



***ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΡΧΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ  
ΤΙΜΩΝ ΣΤΗ ΒΑΘΜΟΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ.  
ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ***

*Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία*

*Μπόκας Ελευθέριος*

*Επιβλέπων: Χαραλαμπίδης Αντώνης*

*Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΜΠ*

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Τομέας Μαθηματικών

Δ.Π.Μ.Σ Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες

Αθήνα

Δεκέμβριος 2015



## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η μελέτη προβλημάτων Αρχικών και Συνοριακών τιμών στη Βαθμοελαστικότητα. Η κλασική ελαστικότητα δεν έχει τη δυνατότητα να περιγράψει λεπτομερώς τη συμπεριφορά υλικών με μικροδομή, όταν επάνω τους ασκούνται δυνάμεις.

Οι θεωρίες βαθμοελαστικότητας αποτελούν προεκτάσεις των κλασικών εξισώσεων ελαστικότητας, στις οποίες έχουν προστεθεί χωρικές παράγωγοι ανώτερης τάξης οι οποίες αφορούν τάση, πίεση και επιτάχυνση.

Το επιθυμητό λοιπόν είναι, οι εξισώσεις της βαθμοελαστικότητας να είναι τόσο πολύπλοκες μόνο, όσο απαιτεί η επαλήθευση των πειραματικών παρατηρήσεων.

Στο πρώτο κεφάλαιο κάνουμε μια εισαγωγή στη σύγχρονη τεχνολογία των υλικών, την αδυναμία της κλασικής ελαστικότητας να τα περιγράψει και την ανάγκη για την εξέλιξή της.

Στο δεύτερο κεφάλαιο περιγράφουμε πως έχει διεισδύσει η βαθμοελαστικότητα μέσω της εξέλιξης της τεχνολογίας των υλικών στη ζωή μας.

Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται μια σύντομη ιστορική αναδρομή.

Στο τέταρτο κεφάλαιο γίνεται μια σύντομη περιγραφή των βασικών εννοιών της θεωρίας ελαστικότητας τις οποίες θα χρειαστούμε και μετέπειτα.

Το πέμπτο κεφάλαιο αναφέρεται στην θεωρία του Mindlin η οποία θεμελιώνει την εξίσωση της βαθμοελαστικότητας

Στο έκτο κεφάλαιο γίνεται αναφορά στη θεωρία συναρτησιακής ανάλυσης, η οποία θα μας βοηθήσει να αποδείξουμε ύπαρξη και μοναδικότητα των λύσεων της εξίσωσης της βαθμοελαστικότητας

Τέλος στο έβδομο κεφάλαιο γίνεται η μελέτη της εξίσωσης της βαθμοελαστικότητας και παρατίθενται κάποια αντιπροσωπευτικά αριθμητικά αποτελέσματα που αφορούν προβλήματα ιδιοταλαντώσεων, ώστε ενδεικτικά να αναδειχτεί η διαφορετικότητα με την κλασική θεωρία ελαστικότητας



# 1.

## Περιεχόμενα

<i>Πρόλογος</i> .....	3
<b>2.</b> Εισαγωγή .....	7
3. Τομείς εφαρμογής της βαθμοελαστικότητας .....	11
4. Ιστορική αναδρομή της θεωρίας της βαθμοελαστικότητας .....	15
5. Βασικές έννοιες της Κλασικής θεωρίας ελαστικότητας .....	17
6. Η θεωρία του Mindlin .....	27
7. Θεωρητικό υπόβαθρο .....	33
7.1. Εξισώσεις εξέλιξης πρώτης τάξης .....	37
7.2. Εξισώσεις εξέλιξης σε πεπλεγμένη μορφή (Implicit).....	53
7.3. Εξισώσεις εξέλιξης Δεύτερης τάξης .....	65
8. Περιγραφή και μελέτη της εξίσωσης βαθμοελαστικότητας.....	79
9. Βιβλιογραφία.....	99



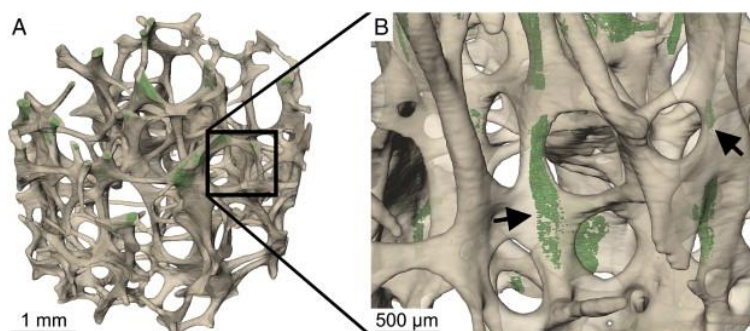
## 2. Εισαγωγή

Οι κλασικές θεωρίες μηχανικής του συνεχούς, όπως η γραμμική και μη γραμμική ελαστικότητα και πλαστικότητα, χρησιμοποιήθηκαν σε μια ευρεία γκάμα θεμελιωδών προβλημάτων και εφαρμογών στη μηχανική, τον ηλεκτρισμό, τη χημεία, τη φυσική, τη γεωλογία, τη μηχανική υλικών, καθώς και σε διάφορα πεδία των φυσικών επιστημών.

Αρχικά οι κλίμακες για τις οποίες σχεδιάστηκαν αυτές οι θεωρίες είχαν εύρος από μερικά χιλιοστά έως ένα μέτρο, ώστε να περιγράψουν φαινόμενα παραμόρφωσης και διεργασίες οι οποίες είναι ορατές δια γυμνού οφθαλμού. Από τον περασμένο αιώνα, άρχισαν να χρησιμοποιούνται επίσης και για φαινόμενα τα οποία λαμβάνουν χώρα σε ατομικό επίπεδο (ελαστική θεωρία εξαρθρώσεων), αλλά και σε μεγαλύτερες κλίμακες (σεισμολογία, αστρονομία).

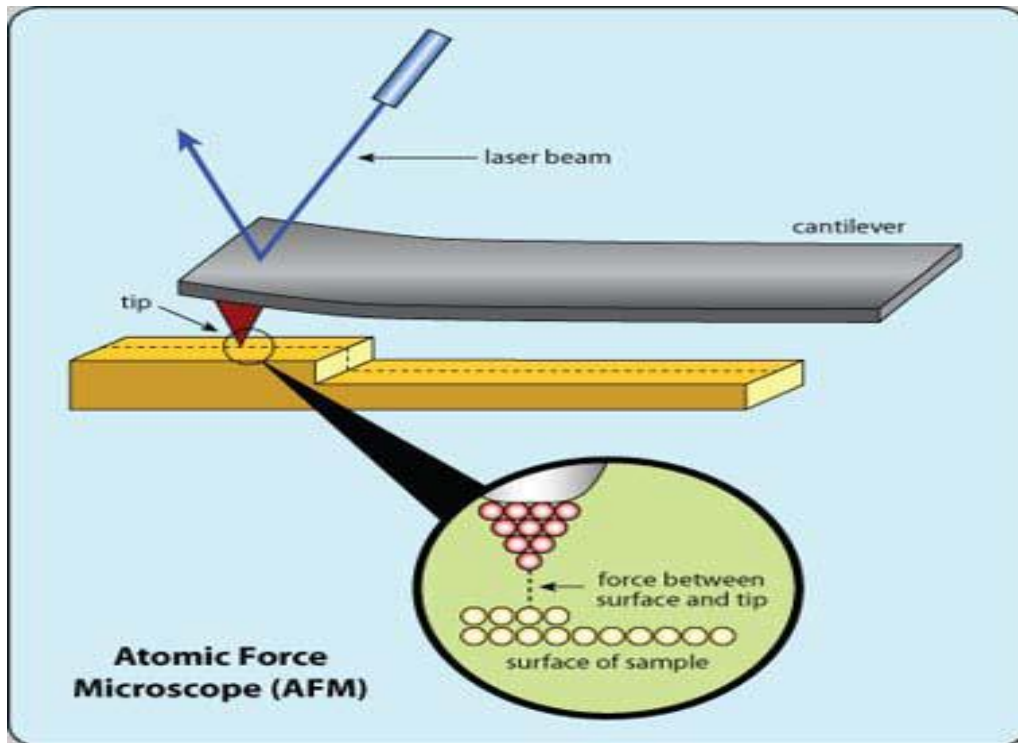
Η ραγδαία εξέλιξη της τεχνολογίας τα τελευταία χρόνια έχει ως αποτέλεσμα την αντίστοιχη εξέλιξη στα μέσα παρατήρησης που χρησιμοποιούνται από τους επιστήμονες για την καταγραφή των πειραματικών αποτελεσμάτων.

Τελευταία η κλασική θεωρία μηχανικής του συνεχούς μέσου χρησιμοποιήθηκε για να περιγράψει τέτοιες παρατηρήσεις από οπτικά και ηλεκτρονικά μικροσκόπια καθώς και φαινόμενα παραμόρφωσης σε νάνο κλίμακα (νάνο σωλήνες).



Σχήμα 1 Διαφορές στην κλίμακα παρατήρησης

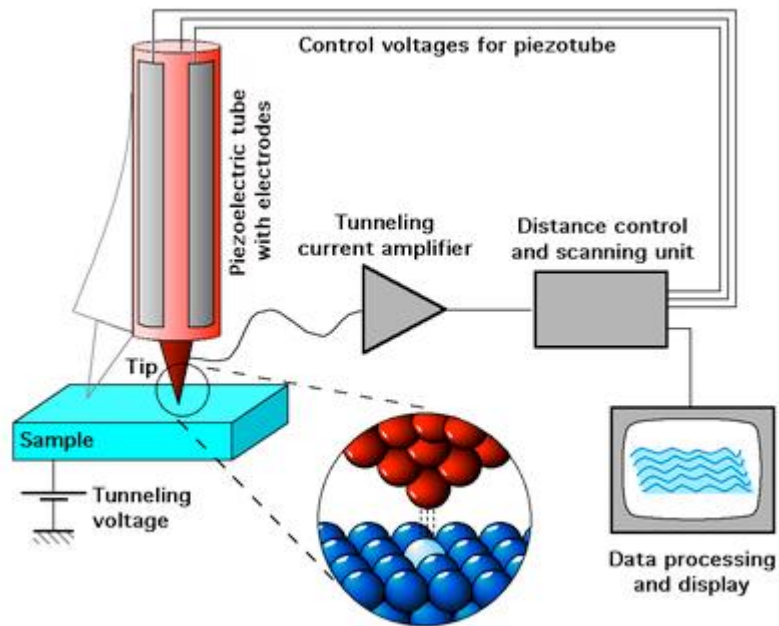
Τα ατομικά μικροσκόπια, είναι μικροσκόπια πολύ υψηλής ανάλυσης, της τάξης νανόμετρου. Δηλαδή έως και 1000 φορές καλύτερη από την κλίμακα των οπτικών.



**Σχήμα 2** Μικροσκόπιο ατομικής δύναμης. Ο ρόλος του στη μελέτη της ύλης στη νανοκλίμακα είναι εξαιρετικά σημαντικός

Χρησιμοποιώντας μικροσκόπια ατομικής κλίμακας μπορούμε να διακρίνουμε λεπτομέρειες στη μικροδομή ενός υλικού. Για παράδειγμα να αναγνωριστούν τα άτομα μεταξύ τους, η αλληλεπίδραση με τα γειτονικά άτομα, καθώς και η διεύθυνση τους στο χώρο.





Σχήμα 3 Ηλεκτρονικό Μικροσκόπιο Σάρωσης (STM)

Αυτή η ραγδαία εξέλιξη στην ακρίβεια των παρατηρήσεων και των πειραματικών αποτελεσμάτων, είχε ως αποτέλεσμα να γίνει φανερό ότι οι κλασικές θεωρίες ελαστικότητας δεν ήταν επαρκείς για να περιγράψουν με ακρίβεια και λεπτομερώς τη συμπεριφορά γραμμικά ελαστικών υλικών, τα οποία παρουσιάζουν συγκεκριμένο τύπο μικροδομής. Υγροί κρύσταλλοι, πορώδη υλικά, πολυμερή, μοριακές μετατοπίσεις, είναι περιπτώσεις για τις οποίες οι θεωρίες του μικρό συνεχούς είναι απαραίτητες για να πάρουμε ικανοποιητικές λύσεις.

Πιο συγκεκριμένα, οι επιδράσεις του μεγέθους δεν μπορούν να αποτυπωθούν στις κλασικές θεωρίες ελαστικότητας και πλαστικότητας, παρόλο που όσο μειώνεται το μέγεθος, αυτές οι επιδράσεις κυριαρχούν.

Επίσης μοναδικότητες, όπως αυτές που είναι αποτέλεσμα σημειακών φορτίων, ή γραμμών μετατόπισης, ή σπασιμάτων, επίσης δεν μπορούν να εκφραστούν.

Ένα άλλο είδος προβλημάτων που δεν μπορεί να περιγραφεί, είναι για παράδειγμα, όταν η ομογενής καμπύλη τάσης – πίεσης έχει αρνητική κλίση, όταν δηλαδή η τάση μειώνεται. Αυτό συμβαίνει όταν υπάρχουν ελαστικές και πλαστικές αστάθειες. Αυτό που λείπει από την κλασική θεωρία λοιπόν ώστε να είναι ικανή να περιγράψει τα παραπάνω

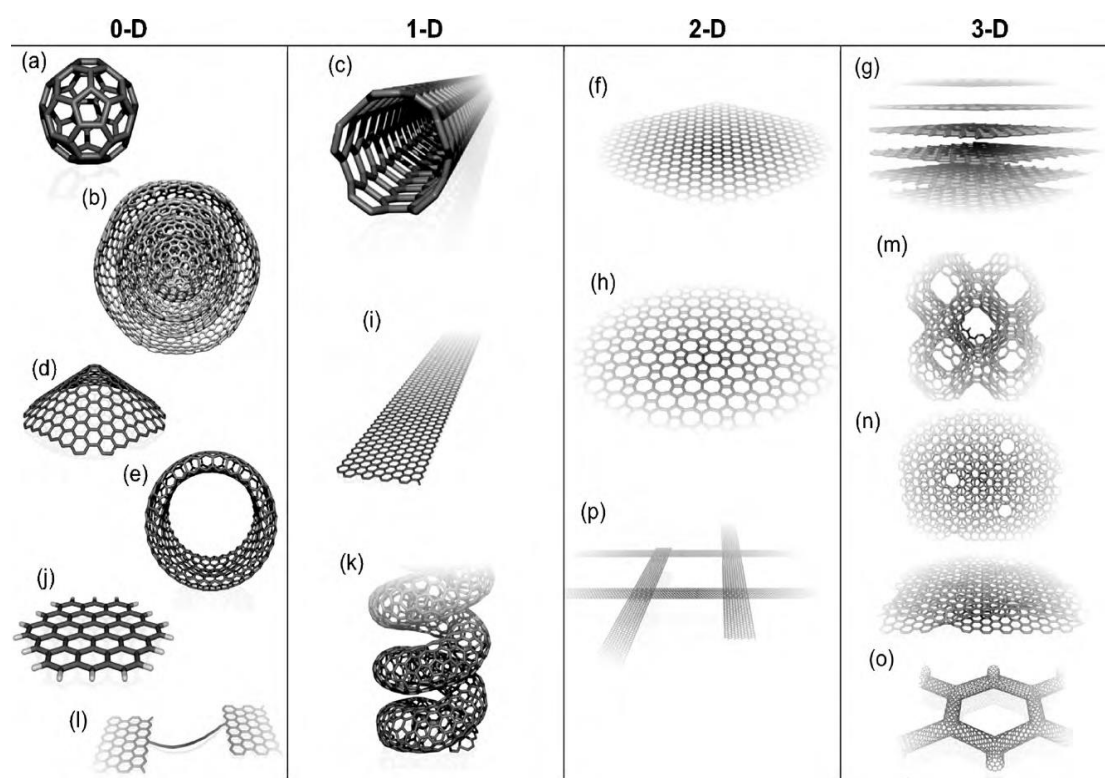
φαινόμενα, αλλά και διάφορα άλλα, είναι η απώλεια ενός συντελεστή ο οποίος να είναι εξαρτώμενος από το εσωτερικό μέγεθος, το οποίο είναι χαρακτηριστικό της μικροδομής του εκάστοτε υλικού και προκύπτει από τις καταστατικές εξισώσεις.

### 3. Τομείς εφαρμογής της βαθμοελαστικότητας

Τα φύλλα γραφενίου τα τελευταία χρόνια έχουν προσελκύσει το έντονο ενδιαφέρον πολλών ερευνητικών ομάδων και επιστημόνων χάρη στις μοναδικές μηχανικές, ηλεκτρικές, θερμικές και οπτικές ιδιότητες τους, που τα κάνουν εξαιρετικά χρήσιμα σε πάρα πολλές εφαρμογές.

Η αυξημένη συνεπώς ζήτηση των υλικών αυτών οδήγησε στην ανάπτυξη διαφορετικών μεθόδων προσομοίωσης της συμπεριφοράς τους.

Παραθέτουμε παρακάτω διαφορετικές μορφολογίες των νανοδομών που βασίζονται στο γραφένιο (σχήμα 4), σύμφωνα και με μελέτες που έχουν γίνει, για τις δομές τύπου γραφενίου.



Σχήμα 4 Νανοδομή γραφενίου

Όσον αφορά στην ιστορική εξέλιξη της Νανοτεχνολογίας, η απαρχή της μπορεί να τοποθετηθεί σε μια ιστορική ομιλία του μεγάλου και διορατικού νομπελίστα φυσικού Richard P. Feynman, την οποία έδωσε στις 29 Δεκεμβρίου 1959 στο ετήσιο συνέδριο της Αμερικανικής Ένωσης Φυσικών που διεξήχθη στο Τεχνολογικό Ινστιτούτο της Καλιφόρνια, με

τίτλο *Υπάρχει πολύς χώρος στον πυθμένα (There's Plenty of Room at the Bottom)*. Στην ομιλία αυτή ο Feynman εξετάζει τις επιπτώσεις που θα είχε ο ενδεχόμενος έλεγχος της ύλης στην ατομική κλίμακα, προσβλέπει σε καλύτερα ηλεκτρονικά μικροσκόπια, και πραγματεύεται μερικές πολύ πρωτότυπες ιδέες που προκάλεσαν αίσθηση εκείνη την εποχή.

Νανοδομημένα υλικά είναι τα υλικά με χαρακτηριστική μικροδομή μεγέθους νανοκλίμακας. Η μικροδομή αφορά τη χημική σύνθεση, τη διάταξη των ατόμων (ατομική δομή), και το μέγεθος ενός στερεού σε μία, δύο, ή τρεις διαστάσεις. Οι πιθανοί παράγοντες που επηρεάζουν τις ιδιότητες των νανοδομημένων υλικών αφορούν επενέργειες λόγω μεγέθους (όπου η κρίσιμη κλίμακα μεγέθους των φυσικών φαινομένων είναι συγκρίσιμη με το χαρακτηριστικό μέγεθος των δομικών στοιχείων της μικροδομής), αλλαγές των διαστάσεων του συστήματος, αλλαγές της ατομικής δομής, καθώς και αλλαγές της χημικής σύστασης.

Η Νανοτεχνολογία σχετίζεται με την κατανόηση και τον έλεγχο της ύλης σε διαστάσεις 1 έως 100 nm, όπου φυσικά φαινόμενα επιτρέπουν πρωτότυπες εφαρμογές. Αν και ακούγεται περισσότερο ως τεχνικός όρος, εντούτοις έχει επικρατήσει να περιλαμβάνει την Επιστήμη, τη Μηχανική και την Τεχνολογία της Νανοκλίμακας και εμπλέκει τη φαντασία, τη μέτρηση, την προσομοίωση και τον χειρισμό της ύλης σε αυτές τις διαστάσεις. Στη νανοκλίμακα, οι φυσικές, χημικές και βιολογικές ιδιότητες των υλικών διαφέρουν εκπληκτικά με τη συμπεριφορά της ύλης στον μακρόκοσμο, όπως δηλαδή έχουμε μάθει να την αντιλαμβανόμαστε με τις αισθήσεις μας.

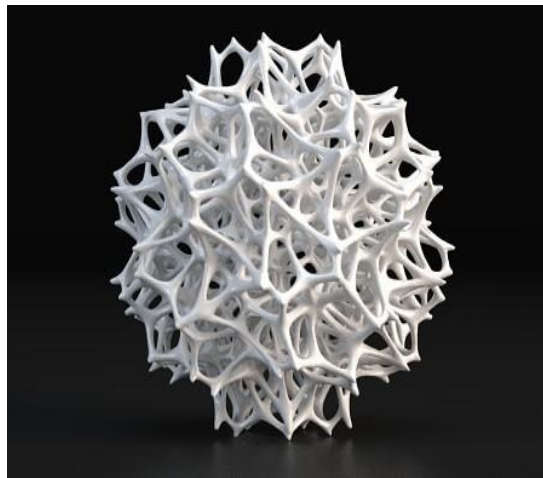
Στοχεύει λοιπόν, ακριβώς στην κατανόηση αυτών των ιδιοτήτων και στη δημιουργία νέων, βελτιωμένων υλικών, συσκευών και συστημάτων έχοντας ως γνώμονα αυτές.

Ένας από τους σημαντικότερους λόγους για τους οποίους η Νανοτεχνολογία έχει βρεθεί στο επίκεντρο του ενδιαφέροντος είναι ότι μας βοηθά να καλύψουμε ένα μεγάλο κενό που έχουμε στην κατανόηση της ύλης. Μέχρι τώρα, γνωρίζουμε αρκετά πράγματα για τα υποατομικά σωματίδια αλλά και τη συμπεριφορά μεμονωμένων ατόμων και μορίων με τη συμβολή της Φυσικής και της Χημείας. Επίσης έχουμε μάθει πολλά για τη συμπεριφορά της ύλης στον μακρόκοσμο. Ωστόσο η γνώση μας ήταν μικρή για τη συμπεριφορά συστημάτων ατόμων ή και μορίων. Η Νανοτεχνολογία μας επέτρεψε να εμβαθύνουμε σε αυτές τις διαστάσεις.

Ένας άλλος λόγος, εξίσου σημαντικός, είναι ότι τα φαινόμενα της νανοκλίμακας «γεννούν» μεγάλες προσδοκίες για ιδιαίτερου ενδιαφέροντος εφαρμογές. Για παράδειγμα είναι δυνατή η αρχιτεκτονική εξειδικευμένων μορίων άτομο προς άτομο.



**Σχήμα 5 Τρισδιάστατος εκτυπωτής**



**Σχήμα 6 Προϊόν τρισδιάστατης εκτύπωσης**



## **4. Ιστορική αναδρομή της θεωρίας της βαθμοελαστικότητας**

Η βαθμοελαστικότητα χρησιμοποιείται για την περιγραφή της μηχανικής συμπεριφοράς υλικών, εδώ και ενάμιση αιώνα περίπου.

Υπήρξαν κάποιες μεμονωμένες προσπάθειες το 19<sup>ο</sup> αιώνα να εμπλουτιστούν οι κλασικές εξισώσεις ελαστικότητας με παραγώγους ανώτερης τάξης, ώστε να αποτυπωθούν οι επιπτώσεις της μικροδομής στη συμπεριφορά.

Το 1851 ο Cauchy εισήγαγε χωρικές παραγώγους ανώτερης τάξης στις εξισώσεις, ώστε να προσεγγιστεί η συμπεριφορά διακριτών μοντέλων πλέγματος με περισσότερη ακρίβεια, ενώ το μέγεθος του πλέγματος εμφανιζόταν ως μια επιπλέον ενσωματωμένη παράμετρος. Αυτές οι πρώτες προσπάθειες δεν ήταν μαθηματικά άρτιες, απλά προσπαθούσαν να αποτυπώσουν τα συγκεκριμένα φυσικά φαινόμενα. Ήταν περισσότερο διερευνητικού χαρακτήρα.

Λίγο αργότερα (1887), ο Voigt ανέπτυξε μια ολοκληρωμένη περιγραφή της κινηματικής, των αρχών διατήρησης και των θεμελιωδών παραμέτρων που διέπουν μεμονωμένα μοντέλα κρυστάλλων. Περιέλαβε μοριακές περιστροφές, μετατοπίσεις, καθώς και τις μεταξύ τους δυνάμεις. Παρόλα αυτά, οι διαφορικές εξισώσεις που προέκυψαν, ήταν φοβερά περίπλοκες και οι λύσεις σε προβλήματα με συνοριακές συνθήκες απαιτούσαν επιπλέον παραδοχές για να επιδέχονται λύση.

Στις αρχές του 20<sup>ου</sup> αιώνα το πεδίο επεκτάθηκε μέσα από την δουλειά των αδερφών Cosserat, οι οποίοι εισήγαγαν στις τρισδιάστατες εξισώσεις του συνεχούς τρεις συνιστώσες μετατόπισης, τρεις μικρό-περιστροφές καθώς και τις πιέσεις εκείνες, οι οποίες είναι συζευγμένες με τις μικρό-περιστροφές στις εξισώσεις κίνησης.

Η μεγάλη εξέλιξη όμως ήρθε μετά το 1960, ταυτόχρονα σχεδόν από ανατολή και δύση. Βασικές εργασίες τη σοβιετικής σχολής είναι οι: Kuvshinskii(1961), Palmov(1964), Kunin(1966), Levin(1971). Από την

Δυτική σχολή, καθοριστικό ρόλο έπαιξαν οι εργασίες των Tourpin(1964), Kroner(1963,1967), Green(1964) και φυσικά του Mindlin (1962,1964,1965,1968). Αρχικά ο στόχος τους ήταν να επεκτείνουν και να βελτιώσουν τη θεωρία των Cosserat. Στη συνέχεια όμως εξελίχθηκαν και κατέληξαν σε πλήρη θεωρία βαθμοελαστικότητας.

Οι τελευταίες μελέτες είναι μαθηματικά άρτιες και περιλαμβάνουν όλες τις ανώτερης τάξης παραγώγους που απαιτούνται για να περιγραφούν πλήρως τα αντίστοιχα φυσικά φαινόμενα.

Συγκρινόμενες όμως με τις παλιότερες θεωρίες, οι νέες είναι πολύ πιο απλές διότι περιέχουν λιγότερους ανώτερης τάξης όρους. Αυτό συμβαίνει επειδή έχει μειωθεί πλέον σημαντικά ο αριθμός των σταθερών οι οποίες χρειάζονται πειραματική επιβεβαίωση. Επίσης χρησιμοποιούνται μόνο οι όροι ανώτερης τάξης που απαιτούνται για να αναπαρασταθεί το εκάστοτε φυσικό πρόβλημα. Η αύξηση της υπολογιστικής ισχύος έχει παίξει επίσης σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη του συγκεκριμένου τομέα.

Η επιστήμη της μηχανικής απαιτεί η πειραματική επιβεβαίωση να συμβαδίζει με τη θεωρητική πρόοδο. Το επιθυμητό λοιπόν είναι, οι εξισώσεις της βαθμοελαστικότητας να είναι τόσο πολύπλοκες μόνο, όσο απαιτεί η επαλήθευση των πειραματικών παρατηρήσεων.

Οι θεωρίες βαθμοελαστικότητας αποτελούν προεκτάσεις των κλασικών εξισώσεων ελαστικότητας, στις οποίες έχουν προστεθεί χωρικές παράγωγοι ανώτερης τάξης οι οποίες αφορούν τάση, πίεση και επιτάχυνση.

Επίσης πρέπει να περιέχουν εγγενής παραμέτρους, οι οποίες συσχετίζουν τη μακρό με τη μικρό δομή.

Η μεγαλύτερη πρόκληση στην διατύπωση μιας θεωρίας βαθμοελαστικότητας, είναι να κρατηθεί ο αριθμός των καθοριστικών παραμέτρων σε ένα ικανοποιητικό ελάχιστο.

Όμως προτού περάσουμε στη σύγχρονη εποχή, θα κάνουμε μια αναφορά στις βασικές έννοιες της κλασικής θεωρίας ελαστικότητας.



## 5. Βασικές έννοιες της Κλασικής Θεωρίας ελαστικότητας

Όπως είναι γνωστό, σε όλα τα στερεά υλικά που καταπονούνται από εξωτερικά φορτία αναπτύσσονται εσωτερικές δυνάμεις, οι οποίες κατανεμημένες στην επιφάνεια της διατομής του σώματος οδηγούν στην ανάπτυξη ορθών και διατμητικών τάσεων. Αυτές οι τάσεις με τη σειρά τους προκαλούν την παραμόρφωση του στερεού σώματος, δηλαδή την μεταβολή των διαστάσεων και/ή του σχήματός του.

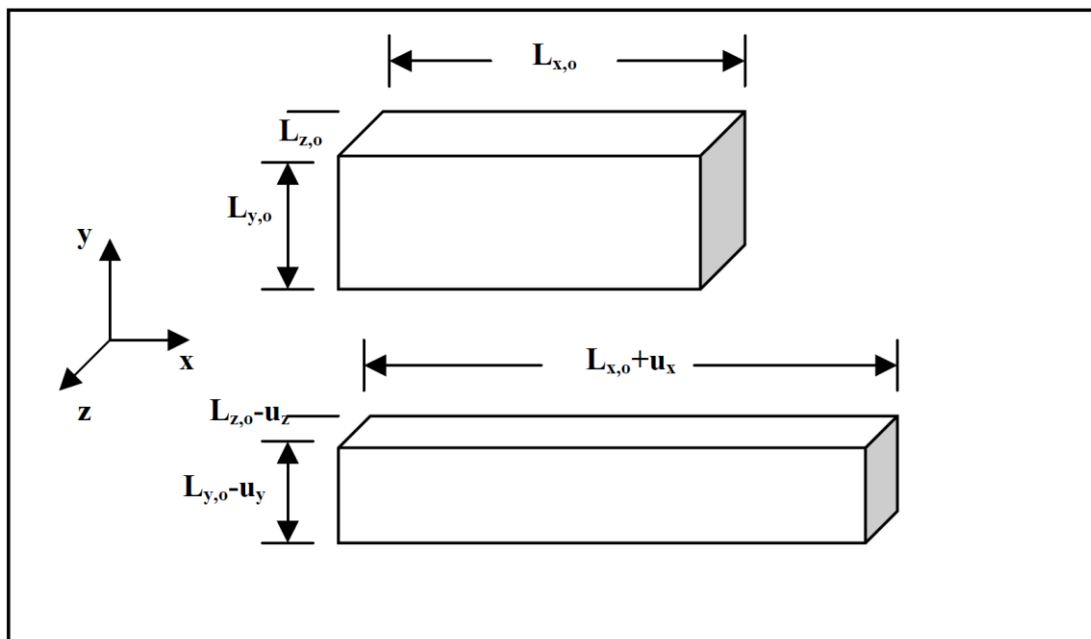
Όσο οι τιμές της παραμόρφωσης του σώματος διατηρούνται σε χαμηλά επίπεδα, τότε η φύση τους είναι αντιστρεπτή (reversible). Αυτό σημαίνει ότι εάν εξαλειφθεί η αιτία που προκαλεί αυτές τις μικρές παραμορφώσεις (δηλαδή οι τάσεις), τότε οι παραμορφώσεις μηδενίζονται και το σώμα ανακτά τις αρχικές του διαστάσεις και σχήμα. Αυτού του είδους η αντιστρεπτή παραμόρφωση ονομάζεται ελαστική παραμόρφωση (elastic deformation). Όλα τα στερεά υλικά (μέταλλα, κεραμικά, πολυμερή) εμφανίζουν ελαστική συμπεριφορά (elastic behavior) σε μικρότερο ή μεγαλύτερο βαθμό.

Η μέχρι τώρα συζήτησή μας σχετικά με τις τάσεις και τις παραμορφώσεις είναι απολύτως γενική και εφαρμόσιμη σε όλα τα στερεά υλικά. Εάν, όμως, θέλουμε να συσχετίσουμε τις τάσεις που αναπτύσσονται σε ένα σώμα με τις παραμορφώσεις που προκαλούν σε αυτό, τότε πρέπει απαραίτητα να εισάγουμε τις ιδιότητες (*properties*) του εκάστοτε υλικού.

Μαθηματικές σχέσεις αυτής της μορφής, που συσχετίζουν δηλαδή τις τάσεις με τις παραμορφώσεις σε ένα σώμα μέσω των ιδιοτήτων του υλικού του σώματος, ονομάζονται καταστατικές εξισώσεις (*constitutive equations*).

Σε υλικά που εμφανίζουν γραμμική ελαστικότητα, όπως είναι τα μέταλλα και τα κράματά τους, που μας απασχολούν και περισσότερο, οι παραμορφώσεις και οι τάσεις στην ελαστική περιοχή συνδέονται μεταξύ τους με γραμμικό τρόπο. Ας θεωρήσουμε το απλό παράδειγμα του μονοαξονικού εφελκυσμού (ή θλίψης) μίας ράβδου, με αρχικό μήκος  $L_{x,0}$

και αρχική διατομή  $L_{y,0} \times L_{z,0}$  , στην οποία εφαρμόζεται ένα αξονικό εφελκυστικό φορτίο  $P$ ,



Σχήμα 7 Εφελκυσμός ράβδου

Η επενέργεια της εφελκυστικής δύναμης  $P$  θα έχει σαν αποτέλεσμα την ανάπτυξη μιας ομοιόμορφης ορθής τάσης  $\sigma_x$  σε κάθε διατομή της ράβδου. Επίσης, λόγω της εφελκυστικής δύναμης  $P$ , το μήκος της ράβδου θα μεταβληθεί από  $L_{x,0}$  σε  $L_{x,0} + u_x$  , όπου  $u_x$  η επιμήκυνση της ράβδου κατά τον άξονα  $x$ . Επιπρόσθετα, η επιμήκυνση της ράβδου κατά τον άξονα  $x$  θα έχει σαν συνέπεια την μείωση (λέπτυνση) της διατομής. Αυτό σημαίνει ότι οι εγκάρσιες διαστάσεις της ράβδου θα μεταβληθούν από  $L_{y,0}$  σε  $L_{y,0} - u_y$  και από  $L_{z,0}$  σε  $L_{z,0} - u_z$  , όπου  $u_y$  και  $u_z$  η επιβράχυνση της ράβδου κατά τους άξονες  $y$  και  $z$  , αντίστοιχα.

Εάν η ορθή τάση  $\sigma_x$  είναι μικρότερη από το όριο αναλογίας (ή το όριο ελαστικότητας) του υλικού της ράβδου, τότε η ράβδος λειτουργεί εντός της γραμμικής ελαστικής περιοχής και κατά συνέπεια οι παραμορφώσεις που υφίσταται είναι ελαστικές. Ας δούμε τώρα πόση είναι η ορθή τάση  $\sigma_x$  που αναπτύσσεται στη ράβδο. Εάν εκφράσουμε την ορθή τάση  $\sigma_x$  σαν ονομαστική τάση (δηλαδή σε ονομαστικές τιμές), τότε θα έχουμε:

$$\sigma_{n.x} = \frac{P}{L_{y,0} \cdot L_{z,0}}$$

Εάν την εκφράσουμε σαν πραγματική τάση (δηλαδή, σε πραγματικές τιμές) τότε είναι:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{P}{(L_{y,0} - u_y) \cdot (L_{z,0} - u_z)} \\ &= \frac{P}{L_{y,0} \cdot L_{z,0} - L_{y,0} \cdot u_z - L_{z,0} \cdot u_y - u_y \cdot u_z} \end{aligned}$$

Το ερώτημα τώρα είναι πώς συσχετίζεται η τάση με την παραμόρφωση, όταν το υλικό βρίσκεται εντός της γραμμικής ελαστικής περιοχής. Η συσχέτιση αυτή γίνεται μέσω του νόμου του **Hooke**, που γενικότερα είναι γνωστός σαν νόμος γραμμικής ελαστικότητας. Έτσι, επιστρέφοντας στο παράδειγμα του σχήματος, η ορθή τάση  $\sigma_x$  συνδέεται με την ορθή παραμόρφωση  $\epsilon$  μέσω της γραμμικής σχέσης:

$$\sigma_x = E \cdot \epsilon_x$$

Η σταθερά αναλογίας,  $E$ , στην είναι μία από τις βασικότερες μηχανικές ιδιότητες των υλικών και ονομάζεται μέτρο *Young (Young's modulus)* ή μέτρο ελαστικότητας (*elasticity modulus*) σε εφελκυσμό και θλίψη. Το μέτρο ελαστικότητας ενός υλικού, σαν φυσική έννοια, εκφράζει την αντίσταση που προβάλλει το υλικό σε ελαστική παραμόρφωση και εξαρτάται άμεσα από την ισχύ των χημικών δεσμών μεταξύ των ατόμων του υλικού.

Έτσι, υλικά που σχηματίζουν ισχυρούς χημικούς δεσμούς, όπως τα μέταλλα (μεταλλικοί δεσμοί) και τα κεραμικά (ομοιοπολικοί ή ετεροπολικοί δεσμοί), χαρακτηρίζονται από υψηλό μέτρο ελαστικότητας. Αυτό σημαίνει ότι απαιτούνται σχετικά μεγάλες τάσεις για να παραχθεί σχετικά μικρή ελαστική παραμόρφωση. Αντίθετα, υλικά όπως τα πολυμερή και τα ελαστομερή, των οποίων οι μοριακές αλυσίδες συγκρατούνται μεταξύ τους με ασθενείς χημικούς δεσμούς (π.χ. *Van der Waals*), χαρακτηρίζονται από χαμηλό μέτρο ελαστικότητας, που σημαίνει ότι σχετικά μικρές τάσεις μπορούν να προκαλέσουν μεγάλες ελαστικές παραμορφώσεις. Το μέτρο ελαστικότητας ενός υλικού εξαρτάται επίσης από την θερμοκρασία. Επειδή όσο αυξάνεται η θερμοκρασία τα άτομα των

υλικών γίνονται πιο κινητικά, αυτό έχει σαν συνέπεια την χαλάρωση της ισχύος των χημικών δεσμών που τα συγκρατούν στις θέσεις ισορροπίας τους, με αποτέλεσμα να μειώνεται και το μέτρο ελαστικότητας του υλικού.

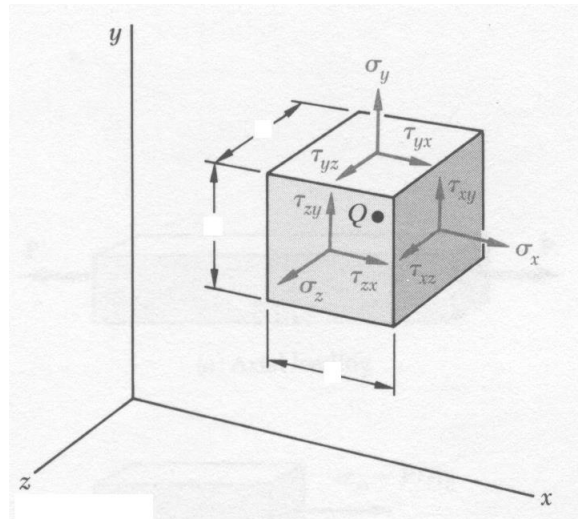
Από εμπειρία έχει παρατηρηθεί ότι η ορθή παραμόρφωση στους εγκάρσιους άξονες (δηλαδή στην περίπτωση της ράβδου του Σχ. 1 οι ορθές παραμορφώσεις  $\varepsilon_y$  και  $\varepsilon_z$ ) ισούται με ένα σταθερό ποσοστό της ορθής παραμόρφωσης κατά τον επιμήκη άξονα (δηλαδή της  $\varepsilon_x$ ). Το ποσοστό αυτό ονομάζεται λόγος Poisson (*Poisson's ratio*) και συμβολίζεται με το γράμμα  $\nu$ :

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \cdot \varepsilon_x = -\frac{\nu \cdot \sigma_x}{E}$$

Ο λόγος Poisson για ένα τέλεια ισότροπο στερεό υλικό ισούται θεωρητικά με 0.25. Ωστόσο, στην πραγματικότητα στα περισσότερα μέταλλα, επειδή δεν είναι τέλεια ισότροπα, οι τιμές του λόγου Poisson βρίσκονται πιο κοντά στο 0.33.

Προηγουμένως, είδαμε το νόμο του *Hooke*, ή νόμο της γραμμικής ελαστικότητας στην απλή περίπτωση του μονοαξονικού εφελκυσμού (ή θλίψης). Σπάνια, όμως, στην πράξη οι εντατικές καταστάσεις που υφίσταται ένα σώμα είναι τόσο απλές. Ωστόσο, ο νόμος της γραμμικής ελαστικότητας ισχύει και σε πιο περίπλοκες εντατικές καταστάσεις, απλά χρειάζεται την κατάλληλη μαθηματική διατύπωση.

Η πλέον περίπλοκη εντατική κατάσταση είναι η γενικευμένη τρισδιάστατη, όπου υπάρχουν ορθές και διατμητικές τάσεις και προς τις τρεις διαστάσεις του χώρου. Μία τέτοια γενικευμένη εντατική κατάσταση φαίνεται στο Σχ. 7, και δείχνει έναν στοιχειώδη κύβο με μοναδιαίο μήκος ακμής, στις έδρες του οποίου αναπτύσσονται οι ορθές τάσεις  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  και οι διατμητικές τάσεις  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ,  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$  και  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ .



**Σχήμα 8 Εφαρμογή τάσεων σε κύβο**

Επειδή συζητάμε πάντοτε για την ελαστική περιοχή, όπου τα μεγέθη των τάσεων και των παραμορφώσεων είναι μικρά (τουλάχιστον στα μεταλλικά υλικά που μας ενδιαφέρουν περισσότερο) και επειδή το υλικό μας θεωρείται **ισότροπο**, μπορούμε χωρίς να εισάγουμε σφάλμα στους υπολογισμούς να δεχτούμε ότι οι ορθές τάσεις προκαλούν μόνο ορθές παραμορφώσεις (όχι όμως διατμητικές) και ότι οι διατμητικές τάσεις προκαλούν μόνο διατμητικές παραμορφώσεις (όχι όμως ορθές). Με βάση αυτή την παραδοχή, μπορούμε να εξετάσουμε ξεχωριστά την σχέση μεταξύ ορθών τάσεων - ορθών παραμορφώσεων και διατμητικών τάσεων - διατμητικών παραμορφώσεων στην ελαστική περιοχή.

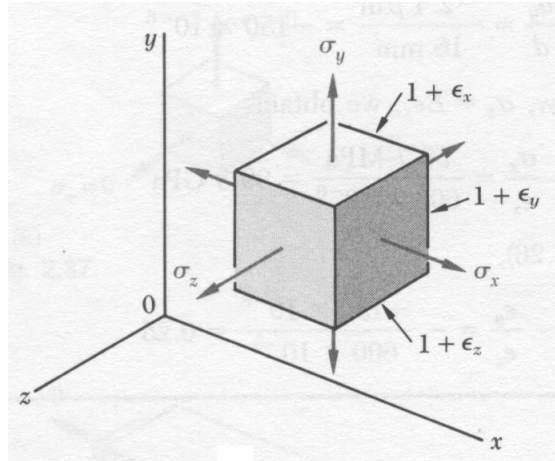
Ας ξεκινήσουμε από τις ορθές τάσεις και τις ορθές παραμορφώσεις, (Σχ.8). Η ορθή τάση  $\sigma_x$ , σύμφωνα με τα όσα αναφέρθηκαν στην προηγούμενη ενότητα, προκαλεί μία ορθή παραμόρφωση κατά τον άξονα  $x$ , δηλαδή την  $\epsilon_x$ . Επειδή το μήκος της έδρας του κύβου αυξάνεται κατά τον άξονα  $x$ , αυτόματα σημαίνει ότι το μήκος των εδρών κατά τους άξονες  $y$  και  $z$  μειώνεται (εγκάρσιες παραμορφώσεις).

Πόση είναι η ορθή παραμόρφωση που προκαλεί η ορθή τάση  $\sigma_x$  σε κάθε άξονα; Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν παραπάνω είναι:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\nu \cdot \sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu \cdot \sigma_x}{E}$$



**Σχήμα 9 Εφαρμογή ορθών τάσεων**

Οι ορθές παραμορφώσεις οφείλονται στην επενέργεια μόνο της  $\sigma_x$ . Ας μην ξεχνάμε, όμως, ότι στον κύβο επενεργούν και οι άλλες δύο ορθές τάσεις, οι  $\sigma_y$  και  $\sigma_z$ . Κάθε μία από αυτές προκαλεί αντίστοιχες ορθές παραμορφώσεις με την  $\sigma_x$ , δηλαδή:

$$\text{Η ορθή τάση } \sigma_y \rightarrow \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}, \quad \varepsilon_x = -\frac{\nu \cdot \sigma_y}{E}, \quad \varepsilon_z = -\frac{\nu \cdot \sigma_y}{E}$$

$$\text{Η ορθή τάση } \sigma_z \rightarrow \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}, \quad \varepsilon_x = -\frac{\nu \cdot \sigma_z}{E}, \quad \varepsilon_y = -\frac{\nu \cdot \sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}, \quad \varepsilon_y = -\frac{\nu \cdot \sigma_x}{E}, \quad \varepsilon_z = -\frac{\nu \cdot \sigma_x}{E}$$

Επομένως, για να βρούμε συνολικά την ορθή παραμόρφωση του κύβου ως προς κάθε άξονα, πρέπει να εφαρμόσουμε την αρχή της υπέρθεσης και να λάβουμε υπόψη τη συνεισφορά κάθε μίας από τις ορθές

τάσεις στην ορθή παραμόρφωση για κάθε άξονα. Άρα, οι ορθές παραμορφώσεις για κάθε άξονα έχουν ως εξής:

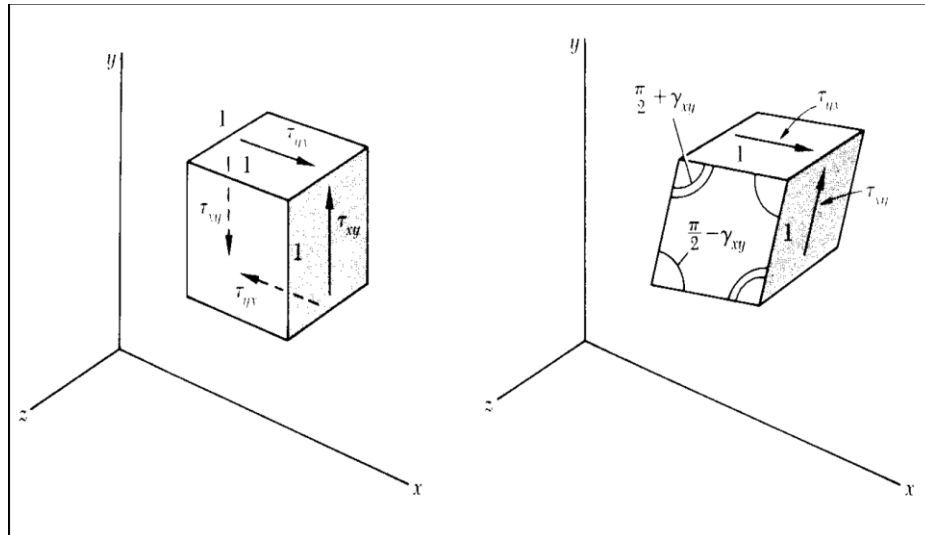
$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu \cdot \sigma_y}{E} - \frac{\nu \cdot \sigma_z}{E} \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu \cdot (\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu \cdot \sigma_x}{E} - \frac{\nu \cdot \sigma_z}{E} \Rightarrow \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu \cdot \sigma_x}{E} - \frac{\nu \cdot \sigma_y}{E} \Rightarrow \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)]$$

Οι ανωτέρω εξισώσεις, είναι γνωστές ως ο γενικευμένος νόμος του *Hooke* στις τρεις διαστάσεις και μας επιτρέπουν να συσχετίσουμε τις ορθές παραμορφώσεις και τις ορθές τάσεις στην γραμμική ελαστική περιοχή ενός υλικού, χρησιμοποιώντας για το σκοπό αυτό το μέτρο ελαστικότητας και το λόγο *Poisson* του υλικού.

Στη μέχρι τώρα ανάλυσή μας δεν αναφερθήκαμε καθόλου στις σχέσεις μεταξύ διατμητικών τάσεων και διατμητικών παραμορφώσεων στην ελαστική περιοχή. Το μόνο που παραδεχθήκαμε ήταν ότι οι διατμητικές τάσεις δεν προκαλούν ορθές παραμορφώσεις, όπως και το αντίστροφο, ότι δηλαδή οι ορθές τάσεις δεν προκαλούν διατμητικές παραμορφώσεις. Επομένως, μπορούμε τώρα να εξετάσουμε ξεχωριστά την σχέση ανάμεσα σε διατμητικές τάσεις και παραμορφώσεις.



Σχήμα 10 Εφαρμογή διατμητικών τάσεων

Έστω αντίστοιχος κύβος, στον οποίο για απλότητα έχουμε κρατήσει μόνο τις τάσεις  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ , οι διατμητικές τάσεις δεν προκαλούν μεταβολή των γραμμικών διαστάσεων (δηλαδή μήκους), αλλά του σχήματος (δηλαδή γωνιών). Ας θυμηθούμε, επίσης, ότι είχαμε ορίσει σαν διατμητική παραμόρφωση τη μεταβολή της γωνίας εκφρασμένη σε rad. Στη γραμμική ελαστική περιοχή η συσχέτιση μεταξύ διατμητικής τάσης και διατμητικής παραμόρφωσης είναι επίσης γραμμική. Ο νόμος του *Hooke* για τις διατμητικές τάσεις και παραμορφώσεις έχει τη μορφή:

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy}$$

Η σταθερά αναλογίας  $G$  στην Εξ.(15) είναι ιδιότητα του υλικού και ονομάζεται μέτρο διάτμησης (*shear modulus*). Σαν φυσικό μέγεθος εκφράζει την αντίσταση ενός υλικού σε ελαστική διάτμηση και είναι απολύτως ανάλογο του μέτρου ελαστικότητας που αναφέρεται σε ορθές τάσεις και παραμορφώσεις στην ελαστική περιοχή. Το μέτρο διάτμησης καθορίζεται επίσης από την ισχύ των χημικών δεσμών ανάμεσα στα άτομα και εξαρτάται με τον ίδιο τρόπο από την θερμοκρασία όπως και το μέτρο ελαστικότητας. Ο πειραματικός καθορισμός του μέτρου διάτμησης των υλικών γίνεται με μία μέτρηση που ονομάζεται δοκιμή στρέψης.



Ένα ιδεατό υλικό με  $\nu = 0$  θα μπορούσε να επιμηκύνεται προς μία κατεύθυνση, χωρίς να συρρικνώνονται οι διαστάσεις του προς τις εγκάρσιες κατευθύνσεις. Τέτοιο υλικό φυσικά δεν υπάρχει στην πραγματικότητα.

Από την άλλη μεριά, ένα ιδεατό υλικό με  $\nu = 0,5$  θα έδινε  $K = \infty$ , δηλαδή το υλικό θα ήταν τελείως ασυμπίεστο. Ούτε τέτοιο υλικό υπάρχει στην πραγματικότητα. Άλλωστε, όπως είδαμε, στα περισσότερα μεταλλικά υλικά ο λόγος *Poisson* παίρνει τιμές κοντά στο 0,33, δηλαδή περίπου στο μέσο του διαστήματος 0 – 0,5.

Τέλος, αξίζει να παρατηρήσουμε το εξής: εφόσον στην ελαστική περιοχή ο λόγος *Poisson* των πραγματικών υλικών είναι όπως είδαμε  $\nu < 1/2$ , αυτό σημαίνει ότι όταν υποβάλλουμε ένα υλικό σε μονοαξονικό εφελκυσμό ( $\sigma_x > 0$ ,  $\sigma_y = \sigma_z = 0$ ), τότε  $\Delta V > 0$ .

Επομένως, στην ελαστική περιοχή ο όγκος ενός υλικού δεν διατηρείται σταθερός. Αντίθετα, θα δούμε ότι όταν το υλικό περάσει στην πλαστική περιοχή, δηλαδή όταν υφίσταται πλέον μόνιμη πλαστική παραμόρφωση, τότε ο όγκος του διατηρείται σταθερός.



## **6. Η θεωρία του Mindlin**

Ο Mindlin στην εργασία του (1964), παρουσίασε μια γενική θεωρία ελαστικότητας, η οποία περιγράφει την συμπεριφορά ισοτροπικών ελαστικών υλικών με μικροδομή. Ενώ ήταν πολύ ολοκληρωμένη, το γεγονός ότι εισήγαγε 18 νέες ανεξάρτητες παραμέτρους που αφορούσαν το υλικό και φυσικά ήταν πολύ δύσκολο να καθοριστούν θεωρητικά ή πειραματικά, την καθιστούσε πολύ περίπλοκη από φυσικής αλλά και μαθηματικής άποψης.

Προκειμένου να καταστήσει αυτή του τη θεωρία απλούστερη, πρότεινε στην ίδια εργασία 3 απλοποιημένες μορφές, γνωστές ως μορφές I, II και III.

Στη μορφή I, η ενεργειακή πυκνότητα λόγω τάσεων, θεωρείται τέταρτης τάξης ως προς τις τάσεις και δευτέρου βαθμού παράγωγος της μετατόπισης. Η παράγωγος της μικροσκοπικής παραμόρφωσης εδώ, ορίζεται ως η δεύτερη παράγωγος της μακροσκοπικής μετατόπισης.

Στη μορφή II, η δεύτερη παράγωγος της μετατόπισης αντικαθίσταται από την παράγωγο των τάσεων. Η παράγωγος της μικροσκοπικής παραμόρφωσης θεωρείται ως η πρώτη παράγωγος της μακροσκοπικής τάσης. Αυτή η μορφή, γνωστή και ως ελαστική θεωρία της παραγώγου τάσης είναι αυτή που θα μας απασχολήσει στην παρούσα εργασία.

Στη μορφή III, η μικροσκοπική παραμόρφωση, γράφεται ως άθροισμα 2 παραγόντων. Της βαθμίδας της μακροσκοπικής περιστροφής και του συμμετρικού μέρους της δεύτερης τάξης παραγώγου της μακροσκοπικής μετατόπισης.

Παρόλες τις θεωρητικές διαφορές, οι εξισώσεις κίνησης των τριών μορφών είναι όμοιες, είτε εκφραστούν με όρους μετατόπισης, είτε με όρους τάσεων.

Ο Mindlin στην εργασία του (1964) απέδειξε ότι η πυκνότητα δυναμικής ενέργειας ενός ελαστικού υλικού με μικροδομή, περιγράφεται από μια ομογενή εξίσωση δεύτερης τάξης 42 μεταβλητών  $\varepsilon_{ij}, \gamma_{ij}, \kappa_{ijk}$ .

Στην περίπτωση που το υλικό είναι και ισοτροπικό, ο αριθμός των ανεξάρτητων μεταβλητών μειώνεται δραματικά επειδή απαλείφονται οι ισοτροπικοί τανυστές περιττού βαθμού. Έτσι οι εναπομείναντες μεταβλητές είναι ομογενείς γραμμικές συναρτήσεις του  $\delta$  του Kronecker. Έτσι καταλήγει σε 18 ανεξάρτητες μεταβλητές.

Όπως αναφέραμε και πιο πάνω, οι 18 ανεξάρτητες παράμετροι είναι πολύ δύσκολο να καθοριστούν θεωρητικά ή πειραματικά. Αυτό καθιστά τις εξισώσεις ιδιαίτερα περίπλοκες από φυσικής και μαθηματικής άποψης. Από τις τρεις μορφές που αναλύσαμε νωρίτερα και οι οποίες σκοπό έχουν να ξεπεράσουν αυτές τις δυσκολίες, θα ασχοληθούμε με τη δεύτερη, η οποία είναι και γνωστή ως "θεωρία βαθμοελαστικότητας" (*strain gradient elastic theory*).

Παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον διότι περιλαμβάνει μόνο μία παράμετρο όσον αφορά την κλίμακα του εσωτερικού μήκους, τις δύο κλασσικές σταθερές Lamé και επίσης οι τάσεις και οι πιέσεις που παρουσιάζονται είναι συμμετρικές όπως και στην περίπτωση της κλασσικής ελαστικότητας.

Σε περισσότερες διαστάσεις η εξίσωση γίνεται πολύ περίπλοκη ακόμα και για την απλή βαθμοελαστικότητα.

Στην μορφή II θεωρούμε ότι η πυκνότητα δυναμικής ενέργειας ενός ελαστικού σώματος με μικροδομή είναι δεύτερης τάξης ως προς τις τάσεις και τις βαθμίδες των τάσεων. Κάνοντας επιπλέον την παραδοχή ότι οι διασταλτικές και διατμητικές παραμορφώσεις έχουν τις ίδιες επιδράσεις στη μικροδομή, η πυκνότητα δυναμικής ενέργειας δίνεται από τον τύπο

$$U = \frac{1}{2} \lambda \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \lambda g^2 \kappa_{ijj} \kappa_{ikk} + \mu g^2 \kappa_{ijk} \kappa_{ijk}, \quad i, j = 1, 2 \quad (1)$$

όπου  $\lambda, \mu$  οι σταθερές Lamé και  $g^2$  η παράμετρος της κλίμακας του εσωτερικού μήκους η οποία συνδέει τη μικροδομή με τη μακροδομή και έχει μονάδες μήκους στο τετράγωνο.

Οι τάσεις  $\varepsilon_{ij}$  είναι δυικές ως προς τις κατά Cauchy πιέσεις και οι βαθμίδες των τάσεων  $\kappa_{ijk}$  ως προς τις διπλές πιέσεις αντίστοιχα σε ό,τι αφορά στην ενέργεια και ορίζονται

$$\tau_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$$

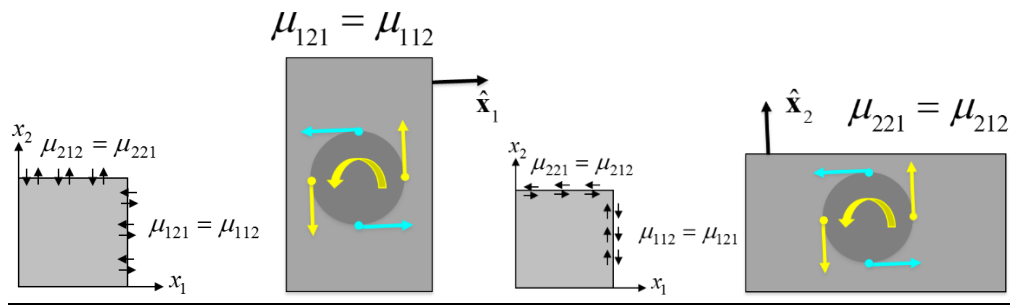
$$\mu_{ijk} = \frac{\partial U}{\partial \kappa_{ijk}} = g^2 \partial_i \tau_{jk}$$

Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων  $x_1, x_2$ , οι κατά Cauchy και οι διπλές πιέσεις περιγράφονται αντίστοιχα.

$$\tau_{11} = (\lambda + 2\mu)\partial_1 u_1 + \lambda\partial_2 u_2$$

$$\tau_{22} = (\lambda + 2\mu)\partial_2 u_2 + \lambda\partial_1 u_1$$

$$\tau_{12} = \tau_{21} = \mu(\partial_2 u_1 + \partial_1 u_2)$$



Σχήμα 11 (α) Αναπαράσταση διπλών πιέσεων

$$\mu_{111} = (\lambda + 2\mu)g^2 \partial_1^2 u_1 + \lambda g^2 \partial_1 \partial_2 u_2$$

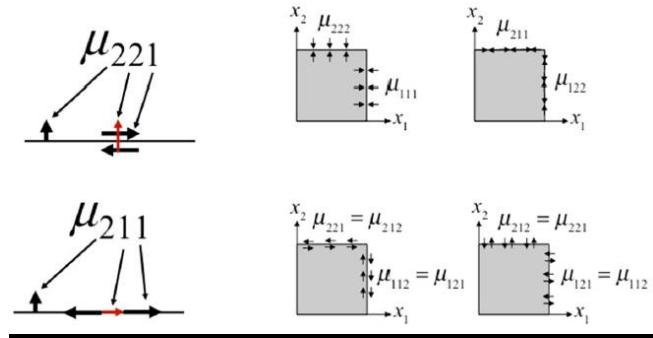
$$\mu_{222} = (\lambda + 2\mu)g^2 \partial_2^2 u_2 + \lambda g^2 \partial_1 \partial_2 u_1$$

$$\mu_{112} = \mu_{121} = \mu g^2 (\partial_1^2 u_2 + \partial_1 \partial_2 u_1)$$

$$\mu_{122} = (\lambda + 2\mu)g^2\partial_1 u_2 + \lambda g^2\partial_1^2 u_1$$

$$\mu_{211} = (\lambda + 2\mu)g^2\partial_1\partial_2 u_1 + \lambda g^2\partial_2^2 u_2$$

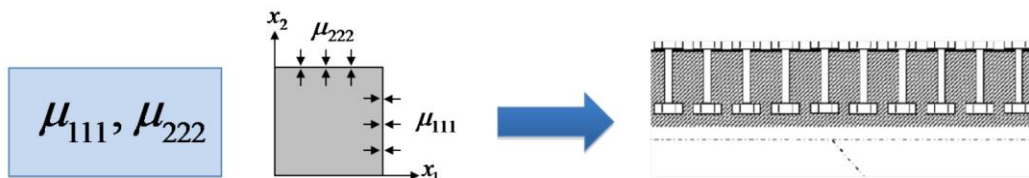
$$\mu_{212} = \mu_{221} = \mu g^2(\partial_2^2 u_1 + \partial_1\partial_2 u_2)$$



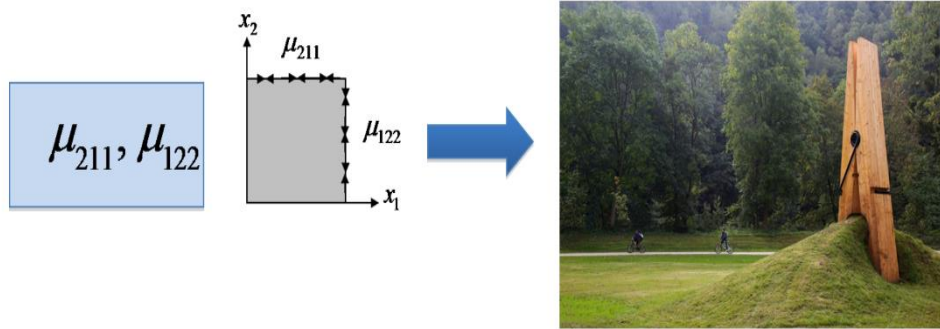
Σχήμα 12 (b) Αναπαράσταση διπλών πιέσεων

Όπου  $\partial_1$  και  $\partial_2$  δηλώνουν διαφώριση ως προς  $x_1, x_2$  αντίστοιχα. Όπως φαίνεται και από τα σχήματα ο πρώτος δείκτης των διπλών πιέσεων, δείχνει τη φορά του διανύσματος της επιφάνειας στην οποία οι διπλές τάσεις αναφέρονται. Ο δεύτερος δείκτης δείχνει τον προσανατολισμό της ροπής ανάμεσα στις διπλές τάσεις. Ο τρίτος δείκτης δείχνει τη φορά των διπλών δυνάμεων.

Οι δυνάμεις και ο τρόπος που επενεργούν φαίνονται αναλυτικά στα παρακάτω σχήματα.



Σχήμα 13 (c) Αναπαράσταση διπλών πιέσεων



Σχήμα 14 (d) Αναπαράσταση διπλών πιέσεων

Η παραπάνω εξίσωση (1) πυκνότητας δυναμικής ενέργειας του Mindlin όπως εκφράζεται μέσω των παραδοχών της μορφής  $\Pi$ , καταλήγει στην παρακάτω διαφορική εξίσωση ισορροπίας, με την οποία και θα ασχοληθούμε.

$$\begin{aligned}
 & (\lambda + 2\mu)(1 - \xi_1^2 \Delta) \nabla(\nabla \cdot u) - \mu(1 - \xi_2^2 \Delta) \nabla \times (\nabla \times u) \\
 & = -f + p \frac{\partial^2}{\partial t^2} (u - h_1^2 \nabla(\nabla \cdot u) + h_2^2 \nabla \times (\nabla \times u))
 \end{aligned}$$

όπου οι συντελεστές  $\xi_1^2$ ,  $\xi_2^2$  και  $h_1^2$ ,  $h_2^2$  είναι θετικές ποσότητες, παριστάνουν ιδιότητες της κλίμακας μεγέθους του υλικού και εξαρτώνται από τους λόγους ακαμψίας και πυκνότητας, καθώς και από το μέγεθος του μοναδιαίου κελιού.

Ανάλογα των λόγων πυκνότητας και ακαμψίας μπορεί να έχουμε είτε τα  $\xi_1^2$ ,  $\xi_2^2$  μεγαλύτερα από τα  $h_1^2$ ,  $h_2^2$ , είτε αντίστροφα.

Η διαφορική εξίσωση, συνδυαζόμενη με τις εκάστοτε συνοριακές συνθήκες, θα πρέπει να διατυπωθεί στη μορφή ενός μεταβολικού προβλήματος, ώστε να διερευνηθούν έννοιες σχετικές με την ύπαρξη, μοναδικότητα και ευστάθεια της λύσης.





## 7. Θεωρητικό υπόβαθρο

Παρατίθεται παρακάτω η απαιτούμενη θεωρία συναρτησιακής ανάλυσης που θα μας χρειαστεί ώστε να αποδείξουμε ύπαρξη, μοναδικότητα και ευστάθεια των λύσεων.

**Ορισμός .** Η ημιγραμμική μορφή  $\alpha(\cdot, \cdot)$  του χώρου Hilbert  $V$ , καλείται  $V$  – πιεστικός , εάν υπάρχει ένα  $c > 0$  τέτοιο ώστε

$$|\alpha(v, v)| \geq c \|v\|_V^2, \quad v \in V. \quad (1.1)$$

### Θεώρημα 1

Θεωρούμε ένα  $\alpha(\cdot, \cdot)$  να είναι μια  $V$  – πιεστική , συνεχής και ημιγραμμική μορφή. Τότε για κάθε  $f \in V'$ , υπάρχει μια μοναδική λύση  $u \in V$  για την οποία ικανοποιείται η εξής ισότητα

$$\alpha(u, v) = f(v), \quad v \in V.$$

και ισχύει ακόμα

$$\|u\|_V \leq \left(\frac{1}{c}\right) \|f\|_{V'}.$$

### Απόδειξη

Τα  $\alpha$  και  $\beta$  είναι "1-1" και από αυτό οδηγούμαστε στο εξής συμπέρασμα

$$\|\alpha(u)\|_V \geq c \|u\|_V, \quad u \in V.$$

Η εκτίμηση αυτή συνεπάγεται ότι το εύρος του  $\alpha$  είναι κλειστό. Όμως το  $\beta$  είναι συζυγής του  $\alpha$  στο  $V$ , έτσι ώστε το εύρος του  $\alpha$  ( $Rg(\alpha)$ ), να ικανοποιεί τη συνθήκη ορθογωνιότητας  $Rg(\alpha)^\perp = K(\beta) = \{0\}$ .

Συνεπώς, το  $Rg(a)$  είναι πυκνό υποσύνολο του  $V$  και σαν αποτέλεσμα αυτό έχει ότι  $Rg(a) = V$ . Εφόσον λοιπόν το  $J$  διατηρεί τη νόρμα, τα παραπάνω διατυπωμένα αποτελέσματα έπονται εύκολα.

Για να προσδιορίσουμε τα  $\alpha, \beta$  και  $J$  που αναφέραμε πιο πάνω έτσι ώστε να κατανοήσουμε τα αποτελέσματα που προέκυψαν, πρέπει να αναφέρουμε την γενίκευση του ασθενούς προβλήματος Dirichlet και του ασθενούς προβλήματος Neumann.

### **Γενίκευση**

Δοσμένου ενός χώρου Hilbert  $V$ , μιας συνεχούς, ημιγραμμικής μορφής  $\alpha(\cdot, \cdot)$  στον  $V$  και μια  $f \in V'$ , βρείτε  $u \in V$  τέτοιο ώστε

$$\alpha(u, v) = f(v), \quad v \in V. \quad (1.2)$$

Αυτή η ημιγραμμική μορφή  $\alpha(\cdot, \cdot)$ , ορίζει ένα ζευγάρι τελεστών  $\alpha, \beta \in \mathcal{L}(V)$  που ικανοποιούν τις ταυτότητες

$$\alpha(u, v) = (\alpha(u), v)_V = (u, \beta(v))_V, \quad u, v \in V. \quad (1.3)$$

Κάνοντας μια αναφορά στο παρακάτω θεώρημα το οποίο χρειαζόμαστε για να δημιουργήσουμε τις μορφές  $\alpha(\cdot, \cdot)$  και  $\beta(\cdot, \cdot)$ , καθορίζεται από τα  $\alpha$  ή  $\beta$  μέσω της (1.3).

Επίσης ορίζει το θεώρημα αυτό και την "1-1" και "επί" απεικόνιση  $J \in \mathcal{L}(V', V)$ , για την οποία ισχύει

$$f(v) = (J(f), v)_V, \quad f \in V', v \in V.$$

Πιο συγκεκριμένα, ο  $J$  είναι ο αντίστροφος του  $R_V$ . Ακόμα η  $u$  είναι η λύση του "ασθενούς" προβλήματος που σχετίζεται με την (1.2) εάν και μόνο εάν  $\alpha(u) = J(f)$ . Εφόσον το  $J$  είναι "1-1" και "επί" απεικόνιση, η ευελιξία της λύσης της εξίσωσης στον χώρο  $V$  εξαρτάται από την αντιστρεψιμότητα του τελεστή  $\alpha$ . Μια χρήσιμη και ικανή συνθήκη για να είναι το  $\alpha$  "1-1" και "επί" είναι ο ορισμός του  $V$  – πιεστικού ο οποίος έχει δοθεί νωρίτερα και συσχετιζόμενο με το "ασθενές" πρόβλημα το οποίο δείχνουμε κατά συνέπεια πως είναι καλώς ορισμένο.

## Θεώρημα 2

Έστω χώρος Hilbert  $H$ , και μια  $f \in H'$ . Τότε υπάρχει ένα και μοναδικό στοιχείο  $x \in H$ , για το οποίο ισχύει

$$f(y) = (x, y), \quad y \in H.$$

Συνεχίζουμε τώρα για να κατασκευάσουμε τελεστές οι οποίοι περιγράφουν τις λύσεις του προβλήματος, σαν λύσεις των προβλημάτων συνοριακών τιμών για συγκεκριμένη επιλογή των  $\alpha(\cdot, \cdot)$  και  $V$ . Αρχικά ορίζουμε  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V')$  ως:

$$\alpha(u, v) = \mathcal{A}u(v), \quad u, v \in V. \quad (1.4)$$

Υπάρχει "1-1" αντιστοιχία ανάμεσα μεταξύ των συνεχών ημιγραμμικών μορφών στον χώρο  $V$  και των γραμμικών τελεστών από τον  $V$  στον  $V'$ . Αυτή η αντιστοιχία δίνεται από τη σχέση (1.4).

Πιο συγκεκριμένα, η  $u$  είναι μια λύση του "ασθενούς" προβλήματος, αν και μόνο αν,  $u \in V$ , και  $\mathcal{A}u = f$ , έτσι ώστε το πρόβλημα να καθορίζεται από το  $\mathcal{A}$  όταν η  $f \in V'$  θεωρείται δεδομένο.

Από παραπάνω ισότητα  $\mathcal{A}u = f$ , επάγεται ότι η  $u$  ικανοποιεί μια μερική διαφορική εξίσωση.

Δεν θα είναι δυνατό σε όλα τα παραδείγματα να προσδιορίσουμε το  $V'$  σε ένα χώρο κατανομών στο πεδίο ορισμού  $G$  στον  $\mathbb{R}^n$ .

Για παράδειγμα, ένα πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε είναι:

Σκεφτόμαστε πως το  $V = H^1(G)$  στο πρόβλημα Neumann. Η δυσκολία όμως που αναδύεται είναι ότι ο χώρος  $C_0^\infty(G)$  δεν είναι πυκνός στον  $V$ .

Πάνω σε αυτή λοιπόν τη "δυσκολία" πρέπει να εργαστούμε και υπάρχουν δύο τρόποι να αντιμετωπιστεί.

Αρχικά θεωρούμε ένα χώρο Hilbert  $H$  τέτοιο ώστε ο  $V$  να είναι πυκνός και συνεχώς ενσφηνωμένος στον  $H$  ( $H' \subset V'$ ), έτσι ώστε ο  $H$  να καθορίζεται από τον  $H'$  μέσω της απεικόνισης Riesz.

Έτσι προκύπτουν οι παρακάτω εγκλεισμοί:

$$V \hookrightarrow H = H' \hookrightarrow V'$$

Και η ταυτότητα:

$$f(v) = (f, v)_H, \quad f \in H, v \in V. \quad (1.5)$$

Καλούμε λοιπόν το  $H$  χώρο άξονα περιστροφής (*pivot space*), στην περίπτωση που έχουμε  $H = H'$  όπως πιο πάνω.

Στο παράδειγμά μας, ορίζουμε  $D = \{u \in V : \mathcal{A}u \in H\}$ . Έχουμε σαν δεδομένο ότι  $\mathcal{A}u = f$  και  $u \in D$ , από το οποίο προκύπτει ότι μια μερική διαφορική μπορεί να ικανοποιείται, εφόσον ο χώρος  $C_0^\infty(G)$  είναι πυκνός στον  $H$ .

Είναι σημαντικό να σημειώσουμε στο σημείο αυτό ότι  $u \in D$ , αν και μόνο αν,  $u \in V$  και υπάρχει ένα  $K > 0$  τέτοιο ώστε

$$|\alpha(u, v)| \leq K \|v\|_H, \quad v \in V.$$

## 7.1. Εξισώσεις εξέλιξης πρώτης τάξης

Θεωρούμε ένα αρχικό πρόβλημα συνοριακών τιμών για την εξίσωση θερμότητας-διάχυσης.

Αναζητούμε λοιπόν μια συνάρτηση  $u : [0, \pi] \times [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ , που ικανοποιεί την μερική διαφορική εξίσωση

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0 \quad (2.1)$$

με συνοριακές συνθήκες:

$$u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, \quad t > 0 \quad (2.2)$$

και αρχική συνθήκη:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 < x < \pi \quad (2.3)$$

Η τεχνική με την οποία θα προσεγγίσουμε αυτού του είδους τα προβλήματα είναι γνωστή ως **μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών**. Ξεκινάμε ψάχνοντας μια μη μηδενική λύση της (2.1) που θα επιδέχεται λύσεις της μορφής:

$$u(x, t) = X(x) T(t)$$

Είναι προφανές ότι, η τυχαία συνάρτηση δύο μεταβλητών δεν μπορεί να γραφτεί ως γινόμενο δύο συναρτήσεων, καθεμιά από τις οποίες εξαρτάται μόνο από τη μία από τις δύο ανεξάρτητες μεταβλητές.

Στη συνέχεια λοιπόν, αφού έχουμε ορίσει την γενική μορφή της λύσης που περιμένουμε, επιστρέφουμε στην αρχική δοσμένη Μ.Δ.Ε και αντικαθιστούμε με βάση την (1.4).

Οι συναρτήσεις  $X(x)$  και  $T(t)$  δεν μπορεί να είναι μηδενικές σε ανοιχτά διαστήματα των  $x$  και  $t$ , γιατί τότε θα έδιναν την τετριμμένη λύση  $u(x, t) = 0$ , που δεν έχει κανένα ενδιαφέρον. Αυτό μας επιτρέπει να διαιρέσουμε και τα δυο μέλη με  $X(x) T(t)$  και έτσι φτάνουμε στη μορφή της εξίσωσης που το αριστερό της μέλος είναι μια συνάρτηση

αποκλειστικά του  $x$ , ενώ το δεξί μέλος είναι μια συνάρτηση αποκλειστικά του  $t$ .

Όμως αφού οι μεταβλητές  $x$  και  $t$  είναι ανεξάρτητες, η ισότητα

$F(x) = G(t)$  μπορεί να ισχύει αν και μόνο αν οι συναρτήσεις

$F(x)$  και  $G(t)$  είναι σταθερές.

Συνεπώς καταλήγουμε σε ένα ζευγάρι συνήθων διαφορικών εξισώσεων (Σ.Δ.Ε) της μορφής:

$$X''(x) = \lambda X(x)$$

$$T'(t) = \lambda T(t)$$

Από τις λύσεις λοιπόν της Μ.Δ.Ε μας ενδιαφέρουν μόνο αυτές που σέβονται τις δοσμένες από την υπόθεση συνοριακές συνθήκες.

Έτσι, επειδή ο μηδενισμός του  $T(t)$  για οποιοδήποτε  $t \geq 0$  δεν είναι αποδεκτός, έχουμε:

$$X(0) = X(\pi) = 0.$$

Αυτό λοιπόν είναι ένα πρόβλημα ιδιοτιμών και για τη  $X(x)$  και οι λύσεις δίνονται από την  $X_n(x) = \sin(nx)$ , με αντίστοιχες ιδιοτιμές για το  $\lambda$ :

$\lambda_n = n^2$ , για  $n \geq 1$  ακέραιους αριθμούς.

Η δεύτερη από τις εξισώσεις του ζεύγους, θα έχει την εξής λύση:

$$T_n(t) = e^{-n^2 t}$$

Και συνεπώς εξασφαλίζουμε ένα αριθμήσιμο σύνολο συναρτήσεων που ικανοποιούν τις (2.1) και (2.2).

Η λύση που ικανοποιεί τις δυο προηγούμενες αλλά και την (2.3) εξασφαλίζεται από τις σειρές:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_0^n e^{-n^2 t} \sin(nx) \quad (2.4)$$

όπου ο  $\{u_0^n\}$  είναι συντελεστής Fourier τέτοιος ώστε:

$$u_0^n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u_0(x) \sin(nx) dx, \text{ για } n \geq 1,$$

για την αρχική συνάρτηση  $u_0(x)$ .

Μπορούμε να θεωρήσουμε την λύση (2.4) σαν μια συνάρτηση  $t \rightarrow S(t)$

Από τους μη αρνητικούς πραγματικούς  $\mathbb{R}_0^+$ , στους φραγμένους γραμμικούς τελεστές στο  $L^2[0,\pi]$ .

Ορίζουμε ως  $S(t)$  να είναι ο τελεστής που δίνεται από τον εξής τύπο:

$$S(t) u_0(x) = u(x,t),$$

Έτσι το  $S(t)$  αποδίδει σε κάθε συνάρτηση  $u_0 \in L^2[0,\pi]$ , ότι η συνάρτηση  $u(\cdot,t) \in L^2[0,\pi]$  που δίνεται από την (1.4).

Εάν  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_0^+$ , τότε έχουμε για κάθε  $u_0 \in L^2[0,\pi]$ , τις ισότητες:

$$S(t_1) u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (u_0^n e^{-n^2 t}) \sin(nx)$$

$$S(t_1) S(t_2) u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (u_0^n e^{-n^2 t_1}) \sin(nx) e^{-n^2 t_2}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} u_0^n \sin(nx) e^{-n^2(t_1+t_2)}$$

$$= S(t_1 + t_2) u_0(x)$$

$$\rightarrow S(t_1) S(t_2) = S(t_1 + t_2) \quad , \quad \text{με } t_1, t_2 \geq 0$$

για αυθαίρετο  $u_0$ .

αυτή είναι η ταυτότητα ενός semigroup.

Μπορούμε να δείξουμε στη συνέχεια ότι  $S(0) = I$ , τον ταυτοτικό τελεστή, και πως για κάθε  $u_0$ ,  $S(t) u_0 \rightarrow u_0$  στο  $L^2[0,\pi]$ , καθώς  $t \rightarrow 0^+$ .

Τελικά, βρίσκουμε ότι κάθε  $S(t)$  έχει νόρμα  $\leq e^{-t}$  στο  $\mathcal{L}(L^2[0,\pi])$ .

Οι ιδιότητες των  $\{S(t) : t \geq 0\}$  που έχουμε συγκεντρώσει εδώ, οδηγούν στον ορισμό των ημικρούπ συστολής (contraction semigroups).

Στη συνέχεια πρέπει να δείξουμε ότι κάθε contraction semigroup χαρακτηρίζεται από μια αναπαράσταση λύσης ενός αντίστοιχου προβλήματος Cauchy.

Δείχνουμε δηλαδή, πιο συγκεκριμένα, πως το semigroup  $\{S(t) : t \geq 0\}$

Οδηγεί σε μια παρουσίαση λύσης μιας μη-ομογενούς μερικής διαφορικής εξίσωσης:

$$u_t = u_{xx} + f(x,t) \quad , \quad 0 < x < \pi \quad , \quad t > 0 \quad (2.5)$$

Με τις συνοριακές συνθήκες (2.2) και την αρχική συνθήκη (2.3).

Υποθέτουμε ότι για κάθε  $t > 0$ ,  $f(\cdot, t) \in L^2[0, \pi]$ .

Ως εκ τούτου, έχουμε την ιδιοσυνάρτηση επέκτασης:

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin(nx)$$

$$f_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\xi, t) \sin(n\xi) d\xi \quad (2.6)$$

Αναζητάμε λύση της μορφής  $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin(nx)$  και βρίσκουμε από τις (2.5) και (2.3) ότι οι συντελεστές πρέπει να ικανοποιούν τις συνθήκες:

$$\begin{cases} u_n'(t) + n^2 u_n(t) = f_n(t) & , t \geq 0 \\ u_n(0) = u_n^0 & , n \geq 1 \end{cases}$$

Συνεπώς έχουμε:

$$u_n(t) = u_n^0 e^{-n^2 t} + \int_0^t e^{-n^2(t-\tau)} f_n(\tau) d\tau$$

Και εν τέλει η λύση μας γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \\ &= S(t)u_0(x) + \int_0^t \int_0^{\pi} \left\{ \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2(t-\tau)} \sin(nx) \sin(n\xi) \right\} f(\xi, \tau) d\xi d\tau \end{aligned}$$

Όμως από την (2.6) αυτό που προκύπτει είναι:

$$u(\cdot, t) = S(t)u_0(\cdot) + \int_0^t S(t-\tau) f(\cdot, \tau) d\tau \quad (2.7)$$

Για τη λύση των (2.5), (2.2), (2.3).

### ***Το πρόβλημα Cauchy***

Ας θεωρήσουμε ένα χώρο Hilbert  $H$ ,  $D(A)$  έναν υπόχωρο του  $H$  και  $A \in L(D(A), H)$ . Θεωρούμε ακόμα την εξίσωση εξέλιξης:



$$u'(t) + Au(t) = 0 \quad (2.8)$$

Το πρόβλημα Cauchy έγκειται στο να βρεθεί μια συνάρτηση  $u \in C([0, \infty], H) \cap C^1((0, \infty), H)$  τέτοια ώστε για  $t > 0$ ,  $u(t) \in D(A)$  και η (2.8) να ισχύει και  $u(0) = u_0$ , όπου η αρχική τιμή  $u_0 \in H$  ορίζεται.

Θεωρούμε ότι για κάθε  $u_0 \in D(A)$ , υπάρχει μια μοναδική λύση του προβλήματος Cauchy.

Ορίζουμε  $S(t)u_0 = u(t)$ , για  $t \geq 0$ ,  $u_0 \in D(A)$ , όπου  $u(\cdot)$  η λύση της (2.8) με αρχική συνθήκη  $u(0) = u_0$ .

Εάν  $u_0, v_0 \in D(A)$  και εάν  $a, b \in \mathbb{R}$ , τότε η συνάρτηση

$$t \mapsto aS(t)u_0 + bS(t)v_0$$

είναι μια λύση της (2.8), εφ'όσον ο  $A$  είναι γραμμικός, και η μοναδικότητα των λύσεων τότε επιβάλλει:

$$S(t)(au_0 + bv_0) = aS(t)u_0 + bS(t)v_0.$$

Συνεπώς,  $S(t) \in L(D(A))$  για όλα τα  $t \geq 0$ . Εάν  $u_0 \in D(A)$  και  $\tau \geq 0$ , τότε η συνάρτηση  $t \mapsto aS(t + \tau)u_0$  ικανοποιεί την (2.1) και παίρνει την αρχική τιμή  $S(\tau)u_0$ .

Η μοναδικότητα της λύσης επιτάσσει το εξής:

$$S(t + \tau)u_0 = S(t)S(\tau)u_0, \quad u_0 \in D(A).$$

Σαφώς ισχύει ότι,  $S(0) = I$ .

Ορίζουμε στη συνέχεια τον τελεστή  $A$  να είναι αυξητικός (accretive) εάν

$$\operatorname{Re}(Ax, x)_H \geq 0, \quad x \in D(A).$$

Εάν λοιπόν ο  $A$  είναι αύξοντας και εάν  $u$  είναι μια λύση του προβλήματος Cauchy της (2.8), τότε

$$\begin{aligned} D_t(\|u(t)\|^2) &= 2 \operatorname{Re}(u'(t), u(t))_H \\ &= -2 \operatorname{Re}(Au(t), u(t))_H \leq 0, \quad t > 0 \end{aligned}$$

Έτσι ακολουθεί το εξής:  $\|u(t)\| \leq \|u(0)\|, \quad t \geq 0$

Το οποίο συνεπάγεται:  $\|S(t) u_0\| \leq \|u_0\|$  ,  $u_0 \in D(A), t \geq 0$

Έτσι ώστε το  $S(t)$  να είναι μια συστολή στον χώρο με νόρμα  $H$  και ως εκ τούτου και μια μοναδική επέκταση στην κλειστότητα του  $D(A)$ . Όταν το  $D(A)$  είναι πυκνό, μπορούμε να θεωρήσουμε ένα semigroup συστολής στον  $H$ .

**Ορισμός.** ένα semigroup συστολής στον  $H$  είναι ένα σύνολο  $\{S(t) : t \geq 0\}$  από γραμμικούς τελεστές στον χώρο  $H$  που είναι συστολές και ικανοποιούν:

$$S(t + \tau) = S(t) \cdot S(\tau) \quad , \quad S(0) = I, \quad t, \tau \geq 0 \quad (2.9)$$

$$S(\cdot)x \in C([0, \infty), H) \quad , \quad x \in H. \quad (2.10)$$

Ο γεννήτορας του semigroup συστολής  $\{S(t) : t \geq 0\}$  είναι ο τελεστής με πεδίο ορισμού:

$D(B) = \{x \in H : \lim_{h \rightarrow 0^+} h^{-1}(S(h) - I)_x = D^+(S(0)_x) \text{ υπάρχει στον } H\}$   
και τιμή:

$$Bx = \lim_{h \rightarrow 0^+} h^{-1}(S(h) - I)_x = D^+(S(0)_x).$$

όπου να σημειώσουμε πως το  $Bx$  είναι η δεξιά παράγωγος στο 0 της  $S(t)x$ . Η ισότητα (2.9) είναι η ταυτότητα semigroup. Ο ορισμός της λύσης του προβλήματος Cauchy δείχνει ότι η (2.10) ισχύει για  $x \in D(A)$  και ένα στοιχειώδες επιχείρημα των ομοιόμορφα φραγμένων τελεστών (συστολή)  $\{S(t) : t \geq 0\}$  δείχνει ότι η (2.10) ισχύει για όλα τα  $x \in H$ . Η ιδιότητα (2.10) είναι η *ισχυρή συνέχεια* του semigroup.

### Θεώρημα 3

Ας θεωρήσουμε  $A \in L(D(A), H)$  αύξητικό τελεστή, με  $D(A)$  πυκνό στο  $H$ . Υποθέτουμε ότι για κάθε  $u_0 \in D(A)$  υπάρχει μια μοναδική λύση  $u \in C^1((0, \infty), H)$  της (2.1) με  $u(0) = u_0$ . Τότε η οικογένεια των τελεστών  $\{S(t) : t \geq 0\}$  που έχει οριστεί παραπάνω είναι ένα semigroup συστολής στον  $H$ , της οποίας ο γεννήτορας είναι μια επέκταση του  $-A$ .

### Απόδειξη

Η μοναδικότητα των λύσεων έπεται από το γεγονός ότι ο τελεστής  $A$  είναι αύξητικός, και έτσι το semigroup ορίζεται όπως αναφέραμε νωρίτερα. Το μόνο που χρειάζεται είναι να επαληθεύσουμε ότι ο  $-A$  είναι ένας περιορισμός του γεννήτορα.

Ας θεωρήσουμε το  $B$  ως τον γεννήτορα του  $\{S(t) : t \geq 0\}$  και  $u_0 \in D(A)$ . Εφόσον η αντίστοιχη λύση  $u(t) = S(t)u_0$  είναι δεξιά-διαφορίσιμη στο 0, έχουμε :

$$S(h)u_0 - u_0 = \int_0^h u'(t)dt = - \int_0^h Au(t)dt, h > 0.$$

Συνεπώς,  $D^+(S(0)u_0) = -Au_0$ , και έτσι  $u_0 \in D(B)$  και  $Bu_0 = -Au_0$ . Στη συνέχεια θα δούμε ότι εάν το  $-A$  είναι ο γεννήτορας ενός semigroup συστολής, τότε ο  $A$  είναι αυξητικός, το  $D(A)$  είναι πυκνό και για κάθε  $u_0 \in D(A)$  υπάρχει μια μοναδική λύση  $u \in C^1((0, \infty), H)$  της (2.9) με  $u(0) = u_0$ . Πρώτα απ'όλα όμως θα δούμε ένα απλό παράδειγμα.

### Θεώρημα 4

Για κάθε  $B \in \mathcal{L}(H)$ , οι σειρές  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{B^n}{n!}\right)$  συγκλίνουν στο  $\mathcal{L}(H)$ , δηλώνοντας έτσι το άθροισμά τους μέσω του  $\exp(B)$ .

Η συνάρτηση  $t \mapsto \exp(tB) : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(H)$  είναι απείρως διαφορίσιμο και ικανοποιεί το παρακάτω:

$$D[\exp(tB)] = B \cdot \exp(tB) = \exp(tB) \cdot B, t \in \mathbb{R}. \quad (2.11)$$

Εάν  $B_1, B_2 \in \mathcal{L}(H)$  και εάν  $B_1 \cdot B_2 = B_2 \cdot B_1$ , τότε:

$$\exp(B_1 + B_2) = \exp(B_1) \exp(B_2). \quad (2.12)$$

### Απόδειξη

Η σύγκλιση των σειρών στο  $\mathcal{L}(H)$  προκύπτει από το εξής:

$\frac{\sum_{n=0}^h \|B\|_{\mathcal{L}(H)}^n}{n!} = \exp(\|B\|)$  στο  $\mathbb{R}$ . Για να επαληθεύσουμε τη διαφορισιμότητα της  $\exp(tB)$  στο  $t = 0$ , σημειώνουμε ότι:

$$[(\exp(tB) - I)/t] - B = (1/t) \sum_{n=2}^{\infty} (tB)^n / n! , t \neq 0$$

Και αυτό μας δίνει την εκτίμηση:

$$\|[(\exp(tB) - I)/t] - B\| \leq \left(\frac{1}{|t|}\right) [\exp(|t| \cdot \|B\|) - 1 - |t| \|B\|].$$

Εφόσον το  $t \mapsto \exp(t\|B\|)$  είναι (δεξιά) διαφορίσιμο στο 0, με (δεξιά) παράγωγο  $\|B\|$ , συνεπάγεται ότι η (2.11) ισχύει για  $t = 0$ .

Η ιδιότητα semigroup τελικά μας δείχνει ότι η (2.11) ισχύει για κάθε  $t \in \mathbb{R}$ .

Ο στόχος μας εδώ είναι να προσδιορίσουμε αυτούς τους τελεστές που παράγουν συστολικά semigroups.

Αρχικά θα ορίσουμε τις απαραίτητες συνθήκες, υποθέτουμε ότι

$B : D(B) \rightarrow H$  είναι ο γεννήτορας του συστολικού semigroup

$\{S(t) : t \geq 0\}$ . Εάν  $t \geq 0$  και  $x \in D(B)$ , τότε ο τελευταίος όρος στην ταυτότητα:

$$\begin{aligned} h^{-1}(S(t+h)x - S(t)x) &= h^{-1}(S(h) - I)S(t)x = \\ &= h^{-1}S(t)(S(h)x - x) \quad , h > 0 \end{aligned}$$

Έχει όριο στο  $h \rightarrow 0^+$ , και επομένως το ίδιο ισχύει και για κάθε άλλο όρο.

Έχουμε λοιπόν

$$D^+S(t)x = BS(t)x = S(t)Bx \quad , x \in D(B) , t \geq 0 .$$

Ομοίως, χρησιμοποιώντας την ομοιόμορφη φραγή του semigroup, θα μπορούσαμε να πάρουμε το όριο να τείνει  $h \rightarrow 0^+$  όπως στην ταυτότητα

$$h^{-1}(S(t)x - S(t-h)x) = S(t-h)h^{-1}(S(h)x - x) \quad , 0 < h < t$$

Και να έχουμε το εξής:

$$D^-S(t)x = S(t)Bx \quad x \in D(B) \text{ και } t = 0.$$

Κάνοντας τώρα μια ανασκόπηση σε όλα τα παραπάνω, καταλήγουμε στο εξής:

### ***Λήμμα***

Για κάθε  $x \in D(B)$ ,  $S(\cdot)x \in C^1(\mathbb{R}_0^+, H)$ ,  $S(t)x \in D(B)$  και

$$\begin{aligned} S(t)x - x &= \int_0^t BS(s)x ds \\ &= \int_0^t S(s)Bx ds \quad , t \geq 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

***Πόρισμα.*** Το  $B$  είναι κλειστό.

### ***Απόδειξη***

Θεωρούμε μια ακολουθία  $x_n \in D(B)$ , με  $x_n \rightarrow x$  και  $Bx_n \rightarrow y$  στον  $H$ . Για κάθε  $h > 0$  έχουμε από την (2.13)

$$h^{-1}(S(h)x_n - x_n) = h^{-1} \int_0^h S(s) Bx_n ds \quad , n \geq 1.$$

Έχοντας  $n \rightarrow \infty$  και  $h \rightarrow 0^+$ , έπεται ότι  $D^+S(0)x = y$ , συνεπώς  $Bx = y$ .

### ***Λήμμα***

Έχουμε το  $D(B)$  πυκνό υποσύνολο του  $H$ .

Για κάθε  $t \geq 0$  και  $x \in H$ ,  $\int_0^t S(s)x ds \in D(B)$  και

$$S(t)x - x = B \int_0^t S(s)x ds, \quad x \in H, t \geq 0. \quad (2.14)$$

### Απόδειξη

Ορίζουμε  $x_t = \int_0^t S(s)x ds$ . Τότε για  $h > 0$  έχουμε

$$\begin{aligned} h^{-1}(S(h)x_t - x_t) &= h^{-1} \left\{ \int_0^t S(h+s)x ds - \int_0^t S(s)x ds \right\} \\ &= h^{-1} \left\{ \int_h^{t+h} S(s)x ds - \int_0^t S(s)x ds \right\}. \end{aligned}$$

Προσθαφαιρώντας τώρα τον όρο  $\int_t^{t+h} S(s)x ds$ , προκύπτει η ισότητα:

$$h^{-1}(S(h)x_t - x_t) = h^{-1} \int_t^{t+h} S(s)x ds - h^{-1} \int_0^h S(s)x ds$$

και για  $h \rightarrow 0$ , έχουμε ότι  $x_t \in D(B)$  και  $Bx_t = S(t)x - x$ .

Τελικά,  $t^{-1}x_t \rightarrow x$ , καθώς  $t \rightarrow 0^+$ , έπεται ότι το  $D(B)$  είναι πυκνό υποσύνολο του  $H$ .

Θεωρούμε  $\lambda > 0$ . Τότε είναι εύκολο να επαληθεύσουμε ότι το  $\{e^{-\lambda t}S(t): t \geq 0\}$  είναι μια συστολή semigroup, της οποίας ο γεννήτορας είναι το  $B - \lambda$  με πεδίο ορισμού το  $D(B)$ . Αν εφαρμόσουμε τις (2.13) και (2.14) σε αυτό το semigroup, θα καταλήξουμε στο εξής:

$$e^{-\lambda t}S(t)x - x = \int_0^t e^{-\lambda s}S(s)(B - \lambda)x ds, \quad x \in D(B)$$

$$e^{-\lambda t}S(t)y - y = (B - \lambda) \int_0^t e^{-\lambda s}S(s)y ds, y \in H, t \geq 0.$$

Με  $t \rightarrow \infty$  (και σύμφωνα με το γεγονός ότι ο  $B$  είναι κλειστός για να εκτιμήσουμε το όριο του τελευταίου όρου) έχουμε το εξής:

$$x = \int_0^{\infty} e^{-\lambda s}S(s)(\lambda - B)x ds, x \in D(B)$$

$$y = (\lambda - B) \int_0^{\infty} e^{-\lambda s}S(s)y ds, y \in H$$

Αυτές οι ταυτότητες μας δείχνουν ότι ο όρος  $(\lambda - B)$  είναι "1-1" και "επί" αντίστοιχα, με

$$\|(\lambda - B)^{-1}y\| \leq \int_0^{\infty} e^{-\lambda s} ds \|y\| = \lambda^{-1} \|y\|, y \in H$$

και αυτό αποδεικνύει την αναγκαιότητα του ακόλουθου θεμελιώδους αποτελέσματος.

### Θεώρημα 5

Ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να είναι ο τελεστής  $B : D(B) \rightarrow H$  γεννήτορας μιας συστολής semigroup στον  $H$ , είναι :

- (a)  $D(B)$  πυκνό υποσύνολο του  $H$
- (b)  $\lambda - B : D(B) \rightarrow H$  να είναι "1-1" και "επί",  
με  $\|\lambda(\lambda - B)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$  για όλα τα  $\lambda > 0$ .

### Απόδειξη

Εδώ υπολείπεται να δείξουμε ότι οι συνθήκες που υποδεικνύονται στον  $B$  σημαίνει ότι είναι γεννήτορας ενός semigroup. Αυτό που εμείς στοχεύουμε να δείξουμε είναι:

- (a) Κατά προσέγγιση τον  $B$  μέσω των φραγμένων τελεστών,  $B_\lambda$

(b) Να βρούμε τα αντίστοιχα semigroups  $\{S_\lambda(t) : t \geq 0\}$  εκθέτοντας τα  $B_\lambda$ .

(c) Να δείξουμε την ύπαρξη του ορίου  $S(t) \equiv \lim_{\lambda \rightarrow \infty} S_\lambda(t)$  και είναι το επιθυμητό semigroup.

Εφόσον έχουμε ότι  $\lambda - B : D(B) \rightarrow H$  να είναι "1-1" και "επί" για όλα τα  $\lambda > 0$ , μπορούμε να ορίσουμε το εξής:

$$B_\lambda = \lambda B(\lambda - B)^{-1}, \lambda > 0.$$

### **Λήμμα**

Για κάθε  $\lambda > 0$ ,  $B_\lambda \in \mathcal{L}(H)$  και ικανοποιεί:

$$B_\lambda = -\lambda + \lambda^2(\lambda - B)^{-1}. \quad (2.15)$$

Για  $x \in D(B)$ ,  $\|B_\lambda(x)\| \leq \|Bx\|$  και  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} B_\lambda(x) = Bx$ .

### **Απόδειξη**

Η ισότητα (2.15) που έπεται της  $(B_\lambda + \lambda)(\lambda - B)x = \lambda^2 x$ ,  $x \in D(B)$ .

Η εκτίμηση λαμβάνεται από το  $B_\lambda = \lambda(\lambda - B)^{-1}B$  και το γεγονός ότι το  $\lambda(\lambda - B)^{-1}$  είναι μια συστολή. Εν τέλει, λόγω της (3.3) έχουμε:

$$\|\lambda(\lambda - B)^{-1}x - x\| = \|\lambda^{-1}B_\lambda x\| \leq \lambda^{-1}\|Bx\|, \lambda > 0, x \in D(B)$$

Και ως εκ τούτου έχουμε ότι  $\lambda(\lambda - B)^{-1}x \mapsto x$  για όλα τα  $x \in D(B)$ .

Όμως το  $D(B)$  είναι πυκνό και το  $\{\lambda(\lambda - B)^{-1}\}$  είναι ομοιόμορφα φραγμένο και συνεπάγεται από αυτά ότι  $\lambda(\lambda - B)^{-1}x \mapsto x$  για όλα τα  $x \in H$ , και στη συνέχεια έχουμε  $B_\lambda x = \lambda(\lambda - B)^{-1}Bx \rightarrow Bx$  για όλα τα  $x \in D(B)$ .

Εφ'όσον το  $B_\lambda$  είναι φραγμένο για κάθε  $\lambda > 0$ , θα μπορούσαμε να το ορίσουμε τώρα από το **θεώρημα 4**

$$S_\lambda(t) = \exp(tB_\lambda), \lambda > 0, t \geq 0.$$



### Λήμμα

Για κάθε  $\lambda > 0$ ,  $\{S_\lambda(t) : t \geq 0\}$  είναι μια συστολή semigroup στον  $H$  με γεννήτορα τον  $B_\lambda$ . Για κάθε  $x \in D(B)$ ,  $\{S_\lambda(t)x\}$  συγκλίνει στον  $H$  με  $\lambda \rightarrow \infty$ , και έχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση για  $t \in [0, t] > 0$ .

### Απόδειξη

Το πρώτο στοιχείο έπεται από

$$\|S_\lambda(t)\| = e^{-\lambda t} \|\exp(\lambda^2(\lambda - B)^{-1}t)\| \leq e^{-\lambda t} e^{\lambda t} = 1$$

και ότι  $D(S_\mu) = B_\lambda S_\lambda(t)$ .

Επιπλέον,

$$\begin{aligned} S_\lambda(t) - S_\mu(t) &= \int_0^t D_s S_\mu(t-s) S_\lambda(s) ds \\ &= \int_0^t S_\mu(t-s) S_\lambda(s) (B_\lambda - B_\mu) ds, \quad \mu, \lambda > 0 \end{aligned}$$

στον χώρο  $\mathcal{L}(H)$ , συνεπώς καταλήγουμε στην παρακάτω ανισότητα

$$\|S_\lambda(t)x - S_\mu(t)x\| \leq t \|B_\lambda x - B_\mu x\|, \quad \lambda, \mu > 0, t \geq 0, x \in D(B).$$

Από αυτό φαίνεται πως το  $\{S_\lambda(t)x\}$  είναι ομοιόμορφα Cauchy για  $t$  στα φραγμένα διαστήματα και έτσι έπεται το Λήμμα.

Εφόσον κάθε  $S_\lambda(t)$  είναι μια συστολή και ο  $D(B)$  είναι πυκνός χώρος, το προβλεπόμενο όριο ισχύει για όλα τα  $x \in H$ , και είναι ομοιόμορφα στα φραγμένα διαστήματα.

Ορίζουμε  $S(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} S_\lambda(t)x$ ,  $x \in H$ ,  $t \geq 0$  και είναι ξεκάθαρο πλέον ότι κάθε  $S(t)$  είναι μια γραμμική συστολή.

Η ομοιόμορφη σύγκλιση σε φραγμένα διαστήματα συνεπάγεται το  $t \mapsto S(t)x$  είναι συνεχής για κάθε  $x \in H$ , και η ταυτότητα semigroup μπορεί εύκολα να επαληθευτεί.

Ως συνέπεια αυτού, έχουμε ότι το  $\{S(t): t \geq 0\}$  είναι ένα semigroup συστολής στον  $H$ .

Εάν  $x \in D(B)$ , οι συναρτήσεις  $S_\lambda(\cdot)B_\lambda x$  συγκλίνουν ομοιόμορφα στο  $S(\cdot)B_x$  και συνεπώς για  $h > 0$  θα μπορούσαμε να πάρουμε το όριο στην ταυτότητα

$$S_\lambda(h)x - x = \int_0^h S_\lambda(t)B_\lambda x dt$$

για να καταλήξουμε στο εξής:

$$S(h)x - x = \int_0^h S(t)Bx dt, \quad x \in H, h > 0.$$

Αυτό συνεπάγεται ότι  $D^+(S(0)_x) = Bx$ , για  $x \in D(B)$ . Εάν το  $C$  δηλώνει το γεννήτορα του  $\{S(t): t \geq 0\}$ , θα έχουμε δείξει ότι  $D(B) \subset D(C)$  και  $B_x = C_x$  για όλα τα  $x \in D(B)$ . Αυτό σημαίνει ότι το  $C$  είναι μια επέκταση του  $B$ . Όμως, το  $I - B$  είναι "επί" και  $I - C$  είναι "1-1", έτσι ώστε να έπεται  $D(B) = D(C)$ .

### **Πόρισμα**

Εάν το  $-A$  είναι ο γεννήτορας μιάς συστολής semigroup, τότε για κάθε  $u_0 \in D(A)$  υπάρχει μία και μοναδική λύση  $u \in C^1([0, \infty), H)$  της (2.8) με αρχική συνθήκη  $u(0) = u_0$ .

### **Απόδειξη**

Προκύπτει άμεσα από την (2.13):

### **Θεώρημα 6**

Εάν το  $-A$  είναι ο γεννήτορας ενός semigroup συστολής, τότε για κάθε  $u_0 \in D(A)$  και για κάθε  $f \in C^1([0, \infty), H)$  υπάρχει μία και μοναδική λύση  $u \in C^1([0, \infty), H)$ , τέτοια ώστε  $u(0) = u_0$ ,  $u(t) \in D(A)$ , για  $t \geq 0$ , και

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \quad t \geq 0. \quad (2.16)$$

### Απόδειξη

Αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση

$$g(t) = \int_0^t S(t-\tau)f(\tau)d\tau, \quad t \geq 0,$$

Ικανοποιεί την (3.4) και σημειώνουμε ότι  $g(0) = 0$ . Θεωρούμε ότι  $z = t - \tau$ , και έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} &= \\ &= \int_0^t S(z)(f(t+h-z) - f(t-z))h^{-1}dz \\ &\quad + h^{-1} \int_t^{t+h} S(z)f(t+h-z)dz \end{aligned}$$

ως εκ τούτου προκύπτει η ύπαρξη της  $g'(t)$  και

$$g'(t) = \int_0^t S(z)f'(t-z)dz + S(t)f(0).$$

Επιπλέον έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} &= h^{-1} \left\{ \int_0^{t+h} S(t+h-\tau)f(\tau)d\tau - \int_0^t S(t-\tau)f(\tau)d\tau \right\} \\ &= (S(h) - I)h^{-1} \int_0^t S(t-\tau)f(\tau)d\tau + h^{-1} \int_t^{t+h} S(t+h-\tau)f(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (2.17)$$

Εφόσον η  $g'(t)$  υπάρχει και ο τελευταίος όρος της (2.17) έχει όριο καθώς το  $h \rightarrow 0^+$ , προκύπτει από την (2.17) ότι

$$\int_0^t S(t-\tau)f(\tau)d\tau \in D(A)$$

Και αυτό το  $g$  ικανοποιεί την (2.16).

## 7.2. Εξισώσεις εξέλιξης σε πεπλεγμένη μορφή (Implicit)

Σε περίπτωση που η εξίσωση εξέλιξης έχει τη γενικότερη μορφή:

$$\mathcal{M}u'(t) + Lu(t) = f(t), \quad t > 0$$

Και με αρχική συνθήκη:  $u(0) = u_0$ , μπορούμε να τη λύσουμε υποβιβάζοντάς την στο πρόβλημα Cauchy που αναλύσαμε στην προηγούμενη ενότητα. Δηλαδή,

$$u'(t) + Au(t) = 0, \quad t > 0$$

Για παράδειγμα, σε προβλήματα που περιέχουν την ψευδοπαραβολική εξίσωση της μορφής:

$$\partial_t u(x,t) - \alpha \partial_x^2 \partial_t u(x,t) - \partial_x^2 u(x,t) = f(x,t) \quad (3.1)$$

όπου  $\alpha$  μη αρνητική σταθερά,

η οποία σε κατάλληλο χώρο μπορεί να αναχθεί στη μορφή:

$$u'(t) + Au(t) = f(t)$$

επειδή ο τελεστής  $(\mathbf{I} - \alpha \partial_x^2)$ , ο οποίος δρα πάνω στο  $\partial_t u(x,t)$  μπορεί να αντιστραφεί.

Έτσι η (3.1) είναι ένα παράδειγμα κανονικής εξίσωσης που θα μελετήσουμε στη συνέχεια.

### Κανονικές εξισώσεις

Έστω  $V_m$  ένας χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο  $(\cdot, \cdot)_m$ , ο οποίος προσδιορίζει την αντίστοιχη απεικόνιση Riesz από τον  $V_m$  στον δυικό  $V'_m$  μέσω του  $\mathcal{M}$ .

Έτσι έχουμε,

$$\mathcal{M}x(y) = (x, y)_m, \quad x, y \in V_m$$

Έστω τώρα  $D$  ένας υπόχωρος του  $V_m$  και  $L: D \rightarrow V'_m$  μια γραμμική απεικόνιση.

Εάν γνωρίζουμε ότι  $u_0 \in V_m$  και  $f \in C((0, \infty), V'_m)$ , τότε θεωρούμε το πρόβλημα εύρεσης της  $u \in C([0, \infty), V_m) \cap C^1((0, \infty), V_m)$  τέτοιο ώστε

$$\mathcal{M}u'(t) + Lu(t) = f(t), \quad t > 0 \quad (3.2)$$

και  $u(0) = u_0$ .

Στο σημείο αυτό να σημειώσουμε ότι η (3.2) είναι μια γενίκευση της εξίσωσης εξέλιξης του 4<sup>ου</sup> κεφαλαίου:  $u'(t) + Au(t) = 0$ . (\*)

Εάν αντιστοιχίσουμε τον  $V_m$  με τον  $V'_m$  μέσω της απεικόνισης Riesz  $\mathcal{M}$  (παίρνοντας  $\mathcal{M} = \mathbf{I}$ ), τότε η (3.2) αναγράφεται στη μορφή αυτή.

Σε ένα γενικότερο πλαίσιο, θα έπρεπε να λύσουμε την (3.2) υποβιβάζοντάς την σε ένα πρόβλημα Cauchy ισοδύναμο με το (\*).

Αρχικά παραθέτουμε μια εκ των προτέρων εκτίμηση για τη λύση  $u(\cdot)$  της (3.2), με  $f = 0$  για να γίνει το πρόβλημα πιο απλό.

Για μια τέτοια λύση έχουμε:

$$D_t(u(t), u(t))_m = -2ReLu(t)(u(t))$$

και αυτό προτείνει την εξέταση αυτών που ακολουθούν παρακάτω.

Ο ανωτέρω υπολογισμός μας, φανερώνει το γεγονός πως υπάρχει μια το πολύ λύση του προβλήματος Cauchy για την (3.2) όποτε η  $L$  είναι μονότονη\*. Συνεπώς, λόγω αυτού, προβλέπεται ότι ο χώρος  $V_m$  είναι ο σωστός για να αναζητήσουμε καλώς ορισμένες λύσεις για την (3.2).

Για να επιτύχουμε μια αόριστη εξίσωση εξέλιξης στον  $V_m$  που θα είναι ισοδύναμη της (3.2), το μόνο που χρειαζόμαστε είναι να επενεργεί πάνω στη (3.2) ο αντίστροφος ισομορφισμός του  $\mathcal{M}$  και αυτό θα μας δώσει την παρακάτω ισότητα.

$$u'(t) + \mathcal{M}^{-1} \circ Lu(t) = \mathcal{M}^{-1} f(t), \quad t > 0. \quad (3.3)$$

Αυτό μας προτρέπει να ορίσουμε ένα  $A = \mathcal{M}^{-1} \circ L$  με πεδίο ορισμού  $D(A) = D$ , έτσι ώστε η (2.3) να είναι ισοδύναμη με την (2.14).

Επιπλέον, εφόσον το  $\mathcal{M}$  είναι η απεικόνιση Riesz που καθορίζεται και προσδιορίζεται από το εσωτερικό γινόμενο  $(\cdot, \cdot)_m$ , έχουμε:

$$(Ax, y)_m = Lx(y) \quad , \quad x \in D \quad , \quad y \in V_m \quad (3.4)$$

Από αυτό συμπεραίνουμε πως ο  $L$  είναι μονότονος, εάν και μόνο εάν, ο  $A$  είναι αύξοντας. Στη συνέχεια, ο  $-A$  παράγει μια συστολή semigroup στον  $V_m$ , αν και μόνο αν, το  $L$  είναι μονότονο και ο  $(I+A)$  είναι «επί».

Εφόσον ισχύει ότι:  $\mathcal{M}(I+A) = \mathcal{M} + L$ , καταλήγουμε στο παρακάτω αποτέλεσμα μέσω του θεωρήματος 6.

### Θεώρημα 6

Έστω  $M$  μια απεικόνιση Riesz ενός χώρου Hilbert  $V_m$ , με εσωτερικό γινόμενο  $(\cdot, \cdot)_m$  και έστω  $L$  γραμμικός τελεστής  $L: D \subset V_m \rightarrow V'_m$ .

Θεωρούμε ότι ο  $L$  είναι μονότονος και  $M+L: D \rightarrow V'_m$  είναι επί. Τότε, για κάθε  $f \in C^1([0, \infty), V'_m)$  και  $u_0 \in D$ , υπάρχει μια μοναδική λύση  $u(\cdot)$  της εξίσωσης:  $Mu'(t) + Lu(t) = f(t)$ ,  $t > 0$  με  $u(0) = u_0$ .

Προκειμένου να ληφθεί μια λύση ανάλογη της περίπτωσης της προηγούμενης ενότητας, θεωρούμε τον  $L$  δεδομένο από μια συνεχή ημιγραμμική μορφή.

Πιο συγκεκριμένα, ένα χώρο Hilbert  $V$ , ο οποίος είναι ένας πυκνός υπόχωρος του  $V_m$  και η ενσφήνωση (injection) είναι συνεχής, οπότε μπορούμε να πούμε το εξής:  $V'_m \subset V'$ .

Θεωρούμε τώρα ότι το  $\ell(\cdot, \cdot)$  είναι συνεχές και ημιγραμμικό πάνω στο  $V$ . Έτσι ορίζουμε την αντίστοιχη γραμμική απεικόνιση  $\mathcal{L}: V \mapsto V'$  μέσω του:

$$\mathcal{L}x(y) = \ell(x, y) \quad , x, y \in V .$$

Ορίζουμε:

$$D \equiv \{ x \in V : \mathcal{L}x \in V'_m \} \text{ και } L = \mathcal{L}|_D .$$

Τότε η (3.4) μας δείχνει το ότι:  $\ell(x, y) = (Ax, y)_m$ ,  $x \in D$ ,  $y \in V$

Και έτσι προκύπτει ότι ο  $A$  είναι ένας τελεστής προσδιορισμένος από το  $\{\ell(\cdot, \cdot), V, V_m\}$ .

Συνεπώς προκύπτουν τα παρακάτω.

### Θεώρημα 7

Έστω  $M$  μια απεικόνιση Riesz ενός χώρου Hilbert  $V_m$ , με εσωτερικό γινόμενο  $(\cdot, \cdot)_m$ . Έστω  $\ell(\cdot, \cdot)$  είναι μια συνεχής, ημιγραμμική και ελλειπτική μορφή πάνω στο χώρο Hilbert  $V$ , τον οποίο θεωρούμε πυκνό και συνεχώς ενσφυνωμένο στο  $V_m$ .

Δηλώνουμε τον αντίστοιχο ισομορφισμό  $\mathcal{L}$  τέτοιο ώστε  $\mathcal{L}: V \rightarrow V'$

Τότε κάθε Hölder-συνεχής  $f: [0, \infty) \rightarrow V'_m$  και  $u_0 \in V_m$ , υπάρχει μια μοναδική λύση  $u \in C([0, \infty), V_m) \cap C^1([0, \infty), V_m)$ , τέτοιο ώστε  $u(0) = u_0$  και  $\mathcal{L}u(t) \in V'_m$ , για  $t > 0$  και

$$Mu'(t) + Lu(t) = f(t), \quad t > 0. \quad (3.5)$$

Στη συνέχεια θα δώσουμε 4 στοιχειώδη παραδείγματα για να παρουσιάσουμε τους τύπους των προβλημάτων αρχικών και συνοριακών τιμών (ΠΑΣΤ), στα οποία μπορούν να εφαρμοστούν όσα αναφέρθηκαν πιο πάνω.

Στα τρία πρώτα παραδείγματα, θεωρούμε τον  $V_m = H_0^1(0,1)$ , με το εσωτερικό γινόμενο

$$(u, v)_m = \int_0^1 (u\bar{v} + \alpha u\partial\bar{v}), \quad \text{με } \alpha > 0.$$

### Παράδειγμα 1

Θεωρούμε  $D = \{u \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1) : u'(0) = cu'(1)\}$ ,  $|c| \leq 1$

Και ορίζουμε  $LU = -\partial^3 u$ .

Τότε θα έχουμε:

$$Lu(\varphi) = (\partial^2 u, \partial\varphi), \quad \text{για } \varphi \in H_0^1(0,1)$$

και

$$2\operatorname{Re}Lu(u) = |u'(1)|^2 - |u'(0)|^2 \geq 0, \quad u \in D.$$

Καταλήγοντας λοιπόν, βλέπουμε πως το *θεώρημα 6* δείχνει ότι το ΠΑΣΤ



$$\begin{cases} (\partial_t - a\partial_x^2\partial_t)U(x,t) - \partial_x^3U(x,t) = 0, & 0 < x < 1, t \geq 0 \\ U(0,t) = U(1,t) = 0, & \partial_x U(0,t) = c\partial_x U(1,t), t \geq 0 \\ U(x,0) = U_0(x) \end{cases}$$

Έχει μία και μοναδική λύση για  $U_0 \in D$ .

### Παράδειγμα 2

Θεωρούμε  $V = H_0^2(0,1)$  και ορίζουμε

$$\ell(u,v) = \int_0^1 \partial^2 u \cdot \partial^2 \bar{v} \quad , u, v \in V .$$

Τότε θα έχουμε:

$$D = H_0^2(0,1) \cap H^3(0,1) \quad \text{και} \quad Lu = \partial^4 u \quad , u \in D .$$

Το *θεώρημα 7* είναι υπεύθυνο για την ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος

$$\begin{cases} (\partial_t - a\partial_x^2\partial_t)U(x,t) + \partial_x^4 U(x,t) = 0, & 0 < x < 1, t > 0 \\ U(0,t) = U(1,t) = \partial_x U(0,t) = \partial_x U(1,t) = 0, & t > 0 \\ U(x,0) = U_0(x), & 0 < x < 1 \end{cases}$$

για κάθε  $U_0 \in H_0^1(0,1)$ .

### Παράδειγμα 3

Θεωρούμε τον χώρο  $V = H_0^1(0,1)$  και ορίζουμε

$$\ell(u,v) = \int_0^1 \partial u \partial \bar{v} \quad , u, v \in V .$$

Τότε  $D = V = V_m$  και  $Lu = -\partial^2 u$  ,  $u \in D$ .

Από τα θεωρήματα 6 ή 7 κατοχυρώνουμε την ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης για το πρόβλημα

$$\begin{cases} (\partial_t - a\partial_x^2\partial_t)U(x,t) - \partial_x^2 U(x,t) = 0, & 0 < x < 1, & t > 0 \\ U(0,t) = U(1,t) = 0, & & t > 0 \\ U(x,0) = U_0(x), & & 0 < x < 1 \end{cases}$$

για  $U_0 \in D = V_m$ .

#### Παράδειγμα 4

Για το τελευταίο μας παράδειγμα, θα θεωρήσουμε τον  $V_m$  ως το συμπλήρωμα του  $C_0^\infty(G)$  με εσωτερικό γινόμενο

$$(u, v)_m \equiv \int_G m(x)u(x)\overline{v(x)} dx.$$

Υποθέτουμε ότι το  $G$  είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^n$  και  $m \in L^\infty(G)$  με  $m(x) > 0$  για  $x \in G$ .

Σύμφωνα με αυτά, το  $V_m$  είναι το σύνολο των μετρήσιμων συναρτήσεων  $u$  στο  $G$ , για το οποίο ισχύει  $m^{1/2}u \in L^2(G)$ .

Θεωρούμε  $V = H_0^1(G)$  και ορίζουμε

$$\ell(u, v) = \int_0^1 \nabla u \cdot \nabla \bar{v} \quad , u, v \in V.$$

τότε το θεώρημα 7 είναι αυτό που μας κατοχυρώνει την ύπαρξη και τη μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος

$$\begin{cases} m(x)\partial_t U(x,t) - \Delta_n U(x,t) = 0, & x \in G, t > 0 \\ U(s,t) = 0, & s \in \partial G, t > 0 \\ U(x,0) = U_0(x), & x \in G \end{cases}$$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε στο σημείο αυτό πως οι αρχικές συνθήκες έχουν ικανοποιηθεί, με την έννοια ότι:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_G m(x)|U(x,t) - U_0(x)|^2 dx = 0.$$

Εν κατακλείδι, στα δύο πρώτα παραδείγματα εφαρμόσαμε τα θεωρήματα 6 και 7, όταν τα  $\mathcal{M}$  και  $L$  είναι δύο διαφορετικοί τελεστές, με την τάξη του  $L$  να είναι αυστηρά μεγαλύτερη της τάξης του  $\mathcal{M}$ .

Η ισότητα του παραδείγματος 2 ονομάζεται *μεταπαραβολική* και εμφανίζεται σε ειδικά μοντέλα διάχυσης ή ροής ρευστού.

Η ισότητα του παραδείγματος 3 εμφανίζεται ομοίως με την προηγούμενη και ονομάζεται *ψευδοπαραβολική*.

Παρακάτω θα αναλύσουμε αυτού του είδους τα προβλήματα.

Το τελευταίο παράδειγμα περιέχει μια ασθενή εκφυλισμένη παραβολική εξίσωση, όμως αυτού του είδους τα προβλήματα δεν θα αναλυθούν στην παρούσα εργασία.

### **Ψευδοπαραβολικές εξισώσεις**

Θα εξετάσουμε κάποιες εξισώσεις εξέλιξης οι οποίες γενικεύουν το παράδειγμα 3.

Θα αναλύσουμε δύο ειδών αποτελέσματα και θα δείξουμε πως αυτά τα δύο διαφέρουν ουσιαστικά από τις συνοριακές συνθήκες που ικανοποιούν.

### **Θεώρημα 8**

Θεωρούμε  $V$  ένα χώρο Hilbert και τα  $m(\cdot, \cdot)$  και  $\ell(\cdot, \cdot)$  να είναι συνεχείς ημιγραμμικές μορφές στον  $V$ .

Συμβολίζουμε με  $\mathcal{M}$  και  $\mathcal{L}$  τους αντίστοιχους τελεστές στον  $\mathcal{L}(V, V')$ , έχουμε δηλαδή

$$\begin{aligned} \mathcal{M}x(y) &= m(x, y) \\ \mathcal{L}x(y) &= \ell(x, y), \quad \text{για } x, y \in V. \end{aligned}$$

Υποθέτουμε ότι το  $m(\cdot, \cdot)$  είναι  $V$  – πιαστικό.

Τότε, για κάθε  $u_0 \in V$  και  $f \in C(\mathbb{R}, V')$ , υπάρχει μια μοναδική  $u \in C^1(\mathbb{R}, V)$  για την οποία η (2.4) ισχύει για όλα τα  $t \in \mathbb{R}$  και  $u(0) = u_0$ .

## Απόδειξη

Η υπόθεση της πιστικότητας του  $V$  δείχνει ότι το  $\mathcal{M}$  είναι ένας ισομορφισμός του  $V$  στο  $V'$ , έτσι ώστε ο τελεστής  $A \equiv \mathcal{M}^{-1} \circ \mathcal{L}$  ανήκει στο  $\mathcal{L}(V)$ .

Μπορούμε να ορίσουμε το

$e^{-tA} \in \mathcal{L}(V)$  όπως στο *θεώρημα 3* και στη συνέχεια ορίζουμε

$$u(t) = e^{-tA} \cdot u_0 + \int_0^t e^{(A(\tau-t)) \circ \mathcal{M}^{-1}} f(\tau) d\tau, t > 0 \quad (3.6)$$

Εφόσον το ολοκλήρωμα είναι συνεχές και κατάλληλα φραγμένο, επάγεται ότι η (3.6) είναι μια λύση της (3.3), όπως προκύπτει από τη (3.2). Ονομάζουμε τη λύση  $u(\cdot)$  που δίνεται από το *θεώρημα 3* μια ασθενή λύση της (3.2). υποθέτουμε ότι μας δίνεται ένας χώρος Hilbert  $H$ , στον οποίο ο  $V$  είναι ένα πυκνό υποσύνολο, συνεχώς ενταγμένο. Έχουμε λοιπόν ότι  $H \subset V'$  και ορίζουμε το εξής:

$$\begin{aligned} D(M) &= \{v \in V : \mathcal{M}v \in H\} \\ D(L) &= \{v \in V : Lv \in H\} \end{aligned}$$

με αντίστοιχους τελεστές:  $M = \mathcal{M}|_{D(M)}$  και  $L = \mathcal{L}|_{D(L)}$  στον  $H$ .

Μια λύση  $u(\cdot)$  της (3.2) για την οποία κάθε όρος της (3.2) ανήκει στο  $C(\mathbb{R}, H)$  [αντί για το  $C(\mathbb{R}, V')$ ], ονομάζεται ισχυρή λύση.

Μια τέτοια λοιπόν λύση ικανοποιεί την παρακάτω ισότητα:

$$Mu'(t) + Lu(t) = f(t), t \in \mathbb{R}. \quad (3.7)$$

## Θεώρημα 9

Θεωρούμε τον χώρο Hilbert  $V$  και τους τελεστές  $\mathcal{M}$  και  $\mathcal{L} \in \mathcal{L}(V, V')$ , που δίνονται όπως στο *θεώρημα 3.1*.

Θεωρούμε ακόμα τον χώρο Hilbert  $H$ , που δίνεται όπως παραπάνω και ορίζουμε τα πεδία ορισμού  $D(M)$ ,  $D(L)$  και τους τελεστές  $M$ ,  $L$  όπως πριν.

Υποθέτουμε ότι  $D(M) \subset D(L)$ .

Τότε, για κάθε  $u_0 \in D(M)$  και  $f \in C(\mathbb{R}, H)$ , υπάρχει μια μοναδική ισχυρή λύση  $u(\cdot)$  της (3.2) με α.σ.  $u(0) = u_0$ .

### Απόδειξη

Κάνοντας την αλλαγή των μεταβλητών  $v(t) = e^{-\lambda t} u(t)$  για κάποιο  $\lambda > 0$  επαρκώς μεγάλο, θα μπορούσαμε να υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι  $D(M) = D(L)$  και ότι  $\ell(\cdot, \cdot)$  είναι  $V$ -πιεστικό.

Τότε το  $L$  είναι "1-1" και "επί" πάνω στο  $H$ , επομένως μπορούμε να ορίσουμε μια νόρμα στον  $D(L)$  τέτοια ώστε:

$$\|v\|_{D(L)} = Lv_H, v \in D(L)$$

η οποία καθιστά τον  $D(L)$  ένα χώρο Banach. (σαφώς, ο  $D(L)$  είναι και χώρος Hilbert).

Εφόσον γνωρίζουμε ότι ο  $\ell(\cdot, \cdot)$  είναι  $V$ -πιεστικός, έπεται πως ισχύει το εξής για κάποιο  $c > 0$ :

$$c\|v\|_V^2 \leq \|Lv\|_H \|v\|_H, v \in D(L)$$

Και η συνέχεια της ενσφήνωσης  $V \hookrightarrow H$ , μας φανερώνει τότε ότι η άλλη ενσφήνωση  $D(L) \hookrightarrow V$  είναι επίσης συνεχής.

Ο τελεστής  $A \equiv \mathcal{M}^{-1}L \in \mathcal{L}(V)$  αφήνει αμετάβλητο τον υπόχωρο  $D(L)$ .

Αυτό συνεπάγεται το γεγονός ότι ο περιορισμός του  $A$  στο  $D(L)$  είναι ένας κλειστός τελεστής μέσα στη νόρμα  $-D(L)$ .

Για να δούμε και στην πράξη όσα αναφέραμε μόλις, υποθέτουμε ότι  $v_n \in D(L)$  και ότι  $\|v_n - u_0\|_{D(L)} \rightarrow 0$ ,  $\|Av_n - u_0\|_{D(L)} \rightarrow 0$

Τότε:

$$\begin{aligned} \|u_0 - Au_0\|_V &\leq \|u_0 - Av_n\|_V + \|A(v_n - u_0)\|_V \\ &\leq \|u_0 - Av_n\|_V + \|A\|_{\mathcal{L}(V)} \|v_n - u_0\|_V \end{aligned}$$

Έτσι η συνέχεια του  $D(L) \hookrightarrow V$  συνεπάγεται ότι καθένας από τους όρους συγκλίνει στο μηδέν. Οπότε,  $v_0 = Au_0$ .

Εφόσον ο  $A|_{D(L)}$  είναι κλειστός και ορίζεται παντού στον  $D(L)$ , έπεται από το *θεώρημα III.7.5* ότι είναι συνεχής στο  $D(L)$ . Επομένως, οι περιορισμοί των τελεστών  $e^{-tA}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , είναι συνεχείς στο  $D(L)$ . Και ο τύπος στην (3.1) στο  $D(L)$  δίνει μια ισχυρή λύση όπως ήταν το επιθυμητό.

### **Πόρισμα**

Στην περίπτωση του *θεωρήματος 9*, η ασθενής λύση  $u(\cdot)$ , είναι μια ισχυρή λύση, αν και μόνο αν,  $u_0 \in D(M)$ .

### **Παράδειγμα 5**

Θεωρούμε ένα ψευδοπαραβολικό πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών.

Θεωρούμε  $\varepsilon > 0$  και ορίζουμε

$$\begin{aligned} m(u, v) &= (u, v)_H + \varepsilon a(u, v) \\ \ell(u, v) &= a(u, v), \quad u, v \in V. \end{aligned}$$

Έτσι έχουμε  $D(M) = D(L) = D(A)$ .

Θεωρούμε ακόμα  $f \in C(\mathbb{R}, H)$ .

Εάν η  $u(\cdot)$  είναι μια ισχυρή λύση της (3.2), τότε θα έχουμε

$$\begin{cases} u'(t) + \varepsilon A_1 u'(t) + A_1 u(t) = f(t) \\ u(t) \in V \\ \partial_1 u(t) + A_2 \gamma(u(t)) = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad (3.8)$$

Αντί για αυτό λοιπόν υποθέτουμε ότι  $F \in C(\mathbb{R}, H)$  και  $g \in C(\mathbb{R}, B')$ .

Αν ορίσουμε:

$$f(t)(v) \equiv (F(t), v)_H + g(t)(\gamma(v)), v \in V, t \in \mathbb{R}.$$

Τότε μια ασθενής λύση  $u(\cdot)$  της (3.5) μπορεί να βρεθεί και να ικανοποιεί

$$\begin{cases} u'(t) + \varepsilon A_1 u'(t) + A_1 u(t) = F(t) \\ u(t) \in V \\ \partial_1(\varepsilon u'(t) + u(t)) + A_2(\gamma(\varepsilon u'(t) + u(t))) = g(t) \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad (3.9)$$

Να σημειώσουμε πως η (3.8) συνεπάγεται το  $g = 0$  περισσότερο από την (3.9). Κάνοντας τις κατάλληλες επιλογές τελεστών παραπάνω, μπορούμε να αναφέρουμε παραδείγματα προβλημάτων αρχικών και συνοριακών συνθηκών των (3.8) και (3.9)

### Παράδειγμα 6

Για το δεύτερο παράδειγμά μας τώρα, θεωρούμε τον  $G$ , ένα ανοιχτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^n$  ( $G \subset \mathbb{R}^n$ ).

Διαλέγουμε ένα  $V$  τέτοιο ώστε:

$V = \{v \in H^1(G) : v(s) = 0, s \in \Gamma\}$ , όπου το  $\Gamma$  είναι κλειστό υποσύνολο του συνόρου  $\partial G$ .

Ορίζουμε τώρα:

$$m(u, v) = \int_G \nabla u(x) \cdot \nabla \overline{v(x)} dx, u, v \in V$$

Και υποθέτουμε ότι το  $m(\cdot, \cdot)$  είναι  $V -$  ελλειπτικό.

Επιλέγω,  $H = L^2(G)$  και  $V_0 = H_0^1(G)$

Ο αντίστοιχος μερικός διαφορικός τελεστής  $M: V \rightarrow V_0' \leq \mathcal{D}^*(G)$  μας,

Συνεπάγεται ότι:

$D(M) = \{u \in V : \Delta_n u \in L^2(G), \partial_n u = 0\}$ , όπου το  $\partial$  είναι η κανονική παράγωγος  $\partial_n$  πάνω στο σύνορο  $\partial G \sim \Gamma$ , στα σημεία όπου το σύνορο είναι επαρκώς λείο.

Ορίζουμε τώρα μια δεύτερη μορφή στον  $V$ :

$$l(u, v) = \int_G \alpha(x) \partial_n u(x) \overline{v(x)} dx, u, v \in V$$

και έχουμε ότι  $L = \mathcal{L}: V \rightarrow H \leq V'$  που δίνεται από  $\mathcal{L}u = \alpha(x) \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ ,

όπου  $\alpha(\cdot) \in L^\infty(G)$ .

Υποθέτουμε ότι για κάθε  $t \in \mathbb{R}$ , δίνεται μια  $F(\cdot, t) \in L^2(G)$  και ότι η απεικόνιση  $t \rightarrow F(\cdot, t): \mathbb{R} \rightarrow L^2(G)$  είναι συνεχής.

Θεωρούμε ακόμα πως η  $g(\cdot, t) \in L^2(\partial G)$  μας δίνεται ομοίως και ορίζει την  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, V')$  ως:

$$f(t)(v) = \int_G F(x, t) \overline{v(x)} dx + \int_{\partial G} g(s, t) \overline{v(s)} ds \quad , t \in \mathbb{R}, v \in V .$$

Εάν  $u_0 \in V$  , τότε το θεώρημα 8 δίνει μια μοναδική ασθενή λύση  $u(\cdot)$  της (3.5) με αρχική συνθήκη  $u(0) = u_0$  .

Έπεται λοιπόν ότι:

$$m(u'(t), v) + \ell(u(t), v) = f(t)(v) \quad , v \in V, t \in \mathbb{R}$$

Και αυτό είναι ισοδύναμο με το εξής:

$$\begin{aligned} Mu'(t) + Lu(t) &= F(\cdot, t) \quad , t \in \mathbb{R} \\ u(t) \in V, \quad \partial_t(\partial u(t)) &= g(\cdot, t) \end{aligned}$$

Οδηγούμαστε έτσι σε μια γενικευμένη λύση  $U(\cdot, \cdot)$  του προβλήματος αρχικών συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} -\Delta_n \partial_t U(x, t) + a(x) \partial_n U(x, t) = F(x, t) \quad , x \in G, t \in \mathbb{R} \\ U(s, t) = 0 \quad , s \in \Gamma \text{ και } U(x, 0) = U_0(x) \quad , x \in G \\ \partial_\nu U(s, t) = \partial_\nu U_0(s) + \int_0^t g(s, \tau) d\tau \quad , s \in \partial G \sim \Gamma \end{cases}$$

Εν κατακλείδι, έχουμε ότι  $f \in C(\mathbb{R}, H)$  εάν και μόνο εάν  $g \equiv 0$  , και τότε  $\partial_\nu U(s, t) = \partial_\nu U_0(s)$  για τα  $s \in \partial G \sim \Gamma, t \in \mathbb{R}$ .

Έτσι  $U(\cdot, t) \in D(M)$  εάν και μόνο εάν  $U_0 \in D(M)$



### 7.3. Εξισώσεις εξέλιξης Δεύτερης τάξης

Παρακάτω θα αναφερθούμε στη θεωρία που απαιτείται ώστε να λυθούν καλώς ορισμένα προβλήματα εξισώσεων εξέλιξης, οι οποίες περιέχουν δεύτερης τάξης χρονική παράγωγο της συνάρτησης. Ένα παράδειγμα είναι η επίλυση ενός προβλήματος Cauchy για την κυματική εξίσωση:

$$\partial_t^2 u(x,t) - \Delta_n u(x,t) = F(x,t) \quad (4.1)$$

Το αφαιρετικό πρόβλημα που αντιστοιχεί στα ανωτέρω, μας οδηγεί σε μια δευτέρας τάξης εξελικτική εξίσωση της μορφής:

$$u''(t) + Au(t) = f(t) \quad (4.2)$$

όπου  $A$  είναι ένας τελεστής που περιέχει το  $(-\Delta_n)$  κατά μία έννοια.

Επίσης εάν προσθέσουμε απόσβεση ή τριβές στην κυματική εξίσωση, προκύπτει η παρακάτω μορφή:

$$\partial_t^2 u(x,t) + \mathbf{R} \cdot \partial_t u(x,t) - \Delta_n u(x,t) = F(x,t)$$

Σε αυτή την περίπτωση πρέπει να προσθέσουμε τον όρο  $\mathbf{B}u'(t)$ . Έτσι θα έχουμε την εξίσωση:

$$u''(t) + \mathbf{B}u'(t) + Au(t) = f(t) \quad (4.3)$$

Ακόμα, συγκεκριμένα μοντέλα μηχανικής των ρευστών οδηγούν σε εξισώσεις όπως για παράδειγμα η παρακάτω εξίσωση:

$$\partial_t^2 (\Delta_n u(x,t)) + \partial_n^2 u(x,t) = 0, \quad (4.4)$$

$$\text{για } \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$$

η οποία περιέχει χωρικές παραγώγους, σε συνδυασμό με δεύτερης τάξης χρονικές.

Αυτά μας δίνουν το κίνητρο να ασχοληθούμε με εξισώσεις εξέλιξης οι οποίες έχουν τη γενικότερη μορφή:

$$Cu''(t) + Bu'(t) + Au(t) = f(t), \quad t > 0 \quad (4.5)$$

Όσον αφορά τις περιπτώσεις όπου ο τελεστής  $C$  είναι αντιστρέψιμος, χρησιμοποιώντας τη θεωρία που θα αναφέρουμε παρακάτω, μπορούμε να υποβιβάσουμε την ανωτέρω δεύτερης τάξης εξίσωση εξέλιξης σε πρώτης τάξης κανονική εξίσωση της μορφής:

$$Mw'(t) + Lw(t) = [0, f(t)], \quad t > 0.$$

Αυτή είναι η εξίσωση που περιγράψαμε παραπάνω. Αυτό που χρειαζόμαστε λοιπόν είναι να ορίσουμε τις προϋποθέσεις στην ανωτέρω γενικευμένη εξίσωση εξέλιξης 2<sup>ης</sup> τάξης.

### Κανονικές Εξισώσεις

Θεωρούμε τους χώρους Hilbert  $V, W$  με τον  $V$  πυκνό υπόχωρο του  $W$  στον οποίο η εμφύτευση είναι συνεχής.

Λόγω δυσκολίας έχουμε ότι  $W' \leq V'$ .

Έστω  $A \in \mathcal{L}(V, V')$  και  $C \in (W, W')$  δοσμένοι τελεστές.

Υποθέτουμε ότι  $D(B) \leq V$  και  $B: D(B) \rightarrow V'$  είναι γραμμικός.

Αν  $u_0 \in V$ ,  $u_1 \in W$  και  $f \in C((0, \infty), W')$  γνωστά, θεωρούμε το πρόβλημα εύρεσης μιας λύσης:

$$u \in C([0, \infty), V) \cap C^1((0, \infty), V) \cap C^1([0, \infty), W) \cap C^2((0, \infty), W),$$

τέτοιας ώστε  $u(0) = u_0$  και  $u'(0) = u_1$  και επιπλέον

$$Cu''(t) + Bu'(t) + Au(t) = f(t), \quad (4.6)$$

για όλα τα  $t$  θετικά.

Παρατηρούμε ότι για κάθε λύση της ανωτέρω εξίσωσης, ισχύει ότι  $u'(t) \in D(B)$  και  $[Bu'(t) + Au(t)] \in W'$ , για όλα τα  $t$  θετικά.

Για να λύσουμε την ανωτέρω εξίσωση εξέλιξης δεύτερης τάξης, θα την υποβιβάσουμε σε πρώτης τάξης σε ένα χώρο Hilbert (χώρο γινόμενο). Η ιδέα είναι να γράψουμε τη (4.6) στη μορφή:

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix}' + \begin{pmatrix} 0 & -A \\ A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

Ορίζουμε ως  $V_m = V \times W$ , τον χώρο γινόμενο των χώρων Hilbert  $V$  και  $W$ , με εσωτερικό γινόμενο που δίνεται από τον τύπο:

$$([x_1, x_2], [y_1, y_2])_{V_m} = (x_1, y_1)_V + (x_2, y_2)_W, \quad [x_1, x_2], [y_1, y_2] \in V \times W$$

Οπότε έχουμε  $V_m' = V' \times W'$ , και ορίζουμε  $M \in \mathcal{L}(V_m, V_m')$  ως:

$$M([x_1, x_2]) = [Ax_1, Cx_2], \quad [x_1, x_2] \in V_m$$

Επίσης, τον χώρο  $D = \{ [x_1, x_2] \in V \times D(B) : Ax_1 + Bx_2 \in W' \}$  και τον τελεστή  $L \in \mathcal{L}(D, V_m')$  ως:

$$L([x_1, x_2]) = [-Ax_2, Ax_1 + Bx_2], \quad [x_1, x_2] \in D$$

Αν  $u(\cdot)$  είναι λύση της (4.6) τότε η συνάρτηση που ορίζεται ως  $w(t) = [u(t), u'(t)]$ ,  $t \geq 0$  ικανοποιεί τα ακόλουθα:

$$w \in C([0, \infty), V_m) \cap C^1((0, \infty), V_m), \quad w(0) = [u_0, u_1] \in V_m \text{ και}$$

$$Mw'(t) + Lw(t) = [0, f(t)], \quad t > 0.$$

Αυτή λοιπόν είναι η μορφή που έχουμε στην προηγούμενη ενότητα και χρειαζόμαστε να βρούμε τις συνθήκες για τα δεδομένα μας στην εξίσωση (4.6), έτσι ώστε τα θεωρήματα 6 και 7 να είναι εφαρμόσιμα.

Αυτά μας οδηγούν στο ακόλουθο θεώρημα:

### **Θεώρημα 10**

Έστω  $V, W$  χώροι Hilbert, με τον  $V$  πυκνό και συνεχώς ενσφυνωμένο στον  $W$ . Θεωρούμε  $A \in \mathcal{L}(V, V')$  και  $C \in \mathcal{L}(W, W')$  είναι οι απεικονίσεις Riesz του  $V$  και του  $W$  αντίστοιχα.

Έστω  $B$  γραμμικός τελεστής, όπου  $B: D(B) \hookrightarrow V \rightarrow V'$

Θεωρούμε ότι ο  $B$  είναι μονότονος και ότι η απεικόνιση

$A+B+C: D(B) \rightarrow V'$  είναι επί. Τότε, για κάθε  $f \in C^1([0, \infty), W')$ ,

$u_0 \in V$  και  $u_1 \in D(B)$ , με  $Au_0 + Bu_1 \in W'$ , υπάρχει μία και μοναδική λύση  $u(t)$  της εξίσωσης  $Cu''(t) + Bu'(t) + Au(t) = f(t)$ ,  $t \geq 0$ , με αρχικές συνθήκες  $u(0)=u_0$  και  $u'(0)=u_1$ .

### **Απόδειξη**

Επειδή οι τελεστές  $A$  και  $C$  είναι οι απεικονίσεις Riesz των αντίστοιχων χώρων τους, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} M([x_1, x_2]) ([y_1, y_2]) &= Ax_1(y_1) + Cx_2(y_2) \\ &= (x_1, y_1)_V + (x_2, y_2)_W \\ &= ([x_1, x_2], [y_1, y_2])_{V_m}, [x_1, x_2], [y_1, y_2] \in V_m \end{aligned}$$

Άρα ο τελεστής  $M$  είναι η απεικόνιση Riesz του χώρου γινόμενο  $V_m$ .

Ακόμα έχουμε για  $[x_1, x_2] \in D$ :

$$L([x_1, x_2]) ([y_1, y_2]) = -Ax_2(y_1) + (Ax_1 + Bx_2)(y_2), [y_1, y_2] \in V_m$$

Συνεπώς:

$$L([x_1, x_2]) ([x_1, x_2]) = -\overline{Ax_1(x_2)} + Ax_1(x_2) + Bx_2(x_2)$$

αφού ο τελεστής  $A$  είναι συμμετρικός.

Από αυτό έπεται ότι:

$$\operatorname{Re} L([x_1, x_2]) ([x_1, x_2]) = \operatorname{Re} Bx_2(x_2), [x_1, x_2] \in D,$$

Άρα αν ο  $B$  είναι μονότονος, έπεται ότι και ο  $L$  είναι μονότονος.

Τελικά αν έχουμε δυο συναρτησιακά  $f_1$  και  $f_2$  που ανήκουν στους χώρους  $V'$  και  $W'$  αντίστοιχα, τότε μπορούμε να βρούμε ένα  $x_2 \in D(B)$  τέτοιο ώστε:

$$(A + B + C)x_2 = f_2 - f_1.$$

Θέτοντας  $x_1 = x_2 + A^{-1}f_1 \in V$ , έχουμε ένα ζευγάρι  $[x_1, x_2] \in D$  για το οποίο  $(M + L)[x_1, x_2] = [f_1, f_2]$ .

Παρατηρούμε ότι  $Ax_1 + Bx_2 = f_2 - Cx_2 \in W'$  όπως απαιτείται.

Οπότε η απεικόνιση  $(M + L)$  από τον  $D$  στον  $V'_m$  είναι επί.

Συνεπώς το θεώρημα 10 αποδεικνύει την ύπαρξη λύσης  $w(t) = [u(t), v(t)]$  της  $Mw'(t) + Lw(t) = [0, f(t)]$ ,  $t > 0$ .

Αφού ο τελεστής  $A$  είναι ισομορφισμός, ο οποίος διατηρεί τη νόρμα, έχουμε ότι  $v(t) = u'(t)$  το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη.

Μια ειδική περίπτωση του θεωρήματος που συναντάται συχνά στις εφαρμογές, έχουμε όταν  $D(B) = V$  και  $B = \mathbf{B} \in \mathcal{L}(V, V')$ . Τότε χρειάζεται να εξακριβώσουμε ότι ο  $\mathbf{B}$  είναι μονότονος, το οποίο συνεπάγεται ότι ο  $(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C})$  είναι  $V$ -πιεστικός και άρα και επί. Σε αυτήν την περίπτωση μπορούμε να ορίσουμε  $\mathcal{L} \in \mathcal{L}(V_\ell, V'_\ell)$  και  $V_\ell = V \times V$ , με

$$\mathcal{L}([x_1, x_2])([y_1, y_2]) = -Ax_2(y_1) + (Ax_1 + Bx_2)(y_2),$$

με  $[x_1, x_2], [y_1, y_2] \in V_\ell$

Άρα το θεώρημα 7 εφαρμόζεται αρκεί να δείξουμε ότι  $\mathcal{L}(\cdot)(\cdot)$  είναι  $V_\ell$ -ελλειπτικός. Δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι ο τελεστής  $(\lambda \mathbf{M} + \mathcal{L})(\cdot)(\cdot)$  είναι  $V_\ell$ -ελλειπτικός, για κάποιο  $\lambda > 0$ , το οποίο μας οδηγεί στο επόμενο θεώρημα.

### **Θεώρημα 11**

Έστω  $A$  και  $C$  οι απεικονίσεις Riesz των χώρων Hilbert  $V, W$  αντίστοιχα, όπου  $V$  πυκνός και συνεχώς ενσφυνωμένος στον  $W$ . Έστω  $B \in \mathcal{L}(V, V')$ . Θεωρούμε  $(B + \lambda \cdot C)$  είναι  $V$ -ελλειπτικός, για κάποιο  $\lambda > 0$ . Τότε για κάθε Hölder-συνεχή  $f: [0, \infty) \rightarrow W'$ , με  $u_0 \in V$  και  $u_1 \in W$ , υπάρχει μοναδική λύση  $u(t)$  της εξίσωσης:

$$Cu''(t) + Bu'(t) + Au(t) = f(t),$$

για  $t \geq 0$ , με αρχικές συνθήκες  $u(0) = u_0$  και  $u'(0) = u_1$ .

**Ορισμός**. Ο γραμμικός τελεστής  $L: D \rightarrow V'_m$  με  $D \leq V_m$  καλείται μονότονος (μη αρνητικός), εάν  $\operatorname{Re}Lx(x) \geq 0$ ,  $x \in D$  και αντίστοιχα καλείται αυστηρά μονότονος (θετικός), εάν  $\operatorname{Re}Lx(x) > 0$ ,  $x \in D$ ,  $x \neq 0$ .

Το θεώρημα 11 εφαρμόζεται στην εξίσωση εξέλιξης δεύτερης τάξης, η οποία είναι παραβολική, δηλαδή σε αυτές για τις οποίες έχουμε λύσεις για πιο γενικά δεδομένα  $u_0, u_1, f(\cdot)$  και γι' αυτές που έχουμε πιο στρωτή λύση για  $t > 0$ .

Τέτοια προβλήματα προκύπτουν όταν η ενέργεια διαχέεται έντονα, για τα οποία θα δώσουμε παράδειγμα παρακάτω.

Την περίπτωση στην οποία η ενέργεια διατηρείται, περιγράφεται στο επόμενο αποτέλεσμα.

### **Θεώρημα 12**

Επιπρόσθετα στην υπόθεση του θεωρήματος 10, θεωρούμε ότι  $\operatorname{Re} Bx(x) = 0$  για όλα τα  $x \in D(B)$  καθώς και οι δύο τελεστές  $A + B + C$  και  $A - B + C$  είναι επί από το  $D(B)$  στο  $V'$ . Τότε για κάθε  $f \in C^1(\mathbb{R}, W')$  και  $u_0 \in V, u_1 \in D(B)$  με  $Au_0 + Bu_1 \in W'$ , τότε υπάρχει μια μοναδική λύση της (2.1) στον  $\mathbb{R}$  με αρχικές συνθήκες  $u(0) = u_0$  και  $u'(0) = u_1$ .

Θα πρέπει να περιγράψουμε πως τα θεωρήματα 10 και 12 εφαρμόζονται σε μια αφηρημένη κυματική εξίσωση. Παρακάτω θα δοθούν παραδείγματα.

Υποθέτουμε ότι μας δίνονται χώροι Hilbert  $V \leq H$  και  $B$  και μια γραμμική απεικόνιση «επί»  $\gamma: V \rightarrow B$  με πυρήνα  $V_0$  τέτοιο ώστε οι παράγοντες του  $\gamma$  να είναι σε ένα ισομορφισμό  $V/V_0$  του  $B$  και η εμφύτευση:

$V \hookrightarrow H$  να είναι συνεχής, με  $V_0$  πυκνό στον  $H$  και η  $H$  προσδιορίζεται με τον δυικό της χώρο, τον  $H'$ , μέσω της απεικόνισης Riesz.

Ως εκ τούτου, αποκτούμε συνεχείς εμφυτεύσεις  $V_0 \hookrightarrow H \hookrightarrow V_0'$  και  $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$ .

Θεωρούμε:  $V \times V \rightarrow \mathcal{B}$  και

$\alpha_2: B \times B \rightarrow \mathcal{B}$  συνεχείς, συμμετρικές, ημιγραμμικές μορφές και ορίζουμε:

$\alpha: V \times V \rightarrow \mathcal{B}$  ως:

$$\alpha(u, v) = \alpha_1(u, v) + \alpha_2(\gamma(u), \gamma(v)), \text{ με } u, v \in V \quad (4.7)$$

Θεωρούμε  $a(\cdot, \cdot)$  είναι  $V$ -ελλειπτικός. Τότε το  $a(\cdot, \cdot)$  είναι εσωτερικό γινόμενο στον  $V$ , το οποίο μας δίνει μια ισοδύναμη νόρμα στον  $V$ . Εφεξής θεωρούμε το  $V$  σαν αυτό το εσωτερικό γινόμενο.

Παράδειγμα:  $(u, v)_V \equiv a(u, v)$ , για  $u, v \in V$ .

Έτσι ορίζω:

$$A: V \rightarrow V_0' \text{ ως}$$

$$Au(v) = \alpha_1(u, v) \text{ με } u \in V \text{ και } v \in V_0 \text{ και } D_0 = \{ u \in V : Au \in H \}$$

Τότε έχουμε τον αφηρημένο φραγμένο τελεστή  $\partial_1 \in L(D_0, B')$  για το οποίο:

$$\alpha_1(u, v) - (Au, v)_H = \partial_1 u(v), \quad v \in V, \quad u \in D_0$$

Ορίζουμε ακόμα  $D = \{ u \in V : \mathcal{A}u \in \mathcal{H} \}$ , όπου ο  $\mathcal{A}$  είναι απεικόνιση Riesz του  $V$ , δοσμένο από:  $\mathcal{A}u(v) = a(u, v)$  με  $u, v \in V$  και  $\mathcal{A}_2\varphi(\psi) = \alpha_2(\varphi, \psi)$  με  $\varphi, \psi \in B$ .

Τότε, ισχύει ότι  $u \in D$ , αν και μόνο αν,  $u \in D_0$  και  $\partial_1 u + \mathcal{A}_2(\gamma u) = 0$ .

Θεωρούμε  $(\cdot, \cdot)_W$  ένα εσωτερικό γινόμενο στον  $H$ , του οποίου η νόρμα είναι ισοδύναμη αυτής του  $(\cdot, \cdot)_H$  εσωτερικού γινομένου.

Θεωρούμε ακόμα ότι ο  $W$  είναι ο χώρος Hilbert που αποτελείται από τον  $H$  με εσωτερικό γινόμενο  $(\cdot, \cdot)_W$ .

Τότε η απεικόνιση Riesz  $C$  του  $W$  ικανοποιεί ότι  $C \in \mathcal{L}(H)$  (και  $C^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ ).

Υποθέτοντας πως μας έχει δοθεί ακόμα ένας τελεστής  $B \in \mathcal{L}(V, H)$  που είναι μονότονος (αφού  $H \leq V'$ ).

### **Θεώρημα 13**

Υποθέτουμε ότι μας δίνονται οι εξής χώροι Hilbert  $V, H, B, V_0, W$  και οι γραμμικοί τελεστές  $\gamma, \partial_1, \mathcal{A}_2, A, \mathcal{A}, B$  και  $C$  όπως τους έχουμε αναφέρει μέχρι τώρα. Τότε για κάθε συνάρτηση  $f \in C^1([0, \infty), H)$ ,  $u_0 \in D$  και  $u_1 \in V$ , υπάρχει μία και μοναδική λύση  $u(\cdot)$  της (2.1) η οποία ικανοποιεί:



$$\begin{aligned}
Cu''(t) + Bu'(t) + Au(t) &= f(t), t \geq 0 \\
u(t) \in V, \partial_1 u(t) + \mathcal{A}_2 \gamma(u(t)) &= 0, t \geq 0 \\
u(0) &= u_0, u'(0) = u_1
\end{aligned} \tag{4.8}$$

### Απόδειξη

Εφόσον γνωρίζουμε ότι  $\mathcal{A} + B + C \in \mathcal{L}(V, V')$  είναι  $V$ -ελλειπτικός, είναι και «επί», συνεπώς το θεώρημα 10 (με  $B = \mathcal{B}$ ) επιβεβαιώνει την ύπαρξη μιας μοναδικής λύσης. Επιπλέον, εφόσον ο καθένας από τους όρους  $Cu''(t)$ ,  $Bu'(t)$  και  $f(t)$  της ισότητας ανήκουν στην  $H$ , έπεται ότι  $Au(t) \in H$  και  $u(t) \in D$ . Αυτό μας δίνει τη δεύτερη εξίσωση της (4.8).

Παρακάτω θα δώσουμε μερικά παραδείγματα στα οποία η πρώτη εξίσωση της (4.8) συνεπάγεται μια κυματική εξίσωση, πιθανότατα με απόσβεση, ενώ η δεύτερη εξίσωση της (4.8) συνοριακές συνθήκες.

### Παράδειγμα

Έστω  $G$  ένα ανοιχτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^n$  και θεωρώ  $H = L^2(G)$ . Έστω ακόμα  $\rho \in L^\infty(G)$ , η οποία ικανοποιεί την  $\rho(x) \geq c > 0$  για  $x \in G$  και ορίζουμε:  $(u, v)_W = \int_G \rho(x) u(x) \overline{v(x)} dx$ ,  $u, v \in H$ .

Τότε το  $C$  θα είναι πολλαπλασιασμός με το  $\rho(\cdot)$ . Υποθέτουμε επιπλέον ότι το  $\partial G$  είναι  $C^1$ -πολλαπλό και το  $\Gamma$  κλειστό υποσύνολο του  $\partial G$ .

Ορίζουμε  $V = \{v \in H^1(G): \gamma_0(v)(s) = 0, s \in \Gamma\}$ ,  $\gamma = \gamma_0|_V$ ,  $V_0 = H_0^1(G)$  και  $B$  είναι το φάσμα των  $\gamma$ .

Να σημειώσουμε στο σημείο αυτό ότι  $B \hookrightarrow L^2(\partial G \sim \Gamma) \hookrightarrow B'$ .

Τώρα ορίζουμε:

$$a_1(u, v) = \int_G \nabla u \cdot \nabla \bar{v} dx, u, v \in V \text{ και από εδώ συνεπάγεται ότι:}$$

$A = -\Delta_n$  και ότι το  $\partial_1$  είναι η κανονική παράγωγος

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu \text{ πάνω στο } \partial G.$$

Θεωρούμε ότι  $\alpha \in L^\infty(\partial G)$  που ικανοποιεί την ανισότητα  $\alpha(s) \geq 0$ ,  $s \in \partial G$

Και ορίζουμε  $\alpha_2(\varphi, \psi) = \int_{\partial G \sim \Gamma} \alpha(s) \varphi(s) \overline{\psi(s)} ds$ , με  $\varphi, \psi \in L^2(G)$ .

Τότε το  $A_2$  είναι πολλαπλάσιο του  $\alpha(\cdot)$ .

Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι για κάθε  $t \in [0, T]$  μας δίνεται μια  $F(\cdot, t) \in L^2(G)$ .

Η μερική παράγωγος της  $F$  ως προς  $t$  είναι συνεχής για σχεδόν κάθε  $x \in G$ .

Επιπλέον ισχύει ότι:

$$|\partial_t F(x, t)| \leq g(x), \text{ για κάποιο } g \in L^2(G).$$

Από αυτό επάγεται ότι η απεικόνιση  $t \mapsto F(\cdot, t) \equiv f(t)$  ανήκει στο  $C^1([0, T], L^2(G))$ .

Τελικά θεωρούμε ότι  $U_0(\cdot) \in D$  καθώς και  $U_1(\cdot) \in V$  όπως θα δούμε και παρακάτω. Έτσι στη συνέχεια εάν το  $u(\cdot)$  έχει τη λύση του θεωρήματος 13, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια συνάρτηση  $U \in L^2(G \times [0, T])$  τέτοιο ώστε  $U(\cdot, t) = u(t)$  στο  $L^2(G)$ , για κάθε  $t \in [0, T]$  και αυτή η συγκεκριμένη συνάρτηση ικανοποιεί τη μερική διαφορική εξίσωση:

$$\rho(x) \partial_t^2 U(x, t) - \Delta_n U(x, t) = F(x, t) \quad (4.9)$$

με  $x \in G$ ,  $0 \leq t \leq T$

και με αρχικές συνθήκες:

$$U(x, 0) = U_0(x)$$

$$\partial_t U(x, 0) = U_1(x), x \in G$$

Και καταλήγουμε πως  $u(t) \in D$  και οι συνοριακές συνθήκες για  $t \geq 0$  είναι:

$$U(s, t) = 0 \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial U(s, t)}{\partial \nu} + \alpha(s) U(s, t) = 0, s \in \partial G \sim \Gamma$$

Η πρώτη λοιπόν εξίσωση της (4.10) είναι συνοριακή συνθήκη πρώτου τύπου, ενώ η δεύτερη είναι δεύτερου τύπου, όπου  $\alpha(s) = 0$ , και τρίτου τύπου έχουμε για  $\alpha(s) > 0$ . (Σημειώνουμε εδώ ότι το  $U_0$

υποχρεωτικά ικανοποιεί τις συνθήκες (4.10) με  $t=0$  και το  $U_1$  ικανοποιεί την πρώτη συνθήκη του (4.10).

Εάν η  $F(\cdot, t)$  δινόταν όπως πιο πάνω, αλλά για κάθε  $t \in [-T, T]$ , τότε το *θεώρημα 12* θα έδινε μια λύση του τύπου (4.9) στο  $G \times [-T, T]$ .

### Παράδειγμα

Επιπλέον σε όλες τις παραπάνω πληροφορίες, μπορούμε να προσθέσουμε την εξής υπόθεση.

Έστω ότι μας δίνεται μια  $R(\cdot) \in L^\infty(G)$  και ένα διανυσματικό πεδίο

$$\mu(x) = (\mu_1(x), \mu_2(x), \mu_3(x), \dots, \mu_n(x)), x \in G$$

με κάθε  $\mu_j \in C^1(\bar{G})$ .

Ορίζουμε  $B \in \mathcal{L}(V, H)$  (όπου  $V \leq H^1(G)$  και  $H = L^2(G)$ ) τέτοιο ώστε:

$$Bu(v) = \int_G \left( R(x)u(x) + \frac{\partial u(x)}{\partial \mu} \right) \overline{v(x)} dx \quad (4.11)$$

Η κατευθυνόμενη παράγωγος που ενδείκνυται εδώ, μας δίνεται ως:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \mu} \equiv \sum_{j=1}^n d_j u(x) \mu_j(x).$$

Από το *θεώρημα Απόκλισης* συμπεραίνουμε ότι:

$$2Re \int_G \frac{\partial u(x)}{\partial \mu} \overline{u(x)} dx + \int_G \left( \sum_{j=1}^n d_j \mu_j(x) \right) |u(x)|^2 dx = \int_{\partial G} (\mu \cdot \nu) |u(x)|^2 ds$$

Όπου  $\mu \cdot \nu = \sum_{j=1}^n \mu_j(s) \nu_j(s)$  είναι το προβλεπόμενο ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο.

Το  $B$  λοιπόν που ορίσαμε πιο πάνω, είναι μονότονο εάν:

$$-\frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^n d_j \mu_j(x) \right) + Re\{R(x)\} \geq 0, x \in G$$

$$\mu(s) \cdot \nu(s) \geq 0, s \in \partial G \sim \Gamma$$

Η πρώτη εξίσωση αντιπροσωπεύει την τριβή ή τη διάχυση της ενέργειας που διανέμεται σε όλο το  $G$ , ενώ η δεύτερη αντιπροσωπεύει την τριβή πάνω στο σύνορο  $\partial G$ .

Στο σημείο αυτό να παρατηρήσουμε ότι αυτά καθορίζονται από την απόκλιση του  $\mu$  και το φυσικό μέρος του  $\mu$  αντίστοιχα.

Εάν τώρα έχουμε μια  $u(\cdot)$  που είναι λύση της (4.8) και το αντίστοιχο  $U(\cdot)$  προκύπτει όπως πριν, τότε το  $U(\cdot)$  είναι η γενική λύση του προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών(ΠΑΣΤ):

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(x)\partial_t^2 U(x, t) + R(x)\partial_t U(x, t) + \partial_t \frac{\partial U(x, t)}{\partial \mu} - \Delta_n U(x, t) = F(x, t), \quad x \in G, t \geq 0 \\ U(s, t) = 0, \quad s \in \Gamma \quad \text{και} \quad U(x, 0) = U_0(x), \quad \partial_t U(x, 0) = U_1(x) \\ \frac{\partial U(s, t)}{\partial \nu} + \alpha(s)U(s, t) = 0, \quad s \in \partial G \sim \Gamma \end{array} \right.$$

Τώρα θα περιγράψουμε πως το *θεώρημα 11* εφαρμόζεται σε μια τυχαία εξίσωση ιξώδους ελαστικότητας (*viscoelasticity*).

### **Θεώρημα 14**

Υποθέτουμε ότι μας δίνονται οι χώροι Hilbert  $V, H, B, V_0, W$  και οι γραμμικοί τελεστές  $\gamma, \partial_1, A_2, A, \mathcal{A}, \mathcal{B}$  και  $C$  όπως στο *θεώρημα 2.4*

Τότε για κάθε  $f: [0, \infty) \mapsto H$  η οποία είναι Hölder-συνεχής, με  $U_0 \in V$  και  $U_1 \in H$ , υπάρχει μια μοναδική λύση  $u(t)$  της (2.1) με  $B = \mathcal{B} + \varepsilon \mathcal{A}$  και  $\varepsilon > 0$ .

Αυτή η λύση ικανοποιεί τα παρακάτω:

$$\left\{ \begin{array}{l} Cu''(t) + (\mathcal{B} + \varepsilon \mathcal{A})u'(t) + Au(t) = f(t), \quad t > 0 \\ u(t) \in V, \quad t \geq 0, \quad u(0) = u_0 \quad \text{και} \quad u'(0) = u_1 \\ \partial_1(\varepsilon u'(t) + u(t)) + A_2 \gamma(\varepsilon u'(t) + u(t)) = 0, \quad t > 0 \end{array} \right. \quad (4.11)$$

### **Απόδειξη**

Προκύπτει άμεσα από το εξής:

$$Re Bx(x) \geq \varepsilon \mathcal{A}x(x) = \varepsilon \|x\|_V^2, \quad x \in V$$

(διότι το  $B$  είναι μονότονο) και αφού παρατηρώ ότι  $eu'(t) + u(t) \in D$  για  $t > 0$ .

### Παράδειγμα

Διαλέγουμε όλους τους χώρους και τους τελεστές όπως παραπάνω. Υποθέτουμε ότι  $U_0 \in V$ ,  $U_1 \in H$  και  $f(t) = F(t, \cdot)$ ,  $t \geq 0$ , όπου  $F(\cdot, \cdot)$  τότε προκύπτει μια γενικευμένη λύση του προβλήματος αρχικών συνοριακών τιμών (ΠΑΣΤ):

$$\begin{cases} \rho(x) \partial_t^2 U(x, t) - \varepsilon \partial_t \Delta_n U(x, t) - \Delta_n U(x, t) = F(x, t), & x \in G, t > 0 \\ U(s, t) = 0, s \in \Gamma, t \geq 0 & \text{και} \quad U(x, 0) = U_0(x), \quad \partial_t U(x, 0) = U_1(x), x \in G \\ \frac{\partial}{\partial \nu} (\varepsilon \partial_t U(s, t) + U(s, t)) + a(s) (\varepsilon \partial_t U(s, t) + U(s, t)) = 0, & s \in \partial G \sim \Gamma, t > 0 \end{cases}$$

Σε ορισμένες εφαρμογές ο συντελεστής  $\varepsilon > 0$  αντιστοιχεί στο ιξώδες του μοντέλου και διακρίνει το προηγούμενο παραβολικό πρόβλημα από το αντίστοιχο υπερβολικό παράδειγμα που παρατέθηκε πιο πάνω προβλήματα με αποτελέσματα ιξώδους με πολύ μεγάλη απόσβεση στις λύσεις.

Όσον αφορά την απαγωγή σε κατώτερη τάξη όπως στο μπορεί εύκολα να προστεθεί στο ανωτέρω σύστημα και να προκύψουν και άλλοι τύποι συνοριακών συνθηκών.



## 8. Περιγραφή και μελέτη της εξίσωσης βαθμοελαστικότητας

Το πρόβλημα με το οποίο θα ασχοληθούμε παρακάτω, περιγράφει την εγκάρσια ταλάντωση μιάς πεπερασμένης χορδής με δεδομένη θέση  $W(x, 0)$  και ταχύτητα  $W_t(x, 0)$  στη χρονική στιγμή  $t = 0$ , όταν η εξασκούμενη εξωτερική δύναμη στο σημείο  $x$ , τη χρονική στιγμή  $t$  είναι  $f(x, t)$ . Ο μη ομογενής όρος αυτός  $f(x, t)$ , αναφέρεται ως **όρος εξαναγκασμού**.

Έχουμε τη γενική εξίσωση:

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu)(1 - \xi_1^2 \Delta) \nabla(\nabla \cdot \underline{u}) - \mu(1 - \xi_2^2 \Delta) \nabla \times (\nabla \times \underline{u}) \\ = -f + p \frac{\partial^2}{\partial t^2} (u - h_1^2 \nabla(\nabla \cdot \underline{u}) + h_2^2 \nabla \times (\nabla \times \underline{u})) \end{aligned}$$

όπου έχουμε τους όρους:

$\nabla(\nabla \cdot \underline{u})$ : διαμήκη κύματα

$\nabla \times (\nabla \times \underline{u})$ : εγκάρσια κύματα

$\lambda, \mu$ : σταθερές *Lame*

Σε περίπτωση που δεν έχουμε μικροδομή, απλοποιούνται οι επιπλέον όροι  $\xi_1 = \xi_2 = 0 = h_1 = h_2$  και προκύπτει η κλασική εξίσωση ελαστικότητας

$$(\lambda + 2\mu) \nabla(\nabla \cdot \underline{u}) - \mu \nabla \times (\nabla \times \underline{u}) = -f + p \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2}$$

$$\stackrel{(**)}{\implies} (\lambda + 2\mu) \nabla(\nabla \cdot \underline{u}) - \mu [\nabla(\nabla \cdot \underline{u}) - \Delta \underline{u}] = -f + p \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2}$$

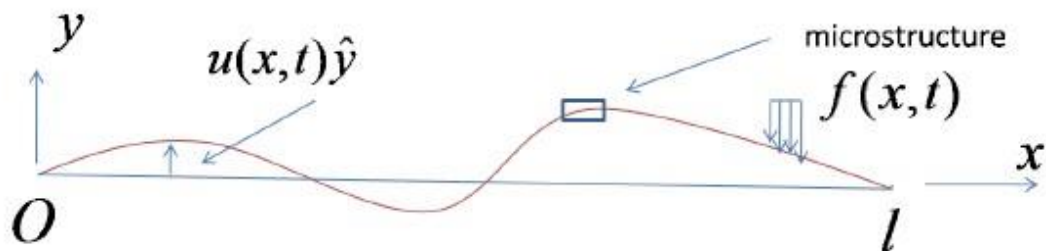
$$\Rightarrow \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \underline{u}) = -f + \rho \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \mu \Delta u = -f + \rho \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2}$$

διότι  $(\lambda + \mu) = 0$ , για ρευστό.

(\*\*):  $\nabla \times (\nabla \times u) = \nabla(\nabla \cdot u) - \Delta u$  (ισχύει γενικά)

### Περίπτωση 1<sup>ης</sup> διάστασης



Εγκάρσια ταλάντωση χορδής σε άξονα, με πεπερασμένο μήκος και πακτωμένες άκρες.

Η διαφορική εξίσωση εδώ γίνεται:

$$\mu \left( 1 - \xi^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = -f(x,t) + \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( 1 - h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(x,t)$$

Παρακάτω θα περιγράψουμε τις αρχικές και συνοριακές συνθήκες που ικανοποιούνται στην περίπτωση αυτή.



(Σ.Σ)  $u(0, t) = u(l, t) = 0$  -Συνθήκες Dirichlet-

$$u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0$$

$$(A.Σ) u(x, 0) = \tilde{f}(x)$$

$$u_t(x, 0) = \tilde{g}(x)$$

Στη συνέχεια η διαφορική εξίσωση γίνεται:

$$f(x, t) = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( 1 - h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(x, t) - \mu \left( 1 - \xi^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \Rightarrow$$

$$f(x, t) = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( 1 - h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(x, t) + \mu \left( \xi^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 1 \right) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \Rightarrow$$

$$f(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( 1 - h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(x, t) + \frac{\mu}{\rho} \left( \xi^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 1 \right) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \Rightarrow$$

$$f(x, t) = \left( 1 - h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) + \frac{\mu}{\rho} \left( \xi^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 1 \right) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$$

Αυτή είναι η μορφή:  $\mathbf{C}u''(t) + \mathbf{A}u(t) = \mathbf{0}$  που θέλαμε να φέρουμε τη μ.δ.ε μας.

όπου:

$$\mathbf{C} = \left( 1 - h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{\rho} \left( \xi^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 1 \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Ακόμα, μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα να προσδιορίσουμε τους χώρους στους οποίους δρουν οι τελεστές αυτοί.

Έτσι έχουμε αρχικά:

$$u(t) := u(\cdot, t) \in C^2((0, \infty), V) \cap C([0, \infty), H)$$

$$f(t) := f(\cdot, t) \in C((0, \infty), V)$$

Και επιπλέον:

$$C = \left(1 - h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) : D(C) \subset H \rightarrow H$$

$$A = \frac{\mu}{\rho} \left(\xi^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 1\right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} : D(A) \subset H \rightarrow H$$

όπου  $V, H$  είναι κατάλληλοι χώροι *Sobolev* που ελέγχουν την συμπεριφορά του  $x$  και ενσωματώνουν στις εξισώσεις, κάποιες από τις συνοριακές συνθήκες.

Στο σημείο αυτό, κάνοντας μια αναδρομή στο προηγούμενο κεφάλαιο που δώσαμε αναλυτικά όλη την απαιτούμενη θεωρία του *Showalter* για τη μελέτη και λύση του προβλήματός μας, καταλήγουμε στα εξής συμπεράσματα μέσω των θεωρημάτων και των ορισμών αντίστοιχα.

Στο γενικότερο πλαίσιο του προβλήματος, θεωρούμε τους χώρους *Hilbert*  $V, W$  με  $V$  να είναι ένα πυκνό υποσύνολο του  $W$  και η εμφύτευση είναι συνεχής. Έτσι έχουμε ότι  $W' \leq V'$ .

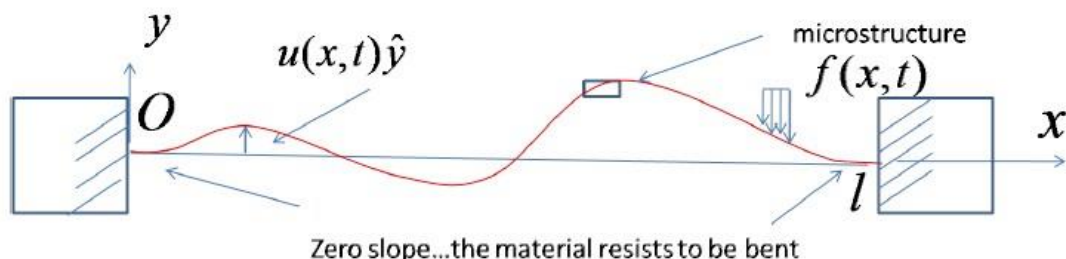
Θεωρούμε ότι  $A \in \mathcal{L}(V, V')$  και  $C \in \mathcal{L}(W, W')$ . Εάν  $u_0 \in V, u_1 \in W$  και  $f \in C((0, \infty), W')$ , θεωρούμε το πρόβλημα εύρεσης της:

$$u \in C([0, \infty), V) \cap C^1((0, \infty), V) \cap C^1([0, \infty), W) \cap C^2((0, \infty), W)$$

τέτοιο ώστε  $u(0) = u_0, u'(0) = u_1$  και

$$C u''(t) + A u(t) = f(t) , \quad t > 0$$

Προκύπτει λοιπόν ότι  $Au(t) \in W'$ , για όλα τα  $t > 0$ .



Έχοντας δώσει στην αρχή τις συνοριακές συνθήκες, προκύπτει πως ο χώρος  $V$  καλείται να είναι ο  $H_0^2(0, l)$  έτσι ώστε να ανταποκρίνεται σε αυτές και να μπορεί να τις ενσωματώσει μέσα στο πρόβλημα.

δεδομένου ότι η παράμετρος  $\xi \neq 0$

1. Για  $h \neq 0$ . θεωρούμε  $V := H_0^2(0, l)$  και  $W := H_0^1(0, l)$   
(είναι προφανές ότι το  $V$  είναι πυκνό και συνεχώς ενσφυνωμένο στο  $W$  και οι δυϊκοί τους χώροι υπακούουν στο εξής  $H^{-1}(0, l) \leq H^{-2}(0, l)$  .

Τότε για κάθε  $f \in C^1([0, \infty), H^{-1}(0, l))$  ,  $u_1 \in H_0^1(0, l)$  και  $u_0 \in H_0^2(0, l)$  με  $Au_0 \in H^{-1}(0, l) *$  , υπάρχει μία και μοναδική λύση  $u \in C([0, \infty), H_0^2(0, l)) \cap C^1((0, \infty), H_0^2(0, l)) \cap C^1([0, \infty), H_0^1(0, l)) \cap C^2((0, \infty), H_0^1(0, l))$  τέτοιο ώστε  $u(0) = u_0, u'(0) = u_1$  και  $C u''(t) + A u(t) = f(t)$  ,  $t > 0$   
(προκύπτει άμεσα πως  $Au(t) \in H^{-1}(0, l)$  για όλα τα  $t > 0$  , δηλαδή  $(\cdot, t) \in H^3(0, l) \cap H_0^2(0, l)$  .

2. Για  $h = 0$ . θεωρούμε  $W := L^2(0, l)$  αντί για  $H_0^1(0, l)$  .

\* : αυτό σημαίνει ότι  $(\xi^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 1) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_0 \in H^{-1}(0, l)$  ή ότι  $u_0 \in H^3(0, l) \cap H_0^2(0, l)$ .

## Απόδειξη

Γράφοντας την εξίσωση στην παρακάτω μορφή

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix}' + \begin{pmatrix} 0 & -A \\ A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix} \quad (a)$$

Ορίζουμε ως  $V_m = V \times W$ , τον χώρο γινόμενο των χώρων Hilbert  $V$  και  $W$ , με εσωτερικό γινόμενο που δίνεται από τον τύπο:

$$([x_1, x_2], [y_1, y_2])_{V_m} = (x_1, y_1)_V + (x_2, y_2)_W, \quad [x_1, x_2], [y_1, y_2] \in V \times W$$

Εδώ δηλαδή έχουμε:

$$(x_1, y_1)_V = \frac{\mu}{\rho} \int_0^l (\partial x_1 \partial \bar{y}_1 + \xi^2 \partial^2 x_1 \partial^2 \bar{y}_1),$$
$$(x_2, y_2)_W = \int_0^l (x_2, \bar{y}_2 + h^2 \partial^2 x_2 \partial \bar{y}_2)$$

Τότε,  $V'_m = V' \times W'$ , και ορίζουμε  $M \in \mathcal{L}(V_m, V'_m)$  ως

$$M([x_1, x_2]) = [Ax_1, Cx_2], \quad [x_1, x_2] \in V_m$$

Επίσης τον χώρο  $D = \{ [x_1, x_2] \in V \times W : Ax_1 \in W' \}$  και τον τελεστή  $L \in \mathcal{L}(D, V'_m)$  ως:

$$L([x_1, x_2]) = [-Ax_2, Ax_1], \quad [x_1, x_2] \in D$$

Τότε το πρόβλημα (α) είναι ισοδύναμο με το

$$Mw'(t) + Lw(t) = [0, f(t)], \quad t > 0$$

$$\text{όπου } w(t) = [u(t), u'(t)], \quad t \geq 0.$$

Ακόμα, λόγω του ότι ο  $L$  είναι μονότονος, προκύπτει ότι:

$$\Re(L([x_1, x_2])([x_1, x_2])) = \Re(\overline{-Ax_1(x_2)} + Ax_1(x_2)) = 0.$$

$A + C$ : είναι «επί»

Τότε, εάν  $f_1 \in V'$  και  $f_2 \in W'$ , υπάρχει  $x_2 \in V$ , τέτοιο ώστε:

$$(A + C)x_2 = f_2 - f_1.$$

Θέτοντας  $x_1 = x_2 + A^{-1}f_2 \in V$ , έχουμε ένα ζευγάρι  $[x_1, x_2] \in D$  για το οποίο  $(M + L)[x_1, x_2] = [f_1, f_2]$ .

Τότε το  $(M + L)$  είναι «επί» στον  $D$  πάνω στον  $V'_m$ .

Να σημειώσουμε εδώ ότι:  $Ax_1 = f_2 - Cx_1 \in W'$ .

Συνεπώς, υπάρχει μία μοναδική λύση  $w(t) = [u(t), v(t)]$ , και εφόσον ο τελεστής  $A$  είναι ένας ισομορφισμός που διατηρεί τη νόρμα, τότε  $v(t) = u'(t)$ .

### **Περίπτωση $\xi = 0$**

Αυτή είναι η περίπτωση της ψευδοπαραβολικής μορφής εξίσωσης ή εξίσωση *Sobolev*, την οποία και αυτή έχουμε περιγράψει αναλυτικά στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Η διαφορική εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$f(x, t) = \left(1 - h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$$

με  $x \in (0, l)$  και  $t > 0$ .

Έτσι οι τελεστές  $A, C$  είναι της ίδιας τάξης ( $C^{-1}A$  είναι φραγμένος), ενώ οι ημιγραμμικές μορφές από τις οποίες προέρχονται είναι φραγμένες από κάτω στον ίδιο χώρο  $V = W = H_0^1(0, l)$  (ο  $C$  είναι  $V$ -ελλειπτικός).

Θεωρώντας τώρα πως  $H = L^2(0, l)$  και εφαρμόζοντας τις παραδοχές της περίπτωσης της ψευδοπαραβολικής εξίσωσης, καταλήγουμε στο παρακάτω συμπέρασμα για την ύπαρξη μιας ασθενούς και μιας ισχυρής λύσης (όπως έχουμε περιγράψει και αναλυτικά στα προηγούμενα κεφάλαια).

Παρακάτω παραθέτουμε εν συντομία το συμπέρασμα.

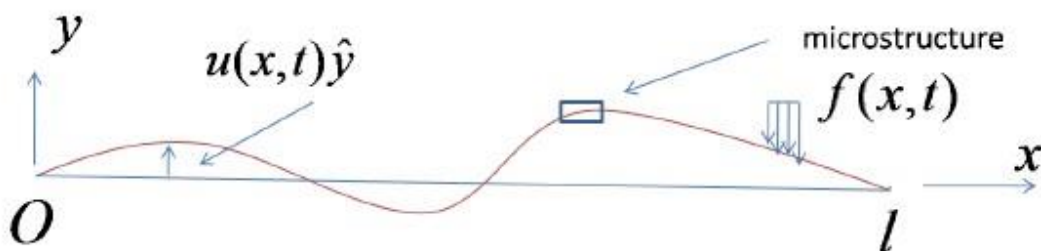
### Θεώρημα

1. Για κάθε ζεύγος  $u_0, u_1 \in V$  και  $f \in C(\mathbb{R}, V')$ , υπάρχει μια μοναδική λύση  $u \in C^2(\mathbb{R}, V)$ , τέτοιο ώστε  $u(0) = u_0$ ,  $u'(0) = u_1$  και (ασθενής λύση)

$$C u''(t) + A u(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

2. Για κάθε ζεύγος  $u_0, u_1 \in H^2(0, l)$  και  $f \in C(\mathbb{R}, H)$ , υπάρχει μια μοναδική λύση  $u \in C^2(\mathbb{R}, H^2(0, l))$ , τέτοιο ώστε  $u(0) = u_0$ ,  $u'(0) = u_1$  και (ισχυρή λύση)

$$C u''(t) + A u(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}$$



Γυρνάμε πάλι πίσω στο πρόβλημά μας, με τις συνθήκες που έχουμε δώσει, καταλήγοντας πως για χώρο  $V$  πρέπει να επιλεγεί ο

$H^2(0, l) \cap H_0^1(0, l)$  για να ικανοποιούνται μέσα σε αυτών οι δεδομένες συνθήκες της υπόθεσης και η απαιτούμενη εκ των προτέρων κανονικότητα της ημιγραμμικής μορφής που σχετίζεται με τον τελεστή  $A$ .

Έχουμε ήδη αναφέρει ότι  $\mathbf{A} + \mathbf{C}$  : είναι «επί»

$$((Cu'' + A)u)(v) = f(v), \forall v \in H_0^1(0, l)$$

$$u \in D := H^3(0, l) \cap V = H^3(0, l) \cap H_0^1(0, l)$$

Έχουμε λοιπόν ότι:

εξ.(β)

$$\begin{aligned} (C(u''))(v) + (A(u))(v) \\ = \int_0^l (u'' \bar{v}) + h^2 \partial u'' \partial \bar{v} - \frac{\mu}{\rho} \int_0^l (\xi^2 \partial^3 u - \partial u) \partial \bar{v} \end{aligned}$$

Δουλεύοντας τώρα με ένα  $v \in V = H^2(0, l) \cap H_0^1(0, l)$ , η σχέση

$$((Cu'' + A)u)(v) = f(v) \text{ γίνεται:}$$

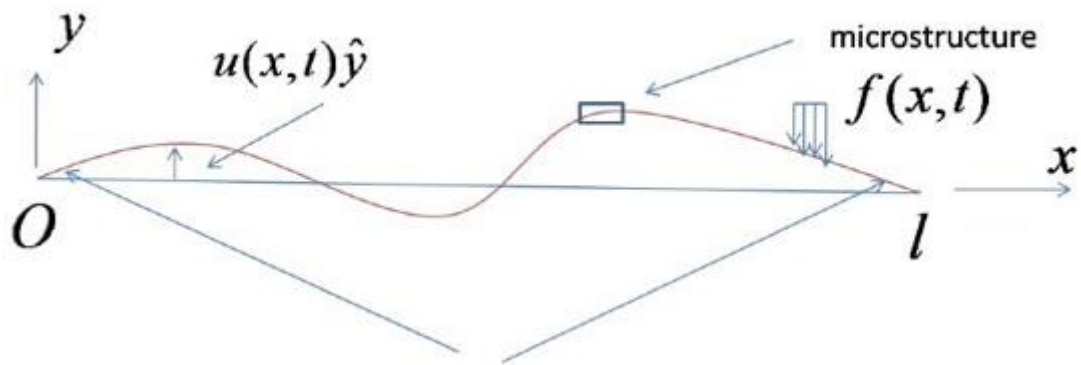
1. (από τον ορισμό της απεικόνισης Riesz στον  $V$ )

$$\int_0^l (u'' \bar{v}) + h^2 \partial u'' \partial \bar{v} + \frac{\mu}{\rho} \int_0^l (\partial u \partial \bar{v} + \xi^2 \partial^2 u \partial^2 \bar{v}) = f(v)$$

2. Ενσωματώνοντας την εξ.(β) κατά μέλη

$$\begin{aligned} \int_0^l (u'' \bar{v}) + h^2 \partial u'' \partial \bar{v} \\ + \frac{\mu}{\rho} \int_0^l (\partial u \partial \bar{v} + \xi^2 \partial^2 u \partial^2 \bar{v}) - \frac{\mu}{\rho} \xi^2 [\partial^2 u \partial \bar{v}]_0^l \\ = f(v) \end{aligned}$$

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε μηδενική καμπυλότητα που είναι ισοδύναμη με την έλλειψη διπλών τάσεων και στα δύο άκρα.



Επιστρέφοντας λοιπόν στον αρχικό μας στόχο, να λύσουμε τη δεδομένη μ.δ.ε, θα εργαστούμε με τον γνωστό τρόπο λύσης μερικών διαφορικών εξισώσεων, αυτό των **χωριζομένων μεταβλητών**.

Όπως και κάποια από τα προαναφερθέντα σημεία, έτσι και αυτόν τον τρόπο επίλυσης, τον έχουμε ήδη αναφέρει και αναλύσει στα προηγούμενα κεφάλαια της εργασίας μας, συνεπώς τώρα θα παραθέσουμε μόνο την εφαρμογή αυτού πάνω στην εξίσωσή μας.

Ξεκινάμε ψάχνοντας μια μη μηδενική λύση της εξίσωσής μας που θα επιδέχεται λύσεις της μορφής:

$$u(x,t) = X(x) T(t) \quad (1)$$

αντικαθιστώ λοιπόν στην εξίσωση την (1) και και  $f = 0$  (εξωτερική μηδενική δύναμη) έχω:

$$\rho(X(x) - h^2 X''(x))T''(t) + \mu(\xi^2 X^{(4)}(x) - X''(x))T(t) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\rho T''(t)}{\mu T(t)} = -\frac{\xi^2 X^{(4)}(x) - X''(x)}{X(x) - h^2 X''(x)} = -\lambda \text{ (σταθερό)}$$

Το φέρουμε λοιπόν στη μορφή  $F(t) = G(x) = -\lambda$ , όπως ακριβώς θέλαμε.

Συνεπώς μας προκύπτουν τώρα δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις οι οποίες είναι:



1.

$$F(t) = -\lambda$$

$$\frac{\rho T''(t)}{\mu T(t)} = -\lambda$$

$$T''(t) + \frac{\mu}{\rho} \lambda T(t) = 0$$

2.

$$G(x) = -\lambda$$

$$-\frac{\xi^2 X^{(4)}(x) - X''(x)}{X(x) - h^2 X''(x)} = -\lambda$$

$$\xi^2 X^{(4)}(x) - (1 - \lambda h^2) X''(x) - \lambda X(x) = 0$$

Από τις λύσεις λοιπόν της Μ.Δ.Ε μας ενδιαφέρουν μόνο αυτές που σέβονται τις δοσμένες από την υπόθεση αρχικές και συνοριακές συνθήκες. Εδώ οι αρχικές μας συνθήκες αφορούν ισχυρή σύνδεση και είναι οι εξής:

$$X(0) = X'(0) = X(l) = X'(l) = 0$$

Συνακόλουθα, εκείνο που μας ενδιαφέρει δεν είναι η γενική λύση της Σ.Δ.Ε που μας προέκυψε, αλλά οι ειδικές λύσεις αυτής που σέβονται τις συνοριακές συνθήκες.

Τώρα, στη φυσική εφαρμογή, η συνάρτηση  $u(x,t)$  παίρνει μόνο πραγματικές τιμές. Το ίδιο λοιπόν πρέπει να ισχύει και για τις  $X(x)$  και  $T(t)$ . Άρα, σε τέτοιες περιπτώσεις η παράμετρος διαχωρισμού αναγκαστικά περιορίζεται στην πραγματική ευθεία. Έτσι θα μπορούσαμε να προχωρήσουμε στην επίλυση της Σ.Δ.Ε με τις Σ.Σ, υποθέτοντας ότι  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Ωστόσο για να καλύψουμε την γενικότερη, από μαθηματικής άποψης, περίπτωση, θα προτιμήσουμε να αφήσουμε το ίδιο το μαθηματικό πρόβλημα να μας οδηγήσει στους τυχόν περιορισμούς που πρέπει να επιβληθούν στις τιμές της παραμέτρου  $\lambda$ .

**Περίπτωση  $\lambda = 0$**

$$T''(t) = 0$$

που έχει ως γενική λύση τις συναρτήσεις:

$$T(t) = c_1 x + c_2$$

με  $c_1, c_2$  τυχαίες μιγαδικές σταθερές.

**Περίπτωση  $\lambda \neq 0$**

$$\xi^2 X^{(4)}(x) - (1 - \lambda h^2) X''(x) - \lambda X(x) = 0$$

Θα έχουμε λύσεις της μορφής:

$$e^{Sx}, \quad \xi^2 S^4 - (1 - \lambda h^2) S^2 - \lambda.$$

Θα πάρουμε τη διακρίνουσα της παρακάτω δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$$\xi^2 (S^2)^2 - (1 - \lambda h^2) S^2 - \lambda = 0$$

$$\xi^2 W^2 - (1 - \lambda h^2) W - \lambda = 0$$

με  $W = S^2$ .

έχουμε

$$W = S^2 = \frac{1 - \lambda h^2 \pm \sqrt{(1 - \lambda h^2)^2 + 4\lambda \xi^2}}{2\xi^2}$$

$$S_{1,2,3,4} = \frac{\pm \sqrt{1 - \lambda h^2 \pm \sqrt{(1 - \lambda h^2)^2 + 4\lambda \xi^2}}}{\sqrt{2}\xi}$$

Έχουμε λοιπόν 4 λύσεις

$$S_1 = \frac{\sqrt{1 - \lambda h^2 + \sqrt{(1 - \lambda h^2)^2 + 4\lambda \xi^2}}}{\sqrt{2}\xi}$$

$$S_2 = \frac{-\sqrt{1 - \lambda h^2 + \sqrt{(1 - \lambda h^2)^2 + 4\lambda \xi^2}}}{\sqrt{2}\xi} = -S_1$$

$$S_3 = i \frac{\sqrt{-(1 - \lambda h^2) + \sqrt{(1 - \lambda h^2)^2 + 4\lambda \xi^2}}}{\sqrt{2}\xi} = ia$$

$$S_4 = -S_3 = -ia = \frac{\sqrt{1 - \lambda h^2 - \sqrt{(1 - \lambda h^2)^2 + 4\lambda \xi^2}}}{\sqrt{2}\xi}$$

Οπότε η γενική λύση είναι παίρνει τη μορφή:

$$X(x) = \tilde{A}e^{S_1 x} + \tilde{B}e^{S_2 x} + \tilde{C}e^{S_3 x} + \tilde{D}e^{S_4 x}$$

$$= \tilde{A}e^{S_1 x} + \tilde{B}e^{-S_1 x} + \tilde{C}e^{S_3 x} + \tilde{D}e^{-S_3 x}$$

$$= \tilde{A}e^{S_1 x} + \tilde{B}e^{S_2 x} + \tilde{C}e^{iax} + \tilde{D}e^{-iax}$$

$$= \tilde{A}e^{s_1x} + \tilde{B}e^{s_2x} + \tilde{C}e^{s_3x} + \tilde{D}e^{s_4x} \implies$$

$$X(x) = \tilde{A} \cosh(\beta x) + \tilde{B} \sinh(\beta x) + \tilde{C} \cos(ax) + \tilde{D} \sin(ax)$$

Αναλύοντας τώρα τις αρχικές μας συνθήκες έχουμε:

1. Για  $X(0) = 0$  :  $A + C = 0$  «επί»
2. Για  $X'(0) = 0$  :  $B\beta + D\alpha = 0$
3. Για  $X(l) = 0$  :  $\tilde{A} \cosh(\beta l) + \tilde{B} \sinh(\beta l) + \tilde{C} \cos(al) + \tilde{D} \sin(al) = 0$
4. Για  $X'(l) = 0$  :  $\tilde{A}\beta \cosh(\beta l) + \tilde{B}\beta \sinh(\beta l) - \tilde{C}\alpha \cos(al) + \tilde{D}\alpha \sin(al) = 0$

Φτιάχνουμε την εξίσωση σε πίνακα και στη συνέχεια βρίσκουμε τις τιμές της ορίζουσας που μας δίνουν τις ιδιοτιμές.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & \alpha \\ \cosh(\beta l) & \sinh(\beta l) & \cos(al) & \sin(al) \\ \beta \sinh(\beta l) & \beta \cosh(\beta l) & -\alpha \sin(al) & \alpha \cos(al) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix}$$

$$[\mathcal{A}] \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A} : \text{αντιστρέψιμος}$$

Και παίρνοντας την εξίσωση  $\det \mathcal{A} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2,3,\dots}$ ,  
για  $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$$

Τότε οι ιδιοσυχνότητες είναι

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\mu}{\rho} \frac{n\pi}{l}}$$

Και τέλος οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις

$$\sin(\sqrt{\lambda_n} x) \cos\left(\sqrt{\frac{\mu}{\rho} \frac{n\pi}{l}} t + \gamma_n\right)$$

Αφού ολοκληρώσαμε την διαδικασία για την κλασσική ελαστικότητα, τώρα θα περιγράψουμε τι συμβαίνει με τη βαθμοελαστικότητα.

Εδώ ο χωρισμός των μεταβλητών μας οδηγεί στην παρακάτω εξίσωση ιδιοτιμών

$$2\sqrt{\lambda_n} - \sqrt{\lambda_n} \cosh(\beta_n l) \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_n} l}{\xi \beta_n}\right) + \frac{1 - \lambda_n h^2}{\xi} \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_n} l}{\xi \beta_n}\right) \sinh(\beta_n l) = 0$$

για  $n \in \mathbb{N}$

με

$$\beta_n = \frac{\sqrt{1 - \lambda_n h^2 + \sqrt{(1 - \lambda_n h^2)^2 + 4\lambda_n \xi^2}}}{\sqrt{2}\xi}$$

και οι ιδιοσυναρτήσεις γίνονται

$$U_n(x, t) = \Phi_n(x) \cos\left(\sqrt{\frac{\mu n\pi}{\rho l}} t + \gamma_n\right)$$

Όπου το χωρικό μέρος είναι

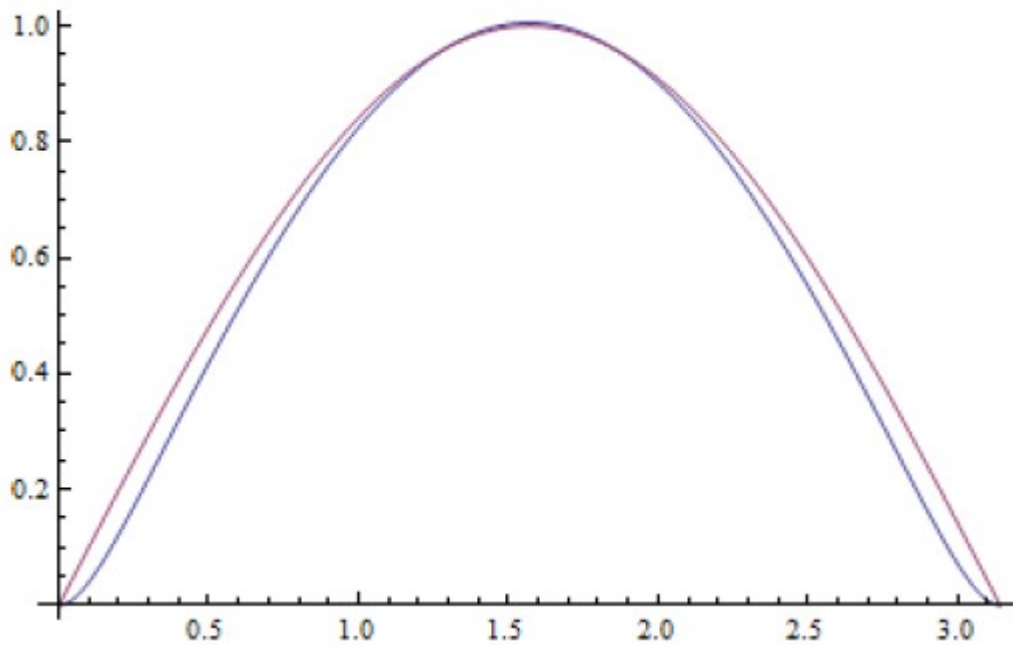
$$\begin{aligned} \Phi_n(x) = & \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\xi\beta_n} x\right) - \frac{\sqrt{\lambda_n}}{\xi\beta_n^2} \sinh(\beta_n x) \\ & + \frac{\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\xi\beta_n} l\right) - \frac{\sqrt{\lambda_n}}{\xi\beta_n^2} \sinh(\beta_n l)}{\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\xi\beta_n} l\right) - \cosh(\beta_n l)} (\cosh(\beta_n x) \\ & - \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\xi\beta_n} l\right)) \end{aligned}$$

για  $n = 1, 2, 3, \dots$

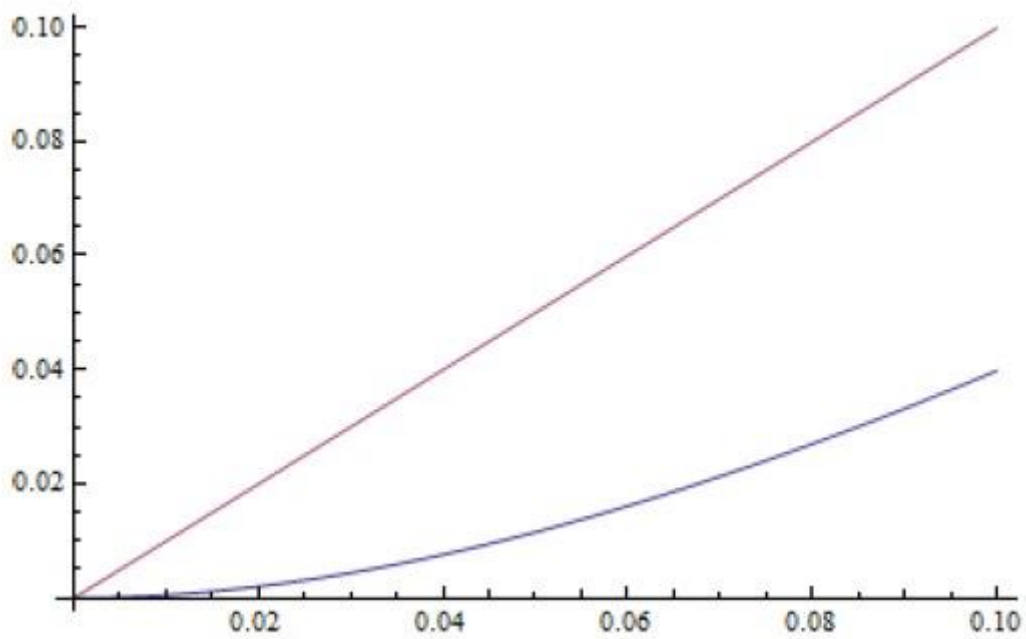
serial no:	$\lambda_n$ for $\xi = 10^{-3}, h = 10^{-2}$	$\lambda_n$ for $\xi = 10^{-2}, h = 10^{-3}$
n=1	1.001175	1.012955
n=2	4.003511	4.053027
n=3	9.003443	9.123833
n=4	15.995039	16.23140
n=5	24.970023	25.384168
n=6	35.917792	36.592985

serial no:	Eigenvalue ( $\lambda_n$ ) for Clas. Elast.	Eigenvalue ( $\lambda_n$ ) for Gradient Elast.
n=1	$1^2 = 1$	1.000027
n=2	$2^2 = 4$	3.998909
n=3	$3^2 = 9$	8.993053
n=4	$4^2 = 16$	15.976476
n=5	$5^2 = 25$	24.940833
n=6	$6^2 = 36$	35.875437

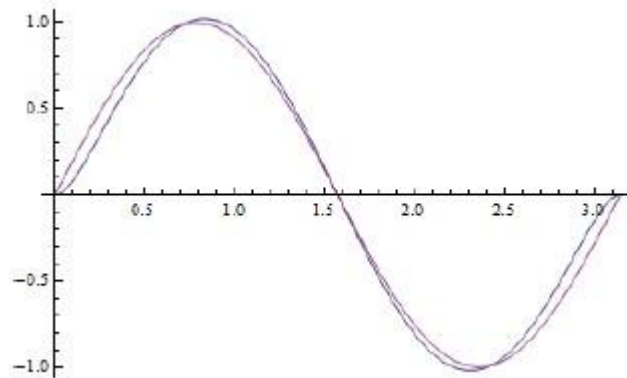
Σχήμα 15 Πίνακες ιδιοτιμών της χορδής



Σχήμα 16 Η ιδιοσυνάρτηση  $\phi_1(x)$  σε σχέση με την κλασική λύση.

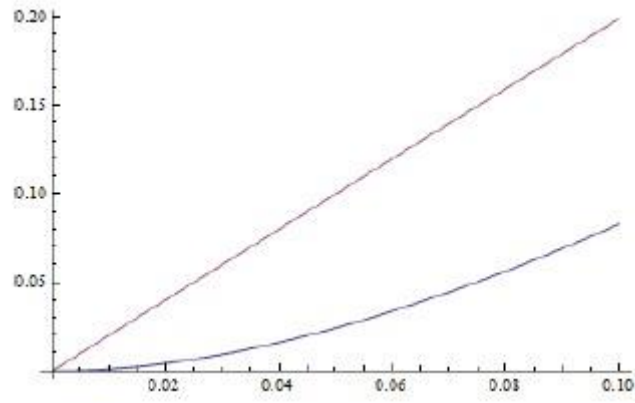


Σχήμα 17 (a) Ολική και τοπική σύγκριση της  $\phi_1(\chi)$  και της κλασικής λύσης.



Σχήμα 18 (b) Ολική και τοπική σύγκριση της  $\phi_1(\chi)$  και της κλασικής λύσης.





**Σχήμα 19** Η ιδιοσυνάρτηση  $\phi_1(\chi)$  σε σχέση με την κλασική λύση



## ***9. Βιβλιογραφία***

- 1 R. D. Mindlin “micro-structure in linear elasticity” (communicated by R.A. Touplin), 1963
- 2 R. E. Showalter “Hilbert Space Methods for Partial Differential Equations”, 1977
- 3 A. Cemal Eringen “Microcontinuum Field Theories I. Foundations and Solids”, Springer 1999
- 4 Haim Brezis “Analyse Fonctionnelle”, 2005
- 5 S.L. SOBOLEV “Partial Differential Equations of Mathematical Physics”, 1964
- 6 Antonios Charalambopoulos – Demosthenes Polyzos “Plane Strain Gradient Elastic Rectangle in Tension”, 2014
- 7 Antonios Charalambopoulos, Demosthenes Polyzos ” Analysis of strain gradient elastostatic problems with non-smooth boundaries”
- 8 William D. Callister JR, “Materials Science and Engineering, An introduction”, 2008
- 9 Rolf Leis “Initially Boundary Value Problems in Mathematical Physics”, 1986
- 10 Harm Askes – Elias Aifantis “Gradient elasticity in statics and dynamics: An overview of formulations, length scale identification procedures finite element implementations and new results”, 2011

- 11 G.I. Giannopoulos, I.A. Liosatos, A.K. Moukanidis “Parametric study of elastic mechanical properties of graphene nanoribbons by a new structural mechanics approach”, 2011