



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
Υπολογιστική Μηχανική

**Υπολογιστική ανάλυση εγκεφαλικών χρονοσειρών για την
κατασκευή λειτουργικών δικτύων διασύνδεσης με την
έννοια της αμοιβαίας πληροφορίας**

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΕΥΑΓΓΕΛΙΔΗΣ ΝΕΚΤΑΡΙΟΣ-ΙΩΑΝΝΗΣ

Επιβλέπων : Γκούσης Δημήτριος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Νοέμβριος 2015



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
Υπολογιστική Μηχανική

**Υπολογιστική ανάλυση εγκεφαλικών χρονοσειρών για την
κατασκευή λειτουργικών δικτύων διασύνδεσης με την
έννοια της αμοιβαίας πληροφορίας**

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΕΥΑΓΓΕΛΙΔΗΣ ΝΕΚΤΑΡΙΟΣ-ΙΩΑΝΝΗΣ

Επιβλέπων : Γκούσης Δημήτριος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 5η Νοεμβρίου 2015.

.....
Γκούσης Δημήτριος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Σιέττος Κωνσταντίνος
Αναπλ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Σμυρνης Νικόλαος
Αναπλ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Νοέμβριος 2015

.....
Ευαγγελίδης Νεκτάριος-Ιωάννης

Διπλωματούχος Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών Ε.Μ.Π.

Copyright © Ευαγγελίδης Νεκτάριος-Ιωάννης, 2015.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή κ. Γκούση Δημήτριο για την ανάθεση και επίβλεψη αυτής της μεταπτυχιακής διπλωματικής εργασίας και για την ευκαιρία που μου έδωσε να την εκπονήσω, καθώς επίσης και τους επιβλέποντες καθηγητές. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς και όλους τους φίλους μου για την καθοδήγηση και την ηθική συμπαράσταση που μου προσέφεραν όλα αυτά τα χρόνια.

Ευαγγελίδης Νεκτάριος-Ιωάννης,

Αθήνα, 5η Νοεμβρίου 2015

Περίληψη

Κύριο θέμα της μεταπτυχιακής διπλωματικής εργασίας είναι η ανάπτυξη γραμμικών και μη γραμμικών μεθόδων με σκοπό την κατασκευή δικτύων αλληλεπίδρασης εγκεφαλικών περιοχών. Αρχικά, θα γίνει μια εισαγωγή των βιοϊατρικών σημάτων, βασικό αντικείμενο της εργασίας, στην συνέχεια θα πραγματοποιηθεί ανάπτυξη των εργαλείων για την ανάπτυξη των μεθόδων στα πεδία του χρόνου και των συχνοτήτων. Τέλος, θα παρουσιαστούν οι βασικότερες μέθοδοι κατασκευής δικτύων μεταξύ χρονοσειρών μέσω της θεωρίας πληροφορίας (*Mutual Information Theory*).

Συγκεκριμένα, στο πρώτο μέρος της μεταπτυχιακής διπλωματικής εργασίας γίνεται μια εισαγωγή των εγκεφαλικών σημάτων καθώς και η διαδικασία παραγωγής του. Στην συνέχεια παρουσιάζονται χαρακτηριστικά των εγκεφαλικών σημάτων στο χώρο των συχνοτήτων και γίνεται μια αναφορά για τις διαδικασίες καταγραφής τους. Τέλος, σημειώνονται οι βασικότερες μέθοδοι ανάλυσης των ηλεκτροεγκεφαλογραφημάτων.

Στο δεύτερο και τρίτο μέρος γίνεται παρουσίαση των βασικότερων εργαλείων για την ανάλυση και την μοντελοποίηση των εγκεφαλικών σημάτων. Συγκεκριμένα, στο δεύτερο μέρος γίνεται μια εκτενέστερη μελέτη των μεθόδων απεικόνισης των σημάτων στο πεδίο των συχνοτήτων με την ανάπτυξη του μετασχηματισμού *Fourier* καθώς και την απεικόνιση στα πεδία του χρόνου και των συχνοτήτων με την ανάπτυξη του μετασχηματισμού *Gabor* και του συνεχούς μετασχηματισμού *Wavelet*. Στο τρίτο μέρος γίνεται εισαγωγή στα πολυμεταβλητά αυτοπαλινδρομικά μοντέλα με σκοπό την ανάπτυξη της παραμετρικής γραμμικής μεθόδου μερικής κατευθυνόμενης συνάφειας (*Partial Directed Coherence*).

Τέλος, παρουσιάζονται τα μέτρα συσχέτισης που έχουν αναπτυχθεί σύμφωνα με την θεωρία πληροφορίας. Συγκεκριμένα, εστιάζεται η προσοχή στην ανάπτυξη του δείκτη αμοιβαίας πληροφορίας βασισμένη στον υπολογισμό κ -κοντινότερων γειτόνων. Στην συνέχεια, γίνεται μια περαιτέρω μελέτη άλλων δεικτών συσχέτισης που βασίζονται στην αμοιβαία πληροφορία, οι οποίες είναι η μερική αμοιβαία πληροφορία, εντροπία μεταφοράς, μερική εντροπία μεταφοράς και η μερική αμοιβαίας πληροφορίας με μεικτή εμβάθυνσης. Τέλος, πραγματοποιείται αξιολόγηση των μη γραμμικών και γραμμικών δεικτών συσχέτισης σε ένα γραμμικό σύστημα αυτοπαλινδρόμησης καθώς και σε δυο συζευγμένα μη γραμμικά συστήματα.

Λέξεις κλειδιά

Βιοϊατρικά Σήματα, Ανάλυση σήματος, Θεωρία Πληροφορίας, Αμοιβαία πληροφορία, Μεταφορά εντροπίας, *MVAR*, *PDC*

Abstract

The main subject of this thesis is the development of linear and nonlinear methods for the construction of interaction networks brain regions . Firstly, there will be an introduction to biomedical signals, an essential focus of this work, and then the study of tools for the development of methods into the time and frequency domains will be presented. Finally, the main network construction methods between time series using tools of information theory will be illustrated.

More specifically, in the first part of the thesis there is an introduction to brain signals and their emergence process. Then, we study the features of brain signals in the frequency domain and their recording procedures. Finally, the main methods of analysis of electroencephalography signals are described.

The second and third part are a present the main tools for the analysis and modeling of brain signals. Specifically, the second part provides a extensive study of the time frequency methods of the brain signals by applying the textit Fourier, *Gabor* and *continuous Wavelets* transformation. In the third part an introduction to multivariate autoregressive models is made aiming to the presentation of the parametric linear method of partial directed coherence (PDC).

Finally, we present the relation measures index according to information theory. In particular, our attention is focused on the development of mutual information index (MI), based on the calculation of k -nearest neighbors. Then, there was a further study of other relation index based on mutual information, which is the partial mutual information (PMI), transfer entropy (TE), partial transfer entropy (PTE) and partial mutual information with mixed embedding (PMIME). Finally, we evaluate the nonlinear and linear relation index for a linear autoregressive system as in two coupled nonlinear systems.

Key words

Biomedical signals, Signal Analysis, Information Theory, Mutual Information, Transfer Entropy, *MVAR*, *PDC*

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες	5
Περίληψη	7
Abstract	9
Περιεχόμενα	11
Κατάλογος Σχημάτων	13
Κατάλογος Πινάκων	15
1. Βιοϊατρικά Σήματα	17
1.1 Εγκεφαλικά σήματα: τοπικό δυναμικό πεδίο (Local field potentials), Ηλεκτροεγκεφαλογραφήματα (EEG), Μαγνητοεγκεφαλογραφήματα (MEG)	17
1.1.1 Εφαρμογή των ΗΕΓ	18
1.1.2 Εφαρμογή των ΜΕΓ	18
1.2 Παραγωγή εγκεφαλικών σημάτων	18
1.3 Ρυθμοί ΗΕΓ/ΜΕΓ	19
1.4 Καταγραφή ΗΕΓ	20
1.5 Καταγραφή ΜΕΓ	21
1.6 Ανάλυση των ΗΕΓ σημάτων	22
1.6.1 Ανάλυση ανά κανάλι	22
1.6.2 Ανάλυση σε πολλαπλά κανάλια	22
2. Ανάλυση Σήματος	25
2.1 Εισαγωγή στον διακριτό μετασχηματισμό Fourier	25
2.1.1 Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier	27
2.1.2 Ταχύς μετασχηματισμός Fourier	29
2.2 Αρχή της Αβεβαιότητας	30
2.3 Μετασχηματισμός Gabor	31
2.4 Μέθοδος Multitaper	33
2.5 Συνεχής Wavelet μετασχηματισμός	37
2.5.1 Ιδιότητες μετασχηματισμού Wavelet	38
2.5.2 Βάση Wavelet	39
2.5.3 Παράδειγμα	39
2.6 Συμπεράσματα	40
3. Πολυμεταβλήτα Μοντέλα Παλινδρόμησης	43
3.1 Εισαγωγή στα μοντέλα παλινδρόμησης	43
3.1.1 Εισαγωγή	43
3.1.2 Χαρακτηριστικά των χρονοσειρών	43
3.2 Σταθερότητα και ευστάθεια χρονοσειρών	44

3.3	Λευκός Θόρυβος	45
3.4	Πολυμεταβλητό μοντέλο p-τάξης	45
3.5	Μέθοδοι προσέγγισης συντελεστών	46
3.5.1	Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων (least squares)	46
3.5.2	Μέθοδος Burg	47
3.6	Κριτήρια επιλογής τάξης	48
3.7	Απεικόνιση στον χώρο των συχνοτήτων	49
3.8	Μερική κατευθυνόμενη συνάφεια (Partial Directed Coherence)	50
3.9	Μοντελοποίηση μη στάσιμων σημάτων	50
4.	Θεωρία Πληροφορίας	53
4.1	Θεωρία πληροφορίας και νευροεπιστήμες	53
4.2	Εντροπία	54
4.3	Αμοιβαία πληροφορία (Mutual Information)	55
4.4	Μερική αμοιβαία πληροφορία (Partial Mutual Information)	59
4.5	Εντροπία μεταφοράς (Transfer Entropy)	60
4.6	Μερική αμοιβαία πληροφορία με μεικτή εμφάθυση (Partial Mutual Information on Mixed Embedding)	62
4.7	Προσομοιώσεις	63
4.8	Αποτελέσματα	65
4.9	Συμπεράσματα	73
	Βιβλιογραφία	75

Κατάλογος Σχημάτων

1.1	Παραγωγή ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου από μια πηγή δίπολου	17
1.2	Διαδικασία παραγωγής δυναμικού δράσης νευρικού κυττάρου.	19
1.3	Αδρή παράσταση ρυθμών ηλεκτροεγκεφαλικών σημάτων	20
1.4	Θέσεις ηλεκτροδίων συστήματος 10 – 10 καταγραφής ΗΕΓ.	21
2.1	Μετασχηματισμός Fourier ενός συντονικού σήματος $x(t) = 0.5 \sin(2\pi t30) + 0.3 \cos(2\pi t30)$ (α') συχνοτήτων $20Hz$ και $30Hz$, παρατηρείτε η συμμετρία του μετασχηματισμού Fourier ως προς τον άξονα συμμετρίας που βρίσκεται στα $50Hz$ (β').	27
2.2	Ανάλυση Fourier σε ένα άθροισμα συνημιτονικών σημάτων $x(t) = 0.5 \sin(2\pi t0.5) + \cos(2\pi t0.8)$ στο οποίο εφαρμόζεται ένα Gaussian Window, που στην (α') έχει τυπική απόκλιση 0.05 και στην (β') περίπτωση είναι 0.3.	30
2.3	Γραφική αναπαράσταση του μετασχηματισμού Gabor που αποσπάμε τις συνιστώσες του χρόνου και της συχνότητας ενός $S(t)$ σήματος. Επίσης, το χρονικό παράθυρο $g(\tau - t)$ με κέντρο στο τ και πλάτος a [Nathan Kutz, Computational Methods for Data Analysis, σελ 224].	32
2.4	Φωνητικό σήμα που αντιστοιχεί στην λέξη ‘GABOR’ [Σήμα από τη βάση δεδομένων του υπολογιστικού πακέτου TFA]. Το (α') διάγραμμα είναι το χρονικό σήμα και το (β') είναι η φασματική πυκνότητα ενέργειας.	33
2.5	Φασματική ανάλυση του φωνητικού σήματος κάνοντας χρήση του μετασχηματισμού Gabor στα πεδία του χρόνου και της συχνότητας.	34
2.6	Τα τέσσερα πρώτα παράθυρα (tapers) που δημιουργούνται από τις DPSS συναρτήσεις της εξίσωσης (2.24).	35
2.7	Στο γράφημα α είναι μια αναπαράστασή ενός τεχνητού EEG σήματος, στο γράφημα β είναι το μετασχηματισμένο σήμα κατά Fourier, στο γράφημα γ - δ είναι το μετασχηματισμένο σήμα κάνοντας Multitaper ανάλυση με συνολικό αριθμό παραθύρων (tapers) 4 και 8 αντίστοιχα.	36
2.8	Παράδειγμα CWT συστολής ή διαστολής σήματος σε διάφορες θέσεις του σήματος μας.	37
2.9	Αριστερά ένα συμπιεσμένο σήμα (χαμηλή κλίμακα, υψηλές συχνότητες), δεξιά ένα διεσταλμένο σήμα (υψηλή κλίμακα, χαμηλές συχνότητες).	37
2.10	Ανάλυση τεχνικού EEG σήματος (α') στο πεδίο των συχνοτήτων (β') και ταυτόχρονη ανάλυση στα πεδία των συχνοτήτων-χρόνου με την μέθοδο του μετασχηματισμού wavelet (γ').	40
2.11	Διάφορες περιπτώσεις στην ανάλυση στα πεδία του χρόνου και της συχνότητα. χρονική ανάλυση (α'), Fourier ανάλυση (β'), Gabor ή STFT ανάλυση (γ'), wavelet ανάλυση (δ').	41
4.1	Ορισμός του ϵ , n_x και n_y για την εκτίμηση της (4.10), για $k = 1$ για κάποιο i . Σε αυτό το παράδειγμα, $n_x = 5$ και $n_y = 3$	57
4.2	Εκτίμηση του $I(X, Y) - I_{exact}(X, Y)$ για κανονικές μεταβλητές, μοναδιαίας διακύμανσης και για τιμές της αυτοδιακύμανσης $r = 0.1, 0.3, 0.6, 0.9$, συναρτήσει των αριθμών των μεταβλητών για $k = 1$	58

4.3	Εκτίμησης της ΑΠ για συζευγμένες κανονικές μεταβλητές με μοναδιαία διακύμανση και τιμή της αυτοδιακύμανση $r = 0.9$, συναρτήσει του k/N όπου αριθμό των σημείων N ορίστηκε ως $N = 125, 250, 500, 1000, 2000, 4000, 10000$. Η διακεκομμένη γραμμή είναι η ακριβής τιμή της ΑΠ, $I(X, Y) = 0.8303$.	58
4.4	Τρία συζευγμένα συστήματα Σ_1, Σ_2 και Σ_3 , όπου τα συνεχής βέλη αφορούν άμεσες συζεύξεις και το διακεκομμένο την έμμεση σύζευξη	59
4.5	Ποιοτική αναπαράσταση συζεύξεων του γραμμικού συστήματος 1.	63
4.6	Ποιοτική αναπαράσταση σύζευξης του μη γραμμικού συστήματος 2 (α') και 3(β').	64
4.7	Εκτίμηση των μέτρων αλληλεπίδρασης $MI(\alpha')$, $PMI(\beta')$, $TE(\gamma')$, $PTE(\delta')$, $PMIME(\epsilon')$ και $PDC(\sigma')$ συναρτήσει των τιμών σύζευξης του συστήματος 2 για $c = [0.1, 0.7]$	68
4.8	Εκτίμηση των μέτρων δεικτών αλληλεπίδρασης $MI(\alpha')$, $PMI(\beta')$, $TE(\gamma')$, $PTE(\delta')$, $PMIME(\epsilon')$ και $PDC(\sigma')$ συναρτήσει των τιμών σύζευξης του συστήματος 3, για $c = [0, 5]$	70
4.9	Υπολογισμός του δείκτη PDC στο πεδίο των συχνοτήτων του γραμμικού συστήματος 1.	71
4.10	Υπολογισμός του δείκτη PDC στο πεδίο των συχνοτήτων του μη γραμμικού συστήματος Henon.	72
4.11	Υπολογισμός του δείκτη PDC στο πεδίο των συχνοτήτων του μη γραμμικού συστήματος Lorenz.	72

Κατάλογος Πινάκων

3.1	Κριτήρια επιλογής τάξης παλινδρομικού μοντέλου.	48
4.1	Εκτίμηση των ΜΙ(ΑΠ) και ΡΜΙ(ΜΑΠ) του γραμμικού συστήματος 1 με κοινές χρονοκαθυστερήσεις μεταξύ των χρονοσειρών $k = 1$	65
4.2	Εκτίμηση των ΤΕ, ΡΤΕ, ΡΜΙΜΕ και ΡDC του γραμμικού συστήματος 1.	66
4.3	Εκτίμηση των CΙ(ΑΠ) και ΡCΙ(ΜΑΠ) του μη γραμμικού συστήματος Henon τριών χρονοσειρών.	67
4.4	Εκτίμηση των ΤΕ, ΡΤΕ, ΡΜΙΜΕ και ΡDC του μη γραμμικού συστήματος Henon.	67
4.5	Εκτίμηση δεικτών ΜΙ και ΡΜΙ του συστήματος Lorenz.	69
4.6	Εκτίμηση των ΤΕ, ΡΤΕ, ΡΜΙΜΕ και ΡDC του μη-γραμμικού συστήματος Lorenz.. . . .	69

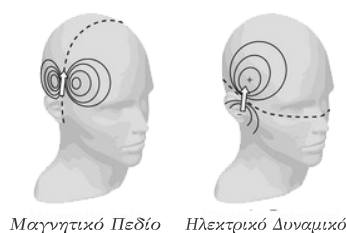
Κεφάλαιο 1

Βιοϊατρικά Σήματα

1.1 Εγκεφαλικά σήματα: τοπικό δυναμικό πεδίο (Local field potentials), Ηλεκτροεγκεφαλογραφήματα (EEG), Μαγνητοεγκεφαλογραφήματα (MEG)

Τα ηλεκτροεγκεφαλογραφήματα (HEΓ) καταγράφονται από ηλεκτρικά σήματα που παράγονται από συντονισμένη ενεργοποίηση των εγκεφαλικών κυττάρων. Τα HEΓ που καταγράφονται με απουσία κάποιου ερεθίσματος ονομάζονται αυθαίρετα HEΓ, ενώ το ηλεκτρικό που παράγεται από απάντηση από εξωτερικό ή εσωτερικό ερέθισμα ονομάζονται προκλητά δυναμικά (event-related potential). Συνήθης τρόπος καταγραφής των HEΓ είναι η εξωτερική τοποθέτηση ηλεκτροδίων επί του κρανίου ή εσωτερική τοποθέτηση ηλεκτροδίων στην εξωτερική επιφάνεια του εγκεφάλου (Electrocorticogram [ECOG]). Το ηλεκτρικό πεδίο που μετράται ενδοφλοιακά με εμφύτευση ηλεκτροδίων στις επιμέρους περιοχές του εγκεφάλου ονομάζεται τοπικό δυναμικό (local fields potentials [LPF]). Ηλεκτρόδια τοποθετούνται εφόσον είναι αρκετά σε μέγεθος μικρό σε κάποιο νευρώνα, όπου γίνεται καταγραφή του δυναμικού ενεργοποίησης του (spikes). Το πλάτος των HEΓ σημάτων σε ένα φυσιολογικό άτομο, καταγράφοντας από το κρανίο, κυμαίνεται από $10 - 100 \mu V$. Η καταγραφή των κρανιοεγκεφαλικών δυναμικών είναι ανεξάρτητη από το μέγεθος των ηλεκτροδίων εξαιτίας της σταθερής χωρικής αγωγιμότητας μεταξύ του εγκεφάλου και του κρανίου. Ενώ η καταγραφή των ενδοκρανιακών δυναμικών εξαρτάται από το μέγεθος του ηλεκτροδίου (αρκετά μικρότερο) λόγω της χωρικής ακρίβειας, όπου μπορεί να φτάσει το πλάτος καταγραφής τέσσερις φορές μεγαλύτερο από μια κρανιοεγκεφαλική καταγραφή.

Από τις εξισώσεις του Maxwell γνωρίζουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο είναι κάθετο με το μαγνητικό, όπου η καταγραφή του από τους νευρώνες του εγκεφάλου αποκαλείται μαγνητοεγκεφαλογράφημα (MEG). Το πλάτος του μαγνητικού πεδίου σε φυσιολογικούς κυμαίνεται στα $0.5 pT$ και το πεδίο συχνοτήτων είναι με αυτό των HEΓ. Δεδομένου της ορθογωνιότητας μεταξύ του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου μια ακτινική πηγή, κάθετη στο κρανίο, είναι καλύτερα ανιχνεύσιμη με καταγραφή HEΓ και αντίστοιχα οι εφαπτόμενες είναι ανιχνεύσιμες με MEG. Παρόλο που τα MEG εξαρτώνται από την γεωμετρία των ακτινικών πηγών, το μαγνητικό πεδίο δεν επηρεάζεται από την δομή του εγκεφάλου.



Σχήμα 1.1: Παραγωγή ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου από μια πηγή δίπολου

1.1.1 Εφαρμογή των ΗΕΓ

Τα ΗΕΓ βρίσκουν εφαρμογή για την μελέτη εγκεφαλικής επεξεργασίας μια πληροφορίας που έχει επέλθει ύστερα από κάποιο ερέθισμα άλλα και στην ιατρική διάγνωση. Πιο συγκεκριμένα βοηθάει στην ιατρική διάγνωση των ασθενειών όπως είναι η επιληψία, εγκεφαλικών όγκων, εγκεφαλικών επεισοδίων, ψυχικών ασθενειών, διαταραχές ύπνου κ.α.

Άλλες εφαρμογές των ΗΕΓ βρίσκονται στο σχεδιασμό ηλεκτρονικών συσκευών όπου πραγματοποιείται άμεση σύνδεση μεταξύ εγκεφάλου και υπολογιστή και είναι δυνατή η on line ανάλυση των σημάτων με σκοπό μια γρήγορη ιατρική διάγνωση. Συνήθως, για την μελέτη εγκεφαλικών λειτουργιών εστιάζεται η έρευνα γύρω από τα προκλητά δυναμικά (ERP), όπου παρατηρείται η εγκεφαλική δραστηριότητα σε κάποιο συγκεκριμένο εσωτερικό ή εξωτερικό ερέθισμα. Επίσης τα ERP χρησιμοποιούνται για την διάγνωση ψυχικών διαταραχών, αναπτυξιακών διαταραχών, π.χ διάγνωση δυσλεξίας.

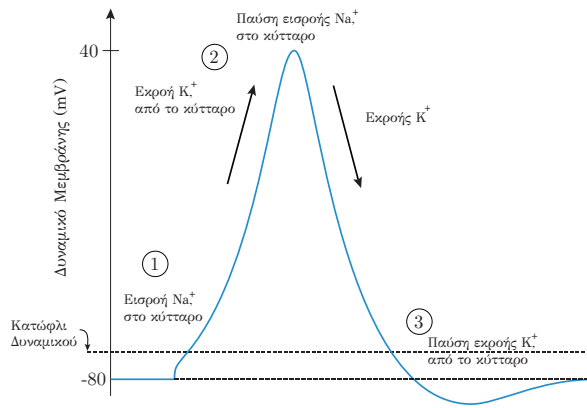
1.1.2 Εφαρμογή των ΜΕΓ

Το μαγνητοεγκεφαλογράφημα, είναι η καταγραφή του μαγνητικού πεδίου που παράγεται από την ενεργοποίηση πηγών του εγκεφάλου μετράται εξωτερικά του κεφαλιού και θεωρείται μια από τις πιο διαδομένες μεθόδους κλινικής καταγραφής παγκοσμίως. Τα ΜΕΓ χρησιμοποιούνται για προ εγχειρητικές διαγνώσεις σε ασθενείς που πάσχουν από επιληψία είτε για ασθενείς με εγκεφαλικό όγκο. Το μεγάλο πλεονέκτημα των ΜΕΓ είναι το μαγνητικό πεδίο που παράγεται εσωτερικά του εγκεφάλου δεν επηρεάζεται από την αγωγιμότητα του εγκεφαλικού φλοιού και του κρανίου σε σχέση του ηλεκτρικού πεδίου το οποίο παράγεται από τις ίδιες πηγές. Ενδιαφέρον ιδιότητα των ΜΕΓ είναι η ανάπτυξη μεθοδολογίας εντοπισμού πηγών ενεργοποίησης λύνοντας το αντίστροφο πρόβλημα [Hamalainen, 1993]. Τα προκλητά μαγνητικά πεδία είναι τα αντίστοιχα με αυτά των ηλεκτρικών πεδίων τα ERP, τα οποία σχετίζονται με εγκεφαλικές λειτουργίες που μπορούν να προκληθούν είτε από οπτικά, ακουστικά, αισθητήρια και εσωτερικά ερεθίσματα. Η ανάλυση των ΜΕΓ σχετίζεται με την ανίχνευση των εγκεφαλικών περιοχών καθώς ενεργοποιούνται ύστερα από κάποιο ερέθισμα.

1.2 Παραγωγή εγκεφαλικών σημάτων

Στον εγκέφαλο υπάρχουν γύρω 10^{11} νευρικά κύτταρα. Κάθε ένα από αυτά συνδέεται με 10^4 άλλους νευρώνες, δια μέσου ηλεκτρικών συνάψεων και η επικοινωνία μεταξύ τους πραγματοποιείται με την μορφή ηλεκτρικού ρεύματος. Η ηλεκτρικής δραστηριότητας των νευρώνων εκδηλώνεται με την παραγωγή δυναμικών δράσης, που συμβαίνουν όταν η ηλεκτρική διέγερση της κυτταρικής μεμβράνης των νευρώνων υπερβαίνει ένα κατώφλι δυναμικού. Η παραγωγή δυναμικών δράσης πραγματοποιείται με την ταχεία εισροή ιόντων Na^+ στο κύτταρο, το οποίο αλλάζει την πόλωση στο εσωτερικό του νευρώνα από περίπου $-80mV$ έως περίπου $+40mV$, η επαναπόλωση του κυττάρου αντίστοιχα γίνεται με την εκροή των ιόντων K^+ στον εξωτερικό κυτταρικό χώρο σχήμα 1.2. Με αυτόν τον τρόπο ένα δυναμικό δράσης έχει χαρακτηριστική μορφή αιχμής (spike) διάρκειας περίπου $1ms$. Η ακριβής χρονική διάρκεια του δυναμικού δράσης διαμορφώνεται ανάλογα με το τύπο του κάθε νευρώνα.

Η ηλεκτρική δραστηριότητα των νευρώνων παράγει ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία ενός δίπολου το οποίο δημιουργείται ρεύμα με κατεύθυνση κατά μήκος της κυτταρικής μεμβράνης. Μακροσκοπικά, για την παρατήρηση αυτών των πεδίων απαιτείται ο συγχρονισμός της ηλεκτρικής δραστηριότητας ενός μεγάλου αριθμού διπόλων παράλληλα προσανατολισμένων [Nunez, 1981]. Μάλιστα, τα πυραμιδικά κύτταρα του εγκεφαλικού φλοιού είναι σε μεγάλο βαθμό παράλληλα μεταξύ τους και συγχρονίζονται με βάση την κοινή τροφοδοσία από θαλαμοφλοιώδεις συνδέσεις [Lopes da Silva, 1996]. Τα ΗΕΓ προέρχεται από το άθροισμα των συγχρονισμένων δυναμικών δράσης των νευρώνων. Η συνεισφορά στο ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ των συγχρονισμένων ενεργών νευρώνων είναι περίπου ανάλογη



Σχήμα 1.2: Διαδικασία παραγωγής δυναμικού δράσης νευρικού κυττάρου.

προς τον αριθμό τους, καθώς η συνεισφορά των μη-συγχρονισμένων είναι η τετραγωνική ρίζα του αριθμού τους.

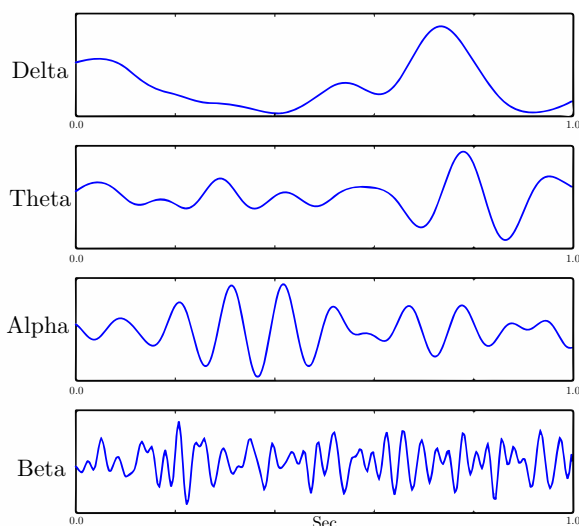
Η διαδικασία παραγωγής δυναμικού δράσης σε κυτταρικό επίπεδο είναι ένα μη-γραμμική φαινόμενο. Επίσης, μη-γραμμικές ιδιότητες παρατηρούνται στην δυναμική συμπεριφορά και των νευρικών πληθυσμών. Παρόλα αυτά, στο επίπεδο των καταγραφών ΗΕΓ, η μη-γραμμικότητα είναι η εξαίρεση πάρα ο κανόνας [Achermann et al., 1994; Stam et al., 1999]. Επίσης, στην περίπτωση των LFP καταγραφών όπου γίνεται εμφύτευση ηλεκτροδίων ενδοκρανιακά, όπου η πρόβλεψη των σημάτων γίνεται καλύτερα με γραμμικά μοντέλα σε σύγκριση με μη γραμμικά [Blinowska and Malinowski, 1991]. Μη γραμμικά χαρακτηριστικά εμφανίζονται κατά τις καταγραφές ΗΕΓ επιληπτικών κρίσεων [Pijn et al. 1997].

Επιπρόσθετα, οι μη γραμμικοί μέθοδοι είναι αρκετά ευαίσθητη στο θόρυβο των σημάτων, όπου προσθέεται ένα συστηματικό σφάλμα στα αποτελέσματα, όπως φαίνεται και από την ανάλυση που έχει γίνει στο 4 κεφάλαιο. Γενικά, συνιστάται για την ανάλυση των ΗΕΓ σημάτων αρχικά να γίνεται έλεγχος των γραμμικών μεθόδων και αν είναι αναγκαίο στην συνέχεια στην εφαρμογή των μη γραμμικών, διότι οι περισσότερες λειτουργίες είναι τοπικά γραμμικές και οι αντίστοιχοι μέθοδοι είναι αρκετά αποτελεσματικοί σε σχέση με τους μη γραμμικούς.

1.3 Ρυθμοί ΗΕΓ/ΜΕΓ

Το πρόβλημα της προέλευσης των ΗΕΓ ρυθμών ενεργοποίησης έχει απαντηθεί από ηλεκτροφυσιολογικές μελέτες των εγκεφαλικών νευρικών κυττάρων καθώς και με την μοντελοποίηση των ηλεκτρικών πυροδοτήσεων πληθυσμού νευρώνων [Freeman, 1975; Lopes da Silva, 1996; Wright et al., 2000; David et al., 2004]. Σημαντικό ρόλο για την διαμόρφωση των ΗΕΓ ρυθμών αποτελεί οι ιδιότητες του νευρικού δικτύου το οποίο περιέχει σύνολο διεγερμένων και ανασταλτικών νευρώνων που συνδέεται με βρόχους ανατροφοδότησης. Επίσης, υπάρχουν ενδείξεις ότι οι ταλαντώσεις των νευρώνων συμβάλουν στην διαμόρφωση ρυθμικής συμπεριφοράς των δικτύων στα όποια ανήκουν. Η συχνότητες ταλάντωσης εξαρτώνται από της εγγενής ιδιότητες της μεμβράνης του νευρικού κυττάρου, από το δυναμικό δράσης μεμονωμένων νευρώνων και από την ισχύς των συναπτικών αλληλεπιδράσεων. Οι ρυθμοί που έχουν παρατηρηθεί σε ΗΕΓ σήματα είναι (αντίστοιχα έχουν παρατηρηθεί και σε ΜΕΓ) [Niedermayer and Lopes da Silva, 2004]: Δέλτα ($0.1 - 4Hz$), Θήτα ($4 - 8Hz$), Άλφα ($8 - 13Hz$), Βήτα ($13 - 30Hz$) και Γάμμα (πάνω από $30Hz$), σχήμα 1.3.

Η συμβολή των διαφορετικών ρυθμών στα ΗΕΓ/ΜΕΓ εξαρτάται από την ηλικία και την συμπεριφορική κατάσταση του κάθε υποκειμένου όπως επίσης και από τα επίπεδα προσοχής των ερεθισμάτων.



Σχήμα 1.3: Αδρή παράσταση ρυθμών ηλεκτροεγκεφαλικών σημάτων

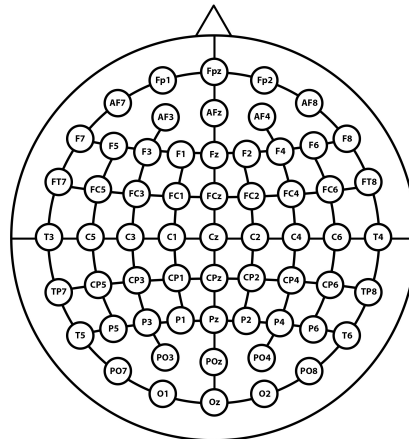
Επιπλέον υπάρχουν σημαντικές διαφορές των ρυθμών μεταξύ φυσιολογικών με άτομα που πάσχουν από μια νευροπαθολογική ασθένεια [Niedermayer and Lopes da Silva, 2004]. Τα γενικά χαρακτηριστικά του κάθε ρυθμού συνοψίζονται ως εξής:

- Ο Δέλτα ρυθμός είναι χαρακτηριστικών των ΗΕΓ που καταγράφονται κατά την διάρκεια βαθύ ύπνου. Το πλάτος των Δέλτα κυμάτων συνηθίζεται να είναι γύρω στα ($75 - 200\mu V$) και παρατηρείται ενισχυμένη συνάφεια σε όλα τα κανάλια καταγραφής.
- Ο Θήτα ρυθμός συσχετίζεται για κάποιες συναισθηματικές καταστάσεις, όπως επίσης σε γνωστικές διαδικασίες που αφορούν την λειτουργία της δρώσας μνήμης (working memory). Ο Θήτα ρυθμός επίσης συνδέεται με την δραστηριότητα του Γάμμα ρυθμού και με τον αργό Άλφα ρυθμό εξαιτίας παθολογικών δυσλειτουργιών.
- Ο Άλφα ρυθμός εμφανίζεται σε καταστάσεις εγρήγορσης στις κροταφικές περιοχές του εγκεφάλου. Παρατηρούνται καθαρά όταν το υποκείμενο είναι σε κατάσταση ηρεμίας έχοντας κλειστά τα μάτια και μπλοκάρεται όταν υπόκειται σε κάποιο οπτικό ερέθισμα που αφορά την προσοχή.
- Η Βήτα δραστηριότητα είναι κύριο χαρακτηριστικό καταστάσεων άμεσης εγρήγορσης και εστιασμένης προσοχής.
- Η Γάμμα δραστηριότητα συνδέεται με την διαδικασία επεξεργασίας πληροφορίας π.χ. παρατηρείται κατά την διάρκεια εμφάνισης κάποιου ερεθίσματος. Ο Γάμμα ρυθμός συσχετίζεται με την αλληλεπίδραση μεταξύ των εγκεφαλικών περιοχών που αφορά λειτουργικές δραστηριότητες του.

1.4 Καταγραφή ΗΕΓ

Η ΗΕΓ καταγραφές πραγματοποιούνται με την χρήση ηλεκτροδίων τα όποια τοποθετούνται στην επιφάνεια του κεφαλιού. Το πρώτο στοιχείο του συστήματος καταγραφής είναι τα ηλεκτρόδια τα όποια συνδέονται με διαφορικό ενισχυτή. Σημαντικό ρόλο στην ποιότητα του σήματος παίζει ο λόγος των αντιστάσεων, των ηλεκτροδίων με με αυτή του ενισχυτή. Η προαπαιτούμενη αντίσταση ενός σύγχρονου ενισχυτή κυμαίνεται γύρω στα $10^{12}\Omega$ και αντίστοιχα η επιθυμητή αντίσταση των ηλεκτροδίων να

μην ξεπερνά τα $5k\Omega$. Για τον περιορισμό συστηματικού θορύβου εφαρμόζονται υψηλοπερατό φίλτρο για την αφαίρεση της συχνότητας του ρεύματος ($50Hz$), καθώς και χαμηλοπερατό φίλτρο για την αφαίρεση τεχνητών σημάτων, π.χ καρδιακός παλμός, κίνηση ματιών κ.α. Στην συνέχεια το σήμα εισάγεται σε μετασχηματιστή όπου γίνεται η μετατροπή από αναλογικό σε ψηφιακό. Κατά την ψηφιοποίηση του αναλογικού σήματος επιπροσθέτεται ένα σφάλμα ποσοτικοποίησης το οποίο εξαρτάται από την πληθυσμό των bits. Η δειγματοληπτική συχνότητα των σημάτων κυμαίνεται από $100Hz$ για μια διαγνωστική καταγραφή ΗΕΓ έως αρκετές χιλιάδες Hz για καταγραφές ερευνητικού ενδιαφέροντος. Επίσης, σημαντικό για καταγραφή ΗΕΓ είναι ο πληθυσμός των ηλεκτροδίων και η αντίστοιχη τοποθεσία τους. Συνήθως χρησιμοποιούνται σύστημα 61 ηλεκτροδίων, όπου η σχετική απόσταση μεταξύ τους να είναι μικρότερη από 10%, σχήμα 1.4.



Σχήμα 1.4: Θέσεις ηλεκτροδίων συστήματος 10 – 10 καταγραφής ΗΕΓ.

Τα ΗΕΓ στην ουσία είναι οι μετρήσεις διαφοράς δυναμικού μεταξύ των ηλεκτροδίων και ενός ηλεκτροδίου αναφοράς. Για το ηλεκτρόδιο αναφοράς δεν υπάρχει κάποια μόνιμη θέση, διότι πρέπει να τοποθετηθεί σε σημείο κοντά στο κεφάλι το οποίο δεν επηρεάζεται από διάφορες πηγές θορύβου. Το κανάλι αναφοράς συνηθίζεται να τοποθετείται στο λοβό του αυτιού ή στο κεντρικό κανάλι της κάσκας καταγραφής.

1.5 Καταγραφή ΜΕΓ

Η καταγραφές μαγνητοεγκεφαλογραφημάτων είναι τεχνική αρκετά πιο απαιτητική από αυτή των ηλεκτροεγκεφαλογραφημάτων. Κύριος λόγος είναι ότι το μαγνητικό πεδίο είναι πολύ ασθενέστερο από το ηλεκτρικό διότι σύμφωνα με την εξίσωση Biot-Savart το μαγνητικό πεδίο μειώνεται τετραγωνικά με την απόσταση, ενώ το ηλεκτρικό μειώνεται γραμμικά [Hamalainen et al., 1993]. Το μαγνητικό πεδίο που παράγεται από το εγκέφαλο είναι της τάξεως των μερικών εκατοντάδων femtoTesla το οποίο είναι αρκετά πιο ασθενέστερο από το μαγνητικό πεδίο της γης. Για την καταγραφή των εγκεφαλικών μαγνητικών πεδίων πρέπει να απομονωθεί το σήμα από τον θόρυβο του περιβάλλοντος με την θωράκιση των υπεραγωγίων πηνίων όπου πραγματοποιούνται και οι μετρήσεις. Τρεις τύποι πηνίων χρησιμοποιούνται για την καταγραφή του μαγνητικού πεδίου: μαγνητόμετρο, αξονικό βαθμονόμετρο και επίπεδο βαθμονόμετρο. Τα βαθμονόμετρα τοποθετούνται κατά μήκος μιας περιοχής με σκοπό την μέτρηση της κλίσης του μαγνητικού πεδίου στον χώρο. Σε γενικές γραμμές τα μαγνητόμετρα είναι προτείνονται σε σχέση με τα βαθμονόμετρα όσον αφορά την καταγραφή βαθύτερων πηγών. Οι διαφορές μεταξύ τους βρίσκονται κυρίως στην ευαισθησία στον θόρυβο και στην ενίσχυση των σημάτων που προέρχονται από εγκεφαλικές πηγές. Αντίθετα τα επίπεδα βαθμονόμετρα ανιχνεύουν πηγές κατά μήκος της επιφάνειας του εγκεφάλου καθώς σε όλους τους τύπους ανιχνευτών η πηγή είναι ανιχνεύσιμη για κάθε ένα πόλο [Hamalainen et al., 1993].

1.6 Ανάλυση των ΗΕΓ σημάτων

Λόγω της πολυπλοκότητας τους, τα ΗΕΓ σήματα αντιμετωπίζονται ως στοχαστικές διαδικασίες, όπου στατιστικές ιδιότητες μπορούν να υπολογιστούν χρησιμοποιώντας μεθόδους από την θεωρία στοχαστικών σημάτων. Συγκεκριμένα, οι μέθοδοι συμπεριλαμβάνουν τον υπολογισμό των κατανομών πιθανότητας, τις στατιστικές ροπές (μέσος, διακύμανση, κυρτότητα κ.α), συναρτήσεις συσχέτισης και φασματική ανάλυση. Η εκτίμηση των παραπάνω μεγεθών συνήθως προϋποθέτει τα σήματα να είναι στάσιμα, το οποίο σημαίνει ότι ο μέσος δεν μεταβάλλεται στον χρόνο. Ωστόσο, τα ΗΕΓ σήματα δεν τηρούν την προϋπόθεση της στασιμότητας καθ' όλη την διάρκεια της καταγραφής γι' αυτό κόβονται τα σήματα χρονικά γύρω από την εμφάνιση του ερεθίσματος. Παρόλα αυτά, το σήμα διάρκειας λίγων δευτερολέπτων είναι τμηματικά στάσιμο, οπότε οποιαδήποτε στατιστική ανάλυση καταλήγει να γίνεται σε χρονικά παράθυρα της τάξεων των millisecond ώστε να τηρείται η στασιμότητα [Ding et al, 2000].

Τα ΗΕΓ σήματα μπορούν να αναλυθούν στο χρονικό ή στο συχνοτικό ή και στα δύο πεδία ταυτόχρονα σε ένα κανάλι ή σε όλα τα κανάλια την ίδια στιγμή. Βασικές μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για την φασματική ανάλυση είναι ο μετασχηματισμός Fourier (κεφάλαιο 2), αυτοπαλινδρομικά ή πολυμεταβλητά αυτοπαλινδρομικά παραμετρικά μοντέλα (κεφάλαιο) και χρόνο συχνοτική ανάλυση που πραγματοποιείται με τον μετασχηματισμό Gabor, τον συνεχή μετασχηματισμό wavelet, τον Hilbert μετασχηματισμό κ.α.

1.6.1 Ανάλυση ανά κανάλι

Η εκτίμηση της φασματικής ενέργειας είναι από τις πιο κοινές μεθόδους ανάλυσης ΗΕΓ. Παρέχεται η πληροφορία που αφορά τους ρυθμούς που παρουσιάζονται στα σήματα, καθώς είναι εύκολη με μηδενικό υπολογιστικό κόστος κατά την εφαρμογή του γρήγορου μετασχηματισμού Fourier. Επίσης, μπορεί να γίνει ο υπολογισμός της φασματικής ενέργειας μέγιστης εντροπίας με την χρήση αυτοπαλινδρομικών μοντέλων, κάτι που επίσης συνιστάται για ανάλυση ΗΕΓ. Οι παράμετροι που ορίζουν το αυτοπαλινδρομικό μοντέλο δείχνουν άμεσα τις συχνότητες και το αντίστοιχο πλάτος του ρυθμού δίχως την απεικόνιση του φάσματος. Οι παράμετροι παρέχουν πληροφορίες για κάθε έναν ρυθμό, το οποίο είναι αρκετά χρήσιμο για την μοντελοποίηση των ΗΕΓ χρονοσειρών [Wright, 1989]. Έχειδειχτεί ότι η συνάρτηση μεταφοράς του αυτοπαλινδρομικού μοντέλου δεν διαφέρει σημαντικά από την συνάρτηση μεταφοράς από ένα βιολογικό μοντέλο παραγωγής ρυθμών ΗΕΓ [Blinowska and Franaszczuk, 1989].

Επιπλέον, η φασματική ανάλυση των ΗΕΓ ανά κανάλι βρίσκει εφαρμογή στον εντοπισμό αλλαγών στους ρυθμούς των ΗΕΓ ύστερα από χορήγηση ψυχοδραστικών ή αντί-επιληπτικών φαρμάκων. Ακόμη, η αξιολόγηση της αποδοτικότητας των φαρμακευτικών φαρμάκων μπορεί να γίνει από την μεταβολή των χαρακτηριστικών των συχνοτικών μπαντών δια μέσου του υπολογισμού της φασματικής ενέργειας. Λόγου χάριν, ο υπολογισμός του μέσου της φασματικής ενέργειας για κάθε συχνοτική μπάντα είναι ένας χρήσιμος διαγνωστικός δείκτης της κατάθλιψης [Cook et al., 2009].

1.6.2 Ανάλυση σε πολλαπλά κανάλια

Απεικόνιση. Μια από τις πιο συνηθισμένες μεθόδους απεικόνισης των καναλιών στο σύνολο τους είναι η τοπογραφική παρουσίαση κάποιου χαρακτηριστικού των σημάτων. Η τοπογραφική απεικόνιση των σημάτων είναι χρήσιμο εργαλείο για την άμεση σύγκριση μεταξύ των συνθηκών που υπόκεινται σε ένα σύνολο υποκειμένων ή την σύγκριση μεταξύ φυσιολογικών με ασθενείς ώστε να φανούν οι διαφορές για κάποιο χαρακτηριστικό μέγεθος. Οι περισσότερες κοινές απεικονίσεις για ιατρικές εφαρμογές είναι η μελέτη του πλάτους των σημάτων, ο μετασχηματισμός των σημάτων στο χώρο των συχνοτήτων και ο υπολογισμός της φασματικής ενέργειας και τις σχετικής φασματικής ενέργειας ανά

μπάντα και στατιστικά αποτελέσματα που αφορούν συγκεκριμένα χαρακτηριστικά των ΗΕΓ σημάτων.

Η τοπογραφική απεικόνιση συχνά χρησιμοποιείται για την παρουσίαση συγκρίσεων μεταξύ πολλών ομάδων σε διαφορετικούς χρόνους π.χ οι αλλαγές που εντοπίζονται ύστερα από μια φαρμακευτική αγωγή. Οι συγκρίσεις των απεικονίσεων γίνεται συχνά με την χρήση του z-score μετασχηματισμού, οποίος ορίζεται ως $Z = \frac{X - \bar{X}}{\sigma_x}$ όπου είναι η μεταβλητή για κάθε άτομο, \bar{X} είναι ο μέσος του συνόλου και σ_x είναι η τυπική απόκλιση του συνόλου. Επίσης, για την σύγκριση μεταξύ των ομάδων χρησιμοποιείται και t-στατιστικός έλεγχος το οποίο προϋποθέτει οι μεταβλητές να είναι από κανονική κατανομή και η διασπορά τους να είναι ίση για κάθε ομάδα. Για τον μετασχηματισμό των κατανομών σε κανονικές μπορεί να γίνει χρήση του Box-Cox μετασχηματισμού [Box and Cox, 1964]. Στην περίπτωση όπου η διακύμανση των συνόλων είναι διαφορετική μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο Welch έλεγχος [Welch, 1947]. Τέλος, για μεταβλητές που δεν μπορούν να μετασχηματιστούν σε μεταβλητές κανονικής κατανομής, καθώς οι διακυμάνσεις είναι άνισες μεταξύ τους, χρησιμοποιούνται μη παραμετρικοί στατιστικοί έλεγχοι (Wilcoxon test, Kruskal–Wallis test κ.α) [Wilcoxon, 1945; Kruskal and Wallis, 1952]

Μέτρηση εξάρτησης μεταξύ ΗΕΓ σημάτων. Η εξάρτηση μεταξύ δύο ΗΕΓ σημάτων μπορεί να υπολογιστεί μέσω της συνάρτησης ετεροσυσχέτισης στο πεδίο του χρόνου· αντίστοιχα και η συνάφεια στο πεδίο των συχνοτήτων. Η ανάλυση των διασυνδέσεων μεταξύ των ΗΕΓ σημάτων εκτιμάται κατά κύριο λόγο στο πεδίο των συχνοτήτων πάρα στο χρονικό, διότι παρέχεται η πληροφορία του συγχρονισμού των συχνοτικών ρυθμών μεταξύ των σημάτων. Ο υπολογισμός της συνάφειας μας δείχνει την αλληλεξάρτηση μεταξύ δυο καναλιών και χρησιμοποιείται για ΗΕΓ καθώς και για ERP μελέτες. Παρόλα αυτά, η εκτίμηση της διμεταβλητής συνάφειας συχνά δεν συμφωνεί με τις πραγματικές αλληλεπιδράσεις των ΗΕΓ σημάτων και γι' αυτό συνιστάται για τις συγκεκριμένες αναλύσεις η χρήση της μερικής πολυμεταβλήτης συνάφειας [Franaszczuk et al., 1985].

Η μερική συνάφεια εκτιμά μόνο τις κατευθυνόμενες διασυνδέσεις μεταξύ των καναλιών, μια αρκετά επιλεκτική πληροφορία που αφορά το πραγματικό δίκτυο των εγκεφαλικών περιοχών. Ο υπολογισμός της συνήθους, μερικής και της πολυμεταβλητής συνάφειας μπορεί να επιτευχθεί στα πλαίσια των πολυμεταβλητών αυτοπαλινδρομικών μοντέλων. Τα μέτρα που έχουν αναπτυχθεί για την ανίχνευση των άμεσων κατευθυνόμενων μοντέλων βάσει των αυτοπαλινδρομικών μοντέλων βασίζονται στην εκτίμηση της Granger αιτιότητας το οποίο είναι ο δείκτης κατευθυνόμενης συνάρτησης μεταφοράς (Directed transfer function (DTF)) [Kaminski and Blinowska, 1991] και η μερική κατευθυνόμενη συνάφεια (Partial directed coherence (PDC)) [Baccala, 2004]. Οι δείκτες DTF και PDC βασίζονται στην διαφορά των φάσεων μεταξύ καναλιών, που σημαίνει ότι έχουν μη μηδενικές τιμές μόνο όταν υπάρχει διαφορά των φάσεων μεταξύ των καναλιών. Επίσης, αυτοί οι δείκτες προσπερνούν το πρόβλημα της χωρικής αγωγιμότητας (volume conduction) λόγω της μηδενικής φάσης των πηγών. Στην πράξη επηρεάζονται οι δείκτες για μεγάλα επίπεδα θορύβου στο σήματα, ωστόσο δεν επηρεάζουν σημαντικά τα αποτελέσματα σε σχέση με τις άλλες μεθόδους.

Κεφάλαιο 2

Ανάλυση Σήματος

2.1 Εισαγωγή στον διακριτό μετασχηματισμό Fourier

Ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier (ΔMF) είναι ένα από τα πιο διαδεδομένα και χρήσιμα εργαλεία, πάνω στο πεδίο των διακριτών (ψηφιακών) σημάτων. Ψηφιακά σήματα εννοούμε την διακριτοποίηση των αντίστοιχων αναλογικών σημάτων. Στην ουσία, παίρνουμε για μια χρονική στιγμή μια συγκεκριμένη πληροφορία που μας ενδιαφέρει και με τον διακριτό μετασχηματισμό Fourier μπορούμε να αντλήσουμε από το σήμα περαιτέρω πληροφορίες πάνω στο πεδίο των συχνοτήτων.

Ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier είναι μια μαθηματική έκφραση που ουσιαστικά μας μεταφέρει από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο των συχνοτήτων. Ο ΔMF προέρχεται φυσικά από τον συνεχή μετασχηματισμό Fourier που ορίζεται ως [Lyons, 2004; Chararro, 2011]:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i2\pi ft} dt \quad (2.1)$$

όπου $x(t)$ είναι ένα συνεχές σήμα (αναλογικό) στο πεδίο του χρόνου. Από την παραπάνω σχέση είμαστε σε θέση να εκφράσουμε οποιοδήποτε φυσικό σήμα στον χώρο συχνοτήτων, πράγμα που καθιστά τον μετασχηματισμό Fourier ένα πολύ εύχρηστο εργαλείο στο πεδίο της μηχανικής αλλά και της φυσικής.

Τέλος, εξίσου χρήσιμος είναι και ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier, όπου γίνεται η αντίστροφη διαδικασία που προαναφέραμε και ορίζεται ως :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(f)e^{i2\pi ft} df \quad (2.2)$$

Έχοντας εν γνώση τους συνεχείς μετασχηματισμούς Fourier που μπορούμε να κάνουμε ανάλυση σε ένα αναλογικό σήμα, μπορούμε να γράψουμε την παραπάνω έκφραση σε μορφή αναπτύγματος μια σειράς για ένα διακριτό χρονικό πεδίο, που αντίστοιχα ορίζεται ως εξής:

$$X(m) = \sum_{n=1}^{N-1} x(n)e^{\frac{i2\pi nm}{M}} \quad (2.3)$$

όπου το $x(n)$ είναι το διακριτό (ψηφιακό) σήμα στο πεδίο του χρόνου στο διακριτό χρονικό διάστημα $0, 1, 2, \dots, N - 1$. Η αντίστοιχη τιμή στο συνεχές φάσμα ήταν το $x(t)$

Επίσης, η παραπάνω έκφραση του διακριτού μετασχηματισμού Fourier γράφεται σύμφωνα με τον τύπου Euler, όπου έχουμε την εναλλακτική διατύπωση του διακριτού μετασχηματισμού ως:

$$X(m) = \sum_{n=1}^{N-1} x(n) \left(\cos \left(\frac{2\pi nm}{N} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi nm}{N} \right) \right) \quad (2.4)$$

όπου m και n είναι οι τιμές των συχνοτήτων και του χρονικού πεδίου αντίστοιχα και παίρνουν τις τιμές $0, 1, 2, \dots - 1$. Επίσης, σημαντικός είναι ο παράγοντας m οποίος μας δείχνει το διάστημα του χρόνου καθώς και των συχνοτήτων. Αν παραδείγματος χάρη έχουμε ένα σήμα που η συχνότητα του αλλάζει σε διαφορετικές χρονικές στιγμές και δεν εμπλέκονται μεταξύ τους κατά την διάρκεια του χρόνου, τότε για να μπορέσουμε να δούμε όλες τις δυνατές συχνότητες του σήματος πρέπει να εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό Fourier στο διάστημα $(0, N)$, έτσι ώστε να εντοπίσουμε όλες τις δυνατές συχνότητες του σήματος.

Το μέγεθος (m) από την σχέση (2.4) αποτελείται από έναν μιγαδικό αριθμό κι αποτελείται από ένα πραγματικό και ένα φανταστικό μέρος, το μέγεθος, όμως, που συνήθως μας ενδιαφέρει στην ανάλυση Fourier είναι η απόλυτη τιμή του (m) , που συμβολίζεται:

$$X_{mag}(m) = |X(m)| = \sqrt{X_{real}^2 + X_{Imag}^2} \quad (2.5)$$

Επίσης ένα άλλο ενδιαφέρον μέγεθος στην ανάλυση κατά Fourier είναι η φάση (phase) του $X(m)$ που είναι η γωνία που σχηματίζει το $X_{mag}(m)$ στο μιγαδικό επίπεδο και ορίζεται ως:

$$X_{Phase}(m) = \arctan \left(\frac{X_{Imag}}{X_{Real}} \right) \quad (2.6)$$

Τα μεγέθη των εξισώσεων (2.5) και (2.6) περιγράφουν τους παράγοντες πλάτους συχνοτήτων της εκθετικής έκφρασης:

$$X(m) = X_{mag} e^{-iX_{phase}} \quad (2.7)$$

Τέλος ένα σημαντικό μέγεθος είναι η ενέργεια του $X(m)$, που αναφέρεται και ως φασματική ενέργεια (power spectrum) και εκφράζεται ως:

$$X_{ps}(m) = X_{mag}^2 = X_{Real}^2 + X_{Imag}^2 \quad (2.8)$$

Η φασματική ενέργεια συνήθως αναπαρίσταται με την διαφορά της σε λογαριθμική κλίμακα που η μονάδα μέτρησης είναι τα dB, το οποίο το χρησιμοποιούμε κατά την ανάλυση φίλτρων. Ένα *bel* σημαίνει ότι η ενέργεια του σήματος αλλάζει κάθε φορά στο πεδίο των συχνοτήτων κατά ένα παράγοντα 10 και εκφράζεται από:

$$X_{dB} = 10 \times \log \left(\frac{X_{ps}(m)}{\max(X_{ps}(m))} \right) \quad (2.9)$$

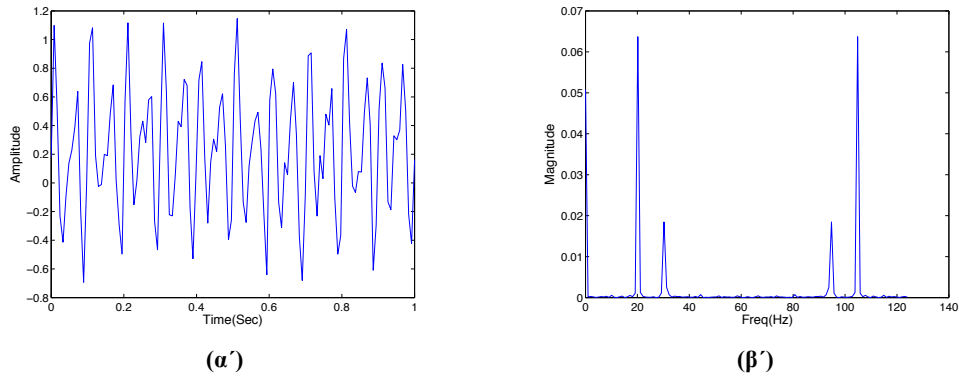
2.1.1 Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier

Συμμετρία μετασχηματισμών Fourier

Κοιτώντας την εικόνα 2.1 όπου έχει γίνει μετασχηματισμός Fourier στο σήμα $x(t) = 0.5\sin(2\pi t20) + 0.2\cos(2\pi t30)$ παρατηρούμε μια συμμετρία στον μετασχηματισμό Fourier, ενώ μελετώντας προσεκτικά την εικόνα βλέπουμε ότι ο άξονας συμμετρίας είναι το μέσο του άξονα συχνοτήτων. Το πλάτος συχνότητας (magnitude) δηλαδή, στο πρώτο σημείο είναι ίσο με το πλάτος συχνότητας στο N-1 σημείο. Γενικά, μπορούμε να πούμε ότι $X_{mag}(m) = X_{mag}(N - m)$, αυτή η ιδιότητα προκύπτει από:

$$\begin{aligned}
 X_{mag}(N - m) &= |X(N - m)|^2 = X(N - m)X^*(N - m) = \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-i2\pi n(N-m)/N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{i2\pi n(N-m)/N} = \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{i2\pi nm/N} e^{i2\pi n} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-i2\pi nm/N} e^{-i2\pi n} = \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{i2\pi nm/N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-i2\pi nm/N} = X(m)X^*(m) = X_{mag}(m)
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Από την παραπάνω ιδιότητα, συμπεραίνουμε ότι κατά την ανάλυση Fourier μπορούμε να επιλέξουμε οποιοδήποτε φάσμα συχνοτήτων, αλλά οι συχνότητες που θα μας δώσουν την ουσιαστική πληροφορία θα είναι στον μισό άξονα συχνοτήτων.



Σχήμα 2.1: Μετασχηματισμός Fourier ενός συντονικού σήματος $x(t) = 0.5\sin(2\pi t20) + 0.3\cos(2\pi t30)$ (α') συχνοτήτων $20Hz$ και $30Hz$, παρατηρείτε η συμμετρία του μετασχηματισμού Fourier ως προς τον άξονα συμμετρίας που βρίσκεται στα $50Hz$ (β').

Παραδείγματος χάρη, αν θέλουμε να εντοπίσουμε μια συχνότητα που βρίσκεται μεταξύ $0 - 50Hz$ θα πρέπει να κάνουμε ανάλυση Fourier μέχρι τα $100Hz$ ώστε ο άξονας συμμετρίας να βρίσκεται στα $50Hz$ και έτσι να είναι δυνατός ο εντοπισμός κορυφών στο πρώτο διάστημα συμμετρίας. Από την συμμετρία του μετασχηματισμού Fourier θα εμφανιστούν οι αντίστοιχες κορυφές στο δεύτερο μισό διάστημα συμμετρίας, όπου δεν δίνουν καμία επιπλέον πληροφορία στην ανάλυση μας. Με αυτή την ιδιότητα του μετασχηματισμού μπορούμε να εξοικονομήσουμε χρόνο υπολογισμού και χώρο δεδομένων, καθώς έχουμε μια επικεντρωμένη ανάλυση στις συχνότητες που μας ενδιαφέρουν και, επομένως, ταχύτερο υπολογισμό τους. Από την άλλη, πρέπει να προσέχουμε και τον παράγοντα N, δηλαδή τον αριθμό των σημείων που κάνουμε την ανάλυση και που είναι άμεσα συνδεδεμένος με το εύρος συχνοτήτων, διότι, αν είναι μικρός, θα χάσουμε πληροφορία στην ανάλυση (resolution) των πλατών συχνοτήτων.

Γραμμικότητα του μετασχηματισμού Fourier

Σημαντική ιδιότητα που ικανοποιεί ο μετασχηματισμός Fourier είναι η γραμμικότητα, διότι μας επιτρέπει να κάνουμε τον μετασχηματισμό σε ένα άθροισμα σημάτων και να έχουμε το άθροισμα των πλατών στο πεδίο των συχνοτήτων. Δηλαδή, στην περίπτωση που έχουμε δυο σήματα $x_1(n)$ και $x_2(n)$ που το άθροισμα τους $x_{sum}(n)$, ο μετασχηματισμός Fourier του αθροίσματος θα είναι:

$$X_{sum}(m) = X_1(m) + X_2(m) \quad (2.11)$$

Η ιδιότητα αυτή προκύπτει από τον ορισμό του μετασχηματισμού (2.3) ως εξής:

$$\begin{aligned} X_{sum}(m) &= \sum x_{sum}(n)e^{-j2\pi mn/N} = \sum [x_1(n) + x_2(n)]e^{-j2\pi mn/N} = \\ &= \sum x_1(n)e^{-j2\pi mn/N} + \sum x_2(n)e^{-j2\pi mn/N} = X_1(m) + X_2(m) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Η ιδιότητα της γραμμικότητας παρατηρείται επίσης στην εφαρμογή στην εικόνα 2.1, όπου το αρχικό μας σήμα είναι μια επαλληλία δύο συνημίτονων και το τελικό αποτέλεσμα, ύστερα από μετασχηματισμό Fourier, είναι η άθροιση των δύο πλατών συχνοτήτων στο τελικό διάγραμμα.

Επιπλέον, χωρίς την ιδιότητα της γραμμικότητας οι μετασχηματισμοί Fourier θα ήταν ένα μη χρήσιμο εργαλείο το οποίο θα εφαρμόζαμε για την ανάλυση μοναχά ενός αρμονικού σήματος. Όμως, τα πραγματικά σήματα που είμαστε σε θέση να αναλύσουμε αποτελούνται από μία επαλληλία πολλών αρμονικών σημάτων, όπου η γραμμικότητα καθιστά τον μετασχηματισμό Fourier απαραίτητο.

Χρονική Μετατόπιση

Κάνοντας σε κάποιο σήμα μετατόπιση στον χρόνο η συχνότητα και το πλάτος συχνοτήτων δεν επηρεάζονται. Το μόνο που επηρεάζεται από τον μετασχηματισμό Fourier είναι η φάση του σήματος. Έστω, ότι έχουμε ένα σήμα $x(n)$ και του εφαρμόζουμε μια χρονική μετατόπιση k , όπου το σήμα θα γράφεται ως $x(n - k)$. Τότε το πλάτος συχνοτήτων γίνεται:

$$\begin{aligned} X(m) &= \sum_n x(n - k)e^{-j2\pi mn/N} = \sum_z x(z)e^{-j2\pi m(k+z)/N} = \\ &= \sum_z x(z)e^{-j2\pi mz/N} e^{-j2\pi mk/N} = e^{-j2\pi mk/N} \sum_z x(z)e^{-j2\pi mz/N} = \\ &= X(m)e^{-j2\pi mk/N} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Από την παραπάνω απόδειξη φαίνεται ξεκάθαρα πώς επηρεάζει η χρονική μετατόπιση τον μετασχηματισμό, αλλά το μόνο που «αλλοιώνεται» είναι η φάση του μετασχηματιζόμενου σήματος.

Η ιδιότητα αυτή της μετατόπισης του χρόνου χωρίς να αλλοιώνει τις συχνότητες του σήματος μας επιτρέπει να κάνουμε ανάλυση των συχνοτήτων συναρτήσει του χρόνου. Αυτή, δηλαδή, η χρήσιμη ιδιότητα μας επιτρέπει να εντοπίσουμε ποιο είναι το χρονικό πεδίο που αναλογεί για μια από τις συχνότητες του σήματος και έτσι να κάνουμε μια χρονικό-συνολική ανάλυση του σήματος.

Μετατόπιση συχνότητας

Όπως με την χρονική μετατόπιση έτσι και με την μετατόπιση συχνότητας μπορούμε να μετακινήσουμε τις συχνότητες στον χώρο των συχνοτήτων πολλαπλασιάζοντας με ένα εκθετικό παράγοντα $e^{-j\pi nm/N}$ το αρχικό μας σήμα, έτσι ώστε να κάνουμε μία μετατόπιση κατά στον άξονα των συχνοτήτων.

$$x(n)e^{-j\frac{2\pi nm_0}{N}} \stackrel{F}{\Leftrightarrow} X(m - m_0) \quad (2.14)$$

Η μετατόπιση στον χώρο δεν επηρεάζει το πλάτος των συχνοτήτων, ούτε το πλάτος του εισερχόμενου σήματος, αφού το πολλαπλασιάζουμε με ένα μιγαδικό αριθμό.

Αντιστροφή μετασχηματισμού Fourier

Εξίσου σημαντικό ρόλο στην ανάλυση Fourier έχει και ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier (*IDFT*), που μας μεταφέρει από τον χώρο των συχνοτήτων στον χώρο του χρόνου. Πάνω σε ένα πλάτος συχνοτήτων (m) ορίζεται ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier [Lyons, 2004] ως :

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X(m)e^{j\frac{2\pi mn}{N}} \quad (2.15)$$

Επίσης η παραπάνω σχέση (2.7) γράφεται σύμφωνα με την ταυτότητα Euler:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X(m) \left(\cos\left(\frac{2\pi nm}{N}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi nm}{N}\right) \right) \quad (2.16)$$

Η αντιστροφή αυτή του μετασχηματισμού Fourier μας δείχνει από τι αποτελείται το εισερχόμενο σήμα. Όπως έχουμε αναφέρει και στα προηγούμενα, το εισερχόμενο σήμα αποτελείται από μία συνισταμένη συχνοτήτων, όπου εκφράζονται από μια σειρά ημιτόνων και συνημίτονων. Για αυτό η παραπάνω εξίσωση (2.8) μας δείχνει τι είναι αυτό που πρόκειται να αναλύσουμε κατά το μετασχηματισμό Fourier. Τέλος ο τύπος αυτός διαφέρει από το μετασχηματισμό Fourier μόνο κατά ένα παράγοντα $1/N$, που σημαίνει ότι το πλάτος συχνοτήτων είναι κατά μεγαλύτερο από το πλάτος του εισερχόμενου σήματος [Lyons, 2004].

$$x_{Amplitude} \sim \frac{1}{N} X_{Magnitude} \quad (2.17)$$

2.1.2 Ταχύς μετασχηματισμός Fourier

Ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier, ως γνωστόν, έχει πολλά προτερήματα κατά την ανάλυση δεδομένων, διότι είναι μια απλή μαθηματική έκφραση. Παρόλα αυτά, όταν έχουμε να κάνουμε ανάλυση σε πραγματικά φυσικά προβλήματα που πρέπει να επεξεργαστούμε εκατοντάδες χιλιάδες δεδομένα, όπως είναι φυσικό, ο αριθμός των πράξεων στον διακριτό μετασχηματισμό Fourier είναι αρκετά μεγάλος και τον καθιστά έναν πολύ αργό αλγόριθμο. Το 1965, από τους Cooley και Tukey δημοσιεύτηκε ένα άρθρο που περιέγραφε έναν εξίσου αποτελεσματικό αλγόριθμο με αυτόν του διακριτού μετασχηματισμού Fourier, άλλα με την διάφορα ότι ήταν αρκετές τάξεις γρηγορότερος. Ο αλγόριθμος αυτός ήταν ο ταχύς μετασχηματισμός Fourier (Fast Fourier transform) [Cooley and Tukey, 1965]. Ο FFT είναι ο πλέον πιο διαδεδομένος αλγόριθμος για να την ανάλυση Fourier και χρησιμοποιείται σε πολλά επιστημονικά πεδία.

Αρχικά, ο FFT αλγόριθμος για να κάνει την ίδια ανάλυση με αυτή του διακριτού μετασχηματισμού πρέπει ο αριθμός των σημείων του να είναι ίσος με την δύναμη του δυο. Παραδείγματος χάρη, αν έχω να κάνω ανάλυση σε 1000 σημεία στον DFT, ο FFT θα πραγματοποιήσει την ίδια ανάλυση σε 1024 σημεία, δηλαδή ο αριθμός των σημείων είναι , όπου k είναι ένας θετικό ακέραιος αριθμός.

Ο αριθμός των πράξεων που πραγματοποιείται κατά τον DFT είναι (N είναι ο αριθμός των σημείων). Δηλαδή, αν έχουμε $N = 32$ σημεία, οι πράξεις που θα πραγματοποιηθούν είναι 1024, ενώ με τον FFT ο αριθμός των πράξεων που θα πραγματοποιηθούν θα είναι γύρω στους $\frac{N}{2} \log_2 N$, δηλαδή αν έχουμε τον ίδιο αριθμό σημείων με το προηγούμενο παράδειγμα, ο αριθμός των πράξεων θα είναι μόνο 80! Η διαφορά των δύο αλγορίθμων είναι αισθητή και για πολύ μικρό αριθμό σημείων που έχουμε δυο τάξεις μεγέθους λιγότερους υπολογισμούς.

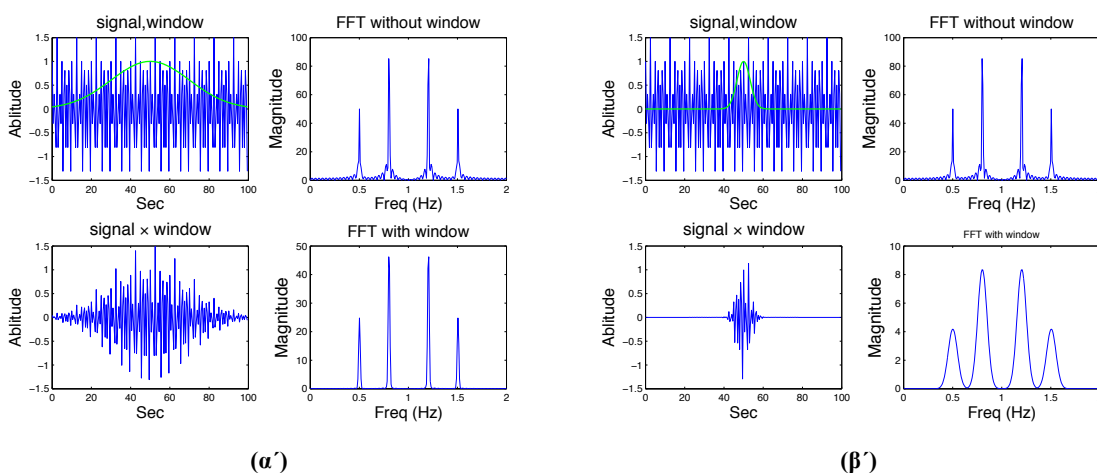
Τέλος, πρέπει να διευκρινίσουμε ότι ο ταχύς μετασχηματισμός Fourier δεν είναι μια εκτίμηση του διακριτού μετασχηματισμού. Οι δυο μετασχηματισμοί ικανοποιούν ακριβώς τις ίδιες ιδιότητες και παράγουν τα ίδια αποτελέσματα.

2.2 Αρχή της Αβεβαιότητας

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, ο μετασχηματισμός Fourier βρίσκει πολλές εφαρμογές στην ανάλυση ψηφιακών σημάτων. Παρόλα αυτά, επειδή κατά την ανάλυση πραγματικών δεδομένων έχουμε να κάνουμε με μία πληθώρα σημάτων που μπορούν να αλλάζουν συχνότητα ανά χρονικά διαστήματα, η ανάλυση στο πεδίο των συχνοτήτων τελικά δεν μας βοηθάει ιδιαίτερα. Συνεπώς, πρέπει να αναπτύξουμε μια άλλη μέθοδο που να βρίσκει λύση σε αυτό το πρόβλημα κάνοντας ταυτόχρονη ανάλυση του πεδίου του χρόνου με το πεδίο των συχνοτήτων.

Για να κάνουμε ανάλυση και στα δύο πεδία, δηλαδή του χρόνου και της συχνότητας, αυτό που πρέπει να κάνουμε είναι να κόψουμε το σήμα μας σε διάφορα κομμάτια που στο καθένα θα αντιστοιχεί μια χρονική περίοδος. Εν συνεχεία, στο κάθε κομμάτι θα εφαρμόσουμε έναν μετασχηματισμό Fourier για να αποκομίσουμε τις διαφορές συχνοτήτες του σήματος για αυτή την χρονική περίοδο του κομματιού. Εν τέλει, θα έχουμε απόκτηση της πληροφορίας του πλάτους συχνοτήτων (magnitude) συναρτήσει του χρόνου και των συχνοτήτων.

Στην εικόνα 2.2 παρουσιάζεται η προαναφερθείσα ανάλυση όπου ένα συνημιτονικό σήμα $x(t) = 0.5 \sin(2\pi t 0.5) + \cos(2\pi t 0.8)$ το οποίο διαχωρίζεται εφαρμόζοντας του παράθυρα (windows). Στην ανάλυση Fourier είναι πολύ διαδεδομένο η χρήση διάφορων παραθύρων, διότι το κάθε παράθυρο έχει και διαφορετικές ιδιότητες ανάλογα με την ανάλυση που επιθυμούμε να κάνουμε.



Σχήμα 2.2: Ανάλυση Fourier σε ένα άθροισμα συνημιτονικών σημάτων $x(t) = 0.5 \sin(2\pi t 0.5) + \cos(2\pi t 0.8)$ στο οποίο εφαρμόζεται ένα Gaussian Window, που στην (α') έχει τυπική απόκλιση 0.05 και στην (β') περίπτωση είναι 0.3.

Κοιτώντας την εικόνα 2.2, όπου έχουμε δυο περιπτώσεις διαχωρισμού σήματος με ένα Gaussian παράθυρο, παρατηρούμε ότι στην πρώτη περίπτωση που έχουμε ένα πλατύ παράθυρο υπάρχει μια καλύτερη προσέγγιση στις συχνότητες, ενώ δεν έχουμε καθόλου καλή ανάλυση στον χρόνο. Ωστόσο, στην δεύτερη περίπτωση, που έχουμε ένα μικρού μήκους παράθυρο (που σημαίνει ότι έχουμε καλύτερη ανάλυση στο πεδίο του χρόνου), χάνουμε από ακρίβεια στο πεδίο των συχνοτήτων. Γενικά, παρατηρούμε ότι όσο αυξάνουμε την ακρίβεια στον χρόνο, τόσο χάνουμε σε ακρίβεια στο πεδίο των συχνοτήτων και αντίστροφα.

Αυτό συμβαίνει λόγω της αρχής της αβεβαιότητας, που στην κβαντομηχανική αναφέρει ότι δεν μπορούμε να μετρήσουμε ταυτόχρονα την θέση και την ορμή ενός σωματιδίου. Το αντίστοιχο συμβαίνει εδώ για τον χρόνο και τις συχνότητες, δηλαδή :

$$\Delta t \cdot \Delta f \geq 1 \quad (2.18)$$

Όπου Δt και Δf είναι η τυπική απόκλιση του χρόνου και της συχνότητας αντίστοιχα.

2.3 Μετασχηματισμός Gabor

Επειδή ο μετασχηματισμός Fourier το μόνο που μπορεί κάνει είναι να μας μεταφέρει από το χρονικό πεδίο στο πεδίο των συχνοτήτων, πολλές φορές συναντάται το πρόβλημα το οποίο αναφέρεται στο χρονικό πεδίο όπου αντιστοιχεί η ενδιαφερόμενη συχνότητα. Η short time Fourier transformation [Gabor, 1947] είναι η μέθοδος που αντιμετωπίζει το προαναφερόμενο πρόβλημα ώστε εν τέλει να έχουμε μια σαφή εικόνα στα πεδία των συχνοτήτων και του χρόνου. Ο Gabor τροποποίησε το πυρήνα (*kernel*) του μετασχηματισμού Fourier και τον αντικατέστησε με τον ακόλουθο πυρήνα:

$$g_{t,f}(\tau) = e^{i2\pi f t} g(\tau - t) \quad (2.19)$$

Ο καινούργιος όρος στον πυρήνα του Fourier είναι ο όρος $g(\tau - t)$, με σκοπό να εντοπίζει συχνότητες σε ένα χρονικό πεδίο. Συνήθως, την συνάρτηση $g(\tau - t)$ τη συναντούμε και ως χρονικά παράθυρα (time-windows). Τέλος, ορίζουμε τον μετασχηματισμό Gabor ως εξής [Gabor, 1947]:

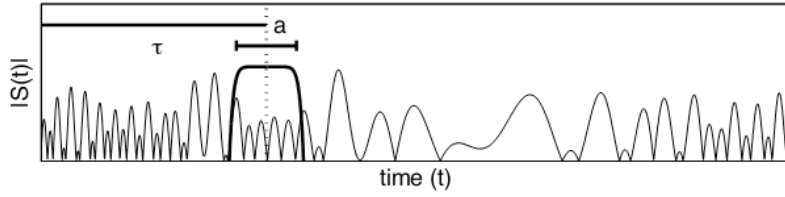
$$X_g(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) g^*(\tau - t) e^{-i2\pi f \tau} d\tau \quad (2.20)$$

Στην εικόνα 2.3 φαίνεται η λειτουργία του μετασχηματισμού Gabor σε ένα σήμα που μεταβάλλεται η συχνότητά του στο χρονικό πεδίο. Ένα παράθυρο πλάτους α κινείται κατά μήκος του σήματος αλλάζοντας το κέντρο τ του παραθύρου. Καθώς γίνεται η χρονική ανάλυση του σήματος, αποσπούμε τις συχνότητές του που εμπεριέχονται μέσα στο παράθυρο. Με αυτόν τον τρόπο, ξέρουμε ποια συχνότητα αντιστοιχεί σε μια χρονική περίοδο που μπορούμε να ελέγξουμε από το πλάτος του χρονικού παραθύρου.

Παρακάτω θα αναφέρουμε κάποιες από τις πιο σημαντικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Gabor [Kutz, 2012]:

- 1) Η διατήρηση στην μετατόπιση στον χρόνο και στις συχνότητες, που είναι

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) e^{-i2\pi f_0 t} \Rightarrow X_g(t, f) = X_g(t, f - f_0) \\ y(t) &= x(t - t_0) \Rightarrow X_g(t, f) = X_g(t - t_0, f) e^{j2\pi t_0 f} \end{aligned} \quad (2.21)$$



Σχήμα 2.3: Γραφική αναπαράσταση του μετασχηματισμού Gabor που αποσπάμε τις συνιστώσες του χρόνου και της συχνότητας ενός $S(t)$ σήματος. Επίσης, το χρονικό παράθυρο $g(\tau-t)$ με κέντρο στο τ και πλάτος α [Nathan Kutz, Computational Methods for Data Analysis, σελ 224].

2) Διατήρηση της γραμμικότητας

$$X_g[a(t_1, f_1) + b(t_2, f_2)] = aX_g(t_1, f_1) + bX_g(t_2, f_2) \quad (2.22)$$

3) Διατήρηση της συμμετρίας στον χώρο των συχνοτήτων που συμβαίνει διότι η νόρμα του χρόνο-παραθύρου ισούται με 1, δηλαδή $\|g(t - \tau)\| = 1$

4) Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Gabor ορίζεται ως :

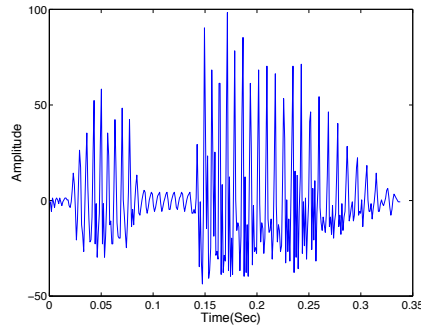
$$x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\|g\|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} X_g^*(t, f) g(\tau - t) e^{i2\pi ft} df dt \quad (2.23)$$

Κάνοντας ανάλυση κατά *Gabor*, σημαντικός παράγοντας είναι η χρονική ανάλυση του σήματος, που είναι άμεσα εξαρτημένος από την ακρίβεια των συχνοτήτων. Όπως έχουμε προαναφέρει, όσο περισσότερη ακρίβεια στον χρόνο κερδίζουμε, τόση ακρίβεια στις συχνότητες χάνουμε, λόγω της αρχής της αβεβαιότητας. Συνεπώς, δεν μπορούμε να έχουμε ένα πολύ μικρό σε πλάτος χρονικό παράθυρο, διότι θα χάσουμε ακρίβεια στις συχνότητες, άλλα ούτε ένα πολύ μεγάλο σε πλάτος χρονικό παράθυρο (καλύτερη ακρίβεια στις συχνότητες), γιατί θα χάσουμε από την ανάλυση στον χρόνο. Γι' αυτό, αρχικά κατά την ανάλυση σήματος κάνουμε διάφορες δοκιμές ως προς το ποιο είναι το πιο κατάλληλο σε μέγεθος παράθυρο, ώστε να έχουμε την επιθυμητή ακρίβεια στις συχνότητες. Για να βελτιώσουμε την ακρίβεια στον χρόνο προσπαθούμε να έχουμε μεγάλη αλληλοεπικάλυψη των χρονικών παραθύρων. Αυτό έχει ως συνέπεια να καθυστερεί ο αλγόριθμος και να χρειαζόμαστε περισσότερη χρονική διάρκεια ανάλυσης, το αποτέλεσμα όμως θα είναι σίγουρα κατά πολύ πιο βελτιωμένο και ακριβές.

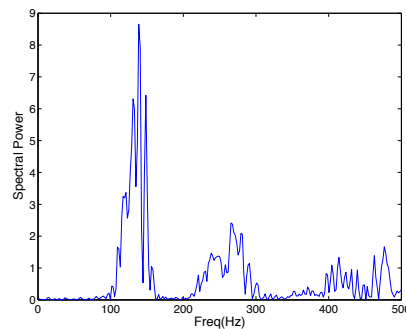
Ας δούμε τον μετασχηματισμό Gabor στην εφαρμογή κάνοντας ένα παράδειγμα. Στην εικόνα 2.4 έχουμε ηχογραφήσει την λέξη 'GABOR' [Σήμα από τη βάση δεδομένων του Matlab] σε 338 σημεία με δειγματοληπτική συχνότητα 1 KHz.

Στην συνέχεια, κάναμε μια ανάλυση στον χώρο των συχνοτήτων, όπου συμπεράναμε ότι δεν είμαστε σε θέση να αποφανθούμε για το ποιες συχνότητες αντιστοιχούν σε κάθε συλλαβή της λέξης. Το μόνο που μπορούμε να πούμε είναι ότι έχουμε μία κορυφή γύρω από την συχνότητα των 140 Hz.

Κάνοντας ανάλυση κατά Gabor στο φωνητικό σήμα, χρησιμοποιώντας ένα Gaussian χρονικό παράθυρο με συνολικό πλάτος 75 σημείων και μία αλληλοεπικάλυψη παραθύρων 87%, παίρνουμε την εικόνα 2.5. Το πλάτος του παραθύρου είναι κατά 4.5 φορές μικρότερο σε σχέση με το σύνολο των σημείων, που σημαίνει ότι έχουμε καλή ακρίβεια στις συχνότητες παρόλα αυτά όμως έχουμε και καλή ακρίβεια στον χρόνο όπως φαίνεται και στην εικόνα 1.2 και αυτό συμβαίνει διότι έχουμε μια υψηλή αλληλοεπικάλυψη παραθύρων.



(α')



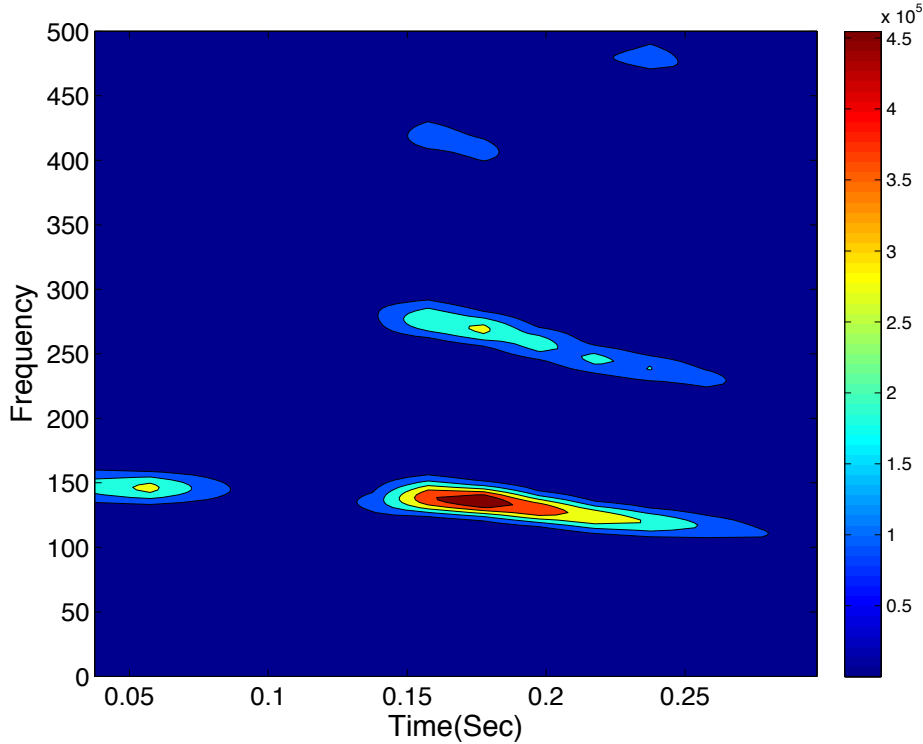
(β')

Σχήμα 2.4: Φωνητικό σήμα που αντιστοιχεί στην λέξη ‘GABOR’ [Σήμα από τη βάση δεδομένων του υπολογιστικού πακέτου TFA]. Το (α') διάγραμμα είναι το χρονικό σήμα και το (β') είναι η φασματική πυκνότητα ενέργειας.

Τέλος, στην εικόνα 2.5 έχουμε μια πιο ξεκάθαρη εικόνα στο πεδίο του χρόνου και των συχνοτήτων. Τώρα μπορούμε να θέσουμε τις συχνότητες στα διάφορα χρονικά διαστήματα. Δηλαδή, στο διάστημα των $30 - 60\text{msec}$ που αντιστοιχεί η συλλαβή ‘GA’ οι συχνότητες είναι γύρω στα 150Hz και στο διάστημα των $150 - 250\text{msec}$ που αντιστοιχεί η δεύτερη συλλαβή ‘BOR’ οι συχνότητες είναι γύρω στα $110 - 150\text{Hz}$.

2.4 Μέθοδος Multitaper

Όπως είδαμε και στην προηγούμενη παράγραφο, για να κάνουμε μια φασματική ανάλυση των δεδομένων πολλαπλασιάζαμε το σήμα με ένα παράθυρο (taper) και στην συνέχεια, υστέρη από ένα μετασχηματισμό Fourier, παίρναμε την συχνότητα που αντιστοιχούσε. Ανάλογα με την αλληλοεπικάλυψη των παραθύρων παίρναμε μια εικόνα των συχνοτήτων στο χρονικό πεδίο. Όμως, η ανάλυση που έχουμε πραγματοποιήσει μέχρι στιγμής γίνεται μόνο με ένα παράθυρο (taper), όπως είναι αυτό του Gauss, Hamming, Hanning και άλλα πολλά. Αντίθετα, στην μέθοδο Multitaper [Thomson, 1982] χρησιμοποιούνται για παράθυρο οι συναρτήσεις Slepian ή οι διακριτές σειρές prolate Spheroidal (DPSS) [Slepian and Pollak, 1961], οι οποίες είναι ορθογώνιες συναρτήσεις. Οι Slepian συναρτήσεις χαρακτηρίζονται από την παράμετρο W την οποία αποκαλούμε παράμετρο “εύρος ζώνης” (bandwidth). Αυτή σχετίζεται με το εύρος ζώνης συχνοτήτων της συνάρτησης και συνδυάζοντάς τη με το μήκος του σήματος μπορούμε να υπολογίσουμε τον αριθμό των συναρτήσεων-παραθύρων που μπορούμε να εφαρμόσουμε στο σήμα. Αν W είναι το εύρος ζώνης των συχνοτήτων και N το μήκος του σήματος, μπορούμε να κάνουμε ανάλυση με $2NW$ Slepian συναρτήσεις, όπου θα έχουμε ένα κάλο φασματικό υπολογισμό των συχνοτήτων στο διάστημα $[-W, W]$. Μπορούμε, δηλαδή, να χρησιμοποιήσουμε ως



Σχήμα 2.5: Φασματική ανάλυση του φωνητικού σήματος κάνοντας χρήση του μετασχηματισμού Gabor στα πεδία του χρόνου και της συχνότητας.

παράθυρα $W_k(t) \{k = 1, 2, \dots, 2NW, t = 1, 2, \dots, N\}$ DPSS συναρτήσεις της εικόνας (1.6). για την εκτίμηση των συχνοτήτων στο σήμα, οι οποίες ορίζονται από την σχέση [Slepian and Pollak, 1961]

$$W_n(k) = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin \frac{\pi(n+1)(k+1)}{N+1} \quad (2.24)$$

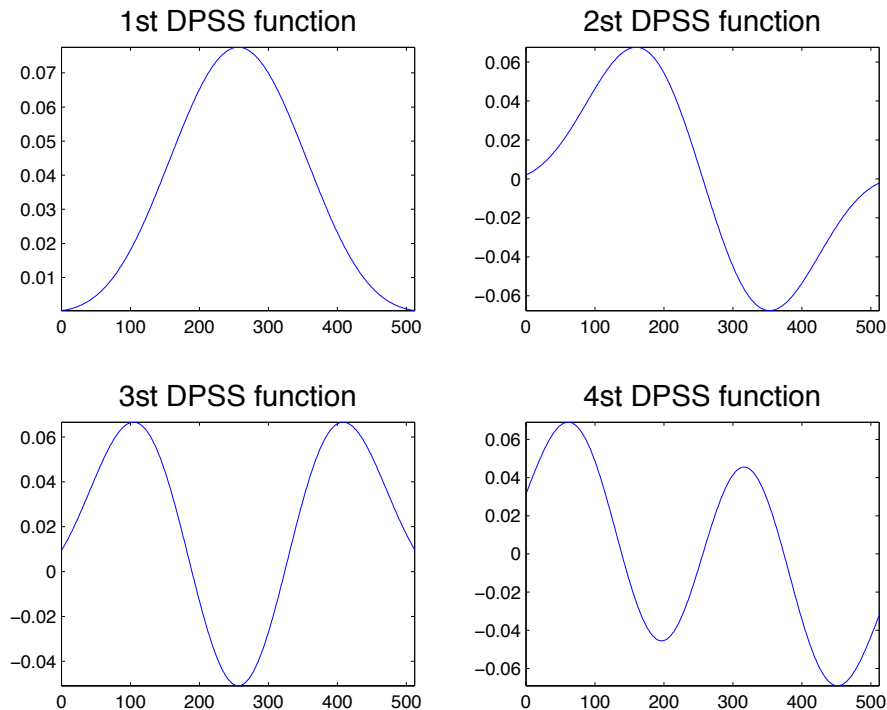
Σημαντικό, για την ανάπτυξη της Multitaper μεθόδου είναι η κατάλληλη επιλογή του αριθμού των Slepian συναρτήσεων ($2W$), καθώς επίσης και το μέγεθος της παραμέτρου W . Δεν υπάρχει κάποιος συγκεκριμένος τρόπος επιλογής των παραπάνω, παρά αφήνεται στην κρίση του ερευνητή να επιλέξει τις κατάλληλες παραμέτρους για την καλύτερη εκτίμηση των συχνοτήτων. Η επιλογή της "εύρους ζώνης" παραμέτρου W είναι ανάλογη με το πόσο ήπιες (smoothed) θέλουμε τις συχνότητες. Συνήθως, η στρατηγική που ακολουθούμε είναι να ξεκινάμε με μικρό αριθμό $SPSS$ συναρτήσεων (συνήθως 3 ή 4) και στην συνέχεια να τις αυξάνουμε μέχρι την καλύτερη ανάλυση των συχνοτήτων.

Για το υπολογισμό των συχνοτήτων που αντιστοιχούν για κάθε ένα από τα taper $W_t(k)$ για τα δεδομένα $x_t \{t = 1, 2, \dots, N\}$ εφαρμόζουμε ένα μετασχηματισμό Fourier και παίρνουμε το πλάτος που αντιστοιχεί σε κάθε συχνότητα για κάθε taper.

$$X_k(f) = \sum_{i=1}^N W_n(k)x(t)e^{-i2\pi tf} \quad (2.25)$$

Μπορούμε εν συνεχεία να υπολογίσουμε την ενέργεια του σήματος εφαρμόζοντας την εξίσωση (2.25) βρίσκοντας τον μέσο όρο όλων των tapers που χρησιμοποιήσαμε και να παίρνουμε τελικά την σχέση:

$$S_{mt}(f) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K |X_k(f)|^2 \quad (2.26)$$

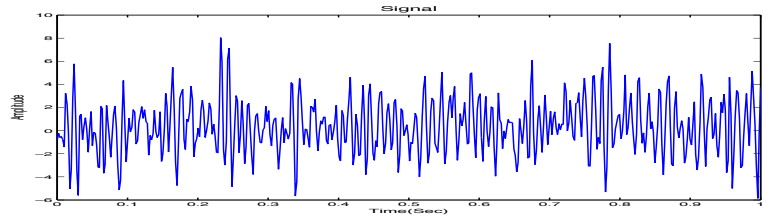


Σχήμα 2.6: Τα τέσσερα πρώτα παράθυρα (tapers) που δημιουργούνται από τις DPSS συναρτήσεις της εξίσωσης (2.24).

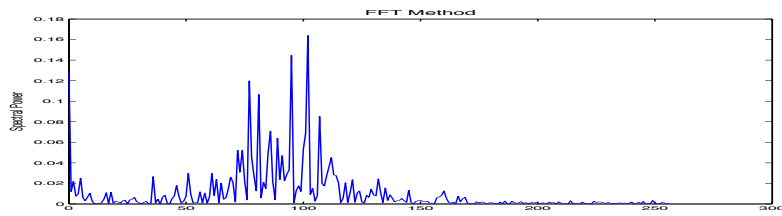
όπου είναι ο αριθμός των taper και είναι η ενέργεια του σήματος υπολογισμένη με την multitaper μέθοδο. Την παραπάνω σχέση μπορούμε να την αναγάγουμε και στο πεδίο του χρόνου βάζοντας τα tapers να κινηθούν στο σήμα και να ακολουθήσουμε την ίδια λογική με τον μετασχηματισμό Gabor.

Για την καλύτερη κατανόηση των προαναφερθέντων μεθόδων, θα συνεχίσουμε με μια εφαρμογή αυτών. Πιο συγκεκριμένα θα αναλύσουμε ένα τεχνητό ηλεκτροεγκεφαλογραφικό (EEG) σήμα (εικόνα 2.7α') κάνοντας χρήση των χρονοσειρών, που είναι και το κεντρικό ενδιαφέρον της εργασίας. Αρχικά θα εντοπίσουμε τις συχνότητες κάνοντας έναν μετασχηματισμό Fourier στα δεδομένα, όπου θα πάρουμε μια μη ξεκάθαρη εικόνα για το πού βρίσκεται η κορυφή των συχνοτήτων (εικόνα 2.7β'). Αντίθετα, με την μέθοδο Multitaper, βλέπουμε ξεκάθαρα πού βρίσκονται οι κορυφές των συχνοτήτων.

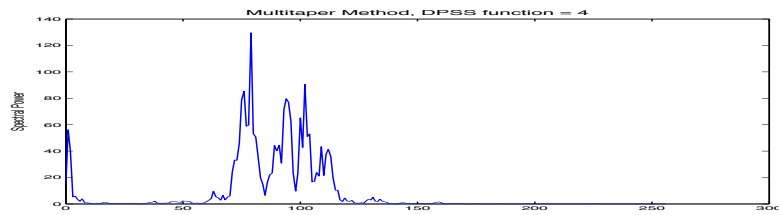
Ξεκινήσαμε την μελέτη της Multitaper μεθόδου χρησιμοποιώντας αρχικά τέσσερις DPSS συναρτήσεις, όπου έχουμε μια πιο ήπια εικόνα από την FFT μέθοδο και βλέπουμε ότι εντοπίζονται κορυφές στα 23Hz και στα 26Hz, πληροφορία την οποία δεν έχουμε με την FFT μέθοδο (εικόνα 2.7γ'). Αν τώρα αυξήσουμε τον αριθμό των DPSS συναρτήσεων στις οκτώ, οι συχνότητες θα φαίνονται μεν πιο ήπιες από αυτές τις FFT, άλλα τείνουν να ενωθούν οι κορυφές (εικόνα 2.7δ'). Αν επιπλέον αυξήσουμε ακόμη περισσότερο τις DPSS συναρτήσεις, τότε οι δυο κορυφές θα ενωθούν με αποτέλεσμα να χάσουμε ένα μεγάλο μέρος της πληροφορίας.



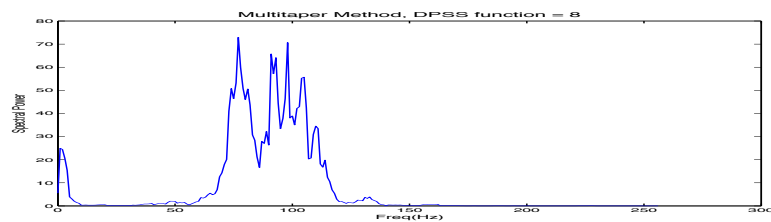
(α')



(β')



(γ')



(δ')

Σχήμα 2.7: Στο γράφημα α είναι μια αναπαράσταση ενός τεχνητού EEG σήματος, στο γράφημα β είναι το μετασχηματισμένο σήμα κατά Fourier, στο γράφημα γ-δ είναι το μετασχηματισμένο σήμα κάνοντας Multitaper ανάλυση με συνολικό αριθμό παραθύρων (tapers) 4 και 8 αντίστοιχα.

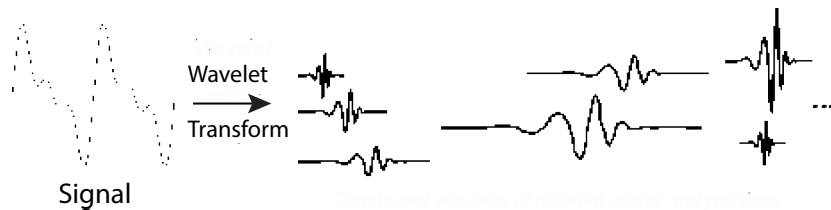
2.5 Συνεχής Wavelet μετασχηματισμός

Όπως με το μετασχηματισμό Fourier ή με τον STFT, έτσι και με τον συνεχή μετασχηματισμό Wavelet κάνουμε ανάλυση σήματος συγκρίνοντας το προς επεξεργασία σήμα με μια “μητρική” συνάρτηση wavelet ψ . Κατά τον μετασχηματισμό Fourier, η συνάρτηση κατά την οποία γίνεται η ανάλυση είναι το εκθετικό $e^{-j2\pi ft}$ και έτσι μεταφερόμαστε από το χρονικό πεδίο στον πεδίο των συχνοτήτων. Παρόμοια συμβαίνει και κατά την ανάλυση Gabor που η αντίστοιχη συνάρτηση είναι η $w(t)e^{-j2\pi ft}$ και έχουμε ως αποτέλεσμα μια ανάλυση στις συχνότητες f μέσα στο χρονικό διάστημα του παραθύρου.

Κατά τον συνεχή μετασχηματισμό wavelet συγκρίνουμε το σήμα μας κάνοντας μετατοπίσεις και διαστολές ή συστολές της μητρικής συνάρτησης ψ . Κάνοντας μετατοπίσεις την μητρική συνάρτηση παίρνουμε μια ανάλυση στο πεδίο του χρόνου και κάθε φορά που διαστέλλεται ή συστέλλεται η μητρική συνάρτηση αλλάζουμε κλίμακα (scale). Εν τέλει, έχουμε μια δισδιάστατη ανάλυση στο πεδίο του χρόνου και κλίμακας της μητρικής συνάρτησης. Ορίζουμε τον συνεχή μετασχηματισμό wavelet [Mallat, 1999; Barford et al., 1992] ως:

$$C_{\psi}(f)(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi^* \left(\frac{t - b}{a} \right) dt \quad (2.27)$$

Όπου a είναι ο παράγοντας κλίμακας και b είναι η θέση της μητρικής συνάρτησης στον χρόνο. Επίσης όταν $a > 0$ τότε η μητρική συνάρτηση ψ διαστέλλεται και συμβαίνει το αντίθετο όταν ο παράγοντας $a < 0$.



Σχήμα 2.8: Παράδειγμα CWT συστολής ή διαστολής σήματος σε διάφορες θέσεις του σήματος μας.

Κατά την ανάλυση wavelet καθοριστικό ρόλο παίζει η κατάλληλη επιλογή της μητρικής συνάρτησης. Ανάλογα με το τι θέλουμε να εντοπίσουμε ή να αφαιρέσουμε πάνω σε ένα σήμα επιλέγουμε και την καταλληλότερη συνάρτηση, ύστερα από πολλές δοκιμές. Γενικά, αν επιλέξουμε να κάνουμε ανάλυση κατά wavelet, υπάρχει μια ποικιλία από μητρικές συναρτήσεις με τις οποίες μπορούμε να λύσουμε πολλών ειδών προβλήματα, γι’ αυτό και είναι τόσο δημοφιλής.

Υπάρχει μια αλληλεξάρτηση ανάμεσα στον παράγοντα κλίμακας και στις συχνότητες. Διότι, για ένα σήμα που έχει διασταλεί (υψηλή κλίμακα) θα αντιστοιχούν χαμηλές συχνότητες ενώ για ένα σήμα που έχει συμπιεστεί θα αντιστοιχούν σε αυτό υψηλές συχνότητες, όπως φαίνεται και στην εικόνα 2.9. Γι’ αυτό, είναι σαφές ότι υπάρχει σχέση ανάμεσα στην κλίμακα συχνότητα και έτσι μπορούμε να μετατρέψουμε τον άξονα της κλίμακας σε συχνότητες.



Σχήμα 2.9: Αριστερά ένα συμπιεσμένο σήμα (χαμηλή κλίμακα, υψηλές συχνότητες), δεξιά ένα διασταλμένο σήμα (υψηλή κλίμακα, χαμηλές συχνότητες).

Η σχέση που μας δίνει την αντιστοίχιση της κλίμακας του μετασχηματισμού wavelet με την συχνότητα του σήματος ορίζεται ως [Abry, 1997]:

$$F_a = \frac{F_c}{a \cdot T_s} \quad (2.28)$$

όπου a είναι η κλίμακα, T_s είναι η δειγματοληπτική περίοδος του σήματος, F_c είναι η κεντρική συχνότητα της wavelet σε Hz (χαρακτηριστικό των μητρικών συναρτήσεων).

2.5.1 Ιδιότητες μετασχηματισμού Wavelet

Σημαντικό είναι να αναφέρουμε τις ιδιότητες που ικανοποιούνται στον μετασχηματισμός wavelet, οι οποίες είναι οι ακόλουθες [Kutz, 2012]. :

1) Γραμμικότητα:

$$C_\psi(\alpha f + \beta g)(a, b) = \alpha C_\psi(f)(a, b) + \beta C_\psi(g)(a, b) \quad (2.29)$$

όπου α και β είναι κάποιες σταθερές και f, g είναι τα σήματα.

2) Μετατόπιση:

$$C_\psi(T_\tau f)(a, b) = C_\psi(f)(a, b - \tau) \quad (2.30)$$

3) Διαστολή

$$C_\psi(D_c f)(a, b) = \frac{1}{\sqrt{c}} C_\psi\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right) \quad (2.31)$$

4) Αντίστροφος μετασχηματισμός wavelet:

$$f(t) = \frac{1}{A_\psi} \int \int_{-\infty}^{+\infty} C_\psi(f)(a, b) \psi_{a,b}(t) \frac{dadb}{a^2} \quad (2.32)$$

όπου είναι σταθερά από την ικανή συνθήκη του μετασχηματισμός wavelet η οποία ορίζεται ως:

$$A_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (2.33)$$

Στην σχέση (2.32) έχουμε κάνει μετασχηματισμό Fourier στην συνάρτηση wavelet, η οποία ισούται με:

$$\psi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-i\omega b} \psi(a\omega) \quad (2.34)$$

Αν η παραπάνω συνθήκη ικανοποιείται, τότε ο μετασχηματισμός wavelet είναι καλά ορισμένος.

2.5.2 Βάση Wavelet

Κατά την ανάλυση Fourier, είναι δυνατό να απεικονίσουμε οποιαδήποτε συνάρτηση με ένα άθροισμα ημιτόνων και συνημίτονων. Με τον ίδιο τρόπο λειτουργεί και ο μετασχηματισμός wavelet που, αντί για άθροισμα ημιτόνων και συνημίτονων, χρησιμοποιείται μία μητρική συνάρτηση wavelet. Όμως, για να ικανοποιούνται όλες οι παραπάνω ιδιότητες πρέπει οι συναρτήσεις wavelet να είναι ορθομοναδιαίες μεταξύ τους, δηλαδή:

$$(\psi_{\alpha,b}, \psi_{c,d}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{\alpha,b} \psi_{c,d} dx = \delta_{\alpha,b} \delta_{c,d} \quad (2.35)$$

όπου $\delta_{\alpha,b}$ είναι το δέλτα του Dirac.

Συνεπώς, τώρα μπορούμε να εκφράσουμε με ένα ανάπτυγμα σειράς μια συνάρτηση ή ένα σήμα συναρτήσει της βάσης wavelet $\psi(t)$ δηλαδή:

$$f(t) = \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} c_{m,n} \psi_{m,n}(t) \quad (2.36)$$

όπου οι σταθερές μπορούν να δοθούν λόγω της ορθογωνιότητας από την σχέση:

$$c_{m,n} = (f, \psi_{m,n}) \quad (2.37)$$

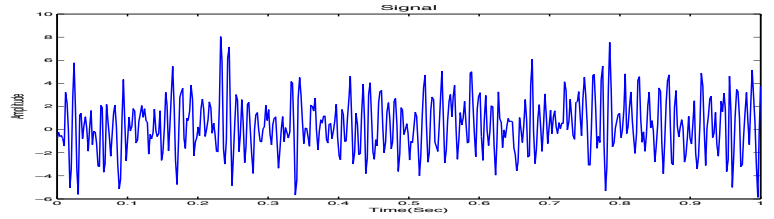
Σύμφωνα με το παραπάνω, μπορούμε να ορίσουμε και τον αντίστροφο μετασχηματισμό wavelet. Λόγω της ορθοκανονικής βάσης ο μετασχηματισμός wavelet είναι ένα σημαντικό εργαλείο για την ανάλυση οποιοδήποτε σήματος.

2.5.3 Παράδειγμα

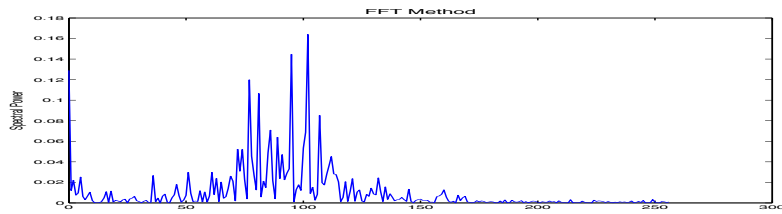
Θα εφαρμόσουμε τα παραπάνω αναλύοντας σήματα της μορφής ηλεκτροεγκεφαλογραφικών σημάτων. Αρχικά θα κάνουμε χρήση του μετασχηματισμού Fourier έτσι ώστε να έχουμε μια πρώτη εικόνα του πού βρίσκονται οι ενδιαφερόμενες συχνότητες και στην συνέχεια θα εφαρμόσουμε μετασχηματισμό wavelet στο διάστημα όπου είδαμε τις κορυφές των συχνοτήτων προκειμένου να κάνουμε μια ανάλυση του σήματος στα πεδία του χρόνου και των συχνοτήτων.

Συγκεκριμένα, θα φτιάξουμε σήμα με την χρήση χρονοσειρών το οποίο θα διαρκεί οκτώ δευτερόλεπτα με δειγματική συχνότητα 120 σημεία/δευτερόλεπτο, όπως φαίνεται και από την εικόνα 1.10. Κατά την ανάλυση wavelet θα χρησιμοποιήσουμε την μιγαδική Morlet [Shift et al., 1994] μητρική συνάρτηση με κεντρική συχνότητα 5 Hz και ο παράγοντας τις κλίμακας θα αυξάνεται με την δύναμη του δυο. Για την μετατροπή της κλίμακας σε συχνότητα θα κάνουμε χρήση της σχέσης 1.29, όπου θα έχουμε την ταυτόχρονη ανάλυση στο πεδίο των συχνοτήτων αλλά και του χρόνου (βλ. εικόνα 2.10).

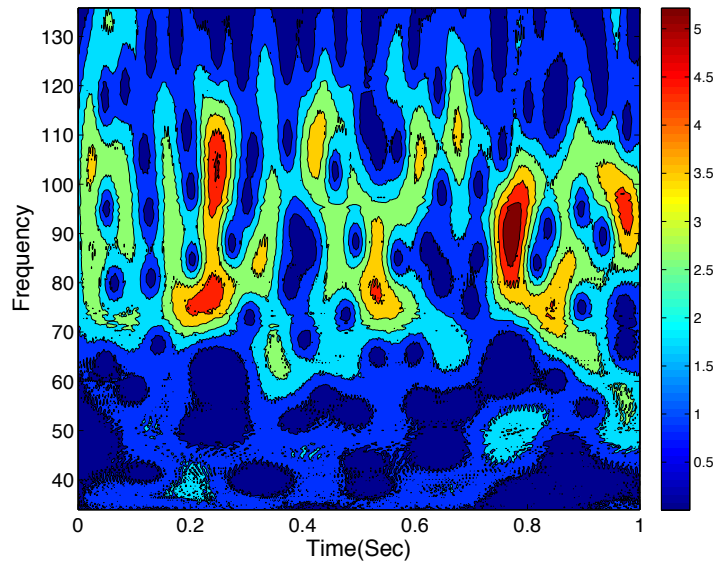
Για την καλύτερη ανάλυση του σήματος ακολουθούμε την μεθοδολογία όπως φαίνεται και από την εικόνα 2.10. Δηλαδή, αφού εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό Fourier στο σήμα παρατηρούμε ότι η συχνότητα που μας ενδιαφέρει βρίσκεται ανάμεσα των $20 - 30 Hz$, αλλά δεν γνωρίζουμε πώς κατανέμεται αυτή η κορυφή στο πεδίο του χρόνου. Έτσι, επιλέγουμε το διάστημα των συχνοτήτων που μας ενδιαφέρει εδώ είναι από $20 - 30 Hz$ και εφαρμόζουμε τον συνεχή μετασχηματισμό wavelet για να πάρουμε την ανάλυση στο πεδίο του χρόνου και των συχνοτήτων. Στην προκειμένη περίπτωση η κορυφή της δεύτερης εικόνας βρίσκεται ανάμεσα στα $20 - 25 Hz$ και ενεργείται στα επιμέρους χρονικά διαστήματα των περιοχών του πρώτου και τετάρτου δευτερολέπτου. Με ανάλογο τρόπο δράσαμε και με την εφαρμογή του μετασχηματισμού Gabor στην προηγούμενη παράγραφο.



(α')



(β')



(γ')

Σχήμα 2.10: Ανάλυση τεχνικού EEG σήματος (α') στο πεδίο των συχνοτήτων (β') και ταυτόχρονη ανάλυση στα πεδία των συχνοτήτων-χρόνου με την μέθοδο του μετασχηματισμού wavelet (γ').

2.6 Συμπεράσματα

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάσαμε μια σειρά από μεθόδους που μπορούμε να κάνουμε ανάλυση στα πεδία του χρόνου και των συχνοτήτων (εικόνα 2.11). Καμία, όμως, από τις παραπάνω δεν μπορεί να αποφύγει την απροσδιοριστία Heisenberg και να έχουμε μια τέλεια ανάλυση και στα δύο πεδία. Η κάθε μέθοδος αναπαριστά με διαφορετικό τρόπο τα δυο πεδία, αλλά πάντοτε ισχύει ότι $\Delta t \Delta f \geq 1/2$.

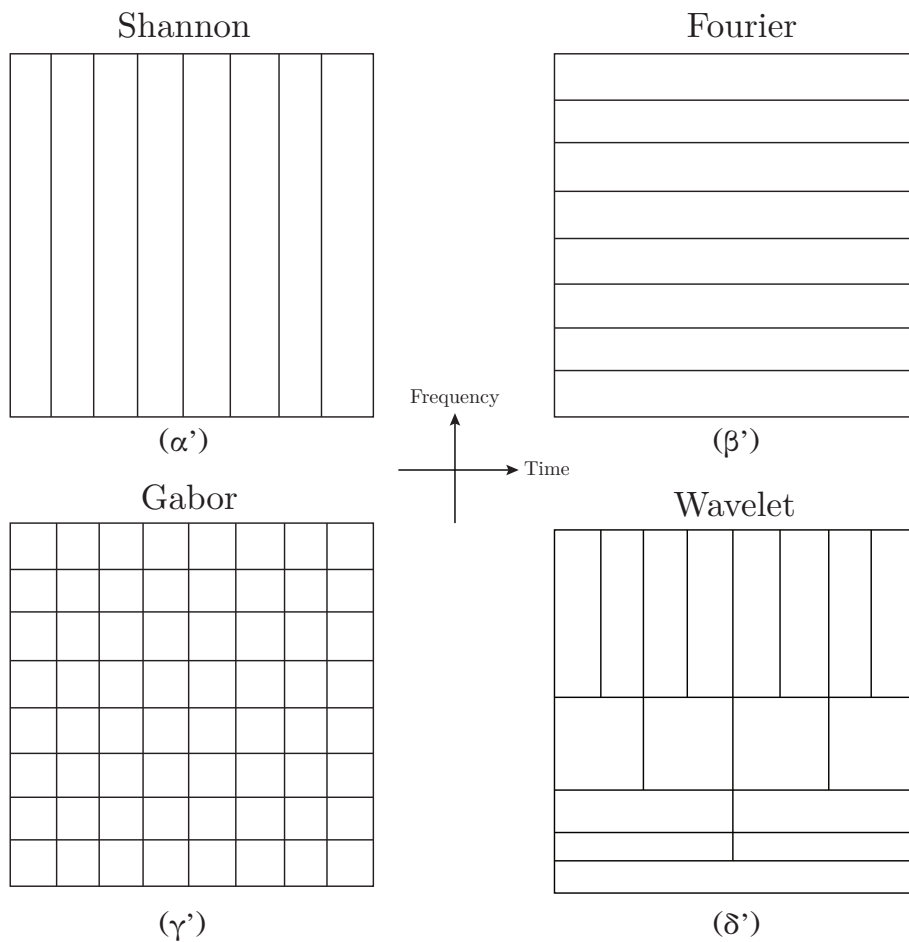
Μετασχηματισμός Fourier: Έχουμε πλήρη πληροφορία στο πεδίο των συχνοτήτων αλλά καμία στο πεδίο του χρόνου. Χρησιμοποιείται για να πάρουμε μια πρώτη εικόνα των συχνοτήτων, διότι ο αλγόριθμος του μετασχηματισμού Fourier είναι πολύ γρήγορος και εξίσου ακριβείς.

Μετασχηματισμός Gabor ή STFT: Προσθέτοντας ένα παράθυρο στον πυρήνα του μετασχηματι-

σμού Fourier παίρνουμε πληροφορίες και από τα δυο πεδία. Στην προκειμένη περίπτωση, λόγω αρχής απροσδιοριστίας, πρέπει να επιλέξουμε ένα πλάτος παράθυρου έτσι ώστε να έχουμε την καλύτερη ανάλυση και στα δυο πεδία (ποτέ τέλεια ανάλυση).

Μέθοδος Multitaper : Έχουμε την ίδια πληροφορία με αυτήν του μετασχηματισμού Fourier, αλλά σε αυτή την περίπτωση έχουμε καλύτερη ευκρίνεια στις κορυφές των συχνοτήτων με την χρήση των Slepian σειρών.

Μετασχηματισμός wavelet: Σε αυτήν την περίπτωση αλλάζουμε την βάση του μετασχηματισμού Fourier με μία μητρική συνάρτηση η οποία συστέλλεται ή διαστέλλεται και μετατοπίζεται. Ανάλογα με το ποια συχνότητα μας ενδιαφέρει, επιλέγουμε την κατάλληλη κλίμακα, παραδείγματος χάρι αν θέλουμε να εντοπίσουμε χαμηλές συχνότητες επιλέγουμε να κάνουμε ανάλυση σε υψηλή κλίμακα και το αντίστροφο. Η ανάλυση, δηλαδή, στο πεδίο του χρόνου μεταβάλλεται με την συχνότητα.



Σχήμα 2.11: Διάφορες περιπτώσεις στην ανάλυση στα πεδία του χρόνου και της συχνότητας. χρονική ανάλυση (α'), Fourier ανάλυση (β'), Gabor ή STFT ανάλυση (γ'), wavelet ανάλυση (δ')

Κεφάλαιο 3

Πολυμεταβλήτα Μοντέλα Παλινδρόμησης

3.1 Εισαγωγή στα μοντέλα παλινδρόμησης

3.1.1 Εισαγωγή

Μια χρονοσειρά χαρακτηρίζεται ως διανυσματική όταν αποτελείται από M επιμέρους χρονοσειρές (κανάλια) και η κάθε χρονοσειρά εκτείνεται για T χρονικά σημεία. Τα κανάλια x_1, x_2, \dots, x_M που τα χρονικά σημεία των καναλιών είναι το διάνυσμα $\mathbf{x}_t = [x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{Mt}]$ όπου $t = 0, 1, 2, \dots, T$. Τα παραπάνω μπορούν να εκφραστούν από ένα διανυσματικό γραμμικό αυτοπαλινδρομικό μοντέλο (MAR) τάξεως p , δηλαδή [Wei, 1999; Lutkepohl, 2011]:

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{v} + \sum_{k=1}^p A_k \mathbf{x}_{t-k} + \mathbf{u}_k \quad (3.1)$$

όπου \mathbf{v} είναι διάνυσμα $[1 \times M]$ σταθερών συντελεστών, ο πίνακας A_k διαστάσεων $[M \times M]$ είναι οι παράμετροι του μοντέλου και \mathbf{u}_k είναι ο λευκός θόρυβος της διαδικασίας διαστάσεων $[1 \times M]$ με μέση τιμή μηδέν και πίνακα διασποράς Σ διαστάσεων $[M \times M]$.

$$\mathbf{u}_k = N(0, \Sigma) \quad (3.2)$$

3.1.2 Χαρακτηριστικά των χρονοσειρών.

Πρώτου περιγράψουμε τις ιδιότητες των διανυσματικών χρονοσειρών, ας αναφέρουμε διάφορα στατιστικά μεγέθη που θα μας χρειαστούν στην ανάλυση τους.

1) Μέση τιμή (mean) των σημείων των επιμέρους καναλιών:

$$E(\mathbf{x}_t) = \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_M \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

2) Πίνακας διακύμανσης καθυστέρησης k (lagk).

$$\Gamma(k) = Cov(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+k}) = E[(\mathbf{x}_t - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{x}_{t+k} - \boldsymbol{\mu})] \quad (3.4)$$

Το παραπάνω ανάπτυγμα (3.4) γράφεται και με μορφή πίνακα ως:

$$\mathbf{\Gamma}(k) = \begin{pmatrix} \gamma_{1,1} & \cdots & \gamma_{1,M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{M,1} & \cdots & \gamma_{M,M} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

όπου $\gamma_{i,j} = E[(\mathbf{x}_{i,t} - \boldsymbol{\mu}_i)(\mathbf{x}_{j,t+k} - \boldsymbol{\mu}_j)]$

Για $\kappa = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ και $j = 1, 2, \dots, M$. Η συνάρτηση $\Gamma(\kappa)$ ονομάζεται πίνακας διακύμανσης της χρονοσειράς \mathbf{x}_t . Για $i = j$, το $\gamma_{i,i}$ λέγεται συνάρτηση αυτό-διακύμανση (auto covariance function) της διαδικασίας $x_{i,t}$ και για $i \neq j$ το $\gamma_{i,j}$ είναι συνάρτηση ετεροδιακύμανσης (cross-covariance function) ανάμεσα στις διαδικασίες x_i και x_j .

3) Πίνακας συσχέτισης μιας διανυσματικής διαδικασίας, ορίζεται ως:

$$\boldsymbol{\rho}(k) = D^{\frac{1}{2}}\mathbf{\Gamma}(k)D^{-\frac{1}{2}} = [\rho_{i,j}(k)] \quad (3.6)$$

για $i, j = 1, 2, \dots, M$ και ο πίνακας \mathbf{D} είναι τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα αυτοσυσχέτισης $\mathbf{\Gamma}(0)$. Συνεπώς, μπορούμε να εκφράσουμε τα στοιχεία του πίνακα συσχέτισης ως:

$$\rho_{i,j}(k) = \frac{\gamma_{i,j}(k)}{\sqrt{(\gamma_{i,i}(0)\gamma_{j,j}(0))}} \quad (3.7)$$

Για $i = j$ η $\rho_{i,i}$ είναι συνάρτηση αυτό-συσχέτισης (autocorrelation function) της διαδικασίας $x_{i,t}$ και για $i \neq j$ η $\rho_{i,j}$ λέγεται συνάρτηση ετεροσυσχέτισης (cross correlation function) μεταξύ των χρονοσειρών $x_{i,t}$ και $x_{j,t}$.

3.2 Σταθερότητα και ευστάθεια χρονοσειρών

Η στασιμότητα και ευστάθεια είναι μια βασική συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν τα δεδομένα ενός διανυσματικού αυτοπαλινδρομικού μοντέλου για να κάνουμε μια περαιτέρω ανάλυση. Λέμε ότι μια χρονοσειρά είναι στάσιμη όταν η μέση τιμή και η συνάρτηση συσχέτισης δεν μεταβάλλονται με τον χρόνο. Μπορούμε να γράψουμε ότι $E(\mathbf{x}_t) = \boldsymbol{\mu}$ και $\mathbf{\Gamma}(k) = \text{Cov}(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+k})$ είναι ανεξάρτητα από τον χρόνο τότε η διαδικασία είναι στάσιμη.

Επίσης, λέμε ότι μια χρονοσειρά είναι ευσταθής όταν οι παράμετροι του μοντέλου παίρνουν τιμές εντός μοναδιαίου κύκλου. Για να ελέγξουμε αν μια χρονοσειρά είναι ευσταθής ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

Βρίσκουμε την ορίζουσα $\det(\mathbf{I} - \mathbf{A}z)$ για $|z| < 1$ όπου:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_1 & \cdots & A_{1,M-1} & A_{1,M} \\ \mathbf{I}_M & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathbf{I}_M & 0 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Αν οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι μικρότερες της μονάδας, τότε η διαδικασία είναι ευσταθής [Lutkepohl, 2006]. Ακόμη, είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι αν μια χρονοσειρά είναι ευσταθής, συνεπάγεται ότι είναι και στάσιμη. Συνεπώς, κάνοντας έναν έλεγχο στις ιδιοτιμές του πίνακα A , καταλαβαίνουμε την σταθερότητα και την ευστάθεια του μοντέλου.

3.3 Λευκός Θόρυβος

Στο ανάπτυγμα του διανυσματικού παλινδρομικού μοντέλου (εξίσωση 3.1) (MAR) ορίστηκε το διάνυσμα \mathbf{u}_t του λευκού θορύβου. Ορίζουμε, λοιπόν, ως λευκό θόρυβο μια διαδικασία που τα στοιχεία του \mathbf{u}_t να μεταξύ τους ασυσχέτιστα, δηλαδή $Cov(\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_{t+k})$ και ακολουθούν μια κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν και η διασπορά του πίνακα Σ υπολογίζεται:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} cov(u_1, u_1) & \dots & cov(u_1, u_M) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(u_M, u_1) & \dots & cov(u_M, u_M) \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Τα διαγώνια στοιχεία του παραπάνω πίνακα (3.9) είναι $cov(u_i, u_i) = Var(u_i)$ για $i = 1, 2, \dots, M$ η διασπορά των στοιχείων του διανύσματος του λευκού θορύβου. Κάθε στοιχείο του πίνακα είναι ανεξάρτητο από τον χρόνο, συνεπώς ο λευκός θόρυβος είναι και μια στάσιμη διαδικασία.

3.4 Πολυμεταβλητό μοντέλο p-τάξης

Ορίζεται ένα πολυμεταβλητό αυτοπαλινδρομικό μοντέλο MAR(p) p-τάξης με σκοπό την εύρεση των συντελεστών ως:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_t &= \mathbf{v} + A_1 \mathbf{x}_{t-1} + A_2 \mathbf{x}_{t-2} + \dots + A_p \mathbf{x}_{t-p} + \mathbf{u}_t \Rightarrow \text{βρίσκω τον μέσο} \\ &\Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{x}_t - \mathbf{v}) = A_1 \mathbf{E}(\mathbf{x}_{t-1}) + A_2 \mathbf{E}(\mathbf{x}_{t-2}) + \dots + A_p \mathbf{E}(\mathbf{x}_{t-p}) + \mathbf{E}(\mathbf{u}_t) \\ &\Rightarrow \boldsymbol{\mu} - \mathbf{v} = A_1 \boldsymbol{\mu} + A_2 \boldsymbol{\mu} + \dots + A_p \boldsymbol{\mu} + 0 \\ &\Rightarrow \boldsymbol{\mu} = \mathbf{v} [I - A_1 - A_2 - \dots - A_p]^{-1} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Αντικαθιστώντας το διάνυσμα στην αρχική διατύπωση (3.1) του MAR(p) καταλήγουμε στην έκφραση:

$$\dot{\mathbf{x}}_t = \sum_{i=1}^p A_i \dot{\mathbf{x}}_{t-i} + \mathbf{u}_t \quad (3.11)$$

Όπου $\dot{\mathbf{x}}_t = \mathbf{x}_t - \boldsymbol{\mu}$, για να υπολογίσουμε την εξίσωση Yule-Walker, αρχικά βρίσκουμε τον πίνακα διακύμανσης του μοντέλου.

$$\begin{aligned} \Gamma(k) &= \mathbf{E}(\dot{\mathbf{x}}_t, \dot{\mathbf{x}}_{t+k}) \leftrightarrow \Gamma(k) = \mathbf{E}(\dot{\mathbf{x}}_{t-k}, \dot{\mathbf{x}}_t) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Gamma(k) = \mathbf{E} \left(\dot{\mathbf{x}}_{t-k} \left(\sum_{i=1}^p A_i' \dot{\mathbf{x}}_{t-i} \right) \right) + \mathbf{E}(\dot{\mathbf{x}}_{t-k}, \mathbf{u}_t') \end{aligned} \quad (3.12)$$

Η παραπάνω εξίσωση (3.12) είναι η Yule-Walker που αφορά το διανυσματικό αυτοπαλινδρομικό μοντέλο γράφεται με την μορφή πίνακα $k \geq 1$ και υπολογίζονται οι συντελεστές του μοντέλου.

$$\begin{bmatrix} \Gamma(1) \\ \Gamma(2) \\ \vdots \\ \Gamma(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma(0) & \Gamma(1)' & \Gamma(2)' & \dots & \Gamma(p-1) \\ \Gamma(1) & \Gamma(0) & \Gamma(1)' & \dots & \Gamma(p-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma(p-1) & \Gamma(p-2) & \Gamma(p-3) & \dots & \Gamma(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1' \\ A_2' \\ \vdots \\ A_p' \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Και για $k = 0$ υπολογίζεται ο πίνακας διασποράς του λευκού θορύβου.

$$\begin{aligned}\Gamma(0) &= \sum_{i=1}^p \Gamma(-i) \mathbf{A}'_i + \Sigma \Leftrightarrow \\ \Sigma &= \Gamma(0) - \sum_{i=1}^p \Gamma(-i) \mathbf{A}'_i\end{aligned}\quad (3.14)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις (3.13) και (3.14) γράφονται επίσης, αν θέσουμε όπου Γ_p το πίνακα των διακυμάνσεων, $[p \times p]$, $\Gamma_{(p)}$ διάνυσμα των διακυμάνσεων $[1 \times p]$ και \mathbf{A} το διάνυσμα των συντελεστών $[1 \times p]$. Επομένως η εξίσωση Yule-Walker γράφεται:

$$\Gamma_{(p)} = \Gamma_p \mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{A} = \Gamma_p^{-1} \Gamma_{(p)} \quad (3.15)$$

Και ο πίνακας διασποράς του λευκού θορύβου γράφεται εναλλακτικά ως:

$$\Sigma = \Gamma(0) - \Gamma'_{(p)} \mathbf{A} \Rightarrow \Sigma = \Gamma(0) - \Gamma'_{(p)} \Gamma_p \Gamma_{(p)}^{-1} \quad (3.16)$$

Οι παραπάνω δύο εξισώσεις έχουν λύση με γνώση την συνάρτηση διακύμανσης των δεδομένων της διαδικασίας. Την συνάρτηση της διακύμανσης μπορούμε να την αντικαταστήσουμε με την δειγματική συνάρτηση διακύμανσης, η οποία παράγεται από τα δεδομένα, και να κάνουμε μια εκτίμηση των συντελεστών και του πίνακα διασποράς. Ως δειγματική συνάρτηση διακύμανσης ορίζουμε:

$$\hat{\Gamma}(\mathbf{k}) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-k} (\mathbf{x}_{t-k} - \hat{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}})' \text{ για } k \geq 0 \quad (3.17)$$

Όπου $\hat{\mathbf{x}}$ είναι ο μέσος των δεδομένων και ορίζεται ως $\hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\mathbf{x}_t)$.

Έτσι, μπορούμε να υπολογίσουμε με έναν απλό τρόπο να εκτιμηθούν οι τιμές των συντελεστών του μοντέλου $\hat{\mathbf{A}}$ και του $\hat{\Sigma}$ πίνακα διασποράς, εντοπίζοντας την δειγματική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης (σχέση (3.17)) και ύστερα από αντικατάσταση στις (σχέσεις (3.15)-(3.16)) να υπολογίσουμε τους πίνακες $\hat{\mathbf{A}}$ και $\hat{\Sigma}$. Η παραπάνω μέθοδος εύρεσης συντελεστών ονομάζεται Yule-Walker και για να κάνουμε πιο γρήγορους και ακριβείς υπολογισμούς χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο Levinson-Durbin.

Επίσης, πέρα από την μέθοδο Yule-Walker, μπορούμε να υπολογίσουμε του συντελεστές του μοντέλου και τον πίνακα διασποράς με την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων (Least Squares) αλλά και με την μέθοδο Burg.

3.5 Μέθοδοι προσέγγισης συντελεστών

3.5.1 Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων (least squares)

Η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων προσομοιάζει ένα σύνολο δεδομένων με ένα μαθηματικό μοντέλο. Στην περίπτωση μας, που θέλουμε τα δεδομένα μας να περιγράφονται από ένα αυτοπαλινδρομικό μοντέλο, η μέθοδος αυτή προσεγγίζει του συντελεστές του μοντέλου, καθώς επίσης και τον πίνακα διασποράς.

Το νόημα της μεθόδου είναι ότι προσδιορίζει με τον καλύτερο τρόπο το μοντέλο ελαχιστοποιώντας το άθροισμα των τετραγώνων της διαφοράς ανάμεσα στις πραγματικές και τις εκτιμητές τιμές.

Το υπόλοιπο (residuals) ανάμεσα στην πραγματική τιμή και την εκτιμητέα το γράφουμε ως:

$$\mathbf{R}_t = \mathbf{x}_t - \sum_{i=1}^p \mathbf{A}_i \mathbf{x}_{t-i} \quad (3.18)$$

και το άθροισμα των τετραγώνων του υπολοίπου ως:

$$\mathbf{S}(A) = \sum_{i=1}^T \mathbf{R}_i^2 \quad (3.19)$$

Τέλος, η ελαχιστοποίηση του παραπάνω αθροίσματος της εξίσωσης (3.19) ισούται με τον εκτιμητή των συντελεστών του μοντέλου.

$$\hat{\mathbf{A}} = \operatorname{argmax}(\mathbf{S}(A)) \quad (3.20)$$

όπου υπολογίστηκε ο καλύτερο δυνατός εκτιμητής των βέλτιστων συντελεστών ως [Lutkepohl, 2006]:

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{x}_t \mathbf{Z} (\mathbf{Z} \mathbf{Z}')^{-1} \quad (3.21)$$

Όπου $Z = (Z_0, \dots, Z_{T-1})$ και $\mathbf{Z}_t = [\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}, \dots, \mathbf{x}_{t-p}]'$

Ο Yule-Walker εκτιμητής προσδιορίζει τους συντελεστές του MAR μοντέλου στα πλαίσια της ευστάθειας. Με αλλά λόγια, η εκτιμητέα διαδικασία είναι πάντα ευσταθής. Παρόλο το πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου, στην πραγματικότητα δεν είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε αν μια διαδικασία είναι στάσιμη ή όχι κι έτσι ο εκτιμητής Yule-Walker αποκλίνει από την πραγματική διαδικασία. Πολλές φορές είναι κακή στρατηγική να επιβάλουμε την ευστάθεια σε μια διαδικασία. Έτσι, για μια μη ευσταθή διαδικασία η LS μέθοδος προτιμάται από την YW διότι δεν προϋποθέτει στασιμότητα της διαδικασίας [Reinsel, 1993].

3.5.2 Μέθοδος Burg

Η μέθοδος Burg είναι η πιο διαδομένη για την εκτίμηση συντελεστών. Σε αντίθεση με τις υπόλοιπες δυο μεθόδους που περιγράψαμε, δεν εντοπίζει άμεσα τους συντελεστές του μοντέλου, αλλά χρησιμοποιεί έναν συνδυασμό της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων και του αλγόριθμου Levinson-Durbin τον οποίο τροποποιεί έτσι ώστε να έχουμε το ελάχιστο υπόλοιπο ανάμεσα σε πραγματική και εκτιμητέα τιμή. Σε αυτήν, δηλαδή, την μέθοδο βρίσκουμε το ελάχιστο άθροισμα των τετραγωνικών υπολοίπων των δειγματικών συναρτήσεων της διακύμανσης και της μερική διακύμανσης όπου εντοπίζουμε τους συντελεστές για κάθε μια από της συναρτήσεις και στην συνέχεια εντοπίζουμε τις εκτεινόμενες τιμές του μοντέλου.

Εν συντομία, ο αλγόριθμος που υπολογίζει του συντελεστές του αυτοπαλινδρομικού μοντέλου εξελίσσεται ως εξής [Burg, 1968; Childers, 1978]:

- Βήμα 1.

- Εντοπισμός του σφάλματος διασποράς $\sigma_u^2(0) = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} [\mathbf{x}_t \mathbf{x}_t']$
- Εντοπισμός του σφάλματος του forward u_t και backward b_{t-1} μοντέλων

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t(0) &= \mathbf{x}_t \\ \mathbf{b}_{t-1}(0) &= \mathbf{x}_{t-1} \end{aligned} \quad (3.22)$$

- Βήμα 2.

- Υπολογισμός των καθρεπτικών παραμέτρων

$$\pi_m = -2 \frac{\sum_{n=m}^{N-1} \mathbf{b}_{n-1}(m-1) \mathbf{u}_n(m-1)}{\sum_{n=m}^{N-1} [\mathbf{b}_{n-1}(m-1) \mathbf{b}'_{n-1}(m-1) + \mathbf{u}_n(m-1) \mathbf{u}'_n(m-1)]} \quad (3.23)$$

- Βρίσκω το νέο σφάλμα διασποράς

$$\sigma_u^2(m) = [1 - \rho_i^2] \sigma_u^2(m-1) \quad (3.24)$$

- Βήμα 3.

- Υπολογισμός των συντελεστών του AR μοντέλου

$$A_k(m) = \begin{cases} A_k(m-1) + \pi_m A_{m-k}(m-1) & m > 1 \\ \pi_m = A_m(m) & m = 1 \end{cases} \quad (3.25)$$

- Νέος υπολογισμός των σφαλμάτων,

$$\begin{aligned} u_n(m) &= u_n(m-1) + \pi_m b_{n-1}(m-1) \\ b_n(m) &= b_{n-1}(m-1) + \pi_m u_n(m-1) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Τέλος επαναλαμβάνουμε τα βήματα 2 έως 4 ανάλογα με την τάξη του μοντέλου.

3.6 Κριτήρια επιλογής τάξης

Ως γνωστόν, για ένα MAR μοντέλο οι συντελεστές του έχουν εκτιμηθεί από τις μεθόδους που έχουμε περιγράψει στην προηγούμενη παράγραφο. Παρόλο που θέλουμε να έχουμε την καλύτερη δυνατή εκτίμηση των συντελεστών, εμείς ενδιαφερόμαστε περισσότερο για την καλύτερη προσομοίωση του μοντέλου ώστε να έχουμε μια καλή πρόβλεψη. Μια καλή πρόβλεψη δεν είναι ανάλογη με την τάξη μοντέλου. Εμείς επιθυμούμε την καλύτερη δυνατή τάξη μοντέλου ώστε να έχουμε το ελάχιστο σφάλμα πρόβλεψης. Την απάντηση αυτή μπορεί να μας τη δώσουν τα κριτήρια επιλογής τάξης, μερικά εκ των οποίων είναι 1) AIC (Akaike's Information Criterion) [Akaike, 1974] 2) HQ (Hannan and Quinn) [Hannan and Quinn, 1979] 3) BSC (Bayesian Schwarz Criterion) [Schwarz, 1978].

Κριτήρια	Διατυπώσεις
Akaike's Information Criterion	$AIC(p) = \ln \hat{\Sigma}(p) + \frac{2pM^2}{T}$
Hannan & Quinn	$HQ(p) = \ln \hat{\Sigma}(p) + \frac{2\ln\ln T}{T} pM^2$
Bayesian Schwarz Criterion	$BSC(p) = \ln \hat{\Sigma}(p) + \frac{2\ln T}{T} pM^2$

Πίνακας 3.1: Κριτήρια επιλογής τάξης παλινδρομικού μοντέλου.

όπου T είναι το μέγεθος του δείγματος, M είναι η διάσταση του μοντέλου και $\hat{\Sigma}(p)$ ο εκτιμητέος πίνακας διασποράς λευκού θορύβου. Η τάξη- p του μοντέλου εντοπίζεται στο ελάχιστο των παραπάνω κριτηρίων.

Για να γίνει η καλύτερη δυνατή πρόβλεψη τάξης μοντέλου πρέπει να επιλέξουμε και το κατάλληλο μοντέλο. Το μοντέλο AIC είναι ιδανικό όταν έχουμε ένα μικρό δείγμα ($T < 16$), ωστόσο μπορούμε να

βελτιώσουμε την πρόβλεψη κατά AIC και σε μεγαλύτερα δείγματα έχοντας τις κατάλληλες συνθήκες [Shibata, 1980]. Παρόλα αυτά, για μεγάλα δείγματα είναι προτιμότερη η επιλογή των κριτηρίων HQ ή BSC και αυτό είναι απόρροια του ότι είναι πλήρη (consistent) κριτήρια, δηλαδή $\lim_{T \rightarrow \infty} Pr(P_{cor} = P_{sel}) = 1$, το οποίο δεν ισχύει για το AIC.

Για την ανάλυση EEG σημάτων συνίσταται η χρήση του AIC κριτηρίου, διότι είναι πιο ξεκάθαρο ποια είναι η κατάλληλη τάξη του μοντέλου. Επίσης, μπορούμε να πούμε εμπειρικά ότι η τάξη των EEG είναι $1 < p < 30$ και στο 80% των περιπτώσεων η προτεινόμενη τάξη είναι μικρότερη του 14. Τέλος, επειδή πολλές φορές κανένα από τα κριτήρια δεν είναι σε θέση να μας δώσει μια σαφή εικόνα για το ποια είναι η κατάλληλη τάξη του μοντέλου, μπορούμε να κάνουμε την ανάλυση των EEG σημάτων με μη-παραμετρική μέθοδο [Dhamala, 2008], όπου ξεπερνάμε τα προβλήματα επιλογής παραμέτρων του μοντέλου αλλά και η έχουμε καλύτερη εκτίμηση αυτών.

3.7 Απεικόνιση στον χώρο των συχνοτήτων

Τα υπό επεξεργασία σήματα (EEG) είναι δοσμένα στο χρονικό πεδίο και στην συνέχεια τα προσομοιώνουμε με ένα μοντέλο, που στην περίπτωση μας είναι MAR μοντέλο. Μας ενδιαφέρει, όμως, να κάνουμε μια ανάλυση του σήματος και στο χώρο των συχνοτήτων ώστε να εξάγουμε όσο πιο πολλές πληροφορίες αφορούν το δίκτυο του εγκεφάλου (coherence, granger causality, PDC, DTF). Προφανώς, η αλλαγή από το πεδίο του χρόνου στις συχνότητες θα πραγματοποιηθεί με ένα μετασχηματισμό Fourier στο MAR μοντέλο.

Χωρίς να χάσουμε καμιά πληροφορία από το μοντέλο μας, μπορούμε να το γράψουμε την (3.1) ως:

$$\mathbf{x}_t = \sum_{i=0}^p \mathbf{A}_i \mathbf{x}_{t-i} \quad (3.27)$$

Με $\mathbf{A}_0 = \mathbf{I}$ και $\mathbf{A}_i = -\mathbf{A}_i$ για $i = 1, 2, \dots, p$. Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Fourier στην παραπάνω σχέση παίρνουμε το μοντέλο στο χώρο των συχνοτήτων.

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(f) &= \mathbf{A}(f)\mathbf{X}(f) \\ \text{όπου } \mathbf{A}(f) &= \sum_{t=0}^p \mathbf{A}(t)e^{\frac{-i2\pi t f}{p}} \\ \Rightarrow \mathbf{X}(f) &= \mathbf{A}^{-1}(f)\mathbf{U}(f) \Rightarrow \mathbf{X}(f) = \mathbf{H}(f)\mathbf{U}(f) \end{aligned} \quad (3.28)$$

όπου ο πίνακας $H(f)$ ονομάζεται πίνακας μεταφοράς του συστήματος και $U(f)$ είναι ο μετασχηματισμός του πίνακα λευκού θορύβου. Όμως, το μέγεθος το οποίο θα μας απασχολήσει είναι πυκνότητα συχνοτήτων, δηλαδή η ενέργεια του $X(f)$, η οποία ορίζεται ως:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(f) &= |\mathbf{X}(f)|^2 = \mathbf{H}(f)\mathbf{U}(f)\mathbf{U}(f)^*\mathbf{H}(f)^* \Rightarrow \\ \Rightarrow \boxed{\mathbf{S}(f) = \mathbf{H}(f)\mathbf{\Sigma}(f)\mathbf{H}(f)^*} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Όπου $\mathbf{\Sigma}(f)$ είναι ο πίνακας διασποράς του λευκού θορύβου στο πεδίο των συχνοτήτων.

Η πυκνότητα συχνοτήτων χρησιμοποιείται για την ανάλυση EEG σήματος, καθώς και για την μελέτη κάποιων ενδιαφερόντων μεγεθών, όπως είναι η αιτιότητα των επιμέρους EEG σημάτων, η ροή πληροφοριών σε ένα νευρώνα, η αλληλοσυσχέτιση μεταξύ των νευρώνων, κ.α. Επίσης, από την πυκνότητα συχνοτήτων μπορούμε να αναπτύξουμε την μη παραμετρική μέθοδο ανάλυσης σημάτων EEG, όπου έχουμε καλύτερη εικόνα στην κατά Granger αιτιότητα.

3.8 Μερική κατευθυνόμενη συνάφεια (Partial Directed Coherence)

Από την εξίσωση (3.29) η οποία έχει προκύψει από την παραμετρική πολυμεταβλητή μοντελοποίηση των χρονοσειρών μπορούν να εξαχθούν μέτρα τα οποία υπολογίζεται η αιτιότητα μεταξύ των εν λόγω χρονοσειρών. Γενικά μια χρονοσειρά $x_j(n)$ λέμε ότι αλληλεπιδρά με μια άλλη χρονοσειρά $x_i(n)$, εάν πληροφορία από την χρονοσειρά $x_j(n)$ προσδίδει βελτίωση για την εκτίμηση της χρονοσειράς $x_i(n)$ [Granger, 1969]. Από τον παραπάνω ορισμό της αιτιότητας μεταξύ δυο χρονοσειρών μπορεί να αναπαρασταθεί και για την μελέτη μεταξύ όλων των χρονοσειρών που αφορά ένα σύστημα. Το πολυμεταβλητό μοντέλο που κατασκευάζεται από την θεωρία πολυδιάστατης παλινδρόμησης έχει ως αποτέλεσμα του πίνακα της εξίσωσης (3.29) όπου μέσω του πίνακα μεταφοράς μπορούν να υπολογιστούν Granger-αιτιότητες μεταξύ των χρονοσειρών. Κάνοντας κανονικοποίηση ως προς κάθε στοιχείο του αντίστροφου πίνακα μεταφοράς $A(f)$ το οποίο είναι συντελεστές του πολυμεταβλητού αυτοπαλινδρομικού μοντέλου, προκύπτει δείκτης μερικής κατευθυνόμενης συνάφειας μεταξύ των x_i και x_j ως [Baccala et al., 2001]:

$$PDC_{i \rightarrow j}(f) = \frac{A_{i,j}}{\sqrt{\mathbf{a}_j^H(f) \mathbf{a}_j(f)}} \quad (3.30)$$

όπου $\mathbf{a}_j(f)$ είναι όλα τα στοιχεία του πίνακα $A(f)$ της στήλης j , δηλαδή, $\mathbf{a}_j(f) = [A_{1,j}(f), A_{2,j}(f), \dots, A_{N,j}(f)]$. Όπου με την παραπάνω διατύπωση της αιτιότητας έχουν αφαιρεθεί οι μικτοί όροι έμμεσης Granger αιτιότητας διότι δεν έχει συνυπολογιστεί για τον υπολογισμό της συνάφειας ο πίνακας διασποράς Σ . Όρος που προσδίδει την έμμεση Granger αιτιότητας [Baccala et al., 2001]. Από την κανονικοποίηση του πίνακα (f) προκύπτουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

$$\begin{aligned} 0 &\leq |PDC_{i \rightarrow j}(f)|^2 \leq 1 \\ \text{και} \\ \sum_{i=1}^N |PDC_{i \rightarrow j}(f)|^2 &= 1 \end{aligned} \quad (3.31)$$

Η κανονικοποιημένη συνθήκη PDC μας δείχνει την σχετική ισχύεις συσχέτισης μεταξύ της δομής του σήματος j σχετικά με την δομή του σήματος i σε σύγκριση με όλες τις υπόλοιπες δομές των συσχετισμένων σημάτων. Διαφορετικά, ο δείκτης PDC δείχνει την συσχέτιση μεταξύ των x_i και x_j σε σχέση με όλες τις διασυνδέσεις που έχει η χρονοσειρά x_i .

3.9 Μοντελοποίηση μη στάσιμων σημάτων

Τα EEG σήματα, όπως και κάθε είδος νευρικών σημάτων, είναι μη στάσιμες διαδικασίες, δηλαδή ο μέσος και η διακύμανση τους είναι εξαρτημένα από τον χρόνο. Συνεπώς, τα συγκεκριμένα σήματα δεν μπορούν να προσομοιωθούν με ένα γραμμικό αυτοπαλινδρομικό μοντέλο. Η διαδικασία που συνίσταται για την προσομοίωση των EEG σημάτων είναι να μετατρέψουμε το μη στάσιμο σήμα σε στάσιμο και όχι να χρησιμοποιήσουμε ένα μη γραμμικό αυτοπαλινδρομικό μοντέλο.

Τα περισσότερα μεγέθη (Granger causality, coherence) που μας ενδιαφέρουν στην ανάλυση νευρικών σημάτων είναι εκφρασμένα στο πεδίο των συχνοτήτων, αλλά, επειδή χρειαζόμαστε και την πληροφορία στο πεδίο του χρόνου, οι τρόποι μετατροπής είναι η παραθυροποίηση [Ding et al., 2000] και η ανάλυση κατά Wavelet [Dhamala et al., 2008].

Κατά την παραθυροποίηση χωρίζουμε το μη στάσιμο σήμα σε μικρά παράθυρα έτσι ώστε να διατηρείται η στασιμότητα στα επιμέρους παράθυρα. Σε κάθε κομμάτι του σήματος κάνουμε και την ανάλογη

ανάλυση των στάσιμων σημάτων αφού πρώτα γίνει έλεγχος της στασιμότητας με το κριτήριο που αναφέραμε στην αρχή του κεφαλαίου. Επίσης, για να βεβαιωθούμε ότι το διαιρούμενο σήμα είναι στάσιμο, βρίσκουμε τον συνολικό μέσο των καναλιών και τον διαιρούμε με την αντίστοιχη συνολική απόκλιση. Έτσι, βελτιώνουμε σημαντικά την τοπική στασιμότητα των δεδομένων [Ding et al., 2000]. Τέλος, επειδή μας ενδιαφέρει η μελέτη του σήματος να γίνει και στο χρονικό πεδίο αυξάνουμε την αλληλοεπικάλυψη των παραθύρων με αποτέλεσμα να έχουμε μια τελική ανάλυση του σήματος στα πεδία του χρόνου και των συχνοτήτων.

Κεφάλαιο 4

Θεωρία Πληροφορίας

4.1 Θεωρία πληροφορίας και νευροεπιστήμες

Η θεωρία πληροφορίας είναι ένας κλάδος της πληροφορικής που ασχολείται με την ποσοτικοποίηση της πληροφορίας. Αναπτύχθηκε από τον Claude Shannon και αναφέρθηκε σε αυτήν στο επιστημονικό άρθρο του με τίτλο “The Mathematical Theory of Communication” [Shannon, 1949]. Με την θεωρία πληροφορίας μπορούμε να μετρήσουμε την πληροφορία που πηγάζει από ένα φυσικό σύστημα και την μετάδοση αυτής σε κάποιο άλλο σύστημα. Ως ποσότητα της πληροφορίας ορίζεται το μέτρο της αβεβαιότητας να συμβεί ένα γεγονός από ένα δεδομένο σύστημα. Συγκεκριμένα, η διαφορά των μετρήσεων αβεβαιότητας μεταξύ δύο χρονικών στιγμών ενός συστήματος ορίζει την ποσότητα της πληροφορίας που μας δίνει αυτή η μέτρηση. Ο Shannon προσέγγισε ως μέτρο αβεβαιότητας την έννοια της εντροπίας, χαρακτηριστικό μέγεθος της Θερμοδυναμικής η οποία θα αναλυθεί εκτενέστερα στην παρακάτω ενότητα [Baddeley et al., 2000].

Μια από τις προκλήσεις που καλείται να λύσει ο κλάδος της νευροεπιστήμης είναι η αναγνώριση και ανίχνευση εγκεφαλικών αλληλεπιδράσεων μεταξύ νευρώνων που βρίσκονται σε διαφορετικές εγκεφαλικές περιοχές. Ο πιο κοινός τρόπος παροχής πληροφοριών ενός νευροφυσιολογικού συστήματος είναι η μελέτη των χαρακτηριστικών των καταγεγραμμένων σημάτων από τον εγκεφαλικό φλοιό (ηλεκτροεγκεφαλογραφήματα και μαγνητοεγκεφαλογραφήματα) χρησιμοποιώντας τεχνικές από την ανάλυση χρονοσειρών [Galka, 2000]. Για την μελέτη των νευροφυσιολογικών σημάτων γίνεται είτε μονομεταβλητή είτε πολυμεταβλητή ανάλυση των χρονοσειρών που η κάθε μια έχει διαφορετική σημασία και σκοπό. Η εκάστοτε, όμως, ανάλυση έχει σημαντικό κοινό σημείο ότι πραγματοποιείται χρησιμοποιώντας γραμμικές μεθόδους τόσο στο χρονικό όσο και στο συχνοτικό πεδίο [Bendat and Pierson, 2000]. Αυτές οι μέθοδοι δεν μπορούν να δώσουν καμία πληροφορία γύρω από την μη γραμμικότητα των εγκεφαλικών σημάτων. Παρόλα αυτά, έχουν πραγματοποιηθεί και αναπτυχθεί αναλύσεις μονομεταβλητών μη γραμμικών χρονοσειρών πάνω σε νευροφυσιολογικά δεδομένα [Elbert et al., 1994; Faure and Korn, 2001; Galka, 2000; Segundo et al., 2001; Stam, 2005]. Επίσης, τα τελευταία χρόνια έχουν αναπτυχθεί τεχνικές ανάλυσης μη γραμμικών χρονοσειρών βασισμένες στην θεωρία πληροφορίας [Kraskov et al., 2004; Schreiber, 2000; Fredor, 2014]. Οι μέθοδοι που είναι βασισμένες πάνω στην θεωρία πληροφορίας είναι αρκετά χρήσιμες στην νευροφυσιολογία διότι έχουν την ικανότητα ανίχνευσης μη γραμμικών αλληλεπιδράσεων μεταξύ νευρώνων, το οποίο είναι αδύνατο με την εφαρμογή γραμμικών τεχνικών. Παρόλα αυτά, η εφαρμογή των μη γραμμικών μεθόδων σε νευροφυσιολογικά σήματα δεν είναι μια εύκολη υπόθεση διότι τα σήματα έχουν υψηλό δείκτη θορύβου, είναι μη στάσιμα και είναι πεπερασμένου μήκους και τα εργαλεία από την θεωρία πληροφορίας είναι ευαίσθητα στους εν λόγω παράγοντες για την ανίχνευση μη γραμμικών αλληλεπιδράσεων [Pereda et al., 2005].

Αρκετές μέθοδοι έχουν παρουσιαστεί κατά καιρούς [Blinowska et al., 1991; Baccala et al., 2001; Stam et al., 2002] για την ανίχνευση γραμμικών και μη αλληλεπιδράσεων ενός νευροφυσιολογικού συστήματος, άλλα όλες έχουν ως κοινή ρίζα τον εντοπισμό της πληροφορίας η οποία μεταδίδεται

μεταξύ των χρονοσειρών. Η μετάδοση πληροφορίας μεταξύ των νευροφυσιολογικών σημάτων θα εντοπιστεί και θα μελετηθεί άμεσα από τον χώρο της θεωρίας πληροφορίας χρησιμοποιώντας εργαλεία και μεθόδους που έχουν αναπτυχθεί στον εν λόγω επιστημονικό κλάδο.

4.2 Εντροπία

Ένα χαρακτηριστικό μέγεθος της θεωρίας πληροφορίας είναι το μέτρο της εντροπίας με το οποίο μετράται η ποσότητα της αβεβαιότητας να συμβεί ένα γεγονός, δηλαδή η εντροπία είναι αντιστρόφως ανάλογη με την πιθανότητα να συμβεί ένα γεγονός. Για παράδειγμα, αν υποθέσουμε ότι έχουμε δύο τυχαία γεγονότα x_i , $i = 1, 2$ όπου το κάθε ένα συνδέεται με μια πιθανότητα p_i . Στο πρώτο πείραμα, οι δυο πιθανότητες είναι $p_1 = 0.5$, $p_2 = 0.5$ ενώ στο δεύτερο είναι $p_1 = 0.01$, $p_2 = 0.99$. Φαίνεται καθαρά ότι το αποτέλεσμα του πρώτου πειράματος είναι λιγότερο προβλέψιμο και κατά συνέπεια περισσότερο αβέβαιο από το αποτέλεσμα του δεύτερου. Μπορούμε να πούμε ότι η αβεβαιότητα H_i ενός αποτελέσματος x_i γράφεται ως:

$$H_i \propto \frac{1}{p_i} \quad (4.1)$$

Είναι επιθυμητό η αβεβαιότητα να κυμαίνεται στο πεδίο τιμών $[0, \infty]$ όπου το αντίστοιχο πεδίο ορισμού των πιθανοτήτων είναι $[0, \infty]$, όποτε ξαναγράφεται η εξίσωση (4.1) ως εξής:

$$H_i \propto \log \frac{1}{p_i} \quad (4.2)$$

Αν υπολογίσουμε την μέση αβεβαιότητα που συσχετίζεται με το πείραμα το οποίο έχει M αποτελέσματα προκύπτει η εντροπία του πειράματος η οποία γράφεται ως:

$$H = - \sum_{i=1}^M p_i \log p_i \quad (4.3)$$

Όπου η βάση του λογαρίθμου ορίζεται ανάλογα με τις μονάδες μέτρησης των τιμών. Συνήθως στην εξίσωση (4.3) χρησιμοποιείται ο λογάριθμος με βάση το 2 όπου η εντροπία έχει μονάδα μέτρησης τα bits. Αξίζει να αναφερθεί ότι ο Shannon υιοθέτησε τον όρο εντροπία από τον ορισμό που είχε δώσει Von Neumann για το αντίστοιχο θερμοδυναμικό μέγεθος το οποίο έχει τον ίδιο φορμαλισμό με την εξίσωση (4.3).

Η εκτίμηση της εντροπίας πραγματοποιείται υπολογίζοντας την πιθανότητα $p_i = n_i/N$ όπου n_i είναι ο αριθμός των τυχαίων συμβάντων x_i και N ο συνολικός αριθμός του δείγματος. Παρόλα αυτά, αν η εκτίμηση της εντροπίας υπολογίζεται άμεσα την πιθανότητα καθιστά το μέγεθος ευάλωτο στο θόρυβο. Για την βελτίωση την εκτίμησης της εντροπίας εισάχθηκε ένας όρος διόρθωσης στην εξίσωση (4.3), ο οποίος συγκλίνει ασυμπτωτικά στο $1/N$ η οποία ορίζεται ως [Grassberger, 1988]:

$$H \approx \sum_i \frac{n_i}{N} (\log N - \psi(n_i)) \quad (4.4)$$

με $\Psi(x) = \frac{d \log \Gamma(x)}{dx} \approx \log x - 1/2x$ για αρκετά μεγάλο x . Η εξίσωση (4.4) είναι αρκετά σημαντική για την ανάπτυξη μεθόδων που βασίζονται στην θεωρία πληροφορίας διότι είναι αρκετά ανθεκτική (robust) στον θόρυβο των νευροφυσιολογικών σημάτων.

4.3 Αμοιβαία πληροφορία (Mutual Information)

Υπάρχουν αρκετοί δείκτες που μετράνε την ανεξαρτησία μεταξύ δύο τυχαίων μεταβλητών η αμοιβαία πληροφορία [ΑΠ], κυρίως, βασίζεται στην θεωρία πληροφορίας [Cover and Thomas, 1991]. Σε αντίθεση, με τους δείκτες της γραμμικής αυτοσυσχέτισης, οι οποίοι επίσης είναι ευαίσθητοι για τον εντοπισμό εξαρτήσεων, η ΑΠ δεν εκφράζεται από στατικά μεγέθη όπως αυτό της συνδιακύμανσης (covariance). Ο υπολογισμός της ΑΠ δεν είναι πάντα μια εύκολη διαδικασία για σήματα που έχουν υψηλό δείκτη θορύβου. Αν υποθέσουμε ότι έχουμε ένα σύνολο N διμεταβλητών μετρήσεων, $z_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$ και υποθέτοντας ότι είναι από ανεξάρτητες ταυτοτικές κατανομές, τότε έχουμε ένα σύνολο τυχαίων μεταβλητών $Z = (X, Y)$ με πυκνότητα $\mu(x, y)$. Ο πιο απλός και γενικότερος τρόπος προσέγγισης της ΑΠ είναι η διαμέριση των μεταβλητών X και Y σε παράθυρα πεπερασμένου μήκους, όπου η ΑΠ γράφεται ως:

$$I(X, Y) \approx I_{binned}(X, Y) \equiv \sum_{i,j} p(i, j) \log \frac{p(i, j)}{p_x(i)p_y(j)} \quad (4.5)$$

όπου $p_x(i) = \int_i dx \mu_x(x)$, $p_y(i) = \int_i dy \mu_y(y)$ και $p(i, j) = \int_j \int_i dx dy \mu(x, y)$ και όπου \int_i σημαίνει ολοκλήρωση πάνω στα παράθυρα i . Η προσέγγιση I_{binned} υπολογίζεται μετρώντας τον αριθμό των σημείων σε κάθε ένα παράθυρο. Αν $n_x(i)$ και $n_y(j)$ είναι ο αριθμός των σημείων που αντιστοιχεί στο i παράθυρο της μεταβλητής X και αντίστοιχα του j παραθύρου για την μεταβλητή Y και $n(i, j)$ είναι ο αριθμός των κοινών σημείων του i και j παραθύρων, τότε υπολογίζονται προσεγγιστικά οι όροι της εξίσωσης (4.5) $p_x(i) \approx n_x(i)/N$, $p_y(j) \approx n_y(j)/N$ και $p(i, j) \approx n(i, j)/N$.

Το μέγεθος του παραθύρου που χρησιμοποιείται στην εξίσωση (4.5) δεν χρειάζεται να είναι σταθερού μήκους. Μέθοδοι βελτιστοποίησης [Delbellow and Vajda, 1999] έχουν χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση του μεγέθους αναπροσαρμοστικών παραθύρων ώστε να υπάρχει ίσος αριθμός των $n(i, j)$ για κάθε ζευγάρι (i, j) έχοντας μη μηδενικές μετρήσεις. Παρόλο που ο υπολογισμός της ΑΠ με αναπροσαρμοστικά παράθυρα είναι καλύτερος από ότι με σταθερού μήκους παράθυρα, στον υπολογισμό της ΑΠ προστίθεται ένα συστηματικό σφάλμα [Kraskov et al., 2005]. Για την ελαχιστοποίηση του σφάλματος για τον υπολογισμό των $n_x(i)$, $n_y(j)$ και $n(i, j)$ χρησιμοποιείται ως διόρθωση μια ασυμπτωτική σειρά η οποία συγκλίνει για πεπερασμένο αριθμό δείγματος N , όπως προαναφερθήκε και στην εξίσωση (4.4).

Επίσης, θα μπορούσε ο υπολογισμός της ΑΠ να γίνει από την εύρεση των εντροπιών για κάθε μεταβλητή X , Y και από την από κοινού εντροπία των δυο μεταβλητών. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.5) και (4.3) καταλήγουμε στην εξής έκφραση της ΑΠ:

$$\begin{aligned} I(X, Y) &= \sum_{i,j} p(i, j) \log \frac{p(i, j)}{p_x(i)p_y(j)} \\ &= \sum_{i,j} p(i, j) (\log p(i, j) - \log(p_x(i)p_y(j))) = \\ &= \sum_{i,j} p(i, j) (\log p(i, j) - \log p_x(i) - \log p_y(j)) = \\ &= \sum_{i,j} p(i, j) \log p(i, j) - \sum_i p_x(i) \log p_x(i) - \sum_j p_y(j) \log p_y(j) = \\ I(X; Y) &= H(X) + H(Y) - H(X, Y) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Όπου $H(X, Y)$ είναι η από κοινού εντροπία των δυο μεταβλητών X , Y . Από την εξίσωση (4.6) φαίνεται ότι αν οι μεταβλητές X , Y είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, η από κοινού εντροπία γράφεται ως: $H(X, Y) = H(X) + H(Y)$ και το αποτέλεσμα της ΑΠ είναι μηδέν. Βέβαια, το παραπάνω

συμπέρασμα φαίνεται και από την εξίσωση (4.5) όπου αν η από κοινού κατανομή είναι $p(i, j) = p_x(i)p_y(j)$ τότε και ο λογάριθμος της εξίσωσης μηδενίζεται, που σημαίνει ότι και οι δυο μεταβλητές που μετράμε είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Η εκτίμηση των επιμέρους εντροπιών της εξίσωσης (4.6) μπορεί να πραγματοποιηθεί με την μέθοδο των κ-κοντινότερων γειτόνων [Kraskov, 2005]. Η εκτίμηση της εντροπίας μιας μεταβλητής X μπορεί να εκφραστεί ως συνάρτηση των διγράμματα συναρτήσεων $\psi(x_i)$ και την Ευκλείδεια απόστασης των σημείων $\epsilon(i)$ με τους κοντινότερους κ-γείτονες ως [Kraskov, 2005]:

$$\hat{H}(X) = \psi(k) - \psi(N) - \log c_d - \frac{d}{N} \sum_{i=1}^N N \log \epsilon(i) \quad (4.7)$$

όπου d είναι η διάσταση της μεταβλητής και c_d είναι ο όγκος της d -διάστατης μοναδιαίας σφαίρας. Η μέγιστη μοναδιαία νόρμα του $c_p = 1$ όταν Ευκλείδεια νόρμα είναι $c_p = \pi^{d/2}/\Gamma(1 + d/2)/2^d$. Αν θεωρήσουμε την από κοινού τυχαία μεταβλητή $Z = (X, Y)$ με μέγιστη νόρμα, υπολογίσουμε τις αποστάσεις του σημείου z_i με τα υπόλοιπα σημεία του συνόλου $\epsilon(i)$ και βρούμε του κ-κοντινότερους γείτονες παρόμοια με την εξίσωση (4.7), η από κοινού εντροπία των μεταβλητών (X, Y) γράφεται ως [Kraskov, 2005]:

$$\hat{H}(X, Y) = \psi(k) - \psi(N) - \log(c_{dX}c_{dY}) + \frac{d_X + d_Y}{N} \sum_{i=1}^N N \log \epsilon(i) \quad (4.8)$$

Αν τώρα προστεθούν οι εξισώσεις (4.7) και (4.8) σύμφωνα με την (4.6) γίνεται ο προσεγγιστικός υπολογισμός της ΑΠ. Αν όμως υπολογιστεί άμεσα η (4.7) με τον αριθμό των γειτόνων k να παραμένει σταθερός, τότε θα έχει ως αποτέλεσμα να χρησιμοποιείται διαφορετική κλίμακα αποστάσεων στους από κοινού και περιθωριακούς χώρους. Για σταθερό k οι αποστάσεις του κ-ου γείτονα στον από κοινού χώρο είναι μεγαλύτερες από τις αποστάσεις των γειτόνων του περιθωριακού χώρου. Ως αποτέλεσμα να υπάρχει μεροληψία των εκτιμήσεων των μοναδιάστατων $H(X)$, $H(Y)$ και διδιάστατων $H(X, Y)$ εντροπιών.

Ο αμερόληπτος υπολογισμός της εντροπίας της εξίσωσης (4.7) θα πραγματοποιηθεί υπολογίζοντας την για κάθε τιμή των κ-γειτόνων. Σύμφωνα, από το σχήμα 4.1 ο κ-ος γείτονας του x_i είναι αυτός που βρίσκεται στην οριζόντια πλευρά του τετραγώνου $\epsilon(i)$. Εάν υπάρχουν $n_x(i)$ σημεία μέσα στην οριζόντια γραμμή $x = x \pm \epsilon(i)/2$, τότε $\epsilon/2$ είναι η απόσταση από το $n_x(i) + 1$ -το γείτονα του x_i και η σχέση (4.7) γράφεται για κάθε κ-γείτονα ως:

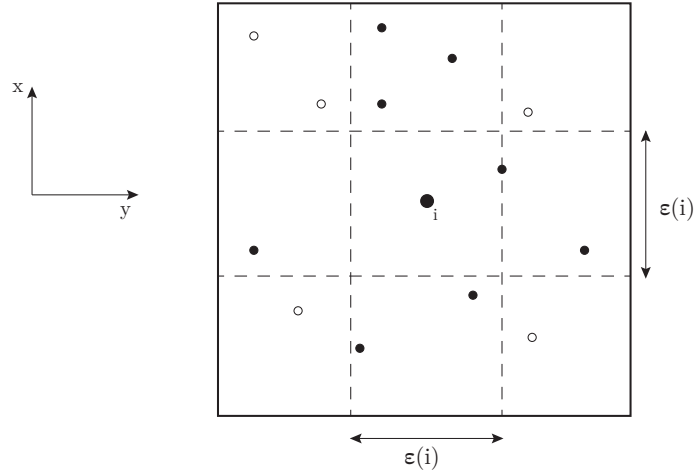
$$\hat{H}(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N \psi(n_x(i) + 1) - \psi(N) - \log c_d - \frac{d}{N} \sum_{i=1}^N N \log \epsilon(i) \quad (4.9)$$

Αντίστοιχα, το ίδιο ισχύει και για την διεύθυνση y . Αν τώρα αντικαταστήσουμε τις εξισώσεις (4.8) και (4.9) στην (4.6) παίρνουμε την σχέση της προσέγγισης της ΑΠ με την μέθοδο των κ-κοντινότερων γειτόνων ως:

$$I(X, Y) = \psi(k) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\psi(n_x + 1) + \psi(n_y + 1)) + \psi(N) \quad (4.10)$$

Για τον υπολογισμό της ΑΠ με την μέθοδο των κ-κοντινότερων γειτόνων, αρχικά χρησιμοποιούμε την μέγιστη νόρμα του συνόλου $Z = (X, Y)$ που έχει ως:

$$\|z - z'\| = \max\{\|x - x'\|, \|y - y'\|\} \quad (4.11)$$



Σχήμα 4.1: Ορισμός του ϵ , n_x και n_y για την εκτίμηση της (4.10), για $k = 1$ για κάποιο i . Σε αυτό το παράδειγμα, $n_x = 5$ και $n_y = 3$

Όπου $\|x - x'\|$, $\|y - y'\|$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί οποιαδήποτε νόρμα. Αν υποθέσουμε ότι $\epsilon_x/2$ και $\epsilon_y/2$ είναι οι αποστάσεις των k -κοντινότερων γειτόνων για κάθε διάσταση αντίστοιχα, τότε ορίζεται ως $\epsilon/2$ η απόσταση του κοντινότερου γείτονα από το σημείο z_i όπου υπολογίζεται από το $\epsilon = \max(\epsilon_x, \epsilon_y)$. Στην συνέχεια μετριέται ο αριθμός των σημείων $n_x(i)$ όπου η απόσταση του σημείου x_j από το σημείο x_i είναι αυστηρά μικρότερη από την απόσταση $\epsilon/2$, αντίστοιχη διαδικασία ακολουθείται και για τον υπολογισμό του των σημείων στην διάσταση y . Η παραπάνω διαδικασία φαίνεται και από το σχήμα 4.1. Να σημειωθεί ότι η μεταβλητή $\epsilon(i)$ είναι τυχαία μεταβλητή που σημαίνει ότι τα n_x και n_y δεν παραμένουν σταθερά για κάθε σημείο.

Επίσης μπορεί να γενικευτεί ο υπολογισμός της ΑΠ όπου η εξίσωση (4.6) γράφεται για υψηλότερες διαστάσεις ως:

$$I(X, X_2, \dots, X_n) = H(X) + H(X_2) + \dots + H(X_n) - H(X_1, X_2, \dots, X_n). \quad (4.12)$$

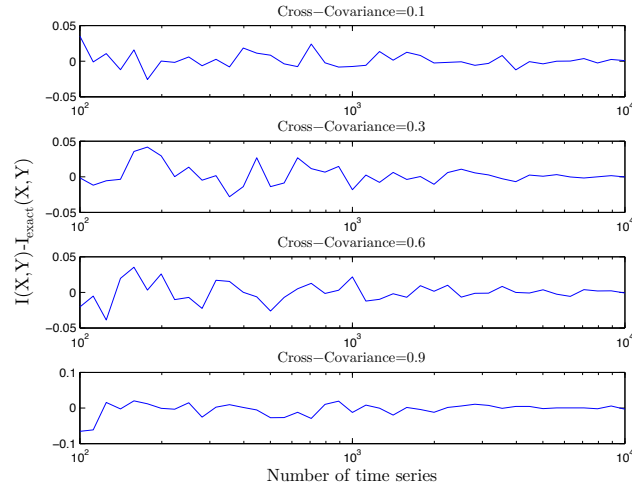
Αντίστοιχα με το ίδιο τρόπο προκύπτει η έκφραση της παραπάνω εξίσωσης με αυτή της (4.11) όπου γράφεται υπολογίζοντας τον αριθμό των k -κοντινότερων γειτόνων για κάθε μία διάσταση, όποτε η εξίσωση (4.12) γράφεται ως:

$$I(X, X_2, \dots, X_n) = \psi(k) + (n-1)\psi(N) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\psi(n_{x_1}) + \psi(n_{x_2}) + \dots + \psi(n_{x_n})) \quad (4.13)$$

Για την μελέτη της εκτίμησης ΑΠ (4.10) πραγματοποιήθηκε σύγκριση με την αναλυτική λύση της ΑΠ για κανονική κατανομή. Αν δυο μεταβλητές X και Y είναι από κανονικές κατανομές με μηδενικό μέσο και μοναδιαία διακύμανση, και με r τιμή της αυτοδιακύμανσης. Ορίζεται ο αναλυτικός τύπος της ΑΠ ως [Darbellay and Vajda, 1999]:

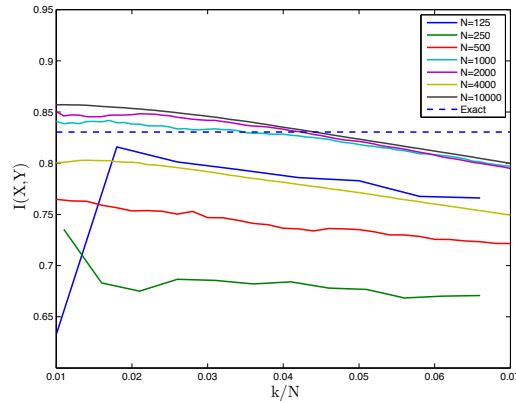
$$I_{Gauss}(X, Y) = -\frac{1}{2} \log(1 - r^2) \quad (4.14)$$

Στο σχήμα 4.2 φαίνονται η διαφορά μεταξύ της εκτίμησης ΑΠ (4.10) με τη ακριβής λύση (4.14), $I(X, Y) - I_{Gauss}(X, Y)$, για ένα σύνολο τιμών της αυτοδιακύμανσης r , συναρτήσει του αριθμού των σημείων των μεταβλητών.



Σχήμα 4.2: Εκτίμηση του $I(X, Y) - I_{exact}(X, Y)$ για κανονικές μεταβλητές, μοναδιαίας διακύμανσης και για τιμές της αυτοδιακύμανσης $r = 0.1, 0.3, 0.6, 0.9$, συναρτήσει των αριθμών των μεταβλητών για $k = 1$.

Ένα φανερό χαρακτηριστικό του σχήματος 4.2 είναι ότι για οποιαδήποτε τιμή της αυτοδιακύμανσης r για μεγάλο αριθμό σημείων $N \rightarrow \infty$ το σφάλμα εκτιμάται κοντά στο μηδέν, $I(X, Y) - I_{gauss}(X, Y) \rightarrow 0$. Επίσης φαίνεται ότι όσο αυξάνεται η σύζευξη των μεταβλητών αυξάνεται και το σφάλμα εκτίμησης της ΑΠ για μικρό αριθμό σημείων.

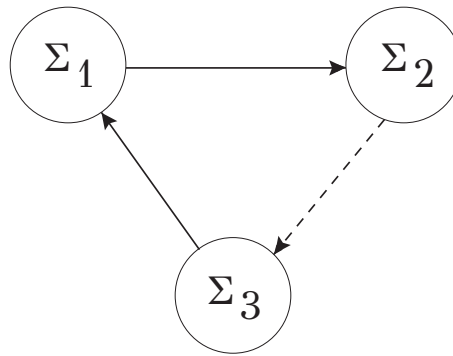


Σχήμα 4.3: Εκτίμησης της ΑΠ για συζευγμένες κανονικές μεταβλητές με μοναδιαία διακύμανση και τιμή της αυτοδιακύμανσης $r = 0.9$, συναρτήσει του k/N όπου αριθμό των σημείων N ορίστηκε ως $N = 125, 250, 500, 1000, 2000, 4000, 10000$. Η διακεκομμένη γραμμή είναι η ακριβής τιμή της ΑΠ, $I(X, Y) = 0.8303$.

Στο σχήμα 4.3 έγινε σύγκριση των τιμών της $I(X, Y)$ για κανονικές μεταβλητές για διαφορετικό αριθμόν σημείων N και για τιμή της αυτοδιακύμανσης $r = 0.9$. Από την εικόνα 4.3 φαίνεται ότι ο αριθμός των γειτόνων που επιλέγεται για την εκτίμηση της ΑΠ είναι ανάλογος με τον αριθμό των σημείων $\propto N$ των μεταβλητών που σημαίνει ότι εκτίμηση της ΑΠ εξαρτάται μόνο από το κλάσμα k/N .

4.4 Μερική αμοιβαία πληροφορία (Partial Mutual Information)

Στην πραγματικότητα ο δείκτης που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για την ανάλυση νευροφυσιολογικών σημάτων είναι αυτός όπου καθιστά δυνατό την ανίχνευση έμμεσων αιτιοτήτων μεταξύ τριών ή περισσότερων συστημάτων. Έμμεση αιτιότητα έχουμε όταν δύο από τα τρία συστήματα προκαλούνται μεταξύ τους και στη συνέχεια δημιουργείται μια επιπλέον σύνδεση μεταξύ δυο συστημάτων. Όπως φαίνεται από το σχήμα 4.4 αν το $\Sigma_3 \rightarrow \Sigma_1$ και $\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ τότε δημιουργείται η έμμεση αιτιότητα μεταξύ των συστημάτων $\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_3$. Υπολογίζοντας την ΑΠ δεν μπορούμε να αποφύγουμε την ανίχνευση και των έμμεσων αιτιοτήτων αλλά επίσης ΑΠ δεν προσδίδει καμία πληροφορία της κατεύθυνσης των συνδέσεων μεταξύ των συστημάτων, $I(X, Y) = I(Y, X)$. Για τον εντοπισμό των έμμεσων συνδέσεων ορίστηκε το μέγεθος της Μερικής Αμοιβαίας Πληροφορίας [ΜΑΠ] [Hamming, 1986]. Αν θεωρήσουμε μια τρίτη μεταβλητή Z που παίρνει μέρος κατά την μέτρηση της ΑΠ $I(X, Y)$ τότε ορίζεται η μερική αμοιβαία πληροφορία ως:



Σχήμα 4.4: Τρία συζευγμένα συστήματα Σ_1, Σ_2 και Σ_3 , όπου τα συνεχής βέλη αφορούν άμεσες συζεύξεις και το διακεκομμένο την έμμεση συζεύξη

$$I(X, Y|Z) = H(X, Y) + H(Y, Z) - H(Z) - H(X, Y, Z) \quad (4.15)$$

Η παραπάνω εξίσωση γράφεται αν θεωρήσουμε την από κοινού πιθανότητα p_{xyz} των (X, Y, Z) και τις αντίστοιχες περιθωριακές πιθανότητες $p_{xz} = \sum_y p_{xyz}$, $p_{yz} = \sum_x p_{xyz}$ και $p_z = \sum_{xy} p_{xyz}$ όπου η εξίσωση (4.15) γράφεται:

$$I(X, Y|Z) = \sum_{xyz} p_{xyz} \log \frac{p_{xyz} p_z}{p_{xz} p_{yz}} \quad (4.16)$$

Η ΜΑΠ είναι συμμετρικός δείκτης κάτω από την ίδια συνθήκη Z δηλαδή $I(X, Y|Z) = I(Y, X|Z)$. Επίσης έχουμε ότι $0 \leq I(X, Y|Z)$ όπου συμβαίνει να είναι μηδέν όταν και μόνο όταν το X και Y είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους υπό την συνθήκη Z .

Η εκτίμηση της ΜΑΠ μπορεί να γίνει με την μέτρηση σημείων παραθύρου ώστε να υπολογιστούν οι από κοινού και περιθωριακές πιθανότητες. Παρόλο αυτά, επειδή οι από κοινού κατανομές είναι υψηλών διαστάσεων καθιστά την μεθοδολογία αυτή πάρα πολύ αργή. Για την μείωση του υπολογιστικού κόστους εκτιμάται η ΜΑΠ με την μέθοδο των κ-κοντινότερων γειτόνων όπως είχε γίνει και στην προηγούμενη παράγραφο για τον δείκτη ΑΠ [Frenzel and Pompe, 2007].

Η εκτίμηση ΜΑΠ με την μέθοδο των κ-κοντινότερων γειτόνων γίνεται με παρόμοιο τρόπο όπως είχε προτείνει ο [Kraskov, 2005] για την ΑΠ. Αν θεωρήσουμε ένα διάνυσμα $u_i \equiv (x_i y_i, z_i)$ όπου x_i, y_i και z_i είναι τρεις χρονοσειρές με $i = 1, 2, \dots, N$ και k είναι ο αριθμός των γειτόνων με $1 \leq k \ll N$. Υπολογίζουμε με την μοναδιαία μέγιστη νόρμα του $U = (X, Y, Z)$ που έχει ως:

$$\|u - u'\| = \max\{\|x - x'\|, \|y - y'\|, \|z - z'\|\} \quad (4.17)$$

Όπου ορίζεται οι μέγιστες αποστάσεις μεταξύ των τριών χρονοσειρών $\epsilon(i)$. Αν τώρα θεωρήσουμε το περιθωριακό διάνυσμα $w_i \equiv (x_i, z_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$ και υπολογίσουμε τον αριθμό για κάθε i των αριθμό των σημείων $N_{x,z}$ όπου είναι αυστηρά μικρότεροι από την απόσταση $\epsilon(i)$ αντίστοιχα υπολογίζεται τα $N_{y,z}$ και N_z χρησιμοποιώντας ως περιθωριακά διανύσματα τα (y_t, z_t) και z_t . Όποτε σύμφωνα με τα παραπάνω η ΜΑΠ εκτιμάται ως:

$$I(X, Y|Z) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^T \left(h_{N_{xy(t)}} + h_{N_{yz(t)}} - h_{N_{z(t)}} \right) - h_{N_{k-1}} \quad (4.18)$$

Όπου $h_N = -\sum_{n=1}^N n^{-1}$ είναι γεωμετρική σειρά. Αν μηδενιστεί η συνθήκη Z , δηλαδή $Z = \emptyset$ τότε έχουμε ότι $N_{xz} = N_z$ και $N_{yz} = N_y$ όποτε καταλήγουμε από την εξίσωση (4.18) στην (4.10).

4.5 Εντροπία μεταφοράς (Transfer Entropy)

Όπως αναφέραμε προηγούμενος, με τον υπολογισμό της ΑΠ γίνεται ο εντοπισμός της πληροφορίας που ανταλλάσσεται μεταξύ δυο συστημάτων. Δυστυχώς, η ΑΠ δεν παρέχει καμία πληροφορία για τη δυναμική αλλά και την κατεύθυνση της. Ο δυναμικός χαρακτήρας στην εντροπία έχει γίνει μελετώντας της χρονοσειρές για διαφορετικές χρονοκαθυστερήσεις όπου γίνεται η εισαγωγή της εντροπίας μεταφοράς [EM] στην θεωρία πληροφορίας [Schreiber, 2000].

Μπορούμε να ενσωματώσουμε την δυναμική δομή στην ΑΠ μελετώντας την πιθανότητα μετάβασης μεταξύ δυο χρονικών σημείων. Θεωρούμε ένα σύστημα το οποίο μπορεί να προσεγγιστεί με μια στάσιμη Μαρκοβιανή διαδικασία τάξης k , που σημαίνει ότι η υπό συνθήκη πιθανότητα να βρεθεί X σε μια κατάσταση X_{n+1} την χρονική στιγμή $n+1$ είναι $P(X_{n+1}|X_n, \dots, X_{n-k+1}) = P(X_{n+1}|X_n, \dots, X_{n-k})$, όπου k είναι η διάσταση του διανύσματος χρονοκαθυστερημένης εμβάθυνσης (delay embedding vector).

Ο μέσος αριθμός των bits που χρειάζεται για την αποκωδικοποίηση μια κατάστασης ενός συστήματος εάν είναι γνωστές οι προηγούμενες καταστάσεις δίνει το ρυθμό εντροπίας [Schreiber, 2000]:

$$h_X = - \sum p(X_{n+1}, X_n^k) \log \left(p(X_{n+1}|X_n^{(k)}) \right) \quad (4.19)$$

όπου $p(X_{n+1}|X_n^{(k)}) = \frac{X_{n+1}}{X_n^{(k)}}$ και $X_n^{(k)} = (X_n, \dots, X_{n-k+1})$. Η εξίσωση (4.19) δεν είναι τίποτα παρά μόνο η διαφορά της Shannon εντροπίας για μεταξύ των χρονοσειρών $k+1$ και k διαστάσεων η οποία επίσης γράφεται: $h_X = H_{X^{k+1}} - H_{X^k}$.

Ο ρυθμός αμοιβαίας πληροφορίας είναι η γενίκευση του ρυθμού εντροπίας h_X δυο διαδικασιών (X, Y) όπου θα υπολογιστεί μετρώντας την απόκλιση της ΑΠ μεταξύ των χρονοσειρών $k+1$ και k διαστάσεων. Κάνοντας την αντιστοίχιση με την εξίσωση (4.5) ο ρυθμός ΑΠ ή εντροπία μεταφοράς ορίζεται ως:

$$T_{Y \rightarrow X} = \sum p \left(X_{n+1}, X_n^{(k)}, Y_n^{(j)} \right) \log \frac{p(X_{n+1}|X_n^{(k)}), Y_n^{(j)}}{p(X_{n+1}|X_n^{(k)})} \quad (4.20)$$

Η επιλογή των διαστάσεων j συνηθίζεται να είναι είτε $j = k$ ή $j = 1$. Η εντροπία μεταφοράς $T_{Y \rightarrow X}$ είναι μη συμμετρικός δείκτης που δείχνει την άμεση εξάρτηση μεταξύ των δυο μεταβλητών (X, Y) .

Για την εκτίμηση της EM, αρχικά πρέπει να υπολογιστεί η διάσταση του διανύσματος χρονοκαθυστερημένης εμβάθυνσης, συγκεκριμένα χρησιμοποιείται το θεώρημα Takens [Takens, 1981] όπου γίνεται αναπαράσταση μιας χρονοσειράς σε τροχαίες σταθερή κατάσταση με την υψηλότερη δυνατή διάσταση. Το διάνυσμα σταθερής κατάστασης που χρησιμοποιείται για την δυναμική μελέτη της εντροπίας γράφεται ως:

$$X_t^d = (x(t), x(t - 2\tau), x(t - 2\tau), \dots, x(t - (d - 1)\tau)) \quad (4.21)$$

Ο προσδιορισμός των παραμέτρων τ και d έχει σημαντική επίδραση για την εκτίμηση της EM. Για παράδειγμα, χαμηλή διάσταση d , το διάστημα των σταθερών καταστάσεων να είναι ανεπαρκής, ως αποτέλεσμα την αλλοίωση της μέτρησης της EM, ενώ για πολύ υψηλό d η εκτίμηση της EM έχει μικρότερη ακρίβεια και σημαντικό υπολογιστικό κόστος κατά τον υπολογισμό της. Υπάρχουν αρκετοί τρόποι για την εκτίμηση των παραμέτρων, ο πιο δημοφιλής, για τον υπολογισμό της χρονοκαθυστερήσης τ είναι μέσω της εκτίμησης αυτοσυσχέτισης και στο χρονικό σημείο όπου εντοπίζεται το πρώτο ελάχιστο ή μηδενική τιμή αντιστοιχεί η παράμετρος τ . Η εκτίμηση της διάστασης του σταθερού χώρου d γίνεται είτε με την εφαρμογή του Cao κριτηρίου το οποίο βασίζεται στον εντοπισμό λανθασμένων γειτόνων [Cao, 1997] είτε εναλλακτικά για μη ντετερμινιστικές χρονοσειρές το κριτήριο Ragwitz το οποίο βασίζεται στην ελαχιστοποίηση σφάλματος πρόβλεψης των χρονοσειρών [Ragwitz and Kantz, 2002].

Αφού έχουν βρεθεί οι παράμετροι όπου οι χρονοσειρές βρίσκονται σε σταθερό πεδίο υπολογίζεται η EM μεταξύ τους, γράφοντας την εξίσωση (4.20) συναρτήσει των Shannon εντροπιών ως:

$$T_{Y \rightarrow X} = H(x_t^{d_x}, y_t^{d_y}) - H(x_{t+u}, x_t^{d_x}, y_t^{d_y}) + H(x_{t+u}, x_t^{d_x}) - H(x_t^{d_x}) \quad (4.22)$$

όπου u είναι ο χρόνος πρόβλεψης, d_x και d_y είναι οι διαστάσεις εμβάθυνσης για την κάθε χρονοσειρά αντίστοιχα. Η εκτίμηση των επί κοινού και περιθωριακών πιθανοτήτων της εξίσωσης (4.22) γίνεται με την είτε εφαρμογή σταθερών ή αναπροσαρμοστικών παραθύρων είτε με την μέθοδο των k -κοντινότερων γειτόνων όπως έγινε και για την εκτίμηση της ΑΠ προηγουμένως. Η εξίσωση (4.22) γράφεται συναρτήσει των κοντινότερων γειτόνων ως [Gomez and Herrero, 2010].

$$T_{Y \rightarrow X} = \psi(k) + \frac{1}{N} \sum \left(\psi(n_{x_t}^{d_x}) - \psi(n_{x_{t+u}}^{d_x} + 1) - \psi(n_{x_t}^{d_x} y_t^{d_y}) \right) t \quad (4.23)$$

όπου ψ είναι η διγάμμα συνάρτηση και k είναι ο κοντινότερος γείτονας μεταξύ των διανυσμάτων χρονοκαθυστερημένης εμβάθυνσης. Είναι προτιμότερο ο υπολογισμός της EM να γίνει με την μέθοδο των k -κοντινότερων γειτόνων διότι η τεχνική αυτή προσδίδει ομαλές πιθανότητες κατανομών από την κατανομή των αποστάσεων του κάθε σημείου με τους κοντινότερους γείτονες.

Επίσης σημαντικό μέγεθος για την ανίχνευση των αλληλεπιδράσεων μεταξύ νευροφυσιολογικών σημάτων είναι η μερική εντροπία μεταφοράς [partial transfer entropy], που δείχνει την κατεύθυνση μιας έμμεση αιτιότητας μεταξύ τριών συστημάτων. Η μερική εντροπία εκτιμάται μεταξύ τριών μεταβλητών, X , Y και Z όπου αρχικά έχουν βρεθεί οι παράμετροι της διάστασης εμβάθυνσης k, l και m και οι χρόνοι καθυστέρησης τ για κάθε μεταβλητή αντίστοιχα. Η μερική εντροπία μεταφοράς συμπεριλαμβάνει την επίδραση της τρέχουσας κατάστασης του Z πάνω στην μελλοντική κατάσταση που αντιστοιχεί στην X και στην τρέχουσα κατάσταση της Y , οπότε ο ορισμός της μερικής εντροπίας μεταφοράς γράφεται ως [Vakorin et al., 2009, Kugiumtzis et al., 2012]:

$$\begin{aligned} T_{Y \rightarrow X|Z} &= I(x_{t+u}; y_t^{d_y} | x_t^{d_x}, z_t^{d_z}) = \\ &= -H(x_{t+u}, y_t^{d_y}, x_t^{d_x}, z_t^{d_z}) + H(x_t^{d_x}, y_t^{d_y}, z_t^{d_z}) + H(x_{t+u}, x_t^{d_x}, z_t^{d_z}) - H(x_t^{d_x}, z_t^{d_z}) \end{aligned} \quad (4.24)$$

4.6 Μερική αμοιβαία πληροφορία με μεικτή εμβάθυνση (Partial Mutual Information on Mixed Embedding)

Αν θεωρήσουμε ότι $\{x_t, y_t, z_{1,T}, \dots, z_{K-2,t}\}_{t=1}^n$ όπου K είναι ο αριθμός των υπολοίπων χρονοσειρών των μεταβλητών $X, Y, Z_1, Z_2, \dots, Z_{K-2}$ και θέλουμε να εκτιμηθεί κατά πόσο επηρεάζει η Y συναρτήσει των μεταβλητών $Z = Z_1, \dots, Z_{K-2}$. Η μελλοντική τιμή της μεταβλητής Y για κάθε χρονικό σημείο t αναπαριστάται με διάνυσμα μήκους T όπου η χαρακτηριστική μεταβλητή γράφεται, $y_t^T = [y_{t+1}, y_{t+2}, \dots, y_{t+T}]$. Η χρονοκαθυστέρηση για κάθε μεταβλητή X, Y και Z εντοπίζεται μέσα στο πεδίο που δίνεται από την μέγιστη χρονοκαθυστέρηση για κάθε μεταβλητή, π.χ L_x για X και L_y για την Y . Όταν όλες οι μεταβλητές είναι του ίδιου τύπου, π.χ ηλεκτροεγκεφαλογραφικά σήματα, θεωρούμε σε όλες τις μεταβλητές την ίδια μέγιστη χρονοκαθυστέρηση L για όλες τις μεταβλητές. Αν ορίσουμε το σύνολο όλων των χρονοκαθυστερημένων μεταβλητών την χρονική στιγμή t ως W_t , το οποίο περιέχει τις συνιστώσες της X ως $x_t, x_{t-1}, \dots, x_{t-L_x}$ όμοια και για τις υπόλοιπες μεταβλητές.

Χρησιμοποιώντας ένα επαναληπτικό σχήμα με διάνυσμα μεικτής εμβάθυνσης $w_t \in W_t$ ξεκινώντας με, $w_t^0 = \emptyset$ [Vlachos and Kugiumtzis, 2011]. Στην πρώτη επανάληψη, βρίσκουμε την συνιστώσα του W_t η οποία είναι περισσότερο συσχετισμένη με την y_t^T που δίνεται από την εκτίμηση της Αμοιβαίας Πληροφορίας εκτιμώντας την με την μέθοδο κ-κοντινότερων γειτόνων, $w_t^1 = \operatorname{argmax}_{w \in W_t} I(y_t^T, w)$ και παίρνοντας το $w_t^1 = [w_t^1]$. Στην δεύτερη επανάληψη, βρίσκουμε την δεύτερη συνιστώσα του διανύσματος μεικτής εμβάθυνσης, $w_t^2 \in W_t$, το οποίο δίνεται αν παρέχεται περισσότερη πληροφορία για το y_t^T προσθέτοντας την συνιστώσα της προηγούμενης επανάληψης, w_t^2 , δηλαδή, $w_t^2 = \operatorname{argmax}_{w \in W_t} I(y_t^T, w | w_t^1)$, όπου υπολογίζεται εκτιμώντας την μερική αμοιβαία πληροφορία με την μέθοδο των κοντινότερων γειτόνων. Το νέο διάνυσμα της μεικτής εμβάθυνσης είναι $w_t^2 = [w_t^1, w_t^2]$. Το διάνυσμα w_t^j σταματάει την ανατροφοδότηση από το σύνολο W_t εφαρμόζοντας το τερματικό κριτήριο [Vlachos and Kugiumtzis, 2011]:

$$\frac{I(y_t^T, w_t^{j-1})}{I(y_t^T, w_t^j)} > A \quad (4.25)$$

όπου χρησιμοποιείται ως όριο το $A < 1$.

Το διάνυσμα μεικτής εμβάθυνσης w_t περιέχει τις χρονοκαθυστερημένες μεταβλητές $X, Y, Z_1, \dots, Z_{k-2}$, όπου όροι αλληλεπίδρασης $X \leftarrow Y$ υπάρχουν στις συνιστώσες του w_t που αφορά την μεταβλητή X . Αν ορίσουμε τις συνισταμένες της X στο w_t ως w_t^x , για την Y ως w_t^y και υπόλοιπες συνισταμένες της Z ως w_t^z . Για την μέτρηση της αιτιότητας μεταξύ των μεταξύ των X και Y υπό την συνθήκη της μεταβλητής Z , ορίζεται η μερική αμοιβαία πληροφορία μεικτής εμβάθυνσης [ΜΑΠΜΕ] [Kugiumtzis et al., 2013] ως:

$$R_{X \rightarrow Y | Z} = \frac{I(y_t^T, w_t^x | w_t^y, w_t^z)}{I(y_t^T, w_t)} \quad (4.26)$$

Η υπό συνθήκη αμοιβαία πληροφορία που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των (4.25) και (4.26) είναι παρόμοια με αυτή της μερικής εντροπίας μεταφοράς με μοναδιαία χρονοκαθυστέρηση των μεταβλητών. Η κανονικοποίηση της εξίσωσης (4.26) με την αμοιβαία εντροπία του διανύσματος μελλοντικών σημείων με ολόκληρο των διάνυσμα μεικτής εμβάθυνσης περιορίζει το πεδίο τιμών της, $R_{x \rightarrow y | z}$ είναι $[0, 1]$, και μηδενίζεται εάν δεν υπάρχει αιτιότητα μεταξύ των συνιστωσών του διανύσματος μεικτών εμβάθυνσεων ($w_t^x = \emptyset$), το οποίο σημαίνει ότι δεν υπάρχει άμεση συνδεσιμότητα της X πάνω στην Y .

Οι ελεύθεροι παράμετροι της ΜΑΠΜΕ είναι οι μέγιστοι χρόνοι χρονοκαθυστέρησης για κάθε μεταβλητή, π.χ L_x , ο χρονικός ορίζοντας T του διανύσματος y_t^T και το όριο A κριτήριο τερματισμού στην

διαδικασία κατασκευής των w_t . Η επιλογή της μέγιστης χρονοκαθυστέρησης δεν είναι μια κρίσιμη τιμή μπορεί να είναι αυθαίρετα μεγάλη που το μόνο κόστος θα είναι υπολογιστικό.

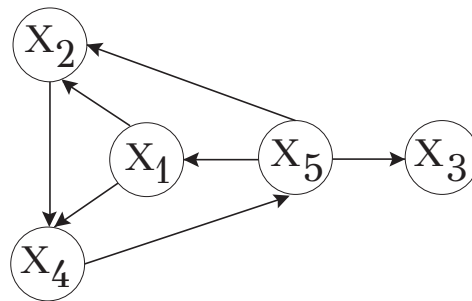
4.7 Προσομοιώσεις

Οι παραπάνω δείκτες εκτίμησης της αιτιότητας μεταξύ πολυμεταβλητών συστημάτων θα αξιολογηθούν μελετώντας μοντέλα χρονοσειρών. Θα υπολογιστούν τα μέτρα των συζεύξεων μεταξύ των συστημάτων ως προς όλες τις κατευθύνσεις και θα εκτιμηθούν οι στατιστικά σημαντικές για τα μέτρα της αμοιβαίας πληροφορίας (MI), μερικής αμοιβαίας πληροφορίας (PMI), εντροπίας μεταφοράς (TE), μερική εντροπία μεταφοράς (PTE) και μερική αμοιβαίας πληροφορία μεικτής εμβάθυνσης (PMIME). Οι προσομοιώσεις που θα πραγματοποιηθούν αφορούν τα συστήματα:

- Σύστημα 1: Ένα πολυμεταβλητό αυτοπαλινδρομικό μοντέλο πέμπτης τάξης $VAR(5)$ με συζεύξεις, $X_1 \rightarrow X_2$, $X_1 \rightarrow X_4$, $X_2 \rightarrow X_4$, $X_4 \rightarrow X_5$, $X_5 \rightarrow X_1$, $X_5 \rightarrow X_2$ και $X_5 \rightarrow X_3$ όπως φαίνεται στο σχήμα 4.5

$$\begin{aligned}
 x_{1,t} &= 0.4x_{1,t-1} - 0.5x_{1,t-2} + 0.4x_{5,t-1} + \epsilon_{1,t} \\
 x_{2,t} &= 0.4x_{2,t-1} - 0.3x_{1,t-4} + 0.4x_{5,t-2} + \epsilon_{2,t} \\
 x_{3,t} &= 0.5x_{3,t-1} - 0.7x_{3,t-2} - 0.3x_{5,t-3} + \epsilon_{3,t} \\
 x_{4,t} &= 0.8x_{4,t-3} + 0.4x_{1,t-2} + 0.3x_{2,t-3} + \epsilon_{4,t} \\
 x_{5,t} &= 0.7x_{5,t-1} - 0.5x_{5,t-2} - 0.4x_{4,t-1} + \epsilon_{5,t}
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

όπου $\epsilon_{i,t}$, $i = 1, \dots, 5$ είναι ο λευκός θόρυβος για κάθε χρονοσειρά με μοναδιαία τυπική απόκλιση.



Σχήμα 4.5: Ποιοτική αναπαράσταση συζεύξεων του γραμμικού συστήματος 1.

- Σύστημα 2: Τρεις μη γραμμικές συζεύξεις από *Henon* απεικονίσεις, $X_1 \rightarrow X_2$ και $X_2 \rightarrow X_3$, σχήμα 4.6.

$$\begin{aligned}
 x_{1,t} &= 1.4 - x_{1,t-1}^2 + 0.3x_{1,t-2} \\
 x_{2,t} &= 1.4 - cx_{1,t-1}x_{2,t-1} - (1-c)x_{2,t-1}^2 + 0.3x_{2,t-2} \\
 x_{3,t} &= 1.4 - cx_{2,t-1}x_{3,t-1} - (1-c)x_{3,t-1}^2 + 0.3x_{3,t-2}
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

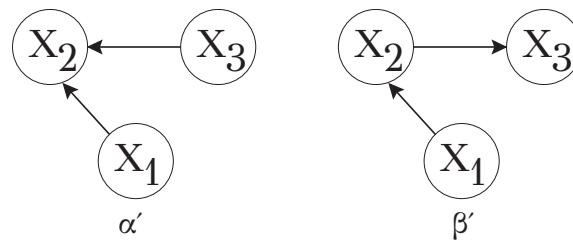
όπου c είναι συντελεστή σύζευξης του συστήματος και $c = 0, 0.05, 0.3, 0.5$.

Οι χρονοσειρές του συστήματος (4.28) συγχρονίζονται πλήρως για συντελεστές σύζευξης, $c \geq 7$. Για να μελετηθεί κατά πόσο επηρεάζει ο θόρυβος την συζεύξεις του συστήματος επιλέχθηκαν συντελεστές μικρότερες από την τιμή 0.5 και προστέθηκε σε κάθε χρονοσειρά του συστήματος λευκός θόρυβος με 0.2 τυπική απόκλιση [Stefanski et al., 2009].

- Σύστημα 3: Τρία συζευγμένα *Lorenz* συστήματα με μη γραμμικές συζεύξεις, $X_1 \rightarrow X_2$ και $X_2 \rightarrow X_3$, σχήμα 4.6.

$$\begin{aligned}
 X_1 &\equiv \begin{cases} \dot{x}_1 = 10(y_1 - x_1) \\ \dot{y}_1 = 28x_1 - y_1 - x_1z_1 \\ \dot{z}_1 = x_1y_1 - 8/3z_1 \end{cases} \\
 X_2 &\equiv \begin{cases} \dot{x}_2 = 10(y_2 - x_2) + c(x_1 - x_2) \\ \dot{y}_2 = 28x_2 - y_2 - x_2z_2 \\ \dot{z}_2 = x_2y_2 - 8/3z_2 \end{cases} \\
 X_3 &\equiv \begin{cases} \dot{x}_3 = 10(y_3 - x_3) + c(x_2 - x_3) \\ \dot{y}_3 = 28x_3 - y_3 - x_3z_3 \\ \dot{z}_3 = x_3y_3 - 8/3z_3 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

Οι πρώτοι μεταβλητές των τριών συζευγμένων συστημάτων υπολογίστηκαν με δειγματοληπτικό χρόνο 0.05. Οι δεσμοί, $X_1 \rightarrow X_2$ και $X_2 \rightarrow X_3$ έχουν την ίδια ισχύεις, c και εξετάστηκαν για $c = 0, 1, 3, 5$. Οι χρονοσειρές του συστήματος είναι πλήρως συγχρονισμένες για συντελεστές, $c \geq 8$ [Stefanski et al. 2009]



Σχήμα 4.6: Ποιοτική αναπαράσταση σύζευξης του μη γραμμικού συστήματος 2 (α') και 3(β').

Στο πρώτο σύστημα (4.27) πραγματοποιήθηκε προσομοίωση με μήκος των χρονοσειρών $n = 512$ και $n = 1024$ με σκοπό την μελέτη των δεικτών σύζευξης για διαφορετικά μήκη των σημάτων, ενώ για τα συστήματα 2 και 3 το μήκος των χρονοσειρών είναι $n = 1024$ με σκοπό την ανάλυση της ι-σχούς των συζεύξεων. Σε όλα τα συστήματα το χρονικό πεδίο των χρονοσειρών είναι $[0, 1] \text{ sec}$. Για τον υπολογισμό του γραμμικού δείκτη PDC για όλα τα συστήματα έγινε επιλογή της τάξης του πολυμεταβλητού αυτοπαλινδρομικού μοντέλου (MVAR) σύμφωνα με το Bayesian information κριτήριο (BIC) για το σύνολο τιμών των τάξεων από $[1, 10]$. Επίσης ο υπολογισμός του δείκτη PDC έγινε σε ολόκληρο το πεδίο τιμών των συχνοτήτων για κάθε σύστημα ($[0, 0.5] f_s$) Hz, όπου η f_s δειγματοληπτική συχνότητα η οποία είναι ίση με το σύνολο των σημείων για κάθε περίπτωση.

Για τον υπολογισμό των δεικτών της αμοιβαίας πληροφορίας και της μερικής αμοιβαίας πληροφορίας χρησιμοποιήθηκε χρονοκαθυστέρηση $k = 1$ μεταξύ των δύο χρονοσειρών και $l = 4$ ως προς την υπό συνθήκη χρονοσειρά για την εκτίμηση της MAΠ. Ενώ για τον υπολογισμό της εντροπία μεταφοράς και μερικής εντροπίας μεταφοράς χρησιμοποιήθηκαν χρονοκαθυστερήσεις $k = l = 1$ και $u = 1$ συντελεστής που αφορά την μεταφορά της εντροπίας την δεδομένη χρονική στιγμή. Επιπλέον, οι εκτιμήσεις των εντροπιών και των ΑΠ πραγματοποιήθηκαν μέσω της μεθόδου των k -κοντινότερων γειτόνων, όπου χρησιμοποιήθηκαν $k = 10$ για όλα τα συστήματα και για όλους τους δείκτες.

Για τον υπολογισμό του δείκτη μερική αμοιβαίας πληροφορίας μεικτής εμβάθυνσης (PMIME) έγινε επιλογή μέγιστης χρονοκαθυστέρησης $L_{max} = 10$, ίσο με το πεδίο εύρεσης τάξης των MVAR, επίσης επιλέχθηκαν $K = 10$ αριθμός κοντινότερων γειτόνων και το κριτήριο παύσης της μεθόδου ισούται με $A = 0.95$ [Vlachos et al., 2010].

Για την στατιστική σημαντικότητα των αποτελεσμάτων όλων των δεικτών πραγματοποιήθηκε ο μη παραμετρικός έλεγχος bootstrap των χρονοσειρών, με μηδενική υπόθεση 0 την απουσία σύζευξης μεταξύ των χρονοσειρών [Quiñan Quiroga et al., 2010]. Με την bootstrap μέθοδο κατασκευάζονται M χρονοσειρές για κάθε μια χρονοσειρά όπου έχει καταστραφεί η σύζευξη μεταξύ των χρονοσειρών και υπολογίζονται για κάθε επανάληψη οι δείκτες που γίνεται ο στατιστικός έλεγχος. Για την καταστροφή της αιτιότητας μεταξύ των σημάτων πραγματοποιήθηκε τυχαία μετάθεση χρονικών παραθύρων για το διάστημα $[0.3n, 0.7n]$, όπου n είναι το μήκος των χρονοσειρών. Αν q_0 είναι τιμή πριν την διαδικασία μετάθεσης και βρίσκεται ακραία της εμπειρικής κατανομής των q_1, q_2, \dots, q_M , τότε απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση H_0 . Ο αριθμός των επαναληπτικών μεταθέσεων για όλα τα συστήματα ήταν 100 και υπολογίστηκε για τους δείκτες MI , PMI , TE , PTE και PDC όπου για ακραία τιμή για την απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης θεωρείται το 95% της εμπειρικής κατανομής. Για τον υπολογισμό των στατικά σημαντικών τιμών της μεθόδου PMIME δεν είναι αναγκαίος, διότι δίνει μηδενικές τιμές στην περίπτωση μη συζευγμένων χρονοσειρών και θετική τιμή για την αντίθετη περίπτωση. Χρησιμοποιώντας τυχαία μετάθεση χρονικών σημείων για την καταστροφή των συζεύξεων η μέθοδος PMIME θα δημιουργεί κατανομές μόνο με μηδενικά σημεία, όποτε με την μέθοδο PMIME δεν είναι αναγκαίος ο στατιστικός έλεγχος [Parana et al., 2013].

4.8 Αποτελέσματα

Για την αξιολόγηση των δεικτών μέτρησης της αιτιότητας των συστημάτων υπολογίστηκε η ποσοστιαία απόρριψη των μηδενικών υποθέσεων για 30 επαναλήψεις για κάθε σύζευξη των χρονοσειρών για όλα τα συστήματα.

Αποτελέσματα για το Σύστημα 1. Εκτίμηση των γραμμικών συζεύξεων του συστήματος 1 (4.27) ($X_1 \rightarrow X_2, X_1 \rightarrow X_4, X_2 \rightarrow X_4, X_4 \rightarrow X_5, X_5 \rightarrow X_1, X_5 \rightarrow X_2$ και $X_5 \rightarrow X_3$). Αρχικά στον πίνακα 4.1 φαίνεται η ποσοστιαία απόδοση των δεικτών ΑΠ και ΜΑΠ για όλες τις υπάρχουσες συζεύξεις του συστήματος 1 (σχήμα 4.5) με σκοπό την ποιοτική σύγκριση των δεικτών ανάλογα με το μέγεθος των χρονοσειρών. Στο πίνακα 4.2 φαίνονται όλες οι άμεσες συνδέσεις του συστήματος 1, στο σύνολο επτά, και έχουν προστεθεί επιπλέον τρεις συνδέσεις με σκοπό τη σύγκριση της διακριτικής ικανότητας έμμεσων συζεύξεων των δεικτών.

512/1024	MI	PMI
$x_1 \leftrightarrow x_2$	96/90	93/96
$x_1 \leftrightarrow x_4$	0/0	3/7
$x_1 \leftrightarrow x_5$	63/87	93/90
$x_2 \leftrightarrow x_4$	3/16	20/47
$x_2 \leftrightarrow x_5$	3/0	7/10
$x_4 \leftrightarrow x_5$	50/50	80/77
$x_5 \leftrightarrow x_3$	43/60	80/77

Πίνακας 4.1: Εκτίμηση των MI(ΑΠ) και PMI(ΜΑΠ) του γραμμικού συστήματος 1 με κοινές χρονοκαθυστερήσεις μεταξύ των χρονοσειρών $k = 1$.

Οι δείκτες ΑΠ και ΜΑΠ υπολογίζουν την αλληλεξάρτηση μεταξύ των χρονοσειρών χωρίς την πληροφορία της κατεύθυνσης των συζεύξεων. Παραπάνω 4.1 φαίνεται ότι και τα δυο μέτρα χάνουν από κοινού την διακριτική τους ικανότητα σε τρεις συνδέσεις από τις επτά ανεξάρτητα από το μέγεθος της χρονοσειράς. ΜΑΠ είναι ελαφρώς πιο αποδοτική για τις τελευταίες συνδέσεις του πίνακα ($X_4 \leftrightarrow X_5$

και $X_5 \leftrightarrow X_3$), όπου αντίστοιχα οι τιμές της ΑΠ δεν είναι σημαντικά μικρότερες. Εν κατακλείδι, ο δείκτης της ΜΑΠ είναι πιο αποδοτικός για τον εντοπισμό γραμμικών αλληλεπιδράσεων από τον ΑΠ άλλα και οι δύο δεν φαίνεται να επηρεάζονται από το μήκος των χρονοσειρών.

512/1024	TE	PTE	PMIME	PDC
$x_1 \rightarrow x_2$	100/100	100/100	100/100	20/90
$x_1 \rightarrow x_4$	80/90	100/100	100/100	83/100
$x_2 \rightarrow x_4$	7/13	7/10	100/100	57/96
$x_4 \rightarrow x_5$	83/90	100/100	100/100	97/100
$x_5 \rightarrow x_1$	100/100	100/100	100/100	67/100
$x_5 \rightarrow x_2$	100/100	100/100	100/100	70/97
$x_5 \rightarrow x_3$	70/63	86/83	100/100	60/100
$x_4 \rightarrow x_3$	7/13	27/27	0/0	0/0
$x_4 \rightarrow x_1$	60/56	73/90	0/0	0/0
$x_3 \rightarrow x_2$	43/36	43/30	7/7	3/16

Πίνακας 4.2: Εκτίμηση των TE, PTE, PMIME και PDC του γραμμικού συστήματος 1.

Οι παραπάνω δείκτες του πίνακα 4.2 υπολογίζουν την κατευθυνόμενη σύζευξη μεταξύ των χρονοσειρών του συστήματος 1. Φαίνεται καθαρά ότι η μη-γραμμικοί δείκτες (TE, PTE και PMIME) εντοπίζουν με αρκετή ακρίβεια τις συνδέσεις του συστήματος, με εξαίρεση την $X_2 \rightarrow X_4$ για τους δείκτες TE και PTE. Αντίθετα ο γραμμικός δείκτης PDC επηρεάζεται από το μέγεθος των χρονοσειρών όπου δεν για $n = 512$ είναι αρκετά πιο ασθενής για πολλές συνδέσεις του συστήματος. Παρόλα αυτά, στην εκτίμηση των έμμεσων συνδέσεων (τρεις τελευταίες σειρές του πίνακα 4.2) οι PTE και TE δεν φαίνεται να τις εντοπίζουν με ακρίβεια σε σύγκριση με τις υπόλοιπες δύο, το οποίο μπορεί να οφείλεται στην επιλογή των παραμέτρων των δεικτών (αριθμός κοντινότερων γειτόνων, χρονοκαθυστερήσεις των χρονοσειρών) άλλα και ακόμη στον θόρυβο των χρονοσειρών. Εν κατακλείδι, στην μελέτη των κατευθυνόμενων δεικτών το μήκος των χρονοσειρών φαίνεται να είναι ανεξάρτητο από την ακρίβεια των δεικτών με εξαίρεση τον δείκτη PDC όπου για $n = 1024$ έχει καλύτερη διακριτικότητα.

Αποτελέσματα για το Σύστημα 2. Παρακάτω θα δούμε τα αποτελέσματα της προσομοίωσης μη γραμμικών συζεύξεων ενός Henon συστήματος (εξίσωση (4.28)) όπου οι αντίστοιχες αλληλεπιδράσεις των χρονοσειρών είναι $X_1 \rightarrow X_2$ και $X_3 \rightarrow X_2$. Σε αυτή την περίπτωση θα μελετηθεί η απόδοση των δεικτών σε μη γραμμικά συστήματα όπου οι συζεύξεις των χρονοσειρών είναι μόνο άμεσες και οι συγκρίσεις θα αφορούν τον εντοπισμό των μη γραμμικών συζεύξεων. Στο πίνακα 4.3 φαίνονται τα αποτελέσματα των MI και PMI για ένα μήκος των χρονοσειρών $n = 1024$ για την μέγιστη απόδοση των δεικτών και στον πίνακα 4.4 είναι οι υπόλοιποι δείκτες που δείχνουν την κατευθυνόμενη σύζευξη των χρονοσειρών.

Οι δείκτες της αμοιβαίας πληροφορίας MI και την μερικής αμοιβαίας πληροφορίας PMI υπολογίζουν την μη γραμμική αλληλεξάρτηση μεταξύ των χρονοσειρών εκτός από την MI στην περίπτωση $X_2 \leftrightarrow X_3$ που είναι πιο αδύναμη από την CMI. Το σημαντικότερο των αποτελεσμάτων του πίνακα 4.3 είναι το αποτέλεσμα της τελευταίας γραμμής, όπου φαίνεται ότι δεν υπάρχει εξάρτηση μεταξύ

1024	MI	PMI
$x_1 \leftrightarrow x_2$	83	97
$x_2 \leftrightarrow x_3$	63	97
$x_3 \leftrightarrow x_1$	13	7

Πίνακας 4.3: Εκτίμηση των CI(AΠ) και PCI(MAΠ) του μη γραμμικού συστήματος Henon τριών χρονοσειρών.

των χρονοσειρών X_3 και X_1 το οποίο συμφωνεί με την αρχική θεώρηση του συστήματος 2.

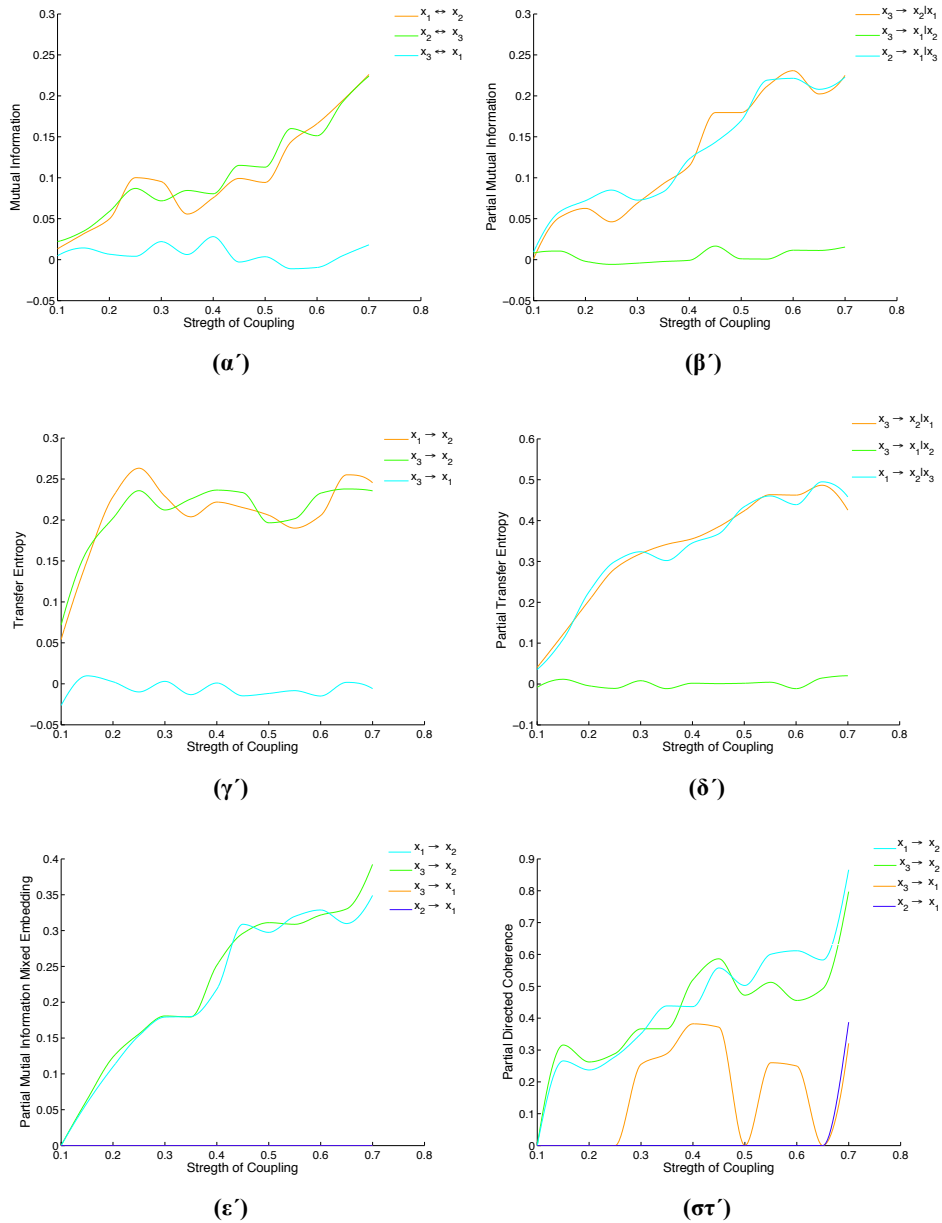
1024	TE	PTE	PMIME	PDC
$x_1 \rightarrow x_2$	93	100	100	97
$x_3 \rightarrow x_2$	93	100	100	100
$x_1 \rightarrow x_3$	0	10	0	7
$x_2 \rightarrow x_1$	60	86	0	40
$x_3 \rightarrow x_1$	0	16	0	7
$x_2 \rightarrow x_3$	40	67	0	40

Πίνακας 4.4: Εκτίμηση των TE, PTE, PMIME και PDC του μη γραμμικού συστήματος Henon.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του παραπάνω πίνακα φαίνεται ότι όλοι οι δείκτες εντοπίζουν όλες τις κατευθυνόμενες αλληλεπιδράσεις του μη γραμμικού συστήματος. Ο γραμμικός δείκτης PDC εντοπίζει με αρκετά καλή ακρίβεια τις συνδέσεις του συστήματος, αλλά εντοπίζονται επίσης οι συνδέσεις $X_2 \rightarrow X_1$ και $X_2 \rightarrow X_3$ οι οποίες είναι αντίθετης κατεύθυνσης από αυτές του συστήματος. Τα ίδια αποτελέσματα φαίνονται και για τους δείκτες TE και PTE για τις ίδιες συνδέσεις που εντοπίστηκαν με τον δείκτη PDC. Παρόλο που η PTE θεωρικά έχει αυξημένη διακριτική ικανότητα στην ανίχνευση έμμεσων συνδέσεων, αποτυγχάνει στη συγκεκριμένη περίπτωση διότι δεν είναι αρκετά σαφές ποιες πρέπει να είναι οι τιμές των παραμέτρων για τον σωστό υπολογισμό. Σύμφωνα και το προηγούμενο σύστημα όπου είχαμε το ίδιο πρόβλημα, καθιστά τον δείκτη PTE αρκετά αβέβαιο ως προς την προσέγγιση έμμεσων συζεύξεων, ενώ με την μέθοδο PMIME εντοπίζονται απόλυτα οι συνδέσεις του συστήματος χωρίς την παρεμβολή άλλων συνδέσεων όπως γίνεται με τις υπόλοιπες μεθόδους.

Στην συνέχεια, στο σχήμα 4.7 φαίνονται τα μέτρα των δεικτών συναρτήσεων των συντελεστών συζεύξης του συστήματος 2 (4.28). Οι τιμές των δεικτών αφορούν κυρίως τις άμεσες συνδέσεις του συστήματος ($X_1 \rightarrow X_2$ και $X_3 \rightarrow X_2$) και επιπλέον μια σύνδεση $X_3 \rightarrow X_1$ η οποία δεν υφίσταται θεωρητικά. Επιπρόσθετα, η μελέτη έχει πραγματοποιηθεί σε χρονοσειρές μήκους $n = 1024$. Σκοπός της ανάλυσης είναι η μελέτη της ανιχνευτικής ικανότητας των δεικτών σε σχέση με την ισχύ των συζεύξεων μεταξύ των χρονοσειρών ενός μη γραμμικού συστήματος.

Από τα παραπάνω διαγράμματα φαίνεται ότι όλοι οι δείκτες εντοπίζουν τις μη γραμμικές αλληλεπιδράσεις μεταξύ των χρονοσειρών γραμμικά με τις τιμές των συζεύξεων. Οι δείκτες MI και PMI σχήματα 4.7α' και 4.7β' έχουν μια γραμμική συσχέτιση με τις τιμές των συζεύξεων όπου έχουν μέγιστη τιμή όταν τον σύστημα είναι πλήρως συγχρονισμένο ($c = 0.7$) και ταυτόχρονα μηδενικές τιμές



Σχήμα 4.7: Εκτίμηση των μέτρων αλληλεπίδρασης $MI(\alpha')$, $PMI(\beta')$, $TE(\gamma')$, $PTE(\delta')$, $PMIME(\epsilon')$ και $PDC(\sigma')$ συναρτήσει των τιμών σύζευξης του συστήματος 2 για $c = [0.1, 0.7]$

για την σύνδεση $X_1 \leftrightarrow X_2$, το οποίο συμφωνεί με το θεωρητικό. Τα μέτρα των TE και PTE σχήματα 4.7γ' και 4.7δ' φαίνεται ότι έχουν την μέγιστη τιμή για μικρότερες τιμές της ισχύος των συζεύξεων ($c = 0.25$) με εμφανής διαφορά στην εκτίμηση της TE και μηδενικές για τις συνδέσεις που δεν υπάρχουν θεωρητικά. Οι εκτιμήσεις της μεθόδου PMIME σχήμα 4.7ε' των μη-γραμμικών συζεύξεων φαίνεται να έχουν μια γραμμική σχέση για $c = 0.3$ και στην συνέχεια μια σταθερή ενίσχυση του μέτρου για μεγαλύτερες τιμές των συζεύξεων. Τέλος, ο γραμμικός δείκτης PDC σχήμα 4.7στ' όπου εμφανίζει μια καλή προσέγγιση των μη-γραμμικών συζεύξεων για μικρές τιμές του δείκτη αλληλεπίδρασης του συστήματος 2 για $c = 0.15$ και στη συνέχεια αυξάνει γραμμικά, παρόλα αυτά φαίνεται ότι υπάρχει μια αύξηση του μέτρου μεταξύ των τιμών $c = [0.3 - 0.45]$ για σύνδεση $X_3 \rightarrow X_1$ η οποία θεωρείται μηδενική στο υπό μελέτη σύστημα.

Αποτελέσματα για το Σύστημα 3. Παρακάτω θα δούμε τα αποτελέσματα ενός συζευγμένου συστήματος Lorenz (εξίσωση 4.29) όπου οι αντίστοιχες συνδέσεις που θα μελετηθούν θα είναι $X_1 \rightarrow X_2$

και $X_2 \rightarrow X_1$. Για την περίπτωση του συστήματος 3 δημιουργείται η μη-γραμμική έμμεση σύζευξη $X_2 \rightarrow X_3$ όπου θα μελετηθεί η απόδοση των υπό συνθήκη δεικτών (PMI, PTE, PMIME, PDC). Στον πίνακα 4.5 φαίνονται τα μέτρα των MI και CMI για μήκος των χρονοσειρών $n = 1024$, όπως επίσης στον πίνακα 4.6 φαίνονται τα αποτελέσματα των κατευθυνόμενων δεικτών για τις μη γραμμικές συζεύξεις του συστήματος Lorenz.

1024	MI	PMI
$x_1 \leftrightarrow x_2$	23	13
$x_2 \leftrightarrow x_3$	96	100
$x_3 \leftrightarrow x_1$	0	10

Πίνακας 4.5: Εκτίμηση δεικτών MI και PMI του συστήματος Lorenz.

Οι δείκτες MI και PMI φαίνεται να χάνουν την διακριτική τους ικανότητα μεταξύ των χρονοσειρών X_1 και X_2 , ενώ έχουν καλύτερα αποτελέσματα για την αλληλεπίδραση $X_2 \leftrightarrow X_3$. Επίσης και οι δυο δείκτες φαίνεται να έχουν σύμφωνα αποτελέσματα για την έμμεση σύζευξη του συστήματος $X_3 \leftrightarrow X_1$ που σημαίνει από την μια ότι έχουν είναι αρκετά αποδοτικές για την ανίχνευση των έμμεσων συνδέσεων, αλλά χάνουν ταυτόχρονα και την μια άμεση σύνδεση που μπορεί να είναι η κύρια αιτία του παραπάνω αποτελέσματος.

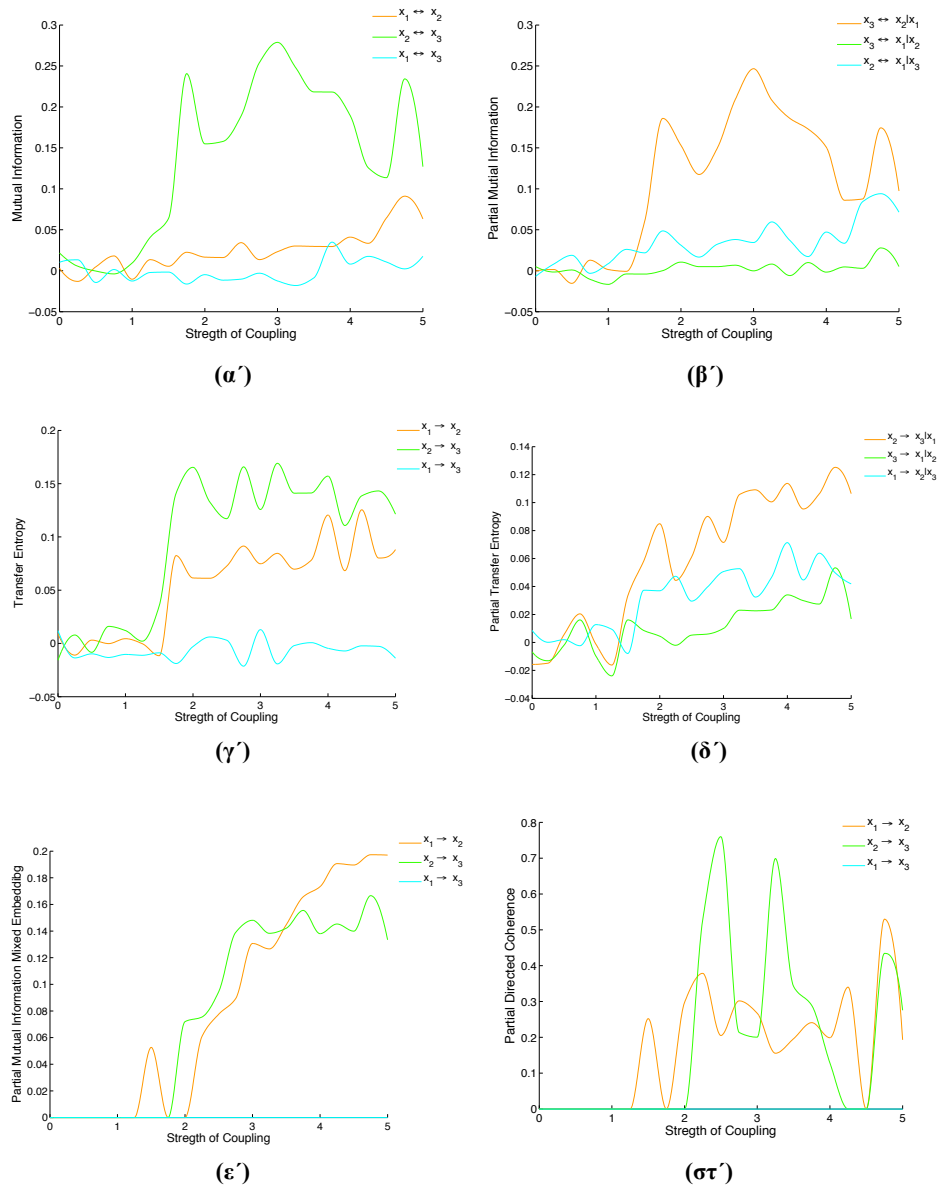
1024	TE	PTE	PMIME	PDC
$x_1 \rightarrow x_2$	67	70	51	17
$x_2 \rightarrow x_3$	93	93	41	37
$x_1 \rightarrow x_3$	7	7	0	0
$x_2 \rightarrow x_1$	0	0	0	70
$x_3 \rightarrow x_1$	0	0	0	90
$x_3 \rightarrow x_2$	0	3	0	63

Πίνακας 4.6: Εκτίμηση των TE, PTE, PMIME και PDC του μη-γραμμικού συστήματος Lorenz..

Όπως φαίνεται από τον πίνακα 4.6 οι δείκτες κατευθυνόμενης εκτίμησης αιτιότητας δεν έχουν τα ίδια αποτελέσματα με τις προηγούμενες προσομοιώσεις με εξαίρεση τους TE και PTE όπου έχουν ελαφρώς βελτιωμένη απόδοση σε σχέση με τους υπόλοιπους δείκτες. Χαρακτηριστικό είναι τα αποτελέσματα του δείκτη PDC όπου έχει μειωθεί δραστικά στον εντοπισμό των δυο άμεσων μη γραμμικών συνδέσεων ενώ ταυτόχρονα βλέπουμε μεγάλες τιμές των άμεσων συζεύξεων τους συστήματος $X_3 \rightarrow X_1$ και $X_2 \rightarrow X_1$ που καθιστά την μέθοδο ακατάλληλη για τον εντοπισμό μη-γραμμικών συζεύξεων με έμμεσες συνδέσεις. Επίσης, ο δείκτης PMIME εντοπίζει της άμεσες συνδέσεις του συστήματος έχοντας μικρότερη απόδοση από τους υπόλοιπους μη γραμμικούς δείκτες (TE και PTE), αλλά δεν υπάρχει καμία ένδειξη ανίχνευσης έμμεσων συνδέσεων του μη γραμμικού συστήματος. Από την παραπάνω ανάλυση του συστήματος ο δείκτης PTE έχει την μεγαλύτερη απόδοση για την ανίχνευση των μη-γραμμικών αλληλεξαρτήσεων και ταυτόχρονα μηδενικές τιμές για όλες έμμεσες συνδέσεις στο σημαντικότερο της παραπάνω ανάλυσης.

Στην συνέχεια έχει γίνει ανάλυση των δεικτών συναρτήσε των συντελεστών συζεύξεων του συστή-

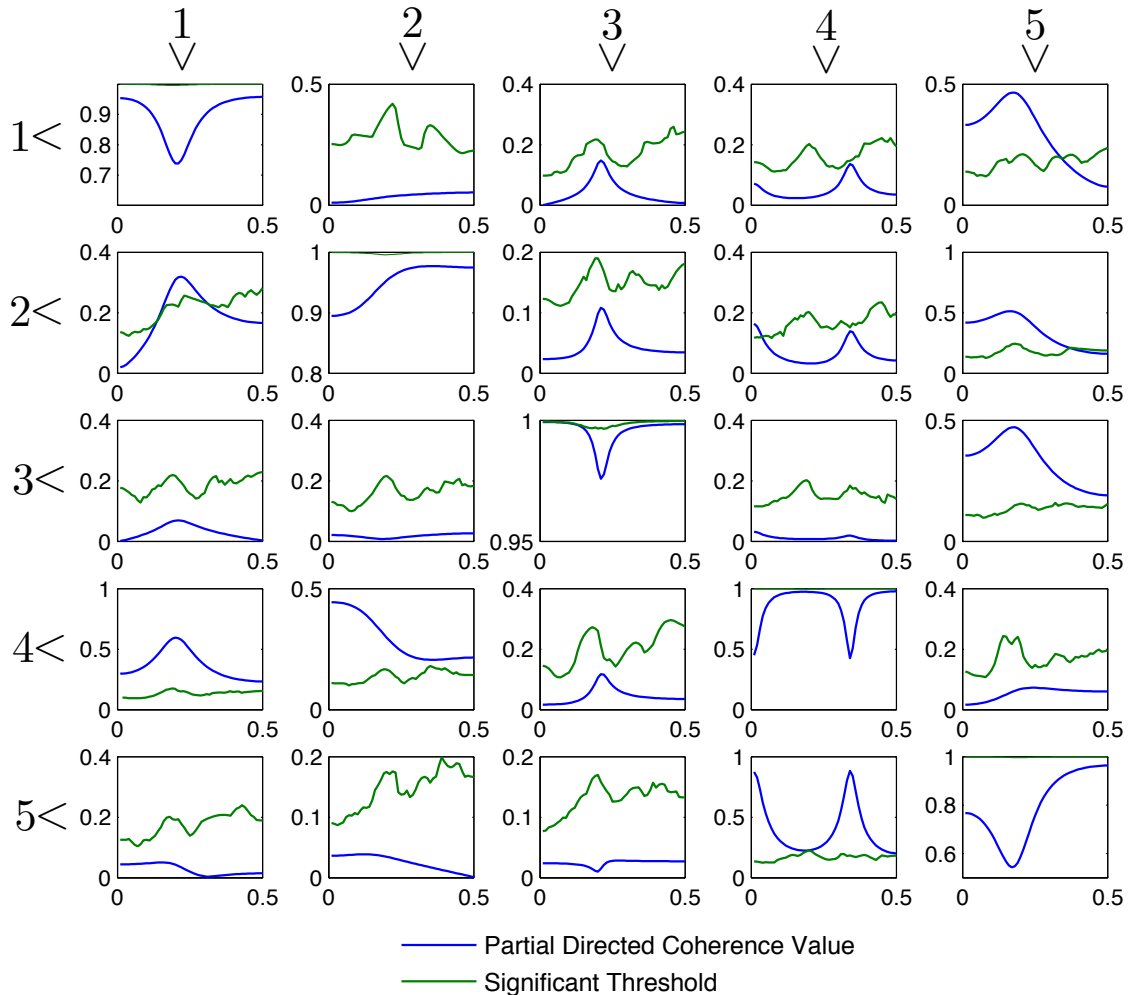
ματος Lorenz σχήμα 4.8. Η ανάλυση έχει γίνει για τις κυρίως για τις άμεσες συνδέσεις του συστήματος διότι σκοπός είναι να παρατηρηθεί η συσχέτιση των δεικτών με την ισχύ των συνδέσεων για τιμές $c = [0, 5]$.



Σχήμα 4.8: Εκτίμηση των μέτρων δεικτών αλληλεπίδρασης $MI(\alpha')$, $PMI(\beta')$, $TE(\gamma')$, $PTE(\delta')$, $PMIME(\epsilon')$ και $PDC(\sigma')$ συναρτήσε των τιμών σύζευξης του συστήματος 3, για $c = [0, 5]$

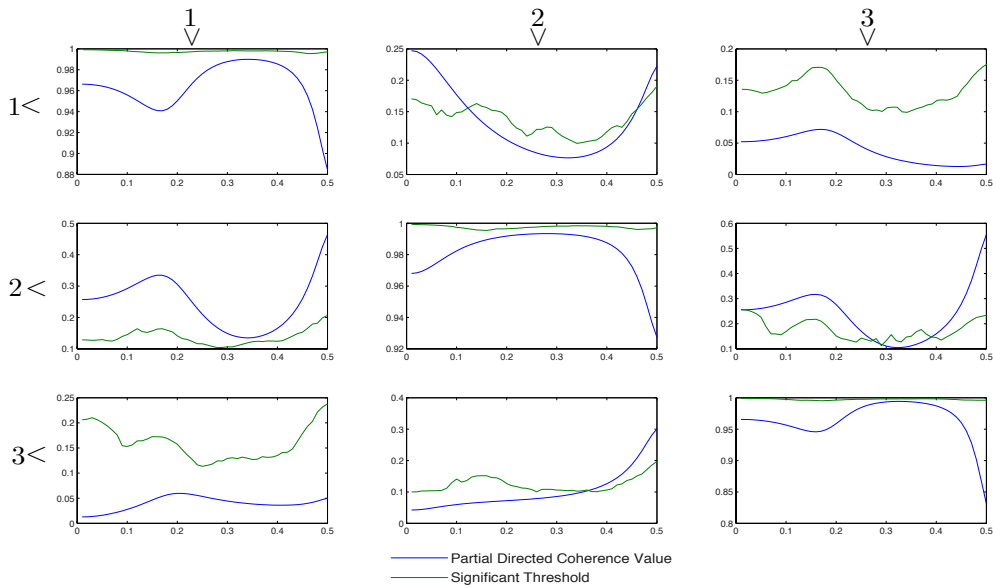
Από τα παραπάνω διαγράμματα 4.8α' και 4.8β' φαίνεται ότι οι δείκτες MI και PMI εντοπίζουν μονό την μία σύζευξη του συστήματος $X_2 \rightarrow X_3$ για τιμές μεγαλύτερες από 1.5 και στη συνέχεια παραμένουν σταθερά τα μέτρα των δεικτών. Στα σχήματα 4.8γ' και 4.8δ' φαίνονται τα μέτρα των εντροπιών μεταφοράς όπου εντοπίζονται και οι δύο αλληλεπιδράσεις του συστήματος για τιμές μεγαλύτερες από $c = 2$ και στην συνέχεια παραμένουν σταθερά τα μέτρα των δεικτών. Επιπλέον, το μέτρο της μεθόδου PMIME (σχήμα 4.8ε') παρουσιάζει μια γραμμική αύξηση του μέτρου για τιμές των συζεύξεων μεγαλύτερες από 2, ενώ για τον δείκτη PDC (σχήμα 4.8στ') δεν φαίνεται να υπάρχει σταθερή εξάρτηση μεταξύ των χρονοσειρών συναρτήσε της ισχύος των συζεύξεων, διότι φαίνεται να μηδενίζεται όταν το σύστημα είναι πλήρως συγχρονισμένο.

Με σκοπό την ολοκληρωμένη μελέτη των συστημάτων προσομοιώσεων έχει γίνει επιπλέον ανάλυση του δείκτη PDC στο πεδίο των συχνοτήτων ($[0, 0.5]fs$)Hz. Για τον εντοπισμό των σημαντικών συνδέσεων έχει πραγματοποιηθεί μη παραμετρικός στατιστικός έλεγχος τυχαίας μετάθεσης χρονικών σημείων σύμφωνα με την μέθοδο Bootstrap με 95% διάστημα επιστημοσύνης.

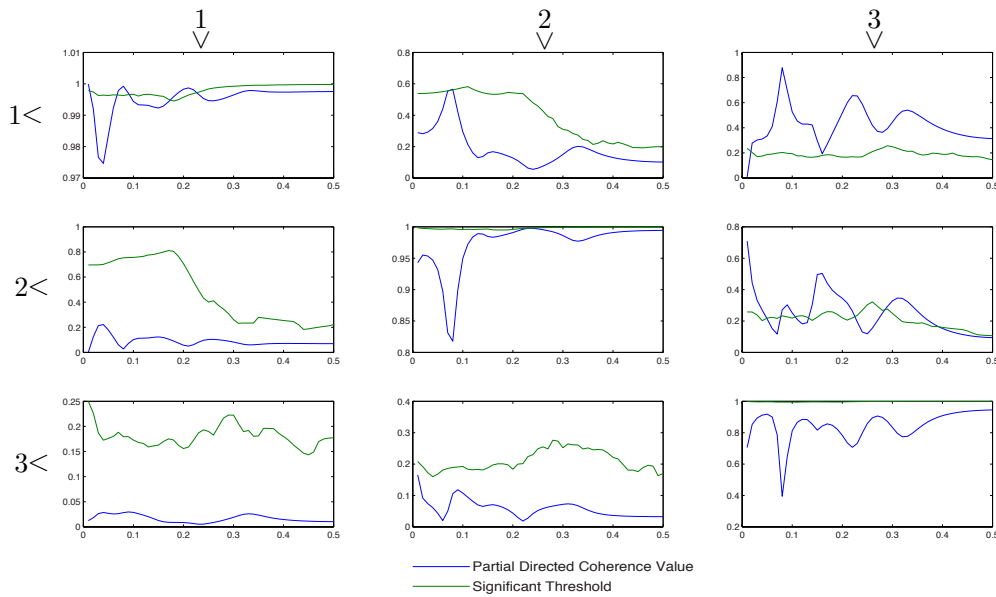


Σχήμα 4.9: Υπολογισμός του δείκτη PDC στο πεδίο των συχνοτήτων του γραμμικού συστήματος 1.

Στο σχήμα 4.9 έχει υπολογιστεί το μέτρο του δείκτη PDC για το γραμμικό σύστημα των εξισώσεων 4.27. Επίσης, με την τεχνική bootstrap έχουν εκτιμηθεί οι στατιστικά σημαντικές τιμές του δείκτη για κάθε τιμή των συχνοτήτων για όλες τις συζεύξεις του συστήματος που υποδηλώνεται με την πράσινη καμπύλη για κάθε γράφημα. Στατιστικά σημαντικές τιμές του δείκτη είναι προφανώς είναι οι τιμές που βρίσκονται εκτός του διαστήματος εμπιστοσύνης των κατανομών. Οι στατιστικά σημαντικές συζεύξεις είναι αυτές που έχουν ειπωθεί θεωρητικά, δηλαδή οι $X_1 \rightarrow X_2$, $X_1 \rightarrow X_4$, $X_2 \rightarrow X_4$, $X_4 \rightarrow X_5$, $X_5 \rightarrow X_1$, $X_5 \rightarrow X_2$ και $X_5 \rightarrow X_3$, όπου επαληθεύεται η διακριτική ικανότητα του γραμμικού-παραμετρικού δείκτη PDC στο πεδίο των συχνοτήτων για γραμμικά συστήματα.



Σχήμα 4.10: Υπολογισμός του δείκτη PDC στο πεδίο των συχνοτήτων του μη γραμμικού συστήματος Henon.



Σχήμα 4.11: Υπολογισμός του δείκτη PDC στο πεδίο των συχνοτήτων του μη γραμμικού συστήματος Lorenz.

Στα παραπάνω σχήματα 4.10 και 4.11 φαίνεται η διακριτική ικανότητα του γραμμικού δείκτη PDC στα μη γραμμικά συζευγμένα συστήματα 2 και 3 στο πεδίο των συχνοτήτων $([0, 0.5] Hz)$. Για το σύστημα Henon φαίνεται ότι οι σημαντικές τιμές του δείκτη PDC υπάρχουν για τις συζεύξεις $X_1 \rightarrow X_2$ και $X_3 \rightarrow X_1$ όπως έχουν ειπωθεί και θεωρητικά, άλλα επίσης φαίνεται ότι υπάρχει σημαντική αιτιότητα στο $X_2 \rightarrow X_1$ στις χαμηλές συχνότητες, το οποίο μπορεί να οφείλεται στην μη γραμμική αλληλεξάρτηση των χρονοσειρών καθώς και της σταθερότητας των χρονοσειρών. Ίσως το μεγαλύτερο πρόβλημα της μεθόδου παρουσιάζεται για την εκτίμηση των συζεύξεων του μη γραμμικού συστήματος Lorenz, όπου φαίνονται ως στατιστικά σημαντικές συνδέσεις οι $X_3 \rightarrow X_1$ και $X_3 \rightarrow X_2$, οι οποίες δεν συμφωνούν με τις θεωρητικές συζεύξεις του συστήματος, οι οποίες είναι $X_1 \rightarrow X_2$ και $X_2 \rightarrow X_3$. Αυτό μπορεί να οφείλεται στην μη γραμμικότητα των συνδέσεων, στην υπαρξη έμμεσων συνδέσεων αλλά και στην στασιμότητα των χρονοσειρών.

4.9 Συμπεράσματα

Στο παρόν κεφάλαιο, που είναι και το κυρίως θέμα της μεταπτυχιακή διπλωματικής εργασίας, μελετήθηκε αρχικά η θεωρητική πλευρά των μέτρων αναγνώρισης μη γραμμικών αλληλεπιδράσεων από την θεωρία πληροφορίας. Εστιάστηκε η προσοχή στην κατανόηση του υπολογισμού της αμοιβαίας πληροφορίας (Mutual Information) με την μέθοδο των κ-κοντινότερων γειτόνων και στην συνέχεια, πάνω σε αυτή την μεθοδολογία στηριχθήκαν οι υπολογισμοί των υπόλοιπων δεικτών μερικής αμοιβαίας πληροφορίας, εντροπίας μεταφοράς, μερικής εντροπίας μεταφοράς και μερικής αμοιβαίας πληροφορίας μεϊκτής εμβάθυνσης.

Στην συνέχεια, πραγματοποιήθηκε αξιολόγηση των μη γραμμικών δεικτών προσθέτοντας και τον γραμμικό δείκτη μερικής κατευθυνόμενης συνάφειας (Partial Director Coherence) σε ένα γραμμικό μοντέλο πέντε συζευγμένων χρονοσειρών και σε δυο μη γραμμικά μοντέλα. Στο πρώτο μοντέλο προσομοίωσης παρατηρήθηκε καλύτερη απόδοση των γραμμικών δεικτών PDC και PMIME σε σχέση με του δείκτες από την θεωρία πληροφορίας. Παρόλο που οι δείκτες πληροφορίας είχαν μια σχετικά καλή απόδοση, παρατηρήθηκε ότι είχε αδυναμία στην ανίχνευση κάποιων συζεύξεων, γεγονός που μπορεί να οφείλεται στον θόρυβο που προσδόθηκε στο σύστημα που καθιστά τους δείκτες πληροφορίας ευάλωτους στον θόρυβο. Στην συνέχεια μελετήθηκε η απόδοση των δεικτών σε ένα μη γραμμικό σύστημα Henon από το οποίο δεν προερχόντουσαν έμμεσες συνδέσεις στο σύστημα όπου παρατηρήθηκε ευστοχία όλων των δεικτών για των εντοπισμό των συνδέσεων του συστήματος. Παρόλα αυτά, συγκεκριμένα οι δείκτες TE και PTE δεν είχαν την ακρίβεια των υπολοίπων διότι εντοπίστηκαν εσφαλμένα συζεύξεις του συστήματος οι οποίες δεν υπήρχαν στην πραγματικότητα, γεγονός που μπορεί να οφείλεται στην ακατάλληλη επιλογή παραμέτρων κατά των υπολογισμούς τους (κ-κοντινότερους γείτονες και χρονοκαθυστερήσεις μεταξύ των χρονοσειρών). Επιπλέον έγινε παραμετρική ανάλυση ως προς την ισχύ των συνδέσεων του συστήματος, όπου παρατηρήθηκε ότι για μικρές τιμές των συνδέσεων όλοι οι δείκτες ήταν αρκετά ευαίσθητοι στον εντοπισμό των αλληλεπιδράσεων. Στην συνέχεια έγινε η ίδια ανάλυση για την μελέτη του μη γραμμικού συστήματος Lorenz στο οποίο παρατηρήθηκε κατά κύριο λόγο η αποτυχία ανίχνευσης των συζεύξεων από τον γραμμικό δείκτη PDC σε σχέση με του υπόλοιπους δείκτες. Στο συγκεκριμένο σύστημα την καλύτερη απόδοση είχαν οι κατευθυνόμενοι δείκτες πληροφορίας (TE, PTE και PMIME), με την μεγαλύτερη δυνατή απόδοση να έχει ο δείκτης PTE. Αυτό σημαίνει ότι για μη γραμμικά συστήματα τα οποία περιλαμβάνουν έμμεσες συνδέσεις η επιλογή δεικτών πληροφορίας είναι καταλληλότερη για την μέτρηση των συζεύξεων.

Παρόλη την αρκετά καλή απόδοση των μη γραμμικών δεικτών στην ανίχνευση των γραμμικών και μη συζεύξεων σε σχέση με τον γραμμικό δείκτη PDC, ο PDC έχει βασικό πλεονέκτημα ότι υπολογίζεται στο πεδίο των συχνοτήτων. Η ανίχνευση διασυνδέσεων στο πεδίο των συχνοτήτων είναι ίσως η πιο σημαντική για την ανάλυση σε νευροφυσιολογικά σήματα όπου μελετούνται οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ εγκεφαλικών περιοχών για συγκεκριμένες μπάντες συχνοτήτων. Επίσης, ο δείκτης PDC είναι αρκετά αποδοτικός για γραμμικά συστήματα τα οποία έχουν υποστεί φθορά από πηγές θορύβου σε σχέση με τους μη γραμμικούς δείκτες. Γενικότερα, θεωρείται ως στρατηγική εντοπισμού εγκεφαλικών αλληλεπιδράσεων η μελέτη πρωτίστως των γραμμικών δεικτών και αν τότε αν υπάρχει κάποιο πρόβλημα να προβούμε στην χρήση των μη γραμμικών δεικτών [Pereda et al. 2005].

Βιβλιογραφία

- [1] Jeong, J., Gore, J. C., Peterson, B. S. Mutual information analysis of the EEG in patients with Alzheimer's disease. *Clin.Neurophysiol.*, 112(5):827–835, 2001.
- [2] Hannan, E. J., Quinn, B. G. The Determination of the order of an autoregression. *Journal of the Royal Statistical Society*, 41:190–195, 1979.
- [3] Dhamala, M., Rangarajan, G., Ding, M. Analyzing information flow in brain networks with nonparametric Granger causality. *NeuroImage*, 41(2):354–362, 2008.
- [4] Akaike, H. A new look at the statistical model identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(6):716–723, 1974.
- [5] Pereda, E., Quiroga, R., Bhattacharya, J. Nonlinear multivariate analysis of neurophysiological signals. *Progress in Neurobiology*, 77:1–37, 2005.
- [6] Franaszczuk, P., Blinowska, K. Linear model of brain electrical activity - EEG as a superposition of damped oscillatory modes. *Biol. Cybern.*, 53:19–25, 1985.
- [7] Kaminski, M., Blinowska, K. A new method of the description of the information flow in brain structures. *Biol. Cybern.*, 65:203–210, 1991.
- [8] Cao, L. Practical method for determining the minimum embedding dimension of a scalar time series. *Physica A*, 110:43–50, 1997.
- [9] Wright, J., Bourke, P., Chapman, C. Synchronous oscillations in the cerebral cortex and object coherence: simulation of basic electrophysiological finding. *Biol. Cybern.*, 83:341–353, 2000.
- [10] David, O., Cosmelli, D. Evaluation of different measures of functional connectivity using a neural mass model. *Neuroimage*, 21:659–673, 2004.
- [11] Cover, T. M., Thomas, J. A. *Elements of Information Theory*. John Wiley & Sons, 1991.
- [12] Box, G., Cox, D. An analysis of transformations. *Journal of the Royal Statistical Society*, 26(2):211–252, 1964.
- [13] Papan, A., Kyrtsov, C., Kugiumtzis, D., Diks, C. Simulation study of direct causality measures in multivariate time series. *Entropy*, 15(7):2635–2661, 2013.
- [14] Baddeley, P., Foldiak, P., *Information Theory and the Brain*. Cambridge University Press, New York, 2000.
- [15] Freeman, W. *Mass Action in the Nervous System*. Academic Press, New York, 1975.
- [16] Galka, A. *Topics in Nonlinear Time Series Analysis: With Implications for Eeg Analysis (Advanced Series in Nonlinear Dynamics, 14)*. World Scientific, 2000.
- [17] Gomez-Herrero, G., Wu, W., Rutanen, K., Soriano, M. C., Pipa, G., Vicente, R. Assessing coupling dynamics from an ensemble of time series. *Entropy*, 17:1958–1970, 2010.

- [18] Vicente, R., Wibral, M., Lindner, M., Gordon, P. Transfer entropy—a model-free measure of effective connectivity for the neurosciences. *Journal of Computational Neuroscience*, 30:45–67, 2011.
- [19] Granger C. W. J. Investigating Causal Relations by Econometric Models and Cross-spectral Methods. *Econometrica*, 37(3):424–438, 1969.
- [20] Kraskov, A., Stögbauer, H., Grassberger, P. Estimating mutual information. *Physical Review E*, 69(6):066138, 2004.
- [21] Quiñero, R., Kraskov, A., Kreuz, T., Grassberger, P. Performance of different synchronization measures in real data: A case study on electroencephalographic signals. *Physical Review E*, 65(4):041903, 2002.
- [22] Achermann, P., Hartmann, R., Gunzinger, A., Guggenbühl, W., Borbély, A. All night sleep and artificial stochastic control signals have similar correlation dimension. *Electroencephalogr Clin Neurophysiol.*, 90:384–387, 1994.
- [23] Pethel, S., Hahs, D. Exact Test of Independence Using Mutual Information. *Entropy*, 16(5):2839–2849, 2014.
- [24] Hamalainen, M., Hari, R., Ilmoniemi, R. J., Knuutila, J., Lounasmaa, O. V. Magnetoencephalography theory, instrumentation, and applications to noninvasive studies of the working human brain. *Rev Mod Phys.*, 65(2):392–497, 1993.
- [25] Ragwitz, M., Kantz, H. Markov models from data by simple nonlinear time series predictors in delay embedding spaces. *Physical Review E*, 65:056201, 2002.
- [26] Faure, P., Korn, H. Is there chaos in the brain? I. Concepts of nonlinear dynamics and methods of investigation. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences - Serie III*, 324(9):773–793, 2001.
- [27] Kruskal, W., Wallis W. A. Use of ranks in one-criterion variance analysis. *Journal of the American Statistical Association*, 47(26):583–621, 1952.
- [28] Kugiumtzis, D. Direct coupling information measure from non-uniform embedding. *Physical Review E*, pages 1–28, 2013.
- [29] Kugiumtzis, D. Partial Transfer Entropy on Rank Vectors. *Physical Review E*, 2013.
- [30] Vlachos, I., Kugiumtzis, D. Non-uniform state space reconstruction and coupling detection. *Physical Review E*, 82:016207, 2010.
- [31] Elbert, T., Flor, H., Birbaumer, N., Knecht, S., Hampson, S., Larbig, W. Extensive reorganization of the somatosensory cortex in adult humans after nervous system injury. *NeuroReport*, 5:2593–2597, 1994.
- [32] Cook, I. A., Hunter, A., Korb, A., Farahbod, H., Leuchter, A. *Quantitative EEG Analysis Methods and Clinical Applications*. Artech House, 2009.
- [33] Ding, M., Bressler, S.L., Yang, W., Liang, H. Short-window spectral analysis of cortical event-related potentials by adaptive multivariate autoregressive modeling: data preprocessing, model validation, and variability assessment. *Biological cybernetics*, 83:35–45, 2000.
- [34] Stam, C., Pijn, J., Suffczynski, P., Lopes da Silva, F. Dynamics of the human alpha rhythm: evidence for non-linearity? *R Clin Neurophys.*, 110:1801–1813, 1999.
- [35] Niedermayer, E., Lopes da Silva, F. H. *Electroencephalography, Basic Principles, Clinical Applications, and Related Fields*. Williams & Wilkins, Baltimore, 5th edition, 2004.

- [36] Pijn, J. P., Van Neerven, J., Noest, A., Lopes da Silva, F. H. Chaos or noise in EEG signals; dependence on state and brain site. *Electroencephalogr Clin Neuro-physiol.*, 79:371–381, 1991.
- [37] Lopez da Silva, F. *Comprehensive Human Physiology*. Springer-Verlag, 1996.
- [38] Lutkepohl, H. *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*. Springer-Verlag, 2005.
- [39] Lyon, R.G. *Understanding digital signal processing*. Pearson Education, 4th edition, 2004.
- [40] Blinowska, K., Malinowski, M. Non-linear and linear forecasting of the EEG time series. *Biol Cybern*, 66:159–165, 1991.
- [41] Mallat, S. A. *Wavelet Tour of Signal Processing: The Sparse Way*. Academic Press, London, 3th edition, 2009.
- [42] Nunez, P. *Electric Fields of the Brain*. Oxford University Press, New York, 1981.
- [43] Greenblatt, R. E., Pflieger, M. E., Ossadtchi, A. E. Connectivity measures applied to human brain electrophysiological data. *Journal of Neuroscience Methods*, 207(1):1–16, 2012.
- [44] Paninski, L. Estimation of Entropy and Mutual Information. *Neural Computation*, 15(6):1191–1253, 2003.
- [45] Grassberger, P., Badii, R., Politi, A. Scaling laws for invariant measures on hyperbolic and nonhyperbolic attractors. *Journal of Statistical Physics*, 51(1-2):135–178, 1988.
- [46] Frenzel, S., Pompe, B. Partial mutual information for coupling analysis of multivariate time series. *Physical Review Letters*, 99(20):1–4, 2007.
- [47] Reinsel, G. C. *Elements of multivariate time series*. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [48] Baccala, L., Sameshima, K. Partial directed coherence: a new concept in neural structure determination. *Biol Cybern*, 84:463–474, 2001.
- [49] Schreiber, T. *Measuring Information Transfer*. *Physical Review*, pages 0–3, 2000.
- [50] Schwarz, G. E. Estimating the dimension of a model. *Annals of Statistics*, 6(2):461–464, 1978.
- [51] Shannon, C. E. *A Mathematical Theory of Communication*. *Bell System Technical Journal*, 27(3):379–423, 1948.
- [52] Slepian, D. Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis, and uncertainty - V: The discrete case. *The Bell System Technical Journal*, 57(5):1371–1430, 1982.
- [53] Stam, C. Nonlinear dynamical analysis of EEG and MEG: review of an emerging field. *Clinical Neurophysiology*, 116(10):2266–2301, 2005.
- [54] Stefanski, A. *Determining Thresholds of Complete Synchronization and Application*. Word Scientific, 2009.
- [55] Takens, F. Detecting strange attractors in turbulence. In *Dynamical Systems and Turbulence*, Lecture Notes in Mathematics, volume 898. Springer-Verlag, 1981.
- [56] Thomson, D. J. Spectrum estimation and harmonic analysis. *Proceedings of the IEEE*, 70:1055–1096, 1982.
- [57] Small, M., Tse, C. K. Optimal embedding parameters: A modelling paradigm. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 194(3-4):283–296, 2004.

- [58] Cooley, J. W., Tukey, J. W. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. *Math. Comput.*, 19:297–301, 1965.
- [59] Sacchi, T., Urlych, J., Mauricio D. *Information-Based Inversion and Processing with Applications*. Elsevier, 2005.
- [60] Darbellay, G. A., Vajda, I. Estimation of the Information by an Adaptive Partitioning of the Observation Space. *IEEE Transactions on Information Theory*, 45(4):1801–1813, 1999.
- [61] Stam, C., Van Dijk., B. W. Synchronization likelihood: an unbiased measure of generalized synchronization in multivariate data sets. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 163(3):236–251, 2002.
- [62] Wei, W. S. *Time Series Analysis. Univariate and Multivariate Methods*. Pearson Addison Wesley, 2th edition, 2006.
- [63] Welch, B. The generalization of “Student’s” problem when several different population variances are involved. *Biometrika*, 34(1–2):28–35, 1947.
- [64] Wilcoxon, F. Individual comparisons by ranking methods. *Biometrics Bulletin*, 1(6):80–83, 1945.
- [65] Blinowska, K., Zygierewicz, J. *Practical Biomedical Signal Analysis*. CRC Press, 2012.