



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ ΚΑΙ ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΕΡΓΩΝ ΥΠΟΔΟΜΗΣ ΚΑΙ ΑΓΡΟΤΙΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

**ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΠΑΡΑΚΤΙΩΝ ΥΔΡΟΦΟΡΕΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ  
ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ – ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΗ  
ΝΗΣΟ ΚΑΛΥΜΝΟ**

ΛΥΔΙΑ ΓΟΥΤΑ  
ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Επιβλέπων: Αριστοτέλης Μαντόγλου

Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Ιούλιος 2016

# ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το νερό είναι το πολυτιμότερο και το πιο απαραίτητο αγαθό της φύσης για όλον τον πλανήτη και αποτελεί βασικό παράγοντα διαβίωσης και ανάπτυξης.

Παρ' ότι το απόθεμα της Γης σε νερό είναι πολύ μεγάλο (αφού η Γη καλύπτεται από τα  $\frac{3}{4}$  περίπου της επιφάνειάς της από νερό), στην πραγματικότητα το εκμεταλλεύσιμο σε υγρή κατάσταση είναι μόλις το 0.6%, δηλαδή περίπου  $8.5 \cdot 10^{15} \text{ m}^3$ . Από αυτό, το 98% είναι υπόγειο νερό το οποίο βρίσκεται αποθηκευμένο ή κινείται στο υπέδαφος. Ακόμη, η μισή ποσότητα από αυτό βρίσκεται σε πολύ μεγάλα βάθη ( $> 800 \text{ m}$ ), όπου η ποσότητα των περιεχομένων σε αυτό άλατα είναι πολύ μεγάλη και επιπλέον τα κόστη άντλησης πολύ υψηλά.

Δυστυχώς τα τελευταία χρόνια ως χώρα αλλά και παγκοσμίως, έχουμε έρθει αντιμέτωποι με το πρόβλημα της λειψυδρίας.

Το πρόβλημα αυτό έχει μια σειρά από αιτίες, οι σημαντικότερες από αυτές είναι: η συνεχής αύξηση του πληθυσμού, η αύξηση του τουρισμού, η κακή διαχείριση του υδατικού δυναμικού, οι διάφορες κλιματικές αλλαγές, η υπεράντληση των υπογείων υδροφορέων, η ανισοκατανομή του υδατικού δυναμικού κλπ. Αντιλαμβάνεται λοιπόν κανείς ότι η αξία των υπογείων υδροφορέων, η σωστή διαχείρισή τους και η διατήρηση της ποιότητάς τους είναι θέματα μείζονος σημασίας.

Λόγω της χωρικής και χρονικής ανισοκατανομής του νερού, παρατηρούνται σε πολλές περιοχές αυξημένες ανάγκες για νερό.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελούν οι παραθαλάσσιες και πιο συγκεκριμένα οι νησιωτικές περιοχές, όπου η ζήτηση για νερό είναι ιδιαίτερα αυξημένη κυρίως τους θερινούς μήνες λόγω της μεγάλης τουριστικής προσέλευσης.

Αποτέλεσμα αυτού είναι η υπεράντληση των υπογείων υδροφορέων, πράγμα που σταδιακά οδηγεί στην υφαλμύρισή τους και τελικά στην οικολογική καταστροφή τους.

Επομένως, είναι απαραίτητο να υπάρχει ένα ολοκληρωμένο σύστημα διαχείρισης και ελέγχου των υπογείων υδροφορέων αλλά και των επιφανειακών υδάτων της εκάστοτε περιοχής το οποίο θα εξασφαλίζει την βέλτιστη ποσότητα άντλησης του υδροφορέα αποφεύγοντας την ποιοτική υποβάθμισή του.

Για να επιτευχθεί αυτό απαιτείται η γνώση της γεωμετρίας του υδροφορέα, οι υδραυλικές και υδρολογικές του παράμετροι, καθώς επίσης και η γνώση της λειτουργίας του υδροφορέα μέσω ενός συστήματος προσομοίωσης.

Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματεύεται την μελέτη του μοντέλου του παράκτιου υδροφορέα στον Βαθύ της Καλύμνου και την επίδραση που έχει η μεταβολή της υδραυλικής αγωγιμότητας σε συνδυασμό με τις θέσεις των πηγαδιών στην συνολική βέλτιστη παροχή άντλησης. Η πρακτική εφαρμογή των άνωθι πραγματοποιήθηκε στο περιβάλλον εργασίας Matlab αξιοποιώντας το πακέτο βελτιστοποίησης που διαθέτει.

Θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στον Επιβλέποντα Καθηγητή κ. **Αριστοτέλη Μαντόγλου** για την πολύτιμη συμβολή του, την καθοδήγηση και τον χρόνο που διέθεσε για την εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερος τον Υποψήφιο Διδάκτορα **Γεώργιο Κοψιάτη** για τον χρόνο του και την προθυμία που επέδειξε για την επεξήγηση των χρησιμοποιηθέντων υπολογιστικών εργαλείων. Η βοήθειά του υπήρξε καθοριστικής σημασίας για την ολοκλήρωση της εργασίας.

## ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

<b>ΠΡΟΛΟΓΟΣ</b> .....	ii
<b>ΠΕΡΙΛΗΨΗ</b> .....	vii
<b>ABSTRACT</b> .....	x
<b>1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ</b> .....	1
1.1 Αντικείμενο της διπλωματικής εργασίας.....	1
1.2 Δομή και οργάνωση της εργασίας.....	2
<b>2. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΙΝΗΣΗΣ ΝΕΡΟΥ – ΥΦΑΛΜΥΡΩΣΗ ΠΑΡΑΚΤΙΩΝ ΥΔΡΟΦΟΡΕΩΝ</b> .....	3
2.1 Υπόγεια νερά – Υδροφορείς.....	3
2.2 Υδραυλική θεώρηση των υπογείων ροών.....	5
2.3 Υδραυλικές παράμετροι των υδροφορέων.....	5
2.4 Το μαθηματικό πρόβλημα των υπογείων ροών.....	6
2.4.1 Οι εξισώσεις κίνησης – Ο νόμος Darcy.....	6
2.4.2 Η εξίσωση συνέχειας.....	8
2.4.3 Αρχικές και οριακές συνθήκες.....	11
2.4.4 Δίκτυα γραμμών ροής και δυναμικού.....	12
2.5 Υφαλμύριση παράκτιων υδροφορέων.....	13
2.5.1 Ορισμός.....	13
2.5.2 Αίτια της υφαλμύρισης.....	14
2.5.3 Επιπτώσεις του φαινομένου της υφαλμύρισης.....	14
2.5.4 Πολυπλοκότητα του φαινομένου της υφαλμύρισης.....	15
2.5.5 Τρόποι αντιμετώπισης της υφαλμύρισης.....	15
2.6 Θεωρήσεις διεπιφάνειας μεταξύ γλυκού και αλμυρού νερού.....	16
2.6.1 Η θεώρηση απότομης διεπιφάνειας (sharp interface).....	17
2.6.2 Θεώρηση υπόγειας ροής μεταβλητής πυκνότητας (variable density).....	18
2.7 Η προσέγγιση Ghyben – Herzberg.....	19
2.8 Ανάλυση κατά Strack.....	21
2.8.1 Αναλυτικές σχέσεις.....	22
2.9 Ύπαρξη φρέατος άντλησης – Επίλυση κατά Strack.....	27
2.10 Το μοντέλο απότομης διεπιφάνειας (Mantoglou et al. 2004).....	30
<b>3. ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ ΝΕΡΟΥ ΚΑΙ ΥΦΑΛΜΥΡΙΣΗΣ ΠΑΡΑΚΤΙΩΝ ΥΔΡΟΦΟΡΕΩΝ</b> .....	33
3.1 Παρουσίαση του MODFLOW.....	33
3.2 Λειτουργία του MODFLOW – Μαθηματική αναπαράσταση του μοντέλου.....	35
3.2.1 Διακριτοποίηση υδροφορέα.....	35
3.2.2 Η εξίσωση των πεπερασμένων διαφορών.....	37

3.2.3 Επαναληπτική διαδικασία για τον υπολογισμό του δυναμικού σε κάθε χρονικό βήμα.....	41
3.2.4 Αναδιαμόρφωση των εξισώσεων προς επίλυση.....	42
3.3 Προσομοίωση του υπό μελέτη υδροφορέα.....	43
3.3.1 Ο υδροφορέας προς προσομοίωση.....	43
3.3.2 Παράμετροι προσομοίωσης υδροφορέα.....	43
3.3.3 Εκτέλεση Modflow.....	45
<b>4. ΜΕΘΟΔΟΙ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΠΑΡΑΚΤΙΩΝ ΥΔΡΟΦΟΡΕΩΝ.....</b>	<b>46</b>
4.1 Γενικά.....	46
4.2 Κατηγορίες βελτιστοποίησης.....	46
4.3 Βελτιστοποίηση αντλήσεων σε δεδομένες θέσεις φρεάτων.....	48
4.4 Περιορισμοί της βελτιστοποίησης.....	49
4.4.1 Περιορισμός δυναμικού.....	49
4.4.2 Περιορισμός στη θέση του ποδιού της αλάτινης σφήνας.....	49
4.5 Μεθοδολογία που εφαρμόζεται στην παρούσα εργασία.....	51
4.5.1 Γενικά.....	51
4.5.2 Το υπολογιστικό περιβάλλον Matlab – Η βιβλιοθήκη βελτιστοποίησης (Optimization Toolbox).....	52
4.5.3 Η μέθοδος του Εσωτερικού Σημείου (Interior Point Method).....	53
4.5.3.1 Το άμεσο βήμα.....	54
4.5.3.2 Το CG βήμα.....	55
4.5.4 Η συνάρτηση fmincon.....	56
4.5.5 Παράμετροι εκτέλεσης και τερματισμού του προγράμματος.....	58
4.5.6 Συναρτήσεις Matlab που χρησιμοποιήθηκαν για την βελτιστοποίηση των αντλήσεων.....	59
<b>5. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΟΝ ΠΑΡΑΚΤΙΟ ΥΔΡΟΦΟΡΕΑ ΒΑΘΕΩΣ ΚΑΛΥΜΝΟΥ.....</b>	<b>61</b>
5.1 Περιγραφή του υδροφορέα του Βαθέως.....	61
5.2 Περιγραφή του μοντέλου του υδροφορέα του Βαθέως.....	64
5.3 Περιορισμοί για την αποφυγή της υφαλμύρισης.....	66
5.4 Βελτιστοποίηση των αντλήσεων στις υπάρχουσες θέσεις φρεάτων.....	67
5.5 Βελτιστοποίηση των αντλήσεων στις υπάρχουσες θέσεις των γεωτρήσεων με μεταβολή της υδραυλικής αγωγιμότητας.....	69
5.5.1 Βελτιστοποίηση των αντλήσεων με μειωμένη κατά 50% την υδραυλική αγωγιμότητα.....	70
5.5.2 Βελτιστοποίηση των αντλήσεων με διπλάσια υδραυλική αγωγιμότητα.....	71
5.6 Βελτιστοποίηση των αντλήσεων σε νέες θέσεις φρεάτων με μεταβολή της υδραυλικής αγωγιμότητας K.....	72
5.6.1 Πηγάδια συγκεντρωμένα στο εσωτερικό του υδροφορέα.....	72
5.6.1.1 Βελτιστοποίηση με την αρχική υδραυλική αγωγιμότητα στις νέες θέσεις.....	73
5.6.1.2 Βελτιστοποίηση με μείωση κατά 50% της αρχικής υδραυλικής αγωγιμότητας.....	74

5.6.1.3 Βελτιστοποίηση με διπλασιασμό της τιμής της αρχικής υδραυλικής αγωγιμότητας.....	75
5.6.2 Πηγάδια συγκεντρωμένα κοντά στην ακτή.....	76
5.6.2.1 Βελτιστοποίηση αντλήσεων με την αρχική υδραυλική αγωγιμότητα.....	77
5.6.2.2 Βελτιστοποίηση των αντλήσεων με μειούμενη κατά 50% υδραυλική αγωγιμότητα.....	77
5.6.2.3 Βελτιστοποίηση των αντλήσεων με την διπλάσια υδραυλική αγωγιμότητα.....	78
5.6.3 Πηγάδια διάσπαρτα σε όλη την έκταση του υδροφορέα.....	79
5.6.3.1 Βελτιστοποίηση με την αρχική υδραυλική αγωγιμότητα.....	80
5.6.3.2 Βελτιστοποίηση με μείωση 50% της αρχικής υδραυλικής αγωγιμότητας.....	80
5.6.3.3 Βελτιστοποίηση αντλήσεων με εφαρμογή διπλάσιας υδραυλικής αγωγιμότητας.....	81
5.7 Σύνοψη και Συμπεράσματα.....	83
<b>6. ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....</b>	<b>85</b>
6.1 Το φαινόμενο της υπαλμύρισης – Μοντέλα προσομοίωσης διεπιφάνειας και αναλυτικές σχέσεις.....	85
6.2 Μοντέλα προσομοίωσης κίνησης νερού – Βελτιστοποίηση των αντλήσεων..	86
6.3 Εφαρμογή στον παράκτιο υδροφορέα του Βαθέως Καλύμνου.....	87
<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....</b>	<b>90</b>

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Οι αυξημένες απαιτήσεις των ανθρώπων και γενικότερα των ανθρώπινων δραστηριοτήτων σε νερό έχουν οδηγήσει στην υπεράντληση των υπογείων υδροφορέων πράγμα το οποίο μπορεί να οδηγήσει σταδιακά στην υφαλμύρισή τους. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελούν οι υπόγειοι παράκτιοι υδροφορείς στα νησιά της Ελλάδας, όπου κατά τους θερινούς ειδικά μήνες οι ανάγκη για νερό είναι ιδιαίτερα αυξημένη λόγω της τουριστικής κίνησης.

Για να αποφευχθεί η υφαλμύριση των υδροφορέων, δηλαδή η διείσδυση θαλασσινού νερού σε αυτούς, είναι απαραίτητη η ανάπτυξη μοντέλων προσομοίωσης και η σύνταξη προγραμμάτων βελτιστοποίησης αντλήσεων προκειμένου να αντλούνται οι μέγιστες (βέλτιστες) ποσότητες υπογείου νερού αλλά παράλληλα να εξασφαλίζεται η προστασία τους από την εισροή θαλασσινού νερού.

Η διαχείριση των υπογείων υδροφορέων έχει αποτελέσει αντικείμενο μελέτης και έρευνας κατά το παρελθόν και συνεχίζει να αποτελεί ενδιαφέρον πεδίο έρευνας λόγω της σπουδαιότητας και χρησιμότητάς της. Ο Bear (1979) θεωρείται από τους πρωτοπόρους που ασχολήθηκαν με προβλήματα διαχείρισης και βελτιστοποίησης υπογείων υδροφορέων. Ο Gorelick (1983) ταξινόμησε σε κατηγορίες τα διάφορα μοντέλα διαχείρισης υδροφορέων και οι Gorelick et al (1983), ανέπτυξαν ένα μοντέλο ελαχίστων τετραγώνων και γραμμικού προγραμματισμού για την εύρεση πηγών μόλυνσης σε υπόγειους υδροφορείς.

Η θεώρηση που χρησιμοποιείται για την μελέτη του φαινομένου της υφαλμύρισης είναι αυτή της απότομης διεπιφάνειας - sharp interface (Emch & Yeh 1998, Cheng & Ouazar 1999, Cheng et al 2000, Mantoglou 2002) και είναι αυτή που χρησιμοποιείται και σε αυτήν την διπλωματική. Επίσης σε αυτήν την διπλωματική εφαρμόζεται και η ανάλυση κατά Strack (Strack 1976, Bear 1979 και Cheng & Ouazar 1999).

Όσον αφορά την βελτιστοποίηση, αυτή πραγματοποιείται κατά κύριο λόγο σε δεδομένες θέσεις φρεάτων. Η ανάλυση μπορεί να επεκταθεί υπολογίζοντας όχι μόνο τις βέλτιστες παροχές άντλησης σε δεδομένες θέσεις φρεάτων, αλλά ταυτόχρονο εντοπισμό των βέλτιστων θέσεων των φρεάτων σε συνδυασμό με την βέλτιστη τιμή άντλησης (Gorelick et al (1983) και Wang & Ahlfeld (1994)). Στην Ελλάδα, με το ζήτημα του εντοπισμού της βέλτιστης άντλησης και παράλληλα των βέλτιστων θέσεων των γεωτρήσεων έχουν ασχοληθεί κατά κύριο λόγο οι Mantoglou & Papantonίου (2008).

Η γραμμικότητα (Ahlfeld and Sawyer 1990, Hallaji and Yazicigil 1996, Mantoglou 2002) ή όχι (Gorelick et al. 1984, Shamir et al. 1984, Wang and Ahlfeld 1994, Hallaji and Yazicigil 1996, Emch and Yeh 1998, Mantoglou 2002) σε συνδυασμό με τη συνέχεια της συνάρτησης σκοπού, την ύπαρξη παραγώγων και τοπικών ελαχίστων καθορίζουν κάθε φορά την επιλεγόμενη μέθοδο βελτιστοποίησης.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετάται ο παράκτιος φρεάτιος υδροφορέας στον Βαθύ της Καλύμνου. Έχει δημιουργηθεί το μοντέλο του υδροφορέα μέσω του

προγράμματος PMWIN εισάγοντας τα γεωμετρικά του χαρακτηριστικά και τις υδρολογικές και υδραυλικές του παραμέτρους και πραγματοποιείται μέσω του Modflow η προσομοίωση της ροής του υπογείου νερού.

Τα παραπάνω δεδομένα του υπό προσομοίωση υδροφορέα αντλήθηκαν από την μεταπτυχιακή εργασία της Μαρίας Παπαντωνίου (2003).

Στη συνέχεια, πραγματοποιείται βελτιστοποίηση μέσω του υπολογιστικού περιβάλλοντος Matlab για την εύρεση της βέλτιστης παροχής άντλησης υπαρχουσών γεωτρήσεων και έπειτα σε διαφορετικές θέσεις, με ταυτόχρονη ποσοστιαία μεταβολή της υδραυλικής αγωγιμότητας σε όλη την έκταση του υδροφορέα με σκοπό να παρατηρηθεί και να αξιολογηθεί η επίπτωσή τους στην συνολική παροχή άντλησης υπογείου νερού.

Το πρόβλημα βελτιστοποίησης που αντιμετωπίζεται είναι μεσαίας κλίμακας υπό περιορισμούς με γραμμική αντικειμενική συνάρτηση. Οι βελτιστοποιήσεις έγιναν με την μέθοδο του Εσωτερικού Σημείου (Interior Point) με χρήση της συνάρτησης ελαχιστοποίησης `fmincon` του Matlab.

Οι περιορισμοί που τέθηκαν για την άντληση του υπογείου ύδατος αφορούν αποκλειστικά την αποτροπή της υπαλμύρισης των φρεάτων και δεν λαμβάνονται υπ' όψιν οικονομικοί παράγοντες.

Τα εναλλακτικά σενάρια που εξετάστηκαν, δίνουν πληροφορίες για τις επιπτώσεις της θέσης των γεωτρήσεων στην βέλτιστη άντληση, καθώς έγιναν δοκιμές με χωροθέτηση των φρεάτων μακριά από την ακτή, κοντά στην ακτή και διάσπαρτα σε όλη την επιφάνεια του υδροφορέα.

Η χωροθέτηση των γεωτρήσεων μακριά από την ακτή δίνει μεγάλη παροχή άντλησης και ταυτόχρονα κρατάει το μέτωπο του θαλασσινού νερού μακριά από τα φρέατα, αφού το πάχος του γλυκού νερού είναι μεγαλύτερο όσο απομακρυνόμαστε από την ακτή.

Αντιθέτως, χωροθέτηση πηγαδιών πολύ κοντά στην ακτή ή κοντά σε αδιαπέρατα όρια μας δίνει σαφώς μειωμένη βέλτιστη παροχή άντλησης, αφού αφενώς ελλοχεύει ο κίνδυνος για εισροή θαλασσινού νερού σε αυτά, αφετέρου πλησίον των αδιαπεράτων ορίων η ικανότητα άντλησης είναι μικρότερη λόγω του ότι η άμεση γειτνίαση του πηγαδιού με το αδιαπέρατο όριο περιορίζει το χωρικό πεδίο άντλησης.

Χωροθέτηση των πηγαδιών όμως σε ικανοποιητική απόσταση από την ακτή αλλά όχι μακρύτερα από 1 km, μας εξασφαλίζει μεγαλύτερη παροχή άντλησης απ' όταν τα φρέατα βρίσκονται πολύ μακριά (κοντά στα αδιαπέρατα όρια), καθώς βρίσκονται μακρύτερα από τα όρια του υδροφορέα και έχουν την δυνατότητα να παραλαμβάνουν μεγαλύτερη ποσότητα διηθούμενου νερού.

Επιπλέον, η αραιή διάταξη των πηγαδιών μας δίνει καλύτερα αποτελέσματα βέλτιστης παροχής άντλησης, αφού τυχόν φρέατα σε πολύ κοντινές αποστάσεις



μεταξύ τους συμπεριφέρονται ως ένα με αποτέλεσμα την επίτευξη σημαντικά χαμηλοτέρων παροχών άντλησης.

Τέλος, οι υδραυλικές παράμετροι όπως είναι η υδραυλική αγωγιμότητα, είναι ένας παράγοντας που επηρεάζει την βέλτιστη παροχή άντλησης. Μικρή τιμή της υδραυλικής αγωγιμότητας παρεμποδίζει την κίνηση του θαλασσινού νερού στο εσωτερικό του υδροφορέα επιτρέποντας την άντληση μεγαλύτερων ποσοτήτων άντλησης υπογείου νερού.

## ABSTRACT

The increasing demands of people and more generally the demands of the human activities referring to water, have led to the overpumpage of groundwater aquifers, which may lead them to their salinization. Typical examples are the coastal underground aquifers in the islands of Greece, where during the summer months, the need for water is particularly high because of tourism.

In order to avoid the salinization of the aquifers, which is the penetration of sea water into them, is necessary to develop simulation models as well as syntax of optimization programs in order to allege the maximum (optimal) quantities of ground water but also to ensure their protection from the influx of sea water.

The management of underground aquifers has been the subject of study and research in the past and continues to be an interesting field of research because of its importance and usefulness. Bear (1979) is considered one of the pioneers who worked with management problems and optimization of underground aquifers. Gorelick (1983) classified into categories the various aquifer management models, and Gorelick et al (1983) developed a least squares model of linear programming to find sources of contamination in underground aquifers.

The approach used to study the effect of salinity is the *sharp interface* (Emch & Yeh 1998, Cheng & Ouazar 1999, Cheng et al 2000, Mantoglou 2002) and is used in this subject. Also here applies the Strack analysis (Strack 1976, Bear 1979 and Cheng & Ouazar 1999).

Concerning the optimization, it takes place mainly at given positions wells. The analysis can be extended not only by calculating the optimal pumpage at specified locations of wells, but also simultaneous detection of the best position of the wells in conjunction with the optimum pumping rate (Gorelick et al (1983) and Wang & Halfeld (1994)). In Greece, with the issue of optimal pumpage and optimal well positions have dealt mainly Mantoglou and Papantoniou (2008).

The linearity (Ahlfeld and Sawyer 1990, Hallaj and Yazicigil 1996, Mantoglou 2002) or not (Gorelick et al. 1984, Shamir et al. 1984, Wang and Ahfeld 1994, Hallazi and Yazicigil 1996, Emch and Yeh 1998, Mantoglou 2002) combined with the continuity of the objective function, the existence of derivatives and local minima define each time the selected optimization method.

The present study deals with a coastal unconfined aquifer in the greek island of Calymnos. The model of the aquifer has been created through the program PMWIN using the geometrical features and hydrological and hydraulic parameters and then starts the simulation of the groundwater flow via Modflow program.

The data referring to the model of the aquifer were taken from the postgraduate thesis of Maria Papantoniou (2003).

Then, via the computing program Matlab, starts the optimization in order to obtain the optimal water supply at existing wells and then at different positions, with

[x]

simultaneous percentage alteration of the hydraulic conductivity throughout the aquifer in order to observe and evaluate their impact on the overall supply of groundwater pumpage.

The optimization problem encountered is medium-scale constrained with a linear objective function. The optimizations were made with the method of Interior Point using `fmincon` function of Matlab.

The restrictions set for pumpage relate solely to prevent salinization of wells and does not take into account economic factors, but only environmental.

The scenarios considered, give information on the effects of the position of the wells, as there were attempts with placing wells away from the coast, near shore and scattered across the surface of the aquifer.

Placing wells away from the coast gives a great total flow pumpage while holding the front of sea water away from the wells, since the thickness of freshwater is bigger as we move far from the coast.

On the contrary, placing wells near the coast or near impermeable boundaries gives us clearly reduced optimal supply pumpage because we run the risk of influx of seawater to the interior of the aquifer. Also, near impermeable boundaries pumping capacity is smaller because the immediate vicinity of the well with impervious limit restricts the spatial pumping field.

Placing wells not very far from the coast, but also at a satisfying and safe distance from the coast (~ 1 km), allows a bigger amount of groundwater to be pumped. That happens because at that specific point which is far from the boundaries of the aquifer wells have the ability to obtain greater quantities of infiltrated water.

Finally, the sparse arrangement of the wells gives good results at the optimum flow pumping, since any wells at very short distances between them behave as one, achieving remarkably lower pumping rates.

Furthermore, the hydraulic parameters such as the hydraulic conductivity, is a factor which affects the optimal water supply. Small value of hydraulic conductivity prevents movement of sea water inside the aquifer allowing larger pumped groundwater quantities.

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο εισαγωγικό αυτό κεφάλαιο παρουσιάζεται το αντικείμενο της παρούσας εργασίας και αναλύεται η δομή της.

### 1.1 Αντικείμενο της διπλωματικής εργασίας

Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματεύεται τις επιπτώσεις που έχει η μεταβολή της σπουδαιότερης παραμέτρου ενός υπογείου υδροφορέα, της υδραυλικής αγωγιμότητας στην συνολική παροχή άντλησης, σε συνδυασμό με την θέση των φρεάτων.

Για την πραγματοποίηση των άνωθι εργασιών, χρησιμοποιήθηκε ένα μοντέλο προσομοίωσης που αναπαριστά την λειτουργία του υδροφορέα. Το μοντέλο αυτό δημιουργήθηκε μέσω των προγραμμάτων PMWIN και Modflow. Ο υπό μελέτη υδροφορέας βρίσκεται στον Βαθύ της Καλύμνου και πρόκειται για έναν φρεάτιο υδροφορέα με διαφορετικές τιμές υδραυλικής αγωγιμότητας στην έκτασή του.

Το μοντέλο που χρησιμοποιήθηκε για τον εν λόγω υδροφορέα καθώς και οι υδρολογικές και υδραυλικές του παράμετροι αντλήθηκαν από την μεταπτυχιακή εργασία Παπαντωνίου (2003).

Οι βελτιστοποιήσεις έγιναν στο περιβάλλον Matlab και ο αλγόριθμος που χρησιμοποιήθηκε ήταν η μέθοδος του Εσωτερικού Σημείου (Interior Point Method).

Η μεταβολή της υδραυλικής αγωγιμότητας έγινε σε συνδυασμό με την αλλαγή θέσεων των φρεάτων και μεταβλήθηκε ποσοστιαία πρώτα κατά το ήμισυ και έπειτα στο διπλάσιο, προκειμένου να αποτιμηθεί η επιρροή της στην βέλτιστη παροχή άντλησης από τα φρέατα.

Οι βελτιστοποιήσεις πραγματοποιήθηκαν υπό δύο περιορισμούς που στόχευαν αποκλειστικά στην προστασία των φρεάτων από την υφαλμύριση. Οικονομικοί και λειτουργικοί παράγοντες δεν λήφθηκαν υπ' όψη.

Αρχικά πραγματοποιήθηκαν βελτιστοποιήσεις με μεταβολή της υδραυλικής αγωγιμότητας στις ήδη υπάρχουσες 11 γεωτρήσεις (Παπαντωνίου 2003) και στη συνέχεια δομήθηκαν τρία σενάρια με διαφορετικές, νέες ενδεχόμενες θέσεις γεωτρήσεων (10 στον αριθμό), όπου εξετάστηκε και γι' αυτές η επίδραση της αλλαγής της αγωγιμότητας.

Τα τρία σενάρια που δομήθηκαν αφορούσαν γεωτρήσεις κοντά στην ακτή, έπειτα γεωτρήσεις μακριά από την ακτή και τέλος γεωτρήσεις διάσπαρτες σε όλη την επιφάνεια του υδροφορέα.

## 1.2 Δομή και οργάνωση της εργασίας

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζεται το αντικείμενο της διπλωματικής εργασίας και αναλύεται η δομή της και ο διαχωρισμός της σε κεφάλαια.

Στο δεύτερο κεφάλαιο επισημαίνονται οι βασικές αρχές και μαθηματικές σχέσεις που διέπουν τις υπόγειες ροές των υδάτων. Έπειτα, επεξηγείται το πρόβλημα της υφαλμύρισης παρακτίων υδροφορέων και παρατίθενται τα αίτια και οι επιπτώσεις της καθώς και τρόποι αντιμετώπισής της.

Στη συνέχεια παρατίθενται οι πλέον επικρατέστερες θεωρήσεις για την μορφή της διεπιφάνειας. Παρουσιάζεται η προσέγγιση Ghyben – Herzberg η οποία συσχετίζει την θέση και το σχήμα της διεπιφάνειας με τις υδρολογικές παραμέτρους του υδροφορέα και στη συνέχεια παρουσιάζεται η ανάλυση κατά Strack στην οποία βασίζεται η μελέτη της κίνησης του μετώπου του θαλασσινού νερού αναλόγως της παροχής άντλησης. Τέλος παρουσιάζεται το μοντέλο απότομης διεπιφάνειας (Mantoglou et al 2004) το οποίο και είναι αυτό που χρησιμοποιείται στην παρούσα εργασία.

Ακολουθεί το τρίτο κεφάλαιο όπου εισάγονται οι έννοιες της προσομοίωσης και παρουσιάζεται το πρόγραμμα προσομοίωσης PMWIN το οποίο σε συνεργασία με το Modflow αναπαριστούν την λειτουργία του υπογείου υδροφορέα με δεδομένα τα γεωμετρικά του χαρακτηριστικά, τις αρχικές και οριακές συνθήκες λειτουργίας του καθώς και τις υδρολογικές και υδραυλικές του παραμέτρους. Το πρόβλημα της υφαλμύρισης αναλύεται τελικά σε ένα πρόβλημα ροής ενός περιορισμένου υδροφορέα, αφού η εξίσωση που επιλύει το εν λόγω πρόγραμμα είναι αντίστοιχη με αυτήν για την υφαλμύρωση με την μόνη διαφορά ότι η πρώτη χρησιμοποιεί το πιεζομετρικό φορτίο αντί του δυναμικού κατά Strack και την μεταφορικότητα αντί της υδραυλικής αγωγιμότητας.

Στο τέταρτο κεφάλαιο αναλύεται η έννοια της βελτιστοποίησης και παρουσιάζονται διάφορες κατηγορίες βελτιστοποίησης ανάλογα με το προς επίλυση πρόβλημα. Το πρόβλημα που εξετάζεται στην παρούσα εργασία ανήκει στην κατηγορία των μη γραμμικών προβλημάτων υπό περιορισμούς. Περιγράφεται ο χρησιμοποιηθείς αλγόριθμος και η συνάρτηση Matlab που χρησιμοποιήθηκε για τις βελτιστοποιήσεις.

Το επόμενο κεφάλαιο, το πέμπτο, εστιάζεται στην πρακτική εφαρμογή στον φρεάτιο υδροφορέα του Βαθέως Καλύμνου. Αρχικά, πραγματοποιούνται βελτιστοποιήσεις στις ήδη υπάρχουσες γεωτρήσεις και έπειτα, σε νέες θέσεις γεωτρήσεων πραγματοποιούνται βελτιστοποιήσεις με ταυτόχρονη μείωση ή αύξηση της υδραυλικής αγωγιμότητας. Παρατηρείται ότι σε όλα τα σενάρια, η μικρότερη τιμή της υδραυλικής αγωγιμότητας αποδίδει την μεγαλύτερη ποσότητα άντλησης σε κάθε περίπτωση. Αυτό συμβαίνει, καθώς μικρές τιμές της υδραυλικής αγωγιμότητας συνδράμουν στην αντίσταση της εισόδου του μετώπου του θαλασσινού νερού προς το εσωτερικό του υδροφορέα.

Στο τελευταίο κεφάλαιο παρουσιάζεται μία ανασκόπηση της εργασίας και τα συμπεράσματα που εξήχθησαν από την πρακτική εφαρμογή των βελτιστοποιήσεων.

## ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΙΝΗΣΗΣ ΥΠΟΓΕΙΟΥ ΝΕΡΟΥ - ΥΦΑΛΜΥΡΙΣΗ ΠΑΡΑΚΤΙΩΝ ΥΔΡΟΦΟΡΕΩΝ

Στο κεφάλαιο που ακολουθεί δίνεται ένας ορισμός για την έννοια του υδροφορέα και τα είδη που συναντώνται, παρουσιάζονται οι βασικές σχέσεις οι οποίες διέπουν την υπόγεια ροή και επεξηγείται η έννοια της υφαλμύρισης των υπογείων υδάτων καθώς και τα μοντέλα που έχουν αναπτυχθεί για την αντιμετώπισή της.

### 2.1 Υπόγεια νερά – Υδροφορείς

Υδροφορείς ή υδροφόροι (aquifers) είναι γεωλογικοί σχηματισμοί που περιέχουν αρκετό κορεσμένο με νερό υλικό, ώστε να τροφοδοτήσουν με σημαντικές ποσότητες νερού γεωτρήσεις ή πηγές. Οι υδροφορείς έχουν αυξημένη ικανότητα να αποθηκεύουν και να μεταβιβάζουν νερό.

Το υδροφόρο στρώμα αποτελείται από τον γεωλογικό σχηματισμό (σκελετό) και το υπεδάφικό νερό, που βρίσκεται σε βαρυτική μορφή και ως νερό συγκράτησης. Ως υδροφόρος ορίζοντας θεωρείται η άνω επιφάνεια του υδροφορέα.

Οι κυριότεροι τύποι υπογείων υδροφορέων είναι οι εξής:

#### - Ελεύθεροι ή φρεάτιοι υδροφορείς

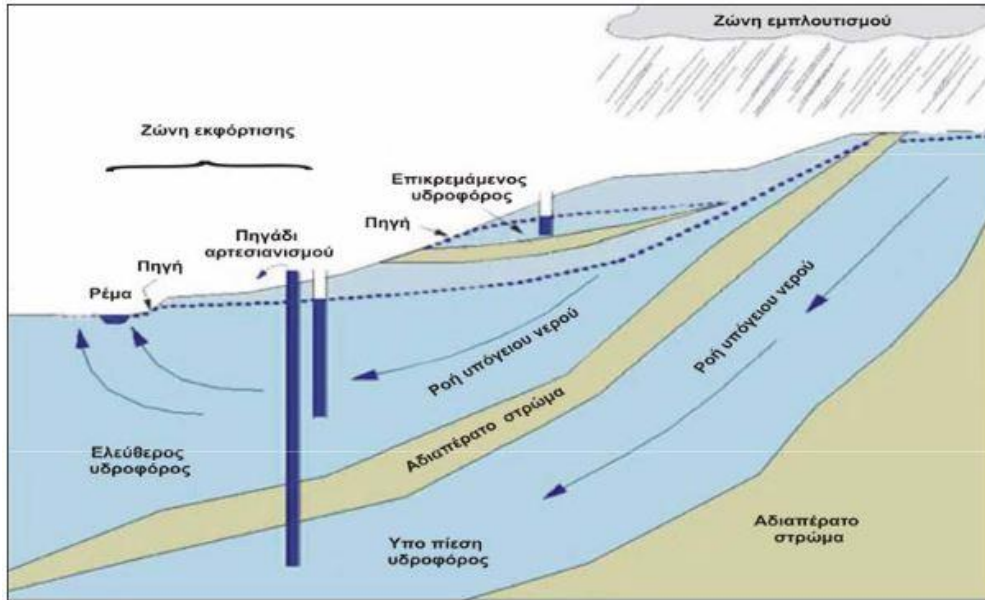
Είναι οι υδροφορείς που έχουν ως κάτω όριο αδιαπέρατο στρώμα ενώ άνω όριο είναι η ελεύθερη επιφάνεια του υπογείου νερού.

#### - Υπό πίεση ή περιορισμένοι υδροφορείς

Είναι οι υδροφορείς οι οποίοι περιορίζονται από πάνω και από κάτω από αδιαπέρατους γεωλογικούς σχηματισμούς. Είναι κορεσμένοι σε όλο το πάχος τους και η πίεση του νερού είναι μεγαλύτερη της ατμοσφαιρικής. Για τον λόγο αυτό, η *πιεζομετρική επιφάνεια* (ιδεατή επιφάνεια), βρίσκεται υψηλότερα της βάσης της αδιαπέρατης οροφής. Χαρακτηριστικό αυτών των υδροφορέων είναι πώς όταν η πιεζομετρική επιφάνεια βρεθεί πάνω από την επιφάνεια του εδάφους, παρατηρείται ροή με την μορφή πίδακα (αρτεσιανισμός).

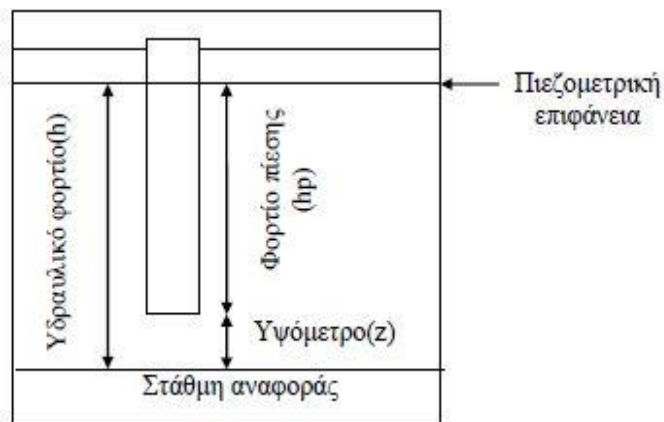
- Ημιαρτεσιανοί (υπό μερική πίεση) υδροφορείς

Πρόκειται για υδροφορείς αναλόγους με τους υπό πίεση με την διαφορά ότι το υπερκείμενο στρώμα είναι ημιπερατό, παρουσιάζει δηλαδή μικρή υδατοπερατότητα.



Σχήμα 2.1: Είδη υδροφορέων

Τα υπόγεια νερά κινούνται υπό την επίδραση της συνολικής ενέργειας που φέρουν. Η ενέργεια αυτή (υδραυλικό φορτίο) είναι ίση με το άθροισμα του φορτίου πίεσης  $p/\gamma$  και του φορτίου ύψους  $z$ , δηλαδή της απόστασης από το επίπεδο αναφοράς, όπου  $p$  η υδροστατική πίεση και  $\gamma$  το ειδικό βάρος του νερού. Το φορτίο  $H$  αναφέρεται και ως πιεζομετρικό φορτίο και ταυτίζεται με το απόλυτο υψόμετρο της στάθμης του υπογείου νερού σε μια γεώτρηση ανορυγμένη σε ελεύθερο υδροφορέα.



Σχήμα 2.2: Το υδραυλικό φορτίο και οι συνιστώσες του (Πηγή: Παπαντωνίου 2003)

Στους υπό πίεση υδροφορείς το φορτίο είναι το απόλυτο υψόμετρο που θα έφτανε το νερό αν ο σωλήνας της γεώτρησης επεκτεινόταν πάνω από την επιφάνεια του εδάφους. Έτσι, η κίνηση του υπογείου νερού σε ένα πορώδες μέσο οφείλεται στην υδροστατική πίεση και στη θέση του ως προς το επίπεδο αναφοράς.

## 2.2 Υδραυλική θεώρηση των υπογείων ροών

Η κίνηση του υπογείου νερού γίνεται σε χώρο τριών διαστάσεων. Εξαιτίας όμως της ειδικής γεωμετρίας που συναντάμε στους υπόγειους υδροφορείς είναι δυνατό η κίνηση των υπογείων νερών με πολύ καλή προσέγγιση να αντιμετωπίζεται ως ροή σε χώρο δύο διαστάσεων ( $x, y$ ). Το γεγονός ότι στην πραγματικότητα το πάχος των υπογείων υδροφορέων είναι κατά πολύ μικρότερο από τις οριζόντιες διαστάσεις τους ευνοεί την θεώρηση της δισδιάστατης ροής.

Γίνεται παντού λοιπόν η υπόθεση ότι η ροή του νερού γίνεται παντού παράλληλα με το οριζόντιο επίπεδο, επομένως αγνοούνται οι κατακόρυφες συνιστώσες της ταχύτητας. Μαθηματικά αυτό εκφράζεται με ολοκλήρωση των διαφορικών εξισώσεων ροής κατά την κατακόρυφη διεύθυνση, ως προς το πάχος του υδροφορέα δηλαδή.

Τυπική περίπτωση απόλυτης ισχύος της υπόθεσης αποτελεί η ροή σε οριζόντιους περιορισμένους υδροφορείς, ενώ περιπτώσεις σημαντικής απόκλισης από την παραδοχή οριζόντιας ροής εμφανίζονται κυρίως τοπικά όπως παραδείγματος χάριν σε πηγάδια, πηγές κτλ.

Και σε αυτές τις περιπτώσεις όμως γίνεται η εκτίμηση πως η παράλειψη της κατακόρυφης συνιστώσας της ροής δεν προκαλεί ουσιαστικά σφάλματα σε αποστάσεις από τα σημεία αυτά μεγαλύτερες από το διπλάσιο του πάχους του υδροφορέα.

## 2.3 Υδραυλικές παράμετροι των υδροφορέων

Οι βασικότερες παράμετροι ενός υπόγειου υδροφορέα είναι οι εξής (Λατινόπουλος 1986):

### • Υδραυλική αγωγιμότητα $K$ – Hydraulic Conductivity ( $L T^{-1}$ )

Η υδραυλική αγωγιμότητα είναι η έκφραση της ευκολίας ή της δυσκολίας με την οποία ένα ρευστό ρέει δια μέσου των δομικών κενών ενός στερεού μέσου. Εκφράζεται σε μονάδες ταχύτητας και εξαρτάται τόσο από το πορώδες μέσο, όσο και από το ρευστό.

### • Μεταφορικότητα ή Παροχτευτικότητα ( $L^2 T^{-1}$ )

Ορίζεται ως η παροχή νερού που περνάει από ένα μοναδιαίο πλάτος του υδροφορέα κατά μήκος όλου του πάχους του, εξαιτίας μιας μοναδιαίας κλίσης του υδραυλικού φορτίου. Άρα λοιπόν, η μεταφορικότητα είναι το γινόμενο της υδραυλικής



αγωγιμότητας  $K$  επί το πάχος  $b$  της κορεσμένης ζώνης, δηλαδή  $T=Kb$ .  
(Λατινόπουλος, Υδραυλική των Υπογείων Ροών 1986).

Η έννοια της μεταφορικότητας αφορά τις δισδιάστατες οριζόντιες ροές και συνήθως χρησιμοποιείται για περιορισμένους υδροφορείς.

#### • Ομογένεια και Ισοτροπία

Ένας υδροφορέας λέγεται ότι έχει την ιδιότητα της ομογένειας ή ότι το πορώδες μέσο που τον αποτελεί είναι ομογενές όταν η διαπερατότητά του είναι σε κάθε σημείο η ίδια. Αντίθετα, όταν η τιμή της μεταβάλλεται στον χώρο, τότε το μέσο ονομάζεται ανομογενές. Όσον αφορά την ισοτροπία, ισότροπο λέγεται το μέσο αν σε κάθε σημείο η διαπερατότητα είναι ανεξάρτητη από τη διεύθυνση, ενώ στην αντίθετη περίπτωση το μέσο χαρακτηρίζεται ως ανισότροπο. (Λατινόπουλος, Υδραυλική των Υπογείων Ροών 1986).

#### • Αποθηκευτικότητα $S$

Η παράμετρος αυτή διαφέρει στους περιορισμένους και στους ελεύθερους υδροφορείς.

Για περιορισμένο υδροφορέα η αποθηκευτικότητα ορίζεται ως ο όγκος του νερού  $\Delta U$  που απομακρύνεται (ή προστίθεται) από την μονάδα οριζόντιας επιφάνειας  $A$  του υδροφορέα εξαιτίας μοναδιαίας πτώσης (ή αύξησης)  $\Delta\phi$  του πιεζομετρικού φορτίου. Έτσι, η αποθηκευτικότητα ορίζεται από την σχέση  $S = \Delta U/A\delta\phi$ .

Αντίστοιχα για φρεάτιο υδροφορέα, η αποθηκευτικότητα ορίζεται ως ο όγκος νερού που απομακρύνεται από την μονάδα οριζόντιας επιφάνειας  $A$  του υδροφορέα εξαιτίας πτώσης της ελεύθερης επιφάνειάς του, οπότε έχουμε  $S = \Delta U/A\Delta h$ . Είναι προφανές ότι η αποθηκευτικότητα των φρεατίων υδροφορέων (και κατ'επέκτασιν ο όγκος νερού που απομακρύνεται), είναι πολύ μεγαλύτερη από την αποθηκευτικότητα των ίδιων γεωλογικών σχηματισμών κάτω από συνθήκες ροής υπό πίεση (Λατινόπουλος 1986).

Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι στον υπό πίεση υδροφορέα η απομάκρυνση του νερού οφείλεται στη συμπίεστίτητα του στερεού σκελετού, ενώ στον φρεάτιο υδροφορέα σημαίνει απομάκρυνση ή μεταφορά νερού με βαρύτητα.

## 2.4 Το μαθηματικό πρόβλημα των υπογείων ροών

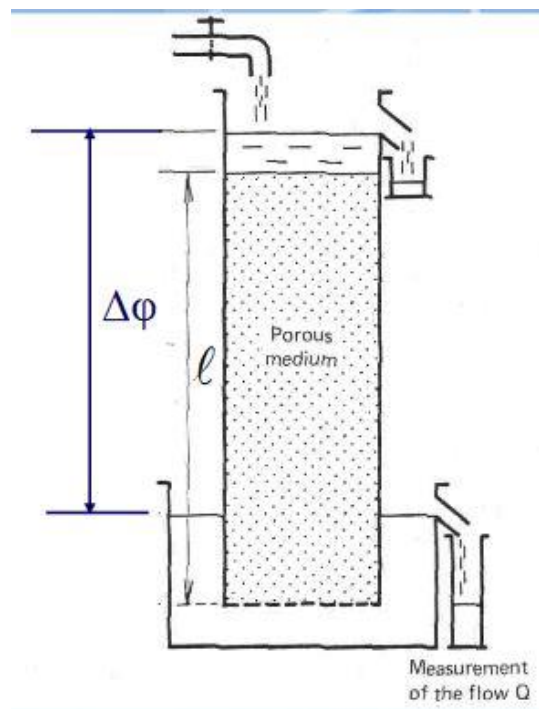
Σε αυτό το υποκεφάλαιο επεξηγούνται οι βασικές εξισώσεις που διέπουν την κίνηση των υπογείων νερών.

### 2.4.1 Οι εξισώσεις κίνησης – Ο νόμος του Darcy

Το υπόγειο νερό κινείται διαρκώς στα υπόγεια υδροφόρα στρώματα από περιοχές μεγάλης ενέργειας σε περιοχές μικρότερης ενέργειας. Χαρακτηριστικό της κίνησης

αυτής είναι μεν πως οι ταχύτητες κίνησης του νερού είναι πολύ μικρές, οι διατομές όμως μέσα από τις οποίες το νερό κινείται είναι πολύ μεγάλες και τελικά οι όγκοι που μετακινούνται είναι πολύ μεγάλοι.

Ο Γάλλος υδραυλικός μηχανικός Henry Darcy (1856) μελέτησε τη ροή μέσα από στρώματα άμμου που χρησιμοποιούνταν για φίλτρα νερού και τελικά διατύπωσε μια σχέση που επρόκειτο να αποτελέσει θεμελιώδη νόμο της υδραυλικής των υπογείων ροών.



Σχήμα 2.3: Η πειραματική συσκευή του Darcy (Πηγή: Α. Νάνου 2007)

Ο νόμος αυτός διατυπώνεται ως εξής: « Η παροχή της ροής που περνάει από μία διατομή ενός πορώδους μέσου είναι ανάλογη του εμβαδού της διατομής αυτής, ανάλογη της διαφοράς της πίεσης μεταξύ των δύο θέσεων και αντιστρόφως ανάλογη της απόστασής τους ».

Ο τύπος για την κατακόρυφη διήθηση είναι:  $Q = KA(\varphi_1 - \varphi_2)/L$ , με K την υδραυλική αγωγιμότητα, A το εμβαδόν της διατομής, L την απόσταση μεταξύ δύο θέσεων και  $\varphi$  τα φορτία τα οποία μετρώνται από ένα αυθαίρετο οριζόντιο σύστημα αναφοράς.

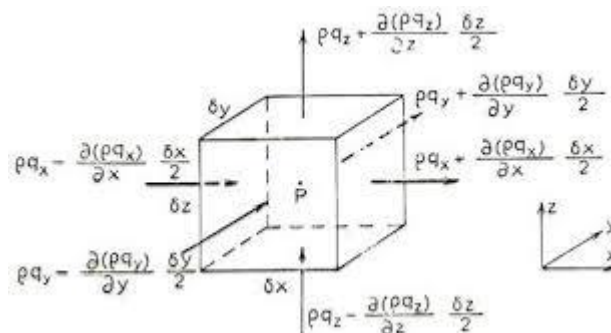
Ο νόμος του Darcy, ως εμπειρικός νόμος, δεν έχει απεριόριστα όρια εφαρμογής. Ισχύει μόνο όταν ο αριθμός Reynolds ( $Re = q \cdot d / \nu$ ) στις ροές σε πορώδες υλικό παίρνει τιμές από 1 έως 10.

## 2.4.2 Η εξίσωση συνεχείας

Εκτός από τις εξισώσεις κίνησης οι οποίες περιγράφονται από τον νόμο του Darcy υπάρχει και μία επιπλέον εξίσωση, η εξίσωση διατήρησης της μάζας ή *εξίσωση συνεχείας* (Λατινόπουλος, Υδραυλική των Υπογείων Ροών, 1986).

Για την διατύπωση της εξίσωσης συνεχείας θεωρούμε ένα στοιχειώδες παραλληλεπίπεδο πορώδους υλικού που είναι τελείως κορεσμένο με ρευστό πυκνότητας  $\rho$ .

Η εξίσωση συνεχείας μπορεί να διατυπωθεί υπολογίζοντας το ισοζύγιο της μάζας που περνάει ή παραμένει στον στοιχειώδη αυτόν όγκο. Η συνολική εισροή μάζας που μπαίνει στο στοιχειώδες παραλληλεπίπεδο ισούται με την συνολική ροή μάζας που βγαίνει από αυτό συν την μεταβολή στο χρόνο της μάζας που βρίσκεται αποθηκευμένη σε αυτό.



Σχήμα 2.4: Στοιχειώδες παραλληλεπίπεδο πορώδους μέσου κορεσμένου με ρευστό πυκνότητας  $\rho$ . (Πηγή: Λατινόπουλος, 1986)

Αν οι συνιστώσες της ειδικής παροχής είναι  $q_x$ ,  $q_y$  και  $q_z$ , η μάζα του νερού που περνάει πρέπει να υπολογισθεί από τις μεταβολές των συνιστωσών αυτών. Επιπλέον, αφού και η πυκνότητα είναι συνάρτηση των χωρικών συντεταγμένων ( $\rho = \rho(x, y, z)$ ) και για τον στοιχειώδη όγκο η διεύθυνση της ταχύτητας ροής δεν διαφέρει από αυτήν της ειδικής παροχής, χρησιμοποιούνται τελικά τα γινόμενα  $\rho q_x$ ,  $\rho q_y$  και  $\rho q_z$  για να υπολογίσουμε τη μάζα του νερού που περνάει από κάθε πλευρά του παραλληλεπιπέδου.

Αναπτύσσοντας σε σειρές Taylor τις παραπάνω ποσότητες γύρω από το σημείο P, καταλήγουμε στις τιμές των ποσοτήτων  $\rho q$  που φαίνονται στο παραπάνω σχήμα. (Λατινόπουλος, 1986).

Η αρχή της διατήρησης της μάζας για το σημείο P ( $x, y, z$ ) διατυπώνεται τελικά ως εξής (Παπαντωνίου 2003):

$$\frac{\partial(\rho q_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho q_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho q_z)}{\partial z} = - \frac{\partial(\rho n)}{\partial t} \quad (2.1)$$

όπου  $\rho$  η πυκνότητα του νερού και  $n$  το πορώδες του υλικού.

Όταν η ροή είναι μόνιμη, το δεύτερο μέλος της παραπάνω εξίσωσης είναι ίσο με 0, καθώς δεν υπάρχει μεταβολή της ροής ως προς τον χρόνο.

Η παραπάνω γενική εξίσωση τροποποιείται ανάλογα με το αν μελετούμε περιορισμένο ή φρεάτιο υδροφορέα, με τρισδιάστατη ή δισδιάστατη ροή ή αν ο προς μελέτη υδροφορέας είναι ομογενής, ισότροπος ή όχι.

Έτσι, η παραπάνω εξίσωση συνεχείας για περιορισμένο υδροφορέα για τρισδιάστατη ροή παίρνει τις εξής μορφές ανάλογα με τις υδραυλικές του παραμέτρους :

- Μη ομογενής περιορισμένος υδροφορέας:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( T_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( T_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = -S_s \frac{\partial \varphi}{\partial t} + Q \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( T \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = -S_s \frac{\partial \varphi}{\partial t} + Q \quad (2.3)$$

- Ομογενής περιορισμένος υδροφορέας:

$$T_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + T_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + T_z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -S_s \frac{\partial \varphi}{\partial t} + Q \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{S_s}{T} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + Q \quad (2.5)$$

όπου:

- $S$  είναι η αποθηκευτικότητα του περιορισμένου υδροφορέα (αδιάστατο μέγεθος)
- $T_x$  η μεταφορικότητα κατά την διεύθυνση  $x$  και  $T_y$  η μεταφορικότητα κατά την διεύθυνση  $y$  ( $L^2T^{-1}$ )
- $Q$  η συνολική παροχή άντλησης ή τροφοδοσίας ( $L^3T^{-1}$ ).

Εάν πρόκειται για παροχή άντλησης (πηγάδια άντλησης) έχει θετικό πρόσημο, ενώ εάν πρόκειται για παροχή τροφοδοσίας (πηγάδια φόρτισης) ή παροχή διήθησης, το πρόσημό της είναι θετικό.

Κατ' αντιστοιχίαν και για φρεάτιο υδροφορέα, η εξίσωση συνέχειας παίρνει την εξής μορφή (τρισδιάστατη ροή) :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K_x h \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_y h \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z h \frac{\partial h}{\partial z} \right) = S \frac{\partial h}{\partial t} + Q \quad (2.6)$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι γενικής μορφής και ισχύει για ανομογενή και ανισότροπο φρεάτιο υδροφορέα, όπου S είναι η φρεάτια αποθηκευτικότητα (αδιάστατο μέγεθος) και Q το σύνολο των παροχών άντλησης και τροφοδοσίας.

Στην περίπτωση ομογενούς και ισότροπου φρεάτιου υδροφορέα, η (2.5) γράφεται:

$$K \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( h \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( h \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( h \frac{\partial h}{\partial z} \right) \right) = S \frac{\partial h}{\partial t} + Q \quad (2.7 - \text{Εξ. Boussinesq})$$

Όταν οι μεταβολές στην στάθμη της ελεύθερης επιφάνειας είναι πολύ μικρές σε σχέση με το συνολικό πάχος του υδροφορέα, χρησιμοποιείται η απλουστευμένη προσέγγιση της (2.7), η οποία δίνει πολύ καλά αποτελέσματα:

$$K h \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right) = -S \frac{\partial h}{\partial t} + Q \quad (2.8)$$

και πιο συχνά για δισδιάστατη ροή:

$$K h \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) = -S \frac{\partial h}{\partial t} + Q \quad (2.9)$$

Για την περίπτωση της μόνιμης ροής σε ισότροπο και ομογενή υδροφορέα, η εξίσωση συνεχείας καταλήγει στην εξίσωση Laplace (όπου φ εδώ το δυναμικό):

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.10)$$

και αν ακόμα γίνει η υπόθεση της οριζόντιας ροής:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (2.11)$$

Η παραπάνω εξίσωση Laplace γενικεύεται ώστε να συμπεριλάβει την επιφανειακή τροφοδοσία  $N$  και το σύνολο των αντλήσεων  $Q_w$  :

$$K \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + N - Q_w = 0 \quad (2.12)$$

Η εξίσωση αυτή (2.12) είναι όμοια με την εξίσωση οριζόντιας ροής για ομογενή και ισότροπο *περιορισμένο* υδροφορέα:

$$T \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + N - Q_w = 0 \quad (2.13)$$

με τη διαφορά ότι αντί της υδραυλικής αγωγιμότητας χρησιμοποιείται η μεταφορικότητα  $T$  του περιορισμένου υδροφορέα, και αντί του δυναμικού που χρησιμοποιείται στην εξίσωση (2.12) χρησιμοποιείται το πιεζομετρικό φορτίο  $\varphi$ .

### 2.4.3 Αρχικές και οριακές συνθήκες

Εφ'όσον έχουν δοθεί στο προηγούμενο υποκεφάλαιο οι διαφορικές εξισώσεις για διάφορα προβλήματα ροής σε υπόγειους υδροφορείς και αφού επιλέγεται η εξίσωση που προσομοιάζει καλύτερα τη ροή σε κάθε πρόβλημα, είναι αναγκαίο να οριστούν κάποιες επιπλέον παράμετροι και συνθήκες, ούτως ώστε να ολοκληρωθεί ο ορισμός του εκάστοτε προβλήματος υπόγειας ροής.

Τα στοιχεία που θα πρέπει επιπλέον να ορισθούν είναι (Λατινόπουλος, 1986):

(α) *Γεωμετρικά όρια του πεδίου ροής*, δηλαδή λίμνες, ποτάμια κτλ τα οποία συνορεύουν με τον υπό μελέτη υδροφορέα,

(β) *Τιμές των φυσικών παραμέτρων του υδροφορέα* όπως υδραυλική αγωγιμότητα, αποθηκευτικότητα κ.λπ,

(γ) *Αρχικές συνθήκες* . Οι συνθήκες αυτές αφορούν καθορισμό του πιεζομετρικού φορτίου  $\varphi$  (ή του ύψους  $h$  αν πρόκειται για ελεύθερο υδροφορέα) σε μια δεδομένη αρχική στιγμή του προβλήματος ροής.

(δ) *Οριακές συνθήκες* . Πρόκειται για μαθηματικές σχέσεις οι οποίες καθορίζουν τον τρόπο επικοινωνίας του ρευστού με το περιβάλλον του.

Από μαθηματικής πλευράς, τρεις είναι οι τύποι των οριακών συνθηκών:

- Συνθήκες για την μεταβλητή του προβλήματος ή συνθήκες Dirichlet.

Εφαρμόζεται όταν σε κάποιο όριο του υδροφορέα το υδραυλικό φορτίο είναι ανεξάρτητο από τις συνθήκες ροής στον υδροφορέα. Αυτό συνήθως συμβαίνει όταν ο υδροφορέας είναι σε άμεση υδραυλική επικοινωνία με ποταμό, λίμνη ή θάλασσα όπου η μεταβολή της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειάς τους είναι γνωστή.

- Συνθήκες για την παράγωγο της μεταβλητής ή συνθήκες Neumann.

Χρησιμοποιούνται όταν υπάρχει όριο σταθερής παροχής. Κλασσική περίπτωση το αδιαπέρατο όριο, όπου η παροχή είναι μηδενική.

- Συνθήκες για συνδυασμό της μεταβλητής και της παραγώγου της ή συνθήκες Cauchy.

Αφορά ημιπερατά όρια υδροφορέων τα οποία είναι κάθετα στη διεύθυνση ροής (την οριζόντια), σε αντίθεση με την θεωρία υδροφορέων με διαρροή, όπου τα ημιπερατά όρια θεωρούνται οριζόντια (παράλληλα με την ταχύτητα ροής).

Χαρακτηριστικό παράδειγμα αφορά κοίτη ποταμού ή λίμνης, όπου από απόθεση λεπτόκοκκων υλικών, ένα μέρος της ή ολόκληρη έχει φράξει μερικά και άρα δημιουργεί μικρή αντίσταση στη ροή. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την ελάττωση της διηθούμενης παροχής μεταξύ υδροφορέα και ποταμού και τη δημιουργία διαφοράς στην στάθμη ποταμού και φορτίου του υδροφορέα αμέσως μετά το ημιπερατό στρώμα. (Λατινόπουλος, 1986).

#### 2.4.4 Δίκτυα γραμμών ροής και δυναμικού

Σε ομογενή και ισότροπο υδροφορέα, η εξίσωση μόνιμης ροής περιγράφεται από την εξίσωση Laplace (2.10) αναφερόμενοι σε οριζόντια ροή, δηλαδή σε δισδιάστατα πεδία (Λατινόπουλος 1986).

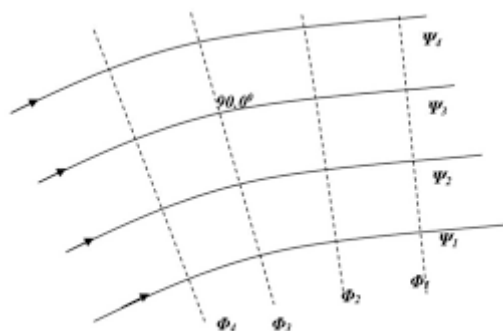
Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση δυναμικού  $\Phi = K\phi$ , αυτή μπορεί επίσης να γραφεί ως μια εξίσωση Laplace με άγνωστη μεταβλητή τη συνάρτηση δυναμικού  $\Phi$  και επομένως η συνάρτηση  $\Phi$  είναι αρμονική, αφού ικανοποιεί την εξίσωση Laplace.

Οι καμπύλες του επιπέδου  $x-y$  για τις οποίες το δυναμικό είναι ίδιο, δηλαδή ισχύει  $\Phi = \text{σταθερό}$ , ονομάζονται *ισοδυναμικές γραμμές* ή γραμμές ίσου δυναμικού. Από τον ορισμό του δυναμικού  $\Phi$  προκύπτει ότι η ισοδυναμική γραμμή είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων στα οποία το πιεζομετρικό φορτίο έχει μία συγκεκριμένη, σταθερή τιμή.

Το διάνυσμα της ειδικής παροχής (ταχύτητας Darcy) είναι κάθετο σε κάθε σημείο μιας

ισοδυναμικής καμπύλης.

Οι καμπύλες του οριζόντιου επιπέδου x-y που ορίζονται έτσι ώστε σε κάθε τους σημείο να έχουν εφαπτόμενο το διάνυσμα της ειδικής παροχής  $q$  λέγονται *γραμμές ροής*.



Σχήμα 2.5: Δίκτυο γραμμών ροής ( $\Psi$ ) και δυναμικού ( $\Phi$ ), Πηγή: Σούλης, I.B. "Υπολογιστική Μηχανική Ρευστών", Θεσσαλονίκη, Εκδόσεις Αιβάζη, 1986

Είναι φανερό ότι γραμμές ροής και ισοδυναμικές γραμμές είναι κάθετες μεταξύ τους.

## 2.5 Υφαλμύριση παρακτίων υδροφορέων

Στο παρόν υποκεφάλαιο δίδεται ο ορισμός της υφαλμύρισης των παρακτίων υδροφορέων, καταγράφονται οι αιτίες του φαινομένου και οι τρόποι αντιμετώπισής του και παρατίθενται οι θεωρήσεις της διεπιφάνειας που δημιουργείται και οι αναλυτικές σχέσεις που χρησιμοποιούνται.

### 2.5.1 Ορισμός

Ως *υφαλμύριση* (salinization) ορίζεται η αύξηση της ποσότητας του αλατιού στο γλυκό νερό και οφείλεται στη διείσδυση θαλασσινού νερού στο γλυκό. Η υφαλμύριση των υπογείων υδροφορέων αποτελεί ειδική περίπτωση υπόγειας ροής και αφορά συγκεκριμένους υδροφορείς με γνωστά υδρογεωλογικά χαρακτηριστικά.

Η υφαλμύριση μπορεί να οφείλεται σε φυσικούς παράγοντες, όπως π.χ. η ανύψωση της στάθμης της θάλασσας, αλλά συνηθέστερα είναι αποτέλεσμα ανθρώπινης δραστηριότητας.



Παρατηρείται όταν ο ρυθμός άντλησης των φρεάτων κοντά στην θάλασσα υπερβεί τον ρυθμό φυσικής ή τεχνητής επανατροφοδότησης του υδροφορέα (Α. Νάνου – Γιάνναρου).

Το πρόβλημα της υφαλμύρισης δεν μπορεί να θεωρηθεί αναστρέψιμο, γι αυτό απαιτείται η ορθή διαχείριση των υπόγειων υδάτων με στόχο την πρόληψη του προβλήματος. Κυρίως εντοπίζεται σε παραθαλάσσιες περιοχές όπως τα ελληνικά νησιά του Αιγαίου, όπου το επιφανειακό δυναμικό δεν επαρκεί για την κάλυψη των ανθρωπίνων αναγκών σε νερό ιδιαίτερα κατά τους θερινούς μήνες.

Λόγω του ότι το πρόβλημα της υφαλμύρισης είναι γενικά ένα σύνθετο πρόβλημα και απαιτούνται εξειδικευμένες γνώσεις, ένα εργαλείο που διευκολύνει την μελέτη της είναι η μαθηματική προσομοίωση των υπογείων υδροφορέων και της διεπιφάνειας μεταξύ γλυκού και αλμυρού νερού που δημιουργείται.

### **2.5.2 Αίτια της υφαλμύρισης**

Τα αίτια της υφαλμύρισης μπορεί να είναι φυσικής προέλευσης όπως η κλιματική αλλαγή και συνεπώς η αύξηση της στάθμης της θάλασσας ή η μείωση των ατμοσφαιρικών κατακρημνισμάτων. Είναι παραδεκτό ότι τα τελευταία χρόνια σε πολλές περιοχές το μέσο ύψος βροχής είναι μειωμένο, γεγονός που θα έχει επίπτωση στον ρυθμό φυσικής επαναπλήρωσης μέσω βροχόπτωσης των υδροφορέων.

Συνηθέστερα όμως, τα αίτια της υφαλμύρισης είναι ανθρωπογενούς προέλευσης. Οι αυξημένες ανάγκες του ανθρώπου σε νερό και η μη επάρκεια στο επιφανειακό δυναμικό οδηγούν στην υπεράντληση των υπογείων υδροφορέων. Όταν ο ρυθμός άντλησης υπερβεί τον ρυθμό φυσικής αναπλήρωσής τους, τότε το θαλασσινό νερό διεισδύει στον υδροφορέα και επέρχεται η υφαλμύρισή του, πράγμα το οποίο οδηγεί και στην περιβαλλοντική καταστροφή του.

Ένα ακόμη αίτιο της υφαλμύρισης είναι οι παράνομες γεωτρήσεις. Λόγω των παράνομων γεωτρήσεων αντλείται τελικά μεγαλύτερη ποσότητα από την επιτρεπόμενη δυνατή, με συνέπεια να διεισδύσει στον υδροφορέα το θαλασσινό νερό.

### **2.5.3 Επιπτώσεις του φαινομένου της υφαλμύρισης**

Οι επιπτώσεις της υφαλμύρισης είναι πολύ σημαντικές, καθώς άνθρωπος και περιβάλλον επηρεάζονται σε πολύ μεγάλο βαθμό.

Όταν ο υδροφορέας υφαλμυρωθεί, αντλούμε πλέον θαλασσινό νερό το οποίο είναι ακατάλληλο προς πόση αλλά και για οποιαδήποτε άλλη δραστηριότητα του ανθρώπου. Επιπλέον το θαλασσινό νερό αντεδείκνυται και για άρδευση.

Πέρα από τις επιπτώσεις που προκαλεί η υφαλμύριση στην υγεία του ανθρώπου και την ποιότητα της ζωής του, η υφαλμύριση έχει και επιπτώσεις που σχετίζονται με την οικονομία του τόπου, όπως είναι η εγκαθίδρυση μονάδων αφαλάτωσης ή εναλλακτικές μορφές άντλησης.

Υπάρχουν βέβαια και περιπτώσεις όπου η υπεράντληση οδηγεί και σε καθίζηση των εδαφών, πράγμα επικίνδυνο για κάθε μορφή ζωής αλλά και για λόγους οικονομικούς. (καταστροφή σοδειών, ενδεχομένως καταστροφές έργων κ.λπ).

#### **2.5.4 Πολυπλοκότητα του φαινομένου της υφαλμύρισης**

Το φαινόμενο της υφαλμύρισης παρακτίων υδροφορέων συνιστά ένα πολύπλοκο φαινόμενο και αυτό γιατί υπάρχουν δύο φάσεις ρευστών και μάλιστα η ζώνη ανάμιξης μεταξύ των δύο υγρών δεν είναι σαφώς ορισμένη.

Επιπλέον, η κίνηση και η διασπορά του ενός ρευστού στο άλλο εξαρτάται από την πυκνότητα των ρευστών στη ζώνη υφαλμύρισης, η οποία μεταβάλλεται σαν συνάρτηση του χώρου και του χρόνου και εξαρτάται από τις συνθήκες ροής. Η αλληλεξάρτηση αυτή καθιστά τις αντίστοιχες εξισώσεις μη γραμμικές και είναι πολύ δύσκολο να επιλυθούν με αριθμητικές μεθόδους, αφού απαιτούνται διαδοχικές προσεγγίσεις και επαναλήψεις.

Η περιγραφή του φαινομένου περιπλέκεται ακόμη περισσότερο λόγω της ανομοιογένειας των υδραυλικών παραμέτρων του υδροφορέα. Ιδιαίτερα σε καρστικούς υδροφορείς, η ανάμιξη γλυκού και αλμυρού νερού είναι εντελώς διαφορετικής φύσης από αυτήν σε ομοιογενείς και ισότροπους πορώδεις υδροφορείς. Η ροή σε καρστικούς υδροφορείς συχνά δεν ακολουθεί τον νόμο του Darcy, αφού γίνεται σε κοιλότητες και σε ανοίγματα που είναι πολλές φορές μεγάλων διαστάσεων με αποτέλεσμα να είναι πολύπλοκη και να μην μπορεί να περιγραφεί από γενικές διαφορικές εξισώσεις ροής (Τρούσσα 2009).

#### **2.5.5 Τρόποι αντιμετώπισης της υφαλμύρισης**

Εν γένει το πρόβλημα της υφαλμύρισης είναι μη αναστρέψιμο και επομένως απαιτείται ορθή διαχείριση των υδροφορέων, ούτως ώστε να αντλείται αυτή η ποσότητα νερού που μπορεί να αναπληρωθεί φυσικά.

Έχουν προταθεί και εφαρμοσθεί αρκετοί τρόποι αντιμετώπισης αυτού του φαινομένου όπως είναι η εγκατάσταση μονάδων αφαλάτωσης θαλασσινού νερού, ο περιορισμός των αντλήσεων και τεχνητός εμπλουτισμός των υπογείων υδροφορέων. (Παρλατζάς, 2013).

Επίσης, ένας άλλος τρόπος διατήρησης της στάθμης του υδροφόρου ορίζοντα είναι η χρήση επιφανειακών υδάτων όπως η απορροή των ομβρίων καθώς επίσης και η χρήση των υδάτων των ποταμών, ούτως ώστε να επαναφορτίζεται ο υδροφορέας.

Για να αντιμετωπιστεί αποτελεσματικά η υφαλμύριση των υπογείων υδροφορέων απαιτείται η πλήρης κατανόηση της κίνησης του υπογείου νερού και της αλληλεπίδρασής του με το αλμυρό και να καθορισθεί η βέλτιστη μέθοδος για την διαχείριση της διείσδυσης του αλμυρού νερού. Απαιτείται επίσης η συνεχής παρακολούθηση της ποιότητας των υδάτων καθώς και υδρολογικές μελέτες.

Η χαρτογράφηση επίσης της πιεζομετρικής επιφάνειας του υδροφορέα θα μπορούσε να είναι πολύ βοηθητική για την μελέτη της ροής του υπογείου νερού του υδροφορέα. Μπορούν να εγκατασταθούν πηγάδια παρατήρησης για να παρακολουθηθεί η στάθμη της επιφάνειας ενός ελεύθερου υδροφορέα.

## 2.6 Θεωρήσεις διεπιφάνειας μεταξύ γλυκού και αλμυρού νερού

Σε αυτό το κεφάλαιο αναλύονται οι δύο συχνότερα χρησιμοποιούμενες μέθοδοι αναπαράστασης του μετώπου του θαλασσινού νερού. Αυτές είναι η θεώρηση της απότομης διεπιφάνειας (sharp interface) και η θεώρηση υπόγειας ροής μεταβλητής πυκνότητας με ζώνη ανάμειξης λόγω διάχυσης άλατος (variable density).

«Εκεί όπου συναντάται το αλμυρό και το γλυκό νερό, δημιουργείται μια ζώνη μεταβαλλόμενης πυκνότητας και ορισμένου πάχους που ονομάζεται διεπιφάνεια. Πάνω από την διεπιφάνεια υπάρχει και κινείται προς την θάλασσα το γλυκό νερό ως ελαφρύτερο (ειδικό βάρος  $1000 \text{ cm}^3 / \text{gr}$ ), ενώ κάτω από αυτήν υπάρχει το αλμυρό νερό (ειδικό βάρος  $1025 \text{ cm}^3 / \text{gr}$ )» (Παπαντωνίου, 2003).

Γενικά, η μοντελοποίηση της υφαλμύρισης θεωρείται δύσκολη διαδικασία. Μερικές από τις δυσκολίες που προκύπτουν είναι (Παρλατζάς 2013) :

- Η πιθανή παρουσία ρωγμών στον υδροφορέα των οποίων η ακριβής θέση είναι άγνωστη, αλλά έχουν μεγάλη επίδραση στην ανάπτυξη της υφαλμύρισης.
- Η πιθανή παρουσία ετερογενειών στις υδραυλικές ιδιότητες του υδροφορέα έχουν επίσης μεγάλη επίδραση στην πορεία της διείσδυσης του θαλασσινού νερού.
- Επειδή η υφαλμύριση συχνά δεν είναι σε ισορροπία, είναι δύσκολο να προσομοιωθεί με ακρίβεια το μοντέλο. Η αλάτινη σφήνα χρειάζεται πολύ χρόνο για να προσαρμοσθεί στις αλλαγές.
- Ένα άλλο γεγονός που επιτείνει την δυσκολία της προσομοίωσης του φαινομένου της υφαλμύρισης είναι η ενδεχόμενη κλιματική αλλαγή. Η κλιματική αλλαγή θα επηρεάσει την μελλοντική στάθμη της θάλασσας και το ποσοστό αναπλήρωσης, γεγονός που θα επηρεάσει και την πορεία της υφαλμύρισης. Αυτό αφορά περισσότερο μακροχρόνια μοντέλα.

Οι δύο θεωρήσεις της διεπιφάνειας μεταξύ του γλυκού και του αλμυρού νερού αναλύονται στις παρακάτω παραγράφους.

### 2.6.1 Θεώρηση απότομης διεπιφάνειας (sharp interface)

Είναι η ευρύτερα χρησιμοποιούμενη μέθοδος αναπαράστασης του μετώπου του θαλασσινού νερού και αυτή που χρησιμοποιείται στην παρούσα εργασία. Σύμφωνα με αυτήν την θεώρηση, η μεταβατική ζώνη μεταξύ γλυκού και αλμυρού νερού έχει μηδενικό πάχος συγκριτικά με το πάχος του υδροφορέα. Η θεώρηση αυτής της διεπιφάνειας έχει εφαρμογή όταν η ζώνη που εμπεριέχει το γλυκό νερό μαζί με το αλμυρό νερό έχει πολύ μικρό πάχος σε σχέση με το πάχος του υδροφορέα.

Σε κατάσταση ισορροπίας (απουσία δηλαδή άντλησης), η διεπιφάνεια γλυκού και αλμυρού νερού θεωρείται ακίνητη. Όταν υπάρχει όμως άντληση και ειδικά αυξημένη άντληση από πηγάδια σε βαθμό τέτοιοι ώστε οι ρυθμοί της φυσικής επαναπλήρωσης του υδροφορέα να είναι μικρότεροι από τους ρυθμούς άντλησης, δημιουργείται πτώση του πιεζομετρικού φορτίου η οποία έχει ως αποτέλεσμα την κίνηση της διεπιφάνειας αυτής προς το εσωτερικό του υδροφορέα.

«Η ποσότητα του αλμυρού νερού που εισέρχεται στον υδροφορέα καθορίζεται από τις τιμές του πιεζομετρικού φορτίου που σχετίζεται άμεσα με τις οριακές συνθήκες, την επιφανειακή τροφοδοσία και την άντληση» (Παπαντωνίου 2003).

Οι εξισώσεις γράφονται ξεχωριστά για κάθε μία από τις φάσεις:

Τόσο για το γλυκό, όσο για το αλμυρό νερό χρησιμοποιούνται (α) η εξίσωση συνεχείας και (β) ο νόμος του Darcy.

Άγνωστα μεγέθη του προβλήματος είναι η πίεση  $P$ , το βάθος από την διεπιφάνεια έως την στάθμη της θάλασσας και οι ειδικές παροχές (ταχύτητες) για το γλυκό και το αλμυρό νερό αντίστοιχα.

Οι Emch και Yeh (1999) βασιζόμενοι σε προηγούμενες έρευνες, αναφέρουν τους εναλλακτικούς τρόπους εξέτασης του προβλήματος της υφαλμύρισης:

(α) υπό την προϋπόθεση ότι το θαλασσινό νερό παραμένει ακίνητο, χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις κίνησης του γλυκού

(β) επιλύονται ταυτόχρονα οι εξισώσεις ροής για το γλυκό και το θαλασσινό νερό με αποτέλεσμα την αύξηση της πολυπλοκότητας του προβλήματος.

Στην παρούσα εργασία υιοθετείται η θεώρηση της απότομης διεπιφάνειας (sharp interface), λόγω της ευκολίας της και της γρηγορότερης διαδικασίας υπολογισμού στα υπολογιστικά προγράμματα. Μειονέκτημα της θεώρησης σε σχέση με την δεύτερη η οποία περιγράφεται παρακάτω είναι η μειωμένη ακρίβεια των αποτελεσμάτων λόγω του ότι δεν περιγράφεται η πραγματική επιφάνεια, αλλά μία προσέγγισή της.

Η προσέγγιση της απότομης διεπιφάνειας είναι αυτή που χρησιμοποιείται από τον Mantoglou (2003) καθώς επίσης και σε αυτήν την εργασία.

## 2.6.2 Θεώρηση Υπόγειας Ροής Μεταβλητής Πυκνότητας (variable density)

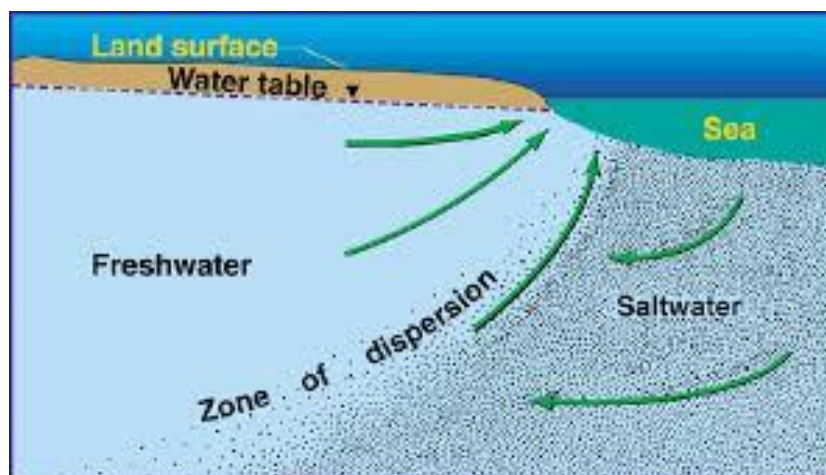
Η ροή μεταβλητής πυκνότητας σε πορώδη μέσα έχει λάβει όλο και περισσότερο αυξανόμενη προσοχή από τη διεθνή βιβλιογραφία, καθώς η μεταβλητή πυκνότητα υγρών παίζει σημαντικό ρόλο σε πληθώρα περιβαλλοντικών προβλημάτων.

Ένα από τα σημαντικότερα περιβαλλοντικά προβλήματα είναι το πρόβλημα της ρύπανσης υδατικών πόρων πόσιμου νερού από θαλασσινό νερό με υψηλή περιεκτικότητα σε διαλυμένο άλας. Το αλμυρό νερό μπορεί να προέρχεται είτε από τη θάλασσα (Custodio, Bruggeman & Cotecchia 1987), είτε ως αποτέλεσμα εκπλυμάτων υγειονομικής ταφής ή καλλιεργειών ( Simmons et al. 2003).

Η διείσδυση αλμυρού νερού σε υπόγειους υδροφορείς αντιμετωπίζεται σαν ένα είδος ρύπανσης περιβαλλοντικής προέλευσης.

Τα υπόγεια ύδατα περιέχουν διαλυμένα στοιχεία, όπως είναι το αλάτι. Όταν οι συγκεντρώσεις των διαλυμένων στο νερό στοιχείων είναι μικρές, τα συστατικά αυτά δεν μπορούν να επηρεάσουν την πυκνότητα του νερού που τα περιέχει. Όταν όμως τα συστατικά αυτά ευρίσκονται σε μεγάλες ποσότητες, αυτό επηρεάζει την πυκνότητα του υγρού. Οι αλλαγές στην πυκνότητα του νερού επηρεάζουν σημαντικά την ροή του νερού. Έτσι, απαιτείται ακριβής αναπαράσταση της υπόγειας ροής μεταβλητής πυκνότητας για να προβλεφθούν οι ταχύτητες και η πορεία της υπόγειας ροής και της υφαλμύρισης (Παρλατζάς, 2013).

Στο σχήμα φαίνεται η κίνηση του θαλασσινού νερού στο εσωτερικό του υδροφορέα και η ζώνη διάχυσης :



Σχήμα 2.6 Κίνηση αλμυρού νερού και ζώνη διάχυσης, Πηγή:  
<http://water.usgs.gov/ogw/gwrp/saltwater/salt.html>

Η θεώρηση της υπόγειας ροής μεταβλητής πυκνότητας εξετάζεται εδώ και πολλά χρόνια, ξεκινώντας από την πρώιμη εργασία των Badon – Ghyben (1888) και Herzberg (1901). Αργότερα, ο Hubbert (1940) παρουσίασε μία απλή εξίσωση σχετιζόμενη με την ανύψωση της απότομης διεπιφάνειας σε υδραυλικά ύψη γλυκού

νερού μετρημένα πάνω στην διεπιφάνεια και στις πυκνότητες του αλμυρού και του γλυκού νερού. Ο Henry (1964) χρησιμοποίησε μία ημιαναλυτική λύση για να καθορίσει την θέση και την μορφή της διεπιφάνειας υπό την συνθήκη μίας σταθερής ροής γλυκού νερού προς το όριο επαφής με τον ωκεανό.

Σε αυτήν την κατηγορία οι διαφορικές εξισώσεις που χρησιμοποιούνται είναι πολύπλοκες και η επίλυσή τους είναι ιδιαίτερα χρονοβόρα. Επίσης απαιτούνται παράμετροι διασποράς του άλατος που λόγω της πολυπλοκότητας των υδροφορέων είναι δύσκολο να εκτιμηθούν.

Η θεώρηση αυτή καθώς και οι σχέσεις οι οποίες την πλαισιώνουν δεν αποτελούν αντικείμενο αυτής της εργασίας, γι' αυτό και δεν αναλύονται περαιτέρω. Στην παρούσα εργασία όπως έχει ήδη προαναφερθεί, χρησιμοποιείται το μοντέλο της απότομης διεπιφάνειας (sharp interface).

## 2.7 Η προσέγγιση Ghyben – Herzberg

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, η επαφή του γλυκού με το αλμυρό νερό αποτελεί μία ζώνη και όχι απλώς μια επιφάνεια. Την επαφή των δύο υγρών μελέτησαν ο Ολλανδός Ghyben (1888) και ο Γερμανός Herzberg (1901), προκειμένου να συσχετίσουν το σχήμα και την θέση της διεπιφάνειας με τις υδρολογικές παραμέτρους του υδροφορέα.

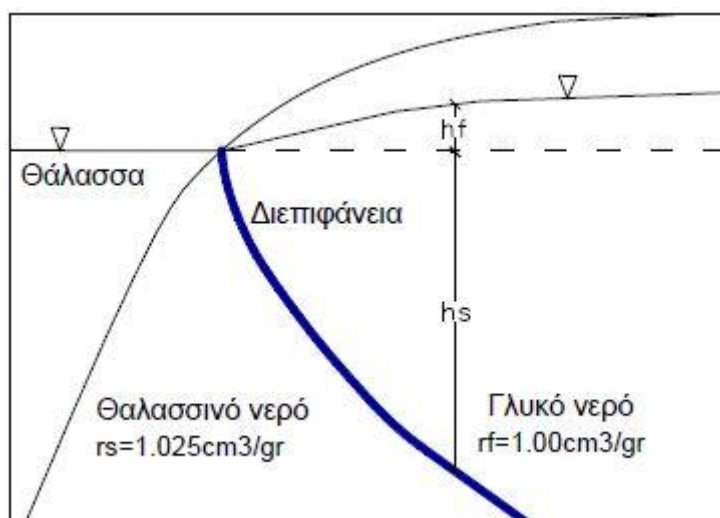
Η αρχή που αναπτύχθηκε από τους ανωτέρω επιστήμονες έχει ως σκοπό τον προσδιορισμό του βάθους της διεπιφάνειας μεταξύ γλυκού και αλμυρού νερού και ουσιαστικά προκύπτει από την υδροστατική ισορροπία γλυκού – αλμυρού νερού.

Η αλάτινη σφήνα θεωρείται ακίνητη όπως επίσης και το θαλασσίνο νερό εντός του υδροφορέα, ενώ υπάρχει εκροή του γλυκού νερού η οποία υπακούει στην υπόθεση Dupuit για οριζόντια ροή.

Ορίζοντας  $h_f$  το ύψος του γλυκού νερού πάνω από την στάθμη της θάλασσας,  $h_s$  την θέση της διεπιφάνειας κάτω από την θάλασσα (καθ' ύψος) και  $\gamma_f$  και  $\gamma_s$  τα ειδικά βάρη γλυκού και αλμυρού νερού αντίστοιχα, και  $\delta$  τον λόγο  $r_f / (r_s - r_f)$  ισχύει:

$$h_s r_s = (h_f + h_s) r_f \Rightarrow h_s = [r_f / (r_s - r_f)] * h_f = \delta h_f \quad (2.14)$$

Για  $r_f = 1.000 \text{ gr/cm}^3$  και  $r_s = 1.025 \text{ gr/cm}^3$ , η άνωθι σχέση γίνεται:  $h_s = 40 h_f$ , άρα η διεπιφάνεια σε συγκεκριμένο σημείο απέχει από την στάθμη της θάλασσας κατά βάθος 40 φορές το ύψος του γλυκού νερού πάνω από την στάθμη της θάλασσας.



Σχήμα 2.7: Προσέγγιση Ghyben – Herzberg (Πηγή: Νάνου – Γιάνναρου 1999)

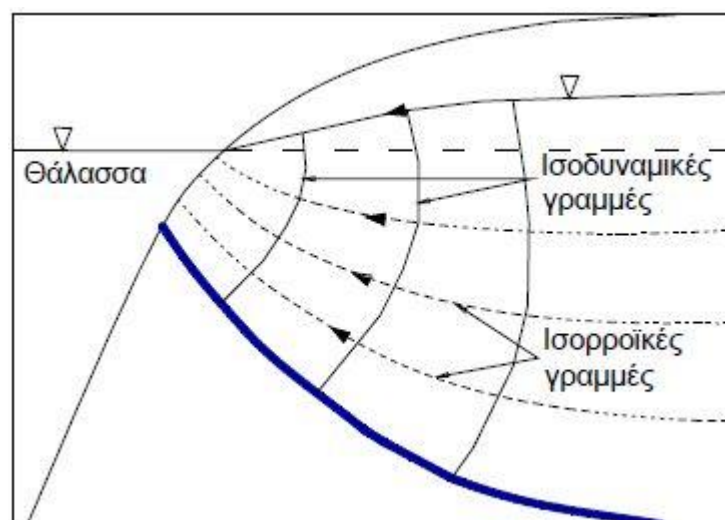
Οι υποθέσεις που γίνονται για την χρήση αυτής της προσέγγισης είναι:

- Ισότροπος, ομογενής υδροφορέας
- Δισδιάστατη ροή
- Συνθήκες μόνιμης ροής
- Ακίνητη διεπιφάνεια
- Ισχύει η υπόθεση του Dupuit για οριζόντια ροή
- Το σύστημα του αλμυρού νερού βρίσκεται σε υδροστατική ισορροπία.

Στην πραγματικότητα όμως δεν ισχύει η παραδοχή της οριζόντιας ροής, καθώς υπάρχουν μη αμελητέες συνιστώσες της κατακόρυφης ταχύτητας και η διεπιφάνεια δεν είναι ακίνητη, αλλά μετακινείται προς το εσωτερικό του υδροφορέα.

Επιπλέον, η προσέγγιση Ghyben – Herzberg δεν υπολογίζει την επιφάνεια δια μέσου της οποίας γίνεται εκροή γλυκού νερού προς την θάλασσα και δεν μπορεί να προβλέψει την επιφάνεια διήθησης στην περίπτωση των φρεάτιων υδροφορέων.

Η πραγματική εικόνα της διεπιφάνειας είναι η παρακάτω:



Σχήμα 2.8: Πραγματική εικόνα διεπιφάνειας, (Πηγή: Νάνου – Γιάνναρου, 1999)

Η προσέγγιση Ghyben – Herzberg επιτρέπει την εύρεση της θέσης της διεπιφάνειας μεταξύ θαλασσινού – γλυκού νερού ως εξής (Νάνου – Γιάνναρου):

- Με παρατηρήσεις από φρέατα της περιοχής οπότε και κατασκευάζεται ο πιεζομετρικός χάρτης του υδροφορέα για το γλυκό νερό
- Από την γεωλογική μελέτη είναι γνωστή η θέση του πυθμένα του υδροφορέα
- Τα βάθη της διεπιφάνειας βρίσκονται σύμφωνα με την παραπάνω εξίσωση (2.14)
- Βρίσκει εφαρμογή σε περιορισμένους αλλά και σε φρεάτιους υδροφορείς.

## 2.8 Ανάλυση κατά Strack

Η κίνηση των υπογείων υδάτων ειδικά μάλιστα όταν συνοδεύεται από το φαινόμενο της υπαλμύρισης διέπεται από πολύπλοκες μαθηματικές σχέσεις. Για τον λόγο αυτό έχουν υιοθετηθεί από τους μελετητές κάποιες παραδοχές με σκοπό την απλούστευση των μαθηματικών σχέσεων.

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, απλοποιητικές αυτές παραδοχές είναι (Strack 1979, Bear 1979, Cheng & Ouazar 1999, Cheng et al. 2000, Mantoglou 2003):

- Παραδοχή απότομης διεπιφάνειας (sharp interface) θεωρώντας ότι το μέτωπο του θαλασσινού νερού έχει σταθεροποιηθεί και δεν μετακινείται
- Παραδοχή μόνιμης ροής (steady – state flow)

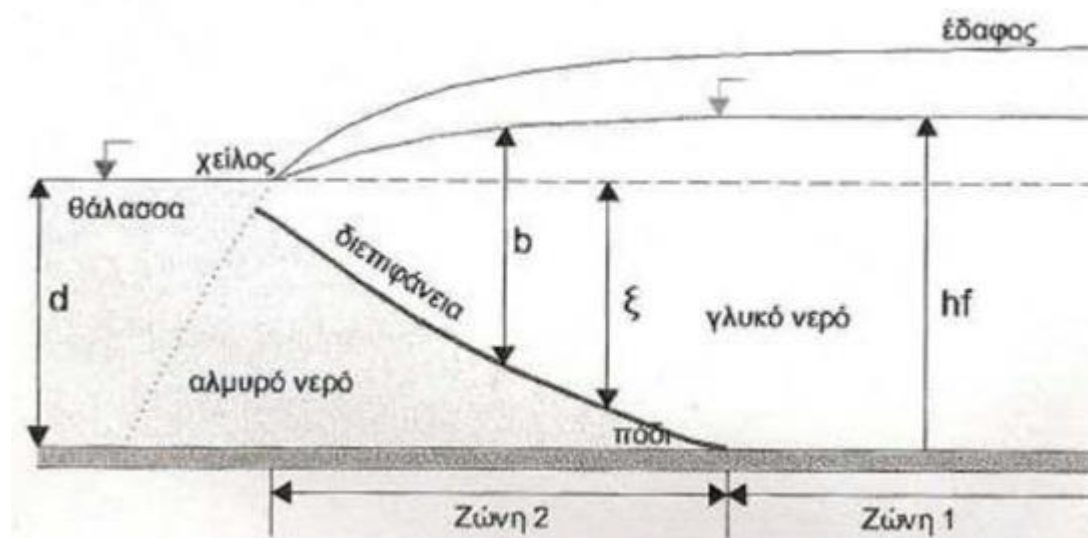


- Παραδοχή οριζόντιας ροής (υπόθεση Dupuit) για το γλυκό νερό (το θαλασσινό νερό παραμένει ακίνητο)
- Χρησιμοποιείται η προσέγγιση Ghyben – Herzberg για τον υπολογισμό της μορφής της διεπιφάνειας
- Παραδοχή ισότροπου και ομογενούς υδροφορέα με οριζόντιο αδιαπέρατο πυθμένα.

### 2.8.1 Αναλυτικές σχέσεις

Ο υπό μελέτη παράκτιος υδροφορέας, είτε είναι φρεάτιος είτε περιορισμένος, χωρίζεται σε δύο ζώνες. Η πρώτη ζώνη είναι το τμήμα στο εσωτερικό του υδροφορέα και καλύπτεται εξ ολοκλήρου από γλυκό νερό, ενώ η δεύτερη είναι στο εξωτερικό τμήμα του υδροφορέα όπου το γλυκό νερό συνυπάρχει με το θαλασσινό.

Το γλυκό νερό σε αυτήν την ζώνη βρίσκεται πάνω από το θαλασσινό ως ελαφρύτερο (ειδικό βάρος γλυκού νερού < ειδικό βάρος θαλασσινού νερού).



Σχήμα 2.9: Ζώνες φρεάτιου υδροφορέα σε τομή (Πηγή: Ευαγόρου, 2012)

Το παραπάνω σχήμα δείχνει έναν φρεάτιο υδροφορέα και τις ζώνες από τις οποίες αποτελείται.

Έτσι έχουμε ότι:

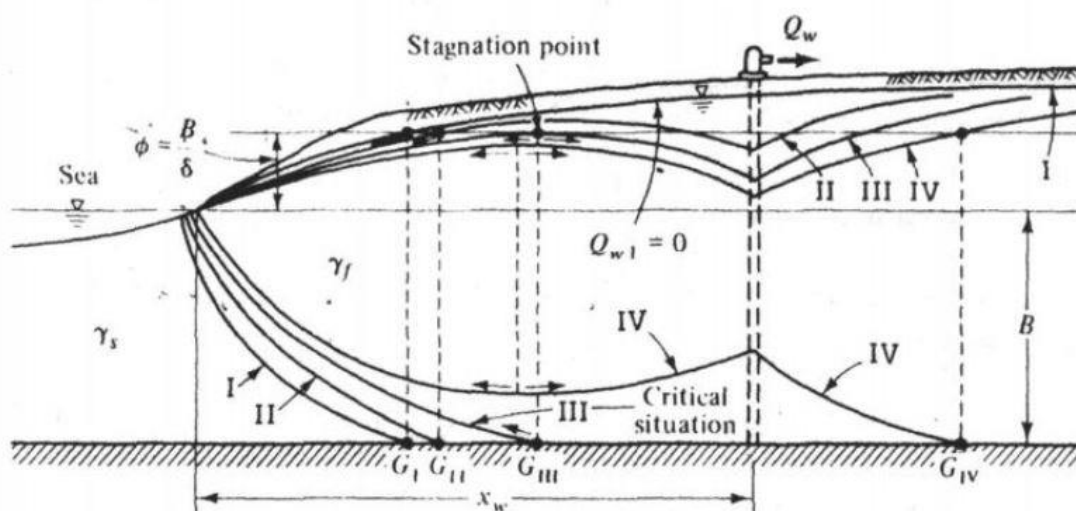
- Ως *αλάτινη σφήνα* ορίζεται το τμήμα του υδροφορέα στο οποίο έχει εισχωρήσει το θαλασσινό νερό. Οριοθετείται από την διεπιφάνεια μεταξύ αλμυρού – γλυκού νερού.
- *Χείλος* της αλάτινης σφήνας ονομάζεται το σημείο τομής της διεπιφάνειας με την επιφάνεια της θάλασσας.

- Πόδι (toe) της αλάτινης σφήνας ονομάζεται το σημείο τομής της αλάτινης σφήνας με τον αδιαπέρατο πυθμένα του υδροφορέα.

Παρατηρούμε ότι η ζώνη 1 αποτελείται εξ ολοκλήρου από γλυκό νερό, ενώ στη ζώνη 2 συνυπάρχει το αλμυρό νερό μαζί με το γλυκό νερό. Τα δύο αυτά υγρά διαχωρίζονται από την διεπιφάνεια.

Σε κατάσταση ισορροπίας, η διεπιφάνεια παραμένει ακίνητη και καθορίζει το κατά πόσο ο υδροφορέας απειλείται από την υφαλμύρωση. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται διάφορες θέσεις της διεπιφάνειας ανάλογα με την άντληση που εφαρμόζεται. Η θέση I της διεπιφάνειας αντιστοιχεί σε μηδενική άντληση.

Έστω φρέαρ σε απόσταση  $x_w$  από την ακτή. Όταν ξεκινήσει άντληση από το φρέαρ με ρυθμό  $Q_w$ , η διεπιφάνεια μετακινείται προς το εσωτερικό του υδροφορέα (θέση II). Για μεγαλύτερη τιμή άντλησης  $Q'_w$ , η αλάτινη σφήνα μετακινείται περισσότερο προς το εσωτερικό του υδροφορέα (θέση III).



Σχήμα 2.10: Θέσεις διεπιφάνειας αναλόγως άντλησης, Πηγή: Bear 1979

Η θέση III αποτελεί μία οριακή κατάσταση για την εξέλιξη της υφαλμύρισης στον υδροφορέα. Μικρή αύξηση του ρυθμού άντλησης από το φρέαρ, έχει ως αποτέλεσμα περαιτέρω κίνηση της διεπιφάνειας η οποία τελικά φτάνει στη θέση του πηγαδιού, οδηγώντας το στην υφαλμύριση. Το πηγάδι πλέον θα αντλεί θαλασσινό νερό (θέση IV).

Ο Strack (1976) εφάρμοσε την έννοια του ενιαίου δυναμικού και για τις δύο ζώνες. Για τον σχηματισμό της ενιαίας εξίσωσης υιοθετείται η υπόθεση Dupuit για την ροή του γλυκού νερού και χρησιμοποιείται η σχέση Ghyben – Herzberg για τον προσδιορισμό του βάθους της διεπιφάνειας.

Ο υδροφορέας στην ζώνη 1 συμπεριφέρεται όπως ένας φρεάτιος υδροφορέας με αδιαπέρατο πυθμένα, οπότε για μόνιμη οριζόντια ροή η διαφορική εξίσωση συνέχειας γράφεται ως εξής:

$$\frac{\partial}{\partial x} (K h_f \frac{\partial h_f}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (K h_f \frac{\partial h_f}{\partial y}) = 0 \quad (2.15)$$

Για την ζώνη 2, η εξίσωση συνέχειας γράφεται:

$$\frac{\partial}{\partial x} (K b \frac{\partial h_f}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (K b \frac{\partial h_f}{\partial y}) = 0 \quad (2.16)$$

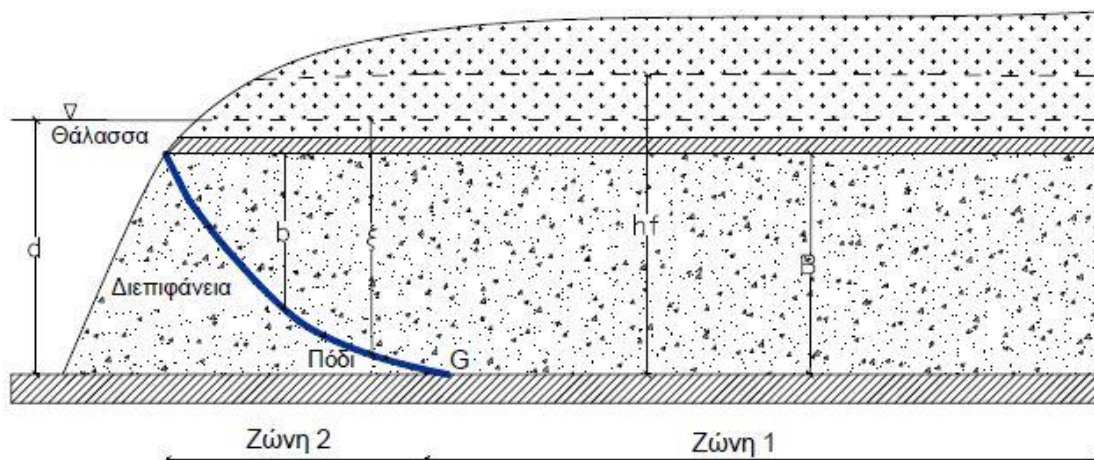
Οι παραπάνω εξισώσεις περιγράφονται από την γενική εξίσωση:

$$\nabla (Kb \nabla h_f) = 0 \quad (2.17)$$

Αν  $N$  η επιφανειακή τροφοδοσία και  $Q$  το άθροισμα των αντλήσεων, τότε η (2.13) γίνεται:

$$\nabla (Kb \nabla h_f) + N - Q = 0 \quad (2.18)$$

Όσον αφορά το πάχος  $b$  του γλυκού νερού, αυτό δεν είναι το ίδιο σε κάθε ζώνη. Επίσης διαφέρει ανάλογα με το αν έχουμε να κάνουμε με φρεάτιο ή περιορισμένο υδροφορέα.



Σχήμα 2.11: Τομή περιορισμένου υδροφορέα, Πηγή: Παπαντωνίου 2003

Για φρεάτιο υδροφορέα, το πάχος  $b$  του γλυκού νερού είναι :

$$\begin{aligned} b &= h_f, \text{ για την ζώνη 1} \\ b &= h_f - d + \xi, \text{ για την ζώνη 2} \end{aligned}$$

Για περιορισμένο υδροφορέα, το πάχος  $b$  του γλυκού νερού είναι:

$$\begin{aligned} b &= B, \text{ για την ζώνη 1} \\ b &= \xi - (d - B), \text{ για την ζώνη 2} \end{aligned}$$

Η κατακόρυφη απόσταση  $\xi$  της διεπιφάνειας από την στάθμη της θάλασσας υπολογίζεται από την προσέγγιση Ghyben – Herzberg ως εξής:

$$h_f - d = \Delta s \xi \rightarrow \xi = \frac{1}{\Delta s} (h_f - d) \quad (2.19)$$

όπου  $d$  το βάθος της θάλασσας με επίπεδο αναφοράς τον πυθμένα του υδροφορέα.

Κάνοντας χρήση της προσέγγισης Ghyben – Herzberg, ο Strack καταλήγει στις παρακάτω εξισώσεις υπολογισμού δυναμικού για συνθήκες μόνιμης ροής σε παράκτιο υδροφορέα:

• Φρεάτιος υδροφορέας

Ζώνη 1:

$$\varphi_{\text{δεξιά}} = \frac{1}{2} [h_f^2 - (1 + \Delta s) d^2] \quad (2.20)$$

Ζώνη 2:

$$\varphi_{\text{αριστερά}} = \frac{1 + \Delta s}{2 \Delta s} (h_f - d)^2 \quad (2.21)$$

• Περιορισμένος υδροφορέας:

Ζώνη 1:

$$\varphi_{\text{δεξιά}} = \frac{B h_f + \Delta s B^2}{2 - (1 + \Delta s) B d} \quad (2.22)$$

Ζώνη 2:

$$\varphi_{\text{αριστερά}} = \frac{1}{2 \Delta s} [h_f + \Delta s B - (1 + \Delta s) d^2] \quad (2.23)$$

Οι ανωτέρω συναρτήσεις είναι συνεχείς μεταξύ των ζωνών 1 και 2. Επιπλέον οι εξισώσεις (2.16 -2.19) ικανοποιούν την εξίσωση Laplace και την εξίσωση (Mantoglou 2002):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + N - Q = 0 \quad (2.24)$$

Στον πόδα της αλάτινης σφήνας (σημείο G), το δυναμικό παίρνει συγκεκριμένη τιμή (βάθος όσο το πάχος του υδροφορέα):

για φρεάτιο υδροφορέα:

$$\varphi_G = \varphi_{\alpha\rho} = \varphi_{\text{δεξιά}} = \frac{\Delta s (1 + \Delta s)}{2 d^2} \quad (2.25)$$

και για περιορισμένο υδροφορέα:

$$\varphi_G = \varphi_{\alpha\rho} = \varphi_{\text{δεξιά}} = \frac{\Delta s}{2 B^2} \quad (2.26)$$

Στο χείλος της διεπιφάνειας ισχύει  $\xi = 0$ , επομένως  $\mathbf{h}_f = \mathbf{d}$ , άρα το δυναμικό σε αυτό το σημείο θα είναι 0 τόσο για φρεάτιο όσο και για περιορισμένο υδροφορέα, λόγω της επαφής του υδροφορέα με τη θάλασσα (όριο σταθερού φορτίου).

## 2.9 Ύπαρξη φρέατος άντλησης – Επίλυση κατά Strack

Θεωρούμε παράκτιο υδροφορέα **ημιαπείρων** διαστάσεων με παροχή ανά μονάδα πλάτους  $q$ . Έστω ότι υπάρχει πηγάδι άντλησης  $Q_w$  σε απόσταση  $x_w$  από την ακτή.

Σύμφωνα με τον Strack το δυναμικό σε κάθε σημείο του υδροφορέα υπολογίζεται από την μέθοδο των εικόνων με την κάτωθι σχέση:

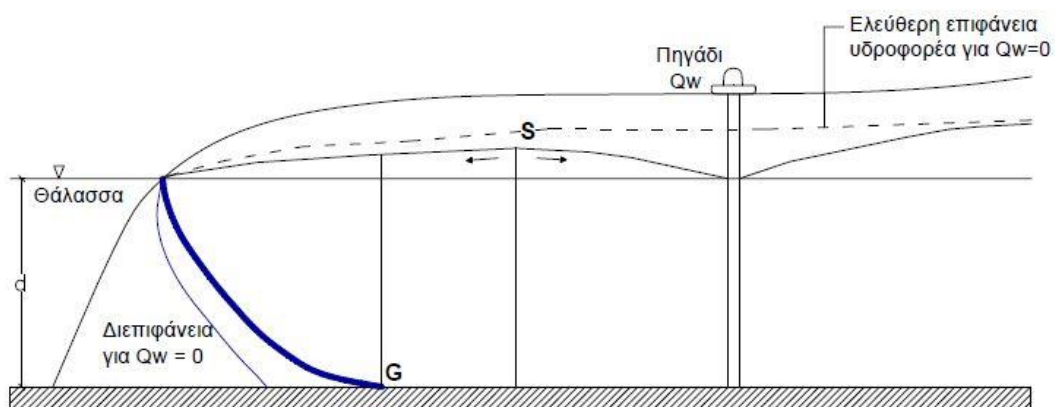
$$\varphi = \frac{q}{K}x + \frac{Q}{4\pi K} \ln \left[ \frac{(x-x_w)^2 + y^2}{(x+x_w)^2 + y^2} \right] \quad (2.27)$$

Εφ' όσον μπορούμε να υπολογίσουμε το δυναμικό στο πόδι της αλάτινης σφήνας  $\varphi_{toe}$  (εξ. 2.25 και 2.26), από την άνωθι εξίσωση μπορούμε να υπολογίσουμε και τη θέση του ποδιού της αλάτινης σφήνας ( $x_{toe}$ ).

Κάτω από συνθήκες άντλησης ενός φρέατος, το πόδι της αλάτινης σφήνας μετατοπίζεται προς το εσωτερικό του υδροφορέα. Σκοπός είναι το πόδι της αλάτινης σφήνας να μην φτάσει στη θέση πάνω από την οποία υπάρχει φρέαρ.

“Υπάρχει μία συγκεκριμένη τιμή της παροχής άντλησης (οριακή τιμή) από την οποία και πάνω από το πηγάδι αντλείται πλέον υφάλμυρο νερό και μάλιστα με απότομο ρυθμό” (Παπαντωνίου 2003).

Η παροχή αυτή ονομάζεται κρίσιμη παροχή ( $Q_c$ ) και για ελάχιστη αύξησή της, το πόδι της αλάτινης σφήνας μετατοπίζεται απότομα προς το εσωτερικό του υδροφορέα προκαλώντας υφαλμύριση του φρέατος.



Σχήμα 2.12: Φρέατος υδροφορέας με άντληση, Πηγή Παπαντωνίου 2003

Στο παραπάνω σχήμα εκτός από το σημείο G (πόδι αλάτινης σφήνας), υπάρχει και το σημείο S. Το σημείο S (stagnation point) είναι το σημείο το οποίο οριοθετεί τον κώνο ταπείνωσης που οφείλεται στην άντληση.

Όσο μεγαλύτερη είναι η άντληση, τόσο το σημείο αυτό μετατοπίζεται προς την ακτή. Παρουσιάζει λοιπόν αντίθετη συμπεριφορά από το σημείο G, το οποίο όσο αυξάνει η άντληση μετατοπίζεται προς το εσωτερικό του υδροφορέα.

Για παροχή ίση με την κρίσιμη παροχή  $Q_C$ , το σημείο S με το σημείο G αποκτούν την ίδια τετμημένη.

Επομένως, η παροχή  $Q_C$  είναι η μέγιστη δυνατή χωρίς να υπάρξει υφαλμύριση του φρέατος.

Η παροχή αυτή προκύπτει από την σχέση (Cheng & Ouazar 1999):

$$\varphi = \frac{q}{K} x_w \sqrt{1 - \frac{Q_C}{\pi q x_w}} + \frac{Q_C}{2 \pi K} \ln \frac{1 - \sqrt{\frac{1 - Q_C}{\pi q x_w}}}{1 + \sqrt{\frac{1 - Q_C}{\pi q x_w}}} \quad (2.28)$$

αφού πρώτα έχει υπολογισθεί το δυναμικό στο πόδι της αλάτινης σφήνας  $\varphi_{toe}$ .

Έπειτα, η κρίσιμη απόσταση  $x_{toe,max}$  του ποδιού της αλάτινης σφήνας από την ακτή για παροχή άντλησης  $Q_C$  υπολογίζεται από την σχέση:

$$x_{toe,max} = x_S = x_w \sqrt{\frac{1 - Q_w}{\pi q x_w}} \quad (2.29)$$

Τα ανωτέρω ισχύουν για ένα φρέαρ άντλησης. Εάν τα φρέατα είναι περισσότερα του ενός και αντλούν ταυτόχρονα, τότε το δυναμικό τους υπολογίζεται από τη σχέση (Cheng & Ouazar 1999, Papantoniou 2003):

$$\varphi = \frac{q}{K} x + \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{4\pi K} \ln \left[ \frac{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}{(x+x_i)^2 + (y-y_i)^2} \right] \quad (2.30)$$

Όπου:

$n$  ο αριθμός των φρεάτων

$Q_i$  η παροχή άντλησης του πηγαδιού  $i$

$x_i$  και  $y_i$  οι συντεταγμένες του πηγαδιού  $i$

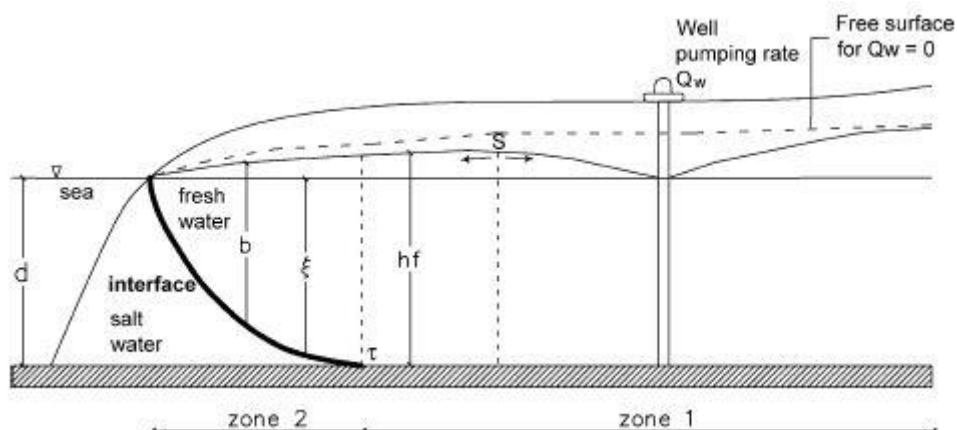
Οι παραπάνω αναλυτικές σχέσεις ισχύουν για υδροφορείς με ημιάπειρες διαστάσεις. Στα πρακτικά προβλήματα όμως, οι υδροφορείς έχουν πεπερασμένες διαστάσεις και όρια, οπότε η εφαρμογή των ανωτέρω μπορεί να δώσει λανθασμένα αποτελέσματα.

Για τον λόγο αυτό έχουν αναπτυχθεί αριθμητικές μέθοδοι μέσω μοντέλων προσομοίωσης, όπως είναι το MODFLOW (Mantoglou 2002).



## 2.10 Το μοντέλο απότομης διεπιφάνειας (Mantoglou et al. (2004))

Έστω ένας φρεάτιος υδροφορέας για τον οποίον γίνεται η παραδοχή της οριζόντιας ροής. Επιπλέον, γίνεται η υπόθεση της ύπαρξης μιας διακριτής οριακής επιφάνειας (διεπιφάνειας) η οποία διαχωρίζει το γλυκό από το αλμυρό νερό και η οποία τέμνει τον αδιαπέρατο πυθμένα του υδροφορέα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 2.13: Τομή φρεατίου υδροφορέα, Πηγή: Mantoglou, Papantoniou, Giannouloropoulos 2004

Το μοντέλο Mantoglou et al στηρίζεται στις θεωρήσεις που παρουσιάστηκαν παραπάνω, συγκεκριμένα :

- Στην θεώρηση απότομης διεπιφάνειας μεταξύ γλυκού και αλμυρού νερού ( sharp interface )
- Στην προσέγγιση Ghyben - Herzberg
- Στην ανάλυση κατά Strack

Ακολουθώντας την ανάλυση κατά Strack, έστω  $b(x,y)$  η απόσταση της διεπιφάνειας από την ελεύθερη επιφάνεια του υδροφορέα (δηλαδή το συνολικό βάθος του γλυκού νερού),  $\xi(x,y)$  το βάθος του γλυκού νερού έως την στάθμη της θάλασσας,  $h_f(x,y)$  το πιεζομετρικό φορτίο στη θέση  $(x,y)$  και  $\tau$  το σημείο τομής της διεπιφάνειας με τον αδιαπέρατο πυθμένα του υδροφορέα.

Επιπλέον, στο σχήμα μπορούμε να διακρίνουμε τις δύο ζώνες του υδροφορέα. Στην ζώνη 1 το νερό που υπάρχει είναι εξ ολοκλήρου γλυκό, ενώ στην ζώνη 2 συνυπάρχει το γλυκό με το αλμυρό νερό.

Η σχέση Ghyben – Herzberg συνδέει το υδραυλικό φορτίο  $h$  με το βάθος  $\xi$  ως ακολούθως:

$$h_f - d = \delta \xi \quad (2.31)$$

όπου  $\delta = (\rho_s - \rho_f) / \rho_f$ , με  $\rho_s$  την πυκνότητα του αλμυρού νερού και  $\rho_f$  την πυκνότητα του γλυκού νερού ( $\rho_f \approx 1.000 \text{ gr/cm}^3$  και  $\rho_s \approx 1.025 \text{ gr/cm}^3$ ).

Η τιμή της παραμέτρου  $\delta$  θεωρείται σταθερή καθ' όλην την διάρκεια των υπολογισμών και ίση περίπου με 0.025.

Η ανάλυση κατά Strack εισάγει την έννοια του δυναμικού  $\phi$ , ενιαίου και για τις δύο ζώνες και δημιουργείται μία γενικευμένη εξίσωση συνέχειας η οποία συμπίπτει με την εξίσωση Laplace:

$$K \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) + N = 0 \quad (2.32)$$

(N η επιφανειακή τροφοδοσία, K η υδραυλική αγωγιμότητα του υδροφορέα και  $\phi$  το δυναμικό κατά Strack).

Η παραπάνω σχέση είναι όμοια με την σχέση που ισχύει για οριζόντια ροή σε ισότροπο και ομογενή περιορισμένο υδροφορέα, η οποία είναι η εξής:

$$T \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) + N = 0 \quad (2.33)$$

(T η μεταφορικότητα, ενώ  $\phi$  το πιεζομετρικό φορτίο).

Οι δύο εξισώσεις διαφέρουν μόνο στα μεγέθη, αφού στην πρώτη χρησιμοποιείται η υδραυλική αγωγιμότητα K του υδροφορέα και το δυναμικό  $\phi$ , ενώ στην δεύτερη η μεταφορικότητα T και το πιεζομετρικό φορτίο αντί του δυναμικού.

Επομένως ο παράκτιος φρεάτιος υδροφορέας μπορεί να μελετηθεί απλοποιημένα ως ένας περιορισμένος υδροφορέας με μεταφορικότητα ίση με την υδραυλική αγωγιμότητα. Παρά τις απλοποιήσεις η τιμή του δυναμικού εξακολουθεί να παραμένει άγνωστη, αφού η γεωμετρία του υδροφορέα δεν είναι απλή.

Λόγω του ότι στον υπό μελέτη υδροφορέα υπάρχουν και φρέατα, οι άνωθεν εξισώσεις τροποποιούνται ελάχιστα, ούτως ώστε να συμπεριλάβουν την άντληση από τα πηγάδια και τελικά:

$$K \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) + N - Q_w = 0 \quad (2.34)$$

$$T \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) + N - Q_w = 0 \quad (2.35)$$

Επιλύεται η εξίσωση (2.21) ως προς το πιεζομετρικό φορτίο  $h_f$ , (ζώνη 2 φρεατίου υδροφορέα), και προκύπτει:

$$\phi = \frac{1+\Delta s}{2\Delta s} (h_f - d)^2 \rightarrow (h_f - d)^2 = \frac{2\Delta s \phi}{1+\Delta s} \rightarrow h_f = \sqrt{\frac{2\Delta s \phi}{1+\Delta s}} + d \quad (2.36)$$

οπότε για  $\Delta s = 0.025$ , προκύπτει:

$$h_f = \sqrt{\frac{0.05 \varphi}{1.025}} + d \quad (2.37)$$

με  $d$  το βάθος της θάλασσας με επίπεδο αναφοράς τον πυθμένα του υδροφορέα.

Εφαρμόζοντας την εξίσωση Ghyben – Herzberg προκύπτει:

$$\xi = \frac{h_f - d}{0.025} = 40 (h_f - d) \quad (2.38)$$

Για  $\xi = -z$ , υπολογίζεται το βάθος κάτω από το επίπεδο της στάθμης της θάλασσας που βρίσκεται η διεπιφάνεια.

Ο Mantoglou (2003) χρησιμοποιεί τις διαφορικές εξισώσεις του Strack ( 1976) σε συνδυασμό με την μέθοδο των εικόνων για να εκτιμήσει με αναλυτικές σχέσεις την συμπεριφορά ενός παράκτιου υδροφορέα ορθογωνίου σχήματος πεπερασμένων διαστάσεων.

Με άλλα λόγια, η ανάλυση κατά Strack για την κρίσιμη άντληση παρουσία φρέατος θεωρεί πως υπάρχει μόνο το όριο της θάλασσας και αγνοεί τα πλευρικά όρια. Άρα βασίζει την ανάλυσή του σε έναν υδροφορέα απείρων διαστάσεων.

Αντιθέτως, ο Mantoglou (2003) επεκτείνει το παραπάνω πρόβλημα ούτως ώστε να περιλαμβάνει τα πλευρικά όρια και να επιλύει συστήματα πεπερασμένων διαστάσεων υδροφορέα.

Στην περίπτωση όμως τυχαίου σχήματος υδροφορέα με μεταβαλλόμενη τροφοδοσία ή υδραυλική αγωγιμότητα, η επίλυση με μαθηματικές σχέσεις είναι αδύνατη (Mantoglou 2003). Τότε, εφαρμόζονται αριθμητικές μέθοδοι μέσω των μοντέλων SUTRA (Gorelick et al. 1984, Hallaji and Yazicigil 1996, Mantoglou 2003, Mantoglou et al. 2004), SHARP ( Emch and Yeh 1998) και MODFLOW.

Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιείται το πρόγραμμα προσομοίωσης υπόγειας ροής MODFLOW, το οποίο είναι βασίζεται στη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών και περιγράφεται στο επόμενο κεφάλαιο.

## ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ ΝΕΡΟΥ ΚΑΙ ΥΦΑΛΜΥΡΩΣΗΣ ΠΑΡΑΚΤΙΩΝ ΥΔΡΟΦΟΡΕΩΝ

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται η μέθοδος με τη οποία αναπαρίσταται η κίνηση του νερού ενός παράκτιου υδροφορέα (προσομοίωση – simulation), καθώς επίσης και η παρακολούθηση της υφαλμύρισης.

Το πιο ευρέως χρησιμοποιούμενο μοντέλο προσομοίωσης υδροφορέων είναι το Modflow (McDonald & Harbaugh 1988) το οποίο και χρησιμοποιείται και στην παρούσα εργασία.

### 3.1 Παρουσίαση του MODFLOW

Το Modflow (Modular Three - Dimensional Finite Difference Ground Water Flow Model) είναι ένα τρισδιάστατο μοντέλο προσομοίωσης πεπερασμένων αριθμητικών διαφορών. Επιλύει την εξίσωση της συνέχειας για την κίνηση του υπογείου νερού στους υδροφορείς σε τρεις διαστάσεις σύμφωνα με τον νόμο του Darcy σε συνθήκες μόνιμης ή και μη - μόνιμης ροής.

Το Modflow έχει αναπτυχθεί από τον φορέα Γεωλογικών Ερευνών των Ηνωμένων Πολιτειών της Αμερικής (United States Geological Survey – USGS), από τους McDonald και Harbaugh το 1988.

Για την επίλυση των προβλημάτων ροής εφαρμόζεται η αριθμητική μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών και δίνεται η δυνατότητα στον χρήστη να εισάγει τα υδρολογικά χαρακτηριστικά του υδροφορέα, όπως είναι:

- η επιφανειακή τροφοδοσία (recharge)
- η εξατμισοδιαπνοή (evapotranspiration)
- τα ποτάμια (river)
- οι ταμιευτήρες (reservoir)
- οι τιμές της υδραυλικής αγωγιμότητας (hydraulic conductivity)
- οι στραγγιστικές τάφροι (drain)
- τα φρέατα άντλησης και τροφοδοσίας (well)
- η πλευρική τροφοδοσία κ.λπ.

Έχουν αναπτυχθεί διάφορα προγράμματα προεπεξεργασίας και προετοιμασίας των δεδομένων εισόδου στο Modflow. Ένα από αυτά είναι το PMWIN (Processing Modflow for Windows), το οποίο σε συνεργασία με το Modflow αποτελεί ένα ολοκληρωμένο πρόγραμμα προσομοίωσης της ροής υπογείου νερού.

Αρχικά εισάγονται μέσω PMWIN οι διαστάσεις και το πάχος του υδροφορέα, το σχήμα του, τα υδραυλικά και υδρολογικά στοιχεία του όπως είναι η υδραυλική αγωγιμότητα, η μεταφορικότητα, η τροφοδοσία, οι οριακές και αρχικές συνθήκες λειτουργίας του, το είδος του υδροφορέα (περιορισμένος ή φρεάτιος), καθώς και οι συνθήκες ροής του (μόνιμη / μη - μόνιμη).

Κατόπιν, η επίλυση πραγματοποιείται μέσω του Modflow, παράγοντας τα αρχεία με τα αποτελέσματα.

Τα χαρακτηριστικά αυτά χρησιμοποιούνται στην πορεία από το Modflow όπου επιλύεται η εξίσωση της συνέχειας, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω.

Ο υπό μελέτη υδροφορέας αναπαρίσταται από έναν κάρναβο κατάλληλων διαστάσεων, όπου σε κάθε κελί του αντιστοιχεί συγκεκριμένη τιμή των δεδομένων αλλά και των μετέπειτα αποτελεσμάτων.

Όπως αναφέρθηκε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, υιοθετείται η προσέγγιση κατά Strack. Η προσέγγιση αυτή εισάγει την έννοια του ενιαίου δυναμικού  $\varphi$  και συμβάλλει στην δημιουργία μίας γενικής εξίσωσης συνέχειας που ισχύει και για τις δύο ζώνες του υδροφορέα και συμπίπτει με την εξίσωση Laplace. Στην περίπτωση που μελετούμε, η παραπάνω εξίσωση παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$K \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + N = 0 \quad (3.1)$$

Όπου  $K$  η υδραυλική αγωγιμότητα του υδροφορέα,  $N$  η επιφανειακή τροφοδοσία και  $\varphi$  το δυναμικό κατά Strack.

Σύμφωνα με τους Mantoglou et al. (2004), η σχέση (3.1) που αποτελεί την εξίσωση συνέχειας στην περίπτωση του υδροφορέα που μελετάται, ομοιάζει με την αντίστοιχη σχέση που ισχύει για οριζόντια ροή σε ομογενή και ισότροπο περιορισμένο υδροφορέα:

$$T \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + N = 0 \quad (3.2)$$

Όπου  $T$  η μεταφορικότητα και  $\varphi$  το πιεζομετρικό φορτίο.

Επομένως, παρατηρούμε πως η εξίσωση (3.1) είναι παρόμοια με την (3.2) με την μόνη διαφορά ότι η (3.1) χρησιμοποιεί την υδραυλική αγωγιμότητα και το δυναμικό, ενώ η (3.2) χρησιμοποιεί την μεταφορικότητα και το πιεζομετρικό φορτίο. Ο φρεάτιος υδροφορέας στην παρούσα εργασία μπορεί να προσομοιωθεί ως ένας

περιορισμένος υδροφορέας με τιμή της μεταφορικότητας ίση με την τιμή της υδραυλικής αγωγιμότητας.

Συμπερασματικά, μπορεί τελικά το Modflow να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του δυναμικού έπειτα από επίλυση της διαφορικής εξίσωσης (3.1). Έτσι, το πρόβλημα της υφαλμύρισης όπως έχει αναλυθεί και επιλυθεί από τον Strack ανάγεται σε πρόβλημα οριζόντιας ροής ενός περιορισμένου υδροφορέα του οποίου η μεταφορικότητα τίθεται ίση με την υδραυλική αγωγιμότητα του υπό μελέτη φρεατίου υδροφορέα.

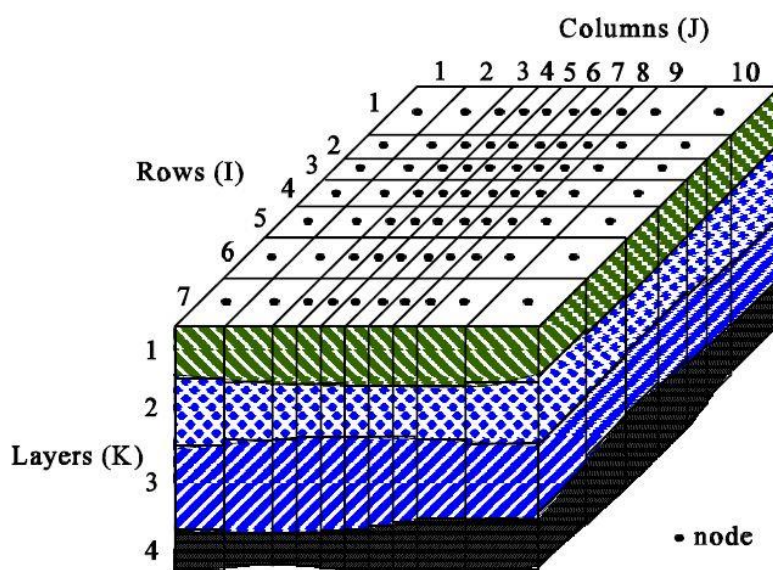
### 3.2 Λειτουργία του MODFLOW – Μαθηματική αναπαράσταση του μοντέλου

Η υπόγεια ροή περιγράφεται από σύνθετες, μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις. Στόχος του Modflow είναι η απλοποίηση των εξισώσεων αυτών και η μετατροπή τους σε γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις.

Επομένως, η περιοχή ενδιαφέροντος – εδώ ο υπό μελέτη υδροφορέας, χωρίζεται σε κελιά κατάλληλων διαστάσεων για τα οποία επιλύεται η βασική εξίσωση υπόγειας ροής (η εξίσωση της συνέχειας).

#### 3.2.1 Διακριτοποίηση υδροφορέα

Σε κάθε κελί λαμβάνεται υπόψη η υδάτινη ισορροπία μεταξύ εισροών και εκροών. Η μορφή του υδροφορέα όπως δημιουργείται μέσω PMWIN φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 3.1: Διακριτοποίηση υδροφορέα, Πηγή: Pmwin User's Guide

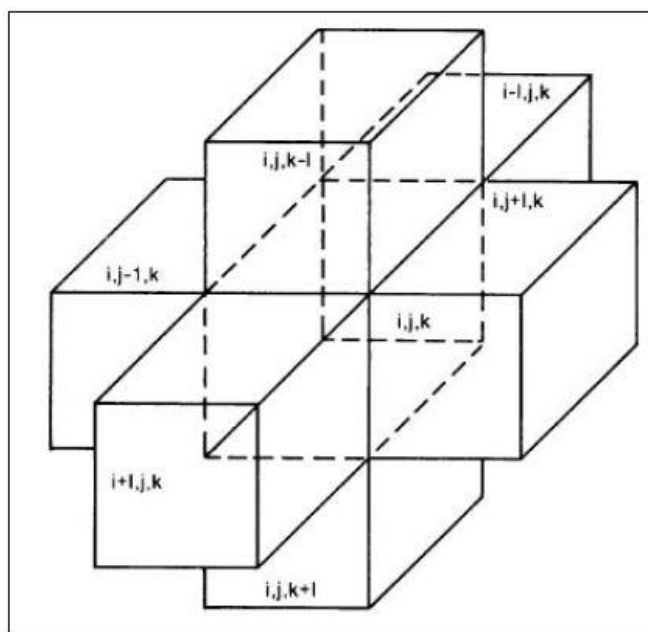
Κάθε κελί χαρακτηρίζεται από την θέση του η οποία περιγράφεται από τρεις συνιστώσες:

- την γραμμή ( $i$ )
- την στήλη ( $j$ )
- το οριζόντιο επίπεδο ( $layer - k$ )

Οι στήλες και οι γραμμές τέμνονται κάθετα μεταξύ τους, ορίζοντας έτσι ορθογώνια κελιά σε κάθε επίπεδο.

Χρησιμοποιώντας τις αρχικές και τις οριακές συνθήκες, η λύση της διακριτοποιημένης εξίσωσης δίνει το πιεζομετρικό φορτίο σε κάθε σημείο του κελιού το οποίο καλείται *κόμβος* (node) και αποτελεί το μέσον κάθε κελιού.

Για τον υπολογισμό οποιασδήποτε παραμέτρου (έστω του υδραυλικού φορτίου) για κάθε ένα κελί  $i,j,k$  χρησιμοποιούνται τα έξι γειτονικά του  $i-1,j,k$  ,  $i,j-1,k$  ,  $i,j,k-1$  ,  $i+1,j,k$  ,  $i,j+1,k$  και  $i,j,k+1$ , όπως φαίνεται και από το παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 3.2: Κελί  $i,j,k$  και γειτονικά κελιά, Πηγή: Παπαντωνίου 2003

### 3.2.2 Η εξίσωση των πεπερασμένων διαφορών

Η αρχή της συνέχειας ορίζει ότι το άθροισμα των εισροών και εκροών στο κελί (i, j,k) ισούται με την μεταβολή του αποθηκευμένου όγκου νερού σε αυτό. Με την υπόθεση ότι η πυκνότητα του νερού είναι σταθερή, η εξίσωση συνέχειας που εκφράζει το ισοζύγιο των ροών στο κελί είναι:

$$\sum Q_i = SS \frac{dh}{dt} \Delta V \quad (3.3)$$

Όπου:

$\sum Q_i$  το άθροισμα των εισροών και εκροών ( $L^3 T^{-1}$ )

SS η ειδική αποθηκευτικότητα ( $L^{-1}$ )

dh η μεταβολή του υδραυλικού φορτίου σε χρονικό διάστημα dt

$\Delta V$  ο όγκος του κελιού

Ο δεξιός όρος της εξίσωσης (3.3) είναι ουσιαστικά η μεταβολή του όγκου του νερού που παρατηρείται στο κελί σε χρονικό διάστημα dt.

Κατά σύμβαση, οι ροές οι οποίες εισέρχονται στο κελί θεωρούνται θετικές, ενώ οι ροές οι οποίες εξέρχονται από το κελί θεωρούνται αρνητικές.

Οπότε σύμφωνα με αυτήν την παραδοχή, η εισροή νερού q ( $L^3 T^{-1}$ ) στο κελί [i,j,k] από το γειτονικό του [i,j-1,k] κατά την διεύθυνση της γραμμής i θα δίνεται από τον τύπο (μονοδιάστατη ροή):

$$q_{i,j-1/2,k} = KR_{i,j-1/2,k} \Delta c_i \Delta v_k \frac{h_{i,j-1,k} - h_{i,j,k}}{\Delta r_{j-1/2}} \quad (3.4 - \text{Νόμος}$$

Darcy)

Όπου:

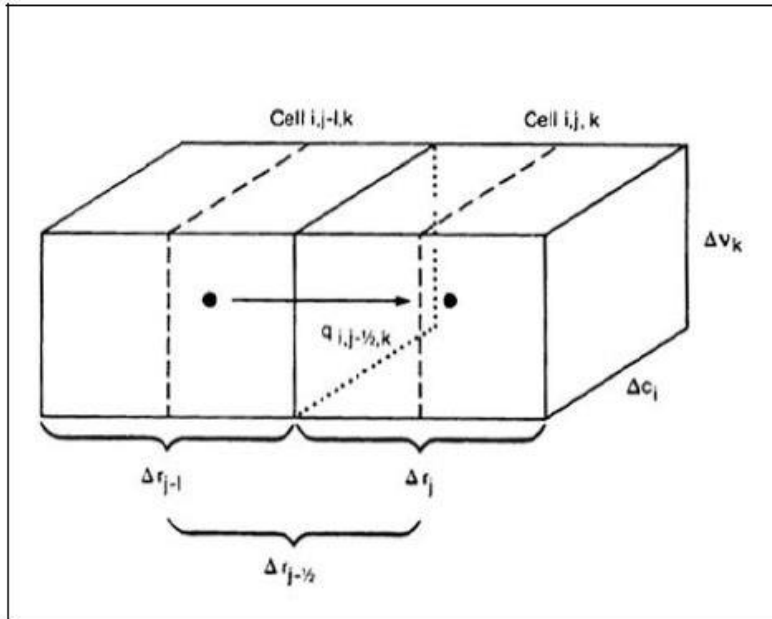
$KR_i$  είναι η υδραυλική αγωγιμότητα (αρμονικός μέσος) κατά μήκος της γραμμής  $R_i$  μεταξύ των κελιών [i, j, k] και [i, j-1, k] ( $LT^{-1}$ )

$\Delta c_i \Delta v_k$  η επιφάνεια της διατομής μεταξύ των κελιών ( $L^2$ )

$h_{i,j,k}$  και  $h_{i,j-1,k}$  το πιεζομετρικό φορτίο των κελιών i,j,k και i, j-1,k αντίστοιχα (L)

$\Delta r$  η απόσταση των κελιών (L)





Σχήμα 3.3: Ροή από το κελί  $i,j-1,k$  προς το κελί  $i,j,k$ , Πηγή: Παπαντωνίου 2003

Αντίστοιχες εκφράσεις μπορούν να γραφούν και για την προσέγγιση της ροής μεταξύ των υπολοίπων πέντε πλευρών του κελιού  $i, j, k$ .

Οι σχέσεις αυτές απλοποιούνται εάν περιγράψουμε τις διαστάσεις του κελιού και την υδραυλική αγωγιμότητα με μία μεταβλητή, την *αγωγιμότητα* ( $CR$ ) η οποία κατά μήκος μίας γραμμής  $R_i$  μεταξύ των κελιών  $i,j,k$  και  $i,j-1,k$  ορίζεται ως εξής:

$$CR_{i,j-1/2,k} = KR_{i,j-1/2,k} \frac{\Delta c_i \Delta v_k}{\Delta r_{j-1/2}} \quad (3.5)$$

Κατά την διεύθυνση της στήλης η αγωγιμότητα θα συμβολίζεται  $CC$ , ενώ κατά την κατακόρυφη διεύθυνση με  $CV$ . Από την σχέση (3.9) προκύπτει ότι ουσιαστικά η αγωγιμότητα είναι ο λόγος της διατομής του κελιού κατά την  $i$  ή  $j$  ή κατακόρυφη διεύθυνση προς την απόσταση μεταξύ των διαδοχικών κελιών επί τον αρμονικό μέσο της υδραυλικής αγωγιμότητας κατά την εκάστοτε διεύθυνση.

Επομένως, εάν αντικαταστήσουμε την παραπάνω εξίσωση (3.3) στην έκφραση για τον υπολογισμό του ισοζυγίου εισερχόμενης – εξερχόμενης ροής (νόμος Darcy, εξ. 3.2), προκύπτει η παρακάτω έκφραση για κάθε πλευρά του κελιού  $i,j,k$ :

$$q_{i,j-1/2,k} = CR_{i,j-1/2,k} (h_{i,j-1,k} - h_{i,j,k}) \quad (3.6)$$

και αντίστοιχα με τα υπόλοιπα γειτονικά κελιά.

Οι παραπάνω εξίσωση και οι υπόλοιπες κατ'αντιστοιχίαν αφορούν στην *εσωτερική* ροή στα κελιά.

Εάν υπάρχουν  $N$  *εξωτερικές* πηγές ή πηγάδια, τότε η συνολική ροή  $QS$  στο κελί  $i,j,k$  είναι:

$$QS_{i,j,k} = \sum_{n=1}^N a_{i,j,k,n} = \sum_{n=1}^N p_{i,j,k,n} h_{i,j,k,n} + \sum_{n=1}^N q_{i,j,k,n} \quad (3.7)$$

Όπου:

$a_{i,j,k,n}$  είναι η ροή από την  $n$ -οστή εξωτερική πηγή στο κελί  $i,j,k$

$p_{i,j,k,n}$  και  $q_{i,j,k,n}$  είναι σταθερές

Εφαρμόζοντας τις παραπάνω εξισώσεις στην εξίσωση της συνέχειας (3.1) του κελιού  $i,j,k$  προκύπτει η εξίσωση:

$$\begin{aligned} q_{i,j-1/2,k} + q_{i-1/2,j,k} + q_{i,j,k-1/2} + q_{i,j+1/2,k} + q_{i+1/2,j,k} + q_{i,j,k+1/2} + QS_{i,j,k} \\ = SS_{i,j,k} \frac{dh_{i,j,k}}{dt} \Delta r_j \Delta c_i \Delta v_k \end{aligned}$$

όπου:

$dh_{i,j,k} / dt$  η *πεπερασμένη διαφορά* που αντικαθιστά την παράγωγο ως προς τον χρόνο ( $LT^{-1}$ )

$SS_{i,j,k}$  η ειδική αποθηκευτικότητα του κελιού ( $L^{-1}$ )

$\Delta r_j \Delta c_i \Delta v_k$  ο όγκος του κελιού ( $L^3$ )

Η προσέγγιση με πεπερασμένες διαφορές της παραγώγου  $\frac{dh_{i,j,k}}{dt}$  εκφράζεται μέσω της *οπισθοδρομικής διαφοράς* (backward difference):

$$\left. \frac{dh_{i,j,k}}{dt} \right| = \frac{h_{i,j,k}^m - h_{i,j,k}^{m-1}}{t_m - t_{m-1}} \quad (3.8)$$

σύμφωνα με την οποία ισούται με την μεταβολή του  $h$  στο χρονικό διάστημα που εκτείνεται από την προηγούμενη χρονική στιγμή  $t_{m-1}$  έως την χρονική στιγμή που μας ενδιαφέρει ( $t_m$ ).

Εάν χρησιμοποιήσουμε στην εξίσωση της συνέχειας τις οπισθοδρομικές διαφορές, προκύπτουν ως άγνωστοι οι επτά τιμές του υδραυλικού φορτίου στο χρονικό βήμα m. Άρα έχουμε μία εξίσωση με επτά αγνώστους:

$$\begin{aligned}
 & CR_{i,j-1/2,k} (h_{i,j-1,k}^m - h_{i,j,k}^m) + CR_{i,j+1/2,k} (h_{i,j+1,k}^m - h_{i,j,k}^m) + \\
 & CC_{i+1/2,j,k} (h_{i+1,j,k}^m - h_{i,j,k}^m) + CC_{i-1/2,j,k} (h_{i-1,j,k}^m - h_{i,j,k}^m) + \\
 & CV_{i,j,k+1/2} (h_{i,j,k+1}^m - h_{i,j,k}^m) + CV_{i,j,k-1/2} (h_{i,j,k-1}^m - h_{i,j,k}^m) + P_{i,j,k} h_{i,j,k}^m + \\
 & Q_{i,j,k} = SS_{i,j,k} (\Delta r_j \Delta c_i \Delta v_k) \frac{h_{i,j,k}^m - h_{i,j,k}^{m-1}}{t_m - t_{m-1}}
 \end{aligned}$$

(3.9)

Μία τέτοια εξίσωση γράφεται για κάθε κόμβο μεταβλητού φορτίου (n κόμβοι), οπότε τελικά προκύπτει ένα σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους.

- Μόνιμη ροή (steady - state simulation)

Στην περίπτωση μόνιμης ροής, το δεύτερο μέρος της εξίσωσης συνέχειας είναι ίσο με 0:

$$\begin{aligned}
 & CR_{i,j-1/2,k} (h_{i,j-1,k}^m - h_{i,j,k}^m) + CR_{i,j+1/2,k} (h_{i,j+1,k}^m - h_{i,j,k}^m) + \\
 & CC_{i+1/2,j,k} (h_{i+1,j,k}^m - h_{i,j,k}^m) + CC_{i-1/2,j,k} (h_{i-1,j,k}^m - h_{i,j,k}^m) + \\
 & CV_{i,j,k+1/2} (h_{i,j,k+1}^m - h_{i,j,k}^m) + CV_{i,j,k-1/2} (h_{i,j,k-1}^m - h_{i,j,k}^m) + P_{i,j,k} h_{i,j,k}^m + \\
 & Q_{i,j,k} = 0
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Οπότε με δεδομένα τις αρχικές τιμές των υδραυλικών φορτίων, τις οριακές συνθήκες, τις αντλήσεις, τις τροφοδοσίες και τις υδραυλικές παραμέτρους του υδροφορέα, υπολογίζονται με επαναληπτική διαδικασία τα υδραυλικά φορτία στους κόμβους των κελιών στη δεδομένη χρονική στιγμή.

- Μη μόνιμη ροή (transient state simulation)

Σε αυτήν την περίπτωση, υπολογίζεται η τιμή του υδραυλικού φορτίου στους κόμβους των κελιών σε διαδοχικές χρονικές στιγμές.

Οι αρχικές τιμές των φορτίων – που δίδονται από τον μελετητή, αποτελούν τις τιμές του υδραυλικού φορτίου στην αρχή του 1<sup>ου</sup> χρονικού βήματος όπου συμβολίζεται με  $h^1_{i,j,k}$  για κάθε κόμβο του κανάβου. Κατά την διαδικασία επίλυσης προσδιορίζονται αρχικά οι τιμές των υδραυλικών φορτίων στο τέλος του 1<sup>ου</sup> χρονικού βήματος  $h^2_{i,j,k}$ .

Έπειτα ακολουθεί ο υπολογισμός του υδραυλικού φορτίου μέσω της εξίσωσης της συνέχειας στο τέλος του 2<sup>ου</sup> χρονικού βήματος  $h^3_{i,j,k}$  με αρχική τιμή την  $h^2_{i,j,k}$ .

Η διαδικασία ολοκληρώνεται όταν το υδραυλικό φορτίο υπολογισθεί για όλα τα χρονικά βήματα που έχουν ορισθεί. Ο προσδιορισμός των υδραυλικών φορτίων στο τέλος κάθε χρονικού βήματος γίνεται και εδώ όπως και στην περίπτωση της μόνιμης ροής με επαναληπτική διαδικασία.

Η μόνιμη ροή εν αντιθέσει με την μη μόνιμη, χαρακτηρίζεται από ένα χρονικό βήμα.

### **3.2.3 Επαναληπτική διαδικασία για τον υπολογισμό του δυναμικού σε κάθε χρονικό βήμα**

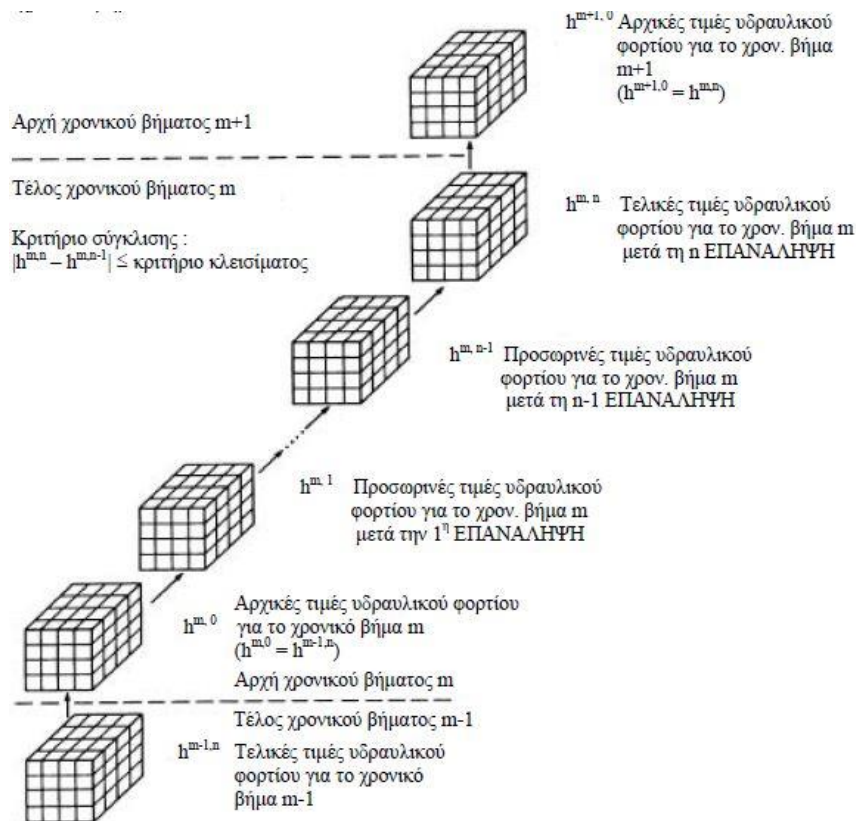
Σε κάθε κελί του κανάβου αποδίδονται από τον μελετητή αρχικές προσωρινές τιμές για το υδραυλικό φορτίο και ελέγχεται η ικανοποίηση του συστήματος των εξισώσεων.

Ακολουθείται μία επαναληπτική διαδικασία για την επίλυση των εξισώσεων των πεπερασμένων διαφορών σε κάθε χρονικό βήμα, οπότε και στην επόμενη επανάληψη παράγεται ένα νέο «σετ» προσωρινών τιμών οι οποίες προσεγγίζουν σε μεγαλύτερο βαθμό την επίλυση του συστήματος. Κάθε ένα από τα παραπάνω βήματα που οδηγούν στην παραγωγή νέων τελικών τιμών για κάθε χρονικό βήμα καλείται *επανάληψη*.

Όσο προχωρούν οι επαναλήψεις, η διαφορά των τιμών των υδραυλικών φορτίων μεταξύ δύο διαδοχικών επαναλήψεων μειώνεται και το σύστημα φτάνει στην σύγκλιση.

Η διαδικασία των επαναλήψεων φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Κάθε ένας από τους τρισδιάστατους καννάβους αναπαριστά τα υπολογισμένα σε κάθε επανάληψη υδραυτικά φορτία τα οποία συμβολίζονται με  $h$  και δύο εκθέτες. Ο μεν πρώτος εκθέτης δείχνει το χρονικό βήμα  $m$ , ενώ ο δεύτερος εκφράζει τον αριθμό των επαναλήψεων.



Σχήμα 3.4: Σχηματική αναπαράσταση των επαναλήψεων, Πηγή: Παπαντωνίου 2003

### 3.2.4 Αναδιαμόρφωση των εξισώσεων για επίλυση

Προκειμένου να επιλυθεί το σύστημα, δηλαδή η εξ. 3.9 για κάθε κόμβο του κανάβου, οι εξισώσεις αναδιατάσσονται έτσι ώστε οι όροι που περιέχουν τη μεταβλητή του υδραυλικού φορτίου στο τέλος του τρέχοντος χρονικού βήματος  $m$  να βρίσκονται στην αριστερή πλευρά της εξίσωσης και οι υπόλοιποι στην δεξιά.

Προκύπτει επομένως ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων που περιλαμβάνει μία εξίσωση για κάθε κελί μεταβλητού φορτίου στον κানাβο των πεπερασμένων διαφορών.

Μπορεί να γραφεί και ως πίνακας ως εξής:

$$A h = q,$$

όπου  $A$  ο πίνακας των συντελεστών του υδραυλικού φορτίου  
 $h$  ο πίνακας των τιμών του υδραυλικού φορτίου στο τέλος κάθε χρονικού βήματος  
 $q$  διάνυσμα σταθερών όρων για όλους τους κόμβους του δικτύου.

Το σύστημα αυτό επιλύεται με επαναληπτικές μεθόδους.

### 3.3 Προσομοίωση του υπό μελέτη υδροφορέα

Στο παρόν υποκεφάλαιο περιγράφονται τα χαρακτηριστικά του υπό μελέτη υδροφορέα και πως αυτά εισήχθησαν στο πρόγραμμα προσομοίωσης PMWIN έτσι ώστε ο προσομοιωτής υδροφορέας να προσεγγίζει όσο το δυνατόν καλύτερα και ακριβέστερα την πραγματική του μορφή.

#### 3.3.1 Ο υδροφορέας προς προσομοίωση

Ο προς προσομοίωση φρεάτιος υδροφορέας βρίσκεται στον Βαθύ της Καλύμνου και θα απεικονιστεί ως ένας κάνναβος 37 γραμμών και 61 στηλών με μέγεθος κελιού 150mm x 150mm.

Θεωρείται ότι δεν τροφοδοτείται πλευρικά, αλλά μόνο επιφανειακά. Η επιφανειακή του τροφοδοσία χωρίζεται σε 4 ζώνες.

Σε 4 ζώνες διαχωρίζεται και η υδραυλική αγωγιμότητα, ανάλογα με τους γεωλογικούς σχηματισμούς που υπάρχουν.

Τοποθετούνται επίσης και οι υπάρχουσες γεωτρήσεις ως πηγάδια άντλησης.

Ο υδροφορέας δεν έχει ένα σαφές γεωμετρικό σχήμα, οπότε μερικά από τα κελιά του μένουν ανενεργά έτσι ώστε να παρουσιασθεί ακριβέστερα το πραγματικό σχήμα του υδροφορέα.

Τα άνωθι χαρακτηριστικά θα αναλυθούν εν συνεχεία εκτενώς στο πέμπτο κεφάλαιο που αφορά την πρακτική εφαρμογή της βελτιστοποίησης στον υδροφορέα Βαθέως Καλύμνου.

#### 3.3.2 Παράμετροι προσομοίωσης του υδροφορέα

Αφού εισαχθούν οι διαστάσεις του υδροφορέα στο PMWIN, είναι απαραίτητο να ορισθούν κάποιες παράμετροι. Αυτές είναι:

- *Το είδος του υδροφορέα:*

Ο υδροφορέας εισάγεται ως περιορισμένος με μεταφορικότητα ίση με την υδραυλική αγωγιμότητα.

- *Οι οριακές συνθήκες :*

Κατάντη, ο υδροφορέας συνορεύει με την θάλασσα. Πρόκειται επομένως για όριο σταθερού δυναμικού  $\phi = 0$ . Στο PMWIN η συνθήκη Dirichlet αναπαρίσταται δίνοντας σε κάθε ένα από τα κελιά σταθερού δυναμικού την τιμή -1.

Ανάντη, ανατολικά και δυτικά, ο υδροφορέας συνορεύει με αδιαπέρατο όριο. Προσδίδεται στα κελιά αυτά η τιμή 0.

- *Το ανώτατο και κατώτατο ύψος του υδροφόρου στρώματος:*

Το πάχος του υδροφόρου στρώματος είναι 25 μέτρα. Επομένως το κατώτατο ύψος του υδροφόρου στρώματος είναι 0 μέτρα και το ανώτατο 25 μέτρα.

- *Ο χρόνος προσομοίωσης:*

Ως μονάδα μέτρησης του χρόνου ορίζεται η μέρα (day).

- *Οι αρχικές συνθήκες :*

Ορίζονται οι αρχικές συνθήκες, δηλαδή οι αρχικές τιμές του δυναμικού σε κάθε κελί του υδροφορέα. Τίθεται μία τυχαία αρχική τιμή (εδώ 5) στα κελιά του υδροφορέα. Στο όριο σταθερού δυναμικού διατηρείται η ορισθείσα από πριν τιμή 0.

- *Η μεταφορικότητα :*

Εισάγεται η τιμή της μεταφορικότητας ίση με την υδραυλική αγωγιμότητα, όπως έχει ήδη αναφερθεί.

- *Εισαγωγή πηγαδιών :*

Κατά την βελτιστοποίηση των αντλήσεων σε δεδομένες θέσεις φρεάτων , επισημαίνονται στο PMWIN οι θέσεις τους και εκτελείται το Modflow για κάποιες τυχαίες αρχικές τιμές άντλησης, προκειμένου να δημιουργηθεί το αρχείο του δυναμικού, το οποίο στη συνέχεια θα χρησιμοποιηθεί κατά την βελτιστοποίηση.

- *Η επιφανειακή τροφοδοσία :*

Εισάγεται στο μοντέλο του υδροφορέα η επιφανειακή τροφοδοσία κατά ζώνες.

### 3.3.3 Εκτέλεση του Modflow

Κατά την εκτέλεση του Modflow, εξάγονται αρχεία δεδομένων και αρχεία αποτελεσμάτων (Παπαντωνίου 2003).

Τα *αρχεία δεδομένων (input data files)* είναι:

- Basic Package (bas.dat): Το αρχείο αυτό περιλαμβάνει τις αρχικές και οριακές συνθήκες και είναι σε μορφή ASCII.
- Block - centered Flow Package ( bcf.dat): Το αρχείο αυτό περιλαμβάνει τις διαστάσεις των κελιών και τις παραμέτρους του υδροφορέα (υδραυλική αγωγιμότητα, μεταφορικότητα). Είναι επίσης σε μορφή ASCII.
- Output Control (oc.dat)
- Preconditioned Conjugate Gradient 2 Package (PCG2.dat)
- Recharge Package (rch.dat): Περιλαμβάνει την επιφανειακή τροφοδοσία μέσω κατείσδυσης και είναι και αυτό σε μορφή ASCII.
- Well Package (wel.dat): Περιλαμβάνει τα πηγάδια άντλησης (και τροφοδοσίας). Πρόκειται επίσης για αρχείο ASCII.

Τα *αρχεία αποτελεσμάτων (output files)* είναι:

- Output.dat: Πρόκειται για ένα ASCII αρχείο στο οποίο γίνεται λεπτομερής αναφορά στην εκτέλεση του προγράμματος και στην αξιοπιστία των αποτελεσμάτων προσομοίωσης.
- Heads.dat: Είναι το binary αρχείο στο οποίο καταγράφονται τα αποτελέσματα της επίλυσης για το δυναμικό.
- Ddown.dat: Binary αρχείο το οποίο παρουσιάζει την διαφορά των αρχικών τιμών δυναμικού από τις τελικές υπολογισμένες τιμές.
- Budget.dat: Binary αρχείο το οποίο περιλαμβάνει την παροχή υπογείου νερού μεταξύ γειτονικών κελιών, την παροχή άντλησης και τροφοδοσίας μέσω φρεάτων και επίσης την επιφανειακή τροφοδοσία.



## ΜΕΘΟΔΟΙ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΠΑΡΑΚΤΙΩΝ ΥΔΡΟΦΟΡΕΩΝ

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται οι μέθοδοι βελτιστοποίησης που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των βέλτιστων τιμών των αντλήσεων παρακτίων υδροφορέων και αναλύεται το υπολογιστικό πρόγραμμα που χρησιμοποιήθηκε.

### 4.1 Γενικά

Η βελτιστοποίηση στα εφαρμοσμένα μαθηματικά αναφέρεται στην αναζήτηση των βέλτιστων παραμέτρων ενός – συνήθως πολύπλοκου – συστήματος. Προβλήματα βελτιστοποίησης απαντώνται σε πολλά επιστημονικά πεδία, όπως για παράδειγμα τα μαθηματικά, η φυσική κλπ. (Wikipedia.org)

Στα μαθηματικά διατυπώνεται ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης σαν πρόβλημα ελαχιστοποίησης ή μεγιστοποίησης μίας μεταβλητής ή πολλών μεταβλητών. Ενώ στην ελαχιστοποίηση (ή στην μεγιστοποίηση) συναρτήσεων μίας μεταβλητής μπορούν να χρησιμοποιηθούν αναλυτικές και αλγεβρικές μέθοδοι για τον ακριβή ορισμό ελαχίστων (ή μεγίστων), στη μελέτη συναρτήσεων πολλών μεταβλητών χρησιμοποιούνται κυρίως αριθμητικές μέθοδοι για έναν προσεγγιστικό ορισμό ελαχίστων ή μεγίστων σημείων.

Σε πολλά προβλήματα βελτιστοποίησης τίθενται επιπλέον περιορισμοί (constraints), τους οποίους οι λύσεις πρέπει να ικανοποιούν. Οι περιορισμοί ή οι συνθήκες αυτές είναι συνήθως ανισότητες.

### 4.2 Κατηγορίες βελτιστοποίησης

Η βελτιστοποίηση των αντλήσεων στοχεύει στον καθορισμό της βέλτιστης (μεγαλύτερης) παροχής άντλησης από τα φρέατα, αποφεύγοντας παράλληλα τον κίνδυνο υπαλμύρισής τους. Τα φρέατα βρίσκονται σε δεδομένες θέσεις, οπότε η συνάρτηση σκοπού (objective function) που πρέπει να μεγιστοποιηθεί είναι το άθροισμα όλων των αντλήσεων. Ουσιαστικά πρόκειται για την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης σκοπού, στην οποία έχουμε θεωρήσει ότι είναι το αρνητικό άθροισμα των αντλήσεων.

Η μεταβλητή απόφασης είναι οι παροχές των αντλήσεων στην περίπτωση των δεδομένων θέσεων των φρεάτων, ενώ στο πιο περίπλοκο πρόβλημα βελτιστοποίησης όπου αναζητάται όχι μόνο η μέγιστη παροχή άντλησης αλλά

παράλληλα και οι βέλτιστες θέσεις των φρεάτων οι μεταβλητές απόφασης είναι η παροχή άντλησης και η θέση των φρεάτων (γραμμή και στήλη καννάβου).

Η προστασία των φρεάτων από την υφαλμύριση επιτυγχάνεται μέσω των περιορισμών που τίθενται από τον μελετητή.

Το πρόβλημα της εξασφάλισης της μέγιστης ποσότητας υπογείου νερού εντάσσεται στην κατηγορία των *μη γραμμικών προβλημάτων βελτιστοποίησης υπό περιορισμούς*.

Άλλες δύο βασικές κατηγορίες προβλημάτων βελτιστοποίησης είναι: τα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού και τα προβλήματα βελτιστοποίησης άνευ περιορισμών (Luenberger 1989).

Έτσι, τα *προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού (linear programming)* αναφέρονται στην περίπτωση γραμμικής αντικειμενικής συνάρτησης και γραμμικών περιοριστικών συνθηκών, ενώ τα *προβλήματα βελτιστοποίησης άνευ περιορισμών (unconstrained optimization)* χαρακτηρίζονται από την απουσία περιορισμών.

Τα προβλήματα βελτιστοποίησης υπό περιορισμούς – κατηγορία στην οποία εντάσσεται και το πρόβλημα βελτιστοποίησης αντλήσεων παρακτίων υδροφορέων – χαρακτηρίζεται από την παρουσία περιορισμών – γραμμικών ή μη.

Ζητείται η ελαχιστοποίηση της συνάρτησης σκοπού  $\min f(x)$ , όπου  $f(x)$  η συνάρτηση σκοπού και  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_i\}$  ο πίνακας των μεταβλητών απόφασης.

Οι περιορισμοί έχουν την μορφή ισότητας ( $G_i(x) = 0$ ) ή ανισότητας ( $G_i(x) \leq 0$ ). Ένας περιορισμός υπό μορφή ανισότητας ορίζεται ως ενεργός (active constraint) στο σημείο  $x$  για το οποίο ισχύει  $G(x) = 0$  και ανενεργός (inactive constraint) όταν  $G(x) < 0$ . Οι ενεργοί περιορισμοί είναι αυτοί που καθορίζουν ουσιαστικά την λύση του προβλήματος (Luenberger 1989).

Οι συναρτήσεις  $f(x)$ ,  $G(x)$  που υπεισέρχονται στο πρόβλημα πρέπει να είναι συνεχείς ούτως ώστε μικρές τιμές των μεταβλητών απόφασης να οδηγούν σε αντίστοιχα μικρές μεταβολές των άλλων παραμέτρων του προβλήματος.

Τα προβλήματα βελτιστοποίησης μπορούν επίσης να κατηγοριοποιηθούν ανάλογα με το μέγεθός τους. Έτσι, υπάρχουν τρεις κατηγορίες:

- Προβλήματα *μικρής κλίμακας* : Στην κατηγορία αυτήν εντάσσονται προβλήματα τα οποία έχουν το πολύ 5 μεταβλητές απόφασης και περιορισμούς και μπορούν να επιλυθούν και χωρίς την χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή.
- Προβλήματα *μεσαίας κλίμακας* : Περιλαμβάνουν από 5 έως και 100 μεταβλητές απόφασης. Για να επιλυθούν, είναι απαραίτητη η χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή και η βέλτιστη λύση προκύπτει με αλγόριθμο έπειτα από κάποιον αριθμό επαναλήψεων.

- Προβλήματα *μεγάλης κλίμακας* :Τα προβλήματα αυτής της κατηγορίας περιλαμβάνουν εκατοντάδες ή και χιλιάδες μεταβλητές απόφασης και περιορισμούς. Επιλύονται μόνο με τη χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή.

Το παρόν πρόβλημα βελτιστοποίησης των αντλήσεων εντάσσεται στην κατηγορία των προβλημάτων μεσαίας κλίμακας.

Υπάρχουν πολλές επιλογές για τον ορισμό της συνάρτησης σκοπού. Για παράδειγμα, οι μεταβλητές που περιλαμβάνονται στο πρόβλημα που εξετάζεται μπορεί να είναι:

- η συνολική παροχή άντλησης (Mantoglou 2002)
- η συγκέντρωση άλατος με σκοπό την ελαχιστοποίησή του (Das & Datta 1999)
- η θέση των φρεάτων ( Wang & Ahlfeld 1994)

Ακόμη, υπάρχει η δυνατότητα επιλογής μιας συνάρτησης σκοπού που να περιλαμβάνει συνδυασμό μεταβλητών, όπως είναι η συνολική παροχή άντλησης και η θέση των φρεάτων (Παπαντωνίου 2003).

Στην παρούσα εργασία η συνάρτηση σκοπού περιλαμβάνει ως μεταβλητές απόφασης τις επιμέρους παροχές άντλησης των φρεάτων και εξετάζεται η μεγιστοποίηση των τιμών αυτών μέσω της ελαχιστοποίησης της συνάρτησης σκοπού σε δεδομένες θέσεις φρεάτων η οποία ορίζεται ως το αρνητικό άθροισμα των αντλήσεων.

### 4.3 Βελτιστοποίηση αντλήσεων σε δεδομένες θέσεις φρεάτων

Η βελτιστοποίηση των αντλήσεων γίνεται στο περιβάλλον εργασίας Matlab. Είναι ένα εύχρηστο μαθηματικό πρόγραμμα με πολλές δυνατότητες το οποίο έχει ένα σύνολο εργαλείων και εντολών φιλικών προς τον χρήστη, καθώς και την δυνατότητα για την σύνταξη νέων προγραμμάτων.

Για την αντιμετώπιση του προβλήματος βελτιστοποίησης αντλήσεων σε δεδομένες θέσεις φρεάτων συντάσσεται η συνάρτηση σκοπού (objective function), η οποία ορίζεται ως το αρνητικό άθροισμα των επιμέρους αντλήσεων των φρεάτων :

$\min f(Q)$ , όπου  $f(Q) = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_N$ , όπου  $N$  ο αριθμός των φρεάτων και  $Q_i$  οι παροχή άντλησης του φρεάτος  $i$ .

Οι περιορισμοί (Constraints) συντάσσονται σε μία άλλη ξεχωριστή συνάρτηση Matlab η οποία δημιουργείται από τον χρήστη και υπεισέρχονται στο πρόβλημα μέσω της συνάρτησης `fmincon`.

Η συνάρτηση `fmincon` αφορά στον μη γραμμικό προγραμματισμό και βρίσκει το ελάχιστο μίας συνάρτησης (αντικειμενική συνάρτηση), προσδίδοντας στις μεταβλητές κάποιες αρχικές τιμές καθώς επίσης και τις συνθήκες κλεισίματος των επαναλήψεων.

## 4.4 Περιορισμοί της βελτιστοποίησης

Οι περιορισμοί που χρησιμοποιήθηκαν καθ' όλην την διάρκεια των βελτιστοποιήσεων ήταν δύο και στοχεύουν αποκλειστικά στην προστασία των φρεάτων από την υπαλμύριση. Οι περιορισμοί αυτοί αντλήθηκαν από την μεταπτυχιακή εργασία Παπαντωνίου (2003).

### 4.4.1 Περιορισμός δυναμικού

Ο πρώτος περιορισμός αφορά την τιμή του δυναμικού στα φρέατα, όπου τίθεται ο περιορισμός του θετικού ή ίσου με το μηδέν δυναμικού,  $\varphi_i \geq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , όπου  $n$  ο αριθμός των φρεάτων.

Με αυτόν τον περιορισμό εξασφαλίζεται ότι η ελεύθερη επιφάνεια του υδροφορέα στις θέσεις των πηγαδιών θα βρίσκεται πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας.

Είναι:

- Υφάλμυρη ζώνη (εξ. 2.21)

$$\varphi \geq 0 \rightarrow \frac{1+\Delta s}{2 \Delta s} (h_f - d)^2 \geq 0 \rightarrow h_f \geq d \quad (4.1)$$

- Ζώνη γλυκού νερού (εξ. 2.20)

$$\varphi \geq 0 \rightarrow \frac{1}{2} [h_f^2 - (1 + \Delta s) d^2] \geq 0 \rightarrow h_f \geq 1.0124 d \quad (4.2)$$

Από την εξ. 2.25, υπολογίζεται το δυναμικό στην θέση του ποδιού της αλάτινης σφήνας, το οποίο είναι  $\varphi_{\text{πόδα}} = 8.0078$ . Στη θέση αυτή, η στάθμη της ελεύθερης επιφάνειας του υδροφορέα είναι  $\sim 0.625$  m υψηλότερα από την στάθμη της θάλασσας (εξ. 2.20, 2.21).

Μικρότερες τιμές δυναμικού συναντώνται στην υφάλμυρη ζώνη και στη ζώνη του γλυκού νερού, μόνο όταν εκεί υπάρχει πηγάδι που αντλεί.

### 4.4.2 Περιορισμός στη θέση του πόδα της αλάτινης σφήνας

Ο παραπάνω περιορισμός για μη αρνητικό δυναμικό στις θέσεις των πηγαδιών δεν εξασφαλίζει τη μη υπαλμύριση των φρεάτων, ειδικά αυτών που βρίσκονται κοντά στην ακτή, καθώς θετικό δυναμικό δεν σημαίνει κατ' ανάγκη και μεγαλύτερο του δυναμικού του πόδα της αλάτινης σφήνας. Όπως αναφέραμε και παραπάνω, το δυναμικό κατά Strack στον πόδα της αλάτινης σφήνας είναι  $\varphi = 8.0078$ .

Ο δεύτερος περιορισμός που θα τηρηθεί σε συνδυασμό με τον πρώτο αφορά την θέση του ποδιού της αλάτινης σφήνας, και πιο συγκεκριμένα την απόσταση της αλάτινης σφήνας από την ακτή.

Έτσι μέσω αυτού του περιορισμού, ελέγχεται η θέση του ποδιού της σφήνας κατά μήκος της γραμμής του καννάβου που διέρχεται από το κελί του φρέατος.

Άρα, η οριζόντια απόσταση του ποδιού από την ακτή πρέπει να είναι μικρότερη από την οριζόντια απόσταση του κάθε φρέατος. Με άλλα λόγια το πόδι της σφήνας δεν πρέπει να προσεγγίσει τα φρέατα.

Επειδή μικρές μεταβολές (αυξήσεις συγκεκριμένα) στην άντληση μπορεί να επιφέρουν απότομη υφαλμύριση, δηλαδή εισχώρηση της αλάτινης σφήνας στο εσωτερικό του υδροφορέα και στη θέση των πηγαδιών, επελέγη ένας συντελεστής ασφαλείας της τάξεως του 1.012 (Παπαντωνίου 2003).

Επομένως, ο περιορισμός τελικά εκφράζεται μαθηματικά ως εξής:

$x_{wi} \geq x_{scti}$ , όπου  $x_{wi}$  η οριζόντια απόσταση του πηγαδιού  $i$  από την ακτή και  $x_{scti}$  η (προσαυξημένη υπέρ της ασφάλειας) απόσταση του σημείου με δυναμικό  $8.0078 \cdot 1.012 = 8.1$ , δηλαδή του ποδιού της αλάτινης σφήνας από την ακτή.

«Είναι φανερό ότι όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του παραπάνω συντελεστή ασφαλείας τόσο μεγαλύτερη ασφάλεια παρέχεται στα φρέατα από την υφαλμύριση, αλλά μειώνεται σημαντικά η βέλτιστη επιτρεπόμενη παροχή άντλησης» (Παπαντωνίου 2003).

Οι δύο αυτοί περιορισμοί θα πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα. Είναι φανερό ότι οι θέσεις των πηγαδιών στην έκταση του υδροφορέα παίζουν καθοριστικό ρόλο για την άντληση της βέλτιστης ποσότητας υπόγειου ύδατος. Η ισχύς δε του πρώτου περιορισμού στην περίπτωση απομακρυσμένου/ων φρέατος/ων είναι αυτή που παίζει καθοριστικό ρόλο, αφού όταν τα φρέατα βρίσκονται σε πολύ μεγάλη απόσταση από την ακτή και έχοντας ως δεδομένο το μη αρνητικό δυναμικό, η σφήνα δεν πλησιάζει εύκολα στο εσωτερικό του υδροφορέα.

Αντιθέτως όταν υπάρχουν φρέατα κοντά στην ακτή, ο δεύτερος περιορισμός κατ' ουσίαν είναι αυτός που καθορίζει το τελικό αποτέλεσμα και έχει την μεγαλύτερη ισχύ.

Ένα τελευταίο ζήτημα το οποίο μπορεί να επηρεάσει το αποτέλεσμα σε σχέση με τους περιορισμούς, είναι η διάταξη των πηγαδιών. Εάν παραδείγματος χάριν υπάρχουν πηγάδια και κοντά αλλά και μακριά από την ακτή, είναι πιθανόν η σφήνα να μπορέσει να μετακινηθεί στο εσωτερικό του υδροφορέα από ενδιάμεσα σημεία και να οδηγηθούν τελικά στην υφαλμύριση.

Τέλος, είναι σκόπιμο να αναφερθεί πως οι παραπάνω δύο περιορισμοί στοχεύουν αποκλειστικά στην προστασία των φρεάτων από την εισροή του θαλασσινού νερού και δεν λαμβάνονται υπ' όψιν οικονομικοί παράγοντες.

## 4.5 Μεθοδολογία που εφαρμόζεται στην παρούσα εργασία

Στην παράγραφο που ακολουθεί περιγράφεται η μεθοδολογία που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα εργασία αναφορικά με το ζήτημα της βελτιστοποίησης και περιγράφεται ο χρησιμοποιηθείς αλγόριθμος.

### 4.5.1 Γενικά

Το πρόβλημα βελτιστοποίησης που εξετάζεται στην παρούσα εργασία είναι ο προσδιορισμός της βέλτιστης ποσότητας άντλησης υπογείου νερού σε δεδομένες θέσεις φρεάτων τηρώντας τους παραπάνω περιορισμούς για την αποφυγή της υπαλμύρισης.

Ο αλγόριθμος που χρησιμοποιήθηκε ήταν η Μέθοδος του Εσωτερικού Σημείου - Interior Point και ως περιβάλλον εργασίας χρησιμοποιήθηκε το Matlab (Matlab Optimization Toolbox 2016).

Προκειμένου να υλοποιηθεί η βελτιστοποίηση, είναι απαραίτητο να ορισθούν από πριν οι παράμετροι της βελτιστοποίησης. Αρχικά ορίζονται οι μεταβλητές απόφασης του προβλήματος - που στην περίπτωση που μελετάμε είναι οι παροχές άντλησης των φρεάτων, το πεδίο ορισμού τους και οι αρχικές τιμές τους. Επίσης, συντάσσονται η συνάρτηση σκοπού και η συνάρτηση των περιορισμών.

Στο πρόγραμμα βελτιστοποίησης που εφαρμόζει την μέθοδο του Εσωτερικού Σημείου ο ορισμός των περιορισμών γίνεται μέσω της σύνταξης μιας ξεχωριστής συνάρτησης από την συνάρτηση σκοπού, η τήρηση της οποίας ελέγχεται για τις δοθείσες τιμές των μεταβλητών.

Η μέθοδος Interior Point χρησιμοποιεί ένα κατά προσέγγιση πρόβλημα το οποίο είναι μία ακολουθία από ισότητες περιορισμένων προβλημάτων που είναι πιο εύκολο να λυθούν από την αυθεντική ανισότητα του περιορισμένου προβλήματος.

Μειονέκτημα της μεθόδου αποτελεί ο κίνδυνος εγκλωβισμού της λύσης σε τοπικό ελάχιστο - local (και όχι ολικό - global). Επιπλέον, πρέπει να δίδεται ιδιαίτερη προσοχή στον ορισμό των παραμέτρων κλεισίματος της βελτιστοποίησης.

Παραδείγματος χάριν ο ορισμός από τον μελετητή μικρών διαφορών των μερικών παραγώγων της συνάρτησης ή ο ορισμός ενός μικρού μεγίστου αριθμού επαναλήψεων, μπορεί να οδηγήσουν σε παραπλανητικά αποτελέσματα λόγω πρόωρης διακοπής του προγράμματος βελτιστοποίησης.

#### 4.5.2 Το υπολογιστικό περιβάλλον Matlab – Η βιβλιοθήκη βελτιστοποίησης (Optimization Toolbox)

Η εφαρμογή της μεθόδου Interior Point για τον υπολογισμό των βέλτιστων παροχών άντλησης για κάθε περίπτωση έγινε όπως έχει ήδη αναφερθεί, μέσω του προγραμματιστικού περιβάλλοντος Matlab.

Το Matlab (MATrix LABoratory) είναι ένα περιβάλλον αριθμητικής υπολογιστικής και μία προγραμματιστική γλώσσα τέταρτης γενιάς. Αποθηκεύει και κάνει τις πράξεις με βάση την άλγεβρα πινάκων.

Χρησιμοποιείται κατά κύριο λόγο για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, ωστόσο είναι πολύ ισχυρό πρόγραμμα και μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για προγραμματισμό καθώς περιέχει εντολές από την C++, όπως την while, την switch και την if. Στον τομέα των γραφικών όσον αφορά τον μαθηματικό κλάδο μπορεί να υλοποιήσει συναρτήσεις πραγματικές, μιγαδικές, πεπλεγμένες συναρτήσεις δύο μεταβλητών κ.α.

Ένα άλλο ισχυρό εργαλείο του περιβάλλοντος Matlab είναι το πακέτο βελτιστοποίησης (Optimization Toolbox), που είναι και αυτό που χρησιμοποιείται στην παρούσα εργασία για τις βελτιστοποιήσεις των αντλήσεων.

Το Optimization Toolbox είναι μία πρόσθετη βιβλιοθήκη του Matlab που παρέχει συναρτήσεις για προβλήματα βελτιστοποίησης.

Τα προβλήματα που μπορούν να επιλυθούν με χρήση του Optimization Toolbox είναι (Optimization Toolbox 2016, Αγραπίδης 2006):

- Ελαχιστοποίηση με όριο (Scalar Minimization):  $\min f(\alpha)$ , με  $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$
- Ελαχιστοποίηση χωρίς περιορισμούς (Unconstrained Minimization):  $\min f(x)$
- Γραμμικός προγραμματισμός (Linear programming):  $\min f(x)$ , με  $Ax \leq b$ ,  $Aeq\ x = beq$ ,  $l \leq x \leq u$ .
- Τετραγωνικός προγραμματισμός (Quadratic programming)
- Ελαχιστοποίηση με περιορισμούς (Constrained Minimization). Είναι η μέθοδος που χρησιμοποιείται στην παρούσα εργασία.
- Μέθοδος επίτευξης στόχου (Goal attainment). Χρησιμοποιείται συνήθως για πολυδιάστατη βελτιστοποίηση (περισσότερες της μίας αντικειμενικές συναρτήσεις).
- Μέθοδος Minimax.
- Ελαχιστοποίηση ημι-απείρων προβλημάτων (Semi-infinite minimization).

Οι περισσότεροι από τους αλγορίθμους βελτιστοποίησης απαιτούν την δημιουργία αρχείου (function m-file) στο οποίο θα βρίσκεται η συνάρτηση σκοπού. Σε περίπτωση που έχουμε περιορισμούς, αυτοί θα αναγράφονται σε ξεχωριστό αρχείο.

Επίσης, στην περίπτωση που μας ενδιαφέρει η μεγιστοποίηση μίας συνάρτησης και όχι η ελαχιστοποίησή της, τότε απλώς εφαρμόζουμε τους αλγόριθμους ελαχιστοποίησης για την συνάρτηση σκοπού  $-f$  (με αντίθετο πρόσημο).

Η βελτιστοποίηση που εξετάζεται στην παρούσα εργασία κατατάσσεται στην κατηγορία της βελτιστοποίησης υπό περιορισμούς και η συνάρτηση Matlab που χρησιμοποιείται είναι η *fmincon*.

### 4.5.3 Η μέθοδος του Εσωτερικού Σημείου (Interior Point method)

Η μέθοδος του Εσωτερικού Σημείου χρησιμοποιείται για την επίλυση μη – γραμμικών προβλημάτων βελτιστοποίησης υπό περιορισμούς. Η μέθοδος Interior point στην βελτιστοποίηση υπό περιορισμούς αφορά στη λύση μία ακολουθίας από προβλήματα ελαχιστοποίησης. Το αυθεντικό πρόβλημα είναι (Optimization Toolbox 2016 – User’s Guide, Δήμος Χ. 2015):

$$\min f(x) , \text{ όπου } h(x) = 0 \text{ και } g(x) \leq 0 \quad (4.3)$$

Για κάθε  $\mu > 0$ , το κατά προσέγγιση πρόβλημα είναι:

$$\min_{x,s} f_{\mu}(x,s) = \min_{x,s} f(x) - m \sum \ln(s_i) \quad (4.4)$$

όπου  $h(x) = 0$  και  $g(x) + s = 0$ .

Υπάρχουν τόσες μεταβλητές  $s_i$  όσες και οι περιοριστικές ανισότητες  $g$ . Τα  $s_i$  είναι περιορισμένα να είναι θετικά, ούτως ώστε να κρατούν το  $\ln(s_i)$  δεσμευμένο. Όσο το  $\mu$  πλησιάζει στο 0, το ελάχιστο της  $f_{\mu}$  πρέπει να πλησιάζει στο ελάχιστο της  $f$ . Ο προστιθέμενος λογαριθμικός όρος ονομάζεται συνάρτηση φραγμού.

Το κατά προσέγγιση πρόβλημα (εξ. 4.4), είναι μία ακολουθία από ισότητες περιορισμένων προβλημάτων. Οι ισότητες αυτές είναι πιο εύκολο να λυθούν από την αυθεντική ανισότητα του περιορισμένου προβλήματος (εξ. 4.3). Επομένως, για να λυθεί το κατά προσέγγιση πρόβλημα, ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί έναν από τους δύο βασικούς τύπους βημάτων σε κάθε επανάληψη:

- Ένα άμεσο βήμα σε  $(x,s)$ . Σε αυτό το βήμα γίνεται προσπάθεια να λυθούν οι εξισώσεις :

$\nabla_x [L(x,\lambda)] = 0, \lambda_{g,i} g_i(x) = 0, \forall i$ , για το κατά προσέγγιση πρόβλημα μέσω μίας γραμμικής προσέγγισης. Αυτό ονομάζεται επίσης και Νευτώνειο Βήμα.

- Ένα CG (συζυγής βαθμίδα) βήμα, το οποίο χρησιμοποιεί μία περιοχή εμπιστοσύνης.



Από προεπιλογή, ο αλγόριθμος πρώτα προσπαθεί να πάρει ένα άμεσο βήμα. Εάν δεν τα καταφέρει, τότε παίρνει ένα CG βήμα.

Η περίπτωση στην οποία δεν μπορεί να χρησιμοποιήσει ένα άμεσο βήμα προκύπτει όταν το κατά προσέγγιση πρόβλημα δεν είναι τοπικά καμπύλο κοντά στη συγκεκριμένη επανάληψη. Σε κάθε επανάληψη ο αλγόριθμος μειώνει μία συνάρτηση αξίας (Δήμος 2015):

$$f_{\mu}(x, s) + \nu || h(x), g(x) + s || \quad (4.5)$$

Η παράμετρος  $\nu$  μπορεί να αυξηθεί με αριθμό επαναλήψεων έτσι ώστε να οδηγηθεί το αποτέλεσμα σε εφικτή λύση. Αν ένα βήμα δεν μειώσει την συνάρτηση αξίας, ο αλγόριθμος θα απορρίψει το βήμα και θα προσπαθήσει με ένα νέο βήμα.

Εάν είτε η αντικειμενική συνάρτηση είτε μία μη γραμμική περιορισμένη συνθήκη επιστρέψει σε μια επανάληψη  $x_j$ , τότε ο αλγόριθμος απορρίπτει την  $x_j$ . Η απόρριψη έχει την ίδια επίδραση με την περίπτωση που η συνάρτηση αξίας δεν μειώνεται αρκετά, όπου τότε ο αλγόριθμος προσπαθεί ένα διαφορετικό, μικρότερο βήμα.

#### 4.5.3.1 Το άμεσο βήμα

Για να οριστεί το άμεσο βήμα, χρησιμοποιούνται οι παρακάτω μεταβλητές (Matlab Optimization Toolbox 2016 – User’s Guide):

- $H$ . Η μεταβλητή αυτή υποδηλώνει τον Hessian πίνακα της συνάρτησης Lagrange:

$$H = \nabla^2 f(x) + \sum_i l_i \nabla^2 g_i(x) + \sum_j l_j \nabla^2 h_j(x) \quad (4.6)$$

- $J_g$ . Η μεταβλητή αυτή υποδηλώνει τον Ιακωβιανό πίνακα της περιορισμένης συνάρτησης  $g$ .
- $J_h$ . Ο Ιακωβιανός πίνακας της περιορισμένης συνάρτησης  $h$ .
- $\lambda$ . Η μεταβλητή αυτή υποδηλώνει το πολλαπλασιαστικό διάνυσμα Lagrange με τους περιορισμούς  $g$ .
- $\Lambda = \text{diag}(\lambda)$
- $\gamma$ , το οποίο υποδηλώνει το πολλαπλασιαστικό διάνυσμα Lagrange που σχετίζεται με το  $h$ .

Η εξίσωση που προκύπτει από την λύση των εξισώσεων

$\nabla_x[L(x, \lambda)] = 0$ ,  $\lambda_{g,i}g_i(x) = 0, \forall i$ , και ορίζει το άμεσο βήμα  $(\Delta S, \Delta X)$  χρησιμοποιώντας μια γραμμικοποιημένη Lagrange είναι:

$$\begin{pmatrix} H & 0 & J_h^T & J_g^T \\ 0 & S\Lambda & 0 & -S \\ J_k & 0 & I & 0 \\ J_g & -S & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta X \\ -\Delta \lambda \\ -\Delta y \\ \Delta s \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla f - J_h^T y - J_g^T \lambda \\ S\lambda - \mu e \\ h \\ g + s \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Για να λυθεί η άνωθεν εξίσωση για  $(\Delta S, \Delta X)$ , ο αλγόριθμος κάνει μία LDL παραγοντοποίηση του πίνακα. Αυτό είναι το πιο ακριβό υπολογιστικά βήμα. Ένα από τα αποτελέσματα της παραγοντοποίησης είναι η απόφαση του αν ο προβαλλόμενος Hessian πίνακας είναι θετικά ορισμένος ή όχι. Εάν δεν είναι, τότε ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί το CG βήμα.

#### 4.5.3.2 Το CG βήμα (conjugate gradient method)

Η μέθοδος αυτή, είναι κατ' ουσίαν ένας αλγόριθμος για την εύρεση μιας αριθμητικής λύσης συστημάτων γραμμικών εξισώσεων. Σε αυτήν την περίπτωση, ο αλγόριθμος ρυθμίζει το  $x$  και το  $s$  κρατώντας το  $s$  θετικό. Η επίλυση γίνεται μέσω της τετραγωνικής προσέγγισης του κατά προσέγγιση προβλήματος σε μια περιοχή εμπιστοσύνης που υπόκειται σε γραμμικούς περιορισμούς (Optimization Toolbox – User's Guide 2016).

Ο αλγόριθμος περιέχει πολλαπλασιαστές Lagrange που προσεγγιστικά επιλύουν τις εξισώσεις:

- $\nabla_x[L(x, \lambda)] = 0$ ,  $\lambda_{g,i}g_i(x) = 0, \forall i$
- $\nabla_x L = \nabla_x f(x) + \sum_i \lambda_i \nabla g_i(x) + \sum_j y_j \nabla h_j(x) = 0$ .

Στην μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων το  $\lambda$  είναι θετικό. Τότε παίρνει ένα βήμα ώστε να λυθεί προσεγγιστικά ως κάτωθι:

$$\min_{\Delta x, \Delta s} \nabla f^T \Delta x + \frac{1}{2} \Delta x^T \nabla_{xx}^2 L \Delta x + \mu e^T S^{-1} \Delta s + \frac{1}{2} \Delta s^T S^{-1} \Lambda \Delta s \quad (4.8)$$

και υπόκειται στους εξής γραμμικοποιημένους περιορισμούς:

$$g(x) + J_g \Delta x + \Delta s = 0 \text{ και } h(x) + J_h \Delta x = 0 \quad (4.9)$$

Για να λυθεί η (4.9), ο αλγόριθμος προσπαθεί να ελαχιστοποιήσει την νόρμα των γραμμικοποιημένων περιορισμών μέσα σε μια περιοχή ακτίνας  $R$ . Τότε, η (4.8) λύνεται με τους περιορισμούς που ταιριάζουν με το υπόλοιπο από την επίλυση της (4.9) παραμένοντας εντός της περιοχής εμπιστοσύνης της ακτίνας  $R$  και κρατώντας το  $s$  αυστηρά θετικό.

#### 4.5.4 Η συνάρτηση `fmincon`

Η συνάρτηση `fmincon` χρησιμοποιείται από το πρόγραμμα Matlab για την επίλυση μη – γραμμικών προβλημάτων βελτιστοποίησης υπό περιορισμούς. Η σύνταξη της συνάρτησης `fmincon` είναι γενικά η εξής:

**`[x, fval, exitflag, output, lambda, grad, hessian] = fmincon ( objfun, x0, A, b, Aeq, Beq, lb, ub, nonlcon, options, P1, P2..)`**

Η σύνταξη της `fmincon` γίνεται *πάντα* με τον συγκεκριμένο τρόπο. Αυτό σημαίνει ότι η δήλωση των ορισμάτων εισόδου και εξόδου πρέπει να γίνεται με την συγκεκριμένη σειρά που δίνονται στην παραπάνω έκφραση.

Στο δεξί μέρος της έκφρασης που είναι κλεισμένο σε παρενθέσεις ( ) βρίσκονται *πάντα* τα ορίσματα εισόδου.

Αυτά είναι τα εξής:

- Ο πίνακας  $A$  και το διάνυσμα  $b$  είναι αντίστοιχα ο συντελεστής και το διάνυσμα στο δεξί μέρος των *γραμμικών ανισοτικών* περιορισμών της μορφής  $Ax \leq b$ .
- Ο πίνακας  $Aeq$  και το διάνυσμα  $beq$  είναι αντίστοιχα ο συντελεστής και το διάνυσμα στο δεξί μέρος των *γραμμικών ισοτικών* περιορισμών της μορφής  $Ax = b$ .
- *objfun* είναι η αντικειμενική συνάρτηση, της οποίας επιζητείται μέσω της βελτιστοποίησης η ελαχιστοποίησή της.
- *lb* και *ub* είναι τα κατώτατα και τα ανώτατα όρια αντίστοιχα για τις μεταβλητές. Μπορεί να είναι διανύσματα ή πίνακες. Τα *lb*, *ub* πρέπει να έχουν τις ίδιες διαστάσεις με το  $x$  (διάνυσμα το οποίο περιέχει τις ανεξάρτητες μεταβλητές).
- Το αρχείο εισόδου *nonlcon* είναι συνήθως κάποιο αρχείο τύπου `function m-file` που περιέχει τους μη γραμμικούς ισοτικούς και ανισοτικούς περιορισμούς.
- *options* είναι μία δομή η οποία ορίζει διάφορες παραμέτρους για τον αλγόριθμο βελτιστοποίησης.
- *P1, P2* είναι επιπρόσθετοι παράμετροι οι οποίοι μπορούν να εισαχθούν στην αντικειμενική συνάρτηση.
- $x0$  είναι το διάνυσμα ή ο πίνακας των αρχικών τιμών των ανεξάρτητων μεταβλητών  $x$ .

Στο αριστερό μέλος της έκφρασης για την σύνταξη της συνάρτησης `fmincon` παρουσιάζονται τα ορίσματα εξόδου που χρησιμοποιούνται. Αυτά είναι τα εξής (Αγραπίδης 2006, Optimization Toolbox 2016):

- *exitflag*. Είναι μεταβλητή που περιγράφει την κατάσταση εξόδου. Αν  $exitflag > 0$ , σημαίνει ότι βρέθηκε η βέλτιστη λύση. Αν  $exitflag < 0$ , σημαίνει ότι ο αλγόριθμος δεν βρήκε την βέλτιστη λύση. Τέλος, αν  $exitflag = 0$ , σημαίνει ότι ο μέγιστος αριθμός των επαναλήψεων που δηλώθηκαν στην δομή `options` του αλγορίθμου ξεπεράστηκε χωρίς να βρεθεί βέλτιστη λύση.
- *fval*. Είναι η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης στην βέλτιστη λύση  $x$ .
- *grad*. Η τιμή του διανύσματος κλίσης στην βέλτιστη τιμή  $x$ .
- *hessian*. Είναι η τιμή του Εσσιανού πίνακα στην βέλτιστη λύση  $x$ .
- *lambda*. Οι τιμές των πολλαπλασιαστών Lagrange στην βέλτιστη λύση  $x$ .
- *output*. Δίνει πληροφορίες σχετικά με τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης. Παρέχει πληροφορίες σχετικά με τον αλγόριθμο (τον αριθμό των επαναλήψεων, τον αριθμό υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης - `function evaluations`, το όνομα του χρησιμοποιούμενου αλγορίθμου).
- $x$ . Είναι η βέλτιστη λύση που βρέθηκε από την συνάρτηση βελτιστοποίησης. Αν  $exitflag > 0$ , τότε το  $x$  είναι λύση αλλιώς είναι η τιμή την οποία υπολόγιζε εκείνη την στιγμή η συνάρτηση βελτιστοποίησης, όταν τερματίστηκε πρόωρα για κάποιον άγνωστο λόγο.

Στην συνάρτηση `fmincon` αν δεν θέλουμε να εισάγουμε ορίσματα εισόδου που βρίσκονται δεξιότερα του τελευταίου δεδομένου ορίσματος στη σύνταξη της εντολής, απλώς τα παραλείπουμε.

Επιπλέον ανάλογα με το πρόβλημα, μπορεί να μην έχουμε γραμμικούς ανισοτικούς περιορισμούς. Σε αυτήν την περίπτωση στη σύνταξη της εντολής, θέτουμε στις θέσεις των  $A$ ,  $b$  έναν κενό πίνακα (που παριστάνεται από τις αγκύλες `[]`). Γενικά, θα πρέπει να αντικαταστήσουμε με τον κενό πίνακα όλα τα ορίσματα που δεν δίνονται.

Υπάρχουν κάποιοι περιορισμοί στην χρήση της συνάρτησης `fmincon`. Η συνάρτηση η οποία πρόκειται να βελτιστοποιηθεί και οι περιορισμοί, πρέπει να είναι συνεχείς. Η `fmincon` ίσως μπορεί να δώσει μόνο τοπικές λύσεις (Αγραπίδης 2006).

Όταν το πρόβλημα είναι αδύνατο, η `fmincon` προσπαθεί να ελαχιστοποιήσει την μέγιστη τιμή των περιορισμών.

Η αντικειμενική συνάρτηση και οι περιορισμοί πρέπει να δέχονται πραγματικές τιμές, που σημαίνει ότι δεν επιτρέπεται να δίνουν μιγαδικές τιμές.

#### 4.5.5 Παράμετροι εκτέλεσης και τερματισμού του προγράμματος

Πριν γίνει η σύνταξη της `fmincon` προκειμένου να ξεκινήσει ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης, είναι αναγκαίο να ορίσουμε κάποιες παραμέτρους του αλγορίθμου. Το πρώτο βήμα αφορά στον καθορισμό του τύπου του προβλήματος, έτσι ώστε να χρησιμοποιηθεί η πιο κατάλληλη μέθοδος βελτιστοποίησης. Αν το πρόβλημα είναι μεγάλης κλίμακας (*large scale*), τότε αυτό πρέπει να διευκρινιστεί, διότι αν όχι, τότε ο αλγόριθμος θα χρησιμοποιήσει μεθόδους βελτιστοποίησης μέσης κλίμακας (*Medium scale*) που είναι και οι προεπιλεγμένες (*default*), με συνέπεια πολλές φορές τον πρόωρο τερματισμό του αλγορίθμου ή λάθος αποτελέσματα.

Ο καθορισμός των επιλογών γίνεται χρησιμοποιώντας την συνάρτηση `optimset` ως εξής:

```
options = optimset ( 'Display' , 'MaxFunEvals' , 'MaxIter' , 'TolFun' , 'TolX' , 'TolCon' ,  
'DiffMaxChange' , 'DiffMinChange' )
```

Οι παραπάνω επιλογές αναλύονται κάτωθι:

- Η επιλογή *Display* δείχνει τα αποτελέσματα του αλγορίθμου όταν είναι στην επιλογή 'on'. Όταν είναι στην επιλογή 'iter', δείχνει τα ενδιάμεσα αποτελέσματα του αλγορίθμου. Στο 'final' δείχνει μόνο το τελικό αποτέλεσμα.
- *MaxFunEvals* είναι ο μέγιστος αριθμός των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης. Από προεπιλογή, η τιμή αυτή ορίζεται ως  $100 * \text{number of variables}$  (100 φορές ο αριθμός των μεταβλητών του προβλήματος).
- *MaxIter* είναι ο μέγιστος αριθμός των επιτρεπόμενων επαναλήψεων.
- Η επιλογή *TolFun* (*tolerance*) μας δείχνει την ανοχή για τον τερματισμό του αλγορίθμου όσον αφορά την τιμή της συνάρτησης σκοπού. Επιτυχής τερματισμός του αλγορίθμου και σύγκλιση επιτυγχάνεται όταν η διαφορά δύο διαδοχικών επαναλήψεων γίνει μικρότερη από την καθορισμένη τιμή.
- Η επιλογή *TolX* μας δείχνει την ανοχή για τον τερματισμό του αλγορίθμου όσον αφορά την διαφορά μεταξύ δύο υπολογισμένων τιμών των μεταβλητών  $x$ .
- Η επιλογή *TolCon* είναι η ανοχή για τον τερματισμό του αλγορίθμου όσον αφορά την παραβίαση των περιορισμών (*constraints violation*).
- *DiffMaxChange*: Δείχνει την μέγιστη διαφορά των τιμών των μεταβλητών κατά τον υπολογισμό των μερικών παραγώγων τους. Ο υπολογισμός των μερικών παραγώγων γίνεται με την μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών. Το κριτήριο αυτό δεν επιτρέπει η τιμή των μερικών παραγώγων δύο διαδοχικών επαναλήψεων να είναι μεγαλύτερη της προκαθορισμένης.

- *DiffMinChange*: Κριτήριο αντίστοιχο με το προηγούμενο. Δεν επιτρέπει η η διαφορά  $\Delta x$  της τιμής κάθε μεταβλητής μεταξύ δύο διαδοχικών επαναλήψεων να είναι μικρότερη της προκαθορισμένης.

#### Αποτελέσματα από τον τερματισμό του αλγορίθμου

Τα αποτελέσματα που εμφανίζονται κατά τον τερματισμό του αλγορίθμου είναι:

- η βέλτιστη τιμή των μεταβλητών του προβλήματος
- η αντίστοιχη βέλτιστη τιμή της συνάρτησης σκοπού
- ο αριθμός των επαναλήψεων που εκτελέστηκαν
- ο αριθμός υπολογισμών της συνάρτησης σκοπού
- ο χρόνος εκτέλεσης της βελτιστοποίησης

#### **4.5.6 Συναρτήσεις Matlab που χρησιμοποιήθηκαν για την βελτιστοποίηση των αντλήσεων**

Όπως έχει αναφερθεί και παραπάνω, είναι απαραίτητη η σύνταξη της συνάρτησης σκοπού. Στην περίπτωση μας όπου το ζητούμενο είναι η παροχή άντλησης σε δεδομένες θέσεις φρεάτων, η συνάρτηση σκοπού είναι το αρνητικό άθροισμα όλων των επιμέρους παροχών άντλησης, δηλαδή:

$$F = - (Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_N) , \quad \text{με } N \text{ τον αριθμό των φρεάτων (Παπαντωνίου 2003).}$$

Η συνάρτηση Matlab που περιλαμβάνει την άνωθεν συνάρτηση σκοπού είναι η: *ObjFnc.m*.

Το αρχείο που περιέχει τους περιορισμούς είναι χωριστά από την συνάρτηση σκοπού και είναι το *Constraints.m*, το οποίο περιλαμβάνει τον περιορισμό για θετικό δυναμικό στις θέσεις των πηγαδιών,  $\varphi \geq 0$  και η θέση της σφήνας να προηγείται των πηγαδιών,  $x_{scti} \leq x_{wi}$ .

Για την εφαρμογή των περιορισμών είναι απαραίτητος ο υπολογισμός των  $\varphi$ ,  $x_{scti}$  και  $x_{wi}$ , τα οποία υπολογίζονται μέσω των παρακάτω βοηθητικών συναρτήσεων:

- *readPMheads.m*. Η συνάρτηση αυτή διαβάζει το binary αρχείο heads.dat που έχει δημιουργηθεί μέσω του PMWIN και περιέχει τις τιμές του δυναμικού για κάθε κελί του καννάβου.

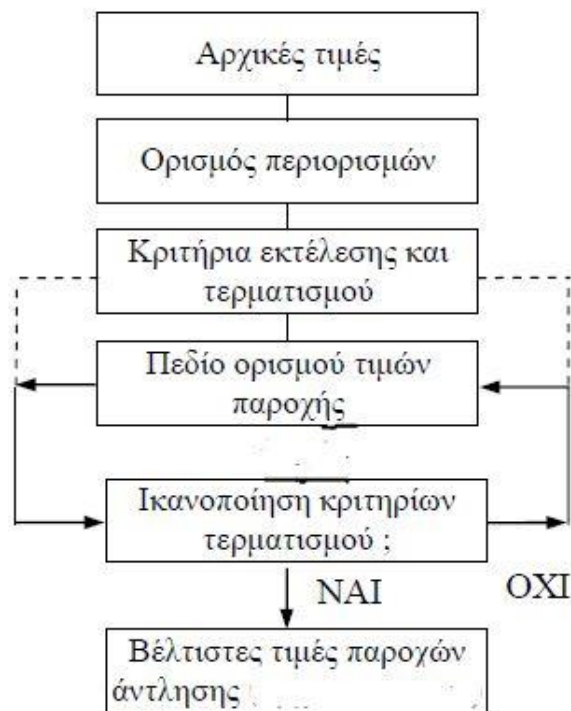
- *PmwinWell.m*. Η συγκεκριμένη συνάρτηση χρησιμοποιείται από την *GAObjFnc.m*, ούτως ώστε να αντικαθιστά τις τιμές αυτές με νέες σε κάθε βήμα βελτιστοποίησης έτσι ώστε να υπολογισθούν οι τιμές του δυναμικού σε κάθε κελί του καννάβου.

- *Optimization.m*. Είναι το κυρίως πρόγραμμα βελτιστοποίησης. Σε αυτό χρησιμοποιούνται το αρχείο της συνάρτησης σκοπού (*ObjFun.m*) και το αρχείο των περιορισμών (*Constraints.m*).

Ορίζονται οι μεταβλητές του προβλήματος όπως είναι ο αριθμός των φρεάτων, οι διαστάσεις των κελιών κατά x και κατά y, ο αριθμός των γραμμών και των στηλών, το πάχος του υδροφορέα και το δυναμικό στο πόδι της αλάτινης σφήνας.

Στη συνέχεια ορίζονται οι αρχικές τιμές των μεταβλητών (παροχών άντλησης) καθώς και το πεδίο ορισμού τους. Ορίζονται οι παράμετροι εκτέλεσης και τερματισμού της βελτιστοποίησης όπως είναι ο αλγόριθμος που θα χρησιμοποιηθεί και εν τέλει εκτελείται η συνάρτηση ελαχιστοποίησης *fmincon*.

Σε κάθε βήμα (επανάληψη), υπολογίζεται η τιμή της συνάρτησης σκοπού και ελέγχεται αν ικανοποιεί τους περιορισμούς. Όταν βρεθεί η βέλτιστη λύση που να ικανοποιεί τους περιορισμούς, ο αλγόριθμος τερματίζει παράγοντας τα επιθυμητά αποτελέσματα (βέλτιστες παροχές άντλησης). Η παραπάνω διαδικασία περιγράφεται σχηματικά ως εξής (Παπαντωνίου 2003):



Σχήμα 4.1: Διάγραμμα ροής για την βελτιστοποίηση αντλήσεων, Πηγή: Παπαντωνίου 2003

Με τον τερματισμό του προγράμματος, εξάγονται οι βέλτιστες τιμές των μεταβλητών σε μορφή πίνακα.

## ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΟΝ ΠΑΡΑΚΤΙΟ ΥΔΡΟΦΟΡΕΑ ΒΑΘΕΩΣ ΚΑΛΥΜΝΟΥ

Στο κεφάλαιο που ακολουθεί παρουσιάζεται το μοντέλο του παράκτιου υδροφορέα στον Βαθύ της Καλύμνου. Η προσομοίωση του υδροφορέα έγινε μέσω του προγράμματος Modflow και τα δεδομένα για την αρχική κατάσταση του υδροφορέα και τα υδραυλικά – υδρολογικά του χαρακτηριστικά αντλήθηκαν από την μεταπτυχιακή εργασία Παπαντωνίου (2003). Επίσης παρουσιάζονται οι βελτιστοποιήσεις που εκτελέστηκαν για τον υπολογισμό της βέλτιστης παροχής σε διαφορετικές περιπτώσεις και με αυξομείωση της υδραυλικής αγωγιμότητας.

Στον δεδομένο υδροφορέα υπάρχουν 11 γεωτρήσεις κατανεμημένες σε όλη την έκτασή του (Παπαντωνίου 2003). Για τις υπάρχουσες 11 γεωτρήσεις γίνεται βελτιστοποίηση των αντλήσεων με μείωση της υδραυλικής αγωγιμότητας σε όλη την έκταση του υδροφορέα στο μισό και έπειτα αύξηση της υδραυλικής αγωγιμότητας στο διπλάσιο. Με τον τρόπο αυτό, παρουσιάζεται και αξιολογείται η επίδραση της υδραυλικής αγωγιμότητας στην συνολική αντλούμενη παροχή για συγκεκριμένες θέσεις φρεάτων.

Στη συνέχεια επιλέγονται νέες θέσεις των φρεάτων, πρώτα μακριά από την ακτή, έπειτα κοντά στην ακτή αλλά σε ασφαλή απόσταση από την αλάτινη σφήνα και τέλος διάσπαρτα σε όλη την έκταση του υδροφορέα και μεταβάλλονται ποσοστιαία οι τιμές της υδραυλικής αγωγιμότητας με σκοπό να ελεγχθεί κατά πόσον επηρεάζει η μεταβολή αυτή της αγωγιμότητας σε συνδυασμό με την θέση των φρεάτων τις βέλτιστες παροχές άντλησης.

### 5.1 Περιγραφή του υδροφορέα του Βαθέως

Στην ανατολική πλευρά της Καλύμνου υπάρχει η περιοχή του Βαθέως. Είναι ένα χωριό 492 κατοίκων και βρίσκεται σε μία καταπράσινη εύφορη κοιλάδα (κοιλάδα του Βαθέως).

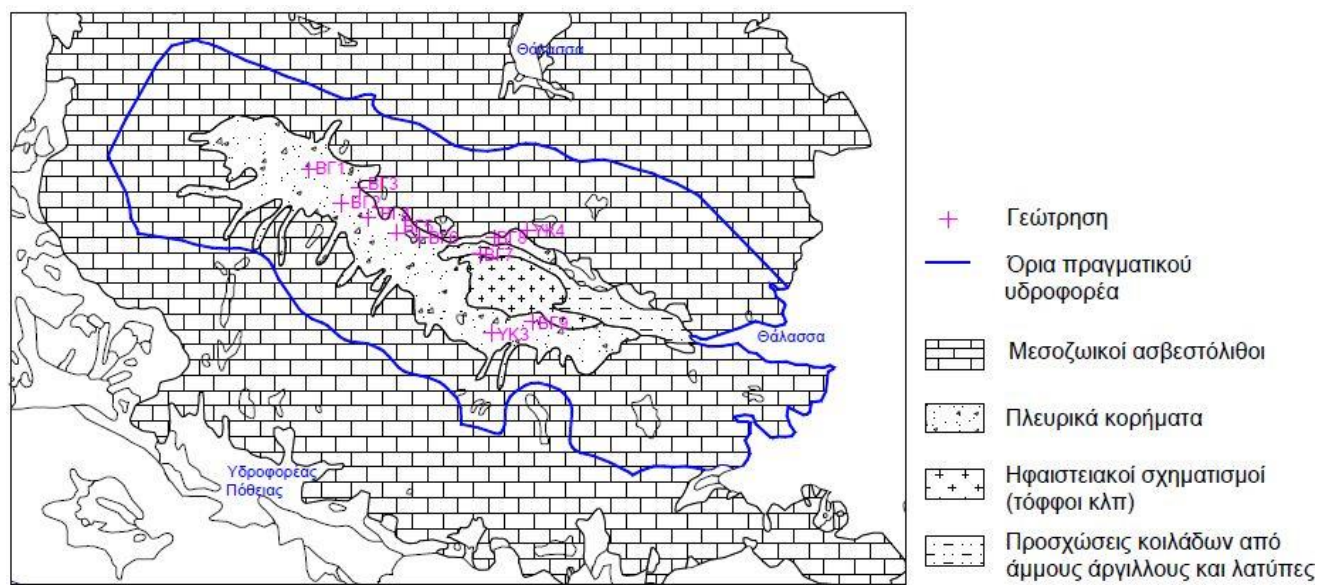
Στην κοιλάδα αυτή, αναπτύσσονται δύο υδροφόροι σχηματισμοί:

- Ο ένας είναι ο καρστικός υδροφόρος της κοιλάδας του Βαθέως, ο οποίος αποτελεί και τον σημαντικότερο υδροφορέα της Καλύμνου και καλύπτει κυρίως τις ανάγκες ύδρευσης.



- Ο δεύτερος είναι ο φρεάτιος υδροφορέας ο οποίος ευρίσκεται υψηλότερα από τον καρστικό και είναι μικρότερου πάχους. Καλύπτει τις ανάγκες άρδευσης της περιοχής, αλλά έχει υποστεί ποιοτική υποβάθμιση λόγω των αγροτικών κυρίως δραστηριοτήτων.

Οι δύο αυτοί υδροφορείς λόγω έλλειψης περαιτέρω στοιχείων αντιμετωπίζονται ως ένας ενιαίος υδροφορέας πάχους 25 m (Παπαντωνίου 2003).



Σχήμα 5.1: Υδροφορέας Βαθέως, Πηγή: Παπαντωνίου 2003

Ο υδροφορέας ανατολικά συνορεύει με την θάλασσα ενώ βόρεια, δυτικά και νότια υπάρχει αδιαπέρατο όριο το οποίο τον διαχωρίζει από τον υδροφορέα της Πόθειας. Πρόκειται για έναν υδροφορέα διαστάσεων 9150m x5550 m, δηλαδή κάτι λιγότερο από 51,000 στρέμματα.

Όπως φαίνεται και από το παραπάνω σχήμα οι γεωλογικοί σχηματισμοί που τον περιβάλλουν είναι μεσοζωικοί ασβεστόλιθοι, ενώ στο εσωτερικό απαντώνται ηφαιστειακοί σχηματισμοί, πλευρικά κορήματα και αργιλικά υλικά (Γιαννουλόπουλος & Παπαντωνίου).

Ο υδροφορέας τροφοδοτείται μόνο επιφανειακά (από βροχόπτωση) και δεν υπάρχει πλευρική τροφοδοσία, λόγω των αδιεπέρατων ορίων που τον περιβάλλουν.

Η επιφανειακή τροφοδοσία δεν είναι ίδια για όλη την έκταση του υδροφορέα. Χωρίζεται σε 4 συνολικά ζώνες, αναλόγως με τους γεωλογικούς σχηματισμούς που υπάρχουν και την περατότητά τους.

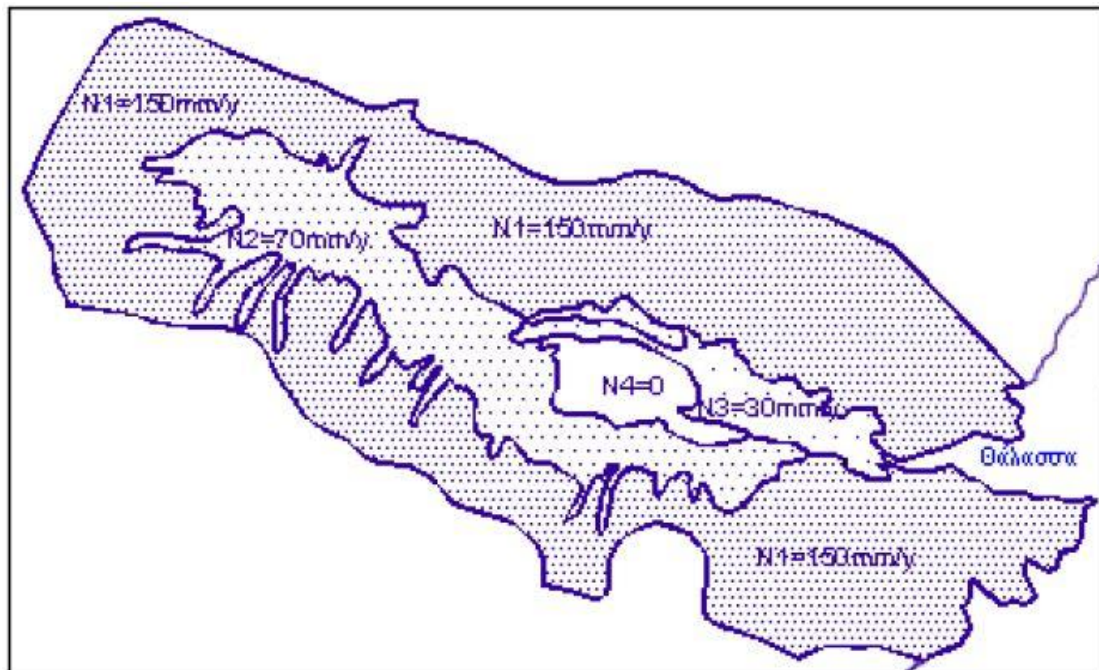
Έτσι, στην ζώνη 1 που είναι και ορεινότερη και αποτελείται από καρστικούς ασβεστόλιθους, η τροφοδοσία παίρνει την τιμή  $N_1 = 150 \text{ mm/y}$ .

Στη ζώνη 2 (στην πεδινή περιοχή) η τροφοδοσία έχει την τιμή  $N_2 = 70 \text{ mm/y}$ .

Στην τρίτη ζώνη λόγω της παρουσίας της αργίλου δυσχεραίνεται η διήθηση. Η τιμή της τροφοδοσίας είναι  $N_3 = 30 \text{ mm/y}$ .

Η ζώνη 4 αποτελείται από ηφαιστειακούς σχηματισμούς (τόφφοι) οι οποίοι θεωρούνται πρακτικά αδιαπέρατοι, επομένως  $N_4 = 0 \text{ mm/y}$ .

Παρακάτω φαίνεται ο χάρτης όπου επισημαίνονται οι διαφορετικές τιμές της επιφανειακής τροφοδοσίας:

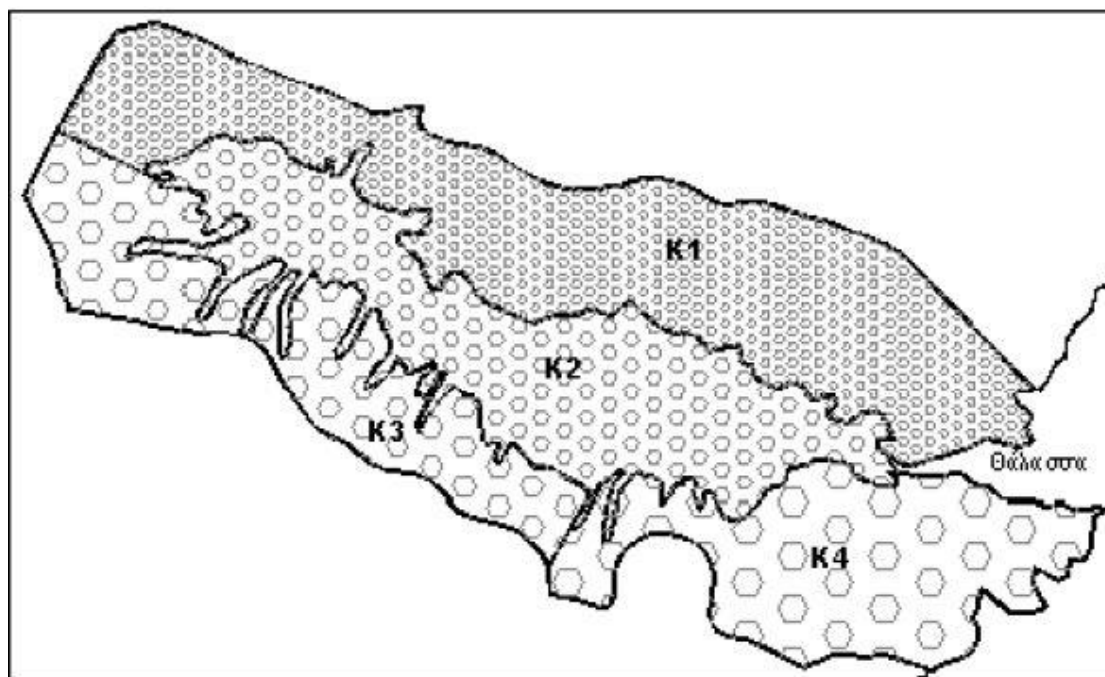


Σχήμα 5.2: Ζώνες διαφορετικής τροφοδοσίας, Πηγή: Παπαντωνίου 2003

Εκτός από τις διαφορετικές ζώνες επιφανειακής τροφοδοσίας ο υδροφόρος χωρίζεται και σε διαφορετικές ζώνες υδραυλικής αγωγιμότητας  $K$ , λόγω των διαφορετικών πετρωμάτων.

Έτσι, έχουμε  $K_1 = 25 \text{ m/d}$ ,  $K_2 = 35 \text{ m/d}$ ,  $K_3 = 50 \text{ m/d}$  και  $K_4 = 75 \text{ m/d}$ .

Ο χάρτης με τις τέσσερις ζώνες διαφορετικής υδραυλικής αγωγιμότητας φαίνεται παρακάτω:



Σχήμα 5.3: Ζώνες διαφορετικής υδραυλικής αγωγιμότητας, Πηγή: Παπαντωνίου 2003

## 5.2 Περιγραφή του μοντέλου του υδροφορέα του Βαθέως

Ο υπό μελέτη υδροφορέας αποτελείται από έναν κάνναβο 37 γραμμών και 61 στηλών με διαστάσεις κελιού 150m x 150m. Οι συνολικές διαστάσεις του είναι 5550m x 9150m. Το πάχος του υδροφορέα ορίστηκε ίσο με 25m.

Για να υπολογισθεί το δυναμικό κατά Strack αντί του πιεζομετρικού φορτίου (εξ. 2.12), ο υδροφορέας εισάγεται ως περιορισμένος και η μεταφορικότητα ορίζεται ίση με την υδραυλική αγωγιμότητα (μοναδιαίο πάχος υδροφορέα).

Όσον αφορά τις οριακές συνθήκες όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, ανατολικά ο υδροφορέας συνορεύει με την θάλασσα, επομένως πρόκειται για όριο σταθερού φορτίου  $\varphi=0$ . Από τις υπόλοιπες μεριές υπάρχει αδιαπέρατο όριο.

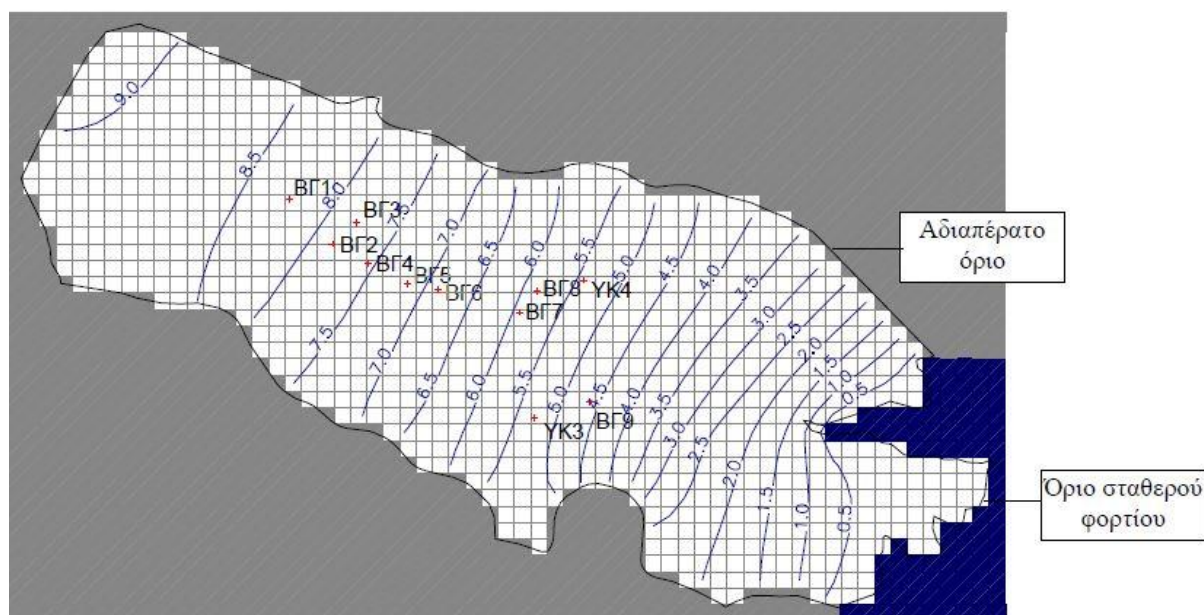
Ως τύπος ροής επιλέγεται η μόνιμη και ως μονάδα μέτρησης του χρόνου η μέρα (day). Επίσης προκειμένου να εκτελεστεί το μοντέλο μέσω του Modflow απαιτήθηκαν κάποιες αρχικές τιμές του υδραυλικού φορτίου, οπότε ορίστηκε σε κάθε κελί του κανάβου η τιμή 5.

Κατά την μοντελοποίηση του υδροφορέα εισήχθησαν και οι θέσεις των 11 υπαρχουσών γεωτρήσεων με χαρακτηριστικά τα οποία φαίνονται από τον παρακάτω πίνακα (Παπαντωνίου):

Γεώτρηση	Θέση	παροχή	Ποιότητα (Cl - ppm)
ΒΓ1	Στημένα – Στέρνα	-	105
ΒΓ2	Στημένα	-	27
ΒΓ3	Στημένα – Αγ. Ακίνδυνος	-	
ΒΓ4	Αγ. Παρασκευή	-	35
ΒΓ6	Χωρίζι (Νίνη)	45m <sup>3</sup> /h	75
ΒΓ7	Μετόχι	60 m <sup>3</sup> /h	115
ΒΓ8	Παναγιάς της Κυρά Ψιλής	-	270
ΒΓ9	Κολλητήρι	27 m <sup>3</sup> /h	105
ΥΚ3	ΠΓΜΕ 1992	30m <sup>3</sup> /h x 18h/d	160
ΥΚ4	ΠΓΜΕ 1992	15m <sup>3</sup> /h x 18h/d	240

Πίνακας 5.1: Στοιχεία υπαρχουσών γεωτρήσεων, Πηγή: Παπαντωνίου 2003

Οι θέσεις των υπαρχουσών γεωτρήσεων - συνολικά 11 στον αριθμό - φαίνονται στο παρακάτω σχήμα :



Σχήμα 5.4: Θέσεις υπαρχουσών γεωτρήσεων – Ισοπιεζομετρικές καμπύλες σε κατάσταση ισορροπίας (Πηγή Παπαντωνίου 2003)

Οι αρχικές τιμές των αντλήσεων ορίσθηκαν σε κάθε γεώτρηση 50 m<sup>3</sup> / day. Επιπλέον, οι τιμές της επιφανειακής τροφοδοσίας εισήχθησαν ανά ζώνες όπως αναφέρθηκε και παραπάνω και με τον ίδιο τρόπο εισήχθησαν οι τιμές της υδραυλικής αγωγιμότητας.

### 5.3 Περιορισμοί για την αποφυγή της υφαλμύρωσης

Κατά την εκτέλεση των προγραμμάτων βελτιστοποίησης κρίθηκε απαραίτητη η εφαρμογή δύο περιορισμών προκειμένου οι βέλτιστες τιμές των αντλήσεων να μην οδηγήσουν σε υφαλμύρωση κανενός από τα φρέατα. Οι περιορισμοί αυτοί είναι οι ίδιοι που χρησιμοποιήθηκαν στην μεταπτυχιακή εργασία Παπαντωνίου (2003).

Έτσι, ο πρώτος περιορισμός είναι: το δυναμικό σε κάθε κελί του υδροφορέα να είναι πάντα θετικό ή ίσο του μηδενός, δηλ.  $\varphi \geq 0$ .

Υφάλμυρη ζώνη (εξ. 2.20):

$$\varphi \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1+\Delta S}{2\Delta S} (h_f - d)^2 \geq 0 \Leftrightarrow h_f \geq d \quad (5.1)$$

Ζώνη γλυκού νερού (εξ.2.21):

$$\varphi \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} [h_f^2 - (1 + \Delta S) d^2] \geq 0 \Leftrightarrow h_f^2 \geq (1 + \Delta S) d^2 \Leftrightarrow h_f \geq 1.0124 d, \quad (5.2)$$

Αυτός ο περιορισμός ο οποίος έχει χαρακτήρα περιβαλλοντικό, ουσιαστικά μας εξασφαλίζει ότι η ελεύθερη επιφάνεια του υδροφορέα θα βρίσκεται διαρκώς πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας (η θάλασσα είναι όριο σταθερού δυναμικού,  $\varphi=0$ ).

Όταν η στάθμη της θάλασσας υπερβεί την στάθμη του υδροφορέα, το θαλασσινό νερό θα είναι αυτό που θα ρέει μέσα στον υδροφορέα λόγω διαφοράς πιεζομετρικού, επομένως στον υδροφορέα θα εισχωρήσει το θαλασσινό νερό με αποτέλεσμα την υφαλμύρωσή του.

Ο δεύτερος και πιο αυστηρός περιορισμός που έχει τεθεί είναι το πόδι της αλάτινης σφήνας να μην φτάσει στη θέση των πηγαδιών. Γνωρίζοντας την θέση της σφήνας (εξ. 2.27) και το δυναμικό στο πόδι της κατά Strack ( $\varphi_{\text{πόδα}} = 8.0078$ ), επιλέγουμε η θέση του σημείου με δυναμικό όσο αυτό του ποδιού της σφήνας να προηγείται των θέσεων πηγαδιών κατά τον άξονα των  $x$ . Μάλιστα, επελέγη ένας συντελεστής υπέρ ασφαλείας ούτως ώστε το δυναμικό στο πόδι της σφήνας να λάβει μία μικρή προσαύξηση και τελικά:  $\varphi' = 1.012 \cdot 8.0078 = 8.1$  (Παπαντωνίου 2003).

Οπότε ο περιορισμός τελικά αφορά τη θέση του σημείου με δυναμικό 8.1 να προηγείται των θέσεων των πηγαδιών, δηλαδή:  $x_{\text{scti}} < x_{wi}$ , όπου  $x_{wi}$  οι θέσεις των πηγαδιών από  $i = 1, 2, \dots, 11$  και  $x_{\text{scti}}$  η θέση του σημείου με δυναμικό 8.1.

Με άλλα λόγια με αυτόν τον περιορισμό επιδιώκουμε κατά την γραμμή του καννάβου που αναπαριστά τον υδροφορέα, η απόσταση της αλάτινης σφήνας από την ακτή να είναι μικρότερη από την απόσταση του κάθε πηγαδιού από την ακτή.

Οι δύο παραπάνω περιορισμοί τηρήθηκαν καθ' όλην τη διάρκεια των υπολογισμών και σε όλες τις βελτιστοποιήσεις.



Εάν επιλέγαμε μόνο τον πρώτο περιορισμό ( $\varphi > 0$ ), τότε τα πηγάδια θα οδηγούνταν ενδεχομένως σε υπαλμύρωση, ειδικά αν βρίσκονται κοντά στη θάλασσα.

Αυτό συμβαίνει επειδή μπορεί η στάθμη συνεχώς να ήταν ψηλότερα από την στάθμη της θάλασσας, όμως δεν εξασφαλίζεται ότι το δυναμικό στα πηγάδια θα ήταν μεγαλύτερο από αυτό της αλάτινης σφήνας, δηλαδή οι τιμές του δυναμικού στα φρέατα θα ήταν  $0 < \varphi < 8.1$ , και το πηγάδι θα οδηγούταν ενδεχομένως σε υπαλμύρωση.

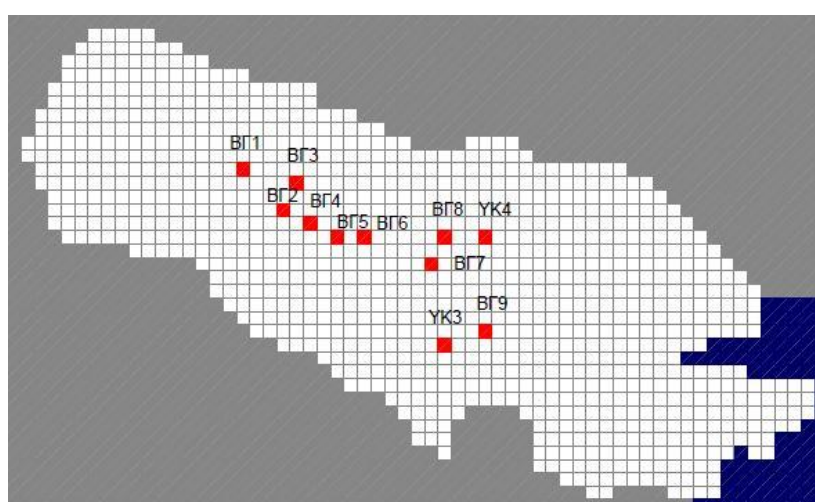
Ο συνδυασμός των δύο αυτών περιορισμών οδηγεί σε συντηρητικές τιμές των βέλτιστων τιμών, καθώς όπως θα δούμε και παρακάτω το πόδι της αλάτινης σφήνας βρίσκεται αρκετά μακριά από τα πηγάδια και κοντά στην ακτή.

#### 5.4 Βελτιστοποίηση των αντλήσεων στις υπάρχουσες θέσεις φρεάτων

Η βελτιστοποίηση των αντλήσεων αποσκοπεί στον υπολογισμό των βέλτιστων τιμών άντλησης με παράλληλη αποφυγή της υπαλμύρωσης των φρεάτων και άρα άντλησης θαλασσινού νερού.

Σε αυτήν την παράγραφο γίνεται η βελτιστοποίηση των αντλήσεων για τις δεδομένες 11 θέσεις των υπάρχουσων γεωτρήσεων (Παπαντωνίου 2003) με τις αρχικές τιμές υδραυλικής αγωγιμότητας και επιφανειακής τροφοδοσίας που παρουσιάστηκαν παραπάνω.

Οι θέσεις των υπάρχουσων γεωτρήσεων είναι σημειωμένες στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 5.5 Υπάρχουσες γεωτρήσεις. Πηγή Παπαντωνίου 2003

Η βελτιστοποίηση έγινε σε περιβάλλον Matlab χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο Interior Point.

Οι παράμετροι που επελέγησαν για την εφαρμογή της μεθόδου interior point ήταν:

DiffMax Change	DiffMin Change
5	0,5

MaxFunEvals	TolFun	MaxIter
1100	$10^{-3}$	700

Πίνακας 5.1: Παράμετροι για την μέθοδο Interior point

όπου:

- MaxFunEvals: ο μέγιστος αριθμός αξιολογήσεων της αντικειμενικής συνάρτησης
- MaxIter: ο μέγιστος αριθμός των επαναλήψεων
- TolFun: η ανοχή για τον τερματισμό του αλγορίθμου όσον αφορά την συνάρτηση σκοπού
- DiffMaxChange και DiffMinChange: η μέγιστη και η ελάχιστη κατ' αντιστοιχίαν διαφορά των τιμών των μεταβλητών κατά τον υπολογισμό των μερικών παραγώγων τους

Επιπλέον, πριν από την βελτιστοποίηση ορίστηκε ο πίνακας των αρχικών τιμών των μεταβλητών απόφασης, δηλαδή των βέλτιστων παροχών άντλησης. Οι τιμές που επελέγησαν ήταν για κάθε φρέαρ  $50 \text{ m}^3 / \text{d}$ .

Η συνάρτηση σκοπού σε προηγούμενο κεφάλαιο ορίστηκε ως το αρνητικό άθροισμα όλων των παροχών άντλησης, επομένως η αρχική της τιμή εν προκειμένω είναι  $-(11 \cdot 50) = -550 \text{ m}^3 / \text{d}$ .

Τα βέλτιστα αποτελέσματα που προέκυψαν από την εφαρμογή του αλγορίθμου είναι:

	Γεώτρηση	Βέλτ. Παροχή Άντλησης (m <sup>3</sup> /d)
1	ΒΓ1	1182,6
2	ΒΓ3	495,2
3	ΒΓ2	521,6
4	ΒΓ4	360,6
5	ΒΓ5	345,3
6	ΒΓ6	369,3
7	ΒΓ8	365
8	ΥΚ4	515,6
9	ΒΓ7	307,7
10	ΒΓ9	512,5
11	ΥΚ3	524,9
	ΣΥΝΟΛΟ	5500,3

Πίνακας 5.2: Αποτελέσματα βελτιστοποίησης

Η συνολική βέλτιστη άντληση αφού τερματίστηκε ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης προέκυψε ίση με 5500.3 m<sup>3</sup> / d. Παρατηρούμε ότι η μεγαλύτερη άντληση επιτυγχάνεται στην γεώτρηση ΒΓ1, η οποία βρίσκεται πιο μακριά από την θάλασσα από όλες τις υπόλοιπες γεωτρήσεις και ταυτόχρονα όχι κοντά στα αδιεπέρατα όρια του υδροφορέα.

## 5.5 Βελτιστοποίηση των αντλήσεων στις υπάρχουσες θέσεις των γεωτρήσεων με μεταβολή της υδραυλικής αγωγιμότητας

Όπως αναφέρθηκε και στο κεφάλαιο 2, η *υδραυλική αγωγιμότητα* ή διαπερατότητα αφορά στην ικανότητα των εδαφικών υλικών να επιτρέπουν την κίνηση του ρευστού και εξαρτάται τόσο από το πορώδες μέσο, όσο και από το ρευστό.

Δείχνει ουσιαστικά πόση ευκολία ή δυσκολία συναντά το ρευστό για να κινηθεί μέσα στα στρώματα του εδάφους. Επομένως ο συντελεστής υδραυλικής αγωγιμότητας  $K$  είναι μια πολύ σημαντική παράμετρος στην μελέτη της κίνησης των υπογείων ροών.



Επιχειρείται βελτιστοποίηση των αντλήσεων στις ήδη υπάρχουσες έντεκα γεωτρήσεις (Παπαντωνίου), αρχικά με ποσοστιαία μείωση της υδραυλικής αγωγιμότητας κατά το ήμισυ και στη συνέχεια με αύξηση της αρχικής αγωγιμότητας στο διπλάσιο.

Ο λόγος που επελέγησαν οι συγκεκριμένες μεταβολές στην υδραυλική αγωγιμότητα  $K$  είναι ότι η υδραυλική αγωγιμότητα παρουσιάζει μεγάλες μεταβολές, οπότε ο λογάριθμός της ( $\log K$ ) είναι κανονική κατανομή. Άρα, μικρές μεταβολές της υδραυλικής αγωγιμότητας  $K$  δεν θα είχαν καθόλου επίπτωση στο τελικό αποτέλεσμα.

Η επίπτωση της μεταβολής της υδραυλικής αγωγιμότητας στην βέλτιστη παροχή αντλήσεως μελετάται επίσης διότι ενδέχεται οι τιμές της υδραυλικής αγωγιμότητας έτσι όπως έχουν υπολογισθεί να εμφανίζουν σφάλματα υπολογισμού.

### 5.5.1 Βελτιστοποίηση των αντλήσεων με μειωμένη κατά 50% υδραυλική αγωγιμότητα

Ο υπό μελέτη υδροφορέας αποτελείται από 4 ζώνες με διαφορετικές υδραυλικές αγωγιμότητες, λόγω των πετρωμάτων που τον αποτελούν. Σε αυτήν την παράγραφο επιχειρείται ποσοστιαία μείωση της υδραυλικής αγωγιμότητας κατά 50%. Έτσι, οι νέες υδραυλικές αγωγιμότητες του μοντέλου του υδροφορέα είναι  $K'_1 = 12.5 \text{ m/d}$ ,  $K'_2 = 17.5 \text{ m/d}$ ,  $K'_3 = 25 \text{ m/d}$  και  $K'_4 = 37.5 \text{ m/d}$ .

Πραγματοποιήθηκε η βελτιστοποίηση μέσω του προγράμματος Matlab για τις 11 δεδομένες θέσεις φρεάτων με τις ίδιες παραμέτρους τερματισμού του προγράμματος όπως και παραπάνω. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν είναι:

	Γεώτρηση	Βέλτ. Παροχή Άντλησης (m <sup>3</sup> /d)
1	BΓ1	1196,7
2	BΓ3	496,4
3	BΓ2	520,4
4	BΓ4	360,1
5	BΓ5	344,9
6	BΓ6	369,5
7	BΓ8	365,1
8	ΥΚ4	537,9
9	BΓ7	307,2
10	BΓ9	572,2
11	ΥΚ3	524,1
	ΣΥΝΟΛΟ	<b>5594,5</b>

Πίνακας 5.3: Αποτελέσματα βελτιστοποίησης

Οι παράμετροι τερματισμού του προγράμματος ήταν:

Επαναλήψεις	Αξιολ. Συναρτ. Σκοπού
71	883

Η συνολική βέλτιστη άντληση παρουσιάζεται αυξημένη κατά ~2% ( $95 \text{ m}^3 / \text{d}$ ) σε σχέση με τα βέλτιστα αποτελέσματα που εξήχθησαν προηγουμένως χρησιμοποιώντας την αρχική υδραυλική αγωγιμότητα.

### 5.5.2 Βελτιστοποίηση των αντλήσεων με διπλάσια υδραυλική αγωγιμότητα

Οι τιμές της διπλάσιας υδραυλικής αγωγιμότητας για τις τέσσερις ζώνες του υδροφορέα είναι:  $K''_1 = 50 \text{ m/d}$ ,  $K''_2 = 70 \text{ m/d}$ ,  $K''_3 = 100 \text{ m/d}$  και  $K''_4 = 150 \text{ m/d}$ .

Ενημερώνεται το αντίστοιχο αρχείο που περιέχει την υδραυλική αγωγιμότητα μέσω Matlab.

Μετά την βελτιστοποίηση που πραγματοποιήθηκε, εξήχθησαν τα αποτελέσματα για τις βέλτιστες παροχές άντλησης. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

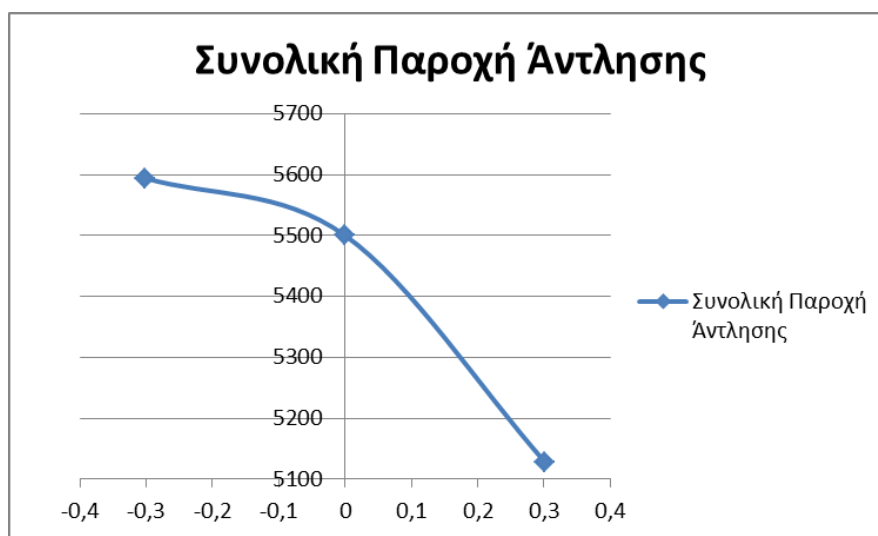
	Γεώτρηση	Βέλτ. Παροχή Αντλησης ( $\text{m}^3/\text{d}$ )
1	BΓ1	466,2
2	BΓ3	466,2
3	BΓ2	466,2
4	BΓ4	466,19
5	BΓ5	466,19
6	BΓ6	466,2
7	BΓ8	466,22
8	ΥΚ4	466,23
9	BΓ7	466,22
10	BΓ9	466,24
11	ΥΚ3	466,23
	ΣΥΝΟΛΟ	<b>5128,32</b>

Πίνακας 5.4: Αποτελέσματα βελτιστοποίησης

Επαναλήψεις	Αξιολ. Συναρτ. Σκοπού
12	196

Η παραπάνω συνολική άντληση εμφανίζεται μειωμένη κατά ~7% ( $372 \text{ m}^3 / \text{d}$ ) σε σχέση με τα αποτελέσματα με την αρχική αγωγιμότητα.

Το παρακάτω διάγραμμα μας δείχνει την μεταβολή που υφίσταται η συνολική παροχή άντλησης όταν αλλάζει η υδραυλική αγωγιμότητα:



Διάγραμμα 5.1: Μείωση της συνολικής παροχής άντλησης (ποιοτικό)

Από το διάγραμμα φαίνεται πως όσο αυξάνεται η υδραυλική αγωγιμότητα, η συνολική βέλτιστη παροχή μειώνεται.

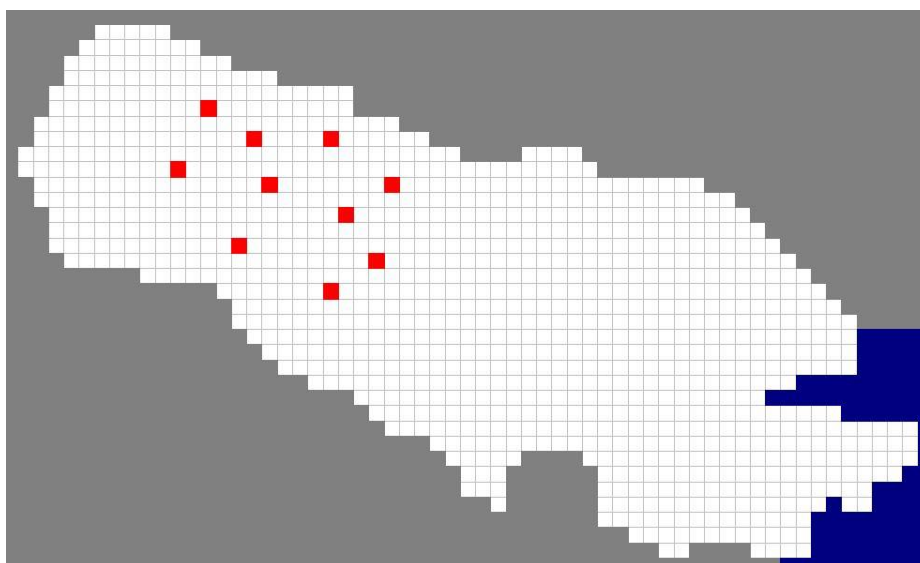
## 5.6 Βελτιστοποίηση των αντλήσεων σε νέες θέσεις φρεάτων με μεταβολή της υδραυλικής αγωγιμότητας

Στην παράγραφο αυτή ορίζονται νέες θέσεις των υποψήφιων γεωτρήσεων πρώτα συγκεντρωμένες μακριά από την ακτή, έπειτα συγκεντρωμένες κοντά στην ακτή και τέλος διάσπαρτες σε όλη την επιφάνεια του υδροφορέα. Παράλληλα, μεταβάλλεται ποσοστιαία η υδραυλική αγωγιμότητα του υδροφορέα και διερευνάται η επιρροή της στην βέλτιστη ποσότητα άντλησης υπογείου νερού.

### 5.6.1 Πηγάδια συγκεντρωμένα στο εσωτερικό του υδροφορέα

Ιδρύθηκαν 10 νέες θέσεις ενδεχόμενων γεωτρήσεων και πραγματοποιήθηκαν βελτιστοποιήσεις με παράλληλη μεταβολή της υδραυλικής αγωγιμότητας  $K$  του υδροφορέα προκειμένου να εξεταστεί η ευαισθησία της συνολικής παροχής άντλησης όταν μεταβάλλεται η υδραυλική αγωγιμότητα.

Οι νέες θέσεις με τα φρέατα συγκεντρωμένα στο εσωτερικό του υδροφορέα φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 5.6 : Θέσεις γεωτρήσεων συγκεντρωμένες στο εσωτερικό του υδροφορέα

#### 5.6.1.1 Βελτιστοποίηση με την αρχική υδραυλική αγωγιμότητα στις νέες θέσεις

Εκτελέστηκε η βελτιστοποίηση αφού ενημερώθηκε το αρχείο των πηγαδιών (wel.dat) ώστε να συμπεριλάβει τις νέες συντεταγμένες των γεωτρήσεων. Κατά την βελτιστοποίηση προέκυψαν τα παρακάτω αποτελέσματα:

Γεώτρηση	Βέλτ. Παροχή Άντλησης (m <sup>3</sup> /d)
1	466,8
2	277,3
3	277,4
4	547,3
5	265,5
6	527,2
7	306,5
8	569,2
9	695,2
10	693
<b>ΣΥΝΟΛΟ</b>	<b>4625,4</b>

Επαναλήψεις	Αξιολ. Συναρτ. Σκοπού
65	797

Πίνακες 5.5 – 5.6: Αποτελέσματα βελτιστοποίησης

Οι τιμές των αντλήσεων σε κάθε φρέαρ κυμαίνονται από 265 έως 695 m<sup>3</sup> / d. Τις δύο μεγαλύτερες αντλήσεις τις συναντάμε στα πηγάδια 9 και 10, τα οποία βρίσκονται στο κέντρο του υδροφορέα, ενώ τις μικρότερες αντλήσεις τις συναντάμε στα πηγάδια 2,3 και 5, όπου οι μεν 2 και 3 βρίσκονται κοντά στο βόρειο αδιαπέρατο όριο, ενώ η 5 σε πολύ μικρές αποστάσεις από τις γειτονικές γεωτρήσεις.

#### 5.6.1.2 Βελτιστοποίηση με μείωση κατά 50% της αρχικής υδραυλικής αγωγιμότητας

Διατηρώντας τις ίδιες θέσεις των φρεάτων με προηγουμένως στο εσωτερικό του υδροφορέα και μακριά από την ακτή, πραγματοποιήθηκε εκ νέου βελτιστοποίηση με μόνη διαφορά την ποσοστιαία μείωση της υδραυλικής αγωγιμότητας σε όλη την έκταση του υδροφορέα κατά 50%.

Ενημερώθηκε το αρχείο που περιέχει την υδραυλική αγωγιμότητα και εκτελέστηκε η βελτιστοποίηση. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Γεώτρηση	Βέλτ. Παροχή Αντλησης (m <sup>3</sup> /d)
1	435
2	257,3
3	276,2
4	657,5
5	249,4
6	630,4
7	305
8	534,9
9	694,7
10	686,8
<b>ΣΥΝΟΛΟ</b>	<b>4727,2</b>

Επαναλήψεις	Αξιολ. Συναρτ. Σκοπού
74	871

Πίνακες 5.7 – 5.8 : Αποτελέσματα βελτιστοποίησης

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η συνολική βέλτιστη παροχή άντλησης είναι αυξημένη σε σχέση με προηγουμένως κατά 102 m<sup>3</sup> / d.

### 5.6.1.3 Βελτιστοποίηση με διπλασιασμό της τιμής της αρχικής υδραυλικής αγωγιμότητας

Αντιστοίχως, πραγματοποιήθηκε βελτιστοποίηση διατηρώντας τα ίδια χαρακτηριστικά με προηγουμένως, με μόνη μεταβολή τον διπλασιασμό της αρχικής υδραυλικής αγωγιμότητας.

Προέκυψαν τα κάτωθι αποτελέσματα για τις βέλτιστες αντλήσεις:

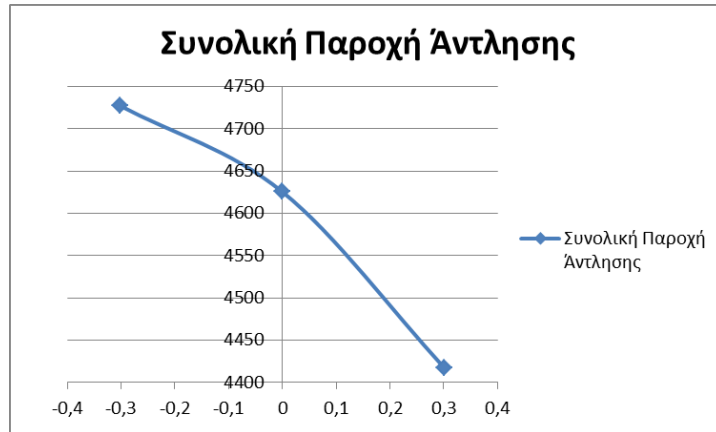
Γεώτρηση	Βέλτ. Παροχή Αντλησης (m <sup>3</sup> /d)
1	441,5
2	441,5
3	441,4
4	441,4
5	441,5
6	442,3
7	441,9
8	441,4
9	442,3
10	441,9
<b>ΣΥΝΟΛΟ</b>	<b>4417,1</b>

Επαναλήψεις	Αξιολ. Συναρτ. Σκοπού
67	829

Πίνακες 5.9 – 5.10: Αποτελέσματα βελτιστοποίησης

Τα αποτελέσματα αυτά εμφανίζονται μειωμένα σε σχέση με τα αποτελέσματα από την βελτιστοποίηση με την αρχική υδραυλική αγωγιμότητα αλλά και από την μειωμένη κατά -4.5% και -6.5% αντίστοιχα.

Το διάγραμμα που ακολουθεί δείχνει τις τιμές της συνολικής παροχής άντλησης στις υπάρχουσες γεωτρήσεις για τις διάφορες μεταβολές της υδραυλικής αγωγιμότητας:

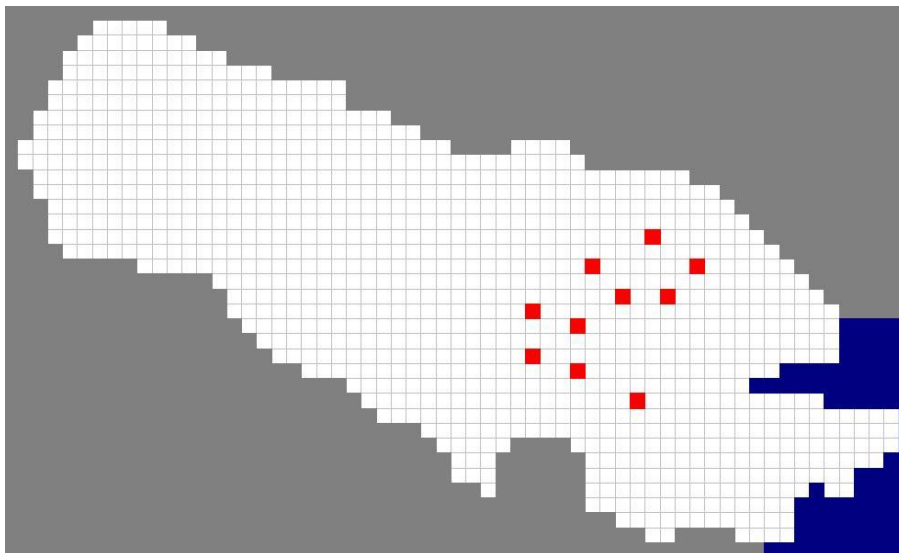


Διάγραμμα 5.2: Μεταβολή συνολικής παροχής άντλησης

Είναι φανερό ότι όσο η υδραυλική αγωγιμότητα αυξάνει, η τιμή της συνολικής βέλτιστης παροχής μειώνεται.

### 5.6.2 Πηγάδια συγκεντρωμένα κοντά στην ακτή

Εκλέγονται δέκα νέες θέσεις υποψηφίων φρεάτων αυτήν την φορά συγκεντρωμένα σε μικρές αποστάσεις από την ακτή, αλλά όχι πολύ κοντά στην ακτογραμμή και πραγματοποιείται βελτιστοποίηση με μεταβολή της υδραυλικής αγωγιμότητας. Οι θέσεις των φρεάτων φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 5.7 : Θέσεις γεωτρήσεων συγκεντρωμένες σε ικανοποιητική απόσταση από την ακτή

### 5.6.2.1 Βελτιστοποίηση αντλήσεων με την αρχική υδραυλική αγωγιμότητα

Πραγματοποιήθηκε η βελτιστοποίηση με χρήση του ίδιου αλγορίθμου στο περιβάλλον Matlab αφού ενημερώθηκε το αρχείο wel.dat και προέκυψαν τα κάτωθι αποτελέσματα:

Επαναλήψεις	Αξιολ. Συναρτ. Σκοπού
7	102

Γεώτρηση	Βέλτ. Παροχή Άντλησης (m <sup>3</sup> /d)
1	553,1
2	553,1
3	553,1
4	553,1
5	553,1
6	553,1
7	553,1
8	553,1
9	553,1
10	553,1
<b>ΣΥΝΟΛΟ</b>	<b>5531</b>

Πίνακες 5.8 – 5.9: Αποτελέσματα βελτιστοποίησης

Παρατηρείται ότι η συνολική βέλτιστη παροχή άντλησης ισομοιράζεται στα επιμέρους πηγάδια και επιτυγχάνονται μεγαλύτερες τιμές για την συνολική παροχή σε σχέση με προηγούμενως (για την ίδια τιμή της υδραυλικής αγωγιμότητας).

### 5.6.2.2 Βελτιστοποίηση των αντλήσεων με μειωμένη κατά 50% υδραυλική αγωγιμότητα

Με μόνη αλλαγή την μείωση κατά το ήμισυ της υδραυλικής αγωγιμότητας του υδροφορέα σε όλη την έκτασή του εκτελέστηκε εκ νέου βελτιστοποίηση των αντλήσεων με αποτελέσματα που φαίνονται στον κάτωθι πίνακα:

Γεώτρηση	Βέλτ. Παροχή Άντλησης (m <sup>3</sup> /d)
1	559,2
2	786,1
3	352,2
4	194
5	248,8
6	1051,2
7	361,4
8	1268,9
9	623,8
10	769,5
<b>ΣΥΝΟΛΟ</b>	<b>6215,1</b>



Επαναλήψεις	Αξιολ. Συναρτ. Σκοπού
68	866

Πίνακας 5.9: Αποτελέσματα βελτιστοποίησης

Όπως φαίνεται και παραπάνω, η συνολική βέλτιστη άντληση παρουσιάζεται σημαντικά αυξημένη συγκρινόμενη με τα αποτελέσματα που προέκυψαν προηγουμένως για την αρχική τιμή της υδραυλικής αγωγιμότητας. Συγκεκριμένα, παρατηρείται αύξηση κατά 12.4%.

### 5.6.2.3. Βελτιστοποίηση των αντλήσεων με την διπλάσια υδραυλική αγωγιμότητα

Μεταβλήθηκε η υδραυλική αγωγιμότητα του μοντέλου του υδροφορέα στις νέες θέσεις των φρεάτων και τα αποτελέσματα που προέκυψαν φαίνονται παρακάτω:

Γεώτρηση	Βέλτ. Παροχή Άντλησης (m <sup>3</sup> /d)
1	478,6
2	478,7
3	478,5
4	478,7
5	478,6
6	478,8
7	478,8
8	478,9
9	478,9
10	479
<b>ΣΥΝΟΛΟ</b>	<b>4787,5</b>

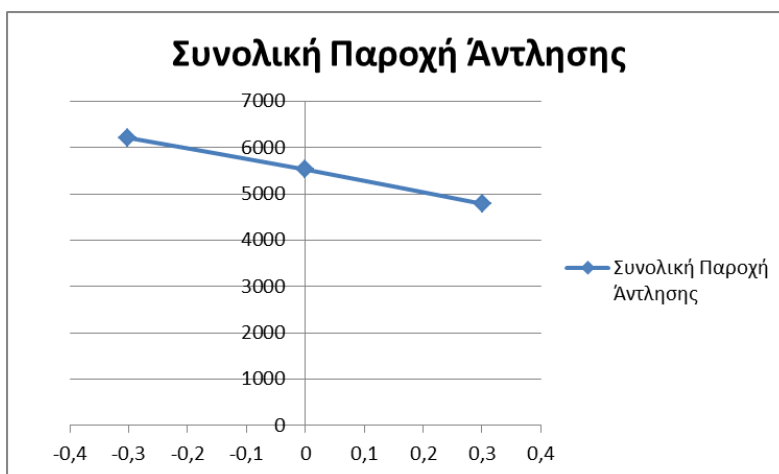
Πίνακας 5.10: Αποτελέσματα βελτιστοποίησης

Επαναλήψεις	Αξιολ. Συναρτ. Σκοπού
16	283

Πίνακας 5.11: Παράμετροι τερματισμού βελτιστοποίησης

Μπορούμε να δούμε πως η συνολική βέλτιστη άντληση είναι σημαντικά μειωμένη συγκρινόμενη και με τα δύο προηγούμενα σενάρια. Πιο συγκεκριμένα, σε σχέση με το σενάριο της ημίσεως της υδραυλικής αγωγιμότητας τα αποτελέσματα αυτά εμφανίζουν μείωση της τάξης του 23%, ενώ σε σχέση με τα αποτελέσματα του πρώτου σεναρίου που χρησιμοποιεί την αρχική υδραυλική αγωγιμότητα παρατηρείται μείωση 13.4%.

Το διάγραμμα που ακολουθεί δείχνει σχηματικά τις τιμές της συνολικής βέλτιστης παροχής για το σενάριο των πηγαδιών κοντά στην ακτή βάσει της υδραυλικής αγωγιμότητας που εφαρμόστηκε:

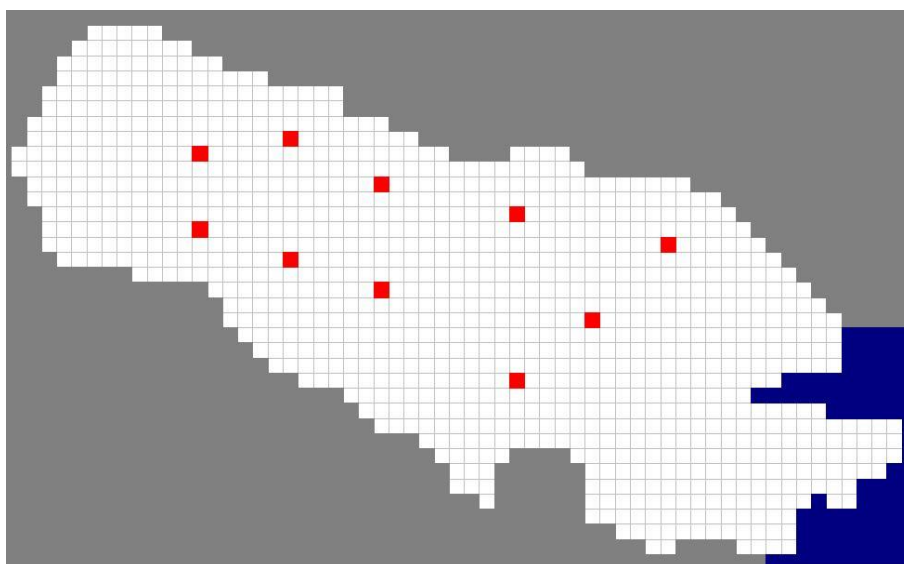


Διάγραμμα 5.3: Τιμές βέλτιστης άντλησης για διάφορες τιμές της παροχής

Και σε αυτήν την περίπτωση, η βέλτιστη άντληση ακολουθεί φθίνουσα πορεία με την αύξηση της υδραυλικής αγωγιμότητας.

### 5.6.3 Πηγάδια διάσπαρτα σε όλη την έκταση του υδροφορέα

Εξελέγησαν δέκα νέες θέσεις, αυτήν την φορά σε τυχαίες θέσεις καταναμημένες σε όλη την έκταση του υδροφορέα. Οι νέες θέσεις φαίνονται στο κάτωθι σχήμα:



Σχήμα 5.8 : Θέσεις γεωτρήσεων καταναμημένες σε όλη την έκταση του υδροφορέα

### 5.6.3.1 Βελτιστοποίηση με την αρχική υδραυλική αγωγιμότητα

Ενημερώθηκε το αρχείο πηγαδιών wel.dat έτσι ώστε να συμπεριλάβει τις νέες θέσεις των πηγαδιών και εκτελέστηκε η βελτιστοποίηση. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την βελτιστοποίηση είναι τα παρακάτω:

Γεώτρηση	Βέλτ. Παροχή Άντλησης (m <sup>3</sup> /d)
1	476,6
2	726,9
3	429,4
4	514,8
5	803,1
6	564,7
7	577,2
8	567,9
9	528,5
10	631,9
<b>ΣΥΝΟΛΟ</b>	<b>5821</b>

Επαναλήψεις	Αξιολ. Συναρτ. Σκοπού
49	563

Πίνακες 5.12 – 5.13: Αποτελέσματα βελτιστοποίησης

Τα αποτελέσματα αυτά συγκρινόμενα με τα προηγούμενα (με την αρχική υδραυλική αγωγιμότητα) δίνουν την μεγαλύτερη ποσότητα παροχής υπογείου νερού. Αυτό οφείλεται κυρίως στο γεγονός ότι τα φρέατα βρίσκονται σε μεγάλες αποστάσεις μεταξύ τους.

### 5.6.3.2 Βελτιστοποίηση με μείωση 50% της αρχικής υδραυλικής αγωγιμότητας

Επεβλήθη μείωση της υδραυλικής αγωγιμότητας κατά το ήμισυ στις προαναφερθείσες θέσεις των φρεάτων και προέκυψαν τα εξής για τις βέλτιστες παροχές άντλησης:

Γεώτρηση	Βέλτ. Παροχή Άντλησης (m <sup>3</sup> /d)
1	460,8
2	795,5
3	428,2
4	516,2
5	796,4
6	566,5
7	564,8
8	565,5
9	527,7
10	631,7
<b>ΣΥΝΟΛΟ</b>	<b>5853,3</b>

Επαναλήψεις	Αξιολ. Συναρτ. Σκοπού
71	909

Πίνακες 5.14 – 5.15: Αποτελέσματα βελτιστοποίησης

Παρατηρούμε ότι υπάρχει μία μικρή αύξηση της συνολικής παροχής άντλησης σε σχέση με τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης με την αρχική υδραυλική αγωγιμότητα αλλά όχι πολύ μεγάλη, της τάξης των 32 m<sup>3</sup> / d.

#### 5.6.3.3 Βελτιστοποίηση αντλήσεων με εφαρμογή διπλάσιας υδραυλικής αγωγιμότητας

Πραγματοποιήθηκε η βελτιστοποίηση με μόνη αλλαγή αυτήν της υδραυλικής αγωγιμότητας. Οι τιμές της υδραυλικής αγωγιμότητας για αυτό το σενάριο διπλασιάστηκαν.

Πρόέκυψαν τα εξής:

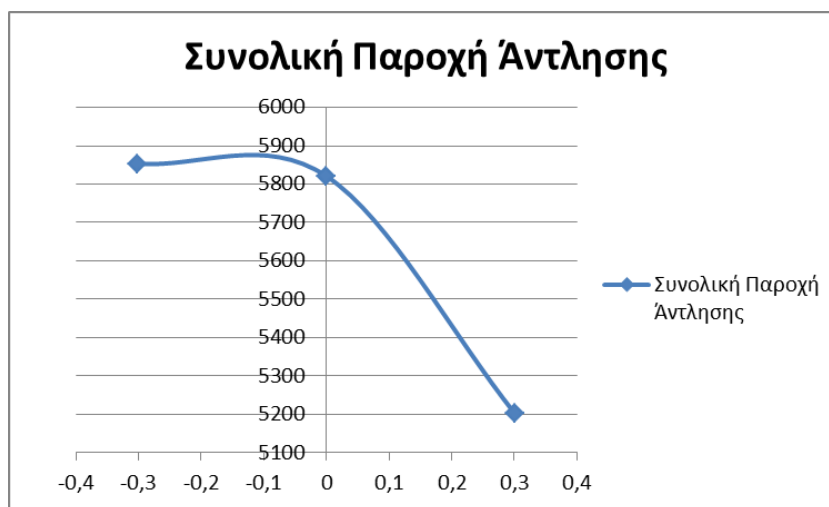
Επαναλήψεις	Αξιολ. Συναρτ. Σκοπού
21	352

Γεώτρηση	Βέλτ. Παροχή Άντλησης (m <sup>3</sup> /d)
1	520,1
2	520,1
3	520,1
4	520,1
5	520,1
6	520,3
7	520,1
8	520,1
9	520,1
10	520,2
<b>ΣΥΝΟΛΟ</b>	<b>5201,3</b>

Πίνακας 5.13: Αποτελέσματα βελτιστοποίησης

Η συνολική παροχή άντλησης εμφανίζεται σημαντικά μειωμένη σε σχέση με τις άλλες δύο προηγούμενες δοκιμές, πιο συγκεκριμένα κατά περίπου -11%.

Το διάγραμμα που ακολουθεί δείχνει την πορεία της συνολικής βέλτιστης παροχής άντλησης σε σχέση με την μεταβολή της υδραυλικής αγωγιμότητας:



Διάγραμμα 5.4: Συνολική βέλτιστη άντληση αναλογικά με υδραυλική αγωγιμότητα

Και σε αυτήν την περίπτωση, η συνολική βέλτιστη άντληση ελαττώνεται όσο η υδραυλική αγωγιμότητα αυξάνεται.

## 5.7 Συμπεράσματα

Από τις παραπάνω δοκιμές που πραγματοποιήθηκαν, προκύπτουν συμπεράσματα αναφορικά με το ποιά είναι η καλύτερη τοποθέτηση των φρεάτων ούτως ώστε να αντληθεί η μέγιστη ποσότητα υπογείου νερού.

Η μεγαλύτερη συνολική παροχή άντλησης από τα φρέατα επιτυγχάνεται όταν αυτά χωροθετηθούν σε μεγάλες σχετικά αποστάσεις μεταξύ τους και παράλληλα κατανεμημένα σε όλη την έκταση του υδροφορέα ή προς την ακτή αλλά σε ασφαλή απόσταση από την αλάτινη σφήνα, ενώ μικρότερη συνολική παροχή άντλησης παρατηρήθηκε όταν τα πηγάδια βρίσκονταν απομακρυσμένα από την ακτή.

Αυτό συνέβη, διότι τα πηγάδια ήταν σε αρκετά κοντινές αποστάσεις μεταξύ τους και βρίσκονταν κοντά στο αδιαπέρατο όριο του υδροφορέα και από τις τρεις πλευρές. Επίσης, ένα γεγονός που ενίσχυσε αυτό το αποτέλεσμα ήταν επειδή δεν υπάρχει κάποια πλευρική εισροή (τροφοδοσία) δυτικά του υδροφορέα.

Η μέγιστη άντληση που παρατηρήθηκε όταν τα πηγάδια ήταν μακριά από τα αδιαπέρατα όρια και ταυτόχρονα σε μικρή αλλά «ασφαλή» απόσταση από την ακτή, οφείλεται στο γεγονός ότι η ποσότητα του νερού που φτάνει εκεί είναι πολύ περισσότερη από ότι είναι σε θέσεις δυτικότερα, λόγω του ότι το νερό κινείται προς τα ανατολικά.

Επιπλέον, προκύπτουν συμπεράσματα για το κατά πόσον επηρεάζει η τιμή της υδραυλικής αγωγιμότητας την συνολική παροχή άντλησης των φρεάτων.

Αρχικά, πραγματοποιήθηκαν βελτιστοποιήσεις στις ήδη υπάρχουσες έντεκα γεωτρήσεις του φρεάτιου υδροφορέα του Βαθέως της Καλύμνου.

Παρατηρήθηκε πως όταν εισάγαμε την μειωμένη υδραυλική αγωγιμότητα (και στις τρεις διαφορετικές νέες θέσεις των φρεάτων, αλλά και στις ήδη υπάρχουσες), η συνολική βέλτιστη άντληση εμφανιζόταν αυξημένη σε σχέση με την συνολική βέλτιστη άντληση με την διπλάσια αλλά και με την αρχική υδραυλική αγωγιμότητα.

Αυτό συνέβη διότι μικρές τιμές της υδραυλικής αγωγιμότητας παρεμποδίζουν την κίνηση του θαλασσινού νερού στο εσωτερικό του υδροφορέα με αποτέλεσμα να επιτυγχάνονται μεγαλύτερες τιμές των παροχών άντλησης.

Επίσης, μπορούμε να παρατηρήσουμε πως υπάρχει διαφορετική μεταβολή της βέλτιστης παροχής άντλησης σε σχέση με την θέση των αντλήσεων σε συνδυασμό με την μεταβολή της υδραυλικής αγωγιμότητας.

Αυτό οφείλεται κυρίως στο ότι ο υδροφορέας που μελετήθηκε στην παρούσα εργασία είναι ανομογενής και ακανονίστου σχήματος, με διαφορετικές τιμές της υδραυλικής αγωγιμότητας αλλά και της επιφανειακής τροφοδοσίας σε όλη του την έκταση.

Παρατηρήθηκε ότι στις θέσεις φρεάτων κοντά στην ακτή της θάλασσας (τρίτο σενάριο νέων θέσεων γεωτρήσεων), η μεταβολή της υδραυλικής αγωγιμότητας επηρέασε

περισσότερο την βέλτιστη άντληση. Μικρότερη επιρροή είχε η αλλαγή της υδραυλικής αγωγιμότητας στις άλλες δύο περιπτώσεις.

Οι διαφορετικές μεταβολές στα σενάρια οφείλονται στην ανομογένεια του υδροφορέα, στο ακανόνιστο σχήμα του και στις μεταβαλλόμενες παραμέτρους του όπως είναι η υδραυλική αγωγιμότητα αλλά και η επιφανειακή τροφοδοσία σε όλο το μήκος του υδροφορέα.

## ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στο κεφάλαιο που ακολουθεί παρατίθενται συγκεντρωμένα τα συμπεράσματα της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Μελετάται ο παράκτιος φρεάτιος υδροφορέας του Βαθέως της Καλύμνου κάνοντας χρήση ενός μοντέλου προσομοίωσης υπόγειας ροής όπως είναι το MODFLOW, μιάς και η εξίσωση για την υφαλμύριση όπως αναλύθηκε κατά Strack είναι παρόμοια με αυτή του ομογενούς κ ισότροπου περιορισμένου υδροφορέα.

Παρουσιάζονται οι βασικές αρχές που διέπουν την κίνηση του υπογείου νερού και αναλύεται το φαινόμενο της υφαλμύρισης, τα αίτια, τρόποι αντιμετώπισής της και τα μοντέλα της διεπιφάνειας που δημιουργείται από την επαφή του γλυκού με το αλμυρό νερό. Δύο είναι οι ευρύτερα χρησιμοποιούμενες θεωρήσεις, αυτή της απότομης διεπιφάνειας (sharp interface) η οποία χρησιμοποιείται και σε αυτήν την εργασία και η θεώρηση υπόγειας ροής μεταβλητής πυκνότητας (variable density).

Έπειτα παρουσιάζονται οι προσεγγίσεις της διεπιφάνειας που έχουν αναπτυχθεί κατά το παρελθόν, η προσέγγιση Ghyben – Herzberg όπου μελετάται η θέση και το σχήμα της διεπιφάνειας χρησιμοποιώντας τις υδρολογικές παραμέτρους του υδροφορέα, στηριζόμενη στην αρχή της υδροστατικής ισορροπίας.

Παρουσιάζεται η ανάλυση κατά Strack, όπου εισάγεται η έννοια του δυναμικού και υπολογίζεται η θέση της σφήνας σε σημεία του υδροφορέα και το μοντέλο Mantoglou το οποίο χρησιμοποιείται σε αυτήν την εργασία.

Στη συνέχεια πραγματοποιούνται βελτιστοποιήσεις των αντλήσεων για την εξαγωγή της βέλτιστης ποσότητας υπογείου νερού που μπορεί να αντληθεί για διάφορες περιπτώσεις που αφορούν αλλαγή της θέσης των πηγαδιών και ταυτόχρονη μεταβολή της υδραυλικής αγωγιμότητας σε όλη την έκταση του υδροφορέα και αναλύονται τα αποτελέσματα.

### 6.1 Το φαινόμενο της υφαλμύρισης – Μοντέλα προσομοίωσης διεπιφάνειας και αναλυτικές σχέσεις

Ως υφαλμύριση ενός υπόγειου υδροφορέα ορίζεται η εισροή θαλασσινού νερού σε αυτόν, με αποτέλεσμα την υποβάθμιση της ποιότητάς του. Το φαινόμενο αυτό είναι ένα πολύπλοκο φαινόμενο και συχνά μη αναστρέψιμο και προκαλείται κυρίως από την υπεράντληση των υπογείων υδροφορέων.



Παρατηρείται συνήθως στους παράκτιους υδροφορείς, οι οποίοι χρησιμοποιούνται στις παράκτιες περιοχές για την κάλυψη των αναγκών των κατοίκων σε νερό (ύδρευση και άρδευση), όπου το επιφανειακό δυναμικό δεν επαρκεί.

Προκειμένου το πρόβλημα της υφαλμύρισης να αντιμετωπιστεί, απαιτείται γνώση της γεωμετρίας και των υδραυλικών χαρακτηριστικών του υπό μελέτη υδροφορέα. Είναι επίσης απαραίτητο να προσδιορισθεί η μορφή της διεπιφάνειας μεταξύ του γλυκού και του θαλασσινού νερού και να οριστούν οι μαθηματικές σχέσεις της ροής μεταξύ των δύο αυτών υγρών. Η θεώρηση της διεπιφάνειας που έχει χρησιμοποιηθεί σε αυτήν την εργασία είναι η θεώρηση της απότομης διεπιφάνειας (sharp interface). Υπάρχει επίσης και μια άλλη θεώρηση, αυτή της ύπαρξης ζώνης διάχυσης και ανάμειξης άλατος ή θεώρηση υπόγειας ροής μεταβλητής πυκνότητας (variable density), αλλά δεν χρησιμοποιείται στην παρούσα εργασία.

Η προσέγγιση που χρησιμοποιείται για να συσχετισθεί το σχήμα και η θέση της αλάτινης σφήνας με τις υδρολογικές παραμέτρους του υπογείου νερού είναι η προσέγγιση Ghyben – Herzberg. Σύμφωνα με αυτήν όταν υπάρχει φυσική ισορροπία στο σύστημα, η διεπιφάνεια παραμένει ακίνητη. Το θαλασσινό νερό εντός του υδροφορέα παραμένει επίσης ακίνητο ενώ υπάρχει μόνιμη ροή γλυκού νερού προς την θάλασσα που υπακούει στην υπόθεση της οριζόντιας ροής (υπόθεση Dupuit).

Έπειτα, χρησιμοποιείται η ανάλυση κατά Strack χρησιμοποιώντας κάποιες παραδοχές όπως είναι και η προσέγγιση Ghyben – Herzberg για να μαθηματικοποιηθεί το πρόβλημα της υφαλμύρισης και να υπολογισθεί η θέση της αλάτινης σφήνας όταν υπάρχει άντληση.

Το μοντέλο Mantoglou et al. στηρίζεται στις ανωτέρω θεωρήσεις με την διαφορά ότι αφορά πλέον υδροφορέα πεπερασμένων διαστάσεων και όχι ημι-απειρών και μέσω της εξίσωσης συνέχειας η οποία εισάγει την έννοια του δυναμικού  $\phi$  κατά Strack, μπορεί το πρόβλημα της υφαλμύρισης να μελετηθεί τελικά απλοποιημένα ως πρόβλημα υπόγειας οριζόντιας ροής ομογενούς και ισότροπου περιορισμένου υδροφορέα με τιμή μεταφορικότητας ίση με την υδραυλική αγωγιμότητα του φρεατίου.

## **6.2 Μοντέλα προσομοίωσης κίνησης νερού – Βελτιστοποίηση των αντλήσεων**

Λόγω του ότι το πρόβλημα της υφαλμύρισης είναι ένα πολύπλοκο πρόβλημα και αποτελείται από πολύπλοκες μαθηματικές εξισώσεις, απαιτείται η χρήση διάφορων υπολογιστικών εργαλείων για την ανάλυσή του.

Αρχικά μοντελοποιείται ο προς μελέτη υδροφορέας και εισάγονται στο πρόγραμμα προσομοίωσης τα υδρολογικά και υδραυλικά χαρακτηριστικά του υδροφορέα, όπως είναι η υδραυλική αγωγιμότητα και η επιφανειακή τροφοδοσία. Επίσης εισάγεται το είδος του υδροφορέα, οι αρχικές και οριακές συνθήκες, το πάχος του υδροφορέα και οι θέσεις των φρεάτων άντλησης.

Αφού έχει δημιουργηθεί το μοντέλο προσομοίωσης του υδροφορέα, πραγματοποιείται η βελτιστοποίηση. Τα αρχεία δεδομένων που παράγονται έπειτα από την εκτέλεση του Modflow χρησιμοποιούνται από το Matlab για την βελτιστοποίηση.

Το πρόβλημα βελτιστοποίησης που εξετάζεται είναι η εύρεση της βέλτιστης (μέγιστης) παροχής άντλησης από δεδομένο αριθμό φρεάτων. Εντάσσεται στην ευρύτερη κατηγορία των μη γραμμικών προβλημάτων βελτιστοποίησης υπό περιορισμούς. Η μέθοδος που χρησιμοποιείται είναι αυτή του Εσωτερικού Σημείου (Interior Point).

Η μέθοδος Interior Point χρησιμοποιεί για να λυθεί ένα κατά προσέγγιση πρόβλημα στο οποίο οι περιορισμοί μετατρέπονται σε ισότητες και το οποίο είναι κατ' ουσίαν μία ακολουθία από προβλήματα ελαχιστοποίησης. Για να λυθεί το πρόβλημα, ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί δύο είδη βημάτων τα οποία χρησιμοποιούνται κατά περίπτωση. Επίσης, ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί μία συνάρτηση αξίας, την οποία μειώνει σε κάθε επανάληψη.

Για το ειδικευμένο πρόβλημα της βελτιστοποίησης των αντλήσεων σε παράκτιους υδροφορείς, ήταν απαραίτητο να συνταχθούν τα κατάλληλα προγράμματα και συναρτήσεις στο υπολογιστικό περιβάλλον Matlab. Οι συναρτήσεις αυτές περιλάμβαναν την συνάρτηση σκοπού, τους περιορισμούς και τις παραμέτρους εκτέλεσης και τερματισμού της βελτιστοποίησης, καθώς και βοηθητικά προγράμματα.

### **6.3 Εφαρμογή στον παράκτιο υδροφορέα του Βαθέως Καλύμνου**

Ο υπό μελέτη υδροφορέας βρίσκεται στον Βαθύ της Καλύμνου. Πραγματοποιήθηκαν βελτιστοποιήσεις των αντλήσεων στις ήδη υπάρχουσες έντεκα γεωτρήσεις. (Παπαντωνίου 2003). Έπειτα, επιβλήθηκε πρώτα μείωση κατά το ήμισυ στην υδραυλική αγωγιμότητα και στη συνέχεια αύξηση στο διπλάσιο, ούτως ώστε να διερευνηθεί η επίδραση αυτών των μεταβολών στη συνολική βέλτιστη παροχή.

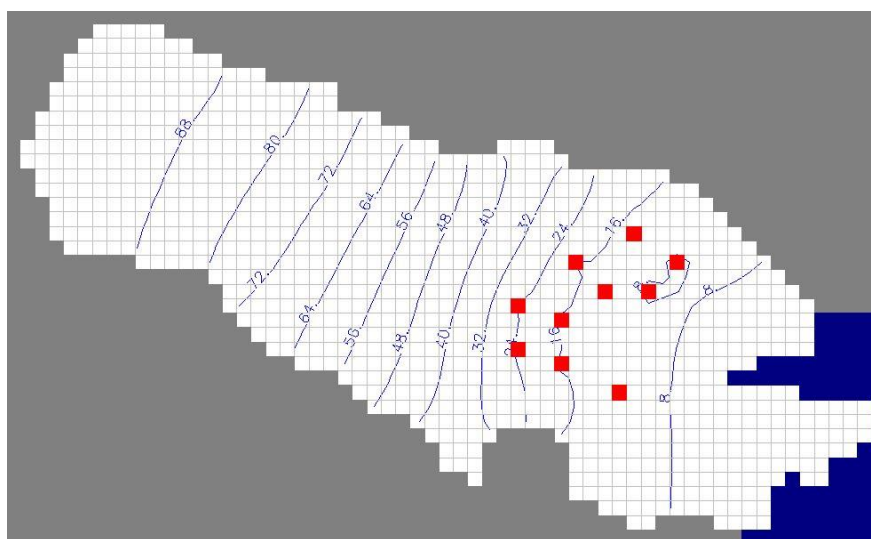
Στη συνέχεια, επελέγησαν τρία σενάρια διαφορετικών θέσεων ενδεχόμενων νέων γεωτρήσεων – δέκα στον αριθμό, και πραγματοποιήθηκε βελτιστοποίηση για κάθε ένα από αυτά. Το πρώτο σετ αφορούσε θέσεις πηγαδιών στο εσωτερικό του υδροφορέα, το δεύτερο κοντά στην ακτή και το τρίτο κατανομημένα σε όλη την έκταση του υδροφορέα. Έπειτα, σε κάθε ένα από τα σετ αυτά έγινε αλλαγή της υδραυλικής αγωγιμότητας του υδροφορέα και εξήχθησαν τα αποτελέσματα για κάθε περίπτωση.

Όλες οι βελτιστοποιήσεις πραγματοποιήθηκαν υπό δύο περιορισμούς. Ο πρώτος αφορούσε την τιμή του δυναμικού στα φρέατα. Συγκεκριμένα, όριζε ότι το δυναμικό  $\phi$  στην θέση των πηγαδιών πρέπει να είναι θετικό ή ίσον με το μηδέν,  $\phi \geq 0$ . Ο δεύτερος περιορισμός αφορούσε την θέση του ποδιού της αλάτινης σφήνας. Η οριζόντια απόσταση (κατά  $x$  δηλαδή) του ποδιού της αλάτινης σφήνας από την ακτή θα πρέπει

να είναι μικρότερη από την θέση κάθε πηγαδιού, δηλαδή με άλλα λόγια να προηγείται η θέση της σφήνας της θέσης των πηγαδιών. Ως πόδι της αλάτινης σφήνας θεωρείται το σημείο με δυναμικό κατά Strack όπως υπολογίσθηκε ίσο με 8.0078.

Το πρώτο συμπέρασμα που βγήκε από την υλοποίηση των σεναρίων μέσω της βελτιστοποίησης είναι ότι η θέση των φρεάτων επηρεάζει την βέλτιστη παροχή άντλησης και είναι πρωτεύουσας σημασίας. Υπό τις συνθήκες της αρχικής υδραυλικής αγωγιμότητας, μεγαλύτερη συνολική ποσότητα άντλησης επιτυγχάνεται έχοντας τα πηγάδια διάσπαρτα σε όλη την έκταση του υδροφορέα και αν αυτό είναι δυνατό όχι κοντά στα όρια του, αλλά στο κέντρο του. Μικρότερη βέλτιστη άντληση επιτυγχάνεται όταν τα πηγάδια βρίσκονται κοντά σε αδιαπέρατο όριο του υδροφορέα και επίσης όταν βρίσκονται πολύ κοντά στη θάλασσα.

Οι περιορισμοί που έχουν τεθεί, και ειδικά ο περιορισμός της θέσης του ποδιού της αλάτινης σφήνας (που μεταφράζεται ως σημείο με δυναμικό 8.0078), είναι πολύ αυστηρός και ως αποτέλεσμα επιτρέπει πολύ συντηρητικές τιμές της βέλτιστης παροχής άντλησης. Αυτό φαίνεται και από το γεγονός ότι σε όλες τις βελτιστοποιήσεις που πραγματοποιήθηκαν, η ισοδυναμική γραμμή των 8.0078 βρισκόταν κάθε φορά μακριά από τα φρέατα και πολύ κοντά στην ακτή. Στο σχήμα που ακολουθεί φαίνεται ενδεικτικά πού περίπου ήταν κάθε φορά η σφήνα (ισοδυναμική των 8.0078):



Σχήμα 6.1 Ισοδυναμικές γραμμές με άντληση

Το σχήμα παρ' ότι αφορά ένα από τα σεναρία με πηγάδια τα οποία ήταν σε κοντινή σχετικά θέση από την ακτή είναι ενδεικτικό καθώς σε όλα τα σεναρία επικρατούσε η παραπάνω κατάσταση. Η σφήνα βρισκόταν πολύ κοντά στην ακτή και δεν έφτανε στα πηγάδια.

Το δεύτερο συμπέρασμα που εξήχθη αφορά την επίδραση που έχει η υδραυλική αγωγιμότητα ως παράμετρος στην συνολική βέλτιστη παροχή άντλησης. Παρατηρήθηκε πως όταν εφαρμοζόταν η μικρότερη υδραυλική αγωγιμότητα, η συνολική άντληση ήταν μεγαλύτερη.

Αυτό οφείλεται στο ότι μικρές τιμές της υδραυλικής αγωγιμότητας παρεμποδίζουν το θαλασσινό νερό να εισέλθει στο εσωτερικό του υδροφορέα. Επίσης παρατηρήθηκε ότι για τις ίδιες θέσεις φρεάτων, στο σενάριο της μικρότερης υδραυλικής αγωγιμότητας το δυναμικό (και άρα και το πιεζομετρικό φορτίο) ήταν μεγαλύτερο, άρα επέτρεπε την άντληση μεγαλύτερων ποσοτήτων υπόγειου νερού.

Επιπλέον, ένα άλλο συμπέρασμα που προέκυψε έχει να κάνει με το ότι διαφορετικά συμπεριφέρονται στην μεταβολή της υδραυλικής αγωγιμότητας (είτε αύξηση είτε μείωση) τα πηγάδια ανάλογα με την θέση τους. Παρατηρήθηκε ότι μεγαλύτερες διαφορές από τα αποτελέσματα με την χρήση της αρχικής αγωγιμότητας υπάρχουν όταν τα πηγάδια βρίσκονταν κοντά στην ακτή.

Ο υδροφορέας που μελετούμε έχει ακανόνιστο, μη γεωμετρικό σχήμα και αποτελείται από τέσσερις διαφορετικές ζώνες υδραυλικής αγωγιμότητας και επιφανειακής τροφοδοσίας, είναι δηλαδή ανομογενής με μεταβαλλόμενα χαρακτηριστικά.

Το γεγονός ότι μικρότερη τιμή της υδραυλικής αγωγιμότητας επιτρέπει την άντληση μεγαλύτερων ποσοτήτων υπογείου νερού οφείλεται στο ότι μικρές τιμές της υδραυλικής αγωγιμότητας δεν επιτρέπουν τόσο εύκολα να κινηθεί το μέτωπο του θαλασσινού νερού στο εσωτερικό του υδροφορέα. Έτσι, επιτυγχάνονται υψηλότερες τιμές της συνολικής βέλτιστης άντλησης.

# **ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

## Διεθνής Βιβλιογραφία

1. Ahlfeld D. P. & Sawyer C. S., "Well Location in Capture Zone Design Using Simulation and Optimization Techniques", Vol. 28, No.4, Ground Water, pages 507 – 512, July - August 1990
2. Bear, J., "Hydraulics of Groundwater", McGraw-Hill, New York, 1979
3. Cheng A.H.-D., Ouazar D., "Coastal Aquifer Management – monitoring, modeling and case studies", Lewis Publishers, a CRC Press Company, Boca Raton, London, New York, Washington D.C. – Chapter 11: "Pumping Optimization in Saltwater – Intruded Aquifers", A.H. – D. Cheng, M.K Benhachmi, D. Halhal, D. Ouazar, A.Naji, K. El. Harrouni
4. Das A. & Datta B., "Development of Multiobjective Management Models for Coastal Aquifers", J. Water Resources Planning and Management, 125(2), pp. 76-87, 1999
5. Forsgern A., Gill P.E., Wright M.H., "Interior Methods for Nonlinear Optimization", SIAM Review, Vol.44, No.4, pp. 525-597, 2002 Society for Industrial and Applied Mathematics
6. Gill P., Murray W., Wright M. H. , "Practical Optimization", Systems Optimization Laboratory, Department of Operations Research, Stanford University, California, USA
7. Gorelick S. M. & Voss C. I., U.S Geological Survey, "Aquifer Reclamation Design: The Use of Contaminant Transport Simulation Combined With Nonlinear Programming", Water Resources Research, Vol. 20, No.4, Pages 415-427, April 1984
8. Luenberger D.G., Ye. Y, "Linear and Nonlinear Programming- Fourth Edition", Springer Science + Business Media, 2008
9. Mantoglou A., Papantoniou M., Giannouloupoulos P., "Management of Coastal Aquifers based on Nonlinear Optimization and Evolutionary Algorithms", Journal of Hydrology, 297, pp. 209-228, 2004
10. Mantoglou A., "Pumping Management of Coastal Aquifers using analytical models of saltwater intrusion", Water Resources Research, Vol.39, No.12, 2003
11. "Optimization Toolbox, for Use with Matlab", User's Guide, Mathworks, version R2016a
12. "Processing Modflow: A Simulation System for Modelling Groundwater Flow and Pollution", User's Guide, Wen-Hsing Chiang & Wolfgang Kinzelbach
13. Strack O.D.L., " A Single-Pontential Solution for Regional Interface Problems in Coastal Aquifers", Water Resources Research, Vol 12, No.6, December 1976

### Ελληνική Βιβλιογραφία

14. Αγραπίδης Π., «Βελτιστοποίηση Ενεργειακών Συστημάτων με χρήση Matlab, Simulink», Διπλωματική Εργασία, Ε.Μ.Π, Αθήνα 2006
15. Γιαννουλόπουλος Π.Κ., «Υπόγεια Υδραυλική και Μαθηματικά Μοντέλα στο Αργολικό Πεδίο» , Διδακτορική Διατριβή, Αθήνα 2000
16. Δήμος Χ. , «Εκτίμηση Απόδοσης Νερού από Παράκτιους Υδροφορείς με Χρήση Αριθμητικών Μοντέλων και Μεθόδων Βελτιστοποίησης» , Διπλωματική Εργασία, Ε.Μ.Π, Αθήνα 2015
17. Ευαγόρου Ευαγόρας, «Εκτίμηση Υδατικού Ισοζυγίου και Προσομοίωση του Υπόγειου Παράκτιου Υδροφορέα Ακρωτηρίου», Διπλωματική Εργασία, Ε.Μ.Π, 2012
18. Λατινόπουλος Π., «Υδραυλική των Υπογείων Ροών», 1989
19. Μαντόγλου Α., Γιαννουλόπουλος Π., «Βελτιστοποίηση Αντλήσεων Παράκτιων Υδροφορέων για Πρόληψη Υφαλμύρωσης»
20. Μαντόγλου Α., Κουράκος Γ., «Ολοκληρωμένη Διαχείριση Υδατικών Συστημάτων σε Σύζευξη με Εξελιγμένο Υπολογιστικό Σύστημα ΟΔΥΣΣΕΥΣ» , Τεύχος 4β, Θεωρητική Τεκμηρίωση μοντέλου ανάλυσης παράκτιων υδροφορέων, 2005
21. Νάνου-Γιάνναρου Α., «Υφαλμύρωση Παρακτίων Υδροφορέων», ΣΥΜΠΟΣΙΟ «ΑΙΓΑΙΟ-ΝΕΡΟ-ΒΙΩΣΙΜΗ ΑΝΑΠΤΥΞΗ», Πάρος 6 & 7 Ιουλίου 2001
22. Παπαντωνίου Μ., «Διαχείριση Παράκτιων Υδροφορέων – Βελτιστοποίηση αντλήσεων» , Μεταπτυχιακή Εργασία, Διεπιστημονικό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών «Επιστήμη και Τεχνολογία Υδατικών Πόρων», Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα 2003
23. Παρλατζάς Ν., «Σύγκριση Μοντέλων Προσομοίωσης Κίνησης Νερού σε Παράκτιους Υδροφορείς» , Διπλωματική Εργασία , Ε.Μ.Π, Αθήνα 2013
24. Σκορδής Χ.Χ., «Εφαρμογή του μοντέλου μεταβλητής πυκνότητας Seawat για την Προσομοίωση του Φαινομένου της Υφαλμύρισης σε Πιλοτική Εργαστηριακή Μονάδα και Σύγκρισή του με Εργαστηριακά Αποτελέσματα», Διπλωματική Εργασία, Πολυτεχνείο Κρήτης, Χανιά 2013
25. Σταμάτης Γ., «Υφαλμύρωση Παρακτίων Υδροφορέων και Κλιματική Αλλαγή – Ειδικές και Γενικές Επιπτώσεις», Ελληνική Επιτροπή Υδρογεωλογίας,
26. Τερζίδης Γ. Α , «Μαθήματα Υδραυλικής» , Τόμος Ι και ΙΙΙ, 1985
27. Τζιμόπουλος Χ., «Διαχείριση Υδάτινων Πόρων – Υπόγεια νερά» , Θεσσαλονίκη 2009
28. Τρούσσα-Μάρτη Σ., «Υφαλμύρωση Υπόγειων Υδροφορέων Νομού Χανίων», Πτυχιακή Εργασία, Χανιά 2009