

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών  
Τομέας Ρευστών  
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών  
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής  
& Βελτιστοποίησης

Διερεύνηση Διαφορετικών Διατυπώσεων της Συνεχούς  
Συζυγούς Μεθόδου για τον Υπολογισμό Παραγώγων  
Ευαισθησίας στην Αεροδυναμική Βελτιστοποίηση με  
Ακρίβεια. Εφαρμογές

Διπλωματική Εργασία

Γκαραγκούνης Κωνσταντίνος

Επιβλέποντες: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου , Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2016



## Ευχαριστίες

Πριν από όλα, καταρχάς θα ήθελα να ευχαριστήσω τους ανθρώπους που με βοήθησαν στην ολοκλήρωση αυτής της διπλωματικής εργασίας.

Καταρχάς, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα Καθηγητή κ. Κυριάκο Γιαννάκογλου για τη διαρκή υποστήριξη και καθοδήγηση κατά τη διάρκεια αυτής της εργασίας. Πέρα από την βοήθεια που μου προσέφερε, τον ευχαριστώ για την εμπιστοσύνη και για το θέμα που μου ανέθεσε, το οποίο μου κέντρισε εξ αρχής το ενδιαφέρον.

Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω το Δρ. Ευάγγελο Παπουτσή-Κιαχαγιά για την καθοδήγηση και τις συμβουλές σε εξειδικευμένα θέματα σχετιζόμενα με την εργασία αυτή, καθώς επίσης και τον υποψήφιο διδάκτορα Κωνσταντίνο Σαμούχο για τη βοήθεια επίσης σε θέματα που αφορούσαν τη διπλωματική αυτή εργασία. Ευχαριστώ και τα υπόλοιπα άτομα στο ΜΠΥΡ&Β του Τομέα Ρευστών, όπως την Δρ. Βαρβάρα Ασούτη και τον Δρ. Ξεν. Τρομπούκη και τον υποψήφιο διδάκτορα Χρ. Βεζύρη, για τις συμβουλές και τη βοήθεια γενικότερα σε τεχνικά θέματα, όποτε χρειάστηκε.

Ευγνώμων επίσης νιώθω για την υποστήριξη που μου προσέφερε η οικογένεια μου και για την υπομονή που έδειξαν οι γονείς μου, Θεοφάνης και Βιργινία, και η αδερφή μου Χριστίνα, όχι μόνο για όσο διήρκεσε αυτή η διπλωματική εργασία, αλλά γενικότερα όλα αυτά τα χρόνια. Χωρίς τη βοήθειά και τη στήριξή τους, πολλά πράγματα θα ήταν διαφορετικά.

Τέλος, πολλές φορές χρειάστηκα την στήριξη των φίλων μου και κάποιων συγκεκριμένων κοντινών μου προσώπων, που πάντα άκουγαν με ενδιαφέρον τους προβληματισμούς μου, και με βοηθούσαν δίνοντας μου συμβουλές και παρακινώντας με να συνεχίσω την προσπάθειά μου. Γι'αυτόν το λόγο, θα ήθελα να τους ευχαριστήσω.

*In theory, there is no difference between  
theory and practice. But in practice, there is.*  
Yogi Berra

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ  
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΘΕΡΜΙΚΩΝ ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΩΝ  
ΜΟΝΑΔΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΡΕΥΣΤΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ &  
ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

**Διερεύνηση Διαφορετικών Διατυπώσεων της Συνεχούς Συζυγούς  
Μεθόδου για τον Υπολογισμό Παραγώγων Ευαισθησίας στην  
Αεροδυναμική Βελτιστοποίηση με Ακρίβεια. Εφαρμογές**

Διπλωματική Εργασία  
του

**Κωνσταντίνου Γκαραγκούνη**

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Ιούνιος 2016

**Περίληψη**

Η παρούσα διπλωματική εργασία εντάσσεται θεματικά στην περιοχή της αεροδυναμικής βελτιστοποίησης μορφών με χρήση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου (aerodynamic shape optimization based on the continuous adjoint method) και αποσκοπεί στη διερεύνηση των διαφορετικών διατυπώσεων για τον υπολογισμό παραγώγων ευαισθησίας αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις εκάστοτε μεταβλητές σχεδιασμού. Σκοπός είναι αφενός ο υπολογισμός παραγώγων με ακρίβεια και αφετέρου η μείωση του υπολογιστικού κόστους.

Μέχρι πρότινος, είχαν εμφανισθεί στη βιβλιογραφία δύο διατυπώσεις της συνεχούς συζυγούς μεθόδου, η Διατύπωση με Χωρικά Ολοκληρώματα (FI Formulation) και η Διατύπωση με Επιφανειακά Ολοκληρώματα (SI Formulation). Οι παραπάνω δύο ονομασίες έχουν καθιερωθεί στη Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης του ΕΜΠ (ΜΠΥΡ&Β/ΕΜΠ) για τις διατυπώσεις που βασίζονται σε χρήση χωρικών και επιφανειακών ολοκληρωμάτων, αντίστοιχα.

Η πρώτη διατύπωση (FI), εμπλέκει χωρικά ολοκληρώματα που περιέχουν την παράγωγο της μεταβολής της θέσης των κόμβων του πλέγματος, ως προς τη μεταβολή των μεταβλητών σχεδιασμού (λ.χ. των συντεταγμένων των σημείων ελέγχου της γεωμετρίας με NURBS). Με αυτήν τη διατύπωση, επιτυγχάνεται μεγάλη ακρίβεια στον υπολογισμό παραγώγων ευαισθησίας, σε σύγκριση με παραγώγους υπολογιζόμενες με πεπερασμένες διαφορές. Ωστόσο, λόγω της ανάγκης υπολογισμού, με πεπερασμένες διαφορές, ποσοτήτων που αντιστοιχούν στη μετατόπιση των κόμβων του πλέγματος ως προς κάθε μεταβλητή σχεδιασμού και ανά κατεύθυνση, σε όλο το χωρίο, αυξάνεται σημαντικά το υπολογιστικό κόστος.

Στον αντίποδα, η δεύτερη διατύπωση βασίζεται στη χρήση αποκλειστικά επιφανειακών ολοκληρωμάτων στο όριο και διακρίνεται για το αρκετά χαμηλότερο υπολογιστικό της κόστος

έναντι της πρώτης. Ωστόσο, σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, στη διατύπωση SI, γινόταν η απαλοιφή ενός συγκεκριμένου όρου από την πλήρη της διατύπωση, του λεγόμενου Leibniz term, επειδή θεωρούνταν ότι αυτός τείνει στο μηδέν στο όριο του χωρίου, τουλάχιστον σε αρκετά πυκνά πλέγματα. Αυτή η απαλοιφή του όρου του Leibniz δεν είναι άμοιρη συνεπειών και συχνά οδηγεί σε μη-ακριβή υπολογισμό παραγώγων ευαισθησίας.

Πρόσφατα, σε διδακτορική διατριβή που εκπονήθηκε στη ΜΠΥΡ&B/EMΠ, στη Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, αναπτύχθηκε νέα διατύπωση, η οποία ονομάζεται Εμπλουτισμένη Διατύπωση με Επιφανειακά Ολοκληρώματα (E-SI) [3, 15]. Η διατύπωση αυτή συνδυάζει τα πλεονεκτήματα των δύο προηγούμενων, δηλαδή το χαμηλό υπολογιστικό κόστος της διατύπωσης SI και την ακρίβεια υπολογισμού παραγώγων της FI. Το πρώτο πλεονέκτημα από τα δύο απορρέει από το γεγονός ότι η παράγωγος κατά E-SI αποτελείται αποκλειστικά από επιφανειακά ολοκληρώματα. Το δεύτερο, οφείλεται στην αντικατάσταση του όρου του Leibniz με επιφανειακό όρο που προκύπτει από την ενσωμάτωση, στην επαυξημένη αντικειμενική συνάρτηση, και στη συνέχεια την παραγωγή, ενός χωρικού ολοκληρώματος για τον νόμο μετατόπισης πλέγματος.

Το γεγονός ότι με τη διατύπωση E-SI καθίσταται δυνατός ο υπολογισμός παραγώγων ευαισθησίας, με μεγαλύτερη ακρίβεια από τη διατύπωση SI και με χαμηλό υπολογιστικό κόστος, είναι πολύ σημαντικό. Ιδιαίτερα στη βιομηχανία, υπάρχει μεγάλο ενδιαφέρον για την επίλυση προβλημάτων αντίστροφου σχεδιασμού, με πλήθος μεταβλητών σχεδιασμού που φτάνει και την τάξη του εκατομμυρίου ή για τη δημιουργία χάρτη ευαισθησίας της υπό μελέτη γεωμετρίας. Σε τέτοιες περιπτώσεις, η εφαρμογή της διατύπωσης FI είναι αδύνατη, λόγω του υψηλού υπολογιστικού κόστους, με αποτέλεσμα, να καθίσταται έως τώρα δυνατή μόνο η χρήση της διατύπωσης SI, παρά τη μειωμένη ακρίβεια στον υπολογισμό παραγώγων. Με τη διατύπωση E-SI αντιμετωπίζεται το πρόβλημα του αυξημένου υπολογιστικού κόστους, διατηρώντας παράλληλα την υψηλή ακρίβεια υπολογισμού παραγώγων.

Σε αυτήν την εργασία, μέσα από εφαρμογές σε μεμονωμένες αεροτομές και σε σταθερή πτερύγωση συμπίεστη, διερευνάται η ακρίβεια υπολογισμού παραγώγων με τις διαφορετικές διατυπώσεις. Ακόμα, επιδιώκεται, μέσω της ανάλυσης των παραγώγων ευαισθησίας, όρο-προς-όρο, να δοθεί ερμηνεία στις αιτίες που οδηγούν στις διαφορές ανάμεσα στη διατύπωση SI και την FI. Επιπλέον, ποσοτικοποιείται η συνεισφορά του όρου του Leibniz και ιδιαίτερα η επίπτωση στην ακρίβεια υπολογισμού παραγώγων, κατά την απαλοιφή του από την έκφραση της παραγώγου στην πλήρη έκφραση της SI. Επιπρόσθετα, η διπλωματική εργασία εστιάζει και στις ανακρίβειες υπολογισμού παραγώγων, λόγω της παραδοχής της 'παγωμένης τύρβης (frozen turbulence)' που γίνεται συχνά κατά την χρήση της συνεχούς συζυγούς μεθόδους για τυρβώδεις ροές.

---

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS  
SCHOOL OF MECHANICAL ENGINEERING  
FLUIDS DEPARTMENT  
LABORATORY OF THERMAL TURBOMACHINES  
PARALLEL CFD & OPTIMIZATION UNIT

## **The Assessment of Different Formulations of the Continuous Adjoint Method for the Computation of Exact Sensitivity Derivatives in Aerodynamic Optimization. Applications**

Diploma Thesis  
by

**Konstantinos Gkaragkounis**

Supervisor: Kyriakos C. Giannakoglou, Professor NTUA

**Athens, June 2016**

### **Abstract**

This diploma thesis aims at assessing different formulations of the continuous adjoint method, in the field of aerodynamic shape optimization, for computing the sensitivity derivatives (SDs) of any objective function given, w.r.t the design variables. The goal is not just the accurate computation of the SDs but also the reduction of the computational cost.

Until recently, two formulations of the continuous adjoint method could be found in the literature, namely the Field Integral (FI) and the Surface Integral Formulation (SI).

The FI formulation leads to SD expressions which include field integrals of the derivatives of displacement of the grid nodes, w.r.t. the design variables (the coordinates of NURBS control points, for instance). Its main advantage is that a high level of accuracy in the computed SDs is achieved, in comparison with finite differences. However, the need of computing, with finite differences, terms associated with the displacement of the grid nodes, in the whole computational domain, per design variable and in each cartesian direction, results in high computational cost.

On the other hand, the second formulation leads to SDs which include exclusively surface integrals and is merited for its low computational cost. However, this formulation often leads to lower accuracy, in the SDs. This is because, until recently in literature, a specific term of the full expression of the derivative was omitted. This term will be referred to as the 'Leibniz term', since it comes from the application of the Leibniz rule of differentiation under the integral sign. This term was omitted, because it was assumed to be close to zero at boundaries, at least in finer grids. However, the omission of this term in general is not as harmless as believed, yet leading to inaccuracies in the computation of SDs.

Very lately, in the Parallel CFD & Optimization Unit of the Lab. of Thermal Turboma-

chines of NTUA (PCopt/NTUA), within the PhD thesis by I. Kavvadias [3, 15], a new formulation was developed, namely the Enhanced-Surface Integral Formulation (E-SI). This formulation combines the advantages of the two previous ones, i.e. the low computational cost of the SI Formulation and higher accuracy in computing the SDs offered by the FI formulation. The first one is attributed to the fact that the SD expression includes only surface integrals, similarly to the standard SI Formulation. The second one results from the substitution of the Leibniz term with a surface integral. This integral comes from the inclusion of a volume integral in the augmented objective function, which is associated with the grid displacement law, and its differentiation.

The fact that, through E-SI, low computational cost along with higher accuracy in SD computation are achieved is of great importance, particularly in industry, where the number of the design variables could reach the order of millions, such as when a sensitivity map has to be computed. In such cases, the high computational cost of the FI formulation makes their use almost prohibitive. using it. As a result, until recently, only the SI formulation could be implemented, despite its issues with lower accuracy (which are frequently overcome by using excessively stretched meshes).

In the present diploma thesis, the characteristics of each formulation are assessed, through simulations pertinent to the steady 1D Burgers equation, the shape optimization (of just the computation of SDs) of two isolated airfoils and a cascade airfoil. Furthermore, a term-by-term analysis in derivatives is performed, in order to explain the observed differences between the FI and SI formulations and quantify the importance of the omitted Leibniz term, in the SI formulation. Finally, the frozen-turbulence assumption is assessed, because, in turbulent flows, this may lead to inaccuracies in the computation of SDs.



## Ακρωνύμια

---

ΕΜΠ	Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
ΕΘΣ	Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών
ΜΠΥΡ&Β	Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης

---

ΥΡΔ	Υπολογιστική Ρευστοδυναμική
ΜΔΕ	Μερική /-ές Διαφορική /-ές Εξίσωση /-εις
ΣΔΕ	Συνήθης /-εις Διαφορική /-ές Εξίσωση /-εις
1Δ	Μίας διάστασης (μονοδιάστατο)

---

NTUA	National Technical University of Athens
PCopt	Parallel CFD & Optimization Unit

---

CFD	Computational Fluid Dynamics
NS	Navier Stokes
FI	Field Integral
SI	Surface Integral
E-SI	Enhanced Surface Integral
FD	Finite Differences
SD	Sensitivity Derivative
ODE	Ordinary Differential Equation
PDE	Partial Differential Equation
gdPDE	grid displacement PDE
agdPDE	adjoint grid displacement PDE
LBterm	Leibniz term
NURBS	Non-Uniform Rational B-Spline



# Περιεχόμενα

Περιεχόμενα	i
<b>1 Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
1.1 Μέθοδοι Βελτιστοποίησης στον Αεροδυναμικό Σχεδιασμό . . . . .	1
1.2 Η συζυγής μέθοδος . . . . .	3
1.3 Διατυπώσεις της συνεχούς συζυγούς μεθόδου . . . . .	3
1.4 Στόχος - Δομή εργασίας . . . . .	4
<b>2 Παράγωγοι με τη συνεχή συζυγή μέθοδο</b>	<b>7</b>
2.1 Παραγωγή με τη συζυγή μέθοδο . . . . .	9
2.1.1 Διακριτή συζυγής μέθοδος . . . . .	9
2.1.2 Συνεχής συζυγής μέθοδος . . . . .	10
2.2 Διατύπωση SI . . . . .	11
2.3 Διατύπωση FI . . . . .	11
2.4 Μαθηματική ισοδυναμία SI και FI . . . . .	12
2.5 Συζυγής Μέθοδος για τις NS . . . . .	13
2.5.1 Διατύπωση FI για τις NS . . . . .	13
2.5.2 Διατύπωση SI για τις NS . . . . .	17
2.6 Εφαρμογή - υπολογισμός παραγώγων με SI και FI . . . . .	18
2.7 Σύγκριση των διατυπώσεων FI και SI . . . . .	21
2.8 Διαφορές ανάμεσα στις δύο διατυπώσεις . . . . .	25
2.9 Διατύπωση E-SI . . . . .	26
2.10 Διαδικασία βελτιστοποίησης . . . . .	28
<b>3 Η συζυγής μέθοδος για την εξίσωση Burgers</b>	<b>29</b>
3.1 Ανάπτυξη της συζυγούς μεθόδου . . . . .	30
3.1.1 Διατύπωση FI . . . . .	31
3.1.2 Διατύπωση SI . . . . .	33
3.1.3 Διατύπωση E-SI . . . . .	35
3.2 Υπολογιστικές μελέτες . . . . .	36
<b>4 Παράγωγοι ευαισθησίας σε μεμονωμένες αεροτομές</b>	<b>39</b>
4.1 Εισαγωγή . . . . .	39
4.2 Αεροτομή A . . . . .	41
4.3 Αεροτομή B . . . . .	42
4.4 Σχολιασμός των παραγώγων ευαισθησίας . . . . .	45
4.4.1 Ανάλυση όρων παραγώγου SI . . . . .	51
4.5 Ενδεικτικές περιπτώσεις πεδίων ροής για τις αεροτομές A και B . . . . .	60

<b>5 Βελτιστοποίηση πτερύγωσης συμπιεστή</b>	<b>67</b>
5.1 Εύρεση παραγώγων ευαισθησίας . . . . .	68
5.2 Ελαχιστοποίηση απωλειών ολικής πίεσης . . . . .	70
<b>6 Ανακεφαλαίωση - Συμπεράσματα</b>	<b>75</b>
6.1 Συμπεράσματα . . . . .	75
6.2 Προτάσεις για μελλοντική μελέτη . . . . .	76
<b>A' Τυπολόγιο - δύναμη σε σώμα</b>	<b>79</b>
A'.1 Αντικειμενική συνάρτηση: Δύναμη σε σώμα . . . . .	79
A'.1.1 Παράγωγος ευαισθησίας με διατύπωση SI χωρίς απαλοιφή του όρου του Leibniz . . . . .	81
A'.1.2 Παράγωγος ευαισθησίας με διατύπωση SI με απαλοιφή του όρου του Leibniz . . . . .	81
A'.1.3 Παράγωγος ευαισθησίας με διατύπωση E-SI . . . . .	81
A'.1.4 Παράγωγος ευαισθησίας με διατύπωση FI . . . . .	81
A'.2 Αντικειμενική συνάρτηση: Απώλειες ολικής πίεσης . . . . .	82
A'.2.1 Παράγωγος ευαισθησίας με διατύπωση SI χωρίς απαλοιφή του όρου του Leibniz . . . . .	83
A'.2.2 Παράγωγος ευαισθησίας με διατύπωση SI με απαλοιφή του όρου του Leibniz . . . . .	83
A'.2.3 Παράγωγος ευαισθησίας με διατύπωση E-SI . . . . .	83
A'.2.4 Παράγωγος ευαισθησίας με διατύπωση FI . . . . .	83
<b>B' Δεύτερες παραγώγοι πάνω στον τοίχο</b>	<b>85</b>
B'.1 Διακριτοποίηση πρώτης παραγώγου . . . . .	86
B'.2 Διακριτοποίηση δεύτερης παραγώγου . . . . .	87
B'.3 Σχολιασμός των παραδοχών . . . . .	88
<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>89</b>

# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

### 1.1 Μέθοδοι Βελτιστοποίησης στον Αεροδυναμικό Σχεδιασμό

Στον τομέα της μηχανικής των ρευστών και την αεροδυναμική ανέκαθεν υπήρχε ενδιαφέρον για τη δημιουργία γρήγορων και αξιόπιστων διαδικασιών για τον υπολογισμό του πεδίου ροής γύρω από αεροδυναμικά και μη σώματα και με τρόπο, ώστε να αποτυπώνεται το πεδίο ταχυτήτων γύρω από αυτά, καθώς και οι δυνάμεις και οι τάσεις που αναπτύσσονται σε αυτά. Για τον σκοπό αυτόν, είναι αναγκαίο να επιλυθούν οι εξισώσεις συνέχειας, ορμής (γνωστές και ως Navier - Stokes) και ενέργειας.

Η αδυναμία εύρεσης γενικευμένης αναλυτικής λύσης για κάθε τύπο οριακών συνθηκών στις εξισώσεις Navier - Stokes, οδήγησε στην ανάπτυξη του κλάδου της Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής (γνωστού ως Computational Fluid Dynamics - CFD).

Τις τελευταίες δεκαετίες, βασικός στόχος δεν είναι πλέον η επίλυση μόνο των εξισώσεων ροής, αλλά και η εύρεση της γεωμετρίας των υπό μελέτη σωμάτων κατά το σχεδιασμό τους, προκειμένου να επιτευχθεί συγκεκριμένη ή η βέλτιστη δυνατή αεροδυναμική συμπεριφορά. Το πρόβλημα είναι γνωστό ως πρόβλημα αντίστροφου σχεδιασμού ή, γενικότερα, ως πρόβλημα αεροδυναμικού σχεδιασμού-βελτιστοποίησης.

Για την ικανοποίηση αυτής της ανάγκης, αναπτύχθηκαν μέθοδοι βελτιστοποίησης. Χαρακτηριστικά προβλήματα στην αεροδυναμική βελτιστοποίηση είναι τα εξής:

- Ελαχιστοποίηση της αεροδυναμικής αντίστασης σώματος σε εξωτερική ροή.
- Μεγιστοποίηση της άνωσης σώματος σε εξωτερική ροή.
- Ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης σε προβλήματα εσωτερικής αεροδυναμικής.
- Εύρεση της βέλτιστης μορφής πτερυγώσεων συμπιεστή ή στροβίλου, για μέγιστο βαθμό απόδοσης.

Οι μέθοδοι βελτιστοποίησης, σύμφωνα με το [2], διακρίνονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες:

1. Στις στοχαστικές μεθόδους βελτιστοποίησης (Stochastic Optimisation Methods).

## 2. Στις αιτιοκρατικές μεθόδους βελτιστοποίησης (Deterministic Optimisation Methods).

Βέβαια, πολλές σύγχρονες μέθοδοι βελτιστοποίησης (οι αποκαλούμενες υβριδικές-hybrid) χρησιμοποιούν στοιχεία και από τις δύο αυτές κατηγορίες.

Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν οι μέθοδοι εκείνες στις οποίες χρησιμοποιούνται στοιχεία τυχαίας ή οργανωμένα τυχηματικής αναζήτησης της βέλτιστης λύσης. Οι στοχαστικοί αλγόριθμοι είναι περισσότερο γενικοί, εύκολα προσαρμόσιμοι για να λυθεί ένα διαφορετικό πρόβλημα και μπορούν να εντοπίσουν το ολικό ακρότατο μιας συνάρτησης στόχου, ανεξάρτητα από τα σημεία αρχικοποίησης. Έχουν επιπλέον το πλεονέκτημα να επιλύουν προβλήματα πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης, υπολογίζοντας το κατά Pareto μέτωπο μη κυριαρχούμενων λύσεων. Το μεγάλο τους μειονέκτημα είναι το υψηλό υπολογιστικό κόστος τους, οποτεδήποτε χρησιμοποιούνται στην τυπική μορφή τους.

Χαρακτηριστικά παραδείγματα στοχαστικών αλγορίθμων, σύμφωνα με το [2], αποτελούν οι εξελικτικοί αλγόριθμοι (Evolutionary Algorithms, EA), οι εξελικτικές στρατηγικές (Evolution Strategies, ES) κλπ.

Στη δεύτερη κατηγορία ανήκουν εκείνες οι μέθοδοι στις οποίες γίνεται η χρήση της γενικευμένης έννοιας της παραγώγου της αντικειμενικής συνάρτησης, με σκοπό την ελαχιστοποίηση ή μεγιστοποίηση της τιμής μιας οποιασδήποτε αντικειμενικής συνάρτησης. Η διαμόρφωση μιας αιτιοκρατικής μεθόδου βελτιστοποίησης απαιτεί περισσότερο χρόνο, είναι δυσκολότερο επεκτάσιμη σε άλλα παρεμφερή προβλήματα και τρέχοντάς την, υπάρχει ο κίνδυνος να εντοπισθεί τοπικό και αντί του καθολικού ακρότατου μιας συνάρτησης, ανάλογα με το σημείο εκκίνησης. Ωστόσο, το πολύ μεγάλο πλεονέκτημά τους είναι ότι συγκλίνουν πιο γρήγορα στη λύση σε σύγκριση με τις στοχαστικές μεθόδους.

Βασικό ζήτημα στις αιτιοκρατικές μεθόδους είναι ο υπολογισμός ή η προσέγγιση της παραγώγου της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού. Ενδεικτικοί τρόποι υπολογισμού της παραγώγου είναι οι εξής:

- Πεπερασμένες διαφορές (Finite Differences.) [2]
- Ευθεία διαφορίση (Direct Differentiation.) [2, 16]
- Μέθοδος των μιγαδικών μεταβλητών (Complex Variable Methods.) [2]
- Μέθοδος της αυτόματης διαφορίσης (Automated Differentiation.) [2, 8]
- Συζυγής μέθοδος (Adjoint Method.) [2, 16]

Η πιο ισχυρή μέθοδος από τις παραπάνω είναι η συζυγής μέθοδος. Το βασικό της πλεονέκτημα είναι ότι το υπολογιστικό κόστος είναι ανεξάρτητο του αριθμού των μεταβλητών σχεδιασμού. Αυτό το χαρακτηριστικό είναι πολύ σημαντικό για τα σύγχρονα προβλήματα αεροδυναμικού σχεδιασμού, στα οποία ο αριθμός των μεταβλητών σχεδιασμού μπορεί να είναι και της τάξης του εκατομμυρίου. Σε τέτοιου είδους προβλήματα, γίνεται υπολογιστικά ασύμφορη έως και ανέφικτη η χρήση άλλων μεθόδων, όπως των εξελικτικών αλγορίθμων, όπου αν αυξηθεί ο αριθμός των μεταβλητών σχεδιασμού, τότε το υπολογιστικό κόστος αυξάνεται αρκετά!

Το πλεονέκτημα αυτό αντισταθμίζει το μειονέκτημα των συζυγών μεθόδων που σχετίζεται με την ανάγκη για επαναδιατύπωση των εξισώσεων και των οριακών τους συνθηκών και για το μερικό επαναπρογραμματισμό του λογισμικού, κάθε φορά που αλλάζει η αντικειμενική συνάρτηση. Αντίθετα, στους εξελικτικούς αλγορίθμους, δεν πραγματοποιείται καμία αλλαγή

ή/και παρέμβαση στο μοντέλο αξιολόγησης της αντικειμενικής συνάρτησης (λ.χ. το λογισμικό υπολογιστικής ρευστοδυναμικής), αλλά αυτό χρησιμοποιείται στη λογική του 'μαύρου κουτιού'.

## 1.2 Η συζυγής μέθοδος

Όπως αναφέρθηκε και πιο πριν, το βασικό πλεονέκτημα της συζυγούς μεθόδου είναι ότι το υπολογιστικό κόστος της είναι (θεωρητικά, έστω) ανεξάρτητο του πλήθους των μεταβλητών σχεδιασμού. Αυτό το χαρακτηριστικό την καθιστά ιδιαίτερα διαδεδομένη σε προβλήματα αεροδυναμικού σχεδιασμού, αλλά και στον κατασκευαστικό τομέα.

Η συζυγής μέθοδος διακρίνεται:

1. στη διακριτή συζυγή μέθοδο (Discrete Adjoint Method),
2. στη συνεχή συζυγή μέθοδο (Continuous Adjoint Method).

Η ειδοποιός διαφορά ανάμεσα στις δύο αυτές μεθόδους είναι ότι στην πρώτη, αρχικά διακρίνονται οι εξισώσεις που περιγράφουν το πρόβλημα και στη συνέχεια, διαφορίζονται, ενώ στη δεύτερη μέθοδο συμβαίνει το αντίστροφο. Θεωρητικά, οι δύο μέθοδοι υπολογίζουν για την ίδια αντικειμενική συνάρτηση τις ίδιες παραγώγους, εφόσον το πλέγμα είναι απειροστά πυκνό.

Στη ΜΠΥΡ&B/EMΠ έχει δοθεί ιδιαίτερη έμφαση στην ανάπτυξη της συνεχούς συζυγούς μεθόδου. Σε αυτήν τη διπλωματική εργασία, γίνεται η μελέτη των αποτελεσμάτων υπολογισμού των παραγώγων ευαισθησίας αποκλειστικά με τη συνεχή μέθοδο μέσω διαφορετικών διατυπώσεων.

## 1.3 Πιθανές διατυπώσεις της συνεχούς συζυγούς μεθόδου

Στα προβλήματα αντίστροφου σχεδιασμού, για τις ροές που διέπονται από τις εξισώσεις Navier - Stokes, στη βιβλιογραφία έως τώρα συναντώνται δύο διατυπώσεις για τη συνεχή συζυγή μέθοδο. Καθεμία από αυτές οδηγεί σε διαφορετική έκφραση της παραγώγου ευαισθησίας της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού. Πρέπει να γίνει σαφές ότι, και με τις δύο διατυπώσεις, σκοπός είναι ο υπολογισμός της ακριβούς παραγώγου της αντικειμενικής συνάρτησης και όχι προσεγγιστικής. Ακόμα, στο μεγαλύτερο μέρος αυτής της διπλωματικής εργασίας, η μελέτη επικεντρώνεται σε στρωτές ροές και όχι τυρβώδεις. Ο λόγος είναι απλός: το πρόβλημα που αναλύεται και θεραπεύεται σε αυτήν την εργασία δεν σχετίζεται με την ύπαρξη ή όχι τύρβης (και μοντέλου τύρβης) στο πρόβλημα. Στις τυρβώδεις ροές, πρέπει να γίνει παραγωγή και των εξισώσεων του μοντέλου τύρβης κατά τη διαμόρφωση του συζυγούς προβλήματος, προκειμένου να διατυπωθούν οι ακριβείς παράγωγοι ευαισθησίας και όχι προσεγγίσεις τους (όπως όταν γίνεται η παραδοχή της 'παγωμένης τύρβης' - frozen turbulence - όπου αμελούνται οι μεταβολές της τυρβώδους συνεκτικότητας λόγω μεταβολών των μεταβλητών σχεδιασμού [5]).

Η μία διατύπωση οδηγεί σε παραγώγους ευαισθησίας που περιέχουν μόνο επιφανειακά ολοκληρώματα στα όρια του πεδίου και θα λέγεται **Συζυγής Διατύπωση Επιφανειακών Ολοκληρωμάτων (Surface Integrals - SI)**. Το υπολογιστικό κόστος σε αυτήν την περίπτωση είναι αρκετά χαμηλό, ωστόσο η ακρίβεια της μεθόδου δεν είναι εγγυημένη, κυρίως όταν τα πλέγματα που χρησιμοποιούνται είναι σχετικά αραιά.

Η άλλη διατύπωση οδηγεί σε παραγώγους ευαισθησίας που περιέχουν και επιφανειακά και χωρικά ολοκληρώματα. Εξαιτίας της ύπαρξης χωρικών ολοκληρωμάτων στην έκφραση της παραγώγου, η μέθοδος αυτή έχει μεγαλύτερο υπολογιστικό κόστος, ωστόσο είναι και πολύ πιο ακριβής. Σε αυτήν την εργασία, αυτή η μέθοδος θα λέγεται **Συζυγής Διατύπωση Χωρικών Ολοκληρωμάτων (Field Integrals - FI)**.

Οι δύο διατυπώσεις αυτές αποδεικνύεται ότι είναι μαθηματικά ισοδύναμες, ωστόσο σε αριθμητικό επίπεδο κρύβονται διαφορές που οδηγούν σε μειωμένη ακρίβεια της πρώτης διατύπωσης από τις δύο προαναφερθείσες.

Πρόσφατα, στη ΜΠΥΡ&B/ΕΜΠ, στο πλαίσιο της Διδακτορικής Διατριβής του Ιωάννη Καββαδία [3], εξετάστηκαν οι λόγοι που οδηγούν στη διαφορά μεταξύ των δύο διατυπώσεων και αναπτύχθηκε μια νέα μέθοδος υπολογισμού των παραγώγων ευαισθησίας, η οποία αποτελεί βελτιωμένη εκδοχή της πρώτης από τις δυο προαναφερθείσες διατυπώσεις. Στη νέα αυτή μέθοδο, διατυπώνεται η συνεχής συζυγής μέθοδος ως προς το μαθηματικό-υπολογιστικό μοντέλο μετατόπισης του πλέγματος και προκύπτει μια βελτιωμένη διατύπωση της SI, που έχει το ίδιο υπολογιστικό κόστος με αυτήν και παράλληλα την ακρίβεια της FI. Η τελευταία αυτή εκδοχή της μεθόδου ονομάστηκε (στη διατριβή [3] και στη δημοσίευση [15]) **Εμπλουτισμένη Διατύπωση Επιφανειακών Ολοκληρωμάτων (Enhanced Surface Integrals - E-SI)** και είναι αυτή η οποία διερευνάται, ακόμη περισσότερο, στην εργασία αυτή.

## 1.4 Στόχος και δομή της εργασίας

Σε αυτήν τη διπλωματική εργασία δίνεται έμφαση σε εφαρμογές που αφορούν τις διαφορετικές διατυπώσεις για την εύρεση των παραγώγων ευαισθησίας στη συνεχή συζυγή μέθοδο. Πιο συγκεκριμένα,

- Πραγματοποιήθηκε η ανάπτυξη κώδικα υπολογισμού παραγώγων ευαισθησίας με τις διαφορετικές διατυπώσεις, για την εξίσωση Burgers, για την περίπτωση του χρονικά μόνιμου μονοδιάστατου προβλήματος.
- Με χρήση του λογισμικού OpenFOAM<sup>©</sup> και λογισμικού που αναπτύχθηκε στη ΜΠΥΡ &B/ΕΜΠ για την εύρεση παραγώγων ευαισθησίας μέσω διαφορετικών διατυπώσεων, έγινε η μοντελοποίηση προβλημάτων ροής σε διαφορετικούς τύπους αεροτομών, για την περίπτωση της μόνιμης στρωτής ροής ασυμπίεστου ρευστού και, η επίλυση του πρωτεύοντος πεδίου ροής και του συζυγούς προβλήματος, με σκοπό τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας με τις διαφορετικές διατυπώσεις. Με βάση τα αποτελέσματα που προέκυψαν, έγινε η ανάλυση της συνεισφοράς των επιμέρους όρων των παραγώγων ευαισθησίας από τις διαφορετικές διατυπώσεις και διευκρινίστηκε η αιτία που οδηγεί σε διαφοροποιήσεις μεταξύ των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από τις διαφορετικές διατυπώσεις. Μάλιστα, εξετάζεται και το πρόβλημα της αεροδυναμικής



αντίστασης και με τη βελτιωμένη διατύπωση E-SI, κάτι που δεν έχει παρουσιαστεί στη βιβλιογραφία ως τώρα και προκύπτουν ενδιαφέροντα συμπεράσματα.

- Με χρήση του λογισμικού OpenFOAM<sup>®</sup>, υπολογίστηκαν οι παράγωγοι ευαισθησίας με τις διατυπώσεις FI, SI και E-SI, για μια ακίνητη διδιάστατη πτερύγωση στροβιλομηχανής, για μόνιμη τυρβώδη ροή ασυμπίεστου ρευστού.

Η δομή της εργασίας είναι η εξής:

- Κεφάλαιο 2: Παρουσιάζονται οι δύο κλασικές διατυπώσεις του συζυγούς προβλήματος που συναντώνται στη βιβλιογραφία (δηλαδή οι διατυπώσεις FI και SI), εξετάζεται η μαθηματική τους ισοδυναμία και στο τέλος, παρουσιάζεται η βελτιωμένη διατύπωση E-SI, όπου γίνεται χρήση επιφανειακών ολοκληρωμάτων.
- Κεφάλαιο 3: Παρουσιάζεται η επίλυση του μονοδιάστατου χρονικά μόνιμου προβλήματος που διέπεται από την εξίσωση Burgers. Αναπτύσσεται η μαθηματική διατύπωση του συζυγούς προβλήματος και γίνεται παραμετρική μελέτη για την εύρεση των παραγώγων ευαισθησίας με τις διαφορετικές διατυπώσεις, για διαφορετικό αριθμό κόμβων πλέγματος. Τέλος, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα σε σύγκριση με πεπερασμένες διαφορές.
- Κεφάλαιο 4: Γίνεται παραμετρική μελέτη πλέγματος κατά τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας με τις διαφορετικές διατυπώσεις για το πρόβλημα της μόνιμης διδιάστατης στρωτής ροής ασυμπίεστου ρευστού γύρω από δύο τύπους αεροτομών. Και στις δύο αεροτομές γίνεται εύρεση παραγώγων, έχοντας ως αντικειμενικές συναρτήσεις την αεροδυναμική αντίσταση αλλά και την άνωση. Η αξιοπιστία των υπολογιζόμενων παραγώγων μέσω των διαφορετικών διατυπώσεων ελέγχεται, συγκρίνοντάς τις με τις παραγώγους που προκύπτουν με πεπερασμένες διαφορές. Ακόμα, δίνεται εξήγηση για τη διαφορετική τάξη μεγέθους όσον αφορά στη διαφορά που εντοπίζεται ανάμεσα στις παραγώγους, αναλύοντας τους διαφορετικούς όρους που συνεισφέρουν στην τιμή κάθε παραγώγου.
- Κεφάλαιο 5: Παρουσιάζεται μια εφαρμογή σχετική με πτερυγώσεις στροβιλομηχανών. Σε αυτήν την περίπτωση, αντικειμενική συνάρτηση είναι η μέση μαζικά τιμή των απωλειών ολικής πίεσης σε μια σταθερή διδιάστατη πτερύγωση για συνθήκες μόνιμης και τυρβώδους ροής ασυμπίεστου ρευστού. Γίνεται υπολογισμός των παραγώγων ευαισθησίας και διερευνάται η παραδοχή της 'παγωμένης τύρβης'.
- Κεφάλαιο 6: Συνοψίζονται τα συμπεράσματα που αφορούν τις περιπτώσεις που διερευνήθηκαν και γίνεται αναφορά σε ενδεχόμενο μελλοντικό έργο στο συγκεκριμένο πεδίο, για τον ακριβή υπολογισμό παραγώγων ευαισθησίας με τη συνεχή συζυγή μέθοδο.



## Κεφάλαιο 2

# Εύρεση παραγώγων με τη συνεχή συζυγή μέθοδο

Έστω ότι για ένα οποιοδήποτε πρόβλημα βελτιστοποίησης, η αντικειμενική συνάρτηση προς ελαχιστοποίηση είναι η  $J$  και το διάνυσμα των μεταβλητών σχεδιασμού  $\vec{b} = b_n$  όπου  $n = 1, \dots, N$ , ενώ  $N$  ο αριθμός των μεταβλητών σχεδιασμού. Έστω ακόμα ότι οι εξισώσεις του πρωτεύοντος προβλήματος γράφονται στη μορφή  $R_i = 0$  (με  $R_i$  τα υπόλοιπα των εξισώσεων), όπου  $i = 1, \dots, E$ , με  $E$  το αριθμό των εξισώσεων. Τότε, ορίζεται η επαυξημένη αντικειμενική συνάρτηση

$$L = J + \int_{\Omega} \Psi_i R_i d\Omega \quad (2.1)$$

όπου  $\Psi_i$  είναι τα πεδία των συζυγών μεταβλητών και  $\Omega$  είναι το υπολογιστικό χωρίο. Από τη στιγμή που οι εξισώσεις του πρωτεύοντος προβλήματος ικανοποιούνται σε όλο το χωρίο  $\Omega$ , ισχύει ότι  $L \equiv J$ .

Η εξίσωση 2.1, παραγωγιζόμενη ως προς τη μεταβλητή σχεδιασμού  $b_n$ , δίνει

$$\frac{\delta L}{\delta b_n} = \frac{\delta J}{\delta b_n} + \frac{\delta}{\delta b_n} \int_{\Omega} \Psi_i R_i d\Omega \quad (2.2)$$

όπου ο όρος  $\delta()/\delta b_n$  είναι η ολική παράγωγος ως προς τη μεταβλητή σχεδιασμού  $b_n$ .

Όπως αναφέρθηκε και στο Κεφάλαιο 1, υπάρχουν διαφορετικές διατυπώσεις για τη συνεχή συζυγή μέθοδο. Στη βιβλιογραφία, μέχρι πρότινος, συναντώνται δύο κλασικές διατυπώσεις, με τις οποίες προκύπτουν ίδιες πεδιακές συζυγείς εξισώσεις, ίδιες συζυγείς οριακές συνθήκες αλλά διαφορετικές εκφράσεις των παραγώγων ευαισθησίας της αντικειμενικής συνάρτησης  $J$  ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού  $\vec{b}$ . Οι διαφορετικές αυτές διατυπώσεις οφείλονται στον διαφορετικό τρόπο ανάπτυξης των παραγώγων των ολοκληρωματικών ποσοτήτων της σχέσης 2.2. Οι δύο τρόποι ανάπτυξης της παραγώγου παρουσιάζονται στις ενότητες 2.2 και 2.3.

Στην πρώτη διατύπωση που έχει δημοσιευθεί στο [6], οι υπολογιζόμενες παράγωγοι ευαισθησίας περιέχουν χωρικά ολοκληρώματα των μεταβολών των συντεταγμένων των κόμβων του πλέγματος  $\vec{x}$  ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού  $\vec{b}$ , που καλούνται παράγωγοι (των συντεταγμένων) του πλέγματος (grid sensitivities). Η διατύπωση αυτή ονομάζεται **Συζυγής Διατύπωση Χωρικών Ολοκληρωμάτων (Field Integrals - FI)** και έχει μεγάλο

υπολογιστικό κόστος, εξαιτίας της ανάγκης υπολογισμού ολοκληρωμάτων σε όλο το χωρίο επίλυσης του φυσικού προβλήματος και του υπολογισμού των ποσοτήτων  $dx_i/db_n$ . Το τελευταίο απαιτεί την επίλυση των εξισώσεων μετατόπισης πλέγματος δύο φορές για κάθε μεταβλητή σχεδιασμού ανά κατεύθυνση, (αν υποθεθεί ότι υπολογίζονται με σχήμα κεντρικών διαφορών, δηλαδή σχήμα ακρίβειας δεύτερης τάξης, διαφορετικά για σχήμα πρώτης τάξης απαιτείται μία επίλυση της εξίσωσης μετατόπισης του πλέγματος ανά μεταβλητή σχεδιασμού και ανά κατεύθυνση).

Αν οι ποσότητες  $dx_i/db_n$  υπολογιστούν με πεπερασμένες διαφορές, το υπολογιστικό κόστος υπολογισμού αυξάνεται με τη αύξηση του αριθμού των μεταβλητών σχεδιασμού αφού, για κάθε μεταβλητή σχεδιασμού, απαιτείται να λυθεί δύο φορές το σύστημα των εξισώσεων που διέπουν τη μετατόπιση του πλέγματος, οι οποίες μπορεί να είναι μερικές διαφορικές ή αλγεβρικές εξισώσεις. Εξαιτίας της ανάγκης επίλυσης των εξισώσεων μετατόπισης του πλέγματος τόσες πολλές φορές (ιδίως όταν είναι ΜΔΕ), το κόστος τελικά του υπολογισμού των παραγώγων ευαισθησίας γίνεται απαράδεκτα μεγάλο, σε μεγάλες εφαρμογές.

Ειδικά, για τον υπολογισμό του χάρτη ευαισθησίας, όπου απαιτείται η παράγωγος της αντικειμενικής συνάρτησης  $J$  ως προς την κάθετη στην προς βελτιστοποίηση επιφάνεια μετατόπιση των σημείων της, που φτάνουν σε πλήθος και τα εκατοντάδες χιλιάδες, γίνεται πρακτικά απαγορευτική η χρήση της διατύπωσης με Χωρικά Ολοκληρώματα.

Από την άλλη, το μεγάλο πλεονέκτημα της μεθόδου είναι ότι είναι αρκετά ακριβής, μιας και δεν γίνεται κάποια απλοποιητική παραδοχή.

Η δεύτερη διατύπωση, η οποία προτάθηκε από τους Anderson - Venkatakrishnan (για ασυμπίεστες ροές) [21], Jameson - Kim (για συμπίεστες ροές) [7] και αναδιατυπώθηκε από τους Papadimitriou - Giannakoglou (γενίκευση για κάθε τύπο πλέγματος, δηλαδή δομημένα και μη-δομημένα πλέγματα) [10], περιέχει μόνο επιφανειακά ολοκληρώματα και ονομάζεται **Συζυγής Διατύπωση Επιφανειακών Ολοκληρωμάτων (Surface Integrals - SI)**.

Οι δυο αυτές διατυπώσεις είναι μαθηματικά ισοδύναμες (βλέπε [3] και [15]). Ωστόσο, μετά από υπολογιστικές προσομοιώσεις, παρατηρήθηκε ότι σε μη-επαρκώς πυκνά πλέγματα υπάρχουν διαφορές ανάμεσα στις παραγώγους που υπολογίζουν. Αυτές οι διαφορές αποδεικνύεται ότι οφείλονται σε παραδοχές που γίνονται κατά την υλοποίηση της Συζυγούς Διατύπωσης με Επιφανειακά Ολοκληρώματα (SI) και οι οποίες δεν είναι τόσο ακίνδυνες όσο μοιάζουν εκ πρώτης όψεως.

Για να ξεπεραστεί το πρόβλημα αυτό της διαφοράς μεταξύ των υπολογιζόμενων παραγώγων ευαισθησίας, αναπτύχθηκε στη ΜΠΥΡ&Β/ΕΜΠ μια νέα διατύπωση, η **Εμπλουτισμένη Συζυγής Διατύπωση Επιφανειακών Ολοκληρωμάτων (Surface Integrals - E-SI)** [3, 15], η οποία έχει το ίδιο υπολογιστικό κόστος με τη Διατύπωση Επιφανειακών Ολοκληρωμάτων και την ίδια ακρίβεια με τη Διατύπωση Χωρικών Ολοκληρωμάτων.

Στις επόμενες ενότητες του κεφαλαίου αυτού παρουσιάζονται οι δυο κλασικές διατυπώσεις που υπήρχαν στη βιβλιογραφία των συνεχών συζυγών μεθόδων πριν την πρόσφατη εμφάνιση της διατριβής [3] από την ΜΠΥΡ&Β/ΕΜΠ, παρουσιάζεται η μαθηματική τους ισοδυναμία, οι διαφορές στον αριθμητικό υπολογισμό των παραγώγων και, τέλος, παρουσιάζεται η Εμπλουτισμένη Συζυγής Διατύπωση.

Πρώτα, όμως, θα γίνει αναφορά στον τρόπο με τον οποίο γίνεται χειρισμός των παραγώγων στη συζυγή μέθοδο.

## 2.1 Παραγωγή με τη συζυγή μέθοδο

Κάθε ποσότητα  $\Phi$ , η οποία περιέχεται στο ολοκλήρωμα της σχέσης 2.1, μπορεί να γραφτεί ως

$$\Phi = \Phi [\vec{b}, \vec{x}(\vec{b}), \vec{U}(\vec{b}, \vec{x}(\vec{b}))] \quad (2.3)$$

όπου  $\vec{b} \in R^n$  είναι το διάνυσμα των  $N$  μεταβλητών σχεδιασμού,  $\vec{x}(\vec{b})$  είναι το πεδίο των χωρικών συντεταγμένων και  $U(\vec{b}, \vec{x}(\vec{b}))$  είναι το πεδίο των μεταβλητών κατάστασης, δηλαδή των ροϊκών ποσοτήτων (αν πρόκειται για πρόβλημα ροής).

Τότε, η πλήρης έκφραση της παραγώγου της  $\Phi$  ως προς μια οποιαδήποτε από τις μεταβλητές σχεδιασμού (έστω τη  $b_n$ ) δίνεται από την εξίσωση

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Phi}{\delta b_n} &= \frac{\partial \Phi}{\partial b_n} \Big|_{x=ct}^{U=ct} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \Big|_{b=ct}^{U=ct} \frac{\delta x_i}{\delta b_n} + \frac{\partial \Phi}{\partial U_j} \Big|_{b=ct}^{x=ct} \left[ \frac{\partial U_j}{\partial b_n} \Big|_{x=ct} + \frac{\partial U_j}{\partial x_k} \Big|_{b=ct} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \right] \\ &= \underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial b_n} \Big|_{x=ct}^{U=ct}}_{T_1} + \underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \Big|_{b=ct}^{U=ct} \frac{\delta x_i}{\delta b_n}}_{T_2} + \underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial U_j} \Big|_{b=ct}^{x=ct} \frac{\partial U_j}{\partial b_n} \Big|_{x=ct}}_{T_3} + \underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial U_j} \Big|_{b=ct}^{x=ct} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} \Big|_{b=ct} \frac{\delta x_k}{\delta b_n}}_{T_4} \end{aligned} \quad (2.4)$$

όπου ' $=ct$ ' υποδηλώνει το ότι η ποσότητα αυτή διατηρείται σταθερή κατά την παραγωγή.

### 2.1.1 Παράγωγοι με τη διακριτή συζυγή μέθοδο

Στη διακριτή συζυγή μέθοδο [9, 17, 18, 20], η παράγωγος ευαισθησίας ως προς τη μεταβλητή σχεδιασμού δίνεται από τη σχέση

$$\frac{\delta \Phi}{\delta b_n} = \underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial b_n}}_{D_1} + \underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial U_j} \frac{\delta U_j}{\delta b_n}}_{D_2} \quad (2.5)$$

και προκύπτει ότι

$$D_2 = T_3 + T_4 \quad (2.6)$$

Ο όρος  $D_1$  αναλύεται ως

$$\frac{\partial \Phi}{\partial b_n} = \frac{\partial}{\partial b_n} \left[ \Phi(b_n, x(b_n)) \right] = \frac{\partial \Phi}{\partial b_n} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\delta x_i}{\delta b_n} \quad (2.7)$$

Οπότε, είναι

$$D_1 = T_1 + T_2 \quad (2.8)$$

Με βάση τα ανωτέρω, μπορούν να γίνουν τα εξής σχόλια:

- Ο όρος  $\frac{\partial \Phi}{\partial b_n}$  στη σχέση 2.5 σημαίνει ότι καθώς το  $b_n$  μεταβάλλεται και  $U = ct$ , το  $\Phi$  πρέπει να υπολογιστεί σε διαφορετική θέση  $x$  σε σχέση με την προηγούμενη, γιατί εφόσον το  $b_n$  αλλάζει, τότε μεταβάλλεται και η τιμή του  $U$ . Άρα, το  $\Phi$  δεν μπορεί να υπολογιστεί στο ίδιο σημείο, γιατί στο συγκεκριμένο σημείο, το  $U$  θα είναι διαφορετικό.

- Η έκφραση της παραγώγου στη διακριτή συζυγή μέθοδο δείχθηκε μαθηματικά ισοδύναμη με την πλέον γενική έκφραση της παραγώγου, αφού  $D_1+D_2=T_1+T_2+T_3+T_4$ , ως όφειλε να είναι και, το πιο σημαντικό, εντοπίστηκαν οι αντιστοιχίες όρων.

### 2.1.2 Παράγωγοι με τη συνεχή συζυγή μέθοδο

Στη συνεχή συζυγή μέθοδο, η παράγωγος ευαισθησίας της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού δίνεται από τη σχέση

$$\frac{\delta\Phi}{\delta b_n} = \underbrace{\frac{\partial\Phi}{\partial b_n}\bigg|_{x=ct}}_{C_1} + \underbrace{\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}\bigg|_{b=ct} \frac{\delta x_j}{\delta b_n}}_{C_2} \quad (2.9)$$

Ο όρος  $C_1$  γράφεται ως

$$C_1 = \frac{\partial}{\partial b_n} \left[ \Phi(b_n, U(b_n)) \right] \bigg|_{x=ct} = \frac{\partial\Phi}{\partial b_n} \bigg|_{x=ct}^{U=ct} + \frac{\partial\Phi}{\partial U_j} \bigg|_{b=ct} \frac{\partial U_j}{\partial b_n} \bigg|_{x=ct} \quad (2.10)$$

και συνεπώς,

$$C_1 = T_1 + T_3 \quad (2.11)$$

Ο όρος  $C_2$  γράφεται ως

$$C_2 = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \Phi(x, U(x)) \right] \bigg|_{b=ct} \frac{\delta x_j}{\delta b_n} = \frac{\partial\Phi}{\partial x_j} \bigg|_{b=ct}^{U=ct} \frac{\delta x_j}{\delta b_n} + \frac{\partial\Phi}{\partial U_i} \bigg|_{b=ct}^{x=ct} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \bigg|_{b=ct} \frac{\delta x_j}{\delta b_n} \quad (2.12)$$

και συνεπώς,

$$C_2 = T_2 + T_4 \quad (2.13)$$

Με βάση τα ανωτέρω, προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

- Η αναμενόμενη ισότητα  $C_1 + C_2 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$  δείχνει τη μαθηματική ισοδυναμία της παραγώγου που υπολογίζεται με τη συνεχή συζυγή μέθοδο με την έκφραση της ολικής παραγώγου της σχέσης 2.4, ενώ εντοπίζονται και κατανοούνται χρήσιμες αντιστοιχίες όρων.
- Από την ίδια ισότητα φαίνεται ότι η συνεχής και η διακριτή συζυγής μέθοδος είναι μαθηματικά ισοδύναμες. Ωστόσο, λόγω της διαφορετικής σειράς διαφορίσης - διακριτοποίησης των εξισώσεων και λόγω της χρήσης αριθμητικών μεθόδων υπολογισμού, τελικά οι υπολογιζόμενες τιμές των παραγώγων με τις δύο μεθόδους διαφέρουν.

Σε αυτήν τη διπλωματική εργασία γίνεται μελέτη των διαφορετικών διατυπώσεων για τη συνεχή συζυγή μέθοδο. Γι' αυτό, στο εξής, κάθε αναφορά στη συζυγή μέθοδο υπονοεί αποκλειστικά τη **συνεχή συζυγή μέθοδο**.

## 2.2 Διατύπωση επιφανειακών ολοκληρωμάτων (SI)

Με χρήση του κανόνα του Leibniz για τη διαφορίση ολοκληρωμάτων (Leibniz's rule for differentiation under the integral sign), στη σχέση 2.2, προκύπτει ότι

$$\frac{\delta L}{\delta b_n} = \frac{\delta J}{\delta b_n} + \int_{\Omega} \Psi_i \frac{\partial R_i}{\partial b_n} d\Omega + \underbrace{\int_S \Psi_i R_i n_k \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS}_{LBterm} \quad (2.14)$$

όπου  $S$  είναι η οριακή επιφάνεια που περικλείει το χωρίο  $\Omega$ . Η εξίσωση 2.14 αποτελεί τη βάση για τη συζυγή διατύπωση SI.

Ο όρος LBterm θα ονομάζεται όρος του Leibniz. Αυτός ο όρος πολύ συχνά στη βιβλιογραφία αμελείται, λόγω της υπόθεσης που γίνεται ότι οι εξισώσεις της ροής ικανοποιούνται στο όριο. Σύμφωνα με τα [3] και [15], αυτή η υπόθεση τείνει γενικά να μην επιφέρει μεγάλο σφάλμα, όταν το πλέγμα είναι αρκετά πυκνό. Όμως, σε αραιά πλέγματα και ανάλογα με την περίπτωση, η απαλοιφή του όρου του Leibniz μπορεί να οδηγήσει σε αρκετά λανθασμένο υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας με αυτήν τη διατύπωση.

Η σχέση 2.14 μπορεί να αναλυθεί περαιτέρω, με χρήση της σχέσης

$$\frac{\partial}{\partial b_n} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial b_n} \right) \quad (2.15)$$

όπου  $\Phi$  είναι μια οποιοδήποτε ποσότητα που περιέχεται στην εξίσωση  $R_i$ . Η σχέση 2.15 μπορεί να γραφεί κατά αυτόν τον τρόπο, γιατί εμπεριέχει τη μερική παράγωγο του  $\Phi$  ως προς τη μεταβλητή σχεδιασμού  $b_n$ , και όχι την ολική, και έτσι, αυτή μπορεί να εναλλάσσεται με τη χωρική παράγωγο.

## 2.3 Διατύπωση χωρικών ολοκληρωμάτων (FI)

Για την ίδια αντικειμενική συνάρτηση, για την ανάλυση της παραγώγου της σχέσης 2.2, αναλύεται η ολική παράγωγος ενός μεγέθους  $\Phi$  ως προς  $b_n$  με χρήση της σχέσης 2.9.

Εδώ καλό είναι να γίνει σαφές ότι η μερική παράγωγος  $\partial \Phi / \partial b_n$  στη σχέση 2.9 αντιστοιχεί στη μεταβολή του μεγέθους  $\Phi$  λόγω της μεταβολής των ροϊκών μεγεθών και των μεταβλητών σχεδιασμού, αμελώντας τη μεταβολή του  $\Phi$  λόγω της μετατόπιση των κόμβων του πλέγματος.

Η παράγωγος στη σχέση 2.2, αναλύεται ως

$$\frac{\delta}{\delta b_n} \int_{\Omega} \Psi_i R_i d\Omega = \int_{\Omega} \Psi_i \frac{\delta R_i}{\delta b_n} d\Omega + \int_{\Omega} \Psi_i R_i \frac{\delta(d\Omega)}{\delta b_n} \quad (2.16)$$

όπου ο τελευταίος όρος αντιστοιχεί στη μεταβολή του υπολογιστικού χωρίου, όταν μεταβάλλεται η μεταβλητή σχεδιασμού  $b_n$ .

Για δομημένα και μη-πλέγματα, έχει αποδειχτεί, στις εργασίες [7] και [10], ότι

$$\frac{\delta(d\Omega)}{\delta b_n} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \right) d\Omega \quad (2.17)$$

και η εξίσωση 2.16 γίνεται

$$\left. \frac{\delta L}{\delta b_n} \right|_{FI} = \frac{\delta J}{\delta b_n} + \int_{\Omega} \Psi_i \frac{\delta R_i}{\delta b_n} d\Omega + \int_{\Omega} \Psi_i R_i \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \right) d\Omega \quad (2.18)$$

Όπως αναφέρεται και στο [5], σε αντίθεση με την εξίσωση 2.15, τώρα ισχύει

$$\frac{\delta}{\delta b_n} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) \neq \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\delta \Phi}{\delta b_n} \right) \quad (2.19)$$

Συνεπώς, η σχέση 2.18 μπορεί να αναλυθεί περαιτέρω, με τη χρήση της επόμενης σχέσης, που συνδέει την ολική και τη μερική παράγωγο ενός οποιοδήποτε μεγέθους  $\Phi$ ,

$$\frac{\delta}{\delta b_n} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\delta \Phi}{\delta b_n} \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \right) \quad (2.20)$$

Με χρήση της εξίσωσης 2.20 και του θεωρήματος Green - Gauss για την ανάπτυξη της εξίσωσης 2.18 προκύπτει η τελική έκφραση της παραγώγου που περιέχει την πεδιακή μεταβολή του  $x_k$  (που ονομάζονται παράγωγοι ευαισθησίας των κόμβων του πλέγματος - grid sensitivities). Η έκφραση που προκύπτει αντιστοιχεί στη συζυγή διατύπωση με χωρικά ολοκληρώματα FI.

## 2.4 Μαθηματική ισοδυναμία των δύο διατυπώσεων

Σε αυτήν την ενότητα, παρουσιάζεται η μαθηματική ισοδυναμία των παραγώγων που προκύπτουν από τις διατυπώσεις με χωρικά και επιφανειακά ολοκληρώματα. Κάνοντας χρήση του θεωρήματος Green - Gauss, φαίνεται ότι

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta L}{\delta b_n} \right|_{FI} &= \frac{\delta J}{\delta b_n} + \int_{\Omega} \Psi_i \frac{\delta R_i}{\delta b_n} d\Omega + \int_{\Omega} \Psi_i R_i \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \right) d\Omega \\ &= \frac{\delta J}{\delta b_n} + \int_{\Omega} \Psi_i \frac{\partial R_i}{\partial b_n} d\Omega + \int_{\Omega} \Psi_i \frac{\partial R_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} d\Omega \\ &= \frac{\delta J}{\delta b_n} + \int_{\Omega} \Psi_i \frac{\partial R_i}{\partial b_n} d\Omega + \underbrace{\int_S \Psi_i R_i n_k \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS}_{LBterm} \\ &\quad - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \Psi_i \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \right) R_i d\Omega = \left. \frac{\delta L}{\delta b_n} \right|_{SI} \end{aligned} \quad (2.21)$$

αφού  $R_i = 0$  στο χωρίο  $\Omega$ . [3, 15].



## 2.5 Η συζυγής μέθοδος για τις εξισώσεις Navier - Stokes

Σε αυτή την ενότητα, θα παραχθούν οι παράγωγοι ευαισθησίας για τις εξισώσεις Navier - Stokes για την περίπτωση της χρονικά μόνιμης στρωτής ροής ασυμπίεστου ρευστού. Όπως τονίστηκε και προηγουμένως, το θέμα των πλεονεκτημάτων και μειονεκτημάτων κάθε συνεχούς συζυγούς διατύπωσης δεν σχετίζεται με το αν υπεισέρχεται και μοντέλο τύρβης (αν και, όπως θα φανεί, επηρεάζεται από αυτό). Για το λόγο αυτό, μεγάλη τμήμα της παρούσας μελέτης εστιάζει σε στρωτές ροές. Συζυγείς μέθοδοι για τυρβώδεις ροές αναφέρονται αργότερα σε τμήμα αυτής της εργασίας.

Οι εξισώσεις που περιγράφουν το πρωτεύον πρόβλημα είναι οι  $R^p = 0$  (εξίσωση της συνέχειας) και  $R_i^v = 0$  (εξίσωση της ορμής στην  $i$ -κατεύθυνση):

$$R^p = -\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2.22)$$

$$R_i^v = v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.23)$$

όπου  $v_i$  είναι οι συνιστώσες της ταχύτητας,  $p$  είναι η στατική πίεση δια της σταθερής πυκνότητας,  $\tau_{ij} = \nu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$  ο τανυστής των τάσεων,  $\nu$  η σταθερή κινηματική συνεκτικότητα. Οι εξισώσεις ροής 2.22 και 2.23 ικανοποιούνται παντού μέσα στο χωρίο ολοκλήρωσης και το σύστημα κλείνει με την επιβολή οριακών συνθηκών.

Για την περίπτωση της στρωτής ροής, η επαυξημένη αντικειμενική συνάρτηση δίνεται από τη σχέση

$$L = J + \int_{\Omega} u_i R_i^v d\Omega + \int_{\Omega} q R^p d\Omega \quad (2.24)$$

Η αντικειμενική συνάρτηση  $J$ , εφόσον ορίζεται στο όριο  $S$  του χωρίου  $\Omega$ , μπορεί να γραφεί ως

$$J = \int_S J_{S,i} n_i dS = \int_{S_I} J_{S_I,i} n_i dS + \int_{S_O} J_{S_O,i} n_i dS + \int_{S_W} J_{S_W,i} n_i dS \quad (2.25)$$

όπου  $S_I$  το όριο εισόδου (Inlet) του χωρίου  $\Omega$ ,  $S_O$  το όριο εξόδου (Outlet) και  $S_W$  τα στερεά όρια (Wall).

Στις υποενότητες 2.5.1 και 2.5.2 παρουσιάζονται οι σχετικές FI και SI συζυγείς διατυπώσεις των εξισώσεων Navier-Stokes.

### 2.5.1 Διατύπωση FI για τις εξισώσεις Navier - Stokes

Με χρήση της σχέσης 2.18, αναπτύσσεται η παράγωγος της  $L$  ως προς το  $b_n$  σύμφωνα με τη συζυγή διατύπωση με χωρικά ολοκληρώματα (FI διατύπωση) και προκύπτει η παράγωγος

ευαισθησίας κατά FI [3, 15]

$$\begin{aligned} \frac{\delta L}{\delta b_n} \Big|_{FI} &= \int_{\Omega} \left( R_i^u \frac{\delta v_i}{\delta b_n} + R^q \frac{\delta p}{\delta b_n} \right) d\Omega + \int_S \left( D_i^u \frac{\delta v_i}{\delta b_n} + D^q \frac{\delta p}{\delta b_n} \right) dS \\ &+ \int_S \left( \frac{\partial J_{S_k}}{\partial \tau_{ij}} n_k - u_i n_j \right) \frac{\delta \tau_{ij}}{\delta b_n} dS + \int_{S_W} J_{S_i} \frac{\delta (n_i dS)}{\delta b_n} \\ &+ \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \right) \left\{ q \frac{\partial v_j}{\partial x_k} - u_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \tau_{ij}^a \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + u_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} - u_j \frac{\partial p}{\partial x_k} \right\} d\Omega \end{aligned} \quad (2.26)$$

όπου

$$R^q = -\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \quad (2.27)$$

$$R_i^u = u_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial (u_i v_j)}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}^a}{\partial x_j} + \frac{\partial q}{\partial x_i}, \quad i=1, 2, (3) \quad (2.28)$$

και  $\tau_{ij}^a = \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$  είναι ο τανυστής των συζυγών τάσεων. Ακόμα,

$$D^q = u_i n_i + \frac{\partial J_{S_k}}{\partial p} n_k, \quad i=1, 2, (3) \quad (2.29)$$

$$D_i^u = v_i v_j n_j - q n_i + \tau_{ij}^a n_j + \frac{\partial J_{S_k}}{\partial v_i} n_k, \quad i=1, 2, (3) \quad (2.30)$$

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το χωρικό ολοκλήρωμα της σχέσης 2.26 που περιέχει τον όρο  $\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \right)$ . Ο όρος αυτός αντιστοιχεί στις χωρικές παραγώγους των παραγώγων των συντεταγμένων του πλέγματος στις καρτεσιανές κατευθύνσεις ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού και αποτελεί τον βασικό όρο της διατύπωσης FI, γιατί με το ολοκλήρωμα που περιέχει αυτόν τον όρο, λαμβάνεται υπόψη η μετατόπιση του πλέγματος όταν μεταβάλλεται κάποια μεταβλητή σχεδιασμού, που τροποποιεί τη μορφή του περιγράμματος του χωρίου.

Μηδενίζοντας τους όρους  $R^q$  και  $R_i^u$  των χωρικών ολοκληρωμάτων που πολλαπλασιάζονται με τις παραγώγους  $\frac{\delta p}{\delta b_n}$  και  $\frac{\delta v_i}{\delta b_n}$  αντίστοιχα, προκύπτουν οι **Συζυγείς Πεδιακές Εξισώσεις (Field Adjoint Equations (FAE))**,

$$R^q = -\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2.31)$$

$$R_i^u = u_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial (u_i v_j)}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}^a}{\partial x_j} + \frac{\partial q}{\partial x_i} = 0, \quad i=1, 2, (3) \quad (2.32)$$

Η σχέση 2.31 είναι η συζυγής εξίσωση συνέχειας και η σχέση 2.32 η συζυγής εξίσωση της ορμής.

Στην FI διατύπωση, για να εξαχθούν οι **Συζυγείς Οριακές Συνθήκες (Adjoint Boundary Conditions - ABC)**, πρέπει να μηδενιστούν οι όροι των επιφανειακών ολοκληρωμάτων που περιέχονται στην παράγωγο  $\frac{\delta L}{\delta b_n}$  και πολλαπλασιάζονται με τους όρους  $\frac{\delta u_i}{\delta b_n}$ ,  $\frac{\delta p}{\delta b_n}$  και  $\frac{\delta \tau_{ij}}{\delta b_n}$ .

- Οριακές Συνθήκες στο  $S_I$

Στην επιφάνεια εισόδου  $S_I$  επιβάλλονται συνθήκες Dirichlet για την ταχύτητα και μηδενική Neumann για την πίεση, ενώ ισχύει ότι  $\frac{\delta x_k}{\delta b_n} = 0$ . Η συνθήκη Dirichlet για την ταχύτητα έχει ως αποτέλεσμα  $\frac{\delta u_i}{\delta b_n} = 0$ . Προκειμένου να απαλειφθούν τα επιφανειακά ολοκληρώματα της σχέσης 2.26 που περιέχουν τους όρους  $\frac{\delta p}{\delta b_n}$  και  $\frac{\delta \tau_{ij}}{\delta b_n}$  στο  $S_I$ , πρέπει να ικανοποιούνται οι σχέσεις

$$u_{(n)} = u_j n_j = -\frac{\partial J_{S_I, i}}{\partial p} n_i \quad (2.33\alpha')$$

$$u_{(t)}^I = u_i t_i^I = \frac{\partial J_{S_I, k}}{\partial \tau_{ij}} n_k t_i^I n_j + \frac{\partial J_{S_I, k}}{\partial \tau_{ij}} n_k t_j^I n_i \quad (2.33\beta')$$

$$u_{(t)}^{II} = u_i t_i^{II} = \frac{\partial J_{S_I, k}}{\partial \tau_{ij}} n_k t_i^{II} n_j + \frac{\partial J_{S_I, k}}{\partial \tau_{ij}} n_k t_j^{II} n_i \quad (2.33\gamma')$$

Σε αυτό το σημείο θα εξηγηθούν οι όροι στις σχέσεις 2.33α', 2.33β' και 2.33γ'. Το διάνυσμα  $n_i$  είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια  $S_I$  και τα διανύσματα  $t_i^I$ ,  $t_i^{II}$  είναι οι συνιστώσες των δύο εφαπτόμενων στην επιφάνεια μοναδιαίων διανυσμάτων που συνθέτουν μια τοπική ορθοκανονική βάση μαζί και με το κάθετο διάνυσμα  $n_i$ . Το  $t_i^I$  μπορεί να οριστεί αυθαίρετα ως ένα μοναδιαίο διάνυσμα παράλληλο στην επιφάνεια  $S_I$  και το  $t_i^{II}$  προκύπτει από τη σχέση  $t_i^{II} = e_{ijk} n_j t_k^I$  όπου  $e_{ijk}$  είναι το σύμβολο μετάθεσης. Οι ποσότητες  $u_{(n)}$ ,  $u_{(t)}^I$  και  $u_{(t)}^{II}$  είναι οι συνιστώσες της συζυγούς ταχύτητας στις διευθύνσεις  $n_i$ ,  $t_i^I$  και  $t_i^{II}$  αντίστοιχα [5].

Ως οριακή συνθήκη για το  $q$  στο  $S_I$  εφαρμόζεται μια μηδενική Neumann.

- Οριακές Συνθήκες στο  $S_W$ :

Στην προς βελτιστοποίηση επιφάνεια του στερεού τοιχώματος  $S_W$  επιβάλλονται μηδενικές συνθήκες Dirichlet για την ταχύτητα, λόγω της συνθήκης μη-ολίσθησης, και μηδενική Neumann για την πίεση. Ακόμα, στο  $S_W$ , το  $\frac{\delta x_k}{\delta b_n}$  υπολογίζεται και εξαρτάται από τη μέθοδο παραμετροποίησης του ορίου.

Η συνθήκη Dirichlet μη-ολίσθησης στο  $S_W$  έχει ως αποτέλεσμα  $\frac{\delta u_i}{\delta b_n} = 0$ . Οι οριακές συνθήκες υπολογίζονται και πάλι με παραπλήσιο τρόπο, όπως στο  $S_I$  και είναι οι

$$u_{(n)} = u_j n_j = -\frac{\partial J_{S_W, i}}{\partial p} n_i \quad (2.34\alpha')$$

$$u_{(t)}^I = u_i t_i^I = \frac{\partial J_{S_W, k}}{\partial \tau_{ij}} n_k t_i^I n_j + \frac{\partial J_{S_W, k}}{\partial \tau_{ij}} n_k t_j^I n_i \quad (2.34\beta')$$

$$u_{(t)}^{II} = u_i t_i^{II} = \frac{\partial J_{S_W, k}}{\partial \tau_{ij}} n_k t_i^{II} n_j + \frac{\partial J_{S_W, k}}{\partial \tau_{ij}} n_k t_j^{II} n_i \quad (2.34\gamma')$$

Σε αυτήν την περίπτωση, το διάνυσμα  $t_i^I$  μπορεί να οριστεί ως ένα μοναδιαίο διάνυσμα παράλληλο στην ταχύτητα του κέντρου του πρώτου κελιού από την επιφάνεια  $S_W$ .

Για τη συζυγή πίεση  $q$ , εφαρμόζεται στο  $S_W$  μια μηδενική Neumann συνθήκη.

• Οριακές Συνθήκες στο  $S_O$ :

Στο πρωτεύον πρόβλημα, στην επιφάνεια εξόδου  $S_O$  του χωρίου  $\Omega$ , επιβάλλεται συνθήκη Dirichlet για τη στατική πίεση και μηδενική Neumann για την ταχύτητα. Ακόμα, ισχύει ότι  $\frac{\delta x_k}{\delta b_n} = 0$ . Επίσης, γίνεται η υπόθεση ότι η κατανομή της ταχύτητας στην έξοδο είναι ομοιόμορφη, άρα οι χωρικές παράγωγοι της ταχύτητας είναι σταθερές και συνεπώς,  $\frac{\delta \tau_{ij}}{\delta b_n} = 0$ . Συνέπεια αυτών είναι ότι τα επιφανειακά ολοκληρώματα στην έξοδο που περιέχουν τους όρους  $\frac{\delta p}{\delta b_n}$  και  $\frac{\delta \tau_{ij}}{\delta b_n}$  απαλείφονται και απομένει να μηδενιστεί μόνο το επιφανειακό ολοκλήρωμα που περιέχει τον όρο  $\frac{\delta u_i}{\delta b_n}$ . Συνεπώς, στην έξοδο επιβάλλεται η οριακή συνθήκη

$$u_i v_j n_j + \tau_{ij}^a n_j - q n_i + \frac{\partial J_{S_{O,k}}}{\partial v_i} n_k = 0, \quad i=1, 2, (3) \quad (2.35)$$

Στις τριδιάστατες ροές, υπάρχουν στη σχέση 2.35 τέσσερις άγνωστες ποσότητες, οι τρεις συνιστώσες της συζυγούς ταχύτητας και η συζυγής πίεση. Συνεπώς, μία από αυτές θα προεκβληθεί από το εσωτερικό του χωρίου και οι υπόλοιπες τρεις θα προκύψουν από την 2.35. Υπάρχουν εναλλακτικές 'οδοί' για την εξαγωγή των οριακών συνθηκών. Σύμφωνα με το [5], είναι σχεδόν αμελητέα η διαφορά στις υπολογιζόμενες παραγωγούς ευαισθησίας, εξαιτίας της διαφορετικής διατύπωσης των οριακών συνθηκών.

Αφού ικανοποιηθούν οι παραπάνω συζυγείς ΜΔΕ και οριακές συνθήκες, η τελική, έκφραση των παραγωγών ευαισθησίας με τη διατύπωση FI είναι η

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta L}{\delta b_n} \right|_{FI} &= \int_{S_W} J_{S_W,i} \frac{\delta(n_i dS)}{\delta b_n} \\ &+ \int_{\Omega} \left\{ -u_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - u_j \frac{\partial p}{\partial x_k} - \tau_{ij}^a \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + u_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} + q \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right\} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \right) d\Omega \\ &- \int_{S_W} \left( -u_k n_k + \frac{\partial J_{S_W,k}}{\partial \tau_{lz}} n_k n_l n_z \right) \tau_{ij} \frac{\delta(n_i n_j)}{\delta b_n} dS \\ &- \int_{S_W} \frac{\partial J_{S_W,k}}{\partial \tau_{lz}} n_k t_l^I t_z^I \tau_{ij} \frac{\delta(t_i^I t_j^I)}{\delta b_n} dS - \int_{S_W} \frac{\partial J_{S_W,k}}{\partial \tau_{lz}} n_k t_l^{II} t_z^{II} \tau_{ij} \frac{\delta(t_i^{II} t_j^{II})}{\delta b_n} dS \\ &- \int_{S_W} \left( \frac{\partial J_{S_W,k}}{\partial \tau_{lz}} n_k (t_l^{II} t_z^I + t_l^I t_z^{II}) \right) \tau_{ij} \frac{\delta(t_i^{II} t_j^I)}{\delta b_n} dS \end{aligned} \quad (2.36)$$

### 2.5.2 Διατύπωση SI για τις εξισώσεις Navier - Stokes

Στη διατύπωση SI, με χρήση της σχέσης 2.14, αναπτύσσεται η παράγωγος της  $L$  ως προς το  $b_n$  και προκύπτει η παράγωγος ευαισθησίας κατά SI που δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} \frac{\delta L}{\delta b_n} \Big|_{SI} &= \int_{\Omega} \left( R_i^u \frac{\partial u_i}{\partial b_n} + R^q \frac{\partial p}{\partial b_n} \right) d\Omega + \int_S \left( D_i^u \frac{\partial u_i}{\partial b_n} + D^q \frac{\partial p}{\partial b_n} \right) dS \\ &+ \int_S \left( \frac{\partial J_{S_k}}{\partial \tau_{ij}} n_k - u_i n_j \right) \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial b_n} dS + \int_{S_W} n_i \frac{\partial J_{S_W,i}}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS \\ &+ \int_{S_W} J_{S_i} \frac{\delta(n_i dS)}{\delta b_n} + \int_{S_W} (u_i R_i^v + q R^p) n_k \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS \end{aligned} \quad (2.37)$$

όπου  $R^q$ ,  $R_i^u$ ,  $D^q$  και  $D_i^u$  είναι οι ίδιοι όροι που εμφανίζονται και στη διατύπωση FI.

Στη διατύπωση SI, μηδενίζονται οι όροι των ολοκληρωμάτων που πολλαπλασιάζονται με  $\frac{\partial u_i}{\partial b_n}$ ,  $\frac{\partial p}{\partial b_n}$  και  $\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial b_n}$ . Έτσι, προκύπτουν οι συζυγείς πεδιακές εξισώσεις και οι συζυγείς οριακές συνθήκες, οι οποίες είναι ακριβώς οι ίδιες με αυτές της διατύπωσης FI.

Με τη διατύπωση SI, η τελική έκφραση της παραγωγού ευαισθησίας μετά την ικανοποίηση των συζυγών πεδιακών εξισώσεων και των συζυγών οριακών συνθηκών είναι

$$\begin{aligned} \frac{\delta J}{\delta b_n} \Big|_{SI} &= - \int_{S_W} \left( \tau_{ij}^a n_j - q n_i + \frac{\partial J_{S_W,l}}{\partial v_i} n_l \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS \\ &+ \int_{S_W} \frac{\partial J_{S_W,i}}{\partial x_k} n_i \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS + \int_{S_W} J_{S_W,i} \frac{\delta(n_i dS)}{\delta b_n} + \underbrace{\int_{S_W} (u_i R_i^v + q R^p) n_k \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS}_{LBterm} \\ &- \int_{S_W} \left[ \left( -u_k n_k + \frac{\partial J_{S_W,k}}{\partial \tau_{lz}} n_k n_l n_z \right) \left( \tau_{ij} \frac{\delta(n_i n_j)}{\delta b_n} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} n_i n_j \right) \right] dS \\ &- \int_{S_W} \left[ \frac{\partial J_{S_W,k}}{\partial \tau_{lz}} n_k t_l^I t_z^I \left( \tau_{ij} \frac{\delta(t_i^I t_j^I)}{\delta b_n} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} t_i^I t_j^I \right) \right] dS \\ &- \int_{S_W} \left[ \left( \frac{\partial J_{S_W,k}}{\partial \tau_{lz}} n_k (t_l^{II} t_z^I + t_l^I t_z^{II}) \right) \left( \tau_{ij} \frac{\delta(t_i^{II} t_j^I)}{\delta b_n} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} t_i^{II} t_j^I \right) \right] dS \\ &- \int_{S_W} \left[ \frac{\partial J_{S_W,k}}{\partial \tau_{lz}} n_k t_l^{II} t_z^{II} \left( \tau_{ij} \frac{\delta(t_i^{II} t_j^{II})}{\delta b_n} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} t_i^{II} t_j^{II} \right) \right] dS \end{aligned} \quad (2.38)$$

Στις σχέσεις 2.36 και 2.38, τα επιφανειακά ολοκληρώματα αναφέρονται μόνο στην προς βελτιστοποίηση επιφάνεια  $S_W$ , γιατί  $\frac{\delta x_k}{\delta b_n} = \frac{\delta n_k}{\delta b_n} = \frac{\delta t_k^I}{\delta b_n} = \frac{\delta t_k^{II}}{\delta b_n} = 0$  στα υπόλοιπα όρια του χωρίου  $\Omega$ , τα οποία δεν μετακινούνται.

## 2.6 Εφαρμογή - υπολογισμός παραγώγων με διατυπώσεις SI και FI

Σε αυτήν την υποενότητα, σκοπός είναι να δειχτεί, μέσω ενός παραδείγματος, η διαφορά ανάμεσα στις υπολογιζόμενες παραγώγους με τις διατυπώσεις FI και SI και να μελετηθούν οι επιμέρους όροι των παραγώγων ευαισθησίας, ώστε να εξηγηθεί αυτή. Πρέπει να διευκρινιστεί ότι η διαφορά μεταξύ παραγώγων υπολογισμένων με τις διατυπώσεις SI και FI είναι ένα πρόβλημα γενικότερο, γι' αυτό και εδώ απλά παρατίθεται μόνο ένα παράδειγμα για την επίδειξη αυτής διαφοράς. Ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο Κεφάλαιο 3, όπου παρατίθενται αρκετά παραδείγματα, όπου μεταξύ των άλλων, φαίνεται και η διαφορά μεταξύ των παραγώγων με διατυπώσεις SI και FI.

Στα σχήματα 2.1(α-στ) παρατίθενται τα πεδία ροής για μια αεροτομή (η οποία, ενδεικτικά, θα αποκαλείται αεροτομή  $A$ ), με αντικειμενική συνάρτηση την αεροδυναμική αντίσταση  $A'.1$ . Το μήκος της χορδής της αεροτομής είναι  $c = 1 \text{ m}$ , το πλέγμα που χρησιμοποιείται είναι δομημένο τύπου C, 45036 κελιών, η απόσταση του κέντρου το πρώτου κελιού από το στερεό τοίχωμα είναι  $2.5 \times 10^{-4} \text{ m}$ , η ροή είναι στρωτή και μόνιμη για ασυμπίεστο ρευστό, η γωνία εισόδου της ροής είναι  $1.5^\circ$  μοίρες, η ταχύτητα έχει μέτρο  $v = 60 \text{ m/sec}$  και ο αριθμός Reynolds είναι  $Re = 600$  (η κινηματική συνεκτικότητα είναι  $\nu = 1.5 \times 10^{-1}$ ).

Η παραμετροποίηση της αεροτομής έγινε με σημεία ελέγχου καμπύλων NURBS [14], τα οποία χρησιμοποιήθηκαν ως μεταβλητές σχεδιασμού και ο υπολογισμός των παραγώγων ευαισθησίας της εκάστοτε αντικειμενικής συνάρτησης έγινε ως προς αυτά.

Στο σχήμα 2.1(ζ), η μορφή των γραμμών ροής της συζυγούς ταχύτητας δικαιολογείται από το είδος οριακών συνθηκών στην επιφάνεια  $S_w$ , που είναι το στερεό τοίχωμα της αεροτομής. Πιο συγκεκριμένα, η οριακή συνθήκη για τη συζυγή ταχύτητα στο στερεό τοίχωμα είναι η

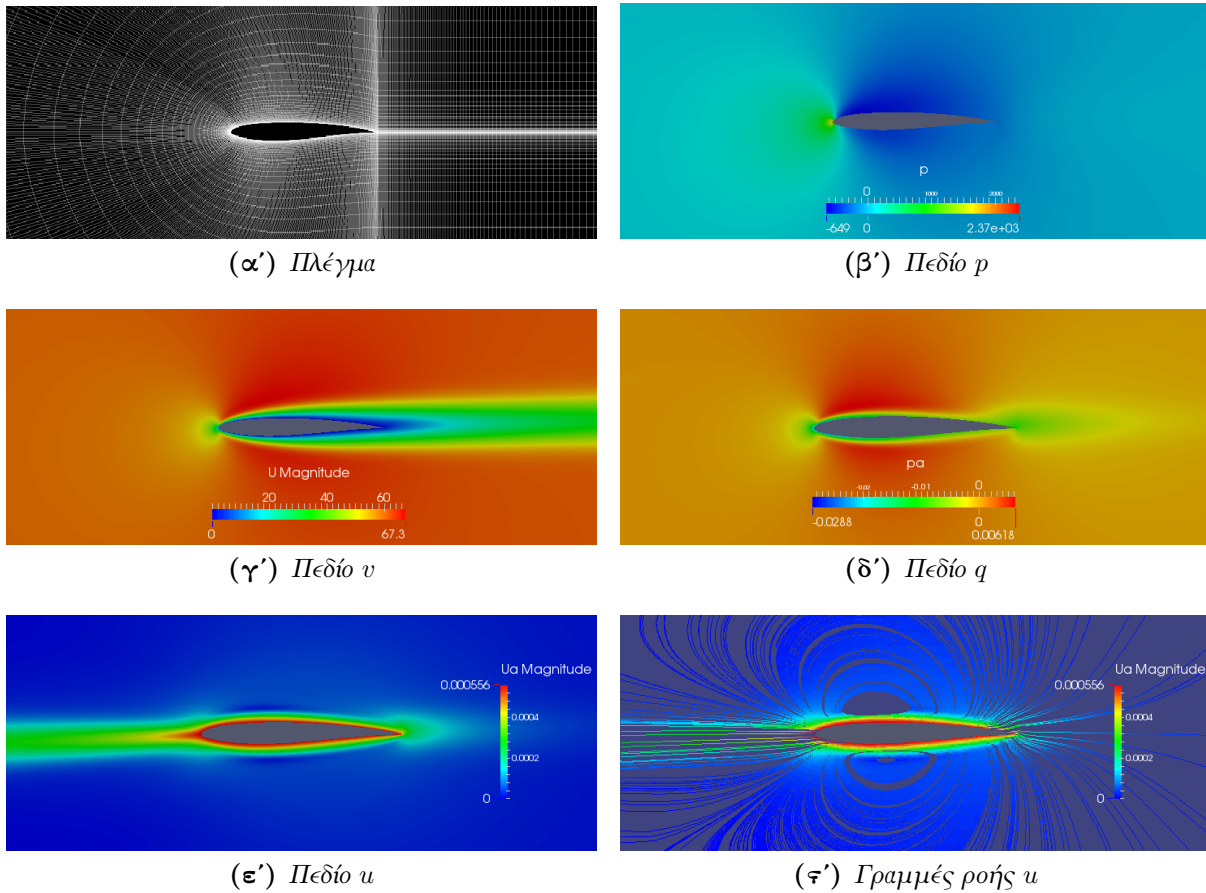
$$u_i = -r_i \quad (2.39)$$

όπου  $r_i$  είναι οι συνιστώσες του μοναδιαίου διανύσματος που είναι παράλληλο στην επ' άπειρον ταχύτητα ροής. Συνεπώς, οι γραμμές ροής της συζυγούς ταχύτητας αποκτούν τη μορφή κλειστών βρόχων πάνω και κάτω από την αεροτομή.

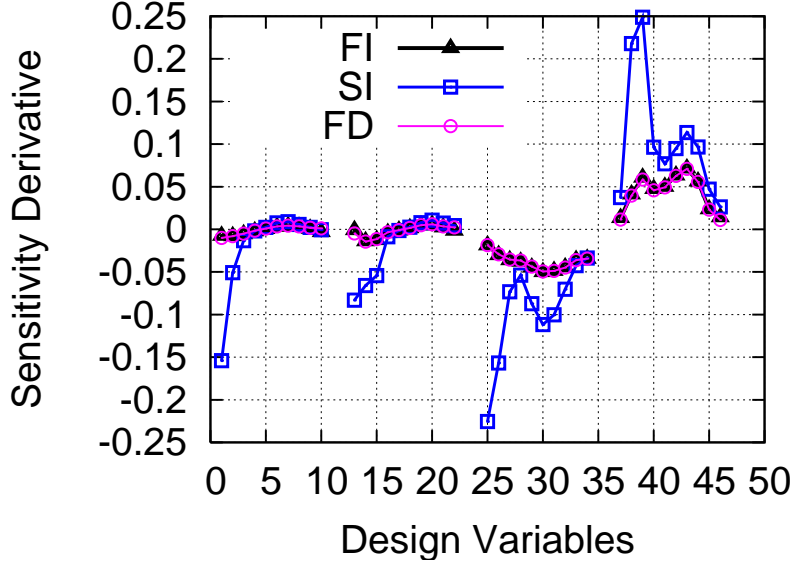
Στο σχήμα 2.2 παρατίθενται οι τιμές των παραγώγων ευαισθησίας που προκύπτουν από τις διατυπώσεις FI και SI. Οι δύο πρώτες καμπύλες, από αριστερά προς τα δεξιά, αντιστοιχούν στις παραγώγους ευαισθησίας ως προς τα σημεία ελέγχου με τα οποία παραμετροποιείται η πλευρά πίεσης και υποπίεσης αντίστοιχα, για μετατόπισή τους κατά τον άξονα  $x$ , ενώ οι δύο τελευταίες στις παραγώγους για μετατόπιση των σημείων ελέγχου της πλευράς πίεσης και υποπίεσης αντίστοιχα κατά τον άξονα  $y$ .

Παρότι και με τις δύο μεθόδους οι αντίστοιχες παράγωγοι γενικά έχουν ίδιο πρόσημο, μεταξύ των τιμών τους παρατηρείται σημαντική διαφορά, η οποία μπορεί να εξηγηθεί υπολογίζοντας τους επιμέρους όρους των παραγώγων ευαισθησίας.

Οι παράγωγοι της αεροδυναμικής αντίστασης με τις διατυπώσεις FI και SI, δίνονται από τις



**Σχήμα 2.1:** Πεδία ροής στην αεροτομή A. Στο σχήμα (α') παρατίθεται το χρησιμοποιούμενο πλέγμα, στο (β') το πεδίο της στατικής πίεσης δια της σταθερής πυκνότητας, στο (γ') το πεδίο του μέτρου της ταχύτητας  $v$ , στο (δ') το πεδίο της συζυγούς πίεσης  $q$ , στο (ε') το πεδίο του μέτρου της συζυγούς ταχύτητας  $u$  και στο (ς') οι γραμμές ροής του συζυγούς πεδίου  $u$ .



Σχήμα 2.2: Στρωτή μόνιμη ροή γύρω από τη μεμονωμένη αεροτομή  $A$ , παραγωγή της αεροδυναμικής αντίστασης. Διαφορές ανάμεσα στις υπολογιζόμενες τιμές παραγώγων με διατυπώσεις SI και FI και σύγκριση με παραγώγους από FD, σε πλέγμα 45036 κελιών.

παρακάτω δύο σχέσεις αντίστοιχα (βλέπε και Α.1)

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\delta J}{\delta b_n} \right|_{SI} &= - \underbrace{\int_{S_W} \left( \tau_{ij}^a n_j - q n_i \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS}_{SI \text{ term1}} + \underbrace{\int_{S_W} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \left( p \delta_i^j - \tau_{ij} \right) r_i \right] n_j \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS}_{SI \text{ term2}} \\
 &+ \underbrace{\int_{S_W} \left[ \left( p \delta_i^j - \tau_{ij} \right) r_i \right] \frac{\delta (n_j dS)}{\delta b_n}}_{SI \text{ term3}} + \underbrace{\int_{S_W} \left( u_i R_i^u + q R^p \right) n_k \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS}_{LBterm} \quad (2.40)
 \end{aligned}$$

όπου στο εξής, όταν η μέθοδος χαρακτηρίζεται ως SI, τότε ο όρος LBterm αμελείται και

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\delta L}{\delta b_n} \right|_{FI} &= \underbrace{\int_{S_W} \left[ \left( p \delta_i^j - \tau_{ij} \right) r_i \right] \frac{\delta (n_j dS)}{\delta b_n}}_{FI \text{ term1}} \\
 &+ \underbrace{\int_{\Omega} \left\{ -u_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - u_j \frac{\partial p}{\partial x_k} - \tau_{ij}^a \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + u_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} + q \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right\} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \right) d\Omega}_{FI \text{ term2}} \quad (2.41)
 \end{aligned}$$

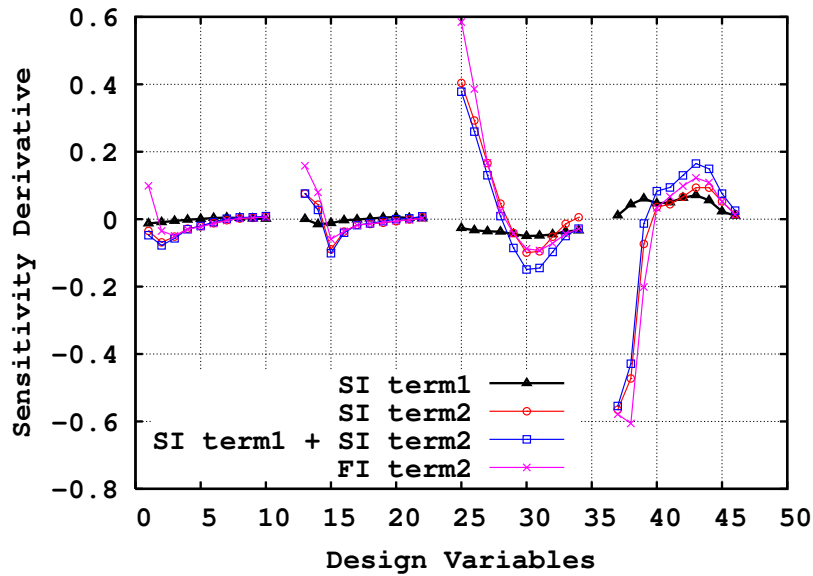
Γίνεται άμεσα αντιληπτό ότι

$$SI \text{ term3} = FI \text{ term1}$$

Συνεπώς, η διαφορά ανάμεσα στις παραγώγους από τις δύο διατυπώσεις οφείλεται στους όρους SI term1, SI term2 και FI term2. Στο σχήμα 2.3 παρουσιάζονται οι όροι SI term1, SI term2, SI term1+SI term2 και FI term2. Γίνεται άμεσα φανερό ότι, σε αυτό το παράδειγμα, ότι το άθροισμα SI term1+SI term2 είναι διαφορετικό από τον όρο FI term2. Συνεπώς, αμελώντας τον όρο LBterm κατά τον υπολογισμό της παραγώγου με διατύπωση SI δεν αντισταθμίζεται η συνεισφορά των όρων SI term1 και SI term2, με αποτέλεσμα οι



υπολογιζόμενες παράγωγοι με διατύπωση SI να προκύπτουν διαφορετικές από ό,τι με FI.



**Σχήμα 2.3:** Στρωτή μόνιμη ροή γύρω από τη μεμονωμένη αεροτομή A, παραγωγή της αεροδυναμικής αντίστασης. Όροι SI term1, SI term2, SI term1+SI term2 της παραγωγού που υπολογίζει η διατύπωση SI. Όρος FI term2 της παραγωγού που υπολογίζει η διατύπωση FI.

Τέλος, συγκρίνοντας με τις παραγωγούς από πεπερασμένες διαφορές, προκύπτει ότι από τις δύο διατυπώσεις, η FI οδηγεί σε ακριβέστερες παραγωγούς, σε αντίθεση με τη διατύπωση SI.

## 2.7 Σύγκριση των διατυπώσεων FI και SI

Στην ενότητα 2.4 φάνηκε ότι οι διατυπώσεις FI και SI χωρίς απαλοιφή του LBterm είναι μαθηματικά ισοδύναμες. Ωστόσο, στην ενότητα 2.6, μέσα από μια εφαρμογή, δείχθηκε ότι οι υπολογιζόμενες παράγωγοι με τη διατύπωση SI, αν αμεληθεί ο φαινομενικά μηδενικός όρος του Leibniz (LBterm), είναι πολύ διαφορετικές σε σχέση με αυτές που υπολογίστηκαν με τη διατύπωση FI. Σε αυτήν την ενότητα, θα συγκριθούν, όρος-προς-όρος οι εκφράσεις που προκύπτουν από τις δύο αυτές διατυπώσεις και θα γίνει διερεύνηση της αιτίας της διαφοράς.

Καταρχάς, εφόσον οι συζυγείς πεδιακές εξισώσεις και οι συζυγείς οριακές συνθήκες που προκύπτουν από τις δυο διατυπώσεις είναι οι ίδιες, σύγκριση έχει νόημα να γίνει μόνο για τις προκύπτουσες από τις δύο διατυπώσεις παραγωγούς ευαισθησίας. Οπότε, πρέπει να δειχτεί ότι

$$\left. \frac{\delta J_F}{\delta b_n} \right|_{SI} = \left. \frac{\delta J_F}{\delta b_n} \right|_{FI} \quad (2.42)$$

Από τις σχέσεις 2.36 και 2.38, απαλείφοντας τους κοινούς όρους, η υπό διερεύνηση ισότητα 2.42 παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned}
& - \int_{S_W} \left( \tau_{ij}^a n_j - q n_i + \frac{\partial J_{S_W, m}}{\partial v_i} n \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS + \int_{S_W} \frac{\partial J_{S_W, m}}{\partial x_k} n_m \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS \\
& + \underbrace{\int_{S_W} (u_i R_i^u + q R^p) n_k \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS}_{LBterm} \\
& - \int_{S_W} \left( -u_m n_m + \frac{\partial J_{S_W, m}}{\partial \tau_{lz}} n_m n_l n_z \right) \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} n_i n_j dS \\
& - \int_{S_W} \frac{\partial J_{S_W, m}}{\partial \tau_{lz}} n_m t_l^I t_z^I \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} t_i^I t_j^I dS \\
& - \int_{S_W} \left( \frac{\partial J_{S_W, m}}{\partial \tau_{lz}} n_m (t_l^H t_z^I + t_l^I t_z^H) \right) \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} t_i^H t_j^I dS \\
& - \int_{S_W} \frac{\partial J_{S_W, m}}{\partial \tau_{lz}} n_m t_l^H t_z^H \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} t_i^H t_j^H dS \\
& = \int_{\Omega} \left\{ -u_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - u_j \frac{\partial p}{\partial x_k} - \tau_{ij}^a \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + u_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} + q \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right\} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \right) d\Omega \quad (2.43)
\end{aligned}$$

Με χρήση του θεωρήματος Green - Gauss, το τελευταίο χωρικό ολοκλήρωμα γίνεται

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left\{ -u_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - u_j \frac{\partial p}{\partial x_k} - \tau_{ij}^a \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + u_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} + q \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right\} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \right) d\Omega = \\
& \underbrace{\int_{S_W} \left\{ -u_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - u_j \frac{\partial p}{\partial x_k} - \tau_{ij}^a \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + u_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} + q \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right\} n_j \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS}_{Sterm} \\
& - \underbrace{\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ -u_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - u_j \frac{\partial p}{\partial x_k} - \tau_{ij}^a \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + u_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} + q \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right\} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} d\Omega}_{Vterm} \quad (2.44)
\end{aligned}$$

όπου ο όρος Sterm αφορά μόνο το όριο  $S_W$ , αφού στις υπόλοιπες οριακές επιφάνειες ισχύει ότι  $\frac{\delta x_k}{\delta b_n} = 0$ . Λαμβάνοντας υπόψη ότι  $v_i = 0$  στο  $S_W$  και ότι εκεί ισχύουν οι σχέσεις 2.34α' έως 2.34γ', μετά από αναδιάταξη των όρων, ο όρος Sterm παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned}
Sterm & = - \int_{S_W} \left( \tau_{ij}^a n_j - q n_i \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS + \int_{S_W} \left( u_j n_j n_i + \frac{\partial J_{S_W, m}}{\partial \tau_{lm}} n_m t_l^I n_m t_i^I \right. \\
& + \frac{\partial J_{S_W, m}}{\partial \tau_{lm}} n_m t_m^I n_l t_i^I + \frac{\partial J_{S_W, m}}{\partial \tau_{lm}} n_m t_l^H n_m t_i^H + \frac{\partial J_{S_W, m}}{\partial \tau_{lm}} n_m t_m^H n_l t_i^H \left. \right) \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} n_j \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS \\
& + \int_{S_W} \frac{\partial J_{S_W, m}}{\partial p} n_m \frac{\partial p}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS \quad (2.45)
\end{aligned}$$

Αναλύοντας τον όρο  $\frac{\partial J_{SW,m}}{\partial \tau_{ij}} n_m$  κατά Frenet, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_{SW,m}}{\partial \tau_{ij}} n_m = & \\ \frac{\partial J_{SW,m}}{\partial \tau_{lz}} n_m n_l n_z n_i n_j + \frac{\partial J_{SW,m}}{\partial \tau_{lz}} n_m n_l t_z^I n_i t_j^I + \frac{\partial J_{SW,m}}{\partial \tau_{lz}} n_m n_l t_z^{II} n_i t_j^{II} & \\ \frac{\partial J_{SW,m}}{\partial \tau_{lz}} n_m t_l^I n_z t_i^I n_j + \frac{\partial J_{SW,m}}{\partial \tau_{lz}} n_m t_l^I t_z^I t_i^I t_j^I + \frac{\partial J_{SW,m}}{\partial \tau_{lz}} n_m t_l^I t_z^{II} t_i^I t_j^{II} & \\ \frac{\partial J_{SW,m}}{\partial \tau_{lz}} n_m t_l^{II} n_z t_i^{II} n_j + \frac{\partial J_{SW,m}}{\partial \tau_{lz}} n_m t_l^{II} t_z^I t_i^I t_j^I + \frac{\partial J_{SW,m}}{\partial \tau_{lz}} n_m t_l^{II} t_z^{II} t_i^{II} t_j^{II} & \end{aligned} \quad (2.46)$$

Με εφαρμογή του κανόνα της αλυσίδας, ο όρος  $\frac{\partial J_{SW,m}}{\partial x_k}$  γίνεται

$$\frac{\partial J_{SW,m}}{\partial x_k} = \frac{\partial J_{SW,m}}{\partial \tau_{ij}} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial J_{SW,m}}{\partial v_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial J_{SW,m}}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x_k} \quad (2.47)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις 2.46 και 2.47 στην 2.45, προκύπτει

$$\begin{aligned} Sterm = & - \int_{S_W} \left( \tau_{ij}^a n_j - q n_i + \frac{\partial J_{SW,m}}{\partial v_i} n \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS + \int_{S_W} \frac{\partial J_{SW,m}}{\partial x_k} n_m \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS \\ & - \int_{S_W} \left( -u_m n_m + \frac{\partial J_{SW,m}}{\partial \tau_{lz}} n_m n_l n_z \right) \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} n_i n_j dS \\ & - \int_{S_W} \frac{\partial J_{SW,m}}{\partial \tau_{lz}} n_m t_l^I t_z^I \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} t_i^I t_j^I dS \\ & - \int_{S_W} \left( \frac{\partial J_{SW,m}}{\partial \tau_{lz}} n_m (t_l^{II} t_z^I + t_l^I t_z^{II}) \right) \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} t_i^{II} t_j^I dS \\ & - \int_{S_W} \frac{\partial J_{SW,m}}{\partial \tau_{lz}} n_m t_l^{II} t_z^{II} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} t_i^{II} t_j^{II} dS \end{aligned} \quad (2.48)$$

Επομένως, ο όρος Sterm, όπως φαίνεται από τη σχέση 2.48, περιέχει όλους τους όρους του αριστερού μέλους της 2.43 εκτός από τον LBterm! Με βάση λοιπόν αυτήν τη διαπίστωση, προκύπτει από τις σχέσεις 2.43 και 2.44 ότι οι δυο διατυπώσεις είναι ισοδύναμες, μόνο αν οι Vterm και LBterm είναι ίσοι [3, 15].

Αναλύοντας κάθε όρο του Vterm ξεχωριστά, προκύπτουν

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ -u_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right\} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} d\Omega = & \\ \int_{\Omega} \left( -\frac{\partial (u_i v_j)}{\partial x_j} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} d\Omega - \int_{\Omega} u_i \frac{\partial}{\partial x_k} \left( v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_n} d\Omega + \int_{\Omega} u_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} d\Omega & \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ -u_j \frac{\partial p}{\partial x_k} \right\} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} d\Omega = \int_{\Omega} \left( -\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \frac{\partial p}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} d\Omega - \int_{\Omega} u_j \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_n} d\Omega \quad (2.50)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ -\tau_{ij}^a \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right\} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial \tau_{ij}^a}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} d\Omega - \int_{\Omega} \tau_{ij}^a \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_n} d\Omega \quad (2.51)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ u_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} \right\} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} d\Omega = \int_{\Omega} \tau_{ij}^a \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_n} d\Omega + \int_{\Omega} u_i \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_n} d\Omega \quad (2.52)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ q \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right\} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial q}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} d\Omega + \int_{\Omega} q \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_n} d\Omega \quad (2.53)$$

Η κινηματική συνεκτικότητα  $\nu$  είναι σταθερή και μπορεί να μετακινείται μέσα ή έξω από τους τελεστές διαφορίσης. Έτσι, από τις σχέσεις 2.49 έως 2.53, ο όρος  $Vterm$  παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} Vterm = & - \int_{\Omega} \left\{ -\frac{\partial(u_i v_j)}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ij}^a}{\partial x_j} + \frac{\partial q}{\partial x_i} \right\} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} u_i \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} \right\} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \left\{ -\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right\} \frac{\partial p}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} d\Omega + \int_{\Omega} q \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ -\frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right\} \frac{\partial p}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} d\Omega \end{aligned} \quad (2.54)$$

και με βάση τις σχέσεις 2.22, 2.23, 2.31 και 2.32,

$$Vterm = - \int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} R_i^u \frac{\delta x_k}{\delta b_n} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_k} R^q \frac{\delta x_k}{\delta b_n} d\Omega + \int_{\Omega} u_i \frac{\partial R_i^v}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} d\Omega + \int_{\Omega} q \frac{\partial R^p}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} d\Omega \quad (2.55)$$

Τα δύο πρώτα χωρικά ολοκληρώματα στο δεξί μέλος της εξίσωσης 2.55 είναι ίσα με το μηδέν, γιατί περιέχουν τα υπόλοιπα των συζυγών εξισώσεων  $R_i^u$  και  $R^q$ . Όμως, τα δυο τελευταία ολοκληρώματα είναι διάφορα του μηδενός, γιατί οι παράγωγοι των εξισώσεων του πρωτεύοντος προβλήματος δεν είναι μηδενικές απειροστά κοντά στο όριο. Μέσω του θεωρήματος Green - Gauss, ο όρος  $Vterm$  ξαναγράφεται ως

$$Vterm = \underbrace{\int_{S_W} (u_i R_i^v + q R^p) n_k \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS}_{LBterm} - \int_{\Omega} R_i^v \frac{\partial}{\partial x_k} \left( u_i \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \right) d\Omega - \int_{\Omega} R^p \frac{\partial}{\partial x_k} \left( q \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \right) d\Omega \quad (2.56)$$

Τα δυο χωρικά ολοκληρώματα απαλείφονται, γιατί περιέχουν τα υπόλοιπα των εξισώσεων του πρωτεύοντος προβλήματος. Τότε όμως, αποδεικνύεται τελικά ότι

$$\begin{aligned} & \underbrace{\int_{S_W} (u_i R_i^v + q R^p) n_k \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS}_{LBterm} \\ & - \underbrace{\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ -u_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - u_j \frac{\partial p}{\partial x_k} - \tau_{ij}^a \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + u_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} + q \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right\} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} d\Omega}_{Vterm} \end{aligned} \quad (2.57)$$

Έρα, αποδεικνύεται μαθηματικά η ισοδυναμία της διατύπωσης FI και της SI στην οποία όμως δεν αμελείται ο όρος  $LBterm$ . Από τη σχέση 2.57, φαίνεται ότι οι παράγωγοι που

υπολογίζονται από τις δύο διατυπώσεις θα έπρεπε να είναι ίσες, αν στην SI δεν αμελούνταν ο LBterm. Επειδή όμως ο όρος LBterm, έως τώρα στη βιβλιογραφία αμελείται, τελικά και οι υπολογιζόμενες παράγωγοι θα διαφέρουν.

Η παράλειψη, λοιπόν, του όρου του Leibniz επιδείχθηκε ότι οδηγεί σε πιθανώς λιγότερο ακριβή υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας. Ωστόσο, ούτε η απευθείας ενσωμάτωση του στην έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας λύνει το πρόβλημα, αλλά αντιθέτως εισάγει ανακρίβειες. Ένας λόγος είναι ότι, για τον υπολογισμό του όρου του Leibniz, απαιτείται η εύρεση παραγώγων δεύτερης τάξης της ταχύτητας πάνω στο στερεό τοίχωμα, που για αραιά και μη-δομημένα πλέγματα, δεν υπολογίζονται με επαρκή ακρίβεια (B').

## 2.8 Διαφορές ανάμεσα στις δύο διατυπώσεις

Παρά το ότι οι διατυπώσεις FI και SI με την ενσωμάτωση στη δεύτερη του LBterm είναι μαθηματικά ισοδύναμες, μεταξύ των υπολογιζόμενων παραγώγων ευαισθησίας υπάρχουν σημαντικές διαφορές, όταν παραλείπεται ο LBterm. Λόγος για τη μειωμένη ακρίβεια υπολογισμού παραγώγων με διατύπωση SI έγινε αρχικά στα [12, 13, 21]. Αν το πλέγμα δεν είναι αρκετά πυκνό, τότε προκύπτουν διαφορές ανάμεσα στις παραγώγους με διατυπώσεις SI και FI, λόγω μειωμένης ακρίβειας της SI [3, 15].

Σε όλες τις περιπτώσεις, έως την πολύ πρόσφατη εμφάνιση της εμπλουτισμένης διατύπωσης με επιφανειακά ολοκληρώματα (E-SI) [3, 15], ο όρος αυτός αμελείτο, κάτω από την υπόθεση ότι οι εξισώσεις ροής (δηλαδή του πρωτεύοντος προβλήματος) ικανοποιούνται πάνω στο όριο. Σύμφωνα με τα [3, 15], σε αρκετά πυκνά πλέγματα, τα υπόλοιπα αυτών των εξισώσεων  $R^p$  και  $R_i^v$  όντως είναι ασυμπτωτικά κοντά στο μηδέν και μπορεί να αμεληθεί ο όρος του Leibniz, χωρίς μεγάλη απώλεια ακρίβειας στον υπολογισμό των παραγώγων. Ωστόσο, σε αραιά πλέγματα, ο ακριβής υπολογισμός των  $R^p$  και  $R_i^v$  στο όριο είναι πιο δύσκολος. Αυτό συμβαίνει γιατί υπάρχει η ανάγκη υπολογισμού δευτέρων παραγώγων της ταχύτητας (στο  $R_i^v$ ) και η ακρίβεια τέτοιου υπολογισμού σε μη-δομημένα και αραιά πλέγματα εισάγει εκ των πραγμάτων σφάλμα. Επομένως, ούτε η απευθείας ενσωμάτωση αυτού του όρου οδηγεί σε ακριβή υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας με τη διατύπωση SI.

Εφόσον, λοιπόν, ακόμα και αν ενσωματωθεί ο όρος του Leibniz στην έκφραση των παραγώγων, δεν είναι κατ' ανάγκην εφικτή η εξάλειψη των διαφορών ανάμεσα στις υπολογιζόμενες παραγώγους με τις δύο διατυπώσεις, γεννάται το ερώτημα αν τελικά μπορεί αυτός να υπολογιστεί με εναλλακτικό τρόπο.

Μέσω της σχέσης 2.57, αποδείχθηκε ότι  $LBterm = Vterm$  [3, 15]. Επομένως, ο όρος  $Vterm$  θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για τον ακριβέστερο υπολογισμό του  $LBterm$ . Παρότι ο υπολογισμός αυτού του όρου θα ήταν αρκετά ακριβής, ώστε να εξαλειφθούν οι διαφορές ανάμεσα στις παραγώγους από τις δύο διατυπώσεις, το υπολογιστικό κόστος θα ήταν υψηλό. Πιο συγκεκριμένα, για την εύρεση μέσω πεπερασμένων διαφορών των ποσοτήτων  $\frac{\delta x_k}{\delta b^n}$  σε όλο το χωρίο  $\Omega$ , πρέπει να λυθούν 2 φορές για κάθε μεταβλητή σχεδιασμού οι εξισώσεις μετατόπισης του πλέγματος για σχήμα ακρίβειας δεύτερης τάξης (ή μια φορά για ακρίβεια πρώτης τάξης), αφού σε κάθε μεταβλητή σχεδιασμού πρέπει να επιβληθούν απειροστά μικρές μετατοπίσεις  $\pm \epsilon$ . Στις περιπτώσεις όπου οι μεταβλητές σχεδιασμού είναι σημεία ελέγχου με τα οποία παραμετροποιείται η επιφάνεια του σώματος, με κάθε τέτοια μικρή μεταβολή  $\epsilon$ , μεταβάλλεται και το περίγραμμα της προς βελτιστοποίηση επιφάνειας του

σώματος και έτσι μετακινούνται οι υπόλοιποι κόμβοι στο εσωτερικό του πλέγματος, σύμφωνα με το νόμο μετατόπισης πλέγματος και περιγράφεται από ένα σύστημα ΜΔΕ (μιας και ΜΔΕ χρησιμοποιούνται συνήθως ως νόμος μετατόπισης πλέγματος γενικότερα μεν και αποκλειστικά δε στο OpenFOAM<sup>®</sup> όπου χρησιμοποιείται κεντροκυβελική διατύπωση, αν και γενικότερα υπάρχουν και αριθμητικές και όχι μόνο διαφορικές εξισώσεις για τη μετατόπιση πλέγματος, όπως τα ελατήρια). Τότε, αν είναι  $N$  οι μεταβλητές σχεδιασμού, τότε πρέπει να λυθούν  $2N$  φορές οι ΜΔΕ μετατόπισης του πλέγματος. Οπότε, το υπολογιστικό κόστος γίνεται ίδιο όπως στην εύρεση παραγώγων με τη διατύπωση FI. Επιπλέον, ακόμα και αν παραβλέψει κανείς την αύξηση του υπολογιστικού κόστους, η εμφάνιση χωρικών ολοκληρωμάτων στην έκφραση για επιφανειακά ολοκληρώματα αυτόματα καθιστά τη μέθοδο μια εναλλακτική διατύπωση FI!

Οι ανωτέρω δυσκολίες μπορούν να αντιμετωπιστούν με την εφαρμογή της διατύπωσης E-SI που περιγράφεται στην ενότητα 2.9. Με τη διατύπωση E-SI, το υπολογιστικό κόστος είναι ίδιας τάξης με αυτό της διατύπωσης SI, όμως οι παράγωγοι ευαισθησίας υπολογίζονται με την ίδια ακρίβεια όπως με τη διατύπωση FI.

## 2.9 Η Εμπλουτισμένη διατύπωση SI (E-SI)

Όπως ήδη αναφέρθηκε, με τον όρο Vterm, αντιμετωπίζεται το πρόβλημα των διαφορών στον υπολογισμό παραγώγων με SI και FI διατύπωση, ωστόσο, το υπολογιστικό κόστος γίνεται ίδιο όπως με τη διατύπωση FI, αφού πρέπει να υπολογιστεί το πεδίο  $\frac{\delta x_k}{\delta b_n}$  σε όλο το χωρίο  $\Omega$  για κάθε μεταβλητή σχεδιασμού.

Η νέα αυτή δυσκολία αντιμετωπίζεται αναπτύσσοντας μια εμπλουτισμένη συζυγή διατύπωση και λύνοντας το συζυγές πρόβλημα ως προς το νόμο μετατόπισης του πλέγματος, που έστω ότι είναι ένα σύστημα εξισώσεων Laplace [3, 15].

Έστω ότι η μετατόπιση του πλέγματος διέπεται από εξισώσεις Laplace, στη μορφή

$$R_i^m = \frac{\partial^2 m_i}{\partial x_j^2} = 0 \quad (2.58)$$

όπου  $m_i$  οι καρτεσιανές μετατοπίσεις των κόμβων του πλέγματος.

Οι ΜΔΕ που αποτελούν το νόμο μετατόπισης του πλέγματος, θεωρούνται ως επιπλέον πρωτεύουσες εξισώσεις. Έτσι, όπως και για τις εξισώσεις Navier-Stokes, υιοθετείται η συζυγής προσέγγιση. Έτσι, η παράγωγος της επαυξημένης αντικειμενικής συνάρτησης δίνεται πλέον από τη σχέση

$$\frac{\delta L}{\delta b_n} = \frac{\delta J}{\delta b_n} + \frac{\delta}{\delta b_n} \int_{\Omega} u_i R_i^v d\Omega + \frac{\delta}{\delta b_n} \int_{\Omega} q R^p d\Omega + \frac{\delta}{\delta b_n} \int_{\Omega} m_i^a R_i^m d\Omega \quad (2.59)$$

όπου  $m_i^a$  είναι το συζυγές πεδίο του  $m_i$ .

Η ανάλυση των τριών πρώτων όρων στο δεξί μέλος της 2.59 γίνεται με το γνωστό τρόπο, ενώ για την ανάλυση του τελευταίου ολοκληρώματος, μπορεί να εφαρμοστεί είτε η διατύπωση SI είτε η FI, μιας και οι δύο διατυπώσεις είναι μαθηματικά ισοδύναμες (αν στην SI δεν αμεληθεί ο όρος του Leibniz). Εδώ, γίνεται η χρήση των κανόνα του Leibniz για τη διαφορίση

ολοκληρωμάτων (όπως στη διατύπωση SI) και του θεωρήματος Green - Gauss. Έτσι, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta b_n} \int_{\Omega} m_i^a R_i^m d\Omega = & \int_S m_i^a n_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\delta x_i}{\delta b_n} \right) dS - \int_{S_W} \frac{\partial m_i^a}{\partial x_j} n_j \frac{\delta x_i}{\delta b_n} dS \\ & + \int_{\Omega} \frac{\partial^2 m_i^a}{\partial x_j^2} \frac{\delta x_i}{\delta b_n} d\Omega + \int_S m_i^a R_i^m n_k \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS \end{aligned} \quad (2.60)$$

Στη σχέση 2.60 περιλαμβάνονται μόνο όροι εξαρτώμενοι από τις ποσότητες  $\frac{\delta x_k}{\delta b_n}$ , άρα η συζυγής πεδιακή εξίσωση και οι συζυγείς οριακές συνθήκες παραμένουν ίδιες. Η έκφραση της παραγώγου ευαισθησίας δεν περιέχει τους όρους της 2.38, αλλά επιπλέον και αυτούς της σχέσης 2.60. Αντικαθιστώντας, από τη σχέση 2.57, τον όρο του Leibniz (που φαίνεται στη σχέση 2.38) και μηδενίζοντας τους όρους που πολλαπλασιάζονται με τα  $\frac{\delta x_k}{\delta b_n}$  προκύπτει η συζυγής εξίσωση της ΜΔΕ μετατόπισης του πλέγματος [3, 15]

$$R_k^m = \frac{\partial^2 m_k^a}{\partial x_j^2} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ u_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + u_j \frac{\partial p}{\partial x_k} + \tau_{ij}^a \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - u_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} - q \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right\} = 0 \quad (2.61)$$

Οι αντίστοιχες συζυγείς οριακές συνθήκες προκύπτουν μηδενίζοντας τους όρους στα όρια που πολλαπλασιάζονται με  $\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \right)$  και είναι

$$m_k^a = 0 \quad (2.62)$$

σε όλα τα όρια. Αφού,  $m_k^a = 0$  στο  $S_W$ , ο τελευταίος όρος στη σχέση 2.60 (ο αντίστοιχος όρος του Leibniz για τις συζυγείς ΜΔΕ μετατόπισης του πλέγματος) απαλείφεται.

Έτσι, η έκφραση της παραγώγου ευαισθησίας που προκύπτει είναι η εξής

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta J}{\delta b_n} \right|_{E-SI} = & - \int_{S_W} \left( \tau_{ij}^a n_j - q n_i + \frac{\partial J_{S_W, l}}{\partial v_i} n_l \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS - \int_{S_W} \frac{\partial m_i^a}{\partial x_j} n_j \frac{\delta x_i}{\delta b_n} dS \\ & + \int_{S_W} \frac{\partial J_{S_W, i}}{\partial x_k} n_i \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS + \int_{S_W} J_{S_W, i} \frac{\delta (n_i dS)}{\delta b_n} \\ & - \int_{S_W} \left[ \left( -u_k n_k + \frac{\partial J_{S_W, k}}{\partial \tau_{lz}} n_k n_l n_z \right) \left( \tau_{ij} \frac{\delta (n_i n_j)}{\delta b_n} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} n_i n_j \right) \right] dS \\ & - \int_{S_W} \left[ \frac{\partial J_{S_W, k}}{\partial \tau_{lz}} n_k t_l^I t_z^I \left( \tau_{ij} \frac{\delta (t_i^I t_j^I)}{\delta b_n} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} t_i^I t_j^I \right) \right] dS \\ & - \int_{S_W} \left[ \left( \frac{\partial J_{S_W, k}}{\partial \tau_{lz}} n_k (t_l^{II} t_z^I + t_l^I t_z^{II}) \right) \left( \tau_{ij} \frac{\delta (t_i^{II} t_j^I)}{\delta b_n} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} t_i^{II} t_j^I \right) \right] dS \\ & - \int_{S_W} \left[ \frac{\partial J_{S_W, k}}{\partial \tau_{lz}} n_k t_l^{II} t_z^{II} \left( \tau_{ij} \frac{\delta (t_i^{II} t_j^{II})}{\delta b_n} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} t_i^{II} t_j^{II} \right) \right] dS \end{aligned} \quad (2.63)$$

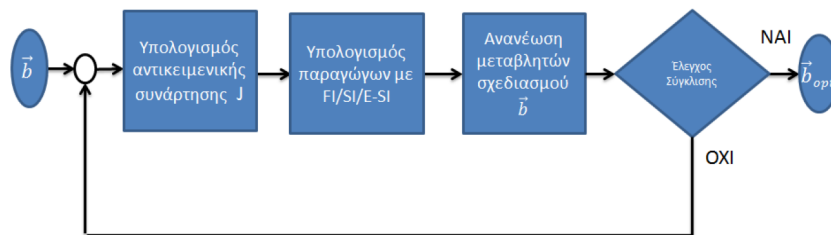
Η παράγωγος που υπολογίζεται από τη σχέση 2.63 περιέχει μόνο επιφανειακά ολοκληρώματα και έτσι μπορεί να θεωρηθεί μια εμπλουτισμένη εκδοχή της διατύπωσης με επιφανειακά ολοκληρώματα και γι' αυτό ονομάζεται **Εμπλουτισμένη Διατύπωση Επιφανειακών Ολοκληρωμάτων (E-SI)**.

Το επιπλέον κόστος της 2.63, σε σχέση με την 2.38, οφείλεται στην ανάγκη επίλυσης των συζυγών εξισώσεων μετατόπισης πλέγματος. Ωστόσο, το επιπλέον κόστος είναι αμελητέο σε σχέση με το υπολογιστικό κόστος επίλυσης των εξισώσεων του πρωτεύοντος και του συζυγούς προβλήματος.

Επιπλέον, η διατύπωση αυτή διατηρεί τα σημαντικά πλεονεκτήματα της διατύπωσης SI, δηλαδή την ανεξαρτησία από τον αριθμό των μεταβλητών σχεδιασμού και την ανάγκη υπολογισμού μόνο επιφανειακών ολοκληρωμάτων. Ακόμα, για το νόμο μετατόπισης πλέγματος που εφαρμόστηκε (εξισώσεις Laplace), οι μετατοπίσεις των κόμβων του πλέγματος  $m_i$  δεν εμφανίζονται στην παράγωγο ευαισθησίας της διατύπωσης E-SI ούτε στις συζυγείς ΜΔΕ μετατόπισης πλέγματος, κάτι που σημαίνει ότι οι συζυγείς εξισώσεις μετατόπισης του πλέγματος μπορούν να υπολογιστούν σε επόμενη φάση, μετά την επίλυση των εξισώσεων του πρωτεύοντος και του συζυγούς προβλήματος.

## 2.10 Διαδικασία βελτιστοποίησης

Έχοντας παρουσιάσει τις διατυπώσεις της συζυγούς μεθόδου, για λόγους πληρότητας παρατίθεται και η διαδικασία βελτιστοποίησης με κάποια αιτιοκρατική μέθοδο, η οποία συνοπτικά φαίνεται στο σχήμα 2.4.



Σχήμα 2.4: Λογικό διάγραμμα: Διαδικασία Βελτιστοποίησης με αιτιοκρατική μέθοδο.

Η διαδικασία της βελτιστοποίησης, περιλαμβάνει τα εξής βήματα:

- **Βήμα 1ο:** Αρχικοποίηση του  $\vec{b}$ .
- **Βήμα 2ο:** Υπολογισμός της αντικειμενικής συνάρτησης  $J$ . Στην περίπτωση της Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής, επιλύονται οι εξισώσεις Navier-Stokes και με βάση τα πεδία από την επίλυση των εξισώσεων, υπολογίζεται η τιμή της  $J$ .
- **Βήμα 3ο:** Επίλυση των συζυγών εξισώσεων και υπολογισμός των παραγώγων ευαισθησίας της αντικειμενικής συνάρτησης  $J$  με μία εκ των διατυπώσεων FI, SI, E-SI.
- **Βήμα 4ο:** Ανανέωση των μεταβλητών σχεδιασμού, δηλαδή του  $\vec{b}$ .
- **Βήμα 5ο:** Έλεγχος της σύγκλισης σε  $\vec{b}_{opt}$ , αλλιώς επιστροφή στο Βήμα 2.



## Κεφάλαιο 3

# Η συζυγής μέθοδος για την εξίσωση Burgers

Η αριθμητική επίλυση των εξισώσεων Navier-Stokes είναι ένα πρόβλημα που απασχόλησε για δεκαετίες την επιστημονική κοινότητα και συνεχίζει να αποτελεί αντικείμενο μελέτης και σήμερα. Στην προσπάθεια να αναπτυχθούν σχήματα που να επιλύουν αριθμητικά τις εξισώσεις Navier-Stokes, συχνά χρησιμοποιήθηκαν απλουστεύσεις της. Μια από αυτές είναι η μη-γραμμική εξίσωση Burgers, στην οποία αμελείται η κλίση της πίεσης των εξισώσεων Navier-Stokes. Κρίθηκε, λοιπόν, χρήσιμο να αναλυθεί (επιπλέον των εξισώσεων Navier-Stokes) και ένα απλοποιημένο μονοδιάστατο (1Δ) πρόβλημα, μιας και ο χρόνος εκτέλεσης μιας τέτοιας μελέτης είναι λίγα δευτερόλεπτα σε προσωπικό υπολογιστή και η βαθιά σύγκλιση του πρωτεύοντος και του συζυγούς προβλήματος εξασφαλισμένη. Στη γενική περίπτωση, η μη-γραμμική εξίσωση Burgers, στη γενική περίπτωση, δίνεται από τη σχέση

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] = 0 \quad (3.1)$$

ενώ το αντίστοιχο μόνιμο 1Δ πρόβλημα περιγράφεται από τη μη-γραμμική εξίσωση

$$v \frac{\partial v}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad (3.2)$$

Το 1Δ στο οποίο επιλύεται η εξίσωση 3.2 είναι ένα ευθύγραμμο κατά  $x$ , με  $x \in [b, 1]$ , όπου  $b < 1$  είναι και η μοναδική μεταβλητή σχεδιασμού ως προς την οποία υπολογίζονται οι παράγωγοι ευαισθησίας. Στην εργασία αυτή που πραγματεύεται το ρόλο των παραγώγων ευαισθησίας του πλέγματος στη συζυγή μέθοδο, σκόπιμα η μεταβλητή σχεδιασμού μετακινεί ένα όριο του χωρίου, άρα και το υπολογιστικό πλέγμα (από τη σκοπιά της διακριτής μεθόδου).

Οι οριακές συνθήκες είναι:

- Συνθήκη Neumann στο  $x=b$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=b} = \kappa(b) \quad (3.3)$$

όπου  $\kappa$  είναι μια γνωστή συνάρτηση του  $b$ .

- Συνθήκη Dirichlet στο  $x=1$

$$v \Big|_{x=1} = \lambda(b) \quad (3.4)$$

όπου  $\lambda$  επίσης γνωστή συνάρτηση του  $b$ .

Σκοπός είναι η ανάπτυξη της συζυγούς μεθόδου, με τις διατυπώσεις FI, SI και E-SI, ο αριθμητικός υπολογισμός και η σύγκριση των παραγώγων ευαισθησίας που προκύπτουν από τις διαφορετικές διατυπώσεις, για δεδομένο πλέγμα, αλλά και για πλέγματα διαφορετικής πυκνότητας.

Η συνάρτηση, η παράγωγος ως προς  $b$  της οποίας πρέπει να υπολογιστεί, είναι η εξής

$$J = \frac{1}{2} \int_b^1 v^2 dx \quad (3.5)$$

Για τον υπολογισμό των παραγώγων της 3.5 ως προς  $b$  απαιτούνται τα εξής βήματα

- **Βήμα 1ο:** Αριθμητική επίλυση του πρωτεύοντος προβλήματος που περιγράφεται από τη σχέση 3.2.
- **Βήμα 2ο:** Ανάπτυξη της συζυγούς μεθόδου με τις διατυπώσεις FI, SI ή E-SI.
- **Βήμα 3ο:** Αριθμητική επίλυση του συζυγούς προβλήματος.
- **Βήμα 4ο:** Υπολογισμός των παραγώγων ευαισθησίας για τις διαφορετικές διατυπώσεις.

Στις ενότητες που ακολουθούν, παρουσιάζονται η ανάπτυξη της συζυγούς μεθόδου με τις διαφορετικές διατυπώσεις και οι υπολογισθείσες παράγωγοι ευαισθησίας. Γίνεται σύγκριση των παραγώγων μεταξύ τους αλλά και με πεπερασμένες διαφορές διαφορετικού βαθμού ακρίβειας, προκειμένου να διαπιστωθεί κατά πόσο ισχύουν τα όσα αναφέρθηκαν στο Κεφάλαιο 2.

### 3.1 Ανάπτυξη της συζυγούς μεθόδου

Η επαυξημένη αντικειμενική συνάρτηση, δίνεται από τη σχέση

$$L = J + \int_b^1 \Psi R dx \quad (3.6)$$

όπου  $R$  το υπόλοιπο της εξίσωσης του πρωτεύοντος προβλήματος, δηλαδή

$$R = v \frac{\partial v}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad (3.7)$$

και  $\Psi$  το πεδίο της συζυγούς μεταβλητής.

Η παράγωγός της 3.6 δίνεται από τη σχέση

$$\frac{\delta L}{\delta b} = \frac{\delta J}{\delta b} + \frac{\delta}{\delta b} \int_b^1 \Psi R dx \quad (3.8)$$

Ο τρόπος ανάπτυξης της παραγώγου της σχέσης 3.8 μπορεί να γίνει με τις διατυπώσεις FI, SI και E-SI, βλ. υποενότητες 3.1.1, 3.1.2 και 3.1.3, αντίστοιχα.

Σε ότι ακολουθεί, η κινηματική συνεκτικότητα  $\nu$  είναι ανεξάρτητη των μεταβλητών  $x$  και  $b$ , δηλαδή σταθερή.

### 3.1.1 Διατύπωση FI

Στη διατύπωση FI, το τελευταίο ολοκλήρωμα της σχέσης 3.8 αναπτύσσεται ως εξής

$$\frac{\delta}{\delta b} \int_b^1 \Psi R dx = \int_b^1 \Psi \frac{\delta R}{\delta b} dx + \int_b^1 \Psi R \frac{\delta(dx)}{\delta b} \quad (3.9)$$

όπου το τελευταίο ολοκλήρωμα μηδενίζεται, γιατί το υπόλοιπο της εξίσωσης μέσα στο χωρίο υπολογισμού είναι μηδέν. Άρα

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta b} \int_b^1 \Psi R dx &= \int_b^1 \Psi \frac{\delta}{\delta b} \left[ v \frac{\partial v}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] dx \\ &= \int_b^1 \Psi \left[ \frac{\delta v}{\delta b} \frac{\partial v}{\partial x} + \underbrace{v \frac{\delta}{\delta b} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)}_{F_1} - \nu \underbrace{\frac{\delta}{\delta b} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)}_{F_2} \right] dx \end{aligned} \quad (3.10)$$

Ο όρος  $F_1$  αναλύεται, με χρήση της εξίσωσης 2.20, ως εξής

$$\frac{\delta}{\delta b} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\delta v}{\delta b} \right) - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\delta x}{\delta b} \right) \quad (3.11)$$

ενώ ο όρος  $F_2$ , με εφαρμογή της εξίσωσης 2.20 δύο φορές για τη δεύτερη παράγωγο, γίνεται

$$\frac{\delta}{\delta b} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\delta v}{\delta b} \right) - 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\delta x}{\delta b} \right) - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\delta x}{\delta b} \right) \quad (3.12)$$

Με αντικατάσταση των εξισώσεων 3.11 και 3.12 στην 3.10, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta b} \int_b^1 \Psi R dx &= \int_b^1 \Psi \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\delta v}{\delta b} dx + \int_b^1 \Psi v \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\delta v}{\delta b} \right) dx \\ &\quad - \int_b^1 \Psi v \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\delta x}{\delta b} \right) dx - \int_b^1 \Psi \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\delta v}{\delta b} \right) dx \\ &\quad + 2 \int_b^1 \Psi \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\delta x}{\delta b} \right) dx + \int_b^1 \Psi \nu \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\delta x}{\delta b} \right) dx \end{aligned} \quad (3.13)$$

Με εφαρμογή του θεωρήματος Green-Gauss μία φορά στο δεύτερο και το τελευταίο ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους και δύο φορές στο τέταρτο ολοκλήρωμα, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta b} \int_b^1 \Psi R dx &= \int_b^1 \Psi \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\delta v}{\delta b} dx + \left[ \Psi v \frac{\delta v}{\delta b} \right]_b^1 - \int_b^1 \frac{\partial}{\partial x} (\Psi v) \frac{\delta v}{\delta b} dx \\
&\quad - \int_b^1 \Psi v \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\delta x}{\delta b} \right) dx - \left[ \Psi v \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\delta v}{\delta b} \right) \right]_b^1 + \left[ \nu \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\delta v}{\delta b} \right]_b^1 \\
&\quad - \int_b^1 \nu \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \frac{\delta v}{\delta b} dx + \int_b^1 \Psi \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\delta x}{\delta b} \right) dx \\
&\quad + \left[ \Psi \nu \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\delta x}{\delta b} \right) \right]_b^1 - \int_b^1 \nu \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\delta x}{\delta b} \right) dx
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Η παράγωγος  $\frac{\delta J}{\delta b}$ , σχέση 3.8, λόγω της εξίσωσης 3.5, γίνεται

$$\frac{\delta F}{\delta b} = \frac{\delta}{\delta b} \int_b^1 \frac{v^2}{2} dx = \int_b^1 v \frac{\delta v}{\delta b} dx + \int_b^1 \frac{v^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\delta x}{\delta b} \right) dx \tag{3.15}$$

Με αντικατάσταση των σχέσεων 3.14 και 3.15 στην εξίσωση 3.8 και μετά από αναδιάταξη των όρων προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
\frac{\delta L}{\delta b} &= \int_b^1 \left[ v + \Psi \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial (\Psi v)}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right] \frac{\delta v}{\delta b} dx \\
&\quad + \int_b^1 \left( \frac{v^2}{2} - \underbrace{\Psi v \frac{\partial v}{\partial x} + \Psi \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}_{-\Psi R=0} - \nu \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\delta x}{\delta b} \right) dx \\
&\quad + \left[ \left( \Psi v + \nu \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \frac{\delta v}{\delta b} \right]_b^1 - \left[ \Psi \nu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\delta v}{\delta b} \right) \right]_b^1 + \left[ \Psi \nu \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\delta x}{\delta b} \right) \right]_b^1
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Ακόμα, λόγω της σχέσης 2.20, η σχέση 3.16 μπορεί να αναπτυχθεί περαιτέρω ως

$$\begin{aligned}
\frac{\delta L}{\delta b} &= \int_b^1 \left[ v - v \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right] \frac{\delta v}{\delta b} dx \\
&\quad + \int_b^1 \left( \frac{v^2}{2} - \nu \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\delta x}{\delta b} \right) dx \\
&\quad + \left[ \left( \Psi v + \nu \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \frac{\delta v}{\delta b} \right]_b^1 - \left[ \Psi \nu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\delta v}{\delta b} \right) \right]_b^1
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Προκειμένου να μην υπάρχει η ανάγκη υπολογισμού του πεδίου  $\frac{\delta v}{\delta b}$ , μηδενίζεται ο όρος στην αγκύλη του πρώτου ολοκληρώματος της σχέσης 3.17. Έτσι, προκύπτει η πεδιακή συζυγής εξίσωση (Field Adjoint Equation - FAE),

$$R_a = v - v \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = 0 \tag{3.18}$$

Εξαιτίας των οριακών συνθηκών του πρωτεύοντος προβλήματος, για να αποφευχθεί ο υπολογισμός των παραγώγων  $\frac{\delta v}{\delta b}$  και  $\frac{\delta}{\delta b} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)$  στα όρια  $x=b$  και  $x=1$  αντίστοιχα, μηδενίζονται οι όροι με τους οποίους αυτές πολλαπλασιάζονται στα αντίστοιχα όρια και έτσι προκύπτουν οι συζυγείς οριακές συνθήκες (Adjoint Boundary Conditions -ABC), οι οποίες είναι οι εξής

- Μηδενική συνθήκη Robin στο  $x=b$ , δηλαδή

$$\left( \Psi v + \nu \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \Big|_{x=b} = 0 \quad (3.19)$$

- Μηδενική συνθήκη Dirichlet στο  $x=1$ , δηλαδή

$$\Psi \Big|_{x=1} = 0 \quad (3.20)$$

Με βάση τις σχέσεις 3.18, 3.19 και 3.20 και εξαιτίας των οριακών συνθηκών του πρωτεύοντος προβλήματος 3.3 και 3.4, προκύπτει από τη σχέση 3.17 η έκφραση της παραγώγου με διατύπωση FI

$$\frac{\delta J}{\delta b} \Big|_{FI} = \int_b^1 \left( \frac{v^2}{2} - \nu \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\delta x}{\delta b} \right) dx + \nu \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\delta \lambda}{\delta b} \Big|_{x=1} + \Psi \nu \frac{\delta \kappa}{\delta b} \Big|_{x=b} \quad (3.21)$$

Εφόσον  $\kappa$  και  $\lambda$  είναι γνωστές συναρτήσεις του  $b$ , οι αναλυτικές εκφράσεις των  $\frac{\delta \kappa}{\delta b}$  και  $\frac{\delta \lambda}{\delta b}$  είναι γνωστές.

### 3.1.2 Διατύπωση SI

Στη διατύπωση SI, η παράγωγος του ολοκληρώματος της σχέσης 3.6 αναπτύσσεται εφαρμόζοντας το θεώρημα του Leibniz και την εξίσωση 2.15, ως εξής

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta b} \int_b^1 \Psi R dx &= \int_b^1 \Psi \frac{\partial R}{\partial b} dx + \left[ \Psi R \frac{\delta x}{\delta b} \right]_b^1 = \int_b^1 \Psi \frac{\partial}{\partial b} \left[ v \frac{\partial v}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] dx - \Psi R \Big|_{x=b} \\ &= \int_b^1 \Psi \left[ \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial b} + v \frac{\partial}{\partial b} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \nu \frac{\partial}{\partial b} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right] dx \\ &\quad - \left( \Psi v \frac{\partial v}{\partial x} - \Psi \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=b} \\ &= \int_b^1 \Psi \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial b} dx + \underbrace{\int_b^1 \Psi v \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial b} \right) dx}_{S_1} - \underbrace{\int_b^1 \Psi \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial v}{\partial b} \right) dx}_{S_2} \\ &\quad - \left[ \left( \Psi v \frac{\partial v}{\partial x} - \Psi \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right] \Big|_{x=b} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Το ολοκλήρωμα  $S_1$  αναπτύσσεται, με χρήση του θεωρήματος Green-Gauss, ως

$$S_1 = \left[ \Psi v \frac{\partial v}{\partial b} \right]_b^1 - \int_b^1 \frac{\partial(\Psi v)}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial b} dx \quad (3.23)$$

Το ολοκλήρωμα  $S_2$  αναπτύσσεται, με διπλή εφαρμογή του θεωρήματος Green-Gauss, ως

$$S_2 = \left[ \Psi \nu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial b} \right) \right]_b^1 - \left[ \nu \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial b} \right]_b^1 + \int_b^1 \nu \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial b} dx \quad (3.24)$$

Με αντικατάσταση των 3.23 και 3.24 στην 3.22, προκύπτει

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta b} \int_b^1 \Psi R dx = & \int_b^1 \Psi \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial b} dx + \left[ \Psi v \frac{\partial v}{\partial b} \right]_b - \int_b^1 \frac{\partial(\Psi v)}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial b} dx \\ & - \left[ \Psi \nu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial b} \right) \right]_b + \left[ \nu \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial b} \right]_b \\ & - \int_b^1 \nu \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial b} dx - \left[ \left( \Psi v \frac{\partial v}{\partial x} - \Psi \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right]_{x=b} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Ακόμα, η παράγωγος της αντικειμενικής συνάρτησης της σχέσης 3.5 αναπτύσσεται ως

$$\frac{\delta J}{\delta b} = \frac{\delta}{\delta b} \int_b^1 \frac{v^2}{2} dx = \int_b^1 v \frac{\partial v}{\partial b} dx - \frac{v^2}{2} \Big|_{x=b} \quad (3.26)$$

Με αντικατάσταση των 3.25 και 3.26 στη σχέση 3.8 και αναδιάταξη των όρων, προκύπτει η εξής σχέση

$$\begin{aligned} \frac{\delta L}{\delta b} = & \int_b^1 \left( -v \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + v \right) \frac{\partial v}{\partial b} dx + \left[ \left( \Psi v + \nu \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \frac{\partial v}{\partial b} \right]_b \\ & - \left[ \Psi \nu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial b} \right) \right]_b - \frac{v^2}{2} \Big|_{x=b} - \Psi \left( v \frac{\partial v}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=b} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Για να αποφευχθεί ο υπολογισμός του πεδίου  $\frac{\partial v}{\partial b}$ , μηδενίζεται στο πρώτο ολοκλήρωμα ο όρος που πολλαπλασιάζεται με το  $\frac{\partial v}{\partial b}$ . Έτσι, προκύπτει η συζυγής πεδριακή εξίσωση (Field Adjoint Equation - FAE), η οποία είναι ακριβώς η 3.18, όπως εξάλλου ήταν αναμενόμενο. Με χρήση της σχέσης 2.9, είναι

$$\frac{\delta}{\delta b} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Big|_{x=b} = \frac{\delta \kappa}{\delta b} = \frac{\partial}{\partial b} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Big|_{x=b} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\delta x}{\delta b} \Big|_{x=b} \quad (3.28)$$

και συνεπώς,

$$\frac{\partial}{\partial b} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Big|_{x=b} = \frac{\delta \kappa}{\delta b} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Big|_{x=b} \quad (3.29)$$

Άρα, για να μην υπάρχει ανάγκη υπολογισμού της ποσότητας  $\frac{\partial}{\partial b} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)$  στο όριο  $x = 1$ , προκύπτει η πρώτη συζυγής οριακή συνθήκη

$$\Psi \Big|_{x=1} = 0 \quad (3.30)$$

που είναι ίδια με την αντίστοιχη συνθήκη της διατύπωσης FI (σχέση 3.20). Ακόμα, επειδή

$$\frac{\delta v}{\delta b} \Big|_{x=1} = \frac{\delta \lambda}{\delta b} \quad (3.31)$$

και λόγω της σχέσης 2.9, προκύπτει ότι

$$\frac{\partial v}{\partial b} \Big|_{x=1} = \frac{\delta \lambda}{\delta b} \quad (3.32)$$

Για να αποφευχθεί ο υπολογισμός του όρου  $\frac{\partial v}{\partial b}$  στο όριο  $x=b$ , προκύπτει η δεύτερη συζυγής οριακή συνθήκη στο  $x=b$ , που είναι και πάλι ίδια με την αντίστοιχη συνθήκη της διατύπωσης FI (σχέση 3.19), επίσης αναμενόμενο με βάση όσα παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 2.

Συνεπώς

$$\frac{\partial J}{\partial b} \Big|_{SI} = \frac{\delta \lambda}{\delta b} \left( \Psi v + \nu \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \Big|_{x=1} + \Psi \nu \left( \frac{\delta \kappa}{\delta b} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=b} - \frac{v^2}{2} \Big|_{x=b} - \underbrace{\Psi \left( v \frac{\partial v}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=b}}_{LBterm} \quad (3.33)$$

Αμελώντας τον όρο του Leibniz (LBterm), μιας και αυτός ο χειρισμός είναι που γίνεται στη διατύπωση που ονομάστηκε SI, η τελική έκφραση της παραγώγου με διατύπωση SI είναι η εξής

$$\frac{\partial J}{\partial b} \Big|_{SI} = \nu \frac{\delta \lambda}{\delta b} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_{x=1} + \Psi \nu \left( \frac{\delta \kappa}{\delta b} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=b} - \frac{v^2}{2} \Big|_{x=b} \quad (3.34)$$

### 3.1.3 Διατύπωση E-SI

Στη διατύπωση E-SI, ακολουθείται η διαδικασία που περιγράφεται στο Κεφάλαιο 2. Έστω ότι το μοντέλο μετατόπισης των κόμβων του πλέγματος είναι μια εξίσωση Laplace, δηλαδή

$$R_m = \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} = 0 \quad (3.35)$$

όπου  $m$  είναι το πεδίο μετατόπισης των κόμβων του πλέγματος. Η εξίσωση 3.35 καλείται εξίσωση μετατόπισης πλέγματος (grid displacement PDE - gdPDE), αν και στο 1D πρόβλημα καταλήγει να είναι μια ΣΔΕ. Σε ένα 1D πρόβλημα, η 3.35 εξασφαλίζει γραμμική κατανομή της μετατόπισης για οποιαδήποτε τιμή του  $b$ . Η συζυγής εξίσωση του νόμου μετατόπισης του πλέγματος είναι η

$$R_m^a = \frac{\partial^2 m^a}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v^2}{2} - \nu \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.36)$$

Οι συζυγείς οριακές συνθήκες για το  $m^a$  είναι

$$m^a \Big|_{x=b} = m^a \Big|_{x=1} = 0 \quad (3.37)$$

Έτσι, η έκφραση της παραγώγου στη διατύπωση E-SI παίρνει τη μορφή

$$\frac{\delta J}{\delta b} \Big|_{E-SI} = \frac{\delta J}{\delta b} \Big|_{SI} + \frac{\partial m^a}{\partial x} \Big|_{x=b} \quad (3.38)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι στην εξίσωση 3.36, δεν περιέχεται το πεδίο των μετατοπίσεων των κόμβων του πλέγματος  $m$ . Αυτό σημαίνει ότι δεν χρειάζεται να λυθεί η 3.36 μαζί με τις άλλες συζυγείς πεδιακές εξισώσεις, αλλά μετά από αυτές, σε επίπεδο μετεπεξεργασίας! Δηλαδή, αν υπολογιστεί η παράγωγος με διατύπωση SI (χωρίς τον όρο του Leibniz) και στη συνέχεια, επιλυθεί αριθμητικά η 3.36, ώστε να υπολογιστεί και ο επιπλέον όρος της σχέσης 3.38,

Μέγεθος	Τιμή
Όριο χωρίου $b$	$0 \text{ m}$
Κινηματική συνεκτικότητα $\nu$	$0.15 \text{ m}^2/\text{s}$
Οριακή συνθήκη $\kappa$	$-6.931757 \text{ 1/s}$
Οριακή συνθήκη $\lambda$	$-0.075 \text{ m/s}$

Πίνακας 3.1: Εξίσωση Burgers, μόνιμο 1D πρόβλημα: Αρχικά δεδομένα.

Αριθμός κόμβων / Παραγωγός με	N=10	N=100	N=1000	N=10000
Διατύπωση SI	-23.958269	-24.017021	-24.023850	-24.024552
Διατύπωση E-SI	-24.010522	-24.025469	-24.024843	-24.024662
Διατύπωση FI	-24.020174	-24.024490	-24.024619	-24.024629
Πεπερασμένες διαφορές ( $\epsilon = 10^{-5}$ )	-24.016344	-24.024407	-24.024606	-24.024486
Πεπερασμένες διαφορές ( $\epsilon = 10^{-6}$ )	-24.016344	-24.024408	-24.024612	-24.024401
Πεπερασμένες διαφορές ( $\epsilon = 10^{-7}$ )	-24.016344	-24.024407	-24.024273	-24.024548

Πίνακας 3.2: Εξίσωση Burgers, μόνιμο 1D πρόβλημα: Παραμετρική ανάλυση για διαφορετική πυκνότητα πλέγματος και  $b=0$ , με σκοπό τον υπολογισμό παραγώγων ευαισθησίας με τις διαφορετικές διατυπώσεις και με παραγώγους από πεπερασμένες διαφορές, διαφορετικής τάξης ακρίβειας.

προκύπτει άμεσα και η τιμή της παραγώγου με διατύπωση E-SI.

## 3.2 Υπολογιστικές μελέτες

Τα αρχικά δεδομένα για την επίλυση του πρωτεύοντος προβλήματος περιέχονται στον πίνακα 3.1.

Τα αποτελέσματα από την εύρεση παραγώγων με τις διαφορετικές διατυπώσεις παρουσιάζονται στον πίνακα 3.2. Γίνεται παραμετρική μελέτη για το πλήθος των κόμβων του πλέγματος και σύγκριση με τις παραγώγους που βρέθηκαν με πεπερασμένες διαφορές.

Ακολουθούν σχόλια με βάση τα αποτελέσματα που παρατίθενται στον πίνακα 3.2:

- Στο πρόβλημα αυτό, με τη διατύπωση SI, επιτυγχάνεται ελαφρώς μικρότερη ακρίβεια υπολογισμού από ό,τι με τις υπόλοιπες μεθόδους. Ωστόσο, όσο το πλέγμα γίνεται πυκνότερο, οι τιμές των παραγώγων με SI τείνουν όλο και περισσότερο στις τιμές των υπόλοιπων διατυπώσεων.
- Η προσθήκη του όρου του Leibniz, η υλοποίηση δηλαδή της σχέσης 3.38, επαναφέρει την ακρίβεια της παραγώγου ευαισθησίας. Στο αραιό πλέγμα, όπου πρακτικά αξίζει να εστιάσουμε, φαίνεται πρακτικά η αξία της διατύπωσης E-SI.



- Οι διατυπώσεις E-SI και FI δίνουν σε επαρκώς πυκνά πλέγματα ακρίβεια 5-6 σημαντικών ψηφίων σε σύγκριση με τις πεπερασμένες διαφορές, δηλαδή δίνουν μεγαλύτερη ακρίβεια υπολογισμού παραγώγων.
- Είναι εμφανές ότι, στο πρόβλημα αυτό, η συνεισφορά του όρου του Leibniz που θα υπήρχε στην πλήρη διατύπωση SI μειώνεται, όσο το πλέγμα γίνεται πυκνότερο.



# Κεφάλαιο 4

## Υπολογισμός παραγώγων ευαισθησίας σε μεμονωμένες αεροτομές

### 4.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα αποτελέσματα υπολογισμού των παραγώγων ευαισθησίας σε δύο τύπους αεροτομών:

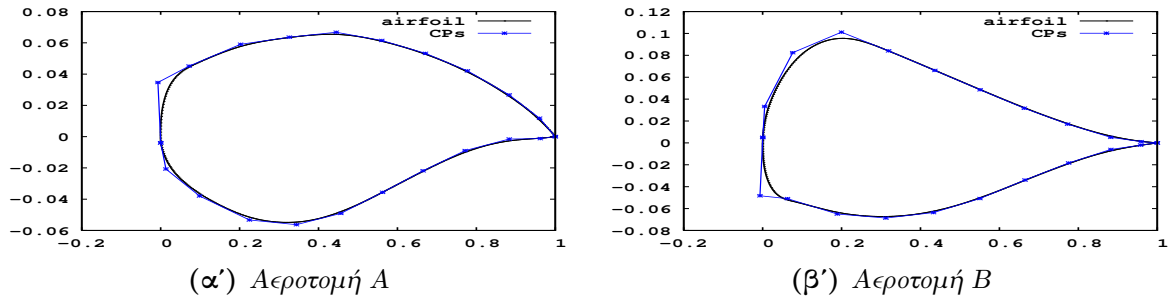
- Αεροτομή A: Πρόκειται για αεροτομή που σχεδιάστηκε για να παράγει μικρή αεροδυναμική αντίσταση για μεγάλες ταχύτητες ροής και μικρή γωνία εισόδου της ροής (λχ. ως αεροτομή πτέρυγας αεροσκάφους με καλή επίδοση κατά την ευθεία πτήση).
- Αεροτομή B: Πρόκειται για αεροτομή που σχεδιάστηκε για να παράγει αυξημένη άνωση σε μικρές ταχύτητες ροής υπό μεγάλη γωνία ( λχ. ως αεροτομή πτέρυγας αεροσκάφους με καλή επίδοση κατά την προσγείωση ή απογείωση).

Και οι δύο περιπτώσεις αποτελούν προβλήματα εξωτερικής αεροδυναμικής και οι συνθήκες ροής αντιστοιχούν σε μόνιμη στρωτή ροή. Στις επιμέρους ενότητες του κεφαλαίου περιγράφονται με περισσότερη λεπτομέρεια οι συνθήκες ροής. Οι συνθήκες αυτές θα αντιστοιχούν σε στρωτή ροή, για λόγους που έχουν εξηγηθεί. Άρα, δεν θα υπάρχει διαφορά στην ταχύτητα της επ'άπειρο ροής, κατά τις μελέτες που θα ακολουθήσουν και θα υπάρχει κοινός αριθμός Reynolds της ροής.

Το λογισμικό που χρησιμοποιήθηκε είναι το OpenFOAM<sup>©</sup>. Ο επιλύτης της στρωτής ροής που χρησιμοποιήθηκε είναι ο simpleFoam, που υλοποιεί τον αλγόριθμο SIMPLE για κεντροκυβελική διατύπωση [4, 5].

Η παραμετροποίηση έγινε με σημεία ελέγχου καμπύλων NURBS [14], τα οποία χρησιμοποιήθηκαν ως μεταβλητές σχεδιασμού και ο υπολογισμός των παραγώγων ευαισθησίας της εκάστοτε αντικειμενικής συνάρτησης έγινε ως προς αυτά. Στο σχήμα 4.1 φαίνονται το περίγραμμα της κάθε αεροτομής και τα σημεία ελέγχου της γεωμετρίας.

Η εύρεση των παραγώγων έγινε με τις διατυπώσεις FI, SI, E-SI. Για αυτόν το σκοπό,



**Σχήμα 4.1:** Περίγραμμα και σημεία ελέγχου γεωμετρίας από καμπύλες NURBS για (α) την αεροτομή A και για (β) την αεροτομή B.

απαιτήθηκε αρχικά η επίλυση του πρωτεύοντος και του συζυγούς προβλήματος και στη συνέχεια, με διαφορετική μετεπεξεργασία των πεδίων του πρωτεύοντος και του συζυγούς προβλήματος για κάθε διατύπωση, υπολογίστηκαν οι παράγωγοι με FI, SI και E-SI. Ακόμα, για τον έλεγχο της εγκυρότητας των υπολογιζόμενων παραγώγων, έγινε ο υπολογισμός τους και με τη μέθοδο των Πεπερασμένων Διαφορών (Finite Differences - FD), η οποία απαιτεί την επίλυση του πρωτεύοντος προβλήματος ροής σε όλο το χωρίο  $\Omega$  δύο φορές για κάθε μεταβλητή σχεδιασμού και ανά κατεύθυνση μετατόπισης των σημείων ελέγχου.

Προκειμένου να διαπιστωθεί η εξάρτηση από το πλέγμα των υπολογιζόμενων παραγώγων με τις διαφορετικές μεθόδους, έγινε παραμετρική ανάλυση πλέγματος:

1. διατηρώντας σταθερή την απόσταση του κέντρου του πρώτου κελιού από τον τοίχο (εφόσον χρησιμοποιείται κεντροκυβελική διατύπωση) και μεταβάλλοντας τον αριθμό των κελιών.
2. διατηρώντας σταθερό τον αριθμό των κελιών και μεταβάλλοντας την απόσταση του κέντρου του πρώτου κελιού από τον τοίχο.

Και στους δύο τύπους αεροτομών χρησιμοποιήθηκαν δύο αντικειμενικές συναρτήσεις, η αεροδυναμική αντίσταση και η άνωση που ασκούνται στην αεροτομή.

Η μαθηματική σχέση για την έκφραση της αντικειμενικής συνάρτησης και στις δύο περιπτώσεις, είναι:

$$J = \int_{S_w} \left[ (p\delta_i^j - \tau_{ij}) r_i \right] n_j dS \quad (4.1)$$

όπου όταν το διάνυσμα  $r_i$  είναι παράλληλο στη διεύθυνση της επί άπειρον ταχύτητας, τότε η  $J$  αντιστοιχεί στην αεροδυναμική αντίσταση, ενώ όταν είναι κάθετη στη διεύθυνση της επί άπειρον ταχύτητας, τότε αντιστοιχεί στην άνωση.

Στις επόμενες ενότητες παρουσιάζονται τα διαγράμματα των παραγώγων ευαισθησίας που υπολογίστηκαν με τις διαφορετικές διατυπώσεις. Σε όλα τα διαγράμματα, περιέχονται τέσσερα διακριτά σύνολα από καμπύλες. Τα δύο πρώτα από αριστερά προς τα δεξιά, αντιστοιχούν στη μετατόπιση των σημείων ελέγχου της πλευράς πίεσης και υποπίεσης αντίστοιχα κατά  $x$ , ενώ τα δύο τελευταία στη μετατόπιση των σημείων ελέγχου της πλευράς πίεσης και υποπίεσης κατά  $y$ .

Τέλος, η παραμετρική μελέτη αφορά και στο εύρος (πάχος) του πρώτου από τον τοίχο κελιού, το οποίο συμβολίζεται με  $\Delta_w$ . Το εύρος αυτό είναι ίσο με το διπλάσιο της απόστασης του

κέντρου του κελιού από τον τοίχο, η οποία συμβολίζεται με  $y_w$ . Είναι, δηλαδή,  $y_w = \frac{\Delta_w}{2}$ .

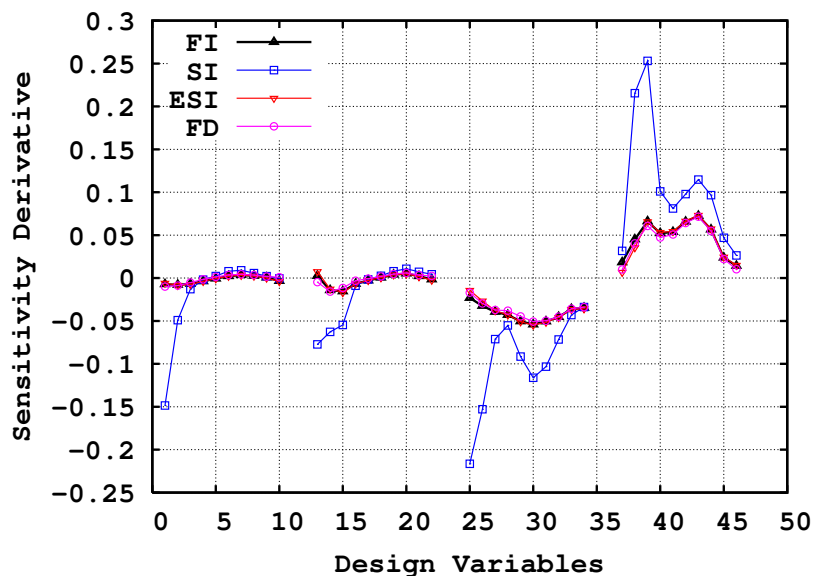
## 4.2 Αεροτομή A

Όπως ήδη αναφέρθηκε, στην αεροτομή A έγινε υπολογισμός των παραγώγων ευαισθησίας για δύο αντικειμενικές συναρτήσεις, για την αεροδυναμική αντίσταση (οπισθέλκουσα) και την άνωση, για τις συνθήκες που περιγράφονται στον πίνακα 4.1.

Μέγεθος	Τιμή
Γωνία της επί άπειρον ροής	1.5 μοίρες
Αριθμός Reynolds	600

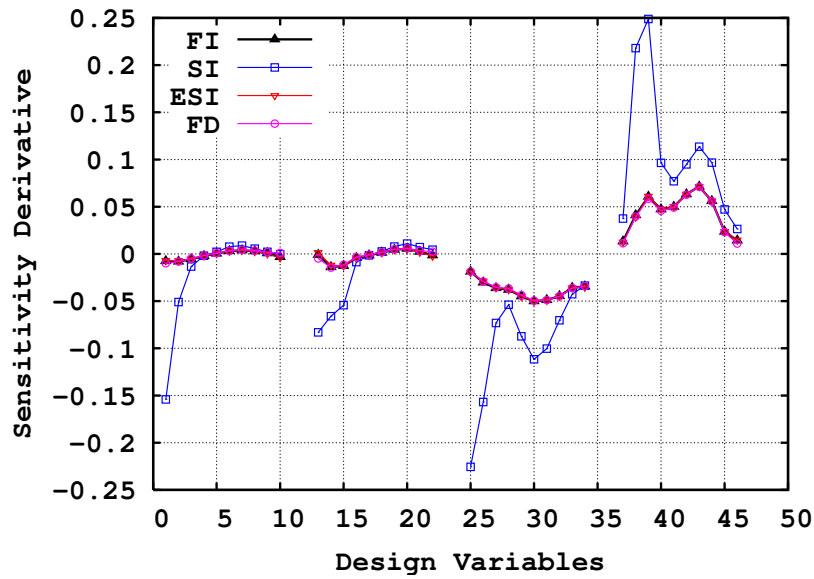
Πίνακας 4.1: Αεροτομή A: Συνθήκες ροής.

Στα σχήματα 4.2, 4.3 και 4.4 παρατίθενται τα διαγράμματα των παραγώγων ευαισθησίας της αεροδυναμικής αντίστασης για πλέγματα με διαφορετικό αριθμό κελιών, με σταθερή την απόσταση του κέντρου του πρώτου κελιού. Στα σχήματα 4.5, 4.6 και 4.7 παρατίθενται οι παράγωγοι ευαισθησίας της αεροδυναμικής αντίστασης για σταθερό αριθμό κελιών πλέγματος αλλά διαφορετική απόσταση του κέντρου του πρώτου κελιού από τον τοίχο.

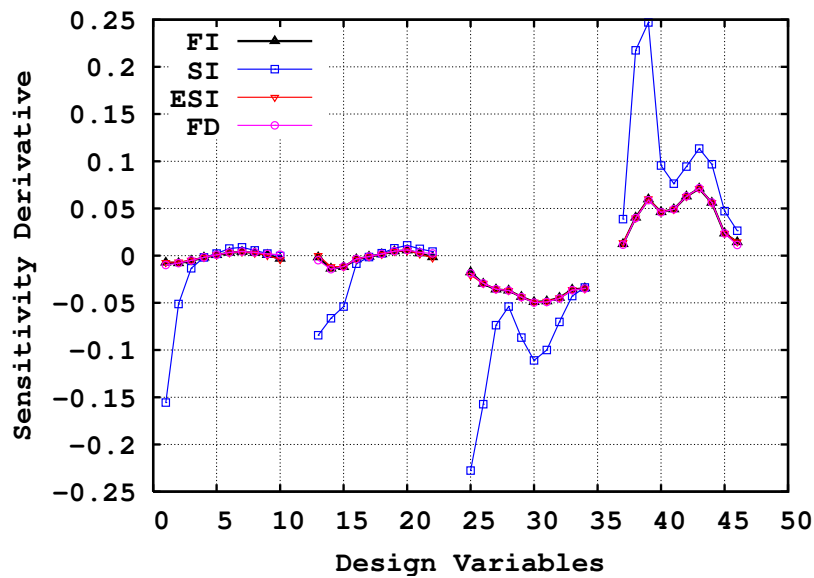


Σχήμα 4.2: Αεροτομή A, μόνιμη στρωτή ροή, παραγωγή της αντίστασης: Αποτελέσματα για πλέγμα  $\sim 22K$  κελιών και  $y_w = 2.5 \times 10^{-4} m$ .

Στα σχήματα 4.8, 4.9 και 4.10 παρατίθενται τα διαγράμματα των παραγώγων ευαισθησίας της άνωσης για διαφορετικό αριθμό κελιών στο πλέγμα με σταθερή την απόσταση του κέντρου του πρώτου κελιού. Στα σχήματα 4.11, 4.12 και 4.13 παρατίθενται οι παράγωγοι ευαισθησίας της άνωσης για σταθερό αριθμό κελιών πλέγματος αλλά διαφορετική απόσταση του κέντρου του πρώτου κελιού από τον τοίχο.



Σχήμα 4.3: Αεροτομή A, μόνιμη στρωτή ροή, παραγωγή της αντίστασης: Αποτελέσματα για πλέγμα  $\sim 45K$  κελιών και  $y_w = 2.5 \times 10^{-4} m$ .

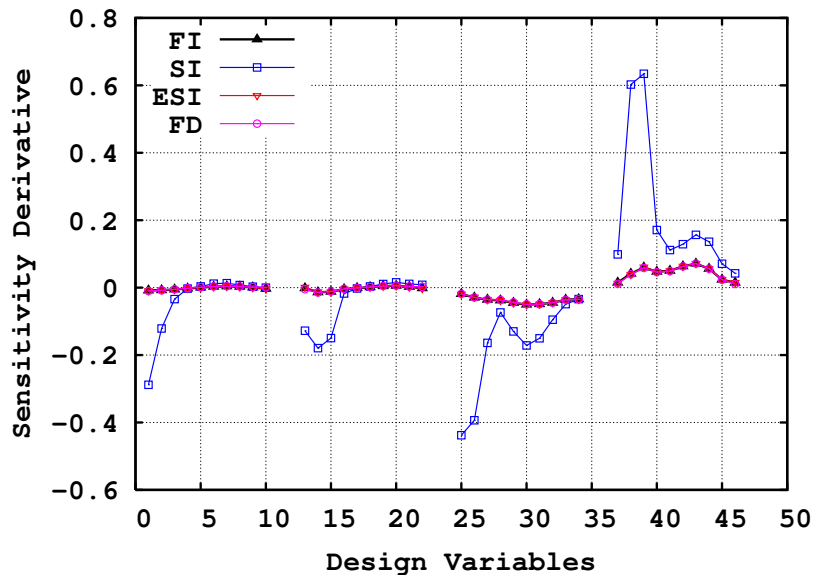


Σχήμα 4.4: Αεροτομή A, μόνιμη στρωτή ροή, παραγωγή της αντίστασης: Αποτελέσματα για πλέγμα  $\sim 82K$  κελιών και  $y_w = 2.5 \times 10^{-4} m$ .

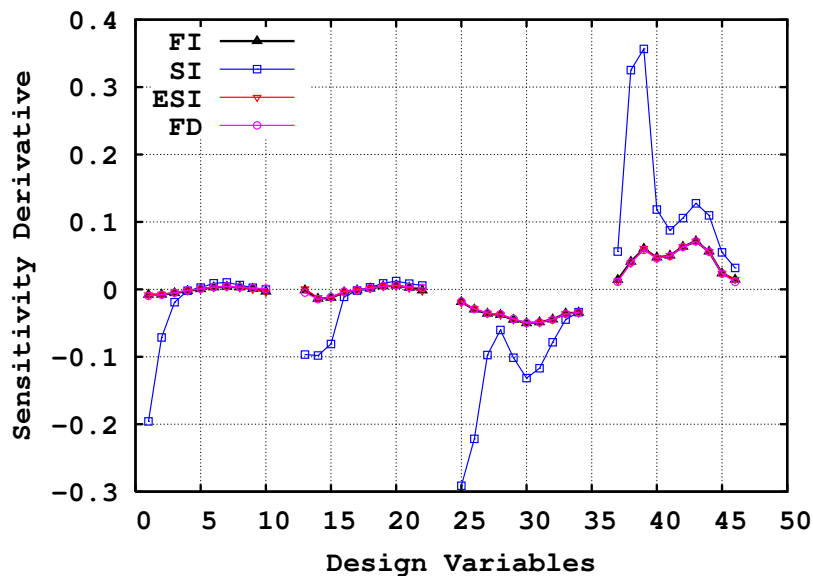
### 4.3 Αεροτομή B

Και στην αεροτομή τύπου B έγινε ο υπολογισμός των παραγώγων ευαισθησίας για τις ίδιες αντικειμενικές συναρτήσεις, για τις συνθήκες που περιγράφονται στον πίνακα 4.2.

Στα σχήματα 4.14, 4.15 και 4.16 παρατίθενται τα διαγράμματα με τις παραγώγους ευαισθησίας της αεροδυναμικής αντίστασης. Σε αυτήν την περίπτωση, πραγματοποιήθηκε παραμετρική μελέτη για πλέγματα με διαφορετικό αριθμό κελιών και με σταθερή την απόσταση του κέντρου του πρώτου κελιού. Στα σχήματα 4.17, 4.18 και 4.19 παρατίθενται οι παράγωγοι



Σχήμα 4.5: Αεροτομή A, μόνιμη στρωτή ροή, παραγωγή της αντίστασης: Αποτελέσματα για πλέγμα  $\sim 45K$  κελιών και  $y_w = 1.25 \times 10^{-4}m$ .

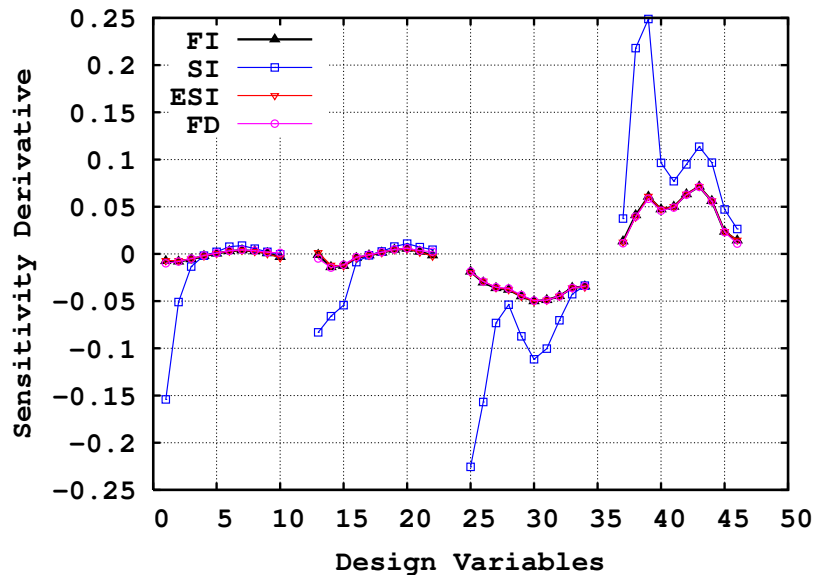


Σχήμα 4.6: Αεροτομή A, μόνιμη στρωτή ροή, παραγωγή της αντίστασης: Αποτελέσματα για πλέγμα  $\sim 45K$  κελιών και  $y_w = 1.875 \times 10^{-4}m$ .

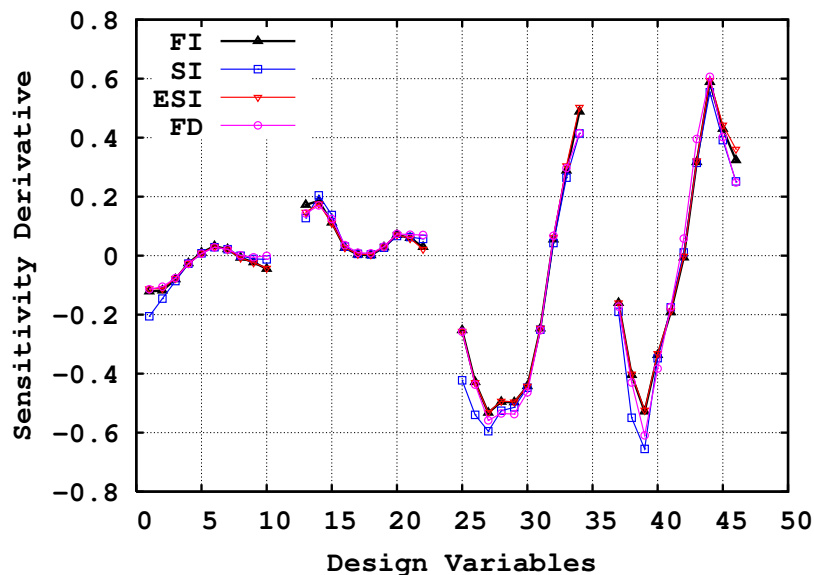
Μέγεθος	Τιμή
Γωνία της επ' άπειρον ροής	7 μοίρες
Αριθμός Reynolds	600

Πίνακας 4.2: Αεροτομή B: Συνθήκες ροής.

ευαισθησίας της αεροδυναμικής αντίστασης για σταθερό αριθμό κελιών πλέγματος, αλλά διαφορετική απόσταση του κέντρου του πρώτου κελιού από τον τοίχο.



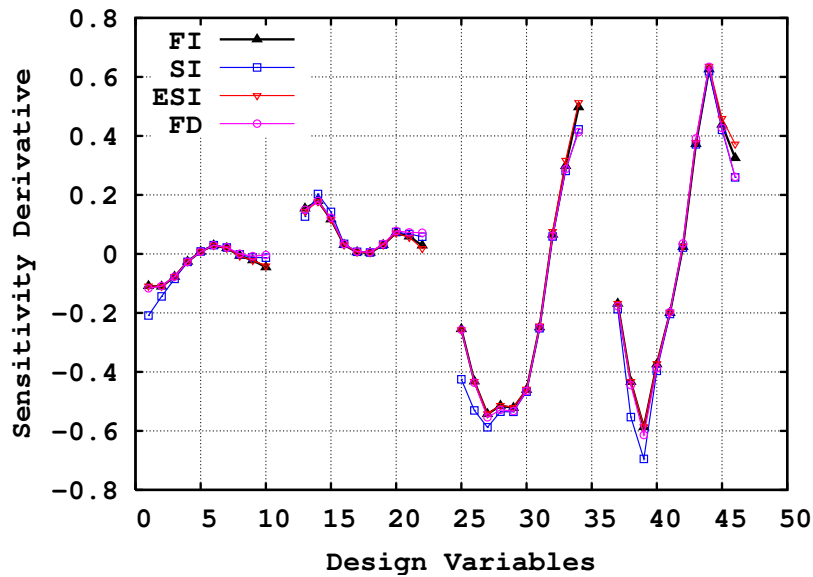
Σχήμα 4.7: Αεροτομή A, μόνιμη στρωτή ροή, παραγωγή της αντίστασης: Αποτελέσματα για πλέγμα  $\sim 45K$  κελιών και  $y_w = 2.5 \times 10^{-4} m$ .



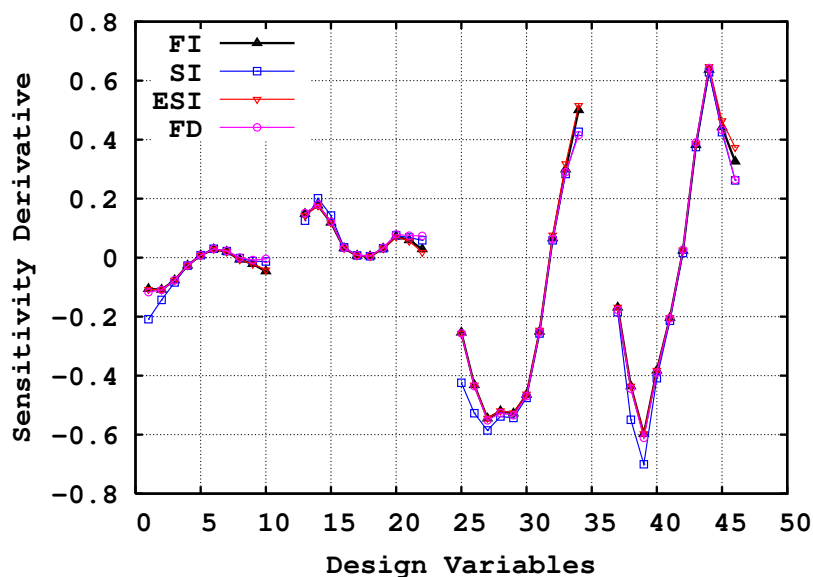
Σχήμα 4.8: Αεροτομή A, μόνιμη στρωτή ροή, παραγωγή της άνωσης: Αποτελέσματα για πλέγμα  $\sim 22K$  κελιών και  $y_w = 2.5 \times 10^{-4} m$ .

Στα σχήματα 4.20, 4.21 και 4.22 παρουσιάζονται τα διαγράμματα των παραγώγων ευαισθησίας της άνωσης για διαφορετικό αριθμό κελιών πλέγματος και με σταθερή την απόσταση του κέντρου του πρώτου κελιού. Αντιθέτως, στα σχήματα 4.23, 4.24 και 4.25 παρατίθενται οι παράγωγοι ευαισθησίας της άνωσης για σταθερό αριθμό κελιών πλέγματος και με διαφορετική απόσταση του κέντρου του πρώτου κελιού από τον τοίχο.





Σχήμα 4.9: Αεροτομή A, μόνιμη στρωτή ροή, παραγωγή της άνωσης: Αποτελέσματα για πλέγμα  $\sim 45K$  κελιών και  $y_w = 2.5 \times 10^{-4} m$ .

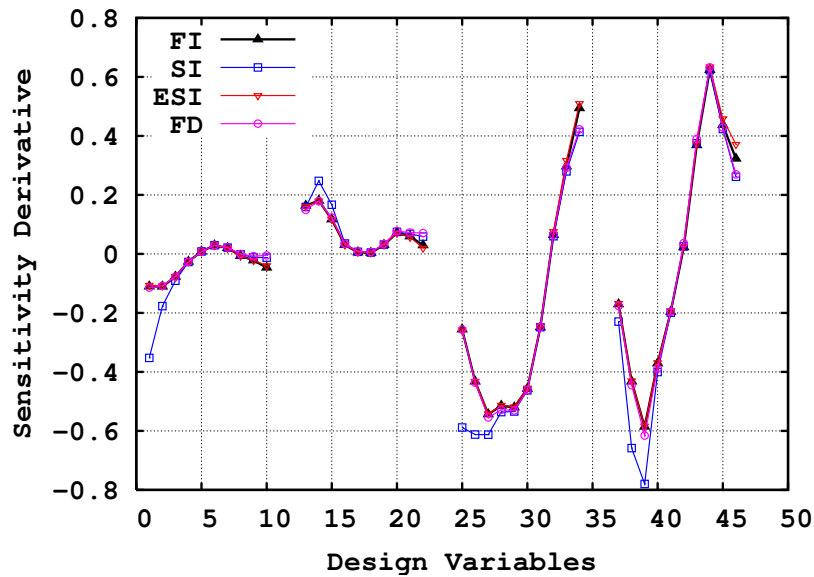


Σχήμα 4.10: Αεροτομή A, μόνιμη στρωτή ροή, παραγωγή της άνωσης: Αποτελέσματα για πλέγμα  $\sim 82K$  κελιών και  $y_w = 2.5 \times 10^{-4} m$ .

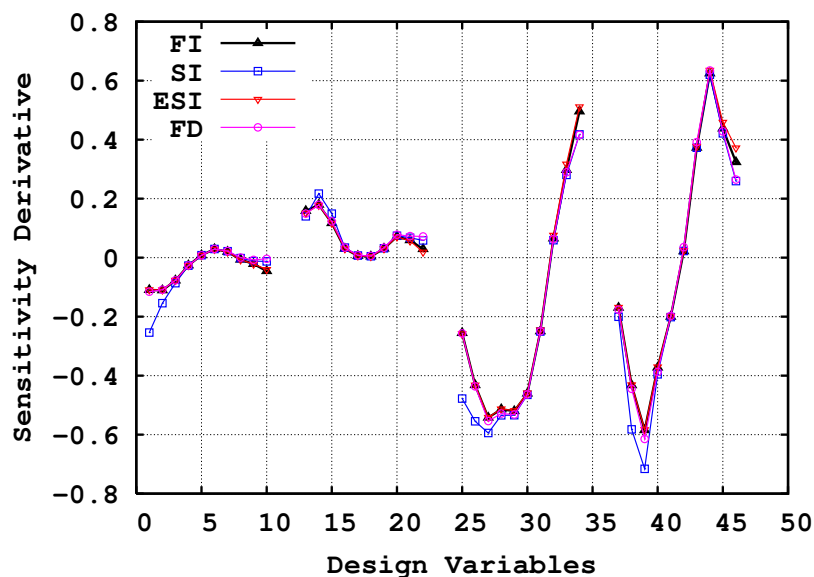
## 4.4 Σχολιασμός των παραγώγων ευαισθησίας

Με βάση τα διαγράμματα 4.2 έως 4.25, καταγράφονται οι εξής παρατηρήσεις που αφορούν στις αεροτομές A και B:

- Στην περίπτωση της αεροδυναμικής αντίστασης, οι παράγωγοι ευαισθησίας που υπολογίστηκαν με τη διατύπωση SI είναι αρκετά διαφορετικές από αυτές που υπολογίστηκαν από τις υπόλοιπες μεθόδους. Αυτή η συμπεριφορά είναι αναμενόμενη και επιβεβαιώνει τον κανόνα σύμφωνα με τον οποίο η μέθοδος SI μπορεί να αποδειχθεί αρκετά έως



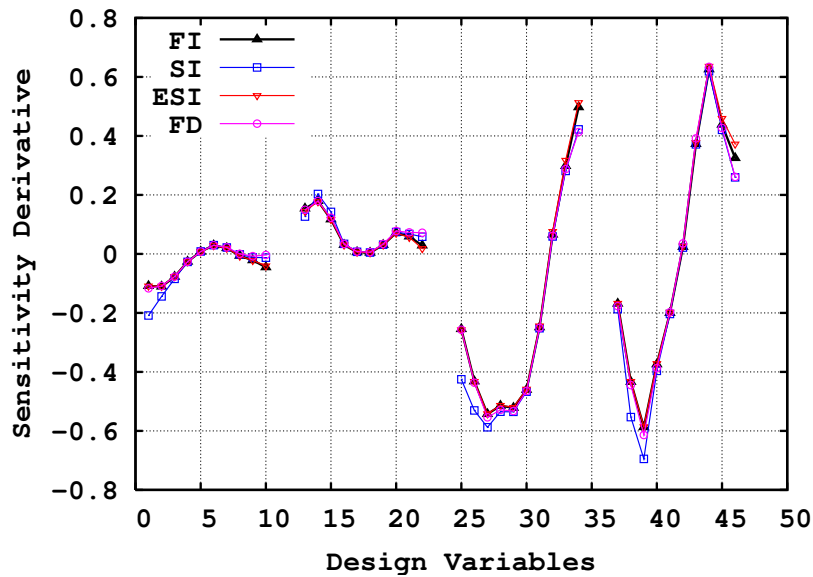
Σχήμα 4.11: Αεροτομή A, μόνιμη στρωτή ροή, παραγωγή της άνωσης: Αποτελέσματα για πλέγμα  $\sim 45K$  κελιών και  $y_w = 1.25 \times 10^{-4}m$ .



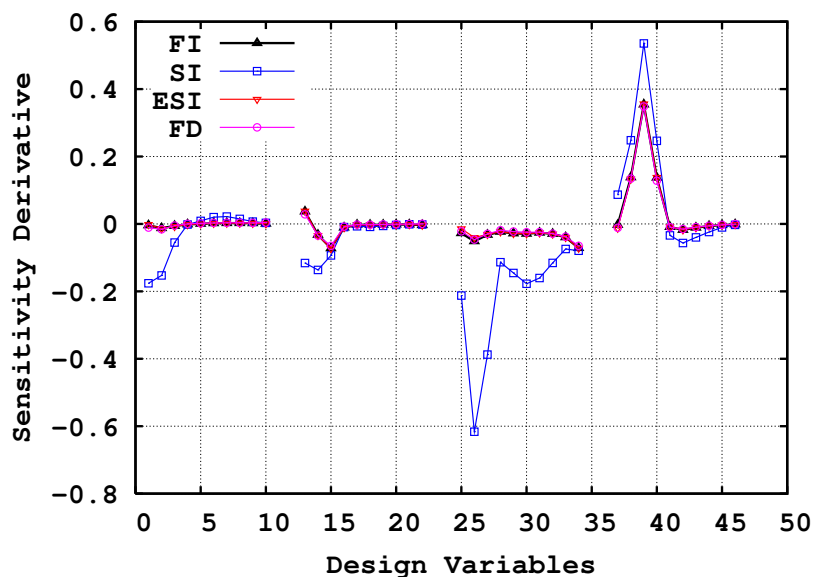
Σχήμα 4.12: Αεροτομή A, μόνιμη στρωτή ροή, παραγωγή της άνωσης: Αποτελέσματα για πλέγμα  $\sim 45K$  κελιών και  $y_w = 1.875 \times 10^{-4}m$ .

και πολύ ανακριβής, γεγονός που αυτομάτως απεμπολεί το πλεονέκτημα του χαμηλού υπολογιστικού κόστους της.

- Οι παράγωγοι ευαισθησίας που υπολογίστηκαν με τη μέθοδο E-SI είναι πρακτικά ίδιες με τις παραγωγούς από τις μεθόδους FI και FD. Αυτό επιβεβαιώνει τον ισχυρισμό ότι με τη μέθοδο E-SI είναι δυνατόν να υπολογιστούν παράγωγοι ευαισθησίας σχεδόν με την ίδια ακρίβεια όπως με την FI και την FD, διατηρώντας το σημαντικό πλεονέκτημα της ταχύτητας υπολογισμού έναντι των δύο τελευταίων. Το πλεονέκτημα του υπολογιστικού κόστους, φαίνεται και από το πίνακα 4.3, στον οποίο φαίνονται οι χρόνοι υπολογισμού παραγώγων ευαισθησίας με διαφορετικές διατυπώσεις, ως πο-

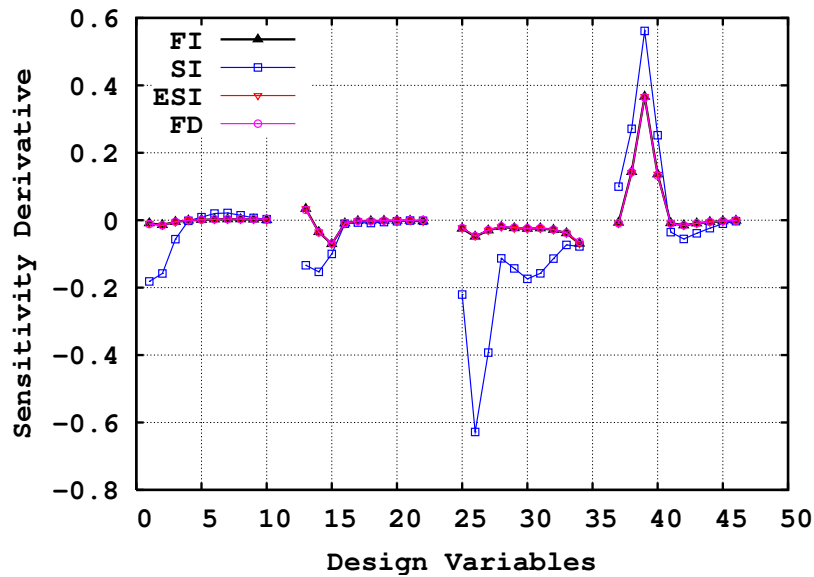


Σχήμα 4.13: Αεροτομή A, μόνιμη στρωτή ροή, παραγωγή της άνωσης: Αποτελέσματα για πλέγμα  $\sim 45K$  κελιών και  $y_w = 2.5 \times 10^{-4} m$ .

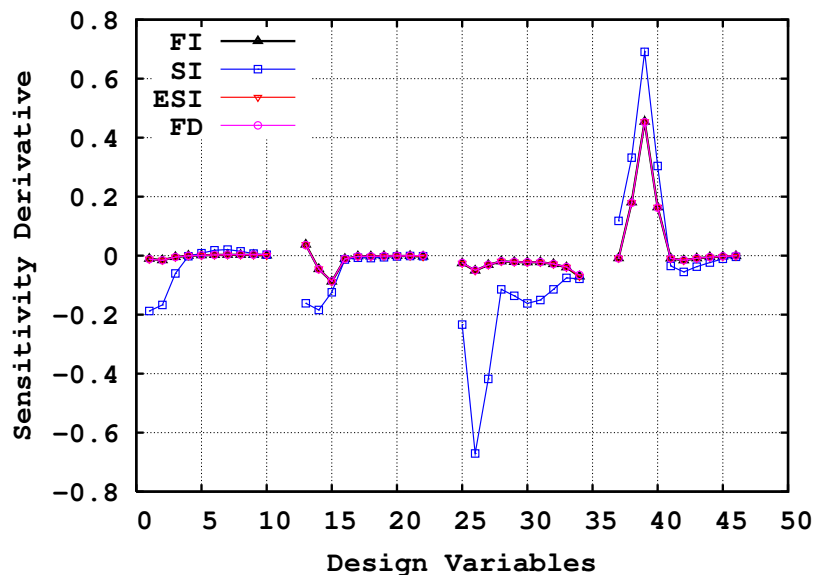


Σχήμα 4.14: Αεροτομή B, μόνιμη στρωτή ροή, παραγωγή της αεροδυναμικής αντίστασης: Αποτελέσματα για πλέγμα  $\sim 24K$  κελιών και  $y_w = 2 \times 10^{-4} m$ .

σοστό επίλυσης του πρωτεύοντος και του συζυγούς προβλήματος μαζί. Η επίλυση του πρωτεύοντος και συζυγούς προβλήματος καθώς και ο υπολογισμός των παραγώγων έγιναν παράλληλα σε 4 πυρήνες επεξεργαστή τύπου Intel(R) Xeon(R) 2.40 GHz. Πρέπει να τονιστεί ότι ο χρόνος υπολογισμού παραγώγων ευαισθησίας με τη διατύπωση SI ή την E-SI είναι, ως ποσοστό επίλυσης του πρωτεύοντος και συζυγούς προβλήματος μαζί, αμελητέος! Αντιθέτως, ο χρόνος υπολογισμού παραγώγων ευαισθησίας με τη διατύπωση FI αρκετά μεγαλύτερος, σε σύγκριση με τις διατυπώσεις SI και E-SI. Τέλος, ο χρόνος υπολογισμού παραγώγων ευαισθησίας με πεπερασμένες διαφορές είναι εξαιρετικά μεγαλύτερος από το χρόνο επίλυσης του πρωτεύοντος και του συζυγούς προβλήματος μαζί.

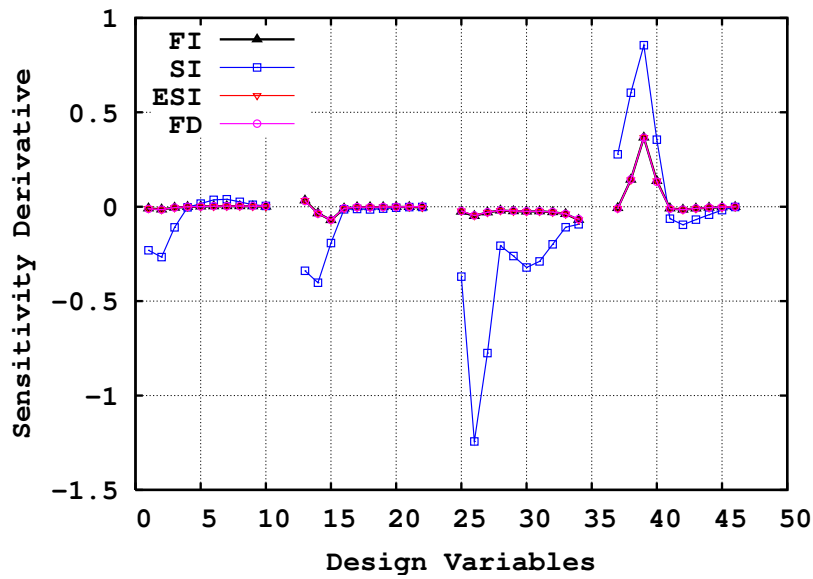


Σχήμα 4.15: Αεροτομή B, μόνιμη στρωτή ροή, παραγωγή της αεροδυναμικής αντίστασης: Αποτελέσματα για πλέγμα  $\sim 44K$  κελιών και  $y_w = 2 \times 10^{-4} m$ .

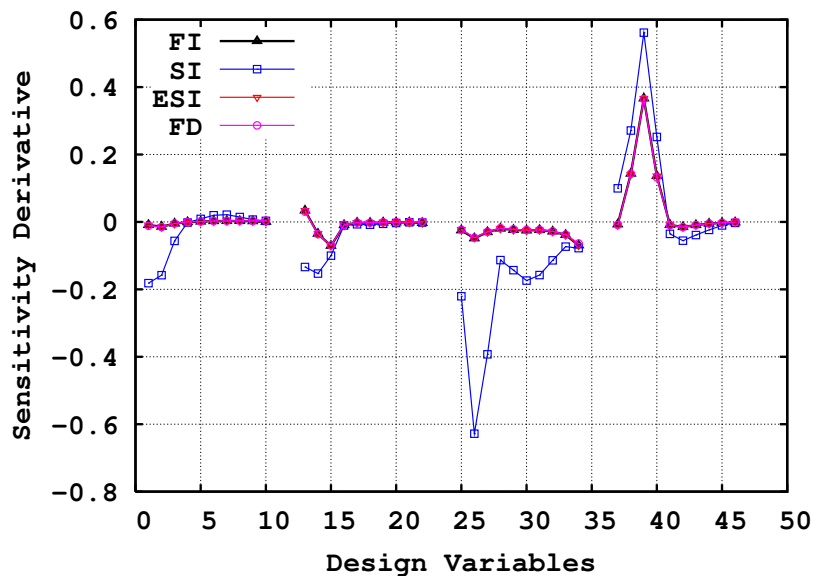


Σχήμα 4.16: Αεροτομή B, μόνιμη στρωτή ροή, παραγωγή της αεροδυναμικής αντίστασης: Αποτελέσματα για πλέγμα  $\sim 82K$  κελιών και  $y_w = 2 \times 10^{-4} m$ .

- Στην περίπτωση της αεροδυναμικής αντίστασης, παρατηρείται η τάση να μειώνεται η ακρίβεια υπολογισμού παραγώγων με διατύπωση SI, όσο το πλέγμα γίνεται πυκνότερο. Η τάση αυτή εξηγείται στην υποενότητα 4.4.1.
- Στην περίπτωση της άνωσης, οι διαφορές μεταξύ των παραγώγων ευαισθησίας από τις διαφορετικές μεθόδους δεν είναι πολύ σημαντικές. Αυτό συμβαίνει, γιατί στην άνωση η πίεση παίζει τον καθοριστικό ρόλο σε αντίθεση με την αεροδυναμική αντίσταση, όπου οι τάσεις είναι το σημαντικό μέγεθος.
- Και στην άνωση παρατηρείται, σε πολύ πιο μικρό βαθμό βέβαια σε σύγκριση με την αεροδυναμική αντίσταση, η τάση να μειώνεται η ακρίβεια υπολογισμού παραγώγων με



Σχήμα 4.17: Αεροτομή B, μόνιμη στρωτή ροή, παραγωγή της αεροδυναμικής αντίστασης: Αποτελέσματα για πλέγμα  $\sim 44K$  κελιών και  $y_w = 10^{-4}m$ .

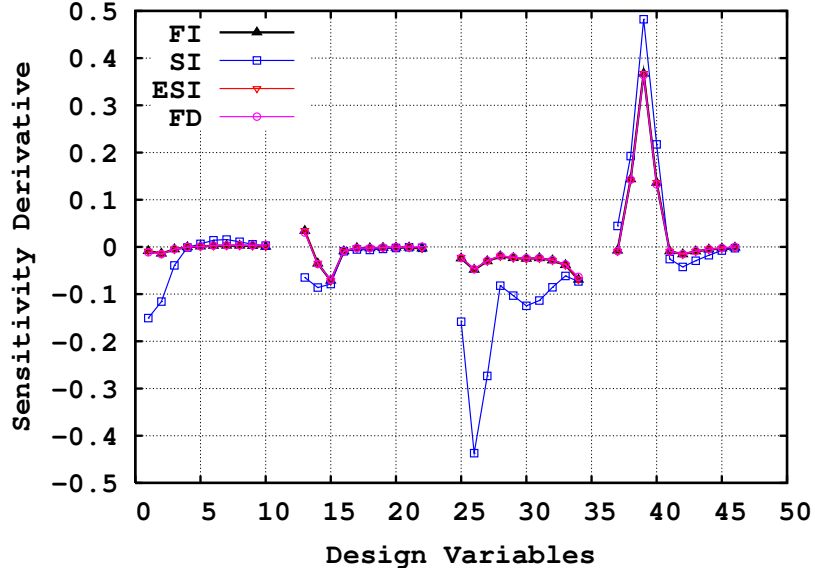


Σχήμα 4.18: Αεροτομή B, μόνιμη στρωτή ροή, παραγωγή της αεροδυναμικής αντίστασης: Αποτελέσματα για πλέγμα  $\sim 44K$  κελιών και  $y_w = 2 \times 10^{-4}m$ .

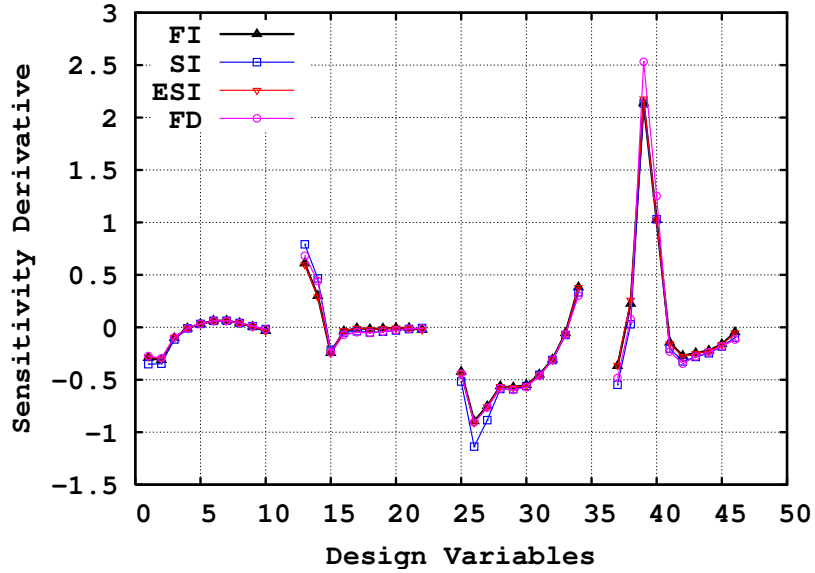
SI, όσο το πλέγμα γίνεται πιο πυκνό.

Προκειμένου να διερευνηθεί η αιτία που οδηγεί στη μεγάλη διαφορά των αποτελεσμάτων των παραγώγων ευαισθησίας κατά SI από τις υπόλοιπες μεθόδους, πρέπει να μελετηθούν οι επιμέρους όροι των παραγώγων ευαισθησίας που βρέθηκαν με τη διατύπωση SI.

Η παράγωγος, με την πλήρη διατύπωση SI (δηλαδή χωρίς την παράλειψη του όρου LBterm),



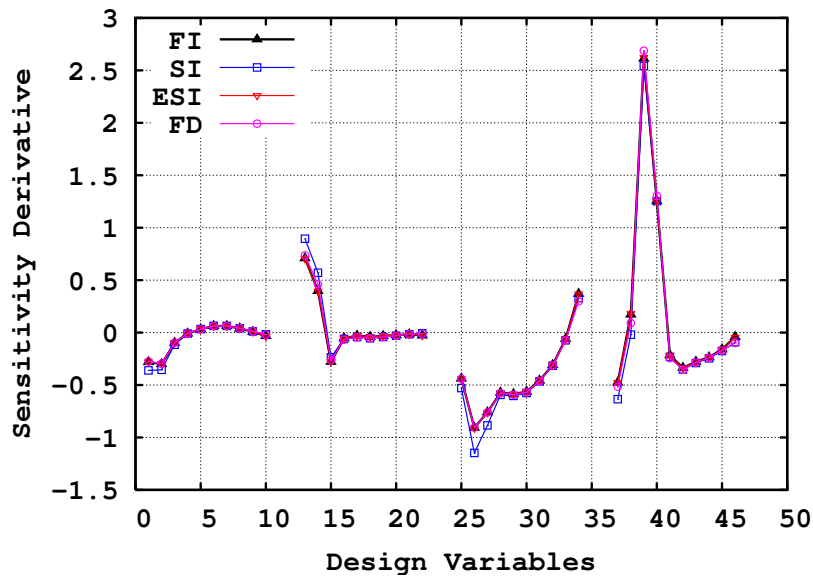
Σχήμα 4.19: Αεροτομή B, μόνιμη στρωτή ροή, παραγωγή της αεροδυναμικής αντίστασης: Αποτελέσματα για πλέγμα  $\sim 44K$  κελιών και  $y_w = 3 \times 10^{-4} m$ .



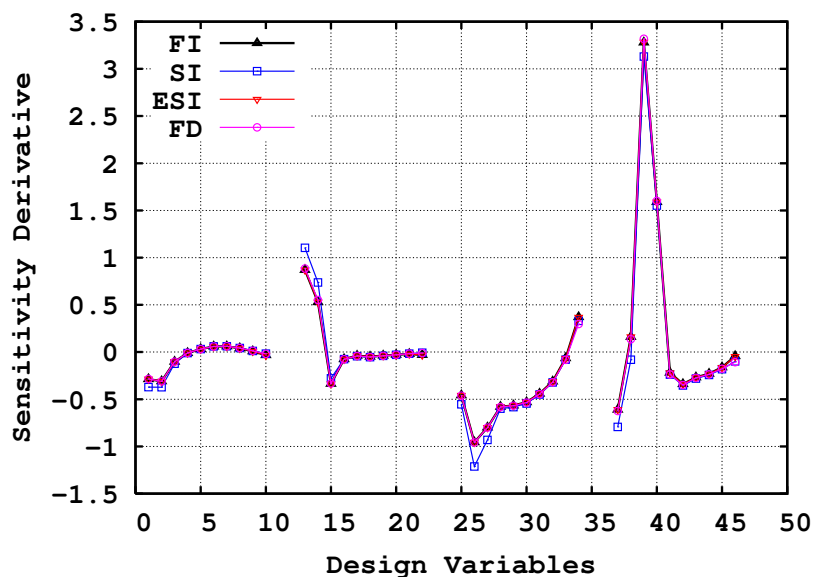
Σχήμα 4.20: Αεροτομή B, μόνιμη στρωτή ροή, παραγωγή της άνωσης: Αποτελέσματα για πλέγμα  $\sim 22K$  κελιών και  $y_w = 2 \times 10^{-4} m$ .

της αντικειμενικής συνάρτησης για δύναμη που ασκείται σε αεροτομή δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\delta L_F}{\delta b_n} \right|_{SI} &= \underbrace{\int_{S_w} [qn_i - \tau_{ij}^\alpha n_j] \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS}_{T_1} + \underbrace{\int_{S_w} \left[ \frac{\partial p}{\partial x_k} \delta_i^j - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} \right] n_j r_i \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS}_{T_2} \\
 &+ \underbrace{\int_{S_w} [p \delta_i^j - \tau_{ij}] r_i \frac{\delta(n_j dS)}{\delta b_n}}_{T_3} + \underbrace{\int_{S_w} [u_i R_i^v + q R^p] \frac{\delta x_k}{\delta b_n} n_k dS}_{LBterm} \quad (4.2)
 \end{aligned}$$



Σχήμα 4.21: Αεροτομή B, μόνιμη στρωτή ροή, παραγωγή της άνωσης: Αποτελέσματα για πλέγμα  $\sim 44K$  κελιών και  $y_w = 2 \times 10^{-4}m$ .

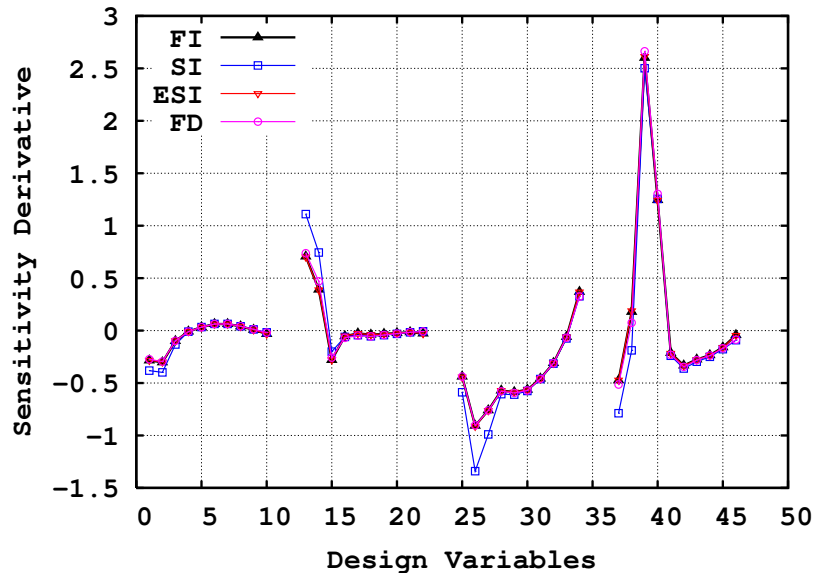


Σχήμα 4.22: Αεροτομή B, μόνιμη στρωτή ροή, παραγωγή της άνωσης: Αποτελέσματα για πλέγμα  $\sim 82K$  κελιών και  $y_w = 2 \times 10^{-4}m$ .

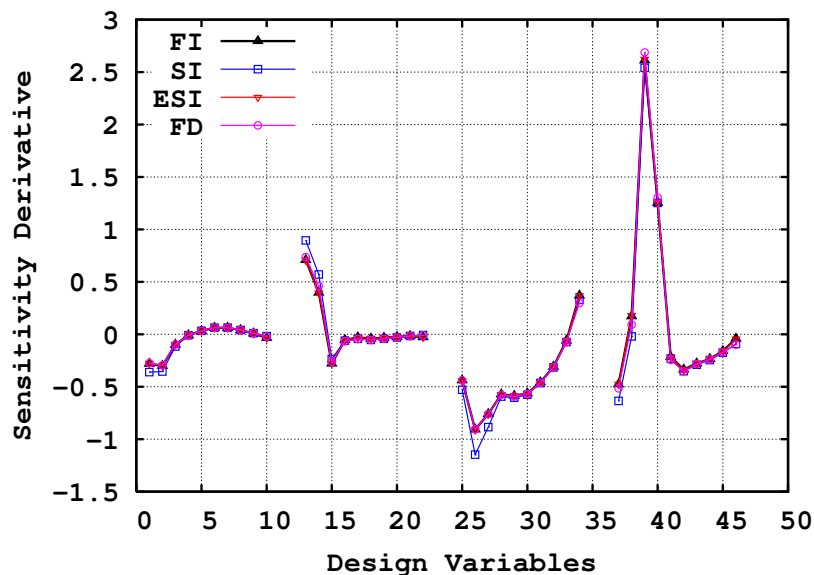
Στο εξής, λοιπόν, η μελέτη θα επικεντρωθεί στους επιμέρους όρους των παραγώγων ευαισθησίας που υπολογίστηκαν με τη μέθοδο SI, με αντικειμενική συνάρτηση την αεροδυναμική αντίσταση.

#### 4.4.1 Ανάλυση όρων παραγώγων με διατύπωση SI

Στα σχήματα 4.26, 4.27 και 4.28 παρουσιάζονται συγκεντρωτικά οι παράγωγοι ευαισθησίας που υπολογίστηκαν με τις μεθόδους SI, E-SI και FI, για την αεροτομή A, για όλα τα πλέγματα, για την περίπτωση της αεροδυναμικής αντίστασης. Σε αντιπαράβολή, φαίνονται οι



Σχήμα 4.23: Αεροτομή B, μόνιμη στρωτή ροή, παραγωγή της άνωσης: Αποτελέσματα για πλέγμα  $\sim 44K$  κελιών και  $y_w = 1 \times 10^{-4}m$ .



Σχήμα 4.24: Αεροτομή B, μόνιμη στρωτή ροή, παραγωγή της άνωσης: Αποτελέσματα για πλέγμα  $\sim 44K$  κελιών και  $y_w = 2 \times 10^{-4}m$ .

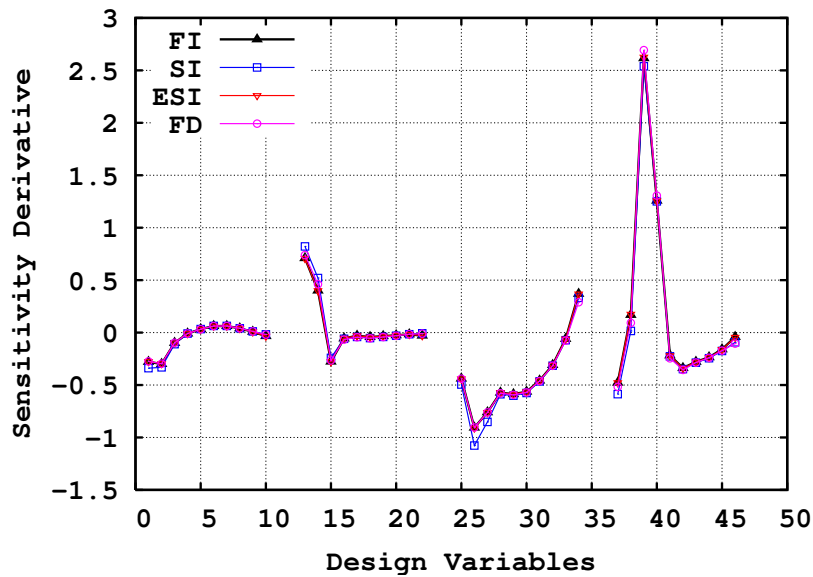
αντίστοιχοι όροι για την άνωση

Στα σχήματα 4.29, 4.30 και 4.31 φαίνονται, για όλα τα πλέγματα, οι επιμέρους όροι των παραγώγου ευαισθησίας της αεροδυναμικής αντίστασης και της άνωσης που υπολογίστηκαν με τη μέθοδο SI, για την αεροτομή A.

Στα σχήματα 4.32, 4.33 και 4.34 φαίνονται οι παράγωγοι ευαισθησίας της αεροδυναμικής αντίστασης και της άνωσης για όλα τα πλέγματα, που υπολογίστηκαν με τις μεθόδους SI, E-SI και FI, για την αεροτομή B.

Στα σχήματα 4.35, 4.36 και 4.37 φαίνονται για όλα τα πλέγματα οι επιμέρους όροι των





Σχήμα 4.25: Αεροτομή B, μόνιμη στρωτή ροή, παραγωγή της άνωσης: Αποτελέσματα για πλέγμα  $\sim 44K$  κελιών και  $y_w = 3 \times 10^{-4}m$ .

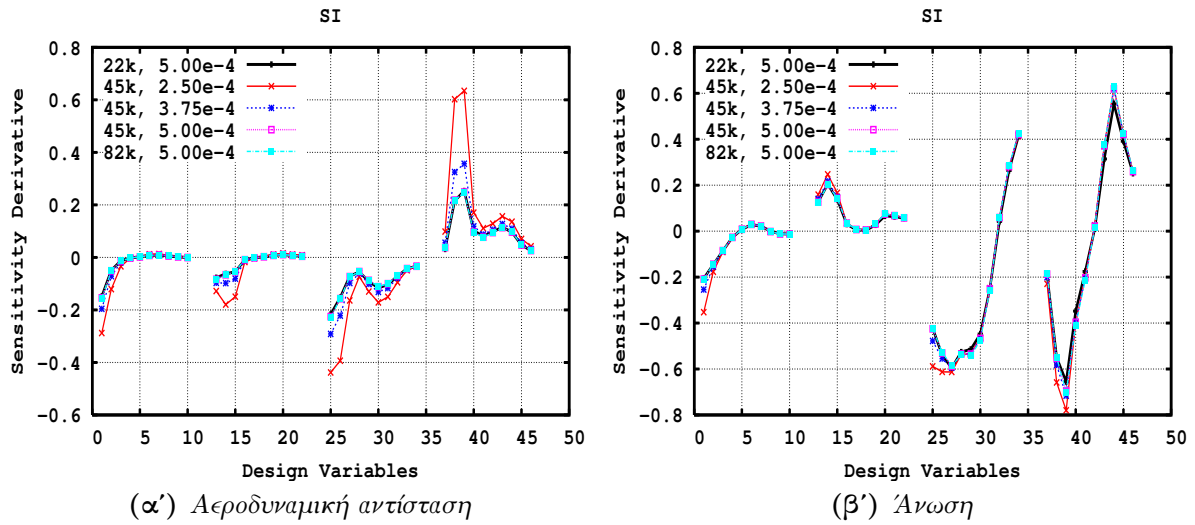
Περίπτωση	Χρόνος υπολογισμού	Ποσοστό
Επίλυση πρωτεύοντος και συζυγούς προβλήματος μαζί	3072 s	100 %
Εύρεση παραγώγων με διατύπωση SI	+1 s	+0.00033 %
Εύρεση παραγώγων με διατύπωση E-SI	+2 s	+0.00066 %
Εύρεση παραγώγων με διατύπωση FI	+81 s	+2.64 %
Εύρεση παραγώγων με διατύπωση FD	+20083 s	+653.75 %

Πίνακας 4.3: Χρόνος υπολογισμού παραγώγων ευαισθησίας με διαφορετικές διατυπώσεις, επιπλέον του χρόνου επίλυσης του πρωτεύοντος και του συζυγούς προβλήματος μαζί. Αφορά στην περίπτωση της αεροτομής A, με αντικειμενική συνάρτηση την αεροδυναμική αντίσταση, πλήθος κελιών  $\sim 45K$  και πάχος  $y_w = 2.5 \times 10^{-4}m$ .

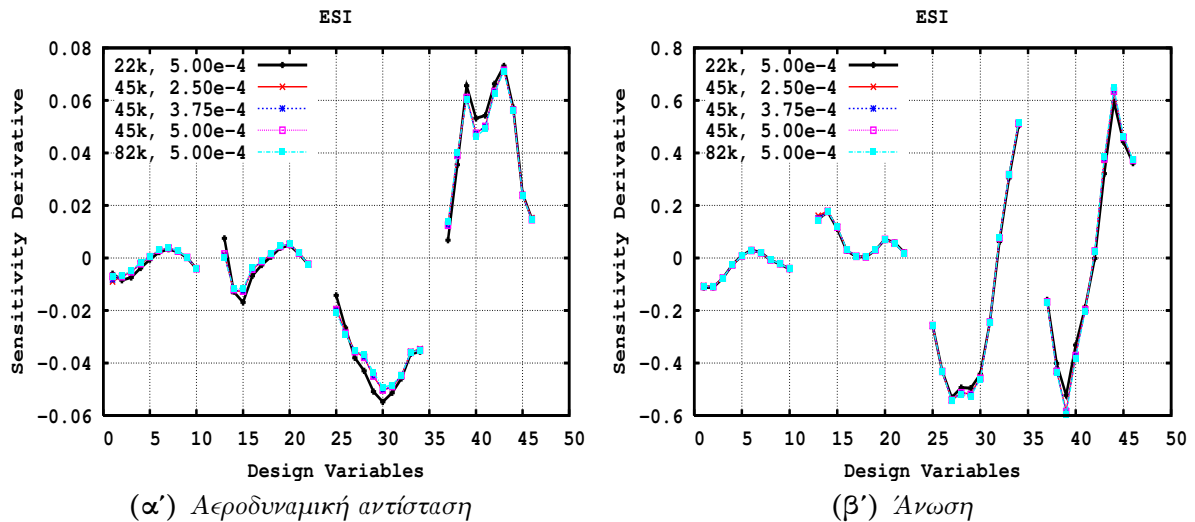
παραγώγου ευαισθησίας για την αεροδυναμική αντίσταση και την άνωση, που υπολογίστηκαν με τη μέθοδο SI, για την αεροτομή τύπου B.

Από τα διαγράμματα 4.29 έως 4.31 και 4.35 έως 4.37 προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα για την περίπτωση όπου ως αντικειμενική συνάρτηση ορίζεται η αεροδυναμική αντίσταση:

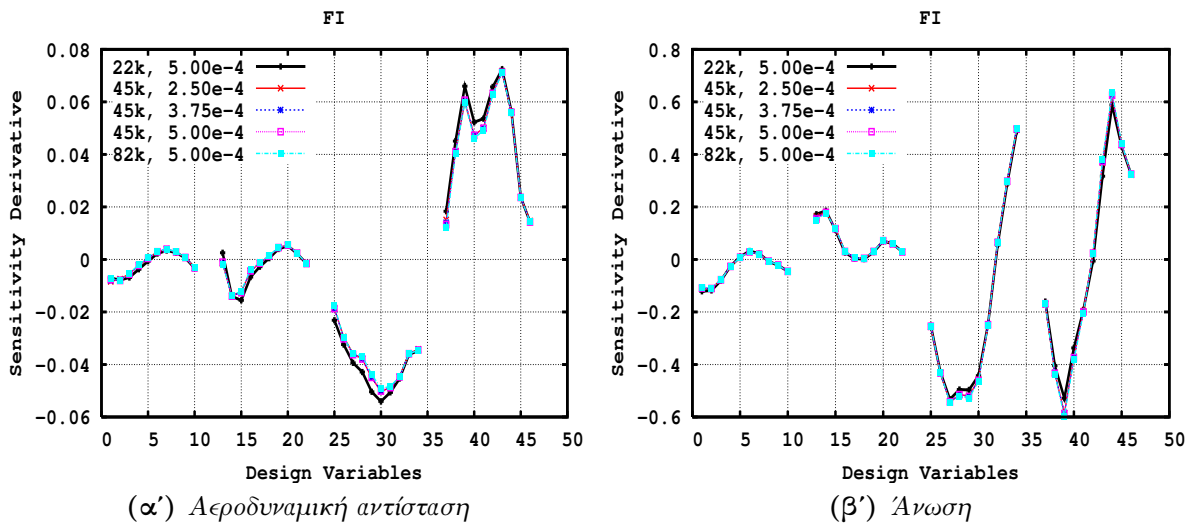
- Ο όρος  $T_1$  εν γένει είναι ανεπηρέαστος από την αλλαγή της πυκνότητας του πλέγματος και μάλιστα, τείνει στην τιμή της παραγώγου από τη διατύπωση E-SI, όσο το πλέγμα γίνεται πυκνότερο (βλέπε σχήματα 4.38,(α) - (δ)).
- Ο όρος  $T_2$  αυξάνει κατ' απόλυτη τιμή, αν η απόσταση του κέντρου του πρώτου κελιού από την αεροτομή μειωθεί αρκετά. Ο όρος αυτός αποτελείται από τη χωρική παράγωγο της πίεσης και τη χωρική παράγωγο των τάσεων. Στην περίπτωση της αεροδυναμικής αντίστασης, κυρίαρχη είναι η συνεισφορά της χωρικής παραγώγου των τάσεων και όχι της πίεσης. Μια πιθανή εξήγηση είναι ότι το μέτρο της χωρικής παραγώγου των τάσεων, τουλάχιστον όπως υπολογίζεται αριθμητικά, αυξάνεται αν ο πρώτος κόμβος



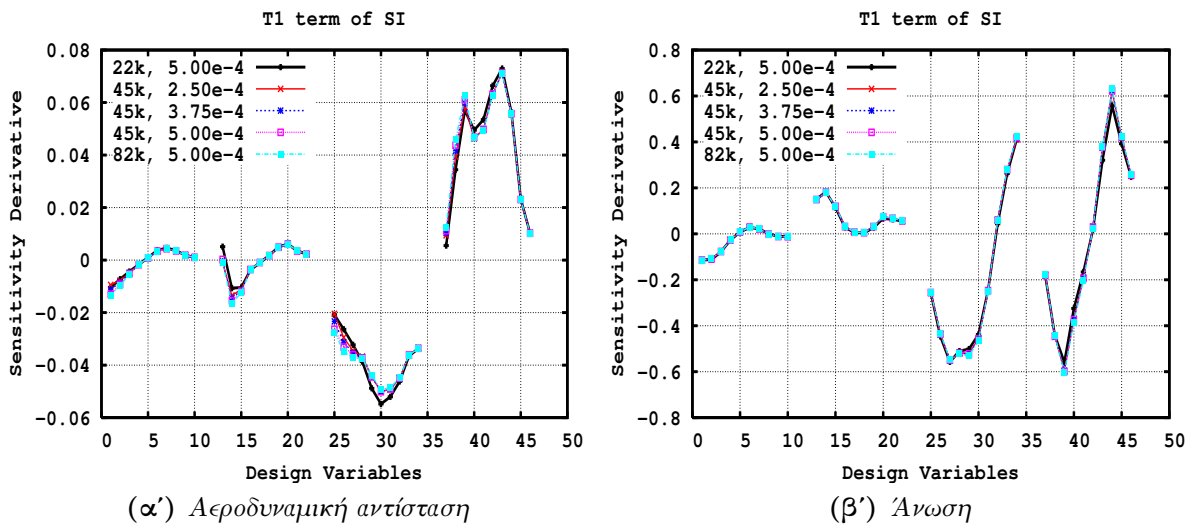
Σχήμα 4.26: Αεροτομή A, μόνιμη στρωτή ροή, παράγωγοι ευαισθησίας της αεροδυναμικής αντίστασης(α) και της άνωσης(β), με τη διατύπωση SI: παραμετρική μελέτη για πέντε διαφορετικά πλέγματα με διαφορετικό αριθμό κελιών (22K – 82K) και διαφορετική απόσταση  $y_w$  ( $1.25 - 2.5 \times 10^{-4}m$ ).



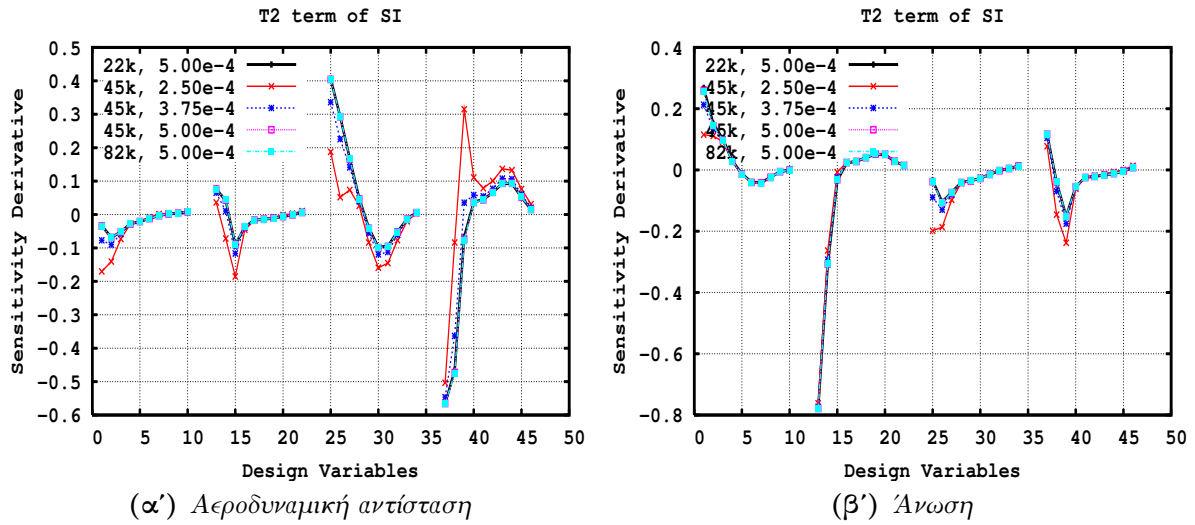
Σχήμα 4.27: Αεροτομή A, μόνιμη στρωτή ροή, παράγωγοι ευαισθησίας της αεροδυναμικής αντίστασης(α) και της άνωσης(β), με τη διατύπωση E-SI: παραμετρική μελέτη για πέντε διαφορετικά πλέγματα με διαφορετικό αριθμό κελιών (22K – 82K) και διαφορετική απόσταση  $y_w$  ( $1.25 - 2.5 \times 10^{-4}m$ ).



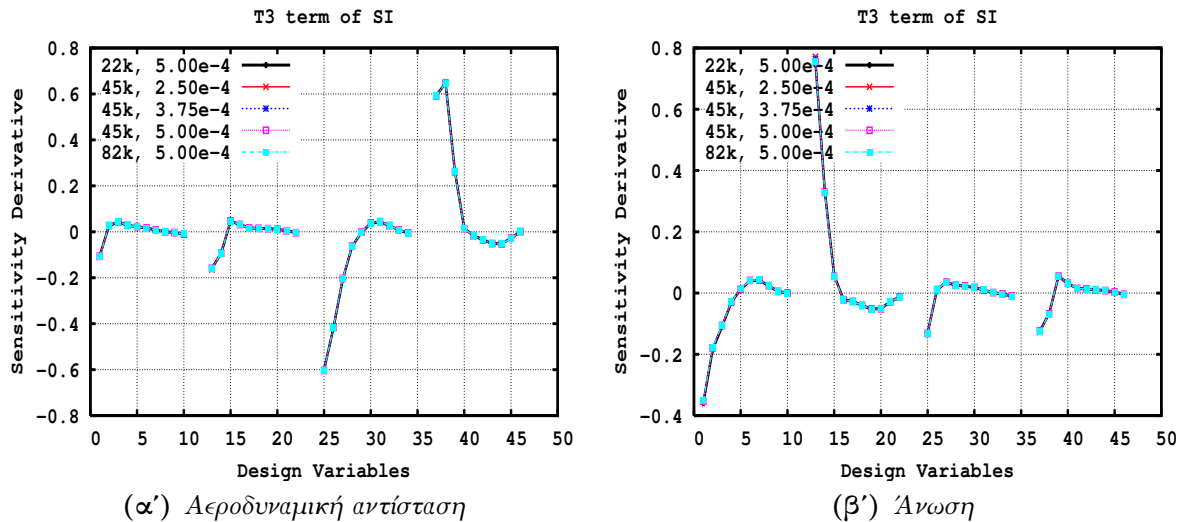
Σχήμα 4.28: Αεροτομή A, μόνιμη στρωτή ροή, παράγωγοι ευαισθησίας της αεροδυναμικής αντίστασης(α) και της άνωσης(β), με τη διατύπωση FI: παραμετρική μελέτη για πέντε διαφορετικά πλέγματα με διαφορετικό αριθμό κελιών (22K – 82K) και διαφορετική απόσταση  $y_w$  ( $1.25 - 2.5 \times 10^{-4}m$ ).



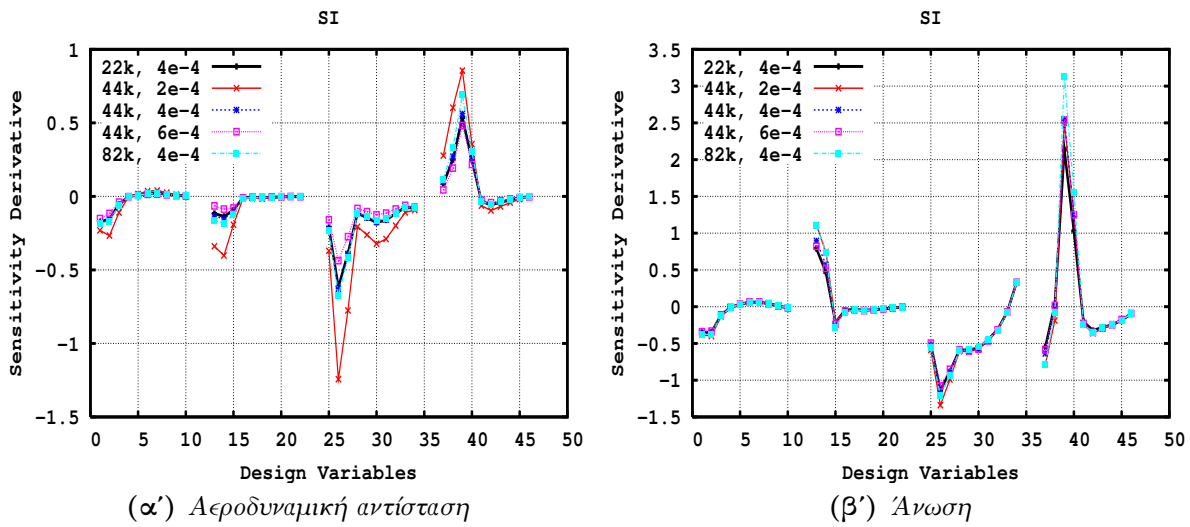
Σχήμα 4.29: Αεροτομή A, μόνιμη στρωτή ροή, όρος  $T_1$  (σχέση 4.2) της παραγώγου με τη διατύπωση SI: παραμετρική μελέτη για πέντε διαφορετικά πλέγματα με διαφορετικό αριθμό κελιών (22K – 82K) και διαφορετική απόσταση  $y_w$  ( $1.25 - 2.5 \times 10^{-4}m$ ).



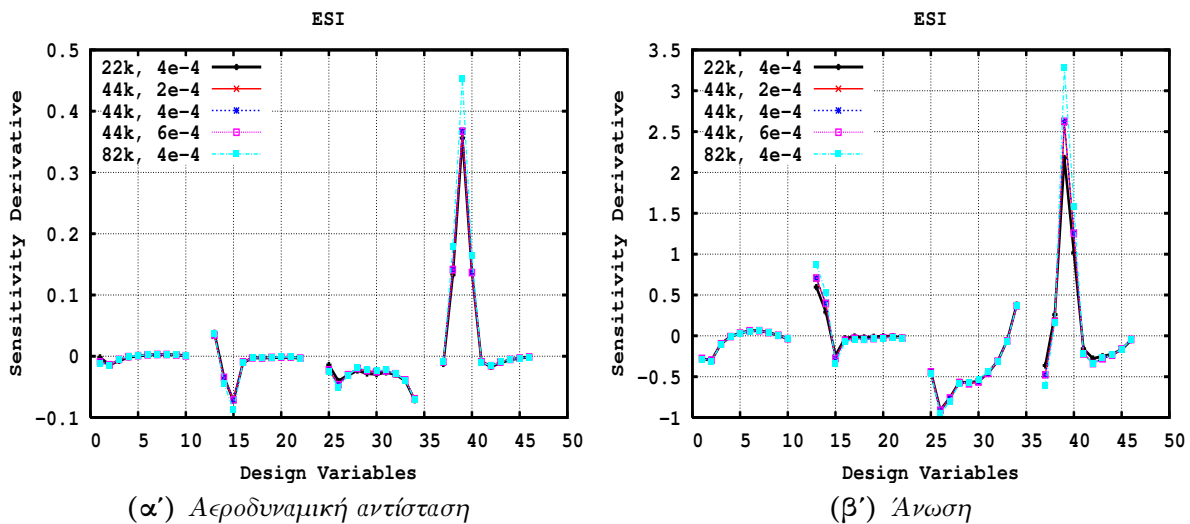
Σχήμα 4.30: Αεροτομή A, μόνιμη στρωτή ροή, όρος  $T_2$  (σχέση 4.2) της παραγώγου με τη διατύπωση SI: παραμετρική μελέτη για πέντε διαφορετικά πλέγματα με διαφορετικό αριθμό κελιών (22K–82K) και διαφορετική απόσταση  $y_w$  ( $1.25-2.5 \times 10^{-4}m$ ).



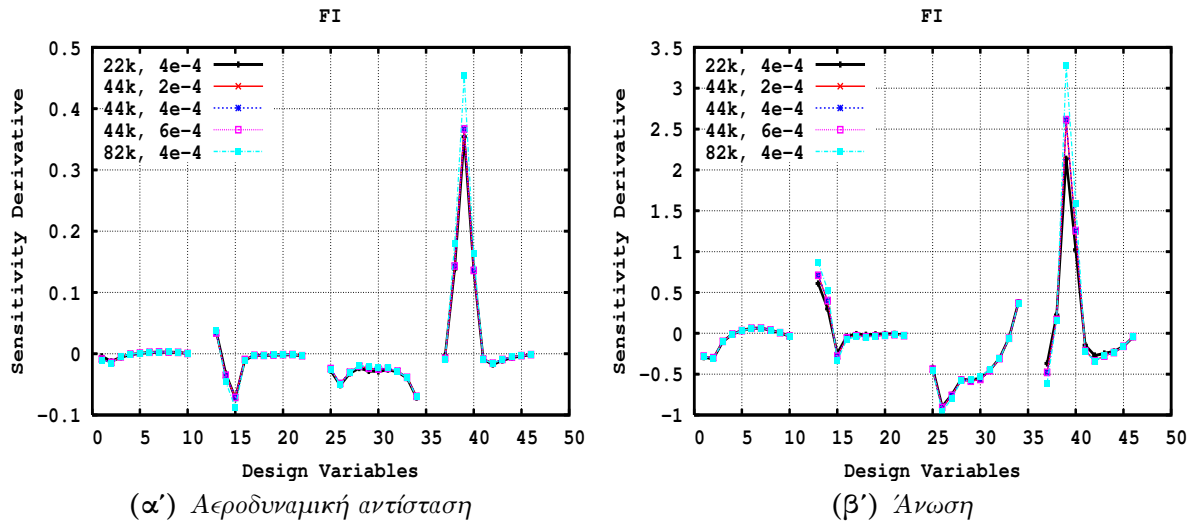
Σχήμα 4.31: Αεροτομή A, μόνιμη στρωτή ροή, όρος  $T_3$  (σχέση 4.2) της παραγώγου με τη διατύπωση SI: παραμετρική μελέτη για πέντε διαφορετικά πλέγματα με διαφορετικό αριθμό κελιών (22K–82K) και διαφορετική απόσταση  $y_w$  ( $1.25-2.5 \times 10^{-4}m$ ).



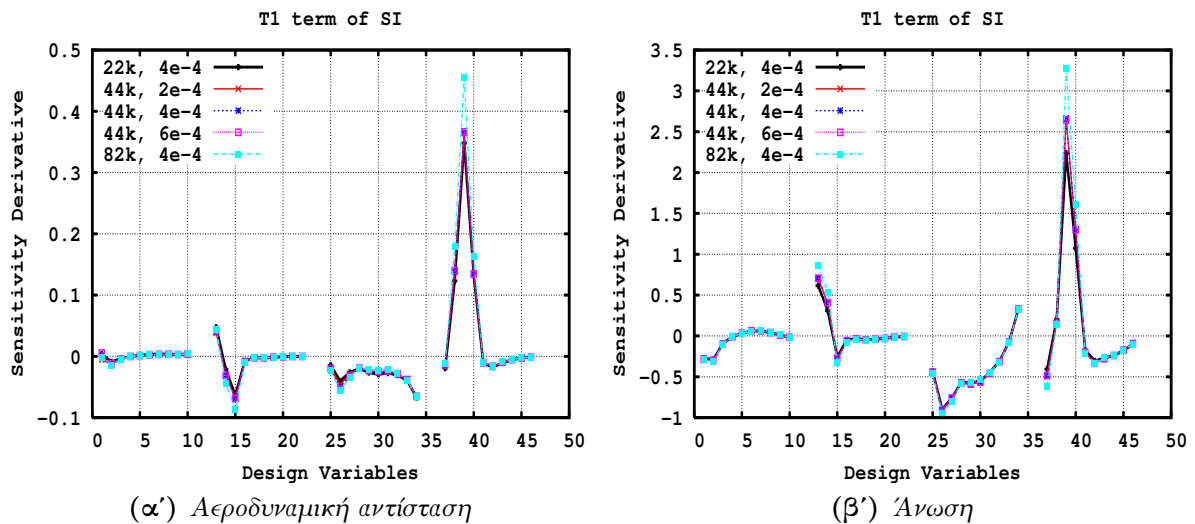
**Σχήμα 4.32:** Αεροτομή B, μόνιμη στρωτή ροή, παράγωγοι ευαισθησίας της αεροδυναμικής αντίστασης(α) και της άνωσης(β), με τη διατύπωση SI: παραμετρική μελέτη για πέντε διαφορετικά πλέγματα με διαφορετικό αριθμό κελιών (22K – 82K) και διαφορετική απόσταση  $y_w$  ( $1-3 \times 10^{-4}m$ ).



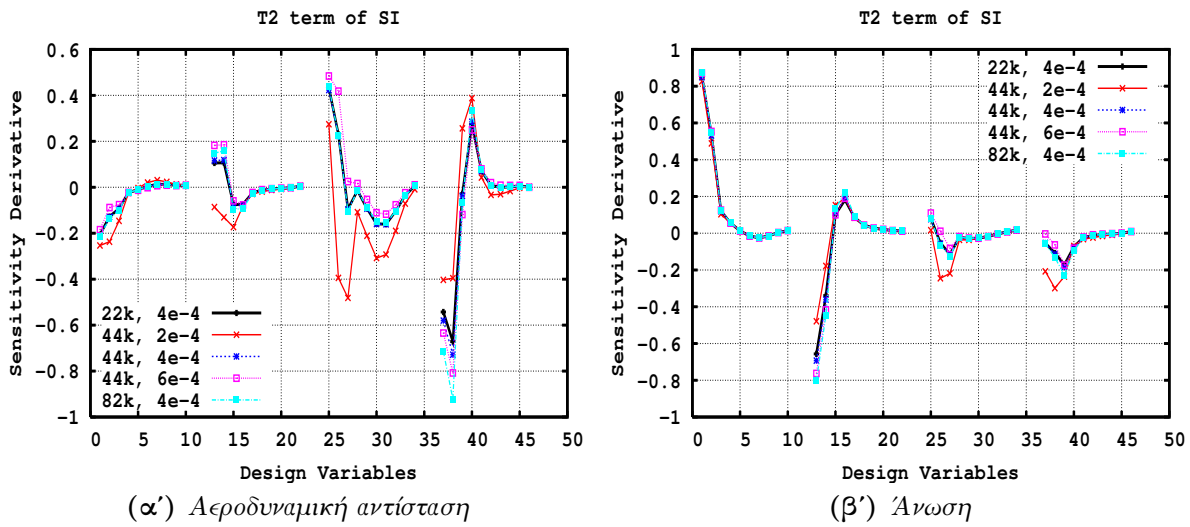
**Σχήμα 4.33:** Αεροτομή B, μόνιμη στρωτή ροή, παράγωγοι ευαισθησίας της αεροδυναμικής αντίστασης(α) και της άνωσης(β), με τη διατύπωση E-SI: παραμετρική μελέτη για πέντε διαφορετικά πλέγματα με διαφορετικό αριθμό κελιών (22K – 82K) και διαφορετική απόσταση  $y_w$  ( $1-3 \times 10^{-4}m$ ).



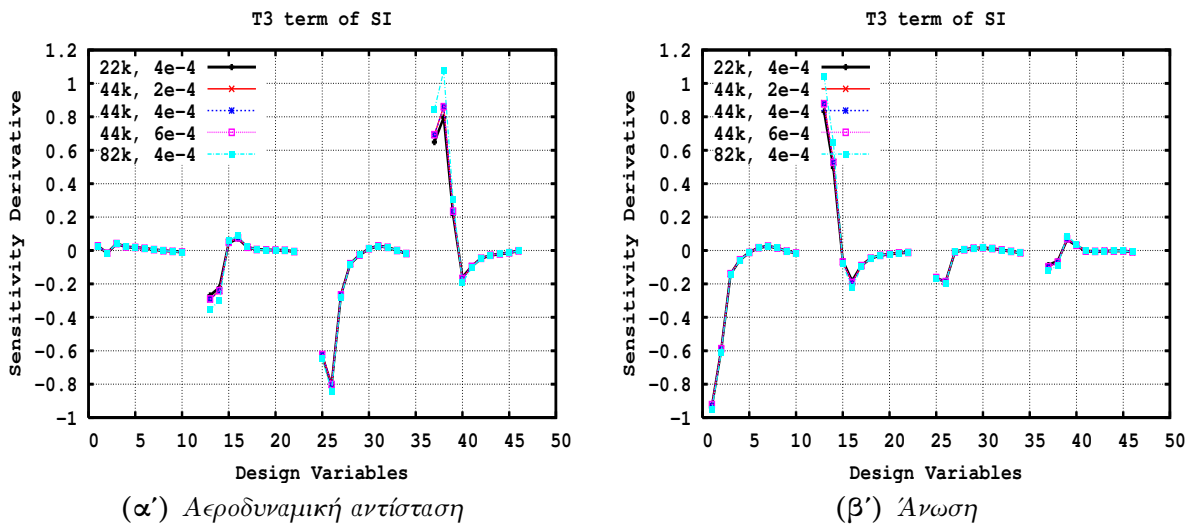
Σχήμα 4.34: Αεροτομή B, μόνιμη στρωτή ροή, παράγωγοι ευαισθησίας της αεροδυναμικής αντίστασης(α) και της άνωσης(β), με τη διατύπωση FI: παραμετρική μελέτη για πέντε διαφορετικά πλέγματα με διαφορετικό αριθμό κελιών (22K – 82K) και διαφορετική απόσταση  $y_w$  ( $1-3 \times 10^{-4}m$ ).



Σχήμα 4.35: Αεροτομή B, μόνιμη στρωτή ροή, όρος  $T_1$  (σχέση 4.2) της παραγώγου με τη διατύπωση SI: παραμετρική μελέτη για πέντε διαφορετικά πλέγματα με διαφορετικό αριθμό κελιών (22K – 82K) και διαφορετική απόσταση  $y_w$  ( $1-3 \times 10^{-4}m$ ).



Σχήμα 4.36: Αεροτομή B, μόνιμη στρωτή ροή, όρος  $T_2$  (σχέση 4.2) της παραγώγου με τη διατύπωση SI: παραμετρική μελέτη για πέντε διαφορετικά πλέγματα με διαφορετικό αριθμό κελιών (22K–82K) και διαφορετική απόσταση  $y_w$  ( $1-3 \times 10^{-4}m$ ).



Σχήμα 4.37: Αεροτομή B, μόνιμη στρωτή ροή, όρος  $T_3$  (σχέση 4.2) της παραγώγου με τη διατύπωση SI: παραμετρική μελέτη για πέντε διαφορετικά πλέγματα με διαφορετικό αριθμό κελιών (22K–82K) και διαφορετική απόσταση  $y_w$  ( $1-3 \times 10^{-4}m$ ).

του πλέγματος πλησιάζει στο στερεό τοίχωμα. Εξαιτίας αυτού του γεγονότος, η τιμή του όρου  $T_2$  αυξάνεται, όσο η απόσταση του κέντρου του πρώτου κελιού από τον τοίχο μειώνεται.

- Ο όρος  $T_3$  εν γένει παραμένει ανεπηρέαστος από την πυκνότητα του πλέγματος.
- Το γεγονός ότι οι όροι  $T_1$  και  $T_3$  είναι πρακτικά ανεπηρέαστοι από την πυκνότητα του πλέγματος, ενώ ο  $T_2$  όχι, έχει ως αποτέλεσμα και η τιμή της παραγώγου με SI όπου αμελείται ο όρος του Leibniz, να είναι ευαίσθητη στην αλλαγή της πυκνότητας του πλέγματος. Αν όμως, ο όρος του Leibniz ενσωματωνόταν στην έκφραση της παραγώγου με SI, τότε το άθροισμα  $T_2 + LBterm$ , θα ήταν πρακτικά αναίσητο στην αλλαγή πυκνότητας του πλέγματος, συμπέρασμα που προκύπτει κοιτώντας και μόνο τις τιμές των παραγώγων με διατύπωση E-SI, όπου υπάρχουν και ο όρος  $T_2$  αλλά και ο  $LBterm$  σε άλλη μορφή. Μάλιστα, εφόσον ο  $T_2$  αυξάνει κατά μέτρο, αν μειωθεί η απόσταση του κέντρου του πρώτου κελιού από την αεροτομή (δηλαδή αν το πλέγμα γίνει πιο πυκνό), η συνεισφορά του  $LBterm$  γίνεται πιο σημαντική, γιατί αυτός είναι ο όρος που αντισταθμίζει την αύξηση του όρου  $T_2$  κατά την πύκνωση του πλέγματος και επιδρά διορθωτικά στην τιμή της υπολογιζόμενης παραγώγου!

Στην περίπτωση της άνωσης, πάλι ισχύει ότι οι όροι  $T_1$  και  $T_3$  είναι πρακτικά ανεπηρέαστοι από την αλλαγή της πυκνότητας του πλέγματος (εδώ ο  $T_1$  είναι για τα πλέγματα διαφορετικής πυκνότητας παρουσιάζεται να είναι περίπου το ίδιο κοντά στην παράγωγο με E-SI, σύμφωνα με τα σχήματα 4.39, (α) - (δ)). Όμως, σε αντίθεση με την αεροδυναμική αντίσταση, ο  $T_2$  είναι λιγότερο ευαίσθητος στην αλλαγή της πυκνότητας του πλέγματος. Αυτό οφείλεται στο ότι η χωρική παράγωγος της πίεσης έχει τη σημαντική συνεισφορά και κυρίως, η συνιστώσα της παραγώγου κατά την εφαπτομενική ως προς το τοίχωμα διεύθυνση (άλλωστε η κάθετη ως προς τον τοίχο συνιστώσα είναι μηδενική λόγω της επιβολής μηδενικής συνθήκης Neumann). Όμως, ο αριθμητικός υπολογισμός της χωρικής παραγώγου της πίεσης είναι αρκετά ακριβής, οπότε ο όρος  $T_2$  για κάθε τύπο πλέγματος είναι περίπου ίδιος και μαζί με τον όρο  $T_3$  έχει άθροισμα κοντά στο μηδέν, ενώ ο  $T_1$  τείνει στην τιμή της παραγώγου με E-SI. Οπότε, ο όρος του Leibniz δεν έχει μεγάλη επίδραση στην υπολογιζόμενη παράγωγο και, επομένως, οι διαφορές ανάμεσα στις υπολογιζόμενες παραγώγους με τις διαφορετικές διατυπώσεις είναι μικρές.

## 4.5 Ενδεικτικές περιπτώσεις πεδίων ροής για τις αεροτομές A και B

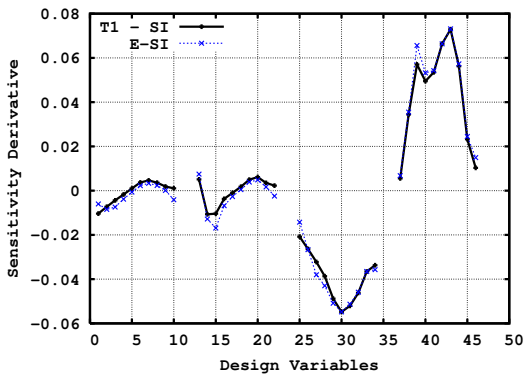
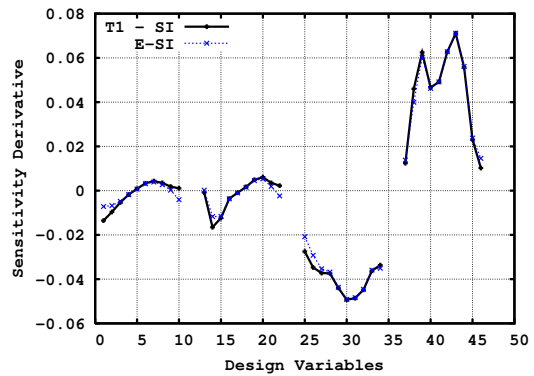
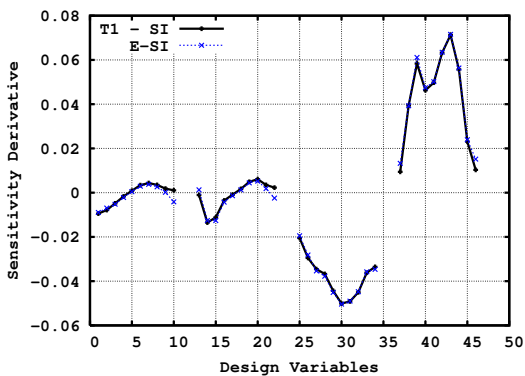
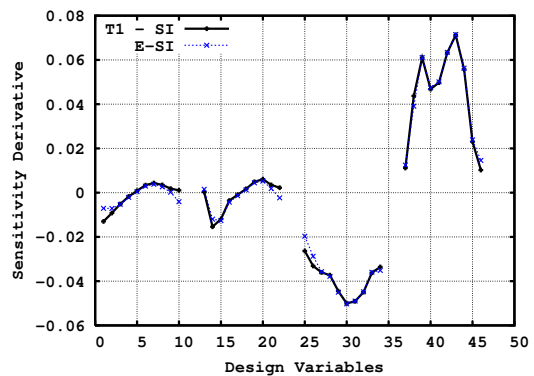
Παρακάτω παρατίθενται, για τις αεροτομές A και B, μεγέθη που περιγράφουν το φυσικό και το συζυγές πεδίο ροής. Και στις δύο αεροτομές, η μορφή των γραμμών ροής της συζυγούς ταχύτητας  $u$  καθορίζεται από το είδος της οριακής συνθήκης της συζυγούς ταχύτητας στην επιφάνεια της αεροτομής, η οποία φαίνεται από τη σχέση 4.3

$$\vec{u} = -\vec{r} \quad (4.3)$$

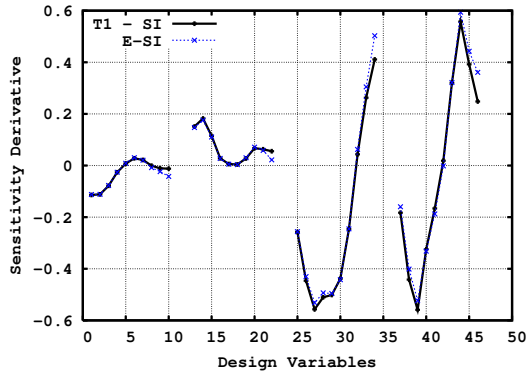
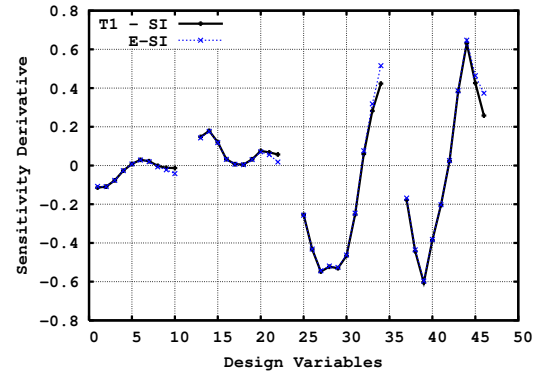
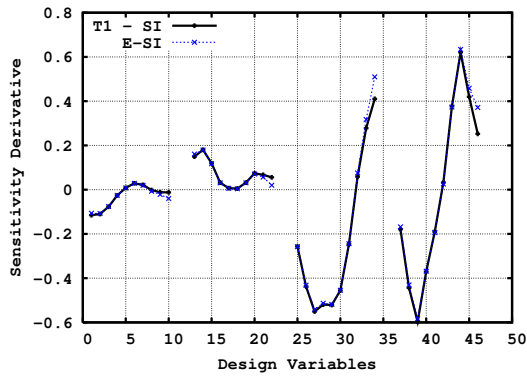
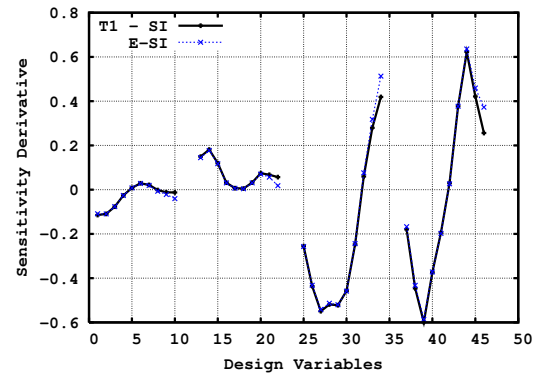
όπου  $\vec{r}$  το διάνυσμα το οποίο είναι παράλληλο στην ταχύτητα, στην περίπτωση της αεροδυναμικής αντίστασης και κάθετο στην ταχύτητα, στην περίπτωση της άνωσης.

Στο σχήμα 4.40 παρατίθενται τα πεδία ροής για την ταχύτητα και την πίεση για την αεροτομή

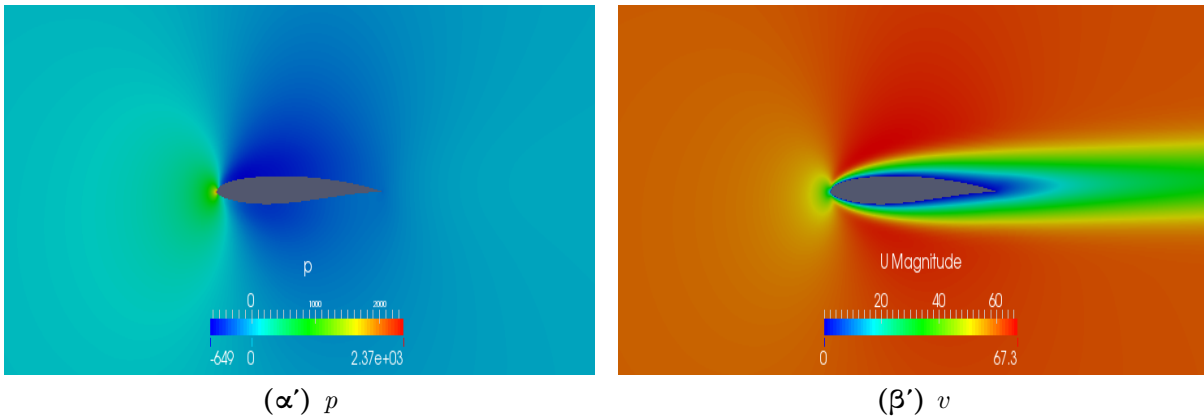


(α') 22k κελιά,  $y_w = 2.5 \times 10^{-4}$ (β') 82k κελιά,  $y_w = 2.5 \times 10^{-4}$ (γ') 45k κελιά,  $y_w = 1.25 \times 10^{-4}$ (δ') 45k κελιά,  $y_w = 2.5 \times 10^{-4}$ 

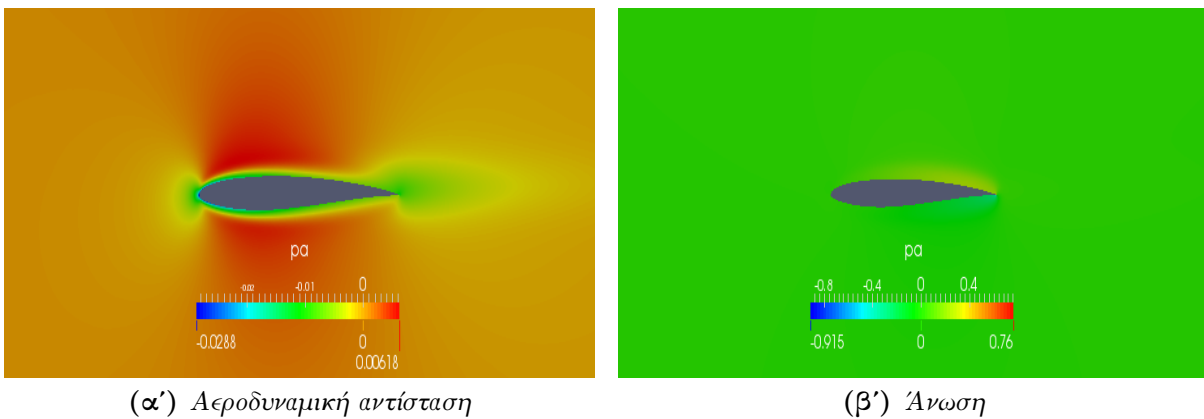
**Σχήμα 4.38:** Αεροτομή A, μόνιμη στρωτή ροή, παραγωγή της αεροδυναμικής αντίστασης: Στα σχήματα (α) -(β) παρουσιάζονται ο όρος  $T_1$  και η παράγωγός με E-SI για πλέγματα με διαφορετικό αριθμό κελιών και ίδια απόσταση  $y_w$ , ενώ στα (γ)-(δ) οι ίδιες ποσότητες αλλά για πλέγματα διαφορετικών αριθμών κελιών και ίδια απόσταση  $y_w$ .

(α') 22k κελιά,  $y_w = 2.5 \times 10^{-4}$ (β') 82k κελιά,  $y_w = 2.5 \times 10^{-4}$ (γ') 45k κελιά,  $y_w = 1.25 \times 10^{-4}$ (δ') 45k κελιά,  $y_w = 2.5 \times 10^{-4}$ 

**Σχήμα 4.39:** Αεροτομή A, μόνιμη στρωτή ροή, παραγωγή της άνωσης: Στα σχήματα (α) -(β) παρουσιάζονται ο όρος  $T_1$  και η παράγωγός με E-SI για πλέγματα με διαφορετικό αριθμό κελιών και ίδια απόσταση  $y_w$ , ενώ στα (γ)-(δ) οι ίδιες ποσότητες αλλά για πλέγματα διαφορετικών αριθμών κελιών και ίδια απόσταση  $y_w$ .



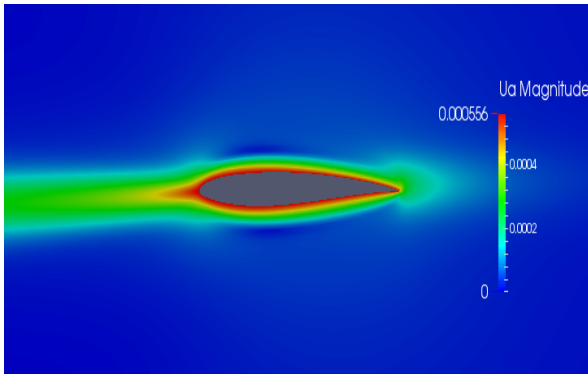
**Σχήμα 4.40:** Αεροτομή A, μόνιμη στρωτή ροή, πλέγμα  $\sim 45K$  κελιών και  $y_w = 5 \times 10^{-4}$ : Αριστερά παρουσιάζονται οι ισόθλιπτες του προβλήματος ροής  $p$  και δεξιά, οι ισοταχείς.



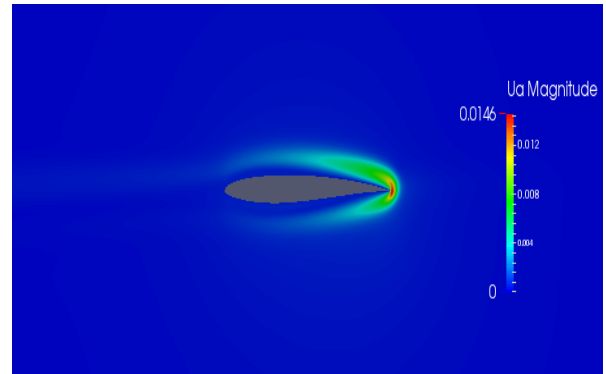
**Σχήμα 4.41:** Αεροτομή A, μόνιμη στρωτή ροή, πλέγμα  $\sim 45K$  κελιών και  $y_w = 5 \times 10^{-4}$ : Αριστερά, παρουσιάζεται το πεδίο της συζυγούς πίεσης  $q$  για την αεροδυναμική αντίσταση και δεξιά, το αντίστοιχο πεδίο για την άνωση.

A, ενώ στο 4.44, τα αντίστοιχα πεδία για την αεροτομή B. Τα πεδία ροής αυτά, μιας και αντιστοιχούν σε μεγέθη του πρωτεύοντος προβλήματος, είναι ίδια για κάθε αντικειμενική συνάρτηση.

Στα σχήματα 4.41 και 4.43 παρατίθενται συγκριτικά τα πεδία ροής για τα συζυγή μεγέθη για την αεροτομή A, για τις περιπτώσεις όπου αντικειμενική συνάρτηση είναι η αεροδυναμική αντίσταση και η άνωση. Στο σχήμα 4.43 παρουσιάζονται οι γραμμές ροής της συζυγούς ταχύτητας  $u$  για τις δύο περιπτώσεις. Αντίστοιχα συμβαίνει για την αεροτομή B, στα σχήματα 4.45, 4.46 και 4.47.

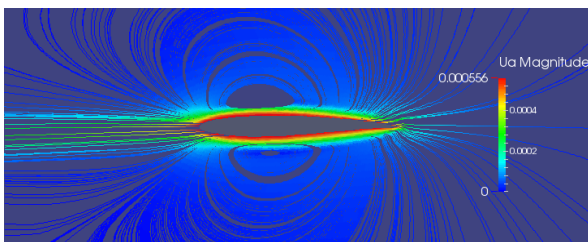


(α') Αεροδυναμική αντίσταση

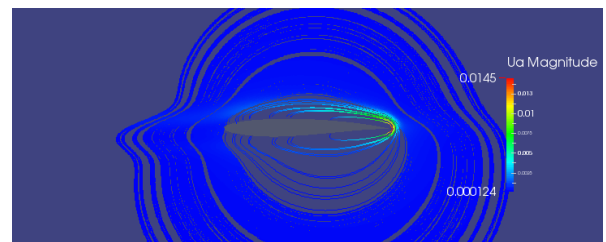


(β') Άνωση

**Σχήμα 4.42:** Αεροτομή A, μόνιμη στρωτή ροή, πλέγμα  $\sim 45K$  κελιών και  $y_w = 5 \times 10^{-4}$ : Αριστερά παρουσιάζεται το πεδίο ροής του μέτρου της συζυγούς ταχύτητας  $u$  για την αεροδυναμική αντίσταση και δεξιά, το αντίστοιχο πεδίο για την άνωση.

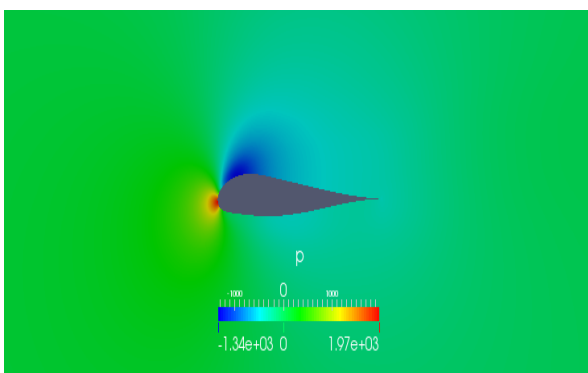
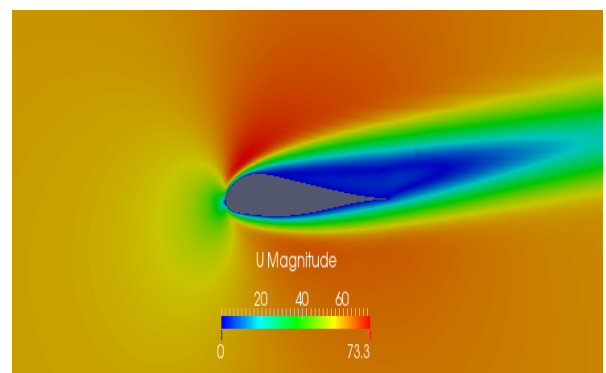


(α') Αεροδυναμική αντίσταση

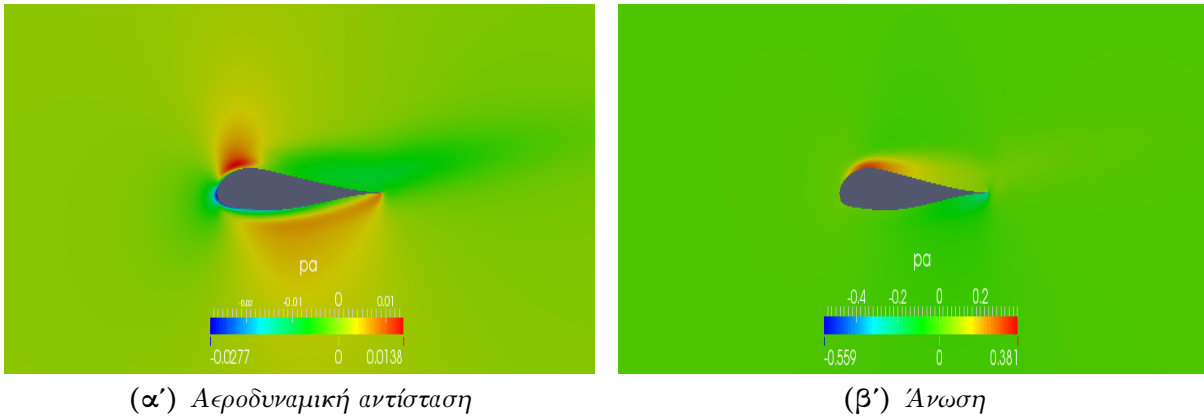


(β') Άνωση

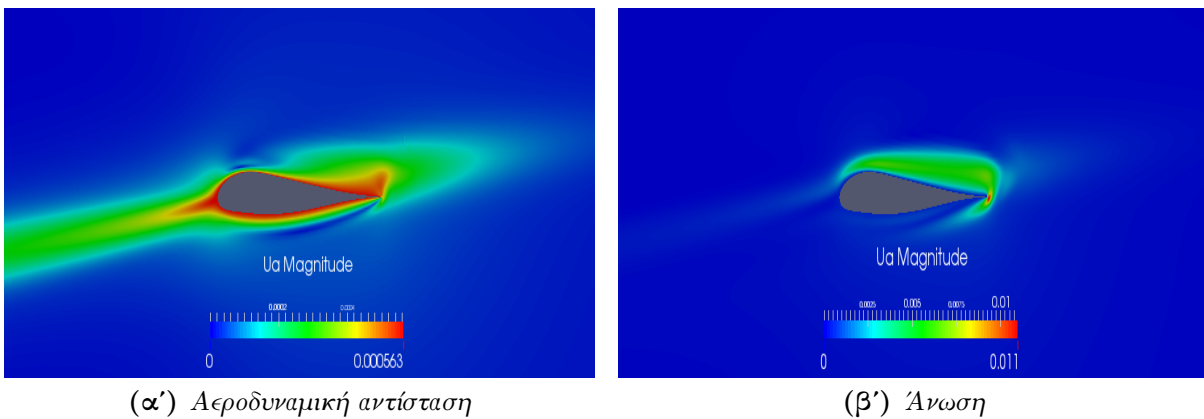
**Σχήμα 4.43:** Αεροτομή A, μόνιμη στρωτή ροή, πλέγμα  $\sim 45K$  κελιών και  $y_w = 5 \times 10^{-4}$ : Αριστερά, παρουσιάζονται οι γραμμές ροής του συζυγούς προβλήματος για την αεροδυναμική αντίσταση και δεξιά, οι γραμμές ροής για την άνωση.

(α')  $p$ (β')  $U$ 

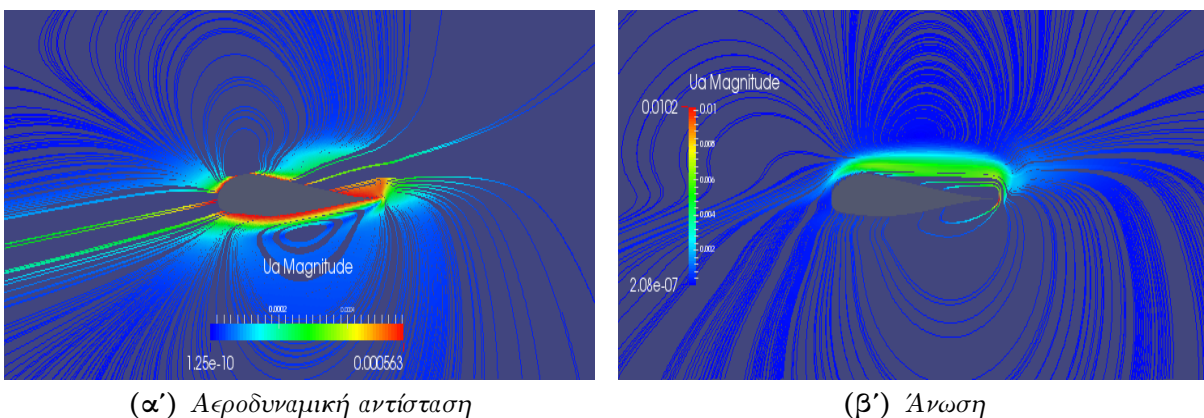
**Σχήμα 4.44:** Αεροτομή B, μόνιμη στρωτή ροή, πλέγμα  $\sim 44K$  κελιών και  $y_w = 2 \times 10^{-4}$ : Αριστερά, παρουσιάζονται οι ισόθλιπτες του προβλήματος ροής  $p$  και δεξιά, οι ισοταχείς.



**Σχήμα 4.45:** Αεροτομή B, μόνιμη στρωτή ροή, πλέγμα  $\sim 44K$  κελιών και  $y_w = 2 \times 10^{-4}$ : Αριστερά, παρουσιάζεται το πεδίο της συζυγούς πίεσης  $q$  για την αεροδυναμική αντίσταση και δεξιά, το αντίστοιχο πεδίο για την άνωση.



**Σχήμα 4.46:** Αεροτομή B, μόνιμη στρωτή ροή, πλέγμα  $\sim 44K$  κελιών και  $y_w = 2 \times 10^{-4}$ : Αριστερά, παρουσιάζεται το πεδίο του μέτρου της συζυγούς ταχύτητας  $u$  για την αεροδυναμική αντίσταση και δεξιά, το αντίστοιχο πεδίο για την άνωση.



**Σχήμα 4.47:** Αεροτομή B, μόνιμη στρωτή ροή, πλέγμα  $\sim 44K$  κελιών και  $y_w = 2 \times 10^{-4}$ : Αριστερά, παρουσιάζονται οι γραμμές ροής του συζυγούς προβλήματος, για την αεροδυναμική αντίσταση και δεξιά, οι γραμμές ροής για την άνωση.



## Κεφάλαιο 5

# Βελτιστοποίηση πτερύγωσης συμπίεστή

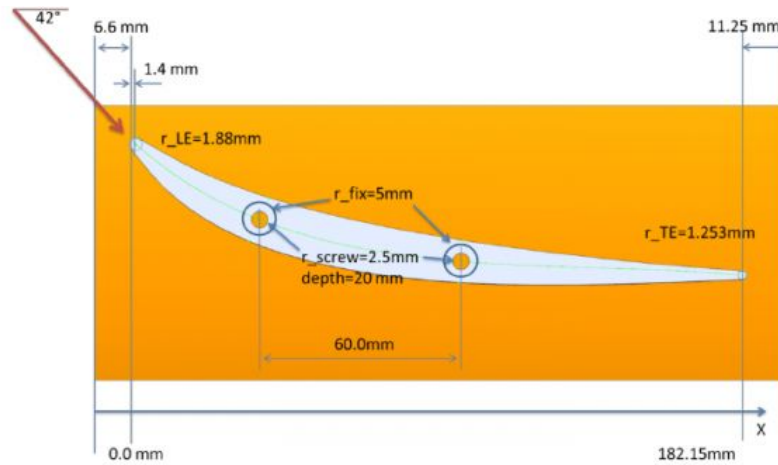
Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζεται μια εφαρμογή σε πρόβλημα ροής εσωτερικής αεροδυναμικής. Πιο συγκεκριμένα, υπολογίζονται οι παράγωγοι ευαισθησίας για μια ακίνητη πτερύγωση συμπίεστή, για χρονικά μόνιμη διδιάστατη τυρβώδη ροή ασυμπίεστου ρευστού, με αντικειμενική συνάρτηση τις μαζικά ολοκληρωμένες απώλειες ολικής πίεσης μεταξύ των διατομών εισόδου-εξόδου. Στη συνέχεια, εξετάζεται το πρόβλημα ελαχιστοποίησης των απωλειών της ολικής πίεσης.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση, πρόκειται για τη σταθερή πτερύγωση ενός συμπίεστή που μελετήθηκε στο Πολυτεχνείο του Βερολίνου, (TU Berlin, Chair for Aero Engines) και η γεωμετρία είναι αντιπροσωπευτική συμπίεστών που συναντώνται στους σύγχρονους κινητήρες τύπου jet. Η μελέτη της συγκεκριμένης πτερύγωσης αποτελεί πρόβλημα αναφοράς για μια σειρά ζητημάτων που αφορούν στον αντίστροφο αεροδυναμικό σχεδιασμό [1].

Η σταθερή πτερύγωση φαίνεται στο σχήμα 5.1 και γεωμετρικά στοιχεία στο σχήμα 5.2.



Σχήμα 5.1: Σταθερή πτερύγωση συμπίεστή TU Berlin: Τριδιάστατη απεικόνιση.



Σχήμα 5.2: Σταθερή πτερύγωση συμπίεστη TU Berlin: Διδιάστατη απεικόνιση.

## 5.1 Εύρεση παραγώγων ευαισθησίας

Η αντικειμενική συνάρτηση είναι οι απώλειες ολικής πίεσης (ολοκληρωμένες με την παροχή όγκου). Η σχέση που δίνει τις απώλειες ολικής πίεσης είναι η εξής

$$J = \int_{S_{I,O}} \left[ - \left( p + \frac{1}{2} v_i^2 \right) v_j \right] n_j dS \quad (5.1)$$

όπου  $S_{I,O}$  αντιστοιχεί στις επιφάνειες εισόδου  $S_I$  και εξόδου  $S_O$  του υπολογιστικού χωρίου  $\Omega$ .

Το μοντέλο τύρβης που χρησιμοποιήθηκε είναι το Spalart-Allmaras χαμηλών αριθμών Reynolds της τύρβης [19] και το οποίο διαφορίστηκε πλήρως κατά την ανάπτυξη της συζυγούς μεθόδου (άρα, δεν έγινε η απλοποιητική, όμως συχνά επικίνδυνη παραδοχή της 'παγωμένης τύρβης', σύμφωνα με την οποία  $\frac{\delta \bar{v}}{\delta b_n} = 0$ , άρα δεν διαφορίζεται το μοντέλο τύρβης κατά την ανάπτυξη της συζυγούς μεθόδου ως προς το πρωτεύον πρόβλημα, θεωρώντας ότι το  $\bar{v}$  παραμένει σταθερό κατά την αλλαγή γεωμετρίας στη βελτιστοποίηση). Η συζυγής μέθοδος που αναπτύχθηκε για το μοντέλο παρουσιάζεται στην εργασία [11].

Οι συνθήκες ροής παρουσιάζονται στο πίνακα 5.1

Μέγεθος	Τιμή
Ταχύτητα εισόδου ροής	48 m/s
Γωνία εισόδου ροής	42 μοίρες
Αριθμός Reynolds	$3.68 \times 10^6$

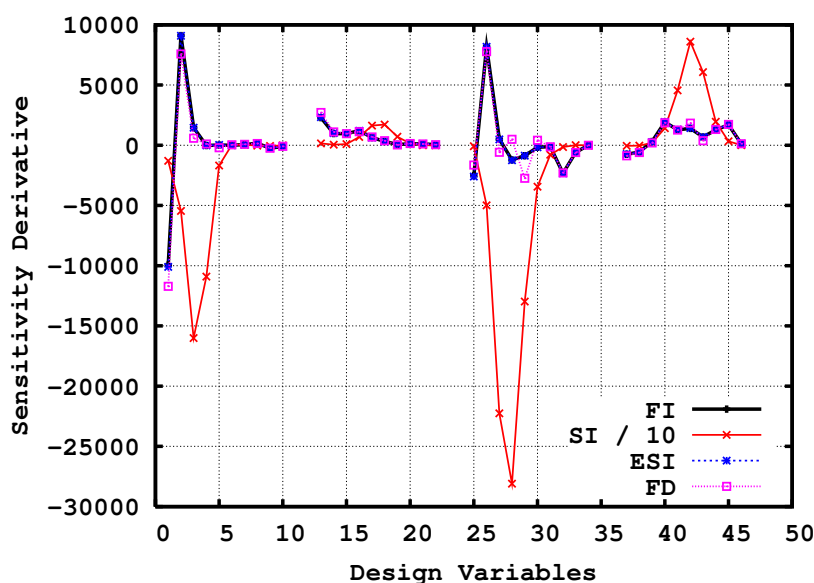
Πίνακας 5.1: Διδιάστατη σταθερή πτερύγωση συμπίεστη TU Berlin: Συνθήκες ροής. Ο αριθμός Reynolds υπολογίζεται με βάση το μήκος χορδής  $c$ ,  $c=1$

Η παραμετροποίηση της αεροτομής της διδιάστατης πτερύγωσης έγινε με καμπύλες NURBS [14] (δυο, μία για την πλευρά πίεσης και μία για την πλευρά υποπίεσης), οι συντεταγμένες των σημείων ελέγχου των οποίων χρησιμοποιήθηκαν ως μεταβλητές σχεδιασμού και ο υπολογισμός των παραγώγων ευαισθησίας έγινε ως προς αυτά.



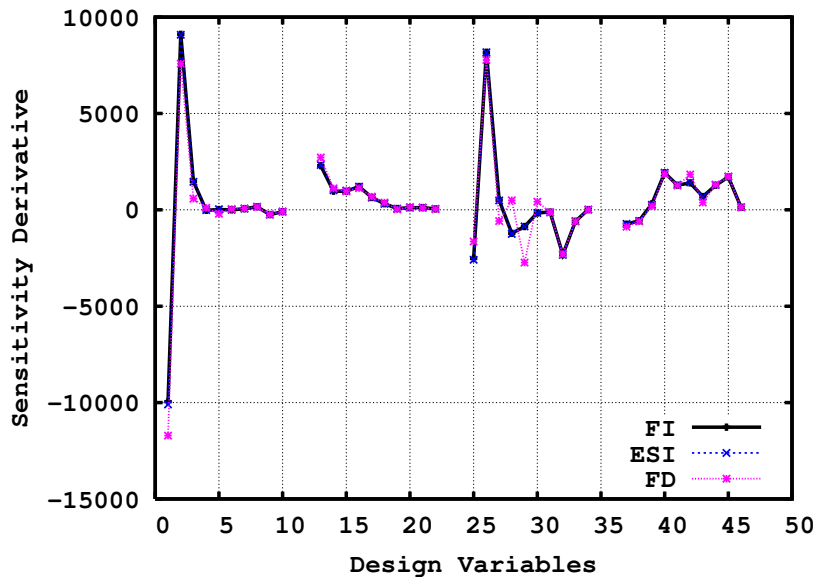
Στο σχήμα 5.3 παρουσιάζονται οι παράγωγοι ευαισθησίας της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, με τις διατυπώσεις FI, SI και E-SI, με τις παραγώγους με διατύπωση SI να έχουν διαιρεθεί με 10 (οι αντίστοιχες σχέσεις των παραγώγων για την αντικειμενική συνάρτηση της σχέσης 5.1 παρατίθενται στο Α'.2). Οι δύο πρώτες καμπύλες από αριστερά προς τα δεξιά αντιστοιχούν στις παραγώγους για μεταβολές της θέσης των σημείων ελέγχου που παραμετροποιούν την πλευρά υποπίεσης και πίεσης αντίστοιχα κατά τη  $x$  διεύθυνση, ενώ οι επόμενες δύο για μεταβολή της θέσης των σημείων ελέγχου κατά τη διεύθυνση  $y$ .

Όπως φαίνεται, οι παράγωγοι ευαισθησίας με τη διατύπωση SI είναι τάξεις μεγέθους διαφορετικές από τις παραγώγους που προέκυψαν με τις διατυπώσεις FI και E-SI. Αντιθέτως, όπως φαίνεται από το σχήμα 5.4, οι παράγωγοι που υπολογίστηκαν με τις διατυπώσεις FI και E-SI είναι πρακτικά ίδιες. Επιπλέον, με τη διατύπωση SI, για αρκετές μεταβλητές σχεδιασμού, οι παράγωγοι που προκύπτουν έχουν και αντίθετο πρόσημο.



**Σχήμα 5.3:** Σταθερή περύγωση συμπιεστή TU Berlin: Παράγωγοι ευαισθησίας της αντικειμενικής συνάρτησης της σχέσης 5.1 με διατυπώσεις FI, SI και E-SI. Οι παράγωγοι με διατύπωση SI είναι διαιρεμένες δια 10.

Το γεγονός ότι οι παράγωγοι ευαισθησίας με διατύπωση SI είναι τόσο διαφορετικές σε σχέση με τις παραγώγους από τις δύο άλλες διατυπώσεις οφείλεται στον όρο του Leibniz, ο οποίος έχει παραλειφθεί. Αυτό το συμπέρασμα προκύπτει, εξετάζοντας τις παραγώγους με διατύπωση SI και E-SI. Ο όρος του Leibniz, ο οποίος αμελείται στη διατύπωση SI, παίζει καθοριστικό ρόλο στην ακρίβεια υπολογισμού παραγώγων ευαισθησίας. Ιδιαίτερος στις τυρβώδεις ροές, όπου η διαφορά μεταξύ των παραγώγων με διατύπωση SI και τις άλλες διατυπώσεις είναι αρκετά μεγαλύτερη σε σχέση με τις στρωτές ροές, ο όρος του Leibniz φαίνεται ότι αποκτά μεγαλύτερες τιμές και, συνεπώς, η ενδεχόμενη παράλειψή του από την έκφραση παραγώγων ευαισθησίας στις διατυπώσεις με επιφανειακά ολοκληρώματα οδηγεί σε αρκετά ανακριβή αποτελέσματα. Αντιθέτως, η ενσωμάτωσή του, όπως γίνεται στη διατύπωση E-SI, οδηγεί σε ακριβέστερα αποτελέσματα, όπως φάνηκε και σε αυτήν την περίπτωση. Παρόμοια συμπεράσματα για τις τυρβώδεις ροές και τον όρο του Leibniz καταγράφονται στα [3, 15]. Τέλος, στο σχήμα 5.5 παρουσιάζονται πεδία ροής των βασικότερων μεγεθών.



Σχήμα 5.4: Σταθερή περύγωση συμπίεστη *TU Berlin*: Παράγωγοι ευαισθησίας της αντικειμενικής συνάρτησης της σχέσης 5.1 με διατυπώσεις *FI* και *E-SI*.

Η μορφή των γραμμών ροής του συζυγούς πεδίου δικαιολογείται από τις οριακές συνθήκες της συζυγούς ταχύτητας στην είσοδο, την έξοδο και την προς βελτιστοποίηση επιφάνεια, που είναι οι εξής:

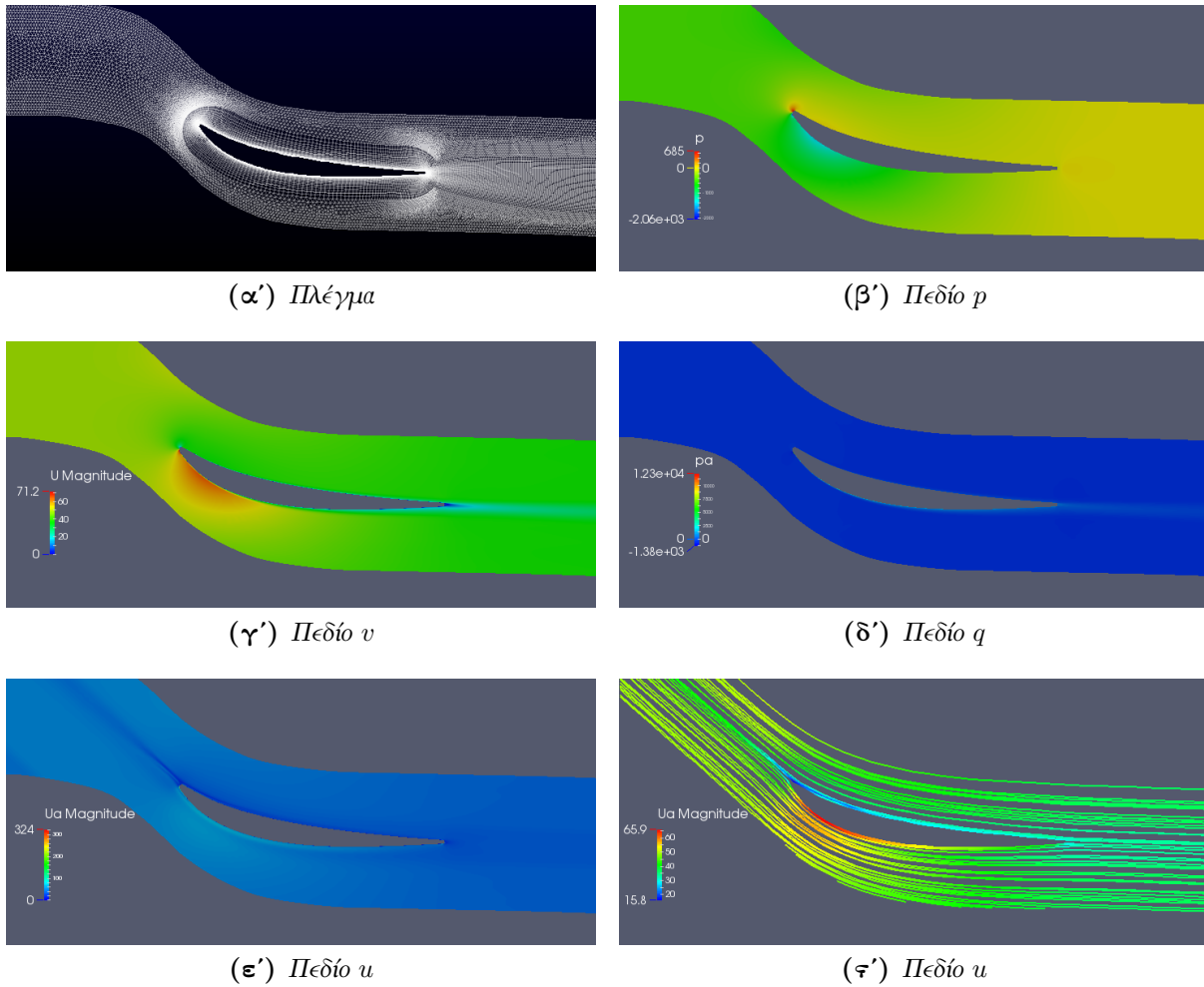
- Στην είσοδο:  $u_i = 0$ .
- Στην έξοδο:  $u_i = 0$ .
- Στην προς βελτιστοποίηση επιφάνεια:  $\vec{u} = (v_k n_k, 0, 0)$ .

## 5.2 Βελτιστοποίηση - Ελαχιστοποίηση απωλειών ολικής πίεσης

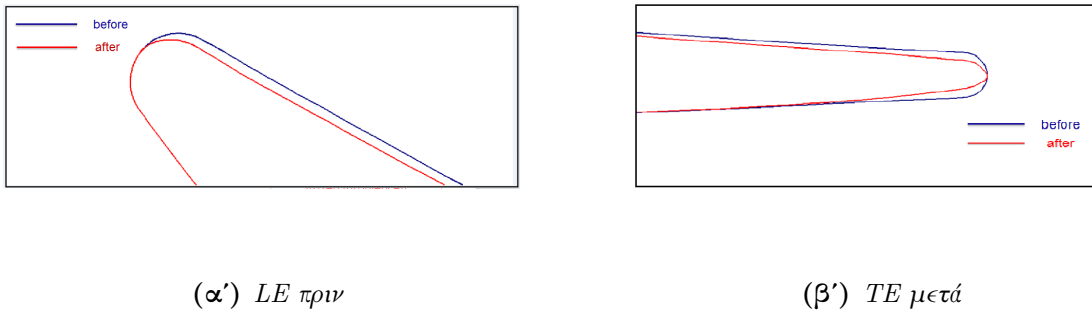
Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται αποτελέσματα από τη διαδικασία βελτιστοποίησης στη διδιάστατη σταθερή περύγωση που προαναφέρθηκε. Αντικειμενική συνάρτηση προς ελαχιστοποίηση αποτελεί η σχέση 5.1. Οι παράγωγοι ευαισθησίας υπολογίζονται με τη διατύπωση *E-SI* και χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος της απότομης καθόδου (*Steepest Descent*), για την διαδικασία βελτιστοποίησης. Κατά τη βελτιστοποίηση δεν επιβάλλονται περιορισμοί και το ενδιαφέρον εστιάζεται στη διερεύνηση της παραδοχής της 'παγωμένης τύρβης' για τον ακριβή υπολογισμό παραγώγων ευαισθησίας σε τυρβώδεις ροές.

Η διαδικασία αυτή γίνεται με τον εξής τρόπο:

1. Στο δεδομένο πλέγμα, επιλύονται οι εξισώσεις ροής του πρωτεύοντος και συζυγούς πεδίου ροής.
2. Υπολογίζονται οι παράγωγοι ευαισθησίας ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού.
3. Ανανεώνονται οι μεταβλητές σχεδιασμού που είναι σημεία ελέγχου της γεωμετρίας, με αποτέλεσμα να αλλάζει το σχήμα της διδιάστατης περύγωσης.



**Σχήμα 5.5:** Πεδία ροής στην ακίνητη διδιάστατη περύγωση του συμπιεστή *TU Berlin*. Στο σχήμα (α') παρατίθεται το χρησιμοποιούμενο πλέγμα, στο (β') το πεδίο της στατικής πίεσης δια σταθερής πυκνότητας  $\rho$ , στο (γ') το πεδίο του μέτρου της ταχύτητας  $v$ , στο (δ') το πεδίο της συζυγούς πίεσης  $q$ , στο (ε') το πεδίο του μέτρου της συζυγούς ταχύτητας  $u$  και στο (ς') οι γραμμές ροής του συζυγούς πεδίου.



**Σχήμα 5.6:** Διδιάστατη ακίνητη περύγωση του συμπίεστη TU Berlin, ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης. Γεωμετρία αεροτομής, πριν και μετά τη βελτιστοποίηση, στην ακίνητη περύγωση του συμπίεστη TU Berlin. Στο σχήμα (α') φαίνεται η γεωμετρία της ακμής πρόσπτωσης και στο (β') φαίνεται η γεωμετρία της ακμής εκφυγής πριν και μετά τη βελτιστοποίηση.

4. Επιλύονται οι εξισώσεις μετατόπισης του πλέγματος.
5. Στο νέο πλέγμα, επαναλαμβάνεται η προηγούμενη διαδικασία, η οποία επαναλαμβάνεται μέχρι να σταθεροποιηθούν οι μεταβλητές σχεδιασμού ή μέχρι ένα καθορισμένο όριο κύκλων βελτιστοποίησης.

Μετά από έναν κύκλο βελτιστοποίησης, η τιμή της αντικειμενική συνάρτησης ελαττώθηκε από  $J = 95.73227 \text{ m}^4/\text{s}^2$  στο  $J = 90.10996 \text{ m}^5/\text{s}^3$ . Δηλαδή, οι απώλειες ολικής πίεσης μειώθηκαν κατά 5.85 %.

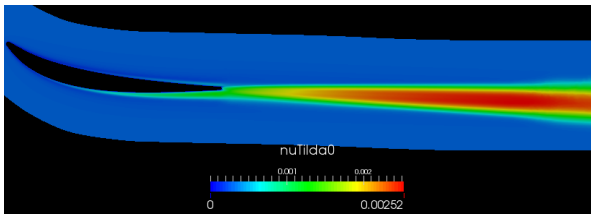
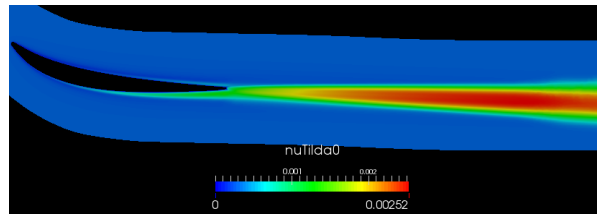
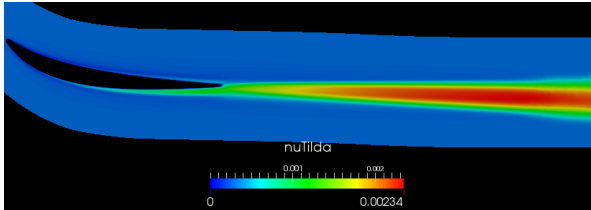
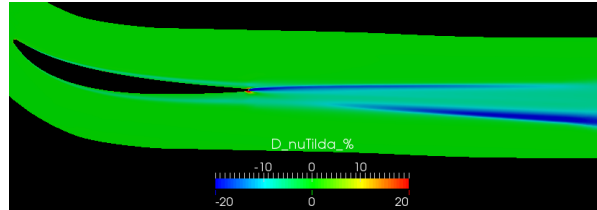
Η μορφή της διδιάστατης περύγωσης πριν και μετά από έναν κύκλο βελτιστοποίησης φαίνεται από τα σχήματα 5.6 (κατά τη διαδικασία αυτή δεν ελήφθησαν περιορισμοί).

Είναι εμφανές ότι με τη βελτιστοποίηση τείνει να γίνει πιο λεπτή η περύγωση. Αυτό οφείλεται στο ότι αν δεν υπήρχε κανένα εμπόδιο στη ροή, τότε οι απώλειες ολικής πίεσης θα ήταν ελάχιστες.

Όπως αναφέρθηκε και πιο πάνω, ως μοντέλο τύρβης χρησιμοποιήθηκε το Spalart-Allmaras χαμηλών αριθμών Reynolds. Οι εξισώσεις του μοντέλου έχουν παραγωγισθεί πλήρως και χρησιμοποιήθηκαν για την επίλυση του συζυγούς πεδίου [11].

Σε αυτό το σημείο, είναι σημαντικό να επισημανθεί η αξία της παραγωγισίας του μοντέλου τύρβης και χρήσης του στη συζυγή διατύπωση, έναντι της χρήσης της παραδοχής της παγωμένης τύρβης (frozen turbulence assumption). Η παραδοχή αυτή οδηγεί σε λιγότερο ακριβή υπολογισμό παραγωγών ευαισθησίας σε τυρβώδεις ροές, μιας και εξαιτίας αυτής της υπόθεσης, δεν έχει νόημα να παραγωγιστεί και το μοντέλο τύρβης κατά την εξαγωγή των συζυγών εξισώσεων και των παραγωγών ευαισθησίας.

Μια περίπτωση, όπου αναδεικνύεται η ανάγκη παραγωγισίας του μοντέλου τύρβης, φαίνεται ενδεικτικά στο σχήμα 5.7. Σε αυτό το σχήμα, παρουσιάζεται η μεταβολή του συντελεστή  $\tilde{\nu}$ , πριν και μετά έναν κύκλο βελτιστοποίησης. Φαίνεται, λοιπόν, ότι όταν αλλάζει η γεωμετρία της αεροτομής κατά τη βελτιστοποίηση, αλλάζει και η τιμή του  $\tilde{\nu}$  και δεν παραμένει σταθερή, σύμφωνα με την παραδοχή της παγωμένης τύρβης. Οι εντονότερες διαφορές δε, εντοπίζονται στον ομόρρο, κάτι που είναι αναμενόμενο και οφείλεται στην αλλαγή της γεωμετρίας της

(α')  $\tilde{\nu}$  - αρχικές συνθήκες ροής - πρώτο πλέγμα(β')  $\tilde{\nu}$  - αρχικές συνθήκες ροής - δεύτερο πλέγμα(γ')  $\tilde{\nu}$  - συνθήκες ροής μετά την αλλαγή γεωμετρίας - δεύτερο πλέγμα(δ') % μεταβολή στο  $\tilde{\nu}$ 

**Σχήμα 5.7:** Μόνιμη διδιάσταση ροή γύρω από ακίνητη περύγωση του συμπιεστή *TU Berlin*, ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης. Μεταβολή του  $\tilde{\nu}$ , πριν και μετά έναν κύκλο βελτιστοποίησης, στην ακίνητη περύγωση του συμπιεστή *TU Berlin*. Στο σχήμα (α') παρουσιάζεται το πεδίο  $\tilde{\nu}$  στο πρώτο πλέγμα για τις συνθήκες ροής πριν την αλλαγή της γεωμετρίας, στο (β') το πεδίο  $\tilde{\nu}$  για τις συνθήκες ροής πριν την αλλαγή της γεωμετρίας και στο δεύτερο πλέγμα, στα (γ') το πεδίο  $\tilde{\nu}$  για τις συνθήκες ροής μετά την αλλαγή γεωμετρίας στο δεύτερο πλέγμα και στο (δ') η ποσοστιαία μεταβολή του  $\tilde{\nu}$  ως πεδίο στο δεύτερο πλέγμα πλέγμα.

αεροτομής.



# Κεφάλαιο 6

## Ανακεφαλαίωση - Συμπεράσματα

### 6.1 Συμπεράσματα

Σε αυτήν την εργασία για τη συνεχή συζυγή μέθοδο όπως χρησιμοποιείται στην αεροδυναμική βελτιστοποίηση, έγινε η παρουσίαση των διατυπώσεων SI και FI, διαπιστώθηκαν οι λόγοι που οδηγούν στη μειωμένη ακρίβεια της διατύπωσης SI, όπως χρησιμοποιούνταν μέχρι πρότινος και παρουσιάστηκε και η διατύπωση E-SI που πρόσφατα εισήγαγε η ερευνητική ομάδα της ΜΠΥΡ&B/ΕΜΠ μέσω της διδακτορικής διατριβής του Ι. Καββαδία. Μέσα από νέες εφαρμογές που έγιναν σε δύο μεμονωμένες αεροτομές και μια ακίνητη διδιάστατη πτερύγωση, όλες για ροή ασυμπίεστου ρευστού και με αντικειμενικές συναρτήσεις πέραν αυτών της παραπάνω διατριβής, αναλύθηκαν οι όροι που συνεισφέρουν στις τιμές των υπολογιζόμενων παραγώγων και διαπιστώθηκαν οι λόγοι που οδηγούν στις διαφορές ανάμεσα στις διαφορετικές διατυπώσεις. Παρακάτω παρουσιάζονται τα βασικότερα συμπεράσματα που προέκυψαν κατά τη μελέτη:

- Οι διαφορές ανάμεσα στις διατυπώσεις SI και FI οφείλονται στην απαλοιφή του όρου του Leibniz, από την έκφραση της παραγώγου της διατύπωσης SI [3, 15].
- Λύση στο πρόβλημα μειωμένης ακρίβειας υπολογισμού παραγώγων με διατύπωση που βασίζεται σε επιφανειακά ολοκληρώματα έδωσε η διατύπωση E-SI [3, 15], η οποία είναι μια εμπλουτισμένη διατύπωση SI. Η διατύπωση E-SI έχει σχεδόν το ίδιο υπολογιστικό κόστος με τη διατύπωση SI (η μικρή διαφορά στον χρόνο υπολογισμού παραγώγων οφείλεται στην επίλυση των συζυγών εξισώσεων μετατόπισης του πλέγματος στη διατύπωση E-SI, που όμως είναι αμελητέος σε σχέση με το χρόνο επίλυσης του πρωτεύοντος και του συζυγούς πεδίου ροής) και πρακτικά την ακρίβεια της διατύπωσης FI, στις περιπτώσεις που μελετήθηκαν.
- Σε αυτήν την εργασία διερευνήθηκαν και άλλες αντικειμενικές συναρτήσεις από αυτές που παρουσιάζονται στα [3, 15], όπως η αεροδυναμική αντίσταση και η άνωση σε προβλήματα εξωτερικής αεροδυναμικής αλλά και οι απώλειες ολικής πίεσης σε πρόβλημα πτερύγωσης στροβιλομηχανής. Τα συμπεράσματα που προέκυψαν επιβεβαιώνουν το συμπέρασμα στα [3, 15], ότι η απαλοιφή του όρου του Leibniz ευθύνεται για τη διαφορά ανάμεσα στις διατυπώσεις SI και FI. Ακόμα, επιβεβαιώνεται η λύση που προτείνεται σε αυτό το πρόβλημα, μέσω της υιοθέτησης της διατύπωσης E-SI. Επιπλέον, φάνηκε ότι η (πολλές φορές υπερβολική, που οδηγεί σε αχρείαστα αυξημένο υπολογιστικό

κόστος) πύκνωση του πλέγματος για υπολογισμό παραγώγων με μεγαλύτερη ακρίβεια με τη διατύπωση SI, δεν αποτελεί σε κάθε περίπτωση θεραπεία του προβλήματος της μειωμένης ακρίβειας υπολογισμού παραγώγων με τη διατύπωση SI, όπως φάνηκε για την περίπτωση όπου αντικειμενική συνάρτηση είναι η αεροδυναμική αντίσταση.

- Ενδιαφέροντα συμπεράσματα προέκυψαν, όσον αφορά την επίδραση της πύκνωσης του πλέγματος στην ακρίβεια υπολογισμού παραγώγων με διατύπωση SI, επεκτείνοντας τα ευρήματα που παρουσιάζονται στα [3, 15]. Φάνηκε ότι, πυκνώνοντας το πλέγμα, οι παράγωγοι ευαισθησίας της αεροδυναμικής αντίστασης και λιγότερο της άνωσης με τη διατύπωση SI είχαν όλο και μεγαλύτερη διαφορά από τις παραγώγους από τις υπόλοιπες διατυπώσεις. Το συμπέρασμα αυτό δεν έρχεται σε αντίθεση με τον ισχυρισμό στα [3, 15] ότι πυκνώνοντας το πλέγμα, οι παράγωγοι με διατύπωση SI διαφέρουν όλο και λιγότερο από τις υπόλοιπες διατυπώσεις μιας και, σε εκείνη την περίπτωση, τα συμπεράσματα αφορούσαν τις απώλειες ολικής πίεσης σε αγωγό.
- Το μεγαλύτερο μέρος της έρευνας που έγινε σε αυτή τη διπλωματική εργασία επικεντρώθηκε σε στρωτές ροές και λιγότερο σε τυρβώδεις, όπου συχνά γίνεται και η 'παραδοχή της παγωμένης τύρβης', γιατί σκοπός αυτής της εργασίας ήταν η μελέτη και εξήγηση των διαφορών μεταξύ των διατυπώσεων της συνεχούς συζυγούς μεθόδου και όχι ο ρόλος της τύρβης. Το πρόβλημα μειωμένης ακρίβειας υπολογισμού παραγώγων με διατύπωση SI είναι διαφορετικό από αυτό της 'παγωμένης τύρβης' και υπερτίθεται, κατά περίπτωση, στο σφάλμα λόγω της παραδοχής της 'παγωμένης τύρβης', αν αυτή γίνει, ενώ εμφανίζεται και στις στρωτές ροές, όπως φάνηκε και στις εφαρμογές που εξετάστηκαν. Συνεπώς, δεν πρέπει να γίνεται σύγχυση ανάμεσα στα διαφορετικά αίτια μειωμένης ακρίβειας υπολογισμού παραγώγων, όπου στη διατύπωση SI οφείλεται στην απαλοιφή του όρου του Leibniz, ενώ στην παραδοχή της παγωμένης τύρβης οφείλεται στη μη-παραγωγή των εξισώσεων του μοντέλου τύρβης.
- Τέλος, μέσα από την επίλυση του χρονικά μόνιμου, μονοδιάστατου προβλήματος που περιγράφεται από την εξίσωση Burgers 3.2, επιβεβαιώθηκαν τα συμπεράσματα που αναφέρονται ανωτέρω και παρατηρήθηκε ότι σε αυτήν την περίπτωση, η συνεισφορά του όρου του Leibniz μειώνεται, καθώς το πλέγμα γίνεται πιο πυκνό. Η μελέτη αυτή ήταν ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα γιατί, λόγω του ασήμαντου υπολογιστικού κόστους της, υπήρχε η δυνατότητα να δοκιμαστούν πολλές διαφορετικές παραλλαγές, πράγμα όχι τόσο εφικτό στα αληθινά προβλήματα ροής.

## 6.2 Προτάσεις για μελλοντική μελέτη

Τέλος, παρατίθενται ορισμένα θέματα, τα οποία θα μπορούσαν να αποτελέσουν αντικείμενο μελλοντικής μελέτης:

- Ως μοντέλο μετατόπισης πλέγματος χρησιμοποιήθηκαν οι εξισώσεις Laplace. Η διατύπωση E-SI, όπως μελετήθηκε σε αυτήν την εργασία, βασίστηκε σε τέτοιο νόμο μετατόπισης πλέγματος. Θα μπορούσε επιπλέον να αναπτυχθεί η διατύπωση αυτή και για μοντέλα μετατόπισης που διέπονται από άλλου είδους ΜΔΕ και να γίνει μια σύγκριση αποτελεσμάτων για τις ίδιες παραμετροποιημένες επιφάνειες.



- Το μεγαλύτερο μέρος της ανάλυσης έγινε για στρωτές μόνιμες ροές, ενώ ως προς την τυρβώδη ροή εξετάστηκε η περίπτωση με αντικειμενική συνάρτηση τις απώλειες ολικής πίεσης σε εσωτερική αεροδυναμική. Ως αντικείμενο μελλοντικής μελέτης, θα ήταν ενδιαφέρον να εξεταστούν τα αποτελέσματα για τυρβώδεις ροές, για τις περιπτώσεις όπου αντικειμενική συνάρτηση είναι η αεροδυναμική αντίσταση και η άνωση. Ακόμα, θα είχε σημασία και η ανάλυση της επίδρασης των όρων που συνεισφέρουν στις τιμές των υπολογιζόμενων παραγώγων ευαισθησίας και ο τρόπος μεταβολής τους, όταν το πλέγμα αλλάζει και γίνεται πιο πυκνό ή αραιό.
- Θα είχε ενδιαφέρον στις τυρβώδεις ροές να διαπιστωθεί η επίδραση του μοντέλου τύρβης στις υπολογιζόμενες παραγώγους με τις διάφορες διατυπώσεις.



# Παράρτημα Α΄

## Τυπολόγιο σχέσεων στις διαφορετικές διατυπώσεις

Στο παράρτημα Α΄ παρατίθενται συγκεντρωτικά οι σχέσεις που χρησιμοποιούνται για το πρωτεύον πρόβλημα και το συζυγές, καθώς και οι εκφράσεις των παραγώγων ευαισθησίας για τις διαφορετικές διατυπώσεις, όταν ως αντικειμενική συνάρτηση χρησιμοποιείται η δύναμη που ασκείται σε σώμα (ενότητα Α΄.1) και όταν αντικειμενική συνάρτηση είναι οι απώλειες ολικής πίεσης (Α΄.2).

### Α΄.1 Αντικειμενική συνάρτηση: Δύναμη σε σώμα

Η δύναμη που ασκείται σε σώμα δίνεται από τη σχέση

$$J_F = \int_{S_W} \left[ (p\delta_i^j - \tau_{ij}) r_i \right] n_j dS \quad (A'.1)$$

όπου όταν το διάνυσμα  $r_i$  είναι παράλληλο στη διεύθυνση της επ΄ άπειρον ταχύτητας, η δύναμη αυτή αντιστοιχεί στην αεροδυναμική αντίσταση, ενώ όταν είναι κάθετη στη διεύθυνση της ταχύτητας, αντιστοιχεί στην άνωση.

Η συζυγής πεδιακή εξίσωση και οι συζυγείς οριακές συνθήκες είναι ίδιες για κάθε διατύπωση.

#### • Οριακές συνθήκες για το πρωτεύον πρόβλημα

- Στην είσοδο  $S_I$  (πρακτικά στο επ΄ άπειρο όριο όταν πρόκειται για πρόβλημα εξωτερικής αεροδυναμικής):
  - \* Dirichlet συνθήκη για την ταχύτητα
  - \* Μηδενική Neumann για την πίεση
  - \*  $\delta x_k / \delta b_n = 0$
- Στην προς βελτιστοποίηση επιφάνεια  $S_W$ :
  - \* Μηδενική Dirichlet συνθήκη για την ταχύτητα

- \* Μηδενική Neumann για την πίεση
- \*  $\delta x_k / \delta b_n$ : παίρνει τιμή ανάλογα με τον τρόπο παραμετροποίησης

– Στην έξοδο  $S_O$ :

- \* μηδενική Neumann για την ταχύτητα
- \* Μηδενική Dirichlet συνθήκη για την πίεση
- \*  $\delta x_k / \delta b_n = 0$ ,

• Συζυγής πεδιακή εξίσωση:

$$R^q = -\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{A'.2})$$

$$R_i^u = u_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial (u_i v_j)}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}^a}{\partial x_j} + \frac{\partial q}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, (3) \quad (\text{A'.3})$$

όπου  $\tau_{ij}^a = \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ .

• Συζυγείς οριακές συνθήκες:

– Στην είσοδο  $S_I$ :

- \* Dirichlet συνθήκη για τη συζυγή ταχύτητα  $u_i = -r_i$
- \* Μηδενική Neumann για τη συζυγή πίεση

– Στην προς βελτιστοποίηση επιφάνεια  $S_W$ :

- \* Dirichlet συνθήκη για τη συζυγή ταχύτητα  $u_i = -r_i$
- \* Μηδενική Neumann για τη συζυγή πίεση

– Στην έξοδο  $S_O$ :

$$q = u_i n_i v_j n_j + 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} n_i n_j \quad (\text{A'.4})$$

$$u_i t_i^I v_j n_j + \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_i t_j^I = 0 \quad (\text{A'.5})$$

$$u_i t_i^{II} v_j n_j + \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_i t_j^{II} = 0 \quad (\text{A'.6})$$

### A'.1.1 Παράγωγος ευαισθησίας με διατύπωση SI χωρίς απαλοιφή του όρου του Leibniz

$$\begin{aligned} \frac{\delta J}{\delta b_n} \Big|_{SI} = & - \int_{S_W} \left( \tau_{ij}^a n_j - q n_i \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS + \int_{S_W} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ (p \delta_i^j - \tau_{ij}) r_i \right] n_j \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS \\ & + \int_{S_W} \left[ (p \delta_i^j - \tau_{ij}) r_i \right] \frac{\delta (n_j dS)}{\delta b_n} + \int_{S_W} (u_i R_i^u + q R^p) n_k \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS \end{aligned} \quad (A'.7)$$

### A'.1.2 Παράγωγος ευαισθησίας με διατύπωση SI με απαλοιφή του όρου του Leibniz

$$\begin{aligned} \frac{\delta J}{\delta b_n} \Big|_{SI} = & - \int_{S_W} \left( \tau_{ij}^a n_j - q n_i \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS + \int_{S_W} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ (p \delta_i^j - \tau_{ij}) r_i \right] n_j \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS \\ & + \int_{S_W} \left[ (p \delta_i^j - \tau_{ij}) r_i \right] \frac{\delta (n_j dS)}{\delta b_n} \end{aligned} \quad (A'.8)$$

### A'.1.3 Παράγωγος ευαισθησίας με διατύπωση E-SI

$$\begin{aligned} \frac{\delta J}{\delta b_n} \Big|_{E-SI} = & - \int_{S_W} \left( \tau_{ij}^a n_j - q n_i \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS - \int_{S_W} \frac{\partial m_i^a}{\partial x_j} n_j \frac{\delta x_i}{\delta b_n} dS \\ & + \int_{S_W} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ (p \delta_i^j - \tau_{ij}) r_i \right] n_j \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS + \int_{S_W} \left[ (p \delta_i^j - \tau_{ij}) r_i \right] \frac{\delta (n_j dS)}{\delta b_n} \end{aligned} \quad (A'.9)$$

### A'.1.4 Παράγωγος ευαισθησίας με διατύπωση FI

$$\begin{aligned} \frac{\delta L}{\delta b_n} \Big|_{FI} = & \int_{S_W} \left[ (p \delta_i^j - \tau_{ij}) r_i \right] \frac{\delta (n_j dS)}{\delta b_n} \\ & + \int_{\Omega} \left\{ -u_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - u_j \frac{\partial p}{\partial x_k} - \tau_{ij}^a \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + u_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} + q \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right\} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \right) d\Omega \end{aligned} \quad (A'.10)$$

## A'.2 Αντικειμενική συνάρτηση: Απώλειες ολικής πίεσης

Σε πρόβλημα εσωτερικής αεροδυναμικής, δηλαδή σε ροή σε αγωγό ή πτερύγωση, οι απώλειες ολικής πίεσης δίνονται από τη σχέση

$$J_{pi} = \int_{S_{I,O}} \left[ - \left( p + \frac{1}{2} v_i^2 \right) v_j \right] n_j dS \quad (A'.11)$$

όπου  $S_{I,O}$  αντιστοιχεί στις επιφάνειες εισόδου  $S_I$  και εξόδου  $S_O$  του υπολογιστικού χωρίου  $\Omega$ .

Η συζυγής πεδιακή εξίσωση και οι συζυγείς οριακές συνθήκες είναι ίδιες για κάθε διατύπωση.

- **Οριακές συνθήκες για το πρωτεύον πρόβλημα**

- Στην είσοδο  $S_I$ :

- \* Dirichlet συνθήκη για την ταχύτητα
- \* Μηδενική Neumann για την πίεση
- \*  $\delta x_k / \delta b_n = 0$

- Στην προς βελτιστοποίηση επιφάνεια  $S_W$ :

- \* Dirichlet συνθήκη για την ταχύτητα
- \* Μηδενική Neumann για την πίεση
- \*  $\delta x_k / \delta b_n$ : παίρνει τιμή ανάλογα με τον τρόπο παραμετροποίησης

- Στην έξοδο  $S_O$ :

- \* μηδενική Neumann για την ταχύτητα
- \* Dirichlet συνθήκη για την πίεση:  $p = 0$
- \*  $\delta x_k / \delta b_n = 0$ ,

- **Συζυγής πεδιακή εξίσωση:**

$$R^q = - \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (A'.12)$$

$$R_i^u = u_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial (u_i v_j)}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}^a}{\partial x_j} + \frac{\partial q}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, (3) \quad (A'.13)$$

όπου  $\tau_{ij}^a = \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ .

- **Συζυγείς οριακές συνθήκες:**

- Στην είσοδο  $S_I$ :

- \* Dirichlet συνθήκη για τη συζυγή ταχύτητα  $\vec{u} = (v_k n_k, 0, 0)$
- \* Μηδενική Neumann για τη συζυγή πίεση

- Στην προς βελτιστοποίηση επιφάνεια  $S_W$ :
  - \* Μηδενική Dirichlet συνθήκη για τη συζυγή ταχύτητα
  - \* Μηδενική Neumann για τη συζυγή πίεση
- Στην έξοδο  $S_O$ :

$$q = u_i n_i v_j n_j + 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} n_i n_j - \left( p + \frac{1}{2} v_i^2 \right) - v_i v_k n_k n_i \quad (A'.14)$$

$$u_i t_i^I v_j n_j + \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_i t_j^I - v_i v_k n_k t_i^I = 0 \quad (A'.15)$$

$$u_i t_i^{II} v_j n_j + \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_i t_j^{II} - v_i v_k n_k t_i^{II} = 0 \quad (A'.16)$$

$$\frac{\partial v_{(n)}}{\partial n} = 0 \quad (A'.17)$$

### A'.2.1 Παράγωγος ευαισθησίας με διατύπωση SI χωρίς απαλοιφή του όρου του Leibniz

$$\left. \frac{\delta J}{\delta b_n} \right|_{SI} = - \int_{S_W} \left( \tau_{ij}^a n_j - q n_i \right) n_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS + \int_{S_W} q R^p n_k \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS \quad (A'.18)$$

### A'.2.2 Παράγωγος ευαισθησίας με διατύπωση SI με απαλοιφή του όρου του Leibniz

$$\left. \frac{\delta J}{\delta b_n} \right|_{SI} = - \int_{S_W} \left( \tau_{ij}^a n_j - q n_i \right) n_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS \quad (A'.19)$$

### A'.2.3 Παράγωγος ευαισθησίας με διατύπωση E-SI

$$\left. \frac{\delta J}{\delta b_n} \right|_{SI} = - \int_{S_W} \left( \tau_{ij}^a n_j - q n_i \right) n_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS - \int_{S_W} \frac{\partial m_i^a}{\partial x_j} n_j \frac{\delta x_i}{\delta b_n} dS \quad (A'.20)$$

### A'.2.4 Παράγωγος ευαισθησίας με διατύπωση FI

$$\left. \frac{\delta L}{\delta b_n} \right|_{FI} = \int_{\Omega} \left\{ -u_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - u_j \frac{\partial p}{\partial x_k} - \tau_{ij}^a \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + u_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} + q \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right\} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \right) d\Omega \quad (A'.21)$$





## Παράρτημα Β΄

# Υπολογισμός δεύτερων παραγώγων ταχύτητας πάνω στο στερεό τοίχωμα

Στο παράρτημα αυτό γίνεται αναφορά στον τρόπο αριθμητικού υπολογισμού δεύτερων παραγώγων της ταχύτητας πάνω στο στερεό τοίχωμα. Στην Υπολογιστική Ρευστοδυναμική, ειδικά σε μη-δομημένα πλέγματα, δεν υπάρχει ένας τρόπος υπολογισμού δεύτερων παραγώγων της ταχύτητας πάνω στον τοίχο, ο οποίος να έχει επικρατήσει. Οι διάφοροι τρόποι που μπορεί να υλοποιηθούν παρουσιάζουν διαφορές, μεταξύ των άλλων, ανάλογα αν πρόκειται για λογισμικό που χρησιμοποιεί κεντροκομβική ή κεντροκυβελική διατύπωση. Αναγκαστικά γίνονται παραδοχές και έχει σημασία η μελέτη και κατανόηση του σφάλματος που αυτές επιφέρουν.

Ο λόγος για τον οποίο σε αυτό το παράρτημα γίνεται αναφορά σε αυτό το ζήτημα, είναι ότι, όπως φάνηκε στο Κεφάλαιο 2, ο όρος του Leibniz απαιτεί τον υπολογισμό, πάνω στο στερεό τοίχωμα, πρώτων παραγώγων των τάσεων, δηλαδή δεύτερων παραγώγων της ταχύτητας. Κατά τον αριθμητικό υπολογισμό των παραγώγων των τάσεων πάνω στο στερεό τοίχωμα, εισάγεται σφάλμα. Βέβαια, πρέπει σε αυτό το σημείο να γίνει σαφές ότι το σφάλμα αυτό δεν ευθύνεται αποκλειστικά, αλλά φέρει μόνο ένα μέρος της ευθύνης για τη μειωμένη ακρίβεια υπολογισμού των παραγώγων ευαισθησίας με διατύπωση SI, στην περίπτωση όπου ο όρος του Leibniz δεν αμελείται, αλλά αυτούσιος περιλαμβάνεται στην έκφραση της παραγώγου!

Ως παράδειγμα λογισμικού επίλυσης προβλημάτων CFD θα χρησιμοποιηθεί το OpenFOAM<sup>®</sup>, μιας και το ίδιο λογισμικό χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση των προβλημάτων ροής σε αυτήν τη διπλωματική εργασία. Αντί του OpenFOAM<sup>®</sup>, θα μπορούσε να εξεταστεί οποιοδήποτε άλλο λογισμικό επίλυσης προβλημάτων CFD. Τότε όμως, ο τρόπος αριθμητικού υπολογισμού παραγώγων στον τοίχο ίσως να ήταν διαφορετικός, μιας και οι αντίστοιχες παραδοχές που γίνονται ενδεχομένως να είναι διαφορετικές.

Το OpenFOAM<sup>®</sup> είναι λογισμικό επίλυσης προβλημάτων ροής που βασίζεται στην κεντροκυβελική διατύπωση και στη χρήση σχημάτων διακριτοποίησης πεπερασμένων όγκων. Το πακέτο αυτό έχει αναπτυχθεί με τέτοιο τρόπο, ώστε να αντιμετωπίζει γενικότερα όλα τα πλέγματα, και τα δομημένα και τα μη-, ως μη-δομημένα. Με αυτόν τον τρόπο, διατηρεί τη γενικότητα ως προς τη δυνατότητα επίλυσης προβλημάτων κάθε τύπου πλέγματος, μιας και τελικά οι επιλύτες που χρησιμοποιεί είναι ανεξάρτητοι του αν το πλέγμα είναι δομη-

μένο ή μη-. Αυτός ο χειρισμός των πλεγμάτων καθιστά εφικτή την εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων όγκων για κάθε τύπο πλέγματος, ωστόσο καθιστά αδύνατη τη χρήση σχημάτων διακριτοποίησης που βασίζονται σε πεπερασμένες διαφορές, οι οποίες στις περιορισμένες πλέον περιπτώσεις όπου εφαρμόζονται (δηλαδή σε δομημένα πλέγματα), μπορούν να είναι πολύ υψηλής τάξης ακρίβειας.

Στις επόμενες, λοιπόν, ενότητες, παρουσιάζεται ο τρόπος διακριτοποίησης των παραγώγων της ταχύτητας και διευκρινίζεται ο λόγος για τον οποίο εισάγεται μεγαλύτερο σφάλμα, καθώς η τάξη της παραγώγου αυξάνεται.

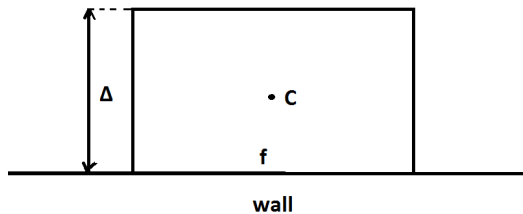
## B'.1 Διακριτοποίηση πρώτης παραγώγου της ταχύτητας κοντά στον τοίχο

Για να γίνει η διακριτοποίηση των δεύτερων παραγώγων της ταχύτητας απαιτείται πρώτα η εύρεση της διακριτοποιημένης έκφρασης της πρώτης παραγώγου.

Ως γνωστόν, ισχύει ότι

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (B'.1)$$

Έστω ένα κελί γειτονικό στο στερεό τοίχωμα, όπως φαίνεται στο σχήμα B'.1, με C το κέντρο του κελιού, f την πλευρά του κελιού στο στερεό τοίχωμα και Δ το πάχος του κελιού.



**Σχήμα B'.1:** Κελί γειτονικό στο στερεό τοίχωμα, με C το κέντρο του κελιού και f την πλευρά του κελιού πάνω στο στερεό τοίχωμα.

Από τη σχέση B'.1, η διακριτοποίηση του όρου  $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$  γίνεται ως εξής

$$\left. \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|_f = \left. \frac{\partial v_i}{\partial n} \right|_f n_j + \left. \frac{\partial v_i}{\partial t} \right|_f t_j \simeq \left. \frac{\partial v_i}{\partial n} \right|_f n_j + \left. \frac{\partial v_i}{\partial t} \right|_c t_j \quad (B'.2)$$

όπου n το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στο στερεό τοίχωμα και t το εφαπτομενικό.

Δηλαδή, για την εξαγωγή της σχέσης B'.2, έγινε η εξής παραδοχή: εφαρμόστηκε μηδενική συνθήκη Neumann για τον όρο  $\frac{\partial v_i}{\partial t}$ , δηλαδή την εφαπτομενική συνιστώσα της ταχύτητας,

από το κέντρο του κελιού στο στερεό τοίχωμα. Άρα,  $\frac{\partial v_i}{\partial t}|_f = \frac{\partial v_i}{\partial t}|_C$ . Ωστόσο, αυτή η παραδοχή αποτελεί μια πρώτη πηγή ανακρίβειας στον αριθμητικό υπολογισμό παραγώγων κοντά στον τοίχο, μιας και στην πραγματικότητα η εφαπτομενική συνιστώσα της παραγώγου της ταχύτητας είναι διαφορετική σε διαφορετικές θέσεις του πεδίου ροής.

Η διακριτοποίηση της πρώτης παραγώγου συνεχίζεται ως εξής

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}|_f &= \frac{\partial v_i}{\partial n}|_f n_j + \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j}|_c - \frac{\partial v_i}{\partial x_m}|_c n_m n_j \right) \\ &= \frac{v_i^f - v_i^c}{\Delta/2} n_j + \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j}|_c - \frac{\partial v_i}{\partial x_m}|_c n_m n_j \right) \end{aligned} \quad (B'.3)$$

όπου  $\Delta$  το πάχος του κελιού και

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j}|_C \simeq \frac{\int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}|_C d\Omega}{\int_{\Omega} d\Omega} \quad (B'.4)$$

όπου  $\Omega$  ο όγκος του κελιού, άρα  $\int_{\Omega} d\Omega = \Omega$ .

Η σχέση B'.4 αποτελεί μια ακόμα πηγή ανακρίβειας κατά τον αριθμητικό υπολογισμό παραγώγου κοντά στον τοίχο, μιας και το δεξί μέλος της σχέσης αυτής αποτελεί προσέγγιση του αριστερού μέλους της. Ωστόσο, ο χειρισμός αυτός είναι ο πλέον κλασικός που ακολουθείται σε επιλύτες ροών που βασίζονται στους πεπερασμένους όγκους.

Τέλος, με εφαρμογή του θεωρήματος Green-Gauss, προκύπτει ότι

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j}|_C \simeq \frac{\int_S v_i^f n_j dS}{\Omega} \quad (B'.5)$$

## B'.2 Διακριτοποίηση δεύτερης παραγώγου της ταχύτητας κοντά στον τοίχο

Ήδη, κατά την ανάπτυξη της διακριτής έκφρασης της πρώτης παραγώγου της ταχύτητας πάνω στον τοίχο, έγιναν δύο παραδοχές που οδηγούν σε μείωση της ακρίβειας υπολογισμού. Η διακριτοποίηση των δεύτερων παραγώγων της ταχύτητας στο στερεό τοίχωμα γίνεται ως εξής:

Έστω ότι  $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \phi_{ij}$ , άρα  $\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial x_k}$ . Τότε,

$$\frac{\partial \phi_{ij}}{\partial x_k}|_f = \frac{\phi_{ij}^f - \phi_{ij}^c}{\Delta/2} n_k + \left( \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial x_k}|_c - \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial x_m}|_c n_m n_j \right) \quad (B'.6)$$

Ο όρος  $\phi_{ij}^C$  δίνεται από τη σχέση B'.5 και ο όρος  $\phi_{ij}^f$  δίνεται από τη σχέση B'.3.

Τέλος, ο όρος  $\left. \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial x_k} \right|_C$  δίνεται από τη σχέση

$$\left. \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial x_k} \right|_C = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \Big|_C d\Omega = \frac{1}{\Omega} \int_S \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \Big|_f n_k dS \quad (B'.7)$$

όπου ο όρος  $\left. \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|_f$  δίνεται από τη σχέση B'.3.

Επομένως, η τελική έκφραση που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό δεύτερων παραγώγων της ταχύτητας πάνω στο στερεό τοίχωμα φαίνεται από τη σχέση

$$\left. \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k} \right|_f = \frac{1}{\Delta/2} \left( \left. \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|_f - \left. \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|_C \right) n_k + \left( \left. \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k} \right|_C - \left. \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_m} \right|_C n_m n_j \right) \quad (B'.8)$$

όπου ο όρος  $\left. \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k} \right|_C$  δίνεται από τη σχέση B'.7 και οι υπόλοιποι όροι είναι επίσης γνωστοί.

### B'.3 Σχολιασμός των επιπτώσεων των παραδοχών που έγιναν για τη διακριτοποίηση των παραγώγων της ταχύτητας στο στερεό τοίχωμα

Οι παραδοχές που έγιναν για τη διατύπωση της διακριτοποιημένης έκφρασης των δεύτερων παραγώγων της ταχύτητας πάνω στο στερεό τοίχωμα είναι χαρακτηριστικές στο CFD. Ωστόσο, σε πακέτα λογισμικού για μη-δομημένα πλέγματα που υποστηρίζουν τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων ως τρόπο διακριτοποίησης των ΜΔΕ, δεν υπάρχει προφανής τρόπος υπολογισμού δεύτερων παραγώγων της ταχύτητας πάνω στο στερεό τοίχωμα.

Έτσι, ανάλογα με τις εκάστοτε παραδοχές που γίνονται για τη διακριτοποίηση των δεύτερων παραγώγων της ταχύτητας πάνω στον τοίχο, πάντα εισάγεται σφάλμα στον αριθμητικό υπολογισμό τους. Όπως αναφέρθηκε όμως και πιο πάνω, στον όρο του Leibniz εμπεριέχονται και δεύτερες παράγωγοι της ταχύτητας πάνω στο στερεό τοίχωμα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, ακόμα και αν συμπεριλαμβανόταν ως έχει ο όρος αυτός στην έκφραση παραγώγων με διατύπωση SI, τότε να μην ήταν σίγουρο ότι θα επιτυγχανόταν ίδια ακρίβεια υπολογισμού των παραγώγων ευαισθησίας με τις πεπερασμένες διαφορές. Αυτές οι αμφιβολίες περί ακρίβειας υπολογισμού του όρου του Leibniz αντιμετωπίζονται, όταν αντί της διατύπωσης SI με τον όρο του Leibniz ως έχει, χρησιμοποιηθεί η διατύπωση E-SI, όπου ο όρος του Leibniz αντικαθίσταται από ένα άλλο επιφανειακό ολοκλήρωμα. Για μια ακόμα φορά πρέπει να αναφερθεί, προς αποφυγή παρερμηνειών, ότι ο τρόπος διακριτοποίησης των παραγώγων ανώτερης τάξης πάνω στο στερεό τοίχωμα δεν ευθύνεται αποκλειστικά για τον μη-ακριβή υπολογισμό του όρου του Leibniz και κατ'επέκτασιν παραγώγων ευαισθησίας με την πλήρη διατύπωση SI.

# Βιβλιογραφία

- [1] Test Case 3: TU Berlin TurboLab Stator. <http://aboutflow.sems.qmul.ac.uk/events/munich2016/benchmark/testcase3/>.
- [2] Κ. Γιαννάκογλου. *Μέθοδοι Βελτιστοποίησης στην Αεροδυναμική*. Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., 2006.
- [3] Ι. Καββαδίας. *Διδακτορική Διατριβή: Η Συνεχής Συζυγής Μέθοδος για Μόνιμες και μη-Μόνιμες Τυρβώδεις Ροές με Έμφαση στην Ακρίβεια των Παραγώγων Ευαισθησίας*. Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2015.
- [4] OpenFOAM, *The Open Source CFD Toolbox, User Guide, Edition 1.6*. July 2009.
- [5] Ε. Παπουτσής-Κιαχαγιάς. *Διδακτορική Διατριβή: Συζυγείς Μέθοδοι για Τυρβώδεις Ροές, με Εφαρμογή στη Βελτιστοποίηση Μορφής ή Τοπολογίας και στο Στιβαρό Σχεδιασμό*. Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2013.
- [6] A. Jameson. Aerodynamic design via control theory. *Journal of Scientific Computing*, 3:233–260, 1988.
- [7] A. Jameson and S. Kim. *Reduction of the adjoint gradient formula in the continuous limit*. Reno, Nevada, January 2003.
- [8] A. Radul. Introduction to AUTOMATIC DIFFERENTIATION. <http://alexey.radul.name/ideas/2013/introduction-to-automatic-differentiation/>.
- [9] D. I. Papadimitriou, A. S. Zymaris, K. C. Giannakoglou. *A Discrete and Continuous Adjoint Formulation for Turbomachinery Applications*. Optimisation and Control with Application to Industrial and Societal Problems, EUROGEN. Munich, September 12 - 14, 2005.
- [10] D. I. Papadimitriou, K. C. Giannakoglou. A continuous adjoint method with objective function derivatives based on boundary integrals, for inviscid and viscous flows. *Journal of Computers & Fluids*, 36(2):325–341, 2007.
- [11] A. Bueno-Orovio, C. Castro, F. Palacios, and E. ZuaZua. Continuous adjoint approach for the Spalart Allmaras model in aerodynamic optimization. *AIAA Journal*, 50(3):631–646, 2012.
- [12] C. Lozano. Discrete surprises in the computation of sensitivities from boundary integrals in the continuous adjoint approach to inviscid aerodynamic shape optimization. *Computers & Fluids*, 56:118–127, 2012.

- 
- [13] C. Lozano and E. Andrés and M. Martin and P. Bitrián. Domain versus boundary computation of flow sensitivities with the continuous adjoint method for aerodynamic shape optimization problems. *Numerical Methods in Fluids*, 70(10):1305–1323, 2012.
- [14] E.M. Papoutsis-Kiachagias, K.C. Giannakoglou. *A parameterization and mesh movement strategy based on volumetric B-splines. Applications to shape Optimization*. Athens, 2015.
- [15] I.S.Kavvadias, E.M.Papoutsis-Kiachagias, K.C.Giannakoglou. On the proper treatment of grid sensitivities in continuous adjoint methods for shape optimization. *Journal of Computational Physics*, 301:1–18, 2015.
- [16] J. Kepler. *Sensitivity Analysis: the Direct and Adjoint Method*, Universitat Linz. 2010.
- [17] M.B. Giles, N.A. Pierce. *Discrete and Continuous Adjoint Methods in Aerodynamic Robust Design Problems*. CFD and Optimisation 2011. Oxford University Computing Laboratory, 1997.
- [18] M. Papoutsis-Kiachagias, D. I. Papadimitriou and K. C. Giannakoglou. *Discrete and Continuous Adjoint Methods in Aerodynamic Robust Design Problems, ACFD and Optimization, An ECCOMAS Thematic Conference*. Antalya, Turkey, 23-25 May 2011.
- [19] P. Spalart and S. Allmaras. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows, AIAA Paper 1992-0439, 30th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. 6-9 January 1992.
- [20] V. G. Asouti, A. S. Zymaris, D. I. Papadimitriou and K. C. Giannakoglou. Continuous and discrete adjoint approaches for aerodynamic shape optimization with low Mach number preconditioning. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 57:1485–1504, August 10 2008.
- [21] W. Kyle Anderson, V. Venkatakrisnan. Aerodynamic design optimization on unstructured grids with a continuous adjoint formulation. *Computers & Fluids*, 28(4-5):443–480, 1999.