ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Διπλωματική Εργασία

Χώροι ημιεσωτερικού γινομένου και Birkhoff-James ε-ορθογωνιότητα

ΧΑΣΑΠΗ Π. ΣΤΑΜΑΤΙΝΑ

Επιβλέπων: Ψαρράκος Παναγιώτης

ΑΘΗΝΑ, 2015

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Διπλωματική Εργασία

Χώροι ημιεσωτερικού γινομένου και Birkhoff-James ε-ορθογωνιότητα

ΧΑΣΑΠΗ Π. ΣΤΑΜΑΤΙΝΑ

Επιτροπή : Αρβανιτάκης Αλέξανδρος ,Επίκουρος Καθηγητής

Κανελλόπουλος Βασίλειος , Αναπληρωτής Καθηγητής

Ψαρράκος Παναγιώτης , Καθηγητής

ΑΘΗΝΑ, 2015

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα καταρχήν να ευχαριστήσω όλους όσους συνέβαλαν με οποιονδήποτε τρόπο στην επιτυχή εκπόνηση αυτής της διπλωματικής εργασίας .Θα πρέπει να ευχαριστήσω θερμά τον καθηγητή κ. Παναγιώτη Ψαρράκο για την επίβλεψη αυτής.Μου προσφέρε τις γνώσεις και την εμπειρία του για την βαθύτερη κατανόηση της περιοχής των διανυσματικών χώρων ημιεσωτερικού γινομένου και των προσεγγιστικών ορθογωνιοτήτων .Μέσα στο τελευταίο εξάμηνο ήταν πάντα διαθέσιμος να ασχοληθεί με κάθε απορία μου σχετική με ακαδημαϊκά ζητήματα,εντός και εκτός των πλαισίων της παρούσας εργασίας και με κάθε δισταγμό ή απογοήτευση μου όταν κάποιες νέες μαθηματικές έννοιες ήταν αρκετά δυσνόητες σε μένα. Η στήριξη του ήταν ιδιαίτερα πολύτιμη όσο και οι ιδέες που μου προσέφερε.

Σ’αυτό το σημείο θέλω να αναφέρω ανθρώπους,εκτός του στενού ακαδημαϊκού περιβάλλοντος, που υπήρξαν σημαντικοί πόλοι στη ζωή μου, προσδίδοντας την απαιτούμενη ισορροπία.Θα ήθελα λοιπόν,να ευχαριστήσω την φίλη μου, υποψήφια διδάκτορα κ. Κρυσταλλένια Δρόσου για την αμέριστη ψυχολογική στήριξη της ,τη πολύτιμη βοήθεια της και την υπέροχη φιλία της, ελπίζοντας να συνεχίσει να είναι δίπλα μου και στο μέλλον. Βέβαια ,δεν θα μπορούσα να μην αναφερθώ και στην οικογένεια μου στους οποίους οφείλω και το μεγαλύτερο ευχαριστώ. Η δική τους υπομονή ,στήριξη και πίστη στις δυνατότητες μου αποτέλεσε αρωγός σε όλους μου τους στόχους και τα όνειρα.Τέλος ,θα ήθελα να αφιερώσω, δικαιωματικά, την παρούσα εργασία στον μικρό μου αδερφό Κωνσταντίνο και να τον ευχαριστήσω για την τεράστια υπομονή του κατά τη διάρκεια των φοιτητικών μου χρόνων.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα διπλωματική εργασία αναφέρεται σε χώρους ημιεσωτερικού γινομένου με ιδιαίτερη αναφορά στην Birkhoff – James προσεγγιστική ορθογωνιότητα. Στο 1^{o} κεφάλαιο , αναφερόμαστε σε βασικές έννοιες ,ορισμούς καθώς και σε συγκεκριμένες μαθηματικές προτάσεις ,οι οποίες είναι αρκετά χρήσιμες για την απόδειξη διάφορων θεωρημάτων και για την κατανόηση σημαντικών εννοιών.Στο 2^{o} κεφάλαιο,στη συνέχεια,παρουσιάζεται μια σύνοψη για τα διάφορα είδη ορθογωνιότητας σε διανυσματικούς χώρους με νόρμα.Παρουσιάζονται τα είδη ορθογωνιότητας,οι ιδιότητες τους καθώς και οι σχέσεις μεταξύ των κύριων ορθογωνιοτήτων.Μάλιστα,εξετάζονται οι περιπτώσεις ισοδυναμίας και συνεπαγωγής μιας ορθογωνιότητας με μια (ή σε μια) άλλη και υπό ποιες προϋποθέσεις , αυτές γίνονται. Έπειτα, στο 3^{o} κεφάλαιο μελετώνται 2 συγκεκριμένα είδη ορθογωνιότητας (Birkhoff,Ισοσκελής) δίνοντας έμφαση στα χαρακτηριστικά, στις ιδιότητες τους και σε διάφορα θεωρήματα που συνδέονται με αυτές. Μάλιστα,στο τέλος του κεφαλαίου ασχολούμαστε με τον χαρακτηρισμό χώρων εσωτερικού γινομένου μέσω της B-J ορθογωνιότητας και τη χρήση του ορθογώνιου συντελεστή. Στο 4^{o} κεφάλαιο,γίνεται εκτενής αναφορά στους ορισμούς των προσεγγιστικών ορθογωνιοτήτων σε χώρους τόσο εσωτερικού όσο και ημιεσωτερικού γινομένου. Παρουσιάζονται, λοιπόν, διάφορες προτάσεις, που συνδέουν τις προσεγγιστικές ορθογωνιότητες σε χώρους εσωτερικού με τις αντίστοιχες ορθογωνιότητες σε χώρους ημιεσωτερικού γινομένου. Τέλος , στο 5^{o} κεφάλαιο ,ορίζουμε το σύνολο των στοιχείων που είναι Birkhoff-James ορθογώνια ως προς κάποια άλλα ,μελετώντας μάλιστα εκτενώς τις ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά του. Πιο συγκεκριμένα ,ασχολούμαστε με το μέγεθος αυτού ,το περιεχόμενο αλλά και το σύνορο του. Στο τελευταίο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας, παρουσιάζεται αναλυτικά η βιβλιογραφία που χρησιμοποιήθηκε για τη μελέτη των παραπάνω εννοιών και τις αποδείξεις των διάφορων θεωρημάτων.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
Εισαγωγικά στοιχεία (ορισμοί)

Χώρος εσωτερικού γινομένου

Έστω Ε διανυσματικός χώρος . Ο Ε καλείται χώρος εσωτερικού γινομένου εάν υπάρχει μια συνάρτηση $\langle\cdot,\cdot\rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

1) $\langle x, x\rangle \geq 0$, για κάθε $x \in E$.
2) Αν $\langle x, x\rangle = 0$ τότε $x = 0$.
3) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$, για κάθε $x, y \in E$.
4) $\langle \lambda x + \mu y, z\rangle = \lambda \langle x, z\rangle + \mu \langle y, z\rangle$, για κάθε $x, y, z \in E$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
5) Ισχύει η σχέση $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$.

Χώρος με νόρμα

Έστω Χ διανυσματικός χώρος . Μια απεικόνιση $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ λέγεται νόρμα και ο Χ αντίστοιχα , διανυσματικός χώρος με νόρμα όταν ικανοποιούνται οι ακόλουθες ιδιότητες :

1) $\|x\| \geq 0$ για κάθε $x \in X$.
2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ για κάθε $x \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.
4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ για κάθε $x, y \in X$ (τριγωνική ανισότητα) .

<u>Σχέσεις σε χώρους εσωτερικού γινομένου</u>

- Πυθαγόρειο Θεώρημα : $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, όπου x,y $\in$ X ώστε $x \perp y$.
- Κανόνας Παρ/μου: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$, για κάθε x, y $\in$ X.
- Ανισότητα Cauchy –Schwartz : $\langle x,y\rangle^2 \leq \langle x,x\rangle\ \langle y,y\rangle$ ή $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$, για κάθε x, y $\in$ X.

<u>Σφαίρα με κέντρο x και ακτίνα r</u>

$$S\,(x, M) = \{y \in X : \|x-y\| = M\}.$$

Μοναδιαία σφαίρα S: $S\,(0, 1) = \{y \in X : \|y\| = 1\}$.

<u>Μπάλα με κέντρο x και ακτίνα r</u>

$$B\,(x, M) = \{y \in X : \|x-y\| < M\} .$$

Μοναδιαία μπάλα B: $B\,(0, 1) = \{y \in X : \|y\| < 1\}$.

<u>Ορθογώνια διανύσματα x,y</u>

Έστω E χώρος εσωτερικού γινομένου. Δύο στοιχεία x ,y $\in$ E λέγονται ορθογώνια (συμβολικά $x \perp y$) ,όταν $\langle x,y\rangle = 0$.

<u>Κλειστό σύνολο</u>

Ένα υποσύνολο F ενός μετρικού χώρου (X,ρ) καλείται κλειστό εάν το συμπλήρωμα του F^c είναι ανοιχτό. Δηλαδή , $\forall\, x \in F^c,\ \exists\ \varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε S (x,ε) $\subset F^c$.

Υπερεπίπεδο

Ένα υποσύνολο W ενός διανυσματικού χώρου X ($W \subset X$) καλείται υπερεπίπεδο αν γράφεται στη μορφή W = x + Y ,όπου $x \in X$ και $Y \hookrightarrow X$ είναι υπόχωρος συνδιάστασης 1 του X .

Δυϊκός διανυσματικού χώρου X

Έστω X διανυσματικός με νόρμα. Ο χώρος $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ καλείται δυϊκός ή συζυγής , και είναι το σύνολο των φραγμένων γραμμικών συναρτησοειδών f , τέτοια ώστε $f : X \to \mathbb{R}$.

Χώρος Banach:

Ένας χώρος με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται χώρος Banach αν είναι πλήρης ως προς τη μετρική που ορίζει η νόρμα . (Δηλαδή αν κάθε ακολουθία Cauchy στον X συγκλίνει σε ένα στοιχείο του X).

Κυρτό σύνολο:

Ένα υποσύνολο K ενός διανυσματικού χώρου X λέγεται κυρτό αν για κάθε x ,y $\in$ K και $0 \leq \lambda \leq 1$ είναι $\lambda x + (1-\lambda) y \in K$.

$[x, y] := \{\lambda\, x + (1 - \lambda)y : \lambda \in [0,1] \ \gamma\iota\alpha\ \forall\, x, y \in X\ \mu\varepsilon\ x \neq y \}$.

$\langle x, y\rangle := \{ \lambda\, x + (1 - \lambda)y : \lambda \in \mathbb{R} \}$

$[x, y\rangle := \{ (1 - \lambda)\, x + \lambda y : \lambda \in [0,+\infty) \}$

$\widehat{x} := \frac{x}{\|x\|}$ (μοναδιαίο διάνυσμα του x με $x \neq 0$)

d(x, K):= απόσταση του σημείου x από ένα σύνολο K .

Υπόχωρος διανυσματικού χώρου:

Έστω X διανυσματικός χώρος και Y ⊂ X . O Y ονομάζεται υπόχωρος του X εάν για $\forall\ x\ ,y \in Y$ και λ ∈ $\mathbb{R}$ ισχύει ότι x+y $\in Y$ και λx $\in Y$.

Κλειστός υπόχωρος: Εάν μάλιστα $(X, \|\cdot\|)$ χ.μ.ν και Y ↪ X πεπερασμένης διάστασης τότε ο Y είναι κλειστός υπόχωρος.

M_L (x):= Το μήκος του μεγαλύτερου ευθυγράμμου τμήματος (όπου $M_x\,(x)$:= sup$\{\|a-b\|\ :\ [a\ ,b]\ \subseteq\ S_x\ \}$ που περιέχεται στην S_x=$\{x\ \in X : \|x\| = 1\}$ και είναι παράλληλο στο ευθύγραμμο τμήμα (-x,x) .

Συμπαγές σύνολο

‘Εστω (X , ρ) μετρικός χώρος και K ⊂ X .Το K θα καλείται συμπαγές αν κάθε ανοιχτό κάλυμμα του K έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα ,δηλαδή αν για κάθε οικογένεια $\{G_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ ανοικτών υποσυνόλων του X με K ⊂ $\bigcup_{\kappa=1}^{n} G_{ik}$.

Καμπύλη Jordan:

Ονομάζεται μια συνεχής γραμμή στο επίπεδο, η οποία δεν τέμνει τον εαυτό της .

Κλειστή καμπύλη Jordan:

Ονομάζεται μια καμπύλη Jordan στο επίπεδο της οποίας τα 2 άκρα συμπίπτουν.

$A_{u,v}$: περιοχή εντός του παραλληλογράμμου (αφορά το σύστημα (u^*, v^*)-συντεταγμένων)

= $\{\alpha u + \beta v : a, \beta\ \in [0,1]\ \}$.

$A_{\lambda u+v,u-\lambda v}$: περιοχή εντός του παραλληλογράμμου (αφορά το σύστημα (u^*, v^*)-συντεταγμένων)

για την οποία ισχύει ότι $A_{\lambda u+v,u-\lambda v} = |\Delta| \cdot A_{u,v}$.

Gâteaux-διαφορίσιμη συνάρτηση

Έστω X,Y διανυσματικοί χώροι Banach με U ⊂ X ανοιχτό υποσύνολο του X και $F : X \longrightarrow Y$. H Gâteaux παράγωγος $dF(u;\psi)$ της F στο σημείο $u \in U$ στην κατεύθυνση του $\psi \in X$ ορίζεται ως :

$$dF(u;\psi) = \lim_{\tau \to 0} \frac{F(u+\tau\psi) - F(u)}{\tau} = \frac{d}{d\tau} F(u+\tau\psi)\Big|_{\tau=0}$$

εάν το όριο υπάρχει .

Ορθογώνιος πίνακας

Ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ καλείται ορθογώνιος , αν ικανοποιούνται οι ακόλουθες ισότητες:

$$AA^T = A^T A = I_n \text{ ή ισοδύναμα } A^T = A^{-1} .$$

Ορθομοναδιαίος πίνακας

Ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{C})$ καλείται ορθομοναδιαίος , αν ικανοποιούνται οι ακόλουθες ισότητες :

$$AA^* = A^* A = I_n \text{ ή ισοδύναμα } A^* = A^{-1} .$$

Φασματική(τελεστική) νόρμα πινάκων στο $\mathbb{C}^{\nu\times\nu}$

Ορίζεται ως $\|A\|_2 = \max\left\{\sqrt{\lambda} : \lambda \in \sigma(A^* A)\right\}$, όπου γενικά σ(A) ≡ φάσμα ενός πίνακα A στο $\mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ δηλαδή το σύνολο των ιδιοτιμών του .

Πυρήνας γραμμικής απεικόνισης

Έστω η γραμμική απεικόνιση f : X⟶ Y όπου X,Y είναι διανυσματικοί χώροι πάνω στο σώμα K. O υπόχωρος Kerf := $\{x \in X : f(x) = 0\} \subseteq$ X αποτελεί τον πυρήνα της απεικόνισης f.

Πρόταση (Χαρακτηρισμοί συνέχειας γραμμικών τελεστών)

Έστω (X,$\|\cdot\|_X$) , (Y,$\|\cdot\|_Y$) χώροι με νόρμα και T: X ⟶ Y γραμμικός .Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

1. O T: X ⟶ Y είναι συνεχής .
2. Υπάρχει x_0 ∈ X και δ > 0 ώστε το σύνολο T $[B(\,x_0, \delta)]$ να είναι φραγμένο .
3. Υπάρχει δ > 0 ώστε το σύνολο T $[B(0_X, \delta)]$ να είναι φραγμένο.
4. Το T $[B(0_X, 1)]$ είναι φραγμένο.
5. Υπάρχει M > 0 ώστε $\|T(x)\|_Y \leq$ M $\|x\|_X$ για κάθε x ∈ X .
6. O T είναι Lipschitz, δηλαδή υπάρχει M ∈ ℝ ώστε $\|T(x) - T(z)\|_Y \leq$ M $\|x - z\|_X$ για κάθε x, z ∈ X .

Πρόταση (για γραμμικούς , φραγμένους τελεστές)

Αν X, Y χώροι με νόρμα και T: X ⟶ Y φραγμένος γραμμικός τελεστής τότε :

1. $\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|$ για κάθε x ∈ X .
2. $\|T\|$ = inf $\{M > 0 : \|T(x)\| \leq M\|x\| \ \forall\, x \in X\}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
Ορθογωνιότητα σε διανυσματικούς χώρους με νόρμα:Μια σύνοψη

2.1 Ορισμοί και βασικές ιδιότητες

2.1.1 ΚΥΡΙΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΤΗΤΑΣ ΣΕ ΧΩΡΟΥΣ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

Οι σχέσεις ορθογωνιότητας χαρακτηρίζονται από κάποιες ενδιαφέρουσες ιδιότητες εκ των οποίων οι πιο σημαντικές παρουσιάζονται στη συνέχεια [1,3]:

1. Μη- εκφυλιστική: $\lambda x \perp \mu x$ αν και μόνο αν είτε $\lambda x=0$ ή $\mu x=0$.
2. Απλοποίηση: Αν $x \perp y$ τότε $\lambda x \perp \lambda y$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.
3. Συνέχεια: έστω $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ 2 ακολουθίες οι οποίες συγκλίνουν στα σημεία x,y αντίστοιχα. Δηλαδή $\lim_{i\to\infty} x_i = x$ και $\lim_{i\to\infty} y_i = y$. Εάν $x_i \perp y_i$ για $\forall$ i $\in \mathbb{N}$, τότε $x \perp y$.
4. Ομογένεια: Αν $x \perp y$ τότε $\lambda x \perp \mu y$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
5. Συμμετρία: Αν $x \perp y$ τότε $y \perp x$.
6. Αθροιστική (βλ.παρακάτω από αριστερά ή δεξιά): Αν $x \perp y$ και $x \perp z$ τότε $x \perp y + z$.
7. Ύπαρξη (από δεξιά ή αριστερά αντίστοιχα): Για κάθε x,y $\in$ X υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός α τέτοιος ώστε $x \perp ax + y$ (ή αντίστοιχα $ax + y \perp x$).
8. Μοναδικότητα (από δεξιά ή αριστερά αντίστοιχα): Για κάθε x,y $\in$ X, $x \neq 0$ υπάρχει ακριβώς ένας πραγματικός αριθμός α τέτοιος ώστε $x \perp ax + y$ (ή αντίστοιχα $ax + y \perp x$).

9. Ύπαρξη μοναδικών ορθογωνίων διαγωνίων: Για κάθε x,y ∈ X \ {0} υπάρχει ένας μοναδικός πραγματικός αριθμός α τέτοιος ώστε x+αy ⊥ x-αy.

Αξίζει βέβαια να σημειωθεί σε αυτό το σημείο πως εάν με το συμβολισμό " ⊥ " αναφερόμαστε σε οποιαδήποτε σχέση ορθογωνιότητας σε ένα χώρο εσωτερικού γινομένου τότε ισχύουν όλες οι παραπάνω γνωστές ιδιότητες. Αν όμως ο παραπάνω συμβολισμός υποδηλώνει γενικευμένη ορθογωνιότητα σε χώρους με νόρμα, τότε δεν ικανοποιούνται όλες οι ιδιότητες και επηρεάζεται ως αποτέλεσμα η γεωμετρική δομή του χώρου.

Από την άλλη πλευρά , υπάρχουν πολλοί τρόποι για να εκφράσουμε την ορθογωνιότητα δύο διανυσμάτων (εκτός από το συνήθη όπου το $\langle x,y\rangle$=0), δηλαδή χωρίς ακριβή αναφορά στο εσωτερικό γινόμενο του χώρου. Παρακάτω θα παρουσιάσουμε επτά ορισμούς ορθογωνιότητας:

2.1.2 ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΕΣ ΜΕ ΤΟ Χ⊥Υ-ΕΙΔΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΤΗΤΑΣ [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]

1. (R) ROBERTS (1934): x $\perp_R$ y εάν ισχύει ότι $\|x+\lambda y\|$=$\|x-\lambda y\|$, ∀ λ ∈ ℝ .
2. (B) BIRKHOFF (1935)*: x $\perp_B$ y εάν ισχύει ότι $\|x\| \leq \|x+\lambda y\|$, ∀ λ ∈ ℝ .
3. (I) ΙΣΟΣΚΕΛΗΣ (1945): x $\perp_I$ y εάν ισχύει ότι $\|x+y\|$=$\|x-y\|$.
4. (P) ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΑ(1945): x $\perp_P$ y εάν ισχύει ότι $\|x+y\|^2$=$\|x\|^2$+$\|y\|^2$.
5. (C) CARLSSON(1962): x $\perp_C$ y εάν ισχύει ότι $\sum_{i=1}^{m} a_i \, \|\beta_i \, x+\gamma_i \, y\|^2$=0,

Όπου α_i,β_i,γ_i είναι προκαθορισμένοι πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους μάλιστα ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

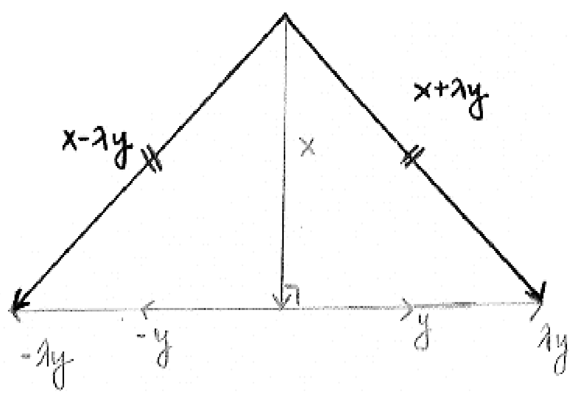
$$\sum_{i=1}^{m} a_i \; \beta_i^2=\sum_{i=1}^{m} a_i \; \gamma_i^2=0 \qquad \text{και} \qquad \sum_{i=1}^{m} a_i\beta_i\gamma_i=1 .$$

Όπως θα παρατηρήσουμε στην συνέχεια (κεφάλαιο 2.2) η C-ορθογωνιότητα δεν είναι ένας μεμονωμένος τύπος αλλά μια οικογένεια ορθογωνιοτήτων της οποίας μέλη είναι τόσο η ισοσκελής όσο και η πυθαγόρεια ορθογωνιότητα.

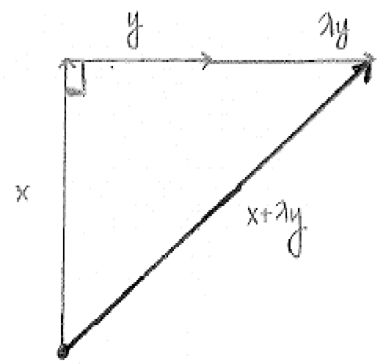
6. (S) SINGER(1957): x $\perp_S$ y εάν ισχύει ότι x=0 ή y=0 (δηλαδή $\|x\|\|y\|$=0) ή $\left\|\frac{x}{\|x\|}+\frac{y}{\|y\|}\right\|$=$\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\|$.

Η (S) ορθογωνιότητα αποτελεί ειδική περίπτωση της Unitary-Carlsson (U) οικογένειας ορθογωνιοτήτων (βλέπε παράγραφο 2.2) .
Όπως προαναφέραμε, καθεμιά από τις παραπάνω προτάσεις είναι ισοδύναμη με την ορθογωνιότητα των σημείων x,y. Βέβαια είναι πολύ σημαντικές και στους χώρους με νόρμα οι οποίοι όπως γνωρίζουμε συνδέονται άρρηκτα με τους χώρους εσωτερικού γινομένου (κάθε χώρος εσωτερικού γινομένου ⇒ χώρος με νόρμα όπου $\|x\|=\langle x,x\rangle^{1/2}$).

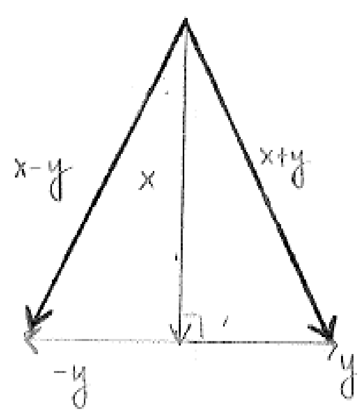
Ακολουθούν κάποια ενδεικτικά σχήματα, των παραπάνω ορθογωνιοτήτων:



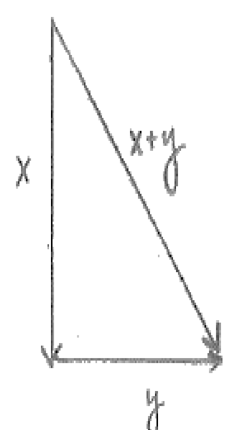
ΣΧΗΜΑ 1: Roberts ορθογωνιότητα



ΣΧΗΜΑ 2: Birkhoff ορθογωνιότητα



ΣΧΗΜΑ 3: Ισοσκελής ορθογωνιότητα



ΣΧΗΜΑ 4: Πυθαγόρεια Ορθογωνιότητα

2.1.3 ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΤΗΤΑ ΣΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥΣ ΧΩΡΟΥΣ ΜΕ ΝΟΡΜΑ

Έστω Ε ένας διανυσματικός χώρος με νόρμα (Ε,$\|\cdot\|$). Από τις ιδιότητες της ορθογωνιότητας, που είδαμε παραπάνω σε χώρους εσωτερικού γινομένου κάποιες είναι κοινές (μη-εκφυλιστική, απλοποίηση, συνέχεια*)* για κάθε είδος ορθογωνιότητας σε χώρους με νόρμα.Όσο αφορά τις υπόλοιπες- μη κοινές- ιδιότητες, κάποιες από αυτές είναι αρκετά δύσκολο να μελετηθούν ,ενώ τα αποτέλεσματα κάποιων άλλων είναι ακόμη και σήμερα άγνωστα.

Στη συνέχεια, θα μελετήσουμε μια περιγραφή των αποτελεσμάτων των συγκεκριμένων ιδιοτήτων για κάθε είδος ορθογωνιότητας ξεχωριστά.

ΚΥΡΙΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ R-ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΤΗΤΑΣ

Εκτός από τις προαναφερθήσες τρεις κοινές ιδιότητες *(μη- εκφυλιστική, απλοποίηση, συνέχεια)* για κάθε τύπο και άρα και για την R-ορθογωνιότητα, είναι επίσης προφανές πως η R-ορθογωνιότητα είναι ομογενής και συμμετρική. Λόγω της γεωμετρικής ερμηνείας υπάρχουν πολλά παραδείγματα διανυσματικών χώρων (όπως ο $\mathbb{R}^3$) στους οποίους η R-ορθογωνιότητα δεν είναι αθροιστική. Αναφορικά με την ύπαρξη της ο R.C James απέδειξε [1,6] ότι η (R)-ορθογωνιότητα ορίζεται αν και μόνο αν η νόρμα επάγεται από ένα εσωτερικό γινόμενο ($δηλαδή\ ισχύει\ ότι$ $\|x\|=\langle x|x\rangle^{1/2}$). Μάλιστα, η παραπάνω ιδιότητα θεωρείται πόρισμα ενός γνωστού θεωρήματος (F.A Fickens[10]) το οποίο χαρακτηριστικά αναφέρει ότι:

Ο *διανυσματικός χώρος Ε* είναι ένας χώρος εσωτερικού γινομένου (Ε,$\langle\cdot,\cdot\rangle$) , αν και μόνο αν ισχύει ότι $\|x+ay\|=\|x-ay\|, \forall\, a \in \mathbb{R}$ και x,y ∈ Ε .

Για ανάλογους λόγους , η ύπαρξη των διαγωνίων για αυτή την ορθογωνιότητα είναι χαρακτηριστική των χώρων εσωτερικού γινομένου. Τέλος, η μοναδικότητα τους (αν αυτοί υπάρχουν) καθώς και η μοναδικότητα της ύπαρξης είναι ιδιότητες που ισχύουν πάντα σε χώρους με νόρμα.

ΚΥΡΙΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ B-ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΤΗΤΑΣ

Είναι προφανές πως η B-ορθογωνιότητα είναι ομογενής. Παρόλα αυτά, γενικά δεν είναι ούτε συμμετρική, ούτε αθροιστική. Οι G.Birkhoff [1,5], R.C James [1,11,12] και M.M Day [1,13]

απέδειξαν ότι:

Ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος με νόρμα διάστασης ≥ 3 είναι ένας χώρος εσωτερικού γινομένου αν και μόνο αν η B-ορθογωνιότητα είναι συμμετρική .

Το παραπάνω εξαιρετικό και πολύ σημαντικό θεώρημα σχετίζεται με το γνωστό θεώρημα Kakutani [13] (το οποίο μαζί με το παραπάνω παρουσιάζονται πιο αναλυτικά στη συνέχεια στο κεφάλαιο 3). Αναφορικά βέβαια με την περίπτωση όπου η διάσταση του χώρου μου είναι ίση με 2, ο G. Birkhoff [5], απέδειξε πως μπορούμε να κατασκευάσουμε παραδείγματα νορμών στον $\mathbb{R}^2$ όπου ναι μεν η B-ορθογωνιότητα είναι συμμετρική αλλά ο χώρος $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ δεν είναι χώρος εσωτερικού γινομένου.

Από τη στιγμή λοιπόν, όπου η B-ορθογωνιότητα δεν είναι γενικά συμμετρική (δηλαδή δεν ισχύει ότι εάν $x \perp y$ τότε $y \perp x$) είναι απαραίτητο να να διαχωρίσουμε **την αθροιστικότητα από τα δεξιά** (εάν $x \perp y$ και $x \perp z$ τότε $x \perp y + z$) με την **αθροιστικότητα από τα αριστερά** (εάν $x \perp z$ και $y \perp z$ τότε $x+y \perp z$) και επίσης την ύπαρξη και τη μοναδικότητα της ύπαρξης από τα αριστερά και δεξιά αντίστοιχα.

Η ιδιότητα της ύπαρξης από τα δεξιά της B-ορθογωνιότητας μπορεί να θεωρηθεί ως μια απλή συνέπεια της παρακάτω πρότασης [1,12] (αναφέρεται ξανά στο κεφάλαιο 3 ως θεώρημα):

Για κάθε $x \in E$,υπάρχει ένα κλειστό και ομογενές υπερεπίπεδο H τέτοιο ώστε $x \perp_B H$.

Η παραπάνω πρόταση ,δεν είναι τίποτε άλλο, παρά ένα πολύ γνωστό πόρισμα του θεωρήματος Hahn-Banach το οποίο αναφέρει [1,12]:

- *Ένα σημείο $x \in E$, είναι B-ορθογώνιο με ένα σημείο $y \in E$,($x \perp_B y$) αν και μόνο αν υπάρχει ένα συνεχές, γραμμικό συναρτησοειδές $f \in E^* \setminus \{0\}$ τέτοιο ώστε $f(x) = \|f\|\|x\|$ και $f(y) = 0$.*
  Σ΄αυτό το σημείο βέβαια, είναι σημαντικό να αναφέρουμε μια πρόταση για την B-ορθογωνιότητα - σε συνδυασμό με την ανακλαστικότητα ενός χώρου - που βασίζεται στο σημαντικό θεώρημα του R.C. James (παρουσιάζεται και σε επόμενο κεφάλαιο)

- *Έστω Ε χώρος Banach. Ο Ε είναι <u>ανακλαστικός αν</u> και μόνο αν για κάθε κλειστό και ομογενές υπερεπίπεδο Η υπάρχει ένα σημείο $x \in E \backslash \{0\}$ τέτοιο ώστε $x \perp_B H$.*

Από την άλλη πλευρά, η ύπαρξη από αριστερά της Β- ορθογωνιότητας σχετίζεται με την ομογένεια της ορθογωνιότητας. Έτσι, η ύπαρξη για ∀ x∈ Ε, ενός κλειστού και ομογενούς υπερεπιπέδου Η τέτοιο ώστε $H \perp_B x$, είναι χαρακτηριστικό των χώρων εσωτερικού γινομένου, με διάσταση ≥ 3[1,11]. (αναλυτικά βλ. κεφάλαιο 3).

Με βάση λοιπόν όλα τα παραπάνω, μπορούμε να καταλήξουμε στις παρακάτω ισοδύναμες προτάσεις, αναφορικά με την Β-ορθογωνιότητα [1,12]:

(i) *Η Β-ορθογωνιότητα είναι αθροιστική από τα δεξιά.*
(ii) *Η ύπαρξη της από τα δεξιά είναι μοναδική.*
(iii) *Για κάθε $x \neq 0$,το κλειστό και ομογενές υπερεπίπεδο Η τέτοιο ώστε $x \perp_B H$, είναι μοναδικό.*
(iv) *Ο Ε είναι λείος.(δηλαδή δεν υπάρχουν ''γωνίες'' στη μοναδιαία σφαίρα) .*

Αναλογικά, οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες [1,12]:

(i) *Η Β-ορθογωνιότητα υπάρχει και είναι μοναδική από τα αριστερά.*
(ii) *Για κάθε $x \in S$ (δηλαδή $\|x\|$=1) και κάθε κλειστό και ομογενές υπερεπίπεδο Η τέτοιο ώστε $x \perp_B H$, το υπερεπίπεδο x+H ακουμπά τη μοναδιαία σφαίρα στο σημείο x.*
(iii) *Ε είναι αυστηρά κυρτός (δηλαδή δεν υπάρχουν ευθύγραμμα τμήματα στη μοναδιαία σφαίρα).*

Βέβαια στις παραπάνω ιδιότητες δεν αναφέραμε την αθροιστικότητα από τα αριστερά, και αυτό γιατί αυτή <u>εξαρτάται από τις διαστάσεις του διανυσματικού μου χώρου</u>. Συνεπώς:

- *Εάν η dimE=2, τότε η Β-ορθογωνιότητα είναι αθροιστική από τα αριστερά αν και μόνο αν είναι μοναδική από τα αριστερά (δηλαδή ο Ε είναι αυστηρά κυρτός).*
- *Εάν η dimE≥3, τότε η Β-ορθογωνιότητα είναι αθροιστική από τα αριστερά αν και μόνο αν είναι συμμετρική (δηλαδή ο Ε είναι χώρος εσωτερικού γινομένου).*

Τέλος, για αυτή την ορθογωνιότητα , έχουμε και την ύπαρξη μοναδικών διαγωνίων, με την παρουσία της ποσότητας δ τέτοια ώστε να ισχύει ότι $3^{-1}\|x\| \leq \delta(y) \leq 3\|x\|$. Επιπλέον, ο E είναι ένας χώρος εσωτερικού γινομένου αν και μόνο αν $\|x\|= \delta\|y\|$, $\forall\, x, y \in E \setminus\{0\}$ [1,15].

ΚΥΡΙΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ I-ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΤΗΤΑΣ

Είναι προφανές ότι η I-ορθογωνιότητα είναι συμμετρική. Από την άλλη πλευρά, η I-ορθογωνιότητα είναι είτε ομογενής ή αθροιστική αν και μόνο αν η νόρμα εισάγεται από ένα εσωτερικό γινόμενο (ουσιαστικά μιλάμε για χώρους εσωτερικού γινομένου όπου ισχύει ότι $\|x\|=\langle\cdot,\cdot\rangle^{1/2}$) [1,15].

Μάλιστα, η συγκεκριμένη πρόταση προκύπτει από το θεωρήμα Fickens, για τους χώρους εσωτερικού γινομένου το οποίο αναφέρθηκε πιο πριν αναφορικά με την ύπαρξη της R-ορθογωνιότητας.

Τα επιχειρήματα της στοιχειώδους κυρτότητας αποδεικνύουν την ύπαρξη της I-ορθογωνιότητας.Από τη στιγμή μάλιστα, που η I-ορθογωνιότητα δεν είναι ομογενής ,δεν μπορούμε να πούμε σε αυτή τη περίπτωση ότι η ιδιότητα της ύπαρξης συνδέεται με το θεώρημα του James όπως είδαμε παραπάνω για την B-ορθογωνιότητα.

Οφείλουμε σε αυτό το σημείο,να αναφέρουμε ότι για τις μη-ομογενείς ορθογωνιότητες πρέπει να διαχωρίσουμε μεταξύ της **μοναδικότητας , α-μοναδικότητας** (αναφέρεται σε σημείο) και **S-μοναδικότητας** (για κάθε προσανατολισμένο επίπεδο P και κάθε x ∈ S ∩ P υπάρχει ένα μοναδικό y ∈ S ∩ P τέτοιο ώστε το ζευγάρι (x,y) να είναι στο δοσμένο προσανατολισμό και να ισχύει ότι $x \perp_I y$).

Τα γνωστά αποτελέσματα που αναφέρονται στα παραπάνω οσο αφορά την I-ορθογωνιότητα είναι:

- *Η I-ορθογωνιότητα είναι είτε μοναδική είτε α-μοναδική* [1,16] *αν και μόνο αν ο E είναι αυστηρά κυρτός.*
- *Η I-ορθογωνιότητα είναι πάντα S-μοναδική.*

Τέλος, είναι προφανές πως και για την I-ορθογωνιότητα, έχουμε την ύπαρξη μοναδικών διαγωνίων.

ΚΥΡΙΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ P-ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΤΗΤΑΣ

Αρχικά, θα πρέπει να αναφέρουμε ότι η P-ορθογωνιότητα είναι συμμετρική. Είναι είτε ομογενής είτε αθροιστική,αν και μόνο αν η νόρμα εισάγεται από ένα εσωτερικό γινόμενο(όπως ακριβώς δηλαδή ισχύει και για την I-ορθογωνιότητα που είδαμε πιο πριν) [1,6]. Στην πραγματικότητα, αν παρατηρήσουμε λίγο καλύτερα θα δούμε ότι η αθροιστικότητα συνεπάγεται την ομογένεια και έτσι στους χώρους εσωτερικού γινομένου που οι ιδιότητες αυτές ισχύουν ακολουθείται ο κανόνας του παραλληλογράμμου όπως φυσικά γνωρίζουμε . Όσο αφορά την ύπαρξη της P-ορθογωνιότητας , όπως ακριβώς και για την ισοσκελή, στοιχειώδη επιχειρήματα κυρτότητας την αποδεικνύουν.

Επιπλέον, για την μοναδικότητα της Πυθαγόρειας ορθογωνιότητας –μιας και αυτή δεν είναι ομογενής-έχουμε τα εξής:

- *Η P-ορθογωνιότητα είναι μοναδική αν και μόνο αν ο E είναι αυστηρά κυρτός.*
- *Η P-ορθογωνιότητα είναι πάντα α-μοναδική* [1,16].
- *Όσο αφορά τώρα την S-μοναδικότητα, ακόμη δεν είμαστε σε θέση να αναφέρουμε στα σίγουρα κάποια χαρακτηριστική της ιδιότητα.*

Τέλος, όπως ακριβώς και για την B-ορθογωνιότητα, έχουμε και εδώ την ύπαρξη μοναδικών ορθογώνιων διαγωνίων.Υπάρχει, δηλαδή ένας αριθμός δ ο οποίος ικανοποιεί τη σχέση $2^{-1/2}\|x\| \leq \delta\|y\| \leq (2^{1/2} - 1)^{-1}\ \|x\|$. Επιπλέον, ο E είναι ένας χώρος εσωτερικού γινομένου αν και μόνο αν $\|x\| = \delta\|y\|, \forall\ x, y \in E \setminus \{0\}$ [1,15].

ΚΥΡΙΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ S-ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΤΗΤΑΣ

Η S-ορθογωνιότητα μπορεί να θεωρηθεί ως μια «νορμοποιημένη» I-ορθογωνιότητα ,όπου στη θέση των διανυσμάτων x,y στον τύπο της I-ορθογωνιότητας μπαίνουν τα μοναδιαία διανύσματα $\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}$. Επιπλέον, η S-ορθογωνιότητα είναι ομογενής,συμμετρική,υφίσταται και μάλιστα έχουμε και μοναδικότητα της ύπαρξης όπως επίσης και ύπαρξη μοναδικών ορθογωνίων διαγωνίων.

Συνεπώς,με βάση τα παραπάνω, η S-ορθογωνιότητα είναι αθροιστική σε χώρους δισδιάστατους (δηλαδή ισχύει dimE=2). Τέλος, δεν γνωρίζουμε τι συμβαίνει με την αθροιστικότητα της S-ορθογωνιότητας σε χώρους διάστασης ≥ 3, καθώς ως επιστημονικό θέμα βρίσκεται ακόμη υπό συζήτηση. Βέβαια,υποθέτουμε ότι εάν dimE ≥ 3 και η S-ορθογωνιότητα είναι αθροιστική τότε ο διανυσματικός χώρος μου E είναι ένας χώρος εσωτερικού γινομένου.

ΚΥΡΙΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ C-ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΤΗΤΑΣ

Αρχικά, η C-ορθογωνιότητα είναι συμμετρική σε κάποιες περιπτώσεις (βλ.*Ισοσκελής* και *Πυθαγόρεια* ορθογωνιότητα που είναι πάντα συμμετρικές) και αντίστοιχα μη-συμμετρική σε κάποιες άλλες (π.χ $x \perp_C y$ όταν $\|x+2y\|=\|x-2y\|$).

Έτσι λοιπόν, υποθέτουμε με βάση τα παραπάνω , πως η C-ορθογωνιότητα είτε είναι γενικά συμμετρική ή αυτή η ιδιότητα ισχύει μόνο σε χώρους εσωτερικού γινομένου . Επίσης,είναι ομογενής και αθροιστική από τα δεξιά ή τα αριστερά αντίστοιχα αν και μόνο αν μιλάμε για χώρο εσωτερικού γινομένου [1,8].

Όσο αφορά την ύπαρξη της, η C-ορθογωνιότητα,υφίσταται- μιας και δεν είναι συμμετρική- από τα δεξιά ή τα αριστερά [1,8].

Αναφορικά, με τη μοναδικότητα της ύπαρξης, δεν έχουμε γενικά σαφή συμπεράσματα (εκτός από τα προαναφερθέντα για την ισοσκελή και πυθαγόρεια ορθογωνιότητα).

Το μόνο γεγονός, που είναι εύκολο να αποδειχθεί, είναι πως η C-ορθογωνιότητα δεν είναι μοναδική,όταν ο χώρος δεν είναι αυστηρά κυρτός. Συνεπώς, η κυρτότητα του χώρου δεν είναι μόνο απαραίτητη αλλά και επαρκής συνθήκη για τη μοναδικότητα της ορθογωνιότητας μας. Τέλος,έχουμε την ύπαρξη ορθογωνίων διαγωνίων,αλλά δεν γνωρίζουμε- ακόμη τουλάχιστον - αν αυτοί είναι μοναδικοί.

2.2 Σχέσεις μεταξύ ορθογωνιοτήτων

Στην προηγούμενη ενότητα (2.1), ασχοληθήκαμε με τις βασικές ιδιότητες διάφορων ειδών ορθογωνιότητας σε διανυσματικούς χώρους με νόρμα. Σ΄αυτή την ενότητα,θα ασχοληθούμε με γνωστά αποτελέσματα και ανοιχτά-στην επιστημονική κοινότητα-προβλήματα που αφορούν τις σχέσεις μεταξύ 2 οποιοδήποτε διαφορετικών ειδών ορθογωνιότητας.

Αρχικά, θα πρέπει να υπενθυμίσουμε, ότι μας ενδιαφέρει η περίπτωση όπου ο διανυσματικός χώρος μας $(E,\|\cdot\|)$ έχει ως συντελεστές πραγματικούς αριθμούς. Όταν μάλιστα,η νόρμα μου εισάγεται από ένα εσωτερικό γινόμενο (*δηλαδή έχω χώρο εσωτερικού γινομένου*) η όποια ορθογωνιότητα 2 σημείων $x,y \in E$ είναι ισοδύναμη με οποιαδήποτε άλλη. Πριν ξεκινήσουμε, καλό θα ήταν να παρουσιάσουμε κάποιες ακόμη ορθογωνιότητες , πέραν των γνωστών, που αναφέρθηκαν πιο πάνω.

2.2.1 Προτάσεις ισοδυναμες με το x⊥y - ειδη ορθογωνιοτητας [3] (συνέχεια)

I. (C) CARLSSON (1962): x $\perp_C$ y εάν ισχύει ότι $\sum_{i=1}^{m} a_i \, \|\beta_i \; x + \gamma_i \; y\|^2=0$,

Όπου α_i,β_i,γ_i είναι προκαθορισμένοι πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους μάλιστα ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \; \beta_i^2=\sum_{i=1}^{m} a_i \; \gamma_i^2=0 \qquad \text{και} \qquad \sum_{i=1}^{m} a_i\beta_i\gamma_i=1 .$$

Η C-ορθογωνιότητα, η οποία μας έγινε γνωστή από την προηγούμενη ενότητα, δεν είναι ένας μεμονωμένος τύπος ,αλλά μια οικογένεια ορθογωνιοτήτων, της οποίας τα μέλη έχουν μελετηθεί πριν και μετά το αντίστοιχο paper του Carlsson[3,8].

Έτσι έχουμε:

(I) Ισοσκελής (1945): $\|x - y\|$=$\|x + y\|$.

(P) Πυθαγόρεια (1945): $\|x - y\|^2$ =$\|x\|^2$ + $\|y\|^2$.

και οι 2 εισήχθησαν από τον James [3,6].

Για ένα συγκεκριμένο a $\neq 0$ [2,19] ισχύουν τα ακόλουθα:

(aI) a-Ισοσκελής (1988):$\|x - ay\|$=$\|x + ay\|$.

(aP) a-Πυθαγόρεια (1988):$\|x - ay\|^2$=$\|x\|^2$+ $a^2\|y\|^2$.

Αντίστοιχα, για κάποιο συγκεκριμένο a,b ∈ (0,1):

(ab) (1978):$\|ax + by\|^2$+$\|x + y\|^2$=$\|ax + y\|^2$ +$\|x + by\|^2$.

Το παραπάνω μάλιστα εισήχθησαν από τους Kapoor και Prasad [2,16].

Για συγκεκριμένο a≠1:

(a) (1983): (1+a^2)$\|x + y\|^2$=$\|ax + y\|^2$+$\|x + ay\|^2$.

(μελετήθηκαν από τους Diminnie,Freese,Andalafte [2,20]) .

II. (U) UNITARY-CARLSSON: Είτε $\|x\|\|y\|$=0 ή $\frac{x}{\|x\|} \perp_C \frac{y}{\|y\|}$.

Προφανώς,δεν υπάρχει μια αναλυτική μελέτη για αυτή την οικογένεια των ορθογωνιοτήτων.Παρόλα αυτά,κάποια συγκεκριμένα μέλη έχουν μελετηθεί ξεχωριστά:

(UI) U-Ισοσκελής (1957): Είτε $\|x\|\|y\|$=0 ή $\frac{x}{\|x\|} \perp_I \frac{y}{\|y\|}$.

μελετήθηκαν από τον Singer [2,21,22].

(UP) U-Πυθαγόρεια (1986): Είτε $\|x\|\|y\|$=0 ή $\frac{x}{\|x\|} \perp_P \frac{y}{\|y\|}$.

μελετήθηκε από τους Diminnie, Andalafte και Freese [2,23] και Bosznay [2,24].

Γενικά λοιπόν, σε χώρους εσωτερικού γινομένου (E,⟨·,·⟩) όλες οι παραπάνω ορθογωνιότητες (B,R,I,P,C,S) είναι μεταξύ τους ισοδύναμες (δηλαδή σαν να ταυτίζονται με μια ορθογωνιότητα) , πράγμα το οποίο δεν ισχύει γενικά σε χώρους με νόρμα.

Συνοψίζοντας λοιπόν,εάν μια ορθογωνιότητα είναι ισοδύναμη (ή συνεπάγεται) κάποια άλλη τότε μιλάμε για χώρο εσωτερικού γινομένου.

Βέβαια,υπάρχουν πολλά άλυτα προβλήματα που αφορούν τις σχέσεις ισοδυναμίας ή συνεπαγωγής μεταξύ των δύο οποιοδήποτε ορθογωνιοτήτων με τα αποτελέσματα πρώτη περίπτωση να είναι πιο εύκολα.

2.2.2 Ισοδυναμίες μεταξυ των κυριων ορθογωνιοτητων

Αρχικά, θα πρέπει να αναφέρουμε ότι από τη στιγμή που η Carlsson και η Unitary - Carlsson αποτελούν οικογένειες ορθογωνιοτήτων αυτό που θα μελετηθεί σε αυτή την παράγραφο είναι οι ισοδυναμίες μεταξύ δύο οποιοδήποτε εκ των κύριων ορθογωνιοτήτων (Roberts , Birkhoff , Carlsson, Unitary - Carlsson).

Ισοδυναμια Roberts με τις υπόλοιπες κύριες ορθογωνιότητες (B,C,U)

Είναι γνωστό, πως κάθε ορθογωνιότητα υφίσταται (δηλαδή -θα αποδοθεί σε επόμενο κεφάλαιο- $\forall$ x,y $\in$ E, $\exists$ a $\in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε x $\perp ax + y$), σε διανυσματικούς χώρους με νόρμα εκτός της Roberts. Η τελευταία, υπάρχει μόνο σε χώρους εσωτερικού γινομένου [2,6].’Ετσι καταλήγουμε στο ακόλουθο:

Η R-ορθογωνιότητα είναι ισοδύναμη με οποιαδήποτε άλλη εκ των κύριων ορθογωνιοτήτων αν και μόνο <u>αν ο διανυσματικός χώρος μου Ε είναι χώρος εσωτερικού γινομένου</u>.

Ισοδυναμια Carlsson με τις υπόλοιπες κύριες ορθογωνιότητες (B,U)

Αρχικά,-όπως έχει αναφερθεί και παραπάνω- η Birkhoff ορθογωνιότητα είναι ομογενής και η Unitary-Carlsson θετικά ομογενής (βλέπε παραπάνω απλή ομογένεια με λ,μ > 0). Παρόλα αυτά,η C-ορθογωνιότητα είναι θετικά ομογενής μόνο σε χώρους εσωτερικού γινομένου[2,25].’Ετσι,

Η C-ορθογωνιότητα είναι ισοδύναμη με οποιδήποτε άλλο είδος ορθογωνιότητας αν και μόνο αν ο χώρος μου Ε είναι χώρος εσωτερικού γινομένου .

Ισοδυναμια Birkhoff με τις υπόλοιπες κύριες ορθογωνιότητες (U)

Ξεκινώντας, θα πρέπει να υπενθυμίσουμε ότι η B-ορθογωνιότητα είναι συμμετρική ,όπως άλλωστε είδαμε και παραπάνω, μόνο σε χώρους εσωτερικού γινομένου Ε με dimE ≥ 3,ενώ αν $dimE = 2$ τότε παρατηρούνται συνδυαστικές νόρμες (για περισσότερες λεπτομέρειες βλ. ενότητα 2.1) [2,5,6,12].

Όσο αφορά ,την ισοδυναμία της Β-ορθογωνιότητας με την U αντίστοιχα, δεν είναι ακόμη τουλάχιστον, γνωστά πολλά για τη μεταξύ τους σχέση. Παρόλα αυτά, αξίζει να σημειωθεί πως γνωρίζουμε αρκετά για την ισοδυναμία της ορθογωνιότητας Birkhoff με μέλη της οικογένειας της Unitary-Carlsson, τα οποία βέβαια ξεπερνούν το αντικείμενο μελέτης της συγκεκριμένης εργασίας.

2.2.3 ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΕΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΚΥΡΙΩΝ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΤΗΤΩΝ

Birkhoff, Carlsson, Unitary Carlsson συνεπάγονται την Roberts ορθογωνιότητα

Όπως από τα παραπάνω γνωρίζουμε, οι ορθογωνιότητες (B,C,U) ικανοποιούν την ιδιότητα της ύπαρξης σε χώρους με νόρμα. Αντίθετα, η Roberts ορθογωνιότητα υπάρχει μόνο σε χώρους εσωτερικού γινομένου. Έτσι,έχουμε:

Όταν μια ορθογωνιότητα(B,C,U) που υφίσταται συνεπάγεται την R-ορθογωνιότητα,τότε και η τελευταία υπάρχει και συνεπώς ο διανυσματικός χώρος μου E είναι χώρος εσωτερικού γινομένου .

Roberts συνεπάγεται τις Birkhoff, Carlsson, Unitary Carlsson ορθογωνιότητες

Όπως προαναφέραμε υπάρχουν διανυσματικοί χώροι όπου η R-ορθογωνιότητα δεν υφίσταται. Γι'αυτούς τους μη-εσωτερικού γινομένου χώρους, η R-ορθογωνιότητα συνεπάγεται κάποια άλλη ορθογωνιότητα. Συνεπώς,

Η R-ορθογωνιότητα σε κάθε περίπτωση συνεπάγεται την Birkhoff, κάποιες φορές την Carlsson (στην ειδική περίπτωση ορθογωνιότητας Carlsson, την Ισοσκελή) και την Unitary-Carlsson (στην ειδική περίπτωση της, την Unitary-Ισοσκελής).

Birkhoff, Unitary - Carlsson συνεπάγονται την Carlsson ορθογωνιότητα

Όπως προαναφέρθηκε,γνωρίζουμε πως η Birkhoff είναι μια ομογενής ορθογωνιότητα(δηλαδή εάν $x \perp y$ τότε $\lambda x \perp_B \mu y,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$) και η Unitary-Carlsson θετικά ομογενής ($\lambda, \mu > 0$). Από την άλλη πλευρά βέβαια,αποδεικνύεται μέσω μιας αναλυτικής απόδειξης [2,8] ότι η C-ορθογωνιότητα είναι θετικά ομογενής <u>μόνο σε χώρους εσωτερικού γινομένου.</u>

"Έτσι,ακολουθώντας ένα έμμεσο τρόπο,θεωρούμε πως η B,U ορθογωνιότητες συνεπάγονται την C-ορθογωνιότητα μόνο σε χώρους εσωτερικού γινομένου".

Αυτό προκύπτει γιατί υποθέτουμε πως ο E είναι ένας χώρος εσωτερικού γινομένου όταν ισχύει η ασθενής συνθήκη ομογένειας (δηλαδή $\forall x \in E$ υπάρχει $y \in E \setminus\{0\}$ τέτοιο ώστε $x \perp_C \lambda y$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$). Τέλος, αξίζει να αναφερθεί πως τα παραπάνω αποτελούν ακόμη και τώρα ένα ανοιχτό θέμα ή καλύτερα αντικείμενο μελέτης για την επιστημονική κοινότητα.

Carlsson συνεπάγεται τις Birkhoff, Unitary - Carlsson ορθογωνιότητες

Καταρχήν, όπως αναφέραμε στην προηγούμενη ενότητα (2.1) ,η B-ορθογωνιότητα λόγω του γεγονότος ότι δεν είναι συμμετρική, διακρίνουμε τη μοναδικότητα της ύπαρξης της από τα δεξιά και αριστερά αντίστοιχα. Πιο συγκεκριμένα, είχαμε αναφέρει πως η B-ορθογωνιότητα είναι μοναδική στα αριστερά (ή δεξιά) αν ο χώρος μου είναι αυστηρά κυρτός (ή λείος) αντίστοιχα [1,2,11]. Επίσης,κάποιες U- ορθογωνιότητες όπως η Unitary-Ισοσκελής είναι μοναδικές ενώ κάποιες άλλες (βλ.Unitary-Πυθαγόρεια) δεν είναι. Από τα παραπάνω λοιπόν,καταλήγουμε στα εξής :

- *Η C-ορθογωνιότητα συνεπάγεται την B-ορθογωνιότητα σε ένα αυστηρά κυρτό ή λείο διανυσματικό χώρο E αν και μόνο αν ο E είναι ένας χώρος εσωτερικού γινομένου.*
- *Η C-ορθογωνιότητα συνεπάγεται την UI-ορθογωνιότητα αν και μόνο αν ο E είναι ένας χώρος εσωτερικού γινομένου.*

Unitary - Carlsson συνεπάγεται την Birkhoff και αντίστροφα

Όπως και στην περίπτωση της ισοδυναμίας που είδαμε πιο πριν, δεν έχουμε πολλά γνωστά αποτελέσματα για τις συνεπαγωγές μεταξύ B και U- ορθογωνιοτήτων. Παρόλα αυτά βέβαια υπάρχουν πολλές επιμέρους απαντήσεις , για την μεταξύ τους σχέση, που δεν αποτελούν αντικείμενο της συγκεκριμένης εργασίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Birkhoff-James ορθογωνιότητα και ισοσκελής Ορθογωνιότητα

3.1 Birkhoff-James ορθογωνιότητα

3.1.1 Χαρακτηρισμοί

Αρχικά, πριν ξεκινήσουμε την εκτενή μελέτη της Birkhoff-James ορθογωνιότητας αξίζει να αναφερθούμε στην ονομασία αυτής. Έτσι, ο James, ήταν ο πρώτος που μας παρείχε μια κατανοητή μελέτη για τις ιδιότητες της Birkhoff ορθογωνιότητας [3,11,12] . Γι'αυτό το λόγο η Birkhoff ορθογωνιότητα αναφέρεται επίσης και ως James ορθογωνιότητα ή Birkhoff-James ορθογωνιότητα. Βέβαια, θα πρέπει να υπογραμμίσουμε για ιστορικούς λόγους ότι και η ισοσκελής ορθογωνιότητα αναφέρεται κάποιες φορές και ως James ορθογωνιότητα.

Ξεκινάμε αυτή την ενότητα,με την Birkhoff ορθογωνιότητα και ένα πολύ σημαντικό χαρακτηρισμό για αυτή.

Θεώρημα 3.1 [3, 12]

Εάν x,y είναι στοιχεία ενός χώρου με νόρμα (E,$\|\cdot\|$) τότε $x \perp_B \alpha x + y$ αν και μόνο αν υπάρχει $f\in E^*$ ικανοποιώντας $|f(x)|=\|f\| \cdot \|x\|$ τέτοιο ώστε $\alpha = -\frac{f(y)}{f(x)}$.

Με βάση το παραπάνω θεώρημα,προκύπτει το ακόλουθο πόρισμα:

<u>Πόρισμα 3.2</u>

Εάν x,y είναι στοιχεία ενός χώρου με νόρμα (E,$\|\cdot\|$) τότε x $\perp_B$ y αν και μόνο αν υπάρχει $f \in E^* \setminus \{0\}$ τέτοιο ώστε $|f(x)|=\|f\| \cdot \|x\|$ και το f(y) =0.

Η Birkhoff ορθογωνιότητα, μπορεί επίσης να χαρακτηριστεί μέσω του ημιεσωτερικού γινομένου.

ΟΡΙΣΜΟΣ ΗΜΙΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

Έστω X ένας διανυσματικός χώρος με νόρμα στο σύνολο K ∈ $\{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Οι Lumer[3,26,48] και Giles [3,52,48] απέδειξαν ότι υπάρχει μια απεικόνιση $[\cdot,\cdot] : X \times X \longrightarrow K$ ικανοποιώντας τις ακόλουθες ιδιότητες:

(s1) $[\lambda x + \mu y, z] = \lambda[x, z] + \mu[y, z]$, ∀x, y, z ∈ X ,∀ λ,μ ∈ K .

(s2) $[x, \lambda y] = \overline{\lambda}\, [x, y]$ και $[\lambda x, y] = \lambda\, [x, y]$,∀x,y ∈ X ,∀ λ ∈ K .

(s3) $[x, x] = \|x\|^2$,∀ x ∈ X.

(s4)$|[x, y]| \leq \|x\|\|y\|$, ∀x,y ∈ X ή $[x, y]^2 \leq [x, x][y, y]$.

(s5) $[x, x] \geq 0$ όπου $[x, x] = 0$ αν και μόνο αν x=0 .

Ο Lumer [3,26] απέδειξε ότι η νόρμα οποιουδήποτε διανυσματικού χώρου μπορεί να οριστεί μέσω ημιεσωτερικού γινομένου (όχι απαραίτητα μοναδικού).

Επίσης απέδειξε ότι οι παραπάνω ιδιότητες που εισήγαγε ο Lumer για τους χώρους ημιεσωτερικού γινομένου είναι ισχυρές. Πριν,προχωρήσουμε στην ορθογωνιότητα κατά Lumer,αξίζει να επισημάνουμε ότι στις παραπάνω ιδιότητες δεν συμπεριλαμβάνεται η αντιμεταθετική ιδιότητα που χαρακτηρίζει τους χώρους εσωτερικού γινομένου.

‘Εστω στο σημείο αυτό, ότι $[\cdot,\cdot]$ είναι ένα ημιεσωτερικό γινόμενο που παράγει τη νόρμα ενός διανυσματικού χώρου με νόρμα έστω E και x,y ∈ E.

<u>Τότε, το x είναι ορθογώνιο στο y κατά Lumer,</u> x $\perp_L y$ (σχετικά με το ημιεσωτερικό γινόμενο($[\cdot,\cdot]$)) αν ισχύει ότι $[y, x]$ =0.

Οι Dragomir και Kohila [3,28] απέδειξαν τον παρακάτω χαρακτηρισμό της Birkhoff ορθογωνιότητας.

Θεώρημα 3.3[3, 28]

Έστω E ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος με νόρμα και x,y $\in E$.Τότε x $\perp_B$ y αν και μόνο αν x $\perp_L$ y δηλαδή σχετίζεται με κάποιο ημιεσωτερικό γινόμενο που παράγει τη νόρμα του διανυσματικού μου χώρου.

Αξίζει σε αυτό το σημείο, να παρατηρήσουμε ότι το παραπάνω θεώρημα αναφέρεται σε οποιοδήποτε ημιεσωτερικό γινόμενο που παράγει την νόρμα του διανυσματικού μου χώρου, με το x $\perp_L$ y να συνεπάγεται ότι x $\perp_B$ y. Βέβαια, το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα [3,28].

Θεώρημα 3.4[3, 28]

Έστω ότι (E,$\|\cdot\|$) είναι ένας διανυσματικός χώρος με νόρμα και x,y ∈ E.Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

$x \perp_B y$

Για κάθε ημιεσωτερικό γινόμενο $[\cdot,\cdot]$ *το οποίο παράγει τη νόρμα του διανυσματικού μου χώρου ισχύει ότι:*

$$[y, x+\mu y] \leq \mathbf{0} \leq [y, x+\gamma y] \qquad \text{για όλα τα } \mu < 0 < \gamma.$$

ΟΜΟΓΕΝΕΙΑ

Η ομογένεια της Birkhoff ορθογωνιότητας είναι επακόλουθο της ομογένειας της νόρμας.

Θεώρημα 3.5 [3]

Η Birkhoff ορθογωνιότητα είναι ομογενής σε οποιοδήποτε διανυσματικό χώρο με νόρμα.

ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

Η συμμετρία της Birkhoff ορθογωνιότητας αποτελεί μια ιδιότητα μείζωνος σημασίας. Ο Birkhoff απέδειξε [3,5] ότι εάν η Birkhoff ορθογωνιότητα είναι συμμετρική σε ένα αυστηρά κυρτό διανυσματικό χώρο δεδομένης διάστασης τότε ο χώρος μου είναι χώρος εσωτερικού γινομένου. Μάλιστα , οι Day [3,13] και James [3,11] έδειξαν με πολλούς διαφορετικούς τρόπους πώς καταλήγουμε στο συμπέρασμα για την αυστηρή κυρτότητα του Birkhoff.

Έτσι, προκύπτει το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 3.6 [3]

Ένας διανυσματικός χώρος με νόρμα (E,‖·‖) του οποίου η διάσταση είναι dimE ≥ 3 είναι ένας χώρος εσωτερικού γινομένου αν και μόνο αν η Birkhoff ορθογωνιότητα είναι συμμετρική στον χώρο E.

Μια από τις αποδείξεις τους για το παραπάνω θεώρημα βασίζεται στο ακόλουθο πολύ γνωστό αποτέλεσμα του **θεωρήματος Kakutani [3, 29]:**

Ένας διανυσματικός χώρος με νόρμα (E,‖·‖) του οποίου η διάσταση είναι ≥3 είναι ένας χώρος εσωτερικού γινομένου αν υπάρχει μια προβολή της νόρμας 1 ($\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|x_i|$) σε κάθε κλειστό διανυσματικό υπόχωρο του E .

ΎΠΑΡΞΗ

Αναφορικά με τις ιδιότητες ύπαρξης της Birkhoff ορθογωνιότητας έχουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

Θεώρημα 3.8 (δεξιά ύπαρξη) [3, 11]

Έστω E ένας διανυσματικός χώρος με νόρμα. Για ∀ x,y ∈ E υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός α τέτοιος ώστε $x \perp_B \alpha x + y$. Επιπλέον,ο αριθμός αυτός ικανοποιεί τη σχέση $|\alpha| \leq \frac{\|y\|}{\|x\|}$. Εάν $x \perp_B \alpha x + y$ και $x \perp_B \beta x + y$ τότε $x \perp_B \gamma x + y$ το οποίο ισχύει για οποιοδήποτε αριθμό γ με $\alpha < \gamma < \beta$.

Πρακτικά,η συνέχεια της Birkhoff ορθογωνιότητας και το θέωρημα 3.8 συνεπάγονται ότι για ∀ x,y ∈ E υπάρχει ένα κλειστό διάστημα (βλ. $|\alpha| \leq \frac{\|y\|}{\|x\|}$) στην ευθεία των πραγματικών αριθμών τέτοιο ώστε ∀ α που βρίσκεται σε αυτό το διάστημα να ισχύει ότι $x \perp_B \alpha x + y$.

Μάλιστα ,ο James απέδειξε τον ακόλουθο τρόπο για να ορίσω αυτό το διάστημα.

<u>Θεώρημα 3.9 $[3, 11]$</u>

Έστω x$\neq 0$ και y , να είναι δύο διανύσματα σε ένα διανυσματικό χώρο με νόρμα και έστω

$$α= \frac{1}{\|x\|}\lim_{n\to\infty}(\|nx\| - \|nx+y\|), \qquad β=\frac{1}{\|x\|}\lim_{n\to\infty}(\|nx-y\| - \|nx\|) .$$

Τότε τα α,β είναι η μικρότερη και μεγαλύτερη τιμή του βαθμωτού γ τέτοιο ώστε x $\perp_B \gamma x + y$.

Από την άλλη πλευρά, για x $\perp_B \alpha x + y$ και y $\perp_B \bar{\alpha} y + x$ η σχέση μεταξύ των βαθμωτών α, $\bar{\alpha}$ δίνεται στο ακόλουθο θεώρημα:

<u>Θεώρημα 3.10 $[3, 11]$</u>

Έστω x, y δύο διανύσματα σε ένα διανυσματικό χώρο με νόρμα. Εάν x $\perp_B \alpha x + y$ και y $\perp_B \bar{\alpha} y + x$ τότε ανάμεσα στα μεγέθη α, $\bar{\alpha}$ ισχύει η ακόλουθη σχέση $|\alpha\bar{\alpha}| \leq 1$. Επιπλέον, η Birkhoff ορθογωνιότητα είναι συμμετρική αν και μόνο αν για οποιοδήποτε διανύσματα x,y≠0 και ποσότητες α, $\bar{\alpha}$ τέτοιες ώστε να ισχύει ότι x $\perp_B \alpha x + y$ και y $\perp_B \bar{\alpha} y + x$ η ανισότητα α$\bar{\alpha}$ $\geq$ 0 να ισχύει.

Ένα αποτέλεσμα όμοιο με αυτό του Θεωρήματος 3.8 ισχύει για την αριστερή ύπαρξη.

<u>Θεώρημα 3.11(αριστερή ύπαρξη) $[3, 11]$</u>

‘Εστω Ε ένας διανυσματικός χώρος με νόρμα , x,y ∈ E.Τότε υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός α τέτοιος ώστε $\alpha x + y \perp_B x$. Επιπρόσθετα, ισχύει

$$\|\alpha x + y\| = inf\{\|\beta x + y\| : \beta \in \mathbb{R}\}$$

Εάν $\alpha x + y \perp_B x$ και $\beta x + y \perp_B x$ τότε $\gamma x + y \perp_B x$ ισχύει για οποιοδήποτε αριθμό $\alpha < \gamma < \beta$.

Το Θεώρημα 3.1 και το Πόρισμα 3.2 δείχνουν τη σχέση μεταξύ της Birkhoff ορθογωνιότητας και των συνεχών γραμμικών συναρτησοειδών (στοιχεία δυϊκού E^*). Στο σημείο αυτό, θα πρέπει να αναφέρουμε ότι αν x $\perp_B$ y (ή y $\perp_B$ x) για κάθε y ∈ H (όπου H είναι ένα κλειστό υπερεπίπεδο) τότε δηλώνουμε ότι x $\perp_B$ H (ή αντίστοιχα H $\perp_B$ x). **Το παρακάτω Θεώρημα είναι ένα εύκολο πόρισμα του Θεωρήματος <u>Hahn-Banach</u>.**

Θεώρημα 3.12 (δεξιά επέκταση)

Για οποιοδήποτε διάνυσμα x σε ένα διανυσματικό χώρο με νόρμα E υπάρχει ένα υπερεπίπεδο $H \subset E$ τέτοιο ώστε $x \perp_B H$.

Από την άλλη πλευρά, όπως το επόμενο θεώρημα δείχνει, εάν ο διανυσματικός μου χώρος E δεν είναι πεπερασμένων διαστάσεων, τότε η ύπαρξη ενός σημείου $x \in E$ το οποίο είναι κάθετο σε ένα κλειστό υπερεπίπεδο H δεν είναι πάντα εγγυημένη.

Θεώρημα 3.13(δεξιά ύπαρξη) [3, 30]

Ένας χώρος Banach E είναι ανακλαστικός αν και μόνο αν για οποιοδήποτε υπερεπίπεδο H με $H \subset E$ υπάρχει ένα διάνυσμα $x \in E \setminus \{0\}$ τέτοιο ώστε $x \perp_B H$.

Εάν βέβαια το υπερεπίπεδο βρίσκεται στα αριστερά στην σχέση μας έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 3.14 (αριστερή ύπαρξη) [3, 11]

Έστω $(E, \|\cdot\|)$ ένας διανυσματικός χώρος με νόρμα με διάσταση $\dim \geq 3$.Τα ακόλουθα γεγονότα είναι ισοδύναμα:

i. *Για κάθε υπερεπίπεδο $H \subset E$ υπάρχει $x \in E \setminus \{0\}$ τέτοιο ώστε $H \perp_B x$.*
ii. *Για κάθε $x \in E$ υπάρχει ένα υπερεπίπεδο $H \subset E$ τέτοιο ώστε $H \perp_B x$ (αριστερή επέκταση) .*
iii. *Ο E είναι ένας χώρος εσωτερικού γινομένου.*

ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ

Θεώρημα 3.15 [3, 12]

'Εστω $(E, \|\cdot\|)$ ένας διανυσματικός χώρος με νόρμα.Τότε η Birkhoff ορθογωνιότητα είναι μοναδική στα αριστερά αν και μόνο αν ο E είναι αυστηρά κυρτός.Αντίστοιχα,η (B) ορθογωνιότητα είναι μοναδική στα δεξιά αν και μόνο αν ο E είναι λείος.

Θεώρημα 3.16 [3, 12]

Έστω Ε ένας διανυσματικός χώρος με νόρμα.Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- *Εάν η Birkhoff ορθογωνιότητα είναι μοναδική στα αριστερά στον E^*,τότε είναι μοναδική στα δεξιά στον Ε. Εάν ο Ε είναι ανακλαστικός,το αντίστροφο αποτέλεσμα επίσης αληθεύει.*
- *Εάν η Birkhoff ορθογωνιότητα είναι μοναδική στα δεξιά στον E^*, τότε είναι μοναδική στα αριστερά στον Ε. Εάν η μοναδιαία σφαίρα S_E είναι επίσης συμπαγής το αντίστροφο αποτέλεσμα ισχύει.*

ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΟΤΗΤΑ

Έχοντας τα παραπάνω θεωρήματα κατά νου , τα επόμενα αποτελέσματα δείχνουν ότι οι ιδιότητες της αθροιστικότητας και της μοναδικότητας για την Birkhoff ορθογωνιότητα είναι στενά συνδεδεμένες.Έτσι,έχουμε τα ακόλουθα θεωρήματα:

Θεώρημα 3.17 [3, 12]

Έστω (Ε,$\|\cdot\|$) ένας διανυσματικός χώρος με νόρμα. Τότε η (Β) ορθογωνιότητα στον Ε είναι αθροιστική στα δεξιά αν και μόνο αν ο Ε είναι λείος.

Θεώρημα 3.18 [3, 11]

Έστω (Ε,$\|\cdot\|$) ένας διανυσματικός χώρος με νόρμα.Τότε,

- *Εάν dimE=2 , τότε η (Β) ορθογωνιότητα είναι αθροιστική στα αριστερά αν και μόνο αν ο Ε είναι αυστηρά κυρτός.*
- *Εάν $dimE \geq 3$,τότε η (Β) ορθογωνιότητα είναι αθροιστική στα αριστερά αν και μόνο αν ο Ε είναι χώρος εσωτερικού γινομένου.*

Όπως συμβαίνει με πολλούς χαρακτηρισμούς για τους χώρους εσωτερικού γινομένου *διάστασης τουλάχιστον 3*, το δεύτερο σκέλος του παραπάνω Θεωρήματος, βασίζεται στο Θεώρημα Kakutani [3,14].

Σ΄αυτό το σημείο αξίζει να αναφέρουμε ότι οι Marino και Pietramala [3,31] απέδειξαν ότι <u>ένας αυστηρά κυρτός και λείος διανυσματικός χώρος με νόρμα διάστασης τουλάχιστον 3,</u>

είναι ένας χώρος εσωτερικού γινομένου αν και μόνο αν *η (B) ορθογωνιότητα είναι αθροιστική στα αριστερά για ένα δισορθογώνιο ζευγάρι διανυσμάτων (l.a.b).*

Αξίζει σε αυτό το σημείο να αναφέρουμε, ότι με τον όρο *δισορθογώνιο ζευγάρι διανυσμάτων έχουμε ότι:*

$x \perp_B y,\ y \perp_B x,\ x \perp_B z,\ y \perp_B z \Longrightarrow x + y \perp_B z$.

Βέβαια αργότερα,στο [3,32] δόθηκε μια διαφορετική απόδειξη για τον παραπάνω χαρακτηρισμό χωρίς την προυπόθεση της αυστηρής κυρτότητας και διαφορισιμότητας που απαιτούσε.Έτσι έχουμε:

Θεώρημα 3.19 [3, 31]

Έστω (E,‖·‖) ένας διανυσματικός χώρος με νόρμα με $dimE \geq 3$.Τότε,ο E είναι ένας χώρος εσωτερικού γινομένου αν και μόνο αν η (B) ορθογωνιότητα είναι l.a.b.

Από το Θεώρημα 4.17 ,είναι προφανές ότι για οποιοδήποτε λείο διανυσματικό χώρο με νόρμα η (B) ορθογωνιότητα είναι αθροιστική στα δεξιά για δισορθογώνιο ζευγάρι διανυσμάτων(r.a.b) δηλαδή:

$x \perp_B y,\ y \perp_B x,\ z \perp_B x,\ z \perp_B y \Longrightarrow z \perp_B x+y$

ΕΠΕΚΤΑΣΗ

Από το Θεώρημα Hahn –Banach (3.12) καταλήγουμε πως η (B) ορθογωνιότητα υπακούει την ιδιότητα της δεξιάς επέκτασης σε οποιοδήποτε διανυσματικό χώρο με νόρμα. Επιπλέον, από τη στιγμή που την αριστερή επέκταση την συναντάμε στο (ii) του θεωρήματος 3.14 , οποιοδήποτε διανυσματικός χώρος με νόρμα (E,‖·‖) με dimE ≥ 3 είναι χώρος εσωτερικού γινομένου αν και μόνο αν η (B) ορθογωνιότητα υπακούει στην ιδιότητα της αριστερής επέκτασης.

ΟΡΘΟΓΩΝΙΕΣ ΔΙΑΓΩΝΙΟΙ ΚΑΙ ΣΧΕΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Η (Β) ορθογωνιότητα έχει την ιδιότητα της ύπαρξης και μοναδικότητας των διαγωνίων σε οποιοδήποτε διανυσματικό χώρο με νόρμα, αλλά μέσω αυτής της ιδιότητας μπορούμε να χαρακτηρίσουμε χώρους εσωτερικού γινομένου.

<u>Θεώρημα 3.20 [3, 33]</u>

Έστω $(E,\|\cdot\|)$ ένας διανυσματικός χώρος με νόρμα και έστω $x,y \in E \setminus \{0\}$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

- *Υπάρχει ένας μοναδικός αριθμός $\alpha := \alpha(x,y)$ τέτοιος ώστε $x+\alpha y \perp_B x-\alpha y$.*

Επιπλέον, αυτός ο αριθμός ικανοποιεί

$$\frac{\|x\|}{3\|y\|} \leq \alpha \leq \frac{3\|x\|}{\|y\|}.$$

- *E είναι ένας χώρος εσωτερικού γινομένου αν και μόνο αν για $\forall\ x, y \in E \setminus \{0\}$, η ταυτότητα $\alpha(x, y) = \frac{\|x\|}{\|y\|}$ ισχύει.*

Από τη στιγμή που γνωρίζουμε πως η Birkhoff ορθογωνιότητα είναι ομογενής,η ii) ιδιότητα του παραπάνω θεωρήματος ουσιαστικά αναφέρει πως ένας διανυσματικός χώρος με νόρμα έστω E είναι ένας χώρος εσωτερικού γινομένου αν και μόνο αν η συνεπαγωγή

$$x, y \in S_E \Longrightarrow x+y \perp_B x-y.$$

Αξίζει σε αυτό το σημείο να αναφέρουμε πως ο Baronti [3,34] βελτίωσε το παραπάνω χαρακτηρισμό δείχνοντας ότι ο E είναι ένας χώρος εσωτερικού γινομένου αν και μόνο αν ο παραπάνω συνεπαγωγή ισχύει για ζευγάρι ορθογώνιων κατά Birkhoff διανυσμάτων,δηλαδή:

$x, y \in S_E,\ x \perp_B y \Longrightarrow x + y \perp_B x - y$.

3.2 Ισοσκελής ορθογωνιότητα

Από τη στιγμή που η ισοσκελής ορθογωνιότητα είναι προφανώς συμμετρική εξετάζουμε τις υπόλοιπες ιδιότητες.

ΟΜΟΓΕΝΕΙΑ

Μια από τις πιο σημαντικές ιδιότητες της ισοσκελούς ορθογωνιότητας είναι ότι είναι ομογενής μόνο σε χώρους εσωτερικού γινομένου.Στη συνέχεια, θα δούμε την προέλευση αυτού του αποτελέσματος.

<u>Θεώρημα 3.21 $[3, 35]$</u>

Ένας διανυσματικός χώρος με νόρμα $(E,\|\cdot\|)$ είναι ένας χώρος εσωτερικού γινομένου αν και μόνο αν $\forall$ $x,y \in S_E$ και για $\forall$ αριθμό α, ισχύει η ταυτότητα $\|ax+y\|$=$\|x+ay\|$.

Υποθέτουμε ότι η ισοσκελής ορθογωνιότητα είναι ομογενής.Έστω, x,y $\in$ S_E και α $\in \mathbb{R}$.Από τη στιγμή,που x+y $\perp_I$ x-y τότε (1+α)(x+y) $\perp_I$ (1-α)(x-y) δηλαδή $\|\alpha x+y\|$=$\|x+\alpha y\|$. Έτσι,το παραπάνω θεώρημα έχει ως συνέπεια το επόμενο.

<u>Θεώρημα 3.22 $[3, 6]$</u>

Η Ι- ορθογωνιότητα είναι ομογενής σε ένα διανυσματικό χώρο με νόρμα $(E,\|\cdot\|)$ αν και μόνο αν ο χώρος μου είναι χώρος εσωτερικού γινομένου.

<u>Θεώρημα 3.23 $[3, 36]$</u>

Ένας διανυσματικός χώρος με νόρμα $(E,\|\cdot\|)$ είναι χώρος εσωτερικού γινομένου αν και μόνο αν υπάρχει ένας αριθμός α $\notin \{0,1,-1\}$ τέτοιος ώστε να ισχύει η συνεπαγωγή

$$x\,,y \in E\,,\ x\perp_I y \Longrightarrow x \perp_I \alpha y\,.$$

<u>Θεώρημα 3.24 $[3, 17]$</u>

Ένας διανυσματικός χώρος με νόρμα $(E,\|\cdot\|)$ είναι ένας χώρος εσωτερικού γινομένου αν και μόνο αν υπάρχει ένας αριθμός $\delta > 0$ τέτοιος ώστε να ισχύει:

$$x, y \in S_E\,, x \perp_I y\,, |\lambda| < \delta \Longrightarrow x \perp_I \lambda y\,.$$

Επιπλέον,το δ εξαρτάται από τα x,y.

ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΟΤΗΤΑ

Από τη συνέχεια της νόρμας ,προκύπτει εύκολα ότι εάν η ισοσκελής ορθογωνιότητα είναι αθροιστική,τότε θα είναι επίσης ομογενής.Το επόμενο θεώρημα προκύπτει απευθείας από το θεώρημα 3.22 :

Θεώρημα 3.25 [3, 6]

Η I- ορθογωνιότητα είναι αθροιστική σε ένα διανυσματικό χώρο με νόρμα $(E,\|\cdot\|)$ *αν και μόνο αν ο χώρος μου είναι χώρος εσωτερικού γινομένου.*

Θεώρημα 3.26 [3, 37]

Έστω Ε ένας διανυσματικός χώρος με νόρμα με $dimE \geq 3$. *H Singer ορθογωνιότητα («νορμοποιημένη» I-ορθογωνιότητα, βλ.παραπάνω σελ.11) είναι αθροιστική στον Ε αν και μόνο αν ο Ε είναι χώρος εσωτερικού γινομένου.*

Από τη στιγμή, που η ισοσκελής ορθογωνιότητα είναι συμμετρική- σε αντίθεση με τα όσα ισχύουν πιο πάνω για την B-J ορθογωνιότητα (αθροιστική ιδιότητα στα αριστερά ή δεξιά,δηλαδή r.a.b ή l.a.b) - *η ιδιότητα της αθροιστικότητας για ένα δισορθογώνιο ζευγάρι διανυσμάτων (a.b)* ορίζεται ως εξής:

$$x \perp_I y\,,\ x \perp_I z\,,\ y \perp_I z \ \Longrightarrow \ \begin{cases} x \perp_I y + z \\ z \perp_I x + y \\ y \perp_I x + z \end{cases} .$$

Θεώρημα 3.27 [3, 32]

Έστω $(E,\|\cdot\|)$ *ένας διανυσματικός χώρος με νόρμα με* $dimE \geq 3$*.Τότε ο Ε είναι ένας χώρος εσωτερικού γινομένου αν και μόνο αν η I-ορθογωνιότητα είναι a.b.*

ΎΠΑΡΞΗ ΚΑΙ ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ

Όσο αφορά τις ιδιότητες της ύπαρξης και της μοναδικότητας, όπως αυτές ορίστηκαν στην αρχή της παρούσας εργασίας η ισοσκελής ορθογωνιότητα έχει την ακόλουθη συμπεριφορά:

<u>Θεώρημα 3.28 $[3, 6, 16]$</u>

Έστω (E,$\|\cdot\|$) ένας διανυσματικός χώρος με νόρμα.Για ∀ x,y ∈ E υπάρχει αριθμός α τέτοιος ώστε $x \perp_I$ αx+y. Η ισοσκελής ορθογωνιότητα στον E είναι μοναδική αν και μόνο αν ο E είναι αυστηρά κυρτός.

<u>Θεώρημα 3.29 $[3, 38]$(Συνδεέται με το Θεώρημα 3.28)</u>

Έστω (E,$\|\cdot\|$) ένας διανυσματικός χώρος με νόρμα με $dimE \geq 2$, x ∈ E $\backslash\{0\}$ και έστω $L \hookrightarrow E$ ένας δισδιάστατος υπόχωρος του E όπου x ∈ L.Τότε για ∀ y ∈ L με 0 ≤ $\|y\| \leq \frac{2\|x\|}{M_L\,(x)}$.

($\|y\| \geq 0$ όταν M_L (x) =0), υπάρχει ένας μοναδικός αριθμός α τ.ώστε $x \perp_I$ αx+y.

ΕΠΕΚΤΑΣΗ

Η ιδιότητα της επέκτασης συνεπάγεται την ομογένεια για την I-ορθογωνιότητα. Γι'αυτό το λόγο,η I-ισοσκελής ορθογωνιότητα έχει την ιδιότητα της επέκτασης σε ένα διανυσματικό χώρο με νόρμα E αν και μόνο αν αυτός είναι ένας χώρος εσωτερικού γινομένου.Το παρακάτω Θεώρημα ,το οποίο σχετίζεται με το θεώρημα 3.26, βελτιώνει τα παραπάνω όταν dimE ≥ 3. Έτσι έχουμε ότι:

<u>Θεώρημα 3.30</u>

Έστω (E,$\|\cdot\|$) ένας διανυσματικός χώρος με νόρμα με $dimE \geq 3$.Οι επόμενες ιδιότητες είναι ισοδύναμες:

- i. *Για ∀ x ∈ S_E υπάρχει ένα κλειστό υπερεπίπεδο H ⊂ E τέτοιο ώστε $x \perp_I H \cap S_E$.*
- ii. *E είναι ένας χώρος εσωτερικού γινομένου.*

ΟΡΘΟΓΩΝΙΕΣ ΔΙΑΓΩΝΙΟΙ ΚΑΙ ΣΧΕΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Προφανώς ,όπως γνωρίζουμε,για ∀ x,y ∈ E \{0} υπάρχει ένας μοναδικός αριθμός α > 0 (για την ακρίβεια α = $\frac{\|x\|}{\|y\|}$) τέτοιο ώστε x+αy $\perp_I$ x-αy.

O Day [3,13] απέδειξε ότι ένας διανυσματικός χώρος με νόρμα E είναι ένας χώρος εσωτερικού γινομένου αν και μόνο αν το κατά Clarkson modulus κυρτότητας του X [3,39]δηλαδή η ποσότητα:

$$\delta_E(\varepsilon):= \inf\left\{1-\frac{\|x+y\|}{2} : x, y \in s_E, \|x-y\| = \varepsilon \right\}, \qquad 0 \le \varepsilon \le 2,$$

Ικανοποιεί την ταυτότητα

$$\delta_E(\varepsilon) = 1 - \sqrt{1-\frac{\varepsilon^2}{4}} \qquad (R_\varepsilon)$$

∀ $0 \le \varepsilon \le 2$. Επιπλέον,ο Nordlander [3,40] υπέθεσε πως ο E είναι ένας χώρος εσωτερικού γινομένου αν και μόνο αν η ταυτότητα (R_ε) ισχύει για κάποια 0 <ε <2.

<u>Θεώρημα 3.31[3, 41]</u>

Έστω E ένας διανυσματικός χώρος με νόρμα με dimE ≥ 3, και έστω 0 < ε < 2. Τότε ο E είναι ένας χώρος εσωτερικού γινομένου αν και μόνο αν

$$\delta_E(\varepsilon) \geq 1 - \sqrt{1-\frac{\varepsilon^2}{4}} .$$

Θα πρέπει να σημειώσουμε εδώ ,ότι η παραπάνω ανισότητα μπορεί να αντικατασταθεί από την αντίστοιχη ισότητα (R_ε) καθώς ο Nordlander [3,40] απέδειξε ότι για κάθε διανυσματικό χώρο με νόρμα E πάντα ισχύει ότι $\delta_E(\varepsilon) \leq 1 - \sqrt{1-\frac{\varepsilon^2}{4}}$.

3.3 Χαρακτηρισμοί χώρων εσωτερικού γινομένου

Τα παρακάτω 2 θεωρήματα δίνουν χαρακτηρισμό σε χώρους εσωτερικού γινομένου μέσω της B-J ορθογωνιότητας. Αξίζει να σημειωθεί, πριν τα παρουσιάσουμε πως για τις αποδείξεις τους έγινε χρήση γνωστών λημμάτων (που θα παρουσιαστούν παρακάτω) και εννοιών (όπως τον *ορθογώνιο συντελεστή*,του οποίου μελετάται η συμπεριφορά και οι τιμές του είναι γνωστοί παράμετροι του διανυσματικού μου χώρου, έστω E).

Θεώρημα 1 [42]

Έστω E ένας διανυσματικός χώρος με νόρμα και $\lambda > 0$ ένας καθορισμένος αριθμός.Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

1. $\forall\, u,v \in S_E$, $u \perp v \Rightarrow (\lambda u+v) \perp (u-\lambda v)$;
2. $\forall\, u,v \in S_E$, $u \perp v \Rightarrow \|\lambda u+v\|=\|u-\lambda v\|$;
3. $\forall\, u,v \in S_E$, $u \perp v \Rightarrow \|\lambda u+v\| \leq \sqrt{1+\lambda^2}$;
4. $\forall\, u,v \in S_E$, $u \perp v \Rightarrow \|\lambda u+v\| \geq \sqrt{1+\lambda^2}$;
5. $\forall\, u,v \in S_E$, $u \perp v \Rightarrow \|\lambda u+v\| = \sqrt{1+\lambda^2}$;
6. *Ο διανυσματικός χώρος με νόρμα E είναι ένας χώρος εσωτερικού γινομένου.*

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Όπως θα παρατηρήσουμε λίγο αργότερα οι ισοδυναμίες 3)$\Leftrightarrow$ 4)$\Leftrightarrow$ 5) είναι απλές συνέπειες αποτελέσματος που βρίσκεται [42,43]. Η συνεπαγωγή 5) $\Rightarrow$ 6)αποτελεί ένα πολύ ισχυρό αποτέλεσμα το οποίο πρόσφατα πήραμε,μαζί φυσικά και με άλλα αποτελέσματα,από τους C.Benitez,K.Przeslawski και τον D.Yost [42,44].Αξίζει να σημειωθεί πως το ασθενές αποτέλεσμα $5'')$ $\Rightarrow$ 6) αποδείχθηκε και χρησιμοποιήθηκε στο [42,45 $\sigma\varepsilon\lambda.$ 388 − 389] . Με το $5'')$ ορίζουμε:

$$\forall\, u, v \in S_E ,\ u\perp v \ \Rightarrow \|\lambda u+v\| = \sqrt{1+\lambda^2},\ \ \|u+\lambda v\|=\sqrt{1+\lambda^2} \quad \text{για κάποιο δεδομένο } \lambda.$$

Απόδειξη θεωρήματος 1:

Θα δείξουμε ότι 1) $\Rightarrow$ 2).Υποθέτουμε η 1) έχει εξακριβωθεί και έστω u,v $\in S_E$, u$\perp$v και $\lambda > 0$ μια καθορισμένη θετική ποσότητα.Έτσι έχουμε ότι:

$$\left(\lambda \frac{\lambda u+v}{\|\lambda u+v\|} + \frac{u-\lambda v}{\|u-\lambda v\|}\right) \perp \left(\frac{\lambda u+v}{\|\lambda u+v\|} - \lambda \frac{u-\lambda v}{\|u-\lambda v\|}\right).$$

Παρατηρούμε παραπάνω πως ξεκινώντας από τη σχέση 1) που ισχύει ,προσπαθώ να καταλήξω στην 2) που θέλω να αποδείξω.Γι'αυτό το λόγο θέτω όπου $u \equiv \frac{\lambda u+v}{\|\lambda u+v\|}$ και όπου $v \equiv \frac{u-\lambda v}{\|u-\lambda v\|}$, στη σχέση καθετότητας που ισχύει στη σχέση 1**)**.

Θέτουμε $t = \frac{\|u-\lambda v\|}{\|\lambda u+v\|}$.

Πριν συνεχίσουμε την απόδειξη, καλό θα ήταν να παρουσιάσουμε το παρακάτω λήμμα που θα μας βοηθήσει σε αυτήν.

ΛΗΜΜΑ 1

Έστω $u, v \in S_E$, $u \neq \pm v$ και λ, $t_0 > 0$ καθορισμένες ποσότητες. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

i. $(\lambda u + t_0 v) \perp (u - \lambda v)$.

ii. $\varphi_{\lambda,u,v}(t_0) \geq \varphi_{\lambda,u,v}(t)$, *όπου* $\varphi_{\lambda,u,v}(t) = \frac{\lambda^2 + t}{\|\lambda u + tv\|}$ $\forall\, t > 0$.

Έτσι συνεχίζοντας,από το Λήμμα 1 (θέτοντας όπου $t_0 \equiv 1$) έχουμε:

$$\frac{\lambda^2+1}{\left\|\lambda^{(\lambda u+v)}/_{\|\lambda u+v\|}+^{(u-\lambda v)}/_{\|u-\lambda v\|}\right\|} \geq \frac{\lambda^2+t}{\left\|\lambda^{(\lambda u+v)}/_{\|\lambda u+v\|}+t\,^{(u-\lambda v)}/_{\|u-\lambda v\|}\right\|}, \qquad (*)$$

Κάνοντας απλές πράξεις στους παρονομαστές (αριστερό μέλος ανισότητας):

$$\lambda \frac{(\lambda u+v)}{\|\lambda u+v\|} + \frac{(u-\lambda v)}{\|u-\lambda v\|} = (\lambda^2 u + \lambda v)\frac{1}{\|\lambda u+v\|} + \frac{(u-\lambda v)}{\|u-\lambda v\|} = (\lambda^2 u + \lambda v)\frac{1}{\|\lambda u+v\|} +$$

$$(u-\lambda v)\frac{\|\lambda u+v\|}{\|\lambda u+v\|}\frac{1}{\|u-\lambda v\|} = (\lambda^2 u + \lambda v)\frac{1}{\|\lambda u+v\|} + \frac{(u-\lambda v)}{\|\lambda u+v\|}\frac{1}{t} =$$

$$= (\lambda^2 u + \lambda v)\frac{1}{\|\lambda u+v\|} + \frac{1}{\|\lambda u+v\|}\frac{(u-\lambda v)}{t} = \frac{1}{\|\lambda u+v\|}\left[(\lambda^2 u + \lambda v) + \frac{(u-\lambda v)}{t}\right]. \qquad \textbf{(1)}$$

Αντίστοιχα, και στο δεξί μέλος της ανισότητας κάνοντας πράξεις:

$$\lambda \frac{(\lambda u+v)}{\|\lambda u+v\|} + t\,\frac{(u-\lambda v)}{\|u-\lambda v\|} = (\lambda^2 u + \lambda v)\frac{1}{\|\lambda u+v\|} + \frac{\|u-\lambda v\|}{\|\lambda u+v\|}\frac{(u-\lambda v)}{\|u-\lambda v\|} = \frac{1}{\|\lambda u+v\|}\left[(\lambda^2 u + \lambda v) + (u - \lambda v)\right]. \qquad \textbf{(2)}$$

Τελικά από τους παρονομαστές της ανισότητας(σχέσεις 1,2) έχουμε:

$$\frac{1}{\|\lambda u+v\|}\left[(\lambda^2 u + \lambda v) + \frac{(u-\lambda v)}{t}\right] \geq \frac{1}{\|\lambda u+v\|}\left[(\lambda^2 u + \lambda v) + (u - \lambda v)\right].$$

Συνεπώς επιστρέφοντας στην αρχική μας σχέση (∗) με αντικατάσταση της παραπάνω σχέσης προκύπτει ότι:

$$\frac{\lambda^2 + 1}{\left\|(\lambda^2 u + \lambda v) + \frac{(u-\lambda v)}{t}\right\|} \geq \frac{\lambda^2 + t}{\|(\lambda^2 u + \lambda v) + (u - \lambda v)\|}. \qquad (**)$$

Από το γεγονός ότι u⊥v παίρνουμε :

$(\lambda^2 + 1)\,\|(\lambda^2 u + \lambda v) + (u - \lambda v)\| \geq (\lambda^2 + t)\left\|(\lambda^2 u + \lambda v) + \frac{(u-\lambda v)}{t}\right\| \Rightarrow$

$\Rightarrow (\lambda^2 + 1)^2 \geq (\lambda^2 + t)\left\|(\lambda^2 + \frac{1}{t})u + (1 - \frac{1}{t})\lambda v\right\| \geq (\lambda^2 + t)(\lambda^2 + \frac{1}{t})$
(από υπόθεση $\|u\| = \|v\| = 1$).

Αποδίδοντας ότι,

$\left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}^2\right) \leq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{t})^2 - 2\sqrt{t}\frac{1}{\sqrt{t}} + (\frac{1}{\sqrt{t}})^2 =$ t−2 + $\frac{1}{\sqrt{t}^2}$=

=t−2 + $\frac{1}{t} \Rightarrow$ t−2 + $\frac{1}{t} \leq 0 \Rightarrow t^2 + 1 \leq 2t \Rightarrow (t-1)^2 \leq 0$.

Δηλαδή t ≤ 1 και επειδή από υπόθεση t ≥ 0 καταλήγουμε πως t=1. Έτσι προκύπτει πως t = $\frac{\|u-\lambda v\|}{\|\lambda u+v\|}$ =1, δηλαδή $\|u - \lambda v\|$=$\|\lambda u + v\|$ ∀ u, v ∈ S_E (δηλαδή $\|u\| = \|v\|$ =1) και u⊥v.

Σε αυτό το σημείο, θα δείξουμε ότι η 2) συνεπάγεται την αυστηρή κυρτότητα του E (όπου αυστηρά κυρτός, βλ .προηγούμενα κεφάλαια) λέγεται ο χώρος όπου δεν υπάρχουν ευθύγραμμα τμήματα που να ενώνουν 2 σημεία του).

Έστω λοιπόν ότι η σχέση 2) ικανοποιείται και αντίθετα έστω ότι υπάρχει 1 γραμμή $\ell \in S_E$ τέτοια ώστε $\ell \cap S_E = [u_1, u_2]$, $u_1 \neq u_2$. Έτσι,οποιοδήποτε u ∈ $[u_1, u_2]$ γράφεται ως u = u_t =u_1+t $(u_2 - u_1)$, t ∈ [0,1] και $\|u_t\| = 1$.Η συνάρτηση t ⟶ $\|u_1 + t\,(u_2 - u_1)\|$, όπου t ∈ ℝ

παίρνει τις τιμές $\begin{cases} 1\ , & όταν\ t \in [0,1] \\ αυστηρά\ αυξανόμενη, & t > 1 \\ αυστηρά\ μειωμένη, & t < 0 \end{cases}$.

Ορίζοντας ως v $= \frac{u_2 - u_1}{\|u_2 - u_1\|}$ (συναρτήσει του u), έχουμε ότι $u_t \perp v$, ∀ t ∈ [0,1].

Με βάση τα παραπάνω έχουμε ότι:

- t $\longrightarrow \|\lambda u_t + v\| = \left\|\lambda(u_1 + t\,(u_2 - u_1) + \frac{u_2-u_1}{\|u_2-u_1\|}\right\| = \lambda\left\|(u_1 + t\,(u_2 - u_1) + \frac{u_2-u_1}{\lambda\|u_2-u_1\|}\right\|\ \forall\, t \in (1-\varepsilon_{1,}1]$. **(A)**

- t $\longrightarrow \|u_t - \lambda v\| = \left\|u_1 + t\,(u_2 - u_1) - \lambda\frac{u_2-u_1}{\|u_2-u_1\|}\right\|$, $\forall\, t \in (1-\varepsilon_{2,}1]$. **(B)**

Αξίζει να σημειωθεί, ότι <u>για τη σχέση Α</u> έχουμε ένα επαρκώς μικρό $\varepsilon_{1,} > 0$ το οποίο "αυστηρά" αυξάνεται. Από την άλλη πλευρά, <u>για τη σχέση Β,</u> έχουμε ένα αρκετά μικρό $\varepsilon_{2,} > 0$,το οποίο είναι μια σταθερά και "αυστηρά μειώνεται".'Ομως, από την 2) ξέρουμε πως ισχύει ότι $\|\lambda u + v\|$=$\|u - \lambda v\|$, $\forall t \in \left(1 - min\{\varepsilon_{1,}\varepsilon_{2,}\}\right)$. Παρατηρούμε λοιπόν πως οι δύο τύποι (A),(B) δεν ισούται, πράγμα το οποίο είχα αρχικά υποθέσει. Συνεπώς κατέληξα σε άτοπο,και έτσι τα 2 στοιχεία u,v $\in S_E$ δεν σχηματίζουν ευθύγραμμο τμήμα.

Αποδείξαμε ότι εάν η 2) ικανοποιείται τότε

$$\text{u,v} \in S_E \text{ και } \|\lambda u + v\| = \|u - \lambda v\| \Rightarrow \text{u} \perp \text{v}.$$

Αφού λοιπόν αποδείξαμε την αυστηρή κυρτότητα μένει να δείξω ότι u $\perp$v. Με απαγωγή εις άτοπο,υποθέτουμε πως η 2) ισχύει και έστω 2 διανύσματα u, $v' \in S_E$ τέτοια ώστε να ισχύει η σχέση $\|\lambda u + v'\| = \|u - \lambda v'\|$ ενώ το u <u>να μην είναι ορθογώνιο</u> με το v'. Στο διανυσματικό χώρο X_2' ,που δημιουργείται από τα διανύσματα μου u, v',(γίνεται αντιληπτός ως $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$) επιλέγουμε προσανατολισμό τέτοιο ώστε να ισχύει u $\prec v' \prec$ -u , ($v' \neq \pm u$). Έστω v $\in S_{X_2'}$ τέτοιο ώστε u $\perp$ v και u $\prec v' \prec$ -u. Τότε v $\neq v'$. Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη μας,θα παρουσιάσουμε ένα λήμμα που είναι ιδιαίτερα χρήσιμο παρακάτω:

<u>ΛΗΜΜΑ Α</u>

Έστω $S_{\mathbb{R}^2}$ η μοναδιαία σφαίρα του $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ και s(α) το σημείο της $S_{\mathbb{R}^2}$ το οποίο σχηματίζει με ένα δοσμένο σημείο s(0) γωνία $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ που καθορίζεται από το δοσμένο προσανατολισμό του επιπέδου.Τότε για $\forall\, \lambda > 0$ οι πραγματικές συνεχείς συναρτήσεις

α $\in\ [0,\pi) \longrightarrow \|s(0) + \lambda s(a)\|$.

και

α $\in\ [0,\pi) \longrightarrow \|s(0) - \lambda s(a)\|$.

μειώνονται και αυξάνονται αντίστοιχα.

Υποθέτοντας ότι, $u \prec v' \prec v \prec -u$ από το Λήμμα Α και την αυστηρή κυρτότητα του Χ έχουμε:

$\|u - \lambda v'\| < \|u - \lambda v\|$. **(Γ)**

αντίστοιχα

$\|\lambda u + v'\| = \lambda \left\| u + \frac{1}{\lambda} v' \right\| > \lambda \left\| u + \frac{1}{\lambda} v \right\| = \|\lambda u + v\| \Rightarrow \|\lambda u + v'\| > \|\lambda u + v\|$. **(Δ)**

Με βάση τις παραπάνω σχέσεις (Γ),(Δ) και το γεγονός ότι η σχέση $\|\lambda u + v'\| = \|u - \lambda v'\|$ έχουμε υποθέσει ότι ισχύει καταλήγουμε ότι $\|\lambda u + v\| < \|u - \lambda v\|$,το οποίο είναι άτοπο καθώς από την αρχή της απόδειξης έχουμε υποθέσει ότι $\|\lambda u + v\| = \|u - \lambda v\|$.Συνεπώς το u, v' είναι ορθογώνια.

Σ'αυτό το σημείο θα δείξουμε ότι από τη 2) $\Longrightarrow$ 1.Έστω ότι η 2) ισχύει με βάση όλες τις προυποθέσεις θα προσπαθήσω να καταλήξω στην 1).Εάν $u, v \in S_E$ και $u \perp v$ με καθορισμένο $\lambda > 0$ τότε

$\|\lambda u + v\| = \left\| \lambda \frac{(\lambda u + v)}{\|\lambda u + v\|} + \frac{(u - \lambda v)}{\|u - \lambda v\|} \right\| = \left\| \frac{\lambda^2 u + \lambda v}{\|u - \lambda v\|} + \frac{u - \lambda v}{\|u - \lambda v\|} \right\| = \left\| \frac{(\lambda^2 + 1) u}{\|u - \lambda v\|} \right\| = \frac{(\lambda^2 + 1)\|u\|}{\|u - \lambda v\|} \stackrel{\text{def}}{=}$
$\frac{\lambda^2 + 1}{\|\lambda u + v\|} = \left\| \frac{(\lambda u + v)}{\|\lambda u + v\|} - \lambda \frac{(u - \lambda v)}{\|u - \lambda v\|} \right\|$ της μορφής $\|u - \lambda v\|$.

Συνεπώς, από τη σχέση $\|\lambda u + v\| = \|u - \lambda v\|$ συμπεραίνουμε ότι:

$$\frac{(\lambda u + v)}{\|\lambda u + v\|} \perp \frac{(u - \lambda v)}{\|u - \lambda v\|} .$$

Άρα προκύπτει ότι $(\lambda u + v) \perp (u - \lambda v)$ που αποτελεί τη σχέση 1) του θεωρήματος μας. Τέλος,αξίζει να σημειωθεί ότι η 2) συνεπάγεται την συμμετρία της ορθογωνιότητας μας. Μέσω λοιπόν,των παρακάτω 2 σχέσεων:

$u, v \in S_E$ και $\|\lambda u + v\| = \|u - \lambda v\| \Rightarrow u \perp v$.

$\forall\, u, v \in S_E$, $u \perp v \Rightarrow \|\lambda u + v\| = \|u - \lambda v\|$.

όπου $\lambda > 0$,έχουμε ότι:

$u \perp v \Leftrightarrow u \perp -v \Leftrightarrow \|\lambda u - v\| = \|u + \lambda v\| \Leftrightarrow \|\lambda v + u\| = \|-(v - \lambda u)\| \Leftrightarrow \|\lambda v + u\| = \|(v - \lambda u)\| \Leftrightarrow v \perp u$.

Θα δείξουμε ότι 3) $\Rightarrow$ 4). Είναι επαρκές να θεώρησω την περίπτωση την περίπτωση των δυσδιάστατων διανυσματικών χώρων.Συνεπώς μπορούμε να θεωρήσουμε πως ο E$\equiv \mathbb{R}^2$,με $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$.Θεωρούμε ότι η S_E είναι μια απλή,λεία ,κλειστή καμπύλη Jordan.Θεωρώντας ότι το σύνολο S_λ έχει την παρακάτω μορφή:

$S_\lambda = \{\lambda u + v\colon\ u, v\ \in\ S_{E,}\ u \perp v\}$.

έπεται ότι είναι (λόγω των u,v) μια απλή ,κλειστή και λεία καμπύλη Jordan.Ωστόσο,μια παραμετροποίηση μπορεί να δοθεί στο σύνολο S_λ (όπως ακριβώς γίνεται και στο paper του J.Joly [42,43]).Για την ακρίβεια λοιπόν,έστω u=u(θ)=$(u_1(\theta), u_2(\theta))$ όπου θ $\in [0,2\pi]$.Θέτω παραμέτρους του S_E σε ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων με u(0) $\prec u(\theta) \prec$ -u(0), για όλα τα θ $\in\ [0, \pi]$.

Θεωρούμε λοιπόν τα διανύσματα u,v $\in S_E$, με u $\perp$v τέτοια ώστε u $\prec$ v $\prec$ -u. Έχουμε λοιπόν,με βάση την παραμετροποίηση ότι:

u=u (θ (σ)) = $(u_1(\theta(\sigma)), u_2(\theta(\sigma)))$.

v=v (υ (σ)) = $(v_1(\upsilon(\sigma)), v_2(\upsilon(\sigma)))$.

όπου θ(σ),υ(σ):$[0,4\pi) \longrightarrow [0,2\pi)$ είναι συνεχείς αυξανόμενες (δηλαδή χωρίς πτωτική τάση) συναρτήσεις και u_1, u_2, v_1, v_2 είναι συνεχείς συναρτήσεις με οριακή μεταβολή.Επιπλέον,ισχύει ότι σ = θ(σ)+ ν(σ) **(**το σ γράφεται έτσι κατά μοναδικό τρόπο**).**

Με βάση λοιπόν, τα παραπάνω το σύνολο S_λ που είδαμε παραπάνω,μπορεί να ξαναγραφεί στη μορφή (με τη βοήθεια των παραμέτρων):

$S_\lambda = \{\lambda u(\theta(\sigma)) + v(\upsilon(\sigma))\colon \sigma \in\ [0,4\pi)\}$.

Έστω A: η περιοχή της μοναδιαίας σφαίρας του E και A_λ:η περιοχή που περικλείεται από την S_λ.Τότε με ένα παρόμοιο υπολογισμό όπως στο [42,43],έχουμε:

$A_\lambda = \lambda^2 \int_{S_x} u_1\, du_2 + \int_{S_x} v_1 d\, v_2 = \lambda^2 \cdot 1 + 1 = (\lambda^2 + 1)$ A .

Τώρα, από την 3) σχέση όπου ισχύει ότι $\|\lambda u + v\| \leq \sqrt{1+\lambda^2}$ και τη συνέχεια των συναρτήσεων u_1, u_2, v_1, v_2, θ, υ έχουμε ότι:

$\|\lambda u + v\| = \|\lambda(u_1(\theta(\sigma)), u_2(\theta(\sigma))) + (v_1(\upsilon(\sigma)), v_2(\upsilon(\sigma)))\| = \|(\lambda u_1(\theta(\sigma)), \lambda u_2(\theta(\sigma))) + (v_1(\upsilon(\sigma)), v_2(\upsilon(\sigma)))\| = \sqrt{(\lambda u_1(\theta(\sigma)) + v_1(\upsilon(\sigma)))^2 + (\lambda u_2(\theta(\sigma)) + v_2(\upsilon(\sigma)))^2} =$

(λόγω του γεγονότος ότι $\|u\|^2$=$\langle u|u\rangle$ =1 και $\|v\|^2$=$\langle v,v\rangle$=1)

= $\sqrt{2\lambda^2+2}$= $\sqrt{2(\lambda^2+1)}$ ⇒ $\|\lambda u+v\|$= $\sqrt{2}$ $\sqrt{\lambda^2+1}$ ⇒ $\|\lambda u+v\| \geq \sqrt{\lambda^2+1}$.

Με βάση τα παραπάνω συμπεραίνουμε πως από το 3) ⇒4).Ομοίως και από το 4) ⇒ 3) και αφού ισχύει ότι $\|\lambda u+v\| \geq \sqrt{\lambda^2+1}$ και $\|\lambda u+v\| \leq \sqrt{\lambda^2+1}$ στη σχέση 5) δηλαδή ότι $\|\lambda u+v\| = \sqrt{\lambda^2+1}$.Άρα τελικά από το 3)⇔ 4)⇔ 5).

Θα δείξουμε ότι 2) ⇒ 5). Από τη στιγμή,που γνωρίζουμε ότι η (B)-ορθογωνιότητα σε ένα διανυσματικό χώρο έστω E είναι συμμετρική,όπως γνωρίζουμε εάν dimE ≥ 3 συνεπάγεται ότι ο E είναι ένας χώρος εσωτερικού γινομένου(42,12,46).Σ'αυτή την περίπτωση,έστω E ένας δισδιάστατος διανυσματικός χώρος και καθορισμένα $u^*, v^* \in S_E$ με $u^* \perp v^*$ τα οποία δημιουργούν το αντίστοιχο (u^*, v^*) -σύστημα συντεταγμένων του E. Επίσης,δίνονται τα u,v ∈ S_E με u ⊥ v.Τότε,η περιοχή $A_{\lambda u+v,u-\lambda v}$ υπολογίζεται με βάση το θεώρημα ως

$$A_{\lambda u+v,u-\lambda v}=|\Delta|\cdot A_{u,v} \text{ όπου } \Delta=\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =-\lambda^2-1 \quad (άρα\ |\Delta|=\lambda^2+1)\ .$$

Πριν συνεχίσουμε την απόδειξη μας ,καλό είναι,να παρουσιάσουμε ένα λήμμα το οποίο θα μας βοηθήσει παρακάτω:

ΛΗΜΜΑ B

Έστω (E,‖·‖) ένας δισδιάστατος διανυσματικός χώρος με νόρμα στον οποίο η ορθογωνιότητα είναι συμμετρική.Τότε $A_{u,v}$=$A_{u^*v^*}$=1, ∀ u,v ∈ S_E ,u ⊥ v.

Τώρα, με βάση το *Λήμμα B*, $A_{\lambda u+v,u-\lambda v} = \lambda^2+1$ στο (u^*, v^*) - σύστημα συντεταγμένων. Από τη στιγμή, που αποδείξαμε παραπάνω ότι 2)⇔ 1), δηλαδή ∀ u,v ∈ S_E και u⊥v τότε $\|\lambda u+v\|$=$\|u-\lambda v\|$ αν και μόνο αν (λu+v) ⊥ (u-λv) έχουμε ότι:

$A_{\lambda u+v,u-\lambda v}$= $A_{\frac{\lambda u+v}{\|\lambda u+v\|},\frac{u-\lambda v}{\|u-\lambda v\|}}$ της μορφής $A_{u,v}$, όπου u ≡ $\frac{\lambda u+v}{\|\lambda u+v\|}$ και v≡ $\frac{u-\lambda v}{\|u-\lambda v\|}$ όπως

τα είχαμε ορίσει στην αρχή της απόδειξης. Συνεπώς, $A_{\frac{\lambda u+v}{\|\lambda u+v\|},\frac{u-\lambda v}{\|u-\lambda v\|}}$=1 ⇒

$\frac{A_{\lambda u+v,u-\lambda v}}{\|\lambda u+v\|\cdot\|u-\lambda v\|}$= $\frac{\lambda^2+1}{\|\lambda u+v\|\cdot\|u-\lambda v\|}$ όπου από τη σχέση 2) όπως πολύ καλά γνωρίζουμε έχουμε ότι $\|\lambda u+v\|$=$\|u-\lambda v\|$ οπότε έχουμε $\frac{\lambda^2+1}{\|\lambda u+v\|\cdot\|u-\lambda v\|}$=$\frac{\lambda^2+1}{\|\lambda u+v\|^2}$=1⇒ λ^2+1=$\|\lambda u+v\|^2$ ⇒ $\|\lambda u+v\|$=$\sqrt{\lambda^2+1}$, ∀ u,v ∈ S_E ,u ⊥ v.

Άρα, η σχέση 5) πρακτικά αποδείχθηκε, το μόνο που μένει είναι να εξασφαλίσουμε και τη συμμετρία της ορθογωνιότητας που είναι και η προϋπόθεση του Λήμματος B. Από u ⊥ v ⇔ u ⊥ −v προκύπτει το ζητούμενο.

Στη συνέχεια, για να πάω 5)⇒ 6) χρησιμοποιούνται τα αποτελέσματα του [44,42] . Στην πραγματικότητα, στο paper [44] αποδείχθηκε πως η σχέση 5) συνεπάγεται τη συμμετρία της (B) ορθογωνιότητας. Έτσι, από το [47] καταλήγουμε ότι ο χώρος μου E είναι χώρος εσωτερικού γινομένου.Από τη στιγμή ,που οι σχέσεις 6) ⇒ 5) και 5) ⇒ 2) είναι ασήμαντες , η απόδειξη ολοκληρώθηκε. ∎

<u>Θεώρημα 2 [42]</u>

α) *Εάν ο H είναι ένας χώρος εσωτερικού γινομένου τότε* μ_H *(λ)* = $\sqrt{1+\lambda^2}$, ∀ $\lambda>0$.
β) *Εάν ο E είναι ένας χώρος με νόρμα και ο H είναι ένας χώρος εσωτερικού γινομένου τότε* μ_E *(λ)* $\geq \mu_H$ *(λ)* , ∀ $\lambda>0$.
γ) *Εάν* μ_E *(λ)* $=\sqrt{1+\lambda^2}$ *για ένα καθορισμένο λ >0 ,τότε ο E είναι ένας χώρος εσωτερικού γινομένου.*

<u>Απόδειξη Θεωρήματος 2:</u>

Πριν ξεκινήσουμε με την απόδειξη του θεωρήματος είναι χρήσιμο να αναφερθούμε σε έννοιες και ορισμούς που θα χρησιμεύσουν παρακάτω:

<u>ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΣΤΑΘΕΡΑ:</u> Για ένα διανυσματικό χώρο E, *η ορθογώνια σταθερά μ(E)* ορίζεται στο[42,43] ως

μ(E)=sup$\{\mu[x,y]: x,y \in E\setminus\{0\}, x\perp y\}$,

όπου $\mu[x,y]$=$sup_{s\in\mathbb{R}}$ $\frac{\|x\|+\|sy\|}{\|x+sy\|}$, $\forall x,y \in E\setminus\{0\}, x\perp y$.Από τη στιγμή λοιπόν που, $x\perp y \Leftrightarrow x\perp -y$,εύκολα συμπεραίνουμε ότι η ορθογώνια σταθερά μ(E) έχει ως εξής:

$$\mu(E) = \sup\left\{\frac{1+|s|^{\|y\|}/_{\|x\|}}{\left\|\frac{x}{\|x\|}\pm|s|^{\|y\|}/_{\|x\|}\cdot\frac{y}{\|y\|}\right\|} : s\neq 0, x,y\in E\setminus\{0, x\perp y\}\right\}$$

$$= \sup\left\{\frac{1+t}{\|u+tv\|} : t>0, u,v\in S_E\,, u\perp v\right\}.$$

Τέλος, ορίζουμε <u>το ορθογώνιο μέτρο του Ε</u> ,ως μια συνάρτηση μ_E: $(0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$\mu_E(\lambda)$=sup $\left\{max\left\{\frac{\lambda^2+t}{\|\lambda u+tv\|},\frac{\lambda^2 t+1}{\|u+\lambda tv\|}\right\}: t>0, u,v \in S_E\,, u \perp v\right\}$ για όλα τα λ> 0.

Επίσης, ισχύει ότι $\mu_E(1)$ = μ(Ε)

α) μ_H (λ) = sup$\left\{max\left\{\frac{\lambda^2+t}{\|\lambda u+tv\|},\frac{\lambda^2 t+1}{\|u+\lambda tv\|}\right\}: t>0, u,v \in S_H\,, u \perp v\right\}$

όπου S_H =$\{x \in H: \|x\|=1\}$.

$$= \sup\left\{max\ \left\{\frac{\lambda^2+t}{\sqrt{\lambda^2+t^2}},\frac{\lambda^2 t+1}{\sqrt{1+\lambda^2 t^2}}\right\}:\ \ t>0\right\}.$$

Αξίζει σ ‘ αυτό το σημείο να σημειωθεί ότι από το προηγούμενο θεώρημα γνωρίζουμε ότι $\|\lambda u+v\|$=$\sqrt{\lambda^2+1} \Longrightarrow \|\lambda u+tv\|$=$\sqrt{\lambda^2+t^2} \Longrightarrow \|u+\lambda tv\|$=$\sqrt{1+\lambda^2 t^2}$.

Έτσι, είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι έστω η συνάρτηση f_λ :(0,+∞)⟶ ℝ όπου

$$f_\lambda = \frac{\lambda^2+t}{\sqrt{\lambda^2+t^2}} - \frac{\lambda^2 t+1}{\sqrt{1+\lambda^2 t^2}}\ ,\ t>0\ .$$

η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη sign$f_\lambda'(t)$ = sign(1-λ) και από το γεγονός ότι f_λ (1)=0, $\forall\,\lambda>0$,συμπεραίνουμε ότι μ_H (λ) = $\sqrt{1+\lambda^2}$, $\forall\,\lambda>0$.

β) Έστω ότι λ ∈ $(0,+\infty)$ είναι ένας καθορισμένος αριθμός. Θεωρούμε πως ο Ε είναι ένας δισδιάστατος διανυσματικός χώρος με νόρμα. Τότε από το προηγούμενο θεώρημα, ξέρουμε πως ισχύει ότι ∀ u,v ∈ S_E , u⊥v ⇒ $\|\lambda u+v\| \leq \sqrt{1+\lambda^2}$ άρα το ίδιο ισχύει, για το infimum:

inf $\{\|\lambda u+v\|: u,v\ \in\ S_E, u\perp v\} \leq \sqrt{1+\lambda^2}$.

οπότε μ_E (λ) ≥ $sup\left\{\left\{\frac{\lambda^2+t}{\|\lambda u+tv\|}\right\}: t>0, u,v \in S_E\,, u \perp v\right\}$

$$\geq \sup\left\{\left\{\frac{\lambda^2+1}{\|\lambda u+v\|}\right\} : u, v \in S_E, u \perp v\right\}$$

$$= \frac{\lambda^2+1}{inf\{\|\lambda u+v\| : u,v \in S_E, u\perp v\}} \geq \frac{\lambda^2+1}{\sqrt{\lambda^2+1}} = \sqrt{\lambda^2+1} \ .$$

Μάλιστα, μ(Ε) = μ_E (1) $\geq \sqrt{2}$ [42,43] .

γ) Γνωρίζουμε ότι μ_E (λ)= $\sqrt{1+\lambda^2}$, για καθορισμένο $\lambda > 0$. Από προηγούμενο ερώτημα (β) έχουμε ότι :

$$\mu_E(\lambda) \geq \mu_H(\lambda) \Longrightarrow$$

$$\sqrt{1+\lambda^2} \geq \sup\left\{ max\left\{\frac{\lambda^2+1}{\|\lambda u+v\|}, \frac{1+\lambda^2}{\|u+\lambda v\|}\right\} : u, v \in S_E, u \perp v\right\} \Longrightarrow$$

$$\sqrt{1+\lambda^2} \geq \frac{\lambda^2+1}{\|\lambda u+v\|}, u, v \in S_E, u \perp v \text{ για καθορισμένο } \lambda>0.$$

Έτσι, έχουμε ότι $\|\lambda u + v\| \geq \frac{\lambda^2+1}{(\lambda^2+1)^{1/2}}$. Ως εκ τούτου προκύπτει ότι $\|\lambda u + v\| \geq \sqrt{1+\lambda^2}$,$\forall\, u, v \in S_E, u \perp v$.Από το προηγούμενο θεώρημα, 4)⇔ 6) άρα καταλήγουμε στο ζητούμενο ότι ο Ε είναι χώρος εσωτερικού γινομένου.

∎

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Birkhoff-James ε-ορθογωνιότητα

Σ' αυτό το κεφάλαιο,θα αναφερθούμε στις προσεγγιστικές ορθογωνιότητες,ορίζοντας μάλιστα και την προσεγγιστική Birkhoff-James ορθογωνιότητα σε ένα χώρο με νόρμα. Όπως θα δούμε,γίνεται σύγκριση με την ορθογωνιότητα που ορίστηκε από τον Dragomir καθώς και αναφορά στις διάφορες ιδιότητες της. Ειδικότερα, θα αποδείξουμε ότι σε λείους χώρους είναι ισοδύναμη με την προσεγγιστική ορθογωνιότητα που απορρέει από το ημιεσωτερικό γινόμενο.

4.1 Ορισμοί προσεγγιστικών ορθογωνιοτήτων

Σε ένα χώρο εσωτερικού γινομένου $\langle\cdot,\cdot\rangle$,με τη δεδομένη σχέση ορθογωνιότητας " $\perp$ ", *ορίζουμε την προσεγγιστική ή ε- ορθογωνιότητα ως εξής:*

$$x \perp^{\varepsilon} y \iff |\langle x|y\rangle| \leq \varepsilon \|x\|\|y\|.$$

(δηλαδή $|\cos(x,y)| \leq \varepsilon$ για x,y $\neq 0$).

Σκοπός μας είναι,να ορίσουμε μια προσεγγιστική Birkhoff-James ορθογωνιότητα γενικεύοντας την $\perp^{\varepsilon}$, που είδαμε πιο πάνω.Έστω (X,$\|\cdot\|$) ένας διανυσματικός χώρος με νόρμα και Κ $\in \{\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}\}$ ο χώρος των συντελεστών μου.Όπως λοιπόν, παρουσιάζεται στα [48,51],ορίζουμε *την προσεγγιστική Birkhoff-James ορθογωνιότητα ως εξής:*

$$x \perp_{BJ}^{\varepsilon} y \Leftrightarrow \forall \lambda \in K: \|x+\lambda y\| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|x\| .$$

Στη συνέχεια,θα παρουσιάσουμε ένα εναλλακτικό ορισμό της *B-J ορθογωνιότητας* όπως αυτή ορίστηκε από τον *Chmielinski* [48]:

$$x \perp_C^{\varepsilon} y \Leftrightarrow \forall \lambda \in K: \|x+\lambda y\|^2 \geq \|x\|^2 - 2\varepsilon\|x\|\|\lambda y\| .$$

Αξίζει σ'αυτό το σημείο να αναφέρουμε ότι η σχέση $\perp_{\boldsymbol{B}}^{\boldsymbol{\varepsilon}}$ είναι ομογενής δηλαδή εάν x $\perp_{\boldsymbol{B}}^{\boldsymbol{\varepsilon}}$ y $\triangleq$ αx $\perp_{\boldsymbol{B}}^{\boldsymbol{\varepsilon}}$ βy (για τυχαία α,β ∈ K).Έτσι, για ∀ λ ∈ K έχουμε(αποκλείοντας την περίπτωση όπου α=0) ότι:

$$\|\alpha x+\beta y\|^2 = |\alpha|^2 \left\|x+\lambda\frac{\beta}{\alpha}\right\|^2$$

$$\geq |\alpha|^2\left(\|x\|^2 - 2\varepsilon\|x\|\left\|\lambda\frac{\beta}{\alpha}\, y\right\|\right)$$

$$= \|\alpha x\|^2 - 2\varepsilon\|\alpha x\|\|\lambda\beta y\|.$$

Σ'αυτό το σημείο, ας τροποποιήσουμε λίγο τον ορισμό της B-J ορθογωνιότητας και στη θέση της ποσότητας $\sqrt{1-\varepsilon^2}$,βάζω τον όρο (1-ε). Προκύπτει λοιπόν,*ο ορισμός της προσεγγιστικής ορθογωνιότητας κατά Dragomir:*

$$x \perp_D^{\varepsilon} y \Leftrightarrow \forall \lambda \in K: \|x+\lambda y\| \geq (1-\varepsilon)\|x\| .$$

<u>Πρόταση 4.1.1</u>

Εάν ο διανυσματικός χώρος μου X είναι ένας χώρος εσωτερικού γινομένου,τότε για ένα αυθαίρετο $\varepsilon \in [0,1)$ *ισχύει ότι:*

$$x \perp^{\varepsilon} y \Leftrightarrow x \perp_{BJ}^{\varepsilon} y .$$

Θα παραλείψουμε,σε αυτό το σημείο,την απόδειξη της παραπάνω πρότασης μιας και ένα πιο γενικό αποτέλεσμα παρουσιάζεται παρακάτω (Θεώρημα 4.2.3).Μάλιστα,για ε=0 καταλήγουμε στο ακόλουθο γνωστό πόρισμα που αναφέρθηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο:

Σε χώρους εσωτερικού γινομένου,ισχύει ότι εάν $x \perp_B y \Leftrightarrow x \perp y$.

<u>Σχέση Dragomir και BJ-προσεγγιστικής νόρμας</u>

Για τις δύο προαναφερθείσες ορθογωνιότητες $\perp_{\boldsymbol{D}}^{\boldsymbol{\varepsilon}}$, $\perp_{\boldsymbol{BJ}}^{\boldsymbol{\delta}}$ ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\perp_D^{\varepsilon} \equiv \perp_{BJ}^{\delta}$$

όπου για τη σχέση των δύο ποσοτήτων ε,δ έχουμε:

$(1-\varepsilon) = \sqrt{1-\delta^2} \Leftrightarrow (1-\varepsilon)^2 = 1-\delta^2 \Leftrightarrow$

$$1-2\varepsilon+\varepsilon^2 = 1-\delta^2 \Leftrightarrow$$

$$\boldsymbol{\delta = \sqrt{(2-\varepsilon)\varepsilon}} \ \text{ ή αλλιώς } \ \boldsymbol{\varepsilon = 1-\sqrt{1-\delta^2}}\ .$$

Έτσι, *για χώρους εσωτερικου γινομένου έχουμε ότι* [48,51 − Πρόταση 1]:

$$\boldsymbol{x \perp_D^{\varepsilon} y \quad \Leftrightarrow \quad x \perp^{\varepsilon} y}$$

Μάλιστα, ο Szostok [48,55] λαμβάνοντας υπόψη μια γενίκευση της συνάρτησης του ημιτόνου , εισήγαγε για ένα πραγματικό διανυσματικό χώρο (X,‖·‖) την απεκόνιση:

$$S(x,y)=\begin{cases} inf_{\lambda\in\mathbb{R}} \dfrac{\|x+\lambda y\|}{\|x\|} & ,\text{για } \forall\, x \in X \setminus \{0\}\,. \\ 1, \quad \text{για } x = 0 & \end{cases}$$

Είναι εύκολο, να διαπιστώσει κάποιος πως εάν $x \perp_{BJ} y \Leftrightarrow s(x,y) = 1$. Είναι , επίσης , προφανές ότι $x \perp_D^{\varepsilon} y \Leftrightarrow s(x,y) \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}$.

ΣΧΕΣΗ $\perp_{\mathbf{D}}^{\boldsymbol{\varepsilon}}$, $\perp_{\mathbf{BJ}}^{\boldsymbol{\varepsilon}}$ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΤΗΤΩΝ

Τέλος ,συγκρίνοντας τις δύο προσεγγιστικές ορθογωνιότητες $\perp_{\boldsymbol{D}}^{\boldsymbol{\varepsilon}}$, $\perp_{\boldsymbol{BJ}}^{\boldsymbol{\varepsilon}}$, θα πρέπει να αναφέρουμε ότι σε χώρους εσωτερικού γινομένου και οι δύο είναι ισοδύναμες με την $\perp^{\varepsilon}$ $\perp_{BJ}^{\varepsilon} \equiv \perp^{\varepsilon}$. Το παραπάνω βέβαια δεν ισχύει,σε ένα αυθαίρετο διανυσματικό χώρο με νόρμα όπου οι σχέσεις $\perp_{BJ}^{\varepsilon} \subset \perp_D^{\varepsilon}$ και $\perp_D^{\varepsilon} \subset \perp_{BJ}^{\varepsilon}$ δεν υφίσταται.

4.2 Ορθογωνιότητα (προσεγγιστική) ημιεσωτερικού γινομένου

Σε αυτή την παράγραφο μελετάμε το ημιεσωτερικό γινόμενο και την προσεγγιστική ορθογωνιότητα που παράγεται μέσω αυτού. Κάθε,λοιπόν, απεικόνιση $[\cdot,\cdot]$ η οποία ικανοποιεί τις ιδιότητες (s1)-(s5) –οι οποίες παρουσιάζονται στο κεφάλαιο 3 – καλείται ημιεσωτερικό γινόμενο (s.i.p) σε ένα διανυσματικό χώρο με νόρμα. Θα πρέπει,αρχικά,να αναφέρουμε πως υπάρχουν απείρως πολλά διαφορετικά ημιεσωτερικά γινόμενα στον X. Έχουμε καταλήξει,στα ακόλουθα συμπεράσματα:

- *Υπάρχει ,μάλιστα,μοναδικό ημιεσωτερικό γινόμενο στον διανυσματικό μου χώρο αν και μόνο αν ο X είναι λείος(δηλαδή -όπως έχουμε αναφέρει σε προηγούμενο κεφάλαιο-η νόρμα του χώρου μας είναι Gâteaux-διαφορίσιμη ή πιο απλά δεν υπάρχουν γωνίες πάνω στη μοναδιαία σφαίρα S* [48,49,50] *).*
- *Εάν βέβαια,ο X είναι χώρος εσωτερικού γινομένου τότε το μοναδικό ημιεσωτερικό γινόμενο (s.i.p) του χώρου ταυτίζεται με το ίδιο το εσωτερικό γινόμενο* [26,48].
- *Το ημιεσωτερικό γινόμενο,επιπλέον,είναι μια συνεχής συνάρτηση αν και μόνο αν* $Re[y, x + \lambda y] \longrightarrow Re[y, x]$ *καθώς* $\mathbb{R} \ni \lambda \longrightarrow 0$ *για* $\forall\, x, y \in S$.
- *Η συνέχεια του ημιεσωτερικού γινομένου είναι ισοδύναμη με το αν ο διανυσματικός χώρος μου X είναι λείος* [48,50,52].*Μάλιστα, ένας άλλος τρόπος για να δείξουμε το παραπάνω είναι μέσω της σχέσης:*
  $\lim\limits_{\lambda \to 0} \frac{\|x+\lambda y\|-1}{\lambda} = Re[y, x]$, $x,y \in S$

Επεκτείνοντας, τις μέχρι τώρα σημειώσεις,ορίζουμε την ημι-ορθογωνιότητα και την προσεγγιστική ημι-ορθογωνιότητα(και οι 2 στηρίζονται στο ημιεσωτερικό γινόμενο):

ΚΑΘΕΤΟΤΗΤΑ ΒΑΣΕΙ ΗΜΙΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

$$x \perp_s y \Leftrightarrow [y, x] = 0.$$

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΗ ΚΑΘΕΤΟΤΗΤΑ ΒΑΣΕΙ ΗΜΙΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

$$x \perp_s^{\varepsilon} y \Leftrightarrow [y, x] \leq \varepsilon \|x\| \|y\|,$$

Για $x,y \in X$ και $0 \leq \varepsilon \leq 1$.

Προφανώς, **σε χώρους εσωτερικού γινομένου** ισχύει:

$$\perp_s = \perp \qquad \text{και} \qquad \perp_s^{\varepsilon} = \perp^{\varepsilon} .$$

Πρόταση 4.2.1

Για ∀ x,y ∈ X εάν $x \perp_s^{\varepsilon} \boldsymbol{y}$ τότε $x \perp_{\boldsymbol{D}}^{\varepsilon} y$ (δηλαδή $\perp_s^{\varepsilon} \subset \perp_{\boldsymbol{D}}^{\varepsilon}$) .

Απόδειξη Πρότασης 4.2.1

Υποθέτουμε ότι ισχύει πως $\boldsymbol{x} \perp_s^{\varepsilon} \boldsymbol{y}$ δηλαδή με βάση τον ορισμό έχουμε ότι $|[\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}]| \leq \boldsymbol{\varepsilon}\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$. Τότε για θ ∈ [0,1] και για συγκεκριμένο φ ∈ $[-\pi,\pi]$ έχουμε ότι:

$$[\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}] = \boldsymbol{\theta\varepsilon}\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|\boldsymbol{e^{i\varphi}} .$$

Έτσι,για τυχαίο λ ∈ K έχουμε ότι :

(s4 ιδιότητα ημιεσωτερικού γινομένου) ⇢ $\|x+\lambda y\|\|x\| \geq |[x+\lambda y, x]|$

$= |[x,x] + \lambda[y,x]|$

$= \left|\|x\|^2 + \theta\varepsilon\|x\|\|y\|\,\lambda\, e^{i\varphi}\right|$,

απ΄ όπου έχουμε ότι : $\|x+\lambda y\|\|x\| \geq \|x\|(\left|\|x\| + \theta\varepsilon\|y\|\,\lambda\, e^{i\varphi}\right|)$

$= \left|\|x\| + \theta\varepsilon\|y\|\,\lambda\, e^{i\varphi}\right|$

$=\left|\|x\| + \theta\varepsilon\|y\|\, Re\left(\lambda\, e^{i\varphi}\right) + i\theta\varepsilon\|y\| Im(\lambda\, e^{i\varphi})\right|$

$\updownarrow$

ο $\lambda\, e^{i\varphi}$ μιγαδικός αριθμός που όπως κάθε μιγαδικός γράφεται στη μορφή z =x +iy με x ≡ $Re(z)$ και y≡ $Im(z)$.

Έτσι,υψώνοντας εις το τετράγωνο την παραπάνω σχέση έχουμε:

$\|x+\lambda y\|^2 \geq (\|x\| + \theta\varepsilon\|y\|\, Re\left(\lambda\, e^{i\varphi}\right))^2 + (\theta\varepsilon\|y\| Im(\lambda\, e^{i\varphi}))^2$

$= \|x\|^2 + 2\theta\varepsilon\|y\|\|x\|\, Re\left(\lambda\, e^{i\varphi}\right) + \theta^2\varepsilon^2\|y\|^2 \left[Re\left(\lambda\, e^{i\varphi}\right)^2 + Im(\lambda\, e^{i\varphi})^2\right]$

$=\|x\|^2 + 2\theta\varepsilon\|y\|\|x\|\, Re\left(\lambda\, e^{i\varphi}\right) + \theta^2\varepsilon^2\|y\|^2|\lambda|^2 \left[Re\left(\lambda\, e^{i\varphi}\right)^2 + Im(\lambda\, e^{i\varphi})^2\right]$

↳*εφαρμόζουμε την ταυτότητα που ισχύει στο* $\mathbb{C}$ $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ *συνεπώς* $Re\left(e^{i\varphi}\right)^2 + Im(e^{i\varphi})^2 = 1$.

$=\|x\|^2 + 2\theta\varepsilon\|y\|\|x\|\, Re\left(\lambda\, e^{i\varphi}\right) + \theta^2\varepsilon^2\|\lambda y\|^2$

$\geq \|x\|^2 + 2\theta\varepsilon\|y\|\|x\| \, Re\big(\lambda \, e^{i\varphi}\big)$

↳ εφαρμόζουμε την ιδιότητα που ισχύει στο $\mathbb{C}$ $|Rez| \leq |z|$ και $|Imz| \leq |z|$.

$\geq \|x\|^2 + 2\theta\varepsilon\|y\|\|x\|(-|\lambda \, e^{i\varphi}|)$

$= \|x\|^2 - 2\theta\varepsilon\|\lambda y\|\|x\|$

$\geq \|x\|^2 - 2\varepsilon\|\lambda y\|\|x\|$.

■

<u>Πρόταση 4.2.2</u>

Εάν ο X είναι ένας συνεχής χώρος ημιεσωτερικού γινομένου (s.i.p) και ε ∈ $[0,1]$ *τότε* $x \perp_D^{\varepsilon} y \subset x \perp_s^{\varepsilon} y$.

<u>Απόδειξη Πρότασης 4.2.2</u>

Έστω ότι ισχύει $\boldsymbol{x \perp_D^{\varepsilon} y}$ **.** Λόγω της ομογένειας, των σχέσεων $\perp_{\boldsymbol{D}}^{\boldsymbol{\varepsilon}}$, $\perp_{\boldsymbol{s}}^{\boldsymbol{\varepsilon}}$ όπως είδαμε σε προηγούμενη ενότητα, μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι x, y ∈ S (δηλαδή $\|x\| = \|y\| = 1$). Έτσι,για αυθαίρετο λ ∈ K έχουμε:

$\|x + \lambda y\|^2 \geq \|x\|^2 - 2\varepsilon\|\lambda y\|\|x\| \implies$

$\|x + \lambda y\|^2 \geq 1 - 2\varepsilon|\lambda| \implies$

$0 \leq \|x + \lambda y\|^2 - 1 + 2\varepsilon|\lambda| = [x, x + \lambda y] + [\lambda y, x + \lambda y] - 1 + 2\varepsilon|\lambda|$.

Έτσι, $0 \leq Re[x, x + \lambda y] + Re[\lambda y, x + \lambda y] - 1 + 2^{\varepsilon}|\lambda|$

↳ *εφαρμόζουμε την ιδιότητα που ισχύει στο* $\mathbb{C}$ $|Rez| \leq |z|$.

$\leq |[x, x + \lambda y]| + Re[\lambda y, x + \lambda y] - 1 + 2\varepsilon|\lambda|$

$\leq \|x + \lambda y\|\|x\| + Re[\lambda y, x + \lambda y] - 1 + 2\varepsilon|\lambda|$. **(1)**

Από όπου,

$Re[\lambda y, x+\lambda y] + \|x+\lambda y\| - 1 \geq -2\varepsilon|\lambda|$, για όλα τα λ ∈ K .

Έστω, σε αυτό το σημείο, ότι $\lambda_o \in$ K \ {0} ,n ∈ ℕ και λ= $\frac{\lambda_o}{n}$. Τότε, από την παραπάνω σχέση (1) με αντικάτασταση έχουμε:

$$Re[\lambda y, x+\lambda y] + \|x+\lambda y\| - 1 \geq -2\varepsilon|\lambda| \Longrightarrow$$

$$Re\left[\frac{\lambda_o}{n} y, x+\frac{\lambda_o}{n} y\right] + \left\|x+\frac{\lambda_o}{n} y\right\| - 1 \geq -2\varepsilon \frac{|\lambda_o|}{n} \Longrightarrow$$

$$Re\left[\frac{\lambda_o}{|\lambda_o|} y, x+\frac{|\lambda_o|}{n}\frac{\lambda_o}{|\lambda_o|} y\right] + \frac{\left\|x+\frac{|\lambda_o|}{n}\frac{\lambda_o}{|\lambda_o|}y\right\|-1}{\frac{|\lambda_o|}{n}} \geq -2\varepsilon \ . \ (\mathbf{2})$$

Βάζοντας $y' := \frac{\lambda_o}{|\lambda_o|} y \in S$, $\xi_n := \frac{|\lambda_o|}{n} \in \mathbb{R}$ ($\xi_n \longrightarrow 0$ καθώς $n \longrightarrow \infty$) στην παραπάνω ανισότητα (2),προκύπτει:

$$Re[y', x+\ \xi_n\ y'\ ] + \frac{\|x+\ \xi_n y\|-1}{\xi_n} \geq\ -2\,\varepsilon\,. \qquad \mathbf{(3)}$$

Όταν $n \longrightarrow \infty$ και $\xi_n \longrightarrow 0$ και *δεδομένου ότι ο χώρος ημιεσωτερικού γινομένου είναι συνεχής* (οι σχέσεις που ισχύουν σε αυτή τη περίπτωση αναφέρθηκαν παραπάνω), η (3) γίνεται:

$$Re[y', x] + Re[y', x]\ \geq\ -2\varepsilon\ . \qquad \mathbf{(4)}$$

Με αντικατάσταση,στην (4) έχουμε:

$$Re\left[\frac{\lambda_o}{|\lambda_o|} y, x\right] + Re\left[\frac{\lambda_o}{|\lambda_o|} y, x\right] \geq\ -2\varepsilon \quad \Longrightarrow$$

$$2Re\left[\frac{\lambda_o}{|\lambda_o|} y, x\right] \geq\ -2\varepsilon \ \Longrightarrow$$

$$\frac{2}{|\lambda_o|} Re[\lambda_o y, x] \geq\ -2\varepsilon \quad \Longrightarrow$$

$$Re[\lambda_o y, x] \geq -\,\varepsilon|\lambda_o|\ . \ (5)$$

Σ'αυτό το σημείο,θέτοντας όπου λ_o , το $-\lambda_o$ παίρνουμε ότι:

$Re[\lambda_o y, x] \leq \varepsilon|\lambda_o| \Longrightarrow$ όπου

$|Re[\lambda_o y, x]| \leq \varepsilon|\lambda_o|$ που ισχύει για αυθαίρετο $\lambda_o \in$ K . **(6)**

Βάζοντας λοιπόν, όπου $\lambda_o = \overline{[y,x]}$ στη σχέση (6) παίρνουμε :

$$\left|Re\left[\overline{[y,x]}y,x\right]\right| \leq \varepsilon|[y,x]| \quad . \tag{7}$$

Από τις ιδιότητες μιγαδικών,γνωρίζουμε ότι, $z=\bar{z}$ και $z\,\bar{z}=|z|^2$ η (7) παίρνει την παρακάτω μορφή:

$|[y,x]|^2 \leq \varepsilon|[y,x]|$,

Και αφού $\|x\| = \|y\| = 1$ τελικά προκύπτει το ζητούμενο $|[y,x]| \leq \varepsilon$.

■

Θεώρημα 4.2.3

Εάν ο X είναι ένας συνεχής χώρος ημιεσωτερικού γινομένου , τότε:

$$\perp_D^{\varepsilon} = \perp_s^{\varepsilon} \quad .$$

Επιπλέον, για ε =0 , έχουμε [48,52]:

Πόρισμα 4.2.4

Εάν ο X είναι ένας συνεχής χώρος ημιεσωτερικού γινομένου , τότε

$$\perp_D = \perp_s .$$

4.3 Παρατηρήσεις

Παρατήρηση 4.3.1 [48, 51]

Έστω (X,‖·‖) και $[\cdot,\cdot] : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ το ημιεσωτερικό γινόμενο που ορίζει τη νόρμα. Το ημιεσωτερικό γινόμενο είναι τύπου - (APP) αν υπάρχει μια απεικόνιση $\eta : [0,1) \longrightarrow [0,1)$ τέτοια ώστε το η(ε)=0 $\Leftrightarrow \varepsilon = 0$ και εάν $x \perp_{BJ}^{\eta(\varepsilon)} y \Longrightarrow x \perp_s^{\varepsilon} y$ για όλα $\varepsilon \in [0,1)$. Επίσης,ως επακόλουθο της πρότασης 4.2.1 , προκύπτει επίσης ότι:

$$x \perp_{BJ}^{\eta(\varepsilon)} y \Longrightarrow x \perp_D^{\varepsilon} y \quad \text{για όλα τα } \varepsilon \in [0,1) . \tag{8}$$

Συνεπώς [48,51], για ένα κλειστό, κατάλληλο γραμμικό υπόχωρο G ενός (X,‖·‖) και για ένα αυθαίρετο $\varepsilon \in (0,1)$ το παρακάτω σύνολο είναι μη μηδενικό:

$$G^{\perp_D^\varepsilon} := \{y \in X \mid y \perp_D^\varepsilon x \quad \forall x \in X\} . \tag{9}$$

Με βάση τις παραπάνω σχέσεις (8),(9) προκύπτει ότι:

$$G^{\perp_{BJ}^\varepsilon} \subset G^{\perp_D^{\eta(\varepsilon)}} . \tag{10}$$

Όπου το σύνολο $G^{\perp_{BJ}^\varepsilon} := \{y \in X \mid y \perp_{BJ}^\varepsilon x \quad \forall x \in X\}$ αντίστοιχα.

Έτσι έχουμε το επόμενο Λήμμα:

Λήμμα 4.3.2

Έστω $(X,\|\cdot\|)$ διανυσματικός χώρος με νόρμα με ημιεσωτερικό γινόμενο $[\cdot,\cdot]$ τύπου - (APP) τότε για ένα αυθαίρετο και κλειστό,γραμμικό υπόχωρο G και για ένα αυθαίρετο ε $\in [0,1)$ το σύνολο $\boldsymbol{G^{\perp_{BJ}^\varepsilon}}$ όλων των διανυσμάτων,που είναι προσεγγιστικά ορθογώνια κατά Birkhoff – James, είναι μη μηδενικό.

Θεώρημα 4.3.3

Εάν $(X,\|\cdot\|)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος με νόρμα με ημιεσωτερικό γινόμενο $[\cdot,\cdot]$ τύπου - (APP) τότε για ένα αυθαίρετο,κλειστό,γραμμικό υπόχωρο G και ένα αυθαίρετο ε $\in [0,1)$ η παρακάτω σχέση ισχύει:

$$X = G + G^{\perp_{BJ}^\varepsilon} .$$

Απόδειξη Θεωρήματος 4.3.3

Ορίζουμε το σύνολο G και έστω ε $\in [0,1)$. Προκύπτει από [48,51] ότι :

$$X = G + G^{\perp_D^{\eta(\varepsilon)}} .$$

Χρησιμοποιώντας, τη σχέση (9) που βλέπουμε παραπάνω προκύπτει το ζητούμενο.

■

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Σύνολα Birkhoff-James ε-ορθογωνιότητας σε διανυσματικούς χώρους με νόρμα

Αρχικά , θεωρήστε ένα διανυσματικό χώρο με νόρμα (X,$\|\cdot\|$) και έστω χ ,ψ ∈ X με ψ$\neq 0$. Με βάση μια πρόσφατη μελέτη των *Χωριανόπουλος και Ψαρράκος (2011)* στους ορθογώνιους πίνακες, σε αυτό το κεφάλαιο, εισάγουμε το σύνολο των στοιχείων x της Birkhoff-James ε-ορθογωνιότητας σε σχέση με το ψ,ανακαλύπτοντας την πλούσια δομή του.

5.1 Εισαγωγή

Το αριθμητικό πεδίο (γνωστό και ως πεδίο τιμών) ενός τετραγωνικού σύνθετου πίνακα A ∈ $\mathbb{C}^{n\times n}$ ορίζεται ως *F(A)* = $\{x^* A\, x \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\}$ [56,59] . Το πεδίο αυτό είναι ένα μη κενό ,συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$, το οποίο έχει μελετηθεί εκτενώς και είναι ιδιαίτερα χρήσιμο στην κατανόηση των πινάκων και διανυσμάτων $[αναλυτικά\, βλ. 56,57,60,59]$.Το αριθμητικό πεδίο *F(A)* **,**γράφεται επίσης στη μορφή ([56,57,60]) *F(A)* = $\{\mu \in \mathbb{C}: \|A-\lambda I_n\|_2 \geq |\mu-\lambda|, \forall\, \lambda \in \mathbb{C}\}$ όπου $\|\cdot\|_2$ δηλώνει τη φασματική νόρμα πίνακα (η οποία επάγεται από την Ευκλείδια νόρμα διανυσμάτων) και I_n είναι ο $n \times n$ μοναδιαίος πίνακας.Συνεπώς, το *F(A)* είναι η άπειρη διατομή κυκλικών δίσκων $D(\lambda, \|A-\lambda I_n\|_2) = \{\mu \in \mathbb{C}: \|A-\lambda I_n\|_2 \geq |\mu-\lambda|, \forall\, \lambda \in \mathbb{C}\}$ και έτσι ονομαστικά έχουμε ότι:

$$F(A) = \bigcap_{\lambda\in\mathbb{C}} \{\mu \in \mathbb{C}: \|A-\lambda I_n\|_2 \geq |\mu-\lambda|, \forall\, \lambda \in \mathbb{C}\} = \cap_{\lambda\in\mathbb{C}} D(\lambda, \|A-\lambda I_n\|_2).\ (1)$$

Με βάση τη σχέση (1) και τους ορισμούς της BJ, BJ-προσεγγιστικής και της ε-ορθογωνιότητας οι Χωριανόπουλος και Ψαρράκος [56,58] πρότειναν τον παρακάτω ορισμό για ορθογώνιους πίνακες.Πιο συγκεκριμένα:

Για κάθε $A,B \in \mathbb{C}^{n\times m}$ με $B \neq 0$,για οποιαδήποτε νόρμα πίνακα $\|\cdot\|$ και $\forall\, \varepsilon \in [0,1)$ ορίζουμε το σύνολο της BJ- προσεγγιστικής ορθογωνιότητας του πίνακα A ως προς τον πίνακα , ως εξής:

$$F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(A,B) = \left\{\mu \in \mathbb{C} : B \perp^{\varepsilon}_{BJ} (A-\mu B)\right\}$$

$$\overset{\text{def}}{=} \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \|A-\lambda B\| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|B\|\,|\mu-\lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C}\right\}$$

$$= \bigcap_{\lambda\in\mathbb{C}} \boldsymbol{D}\left(\boldsymbol{\lambda}, \frac{\|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda B}\|}{\sqrt{\boldsymbol{1}-\boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{2}}}\,\|\boldsymbol{B}\|}\right). \tag{2}$$

Το παραπάνω σύνολο της BJ- προσεγγιστικής ορθογωνιότητας του πίνακα A ως προς το B αποτελεί γενίκευση του αριθμητικού πεδίου *F(A)* .Έτσι , εάν n=m (τετραγωνικός πίνακας) , $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$,$B=I_n$ και ε=0 έχουμε $F^{0}_{\|\cdot\|_2}(A\,;I_n) = F(A)$.Επιπλέον , αξίζει να σημειωθεί πως το σύνολο $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(A;B)$ είναι ένα μη κενό, συμπαγές(δηλαδή κλειστό και φραγμένο) και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ που έγκειται στον κλειστό δίσκο $D\left(0,\frac{\|A\|}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|B\|}\right)$ και έχει σημαντικές γεωμετρικές ιδιότητες [58,59] .

Σ'αυτό λοιπόν το κεφάλαιο , υιοθετούμε τεχνικές και ιδέες από το [58] για να εισάγουμε και να μελετήσουμε τα σύνολα στοιχείων της BJ-προσεγγιστικής ορθογωνιότητας σε ένα διανυσματικό χώρο .Έτσι, στην επόμενη ενότητα ,δίνουμε τον ορισμό του παραπάνω συνόλου και επαληθεύουμε ότι είναι πάντα μη κενό. Στην ενότητα 3 , βρίσκουμε το μέγεθος του συγκεκριμένου συνόλου ενώ στην ενότητα 4 εξάγουμε χαρακτηρισμούς για το εσωτερικό και το σύνορο του.Τελικά,στην ενότητα 5, περιγράφουμε το σύνολο της BJ-προσεγγιστικής ορθογωνιότητας όταν η νόρμα εισάγεται από ένα εσωτερικό γινόμενο.

5.2 Ορισμός

Έστω ένας διανυσματικός χώρος με νόρμα ($X,\|\cdot\|$) και έστω $x,\psi \in X$ με $\psi \neq 0$. Για οποιοδήποτε $\varepsilon \in [0,1)$, *το σύνολο της BJ- προσεγγιστικής ορθογωνιότητας του x ως προς το ψ* ορίζεται ως:

$$F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(x;\psi) = \left\{\mu \in \mathbb{C} : \psi \perp^{\varepsilon}_{BJ} (x-\mu\psi)\right\}. \tag{3}$$

Είναι άμεσο ότι :

$$\boldsymbol{F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(x;\psi)} = \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \ \|\psi - \lambda(x - \mu\psi)\| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|, \forall\, \lambda \in \mathbb{C} \right\}$$

$$= \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \ \left\|\psi - \frac{1}{\lambda}(x - \mu\psi)\right\| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\,, \forall\, \lambda \in \mathbb{C} \ \setminus \{0\} \right\}$$

$$= \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \frac{1}{|\lambda|}\ \|\lambda\psi - (x - \mu\psi)\| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\,, \forall\, \lambda \in \mathbb{C} \ \setminus \{0\} \right\}$$

$$= \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \ \|x - (\mu - \lambda)\psi)\| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\ |\lambda|, \forall\, \lambda \in \mathbb{C} \ \setminus \{0\} \right\}$$

$$= \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \ \|x - \lambda\psi\| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\ |\mu - \lambda|, \forall\, \lambda \in \mathbb{C} \right\} \qquad \textbf{(4)}$$

$$= \bigcap_{\lambda\in\mathbb{C}} D\left(\lambda, \frac{\|x-\lambda\psi\|}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\ \|\psi\|}\right). \qquad \textbf{(5)}$$

Η παραπάνω μορφή (5) υπονοεί ότι το σύνολο $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(x;\psi)$ είναι ένα συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$,το οποίο έγκειται στον κλειστό δίσκο $D\left(0, \frac{\|x\|}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\ \|\psi\|}\right)$.Επιπλέον ,είναι προφανές ότι για οποιοδήποτε $0 \leq \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < 1$ ισχύει ότι:

$$F^{\varepsilon_1}_{\|\cdot\|}(x;\psi) \subseteq F^{\varepsilon_2}_{\|\cdot\|}(x;\psi) \ .$$

Από το Πόρισμα 2.2 [12,59] ,συμπεραίνουμε πως το σύνολο $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(x,\psi)$ είναι μη κενό .Για μεγαλύτερη μάλιστα σαφήνεια , παρακάτω δίνεται μια μικρή απόδειξη υιοθετώντας επιχειρήματα από τις αποδείξεις των Θεωρημάτων 2.1 , 2.2 και Πόρισμα 2.2 [12,59] .

<u>Θεώρημα 5.2.1</u>

Για οποιοδήποτε x,ψ ∈ X με ψ ≠ 0 και οποιοδήποτε ε ∈ [0, 1) , το σύνολο της BJ ε-ορθογωνιότητας $\boldsymbol{F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}}$ ***(x;ψ)*** *είναι μη κενό.*

<u>Απόδειξη</u>

Με βάση τη διαπίστωση ότι για $0\leq\ \varepsilon_1\ <\varepsilon_2<1$ ισχύει ότι $F^{\varepsilon_1}_{\|\cdot\|}(x;\psi)\ \subseteq\ F^{\varepsilon_2}_{\|\cdot\|}(x;\psi)$ για να δείξω ότι το το σύνολο $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(x;\psi)$ είναι μη κενό ,θεωρούμε τα εξής:

Αφού γνωρίζουμε ότι $0\leq\varepsilon\ <1$ τότε θα ισχύει ότι $F^{0}_{\|\cdot\|}(x;\psi)\ \subseteq\ F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(x;\psi)$, $\forall\ \varepsilon\ \in[0,1)$.Έτσι , αρκεί να δείξω ότι το σύνολο $F^{0}_{\|\cdot\|}(x;\psi)\ \neq\emptyset$.Με βάση το θεώρημα Hahn-Banach ,επιβεβαιώνεται ότι για οποιοδήποτε ψ $\neq 0$ με ψ∈ X ,υπάρχει ένα γραμμικό συναρτησοειδές T ∈ $\mathbb{C}^*$ δηλαδή T : X ⟶ $\mathbb{C}$ τέτοιο ώστε T(ψ) = $\|T\|\ \|\psi\|$. Συνεπώς ,

$$\|T\|\ \|\psi\|=|\ T(\psi)\ |=T(x+\psi)\leq\|T\|\ \|x+\psi\|\ ,\qquad\forall\ x\ \in \mathrm{Ker}\ (T).$$

Έτσι, $\|\psi\|\leq\|x+\psi\|$ και απ' αυτό συμπεραίνουμε ότι (με βάση τον ορισμό):

$$\psi\perp_{BJ}\mathrm{X}\ ,\qquad\forall\ x\ \in\mathrm{Ker}\ (\ \mathrm{T}\ )\ .\qquad\textbf{(6)}$$

Για τη βαθμωτή ποσότητα $\mu=\frac{T(x)}{\|T\|\|x\|}$, έχουμε ότι:

$$\mathrm{T}(\mathrm{x}-\mu\psi)=\mathrm{T}(\mathrm{x})-\mathrm{T}(\mu\psi)=\mathrm{T}(\mathrm{x})-\mu\,\mathrm{T}(\psi)=\mathrm{T}(\mathrm{x})-\frac{\mathrm{T}(\mathrm{x})}{\|\mathrm{T}\|\|\mathrm{x}\|}\mathrm{T}(\psi)=0\ .$$

Συνεπώς , *T(x - μψ) =0* δηλαδή **x**-μψ ∈ Ker (T) **.**

Έτσι , από την (6) , ψ $\perp_{BJ}$ x - μψ και από εδώ καταλήγουμε ότι, μ ∈ $F^{0}_{\|\cdot\|}(x\ ;\ \psi)$ δηλαδή προέκυψε το ζητούμενο μας.

■

Παρακάτω , παρουσιάζονται κάποιες βασικές ιδιότητες του συνόλου της Birkhoff –James ε-καθετότητας.

Πρόταση 5.2.2

Έστω $x,\psi \in X$ με $\psi \neq 0$, και έστω $\varepsilon \in [0,1)$.Τότε ,για οποιοδήποτε $b \neq 0$,με $b \in \mathbb{C}$, ισχύει ότι:

$$F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(x\,;b\psi) = \frac{1}{b}F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(x\,;\psi)\,.$$

Απόδειξη

Από τον τύπο (3) που παρουσιάζεται παραπάνω, αναφορικά με το συνόλο της BJ ε-ορθογωνιότητας $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(x;\psi)$ σε ένα χώρο με νόρμα $(X,\|\cdot\|)$ και την ομογένεια της BJ ε-ορθογωνιότητας ($x\perp^{\varepsilon}_{BJ}\psi \Rightarrow \alpha x \perp^{\varepsilon}_{BJ} \beta\psi \;\forall\, \alpha,\beta \in \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$) , είναι άμεσο ότι $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(x\,;b\psi) =\{\mu \in \mathbb{C} : \psi \perp^{\varepsilon}_{BJ} (x-(\mu b)\psi)\}$.

■

Πρόταση 5.2.3

Έστω x,ψ δύο μη μηδενικά στοιχεία του X .Τότε για οποιοδήποτε $\varepsilon \in [0,1)$,

$$\left\{\mu^{-1} \in \mathbb{C} : \mu \in F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(x;\psi), |\mu| \geq \frac{\|x\|}{\|\psi\|}\right\} \subseteq F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\psi;x)\ .$$

Απόδειξη

Θεωρούμε ένα $\mu \in F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(x;\psi)$ με $|\mu| \geq \frac{\|x\|}{\|\psi\|}$. Τότε από τη σχέση (4) γνωρίζουμε ότι:

$$F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(x;\psi) = \left\{ \mu \in \mathbb{C} :\ \|x-\lambda\psi\| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\,|\mu-\lambda|, \forall\, \lambda \in \mathbb{C} \right\}.$$

Βγάζοντας την ποσότητα λ κοινό παράγοντα έχουμε:

$$= \left\{ \mu \in \mathbb{C} :\ |\lambda| \left\|\psi - \frac{1}{\lambda}x\right\| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\,|\lambda| \left|\frac{\mu}{\lambda}-1\right|, \forall\, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right\}$$

ή

$$= \|\psi - \lambda x\| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\,|\mu| \left|\frac{1}{\mu}-\lambda\right| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\frac{\|x\|}{\|\psi\|}\left|\frac{1}{\mu}-\lambda\right|, \forall\, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow \qquad \|\psi - \lambda x\| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|x\| \left|\frac{1}{\mu}-\lambda\right| , \forall\, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{C}\,.$$

Με βάση την παραπάνω σχέση και προφανώς τη σχέση (4) συμπεραίνουμε ότι η ποσότητα μ^{-1} έγκειται στο σύνολο $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(x;\psi)$ και το ζητούμενο αποδείχθηκε.

■

<u>Πρόταση 5.2.4</u>

Έστω ότι $\|\cdot\|_\alpha$ και $\|\cdot\|_b$ ότι είναι δύο ισοδύναμες νόρμες στον χώρο X , και υποθέτουμε ότι ισχύει ότι για 2 πραγματικούς αριθμούς C ,$c > 0$, $c\,\|\zeta\|_\alpha \leq \|\zeta\|_b \leq C\,\|\zeta\|_\alpha$, $\forall\, \zeta \in X$.Τότε , για $\forall$ x, $\psi \in X$ με $\psi \neq 0$ και οποιοδήποτε $\varepsilon \in [0,1)$ ισχύει ότι :

$$F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|_\alpha}(x;\psi) \subseteq F^{\varepsilon'}_{\|\cdot\|_b}(x;\psi),$$

όπου $\varepsilon' = \sqrt{1-\frac{c^2(1-\varepsilon^2)}{C^2}}$.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω ότι μ ∈ $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|_\alpha}(x;\psi)$. Έτσι , ακολουθεί με βάση τον ορισμό ότι:

$$\|x-\lambda\psi\|_\alpha \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|_\alpha|\mu-\lambda|\ ,\forall\,\lambda \in \mathbb{C}\ .$$

ή

$$\|x-\lambda\psi\|_b \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\frac{c}{C}\,\|\psi\|_b|\mu-\lambda|\ ,\forall\,\lambda \in \mathbb{C}\,.$$

ή

$$\|x-\lambda\psi\|_b \geq \sqrt{1-\varepsilon^2\left(\frac{c}{C}\right)^2} = \sqrt{\frac{(1-\varepsilon^2)\,c^2}{C^2}} = \sqrt{1-\left(\sqrt{1-\frac{c^2(1-\varepsilon^2)}{C^2}}\right)^2}\ .$$

Τελικά ,

$$\|x-\lambda\psi\|_b \geq \sqrt{1-\left(\sqrt{1-\frac{c^2(1-\varepsilon^2)}{C^2}}\right)^2}\ \|\psi\|_b|\mu-\lambda|\ ,\forall\,\lambda \in \mathbb{C}\,.$$

Οπότε προκύπτει και το σύνολο $F^{\varepsilon'}_{\|\cdot\|_b}(x;\psi)$, ∀ x , ψ ∈ X και το ζητούμενο προέκυψε .

■

5.3 Μέγεθος συνόλου $F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon}(x;\psi)$

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω , για $0 \leq \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < 1$ και για δύο οποιαδήποτε στοιχεία x ,ψ ενός διανυσματικού χώρου X με $\psi \neq 0$ ισχύει ότι $F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon_1}(x;\psi) \subseteq F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon_2}(x;\psi)$.

<u>Θεώρημα 5.3.1</u>

Έστω x ,ψ ∈ X με $\psi \neq 0$ και έστω ότι το x δεν είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του ψ.Τότε , για οποιοδήποτε $0 \leq \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < 1$, το $F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon_1}(x;\psi)$ έγκειται στο εσωτερικό του $F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon_2}(x;\psi)$.

<u>Απόδειξη</u>

Αρκεί να αποδείξω ότι για ∀ μ ∈ $F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon_1}(x;\psi)$ υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός $\rho_\mu > 0$ τέτοιος ώστε ο δίσκος $D(\mu, \rho_\mu)$ να έγκειται στο εσωτερικό του συνόλου $F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon_2}(x;\psi)$. Από τον ορισμό , για το σύνολο της BJ ε- ορθογωνιότητας $F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon}(x;\psi)$ για κάθε μ ∈ $F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon_1}(x;\psi)$ ισχύει ότι:

$$\|x - \lambda\psi\| \geq \sqrt{1-\varepsilon_1^2}\,\|\psi\||\mu - \lambda| \,,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{C}\,.$$

ή ισοδύναμα (προσθαφαιρώντας την ποσότητα μψ):

$$\|x - \mu\psi + (\mu-\lambda)\psi\| \geq \sqrt{1-\varepsilon_1^2}\,\|\psi\||\mu - \lambda| \,,\ \ \forall\, \lambda \in \mathbb{C}$$

Συνεπώς,

$$\|x - \mu\psi + \lambda\psi\| \geq \sqrt{1-\varepsilon_1^2}\,\|\psi\||\lambda| \geq \sqrt{1-\varepsilon_2^2}\|\psi\||\lambda| \ ,\ \ \forall\, \lambda \in \mathbb{C}$$

Έτσι,για κάθε μιγαδικό αριθμό $\lambda \neq 0$,

$$\|x - \mu\psi + \lambda\psi\| - \sqrt{1-\varepsilon_2^2}\|\psi\||\lambda| \geq \left(\sqrt{1-\varepsilon_1^2} - \sqrt{1-\varepsilon_2^2}\right)\|\psi\||\lambda| \,, \forall\, \lambda \in \mathbb{C}\,.$$

Από τη στιγμή λοιπόν , όπου το x δεν είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του ψ ,αυτό σημαίνει ότι η ποσότητα $\|x - \mu\psi + \lambda\psi\| > 0$ και κατ'επέκταση η συνεχής συνάρτηση (λόγω συνέχειας νόρμας) $f(\lambda) = \|x - \mu\psi + \lambda\psi\| - \sqrt{1-\varepsilon_2^2}\|\psi\||\lambda|$ παίρνει μόνο θετικές τιμές στο δίσκο D(0,1) .

Έτσι,

$$\inf f(\lambda)_{\lambda \in D(0,1)} = \min\ f(\lambda)_{\lambda \in D(0,1)} > 0\,.$$

Αυτό σημαίνει πως μπορούμε να θεωρήσουμε ένα πραγματικό αριθμό δ > 0 ,τέτοιος ώστε να ισχύει:

$$\delta \leq \min\left\{\min f(\lambda)_{\lambda \in D(0,1)}, \left(\sqrt{1-\varepsilon_1^2} - \sqrt{1-\varepsilon_2^2}\right)\|\psi\|\right\}.$$

Άρα, για $\forall\ \lambda \in \mathbb{C}$ με $|\lambda| > 1$ έχουμε ότι:

$$\|x - \mu\psi + \lambda\psi\| - \sqrt{1-\varepsilon_2^2}\|\psi\||\lambda| \geq \left(\sqrt{1-\varepsilon_1^2} - \sqrt{1-\varepsilon_2^2}\right)\|\psi\| \geq \delta .$$

Και έτσι από την ακριβώς πάνω σχέση αφού $\boldsymbol{f(\lambda) \geq \delta}$ δηλαδή ,

$$\|x - \mu\psi + \lambda\psi\| - \sqrt{1-\varepsilon_2^2}\|\psi\||\lambda| \geq \delta .$$

Άρα και για το <u>ανώτερο κάτω φράγμα της (infimum) ισχύει:</u>

$$inf_{\lambda \in \mathbb{C}}\left\{\|x - \mu\psi + \lambda\psi\| - \sqrt{1-\varepsilon_2^2}\|\psi\||\lambda|\right\} \geq \delta .$$

Ως συνέπεια , $\forall$ *ικανώς μικρό* $\xi \in D\left(0, \frac{\delta}{\|\psi\|}\right)$ προκύπτει ότι ,

$$\|x - (\mu+\xi)\psi + \lambda\psi\| \geq \|x - \mu\psi + \lambda\psi\| - \|\xi\psi\| \geq \|x - \mu\psi + \lambda\psi\| - \delta \geq \sqrt{1-\varepsilon_2^2}\|\psi\||\lambda| ,\ \forall\ \lambda \in \mathbb{C} .$$

Απ'εδώ λοιπόν ,συμπεραίνουμε ότι ο δίσκος $D\left(0, \frac{\boldsymbol{\delta}}{\|\boldsymbol{\psi}\|}\right) \subseteq F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon_2}(x;\psi)$ και το ζητούμενο αποδείχθηκε.

■

<u>Πόρισμα 5.3.2</u>

Έστω x ,ψ ∈ X με $\psi \neq 0$ *και έστω ότι το x δεν είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του ψ. Τότε για οποιοδήποτε ε* $\in (0,1)$ *, το σύνολο* $\boldsymbol{F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon}(x;\psi)}$ *έχει μη κενό εσωτερικό.*

<u>Πρόταση 5.3.3</u>

Έστω x ,ψ ∈ X με $\psi \neq 0$ *.Τότε , το x είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του ψ δηλαδή x=αψ, για κάποια α ∈* $\mathbb{C}$ αν και μόνο αν $F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon}(x;\psi) = \{\alpha\}$ για κάθε ε ∈ $[0,1)$.

Απόδειξη

Αρχικά , θα αποδείξουμε την μία κατεύθυνση “⟹”

Εάν το x =αψ για κάποιο α ∈ ℂ τότε με βάση τον ορισμό του συνόλου $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(x;\psi)$ ισχύει ότι:

$$F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(x;\psi) = F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\alpha\psi;\psi) = \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \|\alpha\psi - \lambda\psi\| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\,|\mu-\lambda|, \forall\, \lambda \in \mathbb{C} \right\}.$$

$$= \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \|(\alpha-\lambda)\psi\| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\,|\mu-\lambda|, \forall\, \lambda \in \mathbb{C} \right\}$$

$$= \left\{ \mu \in \mathbb{C} : |\alpha-\lambda|\,\|\psi\| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\,|\mu-\lambda|, \forall\, \lambda \in \mathbb{C} \right\}$$

$$= \left\{ \mu \in \mathbb{C} : |\alpha-\lambda| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\,|\mu-\lambda|, \forall\, \lambda \in \mathbb{C} \right\}.$$

Είναι προφανές ότι α ∈ $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\alpha\psi;\psi)$. Αρκεί λοιπόν, να εξασφαλίσω ότι μέσα σε αυτό το σύνολο δεν έχω άλλο στοιχείο , δηλαδή το $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(x;\psi)$ είναι το μονοσύνολο .Έστω λοιπόν ,ότι μέσα στο σύνολο υπάρχει κάποιος άλλος μιγαδικός μ $\neq \alpha$ και έστω ότι λ=α , με αντικατάσταση στον παραπάνω τύπο έχουμε ότι (με αντικατάσταση):

$$|\alpha-\alpha| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\,|\mu-\alpha|.$$

Επειδή λοιπόν, $0 < \sqrt{1-\varepsilon^2}\,|\mu-\alpha|$ συμπεραίνουμε ότι μ $\notin F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\alpha\psi;\psi)$.

Για το αντίστροφο “ ⟸ ” ,

Έστω ότι $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(x;\psi)$ ={α} για ένα συγκεκριμένο ε ∈ [0,1) .Τότε , από το Πόρισμα 5.3.2 , που έχουμε παραπάνω το x είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του ψ δηλαδή υπάρχει b ∈ ℂ ,τέτοιο ώστε x = bψ.

Συνεπώς έχουμε ότι:

$$|\alpha-\lambda| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\,|b-\lambda|, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C}$$

Οπότε , εάν λ=α τότε $|\alpha-\alpha| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\,|b-a| \Rightarrow 0 \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\,|b-a|$.

δηλαδή $|b-a|$ =0 $\Longrightarrow b = a$, άρα ο μοναδικός μιγαδικός που περιέχεται στο σύνολο μου είναι ο α και το ζητούμενο προέκυψε. ∎

Αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι, από την προηγούμενη πρόταση , είναι σαφές ότι εάν $F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon}(x;\psi)$ $=\{\alpha\}$ για οποιοδήποτε ε ∈ $(0,1)$,τότε εάν x = αψ προκύπτει ότι $F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon}(x;\psi)=\{\alpha\}$, για όλα τα ε ∈ $[0,1)$.

<u>Πρόταση 5.3.4</u>

Έστω x ,ψ ∈ X με $\psi \neq 0$ και έστω ε ∈ $[0,1)$. Τότε για $\forall\ \alpha , b\ \in\ \mathbb{C}$:

$$F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon}(ax+b\psi;\psi)=\alpha F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon}(x;\psi)+b\,.$$

<u>Απόδειξη</u>

- Εάν α=0 (τότε από την προηγούμενη Πρόταση 5.3.3) ,συμπεραίνουμε ότι $F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon}(\alpha x;\psi)=\{0\}=0\,F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon}(\psi;\psi)$.
- Εάν $\alpha \neq 0$, τότε αναλύοντας τη σχέση που θέλουμε να αποδείξουμε έχουμε:

$$\begin{aligned}
F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon}(\alpha x;\psi) &= \left\{\mu\ \in \mathbb{C}:\ \|\alpha x-\lambda\psi\| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\,|\mu-\lambda|, \forall\,\lambda \in \mathbb{C}\right\}\\
&=\left\{\mu\ \in \mathbb{C}:\ \left\|\alpha\left(x-\frac{\lambda}{\alpha}\psi\right)\right\| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\,|\mu-\lambda|, \forall\,\lambda \in \mathbb{C}\right\}\\
&=\left\{\mu\ \in \mathbb{C}:\ |\alpha|\left\|x-\frac{\lambda}{\alpha}\psi\right\| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\,|\mu-\lambda|, \forall\,\lambda \in \mathbb{C}\right\}\\
&=\left\{\mu\ \in \mathbb{C}:\ \left\|x-\frac{\lambda}{\alpha}\psi\right\| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\left|\frac{1}{\alpha}\right|\,|\mu-\lambda|, \forall\,\lambda \in \mathbb{C}\right\}\\
&=\left\{\mu\ \in \mathbb{C}:\ \left\|x-\frac{\lambda}{\alpha}\psi\right\| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\left|\frac{\mu}{\alpha}-\frac{\lambda}{\alpha}\right|, \forall\,\lambda \in \mathbb{C}\right\}\\
&=\left\{\mu\ \in \mathbb{C}:\ \|x-\lambda\psi\| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\left|\frac{\mu}{\alpha}-\lambda\right|, \forall\,\lambda \in \mathbb{C}\right\}\\
&= \alpha F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon}(x;\psi)\,.
\end{aligned}$$

Επιπλέον ,για $\forall\ \alpha, b\ \in\ \mathbb{C}$ προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon}(ax+b\psi;\psi) &= \left\{\mu\ \in \mathbb{C}:\ \|(\alpha x+b\psi)-\lambda\psi\| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\,|\mu-\lambda|, \forall\,\lambda \in \mathbb{C}\right\}\\
&= \left\{\mu\ \in \mathbb{C}:\ \|\alpha x+(b-\lambda)\psi\| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\,|\mu-\lambda|, \forall\,\lambda \in \mathbb{C}\right\}\\
&=
\end{aligned}$$

↳ (αφαιρώ την ποσότητα bψ και από τα 2 μέλη)

$$= \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \|\alpha x - \lambda\psi\| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\|\psi\| \, |(\mu - b) - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \right\}$$

$$= \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \mu - b \in F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon}(\alpha x; \psi) \right\}.$$

■

Θεώρημα 5.3.5 (Για πίνακες βλ.[58, 59])

Έστω x ,ψ με $\psi \neq 0$,και έστω ότι το x δεν είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του ψ .Τότε , για οποιαδήποτε φραγμένη περιοχή $\Omega \subset \mathbb{C}$,υπάρχει ένα $\varepsilon_\Omega \in [0,1)$ τέτοιο ώστε $\Omega \subseteq \boldsymbol{F}_{\|\cdot\|}^{\varepsilon_\Omega}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\psi})$.

Απόδειξη

Αρχικά , καλό θα ήταν να ορίσουμε το σύνολο $F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon_\Omega}(x;\psi)$ ως εξής:

$$F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon_\Omega}(x;\psi) = \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \|x - \lambda\psi\| \geq \sqrt{1-\varepsilon_\Omega^2}\|\psi\| \, |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \right\}.$$

Έτσι, χωρίς απώλεια της γενικότητας ,υποθέτουμε ότι η περιοχή Ω είναι συμπαγής. Με απαγωγή εις άτοπο ,μπορούμε να υποθέσουμε πως για κάθε ε ∈ $[0,1)$ υπάρχει ένα βαθμωτό $\mu_\varepsilon \in \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε $\mu_\varepsilon \notin F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon}(x;\psi)$.Τότε , υπάρχουν 2 ακολουθίες $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,1)$ και $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Omega$ τέτοιες ώστε $e_n \longrightarrow 1^-$ και $\mu_n \notin F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon_n}(x;\psi)$ για $\forall n \in \mathbb{N}$. Λόγω της συμπάγειας του Ω και από γνωστό θεώρημα της Πραγματικής Ανάλυσης, *κάθε ακολουθία στο Ω έχει συγκλίνουσα υπακολουθία σε στοιχείο του Ω* ,συνεπάγεται ότι η $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία έστω $\{\mu_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Omega$ η οποία συγκλίνει σε ένα μ ∈ Ω . Εάν μ ∈ $F_{\|\cdot\|}^{\hat{\varepsilon}}(x;\psi)$ για κάποιο συγκεκριμένο $\hat{\varepsilon} \in [0,1)$,τότε από το Θεώρημα 5.3.1 (που αναφέρθηκε παραπάνω) ,και χωρίς απώλεια της γενικότητας ,υποθέτουμε ότι το μ έγκειται στο εσωτερικό του συνόλου $F_{\|\cdot\|}^{\hat{\varepsilon}}(x;\psi)$.Τότε , (αφού το όριο της υπακολουθίας βρίσκεται στο σύνολο $\boldsymbol{F}_{\|\cdot\|}^{\hat{\varepsilon}}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\psi})$)άρα θα υπάρχει 1 φυσικός αριθμός $n' \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για ∀ n ≥ n' η υπακολουθία $\mu_{k_n} \in \boldsymbol{F}_{\|\cdot\|}^{\hat{\varepsilon}}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\psi})$. Επιπλέον ,υπάρχει ένα $n'' \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\varepsilon_{k_n} > \hat{\varepsilon}$ για κάθε n ≥ n''. Συνεπώς ,για κάθε n ≥ max{ n', n''} ισχύει ότι $0 \leq \hat{\varepsilon} < \varepsilon_{k_n} < 1$ άρα $\mu_{k_n} \in F_{\|\cdot\|}^{\hat{\varepsilon}}(x;\psi) \subseteq F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon_{k_n}}(x;\psi)$ δηλαδή η $\mu_{k_n} \in F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon_{k_n}}(x;\psi)$ το οποίο δεν ισχύει καθότι έχουμε αρχικά υποθέσει ότι η $\mu_n \notin F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon_n}(x;\psi)$. Καταλήγουμε , λοιπόν σε άτοπο, οπότε μ $\notin F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon}(x;\psi)$.

Έπειτα , για κάθε ακολουθία $\varepsilon_n = \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}$, n ∈ ℕ υπάρχει ένα βαθμωτό $\lambda_n \in \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε

$$\|x-(\mu-\lambda_n)\psi\| < \sqrt{1-\left(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)^2}\ \|\psi\||\lambda_n| = \frac{1}{n}\|\psi\||\lambda_n| .$$

ή ισοδύναμα (με βάση την τριγωνική ανισότητα)

$$|\|\lambda_n\psi\| - \|x-\mu\psi\|| \leq \|x-\mu\psi+\lambda_n\psi\| < \frac{1}{n}\|\psi\||\lambda_n| . \qquad \textbf{(7)}$$

ή

$|\|\lambda_n\psi\| - \|x-\mu\psi\|| < \frac{1}{n}\|\psi\||\lambda_n| \Rightarrow \|\lambda_n\psi\|$ - $\frac{1}{n}\|\psi\||\lambda_n| < \|x-\mu\psi\| \Rightarrow \|\psi\||\lambda_n|$ (1 - $\frac{1}{n}$) $< \|x-\mu\psi\|$.

Απ'εδώ , για κάθε $n \geq 2$

$$|\lambda_n| < \frac{\|x-\mu\psi\|}{\|\psi\|(1-\frac{1}{n})} \leq 2\,\frac{\|x-\mu\psi\|}{\|\psi\|} .$$

Από θεώρημα της Πραγματικής Ανάλυσης, όπου κάθε φραγμένη ακολουθία $\boldsymbol{\lambda_n}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $\{\lambda_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ η οποία συγκλίνει και στο $\lambda_0 \in \mathbb{C}$.Από τη σχέση (7) , αντικαθιστώντας την υπακολουθία έχουμε :

$$\left\|x-\mu\psi+\lambda_{k_n}\psi\right\| < \frac{1}{\lambda_{k_n}}\|\psi\|\left|\lambda_{k_n}\right| ,$$

Και καθώς $n \longrightarrow \infty$,

$$\|x-\mu\psi+\lambda_0\psi\| = 0 .$$

Το τελευταίο προφανώς δε ισχύει και έτσι καταλήγω σε άτοπο , καθώς το x δεν είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του ψ .

■

<u>Πόρισμα 5.3.6</u>

Έστω x ,ψ ∈ X με ψ≠ 0 . Εάν το x δεν είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του ψ ,τότε το σύνολο των μιγαδικών αριθμών ℂ προκύπτει ως εξής :

$$\mathbb{C} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_{\|\cdot\|}^{1-\frac{1}{n}}(x\,;\psi) .$$

5.4 Το εσωτερικό και το σύνορο του συνόλου $\boldsymbol{F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon}(x;\psi)}$

Αρχικά, θεωρούμε το σύνολο της BJ ε-ορθογωνιότητας του x ως προς το ψ $F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon}(x;\psi)$ **,** δηλώνοντας το εσωτερικό του ως Int $\left[F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon}(x;\psi)\right]$ και το σύνορο του ως $\partial\, F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon}(x;\psi)$.

<u>Πρόταση 5.4.1</u>

Έστω x , ψ ∈ X με ψ $\neq 0$.Τότε , για ∀ ε ∈ $[0,1)$,

$$Int\left[F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon}(x;\psi)\right] \subseteq \left\{\mu \in \mathbb{C}:\ \|x-\lambda\psi\| > \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\,|\mu-\lambda|, \forall\,\lambda \in \mathbb{C}\right\}.$$

<u>Απόδειξη</u>

Εάν μ ∈ Int $\left[F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon}(x;\psi)\right]$ τότε υπάρχει 1 πραγματικός αριθμός ρ $>$ 0 τέτοιος ώστε μ+ρ$e^{i\theta}$ ∈ $F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon}(x;\psi)$

∀ θ ∈ $[0,2\pi]$. Απ ΄ εδώ έχουμε ότι , ∀ λ ∈ $\mathbb{C}$

$$\|x-\lambda\psi\| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\,\left|\mu+\rho e^{i\theta}-\lambda\right| \qquad \forall\,\theta \in [0,2\pi]\,.$$

Θέτοντας θ_λ =arg (μ - λ) , παρατηρούμε ότι:

$$\|x-\lambda\psi\| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\,\left|\mu+\rho e^{i\theta_\lambda}-\lambda\right| > \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\,|\mu-\lambda|$$

Συνεπώς , το ζητούμενο αποδείχθηκε .

∎

<u>Θεώρημα 5.4.2 (Για πίνακες βλ.[58 , 59])</u>

Έστω $x\,,\psi \in X$ *με* $\psi \neq 0$ *και έστω* $\varepsilon \in [0,1)$. *Υποθέτουμε ότι* $\mu_0 \in F^{\,\varepsilon}_{\|\cdot\|}(x;\psi)$.

i. *Το βαθμωτό* μ_0 *έγκειται στην επιφάνεια του συνόρου* $\partial F^{\,\varepsilon}_{\|\cdot\|}(x;\psi)$ *αν και μόνο αν*

$$inf_{\lambda\in\mathbb{C}}\left\{\|x-\lambda\psi\|-\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\,|\mu_0-\lambda|\right\}=0\,.$$

ii. *Εάν* $\varepsilon > 0$ *,τότε* $\mu_0 \in \partial F^{\,\varepsilon}_{\|\cdot\|}(x;\psi)$ *αν και μόνο αν*

$$min_{\lambda\in\mathbb{C}}\left\{\|x-\lambda\psi\|-\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\,|\mu_0-\lambda|\right\}=0\,.$$

ή ισοδύναμα , αν και μόνο αν $\|x-\lambda_0\psi\|=\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\,|\mu_0-\lambda_0|$ *για κάποιο* $\lambda_0 \in \mathbb{C}$.

<u>Απόδειξη</u>

i. Αρχικά ,για να αποδείξουμε την μια κατεύθυνση “ $\Longrightarrow$”

Από τον ορισμό του συνόλου γνωρίζουμε ότι:

$$F^{\,\varepsilon}_{\|\cdot\|}(x;\psi)=\left\{\mu \in\mathbb{C}:\ \|x-\lambda\psi\|\geq\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\,|\mu-\lambda|,\forall\,\lambda\in\mathbb{C}\right\}$$

$$=\bigcap_{\lambda\in\mathbb{C}} D\Big(\lambda,\frac{\|x-\lambda\psi\|}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\ \|\psi\|}\Big)\,.$$

Τότε για οποιοδήποτε $\delta > 0$ υπάρχει ένας μιγαδικός λ_δ τέτοιος ώστε :

$$\|x-\lambda_\delta\psi\|<\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\,|\mu_0-\lambda_\delta|+\delta\,.$$

Από τη στιγμή , λοιπόν που η ποσότητα $\|x-\lambda_\delta\psi\|-\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\,|\mu_0-\lambda_\delta|$ <u>είναι μη αρνητική</u> καθώς $\delta \longrightarrow 0^+$ (θετική ποσότητα) έπεται ότι :

$$inf_{\lambda\in\mathbb{C}}\left\{\|x-\lambda\psi\|-\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\,|\mu_0-\lambda|\right\}=0\,.$$

Για το αντίστροφο “ $\Longleftarrow$ ” , υποθέτουμε ότι :

$inf_{\lambda\in\mathbb{C}}\left\{\,\|x-\lambda\psi\|-\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\,|\mu_0-\lambda|\ \right\}=0$ (8) και έστω ότι $\mu_0 \in Int\left[F^{\,\varepsilon}_{\|\cdot\|}(x;\psi)\right]$. Θα αποδείξουμε με εις άτοπο απαγωγή (ότι η ποσότητα μ_0 δεν ανήκει στο εσωτερικό αλλά στο σύνορο του συνόλου) .Έτσι , υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός $\rho > 0$, τέτοιος ώστε :

$$\mathrm{D}\left(\mu_{0},\rho\right) \subset Int\left[D\left(\lambda,\frac{\|x-\lambda\psi\|}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\ \|\psi\|}\right)\right] \qquad , \ \forall\, \lambda \in \mathbb{C}\,.$$

Συνεπώς ,

$$\|x-\lambda\psi\| - \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\,|\mu_0-\lambda| > \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\,\rho \ > \ 0 \qquad , \forall\, \lambda \in \mathbb{C}\,.$$

Αφού η παραπάνω ποσότητα είναι θετική , άρα και το ανώτερο κάτω φράγμα της (infimum), θα είναι θετικό . Δηλαδή ,

$$inf_{\lambda\in\mathbb{C}}\left\{\,\|x-\lambda\psi\| - \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\,|\mu_0-\lambda|\ \right\} > \ 0 \ .$$

το οποίο , έρχεται σε αντίθεση με την παραπάνω σχέση (8) που έχουμε υποθέσει ότι ισχύει, άρα καταλήγω σε άτοπο.

ii. Για κάθε ακολουθία $\delta_n = \frac{1}{n}$ (n ∈ ℕ) υπάρχει ένα $\lambda_n \in \mathbb{C}$ τέτοιος ώστε :

$$\|x-\lambda_n\psi\| < \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\,|\mu_0-\lambda_n| + \delta_n$$

ή

$$|\|x\| - \|\lambda_n\psi\|| < \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\,|\mu_0-\lambda_n| + \frac{1}{n}$$

ή

$$|\lambda_n|\|\psi\| - \|x\| < \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\,|\mu_0-\lambda_n| + \frac{1}{n} \ < \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\,(\|\mu_0\| + \|\lambda_n\|) \ + \frac{1}{n}$$

.

Αφού ε > 0 , με πράξεις έχουμε ότι :

$$|\lambda_n|\|\psi\| - \|x\| < \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\|\mu_0\| + \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\|\lambda_n\| + \frac{1}{n} \implies$$

$$|\lambda_n|\|\psi\| - \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\|\lambda_n\| < \|x\| + \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\|\mu_0\| + \frac{1}{n} \implies$$

$$|\lambda_n|\|\psi\|\left(1-\sqrt{1-\varepsilon^2}\right) < \|x\| + \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\|\mu_0\| + \frac{1}{n} \implies$$

$$|\lambda_n| < \frac{\|x\| + \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\|\mu_0\|+1}{\|\psi\|\left(1-\sqrt{1-\varepsilon^2}\right)} \quad . \tag{9}$$

Παρατηρώ λοιπόν , από τη σχέση (9) ότι η ακολουθία $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη . Επειδή κάθε φραγμένη ακολουθία έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία $\left\{\lambda_{k_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ τότε $\lambda_{k_n} \longrightarrow \lambda_0$. Συνεπώς ,

$\left\|x-\lambda_{k_n}\psi\right\| < \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\left|\mu_0-\lambda_{k_n}\right| + \frac{1}{k_n}$ $\quad ,\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Και καθώς n ⟶ $+\infty$,

$\|x-\lambda_0\psi\| \le \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\||\mu_0-\lambda_0|$.

Η παραπάνω σχέση ισχύει μόνο ως ισότητα επειδή μ ∈ $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(x;\psi)$ και το ζητούμενο αποδείχθηκε.

■

Η Πρόταση 5.4.1 και το Θεώρημα 5.4.2 οδηγούμαστε στο παρακάτω πόρισμα :

Πόρισμα 5.4.3

Έστω x , ψ ∈ X με ψ ≠ 0 .Τότε για οποιοδήποτε ε ∈ $(0,1)$,

$Int\left[F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(x;\psi)\right] = \left\{\mu \in \mathbb{C} :\ \|x-\lambda\psi\| > \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\,|\mu-\lambda|, \forall\, \lambda \in \mathbb{C}\right\}$.

5.5 Η περίπτωση που η νόρμα εισάγεται από εσωτερικό γινόμενο

Στην περίπτωση όπου η νόρμα εισάγεται από ένα εσωτερικό γινόμενο , μπορούμε πλήρως να περιγράψουμε το σύνολο της BJ ε- ορθογωνιότητας του x ως προς το ψ. Μάλιστα , σ'αυτή την περίπτωση το σύνολο $\boldsymbol{F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(x;\psi)}$ είναι ένας κλειστός δίσκος.

Θεώρημα 5.5.1

Έστω x , ψ ∈ X με ψ ≠ 0 και ε ∈ $[0,1)$ *,και υποθέτουμε ότι η νόρμα* $\|\cdot\|$ *εισάγεται από ένα εσωτερικό γινόμενο* $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ *.Τότε το σύνολο της BJ ε- ορθογωνιότητας του x ως προς το ψ είναι ο κλειστός δίσκος :*

$$F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(x;\psi) = \mathrm{D}\left(\frac{\langle x,\psi\rangle}{\|\psi\|^2}\,,\left\|x-\frac{\langle x,\psi\rangle}{\|\psi\|^2}\psi\right\|\frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2\|\psi\|}}\right).$$

Απόδειξη

Έστω μ ∈ $\mathbb{C}$ που έγκειται στο σύνολο $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(x;\psi)$ αν και μόνο αν

$\psi \perp^{\varepsilon}$ (x - μψ) .

ή ισοδύναμα (ορισμός ε-καθετότητας)

$|\langle \psi , x - \mu\psi \rangle| \leq$ ε $\|\psi\| \; \|x - \mu\psi\|$.

ή ισοδύναμα (υψώνοντας εις το τετράγωνο και γνωρίζοντας ότι $\|\psi\| = \langle \psi , \psi \rangle^{1/2}$ αφού η νόρμα εισάγεται από εσωτερικό γινόμενο)

$\langle \psi , x - \mu\psi \rangle \langle x - \mu\psi , \psi \rangle \leq \varepsilon^2 \|\psi\|^2 \langle x - \mu\psi , x - \mu\psi \rangle$,

Κάνοντας λοιπόν πράξεις , στην παραπάνω σχέση προκύπτει ότι:

$$\frac{|\langle x ,\psi\rangle|^2}{\|\psi\|^4} - \mu \frac{\langle \psi ,x \rangle}{\|\psi\|^2} - \bar{\mu} \frac{\langle x ,\psi \rangle}{\|\psi\|^2} + |\mu|^2 \leq \varepsilon^2 \left(\frac{\|x\|^2}{\|\psi\|^2} - \mu \frac{\langle \psi ,x \rangle}{\|\psi\|^2} - \bar{\mu} \frac{\langle x ,\psi \rangle}{\|\psi\|^2} + |\mu|^2\right)$$

Και τέλος ,

$$\left|\mu - \frac{\langle x ,\psi \rangle}{\|\psi\|^2}\right|^2 (1- \varepsilon^2) \leq \frac{\varepsilon^2}{\|\psi\|^2} \left\|x - \frac{\langle x ,\psi \rangle}{\|\psi\|^2} \psi \right\|^2$$

Οπότε , το ζητούμενο αποδείχθηκε .∎

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Javier Alonso and Carlos Benitez: Orthogonality in normed linear spaces: A survey - Part 1: Main properties.
2. Javier Alonso and Carlos Benitez: Orthogonality in normed linear spaces: A survey - Part 2: Relations between main orthogonalities.
3. Javier Alonso, Horst Martini and Senlin Wu :On Birkhoff orthogonality and isosceles orthogonality in normed linear spaces.
4. Roberts, B.D: On the geometry of abstract vector spaces. Tôhoku Math.J. 39, 42-45 (1934).
5. Birkhoff, G.: Orthogonality in linear metric spaces .Duke Math .J. 12,291-302 (1945) .
6. James, R .C: Orthogonality in normed linear spaces .Duke Math .J. 12 , 291 -302 (1945).
7. Singer ,I.: Angles abstraits et fonctions trigonometriques dans les espaces de Banach .Acad .R.P .Romîne. Bul .Sti .Sect .Sti .Mat .Fiz .9 , 29 – 42 (1957).
8. Carlsson , S .O : Orthogonality in normed linear spaces .Ark . Mat. 4,297 -318 (1962).
9. Benitez, C: Orthogonality in normed linear Spaces: A classification of the different concepts and some open problems. Rev .Mat .Univ.Complut. Madrid 2 (suppl.),53-57 (1989).
10. F.A Ficken, Note on the existence of scalar products in normed linear spaces , Annals of Math ,(2) 45 (1944),362-366 .
11. R .C James , Inner products in normed linear spaces , Bull . Amer . Math. Soc .53, (1947) 559-566.
12. R .C James, orthogonality and Linear functionals in normed linear spaces, Trans .Amer.Math.Soc .61 (1947) , 265-292 .
13. M.M Day ,Some characterizations of inner product spaces, Trans.Amer .Math., Soc .62 (1947), 320-337.

14. S.Kakutani, Some characterizations of Euclidean space, Japan .Jour .Math. 16 (1939), 93-97.
15. C.Benitez, Una propiedad de la orthogonalidad Birkhoff y una caracterizacion de espacios prehilbertianos, Collectanea Mat., 26 (1975), 211-218.
16. O. P. Kapoor, J.Prasad, Orthogonality and characterizations of inner product spaces Bull.Austral.Math .Soc. 19 (1978) 403 -416.
17. J.Alonso, Ortogonalidad en espacios normados, Ph.D.Thesis, Univ.de Extremadura, Badajoz (Spain), 1984.
18. M.Del Rio,Ortogonalidad en espacios normados y characterizacion de espacios prehilberianos , Dept .Anal.Matem ,Univ .de Santiago de Compostela (Spain) , Serie B ,14 ,1975 .
19. Javier Alonso and Carlos Benitez: Some characteristic and non –characteristic properties of inner product spaces J.Approx .Theory 55 (1988) 318-325.
20. Diminnie ,R.W Freese and E.Z Andalafte .An extension of Pythagorean and Isosceles orthogonality and a characterization of inner product spaces .J .Approx.Theory 39 (1983) 295 -298 .
21. I.Singer: Unghiuri abstracte si functii trigonometrice in spatii Banach .Bul. Sti .Acad .R.P.R, Sect .Sti Mat.Fiz.9 (1957) 29-42.
22. I.Singer: Best Approximation in normed linear spaces by Elements of linear subspaces .Springer 1970.
23. Diminnie, R.W Freese and E.Z Andalafte Angles in normed lineact r spaces and a characterization of real inner product spaces .Math .Nachr .129 (1986) 197 -204 .
24. A.P .Bosznay:On a problem concerning orthogonality in normed linear spaces (preprint).
25. S.O. Carlsson Orthogonality in normed linear spaces .Ark .Mat .4(1962) (297-318).
26. Lumer, G: Semi –inner product spaces .Trans .Am .Math .Soc .100 ,29-43 (1961).
27. Giles, J.R: Classes of semi –inner product spaces .Trans .Am.Math .Soc 129, 436-446(1967).
28. Dragomir, S.S Kohila, J.J: Two mappings related to semi-inner products and their applications in geometry of normed linear spaces. Appl .Math. 45(5), 337 -355(2000).
29. Kakutani, S: Some characterizations of Euclidean space.Jpn.J.Math.16, 93-97 (1939).
30. James, R.C: Reflexivity and the sup of linear functionals .Israel J.Math 13, 289-306.
31. Marino, G.Pietramala, P: A note about inner product on Banach spaces.Boll.Un.Mat.Ital.A (7) 1(3), 425-427(1987).
32. Alonso ,J.:Some properties of Birkoff and isosceles orthogonality in normed linear spaces .In:Inner product spaces and Applications ,Pitman Res .Notes .Math .Ser.,vol Vol 376, pp. 1-11 .Longman, Harlow (1997).
33. Benitez C: A property of Birkhoff orthogonality and a characterization of pre –Hilbert spaces (Spanish) .Collect .Math.26 (3), 211-218 (1975).
34. Baronti M:Su alcuni parametric degli spazi normati.Raporti Scientifico.Dell’Instituto di Mathematica ,Genova ,48(1980).

35. Ficken, F.A: Note on the existence of scalar products in normed linear spaces .Ann .Math .45 (2), 362-366 (1944).
36. Lorch ,E.R: On certain implications which characterize Hilbert space Ann.Math.(2) 49(3) 523-532 (1948) .
37. Lin, P.-K. : A remark on the Singer orthogonality in normed linear spaces .Math .Nachr .160, 325-328 (1993).
38. Ji, D., Li J., Wu, S: On the uniqueness of the isosceles orthogonality in normed linear spaces .Results Math.59 (1-2), 157 -162(2011).
39. Clarkson .J.A: Uniformly convex spaces .Trans .Am.Math.Soc 40(3), 396-414 (1936).
40. Nordlander, G.: The modulus of convexity in normed linear spaces Ark.Mat.4 (2) ,15-17(1960).
41. Chelidze, G .Z: On Nordlander's conjecture in the three dimensional case.Ark .Mat .47(2), 267 -272 (2009).
42. Ioan Serb: Rectangular modulus, Birkhoff orthogonality and characterizations of inner product spaces.
43. Joly J.L.,: Caracterizations d 'espaces hilbertiens au moyen de la constant rectangle, J.Approx .Theory 2 (1969), 301-311.
44. Benitez C., Przeslawski K., Yost D.,: A universal modulus for normed spaces, Studia Math .127 (1998),no .1 ,21-46 .
45. Ioan Serb: A Day –Nordlander theorem for the tangential modulus of a normed space, J.Math Anal.Appl.2009 (1997), 381-391.
46. Amir D., Characterizations of Inner Product Spaces, Birkhauser Verlag, Basel –Boston-Struttgart, 1986.
47. Del Rio M., Benitez C., The rectangular constant for two-dimensional spaces, J.Approx.Theory 19 (1977), 15-21.
48. Jacek Clmielinski: On an ε-Birkhoff orthonality, Poland.
49. M.M Day: Normed Linear Spaces, Springer –Verlag, Berlin –Heidelberg-New York, 1973.
50. S.S Dragomir: Semi-inner Products and Applications ,Nova Science Publishers ,Inc.,Hauppage ,NY,2004 .
51. S.S Dragomir: On approximation of continuous linear functionals in normed linear spaces, An.Univ, Timisoara Ser.Stiint .Mat., (29) (1991),51-58 .
52. J.R.Giles, Classes of semi –inner product spaces, Trans.Amer.Math.Soc. 129(1967), 436-446.
53. J.R$\ddot{a}tz$: On orthogonally additive mappings III, Abh.Math.Sem.Univ.Hamburg, 59(1989) 23-33.
54. J.R$\ddot{a}tz$: Comparison of inner products, Aequationes Math., 57 (1999), 312-321.
55. T.Szostok: On a generalization of the sine function, Glasnik Matematicki, 38 (2003), 29-44.

56. Miltiadis Karamanlis and Panagiotis Psarrakos: Birkhoff-James ε-orthogonality sets in normed linear spaces.
57. Ch.Chorianopoulos, S.Karanasios and P.Psarrakos: A definition of numerical range of rectangular matrices, Linear Multininear Algebra, 57 (2009), 459-475.
58. Ch.Chorianopoulos and P.Psarrakos: Birkhoff –James approximate orthogonality sets and numerical ranges, Linear Algebra Appl.434 (2011), 2089-2108.
59. R.A Horn and C.R Johnson: Topics in Matrix Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
60. J.G.Stampfli and J.P.Williams: Growth conditions and the numerical range in a Banach algebra, T***ô***hoku Math Journ, 20 (1968), 417-424.
61. Bonsall and J.Duncan:Numerical Ranges of operators on Normed Spaces and of Normed Algebras ,London Mathematical Society Lecture Note Series ,Cambridge University Press,New York ,1973.