

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών



ΓΡΑΜΜΙΚΟΠΟΙΗΤΕΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

Διπλωματική Εργασία

ΔΗΜΗΤΡΙΑΔΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ-ΜΙΧΑΗΛ

Επιβλέπων : Παναγιώτης Ψαρράκος
Καθηγητής Ε.Μ.Π

Αθήνα, Μάρτιος 2016

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών



ΓΡΑΜΜΙΚΟΠΟΙΗΤΕΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

Διπλωματική Εργασία

ΔΗΜΗΤΡΙΑΔΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ-ΜΙΧΑΗΛ

Επιβλέπων : Παναγιώτης Ψαρράκος
Καθηγητής Ε.Μ.Π

Εγκρίθηκε από την τριμελή επιτροπή την 3^η Μαρτίου 2016

.....
Αλέξανδρος Αρβανιτάκης
Επικ. Καθηγητής Ε.Μ.Π

.....
Βασίλειος Κανελλόπουλος
Αναπ. Καθηγητής Ε.Μ.Π

.....
Παναγιώτης Ψαρράκος
Καθηγητής Ε.Μ.Π

Αθήνα, Μάρτιος 2016

.....

Δημητριάδης Γεώργιος-Μιχαήλ

Διπλωματούχος της σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Ε.Μ.Π

Copyright © Δημητριάδης Γεώργιος-Μιχαήλ, 2016.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό τη προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευτεί ότι εκφράζουν τις επίσημες θέσεις του Ε.Μ.Π.

Αφιερώνεται στη μνήμη της μητέρας μου...

Περίληψη

Η κλασική μέθοδος επίλυσης πολυωνυμικών ιδιοπροβλημάτων (προβλημάτων ιδιοτιμών) είναι η γραμμικοποίηση (linearization), δηλαδή ο μετασχηματισμός ενός πολυωνυμικού πίνακα σε μια δέσμη (έναν πρωτοβάθμιο πολυωνυμικό πίνακα) πολλαπλάσιων διαστάσεων με τις ίδιες ακριβώς ιδιοτιμές και ισοδύναμα ιδιοδιανύσματα. Για κάθε πολυωνυμικό πίνακα υπάρχουν πολλοί γραμμικοποιητές με διαφορετικές ιδιότητες αλλά συνήθως χρησιμοποιούνται οι λεγόμενες “συνοδεύουσες μορφές” (companion forms). Ωστόσο οι συνοδεύουσες μορφές δεν μας ικανοποιούν πάντα εξ’ ολοκλήρου και τις περισσότερες φορές απαιτούνται γραμμικοποιητές με συγκεκριμένες ιδιότητες.

Θα δείξουμε πως μπορούμε με απλό τρόπο να κατασκευάσουμε δύο διανυσματικούς χώρους δεσμών που να γενικεύουν τις συνοδεύουσες μορφές του P και θα αποδείξουμε ότι σχεδόν όλες αυτές οι δέσμες (pencils) είναι γραμμικοποιητές του P . Η τομή αυτών των χώρων δεσμών συμβολίζεται με $\mathbb{DL}(P)$. Αυτοί οι διανυσματικοί χώροι δεσμών βοηθούν στην εύρεση δομημένων γραμμικοποιητών, δομημένων πολυωνυμικών πινάκων καθώς επίσης και στην προσπάθεια βελτιστοποίησης του ορισμού συνθηκών των γραμμικοποιητών.

Πολλές εφαρμογές έχουν να κάνουν με μη-γραμμικά ιδιοπροβλήματα, με έναν συγκεκριμένο δομημένο πολυωνυμικό πίνακα. Ίσως τα πιο γνωστά είναι τα συμμετρικά και τα ερμιτιανά πολυωνυμικά ιδιοπροβλήματα. Θα ασχοληθούμε επίσης με λιγότερο γνωστά είδη δομημένων πολυωνυμικών πινάκων όπως : οι παλινδρομικοί, οι άρτιοι και οι περιττοί. Θα μελετήσουμε τις μεταξύ τους σχέσεις και θα αναλύσουμε την χρήση τους στις διάφορες εφαρμογές. Επίσης εισάγονται και εξετάζονται ειδικές κατηγορίες γραμμικοποιητών, που αντανakλούν τη δομή αυτών των πολυωνυμικών πινάκων και επομένως διατηρούν τις συμμετρίες στα φάσματα τους. Τέλος θα αναλύσουμε την ύπαρξη και την μοναδικότητα αυτών των γραμμικοποιητών και θα δείξουμε πως μπορούν να κατασκευαστούν.

Οι διάφοροι γραμμικοποιητές κάθε δοσμένου πολυωνυμικού πίνακα P ενδέχεται να έχουν πολύ διαφορετικούς δείκτες κατάστασης ιδιοτιμών. Θα εξετάσουμε τον ορισμό συνθηκών του γραμμικοποιητή στον χώρο $\mathbb{DL}(P)$, θα αναζητήσουμε για τον “καλύτερων συνθηκών” γραμμικοποιητή σε αυτόν τον χώρο και θα συγκρίνουμε τον ορισμό συνθηκών του, με αυτόν του αρχικού πολυωνυμικού πίνακα. Θα αναλύσουμε τον ορισμό συνθηκών ιδιοτιμών των πρώτων και δεύτερων συνοδευουσών γραμμικοποιητών και θα βρούμε εν τέλει ότι μπορούν να είναι πιο “κακώς ορισμένοι” από τον ίδιο τον P .

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: Πολυωνυμικός πίνακας, γραμμικοποιητής, ισχυρός γραμμικοποιητής, συνοδεύουσες μορφές, δέσμη πίνακα, block-συμμετρία.

Abstract

The classical approach to investigating polynomial eigenvalue problems is linearization, where the underlying matrix polynomial is converted into a larger matrix pencil with the same eigenvalues. For any polynomial there are infinitely many linearizations with widely varying properties, but in practice the companion forms are typically used. However, these companion forms are not always entirely satisfactory, and linearizations with special properties may sometimes be required.

Given a matrix polynomial P , we develop a systematic approach to generating large classes of linearizations for P . We show how to simply construct two vector spaces of pencils that generalize the companion forms of P , and prove that almost all of these pencils are linearizations for P . Eigenvectors of these pencils are shown to be closely related to those of P . A distinguished subspace, denoted $DL(P)$, is then isolated, and the special properties of these pencils are investigated. These spaces of pencils provide a convenient arena in which to look for structured linearizations of structured polynomials, as well as to try to optimize the conditioning of linearizations.

Many applications give rise to nonlinear eigenvalue problems with an underlying structured matrix polynomial; perhaps the most well-known are symmetric and Hermitian polynomials. In this thesis we also identify several less well-known types of structured polynomial (e.g., palindromic, even, odd), explore the relationships between them, and illustrate their appearance in a variety of applications. Special classes of linearizations that reflect the structure of these polynomials, and therefore, preserve symmetries in their spectra, are introduced and investigated. We analyze the existence and uniqueness of such linearizations, and show how they may be systematically constructed.

The infinitely many linearizations of any given polynomial P can have widely varying eigenvalue condition numbers. We investigate the conditioning of linearizations from $DL(P)$, looking for the best conditioned linearization in that space and comparing its conditioning with that of the original polynomial. We also analyze the eigenvalue conditioning of the widely used first and second companion linearizations, and find that they can potentially be much more ill conditioned than P . These results are phrased in terms of both the standard relative condition number and the condition number of Dedieu and Tisseur for the problem in homogeneous form, this latter condition number having the advantage of applying to zero and infinite eigenvalues.

KEYWORDS: Matrix polynomial, linearization, strong linearization, companion forms, linear pencil, block-symmetry.

Περιεχόμενα

Copyright	4
Περίληψη.....	6
Abstract	9
Κεφάλαιο 1	12
1.1 Μερικά εισαγωγικά.....	14
Κεφάλαιο 2	18
2.1 Διανυσματικοί χώροι “εν δυνάμει” γραμμικοποιητών	18
2.2 Πότε μια δέσμη στον $\mathbb{L}_1(P)$ είναι γραμμικοποιητής.....	24
2.2.1 Το θεώρημα ισχυρού γραμμικοποιητή	24
2.2.2 Συνθήκες γραμμικοποιητή	28
2.3 Άλλη όψη των $\mathbb{L}_1(P)$ και $\mathbb{L}_2(P)$	31
Κεφάλαιο 3	32
3.1 Πράξη Block-ανάστροφου	32
3.2 Block-συμμετρία και εξισώσεις μετατοπισμένου αθροίσματος.....	34
3.3 Block-συμμετρικές δέσμες στον $\mathbb{L}_1(P)$	38
3.3.1 Ο υπόχωρος $\mathbb{B}(P)$	38
3.3.2 Η κανονική βάση για $\mathbb{B}(P)$	38
3.4 Δέσμες διπλών ansatz για γενικό P	43
3.5 Κάποιες άλλες κατασκευές block-συμμετρικών γραμμικοποιητών	44
Κεφάλαιο 4	47
4.1 Παραδείγματα	47
4.2 Ορίζουσα των $\mathbb{DL}(P)$ -δεσμών	49
4.3 Το θεώρημα εξαίρεσης ιδιοτιμής	53
Κεφάλαιο 5	55
5.1 Συμμετρικές δέσμες στον $\mathbb{L}_1(P)$ για συμμετρικό P	55
5.2 Ερμιτιανές δέσμες στον $\mathbb{L}_1(P)$ για ερμιτιανό P	56
5.3 Γενίκευση γραμμικοποιητών στο $\mathbb{S}(P)$ και $\mathbb{H}(P)$	57
Κεφάλαιο 6	59
6.1 Βασικές δομές: Ορισμοί και συμβολισμός	59
6.2 Φασματική συμμετρία	61
6.3 Μετασχηματισμοί Cayley	64
6.4 Εφαρμογές.....	66
6.5 Ένα παράδειγμα παλινδρόμου	73
Βιβλιογραφία	74

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Πολυωνυμικά προβλήματα ιδιοτιμών (ιδιοπροβλήματα) $P(\lambda)x = 0$, όπου $P(\lambda) = \sum_{i=0}^k \lambda^i A_i$ με πραγματικούς ή μιγαδικούς πίνακες συντελεστές A_i θέτουν τη βάση για την ανάλυση ταλαντώσεων κτιρίων, μηχανών και οχημάτων, καθώς επίσης και αριθμητικών μεθόδων για την επίλυση αυτών των προβλημάτων και έχουν ενσωματωθεί τόσο σε εμπορικά όσο και σε μη-εμπορικά πακέτα λογισμικού ανάλυσης δομής.

Η πιο κλασική μέθοδος επίλυσης πολυωνυμικών ιδιοπροβλημάτων είναι η γραμμικοποίηση (linearization), δηλαδή ο μετασχηματισμός του ιδιοπροβλήματος $P(\lambda)x = 0$ σε ένα ισοδύναμο γραμμικό ιδιοπρόβλημα της μορφής $L(\lambda)z = (\lambda X + Y)z = 0$ πολλαπλάσιων διατάσεων. Έχοντας μετασχηματίσει το πολυωνυμικό ιδιοπρόβλημα σε γραμμικό, χρησιμοποιούμε τις κλασικές μεθόδους επίλυσης γραμμικών ιδιοπροβλημάτων.

Η πιο διαδεδομένη και εύχρηστη μέθοδος γραμμικοποίησης είναι οι συνοδεύουσες μορφές, όπως για παράδειγμα:

$$L(\lambda) = \lambda \begin{bmatrix} A_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & I_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{k-1} & A_{k-2} & \cdots & A_0 \\ -I_n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -I_n & 0 \end{bmatrix}.$$

Υπάρχουν πολλοί γραμμικοποιητές και πέρα από την ευκολία κατασκευής τους, δεν υπάρχει κάποιος άλλος προφανής λόγος προτίμησης των συνοδεουσών μορφών. Ένα σημαντικό μειονέκτημα των συνοδεουσών μορφών είναι η μη-διατήρηση δομικών ιδιοτήτων του P όπως η συμμετρία. Όμως στα φυσικά προβλήματα συχνά οδηγούμαστε σε πολυωνυμικούς πίνακες, οι οποίοι είναι δομημένοι με συγκεκριμένο τρόπο. Για παράδειγμα οι πίνακες συντελεστών μπορεί να είναι όλοι συμμετρικοί ή ακόμη να εναλλάσσονται μεταξύ συμμετρικού και αντι-συμμετρικού ή τέλος να έχουν παλινδρομική δομή.

Αριθμητικές μέθοδοι που αγνοούν αυτή τη δομή μπορούν να καταστρέψουν αυτές τις ποιοτικές σημαντικές φασματικές συμμετρίες ή ακόμη και να εξάγουν αποτελέσματα που δεν έχουν κάποια φυσική σημασία ή που να μην μπορούν να ερμηνευτούν. Αν οι γραμμικοποιητές συνοδεουσών μορφών δεν αντανakλούν κάποια δομή που εμφανίζεται στον αρχικό πολυωνυμικό πίνακα, τότε δημιουργείται πρόβλημα στον αριθμητικό υπολογισμό. Έτσι είναι σημαντικό να μπορούμε να κατασκευάσουμε γραμμικοποιητές που να αντανakλούν την δομή του δοσμένου πολυωνυμικού πίνακα και έπειτα να αναπτύξουμε αριθμητικές μεθόδους για το αντίστοιχο γραμμικό ιδιοπρόβλημα.

Ένα σημαντικό ζήτημα για κάθε υπολογιστικό πρόβλημα είναι η ευαισθησία του ιδιοπροβλήματος (conditioning). Είναι γνωστό ότι διαφορετικοί γραμμικοποιητές για ένα δοσμένο πολυωνυμικό ιδιοπρόβλημα, μπορεί να έχουν πολύ διαφορετικό ορισμό συνθηκών. Έτσι, από τις αριθμητικές μεθόδους εξάγονται διαφορετικά αποτελέσματα για κάθε γραμμικοποιητή.

Επομένως θα ήταν χρήσιμο να έχουμε έναν μεγάλο αριθμό εύκολα κατασκευάσιμων γραμμικοποιητών από τους οποίους, κάποιος θα μπορούσε να επιλεγεί ως τόσο, “καλά συνθηκοποιημένος”, όσο το αρχικό μας πρόβλημα.

Ένα επιπλέον ζήτημα έχει να κάνει με ιδιοτιμές στο ∞ . Οι περισσότερες αναφορές σε πολυωνυμικά ιδιοπροβλήματα εξετάζουν μόνο πολυωνυμικούς πίνακες, όπου ο πίνακας κύριων συντελεστών A_K είναι αντιστρέψιμος (ή ακόμη και ταυτοτικός) και έτσι δεν προκύπτει το πρόβλημα ιδιοτιμών στο ∞ . Όμως υπάρχουν πολλές εφαρμογές όπως για παράδειγμα η διεγερση κυκλώματος, όπου οι κύριοι συντελεστές είναι μη-αντιστρέψιμοι. Την λύση δίνουν οι λεγόμενοι “ισχυροί γραμμικοποιητές” (strong linearizations), οι οποίοι εξασφαλίζουν την διατήρηση της δομής των ιδιοτιμών στο ∞ .

Πρώτος μας στόχος είναι να δείξουμε, πως μπορούμε να δημιουργήσουμε δύο μεγάλες κλάσεις γραμμικοποιητών που να ανταποκρίνονται σε αυτά τα ζητήματα και έτσι να διευρύνουμε τις διαθέσιμες για υπολογισμούς επιλογές γραμμικοποιητών.

Παίρνοντας τις δύο συνοδεύουσες μορφές σαν πρότυπες, ξεκινάμε με το κεφάλαιο 2 δείχνοντας πως μπορούμε να συσχετίσουμε στον γενικό πολυωνυμικό πίνακα P , δύο μεγάλους διανυσματικούς χώρους δεσμών (συμβολίζονται με $\mathbb{L}_1(P)$ και $\mathbb{L}_2(P)$). Οι ειδικοί υπόχωροι των $\mathbb{L}_1(P)$ και $\mathbb{L}_2(P)$ θα εξεταστούν λεπτομερώς στα κεφάλαια 3 και 4.

Το δεύτερο κύριο ζήτημα της παρούσας εργασίας είναι οι δομημένοι πολυωνυμικοί πίνακες και η διατήρηση αυτής της δομής στους γραμμικοποιητές. Οι δύο κύριοι τύποι δομών που εξετάζονται εδώ, είναι η συμμετρική και η παλινδρομική.

Οι συμμετρικοί πολυωνυμικοί πίνακες ως γνωστόν είναι σημαντικοί για εφαρμογές που σχετίζονται με την ανάλυση ταλαντώσεων μηχανικών συστημάτων. Ένας πολυωνυμικός πίνακας ο οποίος είναι πραγματικά συμμετρικός ή ερμιτιανός έχει ένα φάσμα το οποίο είναι συμμετρικό ως προς τον πραγματικό άξονα και τα σύνολα των αριστερών και δεξιών ιδιοδιανυσμάτων συμπίπτουν. Αυτές οι ιδιότητες διατηρούνται σε κάθε συμμετρικό γραμμικοποιητή λόγω της δομής του.

Μια δέσμη που διατηρεί τη συμμετρία της έχει πρακτικά οφέλη. Πιο συγκεκριμένα μειώνει τα αποθηκευτικά και υπολογιστικά κόστη, εφόσον εφαρμοστεί μια μέθοδος η οποία χρησιμοποιεί τη συμμετρία. Οι ιδιοτιμές μια συμμετρικής δέσμης $L(\lambda) = \lambda X + Y$ μπορούν να υπολογιστούν για μικρού και μεσαίου μεγέθους προβλήματα, πρώτον ανάγοντας το ζεύγος πινάκων (Y, X) σε τριδιαγώνια-διαγώνια μορφή και δεύτερον, χρησιμοποιώντας τους HR ή LR αλγόριθμους ή τις επαναλήψεις Ehrlich-Aberth. Σε μεγάλα προβλήματα μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο ψευδό-Lanczos αλγόριθμος του Parlett και Chen. Παλινδρομικοί πολυωνυμικοί πίνακες από την άλλη συναντώνται σε σωρεία εφαρμογών. Όμως δεν έχουν εκτιμηθεί επαρκώς ως μια ξεχωριστή κατηγορία προβλημάτων, η οποία χρήζει ξεχωριστής ανάλυσης.

Η ώθηση για τη συγκεκριμένη μελέτη πηγάζει από ένα project έρευνας του Θορύβου των σιδηροδρομικών μεταφορών που προκαλείται από τις υψηλές ταχύτητες των τρένων. Το ιδιοπρόβλημα που προκύπτει από αυτό το project έχει τη μορφή:

$$(\lambda^2 A + \lambda B + A^T)x = 0, \quad (1.0.1)$$

όπου A, B είναι τετραγωνικοί μιγαδικοί πίνακες, με B συμμετρικό μιγαδικό και A μη-αντιστρέψιμο. Παρατηρούμε ότι ο πολυωνυμικός πίνακας στην (1.0.1) έχει την ιδιότητα αντιστρέφοντας την τάξη των πινάκων συντελεστών και παίρνοντας τον ανάστροφο (transpose), να επιστρέφουμε στον αρχικό πολυωνυμικό πίνακα. Αντίστοιχα με το γλωσσικό παλινδρόμο (διαβάζεται από το τέλος προς την αρχή και ανάποδα το ίδιο) καλούμε αυτούς τους πολυωνυμικούς πίνακες T -παλινδρομικούς.

Πραγματικά τετραγωνικά και μιγαδικά T -παλινδρομικά ιδιοπροβλήματα συναντώνται στη μαθηματική προτυποποίηση και στις αριθμητικές προσομοιώσεις συμπεριφοράς περιοδικών SAW (ακουστικό κύμα επιφάνειας) φίλτρων. Ο υπολογισμός του αριθμού Crawford, που σχετίζεται με την ανάλυση διαταραχών, γενικευμένων συμμετρικών ιδιοπροβλημάτων, παράγει ένα τετραγωνικό $*$ -παλινδρομικό ιδιοπρόβλημα ($*$ συμβολίζει τον συζυγή ανάστροφο). Πολυωνυμικοί πίνακες μεγαλύτερης τάξης με $*$ -παλινδρομική δομή συναντώνται σε προβλήματα διακριτού βέλτιστου ελέγχου.

Εναλλασσόμενοι πολυωνυμικοί πίνακες, δηλαδή πολυωνυμικοί πίνακες όπου οι πίνακες συντελεστές εναλλάσσονται μεταξύ συμμετρικών και αντι-συμμετρικών, δημιουργούν μια άλλη σημαντική κατηγορία δομημένου πολυωνυμικού πίνακα. Ωστόσο οι φαινομενικά ασυσχέτιστες παλινδρομικές και εναλλασσόμενες δομές, τείνουν να συνδεθούν η μια με την άλλη, μέσω μιας εκδοχής πολυωνυμικού πίνακα του μετασχηματισμού Cayley. Στο κεφάλαιο 6 θα αναπτυχθεί μια ενδιαφέρουσα αναλογία μεταξύ παλινδρομικών (palindromic) και εναλλασσόμενων (alternating) πολυωνυμικών πινάκων από την μια και συμπλεκτικών (symplectic) και χαμιλτονιανών (hamiltonian) από την άλλη. Θα δούμε ότι οι εναλλασσόμενοι πολυωνυμικοί πίνακες μπορούν να μελετηθούν παράλληλα με τους παλινδρομικούς και τέλος θα δούμε ότι οι ιδιότητες και οι δομημένοι γραμμικοποιητές, αναπτύσσονται χρησιμοποιώντας ίδιες τεχνικές.

Περισσότερες λεπτομέρειες που αφορούν εφαρμογές εναλλασσόμενων και παλινδρομικών πολυωνυμικών πινάκων θα δούμε στη παράγραφο 6.4.

1.1 Μερικά εισαγωγικά

Αρχικά θα δώσουμε τους απαραίτητους ορισμούς και συνθήκες που θα μας χρειαστούν στη συνέχεια. Τα βασικά αντικείμενα της μελέτης μας είναι οι $n \times n$ πολυωνυμικοί πίνακες της μορφής

$$P(\lambda) = \sum_{i=0}^k \lambda^i A_i, \quad A_0, \dots, A_k \in \mathbb{F}^{n \times n}, \quad A_k \neq 0, \quad (1.1.1)$$

όπου \mathbb{F} συμβολίζει το σώμα των πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών και k ο βαθμός του πίνακα.

Ορισμός 1.1.1 (Δεξιό ιδιοδιάνυσμα). Εάν $\lambda \in \mathbb{C}$ και το μη μηδενικό $x \in \mathbb{C}^n$ ικανοποιεί την $P(\lambda)x = 0$, τότε το x καλείται δεξιό ιδιοδιάνυσμα του P που αντιστοιχεί στη ιδιοτιμή λ .

Από εδώ και στο εξής όταν αναφερόμαστε στο ιδιοδιάνυσμα θα εννοούμε το δεξιό ιδιοδιάνυσμα. Θα ασχοληθούμε κυρίως με regular πολυωνυμικούς πίνακες, δηλαδή πολυωνυμικοί πίνακες, όπου η $\det P(\lambda)$ δεν είναι μηδέν για όλα τα $\lambda \in \mathbb{C}$. Για αυτούς τους πολυωνυμικούς πίνακες, οι πεπερασμένες ιδιοτιμές είναι ακριβώς οι ρίζες της $\det P(\lambda)$.

Ορισμός 1.1.2 (Reversal πολυωνυμικού πίνακα). Για έναν πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda) = \sum_{i=0}^k \lambda^i A_i$ βαθμού k , ο reversal του $P(\lambda)$ είναι ο

$$\text{rev } P(\lambda) := \lambda^k P(1/\lambda) = \sum_{i=0}^k \lambda^i A_{k-i}. \quad (1.1.2)$$

Παρατηρούμε εδώ ότι οι μη-μηδενικές πεπερασμένες ιδιοτιμές του $\text{rev } P(\lambda)$ είναι οι αντίστροφες των ιδιοτιμών του P .

Ορισμός 1.1.3 (Ιδιοτιμή στο άπειρο). Έστω $P(\lambda)$ ένας regular πολυωνυμικός πίνακας βαθμού $k \geq 1$. Τότε $P(\lambda)$ θα λέμε ότι έχει ιδιοτιμή στο ∞ με ιδιοδιάνυσμα x , εάν $\text{rev } P(\lambda)$ έχει ιδιοτιμή το 0 με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα x . Οι αλγεβρικές, γεωμετρικές και μερικές πολλαπλότητες της ιδιοτιμής ∞ έχουν οριστεί να είναι ίδιες με τις αντίστοιχες πολλαπλότητες της ιδιοτιμής 0 του $\text{rev } P(\lambda)$.

Όταν επιλύουμε πολυωνυμικά ιδιοπροβλήματα της μορφής $P(\lambda)x = 0$ πρώτα απ' όλα κατασκευάζουμε έναν γραμμικοποιητή, δηλαδή μετατρέπουμε τον δοσμένο πολυωνυμικό πίνακα σε μια δέσμη γραμμικού πίνακα $L(\lambda) = \lambda X + Y$ με τις ίδιες ιδιοτιμές και στη συνέχεια δουλεύουμε με τη δέσμη.

Ορισμός 1.1.4 (Γραμμικοποιητής). Έστω $P(\lambda)$ ένας $n \times n$ πολυωνυμικός πίνακας βαθμού k με $k \geq 1$. Μια δέσμη $L(\lambda) = \lambda X + Y$ με $X, Y \in \mathbb{F}^{kn \times kn}$ καλείται γραμμικοποιητής του $P(\lambda)$ εάν υπάρχουν (unimodular) πολυωνυμικοί πίνακες $E(\lambda), F(\lambda)$ τέτοιοι ώστε

$$E(\lambda)L(\lambda)F(\lambda) = \left[\begin{array}{c|c} P(\lambda) & 0 \\ \hline 0 & I_{(k-1)n} \end{array} \right].$$

Μια άμεση συνέπεια αυτού του ορισμού είναι ότι $\gamma \det(L(\lambda)) = \det(P(\lambda))$ για κάποια μη-μηδενική σταθερά γ , έτσι ώστε τα L και P να έχουν το ίδιο φάσμα. Υπάρχουν πολλές κατηγορίες γραμμικοποιητών αλλά η πιο σημαντική είναι οι λεγόμενες συνοδεύουσες μορφές ή συνοδεύοντες πολυωνυμικοί πίνακες.

Ορισμός 1.1.5 (Συνοδεύουσες μορφές). Εάν

$$X_1 = X_2 = \text{diag}(A_k, I_{(k-1)n}), \quad (1.1.3.a)$$

$$Y_1 = \begin{bmatrix} A_{k-1} & A_{k-2} & \cdots & A_0 \\ -I_n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -I_n & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad Y_2 = \begin{bmatrix} A_{k-1} & -I_n & \cdots & 0 \\ A_{k-2} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & -I_n \\ A_0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.1.3.b)$$

τότε οι $nk \times nk$ δέσμες πινάκων $C_1(\lambda) = \lambda X_1 + Y_1$ και $C_2(\lambda) = \lambda X_2 + Y_2$ καλούνται πρώτη και δεύτερη συνοδεύουσα μορφή του $P(\lambda)$ αντίστοιχα.

Η έννοια του γραμμικοποιητή του ορισμού 1.1.4 δημιουργήθηκε κυρίως για πολυωνυμικούς πίνακες (1.1.1) με αντιστρέψιμο κύριο συντελεστή A_k . Σε αυτή τη περίπτωση όλες οι ιδιοτιμές του $P(\lambda)$ είναι πεπερασμένες και η μορφή Jordan τους μπορεί να ανακτηθεί από κάποιον άλλο γραμμικοποιητή, ωστόσο υπάρχει μια μικρή διαφορά όταν ο κύριος συντελεστής ενός κανονικού πίνακα $P(\lambda)$ είναι μη-αντιστρέψιμος. Τότε το ∞ είναι μια ιδιοτιμή με κάποια πολλαπλότητα και παρουσιάζει προβλήματα στην κατασκευή της μορφής Jordan.

Για να ξεπεράσουμε αυτό το εμπόδιο εισήχθη μια τροποποίηση στον ορισμό 1.1.4 που ονομάστηκε “Ισχυρός γραμμικοποιητής”. Η αντιστοιχία μεταξύ της ιδιοτιμής του απείρου ενός πολυωνυμικού πίνακα P και της ιδιοτιμής μηδέν του $\text{gen } P$ είναι η βάση αυτού του ορισμού.

Ορισμός 1.1.6 (Ισχυρός γραμμικοποιητής). Έστω $P(\lambda) = \sum_{i=0}^k \lambda^i A_i$ ο πολυωνυμικός πίνακας βαθμού k με $k \geq 1$. Εάν $L(\lambda)$ είναι ένας γραμμικοποιητής του $P(\lambda)$ και $\text{gen } L(\lambda)$ είναι ένας γραμμικοποιητής του $\text{gen } P(\lambda)$ τότε $L(\lambda)$ λέγεται ισχυρός γραμμικοποιητής (strong linerization) του $P(\lambda)$.

Για κανονικούς πολυωνυμικούς πίνακες $P(\lambda)$, η επιπλέον ιδιότητα ότι ο $\text{gen } L(\lambda)$ είναι ένας γραμμικοποιητής του $\text{gen } P(\lambda)$ επιβεβαιώνει ότι η μορφή Jordan της ιδιοτιμής του απείρου διατηρείται από τον ισχυρό γραμμικοποιητή. Οι πρώτες και δεύτερες συνοδεύουσες μορφές κάθε κανονικού πολυωνυμικού πίνακα P έχουν αυτή την επιπλέον ιδιότητα και έτσι είναι πάντα ισχυροί γραμμικοποιητές του P . Οι περισσότερες δέσμες που θα κατασκευάσουμε θα αποδειχθεί ότι είναι ισχυροί γραμμικοποιητές.

Ορισμός 1.1.7 (Unimodular). Ως unimodular πολυωνυμικό πίνακα θα ονομάζουμε τον πολυωνυμικό πίνακα $E(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]^{n \times n}$ του οποίου η ορίζουσα $\det(E(\lambda))$ είναι μη-μηδενική και σταθερή (δηλ., ανεξάρτητη του λ).

Ορισμός 1.1.8 (Βαθμός πολυωνυμικού πίνακα). Βαθμός πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]^{n \times n}$ ορίζεται ως ο μέγιστος βαθμός των πολυωνύμων που εμφανίζονται μεταξύ των στοιχείων του πίνακα και συμβολίζεται με $\deg(P(\lambda))$.

Ορισμός 1.1.9 (Γινόμενο Kronecker). Εάν A ένας $m \times n$ πίνακας και B ένας $p \times q$ πίνακας, τότε το γινόμενο Kronecker $A \otimes B$ είναι ο $mp \times nq$ block πίνακας

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} \alpha_{11}B & \dots & \alpha_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1}B & \dots & \alpha_{mn}B \end{bmatrix}.$$

Επιπλέον $I = I_n$ είναι ο ταυτοτικός πίνακας, $R = R_k$ συμβολίζει τον $k \times k$ αντίστροφο ταυτοτικό και $N = N_k$ είναι ο σταθερός $k \times k$ μηδενοδύναμος (nilpotent) Jordan block πίνακας.

$$R = R_k = \begin{bmatrix} & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & \end{bmatrix} \text{ και } N = N_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.1.4)$$

Το διάνυσμα $[\lambda^{k-1} \lambda^{k-2} \dots \lambda 1]^T \in \mathbb{F}^k$ των φθινουσών δυνάμεων του λ συμβολίζεται με Λ . Έτσι

$$\Lambda(r) := [r^{k-1} r^{k-2} \dots r 1]^T. \quad (1.1.5)$$

Συμβολίζουμε το γινόμενο Kronecker με \otimes , οι unimodular πολυωνυμικοί πίνακες

$$T(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \dots & \lambda^{k-1} \\ & 1 & \lambda & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \lambda^2 \\ & & & \ddots & \lambda \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \otimes I \quad \text{και} \quad G(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & & & \lambda^{k-1} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & \lambda \\ & & & 1 \end{bmatrix} \otimes I. \quad (1.1.6)$$

χρησιμοποιούνται σε διάφορα σημεία της εργασίας. Παρατηρούμε ότι η τελευταία block-στήλη του $G(\lambda)$ είναι $\Lambda \otimes I$ και ότι $T(\lambda)$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως

$$T(\lambda) = G(\lambda) \begin{bmatrix} I & \lambda I & & \\ & I & & \\ & & I & \\ & & & \ddots \\ & & & & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & & & \\ & I & \lambda I & \\ & & I & \ddots \\ & & & I \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} I & & & \\ & \ddots & & \\ & & I & \lambda I \\ & & & I \end{bmatrix}. \quad (1.1.7)$$

Κεφάλαιο 2

Στόχος αυτού του κεφαλαίου είναι να δείξουμε πως μπορούμε να αντιστοιχίσουμε δυο μεγάλους διανυσματικούς χώρους ($\mathbb{L}_1(P)$ και $\mathbb{L}_2(P)$) εύκολα κατασκευάσιμων δεσμών, σε έναν δοσμένο πολυωνυμικό πίνακα P . Θα δούμε ότι αυτές οι δέσμες με την ιδιότητα να είναι στοιχεία αυτών των διανυσματικών χώρων, τείνουν να είναι γραμμικοποιητές του P . Έτσι οι χώροι αυτοί επιτρέπουν την αναζήτηση γραμμικοποιητών με συγκεκριμένες ιδιότητες.

2.1 Διανυσματικοί χώροι “εν δυνάμει” γραμμικοποιητών

Οι συνοδεύουσες μορφές των πολυωνυμικών πινάκων $P(\lambda) = \sum_{i=0}^k \lambda^i A_i$ έχουν κάποιες σημαντικές ιδιότητες που τις καθιστούν τις πλέον κατάλληλες για γραμμικοποιητές του P .

A. Κατασκευάζονται άμεσα από τα δεδομένα του P .

B. Τα ιδιοδιανύσματα του P μπορούν εύκολα να ανακτηθούν από τα ιδιοδιανύσματα των συνοδευσουσών μορφών.

Γ. Είναι πάντα ισχυροί γραμμικοποιητές του P .

Ωστόσο οι συνοδεύουσες μορφές έχουν ένα σημαντικό μειονέκτημα. Πολύ συχνά δεν αντανakλούν κάποια δομή ή κάποια συμμετρία ιδιοτιμών που μπορεί να υπάρχει στον αρχικό πολυωνυμικό πίνακα P . Έτσι λοιπόν εισάγουμε διανυσματικούς χώρους δεσμών οι οποίοι γενικεύουν τις συνοδεύουσες μορφές και στη συνέχεια αναλύουμε κάποιες κοινές ιδιότητες αυτών των δεσμών με τις συνοδεύουσες μορφές.

Ξαναθυμόμαστε την αρχή της πρώτης συνοδεύουσας μορφής. Ακολουθώντας την κλασική μέθοδο μετατροπής ενός συστήματος γραμμικών, αλγεβρικών, διαφορικών εξισώσεων μεγαλύτερης τάξης σε ένα σύστημα πρώτης τάξης, εισάγουμε τις διανυσματικές μεταβλητές

$$x_1 = \lambda^{k-1}x, x_2 = \lambda^{k-2}x, \dots, x_{k-1} = \lambda x, x_k = x, \quad (2.1.1)$$

σε ένα $n \times n$ πολυωνυμικό ιδιοπρόβλημα $P(\lambda)x = (\sum_{i=0}^k \lambda^i A_i)x = 0$, ως εκ τούτου μετατρέπεται σε:

$$A_k(\lambda x_1) + A_{k-1}x_1 + A_{k-2}x_2 + \dots + A_1x_{k-1} + A_0x_k = 0.$$

Τότε μαζί με τις σχέσεις (2.1.1) μεταξύ διαδοχικών μεταβλητών, αυτό μπορεί να εκφραστεί σαν το $kn \times kn$ γραμμικό ιδιοπρόβλημα:

$$\underbrace{\left(\lambda \begin{bmatrix} A_k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & I_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{k-1} & A_{k-2} & \dots & A_0 \\ -I_n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -I_n & 0 \end{bmatrix} \right)}_{C_1(\lambda)} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{k-1} \\ x_k \end{bmatrix} = 0. \quad (2.1.2)$$

Αντιστρόφως αν ξεκινήσουμε απο την (2.1.2), τότε οι τελευταίες $k-1$ block-γραμμές αναγκάζουν κάθε λύση της (2.1.2) να έχει την μορφή:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{k-1} \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^{k-1}x \\ \vdots \\ \lambda x \\ x \end{bmatrix} = \Lambda \otimes x$$

για κάποιο διάνυσμα $x \in \mathbb{F}^n$. Συνεπώς για να λύσουμε την (2.1.2) θα επικεντρωθούμε στα γινόμενα της μορφής $C_1(\lambda) \cdot (\Lambda \otimes x)$. Όμως

$$C_1(\lambda) \cdot (\Lambda \otimes x) = [(P(\lambda)x)^T \ 0 \ \cdots \ 0]^T \text{ για όλα τα } x \in \mathbb{F}^n, \quad (2.1.3)$$

Έτσι κάθε λύση της (2.1.2) οδηγεί στη λύση του αρχικού προβλήματος $P(\lambda)x = 0$. Τώρα παρατηρούμε ότι η (2.1.3) με τον “για όλα τα x ” ποσοδείκτη ισοδυναμεί με:

$$C_1(\lambda) \cdot (\Lambda \otimes I_n) = C_1(\lambda) \begin{bmatrix} \lambda^{k-1}I_n \\ \vdots \\ \lambda I_n \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(\lambda) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = e_1 \otimes P(\lambda). \quad (2.1.4)$$

Συνεπώς για να γενικεύσουμε την συνοδεύουσα μορφή, θεωρούμε το σύνολο όλων των $kn \times kn$ πινάκων δεσμών $L(\lambda) = \lambda X + Y$ που ικανοποιούν την ιδιότητα:

$$L(\lambda) \cdot (\Lambda \otimes I_n) = L(\lambda) \begin{bmatrix} \lambda^{k-1}I_n \\ \vdots \\ \lambda I_n \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 P(\lambda) \\ \vdots \\ v_{k-1} P(\lambda) \\ v_k P(\lambda) \end{bmatrix} = v \otimes P(\lambda). \quad (2.1.5)$$

για κάποιο διάνυσμα $v = [v_1, \dots, v_k]^T \in \mathbb{F}^n$. Αυτό το σύνολο δεσμών θα συμβολίζεται με $\mathbb{L}_1(P)$. Εισάγουμε τον συμβολισμό:

$$\mathcal{V}_P = \{v \otimes P(\lambda) : v \in \mathbb{F}^k\} \quad (2.1.6)$$

για το σύνολο όλων των πιθανών δεξιών μελών της σχέσης (2.1.5). Έτσι λοιπόν έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 2.1.1. $\mathbb{L}_1(P) := \{L(\lambda) = \lambda X + Y : X, Y \in \mathbb{F}^{kn \times kn}, L(\lambda) \cdot (\Lambda \otimes I_n) \in \mathcal{V}_P\}$.

Συχνά θα χρησιμοποιούμε την έκφραση ότι η $L(\lambda)$ ικανοποιεί το δεξιό ansatz με διάνυσμα v ή το v είναι το δεξιό ansatz διάνυσμα για την $L(\lambda)$ όταν $L(\lambda) \in \mathbb{L}_1(P)$. Λέμε δεξιό ansatz διότι $L(\lambda)$ πολλαπλασιάζεται από δεξιά με την block στήλη $\Lambda \otimes I_n$.

Από τις ιδιότητες του γινομένου Kronecker βλέπουμε ότι \mathcal{V}_P είναι ένας διανυσματικός χώρος ισομορφικός με τον \mathbb{F}^k και συνεπώς ο $\mathbb{L}_1(P)$ είναι και αυτός διανυσματικός χώρος.

Πρόταση 2.1.2. Για κάθε πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda)$, $\mathbb{L}_1(P)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος στο \mathbb{F} .

Εφόσον λοιπόν η $C_1(\lambda)$ ανήκει στον $\mathbb{L}_1(P)$, θα δούμε ότι ο $\mathbb{L}_1(P)$ είναι μη-τετριμμένος διανυσματικός χώρος για κάθε πολυωνυμικό πίνακα P . Επόμενος μας στόχος είναι να δείξουμε, όπως και με τις συνοδεύουσες μορφές, ότι οι δέσμες στον $\mathbb{L}_1(P)$ κατασκευάζονται εύκολα από τα δεδομένα του P . Συνέπεια αυτής της κατασκευής είναι ο χαρακτηρισμός όλων των δεσμών στον $\mathbb{L}_1(P)$ και ο υπολογισμός του $\dim \mathbb{L}_1(P)$. Τώρα θα εισάγουμε την επόμενη πράξη πάνω στους block πίνακες η οποία αποτελεί απαραίτητο εργαλείο για να δουλέψουμε με γινόμενα της μορφής $L(\lambda) \cdot (\Lambda \otimes I_n)$.

Ορισμός 2.1.3 (Μετατοπισμένο κατά στήλη άθροισμα). Έστω X και Y τετραγωνικοί $k \times k$ block πίνακες

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{k1} & \cdots & X_{kk} \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & \cdots & Y_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ Y_{k1} & \cdots & Y_{kk} \end{bmatrix},$$

με $X_{ij}, Y_{ij} \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Τότε το μετατοπισμένο κατά στήλη άθροισμα (column shifted sum) των X και Y ορίζεται ως:

$$X_1 \boxplus Y_1 = \begin{bmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1k} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ X_{k1} & \cdots & X_{kk} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & Y_{11} & \cdots & Y_{1k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & Y_{k1} & \cdots & Y_{kk} \end{bmatrix},$$

όπου τα μηδενικά blocks είναι επίσης $n \times n$.

Σαν παράδειγμα για την πρώτη συνοδεύουσα μορφή $C_1(\lambda) = \lambda X_1 + Y_1$ του $P(\lambda) = \sum_{i=0}^k \lambda^i A_i$ το άθροισμα $X_1 \boxplus Y_1$ είναι:

$$\begin{bmatrix} A_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & I_n \end{bmatrix} \boxplus \begin{bmatrix} A_{k-1} & A_{k-2} & \cdots & A_0 \\ -I_n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -I_n & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_k & A_{k-1} & \cdots & A_0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Λήμμα 2.1.4. Έστω $P(\lambda) = \sum_{i=0}^k \lambda^i A_i$ ένας $n \times n$ πολυωνυμικός πίνακας και $L(\lambda) = \lambda X + Y$ μια $kn \times kn$ δέσμη. Τότε για $v \in \mathbb{F}^k$,

$$(\lambda X + Y) \cdot (\Lambda \otimes I_n) = v \otimes P(\lambda) \Leftrightarrow X \boxplus Y = v \otimes [A_{k-1} \quad \cdots \quad A_1 \quad v \otimes A_0], \quad (2.1.7)$$

και έτσι ο χώρος $\mathbb{L}_1(P)$ μπορεί εναλλακτικά να χαρακτηριστεί ως

$$\mathbb{L}_1(P) = \{\lambda X + Y : X \boxplus Y = v \otimes [A_{k-1} \quad \cdots \quad A_1 \quad v \otimes A_0], \quad v \in \mathbb{F}^k\}. \quad (2.1.8)$$

Η απόδειξη προκύπτει από απευθείας υπολογισμό για αυτό και παραλείπεται.

Θεώρημα 2.1.5 (Χαρακτηρισμός των δεσμών στον $\mathbb{L}_1(P)$).

Έστω $P(\lambda) = \sum_{i=0}^k \lambda^i A_i$ ένας $n \times n$ πολυωνυμικός πίνακας και $v \in \mathbb{F}^k$ κάποιο διάνυσμα. Τότε το σύνολο των δεσμών στον $\mathbb{L}_1(P)$ με δεξιά ansatz διανύσματα v αποτελείται από όλες τις $L(\lambda) = \lambda X + Y$, έτσι ώστε:

$$X = \begin{bmatrix} v \otimes A_k & -W \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad Y = \begin{bmatrix} W + v \otimes [A_{k-1} & \cdots & A_1 & v \otimes A_0] \end{bmatrix},$$

με $W \in \mathbb{F}^{kn \times (k-1)n}$ επιλεγμένο τυχαία.

Απόδειξη.

Θεωρούμε την απεικόνιση \mathcal{M} που είναι πεπλεγμένη στον ορισμό του $\mathbb{L}_1(P)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_1(P) &\xrightarrow{\mathcal{M}} \mathcal{V}_p \\ L(\lambda) &\mapsto L(\lambda) (\Lambda \otimes I_n) \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

\mathcal{M} γραμμική. Για να δούμε ότι \mathcal{M} είναι επί, θεωρούμε έστω $v \otimes P(\lambda)$ ένα τυχαίο στοιχείο του \mathcal{V}_p και κατασκευάζουμε

$$X_v = \begin{bmatrix} v \otimes A_k & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad Y_v = \begin{bmatrix} W + v \otimes [A_{k-1} & \cdots & A_1 & v \otimes A_0] \end{bmatrix}.$$

Τότε $X_v \boxplus Y_v = v \otimes [A_k \ A_{k-1} \ \cdots \ A_0]$, έτσι από το λήμμα 2.1.4 η δέσμη $L_v(\lambda) := \lambda X_v + Y_v$ είναι μια αντίστροφη εικόνα του $v \otimes P(\lambda)$. Το σύνολο όλων των αντίστροφων εικόνων του $v \otimes P(\lambda)$ είναι τότε $L_v(\lambda) + \ker \mathcal{M}$. Από (2.1.7), ο πυρήνας του \mathcal{M} αποτελείται από όλες τις δέσμες $\lambda X + Y$ που ικανοποιούν την $X \boxplus Y = 0$. Ο ορισμός του μετατοπισμένου αθροίσματος τότε συνεπάγεται ότι X και Y πρέπει να έχουν την μορφή

$$X = \begin{bmatrix} 0 & -W \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad Y = \begin{bmatrix} W & 0 \end{bmatrix}$$

όπου $W \in \mathbb{F}^{kn \times (k-1)n}$ επιλεγμένο τυχαία. □

Πόρισμα 2.1.6. $\dim \mathbb{L}_1(P) = k(k-1)n^2 + k$.

Απόδειξη.

Εφόσον \mathcal{M} είναι επί, $\dim \mathbb{L}_1(P) = \dim \ker \mathcal{M} + \dim \mathcal{V}_p = (k-1)n^2 + k$. □

Έτσι βλέπουμε ότι $\mathbb{L}_1(P)$ είναι ένας σχετικά μεγάλος υπόχωρος του πλήρους χώρου δεσμών. Το ακόλουθο πόρισμα εστιάζει σε μια ειδική περίπτωση του θεωρήματος 2.1.5 το οποίο θα παίξει σημαντικό ρόλο στη παράγραφο 2.2.

Πόρισμα 2.1.7. Υποθέτουμε ότι $L(\lambda) = \lambda X + Y \in \mathbb{L}_1(P)$ έχει δεξιό ansatz διάνυσμα $u = \alpha e_1$.

Τότε

$$X = \left[\begin{array}{c|c} \alpha A_k & X_{12} \\ \hline 0 & -Z \end{array} \right] \quad \text{και} \quad Y = \left[\begin{array}{c|c} Y_{11} & \alpha A_0 \\ \hline Z & 0 \end{array} \right] \quad (2.1.10)$$

για κάποια $Z \in \mathbb{F}^{(k-1)n \times (k-1)n}$. Παρατηρούμε ότι η $C_1(\lambda)$ ταιριάζει με το μοντέλο του πορίσματος 2.1.7 με $u = e_1$ και $Z = -I_{(k-1)n}$.

Η δεύτερη σημαντική ιδιότητα της συνοδεύουσας μορφής είναι η σχέση μεταξύ των ιδιοδιανυσμάτων της και των πολυωνυμικών πινάκων P που την γραμμικοποιούν. Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως (2.1.2) κάθε ιδιοδιάνυσμα της $C_1(\lambda)$ έχει τη μορφή $\Lambda \otimes x$, όπου x ένα ιδιοδιάνυσμα του P . Έτσι τα ιδιοδιανύσματα του P ανακτώνται απλά εξάγοντας τις τελευταίες n συντεταγμένες από τα ιδιοδιανύσματα της συνοδεύουσας μορφής.

Το επόμενο αποτέλεσμα δείχνει ότι οι γραμμικοποιητές στον $\mathbb{L}_1(P)$ έχουν και αυτοί την ίδια ιδιότητα.

Θεώρημα 2.1.8 (Ιδιότητα ανάκτησης ιδιοδιανύσματος για τον $\mathbb{L}_1(P)$).

Έστω $P(\lambda)$ ένας $n \times n$ πολυωνυμικός πίνακας βαθμού k και $L(\lambda)$ μια δέσμη στον $\mathbb{L}_1(P)$ με μη-μηδενικό δεξιό ansatz διάνυσμα u . Τότε $x \in \mathbb{C}^n$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του $P(\lambda) = \sum_{i=0}^k \lambda^i A_i$ με πεπερασμένη ιδιοτιμή $\lambda \in \mathbb{C}$ εάν και μόνο εάν $\Lambda \otimes x$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα της δέσμης $L(\lambda)$ με ιδιοτιμή λ . Αν επιπλέον P regular και $L \in \mathbb{L}_1(P)$ γραμμικοποιητής του P , τότε κάθε ιδιοδιάνυσμα της L με πεπερασμένη ιδιοτιμή λ είναι της μορφής $\Lambda \otimes x$ για κάποιο ιδιοδιάνυσμα x του P .

Απόδειξη.

Η πρώτη πρόταση προκύπτει άμεσα από :

$$L(\lambda) (\Lambda \otimes x) = L(\lambda) (\Lambda \otimes I_n)(1 \otimes x) = (u \otimes P(\lambda))(1 \otimes x) = u \otimes (P(\lambda)x).$$

Για τη δεύτερη πρόταση υποθέτουμε ότι $\lambda \in \mathbb{C}$ είναι πεπερασμένη ιδιοτιμή του $L(\lambda)$ με γεωμετρική πολλαπλότητα m και έστω $y \in \mathbb{C}^{kn}$ να είναι κάθε ιδιοδιάνυσμα του $L(\lambda)$ αντιστοιχισμένο με λ . Εφόσον $L(\lambda)$ είναι ένας γραμμικοποιητής του $P(\lambda)$, η γεωμετρική πολλαπλότητα του λ για $P(\lambda)$ είναι επίσης m . Έστω x_1, \dots, x_m να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του $P(\lambda)$ αντιστοιχισμένα με λ και ορίζουμε $y_i = \Lambda \otimes x_i$ για $i = 1, \dots, m$. Τότε y_1, \dots, y_m είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα για $L(\lambda)$ με ιδιοτιμή λ , και έτσι y πρέπει να είναι γραμμικός συνδυασμός των y_1, \dots, y_m . Συνεπώς y έχει τη μορφή $y = \Lambda \otimes x$ για κάποιο ιδιοδιάνυσμα $x \in \mathbb{C}^n$ του P . \square

Η παραπάνω ανάλυση του χώρου δεσμών $\mathbb{L}_1(P)$ έχει μια παράλληλη εκδοχή, η οποία ξεκινάει από τη δεύτερη συνοδεύουσα μορφή $C_2(\lambda) = \lambda X_2 + Y_2$ (1.1.3). Ανάλογα με την (2.1.4) :

$$[\lambda^{k-1} I_n \cdots \lambda I_n \ I_n] \cdot C_2(\lambda) = [P(\lambda) \ 0 \ \cdots \ 0],$$

εκφρασμένο καλύτερα : $(\Lambda^T \otimes I_n) \cdot C_2(\lambda) = e_1^T \otimes P(\lambda)$. Αυτό μας οδηγεί να θεωρήσουμε τις δέσμες $L(\lambda) = \lambda X + Y$ που ικανοποιούν το αριστερό ansatz

$$(\Lambda^T \otimes I_n) \cdot L(\lambda) = w^T \otimes P(\lambda), \quad (2.1.11)$$

και σε ένα αντίστοιχο διανυσματικό χώρο $\mathbb{L}_2(P)$. Το διάνυσμα w στην (2.1.11) θα αναφέρεται ως αριστερό ansatz διάνυσμα της $L(\lambda)$.

Ορισμός 2.1.9. Με $\mathcal{W}_p = \{w^T \otimes P(\lambda) : w \in \mathbb{F}^k\}$, ορίζουμε

$$\mathbb{L}_2(P) = \{L(\lambda) = \lambda X + Y : X, Y \in \mathbb{F}^{kn \times kn}, (\Lambda^T \otimes I_n) \cdot L(\lambda) \in \mathcal{W}_p\}.$$

Στην ανάλυση του $\mathbb{L}_2(P)$ βοήθησε η εισαγωγή της ακόλουθης πράξης block πίνακα.

Ορισμός 2.1.10 (Μετατοπισμένο κατά γραμμές άθροισμα).

Έστω X και Y οι πίνακες:

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{k1} & \cdots & X_{kk} \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & \cdots & Y_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ Y_{k1} & \cdots & Y_{kk} \end{bmatrix},$$

με blocks $X_{ij}, Y_{ij} \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Τότε το μετατοπισμένο κατά γραμμές άθροισμα (row shifted sum) των X και Y ορίζεται ως:

$$X \stackrel{\oplus}{\downarrow} Y := \begin{bmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{k1} & \cdots & X_{kk} \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ Y_{11} & \cdots & Y_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ Y_{k1} & \cdots & Y_{kk} \end{bmatrix},$$

όπου τα μηδενικά blocks είναι επίσης $n \times n$. Το ακόλουθο λήμμα πιστοποιεί την αντιστοιχία μεταξύ αριστερού ansatz και μετατοπισμένου κατά γραμμές αθροίσματος.

Λήμμα 2.1.10. Έστω $P(\lambda) = \sum_{i=0}^k \lambda^i A_i$ ένας $n \times n$ πολωνυμικός πίνακας και $L(\lambda) = \lambda X + Y$ μια $kn \times kn$ δέσμη. Τότε για κάθε $w \in \mathbb{F}^k$,

$$(\Lambda^T \otimes I_n) \cdot (\lambda X + Y) = w^T \otimes P(\lambda) \Leftrightarrow X \stackrel{\oplus}{\downarrow} Y = w^T \otimes \begin{bmatrix} A_k \\ \vdots \\ A_0 \end{bmatrix} \quad (2.1.12)$$

Χρησιμοποιώντας αυτά τα εργαλεία μπορούμε να χαρακτηρίσουμε αυτές τις δέσμες στον $\mathbb{L}_2(P)$ με έναν ανάλογο τρόπο όπως του θεωρήματος (2.1.5) και έτσι να καταλήξουμε στο ότι:

$$\dim \mathbb{L}_2(P) = \dim \mathbb{L}_1(P) = k(k-1)n^2 + k. \quad (2.1.13)$$

Το ανάλογο του θεωρήματος (2.1.8) για τις δέσμες στον $\mathbb{L}_2(P)$ περιλαμβάνει περισσότερο αριστερά ιδιοδιανύσματα του $P(\lambda)$. Επειδή δεν έχει διευκρινιστεί επακριβώς ο ορισμός του αριστερού ιδιοδιανύσματος ενός πολυωνυμικού πίνακα, τον παραθέτουμε ευθύς αμέσως.

Ορισμός 2.1.12 (Αριστερά ιδιοδιανύσματα).

Ένα αριστερό ιδιοδιάνυσμα (left eigenvector) ενός $n \times n$ πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda) = \sum_{i=0}^k \lambda^i A_i$ αντιστοιχισμένο με μια πεπερασμένη ιδιοτιμή λ , είναι ένα μη-μηδενικό διάνυσμα $y \in \mathbb{C}^n$ τέτοιο ώστε $y^* P(\lambda) = 0$. Ένα αριστερό ιδιοδιάνυσμα του P που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή ∞ είναι ένα αριστερό ιδιοδιάνυσμα του $\text{gen } P$ αντιστοιχισμένο στην ιδιοτιμή 0.

Το ακόλουθο αποτέλεσμα δείχνει ότι τα αριστερά ιδιοδιανύσματα του P εύκολα ανακτώνται από τους γραμμικοποιητές στον $\mathbb{L}_2(P)$.

Θεώρημα 2.1.13 (Ιδιότητα ανάκτησης ιδιοδιανύσματος για $\mathbb{L}_2(P)$).

Έστω $P(\lambda)$ ένας $n \times n$ πολυωνυμικός πίνακας βαθμού k και $L(\lambda)$ μία δέσμη στον $\mathbb{L}_2(P)$ με μη-μηδενικό αριστερό ansatz διάνυσμα w . Τότε $y \in \mathbb{C}^n$ είναι ένα αριστερό ιδιοδιάνυσμα του $P(\lambda)$ με πεπερασμένη ιδιοτιμή $\lambda \in \mathbb{C}$, εάν και μόνο εάν $\bar{\lambda} \otimes y$ είναι ένα αριστερό ιδιοδιάνυσμα της $L(\lambda)$ με ιδιοτιμή λ . Αν επιπλέον P regular και $L \in \mathbb{L}_2(P)$ ένας γραμμικοποιητής του P , τότε κάθε αριστερό ιδιοδιάνυσμα της L με πεπερασμένη ιδιοτιμή λ είναι της μορφής $\bar{\lambda} \otimes y$ για κάποιο αριστερό ιδιοδιάνυσμα y του P .

Σε αυτή την παράγραφο είδαμε ότι οι δέσμες στους χώρους $\mathbb{L}_1(P)$ και $\mathbb{L}_2(P)$ μοιάζουν με τις συνοδεύουσες μορφές και έχουν ιδιοδιανύσματα που σχετίζονται με αυτά του P . Έτσι μπορεί κάποιος να δει ότι οι $\mathbb{L}_1(P)$ και $\mathbb{L}_2(P)$ είναι μεγάλες κλάσεις εν δυνάμει (potential) γραμμικοποιητών του $P(\lambda)$. Παρακάτω θα δούμε τις καλύτερες δυνατές επιλογές γραμμικοποιητών.

2.2 Πότε μια δέσμη στον $\mathbb{L}_1(P)$ είναι γραμμικοποιητής

Δεν είναι όλες οι δέσμες στους χώρους $\mathbb{L}_1(P)$ και $\mathbb{L}_2(P)$ γραμμικοποιητές του P . Σε αυτή την παράγραφο θα εστιάσουμε στον $\mathbb{L}_1(P)$ και θα προτείνουμε κριτήρια στον αν μια δέσμη από τον $\mathbb{L}_1(P)$ είναι γραμμικοποιητής του P ή όχι. Θα δείξουμε ότι για κάθε δοσμένη $L \in \mathbb{L}_1(P)$ υπάρχει μια συνθήκη (ειδικά για την L) πάνω στους πίνακες συντελεστών του P , που πρέπει να ικανοποιείται για να μας εξασφαλίσει ότι η L είναι στην πραγματικότητα ένας γραμμικοποιητής του P .

2.2.1 Το θεώρημα ισχυρού γραμμικοποιητή

Ξεκινάμε με ένα αποτέλεσμα που αφορά την ειδική περίπτωση του δεξιού ansatz που αναφέρεται στο πόρισμα (2.1.7). Ο P εδώ δεν θεωρείται regular.

Θεώρημα 2.2.1. Υποθέτουμε ότι $P(\lambda) = \sum_{i=0}^k \lambda^i A_i$ με $A_k \neq 0$ ένας $n \times n$ πολυωνυμικός πίνακας και $L(\lambda) = \lambda X + Y \in \mathbb{L}_1(P)$ έχει μη-μηδενικό δεξιό ansatz διάνυσμα $v = \alpha e_1$ τέτοιο ώστε:

$$L(\lambda) \cdot (\lambda \otimes I_n) = \alpha e_1 \otimes P(\lambda). \quad (2.2.1)$$

Διαμέριση X και Y όπως στην (2.1.10) έτσι ώστε

$$L(\lambda) = \lambda X + Y = \left[\begin{array}{c|c} \alpha A_k & X_{12} \\ \hline 0 & -Z \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c|c} Y_{11} & \alpha A_0 \\ \hline Z & 0 \end{array} \right], \quad (2.2.2)$$

όπου $Z \in \mathbb{F}^{(k-1)n \times (k-1)n}$. Τότε Z αντιστρέψιμος συνεπάγεται ότι η $L(\lambda)$ είναι ένας ισχυρός γραμμικοποιητής του $P(\lambda)$.

Απόδειξη.

Θα δείξουμε πρώτα ότι $L(\lambda)$ είναι ένας γραμμικοποιητής του $P(\lambda)$. Ξεκινάμε την αναγωγή του $L(\lambda)$ σε $\text{diag}(P(\lambda), I_{(k-1)n})$ χρησιμοποιώντας τους unimodular πολυωνυμικούς πίνακες $T(\lambda)$ και $G(\lambda)$ όπως ορίζονται στην (1.1.6). Στο γινόμενο $L(\lambda)G(\lambda)$ οι πρώτες $k-1$ block στήλες είναι ίδιες με αυτές του $L(\lambda)$. Επειδή η τελευταία block-στήλη του $G(\lambda)$ είναι η $\Lambda \otimes I$, βλέπουμε από τη (2.2.1) ότι η τελευταία block-στήλη του $L(\lambda)G(\lambda)$ είναι η $\alpha e_1 \otimes P(\lambda)$. Διαμερίζοντας τον Z στη (2.2.2) σε block-στήλες (block-columns) $[Z_1 \ Z_2 \ \dots \ Z_{k-1}]$, όπου $Z_i \in \mathbb{F}^{(k-1)n \times n}$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} L(\lambda)G(\lambda) &= \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} * & * & * & * & * \\ Z_1 & (Z_2 - \lambda Z_1) & \dots & (Z_{k-1} - \lambda Z_{k-2}) & -\lambda Z_{k-1} \end{array} \right] G(\lambda), \\ &= \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} * & * & * & * & \alpha P(\lambda) \\ Z_1 & (Z_2 - \lambda Z_1) & \dots & (Z_{k-1} - \lambda Z_{k-2}) & 0 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Επιπλέον μετασχηματισμός από τις πράξεις block-στήλης δίνει

$$\begin{aligned} L(\lambda)T(\lambda) &= \\ L(\lambda)G(\lambda) &\underbrace{\left[\begin{array}{c|c|c|c|c} I & \lambda I & & & \\ & I & & & \\ & & I & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} I & & & & \\ & I & \lambda I & & \\ & & I & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & I \end{array} \right] \dots \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} I & & & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & I \\ & & & & \lambda I \\ & & & & I \\ & & & & & I \end{array} \right]}_{=T(\lambda)} \\ &= \left[\begin{array}{c|c} * & \alpha P(\lambda) \\ \hline Z & 0 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Κλιμακωτές και block-στηλών μεταθέσεις στο $L(\lambda)T(\lambda)$ μας δείχνουν ότι υπάρχει ένας unimodular πολυωνυμικός πίνακας $F(\lambda)$ τέτοιος ώστε $L(\lambda)F(\lambda) = \left[\begin{array}{c|c} P(\lambda) & W(\lambda) \\ \hline 0 & Z \end{array} \right]$ για κάποιο πολυωνυμικό πίνακα $W(\lambda)$. Τώρα εάν Z αντιστρέψιμος, τότε $L(\lambda)$ είναι ένας γραμμικοποιητής του $P(\lambda)$, έτσι

$$\left[\begin{array}{c|c} I & -W(\lambda)Z^{-1} \\ \hline 0 & Z^{-1} \end{array} \right] L(\lambda)F(\lambda) = \left[\begin{array}{c|c} P(\lambda) & 0 \\ \hline 0 & I_{(k-1)n} \end{array} \right].$$

Για να δείξουμε ότι $L(\lambda)$ είναι επίσης ένας ισχυρός γραμμικοποιητής του $P(\lambda)$, απομένει να δείξουμε ότι $\text{rev } L(\lambda) = \lambda X + Y$ είναι ένας γραμμικοποιητής του $\text{rev } P(\lambda)$. Υπάρχει μια μικρή διαφοροποίηση του $\text{rev } L(\lambda)$ στον $\mathbb{L}_1(\text{rev } P)$. Παρατηρούμε ότι $\lambda^{k-1} \cdot \Lambda(1/\lambda) = [1, \lambda, \dots, \lambda^{k-2}, \lambda^{k-1}]^T = R_k \Lambda$, όπου R_k συμβολίζει τον $k \times k$ αντίστροφο ταυτοτικό πίνακα. Έτσι αντικαθιστώντας το λ με $1/\lambda$ στην (2.2.1) και πολλαπλασιάζοντας εκατέρωθεν με λ^k προκύπτει

$$\lambda L(1/\lambda) \cdot (\lambda^{k-1} \Lambda(1/\lambda) \otimes I) = \alpha e_1 \otimes \lambda^k P(1/\lambda),$$

ή ισοδύναμα $\text{rev } L(\lambda) \cdot ((R_k \Lambda) \otimes I) = \alpha e_1 \otimes \text{rev } P(\lambda)$. Έτσι $\hat{L}(\lambda) := \text{rev } L(\lambda) \cdot (R_k \otimes I)$ ικανοποιεί την

$$\hat{L}(\lambda) \cdot (\Lambda \otimes I) = \alpha e_1 \otimes \text{rev } P(\lambda), \quad (2.2.3)$$

και έτσι $\hat{L}(\lambda) \in \mathbb{L}_1(\text{rev } P)$. (Παρατηρούμε ότι $\hat{L}(\lambda)$ είναι $\text{rev } L(\lambda) = \lambda X + Y$ με block-στήλες του Y και X αλλαγμένες με αντίστροφη σειρά.) Έτσι $\hat{L}(\lambda)$ και $\text{rev } L$ είναι ισοδύναμες δέσμες, η απόδειξη θα ολοκληρωθεί όταν αποδείξουμε ότι $\lambda \hat{X} + \hat{Y} := \hat{L}(\lambda)$ είναι ένας γραμμικοποιητής του $\text{rev } P(\lambda)$, Όμως $\hat{X} = Y \cdot (R_k \otimes I)$ και συνεπώς από (2.2.2) συνεπάγεται ότι

$$\hat{X} = \left[\begin{array}{c|c} \alpha A_0 & \hat{X}_{12} \\ \hline 0 & -\hat{Z} \end{array} \right] \quad \text{και} \quad \hat{Y} = \left[\begin{array}{c|c} \hat{Y}_{11} & \alpha A_k \\ \hline \hat{Z} & 0 \end{array} \right],$$

όπου $\hat{Z} = -Z \cdot (R_{k-1} \otimes I)$. Οπότε είναι φανερό ότι \hat{Z} αντιστρέψιμος αν είναι και ο Z και από το θεώρημα που μόλις απεδείχθη \hat{L} είναι ένας γραμμικοποιητής του $\text{rev } P(\lambda)$. \square

Παρατήρηση 2.2.2. Το γεγονός ότι η πρώτη συνοδεύουσα μορφή κάθε πολυωνυμικού πίνακα είναι πάντα ένας ισχυρός γραμμικοποιητής, είναι μια ειδική περίπτωση του θεωρήματος (2.2.1). Όταν ένας πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ είναι regular, τότε εύκολα βλέπουμε από τον ορισμό (1.1.4) ότι κάθε γραμμικοποιητής του $P(\lambda)$ θα πρέπει να είναι regular. Το επόμενο αποτέλεσμα δείχνει πως όταν μια δέσμη L βρίσκεται στον χώρο $\mathbb{L}_1(P)$, η ελάχιστη απαιτούμενη συνθήκη κανονικότητας αρκεί στο να μας εξασφαλίσει ότι η L είναι γραμμικοποιητής του P .

Θεώρημα 2.2.3 (Θεώρημα ισχυρού γραμμικοποιητή).

Έστω $L(\lambda) \in \mathbb{L}_1(P)$ για έναν κανονικό πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda) = \sum_{i=0}^k \lambda^i A_i$, τότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

- (i) $L(\lambda)$ είναι ένας γραμμικοποιητής του $P(\lambda)$.
- (ii) $L(\lambda)$ είναι μια κανονική δέσμη.
- (iii) $L(\lambda)$ είναι ένας ισχυρός γραμμικοποιητής του $P(\lambda)$.

Απόδειξη.

(i) \Rightarrow (ii): Αν $L(\lambda)$ είναι ένας γραμμικοποιητής του $P(\lambda)$, τότε υπάρχουν unimodular πολυωνυμικοί πίνακες $E(\lambda), F(\lambda)$ τέτοιοι ώστε

$$E(\lambda)L(\lambda)F(\lambda) = \begin{bmatrix} P(\lambda) & 0 \\ 0 & I_{(k-1)n} \end{bmatrix}.$$

Έτσι η κανονικότητα του $P(\lambda)$ συνεπάγεται τη κανονικότητα του $L(\lambda)$.

(ii) \Rightarrow (iii): Αφού $L(\lambda) \in \mathbb{L}_1(P)$, γνωρίζουμε ότι $L(\lambda) \cdot (\Lambda \otimes I_n) = u \otimes P(\lambda)$ για κάποιο $u \in \mathbb{F}^k$. Όμως $L(\lambda)$ regular, έτσι u μη-μηδενικό.

Έστω $M \in \mathbb{F}^{k \times k}$ κάθε αντιστρέψιμος πίνακας τέτοιος ώστε $Mu = \alpha e_1$. Τότε η κανονική δέσμη $\tilde{L}(\lambda) := (M \otimes I_n) \cdot L(\lambda)$ ανήκει στον $\mathbb{L}_1(P)$ με δεξιό ansatz διάνυσμα αe_1 , αφού

$$\begin{aligned} \tilde{L}(\lambda)(\Lambda \otimes I_n) &= (M \otimes I_n)L(\lambda)(\Lambda \otimes I_n) = (M \otimes I_n)(u \otimes P(\lambda)) \\ &= M_u \otimes P(\lambda) \\ &= \alpha e_1 \otimes P(\lambda). \end{aligned}$$

Συνεπώς από τη πρόταση 2.1.7 οι πίνακες \tilde{X} και \tilde{Y} στην $\tilde{L}(\lambda) := \lambda \tilde{X} + \tilde{Y}$ έχουν τις μορφές

$$\tilde{X} = \left[\begin{array}{c|c} n & (k-1)n \\ \hline \alpha A_k & \tilde{X}_{12} \\ 0 & -\tilde{Z} \end{array} \right]_{(k-1)n}^n \quad \text{και} \quad \tilde{Y} = \left[\begin{array}{c|c} (k-1)n & n \\ \hline \tilde{Y}_{11} & \alpha A_0 \\ \tilde{Z} & 0 \end{array} \right]_{(k-1)n}^n.$$

Τώρα αν \tilde{Z} ήταν μη-αντιστρέψιμος θα υπήρχε ένα μη μηδενικό διάνυσμα $w \in \mathbb{F}^{(k-1)n}$ τέτοιο ώστε $w^T \tilde{Z} = 0$. Όμως αυτό συνεπάγεται ότι

$[0 \ w^T](\lambda \tilde{X} + \tilde{Y}) = 0$ για όλα τα $\lambda \in \mathbb{F}$ αντιβαίνοντας την κανονικότητα του $\tilde{L}(\lambda)$. Έτσι \tilde{Z} είναι αντιστρέψιμος και από το θεώρημα 2.2.1 γνωρίζουμε ότι $\tilde{L}(\lambda)$ (και κατά συνέπεια $L(\lambda)$) είναι ένας ισχυρός γραμμικοποιητής του $P(\lambda)$.

(iii) \Rightarrow (i) τετριμμένο. □

Τώρα ας ξαναθυμηθούμε από τους ορισμούς (1.1.3) και (2.1.12) ότι το διάνυσμα $x \in \mathbb{C}^n$ είναι δεξιό ιδιοδιάνυσμα για έναν πολυωνυμικό πίνακα P με ιδιοτιμή ∞ , εάν και μόνο εάν x είναι δεξιό ιδιοδιάνυσμα του $\text{gen } P$ με ιδιοτιμή 0. Αντικαθιστώντας τις προτάσεις για τις μη-πεπερασμένες ιδιοτιμές σε προτάσεις για τις μηδενικές ιδιοτιμές, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα θεωρήματα (2.1.8), (2.1.13) και (2.2.3) για να επεκτείνουμε τις ιδιότητες ανάκτησης ιδιοδιανύσματος (eigenvector recovery properties) των $\mathbb{L}_1(P)$ και $\mathbb{L}_2(P)$ στην ιδιοτιμή ∞ .

Θεώρημα 2.2.4 (Ανάκτηση ιδιοδιανύσματος στο ∞).

Έστω $P(\lambda)$ ένας $n \times n$ πολυωνυμικός πίνακας βαθμού k και $L(\lambda)$ κάποια δέσμη στον $\mathbb{L}_1(P)$ με μη-μηδενικό δεξιό ansatz διάνυσμα u . Τότε $x \in \mathbb{C}^n$ είναι ένα δεξιό ιδιοδιάνυσμα του

$P(\lambda)$ με ιδιοτιμή ∞ , εάν και μόνο εάν, $e_1 \otimes x$ είναι δεξιό ιδιοδιάνυσμα της $L(\lambda)$ με ιδιοτιμή ∞ . Εάν επιπλέον P regular και $L \in \mathbb{L}_1(P)$ ένας γραμμικοποιητής του P , τότε κάθε δεξιό ιδιοδιάνυσμα του L με ιδιοτιμή ∞ είναι της μορφής $e_1 \otimes x$, για κάποιο δεξιό ιδιοδιάνυσμα x του P με ιδιοτιμή ∞ .

Απόδειξη.

Δίνουμε την απόδειξη μόνο για τα δεξιά ιδιοδιανύσματα του $L \in \mathbb{L}_1(P)$. Για κάθε $L(\lambda)$ ορίζουμε $\hat{L}(\lambda) := \text{ren } L(\lambda) \cdot (R_k \otimes I)$. Τότε ο συλλογισμός που χρησιμοποιήθηκε στο θεώρημα 2.2.1 για να πάρουμε την (2.2.3) μας δείχνει ότι $L \in \mathbb{L}_1(P) \Rightarrow \hat{L}(\lambda) \in \mathbb{L}_1(\text{ren } P)$, με το ίδιο μη-μηδενικό δεξιό ansatz διάνυσμα u .

Από το θεώρημα 2.1.8 γνωρίζουμε ότι x είναι ένα δεξιό ιδιοδιάνυσμα του $\text{ren } P$ με ιδιοτιμή 0 εάν και μόνο εάν $\Lambda \otimes x = e_k \otimes x$ είναι ένα δεξιό ιδιοδιάνυσμα του $\hat{L}(\lambda)$ με ιδιοτιμή 0. Όμως $e_k \otimes x$ είναι ένα δεξιό ιδιοδιάνυσμα του $\hat{L}(\lambda)$ εάν και μόνο εάν $e_1 \otimes x = (R_k \otimes I)(e_k \otimes x)$ είναι ένα δεξιό ιδιοδιάνυσμα του $\text{ren } P$. Αυτό αποδεικνύει το πρώτο μέρος του θεωρήματος.

Εάν P regular και $L \in \mathbb{L}_1(P)$ ένας γραμμικοποιητής του P , τότε από το θεώρημα 2.2.3 $\hat{L}(\lambda) \in \mathbb{L}_1(\text{ren } P)$ είναι ένας γραμμικοποιητής του $\text{ren } P$. Το θεώρημα 2.1.8 συνεπάγεται ότι κάθε δεξιό ιδιοδιάνυσμα του \hat{L} με ιδιοτιμή 0 είναι της μορφής $e_k \otimes x$, όπου x ένα δεξιό ιδιοδιάνυσμα του $\text{ren } P$ με ιδιοτιμή 0. Ισοδύναμα κάθε δεξιό ιδιοδιάνυσμα του $\text{ren } P$ με ιδιοτιμή 0 είναι της μορφής $e_1 \otimes x$ για κάποιο δεξιό ιδιοδιάνυσμα x του $\text{ren } P$ με ιδιοτιμή 0. Αυτό αποδεικνύει και το δεύτερο μέρος του θεωρήματος. \square

2.2.2 Συνθήκες γραμμικοποιητή

Μέθοδος προσδιορισμού συνθήκης γραμμικοποιητή για μια δέσμη στον $\mathbb{L}_1(P)$:

1) Υποθέτουμε ότι $P(\lambda)$ ένας regular πολυωνυμικός πίνακας και $L(\lambda) = \lambda X + Y \in \mathbb{L}_1(P)$ έχει μη-μηδενικό δεξιό ansatz διάνυσμα $u \in \mathbb{F}^k$, δηλαδή $L(\lambda) \cdot (\Lambda \otimes I_n) = u \otimes P(\lambda)$

2) Επιλέγουμε κάποιο αντιστρέψιμο πίνακα M τέτοιο ώστε $M u = \alpha e_1$.

3) Εφαρμόζουμε τον αντίστοιχο block-μετασχηματισμό $M \otimes I_n$ στην $L(\lambda)$ για να παράγουμε $\tilde{L}(\lambda) := (M \otimes I_n)L(\lambda)$ που πρέπει να έχει τη μορφή:

$$\tilde{L}(\lambda) = \lambda \tilde{X} + \tilde{Y} = \lambda \left[\begin{array}{c|c} \tilde{X}_{11} & \tilde{X}_{12} \\ \hline 0 & -Z \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c|c} \tilde{Y}_{11} & \tilde{Y}_{12} \\ \hline Z & 0 \end{array} \right], \quad (2.2.4)$$

όπου \tilde{X}_{11} και \tilde{Y}_{12} είναι $n \times n$.

4) Εξάγουμε $\det Z \neq 0$, η συνθήκη γραμμικοποιητή για $L(\lambda)$.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η μέθοδος αυτή μπορεί να εφαρμοστεί ως ένας αριθμητικός αλγόριθμος ελέγχου, εάν η δέσμη στον $\mathbb{L}_1(P)$ είναι γραμμικοποιητής.

Παράδειγμα 2.2.5. Θεωρούμε τον γενικό τετραγωνικό πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda) = \lambda^2 A + \lambda B + C$ και τις ακόλουθες δέσμες στον $\mathbb{L}_1(P)$:

$$L_1(\lambda) = \lambda \begin{bmatrix} A & B+C \\ A & 2B-A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -C & C \\ A-B & C \end{bmatrix}, \quad L_2(\lambda) = \lambda \begin{bmatrix} 0 & -B \\ A & B-C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & 0 \\ C & C \end{bmatrix}.$$

εφόσον

$$\begin{bmatrix} A & B+C \\ A & 2B-A \end{bmatrix} \boxplus \rightarrow \begin{bmatrix} -C & C \\ A-B & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{bmatrix},$$

έχουμε $\mathbb{L}_1(\lambda) \in \mathbb{L}_1(P)$ με δεξιό ansatz διάνυσμα $u = [1 \ 1]^T$. Αφαιρώντας το πρώτο στοιχείο από το δεύτερο, ανάγεται το u σε e_1 και η αντίστοιχη block-row πράξη στο Y , συνεπάγεται

$$\tilde{Y} = \begin{bmatrix} -C & C \\ A-B+C & 0 \end{bmatrix}.$$

Συνεπώς $Z = A - B + C$ και $\det(A - B + C) = \det P(-1) \neq 0$ είναι η συνθήκη γραμμικοποιητή. Έτσι $\mathbb{L}_1(\lambda)$ είναι ένας γραμμικοποιητής του P εάν και μόνο εάν $\lambda = -1$ δεν είναι μια ιδιοτιμή του P . Από την άλλη για τον $\mathbb{L}_2(\lambda)$ έχουμε

$$\begin{bmatrix} 0 & -B \\ A & B-C \end{bmatrix} \boxplus \rightarrow \begin{bmatrix} B & 0 \\ C & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ A & B & C \end{bmatrix},$$

έτσι $\mathbb{L}_2(\lambda) \in \mathbb{L}_1(P)$ με $u = [0 \ 1]^T$. Μεταθέτοντας τα στοιχεία του u προκύπτει το e_1 και εφαρμόζοντας την ανάλογη μετάθεση σε block γραμμές στο Y προκύπτει

$$\tilde{Y} = \begin{bmatrix} C & C \\ B & 0 \end{bmatrix}.$$

Συνεπώς $Z = \tilde{Y}_{21} = B$ και έτσι $\det B \neq 0$ είναι η συνθήκη γραμμικοποιητή για τον $\mathbb{L}_2(\lambda)$. Το επόμενο παράδειγμα δείχνει ότι η συνθήκη γραμμικοποιητή για μια δέσμη στον $\mathbb{L}_1(P)$ ενδεχομένως να εξαρτάται από έναν μη-γραμμικό συνδυασμό δεδομένων του P και έτσι να μη μπορούμε να εξάγουμε εύκολα συμπεράσματα.

Παράδειγμα 2.2.6. Θεωρούμε το γενικό κυβικό πολυωνυμικό πίνακα $\lambda^3 A + \lambda^2 B + \lambda C + D$ και τη δέσμη

$$L_3(\lambda) = \lambda X + Y = \lambda \begin{bmatrix} A & 0 & 2C \\ -2A & -B-C & D-4C \\ 0 & A & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & -C & D \\ C-B & 2C-D & -2D \\ -A & I & 0 \end{bmatrix}$$

στον $\mathbb{L}_1(P)$. Εφόσον $X \boxplus \rightarrow Y = [1 \ -2 \ 0]^T \otimes [A \ B \ C \ D]$, έχουμε $u = [1 \ -2 \ 0]^T$. Προσθέτοντας 2 φορές την block-στήλη του Y στη δεύτερη block-στήλη του Y προκύπτει

$$Z = \begin{bmatrix} B+C & -D \\ -A & I \end{bmatrix},$$

και συνεπώς η συνθήκη γραμμικοποιητή $\det Z = \det(B + C - DA) \neq 0$.

Έχουμε δει σε αυτή την παράγραφο ότι κάθε δέσμη στον $\mathbb{L}_1(P)$ έχει την δική της συνθήκη γραμμικοποιητή πάνω στους πίνακες συντελεστών του P . Απ' αυτή την οπτική γωνία φαίνεται ότι μπορούν να υπάρξουν πολυωνυμικοί πίνακες για τους οποίους πολύ λίγες δέσμες είναι πραγματικά γραμμικοποιητές του P . Ωστόσο το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι αυτό δεν συμβαίνει ποτέ.

Θεώρημα 2.2.7 (Γραμμικοποιητές γενικοί στον $\mathbb{L}_1(P)$).

Για κάθε κανονικό $n \times n$ πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda)$ βαθμού k , σχεδόν κάθε δέσμη στον $\mathbb{L}_1(P)$ είναι γραμμικοποιητής του $P(\lambda)$.

Απόδειξη.

Έστω $d = \dim \mathbb{L}_1(P) = k + (k-1)kn^2$ και έστω $L_1(\lambda), L_2(\lambda), \dots, L_d(\lambda)$ κάποια σταθερή βάση του $\mathbb{L}_1(P)$. Εφόσον κάθε $L(\lambda) \in \mathbb{L}_1(P)$ μπορεί να εκφραστεί μοναδικά σαν ένας γραμμικός συνδυασμός $L(\lambda) = \beta_1 L_1(\lambda) + \beta_2 L_2(\lambda) + \dots + \beta_d L_d(\lambda)$, μπορούμε να δούμε την $\det L(\lambda)$ σαν έναν πολυωνυμικό πίνακα του οποίου οι συντελεστές $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{kn}$ είναι συναρτήσεις των β_1, \dots, β_d , έτσι ώστε $c_i = c_i(\beta_1, \dots, \beta_d)$.

Από το θεώρημα 2.2.3 γνωρίζουμε ότι $L(\lambda) \in \mathbb{L}_1(P)$ αποτυγχάνει σαν γραμμικοποιητής του $P(\lambda)$ εάν και μόνο εάν $\det L(\lambda) \equiv 0$, ισοδύναμα εάν όλοι οι συντελεστές c_i είναι μηδέν. Έτσι το υποσύνολο των δεσμών στον $\mathbb{L}_1(P)$, που δεν είναι γραμμικοποιητές του $P(\lambda)$, μπορεί να χαρακτηριστεί σαν το κοινό μηδενικό σύνολο (common zero set) Z των πολυωνυμικών πινάκων $\{c_i(\beta_1, \dots, \beta_d) : 0 \leq i \leq kn\}$, δηλαδή σαν ένα αλγεβρικό υποσύνολο του \mathbb{F}^d .

Η απόδειξη θα ολοκληρωθεί εάν δείξουμε ότι Z είναι ένα κατάλληλο υποσύνολο του \mathbb{F}^d ή ισοδύναμα ότι υπάρχει κάποια δέσμη στον $\mathbb{L}_1(P)$ η οποία είναι γραμμικοποιητής του P . Άμεσα φαίνεται ότι η πρώτη συνοδεύουσα μορφή $C_1(\lambda)$ του $P(\lambda)$ ανήκει στον $\mathbb{L}_1(P)$ και είναι πάντα ένας γραμμικοποιητής του P . \square

Αν και οι $\mathbb{L}_1(P)$ και $\mathbb{L}_2(P)$ περιέχουν πολλούς γραμμικοποιητές του P , υπάρχουν γραμμικοποιητές που δεν ανήκουν ούτε στον $\mathbb{L}_1(P)$ ούτε στον $\mathbb{L}_2(P)$. Για του λόγου το αληθές παραθέτουμε ένα παράδειγμα

Παράδειγμα 2.2.8. Για τον κυβικό πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda) = \lambda^3 A_3 + \lambda^2 A_2 + \lambda A_1 + A_0$, η δέσμη

$$L(\lambda) = \lambda \begin{bmatrix} 0 & A_3 & 0 \\ I & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -I & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & A_0 \\ 0 & -I & 0 \end{bmatrix}$$

αποδεικνύεται ότι είναι γραμμικοποιητής του P . Χρησιμοποιώντας μετατοπισμένα αθροίσματα βλέπουμε εύκολα ότι $L(\lambda)$ δεν ανήκει ούτε στον $\mathbb{L}_1(P)$ ούτε στον $\mathbb{L}_2(P)$.

2.3 Άλλη όψη των $\mathbb{L}_1(P)$ και $\mathbb{L}_2(P)$

Στην παράγραφο 2.1 ορίσαμε τον χώρο δεσμών $\mathbb{L}_1(P)$ γενικεύοντας μια συγκεκριμένη ιδιότητα της πρώτης συνοδεύουσας μορφής $C_1(\lambda)$ του P . Χρησιμοποιώντας τα τρία πρώτα βήματα της μεθόδου της παραγράφου 2.2.2 μαζί με τον χαρακτηρισμό των $\mathbb{L}_1(P)$ -δεσμών που δίνονται στο θεώρημα 2.1.5 και στο πόρισμα 2.1.7 μπορούμε να δείξουμε ότι κάθε $L(\lambda) \in \mathbb{L}_1(P)$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί στην μορφή:

$$L(\lambda) = (K \otimes I_n) \left[\begin{array}{c|c} aI_n & U \\ \hline 0 & -Z \end{array} \right] C_1(\lambda), \quad (2.3.1)$$

όπου $Z \in \mathbb{F}^{(k-1)n \times (k-1)n}$ είναι το ίδιο όπως στο block Z του πορίσματος 2.1.7 και $K \in \mathbb{F}^{k \times k}$ αντιστρέψιμος. Είναι επίσης εύκολο να ελέγξουμε ότι κάθε δέσμη της μορφής (2.3.1) ικανοποιεί την $L(\lambda) \cdot (\Lambda \otimes I_n) = \alpha K e_1 \otimes P(\lambda)$ και έτσι βρίσκεται στον $\mathbb{L}_1(P)$ με δεξιό ansatz διάνυσμα $v = \alpha K e_1$. Συνεπώς το βαθμωτό $\alpha \in \mathbb{F}$ στον μεσαίο παράγοντα είναι μηδέν, εάν και μόνο εάν το δεξιό ansatz διάνυσμα v του $L(\lambda)$ είναι μηδέν. Η παραγοντοποίηση αυτή δίνει άλλο έναν λόγο γιατί τα δεξιά ιδιοδιανύσματα των δεσμών στον $\mathbb{L}_1(P)$ έχουν την ίδια δομή γινομένου Kronecker όπως αυτών της $C_1(\lambda)$, και γιατί οι δέσμες στον $\mathbb{L}_1(P)$ είναι είτε ισχυροί γραμμικοποιητές του P είτε μη-αντιστρέψιμες δέσμες, εξαρτώμενες από την αντιστρεψιμότητα ή μη των block Z και του βαθμωτού α .

Με ανάλογο τρόπο μπορεί κάποιος να παραγοντοποιήσει κάθε δέσμη $L(\lambda) \in \mathbb{L}_2(P)$ ως

$$L(\lambda) = C_2(\lambda) \left[\begin{array}{c|c} \beta I_n & 0 \\ \hline T & -V \end{array} \right] (H \otimes I_n), \quad (2.3.2)$$

Έτσι παρουσιάζουμε μια διαφορετική εικόνα της δομής του αριστερού ιδιοδιανύσματος των δεσμών στον $\mathbb{L}_2(P)$ και το γεγονός ότι σχεδόν όλες οι δέσμες στον $\mathbb{L}_2(P)$ είναι ισχυροί γραμμικοποιητές του P .

Μας ενδιαφέρει επίσης η πιθανότητα ύπαρξης δεσμών ταυτόχρονα στον $\mathbb{L}_1(P)$ και $\mathbb{L}_2(P)$. Οι παραγοντοποιημένες μορφές (2.3.1) και (2.3.2) κάνουν να φαίνεται περισσότερο απίθανο ότι μπορεί να υπάρξουν μη-τετριμμένες μορφές. Ωστόσο στο επόμενο κεφάλαιο θα δούμε ότι αυτή είναι μια λανθασμένη εντύπωση.

Κεφάλαιο 3

$\mathbb{DL}(P)$ και Block-συμμετρία

Στόχος αυτού του κεφαλαίου είναι η κατανόηση του χώρου $\mathbb{DL}(P) := \mathbb{L}_1(P) \cap \mathbb{L}_2(P)$ των διπλών ansatz δεσμών για γενικό πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda) = \sum_{i=0}^k \lambda^i A_i$ και το πώς μπορούν να κατασκευαστούν όλες οι δέσμες στον $\mathbb{DL}(P)$. Ξεκινάμε το κεφάλαιο με έννοιες όπως block-αναστροφή, block-συμμετρία και κάποιες βασικές τους ιδιότητες.

3.1 Πράξη Block-ανάστροφου

Αυτή η παράγραφος μας εισάγει την πράξη του block-ανάστροφου και μας δείχνει πως αυτή δημιουργεί μια θεμελιώδη σχέση μεταξύ των χώρων $\mathbb{L}_1(P)$ και $\mathbb{L}_2(P)$.

Ξαναθυμόμαστε από το κεφάλαιο 2 ότι οι χώροι $\mathbb{L}_1(P)$ και $\mathbb{L}_2(P)$ είναι μεγέθους $kn \times kn$, όπου k ο βαθμός του $n \times n$ πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$. Για τους σκοπούς αυτής της εργασίας θεωρούμε block πίνακες στους οποίους όλα τα blocks έχουν το ίδιο μέγεθος, όπως στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 3.1.1 (Block-πίνακας). Έστω $E_{ij} \in \mathbb{F}^{k \times \ell}$, συμβολίζουμε τον πίνακα ο οποίος είναι παντού μηδενικός εκτός από ένα 1 στο (i,j) στοιχείο. Τότε ένας $km \times \ell n$ πίνακας A γράφεται της μορφής $A = \sum_{i,j} (E_{ij} \otimes B_{ij})$

με $B_{ij} \in \mathbb{F}^{m \times n}$ καλείται ο $k \times \ell$ block πίνακας με $m \times n$ blocks B_{ij} .

Ορισμός 3.1.2 (Block-ανάστροφος). Υποθέτουμε $A = \sum_{i,j} (E_{ij} \otimes B_{ij})$ ένας block $k \times \ell$ πίνακας με $m \times n$ blocks B_{ij} . Τότε ο block-ανάστροφος (block-transpose) του A είναι ο $\ell \times k$ πίνακας

$$A^B := \sum_{i,j} (E_{ij}^T \otimes B_{ij}), \text{ επίσης με } m \times n \text{ blocks.}$$

Παρατηρούμε ότι εάν ο A εκφράζεται ως άθροισμα $A = \sum (K_i \otimes M_i)$, όπου $K_i \in \mathbb{F}^{k \times \ell}$ και $M_i \in \mathbb{F}^{m \times n}$, τότε $A^B = \sum (K_i^T \otimes M_i)$.

Ο block-ανάστροφος έχει κάποιες, αλλά όχι εξ' ολοκλήρου ίδιες αλγεβρικές ιδιότητες με τον απλό ανάστροφο πίνακα.

Λήμμα 3.1.3. Για κάποιους block πίνακες A, C που είναι σύμμορφοι για block-πρόσθεση (block-addition) έχουμε

$$(A + C)^B = A^B + C^B \quad (3.1.1)$$

Παρατηρούμε ότι οι block-πίνακες A και C δεν ικανοποιούν γενικά την $(AC)^B = C^B A^B$. Ωστόσο αν κάθε block του A αντιμετωπίζεται με κάθε block του C , τότε το ανάλογο της πολλαπλασιαστικής ιδιότητας του ανάστροφου δεν διατηρείται.

Λήμμα 3.1.4. Υποθέτουμε ότι $A = \sum_{i,j} (E_{ij} \otimes B_{ij})$ είναι ένας $(k \times \ell)$ block πίνακας με $n \times n$ blocks A_{ij} και $C = \sum_{p,q} (E_{pq} \otimes C_{pq})$ ένας $(\ell \times m)$ block πίνακας με $n \times n$ blocks C_{pq} . Επιπλέον υποθέτουμε ότι κάθε A_{ij} αντιμετατίθεται με κάθε C_{pq} .

$$\text{Τότε } (AC)^B = C^B A^B. \quad (3.1.2)$$

Απόδειξη.

Έχουμε

$$\begin{aligned} (AC)^B &= (\sum_{i,j} (E_{ij} \otimes A_{ij}) \cdot \sum_{p,q} (E_{pq} \otimes C_{pq}))^B \\ &= (\sum_{i,j,p,q} (E_{ij} E_{pq} \otimes A_{ij} C_{pq}))^B \\ &= \sum_{i,j,p,q} ((E_{ij} E_{pq})^T \otimes A_{ij} C_{pq}) \\ &= \sum_{i,j,p,q} (E_{pq}^T E_{ij}^T \otimes C_{pq} A_{ij}) \\ &= \sum_{p,q} (E_{pq}^T \otimes C_{pq}) \cdot \sum_{i,j} (E_{ij}^T \otimes A_{ij}) = C^B A^B. \end{aligned} \quad \square$$

Θεώρημα 3.1.5 (Ένας θεμελιώδης ισομορφισμός).

Για κάθε πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda) = \sum_{i=0}^k \lambda^i A_i$ η απεικόνιση του block-ανάστροφου:

$$\mathbb{L}_1(P) \xrightarrow{B} \mathbb{L}_2(P)$$

$$L(\lambda) \mapsto L(\lambda)^B$$

είναι ένας γραμμικός ισομορφισμός μεταξύ $\mathbb{L}_1(P)$ και $\mathbb{L}_2(P)$. Συγκεκριμένα εάν $L(\lambda) \in \mathbb{L}_1(P)$ έχει δεξιό ansatz διάνυσμα u , τότε $L(\lambda)^B \in \mathbb{L}_2(P)$ με αριστερό ansatz διάνυσμα $w = u$.

Απόδειξη.

Υποθέτουμε ότι $L(\lambda) \in \mathbb{L}_1(P)$ με δεξιό ansatz διάνυσμα u . Τότε χρησιμοποιώντας τον ορισμό 3.1.2 και το λήμμα 3.1.4 έχουμε

$$\begin{aligned} (L(\lambda) \cdot (\Lambda \otimes I))^B &= (u \otimes P(\lambda))^B \Rightarrow (\Lambda \otimes I)^B \cdot L(\lambda)^B = u^T \otimes P(\lambda) \\ &\Rightarrow (\Lambda^T \otimes I) \cdot L(\lambda)^B = u^T \otimes P(\lambda) \end{aligned}$$

Η τελευταία εξίσωση μας λέει ότι $L(\lambda)^B \in \mathbb{L}_2(P)$ με αριστερό ansatz διάνυσμα u και έτσι ο block-ανάστροφος μας δίνει μια καλά ορισμένη απεικόνιση \mathfrak{B} από $\mathbb{L}_1(P)$ σε $\mathbb{L}_2(P)$. Από το λήμμα 3.1.3 προκύπτει ότι αυτή η απεικόνιση είναι γραμμική. Ο πυρήνας είναι η μηδενική δέσμη αφού $L(\lambda)^B = 0 \Rightarrow L(\lambda) = 0$, έτσι \mathfrak{B} αμφιμονοσήμαντη.

Ένα ανάλογο όρισμα μας δείχνει ότι ο block-ανάστροφος δίνει επίσης μια καλά ορισμένη 1-1 γραμμική απεικόνιση αντίστροφα από $\mathbb{L}_2(P)$ σε $\mathbb{L}_1(P)$, έτσι δείξαμε ότι \mathbb{B} είναι ισομορφισμός. \square

Το ακόλουθο λήμμα δείχνει πως η πράξη του block-ανάστροφου αλληλεπιδρά με τα μετατοπισμένα αθροίσματα και πώς η Block-αναστροφή συνδέει τα $\mathbb{L}_2(P)$ και $\mathbb{L}_1(P)$ μεταξύ τους.

Λήμμα 3.1.6. Για block $k \times k$ πίνακες X και Y (με $n \times n$ blocks) έχουμε:

$$(X \boxplus Y)^B = X^B \boxplus Y^B \quad (3.1.3)$$

Απόδειξη.

Απο τον ορισμό των κατά γραμμές και κατά στήλες μετατοπισμένων αθροισμάτων,

$$\begin{aligned} (X \boxplus Y)^B &= ([X \mid 0] + [0 \mid Y])^B = [X \mid 0]^B + [0 \mid Y]^B \\ &= \left[\begin{array}{c} X^B \\ 0 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 0 \\ Y^B \end{array} \right] = X^B \boxplus Y^B \end{aligned} \quad \square$$

3.2 Block-συμμετρία και εξισώσεις μετατοπισμένου αθροίσματος

Ορισμός 3.2.1 (Block-συμμετρία). Ένας $k \times k$ πίνακας A με $m \times n$ blocks θεωρείται block-συμμετρικός εάν $A^B = A$.

Για παράδειγμα ένας block 2×2 πίνακας είναι block-συμμετρικός εάν και μόνο αν είναι της μορφής $\begin{bmatrix} A & C \\ C & D \end{bmatrix}$. Παρατηρούμε ότι εάν κάθε block $A_{ij} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ σε έναν block-συμμετρικό πίνακα A είναι συμμετρικό, τότε ο A είναι από μόνος του συμμετρικός.

Εύκολα βλέπουμε ότι το σύνολο όλων των block-συμμετρικών πινάκων είναι κλειστό υπό γραμμικούς συνδυασμούς και συνεπώς αποτελεί διανυσματικό χώρο. Έτσι θεωρούμε

$$\mathbb{B}(P) := \{\lambda X + Y \in \mathbb{L}_1(P) : X^B = X, Y^B = Y\} \subseteq \mathbb{L}_1(P) \quad (3.2.1)$$

ο υπόχωρος όλων των block-συμμετρικών δεσμών στον $\mathbb{L}_1(P)$. Σαν άμεσο πόρισμα του θεωρήματος 3.1.5 βλέπουμε ότι κάθε block-συμμετρική δέσμη στον $\mathbb{L}_1(P)$ ανήκει αυτομάτως στον $\mathbb{DL}(P)$.

Πρόταση 3.2.2. Για κάθε πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda)$, $\mathbb{B}(P) \subseteq \mathbb{DL}(P)$.

Απόδειξη.

Έστω $L(\lambda) \in \mathbb{B}(P) \subset \mathbb{L}_1(P)$. Από το θεώρημα 3.1.5 γνωρίζουμε ότι $L(\lambda)^B = L(\lambda)$ ανήκει στον $\mathbb{L}_2(P)$ και έτσι $L(\lambda) \in \mathbb{DL}(P)$. \square

Εξαιτίας του λήμματος 2.1.4 η κατασκευή δεσμών στο $\mathbb{B}(P)$ μειώνει την εύρεση λύσεων της εξίσωσης $X \boxplus Y = Z$ με block-συμμετρικά X και Y .

3.2.1 Εξισώσεις μετατοπισμένου αθροίσματος

Ερευνούμε την ύπαρξη και τη μοναδικότητα των block-συμμετρικών λύσεων της εξίσωσης $X \boxplus Y = Z$, όπου Z δοσμένος τυχαίος πίνακας. Θα δείξουμε ότι η εξίσωση $X \boxplus Y = Z$ θα λύνεται πάντα με block-συμμετρικά X και Y και η μοναδική block-συμμετρική λύση του $X \boxplus Y = 0$ θα είναι η $X = Y = 0$.

Ορίζουμε κάποιους συγκεκριμένους τύπους block-συμμετρικών πινάκων, οι οποίοι παίζουν βασικό ρόλο στη δημιουργία κατασκευών.

$$R_\ell = \begin{bmatrix} & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & \end{bmatrix}_{\ell \times \ell} \quad \text{και} \quad N_\ell = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}_{\ell \times \ell} \quad (\text{Παρατηρούμε ότι } N_1 = [0]). \quad (3.2.2)$$

Τότε για έναν τυχαίο $n \times n$ block πίνακα M , ορίζουμε τρεις block-Hankel, block-συμμετρικούς, block $\ell \times \ell$ πίνακες:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\ell^{(0)}(M) &:= \begin{bmatrix} & & M \\ & \ddots & \\ M & & \end{bmatrix} = R_\ell \otimes M, \\ \mathcal{H}_\ell^{(1)}(M) &:= \begin{bmatrix} & & M & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ M & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \end{bmatrix} = (N_\ell R_\ell) \otimes M = \begin{bmatrix} & & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \otimes M, \\ \mathcal{H}_\ell^{(-1)}(M) &:= \begin{bmatrix} & & 0 \\ & \ddots & \ddots & M \\ 0 & \ddots & \ddots & \end{bmatrix} = (R_\ell N_\ell) \otimes M = \begin{bmatrix} & & 0 \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ & 1 & & \end{bmatrix} \otimes M. \end{aligned}$$

Ο δείκτης (0) , (1) ή (-1) ορίζει ότι τα block M βρίσκονται πάνω, κάτω ή αντιδιαγώνια, αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι αυτοί οι τρεις block-Hankel πίνακες είναι συμμετρικοί εάν και ο M είναι συμμετρικός.

Λήμμα 3.2.3. Έστω Z ένας τυχαίος block $k \times (k+1)$ πίνακας με $n \times n$ blocks. Τότε υπάρχουν block-συμμετρικοί, block $k \times k$ πίνακες X και Y με $n \times n$ blocks τέτοιοι ώστε $X \boxplus Y = Z$.

Απόδειξη.

Έστω $E_{ij}^\ell \in \mathbb{F}^{\ell \times (\ell+1)}$ συμβολίζουμε τον πίνακα που είναι παντού μηδέν εκτός από 1 στο (i,j) στοιχείο. Η απόδειξη μας βασίζεται στη παρατήρηση ότι για τυχαίο $M, P \in \mathbb{F}^{n \times n}$, τα μετατοπισμένα αθροίσματα

$$\mathcal{H}_\ell^{(0)}(M) \boxplus (-\mathcal{H}_\ell^{(1)}(M)) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ M & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} = E_{\ell 1}^\ell \otimes M, \quad (3.2.3)$$

$$-\mathcal{H}_\ell^{(-1)}(P) \boxplus \rightarrow \mathcal{H}_\ell^{(0)}(P) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & P \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} = E_{1,\ell+1}^\ell \otimes P \quad (3.2.4)$$

M και P τοποθετημένα στη κάτω αριστερή και πάνω δεξιά γωνία ενός $\ell \times (\ell + 1)$ block πίνακα αντίστοιχα.

Το μετατοπισμένο άθροισμα $\boxplus \rightarrow$ είναι συμβατό με συνήθη αθροίσματα, δηλαδή

$$(\sum X_i) \boxplus \rightarrow (\sum Y_i) = \sum (X_i \boxplus \rightarrow Y_i).$$

Συνεπώς σκοπός μας είναι να δείξουμε πως μπορούμε να κατασκευάσουμε block-συμμετρικά X και Y τα οποία τοποθετούν ένα τυχαίο $n \times n$ block σε ένα τυχαίο (i, j) block-σημείο στο Z .

Για δείκτες i, j τέτοιους ώστε $1 \leq i \leq j \leq k$, έστω $\ell = j - i + 1$ και ενσωματώνοντας $\mathcal{H}_\ell^{(0)}(M)$ και $-\mathcal{H}_\ell^{(1)}(M)$ σαν έναν κύριο υποπίνακα με block γραμμές και block στήλες i μέχρι j του $k \times k$ μηδενικού πίνακα, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{ij} \boxplus \rightarrow \tilde{Y}_{ij} &:= \begin{matrix} i & j \\ \left[\begin{array}{c} \boxed{\mathcal{H}_\ell^{(0)}(M)} \end{array} \right] \end{matrix} \boxplus \rightarrow \begin{matrix} i & j \\ \left[\begin{array}{c} \boxed{-\mathcal{H}_\ell^{(1)}(M)} \end{array} \right] \end{matrix} \\ &= \begin{matrix} i & j+1 \\ \left[\begin{array}{c} \boxed{\mathcal{H}_\ell^{(0)}(M) \boxplus \rightarrow (-\mathcal{H}_\ell^{(1)}(M))} \end{array} \right] \end{matrix} \\ &= E_\mu \otimes M \quad (i \leq j). \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Παρατηρούμε ότι ενσωματώνοντας $\mathcal{H}_\ell^{(0)}(M)$ και $-\mathcal{H}_\ell^{(1)}(M)$ σαν κύριους block-υποπίνακες εξασφαλίζεται ότι \tilde{X}_{ij} και \tilde{Y}_{ij} είναι block-συμμετρικοί. Ομοίως ορίζοντας τους block-συμμετρικούς πίνακες

$$\hat{X}_{ij} = \begin{matrix} i & j \\ \left[\begin{array}{c} \boxed{-\mathcal{H}_\ell^{(-1)}(P)} \end{array} \right] \end{matrix}, \quad \hat{Y}_{ij} = \begin{matrix} i & j \\ \left[\begin{array}{c} \boxed{\mathcal{H}_\ell^{(0)}(P)} \end{array} \right] \end{matrix}, \quad (3.2.6)$$

έχουμε ότι

$$\hat{X}_{ij} \boxplus \rightarrow \hat{Y}_{ij} = E_{i,j+1} \otimes P \quad (i \leq j) \quad (3.2.7)$$

Έτσι αθροίσματα αυτών των εκδοχών των (3.2.3) και (3.2.4) μπορούν να παράγουν έναν τυχαίο block $k \times (k+1)$ πίνακα Z σαν το μετατοπισμένο κατά στήλη άθροισμα των block-συμμετρικών X και Y . \square

Λήμμα 3.2.4. Υποθέτουμε ότι X και Y είναι και οι δύο block-συμμετρικοί block $k \times k$ πίνακες με $n \times n$ blocks. Τότε $X \boxplus Y = 0 \Leftrightarrow X = Y = 0$.

Απόδειξη.

Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στο k . Θα εστιάσουμε στη μη-τετριμμένη κατεύθυνση (\Rightarrow). Υπάρχουν δύο βασικές περιπτώσεις για να ελεγχθούν, η $k = 1$ και η $k = 2$. Η $k = 1$ περίπτωση είναι άμεση. Επειδή X και Y είναι Block-συμμετρικοί, για $k = 2$ έχουμε

$$X \boxplus Y = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & 0 \\ X_{12} & X_{22} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & Y_{11} & Y_{12} \\ 0 & Y_{12} & Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} + Y_{11} & Y_{12} \\ X_{12} & X_{22} + Y_{12} & Y_{22} \end{bmatrix}.$$

Τότε από $X \boxplus Y = 0$ συνεπάγεται ότι $X = Y = 0$.

Τώρα θεωρούμε $k > 2$ και X και Y με τα block τους ομαδοποιημένα όπως φαίνεται στο διάγραμμα:

$$X \boxplus Y = \left[\begin{array}{c|cc} & (2\alpha) & \\ \hline (1\alpha) & \tilde{X} & (4\alpha) \\ \hline & (3\alpha) & \end{array} \right] \boxplus \left[\begin{array}{cc|c} (3b) & & \\ \hline (4b) & \tilde{Y} & (1b) \\ \hline (2b) & & \end{array} \right].$$

Η μόνη συνεισφορά στη πρώτη block στήλη του $X \boxplus Y$ γίνεται από το (1α) και αντίστοιχα για τη τελευταία block στήλη του $X \boxplus Y$ από το $(1b)$. Έτσι από $X \boxplus Y = 0$ συνεπάγεται ότι (1α) και $(1b)$ είναι όλα μηδενικά. Η block-συμμετρία των X και Y τώρα συνεπάγεται ότι τα blocks στα (2α) και $(2b)$ είναι μηδενικά. Τα blocks του (2α) αλληλεπιδρούν στο μετατοπισμένο άθροισμα με εκείνων στο $(3b)$. Με (2α) να είναι μηδενικά συνεπάγεται ότι όλα τα $(3b)$ blocks είναι μηδενικά. Ομοίως με $(2b)$ blocks όλα μηδενικά, συνεπάγεται ότι όλα τα (3α) blocks είναι μηδενικά επίσης. Τελικά η block-συμμετρία των X και Y μπορεί να χρησιμοποιηθεί για ακόμη μια φορά για να δούμε ότι όλα τα (4α) και $(4b)$ blocks είναι μηδενικά. Σε αυτό το σημείο έχουμε ότι $X \boxplus Y = 0$, που συνεπάγεται

$$X \boxplus Y = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \tilde{X} & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \boxplus \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \tilde{Y} & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \tilde{X} + \tilde{Y} & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Εφόσον $\tilde{X} \boxplus \tilde{Y} = 0$, η υπόθεση επαγωγής συνεπάγεται $\tilde{X} = \tilde{Y} = 0$ και κατά συνέπεια $X = Y = 0$. □

Τα αποτελέσματα αυτής της παραγράφου συνοψίζονται στο ακόλουθο πόρισμα των λημμάτων 3.2.3 και 3.2.4.

Πόρισμα 3.2.5. Έστω Z ένας τυχαίος block $k \times (k+1)$ πίνακας με $n \times n$ blocks. Τότε υπάρχουν μοναδικοί block-συμμετρικοί block $k \times k$ πίνακες X και Y με $n \times n$ blocks όπως στην εξίσωση $X \boxplus Y = Z$.

3.3 Block-συμμετρικές δέσμες στον $\mathbb{L}_1(P)$

Είμαστε τώρα σε θέση να χαρακτηρίσουμε τον υπόχωρο $\mathbb{B}(P)$ όλων των block-συμμετρικών δεσμών στον $\mathbb{L}_1(P)$.

3.3.1 Ο υπόχωρος $\mathbb{B}(P)$

Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της παραγράφου 3.2.1 μπορούμε τώρα να χαρακτηρίσουμε τον υπόχωρο $\mathbb{B}(P) \subseteq \mathbb{L}_1(P)$. Αργότερα στη παράγραφο 5.3 θα δούμε ότι όλες αυτές οι δέσμες είναι πράγματι γραμμικοποιητές του P .

Θεώρημα 3.3.1 (Χαρακτηρισμός του $\mathbb{B}(P)$). Για κάθε πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda) = \sum_{i=0}^k \lambda^i A_i$ βαθμού k $\dim \mathbb{B}(P) = k$ και για κάθε διάνυσμα $u \in \mathbb{F}^k$ υπάρχει μια μοναδικά ορισμένη block-συμμετρική δέσμη στον $\mathbb{B}(P)$.

Απόδειξη.

Το θεώρημα θα αποδειχθεί εάν μπορέσουμε και δείξουμε ότι ο περιορισμός στον $\mathbb{B}(P)$ της απεικόνισης (2.1.9), ο οποίος είναι

$$\begin{aligned} \mathbb{B}(P) &\xrightarrow{\mathcal{M}} \mathcal{V}_P := \{ u \otimes P(\lambda) : u \in \mathbb{F}^k \} \\ L(\lambda) &\mapsto L(\lambda)(\Lambda \otimes I_n), \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

είναι ένας γραμμικός ισομορφισμός. Καταρχήν ξαναθυμόμαστε από το λήμμα 2.1.4 ότι για κάθε δέσμη $\lambda X + Y \in \mathbb{L}_1(P)$,

$$(\lambda X + Y)(\Lambda \otimes I_n) = u \otimes P(\lambda) \Leftrightarrow X \boxplus \rightarrow Y = u \otimes [A_k \ A_{k-1} \ \dots \ A_0]. \quad (3.3.2)$$

Έτσι $\lambda X + Y$ βρίσκεται στο $\ker \mathcal{M}$ εάν $X \boxplus \rightarrow Y = 0$. Όμως X και Y block-συμμετρικοί, έτσι από το λήμμα 3.2.4 βλέπουμε ότι $\ker \mathcal{M} = \{0\}$ και συνεπώς \mathcal{M} είναι 1-1.

Για να δούμε ότι \mathcal{M} είναι 1-1, έστω $u \otimes P(\lambda)$ με $u \in \mathbb{F}^k$ ένα τυχαίο στοιχείο του \mathcal{V}_P . Με $Z = u \otimes [A_k \ A_{k-1} \ \dots \ A_0]$, η κατασκευή του λήμματος 3.2.3 μας δείχνει ότι υπάρχουν block-συμμετρικοί X και Y τέτοιοι ώστε $X \boxplus \rightarrow Y = u \otimes [A_k \ A_{k-1} \ \dots \ A_0]$. Τότε από (3.3.2) έχουμε $\mathcal{M}(\lambda X + Y) = u \otimes P(\lambda)$ δείχνοντας ότι \mathcal{M} είναι 1-1. \square

3.3.2 Η κανονική βάση για $\mathbb{B}(P)$

Όπως στο λήμμα 2.1.4 ο στόχος μας είναι να κατασκευάσουμε για κάθε $1 \leq m \leq k$ μια block-συμμετρική δέσμη $\lambda X_m + Y_m$ τέτοια ώστε

$$X_m \boxplus \rightarrow Y_m = e_m \otimes [A_k \ A_{k-1} \ \dots \ A_0] \quad (3.3.3)$$

Αυτό μπορεί να γίνει σε δύο βήματα. Πρώτα δείχνουμε πως μπορούμε να επιτύχουμε τις αρχικές m block-στήλες στο επιθυμητό μετατοπισμένο-άθροισμα, δηλαδή πώς να πάρουμε $e_m \otimes [A_k \ \dots \ A_{k-m+1} \ 0 \ \dots \ 0]$.

Τότε οι τελικές $k - m + 1$ block-στήλες $e_m \otimes [0 \dots 0 A_{k-m} \dots A_1 A_0]$ παράγονται από διαφορετική δομή. Σε καθεμία από αυτές τις κατασκευές χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο συμβολισμό για κύριους block υποπίνακες. Ένας block $k \times k$ πίνακας X με σύνολο δεικτών $\alpha \subseteq \{1, 2, \dots, k\}$ θα συμβολίζεται με $X(\alpha)$.

Για να πάρουμε τις πρώτες m block-στήλες στο επιθυμητό μετατοπισμένο άθροισμα χρησιμοποιούμε τη δομή:

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{ij} \boxplus \tilde{Y}_{ij} &:= \begin{matrix} i & j \\ \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{H}_\ell^{(0)}(M) & \end{array} \right] \boxplus \rightarrow \left[\begin{array}{c|c} -\mathcal{H}_\ell^{(1)}(M) & \end{array} \right] \end{matrix} \\ &= \begin{matrix} i & j+1 \\ \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{H}_\ell^{(0)}(M) \boxplus (-\mathcal{H}_\ell^{(1)}(M)) & \end{array} \right] \end{matrix} \\ &= E_\mu \otimes M \quad (i \leq j). \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Για να κατασκευάσουμε block $k \times k$ πίνακες \hat{X}_m και \hat{Y}_m , ενσωματώνοντας μια φορά σε κάθε έναν από τους υποπίνακες $\hat{X}_m(\alpha_i)$ και $\hat{Y}_m(\alpha_i)$ για σύνολο δεικτών $\alpha_i = \{i, i + 1, \dots, m\}$, $i = 1 : m$, όπως στο ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{matrix} i & m \\ \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \Gamma & & & \\ & \Gamma & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Gamma \end{matrix} & \end{array} \right] \end{matrix} \quad (3.3.4)$$

Συσσωρεύοντας αυτούς τους πίνακες παίρνουμε:

$$\hat{X}_m = \left[\begin{array}{cccc|c} & & & & m \\ & & & & A_k \\ & & & \ddots & A_{k-1} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ A_k & A_{k-1} & \cdots & \cdots & A_{k-m+1} \\ \hline & & 0 & & 0 \end{array} \right]_{m, m}$$

$$\hat{Y}_m = - \left[\begin{array}{cccc|c} & & & & m \\ & & & A_k & 0 \\ & & \ddots & A_{k-1} & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ A_k & A_{k-1} & \cdots & A_{k-m+1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \hline & & 0 & & 0 \end{array} \right]_m,$$

με την ιδιότητα ότι $\hat{X}_m \boxplus \hat{Y}_m = e_m \otimes [A_k \dots A_{k-m+1} \ 0 \dots 0]$. Για να πάρουμε τις τελευταίες $k - m + 1$ στήλες χρησιμοποιούμε τη δομή:

$$\hat{X}_{ij} = \begin{matrix} & i & j \\ i & \boxed{-\mathcal{H}_\ell^{(-1)}(P)} & \\ j & & \end{matrix}, \quad \hat{Y}_{ij} = \begin{matrix} & i & j \\ i & \boxed{\mathcal{H}_\ell^{(0)}(P)} & \\ j & & \end{matrix}, \quad (3.2.6)$$

έχουμε ότι

$$\hat{X}_{ij} \boxplus \hat{Y}_{ij} = E_{i,j+1} \otimes P \quad (3.2.7)$$

$k - m + 1$ φορές για να κατασκευάσουμε $k \times k$ block πίνακες \tilde{X}_m και \tilde{Y}_m , ενσωματώνοντας μια φορά σε κάθε έναν από τους υποπίνακες $\tilde{X}_m(\beta_j)$ και $\tilde{Y}_m(\beta_j)$ για το σύνολο δεικτών $\beta_j = \{m, m+1, \dots, j\}$, $j = m : k$ όπως στο διάγραμμα (3.3.5).

$$\begin{matrix} & m & k \\ m & \boxed{\begin{matrix} \text{ } & \text{ } & \text{ } \\ \text{ } & \text{ } & \text{ } \\ \text{ } & \text{ } & \text{ } \end{matrix}} & \\ k & \boxed{\begin{matrix} \text{ } & \text{ } & \text{ } \\ \text{ } & \text{ } & \text{ } \\ \text{ } & \text{ } & \text{ } \end{matrix}} & \end{matrix} \quad (3.3.5)$$

Από εδώ προκύπτει:

$$\tilde{X}_m = - \left[\begin{array}{c|ccc} & m & & k \\ \hline 0 & & 0 & \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & 0 & A_{k-m-1} & & A_1 & A_0 \\ & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ & \vdots & A_1 & & \ddots & \ddots \\ & 0 & A_0 & & \ddots & \end{array} \right]_{k \times k},$$

$$\tilde{Y}_m = \left[\begin{array}{c|cccc} & \overset{m}{0} & & & \overset{k}{0} \\ \hline & & A_{k-m} & \cdots & \cdots & A_1 & A_0 \\ & & \vdots & & \ddots & & \\ 0 & & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & A_1 & & \ddots & & \\ & & A_0 & A_0 & & & \end{array} \right] \begin{matrix} m \\ k \end{matrix},$$

που ικανοποιούν την $\tilde{X}_m \boxplus \tilde{Y}_m = e_m \otimes [0 \dots A_{k-m} \dots A_1 A_0]$. Με $X_m := \tilde{X}_m + \tilde{Y}_m$ και $Y_m := \tilde{Y}_m + \tilde{Y}_m$, έχουμε $X_m \boxplus Y_m = e_m \otimes [A_k A_{k-1} \dots A_1 A_0]$, έτσι $\lambda X_m + Y_m$ είναι m -οστή δέσμη κανονικής βάσης για $\mathbb{B}(P)$.

Για να εκφράσουμε με έναν πιο συνοπτικό τρόπο την m -οστή δέσμη κανονικής βάσης, χρησιμοποιούμε τους ακόλουθους Block-Hankel πίνακες. Έστω με $\mathcal{L}_j(P(\lambda))$ συμβολίζουμε τον κάτω block-αντι-τριγωνικό, block-Hankel, block $j \times j$ πίνακα:

$$\mathcal{L}_j(P(\lambda)) := \begin{bmatrix} & & & A_k \\ & & \ddots & A_{k-1} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ A_k & A_{k-1} & \cdots & A_{k-j+1} \end{bmatrix} \quad (3.3.6)$$

αποτελούμενο από τους πρώτους j πίνακες συντελεστές $A_k, A_{k-1}, \dots, A_{k-j+1}$ του $P(\lambda)$. Ομοίως με $\mathcal{U}_j(P(\lambda))$ συμβολίζουμε τον άνω block-αντι-τριγωνικό, block-Hankel, block $j \times j$ πίνακα:

$$\mathcal{U}_j(P(\lambda)) := \begin{bmatrix} A_{j-1} & \cdots & A_1 & A_0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ A_1 & \ddots & & \\ A_0 & & & \end{bmatrix} \quad (3.3.7)$$

αποτελούμενο από τους τελευταίους πίνακες συντελεστές $A_{j-1}, A_{j-2}, \dots, A_1, A_0$ του $P(\lambda)$. Τότε οι block-συμμετρικοί πίνακες X_m και Y_m στη m -οστή δέσμη κανονικής βάσης ($m = 1 : k$), μπορούν να εκφραστούν ως ένα ευθύ άθροισμα των block-Hankel πινάκων:

$$X_m = X_m(P(\lambda)) = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_m(P(\lambda)) & 0 \\ 0 & -\mathcal{U}_{k-m}(P(\lambda)) \end{bmatrix}, \quad (3.3.8a)$$

$$Y_m = Y_m(P(\lambda)) = \begin{bmatrix} -\mathcal{L}_{m-1}(P(\lambda)) & 0 \\ 0 & -\mathcal{U}_{k-m+1}(P(\lambda)) \end{bmatrix}. \quad (3.3.8b)$$

Πίνακας 3.3.1: Δέσμες κανονικής βάσης στον $\mathbb{B}(Q)$ για τη τετραγωνική $Q(\lambda) = \lambda^2 A + \lambda B + C$.

v	$L(\lambda) \in \mathbb{B}(Q)$
$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\lambda \left[\begin{array}{c c} A & 0 \\ \hline 0 & -C \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c c} B & C \\ \hline C & 0 \end{array} \right]$
$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\lambda \left[\begin{array}{c c} 0 & A \\ \hline A & B \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c c} -A & 0 \\ \hline 0 & C \end{array} \right]$

Από την (3.3.8) γίνεται φανερό ότι οι πίνακες συντελεστών στις δέσμες κανονικής βάσης συνδέονται με την

$$Y_m(P(\lambda)) = -X_{m-1}(P(\lambda)), \quad m = 1 : k \quad (3.3.9)$$

Έτσι έχουμε τον ακόλουθο τύπο για τις δέσμες κανονικής βάσης στον $\mathbb{B}(P)$.

Θεώρημα 3.3.2 (Κανονική βάση στον $\mathbb{B}(P)$).

Έστω $P(\lambda) = \sum_{i=0}^k \lambda^i A_i$ ένας πολυωνυμικός πίνακας βαθμού k , τότε για $m = 1 : k$ η block-συμμετρική δέσμη στον $\mathbb{B}(P)$ με ansatz διάνυσμα e_m , είναι $\lambda X_m - X_{m-1}$, όπου X_m δίνεται από (3.3.8a).

Οι δέσμες κανονικής βάσης στον $\mathbb{B}(P)$ για γενικούς πολυωνυμικούς πίνακες βαθμού 2 και 3 υπάρχουν στους πίνακες 3.3.1 και 3.3.2. Μια άμεση συνέπεια για την περίπτωση των τετραγωνικών πολυωνύμων $Q(\lambda) = \lambda^2 A + \lambda B + C$ είναι η ακόλουθη περιγραφή όλων των block-συμμετρικών δεσμών στον $\mathbb{L}_1(Q)$.

$$\mathbb{B}(Q) = \left\{ L(\lambda) = \lambda \begin{bmatrix} v_1 A & v_2 A \\ v_2 A & v_2 B - v_1 C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 B - v_2 A & v_1 C \\ v_1 C & v_2 C \end{bmatrix} : v \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

Πίνακας 3.3.2: Δέσμες κανονικής βάσης στον $\mathbb{B}(P)$ για κυβικό $P(\lambda) = \lambda^3 A + \lambda^2 B + \lambda C + D$

v	$L(\lambda) \in \mathbb{B}(Q)$
$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\lambda \left[\begin{array}{c cc} A & 0 & 0 \\ \hline 0 & -C & -D \\ 0 & -D & 0 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c cc} B & C & D \\ \hline C & D & 0 \\ D & 0 & 0 \end{array} \right]$
$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\lambda \left[\begin{array}{c cc} 0 & A & 0 \\ \hline A & B & 0 \\ 0 & 0 & -D \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c cc} -A & 0 & 0 \\ \hline 0 & C & D \\ 0 & D & D \end{array} \right]$
$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\lambda \left[\begin{array}{c cc} 0 & 0 & A \\ \hline 0 & A & B \\ A & B & C \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c cc} 0 & -A & 0 \\ \hline -A & -B & 0 \\ 0 & 0 & D \end{array} \right]$

3.4 Δέσμες διπλών ansatz για γενικό P

Με έναν ολοκληρωμένο χαρακτηρισμό του $\mathbb{B}(P)$, μπορούμε τώρα να αναπτύξουμε τον χώρο $\mathbb{DL}(P)$ των διπλών ansatz δεσμών. Εξ' ορισμού μια δέσμη $L(\lambda) \in \mathbb{DL}(P)$ ικανοποιεί ταυτόχρονα:

$$\text{Ένα δεξιό ansatz} \quad L(\lambda) \cdot (\Lambda \otimes I) = v \otimes P(\lambda) \quad (3.4.1)$$

$$\text{και ένα αριστερό ansatz} \quad (\Lambda^T \otimes I) \cdot L(\lambda) = w^T \otimes P(\lambda) \quad (3.4.2)$$

για κάποια διανύσματα v και $w \in \mathbb{F}^k$. Από το θεώρημα 3.1.5, 3.3.1 και τον περιορισμό $\mathbb{B}(P) \subseteq \mathbb{DL}(P)$ της πρότασης 3.2.2 γνωρίζουμε ότι κάθε ζεύγος (v, w) με $w = v$ επιτυγχάνεται από μια block-συμμετρική δέσμη στον $\mathbb{DL}(P)$. Σε αυτή την παράγραφο θα δείξουμε ότι κάθε δέσμη στον $\mathbb{DL}(P)$ είναι block-συμμετρική, δηλαδή ο περιορισμός $\mathbb{B}(P) \subseteq \mathbb{DL}(P)$ είναι στη πραγματικότητα μια ισότητα. Ξεκινάμε θεωρώντας την ειδική περίπτωση των $\mathbb{DL}(P)$ -δεσμών με δεξιό ansatz διάνυσμα $v = 0$, δείχνοντας ότι $w = 0$ και ότι η δέσμη είναι μοναδική.

Λήμμα 3.4.1. Υποθέτουμε ότι $L(x) = \lambda X + Y \in \mathbb{DL}(P)$ έχει δεξιό ansatz διάνυσμα v και αριστερό ansatz διάνυσμα w . Τότε $v = 0$ συνεπάγεται ότι w μπορεί να είναι επίσης 0 και έτσι $X = Y = 0$.

Απόδειξη.

Πρώτα θα δείξουμε ότι η ℓ -στη block-στήλη του X και η ℓ -στη συντεταγμένη του w είναι μηδέν για $\ell = 1 : k$ με επαγωγή στο ℓ .

Υποθέτουμε ότι $\ell = 1$. Από το λήμμα 2.1.4 γνωρίζουμε ότι $X \boxplus \rightarrow Y = v \otimes [A_k \ A_{k-1} \ \dots \ A_0]$. Αφού $v = 0$ έχουμε $X \boxplus \rightarrow Y = 0$ και συνεπώς η πρώτη block-στήλη του X είναι μηδέν. Αλλά από το θεώρημα 3.1.5, η $L(\lambda)$ ανήκει στον $\mathbb{L}_2(P)$ με αριστερό ansatz διάνυσμα w , που συνεπάγεται ότι $L(\lambda)^B \in \mathbb{L}_1(P)$ με δεξιό ansatz διάνυσμα w , το οποίο μπορεί να γραφτεί με όρους μετατοπισμένου αθροίσματος σαν

$$X^B \boxplus \rightarrow Y^B = w \otimes [A_k \ A_{k-1} \ \dots \ A_0]. \quad (3.4.3)$$

Το (1-1)-block του δεξιού μέλους της (3.4.3) είναι $w_1 A_k$, ενώ στο αριστερό μέρος το (1-1)-block του $X^B \boxplus \rightarrow Y^B$ είναι το ίδιο όπως το (1-1)-block του X . Συνεπώς $w_1 A_k = 0$. Αλλά ο κύριος συντελεστής A_k του $P(\lambda)$ είναι μη-μηδενικός από υπόθεση, άρα $w_1 = 0$.

Τώρα υποθέτουμε ότι η ℓ -στη block-στήλη του X είναι μηδέν και ότι $w_\ell = 0$. Τότε από (3.4.3) η ℓ -στη block-γραμμή του $X^B \boxplus \rightarrow Y^B$ είναι μηδέν, η οποία μαζί με το γεγονός ότι η ℓ -στη block-γραμμή του X^B είναι μηδέν συνεπάγεται ότι η ℓ -στη block-γραμμή του Y^B είναι μηδέν ή ισοδύναμα η ℓ -στη block-στήλη του Y είναι μηδέν. Συνδυάζοντας αυτό με $X \boxplus \rightarrow Y = 0$ συνεπάγεται ότι η $(\ell + 1)$ -στη block-στήλη του X είναι μηδέν. Τώρα εξισώνοντας $(\ell + 1, 1)$ -blocks και των δύο μελών της (3.4.3) προκύπτει $w_{\ell+1} A_k = 0$ και συνεπώς $w_{\ell+1} = 0$. Αυτό ολοκληρώνει την επαγωγή και αποδεικνύει ότι $X = 0$ και $w = 0$. Τελικά $X = 0$ και $X \boxplus \rightarrow Y = 0$ που συνεπάγεται ότι $Y = 0$. \square

Τώρα μπορούμε να δώσουμε μια ακριβέστερη περιγραφή όλων των δεξιών και αριστερών διανυσματικών ζευγαριών (u, w) , τα οποία μπορούν να επιτευχθούν από κάποια δέσμη $\mathbb{DL}(P)$. Συνεπώς ο $\mathbb{DL}(P)$ χαρακτηρίζεται σαν ταυτοτικός στον $\mathbb{B}(P)$.

Θεώρημα 3.4.2 (Χαρακτηρισμός του $\mathbb{DL}(P)$).

Για έναν πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda) = \sum_{i=0}^k \lambda^i A_i$ βαθμού k , υποθέτουμε ότι $L(\lambda) \in \mathbb{DL}(P)$ με δεξιό ansatz διάνυσμα u και αριστερό ansatz w . Τότε $u = w$ και $L(\lambda) \in \mathbb{B}(P)$. Έτσι $\mathbb{DL}(P) = \mathbb{B}(P)$, $\dim \mathbb{DL}(P) = k$ και για κάθε $u \in \mathbb{F}^k$ υπάρχει μια μοναδικά ορισμένη δέσμη στον $\mathbb{DL}(P)$.

Απόδειξη.

Έστω $L(\lambda) \in \mathbb{B}(P)$ μια μοναδική block-συμμετρική δέσμη από το θεώρημα 3.3.1 με u ως το δεξιό ansatz διάνυσμα του.

Από το θεώρημα 3.1.5 γνωρίζουμε ότι $L(\lambda)^B = L(\lambda)$ ανήκει στον $\mathbb{L}_2(P)$ με αριστερό ansatz διάνυσμα u και έτσι $L(\lambda) \in \mathbb{DL}(P)$ με u ως αριστερό και δεξιό ansatz διάνυσμα ταυτόχρονα. Έτσι η δέσμη $\tilde{L}(\lambda) := L(\lambda) - L(\lambda)$ ανήκει στον $\mathbb{DL}(P)$ με δεξιό ansatz διάνυσμα 0 και αριστερό ansatz διάνυσμα $w - u$. Το λήμμα 3.4.1 τότε συνεπάγεται ότι $u = w$ και $\tilde{L}(\lambda) = \lambda \cdot 0 + 0$. Έτσι $L(\lambda) \equiv L(\lambda) \in \mathbb{B}(P)$ και συνεπώς $\mathbb{DL}(P) \subseteq \mathbb{B}(P)$. Ενόψει του πορίσματος 3.2.2 μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\mathbb{DL}(P) = \mathbb{B}(P)$. Το υπόλοιπο του θεωρήματος προκύπτει άμεσα από τον χαρακτηρισμό του $\mathbb{B}(P)$ στο θεώρημα 3.3.1. \square

3.5 Κάποιες άλλες κατασκευές block-συμμετρικών γραμμικοποιητών

Κάποιες μέθοδοι κατασκευής block-συμμετρικών γραμμικοποιητών πολυωνυμικών πινάκων αναφέρθηκαν προηγουμένως. Ο Αντωνίου και ο Βολογιαννίδης πρόσφατα ανακάλυψαν νέους γραμμικοποιητές για γενικούς πολυωνυμικούς πίνακες P , γενικεύοντας τα αποτελέσματα του Fiedler πάνω στη παραγοντοποίηση του συνοδεύοντα πίνακα ενός βαθμωτού πολυωνύμου και κάποιων μεταθέσεων του. Από αυτή τη πεπερασμένη οικογένεια των $\frac{1}{6}(2 + \deg P)!$ δεσμών (όλες εκ των οποίων είναι γραμμικοποιητές) εντόπισαν μια διακεκριμένη δέσμη η οποία είναι ερμιτιανή όταν P ερμιτιανός. Όμως αυτό το παράδειγμα έχει δομή ακόμη και για γενικό P . Πράγματι παρουσιάζει ένα απλό παράδειγμα ενός block-συμμετρικού γραμμικοποιητή του $P(\lambda)$ ο οποίος δεν ανήκει στον $\mathbb{B}(P)$. Στη περίπτωση του κυβικού πολυωνύμου $P(\lambda) = \lambda^3 A + \lambda^2 B + \lambda C + D$ η δέσμη είναι:

$$L(\lambda) = \lambda \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & I & C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & -I & 0 \\ -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D \end{bmatrix} \quad (3.5.1)$$

Χρησιμοποιώντας το μετατοπισμένο κατά στήλες άθροισμα βλέπουμε ότι $L(\lambda)$ δεν ανήκει στον $\mathbb{L}_1(P)$ και κατά συνέπεια ούτε στον $\mathbb{B}(P)$.

Σε αντίθεση με την προσθετική δομή που χρησιμοποιείται στην εργασία, υπάρχει μια τρίτη πολλαπλασιαστική μέθοδος για τη κατασκευή block-συμμετρικών γραμμικοποιητών, η οποία περιγράφηκε από τον Lancaster. Ξεκινάμε με τον συνοδεύοντα πίνακα του $p(\lambda)$

$$C = \begin{bmatrix} -\alpha_k^{-1} & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{k-1} & \alpha_{k-2} & \cdots & \alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.5.2)$$

Με αντίστοιχη δέσμη $\lambda I - C$. Στρατηγική του Lancaster είναι η αναζήτηση ενός αντιστρέψιμου συμμετρικού πίνακα B τέτοιου ώστε BC συμμετρικό, έτσι προκύπτει ένας συμμετρικός γραμμικοποιητής $B(\lambda I - C) = \lambda B - BC$ για $P(\lambda)$. Ο Lancaster μας δείχνει επιπλέον ότι ο B και BC είναι συμμετρικοί, το οποίο συνεπάγεται ότι BC^j συμμετρικός για όλα τα $j \geq 1$, ενώ για $j \geq 2$ είναι γραμμικοποιητής του $p(\lambda)$ εάν $\alpha_0 \neq 0$. Αυτή η στρατηγική εφαρμόζεται και στην ειδική περίπτωση του συμμετρικού Hankel πίνακα

$$B = \begin{bmatrix} & & & \alpha_k \\ & & \ddots & \alpha_{k-1} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ \alpha_k & \alpha_{k-1} & \cdots & \alpha_1 \end{bmatrix}, \quad (3.5.3)$$

ο οποίος είναι αντιστρέψιμος όταν $\alpha_k \neq 0$. Παρατηρούμε ότι ο B δίνει μια ακολουθία συμμετρικών δεσμών

$$\lambda BC^{j-1} - BC^j, \quad j = 1, \infty \quad (3.5.4)$$

με ιδιαίτερα απλή μορφή για $1 \leq j \leq k$ και με πιο πολύπλοκη για $j > k$.

Εύκολα βλέπουμε ότι αυτές οι συμμετρικές δέσμες που κατασκευάστηκαν για βαθμωτά πολυώνυμα $p(\lambda)$ μπορούν άμεσα να επεκταθούν σε block-συμμετρικές δέσμες για γενικούς πολυωνυμικούς πίνακες $P(\lambda)$. Αυτό γίνεται αντικαθιστώντας τους βαθμωτούς συντελεστές του $p(\lambda)$ στο B, BC, BC^2, \dots με τους πίνακες συντελεστών του $P(\lambda)$.

Εφόσον η κατασκευή δεσμών του Lancaster είναι τόσο διαφορετική από τη δική μας, δεν υπάρχει εκ των προτέρων λόγος να περιμένουμε κάποια σύνδεση μεταξύ των δεσμών του και των δεσμών στον $\mathbb{DL}(P)$. Το ακόλουθο αποτέλεσμα δείχνει ότι οι πρώτες k δέσμες στην ακολουθία (3.5.4) παράγουν τον $\mathbb{DL}(P)$.

Θεώρημα 3.5.1. Έστω $P(\lambda)$ ένας πολυωνυμικός πίνακας βαθμού k . Τότε για $m = 1 : k$ η δέσμη $\lambda BC^{k-m} - BC^{k-m+1}$ από την ακολουθία (3.5.4) με B και C ορισμένα από τα ανάλογα block πίνακα των (3.5.2) και (3.5.3), είναι ταυτοτική με την $\lambda X_m - X_{m-1}$, η m -οστή δέσμη κανονικής βάσης για $\mathbb{DL}(P)$.

Απόδειξη.

Έχουμε να δείξουμε ότι $X_m = BC^{k-m}$ για $m = 1 : k$, όπου X_m δίνεται από την (3.3.8). Για σημειωματική απλότητα θα εκτελέσουμε την απόδειξη για ένα βαθμωτό πολυωνυμικό πίνακα.

Η ίδια απόδειξη εφαρμόζεται και σε έναν πολυωνυμικό πίνακα με κάποιες μικρές αλλαγές στον συμβολισμό. Η $m = k$ περίπτωση $X_k(p(\lambda)) = \mathcal{L}_k(p(\lambda)) = B$, είναι άμεση από τις εξισώσεις (3.3.6), (3.3.8) και (3.5.3). Τα υπόλοιπα ακολουθούν επαγωγικά (προς τα κάτω) από τη σχέση $X_{m-1}(p(\lambda)) = X_m(p(\lambda)) \cdot C$,

Για να δούμε ότι $X_m C = X_{m-1}$ ή ισοδύναμα ότι

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_m(p(\lambda)) & 0 \\ 0 & -\mathcal{U}_{k-m}(p(\lambda)) \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{m-1}(p(\lambda)) & 0 \\ 0 & -\mathcal{U}_{k-m+1}(p(\lambda)) \end{bmatrix}$$

διατηρείται για $m = 1 : k$, θα ήταν βολικό να ξαναγράψαμε τον συνοδεύοντα πίνακα (3.5.2) στη μορφή

$$\begin{bmatrix} \alpha_{k-1} & \alpha_{k-2} & \cdots & \alpha_0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = N_k^T - \alpha_k^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_{k-1} & \alpha_{k-2} & \cdots & \alpha_0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = N_k^T - \alpha_k^{-1} e_1 [\alpha_{k-1} \quad \alpha_{k-2} \quad \cdots \quad \alpha_0],$$

όπου N_k ορίζεται στη (3.2.2).

$$\begin{aligned} \text{Τότε } X_m(p(\lambda))C &= X_m(p(\lambda))N_k^T - \alpha_k^{-1} X_m(p(\lambda))e_1 [\alpha_{k-1} \quad \alpha_{k-2} \quad \cdots \quad \alpha_0] \\ &= \begin{bmatrix} \mathcal{L}_m(p(\lambda)) & 0 \\ 0 & -\mathcal{U}_{k-m}(p(\lambda)) \end{bmatrix} N_k^T - e_m [\alpha_{k-1} \quad \alpha_{k-2} \quad \cdots \quad \alpha_0]. \end{aligned}$$

Στον πρώτο όρο ο πολλαπλασιασμός από δεξιά με N_k^T έχει σαν αποτέλεσμα τον μετατοπισμό των στηλών κατά μια στήλη προς τα αριστερά (χάνοντας τη πρώτη στήλη), έτσι δίνοντας

$$X_m(p(\lambda))C =$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{m-1}(p(\lambda)) & 0 & 0 \\ \alpha_{k-1} \cdots \alpha_{k-m+1} & 0 & 0 \\ 0 & -\mathcal{U}_{k-m}(p(\lambda)) & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{k-1} \cdots \alpha_{k-m+1} & \alpha_{k-1} \cdots \alpha_1 & \alpha_0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{m-1}(p(\lambda)) & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_{k-1} \cdots -\alpha_1 & -\alpha_0 \\ 0 & -\mathcal{U}_{k-m}(p(\lambda)) & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{m-1}(p(\lambda)) & 0 \\ 0 & -\mathcal{U}_{k-m+1}(p(\lambda)) \end{bmatrix} = X_{m-1}(p(\lambda)). \end{aligned}$$

αυτό ολοκληρώνει το επαγωγικό βήμα της απόδειξης. □

Κεφάλαιο 4

Η γενίκευση των γραμμικοποιητών στον $\mathbb{DL}(P)$.

Σε αυτό το κεφάλαιο ξαναθυμόμαστε την συμβολική “συνθήκη γραμμικοποιητή” για την οποία μιλήσαμε στη παράγραφο 2.2.2. Όπως παρουσιάστηκε με το παράδειγμα 2.2.6 η ουσιαστική σημασία αυτής της συνθήκης κάποιες φορές είναι πιο δυσνόητη. Ωστόσο θα δούμε ότι για δέσμες στον $\mathbb{DL}(P)$ αυτή η συνθήκη μπορεί να εκφραστεί με τρόπο που την κάνει πιο ξεκάθαρη. Πράγματι μια από τις σημαντικότερες ιδιότητες του χώρου $\mathbb{DL}(P)$ είναι, ότι η συνθήκη γραμμικοποιητή για κάθε $\mathbb{DL}(P)$ -δέσμη μπορεί να συνδεθεί με το ansatz διάνυσμα της u , όπως θα δούμε παρακάτω. Μια σημαντική συνέπεια αυτής της σύνδεσης είναι ότι σχεδόν κάθε δέσμη στον $\mathbb{DL}(P)$ είναι γραμμικοποιητής του $P(\lambda) = \sum_{i=0}^k \lambda^i A_i$.

4.1 Παραδείγματα

Ας ξεκινήσουμε θεωρώντας κάποια συγκεκριμένα παραδείγματα. Οι πίνακες 4.1.1 και 4.1.2 παρουσιάζουν μια δειγματοληψία διπλών ansatz δεσμών για γενικούς τετραγωνικούς και κυβικούς πολυωνυμικούς πίνακες, μαζί με τις αντίστοιχες συνθήκες γραμμικοποιητών. Κοιτάζοντας στις δέσμες κανονικής βάσης στους πίνακες, δεν είναι εύκολο να διακρίνουμε ένα ξεκάθαρο μοντέλο στις συνθήκες γραμμικοποιητών. Ωστόσο τα τελευταία δύο στοιχεία του πίνακα 4.1.1 παρουσιάζουν ένα σημαντικό στοιχείο. Για τετραγωνικά πολυώνυμα η συνθήκη γραμμικοποιητή μπορεί να ερμηνευτεί εκτός από μια συγκεκριμένη τιμή $\lambda = -\beta/\alpha$ σαν ιδιοτιμή του P .

Πιο συγκεκριμένα η $\mathbb{DL}(P)$ δέσμη με ansatz διάνυσμα $u = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ είναι γραμμικοποιητής του P , αν και μόνο αν $\lambda = -\beta/\alpha$ δεν είναι ιδιοτιμή του P . Αυτή είναι μια ξεκάθαρη ένδειξη μιας ισχυρής σύνδεσης μεταξύ της συνθήκης γραμμικοποιητή της $\mathbb{DL}(P)$ -δέσμης και του ansatz διανύσματος της.

Ας εξετάσουμε τώρα το τέταρτο παράδειγμα πιο προσεκτικά. Για $L(\lambda) \in \mathbb{DL}(P)$ με ansatz διάνυσμα $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, μπορεί κάποιος να βρεί εύκολα χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της παραγράφου 2.2.2 ότι η (4.1.1) είναι η συνθήκη γραμμικοποιητή για $L(\lambda)$.

$$\det \begin{bmatrix} A+C & B+D \\ B+D & A+C \end{bmatrix} \neq 0 \quad (4.1.1)$$

Η ταυτότητα:

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A+C & B+D \\ B+D & A+C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A+B-C+D & A+C \\ 0 & A+B+C+D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(-1) & A+C \\ 0 & P(+1) \end{bmatrix}$$

μας δείχνει ότι η συνθήκη (4.1.1) είναι ισοδύναμη με το να πούμε ότι ούτε το -1 ούτε το $+1$ δεν αποτελούν ιδιοτιμή του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$. Έτσι σε αυτό το παράδειγμα μπορούμε ξανά να ερμηνεύσουμε τη συνθήκη γραμμικοποιητή από την 2.2.2 σαν μια συνθήκη “εξαίρεσης ιδιοτιμής”.

Παρατηρούμε ότι αν ερμηνεύσουμε τις συνιστώσες του u σαν συντελεστές του βαθμωτού πολυωνυμικού πίνακα, τότε παίρνουμε $x^2 - 1$, του οποίου οι ρίζες είναι οι ιδιοτιμές που πρέπει να αποκλειστούν για να μας εξασφαλίσουν ότι ο $L(\lambda)$ είναι γραμμικοποιητής του $P(\lambda)$. Ομοίως στη περίπτωση του τετραγωνικού πολυωνύμου η αποκλείουσα τιμή $\lambda = -\beta/\alpha$ είναι η ρίζα του βαθμωτού πολυωνύμου $\alpha x + \beta$. Ένας από τους σκοπούς αυτού του κεφαλαίου είναι να δείξουμε ότι αυτά δεν απλές συμπτώσεις αλλά παραδείγματα ενός γενικού φαινομένου το οποίο περιγράφεται από το “θεώρημα εξαίρεσης ιδιοτιμής”.

Πίνακας 4.1.1: Κάποιες δέσμες στον $\mathbb{DL}(P)$ για γενικό τετραγωνικό $P(\lambda) = \lambda^2 A + \lambda B + C$. Η συνθήκη γραμμικοποιητή βρέθηκε με τη μέθοδο της παραγράφου 2.2.2

u	$L(\lambda) \in \mathbb{DL}(P)$ για δοσμένο u	Συνθήκη γραμμικοποιητή
$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\lambda \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & C \\ C & 0 \end{bmatrix}$	$\det(C) \neq 0$
$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\lambda \begin{bmatrix} 0 & A \\ A & B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -A & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$	$\det(A) \neq 0$
$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\lambda \begin{bmatrix} A & A \\ A & B-C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B-A & C \\ C & C \end{bmatrix}$	$\det(A - B + C) = \det(P(-1)) \neq 0$
$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$	$\lambda \begin{bmatrix} \alpha A & \beta A \\ \beta A & \beta B - \alpha C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha B - \beta A & \alpha C \\ \alpha C & \beta C \end{bmatrix}$	$\det(\beta^2 A - \alpha \beta B + \alpha^2 C) \neq 0$ Ισοδύναμα, $\det[P(-\beta/\alpha)] \neq 0$.

Πίνακας 4.1.2: Κάποιες δέσμες στον $\mathbb{DL}(P)$ για γενικό κυβικό $P(\lambda) = \lambda^3 A + \lambda^2 B + \lambda C + D$. Η συνθήκη γραμμικοποιητή βρέθηκε με τη μέθοδο της παραγράφου 2.2.2

u	$L(\lambda) \in \mathbb{DL}(P)$ για δοσμένο u	Συνθήκη γραμμικοποιητή
$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\lambda \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & -C & -D \\ 0 & -D & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & C & D \\ C & D & 0 \\ D & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\det \neq 0$
$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\lambda \begin{bmatrix} 0 & A & 0 \\ A & B & 0 \\ 0 & 0 & -D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -A & 0 & 0 \\ 0 & C & D \\ 0 & D & 0 \end{bmatrix}$	$\det A \cdot \det B \neq 0$
$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 & A \\ 0 & A & B \\ A & B & C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -A & 0 \\ -A & -B & 0 \\ 0 & 0 & D \end{bmatrix}$	$\det A \neq 0$
$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\lambda \begin{bmatrix} A & 0 & -A \\ 0 & -A-C & -B-D \\ -A & -B-D & -C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & A+C & D \\ A+C & B+D & 0 \\ D & 0 & -D \end{bmatrix}$	$\det \begin{bmatrix} A+C & B+D \\ B+D & A+C \end{bmatrix} \neq 0$
$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\lambda \begin{bmatrix} A & A & A \\ A & A+B-C & B-D \\ A & B-D & C-D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B-A & C-A & D \\ C-A & C+D-B & D \\ D & D & D \end{bmatrix}$	$\det \begin{bmatrix} C-B & A-B+D \\ A-B+D & A-C+D \end{bmatrix} \neq 0$

4.2 Ορίζουσα των $\mathbb{DL}(P)$ -δεσμών

Αυτό που χρειαζόμαστε για να αποδείξουμε το “θεώρημα εξαίρεσης ιδιοτιμής” είναι ένας συγκεκριμένος τύπος για την ορίζουσα της δέσμης $L(\lambda)$ στον $\mathbb{DL}(P)$. Για βρούμε αυτόν τον τύπο καταρχήν εισάγουμε κάποιους συμβολισμούς. Όπως πριν $P(\lambda) = \sum_{i=0}^k \lambda^i A_i$ ένας $n \times n$ πολυωνυμικός πίνακας με μη-μηδενικούς κύριους συντελεστές A_k . Η δέσμη $L(\lambda) \in \mathbb{DL}(P)$ έχει ansatz διάνυσμα $u = [u_1, u_2, \dots, u_k]^T$ με ένα αντίστοιχο βαθμωτό πολυώνυμο όπως ορίζεται παρακάτω.

Ορισμός 4.2.1 (ν-πολυωνυμικός πίνακας).

Σε ένα διάνυσμα $u = [u_1, u_2, \dots, u_k]^T \in \mathbb{F}^k$ αντιστοιχίζουμε τον βαθμωτό πολυωνυμικό πίνακα $p(x, u) = u_1 x^{k-1} + u_2 x^{k-2} + \dots + u_{k-1} x + u_k$, γνωστό και σαν “ν-πολυωνυμικό πίνακα” του διανύσματος u . Δεχόμαστε την σύμβαση ότι $p(x, u)$ έχει μια ρίζα στο ∞ όταν $u_1 = 0$.

Επίσης θα εισάγουμε και τον όρο “μετατοπίσεις Horner” (Horner shifts) του πολυωνυμικού πίνακα.

Ορισμός 4.2.2 (μετατοπίσεις Horner).

Για κάθε πολυωνυμικό πίνακα $p(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ και $0 \leq \ell \leq n$, η μετατόπιση Horner βαθμού ℓ του $p(x)$ ορίζεται ως $p_\ell(x) := \alpha_n x^\ell + \alpha_{n-1} x^{\ell-1} + \dots + \alpha_{n-\ell+1} x + \alpha_{n-\ell}$.

Παρατήρηση 4.2.3. Οι πολυωνυμικοί πίνακες του ορισμού 4.2.2 ικανοποιούν την επαναληπτική σχέση:

$$p_0(x) = \alpha_n,$$

$$p_{\ell+1} = x p_\ell(x) + \alpha_{n-\ell-1} \text{ για } 0 \leq \ell \leq n-1,$$

$$p_n(x) = p(x),$$

και είναι εκείνοι οι πίνακες που εμφανίζονται στη μέθοδο Horner για τον υπολογισμό του πολυωνυμικού πίνακα $p(x)$.

Είδαμε στο θεώρημα 3.4.2 ότι $L(\lambda) \in \mathbb{DL}(P)$ είναι μοναδικά ορισμένο από το διάνυσμα u και τον πίνακα P , έτσι μπορεί κάποιος να ορίσει τις στήλες του $L(\lambda)$ με βάση αυτά τα δεδομένα. Αυτό θαδειχθεί στο επόμενο λήμμα. Θα κάνουμε εκτενή χρήση του κανονικού $k \times k$ unimodular Jordan block N από (1.1.4) στον πίνακα $N \otimes I$, που χρησιμοποιείται εδώ ως μετατοπισμένος κατά block τελεστής (block-shift operator).

Λήμμα 4.2.4 (Δομή block-στήλης των δεσμών στον $\mathbb{DL}(P)$).

Υποθέτουμε ότι $L(\lambda) = \lambda X + Y$ ανήκει στον $\mathbb{DL}(P)$ με ansatz διάνυσμα u . Διαμέριση X και Y σε block-στήλες

$$X = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_k] \text{ και } Y = [Y_1 \ \dots \ Y_{k-1} \ Y_k],$$

όπου $X_\ell, Y_\ell \in \mathbb{F}^{k \times n}$, $\ell = 1, \dots, k$. Τότε με $Y_0 := 0$, οι block στήλες Y_ℓ ικανοποιούν την:

$$Y_\ell = (N \otimes I)(Y_{\ell-1} - u \otimes A_{k-\ell+1}) + u_\ell \begin{bmatrix} A_{k-1} \\ \vdots \\ A_0 \end{bmatrix} \quad 1 \leq \ell \leq k-1, \quad (4.2.1)$$

$$Y_k = u \otimes A_0, \quad (4.2.2)$$

Οι block-στήλες του X ορίζονται από τη σχέση

$$X_\ell = -Y_{\ell-1} + u \otimes A_{k-\ell+1} \text{ για } 1 \leq \ell \leq k, \quad (4.2.3)$$

και η δέσμη $L(\lambda)$ έχει την ακόλουθη περιγραφή

$$L(\lambda) = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} Y_1 & Y_2 - \lambda Y_1 & \dots & Y_{k-1} - \lambda Y_{k-2} & u \otimes A_2 - \lambda Y_{k-1} \\ + \lambda u \otimes A_k & + \lambda u \otimes A_{k-1} & \dots & + \lambda u \otimes A_2 & + \lambda u \otimes A_1 \end{array} \right]. \quad (4.2.4)$$

Τα ανώτατα ($n \times n$) blocks των block-στηλών Y_ℓ θα δίνονται από την:

$$(e_1^T \otimes I) Y_\ell = u_1 A_{k-\ell} - u_{\ell+1} A_k \text{ για } 1 \leq \ell \leq k-1. \quad (4.2.5)$$

Απόδειξη.

Εφόσον $L(\lambda) \in \mathbb{L}_1(P)$, γνωρίζουμε από το λήμμα 2.1.4 ότι

$$X \boxplus \rightarrow Y = u \otimes [A_k \ A_{k-1} \ \dots \ A_0]. \quad (4.2.6)$$

Από τον ορισμό του $\boxplus \rightarrow$ συνεπάγεται ότι $X_1 = u \otimes A_k$, $Y_k = u \otimes A_0$ και

$$X_\ell + Y_{\ell-1} = u \otimes A_{k-\ell+1} \text{ για } 2 \leq \ell \leq k, \quad (4.2.7)$$

Συνδυάζοντας αυτό με τη παραδοχή ότι $Y_0 := 0$, έχουμε (4.2.2) και (4.2.3), από τις οποίες η (4.2.4) προκύπτει άμεσα.

Εφόσον $L(\lambda) \in \mathbb{L}_2(P)$, γνωρίζουμε από το λήμμα 2.1.11 ότι

$$X \boxdownarrow Y = u^T \otimes \begin{bmatrix} A_k \\ \vdots \\ A_0 \end{bmatrix}. \quad (4.2.8)$$

Για να εξάγουμε από την (4.2.8) μια σχέση συμβατή με τη (4.2.3), χρησιμοποιούμε τον block-shift τελεστή $N \otimes I$. Παρατηρούμε ότι ο πολλαπλασιασμός από αριστερά μιας block-στήλης X_ℓ με $N \otimes I$ προκαλεί μετατοπισμό των blocks του X_ℓ προς τα πάνω κατά ένα

(χάνοντας το πιο πάνω block). Τώρα εάν αποκόψουμε την πάνω block-γραμμή της (4.2.8), τότε εξ ορισμού του \boxplus βλέπουμε ότι

$$(N \otimes I) X_\ell + Y_\ell = v_\ell \begin{bmatrix} A_{k-1} \\ \vdots \\ A_0 \end{bmatrix} \quad \text{για } 1 \leq \ell \leq k. \quad (4.2.9)$$

Λύνοντας την (4.2.9) για Y_ℓ και αντικαθιστώντας στην (4.2.3) για X_ℓ συνεπάγεται η (4.2.1).

Τελικά για να αποδείξουμε την (4.2.5) πρώτα ξαναγράφουμε την (4.2.7) στη μορφή

$$Y_\ell = (v \otimes A_{k-\ell}) - X_{\ell+1} \quad \text{για } 1 \leq \ell \leq k-1.$$

Έπειτα απαλλασσόμαστε από το πιο πάνω (topmost) block πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με $e_1^T \otimes I$:

$$(e_1^T \otimes I) Y_\ell = (e_1^T v \otimes A_{k-\ell}) - (e_1^T \otimes I) X_{\ell+1} = v_1 A_{k-\ell} - (e_1^T \otimes I) X_{\ell+1}.$$

Όμως η (4.2.8) συνεπάγεται ότι η πρώτη γραμμή του X πρέπει να είναι $v^T \otimes A_k$. Έτσι $(e_1^T \otimes I) X_{\ell+1} = v_{\ell+1} A_k$ και συνεπώς $(e_1^T \otimes I) Y_\ell = v_1 A_{k-\ell} - v_{\ell+1} A_k$. \square

Χρησιμοποιώντας την (4.2.1) μπορούμε να εξάγουμε έναν ακριβή τύπο που θα περιγράφει την επίδραση των block-γραμμών $\Lambda^T(x) \otimes I$ πάνω στις block-στήλες Y_ℓ , όπου x μια βαθμωτή μεταβλητή που παίρνει τιμές στο \mathbb{C} και $\Lambda^T(x) := [x^{k-1} \ x^{k-2} \ \dots \ x \ 1]$.

Λήμμα 4.2.5. Υποθέτουμε ότι $L(\lambda) \in \mathbb{DL}(P)$ με ansatz διάνυσμα v και $p(x, v)$ το v -πολυώνυμο. Έστω με Y_ℓ συμβολίζουμε την ℓ -οστή block στήλη του Y στην $L(\lambda) = \lambda X + Y$, όπου $1 \leq \ell \leq k-1$. Τότε

$$(\Lambda^T(x) \otimes I) Y_\ell = p_{\ell-1}(x, v) P(x) - x p(x, v) P_{\ell-1}(x), \quad (4.2.10)$$

όπου $p_{\ell-1}(x, v)$ και $P_{\ell-1}(\lambda)$ είναι μετατοπίσεις Horner βαθμού $\ell - 1$ του $p(x, v)$ και $P(\lambda)$, αντίστοιχα.

Απόδειξη.

Η απόδειξη θα εκτελεστεί με επαγωγή στο ℓ . Παρατηρούμε καταρχήν ότι για $k \times k$ unimodular Jordan block N ότι είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι $\Lambda^T(x)N = [0 \ x^{k-1} \ \dots \ x] = x\Lambda^T(x) - x^k e_1^T$.

$\boxed{\ell = 1}$: χρησιμοποιώντας την (4.2.1) έχουμε

$$(\Lambda^T(x) \otimes I) Y_1 = (\Lambda^T(x) \otimes I) \left(v_1 \begin{bmatrix} A_{k-1} \\ \vdots \\ A_0 \end{bmatrix} - (N \otimes I) (v \otimes A_k) \right).$$

Απλοποιώντας την σχέση προκύπτει:

$$(\Lambda^T(x) \otimes I) Y_1 = v_1 (P(x) - x^k A_k) - (\Lambda^T(x) N \otimes I) (v \otimes A_k)$$

$$\begin{aligned}
&= v_1 P(x) - v_1 x^k A_k - ((x \Lambda^T(x) - x^k e_1^T v) \otimes A_k) \\
&= p_0(x, v) P(x) - v_1 x^k A_k - (x \Lambda^T(x) v) A_k + (x^k e_1^T v) A_k \\
&= p_0(x, v) P(x) - v_1 x^k A_k - x p(x, v) A_k + v_1 x^k A_k \\
&= p_0(x, v) P(x) - x p(x, v) P_0(x),
\end{aligned}$$

το οποίο αποδεικνύει την (4.2.10) για $\ell = 1$. Η υπόθεση επαγωγής είναι τώρα

$$(\Lambda^T(x) \otimes I) Y_{\ell-1} = p_{\ell-2}(x, v) P(x) - x p(x, v) P_{\ell-2}(x). \quad (4.2.11)$$

$\boxed{\ell - 1 \Rightarrow \ell}$: Ξεκινώντας ξανά με την (4.2.1), έχουμε

$$\begin{aligned}
(\Lambda^T(x) \otimes I) Y_\ell &= (\Lambda^T(x) \otimes I) \left((N \otimes I) (Y_{\ell-1} - v \otimes A_{k-\ell+1}) + v_\ell \begin{bmatrix} A_{k-1} \\ \vdots \\ A_0 \end{bmatrix} \right) \\
&= (\Lambda^T(x) N \otimes I) (Y_{\ell-1} - v \otimes A_{k-\ell+1}) + v_\ell (\Lambda^T(x) \otimes I) \begin{bmatrix} A_{k-1} \\ \vdots \\ A_0 \end{bmatrix} \\
&= ((x \Lambda^T(x) - x^k e_1^T) \otimes I) (Y_{\ell-1} - v \otimes A_{k-\ell+1}) + v_\ell (P(x) - x^k A_k) \\
&= x (\Lambda^T(x) \otimes I) Y_{\ell-1} - x^k (e_1^T \otimes I) (Y_{\ell-1} - (x \Lambda^T(x) v) A_{k-\ell+1} + v_1 x^k A_{k-\ell+1} \\
&\quad + v_\ell P(x) - v_\ell x^k A_k.
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $(e_1^T \otimes I) Y_{\ell-1}$ είναι το πιο πάνω (topmost) block $Y_{\ell-1}$ και είναι ίσο με $v_1 A_{k-\ell+1} - v_\ell A_k$ από (4.2.5). Τελικά επικαλούμενοι την υπόθεση επαγωγής η (4.2.11) δίνει

$$\begin{aligned}
(\Lambda^T(x) \otimes I) Y_\ell &= \\
&= x p_{\ell-2}(x, v) P(x) - x^2 p(x, v) P_{\ell-2}(x) - v_1 x^k A_{k-\ell+1} + v_\ell x^k A_k \\
&\quad - x p(x, v) A_{k-\ell+1} + v_1 x^k A_{k-\ell+1} + v_\ell P(x) - v_\ell x^k A_k \\
&= (x p_{\ell-2}(x, v) + v_\ell) P(x) - x p(x, v) (x P_{\ell-2}(x, v) + A_{k-\ell+1}) \\
&= p_{\ell-1}(x, v) P(x) - x p(x, v) P_{\ell-1}(x).
\end{aligned}$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη □

Θεώρημα 4.2.6 (Τύπος ορίζουσας για δέσμες στον $\mathbb{DL}(P)$).

Υποθέτουμε ότι $L(\lambda)$ βρίσκεται στον $\mathbb{DL}(P)$ με μη-μηδενικό ansatz διάνυσμα $v = [v_1, v_2, \dots, v_k]^T$. Θεωρώντας ότι v έχει m πρώτα μηδενικά στοιχεία (leading zeroes) με $0 \leq m \leq k-1$, έτσι ώστε $v_1 = v_2 = \dots = v_m = 0$, $v_{m+1} \neq 0$ είναι ο πρώτος μη-μηδενικός συντελεστής του $p(x, v)$ και $p(x, v)$ έχει $k-m-1$ πεπερασμένες ρίζες στο \mathbb{C} , υπολογισμένες με πολλαπλότητες (συμβολίζονται εδώ με $r_1, r_2, \dots, r_{k-m-1}$). Τότε έχουμε:

$$\det L(\lambda) = \begin{cases} (-1)^{n \lfloor \frac{k}{2} \rfloor} u_1^{kn} \det(P(r_1)P(r_2) \dots P(r_{k-1})) \det P(\lambda) & m = 0, \\ (-1)^s u_{m+1}^{kn} (\det A_k)^m \det(P(r_1) \dots P(r_{k-m-1})) \det P(\lambda) & m > 0, \end{cases} \quad (4.2.12)$$

όπου $s = n(m + \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + \lfloor \frac{k-m}{2} \rfloor)$.

4.3 Το θεώρημα εξαίρεσης ιδιοτιμής

Θεώρημα 4.3.1 (θεώρημα εξαίρεσης ιδιοτιμής).

Υποθέτουμε ότι $P(\lambda) = \sum_{i=0}^k \lambda^i A_i$ ένας regular πολυωνυμικός πίνακας και $L(\lambda)$ ανήκει στον $\mathbb{DL}(P)$ με μη-μηδενικό ansatz διάνυσμα u . Τότε $L(\lambda)$ είναι ένας ισχυρός γραμμικοποιητής του $P(\lambda)$ εάν και μόνο εάν καμία ρίζα του n -πολυωνυμικού πίνακα $p(x, u)$ δεν είναι κάποια ιδιοτιμή του $P(\lambda)$. (Παρατηρούμε ότι αυτή η πρόταση περιλαμβάνει το άπειρο σαν μια από τις πιθανές ρίζες του $p(x, u)$ ή πιθανές ιδιοτιμές του $P(\lambda)$.)

Απόδειξη.

Από το θεώρημα 2.2.3, $L(\lambda)$ είναι ένας ισχυρός γραμμικοποιητής του $P(\lambda)$ εάν και μόνο εάν $L(\lambda)$ regular. Αλλά από τον τύπο της ορίζουσας (4.2.12) έπεται ότι $L(\lambda)$ regular εάν και μόνο εάν καμία ρίζα του $p(x, u)$ δεν είναι κάποια ιδιοτιμή του $P(\lambda)$. \square

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα 4.3.1 μπορούμε να δείξουμε ότι σχεδόν κάθε δέσμη στον $\mathbb{DL}(P)$ είναι ένας γραμμικοποιητής του P . Αν και η ίδια ιδιότητα αποδείχτηκε στο θεώρημα 2.2.7 για δέσμες στον $\mathbb{L}_1(P)$, το αποτέλεσμα για $\mathbb{DL}(P)$ δεν αποτελεί συνέπεια του θεωρήματος 2.2.7, έτσι ο $\mathbb{DL}(P)$ είναι από μόνος του ένα κλειστό, πουθενά πυκνό υποσύνολο μέτρου μηδέν στον $\mathbb{L}_1(P)$.

Θεώρημα 4.3.2 (Γενικοί γραμμικοποιητές στον $\mathbb{DL}(P)$).

Για κάθε κανονικό πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda)$, οι δέσμες στον $\mathbb{DL}(P)$ είναι γραμμικοποιητές του $P(\lambda)$ για σχεδόν όλα τα $u \in \mathbb{F}^k$. (Εδώ το “σχεδόν όλα” αναφέρεται σε ένα κλειστό, πουθενά πυκνό σύνολο μέτρου μηδέν στο \mathbb{F}^k .)

Απόδειξη.

Ξαναθυμόμαστε ότι το $\text{res}(f, g)$ των πολυωνύμων $f(x)$ και $g(x)$ είναι ένα πολυώνυμο στους συντελεστές του f και g με την ιδιότητα ότι $\text{res}(f, g) = 0$ εάν και μόνο εάν $f(x)$ και $g(x)$ έχουν μια κοινή (πεπερασμένη) ρίζα. Τώρα θεωρούμε $r = \text{res}(p(x, u), \det P(x))$, το οποίο επειδή $P(\lambda)$ σταθερός μπορεί να θεωρηθεί σαν πολυώνυμο $r(u_1, u_2, \dots, u_k)$ στις συνιστώσες του $u \in \mathbb{F}^k$. Το μηδενικό σύνολο $Z(r) = \{u \in \mathbb{F}^k : r(u_1, u_2, \dots, u_k) = 0\}$ τότε, είναι ακριβώς το σύνολο των $u \in \mathbb{F}^k$ για το οποίο κάποια πεπερασμένη ρίζα του $p(x, u)$ είναι μια ιδιοτιμή του $P(\lambda)$ μαζί με το σημείο $u = 0$. Για να δούμε ότι $Z(r)$ είναι πάντα ένα κατάλληλο υποσύνολο του \mathbb{F}^k , αρκεί να βρούμε κάποιο $u \in \mathbb{R}^k$ τέτοιο ώστε $r(u) \neq 0$, δηλαδή τέτοιο ώστε $p(x, u)$ να μην έχει ρίζα που είναι ιδιοτιμή του P .

Τώρα ξαναθυμόμαστε τη σύμβαση μας ότι ο n -πολυωνυμικός πίνακας $p(x, u)$ έχει το ∞ σαν μια ρίζα για $u \in \mathbb{F}^k$, που υπόκειται (lying) στο υπερεπίπεδο (hyperplane) $u_1 = 0$. Τότε από θεώρημα 4.3.1 το σύνολο των διανυσμάτων $u \in \mathbb{F}^k$ για το οποίο η αντίστοιχη δέσμη $L(\lambda) \in \mathbb{DL}(P)$ δεν είναι γραμμικοποιήτης του $P(\lambda)$, είναι είτε το κατάλληλο αλγεβρικό σύνολο $Z(r)$ είτε η ένωση δύο κατάλληλα αλγεβρικών συνόλων, $Z(r)$ και $u_1 = 0$. Όμως η ένωση κάθε πεπερασμένου αριθμού κατάλληλων αλγεβρικών συνόλων είναι πάντα ένα κλειστό, πουθενά πυκνό σύνολο βαθμού μηδέν στο \mathbb{F}^k . \square

Μια δέσμη $L \in \mathbb{L}_1(P)$ με δεξιό ansatz διάνυσμα u έχει την “ιδιότητα εξαίρεσης ιδιοτιμής” εάν η πρόταση: “καμία ρίζα του n -πολυωνυμικού πίνακα $p(x, u)$ δεν είναι κάποια ιδιοτιμή του $P(\lambda)$ ” είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη γραμμικοποιήτη του L . Στο παράδειγμα 2.2.5 βλέπουμε ότι υπάρχουν δέσμες στον $\mathbb{L}_1(P)$ με την “ιδιότητα εξαίρεσης ιδιοτιμής” οι οποίες δεν ανήκουν στον $\mathbb{DL}(P)$.

Παράδειγμα 4.3.3. Για τον γενικό κυβικό πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda) = \lambda^3 A + \lambda^2 B + \lambda C + D$ θεωρούμε τη δέσμη:

$$L(\lambda) = \lambda X + Y = \lambda \begin{bmatrix} A & 0 & 2C \\ -2A & -B-C & A-4C \\ 0 & A & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & -C & D \\ C-B & 2C-A & -2D \\ -A & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

η οποία ανήκει στον $\mathbb{L}_1(P)$ αλλά όχι στον $\mathbb{DL}(P)$. Έτσι $X \boxplus \rightarrow Y = [1 \ -2 \ 0]^T \otimes [A \ B \ C \ D]$, το δεξιό ansatz διάνυσμα είναι $u = [1 \ -2 \ 0]^T$ με n -πολυώνυμο $p(x, u) = x^2 - 2x$ και ρίζες 0 και 2. Από την άλλη εφαρμόζοντας τη μέθοδο που εφαρμόστηκε στη παράγραφο 2.2.2 παίρνουμε $Z = \begin{bmatrix} B+C & -A \\ -A & 0 \end{bmatrix}$,

και συνεπώς τη συνθήκη γραμμικοποιήτη $\det(-A^2) \neq 0$ ή ισοδύναμα $\det A \neq 0$. Έτσι λοιπόν $L(\lambda)$ είναι ένας γραμμικοποιήτης του $P(\lambda)$ εάν και μόνο εάν ∞ δεν είναι ιδιοτιμή του $P(\lambda)$. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα τότε, οι ρίζες του n -πολυωνυμικού πίνακα δεν προβλέπουν σωστά την συνθήκη γραμμικοποιήτη για L .

Η πρώτη συνοδεύουσα μορφή του πίνακα P είναι ένα άλλο παράδειγμα, όπου η ιδιότητα ιδιοτιμής εξαίρεσης δεν διατηρείται. Ο χαρακτηρισμός του συνόλου των δεσμών στον $\mathbb{L}_1(P)$ για τις οποίες η “ιδιότητα εξαίρεσης ιδιοτιμής” δεν διατηρείται, αποτελεί ένα ανοιχτό πρόβλημα.

Κεφάλαιο 5

Συμμετρικοί και ερμιτιανοί γραμμικοποιητές

Τώρα επιστρέφουμε στο πρόβλημα εύρεσης μεγάλων συνόλων συμμετρικών γραμμικοποιητών για συμμετρικούς πολυωνυμικούς πίνακες, $P(\lambda) = P(\lambda)^T$. Πρώτα θα χαρακτηρίσουμε τον υπόχωρο

$$\mathcal{S}(P) := \{\lambda X + Y \in \mathbb{L}_1(P) : X^T = X, Y^T = Y\} \quad (5.0.1)$$

όλων των συμμετρικών δεσμών στον $\mathbb{L}_1(P)$ όταν P συμμετρικός. Αργότερα στη παράγραφο 5.3 θα δείξουμε ότι σχεδόν όλες αυτές οι συμμετρικές δέσμες είναι πράγματι γραμμικοποιητές του $P(\lambda) = \sum_{i=0}^k \lambda^i A_i$. Κάτι ανάλογο για ερμιτιανό P θα αναπτυχθεί στη παράγραφο 5.2.

5.1 Συμμετρικές δέσμες στον $\mathbb{L}_1(P)$ για συμμετρικό P

Ξεκινάμε με ένα αποτέλεσμα για συμμετρικούς πολυωνυμικούς πίνακες χρησιμοποιώντας περισσότερο ανάστροφο πίνακα από ότι block-ανάστροφο.

Λήμμα 5.1.1. Υποθέτουμε $P(\lambda)$ ένας συμμετρικός πολυωνυμικός πίνακας και $L(\lambda) \in \mathbb{L}_1(P)$ με δεξιό ansatz διάνυσμα u . Τότε $L^T(\lambda) \in \mathbb{L}_2(P)$ με αριστερό ansatz διάνυσμα $w = u$. Ομοίως $L(\lambda) \in \mathbb{L}_2(P)$ με αριστερό ansatz διάνυσμα u συνεπάγεται ότι $L^T(\lambda) \in \mathbb{L}_1(P)$ με δεξιό ansatz διάνυσμα u .

Απόδειξη.

Ας υποθέσουμε ότι $L(\lambda) \in \mathbb{L}_1(P)$ με δεξιό ansatz διάνυσμα u . Τότε

$$(L(\lambda)(\Lambda \otimes I))^T = (u \otimes P(\lambda))^T \implies (\Lambda^T \otimes I)L^T(\lambda) = u^T \otimes P(\lambda).$$

Έτσι $L^T(\lambda) \in \mathbb{L}_2(P)$ με αριστερό ansatz διάνυσμα u . Η απόδειξη της δεύτερης πρότασης είναι ανάλογη. \square

Ο χώρος $\mathcal{S}(P)$ χαρακτηρίζεται στο επόμενο θεώρημα συσχετισμένος με τον παραπάνω χώρο $\mathbb{DL}(P)$.

Θεώρημα 5.1.2 (Χαρακτηρισμός του $\mathcal{S}(P)$).

Για κάθε συμμετρικό πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda)$, $\mathcal{S}(P) = \mathbb{DL}(P)$.

Απόδειξη.

Ας υποθέσουμε ότι $L(\lambda) \in \mathcal{S}(P) \subseteq \mathbb{L}_1(P)$ με δεξιό ansatz διάνυσμα u . Τότε από το λήμμα 5.1.1 γνωρίζουμε ότι $L^T(\lambda) = L(\lambda)$ ανήκει στον $\mathbb{L}_2(P)$ με αριστερό ansatz διάνυσμα u , και έτσι $L(\lambda) \in \mathbb{DL}(P)$. Συνεπώς $\mathcal{S}(P) \subseteq \mathbb{DL}(P)$.

Από το λήμμα 5.1.1 $L(\lambda) \in \mathbb{DL}(P)$ με δεξιό/αριστερό ansatz διάνυσμα u συνεπάγεται ότι $L^T(\lambda) \in \mathbb{DL}(P)$ με δεξιό/αριστερό ansatz διάνυσμα u . Αλλά από θεώρημα 3.4.2 οι δέσμες στον $\mathbb{DL}(P)$ είναι μοναδικά ορισμένες από το ansatz διάνυσμα τους, έτσι $L(\lambda) \equiv L^T(\lambda)$ και συνεπώς $\mathbb{DL}(P) \subseteq \mathbb{S}(P)$. Δηλαδή $\mathbb{DL}(P) = \mathbb{S}(P)$. \square

5.2 Ερμιτιανές δέσμες στον $\mathbb{L}_1(P)$ για ερμιτιανό P

Για έναν ερμιτιανό πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda)$ βαθμού k , $P(\lambda)^* = P(\bar{\lambda})$, έστω

$$\mathbb{H}(P) := \{\Lambda X + Y \in \mathbb{L}_1(P) : X^* = X, Y^* = Y\} \quad (5.2.1)$$

συμβολίζουμε το σύνολο όλων των ερμιτιανών δεσμών στον $\mathbb{L}_1(P)$. Εκ των προτέρων το δεξιό ansatz διάνυσμα u μιας δέσμης στο $\mathbb{H}(P)$ μπορεί να είναι κάποιο διάνυσμα στο \mathbb{C}^k , τότε P ένας μιγαδικός πολυωνυμικός πίνακας. Ωστόσο, το ακόλουθο αποτέλεσμα μας δείχνει ότι ένα τέτοιο διάνυσμα u μπορεί να είναι πραγματικό.

Λήμμα 5.2.1. Υποθέτουμε ότι $P(\lambda)$ είναι ένας ερμιτιανός πολυωνυμικός πίνακας και $L(\lambda) \in \mathbb{H}(P)$ με δεξιό ansatz διάνυσμα u . Τότε $u \in \mathbb{R}^k$ και $L(\lambda) \in \mathbb{DL}(P)$, έτσι $\mathbb{H}(P) \subseteq \mathbb{DL}(P)$.

Απόδειξη.

Εφόσον $L(\lambda) \in \mathbb{L}_1(P)$, έχουμε $L(\lambda)(\Lambda \otimes I) = u \otimes P(\lambda)$. Τότε εφόσον P και L ερμιτιανοί

$$(L(\lambda)(\Lambda \otimes I))^* = (u \otimes P(\lambda))^* \Rightarrow (\bar{\Lambda}^T \otimes I)L(\bar{\lambda}) = \bar{u}^T \otimes P(\bar{\lambda}).$$

Η τελευταία εξίσωση διατηρείται για όλα τα λ , έτσι θα αντικαταστήσουμε το $\bar{\lambda}$ με λ για να πάρουμε $(\bar{\Lambda}^T \otimes I) \cdot L(\lambda) = \bar{u}^T \otimes P(\lambda)$, με αυτό τον τρόπο $L(\lambda) \in \mathbb{L}_2(P)$ με αριστερό ansatz διάνυσμα $w = \bar{u}$. Έτσι $L(\lambda) \in \mathbb{DL}(P)$. Από το θεώρημα 3.4.2 τα δεξιά και αριστερά διανύσματα κάθε $\mathbb{DL}(P)$ -δέσμης πρέπει να είναι ίσα. Έτσι $u = \bar{u}$, που σημαίνει $u \in \mathbb{R}^k$. Εφόσον $\mathbb{DL}(P)$ περιέχει δέσμες αντίστοιχες σε μη πραγματικά u , $\mathbb{H}(P) \subseteq \mathbb{DL}(P)$. \square

Ξαναθυμόμαστε την απεικόνιση $\mathbb{DL}(P) \xrightarrow{\mathcal{M}} \mathcal{V}_P$ από την (3.3.1), η οποία γνωρίζουμε από το θεώρημα 3.3.1 και 3.4.2 ότι είναι ένας ισομορφισμός. Το λήμμα 5.2.1 συνεπάγεται ότι \mathcal{M} μπορεί να περιοριστεί στον υπόχωρο $\mathbb{H}(P)$, δίνοντας μια 1-1 απεικόνιση στο πραγματικό μέρος του \mathcal{V}_P , δηλαδή στον υπόχωρο $\mathcal{R}_P := \{u \otimes P(\lambda) : u \in \mathbb{R}^k\} \subseteq \mathcal{V}_P$. Ο χαρακτηρισμός (characterization) του $\mathbb{H}(P)$ ολοκληρώνεται παρακάτω δείχνοντας ότι $\mathbb{H}(P) \xrightarrow{\mathcal{M}} \mathcal{R}_P$ είναι πράγματι ένας ισομορφισμός.

Θεώρημα 5.2.2 (Χαρακτηρισμός του $\mathbb{H}(P)$).

Για κάθε ερμιτιανό πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda)$, $\mathbb{H}(P)$ το υποσύνολο όλων των δεσμών στο $\mathbb{DL}(P)$ με ένα πραγματικό ansatz διάνυσμα. Με άλλα λόγια, για κάθε διάνυσμα $u \in \mathbb{R}^k$ υπάρχει μια μοναδική ερμιτιανή δέσμη $H(\lambda) \in \mathbb{H}(P)$.

Απόδειξη.

Θα χρειαστεί να δείξουμε ότι η απεικόνιση $\mathbb{H}(P) \xrightarrow{\mathcal{M}} \mathcal{R}_P$ είναι ένας ισομορφισμός και από τις παρατηρήσεις που οδήγησαν στο θεώρημα το μόνο που μένει, είναι να δείξουμε ότι η απεικόνιση \mathcal{M} είναι 1-1. Από ανάλογα ορίσματα που χρησιμοποιήθηκαν στο λήμμα 5.1.1 και το θεώρημα 5.1.2, εύκολα δείχνουμε ότι για ερμιτιανό P , $L(\lambda) \in \mathbb{DL}(P)$ με δεξιό/αριστερό ansatz διάνυσμα u συνεπάγεται ότι $L^*(\lambda) \in \mathbb{DL}(P)$ με δεξί/αριστερό ansatz διάνυσμα \bar{u} . Τώρα εάν για ένα τυχαίο $u \in \mathbb{R}^k$ ορίσουμε $H(\lambda)$ να είναι η μοναδική δέσμη με δεξιό/αριστερό ansatz διάνυσμα u , τότε $H^*(\lambda)$ ανήκει επίσης στον $\mathbb{DL}(P)$ με ακριβώς το ίδιο ansatz διάνυσμα u . Η μοναδικότητα των $\mathbb{DL}(P)$ -δεσμών τότε συνεπάγεται ότι θα πρέπει $H(\lambda) \equiv H^*(\lambda)$, δηλαδή $H(\lambda) \in \mathbb{H}(P)$, συνεπώς δείξαμε ότι η απεικόνιση είναι 1-1. \square

5.3 Γενίκευση γραμμικοποιητών στο $\mathbb{S}(P)$ και $\mathbb{H}(P)$

Το βασικό ζήτημα όσον αφορά τους $\mathbb{S}(P)$ και $\mathbb{H}(P)$ είναι ποιες δέσμες σε αυτούς τους χώρους είναι πράγματι γραμμικοποιητές του P , όταν P συμμετρικός ή ερμιτιανός αντίστοιχα. Καταρχήν το θεώρημα ισχυρού γραμμικοποιητή μας λέει ότι για κανονικό P , μια δέσμη L στο $\mathbb{S}(P)$ ή $\mathbb{H}(P)$, είναι γραμμικοποιητής ακριβώς όταν η L είναι από μόνη της κανονική. Δεύτερον για κάθε δοσμένη δέσμη στο $\mathbb{S}(P)$ ή $\mathbb{H}(P)$ η μέθοδος, που περιγράφεται στη παράγραφο 2.2.2 μας επιτρέπει να παράγουμε μια ξεχωριστή συμβολική “συνθήκη γραμμικοποιητή”.

Τελικά αν κάποια δέσμη στο $\mathbb{S}(P)$ ή $\mathbb{H}(P)$ ανήκει επίσης στον $\mathbb{DL}(P)$, το θεώρημα εξαίρεσης ιδιοτιμής εφαρμόζει και δίνει ένα τρίτο κριτήριο για το αν μια τέτοια δέσμη είναι γραμμικοποιητής. Παραθέτουμε ξανά για ευκολία του αναγνώστη το θεώρημα:

Θεώρημα 4.3.1 (θεώρημα εξαίρεσης ιδιοτιμής).

Υποθέτουμε ότι $P(\lambda) = \sum_{i=0}^k \lambda^i A_i$ ένας regular πολυωνυμικός πίνακας και $L(\lambda)$ βρίσκεται στον $\mathbb{DL}(P)$ με μη-μηδενικό ansatz διάνυσμα u . Τότε $L(\lambda)$ είναι ένας ισχυρός γραμμικοποιητής για $P(\lambda)$ εάν και μόνο εάν καμία ρίζα του n -πολυωνυμικού πίνακα $p(x, u)$ δεν είναι κάποια ιδιοτιμή του $P(\lambda)$.

Σαν συνέπεια του θεωρήματος 4.3.1 επίσης δείξαμε στο κεφάλαιο 4 ότι η φράση “σχεδόν κάθε” σημαίνει όλα εκτός από ένα κλειστό, πουθενά πυκνό σύνολο μέτρου μηδέν. Επειδή $\mathbb{S}(P) = \mathbb{DL}(P)$ όταν P συμμετρικός το ίδιο αποτέλεσμα διατηρείται και για $\mathbb{S}(P)$. Ωστόσο όταν P ερμιτιανός, ο χώρος $\mathbb{H}(P)$ είναι ένα κλειστό, πουθενά πυκνό υποσύνολο μέτρου μηδέν στον $\mathbb{DL}(P)$, επομένως δεν μπορούμε άμεσα να εξάγουμε ένα “σχεδόν κάθε” αποτέλεσμα για $\mathbb{H}(P)$. Με μερικές τροποποιήσεις του θεωρήματος 4.3.2 αποδεικνύουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 5.3.1 (Γενικοί γραμμικοποιητές στο $\mathbb{H}(P)$).

Έστω $P(\lambda)$ ένας regular ερμιτιανός πολυωνυμικός πίνακας. Για σχεδόν κάθε $u \in \mathbb{R}^k$ η αντίστοιχη δέσμη στο $\mathbb{H}(P)$ είναι ένας γραμμικοποιητής.

Απόδειξη.

Θεωρούμε ξανά το $r = \text{res}(p(x, u), \det P(x))$, το οποίο επειδή P σταθερός μπορεί να θεωρηθεί σαν πολυωνυμικός πίνακας $r(u_1, u_2, \dots, u_k)$ στα στοιχεία του $u \in \mathbb{R}^k$. Εφόσον P ερμιτιανός, δηλαδή $P(\bar{x}) = P(x)$, έχουμε για $g(x) := \det P(x)$ ότι

$$g(x) = \det P(x) = \det (P(\bar{x})^*) = \overline{\det P(\bar{x})} = \overline{g(\bar{x})} = \bar{g}(x).$$

Έτσι όλοι οι συντελεστές του $\det P(x)$ είναι πραγματικοί και συνεπώς r είναι ένας πραγματικό πολυωνυμικός πίνακας στις πραγματικές μεταβλητές u_1, u_2, \dots, u_k . Το πραγματικό μηδενικό σύνολο $Z(r) = \{u \in \mathbb{R}^k : r(u_1, u_2, \dots, u_k) = 0\} \subseteq \mathbb{R}^k$ είναι ακριβώς το σύνολο όλων των $u \in \mathbb{R}^k$ για τα οποία κάποια πεπερασμένη ρίζα του $p(x, u)$ είναι μια ιδιοτιμή του $P(\lambda)$, μαζί με $u = 0$. Από το θεώρημα 4.3.2 γνωρίζουμε ότι $Z(r)$ είναι ένα κατάλληλο αλγεβρικό υποσύνολο του \mathbb{R}^k .

Τώρα ξαναθυμόμαστε τη σύμβαση μας ότι ο n -πολυωνυμικός πίνακας $p(x, u)$ έχει το ∞ σαν μια ρίζα για $u \in \mathbb{F}^k$ που υπόκειται στο υπερεπίπεδο $u_1 = 0$. Τότε από θεώρημα 4.3.1 το σύνολο των διανυσμάτων $u \in \mathbb{F}^k$ για το οποίο η αντίστοιχη δέσμη $L(\lambda) \in \mathbb{H}(P) \subset \mathbb{DL}(P)$ δεν είναι γραμμικοποιητής του $P(\lambda)$, είναι είτε το κατάλληλο αλγεβρικό σύνολο $Z(r)$, είτε η ένωση δύο κατάλληλα αλγεβρικών συνόλων, $Z(r)$ και $u_1 = 0$. Αλλά η ένωση κάθε πεπερασμένου αριθμού κατάλληλων αλγεβρικών συνόλων είναι πάντα ένα κλειστό, πουθενά πυκνό σύνολο βαθμού μηδέν στο \mathbb{R}^k . \square

Κεφάλαιο 6

Παλινδρομικοί και εναλλασσόμενοι πολυωνυμικοί πίνακες

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε δύο τύπους δομημένων πολυωνυμικών πινάκων, των συμμετρικών και των ερμιτιανών, οι οποίοι είναι χρησιμοποιούνται ευρέως στην δομική μηχανική. Επίσης αποδείχθηκε ότι ο $\mathbb{L}_1(P)$, ή πιο συγκεκριμένα ο $\mathbb{DL}(P)$, είναι μια πλούσια πηγή γραμμικοποιητών που διατηρούν τη δομή τους.

Τώρα θα μελετήσουμε κάποιους άλλους πολυωνυμικούς πίνακες διαφορετικής δομής, τους παλινδρομικούς και τους εναλλασσόμενους. Αφού δώσουμε τους ακριβείς ορισμούς και μερικά παραδείγματα, θα περιγράψουμε τις φασματικές συμμετρίες που σχετίζονται με αυτές τις πολυωνυμικές δομές και θα δείξουμε πως αυτές οι δομές συνδέονται η μια με την άλλη, μέσω του “μετασχηματισμού πινάκων Cayley”. Επίσης θα δούμε τρόπους με τους οποίους οι παλινδρομικοί και εναλλασσόμενοι πολυωνυμικοί πίνακες θα παρουσιάζονται ως γενικεύσεις (ή τουλάχιστον ανάλογα) των συμπλεκτικών και χαμιλτονιανών πινάκων.

Τέλος θα ολοκληρώσουμε το κεφάλαιο με σύντομες περιγραφές εφαρμογών που έχουν να κάνουν με παλινδρομικούς και εναλλασσόμενους πολυωνυμικούς πίνακες.

6.1 Βασικές δομές: Ορισμοί και συμβολισμός

Ένα από τα ερωτήματα που μας ώθησε στη συγκεκριμένη εργασία είναι το πρόβλημα ιδιοτιμών που προκύπτει από τον θόρυβο της κίνησης σιδηροδρομικών μεταφορών που προκαλείται από τρένα υψηλής ταχύτητας. Το πρόβλημα έχει τη μορφή:

$$(\lambda^2 A + \lambda B + A^T)x = 0, \quad (6.1.1)$$

όπου A , B μιγαδικοί τετραγωνικοί πίνακες με B μιγαδικό συμμετρικό και A μη-αντιστρέψιμο. Παρατηρούμε ότι ο πολυωνυμικός πίνακας στην (6.1.1) έχει την ιδιότητα να αντιστρέφει την τάξη των πινάκων συντελεστών και παίρνοντας τον ανάστροφο επιστρέφουμε στον αρχικό πολυωνυμικό πίνακα. Ανάλογα με τα γλωσσικά παλίνδρομα χρησιμοποιούμε το όνομα T -παλινδρομικός για έναν τέτοιο πολυωνυμικό πίνακα.

Ένας διαφορετικός τύπος δομημένου προβλήματος ιδιοτιμής, συναντάται στα γυροσκοπικά συστήματα και στη μελέτη ελαστικών υλικών και έχει τη μορφή:

$$(\lambda^2 M + \lambda G + K)x = 0, \quad (6.1.2)$$

όπου M και K είναι πραγματικοί συμμετρικοί και G πραγματικός αντι-συμμετρικός. Ο πολυωνυμικός πίνακας στην (6.1.2) μας θυμίζει μια άρτια συνάρτηση: αντικαθιστώντας το λ με $-\lambda$ και παίρνοντας τον ανάστροφο επιστρέφουμε στον αρχικό πολυωνυμικό πίνακα. Έτσι συμβολίζουμε αυτούς τους πολυωνυμικούς πίνακες με τον όρο T -άρτιος.

Επίσης μπορεί να έχουμε αποκλίσεις από τη T -παλινδρομική και τη T -άρτια δομή. Για παράδειγμα ο ανάστροφος T μπορεί να αντικατασταθεί από τον συζυγή ανάστροφο $*$. Έτσι γίνεται φανερό ότι αυτά τα διαφορετικά είδη δομής στη πραγματικότητα είναι στενά

συνδεδεμένα και για αυτό μελετάμε τις ιδιότητες τους παράλληλα με τις παραλλαγές τους (που θα οριστούν παρακάτω). Περισσότερες λεπτομέρειες εφαρμογών που περιλαμβάνουν αυτές τις δομές θα συναντήσουμε στη παράγραφο 6.4.

Ξεκινάμε ορίζοντας δύο πράξεις πολυωνυμικών πινάκων, δηλαδή τον *-συζυγή και τον *-αντίστροφο. Για συντομία το σύμβολο * θα χρησιμοποιείται για τον ανάστροφο T για την πραγματική περίπτωση και είτε T, είτε συζυγής ανάστροφος * για την αντίστοιχη μιγαδική.

Ορισμός 6.1.1 (Συζυγής και reversal πολυωνυμικού πίνακα).

Έστω $Q(\lambda) = \sum_{i=0}^k \lambda^i B_i$, όπου $B_0, \dots, B_k \in \mathbb{F}^{m \times n}$, ένας πολυωνυμικός πίνακας βαθμού k, $B_k \neq 0$. Τότε

$$Q^*(\lambda) := \sum_{i=0}^k \lambda^i B_i^* \quad \text{και} \quad \text{rev } Q(\lambda) := \lambda^k Q(1/\lambda) = \sum_{i=0}^k \lambda^i B_{k-i} \quad (6.1.3)$$

ορίζει τον *-συζυγή $Q^*(\lambda)$ και τον reversal $\text{rev } Q(\lambda)$ του $Q(\lambda)$ αντίστοιχα.

Αν $\deg(Q(\lambda))$ συμβολίζει τον βαθμό του πολυωνυμικού πίνακα $Q(\lambda)$, τότε γενικά $\deg(\text{rev } Q(\lambda)) \leq \deg(Q(\lambda))$ και $\text{rev } (Q_1(\lambda) Q_2(\lambda)) = \text{rev } Q_1(\lambda) \text{rev } Q_2(\lambda)$, όταν το γινόμενο $Q_1(\lambda) \cdot Q_2(\lambda)$ είναι ορισμένο. Χρησιμοποιώντας τις πράξεις της (6.1.3), οι διάφοροι δομημένοι πολυωνυμικοί πίνακες μπορούν τώρα να οριστούν στον πίνακα 6.1.1

Πίνακας 6.1.1: Ορισμοί βασικών δομών

Παλινδρομικός	$\text{rev } P(\lambda) = P(\lambda)$	αντι-παλινδρομικός	$\text{rev } P(\lambda) = -P(\lambda)$
-παλινδρομικός	$\text{rev } P^(\lambda) = P(\lambda)$	*-αντι-παλινδρομικός	$\text{rev } P^*(\lambda) = -P(\lambda)$
άρτιος	$P(-\lambda) = P(\lambda)$	περιττός	$P(-\lambda) = P(\lambda)$
-άρτιος	$P^(-\lambda) = P(\lambda)$	*-περιττός	$P^*(-\lambda) = -P(\lambda)$

Ένας βαθμωτός πολυωνυμικός πίνακας $p(x)$ είναι ίδιος είτε είναι T-παλινδρομικός είτε είναι απλά παλινδρομικός ($\text{rev } p(x) = p(x)$), ενώ ο *-παλινδρομικός είναι ισοδύναμος με τον συζυγή-παλινδρομικό ($\text{rev } \overline{p(x)} = p(x)$). Ανάλογες απλοποιήσεις ισχύουν και για τον T-άρτιο, *-άρτιο και γενικά για όλες τις αντι-παραλλαγές στην περίπτωση του βαθμωτού πολυωνυμικού πίνακα.

Παρατηρούμε ότι η εναλλαγή των συντελεστών πινάκων μεταξύ συμμετρικών και αντι-συμμετρικών (ή ερμιτιανών και αντι-ερμιτιανών) σε *-άρτιους/περιττούς πίνακες μας οδήγησε στη χρήση του όρου εναλλασσόμενος πολυωνυμικός πίνακας. Ωστόσο θα χρησιμοποιούμε τον όρο εναλλασσόμενος για να συμβολίσουμε κάθε μια από τις έξι άρτιες ή περιττές δομές του πίνακα 6.1.1. Ομοίως ο όρος παλινδρομικός θα χρησιμοποιείται γενικά και για τις έξι δομές του πίνακα 6.1.1 που εμπεριέχουν τον όρο παλινδρομικός.

Δύο ειδικοί πίνακες που παίζουν σημαντικό ρόλο στην έρευνα μας είναι οι $k \times k$ αντίστροφοι μοναδιαίοι R_k στο πλαίσιο των παλινδρομικών δομών και οι $k \times k$ διαγώνιοι πίνακες Σ_k των εναλλασσόμενων προσήμων στο πλαίσιο των άρτιων/περιττών δομών:

$$R = R_k := \begin{bmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{bmatrix}_{k \times k} \quad \text{και} \quad \Sigma = \Sigma_k := \begin{bmatrix} -1^{k-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (-1)^0 \end{bmatrix}_{k \times k}. \quad (6.1.4)$$

Ο δείκτης k θα παραλείπεται όταν εννοείται από τα συμφραζόμενα.

Παρατήρηση 6.1.2. Στον ορισμό 6.1.1 ο συζυγής του $n \times n$ πολυωνυμικού πίνακα θα μπορούσε να οριστεί ως προς τον συζυγή $*$ ενός πιο γενικού βαθμωτού γινόμενου (από ότι περιορίζοντας το $*$ σε ανάστροφους και συζυγείς ανάστροφους). Για παράδειγμα το διγραμμικό βαθμωτό γινόμενο ορίζεται ως $\langle x, y \rangle := x^* M y$ για αντιστρέψιμο πίνακα M και ο συζυγής $*$ ως προς το βαθμωτό γινόμενο θα δίνεται από την $A^* = M^{-1} A^T M$. (Ομοίως ένα γραμμικό-ημιγραμμικό βαθμωτό γινόμενο $\langle x, y \rangle := x^* M y$ έχει συζυγή που δίνεται από $A^* = M^{-1} A^* M$). Τότε ο ορισμός του συζυγή αντίστοιχου πολυωνυμικού πίνακα $P^*(\lambda)$ θα ταυτίζεται με τον ορισμό 6.1.1. Ένα παράδειγμα αυτού του πιο γενικού συμβολισμού είναι οι αντι-χαμιλτονιανές/χαμιλτονιανές δέσμες, οι οποίες είναι $*$ -περιττές ως προς τη συμπλεκτική μορφή που ορίζεται από: $M = J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$.

Ωστόσο όταν το βαθμωτό γινόμενο είναι ορθοσυμμετρικό (συγκεκριμένα, εάν M ικανοποιεί την $M^T = \varepsilon E$ για $\varepsilon = 1$ ή $\varepsilon = -1$ στη διγραμμική περίπτωση ή αντίστοιχα M ικανοποιεί την $M^* = \varepsilon E$, $|\varepsilon| = 1$, $\varepsilon \in \mathbb{C}$ στη γραμμική-ημιγραμμική περίπτωση) τότε δεν κερδίζουμε πολλά από αυτή την επιπλέον γενικότητα. Στη διγραμμική περίπτωση έχουμε

$$P(\lambda) \text{ είναι } * \text{-παλινδρομικός} \Leftrightarrow \text{rev } P^*(\lambda) = \text{rev } (M^{-1} P^T(\lambda) M) = P(\lambda)$$

$$\Leftrightarrow \text{rev } (MP(\lambda))^T = \text{rev } (P^T(\lambda) M^T) = \varepsilon MP(\lambda),$$

Έτσι η $*$ -παλινδρομικότητα του $P(\lambda)$ είναι ισοδύναμη με την T -(αντί)-παλινδρομικότητα του $MP(\lambda)$. Ομοίως η $*$ -αρτιότητα και $*$ -περιττότητα του $P(\lambda)$ είναι ισοδύναμες με την T -αρτιότητα και τη T -περιττότητα του $MP(\lambda)$. Συνεπώς για κάθε σταθερό βαθμωτό γινόμενο με συζυγή $*$, οι $*$ -δομές του πίνακα 6.1.1 μπορούν να μετασχηματιστούν σε μια T ή $*$ περίπτωση. Παρατηρούμε ότι αυτή η αναγωγή, μας αποδεικνύει ότι οι αντι-χαμιλτονιανές/χαμιλτονιανές δέσμες είναι ισοδύναμες με τις T -άρτιες ή $*$ -άρτιες δέσμες.

6.2 Φασματική συμμετρία

Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό των δομημένων πολυωνυμικών πινάκων του πίνακα 6.1.1 είναι ειδικές ιδιότητες συμμετρίας του φάσματος τους, όπως περιγράφεται παρακάτω.

Θεώρημα 6.2.1 (φασματική συμμετρία δομημένων πολυωνυμικών πινάκων).

Έστω $P(\lambda) = \sum_{i=0}^k \lambda^i A_i$, $A_k \neq 0$ ένας regular πολυωνυμικός πίνακας ο οποίος έχει κάποια από τις παλινδρομικές ή εναλλασσόμενες δομές που βρίσκονται στον πίνακα 6.1.1. Τότε το φάσμα του $P(\lambda)$ έχει την αντιστοίχιση που απεικονίζεται στο πίνακα 6.2.1. Επιπλέον οι αλγεβρικές, γεωμετρικές και μερικές πολλαπλότητες των δύο ιδιοτιμών σε κάθε ζεύγος

είναι ίσες. (εδώ $\lambda = 0$ συμπεριλαμβάνεται ως πιθανή ιδιοτιμή, με $1/\lambda$ ή $1/\bar{\lambda}$ να λογίζεται σαν ιδιοτιμή στο ∞ .)

Πίνακας 6.2.1: φασματικές συμμετρίες

Δομή του $P(\lambda)$	Ζεύγη ιδιοτιμών
(αντι-) παλινδρομικός, T-(αντι-) παλινδρομικός, *-παλινδρομικός, *-αντι-παλινδρομικός	$(\lambda, 1/\lambda)$ $(\lambda, 1/\bar{\lambda})$
άρτιος, περιττός, T-άρτιος, T-περιττός, *-άρτιος, *-περιττός	$(\lambda, -\lambda)$ $(\lambda, -\bar{\lambda})$

Απόδειξη.

Πρώτα ξαναθυμόμαστε κάποια πολύ σημαντικές προτάσεις για τις συνοδεύουσες μορφές $C_1(\lambda)$ και $C_2(\lambda)$ ενός κανονικού πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$:

- $P(\lambda)$ και $C_1(\lambda)$ έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές (συμπεριλαμβανομένου και του ∞), με τις ίδιες αλγεβρικές, γεωμετρικές και μερικές πολλαπλότητες.
- $C_1(\lambda)$ και $C_2(\lambda)$ είναι πάντα αυστηρά ισοδύναμες, δηλαδή υπάρχουν αντιστρέψιμοι σταθεροί πίνακες E και F τέτοιοι ώστε $C_1(\lambda) = E \cdot C_2(\lambda) \cdot F$.
- Αυστηρά ισοδύναμες δέσμες έχουν ίδιες ιδιοτιμές (συμπεριλαμβανομένου και του ∞), με τις ίδιες αλγεβρικές, γεωμετρικές και μερικές πολλαπλότητες.

Με αυτές τις προτάσεις ανά χείρας, θεωρούμε πρώτα τη περίπτωση όταν $P(\lambda)$ είναι ή *-παλινδρομικός ή *-αντι-παλινδρομικός, έτσι $\text{rev } P^*(\lambda) = \chi_p P(\lambda)$ για $\chi_p = \pm 1$, ισοδύναμα $\chi_p A_i = A_{k-i}^*$ για $i = 0 : k$. Η στρατηγική μας είναι να δείξουμε ότι $C_1(\lambda)$ είναι αυστηρά ισοδύναμη με $\text{rev } C_1^*(\lambda)$, από όπου έπονται το επιθυμητό ζεύγος ιδιοτιμής και η ισότητα πολλαπλοτήτων. Χρησιμοποιώντας τον αντιστρέψιμο πίνακα

$$T := \begin{bmatrix} \chi_p I & & & 0 \\ & I & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I & A_{k-1} & \cdots & A_1 \\ 0 & 0 & & -I \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & -I & & 0 \end{bmatrix},$$

Πρώτα θα δείξουμε ότι $C_1(\lambda)$ είναι αυστηρά ισοδύναμη με $\text{rev } C_2^*(\lambda)$.

$$\begin{aligned} T \cdot C_1(\lambda) \cdot (R_k \otimes I_n) &= T \cdot \left(\lambda \begin{bmatrix} 0 & & & A_k \\ & \ddots & & I \\ & & I & \\ I & & & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_{k-1} \\ 0 & 0 & & -I \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & -I & & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \lambda \begin{bmatrix} \chi_p A_1 & \cdots & \chi_p A_{k-1} & \chi_p A_k \\ -I & & 0 & 0 \\ & \ddots & \vdots & \\ 0 & & -I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \chi_p A_0 & & & 0 \\ & I & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & I \end{bmatrix} \\ &= \lambda \begin{bmatrix} A_{k-1} & -I & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ A_1 & 0 & & -I \\ A_0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^* + \begin{bmatrix} A_k & & & 0 \\ & I & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & I \end{bmatrix}^* \end{aligned}$$

$$= \text{rev } C_2^*(\lambda).$$

Όμως $\text{rev } C_2^*(\lambda)$ είναι πάντα αυστηρά ισοδύναμος με $\text{rev } C_1^*(\lambda)$, εφόσον είναι και οι $C_1(\lambda)$ και $C_2(\lambda)$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη για αυτή την περίπτωση.

Για την περίπτωση των αμιγώς παλινδρομικών και αντι-παλινδρομικών πινάκων, δηλαδή πινάκων $P(\lambda)$ που ικανοποιούν την $\text{rev } P(\lambda) = \chi_p P(\lambda)$, ένας ανάλογος υπολογισμός μας δείχνει ότι

$$T \cdot C_1(\lambda) \cdot (R_k \otimes I_n) = \text{rev } C_1(\lambda).$$

Έτσι $C_1(\lambda)$ είναι αυστηρά ισοδύναμη με $\text{rev } C_1(\lambda)$, το οποίο ξανά συνεπάγεται το επιθυμητό ζεύγος ιδιοτιμής και την ισότητα πολλαπλοτήτων.

Έπειτα υπολογίζουμε ότι $P(\lambda)$ είναι *-άρτιος ή *-περιττός, έτσι $P^*(-\lambda) = \varepsilon_p P(\lambda)$ για $\varepsilon_p = \pm 1$. Θα δείξουμε ότι $C_1(\lambda)$ είναι αυστηρά ισοδύναμη με $C_1^*(-\lambda)$, από όπου έπονται το επιθυμητό ζεύγος ιδιοτιμών και η ισότητα πολλαπλοτήτων. Ο επόμενος υπολογισμός μας δείχνει ότι $C_1(\lambda)$ είναι αυστηρά ισοδύναμη με $C_2^*(-\lambda)$:

$$\begin{aligned} & (\text{diag}(\varepsilon_p, -\sum k - 1) \otimes I_n) \cdot C_1(\lambda) \cdot (\sum k \otimes I_n) \\ &= \lambda \begin{bmatrix} \varepsilon_p(-1)^{k-1}A_k & & 0 \\ & -I & \\ & & \ddots \\ 0 & & & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_p(-1)^{k-1}A_{k-1} & \cdots & \varepsilon_p(-1)^1A_1 & \varepsilon_pA_0 \\ & -I & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -I \end{bmatrix} \\ &= -\lambda \begin{bmatrix} A_k & & 0 \\ & I & \\ & & \ddots \\ 0 & & & I \end{bmatrix}^* + \begin{bmatrix} A_{k-1} & -I & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ A_1 & 0 & & -I \\ A_0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^* = C_2^*(-\lambda). \end{aligned}$$

Η γνήσια ισοδυναμία των $C_2^*(-\lambda)$ και $C_1^*(-\lambda)$ έπεται αυτής των $C_2(\lambda)$ και $C_1(\lambda)$, και η απόδειξη για αυτή την περίπτωση έχει ολοκληρωθεί.

Για αμιγώς άρτιους ή περιττούς πολυωνυμικούς πίνακες $P(\lambda)$, δηλαδή $P(-\lambda) = \varepsilon_p P(\lambda)$, ένας ανάλογος υπολογισμός

$$\text{diag}(\varepsilon_p, -\sum k - 1) \otimes I_n) \cdot C_1(\lambda) \cdot (\sum k \otimes I_n) = C_1(-\lambda)$$

δείχνει ότι $C_1(\lambda)$ είναι αυστηρά ισοδύναμη με $C_1(-\lambda)$, το οποίο συνεπάγεται το επιθυμητό ζεύγος ιδιοτιμής και την ισότητα πολλαπλοτήτων. \square

Αν οι πίνακες συντελεστών του P είναι πραγματικοί, τότε οι ιδιοτιμές ενός *-άρτιου ή ενός *-περιττού πολυωνυμικού πίνακα εμφανίζονται σε τετράδες $(\lambda, \bar{\lambda}, -\lambda, -\bar{\lambda})$. Αυτή η ιδιότητα συχνά αναφέρεται ως “Χαμιλτονιανή φασματική συμμετρία”, όταν οι ιδιοτιμές των πραγματικών χαμιλτονιανών πινάκων έχουν αυτή τη συμμετρία.

Ομοίως οι ιδιοτιμές των πραγματικών *-παλινδρομικών και αντι-*-παλινδρομικών πολυωνυμικών πινάκων εμφανίζονται όχι απλά σε ζεύγη, αλλά σε τετράδες $(\lambda, \bar{\lambda}, -\lambda, -\bar{\lambda})$,

αυτή η ιδιότητα μερικές φορές αναφέρεται σαν “συμπλεκτική φασματική συμμετρία”, όταν οι πραγματικοί συμπλεκτικοί πίνακες εμφανίζουν αυτή την συμπεριφορά.

Παρατήρηση 6.2.2. Η ικανότητα να μετατρέπουμε έναν δομημένο πίνακα σε μια ισοδύναμη δομημένη δέσμη είναι η δεύτερη πτυχή της αναλογίας μεταξύ χαμιλτονιανών/συμπλεκτικών πινάκων και εναλλασσόμενων/παλινδρομικών. Σε κάθε πίνακα A μπορούμε να συνδέσουμε τη δέσμη $\lambda I - A$ και αντίστοιχα για τον χαμιλτονιανό την δέσμη $\lambda I - H$. Τότε ισοδύναμη με την $\lambda I - H$ είναι η T -άρτια δέσμη $J(\lambda I - H) = \lambda J - JH$. Αυτή η απλή μετατροπή μας δείχνει πως εναλλασσόμενοι πολυωνυμικοί πίνακες γενικεύουν χαμιλτονιανούς πίνακες.

Πράγματι μπορεί κάποιος να μετατρέψει έναν πίνακα συσχετισμένο με ένα ορθοσυμμετρικό βαθμωτό γινόμενο σε μια άρτια ή περιττή δέσμη με την ίδια διαδικασία. Έτσι δείξαμε ότι οι εναλλασσόμενοι πολυωνυμικοί πίνακες γενικεύουν μια μεγάλη γκάμα γνωστών δομημένων πινάκων.

Η περίπτωση των συμπλεκτικών πινάκων δεν είναι τόσο απλή. Η μετατροπή των δεσμών $\lambda I - S$, με συμπλεκτικό S , σε κάποιο είδος παλινδρομικής δέσμης δε μπορεί να επιτευχθεί με μια προσαρμοσμένη ισοδυναμία (όπως συνέβη με τους χαμιλτονιανούς πίνακες). Ωστόσο τελευταίες έρευνες έδειξαν ότι σχεδόν όλοι οι συμπλεκτικοί πίνακες S έχουν μια παραγοντοποίηση της μορφής $S = Z^{-1}Z^T$ για κάποιο αντιστρέψιμο πίνακα Z , συνεπώς σχεδόν όλες οι δέσμες $\lambda I - S$ με συμπλεκτικό S είναι ισοδύναμες με μια T -αντι-παλινδρομική δέσμη $\lambda Z - Z^T$. Οι μοναδικοί συμπλεκτικοί που δεν έχουν μια τέτοια παραγοντοποίηση είναι αυτοί που έχουν έναν περιττό αριθμό άρτιου-μεγέθους Jordan-blocks για την ιδιοτιμή $+1$.

Όσον αφορά τη μετατροπή του $\lambda I - S$ σε T -παλινδρομική δέσμη $\lambda W + W$ το μοναδικό μας εμπόδιο είναι η Jordan δομή του S στην ιδιοτιμή -1 . Μια δέσμη $\lambda I - S$ με συμπλεκτικό S είναι ισοδύναμη με τη T -παλινδρομική δέσμη, εάν και μόνο εάν, S έχει ένα άρτιο αριθμό άρτιου-μεγέθους Jordan blocks για την ιδιοτιμή -1 .

6.3 Μετασχηματισμοί Cayley

Είναι γνωστό ότι οι μετασχηματισμοί Cayley πινάκων και η γενίκευσή τους σε δέσμες, συνδέει τη χαμιλτονιανή με τη συμπλεκτική δομή και για τους πίνακες και για τις δέσμες. Επεκτείνοντας τον κλασικό ορισμό του μετασχηματισμού σε πολυωνυμικούς πίνακες, ανακαλύπτουμε ανάλογες σχέσεις μεταξύ παλινδρομικών και εναλλασσόμενων πολυωνυμικών πινάκων. Αυτές οι σχέσεις αποτελούν την τρίτη πτυχή της αναλογίας μεταξύ χαμιλτονιανών/συμπλεκτικών πινάκων και αντίστοιχα εναλλασσόμενων/παλινδρομικών.

Στον ορισμό καταλήξαμε από την ακόλουθη παρατήρηση: Οι μοναδικοί Mobius μετασχηματισμοί του μιγαδικού επιπέδου, οι οποίοι απεικονίζουν αντιστρόφα ζευγάρια $(\mu, 1/\mu)$ σε συν/πλήν ζευγάρια $(\lambda, -\lambda)$ είναι οι $\alpha(\frac{\mu-1}{\mu+1})$ και $\beta(\frac{1+\mu}{1-\mu})$,

όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ μη-μηδενικές σταθερές. Όταν $\alpha = \beta = 1$, οι μετασχηματισμοί αυτοί απεικονίζουν αναστροφο-συζυγή ζευγάρια $(\mu, 1/\bar{\mu})$ σε ανάστροφα συν/πλήν ζευγάρια $(\lambda,$

$-\bar{\lambda}$). Έτσι μαζί με το θεώρημα 6.2.1 θα δούμε οι Mobius μετασχηματισμοί $\frac{\mu-1}{\mu+1}$ και $\frac{1+\mu}{1-\mu}$ μετατοπίζουν τις φασματικές συμμετρίες των παλινδρομικών πολυωνυμικών πινάκων σε συμμετρίες των εναλλασσόμενων πινάκων. Συνεπώς, περιμένουμε οι μετασχηματισμοί Cayley, μοντελοποιημένοι σε Mobius μετασχηματισμούς, να έχουν ένα ανάλογο αποτέλεσμα στη δομή σε επίπεδο πολυωνυμικών πινάκων. Αυτές οι παρατηρήσεις μας οδήγησαν στον ακόλουθο ορισμό, σαν φυσική επέκταση του μετασχηματισμού Cayley σε πολυωνυμικούς πίνακες.

Ορισμός 6.3.1 (Μετασχηματισμοί Cayley πολυωνυμικών πινάκων).

Έστω $P(\lambda) = \sum_{i=0}^k \lambda^i A_i$ ένας πολυωνυμικός πίνακας βαθμού k . Τότε οι πολυωνυμικοί πίνακες:

$$C_{-1}(P)(\mu) := (\mu + 1)^k P\left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right) \quad \text{και} \quad C_{+1}(P)(\mu) := (\mu - 1)^k P\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right) \quad (6.3.1)$$

είναι μετασχηματισμοί Cayley του $P(\lambda)$ με πόλο στο -1 ή το $+1$ αντίστοιχα.

Πρόταση 6.3.2. Για κάθε $n \times n$ πολυωνυμικό πίνακα P βαθμού $k \geq 1$ έχουμε:

$$C_{+1}(C_{-1}(P)) = C_{-1}C_{+1}(P) = 2^k \cdot P.$$

Το επόμενο λήμμα δείχνει πώς οι συζυγείς και αντίστροφες πράξεις του ορισμού 6.1.1 αλληλεπιδρούν με τους μετασχηματισμούς Cayley C_{-1} και C_{+1} . Αυτό θα μας βοηθήσει να δείξουμε πως η δομή σε έναν πολυωνυμικό πίνακα, οδηγεί σε δομή του Cayley μετασχηματισμού του.

Λήμμα 6.3.3. Έστω πολυωνυμικός πίνακας P βαθμού $k \geq 1$. Τότε:

$$(C_{-1}(P))^*(\mu) = C_{-1}(P^*)(\mu), \quad (C_{+1}(P))^*(\mu) = (C_{+1}(P^*))(\mu), \quad (6.3.2)$$

$$\text{rev}(C_{-1}(P))^*(\mu) = (\mu + 1)^k P^*\left(-\frac{\mu-1}{\mu+1}\right), \quad \mu \neq -1, \quad (6.3.3a)$$

$$\text{rev}(C_{+1}(P))^*(\mu) = (-1)^k (1 - \mu)^k P^*\left(-\frac{1+\mu}{1-\mu}\right), \quad \mu \neq 1. \quad (6.3.3b)$$

Απόδειξη.

Η απόδειξη της (6.3.2) είναι απλή. Θα αποδείξουμε μόνο την (6.3.3b), η απόδειξη της (6.3.3a) είναι παρόμοια. Εφόσον $C_{+1}(P)$ και κατά συνέπεια $(C_{+1}(P))^*$ είναι πολυωνυμικοί πίνακες βαθμού k ,

$$\text{rev}(C_{-1}(P))^*(\mu) = \mu^k (C_{+1}(P))^*\left(\frac{1}{\mu}\right) = \mu^k (C_{+1}(P^*))\left(\frac{1}{\mu}\right) \quad \text{από (6.3.2), (6.1.3)}$$

$$= \mu^k (1 - 1/\mu)^k P^*\left(\frac{1+1/\mu}{1-1/\mu}\right) \quad \text{από (6.3.1)}$$

$$= (-1)^k (1 - \mu)^k P^*\left(-\frac{1+\mu}{1-\mu}\right). \quad \square$$

Τώρα θα βάλουμε στον πίνακα 6.3.1 όλες τις λεπτομέρειες μεταξύ παλινδρομικής/εναλλασσόμενης δομής στους πίνακες και στους Cayley μετασχηματισμούς τους. Παρατηρούμε ότι αυτές οι σχέσεις συχνά εξαρτώνται από την ισότητα του βαθμού του δοσμένου πίνακα.

Θεώρημα 6.3.4 (Αντιστοιχία δομής μέσω Cayley).

Έστω $P(\lambda) = \sum_{i=0}^k \lambda^i A_i$ πολυωνυμικός πίνακας P βαθμού $k \geq 1$. Τότε η αντιστοιχία μεταξύ της δομής στο P του Cayley μετασχηματισμού του $C_{-1}(P)$ και $C_{+1}(P)$ είναι όπως δηλώνεται στον πίνακα 6.3.1. (Παρατηρούμε ότι κάθε αντιστοιχία δομής σε αυτόν τον πίνακα είναι μια “εάν και μόνο εάν” πρόταση.)

Πίνακας 6.3.1: Μετασχηματισμοί Cayley δομημένων πολυωνυμικών πινάκων

$P(\lambda)$	$C_{-1}(P)(\mu)$		$C_{+1}(P)(\mu)$	
	k άρτιος	k περιττός	k άρτιος	k περιττός
παλινδρομικός *-παλινδρομικός	άρτιος *-άρτιο	περιττός *-περιττός	άρτιος *-άρτιος	
αντι-παλινδρομικός *-αντι-παλινδρομικός	Περιττό *-περιττό	άρτιος *-άρτιος	περιττός *-περιττός	
άρτιος *-άρτιος	παλινδρομικός *-παλινδρομικός		Παλινδρομικός *-παλινδρομικός	αντι-παλινδρομικός *-αντι-παλινδρομικός
περιττός *-περιττός	αντι-παλινδρομικός *-αντι-παλινδρομικός		αντι-παλινδρομικός *-αντι-παλινδρομικός	παλινδρομικός *-παλινδρομικός

Απόδειξη.

Εφόσον οι αποδείξεις αυτών των αντιστοιχιών δομής είναι όλες παρόμοιες, θα δώσουμε μόνο μια εδώ. Θα δείξουμε ότι $P(\lambda)$ *-άρτιος εάν και μόνο εάν $C_{+1}(P)(\mu)$ *-παλινδρομικός όταν k είναι άρτιος και *-παλινδρομικός όταν k περιττός. Τώρα $P(\lambda)$ *-άρτιος είναι ισοδύναμο, εξ ορισμού με $P^*(-\lambda) = P(\lambda)$ για όλα τα λ . Θέτοντας $\lambda = \frac{1+\mu}{1-\mu}$ και πολλαπλασιάζοντας με $(1-\mu)^k$ συνεπάγεται

$$P(\lambda) \text{ *-άρτιος} \Leftrightarrow (1-\mu)^k P^*\left(-\frac{1+\mu}{1-\mu}\right) = (1-\mu)^k P^*\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right) \quad \text{για όλα τα } \mu \neq 1$$

$$\Leftrightarrow (-1)^k \text{rev}(C_{+1}(P))^*(\mu) = C_{+1}(P)^*(\mu) \quad \text{από λήμμα 6.3.3}$$

από το οποίο έπεται το επιθυμητό αποτέλεσμα. □

6.4 Εφαρμογές

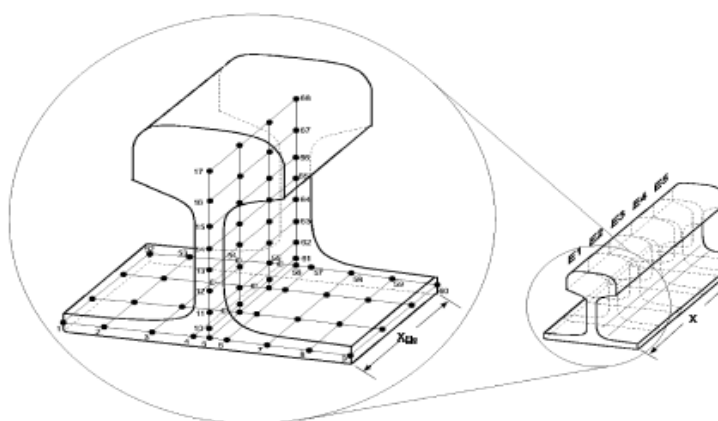
Για να επεξηγήσουμε τη πρακτική σημασία των παλινδρομικών και εναλλασσόμενων πολυωνυμικών πινάκων, κλείνουμε το κεφάλαιο με μια δειγματοληψία εφαρμογών που μας οδηγεί σε πολυωνυμικά ιδιοπροβλήματα με κάποια από αυτές τις δομές.

Πολλά από αυτά τα προβλήματα συναντώνται στην ανάλυση και την αριθμητική λύση συστημάτων μεγαλύτερης τάξης συνήθων και μερικών διαφορικών εξισώσεων, όπως στα πρώτα δύο παραδείγματα.

Παράδειγμα 6.4.1. (Τετραγωνικοί μιγαδικοί T-παλινδρομικοί πολυωνυμικοί πίνακες)

Ένα project της εταιρείας SFE GmbH στο Βερολίνο ερευνά τον θόρυβο σιδηροδρομικών μεταφορών που προκαλείται από τρένα υψηλής ταχύτητας. Η ταλάντωση μιας άπειρης σιδηροτροχιάς προσομοιώνεται και αναλύεται για να πάρουμε πληροφορίες για τον θόρυβο μεταξύ τροχού και σιδηροτροχιάς (ράγες). Στο μοντέλο η σιδηροτροχιά θεωρείται άπειρη και στερεωμένη στο έδαφος σε στρωτήρες, όπου οι γειτονικοί στρωτήρες έχουν απόσταση $s = 0.6\text{m}$ (συμπεριλαμβανομένου και του πλάτους ενός στρωτήρα). Αυτό το τμήμα της άπειρης σιδηροτροχιάς καλείται φάτνωμα στρωτήρα. Το τμήμα της σιδηροτροχιάς που αντιστοιχεί σε ένα φάτνωμα στρωτήρα, έπειτα διακριτοποιείται χρησιμοποιώντας τη κλασική πεπερασμένη μέθοδο στοιχείων για το μοντέλο της excited ταλάντωσης (σχήμα 6.4.1).

Σχήμα 6.4.1 : FE διακριτοποίηση σε ένα φάτνωμα στρωτήρα.



Η διακριτοποίηση οδηγεί σε ένα απειροδιάστατο σύστημα δεύτερης τάξης της μορφής $M\ddot{x} + D\dot{x} + Sx = F$, με μη-πεπερασμένους, block-τριδιαγώνιους, πραγματικούς, συμμετρικούς πίνακες συντελεστών M, D, S , όπου

$$M = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ \ddots & M_{j-1,0} & M_{j,1} & 0 & \vdots \\ 0 & M_{j,1}^T & M_{j,0} & M_{j+1,1} & 0 \\ \vdots & \ddots & M_{j+1,1}^T & M_{j+1,0} & \ddots \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & \ddots \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} \vdots \\ x_{j-1} \\ x_j \\ x_{j+1} \\ \vdots \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} \vdots \\ F_{j-1} \\ F_j \\ F_{j+1} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

D, S έχουν την ίδια block δομή όπως ο M , με blocks $D_{j,0}, D_{j,1}, S_{j,0}, S_{j,1}$, αντίστοιχα. Εδώ $M_{j,0}$ συμμετρικός, θετικά πεπερασμένος και $D_{j,0}, S_{j,0}$ συμμετρικοί, θετικά ημι-πεπερασμένοι για όλα τα j .

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι να φτάσουμε στη λύση του προβλήματος, η οποία είναι ένας συνδυασμός μιας διαφορικής εξίσωσης (χρονικές παράγωγοι του x) και μιας εξίσωσης διαφορών (χωρικές διαφορές στο j).

Εάν κάποιος ενδιαφέρεται να μελετήσει τη συμπεριφορά του συστήματος υπό διέγερση, φτιάχνει τα ansatz $F_j = \hat{F}_j e^{i\omega t}$, $x_j = \hat{x}_j e^{i\omega t}$, όπου ω η συχνότητα διέγερσης. Αυτό οδηγεί σε μια εξίσωσης διαφορών δευτέρας τάξης με μεταβλητούς συντελεστές για \hat{x}_j και δίνεται από την:

$$A_{j-1,j}^T \hat{x}_{j-1} + A_{jj} \hat{x}_j + A_{j,j+1} \hat{x}_{j+1} = \hat{F}_j,$$

με πίνακες συντελεστές:

$$A_{j,j+1} = -\omega^2 M_{j,1} + i\omega D_{j,1} + K_{j,1}, \quad A_{jj} = -\omega^2 M_{j,0} + i\omega D_{j,0} + K_{j,0}.$$

Παρατηρούμε ότι οι συστημικοί πίνακες διαφοροποιούνται περιοδικά εξαιτίας της ταυτοτικής μορφής της σιδηροτροχιάς του κάθε φατνώματος στρωτήρα. Θα ενώσουμε τα τμήματα που ανήκουν σε σιδηροτροχιά ενός φατνώματος στρωτήρα σε ένα διάνυσμα.

$$y_j = \begin{bmatrix} \hat{x}_j \\ \hat{x}_{j+1} \\ \vdots \\ \hat{x}_{j+\ell} \end{bmatrix},$$

και έτσι παίρνουμε μια εξίσωση διαφορών, δευτέρας τάξεως, σταθερού συντελεστή

$$A_1^T y_{j-1} + A_0 y_j + A_1 y_{j+1} = G_j$$

με πίνακες συντελεστές

$$A_0 = \begin{bmatrix} A_{j,j} & A_{j,j+1} & & 0 \\ A_{j,j+1}^T & A_{j+1,j+1} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & A_{j+\ell-1,j+\ell} \\ 0 & & A_{j+\ell,j+\ell}^T & A_{j+\ell,j+\ell} \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ A_{j+\ell-1,j+\ell} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

που εξαρτώνται από τη συχνότητα ω . Για το σύστημα θα κατασκευάσουμε τα ansatz $y_{j+1} = \kappa y_j$ και έτσι οδηγούμαστε στο πρόβλημα μιγαδικών ιδιοτιμών:

$$\frac{1}{\kappa} (A_1^T + \kappa A_0 + \kappa^2 A_1) y = 0.$$

Ξεκάθαρα λοιπόν ο πολυωνυμικός πίνακας $A_1^T + \kappa A_0 + \kappa^2 A_1$ είναι T-παλινδρομικός, επειδή A_0 είναι μιγαδικός συμμετρικός, δηλαδή $A_0 = A_0^T$.

Παράδειγμα 6.4.2. (Τετραγωνικά πραγματικά και μιγαδικά T-παλινδρομικά πολυώνυμα)

Τα SAW φίλτρα (surface acoustic wave) είναι πιεζοηλεκτρικοί μηχανισμοί που χρησιμοποιούνται στις τηλεπικοινωνίες, π.χ. τηλεοράσεις και κινητές συσκευές, για φιλτράρισμα συχνοτήτων. Άλλα είδη SAW μηχανισμών βρίσκουν εφαρμογή σε ραντάρ και σε τεχνολογίες αισθητήρων καθώς επίσης και στο πεδίο της μη-καταστροφικής επίλυσης (non-destructive evaluation). Η Floquet-Bloch θεωρία χρησιμοποιείται για να αντικαταστήσει την υποκείμενη περιοδική δομή του προβλήματος με ψευδό-περιοδικές συνθήκες. Το Bloch-ansatz μειώνει το πρόβλημα υπολογισμού του “διαγράμματος διασποράς” (dispersion diagram), δηλαδή τη συναρτησιακή σχέση μεταξύ συχνότητας διέγερσης ω και σταθεράς γ .

Μια πεπερασμένη διακριτοποίηση στοιχείου οδηγεί σε ένα παραμετρο-εξαρτώμενο Galerkin σύστημα, στο οποίο η επιπλέον αναγωγή μετατρέπεται σε ένα T-παλινδρομικό τετραγωνικό πρόβλημα ιδιοτιμών

$$(\gamma^2 A + \gamma B + A^T)u = 0, \quad \text{με } B^T = B.$$

Παρατηρούμε ότι A και B εξαρτώνται αμφότερα από τη παράμετρο ω . Αν οι συνοριακές συνθήκες (αναγκαίες για ένταση ακτινοβολίας κυμάτων) συμπεριλαμβάνονται στο μοντέλο, τότε A και B μιγαδικοί, ειδικά ως πραγματικοί.

Παράδειγμα 6.4.3. (Τετραγωνικοί *-παλινδρομικοί πολυωνυμικοί πίνακες)

Παρουσιάζονται οι μέθοδοι διχοτόμησης και το level set για τον υπολογισμό του αριθμού Crawford:

$$\gamma(A, B) := \min_{\substack{z \in \mathbb{C}^n \\ \|z\|_2 = 1}} \sqrt{(z^* A z)^2 + (z^* B z)^2}$$

για δύο ερμιτιανούς πίνακες $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Αποδεικνύεται ότι $\gamma(A, B)$ μετράει την απόσταση ενός ερμιτιανού ζεύγους (A, B) προς το εγγύτερο μη-πεπερασμένο ζεύγος στην 2-νόρμα.

$$\gamma(A, B) = \max (\max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \lambda_{\min}(A \cos \theta + B \sin \theta, 0),$$

Το πρόβλημα υπολογισμού του αριθμού Crawford μπορεί να αναχθεί στον υπολογισμό του:

$$\max \{ \lambda_{\min}(M(z)) : |z| = 1 \},$$

όπου $M(z) = z^{-1}C + zC$ και $C = A + iB$. Εύκολα ελέγχουμε ότι $M(z)$ είναι ερμιτιανός για κάθε z στον μοναδιαίο κύκλο. Έτσι για ένα δοσμένο $\xi \in \mathbb{R}$, η παρακάτω ισοδυναμία διατηρείται.

$$\det(M(z) - \xi I) = 0 \Leftrightarrow \det(C - 2\xi I + z^2 C^*) = 0.$$

Παράδειγμα 6.4.4. (Τετραγωνικοί T-άρτιοι πολυωνυμικοί πίνακες)

Η μελέτη των γωνιακών σημείων ανωμαλίας σε ανισότροπα, ελαστικά υλικά μας οδηγεί σε τετραγωνικά προβλήματα ιδιοτιμών της μορφής:

$$P(\lambda)u = (\lambda^2 M + \lambda G + K)u = 0,$$

με $M = M^T$, $G = -G^T$, $K = K^T$ στο $\mathbb{R}^{n \times n}$. Οι πίνακες συντελεστών είναι μεγάλοι και αραιοί, έχοντας παραχθεί από μια πεπερασμένη διακριτοποίηση στοιχείου. Εδώ ο M είναι ένας θετικά πεπερασμένος πίνακας μαζών (mass matrix) και $-K$ ένας πίνακας δυσκαμψίας (stiffness matrix). Αφού οι πίνακες συντελεστών εναλλάσσονται μεταξύ πραγματικών συμμετρικών και αντι-συμμετρικών πινάκων, θα δούμε ότι $P^T(-\lambda) = P(\lambda)$ και έτσι ο πολυωνυμικός πίνακας είναι T-άρτιος. Γυροσκοπικά συστήματα επίσης οδηγούν σε τετραγωνικούς T-άρτιους πολυωνυμικούς πίνακες.

Παράδειγμα 6.4.5. (*-άρτιοι πολυωνυμικοί πίνακες μεγαλύτερου βαθμού)

Το γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου για συστήματα υψηλότερης τάξης, συνήθων διαφορικών εξισώσεων οδηγεί στο πρόβλημα συνοριακών τιμών για $2(k-1)$ -στης τάξης συνήθων διαφορικών εξισώσεων της μορφής:

$$\sum_{j=1}^{k-1} \begin{bmatrix} (-1)^{j-1} Q_j & M_{2j}^* \\ M_{2j} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(2j)} \\ \mu^{(2j)} \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^{k-1} \begin{bmatrix} 0 & -M_{2j-1}^* \\ M_{2j-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(2j-1)} \\ \mu^{(2j-1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -Q_0 & M_0^* \\ M_0 & -BW^{-1}B^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \mu \end{bmatrix} = 0,$$

όπου W και Q_j ερμιτιανοί για $j = 1, \dots, k-1$. Η αντικατάσταση $\begin{bmatrix} x \\ \mu \end{bmatrix} = e^{\lambda t} u$ παράγει το πρόβλημα ιδιοτιμών $P(\lambda)u = 0$ με τον υποκείμενο *-άρτιο πολυωνυμικό πίνακα βαθμού $2(k-1)$ που δίνεται από

$$\sum_{j=1}^{k-1} \left(\lambda^{2j} \begin{bmatrix} (-1)^{j-1} Q_j & M_{2j}^* \\ M_{2j} & 0 \end{bmatrix} + \lambda^{2j-1} \begin{bmatrix} 0 & -M_{2j-1}^* \\ M_{2j-1} & 0 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} -Q_0 & M_0^* \\ M_0 & -BW^{-1}B^* \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 6.4.6. (*-παλινδρομικοί πίνακες μεγαλύτερου βαθμού)

Θεωρούμε το πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου διακριτού χρόνου για να ελαχιστοποιήσουμε

$$\sum_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix} x_j \\ v_j \end{bmatrix}^* \mathcal{H} \begin{bmatrix} x_j \\ v_j \end{bmatrix}, \quad \mathcal{H} = \begin{bmatrix} Q & Y \\ Y^* & R \end{bmatrix} \quad (6.4.1)$$

που υπόκειται στο διακριτό χρονικό έλεγχο

$$\sum_{i=0}^k M_i x_{j+k-i} = B v_j, \quad (6.4.2)$$

με αρχικές συνθήκες x_0, x_1, \dots, x_{k-1} δοσμένες. Εδώ οι πίνακες είναι μεγέθους $Q, M_i \in \mathbb{F}^{n \times n}$ για $i = 0, \dots, k$, $R \in \mathbb{F}^{m \times m}$ και $Y, B \in \mathbb{F}^{n \times m}$ και ικανοποιούν τις $Q^* = Q$ και $R^* = R$.

Στην κλασική εφαρμογή από τον γραμμικό τετραγωνικό βέλτιστο έλεγχο, ο πίνακας \mathcal{H} στην (6.4.1) είναι συμμετρικός ή ερμιτιανός θετικά ημιορισμένος, με R θετικά ορισμένο. Στις εφαρμογές ελέγχου διακριτού χρόνου H_∞ ωστόσο, οι πίνακες μπορεί να είναι ταυτόχρονα μη-ορισμένοι και μη-αντιστρέψιμοι.

Ο σίγουρος τρόπος επίλυσης του προβλήματος είναι να μετατρέψουμε το σύστημα σε πρώτου βαθμού και να εφαρμόσουμε γνωστές τεχνικές για τέτοια συστήματα, καταλήγοντας στο τέλος σε ένα πρόβλημα συννοριακών τιμών του οποίου η λύση μπορεί να βρεθεί, λύνοντας ένα γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών για $(2kn + m) \times (2kn + m)$ δέσμες της μορφής:

$$\mathcal{L}(\lambda) = \lambda \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{E} & 0 \\ \mathcal{A}^* & 0 & 0 \\ \mathcal{B}^* & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{E}^* & \mathcal{G} & \mathcal{Y} \\ 0 & \mathcal{Y}^* & \mathcal{R} \end{bmatrix}. \quad (6.4.3)$$

Για προβλήματα βέλτιστου ελέγχου μεγάλης τάξης υπάρχει επαρκής ειδική δομή εντός των blocks του $\mathcal{L}(\lambda)$ που μπορεί να αναχθεί σε συμπλεκτική δέσμη.

Από την άλλη, σε όλες τις περιπτώσεις είναι πιθανό να αναιρέσουμε την μετατροπή σε πρώτης τάξης και να το μετατρέψουμε σε πολυωνυμικό ιδιοπρόβλημα βαθμού k για $(2n + m) \times (2n + m)$ πολυωνυμικούς πίνακες.

$$\begin{aligned} P_s(\lambda) = & \lambda^{2\ell} \begin{bmatrix} 0 & M_0 & 0 \\ M_{2\ell}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda^{2\ell-1} \begin{bmatrix} 0 & M_1 & 0 \\ M_{2\ell-1}^* & Q & 0 \\ 0 & Y^* & 0 \end{bmatrix} + \lambda^{2\ell-2} \begin{bmatrix} 0 & M_2 & 0 \\ M_{2\ell-2}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & + \dots + \lambda^2 \begin{bmatrix} 0 & M_{2\ell-2} & 0 \\ M_2^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 & M_{2\ell-1} & 0 \\ M_1^* & 0 & 0 \\ -B^* & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & M_{2\ell} & -B \\ M_0^* & 0 & Y \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ο πολυωνυμικός πίνακας $P_s(\lambda)$ δεν είναι παλινδρομικός, όμως χρησιμοποιώντας έναν μη-ισοδύναμο μετασχηματισμό ο $P_s(\lambda)$ μπορεί πολύ απλά να μετασχηματιστεί σε έναν παλινδρομικό πολυωνυμικό πίνακα. Πράγματι πολλαπλασιάζοντας $P_s(\lambda)$ από αριστερά με $\text{diag}(\lambda^{\ell-1}I_n, I_n, \lambda^\ell m)$ και από δεξιά με $\text{diag}(I_n, \lambda^{\ell-1}I_n, I_m)$ καταλήγουμε στον $*$ -παλινδρομικό πολυωνυμικό πίνακα βαθμού $k = 2\ell$.

$$\begin{aligned} P_p(\lambda) = & \lambda^{2\ell} \begin{bmatrix} 0 & M_0 & 0 \\ M_{2\ell}^* & 0 & 0 \\ 0 & Y^* & 0 \end{bmatrix} + \lambda^{2\ell-1} \begin{bmatrix} 0 & M_1 & 0 \\ M_{2\ell-1}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \dots + \lambda^{2\ell+2} \begin{bmatrix} 0 & M_{\ell-2} & 0 \\ M_{\ell+2}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & + \lambda^{\ell+1} \begin{bmatrix} 0 & M_{\ell-1} & 0 \\ M_{\ell+1}^* & 0 & 0 \\ -B^* & 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda^\ell \begin{bmatrix} 0 & M_\ell & 0 \\ M_\ell^* & Q & 0 \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix} + \lambda^{\ell-1} \begin{bmatrix} 0 & M_{\ell+1} & -B \\ M_{\ell-1}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & + \lambda^{\ell-2} \begin{bmatrix} 0 & M_{\ell+2} & 0 \\ M_{\ell-2}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \dots + \lambda \begin{bmatrix} 0 & M_{2\ell-1} & 0 \\ M_1^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & M_{2\ell} & 0 \\ M_0^* & 0 & Y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Εφόσον $\det P_p(\lambda) = \lambda^{\ell m}$, έπεται ότι $P_s(\lambda)$ και $P_p(\lambda)$ έχουν τις ίδιες πεπερασμένες ιδιοτιμές εκτός των ℓm επιπλέον μηδενικών ιδιοτιμών του $P_p(\lambda)$.

Υπάρχει ένας εναλλακτικός τρόπος διατύπωσης του προβλήματος βέλτιστου ελέγχου διακριτού χρόνου σαν έναν *-παλινδρομικό πολυωνυμικό πίνακα. Όπως και με τη δέσμη $\mathcal{L}(\lambda)$ στην (6.4.3) πρώτα κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $\lambda = -\mu^2$ για να πάρουμε τον τετραγωνικό πολυωνυμικό πίνακα:

$$\mathcal{Q}(\mu) := -\mathcal{L}(-\mu^2) = \mu^2 \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{E} & 0 \\ \mathcal{A}^* & 0 & 0 \\ \mathcal{B}^* & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{E}^* & \mathcal{G} & \mathcal{Y} \\ 0 & \mathcal{Y}^* & \mathcal{R} \end{bmatrix}. \quad (6.4.4)$$

Ο πίνακας $\mathcal{Q}(\mu)$ εξακολουθεί να μην είναι *-παλινδρομικός, όμως ένας μη-ισοδύναμος μετασχηματισμός όπως ο παραπάνω θα τον μετατρέψει σε *-παλινδρομικό. Συγκεκριμένα πολλαπλασιάζοντας από αριστερά το $\mathcal{Q}(\mu)$ με $\text{diag}(I_{kn}, \mu I_{kn}, \mu I_m)$ και πολλαπλασιάζοντας από δεξιά με $\text{diag}(\mu^{-1} I_{kn}, I_{kn}, I_m)$ παίρνουμε τον πολυωνυμικό πίνακα

$$\mathcal{Q}_p(\mu) := \mu^2 \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{E} & 0 \\ \mathcal{A}^* & 0 & 0 \\ \mathcal{B}^* & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{G} & \mathcal{Y} \\ 0 & \mathcal{Y}^* & \mathcal{R} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{E}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.4.5)$$

Αφού τα blocks \mathcal{G} και \mathcal{R} είναι ερμιτιανά και ο μεσαίος όρος $\mathcal{Q}_p(\mu)$ είναι ερμιτιανός, συνεπάγεται ότι $\mathcal{Q}_p(\mu)$ είναι *-παλινδρομικός. Αφού $\det \mathcal{Q}_p(\mu) = \mu^m \det \mathcal{Q}_p(\mu)$ έπεται ότι $\mathcal{Q}_p(\mu)$ και $\mathcal{Q}(\mu)$ έχουν τις ίδιες πεπερασμένες ιδιοτιμές εκτός από m επιπλέον μηδενικές ιδιοτιμές του $\mathcal{Q}_p(\mu)$.

Παρατήρηση 6.4.7. Το παράδειγμα 6.4.6 παρουσιάζει μια άλλη οπτική, με την οποία βλέπουμε τους παλινδρομικούς και τους εναλλασσόμενους πολυωνυμικούς πίνακες σαν γενικεύσεις των συμπλεκτικών και χαμιλτονιανών πινάκων. Δεν είναι μόνο η ανταλλαγή των μαθηματικών ιδιοτήτων (όπως οι φασματικές συμμετρίες και οι παράλληλες σχέσεις μέσω Cayley μετασχηματισμού) που δίνει νόημα σε αυτή την αναλογία. Είναι επίσης και η επέκταση της γκάμας εφαρμοσιμότητας σε με μια μεγαλύτερη τάξη πρακτικών προβλημάτων όπου οι παλινδρομικοί πολυωνυμικοί πίνακες μπορούν να γενικεύσουν την συμπλεκτική δομή.

Παρατήρηση 6.4.8. Παρατηρούμε την απουσία της έκφρασης “καθαρά” παλινδρομικών ή “καθαρά” άρτιοι/περιττοί πολυωνυμικοί πίνακες, που θα σήμαινε να μη συμπεριλαμβανόταν ο συζυγής * στον ορισμό τους, στις εφαρμογές αυτής της παραγράφου. Στη παρούσα εργασία δεν παραθέτουμε κάποια εφαρμογή που να μας οδηγεί σε κάποια από αυτές τις “καθαρές” δομές.

Παρατήρηση 6.4.9. Εν κατακλείδι αξίζει να σημειωθεί ότι η παλινδρομική δομή έχει ένα υπολογιστικό όφελος έναντι της συμπλεκτικής. Η παλινδρομικότητα είναι μια γραμμική δομή και έτσι είναι ευκολότερο αριθμητικά να διατηρηθεί, αν λάβουμε υπόψη και τα σφάλματα στρογγυλοποίησης, από ότι μια μη-γραμμική δομή όπως η συμπλεκτικότητα (είτε για πίνακες είτε για δέσμες). Έτσι η διαδικασία αντικατάστασης ενός συμπλεκτικού πίνακα ή δέσμης από ένα παλινδρομικό πίνακα μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα είδος γραμμικοποίησης του προβλήματος.

6.5 Ένα παράδειγμα παλινδρόμου

Το παλίνδρομο είναι ένα είδος λογοπαιγνίου που συναντάται σε πολλές γλώσσες και έχει αρχαίες ρίζες. Τα πρώτα παλίνδρομα αποδίδονται στον Σωτάδη της Μαρώνειας στην Θράκη τον τρίτο αιώνα π.Χ. Για αυτό, πολλές φορές αναφέρονται ως “Σωταδικά” ή “Σωδατικοί στίχοι”.

Αν και η αγγλική γλώσσα είναι υπερπλήρης παλινδρόμων, υπάρχει πληθώρα παλινδρόμων και σε άλλες γλώσσες. Πράγματι τα φινλανδικά μερικές φορές αναφέρονται και ως “γλώσσα των παλινδρόμων”, ίσως επειδή περιέχει πολλά παλίνδρομα μια λέξης. Πράγματι η φινλανδική λέξη “saippuakivinikauppias” έχει καταγραφεί στο βιβλίο Guinness ως η μεγαλύτερη παλινδρομική λέξη.

Επίσης εκτός από τα παλίνδρομα κατά γράμμα υπάρχουν και τα παλίνδρομα κατά λέξη π.χ στην αγγλική: “All for one and one for all”. Καθώς επίσης και τα φωνητικά παλίνδρομα όπως το “ominus cinema”. Κάποιοι το έχουν προχωρήσει τόσο, που έχουν γράψει παλινδρομικά ποιήματα ή παλινδρομικές νουβέλες και σε κατά γράμμα και σε κατά λέξη μορφή, που όμως τείνουν να χάσουν την ισχύ τους καθώς αυξάνεται το μήκος. Ίσως η πιο δραματική εξέλιξη στο πεδίο της παλινδρομικότητας είναι η πρόσφατη ανακάλυψη ότι το Υ χρωμόσωμα περιέχει ένα τριών εκατομμυρίων γραμμάτων παλίνδρομο στην αλληλουχία DNA, κάνοντας το, το μεγαλύτερο γνωστό φυσικά-κατασκευασμένο παλίνδρομο.

Βιβλιογραφία

- [1] Mackey D., 2006a , Structured Linearizations for Matrix Polynomials , PhD Thesis , University of Manchester , Manchester, UK, 2006.
- [2] A. L. Andrew, K.-W. E. Chu, and P. Lancaster, Derivatives of eigenvalues and eigenvectors of matrix functions, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 14 (1993), pp. 903-926.
- [3] E. N. Antoniou and S. Vologiannidis, A new family of companion forms of polynomial matrices, Electron. J. Linear Algebra, 11 (2004), pp. 78-87.
- [4] T. Apel, V. Mehrmann, and D. Watkins, Structured eigenvalue methods for the computation of corner singularities in 3D anisotropic elastic structures., Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 191 (2002), pp. 4459-4473.
- [5] , Numerical solution of large scale structured polynomial eigenvalue problems, in Foundations of Computational Mathematics, Springer Verlag, 2003.
- [6] Zhaojun Bai, James W. Demmel, Jack J. Dongarra, Axel Ruhe, and Henk A. van der Vorst, eds., Templates for the Solution of Algebraic Eigenvalue Problems: A Practical Guide, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 2000.
- [7] David Bellos, Georges Perec: A Life in Words, Harvill Press, London, 1995.
- [8] Peter Benner, Ralph Byers, Volker Mehrmann, and Hongguo Xu, Numerical computation of deflating subspaces of skew Hamiltonian/Hamiltonian pencils, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 24 (2002), pp. 165-190.
- [9] Howard Bergerson, Palindromes and Anagrams, Dover Publications, New York, 1973.
- [10] Dario A. Bini, Luca Gemignani, and Françoise Tisseur, The Ehrlich-Aberth method for the nonsymmetric tridiagonal eigenvalue problem, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 27 (2005), pp. 153-175.
- [11] M. A. Brebner and J. Grad, Eigenvalues of $Ax = \lambda Bx$ for real symmetric matrices A and B computed by reduction to a pseudosymmetric form on the HR process, Linear Algebra Appl., 43 (1982), pp. 99-118.
- [12] T. J. Bridges and P. J. Morris, Differential eigenvalue problems in which the parameter appears nonlinearly, J. Comput. Phys., 55 (1984), pp. 437-460.
- [13] Bill Bryson, The Mother Tongue: English & How It Got That Way, William Morrow and Co., New York, 1990.

- [14] Angelika Bunse-Gerstner, An analysis of the HR algorithm for computing the eigenvalues of a matrix, *Linear Algebra Appl.*, 35 (1981), pp. 155-173.
- [15] Stephen J. Chism, *From A to Zotamorf: The Dictionary of Palindromes*, Word Ways Press, Morristown, NJ, 1992.
- [16] D. Chu, X. Liu, and V. Mehrmann, A numerically backwards stable method for computing the Hamiltonian Schur form, Preprint 24-2004, Institut für Mathematik, TU Berlin, D-10623 Berlin, FRG, 2004.
www.math.tu-berlin.de/preprints/.
- [17] J.-P. Dedieu, Condition operators, condition numbers, and condition number theorem for the generalized eigenvalue problem, *Linear Algebra Appl.*, 263 (1997), pp. 1-24.
- [18] J.-P. Dedieu and F. Tisseur, Perturbation theory for homogeneous polynomial eigenvalue problems, *Linear Algebra Appl.*, 358 (2003), pp. 71-94.
- [19] Michael Donner, *I Love Me*, Vol. I: S. Wordrow's Palindrome Encyclopedia, Algonquin Books, Chapel Hill, N.C., 1996.
- [20] Willard R. Espy, *Another Almanac of Words at Play*, Clarkson N. Potter, Inc., New York, 1980.
- [21] , *The Word's Gotten Out*, Clarkson N. Potter, Inc., New York, 1989.
- [22] E. Eich-Soellner and C. Führer, *Numerical Methods in Multibody Systems*, B. G. Teubner, Stuttgart, Germany, 1998.
- [23] H.-Y. Fan, W.-W. Lin, and P. Van Dooren, Normwise scaling of second order polynomial matrices, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 26 (2004), pp. 252-256.
- [24] Heike Faßbender, *Symplectic Methods for the Symplectic Eigenvalue Problem*, Kluwer Academic, New York, 2000.
- [25] Miroslav Fiedler, A note on companion matrices, *Linear Algebra Appl.*, 372 (2003), pp. 325-331.
- [26] P. Freitas, M. Grinfeld, and P. Knight, Stability of n -dimensional systems with indefinite damping, *Advances in Mathematical Science and Applications*, 17 (1997), pp. 435-446.
- [27] R. W. Freund, Krylov-subspace methods for reduced-order modeling in circuit simulation, *J. Comput. Appl. Math.*, 123 (2000), pp. 395-421