



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ, ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

**Αναλυτική μοντελοποίηση σύγχρονου πρωτοκόλλου πρόσβασης
σε πολυδιαυλικά δίκτυα με πολλαπλούς δέκτες ανά σταθμό**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

της

Γεωργίας Ε. Φραγκούλη

Επιβλέπων: Ευστάθιος Συκάς,
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούνιος 2016



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ, ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

**Αναλυτική μοντελοποίηση σύγχρονου πρωτοκόλλου πρόσβασης
σε πολυδιαυλικά δίκτυα με πολλαπλούς δέκτες ανά σταθμό**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

της

Γεωργίας Ε. Φραγκούλη

Επιβλέπων: Ευστάθιος Συκάς,
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 23^η Ιουνίου 2016.

.....
Ε. Συκάς
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Μ. Θεολόγου
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Μ. Αναγνώστου
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούνιος 2016

.....

Γεωργία Ε. Φραγκούλη

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Γεωργία Ε. Φραγκούλη, 2016

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς την συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν την συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετάμε ένα πολυδιαυλικό δίκτυο όπου κάθε σταθμός διαθέτει δικτυακή διεπαφή αποτελούμενη από ένα πεπερασμένο πλήθος συντονιζόμενων δεκτών. Υιοθετούμε ένα σύγχρονο πρωτόκολλο πρόσβασης στο πολυδιαυλικό δίκτυο, η απόδοση του οποίου επηρεάζεται και μελετάται ως προς δύο κυρίως φαινόμενα: i) τις συγκρούσεις στα πολλαπλά κανάλια του κοινού μέσου και ii) τις συγκρούσεις στον προορισμό. Η μελέτη του τελευταίου φαινομένου και η απόδοση του προτεινόμενου πρωτοκόλλου πρόσβασης επηρεάζονται καθοριστικά από το πλήθος των συντονιζόμενων δεκτών ανά σταθμό. Συγκεκριμένα, η απόδοση του πρωτοκόλλου με την προτεινόμενη δικτυακή διεπαφή συγκρίνεται με την απόδοση του πρωτοκόλλου όταν: i) κάθε σταθμός διαθέτει έναν μοναδικό συντονιζόμενο δέκτη και ii) το φαινόμενο των συγκρούσεων στον προορισμό δεν λαμβάνεται καθόλου υπόψιν. Από τη σύγκριση αυτή προκύπτει η συνεισφορά της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Η απόδοση του πρωτοκόλλου μοντελοποιείται με μία Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου. Τα μέτρα αποδοτικότητας, δηλαδή η μέση διέλευση, η μέση καθυστέρηση και η μέση πιθανότητα απόρριψης στον προορισμό λόγω συγκρούσεων, εξάγονται αναλυτικά από κλειστές μαθηματικές εκφράσεις. Οι παράγοντες που επηρεάζουν την απόδοση του πρωτοκόλλου είναι οι εξής: i) το πλήθος των σταθμών στο δίκτυο, ii) το πλήθος των καναλιών που συγκροτούν το πολυδιαυλικό δίκτυο και iii) το πλήθος των συντονιζόμενων δεκτών ανά σταθμό. Στη διπλωματική αυτή εργασία, η απόδοση του πρωτοκόλλου μελετάται ως προς και τις τρεις αυτές παραμέτρους. Τα αριθμητικά αποτελέσματα καταδεικνύουν ότι η διέλευση του συστήματος αυξάνει με την αύξηση των καναλιών, γεγονός που καθιστά το φαινόμενο των συγκρούσεων στον προορισμό πιο έντονο. Επομένως, στην περίπτωση αυτή, η συνεισφορά της αύξησης του πλήθους των συντονιζόμενων δεκτών ανά σταθμό βελτιώνει σημαντικά την απόδοση, προκαλώντας αύξηση της διέλευσης και μείωση της καθυστέρησης και της πιθανότητας απόρριψης στον προορισμό.

Λέξεις κλειδιά

Πολυδιαυλικά δίκτυα, Συγκρούσεις στον προορισμό, Πλήθος συντονιζόμενων δεκτών, Μαρκοβιανή ανάλυση, Αποτίμηση απόδοσης

Abstract

In the present diploma thesis, we study a multi-channel network, each station of which is equipped with a network interface composed of a finite number of tunable receivers. We adopt a synchronous access protocol, the performance of which is affected and studied by taking into account two main phenomena: i) the packet collisions over the multiple channels of the shared medium and ii) the destination conflicts (commonly referred as receiver collisions). The study of the latter phenomenon as well as the performance of the proposed access protocol are crucially affected by the number of the tunable receivers per station. Specifically, the protocol performance with the proposed network interface is compared to the protocol performance where: i) each station is equipped with a unique tunable receiver and ii) the receiver collisions phenomenon is not taken into account at all. The contribution of the present diploma thesis emerges from this comparison.

The protocol performance is modelled by a discrete time Markovian process. The performance measures, that is, the average throughput, average delay and average rejection probability, are analytically derived by means of closed form mathematical expressions. The factors that affect the protocol performance are the following: i) the number of stations in the network, ii) the number of channels that constitute the multi-channel network and iii) the number of tunable receivers per station. In the present diploma thesis, the protocol performance is studied by taking into account all these three parameters. The numerical results show that the system performance increases when the number of channels increases, and, as a result, the receiver collisions phenomenon becomes more intent. As a consequence, in that case, the contribution of the increase of the number of tunable receivers per station improves the performance decisively, causing the increase of throughput and the decrease of delay and rejection probability at destination.

Keywords

Multi-channel networks, Receiver collisions, Number of tunable receivers, Markovian analysis, Performance evaluation

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία δεν θα μπορούσε να έχει ολοκληρωθεί χωρίς την επιστημονική επίβλεψη και την ηθική συμπαράσταση του Καθηγητή της Σχολής Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών του Ε.Μ.Π. κ. Ευστάθιου Συκά καθώς και της Διδάκτορος Ηλεκτρολόγου Μηχανικού και Μηχανικού Υπολογιστών του Ε.Μ.Π. κα. Περιστεράς Μπαζιάνα. Τους ευχαριστώ θερμά για την πολύτιμη βοήθεια και τη συνεργασία τους.

Ευχαριστώ τους φίλους μου, Κώστα, Δέσποινα και Μανώλη, για την εμπύχωση και τη συμπόρευση κατά τη διάρκεια των φοιτητικών μου χρόνων.

Ευχαριστώ την αδερφή μου, Άννα, για την στήριξη που μου προσέφερε όλα αυτά τα χρόνια.

Ευχαριστώ τους γονείς μου οι οποίοι μου μετέδωσαν την αγάπη για τη διαρκή μάθηση και ήταν πάντα δίπλα μου στηρίζοντας τις επιλογές μου.

Τέλος, ευχαριστώ όλους όσους αγωνίστηκαν και αγωνίζονται για την προώθηση και ανάπτυξη του Ελεύθερου Λογισμικού/Λογισμικού Ανοιχτού Κώδικα (ΕΛ/ΛΑΚ) διότι ένα τεράστιο κομμάτι των εργαλείων που χρησιμοποίησα, όχι μόνο για την εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής αλλά καθόλη τη διάρκεια των φοιτητικών μου χρόνων, ήταν ΕΛ/ΛΑΚ.

Πίνακας Περιεχομένων

Ευρετήριο Σχημάτων.....	13
Ευρετήριο Πινάκων.....	15
Κεφάλαιο 1: Πολυδιαυλικά δίκτυα.....	17
1.1 Φυσικό μέσο.....	17
1.1.1 Κατευθυνόμενα μέσα (ενσύρματης) μετάδοσης.....	17
1.1.2 Μη κατευθυνόμενα μέσα (ασύρματης) μετάδοσης.....	21
1.2 Μονοδιαυλικά και πολυδιαυλικά δίκτυα.....	25
1.3 Πολυπλεξία.....	27
1.4 Στοιχεία πολυδιαυλικών δικτύων.....	31
1.5 Τοπολογίες πολυδιαυλικών δικτύων.....	32
1.6 Παράγοντες που επηρεάζουν την απόδοση πολυδιαυλικών δικτύων.....	35
1.7 Πρωτόκολλα πρόσβασης σε πολυδιαυλικά δίκτυα.....	36
Κεφάλαιο 2: Μοντέλο πολυδιαυλικού δικτύου και παραδοχές.....	40
Κεφάλαιο 3: Μαθηματική μοντελοποίηση των συγκρούσεων στα πολυδιαυλικά δίκτυα.....	43
3.1 Συγκρούσεις πακέτων στα παράλληλα λογικά κανάλια.....	44
3.2 Συγκρούσεις πακέτων στον προορισμό.....	44
Κεφάλαιο 4: Μαθηματική μοντελοποίηση των συγκρούσεων στον προορισμό στα πολυδιαυλικά δίκτυα για πεπερασμένο πλήθος δεκτών ανά δικτυακή διεπαφή σταθμού, $F > 1$.....	47
4.1 Αναλυτική απόδειξη.....	47
4.1.1 Απόδειξη για $F = 2$	50
4.1.2 Απόδειξη για $F = 3$	55
4.1.3 Γενίκευση του τύπου για $F > 1$	62
4.2 Επαλήθευση γενικού τύπου με χρήση SWI-Prolog.....	66
Κεφάλαιο 5: Μαρκοβιανή ανάλυση.....	73
Κεφάλαιο 6: Αριθμητικά αποτελέσματα.....	78
6.1 Απόδοση για δεδομένο $F > 1$	78
6.2 Σύγκριση απόδοσης για μεταβαλλόμενο $F \geq 1$	87

Παραρτήματα.....	94
------------------	----

Παράρτημα Α: Ορθότητα - ακρίβεια των αποτελεσμάτων και χρόνος εκτέλεσης των πράξεων..... 94

A.1	Ορθότητα - ακρίβεια των αποτελεσμάτων.....	94
A.1.1	Χρήση GMP library για ορθότητα - ακρίβεια πράξεων με πολύ μικρούς/μεγάλους αριθμούς.....	94
A.1.2	Χρήση Prolog και bc calculator για ορθότητα - ακρίβεια των πράξεων υπολογισμού της $Pr[A_{F>1}(y) = z]$	95
A.2	Μεγάλος χρόνος εκτέλεσης των πράξεων.....	95
A.2.1	Βελτιστοποιήσεις χρονικής πολυπλοκότητας του αλγορίθμου υπολογισμού της μήτρας μετάβασης σε ένα βήμα P	96
A.2.2	Επιτάχυνση του υπολογισμού της $Pr[A_{F>1}(y) = z]$ για κάθε ζεύγος τιμών M, F και πληθώρα τιμών $y \leq N$ και $z \leq y$	100
A.2.3	Μείωση του χρόνου εκτέλεσης των πράξεων για μια συγκεκριμένη τετράδα τιμών M, N, F, p	100
A.2.4	Μείωση του χρόνου εκτέλεσης κάθε συνόλου πράξεων για μια συγκεκριμένη τιμή του M	101

Παράρτημα Β: Αποτίμηση της ποσότητας $Pr[A_{F>1}(y) = z]M^y$ σε SWI-Prolog... 103

Βιβλιογραφία.....	108
-------------------	-----

Ευρετήριο Σχημάτων

Σχήμα 1-1.	Καλώδιο συνεστραμμένων ζευγών.....	17
Σχήμα 1-2.	Ομοαξονικό καλώδιο.....	19
Σχήμα 1-3.	Δομή οπτικής ίνας.....	20
Σχήμα 1-4.	Πολύτροπη και μονότροπη οπτική ίνα.....	20
Σχήμα 1-5.	Το ηλεκτρομαγνητικό φάσμα και οι χρήσεις του στις επικοινωνίες.....	22
Σχήμα 1-6.	(a) Στις ζώνες VLF, LF και MF τα ραδιοκύματα ακολουθούν την καμπυλότητα της γης. (b) Στις ζώνες HF και VHF διαθλώνται από την ιονόσφαιρα.....	23
Σχήμα 1-7.	(a) Ζεύξη σημείου-προς-σημείο. (b) Ζεύξη εκπομπής.....	24
Σχήμα 1-8.	Το φυσικό κανάλι ταυτίζεται με το μοναδικό λογικό κανάλι ενός μονοδιαυλικού δικτύου.....	25
Σχήμα 1-9.	Φυσικό κανάλι πολυδιαυλικού δικτύου και επιμέρους λογικά κανάλια....	26
Σχήμα 1-10.	Λογικά κανάλια ελέγχου και δεδομένων σε ένα πολυδιαυλικό δίκτυο.....	27
Σχήμα 1-11.	Κενά TDM πλαίσια.....	29
Σχήμα 1-12.	WDM κανάλια σε μια οπτική ίνα.....	30
Σχήμα 1-13.	Τοπολογία παθητικού αστέρα.....	32
Σχήμα 1-14.	Τοπολογία δακτυλίου.....	33
Σχήμα 1-15.	Υβριδική τοπολογία παθητικού αστέρα - δακτυλίου.....	34
Σχήμα 1-16.	Σύγχρονο MAC πρωτόκολλο. Τα πακέτα A και C μεταδίδονται στο ίδιο λογικό κανάλι στην αρχή του ίδιου χρονικού κύκλου c οπότε συγκρούονται.....	37
Σχήμα 1-17.	Ασύγχρονο MAC πρωτόκολλο. Οι μεταδόσεις στο ίδιο λογικό κανάλι των πακέτων A και C επικαλύπτονται χρονικά οπότε τα πακέτα συγκρούονται.....	37
Σχήμα 1-18.	Σύγχρονο MAC πρωτόκολλο. Τα πακέτα με προορισμό τον σταθμό X, που μεταδόθηκαν επιτυχώς στα λογικά κανάλια 1 και 3 κατά τη διάρκεια του χρονικού κύκλου c , συγκρούονται στον προορισμό όταν αυτός διαθέτει έναν μόνο δέκτη.....	38
Σχήμα 1-19.	Ασύγχρονο MAC πρωτόκολλο. Τα πακέτα με προορισμό τον σταθμό X, που μεταδόθηκαν επιτυχώς στα λογικά κανάλια 1, 3 και N, συγκρούονται στον προορισμό όταν αυτός διαθέτει λιγότερους από τρεις δέκτες.....	38
Σχήμα 2-1.	Δομή χρονικού κύκλου.....	40
Σχήμα 3-1.	Στιγμιότυπο του πολυδιαυλικού συστήματος αναφερόμενο σε δεδομένο χρονικό κύκλο c	44
Σχήμα 6-1.	Διέλευση S ως προς p για $M = 100$, $N = 75$ και $F = 2$	79
Σχήμα 6-2.	Πιθανότητα απόρριψης στον προορισμό $Prej$ ως προς p για $M = 100$, $N = 75$ και $F = 2$	79
Σχήμα 6-3.	Ενεργοί σταθμοί B ως προς p για $M = 100$, $N = 75$ και $F = 2$	80
Σχήμα 6-4.	Καθυστέρηση D ως προς p για $M = 100$, $N = 75$ και $F = 2$	81
Σχήμα 6-5.	Καθυστέρηση D ως προς τη διέλευση S για $M = 100$, $N = 75$ και $F = 2$	82
Σχήμα 6-6.	Πιθανότητα απόρριψης στον προορισμό $Prej$ ως προς p για $M = 100$, $F = 2$ και $N = 50, 75, 100$	83
Σχήμα 6-7.	Διέλευση S ως προς p για $M = 100$, $F = 2$ και $N = 50, 75, 100$	84
Σχήμα 6-8.	Καθυστέρηση D ως προς p για $M = 100$, $F = 2$ και $N = 50, 75, 100$	84

Σχήμα 6-9.	Ενεργοί σταθμοί B ως προς p για $M = 100$, $F = 2$ και $N = 50, 75, 100$..	85
Σχήμα 6-10.	Πιθανότητα απόρριψης στον προορισμό $Prej$ ως προς p για $N = 50$, $F = 2$ και $M = 50, 70, 100$	86
Σχήμα 6-11.	Διέλευση S ως προς p για $N = 50$, $F = 2$ και $M = 50, 70, 100$	87
Σχήμα 6-12.	Διέλευση S ως προς p για $M = 100$, $N = 75$ όταν: i) το φαινόμενο των συγκρούσεων στον προορισμό δεν λαμβάνεται υπόψιν (no rc) και ii) $F = 1, 2, 3$	88
Σχήμα 6-13.	Επί τοις % μεταβολή της διέλευσης S ως προς p για $M = 100$, $N = 75$ κατά την μετάβαση από την αγνόηση του φαινομένου των συγκρούσεων στον προορισμό σε $F = 1, 2, 3$	89
Σχήμα 6-14.	Πιθανότητα απόρριψης στον προορισμό $Prej$ ως προς p για $M = 100$, $N = 75$ και $F = 1, 2, 3$	89
Σχήμα 6-15.	Καθυστέρηση D ως προς τη διέλευση S για $M = 100$, $N = 75$ όταν: i) το φαινόμενο των συγκρούσεων στον προορισμό δεν λαμβάνεται υπόψιν (no rc) και ii) $F = 1, 2, 3$	90
Σχήμα 6-16.	Μέγιστη πιθανότητα απόρριψης στον προορισμό $Prej(max)$ για $M = 100$, $N = 50, 75, 100$ και $F = 1, 2, 3$	91
Σχήμα 6-17.	Πιθανότητα απόρριψης στον προορισμό $Prej$ ως προς p για $M = 100$, $N = 50, 75, 100$ και $F = 1, 2, 3$	92
Σχήμα 6-18.	Πιθανότητα απόρριψης στον προορισμό $Prej$ ως προς p για $N = 50$, $M = 50, 70, 100$ και $F = 1, 2, 3$	92
Σχήμα 6-19.	Μέγιστη πιθανότητα απόρριψης στον προορισμό $Prej(max)$ για $M = 50, 70, 100$, $N = 20, 30, 50$ και $F = 1, 2, 3$	93

Ευρετήριο Πινάκων

Πίνακας 6-1.	Μεταβολή της διέλευσης S , του πλήθους των ενεργών σταθμών B και της πιθανότητας απόρριψης στον προορισμό $Prej$ για $M = 100$, $N = 75$, $F = 2$ και διάφορες μεταβάσεις του p	80
Πίνακας 6-2.	Πλήθος ενεργών σταθμών B , διέλευση S , και καθυστέρηση D για $M = 100$, $N = 75$, $F = 2$ και $p = 0.1, 0.2, 0.4, 1.0$	81
Πίνακας 6-3.	Μεταβολή διέλευσης S , καθυστέρησης D και πλήθους ενεργών σταθμών B για $M = 100$, $F = 2$, $p = 0.1, 0.2, 0.4, 0.9$ και διάφορες μεταβάσεις του N	85
Πίνακας 6-4.	Μεταβολή της διέλευσης S , πιθανότητα απόρριψης στον προορισμό $Prej$ και μεταβολή της καθυστέρησης D για $M = 100$, $N = 75$ και $p = 0.1, 0.2, 0.3, 0.9$ κατά την μετάβαση από την αγνόηση του φαινομένου των συγκρούσεων στον προορισμό σε $F = 1, 2, 3$	90
Πίνακας A-1.	Αρχική υλοποίηση σε C της σχέσης (A. 1).....	97
Πίνακας A-2.	Βελτιωμένη συγκριτικά με τον Πίνακα A-1, ως προς την χρονική πολυπλοκότητα, υλοποίηση σε C της σχέσης (A. 1).....	98
Πίνακας A-3.	Τελική υλοποίηση σε C της σχέσης (A. 1), βελτιωμένη συγκριτικά με τον Πίνακα A-2 ως προς την χρονική πολυπλοκότητα.....	99
Πίνακας B-1.	Κώδικας SWI-Prolog για υπολογισμό $Pr[A_{F>1}(y) = z] M^y$	103-107

Κεφάλαιο 1: Πολυδιαυλικά δίκτυα

Με τον όρο δίκτυο (network) εννοούμε ένα σύνολο σταθμών που επικοινωνούν μεταξύ τους μέσω ενός κοινού φυσικού μέσου, το οποίο αποτελεί το φυσικό κανάλι (physical channel).

1.1 Φυσικό μέσο

Στα σύγχρονα δίκτυα, για την μετάδοση δεδομένων μπορούν να χρησιμοποιηθούν διάφορα φυσικά μέσα. Κάθε ένα από αυτά έχει τα δικά του χαρακτηριστικά αναφορικά με το εύρος ζώνης, την καθυστέρηση, το κόστος και την ευκολία εγκατάστασης και συντήρησης.

Τα φυσικά μέσα ομαδοποιούνται σε δύο μεγάλες κατηγορίες: τα κατευθυνόμενα (guided) ή ενσύρματα μέσα, όπως τα χάλκινα καλώδια και οι οπτικές ίνες, και τα μη κατευθυνόμενα (unguided) ή ασύρματα μέσα, όπως οι μικροκυματικές και δορυφορικές ζεύξεις [1]. Και στις δύο περιπτώσεις φυσικών μέσων, η επικοινωνία γίνεται με τη μορφή ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.

1.1.1 Κατευθυνόμενα μέσα (ενσύρματης) μετάδοσης

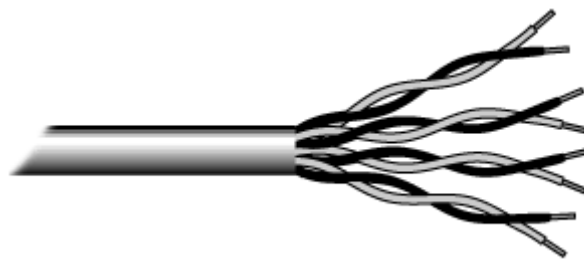
Οι βασικές τεχνολογίες κατευθυνόμενων μέσων μετάδοσης είναι οι εξής:

- το καλώδιο συνεστραμμένων ζευγών
- το ομοαξονικό καλώδιο
- η οπτική ίνα

Ακολούθως, περιγράφουμε ξεχωριστά κάθε μία από τις παραπάνω τεχνολογίες.

Καλώδιο συνεστραμμένων ζευγών

Ένα καλώδιο συνεστραμμένων ζευγών συνίσταται από τέσσερα συνεστραμμένα ζεύγη (twisted pairs), όπως δείχνει το Σχήμα 1-1. Το συνεστραμμένο ζεύγος αποτελείται από δύο μονωμένα χάλκινα σύρματα με πάχος γύρω στο 1 mm συνήθως. Τα παράλληλα αυτά σύρματα συστρέφονται μεταξύ τους ελικοειδώς προκειμένου να μειωθεί η ηλεκτρική αλληλεπίδρασή τους.



Σχήμα 1-1. Καλώδιο συνεστραμμένων ζευγών

Εκτός από το μονωτικό περίβλημα του χάλκινου σύρματος κάθε συνεστραμμένου ζεύγους, υπάρχει εξωτερικό μονωτικό περίβλημα το οποίο καλύπτει και τα τέσσερα συνεστραμμένα ζεύγη. Ανάλογα με το αν υπάρχει ή όχι ένα φύλλο μετάλλου κάτω από το εξωτερικό περίβλημα, τα καλώδια συνεστραμμένων ζευγών διακρίνονται σε θωρακισμένα ή αθωράκιστα, αντίστοιχα, με τα θωρακισμένα να παρέχουν προστασία από θόρυβο ή παρεμβολές. Πιο συγκεκριμένα, υπάρχουν οι εξής κατηγορίες καλωδίων συνεστραμμένων ζευγών:

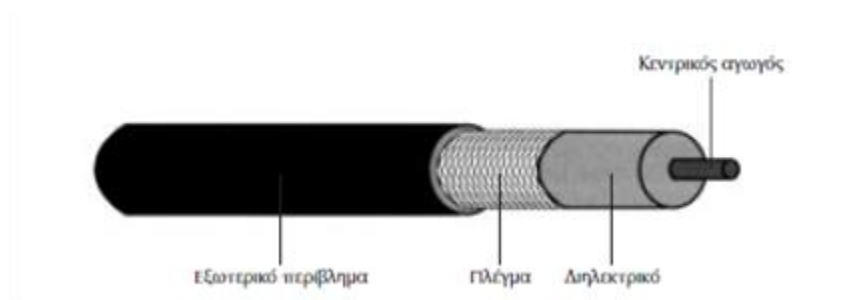
- Θωρακισμένο καλώδιο συνεστραμμένων ζευγών με τη χρήση φύλλου αλουμινίου (Foiled Twisted Pair - FTP): Κάτω από το εξωτερικό περίβλημα υπάρχει φύλλο αλουμινίου για τη θωράκιση του καλωδίου. Σε επαφή με το περίβλημα αλουμινίου υπάρχει γυμνό καλώδιο από συνεστραμμένες ίνες, το οποίο πραγματοποιεί τη γείωση του φύλλου αλουμινίου και καλείται καλώδιο γείωσης (drain wire).
- Θωρακισμένο καλώδιο συνεστραμμένων ζευγών με τη χρήση μεταλλικού πλέγματος (Shielded Twisted Pair - STP): Κάτω από το εξωτερικό περίβλημα υπάρχει επικασσιτερωμένη θωράκιση χαλκού για τη προστασία του καλωδίου. Για την πραγματοποίηση της γείωσης του πλέγματος μπορεί να χρησιμοποιηθεί γυμνό καλώδιο γείωσης ή να συστραφεί στην άκρη του το ίδιο το πλέγμα και ακολούθως να γειωθεί.
- Αθωράκιστο καλώδιο συνεστραμμένων ζευγών (Unshielded Twisted Pair - UTP): ονομάζεται επίσης και 10BaseT καλώδιο. Σε αυτό δεν υπάρχει το επιπλέον φύλλο μετάλλου κάτω από το εξωτερικό περίβλημα.

Τα συνεστραμμένα ζεύγη μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη μετάδοση είτε αναλογικών είτε ψηφιακών σημάτων. Το εύρος ζώνης εξαρτάται από το πάχος του σύρματος και την καλυπτόμενη απόσταση, σε πολλές περιπτώσεις πάντως μπορεί να επιτευχθεί εύρος πολλών Mbps για λίγα χιλιόμετρα.

Λόγω της καλής απόδοσής τους και του μικρού τους κόστους, τα καλώδια συνεστραμμένων ζευγών χρησιμοποιούνται σήμερα ευρύτατα τόσο στις τηλεφωνικές γραμμές όσο και στη μετάδοση δεδομένων σε τοπικά δίκτυα υπολογιστών. Τα καλώδια αυτά μπορούν να εκτείνονται για αρκετά χιλιόμετρα χωρίς ενίσχυση αλλά για μεγαλύτερες αποστάσεις απαιτούνται επαναλήπτες (repeaters).

Ομοαξονικό καλώδιο

Το ομοαξονικό (coaxial) καλώδιο, όπως δείχνει το Σχήμα 1-2, αποτελείται από κεντρικό χάλκινο αγωγό, ο οποίος περικλείεται από μονωτική πλαστική ύλη, την οποία καλούμε διηλεκτρικό. Γύρω από το διηλεκτρικό και ομοαξονικά τοποθετημένη ως προς τον κεντρικό αγωγό βρίσκεται θωράκιση από μεταλλικό πλέγμα ή φύλλο αλουμινίου. Στην περίπτωση του αλουμινίου, υπάρχει και γυμνό καλώδιο γείωσης. Το καλώδιο, τέλος, περικλείεται από εξωτερικό μονωτικό περίβλημα.



Σχήμα 1-2. Ομοαξονικό καλώδιο

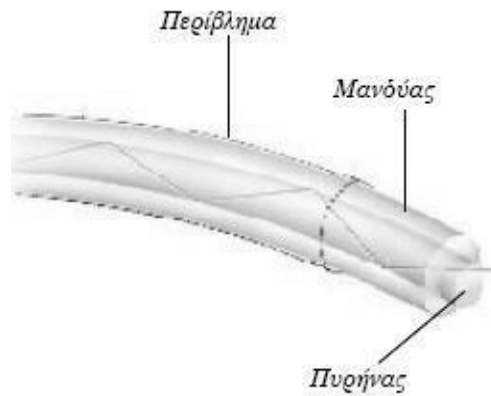
Η κατασκευή και η θωράκιση του ομοαξονικού καλωδίου του δίνουν έναν καλό συνδυασμό υψηλού εύρους ζώνης και προστασίας από το θόρυβο. Το εφικτό εύρος ζώνης εξαρτάται από την ποιότητα και το μήκος του καλωδίου με τα σύγχρονα ομοαξονικά καλώδια να έχουν εύρος ζώνης κοντά στο 1 GHz.

Οι παραπάνω ιδιότητες σε συνδυασμό με το χαμηλό κόστος εγκατάστασης, συνέβαλαν στην ευρεία χρήση του ομοαξονικού καλωδίου στα τέλη του περασμένου αιώνα στο τηλεφωνικό σύστημα για τις υπεραστικές γραμμές. Σήμερα όμως τα καλώδια αυτά έχουν αντικατασταθεί σε μεγάλο βαθμό από τις οπτικές ίνες.

Οπτική ίνα

Η οπτική ίνα (fiber optic) είναι μια εύκαμπτη, λεπτή κυλινδρική ίνα μέσω της οποίας μεταφέρονται δεδομένα υπό μορφή φωτός. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 1-3, κάθε οπτική ίνα αποτελείται από τρία μέρη:

- την κεντρική γυάλινη κυλινδρική ίνα, που ονομάζεται πυρήνας, η οποία είναι το τμήμα στο οποίο διαδίδεται το φως,
- την γυάλινη επικάλυψη (απλή ή πολλαπλή), που είναι ένας ομόκεντρος με τον πυρήνα κύλινδρος. Έχει μικρότερο δείκτη διάθλασης από τον πυρήνα για να παθαίνει το φως συνεχείς ολικές ανακλάσεις και να παραμένει έτσι όλο στον πυρήνα. Η επικάλυψη αυτή ονομάζεται μανδύας.
- το περίβλημα, που είναι ένα αδιαφανές πλαστικό.

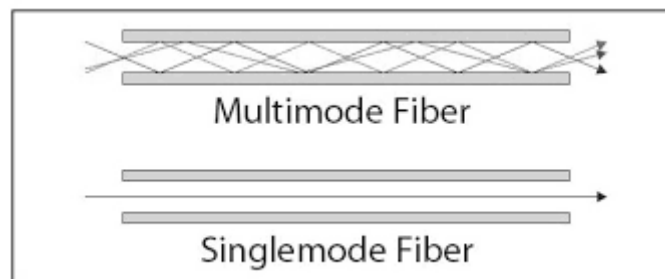


Σχήμα 1-3. Δομή οπτικής ίνας

Η εκπομπή του οπτικού σήματος σε οπτική ίνα γίνεται από πηγή LED (Light Emmiting Diode) ή LASER (Light Amplification by Stimulated Emission off Radiation), και τα μήκη κύματος του φωτός, που η οπτική ίνα είναι σχεδιασμένη να μεταφέρει, ποικίλουν από 800nm μέχρι 1500nm.

Ανάλογα με τον τρόπο μετάδοσης του σήματος στην οπτική ίνα, αυτή κατηγοριοποιείται ως:

- πολύτροπη ίνα (multi-mode fiber): μια πολύτροπη ίνα έχει διάμετρο πυρήνα 50-125 μm. Η αρχή μετάδοσης σε πολύτροπη οπτική ίνα είναι ότι οι διάφορες ακτίνες του οπτικού σήματος, ανάλογα με την είσοδο τους στην οπτική ίνα, ταξιδεύουν ανακλώμενες υπό διαφορετικές γωνίες, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1-4. Αυτός ο τρόπος μετάδοσης ονομάζεται πολύτροπος επειδή έχουμε πολλούς δρόμους μετάδοσης, που αντιστοιχούν στις διαφορετικές γωνίες ανάκλασης.
- μονότροπη ίνα (single-mode fiber): μια μονότροπη ίνα έχει πολύ μικρή διάμετρο πυρήνα (8-10 μm) η οποία πλησιάζει περίπου το επίπεδο του μήκους κύματος του εκπεμπόμενου σήματος. Σε μια μονότροπη οπτική ίνα, το φως διαδίδεται με μόνο έναν τρόπο, τον αξονικό, δηλαδή σε ευθεία γραμμή χωρίς αναπηδήσεις. Η πορεία των ακτίνων σε μια τέτοια οπτική ίνα φαίνεται στο Σχήμα 1-4.



Σχήμα 1-4. Πολύτροπη και μονότροπη οπτική ίνα

Οι επιδόσεις μιας οπτικής ίνας συνδέονται με τον τρόπο μετάδοσης του σήματος στην ίνα και με το μήκος κύματος του φωτός που εκπέμπεται από την πηγή. Στις μονότροπες

οπτικές ίνες χρησιμοποιούνται μήκη κύματος μεταξύ των 1310 nm και των 1550 nm. Στις πολύτροπες οπτικές ίνες έχουμε μήκη κύματος από 850 nm έως 1300 nm.

Οι οπτικές ίνες μπορούν να μεταφέρουν σήματα με πολύ μεγάλο εύρος ζώνης σε μεγάλες αποστάσεις με πολύ μικρή εξασθένηση του σήματος. Οι πολύτροπες οπτικές ίνες μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε αποστάσεις, που υπερβαίνουν τα 3 km, ενώ οι μονότροπες οπτικές ίνες μπορούν να υπερβούν τα 10 km.

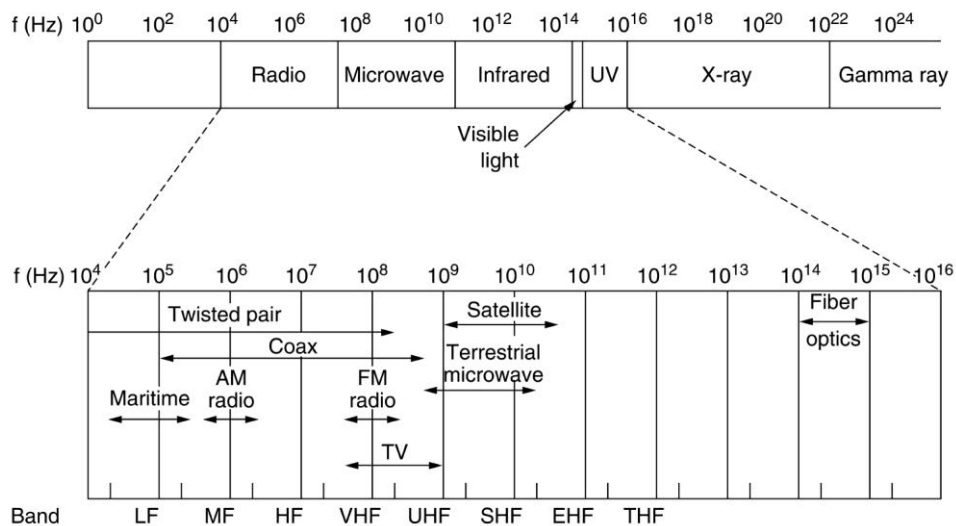
Οι οπτικές ίνες υπερτερούν έναντι των χάλκινων καλωδίων σε πολλά σημεία. Αναφέρουμε τα σημαντικότερα εξ αυτών:

- Μπορούν να χειριστούν υψηλότερο εύρος ζώνης από το χαλκό. Ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης που μπορεί να επιτευχθεί σε μια οπτική είναι ιδανικά πάνω από 50 Tbps [1], παρόλο που η αδυναμία μας να μετατρέψουμε τόσο γρήγορα το ηλεκτρικό σήμα σε οπτικό περιορίζει τον παραπάνω ρυθμό γύρω στα 10 Gbps στην τρέχουσα τεχνολογία οπτικών ινών [1].
- Λόγω της χαμηλής τους εξασθένησης, χρειάζονται επαναλήπτες μόνο κάθε 50 km στις γραμμές μεγάλου μήκους σε σχέση με κάθε 5 km για το χαλκό, γεγονός που αποτελεί μια σημαντική εξοικονόμηση κόστους.
- Δεν επηρεάζονται από διαταραχές του ρεύματος, ηλεκτρομαγνητικές παρεμβολές ή τυχόν διαβρωτικά χημικά στον αέρα, καθιστώντας τις ιδανικές για τις αντίξοες συνθήκες των εργοστασίων.
- Είναι λεπτές και πολύ ελαφρότερες από το χαλκό, γεγονός που τις καθιστά ελκυστικές για τις τηλεφωνικές εταιρείες που αντικαθιστούν τους υπάρχοντες γεμάτους αγωγούς καλωδίων με οπτικές ίνες προσθέτοντας έτσι νέα χωρητικότητα στο δίκτυο.
- Η παρεμβολή μονάδας υποκλοπής σε μία οπτική ίνα είναι πολύ δύσκολη.

Από πλευράς μειονεκτημάτων, οι διασυνδέσεις των οπτικών ινών κοστίζουν περισσότερο από τις ηλεκτρικές συνδέσεις.

1.1.2 Μη κατευθυνόμενα μέσα (ασύρματης) μετάδοσης

Στην ασύρματη μετάδοση, το φυσικό μέσο διάδοσης της πληροφορίας είναι ο ελεύθερος χώρος, δηλαδή η ατμόσφαιρα, το κενό ή το νερό. Η μετάδοση των σημάτων γίνεται μέσω ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων τα οποία εκπέμπονται/ακτινοβολούνται σε διάφορες κατευθύνσεις από κεραιές. Ανάλογα με την περιοχή συχνοτήτων του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος (Σχήμα 1-5) που χρησιμοποιείται (και η οποία συνιστά το ασύρματο φυσικό κανάλι), διακρίνονται τα διάφορα είδη των μέσων ασύρματης μετάδοσης τα οποία διαθέτουν διαφορετικά χαρακτηριστικά. Τα σημαντικότερα από αυτά αναλύουμε στη συνέχεια.



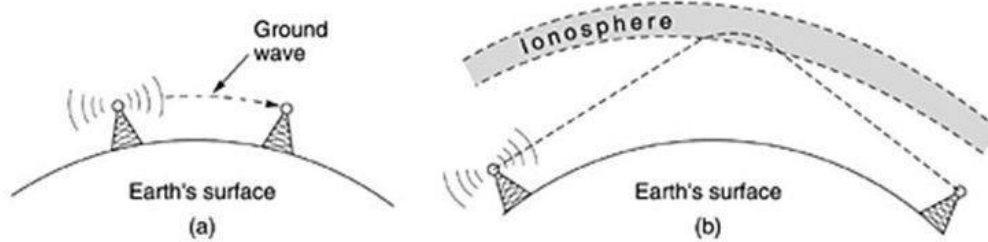
Σχήμα 1-5. Το ηλεκτρομαγνητικό φάσμα και οι χρήσεις του στις επικοινωνίες

Ραδιοκύματα

Τα ραδιοκύματα είναι ένας γενικός όρος που καλύπτει τις συχνότητες 3 KHz έως 1 GHz. Καθώς αυτά είναι μη κατευθυντικά (omnidirectional), δηλαδή ταξιδεύουν από την πηγή τους προς όλες τις κατευθύνσεις, πομπός και δέκτης δεν χρειάζονται ιδιαίτερη φυσική ευθυγράμμιση ούτε κατ' ανάγκη οπτική επαφή.

Οι ιδιότητες των ραδιοκυμάτων εξαρτώνται κυρίως από τη συχνότητα [1]:

- Στις ζώνες χαμηλής συχνότητας, VLF, LF, και MF, τα ραδιοκύματα ακολουθούν την καμπύλη της γης και μεταδίδονται επίγεια, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1-6(a), διαπερνούν δε άνετα όλα τα φυσικά εμπόδια. Ωστόσο, η ισχύς τους μειώνεται αντιστρόφως ανάλογα του τετραγώνου της απόστασης από τον πομπό. Οι ραδιοφωνικές εκπομπές στα AM χρησιμοποιούν τη ζώνη MF.
- Στις ζώνες υψηλής συχνότητας, HF και VHF, τα ραδιοκύματα τείνουν να ταξιδεύουν σε ευθείες γραμμές, να ανακλώνται στα εμπόδια καθώς και να απορροφώνται από τη βροχή και το έδαφος. Ωστόσο, τα ραδιοκύματα υψηλής συχνότητας που φτάνουν στην ιονόσφαιρα – μια στρώση φορτισμένων σωματιδίων που περιβάλλει τη γη σε ύψος από 100 έως 500 km – διαθλώνται από αυτή και επανέρχονται στη γη (π.χ. FM), όπως φαίνεται στο Σχήμα 1-6(b). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τη διάδοση τέτοιου είδους κυμάτων σε μακρινές αποστάσεις, υπό συγκεκριμένες ατμοσφαιρικές συνθήκες.



Σχήμα 1-6. (a) Στις ζώνες VLF, LF και MF τα ραδιοκύματα ακολουθούν την καμπυλότητα της γης. (b) Στις ζώνες HF και VHF διαθλώνται από την ιονόσφαιρα.

Μικροκύματα

Για τις μικροκυματικές επικοινωνίες χρησιμοποιείται η ζώνη συχνοτήτων από 2 GHz έως 40 GHz με το ρυθμό μετάδοσης δεδομένων να είναι τόσο υψηλότερος όσο υψηλότερη είναι η χρησιμοποιούμενη συχνότητα.

Η κύρια χρήση των μικροκυματικών επικοινωνιών είναι η παροχή μεγάλης απόστασης τηλεπικοινωνιακών υπηρεσιών προσφέροντας εναλλακτική επιλογή στους παρόχους έναντι των χάλκινων καλωδίων και της οπτικής ίνας.

Σε αντίθεση με τα ραδιοκύματα σε χαμηλές συχνότητες, τα μικροκύματα δεν διαπερνούν εύκολα τα κτίρια. Μερικά μικροκύματα μπορεί να διαθλαστούν από την ατμόσφαιρα (χαμηλά στρώματα) και να χρειαστούν περισσότερα χρόνια να φτάσουν από το απευθείας κύμα. Τότε φθάνουν με διαφορά φάσης από το απευθείας κύμα, οπότε μπορεί να το ακυρώσουν. Οι ζώνες μέχρι τα 10GHz είναι πια σε κοινή χρήση, με τις υψηλότερες συχνότητες να παρουσιάζουν το μειονέκτημα της απορρόφησης από το νερό (βροχή, υγρασία, υδρατμοί).

Γενικά, οι μικροκυματικές επικοινωνίες χρησιμοποιούνται πλέον τόσο πολύ για υπεραστικές τηλεφωνικές κλήσεις, κινητά τηλέφωνα, διανομή τηλεόρασης, δορυφορικές επικοινωνίες και άλλες χρήσεις, που έχει εμφανιστεί έλλειψη διαθέσιμου φάσματος. Έχουν πολλά πλεονεκτήματα συγκριτικά με τις οπτικές ίνες με βασικότερο ότι δεν απαιτούν δικαιώματα χρήσης, όπως τα καλώδια, δίνοντας έτσι τη δυνατότητα να παρακαμφθεί εύκολα το τηλεφωνικό σύστημα. Η εγκατάσταση του σχετικού συστήματος είναι οικονομικότερη από την τοποθέτηση οπτικών ινών, ενώ συχνά η χρήση τους μπορεί να είναι φθηνότερη από τη μίσθωση οπτικής ίνας.

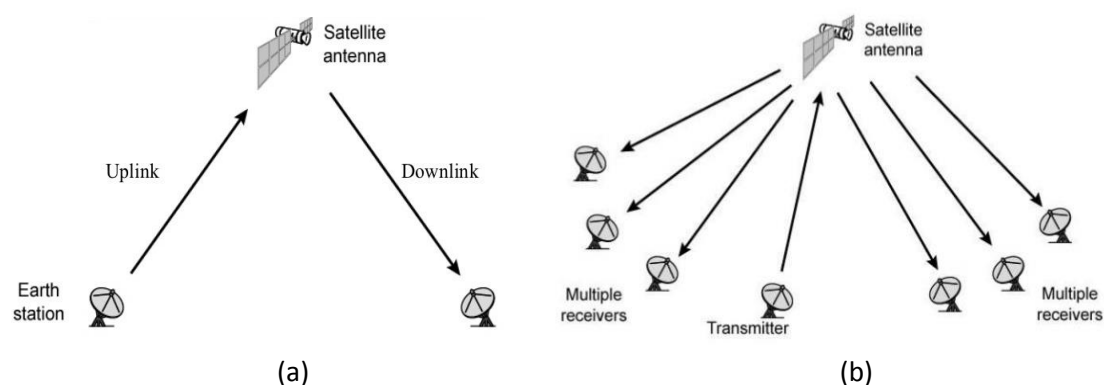
Τηλεπικοινωνιακοί δορυφόροι

Οι τηλεπικοινωνιακοί δορυφόροι (telecommunication satellites) είναι ουσιαστικά σταθμοί αναμετάδοσης μικροκυμάτων μεταξύ επικοινωνιακών εγκαταστάσεων εδάφους, που καλούνται επίγειοι σταθμοί (terrestrial stations).

Ένας τηλεπικοινωνιακός δορυφόρος αποτελείται από ένα πλήθος αναμεταδοτών καθένας εκ των οποίων λαμβάνει μεταδόσεις σε μια ζώνη συχνοτήτων (uplink) και ενισχύει το σήμα ή απλά το επαναμεταδίδει εκπέμποντάς το σε μία άλλη ζώνη συχνοτήτων (downlink). Κατά αυτόν τον τρόπο αποφεύγονται οι παρεμβολές του εξερχόμενου με το εισερχόμενο σήμα.

Υπάρχουν δύο τύποι ζεύξεων που μπορεί να παρέχει ένας τηλεπικοινωνιακός δορυφόρος:

- είτε ζεύξη σημείου-προς-σημείο (point-to-point links) μεταξύ δύο επίγειων σταθμών, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1-7(a)
- είτε ζεύξη εκπομπής (broadcast link) για την επικοινωνία ενός επίγειου πομπού με πολλαπλούς επίγειους δέκτες, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1-7(b).



Σχήμα 1-7. (a) Ζεύξη σημείου-προς-σημείο. (b) Ζεύξη εκπομπής.

Η βέλτιστη περιοχή συχνοτήτων για δορυφορική επικοινωνία είναι από 1 GHz έως 10 GHz καθώς:

- Κάτω από 1 GHz υπάρχει σημαντικός θόρυβος από φυσικές πηγές, συμπεριλαμβανομένου του γαλαξιακού, ηλιακού και ατμοσφαιρικού θορύβου όπως και της ανθρώπινης παρεμβολής από διάφορες ηλεκτρονικές συσκευές.
- Πάνω από 10 GHz το σήμα εξασθενεί σημαντικά από την ατμοσφαιρική απορρόφηση.

Οι σύγχρονοι τηλεπικοινωνιακοί δορυφόροι παρέχουν υπηρεσίες τηλεοπτικής διανομής καθώς και υπηρεσίες τηλεφωνικής μετάδοσης μεγάλων αποστάσεων (διηπειρωτικές). Λόγω των μεγάλων αυτών αποστάσεων διάδοσης, εισάγεται μια καθυστέρηση διάδοσης του σήματος μεταξύ δύο επίγειων σταθμών της τάξης του ενός τετάρτου του δευτερολέπτου η οποία γίνεται αντιληπτή στις συνηθισμένες τηλεφωνικές συνομιλίες.

1.2 Μονοδιαυλικά και πολυδιαυλικά δίκτυα

Ανάλογα με το αν το εύρος ζώνης του φυσικού καναλιού επιμερίζεται σε ένα ή περισσότερα του ενός παράλληλα λογικά κανάλια (logical channels), ένα δίκτυο διακρίνεται αντίστοιχα σε:

- μονοδιαυλικό (single-channel) δίκτυο ή
- πολυδιαυλικό (multi-channel) δίκτυο.

Μονοδιαυλικό δίκτυο

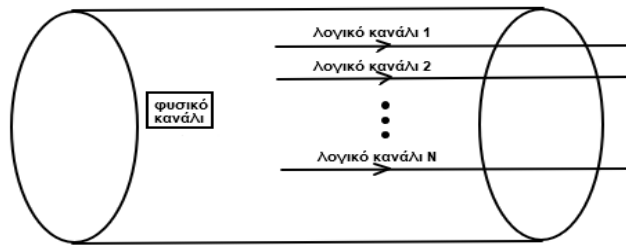
Σε ένα μονοδιαυλικό δίκτυο, το εύρος ζώνης του φυσικού καναλιού δίδεται εξ ολοκλήρου σε ένα μοναδικό λογικό κανάλι, όπως δείχνει το Σχήμα 1-8. Έτσι, κάθε σταθμός που επιθυμεί να μεταδώσει σε ένα μονοδιαυλικό δίκτυο δεν μπορεί παρά να επιλέξει το μοναδικό λογικό κανάλι προς μετάδοση με αποτέλεσμα, αν δύο ή περισσότεροι σταθμοί επιχειρήσουν να μεταδώσουν ταυτόχρονα, όλα τα μεταδιδόμενα σήματα να υπερτεθούν και να καταστραφούν. Συνεπώς, για να είναι επιτυχής η μετάδοση ενός σταθμού, πρέπει κατά τη διάρκεια αυτής να μην γίνει μετάδοση από άλλο σταθμό.



Σχήμα 1-8. Το φυσικό κανάλι ταυτίζεται με το μοναδικό λογικό κανάλι ενός μονοδιαυλικού δικτύου

Πολυδιαυλικό δίκτυο

Αντίθετα, σε ένα πολυδιαυλικό δίκτυο, το μεγάλο εύρος ζώνης του φυσικού καναλιού διαιρείται σε περισσότερα του ενός, έστω N το πλήθος, παράλληλα λογικά κανάλια σύμφωνα με κάποια τεχνική πολυπλεξίας. Κάθε λογικό κανάλι αντιστοιχεί σε ένα υποσύνολο του εύρους ζώνης του φυσικού καναλιού με το εύρος ζώνης οποιονδήποτε δύο λογικών καναλιών να μην παρουσιάζει επικαλύψεις. Στο Σχήμα 1-9 απεικονίζεται η γενική μορφή του φυσικού καναλιού ενός πολυδιαυλικού δικτύου με τα επιμέρους λογικά κανάλια του.



Σχήμα 1-9. Φυσικό κανάλι πολυδιαυλικού δικτύου και επιμέρους λογικά κανάλια

Τα N το πλήθος παράλληλα λογικά κανάλια εξυπηρετούν τη μετάδοση πληροφορίας μεταξύ M το πλήθος σταθμών, όπου εν γένει $M \geq N$. Κάθε σταθμός επιλέγει ένα συγκεκριμένο λογικό κανάλι προκειμένου να μεταδώσει σε κάποιον άλλο σταθμό.

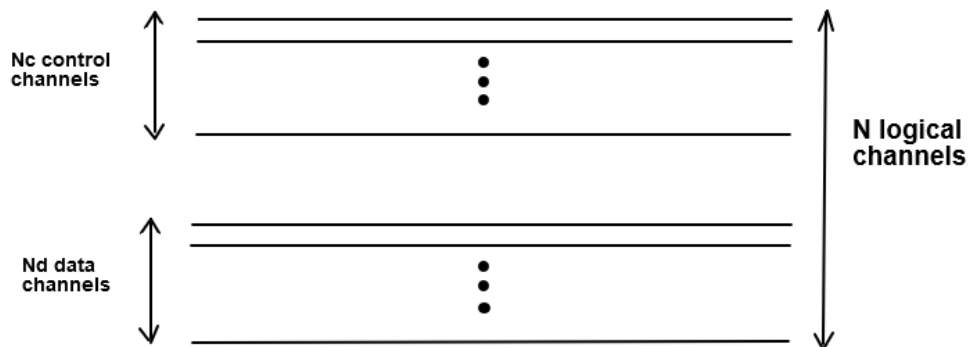
Κατά συνέπεια, η χρήση των πολυδιαυλικών δικτύων αξιοποιεί καλύτερα το εύρος ζώνης του φυσικού καναλιού, συγκριτικά με το μονοδιαυλικό δίκτυο της ίδιας χωρητικότητας, γιατί:

- μειώνει τις συγκρούσεις στα πολλαπλά λογικά κανάλια και, άρα, βελτιώνει την συνολική απόδοση του δικτύου.
- η ταχύτητα μετάδοσης πληροφορίας σε κάθε ένα από τα επιμέρους λογικά κανάλια ενός πολυδιαυλικού δικτύου είναι μικρότερη από την αντίστοιχη ταχύτητα στο μοναδικό φυσικό κανάλι και μπορεί να συγκλίνει στην ταχύτητα επεξεργασίας της πληροφορίας του εξοπλισμού δικτυακών διεπαφών. Με αυτό τον τρόπο, αντιμετωπίζεται αποτελεσματικά το φαινόμενο της ηλεκτρονικής συμφόρησης (electronic bottleneck) που χαρακτηρίζει τα μονοδιαυλικά δίκτυα μεγάλης χωρητικότητας.

Πολλές υλοποιήσεις, επιμερίζουν το συνολικό πολυδιαυλικό δίκτυο N το πλήθος παράλληλων λογικών καναλιών σε δύο επιμέρους συστήματα:

- το πολυδιαυλικό δίκτυο μετάδοσης πληροφορίας ελέγχου, το οποίο αποτελείται από N_c το πλήθος παράλληλα λογικά κανάλια ελέγχου (control channels) που χρησιμοποιούνται για τη μετάδοση πληροφορίας ελέγχου μεταξύ των σταθμών του δικτύου και
- το πολυδιαυλικό δίκτυο μετάδοσης πληροφορίας δεδομένων, το οποίο αποτελείται από N_d το πλήθος παράλληλα λογικά κανάλια δεδομένων (data channels) που χρησιμοποιούνται για τη μετάδοση δεδομένων μεταξύ των σταθμών του δικτύου.

Προφανώς, ισχύει ότι: $N = N_c + N_d$, όπως άλλωστε φαίνεται στο Σχήμα 1-10.



Σχήμα 1-10. Λογικά κανάλια ελέγχου και δεδομένων σε ένα πολυδιαυλικό δίκτυο

Το αποτέλεσμα της μετάδοσης πληροφορίας ελέγχου, που μεταφέρεται στα κανάλια ελέγχου, καθορίζει τα δικαιώματα πρόσβασης των σταθμών που ακολούθως θα μεταδώσουν δεδομένα στα κανάλια δεδομένων.

Στην βιβλιογραφία, υπάρχουν πολυδιαυλικά δίκτυα που χρησιμοποιούν:

- $v = 0$ κανάλια ελέγχου [2]
- $v = 1$ κανάλι ελέγχου [3],[4]
- $v = N$ κανάλια ελέγχου [5]
- $v \leq N$ κανάλια ελέγχου [6]
- $v > N$ κανάλια ελέγχου [7]

Κάθε σταθμός σε ένα πολυδιαυλικό δίκτυο διαθέτει έναν ή περισσότερους εκπομπούς και δέκτες για την επικοινωνία τόσο στα κανάλια ελέγχου όσο και στα κανάλια δεδομένων. Ένας σταθμός δύναται να εκπέμπει σε ένα δεδομένο λογικό κανάλι και ταυτόχρονα να λαμβάνει από ένα άλλο λογικό κανάλι. Καθένας εξ αυτών των εκπομπών/δεκτών μπορεί είτε να λειτουργεί σε ένα συγκεκριμένο λογικό κανάλι (σταθερά συντονισμένος) είτε σε περισσότερα (συντονιζόμενος).

1.3 Πολυπλεξία

Στα σύγχρονα τηλεπικοινωνιακά δίκτυα, η αυξανόμενη απαίτηση για ολοένα και μεγαλύτερο διαθέσιμο εύρος ζώνης οδήγησε στην ανάγκη για καλύτερη εκμετάλλευση του

εύρους ζώνης ενός φυσικού καναλιού. Η μέθοδος με την οποία αυτό επιτυγχάνεται καλείται πολυπλεξία (multiplexing).

Η πολυπλεξία είναι η μέθοδος εκείνη που επιμερίζει το συνολικό εύρος ζώνης του φυσικού καναλιού σε πολλαπλά παράλληλα λογικά κανάλια, χαμηλότερης ταχύτητας μετάδοσης πληροφορίας το καθένα. Τα λογικά αυτά κανάλια, ανά δύο, δεν παρουσιάζουν επικαλύψεις.

Ως αποτέλεσμα, η πολυπλεξία δίνει τη δυνατότητα της παράλληλης πρόσβασης πολλαπλών χρηστών σε διαφορετικά λογικά κανάλια του φυσικού μέσου ώστε τα μεταδιδόμενα σήματα να μην καταστρέφονται παρεμβάλλοντας το ένα στο άλλο.

Το στοιχείο που υλοποιεί την μέθοδο της πολυπλεξίας σε ένα πολυδιαυλικό δίκτυο καλείται πολυπλέκτης (multiplexer - MUX).

Η αντίστροφη μέθοδος της πολυπλεξίας καλείται αποπολυπλεξία (demultiplexing). Δηλαδή, η αποπολυπλεξία είναι η μέθοδος εκείνη που λαμβάνει την πολυπλεγμένη πληροφορία που μεταδίδεται στα παράλληλα λογικά κανάλια του φυσικού μέσου και τη διαχωρίζει βάσει του λογικού καναλιού μετάδοσης.

Το στοιχείο του πολυδιαυλικού δικτύου που υλοποιεί την αποπολυπλεξία καλείται αποπολυπλέκτης (demultiplexer - DEMUX).

Οι σημαντικότερες τεχνικές πολυπλεξίας είναι οι εξής:

- πολυπλεξία με διαίρεση συχνότητας (FDM)
- πολυπλεξία με διαίρεση χρόνου (TDM)
- στατιστική πολυπλεξία με διαίρεση χρόνου (STDM)
- πολυπλεξία με διαίρεση μήκους κύματος (WDM)
- πολυπλεξία με διαίρεση κώδικα (CDM)

Πολυπλεξία με διαίρεση συχνότητας (FDM)

Στην τεχνική της πολυπλεξίας με διαίρεση συχνότητας (Frequency Domain Multiplexing - FDM), το εύρος ζώνης συχνοτήτων του φυσικού καναλιού επιμερίζεται σε πολλαπλά παράλληλα λογικά κανάλια, καθένα εκ των οποίων λειτουργεί σε διαφορετική συχνότητα και εύρος ζώνης που την περιβάλλει. Το εύρος ζώνης δύο οποιονδήποτε παράλληλων λογικών καναλιών δεν παρουσιάζει επικαλύψεις.

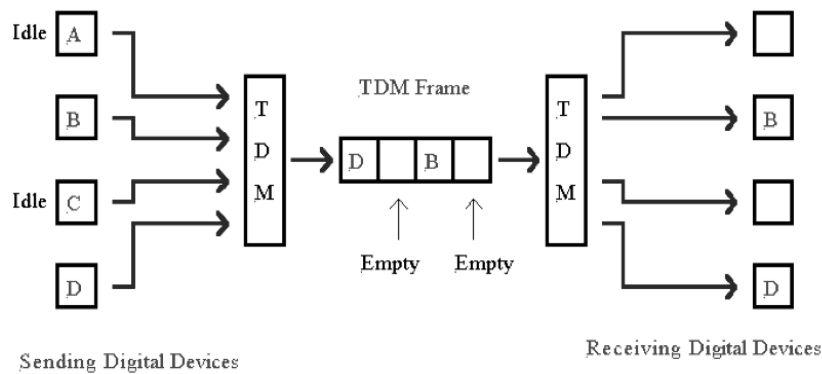
Σε ένα δίκτυο που χρησιμοποιεί την τεχνική FDM, οι σταθμοί μπορούν να μεταδίδουν ταυτόχρονα χωρίς υπερθέσεις και καταστροφές των μεταδιδόμενων σημάτων αρκεί καθένας από αυτούς να είναι ο μοναδικός που μεταδίδει στην συγκεκριμένη συχνότητα και εύρος ζώνης.

Η πολυπλεξία διαίρεσης συχνότητας χρησιμοποιείται ευρέως στη μετάδοση τηλεοπτικών και ραδιοφωνικών σημάτων μέσω ομοαξονικού καλωδίου ή ασύρματης μικροκυματικής ζεύξης. Η δημιουργία των σύνθετων σημάτων των δορυφορικών επικοινωνιών είναι και αυτή αποτέλεσμα της πολυπλεξίας FDM.

Πολυπλεξία με διαίρεση χρόνου (TDM)

Σύμφωνα με την τεχνική της πολυπλεξίας με διαίρεση χρόνου (Time Domain Multiplexing - TDM), το φυσικό κανάλι διαμερίζεται βάσει του χρόνου σε πολλαπλά παράλληλα λογικά κανάλια που λειτουργούν μεν στην ίδια συχνότητα και εύρος ζώνης αλλά διακρίνονται μεταξύ τους από το χρονικό διάστημα που καταλαμβάνουν. Καθένα από τα λογικά κανάλια συνιστά μια χρονική μονάδα (time unit) η οποία διατίθεται σε ένα σταθμό προς μετάδοση. Συνεχείς χρονικές μονάδες, τόσες όσο το πλήθος των σταθμών του δικτύου, συνιστούν ένα TDM πλαίσιο (TDM frame). Μεταξύ οποιονδήποτε δύο χρονικών μονάδων δεν παρουσιάζονται επικαλύψεις, κάτι για το οποίο απαιτείται οι σταθμοί ενός δικτύου που χρησιμοποιεί την τεχνική TDM να είναι συγχρονισμένοι.

Σε ένα δίκτυο που χρησιμοποιεί την τεχνική TDM, οι σταθμοί έχουν δικαίωμα πρόσβασης σε κάθε TDM πλαίσιο κυκλικά, στην χρονική μονάδα που αντιστοιχεί στον καθένα, ανεξάρτητα από το αν έχουν ή όχι πληροφορία προς μετάδοση. Αποτέλεσμα αυτού είναι η μη βέλτιστη αξιοποίηση του φυσικού καναλιού το οποίο μένει ενδεχομένως αδρανές λόγω κενών χρονικών μονάδων σε κάθε TDM πλαίσιο, όπως δείχνει το Σχήμα 1-11.



Σχήμα 1-11. Κενά TDM πλαίσια

Η τεχνική TDM αναπτύχθηκε στα τέλη του 19ου αιώνα για χρήση σε τηλεγραφικά τηλεπικοινωνιακά συστήματα αλλά βρήκε ευρεία εφαρμογή στην ψηφιακή τηλεφωνία κατά το δεύτερο μισό του 20ου αιώνα.

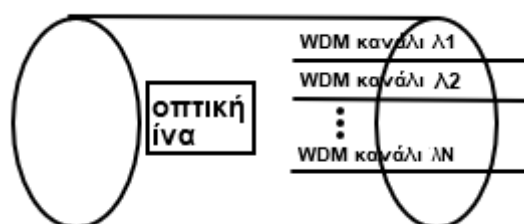
Στατιστική πολυπλεξία με διαίρεση χρόνου (STDM)

Η στατιστική πολυπλεξία με διαίρεση χρόνου (Statistical Time Division Multiplexing - STDM) είναι μια εξελιγμένη μορφή TDM η οποία επιλύει το πρόβλημα της ευελιξίας της τελευταίας ως προς την αξιοποίηση του κοινού μέσου ως εξής: χρονικές μονάδες που δεν χρησιμοποιούνται ανατίθενται δυναμικά σε σταθμούς που διαθέτουν πληροφορία προς μετάδοση. Κατά συνέπεια, η εκμετάλλευση του κοινού μέσου γίνεται με τον βέλτιστο τρόπο αφού το εύρος ζώνης του μοιράζεται στους σταθμούς του δικτύου κατ' αναλογία με τις ανάγκες επικοινωνίας τους.

Πολυπλεξία με διαίρεση μήκους κύματος (WDM)

Η πολυπλεξία με διαίρεση μήκους κύματος (Wavelength Division Multiplexing – WDM) αποτελεί μια εξαιρετικά αξιόπιστη παραλλαγή της πολυπλεξίας με διαίρεση συχνότητας και χρησιμοποιείται σε δίκτυα οπτικών ινών.

Σύμφωνα με την τεχνική WDM, η συνολική χωρητικότητα του φυσικού καναλιού (οπτική ίνα) διαιρείται σε πολλαπλά παράλληλα λογικά κανάλια (WDM κανάλια) χαμηλότερης ταχύτητας μετάδοσης πληροφορίας. Κάθε ένα από τα παράλληλα WDM κανάλια αντιστοιχεί σε ένα διαφορετικό μήκος κύματος λ του οπτικού φάσματος με τα μήκη κύματος οποιονδήποτε δύο WDM καναλιών να μην αλληλοεπικαλύπτονται (Σχήμα 1-12).



Σχήμα 1-12. WDM κανάλια σε μια οπτική ίνα

Ωστόσο, η τεχνική WDM συχνά δεν είναι από μόνη της αρκετή για την βέλτιστη αξιοποίηση του εύρους ζώνης μιας οπτικής ίνας. Έτσι, για την αποδοτική αξιοποίηση του ρυθμού μετάδοσης καθενός οπτικού καναλιού (κάποια Tbps), επιβάλλεται πολλές φορές η διαμοίρασή του σε πολλαπλά επιμέρους κανάλια χαμηλότερης ταχύτητας μετάδοσης πληροφορίας. Ο συνηθέστερος τρόπος να γίνει αυτό είναι με τη χρήση της τεχνικής TDM ανά WDM κανάλι [8].

Πολυπλεξία με διαίρεση κώδικα (CDM)

Κατά την τεχνική της πολυπλεξίας με διαίρεση κώδικα (Code Division Multiplexing), το φυσικό κανάλι διαιρείται σε τόσα επιμέρους παράλληλα λογικά κανάλια όσοι και οι σταθμοί του δικτύου. Κάθε σταθμός - εκπομπός χρησιμοποιεί ένα συγκεκριμένο και μοναδικά αναγνωρίσιμο κώδικα με βάση τον οποίο κωδικοποιεί την πληροφορία του και την αποστέλλει στο δίκτυο. Κατά τη λήψη πληροφορίας από το δίκτυο, ο σταθμός - προορισμός συντονίζεται στον κώδικα αποστολής της, παραλαμβάνει και αποκωδικοποιεί την πληροφορία. Κατά αυτόν τον τρόπο, και εφόσον οι κώδικες που χρησιμοποιούνται επιτρέπουν τον πλήρη διαχωρισμό και αποκωδικοποίηση των σημάτων, όλοι οι σταθμοί χρησιμοποιούν το φυσικό κανάλι ταυτόχρονα χωρίς διαχωρισμό συχνότητας ή χρόνου.

Το βασικότερο πλεονέκτημα της τεχνικής CDM έναντι των υπόλοιπων τεχνικών είναι ότι η τεχνική αυτή δεν θέτει κάποιο άνω όριο στο πλήθος των σταθμών στο δίκτυο προκειμένου να αξιοποιείται βέλτιστα το εύρος ζώνης του φυσικού καναλιού. Στις υπόλοιπες τεχνικές (π.χ. TDM, WDM), το μέγιστο πλήθος σταθμών στο δίκτυο δεν πρέπει να υπερβαίνει το πλήθος των παράλληλων λογικών καναλιών του αν θέλουμε να αξιοποιείται βέλτιστα το εύρος ζώνης του φυσικού καναλιού. Αντίθετα, η χρήση της τεχνικής CDM σε ένα δίκτυο

επιτρέπει την προσθήκη σταθμών σε αυτό, καθένας εκ των οποίων χρησιμοποιεί τον δικό του μονοδικό κώδικα, χωρίς να μειώνεται η απόδοση του δικτύου.

Παρότι η τεχνική CDM χρησιμοποιήθηκε για αρκετά χρόνια μόνο για στρατιωτικές εφαρμογές, σήμερα βρίσκει ευρεία εφαρμογή και σε άλλες περιπτώσεις, όπως οι κινητές και δορυφορικές επικοινωνίες.

1.4 Στοιχεία πολυδιαυλικών δικτύων

Τα κυριότερα στοιχεία σε ένα πολυδιαυλικό δίκτυο είναι τα εξής:

- εκπομποί (transmitters)
- δέκτες (receivers)
- πολυπλέκτες/αποπολυπλέκτες (multiplexers/demultiplexers)

Εκπομποί

Ο εκπομπός είναι εκείνο το σύστημα που διαθέτει τη δυνατότητα να μεταδίδει ένα σήμα [9].

Οι εκπομποί ενός πολυδιαυλικού δικτύου διακρίνονται σε:

- σταθερά συντονισμένους (fixed tuned): ένας σταθερά συντονισμένος εκπομπός μπορεί να μεταδώσει σήμα μόνο σε ένα συγκεκριμένο λογικό κανάλι του φυσικού καναλιού.
- συντονιζόμενους (tunable): ένας συντονιζόμενος εκπομπός μπορεί να μεταδώσει σήμα σε περισσότερα του ενός λογικά κανάλια του φυσικού καναλιού (ένα τη φορά).

Δέκτες

Ο δέκτης είναι εκείνο το σύστημα που διαθέτει τη δυνατότητα να λαμβάνει και να επεξεργάζεται σήματα [9].

Σε πλήρη αντιστοιχία με τους εκπομπούς, οι δέκτες ενός πολυδιαυλικού δικτύου διακρίνονται σε:

- σταθερά συντονισμένους (fixed tuned): ένας σταθερά συντονιζόμενος δέκτης μπορεί να λάβει σήμα μόνο από ένα συγκεκριμένο λογικό κανάλι του φυσικού καναλιού.
- συντονιζόμενους (tunable): ένας συντονιζόμενος δέκτης μπορεί να λάβει σήμα από περισσότερα του ενός λογικά κανάλια του φυσικού καναλιού (ένα τη φορά).

Χαρακτηριστικά συντονιζόμενων εκπομπών/δεκτών

Τα χαρακτηριστικά ενός συντονιζόμενου εκπομπού/δέκτη, τα οποία επηρεάζουν την απόδοση του συστήματος, είναι τα ακόλουθα:

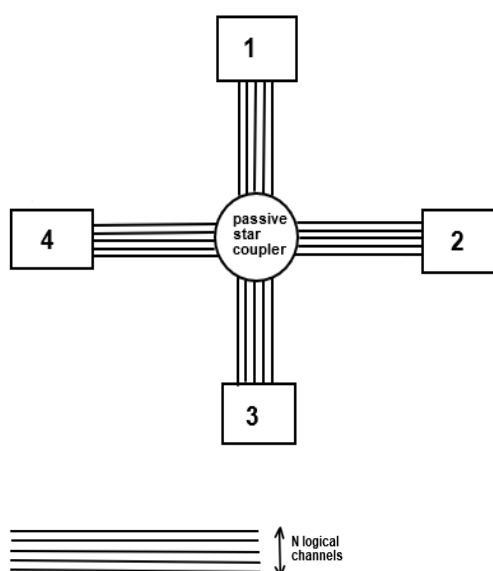
- το εύρος συντονισμού (tuning range), το οποίο περιλαμβάνει όλα τα λογικά κανάλια του φυσικού καναλιού σε καθένα από τα οποία μπορεί να συντονιστεί ο εκπομπός/δέκτης. Το εύρος συντονισμού μπορεί να είναι είτε συνεχές είτε διακριτό.
- ο χρόνος συντονισμού (tuning time), που είναι το χρονικό διάστημα που απαιτείται για τη μετάβαση του εκπομπού/δέκτη από το ένα λογικό κανάλι λειτουργίας του σε κάποιο άλλο, το οποίο βρίσκεται πάντα μέσα στο εύρος συντονισμού του.

1.5 Τοπολογίες πολυδιαυλικών δικτύων

Οι πιο διαδεδομένες τοπολογίες πολυδιαυλικών δικτύων είναι η τοπολογία παθητικού αστέρα και η τοπολογία δακτυλίου, οι οποίες πολλές φορές συνδυάζονται μεταξύ τους συνιστώντας υβριδικές τοπολογίες.

Τοπολογία παθητικού αστέρα

Η τοπολογία παθητικού αστέρα χρησιμοποιείται ευρέως στη βιβλιογραφία κυρίως σε τοπικά δίκτυα (Local Area Networks - LANs) και αναπαρίσταται στο Σχήμα 1-13.



Σχήμα 1-13. Τοπολογία παθητικού αστέρα

Στην τοπολογία παθητικού αστέρα, καθένας από τους M το πλήθος σταθμούς του πολυδιαυλικού δικτύου συνδέεται σε έναν κεντρικό συζεύκτη παθητικού αστέρα (passive star coupler) μέσω συνολικά N το πλήθος λογικών καναλιών.

Η δικτυακή διεπαφή κάθε σταθμού διαθέτει έναν ή περισσότερους εκπομπούς και έναν ή περισσότερους δέκτες για τη μετάδοση και λήψη πακέτων, αντίστοιχα, στα παράλληλα λογικά κανάλια. Ο συζεύκτης παθητικού αστέρα είναι εκείνη η συσκευή η οποία αποτελεί το βασικό μέσο επικοινωνίας μεταξύ των σταθμών σε μια τοπολογία παθητικού αστέρα καθώς είναι επιφορτισμένος με το να δέχεται ως είσοδο όλα τα σήματα που μεταδίδονται από κάθε σταθμό του δικτύου και, στη συνέχεια, να τα παραδίδει ως έξοδο σε όλους τους σταθμούς του δικτύου.

Κάθε σταθμός πληροφορείται για την επιτυχή ή όχι μετάδοση του πακέτου δεδομένων/ελέγχου, παρακολουθώντας το πολυδιαυλικό σύστημα του συζεύκτη παθητικού αστέρα, αφού αυτό λειτουργεί σαν ένα μέσο καθολικής εκπομπής.

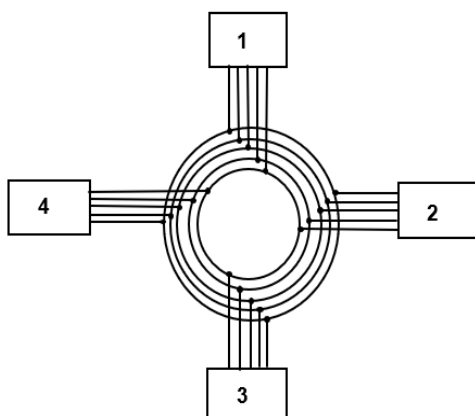
Ανάμεσα στα πλεονεκτήματα της τοπολογίας παθητικού αστέρα συμπεριλαμβάνονται τα ακόλουθα:

- Κάθε σταθμός που μετέχει στην τοπολογία απομονώνεται από τους υπόλοιπους σταθμούς μέσω του συζεύκτη παθητικού αστέρα. Έτσι, εάν ένας οποιοσδήποτε σταθμός πάψει να λειτουργεί, όλοι οι υπόλοιποι σταθμοί μπορούν να συνεχίσουν κανονικά να ανταλλάσσουν πακέτα μεταξύ τους.
- Καθίσταται εύκολη η προσθήκη/αφαίρεση ενός σταθμού από την τοπολογία, για τον ίδιο λόγο.

Το βασικό μειονέκτημα της τοπολογίας παθητικού αστέρα είναι ότι ο συζεύκτης παθητικού αστέρα λειτουργεί ως μοναδικό σημείο αστοχίας (single point of failure).

Τοπολογία δακτυλίου

Η τοπολογία δακτυλίου χρησιμοποιείται κυρίως σε μητροπολιτικά δίκτυα (Metropolitan Area Networks - MANs) και δίκτυα ευρείας περιοχής (Wide Area Networks - WANs). Η τοπολογία αυτή παρουσιάζεται στο Σχήμα 1-14.



Σχήμα 1-14. Τοπολογία δακτυλίου

Σε ένα πολυδιαυλικό δίκτυο τοπολογίας δακτυλίου, καθένας από τους M το πλήθος σταθμούς του πολυδιαυλικού δικτύου συνδέεται άμεσα, μέσω N το πλήθος λογικών

καναλιών, με δύο άλλους ακριβώς σταθμούς, έναν σε κάθε πλευρά του. Αποτέλεσμα αυτού είναι οι σταθμοί να συνδέονται σε μορφή ενός κλειστού βρόχου, τον δακτύλιο.

Η δικτυακή διεπαφή κάθε σταθμού διαθέτει έναν ή περισσότερους εκπομπούς και έναν ή περισσότερους δέκτες για τη μετάδοση και λήψη πακέτων, αντίστοιχα, στα παράλληλα λογικά κανάλια. Τα πακέτα σε ένα πολυδιαυλικό δίκτυο τοπολογίας δακτυλίου διέρχονται μέσω ενός μονοπατιού καθώς μεταδίδονται στον δακτύλιο από τον έναν σταθμό στον αμέσως επόμενο του. Κατά συνέπεια, αν ένας σταθμός επιθυμεί να μεταδώσει πακέτο σε έναν μη γειτονικό του σταθμό, αυτό θα διέλθει πρώτα από όλους τους ενδιάμεσους σταθμούς πριν ληφθεί από τον προορισμό. Ο προορισμός είναι αυτός που εξάγει το πακέτο από το δίκτυο.

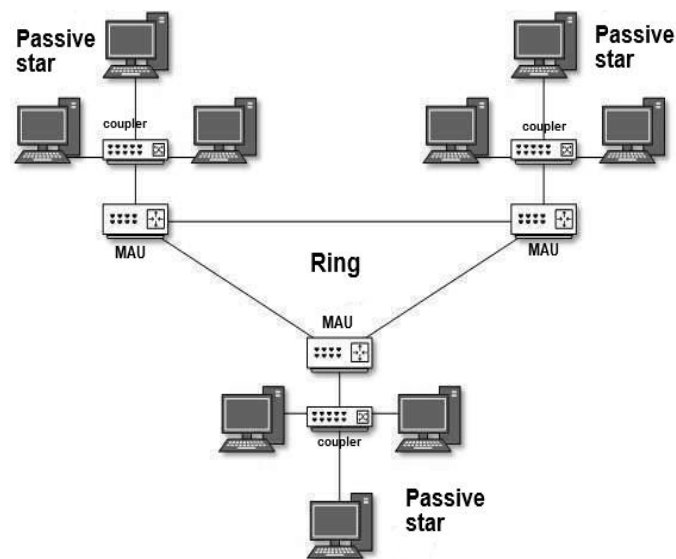
Ανάλογα με το πρωτόκολλο πρόσβασης, εφαρμόζονται διάφορες πολιτικές ελέγχου για την ενημέρωση κάθε σταθμού για την επιτυχή ή όχι μετάδοση του πακέτου του.

Οι τοπολογίες δακτυλίων έχουν υψηλό εύρος ζώνης και μπορούν να εκταθούν σε μεγάλες αποστάσεις. Ωστόσο, είναι σχετικά ακριβές, δύσκολο να εγκατασταθούν ενώ επίσης οποιοσδήποτε σταθμός συνιστά σημείο αστοχίας του δικτύου.

Υβριδικές τοπολογίες

Οι υβριδικές τοπολογίες συνδυάζουν δύο ή περισσότερες, διαφορετικές μεταξύ τους, τοπολογίες κατά τέτοιο τρόπο ώστε να εκμεταλλεύονται καλύτερα τα πλεονεκτήματα που παρέχει η κάθε μία τοπολογία ξεχωριστά.

Τυπικό παράδειγμα υβριδικής τοπολογίας, αποτελεί η τοπολογία παθητικού αστέρα - δακτυλίου. Αυτή συνίσταται από δύο ή περισσότερες τοπολογίες παθητικού αστέρα, κάθε μία εκ των οποίων συνδέεται μέσω μιας μονάδας πρόσβασης μέσου (Media Access Unit - MAU) σε μια κεντρική τοπολογία δακτυλίου. Η τοπολογία αυτή παρουσιάζεται στο Σχήμα 1-15.



Σχήμα 1-15. Υβριδική τοπολογία παθητικού αστέρα - δακτυλίου

Η υβριδική τοπολογία παθητικού αστέρα - δακτυλίου επιτρέπει την επέκταση δικτύων τοπολογίας παθητικού αστέρα σε μεγάλες αποστάσεις.

1.6 Παράγοντες που επηρεάζουν την απόδοση πολυδιαδικτυικών δικτύων

Οι βασικοί παράγοντες που επηρεάζουν σημαντικά την απόδοση των πολυδιαδικτυικών δικτύων είναι οι εξής:

- η καθυστέρηση διάδοσης
- ο χρόνος συντονισμού των εκπομπών και δεκτών
- οι συγκρούσεις πακέτων στα παράλληλα λογικά κανάλια
- οι συγκρούσεις πακέτων στον προορισμό - το πλήθος των δεκτών ανά σταθμό

Ακολουθώς αναλύουμε μερικούς από αυτούς.

Χρόνος συντονισμού των εκπομπών και δεκτών

Ο χρόνος συντονισμού των συντονιζόμενων εκπομπών και δεκτών είναι το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί προκειμένου ο συντονιζόμενος εκπομπός/δέκτης να μεταβεί από το ένα λογικό κανάλι λειτουργίας του σε ένα άλλο προκειμένου να μεταδώσει ή να λάβει πληροφορία, αντίστοιχα.

Ο χρόνος συντονισμού μεγαλώνει όσο μεγαλώνει το εύρος συντονισμού του αντίστοιχου συντονιζόμενου εκπομπού/δέκτη διότι αυξάνει η μέγιστη απόσταση που απέχουν δύο διαφορετικά λογικά κανάλια του.

Στις περισσότερες μελέτες, ο χρόνος συντονισμού των συντονιζόμενων εκπομπών και δεκτών θεωρείται αμελητέος, προς διευκόλυνση της μαθηματικής ανάλυσης. Παρόλα αυτά, η επίδραση της παραμέτρου αυτής στην απόδοση του δικτύου λαμβάνεται υπόψη σε μελέτες που χρησιμοποιούν εξομοίωση [10].

Συγκρούσεις πακέτων στα παράλληλα λογικά κανάλια

Το φαινόμενο των συγκρούσεων στα κανάλια εμφανίζεται όταν δύο ή περισσότεροι σταθμοί του δικτύου επιλέξουν το ίδιο λογικό κανάλι προκειμένου να μεταδώσουν σε αυτό ταυτόχρονα το πακέτο τους. Αποτέλεσμα είναι, όπως ακριβώς και στο μονοδιαδικτυικό δίκτυο, τα πακέτα αυτά να συγκρουστούν καθιστώντας ανεπιτυχείς όλες αυτές τις μεταδόσεις.

Λέμε ότι η μετάδοση ενός πακέτου είναι επιτυχής στα παράλληλα λογικά κανάλια όταν το λογικό κανάλι μετάδοσης του πακέτου αυτού δεν επιλέχτηκε ταυτόχρονα από οποιονδήποτε άλλο σταθμό για τη μετάδοση κάποιου άλλου πακέτου.

Συγκρούσεις πακέτων στον προορισμό

Για το σύστημα όπου η δικτυακή διεπαφή κάθε σταθμού διαθέτει F το πλήθος δέκτες, το φαινόμενο των συγκρούσεων στον προορισμό (receiver collisions) εμφανίζεται όταν περισσότερα των F πακέτα επιτυγχάνουν μετάδοση στα παράλληλα λογικά κανάλια του πολυδιαυλικού δικτύου και προορίζονται στον ίδιο σταθμό.

Αποτέλεσμα είναι ο σταθμός προορισμού να αδυνατεί να παραλάβει όλα τα επιτυχώς μεταδιδόμενα πακέτα που προορίζονται σε αυτόν, λαμβάνοντας ορθά μόνο F το πλήθος εξ αυτών και απορρίπτοντας τα υπόλοιπα.

Το φαινόμενο των συγκρούσεων στον προορισμό παρατηρείται μόνο στα πολυδιαυτικά δίκτυα καθώς, σε ένα μονοδιαυλικό δίκτυο, το πολύ ένα πακέτο μπορεί να επιτύχει μετάδοση στο μοναδικό λογικό κανάλι, οπότε θα ληφθεί ορθά από τον προορισμό.

1.7 Πρωτόκολλα πρόσβασης σε πολυδιαυτικά δίκτυα

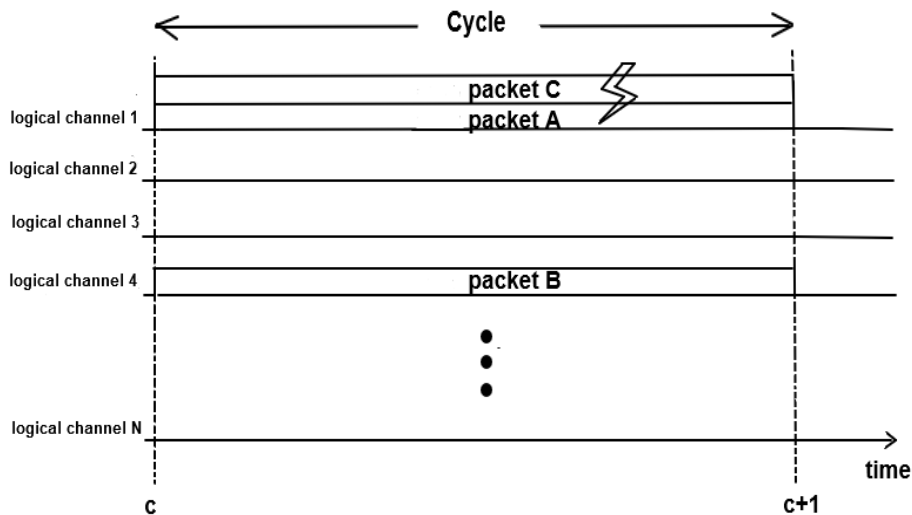
Στην βιβλιογραφία έχουν προταθεί διάφορα πρωτόκολλα πρόσβασης (Medium Access Control - MAC) των σταθμών στα παράλληλα λογικά κανάλια ενός πολυδιαυλικού δικτύου.

Ανάλογα με το αν υπάρχει ή όχι συγχρονισμός στην μετάδοση δεδομένων στα παράλληλα λογικά κανάλια ενός πολυδιαυλικού δικτύου, τα πρωτόκολλα αυτά διακρίνονται σε:

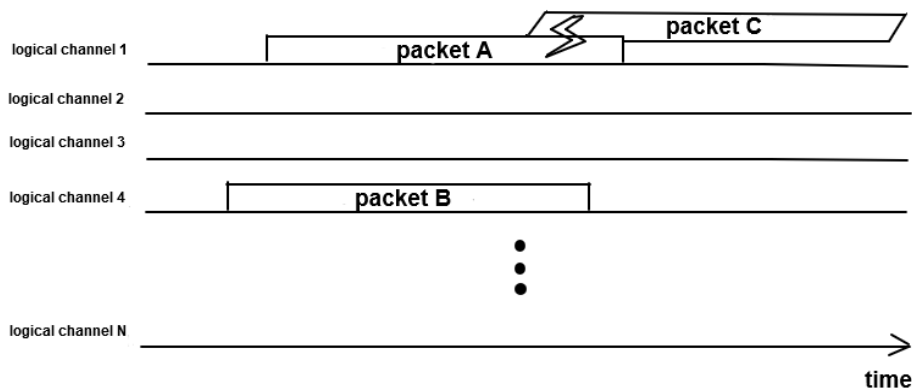
- Σύγχρονα MAC πρωτόκολλα: σε αυτά ο χρόνος χωρίζεται σε χρονικούς κύκλους (time cycles) και οι σταθμοί είναι υποχρεωμένοι να μεταδίδουν στην αρχή ενός χρονικού κύκλου (Σχήμα 1-16).
- Ασύγχρονα MAC πρωτόκολλα, όπου δεν υπάρχει συγχρονισμός στη μετάδοση δεδομένων στα παράλληλα λογικά κανάλια (Σχήμα 1-17).

Το φαινόμενο των συγκρούσεων στα παράλληλα λογικά κανάλια διαφέρει ανάλογα με τον τύπο του χρησιμοποιούμενου MAC πρωτοκόλλου:

- Στα σύγχρονα MAC πρωτόκολλα, η σύγκρουση μπορεί να συμβεί όταν δύο ή περισσότερα πακέτα ξεκινούν να μεταδίδονται την ίδια χρονική στιγμή κατά τη διάρκεια του ίδιου χρονικού κύκλου στο ίδιο λογικό κανάλι. Αποτέλεσμα αυτού είναι η υπέρθεση και καταστροφή όλων αυτών των πακέτων, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1-16.
- Στα ασύγχρονα MAC πρωτόκολλα, η σύγκρουση μπορεί να συμβεί καθόλη τη διάρκεια της μετάδοσης του πακέτου, αφού ένας άλλος σταθμός μπορεί ανά πάσα χρονική στιγμή να αρχίσει να μεταδίδει στο ίδιο λογικό κανάλι. Δύο ή περισσότερα πακέτα των οποίων οι μεταδόσεις στο ίδιο λογικό κανάλι παρουσιάζουν χρονικές επικαλύψεις υπερτίθενται και καταστρέφονται, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1-17.



Σχήμα 1-16. Σύγχρονο MAC πρωτόκολλο. Τα πακέτα A και C μεταδίδονται στο ίδιο λογικό κανάλι στην αρχή του ίδιου χρονικού κύκλου c οπότε συγκρούονται.



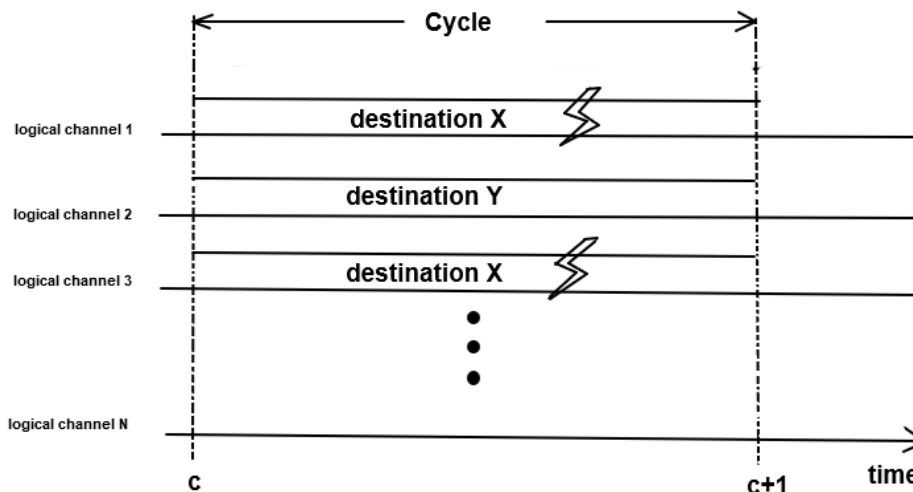
Σχήμα 1-17. Ασύγχρονο MAC πρωτόκολλο. Οι μεταδόσεις στο ίδιο λογικό κανάλι των πακέτων A και C επικαλύπτονται χρονικά οπότε τα πακέτα συγκρούονται.

Το φαινόμενο των συγκρούσεων στον προορισμό διαφέρει ανάλογα με τον τύπο του χρησιμοποιούμενου MAC πρωτοκόλλου:

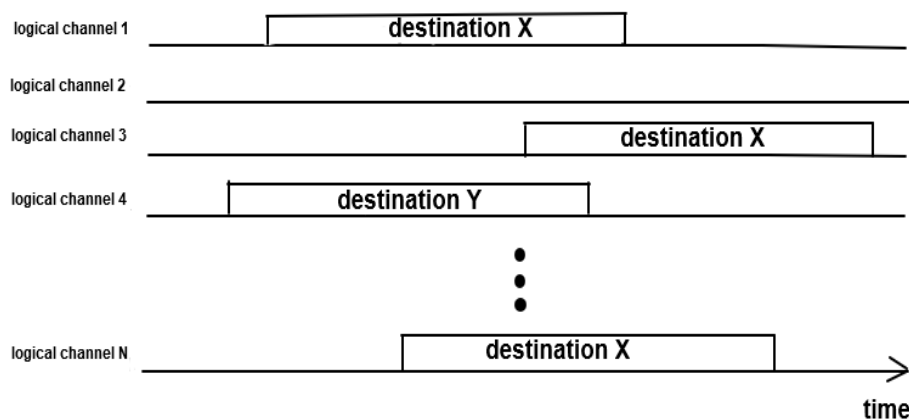
- Στα σύγχρονα MAC πρωτόκολλα, τα πακέτα συγχρονίζονται για τη μετάδοσή τους κατά τη διάρκεια ενός χρονικού κύκλου. Αυτό σημαίνει ότι τα επιτυχώς μεταδιδόμενα πακέτα στα παράλληλα λογικά κανάλια καταφτάνουν σε έναν προορισμό την ίδια περίπου χρονική στιγμή. Επομένως, αν $y \geq 2$ το πλήθος πακέτα προορίζονται στον ίδιο σταθμό, ο οποίος διαθέτει πλήθος δεκτών $F < y$, μόνο F το

πλήθος εξ αυτών λαμβάνονται ορθά από τον προορισμό με τα υπόλοιπα $y - F$ το πλήθος να απορρίπτονται (Σχήμα 1-18) [3].

- Στα ασύγχρονα MAC πρωτόκολλα, αναφερόμαστε στο φαινόμενο των συγκρούσεων στον προορισμό ως την κατάσταση εκείνη όπου $y \geq 1$ το πλήθος πακέτα που μεταδόθηκαν επιτυχώς στα παράλληλα λογικά κανάλια και τα οποία προορίζονται στον ίδιο σταθμό, καταφθάνοντας σε αυτόν (σε διαφορετική ενδεχομένως χρονική στιγμή το καθένα) δεν μπορούν να ληφθούν ορθά γιατί ο προορισμός είναι συντονισμένος σε κάποιο άλλο λογικό κανάλι για τη λήψη ενός άλλου πακέτου. Αποτέλεσμα είναι η απόρριψη αυτών των y το πλήθος πακέτων (Σχήμα 1-19) [3].



Σχήμα 1-18. Σύγχρονο MAC πρωτόκολλο. Τα πακέτα με προορισμό τον σταθμό X, που μεταδόθηκαν επιτυχώς στα λογικά κανάλια 1 και 3 κατά τη διάρκεια του χρονικού κύκλου c , συγκρούονται στον προορισμό όταν αυτός διαθέτει έναν μόνο δέκτη.



Σχήμα 1-19. Ασύγχρονο MAC πρωτόκολλο. Τα πακέτα με προορισμό τον σταθμό X, που μεταδόθηκαν επιτυχώς στα λογικά κανάλια 1, 3 και N, συγκρούονται στον προορισμό όταν αυτός διαθέτει λιγότερους από τρεις δέκτες.

Επίσης, τα πρωτόκολλα MAC κατηγοριοποιούνται ανάλογα με το είδος των εκπομπών και δεκτών που διαθέτει η δικτυακή διεπαφή κάθε σταθμού. Έτσι, υπάρχουν τα:

- MAC πρωτόκολλα όπου κάθε εκπομπός ή/και δέκτης των σταθμών λειτουργεί σε ένα μοναδικό λογικό κανάλι. Αναφερόμαστε σε αυτά ως MAC πρωτόκολλα με σταθερά συντονισμένους εκπομπούς/δέκτες.
- MAC πρωτόκολλα όπου κάθε εκπομπός ή/και δέκτης των σταθμών έχει τη δυνατότητα να λειτουργήσει σε περισσότερα του ενός λογικά κανάλια. Αναφερόμαστε σε αυτά ως MAC πρωτόκολλα με συντονιζόμενους εκπομπούς/δέκτες.
- MAC πρωτόκολλα όπου οι σταθμοί έχουν έναν συνδυασμό από σταθερά συντονισμένους και συντονιζόμενους εκπομπούς/δέκτες.

Κεφάλαιο 2: Μοντέλο πολυδιαυλικού δικτύου και παραδοχές

Υποθέτουμε ένα πολυδιαυλικό δίκτυο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1-9, το οποίο εξυπηρετεί ένα σύνολο M το πλήθος σταθμών. Η δικτυακή διεπαφή κάθε σταθμού έχει πρόσβαση στα N το πλήθος παράλληλα λογικά κανάλια του πολυδιαυλικού δικτύου, ch_1, ch_2, \dots, ch_N , όπου $2 \leq N \leq M$. Οι σταθμοί του δικτύου ανταλλάσσουν πακέτα μέσω των N το πλήθος αυτών λογικών καναλιών.

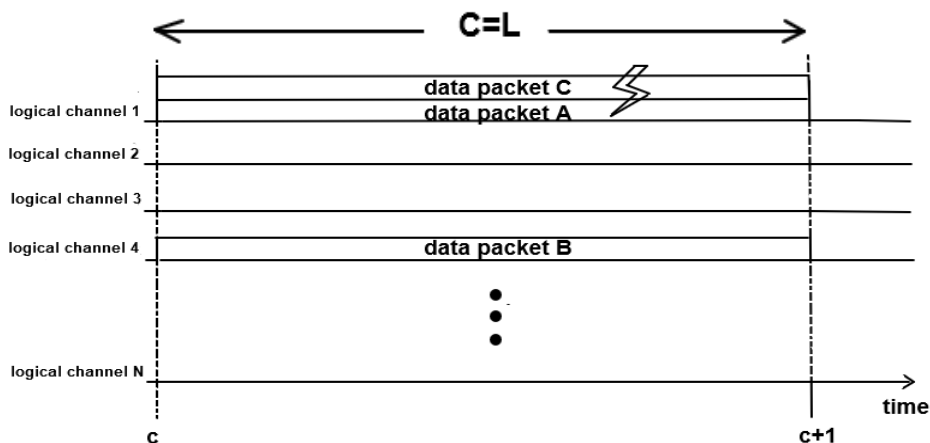
Η δικτυακή διεπαφή κάθε σταθμού διαθέτει έναν συντονιζόμενο εκπομπό, ο οποίος μπορεί να συντονιστεί σε οποιοδήποτε λογικό κανάλι ch_1, ch_2, \dots, ch_N . Επίσης, η δικτυακή διεπαφή κάθε σταθμού διαθέτει F το πλήθος συντονιζόμενους δέκτες, καθένας εκ των οποίων μπορεί να συντονιστεί σε οποιοδήποτε λογικό κανάλι ch_1, ch_2, \dots, ch_N .

Κάθε σταθμός διαθέτει ακόμα F το πλήθος καταχωρητές εισόδου και έναν καταχωρητή εξόδου, με τον καθένα να έχει χωρητικότητα ενός πακέτου. Αν ο καταχωρητής εξόδου είναι άδειος, λέμε ότι ο σταθμός είναι ελεύθερος (free), διαφορετικά λέμε ότι ο σταθμός είναι ενεργός (busy).

Ο χρόνος διαιρείται σε στοιχειώδη χρονικά διαστήματα τα οποία αποκαλούμε χρονικές σχισμές (time slots). Η χρονική διάρκεια μιας χρονικής σχισμής αποτελεί τη μονάδα του χρόνου.

Κάθε πακέτο περιέχει, εκτός από τα εκάστοτε δεδομένα που ο σταθμός επιθυμεί να μεταδώσει, μια πληροφορία για τη διεύθυνση προέλευσης (source address) και μια πληροφορία για τη διεύθυνση προορισμού (destination address). Το μήκος κάθε πακέτου είναι σταθερό και ο χρόνος μετάδοσης καθενός εκ αυτών ισούται με L χρονικές μονάδες. Τα πακέτα παράγονται ανεξάρτητα σε κάθε σταθμό ακολουθώντας μια γεωμετρική κατανομή με πιθανότητα p . Ένας ενεργός σταθμός προσπαθεί να επαναμεταδώσει το ανεπιτυχώς μεταδιδόμενο πακέτο με πιθανότητα p_1 . Εάν ένας ενεργός σταθμός παράξει ένα νέο πακέτο, το πακέτο χάνεται.

Ορίζουμε ως χρονικό κύκλο (time cycle) το χρονικό διάστημα C το οποίο περιλαμβάνει L χρονικές μονάδες για τη μετάδοση του πακέτου. Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 2-1, η διάρκεια ενός χρονικού κύκλου c ισούται με: $C = L$ χρονικές μονάδες.



Σχήμα 2-1. Δομή χρονικού κύκλου

Το πρωτόκολλο πρόσβασης είναι σύγχρονο. Όλοι οι σταθμοί έχουν ένα κοινό ρολόι και ο χρονικός άξονας χωρίζεται σε διακριτούς συνεχόμενους χρονικούς κύκλους. Κάθε σταθμός, κατά τη διάρκεια ενός χρονικού κύκλου, δύναται να μεταδίδει σε ένα λογικό κανάλι ch_T και ταυτόχρονα να λαμβάνει από ένα άλλο λογικό κανάλι ch_R . Όλοι οι σταθμοί συγχρονίζονται για τη μετάδοση ή/και λήψη ενός πακέτου κατά τη διάρκεια ενός χρονικού κύκλου. Αν και ο χρόνος συντονισμού καθώς και το εύρος συντονισμού των συντονιζόμενων εκπομπών και δεκτών θέτουν σημαντικούς περιορισμούς στην απόδοση του πρωτοκόλλου, στην παρούσα ανάλυση δεν λαμβάνονται υπόψιν.

Πολιτική μετάδοσης

Ένας σταθμός που είναι έτοιμος να (επανα)μεταδώσει ένα πακέτο, επιλέγει τυχαία ένα από τα N το πλήθος λογικά κανάλια, έστω το ch_s με $s \in [1, N]$, με ίση και σταθερή πιθανότητα $1/N$. Εάν περισσότεροι από ένας σταθμοί επιλέξουν το ίδιο λογικό κανάλι για να (επανα)μεταδώσουν στην αρχή του ίδιου χρονικού κύκλου, λαμβάνει χώρα το φαινόμενο της σύγκρουσης στα παράλληλα λογικά κανάλια.

Τα επιτυχώς (επανα)μεταδιδόμενα πακέτα κατανέμονται ομοιόμορφα στους M το πλήθος σταθμούς με ίση και σταθερή πιθανότητα $1/M$ (για χάριν απλότητας, θεωρούμε ότι ένας σταθμός μπορεί να στείλει στον εαυτό του και να λάβει από τον εαυτό του).

Πολιτική λήψης

Θεωρούμε ότι ο σταθμός προορισμού ενημερώνεται με κάποιο τρόπο για το λογικό κανάλι ch_s στο οποίο πρέπει να συγχρονίσει κάποιον συντονιζόμενο δέκτη του προκειμένου να αρχίσει να λαμβάνει το πακέτο που προορίζεται προς αυτόν, από την αρχή του ίδιου χρονικού κύκλου.

Εφόσον η δικτυακή διεπαφή κάθε σταθμού διαθέτει F το πλήθος συντονιζόμενους δέκτες και ο σταθμός ισάριθμους καταχωρητές εισόδου μοναδιαίας χωρητικότητας, ένας σταθμός μπορεί, κατά τη διάρκεια ενός χρονικού κύκλου, να λάβει ορθά το πολύ F το πλήθος πακέτα ενώ απορρίπτει όλα τα υπόλοιπα, δηλαδή λαμβάνει χώρα το φαινόμενο της σύγκρουσης στον προορισμό.

Εάν ένας ενεργός σταθμός επαναμεταδώσει επιτυχώς και το πακέτο του ληφθεί ορθά στον προορισμό, τότε γίνεται ελεύθερος στον επόμενο χρονικό κύκλο. Ένας ελεύθερος σταθμός γίνεται ενεργός είτε αν το πακέτο του δεν μεταδοθεί επιτυχώς (λόγω σύγκρουσης στα λογικά κανάλια) είτε, σε περίπτωση που το πακέτο του επιτύχει μετάδοση στα λογικά κανάλια, αν δεν ληφθεί ορθά στον προορισμό (λόγω σύγκρουσης στον προορισμό).

Τέλος, θεωρούμε ότι στα κανάλια δεν συμβαίνουν λάθη. Επίσης, η καθυστέρηση διάδοσης θεωρείται αμελητέα, πολύ μικρότερη της χρονικής μονάδας, κάτι που επιτρέπει αφενός στον προορισμό να αρχίσει να λαμβάνει το πακέτο που προορίζεται σε αυτόν από την αρχή του χρονικού κύκλου και, αφετέρου, στον σταθμό που (επανα)μεταδίδει να

πληροφορείται στο τέλος του ίδιου χρονικού κύκλου αν η (επανα)μετάδοση του πακέτου του ήταν επιτυχής ή μη.

Σημειώνουμε ότι, από αυτό το σημείο κι έπειτα, όπου στην παρούσα διπλωματική εργασία αναφέρεται ότι η δικτυακή διεπαφή κάθε σταθμού διαθέτει F το πλήθος (συντονιζόμενους) δέκτες, υπονοείται ότι κάθε σταθμός διαθέτει επίσης ισάριθμους καταχωρητές εισόδου μοναδιαίας χωρητικότητας.

Κεφάλαιο 3: Μαθηματική μοντελοποίηση των συγκρούσεων στα πολυδιαυλικά δίκτυα

Για την μαθηματική μοντελοποίηση του μοντέλου πολυδιαυλικού δικτύου που παρουσιάσαμε στο Κεφάλαιο 2, ορίζουμε τις παρακάτω τυχαίες μεταβλητές:

H_c = το πλήθος των αφίξεων νέων πακέτων στην αρχή του χρονικού κύκλου $c = 0,1,2, \dots$

S_c = το πλήθος των πακέτων που (επανα)μεταδόθηκαν επιτυχώς στα N το πλήθος λογικά κανάλια κατά τη διάρκεια του χρονικού κύκλου $c = 0,1,2, \dots$ Εξαρτάται από την τιμή του H_c .

$A_{c,F}$ = το πλήθος των ορθώς λαμβανομένων πακέτων από τους προορισμούς στο τέλος του χρονικού κύκλου $c = 0,1,2, \dots$ όταν η δικτυακή διεπαφή κάθε σταθμού διαθέτει F το πλήθος συντονιζόμενους δέκτες. Εξαρτάται από την τιμή του S_c .

Θεωρούμε ότι, για δεδομένο χρονικό κύκλο c , η τιμή της τυχαίας μεταβλητής H_c είναι x , δηλαδή $H_c = x$ για δεδομένο χρονικό κύκλο c , όπου $0 \leq x \leq M$.

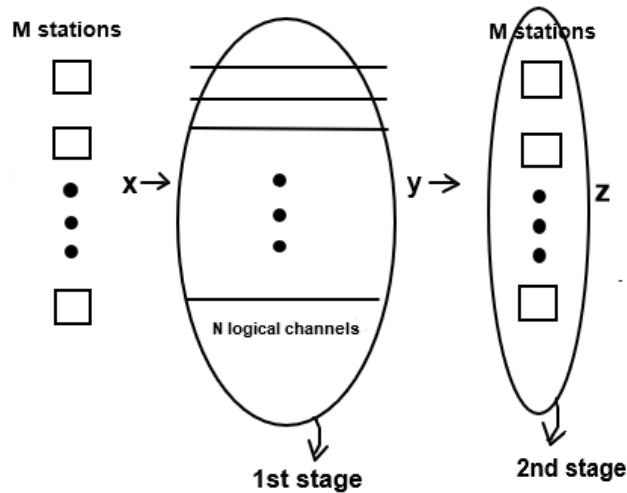
Ορίζουμε επίσης τις αντίστοιχες τιμές των υπόλοιπων τυχαίων μεταβλητών για τον ίδιο χρονικό κύκλο c :

$y = S(x)$ για τον δεδομένο χρονικό κύκλο c , όπου $0 \leq y \leq \min(x, N)$, $x - y \neq 1$.

$z = A_F(y)$ για τον δεδομένο χρονικό κύκλο c , όπου $1 \leq z \leq y$ για κάθε $y \geq 1$.

Στο Σχήμα 3-1 που ακολουθεί, παρουσιάζουμε ένα στιγμιότυπο του πολυδιαυλικού συστήματος που αναφέρεται σε έναν δεδομένο χρονικό κύκλο c . Κατά τη διάρκεια αυτού του χρονικού κύκλου διακρίνουμε δύο επιμέρους στάδια:

- Στο 1^ο στάδιο, θεωρούμε ότι x από τους συνολικά M το πλήθος σταθμούς του δικτύου αποφασίζουν να μεταδώσουν στην αρχή του χρονικού κύκλου πακέτα στα N το πλήθος λογικά κανάλια. Μόνο y το πλήθος από αυτά επιτυγχάνουν μετάδοσης στα παράλληλα λογικά κανάλια, εξαιτίας του φαινομένου των συγκρούσεων στα κανάλια. Προφανώς, κατά τη διάρκεια του χρονικού κύκλου, δεν μπορούν να μεταδοθούν επιτυχώς στα παράλληλα λογικά κανάλια ούτε περισσότερα πακέτα από το συνολικό πλήθος αυτών που μεταδόθηκαν κατά τη διάρκεια του χρονικού κύκλου αλλά ούτε και περισσότερα από το πλήθος των λογικών καναλιών του πολυδιαυλικού δικτύου. Επίσης, αν λάβει χώρα το φαινόμενο των συγκρούσεων στα κανάλια, τουλάχιστον δύο πακέτα θα υπερτεθούν και θα καταστραφούν. Δηλαδή, ισχύει ότι: $0 \leq y \leq \min(x, N)$ και $x - y \neq 1$.
- Στο 2^ο στάδιο, οι προορισμοί λαμβάνουν ορθά συνολικά z το πλήθος πακέτα. Τα πακέτα αυτά είναι υποσύνολο των y το πλήθος πακέτων που μεταδόθηκαν επιτυχώς στα N το πλήθος λογικά κανάλια, καθώς λαμβάνεται υπόψιν το φαινόμενο των συγκρούσεων στον προορισμό. Δηλαδή, ισχύει ότι: $1 \leq z \leq y$ για κάθε $y \geq 1$.



Σχήμα 3-1. Στιγμιότυπο του πολυδιαυλικού συστήματος αναφερόμενο σε δεδομένο χρονικό κύκλο c

3.1 Συγκρούσεις πακέτων στα παράλληλα λογικά κανάλια

Η πιθανότητα $Pr[S(x) = y]$ αναφέρεται στο 1^ο στάδιο του Σχήματος 3-1 και περιγράφει την πιθανότητα να μεταδοθούν επιτυχώς y το πλήθος πακέτα στα N το πλήθος λογικά κανάλια όταν x το πλήθος ενεργοί/ελεύθεροι σταθμοί επιχειρούν μετάδοση πακέτου κατά τη διάρκεια ενός χρονικού κύκλου. Η πιθανότητα αυτή δίνεται από την σχέση [11]:

$$Pr[S(x) = y] = \frac{(-1)^y N! x!}{N^x y!} \sum_{j=y}^{\min(N,x)} \frac{(-1)^j (N-j)^{x-j}}{(j-y)! (N-j)! (x-j)!} \quad (3.1)$$

όπου: $0 \leq y \leq \min(N, x)$ και $x - y \neq 1$.

3.2 Συγκρούσεις πακέτων στον προορισμό

Διακρίνουμε τις ακόλουθες τρεις περιπτώσεις ανάλογα με το πλήθος των συντονιζόμενων δεκτών που διαθέτει η δικτυακή διεπαφή κάθε σταθμού:

1. Αγνόηση του φαινομένου των συγκρούσεων στον προορισμό ($F \rightarrow \infty$)

Αρχικά, οι περισσότερες μελέτες πολυδιαυλικών δικτύων αγνοούσαν το φαινόμενο των συγκρούσεων στον προορισμό, θεωρώντας ότι κάθε σταθμός είναι σε θέση να παραλάβει όλα τα επιτυχώς μεταδιδόμενα πακέτα που προορίζονται σε αυτόν. Σε αυτήν την περίπτωση, η δικτυακή διεπαφή κάθε σταθμού μπορεί να μοντελοποιηθεί ως να έχει άπειρο

πλήθος δεκτών ($F \rightarrow \infty$). Η απόδοση ενός τέτοιου συστήματος περιορίζεται μόνο από το φαινόμενο των συγκρούσεων στα παράλληλα λογικά κανάλια. Αυτό συμβαίνει γιατί η δικτυακή διεπαφή κάθε σταθμού διαθέτει άπειρο πλήθος συντονιζόμενων δεκτών, επιτρέποντάς του να λαμβάνει ορθά όλα τα πακέτα που προορίζονται σε αυτόν και για τα οποία προηγήθηκε επιτυχής μετάδοσή τους στα παράλληλα λογικά κανάλια.

Συνεπώς, για $F \rightarrow \infty$, το 2^ο στάδιο του Σχήματος 3-1 περιγράφεται από την πιθανότητα $Pr[A_{F \rightarrow \infty}(y) = z]$. Πρόκειται για την πιθανότητα να έχουμε z το πλήθος ορθώς λαμβανόμενα πακέτα από τους προορισμούς κατά τη διάρκεια ενός χρονικού κύκλου, δεδομένου ότι y το πλήθος πακέτα μεταδόθηκαν επιτυχώς στα N το πλήθος λογικά κανάλια όταν η δικτυακή διεπαφή κάθε σταθμού διαθέτει $F \rightarrow \infty$ συντονιζόμενους δέκτες. Δίνεται από την σχέση:

$$Pr[A_{F \rightarrow \infty}(y) = z] = \begin{cases} 1, & \text{αν } y = z \\ 0, & \text{αν } y \neq z \end{cases} \quad (3.2)$$

2. Ακριβώς ένας συντονιζόμενος δέκτης ανά δικτυακή διεπαφή σταθμού ($F = 1$)

Η δικτυακή διεπαφή κάθε σταθμού διαθέτει $F = 1$ συντονιζόμενο δέκτη. Αποτέλεσμα είναι ένας σταθμός προορισμού να μπορεί να λάβει ορθά το πολύ ένα πακέτο ανά χρονικό κύκλο, απορρίπτοντας όλα τα υπόλοιπα πακέτα που προορίζονται σε αυτόν.

Συνεπώς, για $F = 1$, το 2^ο στάδιο του Σχήματος 3-1 περιγράφεται από την πιθανότητα $Pr[A_{F=1}(y) = z]$. Πρόκειται για την πιθανότητα να έχουμε z το πλήθος ορθώς λαμβανόμενα πακέτα από τους προορισμούς κατά τη διάρκεια ενός χρονικού κύκλου, δεδομένου ότι y το πλήθος πακέτα μεταδόθηκαν επιτυχώς στα N το πλήθος λογικά κανάλια όταν η δικτυακή διεπαφή κάθε σταθμού διαθέτει $F = 1$ συντονιζόμενο δέκτη. Δίνεται από την σχέση [3]:

$$Pr[A_{F=1}(y) = z] = \binom{M}{z} \sum_{i=0}^z (-1)^i \binom{z}{i} \left(\frac{z-i}{M}\right)^y \quad (3.3)$$

όπου: $1 \leq z \leq y$ για κάθε $y \geq 1$.

3. Πεπερασμένο πλήθος περισσότερων του ενός συντονιζόμενων δεκτών ανά δικτυακή διεπαφή σταθμού ($F > 1$)

Η δικτυακή διεπαφή κάθε σταθμού διαθέτει πεπερασμένο πλήθος $F > 1$ συντονιζόμενων δεκτών. Αποτέλεσμα είναι ένας σταθμός προορισμού να μπορεί να λάβει ορθά το πολύ F το πλήθος πακέτα ανά χρονικό κύκλο, απορρίπτοντας όλα τα υπόλοιπα πακέτα που προορίζονται σε αυτόν.

Συνεπώς, για πεπερασμένο $F > 1$, το 2^ο στάδιο του Σχήματος 3-1 περιγράφεται από την πιθανότητα $Pr[A_{F>1}(y) = z]$. Πρόκειται για την πιθανότητα να έχουμε z το πλήθος ορθώς λαμβανόμενα πακέτα από τους προορισμούς κατά τη διάρκεια ενός χρονικού κύκλου, δεδομένου ότι y το πλήθος πακέτα μεταδόθηκαν επιτυχώς στα N το πλήθος λογικά κανάλια όταν η δικτυακή διεπαφή κάθε σταθμού διαθέτει πεπερασμένο πλήθος $F > 1$ συντονιζόμενων δεκτών. Δίνεται από την σχέση:

$$Pr[A_{F>1}(y) = z] = \begin{cases} 0, & \text{αν } (y < z) \text{ ή } (y > z \text{ και } F > z) \\ 1, & \text{αν } (y = z \text{ και } F \geq y) \\ prob(y, z, F), & \text{αν } (y \geq z \text{ και } F < y) \end{cases} \quad (3.4)$$

όπου:

$$prob(y, z, F) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{M^y} \sum_{a_F=u}^{\lfloor \frac{z}{F} \rfloor} \sum_{a_{F-1}=0}^{\lfloor \frac{z-Fa_F}{F-1} \rfloor} \cdots \sum_{a_s=0}^{\lfloor \frac{z-\sum_{l=s+1}^F(l a_l)}{s} \rfloor} \cdots \sum_{a_2=0}^{\lfloor \frac{z-\sum_{l=3}^F(l a_l)}{2} \rfloor} \binom{M}{z - \sum_{l=2}^F [(l-1)a_l]} \\ \binom{y}{z - \sum_{l=2}^F (l a_l)} \binom{z - \sum_{l=2}^F (l a_l)}{a_F} \binom{z - \sum_{l=2}^F [(l-1)a_l]}{a_F} (a_F)! S_F(y - z + F a_F, a_F) \\ \prod_{w=2}^{F-1} \binom{z - \sum_{l=2}^F [(l-1)a_l] - \sum_{l=w+1}^F (a_l)}{a_w} \binom{y - [z - \sum_{l=2}^F (l a_l)] - \sum_{l=w+1}^F (l a_l)}{w a_w} \frac{(w a_w)!}{(w!)^{a_w}} \end{cases}$$

$$u = \begin{cases} 1, & \text{αν } y > z \\ 0, & \text{αν } y = z \end{cases}$$

και

$$a_s =$$

$$= \begin{cases} \text{πλήθος σταθμών με καθέναν προορισμό} = s \text{ πακέτων,} & \text{για } s \in [2, F-1] \\ \text{πλήθος σταθμών με καθέναν προορισμό} \geq s \text{ πακέτων,} & \text{για } s = F \end{cases}$$

Διευκρινίζουμε ότι, στη σχέση (3.4), συμβολίζουμε ως $\lfloor \frac{a}{b} \rfloor$ την ποσότητα $a \text{ div } b$, δηλαδή την ακέραια διαίρεση a / b .

Η απόδειξη της σχέσης (3.4) δίνεται στο Κεφάλαιο 4 που ακολουθεί.

Κεφάλαιο 4: Μαθηματική μοντελοποίηση των συγκρούσεων στον προορισμό στα πολυδιαυλικά δίκτυα για πεπερασμένο πλήθος δεκτών ανά δικτυακή διεπαφή σταθμού, $F > 1$

Στο κεφάλαιο αυτό αποδεικνύουμε την σχέση που δίνει την πιθανότητα $Pr[A_{F>1}(y) = z]$ να έχουμε z το πλήθος ορθώς λαμβανόμενα πακέτα από τους συνολικά M το πλήθος σταθμούς κατά τη διάρκεια ενός χρονικού κύκλου, δεδομένου ότι y το πλήθος πακέτα (επανα)μεταδόθηκαν επιτυχώς στα N το πλήθος λογικά κανάλια όταν κάθε σταθμός διαθέτει $F > 1$ δέκτες.

Αρχικά αποδεικνύουμε την σχέση (3.4) για $F = 2$ και $F = 3$ και, στη συνέχεια, την γενικεύουμε για πεπερασμένο $F > 1$.

Στο τέλος του κεφαλαίου, επαληθεύουμε προγραμματιστικά την εγκυρότητα της σχέσης (3.4) με χρήση κώδικα SWI-Prolog.

4.1 Αναλυτική απόδειξη

Ορισμοί

Παραθέτουμε τους ακόλουθους ορισμούς τους οποίους θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια για να αποδείξουμε την σχέση (3.4).

Ως $num(Set)$ ορίζουμε τον πληθικό αριθμό του συνόλου Set .

Ως $Perm(Set)$ ορίζουμε το σύνολο όλων των διαφορετικών μεταθέσεων των στοιχείων του συνόλου Set .

Ως $ways(Set_1, Set_2)$ ορίζουμε το πλήθος όλων των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορούν να επιλεγούν τα στοιχεία του συνόλου Set_1 από τα στοιχεία του συνόλου Set_2 .

Προφανώς ισχύει ότι:

$$ways(Set_1, Set_2) = \binom{num(Set_2)}{num(Set_1)} \quad (4.1)$$

Ως $distr_{l=s}(Set_1, Set_2)$, $s \in [0, F - 1]$ ορίζουμε το πλήθος όλων των τρόπων κατανομής των πακέτων του συνόλου Set_1 στους σταθμούς του συνόλου Set_2 έτσι ώστε σε καθέναν εξ αυτών να προορίζονται (και να λαμβάνονται ορθά) $l = s$ επιτυχώς (επανα)μεταδιδόμενα πακέτα.

Ως $distr_{l \geq s}(Set_1, Set_2)$, $s \in [0, F]$ ορίζουμε το πλήθος όλων των τρόπων κατανομής των πακέτων του συνόλου Set_1 στους σταθμούς του συνόλου Set_2 έτσι ώστε σε καθέναν εξ αυτών να προορίζονται $l \geq s$ επιτυχώς (επανα)μεταδιδόμενα πακέτα.

Ως $Stations$ ορίζουμε το σύνολο των M το πλήθος σταθμών του δικτύου στους οποίους κατανέμονται τα y το πλήθος, επιτυχώς (επανα)μεταδιδόμενα στα λογικά κανάλια, πακέτα.

Προφανώς ισχύει ότι:

$$num(Stations) = M \quad (4.2)$$

Ως $Packets$ ορίζουμε το σύνολο των y το πλήθος πακέτων καθένα εκ των οποίων προορίζεται προς κάποιον σταθμό του συνόλου $Stations$.

Προφανώς ισχύει ότι:

$$num(Packets) = y \quad (4.3)$$

Ως R ορίζουμε το υποσύνολο πακέτων του συνόλου $Packets$ που απορρίπτονται λόγω του φαινομένου των συγκρούσεων στον προορισμό.

Θεωρούμε ότι η κατανομή y το πλήθος πακέτων σε M το πλήθος σταθμούς όταν καθένας τους διαθέτει πεπερασμένο πλήθος $F > 1$ δεκτών οδηγεί στο ακόλουθο αποτέλεσμα στο τέλος του χρονικού κύκλου:

- z το πλήθος πακέτα λαμβάνονται ορθά από τους προορισμούς.
- Υπάρχουν $M_{d=0}$ το πλήθος σταθμοί προορισμού, $M_{d=0} \in [0, M]$, για καθέναν από τους οποίους δεν υπάρχει επιτυχώς (επανα)μεταδιδόμενο πακέτο που να προορίζεται σε αυτόν. Αυτοί οι σταθμοί προορισμού σχηματίζουν το σύνολο $L_{d=0}$. Τα επιτυχώς (επανα)μεταδιδόμενα πακέτα που προορίζονται σε σταθμούς του συνόλου $L_{d=0}$ ισούνται με $P_{d=0}$ και σχηματίζουν το σύνολο $V_{d=0}$. Μόνο τα πακέτα του συνόλου $SV_{d=0} \subseteq V_{d=0}$ λαμβάνονται ορθά από τους σταθμούς του συνόλου $L_{d=0}$. Ο πληθικός αριθμός του συνόλου $SV_{d=0}$ συμβολίζεται ως $SP_{d=0}$.
- Υπάρχουν $M_{d=1}$ το πλήθος σταθμοί προορισμού, $M_{d=1} \in [0, M]$, για καθέναν από τους οποίους υπάρχει ακριβώς ένα επιτυχώς (επανα)μεταδιδόμενο πακέτο που να προορίζεται σε αυτόν. Αυτοί οι σταθμοί προορισμού σχηματίζουν το σύνολο $L_{d=1}$. Τα επιτυχώς (επανα)μεταδιδόμενα πακέτα που προορίζονται σε σταθμούς του συνόλου $L_{d=1}$ ισούνται με $P_{d=1}$ και σχηματίζουν το σύνολο $V_{d=1}$. Μόνο τα πακέτα του συνόλου $SV_{d=1} \subseteq V_{d=1}$ λαμβάνονται ορθά από τους σταθμούς του συνόλου $L_{d=1}$. Ο πληθικός αριθμός του συνόλου $SV_{d=1}$ συμβολίζεται ως $SP_{d=1}$, κ.ο.κ.
- Γενικά, υπάρχουν $M_{d=s}$ το πλήθος σταθμοί προορισμού, $s \in [0, y]$, $M_{d=s} \in [0, M]$, για καθέναν από τους οποίους υπάρχουν ακριβώς s επιτυχώς (επανα)μεταδιδόμενα πακέτα που να προορίζονται σε αυτόν. Αυτοί οι σταθμοί προορισμού σχηματίζουν το σύνολο $L_{d=s}$, $s \in [0, y]$. Τα επιτυχώς (επανα)μεταδιδόμενα πακέτα που προορίζονται σε σταθμούς του συνόλου $L_{d=s}$ ισούνται με $P_{d=s}$ και σχηματίζουν το σύνολο $V_{d=s}$. Μόνο τα πακέτα του συνόλου $SV_{d=s} \subseteq V_{d=s}$ λαμβάνονται ορθά από τους σταθμούς του συνόλου $L_{d=s}$. Ο πληθικός αριθμός του συνόλου $SV_{d=s}$ συμβολίζεται ως $SP_{d=s}$.

Ως $L_{d \geq s}$, $s \in [0, y]$ ορίζουμε το υποσύνολο των σταθμών για καθέναν από τους οποίους υπάρχουν τουλάχιστον s επιτυχώς (επανα)μεταδιδόμενα πακέτα που να προορίζονται σε αυτόν. Ο πληθικός αριθμός του συνόλου $L_{d \geq s}$, $s \in [0, y]$ ορίζεται ως $M_{d \geq s}$.

Ως $V_{d \geq s}$, $s \in [0, y]$ ορίζουμε το υποσύνολο των επιτυχώς (επανα)μεταδιδόμενων πακέτων που προορίζονται σε σταθμούς του συνόλου $L_{d \geq s}$. Ο πληθικός αριθμός του συνόλου $V_{d \geq s}$, $s \in [0, y]$ ορίζεται ως $P_{d \geq s}$.

Ως $SV_{d \geq s}$, $s \in [0, y]$ ορίζουμε το υποσύνολο των επιτυχώς (επανα)μεταδιδόμενων πακέτων που προορίζονται σε σταθμούς του συνόλου $L_{d \geq s}$ και τα οποία λαμβάνονται ορθά από αυτούς. Ο πληθικός αριθμός του συνόλου $SV_{d \geq s}$, $s \in [0, y]$ ορίζεται ως $SP_{d \geq s}$.

Είναι προφανές ότι:

$$\text{num}(R) = y - z \quad (4.4)$$

$$M_{d=s} \equiv \text{num}(L_{d=s}), \quad s \in [0, y] \quad (4.5)$$

$$P_{d=s} \equiv \text{num}(V_{d=s}), \quad s \in [0, y] \quad (4.6)$$

$$SP_{d=s} \equiv \text{num}(SV_{d=s}), \quad s \in [0, y] \quad (4.7)$$

$$SP_{d=s} \leq P_{d=s}, \quad s \in [0, y] \quad (4.8)$$

$$SP_{d=s} = s M_{d=s}, \quad s \in [0, F - 1] \quad (4.9)$$

$$\sum_{s=0}^y M_{d=s} = M \quad (4.10)$$

$$\sum_{s=0}^y s M_{d=s} = \sum_{s=0}^y P_{d=s} = y \quad (4.11)$$

$$\sum_{s=0}^y SP_{d=s} = z \quad (4.12)$$

$$L_{d=i} \cap L_{d=j} = \emptyset, \quad \text{για κάθε } i, j \in [0, y], \quad i \neq j \quad (4.13)$$

$$\bigcup_{i=0}^y L_{d=i} = \text{Stations} \quad (4.14)$$

$$\text{num}(\text{Perm}(L_{d=s})) = (M_{d=s})!, \quad s \in [0, y] \quad (4.15)$$

$$\text{num}(\text{Perm}(V_{d=s})) = (P_{d=s})!, \quad s \in [0, y] \quad (4.16)$$

$$L_{d \geq s} = \bigcup_{i=s}^y L_{d=i}, \quad s \in [0, y] \quad (4.17)$$

$$M_{d \geq s} = \sum_{i=s}^y M_{d=i}, \quad s \in [0, y] \quad (4.18)$$

$$\text{num}(L_{d \geq s}) = M_{d \geq s}, \quad s \in [0, y] \quad (4.19)$$

$$V_{d \geq s} = \bigcup_{i=s}^y V_{d=i}, \quad s \in [0, y] \quad (4.20)$$

$$P_{d \geq s} = \sum_{i=s}^y P_{d=i}, \quad s \in [0, y] \quad (4.21)$$

$$SP_{d \geq s} = \sum_{i=s}^y SP_{d=i}, \quad s \in [0, F] \quad (4.22)$$

$$SP_{d=s} = z - SP_{d \geq F} - \sum_{\substack{i=1, \\ i \neq s}}^{F-1} SP_{d=i}, \quad s \in [0, F-1] \quad (4.23)$$

$$num(V_{d \geq s}) = P_{d \geq s}, \quad s \in [0, y] \quad (4.24)$$

$$L_{d \geq 0} \equiv \text{Stations} \quad (4.25)$$

$$V_{d \geq 0} \equiv \text{Packets} \quad (4.26)$$

Επίσης, τα πακέτα του συνόλου R πρέπει να προορίζονται σε σταθμούς του συνόλου $L_{d \geq F}$, όπου και απορρίπτονται. Μόνο από τέτοιους σταθμούς αυτά τα $num(R) = y - z$ το πλήθος πακέτα δεν προσμετρώνται στα ορθά λαμβανόμενα πακέτα αλλά, αντιθέτως, απορρίπτονται.

Προφανώς, για το πλήθος $P_{d \geq F}$ των πακέτων που προορίζονται σε σταθμούς του συνόλου $L_{d \geq F}$ ισχύει ότι:

$$P_{d \geq F} = num(R) + F M_{d \geq F} = y - z + F M_{d \geq F} \quad (4.27)$$

ενώ για το πλήθος $SP_{d \geq F}$ των πακέτων που λαμβάνονται ορθά από τους σταθμούς του συνόλου $L_{d \geq F}$ ισχύει ότι:

$$SP_{d \geq F} = P_{d \geq F} - num(R) = F M_{d \geq F} \quad (4.28)$$

r-συσχετισμένοι αριθμοί Stirling 2^{ou} είδους

Ένας *r*-συσχετισμένος αριθμός Stirling 2^{ou} είδους (*r*-associated Stirling number of the second kind) εκφράζει το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να διαμερίσουμε ένα σύνολο n το πλήθος διακεκριμένων αντικειμένων σε k το πλήθος μη διακεκριμένα υποσύνολα έτσι ώστε κάθε υποσύνολο να περιέχει τουλάχιστον r το πλήθος στοιχεία. Ο αριθμός αυτός συμβολίζεται με $S_r(n, k)$ και υπακούει στην εξής αναδρομική σχέση [12]:

$$S_r(n, k) = k S_r(n-1, k) + \binom{n-1}{r-1} S_r(n-r, k-1) \quad (4.29)$$

με αρχική συνθήκη: $S_r(0,0) = 1$

4.1.1 Απόδειξη για $F = 2$

Θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα $Pr[A_{F=2}(y) = z]$ να έχουμε z το πλήθος ορθώς λαμβανόμενα πακέτα από τους συνολικά M το πλήθος σταθμούς κατά τη διάρκεια ενός χρονικού κύκλου, δεδομένου ότι y το πλήθος πακέτα (επανα)μεταδόθηκαν επιτυχώς στα λογικά κανάλια όταν κάθε σταθμός διαθέτει $F = 2$ δέκτες. Αυτό σημαίνει ότι κάθε σταθμός μπορεί να λάβει ορθά το πολύ δύο πακέτα ανά χρονικό κύκλο, απορρίπτοντας τα υπόλοιπα.

Για τις παρακάτω τετριμμένες περιπτώσεις ισχύει ότι:

- Αν $(y < z)$ ή $(y > z$ και $F = 2 > z)$, τότε:

$$Pr[A_{F=2}(y) = z] = 0 \quad (4.30)$$

- Αν $(y = z$ και $F = 2 \geq y)$, τότε:

$$Pr[A_{F=2}(y) = z] = 1 \quad (4.31)$$

Για $(y \geq z$ και $F = 2 < y)$, ζητούμενη πιθανότητα θα πρέπει να συνυπολογίσει τις δύο περιπτώσεις: i) $y > z$ και ii) $y = z$.

i) $y > z$

Έστω i το πλήθος των σταθμών του συνόλου $L_{d \geq 2}$, σε καθέναν εκ των οποίων προορίζονται τουλάχιστον δύο επιτυχώς (επανα)μεταδιδόμενα πακέτα, δηλαδή:

$$M_{d \geq 2} = i \quad (4.32)$$

Σε αυτή την περίπτωση, όπου $y > z$, τουλάχιστον ένας σταθμός θα είναι προορισμός τουλάχιστον τριών πακέτων ώστε τουλάχιστον ένα πακέτο να απορριφθεί από τους προορισμούς, δηλαδή:

$$M_{d \geq 3} \geq 1 \quad (4.33)$$

Κατά συνέπεια:

$$M_{d \geq 2} = i \geq M_{d \geq 3} \geq 1 \quad (4.34)$$

Το πλήθος των σταθμών $M_{d \geq 2} = i$ δεν μπορεί να υπερβαίνει την ποσότητα:

$$\left\lfloor \frac{z}{2} \right\rfloor \equiv z \text{ div } 2 \quad (4.35)$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τις (4.34), (4.35), προκύπτει ότι το πλήθος $M_{d \geq 2} = i$ μπορεί να παίρνει τιμές:

$$M_{d \geq 2} = i \in \left[1, \left\lfloor \frac{z}{2} \right\rfloor \right], \quad \text{για } y > z \quad (4.36)$$

Για δεδομένη τιμή $M_{d \geq 2} = i \in \left[1, \left\lfloor \frac{z}{2} \right\rfloor \right]$, το πλήθος των διαφορετικών τρόπων $Succ_i$ με τους οποίους έχουμε z το πλήθος ορθώς λαμβανόμενα πακέτα από τους συνολικά M το πλήθος σταθμούς κατά τη διάρκεια ενός χρονικού κύκλου, δεδομένου ότι y το πλήθος πακέτα (επανα)μεταδόθηκαν επιτυχώς στα λογικά κανάλια όταν κάθε σταθμός διαθέτει $F = 2$ δέκτες ισούται με το γινόμενο των παρακάτω παραγόντων:

- του πλήθους $ways(L_{d \geq 1}, Stations)$ όλων των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορεί να επιλεγεί το σύνολο των σταθμών $L_{d \geq 1}$, καθένας εκ των οποίων είναι προορισμός τουλάχιστον ενός επιτυχώς (επανα)μεταδιδόμενου πακέτου, από το σύνολο $Stations$ όλων των σταθμών του δικτύου.
- του πλήθους $ways(L_{d \geq 2}, L_{d \geq 1})$ όλων των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορεί να επιλεγεί το σύνολο των σταθμών $L_{d \geq 2}$, καθένας εκ των οποίων είναι προορισμός τουλάχιστον δύο επιτυχώς (επανα)μεταδιδόμενων πακέτων, από το σύνολο των σταθμών $L_{d \geq 1}$.

- του πλήθους $ways(L_{d=1}, L_{d \geq 1} \setminus L_{d \geq 2})$ όλων των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορεί να επιλεγεί το σύνολο των σταθμών $L_{d=1}$, καθένας εκ των οποίων είναι προορισμός ακριβώς ενός επιτυχώς (επανα)μεταδιδόμενου πακέτου, από το σύνολο των σταθμών $L_{d \geq 1} \setminus L_{d \geq 2} = L_{d=1}$.
- του πλήθους $ways(SV_{d=1}, Packets)$ όλων των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορεί να επιλεγεί το σύνολο των πακέτων $SV_{d=1}$, καθένα εκ των οποίων λαμβάνεται ορθά από σταθμούς του συνόλου $L_{d=1}$, από το σύνολο $Packets$ όλων των επιτυχώς (επανα)μεταδιδόμενων πακέτων.
- του πλήθους $ways(V_{d \geq 2}, Packets \setminus SV_{d=1})$ όλων των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορεί να επιλεγεί το σύνολο των πακέτων $V_{d \geq 2}$, καθένα εκ των οποίων προορίζεται σε σταθμούς του συνόλου $L_{d \geq 2}$, από το σύνολο $Packets \setminus SV_{d=1} = V_{d \geq 2}$.
- του πλήθους $num(Perm(SV_{d=1}))$ όλων των διαφορετικών μεταθέσεων των πακέτων του συνόλου $SV_{d=1}$.
- του πλήθους $distr_{l \geq 2}(V_{d \geq 2}, L_{d \geq 2})$ όλων των τρόπων κατανομής των πακέτων του συνόλου $V_{d \geq 2}$ (που έχει πλήθος $P_{d \geq 2}$) στους $M_{d \geq 2} = i$ το πλήθος σταθμούς του συνόλου $L_{d \geq 2}$ έτσι ώστε σε καθέναν εξ αυτών να προορίζονται $l \geq 2$ επιτυχώς (επανα)μεταδιδόμενα πακέτα.

Είναι προφανές ακόμα ότι:

$$ways(L_{d=1}, L_{d \geq 1} \setminus L_{d \geq 2}) = ways(L_{d=1}, L_{d=1}) = 1 \quad (4.37)$$

δηλαδή, ουσιαστικά “επιλέγουμε” τους σταθμούς του συνόλου $L_{d=1}$ από το σύνολο των εναπομείναντων σταθμών $L_{d \geq 1} \setminus L_{d \geq 2} = L_{d=1}$, οπότε η “επιλογή” γίνεται με έναν ακριβώς τρόπο.

και:

$$ways(V_{d \geq 2}, Packets \setminus SV_{d=1}) = ways(V_{d \geq 2}, V_{d \geq 2}) = 1 \quad (4.38)$$

δηλαδή, ουσιαστικά “επιλέγουμε” τα πακέτα του συνόλου $V_{d \geq 2}$ από το σύνολο των εναπομείναντων πακέτων $Packets \setminus SV_{d=1} = V_{d \geq 2}$, οπότε η “επιλογή” γίνεται με έναν ακριβώς τρόπο.

Συνεπώς:

$$Succ_i =$$

$$= ways(L_{d \geq 1}, Stations)$$

$$ways(L_{d=1}, L_{d \geq 1} \setminus L_{d \geq 2}) ways(SV_{d=1}, Packets) num(Perm(SV_{d=1}))$$

$$ways(L_{d \geq 2}, L_{d \geq 1}) ways(V_{d \geq 2}, Packets \setminus SV_{d=1}) distr_{l \geq 2}(V_{d \geq 2}, L_{d \geq 2}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Succ_i =$$

$$= ways(L_{d \geq 1}, Stations)$$

$$ways(L_{d=1}, L_{d=1}) ways(SV_{d=1}, Packets) num(Perm(SV_{d=1}))$$

$$ways(L_{d \geq 2}, L_{d \geq 1}) ways(V_{d \geq 2}, V_{d \geq 2}) distr_{l \geq 2}(V_{d \geq 2}, L_{d \geq 2}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Succ_i =$$

$$\begin{aligned}
&= \text{ways}(L_{d \geq 1}, \text{Stations}) \\
&\text{ways}(SV_{d=1}, \text{Packets}) \text{ num}(\text{Perm}(SV_{d=1})) \\
&\text{ways}(L_{d \geq 2}, L_{d \geq 1}) \text{ distr}_{l \geq 2}(V_{d \geq 2}, L_{d \geq 2})
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Το πλήθος των πακέτων που προορίζονται σε σταθμούς του συνόλου $L_{d \geq 2}$ ισούται, λόγω της σχέσης (4.27), με:

$$P_{d \geq 2} = \text{num}(R) + 2 M_{d \geq 2} = y - z + 2i \tag{4.40}$$

ενώ το πλήθος των πακέτων που λαμβάνονται ορθά από σταθμούς του συνόλου $L_{d \geq 2}$ ισούται, λόγω της σχέσης (4.28), με:

$$SP_{d \geq 2} = 2i \tag{4.41}$$

Το σύνολο $SV_{d=1}$ των πακέτων που λαμβάνονται ορθά από σταθμούς του συνόλου $L_{d=1}$ θα απαρτίζεται από εκείνα τα πακέτα του συνόλου όλων των πακέτων Packets τα οποία δεν λαμβάνονται ορθά από σταθμούς του συνόλου $L_{d \geq 2}$. Δηλαδή ισχύει ότι:

$$SV_{d=1} = \text{Packets} \setminus SV_{d \geq 2} \tag{4.42}$$

Συνεπώς, για τον πληθικό αριθμό $SP_{d=1}$ του συνόλου $SV_{d=1}$ θα ισχύει ότι:

$$SP_{d=1} = z - 2i \tag{4.43}$$

Προφανώς, το πλήθος των σταθμών καθένας εκ των οποίων είναι προορισμός ενός ακριβώς πακέτου ισούται με:

$$M_{d=1} = SP_{d=1} = z - 2i \tag{4.44}$$

Το πλήθος των σταθμών του συνόλου $L_{d \geq 1}$, καθένας εκ των οποίων είναι προορισμός τουλάχιστον ενός πακέτου, ισούται με:

$$M_{d \geq 1} = M_{d=1} + M_{d \geq 2} = (z - 2i) + i = z - i \tag{4.45}$$

Κάθε σταθμός του συνόλου $L_{d \geq 1}$ μπορεί να επιλεγεί, από το σύνολο Stations , με πλήθος τρόπων:

$$\text{ways}(L_{d \geq 1}, \text{Stations}) = \binom{M}{M_{d \geq 1}} = \binom{M}{z - i} \tag{4.46}$$

Το πλήθος όλων των διαφορετικών τρόπων επιλογής των $SP_{d=1}$ το πλήθος πακέτων του συνόλου $SV_{d=1}$, από το σύνολο Packets , ισούται με:

$$\text{ways}(SV_{d=1}, \text{Packets}) = \binom{y}{SP_{d=1}} = \binom{y}{z - 2i} \tag{4.47}$$

Το πλήθος όλων των διαφορετικών μεταθέσεων των πακέτων του συνόλου $SV_{d=1}$ ισούται με:

$$\text{num}(\text{Perm}(SV_{d=1})) = (SP_{d=1})! = (z - 2i)! \tag{4.48}$$

Οι σταθμοί του συνόλου $L_{d \geq 2}$ είναι υποσύνολο των σταθμών του συνόλου $L_{d \geq 1}$ και μπορούν να επιλεγούν από το τελευταίο σύνολο με πλήθος τρόπων:

$$ways(L_{d \geq 2}, L_{d \geq 1}) = \binom{M_{d \geq 1}}{M_{d \geq 2}} = \binom{z-i}{i} \quad (4.49)$$

Το ζητούμενο τώρα είναι να υπολογίσουμε το πλήθος $distr_{l \geq 2}(V_{d \geq 2}, L_{d \geq 2})$ όλων των τρόπων κατανομής των πακέτων του συνόλου $V_{d \geq 2}$ (που έχει πληθικό αριθμό $P_{d \geq 2} = y - z + 2i$) στους $M_{d \geq 2} = i$ το πλήθος σταθμούς του συνόλου $L_{d \geq 2}$ έτσι ώστε σε καθέναν εξ αυτών να προορίζονται $l \geq 2$ επιτυχώς (επανα)μεταδιδόμενα πακέτα. Για το λόγο αυτό:

- Χρησιμοποιούμε τη σχέση (4.29) με:

$$\begin{aligned} r &= \min(l) = 2 \\ n &= P_{d \geq 2} = y - z + 2i \\ k &= M_{d \geq 2} = i \end{aligned}$$

Συνεπώς, προκύπτει ο όρος:

$$S_2(y - z + 2i, i) \quad (4.50)$$

που εκφράζει το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να διαμερίσουμε το σύνολο $V_{d \geq 2}$ πλήθους $P_{d \geq 2} = y - z + 2i$ διακεκριμένων πακέτων σε $M_{d \geq 2} = i$ το πλήθος μη διακεκριμένους σταθμούς έτσι ώστε κάθε σταθμός να αποτελεί προορισμό τουλάχιστον δύο πακέτων.

- Πολλαπλασιάζουμε τον όρο της σχέσης (4.50) με το πλήθος όλων των διαφορετικών μεταθέσεων των $M_{d \geq 2} = i$ το πλήθος σταθμών του συνόλου $L_{d \geq 2}$, το οποίο ισούται με:

$$num(Perm(L_{d \geq 2})) = (M_{d \geq 2})! = i! \quad (4.51)$$

οπότε λαμβάνουμε την σχέση:

$$\begin{aligned} distr_{l \geq 2}(V_{d \geq 2}, L_{d \geq 2}) &= S_2(y - z + 2i, i) num(Perm(L_{d \geq 2})) \Rightarrow \\ &\Rightarrow distr_{l \geq 2}(V_{d \geq 2}, L_{d \geq 2}) = S_2(y - z + 2i, i) i! \end{aligned} \quad (4.52)$$

Το πλήθος όλων των δυνατών τρόπων κατανομής των y το πλήθος πακέτων του συνόλου $V_{d \geq 0}$ στους M το πλήθος σταθμούς του συνόλου $L_{d \geq 0}$ έτσι ώστε σε καθέναν εξ αυτών να προορίζονται $l \geq 0$ επιτυχώς (επανα)μεταδιδόμενα πακέτα ισούται με:

$$distr_{l \geq 0}(V_{d \geq 0}, L_{d \geq 0}) = M^y \quad (4.53)$$

Τελικά, παίρνοντας το άθροισμα των ποσοτήτων της σχέσης (4.39) πάνω στο εύρος τιμών του $i = M_{d \geq 2}$, όπως αυτό δίνεται από την σχέση (4.36), και διαιρώντας με τον όρο $distr(V_{d \geq 0}, L_{d \geq 0})$, όπως αυτός δίνεται από την σχέση (4.53), λαμβάνουμε την ζητούμενη πιθανότητα:

$$\begin{aligned} Pr[A_{F=2}(y) = z] &= \frac{1}{distr_{l \geq 0}(V_{d \geq 0}, L_{d \geq 0})} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{z}{2} \rfloor} Succ_i \Rightarrow \\ \Rightarrow Pr[A_{F=2}(y) = z] &= \frac{1}{M^y} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{z}{2} \rfloor} \binom{M}{z-i} \binom{y}{z-2i} (z-2i)! \binom{z-i}{i} i! S_2(y - z + 2i, i), \\ &\text{για } (y > z \text{ και } F = 2 < y) \end{aligned} \quad (4.54)$$

ii) $y = z$

Σε αυτήν την περίπτωση, όπου κανένα πακέτο δεν απορρίπτεται λόγω του φαινομένου των συγκρούσεων στον προορισμό, μπορούμε να έχουμε z το πλήθος ορθώς λαμβανόμενα πακέτα από τους συνολικά M το πλήθος σταθμούς κατά τη διάρκεια ενός χρονικού κύκλου, δεδομένου ότι y το πλήθος πακέτα (επανα)μεταδόθηκαν επιτυχώς στα λογικά κανάλια όταν κάθε σταθμός διαθέτει $F = 2$ δέκτες χωρίς απαραίτητα να χρειάζεται να υπάρχει κάποιος σταθμός που να είναι προορισμός περισσότερων του ενός πακέτου.

Συνεπώς, όλα όσα αναφέραμε για την περίπτωση $y > z$ ισχύουν και για την περίπτωση $y = z$, με μόνη διαφορά ότι, για $y = z$, αντί της σχέσης (4.34), ισχύει ότι:

$$M_{d \geq 2} = i \geq 0 \quad (4.55)$$

οπότε η σχέση (4.36), που δίνει το εύρος τιμών του $M_{d \geq 2} = i$, τροποποιείται ως εξής:

$$M_{d \geq 2} = i \in \left[0, \left\lfloor \frac{z}{2} \right\rfloor\right], \quad \text{για } y = z \quad (4.56)$$

και η σχέση (4.54) γίνεται:

$$Pr[A_{F=2}(y) = z] = \frac{1}{M^y} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{z}{2} \rfloor} \binom{M}{z-i} \binom{y}{z-2i} (z-2i)! \binom{z-i}{i} i! S_2(y-z+2i, i),$$

για $(y = z \text{ και } F = 2 < y)$ (4.57)

Συμπτύσσοντας τις (4.30), (4.31), (4.54) και (4.57), παίρνουμε την ενοποιημένη σχέση για οποιαδήποτε τιμή των παραμέτρων y, z και $F = 2$:

$$Pr[A_{F=2}(y) = z] = \begin{cases} 0, & \text{αν } (y < z) \text{ ή } (y > z \text{ και } F = 2 > z) \\ 1, & \text{αν } (y = z \text{ και } F = 2 \geq y) \\ prob(y, z, F = 2), & \text{αν } (y \geq z \text{ και } F = 2 < y) \end{cases} \quad (4.58)$$

όπου:

$$prob(y, z, F = 2) = \frac{1}{M^y} \sum_{i=u}^{\lfloor \frac{z}{2} \rfloor} \binom{M}{z-i} \binom{y}{z-2i} (z-2i)! \binom{z-i}{i} i! S_2(y-z+2i, i)$$

και

$$u = \begin{cases} 1, & \text{αν } y > z \\ 0, & \text{αν } y = z \end{cases}$$

4.1.2 Απόδειξη για $F = 3$

Θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα $Pr[A_{F=3}(y) = z]$ να έχουμε z το πλήθος ορθώς λαμβανόμενα πακέτα από τους συνολικά M το πλήθος σταθμούς κατά τη διάρκεια ενός χρονικού κύκλου, δεδομένου ότι y το πλήθος πακέτα (επανα)μεταδόθηκαν επιτυχώς στα λογικά κανάλια όταν κάθε σταθμός διαθέτει $F = 3$ δέκτες. Αυτό σημαίνει ότι κάθε σταθμός μπορεί να λάβει ορθά το πολύ τρία πακέτα ανά χρονικό κύκλο, απορρίπτοντας τα υπόλοιπα.

Για τις παρακάτω τετριμμένες περιπτώσεις ισχύει ότι:

- Αν $(y < z)$ ή $(y > z \text{ και } F = 3 > z)$, τότε:

$$Pr[A_{F=3}(y) = z] = 0 \quad (4.59)$$

- Αν $(y = z \text{ και } F = 3 \geq y)$, τότε:

$$Pr[A_{F=3}(y) = z] = 1 \quad (4.60)$$

Το ζητούμενο τώρα είναι ο υπολογισμός της πιθανότητας $Pr[A_{F=3}(y) = z]$ για $(y \geq z \text{ και } F = 3 < y)$.

Έστω j το πλήθος των σταθμών του συνόλου $L_{d \geq 3}$, σε καθέναν εκ των οποίων προορίζονται τουλάχιστον τρία επιτυχώς (επανα)μεταδιδόμενα πακέτα, δηλαδή:

$$M_{d \geq 3} = j \quad (4.61)$$

Έστω i το πλήθος των σταθμών του συνόλου $L_{d=2}$, σε καθέναν εκ των οποίων προορίζονται ακριβώς δύο επιτυχώς (επανα)μεταδιδόμενα πακέτα, δηλαδή:

$$M_{d=2} = i \quad (4.62)$$

Το πλήθος των πακέτων που προορίζονται σε σταθμούς του συνόλου $L_{d \geq 3}$ ισούται, λόγω της σχέσης (4.27), με:

$$P_{d \geq 3} = num(R) + 3 M_{d \geq 3} = y - z + 3j \quad (4.63)$$

ενώ το πλήθος των πακέτων που λαμβάνονται ορθά από σταθμούς του συνόλου $L_{d \geq 3}$ ισούται, λόγω της σχέσης (4.28), με:

$$SP_{d \geq 3} = 3j \quad (4.64)$$

Το πλήθος των πακέτων που λαμβάνονται ορθά από σταθμούς του συνόλου $L_{d=2}$ ισούται, λόγω της σχέσης (4.9), με:

$$SP_{d=2} = 2i \quad (4.65)$$

Το σύνολο $SV_{d=1}$ των πακέτων που λαμβάνονται ορθά από σταθμούς του συνόλου $L_{d=1}$ θα απαρτίζεται από εκείνα τα πακέτα του συνόλου όλων των πακέτων *Packets* τα οποία δεν λαμβάνονται ορθά είτε από σταθμούς του συνόλου $L_{d=2}$ είτε από σταθμούς του συνόλου $L_{d \geq 3}$. Δηλαδή ισχύει ότι:

$$SV_{d=1} = \text{Packets} \setminus SV_{d=2} \setminus SV_{d \geq 3} \quad (4.66)$$

Συνεπώς, για τον πληθικό αριθμό $SP_{d=1}$ του συνόλου $SV_{d=1}$ θα ισχύει ότι:

$$SP_{d=1} = z - SP_{d=2} - SP_{d \geq 3} = z - 2i - 3j \quad (4.67)$$

Προφανώς, το πλήθος των σταθμών καθένας εκ των οποίων είναι προορισμός ενός ακριβώς πακέτου ισούται με:

$$M_{d=1} = SP_{d=1} = z - 2i - 3j \quad (4.68)$$

Το πλήθος των σταθμών του συνόλου $L_{d \geq 1}$, καθένας εκ των οποίων είναι προορισμός τουλάχιστον ενός πακέτου, ισούται με:

$$M_{d \geq 1} = M_{d=1} + M_{d=2} + M_{d \geq 3} = (z - 2i - 3j) + i + j = z - i - 2j \quad (4.69)$$

Σε πλήρη αντιστοιχία με τις σχέσεις (4.36), (4.56), για το εύρος επιτρεπτών τιμών του $M_{d \geq 3} = j$ θα ισχύει ότι:

$$M_{d \geq 3} = j \in \begin{cases} \left[1, \left\lfloor \frac{z}{3} \right\rfloor \right], & \text{για } y > z \\ \left[0, \left\lfloor \frac{z}{3} \right\rfloor \right], & \text{για } y = z \end{cases} \quad (4.70)$$

Τόσο στην περίπτωση που κανένα πακέτο δεν απορρίπτεται λόγω του φαινομένου των συγκρούσεων στον προορισμό ($y = z$), όσο και στην περίπτωση που τουλάχιστον ένα πακέτο απορρίπτεται από τους προορισμούς ($y > z$), μπορούμε να έχουμε z το πλήθος ορθώς λαμβανόμενα πακέτα από τους συνολικά M το πλήθος σταθμούς κατά τη διάρκεια ενός χρονικού κύκλου, δεδομένου ότι y το πλήθος πακέτα (επανα)μεταδόθηκαν επιτυχώς στα λογικά κανάλια όταν κάθε σταθμός διαθέτει $F = 3$ δέκτες χωρίς απαραίτητα να χρειάζεται να υπάρχει κάποιος σταθμός που να είναι προορισμός ακριβώς δύο πακέτων. Δηλαδή:

$$M_{d=2} = i \geq 0, \quad \text{για } y \geq z \quad (4.71)$$

Για δεδομένη τιμή $M_{d \geq 3} = j$ του πλήθους των σταθμών του συνόλου $L_{d \geq 3}$, οι οποίοι λαμβάνουν ορθά συνολικά $SP_{d \geq 3} = 3j$ το πλήθος πακέτα, πρέπει να ισχύει για το πλήθος $SP_{d=2}$ των πακέτων που λαμβάνονται ορθά από τους σταθμούς του συνόλου $L_{d=2}$, η εξής σχέση:

$$\begin{aligned} SP_{d=2} &\leq z - SP_{d \geq 3} \Rightarrow \\ \Rightarrow SP_{d=2} &\leq z - 3j, \quad \text{για } y \geq z \end{aligned} \quad (4.72)$$

Συνεπώς, για δεδομένη τιμή $M_{d \geq 3} = j$, η μέγιστη τιμή του πλήθους $M_{d=2} = i$ των σταθμών του συνόλου $L_{d=2}$, καθένας εκ των οποίων λαμβάνει ορθά ακριβώς δύο πακέτα, δεν μπορεί να υπερβαίνει το ένα δεύτερο του πλήθους των πακέτων $SP_{d=2}$ που λαμβάνονται ορθά από τους σταθμούς του συνόλου $L_{d=2}$. Δηλαδή, ισχύει η σχέση:

$$\begin{aligned} M_{d=2} = i &\leq \frac{SP_{d=2}}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow M_{d=2} = i &\leq \frac{z - 3j}{2} \stackrel{i \in \mathbb{N}}{\Rightarrow} \\ \Rightarrow M_{d=2} = i &\leq \left\lfloor \frac{z - 3j}{2} \right\rfloor, \quad \text{για } y \geq z \end{aligned} \quad (4.73)$$

Άρα, λόγω των σχέσεων (4.71), (4.73), για το επιτρεπτό εύρος τιμών του $M_{d=2} = i$ ισχύει ότι:

$$M_{d=2} = i \in \left[0, \left\lfloor \frac{z - 3j}{2} \right\rfloor \right], \quad \text{για } y \geq z \quad (4.74)$$

Το ζητούμενο είναι να υπολογίσουμε, για δεδομένες τιμές των $M_{d \geq 3} = j$, $M_{d=2} = i$ στο εύρος τιμών που καθορίζεται από τις (4.70), (4.74) αντίστοιχα, το πλήθος των διαφορετικών τρόπων $Succ_{ij}$ με τους οποίους έχουμε z το πλήθος ορθώς λαμβανόμενα πακέτα από τους συνολικά M το πλήθος σταθμούς κατά τη διάρκεια ενός χρονικού κύκλου, δεδομένου ότι y το πλήθος πακέτα (επανα)μεταδόθηκαν επιτυχώς στα λογικά κανάλια όταν κάθε σταθμός διαθέτει $F = 3$ δέκτες.

Για το λόγο αυτό, υπολογίζουμε με την αναγραφόμενη σειρά τους ακόλουθους παράγοντες, τους οποίους στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε μεταξύ τους για να βρούμε το $Succ_{ij}$:

- $ways(L_{d \geq 1}, Stations)$

Λόγω της σχέσης (4.69) είναι:

$$ways(L_{d \geq 1}, Stations) = \binom{M}{M_{d \geq 1}} = \binom{M}{z - i - 2j} \quad (4.75)$$

- $ways(L_{d \geq 3}, L_{d \geq 1})$

Λόγω των σχέσεων (4.61), (4.69), είναι:

$$ways(L_{d \geq 3}, L_{d \geq 1}) = \binom{M_{d \geq 1}}{M_{d \geq 3}} = \binom{z - i - 2j}{j} \quad (4.76)$$

- $ways(L_{d=2}, L_{d \geq 1} \setminus L_{d \geq 3})$

Ισχύει ότι:

$$num(L_{d \geq 1} \setminus L_{d \geq 3}) = M_{d \geq 1} - M_{d \geq 3} \quad (4.77)$$

που, λόγω των σχέσεων (4.61), (4.69), γράφεται:

$$num(L_{d \geq 1} \setminus L_{d \geq 3}) = (z - i - 2j) - j = z - i - 3j \quad (4.78)$$

Συνεπώς, λόγω των σχέσεων (4.62), (4.78):

$$ways(L_{d=2}, L_{d \geq 1} \setminus L_{d \geq 3}) = \binom{num(L_{d \geq 1} \setminus L_{d \geq 3})}{M_{d=2}} = \binom{z - i - 3j}{i} \quad (4.79)$$

- $ways(L_{d=1}, L_{d \geq 1} \setminus L_{d \geq 3} \setminus L_{d=2})$

Ισχύει ότι:

$$L_{d \geq 1} \setminus L_{d \geq 3} \setminus L_{d=2} = L_{d=1} \quad (4.80)$$

Συνεπώς:

$$ways(L_{d=1}, L_{d \geq 1} \setminus L_{d \geq 3} \setminus L_{d=2}) = ways(L_{d=1}, L_{d=1}) = 1 \quad (4.81)$$

- $ways(SV_{d=1}, Packets)$

Λόγω της σχέσης (4.67), είναι:

$$ways(SV_{d=1}, Packets) = \binom{y}{SP_{d=1}} = \binom{y}{z - 2i - 3j} \quad (4.82)$$

- $num(Perm(SV_{d=1}))$

Λόγω της σχέσης (4.67), είναι:

$$\text{num}(\text{Perm}(SV_{d=1})) = (SP_{d=1})! = (z - 2i - 3j)! \quad (4.83)$$

- $\text{ways}(SV_{d=2}, \text{Packets} \setminus SV_{d=1})$

Ισχύει ότι:

$$\text{num}(\text{Packets} \setminus SV_{d=1}) = SP_{d=2} + P_{d \geq 3} \quad (4.84)$$

που, λόγω των σχέσεων (4.63), (4.65), γράφεται:

$$\text{num}(\text{Packets} \setminus SV_{d=1}) = 2i + (y - z + 3j) = y - z + 2i + 3j \quad (4.85)$$

Συνεπώς:

$$\text{ways}(SV_{d=2}, \text{Packets} \setminus SV_{d=1}) = \binom{\text{num}(\text{Packets} \setminus SV_{d=1})}{SP_{d=2}} = \binom{y - z + 2i + 3j}{2i} \quad (4.86)$$

- $\text{distr}_{l=2}(SV_{d=2}, L_{d=2})$

Το ζητούμενο είναι να υπολογίσουμε το πλήθος $\text{distr}_{l=2}(SV_{d=2}, L_{d=2})$ όλων των διαφορετικών τρόπων κατανομής των $SP_{d=2} = 2i$ το πλήθος πακέτων του συνόλου $SV_{d=2}$ στους $M_{d=2} = i$ το πλήθος σταθμούς του συνόλου $L_{d=2}$ έτσι ώστε καθένας να είναι προορισμός ακριβώς δύο πακέτων (τα οποία λαμβάνει ορθά).

Εφόσον $SP_{d=2} = 2 M_{d=2} = 2i$, το πλήθος $\text{distr}_{l=2}(SV_{d=2}, L_{d=2})$ θα ισούται με το πλήθος $\text{distr}_{l \geq 2}(SV_{d=2}, L_{d=2})$ όλων των διαφορετικών τρόπων κατανομής των $SP_{d=2} = 2i$ το πλήθος πακέτων του συνόλου $SV_{d=2}$ στους $M_{d=2} = i$ το πλήθος σταθμούς του συνόλου $L_{d=2}$ έτσι ώστε καθένας σταθμός να είναι προορισμός τουλάχιστον δύο πακέτων. Δηλαδή:

$$\text{distr}_{l=2}(SV_{d=2}, L_{d=2}) = \text{distr}_{l \geq 2}(SV_{d=2}, L_{d=2}) \quad (4.87)$$

Για τον υπολογισμό του $\text{distr}_{l \geq 2}(SV_{d=2}, L_{d=2})$:

- Χρησιμοποιούμε τη σχέση (4.29) με:

$$r = \min(l) = 2$$

$$n = SP_{d=2} = 2i$$

$$k = M_{d=2} = i$$

Συνεπώς, προκύπτει ο όρος:

$$S_2(2i, i) \quad (4.88)$$

που εκφράζει το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να διαμερίσουμε το σύνολο $SV_{d=2}$ πλήθους $SP_{d=2} = 2i$ διακεκριμένων πακέτων σε $M_{d=2} = i$ το πλήθος μη διακεκριμένους σταθμούς έτσι ώστε κάθε σταθμός να αποτελεί προορισμό τουλάχιστον δύο πακέτων.

- Πολλαπλασιάζουμε τον όρο της σχέσης (4.88) με το πλήθος όλων των διαφορετικών μεταθέσεων των $M_{d=2} = i$ το πλήθος σταθμών του συνόλου $L_{d=2}$, το οποίο ισούται με:

$$\text{num}(\text{Perm}(L_{d=2})) = (M_{d=2})! = i! \quad (4.89)$$

οπότε λαμβάνουμε την σχέση:

$$\begin{aligned} \text{distr}_{l \geq 2}(SV_{d=2}, L_{d=2}) &= S_2(2i, i) \text{num}(\text{Perm}(L_{d=2})) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \text{distr}_{l \geq 2}(SV_{d=2}, L_{d=2}) = S_2(2i, i) i! \end{aligned} \quad (4.90)$$

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την ποσότητα $distr_{l=2}(SV_{d=2}, L_{d=2})$ ως εξής:

$$distr_{l=2}(SV_{d=2}, L_{d=2}) = \frac{(SP_{d=2})!}{(l!)^{M_{d=2}}} = \frac{(2i)!}{(2!)^i} \quad (4.91)$$

Προφανώς, λόγω των σχέσεων (4.87), (4.90), (4.91), θα πρέπει να ισχύει η εξής σχέση:

$$distr_{l=2}(SV_{d=2}, L_{d=2}) = S_2(2i, i) i! = \frac{(2i)!}{(2!)^i} \quad (4.92)$$

- $ways(V_{d \geq 3}, Packets \setminus SV_{d=1} \setminus SV_{d=2})$

Ισχύει ότι:

$$Packets \setminus SV_{d=1} \setminus SV_{d=2} = V_{d \geq 3} \quad (4.93)$$

Συνεπώς:

$$ways(V_{d \geq 3}, Packets \setminus SV_{d=1} \setminus SV_{d=2}) = ways(V_{d \geq 3}, V_{d \geq 3}) = 1 \quad (4.94)$$

- $distr_{l \geq 3}(V_{d \geq 3}, L_{d \geq 3})$

Για τον υπολογισμό του $distr_{l \geq 3}(V_{d \geq 3}, L_{d \geq 3})$:

- Χρησιμοποιούμε τη σχέση (4.29) με:

$$\begin{aligned} r &= \min(l) = 3 \\ n &= P_{d \geq 3} = y - z + 3j \\ k &= M_{d \geq 3} = j \end{aligned}$$

Συνεπώς, προκύπτει ο όρος:

$$S_3(y - z + 3j, j) \quad (4.95)$$

που εκφράζει το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να διαμερίσουμε το σύνολο $V_{d \geq 3}$ πλήθους $P_{d \geq 3} = y - z + 3j$ διακεκριμένων πακέτων σε $M_{d \geq 3} = j$ το πλήθος μη διακεκριμένους σταθμούς έτσι ώστε κάθε σταθμός να αποτελεί προορισμό τουλάχιστον τριών πακέτων.

- Πολλαπλασιάζουμε τον όρο της σχέσης (4.95) με το πλήθος όλων των διαφορετικών μεταθέσεων των $M_{d \geq 3} = j$ το πλήθος σταθμών του συνόλου $L_{d \geq 3}$, το οποίο ισούται με:

$$num(Perm(L_{d \geq 3})) = (M_{d \geq 3})! = j! \quad (4.96)$$

οπότε λαμβάνουμε την σχέση:

$$\begin{aligned} distr_{l \geq 3}(V_{d \geq 3}, L_{d \geq 3}) &= S_3(y - z + 3j, j) num(Perm(L_{d \geq 3})) \Rightarrow \\ &\Rightarrow distr_{l \geq 3}(V_{d \geq 3}, L_{d \geq 3}) = S_3(y - z + 3j, j) j! \end{aligned} \quad (4.97)$$

Συνεπώς:

$$\begin{aligned}
Succ_{ij} &= \\
&= ways(L_{d \geq 1}, Stations) \\
&\quad ways(L_{d=1}, L_{d \geq 1} \setminus L_{d \geq 3} \setminus L_{d=2}) ways(SV_{d=1}, Packets) num(Perm(SV_{d=1})) \\
&\quad ways(L_{d=2}, L_{d \geq 1} \setminus L_{d \geq 3}) ways(SV_{d=2}, Packets \setminus SV_{d=1}) distr_{l=2}(SV_{d=2}, L_{d=2}) \\
&\quad ways(L_{d \geq 3}, L_{d \geq 1}) ways(V_{d \geq 3}, Packets \setminus SV_{d=1} \setminus SV_{d=2}) distr_{l \geq 3}(V_{d \geq 3}, L_{d \geq 3}) \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow Succ_{ij} &= \\
&= \binom{M}{z-i-2j} \binom{y}{z-2i-3j} (z-2i-3j)! \\
&\quad \binom{z-i-3j}{i} \binom{y-z+2i+3j}{2i} \frac{(2i)!}{(2!)^i} \binom{z-i-2j}{j} j! S_3(y-z+3j, j)
\end{aligned} \tag{4.98}$$

Τελικά, παίρνοντας το άθροισμα των ποσοτήτων της σχέσης (4.98) πάνω στο εύρος τιμών του $M_{d=2} = i$, όπως αυτό δίνεται από την σχέση (4.74), έπειτα το άθροισμα των προηγούμενων αθροισμάτων πάνω στο εύρος τιμών του $M_{d \geq 3} = j$, όπως αυτό δίνεται από την σχέση (4.70), και διαιρώντας με τον όρο M^y , λαμβάνουμε την ζητούμενη πιθανότητα:

$$\begin{aligned}
Pr[A_{F=3}(y) = z] &= \frac{1}{M^y} \sum_{j=u}^{\lfloor \frac{z}{3} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{z-3j}{2} \rfloor} Succ_{ij} = \\
&= \begin{cases} \frac{1}{M^y} \sum_{j=u}^{\lfloor \frac{z}{3} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{z-3j}{2} \rfloor} \binom{M}{z-i-2j} \binom{y}{z-2i-3j} (z-2i-3j)! \\ \binom{z-i-3j}{i} \binom{y-z+2i+3j}{2i} \frac{(2i)!}{(2!)^i} \binom{z-i-2j}{j} j! S_3(y-z+3j, j) \end{cases} \\
&\quad \text{για } (y \geq z \text{ και } F = 3 < y) \tag{4.99}
\end{aligned}$$

όπου:

$$u = \begin{cases} 1, & \text{αν } y > z \\ 0, & \text{αν } y = z \end{cases}$$

Συνοπλοποιώντας τις σχέσεις (4.59), (4.60) και (4.99), λαμβάνουμε την πιθανότητα $Pr[A_{F=3}(y) = z]$ για κάθε συνδυασμό τιμών y, z :

$$Pr[A_{F=3}(y) = z] = \begin{cases} 0, & \text{αν } (y < z) \text{ ή } (y > z \text{ και } F = 3 > z) \\ 1, & \text{αν } (y = z \text{ και } F = 3 \geq y) \\ prob(y, z, F = 3), & \text{αν } (y \geq z \text{ και } F = 3 < y) \end{cases} \tag{4.100}$$

όπου:

$$prob(y, z, F = 3) = \begin{cases} \frac{1}{M^y} \sum_{j=u}^{\lfloor \frac{z}{3} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{z-3j}{2} \rfloor} \binom{M}{z-i-2j} \binom{y}{z-2i-3j} (z-2i-3j)! \\ \binom{z-i-3j}{i} \binom{y-z+2i+3j}{2i} \frac{(2i)!}{(2!)^i} \binom{z-i-2j}{j} j! S_3(y-z+3j, j) \end{cases}$$

και

$$u = \begin{cases} 1, & \text{αν } y > z \\ 0, & \text{αν } y = z \end{cases}$$

4.1.3 Γενίκευση του τύπου για $F > 1$

Θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα $Pr[A_{F>1}(y) = z]$ να έχουμε z το πλήθος ορθώς λαμβανόμενα πακέτα από τους συνολικά M το πλήθος σταθμούς κατά τη διάρκεια ενός χρονικού κύκλου, δεδομένου ότι y το πλήθος πακέτα (επανα)μεταδόθηκαν επιτυχώς στα λογικά κανάλια όταν κάθε σταθμός διαθέτει $F > 1$ δέκτες. Αυτό σημαίνει ότι κάθε σταθμός μπορεί να λάβει ορθά το πολύ F πακέτα ανά χρονικό κύκλο, απορρίπτοντας τα υπόλοιπα.

Έχοντας αποδείξει τον τύπο υπολογισμού της $Pr[A_{F>1}(y) = z]$ στις υποενότητες 4.1.1 και 4.1.2 για $F = 2$ και $F = 3$, αντίστοιχα, δεχόμεστε την ακόλουθη γενίκευση των σχέσεων (4.58) και (4.100) για οποιοδήποτε πεπερασμένο $F > 1$:

$$Pr[A_{F>1}(y) = z] = \begin{cases} 0, & \text{αν } (y < z) \text{ ή } (y > z \text{ και } F > z) \\ 1, & \text{αν } (y = z \text{ και } F \geq y) \\ prob(y, z, F), & \text{αν } (y \geq z \text{ και } F < y) \end{cases} \quad (4.101)$$

όπου:

$$prob(y, z, F) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{M^y} \sum_{a_F=u}^{\lfloor \frac{z}{F} \rfloor} \sum_{a_{F-1}=0}^{\lfloor \frac{z-Fa_F}{F-1} \rfloor} \dots \sum_{a_s=0}^{\lfloor \frac{z-\sum_{l=s+1}^F(l a_l)}{s} \rfloor} \dots \sum_{a_2=0}^{\lfloor \frac{z-\sum_{l=3}^F(l a_l)}{2} \rfloor} \binom{M}{z-\sum_{l=2}^F[(l-1)a_l]} \\ \binom{y}{z-\sum_{l=2}^F(l a_l)} \binom{z-\sum_{l=2}^F(l a_l)}{z-\sum_{l=2}^F(l a_l)}! \binom{z-\sum_{l=2}^F[(l-1)a_l]}{a_F} (a_F)! S_F(y-z+F a_F, a_F) \\ \left\{ \prod_{w=2}^{F-1} \binom{z-\sum_{l=2}^F[(l-1)a_l] - \sum_{l=w+1}^F(a_l)}{a_w} \binom{y - [z - \sum_{l=2}^F(l a_l)] - \sum_{l=w+1}^{F-1}(l a_l)}{w a_w} \frac{(w a_w)!}{(w!)^{a_w}} \right\} \end{cases}$$

$$u = \begin{cases} 1, & \text{αν } y > z \\ 0, & \text{αν } y = z \end{cases}$$

και

$$\begin{aligned}
a_s &= \\
&= \begin{cases} \text{πλήθος σταθμών με καθέναν προορισμό} = s \text{ πακέτων,} & \text{για } s \in [2, F - 1] \\ \text{πλήθος σταθμών με καθέναν προορισμό } \geq s \text{ πακέτων,} & \text{για } s = F \end{cases} \\
&= \begin{cases} M_{d=s}, & \text{για } s \in [2, F - 1] \\ M_{d \geq s}, & \text{για } s = F \end{cases}
\end{aligned}$$

Ο όρος του εσωτερικότερου αθροίσματος της σχέσης (4.101) όταν ($y \geq z$ και $F < y$) ισούται, για δεδομένες τιμές των $a_2, a_3, \dots, a_F \in [0, M]$, με το πλήθος όλων των διαφορετικών τρόπων $Succ_{a_2 a_3 \dots a_F}$ με τους οποίους έχουμε z το πλήθος ορθώς λαμβανόμενα πακέτα από τους συνολικά M το πλήθος σταθμούς κατά τη διάρκεια ενός χρονικού κύκλου, δεδομένου ότι y το πλήθος πακέτα (επανα)μεταδόθηκαν επιτυχώς στα λογικά κανάλια όταν κάθε σταθμός διαθέτει $F > 1$ δέκτες.

Δηλαδή, η ποσότητα $Succ_{a_2 a_3 \dots a_F}$ ισούται με το γινόμενο των παρακάτω παραγόντων:

- $\binom{M}{z - \sum_{l=2}^F [(l-1)a_l]}$ = πλήθος όλων των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορούν να επιλεγούν οι σταθμοί καθένας εκ των οποίων είναι προορισμός τουλάχιστον ενός πακέτου
- $\binom{y}{z - \sum_{l=2}^F (l a_l)}$ = πλήθος όλων των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορούν να επιλεγούν τα πακέτα καθένα εκ των οποίων προορίζεται σε σταθμό ο οποίος είναι προορισμός ακριβώς ενός πακέτου
- $(z - \sum_{l=2}^F (l a_l))!$ = πλήθος όλων των δυνατών μεταθέσεων των πακέτων καθένα εκ των οποίων προορίζεται σε σταθμό ο οποίος είναι προορισμός ακριβώς ενός πακέτου
- $\binom{z - \sum_{l=2}^F [(l-1)a_l]}{a_F}$ = πλήθος όλων των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορούν να επιλεγούν οι σταθμοί καθένας εκ των οποίων είναι προορισμός τουλάχιστον F πακέτων
- $(a_F)! S_F(y - z + F a_F, a_F)$ = πλήθος όλων διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορούν να κατανεμηθούν τα πακέτα, που προορίζονται σε σταθμούς καθένας εκ των οποίων είναι προορισμός τουλάχιστον F πακέτων, στους σταθμούς αυτούς
- $\prod_{w=2}^{F-1} \binom{z - \sum_{l=2}^F [(l-1)a_l] - \sum_{l=w+1}^F (a_l)}{a_w} \binom{y - [z - \sum_{l=2}^F (l a_l)] - \sum_{l=w+1}^{F-1} (l a_l)}{w a_w} \frac{(w a_w)!}{(w!)^{a_w}} =$ γινόμενο παραγόντων, ενός για κάθε διαφορετική τιμή του $w \in [2, F - 1]$. Ο παράγοντας για κάθε τιμή $w \in [2, F - 1]$ ισούται με το γινόμενο των παρακάτω τριών παραγόντων:
 - $\binom{z - \sum_{l=2}^F [(l-1)a_l] - \sum_{l=w+1}^F (a_l)}{a_w}$ = πλήθος όλων των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορούν να επιλεγούν οι σταθμοί καθένας εκ των οποίων είναι προορισμός ακριβώς w πακέτων

- $\binom{y - [z - \sum_{i=2}^F (l a_i)] - \sum_{i=w+1}^{F-1} (l a_i)}{w a_w} =$ πλήθος όλων των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορούν να επιλεγούν τα πακέτα καθένα εκ των οποίων προορίζεται σε σταθμό ο οποίος είναι προορισμός ακριβώς w πακέτων
- $\frac{(w a_w)!}{(w!)^{a_w}} =$ πλήθος όλων διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορούν να κατανεμηθούν τα πακέτα, που προορίζονται σε σταθμούς καθένας εκ των οποίων είναι προορισμός ακριβώς w πακέτων, στους σταθμούς αυτούς

Ακολουθεί η φυσική ερμηνεία σύνθετων ποσοτήτων που χρησιμοποιούνται στους παράγοντες της ποσότητας $Succ_{a_2 a_3 \dots a_F}$:

- $z - \sum_{i=2}^F [(l - 1) a_i] =$ πλήθος σταθμών καθένας εκ των οποίων είναι προορισμός τουλάχιστον ενός πακέτου
- $\sum_{i=w+1}^F (a_i) =$ πλήθος σταθμών καθένας εκ των οποίων είναι προορισμός τουλάχιστον $(w + 1)$ πακέτων
- $z - \sum_{i=2}^F (l a_i) =$ πλήθος πακέτων καθένα εκ των οποίων προορίζεται σε σταθμό ο οποίος είναι προορισμός ακριβώς ενός πακέτου
- $\sum_{i=w+1}^{F-1} (l a_i) =$ πλήθος πακέτων καθένα εκ των οποίων προορίζεται σε σταθμό ο οποίος είναι προορισμός τουλάχιστον $(w + 1)$ πακέτων, εξαιρουμένων των σταθμών εκείνων καθένας εκ των οποίων είναι προορισμός τουλάχιστον F πακέτων

Για πιο παραστατική εξήγηση της φυσικής ερμηνείας του τύπου για $(y \geq z$ και $F < y)$ της σχέσης (4.101), τον παραθέτουμε ξανά ως ακολούθως:

- Αν $(y \geq z$ και $F < y)$, τότε:

$$Pr[A_{F>1}(y) = z] =$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{M^y} \sum_{a_F=u}^{\lfloor \frac{z}{F} \rfloor} \sum_{a_{F-1}=0}^{\lfloor \frac{z-Fa_F}{F-1} \rfloor} \dots \sum_{a_s=0}^{\lfloor \frac{z-\sum_{l=s+1}^F (l a_l)}{s} \rfloor} \dots \sum_{a_2=0}^{\lfloor \frac{z-\sum_{l=3}^F (l a_l)}{2} \rfloor} \overbrace{\binom{M}{z - \sum_{l=2}^F [(l-1)a_l]}}^{\text{επιλογή σταθμών που ο καθένας είναι προορισμός } \geq 1 \text{ πακέτου}} \\
& \underbrace{\binom{y}{z - \sum_{l=2}^F (l a_l)}}_{\text{επιλογή πακέτων που προορίζονται σε σταθμούς καθένας εκ των οποίων είναι προορισμός } = 1 \text{ πακέτου}} \underbrace{\binom{F}{z - \sum_{l=2}^F (l a_l)}!}_{\text{μεταθέσεις πακέτων που προορίζονται σε σταθμούς καθένας εκ των οποίων είναι προορισμός } = 1 \text{ πακέτου}} \\
& \underbrace{\binom{z - \sum_{l=2}^F [(l-1)a_l]}{a_F}}_{\text{επιλογή σταθμών που ο καθένας είναι προορισμός } \geq F \text{ πακέτων}} \underbrace{(a_F)! S_F(y - z + F a_F, a_F)}_{\text{κατανομή } (y - z + F a_F) \text{ διακεκριμένων πακέτων σε } a_F \text{ διακεκριμένους σταθμούς ώστε καθένας να είναι προορισμός } \geq F \text{ πακέτων}} \\
& \underbrace{\prod_{w=2}^{F-1} \left(\binom{z - \sum_{l=2}^F [(l-1)a_l]}{a_w} - \binom{\sum_{l=w+1}^F (a_l)}{a_w} \right)}_{\text{επιλογή } a_w \text{ σταθμών με } w \in [2, F-1] \text{ καθένας εκ των οποίων είναι προορισμός ακριβώς } w \text{ πακέτων}} \\
& \underbrace{\left(y - \binom{z - \sum_{l=2}^F (l a_l)}{a_w} - w a_w \binom{\sum_{l=w+1}^{F-1} (l a_l)}{a_w} \right)}_{\text{πλήθος πακέτων που προορίζονται σε σταθμούς καθένας από τους οποίους είναι προορισμός ακριβώς } w \in [2, F-1] \text{ πακέτων}} \\
& \underbrace{\frac{(w a_w)!}{(w!)^{a_w}}}_{\text{κατανομή } (w a_w) \text{ διακεκριμένων πακέτων σε } a_w \text{ διακεκριμένους σταθμούς έτσι ώστε καθένας τους να είναι προορισμός ακριβώς } w \text{ πακέτων}}
\end{aligned}
\tag{4.102}$$

όπου:

$$u = \begin{cases} 1, & \text{αν } y > z \\ 0, & \text{αν } y = z \end{cases}$$

και

$$a_s = \begin{cases} M_{d=s}, & \text{για } s \in [2, F-1] \\ M_{d \geq s}, & \text{για } s = F \end{cases}$$

Συνοπτικά, η σχέση (4.102) περιγράφει μαθηματικά τα κάτωθι:

- Επιλέγονται με όλους τους δυνατούς τρόπους οι σταθμοί καθένας εκ των οποίων είναι προορισμός τουλάχιστον ενός πακέτου.
- Τα πακέτα που προορίζονται σε σταθμούς, καθένας εκ των οποίων είναι προορισμός $w = 1$ πακέτου, δεν επιλέγουν τους σταθμούς προορισμού τους (στην πράξη, “επιλέγουν” τελευταία τους εναπομείναντες σταθμούς).
- Οι σταθμοί, καθένας εκ των οποίων είναι προορισμός $w \geq F$ πακέτων, δεν επιλέγουν τα πακέτα που προορίζονται σε αυτούς (στην πράξη, “επιλέγουν” τελευταίοι παίρνοντας τα εναπομείναντα πακέτα).
- Για όλες τις υπόλοιπες περιπτώσεις ($w \in [2, F - 1]$), επιλέγονται τόσο οι σταθμοί προορισμού όσο και τα πακέτα που προορίζονται σε αυτούς.

4.2 Επαλήθευση γενικού τύπου με χρήση SWI-Prolog

Στην ενότητα αυτή, επαληθεύουμε την ορθότητα της σχέσης (4.101) μέσω κώδικα SWI-Prolog.

Στάδιο 1: Δημιουργία όλων των ενδεχομένων και καταμέτρηση όσων πληρούν τις προδιαγραφές

Στο στάδιο αυτό, περιγράφουμε τον τρόπο με τον οποίο ο κώδικας Prolog δημιουργεί όλα τα δυνατά ενδεχόμενα (πλήθους M^y) και καταμετρά όσα πληρούν τις προδιαγραφές για τον υπολογισμό της πιθανότητας της σχέσης (4.101) για δεδομένα $y, z, M, F > 1$.

Για τον λόγο αυτό, γράψαμε στη γλώσσα προγραμματισμού Prolog τα εξής κατηγορήματα:

Κατηγορήμα 1: Αντιγράφει N το πλήθος φορές το στοιχείο K σε μια λίστα και την επιστρέφει στο 3^ο όρισμα.

```
repl(_K,0,[]):-true,!.
repl(K,N,[R|Rs]):-
    NewN is N-1,
    R=K,
    repl(K,NewN,Rs).
```

Κατηγορήμα 2: Τοποθετεί το στοιχείο K σε όλες τις πιθανές θέσεις μιας υπάρχουσας λίστας στοιχείων $[L|Ls]$. Το αποτέλεσμα επιστρέφεται στο 3^ο όρισμα.

```
vale_stoixeio_se_lista(_K,[],[]):-false.
vale_stoixeio_se_lista(K,[L|Ls],[R|Rs]):-append(L,[K],R),Rs=Ls.
vale_stoixeio_se_lista(K,[L|Ls],[R|Rs]):-vale_stoixeio_se_lista(K,Ls,Rs),R=L.
```

Κατηγορήμα 3: Τοποθετεί τα στοιχεία της λίστας $[K|Ks]$ με όλους τους δυνατούς τρόπους σε μια υπάρχουσα λίστα στοιχείων $[L|Ls]$. Το αποτέλεσμα επιστρέφεται στο 3^ο όρισμα.

```
vale_lista_se_lista([],R,R).
vale_lista_se_lista([K|Ks],[L|Ls],R):-
    vale_stoixeio_se_lista(K,[L|Ls],Res),
    vale_lista_se_lista(Ks,Res,R).
```

Κατηγορία 4: Δέχεται ως είσοδο το πλήθος K των διακεκριμένων στοιχείων, που τα συμβολίζει ως τη λίστα $[1,2,\dots,K]$, και το πλήθος M των διακεκριμένων συνόλων (που τα αρχικοποιεί ως κενά) και επιστρέφει κάθε φορά, μέσω της λίστας $List$, έναν διαφορετικό τρόπο κατανομής αυτών των στοιχείων σε αυτά τα σύνολα.

```
ftiakse_topothesis(K,M,List):-repl([],M,Adeia_doxeia),
    numlist(1,K,Mpales),
    vale_lista_se_lista(Mpales,Adeia_doxeia,List).
```

Κατηγορία 5: Δέχεται ως είσοδο μια λίστα λιστών L , που αναπαριστά μια κατανομή πακέτων σε σταθμούς, και επιστρέφει στο R μια λίστα κάθε στοιχείο της οποίας ισούται με το πλήθος των πακέτων της συγκεκριμένης κατανομής που προορίστηκαν στην αντίστοιχη λίστα-σταθμό της λίστας λιστών L . Για παράδειγμα, με είσοδο τη λίστα $L=[[1,2],[8],[3,6],[4,5,7]]$, θα επιστραφεί η λίστα $R=[2,1,2,3]$.

```
ftiakse_lista_me_pli8os_stoixeiwn([L],[R]):-length(L,R).
ftiakse_lista_me_pli8os_stoixeiwn([L|Ls],[R|Rs]):-
    length(L,R),ftiakse_lista_me_pli8os_stoixeiwn(Ls,Rs).
```

Κατηγορία 6: Βοηθητικό κατηγορία για το Κατηγορία 7.

```
skorarei_Z_help([],_F,0,true):-true,!.
skorarei_Z_help([L|Ls],F,Z,Res):-
    L<F,
    Znew is Z-L,
    skorarei_Z_help(Ls,F,Znew,Res).
```

```
skorarei_Z_help([L|Ls],F,Z,Res):-
    L>=F,
    Znew is Z-F,
    skorarei_Z_help(Ls,F,Znew,Res).
```

Κατηγορία 7: Βρίσκει αν στην λίστα λιστών L , η οποία αναπαριστά μια κατανομή πακέτων σε σταθμούς, έχουμε Z ορθώς λαμβανόμενα πακέτα όταν κάθε σταθμός διαθέτει $F>1$ δέκτες. Αν ναι, τότε επιστρέφει $Res==true$.

```
skorarei_Z(L,F,Z,Res):-skorarei_Z_help(L,F,Z,Res),Res==true.
```

Κατηγορία 8: Δημιουργεί όλους τους τρόπους κατανομής Y το πλήθος πακέτων σε M το πλήθος σταθμούς και προσμετρά, στην καθολική (global) μεταβλητή $epituxies$, μόνο τους τρόπους όπου Z ακριβώς πακέτα λαμβάνονται ορθά από τους προορισμούς όταν κάθε σταθμός διαθέτει $F>1$ δέκτες.

```
metra_tis_periptwseis_epituxias(Y,M,Z,F):-
```

```

ftiakse_topothesis(Y,M,List),
ftiakse_lista_me_pli8os_stoixeiwn(List,Pli8os_stoixeiwn),
skorarei_Z(Pli8os_stoixeiwn,F,Z,Res),Res==true,
nb_getval(epituxies,Timi),
NewEpituxies is Timi+1,
nb_setval(epituxies,NewEpituxies).

```

Κατηγορία 9: Ένα κατηγορημα που επιστρέφει πάντα false. Ωστόσο, κάνει τα εξής: Τρέχει με backtrack όλες τις πιθανές περιπτώσεις για το κατηγορημα metra_tis_periptwseis_epituxias. Αυτό έχει ως παράπλευρη συνέπεια να πάρει η καθολική μεταβλητή epituxies την μέγιστη δυνατή τιμή της.

```

gurna_fail(Y,M,Z,F):-
    metra_tis_periptwseis_epituxias(Y,M,Z,F),
    false.

```

Κατηγορία 10: Εφαρμόζει στο if clause το κατηγορημα gurna_fail. Όταν το τελευταίο γυρίσει false, το Κατηγορημα 10 θα επιστρέψει στην μεταβλητή Successes την μέγιστη δυνατή τιμή της καθολικής μεταβλητής epituxies.

```

vres_tis_epituxies_eksantlitika(M,Y,Z,F,Successes):-
    ( gurna_fail(Y,M,Z,F)
      -> false
      ; nb_getval(epituxies,Successes)
    ).

```

Κατηγορία 11: Κατηγορημα για την εύρεση του πλήθους Epituxies των ενδεχομένων όπου ακριβώς Z το πλήθος πακέτα λαμβάνονται ορθά από τους προορισμούς όταν Y το πλήθος πακέτα κατανέμονται σε M το πλήθος σταθμούς με τον καθέναν τους να διαθέτει $F > 1$ δέκτες.

```

metra_epituxies(M,Y,Z,F,Epituxies):-
    nb_setval(epituxies,0),
    vres_tis_epituxies_eksantlitika(M,Y,Z,F,Epituxies).

```

Για την γέννηση όλων των ενδεχομένων και την καταμέτρηση του πλήθους εκείνων όπου ακριβώς Z το πλήθος πακέτα λαμβάνονται ορθά από τους προορισμούς όταν Y το πλήθος πακέτα κατανέμονται σε M το πλήθος σταθμούς με τον καθέναν τους να διαθέτει $F > 1$ το πλήθος δέκτες, τρέχουμε το κατηγορημα metra_epituxies(M,Y,Z,F,Epituxies), όπου:

- M = το πλήθος των σταθμών,
- Y = το πλήθος των πακέτων που κατανέμονται στους M το πλήθος σταθμούς,
- Z = το ακριβές πλήθος των πακέτων που ζητάμε να ληφθούν ορθά από τους προορισμούς,
- F = το πλήθος των δεκτών ανά σταθμό, όπου $F > 1$, και
- Epituxies = το πλήθος των ενδεχομένων όπου ακριβώς Z το πλήθος πακέτα λαμβάνονται ορθά από τους προορισμούς.

Το κατηγορήμα `metra_epituxies` θέτει την καθολική μεταβλητή `epituxies` στην τιμή μηδέν και, στη συνέχεια, καλεί το κατηγορήμα `vres_tis_epituxies_eksantlitika`.

Το κατηγορήμα `vres_tis_epituxies_eksantlitika`, στο `if` clause του `if-then-else`, εφαρμόζει το κατηγορήμα `gurna_fail`, το οποίο έχει ως αποτέλεσμα η καθολική μεταβλητή `epituxies` να αυξηθεί μέχρι την μέγιστη τιμή της. Το κατηγορήμα `vres_tis_epituxies_eksantlitika` πάντα στο τέλος μπαίνει στο `else` clause οπότε στο `Successes` παίρνουμε την μέγιστη αυτή τιμή.

Το κατηγορήμα `gurna_fail` καταφέρει να πάει την καθολική μεταβλητή `epituxies` στην μέγιστη τιμή της ως εξής: Επιστρέφει πάντα `false` αφού προηγουμένως έχει τρέξει με `backtrack` όλες τις πιθανές περιπτώσεις για το κατηγορήμα `metra_tis_periptwseis_epituxias(Y,M,Z,F)`.

Το κατηγορήμα `metra_tis_periptwseis_epituxias(Y,M,Z,F)` γεννά όλα τα δυνατά ενδεχόμενα κατανομής Y το πλήθος πακέτων σε M το πλήθος σταθμούς (χρησιμοποιώντας το κατηγορήμα `ftiakse_topothesisi`), ελέγχει για καθένα από αυτά αν το πλήθος των ορθώς λαμβανόμενων πακέτων είναι ίσο με Z (χρησιμοποιώντας τα κατηγορήματα `ftiakse_lista_me_pliθos_stoixeiwn` και `skorarei_Z`) και, αν ναι αυτό ισχύει, αυξάνει κατά ένα την καθολική μεταβλητή `epituxies`.

Μένει τώρα να περιγράψουμε τον τρόπο γέννησης των M^Y το πλήθος ενδεχομένων που γίνεται μέσω του κατηγορήματος `ftiakse_topothesisi(K,M,List)`.

Το κατηγορήμα `ftiakse_topothesisi(K,M,List)` παίρνει ως είσοδο το πλήθος K των διακεκριμένων πακέτων και το πλήθος M των διακεκριμένων σταθμών και επιστρέφει κάθε φορά, μέσω της λίστας `List`, έναν διαφορετικό τρόπο κατανομής των K το πλήθος πακέτων στους M το πλήθος σταθμούς. Το παραπάνω το πετυχαίνει ως εξής:

- Καλεί αρχικά το κατηγορήμα `repI([],M,Adeia_doxeia)`, το οποίο φτιάχνει τη λίστα `Adeia_doxeia` που περιέχει M το πλήθος άδειους σταθμούς.
- Καλεί στην συνέχεια το κατηγορήμα `numlist(1,K,Mpales)` για να δημιουργήσει τη λίστα `Mpales=[1,2,3,...,K]` των K το πλήθος διακεκριμένων πακέτων.
- Τέλος, καλεί το κατηγορήμα `vale_lista_se_lista(Mpales,Adeia_doxeia,List)`, το οποίο παίρνει τη λίστα των K το πλήθος διακεκριμένων πακέτων `Mpales` και κατανέμει τα πακέτα αυτά με όλους τους δυνατούς τρόπους στην λίστα `Adeia_doxeia` των M το πλήθος, άδειων αρχικά, σταθμών. Κάθε φορά, ένας νέος τρόπος κατανομής από τους δυνατούς επιστρέφεται στη λίστα `List`.

Το κατηγορήμα `vale_lista_se_lista([K|Ks],[L|Ls],R)` λειτουργεί ως εξής:

- Χρησιμοποιώντας το κατηγορήμα `vale_stoixeiio_se_lista(K,[L|Ls],Res)`, τοποθετεί το πακέτο K με όλους του δυνατούς τρόπους στην κατανομή πακέτων σε σταθμούς `[L|Ls]` και επιστρέφει στο `Res` κάθε φορά έναν τέτοιο τρόπο. Για καθέναν τρόπο `Res`, καλεί τον εαυτό του αναδρομικά προκειμένου να βρει όλους τους δυνατούς τρόπους τοποθέτησης των υπόλοιπων πακέτων (Ks) στην κατανομή πακέτων σε σταθμούς `Res` επιστρέφοντας κάθε τέτοιο τρόπο στο `R`.
- Η αναδρομή τελειώνει με την τοποθέτηση μιας κενής λίστας πακέτων (`[]`) σε μια υπάρχουσα κατανομή πακέτων σε σταθμούς, έστω `R`, να επιστρέφει την `R`.

Το κατηγορήμα `vale_stoixeiio_se_lista(K,[L|Ls],[R|Rs])` παίρνει το πακέτο `K` και το τοποθετεί σε όλες τις πιθανές θέσεις μιας υπάρχουσας κατανομής πακέτων σε σταθμούς (`[L|Ls]`) με το πακέτο `K`:

- είτε να προορίζεται στον 1^ο σταθμό (περίπτωση `vale_stoixeiio_se_lista(K,[L|Ls],[R|Rs]):-append(L,[K],R),Rs=Ls.`),
- είτε να προορίζεται σε κάποιον από τους υπόλοιπους σταθμούς με την αναδρομική εφαρμογή του εαυτού του κατηγορήματος στην τοποθέτηση του πακέτου `K` στην κατανομή πακέτων σε σταθμούς `Ls` (περίπτωση `vale_stoixeiio_se_lista(K,[L|Ls],[R|Rs]):-vale_stoixeiio_se_lista(K,Ls,R),R=L.`).

Σημειώνεται ότι στα παραπάνω δεν λαμβάνεται υπόψιν η σειρά τοποθέτησης των πακέτων σε κάθε σταθμό (όπως ακριβώς επιτάσσει το μοντέλο μας).

Στάδιο 2: Σύγκριση αποτελεσμάτων

Καθώς η Prolog δεν μπορεί να μας δώσει την ακρίβεια που θέλουμε για την αναπαράσταση πολύ μικρών δεκαδικών αριθμών, ο κώδικας Prolog για την αποτίμηση της σχέσης (4.101) (κατηγορήμα `upologismos_tyrou(M,Y,Z,F,Res)` του Παραρτήματος Β) δεν υπολογίζει πιθανότητες αλλά την ποσότητα `Res` η οποία ισούται με $Pr[A_{F>1}(y) = z] M^y$, δηλαδή αναπαριστά το πλήθος των ενδεχομένων σε καθένα από τα οποία έχουμε ακριβώς `z` το πλήθος ορθώς λαμβανόμενα πακέτα από τους προορισμούς όταν `y` το πλήθος πακέτα κατανέμονται σε `M` το πλήθος σταθμούς και κάθε σταθμός διαθέτει $F > 1$ δέκτες. Έτσι, όποτε ζητάμε τον υπολογισμό της αντίστοιχης πιθανότητας, $Pr[A_{F>1}(y) = z]$, το αποτέλεσμα `Res` που επιστρέφει το κατηγορήμα `upologismos_tyrou(M,Y,Z,F,Res)` διαιρείται με την ποσότητα M^y , κάνοντας χρήση του `bc calculator` του `bash`, για να λάβουμε την ζητούμενη πιθανότητα με ακρίβεια 15 δεκαδικών ψηφίων.

Στο στάδιο αυτό, ζητάμε να επαληθεύσουμε ότι το πλήθος `Res` που επιστρέφει το κατηγορήμα `upologismos_tyrou(M,Y,Z,F,Res)` ισούται με την τιμή της μεταβλητής `Erituxies` που επιστρέφει το κατηγορήμα `metra_epituxies(M,Y,Z,F,Erituxies)`, που παρουσιάστηκε στο Στάδιο 1.

Για το λόγο αυτό, γράψαμε σε Prolog, μεταξύ άλλων, τα παρακάτω κατηγορήματα:

Κατηγορήμα 12:

```
upologismos_tyrou_me_egrifi(M,Y,Z,F,Res):-
    upologismos_tyrou(M,Y,Z,F,Res),
    write(Res),write("\n").
```

Κατηγορήμα 13:

```
generatorVStypos(M,Y,Z,F):-
    metra_epituxies(M,Y,Z,F,Epituxies1),
    write('Katametrimenes epituxies: '),
    write(Epituxies1),
    write("\n"),
    write('O typos dinei: '),
    upologismos_tyrou_me_egrifi(M,Y,Z,F,Epituxies2),
    write("\n"),
    ( Epituxies1:=Epituxies2
```

```
-> write('Swsto!\n')
; write('Vre8ike la8os!!\n')
).
```

Το κατηγορήμα $generatorVStypos(M,Y,Z,F)$ τυπώνει δύο ακέραιους που καθένας τους αναφέρεται στο πλήθος των ενδεχομένων σε καθένα από τα οποία ακριβώς Z το πλήθος πακέτα λαμβάνονται ορθά από τους συνολικά M το πλήθος σταθμούς όταν Y το πλήθος πακέτα κατανέμονται σε αυτούς και κάθε σταθμός διαθέτει $F>1$ δέκτες. Ο $1^{ος}$ εξ αυτών ισούται με την τιμή της μεταβλητής $Erituxies$ που επιστρέφει το κατηγορήμα $metra_erituxies(M,Y,Z,F,Erituxies)$, ενώ ο $2^{ος}$ ισούται με την τιμή της μεταβλητής Res που επιστρέφει το κατηγορήμα $urologismos_tyrou(M,Y,Z,F,Res)$. Ακολουθεί έλεγχος της ισότητας των δύο αυτών ακεραίων τυπώνοντας «Swsto!» σε περίπτωση ισότητας ή «Vre8ike la8os!!» στην αντίθετη περίπτωση.

Προφανώς, για όλους τους συνδυασμούς τιμών $Y, Z, M, F>1$ για τους οποίους τρέξαμε το κατηγορήμα $generatorVStypos(M,Y,Z,F)$, η ορθότητα της σχέσης (4.101) επαληθεύτηκε.

Στάδιο 3: Έλεγχος του αθροίσματος των πιθανοτήτων

Ο τρόπος επαλήθευσης που παρουσιάστηκε στα Στάδια 1 και 2 είναι ο πλέον ασφαλής για την επιβεβαίωση ή μη της ορθότητας ενός αποτελέσματος που προκύπτει από την αποτίμηση της σχέσης (4.101). Αυτό συμβαίνει καθώς γεννά τα M^y το πλήθος δυνατά ενδεχόμενα και αθροίζει το πλήθος αυτών όπου ακριβώς z πακέτα λαμβάνονται ορθά από τους προορισμούς.

Ο λόγος όμως για τον οποίο η ορθότητά του είναι αδιαμφισβήτητη (γέννηση όλων των ενδεχομένων) αποτελεί παράλληλα και το μεγάλο του μειονέκτημα: η πολυπλοκότητά του είναι εκθετική ως προς το πλήθος y των πακέτων που κατανέμονται στους M το πλήθος σταθμούς ($\theta(M^y)$). Δεδομένου ότι $z \leq y \leq \min(M, N)$, ο χρόνος που θα απαιτούνταν για να ελέγξουμε την ορθότητα της σχέσης (4.101) για μεγάλες τιμές των M, N και για ζεύγη τιμών y, z για τα οποία ο υπολογισμός της πιθανότητας αυτής έχει νόημα, είναι πραγματικά τεράστιος (σε εύλογο χρονικό διάστημα μπορούμε να ελέγξουμε την ορθότητα της σχέσης (4.101), με τον τρόπο που περιγράφηκε στα Στάδια 1 και 2, μόνο για τιμές $M \leq 11$).

Τα παραπάνω μας εξώθησαν στην αναζήτηση ενός άλλου, πιο γρήγορου και μαζικού τρόπου ελέγχου της ορθότητας της σχέσης (4.101). Αυτός βασίζεται στην ακόλουθη παρατήρηση, ότι δηλαδή, πρέπει για δεδομένα M, N να ισχύει:

$$\sum_{z=0}^y Pr[A_{F>1}(y) = z] = 1 \quad (4.103)$$

ή, ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} M^y \sum_{z=0}^y Pr[A_{F>1}(y) = z] &= M^y \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{z=0}^y (M^y Pr[A_{F>1}(y) = z]) &= M^y \end{aligned} \quad (4.104)$$

Καθότι το πρόγραμμά μας σε Prolog και, συγκεκριμένα, το κατηγορημα $upologismos_tyrou(M,Y,Z,F,Res)$ υπολογίζει και επιστρέφει στην μεταβλητή Res την ποσότητα $M^Y Pr[A_{F>1}(Y) = Z]$, ένας γρήγορος έλεγχος της ορθότητας της σχέσης (4.101) περιλαμβάνει, για δεδομένα $M, Y, F > 1$:

- Το τρέξιμο του κατηγορήματος $upologismos_tyrou$ για $0 \leq Z \leq Y$,
- την άθροιση των αντίστοιχων αποτελεσμάτων που επιστρέφονται στη μεταβλητή Res και, τέλος,
- την σύγκριση αυτού του αθροίσματος με την ποσότητα M^Y .

Ακολουθεί το κατηγορημα $my_check(M,Y,F)$ που γράψαμε σε Prolog και το οποίο υλοποιεί τα προαναφερόμενα:

Κατηγορημα 14:

```
my_check(M,Y,F):-
    nb_setval(epituxies_gia_check,0),
    numlist(0,Y,Lista_apo_0_ws_Y),
    ( member(Z,Lista_apo_0_ws_Y),
      upologismos_tyrou(M,Y,Z,F,Epituxies),
      nb_getval(epituxies_gia_check,Ep),
      NewEp is Epituxies+Ep,
      nb_setval(epituxies_gia_check,NewEp),
      false
    -> false
  ; nb_getval(epituxies_gia_check,Telikes_ep)
  ),
  write('Successes='),
  write('\n'),
  write(Telikes_ep),
  write('\n'),
  write('M^Y='),
  write('\n'),
  MstinY is M^Y,
  write(MstinY),
  write('\n'),
  write('\n'),
  ( MstinY:=Telikes_ep
  ->write('Mia xara!')
  ;write('LATHOS!')
  ).
```

Όπως ακριβώς έγινε με τη χρήση του τρόπου που περιγράφηκε στα Στάδια 1 και 2, έτσι και εδώ η ορθότητα της σχέσης (4.101) προφανώς επιβεβαιώνεται. Ωστόσο, υπάρχει πιθανότητα ο τρόπος ελέγχου του Σταδίου 3 να γυρίσει λανθασμένα (και χωρίς αυτό να γίνει αντιληπτό) το σωστό άθροισμα (M^Y) στην περίπτωση που η σχέση (4.101) δώσει τουλάχιστον δύο λανθασμένα αποτελέσματα.

Κεφάλαιο 5: Μαρκοβιανή ανάλυση

Η απόδοση του πρωτοκόλλου περιγράφεται με μία Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου (discrete time Markov chain). Η κατάσταση του υπό εξέταση συστήματος δηλώνεται ως X_c , με $c = 0, 1, 2, \dots$ ο αριθμός του χρονικού κύκλου, όπου X_c ένας ακέραιος αριθμός που λαμβάνει τιμές στο διάστημα $[0, M]$ και συμβολίζει το πλήθος των ενεργών σταθμών στην έναρξη του χρονικού κύκλου c .

Ορίζουμε ως $\Phi_F(x, y, z)$ το γινόμενο της πιθανότητας y το πλήθος επιτυχιών από x το πλήθος (επανα)μεταδόσεις πακέτων στα N το πλήθος λογικά κανάλια επί την πιθανότητα z το πλήθος ορθώς λαμβανομένων πακέτων από τους προορισμούς, ανά χρονικό κύκλο, όταν η δικτυακή διεπαφή κάθε σταθμού διαθέτει $F > 1$ συντονιζόμενους δέκτες. Δίνεται από την σχέση [2]:

$$\Phi_F(x, y, z) = Pr[S(x) = y] Pr[A_F(y) = z] \quad (5.1)$$

Ως $q_{i,n}$ ορίζεται η υπό συνθήκη πιθανότητα να επιχειρήσουν να επαναμεταδώσουν με πιθανότητα p_1 i από τους n το πλήθος ενεργούς σταθμούς κατά τη διάρκεια ενός χρονικού κύκλου. Δίνεται από την σχέση [2]:

$$q_{i,n} = bin(n, i, p_1) \quad (5.2)$$

Επίσης, ως $Q_{i,n}$ ορίζεται η υπό συνθήκη πιθανότητα να μεταδώσουν με πιθανότητα p i από τους $(M - n)$ πλήθος ελεύθερους σταθμούς κατά τη διάρκεια ενός χρονικού κύκλου. Δίνεται από την σχέση [2]:

$$Q_{i,n} = bin(M - n, i, p) \quad (5.3)$$

όπου:

$$bin(i, j, p) = \binom{i}{j} p^j (1 - p)^{i-j}, \quad i \geq j \quad (5.4)$$

Η Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_c, c = 0, 1, 2, \dots\}$ είναι απεριοδική, ομογενής και αμείωτη. Οι πιθανότητες μετάβασης σε ένα βήμα $P_{ij} \equiv P[X_{c+1} = j | X_c = i]$, οι οποίες περιγράφουν την πιθανότητα να έχουμε j ενεργούς σταθμούς στην αρχή του χρονικού κύκλου $(c + 1)$ όταν στην αρχή του χρονικού κύκλου c είχαμε i ενεργούς σταθμούς, για $c = 0, 1, 2, \dots$, δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις [2]:

- Περίπτωση A: αν το πλήθος των ενεργών σταθμών μειωθεί κατά μια ποσότητα μεγαλύτερη από το πλήθος των λογικών καναλιών (δηλαδή $j < i - N$), τότε:

$$P_{ij} = 0 \quad (5.5)$$

- Περίπτωση B: αν το πλήθος των ενεργών σταθμών μειωθεί ακριβώς όσο το πλήθος των λογικών καναλιών (δηλαδή $j = i - N$), τότε:

$$P_{ij} = Q_{0,i} q_{N,i} \Phi_F(N, N, N) \quad (5.6)$$

- Περίπτωση Γ: αν το πλήθος των ενεργών σταθμών παρουσιάζει μεν μείωση αλλά κατά μια ποσότητα μικρότερη από το πλήθος των λογικών καναλιών (δηλαδή $i - N < j < i$), τότε:

$$\begin{aligned}
P_{ij} = & \\
= & \left\{ \begin{aligned} & \sum_{m=0}^{M-i} Q_{m,i} \sum_{n=i-j}^{N-m} q_{n,i} \sum_{s=0}^{n+j-i} \Phi_F(n+m, i-j+m+s, m+i-j) \\ & + \sum_{m=0}^{\min(M-i, N-1-i+j)} Q_{m,i} \sum_{n=\max(N+1-m, i-j+2)}^{\min(M-m, N)} q_{n,i} \sum_{s=0}^{N-m+j-i-1} \Phi_F(n+m, i-j+m+s, m+i-j) \\ & + \sum_{m=0}^{\min(M-i, N-1-i+j)} Q_{m,i} \sum_{n=N+1}^i q_{n,i} \sum_{s=0}^{N-1-m-i+j} \Phi_F(n+m, i-j+m+s, m+i-j) \end{aligned} \right. \quad (5.7)
\end{aligned}$$

- Περίπτωση Δ: αν το πλήθος των ενεργών σταθμών παραμένει αμετάβλητο (δηλαδή $j = i$), τότε:

$$\begin{aligned}
P_{ij} = & \\
= & \left\{ \begin{aligned} & Q_{0,i} \sum_{n=2}^i q_{n,i} \Phi_F(n, 0, 0) + q_{0,i} \sum_{m=0}^N Q_{m,i} \Phi_F(m, m, m) \\ & + \sum_{m=1}^{\min(M-i, N-1)} Q_{m,i} \sum_{n=1}^{N-m} q_{n,i} \sum_{s=0}^n \Phi_F(n+m, m+s, m) \\ & + \sum_{m=1}^{\min(M-i, N-1)} Q_{m,i} \sum_{n=N+1-m}^i q_{n,i} \sum_{s=0}^{N-1-m} \Phi_F(n+m, m+s, m) \end{aligned} \right. \quad (5.8)
\end{aligned}$$

- Περίπτωση Ε: αν το πλήθος των ενεργών σταθμών αυξηθεί (δηλαδή $j > i$), τότε:

$$\begin{aligned}
P_{ij} = & \\
= & \left\{ \begin{aligned} & Q_{j-i,i} \sum_{n=0}^i q_{n,i} \Phi_F(j-i+n, 0, 0) \\ & + \sum_{m=1}^{\min(M-j, N+i-j)} Q_{j-i+m,i} \sum_{n=0}^{N-m+i-j} q_{n,i} \sum_{s=0}^{n-i+j} \Phi_F(j-i+n+m, m+s, m) \\ & + \sum_{m=1}^{\min(M-j, N-1)} Q_{j-i+m,i} \sum_{n=N+1-m-j+i}^i q_{n,i} \sum_{s=0}^{N-1-m} \Phi_F(j-i+n+m, m+s, m) \end{aligned} \right. \quad (5.9)
\end{aligned}$$

Μέτρα αποδοτικότητας

Αφού η Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_c, c = 0,1,2 \dots\}$ είναι εργοδική, οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης μπορούν να υπολογιστούν επιλύοντας το ακόλουθο σύστημα γραμμικών εξισώσεων [2]:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{P} & (5.10) \\ \sum_{i=0}^M \pi_i = 1 & (5.11) \end{cases}$$

όπου \mathbf{P} είναι ο πίνακας μετάβασης με στοιχεία τις πιθανότητες P_{ij} και $\boldsymbol{\pi}$ είναι ένα διάνυσμα - γραμμή με στοιχεία τις πιθανότητες μόνιμης κατάστασης π_i .

Συνεπώς, το παραπάνω σύστημα γραμμικών εξισώσεων γράφεται ως εξής:

$$\begin{cases} [\pi_0 \ \pi_1 \ \dots \ \pi_M] = [\pi_0 \ \pi_1 \ \dots \ \pi_M] \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & \dots & P_{0M} \\ P_{10} & P_{11} & \dots & P_{1M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{M0} & P_{M1} & \dots & P_{MM} \end{bmatrix} \\ \pi_0 + \pi_1 + \dots + \pi_M = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \vdots \\ \pi_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_0 P_{00} + \pi_1 P_{10} + \dots + \pi_M P_{M0} \\ \pi_0 P_{01} + \pi_1 P_{11} + \dots + \pi_M P_{M1} \\ \vdots \\ \pi_0 P_{0M} + \pi_1 P_{1M} + \dots + \pi_M P_{MM} \end{bmatrix} \\ \pi_0 + \pi_1 + \dots + \pi_M = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi_0 P_{00} + \pi_1 P_{10} + \dots + \pi_M P_{M0} = \pi_0 & (5.12 - 0) \\ \pi_0 P_{01} + \pi_1 P_{11} + \dots + \pi_M P_{M1} = \pi_1 & (5.12 - 1) \\ \vdots & \vdots \\ \pi_0 P_{0M} + \pi_1 P_{1M} + \dots + \pi_M P_{MM} = \pi_M & (5.12 - M) \\ \pi_0 + \pi_1 + \dots + \pi_M = 1 & (5.13) \end{cases}$$

Δηλαδή, για να υπολογίσουμε τους $(M + 1)$ το πλήθος αγνώστους $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_M$, πρέπει να επιλύσουμε το παραπάνω σύστημα $(M + 2)$ το πλήθος γραμμικών εξισώσεων. Η φαινομενικά περιττή εξίσωση (5.13) είναι απαραίτητη καθώς οι $(M + 1)$ το πλήθος εξισώσεις (5.12 - 0), (5.12 - 1), ..., (5.12 - M) είναι γραμμικά εξαρτημένες. Τελικά λοιπόν διαθέτουμε ένα σύστημα $(M + 1)$ το πλήθος γραμμικών εξισώσεων με $(M + 1)$ το πλήθος αγνώστους, το οποίο λύνουμε (π.χ. με τη μέθοδο απαλοιφής Gauss) για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης π_i .

Η υπό συνθήκη διέλευση $S_F(i)$ ορίζεται ως η αναμενόμενη τιμή του πλήθους των ορθώς λαμβανομένων πακέτων από τους προορισμούς κατά τη διάρκεια ενός χρονικού

κύκλου, δεδομένου ότι το πλήθος των ενεργών σταθμών στην αρχή του χρονικού αυτού κύκλου είναι i , όταν η δικτυακή διεπαφή κάθε σταθμού διαθέτει F συντονιζόμενους δέκτες. Δίνεται από την σχέση [2]:

$$S_F(i) \equiv E[A_{c,F} | X_c = i] = \begin{cases} \sum_{k=1}^N k \sum_{m=0}^{M-i} Q_{m,i} \sum_{\substack{n=0, \\ m+n \geq k, \\ m+n \leq N}}^i q_{n,i} \sum_{s=0}^{N-k} \Phi_F(n+m, k+s, k) \\ + \sum_{k=1}^{N-1} k \sum_{m=0}^{M-i} Q_{m,i} \sum_{\substack{n=0, \\ m+n \geq N+1}}^i q_{n,i} \sum_{s=0}^{N-1-k} \Phi_F(n+m, k+s, k) \end{cases} \quad (5.14)$$

Η μέση τιμή της διέλευσης μόνιμης κατάστασης S_F δίνεται από την σχέση [2]:

$$S_F = E[S_F(i)] = \sum_{i=0}^M S_F(i) \pi_i \quad (5.15)$$

Η μέση τιμή του πλήθους των ενεργών σταθμών μόνιμης κατάστασης B_F δίνεται από την σχέση [2]:

$$B_F = E[i] = \sum_{i=0}^M i \pi_i \quad (5.16)$$

Ο υπό συνθήκη ρυθμός εισόδου $S_{in}(i)$ ορίζεται ως η αναμενόμενη τιμή του πλήθους των αφίξεων νέων πακέτων κατά τη διάρκεια ενός χρονικού κύκλου, δεδομένου ότι το πλήθος των ενεργών σταθμών στην αρχή του χρονικού αυτού κύκλου είναι i . Δίνεται από την σχέση [2]:

$$S_{in}(i) \equiv E[H_c | X_c = i] = (M - i)p \quad (5.17)$$

Η μέση τιμή του ρυθμού εισόδου μόνιμης κατάστασης S_{in} δίνεται από τη σχέση [2]:

$$S_{in} = \sum_{i=0}^M (M - i)p\pi_i \quad (5.18)$$

Στη μόνιμη κατάσταση, θα πρέπει να ισχύει [2]:

$$S_F = (M - B)p \quad (5.19)$$

δηλαδή, στη μόνιμη κατάσταση, θα πρέπει η μέση τιμή της διέλευσης S_F να ισούται με τη μέση τιμή του ρυθμού εισόδου S_{in} , εφόσον, λόγω των σχέσεων (5.11), (5.16), (5.18), για το S_{in} ισχύει:

$$S_{in} = \sum_{i=0}^M (M - i)p\pi_i = \left(M \sum_{i=0}^M \pi_i - \sum_{i=0}^M i\pi_i \right) p = (M - B)p \quad (5.20)$$

Η καθυστέρηση D_F ορίζεται ως η μέση τιμή του πλήθους των χρονικών κύκλων που ένα πακέτο περιμένει μέχρι την ορθή του λήψη από τους προορισμούς. Υπολογίζεται από το νόμο του Little [13]:

$$D_F = 1 + \frac{B_F}{S_F} \quad (5.21)$$

Ως πιθανότητα απόρριψης $Prej_F$ ορίζεται το ποσοστό των επιτυχώς μεταδιδόμενων στα λογικά κανάλια πακέτων που απορρίφθηκαν από τους προορισμούς, ανά χρονικό κύκλο, λόγω των συγκρούσεων σε αυτούς στη μόνιμη κατάσταση και δεδομένου ότι η δικτυακή διεπαφή κάθε σταθμού διαθέτει πεπερασμένο πλήθος $F \geq 1$ συντονιζόμενων δεκτών. Δίνεται από την σχέση [2]:

$$Prej_F = \frac{S_{no\ rc} - S_F}{S_{no\ rc}} \quad (5.22)$$

όπου $S_{no\ rc}$ η διέλευση μόνιμης κατάστασης όταν το φαινόμενο των συγκρούσεων στον προορισμό δεν λαμβάνεται καθόλου υπόψιν [11]. Προφανώς, αυτή ταυτίζεται με την διέλευση $S_{F \rightarrow \infty}$ που προκύπτει καταχρηστικά από τις σχέσεις μας κάνοντας χρήση της σχέσης (3.2).

Για την σύγκριση, επιλέγησαν οι τιμές εκείνες των p που αντιστοιχούν στις μέγιστες τιμές $S_{no\ rc}(\max)$ και $S_F(\max)$. Οπότε:

$$Prej_F(\max) = \frac{S_{no\ rc}(\max) - S_F(\max)}{S_{no\ rc}(\max)} \quad (5.23)$$

Κεφάλαιο 6: Αριθμητικά αποτελέσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο, παρουσιάζουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα που προέκυψαν από τη μαθηματική ανάλυση, με τη βοήθεια των οποίων αποτιμάται η απόδοση του συστήματος. Η απόδοση αυτή επηρεάζεται και μελετάται ως προς τις εξής παραμέτρους: i) το πλήθος των καναλιών που συγκροτούν το πολυδιαυλικό δίκτυο, ii) το πλήθος των σταθμών στο δίκτυο και iii) το πλήθος των συντονιζόμενων δεκτών ανά σταθμό.

Για την εξαγωγή των αποτελεσμάτων, θεωρήσαμε ότι ένας ενεργός σταθμός προσπαθεί να επαναμεταδώσει το ανεπιτυχώς μεταδιδόμενο πακέτο με σταθερή πιθανότητα $p_1 = 0.3$.

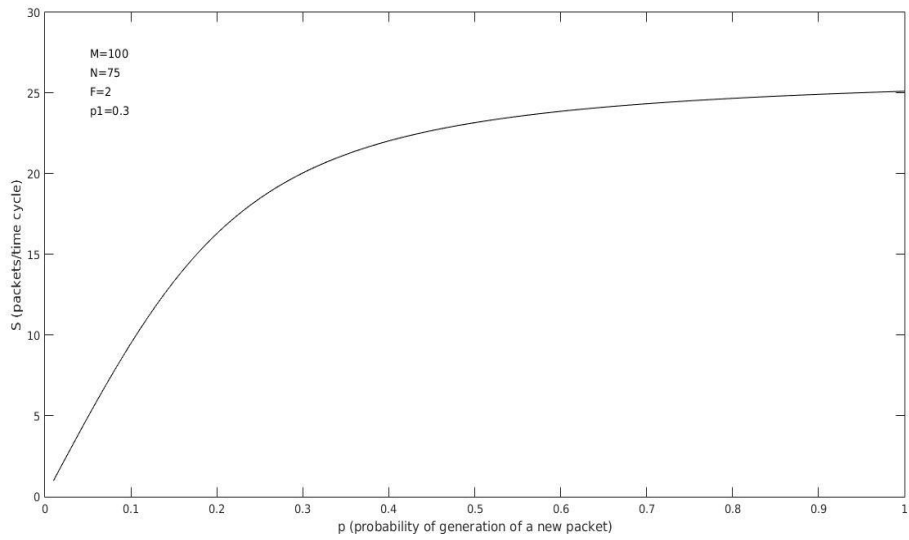
6.1 Απόδοση για δεδομένο $F > 1$

Σε αυτήν την ενότητα, παρουσιάζουμε την μελέτη της συμπεριφοράς του συστήματος για δεδομένο πλήθος συντονιζόμενων δεκτών ανά σταθμό, $F > 1$. Όπως ήταν αναμενόμενο, προέκυψε ότι η συμπεριφορά της συστήματος για δεδομένο $F > 1$ υπακούει στους ίδιους κανόνες με την συμπεριφορά του συστήματος όταν $F = 1$, η οποία έχει αναλυθεί σε προηγούμενες μελέτες [2].

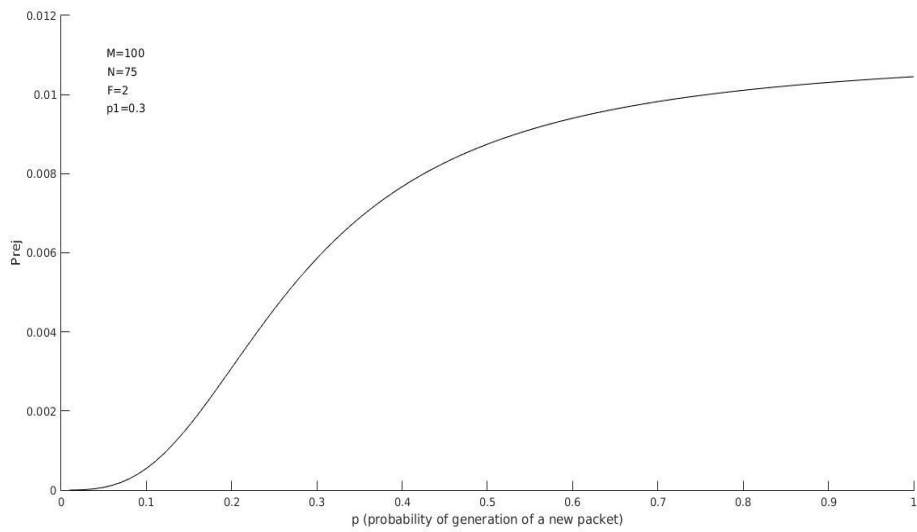
Στην αρχή της ενότητας, μελετάμε την απόδοση του συστήματος για δεδομένα M, N και $F = 2$. Στη συνέχεια, συγκρίνουμε την απόδοση του συστήματος για δεδομένο $F = 2$ ενώ μεταβάλλουμε είτε το πλήθος των καναλιών που συγκροτούν το πολυδιαυλικό δίκτυο, είτε το πλήθος των σταθμών του δικτύου.

Το Σχήμα 6-1 παρουσιάζει την διέλευση S ως συνάρτηση της πιθανότητας γέννησης p όταν καθένας από τους συνολικά $M = 100$ σταθμούς διαθέτει $F = 2$ συντονιζόμενους δέκτες και το πολυδιαυλικό δίκτυο συγκροτείται από $N = 75$ κανάλια. Παρατηρούμε ότι, για τιμές $p < 0.1$, η διέλευση S αυξάνει με ακριβώς τον ίδιο ρυθμό με τον οποίο αυξάνει το p . Στη συνέχεια, και για τιμές $0.1 \leq p < 0.4$, ο ρυθμός αύξησης της διέλευσης S παραμένει μεγάλος αν και μειώνεται καθώς το p αυξάνει. Για τιμές $p \geq 0.4$, το σύστημα εισέρχεται σε κορεσμό καθώς η αύξηση του p οδηγεί σε αύξηση του S που όμως δεν είναι τόσο αισθητή.

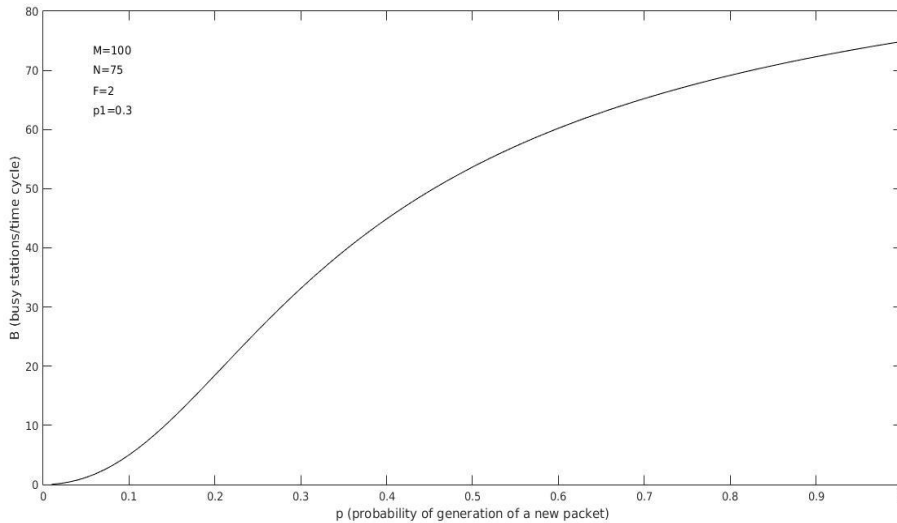
Η ερμηνεία έγκειται στο ότι για μικρές τιμές του φορτίου, $0 \leq p < 0.1$, τόσο το φαινόμενο των συγκρούσεων στα κανάλια όσο και το φαινόμενο των συγκρούσεων στον προορισμό (Σχήμα 6.2) παραμένουν ισχνά, με αποτέλεσμα η διέλευση του συστήματος πρακτικά να ταυτίζεται με τον ρυθμό εισόδου. Για μεγαλύτερες όμως τιμές του φορτίου, $p \geq 0.1$, τα δύο αυτά φαινόμενα γίνονται εντονότερα, με αποτέλεσμα να αυξάνει σημαντικά το πλήθος των ενεργών σταθμών B , όπως δείχνει το Σχήμα 6-3. Συγκεκριμένα, σύμφωνα με το Σχήμα 6-2, για τιμές $0.1 \leq p < 0.4$, το φαινόμενο των συγκρούσεων στον προορισμό γίνεται αρκετά εντονότερο με την αύξηση του p ενώ οξύνεται με μικρότερο ρυθμό για $p \geq 0.4$, καθώς για τέτοια φορτία το φαινόμενο των συγκρούσεων στα κανάλια είναι αυτό που κυρίως περιορίζει την απόδοση του συστήματος. Συνεπώς, για $0.1 \leq p < 0.4$, η αύξηση του πλήθους των ενεργών σταθμών B είναι αποτέλεσμα κυρίως της επίδρασης του φαινομένου των συγκρούσεων στον προορισμό ενώ, για $p \geq 0.4$, το B αυξάνει κυρίως λόγω του φαινομένου των συγκρούσεων στα κανάλια. Οι τιμές του Πίνακα 6-1 επιβεβαιώνουν αυτές τις παρατηρήσεις.



Σχήμα 6-1. Διέλευση S ως προς p για $M = 100$, $N = 75$ και $F = 2$.



Σχήμα 6-2. Πιθανότητα απόρριψης στον προορισμό $Prej$ ως προς p για $M = 100$, $N = 75$ και $F = 2$.

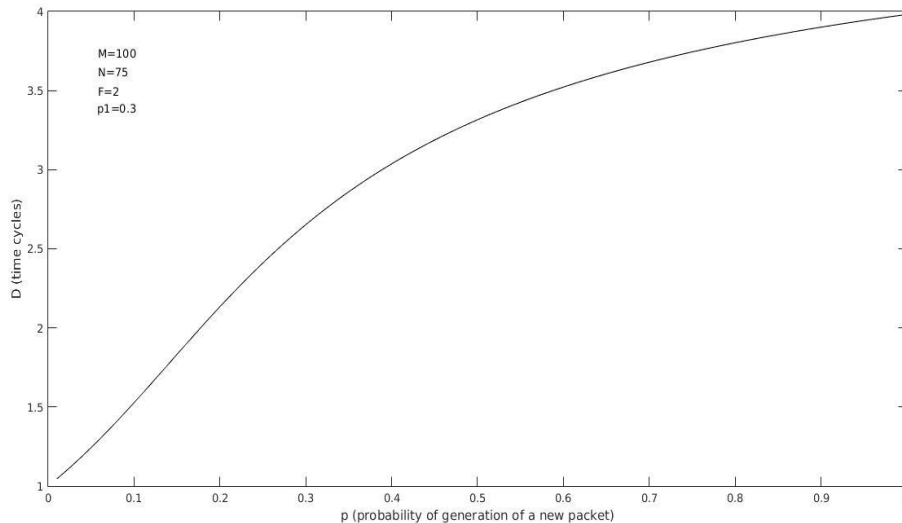


Σχήμα 6-3. Ενεργοί σταθμοί B ως προς p για $M = 100$, $N = 75$ και $F = 2$.

μετάβαση p	μεταβολή S	μεταβολή B	μεταβολή $Prej$
0.1 → 0.2	+71.58%	+263.98%	+464%
0.2 → 0.4	+35.21%	+143.32%	+148%
0.4 → 1.0	+13.97%	+60.40%	+36%

Πίνακας 6-1. Μεταβολή της διέλευσης S , του πλήθους των ενεργών σταθμών B και της πιθανότητας απόρριψης στον προορισμό $Prej$ για $M = 100$, $N = 75$, $F = 2$ και διάφορες μεταβάσεις του p .

Το Σχήμα 6-4 παρουσιάζει την καθυστέρηση D ως συνάρτηση της πιθανότητας γέννησης p όταν καθένας από τους συνολικά $M = 100$ σταθμούς διαθέτει $F = 2$ συντονιζόμενους δέκτες και το πολυδιαυλικό δίκτυο συγκροτείται από $N = 75$ κανάλια. Παρατηρούμε ότι η καθυστέρηση D αυξάνει με την αύξηση του p . Η ερμηνεία αυτού του γεγονότος δεν είναι προφανής αφού, καθώς αυξάνει το p , αυξάνει τόσο η διέλευση S όσο και το πλήθος των ενεργών σταθμών B . Ωστόσο, όπως επιβεβαιώνει ο Πίνακας 6-2, με την αύξηση του p , αυξάνει ο λόγος του πλήθους των ενεργών σταθμών προς την διέλευση, B/S , άρα και η καθυστέρηση D η οποία εξαρτάται από αυτόν (σχέση (5.21)).

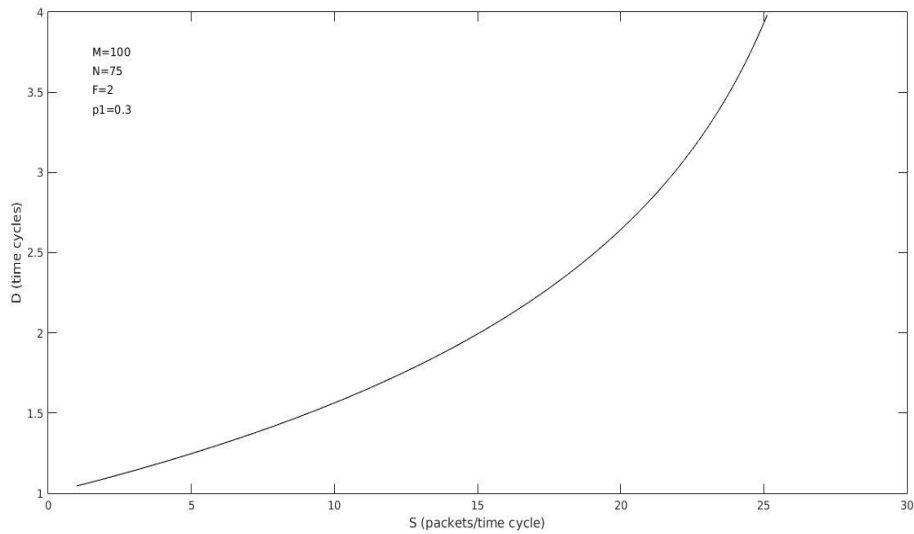


Σχήμα 6-4. Καθυστέρηση D ως προς p για $M = 100$, $N = 75$ και $F = 2$.

ρ	B (ενεργοί σταθμοί)	S (πακέτα/χρονικό κύκλο)	D (χρονικοί κύκλοι)
0.1	5.08	9.50	1.53
0.2	18.49	16.30	2.13
0.4	44.90	22.04	3.04
1.0	72.02	25.12	3.90

Πίνακας 6-2. Πλήθος ενεργών σταθμών B , διέλευση S , και καθυστέρηση D για $M = 100$, $N = 75$, $F = 2$ και $p = 0.1, 0.2, 0.4, 1.0$.

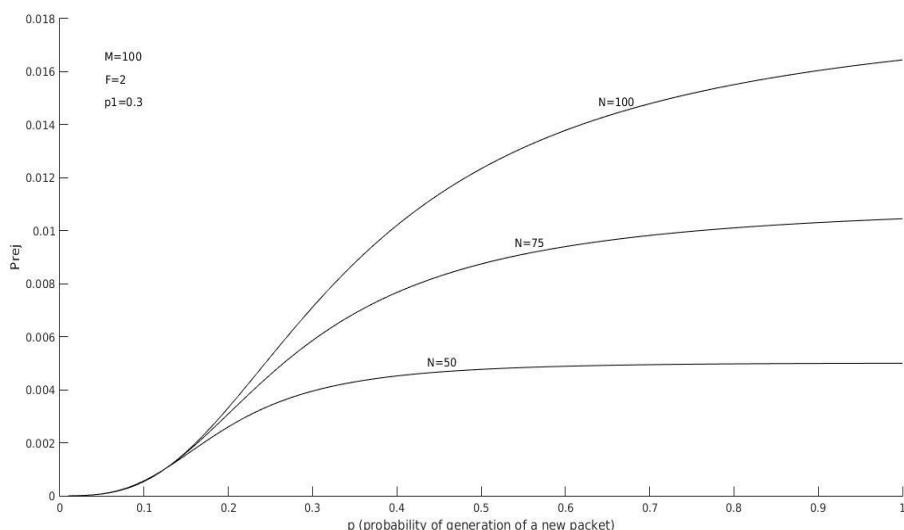
Το Σχήμα 6-5 παρουσιάζει την καθυστέρηση D ως συνάρτηση της διέλευσης S όταν καθένας από τους συνολικά $M = 100$ σταθμούς διαθέτει $F = 2$ συντονιζόμενους δέκτες και το πολυδιαυλικό δίκτυο συγκροτείται από $N = 75$ κανάλια. Παρατηρούμε ότι η καθυστέρηση D είναι αύξουσα συνάρτηση της διέλευσης S , επιβεβαιώνοντας τα παραπάνω συμπεράσματα.



Σχήμα 6-5. Καυστέρηση D ως προς τη διέλευση S για $M = 100$, $N = 75$ και $F = 2$.

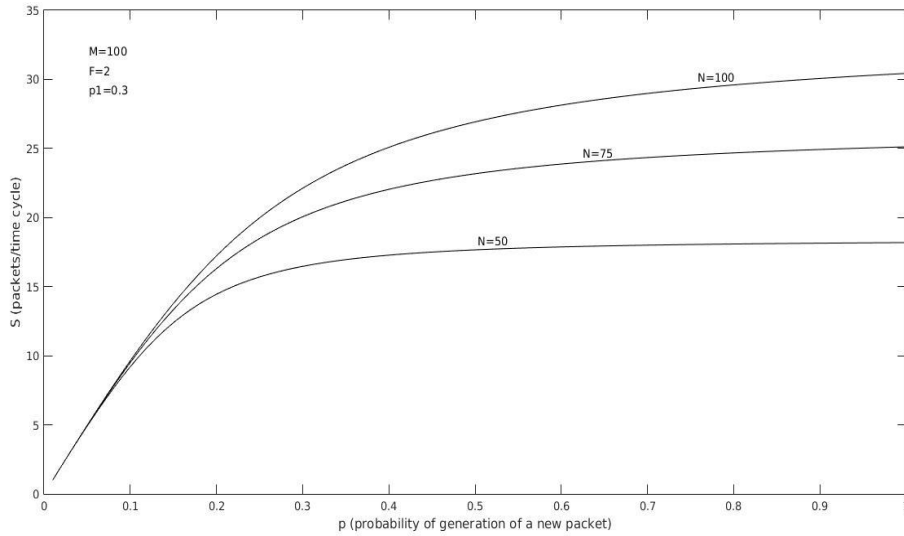
Μεταβολή του πλήθους των καναλιών N

Το Σχήμα 6-6 παρουσιάζει την πιθανότητα απόρριψης στον προορισμό $Prej$ ως συνάρτηση της πιθανότητας γέννησης p όταν καθένας από τους συνολικά $M = 100$ σταθμούς διαθέτει $F = 2$ συντονιζόμενους δέκτες για διάφορες τιμές του πλήθους καναλιών N . Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα απόρριψης στον προορισμό $Prej$ είναι, για δεδομένα M, F, p , μια αύξουσα συνάρτηση του πλήθους καναλιών N . Η ερμηνεία έγκειται στο γεγονός ότι η αύξηση του N για δεδομένα M, F, p οδηγεί στον περιορισμό του φαινομένου των συγκρούσεων στα κανάλια του πολυδιαυλικού δικτύου και, κατά συνέπεια, οξύνει την επίδραση του φαινομένου των συγκρούσεων στον προορισμό. Με άλλα λόγια, καθώς το πλήθος των καναλιών του πολυδιαυλικού δικτύου αυξάνει, περισσότερα πακέτα μεταδίδονται επιτυχώς στα κανάλια, γεγονός που αυξάνει την πιθανότητα τρία ή περισσότερα πακέτα να προορίζονται στον ίδιο σταθμό, οπότε απορρίπτεται μέρος αυτών. Για παράδειγμα, για $p = 0.9$ η πιθανότητα απόρριψης στον προορισμό $Prej$ είναι: 0.50% για $N = 50$, 1.03% για $N = 75$ και 1.60% για $N = 100$.



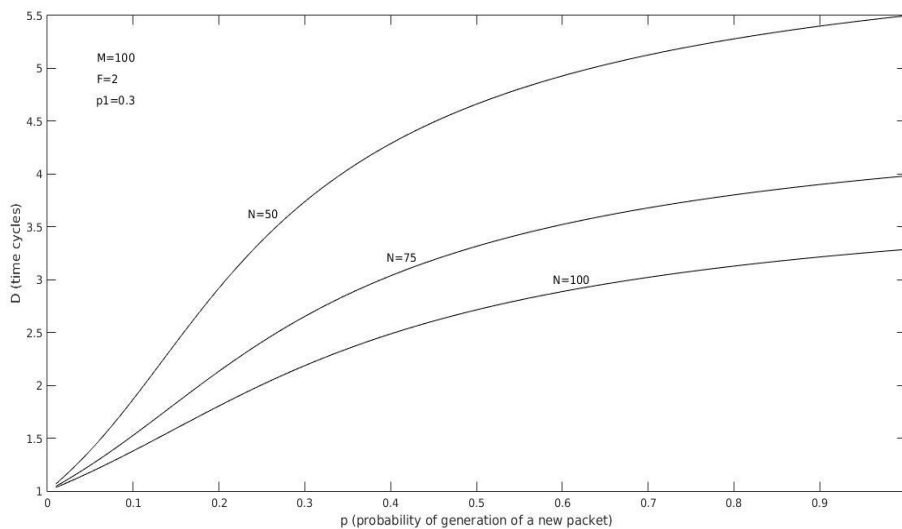
Σχήμα 6-6. Πιθανότητα απόρριψης στον προορισμό P_{rej} ως προς p για $M = 100$, $F = 2$ και $N = 50, 75, 100$.

Παρά το γεγονός ότι η αύξηση του N για δεδομένα M, F, p οδηγεί σε αύξηση της πιθανότητας απόρριψης στον προορισμό P_{rej} , η διέλευση S αυξάνει, όπως φαίνεται στο Σχήμα 6-7. Δηλαδή, εφόσον περισσότερα πακέτα μεταδίδονται επιτυχώς στα κανάλια καθώς αυξάνει το πλήθος των καναλιών, περισσότερα πακέτα λαμβάνονται ορθά από τους προορισμούς. Εντούτοις, η αύξηση της διέλευσης S δεν είναι ανάλογη αλλά μικρότερη της αύξησης του N αφού, καθώς το N αυξάνει, όλο και πιο πολλά, από τα περισσότερα μεν, επιτυχώς μεταδιδόμενα πακέτα στα κανάλια συγκρούονται στον προορισμό (Πίνακας 6-3). Για παράδειγμα, για $p = 0.9$ το S αυξάνει κατά: 37.43% όταν το N αυξάνει κατά 50.00% (μετάβαση $N = 50 \rightarrow N = 75$) και κατά 20.62% όταν το N αυξάνει κατά 33.33% (μετάβαση $N = 75 \rightarrow N = 100$).



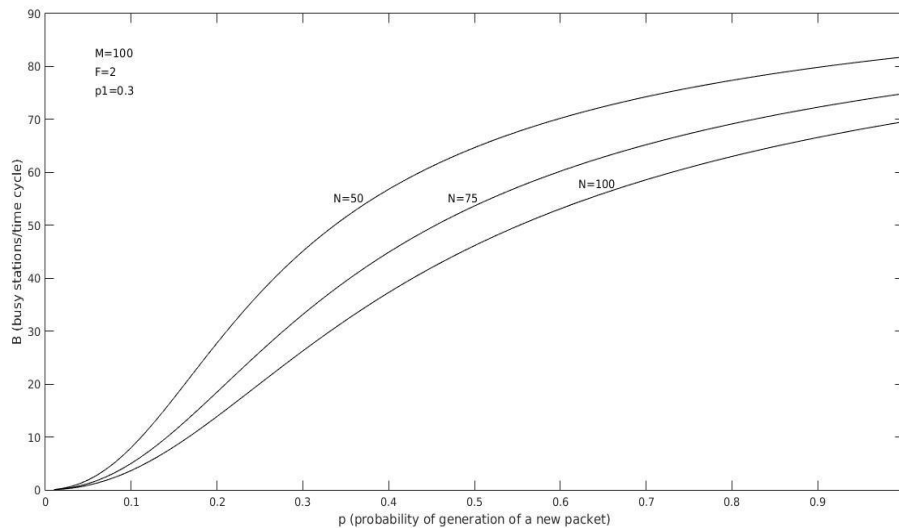
Σχήμα 6-7. Διέλευση S ως προς p για $M = 100$, $F = 2$ και $N = 50, 75, 100$.

Αντίστοιχα με την διέλευση S , η καθυστέρηση D μειώνεται καθώς αυξάνει το N για δεδομένα M, F, p (Σχήμα 6-8), παρά την αύξηση της πιθανότητας απόρριψης στον προορισμό $Prej$. Αυτό συμβαίνει γιατί, καθώς αυξάνει το N , λιγότερα πακέτα συγκρούονται στα κανάλια του πολυδιαυλικού δικτύου. Εντούτοις, η μείωση της καθυστέρησης D δεν είναι ανάλογη αλλά μικρότερη της αύξησης του N αφού, καθώς το N αυξάνει, όλο και πιο πολλά, από τα περισσότερα μεν, επιτυχώς μεταδιδόμενα πακέτα στα κανάλια συγκρούονται στον προορισμό (Πίνακας 6-3). Για παράδειγμα, για $p = 0.9$ το D μειώνεται κατά: 27.78% όταν το N αυξάνει κατά 50.00% (μετάβαση $N = 50 \rightarrow N = 75$) και κατά 17.69% όταν το N αυξάνει κατά 33.33% (μετάβαση $N = 75 \rightarrow N = 100$).



Σχήμα 6-8. Καθυστέρηση D ως προς p για $M = 100$, $F = 2$ και $N = 50, 75, 100$.

Καθώς αυξάνει το N , και για δεδομένα M, F, p , το πλήθος των ενεργών σταθμών B μειώνεται, όπως φαίνεται στο Σχήμα 6-9. Όπως και με την καθυστέρηση D , το πλήθος των ενεργών σταθμών B μειώνεται λιγότερο από όσο αυξάνει το πλήθος των καναλιών N , λόγω της αυξημένης επίδρασης του φαινομένου των συγκρούσεων στον προορισμό (Πίνακας 6-3).



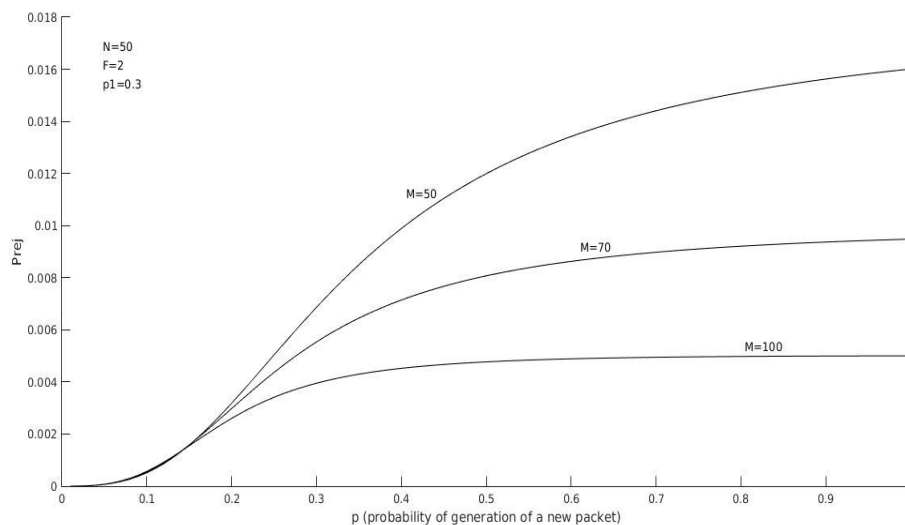
Σχήμα 6-9. Ενεργοί σταθμοί B ως προς p για $M = 100$, $F = 2$ και $N = 50, 75, 100$.

p	μετάβαση N	μεταβολή N	μεταβολή S	μεταβολή D	μεταβολή B
0.1	50 → 75	50.00%	+3.26%	-18.18%	-37.30%
	75 → 100	33.33%	+1.37%	-9.80%	-27.15%
0.2	50 → 75	50.00%	+12.80%	-27.05%	-33.39%
	75 → 100	33.33%	+5.81%	-15.02%	-24.99%
0.4	50 → 75	50.00%	+27.55%	-29.14%	-20.95%
	75 → 100	33.33%	+13.79%	-18.09%	-16.93%
0.9	50 → 75	50.00%	+37.43%	-27.78%	-9.44%
	75 → 100	33.33%	+20.62%	-17.69%	-7.90%

Πίνακας 6-3. Μεταβολή διέλευσης S , καθυστέρησης D και πλήθους ενεργών σταθμών B για $M = 100$, $F = 2$, $p = 0.1, 0.2, 0.4, 0.9$ και διάφορες μεταβάσεις του N .

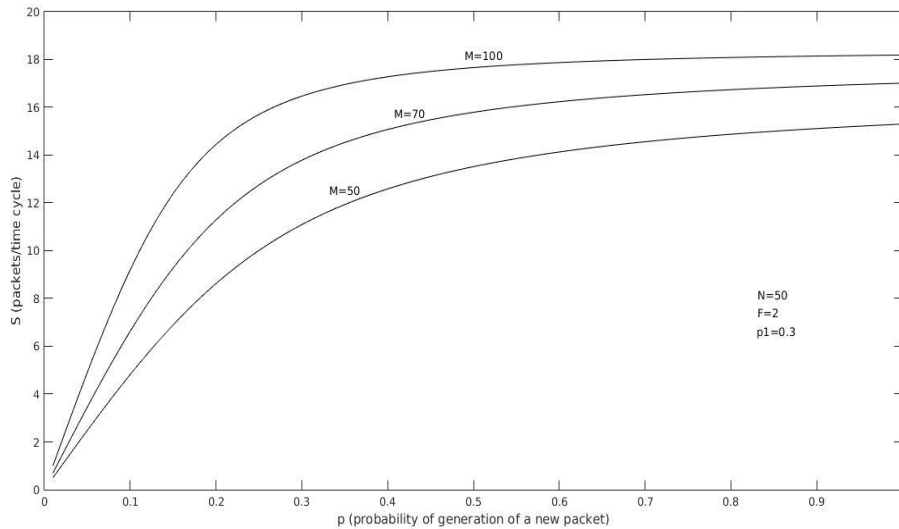
Μεταβολή του πλήθους των σταθμών M

Το Σχήμα 6-10 παρουσιάζει την πιθανότητα απόρριψης στον προορισμό $Prej$ ως συνάρτηση της πιθανότητας γέννησης p όταν το πολυδιαυλικό δίκτυο συγκροτείται από $N = 50$ κανάλια και κάθε σταθμός διαθέτει $F = 2$ συντονιζόμενους δέκτες για διάφορες τιμές πλήθους των σταθμών M . Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα απόρριψης στον προορισμό $Prej$ είναι, για δεδομένα N, F, p , μια φθίνουσα συνάρτηση του πλήθους των σταθμών M . Η ερμηνεία έγκειται στο γεγονός ότι η αύξηση του M για δεδομένα N, F, p οδηγεί σε μείωση της πιθανότητας να προορίζονται τρία ή περισσότερα επιτυχώς μεταδιδόμενα στα κανάλια πακέτα στον ίδιο σταθμό καθώς αυτά πλέον κατανέμονται σε περισσότερους σταθμούς. Για παράδειγμα, για $p = 0.9$ η πιθανότητα απόρριψης στον προορισμό $Prej$ είναι: 1.56% για $M = 50$, 0.94% για $M = 70$ και 0.50% για $M = 100$.



Σχήμα 6-10. Πιθανότητα απόρριψης στον προορισμό $Prej$ ως προς p για $N = 50$, $F = 2$ και $M = 50, 70, 100$.

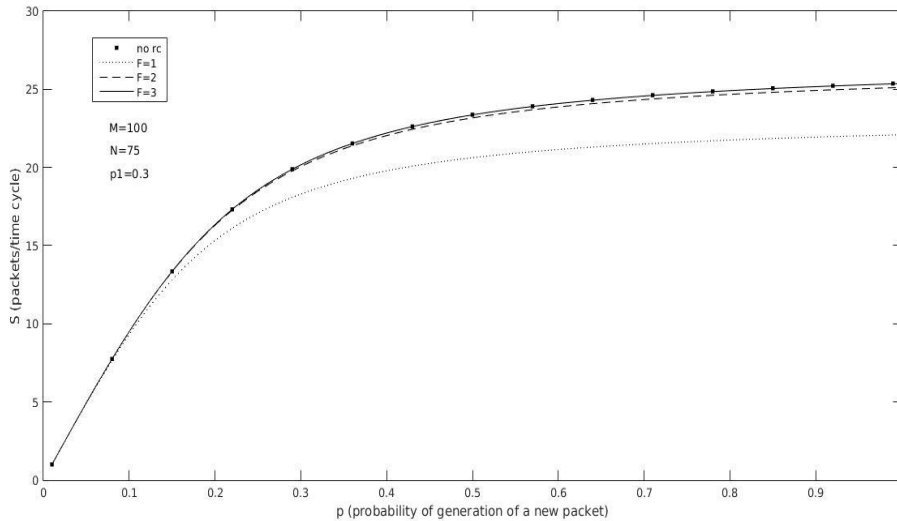
Το Σχήμα 6-11 παρουσιάζει την διέλευση S ως συνάρτηση της πιθανότητας γέννησης p όταν το πολυδιαυλικό δίκτυο συγκροτείται από $N = 50$ κανάλια και κάθε σταθμός διαθέτει $F = 2$ συντονιζόμενους δέκτες για διάφορες τιμές πλήθους των σταθμών M . Παρατηρούμε ότι η διέλευση S είναι, για δεδομένα N, F, p , μια αύξουσα συνάρτηση του πλήθους των σταθμών M . Το γεγονός αυτό δεν είναι προφανές καθώς, για δεδομένα N, F, p , παρατηρούνται τα εξής δύο αντικρουόμενα φαινόμενα: i) αύξηση του M οδηγεί σε αύξηση του φορτίου και, άρα, αύξηση των συγκρούσεων στα κανάλια και ii) αύξηση του M οδηγεί σε μείωση της πιθανότητας τρία ή περισσότερα επιτυχώς μεταδιδόμενα στα κανάλια πακέτα να προορίζονται στον ίδιο σταθμό, εφόσον αυτά κατανέμονται πλέον σε περισσότερους σταθμούς, δηλαδή μείωση των συγκρούσεων στον προορισμό. Παρόλα αυτά, το Σχήμα 6-11 δείχνει ότι, για δεδομένα N, F, p και αύξηση του M , το κέρδος σε διέλευση που οφείλεται στην μείωση των συγκρούσεων στον προορισμό υπερτερεί της ζημίας που προκαλεί σε αυτήν η ισχυροποίηση των συγκρούσεων στα κανάλια, οπότε η διέλευση αυξάνει. Για παράδειγμα, για $p = 0.9$ η διέλευση S (σε πακέτα ανά χρονικό κύκλο) είναι: 15.11 για $M = 50$, 16.89 για $M = 70$ και 18.15 για $M = 100$.



Σχήμα 6-11. Διέλευση S ως προς p για $N = 50$, $F = 2$ και $M = 50, 70, 100$.

6.2 Σύγκριση απόδοσης για μεταβαλλόμενο $F \geq 1$

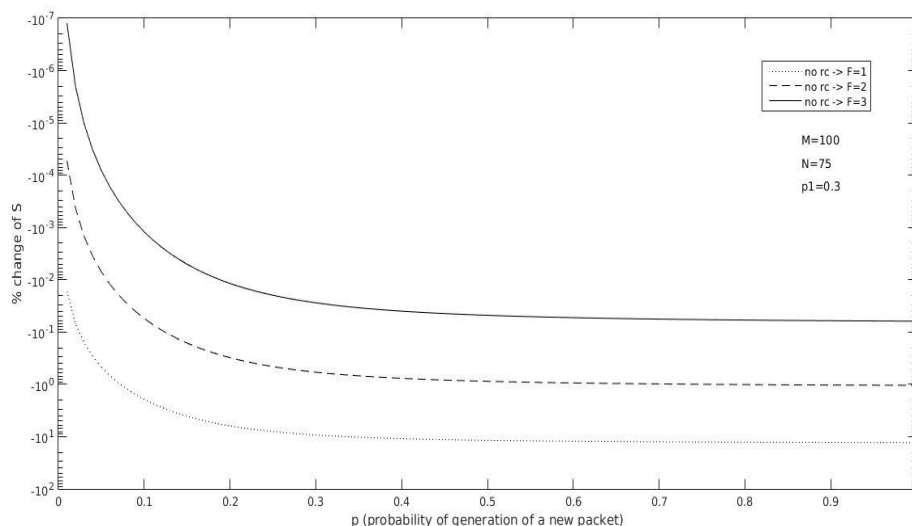
Το Σχήμα 6-12 παρουσιάζει την διέλευση S ως συνάρτηση της πιθανότητας γέννησης p όταν $M = 100$ σταθμοί επικοινωνούν μέσω $N = 75$ καναλιών για τις περιπτώσεις όπου: i) το φαινόμενο των συγκρούσεων στον προορισμό δεν λαμβάνεται υπόψιν (no rc – No Receiver Collisions) και ii) για πλήθος συντονιζόμενων δεκτών ανά σταθμό $F = 1, 2, 3$. Παρατηρούμε ότι, για δεδομένη τιμή $p \geq 0.2$, η διέλευση S είναι αύξουσα συνάρτηση του F και, όπως αναμέναμε, μεγιστοποιείται όταν το φαινόμενο των συγκρούσεων στον προορισμό δεν λαμβάνεται υπόψιν. Η ερμηνεία έγκειται προφανώς στο ότι, για μεγάλες τιμές του φορτίου, αυξάνοντας το πλήθος των δεκτών ανά σταθμό, περισσότερα πακέτα λαμβάνονται ορθά από τους προορισμούς ανά χρονικό κύκλο. Η περίπτωση που το φαινόμενο των συγκρούσεων στον προορισμό δεν λαμβάνεται υπόψιν μοντελοποιείται ως κάθε σταθμός να έχει $F \rightarrow \infty$ πλήθος δεκτών και άρα, για δεδομένο p , θα παρουσιάζει την μέγιστη διέλευση αφού κανένα πακέτο δεν απορρίπτεται από τους προορισμούς. Για παράδειγμα, για $p = 0.9$ η διέλευση S (σε πακέτα ανά χρονικό κύκλο) είναι: 25.19 όταν το φαινόμενο των συγκρούσεων στον προορισμό δεν λαμβάνεται υπόψιν, 21.94 για $F = 1$, 24.93 για $F = 2$ και 25.17 για $F = 3$.



Σχήμα 6-12. Διέλευση S ως προς p για $M = 100$, $N = 75$ όταν: i) το φαινόμενο των συγκρούσεων στον προορισμό δεν λαμβάνεται υπόψιν (no rc) και ii) $F = 1, 2, 3$.

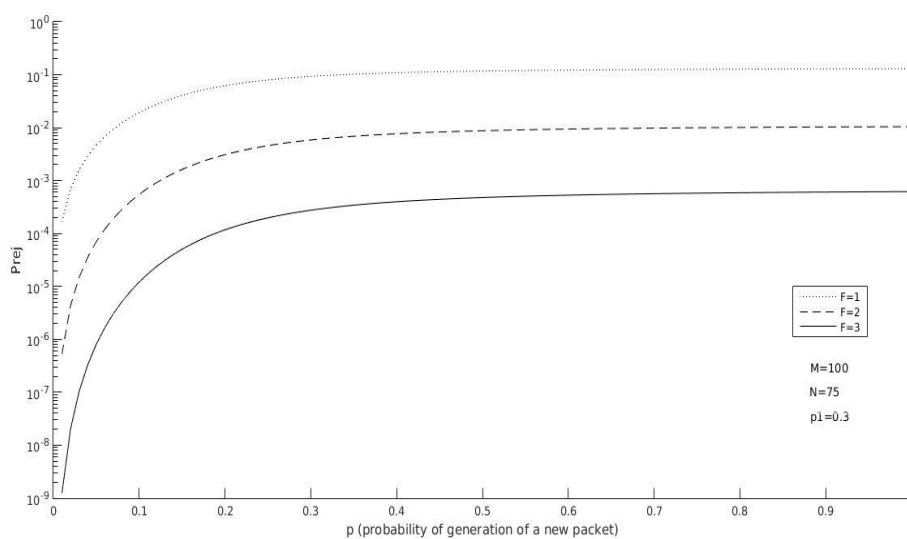
Ωστόσο, από το Σχήμα 6-12 είναι φανερό ότι, για αυξανόμενο πλήθος δεκτών ανά σταθμό, η διέλευση S : για τιμές $p < 0.1$ παραμένει σχεδόν αμετάβλητη, για τιμές $0.1 \leq p < 0.2$ παρουσιάζει μικρή αύξηση και μόνο για τιμές $p \geq 0.2$ βελτιστοποιείται σημαντικά. Η παρατήρηση αυτή ισχυροποιείται από το Σχήμα 6-13 που παρουσιάζει την επί τοις % μεταβολή της διέλευσης S ως προς p για $M = 100$, $N = 75$ καθώς μεταβαίνουμε από την αγνόηση του φαινομένου των συγκρούσεων στον προορισμό σε $F = 1, 2, 3$. Η ερμηνεία έγκειται στο ότι, για μικρές τιμές του φορτίου, τα λίγα πακέτα που μεταδίδονται επιτυχώς στα κανάλια έχουν μικρή πιθανότητα να προορίζονται στον ίδιο σταθμό, με αποτέλεσμα να λαμβάνεται ορθά από τους προορισμούς το ίδιο πλήθος πακέτων (τα περισσότερα από όσα μεταδόθηκαν επιτυχώς στα κανάλια) ανεξάρτητα από το αν κάθε σταθμός διαθέτει έναν ή περισσότερους δέκτες.

Συνεπώς, για μικρές τιμές $p < 0.2$, οι $F = 2$ δέκτες είναι αρκετοί προκειμένου η διέλευση να προσεγγίσει με ικανοποιητική ακρίβεια την τιμή που αυτή έχει όταν δεν λαμβάνεται καθόλου υπόψιν το φαινόμενο των συγκρούσεων στον προορισμό, δηλαδή ισχύει ότι $S_{F=2} \cong S_{no\ rc}$, για $p < 0.2$. Παρόλα αυτά, για μεγαλύτερες τιμές του p , το φαινόμενο των συγκρούσεων στον προορισμό πρακτικά εξαλείφεται για $F = 3$, αφού $S_{F=3} \cong S_{no\ rc}$, για $p \geq 0.2$. Το αποτέλεσμα αυτό είναι πολύ σημαντικό αφού μόνο με $F = 3$ συντονιζόμενους δέκτες ανά σταθμό μπορεί κανείς να πετύχει την διέλευση που θα πετύχαινε αν χρησιμοποιούσε $F \in [4, \infty)$ δέκτες ανά σταθμό, το οποίο συνιστά τεράστια εξοικονόμηση πόρων. Οι τιμές του Πίνακα 6-4 επιβεβαιώνουν αυτά τα συμπεράσματα.



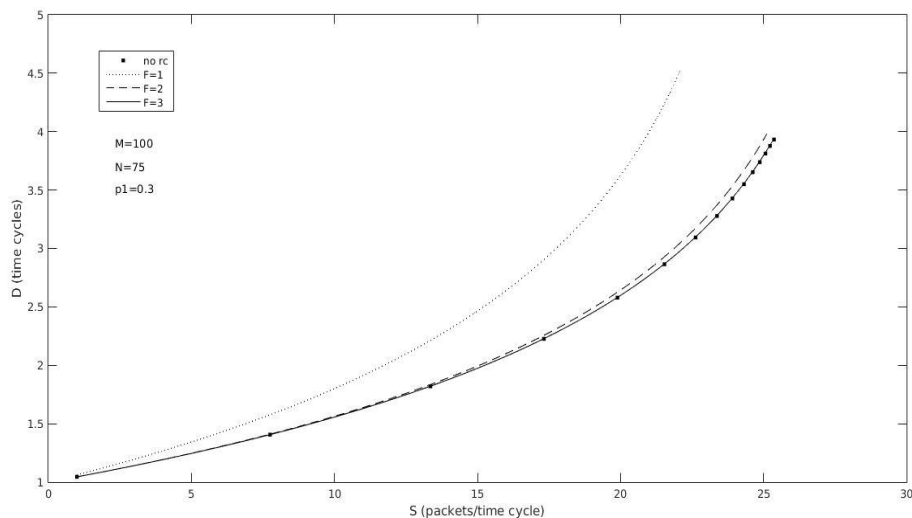
Σχήμα 6-13. Επί τοις % μεταβολή της διέλευσης S ως προς p για $M = 100$, $N = 75$ κατά την μετάβαση από την αγνόηση του φαινομένου των συγκρούσεων στον προορισμό σε $F = 1, 2, 3$.

Ανάλογα συμπεράσματα με την επί τοις % μεταβολή της διέλευσης S προκύπτουν και από το Σχήμα 6-14, που παρουσιάζει την πιθανότητα απόρριψης στον προορισμό $Prej$ ως συνάρτηση της πιθανότητας γέννησης p όταν $M = 100$ σταθμοί επικοινωνούν χρησιμοποιώντας τα $N = 75$ κανάλια του πολυδιαυλικού δικτύου για πλήθος συντονιζόμενων δεκτών ανά σταθμό $F = 1, 2, 3$. Δηλαδή, ισχύει ότι: $Prej_{F=2} \cong 0.00\%$, για $p < 0.2$ και $Prej_{F=3} \cong 0.00\%$, για $p \geq 0.2$. Ενδεικτικές τιμές της πιθανότητας απόρριψης $Prej$ για διάφορες τιμές των p, F παρατίθενται στον Πίνακα 6-4.



Σχήμα 6-14. Πιθανότητα απόρριψης στον προορισμό $Prej$ ως προς p για $M = 100$, $N = 75$ και $F = 1, 2, 3$.

Το Σχήμα 6-15 παρουσιάζει την καθυστέρηση D ως συνάρτηση της διέλευσης S για τις περιπτώσεις όπου: i) το φαινόμενο των συγκρούσεων στον προορισμό δεν λαμβάνεται υπόψιν και ii) για πλήθος συντονιζόμενων δεκτών ανά σταθμό $F = 1, 2, 3$. Παρατηρούμε ότι η αύξηση του πλήθους των δεκτών ανά σταθμό, εκτός από την αύξηση της διέλευσης S , συντελεί στην μείωση της καθυστέρησης D . Ωστόσο, προκειμένου να πετύχει κανείς διέλευση $S_{no rc}$ και καθυστέρηση $D_{no rc}$, δεν χρειάζεται να δαπανήσει περισσότερους από $F = 3$ δέκτες ανά σταθμό, αφού ισχύει ότι: $S_{F=3} \cong S_{no rc}$ και $D_{F=3} \cong D_{no rc}$. Οι τιμές του Πίνακα 6-4 επιβεβαιώνουν αυτές τις παρατηρήσεις.



Σχήμα 6-15. Καθυστέρηση D ως προς τη διέλευση S για $M = 100$, $N = 75$ όταν: i) το φαινόμενο των συγκρούσεων στον προορισμό δεν λαμβάνεται υπόψιν (no rc) και ii) $F = 1, 2, 3$.

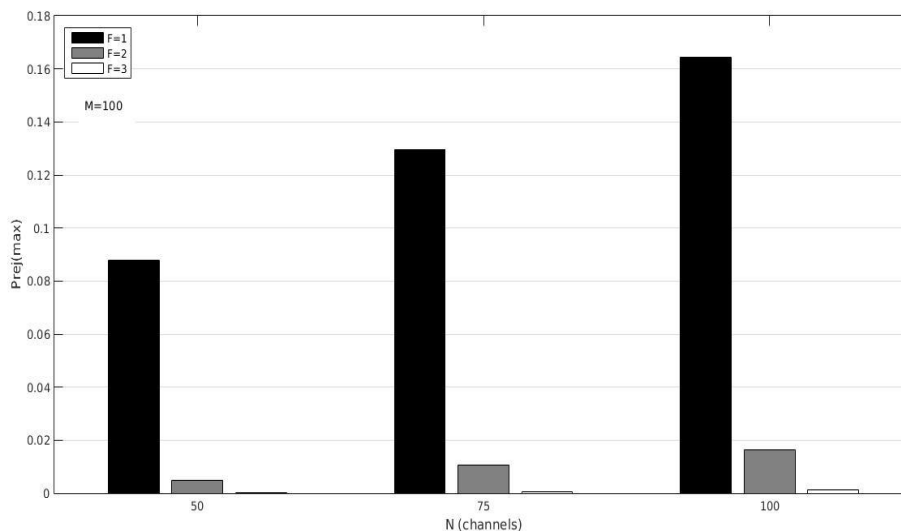
p	μεταβολή S $no rc \rightarrow$ $F = 1$	μεταβολή S $no rc \rightarrow$ $F = 2$	μεταβολή S $no rc \rightarrow$ $F = 3$	$Prej_{F=1}$	$Prej_{F=2}$	$Prej_{F=3}$	μεταβολή D $no rc \rightarrow$ $F = 1$	μεταβολή D $no rc \rightarrow$ $F = 2$	μεταβολή D $no rc \rightarrow$ $F = 3$
0.1	-1.89%	0.00%	0.00%	1.93%	0.05%	0.00%	+13.82	+0.66%	0.00%
0.2	-6.06%	-0.31%	0.00%	6.22%	0.31%	0.01%	+19.43%	+0.95%	0.00%
0.3	-9.27%	-0.55%	0.00%	9.30%	0.59%	0.03%	+19.47%	+7.63%	0.00%
0.9	-12.90%	-1.03%	-0.08%	12.87%	1.03%	0.06%	+15.28%	+1.04%	0.00%

Πίνακας 6-4. Μεταβολή της διέλευσης S , πιθανότητα απόρριψης στον προορισμό $Prej$ και μεταβολή της καθυστέρησης D για $M = 100$, $N = 75$ και $p = 0.1, 0.2, 0.3, 0.9$ κατά την μετάβαση από την αγνόηση του φαινομένου των συγκρούσεων στον προορισμό σε $F = 1, 2, 3$.

Το Σχήμα 6-16 παρουσιάζει την μέγιστη πιθανότητα απόρριψης στον προορισμό $Prej(max)$ για $M = 100$, $N = 50, 75, 100$ και $F = 1, 2, 3$. Όπως ακριβώς περιμέναμε, το $Prej(max)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του F για δεδομένο N . Η ερμηνεία έγκειται στο ότι, καθώς το πλήθος των δεκτών ανά σταθμό αυξάνει, το φαινόμενο των συγκρούσεων στον προορισμό εξασθενεί, επομένως περισσότερα πακέτα λαμβάνονται ορθά από τους προορισμούς ανά χρονικό κύκλο. Για παράδειγμα, για $N = 50$ η μέγιστη πιθανότητα απόρριψης στον προορισμό $Prej(max)$ είναι: 8.79% για $F = 1$, 0.50% για $F = 2$ και 0.02% για $F = 3$.

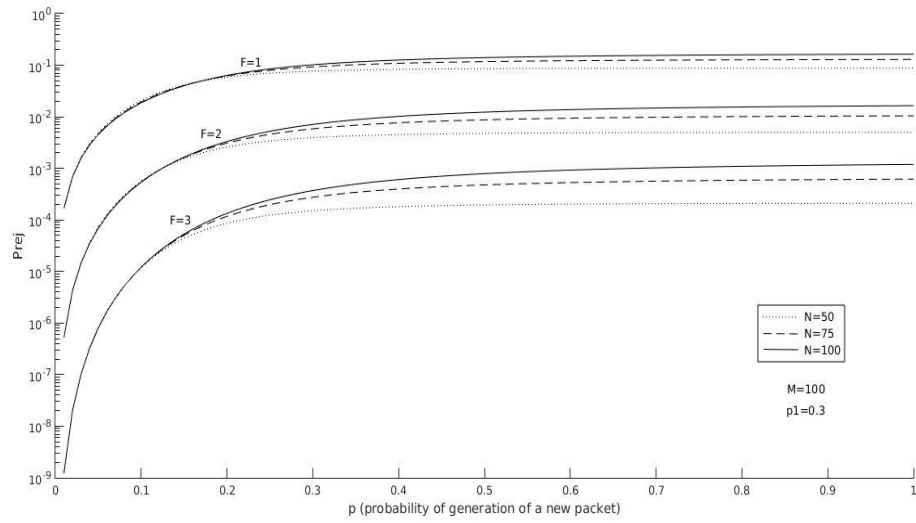
Ακόμα, η πιθανότητα $Prej(max)$ είναι αύξουσα συνάρτηση του N για δεδομένο F . Η ερμηνεία έγκειται στο ότι, καθώς το πλήθος των καναλιών αυξάνει, το φαινόμενο των συγκρούσεων στα κανάλια εξασθενεί, με αποτέλεσμα το φαινόμενο των συγκρούσεων στον προορισμό να γίνεται εντονότερο. Το τελευταίο συμβαίνει γιατί, για μεγαλύτερο πλήθος καναλιών, περισσότερα πακέτα κατανέμονται στους προορισμούς (για τα οποία έχει προηγηθεί επιτυχής μετάδοσή τους στα κανάλια του πολυδιαυλικού δικτύου), επομένως αυξάνει η πιθανότητα τουλάχιστον $(F + 1)$ πακέτα να προορίζονται στον ίδιο σταθμό. Για παράδειγμα, για $F = 3$ η πιθανότητα $Prej(max)$ είναι: 0.02% για $N = 50$, 0.06% για $N = 75$ και 0.12% για $N = 100$.

Από τις τελευταίες δύο παρατηρήσεις, η μετάβαση από $F = 2$ σε $F = 3$ αποκτά μεγαλύτερη αξία καθώς το πλήθος των καναλιών του πολυδιαυλικού δικτύου αυξάνει, με τους $F = 3$ δέκτες ανά σταθμό να είναι αρκετοί ώστε πρακτικά να εξαλείφεται το φαινόμενο των συγκρούσεων στον προορισμό. Για παράδειγμα, για $N = 50$ και $F = 2$ η τιμή του $Prej(max)$ είναι 0.50% και μειώνεται σε 0.02% για $F = 3$, ενώ για $N = 100$ και $F = 2$ είναι $Prej(max) = 1.64%$ και για $F = 3$ μειώνεται σε 0.12%.

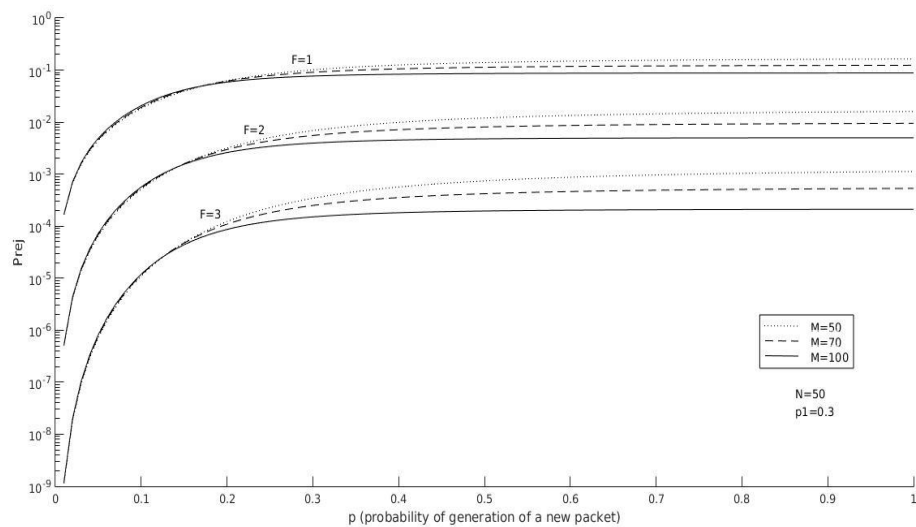


Σχήμα 6-16. Μέγιστη πιθανότητα απόρριψης στον προορισμό $Prej(max)$ για $M = 100$, $N = 50, 75, 100$ και $F = 1, 2, 3$.

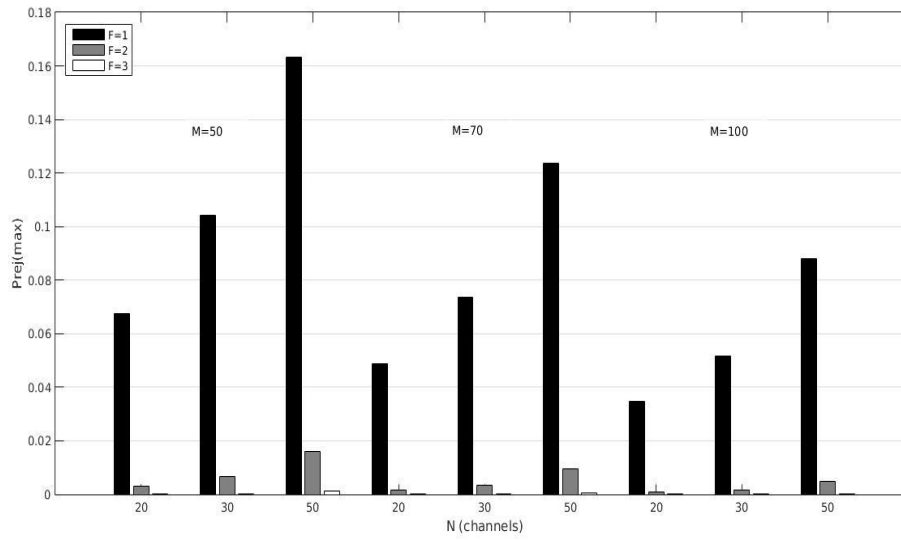
Τα Σχήματα 6-17, 6-18 και 6-19 επαληθεύουν τα παραπάνω συμπεράσματά μας.



Σχήμα 6-17. Πιθανότητα απόρριψης στον προορισμό $Prej$ ως προς p για $M = 100$, $N = 50, 75, 100$ και $F = 1, 2, 3$.



Σχήμα 6-18. Πιθανότητα απόρριψης στον προορισμό $Prej$ ως προς p για $N = 50$, $M = 50, 70, 100$ και $F = 1, 2, 3$.



Σχήμα 6-19. Μέγιστη πιθανότητα απόρριψης στον προορισμό $Prej(max)$ για $M = 50, 70, 100$, $N = 20, 30, 50$ και $F = 1, 2, 3$.

Παραρτήματα

Παράρτημα Α: Ορθότητα - ακρίβεια των αποτελεσμάτων και χρόνος εκτέλεσης των πράξεων

Η αποτίμηση της απόδοσης του συστήματος θα ήταν μια σχετικά εύκολη διαδικασία αν δεν μας ενδιέφερε η μεγάλη ακρίβεια των αποτελεσμάτων και ο χρόνος ολοκλήρωσης των πράξεων. Πιο συγκεκριμένα, ο χειρισμός πολύ μικρών/μεγάλων αριθμών και οι πράξεις με αυτούς σε μια γλώσσα όπως η C δημιουργούσε προβλήματα ορθότητας των αποτελεσμάτων (π.χ. σε περίπτωση διαίρεσης με έναν πολύ μικρό αριθμό για την εύρεση κάποιας πιθανότητας προέκυπταν τεράστια νούμερα τα οποία ξέφευγαν κατά πολύ από το να συνεχίζουν να αναπαριστούν πιθανότητες). Αφετέρου, οι πολλές παράμετροι του συστήματος (M, N, F, p), για διαφορετικούς συνδυασμούς των οποίων έπρεπε να γίνει η αποτίμηση και μελέτη της απόδοσης του συστήματος καθώς και η σχεδίαση των κατάλληλων γραφικών με χρήση ενός εργαλείου όπως το MATLAB το οποίο αργεί κάθε φορά να «σηκωθεί», κατέστησε επιτακτική την ανάγκη για μείωση του χρόνου εκτέλεσης των πράξεων για δεδομένα M, N, F, p .

A.1 Ορθότητα - ακρίβεια των αποτελεσμάτων

Στην υποενότητα αυτή περιγράφονται οι τρόποι με τους οποίους λύσαμε το πρόβλημα της ακρίβειας των αποτελεσμάτων για μεγάλες τιμές του M (π.χ. $M = 100$) και $N \leq M$, εξασφαλίζοντας την ορθότητα των αποτελεσμάτων για κάθε συνδυασμό παραμέτρων M, N, F, p .

A.1.1 Χρήση GMP library για ορθότητα - ακρίβεια πράξεων με πολύ μικρούς/μεγάλους αριθμούς

Η GNU Multiple Precision Arithmetic Library (GMP) αποτελεί μέρος του GNU project και είναι μια δωρεάν βιβλιοθήκη για αριθμητικές πράξεις αυθαίρετης ακρίβειας σε προσημασμένους ακέραιους, ρητούς και αριθμούς κινητής υποδιαστολής. Η GMP πρακτικά δεν έχει περιορισμούς ως προς την ακρίβεια εκτός από τους περιορισμούς που επιβάλλει η μνήμη του μηχανήματος στο οποίο αυτή τρέχει. Διαθέτει ένα πλούσιο σύνολο συναρτήσεων οι οποίες είναι διαθέσιμες μέσω μιας διαπροσωπείας (interface), με τη βασική διαπροσωπεία να έχει κατασκευαστεί για τη γλώσσα προγραμματισμού C.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, η GMP χρησιμοποιήθηκε στον υπολογισμό των πιθανοτήτων $Pr[S(x) = y]$ και $Pr[A_{F=1}(y) = z]$ όπως επίσης και στον υπολογισμό των $bin(i, j, p)$ και των τιμών του παραγοντικού. Ακόμα, έγινε χρήση της στις πράξεις που απαιτούνται για την υλοποίηση σε C της μεθόδου απαλοιφής Gauss, με την τελευταία να χρησιμοποιείται στην επίλυση του ακόλουθου συστήματος γραμμικών εξισώσεων:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{P} \\ \sum_{i=0}^M \pi_i = 1 \end{cases}$$

Χωρίς χρήση της GMP, οι πράξεις αποτίμησης της απόδοσης του συστήματος τις οποίες θα μπορούσαμε να κάνουμε όντας βέβαιοι για την ορθότητα των αποτελεσμάτων μας θα περιορίζονταν σε μικρά M (π.χ. $M \leq 20$). Με τη χρήση αυτής της βιβλιοθήκης, και ορίζοντας ακρίβεια 2048 bits για αριθμούς κινητής υποδιαστολής, μπορούμε να υπολογίζουμε την απόδοση του συστήματος και για μεγαλύτερες τιμές του M (π.χ. $M = 100$) με την ορθότητα των αποτελεσμάτων να είναι εξασφαλισμένη. Έτσι, δίνεται η δυνατότητα να μελετήσουμε το σύστημά μας σε ένα αρκετά μεγαλύτερο υποσύνολο του χώρου του συστήματος (όπως αυτός ορίζεται από τις παραμέτρους του) εξάγοντας πιο ασφαλή συμπεράσματα για τη συμπεριφορά του.

A.1.2 Χρήση Prolog και bc calculator για ορθότητα - ακρίβεια των πράξεων υπολογισμού της $Pr[A_{F>1}(y) = z]$

Εκτός της χρήσης της γλώσσας προγραμματισμού Prolog για την επαλήθευση της ορθότητας του τύπου για το $Pr[A_{F>1}(y) = z]$ (μέσω της γέννησης των όλων των δυνατών ενδεχομένων), η γλώσσα Prolog εξυπηρέτησε, σε συνδυασμό και με τον bash bc (arbitrary precision calculator language), κι έναν άλλο πολύ σημαντικό σκοπό: την ορθότητα των αποτελεσμάτων μέσω της ακρίβειάς της στον υπολογισμό πολύ μεγάλων αριθμών που απαιτούνται για τον υπολογισμό του $Pr[A_{F>1}(y) = z]$, όπως είναι το παραγοντικό μεγάλων αριθμών, δυνατότητα την οποία δεν διαθέτει η C.

Συγκεκριμένα, για δεδομένα M, F , υπολογίζουμε, χρησιμοποιώντας την Prolog, το πλήθος των γεγονότων όπου έχουμε ακριβώς z το πλήθος ορθές λήψεις από τους προορισμούς όταν στους M το πλήθος σταθμούς κατανέμονται y το πλήθος πακέτα (τα οποία έχουν μεταδοθεί επιτυχώς στα κανάλια). Να σημειώσουμε ότι, εδώ, η αξία της Prolog δεν έγκειται μόνο στη δυνατότητά της να υπολογίζει με μεγάλη ακρίβεια τεράστιους αριθμούς (όπως το παραγοντικό μεγάλων αριθμών) αλλά και η ίδια η φύση της γλώσσας βοηθάει γιατί απλουστεύει την προγραμματιστική υλοποίηση της συνάρτησης υπολογισμού του προαναφερόμενου πλήθους γεγονότων. Στην συνέχεια, χρησιμοποιούμε τον bc calculator, έχοντας θέσει την ακρίβειά του στα 15 δεκαδικά ψηφία, για να διαιρέσουμε το αποτέλεσμα που υπολογίζει η Prolog με την ποσότητα M^y και να λάβουμε, τελικά, την ζητούμενη πιθανότητα $Pr[A_{F>1}(y) = z]$. Ο bc calculator έρχεται δηλαδή εδώ να συμπληρώσει την Prolog λόγω του ότι η τελευταία υστερεί στην ακρίβεια υπολογισμού πολύ μικρών (δεκαδικών) αριθμών.

A.2 Μεγάλος χρόνος εκτέλεσης των πράξεων

Στην υποενότητα αυτή περιγράφονται οι τρόποι με τους οποίους μειώσαμε το χρόνο εκτέλεσης των πράξεων αποτίμησης της απόδοσης για δεδομένο ζεύγος τιμών M, F αλλά και για δεδομένο M . Να αναφέρουμε ότι, όπου ήταν δυνατόν, αποθηκεύαμε ενδιάμεσα

αποτελέσματα τόσο στη C όσο και στην Prolog με τα πρώτα να αποθηκεύονται σε πίνακες και τα δεύτερα να εισάγονται δυναμικά με το κατηγορήμα `assert` στη βάση δεδομένων της Prolog.

A.2.1 Βελτιστοποιήσεις χρονικής πολυπλοκότητας του αλγορίθμου υπολογισμού της μήτρας μετάβασης σε ένα βήμα P

Στην υποενότητα αυτή περιγράφουμε τις βελτιστοποιήσεις που έγιναν προκειμένου να μειωθεί ο συνολικός χρόνος εκτέλεσης των πράξεων υπολογισμού της μήτρας μετάβασης P που αφορούν σε μια συγκεκριμένη τριάδα τιμών M, N, F με το p να μεταβάλλεται σε κάθε μία από αυτές. Για τις βελτιστοποιήσεις αυτές, εκμεταλλευτήκαμε τόσο τη μορφή των εξισώσεων που περιγράφουν τη μήτρα μετάβασης P όσο και την επαναχρησιμοποίηση δεδομένων σε αυτές.

Οι σχέσεις (5.5) – (5.9), που περιγράφουν τη μήτρα μετάβασης σε ένα βήμα P, υλοποιήθηκαν στη γλώσσα προγραμματισμού C προκειμένου να αποτιμηθεί και στη συνέχεια να μελετηθεί η απόδοση του υπό εξέταση πολυδιαυλικού συστήματος. Στην υποενότητα αυτή, θα αναφερόμαστε σε καθέναν από τους όρους κάθε σχέσης (5.5) – (5.9), ο οποίος απαιτεί τον υπολογισμό ενός τριπλού αθροίσματος, ως ένα ξεχωριστό *case*.

Τυπικό παράδειγμα ενός *case* αποτελεί η παρακάτω μαθηματική σχέση, που αποτελεί τον πρώτο από τους τρεις όρους της σχέσης (5.7):

$$\sum_{m=0}^{M-i} Q_{m,i} \sum_{n=i-j}^{N-m} q_{n,i} \sum_{s=0}^{n+j-i} \Phi_F(n+m, i-j+m+s, m+i-j) \quad (A.1)$$

Κατά την εκτέλεση των πράξεων για την αποτίμηση της απόδοσης, παρατηρήσαμε ότι ο χρόνος που απαιτούνταν για να τρέξει το πρόγραμμά μας και να υπολογιστεί ο πίνακας μετάβασης P για μια τιμή του p (πιθανότητα μετάδοσης ενός πακέτου από έναν ελεύθερο σταθμό) ήταν απαγορευτικός, πόσο μάλλον για όλες τις τιμές του p (συνολικά 100 ομοιόμορφα κατανομημένες στο διάστημα $[0,1]$). Αυτό συνέβαινε γιατί ο υπολογισμός του πίνακα P απαιτεί, στη χειρότερη περίπτωση, για κάθε ζεύγος τιμών i, j ($i, j \in [0, M]$ με $i+j = M$) τον υπολογισμό ενός ή περισσότερων αθροισμάτων (*cases*), καθένα εκ των οποίων περιέχει ένα εμφωλευμένο άθροισμα που, με τη σειρά του, περιέχει ένα ακόμα εμφωλευμένο άθροισμα. Στο εξωτερικότερο εκ των τριών αθροισμάτων τρέχει πάντα ο δείκτης m , στο αμέσως επόμενο ο δείκτης n και στο εσωτερικότερο ο δείκτης s , όπου:

$m \in [0, M-i]$ = το πλήθος των ελεύθερων σταθμών που επιχειρούν μετάδοση πακέτου κατά τη διάρκεια του χρονικού κύκλου

$n \in [0, i]$ = το πλήθος των ενεργών σταθμών που επιχειρούν μετάδοση πακέτου κατά τη διάρκεια του χρονικού κύκλου

s = το πλήθος των πακέτων που απορρίπτονται από τους προορισμούς λόγω του φαινομένου συγκρούσεων στον προορισμό ($s \leq \min(N, m+n) \leq M$)

Για παράδειγμα, το *case* που περιγράφεται από την σχέση (A.1) περιγράφονταν, αρχικά, στο C πρόγραμμα που γράψαμε από το ακόλουθο κομμάτι κώδικα:


```

sum1=0;
for(m=0;m<=M-i;m++){
  sum2=0;
  for(n=i-j;n<=N-m;n++){
    sum3=0;
    for(s=0;s<=n+j-i;s++){
      sum3+=Fi(n+m,i-j+m+s,m+i-j,M,N,F);
      sum2+=q(n,i)*sum3;
    }
    sum1+=Q(m,i,M,p)*sum2;
  }
}

```

Πίνακας A-1. Αρχική υλοποίηση σε C της σχέσης (A. 1)

Συνεπώς, θεωρώντας για απλότητα ότι κάθε ενδιάμεση συνάρτηση και υπολογισμός, όπως ο υπολογισμός κάθε τιμής $\Phi_F(x, y, z)$, απαιτεί χρόνο $O(1)$, η χρονική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου υπολογισμού του πίνακα P ήταν $O(M^5)$ για κάθε μία τιμή του p οπότε, συνολικά, και για τις 100 τιμές του p ήταν $100 O(M^5)$. Αυτό ασυμπτωτικά είναι το ίδιο με $O(M^5)$ αλλά για πρακτικές τιμές $M \leq 100$, τις οποίες μελετάμε στην παρούσα διπλωματική, ο συντελεστής 100 με τον οποίο πολλαπλασιάζουμε έχει σημασία. Άρα, για μεγάλες τιμές του M ο υπολογισμός ήταν ιδιαίτερα χρονοβόρος. Το ζητούμενο λοιπόν ήταν η μείωση της χρονικής πολυπλοκότητας του αλγορίθμου.

Σε πρώτη φάση, παρατηρήσαμε ότι, στο εσωτερικότερο άθροισμα ενός *case*, οι τιμές που αθροίζονται είναι αυτές του πίνακα $\Phi_F(n + m, z + s, z)$ όπου $n + m \leq M, z + s \leq \min(N, n + m) \leq M, s \geq 0$ και ότι ο δείκτης s πάνω στον οποίο τρέχει το άθροισμα εντοπίζεται μόνο σε μία από τις τρεις παραμέτρους του πίνακα Φ_F που είναι η μεσαία ($z + s$). Αυτό μας επέτρεψε να μειώσουμε την χρονική πολυπλοκότητα υπολογισμού αυτού του αθροίσματος από $O(M)$ σε $O(1)$ ως εξής:

(i) Χρησιμοποιήσαμε στο πρόγραμμά μας έναν νέο πίνακα, τον *Fi_partial_sums*, στον οποίο αποθηκεύσαμε στην τυχαία θέση του, *Fi_partial_sums[x][y][z]*, το μερικό άθροισμα $\sum_{b=0}^y \Phi_F(x, b, z)$.

(ii) Κάθε φορά που απαιτούνταν ο υπολογισμός του εσωτερικότερου εκ των τριών αθροισμάτων ενός *case*, το οποίο είναι πάντα της μορφής:

$$\sum_{s=0}^{s_{max}} \Phi_F(n + m, z + s, z) \quad (A. 2)$$

εμείς δεν κάναμε τις αναγραφόμενες αθροίσεις (κάτι που θα απαιτούσε χρόνο $O(M)$) αλλά υπολογίζαμε το ζητούμενο σε χρόνο $O(1)$ εκμεταλλευόμενοι ότι:

- αν $z \geq 1$ τότε:

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{s_{max}} \Phi_F(n + m, z + s, z) &= \\ &= Fi_partial_sums[n + m][z + s_{max}][z] - Fi_partial_sums[n + m][z - 1][z] \end{aligned} \quad (A. 3)$$

- αν $z = 0$ τότε:

$$\sum_{s=0}^{s_{max}} \Phi_F(n+m, z+s, z) = Fi_partial_sums[n+m][z+s_{max}][z] \quad (A.4)$$

Μέχρι αυτό το σημείο, καταφέραμε, χωρίς να απαιτήσουμε υπερβολικά μεγάλη μνήμη, να μειώσουμε τη συνολική χρονική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου υπολογισμού του πίνακα P για όλες τις τιμές του p από 100 $O(M^5)$ σε 100 $O(M^4)$, εφόσον ο κώδικας του Πίνακα A-1 μετασχηματίζεται τώρα στον ακόλουθο (ο οποίος απαιτεί χρόνο $O(M^2)$ από $O(M^3)$ που ήταν προηγουμένως):

```

sum1=0;
for(m=0;m<=M-i;m++){
  sum2=0;
  for(n=i-j;n<=N-m;n++){
    sum3=0;
    if(i-j+m-1>=0){
      sum3=Fi_partial_sums[n+m][m+n][m+i-j]-Fi_partial_sums[n+m][i-j+m-1][m+i-j];
    }
    else{
      sum3=Fi_partial_sums[n+m][m+n][m+i-j];
    }
    sum2+=q(n,i)*sum3;
  }
  sum1+=Q(m,i,M,p)*sum2;
}

```

Πίνακας A-2. Βελτιωμένη συγκριτικά με τον Πίνακα A-1, ως προς την χρονική πολυπλοκότητα, υλοποίηση σε C της σχέσης (A. 1)

Στην επόμενη βελτιστοποίηση στην οποία προχωρήσαμε (και η οποία μπορεί να απενεργοποιηθεί αν το πρόγραμμα γίνει gcc compile με το flag $-D_LOW_MEM$ ώστε να μην καταναλώνεται περισσότερη μνήμη από όση ένα μηχάνημα με περιορισμένη μνήμη διαθέτει, π.χ. υπολογιστές με 1GB RAM) εκμεταλλευόμαστε το γεγονός ότι στο 2^ο εσωτερικότερο άθροισμα (π.χ. της σχέσης (A. 1)) έχουμε επαναχρησιμοποίηση δεδομένων σε υψηλό βαθμό αφού αυτό είναι πάντα της μορφής:

$$\sum_{n=g_1}^{g_2} q_{n,i} \sum_{s=0}^{s_{max}} \Phi_F(n+m, z+s, z) \quad (A.5)$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι, για δεδομένο ζεύγος τιμών i, j καθώς και για συγκεκριμένο *case*, ώστε τα όρια g_1 και g_2 μεταξύ των οποίων τρέχει η παράμετρος n να είναι τα ίδια, η ποσότητα (A.5) εξαρτάται μόνο από την παράμετρο m και την πιθανότητα p_1 , με την τελευταία να την κρατάμε σταθερή και ίση με 0.3 σε όλη την ανάλυση και, κατ' επέκταση, στο πρόγραμμα C που γράψαμε (υπενθυμίζουμε ότι η υπό συνθήκη πιθανότητα $q_{n,i}$ εξαρτάται από την πιθανότητα p_1 και όχι την p την οποία μεταβάλλουμε). Οπότε, στο κομμάτι κώδικα C που περιγράφει κάθε *case* και για δεδομένα i, j , η ποσότητα της σχέσης (A.5) είναι συνάρτηση μόνο του m , καθώς η πιθανότητα p παίρνει διάφορες τιμές στο εύρος $[0,1]$. Στο γεγονός ότι η ποσότητα της σχέσης (A.5) είναι ανεξάρτητη του (μεταβαλλόμενου) p οφείλεται η 2^η αυτή βελτιστοποίηση καθώς η ίδια ποσότητα (όπως παρατηρήσαμε) επαναχρησιμοποιείται καθώς το p μεταβάλλεται, πάντα αναφερόμενοι στα ίδια *case*, i, j, m .

Έτσι, εισάγαμε έναν νέο πίνακα στον κώδικα C, τον *Two_inner_sums*, η θέση *Two_inner_sums[case][i][j][m]* του οποίου περιέχει την ποσότητα που εκφράζει η σχέση

(A. 5) για μια συγκεκριμένη περίπτωση *case* (π.χ. αυτή που περιγράφεται από την σχέση (A. 1)), ένα ζεύγος τιμών i, j (όπου $i =$ πλήθος των ενεργών σταθμών στην αρχή ενός χρονικού κύκλου και $j =$ πλήθος των ενεργών σταθμών στο τέλος του ίδιου χρονικού κύκλου) και ένα συγκεκριμένο m (= πλήθος ελεύθερων σταθμών που επιχειρούν μετάδοση πακέτου κατά τη διάρκεια του χρονικού κύκλου). Όλες οι θέσεις αυτού του πίνακα αρχικοποιούνται στο πρόγραμμα μας στην τιμή -1 και, μετά την 1^{η} φορά που απαιτείται ο υπολογισμός κάθε μίας (όταν υπολογιστεί, αποθηκεύεται στην κατάλληλη θέση του πίνακα *Two_inner_sums* οπότε η τιμή αυτής της θέσης γίνεται ≥ 0 , εφόσον οι αθροιζόμενες ποσότητες είναι όλες μη αρνητικές), αυτή είναι έτοιμη προς χρήση στην αντίστοιχη θέση του πίνακα (είναι πλέον $\neq -1$) χωρίς να απαιτείται εκ νέου ο υπολογισμός της.

Λαμβάνοντας υπόψιν και αυτή τη βελτιστοποίηση, η συνολική χρονική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου υπολογισμού του πίνακα P για όλα τα p μειώνεται κι άλλο από $100 O(M^4)$ σε $O(M^4) + 99 O(M^3)$, εφόσον ο κώδικας του Πίνακα A-2 μετασχηματίζεται τώρα στον ακόλουθο (ο οποίος απαιτεί χρόνο $O(M)$ αν έχει ήδη υπολογιστεί η αντίστοιχη τιμή του πίνακα *Two_inner_sums* σε προηγούμενο βήμα):

```

sum1=0;
for(m=0;m<=M-i;m++){
if (low_mem || Two_inner_sums[1][i][j][m]==-1){
sum2=0;
for(n=i-j;n<=N-m;n++){
if (i-j+m-1>=0){
sum3=Fi_partial_sums[n+m][m+n][m+i-j]-Fi_partial_sums[n+m][i-j+m-1][m+i-j];
}
else{
sum3=Fi_partial_sums[n+m][m+n][m+i-j];
}
sum2+=q(n,i)*sum3;
}
(void) (low_mem || (Two_inner_sums[1][i][j][m]=sum2));
}
else{
sum2=Two_inner_sums[1][i][j][m];
}
sum1+=Q(m,i,M,p)*sum2;
}

```

Πίνακας A-3. Τελική υλοποίηση σε C της σχέσης (A. 1), βελτιωμένη συγκριτικά με τον Πίνακα A-2 ως προς την χρονική πολυπλοκότητα.

Τέλος, παρατηρούμε ότι δεν θα συνέβαλε στην βελτιστοποίηση της χρονικής πολυπλοκότητας του αλγορίθμου υπολογισμού του πίνακα P η αποθήκευση, σε νέο πίνακα, των τιμών του εξωτερικότερου αθροίσματος ενός *case*, καθώς κάθε τέτοιο άθροισμα είναι της μορφής:

$$\sum_{m=l_1}^{l_2} Q_{m,i} \sum_{n=g_1}^{g_2} q_{n,i} \sum_{s=0}^{s_{max}} \Phi_F(n+m, z+s, z) \quad (A. 6)$$

με την ποσότητα $Q_{m,i}$ να εξαρτάται από την πιθανότητα p την οποία μεταβάλλουμε στον C κώδικα στο εύρος $[0,1]$.

A.2.2 Επιτάχυνση του υπολογισμού της $Pr[A_{F>1}(y) = z]$ για κάθε ζεύγος τιμών M, F και πλήθους τιμών $y \leq N$ και $z \leq y$

Η πιθανότητα $Pr[A_{F>1}(y) = z]$ είναι μεν ανεξάρτητη του πλήθους των καναλιών N αλλά, καθώς $y \leq N$ και $z \leq y$ και εμείς επιθυμούμε να υπολογίσουμε την απόδοση του συστήματος για δεδομένες τιμές των M, F και διάφορες τιμές των N, y, z , θα θέλαμε να μειώσουμε τον συνολικό χρόνο εκτέλεσης των πράξεων (amortized analysis) για κάθε ζεύγος τιμών M, F καθώς αποτιμάμε την απόδοση του συστήματος για μεταβαλλόμενες τιμές των παραμέτρων N, y, z .

Προφανώς, η πρώτη σκέψη ήταν να καλούμε για κάθε συνδυασμό τιμών M, F, N, y, z τους Prolog/bc calculator για τον υπολογισμό της πιθανότητας $Pr[A_{F>1}(y) = z]$. Ο χρόνος που παίρνει όμως να ξεκινήσει ο interpreter της Prolog και ο bc calculator αλλά ο χρόνος υπολογισμού της Prolog για κάθε τέτοια πεντάδα τιμών ήταν πολύ μεγάλος. Συνεπώς, για να μειώσουμε τον συνολικό χρόνο που απαιτείται για να ξεκινήσει ο interpreter της Prolog και ο bc calculator καθώς και τον χρόνο υπολογισμού ενδιάμεσων αποτελεσμάτων (παρατηρήθηκε μεγάλος βαθμός επαναχρησιμοποίησης ενδιάμεσων αποτελεσμάτων και κυρίως των r -συσχετισμένων αριθμών Stirling 2^{ou} είδους και των τιμών του παραγοντικού) για όλες τις πράξεις για δεδομένα M, F και μεταβαλλόμενες τιμές των παραμέτρων y, z , κάναμε τα εξής: για κάθε ζεύγος τιμών M, F και ένα πλήθος τιμών για την παράμετρο N , βρήκαμε το μέγιστο N (N_{max}) και, για αυτό, καλούσαμε μία μόνο φορά τους Prolog/bc calculator να υπολογίσουν όλες τις πιθανότητες $Pr[A_{F>1}(y) = z]$ με $y \leq N_{max}$ και $z \leq N_{max}$. Τις πιθανότητες αυτές τις γράψαμε με κατάλληλο τρόπο σε ένα .txt αρχείο (swipl_results.txt), από το οποίο τις διάβαζε ακολούθως ο C κώδικας. Να σημειώσουμε ότι, συγκριτικά με πριν, η μείωση του χρόνου εκτέλεσης κάθε τέτοιου συνόλου πράξεων ήταν ιδιαίτερα αισθητή.

A.2.3 Μείωση του χρόνου εκτέλεσης των πράξεων για μια συγκεκριμένη τετράδα τιμών M, N, F, p

Για την επίλυση του συστήματος γραμμικών εξισώσεων:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{P} \\ \sum_{i=0}^M \pi_i = 1 \end{cases}$$

για κάθε συνδυασμό τιμών M, N, F, p , αρχικά έγινε χρήση του MATLAB και της μεθόδου των ιδιοτιμών/ιδιοδιανυσμάτων. Αν και τα αποτελέσματα είχαν ικανοποιητική ακρίβεια, ο χρόνος που απαιτούνταν για να σηκωθεί κάθε φορά το MATLAB, και μάλιστα για κάθε τετράδα M, N, F, p με το p να λαμβάνει 100 τιμές ομοιόμορφα κατανεμημένες στο $[0,1]$, ήταν πολύ μεγάλος (παρότι σταθερός για κάθε τετράδα M, N, F, p).

Το παραπάνω μας ανάγκασε να εγκαταλείψουμε τη χρήση του MATLAB για την επίλυση του συστήματος και, μαζί, την μέθοδο των ιδιοτιμών/ιδιοδιανυσμάτων και να στραφούμε στην υλοποίηση της μεθόδου απαλοιφής Gauss στην γλώσσα προγραμματισμού C. Όπως αναφέραμε προηγουμένως, χρησιμοποιήθηκε η βιβλιοθήκη GMP στην υλοποίηση της μεθόδου απαλοιφής Gauss σε C προκειμένου να διασφαλιστεί η ορθότητα - ακρίβεια των αποτελεσμάτων που απωλέσθηκε με την εγκατάλειψη του MATLAB ως επιλυτή του συστήματος.

A.2.4 Μείωση του χρόνου εκτέλεσης κάθε συνόλου πράξεων για συγκεκριμένη τιμή του M

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας ήταν η συγκριτική μελέτη της απόδοσης του συστήματος για διάφορες τιμές των N, F, p για δεδομένο M και, κυρίως, της επίδρασης του πλήθους των συντονιζόμενων δεκτών ανά σταθμό F στην απόδοσή του. Έτσι, για δεδομένο M , έπρεπε να εξαχθεί πλήθος γραφικών (που γίνεται με χρήση του MATLAB) καθώς μεταβάλλεται μία εκ των δύο παραμέτρων N, F με την άλλη να μένει σταθερή και για τιμές του p στο $[0,1]$.

Αρχικά, για κάθε μία παραμετροποίηση του συστήματος για δεδομένο M σηκώναμε διαφορετικό MATLAB προκειμένου να σχεδιάσουμε τις γραφικές με αποτέλεσμα να χάνουμε πολύτιμο χρόνο. Στόχος λοιπόν ήταν, για δεδομένο M , να τρέχουμε συνολικά ένα MATLAB το οποίο να μένει αδρανές ενόσω υπολογίζονται οι μετρικές απόδοσης και να «ξυπνά» όταν αυτές γίνονται διαθέσιμες για να σχεδιάσει τις αντίστοιχες κάθε φορά γραφικές. Απαιτούνταν δηλαδή κάποιο είδος συγχρονισμού και το πρόβλημα έγκειτο στο ότι στο MATLAB δεν υπάρχει τρόπος να δεχτούμε ή να στείλουμε σήματα του UNIX (UNIX signals).

Το πρόβλημα λύθηκε ως εξής:

- Το bash script (run.sh) το οποίο και τρέχουμε, περνώντας του ως παραμέτρους του την τιμή του M και 1 ή 0 (ανάλογα με το αν θέλουμε ή όχι, αντίστοιχα, να λάβουμε υπόψιν μας τις συγκρούσεις στους προορισμούς), τρέχει μία φορά στην αρχή του την εντολή:

```
~/matlab/bin/matlab -nodisplay -nodesktop -r "run ~/GFrakouli_Thesis/matlab_global" >/dev/null &
```

οπότε και σηκώνεται το MATLAB τρέχοντας το matlab script matlab_global.m .

- Το matlab_global.m τρέχει κάθε φορά στην αρχή ενός «while 1» loop το εκτελέσιμο C πρόγραμμα sig_handler_for_matlab.out με την εντολή:

```
[status,cmdout]=system('~/GFrakouli_Thesis/sig_handler_for_matlab.out');
```

περιμένοντάς το να τελειώσει πριν συνεχίσει εκτελώντας τις κατάλληλες εντολές που ακολουθούν μέσα στο σώμα του «while 1» loop, ανάλογα με την τιμή της μεταβλητής status.

- Το C πρόγραμμα sig_handler_for_matlab.c, όπως άλλωστε δηλώνει και το όνομά του, προσφέρει στο MATLAB εκείνα τα εργαλεία που επιτρέπουν το συγχρονισμό του τελευταίου με τον υπόλοιπο κώδικα ώστε να παράγει τις γραφικές όταν τα αποτελέσματα που χρειάζεται είναι διαθέσιμα στα αρχεία από τα οποία και διαβάζει. Πιο συγκεκριμένα, το sig_handler_for_matlab.c:
 - Εγκαθιστά handlers για τα σήματα SIGUSR1 και SIGUSR2 έτσι ώστε αν λάβει το σήμα SIGUSR1 να τερματίσει με status=0 ενώ αν λάβει το σήμα SIGUSR2 να τερματίσει με status=1.
 - Ακολούθως, προσπαθεί συνέχεια (μέσα σε ένα «while 1» loop) να σκοτώσει το εκτελέσιμο waiting_to_die.out τρέχοντας:

```
killall_ret=system("killall -SIGUSR1 waiting_to_die.out");
```

ο τερματισμός του οποίου (εφόσον μια τέτοια διεργασία υπάρχει) θα σημαίνει ότι οι handlers στο εκτελέσιμο sig_handler_for_matlab.out έχουν ήδη εγκατασταθεί οπότε το τελευταίο είναι έτοιμο να λάβει και να χειριστεί τα σήματα για τα οποία έχει εγκαταστήσει handlers.

- Κάθε φορά που θέλουμε να παράξουμε γραφικές με το MATLAB, το αντίστοιχο bash script (είτε το run.sh είτε το run_various_Ns.sh) εκτελεί τις εξής εντολές:

```
./waiting_to_die.out  
killall -<UNIX signal> sig_handler_for_matlab.out  
./waiting_to_die.out
```

όπου ως <UNIX signal> στέλνεται είτε το SIGUSR1 είτε το SIGUSR2, οπότε η μεταβλητή status στο matlab_global.m παίρνει τιμή 0 ή 1, αντίστοιχα, για να τρέξουν έπειτα τα κατάλληλα matlab scripts που θα παράξουν τις ζητούμενες γραφικές.

Σημειώνουμε εδώ ότι το C πρόγραμμα waiting_to_die.c δεν κάνει τίποτα άλλο από το να κάνει sleep(10) μέσα σε ένα «while 1» loop περιμένοντας να πεθάνει από το πρόγραμμα sig_handler_for_matlab.c. Έτσι, αναφερόμενοι στις προηγούμενες τρεις bash εντολές, όταν πεθάνει το 1^ο waiting_to_die.out το οποίο τρέχουμε, μπορούμε να είμαστε βέβαιοι ότι έχουν εγκατασταθεί οι signal handlers του sig_handler_for_matlab.c. Στη συνέχεια, με την 2^η εντολή, στέλνουμε το κατάλληλο σήμα ανάλογα με το οποίο θα τερματίσει με διαφορετικό status το sig_handler_for_matlab.out οπότε το matlab_global.m θα σχεδιάσει τις ζητούμενες κάθε φορά γραφικές τρέχοντας τα αντίστοιχα matlab scripts. Τέλος, και αφού έχουμε ήδη στείλει το κατάλληλο σήμα στο sig_handler_for_matlab.out, τρέχουμε και πάλι το waiting_to_die.out γιατί το matlab_global.m τρέχει με τη system() ένα νέο εκτελέσιμο sig_handler_for_matlab.out στην αρχή του «while 1» loop, οπότε, αν πεθάνει το 2^ο αυτό waiting_to_die.out (που θα συμβεί επειδή θα το έχει σκοτώσει το νέο sig_handler_for_matlab.out), θα είμαστε βέβαιοι ότι το MATLAB τελείωσε τη σχεδίαση των τρέχουσων ζητούμενων γραφικών και άρα μπορούμε να συνεχίσουμε με την εκτέλεση των πράξεων της ίδιας ή κάποιας άλλης παραμετροποίησης του συστήματος, πάντα για δεδομένο *M*, για να εξάγουμε πιθανώς στην συνέχεια νέες γραφικές με το MATLAB.

Παράρτημα Β: Αποτίμηση της ποσότητας $Pr[A_{F>1}(y) = z]M^y$ σε SWI-Prolog

Στον Πίνακα Β-1, που ακολουθεί, δίνεται το κατηγορήμα `υροlogismos_τυρου(M,Y,Z,F,Res)` που γράψαμε σε SWI-Prolog, καθώς και όλα τα κατηγορήματα που αυτό χρησιμοποιεί, προκειμένου να υπολογίσει και να επιστρέψει στην μεταβλητή `Res` την ποσότητα $Pr[A_{F>1}(y) = z] M^y$:

```

/* Ftiachnei dunamiko katigorima me tis times tou sr pou exoume idi vrei, kai to afinei ws exei an idi uparxei. Oi times
prostithentai me to pou tis vriskoume */
init_sr_db:-dynamic times_sr/4 .

/*Omoiwis gia factorial kai (x ana psi)*/
init_fact_db:-dynamic times_fact/2 .

init_xianapsi_db:-dynamic times_xianapsi/3 .

initialise_db:- init_sr_db,
                init_fact_db,
                init_xianapsi_db.

retract_db:-
                retractall(times_sr(_,_)),
                retractall(times_fact(_)),
                retractall(times_xianapsi(_,_)).

/*Υπολογίζει το παραγοντικό*/
factorial(0,1).
factorial(X,Fact):-X>0,NewX is X-1,factorial_db(NewX,NewFact),Fact is NewFact*X.

factorial_db(X,Fact):-
    ( times_fact(X,Fact)
    -> true
    ; factorial(X,Fact),
      assert(times_fact(X,Fact))
    ).

/*Υπολογίζει το (x ana y)*/
xi_ana_psi(X,Y,Res):-
    factorial_db(X,A),
    factorial_db(Y,B),
    Diafora is X-Y,
    factorial_db(Diafora,C),Res is A/(B*C).

xi_ana_psi_db(X,Y,Res):- ( times_xianapsi(X,Y,Res)
                          -> true
                          ; xi_ana_psi(X,Y,Res),
                            assert(times_xianapsi(X,Y,Res))
                          ).

/*Υπολογίζει τον R-associated Stirling Number Sr(N,K)*/
sr(_R,0,0,1):-true,!.
sr(R,N,1,Res):-
    N>=R,
    Res is 1,!.

sr(R,N,K,Res):-
    R>0,
    N>0,
    K>0,
    ΚαραεπιR is K*R,

```

```

N>=KapaepiR,
Nmeion1 is N-1,
Rmeion1 is R-1,
Kmeion1 is K-1,
NmeionR is N-R,
xi_ana_psi_db(Nmeion1,Rmeion1,Result2),
sr_db(R,Nmeion1,K,Result1),
sr_db(R,NmeionR,Kmeion1,Result3),
Res is K*Result1+Result2*Result3,!.
sr(_R,_N,_K,Res):-Res is 0.

sr_db(R,N,K,Res):-
    (times_sr(R,N,K,Res) /*An exeis idi upologisei tis times tou sr */
    -> true /*tote den xreiazetai epanupologismos tous*/
    ; sr(R,N,K,Res), /*Alliws, vres tes kai valtes stin vasi*/
    assert(times_sr(R,N,K,Res))
    ).

/*Kanei replicate N fores to stoixeio K kai epistrefei ti lista*/
repl(_K,0,[]):-true,!.
repl(K,N,[R|Rs]):-NewN is N-1, R=K,repl(K,NewN,Rs).

/*Vriskei to a8roisma twm timwn ston pinaka gia ton pinaka Lista_trexouswn timwn sto euros [Apo,Ews]*/
a8roisma_apo_ews_help(_Apo,Ews,Metr,_Lista_trexouswn_timwn,Res,Res):-Metr:=Ews+1.
a8roisma_apo_ews_help(Apo,Ews,Metr,Lista_trexouswn_timwn,Acc,Res):-
    Metr=<Ews,
    nth1(Metr,Lista_trexouswn_timwn,Timi),
    NewAcc is Acc+Timi,
    NewMetr is Metr+1,
    a8roisma_apo_ews_help(Apo,Ews,NewMetr,Lista_trexouswn_timwn,NewAcc,Res).

a8roisma_apo_ews(Apo,Ews,Lista_trexouswn_timwn,Res):-
    a8roisma_apo_ews_help(Apo,Ews,Apo,Lista_trexouswn_timwn,0,Res).

/*Vriskei to a8roisma twm (timwn ston pinaka * to antistoixo index-1) gia ton pinaka Lista_trexouswn timwn sto euros [Apo,Ews]*/
/*To -1 feugei dioti i 1i timi einai o metritis pou metraei gia diplades (klp), diladi sumperilamvanetai sto Metr*/
a8roisma_epi_indexm1_apo_ews_help(_Apo,Ews,Metr,_Lista_trexouswn_timwn,Res,Res):-Metr:=Ews+1.
a8roisma_epi_indexm1_apo_ews_help(Apo,Ews,Metr,Lista_trexouswn_timwn,Acc,Res):-
    Metr=<Ews,
    nth1(Metr,Lista_trexouswn_timwn,Timi),
    NewAcc is Acc+Metr*Timi,
    NewMetr is Metr+1,
    a8roisma_epi_indexm1_apo_ews_help(Apo,Ews,NewMetr,Lista_trexouswn_timwn,NewAcc,Res).

a8roisma_epi_indexm1_apo_ews(Apo,Ews,Lista_trexouswn_timwn,Res):-
    a8roisma_epi_indexm1_apo_ews_help(Apo,Ews,Apo,Lista_trexouswn_timwn,0,Res).

/*Vriskei to a8roisma twm (timwn ston pinaka * to antistoixo index) gia ton pinaka Lista_trexouswn timwn sto euros [Apo,Ews]*/
/*Mpainei ena +1 dioti i 1i timi einai o metritis pou metraei gia diplades (klp), diladi to Metr emperixeixi ena -1*/
a8roisma_epi_index_apo_ews_help(_Apo,Ews,Metr,_Lista_trexouswn_timwn,Res,Res):-Metr:=Ews+1.
a8roisma_epi_index_apo_ews_help(Apo,Ews,Metr,Lista_trexouswn_timwn,Acc,Res):-
    Metr=<Ews,
    nth1(Metr,Lista_trexouswn_timwn,Timi),
    NewAcc is Acc+(Metr+1)*Timi,
    NewMetr is Metr+1,
    a8roisma_epi_index_apo_ews_help(Apo,Ews,NewMetr,Lista_trexouswn_timwn,NewAcc,Res).

a8roisma_epi_index_apo_ews(Apo,Ews,Lista_trexouswn_timwn,Res):-
    a8roisma_epi_index_apo_ews_help(Apo,Ews,Apo,Lista_trexouswn_timwn,0,Res).

```



```

/*Ypologizei ena terastio ginomeno GIA OLOUS tous deiktas (ektos tou teleutaiou) se ka8e eswteriko oro tou megalou
ekswterikou a8roismatos*/
/*Ton Zindex den ton xeirizomaste ws deikti tou pinaka, alla ws ton deikti tw n I*/
supermult_help(_M,_Z,_Y,_F,_Trexouses_times_metavlitwn,Zindex,Acc,Acc):- Zindex:=1 . /*ftasame stin arxi*/
supermult_help(M,Z,Y,F,Trexouses_times_metavlitwn,Zindex,Acc,Res):-
    Zindexmeion1 is Zindex-1,
    factorial_db(Zindex,Zindexparag),
    nth1(Zindexmeion1,Trexouses_times_metavlitwn,lz),
    Zindexepilz is lz*Zindex,
    factorial_db(Zindex,Zindexparag),
    factorial_db(Zindexepilz,Zindexepilzparag),
    Zindexparagstinlz is Zindexparag^lz,
    Oros_C is Zindexepilzparag//Zindexparagstinlz,

    Fmeion1 is F-1,
    a8roisma_epi_indexm1_apo_ews(1,Fmeion1,Trexouses_times_metavlitwn,Sum1),
    a8roisma_apo_ews(Zindex,Fmeion1,Trexouses_times_metavlitwn,Sum2),
    ZmeionSum1meionSum2 is Z-Sum1-Sum2,
    xi_ana_psi_db(ZmeionSum1meionSum2,lz,Oros_A),

    Fmeion2 is F-2,
    a8roisma_epi_index_apo_ews(Zindex,Fmeion2,Trexouses_times_metavlitwn,Sum4),
    a8roisma_epi_index_apo_ews(1,Fmeion1,Trexouses_times_metavlitwn,Sum3),
    YmZkaiSum3mSum4 is Y-Z+Sum3-Sum4,
    xi_ana_psi_db(YmZkaiSum3mSum4,Zindexepilz,Oros_B),

    NewAcc is Acc*Oros_A*Oros_B*Oros_C,
    supermult_help(M,Z,Y,F,Trexouses_times_metavlitwn,Zindexmeion1,NewAcc,Res).

supermult(M,Z,Y,F,Trexouses_times_metavlitwn,Res):-
    Fmeion1 is F-1,
    supermult_help(M,Z,Y,F,Trexouses_times_metavlitwn,Fmeion1,1,Res).

/*Vriskei mexri poia timi 8a parei enas deiktis, dedomenwn tw n timwn tw n upoloipwn*/
/*PROSOXI o pinakas me tous deiktas exei mege8os F-1*/
euresi_telikis_timis_metavlitis(Z,F,Index,_Lista_trexouswn_timwn,Res):-
    Index:=F-1,
    Res is Z//F.
euresi_telikis_timis_metavlitis(Z,F,Index,Lista_trexouswn_timwn,Res):-
    Index=<F-2,Indexsun1 is Index+1,
    Fmeion1 is F-1,
    a8roisma_epi_index_apo_ews(Indexsun1,Fmeion1,Lista_trexouswn_timwn,Athr),
    Res is (Z-Athr)//Indexsun1.

/*Do8eizas mias listas me tis trexouses times tw n metavlitwn, mas dinei tin amesws epomeni omada timwn wste na
vroume ton antistoixo oro tou a8roismatos*/
/*Px an exoume [1,2,3] kai epitrepetai i 1i timi na paei mexri to 4, i 2i mexri to 2 kai i 3i mexri to 4, 8a paroume:
[1,2,3]
[2,2,3]
[3,2,3]
[4,2,3]
[0,0,4]
[1,0,4]
[2,0,4]
[2,0,4]
[4,0,4]
[0,1,4]
...
*/
/*To max orio vevaia eksartatai apo ta megalutera tou*/
/*OI METAVLITES AFTES EINAI DEIKTES STO TERASTIO EKSWTERIKO ATHROISMA*/
euresi_epomenwn_timwn_metavlitwn_help(_Z,_F,Index,_Lista_trexouswn_timwn,_Wholelsttrexouswntimwn,
    Lista_epomenwn_timwn, Denexeiallo):-
    Index:=F,
    Denexeiallo=true,

```

```

        Lista_epomenwn_timwn=[];
euresi_epomenwn_timwn_metavlitwn_help(Z,F,Index,[L1|L1s],Wholesttrexouswntimwn,[L2|L2s],Denexeiallo):-
    Index=<F-1,
    euresi_telikis_timis_metavlitis(Z,F,Index,Wholesttrexouswntimwn,Tel),
    (L1<Tel
    ->L2 is L1+1,
    L2s=L1s,
    Denexeiallo=false
    ;L2 is 0,
    NewIndex is Index+1,
    euresi_epomenwn_timwn_metavlitwn_help(Z,F,NewIndex,L1s,Wholesttrexouswntimwn,L2s,Denexeiallo)
    ).

euresi_epomenwn_timwn_metavlitwn(Z,F,Lista_trexouswn_timwn,Lista_epomenwn_timwn,Denexeiallo):-
    euresi_epomenwn_timwn_metavlitwn_help(
    Z,F,1,Lista_trexouswn_timwn,Lista_trexouswn_timwn,
    Lista_epomenwn_timwn,Denexeiallo
    ).

upologismos_typou_help_2(M,Z,Y,F,Trexouses_times_metavlitwn,Endiameso,Res):-

    /*Gia sta8mous pou einai o ka8enas proorismos akriwvs z paketwn opou 2<=z<=(F-1)*/
    supermult(M,Z,Y,F,Trexouses_times_metavlitwn,Souperginomeno),

    /*Gia sta8mous pou einai o ka8enas proorismos >=F paketwn*/
    Fmeion1 is F-1,
    nth1(Fmeion1,Trexouses_times_metavlitwn,lx),
    a8roisma_epi_indexm1_apo_ews(1,Fmeion1,Trexouses_times_metavlitwn,Sum1),
    ZmeionSum1 is Z-Sum1,
    xi_ana_psi_db(ZmeionSum1,lx,ZmSum1analx),

    /*(Y>Z
    ->*/factorial_db(lx,lxfact),
    YmZkaiFepilx is Y-Z+F*Ix,
    sr_db(F,YmZkaiFepilx,lx,Timisr),
    OrosX is ZmSum1analx*Ixfact*Timisr
    /*; Fepilx is F*Ix,
    factorial_db(Fepilx,Fepilxparag),
    factorial_db(F,Fparag),
    Fparagstilx is Fparag^Ix,
    OrosX is ZmSum1analx*Fepilxparag/Fparagstilx
    )*/;

    xi_ana_psi_db(M,ZmeionSum1,ManaZmeionSum1),

    /*Gia sta8mous pou einai o ka8enas proorimos akriwvs 1 paketou*/
    a8roisma_epi_index_apo_ews(1,Fmeion1,Trexouses_times_metavlitwn,Sum2),
    ZmeionSum2 is Z-Sum2,
    xi_ana_psi_db(Y,ZmeionSum2,YanaZmeionSum2),
    factorial_db(ZmeionSum2,ZmeionSum2Fact),
    Oros1 is ZmeionSum2Fact*YanaZmeionSum2*ManaZmeionSum1,

    Res is Endiameso+Souperginomeno*OrosX*Oros1.

upologismos_typou_help(M,Z,Y,F,Trexouses_times_metavlitwn,Endiameso,Res):-
    upologismos_typou_help_2(M,Z,Y,F,Trexouses_times_metavlitwn,Endiameso,Res2),

    euresi_epomenwn_timwn_metavlitwn(Z,F,Trexouses_times_metavlitwn,Lista_epomenwn_timwn,Denexeiallo),

    (Denexeiallo==true
    -> Res is Res2
    ; NewEndiameso is Res2,
    upologismos_typou_help(M,Z,Y,F,Lista_epomenwn_timwn,NewEndiameso,Res)
    ).

```

```

/*Υπολογίζει tin timi pou dinei o tupos*/
upologismos_typou(_M,Y,Z,_F,Res):-Y<Z,Res is 0,write(Res),write('\n'),!.
upologismos_typou(_M,Y,Z,F,Res):-F>Z,Y>Z,Res is 0,write(Res),write('\n'),!.
upologismos_typou(M,Y,Z,F,Res):-F>=Y,Y:=Z,Res is M^Y, write(Res),write('\n'),!.
upologismos_typou(M,Y,Z,F,Res):-
    initialise_db,
    Fmeion1 is F-1,
    Fmeion2 is F-2,
    ( Y:=Z
    -> repl(0,Fmeion1,Trexouses_times_metavlitwn) /*Arxikopoiei olous tous deiktes sto 0 */
                                                /* F-1 einai to plithos twn metavlitwn pou trexoun*/
    ; repl(0,Fmeion2,Temp1),
      append(Temp1,[1],Trexouses_times_metavlitwn) /*Arxikopoiei olous tous deiktes ektos tou megaluterou
                                                    που παει sto 1 */
    ),

    Endiameso is 0,
    upologismos_typou_help(M,Z,Y,F,Trexouses_times_metavlitwn,Endiameso,Res),
    write(Res),write('\n').

upologismos_typou_me_egرافي(M,Y,Z,F,Res):-
    upologismos_typou(M,Y,Z,F,Res),
    write(Res),write('\n').

```

Πίνακας Β-1. Κώδικας SWI-Prolog για υπολογισμό $Pr[A_{F>1}(y) = z] M^y$.

Βιβλιογραφία

- [1] A.S. Tanenbaum: "Computer Networks, Fourth Edition", *Prentice Hall*, 2003.
- [2] I.E. Pountourakis, P.A. Baziana: "Multi-channel Multi-access Protocols with Receiver Collision Markovian Analysis", *WSEAS Transactions on Communications*, Issue 8, Vol. 4, ISSN 1109-2742, pp. 564-569, Aug. 2005.
- [3] I.E. Pountourakis: "Performance Evaluation with Receiver Collision Analysis in Very High-Speed Optical Fiber Local Area Networks Using Passive Star Topology", *IEEE Journal of Lightwave Technology*, Vol. 16, No. 12, pp. 2303-2310, Dec. 1998.
- [4] I.M.I. Habbab, M. Kavehrad, C.W. Sundberg: "Protocols for Very High-Speed Optical Fiber Local Area Networks Using a Passive Star Topology", *IEEE Journal of Lightwave Technology*, Vol. LT-5, No. 12, pp. 1782-1794, Dec. 1987.
- [5] P.A. Baziana, I.E. Pountourakis: "An access protocol for efficiency optimization in WDM networks: A propagation delay and collisions avoidance analysis", *Computer Networks* 57, pp. 1234-1252, 2013.
- [6] P.A. Baziana: "An approximate protocol analysis with performance optimization for WDM networks", *Optical Fiber Technology* 20, pp. 414-421, 2014.
- [7] I.E. Pountourakis, P.A. Baziana: "A collision-free with propagation latency WDMA protocol analysis", *Optical Fiber Technology* 13, pp. 160-169, 2007.
- [8] A. Pattavina, M. Tornatore, A. De Fazio, G. Maier, M. Martinelli: "Static WDM Network Planning with TDM Channel Partitioning".
- [9] Π. Κωπτής: "Εισαγωγή στις Τηλεπικοινωνίες, Διαμόρφωση και Μετάδοση Σημάτων", *Εκδόσεις Τζιόλα*, 2012.
- [10] Π. Μπαζιάνα: "Αρχιτεκτονικές Ελέγχου και Τεχνικές Μετάδοσης για τη Βελτιστοποίηση της Απόδοσης Οπτικών WDM Δικτύων", *Διδακτορική Διατριβή Ε.Μ.Π.*, 2008.
- [11] W. Szpankowski: "Packet Switching in Multiple Radio Channels: Analysis and Stability of a Random Access System", *Computer Networks*, Vol. 7, pp. 17-26, 1983.
- [12] L. Comtet: "Advanced Combinatorics: The Art of Finite and Infinite Expansions", *D. Reidel Publishing Company*, 1974, pp. 221-222.
- [13] J.C. Little: "A Proof of the Queueing Formula: $L=\lambda W$ ", *Operations Research*, Vol. 9, pp. 383-387, 1961.