



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Τομέας Μηχανικής

**Μελέτη του συντελεστή επαναφοράς ιξωδοελαστικού υλικού με γραμμικά
και μη-γραμμικά ιξωδοελαστικά πρότυπα**

Διπλωματική εργασία
Καμινάρης Γεράσιμος

Επιβλέπων Καθηγητής
Σπαθής Γεράσιμος

Αθήνα 2016

Πρόλογος

Η ιξωδοελαστικότητα αποτελεί μια ιδιότητα ορισμένων υλικών, των οποίων η μηχανική συμπεριφορά χρονικά εξαρτώμενη. Όταν λοιπόν η επίδραση του χρόνου είναι σημαντική, για την περιγραφή της ανελαστικής συμπεριφοράς των υλικών απαιτείται ειδική θεωρητική και πειραματική μελέτη για τα προβλήματα που εμφανίζονται στην μηχανική απόκριση των υλικών. Λόγω του ότι η επίδραση της ιξωδοελαστικότητας εμφανίζεται με την πάροδο του χρόνου, είναι δύσκολη η μελέτη της μέσω πειραμάτων, η δε ολοκλήρωσή τους απαιτεί αρκετό χρόνο για την κατανόηση τους και την εξαγωγή ασφαλών συμπερασμάτων.

Εξαιτίας της δυσκολίας αυτής, η μελέτη της ιξωδοελαστικότητας βασίζεται σε μαθηματικά μοντέλα προσομοίωσης της συμπεριφοράς του υλικού ως προς το χρόνο. Γίνεται έτσι εφικτός ο προσδιορισμός της διάρκειας ζωής και της αστοχίας του υλικού, και άρα με τον τρόπο αυτό ο μηχανικός μπορεί να χρησιμοποιήσει σε μία οποιαδήποτε κατασκευή το υλικό με ασφάλεια.

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η μελέτη ενός σώματος με ιξωδοελαστική συμπεριφορά που προσκρούσει σε άκαμπτο τοίχο. Το σώμα προσομοιώνεται με ένα απλό μηχανικό μοντέλο άκαμπτου στερεού συνδεδεμένου με ένα σύστημα ελατηρίων και αποσβεστήρων. Μελετάται η κίνηση του σώματος και ο συντελεστής επαναφοράς. Αρχικά εξετάζεται η επίδραση του ιξώδους στην ταχύτητα επαναφοράς, ενώ στη συνέχεια μελετώνται οι χρόνοι αποκόλλησης του σώματος συναρτήσει των σταθερών ελατηρίου και αποσβεστήρα. Το πρόβλημα αυτό προσομοιώνεται και επιλύεται με την εφαρμογή του προγράμματος Mathematica, το οποίο παρατίθεται στο τέλος της εργασίας.

Η εργασία απαρτίζεται από τέσσερα μέρη. Στο πρώτο κεφάλαιο δίνονται ορισμένες βασικές έννοιες της ιξωδοελαστικότητας και παρουσιάζονται βασικά μοντέλα για την περιγραφή της γραμμικής ιξωδοελαστικότητας, καθώς και εφαρμογές της ιξωδοελαστικότητας στην καθημερινή ζωή. Στο δεύτερο κεφάλαιο περιγράφονται οι προσεγγίσεις μιας μη γραμμικής ιξωδοελαστικής συμπεριφοράς, ώστε να γίνει πιο ακριβής η περιγραφή του φαινομένου και η απόκριση στις πειραματικές παρατηρήσεις. Ειδικότερα για την μη γραμμική απόκριση εφαρμόζεται η προσέγγιση του προτύπου Eyring.

Στο τρίτο κεφάλαιο εκτίθεται το υπολογιστικό μέρος, όπου παρουσιάζονται οι προσομοιώσεις για την επίλυση των 3 περιπτώσεων με τη βοήθεια των μοντέλων Kelvin, Maxwell και ενός τριπαραμετρικού μοντέλου. Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι προσομοιώσεις που διεξήχθησαν με τη βοήθεια μη-γραμμικών ιξωδοελαστικών μοντέλων, των οποίων η συμπεριφορά αποδίδεται σε μη-γραμμικό αποσβεστήρα. Τέλος, στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την διαδικασία των προσομοιώσεων.

Ευχαριστίες

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να εκφράσω τις ειλικρινείς ευχαριστίες μου σε όσους συνέβαλαν στη εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας

Πρώτον απ' όλους, τον επιβλέποντα Καθηγητή μου κ. Σπαθή Γεράσιμο, για την εμπιστοσύνη την οποία επέδειξε προς το πρόσωπο μου αναθέτοντας μου την εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής, όσο και για την πολύτιμη βοήθειά του τόσο κατά τη διαδικασία των υπολογισμών, όσο και κατά τη συγγραφή της εργασίας.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τους φίλους μου για τη συμπαράστασή τους, καθώς και την οικογένειά μου για την ηθική και πολύπλευρη υποστήριξή τους.

Περιεχόμενα

Πρόλογος.....	1
Ευχαριστίες	2
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Γραμμικά ιξωδοελαστικά μοντέλα	7
1.1 Εισαγωγή.....	7
1.1.1 Ελαστικά και ανελαστικά υλικά	7
1.1.2 Ιξωδοελαστικότητα	8
1.2 Ερπυσμός.....	10
1.3 Χαλάρωση.....	12
1.4 Μηχανικά μοντέλα ελαστικών και ιξωδών υλικών.....	13
1.4.1 Ελατήριο.....	13
1.4.2 Αποσβεστήρας	13
1.5 Μηχανικά μοντέλα ιξωδοελαστικών υλικών	14
1.5.1 Μοντέλο Maxwell.....	14
1.5.2 Μοντέλο Kelvin-Voigt.....	16
1.5.3 Τριπαραμετρικό μοντέλο	18
1.5.4 Τετραπαραμετρικό μοντέλο Burgers	18
1.6 Παραδείγματα και Εφαρμογές ιξωδοελαστικών υλικών	20
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Μη γραμμικά ιξωδοελαστικά μοντέλα	23
2.1 Εισαγωγή στη μη γραμμική ιξωδοελαστικότητα	23
2.2 Μηχανική προσέγγιση	23
2.3 Ρεολογική προσέγγιση	26
2.4 Μοριακή προσέγγιση	28
2.5 Η εξίσωση του Eyring.....	30
2.5.1 Εφαρμογή του μοντέλου Eyring στον ερπυσμό.....	32
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Επίλυση προσομοίωσης με τη βοήθεια γραμμικών ιξωδοελαστικών μοντέλων.....	38
3.1 Εισαγωγή.....	38
3.2 Επίλυση προσομοίωσης με τη βοήθεια του μοντέλου Kelvin....	38
3.3 Επίλυση προσομοίωσης με τη βοήθεια του μοντέλου Maxwell .	48
3.4 Επίλυση προσομοίωσης με τη βοήθεια του τριπαραμετρικού μοντέλου.	54

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: Επίλυση προσομοίωσης με την βοήθεια μη-γραμμικών ιξωδοελαστικών μοντέλων.....	64
4.1 Επίλυση προσομοίωσης με τη βοήθεια του μοντέλου Kelvin με μη-γραμμικό αποσβεστήρα.	64
4.2 Επίλυση προσομοίωσης με τη βοήθεια του μοντέλου Maxwell με μη-γραμμικό αποσβεστήρα.	74
4.3 Επίλυση προσομοίωσης με τη βοήθεια του τριπαραμετρικού μοντέλου με μη-γραμμικό αποσβεστήρα.....	77
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: Συμπεράσματα	88
Παράρτημα Α: Κώδικας Mathematica	88
Βιβλιογραφία.....	94

Ευρετήριο Εικόνων

Εικόνα 1.1: Διάγραμμα τάσης- παραμόρφωσης για μαλακό χάλυβα (Καραγιαννίδης Γ., 2009	7
Εικόνα 1.2: Διάγραμμα τάσης παραμόρφωσης για ελαστομερές υλικό (Κοντού, Σπαθής, 2001)	8
Εικόνα 1.3: Απεικόνιση της ιξωδοελαστικής συμπεριφοράς (Lakes, 2009).....	8
Εικόνα 1.4: Διάγραμμα τάσης παραμόρφωσης ανελαστικού υλικού (Κοντού, Σπαθής, 2001)	9
Εικόνα 1.5: Διάγραμμα τάσης παραμόρφωσης γραμμικού ελαστικού, τέλειου πλαστικού υλικού (Κοντού, Σπαθής, 2001).....	9
Εικόνα 1.6: Ερπυσμός ιξωδοελαστικού υλικού (α) εφαρμοζόμενη τάση και (β) παραμόρφωση λόγω της εφαρμοζόμενης τάσης συναρτήσει του χρόνου (Αθανασιάδης, 2006)	10
Εικόνα 1.7: Σχηματική παράσταση των καμπυλών ερπυσμού, για αυξανόμενες τιμές θερμοκρασιών ή καταπονήσεων (Αθανασιάδης, 2006)	11
Εικόνα 1.8: (α) Γραμμικό και (β) μη γραμμικό ιξωδοελαστικό υλικό (Αθανασιάδης, 2006)	12
Εικόνα 1.9: Φαινόμενο της χαλάρωσης (α) Εφαρμοζόμενη παραμόρφωση και (β) τάση συναρτήσει του χρόνου (Αθανασιάδης, 2006)	12
Εικόνα 1.10: Ελαστικό μοντέλο για (Α) γραμμικό ελαστικό Hookean υλικό (Β) για μη-γραμμικό ελαστικό Hencky υλικό (Γ) διάγραμμα τάσης-παραμόρφωσης(Καραγιαννίδης, 2009)	13
Εικόνα 1.11: Αποσβεστήρας ως μηχανικό ανάλογο γραμμικού ιξώδους υλικού (Καραγιαννίδης, 2009).....	14
Εικόνα 1.12: Μοντέλο Maxwell(Καραγιαννίδης, 2009)	15
Εικόνα 1.13: Μεταβολή της παραμόρφωσης με το χρόνο κάτω από την επίδραση σταθερής τάσης (ερπυσμός) μέχρι τη χρονική στιγμή t_0 (Καραγιαννίδης, 2009)	16
Εικόνα 1.14: Μοντέλο Kelvin-Voigt(Καραγιαννίδης, 2009).....	16
Εικόνα 1.15: Μεταβολή της παραμόρφωσης με το χρόνο κάτω από την επίδραση σταθερής τάσης (ερπυσμός) σύμφωνα με το μοντέλο Kelvin-Voigt(Καραγιαννίδης, 2009).....	17
Εικόνα 1.16: Τριπαραμετρικό μοντέλο (Καραγιαννίδης, 2009).....	18
Εικόνα 1.17: Συνδυασμένο μοντέλο Maxwell-Kelvin(Καραγιαννίδης, 2009)...	19
Εικόνα 1.18: Μεταβολή της παραμόρφωσης με το χρόνο κάτω από την επίδραση σταθερής τάσης (ερπυσμός) σύμφωνα με το μοντέλο Maxwell – Kelvin (Καραγιαννίδης, 2009)	20
Εικόνα 1.19: Ροή θερμού γυαλιού	21
Εικόνα 1.20: Παραμόρφωση κοχλιοσύνδεσης λόγω ιξωδοελαστικότητας.....	21
Εικόνα 1.21: Συντονισμένη μαζική διάταξη απόσβεσης με ελατήρια και αποσβεστήρες (Connor, 2008).....	22
Εικόνα 2.1: Ερπυσμός πολυπροπυλενίου στους 60°C(Wardetal., 2004).....	24
Εικόνα 2.2: Σχέση τάσης-παραμόρφωσης και χρόνου κατά τον ερπυσμό (Turner, 1965)	25
Εικόνα 2.3: (α) ιστορικό βηματικής τάσης (β) Προκύπτουσα παραμόρφωση (Wardetal., 2004)	28

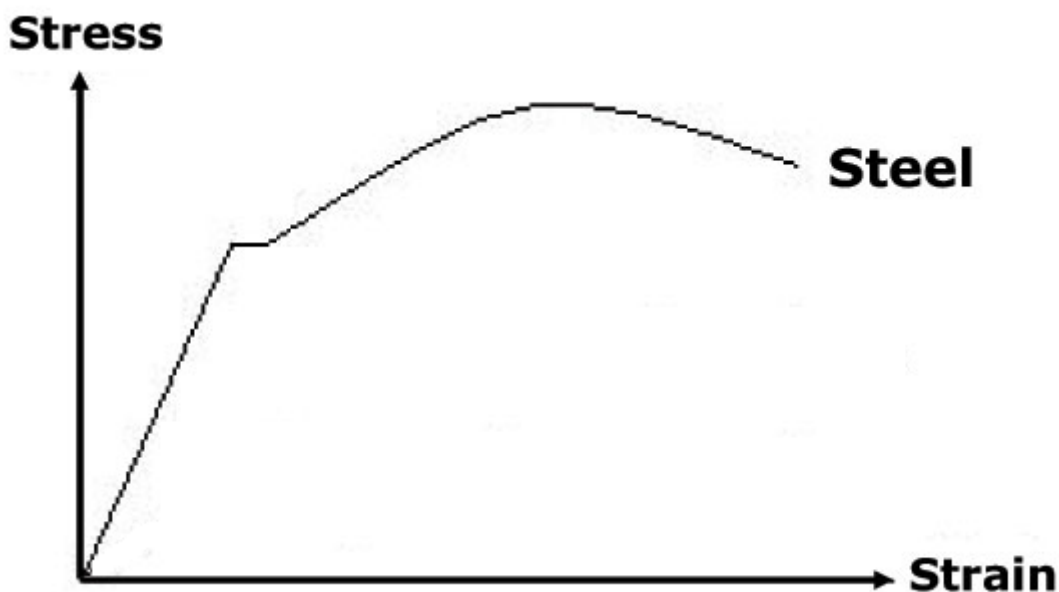
Εικόνα 2.4: Το μοντέλο του Rouse αποτελούμενο από σφαιρίδια ενωμένα με ελατήρια(Strobl, 1997).....	29
Εικόνα 2.5: Το μοντέλο Eyring για το ερπυσμό (Wardetal., 2004)	31
Εικόνα 2.6: Ρυθμοί ερπυσμού ως συνάρτηση της συνολικής παραμόρφωσης ερπυσμού για μεθακρυλικές ενώσεις για επίπεδο τάσης 56 MPa (Wardetal., 2004)	33
Εικόνα 2.7: Υπέρθεση των δεδομένων ερπυσμών μεθακρυλικών ενώσεων σε διαφορετικές θερμοκρασίες για επίπεδο τάσης 56 MPa (Wardetal., 2004)	34
Εικόνα 2.8: Ερπυσμός πολυαιθυλενίου με πολύ υψηλό μέτρο ελαστικότητας σε διαφορετικές θερμοκρασίες (Wardetal., 2004)	36
Εικόνα 2.9: Μοντέλο δύο διεργασιών για τον ερπυσμό μόνιμης ροής (Wardetal., 2004)	37

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Γραμμικά ιξωδοελαστικά μοντέλα

1.1 Εισαγωγή

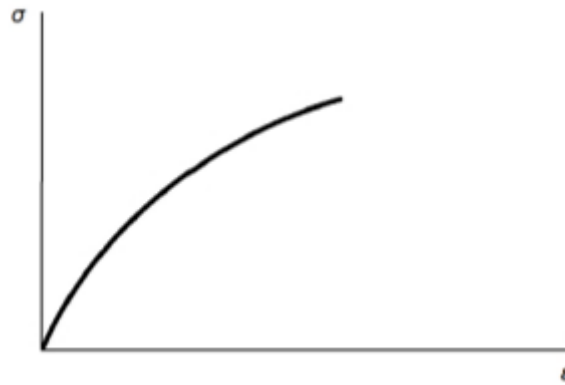
1.1.1 Ελαστικά και ανελαστικά υλικά

Ένα υλικό θεωρείται ελαστικό όταν παραμορφώνεται υπό την επίδραση εξωτερικών δυνάμεων και στη συνέχεια, όταν οι δυνάμεις απομακρύνονται, επανέρχεται στην αρχική γεωμετρία, ακολουθώντας την ίδια διαδρομή που ακολουθήθηκε κατά τη φόρτιση. Ο προσδιορισμός της σχέσης μεταξύ τάσης και παραμόρφωσης γίνεται μέσω πειράματος εφελκυσμού. Όπως φαίνεται στην Εικόνα 1.1 για το χάλυβα αρχικά το υλικό συμπεριφέρεται ελαστικά, όπως υποδεικνύεται χαρακτηριστικά από τη γραμμική σχέση μεταξύ τάσης και παραμόρφωσης στην καμπύλη για το χάλυβα. Η κλίση της καμπύλης αυτής αποτελεί το μέτρο ελαστικότητας E , σύμφωνα με το νόμο του Hooke. Το σημείο του διαγράμματος στο οποίο σταματά η ελαστική συμπεριφορά ονομάζεται όριο αναλογίας.



Εικόνα 1.1: Διάγραμμα τάσης- παραμόρφωσης για μαλακό χάλυβα (Καραγιαννίδης Γ., 2009)

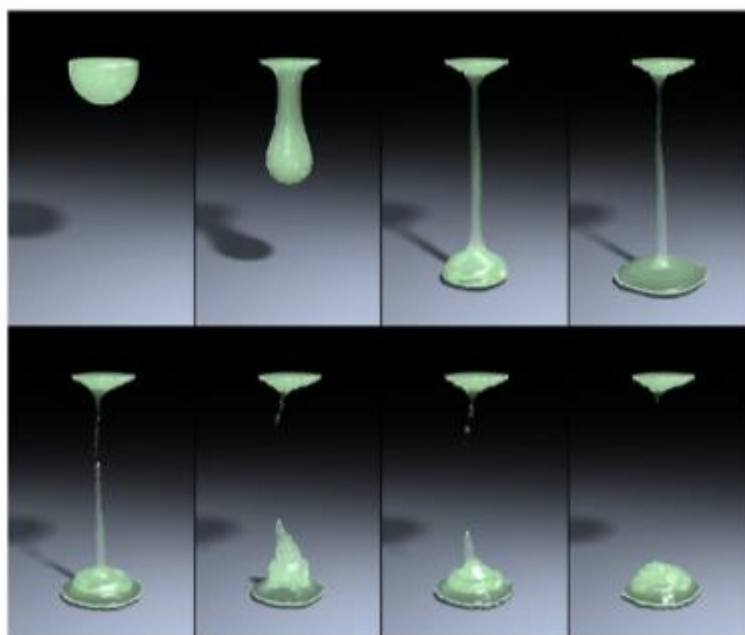
Ανάλογα με το υλικό, το τμήμα της καμπύλης που αντιστοιχεί στην ελαστική συμπεριφορά μπορεί να είναι μη-γραμμικό, όπως στα ελαστομερή υλικά. Και στις δύο περιπτώσεις όμως, με την απομάκρυνση του φορτίου, το υλικό επιστρέφει στην αρχική γεωμετρία του, ακολουθώντας τη διαδρομή φόρτισης με αντίστροφη κατεύθυνση. Όταν το όριο ελαστικότητας είναι κοντά στο όριο αναλογίας, πρόκειται για γραμμικά ελαστικό υλικό. Όταν τα δύο όρια δε βρίσκονται κοντά, αλλά το υλικό εμφανίζει ταυτόσημες καμπύλες φόρτισης-αποφόρτισης, πρόκειται για μη γραμμικά ελαστικό υλικό. Η συμπεριφορά αυτή αντιστοιχεί σε τέλειο ελαστικό υλικό. (Κοντού, Σπαθής, 2001)



Εικόνα 1.2: Διάγραμμα τάσης παραμόρφωσης για ελαστομερές υλικό (Κοντού, Σπαθής, 2001)

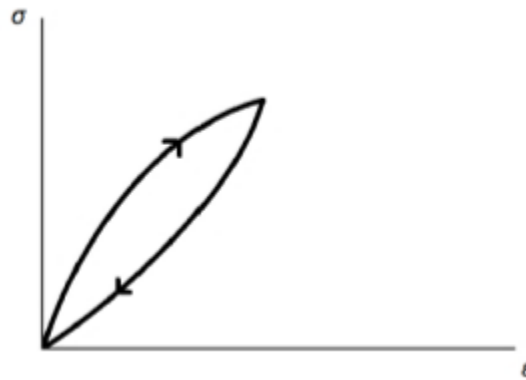
1.1.2 Ιξωδοελαστικότητα

Η μελέτη των παραμορφώσιμων υλικών βασίστηκε στην υπόθεση της γραμμικής ελαστικότητας. Η υπόθεση αυτή όμως αποτελεί μια παραδοχή για τα περισσότερα υλικά, και άρα είναι απαραίτητο να μελετηθεί και η ανελαστική τους συμπεριφορά. Τα άμορφα πολυμερή ανήκουν στα γραμμικά ιξωδοελαστικά υλικά. Σε ορισμένες θερμοκρασίες και τα σύνθετα υλικά, όπως τα κεραμικά αλλά και όλα τα μη-μεταλλικά υλικά συμπεριφέρονται ως γραμμικά ιξωδοελαστικά. Οι περισσότερες εφαρμογές ιξωδοελαστικών υλικών απαντώνται κυρίως στις κατασκευές. Στην Εικόνα 1.3 παρουσιάζεται η ροή ενός ιξωδοελαστικού υλικού, στο οποίο είναι εμφανής τόσο ο ελαστικός χαρακτήρας όσο και η αντίσταση στην παραμόρφωση λόγω του ιξώδους. (Καραγιαννίδης, 2009)



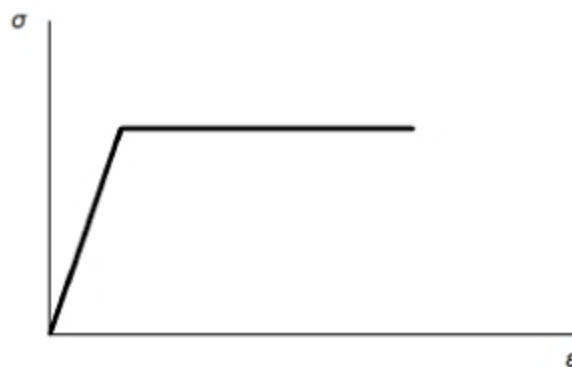
Εικόνα 1.3: Απεικόνιση της ιξωδοελαστικής συμπεριφοράς (Lakes, 2009)

Όταν η φόρτιση ξεπεράσει το όριο αναλογίας και οδηγήσει το υλικό στο όριο ελαστικότητας, δεν έχουμε επαναφορά στην αρχική κατάσταση, ακόμη και ύστερα από την απομάκρυνση του φορτίου. Όταν η καμπύλη αποφόρτισης που ακολουθεί το υλικό είναι διαφορετική από την καμπύλη φόρτισης αλλά έχουμε επιστροφή στην αρχική γεωμετρία, το υλικό ονομάζεται ανελαστικό. Βασικό χαρακτηριστικό της ανελαστικής συμπεριφοράς είναι η εμφάνιση παραμένουσας παραμόρφωσης ύστερα από την απομάκρυνση της δύναμης φόρτισης, ακόμη και αν αυτή η μόνιμη παραμόρφωση εξαφανίζεται σταδιακά με την πάροδο του χρόνου. Αυτή η συμπεριφορά χαρακτηρίζει τα ιξωδοελαστικά υλικά.



Εικόνα 1.4: Διάγραμμα τάσης παραμόρφωσης ανελαστικού υλικού (Κοντού, Σπαθής, 2001)

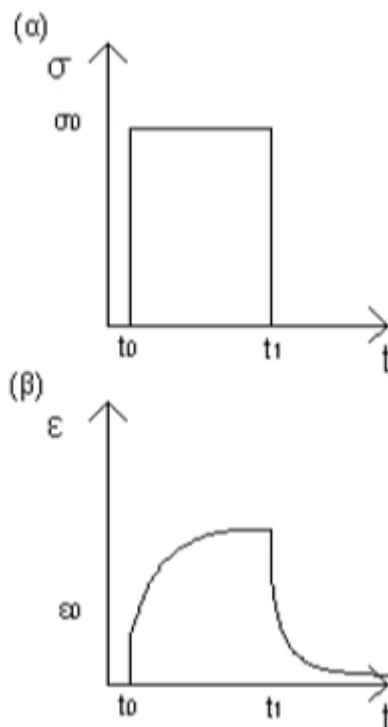
Ιξώδες ονομάζεται η ιδιότητα ενός υλικού να αντιστέκεται στη συνεχή παραμόρφωσή του. Αντίθετα με την ελαστικότητα, η τάση δε συσχετίζεται με την παραμόρφωση αλλά με το ρυθμό παραμόρφωσης. Πολλές κατηγορίες υλικών συμπεριφέρονται ανελαστικά, όπως τα πολυμερή, τα συνθετικά ελαστομερή, τα σύνθετα υλικά, τα μέταλλα σε υψηλές θερμοκρασίες κ.λπ. Τέλος, όταν το υλικό ακολουθεί διαφορετική καμπύλη αποφόρτισης και με μηδενισμό της τάσης, υπάρχει παραμένουσα παραμόρφωση, το υλικό ονομάζεται πλαστικό. (Κοντού, Σπαθής, 2001)



Εικόνα 1.5: Διάγραμμα τάσης παραμόρφωσης γραμμικού ελαστικού, τέλειου πλαστικού υλικού (Κοντού, Σπαθής, 2001)

1.2 Ερπυσμός

Ο ερπυσμός αφορά στην προοδευτική παραμόρφωση ενός υλικού υπό σταθερή τάση. Η μελέτη του ερπυσμού εξετάζει τη μεταβολή της παραμόρφωσης με το χρόνο, υπό την επίδραση ενός σταθερού φορτίου. Εμφανίζεται όταν η καταπόνηση είναι μεγάλης διάρκειας και το επίπεδο τάσης υψηλό, αλλά κάτω από το όριο διαρροής του υλικού. Ο βαθμός στον οποίο θα παραμορφωθεί το υλικό εξαρτάται από τις ιδιότητές του, το χρόνο και τη θερμοκρασία έκθεσης και προφανώς και από το εφαρμοζόμενο φορτίο. Ο συνδυασμός της εφαρμοζόμενης τάσης με της διάρκειάς της, μπορούν να παραμορφώσουν το υλικό σε τέτοιο βαθμό, ώστε να μην είναι πλέον κατάλληλο για την εφαρμογή για την οποία προοριζόταν.



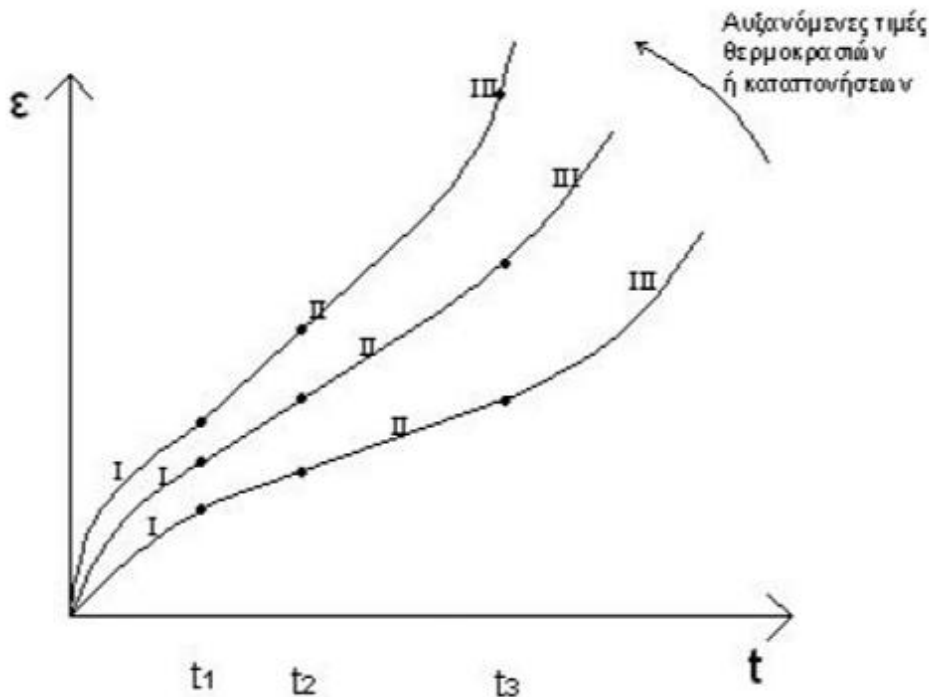
Εικόνα 1.6: Ερπυσμός ιξωδοελαστικού υλικού (α) εφαρμοζόμενη τάση και (β) παραμόρφωση λόγω της εφαρμοζόμενης τάσης συναρτήσει του χρόνου (Αθανασιάδης, 2006)

Στις περισσότερες περιπτώσεις το φαινόμενο του ερπυσμού εμφανίζεται σε υλικά που έχουν εκτεθεί σε υψηλές θερμοκρασίες για μεγάλα χρονικά διαστήματα και κοντά στο σημείο τήξεως. Όταν πρόκειται για πολυμερή υλικά, η μεταβολή της παραμόρφωσής τους κατά την επιβολή σταθερής τάσης εξαρτάται από τη θερμοκρασία υαλώδους μετάβασης του υλικού.

Κατά τις δοκιμές ερπυσμού, ένα δοκίμιο αρχικού μήκους l_0 , το οποίο είναι στερεωμένο στις άκρες του, τοποθετείται εντός φούρνου, που βρίσκεται σε σταθερή θερμοκρασία. Ένα φορτίο εφαρμόζεται στο δοκίμιο διαμέσου ενός βραχίονα. Η μεταβολή του μήκους του δοκιμίου καταγράφεται συναρτήσει του χρόνου του πειράματος. Με τη μέθοδο αυτή, είναι δυνατόν να προσδιοριστεί η αντοχή ενός υλικού σε ερπυσμό. Έτσι, ορίζεται η τάση που απαιτείται να

επιβληθεί σε ένα υλικό, προκειμένου να προκαλέσει καθορισμένη παραμόρφωση σε ορισμένο χρόνο και σε δεδομένη θερμοκρασία.

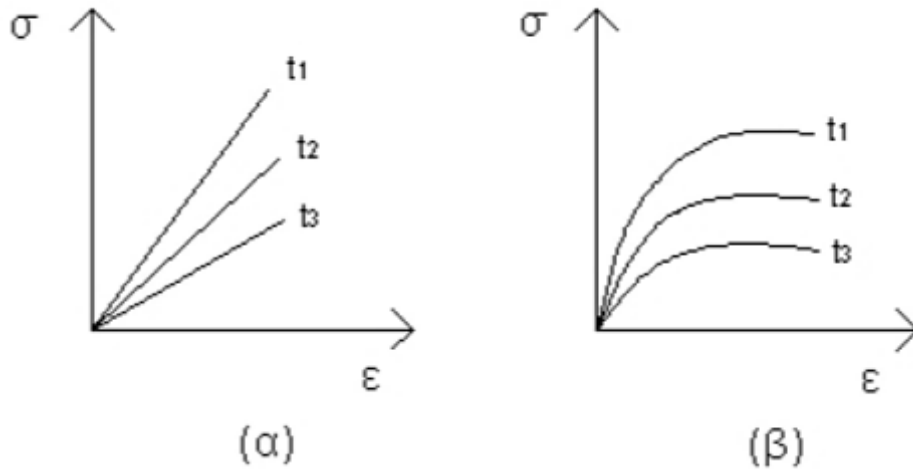
Οι πειραματικά λαμβανόμενες καμπύλες είναι καμπύλες παραμόρφωσης-χρόνου, και έχουν τη μορφή που φαίνεται στην Εικόνα 1.7. Για ορισμένους συνδυασμούς θερμοκρασίας-καταπόνησης, οι καμπύλες ερπυσμού παρουσιάζουν τρεις περιοχές (I, II, III), οι οποίες αντιστοιχούν στον πρωτογενή, δευτερογενή και τριτογενή ερπυσμό, αντίστοιχα.



Εικόνα 1.7: Σχηματική παράσταση των καμπυλών ερπυσμού, για αυξανόμενες τιμές θερμοκρασιών ή καταπονήσεων (Αθανασιάδης, 2006)

Στο στάδιο του πρωτογενούς ερπυσμού, η ταχύτητα της παραμόρφωσης μειώνεται συναρτήσει του χρόνου. Η επίδραση του επιβαλλόμενου φορτίου εξισορροπείται μέσω της σκλήρυνσης του υλικού. Όμως, η αλληλεπίδραση των διαταραχών και η δυσχέρεια στην κίνησή τους, καθιστούν δύσκολη την περαιτέρω σκλήρυνση του υλικού. Το επόμενο στάδιο είναι ο δευτερογενής ερπυσμός, στην οποία η ταχύτητα ερπυσμού σταθεροποιείται. Το φαινόμενο της σκλήρυνσης αντισταθμίζεται από την κίνηση των διαταραχών, και συνεπώς το υλικό συνεχίζει να επιμηκύνεται υπό σταθερή ταχύτητα. Στο τελευταίο στάδιο, τον τριτογενή ερπυσμό, επιταχύνεται η παραμόρφωση του υλικού, καταλήγοντας στη θραύση του. (Αθανασιάδης, 2006)

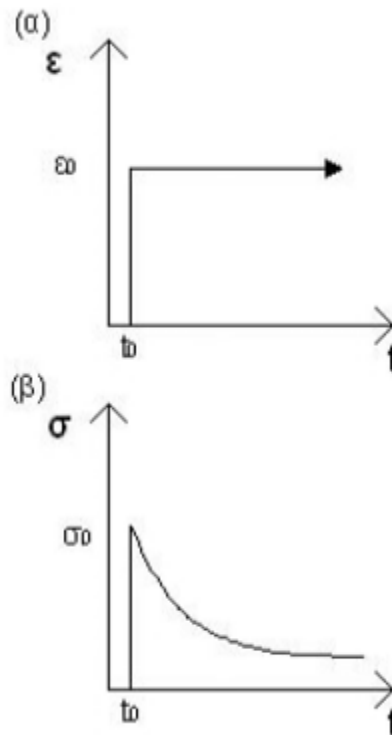
Ο τριτογενής ερπυσμός αντικατοπτρίζει την μη γραμμική ιξωδοελαστικότητα, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι ο δευτερογενής ερπυσμός αποτελεί δείγμα γραμμικής ιξωδοελαστικότητας, παρόλο που η απεικόνιση του είναι ευθεία γραμμή. Γραμμική συσχέτιση σημαίνει γραμμική σχέση μεταξύ αίτιου και αποτελέσματος, δηλαδή τάσης και παραμόρφωσης σε κάθε χρονική στιγμή. Όπως φαίνεται χαρακτηριστικά στην Εικόνα 1.8 η συμπεριφορά του γραμμικού ιξωδοελαστικού υλικό αποτυπώνεται με ευθεία γραμμή στο διάγραμμα τάσης παραμόρφωσης, ενώ η μη γραμμική ιξωδοελαστικότητα προκαλεί καμπυλότητα στο αντίστοιχο διάγραμμα.



Εικόνα 1.8: (α) Γραμμικό και (β) μη γραμμικό ιξωδοελαστικό υλικό (Αθανασιάδης, 2006)

1.3 Χαλάρωση

Η χαλάρωση είναι ένα φαινόμενο που παρατηρείται σε ιξωδοελαστικά υλικά. Αφορά τη σταδιακή μείωση της τάσης συναρτήσει του χρόνου, όταν η παραμόρφωση είναι σταθερή.



Εικόνα 1.9: Φαινόμενο της χαλάρωσης (α) Εφαρμοζόμενη παραμόρφωση και (β) τάση συναρτήσει του χρόνου (Αθανασιάδης, 2006)

Κατά την αντίστοιχη δοκιμή εφαρμόζεται στο δοκίμιο μια τάση πολύ γρήγορα, η οποία προκαλεί μια προκαθορισμένη παραμόρφωση για μεγάλο χρονικό διάστημα, διατηρώντας σταθερή την

παράμετρο της θερμοκρασίας. Η τάση, που χρειάστηκε για να διατηρηθεί η συγκεκριμένη παραμόρφωση, καταγράφεται σε συνάρτηση με τον χρόνο. Λόγω των μοριακών διαδικασιών χαλάρωσης, παρατηρείται μείωση της τάσης συναρτήσει του χρόνου. (Αθανασιάδης, 2006)

1.4 Μηχανικά μοντέλα ελαστικών και ιξωδών υλικών

1.4.1 Ελατήριο

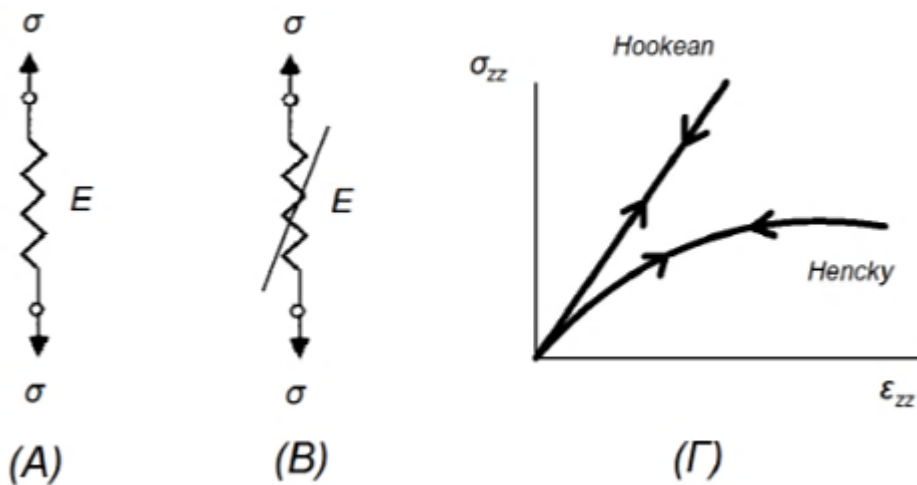
Το μηχανικό ανάλογο των γραμμικών ελαστικών υλικών είναι το ελατήριο, το οποίο μαθηματικά εκφράζεται από το νόμο του Hooke:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (1.1)$$

Στην περίπτωση που ισχύει

$$\sigma \neq E \cdot \varepsilon \quad (1.2)$$

πρόκειται για μη-γραμμικό ελατήριο.



Εικόνα 1.10: Ελαστικό μοντέλο για (Α) γραμμικό ελαστικό Hookean υλικό (Β) για μη-γραμμικό ελαστικό Hencky υλικό (Γ) διάγραμμα τάσης-παραμόρφωσης (Καραγιαννίδης, 2009)

1.4.2 Αποσβεστήρας

Αντίστοιχα με τα ελαστικά, τα ιξώδη υλικά περιγράφονται από τον αποσβεστήρα, διότι η ιξώδης συμπεριφορά συνοδεύεται από σκέδαση ενέργειας. Η τάση συσχετίζεται με το ρυθμό

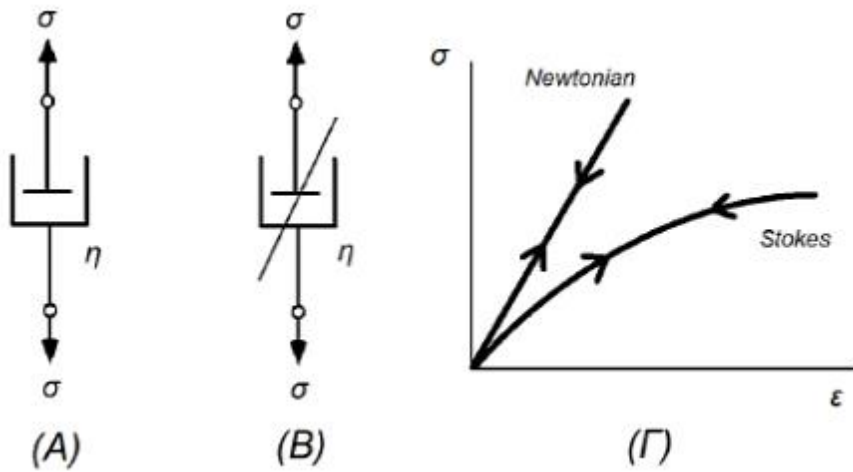
παραμόρφωσης μέσω της σχέσης (1.3) σε νευτώνιο υλικό, το οποίο παρουσιάζει γραμμική ιξώδη συμπεριφορά:

$$\sigma = \eta \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} \Rightarrow \dot{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\eta} \quad (1.3)$$

Αντίστοιχα, όταν έχουμε μη-νευτώνια, μη γραμμική συμπεριφορά, ισχύει η σχέση

$$\dot{\varepsilon} \neq \frac{\sigma}{\eta} \quad (1.4)$$

όπου η είναι ο συντελεστής εφελκυστικού ιξώδους.



Εικόνα 1.11: Αποσβεστήρας ως μηχανικό ανάλογο γραμμικού ιξώδους υλικού (Καραγιαννίδης, 2009)

1.5 Μηχανικά μοντέλα ιξωδοελαστικών υλικών

Η συμπεριφορά ενός ιξωδοελαστικού υλικού περιγράφεται με συνδυασμούς ελατηρίων και απορροφητήρων. Τα κύρια μοντέλα που χρησιμοποιούνται είναι: το μοντέλο Maxwell και το μοντέλο Kelvin-Voigt, χρησιμοποιούνται όμως και μοντέλα που προκύπτουν από το συνδυασμό αυτών. (Κοντού, Σπαθής, 2001)

1.5.1 Μοντέλο Maxwell

Στο μοντέλο αυτό, το ελατήριο και το έμβολο είναι τοποθετημένα σε σειρά.



Εικόνα 1.12: Μοντέλο Maxwell(Καραγιαννίδης, 2009)

Η εφαρμογή τάσης σ , οδηγεί σε συνολική παραμόρφωση ίση με το άθροισμα των δύο παραμορφώσεων ε_1 και ε_2 .

Δηλαδή:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad (1.5)$$

όπου το ε_1 υπολογίζεται από την εξίσωση(1.6):

$$\sigma = \eta \frac{d\varepsilon_1}{dt} = \eta \cdot \dot{\varepsilon}_1 \quad (1.6)$$

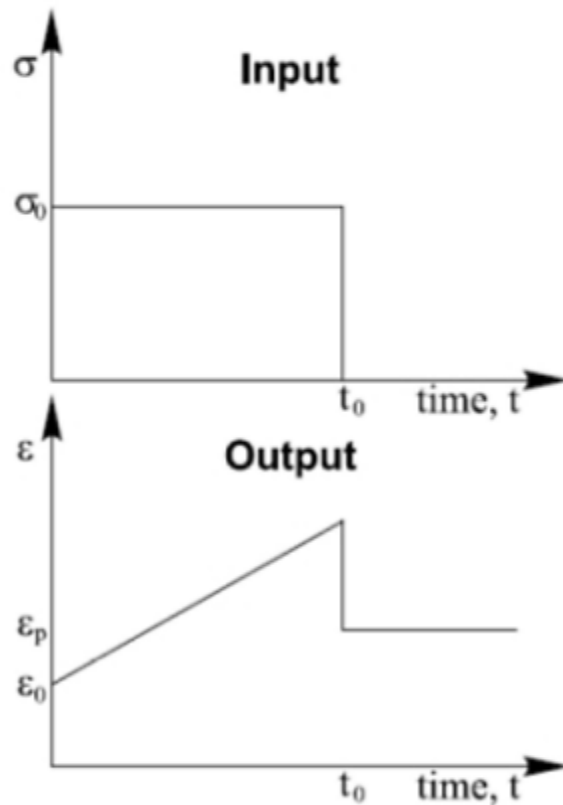
και το ε_2 από την εξίσωση(1.7):

$$\sigma = E \cdot \varepsilon_2 \quad (1.7)$$

Επειδή στην εξίσωση (1.6) εμφανίζεται η παράγωγος της παραμόρφωσης, παραγωγίζουμε την εξίσωση (1.5) και προκύπτει:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon_1}{dt} + \frac{d\varepsilon_2}{dt} = \frac{\sigma}{\eta} + \frac{1}{E} \cdot \frac{d\sigma}{dt} \quad (1.8)$$

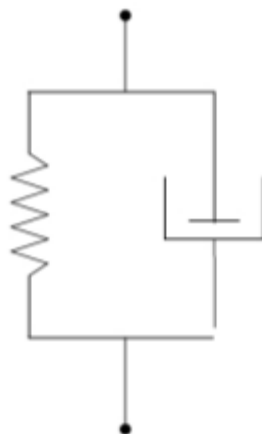
Από την εξίσωση (1.8) προκύπτει ο ρυθμός παραμόρφωσης σύμφωνα με το μοντέλο Maxwell.



Εικόνα 1.13: Μεταβολή της παραμόρφωσης με το χρόνο κάτω από την επίδραση σταθερής τάσης (ερπυσμός) μέχρι τη χρονική στιγμή t_0 (Καραγιαννίδης, 2009)

1.5.2 Μοντέλο Kelvin-Voigt

Στο μοντέλο αυτό, το ελατήριο και το έμβολο είναι τοποθετημένα παράλληλα.



Εικόνα 1.14: Μοντέλο Kelvin-Voigt(Καραγιαννίδης, 2009)

Στην περίπτωση αυτή, η τάση που ασκείται κατανέμεται και στο ελατήριο και στον αποσβεστήρα.

Δηλαδή:

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \quad (1.9)$$

όπου οι τάσεις σ_1 και σ_2 υπολογίζονται επίσης από τις εξισώσεις (1.10) και (1.11).

$$\sigma_1 = \eta \frac{d\varepsilon}{dt} = \eta \cdot \dot{\varepsilon} \quad (1.10)$$

$$\sigma_2 = E \cdot \varepsilon \quad (1.11)$$

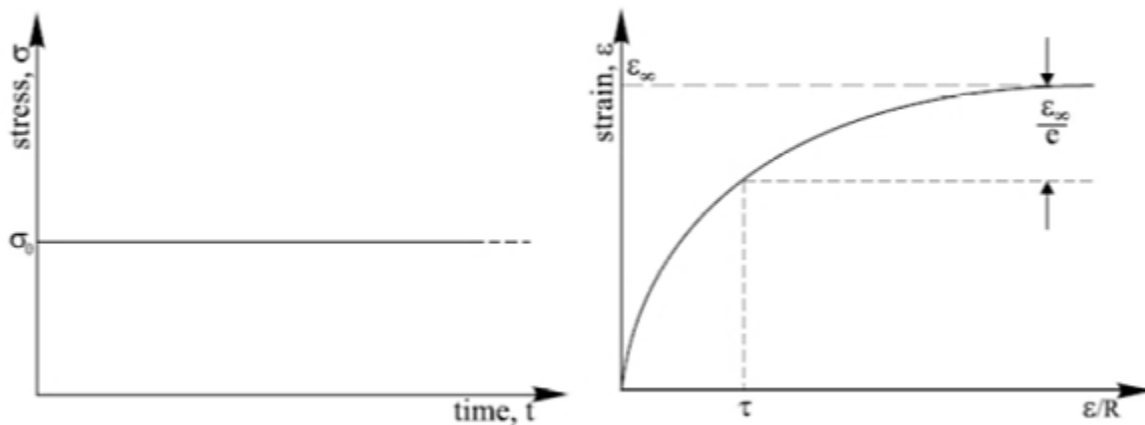
Η συνολική παραμόρφωση που παρατηρείται θα ισούται τόσο με την παραμόρφωση του ελατηρίου όσο και του αποσβεστήρα, άρα:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \quad (1.12)$$

Συνεπώς:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon + \eta \cdot \dot{\varepsilon} = E \cdot \varepsilon + \eta \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (1.13)$$

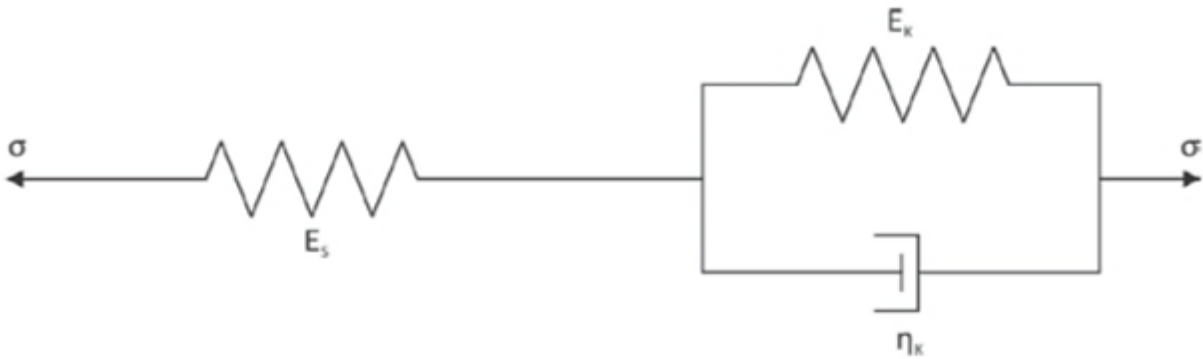
Η εξίσωση (1.13) δίνει τη μεταβολή του ρυθμού παραμόρφωσης σύμφωνα με το μοντέλο των Kelvin-Voigt.



Εικόνα 1.15: Μεταβολή της παραμόρφωσης με το χρόνο κάτω από την επίδραση σταθερής τάσης (ερπυσμός) σύμφωνα με το μοντέλο Kelvin-Voigt (Καραγιαννίδης, 2009)

1.5.3 Τριπαραμετρικό μοντέλο

Το μοντέλο αυτό αποτελείται από ένα ελατήριο συνδεδεμένο σε σειρά με ένα στοιχείο Kelvin, όπως φαίνεται στην Εικόνα 1.16.



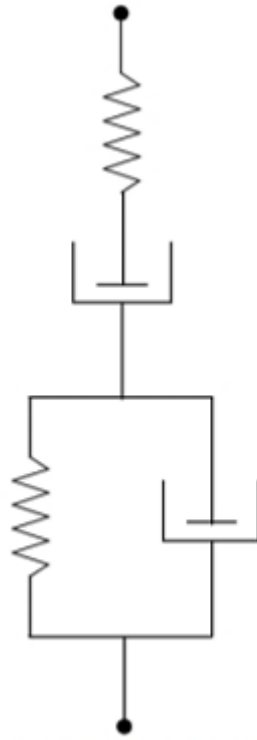
Εικόνα 1.16: Τριπαραμετρικό μοντέλο (Καραγιαννίδης, 2009)

Συμβολίζοντας με S το ελατήριο και K το στοιχείο Kelvin, προκύπτει η καταστατική εξίσωση:

$$\sigma + \frac{\eta_K}{E_s E_K} \dot{\sigma} = \frac{E_s E_K}{E_s + E_K} \varepsilon + \frac{E_s \eta_K}{E_s + E_K} \dot{\varepsilon} \quad (1.14)$$

1.5.4 Τετραπαραμετρικό μοντέλο Burgers

Στο μοντέλο αυτό τοποθετούνται ένα μοντέλο Maxwell και ένα μοντέλο Kelvin σε σειρά, όπως φαίνεται στην Εικόνα 1.17.



Εικόνα 1.17: Συνδυασμένο μοντέλο Maxwell-Kelvin (Καραγιαννίδης, 2009)

Για να υπολογιστεί η συνολική παραμόρφωση στην περίπτωση αυτή, αθροίζονται οι παραμορφώσεις από τα δύο μοντέλα. Συνεπώς:

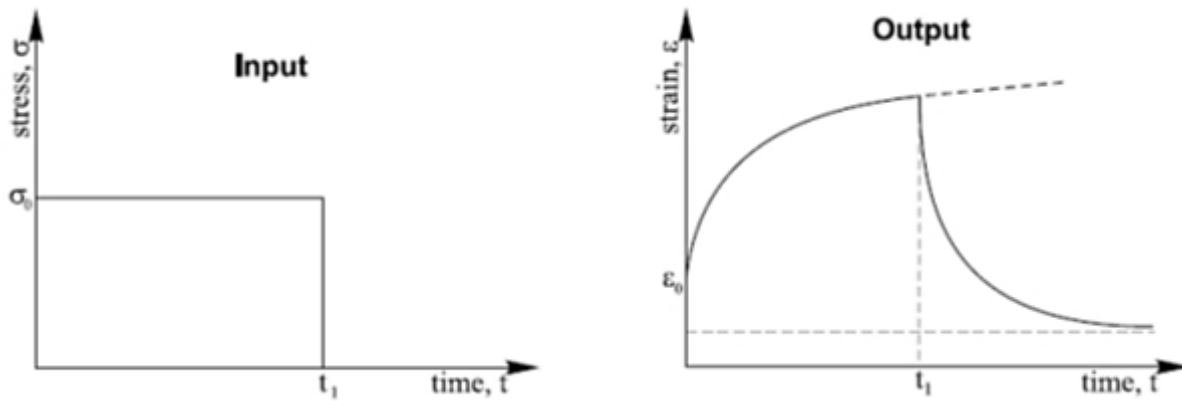
$$\varepsilon = \varepsilon_M + \varepsilon_K = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_K \quad (1.15)$$

Κατά τον ερπυσμό, όπου η τάση είναι σταθερή ($\sigma = \text{σταθ}$) ισχύει:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_M} + \frac{\sigma}{\eta_M} \cdot t + \frac{\sigma}{E_K} \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{E_K}{\eta_K} t\right) \right] \quad (1.16)$$

Άρα ο ρυθμός παραμόρφωσης είναι:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sigma}{\eta_M} + \frac{\sigma}{\eta_K} \exp\left(-\frac{E_K}{\eta_K} t\right) \quad (1.17)$$



Εικόνα 1.18: Μεταβολή της παραμόρφωσης με το χρόνο κάτω από την επίδραση σταθερής τάσης (ερπυσμός) σύμφωνα με το μοντέλο Maxwell - Kelvin (Καραγιαννίδης, 2009)

1.6 Παραδείγματα και Εφαρμογές ιξωδοελαστικών υλικών

Η ιξωδοελαστικότητα είναι σημαντική ιδιότητα των υλικών που πρέπει να λαμβάνεται υπόψη στις εφαρμογές τους. Τα φυσικά ιξωδοελαστικά υλικά, όπως η πέτρα, το έδαφος ή το ξύλο χρησιμοποιούνται σε οικοδομικές κατασκευές. Αντίστοιχα, οι μαλακοί ιστοί και τα οστά βρίσκουν εφαρμογή στην εμβιομηχανική και για το λόγο αυτό πρέπει να είναι γνωστές οι ιξωδοελαστικές τους ιδιότητες. Η ιξωδοελαστική συμπεριφορά δεν είναι πάντα επιθυμητή. Για παράδειγμα εμφανίζεται σε πολλά τεχνητά υλικά που χρησιμοποιούνται σε μηχανολογικές εφαρμογές ως παρενέργεια. Από την άλλη πλευρά, σε πολλές περιπτώσεις η ιξωδοελαστικότητα είναι επιθυμητή ιδιότητα.

Αφρώδες πολυμερές: Ωτοασπίδες

Οι ωτοασπίδες αποτελούν παράδειγμα εφαρμογής των ιξωδοελαστικών υλικών. Η χρησιμότητά τους έγκειται στην εξασθένηση του ήχου που εισέρχεται στο αυτί. Κατασκευάζονται από αφρώδες πολυμερές υλικό με ελεγχόμενη ιξωδοελαστική συμπεριφορά. Συγκεκριμένα, ενώ το αρχικό σχήμα τους είναι κυλινδρικό, όταν τοποθετούνται στο εσωτερικό κανάλι του αυτιού, διαστέλλονται, έως ότου πληρώσουν όλο τον κενό χώρο. Με τον τρόπο αυτό προστατεύουν το κανάλι του αυτιού από τον υπερβολικό θόρυβο.

Γυαλί: Βιτρό

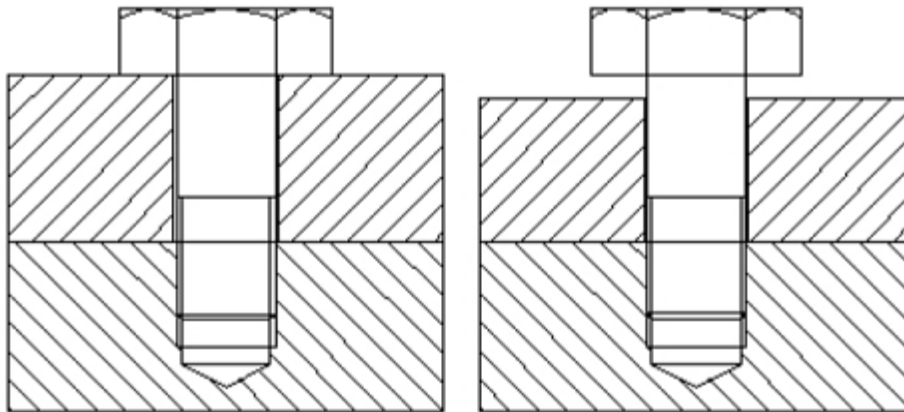
Ένα άλλο ιξωδοελαστικό υλικό είναι το γυαλί. Όταν το γυαλί έχει θερμανθεί σε κατάλληλη θερμοκρασία, η ροή είναι παρατηρήσιμη από το ανθρώπινο μάτι (Εικόνα 1.19). Θεωρείται βέβαια ότι γυαλί ρέει ακόμη και όταν βρίσκεται σε θερμοκρασία δωματίου, αλλά με πολύ αργούς ρυθμούς, οι οποίοι δεν είναι παρατηρήσιμοι, αλλά με την αύξηση της θερμοκρασίας επιταχύνεται η χαλάρωση. Μια περίπτωση στην οποία μπορεί να εντοπιστεί το φαινόμενο αυτό είναι τα βιτρό παράθυρα των καθεδρικών ναών, στα οποία το κάτω μέρος φαίνεται παχύτερο από το επάνω. Το γεγονός αυτό αποδίδεται στη βραδεία ροή του γυαλιού προς τα κάτω στο πέρασμα των αιώνων στη θερμοκρασία του περιβάλλοντος.



Εικόνα 1.19: Ροή θερμού γυαλιού

Μέταλλα σε υψηλές θερμοκρασίες: Κοχλιοσυνδέσεις

Οι κοχλιοσυνδέσεις αποτελούν συνδετικά στοιχεία σε κινητήρες, δοχεία πίεσης, αντιδραστήρες, κ.λπ. Μια κοχλιοσύνδεση μπορεί να αστοχήσει είτε στον κοχλία, είτε στα συνδεδεμένα στοιχεία και προκαλείται λόγω της πλαστικής παραμόρφωσης μετά την παρέλευση κάποιου χρονικού διαστήματος.



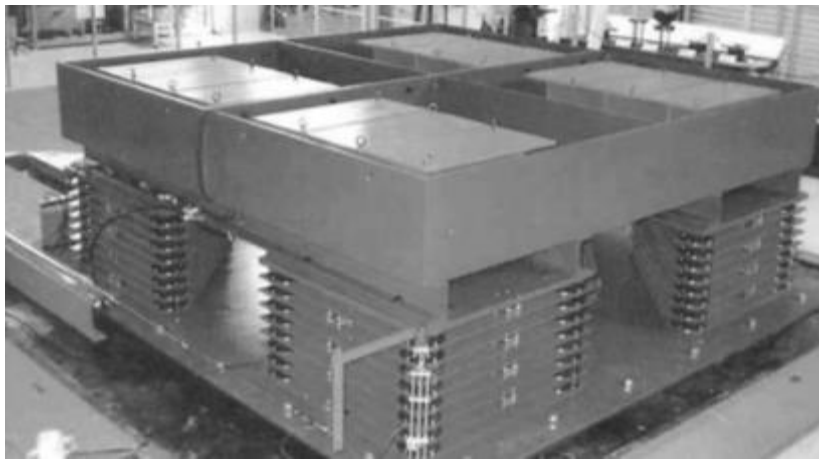
Εικόνα 1.20: Παραμόρφωση κοχλιοσύνδεσης λόγω ιξωδοελαστικότητας

Δέρμα

Ένα ακόμη ιξωδοελαστικό υλικό είναι το δέρμα. Όταν υφίσταται μια παροδική παραμόρφωση, παρατηρείται καθυστέρηση στην επαναφορά του. Η ικανότητα ανάκτησης του αρχικού σχήματος είναι εξαιρετικά σημαντική στην πλαστική χειρουργική. Πολλές ασθένειες οδηγούν σε αλλαγή των μηχανικών ιδιοτήτων του δέρματος, και μέσω του τρόπου αυτού διαγιγνώσκονται.

Ένας κοινός και αποτελεσματικός τρόπος για να μειωθεί η παροδική και η συνεχής δόνηση στις κατασκευές είναι να προστεθεί ένα στρώμα ιξωδοελαστικού υλικού, όπως το καουτσούκ, σε μια υπάρχουσα δομή. Το συνδυασμένο σύστημα έχει συχνά ένα υψηλότερο επίπεδο απόσβεσης και έτσι μειώνει την ανεπιθύμητη δόνηση. Η απλούστερη μορφή ενός ιξωδοελαστικού αποσβεστήρα είναι μια περιορισμένη στρώση υλικού σε μία δοκό. Αυτό θα μπορούσε να γίνει από δύο μεταλλικές πλάκες συνδεδεμένες μεταξύ τους, επιτυγχάνοντας υψηλή απόσβεση. (Connor, 2008)

Οι πρώτες εκδόσεις των TMDs χρησιμοποιούν πολύπλοκους μηχανισμούς για τα έδρανα και για τα διάφορα στοιχεία των αποσβεστήρων, έχοντας σχετικώς μεγάλες μάζες, με αποτέλεσμα να καταλαμβάνουν σημαντικό χώρο και να είναι αρκετά ακριβά. Οι πρόσφατες εκδόσεις έχουν σχεδιαστεί για να ελαχιστοποιήσουν αυτούς τους περιορισμούς. Αυτό το σύστημα χρησιμοποιεί μια συλλογή εδράνων από ελαστομερή, φτιαγμένα από καουτσούκ ,που λειτουργούν ως ελατήρια διάτμησης και ελαστικές ενώσεις ασφάλτου (bitumenrubbercompound 'BRC'). Αυτά τα έδρανα παρέχουν δυνατότητα απόσβεσης, λόγω των ελαστικών στοιχείων. Η συσκευή τέτοιου τύπου είναι συμπαγής σε μέγεθος, απαιτεί απλούς ελέγχους, λειτουργεί σε πολλαπλές κατευθύνσεις, συναρμολογείται και τροποποιείται εύκολα. Μια πραγματική εγκατάσταση παρουσιάζεται στην Εικόνα 1.21. (Connor, 2008)



Εικόνα 1.21: Συντονισμένη μαζική διάταξη απόσβεσης με ελατήρια και αποσβεστήρες (Connor, 2008)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Μη γραμμικά ιξωδοελαστικά μοντέλα

2.1 Εισαγωγή στη μη γραμμική ιξωδοελαστικότητα

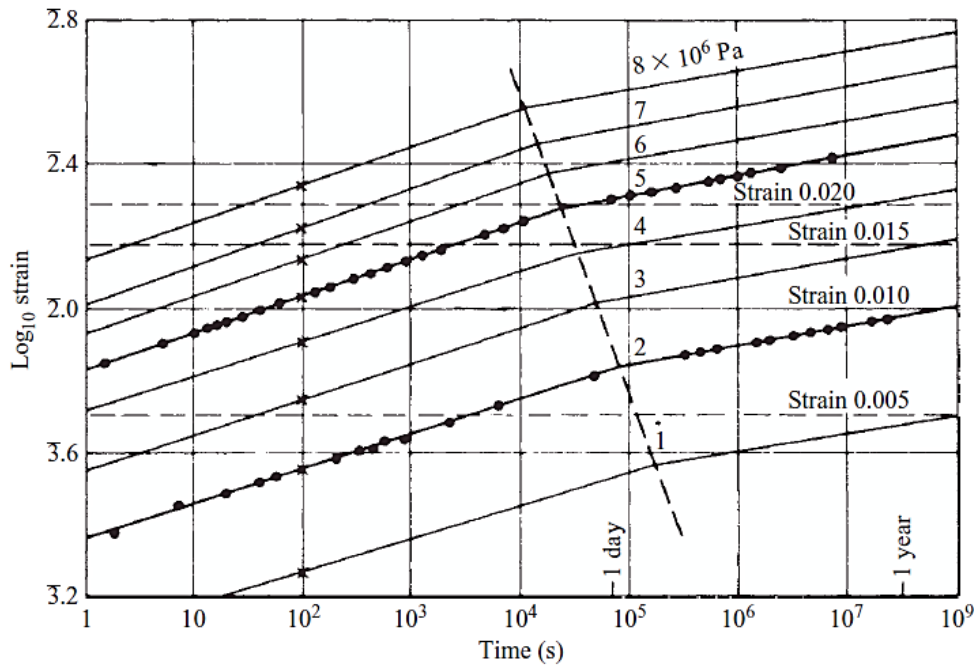
Υπάρχει πληθώρα εφαρμογών όπου δεν παρουσιάζεται γραμμικότητα στη συμπεριφορά των ιξωδοελαστικών υλικών. Συνήθως η γραμμικότητα περιορίζεται σε μικρές παραμορφώσεις. Με τη συνεχή παραμόρφωση ενός υλικού δημιουργείται εν τέλει μεγάλη παραμόρφωση, στην οποία δεν εφαρμόζεται η θεωρία της γραμμικότητας. Ακόμη και σε μικρές παραμορφώσεις όμως, μπορεί να μην παρατηρείται γραμμική ιξωδοελαστική συμπεριφορά.

Κατά την εκτέλεση ενός πειράματος, μπορεί αρχικά να παρατηρηθεί γραμμική απόκριση, αλλά σε μεγάλα χρονικά διαστήματα εμφανίζεται ισχυρή μη γραμμικότητα. Οι μη γραμμικές ιξωδοελαστικές συμπεριφορές δεν έχουν αναπαρασταθεί πλήρως, ούτε έχουν πλήρως διευκρινιστεί οι αιτίες για τις οποίες εμφανίζονται. Για το λόγο αυτό οι θεωρητικές προσεγγίσεις παρουσιάζουν αποκλίσεις σε σχέση με τα πειραματικά αποτελέσματα.

Η μελέτη όμως της μη γραμμικής ιξωδοελαστικότητας έχει μεγάλη πρακτική σημασία και εφαρμογή. Έχουν προταθεί διάφορες προσεγγίσεις, είτε πιο πρακτικές είτε αμιγώς θεωρητικές, για την προσέγγιση του θέματος. Υπάρχουν διάφορες προσεγγίσεις της μη γραμμικής ιξωδοελαστικής συμπεριφοράς: η μηχανική, η ρεολογική και η μοριακή προσέγγιση.

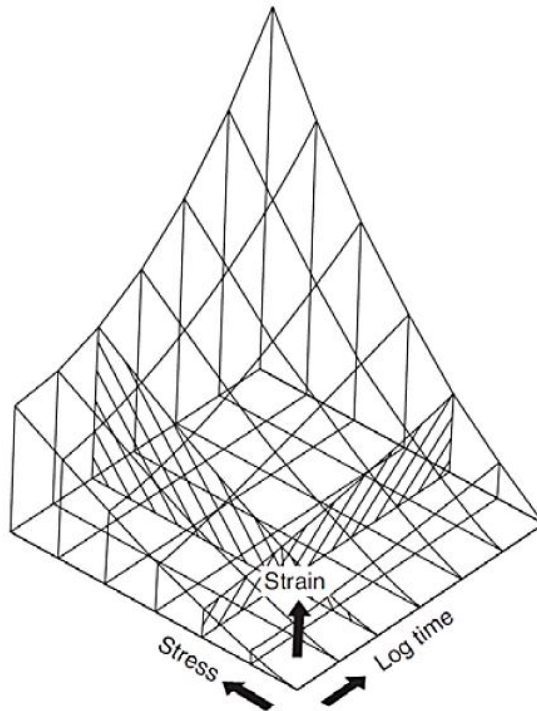
2.2 Μηχανική προσέγγιση

Η προσέγγιση αυτή απαιτεί όσο το δυνατόν λιγότερα πειράματα για τη διερεύνηση της συμπεριφοράς του υλικού. Αρκούν οι εμπειρικές σχέσεις μεταξύ τάσης, παραμόρφωσης και ερπυσμού για την προσέγγιση της συμπεριφοράς του υλικού, χωρίς να επιχειρείται η εξέταση της φυσικής σημασίας. Στη γενική περίπτωση, οι καμπύλες ερπυσμού πρέπει να καλύπτουν ολόκληρο το εύρος των τάσεων σε όσο το δυνατόν μεγαλύτερη χρονική περίοδο. Ο Turner (1965) έδειξε ότι όταν η τάση και η χρονική εξάρτηση είναι διαχωρίσιμες, είναι εφικτός ο προσδιορισμός μιας καμπύλης ερπυσμού με παρεμβολή μεταξύ δυο γνωστών καμπυλών ερπυσμού, σε συνδυασμό με μια καμπύλη τάσης-παραμόρφωσης για δεδομένη χρονική στιγμή (π.χ. 100 s). Στην Εικόνα 2.1 παρουσιάζονται οι καμπύλες ερπυσμού του πολυπροπυλενίου στους 60°C. Η τάση και η χρονική εξάρτηση είναι σχεδόν διαχωρίσιμες και συνεπώς οι καμπύλες ερπυσμού σε ενδιάμεσες τάσεις μπορούν να βρεθούν μέσω γραμμικής παρεμβολής μεταξύ δύο γνωστών καμπυλών για δεδομένη ισόχρονη σχέση τάσης- παραμόρφωσης.



Εικόνα 2.1: Ερπυσμός πολυπροπυλενίου στους 60°C(Wardetal., 2004)

Σε ένα γραμμικό ιξωδοελαστικό υλικό, η συμπεριφορά κατά τον ερπυσμό ως προς το χρόνο, είναι απολύτως καθορισμένη για δεδομένη τάση, υπό σταθερή θερμοκρασία. Όμως, η συμπεριφορά ενός μη γραμμικού ιξωδοελαστικού υλικού ως προς το χρόνο πρέπει να προσδιοριστεί για διάφορες τιμές της τάσης. Είναι απαραίτητο να δημιουργηθούν μαθηματικά μοντέλα τόσο για τη φόρτιση, όσο και για την αποφόρτιση του υλικού. (Turner, 1965) Ο μηχανικός όμως για να ξεκινήσει τη μελέτη του, εξετάζει τη σχέση μεταξύ τάσης-παραμόρφωσης και χρόνου και μελετά τον ερπυσμό υπό σταθερή τάση. Το διάγραμμα που παράγεται φαίνεται στην Εικόνα 2.2



Εικόνα 2.2: Σχέση τάσης-παραμόρφωσης και χρόνου κατά τον ερπυσμό (Turner, 1965)

Οι ισόχρονες καμπύλες τάσης-παραμόρφωσης απεικονίζονται από τις κάθετες γραμμές στην Εικόνα 2.2. Παρόλα αυτά, τα στοιχεία αυτά δεν επαρκούν για να προβλεφθεί η μη γραμμική συμπεριφορά. Για παράδειγμα, μια απότομη μεταβολή του ρυθμού παραμόρφωσης, θα οδηγήσει σε μια ραγδαία μεταβολή και στην τιμή της τάσης. Αυτό όμως δεν μπορεί να παρουσιαστεί στην ομαλή επιφάνεια του σχήματος.

Σύμφωνα με τους Ραο και Martin(1953), το άθροισμα της παραμόρφωσης κατά τον ερπυσμό αποτελείται από τρεις ανεξάρτητες συνιστώσες: το κομμάτι της ελαστικής παραμόρφωσης ε_1 , το κομμάτι της παροδικά ανακτήσιμης ιξωδοελαστικής παραμόρφωσης ε_2 και τέλος το κομμάτι της μόνιμα μη ανακτήσιμης πλαστικής παραμόρφωσης ε_3 . Η προσέγγιση αυτή παρουσιάστηκε κυρίως για τα μέταλλα.

Όταν η τάση είναι σταθερή, η ελαστική παραμόρφωση υπολογίζεται, ως γνωστόν, από τη σχέση:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma}{E} \quad (2.1)$$

όπου E: το μέτρο του Young.

Η ιξωδοελαστική παραμόρφωση ορίζεται ολοκληρώνοντας τη σχέση όπου ο στιγμιαίος ερπυσμός είναι συνάρτηση της τάσης και της ιξωδοελαστικής παραμόρφωσης:

$$\frac{d\varepsilon_2}{dt} = f(\varepsilon_2, \sigma) \quad (2.2)$$

Για τον υπολογισμό της πλαστικής παραμόρφωσης ολοκληρώνεται η σχέση, στην οποία η πλαστική παραμόρφωση είναι συνάρτηση μόνο της τάσης.

Το άθροισμα των παραμορφώσεων αυτών δίνει τη συνολική παραμόρφωση κατά τον ερπυσμό υπό σταθερή τάση και ισούται με:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + K \cdot \sigma^n \cdot (1 - e^{-qt}) + B\sigma^n t \quad (2.3)$$

όπου K , n , q και B σταθερές του υλικού.

Μια προσπάθεια για την προσομοίωση του ερπυσμού των πλαστικών μέσω αναλυτικών σχέσεων έγινε από τον Findlay(1955). Η σχέση στην οποία κατέληξε είναι η ακόλουθη:

$$\varepsilon_c = \varepsilon_o + m \cdot t^n \quad (2.4)$$

όπου ε_o και m είναι οι σταθερές της τάσης για δεδομένο υλικό και n είναι η σταθερά του υλικού. Στη συνέχεια προτάθηκε και η σχέση (2.5):

$$\varepsilon_c(\sigma, t) = \varepsilon'_o \sinh \frac{\sigma}{\sigma_\varepsilon} + m' \cdot t^n \sinh \frac{\sigma}{\sigma_m} \quad (2.5)$$

όπου m' , σ_ε και σ_m είναι οι σταθερές του υλικού. Η εξίσωση αυτή δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα στην περίπτωση μονοβηματικού ερπυσμού. Επίσης είναι ιδιαίτερα ακριβής για τη περιγραφή του ερπυσμού σύνθετου υλικού από γραφίτη και εποξική κόλλα.

Οι σχέσεις αυτές είναι μεν εμπειρικές, αλλά αποδεικνύονται στην πράξη πολύ χρήσιμες για τον υπολογισμό του ερπυσμού υπό σταθερή τάση, όταν όμως είναι γνωστές οι παράμετροι του υλικού. Τα μειονεκτήματα που έχουν οι παραπάνω σχέσεις είναι ότι δε δίνουν μια γενική αναπαράσταση για το φαινόμενο του ερπυσμού, δηλαδή για την επαναφορά του και τη συμπεριφορά του υλικού υπό σύνθετα φορτία. Επίσης τα αποτελέσματα αυτά δε μπορούν να συσχετιστούν με τη χαλάρωση. (Findlay, 1955).

2.3 Ρεολογική προσέγγιση

Η γραμμική ιξωδοελαστική συμπεριφορά έχει επιχειρηθεί να επεκταθεί και σε μη γραμμικές περιπτώσεις. Μια γραμμή ανάπτυξης υπήρξε η διατήρηση της ικανότητας διαχωρισμού της τάσης, της παραμόρφωσης και του χρόνου στις συναρτησιακές αναπαραστάσεις ακολουθώντας την αυστηρή μηχανική του συνεχούς μέσου. Μια δεύτερη γραμμή ανάπτυξης έχει βασιστεί στην πολλαπλή ολοκλήρωση που οδηγεί σε σημαντική μαθηματική πολυπλοκότητα. Ορισμένα

πολύπλοκα ολοκληρωτικά μοντέλα στην πορεία σταμάτησαν να χρησιμοποιούνται, ενώ μεγαλύτερη εφαρμογή βρήκαν μοντέλα που συσχετίζονται με το ρυθμό πλαστικότητας του υλικού.

Η διαφορική προσέγγιση στη γραμμική ιξωδοελαστικότητα μπορεί να τροποποιηθεί κατάλληλα ώστε να συμπεριλάβει και την περιγραφή της μη γραμμικότητας. Οι δύο βασικότερες τέτοιες προσεγγίσεις είναι του Smith (1962) και των Kitagawaetal (1989). Ο πρώτος ερευνητής κατάφερε να γενικεύσει τη γραμμική θεωρία και σε μεγάλες παραμορφώσεις, δημιουργώντας ένα γενικευμένο μοντέλο Maxwell, ενώ η δεύτερη ερευνητική ομάδα επικεντρώθηκε στη διαφορική εξίσωση του πρότυπου γραμμικού υλικού. (Wardetal., 2004)

Μια διαφορετική προσέγγιση για την εισαγωγή της μη γραμμικότητας στα μοντέλα είναι η ολοκληρωτική, η οποία βασίζεται στη γενίκευση της αρχής της επαλληλίας του Boltzmann. Για να γίνει αυτό, λαμβάνεται υπόψη η εξάρτηση της ολοκλήρωσης από την τάση ή την παραμόρφωση. Ο Leederman, ο οποίος χρησιμοποίησε τη μέθοδο αυτή για τη μελέτη των ινών πολυμερούς εξέφρασε το ολοκλήρωμα στην ακόλουθη μορφή:

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t J(t-\tau) \frac{d}{d\tau} f\{\sigma(\tau)\} d\tau \quad (2.6)$$

το οποίο δείχνει ότι με την πάροδο του χρόνου, η παραμόρφωση εξαρτάται από την τάση. Η συνάρτηση f αφορά ξεχωριστά το κάθε πολυμερές και προσδιορίζεται μέσω πειράματος. Από τη μορφή του ολοκληρώματος είναι εμφανής ο διαχωρισμός του χρόνου και της τάσης από το μέτρο ενδοτικότητας σε ερπυσμό.

Μια ακόμη απλή προσαρμογή της αρχής της υπέρθεσης του Boltzmann έγινε από τους Findlay και Lai(1967), οι οποίοι εφάρμοσαν το ιστορικό βηματικών τάσεων σε πολυβινολοχλωρίδιο. Η θεωρία τους διατυπώθηκε ξανά από τους Pipkin και Rogers(1968) για το ιστορικό γενικών τάσεων και παραμορφώσεων. Οι Pipkin και Rogers όρισαν ένα μη γραμμικό μέτρο χαλάρωσης τάσης $R(t,e)$

$$R(t,e) = \frac{\partial \sigma(t,e)}{\partial e} \quad (2.7)$$

Το ολοκλήρωμα των Pipkin και Rogers για την τάση ως προς το ιστορικό παραμόρφωσης είναι:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t \frac{de}{d\tau}(\tau) R[t-\tau, e(\tau)] d\tau \quad (2.8)$$

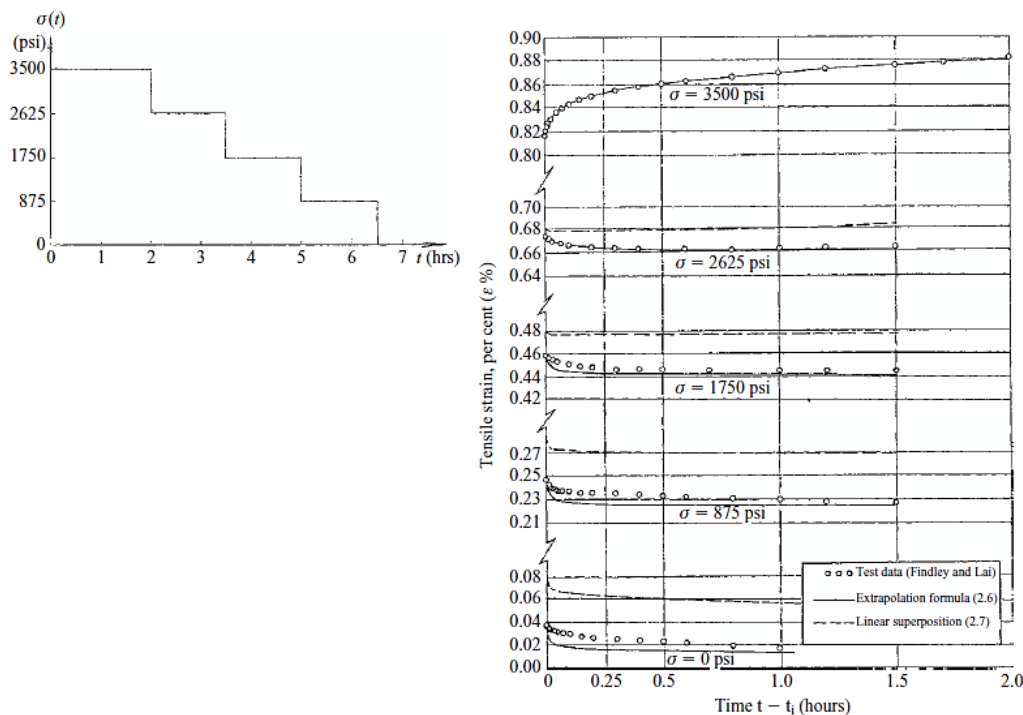
Παρομοίως, για την τάση ως προς το ιστορικό παραμόρφωσης, η συνάρτηση ερπυσμού C ορίζεται ως:

$$C(t,\sigma) = \frac{\partial e(t,\sigma)}{\partial \sigma} \quad (2.9)$$

και ο αντίστοιχος ολοκληρωτικός νόμος είναι:

$$e(t) = \int_{-\infty}^t \frac{d\sigma}{d\tau}(\tau) C[t-\tau, \sigma(\tau)] d\tau \quad (2.10)$$

Οι Pirkkin και Rogers έλεγξαν το μοντέλο τους (εξίσωση (2.10)) χρησιμοποιώντας δημοσιευμένα δεδομένα για το πολιβινιλοχλωρίδιο υπό συνθήκες πολυβηματικού ερπυσμού. Εφάρμοσαν μια σταθερή τάση για μια προκαθορισμένη περίοδο και στη συνέχεια τη μετέβαλαν απότομα σε ένα διαφορετικό επίπεδο για ένα δεύτερο χρονικό διάστημα κ.ο.κ. Με τον τρόπο αυτό ο έλεγχος της θεωρίας είναι πιο ακριβής, σε σχέση με την εφαρμογή σταθερού ρυθμού παραμόρφωσης. Τα αποτελέσματά τους φαίνονται στην Εικόνα 2.3.



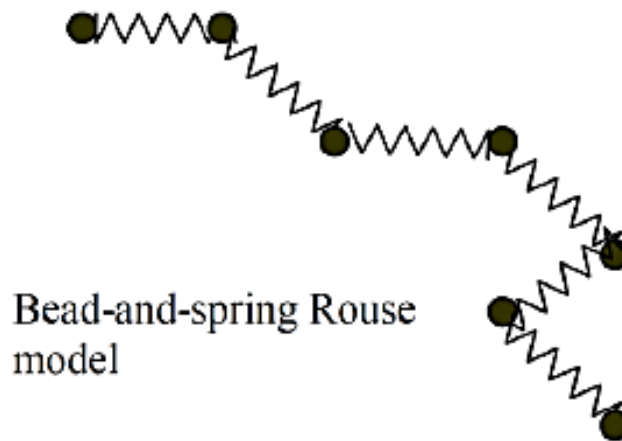
Εικόνα 2.3: (α) ιστορικό βηματικής τάσης (β) Προκύπτουσα παραμόρφωση (Wardetal., 2004)

Η πιο σημαντική διαφορά μεταξύ των δύο προσεγγίσεων είναι ότι στην προσέγγιση του Leadermann η απόκριση του υλικού είναι διαχωρίσιμη σε εξάρτηση τάσης και σε εξάρτηση χρόνου. Αντιθέτως, στην προσέγγιση των Pirkkin και Rogers το C είναι συνάρτηση δύο μόνο μεταβλητών, οι οποίες είτε μπορούν είτε όχι να είναι διαχωρίσιμες. Συνεπώς, η προσέγγιση αυτή είναι πιο γενική και άρα έχει τη δυνατότητα να μοντελοποιήσει ένα μεγαλύτερο εύρος συμπεριφορών υλικού. (Wardetal., 2004)

2.4 Μοριακή προσέγγιση

Η συγκεκριμένη προσέγγιση ξεκινά από το ότι ο ρυθμός εξέλιξης ενός φαινομένου εξαρτάται από την θερμοκρασία στην οποία βρίσκεται το υλικό. (Turner, 1965) Στην προσέγγιση αυτή πρέπει να προσδιοριστούν οι μοριακοί μηχανισμοί της δομής του υλικού.

Ο Rouse (1953) δημιούργησε ένα μοριακό μοντέλο για αραιά διαλύματα πολυμερών. Τα πολυμερικά μακρομόρια μοντελοποιήθηκαν ως αλυσίδες από σφαιρίδια χωρίς μάζα, τα οποία ενώνονται με ελατήρια, που υπακούουν στο νόμο του Hooke.



Εικόνα 2.4: Το μοντέλο του Rouse αποτελούμενο από σφαιρίδια ενωμένα με ελατήρια (Strobl, 1997)

Η δύναμη του ελατηρίου σχετίζεται με την κίνηση Brown, και άρα είναι ανάλογη της απόλυτης θερμοκρασίας. Η ιξώδης αντίσταση περιγράφεται μέσω της κίνησης των σφαιριδίων στο υγρό, με τη βοήθεια του συντελεστή τριβής ζ . Ο συνδυασμός των σφαιριδίων αυτών με την ελαστικότητα των χουκιανών ελατηρίων αποτυπώνει την ιξωδοελαστική συμπεριφορά. Οι διαφορετικοί χρόνοι χαλάρωσης περιγράφονται μέσω της χαλάρωσης διαφορετικών τμημάτων (μονού τμήματος, πολλών τμημάτων ή ολόκληρου του μακρομορίου).

Το μοντέλο αυτό δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα μόνο για αραιά διαλύματα και μικρές συχνότητες. Αυτό συμβαίνει διότι η υδροδυναμική αλληλεπίδραση μεταξύ των μορίων, η επίδραση του πεπερασμένου όγκου του μορίου, η υαλώδης συμπεριφορά και η επίδραση των μοριακών περιελίξεων, δε λαμβάνονται υπόψη.

Μια τροποποίηση της θεωρίας Rouse ορίζει το μέτρο χαλάρωσης σύμφωνα με τη σχέση:

$$G(t) = \frac{\rho RT}{M} \sum_{p=1}^N e^{-t/\lambda_p} \quad (2.11)$$

και ο χρόνος χαλάρωσης ισούται με:

$$\lambda_p = \frac{\alpha^2 P^2 \zeta}{6\pi^2 p^2 kT} \quad (2.12)$$

όπου

α χαρακτηριστικό μήκος του μορίου

ζ συντελεστής τριβής

P βαθμός πολυμερισμού.

Ο μεγαλύτερος χρόνος χαλάρωσης προκύπτει για $\rho=1$.

Το η_0 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\eta_0 = \frac{\zeta \rho \alpha^2 M N_o}{36 M_o^2} \quad (2.13)$$

όπου

N_o ο αριθμός Avogadro

$M_o=M/P$ το μοριακό βάρος του μονομερούς

ρ η πυκνότητα.

Από την εξίσωση (2.13) προκύπτει ότι το η_0 μηδενικού ρυθμού διάτμησης αυξάνεται γραμμικά με το μοριακό βάρος. Αυτό ισχύει για μοριακά βάρη μικρότερα από το κρίσιμο μοριακό βάρος για την επίδραση των περιελίξεων.

Στην τελική ζώνη (χαμηλές συχνότητες) η συμπεριφορά εξαρτάται από τον μεγαλύτερο χρόνο χαλάρωσης ($\rho=1$), και ο χρόνος Rouse είναι:

$$\lambda_R = \frac{6\eta_o M}{\pi^2 \rho RT} = \frac{0,608\eta_o M}{\rho RT} \quad (2.14)$$

Ο προσδιορισμός του χρόνου Rouse προσδιορίζει το χρόνο απαιτείται για τη χαλάρωση των εσωτερικών τάσεων, το χρόνο για να προκύψει μόνιμη ροή σε σταθερή τάση και το χρόνο για να προκύψει πλήρης ελαστική ανάκτηση. (Larson, 1988)

2.5 Η εξίσωση του Eyring

Το τυπικό, γραμμικό μοντέλο τριών ελατηρίων και ενός αποσβεστήρα παρέχει μια προσεγγιστική περιγραφή της γραμμικής ιξωδοελαστικότητας. Ο Eyring (1945) υπέθεσε ότι η παραμόρφωση ενός πολυμερούς είναι μια θερμικά ενεργοποιούμενη διαδικασία, η οποία περιλαμβάνει την κίνηση τμημάτων μιας αλυσίδας μορίων ως προς πιθανά εμπόδια και τροποποίησαν το μοντέλο ώστε η κίνηση του αποσβεστήρα να διέπεται από την ενεργοποιημένο διαδικασία. Με τον τρόπο αυτό το μοντέλο μετατρέπεται σε μη γραμμικό και είναι χρήσιμο διότι οι παράμετροί του περιλαμβάνουν

μια ενέργεια ενεργοποίησης και έναν όγκο ενεργοποίησης των υποκείμενων μοριακών μηχανισμών. Με τον τρόπο αυτό παρέχεται μια κοινή βάση για τον ερπυσμό και την ενδοτικότητα. (Wardetal., 2004)

Η εφαρμογή της εξίσωσης του Eyring στη μηχανική συμπεριφορά, περιγράφει την μη γραμμική ιξωδοελαστικότητα. Η παραμόρφωση σε μακροσκοπικό επίπεδο θεωρείται το αποτέλεσμα βασικών διαδικασιών είτε ενδομοριακών είτε διαμοριακών, η συχνότητα των οποίων εξαρτάται από την ευκολία με την οποία ένα τμήμα της αλυσίδας μπορεί να υπερβεί ένα πιθανό ενεργειακό φράγμα ύψους ΔH . Υπό απουσία τάσεων, υπάρχει δυναμική ισορροπία, και άρα ίσο πλήθος τμημάτων μετακινούνται σε κάθε κατεύθυνση πάνω από το φράγμα δυναμικού με συχνότητα η οποία δίνεται από τη σχέση

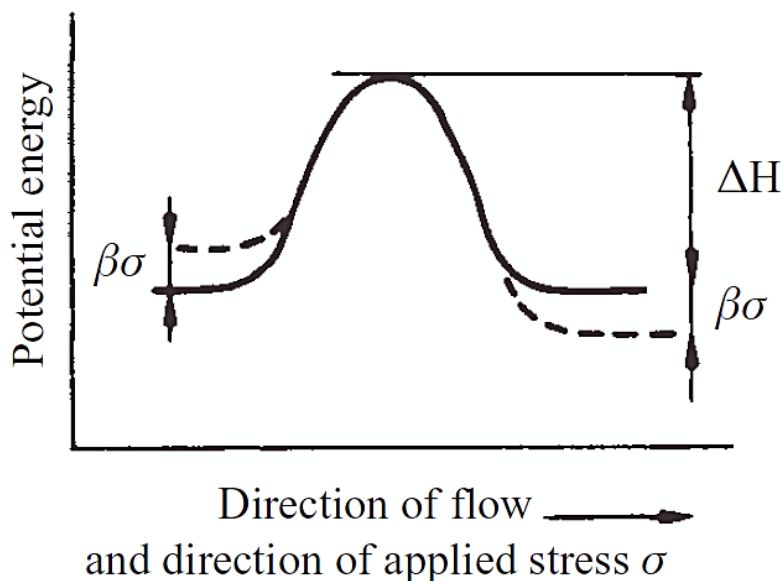
$$v = v_0 \exp\left(-\frac{\Delta H}{RT}\right) \quad (2.15)$$

Μια εφαρμοζόμενη τάση σ θεωρείται ότι οδηγεί σε γραμμική μεταβολή $\beta \cdot \sigma$ του ενεργειακού φράγματος με συμμετρικό τρόπο, όπου ο συντελεστής β έχει διαστάσεις όγκου. Η ροή στην κατεύθυνση της εφαρμοζόμενης τάσης δίνεται από τη σχέση

$$v_1 = v_0 \exp\left[-\frac{(\Delta H - \beta \cdot \sigma)}{RT}\right] \quad (2.16)$$

και με μια μικρότερη ροή προς την αντίθετη κατεύθυνση

$$v_2 = v_0 \exp\left[-\frac{(\Delta H + \beta \cdot \sigma)}{RT}\right] \quad (2.17)$$



Εικόνα 2.5: Το μοντέλο Eyring για το ερπυσμό (Wardetal., 2004)

Η καθαρή ροή προς την εμπρόσθια κατεύθυνση είναι τότε

$$v' = v_1 - v_2 = v_0 \exp\left(-\frac{\Delta H}{RT}\right) \left[\exp\left(\frac{\beta \cdot \sigma}{RT}\right) - \exp\left(-\frac{\beta \cdot \sigma}{RT}\right) \right] \quad (2.18)$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι η παράσταση στην αγκύλη αντιστοιχεί σε συνάρτηση υπερβολικού ημιτόνου.

Θεωρώντας ότι η καθαρή ροή στην εμπρόσθια κατεύθυνση σχετίζεται άμεσα με το ρυθμό παραμόρφωσης έχουμε:

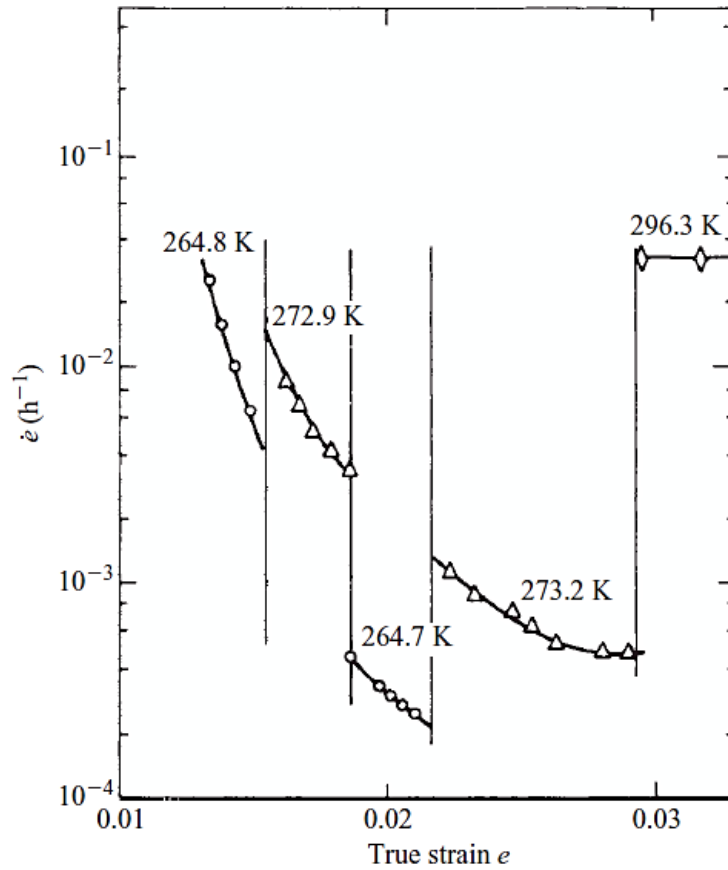
$$\frac{de}{dt} = \dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_0 \exp\left(-\frac{\Delta H}{RT}\right) \sinh\left(\frac{v \cdot \sigma}{RT}\right) \quad (2.19)$$

όπου $\dot{\epsilon}_0$ είναι ο συντελεστής μπροστά από τον εκθετικό παράγοντα και v , το οποίο αντικαθιστά το β , είναι ο όγκος ενεργοποίησης του μοριακού γεγονόςτος.

Η εξίσωση για το ρυθμό παραμόρφωσης (2.19) ορίζει ένα «ενεργοποιημένο» ιξώδες, το οποίο στη συνέχεια ενσωματώνεται στο γραμμικό μοντέλο του αποσβεστήρα και οδηγεί σε μια πιο πολύπλοκη σχέση μεταξύ τάσης και παραμόρφωσης σε σύγκριση με το γραμμικό μοντέλο. Το ενεργοποιημένο μοντέλο για τον αποσβεστήρα ελέγχθηκε με τα δεδομένα του Leaderman (1943) για αρκετές ίνες και με κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων του μοντέλου έδωσε καλή αντιστοιχία για δεδομένο επίπεδο τάσης κατά τη διάρκεια των τεσσάρων δεκαετιών παρατήρησης. (Wardetal., 2004)

2.5.1 Εφαρμογή του μοντέλου Eyring στον ερπυσμό

Οι Sherby και Dorn (1958) μελέτησαν τον ερπυσμό μεθακρυλικών ενώσεων υαλώδους μορφής σε διαφορετικές θερμοκρασίες, εφαρμόζοντας βηματικές μεταβολές θερμοκρασίας, και κατασκεύασαν διαγράμματα του ρυθμού ερπυσμού ως προς τη συνολική παραμόρφωση ερπυσμού για δεδομένο επίπεδο τάσης (Εικόνα 2.6).

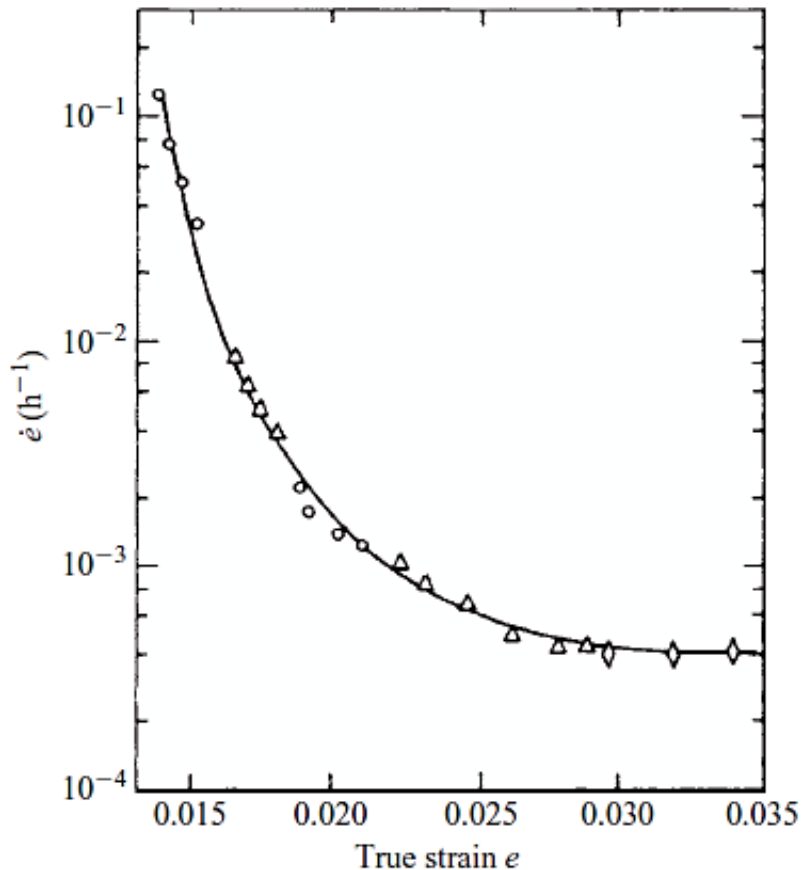


Εικόνα 2.6: Ρυθμοί ερπυσμού ως συνάρτηση της συνολικής παραμόρφωσης ερπυσμού για μεθακρυλικές ενώσεις για επίπεδο τάσης 56 MPa (Wardetal., 2004)

Στη συνέχεια τα δεδομένα υπερτίθενται θεωρώντας ότι η εξάρτηση της θερμοκρασίας σε κάθε επίπεδο τάσης ακολουθεί μια ενεργοποιημένη διαδικασία, ώστε να προκύψει μια σχέση μεταξύ του ρυθμού παραμόρφωσης και της παραμόρφωσης. Οι μεταβολές της θερμοκρασίας παρουσιάζονται ως προς την ενεργοποιημένη διαδικασία, όπου η ενέργεια ενεργοποίησης μειώνεται γραμμικά με την αύξηση της τάσης ώστε να προκύψει η ρυθμός ερπυσμού από την εξίσωση (2.20)

$$\dot{\epsilon} \exp\left[\frac{(\Delta H - \nu)}{RT}\right] = F(e) \quad (2.20)$$

όπου ν είναι ο όγκος ενεργοποίησης.



Εικόνα 2.7: Υπέρθυση των δεδομένων ερπυσμών μεθακρυλικών ενώσεων σε διαφορετικές θερμοκρασίες για επίπεδο τάσης 56 MPa (Wardetal., 2004)

Οι Mindel και Brown (1973) έκανα μια παρόμοια ανάλυση των δεδομένων για τον ερπυσμό του πολυκαρβονιλίου. Η υπέρθεση έγινε χρησιμοποιώντας μια εξίσωση της μορφής (2.20) με όγκο ενεργοποίησης $5,7 \text{ nm}^3$, τιμή η οποία ήταν πολύ κοντά στις τιμές του όγκου ενεργοποίησης που προέκυψαν από μετρήσεις της εξάρτησης του ρυθμού παραμόρφωσης από την τάση διαρροής.

Από τα αποτελέσματα προέκυψε ότι ο ρυθμός ερπυσμού μπορεί να παρασταθεί από μια γενική εξίσωση της μορφής:

$$\dot{\epsilon} = f_1(T)f_2(\sigma/T)f_3(\epsilon) \quad (2.21)$$

όπου $f_1(T)$, $f_2(\sigma/T)$ και $f_3(\epsilon)$ είναι ανεξάρτητες συναρτήσεις των μεταβλητών T , σ και ϵ . Παρόλο που η $f_1(T)$ έχει εκθετική μορφή, όπως αναμενόταν για κάθε θερμικά ενεργοποιημένη διαδικασία, η εκθετική μορφή $f_2(\sigma/T)$ τροποποιείται ώστε να λαμβάνει υπόψη την υδροστατική συνιστώσα της τάσης, δίνοντας διαφορετικούς όγκους ενεργοποίησης για εφελκυσμό, διάτμηση και πίεση. Οι Mindel και Brown (1973) πρότειναν επίσης ότι στην περιοχή όπου ο ρυθμός ερπυσμού μειώνεται γρήγορα με αύξηση της τάσης έχει τη μορφή

$$f_3(e) = \text{constant} \times \exp(-ce_R) \quad (2.22)$$

όπου e_R είναι η ανακτώμενη συνιστώσα της παραμόρφωσης λόγω ερπυσμού και c είναι μια σταθερά. Άρα προκύπτει:

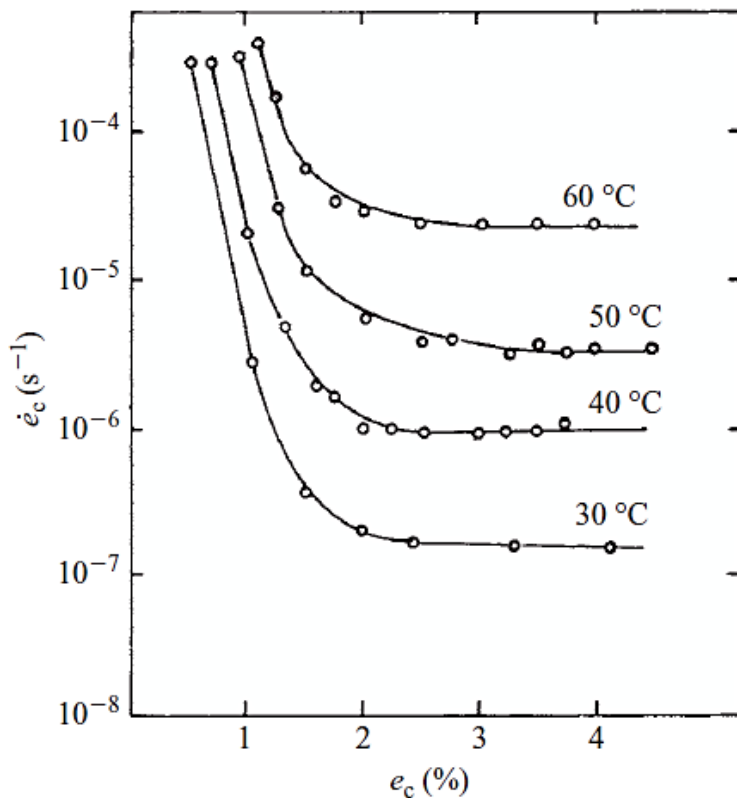
$$\dot{e} = \dot{e}_0 \exp[-(\Delta H - \tau V + p\Omega / RT)] \exp(-ce_R) \quad (2.23)$$

όπου τ και p είναι η διατμητική και η υδροστατική συνιστώσα της τάσης και V και Ω είναι οι όγκοι ενεργοποίησης σε διάτμηση και πίεση. Η εξίσωση μπορεί να ξαναγραφεί ως:

$$\dot{e} = \dot{e}_0 \exp[-(\Delta H - \{\tau - \tau_i\}V + p\Omega / RT)] \quad (2.24)$$

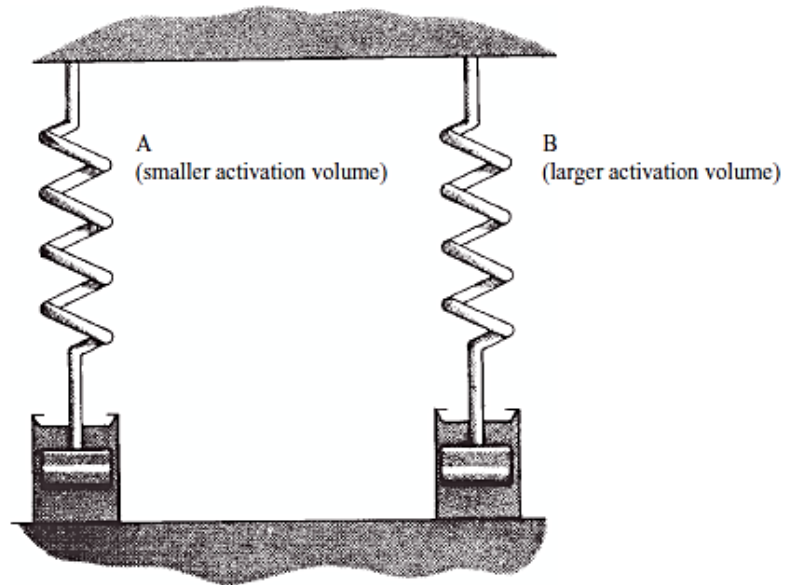
όπου $ce_R = \tau_i V / RT$ και τ_i έχει το χαρακτήρα μιας εσωτερικής τάσης, η οποία αυξάνεται με την παραμόρφωση και είναι ανάλογη της απόλυτης θερμοκρασίας.

Οι Wilding και Ward(1981) χρησιμοποίησαν το μοντέλο Eyring για τον ερπυσμό του πολυαιθυλενίου πολύ υψηλού μέτρου ελαστικότητας και απέδειξαν ότι σε υψηλές παραμορφώσεις, οι οποίες αντιστοιχούν σε μεγάλα διαστήματα ερπυσμού, ο ρυθμός ερπυσμού φτάνει σε μια σταθερή τιμή, η οποία ονομάζεται πλατώ ρυθμού ερπυσμού. Για πολυμερή ή για υλικά σχετικά χαμηλής μοριακής μάζας η εξάρτηση της τάσης και της θερμοκρασίας από τον τελικό ρυθμό ερπυσμού μπορεί να μοντελοποιηθεί μια μία μόνο ενεργοποιημένη διεργασία με όγκο ενεργοποίησης $0,08 \text{ nm}^3$.



Εικόνα 2.8: Ερπυσμός πολυαιθυλενίου με πολύ υψηλό μέτρο ελαστικότητας σε διαφορετικές θερμοκρασίες (Wardetal., 2004)

Για πολυμερή με υψηλότερη μοριακή μάζα, καθώς και για συμπολυμερή, η διεργασία μόνιμης ροής ενεργοποιείται μόνο σε υψηλά επίπεδα τάσης, το οποίο υποδεικνύει ότι υπάρχουν δύο διεργασίες Eyring συζευγμένες παράλληλα. Η Α έχει μικρότερο όγκο ενεργοποίησης σε εφελκυσμό ($0,05 \text{ nm}^3$) και ενεργοποιείται μόνο σε υψηλά επίπεδα τάσης. Η Β έχει υψηλότερο όγκο ενεργοποίησης σε εφελκυσμό (1 nm^3) και είναι λειτουργικό σε χαμηλά επίπεδα τάσης. Σε χαμηλά επίπεδα τάσης θα υπάρχει μικρή μόνιμη ροή διότι το Β μεταφέρει σχεδόν ολόκληρο το φορτίο. Παρόλο που ο συνολικός ερπυσμός και η συμπεριφορά ανάκτησης μπορούν να αναπαρασταθούν από ένα μοντέλο που περιέχει δύο ενεργοποιημένους αποσβεστήρες, θα ήταν απαραίτητο ένα εύρος χρόνων χαλάρωσης ώστε να προκύψει καλή προσαρμογή στα πειραματικά δεδομένα για όλο το χρονικό διάστημα και σε διαφορετικά επίπεδα παραμόρφωσης.



Εικόνα 2.9: Μοντέλο δύο διεργασιών για τον ερπυσμό μόνιμης ροής (Wardetal., 2004)

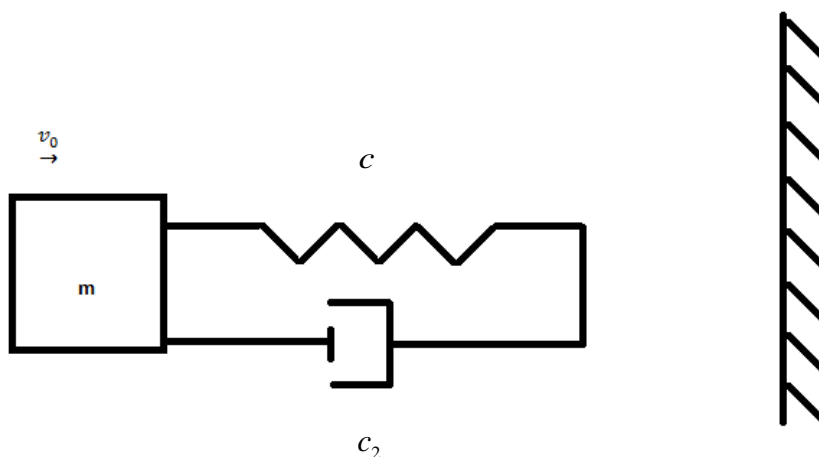
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Επίλυση προσομοίωσης με τη βοήθεια γραμμικών ιξωδοελαστικών μοντέλων

3.1 Εισαγωγή

Τα κεφάλαια 3 και 4 αποτελούν την πρακτική εφαρμογή των ιξωδοελαστικών μοντέλων με σκοπό την προσομοίωση της συμπεριφοράς ενός ιξωδοελαστικού υλικού. Εξετάζεται η συμπεριφορά σώματος που προσκρούει σε άκαμπτο τοίχο και μελετάται η ταχύτητα, η επιτάχυνση καθώς και η επίδραση του ιξώδους στη συμπεριφορά της κίνησης. Τα μοντέλα που χρησιμοποιούνται για την προσομοίωση του υλικού είναι το μοντέλο Kelvin, το μοντέλο Maxwell και το τριπαραμετρικό μοντέλο, τόσο για την περίπτωση του γραμμικού όσο και του μη γραμμικού προβλήματος. Η επίλυση της προσομοίωσης γίνεται μέσω του υπολογιστικού προγράμματος Mathematica, το οποίο χρησιμοποιείται συχνά για την προσομοίωση και επίλυση εφαρμογών μηχανικής.

3.2 Επίλυση προσομοίωσης με τη βοήθεια του μοντέλου Kelvin.

Συγκεκριμένα, μελετάται σώμα μάζας m από ιξωδοελαστικό υλικό, το οποίο προσκρούει σε άκαμπτο τοίχο με ταχύτητα $v_0 = 10^m/s$ και επανέρχεται με ταχύτητα v_1 . Σκοπός μας είναι να αναλύσουμε την κίνηση του σώματος, αλλά και τον συντελεστή επαναφοράς $e = \frac{-v_1}{v_0}$. Το σώμα θεωρείται ως ένα απλό μοντέλο μίας άκαμπτης μάζας m ενωμένης με ένα μοντέλο ελατηρίου – αποσβεστήρα (με σταθερά ελατηρίου c και ιξώδες c_2), όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.1.



Σχήμα 3.1

Λύση. Από την στιγμή της πρώτης επαφής έχουμε να κάνουμε με αποσβενομένη ταλάντωση. Η εξίσωση κίνησης του σώματος είναι :

$$m\ddot{x} + c_2\dot{x} + c x = 0$$

ή

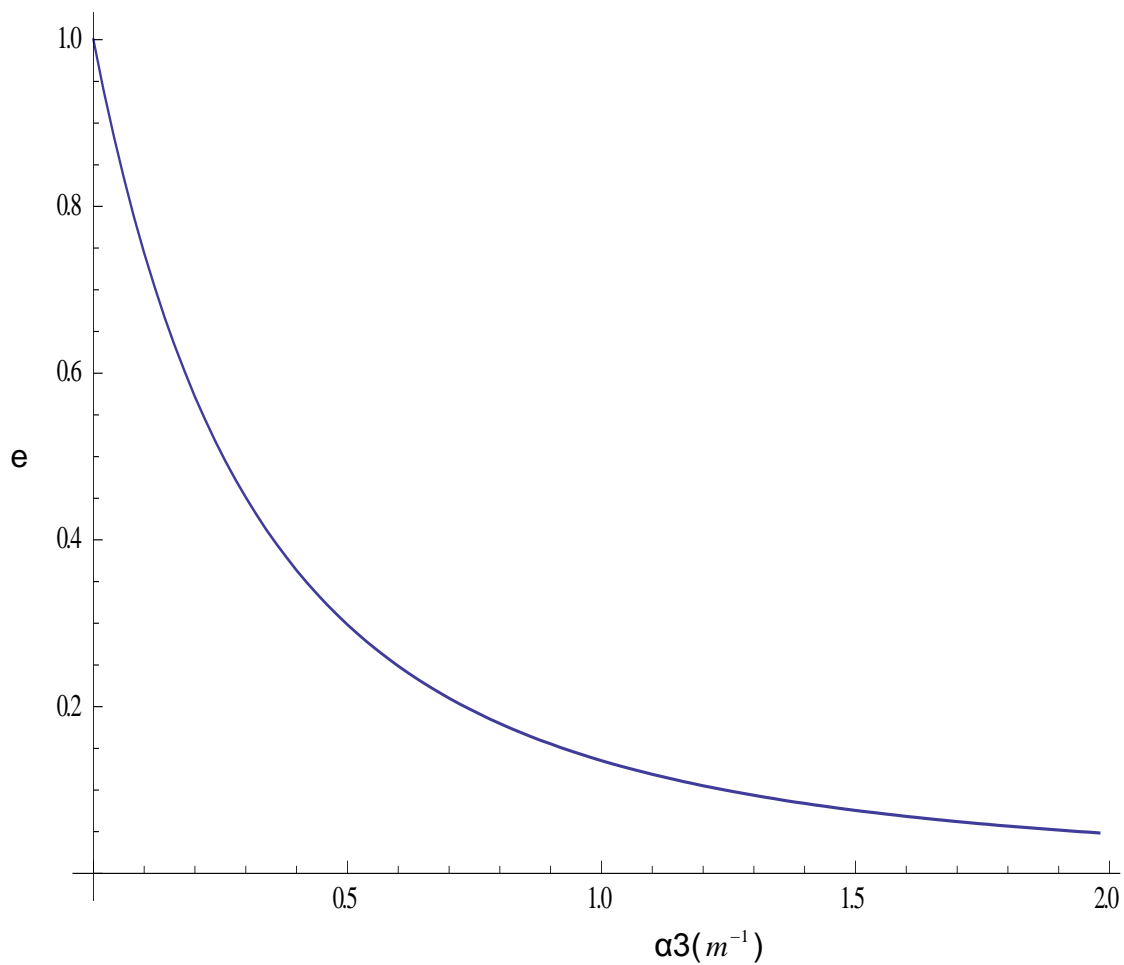
$$\ddot{x} + 2\alpha_1\dot{x} + \alpha_2^2 x = 0$$

Όπου $c = m\alpha_2^2$, $c_2 = 2m\alpha_1$

Και $\alpha_3 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$.

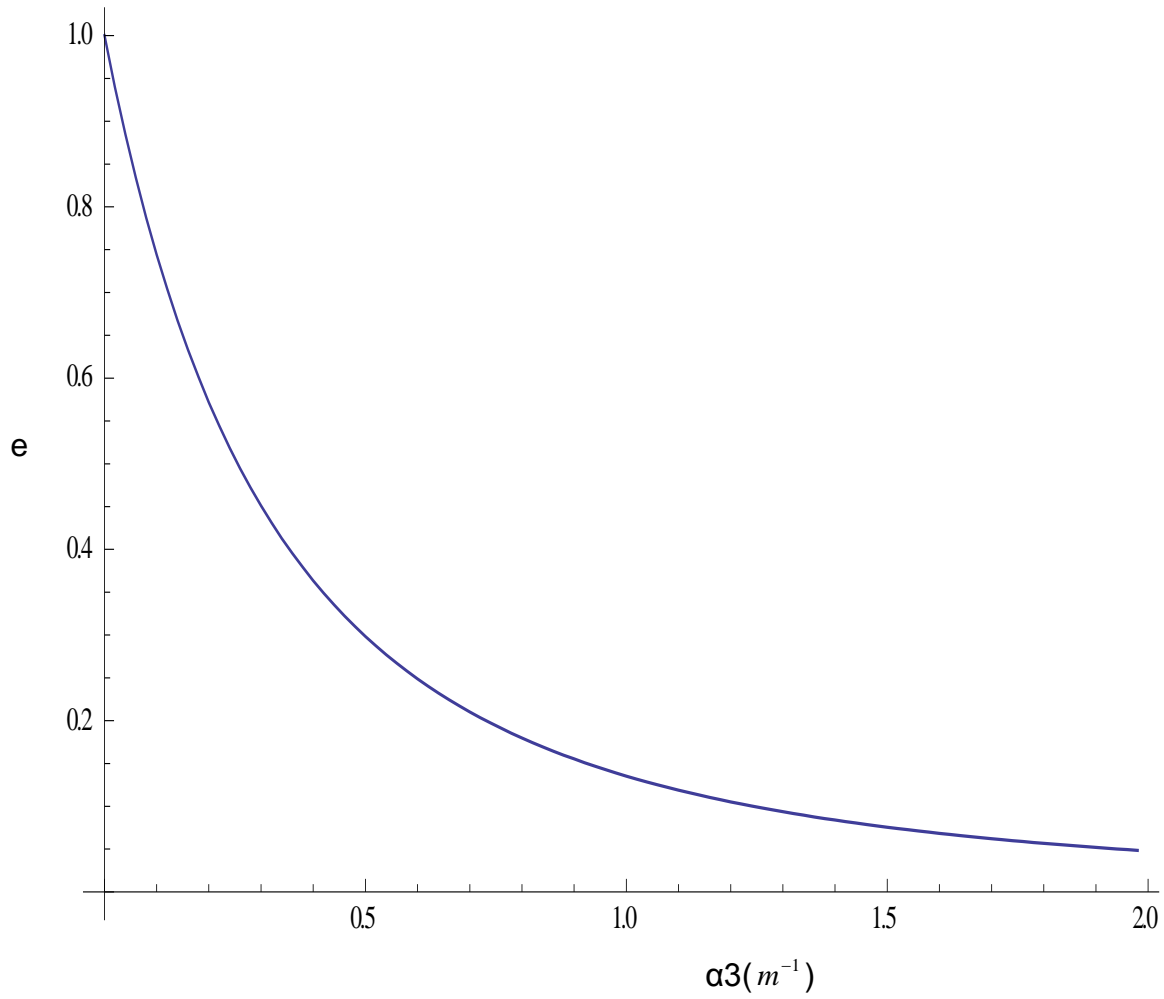
Το σώμα παραμένει σε επαφή με τον τοίχο μέχρι η επιτάχυνση να πάρει μηδενική τιμή. Στη συνέχεια προχωρούμε στην επίλυση της εξίσωσης με την εφαρμογή του προγράμματος *Mathematica*, θέτοντας αρχικές συνθήκες $x(0)=0$ και $\dot{x}(0)=10$.

Για $a_2=0.5 s^{-1}$ και $a_1(m^{-1}s^{-1})$ να μεταβάλλεται από 0 έως 1

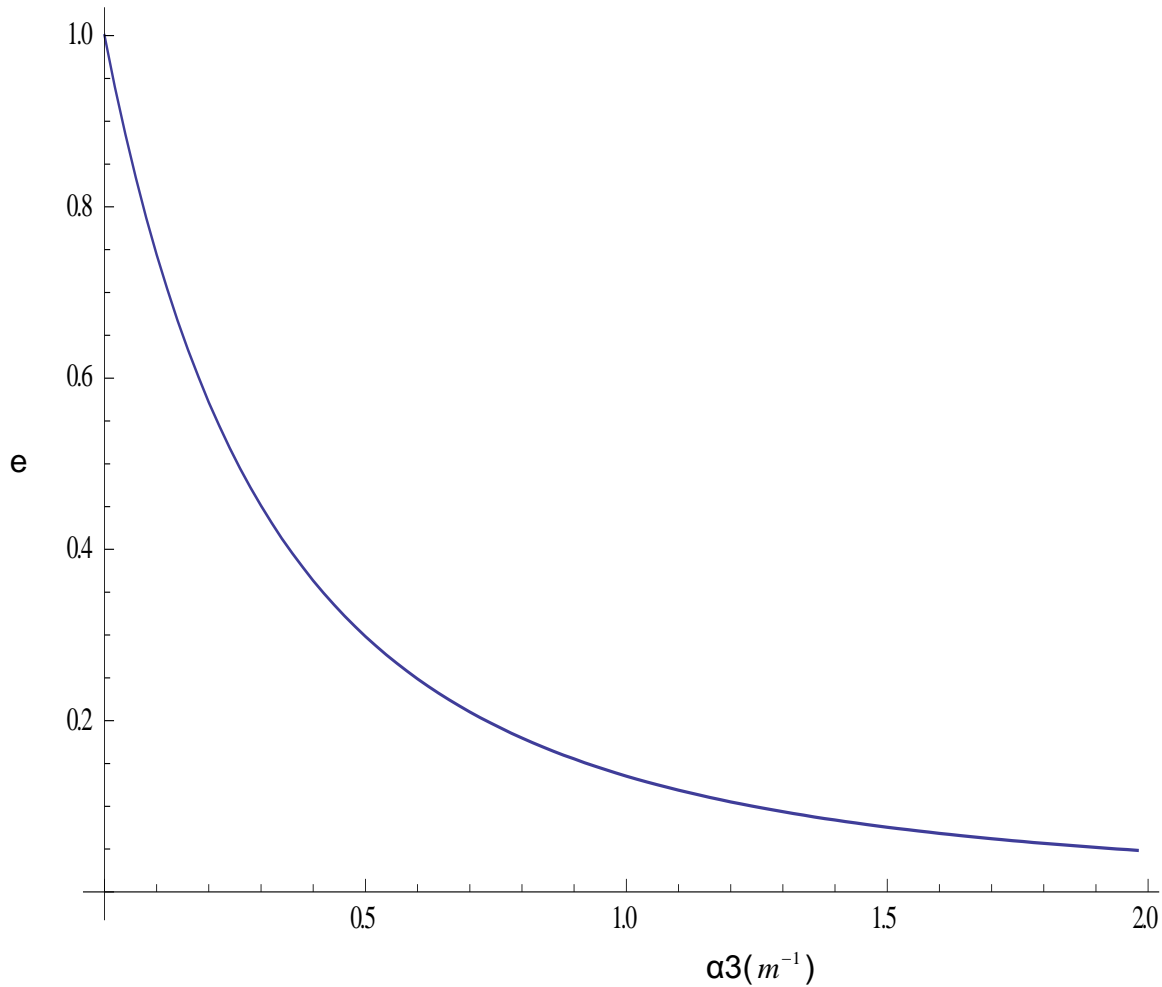


Σχήμα 3.2

Για $a_2=5\text{ s}^{-1}$ και $a_1(m^{-1}s^{-1})$ να μεταβάλλεται από 0 έως 10



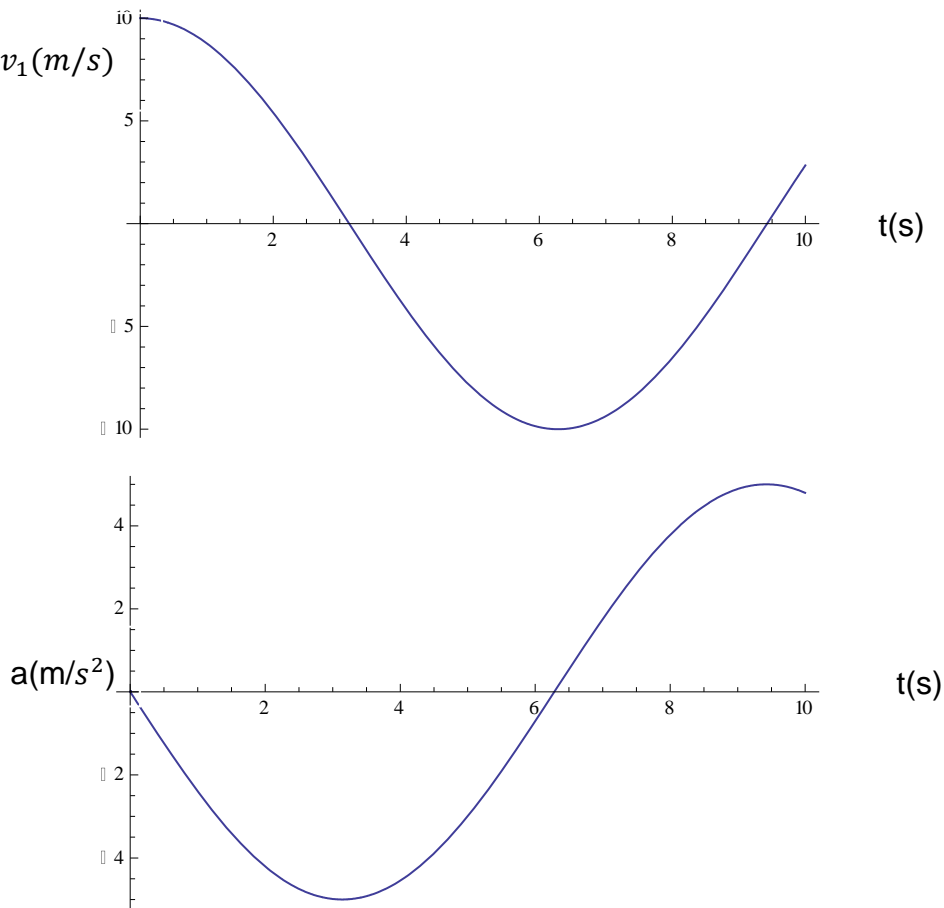
Για $a_2=0.05 s^{-1}$ και $a_1(m^{-1}s^{-1})$ να μεταβάλλεται από 0 έως 0.1



Όπως βλέπουμε η ταχύτητα επαναφοράς μειώνεται όσο αυξάνεται το ιξώδες, καθώς το ιξώδες έχει ρόλο απόσβεσης. Με μηδενικό ιξώδες έχουμε $\frac{-v_1}{v_0} = 1$, δηλαδή μία ελαστική κρούση που απευθύνεται σε ένα πλήρως ελαστικό υλικό. Όπως βλέπουμε από τα τρία διαγράμματα, η τάξη των μεγεθών των σταθερών ελατηρίου και ιξώδους δεν επηρεάζουν το αποτέλεσμα, παρά μόνο ο μεταξύ τους λόγος.

Ας εξετάσουμε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σώματος σε συνάρτηση με τον χρόνο για δεδομένες τιμές της σταθεράς του ελατηρίου και του ιξώδους.

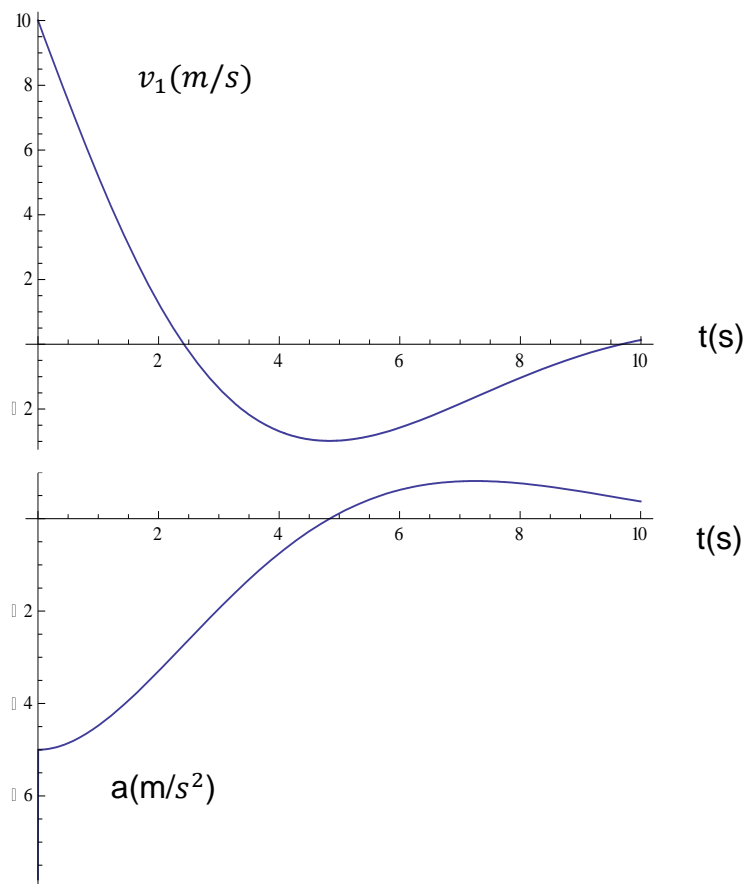
Για $a_2 = 0.5s^{-1}$ και $a_1 = 0m^{-1}s^{-1}$



Σχήμα 3.5

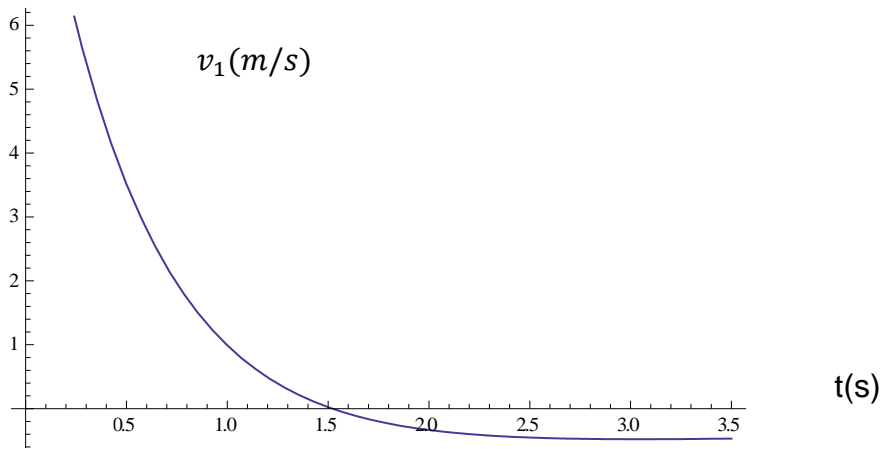
Όπως περιμέναμε με $a_1 = 0.0m^{-1}s^{-1}$ η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σώματος παίρνουν τιμές απλής αρμονικής ταλάντωσης. Βέβαια μετά τον μηδενισμό της επιτάχυνσης το σώμα πραγματοποιεί ελεύθερη κίνηση, καθώς δεν ασκούνται πλέον δυνάμεις πάνω στο σώμα.

Για $a_2 = 0.5s^{-1}$ και $a_1 = 0.25m^{-1}s^{-1}$

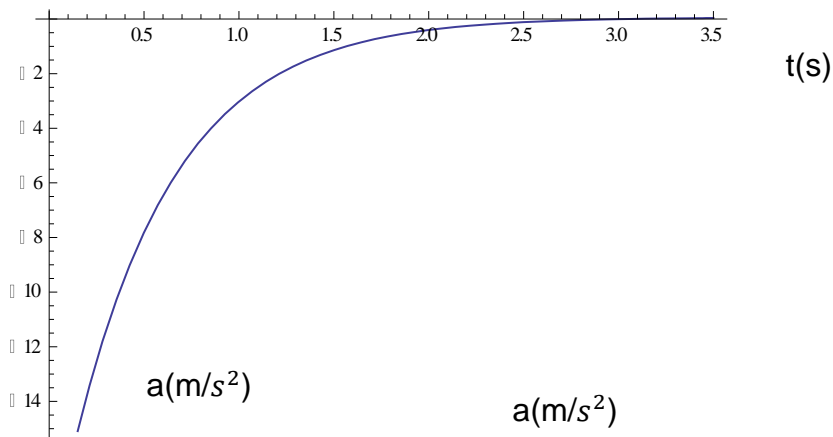


Σχήμα 3.6

Για $a_2 = 0.5s^{-1}$ και $a_1 = 1.0m^{-1}s^{-1}$



Σχήμα 3.7

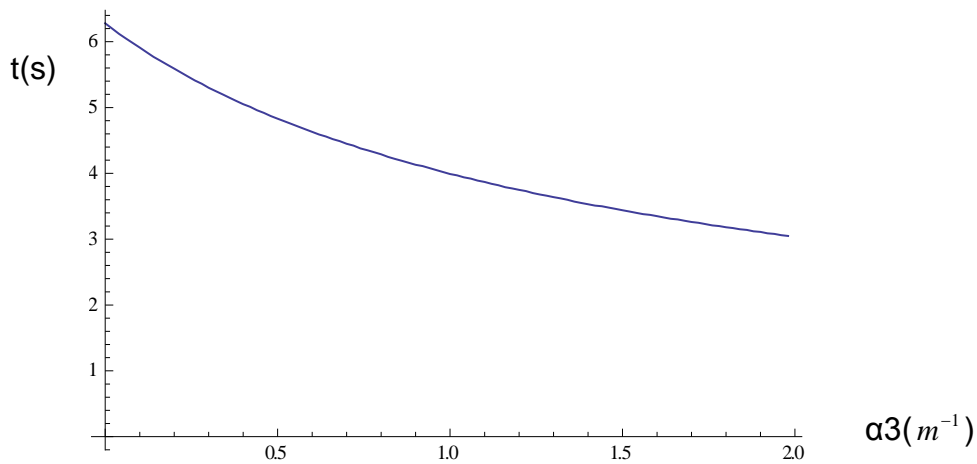


Σχήμα 3.8

Όπως βλέπουμε όσο πιο μεγάλο είναι το ιξώδες, τόσο πιο απότομα μειώνεται η ταχύτητα και τόσο πιο πολύ μειώνεται η τελική της τιμή, κάτι που συμβαίνει όταν μηδενίζεται η επιτάχυνση.

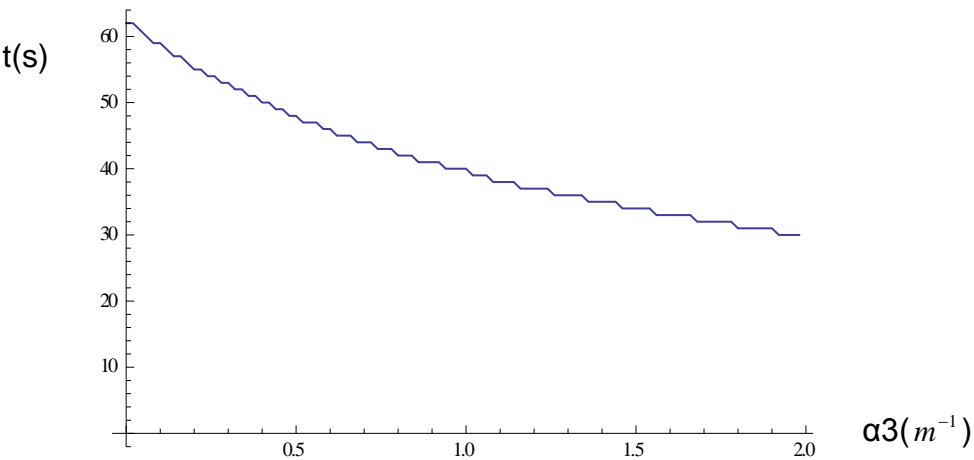
Ενδιαφέρον παρουσιάζουν και οι χρόνοι αποκόλλησης του σώματος από τον τοίχο σε συνάρτηση με τον λόγο των σταθερών ελατηρίου και αποσβεστήρα.

Για $a_2 = 0.5s^{-1}$ και $a_1(m^{-1}s^{-1})$ να μεταβάλλεται από 0 έως 1



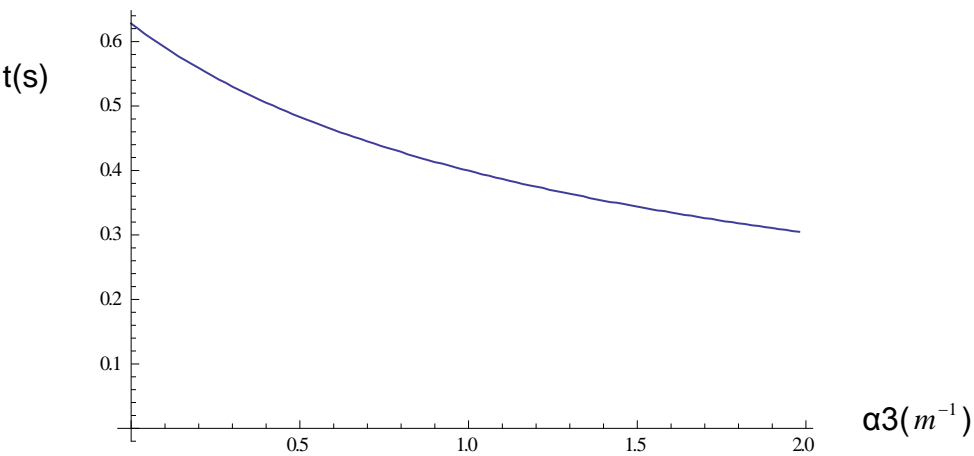
Σχήμα 3.9

Για $a_2 = 0.05s^{-1}$ και $a_1(m^{-1}s^{-1})$ να μεταβάλλεται από 0 έως 0.1



Σχήμα 3.10

Για $a_2 = 5s^{-1}$ και $a_1(m^{-1}s^{-1})$ να μεταβάλλεται από 0 έως 10

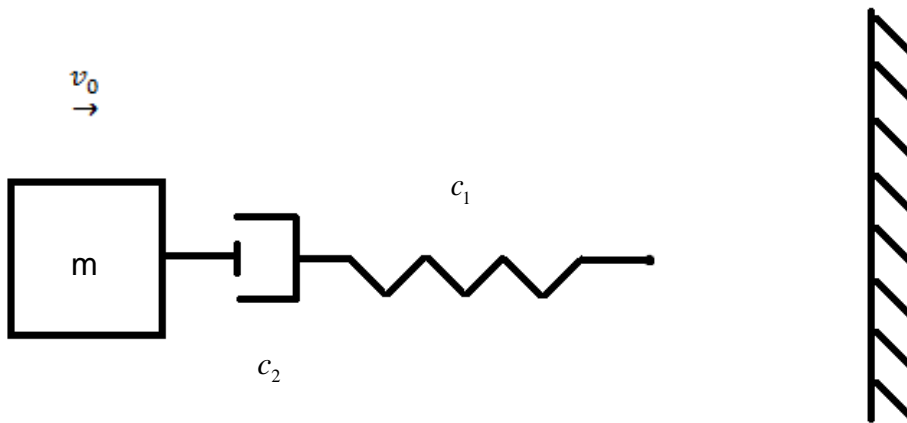


Σχήμα 3.11

Βλέπουμε ότι ο χρόνος αποκόλλησης μειώνεται με τον ίδιο τρόπο για τις διαφορετικές τάξεις μεγεθών των σταθερών ελατηρίου και αποσβεστήρα. Όμως όταν δεκαπλασιάζονται οι σταθερές οι χρόνοι αποκόλλησης υποδεκαπλασιάζονται. Αυτό συμβαίνει διότι ο αποσβεστήρας έχει τον ρόλο της τριβής και έτσι όσο μεγαλύτερη είναι η τριβή τόσο γρηγορότερα θα σταματήσει η κίνηση του σώματος προς τον τοίχο.

3.3 Επίλυση προσομοίωσης με τη βοήθεια του μοντέλου Maxwell

Σώμα μάζας m ιξωδοελαστικού υλικού, προσκρούει σε άκαμπτο τοίχο με ταχύτητα $v_0=10^m/s$ και επανέρχεται με ταχύτητα v_1 . Σκοπός μας είναι να αναλύσουμε την κίνηση του σώματος, αλλά και τον συντελεστή επαναφοράς $e = \frac{-v_1}{v_0}$. Το σώμα θεωρείται ως ένα απλό μοντέλο μίας άκαμπτης μάζας m ενωμένης με ένα μοντέλο ελατηρίου – αποσβεστήρα (με σταθερά ελατηρίου c_1 και ιξώδες c_2), όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.12.



Σχήμα 3.12

Λύση. Από την στιγμή της πρώτης επαφής έχουμε να κάνουμε με αποσβενόμενη ταλάντωση. Η εξίσωση κίνησης του σώματος είναι :

$$m\ddot{x} + c_2\dot{x}_2 = 0 \quad \text{ή} \quad m\ddot{x} + c_1x_1 = 0$$

Όπου x_2 η μετατόπιση του αποσβεστήρα και x_1 η μετατόπιση του ελατηρίου

Καθώς $c_2\dot{x}_2 = c_1x_1$

και $x = x_1 + x_2$

Επομένως $c_2\dot{x}_2 = c_1(x - x_2)$

Τέλος καταλήγουμε στις εξισώσεις :

$$m\ddot{x} + 2\alpha_1\dot{x}_2 = 0 \quad \text{ή} \quad m\ddot{x} + \alpha_2^2 x = 0$$

και
$$\dot{x}_2 = \frac{\alpha_2^2}{2\alpha_1}(x - x_2)$$

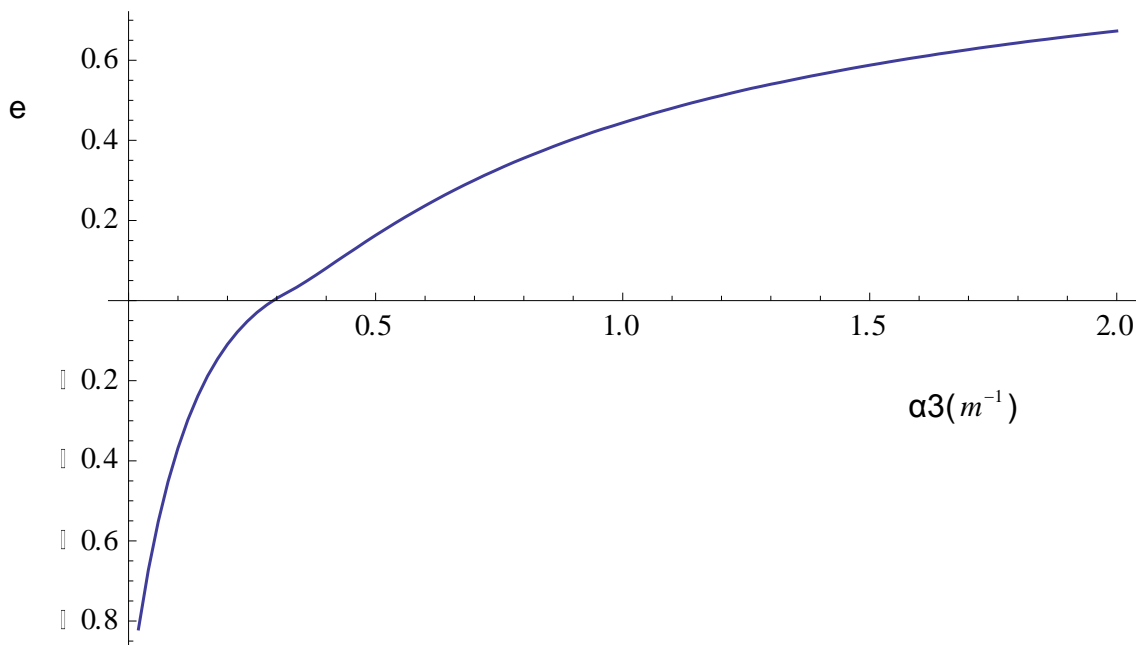
Όπου $\alpha_1 = \frac{c_2}{2m}$, $\alpha_2 = \sqrt{\frac{c_1}{m}}$ και $\alpha_3 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$

Το σώμα παραμένει σε επαφή με τον τοίχο μέχρι η επιτάχυνση να πάρει μηδενική τιμή. Στη συνέχεια προχωρούμε στην επίλυση της εξίσωσης με την εφαρμογή του προγράμματος *Mathematica*, θέτοντας αρχικές συνθήκες $x(0)=0, \dot{x}(0)=10$ και $x_2(0)=0$.

Για την περίπτωση όπου $\alpha_1 = 0$, έχουμε $x_2 = 0$ και $x_1 = x$.

Επομένως καταλήγουμε στην περίπτωση της απλής αρμονικής ταλάντωσης που αναλύσαμε στην Ενότητα 3.1. Στην συνέχεια του κεφαλαίου δεν θα λαμβάνουμε υπ' όψιν την περίπτωση όπου $\alpha_1 = 0$.

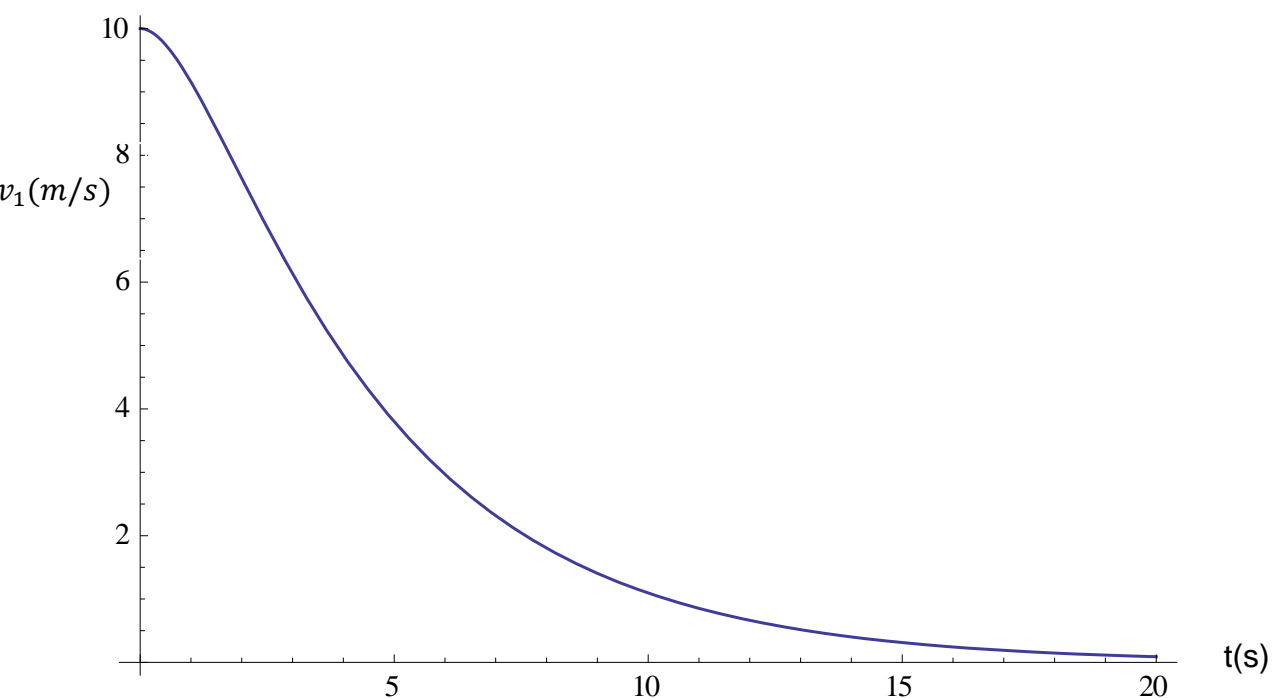
Για $a_2=0.5 s^{-1}$ και $a_1(m^{-1}s^{-1})$ να μεταβάλλεται από 0 έως 1



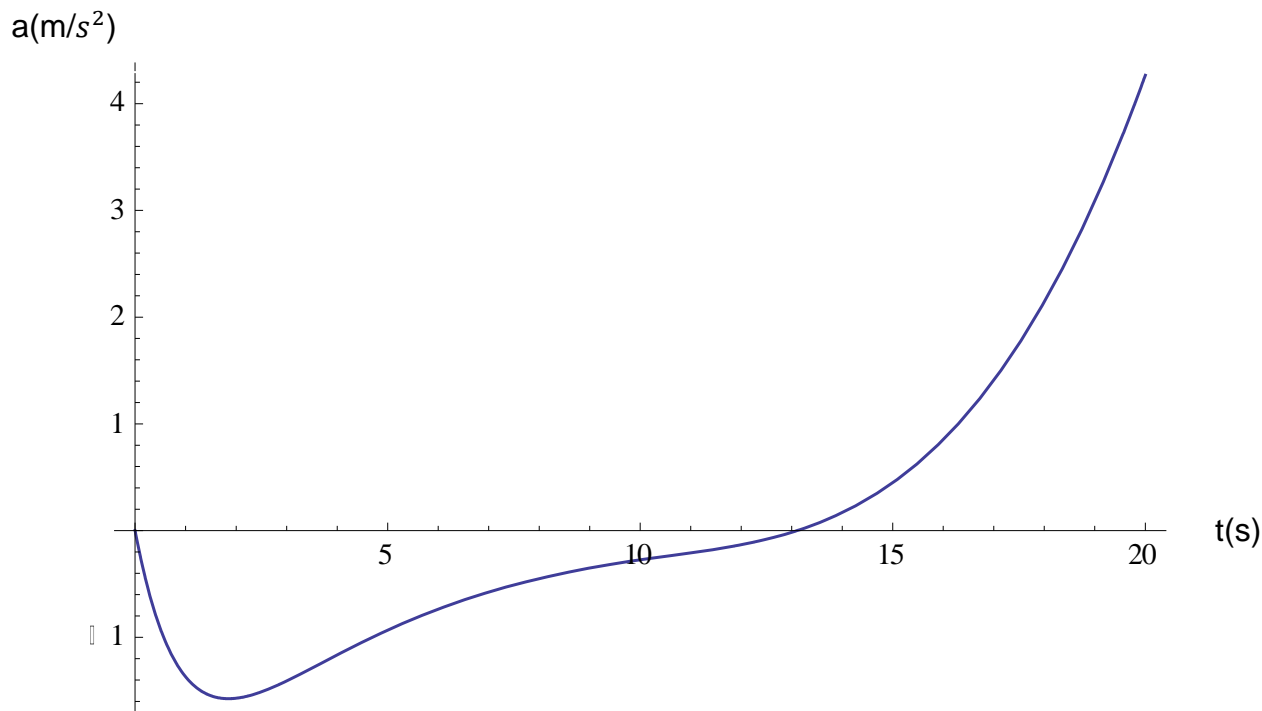
Σχήμα 3.13

Όπως βλέπουμε το μοντέλο Maxwell παρεκκλίνει από το φυσικό νόημα του φαινομένου. Για τιμές του λόγου α_3 μικρότερες από 0,3, οι τιμές της ταχύτητας v_1 είναι θετικές καθώς μηδενίζεται η επιτάχυνση. Πράγμα που σημαίνει ότι το σώμα συνεχίζει να κινείται προς τον τοίχο με σταθερή ταχύτητα και μηδενική επιτάχυνση, ακόμα και όταν σταματήσει να δέχεται δύναμη από τον τοίχο.

Για $a_2 = 0.5 \text{ s}^{-1}$, $a_1 = 0.1 \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$



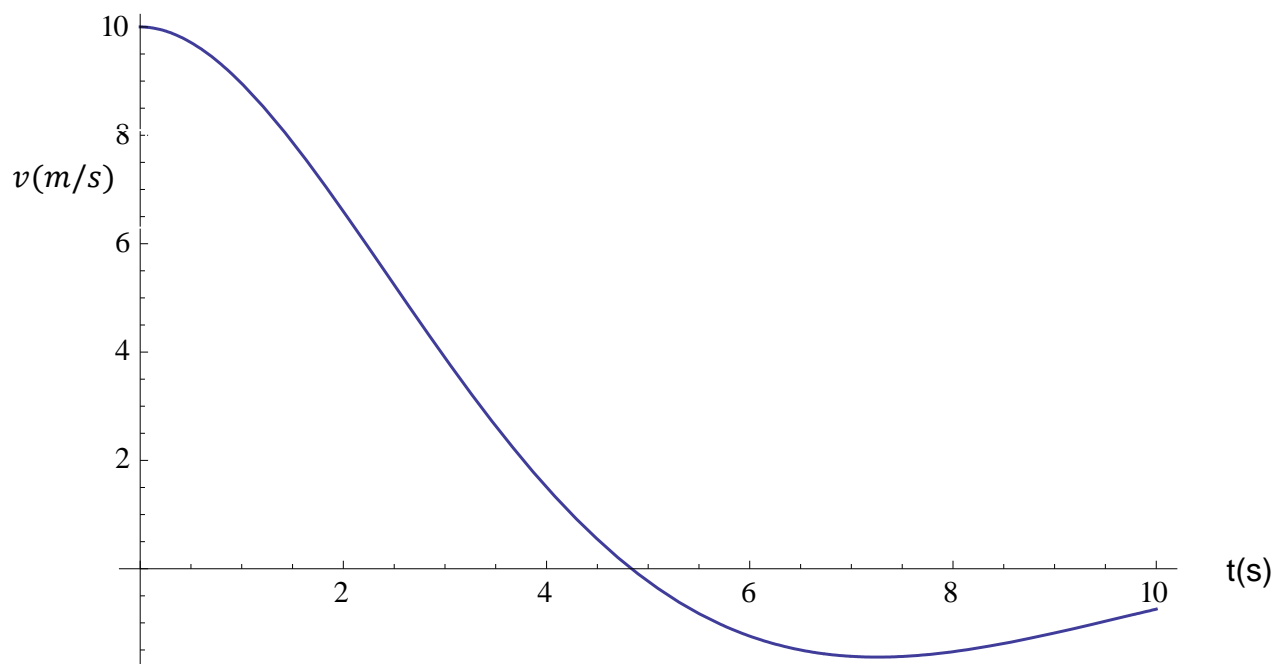
Σχήμα 3.14



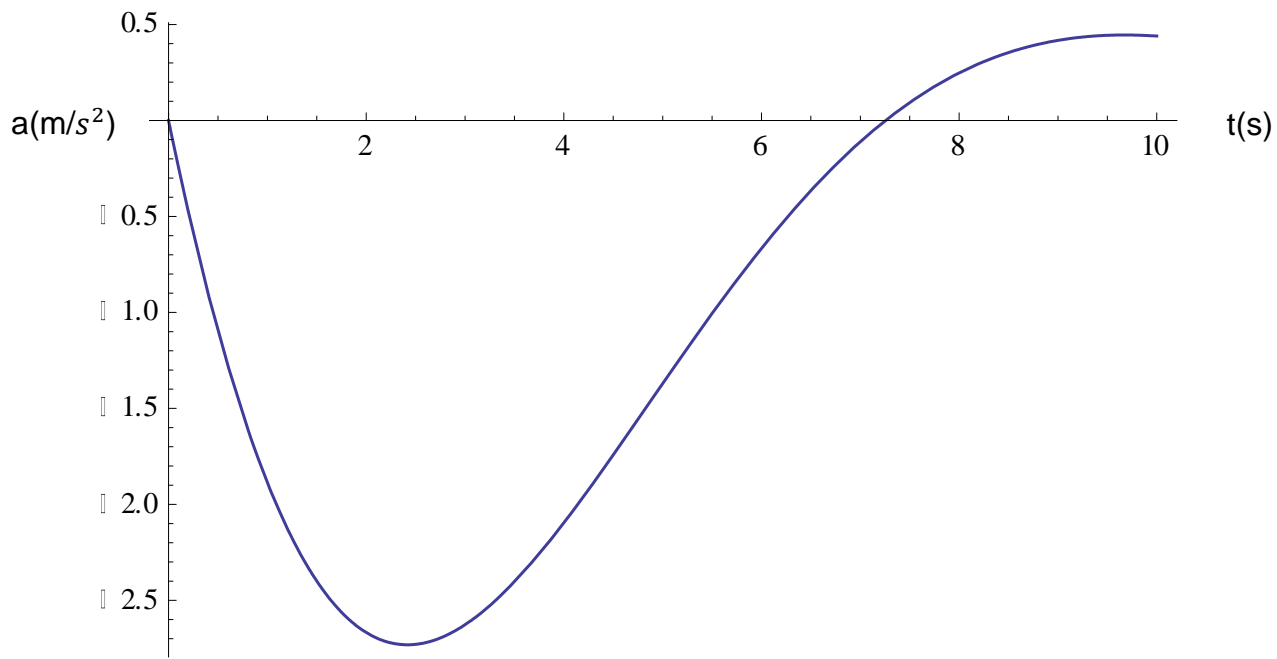
Σχήμα 3.15

Για τιμές του λόγου α_3 μεγαλύτερες από 0,3, παρατηρούμε ότι η ταχύτητα v_1 αυξάνεται με την αύξηση του ιξώδους. Αυτό συμβαίνει καθώς το ελατήριο είναι συνδεδεμένο σε σειρά με τον αποσβεστήρα.

Για $a_2 = 0.5 s^{-1}$, $a_1 = 0.25 m^{-1} s^{-1}$

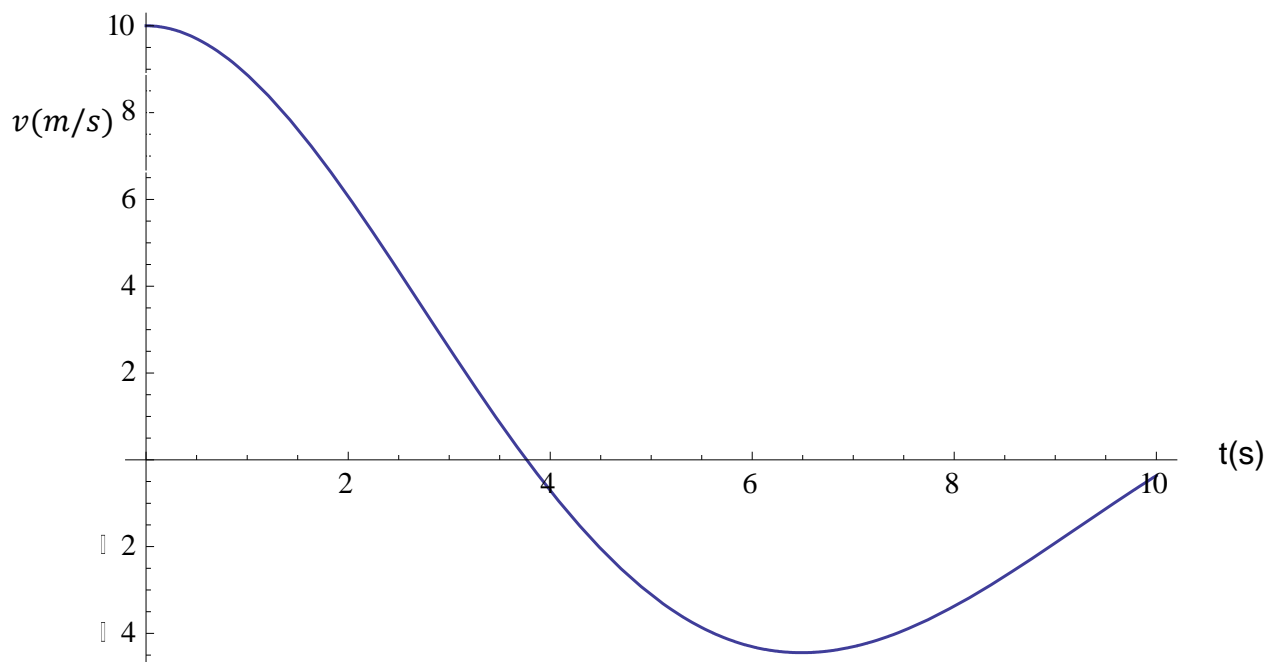


Σχήμα 3.16

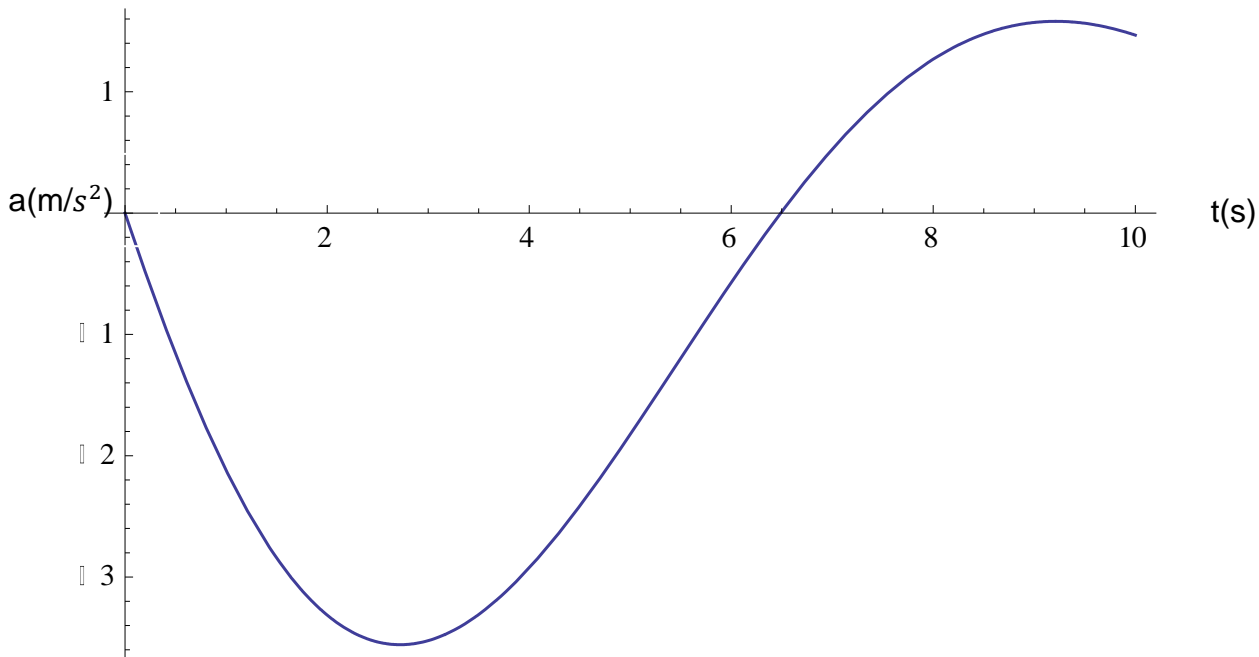


Σχήμα 3.17

Για $a_2 = 0.5 s^{-1}$, $a_1 = 0.5 m^{-1} s^{-1}$



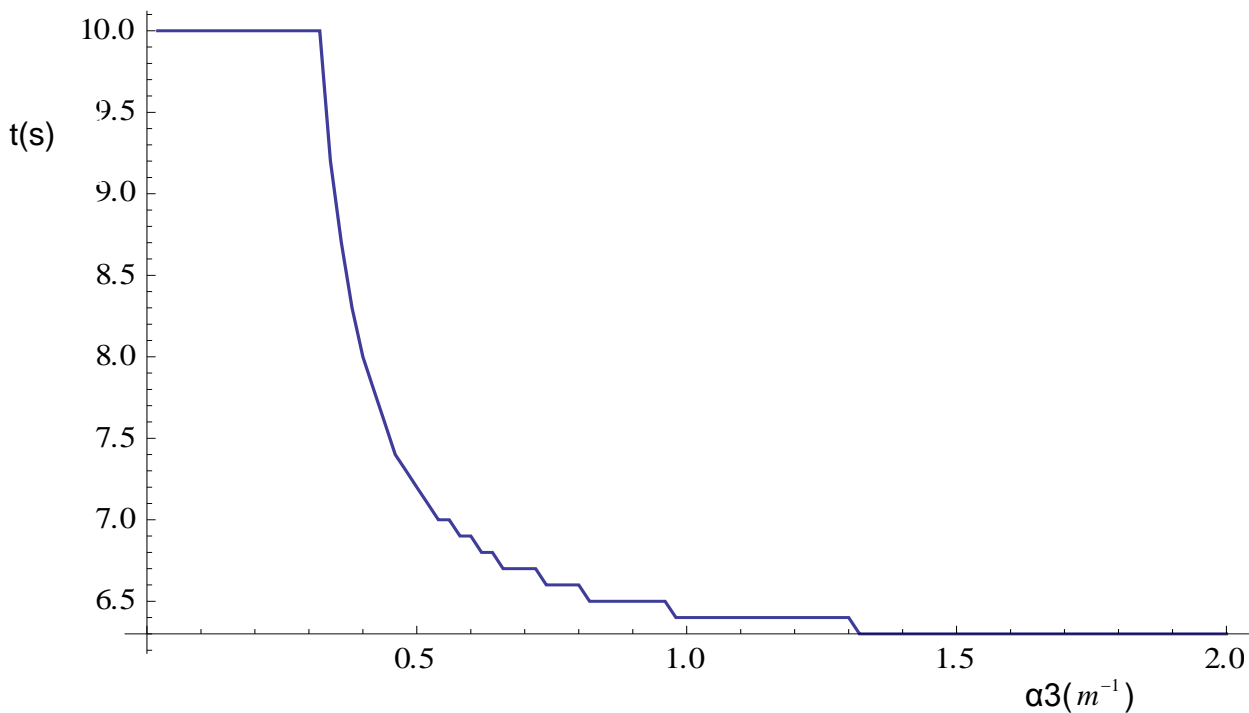
Σχήμα 3.18



Σχήμα 3.19

Συγκρίνοντας τα δύο διαγράμματα, βλέπουμε ότι στον μηδενισμό της επιτάχυνσης η v_1 έχει μεγαλύτερη απόλυτη τιμή για μεγαλύτερο ιξώδες. Παρατηρούμε ότι η επιτάχυνση μηδενίζεται σε μικρότερο χρόνο για μεγαλύτερο ιξώδες. Το ιξώδες παίρνει τον ρόλο της τριβής στην προσομοίωσή μας και έτσι με μεγαλύτερο ιξώδες, δηλαδή τριβή, το σώμα θα σταματήσει γρηγορότερα την κίνησή του προς τον τοίχο.

Ας δούμε τους χρόνους αποκόλλησης του σώματος από τον τοίχο.

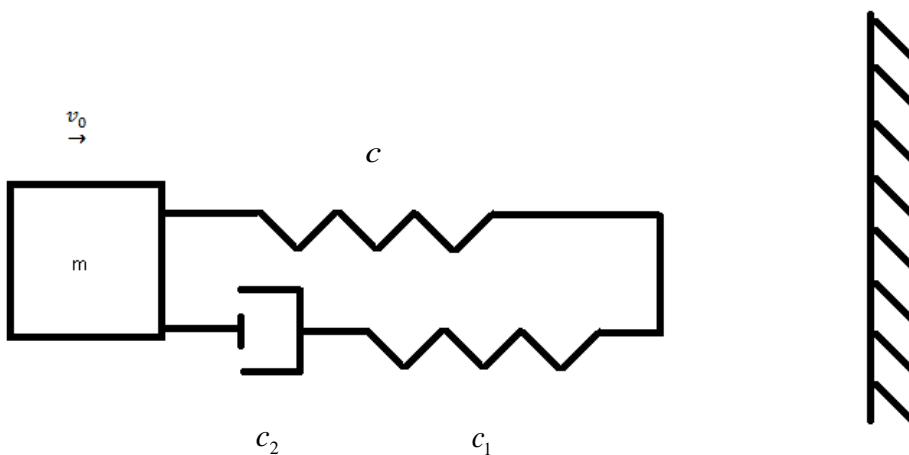


Σχήμα 3.20

Μέχρι το $\alpha_3=0.3$, το σώμα δεν έχει αποκολληθεί και έτσι το Mathematica μας δίνει την τιμή 10s, καθώς μέχρι αυτή την τιμή του χρόνου κάνουμε την διερεύνηση. Στη συνέχεια όπως προείπαμε ο χρόνος μειώνεται με την αύξηση του ιξώδους μέχρι ο λόγος να γίνει περίπου ίσος με 1.3. Για τιμές του λόγου μεγαλύτερες από 1.3, ο χρόνος αποκόλλησης παραμένει σταθερός.

3.4 Επίλυση προσομοίωσης με τη βοήθεια του τριπαραμετρικού μοντέλου.

Σώμα μάζας m ιξωδοελαστικού υλικού, προσκρούει σε άκαμπτο τοίχο με ταχύτητα $v_0=10^m/s$ και επανέρχεται με ταχύτητα v_1 . Σκοπός μας είναι να αναλύσουμε την κίνηση του σώματος, αλλά και τον συντελεστή επαναφοράς $e = \frac{-v_1}{v_0}$. Το σώμα θεωρείται ως ένα απλό μοντέλο μίας άκαμπτης μάζας m ενωμένης με ένα μοντέλο ελατηρίου – αποσβεστήρα (με σταθερά ελατηρίου c και c_1 και ιξώδες c_2), όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.21



Σχήμα 3.21

Λύση. Από την στιγμή της πρώτης επαφής έχουμε να κάνουμε με αποσβεσμένη ταλάντωση. Η εξίσωση κίνησης του σώματος είναι :

$$m\ddot{x} + c_2\dot{x}_2 + cx = 0$$

Όπου x_2 , η μετατόπιση του αποσβεστήρα.

Έχουμε $c_2\dot{x}_2 = c_1x_1$

και $x = x_1 + x_2$

Επομένως $c_2\dot{x}_2 = c_1(x - x_2)$

Τέλος καταλήγουμε στις εξισώσεις :

$$m\ddot{x} + 2\alpha_1\dot{x}_2 + \alpha_2^2 x = 0$$

$$\dot{x}_2 = \frac{\alpha_3^2}{2\alpha_1}(x - x_2)$$

Όπου $\alpha_1 = \frac{c_2}{2m}$, $\alpha_2 = \sqrt{\frac{c}{m}}$, $\alpha_3 = \sqrt{\frac{c_1}{m}}$ και $a = \frac{\alpha_1}{\alpha_3}$, $b = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$.

Το σώμα παραμένει σε επαφή με τον τοίχο μέχρι η επιτάχυνση να πάρει μηδενική τιμή. Στη συνέχεια προχωρούμε στην επίλυση της εξίσωσης με την εφαρμογή του προγράμματος *Mathematica*, θέτοντας αρχικές συνθήκες $x(0)=0, \dot{x}(0)=10$ και $x_2(0)=0$.

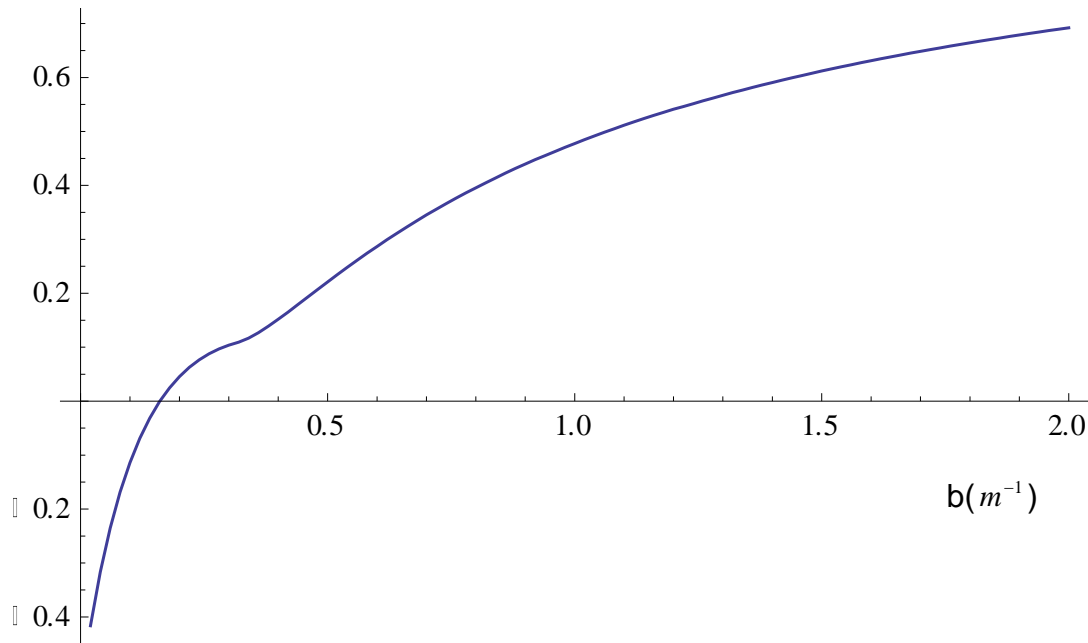
Για την περίπτωση όπου $\alpha_3 = 0$, έχουμε $x_1 = 0$ και $x_2 = x$.

Επομένως καταλήγουμε στην περίπτωση της επίλυσης με τη βοήθεια του μοντέλου Kelvin που αναλύσαμε στην Ενότητα 3.1 (βλέπε Σχήμα 3.1). Στην συνέχεια του κεφαλαίου δεν θα λαμβάνουμε υπ' όψιν την περίπτωση όπου $\alpha_3 = 0$.

Για την περίπτωση όπου $\alpha_2 = 0$, έχουμε την περίπτωση της επίλυσης με τη βοήθεια του μοντέλου Maxwell που αναλύσαμε στην Ενότητα 3.2 (βλέπε Σχήμα 3.12). Στην συνέχεια του κεφαλαίου δεν θα λαμβάνουμε υπ' όψιν την περίπτωση όπου $\alpha_2 = 0$.

Από τις δύο προηγούμενες περιπτώσεις συμπεραίνουμε ότι το τριπαραμετρικό μοντέλο είναι η υπέρθεση των μοντέλων Kelvin και Maxwell.

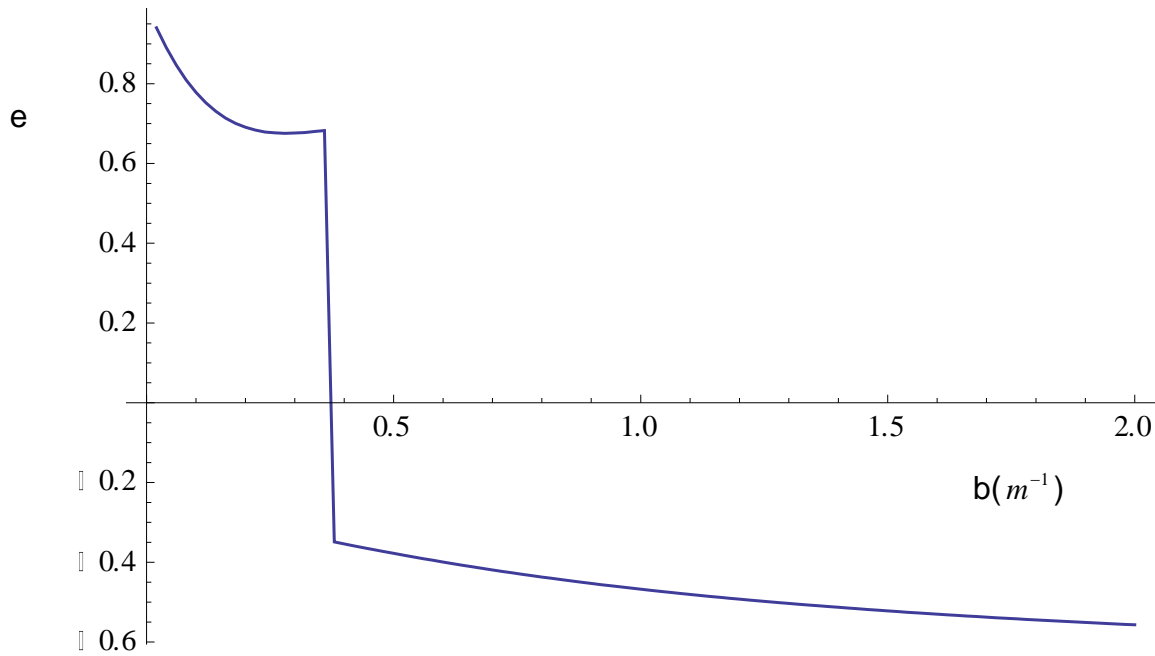
Για $\alpha_3 = 0.5s^{-1}$, $a_2 = 0.1s^{-1}$ και $a_1(m^{-1}s^{-1})$ να μεταβάλλεται από 0 έως 1



Σχήμα 3.22

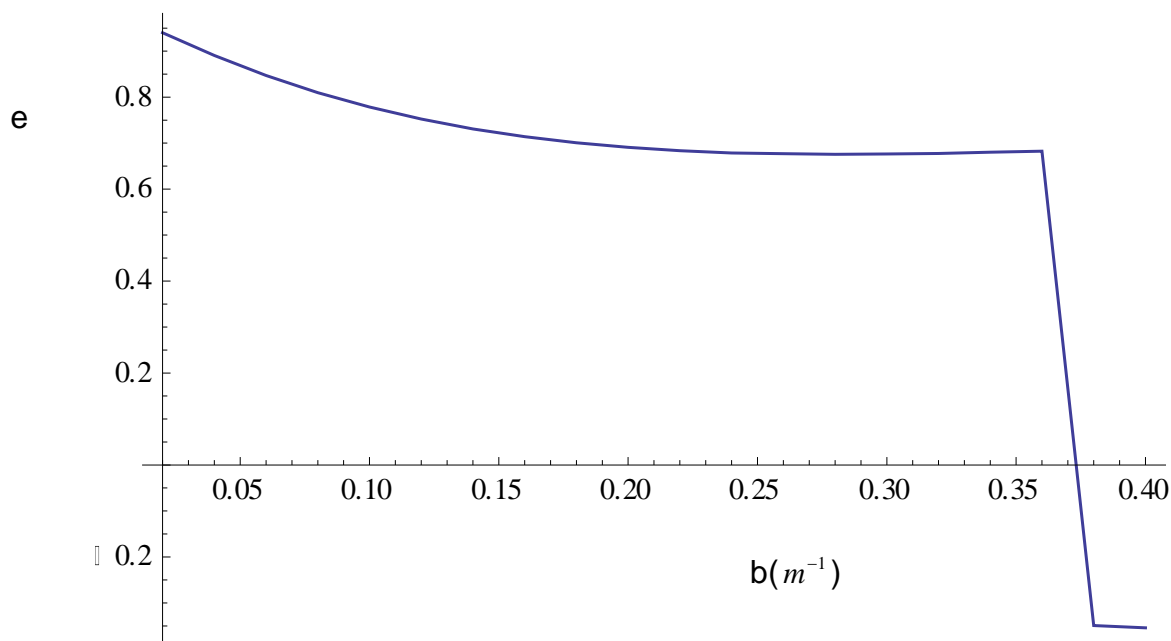
Για μικρό a_2 σε σχέση με τα α_1 και α_3 έχουμε ένα αποτέλεσμα τύπου μοντέλου Maxwell, κάτι που περιμέναμε καθώς εάν καταργήσουμε τελείως το πάνω ελατήριο θα καταλήξουμε σε μοντέλο Maxwell. Εδώ η ταχύτητα παίρνει θετικές τιμές για b περίπου ίσο με $0.17 m^{-1}$, δηλαδή για μικρότερο λόγο σταθερών απ' ότι στο μοντέλο Maxwell ($b=0.3 m^{-1}$) και αυτό εξηγείται με την ύπαρξη της a_2 .

Για $\alpha_3 = 0.5s^{-1}$, $a_2 = 0.5s^{-1}$ και $a_1(m^{-1}s^{-1})$ να μεταβάλλεται από 0 έως 1



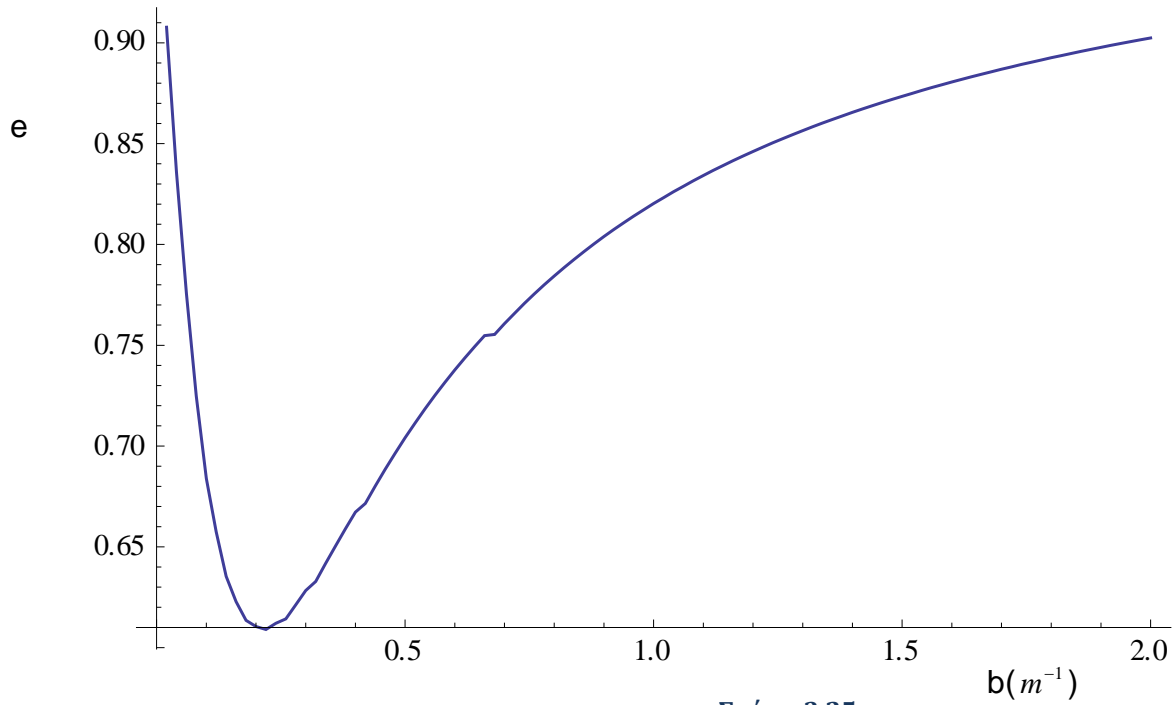
Σχήμα 3.23

Για $a_2 = \alpha_3$ παίρνουμε όπως βλέπουμε ένα καλύτερο αποτέλεσμα, με αποτελέσματα τύπου Kelvin για τιμές του λόγου b μικρότερες από $0.37 m^{-1}$, όπως μπορούμε να διακρίνουμε καλύτερα στο Σχήμα 3.24.

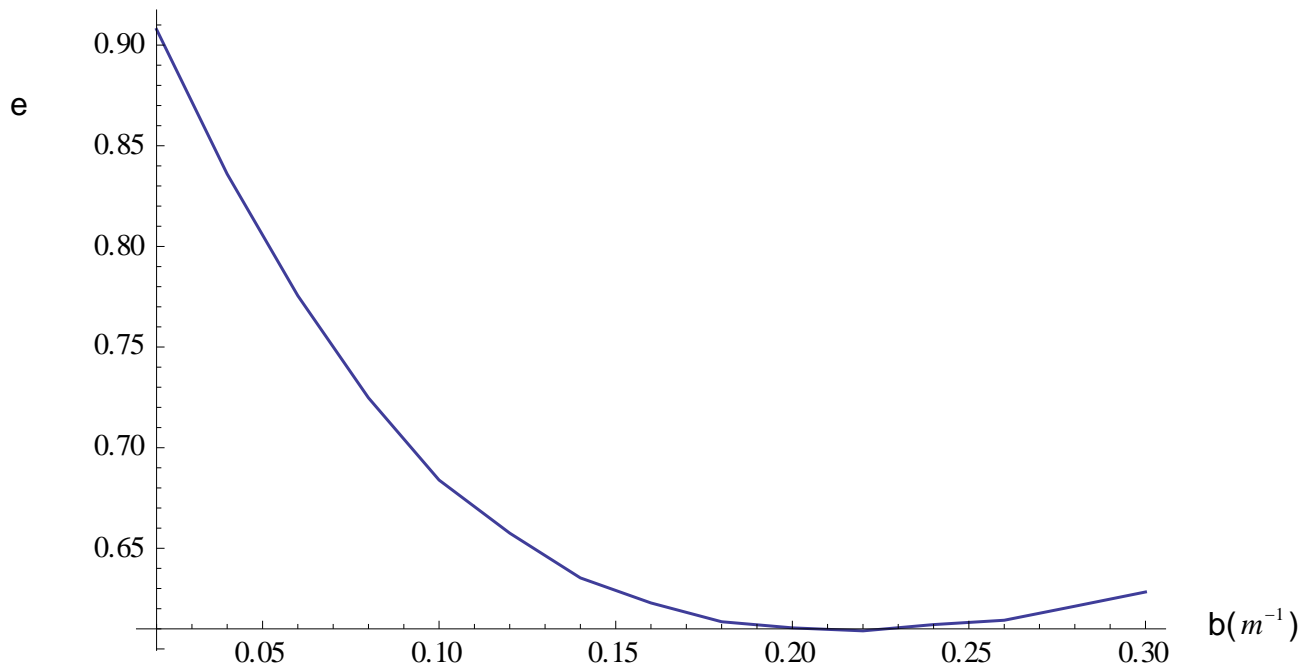


Σχήμα 3.24

Για $\alpha_3 = 0.5s^{-1}$, $a_2 = 1s^{-1}$ και $a_1(m^{-1}s^{-1})$ να μεταβάλλεται από 0 έως 1



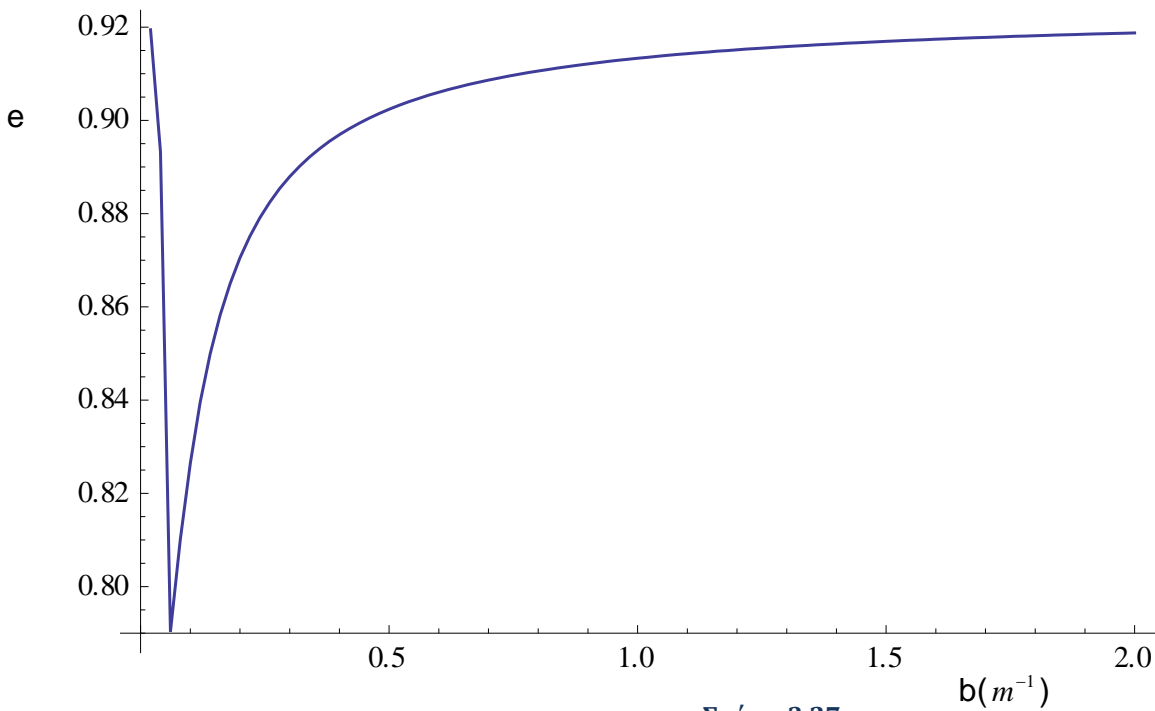
Σχήμα 3.25



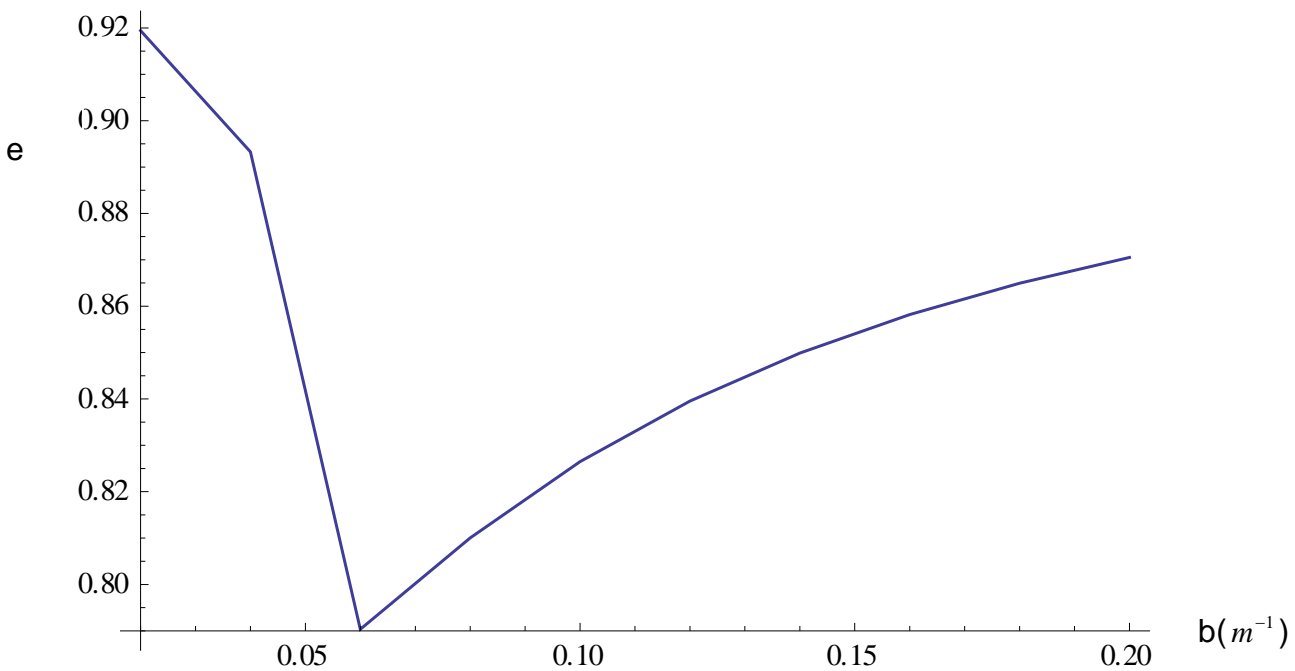
Σχήμα 3.26

Όπως βλέπουμε και σε αυτήν την περίπτωση για τιμές του λόγου b μεγαλύτερες από $0,25 m^{-1}$ η ταχύτητα αυξάνεται με την αύξηση του ιξώδους και έχουμε αποτελέσματα τύπου Maxwell.

Για $\alpha_3 = 0.5s^{-1}$, $a_2 = 5s^{-1}$ και $a_1(m^{-1}s^{-1})$ να μεταβάλλεται από 0 έως 1



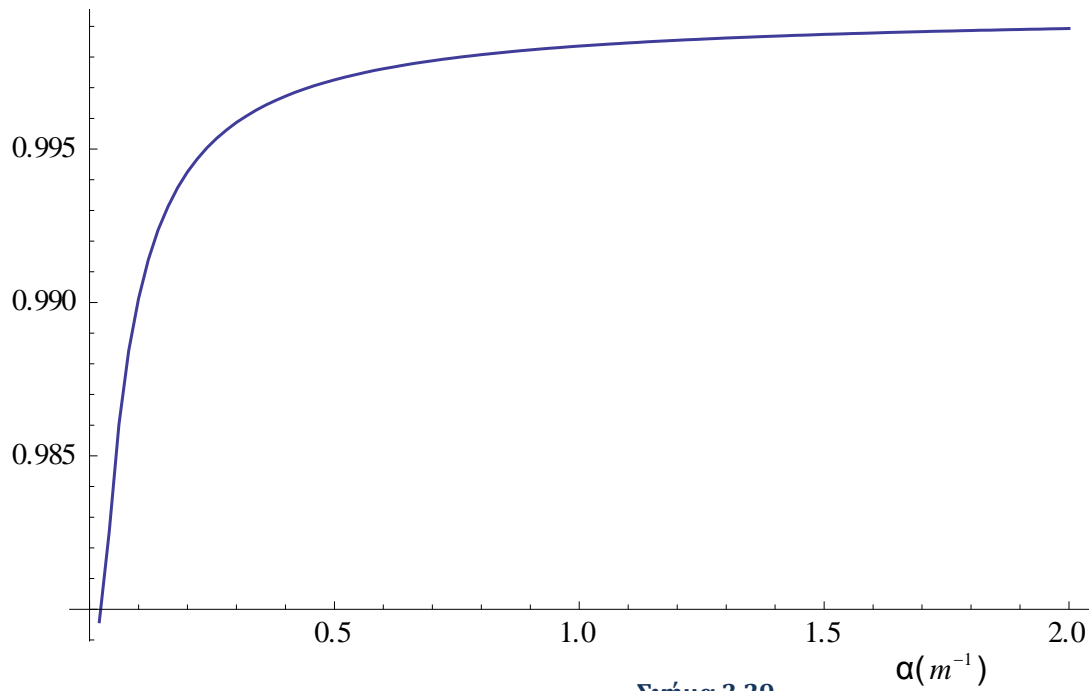
Σχήμα 3.27



Σχήμα 3.28

Από το Σχήμα 3.27 και το Σχήμα 3.28 διακρίνουμε ότι για αισθητά μεγαλύτερο a_2 η καμπύλη είναι ακόμα πιο απότομη και έχουμε αποτελέσματα τύπου Maxwell για ακόμη μικρότερο λόγο b .

Για $a_2 = 0.5s^{-1}$, $\alpha_3 = 0.1s^{-1}$ και $a_1(m^{-1}s^{-1})$ να μεταβάλλεται από 0 έως 1

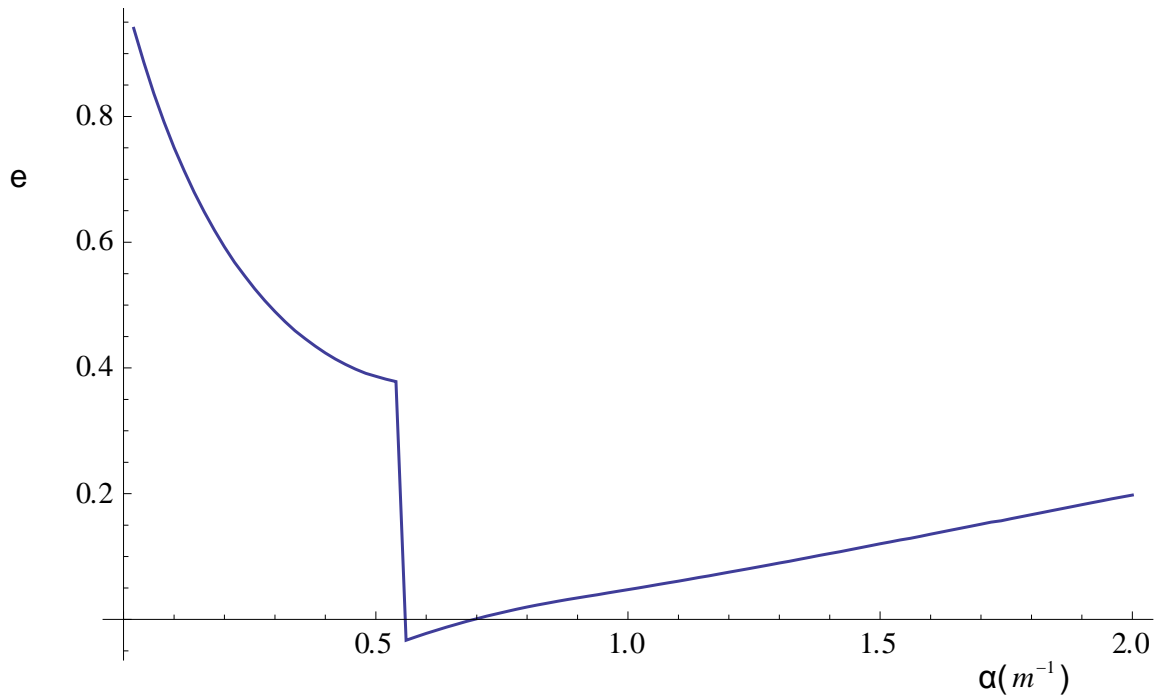


Σχήμα 3.29

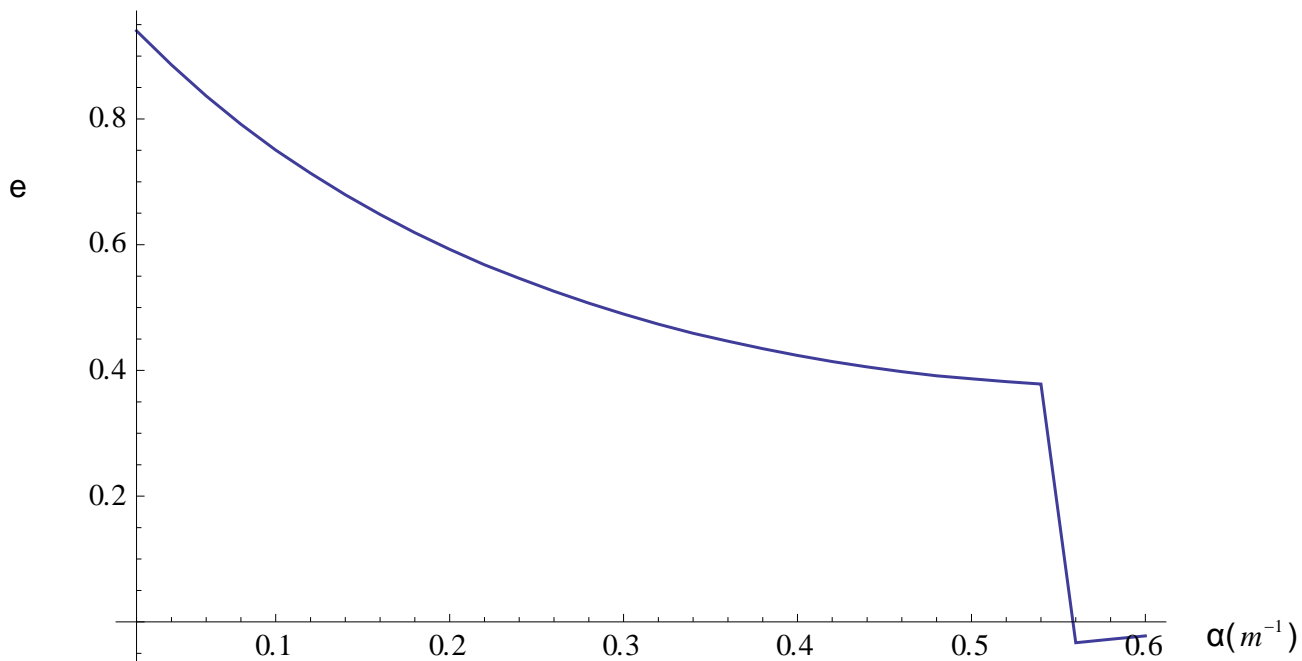
Όπως βλέπουμε για μικρό α_3 παίρνουμε αποτελέσματα τύπου Maxwell καθώς η ταχύτητα αυξάνεται με την αύξηση του ιξώδους.

Για $\alpha_3 = 0.5s^{-1}$, $a_2 = 0.5s^{-1}$ βρίσκουμε το ίδιο αποτέλεσμα με το διάγραμμα στο Σχήμα 3.23.

Για $\alpha_2 = 0.5s^{-1}$, $\alpha_3 = 1s^{-1}$ και $\alpha_1 (m^{-1}s^{-1})$ να μεταβάλλεται από 0 έως 1



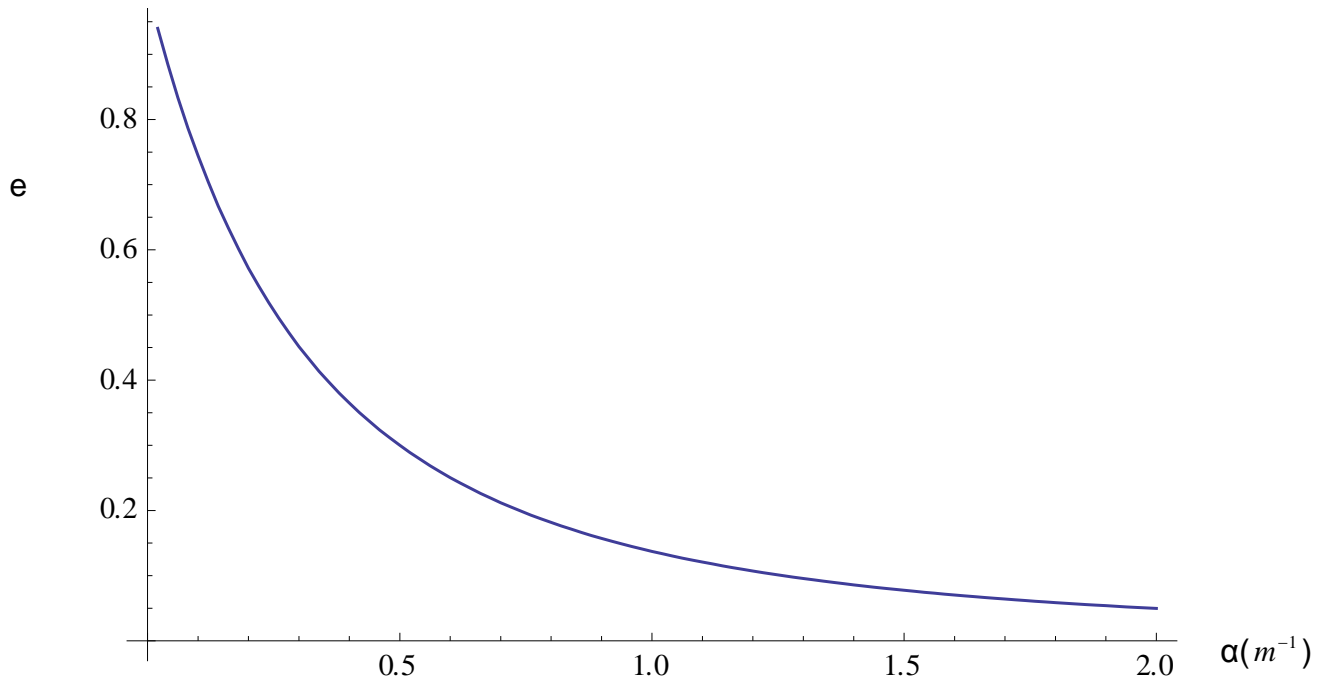
Σχήμα 3.30



Σχήμα 3.31

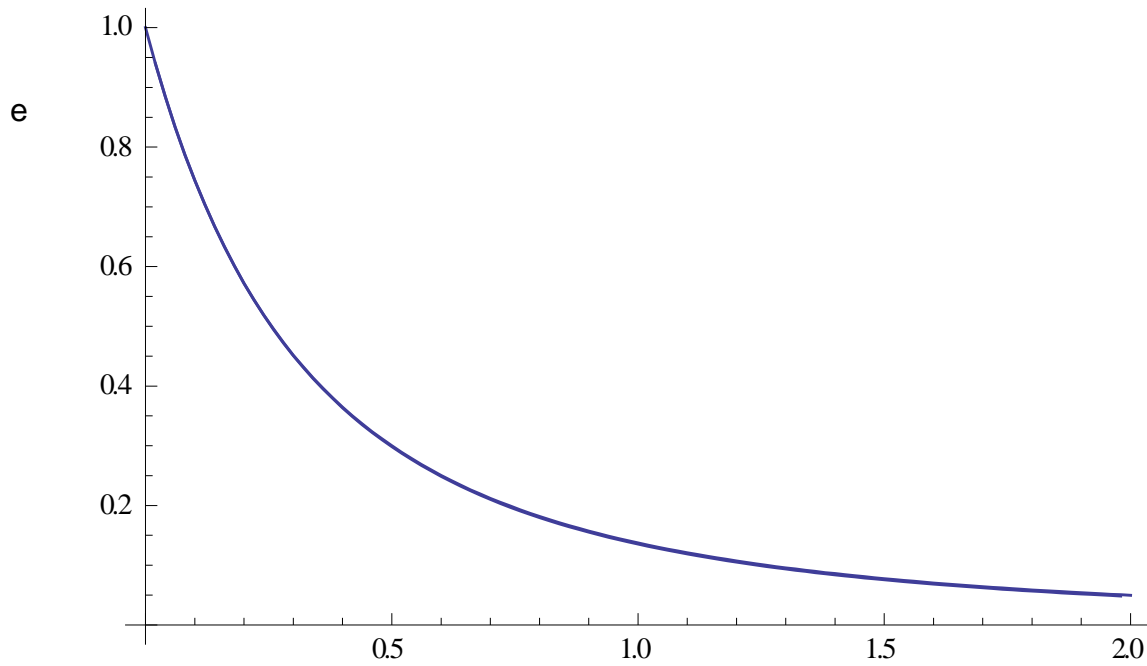
Καθώς αυξάνεται το α_3 παίρνουμε αποτέλεσμα τύπου Kelvin για μεγαλύτερο λόγο α .

Για $a_2 = 0.5s^{-1}$, $\alpha_3 = 5s^{-1}$ και $a_1 (m^{-1}s^{-1})$ να μεταβάλλεται από 0 έως 1



Σχήμα 3.32

Όπως βλέπουμε την καλύτερη λύση για το τριπαραμετρικό μοντέλο την δίνει ένα α_3 αισθητά μεγαλύτερο από τα a_2, α_1 . Το αποτέλεσμα μοιάζει με αυτό του μοντέλου Kelvin και στο Σχήμα 3.33 συγκρίνονται.



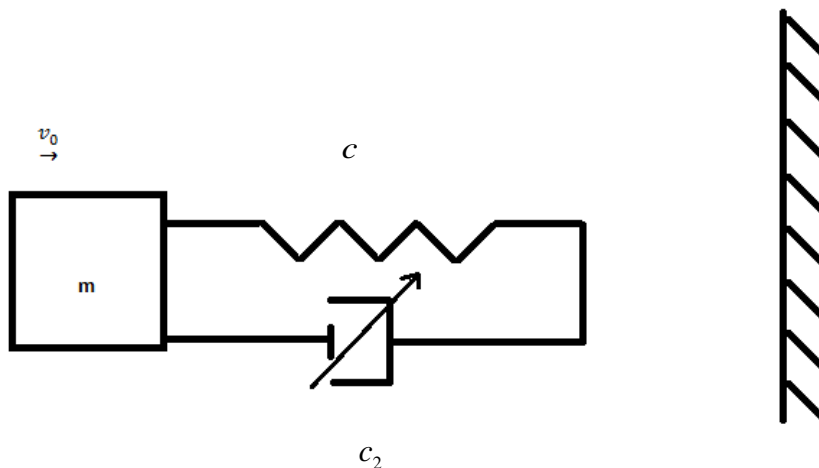
Σχήμα 3.33

Όπως βλέπουμε στο Σχήμα 3.33 οι δύο καμπύλες έχουν αμελητέες διαφορές και αυτό είναι αποτέλεσμα της αρχικής μας υπόθεσης ότι οι λύσεις για το τριπαμετρικό μοντέλο περιλαμβάνουν τις λύσεις για το μοντέλο Kelvin και το μοντέλο Maxwell.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: Επίλυση προσομοίωσης με την βοήθεια μη-γραμμικών ιξωδοελαστικών μοντέλων

4.1 Επίλυση προσομοίωσης με τη βοήθεια του μοντέλου Kelvin με μη-γραμμικό αποσβεστήρα.

Σώμα μάζας m ιξωδοελαστικού υλικού, προσκρούει σε άκαμπτο τοίχο με ταχύτητα $v_0=10^m/s$ και επανέρχεται με ταχύτητα v_1 . Σκοπός μας είναι να αναλύσουμε την κίνηση του σώματος, αλλά και τον συντελεστή επαναφοράς $e = \frac{-v_1}{v_0}$. Το σώμα θεωρείται ως ένα απλό μοντέλο μίας άκαμπτης μάζας m ενωμένης με ένα μοντέλο ελατηρίου – μη-γραμμικού αποσβεστήρα (με σταθερά ελατηρίου c και ιξώδες c_2), όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.1.



Σχήμα 4.1

Λύση. Από την στιγμή της πρώτης επαφής έχουμε να κάνουμε με αποσβενόμενη ταλάντωση. Η εξίσωση κίνησης του σώματος είναι :

$$m\ddot{x} + c_2\dot{x} + cx = 0$$

Όμως ο αποσβεστήρα είναι μη-γραμμικός και δεν υπακούει στον νόμο του Hooke.

Για την σταθερά του ιξώδους θα χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση Eyring(2.19):

$$\dot{x}_2 = A \sinh(bF_2)$$

Όπου x_2 η μετατόπιση και F_2 η δύναμη του αποσβεστήρα

Όμως από την εξίσωση κίνησης: $F_2 = -m\ddot{x} - cx$

Αντικαθιστώντας: $\dot{x}_2 = A \sinh(-bm\ddot{x} - bcx)$

Όμως $c_2 = \frac{\dot{x}_2}{F_2}$ για μία σταθερή F_2

Επομένως η εξίσωση κίνησης γίνεται:

$$m\ddot{x} + \frac{A}{F_2} \sinh(-bm\ddot{x} - bcx)\dot{x} + cx = 0$$

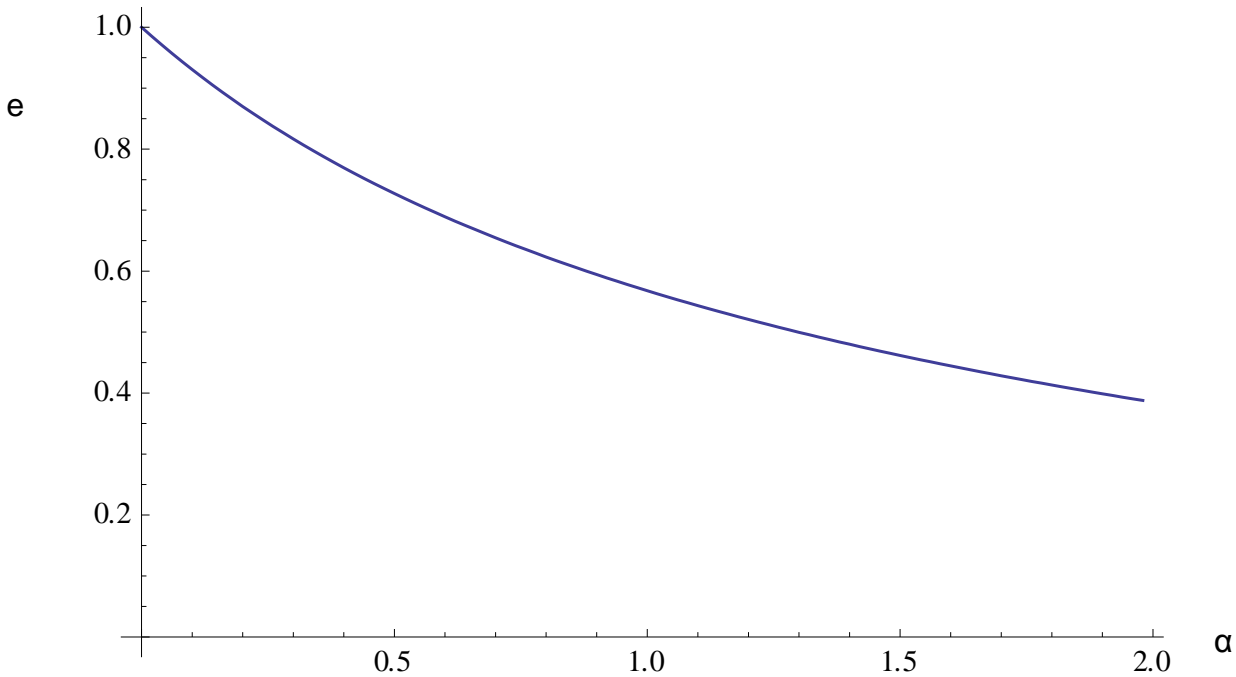
Έτσι καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$\ddot{x} + 2\alpha_1 \sinh(-bm\ddot{x} - bcx)\dot{x} + \alpha_2^2 x = 0$$

$$\text{Με } \alpha_1 = \frac{A}{2mF_2}, \alpha_2 = \sqrt{\frac{c}{m}} \text{ και } a = \frac{\alpha_1}{a_2}$$

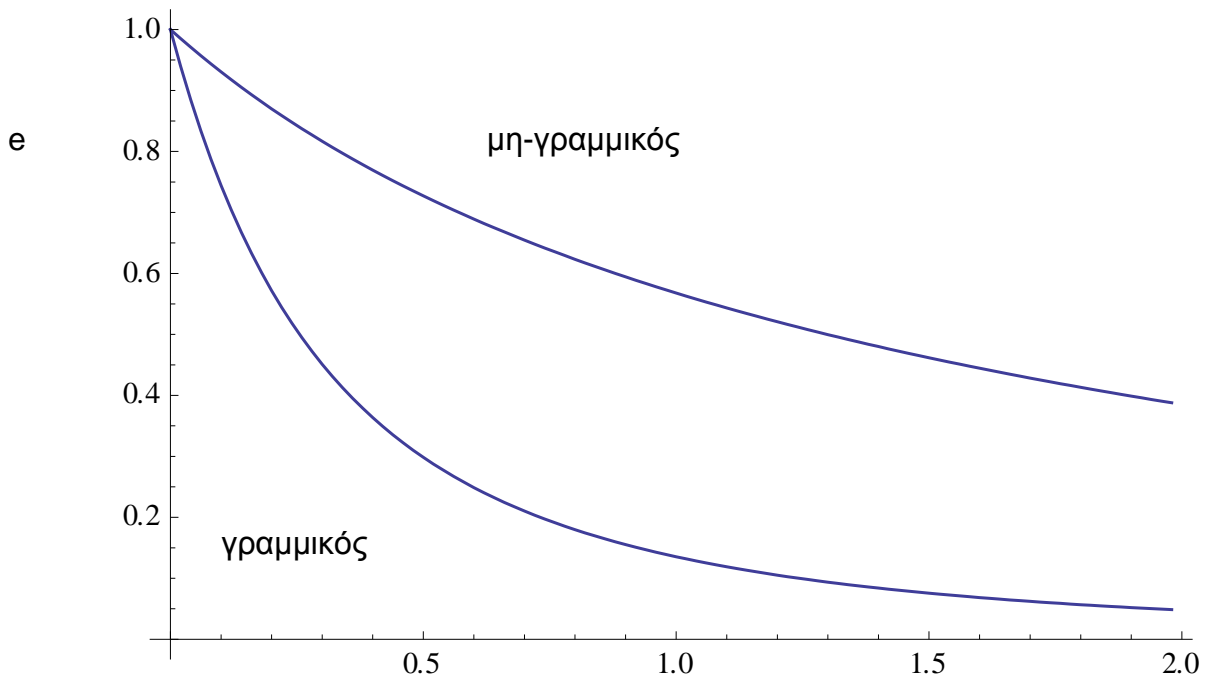
Το σώμα παραμένει σε επαφή με τον τοίχο μέχρι η επιτάχυνση να πάρει μηδενική τιμή. Στη συνέχεια προχωρούμε στην επίλυση της εξίσωσης με την εφαρμογή του προγράμματος *Mathematica*, θέτοντας αρχικές συνθήκες $x(0)=0$ και $\dot{x}(0)=10$.

Για $a_2 = 0.5$, $b_1 = 0.03$, $b_2 = 0.02$ και a_1 να μεταβάλλεται από 0 έως 1



Σχήμα 4.2

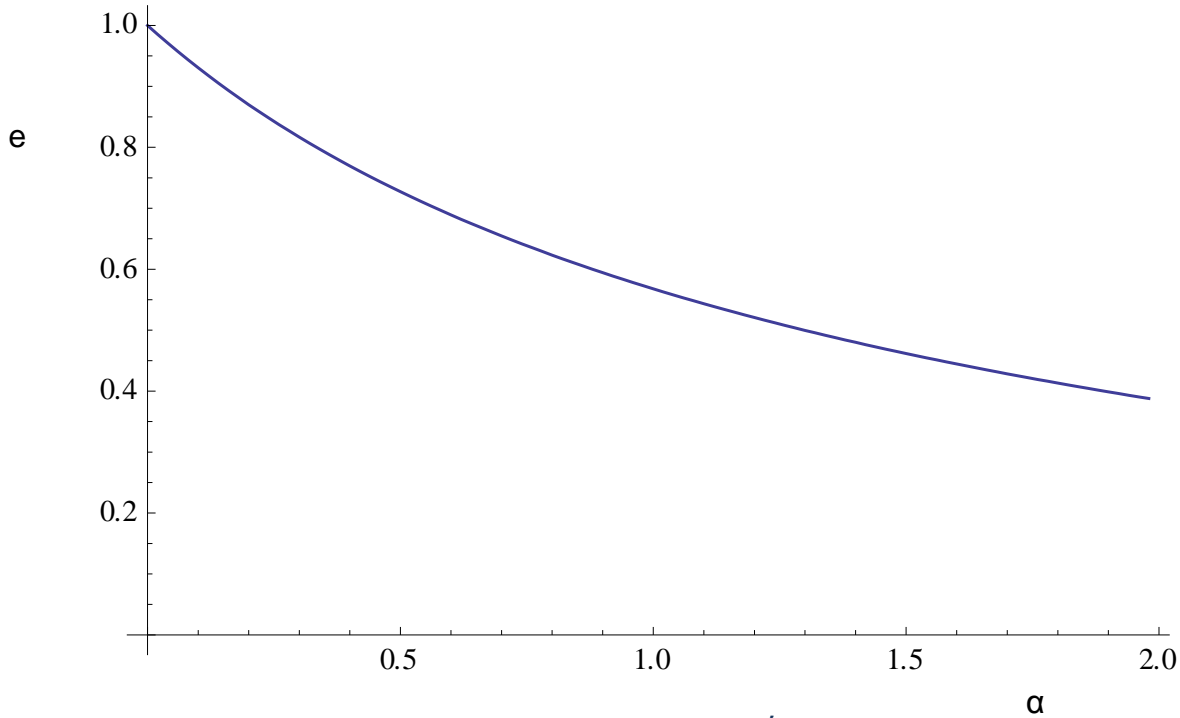
Στο Σχήμα 4.2 βλέπουμε ένα διάγραμμα παρόμοιο με αυτό του Kelvin στο Σχήμα 3.2. Στο επόμενο σχήμα συγκρίνονται τα δύο διαγράμματα.



Σχήμα 4.3

Όπως βλέπουμε οι λύσεις του μη-γραμμικού αποσβεστήρα δίνουν μία πιο απότομη καμπύλη από αυτές του γραμμικού. Επίσης η ταχύτητα για το μεγαλύτερο ιξώδες στον μη-γραμμικό είναι μεγαλύτερη από αυτήν του γραμμικού. Δηλαδή βλέπουμε μία εντονότερη επιρροή στην ταχύτητα επιστροφής από το ιξώδες όταν εφαρμόζουμε γραμμικό αποσβεστήρα.

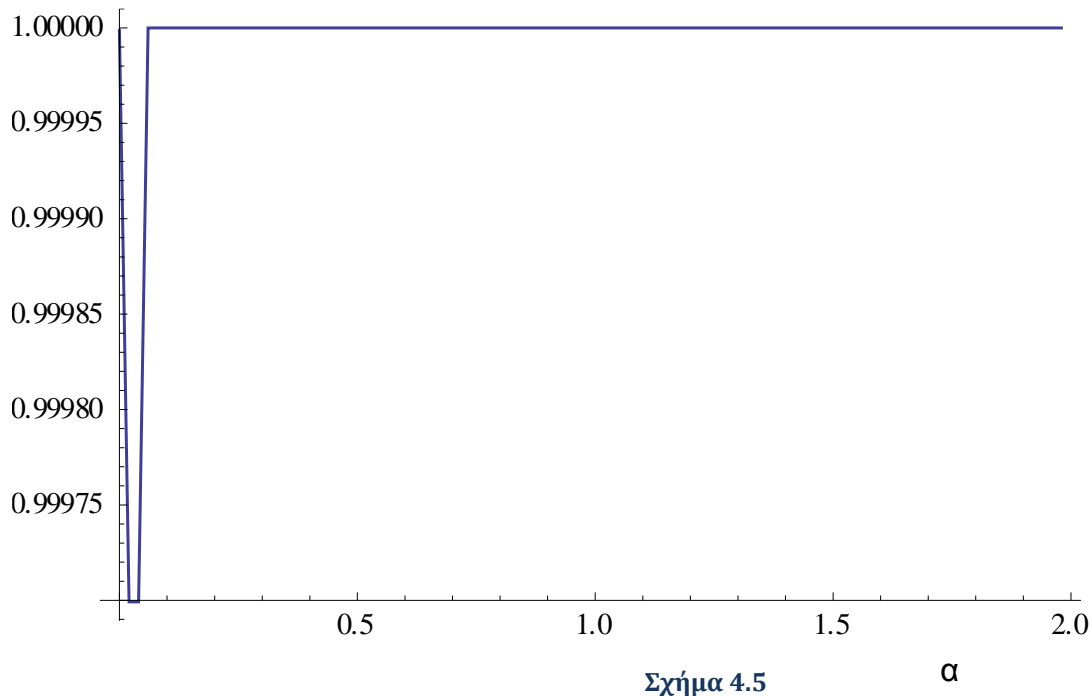
Για $a_2 = 0.05$, $b_1 = 0.003$, $b_2 = 0.002$ και a_1 να μεταβάλλεται από 0 έως 0.1



Σχήμα 4.4

Όπως βλέπουμε στο Σχήμα 4.4 για μικρές τιμές των μεγεθών έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα.

Για $a_2 = 5$, $b_1 = 0.3$, $b_2 = 0.2$ και a_1 να μεταβάλλεται από 0 έως 10

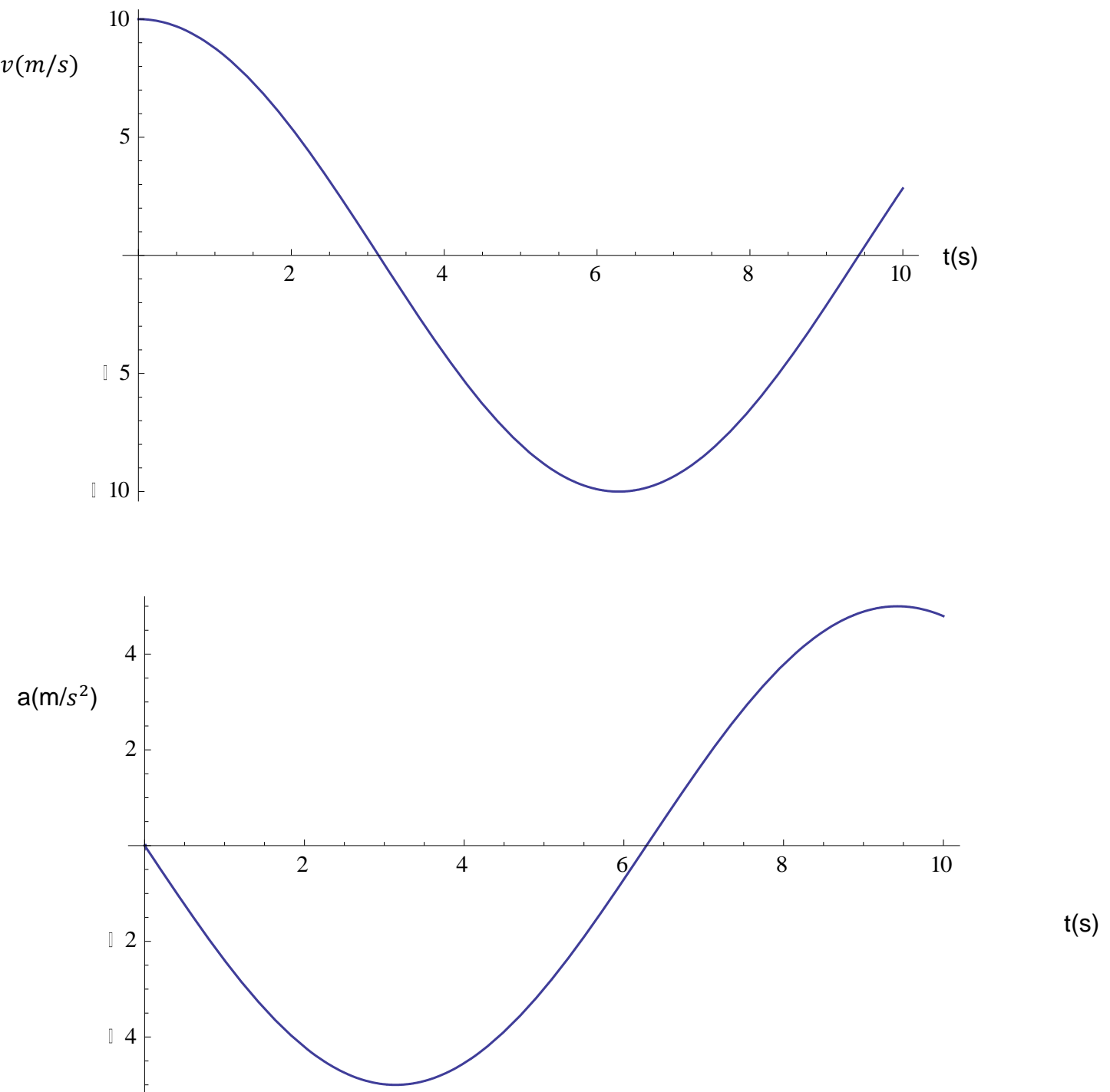


Σχήμα 4.5

Για μεγάλες τιμές των σταθερών ελατηρίου και αποσβεστήρα, όπως φαίνεται το μοντέλο μας δεν μπορεί να ανταποκριθεί. Στο Σχήμα 4.5 φαίνεται ότι η απόσβεση δεν επηρεάζει καθόλου την κίνηση του σώματος και το σώμα κάνει μία πλήρως ελαστική κρούση, κάτι άτοπο στην αρχική μας υπόθεση.

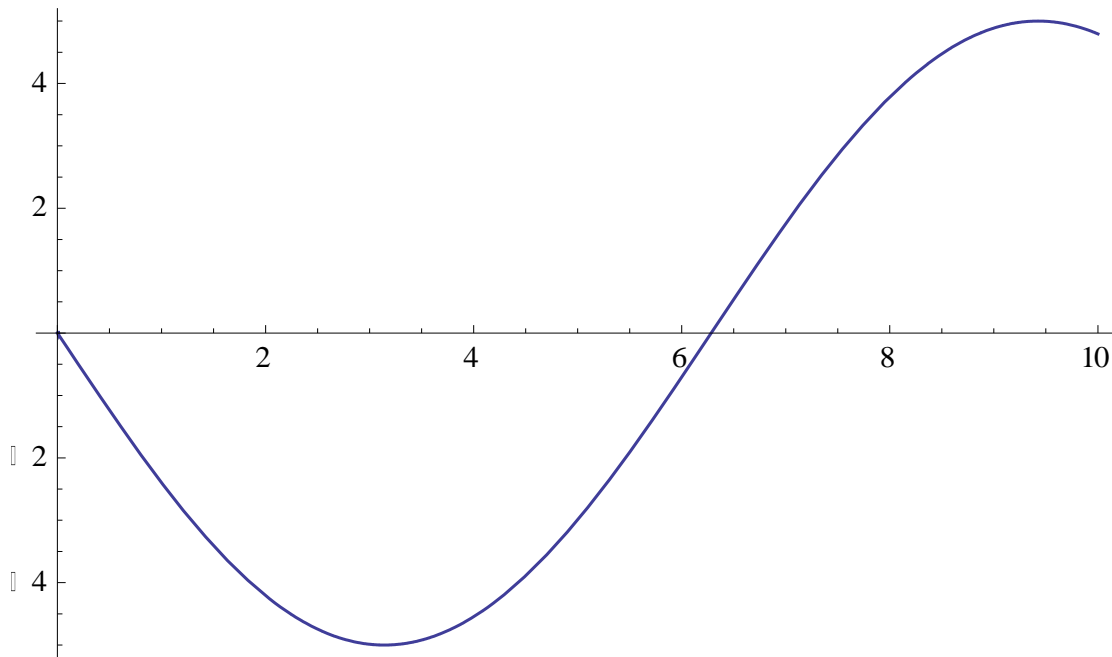
Ας αναλύσουμε τώρα την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σώματος κατά τη διάρκεια της κρούσης.

Για $a_2 = 0.5$, $\alpha_1 = 0$, $b_1 = 0.03$, $b_2 = 0.02$



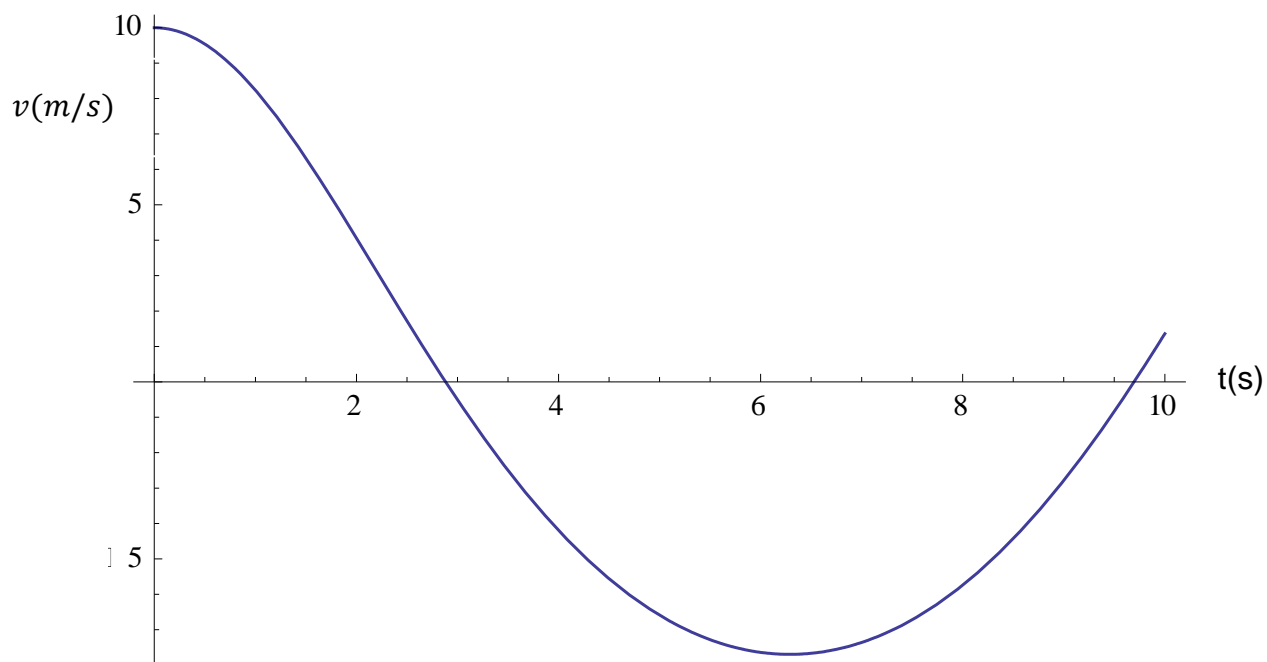
Σχήμα 4.6

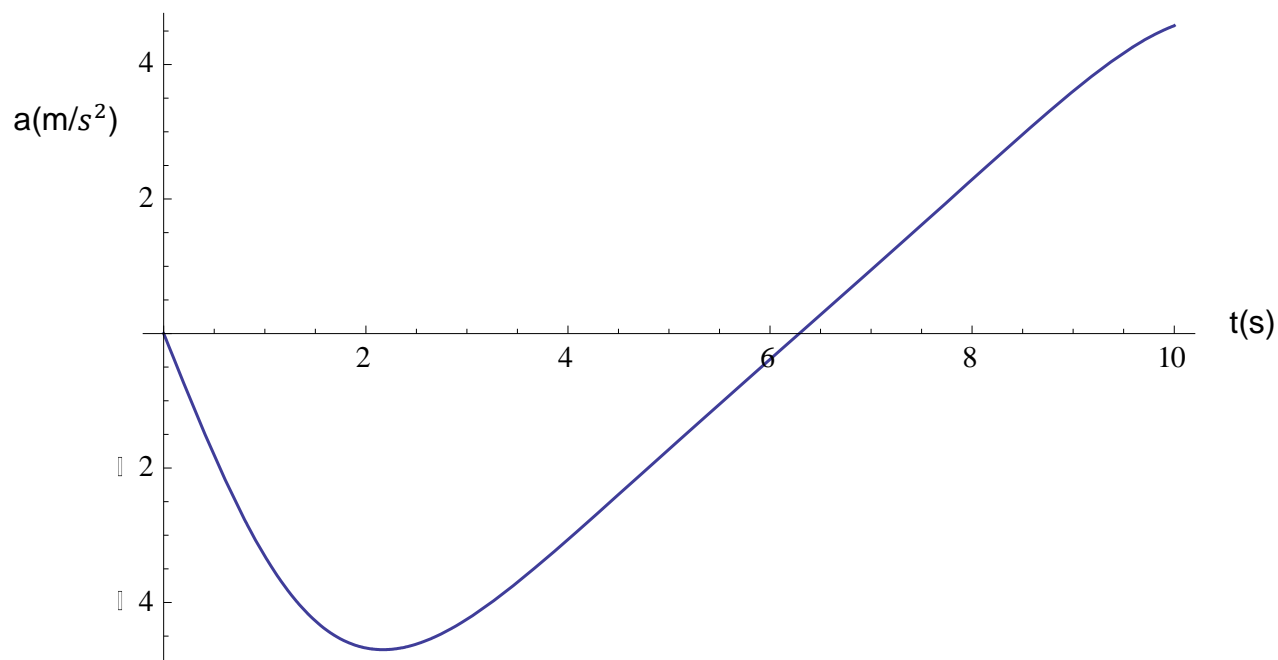
Στο



Σχήμα 4.6 έχουμε την περίπτωση που ο αποσβεστήρας δεν υπάρχει και το υλικό κάνει ελαστική κρούση.

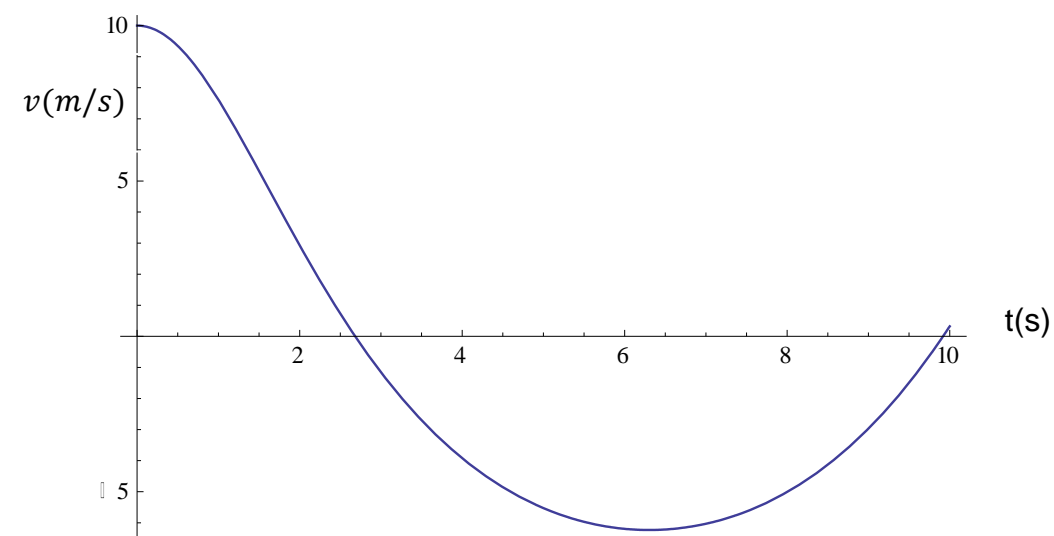
Για $a_2 = 0.5$, $\alpha_1 = 0.2$, $b_1 = 0.03$, $b_2 = 0.02$



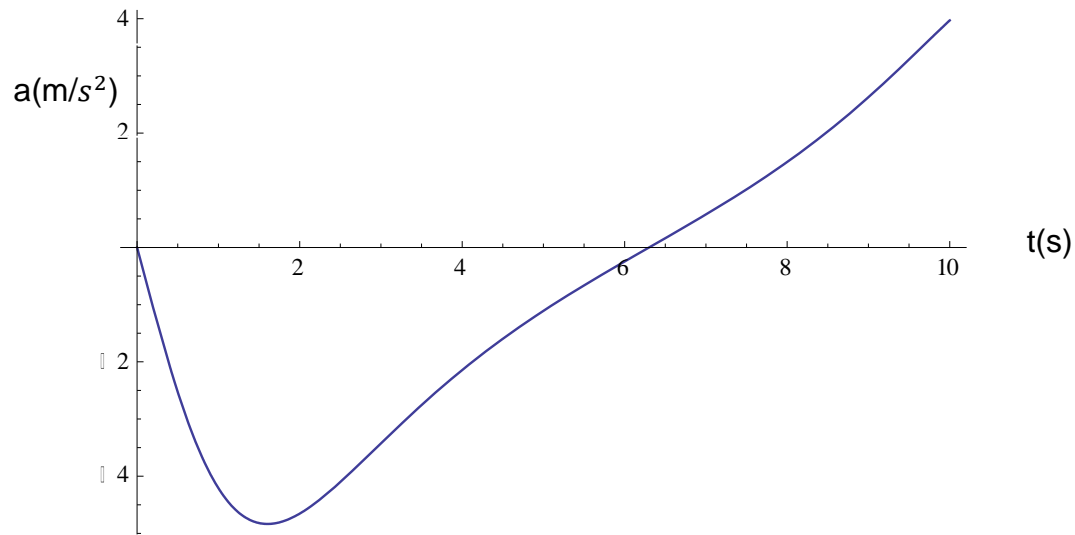


Σχήμα 4.7

Για $a_2 = 0.5$, $\alpha_1 = 0.4$, $b_1 = 0.03$, $b_2 = 0.02$

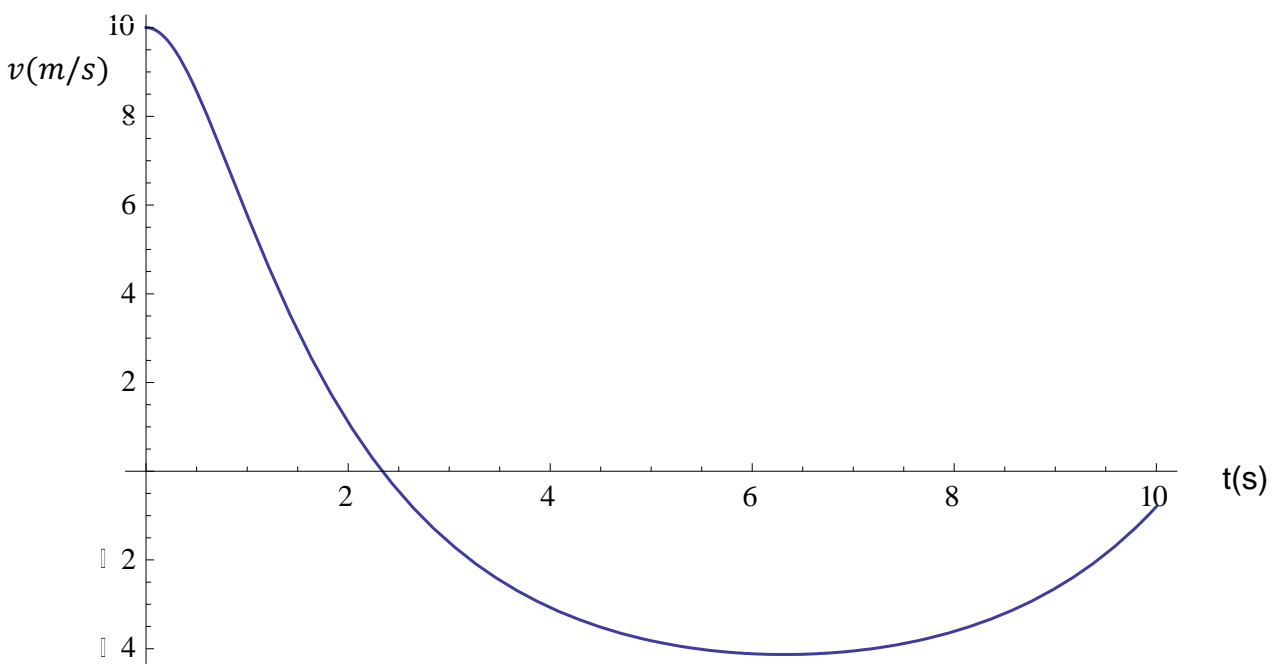


Σχήμα 4.8

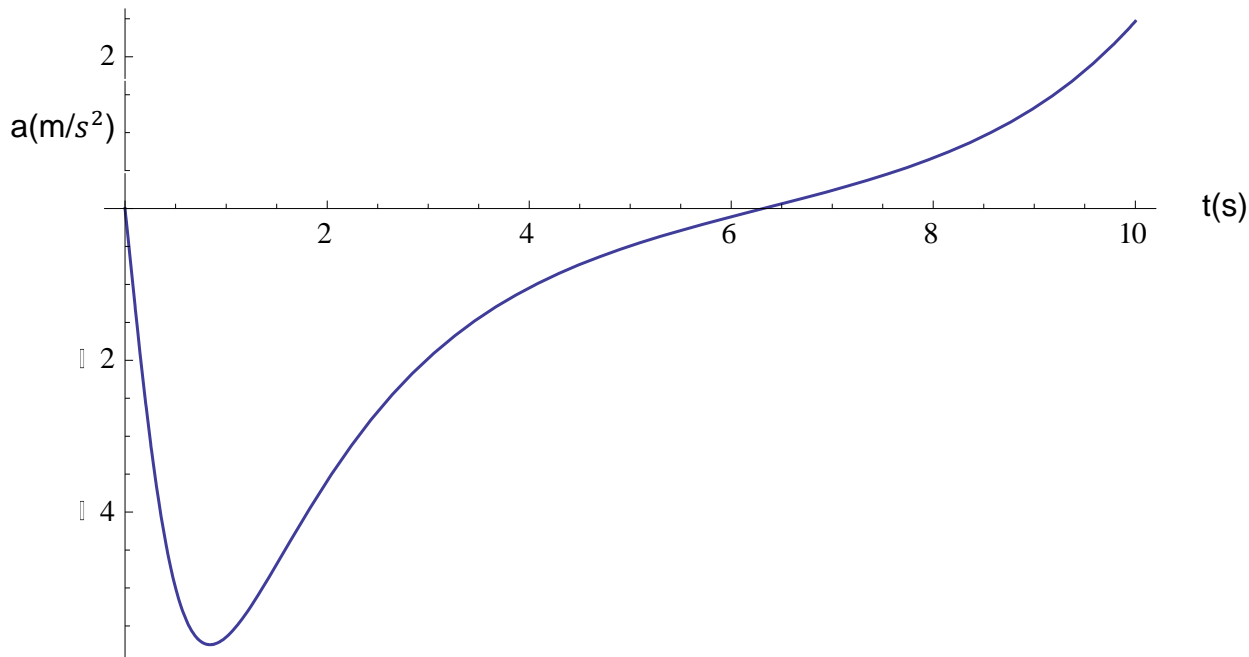


Σχήμα 4.9

Για $a_2 = 0.5$, $\alpha_1 = 0.9$, $b_1 = 0.03$, $b_2 = 0.02$



Σχήμα 4.10

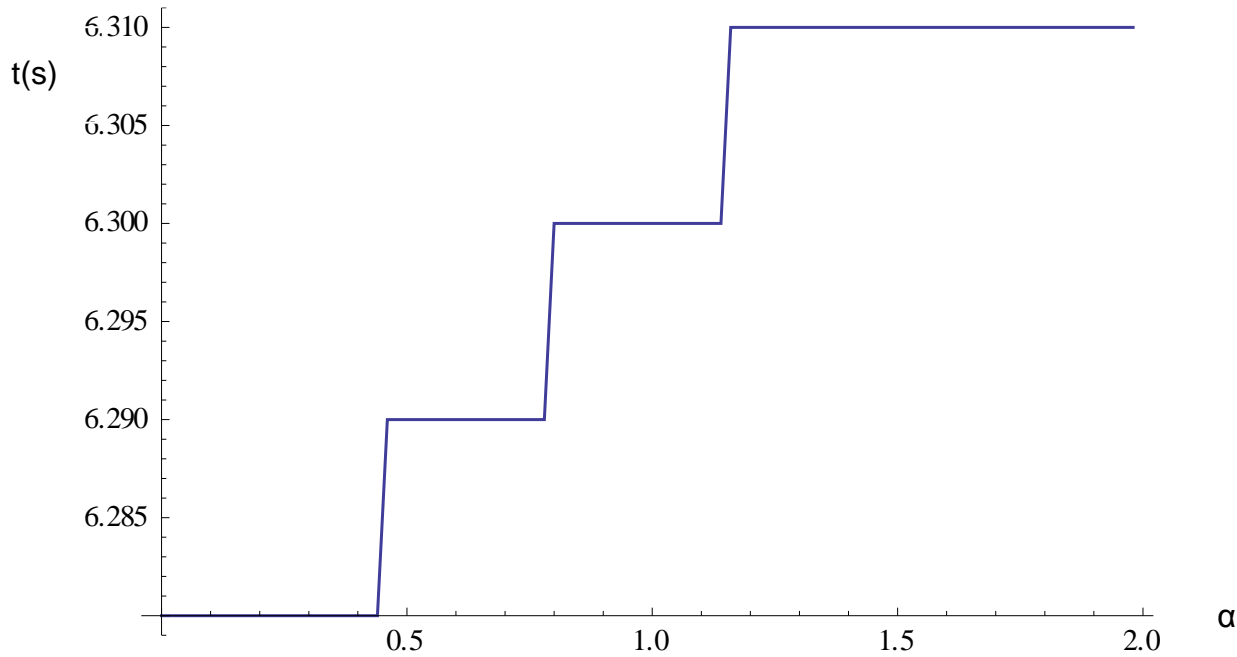


Σχήμα 4.11

Στα Σχήματα 4.6 - 4.9 βλέπουμε πως μεταλλάσσονται η ταχύτητα και η επιτάχυνση με την αύξηση του συντελεστή του μη-γραμμικού αποσβεστήρα και βλέπουμε ότι δεν επηρεάζονται τόσο όσο στην περίπτωση του γραμμικού αποσβεστήρα. Διακρίνουμε όμως ότι η επιτάχυνση μηδενίζεται περίπου για τον ίδιο χρόνο όσο αυξάνεται ο συντελεστής του μη-γραμμικού αποσβεστήρα.

Ας ελέγξουμε τους χρόνους αποκόλλησης λοιπόν.

Για $a_2 = 0.5$, $b_1 = 0.03$, $b_2 = 0.02$ και a_1 να μεταβάλλεται από 0 έως 1

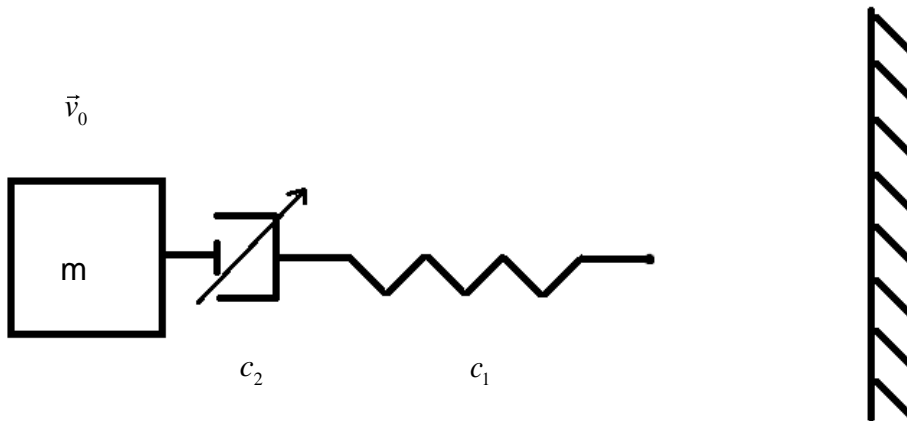


Σχήμα 4.12

Όπως περιμέναμε ο χρόνος αποκόλλησης είναι σχεδόν σταθερός και αυτό είναι άτοπο καθώς με την αύξηση του ιξώδους ο χρόνος αποκόλλησης θα πρέπει να μειώνεται. Επομένως αν και αυτό το μοντέλο δίνει λύσεις για την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σώματος, αποτυγχάνει να δώσει λύσεις για τον χρόνο αποκόλλησης του σώματος από τον τοίχο.

4.2 Επίλυση προσομοίωσης με τη βοήθεια του μοντέλου Maxwell με μη-γραμμικό αποσβεστήρα.

Σώμα μάζας m ιξωδοελαστικού υλικού, προσκρούει σε άκαμπτο τοίχο με ταχύτητα $v_0=10^m/s$ και επανέρχεται με ταχύτητα v_1 . Σκοπός μας είναι να αναλύσουμε την κίνηση του σώματος, αλλά και τον συντελεστή επαναφοράς $e = \frac{-v_1}{v_0}$. Το σώμα θεωρείται ως ένα απλό μοντέλο μίας άκαμπτης μάζας m ενωμένης με ένα μοντέλο ελατηρίου – μη-γραμμικού αποσβεστήρα (με σταθερά ελατηρίου c και ιξώδες c_2), όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.13.



Σχήμα 4.13

Λύση. Από την στιγμή της πρώτης επαφής έχουμε να κάνουμε με αποσβενόμενη ταλάντωση. Η εξίσωση κίνησης του σώματος είναι :

$$m\ddot{x} + c_2\dot{x}_2 = 0 \quad \text{ή} \quad m\ddot{x} + c_1x_1 = 0$$

Όπου x_2 η μετατόπιση του αποσβεστήρα και x_1 η μετατόπιση του ελατηρίου

Για την σταθερά του ιξώδους χρησιμοποιήσαμε την εξίσωση Eyring (2.19):

$$\dot{x}_2 = A \sinh(bF_2)$$

Όπου x_2 η μετατόπιση και F_2 η δύναμη του αποσβεστήρα. Όμως η εξίσωση Eyring δεν μας έδωσε λύσεις.

Πολλές φορές σε μηχανικές μελέτες δεν χρησιμοποιείται η μικρότερη ροή τάσης προς την αντίθετη κατεύθυνση(2.25) :

$$v_2 = v_0 \exp\left[-\frac{(\Delta H + \beta \cdot \sigma)}{RT}\right]$$

Και θεωρείται μοναδική ροή τάσης η (2.16) :

$$v_1 = v_0 \exp\left[-\frac{(\Delta H - \beta \cdot \sigma)}{RT}\right]$$

Ακολουθώντας αυτήν την εξίσωση έχουμε:

$$\dot{x}_2 = A \exp(bF_2)$$

Όμως από την εξίσωση κίνησης: $F_2 = -m\ddot{x}$

Αντικαθιστώντας: $\dot{x}_2 = A \exp(-bm\ddot{x})$

Όμως $c_2 = \frac{\dot{x}_2}{F_2}$ για μία σταθερή F_2

Επομένως η εξίσωση κίνησης γίνεται:

$$m\ddot{x} + \frac{A}{F_2} \exp(-bm\ddot{x}) \dot{x}_2 = 0$$

Καθώς $c_2 \dot{x}_2 = c_1 x_1$

και $x = x_1 + x_2$

Επομένως $c_2 \dot{x}_2 = c_1 (x - x_2)$

Τέλος καταλήγουμε στις εξισώσεις :

$$m\ddot{x} + 2\alpha_1 \exp(-bm\ddot{x}) \dot{x}_2 = 0$$

και $\dot{x}_2 = \frac{\alpha_2^2}{2\alpha_1} (x - x_2)$

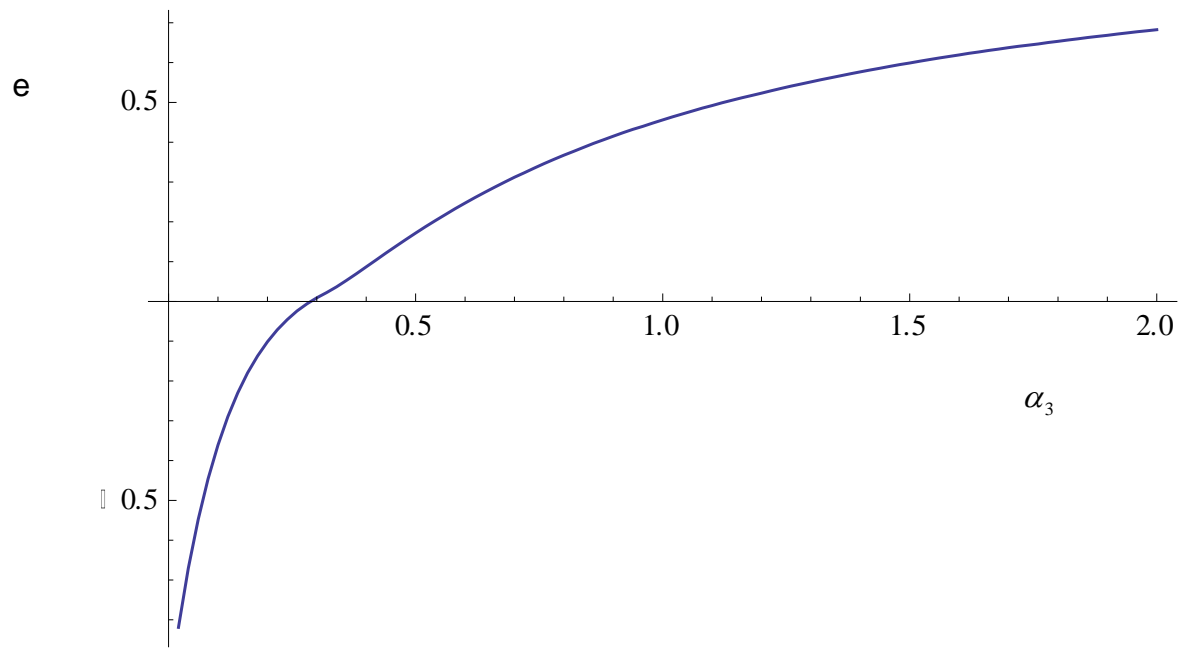
Όπου $\alpha_1 = \frac{A}{2mF_2}$, $\alpha_2 = \sqrt{\frac{c_1}{m}}$ και $\alpha_3 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$

Το σώμα παραμένει σε επαφή με τον τοίχο μέχρι η επιτάχυνση να πάρει μηδενική τιμή. Στη συνέχεια προχωρούμε στην επίλυση της εξίσωσης με την εφαρμογή του προγράμματος *Mathematica*, θέτοντας αρχικές συνθήκες $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=10$ και $x_2(0)=0$.

Για την περίπτωση όπου $\alpha_1 = 0$, έχουμε $x_2 = 0$ και $x_1 = x$.

Επομένως καταλήγουμε στην περίπτωση της απλής αρμονικής ταλάντωσης που αναλύσαμε στο Κεφάλαιο 3.1 (βλέπε Σχ.3.1.4). Στην συνέχεια του κεφαλαίου δεν θα λαμβάνουμε υπ' όψιν την περίπτωση όπου $\alpha_1 = 0$.

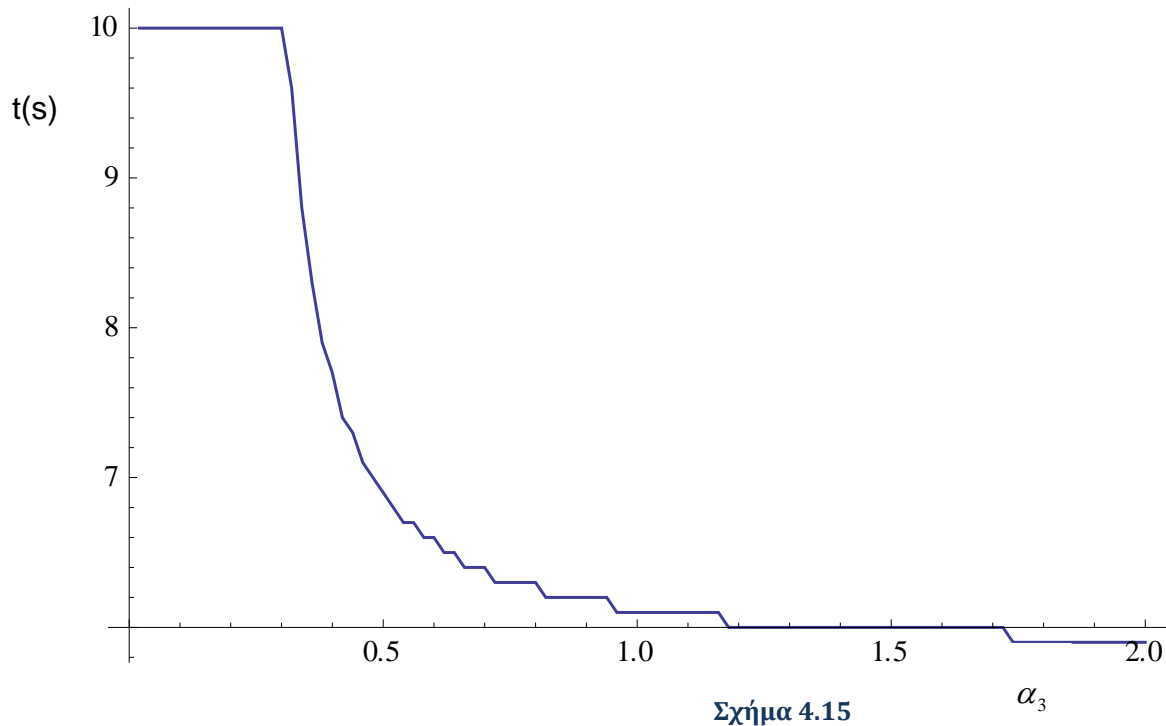
Για $a_2 = 0.5$, $b = 0.03$ και a_1 να μεταβάλλεται από 0 έως 1



Σχήμα 4.14

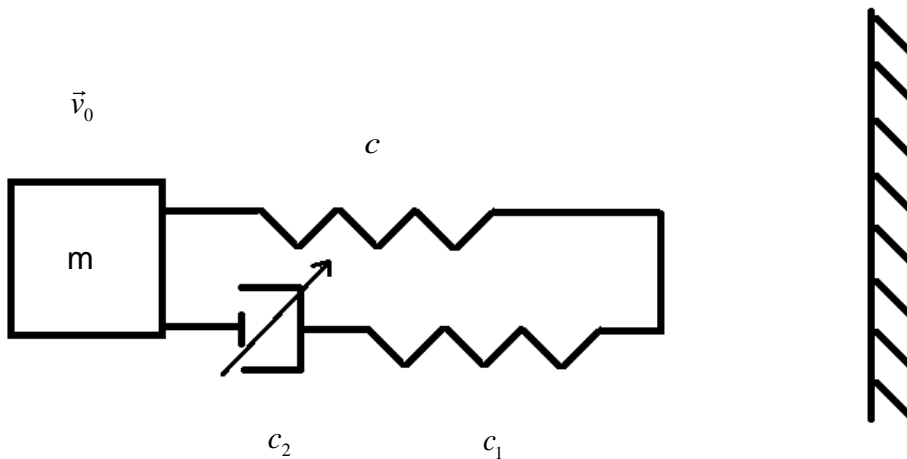
Παρατηρούμε ότι το διάγραμμα στο Σχήμα 4.14 είναι ίδιο με αυτό στο Σχήμα 3.13. Επομένως η μη-γραμμικότητα του αποσβεστήρα δεν επηρεάζει καθόλου τις λύσεις μας.

Αυτό φαίνεται και από τους χρόνους αποκόλλησης που είναι ακριβώς ίδιοι.



4.3 Επίλυση προσομοίωσης με τη βοήθεια του τριπαραμετρικού μοντέλου με μη-γραμμικό αποσβεστήρα.

Σώμα μάζας m ιξωδοελαστικού υλικού, προσκρούει σε άκαμπτο τοίχο με ταχύτητα $v_0=10\text{m/s}$ και επανέρχεται με ταχύτητα v_1 . Σκοπός μας είναι να αναλύσουμε την κίνηση του σώματος, αλλά και τον συντελεστή επαναφοράς $e = \frac{-v_1}{v_0}$. Το σώμα θεωρείται ως ένα απλό μοντέλο μίας άκαμπτης μάζας m ενωμένης με ένα μοντέλο ελατηρίου – μη-γραμμικού αποσβεστήρα (με σταθερές ελατηρίου c , c_1 και ιξώδες c_2), όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.16.



Σχήμα 4.16

Λύση. Από την στιγμή της πρώτης επαφής έχουμε να κάνουμε με αποσβενόμενη ταλάντωση. Η εξίσωση κίνησης του σώματος είναι :

$$m\ddot{x} + c_2\dot{x}_2 + cx = 0$$

Όμως ο αποσβεστήρας είναι μη-γραμμικός και δεν υπακούει στον νόμο του Hooke.

Για την σταθερά του ιξώδους θα χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση Eyring(2.19):

$$\dot{x}_2 = A \sinh(bF_2)$$

Όπου x_2 η μετατόπιση και F_2 η δύναμη του αποσβεστήρα

Όμως από την εξίσωση κίνησης: $F_2 = -m\ddot{x} - cx$

Αντικαθιστώντας: $\dot{x}_2 = A \sinh(-bm\ddot{x} - bcx)$

Όμως $c_2 = \frac{\dot{x}_2}{F_2}$ για μία σταθερή F_2

Επομένως η εξίσωση κίνησης γίνεται:

$$m\ddot{x} + \frac{A}{F_2} \sinh(-bm\ddot{x} - bcx)\dot{x}_2 + cx = 0$$

Καθώς $c_2\dot{x}_2 = c_1x_1$

και $x = x_1 + x_2$

Επομένως $c_2\dot{x}_2 = c_1(x - x_2)$

Έτσι καταλήγουμε στις εξισώσεις:

$$\ddot{x} + 2\alpha_1 \sinh(-bm\dot{x} - bcx)\dot{x}_2 + \alpha_2^2 x = 0$$

$$\dot{x}_2 = \frac{\alpha_3^2}{2\alpha_1}(x - x_2)$$

$$\text{Με } \alpha_1 = \frac{A}{2mF_2}, \alpha_2 = \sqrt{\frac{c}{m}}, \alpha_3 = \sqrt{\frac{c_1}{m}}, b = \frac{\alpha_1}{a_2}, a = \frac{\alpha_1}{a_2}$$

Το σώμα παραμένει σε επαφή με τον τοίχο μέχρι η επιτάχυνση να πάρει μηδενική τιμή. Στη συνέχεια προχωρούμε στην επίλυση της εξίσωσης με την εφαρμογή του προγράμματος *Mathematica*, θέτοντας αρχικές συνθήκες $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=10$ και $x_2(0)=0$.

Για την περίπτωση όπου $\alpha_3 = 0$, έχουμε $x_1 = 0$ και $x_2 = x$.

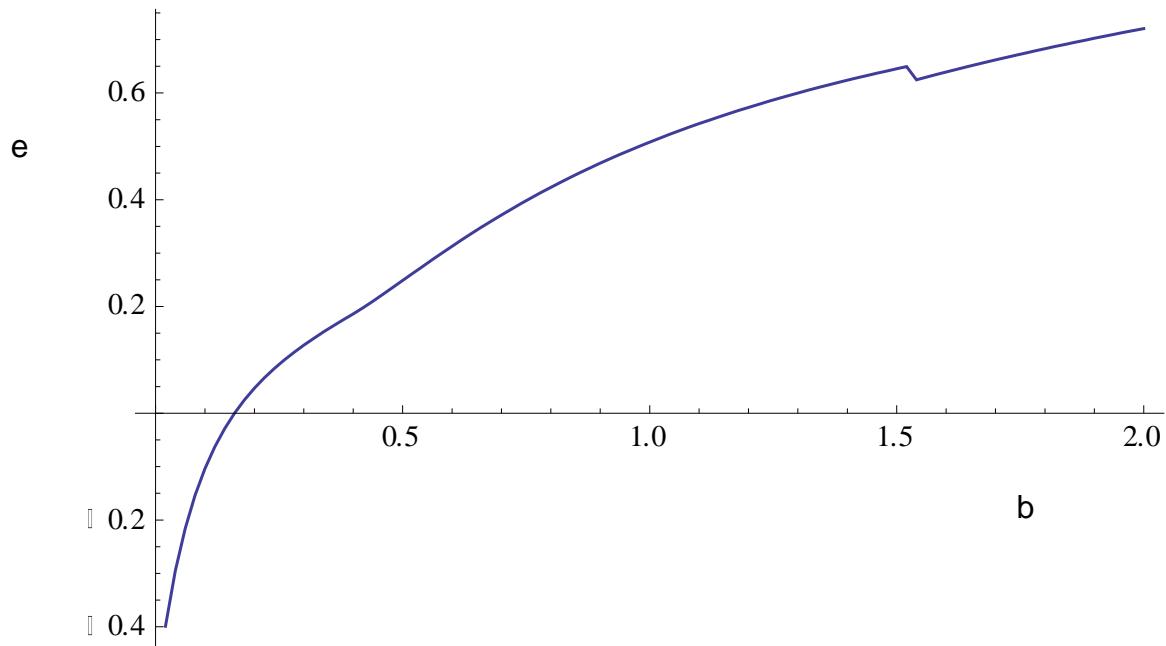
Επομένως καταλήγουμε στην περίπτωση της επίλυσης με τη βοήθεια του μοντέλου Kelvin που αναλύσαμε στην Ενότητα 3.1 (βλέπε Σχήμα 3.1). Στην συνέχεια του κεφαλαίου δεν θα λαμβάνουμε υπ' όψιν την περίπτωση όπου $\alpha_3 = 0$.

Για την περίπτωση όπου $\alpha_2 = 0$, έχουμε την περίπτωση της επίλυσης με τη βοήθεια του μοντέλου Maxwell που αναλύσαμε στο Κεφάλαιο 4.2 (βλέπε Σχ.4.13). Στην συνέχεια του κεφαλαίου δεν θα λαμβάνουμε υπ' όψιν την περίπτωση όπου $\alpha_2 = 0$.

Από τις δύο προηγούμενες περιπτώσεις συμπεραίνουμε ότι το τριπαραμετρικό μοντέλο είναι η υπέρθεση των μοντέλων Kelvin και Maxwell.

Όπως και στην Ενότητα 3.3 στην αρχή θα κρατήσουμε σταθερή την $\alpha_3 = 0.5$ και θα αυξάνουμε την a_2 . Στην συνέχεια θα κρατήσουμε σταθερή την $a_2 = 0.5$ και θα αυξάνουμε την α_3 .

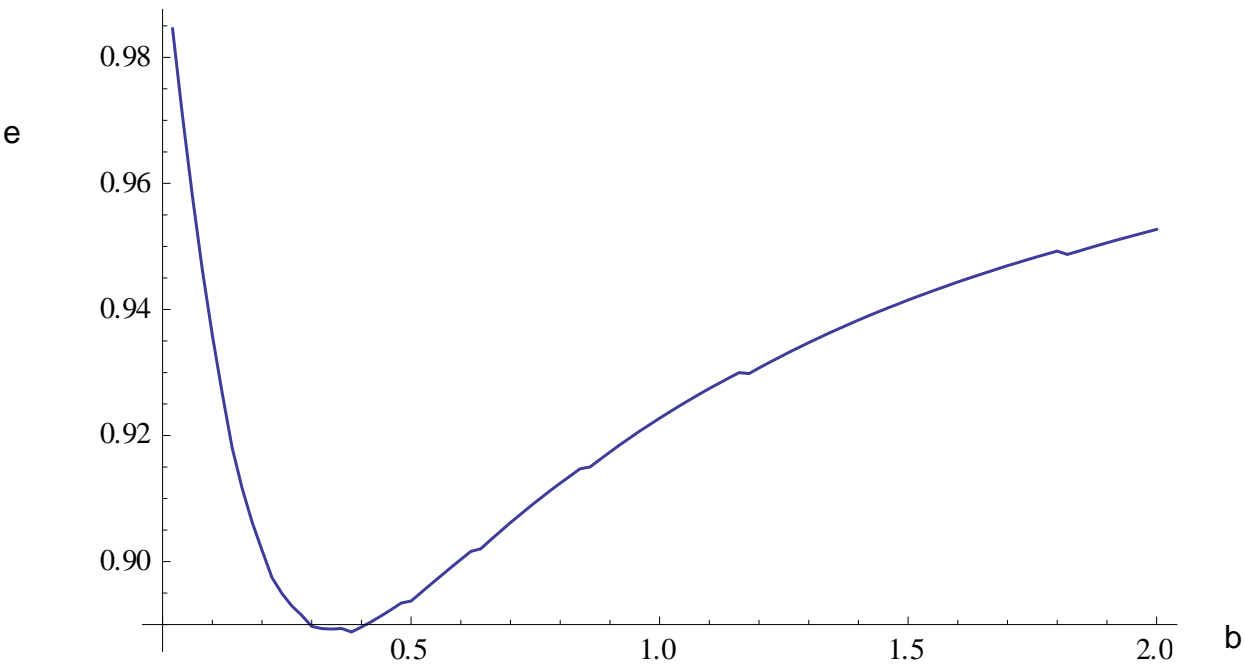
Για $a_2 = 0.1$, $\alpha_3 = 0.5$, $b_1 = 0.03$, $b_2 = 0.02$ και a_1 να μεταβάλλεται από 0 έως 1



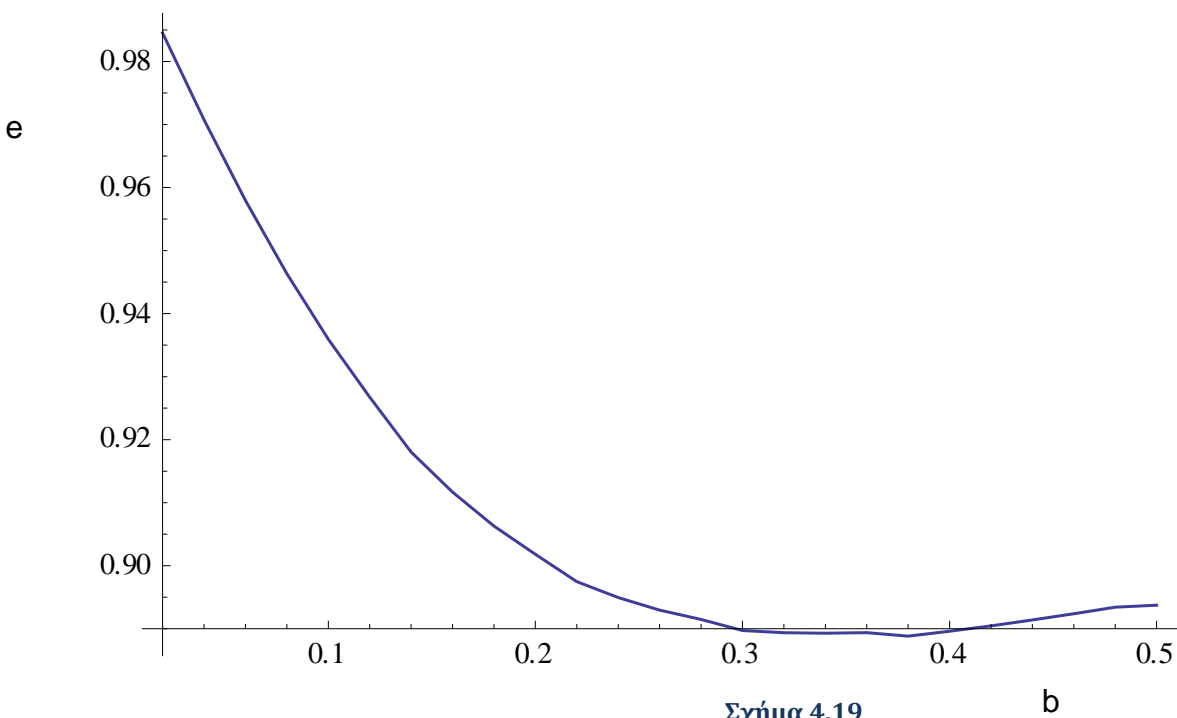
Σχήμα 4.17

Το Σχήμα 4.17 είναι σχεδόν πανομοιότυπο με το αντίστοιχο για το γραμμικό τριπαραμετρικό Σχήμα 3.22.

Για $a_2 = 0.5, \alpha_3 = 0.5, b_1 = 0.03, b_2 = 0.02$ και a_1 να μεταβάλλεται από 0 έως 1



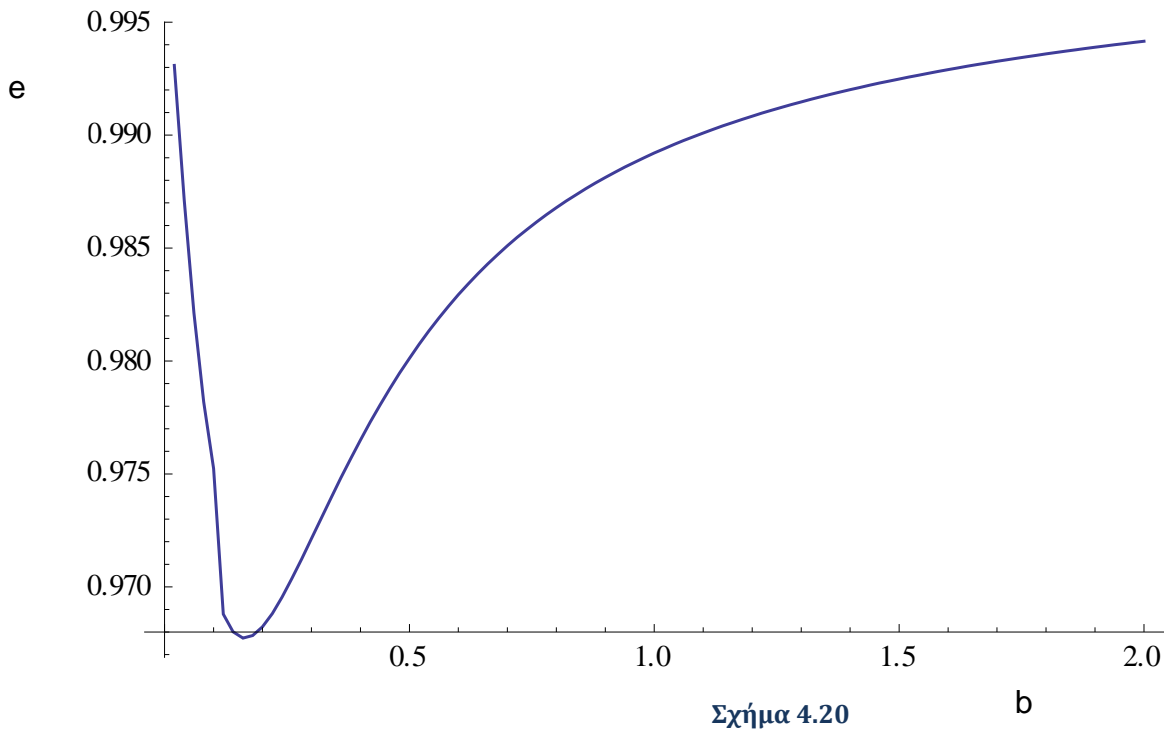
Σχήμα 4.18



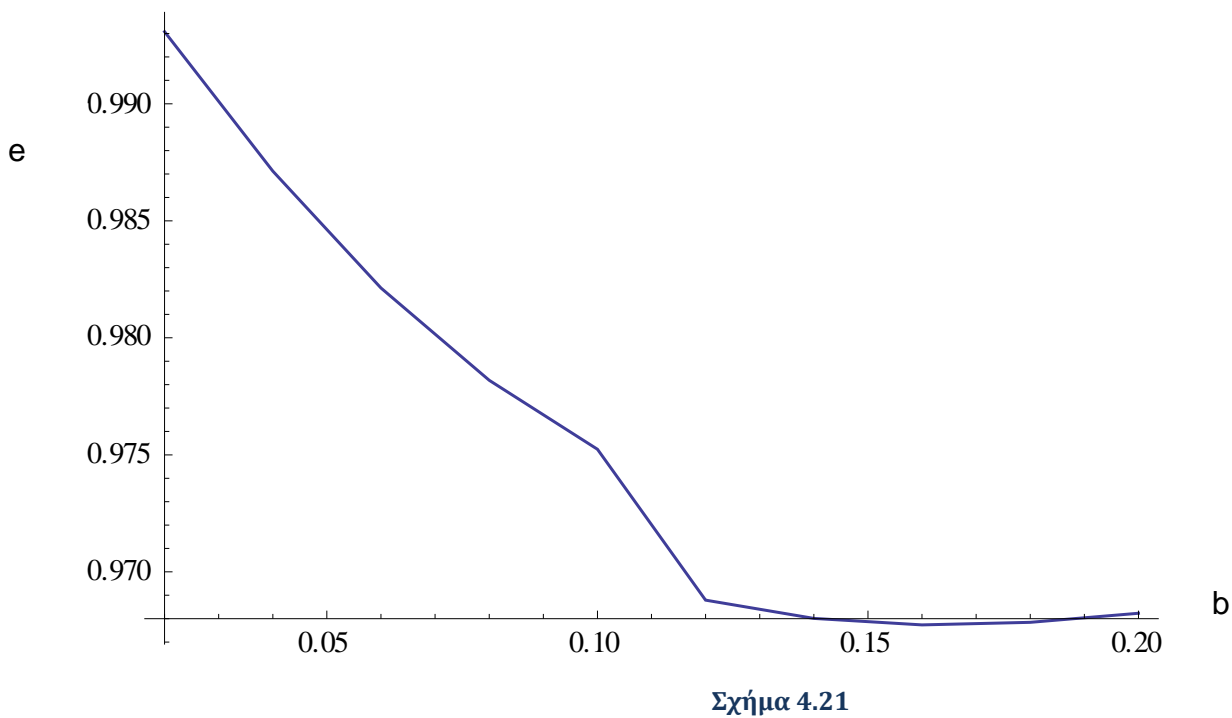
Σχήμα 4.19

Για τις τιμές αυτές παίρνουμε όπως βλέπουμε ένα καλύτερο αποτέλεσμα, αλλά με λύσεις τύπου Kelvin για τιμές του λόγου b μικρότερες από 0.4, όπως μπορούμε να διακρίνουμε καλύτερα στο Σχήμα 4.19.

Για $a_2 = 1, \alpha_3 = 0.5, b_1 = 0.03, b_2 = 0.02$ και a_1 να μεταβάλλεται από 0 έως 1



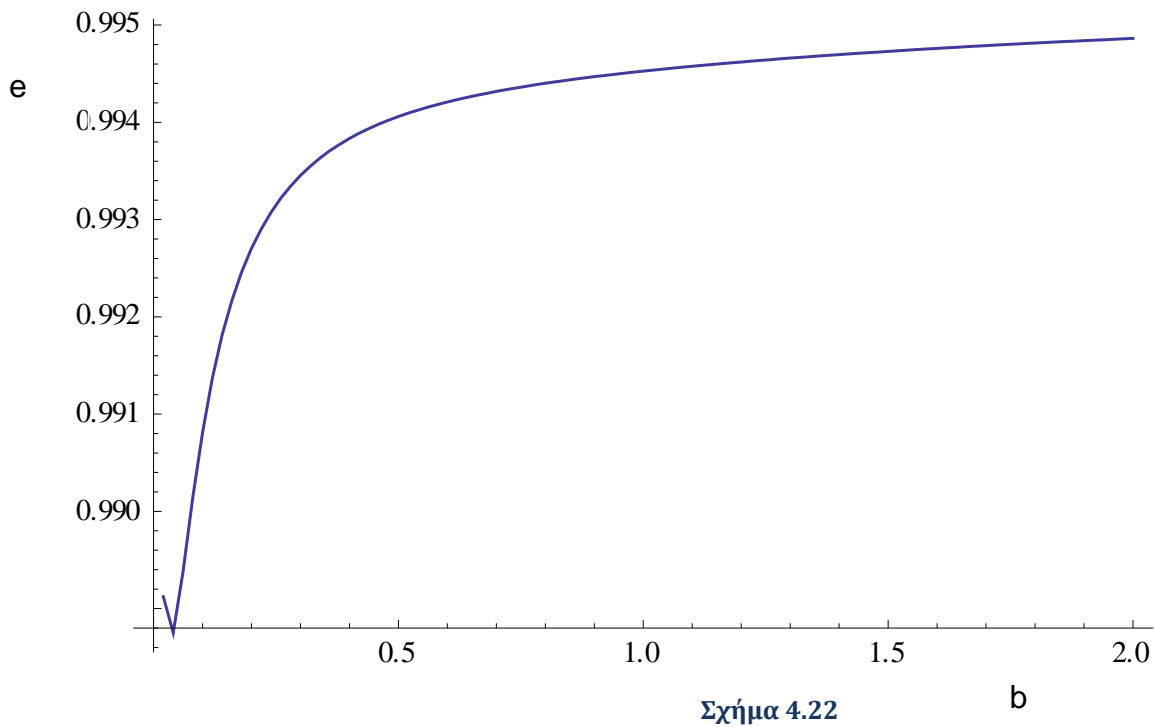
Σχήμα 4.20



Σχήμα 4.21

Για τις τιμές αυτές παίρνουμε όπως βλέπουμε λύσεις τύπου Maxwell για τιμές του λόγου b μεγαλύτερες από 0.15, όπως μπορούμε να διακρίνουμε καλύτερα στο Σχήμα 4.21. Δηλαδή για μεγαλύτερη a_2 έχουμε ακόμα μεγαλύτερη αστοχία στο αποτέλεσμά μας.

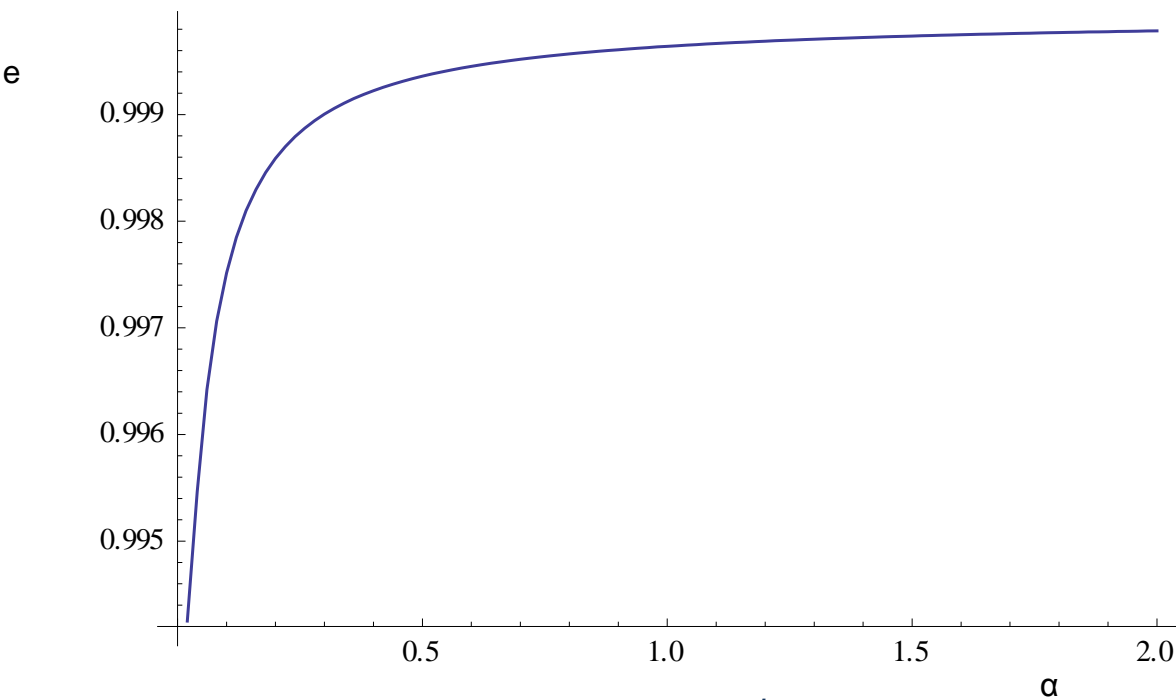
Για $a_2 = 5$, $\alpha_3 = 0.5$, $b_1 = 0.03$, $b_2 = 0.02$ και a_1 να μεταβάλλεται από 0 έως 1



Σχήμα 4.22

Για πολύ μεγάλη a_2 παίρνουμε αποτέλεσμα με λύσεις τύπου Maxwell, όπως ακριβώς και στο γραμμικό τριπαραμετρικό μοντέλο.

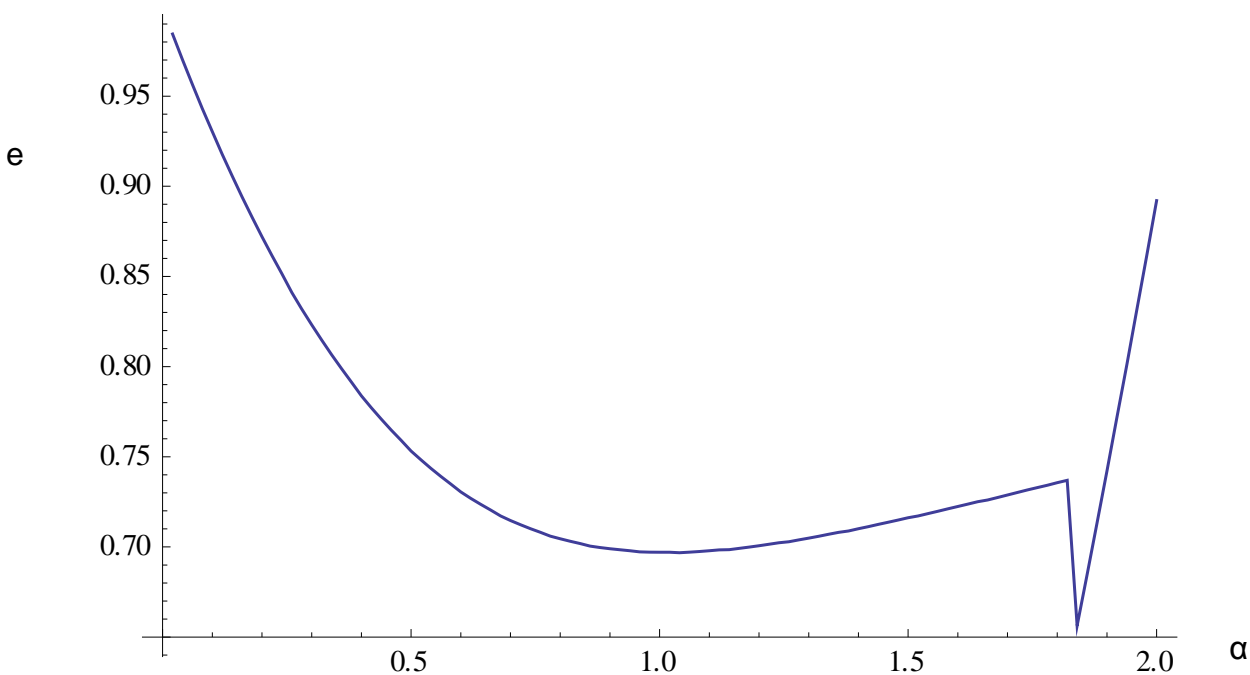
Για $\alpha_3 = 0.1, a_2 = 0.5, b_1 = 0.03, b_2 = 0.02$ και a_1 να μεταβάλλεται από 0 έως 1



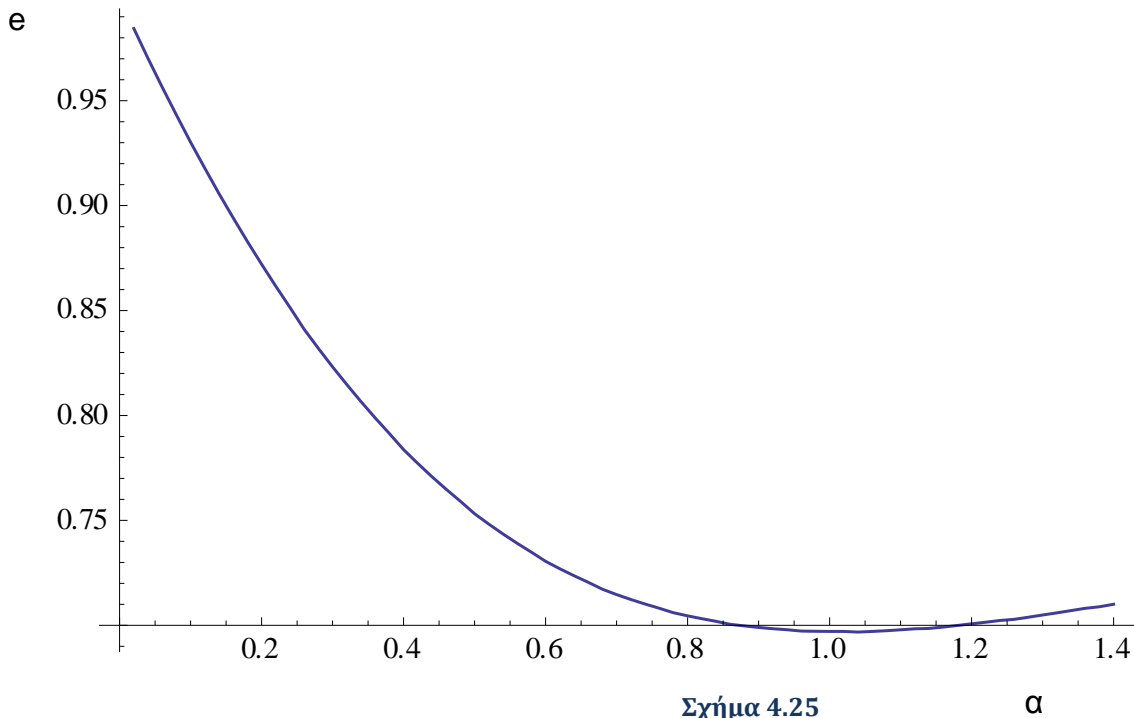
Σχήμα 4.23

Όπως βλέπουμε για μικρό α_3 βρίσκουμε αποτέλεσμα με λύσεις τύπου Maxwell καθώς η ταχύτητα αυξάνεται με την αύξηση του ιξώδους, όπως ακριβώς και στο γραμμικό τριπαραμετρικό μοντέλο.

Για $\alpha_3 = 1, a_2 = 0.5, b_1 = 0.03, b_2 = 0.02$ και a_1 να μεταβάλλεται από 0 έως 1



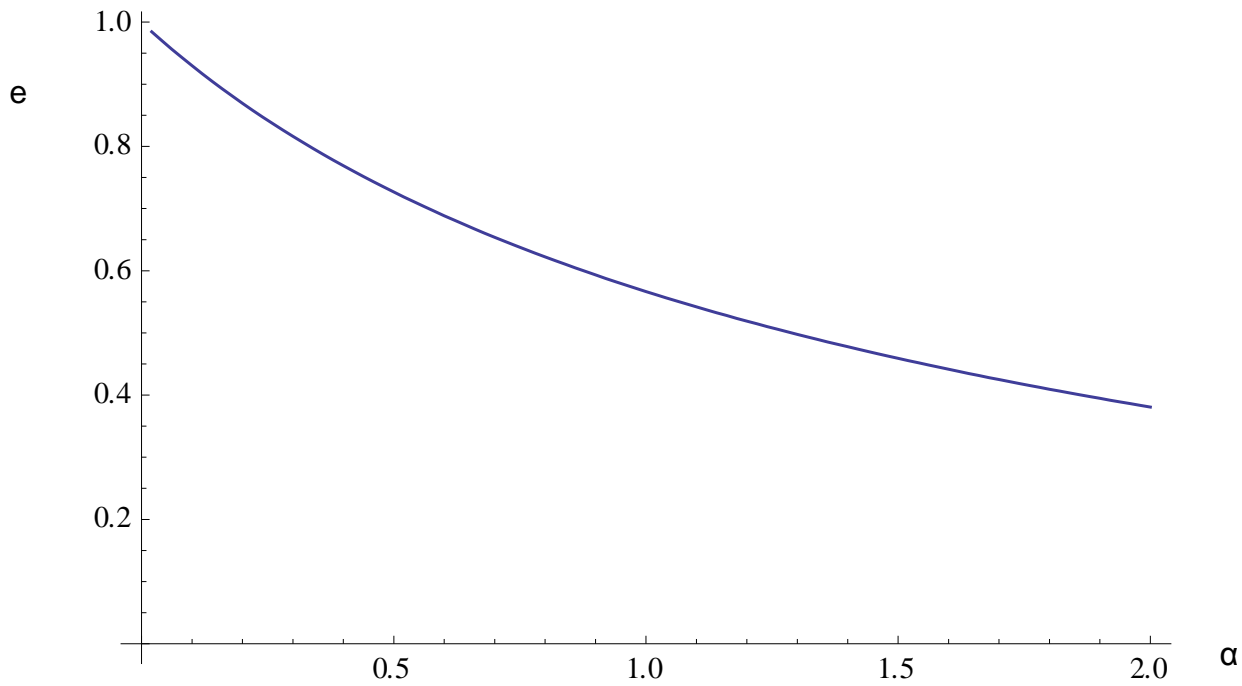
Σχήμα 4.24



Σχήμα 4.25

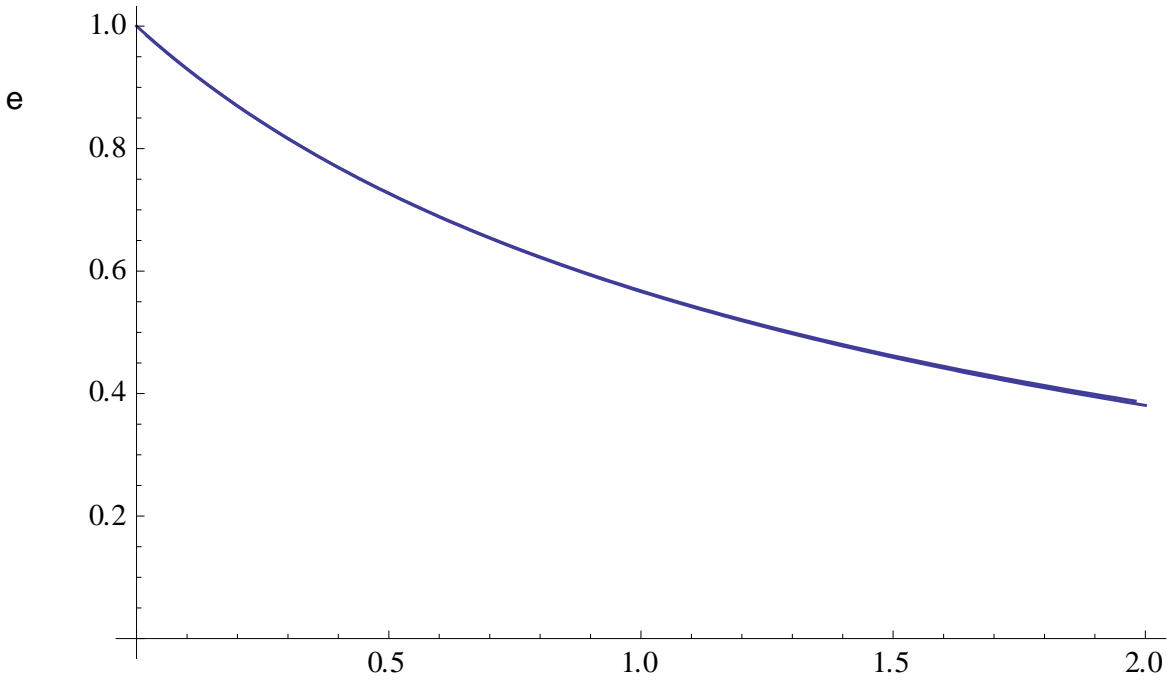
Καθώς αυξάνεται το α_3 παίρνουμε αποτέλεσμα με λύσεις τύπου Maxwell για μεγαλύτερο λόγο α όπως συμβαίνει και στο γραμμικό τριπαραμετρικό μοντέλο Σχ.3.31. Συγκρίνοντας τα δύο διαγράμματα βλέπουμε ότι στο μη-γραμμικό μοντέλο παίρνουμε λύσεις μέχρι ο λόγος α γίνει περίπου ίσος με 1.1 ενώ στο γραμμικό ίσος με 5.5. Όμως το εύρος των τιμών του λόγου των ταχυτήτων, στο μη-γραμμικό μοντέλο, είναι μικρότερο σε σχέση με το γραμμικό.

Για $\alpha_3 = 5$, $a_2 = 0.5$, $b_1 = 0.03$, $b_2 = 0.02$ και a_1 να μεταβάλλεται από 0 έως 1



Σχήμα 4.26

Όπως βλέπουμε την καλύτερη λύση για το μη-γραμμικό τριπαραμετρικό μοντέλο την δίνει ένα α_3 αισθητά μεγαλύτερο από τα a_2, α_1 . Το αποτέλεσμα μοιάζει με αυτό του μοντέλου Kelvin και στο Σχήμα 4.27 συγκρίνονται.



Σχήμα 4.27

Όπως βλέπουμε στο Σχήμα 4.27 οι δύο καμπύλες έχουν αμελητέες διαφορές και αυτό είναι αποτέλεσμα της αρχικής μας υπόθεσης ότι οι λύσεις για το μη- γραμμικό τριπαραμετρικό μοντέλο περικλείουν τις λύσεις για το μοντέλο Kelvin και το μοντέλο Maxwell, όπως ακριβώς και στο γραμμικό τριπαραμετρικό μοντέλο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: Συμπεράσματα

Στην εργασία αυτή μελετήσαμε την κίνηση ενός στερεού από ιξωδοελαστικό υλικό που προσκρούσει σε άκαμπτο τοίχο. Το μηχανικό πρότυπο που χρησιμοποιήσαμε αποτελείται από ένα απλό μοντέλο άκαμπτης μάζας ενωμένης με ένα σύστημα ελατηρίου – αποσβεστήρα. Εξετάστηκε η επίδραση του ιξώδους στην ταχύτητα επαναφοράς, στην ταχύτητα και την επιτάχυνση του σώματος κατά τη διάρκεια της κρούσης, καθώς και στον χρόνο αποκόλλησης του σώματος. Οι εξισώσεις κίνησης καταστρώθηκαν ανάλογα με το εφαρμοζόμενο μοντέλο και στην συνέχεια επιλύθηκαν με την εφαρμογή του προγράμματος Mathematica.

Στο πρώτο μέρος της μελέτης εφαρμόστηκαν γραμμικά ιξωδοελαστικά πρότυπα, μοντέλα δηλαδή που υπακούουν στον νόμο του Hooke για τα ελατήρια και την newtonian εξίσωση για τον αποσβεστήρα. Το μοντέλο Kelvin επέφερε πολύ ικανοποιητικά αποτελέσματα που βέβαια προκύπτουν από μία προσομοίωση με ιδανικές συνθήκες. Το μοντέλο Maxwell επέφερε αποτελέσματα που αποκλίνουν από τα πραγματικά εμπειρικά δεδομένα γεγονός που δείχνει την αδυναμία ανταπόκρισης του μοντέλου Maxwell σε στιγμιαίες μεταβολές, όπως είναι αυτή της κρούσης. Το τριπαραμετρικό μοντέλο αν και υπήρχαν περιπτώσεις που δεν έδινε λύσεις ήταν ουσιαστικά η υπέρθεση των μοντέλων Kelvin και Maxwell. Έτσι λόγω της σύνθεσής του, το μοντέλο αυτό μας έδινε μεγαλύτερη πληθώρα λύσεων και λόγω αυτού είναι και το πιο αποτελεσματικό μοντέλο από τα τρία.

Στο δεύτερο μέρος της μελέτης εφαρμόστηκαν μη-γραμμικά ιξωδοελαστικά μοντέλα, μοντέλα δηλαδή με στοιχεία που δεν υπακούουν στον νόμο του Hooke. Όπως και στο πρώτο μέρος εφαρμόστηκαν τα μοντέλα Kelvin, Maxwell και τριπαραμετρικό μοντέλο, με τον αποσβεστήρα όμως να μην είναι γραμμικός. Ο μη-γραμμικός αποσβεστήρα επιλέξαμε να υπακούει στην εξίσωση Eyring(2.19), ενώ στην περίπτωση του μοντέλου Maxwell επιλέξαμε την εξίσωση (2.16). Το μοντέλο Maxwell και σε αυτή την περίπτωση επέφερε αποτελέσματα ίδια με αυτά του γραμμικού μοντέλου. Το μη-γραμμικό μοντέλο Kelvin μας έδωσε λύσεις για την ταχύτητα επαναφοράς, διαφορετικές από αυτές του γραμμικού μοντέλου, που ίσως να ανταποκρίνονται καλύτερα στην πραγματικότητα. Όμως μας έδινε περίπου τους ίδιους χρόνους αποκόλλησης για κάθε τιμή του ιξώδους και επομένως το μη-γραμμικό μοντέλο Kelvin αδυναμεί να δώσει λύσεις για αυτήν την παράμετρο. Τέλος το μη-γραμμικό τριπαραμετρικό μοντέλο, όπως και το γραμμικό, ήταν η υπέρθεση των Kelvin και Maxwell και έτσι θεωρείται και το πιο κατάλληλο για αυτήν την προσομοίωση.

Παράρτημα Α: Κώδικας Mathematica

Για το μοντέλο Kelvin χρησιμοποιήσαμε τον παρακάτω κώδικα

```
ratio = Table[{a2 = .5 ; a1 = .1 i;  
sol1 = NDSolve[{y''[x] + 2 a1 y'[x] + a2^2 y[x] == 0, y[0] == 0,  
y'[0] == 10}, y, {x, 0, 10}];
```

```
vel[x_] = First[Evaluate[y'[x] /. sol1];  
accel[x_] = First[Evaluate[y''[x] /. sol1];
```

```
Do[accel[x]; vel[x]; If[accel[x] < 0, ttel = x];  
If[accel[x] < 0, vt = vel[x]], {x, 0, 10, .01}];  
vtel = -vt/10;  
a = a1/a2;  
a, vtel, ttel}, {i, 0, 10, .1}];
```

Για το μοντέλο Maxwell χρησιμοποιήσαμε τον παρακάτω κώδικα

```
ratio1 = Table[{a2 = 5; a1 = .1 i;  
sol1 = NDSolve[{x''[t] + 2 a1*x2'[t] == 0,  
x2'[t] == (a2^2) (x[t] - x2[t])/(2 a1), x[0] == 0, x'[0] == 10,  
x2[0] == 0}, {x, x2}, {t, 0, 10}];
```

```
vel[t_] = First[Evaluate[x'[t] /. sol1];  
accel[t_] = First[Evaluate[x''[t] /. sol1];
```

```
Do[accel[t]; vel[t]; If[accel[t] < 0, ttel = t];  
If[accel[t] < 0, vt = vel[t]], {t, 0, 10, .1}];  
vtel = -vt/10;  
a = a1/a2;  
a, vtel, ttel}, {i, .1, 10, .1}];
```

Για το τριπαραμετρικό μοντέλο χρησιμοποιήσαμε τον παρακάτω κώδικα

```
ratio1 = Table[{a3 = 5; a2 = .5; a1 = .1 i;  
sol1 = NDSolve[{x''[t] + 2 a1*x2'[t] + a2^2 x[t] == 0,  
x2'[t] == (a3^2) (x[t] - x2[t])/(2 a1), x[0] == 0, x'[0] == 10,
```

```
x2[0] == 0}, {x, x2}, {t, 0, 10}];
```

```
vel[t_] = First[Evaluate[x'[t] /. sol1]];
```

```
accel[t_] = First[Evaluate[x''[t] /. sol1]];
```

```
Do[accel[t]; vel[t]; If[accel[t] < 0, ttel = t];
```

```
If[accel[x] < 0, ttel = x];
```

```
If[accel[t] < 0, vt = vel[t]], {t, 0, 10, .1}];
```

```
vtel = -vt/10;
```

```
a = a1/a2;
```

```
b = a1/a3;
```

```
a, b, vtel, ttel}, {i, .1, 10, .1}];
```

Για το μοντέλο Kelvin με μη-γραμμικό αποσβεστήρα χρησιμοποιήσαμε τον παρακάτω κώδικα

```
ratio = Table[{a2 = .5 ; a1 = .1 i; b = -.03; b1 = -.02;
```

```
sol1 = NDSolve[{y''[x] + 2 a1 Sinh[b y''[x] - b1 y[x]] y'[x] +
```

```
a2^2 y[x] == 0, y[0] == 0, y'[0] == 10}, y, {x, 0, 10}];
```

```
dist[x_] = First[Evaluate[y[x] /. sol1]];
```

```
vel[x_] = First[Evaluate[y'[x] /. sol1]];
accel[x_] = First[Evaluate[y''[x] /. sol1]];

Do[accel[x]; vel[x]; If[accel[x] < 0, t0 = x];
If[accel[x] < 0, vt = vel[x]], {x, 0, 10, .01}];

vtel = Abs[vt]/10;
a = a1/a2;
work = NIntegrate[dist[x] accel[x], {x, 0, t0}];
a, vtel, work, t0}, {i, 0, 10, .1}];
```

Για το μοντέλο Maxwell με μη-γραμμικό αποσβεστήρα χρησιμοποιήσαμε τον παρακάτω κώδικα

```
ratio = Table[{a2 = .5 ; a1 = .1 i; b = -.03;
sol1 = NDSolve[{y''[x] + 2 a1 Exp[b y''[x]] y2'[x] == 0,
y2'[x] == (a2^2) (y[x] - y2[x])/(2 a1), y[0] == 0, y'[0] == 10,
y2[0] == 0}, {y, y2}, {x, 0, 10}];
dist[x_] = First[Evaluate[y[x] /. sol1]]];
```

```
vel[x_] = First[Evaluate[y'[x] /. sol1]];
accel[x_] = First[Evaluate[y''[x] /. sol1]];

Do[accel[x]; vel[x]; If[accel[x] < 0, ttel = x];
If[accel[x] < 0, vt = vel[x]], {x, 0, 10, .1}];
vtel = -vt/10;
a = a1/a2;

a, vtel, ttel}, {i, .1, 10, .1}];
```

Για το τριπαραμετρικό μοντέλο με μη-γραμμικό αποσβεστήρα χρησιμοποιήσαμε τον παρακάτω κώδικα

```
ratio = Table[{a3 = 5; a2 = .5 ; a1 = .1 i; b = -.03; b1 = -.02;
sol1 = NDSolve[{y''[x] + 2 a1 Sinh[b y''[x] - b1 y[x]] y2'[x] +
a2^2 y[x] == 0, y2'[x] == (a3^2) (y[x] - y2[x])/(2 a1),
y[0] == 0, y'[0] == 10, y2[0] == 0}, {y, y2}, {x, 0, 10}];
dist[x_] = First[Evaluate[y[x] /. sol1]];
```

```
vel[x_] = First[Evaluate[y'[x] /. sol1]];
```

```
accel[x_] = First[Evaluate[y''[x] /. sol1]];
```

```
Do[accel[x]; vel[x];
```

```
If[accel[x] < 0, vt = vel[x]], {x, 0, 10, .1}];
```

```
vtel = -vt/10;
```

```
  a = a1/a2;
```

```
  a, vtel}, {i, .1, 10, .1}];
```

Βιβλιογραφία

- Αθανασιάδης Γ., *Αντοχή υλικών*, Θεσσαλονίκη, Ιούνιος, 2006.
- Καραγιαννίδης, Γ., Σιδερίδου, Ε., Αχιλιάς, Δ. Σ., & Μπικιάρης, Δ., *Τεχνολογία Πολυμερών*, Θεσσαλονίκη, εκδ. Ζήτη, 2009.
- Κοντού Ε., Σπαθής Γ., *Ανελαστική Συμπεριφορά των Υλικών: Ιξωδοελαστικότητα- Πλαστικότητα*, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 2001.
- Connor J., *Introduction to Structural Motion Control*, Prentice Hall, 2002.
- Findlay, W. N. and Lai, J. S. Y., *Trans. Soc. Rheol.*, 11, 361, 1967.
- Findlay, W.N. and Khosla, G. *Application of the superposition principle and theories of mechanical equation of state, strain, and time hardening to creep of plastics under changing loads*. *J. Appl. Phys.*, 26, 821, 1955.
- G. R. Strobl, *The Physics of Polymers*, 2'nd Ed., Springer, NY, 1997.
- Halsey, G., White, H. J. and Eyring, H., *Text Res. J.*, 15, 295, 1945.
- Kitagawa, M., Mori, T. and Matsutani, T. *Rate-dependent nonlinear constitutive equation of polypropylene*. *J. Polym. Sci. B*, 27, 85, 1989.
- Leaderman, H., *Elastic and Creep Properties of Filamentous Materials and Other High Polymers*, Textile Foundation, Washington, DC, 1943.
- Mindel, M. J. and Brown, N., *J. Mater. Sci.*, 8, 863, 1973.
- Pao, Y.H. and Marin, J. *An analytical theory of the creep deformation of materials*. *J. Appl. Mech.*, 20, 245, 1953.
- Pipkin, A. C. and Rogers, T. G., *J. Mech. Phys. Solids*, 16, 59, 1968.
- Roderic Lakes, *Viscoelastic Materials*, Cambridge University Press, 2009.
- Sherby, O. D. and Dorn, J. B., *J. Mech. Phys. Solids*, 6, 145, 1958.
- Smith, T.L. *Nonlinear viscoelastic response of amorphous elastomers to constant strain rates*. *Trans. Soc. Rheol.*, 6, 61, 1962.
- Turner S., *The Strain Response of Plastics to Complex Stress Histories*, Third Annual Conference, 1965.
- Ward I., Sweeney J., *An Introduction to the Mechanical Properties of Solid Polymers*, John Wiley & Sons, 2004.
- Wilding, M. A. and Ward, I. M., *Polymer*, 19, 969 (1978); 22, 870, 1981.