

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ



ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΗΜ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΟΠΤΙΚΗΣ & ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

---

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΤΗΣ  
ΚΥΚΛΟΤΡΟΝΙΚΗΣ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗΣ  
ΣΤΟΝ ΔΙΑΥΛΟ ΔΕΣΜΗΣ  
ΤΟΥ ΓΥΡΟΤΡΟΝΙΟΥ  
ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΗ ΜΕΛΕΤΗ  
ΤΩΝ ΠΑΡΑΣΙΤΙΚΩΝ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ

---

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΙΩΑΝΝΗΣ Γ. ΧΕΛΗΣ

Αθήνα

Μάιος 2016

*Επιβλέπων:*  
Ομ. Καθ. Ι. ΒΟΜΒΟΡΙΔΗΣ



# ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ



ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΗΜ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΟΠΤΙΚΗΣ & ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

---

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΤΗΣ ΚΥΚΛΟΤΡΟΝΙΚΗΣ  
ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗΣ  
ΣΤΟΝ ΔΙΑΥΛΟ ΔΕΣΜΗΣ ΤΟΥ ΓΥΡΟΤΡΟΝΙΟΥ  
ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΗ ΜΕΛΕΤΗ  
ΤΩΝ ΠΑΡΑΣΙΤΙΚΩΝ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ

---

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΙΩΑΝΝΗΣ Γ. ΧΕΛΗΣ

Αθήνα, Μάιος 2016

Handwritten signature of I. Voubozidis.

Ι. Βομβορίδης  
Ομότιμος Καθηγητής  
Ε.Μ.Π. (Επιβλέπων)

Handwritten signature of K. Chitσανίδης.

Κ. Χιτζανίδης  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Handwritten signature of I. Roumeliotis.

Ι. Ρουμελιώτης  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Handwritten signature of I. Tigkelis.

Ι. Τίγκελις  
Καθηγητής Τμ.  
Φυσικής Ε.Κ.Π.Α.

Handwritten signature of I. Tsalamégkas.

Ι. Τσαλαμέγκας  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Handwritten signature of H. Glitsis.

Η. Γλύτσος  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Handwritten signature of G. Fikioris.

Γ. Φικιώρης  
Αν. Καθηγητής  
Ε.Μ.Π.

---



---

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

---

Πρόλογος	ix
Περίληψη	xi
Abstract	xiii
<b>1 Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
1.1 Μικροκυματικές Λυχνίες . . . . .	2
1.2 Η αλληλεπίδραση ECM . . . . .	7
1.2.1 Η συνθήκη συντονισμού . . . . .	7
1.2.2 Ο μηχανισμός ηλεκτρονικής ομαδοποίησης . . . . .	11
1.3 Το γυροτρόνιο . . . . .	14
1.3.1 Μέρη και δομή του συμβατικού γυροτρονίου . . . . .	14
1.3.2 Η αλληλεπίδραση στην κοιλότητα του γυροτρονίου . . . . .	19
1.3.3 Αλληλεπίδραση με το εμπρός ή πίσω κύμα του ρυθμού - συνεκτική και απόλυτη αστάθεια . . . . .	22
1.3.4 Επιδόσεις του συμβατικού γυροτρονίου και παραλλαγές του . .	23
1.4 Ο διάυλος της δέσμης . . . . .	27
1.4.1 Τύποι διαύλου δέσμης γυροτρονίων υψηλής ισχύος . . . . .	27
1.4.2 Πειραματικά αποτελέσματα παρασιτικών ταλαντώσεων . . . . .	29
1.5 Θεωρητική μελέτη των παρασιτικών ταλαντώσεων στον διάυλο της δέσμης . . . . .	31
1.5.1 Προηγούμενες θεωρητικές μελέτες του διαύλου της δέσμης . . .	31
1.5.2 Θεωρητική προσέγγιση του προβλήματος σε αυτή τη διατριβή .	33
<b>2 Επίλυση προβλήματος σκέδασης σε απλοποιημένη γεωμετρία διαύλου</b>	<b>39</b>
2.1 Απλοποιημένη γεωμετρία διαύλου δέσμης γυροτρονίου . . . . .	39
2.2 Εφαρμογή της μεθόδου ταιριάσματος των ρυθμών . . . . .	41
2.2.1 Περιγραφή της μεθόδου . . . . .	41
2.2.2 Ανάπτυξη πεδίων στο κυρίως σώμα του κυματοδηγού . . . . .	41
2.2.3 Ανάπτυξη πεδίων σε κενά δαχτυλίδια . . . . .	42

2.2.4	Ανάπτυξη πεδίων σε δαχτυλίδια με διπλεκτρικά και εσοχή κενού	43
2.2.5	Εξαγωγή του συστήματος εξισώσεων . . . . .	45
2.2.6	Αριθμητική επίλυση συστήματος εξισώσεων . . . . .	48
2.3	Υπολογισμός ηλεκτρομαγνητικών μεγεθών της διάταξης . . . . .	50
2.3.1	Υπολογισμός των ηλεκτρικών πεδιακών συνιστωσών . . . . .	50
2.3.2	Υπολογισμός των μαγνητικών πεδιακών συνιστωσών . . . . .	53
2.4	Αναλυτικές εκφράσεις της ηλεκτρομαγνητικής ισχύος στη διάταξη . . .	55
2.4.1	Προσπίπτουσα ισχύς . . . . .	55
2.4.2	Υπολογισμός διαδιδόμενης και ανακλώμενης ισχύος . . . . .	55
2.4.3	Υπολογισμός απορροφούμενης ισχύος στα διπλεκτρικά . . . . .	57
<b>3</b>	<b>Συντονιζόμενοι ρυθμοί στη διάταξη</b>	<b>59</b>
3.1	Ορισμός προβλήματος ιδιοτιμών . . . . .	60
3.2	Αριθμητική μέθοδος υπολογισμού των ιδιοσυχνοτήτων . . . . .	63
3.3	Φυσική σημασία των λύσεων του προβλήματος ιδιοτιμών . . . . .	67
3.4	Αριθμητικά αποτελέσματα για χαρακτηριστικές γεωμετρίες . . . . .	69
3.4.1	Γεωμετρία με ένα κενό δαχτυλίδι . . . . .	69
3.4.2	Γεωμετρία τριών δαχτυλιδιών . . . . .	73
3.4.3	Γεωμετρία ενός δαχτυλιδιού φορτωμένου με διπλεκτρικό . . . . .	76
3.4.4	Γεωμετρία διαύλου δέσμης γυροτρονίου . . . . .	78
<b>4</b>	<b>Προσομοίωση της αλληλεπίδρασης γυροτρονίου σε γεωμετρίες διαύλου</b>	<b>81</b>
4.1	Απαιτήσεις για την ορθή μοντελοποίηση της αλληλεπίδρασης . . . . .	81
4.2	Ανάπτυξη του μοντέλου αλληλεπίδρασης στον δίαυλο της δέσμης . . .	85
4.2.1	Ανάπτυξη του μοντέλου αλληλεπίδρασης που βασίζεται στη σύζευξη των κωδίκων NESTOR και EURIDICE . . . . .	86
4.2.2	Προσεγγίσεις του μοντέλου αλληλεπίδρασης που βασίζεται στη σύζευξη των κωδίκων NESTOR-EURIDICE . . . . .	93
4.3	Έλεγχος του μοντέλου αλληλεπίδρασης . . . . .	96
<b>5</b>	<b>Αριθμητικά αποτελέσματα πραγματικών διαύλων δέσμης γυροτρονίου</b>	<b>99</b>
5.1	Μεθοδολογία εξαγωγής αποτελεσμάτων . . . . .	101
5.2	Αριθμητικά αποτελέσματα για το γυροτρόνιο 170 GHz 1 MW για το ITER104	
5.2.1	Ρεύματα εκκίνησης για το σημείο λειτουργίας υψηλής τάσης. . .	106
5.2.2	Ρεύματα εκκίνησης για το σημείο λειτουργίας χαμηλής τάσης. . .	116
5.2.3	Έλεγχος της ορθής προσομοίωσης της αλληλεπίδρασης . . . . .	118
5.2.4	Ανάλυση αλληλεπίδρασης και συμπεράσματα . . . . .	120
5.3	Αριθμητικά αποτελέσματα για το γυροτρόνιο 140 GHz 1 MW για το W7-X123	
5.3.1	Υπολογισμός συντονιζόμενων ρυθμών και ρευμάτων εκκίνησης . .	124
5.3.2	Σχολιασμός αποτελεσμάτων και συμπεράσματα . . . . .	130
5.4	Επίδραση των παραμέτρων της γεωμετρίας στη διέγερση παρασιτικών ρυθμών . . . . .	132
5.4.1	Επίδραση της διπλεκτρικής επιτρεπτότητας στην απορρόφηση των πεδίων . . . . .	133
5.4.2	Επίδραση του πάχους των διπλεκτρικών δαχτυλιδιών στην απορρόφηση και συνολικά στην αλληλεπίδραση . . . . .	137

<b>6</b>	<b>Επεκτάσεις σε εναλλακτικές γεωμετρίες διαύλου δέσμης</b>	<b>143</b>
6.1	Εφαρμογή οριακής συνθήκης ολικής ανάκλασης . . . . .	143
6.1.1	Ανάπτυξη του φορμαλισμού με ολική ανάκλαση στο δεξί άκρο .	145
6.1.2	Υπολογισμός πεδιακών μεγεθών . . . . .	149
6.1.3	Επαλήθευση εξισώσεων και κώδικα . . . . .	151
6.1.4	Αριθμητικά αποτελέσματα διαύλων δέσμης . . . . .	153
6.2	Επέκταση σε ομοαξονικές γεωμετρίες . . . . .	156
6.2.1	Ανάπτυξη φορμαλισμού για ομοαξονική γεωμετρία . . . . .	157
6.2.2	Υπολογισμός ολοκληρωμάτων στην περίπτωση ομοαξονικής γεωμετρίας . . . . .	158
6.2.3	Έλεγχος εξισώσεων και κώδικα για ομοαξονική γεωμετρία . . . .	162
6.2.4	Σύγκριση ομοαξονικής με συμβατική γεωμετρία διαύλου δέσμης	164
<b>7</b>	<b>Κύρια Αποτελέσματα και Μελλοντικές Επεκτάσεις</b>	<b>169</b>
7.1	Κύρια αποτελέσματα . . . . .	169
7.1.1	Ανάπτυξη μαθηματικού μοντέλου και σχετικού κώδικα . . . . .	169
7.1.2	Προσομοίωση της αλληλεπίδρασης δέσμης-κύματος στον δίαυλο της δέσμης . . . . .	171
7.1.3	Αριθμητικά αποτελέσματα για διαύλους δέσμης πραγματικών γυροτρονίων . . . . .	172
7.2	Μελλοντικές επεκτάσεις . . . . .	174
7.2.1	Μοντελοποίηση της μεταβολής της ακτίνας των μεταλλικών δαχτυλιδιών . . . . .	175
7.2.2	Ανάπτυξη αυτοσυνεπούς σχήματος προσομοίωσης της αλληλεπίδρασης στον δίαυλο της δέσμης . . . . .	177
7.2.3	Μοντελοποίηση διηλεκτρικών δαχτυλιδιών με μεταβαλλόμενη επιτρεπτικότητα στην ακτινική διεύθυνση . . . . .	179
	<b>Παράρτημα</b>	<b>180</b>
	<b>Υπολογισμός ολοκληρωμάτων Fourier στο μιγαδικό επίπεδο</b>	<b>181</b>
Π.1	Υπολογισμός του ολοκληρώματος $I_1$ . . . . .	181
Π.2	Υπολογισμός του ολοκληρώματος $I_5$ . . . . .	186
Π.3	Υπολογισμός του ολοκληρώματος $I_1^{(bc)}$ . . . . .	191
	<b>Λίστα Συμβόλων</b>	<b>197</b>
	<b>Δημοσιεύσεις</b>	<b>203</b>
	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>207</b>



---

## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

---

Η εκπόνηση της παρούσας διατριβής χρηματοδοτήθηκε καθόλη τη διάρκεια της από το Εθνικό Πρόγραμμα Ελεγχόμενης Θερμοπυρηνικής Σύντηξης, το οποίο επιχορηγείται από την Ευρωπαϊκή Επιτροπή και τον οργανισμό Fusion For Energy\*. Στα πλαίσια της διατριβής πραγματοποιήθηκαν ταξίδια και αναπτύχθηκε συνεργασία με τα ερευνητικά ινστιτούτα Suisse Plasma Center (SPC, πρώην CRPP) του École Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL) στην Ελβετία και Institute for Pulsed Power and Microwave Technology (IHM) του Karlsruhe Institute of Technology (KIT) στη Γερμανία.

Η επιτυχής ολοκλήρωση της διατριβής οφείλεται σε μεγάλο βαθμό στην πεφωτισμένη επίβλεψη του κ. Ι. Βομβορίδη, Ομότιμου Καθηγητή του Ε.Μ.Π., που δημιούργησε τις άριστες συνθήκες κάτω από τις οποίες η εκπόνηση της παρούσας εργασίας έλαβε χώρα. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τα μέλη της επταμελούς επιτροπής κ. Κ. Χιτζανίδη, κ. Ι. Τσαλαμέγκα και κ. Ι. Ρουμελιώτη, καθηγητές μου στο Ε.Μ.Π., για την εξαιρετική διδασκαλία τους και τις γνώσεις που μου μετέφεραν στις περιοχές των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων και της φυσικής πλάσματος.

Ιδιαίτερα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Διδάκτορα Ε.Μ.Π. και ερευνητή του Τεχνολογικού Ινστιτούτου της Καρλσρούης (KIT) Κώστα Αβραμίδη για τη βαθιά και πολύτιμη γνώση του, που μου παρείχε απλόχερα κατά τα πρώτα μου βήματα στο ερευνητικό πεδίο των γυροτρονίων. Ως αναγνώριση του άριστου περιβάλλοντος θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους συνεργάτες ερευνητές του Εργαστηρίου Ηλεκτρονικής Δέσμης, Πλάσματος και Μη Γραμμικής Οπτικής του Ε.Μ.Π., ενώ ξεχωριστή αναφορά θα ήθελα να κάνω στον Γ. Αναστασίου Διδάκτορα Ε.Μ.Π. και στον Ζ. Ιωαννίδη Διδάκτορα Ε.Κ.Π.Α. και ερευνητή του KIT για την άριστη συνεργασία και τη βαθιά φιλία που αναπτύξαμε. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Ι. Τίγκελη, Καθηγητή Ε.Κ.Π.Α. και τους συνάδελφους ερευνητές της Ομάδας Μικροκυματικών και Οπτικών Εφαρμογών του Τμήματος Φυσικής για την πολύ καλή συνεργασία και κοινή προσπάθεια που αναπτύξαμε αυτά τα χρόνια.

Αθήνα, Μάιος 2016

Ιωάννης Γ. Χέλης

---

\*Το περιεχόμενο της παρούσας διδακτορικής διατριβής αποτελεί αποκλειστική ευθύνη του συγγραφέα και δεν αντιπροσωπεύει κατ' ανάγκην τις θέσεις ή τις απόψεις κανενός από τους χρηματοδότες. Οι χρηματοδότες δεν φέρουν καμία απολύτως ευθύνη για το περιεχόμενο αυτής της διατριβής.

---

---

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

---

Τα γυροτρόνια είναι διατάξεις παραγωγής μικροκυμάτων που καλύπτουν τη χιλιοστομετρική περιοχή του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος με κύρια εφαρμογή την παραγωγή μικροκυματικής ακτινοβολίας υψηλής ισχύος για τη θέρμανση του πλάσματος στα πειράματα ελεγχόμενης θερμοπυρηνικής σύντηξης. Ένα από τα σοβαρά προβλήματα, το οποίο αντιμετωπίζουν τα γυροτρόνια υψηλής ισχύος και συχνότητας, είναι η διέγερση ανεπιθύμητων παρασιτικών ταλαντώσεων στον δίαυλο της δέσμης πριν την κοιλότητα. Τέτοιου είδους παρασιτικές ταλαντώσεις υποβαθμίζουν την ποιότητα της δέσμης, μειώνουν την απόδοση της κύριας αλληλεπίδρασης και είναι πιθανό να προκαλέσουν τοπική υπερθέρμανση, ηλεκτρικά τόξα έως και πλήρη διακοπή της λειτουργίας όλης της διάταξης.

Η παρούσα διατριβή ασχολείται με τη θεωρητική μελέτη των παρασιτικών ταλαντώσεων στον δίαυλο της δέσμης και φιλοδοξεί να προσφέρει μια βαθύτερη κατανόηση της φυσικής του φαινομένου και να προτείνει πιθανούς τρόπους αντιμετώπισης του προβλήματος. Συγκεκριμένα, για τη μελέτη του διαύλου δέσμης αναπτύσσεται το μαθηματικό μοντέλο και ο σχετικός κώδικας για την προσομοίωση της διάταξης. Ο δίαυλος της δέσμης αντιμετωπίζεται σαν πεπερασμένου μήκους κοιλότητα εφαρμόζοντας οριακές συνθήκες εξερχόμενων κυμάτων στα άκρα. Έτσι, μπορούν να υπολογισθούν τα χαρακτηριστικά των συντονιζόμενων ρυθμών της διάταξης, οι οποίοι παρουσιάζουν διηλεκτρικές απώλειες και απώλειες περίθλασης.

Για την προσομοίωση της κυκλοτρονικής αλληλεπίδρασης κύματος-δέσμης στον δίαυλο αναπτύσσεται ένα σχήμα προσομοίωσης συνδυάζοντας τον κώδικα μας (NESTOR) με τον κώδικα προσομοίωσης της κοιλότητας EURIDICE. Με τον συνδυασμό αυτό μελετώνται συγκεκριμένες διαμορφώσεις διαύλων δέσμης και υπολογίζονται τα ρεύματα εκκίνησης των ρυθμών. Επίσης, πραγματοποιούνται παραμετρικές μελέτες της εξάρτησης των απωλειών και της αλληλεπίδρασης από γεωμετρικές και φυσικές παραμέτρους του διαύλου, όπως το πραγματικό και φανταστικό μέρος της επιτρεπτότητας και το πάχος των δαχτυλιδιών. Κατόπιν, αναπτύσσονται επεκτάσεις για ομοαξονικές γεωμετρικές διαύλους και εφαρμόζονται οριακές συνθήκες ολικής ανάκλασης στο ένα άκρο. Τέλος, συζητούνται και προτείνονται συγκεκριμένες κατευθύνσεις μελλοντικής έρευνας που υπόσχονται την πλήρη και ακριβή προσομοίωση του διαύλου δέσμης στον υπολογιστή.

Λέξεις κλειδιά: Γυροτρόνιο, δίαυλος δέσμης, κυκλοτρονική αλληλεπίδραση, ανοιχτοί ταλαντωτές.

---



---

## ABSTRACT

---

Gyrotron oscillators are microwave sources covering the millimeter bands of the electromagnetic spectrum with main application being the generation of high-power microwave radiation for heating of plasmas in experimental fusion devices. One serious problem of high-power high-frequency gyrotron experiments is the excitation of parasitic oscillations inside the beam tunnel prior to the cavity. This kind of parasitic oscillations degrade the quality of the electron beam, reduce the efficiency of the main interaction and may cause overheating and arcs possibly leading to the failure of the overall device.

The topic of this dissertation is the theoretical study of parasitic oscillations in the beam tunnel and its aim is to offer a deeper insight of the corresponding physics and suggest possible methods for their suppression. More specifically, for the simulation of the beam tunnel its mathematical model and the pertinent numerical code are developed. The beam tunnel is modeled as a finite-length cavity by applying outgoing-wave boundary conditions at its boundaries. By using such an approach, the characteristics of the resonant modes, which exhibit dielectric and diffraction losses, can be calculated.

For the simulation of the beam-wave interaction in the beam tunnel, a simulation scheme is developed by combining our code (NESTOR) with EURIDICE that is a simulation and design code for gyrotron cavities. With this combination of codes specific beam-tunnel configurations are studied and the starting currents of the resonant modes are calculated. In addition, parametric studies are performed by varying the geometrical and physical properties of the beam tunnel, like the real and imaginary part of the permittivity and the thickness of the dielectric rings. Next, extensions of the model for coaxial geometries and for a structure with a total-reflection boundary condition at the right boundary are developed. Finally, specific directions for future research are presented and discussed, which can simulate realistically and precisely actual beam-tunnel structures.

Keywords: Gyrotron, beam tunnel, cyclotron maser interaction, open resonators.

---

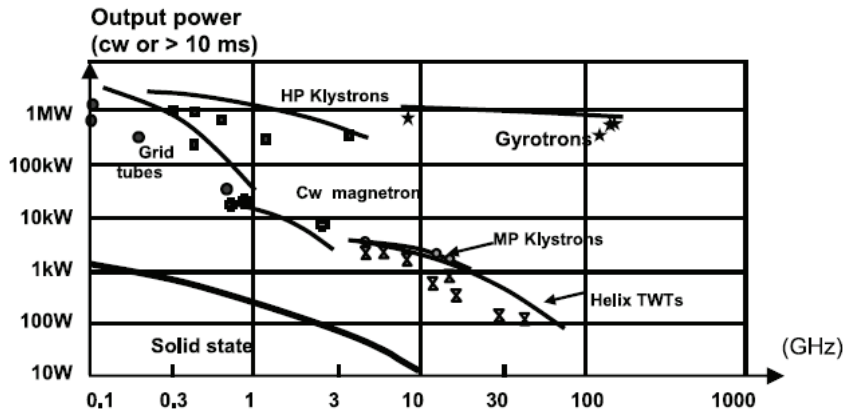
## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

---

Αντικείμενο της παρούσας διδακτορικής διατριβής είναι η μελέτη των παρασιτικών ταλαντώσεων που εμφανίζονται στον δίαυλο της ηλεκτρονικής δέσμης των γυροτρονίων. Πρόκειται για ένα τεχνολογικό πρόβλημα, του οποίου η μελέτη και αντιμετώπιση απαιτεί πολύπλευρη και βαθιά θεωρητική ενασχόληση. Μία τέτοια θεωρητική προσέγγιση στο πρακτικό αυτό πρόβλημα επιχειρείται στα πλαίσια της παρούσας διδακτορικής διατριβής.

Τα γυροτρόνια αποτελούν διατάξεις παραγωγής μικροκυματικής ακτινοβολίας υψηλής ισχύος στη χιλιοστομετρική και υποχιλιοστομετρική περιοχή συχνοτήτων. Μία από τις κύριες εφαρμογές τους είναι η παραγωγή μικροκυμάτων για τις ανάγκες θέρμανσης στους αντιδραστήρες ελεγχόμενης θερμοπυρηνικής σύντηξης. Η ανάπτυξη αξιόπιστων γυροτρονίων μεγάλης ισχύος στην τάξη των MW εντάσσεται στη γενικότερη ερευνητική προσπάθεια για την επίτευξη ελεγχόμενης σύντηξης σε βιομηχανική κλίμακα.

Στο κεφάλαιο αυτό της εισαγωγής θα περιγραφούν τα γενικότερα χαρακτηριστικά των μικροκυματικών πηγών και οι επιμέρους κατηγορίες τους. Στη συνέχεια, θα παρουσιαστεί ο φυσικός μηχανισμός που είναι υπεύθυνος για την κυκλοτρονική αλληλεπίδραση τύπου ECM (Electron Cycotron Maser), η οποία λαμβάνει χώρα στο γυροτρόνιο. Κατόπιν, θα περιγραφούν η δομή και τα επιμέρους στοιχεία του γυροτρονίου, καθώς και οι παραλλαγές του. Έμφαση θα δοθεί στην περιγραφή του διαύλου της δέσμης, ο οποίος αποτελεί και το αντικείμενο της παρούσας διατριβής. Στη συνέχεια, θα συζητηθεί το πρόβλημα των παρασιτικών ταλαντώσεων και θα παρουσιαστούν τα πειραματικά αποτελέσματα συγκεκριμένων γυροτρονίων στα οποία εμφανίζεται. Τέλος, θα αναφερθούν οι προηγούμενες ερευνητικές προσπάθειες μελέτης του φαινομένου και θα τεκμηριωθεί η προσέγγιση, η οποία ακολουθείται στην παρούσα διατριβή.



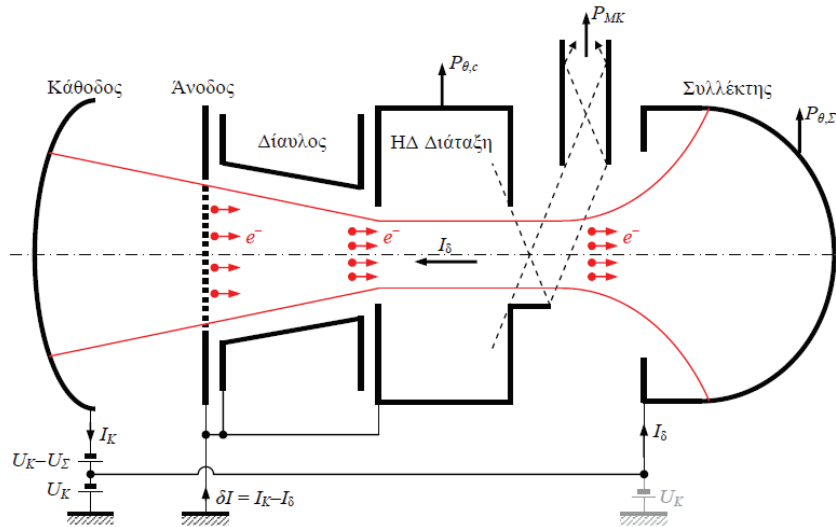
Σχήμα 1.1: Διάγραμμα ισχύος-συχνότητας για τις διάφορες μικροκυματικές πηγές (Σχήμα 1.1 του [1]).

## 1.1 Μικροκυματικές Λυχνίες

Οι μικροκυματικές λυχνίες αποτελούν διατάξεις παραγωγής μικροκυμάτων υψηλής ισχύος. Όπως και στις παλαιότερες λυχνίες με πλέγμα (gridded tubes), από τις οποίες και προέρχονται, το ενεργό στοιχείο των διατάξεων αυτών είναι μια ηλεκτρονική δέσμη, η οποία επιταχύνεται από μια σταθερή διαφορά δυναμικού. Η ηλεκτρονική δέσμη οδηγείται σε κατάλληλο ηλεκτροδυναμικό σύστημα, μέσα στο οποίο τα ηλεκτρόνια, υπό την επίδραση κάποιου είδους συντονισμού με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, μεταβιβάζουν την κινητική τους ενέργεια σε αυτό. Μια πρώτη κατηγοριοποίηση των μικροκυματικών λυχνιών έχει να κάνει με το αν αυτές παράγουν το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο από τον θόρυβο, οπότε λειτουργούν ως ταλαντωτές, ή με το αν ενισχύουν ένα εξωτερικά τροφοδοτούμενο σήμα, όπου στην περίπτωση αυτή καλούνται ενισχυτές.

Στο διάγραμμα του σχήματος 1.1 απεικονίζονται τα διάφορα είδη μικροκυματικών πηγών με βάση την ισχύ που μπορούν να αποδώσουν σε συνθήκες συνεχούς κύματος (Continuous Wave, CW) και σε σχέση με την περιοχή συχνοτήτων που λειτουργούν. Βλέπουμε ότι τα γυροτρόνια είναι οι πλέον ισχυρές πηγές στις υψηλές συχνότητες της μικροκυματικής περιοχής. Η ανάπτυξη των γυροτρονίων υπόσχεται να καλύψει το τεχνολογικό κενό στην παραγωγή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, που υπάρχει στη χιλιοστομετρική και υποχιλιοστομετρική περιοχή, καθώς σε μικρότερα μήκη κύματος έχουν ήδη αναπτυχθεί διατάξεις laser που μπορούν να αποδώσουν ικανή ισχύ.

Η τυπική μορφή των μικροκυματικών λυχνιών απεικονίζεται στο Σχήμα 1.2. Τα κύρια δομικά και λειτουργικά στοιχεία που τη συνθέτουν είναι η κάθοδος, η άνοδος, ο δίαυλος της δέσμης, το ηλεκτροδυναμικό σύστημα και ο συλλέκτης. Η ηλεκτρονική δέσμη παράγεται με θερμική εκπομπή από την κάθοδο, η οποία συνήθως βρίσκεται σε σταθερή τάση αρνητικού δυναμικού και συμπεριλαμβάνει τον εκπομπό των ηλεκτρονίων. Κατόπιν, λόγω της διαφοράς δυναμικού με τη γειωμένη άνοδο τα ηλεκτρόνια επιταχύνονται και αποκτούν την κατάλληλη κινητική ενέργεια. Στη συνέχεια, η ηλεκτρονική δέσμη αφού διαπεράσει την άνοδο, η οποία σε ορισμένες περιπτώσεις μπορεί να πάρει τη μορφή πλέγματος, πρέπει να αποκτήσει συγκεκριμένες ιδιότητες πριν φτάσει στην περιοχή αλληλεπίδρασης, όπου παράγεται η μικροκυματική ισχύς. Η λειτουργία αυτή επιτελείται στον δίαυλο της



Σχήμα 1.2: Κύρια συστατικά μέρη της γενικής δομής μιας μικροκυματικής πηγής (Σχήμα 1.1 του [2]).

δέσμης, όπου συνήθως με τη βοήθεια εξωτερικού μαγνητικού πεδίου προσαρμόζεται η διατομή της δέσμης στις κατάλληλες διαστάσεις, πριν αυτή εισέλθει στην περιοχή του ηλεκτροδυναμικού συστήματος. Εκεί τα ηλεκτρόνια έρχονται σε αλληλεπίδραση με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, που τροφοδοτείται εξωτερικά ή παράγεται από το θόρυβο, και μεταφέρουν μέρος της κινητικής τους ενέργειας σε αυτό, ενισχύοντάς το. Το ηλεκτροδυναμικό σύστημα συνήθως αποτελείται από κάποιο σύστημα κοιλοτήτων ή μέρος κυματοδηγού με ειδικά χαρακτηριστικά που υποστηρίζει την κατάλληλη μορφή κύματος. Η ωφέλιμη μικροκυματική ακτινοβολία κυματοδηγείται προς το εξωτερικό της λυχνίας συνήθως με ημιοπτικό σύστημα κατόπτρων. Η σύζευξη με το εξωτερικό της λυχνίας γίνεται με το παράθυρο των μικροκυμάτων, καθώς το εσωτερικό της λυχνίας διατηρείται σε κατάσταση κενού. Τέλος, η ηλεκτρονική δέσμη συνεχίζει την πορεία της προς τον συλλέκτη, ο οποίος είναι σχεδιασμένος να αντέχει τις θερμοκρασίες που αναπτύσσονται λόγω της εναπομείνουσας κινητικής ενέργειας των ηλεκτρονίων. Σε πολλές περιπτώσεις, όπου η συνολική απόδοση του συστήματος κρίνεται σημαντική, ο συλλέκτης τίθεται σε αρνητικό δυναμικό (depressed collector) και επιβραδύνει τα ηλεκτρόνια, ανακτώντας ηλεκτροστατικά ένα μέρος της κινητικής τους ενέργειας.

Για τη λειτουργία μιας μικροκυματικής λυχνίας απαιτείται η τροφοδοσία της με σταθερή τάση, η οποία κυμαίνεται από λίγα Volt για απλές εφαρμογές, έως υψηλές τάσεις δεκάδων ή και εκατοντάδων kV για ερευνητικές ή βιομηχανικές εφαρμογές υψηλής ισχύος. Επίσης, τα στατικά μαγνητικά πεδία που πολλές φορές απαιτούνται για τη λειτουργία της λυχνίας, δημιουργούνται εξωτερικά από το σύστημα του μαγνήτη, ο οποίος για μικρές εφαρμογές μπορεί να είναι ένας μόνιμος μαγνήτης ή σε πολλές περιπτώσεις, όπου απαιτείται ισχυρό μαγνητικό πεδίο πολλών Tesla, ένας μεγάλος υπεραγωγός μαγνήτης. Το υψηλό κενό της τάξης των  $10^{-8}$  Torr ( $\sim 10^{-11}$  atm) που απαιτείται σε εφαρμογές υψηλής τάσης και ισχύος, προκειμένου να αποφευχθούν ηλεκτρικά τόξα στο εσωτερικό της λυχνίας αλλά και για να διατηρηθούν οι επιθυμητές ιδιότητες της ηλεκτρονικής δέσμης, συχνά διατηρείται με τη συνεχή

λειτουργία εξωτερικών αντλιών κενού. Όλα τα παραπάνω στοιχεία συνθέτουν μια ολοκληρωμένη και πολύπλοκη διάταξη υψηλής τεχνολογίας, που οφείλει να λειτουργεί με υψηλή αξιοπιστία και σταθερότητα παρέχοντας μικροκυματική ισχύ με αυστηρές προδιαγραφές για τις συχνά πολύ απαιτητικές εφαρμογές.

Οι γενικότερες εφαρμογές των μικροκυματικών πηγών καλύπτουν ένα ευρύ φάσμα, το οποίο κυμαίνεται από οικιακές εφαρμογές, όπως στους φούρνους μικροκυμάτων, έως πανίσχυρες ογκώδεις διατάξεις ειδικά αναπτυγμένες για ερευνητικούς σκοπούς. Ιστορικά, οι μικροκυματικές πηγές αρχίζουν να εμφανίζονται ήδη από τη δεκαετία του 1920 με την πρώτη μαγνητρόνη (magnetron) από τον Hull (1921) και ανεξάρτητα από τους Habann και Zacek (1924). Πραγματική ώθηση στην έρευνα για μικροκυματικές πηγές έδωσαν οι στρατιωτικές ανάγκες λόγω του Β΄ παγκοσμίου πολέμου. Η εφεύρεση των Κλύστρων από τους Αμερικανούς αδερφούς Varian το 1937 όπως και η εφεύρεση των καθόδων οξειδίου, οι οποίες παρουσίαζαν χαμηλό έργο εξαγωγής, αποτέλεσαν σταθμούς στην ανάπτυξη των μικροκυματικών πηγών. Η πρώτη λυχνία οδεύοντος κύματος (TWT) θα εμφανιστεί το 1942 στην Αγγλία από τον R. Kompfner αλλά η εξέλιξή της θα κορυφωθεί μετά την ανάπτυξη και παρουσίαση από τον Pierce της θεωρίας λειτουργίας της. Έκτοτε οι μικροκυματικές πηγές συνεχίζουν να αναπτύσσονται επιτυγχάνοντας συνεχώς καλύτερες επιδόσεις και ικανοποιώντας όλο και περισσότερα πεδία εφαρμογών.

Σήμερα οι εφαρμογές τους εντοπίζονται κυρίως σε τρεις τομείς [3], [4]: α) σε εμπορικές διατάξεις ραδιοεκπομπών, τηλεόρασης και τηλεπικοινωνιών β) σε στρατιωτικές εφαρμογές τηλεπισκόπησης, ραντάρ και ηλεκτρονικού πολέμου γ) σε εξειδικευμένες διατάξεις για τη βιομηχανία και την επιστημονική έρευνα ή για ιατρικές και διαστημικές εφαρμογές. Μια έστω επιγραμματική παρουσίαση όλων των εφαρμογών στους παραπάνω τομείς είναι έξω από τους σκοπούς αυτής της εισαγωγής και γι' αυτό θα κάνουμε μια απλή αναφορά στις επιστημονικές εφαρμογές, καθώς η παρούσα διατριβή εντάσσεται σε αυτή την κατεύθυνση.

Στο πεδίο της βασικής φυσικής οι μικροκυματικές πηγές χρησιμοποιούνται όπως και τα laser ως διαγνωστικά για την ανίχνευση των ιδιοτήτων του πλάσματος. Επίσης, στους αντιδραστήρες θερμοπυρηνικής σύντηξης χρησιμοποιούνται για τη θέρμανση των ιόντων (ICRH, Ion Cyclotron Resonance Heating) ή για θέρμανση με τον κατώτερο υβριδικό ρυθμό. Οι εφαρμογές των γυροτρονίων ειδικότερα στην περιοχή αυτή αλλά και γενικότερα θα παρουσιαστούν με μεγαλύτερη λεπτομέρεια στην ενότητα 1.3. Οι μικροκυματικές λυχνίες βρίσκουν επίσης εφαρμογή στην έρευνα των μη γραμμικών φαινομένων που εμφανίζονται από την αλληλεπίδραση ακτινοβολίας υψηλής ισχύος με πλάσμα. Σημαντικό πεδίο εφαρμογών αποτελούν οι γραμμικοί επιταχυντές, οι οποίοι τροφοδοτούνται με την απαιτούμενη μικροκυματική ισχύ από υψηλής ισχύος πηγές, κυρίως κλύστρα. Ουσιαστικά, στους γραμμικούς επιταχυντές επιτελείται η αντίστροφη λειτουργία απ' ότι στις μικροκυματικές πηγές, καθώς τα σωματίδια επιταχύνονται λόγω συντονισμού σε ένα σύστημα κοιλοτήτων απορροφώντας την μικροκυματική ισχύ. Άλλες επιστημονικές εφαρμογές των μικροκυματικών λυχνιών εντοπίζονται στο πεδίο της ατομικής και μοριακής φυσικής, όπου μέσω της μελέτης των συντονισμών εξετάζονται οι καταστάσεις απλούστερων ή περισσότερο πολύπλοκων μορίων με ιδιαίτερο ενδιαφέρον στη βιολογία. Τέλος, απεικονιστικές τεχνικές με τη χρήση μικροκυμάτων υψηλής συχνότητας και ισχύος βρίσκουν εφαρμογή στη γεωεπισκόπηση και στη φυσική της ατμόσφαιρας.

Οι μικροκυματικές πηγές, πέρα από την κατηγοριοποίησή τους σε ταλαντωτές και ενισχυτές, επιδέχονται διαχωρισμό σε επιπλέον κατηγορίες με βάση διαφορετικά

κριτήρια. Ένα κριτήριο αποτελεί εάν η λειτουργία τους είναι συνεχούς κύματος (CW) ή παλμική. Οι μικροκυματικές πηγές συνεχούς κύματος αποδίδουν την ισχύ σε συνεχή λειτουργία ή σε παλμούς μεγάλης διάρκειας. Για το λόγο αυτό, η λειτουργία τους σε υψηλή ισχύ περιορίζεται αναγκαστικά από εξωτερικά φαινόμενα, όπως είναι η απαγωγή της θερμότητας απωλειών, οι απαιτήσεις κενού, η μηχανική αντοχή των πηνίων του μαγνήτη και η αποφυγή ηλεκτρικών τόξων στο εσωτερικό της λυχνίας. Αντιθέτως, οι μικροκυματικές λυχνίες που έχουν σχεδιαστεί για παλμική λειτουργία μπορούν να επιτύχουν πολύ μεγαλύτερη στιγμιαία ισχύ, καθώς κατά την πολύ μικρή διάρκεια των παλμών οι παραπάνω περιορισμοί που αναφέρθηκαν ικανοποιούνται πιο εύκολα. Αν και η στιγμιαία ισχύς τους μπορεί να φτάσει στην τάξη των δεκάδων MW, συνήθως η μέση ισχύς τους είναι μικρότερη από τις αντίστοιχες πηγές συνεχούς λειτουργίας, ενώ ένας κρίσιμος παράγοντας για τις εφαρμογές είναι η μέγιστη συχνότητα επανάληψης των παλμών.

Οι μικροκυματικές λυχνίες διακρίνονται επίσης σε λυχνίες αργού κύματος (slow-wave tubes) και λυχνίες γρήγορου κύματος (fast-wave tubes). Η διάκριση αυτή αφορά τη φύση της αλληλεπίδρασης της δέσμης με τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία. Όπως είναι γνωστό, στους λείους κυματοδηγούς η ταχύτητα φάσης των κυμάτων που υποστηρίζονται είναι μεγαλύτερη της ταχύτητας του φωτός. Επομένως, ηλεκτρόνια που εκτελούν μεταφορική κίνηση κατά τον άξονα ενός λείου κυματοδηγού δεν μπορούν να συντονιστούν με το κύμα, καθώς η ταχύτητά τους είναι αναγκαστικά μικρότερη του φωτός. Για το λόγο αυτό, στις πηγές αργού κύματος εισάγεται μια ανομοιομορφία στον κυματοδηγό, η οποία επιτρέπει τη διάδοση συνιστωσών του κύματος με ταχύτητα φάσης μικρότερης αυτής του φωτός. Η ανομοιομορφία αυτή μπορεί να είναι είτε κάποιο διπλεκτρικό υλικό μέσα στο οποίο η ταχύτητα φάσης γίνεται μικρότερη από  $c$ , είτε η εισαγωγή κάποιας περιοδικότητας στη διάταξη. Για πρακτικούς λόγους συνήθως στις πηγές αργού κύματος εισάγεται κάποια περιοδικότητα, όπως για παράδειγμα στις λυχνίες οδού κτύματος (TWT) ή στον ταλαντωτή επιστρέφοντος κύματος (Backward-wave Oscillator, BWO), όπου χρησιμοποιούνται κυκλώματα αργού κύματος όπως ο ελικοειδής κυματοδηγός ή ο κυματοδηγός με περιοδική ρυτίδωση. Η ακτινοβολία που παράγεται στις λυχνίες αυτές είναι τύπου Cherenkov. Αντιθέτως, η μικροκυματική ισχύς που παράγεται σε πηγές αργού κύματος με απομονωμένες κοιλότητες, όπως το Κλύστρο ή το Magnetron, οφείλεται στην ακτινοβολία μετάβασης. Το μήκος κύματος της παραγόμενης ακτινοβολίας βρίσκεται αναγκαστικά κοντά στο χαρακτηριστικό μήκος της περιοδικότητας, ενώ η ηλεκτρονική δέσμη πρέπει να βρίσκεται κοντά στο αίτιο που προκαλεί την επιβράδυνση για να έχει καλή σύζευξη με τις αργές συνιστώσες του κύματος. Οι παραπάνω απαιτήσεις κάνουν τις λυχνίες αργού κύματος ακατάλληλες για παραγωγή υψηλής ισχύος σε μικρότερα μήκη κύματος. Καθώς αυξάνει η συχνότητα λειτουργίας, μικραίνει το χαρακτηριστικό μήκος της περιοδικότητας και επομένως σε συνθήκες παραγωγής υψηλής ισχύος μικροκυμάτων αναπτύσσονται ισχυρά ρεύματα και ηλεκτρικά πεδία στα τοιχώματα, τα οποία προκαλούν τοπική υπερθέρμανση ή ηλεκτρικά τόξα που δύσκολα αντιμετωπίζονται στις μικρές διαστάσεις που απαιτούνται στις υψηλές συχνότητες. Ο παραπάνω περιορισμός προκαλεί και τη δραματική πτώση στην εφικτή ισχύ λειτουργίας που παρουσιάζουν οι λυχνίες αργού κύματος με την αύξηση της συχνότητας, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 1.1.

Οι περιορισμοί αυτοί στις επιδόσεις των λυχνιών αργού κύματος οδήγησαν στην ανάπτυξη των λυχνιών γρήγορου κύματος. Στις λυχνίες γρήγορου κύματος

η περιοδικότητα μεταφέρεται από το ηλεκτροδυναμικό σύστημα στην ηλεκτρονική δέσμη. Με τον τρόπο αυτό, το ηλεκτροδυναμικό σύστημα απλοποιείται σε μεγάλο βαθμό, αφού η περιοδική πλέον δέσμη μπορεί να αλληλεπιδράσει με ένα γρήγορο κύμα ενός λείου κυματοδηγού. Επιπλέον, η ηλεκτρονική δέσμη δεν απαιτείται πλέον να βρίσκεται κοντά στα τοιχώματα, ενώ οι εγκάρσιες διαστάσεις του ηλεκτροδυναμικού συστήματος μπορούν να γίνουν πολύ μεγαλύτερες, καθώς η επιλογή της συχνότητας λειτουργίας καθορίζεται σε μεγαλύτερο βαθμό από τη δέσμη και όχι από τις ιδιότητες του κυματοδηγού. Τα παραπάνω χαρακτηριστικά οδηγούν σε βελτιωμένες δυνατότητες των λυχνιών, τόσο σε σχέση με την απαγωγή της θερμότητας από το κύκλωμα αλληλεπίδρασης όσο και με τη δυνατότητα διάδοσης ηλεκτρονικής δέσμης υψηλότερης τιμής ρευμάτος μέσα σε αυτό. Η δυσκολία στις λυχνίες γρήγορου κύματος έγκειται στη διαμόρφωση της κατάλληλης ηλεκτρονικής δέσμης, η οποία είναι πιο πολύπλοκη σε σχέση με τις απλές γραμμικές δέσμες που χρησιμοποιούνται συνήθως στις λυχνίες αργού κύματος. Η απαίτηση αυτή καθυστέρησε χρονικά την ανάπτυξη των λυχνιών γρήγορου κύματος σε σχέση με την ραγδαία ανάπτυξη που είχαν οι λυχνίες αργού κύματος. Καθώς όμως οι εφαρμογές πίεζαν για υψηλότερη ισχύ σε όλο και περισσότερο υψηλότερες συχνότητες, αναπτύχθηκαν οι κατάλληλες διατάξεις καθόδου και μαγνητικών πεδίων που πλέον παρέχουν τα απαραίτητα χαρακτηριστικά της δέσμης.

Οι πηγές γρήγορου κύματος χωρίζονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες ανάλογα με το είδος της εγκάρσιας κίνησης που δημιουργεί την περιοδικότητα της ηλεκτρονικής δέσμης. Η μία κατηγορία είναι οι λυχνίες τύπου Ubitrons (undulated beam interaction electron tubes) στις οποίες συμπεριλαμβάνονται τα λέιζερ και μείζερ ελεύθερων ηλεκτρονίων (free electron lasers/masers). Στις λυχνίες αυτές η περιοδικότητα που εισάγεται στην ηλεκτρονική δέσμη δημιουργείται συνήθως από ένα σύστημα μαγνήτη με κάποια εγκάρσια συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου, η οποία παρουσιάζει περιοδικότητα κατά μήκος του άξονα. Η συνιστώσα αυτή του μαγνητικού πεδίου αναγκάζει τη δέσμη να εκτελέσει μια εγκάρσια κυματοειδή κίνηση κάθετη στην περιοδική συνιστώσα του μαγνητοστατικού πεδίου καθώς διαδίδεται κατά μήκος του άξονα της λυχνίας. Εναλλακτικά, η εγκάρσια αυτή κυματοειδής κίνηση μπορεί να δημιουργηθεί και από περιοδικό εγκάρσιο ηλεκτροστατικό πεδίο. Το μήκος της περιόδου καθορίζεται από τη χωρική διαμόρφωση του μαγνητοστατικού πεδίου και ουσιαστικά μαζί με την ενδεχόμενη μετατόπιση Doppler καθορίζει τη συχνότητα της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας.

Η δεύτερη κατηγορία πηγών γρήγορου κύματος είναι οι γυροδιατάξεις (gyrodevices). Σε αυτές η περιοδικότητα της ηλεκτρονικής δέσμης εισάγεται από την κυκλοτρονική κίνηση, η οποία προκαλείται από ένα εξωτερικό μαγνητικό πεδίο με αξονική διεύθυνση. Τα ηλεκτρόνια διαδιδόμενα κατά μήκος της περιοχής αλληλεπίδρασης ακολουθούν ελικοειδείς τροχιές, κατά τις οποίες οι εγκάρσιες συνιστώσες της ταχύτητας εκτελούν αρμονική ταλάντωση. Ανάλογα με τον φυσικό μηχανισμό κατά τον οποίον γίνεται η αλληλεπίδραση, οι γυροδιατάξεις χωρίζονται σε πηνιότροα (peniotrons) και ηλεκτρονικά κυκλοτρονικά μείζερ (ECM, Electron Cyclotron Masers) ή αλλιώς μείζερ κυκλοτρονικού συντονισμού (CRM, Cyclotron Resonance Masers). Στα πρώτα ο φυσικός μηχανισμός δεν είναι σχετικιστικός και απαιτεί κάποια εγκάρσια ανομοιογένεια του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου κατά μήκος της εγκάρσιας κίνησης των ηλεκτρονίων. Αντιθέτως, στις λυχνίες ECM τα σχετικιστικά φαινόμενα, και συγκεκριμένα η εξάρτηση της κυκλοτρονικής συχνότητας από τον σχετικιστικό παράγοντα  $\gamma$ , παίζουν καθοριστικό ρόλο στην



αλληλεπίδραση. Σε αυτά, για την αλληλεπίδραση θεμελιώδους αρμονικής, δεν απαιτείται η εγκάρσια ανομοιογένεια του υψίσυχνου πεδίου. Τα πηνίστρα, αν και θεωρητικά παρουσιάζουν μεγαλύτερη απόδοση, για παραγωγή υψηλής ισχύος μικροκυμάτων αντιμετωπίζουν σοβαρά τεχνολογικά προβλήματα και η ανάπτυξή τους είναι περιορισμένη. Αντιθέτως, οι λυχνίες ECM με κύριο εκπροσωπό τους το γυροτρόνιο, γνώρισαν αξιοσημείωτη ανάπτυξη κατά τις τελευταίες δεκαετίες και μπόρεσαν να αποδώσουν μικροκυματική ισχύ της τάξης του MW σε συχνότητες πάνω από 100 GHz, με κύρια εφαρμογή στους αντιδραστήρες θερμοπυρηνικής σύντηξης. Ο φυσικός μηχανισμός των πηγών ECM εξετάζεται με λεπτομέρεια στην επόμενη ενότητα.

## 1.2 Η αλληλεπίδραση ECM

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιαστεί ο φυσικός μηχανισμός της αλληλεπίδρασης ECM, η οποία είναι υπεύθυνη για τη λειτουργία του γυροτρόνιου, καθώς και άλλων λυχνιών μείζερ κυκλοτρονικού συντονισμού, όπως το γυρο-κλύστρο, η γυρο-λυχνία οδεύοντος κύματος (gyro-TWT), ο γυρο-ταλαντωτής επιστρέφοντος κύματος (gyro-BWO) ή το μείζερ κυκλοτρονικού αυτο-συντονισμού (CARM). Όπως θα παρουσιαστεί και σε επόμενη ενότητα, οι παρασιτικές ταλαντώσεις στον δίαυλο της δέσμης, οι οποίες είναι και το αντικείμενο της παρούσας διατριβής, εκτιμάται ότι διεγείρονται από την αλληλεπίδραση ECM, επομένως ο συγκεκριμένος φυσικός μηχανισμός αλληλεπίδρασης θα παρουσιαστεί με λεπτομέρεια.

### 1.2.1 Η συνθήκη συντονισμού

Για να συμβεί αλληλεπίδραση μεταξύ μιας ηλεκτρονικής δέσμης και ενός υψίσυχνου ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, απαιτείται τα ηλεκτρόνια κατά την κίνησή τους να βρίσκονται σε συντονισμό με το ηλεκτρομαγνητικό κύμα. Αν συμβολίσουμε με  $\mathbf{v}_\perp$  την εγκάρσια ταχύτητα ενός ηλεκτρονίου, με  $\mathbf{E}_{\text{RF}}$  το ηλεκτρικό πεδίο του υψίσυχνου κύματος και με  $e > 0$  το στοιχειώδες φορτίο του ηλεκτρονίου, η ισχύς που μεταφέρεται στο εγκάρσιο επίπεδο από το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο στο ηλεκτρόνιο, καθώς αυτό επιταχύνεται είναι  $-e\mathbf{E}_{\text{RF}} \cdot \mathbf{v}_\perp$ . Για να μεταφερθεί αξιόλογο ποσοστό της κινητικής ενέργειας από το ηλεκτρόνιο προς το υψίσυχνο πεδίο, απαιτείται το τελευταίο να επιβραδύνεται. Επομένως, η ποσότητα  $-e\mathbf{E}_{\text{RF}} \cdot \mathbf{v}_\perp$  θα πρέπει να διατηρείται αρνητική χωρίς να ταλαντώνεται, παρόλο που τα επιμέρους μεγέθη της ποσότητας, που είναι η ταχύτητα των ηλεκτρονίων και το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, ταλαντώνονται σε υψηλή συχνότητα. Στη συνέχεια εξετάζουμε τις συνθήκες που απαιτούνται για να συμβαίνει ικανοποιητική μετατροπή της κινητικής ενέργειας των ηλεκτρονίων σε ηλεκτρομαγνητική.

Η ηλεκτρονική δέσμη στις γυροδιατάξεις, όπως αναφέραμε και στην προηγούμενη ενότητα, διαδίδεται κατά μήκος της λυχνίας εκτελώντας ελικοειδείς τροχιές. Το αξονικό μαγνητικό πεδίο, το οποίο συμβολίζουμε με  $\mathbf{B} = B_0\hat{z}$  επιβάλλει την κυκλοτρονική κίνηση με σχετικιστική κυκλοτρονική συχνότητα, η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$\omega_c = \frac{eB_0}{m_e\gamma}, \quad (1.2.1)$$

όπου  $m_e$  είναι η μάζα του ηλεκτρονίου και  $\gamma = (1 - |\mathbf{v}|^2/c^2)^{-1/2}$  ο σχετικιστικός παράγοντας. Η αδιατάρακτη κίνηση των ηλεκτρονίων στο εγκάρσιο επίπεδο είναι

κυκλική και η ταχύτητά τους στο σύστημα με αρχή το κέντρο περιστροφής των ηλεκτρονίων αναλύεται ως εξής:  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\perp + \mathbf{v}_\parallel$ , με  $\mathbf{v}_\perp = v_\perp \hat{\boldsymbol{\phi}}$  και  $\mathbf{v}_\parallel = v_\parallel \hat{\mathbf{z}}$ .

Οι εγκάρσιες ηλεκτρικές συνιστώσες του ηλεκτρομαγνητικού κύματος μπορούν να γραφούν σαν φασιθέτες ανεξαρτήτως της μορφής του ηλεκτροδυναμικού συστήματος ως εξής:

$$\mathbf{E}_{\text{RF}\perp}(r, \phi, z, t) = \text{Re} \left[ \left[ E_r(r, \phi) \hat{\mathbf{r}} + E_\phi(r, \phi) \hat{\boldsymbol{\phi}} \right] e^{j(\omega t - k_\parallel z)} \right], \quad (1.2.2)$$

όπου  $r, \phi$  οι κυλινδρικές συντεταγμένες του συστήματος με άξονα που περνάει από το κέντρο περιστροφής του ηλεκτρονίου,  $\omega$  η κυκλική συχνότητα του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου και  $k_\parallel$  ο αξονικός κυματαριθμός του.

Τα ηλεκτρόνια στο σύστημα αυτό έχουν εγκάρσια ταχύτητα μόνο με αξιμουθιακή συνιστώσα. Συμβολίζουμε τις συντεταγμένες των ηλεκτρονίων με  $r_e(t), \phi_e(t), z_e(t)$  και θεωρούμε ότι κατά την κυκλοτρονική κίνηση η ακτίνα Larmor διατηρείται περίπου σταθερή. Αν αναπτύξουμε την αξιμουθιακή συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου σε σειρά Fourier ως προς την αξιμουθιακή συντεταγμένη  $\phi$  τότε έχουμε την παρακάτω έκφραση:

$$\mathbf{E}_{\text{RF}\phi} = E_{\text{RF}\phi}(r, \phi, z, t) \hat{\boldsymbol{\phi}} = \text{Re} \left[ \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \tilde{E}_{\phi s}(r) e^{j(\omega t - k_\parallel z - s\phi)} \right] \hat{\boldsymbol{\phi}}. \quad (1.2.3)$$

Με βάση τα παραπάνω η ενέργεια ανά μονάδα χρόνου που μετατρέπεται από κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου σε ενέργεια του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου είναι:

$$e\mathbf{E}_{\text{RF}\perp} \cdot \mathbf{v}_\perp = ev_\perp E_{\text{RF}\phi} [r_e(t), \phi_e(t), z_e(t), t] = ev_\perp \text{Re} \left[ \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \tilde{E}_{\phi s}(r_e) e^{j(\omega t - k_\parallel z_e(t) - s\phi_e(t))} \right]. \quad (1.2.4)$$

Καθώς το μέτρο της εγκάρσιας ταχύτητας και η ακτίνα του κέντρου περιστροφής του ηλεκτρονίου παραμένουν περίπου σταθερά ενόσω το ηλεκτρόνιο διασχίζει την περιοχή αλληλεπίδρασης, για να υπάρξει συντονισμός και να μεταφερθεί ενέργεια μεταξύ κύματος και ηλεκτρονίου θα πρέπει με βάση την (1.2.4) να ισχύει η συνθήκη:

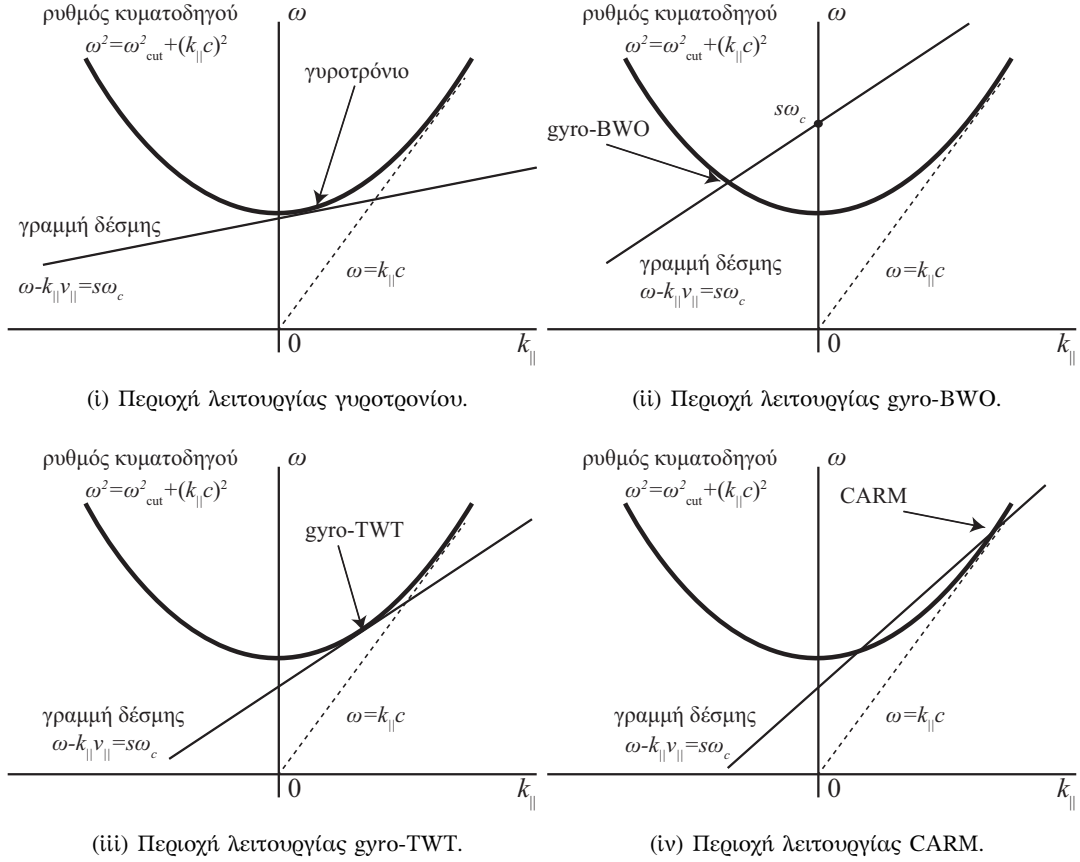
$$\frac{d}{dt} [\omega t - k_\parallel z_e(t) - s\phi_e(t)] \cong 0 \implies \omega - k_\parallel v_\parallel - s\omega_c \cong 0, \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.2.5)$$

καθώς  $\frac{dz_e(t)}{dt} = v_\parallel$  και  $\frac{d\phi_e(t)}{dt} = \omega_c$ . Η (1.2.5) αποτελεί τη συνθήκη συντονισμού για τις γυροδιατάξεις. Η διαφορά με τη συνθήκη συντονισμού των πηγών αργού κύματος, η οποία είναι  $\omega - k_\parallel v_\parallel \cong 0$ , είναι η ύπαρξη του όρου της κυκλοτρονικής συχνότητας, καθώς αυτός είναι ο όρος που επιτρέπει τον συντονισμό της ταχύτητας των ηλεκτρονίων με ένα γρήγορο κύμα. Στις διατάξεις τύπου Ubitrons, όπως τα λέιζερ ελεύθερων ηλεκτρονίων (FEL), ο όρος της κυκλοτρονικής συχνότητας αντικαθίσταται με τον όρο της χαρακτηριστικής συχνότητας κυμάτωσης  $2\pi v_\parallel / \lambda_w$  όπως την αισθανονται τα ηλεκτρόνια, όπου  $\lambda_w$  είναι το χαρακτηριστικό μήκος της περιοδικότητας του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου.

Η (1.2.5) θα πρέπει να ισχύει με ικανοποιητική ακρίβεια για το μεγαλύτερο μέρος του πλήθους των ηλεκτρονίων που αποτελούν την ηλεκτρονική δέσμη. Πιθανές διασπορές στην ενέργεια των ηλεκτρονίων και κυρίως στις ταχύτητές τους χαλούν τη συνθήκη συντονισμού και μειώνουν την απόδοση της αλληλεπίδρασης. Οι διαφορετικού τύπου γυροσυσκευές έχουν και διαφορετική ευαισθησία στις διασπορές των μεγεθών της ηλεκτρονικής δέσμης.

Σε έναν λείο κυματοδηγό η σχέση διασποράς είναι κατά τα γνωστά η παραβολή:

$$\omega^2 = \omega_{\text{cut}}^2 + (k_\parallel c)^2, \quad (1.2.6)$$



Σχήμα 1.3: Καμπύλη διασποράς λείου κυματοδηγού και γραμμή δέσμης που ορίζει τη συνθήκη συντονισμού. Η περιοχή λειτουργίας που καθορίζεται από την τομή τους ορίζει το είδος της γυροσυσσκευής.

όπου  $\omega_{cut}$  είναι η συχνότητα αποκοπής του κυματοδηγού, π.χ. για τους ρυθμούς  $TE_{mp}$  ενός λείου κυλινδρικού κυματοδηγού ακτίνας  $R_0$  η συχνότητα αποκοπής είναι:  $\omega_{cut} = c\chi'_{mp}/R_0$ , όπου  $\chi'_{mp}$  είναι η αντίστοιχη ιδιοτιμή. Για να συμβεί ο συντονισμός μεταξύ της ηλεκτρονικής δέσμης και ενός ρυθμού σε έναν λείο κυλινδρικό κυματοδηγό, θα πρέπει οι (1.2.5) και (1.2.6) να συναληθεύουν. Η περιοχή στην οποία η σχέση διασποράς τέμνει την ευθεία της δέσμης, καθορίζει το συγκεκριμένο είδος της αλληλεπίδρασης και τον τύπο της γυροδιάταξης. Στο Σχήμα 1.3 παρουσιάζονται στο επίπεδο  $\omega - k_{||}$  τα διαγράμματα διασποράς και η τομή τους με την γραμμή της δέσμης για τους διάφορους τύπους γυροσυσσκευών.

Στο Σχήμα 1.3(i), όπου παρουσιάζεται η περιοχή λειτουργίας του γυροτρονίου, βλέπουμε ότι η τομή των δύο καμπυλών συμβαίνει για μικρές θετικές τιμές του αξονικού κυματαριθμού  $k_{||}$  πολύ κοντά στην αποκοπή. Στην περιοχή της αποκοπής ισχύει η ισχυρή ανισότητα  $k_{||}c \ll \omega$  και επομένως η συνθήκη συντονισμού (1.2.5) απλοποιείται σημαντικά:

$$\omega \cong s\omega_c, \quad s = 1, 2, \dots \quad (1.2.7)$$

Λόγω της αμελητέας τιμής του όρου της μετατόπισης Doppler  $k_{||}v_{||}$  το γυροτρόνιο είναι γενικά αναισθητο στην πτώση απόδοσης που συνεπάγεται η διασπορά στην ταχύτητα, καθώς η συνθήκη συντονισμού (1.2.7) ισχύει σε ικανοποιητικό βαθμό

για το μεγαλύτερο μέρος του πλήθους των ηλεκτρονίων. Αντιθέτως, η συνθήκη συντονισμού εξαρτάται ισχυρά από τον σχετικιστικό παράγοντα  $\gamma$ . Γενικά, στις ηλεκτρονικές δέσμες η διασπορά στην ενέργεια, η οποία εκφράζεται από τον σχετικιστικό παράγοντα  $\gamma$ , είναι πολύ μικρότερη από τη διασπορά στις ταχύτητες και έτσι η συνθήκη συντονισμού ισχύει κανονικά για τον ηλεκτρονικό πληθυσμό της δέσμης. Όμως η συγκεκριμένη ισχυρή εξάρτηση από το  $\gamma$  περιορίζει τα γυροτρόνια σε ήπια σχετικιστικές δέσμες με  $\gamma < 1.2$ . Αυτό συμβαίνει γιατί σε σχετικιστικές δέσμες με υψηλές τιμές του  $\gamma$ , απαιτείται μεγάλη ένταση του υπίσυχου πεδίου για να μετατραπεί μεγάλο μέρος της ενέργειας των ηλεκτρονίων [5]. Επίσης, για μεγάλες τιμές του  $\gamma$  αυξάνεται η ένταση του μαγνητικού πεδίου που απαιτείται για την παραγωγή ακτινοβολίας σε συγκεκριμένη συχνότητα  $\omega$ . Έτσι, για τις εφαρμογές που απαιτούν υψηλές συχνότητες αυξάνεται το κόστος και η πολυπλοκότητα του υπεραγωγίου μαγνήτη λόγω της τεχνολογικής δυσκολίας επίτευξης μεγάλων τιμών μαγνητικού πεδίου.

Στη σχέση (1.2.7) ο φυσικός αριθμός  $s$  αντιστοιχεί στην αρμονική της αλληλεπίδρασης. Η θεμελιώδης αρμονική εκφράζεται με την τιμή  $s = 1$ , ενώ για τις ανώτερες αρμονικές απαιτείται κάποιου είδους ανομοιογένεια στο εγκάρσιο προφίλ του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.

Το Σχήμα 1.3 είναι απλουστευτικό με την έννοια ότι παρουσιάζεται η καμπύλη διασποράς ενός κυματοδηγού σταθερής ακτίνας. Στην πραγματικότητα η αλληλεπίδραση γυροτρονίου απαιτεί να υπάρχει εξωτερική ανάδραση του ενισχυμένου κύματος μέσω κάποιας ανάκλασης. Έτσι, το ηλεκτροδυναμικό σύστημα του γυροτρονίου αποτελείται από μια ανοιχτή ηλεκτρομαγνητική κοιλότητα, στην οποία μέρος της ηλεκτρομαγνητικής ισχύος που παράγεται από τη δέσμη, ενισχύει τα πεδία του ρυθμού της κοιλότητας. Το φάσμα των αξονικών κυματαριθμών που υποστηρίζει η κοιλότητα είναι επομένως διακριτό και η αλληλεπίδραση μπορεί να λάβει χώρα πάνω σε συγκεκριμένα διακριτά σημεία της καμπύλης διασποράς.

Στο Σχήμα 1.3(ii) παρουσιάζεται η περιοχή λειτουργίας του γυρο-ταλαντωτή επιστρέφοντος κύματος (Gyro-BWO). Βλέπουμε πως αυτή συμβαίνει σε αρνητικές τιμές του αξονικού κυματαριθμού, όπου οι ταχύτητες φάσης και ομάδας έχουν αρνητικές τιμές. Η φύση της αλληλεπίδρασης στα Gyro-BWOs παρουσιάζει κάποιες ιδιαιτερότητες σε σχέση με αυτή της αλληλεπίδρασης γυροτρονίου. Συγκεκριμένα, η ανάδραση του ενισχυμένου κύματος στην περίπτωση αυτή δεν είναι εξωτερική που προέρχεται από κάποια ανάκλαση αλλά εσωτερική με τη δέσμη (απόλυτη αστάθεια, *absolute instability*), καθώς το επιστρέφον κύμα (*backward wave*) αλληλεπιδρά με την οδεύουσα προς τα εμπρός δέσμη [6]. Το χαρακτηριστικό αυτό επιτρέπει τη συνεχή μεταβολή της συχνότητας (*continuous frequency tunability*) συναρτήσει του μαγνητικού πεδίου, δυνατότητα που δεν έχουν τα γυροτρόνια καθώς η συχνότητα επιλέγεται σε μεγάλο βαθμό από τις ιδιότητες της κοιλότητας. Το συγκεκριμένο χαρακτηριστικό κάνει τα gyro-BWOs να έχουν χαμηλότερη ηλεκτρονική απόδοση από τα γυροτρόνια, καθώς η αλληλεπίδραση δεν μπορεί να βελτιστοποιηθεί ρυθμίζοντας το μαγνητικό πεδίο και μεταβάλλοντας έτσι τον παράγοντα αποσυντονισμού (*detuning factor*) ανεξάρτητα από τη συχνότητα. Με την αλληλεπίδραση επιστρέφοντος κύματος θα ασχοληθούμε και στη συνέχεια, καθώς παρασιτικές ταλαντώσεις αυτού του είδους έχουν ανιχνευθεί στον δίαυλο της δέσμης του γυροτρονίου.

Αντίστοιχα, στο Σχήμα 1.3(iii) παρουσιάζεται η περιοχή λειτουργίας του Gyro-TWT. Πρόκειται για μια λυχνία που λειτουργεί κυρίως ως ενισχυτής που

τροφοδοτείται από ένα εξωτερικό σήμα. Η αλληλεπίδραση μοιάζει σημαντικά με αυτή του γυροτρονίου, καθώς σε αντίθεση με τα Gyro-BWOs βασίζεται στη συνεκτική αστάθεια (convective instability), όπου το ενισχυόμενο κύμα διαδίδεται προς τα εμπρός ταυτόχρονα μαζί με τη δέσμη. Επιδιώκεται κατά τη σχεδίαση, η ευθεία της δέσμης να εφάπτεται της καμπύλης διασποράς (grazing condition), μιας και τότε η ταχύτητα ομάδας του κύματος είναι ίση με την αξονική ταχύτητα της δέσμης και επομένως επιτυγχάνεται καλύτερη απόδοση και εύρος ζώνης του ενισχυτή. Γενικά, στο ηλεκτροδυναμικό σύστημα του gyro-TWT εμφανίζεται επίσης πρόβλημα παρασιτικών ταλαντώσεων, καθώς ταλαντώσεις λόγω ασταθειών (συνεκτικές λόγω ανακλάσεων ή απόλυτες) ανταγωνίζονται την αλληλεπίδραση ενίσχυσης του εξωτερικού σήματος.

Τέλος, στο Σχήμα 1.3(iv) παρουσιάζεται η περιοχή λειτουργίας του μείζερ κυκλοτρονικού αυτο-συντονισμού (Cyclotron Auto-Resonance Maser, CARM). Στην περίπτωση αυτή η αξονική ταχύτητα των ηλεκτρονίων πλησιάζει αυτή του φωτός και η μετατόπιση Doppler παίζει σημαντικό ρόλο. Στην περιοχή αυτή λειτουργίας η συνθήκη συντονισμού έχει την ιδιότητα να διατηρείται κατά προσέγγιση, καθώς η αύξηση του όρου της σχετικιστικής κυκλοτρονικής συχνότητας, η οποία προκαλείται από τη μείωση της ενέργειας των ηλεκτρονίων, αντισταθμίζεται σε μεγάλο βαθμό από τη μεταβολή του όρου Doppler λόγω μείωσης της αξονικής ταχύτητας. Επομένως, καθώς τα ηλεκτρόνια χάνουν την ενέργεια κατά την εγκάρσια κινήσή τους ενώ ταυτόχρονα η αξονική τους ταχύτητα μειώνεται, η συνθήκη συντονισμού (1.2.5) συνεχίζει να ισχύει. Έτσι, ολόκληρη η κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων είναι διαθέσιμη για μετατροπή και θεωρητικά η ηλεκτρονική απόδοση μπορεί να πάρει πολύ μεγάλες τιμές. Στην πράξη όμως, για τη λειτουργία της λυχνίας απαιτούνται εξαιρετικά μικρές τιμές στην διασπορά της ταχύτητας λόγω της μεγάλης επίδρασης του όρου Doppler. Για το λόγο αυτό καθώς και για τις απαιτήσεις πολύ υψηλής τάσης λειτουργίας προκειμένου να επιταχυνθεί η δέσμη σε σχετικιστικές ταχύτητες, η ανάπτυξη λυχνιών τύπου CARM είναι εξαιρετικά περιορισμένη.

### 1.2.2 Ο μηχανισμός ηλεκτρονικής ομαδοποίησης

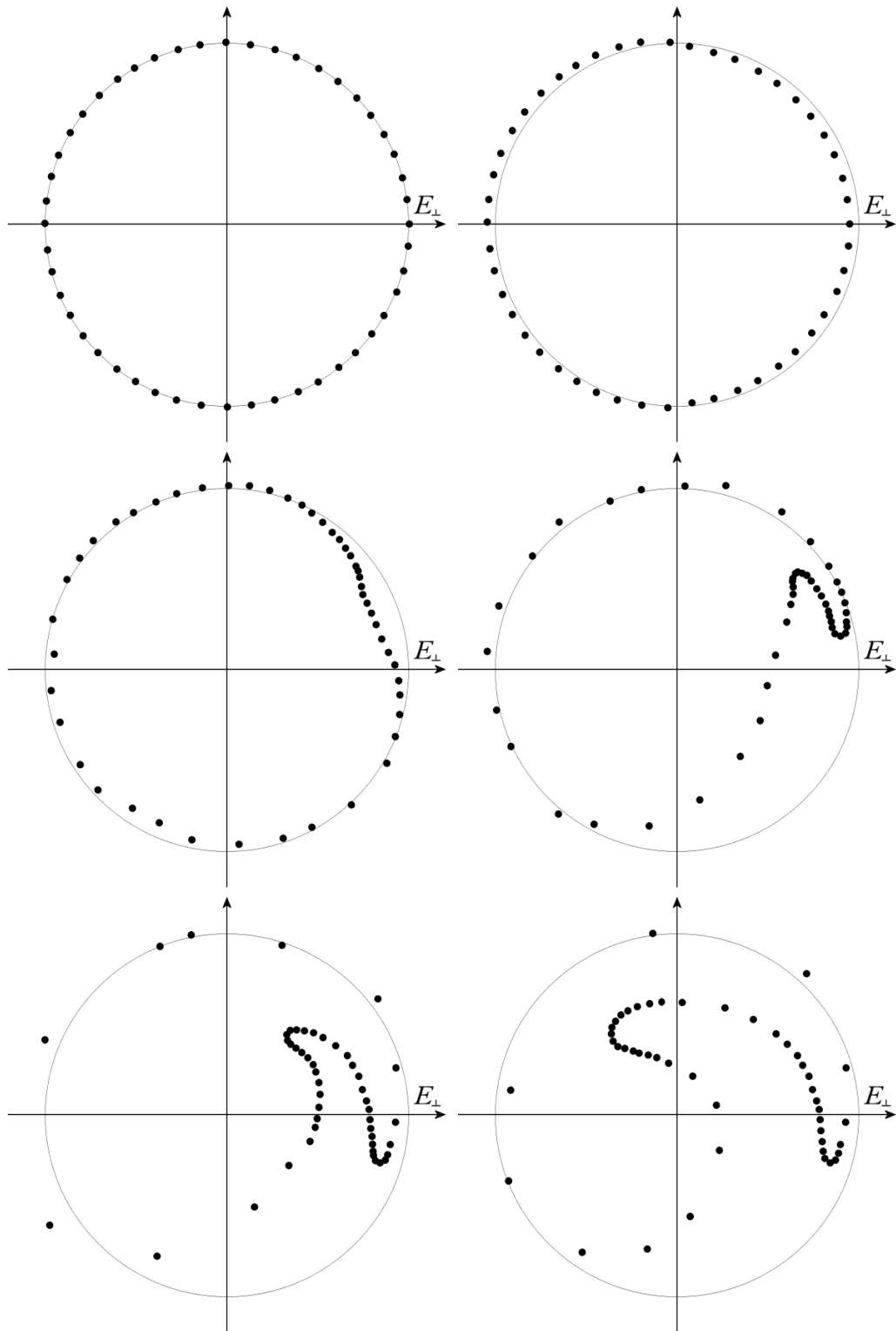
Έχοντας περιγράψει τη συνθήκη συντονισμού, θα παρουσιάσουμε αναλυτικά το φυσικό μηχανισμό μεταφοράς της ενέργειας από τα ηλεκτρόνια στο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Σύμφωνα με τη σχέση (1.2.4), για να υπάρξει αλληλεπίδραση μεταξύ της ηλεκτρονικής δέσμης και του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, θα πρέπει να ισχύει η συνθήκη συντονισμού (1.2.5). Παρ' όλα αυτά, η συνθήκη αυτή δεν περιέχει καμία πληροφορία για την κατεύθυνση και την ένταση της αλληλεπίδρασης, δηλαδή αν υπάρχει ενίσχυση ή απορρόφηση της ενέργειας του πεδίου και σε ποιο βαθμό. Το πρόσημο της (1.2.4) που καθορίζει την κατεύθυνση της αλληλεπίδρασης, εξαρτάται από τη φάση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου σε σχέση με τη φάση της εγκάρσιας ταχύτητας των ηλεκτρονίων. Για τις εφαρμογές ενίσχυσης του πεδίου που μας ενδιαφέρουν, ευνοϊκή σχετική φάση έχουμε όταν ισχύει  $\mathbf{E}_{RF} \cdot \mathbf{v}_\perp > 0$  και τα ηλεκτρόνια επιβραδύνονται, ενώ δυσμενής σχετική φάση έχουμε όταν  $\mathbf{E}_{RF} \cdot \mathbf{v}_\perp < 0$  και τα ηλεκτρόνια επιταχύνονται. Προφανώς, σε μια ηλεκτρονική δέσμη που εισέρχεται συνεχώς στην περιοχή αλληλεπίδρασης, οι σχετικές φάσεις ηλεκτρονίων-κύματος είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες στο διάστημα  $[0, 2\pi]$ . Επομένως, φαίνεται αρχικά παράδοξο πως μπορεί να προκύψει μια συνολική μεταφορά ενέργειας όταν τα μισά ηλεκτρόνια βρίσκονται σε περιοχή ευνοϊκής φάσης και τα υπόλοιπα μισά σε περιοχή

δυσμενούς φάσης.

Για να κατανοήθει ο μηχανισμός μεταφοράς της ενέργειας, αναφερόμαστε στο πολικό σύστημα συντεταγμένων της σχετικής φάσης ηλεκτρονίων-κύματος (Σχήμα 1.4), σε σύστημα που περιστρέφεται με τη συχνότητα του κύματος (η φάση του πεδίου εμφανίζεται συνεπώς σταθερή). Έτσι, με τη φορά του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.4, δυσμενείς είναι οι σχετικές φάσεις από  $90^\circ$  έως  $270^\circ$  και ευνοϊκές είναι οι σχετικές φάσεις από  $270^\circ$  έως  $360^\circ$  και από  $0^\circ$  έως  $90^\circ$ . Η ακτινική θέση των ηλεκτρονίων στο πολικό διάγραμμα αντιστοιχεί στο μέτρο της εγκάρσιας ορμής τους. Όπως αναφέραμε και πριν, κατά την είσοδο των ηλεκτρονίων στην περιοχή αλληλεπίδρασης στο πρώτο στιγμιότυπο του σχήματος 1.4, τα ηλεκτρόνια είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα σε όλες τις φάσεις. Για να υπάρξει επομένως ενίσχυση του κύματος σε ικανοποιητικό επίπεδο θα πρέπει να δρα ένας μηχανισμός ομαδοποίησης (bunching), ο οποίος κατά την εξέλιξη της αλληλεπίδρασης θα συγκεντρώνει τα ηλεκτρόνια στην περιοχή ευνοϊκών φάσεων. Ο κυρίαρχος μηχανισμός ομαδοποίησης υπεύθυνος για την αλληλεπίδραση ECM καλείται μηχανισμός σχετικιστικής αζιμουθιακής ομαδοποίησης (azimuthal relativistic bunching), καθώς ομαδοποιεί τα ηλεκτρόνια στην αζιμουθιακή διεύθυνση και όπως θα εξηγήσουμε αμέσως παρακάτω οφείλεται σε σχετικιστικά φαινόμενα.

Για λόγους απλότητας περιοριζόμαστε στην αλληλεπίδραση γυροτρονίου, στην οποία η μετατόπιση Doppler είναι αμελητέα. Η συμπερίληψη του όρου Doppler δεν αλλοιώνει τον συγκεκριμένο φυσικό μηχανισμό ομαδοποίησης, καθώς ο όρος Doppler μπορεί να ενσωματωθεί στη φάση της γωνιακής ταχύτητας των ηλεκτρονίων. Εάν η συνθήκη συντονισμού (1.2.7) ικανοποιείται με ακρίβεια, τότε η αλληλεπίδραση είναι ασθενής, καθώς προκύπτει ότι όσα ηλεκτρόνια χάνουν ενέργεια τόσα περίπου κερδίζουν και το συνολικό αποτέλεσμα είναι μικρό. Το κλειδί για την επίτευξη ενίσχυσης του πεδίου είναι η επιλογή της κυκλοτρονικής συχνότητας ώστε να ισχύει η ασθενής ανισότητα  $\omega_c \lesssim \omega$ . Στην περίπτωση αυτή, η φάση της ταχύτητας των ηλεκτρονίων καθυστερεί σε σχέση με αυτή του κύματος και η σχετική τους φάση συνεχώς μεταβάλλεται. Τα ηλεκτρόνια που βρίσκονται στην περιοχή ευνοϊκών φάσεων, επιβραδύνονται και καθώς χάνουν ενέργεια, η κυκλοτρονική τους συχνότητα λόγω μεταβολής του σχετικιστικού παράγοντα  $\gamma$  μεγαλώνει και επομένως πλησιάζει τη συχνότητα του κύματος. Αντιθέτως, τα ηλεκτρόνια που βρίσκονται σε περιοχή δυσμενών φάσεων επιταχύνονται, κερδίζουν ενέργεια και η κυκλοτρονική συχνότητα απομακρύνεται περισσότερο από τη συχνότητα του κύματος. Έτσι, τα ηλεκτρόνια έχουν την τάση να παραμείνουν περισσότερο χρόνο στην περιοχή ευνοϊκών φάσεων, απ' όσο στην περιοχή δυσμενών φάσεων.

Έξι στιγμιότυπα κατά τη διάρκεια της αλληλεπίδρασης απεικονίζονται στο Σχήμα 1.4. Στα πρώτα πέντε στιγμιότυπα, τα ηλεκτρόνια συγκεντρώνονται στην περιοχή ευνοϊκών φάσεων χάνοντας την ενέργειά τους. Ειδικά στο πέμπτο στιγμιότυπο, όπου η αλληλεπίδραση είναι μέγιστη, η συντριπτική πλειοψηφία των ηλεκτρονίων έχει χάσει ενέργεια, αποδίδοντας τη στο πεδίο, ενώ ελάχιστα είναι τα ηλεκτρόνια που κερδίζουν ενέργεια. Αν συνεχίσει η αλληλεπίδραση, τα ηλεκτρόνια περνούν μαζικά στην περιοχή δυσμενών φάσεων και απορροφούν ενέργεια από το πεδίο, όπως απεικονίζεται στο τελευταίο στιγμιότυπο. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται overbunching και στις μικροκυματικές πηγές είναι ανεπιθύμητο. Προφανώς, η αλληλεπίδραση πρέπει να τερματιστεί πριν τα ηλεκτρόνια αρχίσουν να απορροφούν ενέργεια από το πεδίο. Ο τερματισμός της αλληλεπίδρασης επιτυγχάνεται σχεδιάζοντας στο κατάλληλο μήκος το ηλεκτροδυναμικό σύστημα ή



Σχήμα 1.4: Η διαδικασία φασικής ομαδοποίησης των ηλεκτρονίων σύμφωνα με την αλληλεπίδραση ECM (Σχήμα 1.12 του [7]).

μειώνοντας απότομα το μαγνητικό πεδίο στην κατάλληλη θέση. Αντίστοιχα, εάν η κυκλοτρονική συχνότητα επιλεγεί ώστε να ισχύει  $s\omega_c \geq \omega$ , η διαδικασία είναι η αντίστροφη και έχουμε τότε μεταφορά ενέργειας από το πεδίο στα ηλεκτρόνια, όπως στους επιταχυντές.

Είδαμε με λεπτομέρεια τον κυρίαρχο φυσικό μηχανισμό της αλληλεπίδρασης ECM. Σημειώνουμε τον συλλογικό χαρακτήρα της αλληλεπίδρασης δέσμης-πεδίου, καθώς η κατανόηση της απαιτεί τη μελέτη της συμπεριφοράς του συνολικού πληθυσμού των ηλεκτρονίων. Συνήθως, στις μονορυθμικές προσομοιώσεις της αλληλεπίδρασης γυροτρονίου για μία δέσμη χωρίς διασπορές, ένας αριθμός περίπου στα τριάντα αντιπροσωπευτικά ηλεκτρόνια προσφέρει αρκετά ικανοποιητική ακρίβεια. Ο χαρακτήρας του αζιμουθιακού μηχανισμού ομαδοποίησης που περιγράψαμε είναι σχετικιστικός, καθώς αυτός συμβαίνει λόγω της διαμόρφωσης του σχετικιστικού παράγοντα  $\gamma$  και μπορεί να εξηγηθεί μόνο σχετικιστικά. Είναι αξιοσημείωτο πως στο γυροτρόνιο, όπου η ηλεκτρονική δέσμη είναι ήπια σχετικιστική, εξακολουθεί να είναι κυρίαρχος ο συγκεκριμένος σχετικιστικός μηχανισμός ομαδοποίησης.

Ταυτόχρονα με τον σχετικιστικό αζιμουθιακό μηχανισμό ομαδοποίησης λειτουργούν και άλλοι αντίστοιχοι μηχανισμοί, άλλοι προς την ίδια κατεύθυνση και άλλοι ανταγωνιστικά. Αναφέρουμε εν συντομία το φαινόμενο Weibel, που οφείλεται στη δράση της εγκάρσιας μαγνητικής συνιστώσας του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Ο συγκεκριμένος μηχανισμός ομαδοποίησης είναι αξονικός, καθώς διαμορφώνει την αξονική ταχύτητα που εμπεριέχεται στον όρο Doppler, ενώ δρα ανταγωνιστικά στη σχετικιστική αζιμουθιακή ομαδοποίηση [8]. Στο γυροτρόνιο, το φαινόμενο Weibel είναι αμελητέο καθώς για τους ρυθμούς κοντά στην αποκοπή οι εγκάρσιες μαγνητικές συνιστώσες του πεδίου είναι σχετικά πολύ μικρές. Σημαντικό ρόλο παίζει σε λυχνίες μακριά από την αποκοπή, όπως συγκεκριμένα στο CARM όπου συμβάλλει στο φαινόμενο του αυτοσυντονισμού. Στο [6] γίνεται εκτενής αναφορά και σε άλλους δευτερεύοντες μηχανισμούς ομαδοποίησης, σχετικιστικούς ή μη.

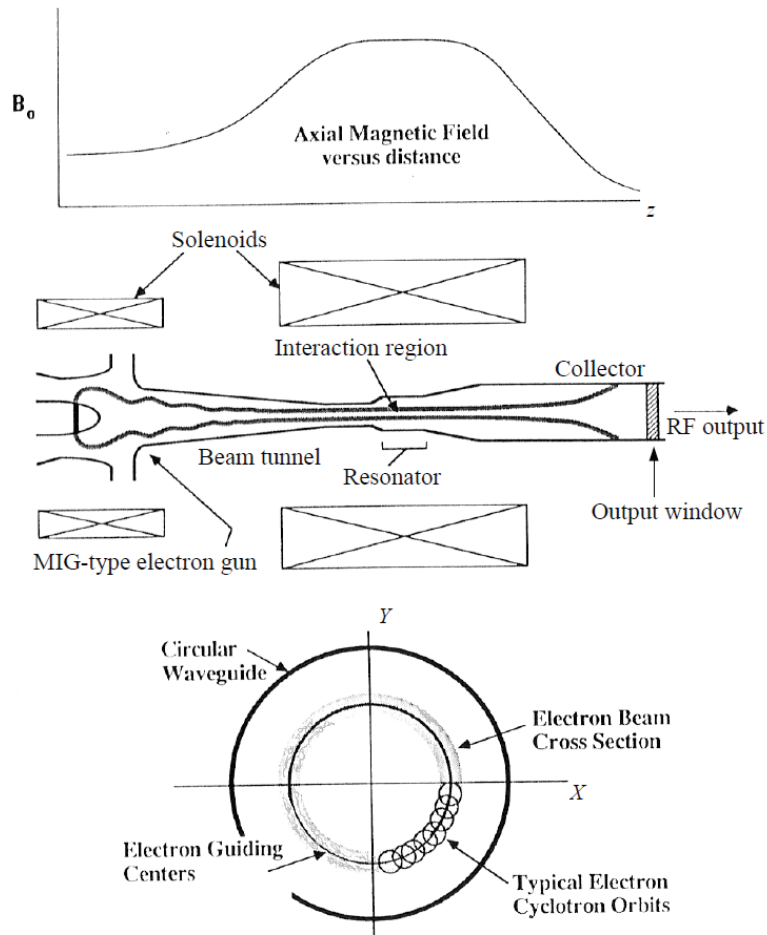
## 1.3 Το γυροτρόνιο

### 1.3.1 Μέρη και δομή του συμβατικού γυροτρονίου

Το γυροτρόνιο, ταυτόχρονα με την ανάπτυξη της θεωρίας του, έχει ωριμάσει τεχνολογικά σαν λειτουργική διάταξη παραγωγής μικροκυμάτων. Η δομή του γυροτρονίου ακολουθεί τη γενική δομή των μικροκυματικών πηγών που περιγράψαμε στην ενότητα 1.1, όπως αυτή συνοψίζεται στο Σχήμα 1.2. Μια απλουστευμένη απεικόνιση της τυπικής δομής του συμβατικού γυροτρονίου παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.5. Σε αυτό απεικονίζεται η μεταβολή του μαγνητοστατικού πεδίου κατά τον άξονα του γυροτρονίου, τα κυριότερα μέρη που συνθέτουν το συμβατικό γυροτρόνιο, καθώς και η εγκάρσια τομή της κοιλότητας αλληλεπίδρασης που περιλαμβάνει την ηλεκτρονική δέσμη και τις τροχιές των ηλεκτρονίων.

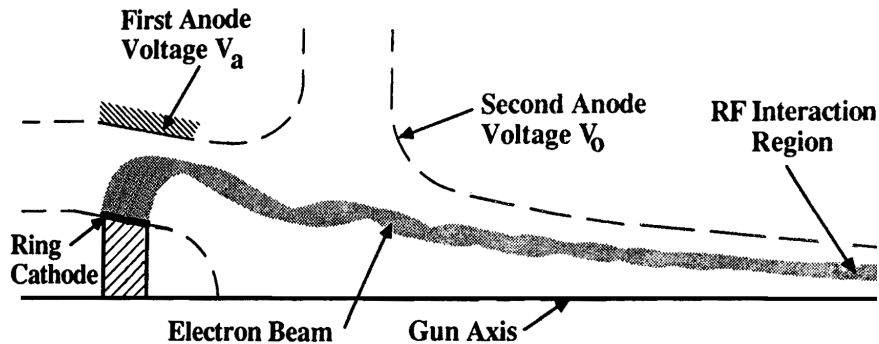
Το γυροτρόνιο έχει κυλινδρική συμμετρία και τοποθετείται μέσα σε ισχυρό μαγνητοστατικό πεδίο αξονικής διεύθυνσης, το οποίο δημιουργείται εξωτερικά από το σύστημα πηνίων ενός συνήθως υπεραγωγμού μαγνήτη. Η ηλεκτρονική δέσμη δημιουργείται από ένα σύστημα καθόδου-ανόδου τύπου MIG (Magnetron Injection Gun). Ο εκπομπός των ηλεκτρονίων, ο οποίος είναι δακτυλιοειδής και τοποθετείται στην κάθοδο, αποτελείται από υλικό με χαμηλό έργο εξαγωγής και θερμαινόμενος





Σχήμα 1.5: Στο πάνω σχήμα απεικονίζεται το αξονικό προφίλ του μαγνητοστατικού πεδίου στο γυροτρόνιο. Το μεσαίο σχήμα δείχνει την τυπική δομή και τα μέρη ενός συμβατικού γυροτρονίου. Στο κάτω σχήμα απεικονίζεται η εγκάρσια τομή στην περιοχή της κοιλότητας με τις τροχιές των ηλεκτρονίων. (Σχήμα 4.1 του [3])

εσωτερικά δημιουργεί την ηλεκτρονική δέσμη με θερμονική εκπομπή ηλεκτρονίων. Ο εκπομπός λειτουργεί σε συνθήκες θερμοκρασιακού περιορισμού (temperature-limited operation) [2], καθώς επιδιώκεται η ελαχιστοποίηση της δασποράς των ταχυτήτων των ηλεκτρονίων που είναι μεγαλύτερη σε συνθήκες περιορισμού φορτίου-χώρου (space-charge-limited operation). Τα ηλεκτρόνια, που εκπέμπονται με αμελητέα αρχική ταχύτητα, αμέσως επιταχύνονται λόγω της σταθερής διαφοράς δυναμικού που επιβάλλεται μεταξύ καθόδου και ανόδου. Ταυτόχρονα, λόγω του ισχυρού μαγνητοστατικού πεδίου ακολουθούν ελικοειδείς τροχιές γύρω από τις μαγνητικές γραμμές και κατευθύνονται προς την κοιλότητα αλληλεπίδρασης, αποφεύγοντας έτσι την πρόσκρουσή τους στην άνοδο. Στα Σχήματα 1.5 και 1.6 το σύστημα επιτάχυνσης της ηλεκτρονικής δέσμης που απεικονίζεται είναι τρίοδος, έχοντας ένα επιπλέον ηλεκτρόδιο ανόδου, του οποίου η ενδιάμεση τάση αποτελεί μια πρόσθετη ελεύθερη παράμετρος που χρησιμεύει στον έλεγχο των χαρακτηριστικών της δέσμης. Μια τέτοια βοηθητική άνοδος δεν είναι αναγκαίο χαρακτηριστικό ενός γυροτρονίου και



Σχήμα 1.6: Απλοποιημένη απεικόνιση της περιοχής του διαύλου δέσμης και της μαγνητικής συμπίεσης της δέσμης (Σχήμα 4.27 του [3]).

συνήθως για λόγους απλοποίησης της διάταξης απουσιάζει.

Η ηλεκτρονική δέσμη όταν περάσει την περιοχή της ανόδου έχει επιταχυνθεί στην επιθυμητή τάση και έχει διαμορφωθεί σε ένα δακτυλιοειδές σχήμα, όπου οι ακτίνες Larmor των ηλεκτρονίων είναι πολύ μικρότερες από την ακτίνα της δέσμης. Πριν η ηλεκτρονική δέσμη φτάσει στην περιοχή της κοιλότητας, θα πρέπει να αποκτήσει τα κατάλληλα χαρακτηριστικά που απαιτούνται για την αλληλεπίδραση. Συγκεκριμένα, θα πρέπει να επιτευχθούν οι κατάλληλες τιμές για τον λόγο ταχυτήτων  $\alpha = v_{\perp}/v_{\parallel}$ , την ακτινική θέση και το πάχος της δέσμης. Η απαραίτητη περιοχή στην οποία προσαρμόζονται τα χαρακτηριστικά αυτά της δέσμης, είναι ο δίαυλος της δέσμης (beam tunnel). Η προσαρμογή αυτή της δέσμης γίνεται με τη βοήθεια της αξονικής συνιστώσας του μαγνητοστατικού πεδίου, η οποία καθώς αυξάνεται προοδευτικά προς την περιοχή της κοιλότητας, προκαλεί τη μαγνητική συμπίεση (magnetic compression) της δέσμης. Συγκεκριμένα, οι ποσότητες  $p_{\perp}^2(z)/B_z(z)$  και  $S(z)B_z(z)$ , όπου  $p_{\perp}(z)$  η εγκάρσια συνιστώσα της σχετικιστικής ορμής και  $S(z)$  το εμβαδό της επιφάνειας που περικλείει η δακτυλιοειδής δέσμη, παραμένουν αδιαβατικά αμετάβλητες κατά την κίνηση των ηλεκτρονίων [2]. Έτσι, καθώς τα ηλεκτρόνια κινούνται προς μεγαλύτερες τιμές του μαγνητικού πεδίου, αυξάνει ο λόγος ταχυτήτων  $\alpha$ , ελαττώνεται η ακτίνα της δέσμης και αυξάνεται αντίστοιχα η πυκνότητα ρεύματος της. Με τον τρόπο αυτό συμβιβάζεται η περιορισμένη πυκνότητα ρεύματος που είναι ικανός να παράξει σε συνεχή λειτουργία ο εκπομπός (περίπου  $4 \text{ A/cm}^2$ ) με την αυξημένη πυκνότητα ρεύματος που απαιτείται στην κοιλότητα για παραγωγή υψηλής ισχύος μικροκυμάτων. Για να ικανοποιείται η αδιαβατική προσέγγιση της κίνησης των ηλεκτρονίων, ο ρυθμός αξονικής μεταβολής του μαγνητικού πεδίου θα πρέπει να είναι μικρός σε σχέση με το βήμα των ελικοειδών τροχιών. Επομένως, ο δίαυλος της δέσμης είναι ένα απαραίτητο μέρος των γυροτρονίων του οποίου το μήκος δεν μπορεί αυθαίρετα να περιοριστεί, καθώς καθορίζεται από τις απαιτήσεις διαμόρφωσης της δέσμης. Στο Σχήμα 1.6 απεικονίζεται η ενδιάμεση περιοχή μεταξύ καθόδου-ανόδου και κοιλότητας αλληλεπίδρασης, η οποία συνιστά τον δίαυλο της δέσμης. Στην παρούσα ενότητα περιοριζόμαστε στην περιγραφή της γενικής χρησιμότητας του διαύλου της δέσμης. Μιας και ο δίαυλος της δέσμης αποτελεί το αντικείμενο της παρούσας διατριβής, σε επόμενη ενότητα θα περιγράψουμε με λεπτομέρεια τα διάφορα είδη γεωμετρίας που συναντώνται στην πράξη και το φαινόμενο των παρασιτικών ταλαντώσεων σε αυτόν.

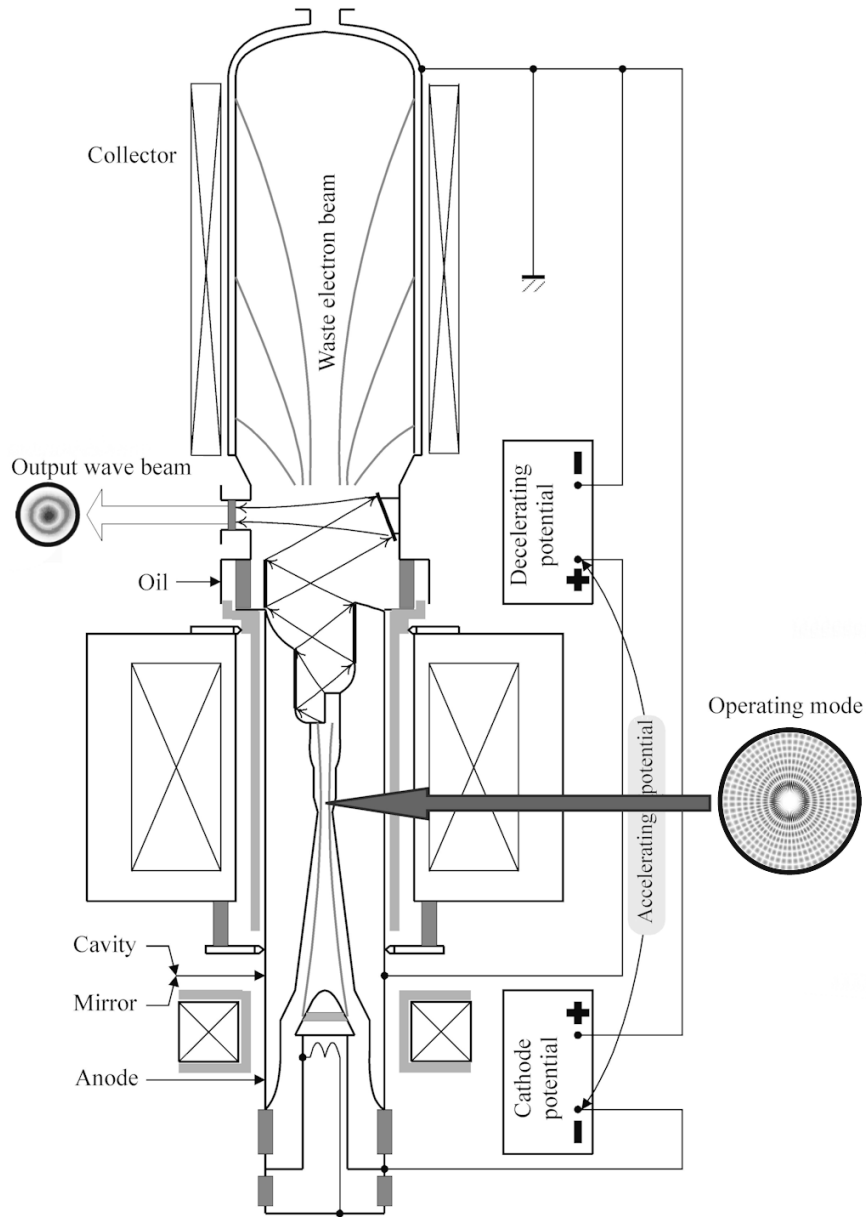
Η ηλεκτρονική δέσμη έχοντας αποκτήσει τα κατάλληλα χαρακτηριστικά,

εισέρχεται στην κοιλότητα του γυροτρονίου, η οποία αποτελεί και το ηλεκτροδυναμικό σύστημα όπου πραγματοποιείται η αλληλεπίδραση και η παραγωγή των μικροκυμάτων. Η κοιλότητα ουσιαστικά αποτελείται από έναν λείο κυλινδρικό κυματοδηγό με ήπια αξονική ανομοιογένεια στην ακτίνα του. Προς τη μεριά του διαύλου της δέσμης η ακτίνα του κυματοδηγού ελαττώνεται, ώστε ο ρυθμός να βρίσκεται στην αποκοπή και η ακτινοβολία να μην μπορεί να οδεύσει προς τα πίσω. Αντίθετα, στο άλλο της άκρο η ακτίνα του κυματοδηγού μεγάλωνει και επιτρέπει στον ρυθμό να οδεύσει προς την έξοδο του γυροτρονίου. Η ανομοιογένεια στην ακτίνα είναι αυτή που προκαλεί ανακλάσεις στον ρυθμό και σχηματίζεται έτσι μια ανοικτή κοιλότητα, η οποία μπορεί να διοχετεύσει την παραγόμενη ισχύ υπό τη μορφή των απωλειών περιθλάσης. Μιας και η κοιλότητα αποτελεί την "καρδιά" του γυροτρονίου, οι ρυθμοί που υποστηρίζονται σε αυτή και οι λεπτομέρειες της γεωμετρίας της θα αναλυθούν με λεπτόμερεια στην επόμενη ενότητα.

Στη συνέχεια, η παραγόμενη ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία από την κοιλότητα μπορεί να οδηγηθεί προς την έξοδο του γυροτρονίου. Παλαιότερα, ή σε γυροτρόνια χαμηλής ισχύος είχε επικρατήσει λόγω της απλότητάς της η αξονική έξοδος των μικροκυμάτων. Ο ρυθμός της κοιλότητας απλά συνέχιζε να κυματοδηγείται έως το παράθυρο των μικροκυμάτων που βρισκόταν στο τέλος του γυροτρονίου κάθετα στον άξονα. Η συγκεκριμένη μέθοδος εξαγωγής παρουσίαζε υψηλότερες ωμικές απώλειες λόγω μεγαλύτερης διαδρομής των μικροκυμάτων και ακαμψία στη σχεδίαση του συλλέκτη, αφού συλλέκτης και σύστημα εξόδου της ακτινοβολίας ήταν η μία και αυτή διάταξη.

Στα σύγχρονα γυροτρόνια υψηλής ισχύος έχει επικρατήσει η μέθοδος ακτινικής εξαγωγής των μικροκυμάτων, η οποία επιτυγχάνεται με σύστημα κατόπτρων που διαχωρίζει πλήρως τη μικροκυματική από την ηλεκτρονική δέσμη. Συγκεκριμένα, μετά την κοιλότητα ακολουθεί ένα τμήμα κυματοδηγού διεύρυνσης της ακτίνας (nonlinear up-taper) και στη συνέχεια ο ημι-οπτικός μετατροπέας ρυθμών (quasi-optical mode converter), ο οποίος με κατάλληλη κυματοειδή διαμόρφωση της ακτίνας μετατρέπει τον ρυθμό της κοιλότητας σε κάποιον διαφορετικό ρυθμό κατάλληλο για ακτινοβολία προς το σύστημα κατόπτρων. Η ακτινοβολία αυτή γίνεται με κατάλληλη τομή του κυματοδηγού (launcher), η οποία εκπέμπει τον κυματοδηγούμενο ρυθμό προς τα κάτοπτρα. Τα κάτοπτρα διορθώνοντας τη φάση και την κατανομή του πεδίου, διαμορφώνουν την ακτινοβολία σε γκαουσιανή δέσμη και την οδηγούν προς το παράθυρο εξόδου της ακτινοβολίας. Στις περισσότερες εφαρμογές σχηματίζεται μια μικροκυματική δέσμη υψηλού γκαουσιανού περιεχομένου (συνήθως πάνω από 95%), η οποία μπορεί με σύστημα κυματοδηγών και κατόπτρων να κυματοδηγηθεί προς το φορτίο με ευελιξία και χαμηλές ωμικές απώλειες στα τοιχώματα.

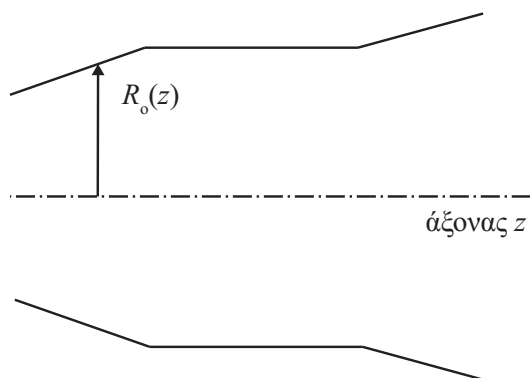
Τέλος, ιδιαίτερα σημαντικό μέρος του γυροτρονίου είναι το διηλεκτρικό παράθυρο μικροκυμάτων, το οποίο επιτρέπει την έξοδο της ακτινοβολίας από το γυροτρόνιο, ενώ παράλληλα σφραγίζει και απομονώνει το εσωτερικό της διάταξης που πρέπει να βρίσκεται υπό συνθήκες υψηλού κενού. Το παράθυρο πρέπει να είναι σε μεγάλο βαθμό διαφανές ως προς την παραγόμενη μικροκυματική ακτινοβολία και το διηλεκτρικό του υλικό να παρουσιάζει ιδιαίτερα μικρή γωνία απωλειών. Καθώς συνήθως απαιτείται η διέλευση από αυτό μικροκυματικής ακτινοβολίας της τάξης του MW σε συνεχή λειτουργία, οφείλει να παρουσιάζει μεγάλη ανθεκτικότητα στις μηχανικές του ιδιότητες και υψηλή θερμική αγωγιμότητα για την αποτελεσματική ψύξη του. Η σχετικά πρόσφατη ανάπτυξη της τεχνικής CVD (Chemical Vapour



Σχήμα 1.7: Σχηματική αναπαράσταση γυροτρονίου υψηλής ισχύος με ακτινική έξοδο των μικροκυμάτων.

Deposition) επέτρεψε την οικονομικά ανεκτή παρασκευή παραθύρων συνθετικού αδάμαντα που ικανοποιούν τις παραπάνω υψηλές απαιτήσεις. Έτσι, δόθηκε ώθηση στην περαιτέρω ανάπτυξη γυροτρονίων υψηλής ισχύος σε συνεχή λειτουργία που περιοριζόταν ως τότε από την έλλειψη ανθεκτικότητας του παραθύρου.

Στο Σχήμα 1.7 παρουσιάζουμε σε σχηματική αναπαράσταση ένα γυροτρόνιο μεγάλης ισχύος με ακτινική έξοδο μικροκυμάτων. Διακρίνονται τα μέρη του γυροτρονίου που περιγράψαμε, ο υπεραγωγίμος μαγνήτης και οι εφαρμοζόμενες τάσεις τροφοδοσίας του.



Σχήμα 1.8: Η κοιλότητα αλληλεπίδρασης του συμβατικού γυροτρονίου.

### 1.3.2 Η αλληλεπίδραση στην κοιλότητα του γυροτρονίου

Στην υποενότητα αυτή θα περιγράψουμε την κοιλότητα του συμβατικού γυροτρονίου και τα βασικά χαρακτηριστικά της αλληλεπίδρασης σε αυτήν. Η κοιλότητα του γυροτρονίου ουσιαστικά αποτελείται από τμήματα μεταλλικού κυλινδρικού κυματοδηγού με ήπια αξονική ανομοιογένεια της εξωτερικής ακτίνας. Στο Σχήμα 1.8 παρουσιάζεται η γενική αναπαράσταση της κοιλότητας του συμβατικού γυροτρονίου. Ουσιαστικά, αποτελείται από τρία τμήματα κυματοδηγού με διαφορετική κωνικότητα. Ο συντονιζόμενος ρυθμός της κοιλότητας σχηματίζεται στο μεσαίο τμήμα, το οποίο έχει σταθερή ακτίνα κατά μήκος του άξονα. Το πρώτο τμήμα έχει ελαττούμενη ακτίνα προς τον διάυλο της δέσμης και δεν επιτρέπει στον ρυθμό να διαφύγει προς τα πίσω, καθώς αυτός βρίσκεται στην αποκοπή σε αυτό. Το τρίτο τμήμα έχει αυξανόμενη ακτίνα ώστε να διοχετεύει την παραγόμενη μικροκυματική ισχύ προς το σύστημα εξόδου της ακτινοβολίας. Η ανάκλαση που δημιουργείται από τη μεταβολή της συμπεριφοράς της ακτίνας μεταξύ του μεσαίου και του δεξιού τμήματος σχηματίζει μια ανοικτή κοιλότητα που μπορεί να υποστηρίξει συντονιζόμενους ρυθμούς. Η ανάκλαση είναι σημαντική κυρίως για τους εγκάρσιους ρυθμούς που βρίσκονται κοντά στην αποκοπή. Έτσι, για τους ρυθμούς αυτούς οι απώλειες περιθλάσης της κοιλότητας προς τα δεξιά είναι μικρότερες και παρουσιάζουν μεγάλους συντελεστές ποιότητας της τάξης του 1000.

Το γεγονός ότι στην ανοικτή κοιλότητα οι συντονιζόμενοι ρυθμοί με μεγάλους συντελεστές ποιότητας σχηματίζονται από εγκάρσιους ρυθμούς κοντά στην αποκοπή, καθώς και η πραγματοποίηση της ανταλλαγής ενέργειας λόγω της αλληλεπίδρασης ECM στο εγκάρσιο επίπεδο, ευνοούν τη διέγερση ρυθμών TE και όχι ρυθμών TM. Αυτό συμβαίνει γιατί οι ρυθμοί TE κοντά στην αποκοπή έχουν πολύ πιο ισχυρό εγκάρσιο ηλεκτρικό πεδίο σε σχέση με τους ρυθμούς TM. Έτσι, η αλληλεπίδραση γυροτρονίου έχει να κάνει με τη συνεργασία της ηλεκτρονικής δέσμης με ρυθμούς TE κοντά στην αποκοπή.

Η έκφραση του ηλεκτρικού πεδίου ενός ρυθμού  $TE_{mp}$  μέσα στην κοιλότητα του γυροτρονίου παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$\mathbf{E}(R, \Phi, z, t) = \text{Re} \left[ E_0 f(z) \left[ \frac{jm}{R} J_m(k_{\perp mp}(z)R) \hat{\mathbf{R}} + k_{\perp mp}(z) J'_m(k_{\perp mp}(z)R) \hat{\Phi} \right] e^{-jm\Phi} e^{j\omega t} \right], \quad (1.3.1)$$

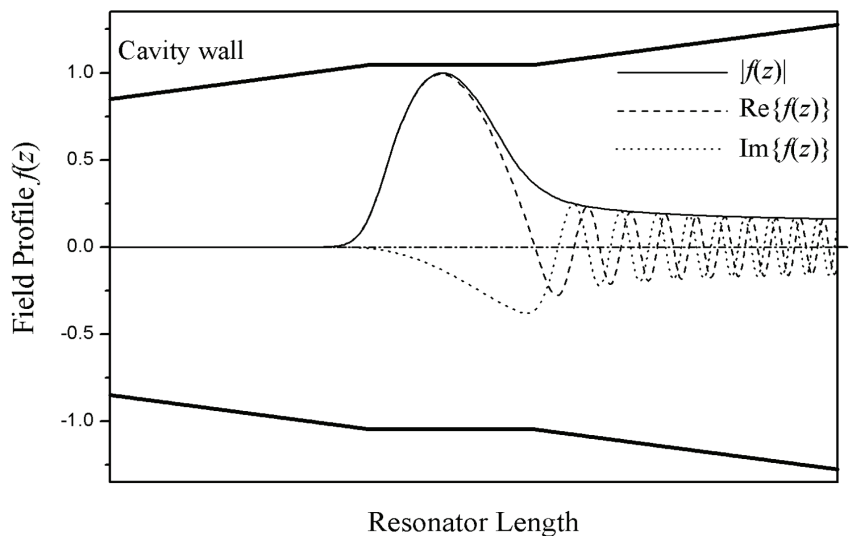
όπου τα  $R, \Phi$  συμβολίζουν την ακτινική και αζιμουθιακή συντεταγμένη του

κυλινδρικού συστήματος,  $m$ ,  $p$  είναι ο αξιωματικός και ακτινικός δείκτης του εγκάρσιου ρυθμού  $TE_{mp}$  με ιδιοτιμή  $\chi'_{mp}$  αντίστοιχα,  $E_0$  ο συντελεστής πλάτους του ρυθμού και  $J_m(x)$  η κυλινδρική συνάρτηση Bessel 1ου είδους. Ο εγκάρσιος κυματαριθμός  $k_{\perp mp}(z)$  εξαρτάται από το  $z$  καθώς λαμβάνεται υπ' όψιν η ήπια μεταβολή της εξωτερικής ακτίνας της κοιλότητας  $R_o(z)$  σύμφωνα με τη σχέση  $k_{\perp mp}(z) = \chi'_{mp}/R_o(z)$ . Η συγκεκριμένη αναλυτική μορφή του ρυθμού είναι προσεγγιστική και υποθέτει ήπια μεταβολή της ακτίνας των τοιχωμάτων, η οποία για τις πρακτικές περιπτώσεις κοιλοτήτων γυροτρονίου ικανοποιείται. Με  $f(z)$  συμβολίζουμε το κανονικοποιημένο ( $|f(z)| \leq 1$ ) αξονικό προφίλ πεδίου του ρυθμού και με  $\omega$  τη συχνότητα ταλάντωσής του. Τα μεγέθη αυτά στην κρύα διάταξη, δηλαδή χωρίς την ύπαρξη ηλεκτρονικής δέσμης, προκύπτουν από την επίλυση του προβλήματος ιδιοτιμών στην κοιλότητα.

Εφαρμόζοντας οριακές συνθήκες εξερχόμενων κυμάτων (outgoing-wave boundary conditions) στο αριστερό και στο δεξί άκρο της κοιλότητας, οι μη μηδενικές λύσεις του προβλήματος δίνουν τις μιγαδικές ιδιοσυχνότητες και τα αντίστοιχα ιδιοπεδία της κοιλότητας [9], [10]. Το πραγματικό μέρος της μιγαδικής ιδιοσυχνότητας είναι η συχνότητα συντονισμού, στην οποία ταλαντώνεται ο ρυθμός και το φανταστικό μέρος δίνει τον συντελεστή ποιότητας που αναπαριστά τις συνολικές απώλειες του ρυθμού και εκφράζει τη χρονική σταθερά απόσβεσης των πεδίων. Για κάθε συντονιζόμενο ρυθμό στην κοιλότητα προκύπτει και το αντίστοιχο αξονικό προφίλ πεδίου, το οποίο και χαρακτηρίζει τον αξονικό δείκτη του συντονιζόμενου ρυθμού. Για παράδειγμα στο Σχήμα 1.9 δίνεται το αξονικό προφίλ πεδίου ενός συντονιζόμενου ρυθμού με αξονικό δείκτη 1, αφού αυτό παρουσιάζει έναν λόβο στην αξονική διεύθυνση του μεσαίου τμήματος της κοιλότητας. Όπως μπορούμε να δούμε στο σχήμα, το μέτρο του προφίλ πεδίου είναι μηδενικό στο πρώτο τμήμα της κοιλότητας αφού εκεί ο ρυθμός βρίσκεται στην αποκοπή. Στο μεσαίο τμήμα το προφίλ πεδίου παίρνει τη μορφή ενός στάσιμου κύματος, το οποίο στο τρίτο τμήμα της κοιλότητας σχηματίζει οδεύον κύμα που διαρρέει προς την έξοδο και αποτελεί την ωφέλιμη ισχύ του γυροτρονίου αφού αφαιρεθούν οι απώλειες του συστήματος εξόδου της ακτινοβολίας. Η παραπάνω συμπεριφορά αποτυπώνεται στη σχέση του πραγματικού με το φανταστικό μέρος του αξονικού προφίλ.

Εκτός από τις απώλειες περίθλασης στο δεξί άκρο της κοιλότητας, υπάρχουν και ωμικές απώλειες στα τοιχώματα. Στην πράξη οι κοιλότητες των γυροτρονίων κατασκευάζονται από ενισχυμένα κράματα χαλκού που παρουσιάζουν βελτιωμένα χαρακτηριστικά θερμικής και ηλεκτρικής αγωγιμότητας στις υψηλές θερμοκρασίες. Η ηλεκτρική αγωγιμότητα όμως των κραμάτων αυτών είναι πεπερασμένη και οι ωμικές απώλειες που δημιουργούνται από τα υψίσυχνα ρεύματα του ρυθμού λειτουργίας σε γυροτρόνια υψηλής ισχύος είναι σημαντικές. Ουσιαστικά, η αποτελεσματική ψύξη της κοιλότητας σε γυροτρόνια συνεχούς κύματος υψηλής ισχύος είναι από τα πιο σημαντικά τεχνολογικά προβλήματα που περιορίζουν τη διαθέσιμη ισχύ των γυροτρονίων. Οι πεπερασμένες δυνατότητες ψύξης της κοιλότητας (που είναι της τάξης των  $2 \text{ kW/cm}^2$ ) επιβάλλουν τη σχεδίαση της κοιλότητας με αυξημένη ακτίνα και επομένως για δεδομένη συχνότητα απαιτείται η λειτουργία σε ρυθμό υψηλότερης τάξης.

Η παραπάνω απαίτηση για τη λειτουργία σε ρυθμούς υψηλής τάξης δημιουργεί στα γυροτρόνια υψηλής ισχύος και συχνότητας το πρόβλημα του ανταγωνισμού των ρυθμών. Καθώς αυξάνεται η τάξη των ρυθμών και η ιδιοτιμή τους, το φάσμα των ρυθμών πυκνώνει, με αποτέλεσμα η μονορυθμική λειτουργία του γυροτρονίου να



Σχήμα 1.9: Τυπικό προφίλ πεδίου ρυθμού  $TE_{mp,1}$  στην κοιλότητα του γυροτρονίου. (Σχήμα 1.10 του [11])

καθίσταται δύσκολη. Η διέγερση γειτονικών ρυθμών γίνεται εις βάρος του κύριου ρυθμού λειτουργίας, ο οποίος δεν μπορεί να φτάσει σε υψηλά επίπεδα ισχύος αφού καταπιέζεται ισχυρά από τον ανταγωνισμό των υπόλοιπων ρυθμών. Η αντιμετώπιση του φαινομένου αυτού οδήγησε στην ανάπτυξη των ομοαξονικών γυροτρονίων, τα οποία υπόσχονται βελτιωμένη συμπεριφορά ως προς τον ανταγωνισμό των ρυθμών. Συνοπτική παρουσίαση της αρχής λειτουργίας των ομοαξονικών γυροτρονίων θα δώσουμε στην επόμενη υποενότητα.

Ουσιαστικά, η επιλογή του κατάλληλου ρυθμού λειτουργίας από τη δέσμη γίνεται με δύο τρόπους. Ο πρώτος είναι η ρύθμιση του μαγνητοστατικού πεδίου στην κοιλότητα, ώστε να δημιουργείται η κατάλληλη κυκλοτρονική συχνότητα των πλεκτρονίων που βελτιστοποιεί την αλληλεπίδραση, καθώς η δέσμη συνεργάζεται με τον κύριο συντονιζόμενο ρυθμό, ο οποίος έχει την τάση να ταλαντώνεται στη συχνότητα συντονισμού του. Ο δεύτερος είναι η ρύθμιση της ακτίνας της δέσμης ώστε αυτή να τοποθετείται σε κάποιο μέγιστο του ρυθμού κατά την εγκάρσια διεύθυνση.

Η ακτινική δομή ενός ρυθμού της κοιλότητας έχει τη μορφή της κυλινδρικής συνάρτησης Bessel πρώτου είδους. Η συνάρτηση Bessel έχει κατά προσέγγιση το πρώτο της μέγιστο κοντά στην ακτινική θέση  $R_c = (|m|/\chi'_{mp})R_0$ , η οποία ονομάζεται και καυστική ακτίνα του ρυθμού. Η ακριβής ακτινική θέση βελτιστοποίησης της αλληλεπίδρασης προκύπτει από τη μεγιστοποίηση του λεγόμενου συντελεστή σύζευξης του ρυθμού (coupling factor):  $[J_{m-s}(k_{\perp mp}R_b)]^2$  [11], όπου  $s$  είναι η αρμονική της αλληλεπίδρασης και  $R_b$  η ακτίνα της δέσμης. Ουσιαστικά, το πλεκτρικό πεδίο του ρυθμού, όπως αυτό περιγράφεται από την (1.3.1), είναι ελλειπτικά πολωμένο στην εγκάρσια διεύθυνση. Η ελλειπτική πόλωση αναλύεται σε δύο κυκλικές πολώσεις, μία που περιστρέφεται κατά την ίδια φορά με τα πλεκτρόνια και μία που περιστρέφεται αντίθετα. Η πρώτη βρίσκεται σε συντονισμό με την κυκλοτρονική κίνηση των πλεκτρονίων και το σχετικό πλάτος της εκφράζεται στον συντελεστή σύζευξης. Σημειώνουμε ότι ο συντελεστής σύζευξης εξαρτάται από το πρόσημο του αζιμουθιακού δείκτη και επομένως ρυθμοί ίδιας ιδιοτιμής αλλά με διαφορετική φορά περιστροφής (πρόσημο του  $m$ ) έχουν διαφορετική σύζευξη με την πλεκτρονική δέσμη.

Αφού δώσαμε τα κύρια χαρακτηριστικά της αλληλεπίδρασης γυροτρονίου που συμβαίνει στην κοιλότητα, προχωράμε με την περιγραφή ενός διαφορετικού τύπου αλληλεπίδρασης που μπορεί να διεγείρει παρασιτικές ταλαντώσεις στον δίαυλο της δέσμης.

### 1.3.3 Αλληλεπίδραση με το εμπρός ή πίσω κύμα του ρυθμού - συνεκτική και απόλυτη αστάθεια

Όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, τα αξονικά προφίλ πεδίου των ρυθμών στο μεσαίο τμήμα της κοιλότητας (Σχήμα 1.9) συνιστούν ένα στάσιμο κύμα, το οποίο συντίθεται από συνιστώσες του κύματος που οδεύουν τόσο προς τα εμπρός όσο και προς τα πίσω σε σχέση με τη διάδοση της δέσμης. Στην αλληλεπίδραση γυροτρονίου η δέσμη συντονίζεται και αλληλεπιδρά με την εμπρός συνιστώσα του στάσιμου κύματος σύμφωνα με το διάγραμμα διασποράς του σχήματος 1.3(i). Η απαραίτητη ανάδραση των πεδίων για την ενίσχυση και τη συντήρηση της αλληλεπίδρασης προέρχεται από την ανάκλαση του ενισχυμένου κύματος στη γωνία μεταξύ του δεύτερου και του τρίτου τμήματος. Η επιστροφή μέρους του ενισχυμένου κύματος στην κοιλότητα αυξάνει την ένταση των πεδίων μέσα σε αυτή και επιτρέπει την περαιτέρω ενίσχυση της αλληλεπίδρασης σε υψηλότερο επίπεδο ισχύος. Η διαδικασία έρχεται σε ισορροπία, όταν τα πλάτη των πεδίων, λόγω του μη γραμμικού χαρακτήρα των εξισώσεων της αλληλεπίδρασης, εισέλθουν στη μη γραμμική περιοχή και φτάσουν στον κορεσμό. Χαρακτηριστικό της αλληλεπίδρασης με το εμπρός κύμα των ρυθμών (εμπρός αλληλεπίδραση, forward interaction) είναι ότι το σχήμα του προφίλ πεδίου δεν αλλοιώνεται σημαντικά από την παρουσία της δέσμης σε σχέση με το αντίστοιχο της κρύας διάταξης [12]. Παρ' όλα αυτά, για προσομοιώσεις ακριβείας που απαιτούνται στα γυροτρόνια υψηλής ισχύος, η επίδραση της δέσμης στο αξονικό προφίλ των πεδίων οφείλει να λαμβάνεται υπ' όψιν με μια αυτοσυνεπή θεώρηση της αλληλεπίδρασης. Η αλληλεπίδραση γυροτρονίου προέρχεται από μια συνεκτική αστάθεια (convective instability) [6], στην οποία η δέσμη και το κύμα οδεύουν προς την ίδια κατεύθυνση και η ανάδραση προκύπτει εξωτερικά από τις ανακλάσεις της κοιλότητας. Χαρακτηριστικό του τύπου αυτού της αλληλεπίδρασης είναι ότι η συχνότητα του ρυθμού μένει κλειδωμένη κοντά στη συχνότητα συντονισμού της κρύας κοιλότητας και δεν μεταβάλλεται ισχυρά με τη μεταβολή των ιδιοτήτων της δέσμης (κυκλοτρονική συχνότητα και τάση).

Σε αντίθεση με την αλληλεπίδραση γυροτρονίου, η δέσμη μπορεί να αλληλεπιδράσει και με πίσω συνιστώσες του κύματος που οδεύουν προς την αντίθετη κατεύθυνση σε σχέση με αυτήν. Η αλληλεπίδραση αυτή καλείται πίσω αλληλεπίδραση (backward interaction) και είναι διαφορετικής φύσης από την εμπρός αλληλεπίδραση. Ουσιαστικά, η πίσω αλληλεπίδραση οφείλεται σε απόλυτη αστάθεια (absolute instability) [6], καθώς η ανάδραση των πεδίων με τη δέσμη δεν προέρχεται από τις εξωτερικές ανακλάσεις της κοιλότητας αλλά προκύπτει αποκλειστικά στο εσωτερικό της δέσμης, καθώς τα ηλεκτρόνια και το κύμα οδεύουν προς αντίθετες κατευθύνσεις. Τα αξονικά προφίλ πεδίου στην περίπτωση αυτή δεν συνδέονται καθόλου με αυτά της κρύας κοιλότητας και σχηματίζονται εξολοκλήρου από τη δράση της δέσμης [6]. Για το λόγο αυτό, η προσομοίωση αυτού του τύπου της αλληλεπίδρασης μπορεί να γίνει ορθά μόνο με μία αυτοσυνεπή θεώρηση της αλληλεπίδρασης που περιλαμβάνει και την επίδραση της δέσμης στα πεδία [13].

Αστάθεια και αλληλεπίδραση αυτού του τύπου συναντάται στους



γυρο-ταλαντωτές επιστρέφοντος κύματος (gyro-BWO) σύμφωνα με την καμπύλη διασποράς του σχήματος 1.3(ii). Επίσης, παρασιτική αλληλεπίδραση αυτού του τύπου μπορεί να παρατηρηθεί σε διατάξεις μικρών γυροτρονίων [14] ή gyro-TWT [15], όπου το φάσμα των συντονιζόμενων ρυθμών είναι αραιό. Υπάρχουν σημαντικές ενδείξεις ότι τέτοιου είδους αλληλεπίδραση συμβαίνει και στον δίαυλο της δέσμης [16], όπως θα συζητήσουμε με λεπτομέρεια σε επόμενη ενότητα. Χαρακτηριστικό αυτής της αλληλεπίδρασης είναι η δυνατότητα συνεχούς ρύθμισης της συχνότητας με τη μεταβολή του μαγνητοστατικού πεδίου ή της τάσης, αφού αυτή δεν είναι κλειδωμένη στη συχνότητα συντονισμού ενός συντονιζόμενου ρυθμού της κοιλότητας, καθώς η ανάδραση με τη δέσμη γίνεται εσωτερικά και δεν οφείλεται στις εξωτερικές ανακλάσεις της κοιλότητας.

Στην παραπάνω διάκριση μεταξύ της εμπρός και της πίσω αλληλεπίδρασης θα επανέλθουμε στη συνέχεια, όταν ασχοληθούμε με τις παρασιτικές ταλαντώσεις στον δίαυλο της δέσμης. Οι ιδιότητες για τον κάθε τύπο αλληλεπίδρασης που παρουσιάσαμε εδώ θα χρησιμεύσουν για να αναλύσουμε τις παρασιτικές ταλαντώσεις και τις μεθόδους προσομοίωσής τους στον υπολογιστή.

### 1.3.4 Επιδόσεις του συμβατικού γυροτρονίου και παραλλαγές του

Το γυροτρόνιο τις τελευταίες δεκαετίες έχει γνωρίσει μεγάλη ανάπτυξη και έχει ωριμάσει τεχνολογικά επιδεικνύοντας σημαντική αξιοπιστία και εντυπωσιακές επιδόσεις. Η κυριότερη εφαρμογή που οδηγεί την έρευνα των γυροτρονίων είναι οι απαιτήσεις των αντιδραστήρων ελεγχόμενης θερμοπυρηνικής σύντηξης σε χλιοστρομετρική ακτινοβολία υψηλής ισχύος για τη θέρμανση του πλάσματος μέσω του ηλεκτρονικού κυκλοτρονικού συντονισμού (Electron Cyclotron Resonance Heating, ECRH), για την ηλεκτρονική κυκλοτρονική οδήγηση ρεύματος (Electron Cyclotron Current Drive, ECCD), για τον έλεγχο ασταθειών του πλάσματος και για διαγνωστικούς σκοπούς. Το πλέον πρωτοποριακό πεδίο έρευνας, που έχει ήδη αποδώσει λειτουργικές διατάξεις συνεχούς κύματος, είναι η ανάπτυξη της σειράς γυροτρονίων 170 GHz, 1 MW για το ITER συνολικής απόδοσης πάνω από 50%, που θα εξοπλίσει το σύστημα ECRH του διεθνούς αντιδραστήρα συνολικής ισχύος 26 MW [17]. Οι κύριοι συμμετέχοντες στην ερευνητική προσπάθεια που αναπτύσσουν διαφορετικές υλοποιήσεις γυροτρονίων για το ITER, είναι η Ευρώπη, η Ρωσική Ομοσπονδία και η Ιαπωνία. Επίσης, γυροτρόνια υψηλής ισχύος συνεχούς κύματος έχουν αναπτυχθεί και λειτουργούν για τον stellarator W7-X (1 MW, 140 GHz) και για τα tokamak DIII-D, JT-60, ASDEX-Upgrade και άλλα. Μια πρόσφατη σύνοψη των πειραματικών αποτελεσμάτων γυροτρονίων υψηλής ισχύος για εφαρμογές σύντηξης μπορεί να βρεθεί στο [18], ενώ ήδη εκπονούνται θεωρητικές μελέτες για τη μελλοντική γενιά γυροτρονίων 240-300 GHz για το DEMO [19-21].

Μία εφαρμογή των γυροτρονίων που βρίσκεται τα τελευταία χρόνια σε μεγάλη ανάπτυξη είναι η φασματοσκοπία μαγνητικού πυρηνικού συντονισμού με ενίσχυση δυναμικής πόλωσης του πυρήνα (Dynamic Nuclear Polarization - Nuclear Magnetic Resonance, DNP-NMR) [22]. Η χρήση ακτινοβολίας στην υποχλιοστομετρική περιοχή μπορεί να αυξήσει την ευαισθησία της κλασικής μεθόδου NMR κατά έναν παράγοντα της τάξης του 100, προσφέροντας σημαντική βελτίωση στις μετρήσεις φασματοσκοπίας. Γυροτρόνια που αποδίδουν δεκάδες ή και εκατοντάδες Watt σε πολύ υψηλές συχνότητες έως και πάνω από 1000 GHz έχουν αναπτυχθεί και χρησιμοποιούνται για την έρευνα στη συγκεκριμένη επιστημονική περιοχή [14, 23].

Τα τελευταία χρόνια η τεχνολογία των THz γνωρίζει ραγδαία ανάπτυξη με τα γυροτρόνια να παίζουν τον κυρίαρχο ρόλο ως πηγές στη συγκεκριμένη ανεξερεύνητη έως πρόσφατα περιοχή του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος.

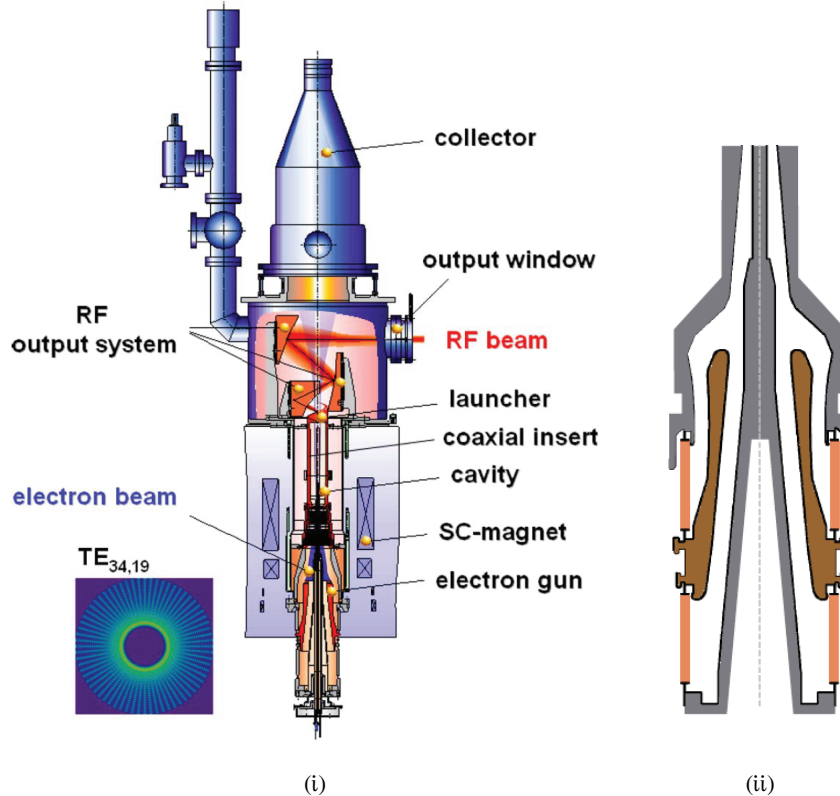
Τέλος, συνοπτικά μόνο αναφέρουμε τις βιομηχανικές εφαρμογές των γυροτρονίων κυρίως για επεξεργασία υλικών, τη χρήση τους ως πηγές σε χιλιοστρομετρικά ραντάρ για εφαρμογές μετεωρολογίας ή διαστημικής επισκόπησης και πιθανές μελλοντικές εφαρμογές σε επιταχυντές υψηλών ενεργειών. Λεπτομερής περιγραφή των συγκεκριμένων εφαρμογών γίνεται στο [5], ενώ μια εξαντλητική λίστα με τις επιδόσεις γυροτρονίων και άλλων γυροδιατάξεων μπορεί να βρεθεί στο [24]. Στο [25] μπορεί να βρεθεί μια αναλυτική ιστορική αναδρομή της εξέλιξης του γυροτρονίου αλλά και των υπόλοιπων γυροδιατάξεων.

Αναμφισβήτητα, το συμβατικό γυροτρόνιο έχει γνωρίσει τη μεγαλύτερη ανάπτυξη σε σχέση με τις υπόλοιπες γυροδιατάξεις. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε συνοπτικά τις κυριότερες παραλλαγές του γυροτρονίου που έχουν αναπτυχθεί προς την κατεύθυνση της αντιμετώπισης των περιορισμών και της βελτίωσης των επιδόσεων του συμβατικού γυροτρονίου.

### Ομοαξονικό γυροτρόνιο

Η σημαντικότερη και πλέον αναπτυγμένη τεχνολογικά παραλλαγή του γυροτρονίου είναι το ομοαξονικό γυροτρόνιο. Το ομοαξονικό γυροτρόνιο είναι σε μεγάλο βαθμό όμοιο με το συμβατικό με τη διαφορά ότι διαθέτει ένα αγωγίμο ομοαξονικό στέλεχος που ξεκινώντας από τη βάση του γυροτρονίου, διαπερνά κάθεδο και κοιλότητα και τελειώνει περίπου στην αξονική θέση του μετατροπέα ρυθμού. Η κύρια λειτουργία του ομοαξονικού στελέχους είναι η αντιμετώπιση του ανταγωνισμού των ρυθμών μέσω της επιλεκτικής καταπίεσης των κυριότερων ανταγωνιστών του ρυθμού λειτουργίας. Συγκεκριμένα, με κατάλληλη σχεδίαση του ομοαξονικού στελέχους που περιλαμβάνει ήπια μεταβολή της ακτίνας του, μπορούν να τροποποιηθούν οι απώλειες περίθλασης και οι ωμικές απώλειες των ρυθμών, ώστε αυτές να αυξάνονται για τους κύριους ανταγωνιστές του ρυθμού λειτουργίας. Έτσι, οι συντελεστές ποιότητας των ανταγωνιστών ελαττώνονται, με συνέπεια την αύξηση των ρευμάτων εκκίνησής τους και την επίτευξη βελτιωμένης μονορυθμικής λειτουργίας του γυροτρονίου [26]. Η επίδραση στους συντελεστές ποιότητας μπορεί να ενισχυθεί περαιτέρω με την εισαγωγή διαμήκους ρυτίδωσης με κατάλληλο βάθος κατά μήκος του ομοαξονικού στελέχους [27]. Εισαγωγή επιπλέον ρυτιδώσεων στο εξωτερικό τοίχωμα υπόσχεται ακόμα πιο βελτιωμένα χαρακτηριστικά ως προς τον ανταγωνισμό των ρυθμών [28].

Ένα εξίσου σημαντικό πλεονέκτημα των ομοαξονικών γυροτρονίων είναι ο περιορισμός του φαινομένου της πτώσης τάσης της δέσμης λόγω του χωρικού της φορτίου (voltage depression). Στα συμβατικά γυροτρόνια η τάση στην ακτινική θέση της δέσμης είναι μικρότερη από την τάση επιτάχυνσης μεταξύ ανόδου-καθόδου κατά αρκετά kV λόγω της ύπαρξης του χωρικού φορτίου της ίδιας της δέσμης. Αυτή η διαφορά μεταξύ της τάσης δέσμης και της τάσης ανόδου-καθόδου, η οποία αφαιρείται από την κινητική και παραμένει σαν δυναμική ενέργεια της δέσμης, δεν συνεισφέρει στην αλληλεπίδραση ρίχνοντας τη συνολική απόδοση του γυροτρονίου. Επίσης, όταν η πτώση τάσης είναι σημαντική, αυξάνεται η διασπορά στις ταχύτητες των ηλεκτρονίων και περιορίζεται το συνολικό ρεύμα της δέσμης που μπορεί να διαδοθεί στην κοιλότητα (Κεφάλαιο 5 του [5]). Στα ομοαξονικά γυροτρόνια, το



Σχήμα 1.10: (i) Ευρωπαϊκό ομοαξονικό γυροτρόνιο 170 GHz, 2 MW (Σχήμα 1 του [29]) και (ii) λεπτομέρεια από την κάθοδο τύπου coaxial MIG (Σχήμα 1 του [30]).

εσωτερικό στέλεχος που είναι γειωμένο, τροποποιεί το ηλεκτροστατικό πρόβλημα και μειώνει σημαντικά την πτώση τάσης λόγω χωρικού φορτίου. Έτσι, επιτυγχάνεται μεγαλύτερη συνολική απόδοση και βελτιωμένα χαρακτηριστικά σε σχέση με τα συμβατικά γυροτρόνια.

Στα ομοαξονικά γυροτρόνια χρησιμοποιούνται ειδικές διατάξεις πηγών ηλεκτρονίων τύπου Coaxial Magnetron Injection Gun (CMIG), που επιτρέπουν τη διέλευση του εσωτερικού ομοαξονικού στελέχους όπως στο Σχήμα 1.10(ii). Επίσης, στα ομοαξονικά γυροτρόνια η πηγή της δέσμης μπορεί να είναι τύπου (Inverse MIG, IMIG), όπου ο εκπομπός βρίσκεται στο εσωτερικό της κοίλης καθόδου εκπέμποντας τα ηλεκτρόνια κατ' ευθείαν προς το εσωτερικό στέλεχος [31]. Παρά τις τεχνολογικές προκλήσεις, όπως η στήριξη και η ευθυγράμμιση του εσωτερικού στελέχους, τα ομοαξονικά γυροτρόνια έχουν επιδείξει εντυπωσιακές επιδόσεις που προδιαθέτουν για τη μελλοντική επικράτησή τους [32]. Ενδεικτικά αναφέρουμε το Ευρωπαϊκό ομοαξονικό γυροτρόνιο των 170 GHz (Σχήμα 1.10(i), που σε παλμική λειτουργία έχει αποδώσει στιγμιαία ισχύ 2.2 MW. Καθώς στο μέλλον αναμένεται με μεγάλη πιθανότητα η σταδιακή επικράτηση των ομοαξονικών γυροτρονίων, ένα μέρος της διατριβής αφιερώνεται στην ανάπτυξη του μοντέλου και στη μελέτη γεωμετρικών διαύλων δέσμης που περιλαμβάνουν ομοαξονικό στέλεχος.

### Ημι-οπτικό γυροτρόνιο

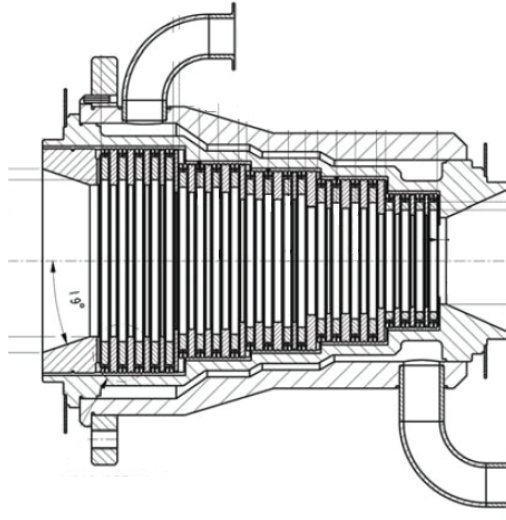
Η ιδιαιτερότητα του ημι-οπτικού γυροτρονίου είναι το ηλεκτροδυναμικό του σύστημα, το οποίο αποτελείται από έναν ανοιχτό ταλαντωτή δύο κατόπτρων [33]. Το ένα ή και τα δύο κάτοπτρα διαθέτουν κατάλληλη σχισμή, από την οποία η ωφέλιμη ακτινοβολία απομακρύνεται με απλό τρόπο κατά την εγκάρσια διεύθυνση. Το πλεονέκτημα του ημι-οπτικού γυροτρονίου είναι ότι το φάσμα των συντονιζόμενων ρυθμών είναι σχετικά αραιό, καθώς η κοιλότητα που σχηματίζεται από τα κάτοπτρα είναι ανοιχτή στην εγκάρσια διεύθυνση με αποτέλεσμα να εισάγονται σημαντικές απώλειες περίθλασης σε πολλούς ρυθμούς και να βελτιώνεται η επιλεκτικότητα ως προς τον κύριο ρυθμό λειτουργίας. Επίσης, οι ωμικές απώλειες είναι εν γένει μικρότερες αφού τα κάτοπτρα μπορούν να τοποθετηθούν σε μεγάλη απόσταση μεταξύ τους παρέχοντας επίσης περισσότερο χώρο για την αλληλεπίδραση.

Το πρόβλημα με τα ημι-οπτικά γυροτρόνια είναι ότι δεν ταιριάζουν στην εγκάρσια δομή του πεδίου οι κυλινδρικές δέσμες που συναντάμε στα συμβατικά γυροτρόνια. Λόγω της ευθύγραμμης κατανομής των πεδίων, τα πλεονεκτήματα των ημι-οπτικών γυροτρονίων μπορούν να αξιοποιηθούν μόνο με τη χρήση ηλεκτρονικών δεσμών ορθογωνικής εγκάρσιας διατομής (sheet beam), που είναι ικανές να οδηγήσουν μεγάλα ρεύματα σε έναν επίσης αυξημένο διαθέσιμο χώρο για την αλληλεπίδραση. Το ζήτημα όμως με αυτού του είδους τις δέσμες είναι ότι δεν μπορούν να διατηρήσουν το σχήμα τους, που παραμορφώνεται λόγω της ολίσθησης  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ . Γενικά, τα ημι-οπτικά γυροτρόνια δεν έχουν γνωρίσει μεγάλη ανάπτυξη, καθώς η σχεδίαση και κατασκευή των κατάλληλων διατάξεων για την παραγωγή και οδήγηση ηλεκτρονικής δέσμης ορθογωνικής διατομής, έχει συναντήσει δυσκολίες. Ένας τύπος διαύλου δέσμης που διατηρεί το σχήμα μιας ηλεκτρονικής δέσμης ελλειψοειδούς σχήματος, η οποία προσομοιάζει σε μεγάλο βαθμό δέσμη ορθογωνικής διατομής, έχει προταθεί στο [34]. Τέλος, με βάση τη θεωρία λειτουργίας του ημι-οπτικού γυροτρονίου στο [7] έχει ερευνηθεί μια διάταξη που μπορεί να ενισχύσει σημαντικά μια γκαουσιανή δέσμη μικροκυμάτων υψηλής ισχύος από την έξοδο ενός γυροτρονίου, μέσω της αλληλεπίδρασης με μια ηλεκτρονική δέσμη ορθογωνικής διατομής.

### Γυροτρόνιο μεγάλης τροχιάς

Στο γυροτρόνιο μεγάλης τροχιάς, τα κέντρα περιστροφής των ηλεκτρονίων βρίσκονται πάνω στον άξονα της κυλινδρικής κοιλότητας. Έτσι, η ακτίνα της δέσμης ταυτίζεται πρακτικά με την ακτίνα Larmor των ηλεκτρονίων, τα οποία κατά την κυκλοτρονική τους κίνηση περικλείουν τον άξονα του γυροτρονίου. Με τον τρόπο αυτό τα ηλεκτρόνια μπορούν να αλληλεπιδράσουν μόνο με ρυθμούς που περιστρέφονται κατά την ίδια φορά με αυτά, αποκλείοντας έτσι τους υποψήφιους ανταγωνιστές ρυθμούς που έχουν το αντίθετο πρόσημο του αζιμουθιακού δείκτη. Επίσης, τα γυροτρόνια μεγάλης τροχιάς μπορούν να λειτουργήσουν άμεσα σε υψηλότερες αρμονικές, προσφέροντας έτσι μεγαλύτερη συχνότητα λειτουργίας για δεδομένο μαγνητικό πεδίο.

Τα γυροτρόνια μεγάλης τροχιάς έχουν γνωρίσει περιορισμένη ανάπτυξη, καθώς για τη δημιουργία δέσμης που περικλείει τον άξονα (axis-encircling beam) απαιτούνται πιο σύνθετες διατάξεις πηγών ηλεκτρονίων. Επίσης, λόγω της ελάττωσης της ακτίνας Larmor με την αύξηση της συχνότητας και τις αυξημένες απαιτήσεις ευθυγράμμισης της δέσμης, τα γυροτρόνια μεγάλης τροχιάς βρίσκουν πρακτικό όριο στο μέγιστο μαγνητικό πεδίο που μπορεί να εφαρμοσθεί, με αποτέλεσμα να περιορίζεται σε



Σχήμα 1.11: Μηχανολογικό σχέδιο διαύλου δέσμης εναλλασσόμενων μεταλλικών-διηλεκτρικών δαχτυλιδιών (stacked beam tunnel).

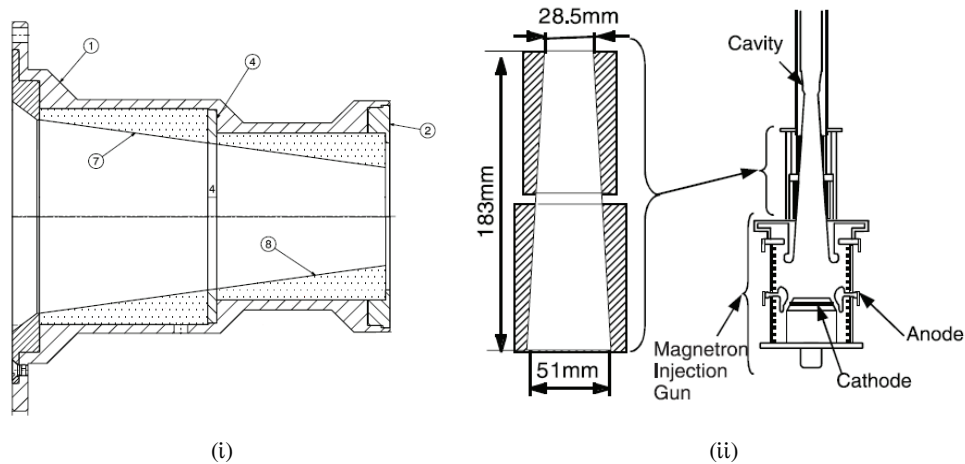
χαμηλές συχνότητες λειτουργίας, όταν η αλληλεπίδραση γίνεται σε χαμηλότερες αρμονικές. Έτσι, για την παραγωγή υψηλότερων συχνοτήτων γίνεται αναγκαστική η λειτουργία σε υψηλές αρμονικές, οι οποίες όμως προσφέρουν μειωμένη απόδοση [25].

## 1.4 Ο διάυλος της δέσμης

### 1.4.1 Τύποι διαύλου δέσμης γυροτρονίων υψηλής ισχύος

Όπως περιγράψαμε στην υποενότητα 1.3.1 ο διάυλος της δέσμης είναι ένα απαραίτητο μέρος του γυροτρονίου, στο οποίο η δέσμη προσαρμόζεται για να λάβει τα κατάλληλα χαρακτηριστικά πριν εισέλθει στην κοιλότητα αλληλεπίδρασης. Προκειμένου η δέσμη να μην διεγείρει παρασιτικές ταλαντώσεις στην περιοχή του διαύλου δέσμης, εισάγονται σε αυτόν διηλεκτρικά υλικά με απώλειες που μειώνουν τα ρεύματα εκκίνησης των παρασιτικών ρυθμών. Στα γυροτρόνια υψηλής ισχύος συναντώνται διαφορετικοί τύποι διαύλων δέσμης που θα περιγράψουμε αμέσως.

Ο πρώτος τύπος διαύλου δέσμης απεικονίζεται στο Σχήμα 1.11. Η κατασκευή του προκύπτει από τη συγκόλληση πολλών εναλλασσόμενων μεταλλικών και διηλεκτρικών δαχτυλιδιών (stacked beam tunnel). Τα μεταλλικά δαχτυλίδια έχουν ελαφρώς μικρότερη εσωτερική ακτίνα σε σχέση με τα διηλεκτρικά δαχτυλίδια, ώστε τα τελευταία να προστατεύονται από ηλεκτροστατική φόρτιση που μπορεί να προκληθεί από την πρόσπτωση διαφεύγοντων ηλεκτρονίων της δέσμης. Επίσης, η εσωτερική ακτίνα των μεταλλικών δαχτυλιδιών έχει το απαραίτητο χαρακτηριστικό ότι μειώνεται, καθώς πλησιάζουμε προς την κοιλότητα. Αυτό συμβαίνει γιατί, καθώς η ηλεκτρονική δέσμη συμπιέζεται και μικραίνει η ακτίνα της, τα τοιχώματα του διαύλου δέσμης οφείλουν να βρίσκονται σε σταθερή απόσταση από την ακτίνα της δέσμης για να διατηρείται περίπου σταθερό το δυναμικό της. Τα διηλεκτρικά δαχτυλίδια συνήθως αποτελούνται από κεραμικά με υψηλές απώλειες βασισμένα σε μείγμα οξειδίου του Βηρυλλίου και καρβιδίου του Πυριτίου ( $\text{BeOSiC}$ ). Τα μεταλλικά δαχτυλίδια ενδεχομένως να φέρουν αζιμουθιακές ρυτιδώσεις, προκειμένου



Σχήμα 1.12: (i) Μηχανολογικό σχέδιο διαύλου δέσμης συνεχούς ακτίνας με SiC και (ii) διάυλος δέσμης για το Ιαπωνικό γυροτρόνιο 170 GHz, 1 MW (Σχήμα 5 του [35]).

να εμποδίζουν τη διάδοση συμμετρικών ρυθμών TE, οι οποίοι σύμφωνα με το [16] έχουν αναγνωρισθεί ως δυνητικά οι πλέον επικίνδυνοι για παρασιτική διέγερση. Καθώς πιθανές παρασιτικές ταλαντώσεις στον διάυλο της δέσμης δεν μπορούν να αποκλειστούν, ο διάυλος της δέσμης ψύχεται για να μην υπάρξει τοπική υπερθέρμανση και καταστροφή των διηλεκτρικών δαχτυλιδιών. Ο συγκεκριμένος τύπος διαύλου δέσμης με διηλεκτρικά δαχτυλίδια υψηλών απωλειών είναι ο βασικός τύπος που χρησιμοποιείται σήμερα στα περισσότερα γυροτρόνια υψηλής ισχύος και ιδιαίτερα στα Ευρωπαϊκά γυροτρόνια.

Ο δεύτερος τύπος διαύλου δέσμης που συναντάται στα γυροτρόνια υψηλής ισχύος είναι η γεωμετρία συνεχούς ακτίνας κεραμικού SiC. Το SiC είναι ημιαγωγός και παρουσιάζει πεπερασμένη αγωγιμότητα περίπου  $10^{-8}$  χαμηλότερη από αυτή του χαλκού [35]. Έτσι, τα προσπίπτοντα ηλεκτρόνια δεν φορτίζουν ηλεκτροστατικά το κεραμικό υλικό και τα μεταλλικά δαχτυλίδια είναι περιττά. Το πλεονέκτημα αυτό του SiC, το οποίο χρησιμοποιείται συχνά ως απορροφητής RF ακτινοβολίας (RF absorber), επιτρέπει την κατασκευή μιας απλούστερης διάταξης συνεχούς ακτίνας, η οποία απεικονίζεται στο Σχήμα 1.12. Συνήθως, το κεραμικό υλικό χωρίζεται σε δύο επιμέρους τμήματα με ένα μικρό μεταλλικό δαχτυλίδι ενδιάμεσα, για να αποφεύγονται οι μηχανικές τάσεις λόγω θερμικής διαστολής ενός ενιαίου μακρού τμήματος. Αν και περιορισμένα, τα πειραματικά αποτελέσματα από τον συγκεκριμένο τύπο διαύλου δέσμης δεν έχουν δώσει ενδείξεις διέγερσης παρασιτικών ταλαντώσεων.

Ένας τρίτος τύπος διαύλου δέσμης, για τον οποίον δεν υπάρχουν δημοσιευμένες λεπτομέρειες και χρησιμοποιείται στα γυροτρόνια Ρωσικής κατασκευής, εικάζεται ότι διαθέτει μεγάλη τυχαιότητα στη διαμόρφωση των τοιχωμάτων του. Έτσι, υποτίθεται πως αποφεύγεται η υποστήριξη ρυθμών με ομαλά χαρακτηριστικά, οι οποίοι πιθανώς να συνεργάζονται καλύτερα με την ηλεκτρονική δέσμη.

Σε σχέση με τους τύπους διαύλου δέσμης που παρουσιάσαμε, στην παρούσα διατριβή ασχολούμαστε αποκλειστικά με τον διάυλο δέσμης του πρώτου τύπου, καθώς είναι ο πιο ευρέως διαδεδομένος και συναντάται σχεδόν σε όλες τις υλοποιήσεις των Ευρωπαϊκών γυροτρονίων. Γενικότερος σκοπός της διατριβής είναι η θεωρητική μελέτη της συγκεκριμένης γεωμετρίας εναλλασσόμενων

μεταλλικών-διηλεκτρικών δαχτυλιδιών. Πριν περάσουμε στην παρουσίαση των προηγούμενων θεωρητικών μελετών για το πρόβλημα και στην τεκμηρίωση της προσέγγισης που ακολουθήθηκε σε αυτήν τη διατριβή, παρουσιάζουμε στην επόμενη ενότητα τα πειραματικά αποτελέσματα γυροτρονίων που αφορούν τη διέγερση παρασιτικών ταλαντώσεων.

#### 1.4.2 Πειραματικά αποτελέσματα παρασιτικών ταλαντώσεων

Με την αύξηση της ισχύος και της συχνότητας των γυροτρονίων, αρκετά νωρίς εμφανίστηκε το πρόβλημα των παρασιτικών ταλαντώσεων. Ήδη από τις αρχές της δεκαετίας του 90 είχαν παρατηρηθεί παρασιτικές ταλαντώσεις στους διαύλους δέσμης γυροκλύστρων, όπου χρησιμοποιήθηκαν για πρώτη φορά κεραμικά υλικά από BeOSiC για την κατάπνιξή τους [36]. Στην περιοχή των γυροτρονίων η ύπαρξη παρασιτικών ταλαντώσεων στον δίαυλο της δέσμης παρατηρήθηκε πρώτα σε πειράματα ημ-οπτικών γυροτρονίων των 100 GHz, 100 kW [37], [38], καθώς στα ημιοπτικά γυροτρόνια η κλίση του μαγνητικού πεδίου στην περιοχή του διαύλου δέσμης είναι εν γένει μικρότερη σε σχέση με το συμβατικό γυροτρόνιο [39]. Πολύ γρήγορα η εμφάνισή τους στο συμβατικό γυροτρόνιο αποδείχτηκε ότι συνδέεται με την πτώση της απόδοσης της κυρίως αλληλεπίδρασης στην κοιλότητα [40].

Καθώς η διέγερση των παρασιτικών ταλαντώσεων στον δίαυλο της δέσμης αναγνωρίστηκε σαν σημαντικό πρόβλημα που υποβαθμίζει τη λειτουργία του γυροτρονίου, δημοσιεύθηκαν και οι πρώτες πειραματικές κυρίως μελέτες υποστηριζόμενες από αρκετά απλουστευτικές και πρώιμες θεωρητικές προσεγγίσεις, που ασχολούνταν αποκλειστικά με το συγκεκριμένο πρόβλημα [40], [39]. Στο [40] προτάθηκε η βελτιστοποίηση της γεωμετρίας του διαύλου δέσμης και η αύξηση της κλίσης του μαγνητικού πεδίου σε αυτόν. Στο [39] μελετήθηκε εκτενώς η επίδραση διαφορετικών γεωμετρικών διαύλου δέσμης στη διέγερση των παρασιτικών ταλαντώσεων και επιβεβαιώθηκε η επικινδυνότητα της αλληλεπίδρασης ECM έναντι άλλου τύπου ασταθειών.

Στα γυροτρόνια υψηλής ισχύος παρασιτικές ταλαντώσεις που υποβάθμιζαν σημαντικά τις επιδόσεις εμφανίστηκαν αρχικά στο Ιαπωνικό γυροτρόνιο 170 GHz, 1 MW. Συγκεκριμένα, οι παρασιτικές ταλαντώσεις που εμφανίστηκαν εκτιμήθηκαν να έχουν ισχύ πάνω από 10 kW, ενώ η απόδοση της κύριας αλληλεπίδρασης έπεφτε στο 22% από την αναμενόμενη απόδοση 30% [41]. Για την αντιμετώπιση του προβλήματος στο συγκεκριμένο γυροτρόνιο εισήχθη η γεωμετρία συνεχούς ακτίνας με SiC που παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.12 [35]. Ο νέος αυτός τύπος διαύλου δέσμης φαίνεται να κατέπνιξε τις παρασιτικές ταλαντώσεις, καθώς μειώθηκε σε μεγάλο βαθμό η διαφεύγουσα ακτινοβολία (stray radiation) και η απόδοση της κύριας αλληλεπίδρασης έφτασε στο 29% [41].

Στην Ευρώπη σημαντικό πρόβλημα παρασιτικών ταλαντώσεων εμφάνισαν τα περισσότερα γυροτρόνια των 140 GHz, 1 MW από τη σειρά γυροτρονίων για το W7-X [42]. Παρατηρήθηκε υψηλό επίπεδο διαφεύγουσας ακτινοβολίας, χαμηλή απόδοση και αστάθεια της κύριας αλληλεπίδρασης και μετρήθηκαν παρασιτικές συχνότητες στην περιοχή 119 GHz - 132 GHz. Ιδιαίτερα σε μεγάλους παλμούς το γυροτρόνιο έπρεπε να λειτουργεί σε σημεία λειτουργίας που δεν εμφανίζονταν παρασιτικές ταλαντώσεις, στα οποία όμως η απόδοση και η ισχύς ήταν χαμηλότερες. Μετά τα πειράματα, τα γυροτρόνια ανοίχτηκαν και παρατηρήθηκε τοπική καταστροφή λόγω υπερθέρμανσης των διηλεκτρικών δαχτυλιδιών που βρίσκονταν κοντά στην



κοιλότητα [42].

Ισχυρές παρασιτικές ταλαντώσεις που έφταναν έως και το 10% των ωμικών απωλειών της κοιλότητας, εμφανίστηκαν στο γυροτρόνιο 95 GHz, 2 MW της Αμερικανικής CPI [43]. Και σε αυτήν την περίπτωση συνοδεύονταν από πτώση της απόδοσης της αλληλεπίδρασης από 30% σε χαμηλές τιμές έως και 21%. Επίσης, παρασιτικές ταλαντώσεις με μικρότερη αλλά αισθητή αρνητική επίδραση στην απόδοση του γυροτρονίου έχουν παρατηρηθεί στα πειράματα μικρού παλμού του Ευρωπαϊκού ομοαξονικού γυροτρονίου 170 GHz, 2 MW [29]. Διαπιστώνουμε ότι στα περισσότερα γυροτρόνια υψηλής ισχύος εμφανίστηκαν παρασιτικές ταλαντώσεις που πέρα από την πτώση των επιδόσεων σε ορισμένες περιπτώσεις εμπόδισαν σε σημαντικό βαθμό την ομαλή λειτουργία του γυροτρονίου.

Ενώ στα Ιαπωνικά γυροτρόνια το πρόβλημα αντιμετωπίστηκε με την αλλαγή σε διάυλο δέσμης συνεχούς ακτίνας με SiC, στα Ευρωπαϊκά γυροτρόνια ακολουθήθηκε διαφορετική στρατηγική. Για να αντιμετωπιστούν οι παρασιτικές ταλαντώσεις στα γυροτρόνια για το W7-X, εκπονήθηκε εκτεταμένη πειραματική μελέτη που απέδωσε σημαντικά συμπεράσματα [16]. Συγκεκριμένα, με τη χρήση ενός εξελιγμένου συστήματος μετρήσεων της συχνότητας σε πραγματικό χρόνο και μεγάλης δυναμικής περιοχής [44], ήταν δυνατή η ακριβής μέτρηση ισχυρών ή ασθενών παρασιτικών συχνοτήτων ταυτόχρονα με την ύπαρξη του πολύ ισχυρού κύριου ρυθμού λειτουργίας. Η δυνατότητα αυτή αποκάλυψε σημαντικά χαρακτηριστικά όπως τον πολύ μεγαλύτερο θόρυβο φάσης των ισχυρών παρασιτικών ταλαντώσεων σε σχέση με τον κύριο ρυθμό λειτουργίας, καθώς και τη συνεχή ρύθμιση της συχνότητας των παρασιτικών με τη μεταβολή των παραμέτρων της δέσμης (τάση και κυκλοτρονική συχνότητα). Όπως εξηγήσαμε και στην υποενότητα 1.3.3 τα χαρακτηριστικά αυτά παραπέμπουν σε αλληλεπίδραση με συνιστώσα κύματος που οδεύει αντίθετα με τη δέσμη (backward interaction). Επίσης, στη μελέτη αυτή αναφέρονται προσομοιώσεις και πειραματικά αποτελέσματα που ταυτοποιούν τους συμμετρικούς ρυθμούς TE ως τους πλέον επικίνδυνους για παρασιτική διέγερση. Για να εμποδισθεί η διάδοση των συμμετρικών ρυθμών TE, στην ίδια μελέτη δοκιμάστηκε μια διαφορετική γεωμετρία διαύλου δέσμης, η οποία έχει αζιμουθιακές ρυτιδώσεις στα μεταλλικά δαχτυλίδια. Κάθε μεταλλικό δαχτυλίδι έχει διαφορετική περιοδικότητα στη ρυτιδωση, έτσι ώστε να σπάει η αζιμουθιακή συμμετρία και να παρεμποδίζεται η ομαλή διάδοση των συμμετρικών ρυθμών TE [16]. Σημειώνουμε ότι πέρα από την εισαγωγή των ρυτιδώσεων η νέα γεωμετρία ήταν εν γένει διαφορετική και παρουσίαζε πιο κωνικό σχήμα. Η νέα γεωμετρία διαύλου δέσμης με τις αζιμουθιακές ρυτιδώσεις δεν εμφάνισε ισχυρές παρασιτικές ταλαντώσεις και η εισαγωγή των ρυτιδώσεων θεωρήθηκε ως ο παράγοντας που κατέπνιξε τις ταλαντώσεις. Η εισαγωγή των αζιμουθιακών ρυτιδώσεων υιοθετήθηκε και σε Αμερικανικά γυροτρόνια της CPI [45].

Αν και η νέα γεωμετρία διαύλου δέσμης με αζιμουθιακές ρυτιδώσεις στα γυροτρόνια για το W7-X κατέπνιξε τις ισχυρές παρασιτικές ταλαντώσεις και βελτίωσε τις επιδόσεις τους, παρέμειναν κάποιες ασθενέστερες παρασιτικές συχνότητες με διαφορετικά χαρακτηριστικά [16], [46]. Συγκεκριμένα, οι παρασιτικές αυτές ταλαντώσεις εμφανίζονταν σε μεγαλύτερες συχνότητες πάνω από τα 130 GHz, είχαν χαμηλότερο θόρυβο φάσης και η συχνότητά τους παρέμενε σχετικά σταθερή σε σχέση με τη μεταβολή των παραμέτρων της δέσμης [46]. Οι παρασιτικές ταλαντώσεις αυτές αποδόθηκαν σε δυναμική αλληλεπίδραση μετά την κοιλότητα (dynamic After-Cavity Interaction, ACI) [16]. Το συμπέρασμα αυτό υποστηρίχτηκε από αποτελέσματα των κωδίκων αλληλεπίδρασης που προβλέπουν τέτοιου είδους αλληλεπίδραση μετά την



κοιλότητα σε παραπλήσιες συχνότητες με αυτές που παρατηρήθηκαν [47], [46]. Παρόλα αυτά, τελευταίες μελέτες δείχνουν ότι τα συγκεκριμένα αποτελέσματα είναι υπό αμφισβήτηση, καθώς έχειδειχτεί ότι πιθανώς αποτελούν καθαρά αριθμητικά ευρήματα που προκύπτουν από την παραβίαση σημαντικών υποθέσεων στην προσομοίωση της αλληλεπίδρασης [48]. Έτσι, παραμένει το ερώτημα για τη φύση των συγκεκριμένων παρασιτικών ταλαντώσεων, αφού πιθανόν να επιδρούν αρνητικά στην απόδοση των γυροτρονίων για το W7-X, που εξακολουθούν να παρουσιάζουν μειωμένη απόδοση σε σχέση με τη θεωρητικά αναμενόμενη τιμή της [49]. Στο [44] υπάρχει εκτεταμένη πειραματική μελέτη των παρασιτικών αυτών και διερεύνηση της προέλευσής τους. Στη διατριβή αυτή θα εξετάσουμε πόσο πιθανή είναι η διέγερση παρασιτικών ταλαντώσεων με την εμπρός αλληλεπίδραση στον δίαυλο της δέσμης του συγκεκριμένου γυροτρονίου και αν αυτές οι πειραματικές συχνότητες μπορούν να αποδοθούν σε αυτού του είδους την αλληλεπίδραση στον δίαυλο της δέσμης.

Σημειώνουμε ότι παρά την εισαγωγή των αζιμουθιακών ρυτιδώσεων στον δίαυλο της δέσμης, παρασιτικές ταλαντώσεις εξακολουθούν να παρατηρούνται στα αμερικανικά γυροτρόνια της CPI [45], [50]. Επίσης, ενδείξεις παρασιτικών ταλαντώσεων εμφανίστηκαν στα πειράματα του Ευρωπαϊκού γυροτρονίου μικρού παλμού 170 GHz, 1 MW για το ITER [51] που περιλαμβάνει δίαυλο δέσμης με αζιμουθιακές ρυτιδώσεις, ενώ τη στιγμή που γράφονται αυτές εδώ οι γραμμές, με ενδιαφέρον αναμένονται τα πειραματικά αποτελέσματα από το πρωτότυπο Ευρωπαϊκό γυροτρόνιο συνεχούς κύματος για το ITER, που διεξάγονται στο εργαστήριο του ινστιτούτου IHM του KIT. Συμπερασματικά, το πρόβλημα των παρασιτικών ταλαντώσεων έστω και σε μειούμενο βαθμό επιμένει για πάνω από δύο δεκαετίες. Η όποια βελτίωση στην απόδοση του διαύλου της δέσμης ως προς την κατάπνιξη των παρασιτικών ταλαντώσεων προέρχεται κυρίως από εμπειρικά δεδομένα, ενώ δεν είναι καθόλου προβλέψιμη η συμπεριφορά του διαύλου δέσμης στα μελλοντικά γυροτρόνια που θα λειτουργούν σε μεγαλύτερες συχνότητες και ρεύματα δέσμης.

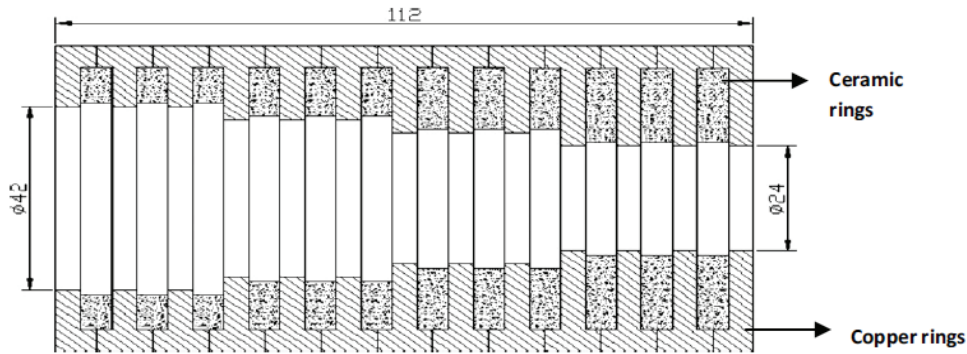
## 1.5 Θεωρητική μελέτη των παρασιτικών ταλαντώσεων στον δίαυλο της δέσμης

### 1.5.1 Προηγούμενες θεωρητικές μελέτες του διαύλου της δέσμης

Ταυτόχρονα με τις πρώτες πειραματικές μελέτες για τις παρασιτικές ταλαντώσεις, έγιναν και οι πρώτες θεωρητικές προσεγγίσεις στο πρόβλημα. Στο [40] έγιναν θεωρητικοί υπολογισμοί των ρευμάτων εκκίνησης παρασιτικών ρυθμών σε έναν απλοποιημένο δίαυλο δέσμης λείου κυματοδηγού υπό την επίδραση μεταβαλλόμενου κατά τον άξονα μαγνητικού πεδίου. Στο [39] έγιναν οι πρώτοι υπολογισμοί με τον κώδικα CASCADE [52] συντελεστών ποιότητας και προφίλ πεδίου σε μια απλοποιημένη γεωμετρία διαύλου δέσμης με διπλεκτρικά δαχτυλίδια.

Θεωρητικές μελέτες με κύριο στόχο τη μοντελοποίηση και μελέτη της γεωμετρίας του διαύλου δέσμης μεταλλικών-διπλεκτρικών δαχτυλιδιών οδήγησαν στην ανάπτυξη του κώδικα FISHBONE και των επεκτάσεών του. Συγκεκριμένα, στο [53] αναπτύχθηκε ο φορμαλισμός για συμμετρικούς ρυθμούς TM και δόθηκαν τα πρώτα αποτελέσματα για απλοποιημένη γεωμετρία διαύλου δέσμης με περιοδικές οριακές συνθήκες. Στο [54] συμπληρώθηκε ο φορμαλισμός και επεκτάθηκε ο κώδικας για

### 1.5 Θεωρητική μελέτη των παρασιτικών ταλαντώσεων στον διάυλο της δέσμης



Σχήμα 1.13: Διάυλος της δέσμης εναλλασσόμενων μεταλλικών-διηλεκτρικών δαχτυλιδιών για γυροτρόνιο των 95 GHz (Σχήμα 1 του [65]).

συμμετρικούς TE και υβριδικούς ρυθμούς σε μια απλοποιημένη γεωμετρία διαύλου δέσμης με ένα διηλεκτρικό δαχτυλίδι ανά περίοδο. Στο [55] έγινε η επέκταση για απλοποιημένες γεωμετρίες διαύλου δέσμης με πολλά διαφορετικά δαχτυλίδια ανά περίοδο. Στα [56,57] εισήχθη στο μοντέλο η αλληλεπίδραση ασθενούς σήματος με την ηλεκτρονική δέσμη μέσω της γραμμικοποιημένης εξίσωσης Vlasov, ενώ στα [58,59] έγινε η επέκταση του φορμαλισμού για ομοαξονικές γεωμετρίες. Τέλος, στα [60] και [61] έγιναν παραμετρικές μελέτες μεταβάλλοντας τις γεωμετρικές παραμέτρους και την επιτρεπτικότητα του διηλεκτρικού για συμβατικές και ομοαξονικές γεωμετρίες διαύλου δέσμης αντίστοιχα. Τα κυριότερα αποτελέσματα των παραπάνω μελετών και οι θεωρητικές παραδοχές της συγκεκριμένης προσέγγισης που εφαρμόζει περιοδικές οριακές συνθήκες θα συζητηθούν στην επόμενη υποενοότητα.

Μια διαφορετική μελέτη που εστιάζει στον διάυλο συνεχούς ακτίνας με SiC παρουσιάζεται στο [62]. Στη μελέτη αυτή μοντελοποιείται με αυτοσυνεπή τρόπο η αλληλεπίδραση με τη δέσμη στην περιοχή ασθενούς σήματος και λαμβάνεται υπ' όψιν η συνεχής μεταβολή της ακτίνας του διαύλου. Έτσι, δείχνεται ότι με κατάλληλη εισαγωγή απωλειών στο τοίχωμα, μπορεί να επιτευχθεί η κατάπνιξη παρασιτικών ταλαντώσεων που οφείλονται στην αλληλεπίδραση της δέσμης με συνιστώσες κύματος που οδεύουν προς τα πίσω. Παρ' όλα αυτά, υπάρχει η προσέγγιση ότι η εγκάρσια δομή των πεδίων είναι παρόμοια με αυτή του λείου κυματοδηγού καθώς το διηλεκτρικό υλικό εισάγεται στο μοντέλο σαν επιφανειακή εμπέδηση.

Με την αύξηση των επιδόσεων των υπολογιστών και την ανάπτυξη υπολογιστικών ηλεκτρομαγνητικών πακέτων, άρχισε σε πρώιμο στάδιο να μελετάται το πρόβλημα των παρασιτικών ταλαντώσεων με καθαρά αριθμητικούς κώδικες χωρίς αναλυτικές παραδοχές. Στο [63] χρησιμοποιήθηκε ο εμπορικός κώδικας HFSS για τη συγκριτική μελέτη διαφορετικών γεωμετριών διαύλου δέσμης. Στα [64–66] με τη βοήθεια του εμπορικού κώδικα CST Studio Suite έγινε η σχεδίαση του διαύλου δέσμης για γυροτρόνια των 42 GHz και 95 GHz. Ο διάυλος δέσμης εναλλασσόμενων διηλεκτρικών-μεταλλικών δαχτυλιδιών του γυροτρονίου για τα 95 GHz που σχεδιάστηκε, απεικονίζεται στο Σχήμα 1.13. Τέλος, στο [67] χρησιμοποιήθηκε ο εσωτερικός (in-house) FDTD-PIC κώδικας BOR-FDTD για να προσομοιωθεί η πίσω αλληλεπίδραση με συμμετρικούς ρυθμούς TE στη γεωμετρία διαύλου δέσμης του γυροτρονίου για το W7-X.

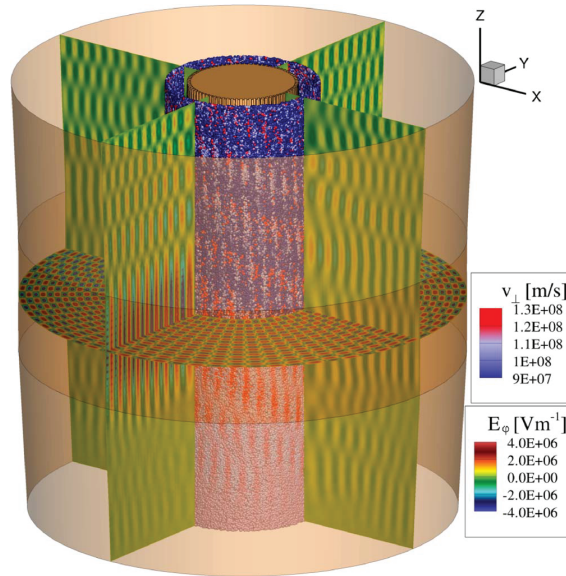
### 1.5.2 Θεωρητική προσέγγιση του προβλήματος σε αυτή τη διατριβή

Αφού εκθέσαμε τα πειραματικά αποτελέσματα και τις προηγούμενες θεωρητικές προσεγγίσεις στο πρόβλημα της διέγερσης παρασιτικών ταλαντώσεων στον δίαυλο της δέσμης, προχωρούμε στην τεκμηρίωση της μεθόδου που ακολουθήσαμε στην παρούσα διατριβή.

Κατ' αρχάς, επιλέξαμε να ακολουθήσουμε μια ημι-αναλυτική προσέγγιση ειδικά προσαρμοσμένη στο πρόβλημα. Τα τελευταία χρόνια με την άνοδο των επιδόσεων των προσωπικών υπολογιστών αλλά και την ανάπτυξη υπερ-υπολογιστικών συστημάτων για ερευνητικές εφαρμογές, έχουν διαδοθεί τα υπολογιστικά πακέτα που επιλύουν ηλεκτρομαγνητικά προβλήματα με καθαρά αριθμητικές μεθόδους, όπως η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων (Finite Element Method, FEM), πεπερασμένων διαφορών στο πεδίο του χρόνου (Finite-Difference Time-Domain) ή η τεχνική πεπερασμένης ολοκλήρωσης (Finite Integration Technique). Ενδεικτικά αναφέρουμε τις οικογένειες εμπορικών κωδίκων CST Studio Suite, Ansys HFSS και COMSOL Multiphysics. Οι ηλεκτρομαγνητικοί κώδικες αυτοί, σε συνεργασία με κώδικες Particle in Cell (PIC) που περιλαμβάνουν τα πακέτα, μπορούν να προσομοιώσουν την αλληλεπίδραση με την ηλεκτρονική δέσμη σε σύνθετες διατάξεις. Το πλεονέκτημά τους είναι ότι μπορούν να αντιμετωπίσουν εύκολα οποιαδήποτε γεωμετρία χωρίς να απαιτείται ουσιαστικά καμία απλοποίηση του προβλήματος. Παρ' όλα αυτά, το συγκεκριμένο πλεονέκτημα γίνεται σοβαρό πρόβλημα στις περιπτώσεις υπολογιστικά απαιτητικών προβλημάτων όπως η αλληλεπίδραση στον δίαυλο δέσμης του γυροτρονίου.

Στα γυροτρόνια υψηλής ισχύος και συχνότητας ο δίαυλος της δέσμης είναι για τις συχνότητες ενδιαφέροντος μια ηλεκτρικά μεγάλη διάταξη στην εγκάρσια διεύθυνση που υποστηρίζει ένα πολύ μεγάλο πλήθος ρυθμών (overmoded structure). Καθώς στα αριθμητικά σχήματα που αναφέραμε, το χαρακτηριστικό μήκος της διακριτοποίησης πρέπει να είναι κλάσμα του μήκους κύματος ελεύθερου χώρου, η πλήρης (full-wave) επίλυση ακόμα και μονάχα του ηλεκτρομαγνητικού μέρους είναι ιδιαίτερα απαιτητική σε υπολογιστικούς πόρους και πρακτικά σχεδόν αδύνατη αν δεν χρησιμοποιηθούν υπερυπολογιστές και εξειδικευμένα σχήματα παραλληλοποίησης. Για παράδειγμα, αναφέρουμε τον κώδικα PIC στο [68], όπου για την προσομοίωση της αλληλεπίδρασης στην κοιλότητα του Ευρωπαϊκού ομοαξονικού γυροτρονίου 170 GHz, 2 MW, με την ανάπτυξη ειδικού σχήματος παραλληλοποίησης απαιτήθηκαν 27.5 ώρες και 16384 πυρήνες επεξεργασίας για μόλις 100 ns προσομοίωσης. Στο Σχήμα 1.14 δίνουμε την απεικόνιση των πεδίων και της ηλεκτρονικής δέσμης για την αλληλεπίδραση στη συγκεκριμένη προσομοίωση. Αντίστοιχες πλήρεις προσομοιώσεις για τον δίαυλο της δέσμης που είναι ακόμα πιο μεγάλος, δεν αναμένονται να είναι εφικτές στο κοντινό μέλλον. Για παράδειγμα, στο [63] γίνεται υπολογισμός της πεδιακής κατανομής από ένα μόνο φύλλο ρεύματος χωρίς να λαμβάνεται υπ' όψιν η αλληλεπίδραση, ενώ στο [67] επιλέγεται να πραγματοποιηθεί η προσομοίωση μόνο για τους συμμετρικούς ρυθμούς, αφού ο κώδικας θεωρεί την αναλυτική εξάρτηση  $e^{jm\phi}$  στην αξιωματική διεύθυνση (κώδικας 2.5-D).

Ένα ακόμα μειονέκτημα των καθαρά αριθμητικών μεθόδων είναι ότι αντιμετωπίζουν τη διάταξη σαν μαύρο κουτί χωρίς να καλλιεργείται η φυσική διαίσθηση για τα φαινόμενα που πραγματοποιούνται. Αντίθετα, με τον αναλυτικό χειρισμό της διάταξης προσφέρεται μια πολύ πιο βαθιά κατανόηση των διεργασιών που λαμβάνουν χώρα στο εσωτερικό της. Στον δίαυλο της δέσμης, όπου το φαινόμενο των παρασιτικών ταλαντώσεων δεν έχει πλήρως κατανοηθεί, η φυσική διαίσθηση



Σχήμα 1.14: Προσομοίωση της αλληλεπίδρασης στην κοιλότητα του ομοαξονικού γυροτρονίου 170 GHz, 2 MW από έναν αριθμητικό κώδικα PIC (Σχήμα 11 του [68]).

που προσφέρεται από τον αναλυτικό χειρισμό του προβλήματος αναμένεται να βοηθήσει ουσιαστικά στην αναζήτηση μεθόδων κατάπνιξής τους. Επίσης, οι ημι-αναλυτικοί κώδικες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη σχεδίαση διαύλων δέσμης πραγματοποιώντας γρήγορα παραμετρικά τρεξίματα σαρώνοντας τον χώρο των γεωμετρικών και φυσικών παραμέτρων. Αντίστοιχα τρεξίματα με καθαρά αριθμητικούς κώδικες θα απαιτούσαν απαγορευτικά μεγάλο υπολογιστικό χρόνο.

Αφού περιγράψαμε τους λόγους για τους οποίους επιλέξαμε μια ημι-αναλυτική προσέγγιση στο πρόβλημα, εστιάζουμε στη μέθοδο επίλυσης των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων στη διάταξη. Για να εκφράσουμε τα πεδία σε αναλυτική μορφή, η διάταξη πρέπει να χωριστεί σε περιοχές και σε κάθε μία ξεχωριστά να αναπτύξουμε τα πεδία ως άθροισμα ιδιοσυναρτήσεων. Η ανάπτυξη των πεδίων μπορεί να γίνει είτε στην εγκάρσια είτε στην αξονική διεύθυνση. Αν επιλέξουμε να αναπτύξουμε τα πεδία στην εγκάρσια διεύθυνση, τότε ο διάυλος της δέσμης θα πρέπει να χωριστεί σε πολλές κυλινδρικές περιοχές που στην εγκάρσια διεύθυνση οριοθετούνται από ένα μεταλλικό ή ένα διηλεκτρικό δαχτυλίδι της διάταξης. Στη συνέχεια, θα πρέπει να εφαρμοσθούν οι οριακές συνθήκες με τη μέθοδο ταιριάσματος των ρυθμών (mode-matching method) σε όλα τα κάθετα στον άξονα επίπεδα που οριοθετούν στην αξονική διεύθυνση τις συγκεκριμένες περιοχές. Για παράδειγμα, σε έναν διάυλο δέσμης με 5 διηλεκτρικά δαχτυλίδια θα πρέπει να θεωρήσουμε 11 τέτοιες περιοχές και να εφαρμοστούν οι οριακές συνθήκες σε 10 διαφορετικές επίπεδες επιφάνειες. Η ανάπτυξη των πεδίων στις περιοχές που οριοθετούνται από μεταλλικά δαχτυλίδια είναι απλή, καθώς αποτελείται από το άθροισμα των εγκάρσιων ρυθμών του λείου κυματοδηγού, ενώ η πολλαπλή εφαρμογή των οριακών συνθηκών σε όλες τις επιφάνειες μπορεί να γίνει εύκολα μέσω του φορμαλισμού των μητρών σκέδασης (scattering matrix formulation). Αυτή η μέθοδος έχει εφαρμοστεί στην περίπτωση του κώδικα CASCADE [52], [69] αλλά και σε άλλες εφαρμογές όπως στη σχεδίαση μετατροπέων ρυθμού  $TE_{11}$  σε  $HE_{11}$  για κωνικές χρονοκεραίες [70]. Επίσης, σημειώνουμε ότι στους ημι-αναλυτικούς κώδικες προσομοίωσης της αλληλεπίδρασης στις γυροδιατάξεις σχεδόν αποκλειστικά

υιοθετείται μια τέτοιου είδους ανάπτυξη σε εγκάρσιους ιδιο-ρυθμούς (π.χ στο [71]).

Τα προβλήματα για την προσέγγιση αυτή στην περίπτωση του διαύλου δέσμης είναι δύο. Κατ' αρχάς, στην εγκάρσια διεύθυνση η διάταξη του διαύλου δέσμης είναι ηλεκτρικά μεγάλη και θα πρέπει να ληφθεί υπ' όψιν μεγάλος αριθμός εγκάρσιων ιδιο-ρυθμών με τους κατάλληλους αγνώστους για να περιγραφούν και να συγκλίνουν τα πεδία στη διάταξη. Έτσι, ο τελικός πίνακας του συστήματος θα έχει μεγάλο αριθμό στοιχείων και οι υπολογισμός του θα απαιτεί περισσότερο χρόνο. Επίσης, καθώς ο αριθμός των διεπαφών που εφαρμόζονται οι οριακές συνθήκες είναι σχετικά μεγάλος (10 περιοχές για δίαυλο δέσμης 5 διπλεκτρικών δαχτυλιδιών), θα απαιτούνται αντίστοιχα πολλές πράξεις μεταξύ πινάκων για την εφαρμογή της μεθόδου των μπρών σκέδασης. Ο δεύτερος όμως και σημαντικότερος λόγος που μια εγκάρσια ανάπτυξη σε ιδιο-ρυθμούς δεν ενδείκνυται για την περίπτωση του διαύλου δέσμης, είναι η δυσκολία στην ανάπτυξη των πεδίων για τις περιοχές που οριοθετούνται από τα διπλεκτρικά δαχτυλίδια. Στις περιοχές αυτές που αντιστοιχούν σε κομμάτια κυματοδηγού φορτωμένου με διπλεκτρικό (dielectric-lined waveguide) η ανάπτυξη των πεδίων σε ιδιο-ρυθμούς στο εγκάρσιο επίπεδο είναι ιδιαίτερα πολύπλοκη. Μια τέτοιου είδους ανάπτυξη των πεδίων μπορεί να βρεθεί στο [72]. Οι ιδιο-ρυθμοί στην περίπτωση αυτή είναι εν γένει υβριδικοί και η ιδιοτιμή τους δίνεται από τη λύση μιας υπερβατικής εξίσωσης\*. Έτσι, οι αναλυτικές εκφράσεις των εγκάρσιων ιδιο-ρυθμών είναι ιδιαίτερα πολύπλοκες και ο αναλυτικός υπολογισμός των ολοκληρωμάτων σύζευξης, τα οποία προκύπτουν από την εφαρμογή της μεθόδου ταιριάσματος των ρυθμών μεταξύ των ιδιο-ρυθμών αυτών και των ιδιο-ρυθμών του λείου κυματοδηγού, καθίσταται ακόμα πιο δύσκολος. Ένας αριθμητικός υπολογισμός των συγκεκριμένων ολοκληρωμάτων σύζευξης θα επιβάρυνε υπολογιστικά έναν τέτοιο κώδικα σε πολύ μεγάλο βαθμό. Τέλος, ακριβώς για να παρακαμφθεί η παραπάνω διαδικασία στο [73] έχει αναπτυχθεί μια μέθοδος που αναπτύσσει τα πεδία σαν μια μη ομοιόμορφα συγκλίνουσα σειρά εγκάρσιων ρυθμών, η οποία είναι όμως προσεγγιστική και υποθέτει επίσης ότι τα διπλεκτρικά μπορούν να θεωρηθούν ως επιφανειακή εμπέδηση.

Για τους παραπάνω λόγους εκτιμήσαμε ότι μια προσέγγιση που αναπτύσσει τα πεδία στην αξονική διεύθυνση, αρμόζει πολύ περισσότερο στο πρόβλημα του διαύλου της δέσμης. Μια τέτοιου είδους ανάπτυξη των πεδίων με τη βοήθεια του θεωρήματος Floquet [74] στην αξονική διεύθυνση έχει ήδη εφαρμοστεί με επιτυχία στα [53–61]. Το βασικό χαρακτηριστικό των παραπάνω μελετών είναι ότι εφαρμόζουν περιοδικές οριακές συνθήκες στα διαμήκη άκρα της διάταξης. Η συγκεκριμένη υπόθεση για την περιοδικότητα της διάταξης αποτελεί μια πρώτη προσέγγιση για τη θεωρητική πλήρη (full-wave) μοντελοποίηση του διαύλου δέσμης και έχει δώσει σημαντικά ποιοτικά αποτελέσματα. Αυτού του είδους η υπόθεση εφαρμόζεται συχνά για την ανάλυση του ηλεκτροδυναμικού συστήματος των TWT. Στις αναλύσεις περιοδικών διατάξεων ο αξονικός κυματαριθμός  $K$  θεωρείται ελεύθερη παράμετρος και τα αποτελέσματα αφορούν διαγράμματα διασποράς.

Η υπόθεση των περιοδικών οριακών συνθηκών περιλαμβάνει, ως μια πρώτη απλοποιητική παραδοχή ότι αγνοούνται οι απώλειες περίθλασης, καθώς με την

\*Ομοίως στην περίπτωση του λείου κυματοδηγού οι ιδιοτιμές του εγκάρσιου προβλήματος δίνονται από τη λύση μιας υπερβατικής εξίσωσης και συγκεκριμένα από τις ρίζες της συνάρτησης Bessel και της παραγώγου της. Παρ' όλα αυτά, οι συναρτήσεις αυτές και οι ρίζες τους είναι πολύ καλά μελετημένες με καλές ιδιότητες, κάτι που δεν ισχύει απαραίτητα για την αντίστοιχη υπερβατική εξίσωση του κυματοδηγού που περιλαμβάνει διπλεκτρικό με απώλειες.

εφαρμογή περιοδικών οριακών συνθηκών, ουσιαστικά όση ισχύς εισέρχεται από το ένα άκρο αναγκαστικά ισούται με την ισχύ που εξέρχεται από το άλλο. Έτσι, οι συνολικές απώλειες περίθλασης είναι μηδενικές. Στα [53–61] ο περιθλαστικός συντελεστής ποιότητας υπολογίζεται προσεγγιστικά λαμβάνοντας υπ' όψιν την ισχύ εξόδου στο ένα άκρο και χρησιμοποιώντας τον ενεργειακό ορισμό του συντελεστή ποιότητας (σχέση (15) του [53]). Μια δεύτερη απλοποιητική παραδοχή είναι ότι, λόγω των περιοδικών οριακών συνθηκών, δεν μπορούν να μελετηθούν ανομοιογενείς γεωμετρίες με διαφορετικά χαρακτηριστικά μεταξύ των δύο άκρων της διάταξης. Για παράδειγμα, η εσωτερική ακτίνα των μεταλλικών δαχτυλιδιών πρέπει να είναι ίση στην αρχή και στο τέλος της διάταξης, ώστε να ικανοποιούνται οι περιοδικές οριακές συνθήκες. Έτσι, αναγκαστικά αγνοείται η μεταβολή της ακτίνας των εσωτερικών τοιχωμάτων της γεωμετρίας, η οποία όπως έχουμε δει είναι ένα εγγενές χαρακτηριστικό των διαύλων δέσμης. Ο περιορισμός αυτός εμφανίζεται επίσης στη μοντελοποίηση της αλληλεπίδρασης δέσμης-κύματος για το μαγνητοστατικό πεδίο, το οποίο αναγκαστικά θεωρείται σταθερό [57]. Η εισαγωγή αξονικά μεταβαλλόμενου μαγνητοστατικού πεδίου συνεπάγεται αντίστοιχη μεταβολή των ιδιοτήτων της δέσμης, η οποία λόγω της σύζευξης της με τα πεδία παραβιάζει τις περιοδικές οριακές συνθήκες. Τέλος, στους πραγματικούς διαύλους δέσμης ο πεπερασμένος αριθμός των δαχτυλιδιών εισάγει ανακλάσεις και προκαλεί τα φαινόμενα των άκρων [75], τα οποία στην υπόθεση της περιοδικής γεωμετρίας αγνοούνται.

Το επόμενο βήμα, μετά τις περιοδικές οριακές συνθήκες, προς μία πιο ρεαλιστική προσέγγιση της πραγματικής κατάστασης είναι η εφαρμογή οριακών συνθηκών εξερχόμενων κυμάτων. Οι οριακές συνθήκες αυτές θεωρούν ότι στα άκρα της διάταξης δεν υπάρχουν ανακλάσεις και η διάταξη ουσιαστικά μοντελοποιείται ως πεπερασμένη. Όπως παρουσιάσαμε και στην υποενότητα 1.3.2, τέτοιου είδους οριακές συνθήκες εφαρμόζονται με επιτυχία κατά κόρον στα μοντέλα για την κοιλότητα του γυροτρονίου [9]. Με τον τρόπο αυτό η διάταξη αντιμετωπίζεται ως ανοιχτή κοιλότητα που παρουσιάζει απώλειες περίθλασης προς τα άκρα. Ο αξονικός κυματαριθμός δεν είναι πλέον ελεύθερη παράμετρος αφού δίνεται από το αξονικό πρόβλημα ιδιοτιμών.

Μία επιπλέον παραδοχή που γίνεται συχνά, είναι ότι αγνοείται η εσωτερική εσοχή που έχουν τα διπλεκτρικά δαχτυλίδια. Όπως έχουμε παρουσιάσει στην ενότητα 1.4.1, στους πραγματικούς διαύλους δέσμης τα διπλεκτρικά δαχτυλίδια έχουν μεγαλύτερη εσωτερική ακτίνα από τα γειτονικά μεταλλικά δαχτυλίδια, ώστε τα πρώτα να προστατεύονται από ηλεκτροστατική φόρτιση που μπορεί να προκύψει από διαφεύγοντα ηλεκτρόνια της δέσμης. Το χαρακτηριστικό αυτό, όπως έχει ήδη σημειωθεί στα [63] και [67], δημιουργεί ισχυρή μετατροπή μεταξύ των εγκάρσιων ρυθμών (mode conversion) και αλλοιώνει τα προφίλ πεδίου σε μεγάλο βαθμό. Έτσι, τα προφίλ πεδίου λόγω του συγκεκριμένου χαρακτηριστικού εμφανίζονται με ισχυρή κυμάτωση κατά μήκος του άξονα, η οποία οφείλεται στην ισχυρή μετατροπή ρυθμών που δημιουργεί η εσοχή.

Με δεδομένα (όπως αναλύσαμε προηγούμενως) τα πλεονεκτήματα της αξονικής ανάπτυξης των πεδίων σε ιδιο-ρυθμούς, η οποία έχει ήδη εφαρμοστεί στις μελέτες με την υπόθεση των περιοδικών οριακών συνθηκών, εφαρμόζουμε πάλι μια αξονική ανάπτυξη των πεδίων σε ιδιο-ρυθμούς, αλλά τώρα επιβάλλοντας στα άκρα οριακές συνθήκες εξερχόμενων κυμάτων. Η προσέγγιση αυτή ενώ αποτελεί συνέχεια και άμεση επέκταση της εφαρμογής περιοδικών οριακών συνθηκών, ταυτόχρονα συνιστά και μια αλλαγή παραδείγματος σε σχέση με τις προηγούμενες μελέτες.

Πλέον, η διάταξη του διαύλου δέσμης μοντελοποιείται σαν πεπερασμένη κοιλότητα, με απώλειες περίθλασης που δίνονται από τη λύση του αξονικού προβλήματος ιδιοτιμών. Η εφαρμογή οριακών συνθηκών εξερχόμενων κυμάτων αποτελεί μια πιο ρεαλιστική επέκταση της βασικής υπόθεσης των περιοδικών οριακών συνθηκών, η οποία επιτρέπει τον υπολογισμό των απωλειών περίθλασης, τη μοντελοποίηση της αξονικής μεταβολής του μαγνητικού πεδίου και μελλοντικά, όπως θα δείξουμε, μπορεί να επεκταθεί για γεωμετρίες με μεταβολή της ακτίνας των μεταλλικών δαχτυλιδιών.

Μια τέτοιου είδους ανάπτυξη των πεδίων με οριακές συνθήκες εξερχόμενων κυμάτων και εφαρμογή της γενικευμένης μεθόδου ταιριάσματος των ρυθμών [76] σε παρόμοιες γεωμετρίες, έχει παρουσιαστεί στη βιβλιογραφία στο παρελθόν. Με την ίδια μέθοδο στο [77], σε μια παρόμοια γεωμετρία κοιλοτήτων για γραμμικούς επιταχυντές έχουν υπολογιστεί οι εμπεδιώσεις σύζευξης για ένα σημειακό φορτίο στη διάταξη. Επίσης, στο [78] έχει εφαρμοστεί η μέθοδος για συμμετρικούς ρυθμούς TM, σε διατάξεις εξόδου λυχνιών οδεύοντος κύματος (travelling-wave extraction sections). Τέλος, στο [79] έχει αναπτυχθεί ο φορμαλισμός για τη μελέτη μετατροπών ρυθμού TE<sub>11</sub>-σε-HE<sub>11</sub> για τον αξιωματικό δείκτη  $m = 1$ . Σε όλες τις παραπάνω μελέτες η διάταξη διεγείρεται εξωτερικά από κάποιον προσπίπτοντα ρυθμό  $n$  τα σωματίδια μιας ηλεκτρονικής δέσμης. Για πρώτη φορά στη διατριβή αυτή, η γενικευμένη μέθοδος ταιριάσματος των ρυθμών με αξονική ανάπτυξη των πεδίων εφαρμόζεται για τον υπολογισμό και τη μελέτη των συντονιζόμενων ρυθμών στη διάταξη, η οποία πλέον αντιμετωπίζεται ως κρύα κοιλότητα. Επίσης, ο φορμαλισμός επεκτείνεται για πιο γενικές γεωμετρίες που περιλαμβάνουν διπλεκτρικά δαχτυλίδια και για όλα τα είδη ρυθμών (συμμετρικούς και υβριδικούς). Τέλος, στο μοντέλο του διαύλου δέσμης που αναπτύσσουμε συμπεριλαμβάνεται η εσοχή κενού των δαχτυλιδιών, η οποία όπως θα δειχτεί και στην παρούσα εργασία παίζει σημαντικό ρόλο.

Η παρούσα διατριβή, στα επόμενα κεφάλαια που ακολουθούν μετά την εισαγωγή, δομείται με τον εξής τρόπο: Στο Κεφάλαιο 2 αναπτύσσεται ο φορμαλισμός των πεδίων, εφαρμόζεται η γενικευμένη μέθοδος ταιριάσματος των ρυθμών και εξάγεται το τελικό σύστημα εξισώσεων. Ως διέγερση θεωρείται ένας εξωτερικά οδεύων ρυθμός που προσπίπτει στη διάταξη. Κατόπιν, υπολογίζονται σε αναλυτική μορφή οι συνιστώσες των πεδίων και οι εκφράσεις της ηλεκτρομαγνητικής ισχύος που ανακλάται, διαδίδεται ή απορροφάται στη διάταξη.

Στο Κεφάλαιο 3 αίρεται η εξωτερική διέγερση από προσπίπτοντα ρυθμό και η διάταξη αντιμετωπίζεται σαν ηλεκτρομαγνητική κοιλότητα. Οι ιδιοσυχνότητες της διάταξης γίνονται μιγαδικές, καθώς στο θεωρητικό μοντέλο περιλαμβάνονται οι απώλειες περίθλασης και οι διπλεκτρικές απώλειες. Για το λόγο αυτό γίνεται αναλυτική επέκταση της συχνότητας  $\omega$  στο μιγαδικό επίπεδο και οι μιγαδικές ιδιοσυχνότητες υπολογίζονται από τους μηδενισμούς της ορίζουσας του συστήματος. Στη συνέχεια αναπτύσσεται η αριθμητική μέθοδος εύρεσης των ριζών της μιγαδικής ορίζουσας και συζητείται η φυσική σημασία των μιγαδικών λύσεων της συχνότητας  $\omega$ . Με βάση το παραπάνω μοντέλο αναπτύσσεται ο υπολογιστικός κώδικας NESTOR και παρουσιάζονται τα βασικά χαρακτηριστικά του. Τέλος, μελετούνται οι συντονιζόμενοι ρυθμοί σε κάποιες χαρακτηριστικές γεωμετρίες και συγκρίνονται τα αριθμητικά αποτελέσματα με αυτά που δίνει ο κώδικας CASCADE.

Στο Κεφάλαιο 4 περιγράφονται οι μέθοδοι προσομοίωσης της αλληλεπίδρασης γυροτρονίου στην κοιλότητα. Στη συνέχεια αναπτύσσεται το μοντέλο σύζευξης του κώδικα NESTOR με το πακέτο κωδίκων EURIDICE που επιτρέπει την προσομοίωση



## 1.5 Θεωρητική μελέτη των παρασιτικών ταλαντώσεων στον διάυλο της δέσμης

της αλληλεπίδρασης γυροτρονίου στον διάυλο της δέσμης. Κατόπιν, συζητούνται οι απαραίτητες υποθέσεις και προσεγγίσεις που έγιναν κατά την ανάπτυξη του μοντέλου. Τέλος, αναπτύσσεται μία μέθοδος που επιτρέπει τον έλεγχο της ορθότητας του μοντέλου που αναπτύχθηκε και την επιβεβαίωση των προσεγγίσεων που ακολουθήθηκαν.

Στο Κεφάλαιο 5 δίνονται αριθμητικά αποτελέσματα για πραγματικούς διαύλους δέσμης συγκεκριμένων σχεδιάσεων γυροτρονίων. Συγκεκριμένα, μελετούνται τα συμβατικά γυροτρόνια 170 GHz, 1 MW για το ITER και 140 GHz, 1 MW για τον stellarator W7-X. Για τις συγκεκριμένες γεωμετρίες διαύλου δέσμης υπολογίζονται οι συντονιζόμενοι ρυθμοί και τα αντίστοιχα ρεύματα εκκίνησής τους για την εμπρός αλληλεπίδραση θεωρώντας τις ρεαλιστικές ιδιότητες της ηλεκτρονικής δέσμης. Γίνεται έλεγχος της ορθότητας των προσομοιώσεων και εξάγονται σημαντικά συμπεράσματα. Τέλος, για τη γεωμετρία του γυροτρονίου 170 GHz, 1 MW για το ITER πραγματοποιείται παραμετρική μελέτη μεταβάλλοντας τις ιδιότητες του διηλεκτρικού υλικού και το πάχος των δαχτυλιδιών.

Στο Κεφάλαιο 6 αναπτύσσονται επεκτάσεις του φορμαλισμού και του κώδικα που κινούνται στην κατεύθυνση βελτίωσης του μοντέλου προς πιο ρεαλιστικές γεωμετρίες. Αρχικά, αναπτύσσεται ο φορμαλισμός για την εφαρμογή οριακής συνθήκης ολικής ανάκλασης στο δεξί άκρο. Η συγκεκριμένη επέκταση του μοντέλου είναι απαραίτητη για τη μελλοντική συμπερίληψη της μεταβολής της εσωτερικής ακτίνας των μεταλλικών δαχτυλιδιών. Επίσης, μπορεί να μοντελοποιήσει πολύ προσεγγιστικά τη μεταβολή αυτή της ακτίνας των τοιχωμάτων. Στη συνέχεια, επαληθεύεται ο κώδικας με τη νέα οριακή συνθήκη μέσω της σύγκρισης αποτελεσμάτων με τον κώδικα CASCADE και χρησιμοποιείται για την εκτίμηση της αύξησης των συντελεστών ποιότητας στον διάυλο δέσμης του γυροτρονίου 140 GHz, 1 MW για το W7-X λόγω της μεταβολής της ακτίνας του τελευταίου μεταλλικού δαχτυλιδιού. Η επόμενη επέκταση του μοντέλου αφορά την ανάπτυξη του φορμαλισμού και του κώδικα για ομοαξονικές γεωμετρίες. Ο κώδικας επαληθεύεται στη συνέχεια μέσω της σύγκρισης με αποτελέσματα από τον CASCADE. Τέλος, η συγκεκριμένη επέκταση του κώδικα χρησιμοποιείται για να συγκρίνει τη γεωμετρία διαύλου δέσμης του ομοαξονικού γυροτρονίου 170 GHz, 2 MW με μια όμοια συμβατική γεωμετρία χωρίς ομοαξονικό στέλεχος.

Στο Κεφάλαιο 7 συνοψίζονται τα κύρια αποτελέσματα της παρούσας διατριβής και παρουσιάζονται προτάσεις για μελλοντικές επεκτάσεις. Συγκεκριμένα, περιγράφεται η μέθοδος επέκτασης του μοντέλου που αναπτύχθηκε στη διατριβή, η οποία μπορεί να συμπεριλάβει τη μεταβολή της εσωτερικής ακτίνας των τοιχωμάτων. Επίσης, προτείνεται και περιγράφεται σχηματικά η ανάπτυξη ενός αυτοσυνεπούς σχήματος προσομοίωσης της αλληλεπίδρασης με βάση το μοντέλο που αναπτύξαμε.



---

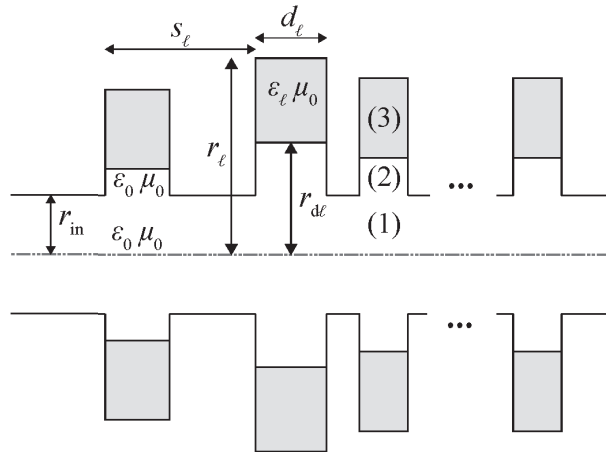
## ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΣΚΕΔΑΣΗΣ ΣΕ ΑΠΛΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΔΙΑΥΛΟΥ

---

### 2.1 Απλοποιημένη γεωμετρία διαύλου δέσμης γυροτρονίου

Σε αυτό το κεφάλαιο, ως πρώτο βήμα για τη μελέτη και την αντιμετώπιση του προβλήματος των παρασιτικών ταλαντώσεων στον διαύλο δέσμης του γυροτρονίου, επιλύουμε το ηλεκτρομαγνητικό πρόβλημα σκέδασης ενός προσπίπτοντος ρυθμού σε απλοποιημένη γεωμετρία διαύλου. Ως διέγερση της διάταξης θεωρούμε έναν οποιονδήποτε ρυθμό λείου κυματοδηγού, ο οποίος προσπίπτει είτε από τα αριστερά είτε από τα δεξιά, καθώς οδεύει στην απλοποιημένη γεωμετρία, η οποία προσομοιάζει με αυτή ενός συμβατικού διαύλου δέσμης. Η ηλεκτρομαγνητική ισχύς σκεδάζεται από τις ασυνέχειες των δαχτυλιδιών και ανακλάται, διαδίδεται ή απορροφάται στα διηλεκτρικά μέρη της διάταξης. Η λύση του προβλήματος θα γίνει αναλυτικά και συγκεκριμένα με τη γενικευμένη μέθοδο ταιριάσματος των ρυθμών (generalized mode-matching method) [76]. Η αναλυτική επεξεργασία του προβλήματος θα καταλήξει σε ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων, το οποίο και θα επιλυθεί αριθμητικά στον υπολογιστή.

Η απλοποίηση της γεωμετρίας σε πρώτη φάση συνίσταται στην υπόθεση μιας σταθερής εσωτερικής ακτίνας του κυλίνδρου τόσο στα άκρα της διάταξης όσο και στο μέσο αυτής. Η απλοποίηση αυτή αγνοεί ένα εγγενές χαρακτηριστικό κάθε σχεδίασης διαύλου δέσμης, αυτό της προοδευτικής μείωσης της ακτίνας προς την πλευρά της κοιλότητας αλληλεπίδρασης, όπως έχουμε εξηγήσει και στο Κεφάλαιο 1. Αν και η σχετική διαφορά στις ακτίνες δύο γειτονικών σκαλοπατιών δεν είναι μεγάλη, αυτή μπορεί να εισάγει σοβαρά σφάλματα, καθώς συνήθως είναι συγκρίσιμη με το μήκος κύματος ελεύθερου χώρου για τις συχνότητες ενδιαφέροντος. Παρ' όλα αυτά, η απλοποίηση αυτή της γεωμετρίας ενδείκνυται, καθώς μόνο έτσι καθίσταται δυνατή μία πρώτη αναλυτική επίλυση του προβλήματος, η οποία στη συνέχεια τίθεται ως βάση για την αναβάθμιση του μοντέλου προς την αντιμετώπιση πιο



Σχήμα 2.1: Σχηματική αναπαράσταση της απλοποιημένης κυλινδρικής γεωμετρίας του διαύλου γυροτρονίου.

ρεαλιστικών γεωμετριών. Η επίδραση της μείωσης της εσωτερικής ακτίνας μελετάται στο Κεφάλαιο 6, ενώ οι δυνατές μεθόδους με τις οποίες μπορεί να ληφθεί υπ' όψιν το γεωμετρικό αυτό χαρακτηριστικό θα συζητηθούν στο Κεφάλαιο 7.

Κατά τα άλλα γεωμετρικά χαρακτηριστικά το μοντέλο είναι πλήρες και μπορεί να συμπεριλάβει έναν αυθαίρετο αριθμό δαχτυλιδιών. Η γενική μορφή της υπό μελέτη γεωμετρίας απεικονίζεται στο Σχήμα 2.1. Τα δαχτυλίδια μπορούν να έχουν αυθαίρετες αποστάσεις μεταξύ τους, διαφορετικά πλάτη και άνισες εξωτερικές ακτίνες. Εκτός από τα μεταλλικά δαχτυλίδια, δύο τύποι δαχτυλιδιών μελετώνται.

Το πρώτο είδος δαχτυλιδιών αφορά κενά δαχτυλίδια χωρίς διηλεκτρικό. Αν και τέτοιου είδους δαχτυλίδια δεν απορροφούν ηλεκτρομαγνητική ισχύ και επομένως δεν χρησιμοποιούνται σε διαύλους δέσμης γυροτρονίου, συχνά αποτελούν συστατικά μέρη άλλων μικροκυματικών πηγών. Χρησιμοποιούνται τόσο ως διατάξεις αλληλεπίδρασης αργού κύματος σε λυχνίες οδεύοντος κύματος (Travelling-Wave Tubes) [80], σε κλύστρα [81], σε ταλαντωτές επιστρέφοντος κύματος (Backward Wave Oscillators) [82] καθώς και σε λυχνίες γρήγορου κύματος όπως, gyro-TWTs [83] και γυροκλύστρα [84]. Στη βιβλιογραφία των γραμμικών επιταχυντών αναφέρονται και ως pill-box cavities [85]. Τέλος, τέτοιου είδους διατάξεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως μικροκυματικά φίλτρα [86, 87], ή μετατροπείς ρυθμού  $TE_{11}$  σε  $HE_{11}$  για κωνικές χοανοκεραίες [70, 79]. Επομένως, αναπτύσσουμε το μοντέλο και τους κώδικες ως ένα γενικό εργαλείο, που θα μπορούσε εν δυνάμει να χειριστεί και άλλες διατάξεις πέρα από την προσομοίωση του διαύλου δέσμης του γυροτρονίου.

Το δεύτερο είδος αφορά δαχτυλίδια, που περιέχουν διηλεκτρικά υλικά με απώλειες και συναντούνται σε τυπικές σχεδιάσεις διαύλων δέσμης εναλλασσόμενων μεταλλικών-διηλεκτρικών δαχτυλιδιών (Σχήματα 1.11 και 1.13). Οι απώλειες στα διηλεκτρικά μοντελοποιούνται με μιγαδική διηλεκτρική επιτρεπτικότητα, της οποίας το φανταστικό μέρος είναι αρνητικό (για χρονική μεταβολή  $e^{+j\omega t}$ ). Επίσης, το είδος αυτό των δαχτυλιδιών περιλαμβάνει και μια περιοχή κενού, η οποία αντιστοιχεί στην εσοχή που έχουν πραγματικές σχεδιάσεις διαύλων και προστατεύει τα διηλεκτρικά από φθορά και ηλεκτροστατική φόρτιση, που προκαλείται από διαφεύγοντα ηλεκτρόνια της δέσμης. Η περιοχή αυτή κενού, αν και έχει αγνοηθεί σε προγενέστερα μοντέλα διαύλων [53–61], θεωρούμε και έχει δείχτει πως παίζει σημαντικό ρόλο στο προφίλ

του πεδίου στην περιοχή της δέσμης [63, 67, 88]. Άλλωστε, το σύννηθες βάθος της εσοχής είναι πάντοτε συγκρίσιμο με το μήκος κύματος αν δεν το ξεπερνάει. Τέτοιου είδους δαχτυλίδια, εκτός από τους διαύλους δέσμης γυροτρονίου, μπορεί να αποτελούν συστατικά μέρη και σε άλλες γυροδιατάξεις. Για παράδειγμα, μπορεί να αποτελούν το κύκλωμα αλληλεπίδρασης με κατανεμημένες απώλειες ενός gyro-TWT [89] ή τις κοιλότητες ενός γυροκλύστρου [90].

## 2.2 Εφαρμογή της μεθόδου ταιριάσματος των ρυθμών

### 2.2.1 Περιγραφή της μεθόδου

Για να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο του ταιριάσματος των ρυθμών αναπτύσσουμε κατά περιοχές το πεδίο σε άθροισμα ιδιο-ρυθμών (eigenmodes). Η ανάπτυξη των πεδίων σε ιδιο-ρυθμούς στη μέθοδο που ακολουθούμε, όπως αναλύσαμε και στην ενότητα 1.5.2, γίνεται κατά την αξονική διεύθυνση. Η επιφάνεια διεπαφής (interface), στην οποία εφαρμόζουμε τη μέθοδο ταιριάσματος των ρυθμών, είναι η κυλινδρική επιφάνεια επικοινωνίας των δαχτυλιδιών με το κυρίως σώμα του κυλινδρικού κυματοδηγού ( $r = r_{in}$ ). Επομένως, τη μία περιοχή ανάπτυξης σε ιδιο-ρυθμούς αποτελούν τα δαχτυλίδια (δηλ. για  $r > r_{in}$ ), ενώ η άλλη περιοχή ανάπτυξης είναι το κυρίως σώμα του κυματοδηγού ( $r < r_{in}$ ). Οι οριακές συνθήκες που εφαρμόζουμε είναι η συνέχεια των εφαπτομενικών συνιστωσών του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου στη διεπαφή των δαχτυλιδιών, ο μηδενισμός των εφαπτομενικών συνιστωσών του ηλεκτρικού πεδίου στα μεταλλικά τοιχώματα καθώς και οριακές συνθήκες εξερχόμενου κύματος (outgoing-wave boundary conditions) στην εγκάρσια επιφάνεια των ακραίων ορίων της περιοχής κυματοδηγού. Όπως έχουμε εξηγήσει και στην ενότητα 1.5.2, όπου αναλύσαμε τη στρατηγική αντιμετώπισης του προβλήματος, η θεώρηση οριακών συνθηκών απομακρυνόμενων κυμάτων αποτελεί καινούριο χαρακτηριστικό, που επιτρέπει τη ρεαλιστική και εις βάθος μελέτη της διάταξης.

Σε αντίθεση με την κλασική μέθοδο ταιριάσματος των ρυθμών, στην οποία οι ρυθμοί στις ξεχωριστές περιοχές ταιριάζονται στη διεπαφή με συνθήκες ορθογωνιότητας και μέσω υπολογισμού ολοκληρωμάτων σύζευξης των ρυθμών στην κοινή περιοχή, στην περίπτωση μας τα ολοκληρώματα σύζευξης είναι γενικευμένα. Ο λόγος είναι ότι στην περιοχή κυματοδηγού λόγω των οριακών συνθηκών εξερχόμενου κύματος, η ανάπτυξη σε ιδιο-ρυθμούς δεν παράγει μια άπειρη σειρά ιδιοσυναρτήσεων διακριτού φάσματος, αλλά ένα ολοκλήρωμα με συνεχές φάσμα κυματαριθμών. Επομένως, έχουμε να ταιριάζουμε μια περιοχή διακριτού φάσματος (δαχτυλίδια) με μια περιοχή συνεχούς φάσματος (κυρίως σώμα κυματοδηγού). Στην περίπτωση μας λοιπόν, όπως θα δούμε παρακάτω, η μέθοδος των ταιριάσματος των ρυθμών γενικεύεται άμεσα και καταλήγει σε εκφράσεις γενικευμένων ολοκληρωμάτων τα οποία μπορούν να υπολογιστούν αναλυτικά, με τεχνικές ολοκλήρωσης στο μιγαδικό επίπεδο.

### 2.2.2 Ανάπτυξη πεδίων στο κυρίως σώμα του κυματοδηγού

Στην υποενότητα αυτή δίνουμε τις εκφράσεις των πεδίων στην περιοχή του κυματοδηγού ( $r < r_{in}$ ). Για την αναπαράσταση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου θα χρησιμοποιήσουμε τα δυναμικά του Hertz [91].

Αρχικά, εισάγουμε ως διέγερση έναν προσπίπτοντα ρυθμό TE κυματοδηγού που διαδίδεται από αριστερά προς τα δεξιά και φωτίζει τη διάταξη. Εστιάζουμε σε ρυθμούς TE γιατί αυτοί είναι οι ρυθμοί οι οποίοι ευνοούν την αλληλεπίδραση γυροτρονίου. Στην ενότητα 2.4.1 για λόγους πληρότητας θα εισάγουμε και τις εκφράσεις για προσπίπτοντες ρυθμούς TM. Η έκφραση του ρυθμού TE με τη βοήθεια του μαγνητικού δυναμικού Hertz δίνεται από τον τύπο:

$$\mathbf{\Pi}_m^{\text{inc}} = \hat{z} A_H J_m(K_\perp r) e^{jm\phi} e^{-\beta z}, \quad (2.2.1)$$

όπου  $A_H$  το πλάτος του προσπίπτοντος ρυθμού,  $m$  ο αζιμουθιακός δείκτης,  $J_m(x)$  η συνάρτηση Bessel πρώτου είδους τάξης  $m$ ,  $K_\perp = \chi'_{mp}/r_{\text{in}}$  ο εγκάρσιος κυματαριθμός του ρυθμού με ιδιοτιμή  $\chi'_{mp}$  την  $p$ -οστή ρίζα της  $J'_m(x)$  και  $\beta = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - K_\perp^2}$  ο αξονικός κυματαριθμός του ρυθμού.

Επίσης εκφράζουμε το σκεδαζόμενο πεδίο, που παράγεται από τις ασυνέχειες των δαχτυλιδιών, ως ένα συνεχές φάσμα κυματαριθμών:

$$\mathbf{\Pi}_e = \hat{z} \int_{-\infty}^{+\infty} A_e(\zeta) J_m(k_\perp r) e^{jm\phi} e^{j\zeta z} d\zeta, \quad (2.2.2\alpha)$$

$$\mathbf{\Pi}_m = \hat{z} \int_{-\infty}^{+\infty} A_h(\zeta) J_m(k_\perp r) e^{jm\phi} e^{j\zeta z} d\zeta, \quad (2.2.2\beta)$$

όπου  $A_e(\zeta)$ ,  $A_h(\zeta)$  άγνωστες κατανομές πλάτους του ηλεκτρικού και μαγνητικού δυναμικού του Hertz, αντίστοιχα, και  $\zeta$  ο αξονικός κυματαριθμός. Ο εγκάρσιος κυματαριθμός εξαρτάται από τη μεταβλητή ολοκλήρωσης και δίνεται από τη σχέση:  $k_\perp = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \zeta^2}$ .

### 2.2.3 Ανάπτυξη πεδίων σε κενά δαχτυλίδια

Στην υποενότητα αυτή δίνουμε τις εκφράσεις των πεδίων σαν ανάπτυξη ιδιο-ρυθμών κατά τη διαμήκη διεύθυνση μέσα σε κενά δαχτυλίδια. Συγκεκριμένα, τα δυναμικά στο  $\ell$ -οστό δαχτυλίδι (περιοχή 2) γράφονται ως εξής:

$$\mathbf{\Pi}_e^{(\ell)} = \hat{z} \sum_{n=0}^{\infty} P_{n\ell}^{(2)}(k_{n\ell}^{(2)} r) e^{jm\phi} \cos\left[\frac{n\pi}{d_\ell}(z - s_\ell)\right], \quad (2.2.3\alpha)$$

$$\mathbf{\Pi}_m^{(\ell)} = \hat{z} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{n\ell}^{(2)}(k_{n\ell}^{(2)} r) e^{jm\phi} \sin\left[\frac{n\pi}{d_\ell}(z - s_\ell)\right], \quad (2.2.3\beta)$$

όπου  $P_{n\ell}^{(2)}(k_{n\ell}^{(2)} r)$ ,  $Q_{n\ell}^{(2)}(k_{n\ell}^{(2)} r)$  οι συναρτήσεις του εγκάρσιου προφίλ, οι οποίες προκειμένου να ικανοποιούν τις οριακές συνθήκες στην εξωτερική ακτίνα του δαχτυλιδιού ορίζονται σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$P_{n\ell}^{(2)}(k_{n\ell}^{(2)} r) = E_{n\ell} p_{en\ell}(r), \quad (2.2.4\alpha)$$

$$Q_{n\ell}^{(2)}(k_{n\ell}^{(2)} r) = H_{n\ell} q_{hn\ell}(r), \quad (2.2.4\beta)$$

$$p_{en\ell}(r) = J_m(k_{n\ell}^{(2)} r) N_m(k_{n\ell}^{(2)} r_\ell) - J_m(k_{n\ell}^{(2)} r_\ell) N_m(k_{n\ell}^{(2)} r), \quad (2.2.5\alpha)$$

$$q_{\text{hnl}}(r) = J_m(k_{nl}^{(2)} r) N'_m(k_{nl}^{(2)} r_\ell) - J'_m(k_{nl}^{(2)} r_\ell) N_m(k_{nl}^{(2)} r), \quad (2.2.5\beta)$$

όπου  $E_{nl}$ ,  $H_{nl}$  είναι οι άγνωστοι συντελεστές πλάτους και  $N_m(r)$  η συνάρτηση Bessel 2<sup>ου</sup> είδους ή συνάρτηση Neumann. Ο εγκάρσιος κυματαριθμός συνδέεται με τον διαμήκη σύμφωνα με τη σχέση:  $k_{nl}^{(2)} = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - (n\pi/d_\ell)^2}$ .

#### 2.2.4 Ανάπτυξη πεδίων σε δαχτυλίδια με διηλεκτρικά και εσοχή κενού

Για την περίπτωση δαχτυλιδιών φορτωμένων με διηλεκτρικό υλικό και παρουσία εσοχής κενού δίνουμε παρακάτω τις εκφράσεις των πεδίων. Στην περιοχή 3 του  $\ell$ -οστού δαχτυλιδιού (Σχήμα 2.1) τα δυναμικά του Hertz έχουν τις εξής εκφράσεις:

$$\mathbf{\Pi}_e^{(3)} = \hat{z} \sum_{n=0}^{\infty} E_{nl} P_{nl}^{(3)}(k_{nl}^{(3)} r) e^{jm\phi} \cos\left[\frac{n\pi}{d_\ell}(z - s_\ell)\right], \quad (2.2.6\alpha)$$

$$\mathbf{\Pi}_m^{(3)} = \hat{z} \sum_{n=1}^{\infty} H_{nl} Q_{nl}^{(3)}(k_{nl}^{(3)} r) e^{jm\phi} \sin\left[\frac{n\pi}{d_\ell}(z - s_\ell)\right], \quad (2.2.6\beta)$$

όπου ο εγκάρσιος κυματαριθμός δίνεται από τη σχέση  $k_{nl}^{(3)} = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_\ell \mu_0 - (n\pi/d_\ell)^2}$ . Ο κυματαριθμός εξαρτάται από την επιτρεπτότητα του διηλεκτρικού υλικού στο  $\ell$ -οστό δαχτυλίδι  $\varepsilon_\ell$  που εν γένει είναι μιγαδική ποσότητα, ώστε να συμπεριλαμβάνει τις διηλεκτρικές απώλειες.

Οι συναρτήσεις του εγκάρσιου προφίλ, που ικανοποιούν τις οριακές συνθήκες στην εξωτερική ακτίνα του διηλεκτρικού όπου θεωρούμε πως υπάρχει τέλειος ηλεκτρικός αγωγός, δίνονται τώρα από τις σχέσεις:

$$P_{nl}^{(3)}(k_{nl}^{(3)} r) = J_m(k_{nl}^{(3)} r) N_m(k_{nl}^{(3)} r_\ell) - J_m(k_{nl}^{(3)} r_\ell) N_m(k_{nl}^{(3)} r), \quad (2.2.7\alpha)$$

$$Q_{nl}^{(3)}(k_{nl}^{(3)} r) = J_m(k_{nl}^{(3)} r) N'_m(k_{nl}^{(3)} r_\ell) - J'_m(k_{nl}^{(3)} r_\ell) N_m(k_{nl}^{(3)} r). \quad (2.2.7\beta)$$

Στην περιοχή 2 (Σχήμα 2.1), η οποία αποτελεί την εσοχή κενού, τα δυναμικά του Hertz γράφονται παρόμοια ως εξής:

$$\mathbf{\Pi}_e^{(2)} = \hat{z} \sum_{n=0}^{\infty} P_{nl}^{(2)}(k_{nl}^{(2)} r) e^{jm\phi} \cos\left[\frac{n\pi}{d_\ell}(z - s_\ell)\right], \quad (2.2.8\alpha)$$

$$\mathbf{\Pi}_m^{(2)} = \hat{z} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{nl}^{(2)}(k_{nl}^{(2)} r) e^{jm\phi} \sin\left[\frac{n\pi}{d_\ell}(z - s_\ell)\right], \quad (2.2.8\beta)$$

όπου ο εγκάρσιος κυματαριθμός στην περιοχή αυτή δίνεται από τη γνωστή σχέση:  $k_{nl}^{(2)} = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - (n\pi/d_\ell)^2}$ . Η γενική μορφή των συναρτήσεων εγκάρσιου προφίλ που εμπεριέχουν τους αγνώστους δίνεται από τις σχέσεις:

$$P_{nl}^{(2)}(k_{nl}^{(2)} r) = E_{nl} p_{enl}(r) + H_{nl} p_{hnl}(r), \quad (2.2.9\alpha)$$

$$Q_{nl}^{(2)}(k_{nl}^{(2)} r) = E_{nl} q_{enl}(r) + H_{nl} q_{hnl}(r). \quad (2.2.9\beta)$$

Οι συναρτήσεις  $p_{enl}(r)$ ,  $p_{hnl}(r)$ ,  $q_{enl}(r)$ ,  $q_{hnl}(r)$  αποτελούνται από έναν γραμμικό συνδυασμό κυλινδρικών συναρτήσεων Bessel 1<sup>ου</sup> και 2<sup>ου</sup> είδους:

$$p_{ent}(r) = C_{1e} J_m(k_{nl}^{(2)} r) + C_{2e} N_m(k_{nl}^{(2)} r), \quad (2.2.10\alpha)$$

$$p_{hnt}(r) = C_{1h} J_m(k_{nl}^{(2)} r) + C_{2h} N_m(k_{nl}^{(2)} r), \quad (2.2.10\beta)$$

$$q_{ent}(r) = C_{3e} J_m(k_{nl}^{(2)} r) + C_{4e} N_m(k_{nl}^{(2)} r), \quad (2.2.11\alpha)$$

$$q_{hnt}(r) = C_{3h} J_m(k_{nl}^{(2)} r) + C_{4h} N_m(k_{nl}^{(2)} r). \quad (2.2.11\beta)$$

Οι άγνωστοι συντελεστές  $C_{1e,h}$ ,  $C_{2e,h}$ ,  $C_{3e,h}$ ,  $C_{4e,h}$  των συναρτήσεων Bessel καθορίζονται από τις οριακές συνθήκες συνέχειας του εφαπτομενικού ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου στη διεπαφή μεταξύ των περιοχών 2 και 3 ( $r = r_{d\ell}$ ). Μετά από εκτεταμένη αλγεβρική επεξεργασία εφαρμόζοντας τις οριακές συνθήκες, προκύπτουν οι αναλυτικές εκφράσεις των αγνώστων συντελεστών:

$$C_{1e} = -\frac{k_{nl}^{(3)}}{\varepsilon_0 k_{nl}^{(2)}} \cdot \frac{\varepsilon k_{nl}^{(2)} P_{nl}^{\prime(3)}(k_{nl}^{(3)} r_{d\ell}) N_m(k_{nl}^{(2)} r_{d\ell}) - \varepsilon_0 k_{nl}^{(3)} P_{nl}^{(3)}(k_{nl}^{(3)} r_{d\ell}) N_m'(k_{nl}^{(2)} r_{d\ell})}{J_m(k_{nl}^{(2)} r_{d\ell}) N_m'(k_{nl}^{(2)} r_{d\ell}) - J_m'(k_{nl}^{(2)} r_{d\ell}) N_m(k_{nl}^{(2)} r_{d\ell})}, \quad (2.2.12\alpha)$$

$$C_{1h} = m \frac{k_{nl}^{(2)} - k_{nl}^{(3)}}{r_{d\ell} \omega \varepsilon_0 k_{nl}^{(3)}} \cdot \frac{n\pi}{d\ell} \cdot \frac{Q_{nl}^{(3)}(k_{nl}^{(3)} r_{d\ell}) N_m(k_{nl}^{(2)} r_{d\ell})}{J_m(k_{nl}^{(2)} r_{d\ell}) N_m'(k_{nl}^{(2)} r_{d\ell}) - J_m'(k_{nl}^{(2)} r_{d\ell}) N_m(k_{nl}^{(2)} r_{d\ell})}, \quad (2.2.12\beta)$$

$$C_{2e} = \frac{k_{nl}^{(3)}}{\varepsilon_0 k_{nl}^{(2)}} \cdot \frac{\varepsilon k_{nl}^{(2)} P_{nl}^{\prime(3)}(k_{nl}^{(3)} r_{d\ell}) J_m(k_{nl}^{(2)} r_{d\ell}) - \varepsilon_0 k_{nl}^{(3)} P_{nl}^{(3)}(k_{nl}^{(3)} r_{d\ell}) J_m'(k_{nl}^{(2)} r_{d\ell})}{J_m(k_{nl}^{(2)} r_{d\ell}) N_m'(k_{nl}^{(2)} r_{d\ell}) - J_m'(k_{nl}^{(2)} r_{d\ell}) N_m(k_{nl}^{(2)} r_{d\ell})}, \quad (2.2.13\alpha)$$

$$C_{2h} = -m \frac{k_{nl}^{(2)} - k_{nl}^{(3)}}{r_{d\ell} \omega \varepsilon_0 k_{nl}^{(3)}} \cdot \frac{n\pi}{d\ell} \cdot \frac{Q_{nl}^{(3)}(k_{nl}^{(3)} r_{d\ell}) J_m(k_{nl}^{(2)} r_{d\ell})}{J_m(k_{nl}^{(2)} r_{d\ell}) N_m'(k_{nl}^{(2)} r_{d\ell}) - J_m'(k_{nl}^{(2)} r_{d\ell}) N_m(k_{nl}^{(2)} r_{d\ell})}, \quad (2.2.13\beta)$$

$$C_{3e} = m \frac{k_{nl}^{(2)} - k_{nl}^{(3)}}{r_{d\ell} \omega \mu_0 k_{nl}^{(3)}} \cdot \frac{n\pi}{d\ell} \cdot \frac{P_{nl}^{(3)}(k_{nl}^{(3)} r_{d\ell}) N_m(k_{nl}^{(2)} r_{d\ell})}{J_m(k_{nl}^{(2)} r_{d\ell}) N_m'(k_{nl}^{(2)} r_{d\ell}) - J_m'(k_{nl}^{(2)} r_{d\ell}) N_m(k_{nl}^{(2)} r_{d\ell})}, \quad (2.2.14\alpha)$$

$$C_{3h} = -\frac{k_{nl}^{(3)}}{k_{nl}^{(2)}} \cdot \frac{k_{nl}^{(2)} Q_{nl}^{\prime(3)}(k_{nl}^{(3)} r_{d\ell}) N_m(k_{nl}^{(2)} r_{d\ell}) - k_{nl}^{(3)} Q_{nl}^{(3)}(k_{nl}^{(3)} r_{d\ell}) N_m'(k_{nl}^{(2)} r_{d\ell})}{J_m(k_{nl}^{(2)} r_{d\ell}) N_m'(k_{nl}^{(2)} r_{d\ell}) - J_m'(k_{nl}^{(2)} r_{d\ell}) N_m(k_{nl}^{(2)} r_{d\ell})}, \quad (2.2.14\beta)$$

$$C_{4e} = -m \frac{k_{nl}^{(2)} - k_{nl}^{(3)}}{r_{d\ell} \omega \mu_0 k_{nl}^{(3)}} \cdot \frac{n\pi}{d\ell} \cdot \frac{P_{nl}^{(3)}(k_{nl}^{(3)} r_{d\ell}) J_m(k_{nl}^{(2)} r_{d\ell})}{J_m(k_{nl}^{(2)} r_{d\ell}) N_m'(k_{nl}^{(2)} r_{d\ell}) - J_m'(k_{nl}^{(2)} r_{d\ell}) N_m(k_{nl}^{(2)} r_{d\ell})}, \quad (2.2.15\alpha)$$

$$C_{4h} = \frac{k_{nl}^{(3)}}{k_{nl}^{(2)}} \cdot \frac{k_{nl}^{(2)} Q_{nl}^{\prime(3)}(k_{nl}^{(3)} r_{d\ell}) J_m(k_{nl}^{(2)} r_{d\ell}) - k_{nl}^{(3)} Q_{nl}^{(3)}(k_{nl}^{(3)} r_{d\ell}) J_m'(k_{nl}^{(2)} r_{d\ell})}{J_m(k_{nl}^{(2)} r_{d\ell}) N_m'(k_{nl}^{(2)} r_{d\ell}) - J_m'(k_{nl}^{(2)} r_{d\ell}) N_m(k_{nl}^{(2)} r_{d\ell})}. \quad (2.2.15\beta)$$

Παρατηρούμε ότι για συμμετρικούς ρυθμούς ( $m = 0$ ) οι συντελεστές  $C_{1h}$ ,  $C_{2h}$ ,  $C_{3e}$ ,  $C_{4e}$  μηδενίζονται και επομένως δεν υπάρχει σύζευξη των δύο πολώσεων λόγω της παρουσίας του διηλεκτρικού. Επομένως, υβριδικοί ρυθμοί λόγω της παρουσίας του

διπλεκτρικού παρουσιάζονται στη διάταξη μόνο για μη συμμετρικούς ρυθμούς. Αν και οι παραπάνω εκφράσεις για τα πεδία στο δαχτυλίδι φαίνονται πολύπλοκες, η αναλυτική μορφή τους τις καθιστά εύκολα και γρήγορα υπολογίσιμες στον υπολογιστή. Η παρουσία της εσοχής, που όπως έχουμε αναλύσει παίζει σημαντικό ρόλο στην ηλεκτρομαγνητική περιγραφή της διάταξης και είναι απαραίτητη για την ορθή μοντελοποίηση σημαντικών φαινομένων, είναι επίσης υπεύθυνη για την αναλυτική πολυπλοκότητα των σχέσεων.

Έτσι, η πολυπλοκότητα των παραπάνω εκφράσεων, η οποία αφορά και τη διαδικασία υπολογισμού τους, είναι αναπόφευκτη και οφείλεται σε μόλις δύο στρώματα διαφορετικού υλικού. Σε αντίστοιχες επίπεδες γεωμετρίες ο υπολογισμός των πεδίων σε πολυστρωματικές διατάξεις μπορεί να γίνει πολύ πιο εύκολα με απλούστερες αναλυτικές εκφράσεις με βάση τη θεωρία των γραμμών μεταφοράς. Εν αντιθέσει με τις επίπεδες γεωμετρίες, η αναλυτική αυτή τεχνική δεν εφαρμόζεται σε κυλινδρικές γεωμετρίες και έτσι είμαστε αναγκασμένοι να βρούμε τις αναλυτικές εκφράσεις των πεδίων επιλύοντας αναλυτικά το σύστημα εξισώσεων που πηγάζει από τις οριακές συνθήκες. Πέρα από την αναλυτική μέθοδο των γραμμών μεταφοράς υπάρχει και η αριθμητική μέθοδος γραμμών μεταφοράς (Transmission Line Method, TLM) [92] υβριδικά σε συνδυασμό με αναλυτικό φορμαλισμό για την αξιωματική και αξονική διεύθυνση όπως στο [93]. Η εφαρμογή μιας τέτοιας αριθμητικής τεχνικής θα επέτρεπε τον χειρισμό ακτινικής ανομοιογένειας στο διπλεκτρικό υλικό, αλλά θα επιβάρυνε σημαντικά σε υπολογιστικό χρόνο την επίλυση του προβλήματος. Ακτινικά ανομοιογενές υλικό με προοδευτική μεταβολή της επιτρεπτότητας θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για το καλύτερο ταίριασμα της περιοχής κενού με το διπλεκτρικό ώστε να επιτευχθεί μεγαλύτερη διείσδυση του πεδίου στο τελευταίο. Έτσι, θα ελαχιστοποιούταν η ανάκλαση στη διεπαφή και οι απώλειες στο διπλεκτρικό θα ήταν μεγαλύτερες. Μια τέτοια υλοποίηση προτείνεται σαν επέκταση αυτής της διατριβής και περιγράφεται με περισσότερες λεπτομέρειες στην υποενότητα 7.2.3.

### 2.2.5 Εξαγωγή του συστήματος εξισώσεων

Έχοντας εξάγει τη γενική έκφραση των πεδίων στην περιοχή του κυματοδηγού και στην περιοχή των δαχτυλιδιών, απομένει η ικανοποίηση των οριακών συνθηκών στην κυλινδρική επιφάνεια  $r = r_{in}$ . Αυτές εκφράζονται ως εξής:

$$\mathbf{E}_t^{(hollow)} = \begin{cases} \mathbf{E}_t^{(ring)} & , \text{για } s_\ell < z < s_\ell + d_\ell \\ 0 & , z \text{ αλλού} \end{cases}, \quad r = r_{in}, \quad (2.2.16\alpha)$$

$$\mathbf{H}_t^{(hollow)} = \mathbf{H}_t^{(ring)} \quad , \text{για } s_\ell < z < s_\ell + d_\ell, \quad r = r_{in}, \quad (2.2.16\beta)$$

όπου  $\mathbf{E}_t^{(hollow)}$ ,  $\mathbf{H}_t^{(hollow)}$  τα διανύσματα των εφαπτομενικών συνιστωσών του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου στην περιοχή του κυματοδηγού και  $\mathbf{E}_t^{(ring)}$ ,  $\mathbf{H}_t^{(ring)}$  τα αντίστοιχα πεδία μεγέθη στην περιοχή του  $\ell$ -οστού δαχτυλιδιού.

Ξεκινάμε με την αξιωματική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου  $E_\phi$ , η οποία εκφράζεται μέσω των δυναμικών του Hertz ως εξής [91]:

$$E_\phi = \frac{1}{r_{in}} \frac{\partial^2 \Pi_c}{\partial \phi \partial z} + j\omega\mu_0 \frac{\partial \Pi_m}{\partial r}. \quad (2.2.17)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (2.2.17) και εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό Fourier στην (2.2.16α) καταλήγουμε στη σχέση:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{j\omega m}{r_{\text{in}}} A_e(\zeta) J_m(k_{\perp} r_{\text{in}}) + j\omega \mu_0 k_{\perp} A_h(\zeta) J'_m(k_{\perp} r_{\text{in}}) = \\
 & \frac{1}{2\pi r_{\text{in}}} \sum_{\ell=1}^L \sum_{n=0}^{\infty} -jm \left( \frac{n\pi}{d_{\ell}} \right)^2 P_{n\ell}^{(2)}(k_{n\ell}^{(2)} r_{\text{in}}) e^{-j\zeta s_{\ell}} F_{n\ell}(\zeta) \\
 & + \frac{j\omega \mu_0}{2\pi} \sum_{\ell=1}^L \sum_{n=1}^{\infty} k_{n\ell}^{(2)} \frac{n\pi}{d_{\ell}} Q_{n\ell}^{(2)}(k_{n\ell}^{(2)} r_{\text{in}}) e^{-j\zeta s_{\ell}} F_{n\ell}(\zeta).
 \end{aligned} \tag{2.2.18}$$

Η βοηθητική συνάρτηση  $F_{n\ell}(\zeta)$  προκύπτει από τον αναλυτικό υπολογισμό των ολοκληρωμάτων  $\int_{s_{\ell}}^{s_{\ell}+d_{\ell}} \sin\left(\frac{n\pi}{d_{\ell}}(z-s_{\ell})\right) e^{-j\zeta z} dz$  και ορίζεται ως εξής:

$$F_{n\ell}(\zeta) = \frac{1 - (-1)^n e^{-j\zeta d_{\ell}}}{(n\pi/d_{\ell})^2 - \zeta^2}. \tag{2.2.19}$$

Η διαμήκης συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου  $E_z$  δίνεται συναρτήσει του ηλεκτρικού δυναμικού του Hertz από τη σχέση:

$$E_z = \frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial z^2} + \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \Pi_e. \tag{2.2.20}$$

Εφαρμόζοντας ομοίως τον μετασχηματισμό Fourier στην (2.2.16α) και μέσω της (2.2.20) παίρνουμε τη σχέση:

$$A_e(\zeta) = \frac{j\zeta}{2\pi k_{\perp}^2 J_m(k_{\perp} r_{\text{in}})} \sum_{\ell=1}^L \sum_{n=0}^{\infty} k_{n\ell}^{(2)} P_{n\ell}^{(2)}(k_{n\ell}^{(2)} r_{\text{in}}) e^{-j\zeta s_{\ell}} F_{n\ell}(\zeta). \tag{2.2.21}$$

Έχοντας την αναλυτική έκφραση της  $A_e(\zeta)$  αντικαθιστούμε την (2.2.21) στην (2.2.18) και παίρνουμε την αναλυτική έκφραση της  $A_h(\zeta)$  :

$$\begin{aligned}
 A_h(\zeta) &= \frac{m}{2\pi \omega \mu_0 k_{\perp} J'_m(k_{\perp} r_{\text{in}}) r_{\text{in}}} \sum_{\ell=1}^L \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{k_{n\ell}^{(2)}}{k_{\perp}^2} \zeta^2 - \left( \frac{n\pi}{d_{\ell}} \right)^2 \right) P_{n\ell}^{(2)}(k_{n\ell}^{(2)} r_{\text{in}}) e^{-j\zeta s_{\ell}} F_{n\ell}(\zeta) \\
 &+ \frac{1}{2\pi k_{\perp} J'_m(k_{\perp} r_{\text{in}})} \sum_{\ell=1}^L \sum_{n=1}^{\infty} k_{n\ell}^{(2)} \frac{n\pi}{d_{\ell}} Q_{n\ell}^{(2)}(k_{n\ell}^{(2)} r_{\text{in}}) e^{-j\zeta s_{\ell}} F_{n\ell}(\zeta).
 \end{aligned} \tag{2.2.22}$$

Συνεχίζουμε με την εφαρμογή της οριακής συνθήκης (2.2.16β) για τις εφαπτομενικές συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου. Για τη διαμήκη συνιστώσα  $H_z$  πολλαπλασιάζουμε την (2.2.16β) με την ιδιοσυνάρτηση  $n$ -οστής τάξης  $\sin\left[\frac{n\pi}{d_{\ell}}(z-s_{\ell})\right]$  και ολοκληρώνουμε κατά μήκος του  $\ell$ -οστού δαχτυλιδιού. Έτσι καταλήγουμε στη σχέση:

$$\begin{aligned}
 & (\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \beta^2) A_H J_m(K_{\perp} r_{\text{in}}) \frac{n\pi}{d_{\ell}} e^{-j\beta s_{\ell}} F_{n\ell}(\beta) - \left( \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \left( \frac{n\pi}{d_{\ell}} \right)^2 \right) Q_{n\ell}^{(2)}(k_{n\ell}^{(2)} r_{\text{in}}) \frac{d_{\ell}}{2} (1 - \delta_{n0}) \\
 & = - \int_{-\infty}^{\infty} (\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \zeta^2) A_h(\zeta) J_m(k_{\perp} r_{\text{in}}) \frac{n\pi}{d_{\ell}} e^{j\zeta s_{\ell}} F_{n\ell}(-\zeta) d\zeta.
 \end{aligned} \tag{2.2.23}$$

Τέλος, εφαρμόζουμε τη συνέχεια της αζιμουθιακής συνιστώσας  $H_{\phi}$ , όπου πολλαπλασιάζουμε με τη  $n$ -οστή ιδιοσυνάρτηση  $\cos\left[\frac{n\pi}{d_{\ell}}(z-s_{\ell})\right]$  και ολοκληρώνουμε κατά μήκος του  $\ell$ -οστού δαχτυλιδιού. Έπειτα από πράξεις καταλήγουμε στη σχέση:



$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{r_{\text{in}}} \int_{-\infty}^{\infty} A_{\text{h}}(\zeta) m \zeta^2 j J_m(k_{\perp} r_{\text{in}}) e^{j\zeta s_{\ell}} F_{n\ell}(-\zeta) d\zeta - \omega \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} A_{\text{e}}(\zeta) \zeta k_{\perp} J'_m(k_{\perp} r_{\text{in}}) e^{j\zeta s_{\ell}} F_{n\ell}(-\zeta) d\zeta \\
 & + \frac{1}{r_{\text{in}}} j m \beta^2 A_{\text{H}} J_m(K_{\perp} r_{\text{in}}) e^{-j\beta s_{\ell}} F_{n\ell}(\beta) = \frac{j m n \pi}{r_{\text{in}}} \frac{d_{\ell}}{d_{\ell}} Q_{n\ell}^{(2)}(k_{n\ell}^{(2)} r_{\text{in}}) \frac{d_{\ell}}{2} (1 + \delta_{n0}) \\
 & - j \omega \varepsilon_0 k_{n\ell}^{(2)} P'_{n\ell}{}^{(2)}(k_{n\ell}^{(2)} r_{\text{in}}) \frac{d_{\ell}}{2} (1 + \delta_{n0}).
 \end{aligned} \tag{2.2.24}$$

όπου με  $\delta_{n0}$  συμβολίζουμε το δέλτα του Kronecker.

Για να σχηματίσουμε τις τελικές εξισώσεις του συστήματος αντικαθιστούμε τώρα τις (2.2.21) και (2.2.22) στην (2.2.24) καθώς και την (2.2.22) στην (2.2.23). Έτσι παίρνουμε τον άπειρο αριθμό εξισώσεων για τους άπειρους αγνώστους  $E_{n\ell}$ ,  $H_{n\ell}$ , οι οποίοι εμπεριέχονται ως συντελεστές στις συναρτήσεις  $P_{n\ell}^{(2)}$ ,  $Q_{n\ell}^{(2)}$ :

$$\begin{aligned}
 & \left[ \frac{n \pi m}{d_{\ell} r_{\text{in}}} Q_{n\ell}^{(2)}(k_{n\ell}^{(2)} r_{\text{in}}) - k_{n\ell}^{(2)} \omega \varepsilon_0 P'_{n\ell}{}^{(2)}(k_{n\ell}^{(2)} r_{\text{in}}) \right] \frac{d_{\ell}}{2} (1 + \delta_{n0}) - \sum_{\nu, \lambda} \frac{\nu \pi m}{d_{\ell} r_{\text{in}}} k_{\nu\lambda}^{(2)} Q'_{\nu\lambda}{}^{(2)}(k_{\nu\lambda}^{(2)} r_{\text{in}}) I_1(n, \ell, \nu, \lambda) \\
 & + \sum_{\nu, \lambda} \frac{P_{\nu\lambda}^{(2)}(k_{\nu\lambda}^{(2)} r_{\text{in}})}{\omega r_{\text{in}}^2} \left[ \left( \frac{\nu \pi}{d_{\ell}} \right)^2 \frac{m^2}{\mu_0} I_1(n, \ell, \nu, \lambda) - k_{\nu\lambda}^{(2)} \frac{m^2}{\mu_0} I_3(n, \ell, \nu, \lambda) + (\omega r_{\text{in}} k_{\nu\lambda}^{(2)})^2 \varepsilon_0 I_4(n, \ell, \nu, \lambda) \right] \\
 & = \frac{\beta^2}{r_{\text{in}}} m A_{\text{H}} J_m(K_{\perp} r_{\text{in}}) e^{-j\beta s_{\ell}} F_{n\ell}(\beta),
 \end{aligned} \tag{2.2.25}$$

$$\begin{aligned}
 & k_{n\ell}^{(2)} Q_{n\ell}^{(2)}(k_{n\ell}^{(2)} r_{\text{in}}) \frac{d_{\ell}}{2} (1 - \delta_{n0}) + \sum_{\nu, \lambda} m n \pi \frac{P_{\nu\lambda}^{(2)}(k_{\nu\lambda}^{(2)} r_{\text{in}})}{\omega \mu_0 r_{\text{in}} d_{\ell}} \left[ \left( \frac{\nu \pi}{d_{\ell}} \right)^2 I_2(n, \ell, \nu, \lambda) - k_{\nu\lambda}^{(2)} I_1(n, \ell, \nu, \lambda) \right] \\
 & - \sum_{\nu, \lambda} k_{\nu\lambda}^{(2)} \frac{n \nu \pi^2}{d_{\ell} d_{\lambda}} Q'_{\nu\lambda}{}^{(2)}(k_{\nu\lambda}^{(2)} r_{\text{in}}) I_2(n, \ell, \nu, \lambda) = K_{\perp}^2 \frac{n \pi}{d_{\ell}} A_{\text{H}} J_m(K_{\perp} r_{\text{in}}) e^{-j\beta s_{\ell}} F_{n\ell}(\beta),
 \end{aligned} \tag{2.2.26}$$

για δείκτη αξονικού ρυθμού  $n = 0, 1, \dots$  και δείκτη δαχτυλιδιού  $\ell = 1, 2, \dots, L$ .

Στις τελικές εξισώσεις του συστήματος εμφανίζονται τα γενικευμένα ολοκληρώματα Fourier  $I_i(n, \ell, \nu, \lambda)$ , τα οποία ορίζονται ως εξής:

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\zeta^2 J_m(k_{\perp} r_{\text{in}})}{k_{\perp} J'_m(k_{\perp} r_{\text{in}})} e^{j\zeta(s_{\ell} - s_{\lambda})} F_{n\ell}(-\zeta) F_{\nu\lambda}(\zeta) d\zeta, \tag{2.2.27}$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_{\perp} J_m(k_{\perp} r_{\text{in}})}{J'_m(k_{\perp} r_{\text{in}})} e^{j\zeta(s_{\ell} - s_{\lambda})} F_{n\ell}(-\zeta) F_{\nu\lambda}(\zeta) d\zeta, \tag{2.2.28}$$

$$I_3 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\zeta^4 J_m(k_{\perp} r_{\text{in}})}{k_{\perp}^3 J'_m(k_{\perp} r_{\text{in}})} e^{j\zeta(s_{\ell} - s_{\lambda})} F_{n\ell}(-\zeta) F_{\nu\lambda}(\zeta) d\zeta, \tag{2.2.29}$$

$$I_4 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\zeta^2 J'_m(k_{\perp} r_{\text{in}})}{k_{\perp} J_m(k_{\perp} r_{\text{in}})} e^{j\zeta(s_{\ell} - s_{\lambda})} F_{n\ell}(-\zeta) F_{\nu\lambda}(\zeta) d\zeta. \tag{2.2.30}$$

Για τον υπολογισμό των γενικευμένων ολοκληρωμάτων Fourier χρησιμοποιούμε τεχνικές υπολογισμού των ολοκληρωμάτων στο μιγαδικό επίπεδο. Η στρατηγική αυτή επιτρέπει τον αναλυτικό προσδιορισμό των ολοκληρωμάτων μέσω του μετασχηματισμού τους σε ταχέως συγκλίνουσες σειρές με όρους που αντιστοιχούν στα ολοκληρωτικά υπόλοιπα των πόλων. Η εφαρμογή της μεθόδου για το ολοκλήρωμα

$I_1$  περιγράφεται με λεπτομέρειες στο Παράρτημα Π.1. Δίνουμε στη συνέχεια τις αναλυτικές εκφράσεις των ολοκληρωμάτων, όπως υπολογίστηκαν σύμφωνα με τη μεθοδολογία του παραρτήματος Π.1:

$$I_1 = \sum_{p=1}^{\infty} j \zeta'_{mp} \frac{J_m(\chi'_{mp})}{r_{in} J_m''(\chi'_{mp})} A(n, \nu, \ell, \lambda, \zeta'_{mp}) + \delta_{\ell\lambda} \delta_{n\nu} (1 + \delta_{n0}) \frac{d_{\ell} J_m(k_{n\ell}^{(2)} r_{in})}{2k_{n\ell}^{(2)} J_m'(k_{n\ell}^{(2)} r_{in})} - j \delta_{m0} \frac{\lambda_0}{r_{in}} A(n, \nu, \ell, \lambda, \lambda_0), \quad (2.2.31)$$

$$I_2 = \sum_{p=1}^{\infty} j \frac{\chi_{mp}^{\prime 2} J_m(\chi'_{mp})}{r_{in}^3 \zeta'_{mp} J_m''(\chi'_{mp})} A(n, \nu, \ell, \lambda, \zeta'_{mp}) + (1 - \delta_{n0}) \delta_{\ell\lambda} \delta_{n\nu} \frac{d_{\ell}^3 k_{n\ell}^{(2)} J_m(k_{n\ell}^{(2)} r_{in})}{2n^2 \pi^2 J_m'(k_{n\ell}^{(2)} r_{in})}, \quad (2.2.32)$$

$$I_3 = \sum_{p=1}^{\infty} j \frac{\zeta_{mp}^{\prime 3} r_{in} J_m(\chi'_{mp})}{\chi_{mp}^{\prime 2} J_m''(\chi'_{mp})} A(n, \nu, \ell, \lambda, \zeta'_{mp}) + \frac{n^2 \pi^2}{2d_{\ell} k_{n\ell}^{(2)}} \delta_{\ell\lambda} \delta_{n\nu} \frac{J_m(k_{n\ell}^{(2)} r_{in})}{J_m'(k_{n\ell}^{(2)} r_{in})} + j(1 - \delta_{m0}) \frac{r_{in}}{2|m|} \lambda_0^3 A(n, \nu, \ell, \lambda, \lambda_0), \quad (2.2.33)$$

$$I_4 = \sum_{p=1}^{\infty} j \frac{\zeta_{mp}}{r_{in}} A(n, \nu, \ell, \lambda, \zeta_{mp}) + (1 + \delta_{n0}) \delta_{\ell\lambda} \delta_{n\nu} \frac{d_{\ell} J_m'(k_{n\ell}^{(2)} r_{in})}{2k_{n\ell}^{(2)} J_m(k_{n\ell}^{(2)} r_{in})} + j \frac{|m|}{2r_{in}} \lambda_0 A(n, \nu, \ell, \lambda, \lambda_0), \quad (2.2.34)$$

όπου η συνάρτηση  $A(n, \nu, \ell, \lambda, \zeta)$  δίνεται από τη σχέση:

$$A(n, \nu, \ell, \lambda, \zeta) = \frac{e^{j\zeta|s_{\ell}-s_{\lambda}|} + (-1)^{n+\nu} e^{j\zeta|s_{\ell}-s_{\lambda}+d_{\ell}-d_{\lambda}|} - (-1)^{\nu} e^{j\zeta|s_{\ell}-s_{\lambda}-d_{\lambda}|} - (-1)^n e^{j\zeta|s_{\ell}-s_{\lambda}+d_{\lambda}|}}{[\zeta^2 - (n\pi/d_{\ell})^2][\zeta^2 - (\nu\pi/d_{\lambda})^2]}. \quad (2.2.35)$$

Οι πόλοι  $\zeta_{mp}$  και  $\zeta'_{mp}$  των ολοκληρωμάτων δίνονται από τη σχέση:

$$\zeta_{mp}^{(\nu)} = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - (\chi_{mp}^{(\nu)} / r_{in})^2}, \quad (2.2.36)$$

όπου  $\chi_{mp}$  και  $\chi'_{mp}$  είναι η  $p$ -οστή ρίζα της  $J_m(\chi)$  και της  $J_m'(\chi)$ , αντίστοιχα. Τέλος, η ποσότητα  $\lambda_0$  δίνεται από τη σχέση  $\lambda_0 = -\omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ .

### 2.2.6 Αριθμητική επίλυση συστήματος εξισώσεων

Οι εξισώσεις του γραμμικού συστήματος (2.2.25) και (2.2.26), που προέκυψαν από την εφαρμογή της μεθόδου, παίρνουν τη γενική μορφή:

$$a\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (2.2.37)$$

όπου  $a$  είναι ο πίνακας των συντελεστών του γραμμικού συστήματος,  $\mathbf{x}$  είναι το διάνυσμα των αγνώστων  $E_{n\ell}$ ,  $H_{n\ell}$  και  $\mathbf{b}$  είναι το διάνυσμα του όρου διέγερσης της διάταξης που περιλαμβάνει τις αναπτύξεις των προσπίπτοντων εξωτερικά ρυθμών.

Η επίλυση στον υπολογιστή του απειροδιάστατου γραμμικού συστήματος εξισώσεων (2.2.37) για τον υπολογισμό του απειροδιάστατου διανύσματος  $\mathbf{x}$  των αγνώστων, απαιτεί την αποκοπή (truncation) του συστήματος εξισώσεων και αγνώστων σε έναν πεπερασμένο αριθμό πλήθους αυτών. Στη συνέχεια η λύση του αποκομμένου συστήματος όπως υπολογίζεται στον υπολογιστή, θα πρέπει να δειχθεί

ότι συγκλίνει, καθώς αυξάνεται ο αριθμός των όρων που συμπεριλαμβάνονται στο αποκομμένο σύστημα. Η απόλυτη σύγκλιση σε μια τιμή δεν επαρκεί, καθώς πρέπει ναδειχθεί αναλυτικά ότι η λύση του συστήματος συγκλίνει στην ορθή λύση, η οποία ορίζεται από την επίλυση του απειροδιάστατου συστήματος.

Συστήματα που προκύπτουν από την εφαρμογή της μεθόδου του ταιριάσματος των ρυθμών εμφανίζουν συχνά το φαινόμενο της σχετικής σύγκλισης [76], δηλαδή της σύγκλισης της λύσης σε λάθος τιμή αν δεν εφαρμοστούν κάποια κριτήρια που επιβάλλουν ένα συγκεκριμένο σχετικό αριθμό αγνώστων μεταξύ των δύο περιοχών εφαρμογής της μεθόδου. Το κριτήριο αυτό συνδέεται με την ικανοποίηση της συνθήκης ακμής και για εγκάρσια ανάπτυξη των ρυθμών παίρνει τη μορφή επιλογής του λόγου του πλήθους των ρυθμών μεταξύ δύο περιοχών να ισούται με τον λόγο των εγκάρσιων διαστάσεων [76]. Στην περίπτωσή μας όμως, όπου η μία περιοχή εφαρμογής της μεθόδου αποτελείται από ένα διακριτό φάσμα ρυθμών, ενώ η άλλη από ένα συνεχές φάσμα, τέτοιου είδους κριτήριο δεν εφαρμόζεται.

Για να αποδείξουμε την ορθή σύγκλιση του αποκομμένου συστήματος εφαρμόζουμε τον εξής μετασχηματισμό των αγνώστων:

$$E_{nl} = \frac{e_{nl}}{k_{nl}^{(2)} p'_{enl}(r_{in})}, \quad H_{nl} = \frac{h_{nl}}{k_{nl}^{(2)} q_{hnl}(r_{in})}. \quad (2.2.38)$$

Το μετασχηματισμένο σύστημα για το νέο διάνυσμα των αγνώστων  $e_{nl}, h_{nl}$  μπορεί να γραφεί με τη μορφή:

$$(I + A) \mathbf{X} = \mathbf{B}, \quad (2.2.39)$$

όπου  $I$  είναι ο μοναδιαίος πίνακας,  $A$  ο νέος πίνακας του συστήματος,  $\mathbf{X}$  το νέο διάνυσμα των αγνώστων και  $\mathbf{B}$  το νέο διάνυσμα της διέγερσης. Ο μετασχηματισμός (2.2.38) εξασφαλίζει ότι η νόρμα  $\|A\|_2$  του πίνακα είναι πεπερασμένη ή ισοδύναμα:

$$\sum_{n,\nu=1}^{\infty} |a_{n\nu}|^2 < \infty, \quad (2.2.40)$$

όπου  $a_{n\nu}$  είναι τα στοιχεία του πίνακα  $A$ . Η παραπάνω σχέση αποδεικνύεται υπολογίζοντας τις ασυμπτωτικές εκφράσεις για μεγάλους δείκτες των στοιχείων του πίνακα  $A$  του μετασχηματισμένου συστήματος. Πράγματι, εύκολα μπορεί ναδειχθεί ότι  $a_{n\nu} = O(n^{-1}\nu^{-1})$  για  $n, \nu \rightarrow \infty$ .

Θεωρούμε τώρα την εξίσωση (2.2.39) ως εξίσωση τελεστή που δρα στον χώρο Hilbert των τετραγωνικώς αθροίσιμων ακολουθιών  $\ell^2$ . Αφού  $\mathbf{X} \in \ell^2$  αποδεικνύεται ότι ικανοποιείται και η συνθήκη ακμής, ενώ ομοίως το διάνυσμα  $\mathbf{B} \in \ell^2$ . Καθώς έχουμε δείξει ότι ο τελεστής  $A$  είναι φραγμένος, έπεται ότι είναι συμπαγής και επομένως η εξίσωση (2.2.39) είναι εξίσωση Fredholm του 2ου είδους. Επομένως, αποδεικνύεται τόσο η αντιστρεψιμότητα σε μοναδική λύση του απειροδιάστατου συστήματος όσο και η ορθή σύγκλιση των αποκομμένου συστήματος στη λύση του απειροδιάστατου συστήματος [94].

Έπειτα από τις παραπάνω επισημάνσεις σχετικά με τη σύγκλιση της μεθόδου, η αντιστροφή του συστήματος (2.2.39) στον υπολογιστή μπορεί να γίνει άμεσα. Τα στοιχεία του πίνακα  $A$  και του διανύσματος διέγερσης  $\mathbf{B}$  υπολογίζονται από τις αναλυτικές εκφράσεις της ενότητας 2.2.5. Τα γραμμικά συστήματα που προκύπτουν είναι μικρού προς μεσαίου μεγέθους συστήματα για ρεαλιστικές διατάξεις 5-10

δαχτυλιδιών και για συχνότητες πρακτικού ενδιαφέροντος περί τα 100-200 GHz. Επομένως, η επίλυση του συστήματος μπορεί να γίνει εύκολα με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss. Με τον υπολογισμό του διανύσματος των αγνώστων  $\mathbf{X}$ , κατόπιν μπορούν να υπολογιστούν τα ηλεκτρομαγνητικά μεγέθη της διάταξης, όπως π.χ. οι πεδριακές κατανομές, η απορροφούμενη ισχύς στα διπλεκτρικά και η ανακλώμενη ισχύς από τα δαχτυλίδια.

## 2.3 Υπολογισμός ηλεκτρομαγνητικών μεγεθών της διάταξης

### 2.3.1 Υπολογισμός των ηλεκτρικών πεδιακών συνιστωσών

Τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία στο κυρίως σώμα του κυματοδηγού εκφράζονται από τα δυναμικά του Hertz σύμφωνα με τις σχέσεις (2.2.2). Αντικαθιστώντας στις προηγούμενες σχέσεις τις αναλυτικές εκφράσεις (2.2.21), (2.2.22) έχουμε στη μορφή γενικευμένων ολοκληρωμάτων τα δυναμικά Hertz μέσα στο κυρίως σώμα του κυματοδηγού. Για την αναλυτική αποτίμηση των γενικευμένων ολοκληρωμάτων θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι τις τεχνικές ολοκλήρωσης στο μιγαδικό επίπεδο όπως και προηγούμενα.

Ξεκινάμε με την αζιμουθιακή συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου, η οποία προσδιορίζεται από τα βαθμωτά δυναμικά του Hertz σύμφωνα με τη σχέση:

$$E_\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Pi_c}{\partial \phi \partial z} + j\omega\mu \frac{\partial \Pi_m}{\partial r}. \quad (2.3.1)$$

Η αναλυτική έκφραση της αζιμουθιακής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό της κυλινδρικής διάταξης γίνεται:

$$\begin{aligned} E_\phi = & \sum_{\ell=1}^L \sum_{n=0}^{\infty} -m P_{n\ell}^{(2)}(k_{n\ell} r_{in}) k_{n\ell}^2 e^{jm\phi} \frac{1}{r} \frac{\partial I_5}{\partial z} \\ & + \sum_{\ell=1}^L \sum_{n=0}^{\infty} j \frac{m}{r_{in}} P_{n\ell}^{(2)}(k_{n\ell} r_{in}) e^{jm\phi} \left[ k_{n\ell}^2 \frac{\partial I_6}{\partial r} - \left( \frac{n\pi}{d_\ell} \right)^2 \frac{\partial I_7}{\partial r} \right] \\ & + \sum_{\ell=1}^L \sum_{n=1}^{\infty} j\omega\mu_0 e^{jm\phi} \frac{n\pi}{d_\ell} k_{n\ell} Q_{n\ell}^{(2)}(k_{n\ell} r_{in}) \frac{\partial I_7}{\partial r}. \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Τα ολοκληρώματα  $I_5$ ,  $I_6$ ,  $I_7$  ορίζονται ως εξής:

$$I_5 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\zeta J_m(k_\perp r)}{k_\perp^2 J_m(k_\perp r_{in})} \frac{e^{j\zeta(z-s_\ell)} - (-1)^n e^{j\zeta(z-s_\ell-d_\ell)}}{(n\pi/d_\ell)^2 - \zeta^2} d\zeta, \quad (2.3.3)$$

$$I_6 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\zeta^2 J_m(k_\perp r)}{k_\perp^3 J'_m(k_\perp r_{in})} \frac{e^{j\zeta(z-s_\ell)} - (-1)^n e^{j\zeta(z-s_\ell-d_\ell)}}{(n\pi/d_\ell)^2 - \zeta^2} d\zeta, \quad (2.3.4)$$

$$I_7 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J_m(k_\perp r)}{k_\perp J'_m(k_\perp r_{in})} \frac{e^{j\zeta(z-s_\ell)} - (-1)^n e^{j\zeta(z-s_\ell-d_\ell)}}{(n\pi/d_\ell)^2 - \zeta^2} d\zeta. \quad (2.3.5)$$

Τα ολοκληρώματα αυτά μπορούν να υπολογιστούν με τεχνικές περιγραμμικής ολοκλήρωσης (contour integration) στο μιγαδικό επίπεδο. Δίνουμε με λεπτομέρειες

την αναλυτική αποτίμηση του ολοκληρώματος  $I_5$  στο παράρτημα Π.2. Η αναλυτική έκφρασή του είναι:

$$I_5 = \begin{cases} \sum_p j \frac{J_m(\chi_{mp} \frac{r}{r_{in}}) - \operatorname{sgn}(z - s_\ell) e^{-j\zeta_{mp}|z-s_\ell|} + \operatorname{sgn}(z - s_\ell - d_\ell) (-1)^n e^{-j\zeta_{mp}|z-s_\ell-d_\ell|}}{J'_m(\chi_{mp}) \chi_{mp} (n\pi/d_\ell)^2 - \zeta_{mp}^2} \\ + \frac{j}{2} \left(\frac{r}{r_{in}}\right)^{|m|} \frac{-\operatorname{sgn}(z - s_\ell) e^{-j\lambda_0|z-s_\ell|} + \operatorname{sgn}(z - s_\ell - d_\ell) (-1)^n e^{-j\lambda_0|z-s_\ell-d_\ell|}}{(n\pi/d_\ell)^2 - \lambda_0^2}, -\infty < z < \infty, \\ -\frac{j}{2} \frac{J_m(k_n r)}{k_n^2 J_m(k_n r_{in})} \left[ \cos \left[ \frac{n\pi}{d_\ell} (z - s_\ell) \right] + (-1)^n \cos \left[ \frac{n\pi}{d_\ell} (z - s_\ell - d_\ell) \right] \right], s_\ell < z < s_\ell + d_\ell. \end{cases} \quad (2.3.6)$$

Με παρόμοιο τρόπο όπως στο παράρτημα Π.2 υπολογίζονται και τα ολοκληρώματα  $I_6$  και  $I_7$ . Η αναλυτική έκφραση του  $I_6$  είναι:

$$I_6 = \begin{cases} \sum_p j \frac{J_m(\chi'_{mp} \frac{r}{r_{in}}) \zeta'_{mp} r_{in} e^{-j\zeta'_{mp}|z-s_\ell|} - (-1)^n e^{-j\zeta'_{mp}|z-s_\ell-d_\ell|}}{J''_m(\chi'_{mp}) \chi'^2_{mp} (n\pi/d_\ell)^2 - \zeta'^2_{mp}} \\ + \frac{j\lambda_0 r_{in}}{2 |m|} \left(\frac{r}{r_{in}}\right)^{|m|} \frac{e^{-j\lambda_0|z-s_\ell|} - (-1)^n e^{-j\lambda_0|z-s_\ell-d_\ell|}}{(n\pi/d_\ell)^2 - \lambda_0^2}, m \neq 0, -\infty < z < \infty, \\ + \frac{1}{2} \frac{n\pi}{d_\ell} \frac{J_m(k_n r)}{k_n^3 J'_m(k_n r_{in})} \left[ \sin \left[ \frac{n\pi}{d_\ell} (z - s_\ell) \right] + (-1)^n \sin \left[ \frac{n\pi}{d_\ell} (z - s_\ell - d_\ell) \right] \right], s_\ell < z < s_\ell + d_\ell. \end{cases} \quad (2.3.7)$$

Το  $I_7$  παρομοίως δίνεται από τον αναλυτικό τύπο:

$$I_7 = \begin{cases} \sum_p j \frac{J_m(\chi'_{mp} \frac{r}{r_{in}}) e^{-j\zeta'_{mp}|z-s_\ell|} - (-1)^n e^{-j\zeta'_{mp}|z-s_\ell-d_\ell|}}{\zeta'_{mp} J''_m(\chi'_{mp}) r_{in} (n\pi/d_\ell)^2 - \zeta'^2_{mp}} \\ -\delta_{m0} \frac{j}{\lambda_0 r_{in}} \frac{e^{-j\lambda_0|z-s_\ell|} - (-1)^n e^{-j\lambda_0|z-s_\ell-d_\ell|}}{(n\pi/d_\ell)^2 - \lambda_0^2}, -\infty < z < \infty, \\ + \frac{J_m(k_n r)}{k_n J'_m(k_n r_{in})} \frac{d_\ell}{2n\pi} \left[ \sin \left[ \frac{n\pi}{d_\ell} (z - s_\ell) \right] + (-1)^n \sin \left[ \frac{n\pi}{d_\ell} (z - s_\ell - d_\ell) \right] \right], s_\ell < z < s_\ell + d_\ell. \end{cases} \quad (2.3.8)$$

Δίνουμε τώρα σύμφωνα με τη σχέση (2.3.1) το αξιωματικό ηλεκτρικό πεδίο στην εσοχή:

$$E_\phi^{\text{ring}} = -\frac{j\omega}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{d_\ell} P_{n\ell}^{(2)}(k_{n\ell} r) e^{jm\phi} \sin \left[ \frac{n\pi}{d_\ell} (z - s_\ell) \right] \\ + j\omega\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} k_{n\ell} \frac{\partial Q_{n\ell}^{(2)}(k_{n\ell} r)}{\partial r} e^{jm\phi} \sin \left[ \frac{n\pi}{d_\ell} (z - s_\ell) \right]. \quad (2.3.9)$$

Συνεχίζουμε με τον αναλυτικό υπολογισμό της αξονικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στο κυρίως σώμα του κυματοδηγού. Η έκφραση του ηλεκτρικού πεδίου δίνεται από τη σχέση:

$$E_z = (\omega^2 \epsilon \mu + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) \Pi_e, \quad (2.3.10)$$

η οποία μετά την αντικατάσταση γίνεται:

$$E_z = \sum_{\ell=1}^L \sum_{n=0}^{\infty} jP_{n\ell}^{(2)}(k_{n\ell}r_{in})k_{n\ell}^2 e^{jm\phi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta \frac{J_m(k_{\perp}r)}{J_m(k_{\perp}r_{in})} \frac{e^{j\zeta(z-s_{\ell})} - (-1)^n e^{j\zeta(z-s_{\ell}-d_{\ell})}}{(n\pi/d_{\ell})^2 - \zeta^2} d\zeta. \quad (2.3.11)$$

Ορίζουμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα  $I_{10}$  ως εξής:

$$I_{10} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta \frac{J_m(k_{\perp}r)}{J_m(k_{\perp}r_{in})} \frac{e^{j\zeta(z-s_{\ell})} - (-1)^n e^{j\zeta(z-s_{\ell}-d_{\ell})}}{(n\pi/d_{\ell})^2 - \zeta^2} d\zeta, \quad (2.3.12)$$

το οποίο υπολογίζεται σύμφωνα με τη διαδικασία του παραρτήματος Π.2 και πάλι με τεχνικές περιγραμμικής ολοκλήρωσης στο μιγαδικό επίπεδο. Η αναλυτική έκφρασή του είναι:

$$I_{10} = \begin{cases} \sum_p j \frac{J_m(\chi_{mp} \frac{r}{r_{in}}) \chi_{mp} - \text{sgn}(z-s_{\ell}) e^{-j\zeta_{mp}|z-s_{\ell}|} + \text{sgn}(z-s_{\ell}-d_{\ell}) (-1)^n e^{-j\zeta_{mp}|z-s_{\ell}-d_{\ell}|}}{J'_m(\chi_{mp}) r_{in}^2} \frac{1}{(n\pi/d_{\ell})^2 - \zeta_{mp}^2} \\ -\infty < z < \infty, \\ -\frac{j}{2} \frac{J_m(k_n r)}{J_m(k_n r_{in})} \left[ \cos \left[ \frac{n\pi}{d_{\ell}} (z-s_{\ell}) \right] + (-1)^n \cos \left[ \frac{n\pi}{d_{\ell}} (z-s_{\ell}-d_{\ell}) \right] \right], s_{\ell} < z < s_{\ell} + d_{\ell}. \end{cases} \quad (2.3.13)$$

Δίνουμε τώρα το αξονικό ηλεκτρικό πεδίο στην εσοχή υπολογισμένο από τα δυναμικά του Hertz μέσω της σχέσης (2.3.10):

$$E_z^{\text{ring}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_{n\ell}^{(2)}(k_{n\ell}r_{in})k_{n\ell}^2 e^{jm\phi} \cos \left[ \frac{n\pi}{d_{\ell}} (z-s_{\ell}) \right]. \quad (2.3.14)$$

Απομένει τώρα ο υπολογισμός της ακτινικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου  $E_r$ , η οποία υπολογίζεται από τα δυναμικά του Hertz ως εξής:

$$E_r = \frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial r \partial z} - j\omega\mu \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_m}{\partial \phi}. \quad (2.3.15)$$

Αντικαθιστώντας τα δυναμικά έχουμε την αναλυτική σχέση:

$$\begin{aligned} E_r = & \sum_{\ell=1}^L \sum_{n=0}^{\infty} jP_{n\ell}^{(2)}(k_{n\ell}r_{in})k_{n\ell}^2 e^{jm\phi} \frac{\partial^2 I_5}{\partial r \partial z} \\ & + \sum_{\ell=1}^L \sum_{n=1}^{\infty} \omega\mu_0 m k_{n\ell} \frac{n\pi}{d_{\ell}} Q_{n\ell}^{(2)}(k_{n\ell}r_{in}) \frac{1}{r} I_7 \\ & + \sum_{\ell=1}^L \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m^2}{r_{in}} e^{jm\phi} P_{n\ell}^{(2)}(k_{n\ell}r_{in}) \left[ k_{n\ell}^2 I_6 - \left( \frac{n\pi}{d_{\ell}} \right)^2 I_7 \right]. \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

Τα ολοκληρώματα  $I_5$ ,  $I_6$ ,  $I_7$  έχουν οριστεί και υπολογιστεί αναλυτικά προηγουμένως. Δίνουμε τέλος το πεδίο στην εσοχή:

$$\begin{aligned} E_r^{\text{ring}} = & - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{d_{\ell}} k_{n\ell} \frac{\partial P_{n\ell}^{(2)}(k_{n\ell}r)}{\partial r} e^{jm\phi} \sin \left[ \frac{n\pi}{d_{\ell}} (z-s_{\ell}) \right] \\ & + \frac{\omega\mu_0 m}{r} \sum_{n=1}^{\infty} k_{n\ell} Q_{n\ell}^{(2)}(k_{n\ell}r) e^{jm\phi} \sin \left[ \frac{n\pi}{d_{\ell}} (z-s_{\ell}) \right]. \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

### 2.3.2 Υπολογισμός των μαγνητικών πεδιακών συνιστώσων

Συνεχίζουμε τώρα με τον αναλυτικό υπολογισμό των μαγνητικών συνιστώσων του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου στη διάταξη. Ξεκινάμε με την αξιωματική συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου  $H_\phi$ , η οποία δίνεται συναρτήσει των δυναμικών του Hertz από τη σχέση:

$$H_\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Pi_m}{\partial \phi \partial z} - j\omega \varepsilon \frac{\partial \Pi_e}{\partial r}. \quad (2.3.18)$$

Αντικαθιστούμε τις εκφράσεις των δυναμικών για το κυρίως σώμα του κυματοδηγού και παίρνουμε την αναλυτική έκφραση της αξιωματικής μαγνητικής συνιστώσας:

$$\begin{aligned} H_\phi = & \sum_{\ell=1}^L \sum_{n=1}^{\infty} jm \frac{n\pi}{d_\ell} k_{n\ell} Q_{n\ell}^{(2)}(k_{n\ell} r_{in}) e^{jm\phi} \frac{1}{r} \frac{\partial I_7}{\partial z} \\ & + \sum_{\ell=1}^L \sum_{n=0}^{\infty} j \frac{m^2}{\omega \mu_0 r_{in}} P_{n\ell}^{(2)}(k_{n\ell} r_{in}) e^{jm\phi} \frac{1}{r} \left[ k_{n\ell}^2 \frac{\partial I_6}{\partial z} - \left( \frac{n\pi}{d_\ell} \right)^2 \frac{\partial I_7}{\partial z} \right] \\ & + \sum_{\ell=1}^L \sum_{n=0}^{\infty} \omega \varepsilon_0 k_{n\ell}^2 P_{n\ell}^{(2)}(k_{n\ell} r_{in}) e^{jm\phi} \frac{\partial I_5}{\partial r}. \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

Στην εσοχή η αναλυτική έκφραση για την αξιωματική έκφραση του μαγνητικού πεδίου είναι:

$$\begin{aligned} H_\phi^{\text{ring}} = & \frac{jm}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{d_\ell} Q_{n\ell}^{(2)}(k_{n\ell} r) e^{jm\phi} \cos \left[ \frac{n\pi}{d_\ell} (z - s_\ell) \right] \\ & - j\omega \varepsilon_0 \sum_{n=0}^{\infty} k_{n\ell} \frac{\partial P_{n\ell}^{(2)}(k_{n\ell} r)}{\partial r} e^{jm\phi} \cos \left[ \frac{n\pi}{d_\ell} (z - s_\ell) \right]. \end{aligned} \quad (2.3.20)$$

Συνεχίζουμε τώρα με την αξονική συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου, η οποία δίνεται μέσω του μαγνητικού δυναμικού του Hertz από τη σχέση:

$$H_z = \left( \omega^2 \varepsilon \mu + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Pi_m \quad (2.3.21)$$

Αντικαθιστούμε το  $\Pi_m$  και παίρνουμε για το κυρίως σώμα του κυματοδηγού:

$$\begin{aligned} H_z = & \sum_{\ell=1}^L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{d_\ell} k_{n\ell} Q_{n\ell}^{(2)}(k_{n\ell} r_{in}) e^{jm\phi} I_8 \\ & + \sum_{\ell=1}^L \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m}{\omega \mu_0 r_{in}} P_{n\ell}^{(2)}(k_{n\ell} r_{in}) e^{jm\phi} \left[ k_{n\ell}^2 I_9 - \left( \frac{n\pi}{d_\ell} \right)^2 I_8 \right]. \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

$$(2.3.23)$$

Τα ολοκληρώματα  $I_8$  και  $I_9$  που εμφανίζονται στις εκφράσεις ορίζονται ως εξής:

$$I_8 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_\perp J_m(k_\perp r)}{J'_m(k_\perp r_{in})} \frac{e^{j\zeta(z-s_\ell)} - (-1)^n e^{j\zeta(z-s_\ell-d_\ell)}}{(n\pi/d_\ell)^2 - \zeta^2} d\zeta, \quad (2.3.24)$$

$$I_9 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\zeta^2 J_m(k_\perp r)}{k_\perp J'_m(k_\perp r_{in})} \frac{e^{j\zeta(z-s_\ell)} - (-1)^n e^{j\zeta(z-s_\ell-d_\ell)}}{(n\pi/d_\ell)^2 - \zeta^2} d\zeta. \quad (2.3.25)$$

Η αναλυτική αποτίμησή τους γίνεται με παρόμοιο τρόπο όπως και το ολοκλήρωμα  $I_5$  στο παράρτημα Π.2. Οι εκφράσεις σε κλειστή μορφή είναι:

$$I_8 = \begin{cases} \sum_p j \frac{\chi'_{mp} J_m(\chi'_{mp} \frac{r}{r_{in}})}{\zeta'_{mp} J'_m(\chi'_{mp}) r_{in}^3} \frac{e^{-j\zeta'_{mp}|z-s_\ell|} - (-1)^n e^{-j\zeta'_{mp}|z-s_\ell-d_\ell|}}{(n\pi/d_\ell)^2 - \zeta'^2_{mp}}, & -\infty < z < \infty, \\ + \frac{k_{n\ell} J_m(k_{n\ell} r)}{J'_m(k_{n\ell} r_{in})} \frac{d_\ell}{2n\pi} \left[ \sin \left[ \frac{n\pi}{d_\ell} (z - s_\ell) \right] + (-1)^n \sin \left[ \frac{n\pi}{d_\ell} (z - s_\ell - d_\ell) \right] \right], & s_\ell < z < s_\ell + d_\ell, \end{cases} \quad (2.3.26)$$

$$I_9 = \begin{cases} \sum_p j \frac{\zeta'_{mp} J_m(\chi'_{mp} \frac{r}{r_{in}})}{J'_m(\chi'_{mp}) r_{in}} \frac{e^{-j\zeta'_{mp}|z-s_\ell|} - (-1)^n e^{-j\zeta'_{mp}|z-s_\ell-d_\ell|}}{(n\pi/d_\ell)^2 - \zeta'^2_{mp}} \\ - \delta_{m0} \frac{j\lambda_0}{r_{in}} \frac{e^{-j\lambda_0|z-s_\ell|} - (-1)^n e^{-j\lambda_0|z-s_\ell-d_\ell|}}{(n\pi/d_\ell)^2 - \lambda_0^2}, & -\infty < z < \infty, \\ + \frac{\zeta'_{mp} J_m(k_{n\ell} r)}{k_{n\ell} J'_m(k_{n\ell} r_{in})} \frac{d_\ell}{2n\pi} \left[ \sin \left[ \frac{n\pi}{d_\ell} (z - s_\ell) \right] + (-1)^n \sin \left[ \frac{n\pi}{d_\ell} (z - s_\ell - d_\ell) \right] \right], & s_\ell < z < s_\ell + d_\ell. \end{cases} \quad (2.3.27)$$

Παραθέτουμε τώρα την αναλυτική έκφραση του αξονικού μαγνητικού πεδίου στην εσοχή:

$$H_z^{\text{ring}} = \sum_{n=1}^{\infty} Q_{n\ell}^{(2)}(k_{n\ell} r_{in}) k_{n\ell}^2 e^{jm\phi} \sin \left[ \frac{n\pi}{d_\ell} (z - s_\ell) \right]. \quad (2.3.28)$$

Τέλος, δίνουμε και τις εκφράσεις του ακτινικού μαγνητικού πεδίου, το οποίο υπολογίζεται από τα δυναμικά του Hertz σύμφωνα με τη σχέση:

$$H_r = \frac{\partial^2 \Pi_m}{\partial r \partial z} + j\omega \epsilon \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_e}{\partial \phi}. \quad (2.3.29)$$

Αντικαθιστούμε τα δυναμικά και παίρνουμε την αναλυτική έκφραση για το κυρίως μέρος του κυματοδηγού:

$$H_r = - \sum_{\ell=1}^L \sum_{n=0}^{\infty} j\omega m \epsilon_0 P_{n\ell}^{(2)}(k_{n\ell} r_{in}) k_{n\ell}^2 e^{jm\phi} \frac{I_5}{r} \\ + \sum_{\ell=1}^L \sum_{n=1}^{\infty} k_{n\ell} \frac{n\pi}{d_\ell} Q_{n\ell}^{(2)}(k_{n\ell} r_{in}) \frac{\partial^2 I_7}{\partial r \partial z} \\ + \sum_{\ell=1}^L \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m}{\omega \mu_0 r_{in}} P_{n\ell}^{(2)}(k_{n\ell} r_{in}) e^{jm\phi} \left[ k_{n\ell}^2 \frac{\partial^2 I_6}{\partial r \partial z} - \left( \frac{n\pi}{d_\ell} \right)^2 \frac{\partial^2 I_7}{\partial r \partial z} \right]. \quad (2.3.30)$$

Τα ολοκληρώματα  $I_6$  και  $I_7$  έχουν οριστεί και υπολογισθεί αναλυτικά στην προηγούμενη παράγραφο. Ολοκληρώνουμε τώρα τις αναλυτικές εκφράσεις των πεδριακών συνιστωσών δίνοντας την έκφραση του ακτινικού μαγνητικού πεδίου στην εσοχή:

$$H_r^{\text{ring}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{d_\ell} k_{n\ell} \frac{\partial Q_{n\ell}^{(2)}(k_{n\ell} r)}{\partial r} e^{jm\phi} \cos \left[ \frac{n\pi}{d_\ell} (z - s_\ell) \right] \\ - \frac{m\omega \epsilon_0}{r} \sum_{n=0}^{\infty} k_{n\ell} P_{n\ell}^{(2)}(k_{n\ell} r) e^{jm\phi} \cos \left[ \frac{n\pi}{d_\ell} (z - s_\ell) \right]. \quad (2.3.31)$$



## 2.4 Αναλυτικές εκφράσεις της ηλεκτρομαγνητικής ισχύος στη διάταξη

Έχουμε υποθέσει ότι στη διάταξη προσπίπτει ένας διαδιδόμενος από τα αριστερά ρυθμός TE. Η διέγερση αυτή της διάταξης δημιουργεί μια ροή ηλεκτρομαγνητικής ισχύος, η οποία μπορεί να διακριθεί στα εξής μέρη. Κατ' αρχάς έχουμε την προσπίπτουσα ισχύ από τον ρυθμό διέγερσης. Επιπλέον έχουμε την ανακλώμενη ισχύ, η οποία επιστρέφει πίσω και διαδίδεται προς τα αριστερά της διάταξης. Ομοίως υπάρχει και η διαδιδόμενη ισχύς, η οποία μεταδίδεται στον κυματοδηγό στα δεξιά της διάταξης. Τέλος, υπάρχει και η απορροφούμενη ισχύς η οποία καταναλίσκεται μέσα στη διάταξη εάν υπάρχει διηλεκτρικό με απώλειες. Η απορροφούμενη ισχύς οφείλεται μόνο στις διηλεκτρικές απώλειες, καθώς έχουμε θεωρήσει τέλεια αγωγία τοιχώματα χωρίς ωμικές απώλειες. Το άθροισμα των παραπάνω ειδών ισχύος που ρέουν στη διάταξη οφείλει στη μόνιμη κατάσταση που εξετάζουμε να είναι μηδέν, καθώς ισχύει το ενεργειακό ισοζύγιο για τη διάταξη.

### 2.4.1 Προσπίπτουσα ισχύς

Η προσπίπτουσα ισχύς οφείλεται στον ρυθμό TE που έχουμε θεωρήσει ως διέγερση και ο οποίος εκφράζεται με το δυναμικό του Hertz σύμφωνα με τη σχέση (2.2.1). Η προσπίπτουσα ισχύς δίνεται από το διάνυσμα Poynting σύμφωνα με τη σχέση:

$$\begin{aligned} P_{\text{inc}}^{\text{TE}} &= \text{Re} \left[ \frac{1}{2} \int_S (\mathbf{E}_{\text{TE}} \times \mathbf{H}_{\text{TE}}^*) \cdot d\mathbf{s} \right] \\ &= \text{Re} \left[ |A_{\text{H}}|^2 \mu_0 \frac{\pi}{2} \omega \beta (\chi'_{mp}{}^2 - m^2) J_m^2(\chi'_{mp}) \right]. \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

Σε περίπτωση που έχουμε διέγερση και από ρυθμό TM, ο οποίος δίνεται από τον τύπο:

$$\mathbf{\Pi}_e^{\text{inc}} = A_{\text{E}} J_m \left( \frac{\chi_{mp}}{r_{\text{in}}} \right) e^{im\phi} e^{-i\beta_{\text{TM}} z} \hat{\mathbf{z}}, \quad (2.4.2)$$

η προσπίπτουσα ισχύς του ρυθμού TM δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} P_{\text{inc}}^{\text{TM}} &= \text{Re} \left[ \frac{1}{2} \int_S (\mathbf{E}_{\text{TM}} \times \mathbf{H}_{\text{TM}}^*) \cdot d\mathbf{s} \right] \\ &= \text{Re} \left[ |A_{\text{E}}|^2 \frac{\pi}{2} \omega \epsilon_0 \beta_{\text{TM}} \chi_{mp}^2 J_{m+1}^2(\chi_{mp}) \right]. \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

Επίσης, εάν υπάρχει διέγερση από προσπίπτοντα ρυθμό TM στην εξίσωση (2.2.25) θα πρέπει να προστεθεί στο δεξί μέλος ως διέγερση επιπλέον ο όρος:

$$j\omega \epsilon_0 A_{\text{E}} \frac{\chi_{mp}}{r_{\text{in}}} J'_m(\chi_{mp}) \beta_{\text{TM}} e^{-j\beta_{\text{TM}} s \ell} F_{nl}(\beta_{\text{TM}}). \quad (2.4.4)$$

### 2.4.2 Υπολογισμός διαδιδόμενης και ανακλώμενης ισχύος

Για τον υπολογισμό της διαδιδόμενης και ανακλώμενης ισχύος βολεύει η έκφραση των εγκάρσιων πεδιακών συνιστωσών με τη μορφή των εγκάρσιων ιδιοδιανυσμάτων. Για παράδειγμα το εγκάρσιο ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$\mathbf{E}_\perp = \sum_p C_p^e \mathbf{e}_p^e e^{\pm \zeta_{mp} z} + \sum_p C_p^h \mathbf{e}_p^h e^{\pm \zeta'_{mp} z}, \quad (2.4.5)$$

όπου το εγκάρσιο ιδιοδιάνυσμα για τους ρυθμούς TE είναι:

$$\mathbf{e}_p^h = jm \frac{\omega}{r} J_m \left( \frac{\chi'_{mp}}{r_{in}} r \right) e^{jm\phi} \hat{\mathbf{r}} - \omega \frac{\chi'_{mp}}{r_{in}} J'_m \left( \frac{\chi'_{mp}}{r_{in}} r \right) e^{jm\phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (2.4.6)$$

και το εγκάρσιο ιδιοδιάνυσμα για τους ρυθμούς TM είναι:

$$\mathbf{e}_p^e = -j\zeta_{mp} \frac{\chi_{mp}}{r_{in}} J'_m \left( \frac{\chi_{mp}}{r_{in}} r \right) e^{jm\phi} \hat{\mathbf{r}} + m \frac{\zeta_{mp}}{r} J_m \left( \frac{\chi_{mp}}{r_{in}} r \right) e^{jm\phi} \hat{\boldsymbol{\phi}}. \quad (2.4.7)$$

Οι συντελεστές πλάτους για τους ρυθμούς TM δίνονται από τη σχέση:

$$C_p^e = \sum_{\ell=1}^L \sum_{n=0}^{\infty} P_{n\ell}(k_{n\ell} r_{in}) k_{n\ell}^2 \frac{1}{\chi_{mp} J'_m(\chi_{mp})} B(\zeta_{mp}, n, \ell), \quad (2.4.8)$$

ενώ για τους ρυθμούς TE από τη σχέση:

$$C_p^h = \frac{\omega}{J'_m(\chi'_{mp}) \zeta'_{mp} \chi'^2_{mp}} [D_1(p, n, \ell) + D_2(p, n, \ell)], \quad (2.4.9)$$

όπου :

$$D_1(p, n, \ell) = - \sum_{\ell=1}^L \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta'_{mp} \chi'^2_{mp}}{\omega^2 r_{in}} m P_{n\ell}(k_{n\ell} r_{in}) \left[ \frac{k_{n\ell}^2 r_{in} \zeta'_{mp}}{\chi'^2_{mp}} - \left( \frac{n\pi}{d_\ell} \right)^2 \frac{1}{r_{in} \zeta'_{mp}} \right] B(\zeta'_{mp}, n, \ell), \quad (2.4.10)$$

$$D_2(p, n, \ell) = - \sum_{\ell=1}^L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_0 \chi'^2_{mp}}{\omega r_{in}} \left( \frac{n\pi}{d_\ell} \right) k_{n\ell} Q'_{n\ell}(k_{n\ell} r_{in}) B(\zeta'_{mp}, n, \ell). \quad (2.4.11)$$

Ο παράγοντας  $B(\xi, n, \ell)$  δίνεται ανάλογα εάν το πεδίο υπολογίζεται δεξιά από τη διάταξη στην περίπτωση που υπολογίζουμε τη διαδιδόμενη ισχύ ή αριστερά από τη διάταξη στην περίπτωση που υπολογίζουμε την ανακλώμενη ισχύ:

$$B(\xi, n, \ell) = \begin{cases} e^{-j\xi s_\ell} \frac{1 - (-1)^n e^{-j\xi d_\ell}}{\left( \frac{n\pi}{d_\ell} \right)^2 - \xi^2}, & \text{δεξιά της διάταξης,} \\ e^{j\xi s_\ell} \frac{1 - (-1)^n e^{j\xi d_\ell}}{\left( \frac{n\pi}{d_\ell} \right)^2 - \xi^2}, & \text{αριστερά της διάταξης.} \end{cases} \quad (2.4.12)$$

Η ισχύς, διαδιδόμενη ή ανακλώμενη, δίνεται από το διάνυσμα Poynting. Για τους ρυθμούς TE η έκφραση της ισχύος γίνεται:

$$\begin{aligned} P^{\text{TE}} &= \text{Re} \left[ \frac{1}{2} \int_S (\mathbf{E}_{\text{TE}} \times \mathbf{H}_{\text{TE}}^*) \cdot d\mathbf{s} \right] = \text{Re} \frac{1}{2} \left[ \sum_p |C_p^h|^2 \int_S (\mathbf{e}_p^h \times \mathbf{h}_p^{h*}) \cdot d\mathbf{s} \right] \\ &= \text{Re} \left[ \sum_p |C_p^h|^2 \frac{\pi}{2} \frac{\omega}{\mu_0} \zeta'^*_{mp} (\chi'^2_{mp} - m^2) J_m^2(\chi'_{mp}) \right]. \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

Για τους ρυθμούς TM, αντίστοιχα, η ισχύς υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
 P^{\text{TM}} &= \text{Re} \left[ \frac{1}{2} \int_S (\mathbf{E}_{\text{TM}} \times \mathbf{H}_{\text{TM}}^*) \cdot d\mathbf{s} \right] = \text{Re} \frac{1}{2} \left[ \sum_p |C_p^e|^2 \int_S (\mathbf{e}_p^e \times \mathbf{h}_p^{e*}) \cdot d\mathbf{s} \right] \\
 &= \text{Re} \left[ \sum_p |C_p^e|^2 \frac{\pi}{2} \omega^* \varepsilon_0 \zeta'_{mp} \chi_{mp}^2 J_{m+1}^2(\chi_{mp}) \right] \quad (2.4.14)
 \end{aligned}$$

Υπενθυμίζουμε ότι στις παραπάνω εκφράσεις ανάλογα τον κλάδο της (2.4.12), που υπεισέρχεται στους συντελεστές  $C_p^h$ ,  $C_p^e$ , υπολογίζουμε αντίστοιχα τη διαδιδόμενη ή την ανακλώμενη ισχύ από τη διάταξη.

### 2.4.3 Υπολογισμός απορροφούμενης ισχύος στα διηλεκτρικά

Σε περίπτωση που η διάταξη περιέχει διηλεκτρικά δαχτυλίδια, ένα μέρος της ισχύος μετατρέπεται σε διηλεκτρικές απώλειες. Οι απώλειες αυτού του τύπου είναι και οι μόνες απώλειες στη διάταξη, καθώς έχουμε θεωρήσει τέλεια αγωγία τοιχώματα, που δεν προκαλούν ωμικές απώλειες. Η υπόθεση αυτή είναι εύλογη για την περίπτωση διαύλων δέσμης γυροτρονίου, καθώς στην περίπτωση αυτή οι διηλεκτρικές απώλειες στα κεραμικά δαχτυλίδια είναι πολύ μεγαλύτερες σε σχέση με τις ωμικές απώλειες στα χάλκινα τοιχώματα. Η απορροφούμενη ισχύς στα διηλεκτρικά μπορεί να υπολογιστεί με διάφορους τρόπους. Έχοντας τις αναλυτικές εκφράσεις του πεδίου μέσα στα δαχτυλίδια και θεωρώντας τις διηλεκτρικές απώλειες ως αγωγιμότητα που δίνεται ως  $\sigma = j\omega\varepsilon_i$ , όπου  $\varepsilon_i$  το φανταστικό μέρος της επιτρεπτότητας, θα μπορούσε κάποιος να ολοκληρώσει στον όγκο των διηλεκτρικών σύμφωνα με τη σχέση:

$$P_{\text{abs}} = \frac{1}{2} \int_{V_d} \mathbf{J}_{\text{con}} \cdot \mathbf{E}^* dV = \frac{1}{2} \omega \varepsilon_i \int_{V_d} |\mathbf{E}|^2 dv. \quad (2.4.15)$$

Ευκολότερα υπολογίζεται η απορροφούμενη ισχύς στα δαχτυλίδια, αν υπολογίσουμε το διάνυσμα Poynting στην είσοδο των δαχτυλιδιών σύμφωνα με τον τύπο:

$$P_{\text{abs}} = \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \sum_{\ell=1}^L \int_0^{2\pi} \int_{s_\ell}^{s_\ell+d_\ell} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \hat{\mathbf{r}} dz d\phi \right]. \quad (2.4.16)$$

Χρησιμοποιώντας τις αναλυτικές εκφράσεις για το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο της περιοχής 3 των διηλεκτρικών καταλήγουμε στην τελική αναλυτική σχέση:

$$\begin{aligned}
 P_{\text{abs}} &= \sum_{\ell=1}^L \text{Re} \left[ j\omega\mu_0\pi r_{d\ell} \sum_{n=1}^{\infty} k_{n\ell}^{(3)} Q_{n\ell}^{(3)}(k_{n\ell}^{(3)} r_{d\ell}) [k_{n\ell}^{(3)} Q_{n\ell}^{(3)}(k_{n\ell}^{(3)} r_{d\ell})]^* \frac{d_\ell}{2} \right. \\
 &\quad - j\pi m \sum_{n=1}^{\infty} P_{n\ell}^{(3)}(k_{n\ell}^{(3)} r_{d\ell}) \frac{n\pi}{d_\ell} [k_{n\ell}^{(3)} Q_{n\ell}^{(3)}(k_{n\ell}^{(3)} r_{d\ell})]^* \frac{d_\ell}{2} \\
 &\quad - j\pi r_{d\ell} \omega^* \varepsilon_\ell^* \sum_{n=0}^{\infty} k_{n\ell}^{(3)} P_{n\ell}^{(3)}(k_{n\ell}^{(3)} r_{d\ell}) \left[ k_{n\ell}^{(3)} \frac{\partial Q_{n\ell}^{(3)}(k_{n\ell}^{(3)} r_{d\ell})}{\partial r} \right]^* \frac{d_\ell}{2} (1 + \delta_{n0}) \\
 &\quad \left. + j\pi m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{d_\ell} k_{n\ell}^{(3)} P_{n\ell}^{(3)}(k_{n\ell}^{(3)} r_{d\ell}) [k_{n\ell}^{(3)} Q_{n\ell}^{(3)}(k_{n\ell}^{(3)} r_{d\ell})]^* \frac{d_\ell}{2} \right]. \quad (2.4.17)
 \end{aligned}$$

Έχουμε ολοκληρώσει τώρα τον αναλυτικό υπολογισμό όλων των πεδριακών συνιστωσών καθώς και των μεγεθών της ισχύος που ενδιαφέρουν στη διάταξη.

## 2.4 Αναλυτικές εκφράσεις της ηλεκτρομαγνητικής ισχύος στη διάταξη

---

## ΣΥΝΤΟΝΙΖΟΜΕΝΟΙ ΡΥΘΜΟΙ ΣΤΗ ΔΙΑΤΑΞΗ

---

Στο προηγούμενο κεφάλαιο εισάγαμε τον φορμαλισμό για το πρόβλημα της σκέδασης ενός εξωτερικά προσπίπτοντος ρυθμού στη διάταξη. Η διέγερση του προβλήματος προέρχεται από ρυθμούς TE ή TM, οι οποίοι διαδίδονται από το άπειρο αριστερό άκρο προς τα δεξιά της διάταξης. Στο παρόν κεφάλαιο αλλάζουμε την οπτική του προβλήματος και αντιμετωπίζουμε τη διάταξη σαν ηλεκτρομαγνητική κοιλότητα.

Η γενική γεωμετρία που εξετάζουμε υποστηρίζει ηλεκτρομαγνητικές ταλαντώσεις, καθώς η παρουσία των δαχτυλιδιών στη διάταξη προκαλεί ανακλάσεις, οι οποίες σχηματίζουν συντονιζόμενους ρυθμούς. Οι ρυθμοί αυτοί εν γένει έχουν απώλειες περίθλασης προς τα άκρα των κυματοδηγών ή διπλεκτρικές απώλειες, αν υπάρχει διπλεκτρικό υλικό με απώλειες. Και σε αυτό το κεφάλαιο οι ωμικές απώλειες στα τοιχώματα αγνοούνται.

Οι οριακές συνθήκες που επιβάλλονται στα άκρα είναι οριακές συνθήκες εξερχόμενων κυμάτων με μηδενική ανάκλαση. Αντιμετωπίζοντας τη διάταξη ως ηλεκτρομαγνητική κοιλότητα χωρίς ανακλάσεις στα άκρα, η θεωρητικά άπειρη διάταξη μπορεί να μοντελοποιήσει πραγματικές κοιλότητες με άκρα που είναι προσαρμοσμένα προς την έξοδο ή με άκρα που έχουν ισχυρά απορροφητικό υλικό με ελάχιστες ανακλάσεις. Στις κοιλότητες των γυροτρονίων οι οριακές συνθήκες εξερχόμενων κυμάτων εφαρμόζονται τυπικά [9, 10], μας και στο αριστερό άκρο ο ρυθμός βρίσκεται στην αποκοπή και δεν διαδίδεται, ενώ το δεξί άκρο είναι προσαρμοσμένο στον κύριο ρυθμό, ο οποίος δεν υφίσταται ανακλάσεις. Επομένως, στην περίπτωση αυτή η θεώρηση της κοιλότητας του γυροτρονίου ως πεπερασμένου μήκους είναι δικαιολογημένη. Στο Κεφάλαιο 6 θα παρουσιάσουμε τον φορμαλισμό του προβλήματος με οριακή συνθήκη ολικής ανάκλασης στο ένα άκρο.

Στον δίαυλο δέσμης του γυροτρονίου αυτού του είδους η μοντελοποίηση δεν είναι το ίδιο ακριβής. Αν υποθέσουμε ότι μελετάμε μια απλοποιημένη γεωμετρία με έναν μικρό αριθμό δαχτυλιδιών (π.χ. 5-6), στα αριστερά της πραγματικής διάταξης συνεχίζουν επιπλέον δαχτυλίδια, ενώ στα δεξιά η διάταξη τυπικά συνεχίζει με μικρότερη ακτίνα, η οποία μπορεί να εισάγει μεγάλες ανακλάσεις. Μια πραγματικά

ακριβής μοντελοποίηση του διαύλου στην περιοχή αυτή, θα έπρεπε να συμπεριλάβει στο μοντέλο το στένεμα της εσωτερικής ακτίνας των μεταλλικών δαχτυλιδιών. Ενώ για το αριστερό άκρο η μεγαλύτερη εσωτερική ακτίνα επιβάλλει και μικρότερες ανακλάσεις, στο δεξί άκρο έχουμε την αντίθετη επίδραση. Γενικά αυτού του είδους η απλοποίηση καθίσταται στην πράξη αναγκαστική, καθώς η ακριβής αριθμητική επίλυση με εμπορικά πλεκτρομαγνητικά πακέτα όλου του διαύλου, μαζί με την άνοδο, την κάθοδο και το πίσω μέρος του γυροτρονίου, είναι αδύνατη με τις τρέχουσες υπολογιστικές δυνατότητες.

Η θεώρηση του προβλήματος ως προβλήματος εύρεσης των συντονιζόμενων ρυθμών ακολουθεί και την πορεία μοντελοποίησης των κοιλοτήτων γυροτρονίων. Στην πορεία αυτή πρώτα επιλύεται το πρόβλημα της ψυχρής κοιλότητας, όπου υπολογίζονται οι συντονιζόμενοι ρυθμοί στην κοιλότητα απουσία δέσμης. Στη συνέχεια μπορεί να υπάρξει μια θεώρηση της αλληλεπίδρασης με την προσέγγιση της ψυχρής κοιλότητας (cold-cavity approximation), όπου η αλληλεπίδραση γίνεται με την υπόθεση ενός σταθερού προφίλ πεδίου (fixed-field). Τέλος, αναπτύσσεται και το ακριβέστερο αυτο-συνεπές μοντέλο (self-consistent), το οποίο λαμβάνει υπ' όψιν και την επίδραση της δέσμης στο αξονικό προφίλ του συντονιζόμενου ρυθμού. Για τη μοντελοποίηση του διαύλου ακολουθούμε παρόμοια πορεία, όπου στο παρόν κεφάλαιο αντιμετωπίζουμε το πρόβλημα της εύρεσης των συντονιζόμενων ρυθμών της ψυχρής κοιλότητας.

Οι συντονιζόμενοι ρυθμοί στη διάταξη χαρακτηρίζονται από μια πραγματική συχνότητα συντονισμού, έναν συντελεστή ποιότητας  $Q$ , που εκφράζει τις απώλειες της διάταξης, και ένα προφίλ πεδίου του ρυθμού. Όλα τα παραπάνω μεγέθη είναι σημαντικά για την ορθή προσομοίωση της αλληλεπίδρασης του ρυθμού με τη δέσμη των ηλεκτρονίων. Η συχνότητα συντονισμού του ρυθμού πρέπει να είναι κοντά στην κυκλοτρονική συχνότητα για να υπάρξει αλληλεπίδραση γυροτρονίου, ενώ οι απώλειες πρέπει να είναι μικρές ώστε ο ρυθμός να μπορεί διεγερθεί από τον θόρυβο. Στην κοιλότητα του γυροτρονίου, όπου το εγκάρσιο πρόβλημα είναι διαχωρισμένο από το διαμήκες, οι ωμικές απώλειες διαχωρίζονται από τις απώλειες περίθλασης και το  $Q$  μπορεί να χωριστεί σε δύο επιμέρους συντελεστές:  $Q_{\text{ohm}}$  και  $Q_{\text{diff}}$ . Όπως θα σχολιάσουμε και στη συνέχεια, ο χωρισμός αυτός δεν είναι δυνατός στο πρόβλημα του διαύλου και μόνο το ολικό  $Q$  είναι αυτό που χαρακτηρίζει τις συνολικές απώλειες. Τέλος, το σχήμα του προφίλ πεδίου είναι αυτό που καθορίζει τη σύζευξη (coupling) του ρυθμού με τη δέσμη, καθώς για να υπάρξει υπολογίσιμη αλληλεπίδραση, πρέπει όχι μόνο η δέσμη να βρίσκεται στη θέση ενός μεγίστου του εγκάρσιου ηλεκτρικού πεδίου του ρυθμού, αλλά και η αξονική εξάρτηση του προφίλ πεδίου να ευνοεί την αλληλεπίδραση.

Αφού δώσαμε το γενικό περίγραμμα και τη χρησιμότητα της εύρεσης των συντονιζόμενων ρυθμών στην υπο εξέταση γεωμετρία διαύλου, περνάμε στη μαθηματική και αριθμητική αντιμετώπιση του προβλήματος.

### 3.1 Ορισμός προβλήματος ιδιοτιμών

Για την εύρεση των συντονιζόμενων ρυθμών της διάταξης, απαιτείται κατ' αρχάς ο προσδιορισμός της μιγαδικής συχνότητας συντονισμού αυτών. Η συχνότητα συντονισμού είναι εν γένει μιγαδική, καθώς εκφράζει επιπλέον τις απώλειες περίθλασης ή τις πιθανές διπλεκτρικές απώλειες, οι οποίες προκύπτουν από την

ύπαρξη κατάλληλων διηλεκτρικών υλικών στη διάταξη. Επομένως, αίρουμε την υπόθεση μόνιμης κατάστασης με εξωτερική διέγερση που είχαμε στο Κεφάλαιο 2 και πραγματοποιούμε μια αναλυτική επέκταση της συχνότητας  $\omega$  στο μιγαδικό επίπεδο. Επίσης, μηδενίζουμε τους συντελεστές πλάτους  $A_H, A_E$  των ρυθμών διέγερσης TE και TM. Κατά τα λοιπά, ο φορμαλισμός του προβλήματος παραμένει ο ίδιος με αυτόν που εισάγαμε στο Κεφάλαιο 2.

Για να υπολογίσουμε τώρα τις ιδιοσυχνότητες των συντονιζόμενων ρυθμών απαιτείται η εύρεση των μιγαδικών ιδιοτιμών του προβλήματος από τις λύσεις της υπερβατικής εξίσωσης:

$$\text{Det}[I + A(\omega)] = 0. \quad (3.1.1)$$

Η προηγούμενη εξίσωση προκύπτει από την τροποποιημένη εξίσωση (2.2.39) μετά την αναλυτική επέκταση στο μιγαδικό επίπεδο και την απάλειψη των όρων διέγερσης.

Η υπερβατική αυτή εξίσωση είναι μια μιγαδική εξίσωση με μιγαδικό όρισμα, η οποία μπορεί να επιλυθεί μόνο αριθμητικά. Η λύση της αποδίδει τις μιγαδικές ιδιοσυχνότητες των συντονιζόμενων ρυθμών, όπου το πραγματικό μέρος τους αποτελεί τη συχνότητα συντονισμού ενώ το μιγαδικό μέρος αποδίδει τον συντελεστή ποιότητας του ρυθμού με δείκτη  $i$  μέσω της σχέσης:

$$Q_{\text{tot}}^{(i)} = \frac{\text{Re}(\omega_i)}{2\text{Im}(\omega_i)}. \quad (3.1.2)$$

Όπως είναι γνωστό από τη θεωρία των ηλεκτρομαγνητικών κοιλοτήτων [2], ο συντελεστής ποιότητας ενός συντονιζόμενου ρυθμού εκφράζει τον χαρακτηριστικό χρόνο απώσβεσής του λόγω των απωλειών και δίνεται επίσης από τη σχέση:

$$Q_{\text{tot}} = \frac{\omega_r W_{\text{em}}}{P_{\text{loss}}}, \quad (3.1.3)$$

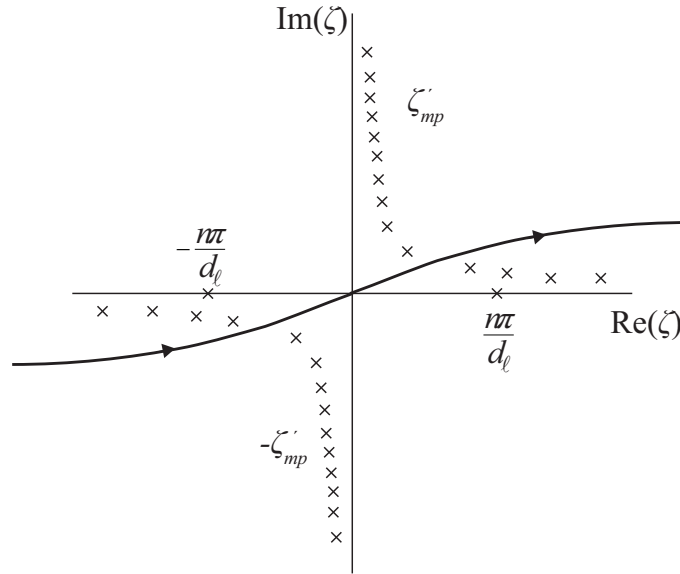
όπου  $\omega_r$  το πραγματικό μέρος της συχνότητας συντονισμού,  $W_{\text{em}}$  η αποθηκευμένη ηλεκτρομαγνητική ενέργεια και  $P_{\text{loss}}$  οι απώλειες ισχύος του ρυθμού.

Προτού περάσουμε στον αριθμητικό χειρισμό της εξίσωσης (3.1.1) οφείλουμε να ορίσουμε την αναλυτική συνέχεια της συχνότητας  $\omega$  στο μιγαδικό επίπεδο. Υπενθυμίζουμε κατ' αρχάς, ότι έχουμε θεωρήσει αρμονική διέγερση με φασιθέτη της μορφής  $e^{+j\omega t}$ . Επομένως, για να επιβάλλουμε οριακές συνθήκες απομακρυνόμενων κυμάτων πρέπει να ισχύει για τον αξονικό κυματαριθμό  $\zeta$  η συνθήκη:

$$\begin{cases} \text{Re}(\zeta) < 0, & \text{για } z \rightarrow +\infty \\ \text{Re}(\zeta) > 0, & \text{για } z \rightarrow -\infty \end{cases}. \quad (3.1.4)$$

Τα ολοκληρώματα Fourier (2.2.27)-(2.2.34) έχουν υπολογιστεί αναλυτικά σύμφωνα με το Παράρτημα Π.1 υπό την προϋπόθεση ότι οι πόλοι τους βρίσκονται πάνω στον πραγματικό άξονα. Όταν θεωρήσουμε τη συχνότητα  $\omega$  μιγαδική, οι πόλοι μετακινούνται από τον πραγματικό άξονα και γίνονται μιγαδικοί. Στην περίπτωση αυτή πρέπει να επανεξετάσουμε τον τρόπο που επιβάλλουμε τις οριακές συνθήκες και τη διαδρομή ολοκλήρωσης.

Με τη θεώρηση ότι το φανταστικό μέρος της συχνότητας είναι θετικό καθώς μας ενδιαφέρουν οι αποσβεννύμενοι ρυθμοί, οι πόλοι  $\pm \zeta'_{mp}$  των ολοκληρωμάτων μετακινούνται από τον πραγματικό άξονα όπως στο Σχήμα 3.1. Η μετακίνηση των πόλων από τον πραγματικό άξονα γίνεται σε διαφορετικά τεταρτημόρια σε σχέση με



Σχήμα 3.1: Πόλοι και τροποποιημένη διαδρομή ολοκλήρωσης στο μιγαδικό επίπεδο.

αυτή που προκαλείται από την εφαρμογή της αρχής οριακής απορρόφησης (limiting absorption principle) [95] που εφαρμόσαμε στο παράρτημα Π.1. Για τον λόγο αυτό εάν κρατήσουμε τη διαδρομή ολοκλήρωσης πάνω στον πραγματικό άξονα τότε με την εφαρμογή του λήμματος Jordan οι οριακές συνθήκες που επιβάλλονται είναι οριακές συνθήκες εισερχόμενων και όχι απομακρυνόμενων κυμάτων.

Ο μόνος τρόπος για να επιβάλλουμε οριακές συνθήκες απομακρυνόμενων κυμάτων είναι να τροποποιήσουμε τη διαδρομή ολοκλήρωσης όπως στο Σχήμα 3.1. Η συγκεκριμένη τροποποίηση της διαδρομής ορίζει τον μετασχηματισμό Fourier όχι πάνω στον πραγματικό άξονα αλλά πάνω στη συγκεκριμένη διαδρομή [96]. Με τον τρόπο αυτό, επιτρέπεται η εφαρμογή του μετασχηματισμού Fourier σε συναρτήσεις οι οποίες δεν είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες. Όπως ξέρουμε από τη βιβλιογραφία [97,98] και θα αναλύσουμε στη συνέχεια, τέτοια είναι και η περίπτωση των προφίλ πεδίου των αποσβεννύμενων ρυθμών, όπου σε αυτή την περίπτωση έχουμε εκθετικά αυξανόμενη συμπεριφορά. Η τεχνική αυτή έχει εφαρμοστεί στον ηλεκτρομαγνητισμό ήδη από πολύ παλιά στις μικροταινίες [99].

Με τη νέα διαδρομή ολοκλήρωσης, οι απομακρυνόμενοι ρυθμοί που διαδίδονται προς τα έξω έχουν ένα εκθετικά αυξανόμενο προφίλ πεδίου. Αντιθέτως, οι ρυθμοί που βρίσκονται στην αποκοπή έχουν αποσβεννύμενο χωρικά προφίλ πεδίου και διαδίδονται προς το εσωτερικό της διάταξης. Τίθεται το ερώτημα σε ποιο σημείο ορίζεται η αποκοπή στην περίπτωση αποσβεννύμενων στο χρόνο ρυθμών ή από διαφορετική σκοπιά μεταξύ ποιων πόλων πρέπει να περάσει η διαδρομή ολοκλήρωσης του Σχήματος 3.1. Η απάντηση δίνεται στη μονογραφία [98], όπου αποδεικνύεται με μαθηματικά επιχειρήματα ότι η συνθήκη που χωρίζει τους διαδιδόμενους από τους ρυθμούς στην αποκοπή είναι η εξής:

$$\varepsilon_0 \mu_0 \operatorname{Re}(\omega^2) - (\chi_{mp}^{(r)} / r_{in})^2 \begin{cases} < 0, & \text{εγκάρσιοι ρυθμοί στην αποκοπή} \\ > 0, & \text{εγκάρσιοι ρυθμοί που διαδίδονται} \end{cases} \quad (3.1.5)$$

Οι πόλοι για  $\zeta = \pm \frac{n\pi}{d_\ell}$  δεν μετακινούνται από τον πραγματικό άξονα και πλέον



$n$  συνεισφορά τους υπολογίζεται κανονικά και όχι κατά την κύρια τιμή Cauchy. Το αναλυτικό αποτέλεσμα και στις δύο περιπτώσεις διαδρομών ολοκλήρωσης είναι το ίδιο για τους δύο αυτούς πόλους και ισχύουν κανονικά οι αναλυτικές εκφράσεις που έχουν υπολογιστεί στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Αφού ορίσαμε το μιγαδικό πρόβλημα ιδιοτιμών και ορίσαμε την αναλυτική επέκταση της συχνότητας στο μιγαδικό επίπεδο, περνάμε τώρα στον αριθμητικό χειρισμό της εξίσωσης (3.1.1) που θα μας επιτρέψει να υπολογίσουμε με αξιοπιστία τις μιγαδικές ιδιοσυχνότητες του προβλήματος.

### 3.2 Αριθμητική μέθοδος υπολογισμού των ιδιοσυχνοτήτων

Το πρόβλημα εύρεσης των ιδιοσυχνοτήτων των συντονιζόμενων ρυθμών στη διάταξη όπως δείξαμε καταλήγει στη λύση της εξίσωσης (3.1.1) για τη μιγαδική συχνότητα  $\omega$ . Η υπερβατική αυτή μιγαδική εξίσωση ακόμα και στην απλούστερη περίπτωση ενός δαχτυλιδιού μπορεί να επιλυθεί μόνο αριθμητικά στον υπολογιστή. Συγκεκριμένα συνιστά ένα  $2 \times 2$  σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων για το πραγματικό και μιγαδικό μέρος της συχνότητας  $\omega$ .

Η επίλυση τέτοιων εξισώσεων στον υπολογιστή δεν αποτελεί απλό ζήτημα καθώς πρέπει να αντιμετωπιστούν διάφορες δυσκολίες. Συγκεκριμένα πρέπει να ληφθούν υπ' όψιν τόσο η ταχύτητα της αριθμητικής μεθόδου όσο και η αξιοπιστία αυτής. Διάφορα θέματα όπως ο διαχωρισμός των μηδενισμών από τους πόλους ή ο χειρισμός των μεγάλων αριθμών, που προκύπτουν από το σύστημα, μας απασχόλησαν κατά την επιλογή της αριθμητικής μεθόδου επίλυσης.

Στη βιβλιογραφία των αριθμητικών μεθόδων αναφέρεται ότι δεν υπάρχει καλή γενική μέθοδος για την επίλυση συστημάτων με παραπάνω από μία μη-γραμμική εξίσωση [100]. Μία από τις μεθόδους που συναντάμε στη βιβλιογραφία σε παρόμοιες με το πρόβλημά μας εφαρμογές είναι η γενίκευση της μεθόδου της διχοτόμησης στο μιγαδικό επίπεδο [55, 101]. Η μέθοδος αυτή αναζητά αλλαγές προσήμου του πραγματικού και φανταστικού μέρους στην περίμετρο ενός τετραγώνου, γεγονός που συνιστά ότι μέσα στο τετράγωνο υπάρχει ρίζα της μιγαδικής συνάρτησης. Τα μειονεκτήματά της μεθόδου είναι ο σχετικά μεγάλος απαιτούμενος αριθμός αποτιμήσεων της συνάρτησης και το γεγονός ότι χωρίς επιπλέον κριτήρια, πόλοι μπορεί να θεωρηθούν ως ρίζες.

Άλλη μέθοδος που θα μπορούσαμε να ακολουθήσουμε είναι να θεωρήσουμε το πρόβλημα ως ένα  $2 \times 2$  σύστημα μη-γραμμικών εξισώσεων και να το λύσουμε με τη μέθοδο Newton-Raphson ή παρόμοιες (μέθοδος τέμνουσας ή μέθοδος Muller), καθώς δεν έχουμε σε ρητή μορφή τον Ιακωβιανό πίνακα του συστήματος. Δεν ακολουθήσαμε αυτό τον δρόμο, καθώς η σύγκλιση σε μία ρίζα δεν είναι εξασφαλισμένη και οι μεγάλοι αριθμοί που εμφανίζονται ως τιμές της ορίζουσας του συστήματος ακόμα και πολύ κοντά σε μια ρίζα δυσχεραίνουν την εφαρμογή κριτηρίων σύγκλισης.

Για τη λύση του αριθμητικού προβλήματος ακολουθήσαμε μια εναλλακτική οδό. Μετατρέψαμε το πρόβλημα εύρεσης των μιγαδικών ριζών σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης. Θεωρήσαμε τη συνάρτηση:

$$D(\omega) = |\text{Det}[I + A(\omega)]|. \quad (3.2.1)$$

Η πραγματική συνάρτηση  $D(\omega)$  με μιγαδικό όρισμα έχει ως ρίζες τις ρίζες της ορίζουσας του συστήματος και είναι μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός για κάθε  $\omega$  στο

μυγαδικό επίπεδο. Επομένως, τα ολικά ελάχιστα της  $D(\omega)$  έχουν τιμή 0 και είναι επίσης οι ρίζες της ορίζουσας του συστήματος που αναζητούμε. Με τον τρόπο αυτό, αρκεί να ελαχιστοποιήσουμε την  $D(\omega)$  και να βρούμε τα ολικά ελάχιστα που της αντιστοιχούν.

Στην παραπάνω διαδικασία η δυσκολία που ανακύπτει, είναι το γεγονός ότι οι μέθοδοι ελαχιστοποίησης δεν μπορούν να αποφανθούν αν ένα ελάχιστο είναι τοπικό ή ολικό ελάχιστο και συνεπώς αν είναι ψευδής ή πραγματική ρίζα της ορίζουσας. Για το ξεπέραςμα της δυσκολίας αυτής, θα εκμεταλλευτούμε τις καλές ιδιότητες των αναλυτικών συναρτήσεων και θα αποδείξουμε ότι η  $D(\omega)$  δεν έχει τοπικά παρά μόνο ολικά ελάχιστα στο 0.

Η απόδειξη ουσιαστικά είναι η εφαρμογή της αρχής του ελαχίστου του μέτρου (minimum modulus principle). Στη βιβλιογραφία συναντάται συχνά το αντίστοιχο θεώρημα για το μέγιστο του μέτρου (maximum modulus principle) [96] το οποίο αναφέρει:

Αν η  $f$  είναι μια αναλυτική συνάρτηση σε ένα ανοιχτό συνεκτικό υποσύνολο του  $\mathbb{C}$  και δεν είναι η σταθερή συνάρτηση τότε η συνάρτηση  $|f|$  παρουσιάζει μέγιστο στο σύνορο του χωρίου.

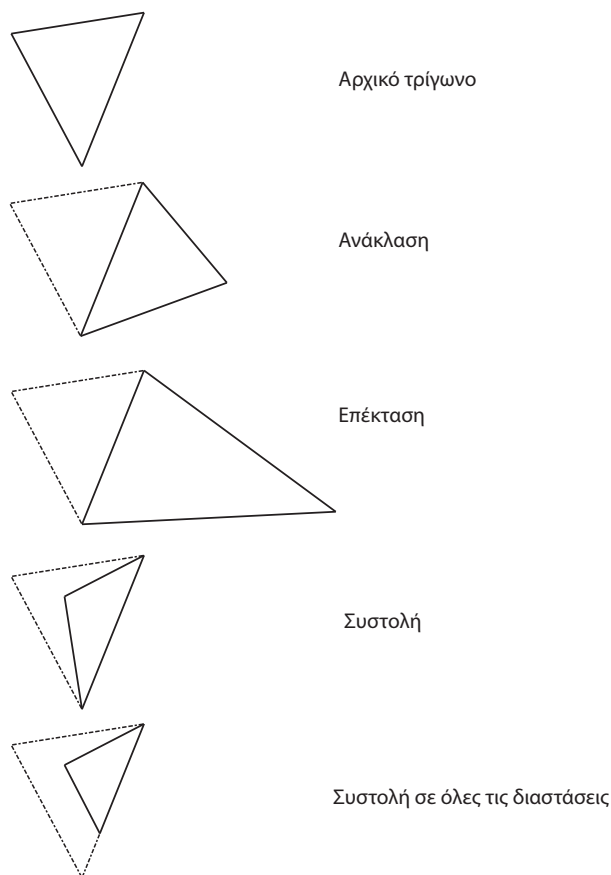
Χρησιμοποιώντας το παραπάνω θεώρημα εύκολα αποδεικνύεται η αρχή του ελαχίστου του μέτρου (minimum modulus principle), αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση  $1/f$ :

Αν η αναλυτική συνάρτηση  $f$  δεν μηδενίζεται στο εσωτερικό του χωρίου, τότε η πραγματική συνάρτηση  $|f|$  παρουσιάζει ελάχιστο στο σύνορο του χωρίου.

Με βάση το παραπάνω θεώρημα έπεται άμεσα για την  $D(\omega)$ , που έχουμε ορίσει σε όλο το  $\mathbb{C}$ , ότι οποιοδήποτε ελάχιστο παρουσιάζει και δεν βρίσκεται πάνω στις καμπύλες ασυνέχειας που περιγράφονται από την (3.15), είναι ρίζα της και επομένως ρίζα της μυγαδικής ορίζουσας. Η ορίζουσα είναι αναλυτική ως προς τη μυγαδική συχνότητα  $\omega$  ως ορίζουσα ενός πίνακα του οποίου τα στοιχεία είναι αναλυτικές συναρτήσεις λόγω της αναλυτικής συνέχειας που έχουμε εφαρμόσει.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, έχουμε εξασφαλίσει ότι οποιοδήποτε ελάχιστο δεν βρίσκεται πάνω στις γνωστές καμπύλες ασυνέχειας της (3.15), είναι και ρίζα της μυγαδικής ορίζουσας του συστήματος. Επομένως, αρκεί να εφαρμόσουμε μια αριθμητική μέθοδο ελαχιστοποίησης για την  $D(\omega)$ , ώστε να βρούμε τις ρίζες του συστήματος.

Για την επιλογή μιας συγκεκριμένης μεθόδου ελαχιστοποίησης αναγκαστικά αποκλείσαμε μεθόδους που χρησιμοποιούν την παράγωγο του συστήματος (π.χ. Quasi-Newton μεθόδους) καθώς στην περίπτωσή μας δεν είναι διαθέσιμη σε ρητή μορφή. Η επιλογή της τελικής μεθόδου αναγκαστικά προκύπτει από έναν συμβιβασμό μεταξύ αξιοπιστίας και ταχύτητας. Η μέθοδος του Powell είναι επιλογή που παρουσιάζει καλή απόδοση σε όρους ταχύτητας. Αντίθετα, η απλούστερη μέθοδος ελαχιστοποίησης που είναι ο αλγόριθμος Nelder-Mead ή μέθοδος της αμοιβάδας είναι γενικά αργός αλλά προσφέρει λόγω της απλότητάς του εξαιρετική σταθερότητα και αξιοπιστία. Μεταξύ των δύο αυτών επιλογών για τους λόγους που θα εξηγήσουμε θεωρήσαμε ότι η ταχύτητα δεν είναι κρίσιμο χαρακτηριστικό και επιλέξαμε τον αλγόριθμο Nelder-Mead, ο οποίος αποδείχτηκε και στην πράξη εξαιρετικά αξιόπιστος.



Σχήμα 3.2: Επιμέρους διαδικασίες του αλγορίθμου Nelder-mead.

Οι λεπτομέρειες του αλγορίθμου Nelder-Mead μπορούν να βρεθούν στη βιβλιογραφία [100], ενώ η βασική του ιδέα μπορεί να δοθεί σύντομα εδώ με μια απλή γεωμετρική περιγραφή στις δύο διαστάσεις, που είναι και η περίπτωση του προβλήματός μας. Αρχικά, ο αλγόριθμος τροφοδοτείται με ένα σημείο εκκίνησης, το οποίο επιλέγεται ως η μία κορυφή του αρχικού τριγώνου αναζήτησης. Στη συνέχεια, αποτιμάται η υπό βελτιστοποίηση συνάρτηση σε όλες τις κορυφές του τριγώνου και ταξινομούνται οι κορυφές. Η χειρότερη κορυφή με τη μεγαλύτερη τιμή απορρίπτεται και σχηματίζουμε ένα νέο τρίγωνο ως ανάκλαση του αρχικού. Η ανάκλαση σχηματίζεται με τη νέα κορυφή να είναι συμμετρική ως προς το σημείο του κέντρου της εναπομείνουσας πλευράς. Τα δύο τρίγωνα, παλιό και νέο, έχουν το ίδιο εμβαδόν. Εάν η τιμή του νέου σημείου είναι ανάμεσα στις τιμές των δύο άλλων τότε επαναλαμβάνεται η διαδικασία με μια νέα ανάκλαση του νέου τριγώνου ως προς το νέο χειρότερο σημείο. Εάν το νέο σημείο μιας ανάκλασης παρουσιάζει χαμηλότερη τιμή σε σχέση με τα υπόλοιπα, τότε γίνεται μια επέκταση του τριγώνου παίρνοντας τώρα τη διπλάσια απόσταση από το κέντρο της εναπομείνουσας πλευράς. Σε κάθε περίπτωση μεταξύ των δύο τελευταίων σημείων (της απλής ανάκλασης και της επέκτασης) επιλέγεται το σημείο με τη χαμηλότερη τιμή. Εάν το σημείο μετά την ανάκλαση είναι μεν καλύτερο από το αρχικό χειρότερο, αλλά παραμένει χειρότερο από τα υπόλοιπα, τότε γίνεται μια συστολή του τριγώνου με ένα νέο σημείο στη μισή απόσταση του χειρότερου σημείου από το κέντρο της απέναντι

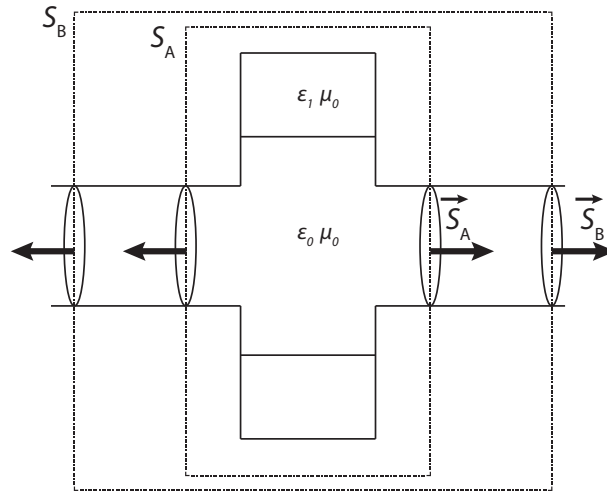
πλευράς. Εάν και πάλι το νέο σημείο είναι χειρότερο από τα υπόλοιπα γίνεται μια συστολή του τριγώνου μειώνοντας την απόσταση των δύο χειρότερων σημείων από το κέντρο της πλευράς στο μισό. Συνοψίζοντας, η επαναληπτική διαδικασία αποτελείται από διαδοχικές διαδικασίες ανάκλασης, επέκτασης και συστολής του τριγώνου, οι οποίες και απεικονίζονται στο Σχήμα 3.2. Με τη διαδικασία αυτή, παραλείποντας τα τρίγωνα στα οποία η νέα κορυφή έχει αυξημένη τιμή της  $D(\omega)$ , σχηματίζεται μία αλληλουχία από τρίγωνα, που οι τιμές της  $D(\omega)$  στις κορυφές διαδοχικά είναι μικρότερες, κατευθυνόμενες προς την ελάχιστη τιμή, και τα μήκη των πλευρών τους γίνονται όλο και μικρότερα. Το κριτήριο σύγκλισης ορίζεται ως μια ελάχιστη απόσταση, που θα πρέπει να απέχουν τα σημεία μεταξύ τους, που είναι ουσιαστικά η ακρίβεια με την οποία θέλουμε να γνωρίζουμε το σημείο ελαχίστου.

Αφού περιγράψαμε την αριθμητική διαδικασία εύρεσης της ρίζας, θα σχολιάσουμε τώρα πως επιλέγονται τα αρχικά σημεία με τα οποία τροφοδοτούμε τον αλγόριθμο Nelder-Mead. Γενικά στο πρόβλημά μας, ο αριθμός των συντονιζόμενων ρυθμών και επομένως και των ριζών της ορίζουσας του συστήματος είναι άγνωστος. Επίσης, δύσκολα έχουμε κάποια πληροφορία από τη φυσική του προβλήματος για την τοποθεσία των ριζών. Μόνο σε απλές περιπτώσεις (π.χ. γεωμετρία με ένα δαχτυλίδι) μπορούμε να έχουμε μια αδρή προσέγγιση των ριζών, παίρνοντας π.χ. τη συχνότητα συντονισμού της αντίστοιχης κλειστής κοιλότητας, αλλά γενικές σχέσεις για όλες τις γεωμετρίες δεν είναι διαθέσιμες. Επίσης, η αναλυτική περιγραφή του συστήματος είναι εξαιρετικά πολύπλοκη για την εξαγωγή τέτοιων σχέσεων.

Για τους παραπάνω λόγους αναπτύξαμε μια απλή τεχνική που μας επιτρέπει να βρίσκουμε τα αρχικά σημεία της αναζήτησης των ριζών. Για την επιλογή των αρχικών σημείων αρχικά παράγουμε έναν διδιάστατο χάρτη αποτίμησης της ορίζουσας σε συγκεκριμένο χωρίο και με συγκεκριμένη σχετικά αραιή διακριτοποίηση. Με μια γρήγορη αναζήτηση συγκρίνοντας κάθε σημείο με τα γειτονικά του μπορούμε άμεσα να βρούμε τα τοπικά ελάχιστα, τα οποία και χρησιμοποιούμε ως αρχικά σημεία της αναζήτησης. Με τον τρόπο αυτό, βρίσκουμε σχετικά αξιόπιστα τις ρίζες της ορίζουσας, με το κόστος όμως ενός πιθανά σημαντικού υπολογιστικού χρόνου. Η διακριτοποίηση του χάρτη είναι μεν αραιή αλλά για να μην χάσουμε ρίζες οφείλει να είναι μικρότερη από την κλίμακα εμφάνισης των ελαχίστων. Η τιμή της διακριτοποίησης επιλέγεται εμπειρικά για κάθε συγκεκριμένη μελετούμενη γεωμετρία. Επίσης, πρέπει να προσέξουμε να μη χάσουμε ρίζες που βρίσκονται πολύ κοντά μεταξύ τους. Για το λόγο αυτό, γύρω από κάθε τοπικό ελάχιστο του χάρτη καταθέτουμε έναν μικρό αριθμό αρχικών σημείων και ελέγχουμε αν τελικά συγκλίνουν όλα σε μία και την αυτή ρίζα. Με τον τρόπο αυτό ελαχιστοποιούμε τις πιθανότητες να χάσουμε κάποια ρίζα που βρίσκεται πολύ κοντά σε μια άλλη.

Η παραπάνω μέθοδος επιλογής των αρχικών σημείων αποδείχτηκε αποτελεσματική αλλά δεν εξασφαλίζει τον σίγουρο υπολογισμό όλων των ριζών σε ένα δεδομένο χωρίο. Σε αντίστοιχες περιπτώσεις με τεχνικές περιγραμμικής ολοκλήρωσης ή πορισμάτων της μιγαδικής ανάλυσης (π.χ. θεωρήμα Rouché) είναι ενδεχομένως δυνατή η ανάπτυξη μιας μεθόδου συστηματικής εύρεσης όλων των ριζών σε ένα χωρίο. Στην περίπτωσή μας λόγω της πολυπλοκότητας των αναλυτικών εκφράσεων καθώς και του γεγονότος ότι αντικείμενο της μελέτης μας είναι η εφαρμογή της μεθόδου και όχι η μέθοδος καθεαυτή, αρκεστήκαμε σε μια λιγότερο αυστηρή αλλά ικανοποιητική για την εφαρμογή μας τεχνική.

Τέλος, δικαιολογούμε τη σύγκλιση των ιδιοσυχνοτήτων του αποκομμένου συστήματος στις ορθές λύσεις που δίνει το απειροδιάστατο σύστημα. Καθώς έχει



Σχήμα 3.3: Φυσική ερμηνεία εκθετικά αύξουσας λύσης.

δειχτεί στην παράγραφο 2.2.6, ότι ο πίνακας  $A$  αποτελεί τελεστής Fredholm 2ου είδους, μπορούμε να εκμεταλλευτούμε τα θεωρήματα τύπου Fredholm για τελεστές που εξαρτώνται από παράμετρο [102]. Επομένως, η οριζούσα του αποκομμένου πίνακα συγκλίνει στην οριζούσα του απειροδιάστατου πίνακα  $A$  και έτσι η εξίσωση (3.2.1) δίνει τις σωστές ιδιοσυχνότητες του προβλήματος μετά την αποκοπή του συστήματος στον υπολογιστή.

### 3.3 Φυσική σημασία των λύσεων του προβλήματος ιδιοτιμών

Θα σχολιάσουμε τώρα με μεγαλύτερη λεπτομέρεια, τη φυσική σημασία των λύσεων του προβλήματος ιδιοτιμών και θα αναδείξουμε ορισμένες ιδιότητες των συντονιζόμενων ρυθμών με απώλειες περίθλασης. Όπως έχουμε αναλυτικά περιγράψει, επιβάλλοντας οριακές συνθήκες απομακρυνόμενων κυμάτων επιτρέπουμε στη διάταξη να είναι ανοιχτή στα άκρα και να διαρρέει προς αυτά ηλεκτρομαγνητική ενέργεια. Επιπροσθέτως, στην περίπτωση που η διάταξή μας περιέχει διπλεκτρικά υλικά με απώλειες, ηλεκτρομαγνητική ενέργεια καταναλίσκεται και σε αυτά όπου μετατρέπεται σε θερμότητα. Επομένως, το σύστημα κοιλοτήτων που σχηματίζει η γενική μορφή της γεωμετρίας συνοδεύεται εν γένει από απώλειες και η ενέργεια των συντονιζόμενων ρυθμών φθίνει εκθετικά στο χρόνο. Αυτή η εξασθένηση των πεδίων στη διάταξη περιγράφεται μαθηματικά με ένα θετικό φανταστικό μέρος της συχνότητας συντονισμού (για φορμαλισμό της μορφής  $e^{+j\omega t}$ ).

Για την περίπτωση των απωλειών περίθλασης στα άκρα, στην προηγούμενη ενότητα είδαμε πως η εφαρμογή οριακών συνθηκών εξερχόμενων κυμάτων επιβάλλει και ένα εκθετικά αύξον πλάτος των πεδίων καθώς απομακρυνόμαστε από τη διάταξη. Αυτή η εκθετικά αύξουσα συμπεριφορά στο χώρο μοιάζει σε πρώτη ματιά αφύσικη. Παρ' όλα αυτά, θα δείξουμε ότι υπάρχει φυσικό περιεχόμενο σε αυτού του είδους τη λύση. Επίσης, σημειώνουμε ότι τέτοιου είδους εκθετικά αύξουσα συμπεριφορά των λύσεων συναντάται συχνά σε ανοιχτές διατάξεις στον ηλεκτρομαγνητισμό (π.χ. στις μικροταινίες [99]).

Για τη φυσική ερμηνεία της εκθετικά αύξουσας συμπεριφοράς των πεδίων, κάνουμε αναφορά στο Σχήμα 3.3. Κατ' αρχάς, υποθέτουμε ότι το διηλεκτρικό υλικό της γεωμετρίας που απεικονίζεται στο σχήμα δεν έχει απώλειες. Επομένως, οι συνολικές απώλειες της διάταξης περιλαμβάνουν μόνο τις απώλειες περίθλασης. Αν για κάποιον ρυθμό, υπολογίσουμε την ηλεκτρομαγνητική ενέργεια στο εσωτερικό της κυλινδρικής επιφάνειας  $S_A$  και την ισχύ εξόδου από το διάνυσμα Poynting στην τομή των κυματοδηγών εξόδου με την επιφάνεια  $S_A$ , τότε παίρνουμε σύμφωνα με τη σχέση (3.1.3) τον συντελεστή ποιότητας του συντονιζόμενου ρυθμού. Αντίστοιχα, ο ίδιος συντελεστής ποιότητας μπορεί να υπολογιστεί με την ίδια διαδικασία στη μεγαλύτερη επιφάνεια  $S_B$ . Στη δεύτερη αυτή περίπτωση λόγω του μεγαλύτερου όγκου που περιλαμβάνει η επιφάνεια  $S_B$ , η αποθηκευμένη ενέργεια θα είναι αναγκαστικά μεγαλύτερη. Για να δώσει η (3.1.3) τον ίδιο συντελεστή ποιότητας θα πρέπει και η ισχύς εξόδου να είναι αντίστοιχα μεγαλύτερη στη δεύτερη περίπτωση. Η προηγούμενη φυσική απαίτηση επιβάλλει και την εκθετικά αύξουσα συμπεριφορά των πεδίων, που είναι η μόνη μορφή λύσης που συμβιβάζει την (3.1.3) με κάθε αυθαίρετη επιφάνεια που μπορούμε να επιλέξουμε.

Στην πραγματικότητα, η εξάρτηση  $e^{+j\omega t}$  με μιγαδικό  $\omega$ , που έχουμε επιλέξει, αναπαριστά μια αρμονική εξάρτηση των πεδίων τα οποία προϋπήρχαν από πάντα και τα οποία φθίνουν εκθετικά με την πάροδο του χρόνου. Αυτή η προϋπάρχουσα ύπαρξη των πεδίων δικαιολογεί την άπειρη ενέργεια που παίρνουμε αν ολοκληρώσουμε την πυκνότητα ενέργειας στο άπειρο μήκος της διάταξης. Έτσι, η εκθετική αύξηση των πεδίων στα άκρα είναι απολύτως δικαιολογημένη από φυσικής άποψης και επιβάλλεται από τη μορφή εξάρτησης που έχουμε επιλέξει χωρίς να παραβιάζεται κάποια φυσική αρχή.

Θα σχολιάσουμε τώρα την περίπτωση που η διάταξη του σχήματος 3.3 περιέχει διηλεκτρικό με απώλειες. Γνωρίζουμε ότι οι ωμικές απώλειες στις ηλεκτρομαγνητικές κοιλότητες με ομοιόμορφη πεπερασμένη αγωγιμότητα κατά τον άξονα  $z$ , διαχωρίζονται από τις απώλειες περίθλασης. Έτσι, ο συνολικός συντελεστής ποιότητας δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{1}{Q_{\text{tot}}} = \frac{1}{Q_{\text{diff}}} + \frac{1}{Q_{\text{ohm}}}. \quad (3.3.1)$$

Τέτοιου είδους διαχωρισμός μεταξύ των δύο μορφών απωλειών δεν μπορεί να γίνει στη διάταξή μας. Αν υπολογίσουμε τις δύο μορφές απωλειών ξεχωριστά θεωρώντας μια νοητή επιφάνεια  $S_B$  η οποία εκτείνεται οριακά ως το άπειρο, θα βρούμε τις απώλειες περίθλασης να μονοπωλούν τον συνολικό συντελεστή ποιότητας σε σχέση με τις διηλεκτρικές απώλειες. Αυτό συμβαίνει γιατί οι απώλειες περίθλασης εξαρτώνται από τη θέση που υπολογίζουμε το διάνυσμα Poynting, ενώ οι διηλεκτρικές απώλειες όχι. Συνεπώς, δεν μπορούν να οριστούν μονοσήμαντα οι δύο επιμέρους συντελεστές ποιότητας, καθώς οι σχετικές τιμές τους εξαρτώνται από την επιφάνεια που θεωρούμε. Επομένως, στην περίπτωση αυτή έχει νόημα μόνο ο συνολικός συντελεστής ποιότητας  $Q_{\text{tot}}$ . Η ιδιαιτερότητα αυτή οφείλεται στο γεγονός ότι στη διάταξή μας το εγκάρσιο με το διαμήκες πρόβλημα είναι πεπλεγμένα και δεν εφαρμόζεται η μέθοδος χωρισμού των μεταβλητών, όπως στην περίπτωση των απωλειών περίθλασης και των ωμικών απωλειών στα τοιχώματα μιας κοιλότητας γυροτρονίου.

### 3.4 Αριθμητικά αποτελέσματα για χαρακτηριστικές γεωμετρίες

Αφού περιγράψαμε το πρόβλημα ιδιοτιμών, την αριθμητική του επίλυση και τη φυσική σημασία των συντονιζόμενων ρυθμών, περνάμε τώρα στην παρουσίαση αριθμητικών αποτελεσμάτων για τρεις χαρακτηριστικές γεωμετρίες. Τα αριθμητικά αποτελέσματα εξήχθησαν από υπολογιστικό κώδικα που υλοποιήσαμε στο περιβάλλον MATLAB. Η ανάπτυξη του κώδικα, τον οποίο ονομάσαμε NESTOR, περιλαμβάνει όλες τις υποπεριπτώσεις της γεωμετρίας που δώσαμε στην ανάλυση και αποτέλεσε ένα σημαντικό μέρος της εργασίας, που εκπονήθηκε στα πλαίσια της συγκεκριμένης διδακτορικής διατριβής.

Λόγω της τελικής μορφής του προβλήματος, το οποίο καταλήγει σε ένα πρόβλημα ιδιοτιμών ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων, η υλοποίηση έγινε εφαρμόζοντας την τεχνική της διανυσματοποίησης (vectorization). Σύμφωνα με την προγραμματιστική αυτή τεχνική, οι επιμέρους πράξεις επιτελούνται πάνω σε διανυσματικά μεγέθη (στην περίπτωσή μας πίνακες) και όχι ξεχωριστά στα στοιχεία που τα αποτελούν. Με τον τρόπο αυτό αποφεύγονται οι βρόχοι, βελτιώνεται η αναγνωσιμότητα του κώδικα και υπάρχει υπολογιστικό όφελος ταχύτητας σε κατάλληλα περιβάλλοντα ανάπτυξης όπως η MATLAB.

Η παρουσίαση των αριθμητικών αποτελεσμάτων έχει διπλό σκοπό. Αφ' ενός θα μελετηθούν οι συντονιζόμενοι ρυθμοί συγκεκριμένων διατάξεων, αφ' ετέρου για λόγους επαλήθευσης και ελέγχου θα συγκριθούν τα αριθμητικά αποτελέσματα με αυτά που δίνει ένας αντίστοιχος εμπορικός κώδικας.

Ο εμπορικός κώδικας που θα χρησιμοποιηθεί είναι ο κώδικας CASCADE [52,69]. Ο κώδικας αυτός είναι ο μοναδικός κατά τη γνώση μας κώδικας που αντιμετωπίζει το πρόβλημα των συντονισμών με απώλειες περίθλασης σε γεωμετρίες που εμπίπτουν στη γενική κατηγορία της διάταξής μας. Ο κώδικας αυτός χρησιμοποιεί διαφορετική μέθοδο ανάλυσης καθώς αναπτύσσει τα πεδία σε εγκάρσιους ιδιο-ρυθμούς. Λόγω της συγκεκριμένης ανάπτυξης των ρυθμών, ο κώδικας αυτός δεν μπορεί να επιλύσει διατάξεις μερικώς πληρωμένες με διηλεκτρικό υλικό στην εγκάρσια διεύθυνση, και επομένως, η σύγκριση θα περιοριστεί σε απλούστερες γεωμετρίες χωρίς διηλεκτρικά δαχτυλίδια.

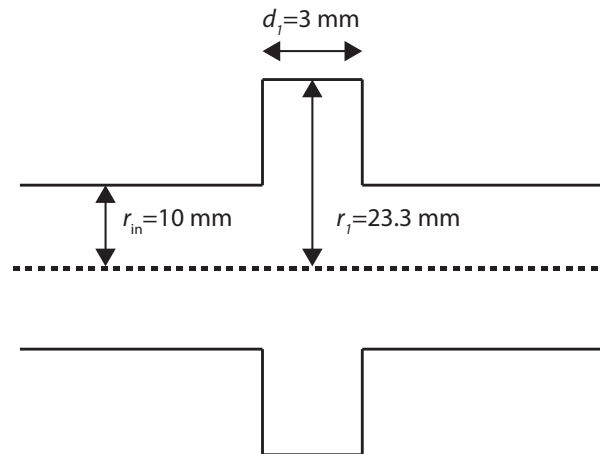
Θα ξεκινήσουμε με τη μελέτη της απλούστερης γεωμετρίας που περιλαμβάνει ένα δαχτυλίδι χωρίς διηλεκτρικό. Θα συνεχίσουμε με μια πιο σύνθετη γεωμετρία με τρία κενά δαχτυλίδια όπου θα δείξουμε για εποπτικούς λόγους κάποιους συντονιζόμενους ρυθμούς. Στη συνέχεια, θα σχολιάσουμε μια γεωμετρία με ένα διηλεκτρικό δαχτυλίδι και τέλος θα μελετήσουμε ένα τμήμα μιας γεωμετρίας διαύλου δέσμης γυροτρονίου, που είναι και η συνθετότερη γεωμετρία που εξετάζουμε.

#### 3.4.1 Γεωμετρία με ένα κενό δαχτυλίδι

Θεωρούμε την απλή γεωμετρία του σχήματος 3.4 με διαστάσεις  $r_{in} = 10.0$  mm,  $r_1 = 23.3$  mm,  $d_1 = 3.0$  mm. Η γεωμετρία αυτή ενός δαχτυλιδιού παρουσιάζει δύο απότομες ασυνέχειες στο εξωτερικό τοίχωμα που σχηματίζουν μια απλή κοιλότητα ανάμεσά τους. Η διάταξη παρουσιάζει μόνο απώλειες περίθλασης προς τους κυματοδηγούς εξόδου, ενώ όπως θα δούμε υποστηρίζει και κάποιους ρυθμούς που δεν παρουσιάζουν καθόλου απώλειες.

Στον Πίνακα 3.1 παρουσιάζουμε τους πρώτους κατά αύξουσα σειρά

### 3.4 Αριθμητικά αποτελέσματα για χαρακτηριστικές γεωμετρίες



Σχήμα 3.4: Γεωμετρία ενός δαχτυλιδιού.

Πίνακας 3.1: Συντονιζόμενοι ρυθμοί γεωμετρίας ενός δαχτυλιδιού για  $m = 0$

Συντονιζόμενος ρυθμός	Συχνότητα	Τιμή $Q$	Συχνότητα	Τιμή $Q$
	(GHz) κώδικα NESTOR	κώδικα NESTOR	(GHz) κώδικα CASCADE	κώδικα CASCADE
TM <sub>010</sub>	5.842	$\infty$	5.844	$\infty$
TM <sub>020</sub>	11.471	$\infty$	11.472	$\infty$
TM <sub>030</sub>	16.367	6.50	16.369	6.50
TE <sub>010</sub>	18.253	$\infty$	18.253	$\infty$
TM <sub>040</sub>	25.268	49.4	25.269	49.4
TM <sub>050</sub>	29.139	5.18	29.142	5.18
TE <sub>020</sub>	33.256	1113	33.255	1105
TM <sub>060</sub>	37.706	16.9	37.709	17.0
TM <sub>070</sub>	42.784	9.32	42.784	9.34
TE <sub>030</sub>	47.473	91.5	47.470	91.1
TM <sub>080</sub>	50.296	12.6	50.299	12.6
TM <sub>011</sub>	50.366	1362	50.367	1371
TE <sub>021</sub>	51.176	257	51.177	257
TM <sub>031</sub>	52.611	178	52.612	178
TE <sub>031</sub>	54.258	69.5	54.259	69.4
TM <sub>041</sub>	56.764	73.2	56.766	73.1
TE <sub>051</sub>	58.412	40.3	58.411	40.2

ιδιοσυχνότητας συντονιζόμενους ρυθμούς της γεωμετρίας του Σχήματος 3.4 για τον αζιμουθιακό δείκτη  $m = 0$ . Βλέπουμε πως τα αριθμητικά αποτελέσματά του κώδικά μας είναι σε εξαιρετική συμφωνία με τα αποτελέσματα που δίνει ο εμπορικός κώδικας CASCADE.

Στην πρώτη στήλη του πίνακα για λόγους κατηγοριοποίησης παρατίθεται η ονομασία του κάθε ρυθμού σύμφωνα με τη σύμβαση που ορίζουμε παρακάτω. Σημειώνουμε ότι για αζιμουθιακό δείκτη  $m = 0$  όπως είναι γνωστό, υποστηρίζονται ανεξάρτητοι ρυθμοί TE και TM χωρίς να συμπλέκονται. Έτσι, η κύρια ονομασία τους προέρχεται από την κατηγοριοποίηση σε εγκάρσιους ηλεκτρικούς η εγκάρσιους



μαγνητικούς ρυθμούς. Ο πρώτος δείκτης αφορά την αξιωματική εξάρτηση των ρυθμών και στον Πίνακα 3.1 είναι 0 για όλους τους ρυθμούς. Ο δεύτερος δείκτης χαρακτηρίζει την εγκάρσια εξάρτηση, η οποία όμως δεν είναι σαφώς ορισμένη, όπως στην περίπτωση του λείου κυματοδηγού. Στη διάταξή μας, λόγω της μη διαχωρισιμότητας ακτινικού και αξονικού προβλήματος, η ακτινική εξάρτηση σχηματίζεται από την υπέρθεση πολλών εγκάρσιων ρυθμών του λείου κυματοδηγού. Ως ακτινικό δείκτη του ρυθμού επιλέγουμε τον επικρατούντα εγκάρσιο ρυθμό στο κέντρο της κοιλότητας. Ο δείκτης αναφέρεται στον αριθμό των αλλαγών προσήμου κατά την ακτινική διεύθυνση του επικρατούντα ρυθμού και δεν ταυτίζεται απαραίτητα με τη σειρά εμφάνισής του όπως στον λείο κυματοδηγό. Για παράδειγμα, στον Πίνακα 3.1 ο ρυθμός  $TM_{021}$  δεν εμφανίζεται καθόλου. Τέλος, ο τρίτος δείκτης που αναφέρεται στην αξονική εξάρτηση επιλέγεται ως ο αριθμός των αξονικών αλλαγών προσήμου μέσα στο δαχτυλίδι, αριθμός ο οποίος είναι εν γένει καλά ορισμένος. Σημειώνουμε ότι λόγω της συμμετρίας της διάταξης ως προς το εγκάρσιο επίπεδο  $z = d_1/2$ , ρυθμοί με αξονικό δείκτη άρτιο και περιττό αποσυμπλέκονται.

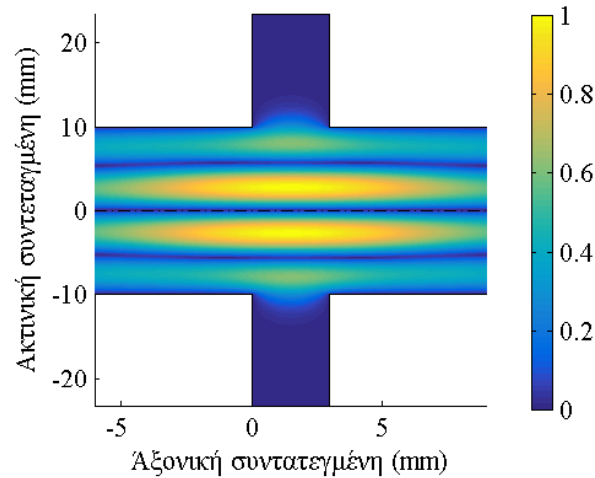
Θα αναλύσουμε τώρα τους ρυθμούς, οι οποίοι εμφανίζονται στην απλή γεωμετρία ενός δαχτυλιδιού. Παρατηρούμε κατ' αρχάς, ότι στον Πίνακα 3.1 οι ρυθμοί  $TM_{010}$ ,  $TM_{020}$  και  $TE_{010}$  παρουσιάζουν άπειρο συντελεστή ποιότητας. Αυτό συμβαίνει γιατί με τις δεδομένες διαστάσεις, οι συχνότητες αποκοπής των ρυθμών TE και TM στους λείους κυματοδηγούς εξόδου, είναι μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες συχνότητες συντονισμού μέσα στο δαχτυλίδι (11.474 GHz για τον  $TM_{01}$  και 18.282 GHz για τον  $TE_{01}$ ). Έτσι, η πλεκτρομαγνητική ενέργεια δεν μπορεί να διαφύγει προς τους κυματοδηγούς και η διάταξη δεν παρουσιάζει απώλειες περιθλάσης. Η απουσία άλλου είδους απωλειών, όπως διπλεκτρικές ή ωμικές απώλειες, έχει ως συνέπεια τον υπολογισμό ενός συντελεστή ποιότητας με άπειρη τιμή.

Θα σχολιάσουμε τώρα τους ρυθμούς  $TE_{0,x0}$ , οι οποίοι στη συγκεκριμένη περίπτωση εμφανίζονται για  $x = 1, 2, 3$ . Οι ρυθμοί αυτοί έχουν ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό. Κατ' αρχάς, σημειώνουμε ότι κανονικοί ρυθμοί  $TE_{0,x0}$  δεν υποστηρίζονται μέσα στο δαχτυλίδι, όπως οι ρυθμοί  $TM_{0,x0}$ . Αυτό συμβαίνει επειδή για αξονικό δείκτη 0 τα πεδία των ρυθμών TE στην εξίσωση (2.2.4β) μηδενίζονται. Παρ' όλα αυτά, το πεδίο στο κυρίως μέρος του κυματοδηγού μπορεί να συζευχθεί με έναν ρυθμό αξονικού δείκτη 1 στο δαχτυλίδι, ο οποίος όμως για συχνότητες μικρότερες των 50 GHz βρίσκεται στην αποκοπή και το πεδίο διεισδύει μόνο ελάχιστα σε αυτό. Οι ρυθμοί αυτοί παρ' όλο ότι μέσα στο δαχτυλίδι έχουν αξονικό δείκτη 1, τους ονομάζουμε  $TE_{0,x0}$  ενάντια στη σύμβασή μας, καθώς στο κυρίως μέρος του κυματοδηγού η αξονική εξάρτηση είναι ρυθμού με δείκτη 0. Επίσης, επιλέγουμε αυτή την ονομασία για να τους διαχωρίσουμε από τους κανονικούς ρυθμούς  $TE_{0,x1}$ , οι οποίοι εμφανίζονται για συχνότητες μεγαλύτερες των 50 GHz, όπου το πεδίο μπορεί κανονικά να διεισδύσει μέσα στο δαχτυλίδι.

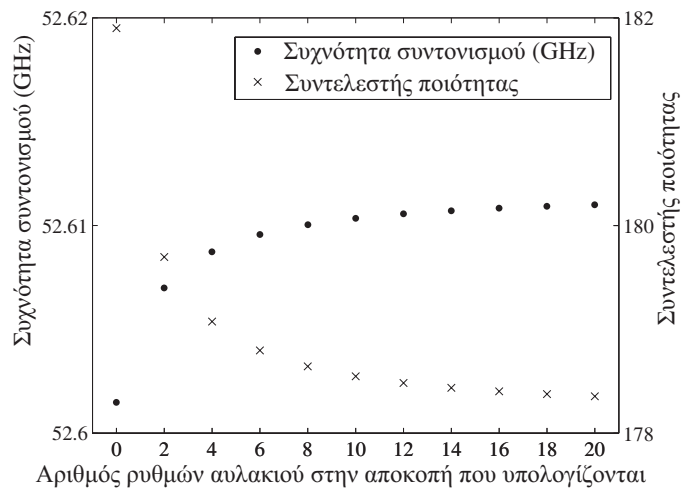
Το προφίλ της αξιωματικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου  $E_\phi(r, z)$  για τον ρυθμό  $TE_{020}$  δίνεται στο Σχήμα 3.5. Παρατηρούμε το πεδίο το οποίο δεν διεισδύει παρά μόνο ελάχιστα στο δαχτυλίδι, καθώς και τους δύο λοβούς που σχηματίζονται στην ακτινική διεύθυνση και οι οποίοι χαρακτηρίζουν τον ακτινικό δείκτη του ρυθμού. Τέτοιου είδους ρυθμοί είναι του ίδιου είδους με αυτούς που μελετώνται για μετρητικές εφαρμογές στο [103] με τη διαφορά όμως ότι ο κύλινδρος στη δικιά μας γεωμετρία δεν είναι κλειστός στις βάσεις του, αλλά συνεχίζει στους άπειρους κυματοδηγούς εξόδου.

Όπως σχολιάσαμε στην ενότητα 3.2, η λύση του αποκομμένου συστήματος

### 3.4 Αριθμητικά αποτελέσματα για χαρακτηριστικές γεωμετρίες



Σχήμα 3.5: Προφίλ της αξιμουθιακής συνιστώσας  $E_\phi(r, z)$  του ηλεκτρικού πεδίου για τον ρυθμό  $TE_{020}$ .



Σχήμα 3.6: Διάγραμμα σύγκλισης συχνότητας και συντελεστή ποιότητας του ρυθμού  $TM_{031}$ .

πεπερασμένης διάστασης, συγκλίνει για επαρκή συμπερίληψη όρων στην ορθή λύση του απειροδιάστατου συστήματος. Στο διάγραμμα 3.6 δείχνουμε και αριθμητικά τη σύγκλιση για τον ρυθμό  $TM_{031}$ . Ο οριζόντιος άξονας ορίζει τον αριθμό των αξονικών ρυθμών στο αυλάκι που βρίσκονται στην αποκοπή και συμπεριλαμβάνουμε στους υπολογισμούς. Ο υπολογισμός συχνότητας και συντελεστή ποιότητας γίνεται ανά δύο ρυθμούς καθώς όπως έχουμε σημειώσει άρτιοι και περιττοί αξονικοί ρυθμοί δεν συμπλέκονται. Παρατηρούμε ότι συμπεριλαμβάνοντας έστω και λίγους ρυθμούς στην αποκοπή, επιτυγχάνεται σύγκλιση του αποτελέσματος με ικανοποιητική ακρίβεια. Σημειώνουμε ότι δοθέντος του αρχικού σημείου, η αριθμητική μέθοδος συγκλίνει με μεγάλη ακρίβεια στη ρίζα μέσα σε ελάχιστα δευτερόλεπτα σε έναν κοινό προσωπικό υπολογιστή με επεξεργαστή Intel dual core i7 στα 2.7 GHz.

Αφού αναλύσαμε τους ανεξάρτητους ρυθμούς TM και TE που προκύπτουν για αξιμουθιακό δείκτη  $m = 0$ , δείχνουμε τώρα τη σύγκριση των αποτελεσμάτων για

Πίνακας 3.2: Συντονιζόμενοι ρυθμοί γεωμετρία ενός δαχτυλιδιού για  $m = 5$

Συντονιζόμενος ρυθμός	Συχνότητα (GHz) κώδικα NESTOR	Τιμή $Q$ κώδικα NESTOR	Συχνότητα (GHz) κώδικα CASCADE	Τιμή $Q$ κώδικα CASCADE
EH <sub>510</sub>	17.866	$\infty$	17.867	$\infty$
EH <sub>520</sub>	24.679	$\infty$	24.679	$\infty$
HE <sub>510</sub>	30.496	$\infty$	30.496	$\infty$
EH <sub>530</sub>	31.271	40.8	31.273	40.7
EH <sub>540</sub>	39.810	61.5	39.812	61.6
EH <sub>550</sub>	44.937	9.12	44.938	9.13
HE <sub>520</sub>	49.263	222	49.260	221
HE <sub>511</sub>	51.699	2234	51.700	2235
EH <sub>560</sub>	52.343	14.9	52.347	14.9
EH <sub>511</sub>	53.252	547	53.252	539
HE <sub>521</sub>	54.812	305	54.820	313
EH <sub>521</sub>	56.663	126	56.667	125
EH <sub>570</sub>	58.837	11445	58.837	13536
HE <sub>531</sub>	58.997	112	58.999	112

τους ρυθμούς με αζιμουθιακό δείκτη  $m = 5$ . Στην περίπτωση αυτή, όπως έχουμε σχολιάσει, υπάρχουν υβριδικοί ρυθμοί, τους οποίους και ονοματίζουμε ως ρυθμούς EH ή HE ανάλογα με το αν κυριαρχεί η διαμήκης ηλεκτρική ή μαγνητική συνιστώσα αντίστοιχα. Ένα πρακτικό κριτήριο για τη διάκριση μεταξύ EH και HE ρυθμών θα δοθεί στην ενότητα 5.1.

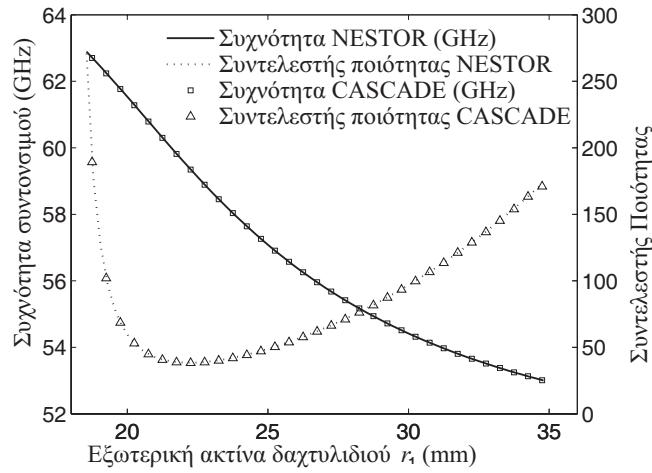
Παρατηρούμε και στην περίπτωση αυτή ότι οι 3 πρώτοι ρυθμοί δεν έχουν απώλειες, καθώς ο κατώτερης τάξης ρυθμός στους κυματοδηγούς είναι ο TE<sub>51</sub>, ο οποίος έχει συχνότητα αποκοπής στα 30.611 GHz. Τα αποτελέσματα σε όλες τις περιπτώσεις μεταξύ του κώδικά μας και του εμπορικού κώδικα CASCADE είναι απολύτως σύμφωνα με μεγάλη ακρίβεια καθώς στις συχνότητες συντονισμού τάξης μεγέθους δεκάδων GHz δεν παρατηρείται μεγαλύτερη απόκλιση πέρα από 8 MHz.

Τέλος, για τη σύγκριση των δύο κωδικών πέρα από την παράθεση αριθμητικών αποτελεσμάτων σε πίνακες, δείχνουμε στο Σχήμα 3.7 ένα παραμετρικό διάγραμμα των χαρακτηριστικών του ρυθμού TE<sub>051</sub> με τη μεταβολή της ακτίνας  $r_1$  του αυλακιού. Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα πρακτικά ταυτίζονται και έτσι επαληθεύεται η ορθότητα του κώδικά μας σε μια ευρεία περιοχή παραμέτρων για την ακτίνα του αυλακιού.

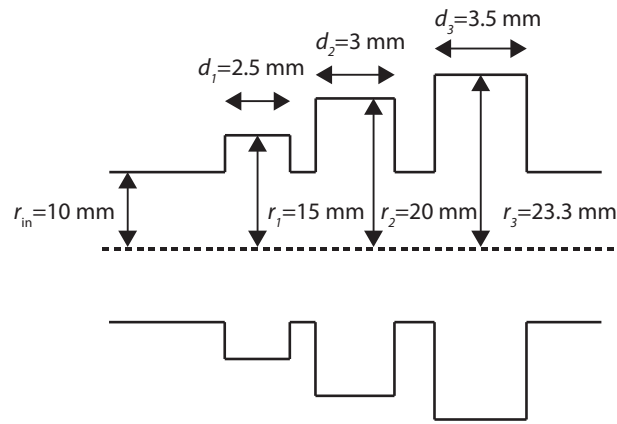
### 3.4.2 Γεωμετρία τριών δαχτυλιδιών

Εξετάζουμε τώρα μια γεωμετρία που διαθέτει τρία δαχτυλίδια. Στην περίπτωση αυτή, η πολυπλοκότητα της γεωμετρίας σε σχέση με την απλή γεωμετρία ενός δαχτυλιδιού επιβάλλει και μια πληθώρα ρυθμών, οι οποίοι δεν είναι καθόλου εύκολο να ονοματισθούν και να κατηγοριοποιηθούν. Αυτό συμβαίνει γιατί τώρα εμφανίζονται πολλές κοιλότητες, όπως οι τρεις που αντιστοιχούν στα δαχτυλίδια, καθώς και οι δύο που σχηματίζονται στην ενδιάμεση περιοχή μεταξύ των δαχτυλιδιών. Οι επιμέρους αυτές κοιλότητες είναι ισχυρά συζευγμένες μεταξύ τους με αποτέλεσμα όλη η γεωμετρία να μπορεί να θεωρηθεί μόνο ως ένα σύστημα κοιλοτήτων. Τέτοιου είδους

### 3.4 Αριθμητικά αποτελέσματα για χαρακτηριστικές γεωμετρίες



Σχήμα 3.7: Διάγραμμα των χαρακτηριστικών του ρυθμού  $TE_{051}$  με την παραμετρική μεταβολή της ακτίνας του αυλακιού  $r_1$ .



Σχήμα 3.8: Γεωμετρία τριών δαχτυλιδιών που μελετάται.

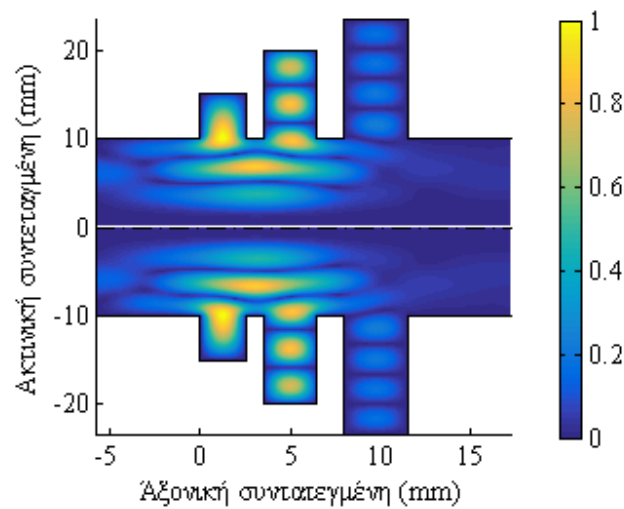
συστήματα κοιλοτήτων χρησιμοποιούνται ευρέως ως διατάξεις αλληλεπίδρασης στους γραμμικούς επιταχυντές (linacs) [85].

Ο λόγος που εξετάζουμε μια τέτοια γεωμετρία είναι ο αριθμητικός έλεγχος των αποτελεσμάτων σε σύγκριση με τον εμπορικό κώδικα CASCADE. Η γεωμετρία των τριών δαχτυλιδιών δεν είναι συμμετρική ως προς ένα εγκάρσιο επίπεδο, όπως συμβαίνει για όλες τις γεωμετρίες που περιλαμβάνουν μόνο ένα δαχτυλίδι. Επίσης, τώρα παίζουν ρόλο οι όροι του συστήματος που αντιστοιχούν στη σύζευξη μεταξύ των κοιλοτήτων. Έτσι, ένας νέος έλεγχος είναι αναγκαίος σε μια τέτοια γεωμετρία για την επαλήθευση των εξισώσεων και του κώδικα σε μια γενικότερη μορφή γεωμετρίας.

Η συγκεκριμένη γεωμετρία που εξετάζουμε απεικονίζεται στο Σχήμα 3.8 και τα γεωμετρικά της χαρακτηριστικά είναι:  $r_{in}=10$  mm,  $r_1=15$  mm,  $r_2=20$  mm,  $r_3=23.3$  mm,  $d_1=2.5$  mm,  $d_2=3$  mm,  $d_3=3.5$  mm,  $s_2=3.5$  mm,  $s_3=8$  mm. Στον Πίνακα 3.3 παραθέτουμε κάποιους υβριδικούς ρυθμούς για τον αζιμουθιακό δείκτη  $m = 5$ , όπως αυτοί υπολογίστηκαν από τους δύο κώδικες. Και σε αυτή τη γενικότερη περίπτωση, παρατηρούμε πολύ καλή συμφωνία μεταξύ των αποτελεσμάτων, η οποία επαληθεύει

Πίνακας 3.3: Συντονιζόμενοι ρυθμοί στη γεωμετρία 3 δαχτυλιδιών για  $m = 5$ .

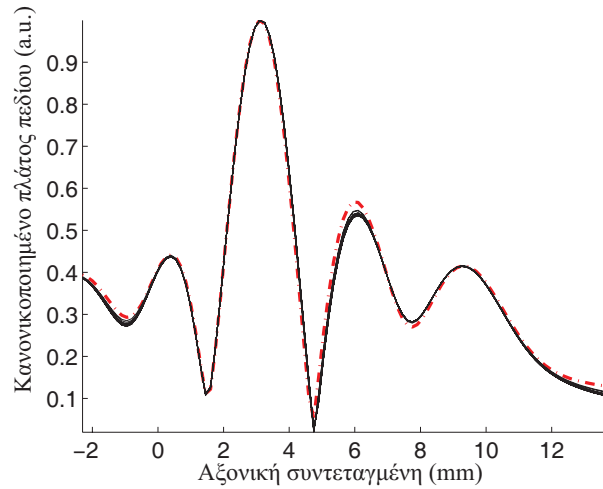
Συχνότητα (GHz) κώδικα NESTOR	Τιμή $Q$ κώδικα NESTOR	Συχνότητα (GHz) κώδικα CASCADE	Τιμή $Q$ κώδικα CASCADE
39.387	48.3	39.390	48.0
45.759	51.1	45.760	51.2
63.505	329	63.500	333
69.062	46.3	69.067	46.3
77.437	82.6	77.436	82.6



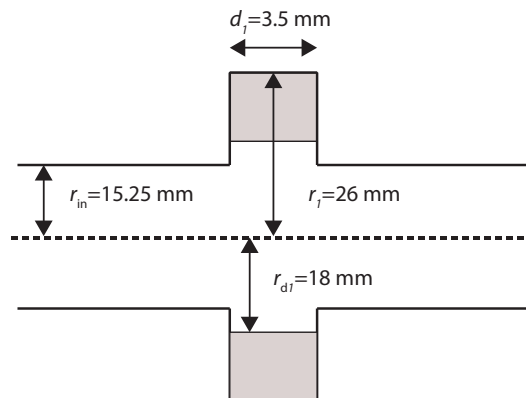
Σχήμα 3.9: Αξιομετρική συνιστώσα ηλεκτρικού πεδίου  $E_\phi(r, z)$  για τον ρυθμό με ιδιοσυχνότητα 63.5 GHz.

την ορθότητα της μεθόδου και του κώδικα που αναπτύξαμε. Τέλος, για επόπτικούς λόγους παραθέτουμε στο Σχήμα 3.9 το προφίλ του αξιωματικού ηλεκτρικού πεδίου για τον ρυθμό που ταλαντώνεται στα 63.5 GHz. Η ισχυρή σύζευξη μεταξύ των κοιλοτήτων, που σχηματίζει έναν σύνθετο ρυθμό της συνολικής διάταξης, είναι εμφανής.

Τέλος, όπως δείξαμε στην απλή γεωμετρία με ένα δαχτυλίδι τη σύγκλιση της συχνότητας και του συντελεστή ποιότητας σε σχέση με τον αριθμό των ρυθμών που θεωρούμε στο δαχτυλίδι (Σχήμα 3.6), δείχνουμε τώρα αντίστοιχα για την τρέχουσα γεωμετρία τη σύγκλιση των πεδίων. Συγκεκριμένα στο διάγραμμα 3.10 για τον ρυθμό του Σχήματος 3.9 έχουμε τυπώσει το μέτρο της αξιωματικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου κατά μήκος του άξονα στην ακτινική θέση  $r = 8$  mm. Στο διάγραμμα εμφανίζονται όλες οι καμπύλες θεωρώντας από κανέναν έως δεκαπέντε ρυθμούς κάτω από την αποκοπή στα δαχτυλίδια. Βλέπουμε ότι η σύγκλιση είναι πολύ καλή καθώς σχεδόν όλες οι καμπύλες ταυτίζονται και γι' αυτό απεικονίζονται με τον ίδιο τύπο γραμμής, ενώ ακόμα και αυτή που δεν περιλαμβάνει κανέναν ρυθμό κάτω από την αποκοπή και παρουσιάζεται με κόκκινη διακεκομμένη γραμμή είναι αρκετά κοντά στις υπόλοιπες.



Σχήμα 3.10: Σύγκλιση της αξιωματικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου για τη γεωμετρία των 3 δαχτυλιδιών στην ακτινική θέση  $r = 8$  mm. Με κόκκινη διακεκομμένη γραμμή σημειώνεται το προφίλ πεδίου για την περίπτωση όπου κανένας ρυθμός που βρίσκεται κάτω από την αποκοπή δεν λαμβάνεται υπ' όψιν στους υπολογισμούς. Όλες οι υπόλοιπες καμπύλες που πρακτικά συμπίπτουν είναι υπολογισμένες συμπεριλαμβάνοντας αυξανόμενο αριθμό αξονικών ρυθμών των δαχτυλιδιών κάτω από την αποκοπή.

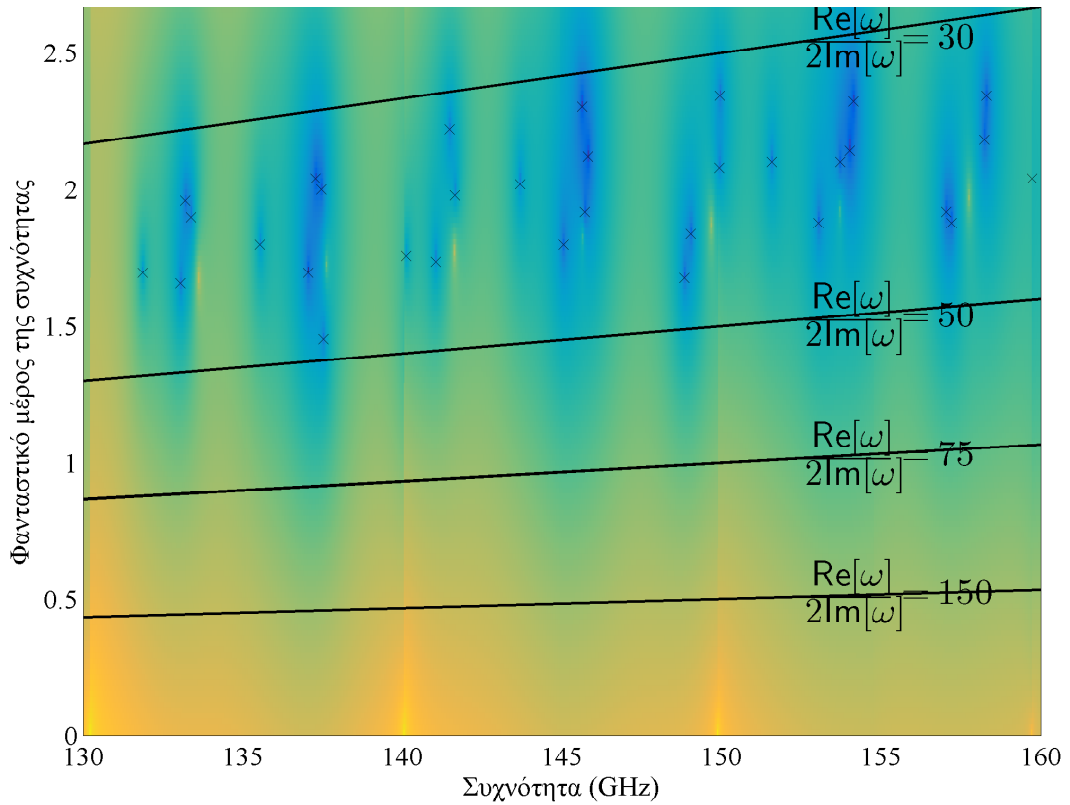


Σχήμα 3.11: Γεωμετρία ενός δαχτυλιδιού φορτωμένο με διηλεκτρικό υλικό.

### 3.4.3 Γεωμετρία ενός δαχτυλιδιού φορτωμένου με διηλεκτρικό

Συνεχίζουμε τώρα με τη μελέτη μιας γεωμετρίας με ένα δαχτυλίδι που περιλαμβάνει διηλεκτρικό υλικό με απώλειες. Η γεωμετρία αυτή είναι και η δομική μονάδα που σχηματίζει τη σύνθετη γεωμετρία ενός διαύλου δέσμης. Οι διαστάσεις της συγκεκριμένης γεωμετρίας, που μελετάμε και η οποία δίνεται στο Σχήμα 3.11, είναι οι εξής:  $r_{in}=15.25$  mm,  $r_1=26$  mm,  $r_{d1}=18$  mm,  $d_1=3.5$  mm και με  $\epsilon_1 = 20 - 0.5j$ .

Όπως έχουμε ήδη σχολιάσει, ο εμπορικός κώδικας CASCADE επειδή χρησιμοποιεί μια ανάπτυξη σε εγκάρσιους ιδιο-ρυθμούς δεν μπορεί να επιλύσει γεωμετρίες που περιέχουν δαχτυλίδια μερικώς πληρωμένα με διηλεκτρικό υλικό όπως η γεωμετρία που εξετάζουμε. Για το λόγο αυτό στην προκειμένη περίπτωση δεν θα παρουσιάσουμε αναλυτικά αποτελέσματα συγκεκριμένων ρυθμών, αλλά θα δώσουμε μια γενική εικόνα των ρυθμών που εμφανίζονται. Αυτό θα επιχειρήσουμε να το



Σχήμα 3.12: Χάρτης άρτιων ρυθμών για  $m = 1$  και  $\varepsilon_1 = 20 - 0.5j$ .

κάνουμε παρουσιάζοντας τώρα τους χάρτες των ρυθμών στο μιγαδικό επίπεδο. Έτσι, επιδεικνύοντας τους χάρτες των ρυθμών, που έχουμε περιγράψει στην ενότητα 3.2, θα σχολιάσουμε ταυτόχρονα κάποιες ιδιότητες που οι ρυθμοί εμφανίζουν.

Στο Σχήμα 3.12 παρουσιάζουμε τον χάρτη των ρυθμών για τη γεωμετρία του ενός δαχτυλιδιού με διπλεκτρικό. Ο οριζόντιος άξονας ορίζει το πραγματικό μέρος της μιγαδικής συχνότητας σε GHz και ο φανταστικός άξονας το αντίστοιχο φανταστικό μέρος. Οι πλάγιες γραμμές ορίζουν σταθερές τιμές του λόγου  $\text{Re}[\omega]/2\text{Im}[\omega]$  και σύμφωνα με την (3.1.2) ο λόγος αυτός όπου υπάρχει ρίζα αντιστοιχεί στην τιμή του συντελεστή ποιότητας  $Q$ . Η χρωματική σκίαση αντιστοιχεί στο μέτρο της οριζουσας του συστήματος σε λογαριθμική κλίμακα. Η σκούρα (μπλε) σκίαση αντιστοιχεί σε χαμηλές τιμές του μέτρου της οριζουσας ενώ η ανοιχτή (κίτρινη) σε υψηλές τιμές. Τα σημεία που ορίζονται με το σύμβολο  $\times$  αντιστοιχούν σε μηδενισμούς της οριζουσας, δηλαδή σε συντονιζόμενους ρυθμούς της διάταξης. Θυμίζουμε ότι ο χάρτης δεν παρουσιάζει τοπικά ελάχιστα πέρα από τα ολικά ελάχιστα στο 0 που είναι και οι ρίζες της οριζουσας. Ορατές είναι και οι ασυνέχειες του χάρτη που οφείλονται στις κλαδικές τομές όπως ορίζονται από την (3.1.5). Η τομή τους με τον οριζόντιο άξονα, αν επιλύσουμε την (3.1.5) ως προς τη συχνότητα για τους ρυθμούς TM του κυματοδηγού με ακτινικό δείκτη  $p = 11 - 14$ , βρίσκουμε πως είναι στις συχνότητες 129.3 GHz, 139.2 GHz, 149.1 GHz, 159.0 GHz, όπως ακριβώς εμφανίζονται στο χάρτη.

Παρατηρούμε ότι όλοι οι ρυθμοί εμφανίζονται στην περιοχή συντελεστή ποιότητας  $Q$  μεταξύ 30 και 50. Η συμπεριφορά αυτή των ρυθμών είναι φυσιολογική, καθώς πρόκειται για ρυθμούς οι οποίοι ταλαντώνονται μέσα στο δαχτυλίδι και στο

διηλεκτρικό υλικό. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι ένας ρυθμός ταλαντώνεται μόνο στο διηλεκτρικό υλικό τότε από τη γνωστή σχέση για τον συντελεστή ποιότητας (3.1.3) χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.4.15) για την ισχύ απωλειών στο διηλεκτρικό και τη σχέση για την αποθηκευμένη ηλεκτρομαγνητική ενέργεια:

$$W_{em} = \frac{1}{4} \int_V [\text{Re}(\epsilon)|\vec{E}|^2 + \mu_0|\vec{H}|^2]dV, \quad (3.4.1)$$

καταλήγουμε για τον συντελεστή ποιότητας στη σχέση:

$$Q_{dielec} = \frac{\text{Re}(\epsilon)}{\text{Im}(\epsilon)}. \quad (3.4.2)$$

Η παραπάνω σχέση στην περίπτωσή μας αποτελεί προσέγγιση, καθώς ο ρυθμός αφ' ενός ταλαντώνεται επίσης στην ενδιάμεση περιοχή, που δεν έχει διηλεκτρικό υλικό με απώλειες αλλά συμμετέχει στην αποθηκευμένη ενέργεια, αφ' ετέρου η διάταξή μας έχει επιπλέον απώλειες περίθλασης. Σύμφωνα λοιπόν με την προσεγγιστική αυτή σχέση είναι  $Q = 40$ , αποτέλεσμα που προσεγγίζει τα ακριβή αποτελέσματα όπως δίνονται από τον κώδικα. Έτσι, παρατηρούμε στο Σχήμα 3.12 ότι οι περισσότεροι ρυθμοί έχουν  $Q$  κάτω από 40 αφού στις διηλεκτρικές προστίθενται και οι απώλειες περίθλασης με συνέπεια την ελάττωση του συνολικού συντελεστή ποιότητας.

#### 3.4.4 Γεωμετρία διαύλου δέσμης γυροτρονίου

Η τελευταία και πιο σύνθετη γεωμετρία που μελετούμε είναι αυτή ενός διαύλου δέσμης γυροτρονίου. Ο συγκεκριμένος δίαυλος δέσμης που θα εξετάσουμε είναι κοντά στις διαστάσεις πραγματικών διαύλων δέσμης γυροτρονίου και περιλαμβάνει 5 δαχτυλίδια με διηλεκτρικό υλικό. Οι γεωμετρικές διαστάσεις του με αναφορά στο Σχήμα 2.1 παρατίθενται στον Πίνακα 3.4.

Οι ρυθμοί που ενδιαφέρουν για μια γεωμετρία διαύλου δέσμης είναι υψηλής τάξης ρυθμοί, που ταλαντώνονται σε υψηλές συχνότητες, καθώς τέτοιες είναι οι παρασιτικές συχνότητες που εμφανίζονται κατά τη λειτουργία πολλών γυροτρονίων. Η μελέτη των ρυθμών υψηλής τάξης σε τέτοιου είδους γεωμετρίες αποκαλύπτει την ύπαρξη δύο ειδών συντονιζόμενων ρυθμών που διαφέρουν ποιοτικά.

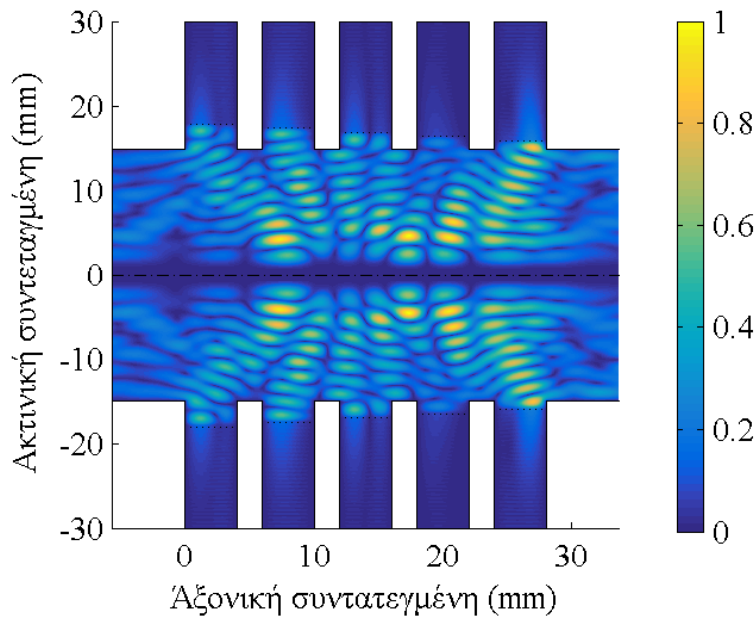
Το πρώτο είδος ρυθμών, είναι ρυθμοί που συντονίζονται και ταλαντώνουν στην εσωτερική κυλινδρική περιοχή. Στο Σχήμα 3.13 απεικονίζεται το προφίλ πεδίου για έναν τέτοιο ρυθμό με αζιμουθιακό δείκτη  $m = 5$  που ταλαντώνει στα 102.9 GHz και εμφανίζει συνολικό συντελεστή ποιότητας  $Q = 73.5$ . Όπως βλέπουμε στο σχήμα, το πεδίο διεισδύει ελάχιστα στο διηλεκτρικό, καθώς ανακλάται στη διεπαφή κενού-διηλεκτρικού, με αποτέλεσμα οι διηλεκτρικές απώλειες να είναι περιορισμένες. Επίσης, το πεδίο, καθώς διεισδύει στο διηλεκτρικό, αποσβέννεται εκθετικά χωρίς ουσιαστικά να βλέπει όλο τον όγκο του διηλεκτρικού, μιας και έχει πρακτικά μηδενιστεί πριν φτάσει στην εξωτερική ακτίνα του δαχτυλιδιού. Το μέγιστο του πεδίου εμφανίζεται στο εσωτερικό του κυλίνδρου, γεγονός που σημαίνει επίσης αρκετά καλή σύζευξη με την ηλεκτρονική δέσμη. Για όλους τους παραπάνω λόγους οι ρυθμοί αυτού του είδους κρίνονται ως επικίνδυνοι για παρασιτική διέγερση λόγω της αλληλεπίδρασης με την ηλεκτρονική δέσμη.

Το δεύτερο είδος αναφέρεται σε ρυθμούς που συντονίζονται και ταλαντώνουν μέσα στο διηλεκτρικό δαχτυλίδι, όπως αυτοί που εξετάσαμε στην προηγούμενη ενότητα. Το προφίλ πεδίου ενός τέτοιου ρυθμού που ταλαντώνει στα 103.1 GHz και



Πίνακας 3.4: Διαστάσεις γεωμετρίας διαύλου δέσμης γυροτρονίου  $\ell$ -οστό

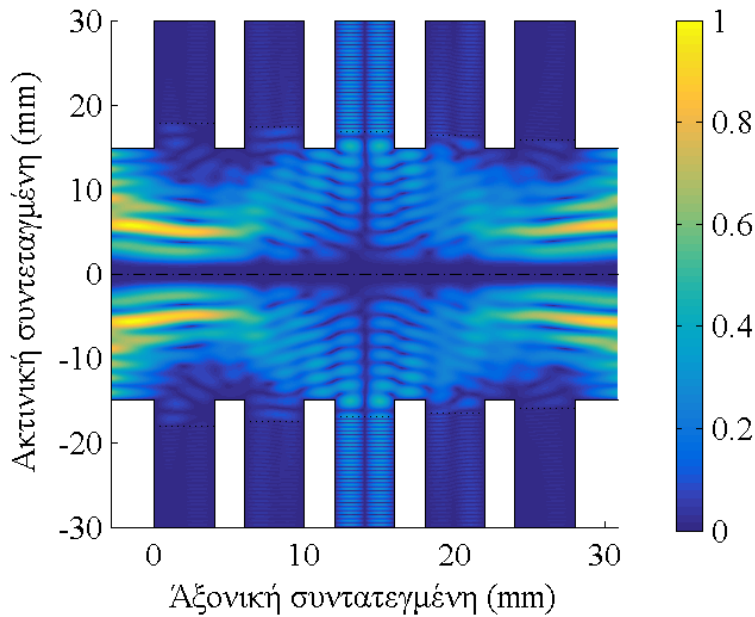
δαχτυλίδι	$r_\ell$ (mm)	$r_{d\ell}$ (mm)	$d_\ell$ (mm)	$s_\ell$ (mm)	$\varepsilon_\ell$
1	30.0	18.0	4.0	0.0	10-0.5j
2	30.0	17.5	4.0	6.0	10-0.5j
3	30.0	17.0	4.0	12.0	10-0.5j
4	30.0	16.5	4.0	18.0	10-0.5j
5	30.0	16.0	4.0	24.0	10-0.5j
$r_{in}$	15 mm				



Σχήμα 3.13: Προφίλ ρυθμού που ταλαντώνεται στο εσωτερικό της διάταξης.

παρουσιάζει συντελεστή ποιότητας  $Q = 19.6$  απεικονίζεται στο Σχήμα 3.14. Όπως φαίνεται και στο σχήμα, ο συντονισμός γίνεται στο μεσαίο δαχτυλίδι. Σε αντίθεση με το προηγούμενο είδος ρυθμών, το πεδίο μέσα στο δαχτυλίδι δεν αποσβέννεται αλλά παρουσιάζει σχετικά σταθερό πλάτος, αφού ο συντονισμός γίνεται μέσα σε αυτό. Καθώς το πεδίο μπορεί να διαφύγει από το δαχτυλίδι προς το εσωτερικό της κυλινδρικής διάταξης, το προφίλ πεδίου αφορά όλη τη γεωμετρία. Έτσι, ο ρυθμός παρουσιάζει και απώλειες περίθλασης. Ο λόγος που η ένταση του πεδίου είναι συγκρίσιμη μέσα στο δαχτυλίδι και στο εσωτερικό του κυλίνδρου, είναι η εκθετική αύξηση του πεδίου που οδεύει εξωτερικά της διάταξης και έχουμε συζητήσει στην παράγραφο 3.3.

Αν αγνοήσουμε τις απώλειες περίθλασης και υπολογίσουμε προσεγγιστικά τον συντελεστή ποιότητας όπως στην προηγούμενη ενότητα σύμφωνα με τη σχέση (3.4.2), θα βρούμε ότι  $Q = 20$ . Η τιμή αυτή είναι πολύ κοντά στην τιμή 19.6 που υπολογίστηκε με ακρίβεια από τον κώδικα και επιβεβαιώνει ότι ο ρυθμός αυτός είναι ρυθμός που συντονίζεται μέσα στο δαχτυλίδι. Οι επιπλέον απώλειες περίθλασης ρίχνουν τον συντελεστή ποιότητας κάτω από την τιμή 20 επιβεβαιώνοντας έτσι ότι



Σχήμα 3.14: Προφίλ ρυθμού που ταλαντώνεται στο εσωτερικό του μεσαίου διηλεκτρικού.

αυτές είναι πολύ μικρές σε σχέση με τις διηλεκτρικές απώλειες.

Οι ρυθμοί αυτού του είδους για διηλεκτρικά υλικά με απώλειες παρουσιάζουν χαμηλό συντελεστή ποιότητας και κακή σύζευξη με την ηλεκτρονική δέσμη. Για τους λόγους αυτούς δεν αποτελούν επικίνδυνους για παρασιτική διέγερση ρυθμούς και δεν θα τους εξετάσουμε περαιτέρω.

Ως επιπλέον έλεγχο για τον κώδικά μας, πέρα από τον τυπικό υπολογισμό του συντελεστή από τη σχέση (3.1.2), υπολογίσαμε αριθμητικά τις απώλειες περίθλασης και την αποθηκευμένη ηλεκτρομαγνητική ενέργεια και κατόπιν τον συντελεστή ποιότητας σύμφωνα με τη σχέση (3.1.3). Το αποτέλεσμα και για τους δύο ρυθμούς που εξετάσαμε είναι όμοιο και υποστηρίζει ισχυρά την ορθότητα του μοντέλου και της υλοποίησης του κώδικα.

---

## ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΤΗΣ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗΣ ΓΥΡΟΤΡΟΝΙΟΥ ΣΕ ΓΕΩΜΕΤΡΙΕΣ ΔΙΑΥΛΟΥ

---

Στο Κεφάλαιο 2 αναπτύξαμε τον φορμαλισμό για το πρόβλημα της σκέδασης από έναν εξωτερικά προσπίπτοντα ρυθμό, στη γενική γεωμετρία του διαύλου δέσμης. Στο Κεφάλαιο 3 καταργήσαμε την εξωτερική διέγερση και επιλύσαμε το πρόβλημα της εύρεσης των συντονιζόμενων ρυθμών που υποστηρίζει η διάταξη. Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τη ανάπτυξη ενός μοντέλου αλληλεπίδρασης της ηλεκτρονικής δέσμης με τους συντονιζόμενους ρυθμούς στην απλοποιημένη γεωμετρία διαύλου δέσμης. Το μοντέλο αυτό θα μας επιτρέψει να προσομοιώσουμε στον υπολογιστή και να μελετήσουμε τη διέγερση παρασιτικών ταλαντώσεων σε διαύλους δέσμης, η οποία και έχει παρατηρηθεί πειραματικά.

Για την προσομοίωση της αλληλεπίδρασης σε μια τέτοια ιδιαίτερη διάταξη λόγω της πολυπλοκότητάς της, θα υιοθετήσουμε έναν αριθμό απλοποιήσεων με την κυριότερη να είναι η προσέγγιση δεδομένου πεδίου (fixed-field approximation). Με τον τρόπο αυτό θα εκμεταλλευτούμε τα ήδη ανεπτυγμένα εργαλεία του πακέτου κωδίκων προσομοίωσης για κοιλότητες γυροτρονίων EURIDICE, το οποίο έχει αναπτυχθεί από το εργαστήριο Ηλεκτρονικής Δέσμης, Πλάσματος και μη Γραμμικής Οπτικής.

### 4.1 Απαιτήσεις για την ορθή μοντελοποίηση της αλληλεπίδρασης

Το πρόβλημα της αλληλεπίδρασης του υψίσυχνου ηλεκτρομαγνητικού πεδίου με την ηλεκτρονική δέσμη σε ένα ηλεκτροδυναμικό σύστημα περιλαμβάνει σε γενικές γραμμές τα εξής μέρη: την επίλυση των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων στη διάταξη, την εφαρμογή των κινηματικών εξισώσεων για τα ηλεκτρόνια της δέσμης υπό την επίδραση των συγκεκριμένων πεδίων και τέλος τον υπολογισμό της επίδρασης της διαταραγμένης δέσμης πάνω στα πεδία. Οι παραδοχές και απλοποιήσεις που ενδεχομένως μπορούν να εφαρμοστούν με βάση το παραπάνω γενικό πλαίσιο,

ανάλογα με τις ιδιαιτερότητες κάθε συγκεκριμένου προβλήματος και τα φαινόμενα στα οποία θέλει να εστιάσει, καθορίζουν και το τελικό σχήμα μοντελοποίησης.

Ειδικότερα για τα γυροτρόνια, η τυπική και ακριβής μοντελοποίηση της αλληλεπίδρασης δέσμης-κύματος για την αλληλεπίδραση γυροτρονίου που εφαρμόζεται κατά κόρον στους κώδικες προσομοίωσης της κοιλότητας [11], περιλαμβάνει τα εξής βήματα: Κατ' αρχάς αναπτύσσεται ο φορμαλισμός των πεδίων στην κοιλότητα. Η ανάπτυξη αυτή και οι αναλυτικές εκφράσεις των πεδίων είναι αρκετά απλές καθώς αυτές αφορούν έναν κυλινδρικό κυματοδηγό ο οποίος συνήθως περιλαμβάνει μια ήπια αξονική ανομοιογένεια στην εξωτερική ακτίνα. Η τελευταία αντιμετωπίζεται συνήθως υπό την προσέγγιση Vlasov θεωρώντας ότι για μικρές γωνίες κλίσης υποστηρίζονται ανεξάρτητοι ρυθμοί TE και TM και αγνοώντας τη μετατροπή ρυθμών (mode conversion) που συμβαίνει μεταξύ των εγκάρσιων ρυθμών. Έχει δείχτει στο [104] ότι για γωνίες κλίσης της ακτίνας μικρότερες των  $5^\circ$  η προσέγγιση Vlasov δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα. Επομένως, ακόμα και στην περίπτωση που επιδιώκεται η πολυ-ρυθμική προσομοίωση (multi-mode simulation) του γυροτρονίου και η μελέτη του φαινομένου του ανταγωνισμού των ρυθμών, ο φορμαλισμός των πεδίων είναι αρκετά απλός, καθώς γράφεται αναλυτικά σαν ένα άθροισμα ανεξάρτητων ρυθμών TE του κυλινδρικού κυματοδηγού.

Αντιθέτως, στην περίπτωση του διαύλου δέσμης, οι εκφράσεις των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων είναι ιδιαίτερα πολύπλοκες και προκύπτουν από την αριθμητική επίλυση ενός γραμμικού συστήματος. Σε αναλυτική μορφή, π.χ. η εγκάρσια συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου ενός ρυθμού, μπορεί να εκφραστεί σαν ένα άθροισμα συζευγμένων εγκάρσιων ρυθμών TE και TM του ίδιου αξιωματικού δείκτη, με γνωστή εξάρτηση ως προς  $z$  και συντελεστές σχετικού πλάτους που δίνονται από την αριθμητική επίλυση του συστήματος (βλ. εξισώσεις 2.3.2, 2.3.16). Οι πολύπλοκες αυτές σχέσεις δυσχεραίνουν τον χειρισμό των πεδριακών μεγεθών σε σχέση με τις αντίστοιχες απλούστερες σχέσεις της κοιλότητας του γυροτρονίου.

Πέρα από αυτού του είδους τις δυσκολίες, υπάρχουν και απλοποιήσεις που μπορούν να γίνουν στην περίπτωση του διαύλου δέσμης. Για παράδειγμα, φαινόμενα όπως αυτό του ανταγωνισμού των ρυθμών, δεν ενδιαφέρουν στους διαύλους δέσμης, καθώς σε αυτούς επιδιώκεται κανένας ρυθμός να μη διεγείρεται, αντίθετα με την κοιλότητα που επιδιώκεται η μονορυθμική λειτουργία με συγκεκριμένο ρυθμό. Έτσι, δεν είναι απαραίτητη η μοντελοποίηση της αλληλεπίδρασης με ταυτόχρονη θέαση ρυθμών με διαφορετικά  $m$ , μιας και αρκεί η εξέταση κάθε αξιωματικού δείκτη ξεχωριστά για να εξασφαλιστεί ότι δεν θα διεγερθεί κανένας ρυθμός. Επίσης, ένα άλλο ζήτημα στον διάυλο δέσμης είναι ότι στη γενική μορφή τους οι ρυθμοί είναι υβριδικοί και όχι ανεξάρτητοι TE ή TM. Το γεγονός ότι η αλληλεπίδραση γυροτρονίου ευνοεί ισχυρά τη σύζευξη με ρυθμούς TE, μας επιτρέπει στο κεφάλαιο 5, που θα προσομοιώσουμε πραγματικές διατάξεις διαύλων δέσμης, να θέσουμε ένα κριτήριο για τον ποσοτικό χαρακτηρισμό ενός υβριδικού ρυθμού ως περισσότερο TE ή TM χαρακτήρα. Έτσι εστιάζουμε μόνο στους υβριδικούς ρυθμούς με ισχυρό TE χαρακτήρα.

Το επόμενο βήμα είναι η αντιμετώπιση του προβλήματος της επίδρασης των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων πάνω στην κίνηση των ηλεκτρονίων. Αυτή μπορεί να μοντελοποιηθεί είτε με την κινητική θεωρία χρησιμοποιώντας τη γραμμικοποιημένη εξίσωση Vlasov για ανάλυση ασθενούς σήματος, όπως έχει γίνει στο [57] για την περίπτωση του διαύλου δέσμης, είτε με κατ' ευθείαν ολοκλήρωση των εξισώσεων κίνησης που δίνει αποτελέσματα τόσο στην περιοχή ασθενούς όσο και στην περιοχή

ισχυρού σήματος και χρησιμοποιείται ευρέως στους κώδικες προσομοίωσης και σχεδίασης κοιλότητων των γυροτρονίων [11], [71].

Για το πρόβλημα των παρασιτικών ταλαντώσεων στον δίαυλο της δέσμης, η βασικότερη ποσότητα που ενδιαφέρει είναι τα ρεύματα εκκίνησης των ρυθμών. Τα ρεύματα εκκίνησης μπορούν να εξαχθούν υπό την προσέγγιση ασθενούς σήματος, επομένως η γραμμικοποιημένη εξίσωση Vlasov αρκεί για τον υπολογισμό τους. Παρ' όλα αυτά, η δίεγερση ενός παρασιτικού ρυθμού και η παραμονή του σε χαμηλά επίπεδα ισχύος μπορεί να μη δημιουργεί προβλήματα στην κυρίως αλληλεπίδραση και εν τέλει μπορεί να είναι ανεκτή για την ομαλή λειτουργία του γυροτρονίου. Εάν στο τελικό σημείο κορεσμού της ισχύος ενός παρασιτικού ρυθμού, οι διπλεκτρικές απώλειες δεν είναι υψηλές ώστε να δημιουργούν πρόβλημα απαγωγής της θερμότητας και η διαταραχή των χαρακτηριστικών της δέσμης έχει ως συνέπεια μικρή διασπορά ταχυτήτων και ενέργειας, τότε ο παρασιτικός ρυθμός δεν δημιουργεί πρόβλημα. Επομένως, η γνώση του τελικού σημείου κορεσμού της ισχύος των παρασιτικών ρυθμών είναι σημαντική πληροφορία που μπορεί να αξιοποιηθεί πρακτικά για το πρόβλημα του διαύλου δέσμης. Για τους λόγους αυτούς στην προσέγγισή μας, προκρίνουμε την πληρέστερη μέθοδο ολοκλήρωσης των εξισώσεων κίνησης που επιτρέπει και τον υπολογισμό στη μη γραμμική περιοχή του τελικού επιπέδου ισχύος ενός παρασιτικού ρυθμού.

Εστιάζοντας λοιπόν στη μέθοδο επίλυσης των εξισώσεων κίνησης, όπως αυτή εφαρμόζεται στους κώδικες προσομοίωσης της κοιλότητας, περιγράφουμε τις απαραίτητες προσεγγίσεις. Κατ' αρχάς, οι εξισώσεις κίνησης μπορούν να ολοκληρωθούν υπό την προσέγγιση αργής χρονικής κλίμακας (slow-time-scale approximation) καθώς ο ρυθμός μεταβολής του πλάτους των πεδίων είναι πολύ μικρότερος της κυκλοτρονικής συχνότητας. Η προσέγγιση αυτή επιτρέπει την ολοκλήρωση των εξισώσεων στην αργή χρονική κλίμακα της διέλευσης των ηλεκτρονίων, αντί να ολοκληρωθούν με μικρό χρονικό βήμα, που αντιστοιχεί σε κλάσμα της κυκλοτρονικής συχνότητας. Έτσι, εξοικονομείται πολύτιμος υπολογιστικός χρόνος χωρίς να χάνεται κάποιο ουσιαστικό κομμάτι της αλληλεπίδρασης, αφού η κυκλοτρονική συχνότητα ή αντίστοιχα η υψίσυχηνη ταλάντωση του ρυθμού απλά επιβάλλουν μια επιπλέον γρήγορη ταλάντωση στην αργή χρονική κλίμακα μεταβολής των κινηματικών μεγεθών των ηλεκτρονίων κατά τη διέλευσή τους από την περιοχή αλληλεπίδρασης. Στον δίαυλο δέσμης, ακριβώς όπως συμβαίνει και στις κοιλότητες, η προσέγγιση αυτή είναι απολύτως δικαιολογημένη.

Επίσης, σημειώνουμε ότι στον δίαυλο της δέσμης δεν είναι απαραίτητη η θεώρηση της αλληλεπίδρασης δεύτερης αρμονικής. Κατά κύριο λόγο σε ένα τόσο πυκνό φάσμα ρυθμών, η αλληλεπίδραση με την πρώτη αρμονική είναι περισσότερο έντονη σε σχέση με τις πιο επιλεκτικές ανώτερες αρμονικές. Άλλωστε, οι συχνότητες των παρασιτικών ταλαντώσεων που έχουν μετρηθεί πειραματικά αντιστοιχούν πάντα στην αλληλεπίδραση με την πρώτη αρμονική της κυκλοτρονικής συχνότητας. Έτσι, απολύτως δικαιολογημένα θα περιορίσουμε το μοντέλο μας στην πρώτη αρμονική και μόνο.

Ένα επιπλέον ζήτημα στους κώδικες αλληλεπίδρασης είναι ο χειρισμός της αξονικής μεταβολής του μαγνητοστατικού πεδίου. Στις κοιλότητες του γυροτρονίου, το μαγνητοστατικό πεδίο είναι σε πολύ μεγάλο βαθμό ομογενές και ένας ακριβής χειρισμός της αξονικής μεταβολής του, δεν είναι καθόλου απαραίτητος. Αντιθέτως, στον δίαυλο της δέσμης, το μαγνητοστατικό πεδίο μεταβάλλεται κατά τον άξονα και επομένως το συγκεκριμένο χαρακτηριστικό εισάγει ένα επιπλέον

στοιχείο πολυπλοκότητας στις εξισώσεις κίνησης. Αυτού του είδους η αξονική ανομοιογένεια εισάγει αναγκαστικά μια ακτινική συνιστώσα του μαγνητοστατικού πεδίου, μεταβάλλει τη κυκλοτρονική συχνότητα κατά μήκος του άξονα, μεταβάλλει την ακτίνα της δέσμης και την ακτίνα Larmor των ηλεκτρονίων και επίσης μεταβάλλει την αξονική ταχύτητα των ηλεκτρονίων, που σε πολλές περιπτώσεις προσομοίωσης της κοιλότητας υποτίθεται σταθερή. Οι παραπάνω επιδράσεις της αξονικής μεταβολής του μαγνητοστατικού πεδίου αναλύονται λεπτομερειακά στο [11] και πολλές από αυτές συχνά μοντελοποιούνται στους αντίστοιχους κώδικες αλληλεπίδρασης. Επομένως, κάποια στοιχεία που στους κώδικες για την κοιλότητα μοντελοποιούνται ως προαιρετικά και χρησιμοποιούνται κυρίως για την προσομοίωση τυχόν παρασιτικών αλληλεπιδράσεων μετά την κοιλότητα (after-cavity interaction) στο μη-γραμμικά μεταβαλλόμενο τμήμα που ακολουθεί (non-linear up-taper), απαιτείται να συμπεριληφθούν ως απαραίτητο στοιχείο σε οποιονδήποτε κώδικα φιλοδοξεί να προσομοιώσει την αλληλεπίδραση στον διαύλο της δέσμης.

Εξετάζουμε τώρα το τελευταίο μέρος του προβλήματος αλληλεπίδρασης δέσμης-κύματος και συγκεκριμένα το πως μοντελοποιείται η επίδραση των ηλεκτρονίων στα ηλεκτρομαγνητικά πεδία. Η πλέον ακριβής και πλήρης θεώρηση είναι η αυτο-συνεπής προσομοίωση (self-consistent simulation) της αλληλεπίδρασης πεδίων-δέσμης. Στην αυτο-συνεπή θεώρηση, πέρα από τις εξισώσεις κίνησης των ηλεκτρονίων, εισάγεται μία επιπλέον εξίσωση που συζεύγει τη διαταραγμένη δέσμη με τα πεδία. Για την εξαγωγή της, η διαταραγμένη κίνηση των ηλεκτρονίων εκφράζεται ως ένας όρος πηγής ο οποίος δρα ως κεραία που ακτινοβολεί. Ο όρος αυτός πηγής επιδρά στον ρυθμό λειτουργίας της ψυχρής κοιλότητας, αλλάζοντας το πλάτος, τη φάση και το προφίλ του (πρωτίστως το αξονικό προφίλ μιας και η αλληλεπίδραση γίνεται κατά μήκος του άξονα). Η θεώρηση αυτή είναι η ακριβέστερη και περιλαμβάνει όλα τα φαινόμενα της αλληλεπίδρασης.

Παρά όλα αυτά, σε αρκετές περιπτώσεις για χάριν απλοποίησης, συγκεκριμένες προσεγγίσεις μπορούν να γίνουν. Η πιο συχνή απλοποίηση που γίνεται στους κώδικες της κοιλότητας είναι η προσέγγιση δεδομένου πεδίου (fixed-field), στην οποία το προφίλ πεδίου του ρυθμού υποτίθεται ότι δεν καθορίζεται καθόλου από την επίδραση της δέσμης αλλά μόνο από την παρουσία των τοιχωμάτων. Έτσι, η διαταραγμένη δέσμη μεταβάλλει μόνο το πλάτος και τη φάση των ρυθμών και συνεπώς η εξίσωση σύζευξης του όρου πηγής με τα πεδία απλοποιείται σημαντικά. Η προσέγγιση αυτή αν και χάνει σε ακρίβεια, είναι δικαιολογημένη για την περίπτωση της εμπρός αλληλεπίδρασης των γυροτρονίων και ιδιαίτερα για ρυθμούς με μεγάλο συντελεστή ποιότητας. Για παράδειγμα, μια τέτοια προσέγγιση έχει χρησιμοποιηθεί σε κώδικες αλληλεπίδρασης της κοιλότητας γυροτρονίου στα [11] και [105]. Αν και σε πιο απλοποιημένες εκδοχές, ως σταθερό προφίλ έχει χρησιμοποιηθεί για τους ρυθμούς ημιτονικό ή γκαουσιανό αξονικό προφίλ, η πιο συνηθισμένη και ακριβής πρακτική είναι η προσέγγιση με το προφίλ ψυχρής κοιλότητας (cold-cavity approximation).

Μια ακόμα πιο απλοποιημένη εξίσωση σύζευξης ρυθμών και ηλεκτρονίων είναι η ενεργειακή προσέγγιση, όπου υποτίθεται ότι μεταβάλλεται μόνο το πλάτος των ρυθμών. Έτσι, η ποσότητα της ενέργειας που χάνουν τα ηλεκτρόνια όταν φτάσουν στο τέλος της περιοχής αλληλεπίδρασης, γίνεται ενέργεια του ρυθμού του οποίου μεταβάλλεται αναλόγως μονάχα το πλάτος. Η τελευταία αυτή θεώρηση χάνει φαινόμενα, όπως η μικρή αλλαγή της συχνότητας του ρυθμού λόγω της αλληλεπίδρασης με τη δέσμη (frequency pulling due to beam loading).

Σε όλες τις παραπάνω μεθόδους γίνεται και μία επιπλέον προσέγγιση. Θεωρείται ότι κατά τη χρονική διάρκεια διέλευσης των ηλεκτρονίων, οι ιδιότητες των πεδίων παραμένουν σταθερές. Έτσι, οι κώδικες που βασίζονται σε αυτή την παραδοχή χαρακτηρίζονται ως τροχιακοί (trajectory) σε αντίθεση με τους πολύ περισσότερο χρονοβόρους και ακριβείς κώδικες τύπου PIC (Particle in Cell), οι οποίοι προωθούν τα ηλεκτρόνια κάθε χρονική στιγμή παράλληλα με την ανανέωση του πεδίου. Για την αλληλεπίδραση στην κοιλότητα του γυροτρονίου πράγματι ο ρυθμός μεταβολής των πεδίων είναι πολύ μικρότερος σε σχέση με τη χρονική κλίμακα διέλευσης των ηλεκτρονίων και η παραδοχή αυτή είναι απολύτως δικαιολογημένη χωρίς απώλεια σε ακρίβεια. Εξαίρεση αποτελεί η περίπτωση εμφάνισης φαινομένων δυναμικής αλληλεπίδρασης ACI (Dynamic After-Capacity Interaction) [106,107], όπου η παραδοχή αυτή παραβιάζεται λόγω εμφάνισης του διακροτήματος της διαφοράς των φερουσών συχνοτήτων μεταξύ της κύριας και της παρασιτικής ACI αλληλεπίδρασης. Στον δίαυλο δέσμης δεν αναμένονται τέτοια φαινόμενα, καθώς η δέσμη εισέρχεται χωρίς διαταραχές σε αυτόν, και επομένως ένας πολύ πιο ελαφρύς τροχιακός κώδικας είναι υπεραρκέτος για τις απαιτήσεις του προβλήματος.

## 4.2 Ανάπτυξη του μοντέλου αλληλεπίδρασης στον δίαυλο της δέσμης

Αφού αναλύσαμε τις μεθόδους με τις οποίες γίνεται η μοντελοποίηση της αλληλεπίδρασης γυροτρονίου και τις παραδοχές που τις συνοδεύουν, προχωρούμε στην ανάπτυξη ενός μοντέλου για την αλληλεπίδραση στον δίαυλο της δέσμης.

Βασική διαφορά του διαύλου της δέσμης σε σχέση με την κοιλότητα ως ηλεκτροδυναμικό σύστημα, είναι η πολυπλοκότητα των πεδίων και των εκφράσεών τους, όπως αυτές βρέθηκαν στο Κεφάλαιο 2. Λόγω των δεδομένων πεδριακών εκφράσεων, η ανάπτυξη ενός ημι-αναλυτικού μοντέλου των εξισώσεων κίνησης για τον δίαυλο της δέσμης καθίσταται εξαιρετικά δυσχερής. Επιπλέον, η ανάγκη ακριβούς χειρισμού του μεταβλητού μαγνητοστατικού πεδίου εισάγει μία επιπλέον διάσταση πολυπλοκότητας σε ένα τέτοιο ημι-αναλυτικό μοντέλο. Καθώς ένας τέτοιος πλήρης κώδικας ήταν εκτός αρχικών στόχων της διδακτορικής διατριβής και για τη γρήγορη εξαγωγή αποτελεσμάτων σχετικά με την αλληλεπίδραση στον δίαυλο της δέσμης, προτιμήσαμε μία εναλλακτική οδό.

Αντί για την εξαρχής θεωρητική και προγραμματιστική ανάπτυξη ενός νέου κώδικα αλληλεπίδρασης, θελήσαμε να εκμεταλλευτούμε την ύπαρξη και τις δυνατότητες του ήδη υπάρχοντος πακέτου κωδίκων για τη σχεδίαση και προσομοίωση κοιλοτήτων γυροτρονίων EURIDICE [11,107], το οποίο έχει αναπτυχθεί από το εργαστήριο Ηλεκτρονικής Δέσμης, Πλάσματος και μη-γραμμικής Οπτικής του ΕΜΠ. Επομένως, επιλέξαμε να αναπτύξουμε μια διεπαφή σύζευξης μεταξύ του κώδικα NESTOR και του πακέτου κωδίκων EURIDICE. Ο κώδικας NESTOR επιλύει το ηλεκτρομαγνητικό μέρος και κατόπιν τροφοδοτεί τους κώδικες του πακέτου EURIDICE, οι οποίοι αναλαμβάνουν να επιλύσουν το κινηματικό μέρος της αλληλεπίδρασης. Με τον τρόπο αυτό, επιτυγχάνεται μία πιο γρήγορη προσέγγιση στην ανάπτυξη ενός εργαλείου, το οποίο μπορεί να προσομοιώσει την αλληλεπίδραση γυροτρονίου στον δίαυλο της δέσμης.

Η ανάπτυξη μιας διεπαφής συνεργασίας μεταξύ των κωδίκων, αν και πιο γρήγορη, αναγκαστικά διέπεται από ορισμένες απλοποιήσεις. Η κυριότερη απλοποίηση που

κάνουμε και η οποία βρίσκεται στη βάση της στρατηγικής που επιλέξαμε, είναι η θεώρηση της αλληλεπίδρασης υπό την προσέγγιση δεδομένου προφίλ πεδίου (fixed-field approximation). Η απλοποίηση αυτή μας επιτρέπει να διαχωρίσουμε το ηλεκτρομαγνητικό από το κινηματικό μέρος του προβλήματος και να αναθέσουμε στους ξεχωριστούς κώδικες την επίλυσή τους. Πέρα από την ακρίβεια των τελικών αποτελεσμάτων λόγω της προσέγγισης αυτής, το σημαντικότερο μειονέκτημα είναι η αδυναμία να μελετηθεί η αλληλεπίδραση με το όπισθεν οδεύον κύμα (backward interaction). Όπως έχουμε εξηγήσει και στην ενότητα 1.3.3 η αλληλεπίδραση με το όπισθεν κύμα είναι μια αστάθεια απόλυτου τύπου (absolute instability), η οποία βασίζεται στην εσωτερική ανάδραση από την ίδια τη δέσμη και δεν βασίζεται σε εξωτερικές ανακλάσεις από το ηλεκτροδυναμικό σύστημα για την ανάπτυξή της. Για τον λόγο αυτό, προκειμένου να μελετηθεί ως φαινόμενο απαιτείται αναγκαστικά μια αυτο-συνεπής θεώρηση στην προσομοίωση της αλληλεπίδρασης [13]. Επιλέγοντας λοιπόν την προσέγγιση δεδομένου προφίλ πεδίου, περιοριζόμαστε αναγκαστικά στην εμπρός αλληλεπίδραση γυροτρονίου. Η επιλογή μας δικαιολογείται λόγω της σημαντικά αυξημένης πολυπλοκότητας που απαιτείται για την ανάπτυξη ενός αυτοσυνεπούς μοντέλου και από τα πειραματικά δεδομένα που έδειξαν πιθανότητα ύπαρξης εμπρός παρασιτικής αλληλεπίδρασης στον διάυλο της δέσμης του γυροτρονίου για το W7-X, όπως περιγράψαμε στην ενότητα 1.4.2

Σχετικά με τη σύζευξη των δύο κωδίκων στο θεωρητικό επίπεδο, αυτή δεν είναι μια ευθεία και άμεση διαδικασία. Η εγγενώς διαφορετική μορφή των εκφράσεων των πεδίων μεταξύ των δύο διαφορετικών ηλεκτροδυναμικών διατάξεων εισάγει μια αντικειμενική δυσκολία στην εύρεση ενός ορθού τρόπου σύζευξης. Επομένως, η ανάπτυξη ενός ορθού μοντέλου αλληλεπίδρασης, το οποίο βασίζεται στη σύζευξη δύο κωδίκων που δεν αναπτύχθηκαν για τον ίδιο σκοπό, απαιτεί εις βάθος γνώση του μοντέλου αλληλεπίδρασης στην κοιλότητα και δημιουργική προσπάθεια στην αντιμετώπιση των προβλημάτων που ανακύπτουν. Αναγκαστικά, θα γίνουν προσεγγίσεις κατά την ανάπτυξη του μοντέλου και ο βαθμός ισχύος τους θα συζητηθεί εκτενώς.

#### 4.2.1 Ανάπτυξη του μοντέλου αλληλεπίδρασης που βασίζεται στη σύζευξη των κωδίκων NESTOR και EURIDICE

Το πακέτο EURIDICE είναι επίσης ένας ημ-αναλυτικός κώδικας, στον οποίο οι τελικές εξισώσεις έχουν εξαχθεί σε κλειστή μορφή, προϋποθέτοντας συγκεκριμένα χαρακτηριστικά γεωμετρίας της κοιλότητας. Η έκφραση του αξιμουθιακού ηλεκτρικού πεδίου στην κοιλότητα του γυροτρονίου σύμφωνα με τον φορμαλισμό που έχει χρησιμοποιηθεί στο EURIDICE [11] είναι η εξής:

$$E_{\Phi} = V(t)f(z)k_{\perp}(z)C_{mp}J'_m(k_{\perp}(z)R)e^{-jm\Phi}e^{j\omega t}, \quad (4.2.1)$$

όπου  $V(t)$  είναι η συνάρτηση πλάτους του ρυθμού που μεταβάλλεται χρονικά πολύ πιο αργά σε σχέση με την αρμονική μεταβολή στη συχνότητα  $\omega$ ,  $f(z)$  η συνάρτηση αξονικού προφίλ πεδίου,  $k_{\perp}(z)$  ο εγκάρσιος κυματαριθμός, του οποίου η αξονική εξάρτηση προέρχεται από την ήπια ανομοιογένεια της εξωτερικής ακτίνας, και  $C_{mp}$  ένας γνωστός αναλυτικά συντελεστής κανονικοποίησης του ρυθμού. Το προφίλ πεδίου  $f(z)$  τυπικά είτε προκύπτει από τη λύση της εξίσωσης του πεδίου που περιλαμβάνει τον όρο πηγής στην αυτο-συνεπή έκδοση, είτε δίνεται εξωτερικά ως αρχείο εισόδου στην έκδοση δεδομένου προφίλ πεδίου. Στην έκδοση δεδομένου



προφίλ πεδίου της EURIDICE το αρχείο εισόδου προκύπτει από την έξοδο του κώδικα COLDCAV του πακέτου [107], ο οποίος υπολογίζει το προφίλ πεδίου της κρύας κοιλότητας (cold-cavity field profile) απουσία της δέσμης. Το αρχείο αυτό εισόδου θα χρησιμοποιήσουμε για να τροφοδοτήσουμε την έκδοση δεδομένου προφίλ πεδίου της EURIDICE με ένα ισοδύναμο πεδίο, που θα αναπαριστά τα πεδία στον δίαυλο της δέσμης και θα λαμβάνεται ως έξοδος από τον κώδικά μας NESTOR.

Στον κωδικά μας, η αντίστοιχη αξιωματική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου δίνεται από τη σχέση (2.3.1), και η οποία απλούστερα μπορεί να γραφεί ως ένα άθροισμα συζευγμένων εγκάρσιων ρυθμών:

$$E_{\Phi} = A e^{j(\omega t + m\Phi)} \left[ \sum_p \left[ C_p f_p(z) J_m(k_{\perp mp} R) + C'_p g_p(z) J'_m(k'_{\perp mp} R) \right] + C_0 f_0(z) R^{|m|} + C'_0 g_0(z) R^{|m|-1} \right], \quad (4.2.2)$$

όπου  $A$  ένας γενικός συντελεστής πλάτους,  $C_p$ ,  $C'_p$  επιμέρους συντελεστές που προκύπτουν από την αριθμητική επίλυση του συστήματος,  $f_p(z)$ ,  $g_p(z)$  συναρτήσεις αξονικού προφίλ πεδίου που μπορούν να υπολογιστούν αναλυτικά, ενώ στους  $k'_{\perp mp}$ ,  $k_{\perp mp}$  περιλαμβάνονται οι εγκάρσιοι κυματαριθμοί των ρυθμών TE και TM του λείου κυματοδηγού καθώς και οι κυματαριθμοί των δαχτυλιδιών  $k_{n\ell}^{(2)} = \sqrt{\omega^2 \epsilon_0 \mu_0 - (n\pi/d_{\ell})^2}$ .

Παρατηρούμε ότι μεταξύ των (4.2.1) και (4.2.2) υπάρχει θεμελιώδης διαφορά, καθώς ο φορμαλισμός της EURIDICE περιλαμβάνει έναν μόνο εγκάρσιο ρυθμό TE ενώ ο αντίστοιχος του NESTOR πολλούς ρυθμούς των δύο πολώσεων. Ακόμα και η χρήση της πολυρυθμικής δυνατότητας της EURIDICE, αν και αυτή δεν υποστηρίζει ρυθμούς TM, δεν θα βοηθούσε, καθώς σε αυτήν οι διαφορετικοί ρυθμοί προϋποτίθενται ανεξάρητοι, ενώ στον φορμαλισμό του NESTOR οι εγκάρσιοι ρυθμοί είναι συζευγμένοι. Επίσης, αν προσεγγίσαμε το πεδίο του NESTOR με τον κυρίαρχο εγκάρσιο ρυθμό αγνοώντας τους υπόλοιπους, θα αλλοιώναμε σημαντικά το συνολικό πεδίο και θα χάναμε την πλήρη (full-wave) περιγραφή του πεδίου στον δίαυλο της δέσμης.

Για να προσομοιώσουμε την αλληλεπίδραση στον δίαυλο της δέσμης, θα πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι η EURIDICE υπολογίζει την κίνηση των ηλεκτρονίων υπό την επίδραση των πεδίων που προέρχονται από τον κώδικα NESTOR. Αρκεί η ταύτιση των πεδίων μόνο στη θέση που βρίσκεται η ηλεκτρονική δέσμη κατά τη διέλευσή της από τον δίαυλο. Ειδικότερα, ενδιαφερόμαστε να ταιριάξουμε μεταξύ των δύο κωδίκων τις εγκάρσιες συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου, καθώς αυτές είναι οι συνιστώσες που παίζουν σημαντικό ρόλο και οδηγούν την αλληλεπίδραση γυροτρονίου [6].

Στον φορμαλισμό της EURIDICE η (4.2.1) είναι η μακροσκοπική περιγραφή της αξιωματικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στο κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων με άξονα στο κέντρο της κοιλότητας. Κατά την ανάπτυξη του μοντέλου αλληλεπίδρασης και για να καταστρωθούν οι εξισώσεις κίνησης γίνεται μεταφορά στο τοπικό κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων με άξονα που περνάει από το κέντρο περιστροφής των ηλεκτρονίων (3.1.23 του [11]). Η αλλαγή αυτή συντεταγμένων γίνεται με το θεώρημα Graf (σχέση 9.1.79 του [108]), η οποία παράγει ένα άπειρο άθροισμα συναρτήσεων Bessel. Από τις άπειρες αυτές συνιστώσες, η μία είναι μόνο σε συντονισμό με τα ηλεκτρόνια που εκτελούν κυκλοτρονική κίνηση γύρω από το κέντρο περιστροφής. Επομένως, με τη διαδικασία εφαρμογής του μέσου όρου ως προς την κυκλοτρονική κίνηση (gyro-averaging), επιβιώνει μόνο μία συνιστώσα από το άπειρο άθροισμα που δίνει το θεώρημα Graf [11]. Οι εκφράσεις

## 4.2 Ανάπτυξη του μοντέλου αλληλεπίδρασης στον δίαυλο της δέσμης

των συνιστώσων αυτών για το ακτινικό και αξιμουθιακό ηλεκτρικό πεδίο του τοπικού συστήματος συντεταγμένων, που μπορούν κατόπιν να εντοπιστούν στις τελικές εξισώσεις της EURIDICE (3.1.31-3.1.32 του [1]), είναι οι εξής:

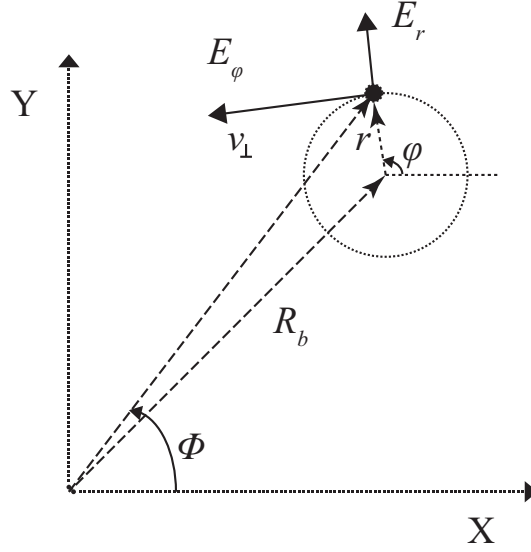
$$E_r^{(\text{res})} = V(t)f(z)\frac{j}{r}C_{mp}J_{m-1}(k_{\perp}R_b)J_1(k_{\perp}r)e^{-j\phi}e^{j\omega t}, \quad (4.2.3)$$

$$E_{\phi}^{(\text{res})} = V(t)f(z)k_{\perp}C_{mp}J_{m-1}(k_{\perp}R_b)J_1'(k_{\perp}r)e^{-j\phi}e^{j\omega t}. \quad (4.2.4)$$

Στις παραπάνω εκφράσεις,  $R_b$  είναι η ακτίνα του κέντρου περιστροφής των ηλεκτρονίων, ενώ οι συντεταγμένες  $r$  και  $\phi$  αναφέρονται στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων με άξονα που περνάει από το κέντρο περιστροφής του εκάστοτε ηλεκτρονίου. Η σύμβαση αυτή ισχύει μόνο γι' αυτό το κεφάλαιο, εν αντιθέσει με τα υπόλοιπα κεφάλαια της διατριβής, όπου με  $r$  και  $\phi$  συμβολίζονται οι συντεταγμένες του κεντρικού συστήματος με άξονα τον άξονα του κυματοδηγού. Στο κεφάλαιο αυτό οι συντεταγμένες του κεντρικού συστήματος συντεταγμένων συμβολίζονται με τα κεφαλαία  $R$  και  $\Phi$ .

Μεταξύ των  $E_{\phi}^{(\text{res})}$  και  $E_r^{(\text{res})}$  η συνιστώσα που παίζει τον σημαντικότερο ρόλο στην αλληλεπίδραση γυροτρονίου είναι η  $E_{\phi}^{(\text{res})}$ . Όπως αναλύσαμε και στην ενότητα 1.2 η  $E_{\phi}^{(\text{res})}$  ασκεί δύναμη κατά την αξιμουθιακή διεύθυνση, η οποία είναι και η διεύθυνση της ταχύτητας των ηλεκτρονίων, και επομένως, είναι αυτή η συνιστώσα που επιβραδύνοντας τα ηλεκτρόνια προκαλεί την αλληλεπίδραση γυροτρονίου. Η παραπάνω διευκρίνιση είναι σημαντική καθώς στους φορμαλισμούς των δύο κωδίκων ο λόγος  $E_{\phi}^{(\text{res})}/E_r^{(\text{res})}$  εν γένει διαφέρει και επομένως δεν μπορούμε να εξισώσουμε και τις δύο συνιστώσες ταυτόχρονα. Επιλέγουμε λοιπόν να εξισώσουμε μόνο τη συνιστώσα  $E_{\phi}^{(\text{res})}$ , καθώς αυτή είναι η σημαντική συνιστώσα που οδηγεί την αλληλεπίδραση. Η μη εξίσωση και της συνιστώσας  $E_r^{(\text{res})}$  αποτελεί μία αναγκαστική προσέγγιση, που η ισχύς της θα συζητηθεί στην επόμενη ενότητα μαζί με τις υπόλοιπες προσεγγίσεις.

Επομένως, αρκεί να εξισώσουμε τη συνιστώσα  $E_{\phi}^{(\text{res})}$  της (4.2.4) με την αντίστοιχη συνιστώσα στον δίαυλο της δέσμης. Η τελευταία μπορεί να υπολογιστεί άμεσα αριθμητικά από τις αντίστοιχες συνιστώσες  $E_{\Phi}$ ,  $E_R$  του κεντρικού συστήματος συντεταγμένων, όπως αυτές δίνονται από τις (2.3.1) και (2.3.15), αντίστοιχα. Οι αντίστοιχες πεδριακές συνιστώσες του τοπικού συστήματος συντεταγμένων συμβολίζονται εδώ με  $E_r$  και  $E_{\phi}$ . Για να υπολογίσουμε τη συνιστώσα του τοπικού συστήματος συντεταγμένων που βρίσκεται σε συντονισμό  $E_{\phi}^{(\text{NESTOR})}$ , ακολουθούμε την εξής διαδικασία: Κατ' αρχάς υπολογίζουμε την τροχιά του κέντρου περιστροφής των ηλεκτρονίων από τις εξισώσεις αδιαβατικής συμπίεσης της δέσμης. Έπειτα, γύρω από το κέντρο περιστροφής και σε απόσταση μιας ακτίνας Larmor από αυτό, κάνουμε δειγματοληψία για κάθε αξονική θέση στις πεδριακές συνιστώσες του εγκάρσιου ηλεκτρικού πεδίου  $E_{\Phi}$  και  $E_R$ . Έπειτα, χρησιμοποιούμε τις συνιστώσες αυτές  $E_{\Phi}^{(\text{sampld})}(\phi, z)$  και  $E_R^{(\text{sampld})}(\phi, z)$  για να εκφράσουμε την  $E_{\phi}$  του τοπικού συστήματος συντεταγμένων σύμφωνα με τις τριγωνομετρικές σχέσεις που προκύπτουν από το Σχήμα 4.1. Τέλος, για να πάρουμε την συνιστώσα που βρίσκεται σε συντονισμό  $E_{\phi}^{(\text{NESTOR})}$ , παίρνουμε τη συνιστώσα της σειράς Fourier που αντιστοιχεί στην πρώτη αρμονική της κυκλοτρονικής κίνησης. Η παραπάνω



Σχήμα 4.1: Κυκλοτρονική κίνηση ηλεκτρονίων και τοπικό σύστημα συντεταγμένων.

διαδικασία εκφράζεται σύμφωνα με τη σχέση:

$$E_{\phi}^{(\text{NESTOR})}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ E_{\Phi}^{(\text{samplerd})}(\phi, z) \cos [\Phi(\phi) - \phi] + E_R^{(\text{samplerd})}(\phi, z) \sin [\Phi(\phi) - \phi] \right] e^{j\phi} d\phi. \quad (4.2.5)$$

Ο αριθμητικός υπολογισμός της συνιστώσας του τοπικού συστήματος συντεταγμένων που βρίσκεται στον συντονισμό, αν και αξιόπιστος, αποδείχθηκε αρκετά απαιτητικός σε υπολογιστικό χρόνο. Για το λόγο αυτό, προχωράμε στον αναλυτικό υπολογισμό αυτής της συνιστώσας. Αυτό γίνεται δυνατό αν εκφράσουμε τις αρχικές εκφράσεις των δυναμικών Hertz σύμφωνα με το θεώρημα Graf, στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων. Το θεώρημα Graf στη γενική του μορφή γράφεται ως εξής:

$$J_m(k_{\perp} R) e^{\pm jm\Phi} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_{m-s}(k_{\perp} R_b) J_s(k_{\perp} r) e^{\pm js\phi} e^{\pm j(m-s)\Phi_0}. \quad (4.2.6)$$

Στην περίπτωση μας που έχουμε εξάρτηση της μορφής  $e^{+jm\Phi}$ , η συνιστώσα που βρίσκεται σε συντονισμό με την κυκλοτρονική κίνηση των ηλεκτρονίων, είναι αυτή για  $s = -1$ . Επίσης, η γωνία  $\Phi_0$  του κέντρου περιστροφής του ηλεκτρονίου δεν παίζει κάποιο ρόλο και χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι εξετάζουμε τα ηλεκτρόνια με  $\Phi_0 = 0$ . Με βάση τα παραπάνω, οι εκφράσεις της συνιστώσας των δυναμικών Hertz του τοπικού συστήματος συντεταγμένων που βρίσκεται στο συντονισμό είναι οι εξής:

$$\mathbf{\Pi}_e = -\hat{z} \int_{-\infty}^{+\infty} A_e(\zeta) J_{m+1}(k_{\perp} R_b) J_1(k_{\perp} r) e^{-j\phi} e^{j\zeta z} d\zeta, \quad (4.2.7\alpha)$$

$$\mathbf{\Pi}_m = -\hat{z} \int_{-\infty}^{+\infty} A_h(\zeta) J_{m+1}(k_{\perp} R_b) J_1(k_{\perp} r) e^{-j\phi} e^{j\zeta z} d\zeta. \quad (4.2.7\beta)$$

Από τις παραπάνω εκφράσεις μπορεί να υπολογιστεί άμεσα η αζιμουθιακή συνιστώσα του τοπικού συστήματος συντεταγμένων που βρίσκεται στον συντονισμό σύμφωνα με τη σχέση:

$$E_{\phi}^{(\text{NESTOR})}(z) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial \phi \partial z} + j\omega\mu \frac{\partial \Pi_m}{\partial r}, \quad (4.2.8)$$

όπου υπενθυμίζουμε ότι σε αυτό το κεφάλαιο τα  $r$  και  $\phi$  αναφέρονται στις κυλινδρικές συντεταγμένες του τοπικού συστήματος συντεταγμένων. Από τις (4.2.8) και (4.2.7) έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} E_{\phi}^{(\text{NESTOR})}(z) = & \sum_{\ell=1}^L \sum_{n=0}^{\infty} -P_{n\ell}^{(2)}(k_n r_{\text{in}}) k_n^2 e^{-j\phi} \frac{1}{r} \frac{\partial I_5^{(\text{res})}}{\partial z} \\ & + \sum_{\ell=1}^L \sum_{n=0}^{\infty} -j \frac{m}{r_{\text{in}}} P_{n\ell}^{(2)}(k_n r_{\text{in}}) e^{-j\phi} \left[ k_n^2 \frac{\partial I_6^{(\text{res})}}{\partial r} - \left( \frac{n\pi}{d_{\ell}} \right)^2 \frac{\partial I_7^{(\text{res})}}{\partial r} \right] \\ & + \sum_{\ell=1}^L \sum_{n=1}^{\infty} -j\omega\mu_0 e^{-j\phi} \frac{n\pi}{d_{\ell}} k_n \ell Q_{n\ell}'^{(2)}(k_n r_{\text{in}}) \frac{\partial I_7^{(\text{res})}}{\partial r}. \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

Τα ολοκληρώματα  $I_5^{(\text{res})}$ ,  $I_6^{(\text{res})}$ ,  $I_7^{(\text{res})}$  ορίζονται ως εξής:

$$I_5^{(\text{res})} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\zeta J_{m+1}(k_{\perp} R_b) J_1(k_{\perp} r)}{k_{\perp}^2 J_m(k_{\perp} r_{\text{in}})} \frac{e^{j\zeta(z-s_{\ell})} - (-1)^n e^{j\zeta(z-s_{\ell}-d_{\ell})}}{(n\pi/d_{\ell})^2 - \zeta^2} d\zeta, \quad (4.2.10)$$

$$I_6^{(\text{res})} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\zeta^2 J_{m+1}(k_{\perp} R_b) J_1(k_{\perp} r)}{k_{\perp}^3 J_m'(k_{\perp} r_{\text{in}})} \frac{e^{j\zeta(z-s_{\ell})} - (-1)^n e^{j\zeta(z-s_{\ell}-d_{\ell})}}{(n\pi/d_{\ell})^2 - \zeta^2} d\zeta, \quad (4.2.11)$$

$$I_7^{(\text{res})} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J_{m+1}(k_{\perp} R_b) J_1(k_{\perp} r)}{k_{\perp} J_m'(k_{\perp} r_{\text{in}})} \frac{e^{j\zeta(z-s_{\ell})} - (-1)^n e^{j\zeta(z-s_{\ell}-d_{\ell})}}{(n\pi/d_{\ell})^2 - \zeta^2} d\zeta. \quad (4.2.12)$$

Με τη γνωστή διαδικασία ολοκλήρωσης στο μιγαδικό επίπεδο τα ολοκληρώματα παίρνουν τις παρακάτω αναλυτικές εκφράσεις:

$$I_5^{(\text{res})} = \begin{cases} \sum_p j \frac{J_{m+1}\left(\frac{\chi_{mp} R_b}{r_{\text{in}}}\right) J_1\left(\frac{\chi_{mp} r}{r_{\text{in}}}\right) - \text{sgn}(z-s_{\ell}) e^{-j\chi_{mp}|z-s_{\ell}|} + \text{sgn}(z-s_{\ell}-d_{\ell}) (-1)^n e^{-j\chi_{mp}|z-s_{\ell}-d_{\ell}|}}{J_m'(\chi_{mp}) \chi_{mp} (n\pi/d_{\ell})^2 - \chi_{mp}^2} \\ + u(-m) \frac{j}{2} |m| R_b^{|m-1|} r \frac{\text{sgn}(z-s_{\ell}-d_{\ell}) (-1)^n e^{-j\lambda_0|z-s_{\ell}-d_{\ell}|} - \text{sgn}(z-s_{\ell}) e^{-j\lambda_0|z-s_{\ell}|}}{(n\pi/d_{\ell})^2 - \lambda_0^2}, -\infty < z < \infty, \\ -\frac{j}{2} \frac{J_{m+1}(k_n R_b) J_1(k_n r)}{k_n^2 J_m(k_n r_{\text{in}})} \left[ \cos\left[\frac{n\pi}{d_{\ell}}(z-s_{\ell})\right] + (-1)^n \cos\left[\frac{n\pi}{d_{\ell}}(z-s_{\ell}-d_{\ell})\right] \right], s_{\ell} < z < s_{\ell} + d_{\ell}, \end{cases} \quad (4.2.13)$$

$$I_6^{(\text{res})} = \begin{cases} \sum_p j \frac{J_{m+1}\left(\chi_{mp} \frac{R_b}{r_{\text{in}}}\right) J_1\left(\chi_{mp} \frac{r}{r_{\text{in}}}\right) \zeta_{mp}' r_{\text{in}} e^{-j\zeta_{mp}'|z-s_{\ell}|} - (-1)^n e^{-j\zeta_{mp}'|z-s_{\ell}-d_{\ell}|}}{J_m''(\chi_{mp}) \chi_{mp}^2 (n\pi/d_{\ell})^2 - \zeta_{mp}'^2} \\ - u(-m) \frac{j\lambda_0}{2} \left(\frac{R_b}{r_{\text{in}}}\right)^{|m-1|} r \frac{e^{-j\lambda_0|z-s_{\ell}|} - (-1)^n e^{-j\lambda_0|z-s_{\ell}-d_{\ell}|}}{(n\pi/d_{\ell})^2 - \lambda_0^2}, -\infty < z < \infty, \\ + \frac{n\pi}{2} \frac{J_{m+1}(k_n R_b) J_1(k_n r)}{d_{\ell} k_n^3 J_m'(k_n r_{\text{in}})} \left[ \sin\left[\frac{n\pi}{d_{\ell}}(z-s_{\ell})\right] + (-1)^n \sin\left[\frac{n\pi}{d_{\ell}}(z-s_{\ell}-d_{\ell})\right] \right], s_{\ell} < z < s_{\ell} + d_{\ell}, \end{cases} \quad (4.2.14)$$

$$I_7^{(\text{res})} = \begin{cases} \sum_p j \frac{J_{m+1}\left(\chi'_{mp} \frac{R_b}{r_{\text{in}}}\right) J_1\left(\chi'_{mp} \frac{r}{r_{\text{in}}}\right) e^{-j\zeta'_{mp}|z-s_\ell|} - (-1)^n e^{-j\zeta'_{mp}|z-s_\ell-d_\ell|}}{\zeta'_{mp} J_m''(\chi'_{mp}) r_{\text{in}} (n\pi/d_\ell)^2 - \zeta'_{mp}}, & -\infty < z < \infty, \\ + \frac{J_{m+1}(k_n R_b) J_1(k_n r)}{k_n J_m'(k_n r_{\text{in}}) 2n\pi} d_\ell \left[ \sin\left[\frac{n\pi}{d_\ell}(z-s_\ell)\right] + (-1)^n \sin\left[\frac{n\pi}{d_\ell}(z-s_\ell-d_\ell)\right] \right], & s_\ell < z < s_\ell + d_\ell. \end{cases} \quad (4.2.15)$$

Οι παραπάνω αναλυτικές σχέσεις επιβεβαιώνονται και από την αριθμητική διαδικασία που περιγράφεται στη σχέση (4.2.5). Παρόμοια, μπορούν εύκολα να βρεθούν και οι αναλυτικές εκφράσεις της συνιστώσας του τοπικού συστήματος συντεταγμένων  $E_r^{(\text{NESTOR})}(z)$  που βρίσκεται στον συντονισμό.

Έχοντας υπολογίσει είτε αριθμητικά είτε αναλυτικά στον διάυλο της δέσμης τη συνιστώσα που βρίσκεται σε συντονισμό  $E_\phi^{(\text{NESTOR})}(z)$ , δεν μας μένει παρά να την εξισώσουμε με την αντίστοιχη  $E_\phi^{(\text{res})}$  της EURIDICE, η οποία δίνεται από την (4.2.4). Για να το πετύχουμε αυτό, θεωρούμε μια απλή κοιλότητα με σταθερή ακτίνα  $r_{\text{in}}$  και έναν τυχαίο εγκάρσιο ρυθμό της EURIDICE, όπου τυπικά επιλέγουμε τον πρώτο ρυθμό για δεδομένο  $m$ . Έτσι, υπολογίζουμε το ισοδύναμο αξονικό προφίλ πεδίου σύμφωνα με τη σχέση:

$$V(t)f(z) = \frac{E_\phi^{(\text{NESTOR})}(z)}{k_\perp C_{mp} J_{m-1}(k_\perp R_b(z)) J_1'(k_\perp r_\perp(z))}. \quad (4.2.16)$$

Στη συνέχεια κανονικοποιούμε την  $f(z)$  στη μονάδα και έτσι βρίσκουμε το αντίστοιχο πλάτους του πεδίου  $V(t)$  της EURIDICE. Επομένως, το ισοδύναμο προφίλ πεδίου  $f(z)$  που υπολογίσαμε από τα πεδία του NESTOR μπορεί πλέον να τροφοδοτηθεί στην EURIDICE για την προσομοίωση της αλληλεπίδρασης. Με την παραπάνω διαδικασία έχουμε εξασφαλίσει μεταξύ των δύο φορμαλισμών την ισότητα της συνιστώσας που βρίσκεται σε συντονισμό και προκαλεί την αλληλεπίδραση γυροτρονίου. Με τον τρόπο αυτό, έχουμε πετύχει τα ηλεκτρόνια σε ό,τι αφορά την αλληλεπίδραση γυροτρονίου να αντιλαμβάνονται τα ίδια πεδία στις δύο αυτές τελείως διαφορετικές ηλεκτροδυναμικές διατάξεις. Σημειώνουμε επίσης, ότι η μεταβολή της ακτίνας της δέσμης και της ακτίνας Larmor λόγω του μεταβαλλόμενου μαγνητοστατικού πεδίου κατά μήκος του άξονα, έχει συμπεριληφθεί στο μοντέλο αλληλεπίδρασης, καθώς η δειγματοληψία γίνεται πάνω στη μεταβαλλόμενη τροχιά, που υπολογίζεται από την αδιαβατική συμπίεση της δέσμης.

Έχοντας πλέον εξασφαλίσει ότι τα ηλεκτρόνια αισθάνονται στην περιοχή της δέσμης τις ίδιες συντονιζόμενες συνιστώσες πεδίου για τα δύο διαφορετικά ηλεκτροδυναμικά συστήματα, έχουμε καλύψει μόνο τον μισό δρόμο για την ορθή μοντελοποίηση της αλληλεπίδρασης. Ο λόγος είναι ότι η μακροσκοπική συμπεριφορά των δύο ρυθμών (του πραγματικού απο τον NESTOR και του ισοδύναμου της EURIDICE) μακριά από τη δέσμη, είναι διαφορετική μεταξύ των δύο φορμαλισμών. Αν και η ίδια ποσότητα ισχύος αντλείται από την ηλεκτρονική δέσμη, η τελευταία ενισχύει τους ρυθμούς σε διαφορετικό βαθμό μεταξύ των δύο περιπτώσεων. Επομένως, προκειμένου να εξισώσουμε ομοίως και την μακροσκοπική συμπεριφορά των ρυθμών, καταφεύγουμε στην παρακάτω διαδικασία.

Κατ' αρχάς, γράφουμε τη γενική εξίσωση του ισοζυγίου της ισχύος για την

αλληλεπίδραση της δέσμης με έναν συντονιζόμενο ρυθμό (7.18 του [2]):

$$\frac{dW_{em}}{dt} = -\frac{\omega}{Q}W_{em} + \eta_{el}V_bI_b. \quad (4.2.17)$$

Για το πρόβλημα των παρασιτικών ταλαντώσεων στον δίαυλο της δέσμης, δύο είναι οι ποσότητες που ενδιαφέρουν στην πράξη. Κυρίως, ενδιαφέρει το ρεύμα εκκίνησης των παρασιτικών ρυθμών και δευτερευόντος ενδιαφέρει το τελικό επίπεδο ισχύος που θα φτάσει η αλληλεπίδραση. Και στις δύο περιπτώσεις, ο όρος  $\frac{dW_{em}}{dt}$  είναι μηδέν, είτε γιατί ο υπολογισμός του ρεύματος εκκίνησης αφορά την κατάσταση που η ισχύς, η οποία αντλείται από τη δέσμη, αρκεί να καλύπτει οριακά τις απώλειες του ηλεκτροδυναμικού συστήματος, είτε γιατί το τελικό επίπεδο ισχύος του ρυθμού αφορά τη μόνιμη κατάσταση λειτουργίας. Καθώς τα πεδία που είναι συζευγμένα με την ηλεκτρονική δέσμη έχουν εξισωθεί για τα δύο διαφορετικά ηλεκτροδυναμικά συστήματα, ο όρος  $\eta_{el}V_bI_b$ , που είναι η μετατρεπόμενη ισχύς από τη δέσμη, είναι ίδιος και για τις δύο περιπτώσεις. Για να εξισώσουμε επομένως και τη μακροσκοπική συμπεριφορά μεταξύ των δύο κωδίκων, δεν τροφοδοτούμε την EURIDICE απ' ευθείας με τον συντελεστή ποιότητας  $Q_{NESTOR}$  που βρίσκουμε από τον κώδικα NESTOR. Υπολογίζουμε έναν ισοδύναμο συντελεστή ποιότητας  $Q_{EQUIV}$  σύμφωνα με τη σχέση:

$$Q_{EQUIV} = Q_{NESTOR} \frac{W_{emEURIDICE}}{W_{emNESTOR}}, \quad (4.2.18)$$

και με τον οποίο τροφοδοτούμε την EURIDICE. Η αποθηκευμένη ηλεκτρομαγνητική ενέργεια  $W_{emEURIDICE}$  του ισοδύναμου ρυθμού της EURIDICE μπορεί να υπολογιστεί άμεσα αναλυτικά από τη σχέση (2.2.32) του [11], ενώ η αντίστοιχη ποσότητα του NESTOR μπορεί να υπολογιστεί αριθμητικά από τη σχέση (3.4.1). Πλέον, όπως φαίνεται αν εισάγουμε την (4.2.18) στην (4.2.17) χωρίς τον μεταβατικό όρο του αριστερού μέλους, οι δύο όροι είναι όμοιοι στα δύο ηλεκτροδυναμικά συστήματα και η ανάπτυξη του μοντέλου ολοκληρώνεται. Προφανώς, λόγω της τελευταίας αυτής παρέμβασης, οι χρόνοι αύξησης (rise-time) των ρυθμών που διεγείρονται, όπως προσομοιώνονται από την EURIDICE, δεν αντιστοιχούν στους πραγματικούς χρόνους αύξησης των ρυθμών στον δίαυλο της δέσμης. Αλλά ο χρόνος αύξησης είναι ένα δευτερεύον χαρακτηριστικό που δεν ενδιαφέρει καθόλου στην περίπτωση του προβλήματος της παρασιτικής διέγερσης στον δίαυλο της δέσμης.

Έχουμε λοιπόν αναπτύξει ένα μοντέλο αλληλεπίδρασης, το οποίο στηρίζεται σε ένα σχήμα σύζευξης του κωδικά μας με το πακέτο προσομοίωσης της κοιλότητας του γυροτρονίου EURIDICE, που θα μας επιτρέψει να προσομοιώσουμε άμεσα την εμπρός αλληλεπίδραση γυροτρονίου στον δίαυλο της δέσμης, χωρίς να καταφύγουμε στη χρονοβόρα και με αναπάνταχες δυσκολίες από το μηδέν ανάπτυξη ενός αντίστοιχου κωδικά για τον δίαυλο της δέσμης. Το σχήμα σύζευξης αυτό, μας επιτρέπει να εκμεταλλευτούμε τις δυνατότητες του πακέτου EURIDICE, όπως τον κώδικα υπολογισμού των ρευμάτων εκκίνησης ISTART και την έκδοση δεδομένου προφίλ πεδίου του χρονικά μεταβαλλόμενου (time-dependent), μη γραμμικού κωδικά αλληλεπίδρασης Enridiki. Φυσικά, μια τέτοια προσέγγιση εμπεριέχει αναγκαστικά κάποιες απλοποιήσεις, τις οποίες και θα συζητήσουμε αναλυτικά στην επόμενη ενότητα.

#### 4.2.2 Προσεγγίσεις του μοντέλου αλληλεπίδρασης που βασίζεται στη σύζευξη των κωδίκων NESTOR-EURIDICE

Στην ενότητα αυτή συγκεντρώνουμε και συζητάμε αναλυτικά τις απλοποιήσεις που έγιναν κατά την ανάπτυξη του μοντέλου αλληλεπίδρασης. Μιας και δεν υπάρχουν αντίστοιχοι κώδικες για τον δίαυλο της δέσμης, που θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για άμεση σύγκριση των αποτελεσμάτων, επιχειρούμε με μια ποιοτική προσέγγιση να προσδιορίσουμε τα όρια ισχύος του σχήματος σύζευξης των κωδίκων NESTOR-EURIDICE, που αναπτύξαμε.

##### Προσομοίωση με την προσέγγιση δεδομένου προφίλ πεδίου.

Όπως έχουμε ήδη συζητήσει, η σημαντικότερη και αναπόφευκτη απλοποίηση αφορά την προσέγγιση δεδομένου πεδίου (fixed-field), η οποία διαχωρίζει το ηλεκτρομαγνητικό και το κινηματικό πρόβλημα και μας επιτρέπει να τα αντιμετωπίσουμε με ξεχωριστούς κώδικες. Η σημαντικότερη συνέπεια αυτής της προσέγγισης είναι ότι δεν μπορούμε να πούμε τίποτα για την πίσω αλληλεπίδραση (backward interaction), η οποία απαιτεί μια αυτο-συνεπή μοντελοποίηση για να προσομοιωθεί ορθά. Για τον ίδιο λόγο, μιας και τα προφίλ πεδίου περιέχουν τόσο οδεύουσες προς τα μπροστά όσο και προς τα πίσω κυματικές συνιστώσες, πρέπει να ελέγχουμε για ισχυρές αλληλεπιδράσεις που τυχόν θα βρεθούν, ότι ο συντονισμός δεν αφορά οδεύουσες προς τα πίσω συνιστώσες του κύματος. Ο έλεγχος αυτός μπορεί πρακτικά να γίνει με αναφορά στο Σχήμα 1.3(ii), συγκρίνοντας τη κυκλοτρονική συχνότητα στην περιοχή της αλληλεπίδρασης με τη συχνότητα του κύματος. Εάν η κυκλοτρονική συχνότητα είναι μεγαλύτερη της συχνότητας του ρυθμού στην περιοχή της αλληλεπίδρασης, τότε πρόκειται για αλληλεπίδραση με συνιστώσα του κύματος που οδεύει προς τα πίσω και επομένως αποτελέσματα από τέτοιου είδους αλληλεπίδραση δεν λαμβάνονται υπ' όψιν. Έτσι, περιοριζόμαστε αναγκαστικά στην εμπρός αλληλεπίδραση γυροτρονίου. Αν και όπως παρουσιάσαμε στην ενότητα 1.4.2, η πίσω αλληλεπίδραση έχει ταυτοποιηθεί στον δίαυλο της δέσμης σε πραγματικά πειράματα γυροτρονίου, ενδείξεις υπάρχουν και για την ύπαρξη της εμπρός αλληλεπίδρασης και σε αυτήν θα εστιάσουμε. Στην 7.2.2 θα εξετάσουμε πως με βάση το ηλεκτρομαγνητικό μοντέλο του διαύλου δέσμης, που αναπτύχθηκε στην παρούσα διδακτορική διατριβή, μπορεί να μοντελοποιηθεί αυτοσυνεπώς η αλληλεπίδραση με σκοπό την μελλοντική μελέτη των παρασιτικών ταλαντώσεων, οι οποίες οφείλονται στην πίσω αλληλεπίδραση.

Ένα δεύτερο μειονέκτημα της προσέγγισης δεδομένου πεδίου, αφορά την απώλεια ακρίβειας ακόμα και στην περίπτωση της εμπρός αλληλεπίδρασης. Στην πραγματικότητα, η ηλεκτρονική δέσμη μεταβάλλει το σχήμα του προφίλ πεδίου και για την εμπρός αλληλεπίδραση του γυροτρονίου. Η μεταβολή αυτή στις προσομοιώσεις για την κοιλότητα έχει βρεθεί ότι είναι σχετικά μικρή, αν και στα αποτελέσματα σχετικά με την κοιλότητα η απώλεια ακρίβειας μπορεί να είναι υπολογίσιμη για τις πρακτικές εφαρμογές ενδιαφέροντος. Μια αντίστοιχη απώλεια ακρίβειας στον δίαυλο της δέσμης δεν είναι σημαντική για τα αποτελέσματα, καθώς στην παρούσα φάση ενδιαφέρει κυρίως μια εκτίμηση των ρευμάτων εκκίνησης. Όμως, ενώ οι ρυθμοί της κοιλότητας έχουν συντελεστές ποιότητας τάξης 1000, όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο για την περίπτωση πραγματικών διαύλων δέσμης, οι τιμές για τα  $Q$  των ασταθών ρυθμών μπορεί να είναι από 100 έως 400. Μικρότερος συντελεστής ποιότητας σημαίνει λιγότερο σταθερό προφίλ πεδίου του

ρυθμού, το οποίο μπορεί να επηρεαστεί σε μεγαλύτερο βαθμό από την ηλεκτρονική δέσμη. Επομένως, ενδέχεται με μικρή όμως πιθανότητα, η προσέγγιση δεδομένου πεδίου για τις χαμηλές αυτές τιμές των  $Q$  να εισάγει ικανή απώλεια ακρίβειας για τις απαιτήσεις του διαύλου δέσμης. Δυστυχώς, για να αποφανθούμε σχετικά με το ζήτημα αυτό, απαιτείται άμεση σύγκριση του σχήματος δεδομένου πεδίου με αυτο-συνεπή κώδικα που προσομοιώνει τον διάυλο δέσμης. Τέτοιος κώδικας δεν υπάρχει και επομένως αναγκαστικά θεωρούμε ότι η απώλεια ακρίβειας αυτή, που αφορά τους συντονιζόμενους ρυθμούς με χαμηλό  $Q$  στον διάυλο της δέσμης, είναι σχετικά μικρή, εκτίμηση που είναι και η πιθανότερη.

### **Εξίσωση μεταξύ των κωδίκων μόνο της τοπικής αξιωματικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου που βρίσκεται στον συντονισμό.**

Όπως περιγράψαμε κατά τη διαδικασία ανάπτυξης του μοντέλου αλληλεπίδρασης, επιλέξαμε να εξισώσουμε μεταξύ των δύο κωδίκων μόνο την αξιωματική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων, καθώς λόγω διαφορετικής δομής των πεδίων δεν είναι δυνατό να είναι ίσες πάνω από μία συνιστώσες ταυτόχρονα. Θα εξετάσουμε τώρα κατά πόσο χάνουμε σε ακρίβεια από τη μη ταύτιση των υπόλοιπων συνιστωσών του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.

Κατ' αρχάς, σημειώνουμε ότι, καθώς στην EURIDICE μοντελοποιούνται μόνο ρυθμοί TE, αναγκαστικά αγνοείται πλήρως η αξονική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου  $E_z$ , που υπάρχει στον διάυλο της δέσμης για τους υβριδικούς ρυθμούς όταν  $m \neq 0$ . Η συγκεκριμένη αξονική συνιστώσα δεν επηρεάζει καθόλου την αλληλεπίδραση γυροτρονίου. Αυτό συμβαίνει, γιατί η  $E_z$  συνιστώσα βρίσκεται εκτός συντονισμού με την κυκλοτρονική κίνηση των ηλεκτρονίων, η οποία πραγματοποιείται στο εγκάρσιο επίπεδο. Καθότι δεν ενδιαφερόμαστε για άλλου είδους αστάθειες, όπως η ακτινοβολία Cerenkov, οι οποίες βασίζονται στην αξονική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου κατά μήκος της κίνησης, και οι οποίες δεν αναμένονται να εμφανιστούν στον διάυλο του γυροτρονίου, είναι ασφαλές να αγνοήσουμε την αξονική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου  $E_z$ .

Σχετικά τώρα με το υψίσυχο μαγνητικό πεδίο των ρυθμών, ισχύουν οι εξής παρατηρήσεις: Σε ό,τι αφορά τις εγκάρσιες συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου, είναι συνηθισμένη πρακτική να αγνοούνται στους κώδικες προσομοίωσης της αλληλεπίδρασης γυροτρονίου. Αυτό συμβαίνει γιατί για τους ρυθμούς που είναι κοντά στην αποκοπή, οι οποίοι είναι και οι υποψήφιοι για παρασιτική διέγερση, μιας και παρουσιάζουν υψηλότερα  $Q$ , προκύπτει ότι παίζουν αμελητέο ρόλο στην αλληλεπίδραση [11]. Ομοίως, αγνοούνται και στο πακέτο EURIDICE. Η αξονική συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου έχει κάποια επίδραση στην αλληλεπίδραση γυροτρονίου, η οποία όμως μπορεί να αγνοηθεί με ασφάλεια για μικρές τιμές της εγκάρσιας σχετικιστικής ορμής  $u_{\perp}$  [11]. Η συγκεκριμένη προσέγγιση γίνεται συχνά στις τυπικές προσομοιώσεις γυροτρονίου όταν αυτό δεν είναι υψηλής τάσης (>250 kV). Για τις προσομοιώσεις του διαύλου δέσμης η  $u_{\perp}$  είναι ακόμα πιο μικρή από τις τιμές που παίρνει στην κοιλότητα και επομένως αγνοούμε την αξονική αυτή συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου με ασφάλεια, επιλέγοντας τη σχετική παράμετρο της EURIDICE, η οποία απενεργοποιεί τη συνιστώσα  $H_z$ .

Αναλύουμε τώρα την επίδραση της μη ορθής εξίσωσης της ακτινικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων που βρίσκεται σε



συντονισμό με τα ηλεκτρόνια  $E_r^{(\text{res})}$ . Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, η συνιστώσα  $E_\phi^{(\text{res})}$  είναι αυτή που δρα στην αξιμουθιακή κατεύθυνση και επιβραδύνει τα ηλεκτρόνια μεταβάλλοντας τον σχετικιστικό παράγοντα  $\gamma$  και συνεπώς την κυκλοτρονική συχνότητα. Αντιθέτως, η  $E_r^{(\text{res})}$ , όπως φαίνεται στην εξίσωση (3.1.32) του [11] επιδρά μονάχα στην αργή μεταβλητή φάσης. Η τελευταία όμως καθορίζεται κυρίως από τη μεταβολή της σχετικιστικής κυκλοτρονικής συχνότητας, η οποία προκαλεί τον μηχανισμό ομαδοποίησης και κατ' επέκταση την αλληλεπίδραση γυροτρονίου. Επομένως, ο ρόλος της  $E_r^{(\text{res})}$  συνιστώσας, αν και επηρεάζει την αλληλεπίδραση, είναι δευτερεύων και μη απαραίτητος για την αλληλεπίδραση γυροτρονίου.

Στη συνέχεια επιχειρηματολογούμε ότι παρ' όλο που ο λόγος  $E_\phi^{(\text{res})}/E_r^{(\text{res})}$  στους δύο φορμαλισμούς φαίνεται να διαφέρει, στην πραγματικότητα είναι αρκετά κοντά και επομένως εξισώνοντας τη σημαντική συνιστώσα  $E_\phi^{(\text{res})}$  εξισώνουμε με πολύ καλή προσέγγιση και τη δευτερεύουσα συνιστώσα  $E_r^{(\text{res})}$ . Πράγματι για τον φορμαλισμό της EURIDICE από τις (4.2.3)-(4.2.4) έχουμε:

$$\frac{E_\phi^{(\text{res})}}{E_r^{(\text{res})}} = \frac{J_1'(k_{\perp mp} r)}{\frac{j}{k_{\perp mp} r} J_1(k_{\perp mp} r)} = \frac{\frac{1}{2} [J_0(k_{\perp mp} r) + J_2(k_{\perp mp} r)]}{\frac{j}{k_{\perp mp} r} J_1(k_{\perp mp} r)} \simeq -j \left[ 1 - \frac{1}{8} (k_{\perp mp} r)^2 \right], \quad (4.2.19)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η προσέγγιση μικρού ορίσματος για τις συναρτήσεις Bessel (9.1.7) του [108]:

$$J_m(k_{\perp mp} r) \sim \frac{1}{2^m m!} (k_{\perp mp} r)^m, \quad \text{για } k_{\perp mp} r \rightarrow 0. \quad (4.2.20)$$

Η παραπάνω ασυμπτωτική σχέση μπορεί να χρησιμοποιηθεί, καθώς στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων η ακτίνα  $r$  είναι ίση με την ακτίνα Larmor της κυκλοτρονικής κίνησης των ηλεκτρονίων. Επομένως, για εγκάρσιους ρυθμούς συνηθισμένης τάξης η ποσότητα  $k_{\perp mp} r$  είναι μικρή. Ιδιαίτερος για τον ρυθμό πρώτης τάξης, που χρησιμοποιούμε σαν ισοδύναμο για τις προσομοιώσεις του διαύλου δέσμης, ισχύει ότι  $\left| E_\phi^{(\text{res})}/E_r^{(\text{res})} \right| \simeq 1$ .

Αντίστοιχη σχέση ισχύει για τον λόγο  $\left| E_\phi^{(\text{NESTOR})}/E_r^{(\text{NESTOR})} \right|$ , που περιλαμβάνει τις τοπικές πεδιακές συνιστώσες που βρίσκονται στον συντονισμό στον δίαυλο της δέσμης. Αν υπολογίσουμε τη συνιστώσα  $E_r^{(\text{NESTOR})}$ , όπως κάναμε για την  $E_\phi^{(\text{NESTOR})}$ , που δίνεται από την (4.2.9), θα δούμε ότι για κάθε έναν εγκάρσιο ρυθμό ξεχωριστά ισχύει αντίστοιχη σχέση με την (4.2.19). Η τελευταία δεν ισχύει για τους εγκάρσιους ρυθμούς μεγάλης τάξης, όπου η ισχυρή ανισότητα  $k_{\perp mp} r \ll 1$  παραβιάζεται, και για τα κύματα που έχουν πολυωνυμική ακτινική εξάρτηση αντί για Bessel. Οι εγκάρσιοι αυτοί ρυθμοί όμως, στα πρακτικά προβλήματα έχουν πολύ μικρό συντελεστή βάρους στο συνολικό πεδίο, και επομένως με αρκετά καλή προσέγγιση έχουμε ότι  $\left| E_\phi^{(\text{NESTOR})}/E_r^{(\text{NESTOR})} \right| \simeq 1$ . Η παραπάνω σχέση για τον λόγο επιβεβαιώθηκε και αριθμητικά. Επομένως, αφού ο λόγος μεταξύ EURIDICE και NESTOR είναι περίπου ο ίδιος, εξισώνοντας την σημαντική συνιστώσα  $E_\phi$  εξισώνουμε με καλή προσέγγιση και τη δευτερεύουσα συνιστώσα  $E_r$ .

### Εξαγωγή του ισοδύναμου προφίλ πεδίου με την προσέγγιση τροχιάς μηδενικής τάξης.

Είτε μέσω των αναλυτικών σχέσεων, που προκύπτουν από την εφαρμογή του θεωρήματος Graf, είτε μέσω του αριθμητικού υπολογισμού από την (4.2.5) της συνιστώσας  $E_{\phi}^{(NESTOR)}$ , που βρίσκεται σε συντονισμό με την κυκλοτρονική κίνηση των ηλεκτρονίων, η ακτίνα Larmor έχει υποθεθεί ότι είναι σταθερή με το χρόνο και προκύπτει από την τροχιά μηδενικής τάξης, όπως αυτή υπολογίζεται από την επίδραση του μαγνητοστατικού πεδίου και μόνο. Στην πραγματικότητα όμως, καθώς η αλληλεπίδραση εξελίσσεται και η ενέργεια των ηλεκτρονίων αλλάζει, η ακτίνα Larmor για κάθε αντιπροσωπευτικό ηλεκτρόνιο μεταβάλλεται, καθώς εξαρτάται από τον σχετικιστικό παράγοντα  $\gamma$ . Αυτή η μεταβολή δεν λαμβάνεται υπ' όψιν καθώς ο υπολογισμός του ισοδύναμου προφίλ πεδίου γίνεται μόνο στην αρχή και με την προσέγγιση τροχιάς μηδενικής τάξης.

Σε ό,τι αφορά τον υπολογισμό των ρευμάτων εκκίνησης, η προσέγγιση αυτή χρησιμοποιείται ευρέως και είναι απολύτως δικαιολογημένη, αφού στη γραμμική περιοχή για ασθενή πεδία, η απόλυτη μεταβολή του  $\gamma$  και κατ' επέκταση της ακτίνας Larmor είναι αμελητέα. Σφάλμα από την προσέγγιση αυτή, εισάγεται μόνο όταν αναζητούμε το τελικό επίπεδο ισχύος της αλληλεπίδρασης. Στην αλληλεπίδραση του διαύλου δέσμης όμως, όπου η αλληλεπίδραση δεν είναι ισχυρή, προκύπτει ότι η ανακρίβεια λόγω της προσέγγισης αυτής δεν είναι σημαντική. Όπως επιβεβαιώσαμε και με τρεξίματα ελέγχου, η ακτίνα Larmor στην περιοχή λειτουργίας υψηλού σήματος για πρακτικές περιπτώσεις είναι πάρα πολύ κοντά σε αυτήν που προκύπτει από την τροχιά μηδενικής τάξης.

### 4.3 Έλεγχος του μοντέλου αλληλεπίδρασης

Στις προηγούμενες ενότητες αναπτύξαμε το μοντέλο αλληλεπίδρασης, που βασίζεται στη σύζευξη των κωδίκων NESTOR και EURIDICE και συζητήσαμε διεξοδικά τις προσεγγίσεις και απλοποιήσεις που το συνοδεύουν. Στην ενότητα αυτή θα περιγράψουμε πως επιβεβαιώνεται αριθμητικά η ισχύς του μοντέλου και των περισσότερων προσεγγίσεων. Συγκεκριμένα, για την επιβεβαίωση της ορθότητας του μοντέλου αναπτύσσουμε ως μέρος του NESTOR έναν απλό κώδικα, ο οποίος επιλύει τις εξισώσεις κίνησης των ηλεκτρονίων υπό την επίδραση των πεδίων κατ' ευθείαν από τον NESTOR.

Δεδομένης της σχετικής πολυπλοκότητας του μοντέλου αλληλεπίδρασης που αναπτύξαμε και των προσεγγίσεων που το συνοδεύουν, τίθεται ως ανάγκη η επαλήθευση τόσο της θεωρητικής ορθότητας όσο και της υλοποίησής του. Καθώς για το πρόβλημα του διαύλου δέσμης δεν υπάρχουν άλλοι κώδικες πέρα από μη πρακτικούς και ιδιαίτερα χρονοβόρους καθαρά αριθμητικούς κώδικες γενικών διατάξεων, οι οποίοι συζητήθηκαν στην ενότητα 1.5.2, είμαστε αναγκασμένοι να κάνουμε τον έλεγχο με έναν μικρό κώδικα που αναπτύχθηκε γι' αυτόν τον σκοπό και μόνο.

Ο κώδικας αυτός είναι ένας απλός κώδικας παρακολούθησης (tracking), ο οποίος χωρίς καμία προσέγγιση ολοκληρώνει τις εξισώσεις κίνησης των ηλεκτρονίων, τα οποία υπόκεινται άμεσα στα πεδία που υπολογίζονται από τον NESTOR. Οι εξισώσεις ολοκληρώνονται μονάχα για ένα πέρασμα των ηλεκτρονίων, όταν τα πεδία έχουν ένα συγκεκριμένο επίπεδο τιμών. Έξοδος του κώδικα είναι η μέση τιμή

του σχετικιστικού παράγοντα  $\gamma$  των ηλεκτρονίων. Η συγκεκριμένη τιμή μπορεί να συγκριθεί άμεσα με την έξοδο ενός αντίστοιχου τρεξίματος της EURIDICE.

Λόγω της λογικής "ωμής βίας" (Brute Force) αυτού του κώδικα, ο οποίος δεν κάνει καμία προσέγγιση, τα τρεξίματα απαιτούν ιδιαίτερα μεγάλο χρόνο. Συγκεκριμένα, για ένα μόνο πέρασμα των ηλεκτρονίων απαιτούνται περίπου 12 ώρες ανά ηλεκτρόνιο και ανά επεξεργαστή. Αντίθετα, για έναν πληθυσμό 37 ηλεκτρονίων με ομοιόμορφα καταναεμμένες φάσεις τον οποίο χρησιμοποιούμε τυπικά στον κώδικα ελέγχου, η EURIDICE κυρίως λόγω των αναλυτικά δοσμένων πεδίων και της ολοκλήρωσης των εξισώσεων στην αργή χρονική κλίμα, δίνει το αποτέλεσμα σχεδόν στιγμιαία. Ο κώδικας ελέγχου είναι επομένως μη πρακτικός και χρησιμοποιήθηκε μονάχα σε λίγες περιπτώσεις για την επαλήθευση του μοντέλου, της υλοποίησης του και της εκάστοτε παραμετροποίησης.

Έχοντας περιγράψει τη λειτουργία και τη χρησιμότητα του απλού κώδικα ελέγχου, περνάμε στην εξαγωγή των εξισώσεων κίνησης. Για την περιγραφή της κίνησης, ως κύρια μεταβλητή των εξισώσεων χρησιμοποιούμε την αδιάστατη ορμή  $\mathbf{u} = \gamma\mathbf{v}/c$ . Οι εξισώσεις εκφράζονται για τις συνιστώσες της αδιάστατης ορμής  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$  στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, καθώς οι καρτεσιανές συνιστώσες του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου μπορούν εύκολα να εξαχθούν από τη θέση των ηλεκτρονίων και από τις αντίστοιχες συνιστώσες του κυλινδρικού συστήματος. Γράφουμε επομένως τις εξισώσεις κίνησης λαμβάνοντας υπ' όψιν όλες τις συνιστώσες του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Για να διακρίνουμε το μαγνητοστατικό πεδίο χρησιμοποιούμε την μαγνητική επαγωγή  $\mathbf{B}$ , ενώ για τις μαγνητικές συνιστώσες του υψίσυχνου ηλεκτρομαγνητικού πεδίου χρησιμοποιούμε την ένταση του μαγνητικού πεδίου  $\mathbf{H}$ . Οι εξισώσεις κίνησης έχουν ως εξής:

$$\frac{du_x}{dt} = -\frac{e}{m_e c} \left[ E_x + v_y \mu_0 H_z - v_z \mu_0 H_y + v_y B_z - v_z B_y \right], \quad (4.3.1\alpha)$$

$$\frac{du_y}{dt} = -\frac{e}{m_e c} \left[ E_y - v_x \mu_0 H_z + v_z \mu_0 H_x - v_x B_z + v_z B_x \right], \quad (4.3.1\beta)$$

$$\frac{du_z}{dt} = -\frac{e}{m_e c} \left[ E_z + v_x \mu_0 H_y - v_y \mu_0 H_x + v_x B_y - v_y B_x \right], \quad (4.3.1\gamma)$$

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad (4.3.1\delta)$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y, \quad (4.3.1\epsilon)$$

$$\frac{dz}{dt} = v_z. \quad (4.3.1\zeta)$$

Με  $e$  συμβολίζουμε την απόλυτη τιμή του φορτίου του ηλεκτρονίου,  $m_e$  τη μάζα του και με το διάνυσμα  $\mathbf{v}$  την ταχύτητά του. Για να φέρουμε το σύστημα των εξισώσεων στην τελική του μορφή αλλάζουμε την ανεξάρτητη μεταβλητή από το χρόνο  $t$  στην αξονική απόσταση  $z$ . Η συγκεκριμένη αλλαγή μεταβλητής μπορεί να πραγματοποιηθεί και βολεύει, καθώς η  $z(t)$  είναι μια μονότιμη και αύξουσα συνάρτηση του χρόνου και η αλληλεπίδραση ξεκινά και τελειώνει σε συγκεκριμένες θέσεις της συντεταγμένης  $z$ , ενώ δεν συμβαίνει κάτι τέτοιο για τον χρόνο  $t$ . Επίσης, εκφράζουμε τις συνιστώσες της ταχύτητας συναρτήσει των αντίστοιχων συνιστωσών

της αδιάστατης ορμής. Οι τελικές εξισώσεις κίνησης των ηλεκτρονίων έχουν την εξής μορφή:

$$\frac{du_x}{dz} = -\frac{\gamma e}{u_z m_e c^2} E_x - \frac{e}{u_z m_e c} u_y \mu_0 H_z + \frac{e}{m_e c} \mu_0 H_y - \frac{e}{u_z m_e c} u_y B_z + \frac{e}{m_e c} B_y, \quad (4.3.2\alpha)$$

$$\frac{du_y}{dz} = -\frac{\gamma e}{u_z m_e c^2} E_y + \frac{e}{u_z m_e c} u_x \mu_0 H_z - \frac{e}{m_e c} \mu_0 H_x + \frac{e}{u_z m_e c} u_x B_z - \frac{e}{m_e c} B_x, \quad (4.3.2\beta)$$

$$\frac{du_z}{dz} = -\frac{\gamma e}{u_z m_e c^2} E_z - \frac{e}{u_z m_e c} u_x \mu_0 H_y + \frac{e}{u_z m_e c} u_y \mu_0 H_x - \frac{e}{u_z m_e c} u_x B_y + \frac{e}{u_z m_e c} u_y B_x, \quad (4.3.2\gamma)$$

$$\frac{dx}{dz} = \frac{u_x}{u_z}, \quad (4.3.2\delta)$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{u_y}{u_z}, \quad (4.3.2\epsilon)$$

$$\frac{dt}{dz} = \frac{\gamma}{cu_z}. \quad (4.3.2\zeta)$$

Το σύστημα των εξισώσεων (4.3.2) μπορεί να ολοκληρωθεί με ένα απλό αριθμητικό σχήμα Runge-Kutta από την αρχική θέση εισόδου των ηλεκτρονίων έως την έξοδό τους από τη μελετούμενη διάταξη. Ο κώδικας έχει υλοποιηθεί στο περιβάλλον του NESTOR και τα πεδία σε κάθε βήμα υπολογίζονται από αυτόν. Στο διάνυσμα των αρχικών τιμών περιλαμβάνεται η θέση του ηλεκτρονίου στην ακτίνα της δέσμης συν την ακτίνα Larmor με τις αντίστοιχες συνιστώσες της ταχύτητας που αντιστοιχούν στην κυκλοτρονική κίνηση. Ο κώδικας εκτελείται 37 φορές για 37 ξεχωριστά ηλεκτρόνια των οποίων η σχετική φάση μεταξύ της εγκάρσιας ταχύτητάς τους και του ύψισχνου ηλεκτρομαγνητικού πεδίου είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα  $[0, 2\pi]$ . Στην έξοδο της διάταξης παίρνουμε για κάθε ηλεκτρόνιο τη μεταβολή του σχετικιστικού παράγοντα  $\gamma$ , όπου από τον μέσο όρο της μπορούμε να υπολογίσουμε την ηλεκτρονική απόδοση της αλληλεπίδρασης για το συγκεκριμένο επίπεδο ισχύος του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου σύμφωνα με τη σχέση:

$$\eta_{el} (\%) = \frac{\gamma_0 - \langle \gamma_{out} \rangle}{\gamma_0 - 1} \cdot 100, \quad (4.3.3)$$

όπου  $\gamma_0$  η αρχική τιμή εισόδου του σχετικιστικού παράγοντα των ηλεκτρονίων και  $\langle \gamma \rangle$  ο μέσος όρος του σχετικιστικού παράγοντα στην έξοδο για τα 37 ηλεκτρόνια. Το μέγεθος αυτό μπορεί να συγκριθεί άμεσα με την αντίστοιχη ποσότητα από το πέρασμα των ηλεκτρονίων στον κώδικα EURIDICE για δεδομένη ισχύ πεδίων. Έτσι, μπορεί να επιβεβαιωθεί ανεξάρτητα το κινηματικό μέρος του μοντέλου αλληλεπίδρασης που αναπτύξαμε.

Στο Κεφάλαιο 5, όπου μελετάμε πραγματικές γεωμετρικές διαύλου δέσμης με ρεαλιστικά χαρακτηριστικά μαγνητικού πεδίου και δέσμης, για ορισμένους ρυθμούς θα χρησιμοποιήσουμε τον κώδικα ελέγχου για να επιβεβαιώσουμε την ισχύ των προσεγγίσεων και την ορθή παραμετροποίηση των προσομοιώσεων.

---

## ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΔΙΑΥΛΩΝ ΔΕΣΜΗΣ ΓΥΡΟΤΡΟΝΙΟΥ

---

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε αριθμητικά αποτελέσματα για γεωμετρίες διαύλων δέσμης που απαντώνται σε συγκεκριμένες διατάξεις γυροτρονίων. Συγκεκριμένα, θα εξετάσουμε τα δύο τελευταία συμβατικά Ευρωπαϊκά γυροτρόνια μεγάλης ισχύος: το συμβατικό γυροτρόνιο 170 GHz, 1 MW για το ITER και το γυροτρόνιο 140 GHz, 1 MW για τον stellarator W7-X. Και τα δύο γυροτρόνια εμφανίζουν παρασιτικές αλληλεπιδράσεις που διαπιστωμένα ή με μεγάλη πιθανότητα προέρχονται από την περιοχή του διαύλου δέσμης. Λεπτομέρειες για τα πειραματικά αποτελέσματα και τη φύση των παρασιτικών αλληλεπιδράσεων για τα δύο γυροτρόνια έχουν δοθεί στην ενότητα 1.4.2.

Στο παρόν κεφάλαιο, θα παρουσιάσουν δύο ειδών αποτελέσματα. Αφ' ενός θα παρουσιάσουν τα αποτελέσματα για τους κρούους (απουσία δέσμης) συντονιζόμενους ρυθμούς στις συγκεκριμένες γεωμετρίες διαύλου δέσμης. Αφ' ετέρου θα εξεταστεί αν το οδεύον προς τα εμπρός κύμα αυτών των ρυθμών μπορεί να αλληλεπιδράσει (forward gyrotron interaction) με τη συγκεκριμένη πλεκτρονική δέσμη που συναντάται στα συγκεκριμένα γυροτρόνια.

Τα αποτελέσματα για τους κρούους ρυθμούς της διάταξης εξάγονται με τον κώδικα NESTOR που αναπτύξαμε και ο οποίος περιγράφεται στα Κεφάλαια 2 και 3. Λόγω των περιορισμών του μοντέλου οι γεωμετρίες που εξετάζουμε είναι αναγκαστικά απλοποιημένες σε σχέση με τις πραγματικές ως προς ορισμένα γεωμετρικά χαρακτηριστικά.

Η κυριότερη απλοποίηση αφορά την αγνόηση της μεταβολής της εσωτερικής ακτίνας των μεταλλικών δαχτυλιδιών του διαύλου. Αν και η συγκεκριμένη μεταβολή είναι μικρή σε σχέση με την εσωτερική ακτίνα, στην πραγματικότητα είναι συγκρίσιμη με το μήκος κύματος και επομένως η απλοποίηση αυτή είναι πιθανό ότι εισάγει σημαντικά σφάλματα και απόκλιση από την πραγματική κατάσταση. Ένα δεύτερο χαρακτηριστικό που αγνοείται, είναι οι αζιμουθιακές ρυτιδώσεις στα μεταλλικά δαχτυλίδια που έχουν εισαχθεί για να παρεμποδίζουν τους ρυθμούς TE με αζιμουθιακό δείκτη 0. Όπως θα δείξουμε μέσω των αποτελεσμάτων παρακάτω,

---

εν τέλει, φαίνεται ότι οι πιο επικίνδυνοι για παρασιτική διέγερση ρυθμοί είναι οι υβριδικοί με υψηλό αξιωματικό δείκτη και επομένως οι συγκεκριμένες ρυτιδώσεις αν και αναμένεται να έχουν κάποια επίδραση σε αυτούς τους ρυθμούς, αυτή δεν είναι καταστρεπτική όπως στους συμμετρικούς (για  $m = 0$ ) ρυθμούς TE. Μια τελευταία απλοποίηση είναι ότι προσομοιώνουμε μόνο ένα μέρος και όχι ολόκληρο τον δίαυλο της δέσμης. Αυτό γίνεται αναγκαστικά για δύο λόγους: Αφ' ενός η συνολική διάταξη είναι ηλεκτρικά πολύ μεγάλη και η προσομοίωση ολόκληρου του διαύλου δέσμης θα απαιτούσε ιδιαίτερα μεγάλους υπολογιστικούς πόρους. Αφ' ετέρου τυχόν παρασιτική αλληλεπίδραση αναμένεται να υπάρξει κυρίως σε ένα μικρό μέρος του διαύλου δέσμης κοντά στην κοιλότητα, όπου ο λόγος ταχυτήτων  $\alpha$  (pitch factor) γίνεται σημαντικός. Επομένως, στις προσομοιώσεις συμπεριλαμβάνουμε τα τελευταία 5 διπλεκτρικά δαχτυλίδια του διαύλου δέσμης με οριακές συνθήκες εξερχόμενων κυμάτων στα άκρα. Η εφαρμογή οριακών συνθηκών αυτού του τύπου αν και στην πλευρά της κοιλότητας είναι ικανοποιητική, στην πλευρά της ανόδου ουσιαστικά αγνοεί τα υπόλοιπα δαχτυλίδια και υποθέτει ότι δεν υπάρχει καμία ανάκλαση. Η συγκεκριμένη απλοποίηση εισάγει και αυτή κάποια σφάλματα, όμως αποτελεί την καλύτερη δυνατή προσέγγιση καθώς η αμέσως καλύτερη επιλογή θα ήταν η προσομοίωση όλη της διάταξης του πίσω μέρους του γυροτρονίου μαζί με άνοδο και κάθοδο, πράγμα που είναι όμως απαγορευτικό για τις δυνατότητες ενός ημι-αναλυτικού μοντέλου λόγω πολυπλοκότητας ή ενός καθαρά αριθμητικού κώδικα λόγω υπολογιστικών απαιτήσεων. Το γεγονός ότι τα πίσω μεταλλικά δαχτυλίδια έχουν μεγαλύτερη ακτίνα από τα μπροστά ευνοεί την υπόθεση αυτή στο μοντέλο μας, μιας και το όπισθεν κύμα εκτιμάται ότι φεύγει ανεμπόδιστο και μικρό μόνο μέρος του σκεδάζεται πάλι προς τα εμπρός. Το μέρος του κύματος που σκεδάζεται και επιστρέφει στα 5 τελευταία δαχτυλίδια είναι στην ουσία αυτό που αγνοείται στο μοντέλο.

Από τα παραπάνω συνάγεται ότι παρ' όλο που παίρνουμε ως βάση τις πραγματικές γεωμετρίες των συγκεκριμένων γυροτρονίων, οι αριθμητικές προσομοιώσεις λόγω των απλοποιήσεων που αναγκαστικά κάνουμε δεν μπορούν να χαρακτηριστούν ως ρεαλιστικές προσομοιώσεις των πραγματικών διαύλων δέσμης. Επομένως, τα αποτελέσματα δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη σχεδίαση ή ακριβή πρόβλεψη της συμπεριφοράς ενός συγκεκριμένου διαύλου δέσμης. Παρ' όλα αυτά, τα αποτελέσματα για τις απλοποιημένες γεωμετρίες που προσομοιώνουμε δεν αναμένεται να διαφέρουν ποιοτικά από την πραγματική κατάσταση. Οι συχνότητες, οι συντελεστές ποιότητας και τα προφίλ των ρυθμών αναμένεται παρά τις απλοποιήσεις να κινούνται σε παραπλήσιες περιοχές τιμών με τα αντίστοιχα μεγέθη της πραγματικής γεωμετρίας. Επομένως, δεδομένου του τεράστιου αριθμού των ρυθμών που υποστηρίζονται στη διάταξη, τα αριθμητικά αποτελέσματα για τις απλοποιημένες γεωμετρίες μπορούν να δώσουν εξαιρετικά χρήσιμα συμπεράσματα για την ποιοτική συμπεριφορά της διάταξης. Για παράδειγμα, το κυριότερο ερώτημα που καλούμαστε να απαντήσουμε σε αυτό το κεφάλαιο είναι αν μπορούν να διεγερθούν ρυθμοί με την εμπρός αλληλεπίδραση σε έναν δίαυλο δέσμης γυροτρονίου που προσομοιάζει σε μεγάλο βαθμό μια πραγματική διάταξη.

Για την απάντηση στο βασικό αυτό ερώτημα, το δεύτερο είδος αποτελεσμάτων, που παρουσιάζουμε στο παρόν κεφάλαιο, είναι τα ρεύματα εκκίνησης για την αλληλεπίδραση της ηλεκτρονικής δέσμης με το οδεύον προς τα εμπρός κύμα των ρυθμών. Τα συγκεκριμένα αποτελέσματα εξάγονται σύμφωνα με το μοντέλο και τον συνδυασμό των κωδικών που αναπτύξαμε στο Κεφάλαιο 4. Τα ρεύματα εκκίνησης

υπολογίζονται είτε άμεσα με τον γραμμικό κώδικα ISTART είτε χειροκίνητα με τον ακριβέστερο μη-γραμμικό χρονικώς εξαρτημένο κώδικα αλληλεπίδρασης Envidiki, όπου και οι δύο κώδικες ανήκουν στο υπολογιστικό πακέτο EURIDICE. Οι παραδοχές και προσεγγίσεις που κάνουμε είναι αυτές που αναλύθηκαν διεξοδικά στην παράγραφο 4.2.2.

Χαρακτηριστικό των διαύλων δέσμης είναι το μεγάλο πλήθος των ρυθμών που υποστηρίζονται, καθώς όπως έχουμε σημειώσει πρόκειται για ιδιαίτερα μεγάλες ηλεκτρικά διατάξεις στην εγκάρσια διάσταση. Στην επόμενη παράγραφο παρουσιάζουμε τη διαδικασία και μεθοδολογία εξαγωγής των αποτελεσμάτων που ακολουθήσαμε για τις δύο αυτές γεωμετρικές διαύλους δέσμης.

## 5.1 Μεθοδολογία εξαγωγής αποτελεσμάτων

Για την εξαγωγή των αριθμητικών αποτελεσμάτων σχετικά με την αλληλεπίδραση, η οποία μπορεί να λάβει χώρα μέσα σε έναν δίαυλο δέσμης, λαμβάνουμε υπ' όψιν τα πραγματικά δεδομένα που υπεισέρχονται, δηλαδή τη γεωμετρία του διαύλου, την αξονική μεταβολή του μαγνητοστατικού πεδίου και τις παραμέτρους της δέσμης. Πιο συγκεκριμένα, ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία:

Με επιχειρήματα φυσικής θεωρούμε κατ' αρχάς, ότι εξαιτίας του αυξημένου λόγου ταχυτήτων  $\alpha$ , μεγαλύτερες τιμές του οποίου ευνοούν ισχυρά την αλληλεπίδραση γυροτρονίου, η παρασιτική αλληλεπίδραση είναι επικίνδυνο να εμφανιστεί στα τελευταία δαχτυλίδια του διαύλου δέσμης λίγο πριν την κοιλότητα. Η υπόθεση αυτή συμφωνεί με τα πειραματικά δεδομένα, καθώς σε σοβαρές περιπτώσεις εμφάνισης παρασιτικών ταλαντώσεων τα τελευταία δαχτυλίδια κοντά στην κοιλότητα ήταν αυτά που βρέθηκαν αλλοιωμένα από τοπική υπερθέρμανση [16]. Έτσι, θεωρούμε μια απλοποιημένη γεωμετρία με πεπερασμένο αριθμό δαχτυλιδίων, ο οποίος στις δύο περιπτώσεις που εξετάζουμε κρίθηκε αρκετός να είναι ίσος με 5 δαχτυλίδια λαμβάνοντας υπ' όψιν την αντίστοιχη μεταβολή του λόγου ταχυτήτων κατά μήκος της διάταξης. Η εσωτερική ακτίνα  $r_{in}$ , η οποία στην απλοποιημένη γεωμετρία είναι αναγκαστικά σταθερή, επιλέγεται ως αυτή του δεύτερου ή τρίτου μεταλλικού δαχτυλιδιού με αρίθμηση που ξεκινά από την κοιλότητα για να έχουμε πιστότερη προσομοίωση της περιοχής που είναι πιο κοντά στην κοιλότητα.

Στη συνέχεια, προσδιορίζεται η ζώνη συχνοτήτων, η οποία είναι επικίνδυνη για παρασιτική διέγερση λόγω της αλληλεπίδρασης με το οδεύον προς τα εμπρός κύμα του ρυθμού. Η ζώνη συχνοτήτων εκτιμάται υπολογίζοντας τη μεταβολή της κυκλοτρονικής συχνότητας κατά μήκος του διαύλου δέσμης και προσθέτοντας ένα επιπλέον 5% που είναι κατά προσέγγιση το εύρος ζώνης της αλληλεπίδρασης γυροτρονίου. Τέλος, γίνεται έλεγχος εάν όντως τα πειραματικά δεδομένα για τις παρασιτικές συχνότητες που εμφανίζονται εμπίπτουν στη ζώνη επικινδυνότητας που υπολογίσαμε.

Έχοντας εκτιμήσει τη ζώνη συχνοτήτων, στην οποία θα αναζητήσουμε τυχόν ασταθείς ρυθμούς, περνάμε τώρα στον υπολογισμό των ρυθμών και των χαρακτηριστικών τους στην κρύα διάταξη. Αρχικά, επιλέγουμε έναν ελάχιστο συντελεστή ποιότητας, για τον οποίο εκτιμούμε ότι δεν είναι πιθανή η διέγερση ρυθμών με τιμή συντελεστή ποιότητας χαμηλότερο από αυτόν. Η τιμή αυτή επιλέγεται λαμβάνοντας υπ' όψιν και το εύρος της ζώνης συχνοτήτων, καθώς τα δύο αυτά στοιχεία θα καθορίσουν τον τελικό αριθμό του πλήθους των

ρυθμών που θα εξετάσουμε και αυτός δεν θα πρέπει να είναι υπερβολικός σε σχέση με τους υπολογιστικούς πόρους τους οποίους έχουμε στη διαθεσίμας. Κατόπιν, με τον κώδικα NESTOR φτιάχνουμε τον διδιάστατο χάρτη των ρυθμών που περιγράφεται στην παράγραφο 3.2. Το βήμα αυτό είναι και το πιο κοστοβόρο σε υπολογιστικό χρόνο και μπορεί να διαρκέσει έως και 10 ημέρες για τους υψηλότερους αζιμουθιακούς δείκτες σε έναν τυπικό προσωπικό ηλεκτρονικό υπολογιστή (2.7-GHz dual-core Intel core i7). Συνήθως, ο χάρτης επιμερίζεται σε περιοχές, οι οποίες ανατίθενται παράλληλα σε ξεχωριστούς επεξεργαστές ενός συστήματος συστάδας επεξεργαστών και επομένως ο χρόνος αυτός είναι μικρότερος. Στη συνέχεια, εντοπίζονται αριθμητικά τα τοπικά ελάχιστα του χάρτη, τα οποία και τροφοδοτούνται στη ρουτίνα εύρεσης ριζών του κώδικα για τον υπολογισμό των ακριβών τιμών της συχνότητας και του συντελεστή ποιότητας των ρυθμών. Σημειώνουμε ότι η διακριτοποίηση του χάρτη επίσης επιλέγεται συμβιβάζοντας τη διαθεσιμότητα των υπολογιστικών πόρων και την πιθανότητα να χαθούν ρυθμοί λόγω χαμηλής ανάλυσης του χάρτη.

Λόγω αζιμουθιακής συμμετρίας της διάταξης, η παραπάνω διαδικασία υπολογισμού των ρυθμών πρέπει να επαναληφθεί ανεξάρτητα για όλες τις τιμές του αζιμουθιακού δείκτη  $m$  που ενδιαφέρουν. Ένα άλλο ζήτημα που αυξάνει την πολυπλοκότητα των προσομοιώσεων είναι η τιμή της επιτρεπτότητας των διπλεκτρικών δαχτυλιδιών. Το υλικό που χρησιμοποιείται για την απορρόφηση της ηλεκτρομαγνητικής ισχύος στους διαύλους δέσμης είναι κεραμικό βασισμένο σε μείγμα οξειδίου του Βηρυλλίου και καρβιδίου του Πυριτίου ( $\text{BeOSiC}$ ). Όταν ξεκίνησαν οι αριθμητικοί υπολογισμοί δεν ήταν καθόλου γνωστή η τιμή της διπλεκτρικής επιτρεπτότητας για τις υψηλές συχνότητες που ενδιαφέρουν τις εφαρμογές γυροτρονίου. Τέτοιου είδους πληροφορία δεν ήταν διαθέσιμη ούτε στη βιβλιογραφία ούτε από τον κατασκευαστή των διπλεκτρικών υλικών. Για τον λόγο αυτό επαναλάβαμε τους υπολογισμούς για 6 χαρακτηριστικές τιμές της διπλεκτρικής επιτρεπτότητας που εκτιμήθηκαν. Οι τιμές αυτές, για τη σχετική διπλεκτρική επιτρεπτότητα του κεραμικού υλικού που χρησιμοποιήθηκαν, είναι οι εξής:  $\epsilon_{r1} = 5 - j$ ,  $\epsilon_{r2} = 5 - 0.5j$ ,  $\epsilon_{r3} = 10 - j$ ,  $\epsilon_{r4} = 10 - 0.5j$ ,  $\epsilon_{r5} = 10 - 0.25j$ ,  $\epsilon_{r6} = 20 - j$ .

Αφού κάποιες προσομοιώσεις και υπολογισμοί είχαν ολοκληρωθεί και μετά από προμήθεια κατάλληλης μετρητικής διάταξης από το ινστιτούτο CRPP του EPFL, μετρήθηκε παρουσία μας η διπλεκτρική επιτρεπτότητα δειγμάτων υλικού της παρτίδας από την οποία είναι εξοπλισμένο το πρωτότυπο γυροτρόνιο του 1 MW για το ITER. Έτσι οι υπολογισμοί επαναλήφθηκαν ακόμη μία φορά για τη μετρημένη τιμή της διπλεκτρικής επιτρεπτότητας. Στο παρόν κεφάλαιο παραθέτουμε τα αποτελέσματα για όλες τις τιμές που χρησιμοποιήσαμε, καθώς έτσι μας επιτρέπεται και η σύγκριση για τις διάφορες τιμές της επιτρεπτότητας.

Στη συνέχεια της διαδικασίας εκτελείται η εξαγωγή των ισοδύναμων αξονικών προφίλ για το πακέτο προσομοίωσης EURIDICE, σύμφωνα με τη διαδικασία που αναλύθηκε στην ενότητα 4.2. Τα ισοδύναμα προφίλ υπολογίζονται για όλους τους ρυθμούς, είτε αυτοί είναι ρυθμοί EH είτε HE, δηλαδή ρυθμοί που προσομοιάζουν περισσότερο σε ρυθμό TM ή TE, αντίστοιχα. Για να μπορέσουμε να εκτιμήσουμε ποσοτικά τον χαρακτήρα ενός ρυθμού, ορίζουμε τον λόγο  $\kappa$  ως εξής:

$$\kappa = \frac{\langle \overline{E_\phi}, \overline{E_R} \rangle}{\overline{E_z}}, \quad (5.1.1)$$

όπου  $\overline{E_\phi}$ ,  $\overline{E_r}$ ,  $\overline{E_z}$  είναι ο μέσος όρος του μέτρου της αντίστοιχης συνιστώσας



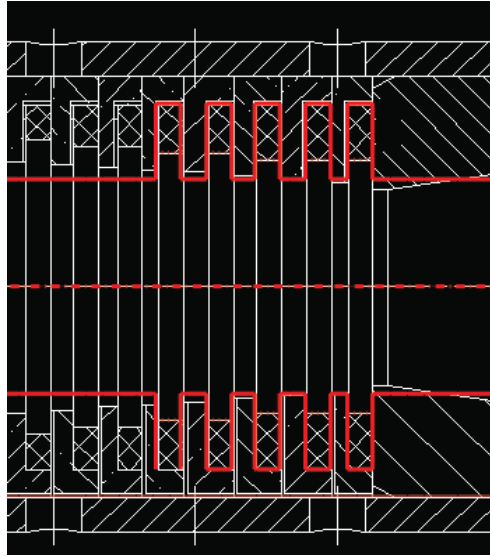
του ηλεκτρικού πεδίου κατά μήκος της ηλεκτρονικής δέσμης και με το σύμβολο  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  συμβολίζουμε τον μέσο όρο των δύο ποσοτήτων. Επομένως, ρυθμοί με ισχυρό χαρακτήρα TM, που δεν ευνοούνται από την αλληλεπίδραση γυροτρονίου, αναμένεται να έχουν λόγο  $\kappa$  μικρότερο της μονάδας. Αν και ρυθμοί EH με ισχυρό χαρακτήρα TM δεν αναμένεται να είναι επικίνδυνοι για παρασιτική διέγερση, οι υπολογισμοί γίνονται για όλους τους ρυθμούς, καθώς η διαδικασία δεν είναι ιδιαίτερα απαιτητική σε υπολογιστικούς πόρους. Σημειώνουμε ότι η διαδικασία εξαγωγής του ισοδύναμου προφίλ πρέπει να γίνει για κάθε ρίζα της οριζουσας του συστήματος δύο φορές, τόσο για τον συμπεριστρεφόμενο (corotating) όσο και για τον αντι-περιστρεφόμενο (counter-rotating) ρυθμό. Οι δύο αυτοί ρυθμοί αν και έχουν όμοια συχνότητα συντονισμού και συντελεστή ποιότητας, μπορεί να διαφέρουν σημαντικά στο προφίλ πεδίου και συνεπώς στον ισοδύναμο συντελεστή ποιότητας.

Έχοντας πλέον υπολογίσει το ισοδύναμο αξονικό προφίλ του πεδίου κατά μήκος της δέσμης ουσιαστικά έχει ολοκληρωθεί η σύνδεση των αποτελεσμάτων του κώδικα με το πακέτο προσομοίωσης EURIDICE. Έτσι, αυτό που μένει είναι ο υπολογισμός του ρεύματος εκκίνησης των ρυθμών με τον γραμμικό κώδικα ISTART [107]. Τα αποτελέσματα για τα ρεύματα εκκίνησης που δίνουμε αφορούν την ονομαστική τάση του σημείου λειτουργίας του εκάστοτε γυροτρονίου.

Ο κώδικας ISTART αν και λαμβάνει υπ' όψιν του στην κυκλοτρονική συχνότητα τη μεταβολή του μαγνητοστατικού πεδίου κατά μήκος του άξονα, αγνοεί τη μεταβολή της αξονικής ταχύτητας των ηλεκτρονίων που λαμβάνει χώρα ακριβώς λόγω της συμπίεσης του μαγνητοστατικού πεδίου [11]. Η απλοποίηση αυτή είναι απολύτως αποδεκτή για την αλληλεπίδραση στην κοιλότητα, για την οποία φτιάχτηκε ο κώδικας, όμως εισάγει σφάλματα στην περίπτωση της αλληλεπίδρασης στον διάυλο δέσμης, όπου η μεταβολή του μαγνητοστατικού πεδίου κατά μήκος του άξονα είναι σημαντική. Για τον λόγο αυτό στις περιπτώσεις ρυθμών με χαμηλό ρεύμα εκκίνησης τρέχουμε επίσης την έκδοση δεδομένου πεδίου (fixed-field) του κώδικα Enridiki [107], στην οποία υπάρχει η επιλογή ακριβούς θεώρησης της μεταβολής της αξονικής ταχύτητας των ηλεκτρονίων λόγω της μεταβολής του μαγνητοστατικού πεδίου. Λόγω του χαρακτήρα του κώδικα Enridiki που δεν υπολογίζει ρεύματα εκκίνησης, οι υπολογισμοί γίνονται χειροκίνητα επιλέγοντας μια τιμή ρεύματος κάθε φορά και ελέγχοντας αν ο ρυθμός διεγείρεται από το κατώφλι του θορύβου. Ακριβώς λόγω της απλοποίησης αυτής, εμφανίζονται κάποιες μικρές σχετικές διαφορές στα αποτελέσματα μεταξύ των δύο κωδίκων. Παρ' όλα αυτά, θεωρούμε ως πιο αξιόπιστα τα αποτελέσματα από τον κώδικα Enridiki, καθώς ο κώδικας ISTART υπερεκτιμά την τιμή λόγου ταχυτήτων  $\alpha$  στο μεγαλύτερο μέρος της περιοχής αλληλεπίδρασης σε σχέση με την πραγματική κατάσταση και έτσι τείνει να ευνοεί την αλληλεπίδραση υποεκτιμώντας τα ρεύματα εκκίνησης.

Για τον έλεγχο της ορθής χρήσης των κωδίκων με τα σωστά αρχεία εισόδου για το μαγνητοστατικό πεδίο και τις ιδιότητες της δέσμης, καθώς και για την επαλήθευση της σωστής σύνδεσης μεταξύ του κώδικα NESTOR και του πακέτου EURIDICE, δειγματοληπτικά για κάποιους ρυθμούς ελέγχθηκαν τα αποτελέσματα για την ηλεκτρονική απόδοση σε ένα πέρασμα των ηλεκτρονίων μεταξύ του κώδικα Enridiki και του απλού τροχιακού κώδικα που περιγράφηκε στην ενότητα 4.3. Κάποια αποτελέσματα από συγκεκριμένους ελέγχους που επαληθεύουν την ορθότητα των προσομοιώσεων θα παρουσιαστούν μαζί με τα κυρίως αποτελέσματα στις επόμενες ενότητες.

Αφού περιγράψαμε αναλυτικά τη διαδικασία και μεθοδολογία εξαγωγής των



Σχήμα 5.1: Σύγκριση απλοποιημένης με την πραγματική γεωμετρία του διαύλου δέσμης.

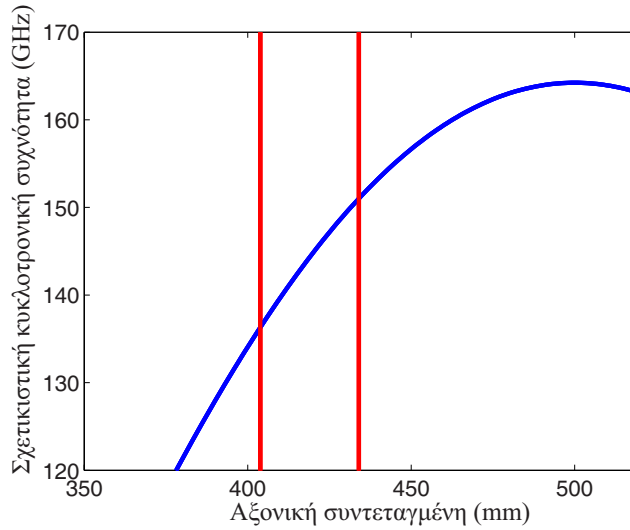
αποτελεσμάτων προχωρούμε τώρα στην παρουσίαση αυτών.

## 5.2 Αριθμητικά αποτελέσματα για το γυροτρόνιο 170 GHz 1 MW για το ITER

Το Ευρωπαϊκό γυροτρόνιο συχνότητας 170 GHz και ονομαστικής ισχύος 1 MW, που προορίζεται να εξοπλίσει με 6 συσκευές το σύστημα ECRH (Electron Cyclotron Resonance Heating) του διεθνούς αντιδραστήρα θερμοπυρηνικής σύντηξης ITER, έχει σχεδιαστεί, μελετάται και ελέγχεται πειραματικά από το EGYC (European Gyrotron Consortium), στο οποίο συμμετέχει το Εργαστήριο Ηλεκτρονικής Δέσμης, Πλάσματος και Μη Γραμμικής οπτικής του Ε.Μ.Π. Στα πλαίσια των ερευνών για τον δίαυλο δέσμης της συγκεκριμένης σχεδίασης γυροτρονίου, πραγματοποιήθηκε η παρούσα μελέτη, στην οποία μελετάται η πιθανότητα διέγερσης παρασιτικών ρυθμών με την αλληλεπίδραση εμπρός κύματος (forward-wave interaction).

Για την εξαγωγή των αποτελεσμάτων ακολουθούμε επακριβώς τη διαδικασία που περιγράφηκε αναλυτικά στην ενότητα 5.1. Η απλοποιημένη γεωμετρία που εξετάζουμε αποτελείται από 5 διπλεκτρικά δαχτυλίδια και έχει σταθερή εσωτερική ακτίνα των μεταλλικών δαχτυλιδιών. Στο Σχήμα 5.1 παρουσιάζεται με κόκκινο η απλοποιημένη γεωμετρία σε σχέση με την πραγματική γεωμετρία που απεικονίζεται στο μηχανολογικό σχέδιο. Παρατηρούμε ότι η απλοποιημένη γεωμετρία σταθερής ακτίνας δεν απέχει πολύ από την πραγματικότητα για τα 5 πρώτα δαχτυλίδια που εξετάζουμε. Παρ' όλα αυτά, η απόκλιση της ακτίνας σε απόλυτα μεγέθη κινείται στην τάξη μεγέθους του μισού εκατοστού ενώ το μήκος κύματος ελευθέρου χώρου στις συχνότητες ενδιαφέροντος είναι περίπου 2 χιλιοστά. Για λόγους βιομηχανικής ιδιοκτησίας οι ακριβείς διαστάσεις της γεωμετρίας που προσομοιώνουμε δεν επιτρέπεται να κοινοποιηθούν.

Στη συνέχεια, προσδιορίζουμε τη ζώνη συχνοτήτων, στην οποία θα αναζητήσουμε παρασιτικούς ρυθμούς. Στο Σχήμα 5.2 σχεδιάζουμε τη μεταβολή της σχετικιστικής



Σχήμα 5.2: Προσδιορισμός της επικίνδυνης ζώνης συχνότητων για διέγερση παρασιτικών ταλαντώσεων στον διάυλο δέσμης.

Πίνακας 5.1: Παράμετροι σημείου λειτουργίας υψηλής τάσης Ευρωπαϊκού γυροτρονίου για το ITER.

Τάση λειτουργίας	Ρεύμα λειτουργίας	Λόγος ταχυτήτων $\alpha$	Μέγιστη τιμή μαγνητικού πεδίου
79.5 kV	40.0 A	1.30	6.78 T

κυκλοτρονικής συχνότητας κατά μήκος του άξονα του γυροτρονίου, η οποία υπολογίζεται από την ονομαστική τάση λειτουργίας (79.5 kV) και το προφίλ του μαγνητοστατικού πεδίου, όπως αυτό δίνεται από τα πραγματικά ρεύματα στα πηνία του μαγνήτη. Οι κάθετες κόκκινες γραμμές απεικονίζουν τα όρια της περιοχής που μελετάμε, δηλαδή την αρχή και το τέλος των 5 τελευταίων διπλεκτρικών δαχτυλιδιών. Όπως βλέπουμε στο σχήμα, η τομή της καμπύλης με τις κόκκινες γραμμές είναι στα 137 GHz και στα 151 GHz αντίστοιχα. Την παραπάνω ζώνη διευρύνουμε προς τα πάνω κατά περίπου 5% για να συμπεριλάβουμε και το εύρος ζώνης της κυκλοτρονικής αλληλεπίδρασης. Εξάλλου, όπως βλέπουμε και στην περιοχή της κοιλότητας, που αντιστοιχεί στο μέγιστο μαγνητικό πεδίο, η κυκλοτρονική συχνότητα είναι στα 163 GHz, περί το 4% δηλαδή κάτω από τα 170 GHz στα οποία και συμβαίνει η αλληλεπίδραση. Η διεύρυνση λόγω εύρους ζώνης αλληλεπίδρασης γίνεται μόνο προς τα πάνω της ζώνης συχνότητων, καθώς είναι δυνατή η ορθή προσομοίωση μόνο της αλληλεπίδρασης με το οδεύον προς τα εμπρός κύμα του ρυθμού. Πιθανή αλληλεπίδραση σε συχνότητα που είναι μικρότερη της κυκλοτρονικής θα σήμαινε αλληλεπίδραση με το οδεύον προς τα πίσω κύμα, φαινόμενο που η προσέγγιση σταθερού πεδίου (fixed-field) δεν αντιμετωπίζει ορθά. Με βάση τα παραπάνω, η ζώνη συχνότητων την οποία εκτιμούμε ως επικίνδυνη για παρασιτική διέγερση είναι από 135 GHz έως 160 GHz.

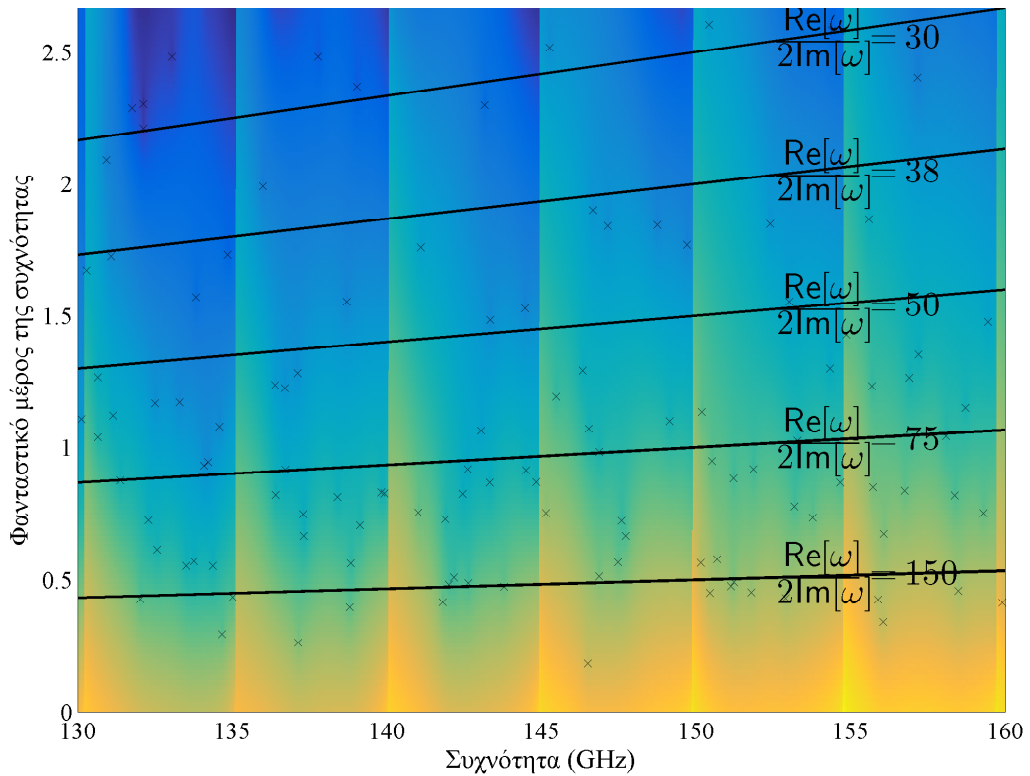
### 5.2.1 Ρεύματα εκκίνησης για το σημείο λειτουργίας υψηλής τάσης.

Προχωρούμε τώρα στον υπολογισμό των ρευμάτων εκκίνησης για τους συντονιζόμενους ρυθμούς στον διαύλο δέσμης. Για τις προσομοιώσεις της αλληλεπίδρασης χρειάζονται οι πραγματικές παράμετροι της ηλεκτρονικής δέσμης. Στη συγκεκριμένη ενότητα εξετάζουμε το σημείο λειτουργίας υψηλής τάσης (79.5 kV), το οποίο ήταν αρχικά το σημείο ονομαστικής λειτουργίας για το οποίο σχεδιάστηκε το γυροτρόνιο. Στην πορεία μεταβάλλοντας το μαγνητικό πεδίο και τις παραμέτρους της δέσμης βρέθηκε και ένα επιπλέον σημείο χαμηλότερης τάσης (71.0 kV). Το επιπλέον αυτό σημείο χαμηλής τάσης διερευνήθηκε, γιατί παρουσιάζει ελαφρώς καλύτερη απόδοση και είναι επίσης συμβατό με την τάση λειτουργίας των τροφοδοτικών που θα χρησιμοποιηθούν στο ITER από τους κατασκευαστές των άλλων γυροτρονίων (Ρωσία και Ιαπωνία). Στον Πίνακα 5.1 παρουσιάζονται οι παράμετροι λειτουργίας του γυροτρονίου με τις οποίες τροφοδοτούμε το πακέτο κώδικα EURIDICE για τον υπολογισμό των ρευμάτων εκκίνησης.

Εκκινώντας τις προσομοιώσεις, η πιθανότητα εύρεσης ασταθών ρυθμών και οι απαιτήσεις σε υπολογιστικό χρόνο δεν ήταν εκ των προτέρων γνωστές. Για τον λόγο αυτό εφαρμόστηκαν χαλαρά κριτήρια ως προς την αναζήτηση των ρυθμών. Για παράδειγμα, στην πρώτη ομάδα προσομοιώσεων έγινε αναζήτηση στην πιο διευρυμένη ζώνη συχνοτήτων από 130 GHz έως 160 GHz και το ελάχιστο πραγματικό  $Q$  (στη μέγιστη συχνότητα) για το οποίο υπολογίζουμε ρυθμούς και ρεύματα εκκίνησης τέθηκε στην τιμή 30. Για τα παραπάνω χαλαρά κριτήρια αναζήτησης βρέθηκε υψηλός αριθμός συντονιζόμενων ρυθμών, ενώ τα αποτελέσματα έδειξαν υψηλά ρεύματα εκκίνησης χωρίς καμία πιθανότητα διέγερσης παρασιτικών ρυθμών. Σημειώνουμε ότι η πραγματική τιμή της διπλεκτρικής επιτρεπτότητας δεν είχε τότε μετρηθεί και επιπλέον των 6 βασικών τιμών, που αναφέραμε στην ενότητα 5.1, προσομοιώθηκε επίσης η τιμή  $\varepsilon = 20 - 2j$ . Στο Σχήμα 5.3 παρουσιάζεται ο χάρτης των ρυθμών για τον αξιμουθιακό δείκτη  $m = 1$  και για τιμή διπλεκτρικής επιτρεπτότητας  $\varepsilon = 20 - j$ . Με τα σημεία  $\times$  σημειώνονται οι μηδενισμοί της οριζουσας που αντιστοιχούν στους συντονιζόμενους ρυθμούς, ενώ ο χρωματισμός αντιστοιχεί στο μέτρο της οριζουσας. Όπως βλέπουμε από το πλήθος των σημείων  $\times$  του χάρτη, μεγάλος αριθμός συντονιζόμενων ρυθμών υποστηρίζεται στη διάταξη και συγκεκριμένα στην περίπτωση αυτή 116 συντονιζόμενοι ρυθμοί. Στον Πίνακα 5.2 συνοψίζονται για όλες τις τιμές της διπλεκτρικής επιτρεπτότητας τα αποτελέσματα του πρώτου πακέτου προσομοιώσεων που περιλαμβάνει τους αξιμουθιακούς δείκτες από  $m = 0$  έως και  $m = 5$ .

Από τα αποτελέσματα βλέπουμε ότι τα ελάχιστα ρεύματα εκκίνησης είναι ιδιαίτερα υψηλά, πάνω από μία τάξη μεγέθους σε σχέση με το ονομαστικό ρεύμα του γυροτρονίου (40 A). Επομένως, για τους χαμηλούς αυτούς αξιμουθιακούς δείκτες η πιθανότητα διέγερσης παρασιτικού ρυθμού στην πραγματική διάταξη (για την εμπρός αλληλεπίδραση) είναι αμελητέα. Βλέπουμε ότι αν εξαιρέσουμε τους συμμετρικούς ρυθμούς με  $m = 0$ , όπου εκεί προσομοιώνουμε μόνο τους καθαρούς ρυθμούς TE, για τους υπόλοιπους δείκτες οι ρυθμοί με πιο ισχυρό TE χαρακτήρα όπως αναμένεται είναι περίπου οι μισοί, σύμφωνα με το κριτήριο για το λόγο  $\kappa$  της (5.1.1).

Συνεχίζοντας τις προσομοιώσεις για τους επόμενους αξιμουθιακούς δείκτες και αφού η πρώτη αυτή σειρά αποτελεσμάτων έδειξε πολύ υψηλά ρεύματα εκκίνησης, κάναμε πιο αυστηρά τα κριτήρια αναζήτησης των ρυθμών. Συγκεκριμένα, για το δεύτερο πακέτο προσομοιώσεων που περιλαμβάνει τους αξιμουθιακούς δείκτες  $m =$



Σχήμα 5.3: Χάρτης ρυθμών για τον αξιμουθιακό δείκτη  $m = 1$  και τιμή διηλεκτρικής επιτρεπτότητας  $\epsilon = 20 - j$ . Με τα σημεία  $\times$  σημειώνονται οι μηδενισμοί της οριζουσας, ενώ ο χρωματισμός αντιστοιχεί στην τιμή του μέτρου της οριζουσας (μπλε για χαμηλότερες τιμές και κίτρινο για υψηλότερες).

Πίνακας 5.2: Αριθμητικά αποτελέσματα προσομοιώσεων για τους ρυθμούς με αξιμουθιακό δείκτη  $m = 0 - 5$ .

Αξιμουθιακός δείκτης $m$	Συνολικός αριθμός ρυθμών	Ποσοστό ρυθμών χαρακτήρα TE	Ελάχιστο ρεύμα εκκίνησης (A)	Συχνότητα πιο ασταθής ρυθμού
0	880	100 %	492 A	148.5 GHz
1	1892	50.9 %	1063 A	156.1 GHz
2	1852	50.5 %	472 A	148.3 GHz
3	1884	50.1 %	846 A	155.8 GHz
4	1876	48.7 %	594 A	148.0 GHz
5	1880	51.8 %	986 A	155.4 GHz
Σύνολο:	10,264			

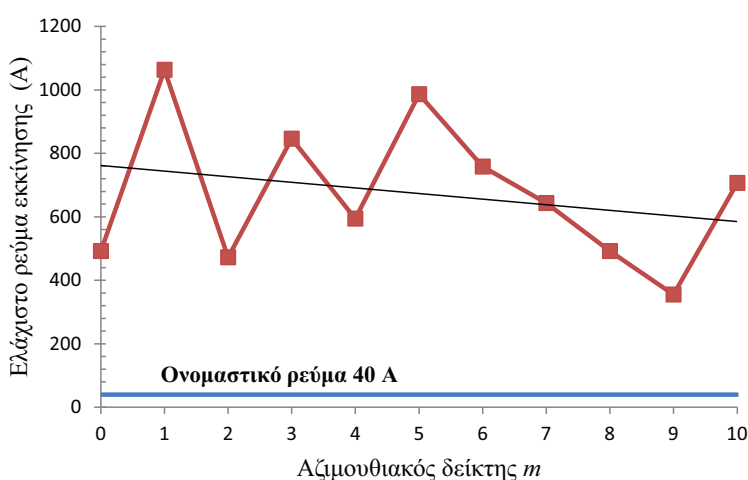
6 – 10, η ζώνη συχνοτήτων που αναζητούμε ρυθμούς επιλέγεται τώρα από 135 GHz έως 160 GHz, ενώ η ελάχιστη τιμή συντελεστή ποιότητας αυξάνεται σε 50. Με αυτά τα πιο αυστηρά κριτήρια περιορίζεται σημαντικά ο αριθμός των ρυθμών που εξετάζουμε και εξοικονομείται πολύτιμος υπολογιστικός χρόνος χωρίς απώλεια στην αξιοπιστία των αποτελεσμάτων.

Τα αποτελέσματα για το δεύτερο πακέτο προσομοιώσεων δίνονται στον Πίνακα 5.3. Παρατηρούμε ότι και πάλι τα ρεύματα εκκίνησης είναι ιδιαίτερα υψηλά. Για

## 5.2 Αριθμητικά αποτελέσματα για το γυροτρόνιο 170 GHz 1 MW για το ITER

Πίνακας 5.3: Αριθμητικά αποτελέσματα προσομοιώσεων για τους ρυθμούς με αξιμουθιακό δείκτη  $m = 6 - 10$ .

Αξιμουθιακός δείκτης $m$	Συνολικός αριθμός ρυθμών	Ποσοστό ρυθμών χαρακτήρα TE	Ελάχιστο ρεύμα εκκίνησης (A)	Συχνότητα πιο ασταθή ρυθμού
6	1114	51.7 %	758 A	138.2 GHz
7	1138	50.6 %	643 A	142.2 GHz
8	1138	54.7 %	492 A	137.5 GHz
9	1180	51.6 %	355 A	153.5 GHz
10	1150	49.1 %	707 A	152.3 GHz
Σύνολο:	5,720			

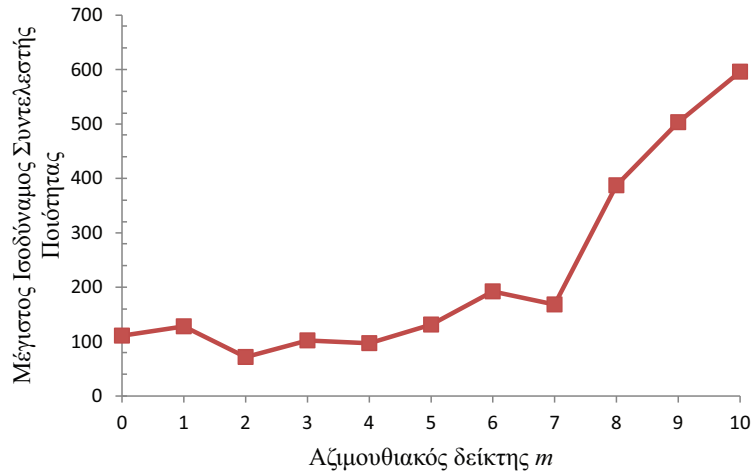


Σχήμα 5.4: Διάγραμμα τιμών ελάχιστου ρεύματος εκκίνησης ανά αξιμουθιακό δείκτη. Στο διάγραμμα παρουσιάζουμε επίσης την ευθεία που ταιριάζει στα δεδομένα με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων και που δείχνει την τάση μείωσης των ρευμάτων εκκίνησης.

να διερευνήσουμε τη συμπεριφορά των ρευμάτων εκκίνησης που υπολογίστηκαν, παρουσιάζουμε στο διάγραμμα του Σχήματος 5.4 τα ελάχιστα ρεύματα εκκίνησης για τις τιμές του αξιμουθιακού δείκτη  $m = 0 - 10$ .

Βλέπουμε από το Σχήμα 5.4 ότι τα ελάχιστα ρεύματα εκκίνησης ως προς τον αξιμουθιακό δείκτη εμφανίζουν αρκετά μεγάλη διασπορά λόγω της τυχαιότητας που υπεισέρχεται στην αλληλεπίδραση, καθώς αυτή εξαρτάται ταυτόχρονα από πολλούς παράγοντες, όπως η συχνότητα συντονισμού, ο συντελεστής ποιότητας και το αξονικό προφίλ πεδίου των ρυθμών. Παρ' όλα αυτά, από την ευθεία που έχουμε ταιριάξει στα δεδομένα με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων είναι αισθητή μια τάση μείωσης των ελαχίστων ρευμάτων εκκίνησης με την αύξηση του αξιμουθιακού δείκτη. Για να προσδιορίσουμε αν όντως υπάρχει μια τέτοια τάση μείωσης και για να την διερευνήσουμε κατανοώντας σε ποιο φαινόμενο οφείλεται, επικεντρώνουμε στα επί μέρους αποτελέσματα της διαδικασίας υπολογισμού.

Κατ' αρχάς, ελέγχουμε αν υπάρχει τάση αύξησης των συντελεστών ποιότητας για μεγαλύτερους αξιμουθιακούς δείκτες. Όπως είναι γνωστό, τα ρεύματα εκκίνησης για την αλληλεπίδραση γυροτρονίου είναι αντιστρόφως ανάλογα με τον συντελεστή



Σχήμα 5.5: Διάγραμμα μεγίστων ισοδύναμων συντελεστών ποιότητας ως προς τον αζιμουθιακό δείκτη.

ποιότητας [2]. Παρ' όλα αυτά, η μέγιστη τιμή του συντελεστή ποιότητας για κάθε αζιμουθιακό δείκτη παραμένει περίπου σταθερή στη ζώνη τιμών μεταξύ 370-400 χωρίς μεγάλη διασπορά και χωρίς συγκεκριμένη τάση μεταβολής. Το ίδιο ανεξάρτητες ως προς τον αζιμουθιακό δείκτη παραμένουν και οι μέσες τιμές των συντελεστών ποιότητας των ρυθμών. Επομένως, η μείωση των ρευμάτων εκκίνησης δεν οφείλεται σε αυξανόμενες τιμές των συντελεστών ποιότητας.

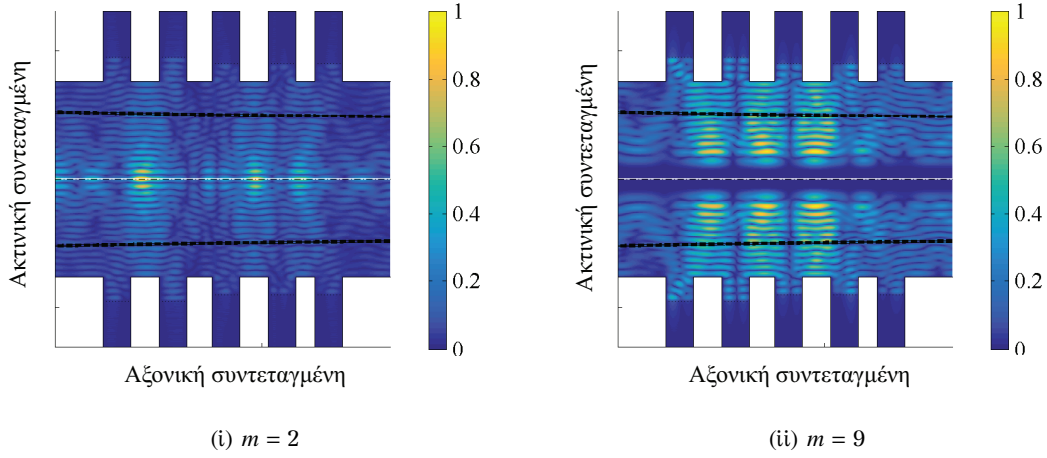
Εξετάζοντας όμως τους ισοδύναμους συντελεστές ποιότητας  $Q_{EQUIV}$ , όπως αυτοί ορίζονται στην ενότητα 4.2.1 και εκφράζουν τη σύνδεση με τον κώδικα EURIDICE, βλέπουμε ότι παρατηρείται μια εμφανέστατη τάση αύξησής τους, καθώς ο αζιμουθιακός δείκτης αυξάνει. Συγκεκριμένα, παρουσιάζουμε στο σχήμα 5.5 τους ισοδύναμους συντελεστές ποιότητας ως προς τον αζιμουθιακό δείκτη  $m$ . Η αύξηση στο μέγεθος των μεγίστων τιμών  $Q_{EQUIV}$ , αν παρακάμψουμε την ταυτόχρονη επίδραση των άλλων παραγόντων (συχνότητα συντονισμού, αξονικό προφίλ) και την τυχαιότητα που αυτοί συνεπάγονται, φαίνεται να ακολουθεί σε γενικές γραμμές την πτώση των ελαχίστων ρευμάτων εκκίνησης. Επομένως, δεν έχουμε παρά να διερευνήσουμε την αιτία της τάσης μείωσης των ρευμάτων εκκίνησης στο περιεχόμενο των ισοδύναμων συντελεστών ποιότητας.

Κάνουμε μια παρένθεση για να ορίσουμε τον συντελεστή σύζευξης και τον συντελεστή αποθηκευμένης ενέργειας, από τους οποίους εξαρτώνται τα ρεύματα εκκίνησης. Αν απομονώσουμε από την (3.3.15) του [11] τους συντελεστές αυτούς, η εξάρτηση των ρευμάτων εκκίνησης μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$I_{st} \propto \frac{1}{J_{m-1}^2(k_{\perp}R_b)} \left( 1 - \frac{m^2}{\chi_{mp}'^2} \right), \quad (5.2.1)$$

όπου  $R_b$  είναι η ακτίνα της δέσμης. Ο όρος  $J_{m-1}^2(k_{\perp}R_b)$  είναι ο συντελεστής σύζευξης με την ηλεκτρονική δέσμη, ο οποίος μεγιστοποιείται κοντά στη μέγιστη τιμή του εγκάρσιου ηλεκτρικού πεδίου και εξαρτάται από τη φορά περιστροφής του ρυθμού. Ο όρος  $1 - m^2/\chi_{mp}'^2$  είναι ανάλογος της αποθηκευμένης ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας στην κοιλότητα και μικραίνει καθώς αυξάνει και πλησιάζει στην μονάδα ο όρος





Σχήμα 5.6: Αξιομυθιακή συνιστώσα ηλεκτρικού πεδίου ρυθμών με το ελάχιστο ρεύμα εκκίνησης i) για  $m = 2$ ,  $I_{st} = 472$  A ii) για  $m = 9$ ,  $I_{st} = 355$  A.

$|m|/\chi'_{mp}$  που είναι ο λόγος καυστικής ακτίνας του ρυθμού (1.3.4 του [11]), αφού το πεδίο καταλαμβάνει μικρότερο όγκο στον κύλινδρο. Και οι δύο συντελεστές ελαττώνουν το ρεύμα εκκίνησης, καθώς αυξάνει ο αξιμοθυακός δείκτης  $m$ . Ο συντελεστής σύζευξης μειώνει το ρεύμα εκκίνησης, αφού βελτιώνεται η σύζευξη πεδίου-δέσμης, όσο η καυστική ακτίνα του ρυθμού πλησιάζει την ακτίνα της ηλεκτρονικής δέσμης. Ο συντελεστής αποθηκευμένης ενέργειας επίσης μειώνει το ρεύμα εκκίνησης, αφού μικρότερη αποθηκευμένη ενέργεια (για δεδομένη τιμή εγκάρσιου ηλεκτρικού πεδίου πάνω στη δέσμη) συνεπάγεται ευκολότερη διέγερση του ρυθμού.

Επιστρέφοντας τώρα στους ισοδύναμους συντελεστές ποιότητας  $Q_{EQUIV}$  πράγματι, σύμφωνα με τον ορισμό τους από τον τύπο (4.2.18), όπως περιγράφηκε στην ενότητα 4.2, αυτοί περιλαμβάνουν τόσο τον συντελεστή αποθηκευμένης ενέργειας όσο και τον συντελεστή σύζευξης με την ηλεκτρονική δέσμη, αφού πριν υπολογιστεί η ενέργεια  $W_{emNESTOR}$  στον κώδικα NESTOR, τα πεδία στους δύο κώδικες εξισώνονται σύμφωνα με τη σχέση (4.2.16).

Για παράδειγμα, στο Σχήμα 5.6(i) παρουσιάζουμε το προφίλ πεδίου του ρυθμού με το ελάχιστο ρεύμα εκκίνησης για  $m = 2$  που είναι 472 A (τιμή επιτρεπτότητας  $\varepsilon_r = 20 - 2j$ ). Στο σχήμα σχεδιάζεται και η ηλεκτρονική δέσμη με το πάχος της και την πραγματική μεταβολή της ακτίνας της. Βλέπουμε ότι η ηλεκτρονική δέσμη δεν είναι κοντά στο μέγιστο του ηλεκτρικού πεδίου. Επίσης, παρατηρούμε ότι το πεδίο καταλαμβάνει όλο το εσωτερικό του κυλίνδρου και επομένως η αποθηκευμένη ηλεκτρομαγνητική ενέργεια του ρυθμού είναι σημαντική. Ο ρυθμός αυτός έχει  $Q = 178$  και ισοδύναμο συντελεστή ποιότητας  $Q_{EQUIV} = 49.1$ .

Αν συγκρίνουμε τον ρυθμό αυτό με έναν ρυθμό υψηλότερου αξιμοθυακού δείκτη μπορούμε να επιμερίσουμε τη διαφορά στους ισοδύναμους συντελεστές ποιότητας στις δύο αιτίες που περιγράψαμε. Για παράδειγμα εξετάζουμε τον ρυθμό με το χαμηλότερο ρεύμα εκκίνησης για  $m = 9$  που είναι 355 A και ο οποίος εμφανίζεται για  $\varepsilon_r = 20 - 2j$ . Ο συγκεκριμένος ρυθμός ταλαντώνεται στα 153.5 GHz με  $Q = 337$  και έχει ισοδύναμο συντελεστή ποιότητας  $Q_{EQUIV} = 303$ . Θυμίζουμε ότι η σχέση που δίνει τον ισοδύναμο συντελεστή ποιότητας, αν η ενέργεια υπολογίζεται όταν



το πεδίο κανονικοποιηθεί με την τιμή μεγίστου πάνω στή δέσμη είναι  $n$  (4.2.18), ή όταν το πεδίο κανονικοποιηθεί με την τιμή μεγίστου γενικά στη διάταξη, η έκφραση γίνεται:

$$Q_{\text{EQUIV}} = Q_{\text{NESTOR}} \frac{W_{\text{emEURIDICE}}}{b^2 W_{\text{em}}}, \quad (5.2.2)$$

όπου ως  $b$  ορίζουμε τον λόγο της τιμής του μεγίστου πεδίου γενικά στη διάταξη προς την τιμή μεγίστου πεδίου πάνω στη δέσμη. Και εδώ ως πεδίο θεωρούμε την ηλεκτρική αξιμουθιακή συνιστώσα του τοπικού συστήματος που είναι στο συντονισμό και δίνεται από την (4.2.8).

Η διαφορά στους ισοδύναμους συντελεστές ποιότητας, όπως εκφράζεται με τον λόγο  $Q_{\text{EQUIV}m9}/Q_{\text{EQUIV}m2} = 6.17$  μεταξύ των ρυθμών, οφείλεται σε 4 παράγοντες. Ο πρώτος παράγοντας είναι η διαφορά στις τιμές των πραγματικών  $Q$  και δίνεται από τον λόγο:  $Q_{m9}/Q_{m2} = 1.89$ . Ο δεύτερος παράγοντας έχει να κάνει με τον λόγο  $W_{\text{emEURIDICE}}^{(m9)}/W_{\text{emEURIDICE}}^{(m2)} = 0.59$ , ο οποίος όπως δείχνει η (2.2.32) του [11], για ρυθμούς κανονικοποιημένους στο ίδιο πλάτος εξαρτάται μόνο από την κατανομή του αξονικού προφίλ πεδίου  $f(z)$ , όπου στην περίπτωση μας είναι τυχαία και δεν δείχνει κάποια ουσιαστική δομική διαφορά μεταξύ ρυθμών με διαφορετικό αξιμουθιακό δείκτη, όπως οι ρυθμοί που συγκρίνουμε. Ο τρίτος παράγοντας είναι η διαφορά στην αποθηκευμένη ενέργεια των ρυθμών. Για να συγκρίνουμε την αποθηκευμένη ενέργεια μεταξύ των δύο ρυθμών κανονικοποιούμε πρώτα, ώστε η μέγιστη τιμή της τοπικής αξιμουθιακής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου (όπως αυτή δίνεται από την (4.2.8)) γενικά στη διάταξη να είναι μονάδα. Έτσι, βρίσκουμε ότι ο λόγος της αποθηκευμένης ενέργειας μεταξύ των δύο ρυθμών είναι  $W_{\text{em}(m9)}/W_{\text{em}(m2)} = 0.75$ . Η τιμή αυτή αντικατοπτρίζει τη μεγαλύτερη αποθηκευμένη ενέργεια που έχει ο ρυθμός για  $m = 2$  σε σχέση με τον ρυθμό για  $m = 9$ . Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 5.2.1, το πεδίο του ρυθμού για  $m = 2$  καταλαμβάνει επίσης την περιοχή κοντά στον άξονα, αντίθετα με τον ρυθμό για  $m = 9$ , ο οποίος έχει μεγαλύτερη καυστική ακτίνα και μηδενικό πεδίο κοντά στον άξονα. Ο τέταρτος παράγοντας είναι η διαφορά στους λόγους  $b$  δηλαδή μεταξύ του μεγίστου ηλεκτρικού πεδίου γενικά στη διάταξη προς το μέγιστο πεδίο πάνω στη δέσμη. Και πάλι ως πεδίο αναφερόμαστε στην αξιμουθιακή συνιστώσα του τοπικού συστήματος συντεταγμένων που βρίσκεται στον συντονισμό. Το κλάσμα των δύο λόγων για τους δύο ρυθμούς είναι 0.49. Όμως η εξάρτηση του ισοδύναμου συντελεστή ποιότητας από τον λόγο  $b$  είναι τετραγωνική, όπως έχουμε σχολιάσει για τον συντελεστή σύζευξης της (5.2.1). Δηλαδή ο συντελεστής σύζευξης για τον ρυθμό με  $m = 9$  είναι περίπου τετραπλάσιος σε σχέση με τον αντίστοιχο του ρυθμού για  $m = 2$ . Συνυπολογίζοντας τους παραπάνω παράγοντες έχουμε:  $1.89 \cdot 0.59 / (0.75 \cdot 0.49^2) \approx 6.17$ . Σημειώνουμε ότι οι δύο πρώτοι παράγοντες, που αποτελούν τυχαίες τιμές χωρίς να οφείλονται σε δομικές διαφορές μεταξύ των δύο ρυθμών διαφορετικών  $m$ , περίπου αλληλοεξουδετερώνονται και η διαφορά στα ισοδύναμα  $Q_{\text{EQUIV}}$  οφείλεται στους δύο τελευταίους παράγοντες. Από την παραπάνω ανάλυση φαίνεται ότι σημαντικότερος παράγοντας στην αύξηση των ισοδύναμων συντελεστών ποιότητας με την αύξηση του  $m$ , αποτελεί η βελτίωση του συντελεστή σύζευξης. Η μείωση της αποθηκευμένης ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας κατά 25% επίσης βοηθάει στην αύξηση των ισοδύναμων  $Q_{\text{EQUIV}}$  αλλά όχι σε τόσο μεγάλο βαθμό. Αντίστοιχη ποσοτική ανάλυση για άλλους συνδυασμούς ρυθμών επιβεβαιώνει επίσης τα παραπάνω συμπεράσματα. Με τον τρόπο αυτό εξηγείται η σημαντική μεταβολή των μέγιστων ισοδύναμων συντελεστών ποιότητας  $Q_{\text{EQUIV}}$ , όπως αυτή παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.5.

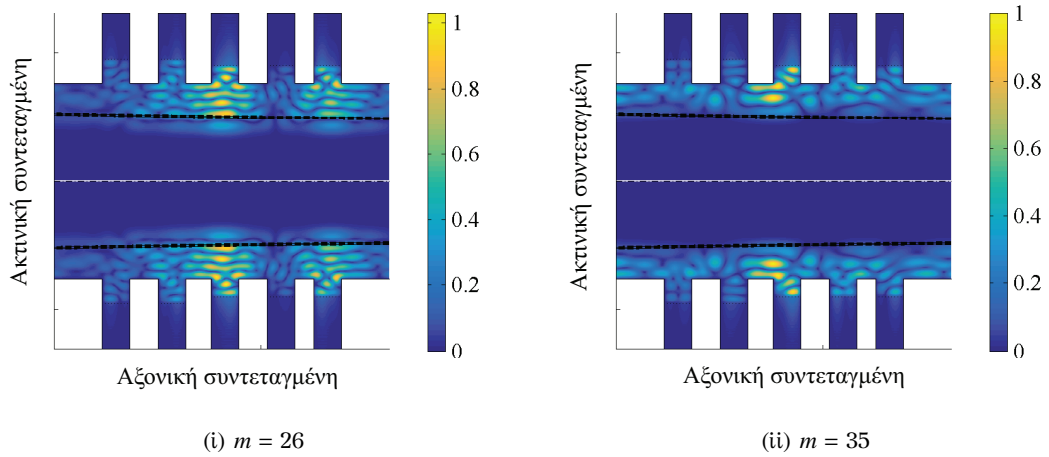
## 5.2 Αριθμητικά αποτελέσματα για το γυροτρόνιο 170 GHz 1 MW για το ITER

Πίνακας 5.4: Αριθμητικά αποτελέσματα προσομοιώσεων για τους ρυθμούς με αξιμουθιακό δείκτη  $m > 20$  για τις 6 τιμές της διηλεκτρικής επιτρεπτότητας.

Αξιμουθιακός δείκτης $m$	Συνολικός αριθμός ρυθμών	Ποσοστό ρυθμών χαρακτήρα TE	Ελάχιστο ρεύμα εκκίνησης (A)	Συχνότητα πιο ασταθή ρυθμού
21	390	56.4 %	402 A	148.8 GHz
22	422	59.2 %	257 A	142.6 GHz
23	394	55.3 %	306 A	145.8 GHz
24	416	57.2 %	308 A	148.7 GHz
25	378	46.0 %	1118 A	152.0 GHz
26	398	47.2 %	81.5 A	145.6 GHz
27	414	45.4 %	134 A	148.9 GHz
28	416	42.8 %	249 A	152.5 GHz
29	354	44.6 %	85.7 A	145.0 GHz
30	380	45.3 %	119 A	149.2 GHz
31	378	37.0 %	85.4 A	151.7 GHz
32	368	44.6 %	309 A	156.1 GHz
33	324	42.0 %	723 A	158.4 GHz
34	290	44.8 %	781 A	150.8 GHz
35	310	60.7 %	2018 A	153.2 GHz
Σύνολο:	5632			

Από τα παραπάνω συνάγεται τόσο αριθμητικά όσο και θεωρητικά, ότι για μικρές τιμές του αξιμουθιακού δείκτη οι ρυθμοί έχουν υψηλότερα ρεύματα εκκίνησης και είναι επομένως λιγότερο επικίνδυνοι για παρασιτική διέγερση. Αντιθέτως, ρυθμοί με μεγαλύτερο  $m$ , που η καυστική τους ακτίνα είναι κοντά στην ακτίνα της δέσμης, παρουσιάζουν τη βέλτιστη σύζευξη με τη δέσμη και επιπλέον έχουν μικρότερες τιμές αποθηκευμένης ενέργειας. Για τους παραπάνω λόγους, προκειμένου να εξοικονομήσουμε υπολογιστικό χρόνο, παραλείπουμε τους ενδιάμεσους δείκτες  $m = 11 - 20$  και εξετάζουμε τους υψηλότερους δείκτες  $m > 20$ . Το άνω όριο του  $m$  θα καθοριστεί από τα αποτελέσματα, καθώς από κάποιο  $m$  και πάνω αναμένεται η καυστική ακτίνα των ρυθμών να ξεπεράσει την ακτίνα της ηλεκτρονικής δέσμης με αποτέλεσμα τη δραστική μείωση των συντελεστών σύζευξης και κατ' επέκταση μια μεγάλη αύξηση των ρευμάτων εκκίνησης.

Επομένως, προχωρούμε τώρα στο τρίτο και τελευταίο πακέτο αποτελεσμάτων για  $m > 20$ . Μιας και μεγαλύτερα  $m$  απαιτούν υψηλότερο χρόνο για την αριθμητική αποτίμηση των συναρτήσεων Bessel, αυξάνουμε περαιτέρω την ελάχιστη τιμή  $Q$ , για την οποία αναζητούμε και υπολογίζουμε ρυθμούς, στην τιμή 90. Στις προσομοιώσεις η τιμή διηλεκτρικής επιτρεπτότητας  $\epsilon_r = 20 - 2j$  πλέον παραλείπεται, καθώς τα αποτελέσματα για την τιμή αυτή στους χαμηλότερους αξιμουθιακούς δείκτες ήταν συστηματικά σχεδόν πανομοιότυπα με τα αποτελέσματα για την τιμή  $\epsilon_r = 20 - j$ . Η συμπεριφορά των αποτελεσμάτων ως προς την τιμή της διηλεκτρικής επιτρεπτότητας θα αναλυθεί με λεπτομέρεια στην ενότητα 5.4.1. Για το λόγο αυτό οι προσομοιώσεις συνεχίστηκαν για τις έξι βασικές τιμές διηλεκτρικής επιτρεπτότητας που έχουμε ήδη αναφέρει. Στη συνέχεια, θα παρουσιάσουμε και τα αποτελέσματα για την πραγματική τιμή της διηλεκτρικής επιτρεπτότητας, όπως αυτή μετρήθηκε πειραματικά. Τα αποτελέσματα λοιπόν για τους αξιμουθιακούς δείκτες  $m > 20$  δίνονται στον πίνακα



Σχήμα 5.7: Αξιομυθιακή συνιστώσα ηλεκτρικού πεδίου ρυθμών με το ελάχιστο ρεύμα εκκίνησης i) για  $m = 26$ ,  $I_{st} = 81.5$  A ii) για  $m = 35$ ,  $I_{st} = 2018$  A.

#### 5.4.

Παρατηρούμε ότι στο τρίτο αυτό πακέτο προσομοιώσεων για τους υψηλούς αξιμουθιακούς δείκτες έχουμε ρυθμούς με αισθητά χαμηλότερα ρεύματα εκκίνησης σε σχέση με τους ρυθμούς για  $m \leq 10$ . Επιβεβαιώνεται λοιπόν και αριθμητικά το συμπέρασμα που εξάγαμε, ότι οι πλέον επικίνδυνοι ρυθμοί για παρασιτική διέγερση είναι αυτοί με μεγαλύτερους αξιμουθιακούς δείκτες, όπου η καυστική ακτίνα είναι κοντά στην ακτίνα της δέσμης. Τα χαμηλότερα ρεύματα εκκίνησης εμφανίζονται για τους αξιμουθιακούς δείκτες 26 έως 31, ενώ για  $m \geq 35$  οι τιμές των ρευμάτων αυξάνουν ραγδαία, καθώς όπως εξηγήσαμε η καυστική ακτίνα των ρυθμών γίνεται μεγαλύτερη από την ακτίνα της δέσμης. Οι πιο ασταθείς ρυθμοί για όλα τα  $m$  βρέθηκαν για τις τιμές επιτρεπτότητας  $\epsilon_r = 20 - j$  και  $\epsilon_r = 10 - 0.25j$ , ενώ ο λόγος  $\kappa$  γι' αυτούς, όπως τον ορίσαμε στην (5.1.1), ήταν πάντα μεγαλύτερος της μονάδας, γεγονός που επιβεβαιώνει την προτίμηση της αλληλεπίδρασης γυροτρονίου σε ρυθμούς με χαρακτήρα TE.

Στο Σχήμα 5.7(i) παρουσιάζουμε το προφίλ πεδίου για τον ρυθμό με το ελάχιστο ρεύμα εκκίνησης που βρέθηκε για όλους τους αξιμουθιακούς δείκτες. Βλέπουμε πως πράγματι η σύζευξη με τη δέσμη είναι πολύ καλή, καθώς η θέση της συμπίπτει σε μεγάλο βαθμό με το μέγιστο του πεδίου. Αντιθέτως, στο Σχήμα 5.7(ii), όπου παρουσιάζεται ο καλύτερα συνεργαζόμενος με τη δέσμη ρυθμός για  $m = 35$  ( $I_{st} = 2018$  A), βλέπουμε ότι στη θέση της δέσμης το πεδίο είναι ασθενές. Για μεγαλύτερους αξιμουθιακούς δείκτες, το πεδίο απομακρύνεται όλο και περισσότερο από τη δέσμη δίνοντας εξαιρετικά χαμηλούς συντελεστές σύζευξης και πολύ υψηλά ρεύματα εκκίνησης. Επομένως, δεν έχει κανένα νόημα η συνέχιση της αναζήτησης ασταθών ρυθμών για μεγαλύτερους αξιμουθιακούς δείκτες.

Στον Πίνακα 5.5 παρουσιάζουμε αναλυτικά τους ρυθμούς για την τιμή της διηλεκτρικής επιτρεπτότητας  $\epsilon_r = 20 - j$  που βρέθηκαν να έχουν ρεύμα εκκίνησης χαμηλότερο από 150 A. Βλέπουμε ότι ο αριθμός των ρυθμών με χαμηλότερο ρεύμα εκκίνησης κάτω από 150 A είναι πολύ μικρός. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι τα ελάχιστα ρεύματα εκκίνησης που υπολογίζονται τόσο με τον κώδικα ISTART όσο και με τον κώδικα Envidiki, είναι πάνω από δύο φορές μεγαλύτερα σε σχέση με

## 5.2 Αριθμητικά αποτελέσματα για το γυροτρόνιο 170 GHz 1 MW για το ITER

Πίνακας 5.5: Ρυθμοί με  $I_{st} < 150A$  για την τιμή διηλεκτρικής επιτρεπτότητας  $\epsilon_r = 20 - j$ .

Αζιμουθ. δείκτης $m$	Συχνότητα συντονισμού	Συντελεστής ποιότητας $Q$	Φορά περιστροφής	Ρεύμα εκκίνησης ISTART	Ρεύμα εκκίνησης Envidiki
26	145.596 GHz	211	+	81.5 A	90 A
30	149.176 GHz	199	-	119 A	153 A
31	151.724 GHz	188	-	85.4 A	104 A
31	151.385 GHz	204	-	133 A	136 A

το ονομαστικό ρεύμα του γυροτρονίου (40 A). Επομένως, η διέγερση παρασιτικών ρυθμών με την εμπρός αλληλεπίδραση στον δίαυλο του Ευρωπαϊκού γυροτρονίου για το ITER, είναι μάλλον δύσκολο να συμβεί. Παρ' όλα αυτά, δεν θα πρέπει να αποκλείσθει η πιθανότητα παρασιτικής διέγερσης αυτού του τύπου, καθώς τα ελάχιστα ρεύματα εκκίνησης δεν απέχουν πάρα πολύ από το ονομαστικό, ενώ το μοντέλο μας δεν είναι απολύτως ακριβές, αφού θεωρεί σταθερή ακτίνα των μεταλλικών δαχτυλιδιών και αγνοεί τις αζιμουθιακές ρυτιδώσεις στα μεταλλικά δαχτυλίδια.

Αφού είχαν υπολογιστεί τα ρεύματα εκκίνησης των ρυθμών για τις 6 χαρακτηριστικές τιμές της διηλεκτρικής επιτρεπτότητας που προαναφέραμε, πραγματοποιήθηκαν μετρήσεις της διηλεκτρικής επιτρεπτότητας για δείγματα υλικού της ίδιας σειράς κατασκευής με αυτά που χρησιμοποιούνται στο συγκεκριμένο γυροτρόνιο. Η διαδικασία των μετρήσεων πραγματοποιήθηκε παρουσία μας στο ινστιτούτο φυσικής πλάσματος CRPP του ομοσπονδιακού πολυτεχνείου της Λωζάννης EPFL. Για τη διαδικασία των μετρήσεων χρησιμοποιήθηκε εξειδικευμένη διάταξη μετρήσεων στη χιλιοστομετρική περιοχή με ημι-οπτικά κάτοπτρα όπως στο [109], ενώ η μεθοδολογία εξαγωγής των τιμών της επιτρεπτότητας από τις μετρήσεις των συντελεστών ανάκλασης έγινε σύμφωνα με το [110]. Η τιμή που μετρήθηκε στη ζώνη συχνοτήτων ενδιαφέροντος είναι κατά προσέγγιση  $\epsilon_r = 20 - 14j$ . Αν και η γωνία απωλειών  $\tan \delta$  είναι αρκετά μεγαλύτερη από τις χαρακτηριστικές τιμές που χρησιμοποιήσαμε, τα αποτελέσματα για την τιμή  $20 - j$  στην οποία και εστίασαμε, βρέθηκαν να μη διαφέρουν σημαντικά σε σχέση με τα αποτελέσματα για τη μετρούμενη τιμή της σχετικής επιτρεπτότητας. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα για τη μετρούμενη τιμή της σχετικής επιτρεπτότητας.

Επαναλαμβάνουμε λοιπόν τα τρεξίματα για τη νέα τιμή της διηλεκτρικής επιτρεπτότητας  $\epsilon_r = 20 - 14j$ . Μιας και όπως αναλύσαμε οι χαμηλοί αζιμουθιακοί δείκτες είναι πολύ λιγότερο επικίνδυνοι ανεξαρτήτου τιμής διηλεκτρικής επιτρεπτότητας, ξεκινάμε τη μελέτη κατ' ευθείαν για τους αζιμουθιακούς δείκτες  $m \geq 20$ . Με την ίδια διαδικασία λοιπόν και με τον κώδικα ISTART, οι ρυθμοί με το χαμηλότερο ρεύμα εκκίνησης που βρέθηκαν για κάθε αζιμουθιακό δείκτη παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.6. Παρατηρούμε λοιπόν ότι και πάλι βρίσκουμε με τον κώδικα ISTART υψηλά ρεύματα εκκίνησης σχεδόν πάνω από 100 A. Στον Πίνακα 5.7 παραθέτουμε τα χαρακτηριστικά όλων των ρυθμών που βρέθηκαν με χαμηλότερο ρεύμα εκκίνησης από 150 A. Στην περίπτωση αυτή μόνο 3 ρυθμοί παρουσιάζουν ρεύμα εκκίνησης μικρότερο των 150 A, αλλά και πάλι αρκετά μεγαλύτερο από το ονομαστικό ρεύμα του γυροτρονίου. Τα ρεύματα εκκίνησης όπως υπολογίζονται με τον κώδικα Envidiki εμφανίζονται κατά κανόνα λίγο υψηλότερα σε σχέση με τον κώδικα ISTART, καθώς όπως έχουμε εξηγήσει, η επίδραση της

Πίνακας 5.6: Αριθμητικά αποτελέσματα προσομοιώσεων για τους ρυθμούς με αξιμουθιακό δείκτη  $m \geq 20$  για τη μετρομένη τιμή της επιτρεπτότητας:  $\varepsilon_r = 20 - 14j$ .

Αξιμουθιακός δείκτης $m$	Συνολικός αριθμός ρυθμών	Ποσοστό ρυθμών χαρακτήρα TE	Ελάχιστο ρεύμα εκκίνησης (A)	Συχνότητα πιο ασταθή ρυθμού
20	94	46.8 %	879 A	143.6 GHz
21	112	53.6 %	197 A	147.2 GHz
22	106	50.9 %	421 A	139.8 GHz
23	102	39.0 %	414 A	154.6 GHz
24	96	50.0 %	99.4 A	147.9 GHz
25	106	45.3 %	351 A	140.9 GHz
26	104	44.2 %	157 A	143.4 GHz
27	96	41.7 %	198 A	147.7 GHz
28	96	42.6 %	115 A	150.7 GHz
29	106	35.9 %	145 A	143.6 GHz
30	102	37.3 %	494 A	135.4 GHz
31	94	38.3 %	658 A	151.7 GHz
32	100	36.0 %	539 A	153.4 GHz
33	94	44.7 %	501 A	156.9 GHz
34	90	40.0 %	1583 A	148.0 GHz
35	86	44.2 %	1445 A	151.5 GHz
36	76	63.2 %	2375 A	154.9 GHz
Σύνολο:	1658			

Πίνακας 5.7: Ρυθμοί με  $I_{st} < 150A$  για τη μετρομένη τιμή επιτρεπτότητας  $\varepsilon_r = 20 - 14j$ .

Αξιμουθ. δείκτης $m$	Συχνότητα συντονισμού	Συντελεστής ποιότητας $Q$	Φορά περιστροφής	Ρεύμα εκκίνησης ISTART	Ρεύμα εκκίνησης Envidiki
24	147.883 GHz	211	-	99.4 A	98 A
28	150.737 GHz	199	+	115 A	131 A
29	143.636 GHz	188	-	145 A	188 A

μεταβολής του μαγνητικού πεδίου στον λόγο ταχυτήτων υπολογίζεται ακριβέστερα. Τα αποτελέσματα για τα ελάχιστα ρεύματα εκκίνησης συγκρινόμενα με τα αντίστοιχα που εξήχθησαν για την τιμή της σχετικής επιτρεπτότητας  $\varepsilon_r = 20 - j$  κινούνται σε παρόμοια τάξη μεγέθους.

Πίνακας 5.8: Παράμετροι σημείου λειτουργίας χαμηλής τάσης Ευρωπαϊκού γυροτρονίου για το ITER.

Τάση λειτουργίας	Ρεύμα λειτουργίας	Λόγος ταχυτήτων $\alpha$	Μέγιστη τιμή μαγνητικού πεδίου
71.0 kV	45.3 A	1.22	6.69 T

## 5.2 Αριθμητικά αποτελέσματα για το γυροτρόνιο 170 GHz 1 MW για το ITER

Πίνακας 5.9: Αριθμητικά αποτελέσματα προσομοιώσεων για τους ρυθμούς με αξιωματικό δείκτη  $m \geq 20$  για τη μετρούμενη τιμή της επιτρεπτότητας:  $\epsilon_r = 20 - 14j$  (σημείο λειτουργίας χαμηλής τάσης).

Αξιωματικός δείκτης $m$	Συνολικός αριθμός ρυθμών	Ποσοστό ρυθμών χαρακτήρα TE	Ελάχιστο ρεύμα εκκίνησης (A)	Συχνότητα πιο ασταθή ρυθμού
20	94	46.8 %	689 A	143.6 GHz
21	112	53.6 %	202 A	147.2 GHz
22	106	50.9 %	513 A	139.8 GHz
23	102	39.0 %	468 A	154.6 GHz
24	96	50.0 %	84.6 A	147.9 GHz
25	106	45.3 %	388 A	140.0 GHz
26	104	44.2 %	179 A	143.4 GHz
27	96	41.7 %	359 A	136.7 GHz
28	94	42.6 %	123 A	150.7 GHz
29	106	35.9 %	179 A	143.6 GHz
30	102	37.3 %	537 A	135.5 GHz
31	94	38.3 %	878 A	151.7 GHz
32	100	36.0 %	613 A	141.6 GHz
33	94	44.7 %	556 A	156.9 GHz
34	90	40.0 %	2245 A	148.0 GHz
35	86	44.2 %	1481 A	151.5 GHz
36	76	63.2 %	2655 A	154.9 GHz
Σύνολο:	1658			

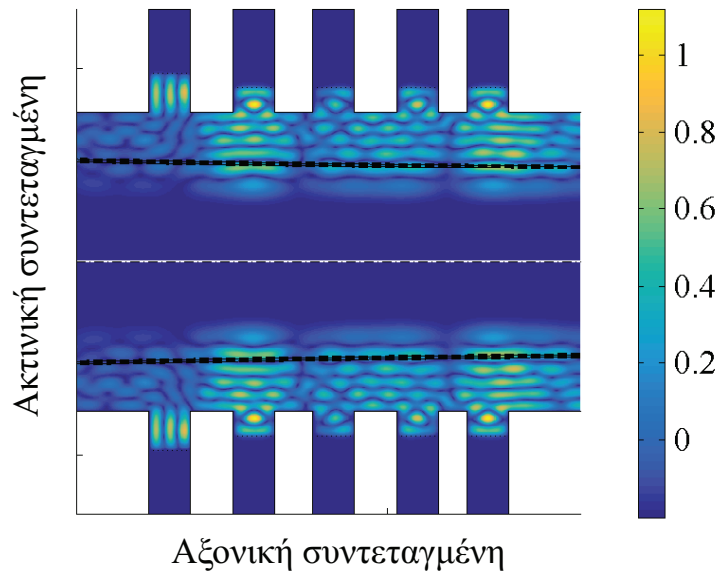
### 5.2.2 Ρεύματα εκκίνησης για το σημείο λειτουργίας χαμηλής τάσης.

Συνεχίζουμε τώρα τους υπολογισμούς για το σημείο λειτουργίας χαμηλής τάσης του γυροτρονίου. Το σημείο αυτό αν και δεν ήταν το αρχικό σημείο για το οποίο σχεδιάστηκε το γυροτρόνιο, προορίζεται να είναι το νέο ονομαστικό σημείο λειτουργίας. Για το λόγο αυτό κρίθηκε απαραίτητο να επαναληφθούν οι υπολογισμοί των ρευμάτων εκκίνησης ώστε να αξιολογήσουμε την πιθανότητα διέγερσης παρασιτικών ρυθμών για τις παραμέτρους λειτουργίας του νέου σημείου. Οι παράμετροι λειτουργίας του σημείου χαμηλής τάσης (71.0 kV) δίνονται στον Πίνακα 5.8.

Στους υπολογισμούς για το νέο σημείο λειτουργίας κατ' αρχάς η γεωμετρία του διαύλου δέσμης παραμένει η ίδια και επομένως τα αποτελέσματα για την κρύα διάταξη (χαρακτηριστικά των συντονιζόμενων ρυθμών) είναι ήδη διαθέσιμα. Λόγω διαφορετικής τάσης, μαγνητικού πεδίου και λόγου ταχυτήτων  $\alpha$  του νέου σημείου λειτουργίας του γυροτρονίου, αλλάζουν ελαφρώς οι τροχιές των ηλεκτρονίων (ακτινική θέση κέντρων περιστροφής και ακτίνα Larmor) κατά μήκος της διάταξης. Επομένως, θα πρέπει να υπολογιστούν εξαρχής τα ισοδύναμα προφίλ πεδίου με τα οποία τροφοδοτούνται οι κώδικες του πακέτου EURIDICE. Τέλος, εκτελούμε τους υπολογισμούς μόνο για τη μετρούμενη τιμή της σχετικής επιτρεπτότητας  $\epsilon_r = 20 - 14j$ , ενώ παραλείπουμε τους χαμηλούς αξιωματικούς δείκτες και εστιάζουμε κατ' ευθείαν στα αποτελέσματα για  $m \geq 20$  μιας και λόγω της πολύ κοντινής ακτινικής θέσης της δέσμης σε σχέση με το σημείο υψηλής τάσης, ισχύουν ακριβώς τα ίδια συμπεράσματα

Πίνακας 5.10: Ρυθμοί με  $I_{st} < 150A$  για τη μετρομένη τιμή επιτρεπτότητας  $\epsilon_r = 20 - 14j$  (σημείο λειτουργίας χαμηλής τάσης).

Αξιμουθ. δείκτης $m$	Συχνότητα συντονισμού	Συντελεστής ποιότητας $Q$	Φορά περιστροφής	Ρεύμα εκκίνησης ISTART	Ρεύμα εκκίνησης Envidiki
24	147.883 GHz	211	-	84.6 A	88.0 A
28	150.737 GHz	199	+	123 A	140 A



Σχήμα 5.8: Αξιομυθιακή συνιστώσα ηλεκτρικού πεδίου του πιο ασταθού ρυθμού με ρεύμα εκκίνησης 88 A ( $m = 24$ ,  $f_r = 147.883$  GHz).

που εξάγαμε στην προηγούμενη ενότητα.

Τα αποτελέσματα για τα ρεύματα εκκίνησης ανά αξιμουθιακό δείκτη παρατίθενται στον Πίνακα 5.9. Τα ελάχιστα ρεύματα εκκίνησης κινούνται στην ίδια τάξη μεγέθους με τα αντίστοιχα του σημείου λειτουργίας υψηλής τάσης, όπως τα τελευταία δίνονται στον Πίνακα 5.6. Σε πολλές περιπτώσεις μάλιστα εμφανίζονται ως ρυθμοί με το χαμηλότερο ρεύμα εκκίνησης οι ίδιοι ρυθμοί και για τα δύο σημεία λειτουργίας.

Στον Πίνακα 5.10 δίνουμε τα χαρακτηριστικά των ρυθμών με ρεύμα εκκίνησης χαμηλότερο από 150 A, όπως αυτά υπολογίστηκαν τόσο με τον κώδικα ISTART όσο και με τον κώδικα Envidiki. Και σε αυτήν την περίπτωση τα αποτελέσματα είναι παρόμοια με αυτά του σημείου υψηλής τάσης και μόνο δύο ρυθμοί εμφανίζουν σχετικά χαμηλά ρεύματα εκκίνησης. Σημαντική ποιοτική διαφοροποίηση δεν παρατηρείται μεταξύ των δύο σημείων λειτουργίας και οι πλέον επικίνδυνοι για παρασιτική διέγερση ρυθμοί είναι κοινός και στα δύο σημεία λειτουργίας.

Στο Σχήμα 5.8 απεικονίζεται η αξιμουθιακή συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου του ρυθμού με το χαμηλότερο ρεύμα εκκίνησης και η τροχιά της ηλεκτρονικής δέσμης. Παρατηρούμε και πάλι την καλή σύζευξη του ρυθμού με την ηλεκτρονική δέσμη όπως και το γεγονός ότι λόγω της συγκεκριμένης τιμής της διηλεκτρικής επιτρεπτότητας, το πεδίο ανακλάται κατά το μεγαλύτερο μέρος του στο διηλεκτρικό χωρίς να διεισδύει

σε αυτό.

### 5.2.3 Έλεγχος της ορθής προσομοίωσης της αλληλεπίδρασης

Στην υποενότητα αυτή θα ελέγξουμε για τη συγκεκριμένη γεωμετρία ότι ο τρόπος που προσομοιώνουμε την αλληλεπίδραση σύμφωνα με τη μέθοδο που αναπτύχθηκε στο Κεφάλαιο 4 είναι ορθός. Συγκεκριμένα, θα χρησιμοποιήσουμε τον απλό κώδικα παρακολούθησης (tracking) που αναπτύχθηκε στην ενότητα 4.3 για να συγκρίνουμε μεγέθη της αλληλεπίδρασης με αυτά που δίνει ο συνδυασμός των κωδίκων NESTOR-EURIDICE. Ο έλεγχος αυτός επαληθεύει τη γενικότερη προσέγγιση της μεθόδου, την ισχύ των απλοποιήσεων που αυτή περιλαμβάνει, αλλά και την παραμετροποίηση των τρεξιμάτων ως προς τη συγκεκριμένη γεωμετρία που εξετάσαμε. Έτσι, είμαστε σε μεγάλο βαθμό βέβαιοι για την ισχύ των αποτελεσμάτων, πράγμα που δεν μπορεί να ελεγχθεί διαφορετικά λόγω της πρωτοτυπίας της μεθόδου και της πρακτικής έλλειψης άλλων κωδίκων που αντιμετωπίζουν το συγκεκριμένο πρόβλημα.

Λόγω των μεγάλων απαιτήσεων σε υπολογιστικούς πόρους του κώδικα ελέγχου, προφανώς ο έλεγχος δεν θα πραγματοποιηθεί για όλους τους ρυθμούς παρά μόνο θα γίνει δειγματοληπτικά για λίγους από αυτούς. Επιλέξαμε να επαληθεύσουμε την αλληλεπίδραση για τους ρυθμούς που έχουν τα μικρότερα ρεύματα εκκίνησης, οι οποίοι ενδιαφέρουν περισσότερο στο πρόβλημα μας.

Ουσιαστικά, αυτό που επαληθεύουμε με τους ελέγχους αυτής της υποενότητας, είναι η ισοδύναμη αντιμετώπιση του κινηματικού μέρους του προβλήματος μεταξύ του συνδυασμού NESTOR-EURIDICE και του κώδικα παρακολούθησης της ενότητας 4.3, ο οποίος έχει την δυνατότητα να μην περιλαμβάνει καμία απλοποίηση και γι' αυτό θεωρούμε ότι δίνει τα σωστά αποτελέσματα. Για να το επιτύχουμε αυτό βρίσκουμε αρχικά ένα επίπεδο ισχύος των πεδίων, στο οποίο η αλληλεπίδραση του υπό εξέταση ρυθμού με τη δέσμη είναι σημαντική. Η αλληλεπίδραση γίνεται μονάχα για ένα πέρασμα των ηλεκτρονίων και δεν ενδιαφέρει αν μπορεί να διατηρηθεί στο συγκεκριμένο επίπεδο ισχύος. Το χαρακτηριστικό μέγεθος της αλληλεπίδρασης που συγκρίνουμε, είναι η ηλεκτρονική απόδοση όπως αυτή ορίζεται από την (4.3.3) για τα 37 ηλεκτρόνια με ομοιόμορφα κατανεμημένα αρχική φάση, που χρησιμοποιούνται στους υπολογισμούς για να περιγραφεί η ηλεκτρονική δέσμη. Αφού βρεθεί ένα συγκεκριμένο επίπεδο ισχύος στο οποίο η ηλεκτρονική απόδοση δεν είναι αμελητέα, εκτελούμε την προσομοίωση της αλληλεπίδρασης, δηλαδή το πέρασμα των ηλεκτρονίων από τα πεδία του ρυθμού, με τρεις διαφορετικούς τρόπους και συγκρίνουμε κατόπιν μεταξύ τους το μέγεθος της ηλεκτρονικής απόδοσης.

Ο πρώτος τρόπος προσομοίωσης (μέθοδος A) είναι η εκτέλεση του κώδικα Envidiki του πακέτου EURIDICE με το ισοδύναμο προφίλ πεδίου του ρυθμού, όπως αυτό υπολογίζεται από τον συνδυασμό κωδίκων NESTOR-EURIDICE που αναπτύχθηκε στο Κεφάλαιο 4. Ο τρόπος αυτός προσομοίωσης περιλαμβάνει όλες τις προσεγγίσεις και απλοποιήσεις του κινηματικού μέρους και αντιστοιχεί στην μέθοδο προσομοίωσης που θέλουμε να επαληθεύσουμε. Η εκτέλεση του κώδικα Envidiki με τον τρόπο αυτόν, εφ' όσον έχει υπολογιστεί ήδη ο ρυθμός, είναι εξαιρετικά γρήγορη και σχεδόν άμεσα δίνει την ηλεκτρονική απόδοση για το πέρασμα των ηλεκτρονίων από τα πεδία.

Ο δεύτερος τρόπος προσομοίωσης (μέθοδος B) είναι ένας ενδιάμεσος τρόπος, ο οποίος συνίσταται στην εκτέλεση του κώδικα παρακολούθησης της ενότητας 4.3 με



Πίνακας 5.11: Επαλήθευση των προσομοιώσεων της αλληλεπίδρασης για τους ρυθμούς με το χαμηλότερο ρεύμα εκκίνησης

Αζιμουθ. δείκτης $m$	Συχν. συντ. (GHz)	Τάση (kV)	Τιμή διπλ. επιτ.	Επίπεδο ισχύος MW	Απόδοση μεθόδου A	Απόδοση μεθόδου B	Απόδοση μεθόδου Γ
+26	145.596	79.5	$20 - 1j$	1.0	5.68	5.83	5.72
-31	151.724	79.5	$20 - 1j$	0.5	3.90	3.75	3.72
-31	151.385	79.5	$20 - 1j$	1.0	8.39	8.41	8.46
-24	147.883	79.5	$20 - 14j$	1.0	4.49	4.75	4.31
+28	150.737	79.5	$20 - 14j$	0.5	4.30	4.24	4.40
-24	147.883	71.0	$20 - 14j$	1.0	5.26	5.52	5.39
+28	150.737	71.0	$20 - 14j$	1.0	7.81	7.70	7.87

είσοδο όμως τα πεδία όπως αυτά υπολογίζονται αναλυτικά από τον φορμαλισμό που χρησιμοποιεί το πακέτο κωδίκων EURIDICE (π.χ. εξίσωση (4.2.1) για το  $E_{\Phi}$ ). Η συνάρτηση του προφίλ πεδίου  $f(z)$  εισάγεται από το ισοδύναμο προφίλ πεδίου, όπως αυτό έχει υπολογιστεί από τον συνδυασμό των κωδίκων NESTOR-EURIDICE. Επομένως, ο δεύτερος αυτός τρόπος προσομοίωσης είναι υβριδικός με την έννοια ότι υπολογίζει τις εξισώσεις κίνησης στη γρήγορη χρονική κλίμακα με τον κώδικα παρακολούθησης, αλλά τα πεδία εισάγονται σύμφωνα με τον αναλυτικό φορμαλισμό της EURIDICE. Και αυτός ο τρόπος είναι σχετικά γρήγορος, καθώς τα πεδία εισάγονται αναλυτικά.

Τέλος, ο τρίτος τρόπος προσομοίωσης (μέθοδος Γ) είναι ο πιο πλήρης και θα είναι η βάση σύγκρισης των αποτελεσμάτων. Σε αυτόν η κίνηση των ηλεκτρονίων υπολογίζεται από τον κώδικα παρακολούθησης, ο οποίος ενσωματώνεται στον κώδικα NESTOR και υπολογίζει τα πεδία που αισθάνονται τα ηλεκτρόνια κατ' ευθείαν από τον τελευταίο. Ο τρόπος αυτός αναγκαστικά είναι αρκετά αργός καθώς παρακάμπτει εντελώς τον κώδικα EURIDICE και χρησιμεύει μονάχα για την επαλήθευση του πρώτου τρόπου προσομοίωσης που υλοποιεί τον συνδυασμό των κωδίκων EURIDICE-NESTOR. Για να εξοικονομηθεί πολύτιμος υπολογιστικός χρόνος, η βασική παραδοχή που γίνεται είναι ότι λαμβάνονται υπ' όψιν μόνο οι εγκάρσιες συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου. Ο βαθμός επίδρασης των άλλων πεδιακών συνιστώσων που είναι δευτερεύουσας σημασίας στην αλληλεπίδραση γυροτρονίου θα αποτελέσει αντικείμενο μελλοντικής μελέτης.

Τα αποτελέσματα της σύγκρισης μεταξύ των τρόπων προσομοίωσης παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.11. Στην πρώτη στήλη δίνεται ο αζιμουθιακός δείκτης του υπό εξέταση ρυθμού σημειώνοντας και το πρόσημό του, όπου με το πρόσημο + αντιπροσωπεύεται ο ρυθμός με θετικό αζιμουθιακό δείκτη (αντιπεριστρεφόμενος σε σχέση με την περιστροφή των ηλεκτρονίων). Στη δεύτερη στήλη δίνεται η συχνότητα συντονισμού του ρυθμού, στην τρίτη η τάση λειτουργίας του γυροτρονίου αν δηλαδή η προσομοίωση αφορά το σημείο υψηλής ή το σημείο χαμηλής τάσης του γυροτρονίου, στην τέταρτη στήλη δίνεται η τιμή της διπλεκτρικής επιρρεπτότητας για την οποία έγινε η προσομοίωση, στην πέμπτη στήλη δίνεται το επίπεδο της ισχύος του ρυθμού (που εν γένει είναι εξωπραγματικά υψηλό, αφού ο κύριος σκοπός είναι να προκληθεί μετρήσιμη μεταβολή στις ιδιότητες των ηλεκτρονίων), ενώ στις τρεις τελευταίες στήλες δίνεται η ηλεκτρονική απόδοση των τριών τρόπων προσομοίωσης που περιγράψαμε. Οι ρυθμοί που εξετάσαμε είναι όσοι ρυθμοί αναφέρονται στους

Πίνακες 5.5, 5.7 και 5.10 και έχουν ρεύμα εκκίνησης κάτω από 150 A.

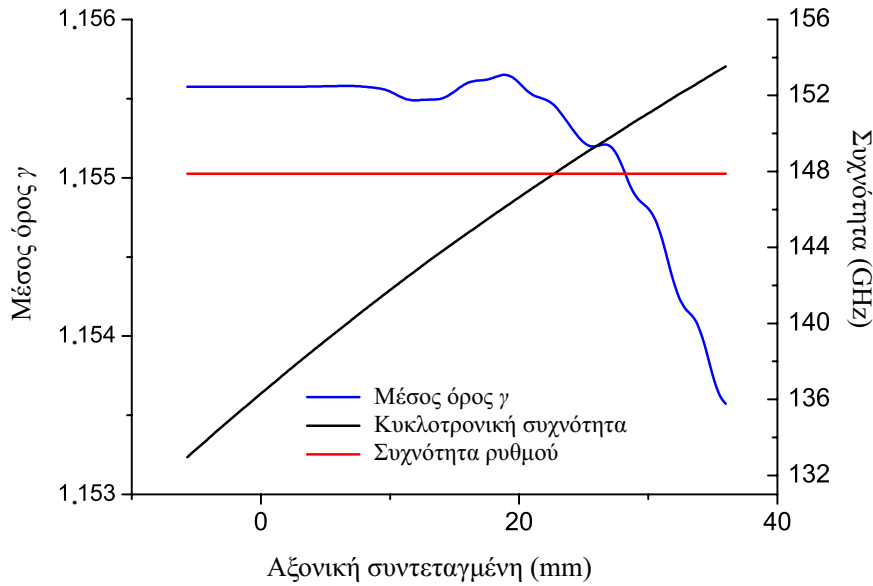
Παρατηρούμε στον Πίνακα 5.11 ότι για όλους τους ρυθμούς που εξετάσαμε, η ηλεκτρονική απόδοση που υπολογίστηκε για τους τρεις τρόπους προσομοίωσης είναι πάρα πολύ κοντά. Αν λάβουμε υπ' όψιν τις προσεγγίσεις που έχουν γίνει στον πρώτο τρόπο προσομοίωσης, ο οποίος υπολοποιεί τον συνδυασμό των κωδίκων EURIDICE-NESTOR και τη διαφορά στον απαιτούμενο υπολογιστικό χρόνο εκτέλεσης μεταξύ του κώδικα EURIDICE και του απλού κώδικα παρακολούθησης, η συμφωνία των αποτελεσμάτων είναι εξαιρετική. Επομένως, με βάση τα παραπάνω θεωρούμε ότι επαληθεύεται, τόσο γενικά αλλά και για τις παραμέτρους της συγκεκριμένης γεωμετρίας, η ορθή προσομοίωση της αλληλεπίδρασης από τον συνδυασμό των κωδίκων που αναπτύξαμε στο Κεφάλαιο 4.

#### 5.2.4 Ανάλυση αλληλεπίδρασης και συμπεράσματα

Όπως έχει αναλυθεί στο κεφάλαιο της εισαγωγής και στην ενότητα 1.3.3, οι παρασιτικές ταλαντώσεις στον διαύλο δέσμης του γυροτρονίου μπορεί να διεγείρονται λόγω αλληλεπίδρασης είτε με το οδεύον προς τα μπροστά είτε με το οδεύον προς τα πίσω κύμα του ρυθμού. Τα σύνθετα προφίλ πεδίου των συντονιζόμενων ρυθμών μέσα σε μια γεωμετρία διαύλου δέσμης, συντίθενται από πολλαπλά κύματα που οδεύουν είτε προς τα μπροστά είτε προς τα πίσω καλύπτοντας ένα συνεχές φάσμα του αξονικού κυματαριθμού. Η ηλεκτρονική δέσμη, της οποίας οι ιδιότητες (ακτίνα, κυκλοτρονική συχνότητα και λόγος ταχυτήτων  $\alpha$ ) μεταβάλλονται σημαντικά κατά μήκος του διαύλου δέσμης λόγω του μεταβαλλόμενου μαγνητοστατικού πεδίου, μπορεί να αλληλεπιδράσει και με τους δύο τύπους κυμάτων. Όπως όμως έχουμε εξηγήσει στην ενότητα 4.2 λόγω διαφορετικής φύσης της πίσω αλληλεπίδρασης, δεν είναι δυνατή η ορθή προσομοίωσή της με την παραδοχή δεδομένου προφίλ πεδίου (fixed-field profile). Η ορθή προσομοίωση αυτού του τύπου της αλληλεπίδρασης απαιτεί μια αυτοσυνεπή θεώρηση που περιλαμβάνει και την επίδραση του υψίσυχνου ρεύματος που διαμορφώνεται στη δέσμη πάνω στο προφίλ του ρυθμού.

Μέχρι στιγμής στο παρόν κεφάλαιο, έχουμε θεωρήσει ότι οι προσομοιώσεις αφορούν αλληλεπίδραση με το οδεύον προς τα εμπρός κύμα του ρυθμού και έχουμε δεχθεί τα αποτελέσματα ως ορθά. Μιας και η διαδικασία εξέτασης για το είδος της αλληλεπίδρασης είναι χρονοβόρα και μπορεί να γίνει μόνο εκ των υστέρων χειροκίνητα, η εφαρμογή της για όλους τους ρυθμούς είναι σχεδόν αδύνατη. Επομένως, συνειδητά αφήσαμε τη διαδικασία αυτή για το τέλος και μόνο για όσους ρυθμούς εμφανίζονται ως επικίνδυνοι για παρασιτική διέγερση. Αν και τα τελικά αποτελέσματα με τους κώδικες ISTART και Envidiki δείχνουν ότι τελικά για καμία από τις περιπτώσεις διηλεκτρικής επιτρεπτότητας και για κανένα σημείο λειτουργίας που εξετάσαμε δεν προβλέπεται ασταθής ρυθμός, εφαρμόσαμε τη διαδικασία στους ρυθμούς που βρέθηκαν να έχουν χαμηλό ρεύμα εκκίνησης κάτω από 100 A.

Για παράδειγμα το σχήμα 5.9 αφορά την αλληλεπίδραση για το σημείο λειτουργίας υψηλής τάσης του ρυθμού με  $m = 24$ ,  $\varepsilon_r = 20 - 14j$  που ταλαντώνεται στα 147.883 GHz και βρέθηκε να έχει ρεύμα εκκίνησης 98 A. Στο διάγραμμα απεικονίζονται ο μέσος όρος του σχετικιστικού παράγοντα  $\gamma$  για όλα τα ηλεκτρόνια, η συχνότητα του ρυθμού και η κυκλοτρονική συχνότητα κατά μήκος του άξονα. Η μεταβολή του μέσου όρου του  $\gamma$  υποδεικνύει και την αξονική περιοχή στην οποία συμβαίνει η αλληλεπίδραση μεταξύ του κύματος και της ηλεκτρονικής

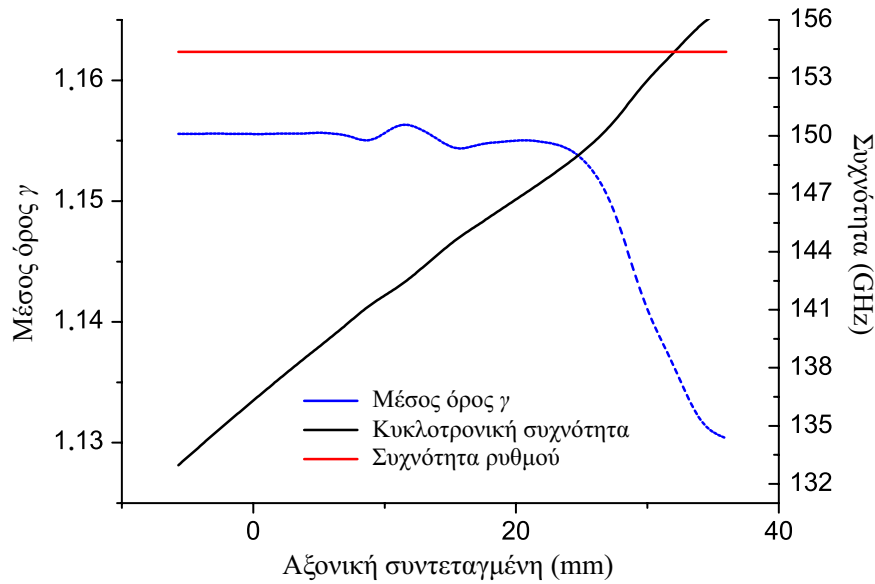


Σχήμα 5.9: Μέσος όρος  $\gamma$ , συχνότητα ρυθμού και κυκλοτρονική συχνότητα κατά μήκος του άξονα για τον ρυθμό με ρεύμα εκκίνησης 98 A ( $m = 24$ ,  $\epsilon_r = 20 - 14j$ ,  $f_{res} = 147.883$  GHz,  $V_{acc} = 79.5$  kV).

δέσμης. Στο διάγραμμα, αν και φαίνεται να υπάρχει χαρακτηριστική για μη παγιδευμένα ηλεκτρόνια αλληλεπίδραση με μικρή ταλάντωση του μέσου  $\gamma$  και χωρίς σημαντική ανταλλαγή ενέργειας πριν τα 20 mm, η αλληλεπίδραση και η απώλεια της ενέργειας των ηλεκτρονίων συμβαίνει κυρίως για την αξονική θέση μετά τα 20 mm. Στην αξονική αυτή περιοχή, η συχνότητα ταλάντωσης του ρυθμού είναι μικρότερη από την κυκλοτρονική συχνότητα. Σύμφωνα με το διάγραμμα Brillouin του σχήματος 1.3(ii), η σχέση αυτή μεταξύ των δύο συχνοτήτων υποδεικνύει ότι πρόκειται για αλληλεπίδραση με οδεύον προς τα πίσω κύμα του ρυθμού. Επομένως η αλληλεπίδραση αυτή δεν προσομοιώνεται σωστά και το υπολογισμένο ρεύμα εκκίνησης δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα.

Στο Σχήμα 5.9 εμφανίζεται επίσης ένα ενδιαφέρον φαινόμενο. Παρ' όλο που έχουμε αλληλεπίδραση με κύμα που οδεύει προς τα αριστερά της διάταξης, τα ηλεκτρόνια φαίνεται να χάνουν ενέργεια έως και το ακραίο δεξί σημείο της θεωρούμενης γεωμετρίας. Όμως το τελικό σημείο του τελευταίου δαχτυλιδιού είναι στα 30.2 mm και έως τα 40 mm συνεχίζει κυματοδηγός σταθερής ακτίνας  $r_{in}$ , όπου δεν μπορεί να υπάρχει κύμα που οδεύει προς τα αριστερά, αφού οι οριακές συνθήκες που εφαρμόζουμε είναι εξερχόμενα προς τα δεξιά κύματα. Αυτό που συμβαίνει είναι ότι η ηλεκτρονική δέσμη αλληλεπιδρά με εγκάρσιους ρυθμούς που βρίσκονται κάτω από την αποκοπή. Οι ρυθμοί αυτοί καθώς αυξάνεται η αξονική συντεταγμένη δεν έχουν εκθετικά αύξουσα συμπεριφορά αλλά εκθετικά φθίνουσα και πράγματι οδεύουν προς το εσωτερικό της διάταξης, όπως έχουμε σημειώσει και στην ενότητα 3.1. Αν εφαρμόσουμε χωρικό μετασχηματισμό Fourier στην περιοχή από τα 30.2 mm έως και τα 40.0 mm βρίσκουμε πράγματι συνιστώσες του κύματος με αρνητικό κυματάριθμο.

Εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία για τον ίδιο ρυθμό και για το σημείο λειτουργίας χαμηλής τάσης ( $I_{st} = 88$  A), αλλά και για τον ρυθμό που ταλαντώνεται



Σχήμα 5.10: Μέσος όρος  $\gamma$ , συχνότητα ρυθμού και κυκλοτρονική συχνότητα κατά μήκος του άξονα για τον ρυθμό με ρεύμα εκκίνησης 303 A ( $m = 29$ ,  $\epsilon_r = 20 - 14j$ ,  $f_{res} = 154.350$  GHz,  $V_{acc} = 79.5$  kV).

στα 145.596 GHz ( $m = 26$ ,  $\epsilon_r = 20 - j$ ,  $I_{st} = 90$  A για το σημείο υψηλής τάσης), βρίσκουμε ότι και για τους δύο ρυθμούς η αλληλεπίδραση είναι με το πίσω κύμα και επομένως τα ρεύματα εκκίνησης που υπολογίστηκαν δεν αντιστοιχούν στην πραγματικότητα. Τα πραγματικά ρεύματα εκκίνησης των συγκεκριμένων ρυθμών για την εμπρός αλληλεπίδραση αναμένεται να είναι υψηλότερα.

Στο σχήμα 5.10 παρουσιάζουμε τη μεταβολή του μέσου σχετικιστικού παράγοντα  $\gamma$  των ηλεκτρονίων για την αλληλεπίδραση της δέσμης με τον ρυθμό που ταλαντώνεται στα 154.350 GHz για την τιμή διηλεκτρικής επιτρεπτότητας  $\epsilon_r = 20 - 14j$ , για  $m=29$  και για το σημείο λειτουργίας υψηλής τάσης. Το ρεύμα εκκίνησης του συγκεκριμένου ρυθμού είναι 303 A με τον κώδικα ISTART. Στη συγκεκριμένη περίπτωση η αλληλεπίδραση είναι με το εμπρός κύμα του ρυθμού, καθώς όπως φαίνεται στο σχήμα η συχνότητα του ρυθμού είναι μεγαλύτερη της κυκλοτρονικής στην περιοχή όπου τα ηλεκτρόνια χάνουν την ενέργειά τους. Γενικά μπορούμε να θέσουμε ως κανόνα ότι ρυθμοί που διεγείρονται και έχουν συχνότητα ταλάντωσης πάνω από τα 154.0 GHz, αλληλεπιδρούν με το οδεύον προς τα εμπρός κύμα των ρυθμών. Αυτό συμβαίνει γιατί η μέγιστη κυκλοτρονική συχνότητα στο δεξί άκρο του διαγράμματος αντιστοιχεί στα 154.0 GHz.

Συνοψίζουμε τώρα τα συμπεράσματα από την αριθμητική μελέτη των παρασιτικών ταλαντώσεων στον διάυλο δέσμης του γυροτρονίου 170 GHz, 1 MW για το ITER. Ένα πολύ μεγάλο πλήθος ρυθμών υποστηρίζεται από τη διάταξη του διαύλου δέσμης, καθώς αυτή στην εγκάρσια διάσταση είναι ηλεκτρικά πολύ μεγάλη. Λόγω κυρίως καλύτερης σύζευξης με την ηλεκτρονική δέσμη αλλά και λόγω χαμηλότερης αποθηκευμένης ενέργειας, οι ρυθμοί με καυστική ακτίνα κοντά στην περιοχή της δέσμης είναι αυτοί που παρουσιάζουν τα χαμηλότερα ρεύματα εκκίνησης. Για το λόγο αυτό, οι ρυθμοί για τους χαμηλούς αζιμουθιακούς δείκτες αποτελούν μικρότερο κίνδυνο για παρασιτική διέγερση με την εμπρός αλληλεπίδραση γυροτρονίου. Τα ρεύματα εκκίνησης που υπολογίστηκαν με τον γραμμικό κώδικα

ISTART και επιβεβαιώθηκαν με τον ακριβέστερο κώδικα Envidiki, βρέθηκαν να είναι αρκετά μεγαλύτερα από το ονομαστικό ρεύμα του γυροτρονίου. Δύο μονάχα ρυθμοί βρέθηκαν να έχουν χαμηλότερο ρεύμα εκκίνησης από 100 A. Με ανάλυση της αλληλεπίδρασης οι δύο αυτοί ρυθμοί και για τα δύο σημεία λειτουργίας τυχαίνει να δίνουν αλληλεπίδραση με το πίσω κύμα του ρυθμού, λόγω της οποίας η προσομοίωση και ο υπολογισμός του ρεύματος εκκίνησης με την προσέγγιση δεδομένου πεδίου δεν θεωρείται ορθός. Έτσι, τα ρεύματα εκκίνησης για την εμπρός αλληλεπίδραση των συγκεκριμένων ρυθμών αναμένεται να είναι στην πραγματικότητα υψηλότερα.

Από τα παραπάνω συνάγουμε ότι στο συγκεκριμένο γυροτρόνιο και για τα δύο σημεία λειτουργίας που εξετάσαμε, είναι μάλλον δύσκολο να διεγερθεί παρασιτική ταλάντωση με την εμπρός αλληλεπίδραση γυροτρονίου. Τα ρεύματα εκκίνησης είναι τουλάχιστον 3 φορές πάνω από το ονομαστικό ρεύμα. Επομένως, οι απλοποιήσεις της γεωμετρίας που είμαστε αναγκασμένοι να κάνουμε και πιθανόν να υποεκτιμούν τους συντελεστές ποιότητας, δεν αναμένεται να καλύψουν τη μεγάλη αυτή διαφορά σε σχέση με τα ρεύματα εκκίνησης στην πραγματική γεωμετρία. Συνεπώς, για τη συγκεκριμένη αλληλεπίδραση η σχεδίαση του διαύλου δέσμης κρίνεται ως ασφαλής. Πιθανόν, ρυθμοί που διεγείρονται από την ηλεκτρονική δέσμη με την πίσω αλληλεπίδραση να μπορούν να εμφανιστούν, αλλά ο κώδικας μας στην παρούσα φάση λόγω της προσέγγισης δεδομένου πεδίου δεν μπορεί να δώσει απάντηση.

Σχετικά με την τιμή της διηλεκτρικής επιτρεπτότητας, τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι πλέον επικίνδυνες τιμές είναι αυτές με μεγάλο πραγματικό μέρος όπως για  $\epsilon_r = 20 - j$  και  $\epsilon_r = 20 - 14j$  που είναι η μετρούμενη τιμή ή με πολύ μικρό φανταστικό μέρος όπως για  $\epsilon_r = 10 - 0.25j$ . Λεπτομερής μελέτη σχετικά με την επίδραση της τιμής της διηλεκτρικής επιτρεπτότητας των κεραμικών θα παρουσιαστεί στην ενότητα 5.4.1.

Τα παραπάνω συμπεράσματα μένει να φανεί αν αφορούν μόνο τη συγκεκριμένη σχεδίαση ή αν μπορούν να γενικευτούν και σε άλλες πραγματικές γεωμετρίες διαύλων δέσμης. Στο ερώτημα αυτό θα επανέλθουμε αφού εξετάσουμε στην επόμενη ενότητα τη γεωμετρία του διαύλου δέσμης του γυροτρονίου 140 GHz, 1 MW για τον stellarator W7-X.

### 5.3 Αριθμητικά αποτελέσματα για το γυροτρόνιο 140 GHz 1 MW για το W7-X

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε τον δίαυλο της δέσμης για το γυροτρόνιο 140 GHz, 1 MW για το W7-X. Η συγκεκριμένη σειρά γυροτρονίων αποτελείται από 9 Ευρωπαϊκά γυροτρόνια, τα οποία εξοπλίζουν το σύστημα ECRH συνολικής ισχύος 10 MW του stellarator W7-X [111].

Όπως είδαμε αναλυτικά στην ενότητα 1.4.2 τα γυροτρόνια για το W7-X λειτουργούν εμφανίζοντας ασθενείς παρασιτικές ταλαντώσεις στην περιοχή συχνοτήτων λίγο πάνω από τα 130 GHz [46]. Οι παρασιτικές αυτές συχνότητες φαίνεται να μην έχουν σημαντική επίδραση στη λειτουργία του γυροτρονίου και έχουν αποδοθεί σε ανεπιθύμητη δυναμική αλληλεπίδραση μετά την κοιλότητα (dynamic After-Cavity Interaction, dynamic ACI) [16, 46]. Μολονότι η συγκεκριμένη υπόθεση στηρίζεται σε αριθμητικά αποτελέσματα των κωδίκων αλληλεπίδρασης [47], υπάρχουν σημαντικές ενδείξεις, που στηρίζονται από πρόσφατες μελέτες, ότι η εμφάνιση στους κώδικες τέτοιου είδους δυναμικών ταλαντώσεων ACI είναι ένα καθαρά αριθμητικό εύρημα, καθώς παραβιάζονται σημαντικές υποθέσεις στην

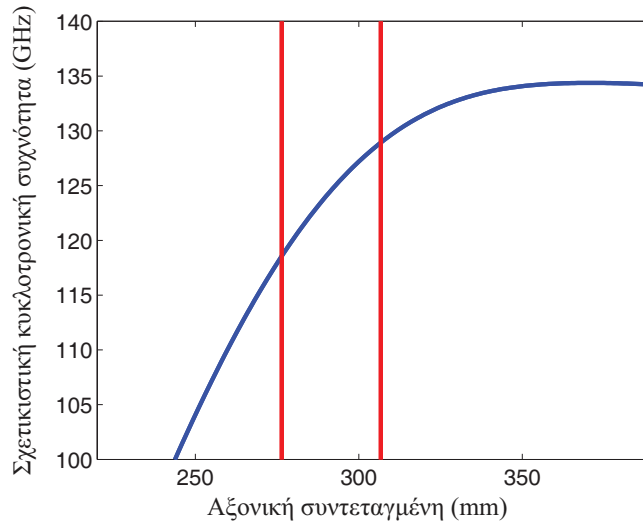
προσομοίωση της αλληλεπίδρασης [48]. Υπενθυμίζουμε ότι η σειρά των γυροτρονίων για το W7-X εμφανίζει χαμηλότερη του αναμενόμενου απόδοση [49], γεγονός που ενδεχομένως σχετίζεται με την εμφάνιση των παρασιτικών συχνοτήτων. Κάποια χαρακτηριστικά των παρασιτικών ταλαντώσεων αυτών, όπως η ζώνη συχνοτήτων που εμφανίζονται, παραπέμπουν επίσης σε ενδεχόμενη παρασιτική αλληλεπίδραση στον διάυλο της δέσμης. Το γεγονός ότι οι παρατηρούμενες ταλαντώσεις έχουν διακριτές συχνότητες και δεν παρουσιάζουν μεγάλο θόρυβο φάσης [46] απομακρύνουν το ενδεχόμενο πίσω αλληλεπίδρασης (backward interaction) και ενισχύουν το ενδεχόμενο να οφείλονται σε παρασιτική εμπρός αλληλεπίδραση (forward interaction) στον διάυλο της δέσμης.

### 5.3.1 Υπολογισμός συντονιζόμενων ρυθμών και ρευμάτων εκκίνησης

Για τους λόγους που παρουσιάσαμε προηγουμένως, εξετάζουμε αριθμητικά στον υπολογιστή, χρησιμοποιώντας τον συνδυασμό των κωδίκων NESTOR-EURIDICE που αναπτύξαμε στο Κεφάλαιο 4, την πιθανότητα διέγερσης παρασιτικών ταλαντώσεων που οφείλονται στην εμπρός αλληλεπίδραση για τη γεωμετρία του διαύλου δέσμης του γυροτρονίου για το W7-X. Η διαδικασία που θα ακολουθήσουμε είναι αυτή που περιγράψαμε στην ενότητα 5.1, με την οποία ομοίως υπολογίσαμε τα ρεύματα εκκίνησης για τον διάυλο δέσμης του γυροτρονίου για το ITER στην ενότητα 5.2.

Η απλοποιημένη γεωμετρία που εξετάζουμε, περιλαμβάνει τα 5 τελευταία διπλεκτρικά δαχτυλίδια του επανασχεδιασμένου διαύλου δέσμης κωνικού τύπου που χρησιμοποιείται στη σειρά των γυροτρονίων για το W7-X. Το απλοποιημένο μοντέλο θεωρεί σταθερή ακτίνα των μεταλλικών δαχτυλιδιών και αγνοεί τις αξιωματικές ρυτιδώσεις πάνω σε αυτά. Οι λεπτομέρειες της γεωμετρίας παραλείπονται, καθώς αποτελούν ευαίσθητα βιομηχανικά δεδομένα που δεν διατίθενται προς δημοσιοποίηση.

Εξεκινάμε τη μελέτη αυτή προσδιορίζοντας τη ζώνη συχνοτήτων που είναι επικίνδυνη για εμφάνιση παρασιτικών ταλαντώσεων στον διάυλο της δέσμης του γυροτρονίου για το W7-X. Στο Σχήμα 5.11 απεικονίζεται η μεταβολή της σχετικιστικής κυκλοτρονικής συχνότητας κατά μήκος του άξονα, η οποία αντιστοιχεί στο ονομαστικό μαγνητικό πεδίο και την ονομαστική τάση λειτουργίας του γυροτρονίου. Επίσης, σημειώνονται με κάθετες γραμμές οι αξονικές θέσεις που οριοθετούν τα τελευταία πέντε δαχτυλίδια της υπό εξέταση γεωμετρίας. Από το σχήμα φαίνεται ότι η μεταβολή της κυκλοτρονικής συχνότητας καλύπτει την περιοχή συχνοτήτων από 120 έως 130 GHz. Συμπεριλαμβάνοντας και ένα εύρος περίπου 4-5% που αντιστοιχεί στο εύρος ζώνης της αλληλεπίδρασης, προκύπτει ότι η επικίνδυνη για παρασιτική διέγερση ζώνη είναι από 120 έως 135 GHz. Η προς τα πάνω επέκταση της ζώνης συχνοτήτων είναι απαραίτητη να περιλαμβάνει το εύρος ζώνης της αλληλεπίδρασης, καθώς όπως βλέπουμε για την κύρια αλληλεπίδραση στην κοιλότητα η μέγιστη κυκλοτρονική συχνότητα είναι στα 135 GHz, ενώ το γυροτρόνιο λειτουργεί στα 140 GHz. Αντίστοιχη προς τα κάτω διεύρυνση της ζώνης δεν απαιτείται, καθώς στην περίπτωση αυτή η αλληλεπίδραση στις χαμηλές συχνότητες αυτές θα αφορούσε αλληλεπίδραση με συνιστώσες κύματος που οδεύουν προς τα πίσω, την οποία το μοντέλο μας δεν μπορεί να προσομοιώσει. Παρατηρούμε ότι η ζώνη συχνοτήτων που προσδιορίσαμε έχει σχεδόν το μισό εύρος της αντίστοιχης ζώνης συχνοτήτων του γυροτρονίου για το ITER που υπολογίσαμε στην ενότητα 5.2. Αυτό συμβαίνει γιατί η κλίση του μαγνητοστατικού πεδίου κατά την αξονική



Σχήμα 5.11: Προσδιορισμός της επικίνδυνης ζώνης συχνότητων για διέγερση παρασιτικών στον διάυλο δέσμης του γυροτρονίου για το W7-X.

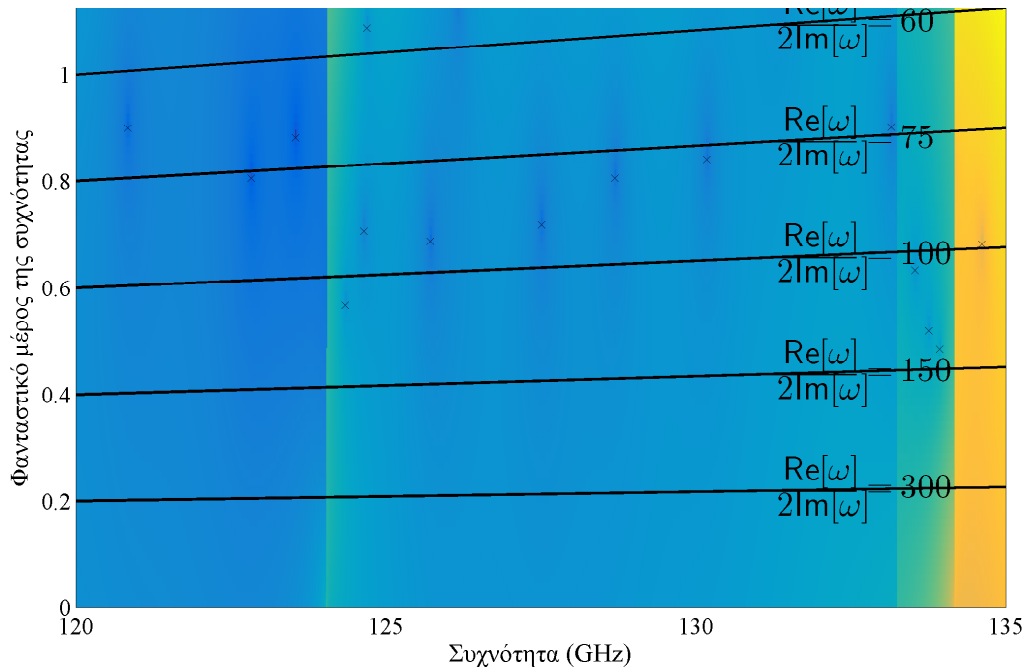
Πίνακας 5.12: Παράμετροι σημείου λειτουργίας γυροτρονίου για το W7-X.

Τάση λειτουργίας	Ρεύμα λειτουργίας	Λόγος ταχυτήτων $\alpha$	Μέγιστη τιμή μαγνητικού πεδίου
81.0 kV	40.0 A	1.30	5.56 T

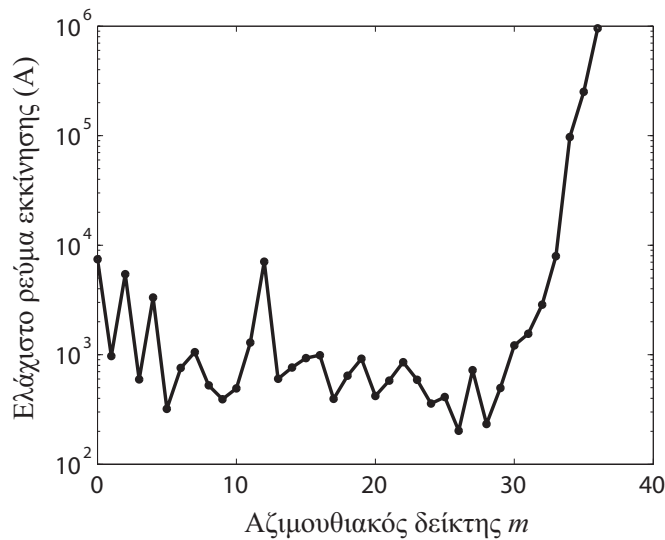
διεύθυνση είναι σχεδόν διπλάσια στην περίπτωση του γυροτρονίου για το ITER. Το συγκεκριμένο χαρακτηριστικό είναι σημαντικό και θα ληφθεί υπ' όψιν στα τελικά συμπεράσματα στα οποία θα επιχειρήσουμε να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα για τις δύο αυτές περιπτώσεις γυροτρονίων.

Έχοντας πλέον προσδιορίσει την επικίνδυνη ζώνη συχνοτήτων, περνάμε στον υπολογισμό των συντονιζόμενων ρυθμών που περιλαμβάνονται στη ζώνη από 120 έως 135 GHz με ελάχιστο συντελεστή ποιότητας  $Q_{\min} = 60$ . Η τιμή της διπλεκτρικής επιτρεπτότητας που χρησιμοποιούμε στις προσομοιώσεις, αν και δεν έχει μετρηθεί πειραματικά, θεωρούμε πως είναι η τιμή που μετρήθηκε για το γυροτρόνιο του ITER. Ο διάυλος της δέσμης του γυροτρονίου για το ITER χρησιμοποιεί το ίδιο διπλεκτρικό κεραμικό υλικό BeOSiC αλλά σίγουρα αυτό προέρχεται από διαφορετική παρτίδα και πιθανόν κατασκευαστή. Όπως θα δείξουμε στην ενότητα 5.4.1 η επίδραση μικρών διαφοροποιήσεων στην τιμή της επιτρεπτότητας για το υλικό αυτό έχει μάλλον ελάχιστη επίδραση στην τιμή των συντελεστών ποιότητας. Έτσι, μπορούμε με καλή προσέγγιση να θεωρήσουμε τη διπλεκτρική επιτρεπτότητα ίση με την τιμή  $\epsilon_r = 20 - 14j$ .

Στο Σχήμα 5.12 δίνουμε τον χάρτη των ρυθμών που περιλαμβάνει μόνο τους καθαρούς ρυθμούς TE για τον αζιμουθιακό δείκτη  $m = 0$ . Αφού υπολογιστούν οι αντίστοιχοι χάρτες και κατόπιν οι συντονιζόμενοι ρυθμοί της κρύας διάταξης για όλους του αζιμουθιακούς δείκτες από  $m = 0$  έως  $m = 36$ , υπολογίζουμε στη συνέχεια τα ρεύματα εκκίνησης που αντιστοιχούν στο σημείο ονομαστικής λειτουργίας του γυροτρονίου. Στον Πίνακα 5.12 δίνουμε τις παραμέτρους για το σημείο ονομαστικής λειτουργίας του γυροτρονίου για το W7-X.



Σχήμα 5.12: Χάρτης ρυθμών TE για τον αζιμουθιακό δείκτη  $m = 0$  στον διαύλο της δέσμης του γυροτρονίου για το W7-X.



Σχήμα 5.13: Έλαχιστο ρεύμα εκκίνησης συντονιζόμενων ρυθμών ανά αζιμουθιακό δείκτη σε λογαριθμική κλίμακα.

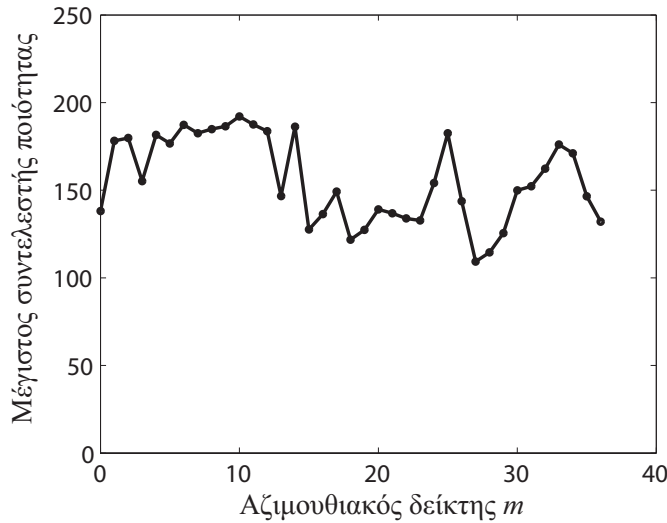
Τα αποτελέσματα για τους ρυθμούς με το ελάχιστο ρεύμα εκκίνησης ανά αζιμουθιακό δείκτη δίνονται συγκεντρωτικά στον Πίνακα 5.13. Παρατηρούμε ότι τα ρεύματα εκκίνησης είναι υψηλά σε σχέση με το ονομαστικό ρεύμα του γυροτρονίου (40 A). Το μικρότερο ρεύμα εκκίνησης που βρέθηκε είναι 202 A για τον ρυθμό με αζιμουθιακό δείκτη  $m = 26$  που ταλαντώνεται στα 122.5 GHz. Ελάχιστοι ρυθμοί βρέθηκαν να έχουν ρεύμα κάτω από 400 A. Στο Σχήμα 5.13 παρουσιάζεται σε



Πίνακας 5.13: Ελάχιστο ρεύμα εκκίνησης ανά αξιμουθιακό δείκτη για τον διάυλο δέσμης του γυροτρονίου για το W7-X.

Αξιμουθιακός δείκτης $m$	Συνολικός αριθμός ρυθμών	Ποσοστό ρυθμών χαρακτήρα TE	Ελάχιστο ρεύμα εκκίνησης (A)	Συχνότητα πιο ασταθή ρυθμού
0	15	100 %	7423 A	124.7 GHz
1	46	60.9 %	970 A	128.9 GHz
2	46	69.6 %	5449 A	124.6 GHz
3	40	65.0 %	594 A	128.6 GHz
4	42	71.4 %	3321 A	134.1 GHz
5	42	57.1 %	320 A	128.0 GHz
6	42	76.2 %	757 A	123.3 GHz
7	42	61.9 %	1054 A	127.7 GHz
8	42	76.2 %	524 A	131.7 GHz
9	44	59.1 %	393 A	126.2 GHz
10	42	71.4 %	493 A	130.0 GHz
11	46	69.6 %	1290 A	125.3 GHz
12	44	54.5 %	7075 A	121.9 GHz
13	44	77.3 %	602 A	123.1 GHz
14	52	61.5 %	765 A	126.9 GHz
15	48	79.2 %	930 A	121.2 GHz
16	46	73.9 %	991 A	134.5 GHz
17	62	64.5 %	395 A	128.5 GHz
18	54	66.7 %	643 A	122.0 GHz
19	60	43.3 %	919 A	127.7 GHz
20	58	51.7 %	420 A	129.4 GHz
21	66	57.6 %	581 A	132.7 GHz
22	68	35.3 %	855 A	123.4 GHz
23	68	35.3 %	591 A	128.8 GHz
24	60	20.0 %	358 A	120.7 GHz
25	62	6.4 %	410 A	130.0 GHz
26	68	17.6 %	202 A	122.5 GHz
27	60	30.0 %	723 A	126.4 GHz
28	64	28.1 %	233 A	133.2 GHz
29	60	23.3 %	497 A	130.6 GHz
30	60	50.0 %	1214 A	122.4 GHz
31	56	50.0 %	1551 A	129.3 GHz
32	60	36.7 %	2867 A	134.2 GHz
33	40	25.0 %	7940 A	132.5 GHz
34	34	23.5 %	97210 A	135.0 GHz
35	30	26.7 %	251700 A	123.2 GHz
36	26	61.2 %	955200 A	126.4 GHz
Σύνολο:	1839			

### 5.3 Αριθμητικά αποτελέσματα για το γυροτρόνιο 140 GHz 1 MW για το W7-X

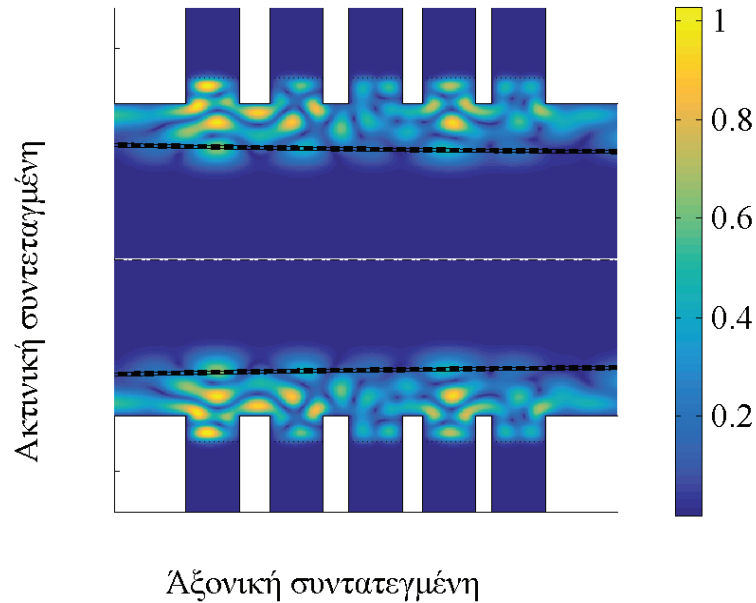


Σχήμα 5.14: Μέγιστος συντελεστής ποιότητας συντονιζόμενων ρυθμών στη ζώνη 120-135 GHz ανά αζιμουθιακό δείκτη.

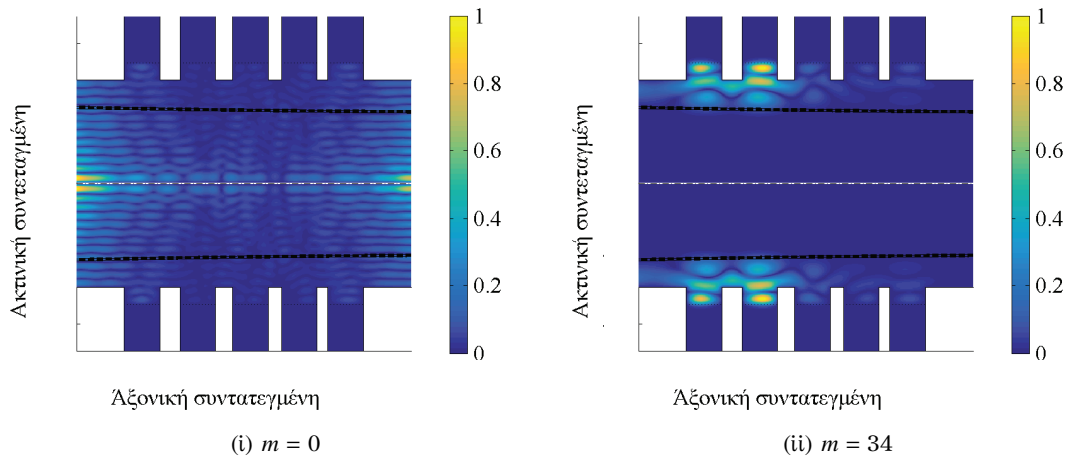
λογαριθμική κλίμακα το διάγραμμα της τιμής του ελάχιστου ρεύματος εκκίνησης ανά αζιμουθιακό δείκτη. Είναι φανερό παρά τις τυχαίες διακυμάνσεις ότι τα ελάχιστα ρεύματα εκκίνησης παρατηρούνται για τους αζιμουθιακούς δείκτες στο εύρος  $m = 20 - 30$ . Οι χαμηλοί αζιμουθιακοί δείκτες έχουν ελαφρώς υψηλότερα ρεύματα εκκίνησης, ενώ για τους πολύ υψηλούς αζιμουθιακούς δείκτες  $m > 33$ , τα ρεύματα εκκίνησης παίρνουν πολύ μεγάλες τιμές.

Το συγκεκριμένο συμπέρασμα είχε εξαχθεί επίσης από τα αποτελέσματα για τον διάυλο δέσμης του γυροτρονίου για το ITER, που παρουσιάστηκαν στην ενότητα 5.2. Εκεί, με ανάλυση των ισοδύναμων συντελεστών ποιότητας είχε δείξει ότι τα χαμηλότερα ρεύματα εκκίνησης οφείλοντα στην καλύτερη σύζευξη της δέσμης και την χαμηλότερη αποθηκευμένη ενέργεια των ρυθμών με υψηλό αζιμουθιακό δείκτη. Για να επιβεβαιώσουμε τη συγκεκριμένη ανάλυση και στην περίπτωση του γυροτρονίου για το W7-X, παρουσιάζουμε στο Σχήμα 5.14 την τιμή του μέγιστου συντελεστή ποιότητας ανά αζιμουθιακό δείκτη. Είναι φανερό ότι για κάθε αζιμουθιακό δείκτη οι τιμές των μέγιστων συντελεστών ποιότητας κινούνται στην ίδια τάξη μεγέθους χωρίς κάποια συγκεκριμένη τάση μεταβολής. Μάλιστα, στους αζιμουθιακούς δείκτες της περιοχής  $m = 20 - 30$  οι συντελεστές ποιότητας είναι ελαφρώς μειωμένοι σε σχέση με τους χαμηλότερους αζιμουθιακούς δείκτες. Έτσι, οι μικρότερες τιμές ρευμάτων εκκίνησης στους υψηλούς αζιμουθιακούς δείκτες δεν οφείλονται σε μειωμένες απώλειες των ρυθμών αυτών.

Στο Σχήμα 5.15 δίνεται το προφίλ πεδίου του ρυθμού που παρουσιάζει το ελάχιστο ρεύμα εκκίνησης (202 A). Είναι φανερό η καλή σύζευξη του ρυθμού με τη δέσμη, καθώς η τελευταία βρίσκεται σε θέση μεγίστου του πεδίου ως προς την εγκάρσια διεύθυνση. Αντίθετα, στο Σχήμα 5.16 δίνουμε τα προφίλ πεδίου των ρυθμών με το ελάχιστο ρεύμα εκκίνησης για τις τιμές αζιμουθιακού δείκτη  $m = 0$  και  $m = 34$ . Τόσο στην περίπτωση των συμμετρικών ρυθμών όσο και στην περίπτωση των ρυθμών με πολύ υψηλό αζιμουθιακό δείκτη, η ηλεκτρονική δέσμη βρίσκεται σε θέση που δεν αντιστοιχεί στη μέγιστη ένταση του πεδίου. Έτσι, επιβεβαιώνεται η επικινδυνότητα



Σχήμα 5.15: Αξιομυθιακή συνιστώσα ηλεκτρικού πεδίου του ρυθμού με το χαμηλότερο ρεύμα εκκίνησης ( $I_{st} = 202$  A,  $m = 26$ ,  $f_r = 122.488$  GHz).



Σχήμα 5.16: Αξιομυθιακή συνιστώσα ηλεκτρικού πεδίου ρυθμών με το ελάχιστο ρεύμα εκκίνησης i) για  $m = 0$ ,  $I_{st} = 7423$  A ii) για  $m = 34$ ,  $I_{st} = 97210$  A.

των ρυθμών με υψηλό αξιομυθιακό δείκτη σε σχέση με τους συμμετρικούς ρυθμούς TE ή πιο γενικά με τους ρυθμούς χαμηλού αξιομυθιακού δείκτη.

Στον Πίνακα 5.14 παραθέτουμε τα αποτελέσματα από την επαλήθευση των προσομοιώσεων που έγινε με τον κώδικα παρακολούθησης της ενότητας 4.3. Η μεθοδολογία επαλήθευσης των προσομοιώσεων είναι όμοια με αυτή που περιγράφηκε στην ενότητα 5.2.3 για το γυροτρόνιο του ITER. Η επαλήθευση έγινε δειγματοληπτικά για τους ρυθμούς του Πίνακα 5.13 που βρέθηκαν να έχουν ρεύμα εκκίνησης μικρότερο από 410 A. Και στην περίπτωση του γυροτρόνιου για το W7-X, υπάρχει πολύ καλή συμφωνία μεταξύ των αποτελεσμάτων και επαληθεύεται η ορθότητα των υπολογισμών των ρευμάτων εκκίνησης με τον συνδυασμό NESTOR-EURIDICE.

### 5.3 Αριθμητικά αποτελέσματα για το γυροτρόνιο 140 GHz 1 MW για το W7-X

Πίνακας 5.14: Επαλήθευση της προσομοίωσης της αλληλεπίδρασης για τους ρυθμούς με ρεύμα εκκίνησης χαμηλότερο από 410 A στο γυροτρόνιο για το W7-X.

Αζιμουθ. δείκτης $m$	Συχνότητα συντονισμού	Ρεύμα εκκίνησης	Επίπεδο ισχύος	Απόδοση μεθόδου Α	Απόδοση μεθόδου Β	Απόδοση μεθόδου Γ
-26	122.488 GHz	202 A	1.5 MW	3.20	3.30	3.27
-28	133.195 GHz	233 A	1.5 MW	2.24	2.19	2.08
+5	128.049 GHz	320 A	1.5 MW	4.75	4.75	4.91
-24	120.688 GHz	358 A	2.0 MW	4.87	4.69	4.73
-9	126.197 GHz	393 A	1.0 MW	1.74	1.70	1.75
-17	128.500 GHz	395 A	1.5 MW	3.48	3.48	3.66
+25	130.026 GHz	410 A	2.0 MW	4.96	4.70	4.88

Καθώς τα ρεύματα εκκίνησης για όλους ρυθμούς είναι αρκετά υψηλότερα σε σχέση με το ονομαστικό ρεύμα του γυροτρονίου, δεν απαιτείται η διερεύνηση εάν το χαμηλό ρεύμα εκκίνησης κάποιου ρυθμού οφείλεται στην πίσω αλληλεπίδραση. Τα συνολικά αποτελέσματα και η σύγκρισή τους με την περίπτωση του γυροτρονίου για το ITER, αναλύονται στην επόμενη ενότητα.

#### 5.3.2 Σχολιασμός αποτελεσμάτων και συμπεράσματα

Οι αριθμητικοί υπολογισμοί των ρευμάτων εκκίνησης του γυροτρονίου για το W7-X έδωσαν επίσης υψηλά ρεύματα εκκίνησης, όπως και στο γυροτρόνιο για το ITER. Από τα αποτελέσματα αυτά το συμπέρασμα που εξάγεται είναι, ότι παρασιτικές ταλαντώσεις που οφείλονται στην εμπρός αλληλεπίδραση είναι μάλλον δύσκολο να διεγερθούν. Έτσι, δεν κατέστη δυνατό να επιβεβαιωθεί αριθμητικά η υπόθεση ότι οι πειραματικά μετρούμενες παρασιτικές συχνότητες στο γυροτρόνιο για το W7-X, που στο παρελθόν έχουν αποδοθεί σε ταλαντώσεις μετά την κοιλότητα, οφείλονται σε εμπρός αλληλεπίδραση στον δίαυλο της δέσμης. Παρ' όλα αυτά, η διεγερση παρασιτικών ταλαντώσεων με την εμπρός αλληλεπίδραση στον δίαυλο της δέσμης δεν θα πρέπει να αποκλειστεί.

Κατ' αρχάς, οι γεωμετρίες που προσομοιώσαμε είναι απλοποιημένες, καθώς θεωρείται ότι η ακτίνα των μεταλλικών δαχτυλιδιών είναι σταθερή και αγνοούνται επίσης οι αζιμουθιακές ρυτιδώσεις στα μεταλλικά δαχτυλίδια. Η υπόθεση σταθερής ακτίνας αναμένεται να υποεκτιμά τους συντελεστές ποιότητας, καθώς το πραγματικό στένεμα της ακτίνας προς το δεξί άκρο προκαλεί αυξημένες ανακλάσεις και μειωμένες απώλειες περίθλασης. Μια αδρή εκτίμηση της αύξησης των συντελεστών ποιότητας λόγω του στενέματος της ακτίνας στο δεξί άκρο δίνεται στην ενότητα 6.1.4. Επίσης, η προσομοίωση της αλληλεπίδρασης των πεδίων με την ηλεκτρονική δέσμη γίνεται με την προσέγγιση δεδομένου πεδίου. Η συγκεκριμένη προσέγγιση, πέρα από την αδυναμία χειρισμού της πίσω αλληλεπίδρασης, υπολείπεται σε ακρίβεια σε σχέση με την αυτοσυνεπή θεώρηση της αλληλεπίδρασης. Η απώλεια σε ακρίβεια είναι μεγαλύτερη για τους ρυθμούς με χαμηλότερα  $Q$  [112]. Συγκεκριμένα, στον δίαυλο δέσμης του γυροτρονίου για το W7-X οι μέγιστοι συντελεστές ποιότητας που υπολογίστηκαν είναι της τάξης του 200 (Σχήμα 5.14), ενώ συνήθως οι συντελεστές ποιότητας για τους ρυθμούς λειτουργίας στην κοιλότητα είναι της τάξης του 1000. Καθώς οι προσομοιώσεις με την προσέγγιση δεδομένου πεδίου τείνουν

να υποεκτιμούν την ισχύ της αλληλεπίδρασης σε σημαντικό ποσοστό σε σχέση με τις πιο ακριβείς αυτοσυνεπείς προσομοιώσεις [112], ενδέχεται τα πραγματικά ρεύματα εκκίνησης να είναι αισθητά χαμηλότερα από αυτά που υπολογίσαμε με την προσέγγιση δεδομένου πεδίου.

Με βάση τα παραπάνω και καθώς τα αποτελέσματα για τα ρεύματα εκκίνησης είναι οριακά ως προς τη δυνατότητα αξιόπιστης απόφασης περί της πιθανότητας διέγερσης παρασιτικών ρυθμών με την εμπρός αλληλεπίδραση, αναδεικνύεται επιτακτικά η ανάγκη βελτίωσης του ηλεκτρομαγνητικού μοντέλου και του κώδικα. Τόσο η μοντελοποίηση του στενέματος της ακτίνας όσο και η ανάπτυξη ενός αυτοσυνεπούς σχήματος προσομοίωσης της αλληλεπίδρασης θα προσδώσουν μεγάλη ρεαλιστικότητα στις προσομοιώσεις και θα μπορέσουν να απαντήσουν τα συγκεκριμένα ερωτήματα με αυξημένη αξιοπιστία. Καθώς αυτά τα χαρακτηριστικά είχαν τεθεί εξαρχής εκτός στόχων της παρούσας διατριβής, στο Κεφάλαιο 7 προτείνουμε πως οι συγκεκριμένες βελτιώσεις μπορούν να υλοποιηθούν ως μελλοντικές επεκτάσεις της εργασίας μας.

Από τη σύγκριση των αποτελεσμάτων των δύο γυροτρονίων (για το W7-X και για το ITER), τα ελάχιστα ρεύματα εκκίνησης είναι περίπου τα μισά στην περίπτωση του γυροτρονίου για το ITER. Τα δύο γυροτρόνια έχουν παρόμοιες γεωμετρίες διαύλου και σχεδόν όμοια χαρακτηριστικά της δέσμης (τάση λειτουργίας και ρεύμα δέσμης), ενώ η ονομαστική τους ισχύς είναι η ίδια. Η βασική τους διαφορά είναι η συχνότητα της παραγόμενης ακτινοβολίας, η οποία καθορίζεται κυρίως από το μαγνητοστατικό πεδίο. Έτσι, στο γυροτρόνιο για το ITER, η επικίνδυνη ζώνη συχνοτήτων για παρασιτική διέγερση στον διάυλο της δέσμης υπολογίστηκε στα 135-160 GHz, ενώ στο γυροτρόνιο για το W7-X στα 120-135 GHz. Η ζώνη συχνοτήτων για το ITER έχει μεγαλύτερο εύρος γιατί η κλίση του μαγνητοστατικού πεδίου στην περιοχή του διαύλου είναι μεγαλύτερη.

Με βάση τα παραπάνω χαρακτηριστικά, τα μικρότερα ρεύματα εκκίνησης που βρέθηκαν στην περίπτωση του γυροτρονίου για το ITER αποδίδονται στους μεγαλύτερους συντελεστές ποιότητας των ρυθμών. Πράγματι, ενώ στο γυροτρόνιο για το W7-X οι μέγιστοι συντελεστές ποιότητας ανά αζιμουθιακό δείκτη κινούνται στην περιοχή τιμών από 150-200 (Σχήμα 5.14), στο γυροτρόνιο για το ITER οι μέγιστοι συντελεστές ποιότητας εντοπίζονται στην περιοχή τιμών από 250-400. Οι συγκεκριμένες τιμές αφορούν την ίδια τιμή της επιτρεπτότητας ( $\epsilon_r = 20 - 14j$ ), ενώ οι γεωμετρίες των δύο διαύλων δέσμης είναι παρόμοιες (η γεωμετρία του W7-X έχει ελαφρώς μεγαλύτερο πάχος διπλεκτρικών δαχτυλιδιών). Έτσι, η διαφορά στους συντελεστές ποιότητας, πέρα από τη μικρή διαφορά στο πάχος των διπλεκτρικών, εκτιμούμε ότι οφείλεται στη μεγαλύτερη συχνότητα συντονισμού των ρυθμών για το γυροτρόνιο του ITER. Για μεγαλύτερες τιμές της συχνότητας η διάταξη είναι ηλεκτρικά πιο μεγάλη και υποστηρίζονται περισσότεροι ρυθμοί. Επίσης, αυξάνει η αποθηκευμένη ενέργεια των ρυθμών ενώ επηρεάζονται τόσο οι απώλειες περίθλασης όσο και οι διπλεκτρικές απώλειες αφού μειώνεται ο βαθμός διείσδυσης των πεδίων στο διπλεκτρικό. Έτσι, για μεγαλύτερες συχνότητες λειτουργίας προκύπτουν αυξημένοι συντελεστές ποιότητας που εν τέλει οδηγούν σε χαμηλότερα ρεύματα εκκίνησης των ρυθμών.

Με βάση τα παραπάνω, στα μελλοντικά γυροτρόνια μεγάλης ισχύος που θα λειτουργούν σε υψηλότερες συχνότητες και θα σχεδιάζονται με αυξημένο ρεύμα δέσμης για την επίτευξη μεγαλύτερης ισχύος εξόδου, το πρόβλημα των παρασιτικών ταλαντώσεων εκτιμούμε πως θα εμφανίζεται με μεγαλύτερη ένταση. Έτσι, κρίνεται

ακόμα πιο επιτακτική η μελλοντική ανάπτυξη αριθμητικών εργαλείων που θα προσομοιώνουν τον διάυλο της δέσμης ρεαλιστικά και θα μπορούν να υπολογίζουν με ακρίβεια τα ρεύματα εκκίνησης των παρασιτικών ρυθμών.

## 5.4 Επίδραση των παραμέτρων της γεωμετρίας στη διέγερση παρασιτικών ρυθμών

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε πώς η μεταβολή των γεωμετρικών και φυσικών παραμέτρων του διαύλου δέσμης, επηρεάζει την διέγερση των παρασιτικών ταλαντώσεων. Η συγκεκριμένη μελέτη είναι ιδιαίτερα χρήσιμη, καθώς προσφέρει μία βαθύτερη κατανόηση στον μηχανισμό αλληλεπίδρασης των ρυθμών με τη δέσμη και μπορεί επίσης να υποδείξει αλλαγές στη γεωμετρία που πιθανόν βελτιώνουν την απόδοση του διαύλου δέσμης στην κατάπνιξη των παρασιτικών ταλαντώσεων. Αντίστοιχες παραμετρικές μελέτες στο μοντέλο του διαύλου δέσμης με περιοδικές οριακές συνθήκες έχουν γίνει στα [60, 61].

Οι γεωμετρικές και φυσικές ιδιότητες του διαύλου δέσμης στις οποίες θα εστιάσουμε είναι: πρώτον, η τιμή της διηλεκτρικής επιτρεπτότητας των κεραμικών δαχτυλιδιών (πραγματικό και φανταστικό μέρος) και δεύτερον, το πάχος των διηλεκτρικών δαχτυλιδιών. Οι ιδιότητες αυτές είναι που έχουν τη μεγαλύτερη επίδραση στη διέγερση των παρασιτικών ταλαντώσεων.

Για τις άλλες γεωμετρικές παραμέτρους της διάταξης είτε δεν είναι δυνατή κάποια σημαντική μεταβολή τους, καθώς αυτές καθορίζονται από εξωτερικές ως προς το διάυλο της δέσμης απαιτήσεις, είτε η μεταβολή τους επηρεάζει ελάχιστα την απόδοση του διαύλου της δέσμης. Πιο συγκεκριμένα, η εσωτερική ακτίνα των μεταλλικών δαχτυλιδιών δεν μπορεί να γίνει αυθαίρετα μικρή, καθώς τα μεταλλικά δαχτυλίδια απαιτείται να έχουν μία ελάχιστη απόσταση από την ηλεκτρονική δέσμη. Αντίθετα, μεγαλύτερη ακτίνα των μεταλλικών δαχτυλιδιών συνεπάγεται υποστήριξη ακόμα περισσότερων συντονιζόμενων ρυθμών που αναμένεται να χειροτερέψει την πιθανότητα διέγερσης παρασιτικών ταλαντώσεων.

Άλλη γεωμετρική παράμετρος είναι το βάθος των διηλεκτρικών δαχτυλιδιών. Όπως έχουμε δείξει και σχολιάσει σχετικά με τα προφίλ πεδίου των ρυθμών (π.χ. Σχήμα 5.8), το πεδίο ελάχιστα εισέρχεται στα διηλεκτρικά δαχτυλίδια, καθώς το μεγαλύτερο μέρος του ανακλάται στην επιφάνεια διεπαφής με το κενό ενώ αποσβέννυται εκθετικά με την ακτινική απόσταση μέσα στο διηλεκτρικό. Για το λόγο αυτό, για μη αμελητέες τιμές του φανταστικού μέρους της διηλεκτρικής επιτρεπτότητας και στις συνήθεις περιπτώσεις σχεδίασης διαύλων δέσμης, το πεδίο δεν βλέπει καν το μεταλλικό μέρος του διαύλου δέσμης στην εξωτερική ακτίνα των διηλεκτρικών δαχτυλιδιών. Επομένως, η περαιτέρω αύξηση του βάθους των διηλεκτρικών δαχτυλιδιών, σε σχέση με τις συνήθεις περιπτώσεις σχεδίασης, έχει αμελητέα επίδραση στην απορρόφηση των πεδίων.

Επίσης, για τη γεωμετρική παράμετρο της εσωτερικής ακτίνας των διηλεκτρικών δαχτυλιδιών, δεν απαιτείται λεπτομερής μελέτη της μεταβολής της. Αφενός, η ελάχιστη τιμή της είναι καθορισμένη από την ακτίνα των μεταλλικών δαχτυλιδιών και την εσοχή ασφαλείας που απαιτείται, ώστε να προστατεύονται τα διηλεκτρικά από φόρτιση τυχόν διαφυγόντων ηλεκτρονίων. Αφετέρου, αύξηση της εσωτερικής ακτίνας των διηλεκτρικών δαχτυλιδιών δεν αναμένεται να έχει σημαντική επίδραση στην απορρόφηση των πεδίων και κατά συνέπεια στη διέγερση των παρασιτικών

ταλαντώσεων. Αυτό συμβαίνει γιατί το ελάχιστο βάθος της εσοχής που συναντάται στην πράξη είναι ήδη αρκετά μεγάλο, ώστε να αποτελεί φράγμα για τους αξονικούς ρυθμούς υψηλής τάξης του διπλεκτρικού δαχτυλιδιού, οι οποίοι διαδίδονται κανονικά σε αυτό, αλλά βρίσκονται στην αποκοπή στην περιοχή της εσοχής. Έτσι, η εσοχή απομονώνει τους ρυθμούς αυτούς από την εσωτερική κυλινδρική περιοχή και περαιτέρω αύξηση του βάθους της επηρεάζει μόνο τη διάδοση των αξονικών ρυθμών που είναι πάνω από την αποκοπή μέσα σε αυτήν και όχι την απορρόφησή τους.

Προχωρούμε τώρα στην παραμετρική μελέτη των παρασιτικών ταλαντώσεων μεταβάλλοντας τόσο το πραγματικό και φανταστικό μέρος της διπλεκτρικής επιτρεπτότητας, όσο και το πλάτος των διπλεκτρικών δαχτυλιδιών, γεωμετρικές παράμετροι που όπως θα δείξουμε έχουν σημαντική επίδραση στην απόδοση του διαύλου δέσμης.

#### 5.4.1 Επίδραση της διπλεκτρικής επιτρεπτότητας στην απορρόφηση των πεδίων

Στην υποενότητα αυτή εξετάζουμε πως επιδρά η τιμή της διπλεκτρικής επιτρεπτότητας στη διέγερση των παρασιτικών ταλαντώσεων. Θα εξετάσουμε τη μεταβολή τόσο του πραγματικού όσο και του φανταστικού μέρους της επιτρεπτότητας, καθώς και τα δύο μεγέθη βρέθηκαν να παίζουν εξίσου σημαντικό ρόλο.

Η τιμή της διπλεκτρικής επιτρεπτότητας επηρεάζει την απορρόφηση των πεδίων στο διπλεκτρικό και συνεπώς τις απώλειες των ρυθμών. Οι διπλεκτρικές απώλειες εκφράζονται άμεσα στον συντελεστή ποιότητας  $Q$  των συντονιζόμενων ρυθμών και η αύξησή τους προκαλεί πτώση της τιμής του. Όπως είναι γνωστό, για την εμπρός αλληλεπίδραση τα ρεύματα εκκίνησης είναι αντιστρόφως ανάλογα με τους συντελεστές ποιότητας των συντονιζόμενων ρυθμών και επομένως αύξηση της απορρόφησης των διπλεκτρικών συντελεί άμεσα στην κατάπνιξη των παρασιτικών ταλαντώσεων. Το παραπάνω προφανές συμπέρασμα ισχύει όμως και για την αλληλεπίδραση με το πίσω κύμα των ρυθμών, παρόλο που η επίδραση αυτή δεν εκφράζεται μέσω των συντελεστών ποιότητας  $Q$ . Αύξηση των απωλειών σε ένα ηλεκτροδυναμικό σύστημα απαιτεί μεγαλύτερα ρεύματα για την εκκίνηση των ταλαντώσεων ανεξάρτητα από τον εάν η αλληλεπίδραση γίνεται με το εμπρός ή το πίσω κύμα του ρυθμού. Επίσης, σημειώνουμε ότι η τιμή της διπλεκτρικής επιτρεπτότητας δεν επηρεάζει κατά κάποιον συστηματικό και ποιοτικά διαφορετικό τρόπο τους άλλους παράγοντες της αλληλεπίδρασης όπως τις συχνότητες συντονισμού και τα προφίλ πεδίου.

Η πρώτη εικόνα που κάποιος έχει για την επίδραση της τιμής της διπλεκτρικής επιτρεπτότητας στις απώλειες των ρυθμών αποδεικνύεται λανθασμένη. Σε πρώτο επίπεδο θα περίμενε κάποιος ότι το πραγματικό μέρος της επιτρεπτότητας δεν παίζει κάποιον ουσιαστικό ρόλο ενώ το φανταστικό μέρος που εκφράζει τις απώλειες του διπλεκτρικού θα αυξάνει τις απώλειες, καθώς αυξάνει η τιμή του. Σε ένα δεύτερο επίπεδο κάποιος θα περιμένε ότι ο συντελεστής ποιότητας των διπλεκτρικών απωλειών των ρυθμών θα είναι αντιστρόφως ανάλογος της γωνίας απωλειών (loss tangent) του διπλεκτρικού, η οποία ορίζεται ως  $\tan \delta = \text{Im}(\epsilon)/\text{Re}(\epsilon)$ . Στην περίπτωση αυτή, αύξηση του φανταστικού μέρους προκαλεί αύξηση των απωλειών, ενώ αύξηση του πραγματικού μέρους προκαλεί μείωση του συντελεστή ποιότητας, καθώς προκαλεί αύξηση της αποθηκευμένης ενέργειας μέσα στο διπλεκτρικό (βλ. σχέση

3.4.2).

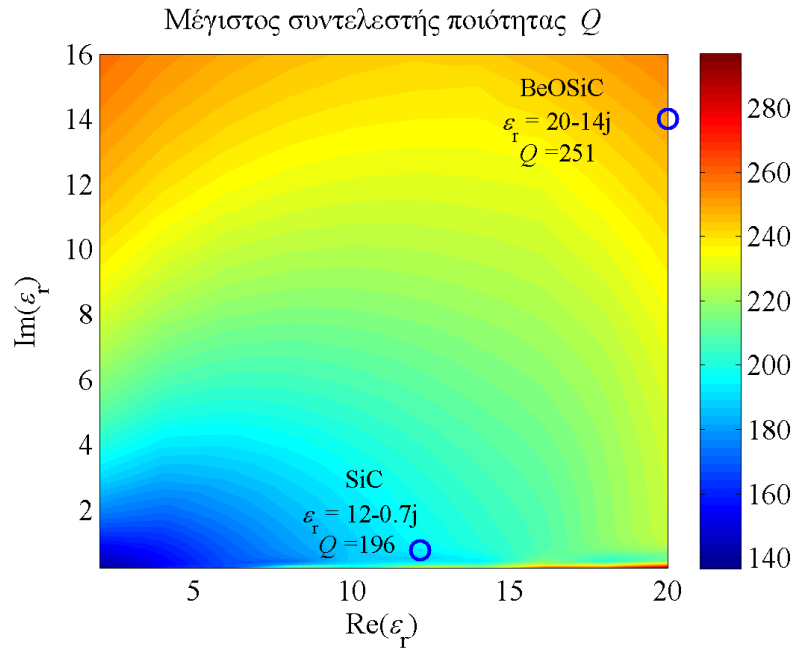
Στην πραγματικότητα η επίδραση της διηλεκτρικής επιτρεπτότητας στις απώλειες των ρυθμών είναι πιο σύνθετη. Βασικό χαρακτηριστικό του διαύλου δέσμης είναι ότι αυτός είναι μονάχα μερικώς πληρωμένος με διηλεκτρικό υλικό. Η σχέση της γωνίας απωλειών ισχύει για διηλεκτρικούς ταλαντωτές (dielectric resonators), οι οποίοι αποτελούνται σε όλο τον όγκο τους από διηλεκτρικό υλικό. Αντιθέτως, στον διαύλο της δέσμης οι διηλεκτρικές απώλειες των ρυθμών που συντονίζονται στον κυματοδηγό και απλά διεισδύουν στα διηλεκτρικά υλικά, δεν υπακούουν στη σχέση της γωνίας των απωλειών. Στην περίπτωση αυτή, πρωτεύοντα ρόλο παίζει ο συντελεστής ανάκλασης μεταξύ κενού-διηλεκτρικού, καθώς το πεδίο προκειμένου να αποσβεσθεί ισχυρά θα πρέπει να εισέλθει πρώτα στο διηλεκτρικό υλικό. Η συμπεριφορά αυτή έχει επισημανθεί και στις ενότητες 3.4.3 και 3.4.4.

Προκειμένου να προσδιορίσουμε επακριβώς την επίδραση της διηλεκτρικής επιτρεπτότητας πάνω στον συνολικό συντελεστή ποιότητας των ρυθμών σε μια ρεαλιστική γεωμετρία διαύλου δέσμης, προχωρήσαμε στην παρακάτω διαδικασία: Εξετάσαμε την απλοποιημένη γεωμετρία που αντιστοιχεί στον πραγματικό δίαυλο δέσμης του γυροτρονίου 170 GHz, 1 MW για το ITER, όπως αυτή εξετάστηκε και στην ενότητα 5.2. Κατόπιν, υπολογίσαμε για κάθε τιμή της διηλεκτρικής επιτρεπτότητας τους συντελεστές ποιότητας των συντονιζόμενων ρυθμών στην επικίνδυνη ζώνη συχνοτήτων από 145 έως 155 GHz για τον αζιμουθιακό δείκτη  $m = 20$ . Συγκεκριμένα, εκτελέσαμε τους υπολογισμούς για 260 διαφορετικές τιμές της σχετικής επιτρεπτότητας καλύπτοντας τις περιοχές τιμών για το πραγματικό μέρος από 2 έως 20 και για το φανταστικό μέρος από 0.2 έως 16. Συνολικά υπολογίστηκαν για όλες τις τιμές της σχετικής επιτρεπτότητας 4270 ρυθμοί.

Στο Σχήμα 5.17 δίνεται σε χρωματική απεικόνιση η εξάρτηση του μέγιστου συντελεστή ποιότητας με την τιμή της διηλεκτρικής επιτρεπτότητας στο επίπεδο του πραγματικού και φανταστικού μέρους της σχετικής επιτρεπτότητας. Παρατηρούμε τη σύνθετη μορφή της εξάρτησης των μέγιστων συντελεστών ποιότητας. Στο σχήμα σημειώνονται επίσης οι τιμές της σχετικής επιτρεπτότητας των υλικών BeOSiC και SiC, όπως αυτές μετρήθηκαν στη συχνότητα κοντά στα 160 GHz από το ινστιτούτο CRPP του EPFL. Η συμπεριφορά των συντελεστών ποιότητας φαίνεται να μην ακολουθεί αυτή της σχέσης της γωνίας των απωλειών:  $Q \propto 1/\tan \delta$ . Κατ' αρχάς, εμφανίζεται το φαινομενικά παράδοξο αποτέλεσμα οι συντελεστές ποιότητας να αυξάνουν (δηλαδή οι απώλειες να μειώνονται), καθώς το φανταστικό μέρος της επιτρεπτότητας που αναπαριστά τις απώλειες του διηλεκτρικού αυξάνεται. Όπως έχουμε εξηγήσει, οι διηλεκτρικές απώλειες ενός ρυθμού εξαρτώνται ισχυρά από τον βαθμό στον οποίο το πεδίο διεισδύει στο διηλεκτρικό. Το συγκεκριμένο φαινόμενο παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.18, όπου συγκρίνουμε τα προφίλ πεδίου των ρυθμών με τον μέγιστο συντελεστή ποιότητας για τα δύο διηλεκτρικά υλικά. Αν και το προφίλ πεδίου για τις δύο περιπτώσεις διηλεκτρικού εμφανίζεται σε μεγάλο βαθμό όμοιο, στη μεγεθυμένη εικόνα μέσα στα δαχτυλίδια είναι εμφανής η μεγαλύτερη διείσδυση του πεδίου στην περίπτωση του SiC. Συνεπώς, η συμπεριφορά του χάρτη στο Σχήμα 5.17 ερμηνεύεται ως αύξηση του συντελεστή ανάκλασης και μείωση της διείσδυσης του πεδίου με την αύξηση του πραγματικού και φανταστικού μέρους της επιτρεπτότητας του διηλεκτρικού.

Στο Σχήμα 5.19 παρουσιάζουμε ξανά τα δεδομένα του Σχήματος 5.17 σε τρισδιάστατη απεικόνιση για λόγους καλύτερης εποπτείας. Στο σχήμα έχουμε σημειώσει επίσης τις επιτρεπτότητες και τους μέγιστους συντελεστές ποιότητας



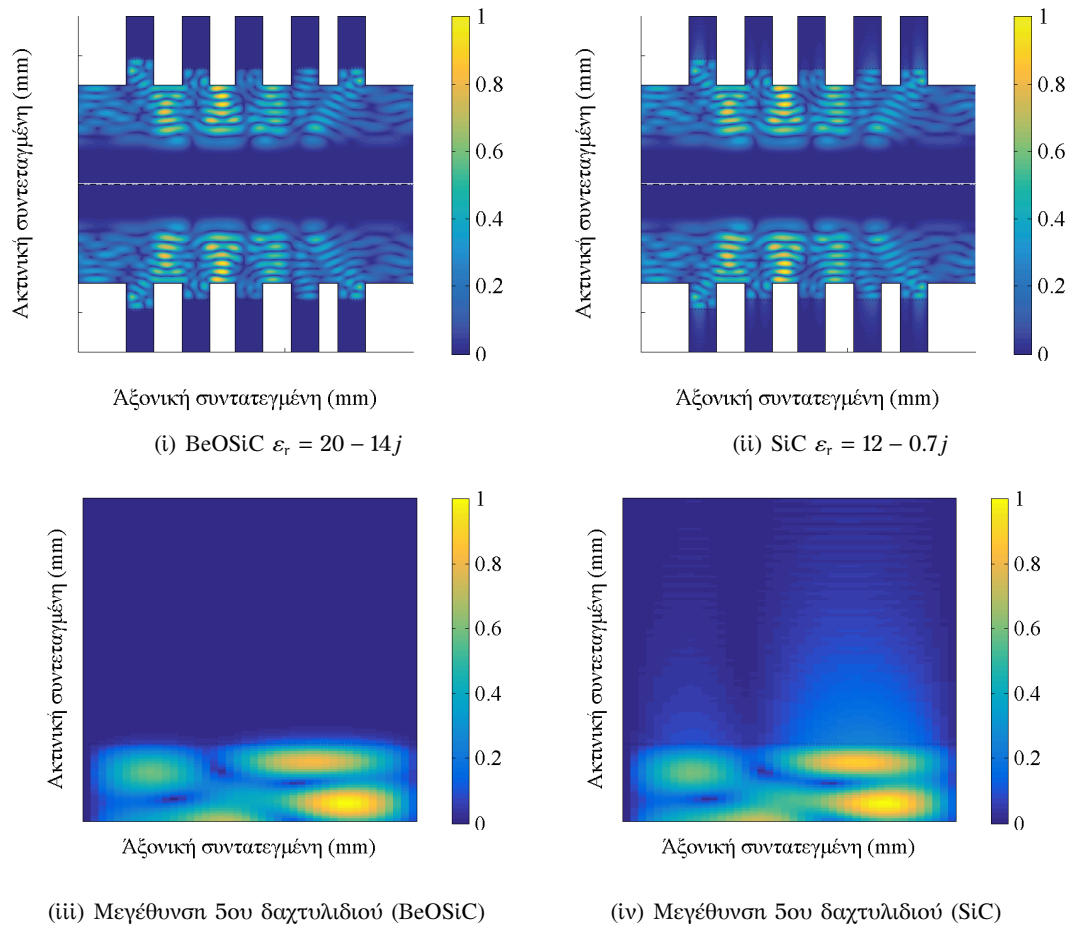


Σχήμα 5.17: Διδιάστατη απεικόνιση με χρώμα της μεταβολής του μέγιστου συντελεστή ποιότητας στο επίπεδο του πραγματικού και φανταστικού μέρους της σχετικής επιτρεπτότητας. Στην επιφάνεια σημειώνονται τα σημεία που αντιστοιχούν στα διηλεκτρικά υλικά BeOSiC και SiC, τα οποία χρησιμοποιούνται για την εισαγωγή απωλειών σε πραγματικούς διαύλους δέσμης.

για τα υλικά BeOSiC και SiC. Για πολύ μικρές τιμές του φανταστικού μέρους της σχετικής επιτρεπτότητας  $\text{Im}(\epsilon_r) < 0.25$  η εικόνα αντιστρέφεται και έχουμε απότομη και μεγάλη αύξηση των συντελεστών ποιότητας. Η συμπεριφορά αυτή είναι απολύτως λογική καθώς για πολύ μικρές τιμές του φανταστικού μέρους της επιτρεπτότητας, οι διηλεκτρικές απώλειες γίνονται πάρα πολύ μικρές ανεξάρτητα του βαθμού διεύθυνσης του διηλεκτρικού. Αντίστοιχη σημαντική επίδραση με το φανταστικό μέρος έχει και το πραγματικό μέρος της επιτρεπτότητας, καθώς και αυτό επηρεάζει σημαντικά τον συντελεστή ανάκλασης στη διεπαφή κενού-διηλεκτρικού. Συγκεκριμένα, ο συντελεστής ανάκλασης μειώνεται και οι διηλεκτρικές απώλειες αυξάνουν όσο ελαττώνεται το πραγματικό μέρος και πλησιάζει αυτό της επιτρεπτότητας του κενού. Έτσι, το ταιρίασμα (matching) μεταξύ των δύο περιοχών γίνεται καλύτερο και το πεδίο διεισδύει περισσότερο στο διηλεκτρικό, όπου καταναλίσκεται η ενέργειά του υπό τη μορφή των διηλεκτρικών απωλειών. Η εξάρτηση των διηλεκτρικών απωλειών από τον συντελεστή ανάκλασης στα δαχτυλίδια έχει σημειωθεί και στα [60, 61], όπου παρουσιάζονται κάποιες καμπύλες με παρόμοια συμπεριφορά ως προς τη μεταβολή της διηλεκτρικής επιτρεπτότητας.

Με βάση τα προηγούμενα συμπεράσματα, είναι εμφανές ότι στον δίαυλο της δέσμης θα πρέπει να χρησιμοποιούνται διηλεκτρικά υλικά που εμφανίζουν στις συχνότητες ενδιαφέροντος μικρές τιμές τόσο του πραγματικού όσο και του φανταστικού μέρους της επιτρεπτότητας. Ιδιαίτερα μικρές τιμές του φανταστικού μέρους δεν είναι επιθυμητές, καθώς τότε η απώσβεση μέσα στο διηλεκτρικό γίνεται εξαιρετικά μικρή και οι απώλειες δεν ενοούνται από περαιτέρω μείωση του συντελεστή ανάκλασης. Από τα σχήματα 5.17 και 5.19 φαίνεται καθαρά ότι το

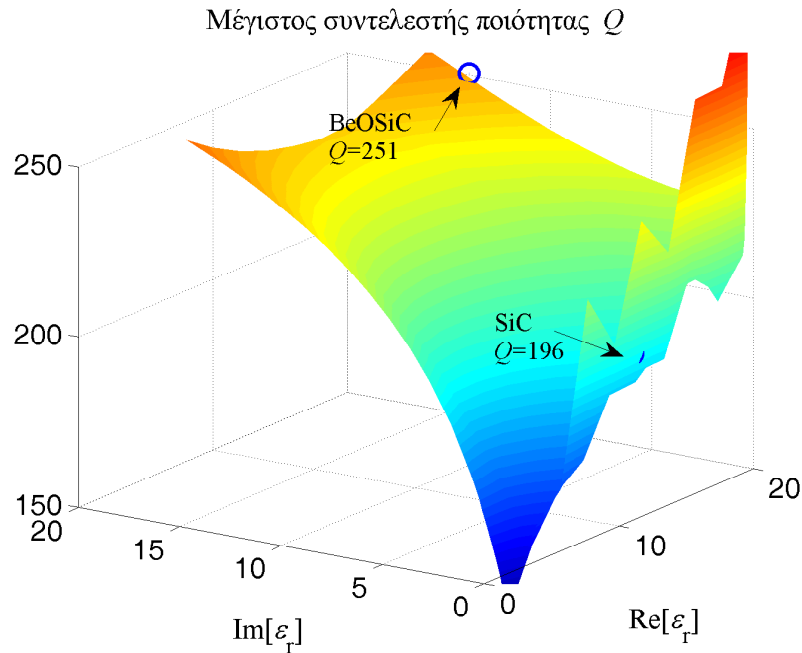
#### 5.4 Επίδραση των παραμέτρων της γεωμετρίας στη διέγερση παρασιτικών ρυθμών



Σχήμα 5.18: Αξιμουθιακή συνιστώσα ηλεκτρικού πεδίου του ρυθμού με τον μέγιστο συντελεστή ποιότητας σε διάυλο δέσμης με i) BeOSiC και ii) SiC. Παρουσιάζεται επίσης σε μεγέθυνση το 5ο διηλεκτρικό δαχτυλίδι μαζί με την αντίστοιχη εσοχή για τις δύο περιπτώσεις. Είναι εμφανής η μεγαλύτερη διεύθυνση του πεδίου για τη δεύτερη περίπτωση.

συγκεκριμένο υλικό SiC, που μετρήθηκε και βρέθηκε να έχει μικρότερο πραγματικό και φανταστικό μέρος σε σχέση με το BeOSiC, είναι καταλληλότερο του BeOSiC, καθώς παρουσιάζει 20% μικρότερες τιμές συντελεστών ποιότητας σε σχέση με αυτό.

Γενικά τα Σχήματα 5.17 και 5.19 μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως χάρτες για την κατάλληλη επιλογή διηλεκτρικού υλικού. Αν και τα σχήματα αυτά αφορούν τον μέγιστο συντελεστή ποιότητας ανά τιμή διηλεκτρικής επιτρεπτότητας, σημειώνουμε ότι και οι υπόλοιποι ρυθμοί εμφανίζουν την ίδια συμπεριφορά στη μεταβολή των αντίστοιχων τιμών των συντελεστών ποιότητάς τους. Η κατάλληλη επιλογή διηλεκτρικού υλικού κρίνεται ως σημαντική, καθώς όπως βλέπουμε στους χάρτες για τον μέγιστο συντελεστή ποιότητας, οι συνολικές απώλειες μπορεί να αυξηθούν έως και 40% σε σχέση με το BeOSiC που χρησιμοποιείται συνήθως. Η αύξηση στις διηλεκτρικές απώλειες είναι ακόμα πιο μεγάλη, καθώς υπενθυμίζουμε ότι στους συντελεστές ποιότητας συμπεριλαμβάνονται και οι απώλειες περίθλασης που δεν επηρεάζονται από το διηλεκτρικό υλικό κατά συστηματικό τρόπο. Τα συγκεκριμένα συμπεράσματα και ο χάρτης που εξάγαμε αναμένεται να είναι χρήσιμα για την κατάλληλη επιλογή διηλεκτρικού υλικού σε περίπτωση που τα πειράματα για το



Σχήμα 5.19: Τρισδιάστατη απεικόνιση της μεταβολής του μέγιστου συντελεστή ποιότητας στο επίπεδο του πραγματικού και φανταστικού μέρους της σχετικής επιτρεπτότητας. Πρόκειται για τα δεδομένα του Σχήματος 5.17 που επαναλαμβάνονται σε τρισδιάστατη απεικόνιση για λόγους καλύτερης εποπτείας για τις μικρές τιμές του φανταστικού μέρους της επιτρεπτότητας.

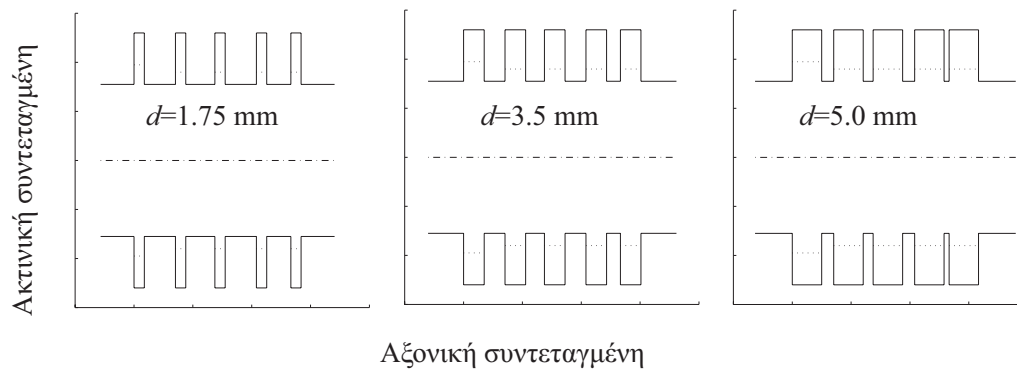
Ευρωπαϊκό γυροτρόνιο του ITER εμφανίσουν προβλήματα στη λειτουργία τους λόγω διέγερσης παρασιτικών ταλαντώσεων.

#### 5.4.2 Επίδραση του πάχους των διηλεκτρικών δαχτυλιδιών στην απορρόφηση και συνολικά στην αλληλεπίδραση

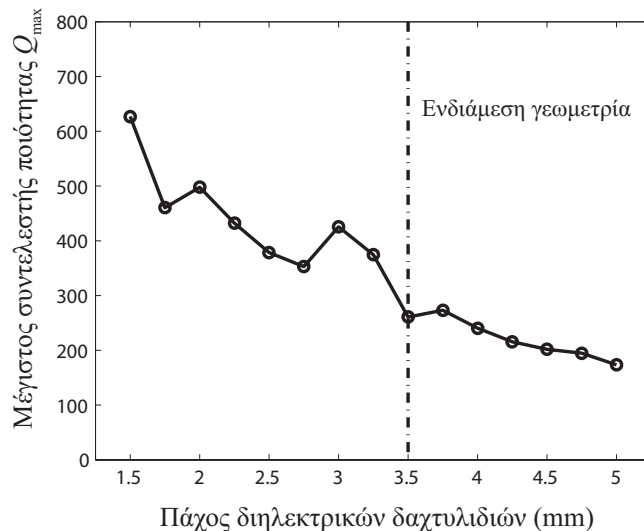
Στην υποενότητα αυτή εξετάζουμε την επίδραση του πάχους των διηλεκτρικών δαχτυλιδιών στη διέγερση των παρασιτικών ταλαντώσεων, καθώς όπως θα δούμε, αντίθετα με την τιμή της διηλεκτρικής επιτρεπτότητας, το πάχος των δαχτυλιδιών φαίνεται να επηρεάζει την αλληλεπίδραση σε σημαντικό βαθμό τόσο μέσω των απωλειών όσο και μέσω των προφίλ του πεδίου.

Πρώτα, θα εξετάσουμε χωριστά την επίδραση του πάχους των διηλεκτρικών δαχτυλιδιών στους συντελεστές ποιότητας των ρυθμών, οι οποίοι περιλαμβάνουν τις διηλεκτρικές απώλειες που εξαρτώνται σε σημαντικό βαθμό από το πάχος των δαχτυλιδιών. Συγκεκριμένα, μελετάμε και πάλι τη γεωμετρία του διαύλου δέσμης του γυροτρονίου 170 GHz, 1 MW για το ITER, όπως αυτή εξετάστηκε επίσης στην ενότητα 5.2. Αυτή τη φορά υπολογίζουμε τους συντονιζόμενους ρυθμούς στην επικίνδυνη περιοχή συχνοτήτων 135-160 GHz με  $Q > 90$  για τον αζμουθιακό δείκτη  $m = 25$  μεταβάλλοντας το πάχος των διηλεκτρικών δαχτυλιδιών ( $\epsilon_r = 20 - 14j$ ). Συγκεκριμένα, κρατώντας σταθερό το μήκος της συνολικής περιοχής του διαύλου δέσμης που εξετάζουμε, μεταβάλλουμε το πάχος των διηλεκτρικών δαχτυλιδιών εις βάρος των αντίστοιχων μεταλλικών δαχτυλιδιών από την τιμή 1.75 mm έως και τα 5.0 mm ανά 0.25 mm. Στο Σχήμα 5.20 παρουσιάζονται οι δύο ακραίες και μία ενδιάμεση

#### 5.4 Επίδραση των παραμέτρων της γεωμετρίας στη διέγερση παρασιτικών ρυθμών



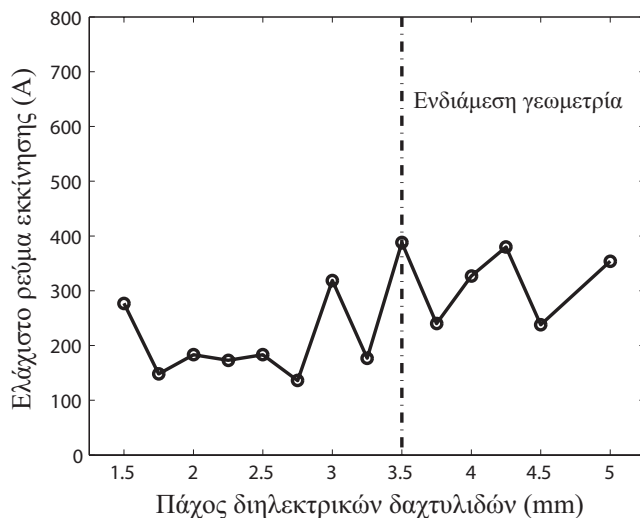
Σχήμα 5.20: Τρεις περιπτώσεις γεωμετρίας με διαφορετικό πάχος των διηλεκτρικών δαχτυλιδιών. Από την περιοχή τιμών που εξετάζουμε, απεικονίζονται οι γεωμετρίες με τις δύο ακραίες και μία ενδιάμεση τιμή του πάχους των διηλεκτρικών δαχτυλιδιών.



Σχήμα 5.21: Μεταβολή της τιμής του μέγιστου συντελεστή ποιότητας για κάθε γεωμετρία με διαφορετικό πάχος των διηλεκτρικών δαχτυλιδιών.

απεικόνιση των περιπτώσεων γεωμετρίας που εξετάσαμε.

Στο Σχήμα 5.21 παρουσιάζουμε τη μεταβολή της τιμής του μέγιστου συντελεστή ποιότητας που βρέθηκε για κάθε γεωμετρία με διαφορετικό πάχος των διηλεκτρικών δαχτυλιδιών. Αντίστοιχη εικόνα εμφανίζει η τιμή των συντελεστών ποιότητας για όλους τους συντονιζόμενους ρυθμούς της περιοχής αναζήτησης. Βλέπουμε στο σχήμα ότι, εκτός κάποιων τυχαίων μικρών διακυμάνσεων, οι τιμές των συντελεστών ποιότητας εν γένει ελαττώνονται με την αύξηση του πάχους των διηλεκτρικών δαχτυλιδιών. Πρόκειται για ένα αναμενόμενο αποτέλεσμα, καθώς το διηλεκτρικό υλικό αυξανόμενου του πάχους προσφέρει μεγαλύτερη επιφάνεια στα πεδία για να διεισδύσουν και να ασπασβεστούν. Μάλιστα, από τη μορφή της καμπύλης του σχήματος 5.21 φαίνεται ότι οι συντελεστές ποιότητας είναι σε μεγάλο βαθμό αντιστρόφως ανάλογοι του πάχους των δαχτυλιδιών. Αντίστοιχη συμπεριφορά αύξησης των απωλειών με την αύξηση του πάχους των διηλεκτρικών έχει βρεθεί και στα [60, 61].



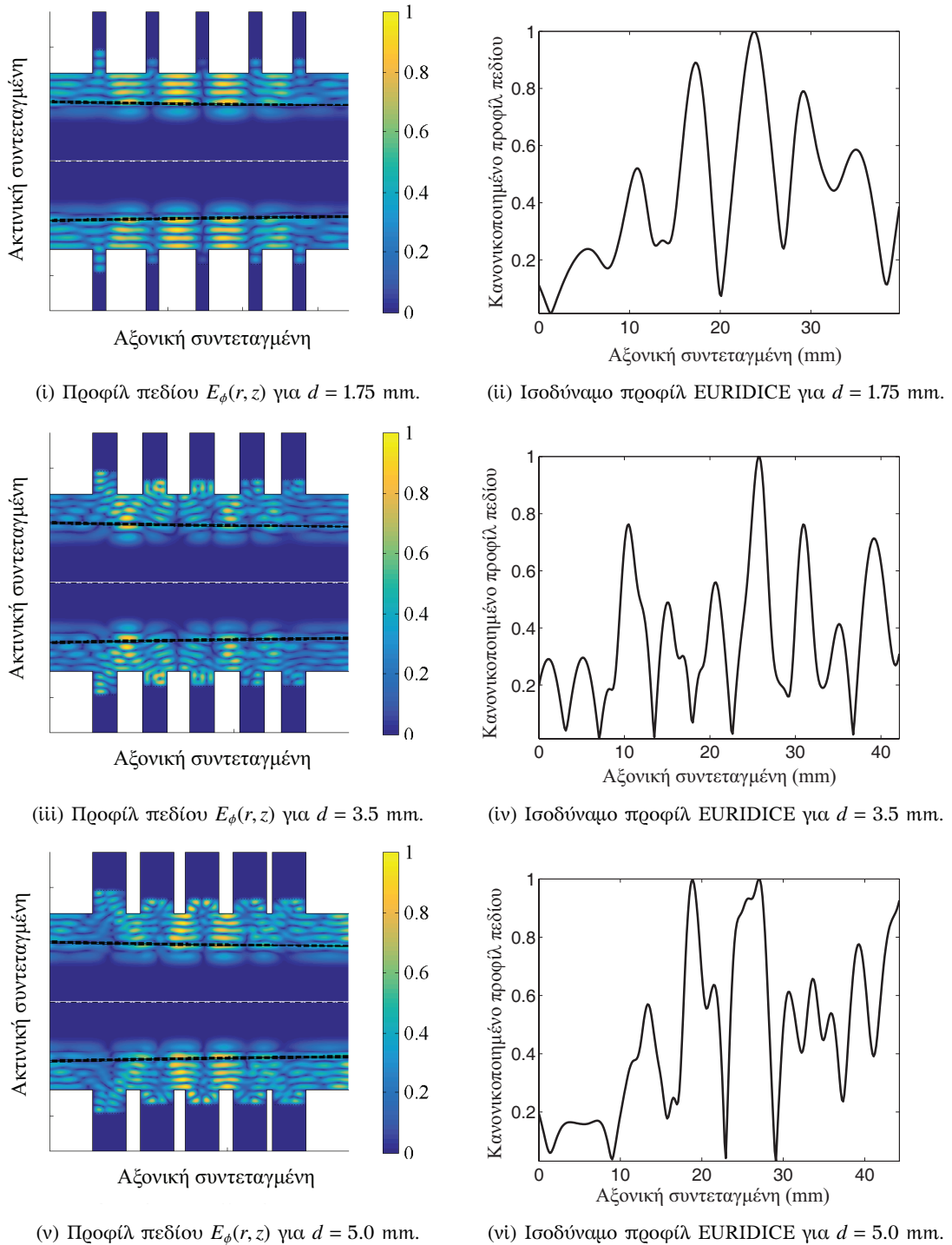
Σχήμα 5.22: Μεταβολή της τιμής του μέγιστου συντελεστή ποιότητας για κάθε γεωμετρία με διαφορετικό πάχος των διηλεκτρικών δαχτυλιδιών.

Αφού προσδιορίσαμε τα χαρακτηριστικά των ρυθμών της κρύας κοιλότητας και εν προκειμένω τους συντελεστές ποιότητας σε σχέση με τη μεταβολή του πάχους των διηλεκτρικών δαχτυλιδιών, συνεχίζουμε με τον υπολογισμό των μεγεθών της αλληλεπίδρασης. Συγκεκριμένα, για κάθε διαφορετική τιμή του πάχους των διηλεκτρικών δαχτυλιδιών υπολογίζουμε τα ρεύματα εκκίνησης όλων των ρυθμών που βρίσκονται στην περιοχή αναζήτησης για το σημείο λειτουργίας χαμηλής τάσης, όπως αυτό ορίστηκε στην ενότητα 5.2. Στο Σχήμα 5.22 παρουσιάζουμε την τιμή του ελάχιστου ρεύματος εκκίνησης που βρέθηκε για κάθε γεωμετρία με διαφορετικό πάχος των διηλεκτρικών δαχτυλιδιών.

Κατ' αρχάς, παρατηρούμε ότι το διάγραμμα των ρευμάτων εκκίνησης παρουσιάζει μεγάλες τυχαίες διακυμάνσεις. Αυτό είναι ένα λογικό φαινόμενο αφού η αλληλεπίδραση εξαρτάται ταυτόχρονα από πολλούς παράγοντες όπως η συχνότητα συντονισμού του κάθε ρυθμού, ο συντελεστής ποιότητάς του και το προφίλ πεδίου του. Έτσι, είναι αναμενόμενη μια τυχαιότητα στα αποτελέσματα για το ελάχιστο ρεύμα εκκίνησης των ρυθμών. Παρ' όλα αυτά το διάγραμμα στη γενική του τάση φαίνεται να εμφανίζει μια ιδιαιτερότητα. Καθώς όπως έχουμε δείξει στο Σχήμα 5.21 οι συντελεστές ποιότητας συστηματικά ελαττώνονται με την αύξηση του πάχους των διηλεκτρικών δαχτυλιδιών, θα περίμενε κανείς στη γενική του τάση το διάγραμμα να εμφανίζει μια ανάλογη συστηματική αύξηση των ελάχιστων ρευμάτων εκκίνησης με την αύξηση του πάχους, καθώς όπως είναι γνωστό τα ρεύματα εκκίνησης είναι αντιστρόφως ανάλογα με τους συντελεστές ποιότητας. Μια τέτοια τάση δεν φαίνεται να εμφανίζεται στο Σχήμα 5.21, καθώς η μεγαλύτερη τιμή του ρεύματος εκκίνησης παρουσιάζεται στην τιμή του πάχους για την ενδιάμεση γεωμετρία.

Η παραπάνω συμπεριφορά είναι πιθανό να οφείλεται στην επίδραση του πάχους στα προφίλ πεδίου των ρυθμών και κατ' επέκταση στην αλληλεπίδραση. Στο Σχήμα 5.23 παρουσιάζουμε τα προφίλ πεδίου τριών χαρακτηριστικών ρυθμών από τις ακραίες και την ενδιάμεση γεωμετρία που εξετάσαμε. Συγκεκριμένα, παρουσιάζουμε

#### 5.4 Επίδραση των παραμέτρων της γεωμετρίας στη διέγερση παρασιτικών ρυθμών



Σχήμα 5.23: Σύγκριση των προφίλ πεδίου για διαφορετικά πάχη των διηλεκτρικών δαχτυλιδιών. Το πάχος επηρεάζει την κυμάτωση των προφίλ πεδίου.

τόσο τα διδιάστατα προφίλ της αξιωματικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου  $E_\phi(r, z)$ , όσο και τα ισοδύναμα προφίλ πεδίου με τα οποία τροφοδοτούμε τον κώδικα EURIDICE, όπως αυτά έχουν οριστεί στην υποενότητα 4.2. Και στις δύο

μορφές απεικόνισης των προφίλ φαίνεται ότι στην ενδιάμεση γεωμετρία τα προφίλ πεδίου εμφανίζουν μεγαλύτερη κυμάτωση σε σχέση με τις ακραίες περιπτώσεις της γεωμετρίας, όπου εμφανίζονται περισσότερο ομαλά προφίλ πεδίου με μεγαλύτερες περιοχές όπου το πεδίο έχει σημαντικό πλάτος. Η μεγαλύτερη αυτή κυμάτωση της ενδιάμεσης γεωμετρίας που εκφράζεται στα ισοδύναμα προφίλ του κώδικα EURIDICE με περισσότερους λοβούς και μηδενισμούς του πλάτους, είναι πιθανό ότι δεν ευνοεί τόσο την αλληλεπίδραση σε σχέση με πιο ομαλά προφίλ πεδίου που συναντώνται σε μεγαλύτερο βαθμό στις ακραίες γεωμετρίες.

Φαίνεται λοιπόν ότι εκτός από τις απώλειες των ρυθμών τα ρεύματα εκκίνησης εξαρτώνται σε υπολογίσιμο βαθμό και από τη μορφή των προφίλ πεδίου. Αν ισχύει η υπόθεση ότι τα περισσότερα κυματωμένα προφίλ πεδίου δεν ευνοούν την αλληλεπίδραση τότε φαίνεται ότι πιο κατάλληλη επιλογή σχεδίασης είναι μια ενδιάμεση γεωμετρία με ισορροπημένο πάχος μεταξύ διπλεκτρικών και μεταλλικών δαχτυλιδιών. Παρ' όλα αυτά, τα παραπάνω συμπεράσματα είναι μάλλον ενδεικτικά και δύσκολα μπορεί να υποστηριχθεί η γενίκευσή τους, καθώς η εικόνα μπορεί να είναι διαφορετική για κάποια άλλη συγκεκριμένη γεωμετρία, όπου τα επιμέρους φαινόμενα μπορεί να μη δρουν με αντίστοιχη ένταση όπως στην περίπτωση που εξετάσαμε.

Τα παραπάνω συμπεράσματα αναδεικνύουν και ένα πλεονέκτημα που πιθανόν έχει η γεωμετρία των στοιβαγμένων μεταλλικών-διπλεκτρικών δαχτυλιδιών σε σχέση με τη γεωμετρία ομαλής ακτίνας από SiC (υποενότητα 1.4.1). Φαίνεται πως ο πρώτος τύπος της γεωμετρίας διαύλου δέσμης δημιουργεί πολύ περισσότερα κυματωμένα αξονικά προφίλ πεδίου σε σχέση με τη γεωμετρία ομαλής ακτίνας από SiC. Το συμπέρασμα αυτό έχει σημειωθεί και στο [63]. Περισσότερο κυματωμένα προφίλ πεδίου είναι πιθανό να μην ευνοούν την αλληλεπίδραση σε σχέση με τα πιο ομαλά προφίλ πεδίου που συναντώνται στους διαύλους συνεχούς ακτίνας. Ασφαλές συμπέρασμα περί αυτού όμως μπορεί να προκύψει μόνο με την εκτέλεση αυτο-συνεπών προσομοιώσεων, οι οποίες είναι και οι μόνες που προσομοιώνουν με ακρίβεια τόσο την εμπρός όσο και την πίσω αλληλεπίδραση.

Γενικά, αν και παρουσιάστηκαν κάποιες ενδείξεις, τα παραπάνω συμπεράσματα ως προς την επίδραση της κυμάτωσης των προφίλ πεδίου οφείλουν να επαληθεύονται ξεχωριστά για κάθε συγκεκριμένη γεωμετρία. Παρόμοιες μεταβολές σε διαφορετικές γεωμετρίες, λόγω της πολυπλοκότητας της διάταξης και της αλληλεπίδρασης σε αυτήν, μπορεί να παρουσιάζουν διαφορετικά μεγέθη στην ένταση μεταξύ των διαφορετικών φαινομένων και μπορεί να τροποποιείται ποιοτικά η συμπεριφορά της διάταξης. Εν κατακλείδι, γενικά συμπεράσματα που αφορούν όλες τις συγκεκριμένες διατάξεις είναι πολύ δύσκολο να εξαχθούν με ασφάλεια. Συνεπώς, αναδεικνύονται η ανάγκη ανάπτυξης ενός προηγμένου εργαλείου που θα προσομοιώνει με ακρίβεια συγκεκριμένες διατάξεις και θα εξάγει ασφαλή συμπεράσματα μόνο γι' αυτές.

#### 5.4 Επίδραση των παραμέτρων της γεωμετρίας στη διέγερση παρασιτικών ρυθμών



---

## ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ ΣΕ ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΕΣ ΔΙΑΥΛΟΥ ΔΕΣΜΗΣ

---

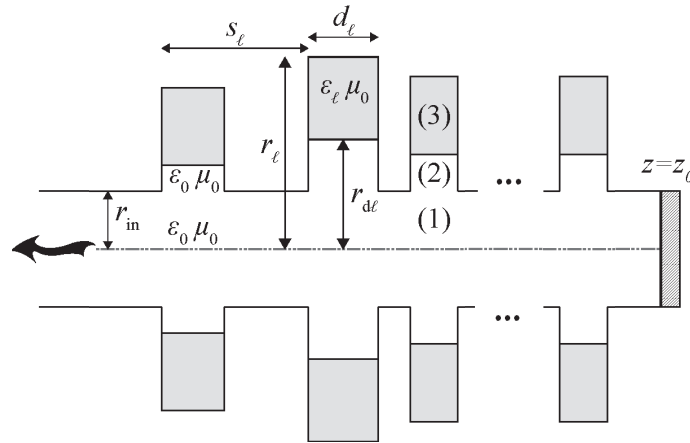
Στο παρόν κεφάλαιο επεκτείνουμε το ηλεκτρομαγνητικό μοντέλο που αναπτύξαμε στο Κεφάλαιο 2 προς την κατεύθυνση ανάπτυξης της δυνατότητας χειρισμού εναλλακτικών γεωμετριών διαύλων δέσμης. Ο φορμαλισμός που θα αναπτυχθεί για τις εναλλακτικές αυτές γεωμετρίες, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για μελλοντικές επεκτάσεις, που θα συμπεριλαμβάνουν την ακριβή μεταβολή της εσωτερικής ακτίνας. Πιο συγκεκριμένα, αναπτύσσουμε τα μοντέλα και τον κώδικα για τις εξής δύο περιπτώσεις γεωμετρίας διαύλου δέσμης:

Πρώτον, αναπτύσσουμε το φορμαλισμό για το πρόβλημα της απλοποιημένης γεωμετρίας με οριακή συνθήκη ολικής ανάκλασης στο δεξί άκρο. Η εφαρμογή του συγκεκριμένου τύπου οριακής συνθήκης θα μας επιτρέψει αφ' ενός να εκτιμήσουμε προσεγγιστικά την επίδραση του στενέματος της ακτίνας, αφ' ετέρου αποτελεί ένα σημαντικό και αναγκαίο ενδιάμεσο βήμα προς μια μελλοντική ακριβή θεώρηση του γεωμετρικού αυτού χαρακτηριστικού. Η μελλοντική αυτή επέκταση θα σκιαγραφηθεί λεπτομερώς στο Κεφάλαιο 7.

Δεύτερον, επεκτείνουμε τον φορμαλισμό και τον κώδικα στην περίπτωση ομοαξονικής γεωμετρίας διαύλου δέσμης. Τα ομοαξονικά γυροτρόνια λόγω βελτιωμένων χαρακτηριστικών επιλεκτικότητας του ρυθμού λειτουργίας αναμένεται στο μέλλον να κυριαρχήσουν σε εφαρμογές υψηλής ισχύος. Με την επέκταση του κώδικα στις ομοαξονικές γεωμετρίες μελετάμε μια γεωμετρία διαύλου δέσμης ομοαξονικού γυροτρονίου και τη συγκρίνουμε με μια όμοια γεωμετρία συμβατικού γυροτρονίου.

### 6.1 Εφαρμογή οριακής συνθήκης ολικής ανάκλασης

Στην ενότητα αυτή αντιμετωπίζουμε το ηλεκτρομαγνητικό πρόβλημα για τη γεωμετρία ενός διαύλου δέσμης, στην οποία δεν ισχύουν οι οριακές συνθήκες εξερχόμενων κυμάτων και στα δύο της άκρα, όπως στο Κεφάλαιο 2. Συγκεκριμένα, η οριακή συνθήκη που επιβάλλουμε τώρα, είναι οριακή συνθήκη ολικής ανάκλασης στα



Σχήμα 6.1: Σχηματική αναπαράσταση γεωμετρίας με οριακή συνθήκη ολικής ανάκλασης στο δεξί άκρο.

δεξιά της διάταξης και συγκεκριμένα στο σημείο  $z = z_0$ , ενώ αριστερά της διάταξης εξακολουθεί να ισχύει η οριακή συνθήκη εξερχόμενου κύματος. Η γεωμετρία που επιλύουμε σε αυτή την παράγραφο απεικονίζεται τώρα στο Σχήμα 6.1.

Μια γεωμετρία με την εναλλακτική αυτή οριακή συνθήκη χρησιμοποιείται για δύο λόγους. Κατ' αρχάς, μπορεί να μοντελοποιήσει προσεγγιστικά το στένεμα της εσωτερικής ακτίνας των μεταλλικών δαχτυλιδιών. Το στένεμα αυτό υπάρχει, γιατί ελαττώνεται η ακτίνα της δέσμης λόγω της μαγνητικής συμπίεσης, η οποία είναι απαραίτητη, ώστε να επιτευχθεί μεγάλη πυκνότητα ρεύματος στην περιοχή της κοιλότητας. Καθώς η ακτίνα της δέσμης μειώνεται, η ακτίνα των τοιχωμάτων πρέπει να στενεύει και αυτή, ώστε να διατηρείται ένα σταθερό δυναμικό πάνω στη δέσμη. Επομένως, ισχύει ότι, αν θέλουμε να μελετήσουμε ένα μέρος του διαύλου δέσμης με τη θεώρηση μιας σταθερής ακτίνας, που επιλέγεται ως ο μέσος όρος των επιμέρους ακτινών, το σφάλμα που εισάγεται με την εφαρμογή οριακής συνθήκης εξερχόμενου κύματος στα δεξιά της διάταξης είναι σημαντικό. Αν θεωρήσουμε οριακή συνθήκη ολικής ανάκλασης στα δεξιά της διάταξης, τότε κάνουμε μια πιο ακριβή προσέγγιση, καθώς στην πραγματική διάταξη ένα μεγάλο μέρος του κύματος που οδεύει προς τα δεξιά ανακλάται λόγω της μικρότερη ακτίνας. Επίσης, με την οριακή συνθήκη ολικής ανάκλασης είμαστε στην ασφαλή πλευρά της προσέγγισης, καθώς η θεώρηση αυτή εν γένει έχει ως συνέπεια μεγαλύτερους συντελεστές ποιότητας για τους ρυθμούς και συνεπώς μικρότερα ρεύματα διέγερσης. Έτσι, ενώ η οριακή συνθήκη εξερχόμενου κύματος υπερεκτιμά τα ρεύματα διέγερσης, η νέα θεώρηση τα υποεκτιμά και εξασφαλίζει, ότι κανείς ρυθμός δεν θα διεγερθεί λόγω υπερεκτίμησης του ρεύματος διέγερσης, ως συνέπεια των σφαλμάτων που εισάγει η θεώρηση σταθερής ακτίνας.

Ο δεύτερος και πιο ουσιαστικός λόγος για την ανάπτυξη του φορμαλισμού της οριακής συνθήκης ολικής ανάκλασης στο δεξί άκρο, αποτελεί η χρησιμότητά του ως πρώτο βήμα στην περίπτωση που θέλουμε να αναπτύξουμε μια ακριβή μοντελοποίηση της μεταβλητής εσωτερικής ακτίνας των μεταλλικών δαχτυλιδιών. Για μια τέτοια μελλοντική επέκταση, η οποία συζητείται στην ενότητα 7.2.1, οι ενδιαμέσες περιοχές, που ορίζονται από τα σκαλοπάτια της ακτίνας, επιδέχονται οριακή συνθήκη ολικής ανάκλασης στο δεξί άκρο. Συνεπώς για τους δύο παραπάνω λόγους

προχωρούμε στην ανάπτυξη του φορμαλισμού, που αντιμετωπίζει τη γεωμετρία του Σχήματος 6.1.

### 6.1.1 Ανάπτυξη του φορμαλισμού με ολική ανάκλαση στο δεξί άκρο

Αναπτύσσουμε τώρα τον φορμαλισμό για τη γενική γεωμετρία του Σχήματος 6.1. Σε αντίθεση με την ανοιχτή γεωμετρία που εφαρμόζονται οι οριακές συνθήκες εξερχόμενων κυμάτων, τώρα εφαρμόζουμε στο δεξί άκρο  $z = z_0$  οριακή συνθήκη ολικής ανάκλασης. Επομένως, οι εκφράσεις των πεδίων στο εσωτερικό του κυλίνδρου υπό τη μορφή ενός μετασχηματισμού Fourier δεν ενδείκνυνται πλέον για την ανάπτυξη του φορμαλισμού.

Για να συμπεριλάβουμε την οριακή συνθήκη ολικής ανάκλασης αναπτύσσουμε τώρα τα πεδία πάλι σε ένα συνεχές φάσμα του αξονικού κυματαριθμού, χρησιμοποιώντας όμως τον αντίστροφο ημιτονικό και συνημιτονικό μετασχηματισμό Fourier (Fourier Sine Transform και Fourier Cosine Transform) μετατοπισμένο στο σημείο  $z = z_0$ . Έτσι, οι εκφράσεις των δυναμικών του Hertz που εξασφαλίζουν την εφαρμογή της οριακής συνθήκης είναι:

$$\mathbf{\Pi}_e = \hat{z} \int_0^{+\infty} A_e(\zeta) J_m(k_{\perp} r) e^{jm\phi} \cos[\zeta(z - z_0)] d\zeta, \quad (6.1.1\alpha)$$

$$\mathbf{\Pi}_m = \hat{z} \int_0^{+\infty} A_h(\zeta) J_m(k_{\perp} r) e^{jm\phi} \sin[\zeta(z - z_0)] d\zeta. \quad (6.1.1\beta)$$

Παρομοίως, η έκφραση του προσπίπτοντος εξωτερικά ρυθμού τροποποιείται και δίνεται τώρα από τον τύπο:

$$\mathbf{\Pi}_m^{\text{inc}} = \hat{z} A_H J_m(K_{\perp} r) e^{im\phi} \sin[\beta(z - z_0)]. \quad (6.1.2)$$

Αντίστοιχη ανάπτυξη των πεδίων με εφαρμογή οριακής συνθήκης ολικής ανάκλασης στο ένα άκρο υπάρχει στο [113]. Με την παραπάνω τροποποίηση των εκφράσεων των πεδίων στο εσωτερικό του κυλίνδρου μεταβάλλεται ουσιαστικά ο φορμαλισμός του προβλήματος σε σχέση με το Κεφάλαιο 2 και οι εξισώσεις του συστήματος πρέπει να εξαχθούν ξανά στη βάση των νέων εκφράσεων για τα πεδία. Αντιθέτως, οι εκφράσεις των πεδίων στα δαχτυλίδια είτε είναι κενά είτε είναι φορτωμένα με διηλεκτρικό παραμένουν ίδιες και δίνονται από τις σχέσεις (2.2.3) και (2.2.6), αντίστοιχα.

Συνεχίζουμε τώρα με την εφαρμογή των οριακών συνθηκών (2.2.16) στην κυλινδρική επιφάνεια  $r = r_{\text{in}}$ . Λαμβάνοντας υπ' όψιν την (2.2.17) εφαρμόζουμε τώρα για την αζιμουθιακή συνιστώσα της (2.2.16α) τον ημιτονικό μετασχηματισμό Fourier μετατοπισμένο κατά  $z_0$  ο οποίος ορίζεται ως εξής:

$$F_S(\zeta) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{z_0} f(z) \sin[\zeta(z - z_0)] dz. \quad (6.1.3)$$

Μετά την εφαρμογή του ημιτονικού μετασχηματισμού Fourier και την αντικατάσταση των εκφράσεων των πεδίων παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{j\zeta m}{r_{\text{in}}} A_e(\zeta) J_m(k_{\perp} r_{\text{in}}) + j\omega\mu_0 k_{\perp} A_h(\zeta) J'_m(k_{\perp} r_{\text{in}}) = \\
 & -\frac{2}{\pi r_{\text{in}}} \sum_{\ell=1}^L \sum_{n=0}^{\infty} jm \left( \frac{n\pi}{d_{\ell}} \right)^2 P_{n\ell}^{(2)}(k_{n\ell}^{(2)} r_{\text{in}}) F_{n\ell}(\zeta, s_{\ell}, z_0) \\
 & + \frac{2j\omega\mu_0}{\pi} \sum_{\ell=1}^L \sum_{n=1}^{\infty} k_{n\ell}^{(2)} \left( \frac{n\pi}{d_{\ell}} \right) Q_{n\ell}^{\prime(2)}(k_{n\ell}^{(2)} r_{\text{in}}) F_{n\ell}(\zeta, s_{\ell}, z_0).
 \end{aligned} \tag{6.1.4}$$

Η βοηθητική συνάρτηση  $F_{n\ell}(\zeta, s_{\ell}, z_0)$ , η οποία είναι διαφορετική από την αντίστοιχη συνάρτηση της παραγράφου 2.2.5, προκύπτει τώρα από τον αναλυτικό υπολογισμό του ολοκληρώματος  $\int_{s_{\ell}}^{s_{\ell}+d_{\ell}} \sin\left[\frac{n\pi}{d_{\ell}}(z-s_{\ell})\right] \sin[\zeta(z-z_0)] dz$  και δίνεται από τη σχέση:

$$F_{n\ell}(\zeta, s_{\ell}, z_0) = \frac{\sin[\zeta(s_{\ell}-z_0)] - (-1)^n \sin[\zeta(s_{\ell}+d_{\ell}-z_0)]}{(n\pi/d_{\ell})^2 - \zeta^2}. \tag{6.1.5}$$

Συνεχίζουμε τώρα ικανοποιώντας τη συνέχεια της αξονικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου. Έτσι, εφαρμόζουμε τώρα τον συνημιτονικό μετασχηματισμό Fourier (FCT) μετατοπισμένο κατά  $z_0$  στην αξονική συνιστώσα της (2.2.16α), ο οποίος ορίζεται ως εξής:

$$F_C(\zeta) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{z_0} f(z) \cos[\zeta(z-z_0)] dz. \tag{6.1.6}$$

Χρησιμοποιώντας την (2.2.20) και αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των πεδίων έχουμε:

$$A_e(\zeta) = \frac{2\zeta}{\pi k_{\perp}^2 J_m(k_{\perp} r_{\text{in}})} \sum_{\ell=1}^L \sum_{n=0}^{\infty} k_{n\ell}^{(2)} P_{n\ell}^{(2)}(k_{n\ell}^{(2)} r_{\text{in}}) F_{n\ell}(\zeta, s_{\ell}, z_0). \tag{6.1.7}$$

Συνεχίζουμε τώρα με την εφαρμογή της οριακής συνθήκης συνέχειας της αξονικής συνιστώσας του μαγνητικού πεδίου. Πολλαπλασιάζουμε την (2.2.16β) με  $\sin\left[\frac{n\pi}{d_{\ell}}(z-s_{\ell})\right]$  και αφού αντικαταστήσουμε τις εκφράσεις του πεδίου, ολοκληρώνουμε στο  $\ell$ -οστό δαχτυλίδι. Έτσι, παίρνουμε τη σχέση:

$$\begin{aligned}
 & (\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \beta^2) A_H J_m(K_{\perp} r_{\text{in}}) \frac{n\pi}{d_{\ell}} F_{n\ell}(\beta, s_{\ell}, z_0) - \left( \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \left( \frac{n\pi}{d_{\ell}} \right)^2 \right) Q_{n\ell}^{(2)}(k_{n\ell}^{(2)} r_{\text{in}}) \frac{d_{\ell}}{2} (1 - \delta_{n0}) \\
 & = - \int_0^{\infty} (\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \zeta^2) A_h(\zeta) J_m(k_{\perp} r_{\text{in}}) \frac{n\pi}{d_{\ell}} F_{n\ell}(\zeta, s_{\ell}, z_0) d\zeta.
 \end{aligned} \tag{6.1.8}$$

Τέλος, εφαρμόζουμε και τη συνέχεια της αξιμουθιακής συνιστώσας του μαγνητικού πεδίου. Πολλαπλασιάζουμε για την αξιμουθιακή συνιστώσα της (2.2.16β) με  $\cos\left[\frac{n\pi}{d_{\ell}}(z-s_{\ell})\right]$  και ολοκληρώνουμε στο  $\ell$ -οστό αυλάκι. Έτσι, εξάγουμε τη σχέση:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{r_{\text{in}}} \int_0^{\infty} A_h(\zeta) jm \zeta^2 J_m(k_{\perp} r_{\text{in}}) F_{n\ell}(\zeta, s_{\ell}, z_0) d\zeta - j\omega\varepsilon_0 \int_0^{\infty} A_e(\zeta) \zeta k_{\perp} J'_m(k_{\perp} r_{\text{in}}) F_{n\ell}(\zeta, s_{\ell}, z_0) d\zeta \\
 & + \frac{1}{r_{\text{in}}} jm \beta^2 A_H J_m(K_{\perp} r_{\text{in}}) F_{n\ell}(\beta, s_{\ell}, z_0) = \frac{jm n\pi}{r_{\text{in}} d_{\ell}} Q_{n\ell}^{(2)}(k_{n\ell}^{(2)} r_{\text{in}}) \frac{d_{\ell}}{2} (1 + \delta_{n0}) \\
 & - j\omega\varepsilon_0 k_{n\ell}^{(2)} P_{n\ell}^{\prime(2)}(k_{n\ell}^{(2)} r_{\text{in}}) \frac{d_{\ell}}{2} (1 + \delta_{n0}).
 \end{aligned} \tag{6.1.9}$$

Για την εξαγωγή του τελικού συστήματος εξισώσεων χρειαζόμαστε την αναλυτική έκφραση της  $A_h(\zeta)$ , την οποία παίρνουμε, αν αντικαταστήσουμε την (6.1.7) στην (6.1.4):

$$A_h(\zeta) = \frac{2m}{\pi\omega\mu_0 k_{\perp} J'_m(k_{\perp} r_{\text{in}}) r_{\text{in}}} \sum_{\ell=1}^L \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{k_{n\ell}^{(2)}}{k_{\perp}^2} \zeta^2 - \left( \frac{n\pi}{d_{\ell}} \right)^2 \right) P_{n\ell}^{(2)}(k_{n\ell}^{(2)} r_{\text{in}}) e^{-j\zeta s_{\ell}} F_{n\ell}(\zeta, s_{\ell}, z_0) \\ + \frac{2}{\pi k_{\perp} J'_m(k_{\perp} r_{\text{in}})} \sum_{\ell=1}^L \sum_{n=1}^{\infty} k_{n\ell}^{(2)} \frac{n\pi}{d_{\ell}} Q_{n\ell}^{(2)}(k_{n\ell}^{(2)} r_{\text{in}}) e^{-j\zeta s_{\ell}} F_{n\ell}(\zeta, s_{\ell}, z_0). \quad (6.1.10)$$

Κατόπιν, αντικαθιστούμε τις (6.1.7) και (6.1.10) στην (6.1.9), καθώς και την (6.1.10) στην (6.1.8). Έτσι, το τελικό σύστημα εξισώσεων για την περίπτωση που εφαρμόζεται οριακή συνθήκη ολικής ανάκλασης στο δεξί άκρο περιγράφεται από τις σχέσεις:

$$\left[ \frac{n\pi m}{d_{\ell} r_{\text{in}}} Q_{n\ell}^{(2)}(k_{n\ell}^{(2)} r_{\text{in}}) - k_{n\ell}^{(2)} \omega \varepsilon_0 P_{n\ell}^{(2)}(k_{n\ell}^{(2)} r_{\text{in}}) \right] \frac{d_{\ell}}{2} (1 + \delta_{n0}) - \sum_{\nu, \lambda} \frac{\nu\pi m}{d_{\lambda} r_{\text{in}}} k_{\nu\lambda}^{(2)} Q_{\nu\lambda}^{(2)}(k_{\nu\lambda}^{(2)} r_{\text{in}}) I_1^{(\text{bc})}(n, \ell, \nu, \lambda) \\ + \sum_{\nu, \lambda} \frac{P_{\nu\lambda}^{(2)}(k_{\nu\lambda}^{(2)} r_{\text{in}})}{\omega r_{\text{in}}^2} \left[ \left( \frac{\nu\pi}{d_{\lambda}} \right)^2 \frac{m^2}{\mu_0} I_1^{(\text{bc})}(n, \ell, \nu, \lambda) - k_{\nu\lambda}^{(2)} \frac{m^2}{\mu_0} I_3^{(\text{bc})}(n, \ell, \nu, \lambda) + (\omega r_{\text{in}} k_{\nu\lambda}^{(2)})^2 \varepsilon_0 I_4^{(\text{bc})}(n, \ell, \nu, \lambda) \right] \\ = \frac{\beta^2}{r_{\text{in}}} m A_H J_m(K_{\perp} r_{\text{in}}) e^{-j\beta s_{\ell}} F_{n\ell}(\beta, s_{\ell}, z_0), \quad (6.1.11)$$

$$k_{n\ell}^{(2)} Q_{n\ell}^{(2)}(k_{n\ell}^{(2)} r_{\text{in}}) \frac{d_{\ell}}{2} (1 - \delta_{n0}) + \sum_{\nu, \lambda} m n \pi \frac{P_{\nu\lambda}^{(2)}(k_{\nu\lambda}^{(2)} r_{\text{in}})}{\omega \mu_0 r_{\text{in}} d_{\ell}} \left[ \left( \frac{\nu\pi}{d_{\lambda}} \right)^2 I_2^{(\text{bc})}(n, \ell, \nu, \lambda) - k_{\nu\lambda}^{(2)} I_1^{(\text{bc})}(n, \ell, \nu, \lambda) \right] \\ - \sum_{\nu, \lambda} k_{\nu\lambda}^{(2)} \frac{n\nu\pi^2}{d_{\ell} d_{\lambda}} Q_{\nu\lambda}^{(2)}(k_{\nu\lambda}^{(2)} r_{\text{in}}) I_2^{(\text{bc})}(n, \ell, \nu, \lambda) = K_{\perp}^2 \frac{n\pi}{d_{\ell}} A_H J_m(K_{\perp} r_{\text{in}}) e^{-j\beta s_{\ell}} F_{n\ell}(\beta, s_{\ell}, z_0). \quad (6.1.12)$$

Παρατηρούμε ότι το σύστημα εξισώσεων που εξάγαμε, έχει ίδια μορφή με αυτή του προβλήματος όπου εφαρμόζονται οριακές συνθήκες εξερχόμενων κυμάτων, όπως αυτό δίνεται από τις (2.2.26) και (2.2.25). Η ουσιαστική διαφορά έγκειται στα ολοκληρώματα  $I_1^{(\text{bc})}$ ,  $I_2^{(\text{bc})}$ ,  $I_3^{(\text{bc})}$ ,  $I_4^{(\text{bc})}$ , τα οποία είναι διαφορετικά λόγω της συνάρτησης  $F_{n\ell}(\zeta, s_{\ell}, z_0)$  και ορίζονται τώρα ως εξής:

$$I_1^{(\text{bc})} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\zeta^2 J_m(k_{\perp} r_{\text{in}})}{k_{\perp} J'_m(k_{\perp} r_{\text{in}})} e^{j\zeta(s_{\ell} - s_{\lambda})} F_{n\ell}(\zeta, s_{\ell}, z_0) F_{\nu\lambda}(\zeta, s_{\lambda}, z_0) d\zeta, \quad (6.1.13)$$

$$I_2^{(\text{bc})} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{k_{\perp} J_m(k_{\perp} r_{\text{in}})}{J'_m(k_{\perp} r_{\text{in}})} e^{j\zeta(s_{\ell} - s_{\lambda})} F_{n\ell}(\zeta, s_{\ell}, z_0) F_{\nu\lambda}(\zeta, s_{\lambda}, z_0) d\zeta, \quad (6.1.14)$$

$$I_3^{(\text{bc})} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\zeta^4 J_m(k_{\perp} r_{\text{in}})}{k_{\perp}^3 J'_m(k_{\perp} r_{\text{in}})} e^{j\zeta(s_{\ell} - s_{\lambda})} F_{n\ell}(\zeta, s_{\ell}, z_0) F_{\nu\lambda}(\zeta, s_{\lambda}, z_0) d\zeta, \quad (6.1.15)$$

$$I_4^{(\text{bc})} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\zeta^2 J'_m(k_{\perp} r_{\text{in}})}{k_{\perp} J_m(k_{\perp} r_{\text{in}})} e^{j\zeta(s_{\ell} - s_{\lambda})} F_{n\ell}(\zeta, s_{\ell}, z_0) F_{\nu\lambda}(\zeta, s_{\lambda}, z_0) d\zeta. \quad (6.1.16)$$

Λόγω της διαφορετικής μορφής της συνάρτησης  $F_{n\ell}(\zeta, s_{\ell}, z_0)$ , η διαδικασία αναλυτικού υπολογισμού των ολοκληρωμάτων διαφέρει σημαντικά από την αντίστοιχη των ολοκληρωμάτων του Κεφαλαίου 2. Για τον λόγο αυτό, παραθέτουμε

με λεπτομέρειες τη διαδικασία αναλυτικού υπολογισμού του ολοκληρώματος  $I_1^{(bc)}$  στο Παράρτημα Π.3. Παρακάτω παραθέτουμε τις αναλυτικές εκφράσεις όλων των ολοκληρωμάτων, όπως αυτές υπολογίστηκαν σύμφωνα με τη μεθοδολογία του παραρτήματος.

$$I_1^{(bc)} = \begin{cases} \sum_p 2j \frac{\zeta'_{mp} J_m(\chi'_{mp})}{r_{in} J_m''(\chi'_{mp})} A_1(-\zeta'_{mp}) - 2j \frac{\lambda_0}{r_{in}} A_1(-\lambda_0) \delta_{m0} + \frac{J_m(k_{n\ell}^{(2)} r_{in})}{k_{n\ell}^{(2)} J_m'(k_{n\ell}^{(2)} r_{in})} \frac{d_\ell}{2} \delta_{n\nu} (1 + \delta_{n0}), & \ell = \lambda \\ \sum_p 2j \frac{\zeta'_{mp} J_m(\chi'_{mp})}{r_{in} J_m''(\chi'_{mp})} A_2(-\zeta'_{mp}) - 2j \frac{\lambda_0}{r_{in}} A_2(-\lambda_0) \delta_{m0}, & \ell \neq \lambda \end{cases}, \quad (6.1.17)$$

$$I_2^{(bc)} = \begin{cases} \sum_p 2j \frac{\chi_{mp}'^2 J_m(\chi'_{mp})}{\zeta'_{mp} r_{in}^3 J_m''(\chi'_{mp})} A_1(-\zeta'_{mp}) + \frac{k_{n\ell}^{(2)} J_m(k_{n\ell}^{(2)} r_{in})}{J_m'(k_{n\ell}^{(2)} r_{in})} \frac{d_\ell^3}{2n^2 \pi^2} \delta_{n\nu}, & \ell = \lambda \\ \sum_p 2j \frac{\chi_{mp}'^2 J_m(\chi'_{mp})}{\zeta'_{mp} r_{in}^3 J_m''(\chi'_{mp})} A_2(-\zeta'_{mp}), & \ell \neq \lambda \end{cases}, \quad (6.1.18)$$

$$I_3^{(bc)} = \begin{cases} \sum_p 2j \frac{\zeta_{mp}'^3 r_{in} J_m(\chi'_{mp})}{\chi_{mp}'^2 J_m''(\chi'_{mp})} A_1(-\zeta'_{mp}) + j \frac{r_{in}}{|m|} \lambda_0^3 A_1(-\lambda_0) + \frac{J_m(k_{n\ell}^{(2)} r_{in})}{k_{n\ell}^{(2)} J_m'(k_{n\ell}^{(2)} r_{in})} \frac{n^2 \pi^2}{2d_\ell} \delta_{n\nu}, & \ell = \lambda \\ \sum_p 2j \frac{\zeta_{mp}'^3 r_{in} J_m(\chi'_{mp})}{\chi_{mp}'^2 J_m''(\chi'_{mp})} A_2(-\zeta'_{mp}) + j \frac{r_{in}}{|m|} \lambda_0^3 A_2(-\lambda_0), & \ell \neq \lambda \end{cases}, \quad (6.1.19)$$

$$I_4^{(bc)} = \begin{cases} \sum_p 2j \frac{\zeta_{mp}}{r_{in}} A_1(-\zeta_{mp}) + j \frac{|m|}{r_{in}} \lambda_0 A_1(-\lambda_0) + \frac{J_m'(k_{n\ell}^{(2)} r_{in})}{k_{n\ell}^{(2)} J_m(k_{n\ell}^{(2)} r_{in})} \frac{d_\ell}{2} \delta_{n\nu} (1 + \delta_{n0}), & \ell = \lambda \\ \sum_p 2j \frac{\zeta_{mp}}{r_{in}} A_2(-\zeta_{mp}) + j \frac{|m|}{r_{in}} \lambda_0 A_2(-\lambda_0), & \ell \neq \lambda \end{cases}, \quad (6.1.20)$$

όπου οι βοηθητικές συναρτήσεις  $A_1(\zeta)$ ,  $A_2(\zeta)$  ορίζονται ως εξής:

$$A_1(\zeta) = -\frac{1}{2 \left[ \zeta^2 - (n\pi/d_\ell)^2 \right] \left[ \zeta^2 - (v\pi/d_\lambda)^2 \right]} \cdot \left[ e^{2j\zeta(z_0 - s_\ell)} \left[ (-1)^{n+\nu} e^{-2j\zeta d_\ell} - [(-1)^n + (-1)^\nu] e^{-j\zeta d_\ell} + 1 \right] + [(-1)^n + (-1)^\nu] e^{j\zeta d_\ell} - 1 - (-1)^{n+\nu} \right], \quad (6.1.21)$$

και

$$A_2(\zeta) = -\frac{1}{2 \left[ \zeta^2 - (n\pi/d_\ell)^2 \right] \left[ \zeta^2 - (v\pi/d_\lambda)^2 \right]} \cdot \left[ e^{j\zeta(2z_0 - s_\ell - s_\lambda)} \left[ 1 + (-1)^{n+\nu} e^{-j\zeta(d_\ell + d_\lambda)} - (-1)^n e^{-j\zeta d_\ell} - (-1)^\nu e^{-j\zeta d_\lambda} \right] - e^{j\zeta|s_\ell - s_\lambda|} - (-1)^{n+\nu} e^{j\zeta|s_\ell - s_\lambda + d_\ell - d_\lambda|} + (-1)^n e^{j\zeta|s_\ell - s_\lambda + d_\ell|} + (-1)^\nu e^{j\zeta|s_\ell - s_\lambda - d_\lambda|} \right]. \quad (6.1.22)$$

### 6.1.2 Υπολογισμός πεδιακών μεγεθών

Αφού εξάγαμε αναλυτικά το τελικό σύστημα εξισώσεων (6.1.11), (6.1.12), το πρόβλημα πλέον συνίσταται στην αριθμητική επίλυση του συστήματος για τον υπολογισμό των αγνώστων  $E_{n\ell}$ ,  $H_{n\ell}$ . Έχοντας υπολογίσει τους άγνωστους συντελεστές, μπορούν να υπολογιστούν στη συνέχεια και τα υπόλοιπα ηλεκτρομαγνητικά μεγέθη της διάταξης. Στην παρούσα παράγραφο περιγράφουμε τον αναλυτικό υπολογισμό των σχέσεων για το ηλεκτρικό πεδίο και συγκεκριμένα για την αξιωματική συνιστώσα του. Οι υπόλοιπες συνιστώσες ή άλλα ηλεκτρομαγνητικά μεγέθη υπολογίζονται αναλόγως.

Η αξιωματική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου δίνεται από τα δυναμικά του Hertz σύμφωνα με τη σχέση [91]:

$$E_\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial \phi \partial z} + j\omega\mu \frac{\partial \Pi_m}{\partial r}. \quad (6.1.23)$$

Αντικαθιστώντας από τις (6.1.1), (6.1.7), (6.1.10) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} E_\phi &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^\infty jmJ_m(k_\perp r) e^{jm\phi} A_e(\zeta) \cos[\zeta(z-z_0)] d\zeta \\ &\quad + j\omega\mu_0 \int_0^\infty J_m(k_\perp r) e^{jm\phi} A_h(\zeta) \sin[\zeta(z-z_0)] d\zeta \\ &= j \frac{m}{r} \sum_{\ell=1}^L \sum_{n=0}^\infty P_{n\ell}^{(2)}(k_{n\ell} r_{in}) k_{n\ell}^2 e^{jm\phi} \frac{\partial I_5^{(bc)}}{\partial z} \\ &\quad + j \frac{m}{r_{in}} \sum_{\ell=1}^L \sum_{n=0}^\infty P_{n\ell}^{(2)}(k_{n\ell} r_{in}) e^{jm\phi} \left[ k_{n\ell}^2 \frac{\partial I_6^{(bc)}}{\partial r} - \left( \frac{n\pi}{d_\ell} \right)^2 \frac{\partial I_7^{(bc)}}{\partial r} \right] \\ &\quad + j\omega\mu_0 \sum_{\ell=1}^L \sum_{n=1}^\infty k_{n\ell} \frac{n\pi}{d_\ell} Q_{n\ell}^{(2)}(k_{n\ell} r_{in}) e^{jm\phi} \frac{\partial I_7^{(bc)}}{\partial r}, \end{aligned} \quad (6.1.24)$$

όπου τα ολοκληρώματα  $I_5^{(bc)}$ ,  $I_6^{(bc)}$ ,  $I_7^{(bc)}$  ορίζονται ως εξής:

$$I_5^{(bc)} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\zeta J_m(k_\perp r)}{k_\perp^2 J_m(k_\perp r_{in})} F_{n\ell}(\zeta, s_\ell, z_0) \cos[\zeta(z-z_0)] d\zeta, \quad (6.1.25)$$

$$I_6^{(bc)} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\zeta^2 J_m(k_\perp r)}{k_\perp^3 J'_m(k_\perp r_{in})} F_{n\ell}(\zeta, s_\ell, z_0) \sin[\zeta(z-z_0)] d\zeta, \quad (6.1.26)$$

$$I_7^{(bc)} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{J_m(k_\perp r)}{k_\perp J'_m(k_\perp r_{in})} F_{n\ell}(\zeta, s_\ell, z_0) \sin[\zeta(z-z_0)] d\zeta. \quad (6.1.27)$$

Τα παραπάνω ολοκληρώματα μπορούν να εκφραστούν σε κλειστή μορφή μέσω του υπολογισμού των ολοκληρωτικών υπολοίπων στο μιγαδικό επίπεδο. Σκιαγραφούμε τον υπολογισμό του ολοκληρώματος  $\frac{\partial I_5^{(bc)}}{\partial z}$ , που εμφανίζεται στην (6.1.24):

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_5^{(bc)}}{\partial z} &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\zeta^2 J_m(k_\perp r)}{k_\perp^2 J_m(k_\perp r_{in})} F_{n\ell}(\zeta, s_\ell, z_0) \sin[\zeta(z-z_0)] d\zeta \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\zeta^2 J_m(k_\perp r)}{k_\perp^2 J_m(k_\perp r_{in})} F_{n\ell}(\zeta, s_\ell, z_0) \sin[\zeta(z-z_0)] d\zeta. \end{aligned} \quad (6.1.28)$$

Η επέκταση του διαστήματος ολοκλήρωσης σε όλοκληρο τον πραγματικό άξονα μπορεί να γίνει, καθώς η  $F_{n\ell}(\zeta, s_\ell, z_0) \sin[\zeta(z - z_0)]$  είναι άρτια συνάρτηση, και συγκεκριμένα αναπτύσσεται ως εξής:

$$\begin{aligned} F_{n\ell}(\zeta, s_\ell, z_0) \sin[\zeta(z - z_0)] &= \frac{\sin[\zeta(s_\ell - z_0)] - (-1)^n \sin[\zeta(s_\ell + d_\ell - z_0)]}{(n\pi/d_\ell)^2 - \zeta^2} \cdot \sin[\zeta(z - z_0)] \\ &= -\frac{1}{4} \frac{1}{(n\pi/d_\ell)^2 - \zeta^2} \left[ e^{j\zeta(z+s_\ell-2z_0)} + e^{-j\zeta(z+s_\ell-2z_0)} - e^{j\zeta(s_\ell-z)} \right. \\ &\quad - e^{-j\zeta(s_\ell-z)} - (-1)^n e^{j\zeta(s_\ell+d_\ell+z-2z_0)} - (-1)^n e^{-j\zeta(s_\ell+d_\ell+z-2z_0)} \\ &\quad \left. + (-1)^n e^{j\zeta(s_\ell+d_\ell-z)} + (-1)^n e^{-j\zeta(s_\ell+d_\ell-z)} \right]. \end{aligned} \quad (6.1.29)$$

Λόγω αρτιότητας του πρώτου μέρους του ολοκληρώματος, μπορούμε να παραλείψουμε τα περιττά μέρη της παραπάνω παράστασης και να την γράψουμε ως εξής:

$$\begin{aligned} F_{n\ell}(\zeta, s_\ell, z_0) \sin[\zeta(z - z_0)] &= -\frac{1}{4} \frac{1}{(n\pi/d_\ell)^2 - \zeta^2} \left[ 2e^{j\zeta(z+s_\ell-2z_0)} - 2e^{j\zeta(z-s_\ell)} \right. \\ &\quad \left. - 2(-1)^n e^{j\zeta(s_\ell+d_\ell+z-2z_0)} + 2(-1)^n e^{j\zeta(z-s_\ell-d_\ell)} \right] \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{(n\pi/d_\ell)^2 - \zeta^2} \left[ e^{j\zeta(z+s_\ell-2z_0)} - e^{j\zeta(z-s_\ell)} \right. \\ &\quad \left. - (-1)^n e^{j\zeta(s_\ell+d_\ell+z-2z_0)} + (-1)^n e^{j\zeta(z-s_\ell-d_\ell)} \right]. \end{aligned} \quad (6.1.30)$$

Αντικαθιστούμε στο ολοκλήρωμα και έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_5^{(bc)}}{\partial z} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta^2 J_m(k_\perp r)}{k_\perp^2 J_m(k_\perp r_{in})} \frac{e^{j\zeta(z+s_\ell-2z_0)} - (-1)^n e^{j\zeta(s_\ell+d_\ell+z-2z_0)}}{(n\pi/d_\ell)^2 - \zeta^2} d\zeta \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta^2 J_m(k_\perp r)}{k_\perp^2 J_m(k_\perp r_{in})} \frac{e^{j\zeta(z-s_\ell)} - (-1)^n e^{j\zeta(z-s_\ell-d_\ell)}}{(n\pi/d_\ell)^2 - \zeta^2} d\zeta. \end{aligned} \quad (6.1.31)$$

Και τα δύο ολοκληρώματα υπολογίζονται με παρόμοια διαδικασία, όπως στο Παράρτημα Π.2. Παραλείπουμε τις λεπτομέρειες του υπολογισμού και δίνουμε τους τελικούς τύπους για όλα τα ολοκληρώματα που απαιτούνται για την έκφραση του αζιμουθιακού ηλεκτρικού πεδίου σε κλειστή μορφή:

$$\frac{\partial I_5^{(bc)}}{\partial z} = \begin{cases} \sum_p j \frac{\zeta_{mp} J_m(\chi_{mp} \frac{r}{r_{in}})}{J'_m(\chi_{mp}) \chi_{mp}} \frac{e^{j\zeta_{mp}(z+s_\ell-2z_0)} - (-1)^n e^{j\zeta_{mp}(z+s_\ell+d_\ell-2z_0)}}{(n\pi/d_\ell)^2 - \zeta_{mp}^2}, -\infty < z < \infty \\ + \frac{j}{2} \lambda_0 \left( \frac{r}{r_{in}} \right)^{|\text{ml}|} \frac{e^{j\lambda_0(z+s_\ell-2z_0)} - (-1)^n e^{j\lambda_0(z+s_\ell+d_\ell-2z_0)}}{(n\pi/d_\ell)^2 - \lambda_0^2}, -\infty < z < \infty \\ - \sum_p j \frac{\zeta_{mp} J_m(\chi_{mp} \frac{r}{r_{in}})}{J'_m(\chi_{mp}) \chi_{mp}} \frac{e^{-j\zeta_{mp}|z-s_\ell|} - (-1)^n e^{-j\zeta_{mp}|z-s_\ell-d_\ell|}}{(n\pi/d_\ell)^2 - \zeta_{mp}^2}, -\infty < z < \infty \\ - \frac{j}{2} \lambda_0 \left( \frac{r}{r_{in}} \right)^{|\text{ml}|} \frac{e^{-j\lambda_0|z-s_\ell|} + (-1)^n e^{-j\lambda_0|z-s_\ell-d_\ell|}}{(n\pi/d_\ell)^2 - \lambda_0^2}, -\infty < z < \infty \\ - \frac{1}{2} \frac{n\pi}{d_\ell} \frac{J_m(k_n r)}{k_n^2 J_m(k_n r_{in})} \left[ \sin \left[ \frac{n\pi}{d_\ell} (z - s_\ell) \right] + (-1)^n \sin \left[ \frac{n\pi}{d_\ell} (z - s_\ell - d_\ell) \right] \right], s_\ell < z < s_\ell + d_\ell \end{cases}, \quad (6.1.32)$$



$$I_6^{(bc)} = \left\{ \begin{array}{l}
 - \sum_p j \frac{J_m \left( \chi'_{mp} \frac{r}{r_{in}} \right) \zeta'_{mp} r_{in}}{J_m''(\chi'_{mp}) \chi_{mp}^{\prime 2}} \frac{e^{j\zeta'_{mp}(z+s_\ell-2z_0)} - (-1)^n e^{j\zeta'_{mp}(z+s_\ell+d_\ell-2z_0)}}{(n\pi/d_\ell)^2 - \zeta_{mp}^{\prime 2}}, -\infty < z < \infty \\
 - \frac{j\lambda_0}{2} \frac{r_{in}}{|m|} \left( \frac{r}{r_{in}} \right)^{|m|} \frac{e^{j\lambda_0(z+s_\ell-2z_0)} - (-1)^n e^{j\lambda_0(z+s_\ell+d_\ell-2z_0)}}{(n\pi/d_\ell)^2 - \lambda_0^2}, m \neq 0, -\infty < z < \infty \\
 \sum_p j \frac{J_m \left( \chi'_{mp} \frac{r}{r_{in}} \right) \zeta'_{mp} r_{in}}{J_m''(\chi'_{mp}) \chi_{mp}^{\prime 2}} \frac{e^{-j\zeta'_{mp}|z-s_\ell|} - (-1)^n e^{-j\zeta'_{mp}|z-s_\ell-d_\ell|}}{(n\pi/d_\ell)^2 - \zeta_{mp}^{\prime 2}}, -\infty < z < \infty \\
 + \frac{j\lambda_0}{2} \frac{r_{in}}{|m|} \left( \frac{r}{r_{in}} \right)^{|m|} \frac{e^{-j\lambda_0|z-s_\ell|} - (-1)^n e^{-j\lambda_0|z-s_\ell-d_\ell|}}{(n\pi/d_\ell)^2 - \lambda_0^2}, m \neq 0, -\infty < z < \infty \\
 + \frac{1}{2} \frac{n\pi}{d_\ell} \frac{J_m(k_n r)}{k_n^3 J_m'(k_n r_{in})} \left[ \sin \left[ \frac{n\pi}{d_\ell} (z - s_\ell) \right] + (-1)^n \sin \left[ \frac{n\pi}{d_\ell} (z - s_\ell - d_\ell) \right] \right], s_\ell < z < s_\ell + d_\ell
 \end{array} \right. , \quad (6.1.33)$$

$$I_7^{(bc)} = \left\{ \begin{array}{l}
 - \sum_p j \frac{J_m \left( \chi'_{mp} \frac{r}{r_{in}} \right)}{\zeta'_{mp} J_m''(\chi'_{mp}) r_{in}} \frac{e^{j\zeta'_{mp}(z+s_\ell-2z_0)} - (-1)^n e^{j\zeta'_{mp}(z+s_\ell+d_\ell-2z_0)}}{(n\pi/d_\ell)^2 - \zeta_{mp}^{\prime 2}}, -\infty < z < \infty \\
 + \delta_{m0} \frac{j}{\lambda_0 r_{in}} \frac{e^{j\lambda_0(z+s_\ell-2z_0)} - (-1)^n e^{j\lambda_0(z+s_\ell+d_\ell-2z_0)}}{(n\pi/d_\ell)^2 - \lambda_0^2}, -\infty < z < \infty \\
 + \sum_p j \frac{J_m \left( \chi'_{mp} \frac{r}{r_{in}} \right)}{\zeta'_{mp} J_m''(\chi'_{mp}) r_{in}} \frac{e^{-j\zeta'_{mp}|z-s_\ell|} - (-1)^n e^{-j\zeta'_{mp}|z-s_\ell-d_\ell|}}{(n\pi/d_\ell)^2 - \zeta_{mp}^{\prime 2}}, -\infty < z < \infty \\
 - \delta_{m0} \frac{j}{\lambda_0 r_{in}} \frac{e^{-j\lambda_0|z-s_\ell|} - (-1)^n e^{-j\lambda_0|z-s_\ell-d_\ell|}}{(n\pi/d_\ell)^2 - \lambda_0^2}, -\infty < z < \infty \\
 + \frac{J_m(k_n r)}{k_n J_m'(k_n r_{in})} \frac{d_\ell}{2n\pi} \left[ \sin \left[ \frac{n\pi}{d_\ell} (z - s_\ell) \right] + (-1)^n \sin \left[ \frac{n\pi}{d_\ell} (z - s_\ell - d_\ell) \right] \right], s_\ell < z < s_\ell + d_\ell
 \end{array} \right. . \quad (6.1.34)$$

### 6.1.3 Επαλήθευση εξισώσεων και κώδικα

Οι παραπάνω εξισώσεις, για την περίπτωση γεωμετρίας με οριακή συνθήκη ολικής ανάκλασης στο δεξί άκρο, προγραμματίστηκαν ως μέρος του κώδικα NESTOR. Για την επαλήθευση της ορθής και ακριβούς λειτουργίας του κώδικα, ελήφθησαν ορισμένα αριθμητικά αποτελέσματα για συγκεκριμένες γεωμετρίες και στην παρούσα παράγραφο συγκρίνονται με τις τιμές που δίνει ο εμπορικός κώδικας CASCADE. Η σύγκριση θα γίνει αναγκαστικά και στην περίπτωση αυτή για γεωμετρίες χωρίς διπλεκτρική φόρτιση καθώς όπως αναφέραμε και στην ενότητα 3.4 ο κώδικας CASCADE δεν μπορεί να χειριστεί τέτοιες γεωμετρίες.

Η πρώτη γεωμετρία για την οποία συγκρίνουμε, είναι μια απλή γεωμετρία ενός δαχτυλιδιού με τα εξής χαρακτηριστικά:  $r_{in} = 10.0$  mm,  $d_1 = 3.0$  mm,  $r_1 = 23.3$  mm. Η οριακή συνθήκη ολικής ανάκλασης επιβάλλεται στο σημείο  $z_0$  για το οποίο παίρνουμε διάφορες τιμές. Κάποιοι ρυθμοί που τυχαία επιλέχθηκαν και υπολογίστηκαν για τη γεωμετρία ενός δαχτυλιδιού παρουσιάζονται στον Πίνακα 6.1. Στόχος μας στη συγκεκριμένη παράγραφο είναι η επαλήθευση του κώδικα μέσω της σύγκρισης των αποτελεσμάτων και όχι η μελέτη της συγκεκριμένης γεωμετρίας μολονότι η γεωμετρία

## 6.1 Εφαρμογή οριακής συνθήκης ολικής ανάκλασης

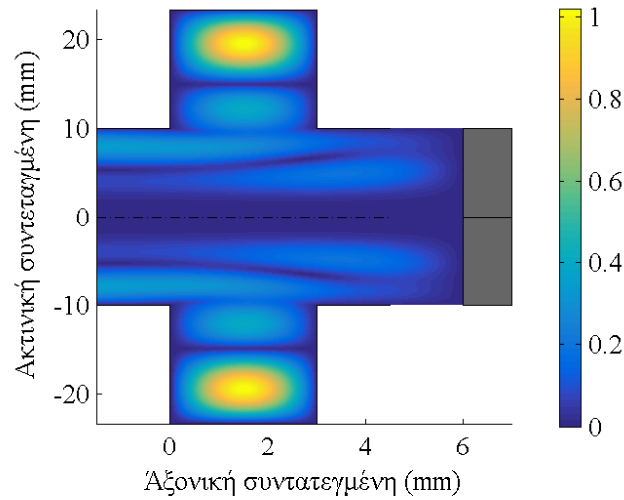
Πίνακας 6.1: Συντονιζόμενοι ρυθμοί στη γεωμετρία ενός δαχτυλιδιού με οριακή συνθήκη ολικής ανάκλασης.

Αξιμουθιακός δείκτης $m$	Σημείο $z_0$ (mm)	Συχνότητα (GHz) κώδικα NESTOR	Τιμή $Q$ κώδικα NESTOR	Συχνότητα (GHz) κώδικα CASCADE	Τιμή $Q$ κώδικα CASCADE
0 (TE)	6.0	54.405	114	54.406	114
0 (TE)	6.0	58.333	108	58.331	108
0 (TM)	6.0	52.586	143	52.588	143
0 (TM)	6.0	56.716	58.4	56.718	58.4
0 (TE)	4.5	54.492	67.8	54.493	67.8
0 (TE)	4.5	51.237	183	51.238	184
0 (TM)	4.5	52.657	273	52.658	273
0 (TM)	4.5	56.815	201	56.817	201
5	7.5	54.836	398	54.829	425
5	7.5	51.704	2621	51.705	2621
5	6.0	54.797	347	54.798	350

είναι αρκετά απλή και οι ρυθμοί θα μπορούσαν να κατηγοριοποιηθούν και να ονοματιστούν όπως στην ενότητα 3.4.1. Το φάσμα της συγκεκριμένης γεωμετρίας στην περιοχή της μιγαδικής συχνότητας που εξετάζουμε είναι αρκετά αραιό και τα αποτελέσματα μεταξύ των δύο κωδίκων σε ιδιαίτερα καλή συμφωνία, ώστε να είμαστε σίγουροι ότι οι ρυθμοί που υπολογίστηκαν μεταξύ των δύο κωδίκων είναι οι ίδιοι.

Παρατηρούμε από τα δεδομένα του πίνακα, ότι τα αποτελέσματα μεταξύ των δύο κωδίκων είναι πολύ κοντά και επομένως για τη γεωμετρία του ενός δαχτυλιδιού επαληθεύεται η ορθότητα του ηλεκτρομαγνητικού μοντέλου και της υλοποίησής του στον υπολογιστή, τόσο για ρυθμούς TE ή TM, καθώς και για υβριδικούς ρυθμούς. Στο Σχήμα 6.2, παρουσιάζουμε το προφίλ πεδίου του υβριδικού ρυθμού που ταλαντώνεται στα 54.797 GHz. Βλέπουμε ότι για την αξιμουθιακή συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου ικανοποιείται η συνέχεια στη διεπαφή κυλίνδρου-δαχτυλιδιού, ενώ μηδενίζεται στο δεξί άκρο, όπως επιβάλλει η οριακή συνθήκη ολικής ανάκλασης που έχουμε εφαρμόσει.

Συνεχίζουμε τον έλεγχο και την επαλήθευση του κώδικα για μία γεωμετρία τριών δαχτυλιδιών. Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της νέας γεωμετρίας είναι τα εξής:  $r_{in} = 10.0$  mm,  $d_1 = 2.5$  mm,  $r_1 = 15.0$  mm,  $d_2 = 3.0$  mm,  $r_2 = 20.0$  mm,  $s_2 = 3.5$  mm,  $d_3 = 3.5$  mm,  $r_3 = 23.3$  mm,  $s_3 = 8.0$  mm. Και σε αυτή την περίπτωση τα αριθμητικά δεδομένα μεταξύ των δύο κωδίκων, για τους ρυθμούς που υπολογίστηκαν, και οι οποίοι παρατίθενται στον Πίνακα 6.2, συμφωνούν με ικανοποιητική ακρίβεια. Με τον έλεγχο αυτό ολοκληρώνεται η επαλήθευση του κώδικα και των εξισώσεων που εξάγαμε, καθώς υπάρχει συμφωνία σε όλες τις περιπτώσεις ρυθμών TE, TM ή υβριδικών για ένα ή περισσότερα ανόμοια δαχτυλίδια. Στο Σχήμα 6.3 παρουσιάζουμε το μέτρο της αξιμουθιακής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου για τον ρυθμό TE που ταλαντώνεται στα 56.597 GHz. Είναι εμφανές τόσο η ικανοποίηση της συνέχειας της αξιμουθιακής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στη διεπαφή κυλίνδρου-δαχτυλιδιού όσο και ο μηδενισμός της στο δεξί άκρο όπου εφαρμόζεται η οριακή συνθήκη ολικής ανάκλασης.



Σχήμα 6.2: Αξιομυθιακή συνιστώσα ηλεκτρικού πεδίου  $E_\phi(r, z)$  του υβριδικού ρυθμού που ταλαντώνεται στα 54.797 GHz.

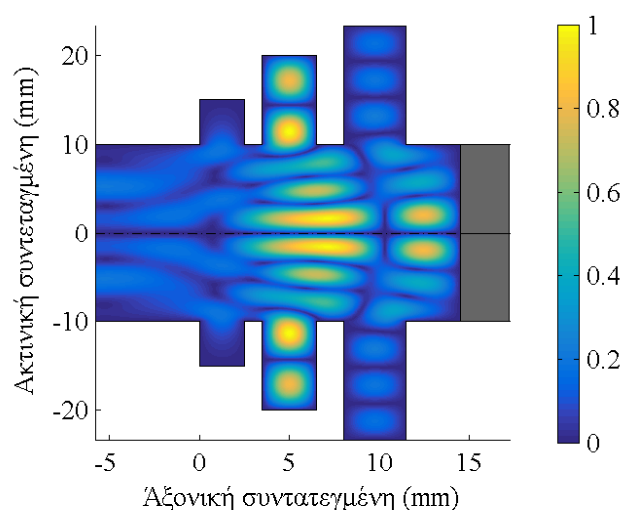
Πίνακας 6.2: Συντονιζόμενοι ρυθμοί για τη γεωμετρία τριών δαχτυλιδιών με οριακή συνθήκη ολικής ανάκλασης.

Αξιομυθιακός δείκτης $m$	Σημείο $z_0$ (mm)	Συχνότητα (GHz) κώδικα NESTOR	Τιμή $Q$ κώδικα NESTOR	Συχνότητα (GHz) κώδικα CASCADE	Τιμή $Q$ κώδικα CASCADE
0 (TE)	14.5	56.597	465	56.595	466
0 (TE)	14.5	59.657	33.9	59.651	33.8
0 (TM)	14.5	59.982	54.1	59.987	53.9
0 (TM)	14.5	51.346	18.1	51.347	18.0
5	14.5	58.793	40.2	58.800	40.1
5	14.5	52.258	69.1	52.261	69.0

### 6.1.4 Αριθμητικά αποτελέσματα διαύλων δέσμης

Σε αυτήν την ενότητα, εφαρμόζουμε σε μια γεωμετρία πραγματικού διαύλου δέσμης τον φορμαλισμό που αναπτύξαμε. Η εφαρμογή της οριακής συνθήκης πλήρους ανάκλασης, θα μας επιτρέψει να έχουμε μια εκτίμηση της αύξησης των συντελεστών ποιότητας των ρυθμών, που οφείλεται στο στένεμα της εσωτερικής ακτίνας.

Όπως εξηγήσαμε και στην ενότητα 6.1, οι ρυθμοί με τους υψηλότερους συντελεστές ποιότητας βρίσκονται κοντά στην αποκοπή και επομένως ακόμα και από ένα μικρό στένεμα της εσωτερικής ακτίνας, μεγάλο μέρος των κυματικών συνιστωσών τους υφίσταται σημαντική ανάκλαση. Αν αντί για το στένεμα της εσωτερικής ακτίνας στα δεξιά, εισάγουμε την οριακή συνθήκη πλήρους ανάκλασης, τότε έχουμε μια εκτίμηση των συντελεστών ποιότητας, η οποία θεωρεί πλήρη ανάκλαση των ρυθμών στο ένα άκρο και επομένως υπερεκτιμά τους συντελεστές ποιότητας σε σχέση με την πραγματική γεωμετρία. Συνεπώς, έχουμε ένα άνω όριο για τους συντελεστές ποιότητας της πραγματικής διάταξης. Το ποσοστό αύξησης των συντελεστών ποιότητας μας δίνει και μια αντίστοιχη εκτίμηση για τα ρεύματα εκκίνησης των πραγματικών ρυθμών, αν τα ελαττώσουμε κατά το ίδιο ποσοστό λόγω

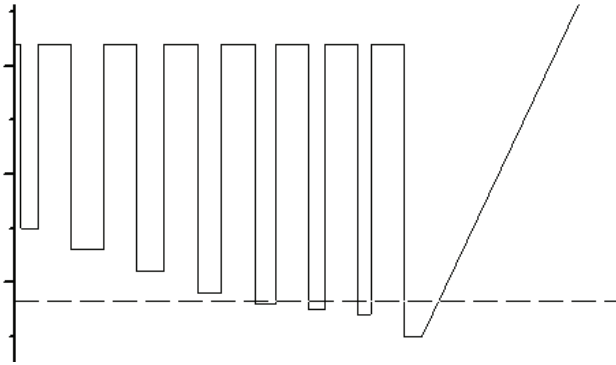


Σχήμα 6.3: Αξιομυθιακή συνιστώσα ηλεκτρικού πεδίου του υβριδικού ρυθμού που ταλαντώνεται στα 56.597 GHz.

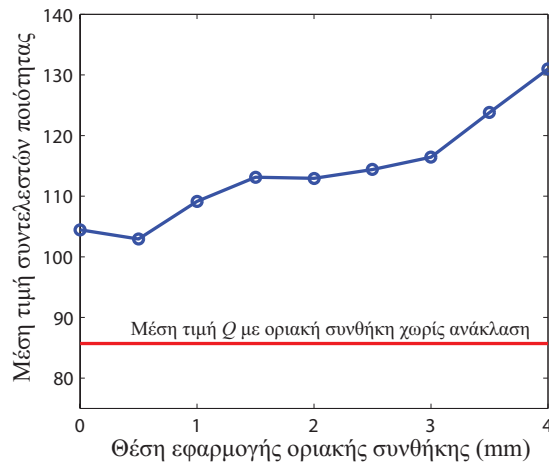
του στενέματος της εσωτερικής ακτίνας.

Ως παράδειγμα πραγματικού διαύλου δέσμης, μελετάμε τη γεωμετρία του διαύλου δέσμης του γυροτρονίου για το W7-X, η οποία εξετάστηκε στην ενότητα 5.3. Στο Σχήμα 6.4 παρουσιάζεται το πραγματικό προφίλ της γεωμετρίας διαύλου δέσμης σε μεγεθυμένη κλίμακα κατά την ακτινική διεύθυνση, ώστε να γίνει εμφανής ο βαθμός προσέγγισης του μοντέλου μας στην πραγματικότητα. Συγκεκριμένα, παρουσιάζονται τα τελευταία δαχτυλίδια από την εσωτερική τους ακτίνα έως την ενδιάμεση ακτίνα που αρχίζει το διπλεκτρικό, δηλαδή στην εικόνα εμφανίζεται μόνο η εσοχή. Οι ακριβείς διαστάσεις για λόγους βιομηχανικής ιδιοκτησίας παραλείπονται και στο σχήμα σημειώνονται μόνο οι γραμμές της ακτινικής κλίμακας που αντιστοιχούν σε ένα χιλιοστό. Με τη διακεκομμένη γραμμή απεικονίζουμε τη σταθερή ακτίνα που θεωρήσαμε στους υπολογισμούς. Όπως φαίνεται στο σχήμα, το τελευταίο σκαλοπάτι στενέματος της εσωτερικής ακτίνας αποτελεί σημαντικό εμπόδιο για έναν ρυθμό κοντά στην αποκοπή και αναμένεται να προκαλεί σημαντική ανάκλασή του. Το εμπόδιο αυτό είναι της τάξης του μισού χιλιοστού και επομένως συγκρίσιμο με το μήκος κύματος ελευθέρου χώρου στην περιοχή συχνοτήτων που μας ενδιαφέρει.

Για την εκτίμηση της αύξησης των συντελεστών ποιότητας, εφαρμόζουμε την οριακή συνθήκη πλήρους ανάκλασης δεξιά και υπολογίζουμε όλους τους ρυθμούς στην περιοχή συχνοτήτων 120-135 GHz με  $Q > 50$  και  $m = 25$ . Αν και στην πραγματική γεωμετρία που εξετάζουμε, το εμπόδιο βρίσκεται σε μηδενική απόσταση από το τελευταίο δαχτυλίδι, επαναλαμβάνουμε τους υπολογισμούς κάθε φορά για διαφορετική θέση εφαρμογής της οριακής συνθήκης, όπου η τελευταία μετράται σε σχέση με τη θέση τέλους του τελευταίου δαχτυλιδιού. Τα αποτελέσματα για τη μέση τιμή των συντελεστών ποιότητας όλων των ρυθμών στην περιοχή αναζήτησης, παρουσιάζονται στο Σχήμα 6.5, ενώ η τιμή του μέγιστου συντελεστή ποιότητας παρουσιάζεται στο Σχήμα 6.6. Φυσικά, το αν θα διεγερθεί ένας παρασιτικός ρυθμός εξαρτάται επίσης από τη συχνότητα συντονισμού του και το προφίλ πεδίου του. Επομένως, εστιάζοντας μόνο στον παράγοντα του συντελεστή ποιότητας της κρύας διάταξης, το διάγραμμα τόσο για τον μέγιστο όσο και για τον μέσο συντελεστή



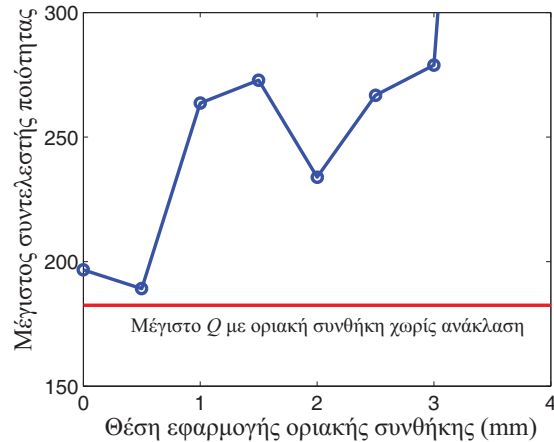
Σχήμα 6.4: Πραγματικό προφίλ γεωμετρίας τελευταίων δαχτυλιδιών του διαύλου δέσμης γυροτρονίου για το W7-X. Με διακεκομμένη γραμμή απεικονίζουμε τη σταθερή ακτίνα που επιλέξαμε στις προσομοιώσεις.



Σχήμα 6.5: Μέση τιμή των συντελεστών ποιότητας των ρυθμών για  $m=25$  ως προς τη θέση εφαρμογής της οριακής συνθήκης μετά το τελευταίο δαχτυλίδι. Με την κόκκινη γραμμή σημειώνεται η μέση τιμή των συντελεστών ποιότητας όταν εφαρμόζουμε οριακή συνθήκη εξερχόμενου κύματος.

ποιότητας δείχνουν τη γενική τάση μεταβολής των συντελεστών ποιότητας σε σχέση με τη θέση εφαρμογής της οριακής συνθήκης.

Στα διαγράμματα παρατηρούμε μια αύξηση της μέσης τιμής των συντελεστών ποιότητας πάνω από 20% σε σχέση με την οριακή συνθήκη εξερχόμενου κύματος. Η αύξηση αυτή γίνεται μεγαλύτερη όσο η οριακή συνθήκη πλήρους ανάκλασης εφαρμόζεται όλο και πιο μακριά σε σχέση με το τελευταίο δαχτυλίδι. Αντίστοιχη συμπεριφορά παρατηρείται και για τον συντελεστή ποιότητας του ρυθμού με τις χαμηλότερες απώλειες. Στην περίπτωση αυτή η σχετική αύξηση του  $Q$  είναι μικρότερη για τις πολύ κοντινές θέσεις εφαρμογής της οριακής συνθήκης, αλλά αυξάνεται ραγδαία καθώς η απόσταση από το τελευταίο δαχτυλίδι μεγαλώνει. Παρόλο που τα αποτελέσματα για τη μέγιστη τιμή του  $Q$  είναι σε μεγάλο βαθμό τυχαία, λόγω του ότι αφορούν για κάθε θέση εν γένει έναν διαφορετικό ρυθμό, σημειώνεται η μεγάλη αύξηση του συντελεστή ποιότητας σε σχέση με την τυπική



Σχήμα 6.6: Μέγιστος συντελεστής ποιότητας των ρυθμών για  $m=25$  ως προς τη θέση εφαρμογής της οριακής συνθήκης μετά το τελευταίο δαχτυλίδι. Με την κόκκινη γραμμή σημειώνεται ο μέγιστος συντελεστής ποιότητας όταν εφαρμόζουμε οριακή συνθήκη εξερχόμενου κύματος.

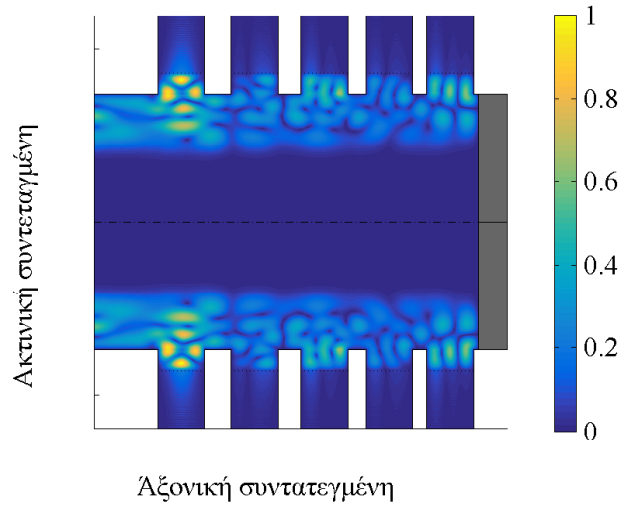
οριακή συνθήκη εξερχόμενων κυμάτων. Η τάση αύξησης των συντελεστών ποιότητας καθώς η θέση εφαρμογής της οριακής συνθήκης αυξάνει, οφείλεται στην αύξηση της αποθηκευμένης ενέργειας, καθώς αυξάνει ο χώρος που καταλαμβάνει το πεδίο και ο οποίος οριοθετεί την κοιλότητά μας. Σημειώνουμε ότι για κάθε ρυθμό ξεχωριστά η μεταβολή της τιμής του συντελεστή ποιότητας ως προς τη θέση εφαρμογής της οριακής συνθήκης είναι ανάλογη αυτής του μέγιστου  $Q$  (Σχήμα 6.6). Η μεταβολή της μέσης τιμής όλων των συντελεστών ποιότητας στο Σχήμα 6.5 υποεκτιμάται λόγω του ότι στη σταθερή περιοχή αναζήτησης εισέρχονται διαρκώς νέοι ρυθμοί με χαμηλά  $Q$  αυξάνοντας τον αριθμό των ρυθμών και μειώνοντας τη μεταβολή της μέσης τιμής όλων των συντελεστών ποιότητας.

Από τα παραπάνω αποτελέσματα μπορούμε να κάνουμε την εκτίμηση, ότι τα ρεύματα εκκίνησης που υπολογίσαμε στην ενότητα 5.3 μπορεί να είναι έως και 20% χαμηλότερα λόγω του στενέματος της εσωτερικής ακτίνας. Φυσικά αυτή η εκτίμηση είναι αρκετά χονδροειδής αλλά μας δίνει μια τάξη μεγέθους του φαινομένου.

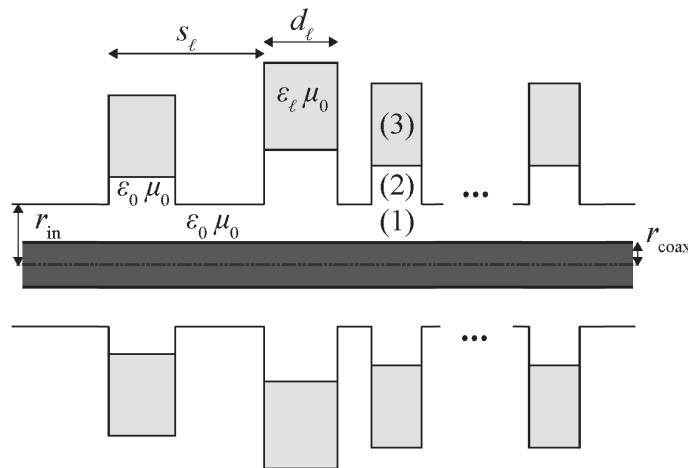
Τέλος, στο Σχήμα 6.7 παρουσιάζουμε το προφίλ πεδίου του ρυθμού με τον υψηλότερο συντελεστή ποιότητας για τη θέση εφαρμογής της οριακής συνθήκης 0.5 mm μετά το τελευταίο δαχτυλίδι. Σημειώνουμε ότι λόγω της μεγάλης καυστικής ακτίνας του ρυθμού, αυτός συγκεντρώνεται κοντά στα τοιχώματα και επομένως η εφαρμογή οριακής συνθήκης πλήρους ανάκλασης αποδίδει πιστότερα την πραγματική κατάσταση, όπου το εμπόδιο είναι πολύ κοντά στη μέση εσωτερική ακτίνα.

## 6.2 Επέκταση σε ομοαξονικές γεωμετρίες

Στην ενότητα αυτή αναπτύσσουμε μια επιπλέον επέκταση του κώδικα, ώστε να μπορεί να χειριστεί ομοαξονικές γεωμετρίες διαύλου δέσμης γυροτρονίου. Τα ομοαξονικά γυροτρόνια, όπως αναλύσαμε και στο κεφάλαιο της εισαγωγής, εμφανίζουν καλύτερη συμπεριφορά ως προς τον ανταγωνισμό των ρυθμών και θεωρούνται ως η ενδεδειγμένη λύση για τα μελλοντικά γυροτρόνια υψηλότερης



Σχήμα 6.7: Αξιμουθιακή συνιστώσα ηλεκτρικού πεδίου ρυθμού που ταλαντώνεται στα 130.6 GHz. Η εφαρμογή της οριακής συνθήκης γίνεται 0.5 mm μετά το τελευταίο δαχτυλίδι.



Σχήμα 6.8: Σχηματική αναπαράσταση ομοαξονικής γεωμετρίας.

συχνότητας και ισχύος. Για τους λόγους αυτούς, αναπτύσσουμε τον φορμαλισμό και επεκτείνουμε τον κώδικα, ώστε να μπορεί να χειριστεί γεωμετρίες που περιέχουν ένα ομοαξονικό στέλεχος, όπως στο Σχήμα 6.8. Αν και στην περιοχή της κοιλότητας, συνήθως το ομοαξονικό στέλεχος είναι ρυτιδωμένο και έχει μια ήπια μεταβαλλόμενη ακτίνα, που καταπιέζει τους ανταγωνιστές ρυθμούς, στην περιοχή του διαύλου δέσμης, δεν υπάρχει καμία τέτοια απαίτηση λειτουργική ή κατασκευαστική, και επομένως το θεωρούμε ως λείο με σταθερή ακτίνα και τέλεια αγωγή.

### 6.2.1 Ανάπτυξη φορμαλισμού για ομοαξονική γεωμετρία

Προχωρούμε στην ανάπτυξη του φορμαλισμού που περιλαμβάνει το ομοαξονικό στέλεχος. Για τα πεδία στην περιοχή του κυματοδηγού τα δυναμικά του Hertz εκφράζονται τώρα ως εξής:

$$\mathbf{\Pi}_e = \hat{z} \int_{-\infty}^{+\infty} A_e(\zeta) G_m^e(k_\perp, r) e^{jm\phi} e^{j\zeta z} d\zeta, \quad (6.2.1\alpha)$$

$$\mathbf{\Pi}_m = \hat{z} \int_{-\infty}^{+\infty} A_h(\zeta) G_m^h(k_\perp, r) e^{jm\phi} e^{j\zeta z} d\zeta. \quad (6.2.1\beta)$$

Οι συναρτήσεις  $G_m^e(k_\perp, r)$ ,  $G_m^h(k_\perp, r)$  ορίζονται τώρα με τρόπο που ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες πάνω στο ομοαξονικό στέλεχος ( $r = r_{\text{coax}}$ ), ενώ στην ενότητα 2.2.2, που η περιοχή του κυματοδηγού περιείχε και τον άξονα, στις συναρτήσεις αυτές δεν μπορούσε να συμμετέχει η συνάρτηση  $N_m(r)$ , βλ. σχέσεις (2.2.2):

$$G_m^e(k_\perp, r) = J_m(k_\perp r) N_m(k_\perp r_{\text{coax}}) - J_m(k_\perp r_{\text{coax}}) N_m(k_\perp r), \quad (6.2.2\alpha)$$

$$G_m^h(k_\perp, r) = J_m(k_\perp r) N'_m(k_\perp r_{\text{coax}}) - J'_m(k_\perp r_{\text{coax}}) N_m(k_\perp r). \quad (6.2.2\beta)$$

Αν τυχόν υπάρχουν προσπίπτοντες ρυθμοί TE ή TM, αυτοί δίνονται από τα δυναμικά του Hertz σύμφωνα με τους τύπους:

$$\mathbf{\Pi}_m^{\text{inc}} = \hat{z} A_H G_m^h(K_\perp, r) e^{im\phi} e^{-i\beta z}, \quad (6.2.3\alpha)$$

$$\mathbf{\Pi}_e^{\text{inc}} = \hat{z} A_E G_m^e(K_\perp^{\text{TM}}, r) e^{im\phi} e^{-i\beta_{\text{TM}} z}. \quad (6.2.3\beta)$$

Οι εκφράσεις των πεδίων μέσα στα δαχτυλίδια παραμένουν ως έχουν, όπως στις ενότητες 2.2.3 και 2.2.4. Εφαρμόζουμε τις οριακές συνθήκες στην επιφάνεια  $r = r_{\text{in}}$  αντικαθιστώντας τώρα για τα πεδία στον κυματοδηγό τις σχέσεις (6.2.1), (6.2.3), όπως εξειδικεύονται από τις εκφράσεις (6.2.2) και ακολουθούμε την ίδια διαδικασία εξαγωγής του συστήματος των εξισώσεων, όπως και στην ενότητα 2.2.5. Παραλείπουμε τις λεπτομέρειες, καθώς η διαδικασία εξαγωγής των εξισώσεων είναι εντελώς όμοια και το τελικό σύστημα ταυτίζεται με το αντίστοιχο σύστημα εξισώσεων της παραγράφου 2.2.5 που δίνεται από τις (2.2.25), (2.2.26). Αυτό που αλλάζει στην περίπτωση της ομοαξονικής γεωμετρίας είναι τα ολοκληρώματα  $I_i(n, \ell, \nu, \lambda)$ , τα οποία ορίζονται στην παράγραφο αυτή ως εξής:

$$I_1^{\text{coax}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\zeta^2 G_m^h(k_\perp, r_{\text{in}})}{k_\perp G_m^h(k_\perp, r_{\text{in}})} e^{j\zeta(s_\ell - s_\lambda)} F_{n\ell}(-\zeta) F_{\nu\lambda}(\zeta) d\zeta, \quad (6.2.4)$$

$$I_2^{\text{coax}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_\perp G_m^h(k_\perp, r_{\text{in}})}{G_m^h(k_\perp, r_{\text{in}})} e^{j\zeta(s_\ell - s_\lambda)} F_{n\ell}(-\zeta) F_{\nu\lambda}(\zeta) d\zeta, \quad (6.2.5)$$

$$I_3^{\text{coax}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\zeta^4 G_m^h(k_\perp, r_{\text{in}})}{k_\perp^3 G_m^h(k_\perp, r_{\text{in}})} e^{j\zeta(s_\ell - s_\lambda)} F_{n\ell}(-\zeta) F_{\nu\lambda}(\zeta) d\zeta, \quad (6.2.6)$$

$$I_4^{\text{coax}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\zeta^2 G_m^e(k_\perp, r_{\text{in}})}{k_\perp G_m^e(k_\perp, r_{\text{in}})} e^{j\zeta(s_\ell - s_\lambda)} F_{n\ell}(-\zeta) F_{\nu\lambda}(\zeta) d\zeta. \quad (6.2.7)$$

## 6.2.2 Υπολογισμός ολοκληρωμάτων στην περίπτωση ομοαξονικής γεωμετρίας

Η μέθοδος υπολογισμού των ολοκληρωμάτων  $I_i^{\text{coax}}(n, \ell, \nu, \lambda)$  είναι όμοια με αυτή που περιγράφεται στο Παραρτημα Π.1 για τα ολοκληρώματα  $I_i(n, \ell, \nu, \lambda)$ . Στη συνέχεια θα δώσουμε περιγραφικά τις αλλαγές που προκύπτουν στη διαδικασία του



υπολογισμού του ολοκληρώματος  $I_1^{\text{coax}}$  και θα παραθέσουμε τις τελικές εκφράσεις των υπόλοιπων ολοκληρωμάτων που υπολογίζονται με όμοιο τρόπο.

Στη διαδικασία υπολογισμού του  $I_1^{\text{coax}}$  οι πόλοι  $\zeta = \pm \zeta'_{mp}$  δίνονται τώρα από τον υπολογισμό των ιδιοτιμών  $g'_{mp} = k_{\perp mp} r_{\text{in}}$ , οι οποίες είναι οι ρίζες τις υπερβατικής εξίσωσης  $G_m^{\text{h}}(k_{\perp mp}, r_{\text{in}}) = 0$ . Στον κώδικα που αναπτύξαμε οι ιδιοτιμές υπολογίζονται αριθμητικά με ένα σχήμα Newton-Raphson, όπου ως αρχικές τιμές της ρουτίνας υπολογισμού δίνουμε τις προσεγγιστικές ασυμπτωτικές εκφράσεις των ριζών αυτών από το [108]. Επομένως, στις τελικές εκφράσεις των ολοκληρωτικών υπολοίπων μετά την εφαρμογή του κανόνα de L'Hospital, στον παρονομαστή εμφανίζεται η συνάρτηση:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_m^{\text{h}}(k_{\perp}, r_{\text{in}})}{\partial k_{\perp}} = & r_{\text{in}} [J_m''(k_{\perp} r_{\text{in}}) N_m'(k_{\perp} r_{\text{coax}}) - J_m'(k_{\perp} r_{\text{coax}}) N_m''(k_{\perp} r_{\text{in}})] \\ & + r_{\text{coax}} [J_m'(k_{\perp} r_{\text{in}}) N_m''(k_{\perp} r_{\text{coax}}) - J_m''(k_{\perp} r_{\text{coax}}) N_m'(k_{\perp} r_{\text{in}})]. \end{aligned} \quad (6.2.8)$$

Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δείξουμε στον πόλο για  $\zeta = \pm \lambda_0$ . Για να δούμε εάν πράγματι υπάρχει πόλος και να υπολογίσουμε το ολοκληρωτικό του υπόλοιπο πρέπει να δούμε τα όρια  $\lim_{\zeta \rightarrow \pm \lambda_0} G_m^{\text{h}}(k_{\perp}, r_{\text{in}})$  και  $\lim_{\zeta \rightarrow \pm \lambda_0} G_m^{\text{h}}(k_{\perp}, r_{\text{in}})$ . Χρησιμοποιώντας τις ασυμπτωτικές εκφράσεις για μικρά ορίσματα [108]:

$$J_m(k_{\perp} r_{\text{in}}) \sim \frac{1}{m!} \left( \frac{1}{2} k_{\perp} r_{\text{in}} \right)^m, \quad \text{όταν } k_{\perp} \rightarrow 0, \quad (6.2.9)$$

$$N_0(k_{\perp} r_{\text{in}}) \sim \frac{2}{\pi} \ln(k_{\perp} r_{\text{in}}), \quad \text{όταν } k_{\perp} \rightarrow 0, \quad (6.2.10)$$

$$N_m(k_{\perp} r_{\text{in}}) \sim -\frac{1}{\pi} (m-1)! \left( \frac{2}{k_{\perp} r_{\text{in}}} \right)^m, \quad \text{όταν } k_{\perp} \rightarrow 0, \quad (6.2.11)$$

έχουμε κατ' αρχάς για  $m = 0$ :

$$\begin{aligned} G_0^{\text{h}}(k_{\perp}, r_{\text{in}}) = & J_0'(k_{\perp} r_{\text{in}}) N_0'(k_{\perp} r_{\text{coax}}) - N_0'(k_{\perp} r_{\text{in}}) J_0'(k_{\perp} r_{\text{coax}}) \\ = & J_1(k_{\perp} r_{\text{in}}) N_1(k_{\perp} r_{\text{coax}}) - N_1(k_{\perp} r_{\text{in}}) J_1(k_{\perp} r_{\text{coax}}) \\ \sim & \frac{1}{2} k_{\perp} r_{\text{in}} \left( -\frac{1}{\pi} \right) \frac{2}{k_{\perp} r_{\text{coax}}} - \left( -\frac{1}{\pi} \right) \frac{2}{k_{\perp} r_{\text{in}}} \frac{1}{2} k_{\perp} r_{\text{coax}}, \quad \text{όταν } k_{\perp} \rightarrow 0, \\ \sim & \frac{1}{\pi} \left( \frac{r_{\text{coax}}}{r_{\text{in}}} - \frac{r_{\text{in}}}{r_{\text{coax}}} \right), \quad \text{όταν } k_{\perp} \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (6.2.12)$$

$$\begin{aligned} G_0^{\text{h}}(k_{\perp}, r_{\text{in}}) = & J_0(k_{\perp} r_{\text{in}}) N_0'(k_{\perp} r_{\text{coax}}) - N_0(k_{\perp} r_{\text{in}}) J_0'(k_{\perp} r_{\text{coax}}) \\ = & -J_0(k_{\perp} r_{\text{in}}) N_1(k_{\perp} r_{\text{coax}}) + N_0(k_{\perp} r_{\text{in}}) J_1(k_{\perp} r_{\text{coax}}) \\ \sim & -\left( -\frac{1}{\pi} \right) \frac{2}{k_{\perp} r_{\text{coax}}} + \frac{2}{\pi} \ln(k_{\perp} r_{\text{in}}) \frac{1}{2} k_{\perp} r_{\text{coax}}, \quad \text{όταν } k_{\perp} \rightarrow 0, \\ \sim & \frac{2}{\pi k_{\perp} r_{\text{coax}}}, \quad \text{όταν } k_{\perp} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (6.2.13)$$

Επομένως, το ολοκληρωτικό υπόλοιπο του πόλου για  $\zeta = \lambda_0$  είναι:

$$\begin{aligned} \text{Res}(\zeta = \lambda_0) = & \lim_{\zeta \rightarrow \lambda_0} (\zeta - \lambda_0) j \frac{2\pi \zeta^2}{k_{\perp}^2 \pi r_{\text{coax}} \left( \frac{r_{\text{coax}}}{r_{\text{in}}} - \frac{r_{\text{in}}}{r_{\text{coax}}} \right)} A(\zeta) \\ = & j \frac{\lambda_0}{r_{\text{coax}} \left( \frac{r_{\text{coax}}}{r_{\text{in}}} - \frac{r_{\text{in}}}{r_{\text{coax}}} \right)} A(\lambda_0), \end{aligned} \quad (6.2.14)$$

όπου η συνάρτηση  $A(\zeta)$  δίνεται κανονικά από την (2.2.35). Για  $m > 0$  έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
 G_m^h(k_\perp, r_{in}) &= J'_m(k_\perp r_{in}) N'_m(k_\perp r_{coax}) - N'_m(k_\perp r_{in}) J'_m(k_\perp r_{coax}) \\
 &\sim \left(\frac{1}{2}\right)^m \frac{(k_\perp r_{in})^{m-1}}{(m-1)!} 2^m \left(-\frac{1}{\pi}\right) (-1)^m m! (k_\perp r_{coax})^{-m-1} \\
 &\quad - \left(\frac{1}{2}\right)^m \frac{(k_\perp r_{coax})^{m-1}}{(m-1)!} 2^m \left(-\frac{1}{\pi}\right) (-1)^m m! (k_\perp r_{in})^{-m-1}, \quad \text{όταν } k_\perp \rightarrow 0, \\
 &\sim \frac{m}{\pi k_\perp^2} \left[ \left(\frac{r_{in}}{r_{coax}}\right)^{m-1} \frac{1}{r_{coax}^2} - \left(\frac{r_{coax}}{r_{in}}\right)^{m-1} \frac{1}{r_{in}^2} \right], \quad \text{όταν } k_\perp \rightarrow 0, \quad (6.2.15)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_m^h(k_\perp, r_{in}) &= J_m(k_\perp r_{in}) N'_m(k_\perp r_{coax}) - N_m(k_\perp r_{in}) J'_m(k_\perp r_{coax}) \\
 &\sim \left(\frac{1}{2}\right)^m \frac{(k_\perp r_{in})^m}{m!} 2^m \left(-\frac{1}{\pi}\right) (-1)^m m! (k_\perp r_{coax})^{-m-1} \\
 &\quad - \left(\frac{1}{2}\right)^m \frac{(k_\perp r_{coax})^m}{(m-1)!} 2^m \left(-\frac{1}{\pi}\right) (-1)^m (m-1)! (k_\perp r_{in})^{-m}, \quad \text{όταν } k_\perp \rightarrow 0, \\
 &\sim \frac{1}{\pi k_\perp} \left[ \left(\frac{r_{in}}{r_{coax}}\right)^m \frac{1}{r_{coax}} - \left(\frac{r_{coax}}{r_{in}}\right)^m \frac{1}{r_{in}} \right], \quad \text{όταν } k_\perp \rightarrow 0. \quad (6.2.16)
 \end{aligned}$$

Μπορούμε να επεκτείνουμε τις παραπάνω εκφράσεις για  $m < 0$  βάζοντας τον αζιμουθιακό δείκτη σε απόλυτο, το οποίο αποδεικνύεται χρησιμοποιώντας τις γνωστές σχέσεις:  $J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$ ,  $N_{-m}(x) = (-1)^m N_m(x)$ .

Από τα παραπάνω εύκολα φαίνεται ότι για  $m \neq 0$  δεν υπάρχει πόλος όταν  $\zeta = -\lambda_0$ . Συνθέτοντας τις παραπάνω παρατηρήσεις και εφαρμόζοντας τη διαδικασία υπολογισμού των ολοκληρωμάτων όπως στο Παράρτημα Π.1 έχουμε για το ολοκλήρωμα  $I_1^{\text{coax}}(n, \ell, \nu, \lambda)$ :

$$\begin{aligned}
 I_1^{\text{coax}} &= \sum_{p=1}^{\infty} j \zeta'_{mp} \frac{G_m^h(g'_{mp}/r_{in}, r_{in})}{\frac{\partial G_m^h}{\partial k_\perp}(g'_{mp}/r_{in}, r_{in})} A(n, \nu, \ell, \lambda, \zeta'_{mp}) + \delta_{\ell\lambda} \delta_{m\nu} (1 + \delta_{n0}) \frac{d_\ell G_m^h(k_{n\ell}^{(2)}, r_{in})}{2k_{n\ell}^{(2)} G_m^h(k_{n\ell}^{(2)}, r_{in})} \\
 &\quad + j \delta_{m0} \frac{\lambda_0}{r_{coax} \left( \frac{r_{coax}}{r_{in}} - \frac{r_{in}}{r_{coax}} \right)} A(n, \nu, \ell, \lambda, \lambda_0). \quad (6.2.17)
 \end{aligned}$$

Τα υπόλοιπα ολοκληρώματα υπολογίζονται ανάλογα και οι τελικές εκφράσεις δίνονται από τους παρακάτω τύπους:

$$\begin{aligned}
 I_2^{\text{coax}} &= \sum_{p=1}^{\infty} j \frac{g_{mp}^2 G_m^h(g'_{mp}/r_{in}, r_{in})}{r_{in}^2 \zeta'_{mp} \frac{\partial G_m^h}{\partial k_\perp}(g'_{mp}/r_{in}, r_{in})} A(n, \nu, \ell, \lambda, \zeta'_{mp}) \\
 &\quad + (1 - \delta_{n0}) \delta_{\ell\lambda} \delta_{m\nu} \frac{d_\ell^3 k_{n\ell}^{(2)} G_m^h(k_{n\ell}^{(2)}, r_{in})}{2n^2 \pi^2 G_m^h(k_{n\ell}^{(2)}, r_{in})}, \quad (6.2.18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_3^{\text{coax}} &= \sum_{p=1}^{\infty} j \frac{\zeta'_{mp}{}^3 r_{in}^2 G_m^h(g'_{mp}/r_{in}, r_{in})}{g_{mp}^2 \frac{\partial G_m^h}{\partial k_\perp}(g'_{mp}/r_{in}, r_{in})} A(n, \nu, \ell, \lambda, \zeta'_{mp}) + \frac{n^2 \pi^2}{2d_\ell k_{n\ell}^{(2)}} \delta_{\ell\lambda} \delta_{m\nu} \frac{G_m^h(k_{n\ell}^{(2)}, r_{in})}{G_m^h(k_{n\ell}^{(2)}, r_{in})} \\
 &\quad + j(1 - \delta_{m0}) \frac{\lambda_0^3}{2|m|} \frac{\left[ \frac{1}{r_{coax}} \left(\frac{r_{in}}{r_{coax}}\right)^{|m|} + \frac{1}{r_{in}} \left(\frac{r_{coax}}{r_{in}}\right)^{|m|} \right]}{\left[ \frac{1}{r_{coax}^2} \left(\frac{r_{in}}{r_{coax}}\right)^{|m|-1} + \frac{1}{r_{in}^2} \left(\frac{r_{coax}}{r_{in}}\right)^{|m|-1} \right]} A(n, \nu, \ell, \lambda, \lambda_0), \quad (6.2.19)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_4^{\text{coax}} = & \sum_{p=1}^{\infty} j \frac{\zeta_{mp} G_m^e(g_{mp}/r_{\text{in}}, r_{\text{in}})}{\frac{\partial G_m^e}{\partial k_{\perp}}(g_{mp}/r_{\text{in}}, r_{\text{in}})} A(n, \nu, \ell, \lambda, \zeta_{mp}) + (1 + \delta_{n0}) \delta_{\ell\lambda} \delta_{n\nu} \frac{d_{\ell} G_m^e(k_{n\ell}^{(2)}, r_{\text{in}})}{2k_{n\ell}^{(2)} G_m^e(k_{n\ell}^{(2)}, r_{\text{in}})} \\
 & - j \frac{\lambda_0 |m| \left[ \frac{1}{r_{\text{coax}}} \left( \frac{r_{\text{in}}}{r_{\text{coax}}} \right)^{|m|} + \frac{1}{r_{\text{in}}} \left( \frac{r_{\text{coax}}}{r_{\text{in}}} \right)^{|m|} \right]}{2 \left[ \left( \frac{r_{\text{coax}}}{r_{\text{in}}} \right)^{|m|} - \left( \frac{r_{\text{in}}}{r_{\text{coax}}} \right)^{|m|} \right]} A(n, \nu, \ell, \lambda, \lambda_0) \\
 & - j \delta_{m0} \frac{\lambda_0}{2r_{\text{in}} \ln \left( \frac{r_{\text{coax}}}{r_{\text{in}}} \right)} A(n, \nu, \ell, \lambda, \lambda_0).
 \end{aligned} \tag{6.2.20}$$

Εύκολα δείχνεται στις παραπάνω εκφράσεις ότι παίρνοντας το όριο για  $r_{\text{coax}} \rightarrow 0$  αυτές ταυτίζονται με τις (2.2.31)-(2.2.34). Εξαιρέση αποτελεί η (6.2.20), στην οποία λόγω του ομοαξονικού στελέχους εμφανίζεται ο επιπλέον όρος με τον λογάριθμο για  $m = 0$ , ο οποίος αντιστοιχεί στον ρυθμό TEM που υποστηρίζει η ομοαξονική διάταξη.

Αντίστοιχες παραλλαγές των τελικών εκφράσεων εμφανίζονται και στις σχέσεις υπολογισμού των πεδιακών μεγεθών της διάταξης. Για παράδειγμα, στον υπολογισμό του αξιμουθιακού ηλεκτρικού πεδίου, το οποίο δίνεται και πάλι από τη σχέση (2.3.2), εμφανίζονται τώρα αντί των  $I_5, I_6, I_7$  τα ολοκληρώματα  $I_5^{\text{coax}}, I_6^{\text{coax}}, I_7^{\text{coax}}$ , τα οποία ορίζονται ως εξής:

$$I_5^{\text{coax}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\zeta G_m^e(k_{\perp}, r)}{k_{\perp}^2 G_m^e(k_{\perp}, r_{\text{in}})} \frac{e^{j\zeta(z-s_{\ell})} - (-1)^n e^{j\zeta(z-s_{\ell}-d_{\ell})}}{(n\pi/d_{\ell})^2 - \zeta^2} d\zeta, \tag{6.2.21}$$

$$I_6^{\text{coax}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\zeta^2 G_m^h(k_{\perp}, r)}{k_{\perp}^3 G_m^h(k_{\perp}, r_{\text{in}})} \frac{e^{j\zeta(z-s_{\ell})} - (-1)^n e^{j\zeta(z-s_{\ell}-d_{\ell})}}{(n\pi/d_{\ell})^2 - \zeta^2} d\zeta, \tag{6.2.22}$$

$$I_7^{\text{coax}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_m^h(k_{\perp}, r)}{k_{\perp} G_m^h(k_{\perp}, r_{\text{in}})} \frac{e^{j\zeta(z-s_{\ell})} - (-1)^n e^{j\zeta(z-s_{\ell}-d_{\ell})}}{(n\pi/d_{\ell})^2 - \zeta^2} d\zeta. \tag{6.2.23}$$

Εφαρμόζοντας αντίστοιχα τις παραλλαγές που περιγράψαμε πιο πριν στη διαδικασία υπολογισμού, η οποία περιγράφεται στο Παράρτημα Π.2, παίρνουμε τις παρακάτω αναλυτικές εκφράσεις για τα ολοκληρώματα  $I_5^{\text{coax}}, I_6^{\text{coax}}, I_7^{\text{coax}}$ :

$$I_5^{\text{coax}} = \left\{ \begin{aligned} & \sum_p \frac{j r_{\text{in}} G_m^e(g_{mp}/r_{\text{in}}, r_{\text{in}}) - \text{sgn}(z - s_{\ell}) e^{-j\zeta_{mp}|z-s_{\ell}|} + \text{sgn}(z - s_{\ell} - d_{\ell}) (-1)^n e^{-j\zeta_{mp}|z-s_{\ell}-d_{\ell}|}}{g_{mp} \frac{\partial G_m^e}{\partial k_{\perp}}(g_{mp}/r_{\text{in}}, r_{\text{in}})} \frac{1}{(n\pi/d_{\ell})^2 - \zeta_{mp}^2} \\ & + \frac{j \left( \frac{r_{\text{coax}}}{r} \right)^{|m|} - \left( \frac{r}{r_{\text{coax}}} \right)^{|m|}}{2 \left( \frac{r_{\text{coax}}}{r_{\text{in}}} \right)^{|m|} - \left( \frac{r_{\text{in}}}{r_{\text{coax}}} \right)^{|m|}} \frac{-\text{sgn}(z - s_{\ell}) e^{-j\lambda_0|z-s_{\ell}|} + \text{sgn}(z - s_{\ell} - d_{\ell}) (-1)^n e^{-j\lambda_0|z-s_{\ell}-d_{\ell}|}}{(n\pi/d_{\ell})^2 - \lambda_0^2} \\ & + \frac{j \ln \left( \frac{r_{\text{coax}}}{r} \right) - \text{sgn}(z - s_{\ell}) e^{-j\lambda_0|z-s_{\ell}|} + \text{sgn}(z - s_{\ell} - d_{\ell}) (-1)^n e^{-j\lambda_0|z-s_{\ell}-d_{\ell}|}}{2 \ln \left( \frac{r_{\text{coax}}}{r_{\text{in}}} \right)} \frac{1}{(n\pi/d_{\ell})^2 - \lambda_0^2}, -\infty < z < \infty \\ & - \frac{j}{2} \frac{G_m^e(k_n, r)}{k_n^2 G_m^e(k_n, r_{\text{in}})} \left[ \cos \left[ \frac{n\pi}{d_{\ell}} (z - s_{\ell}) \right] + (-1)^n \cos \left[ \frac{n\pi}{d_{\ell}} (z - s_{\ell} - d_{\ell}) \right] \right], s_{\ell} < z < s_{\ell} + d_{\ell} \end{aligned} \right. , \tag{6.2.24}$$

$$I_6^{\text{coax}} = \begin{cases} \sum_p j \frac{\zeta'_{mp} r_{\text{in}}^2 G_m^h(g'_{mp}/r_{\text{in}}, r)}{g'_{mp} \frac{\partial G_m^h}{\partial k_{\perp}}(g'_{mp}/r_{\text{in}}, r_{\text{in}})} \frac{e^{-j\zeta'_{mp}|z-s_{\ell}|} - (-1)^n e^{-j\zeta'_{mp}|z-s_{\ell}-d_{\ell}|}}{(n\pi/d_{\ell})^2 - \zeta'_{mp}{}^2}, -\infty < z < \infty \\ + \frac{j\lambda_0}{2|m|} \left[ \frac{1}{r_{\text{coax}}} \left(\frac{r}{r_{\text{coax}}}\right)^{|m|} + \frac{1}{r} \left(\frac{r_{\text{coax}}}{r}\right)^{|m|} \right] \frac{e^{-j\lambda_0|z-s_{\ell}|} - (-1)^n e^{-j\lambda_0|z-s_{\ell}-d_{\ell}|}}{\left[ \frac{1}{r_{\text{coax}}} \left(\frac{r_{\text{in}}}{r_{\text{coax}}}\right)^{|m|-1} + \frac{1}{r_{\text{in}}} \left(\frac{r_{\text{coax}}}{r_{\text{in}}}\right)^{|m|} \right] (n\pi/d_{\ell})^2 - \lambda_0^2}, -\infty < z < \infty \\ + \frac{n\pi}{2d_{\ell}} \frac{G_m^h(k_n, r)}{k_n^3 G_m^h(k_n, r_{\text{in}})} \left[ \sin \left[ \frac{n\pi}{d_{\ell}}(z - s_{\ell}) \right] + (-1)^n \sin \left[ \frac{n\pi}{d_{\ell}}(z - s_{\ell} - d_{\ell}) \right] \right], s_{\ell} < z < s_{\ell} + d_{\ell} \end{cases}, \quad (6.2.25)$$

$$I_7^{\text{coax}} = \begin{cases} \sum_p j \frac{G_m^h(g'_{mp}/r_{\text{in}}, r)}{\zeta'_{mp} \frac{\partial G_m^h}{\partial k_{\perp}}(g'_{mp}/r_{\text{in}}, r_{\text{in}})} \frac{e^{-j\zeta'_{mp}|z-s_{\ell}|} - (-1)^n e^{-j\zeta'_{mp}|z-s_{\ell}-d_{\ell}|}}{(n\pi/d_{\ell})^2 - \zeta'_{mp}{}^2}, -\infty < z < \infty \\ + \delta_{m0} \frac{j}{\lambda_0} \frac{1}{r_{\text{coax}} \left(\frac{r_{\text{coax}}}{r_{\text{in}}} - \frac{r_{\text{in}}}{r_{\text{coax}}}\right)} \frac{e^{-j\lambda_0|z-s_{\ell}|} - (-1)^n e^{-j\lambda_0|z-s_{\ell}-d_{\ell}|}}{(n\pi/d_{\ell})^2 - \lambda_0^2}, -\infty < z < \infty \\ + \frac{G_m^h(k_n, r)}{k_n G_m^h(k_n, r_{\text{in}})} \frac{d_{\ell}}{2n\pi} \left[ \sin \left[ \frac{n\pi}{d_{\ell}}(z - s_{\ell}) \right] + (-1)^n \sin \left[ \frac{n\pi}{d_{\ell}}(z - s_{\ell} - d_{\ell}) \right] \right], s_{\ell} < z < s_{\ell} + d_{\ell} \end{cases}. \quad (6.2.26)$$

Αντίστοιχα ολοκληρώματα που εμφανίζονται για τις άλλες πεδριακές συνιστώσες υπολογίζονται με εντελώς παρόμοιο τρόπο. Έχοντας τώρα επεκτείνει τον φορμαλισμό της απλής γεωμετρίας στην περίπτωση της ομοαξονικής γεωμετρίας, τόσο για την εξαγωγή του τελικού συστήματος εξισώσεων, όσο και για τον υπολογισμό των πεδιακών μεγεθών, περνάμε στον έλεγχο του κώδικα μέσω της σύγκρισης των αριθμητικών αποτελεσμάτων για την περίπτωση της ομοαξονικής γεωμετρίας.

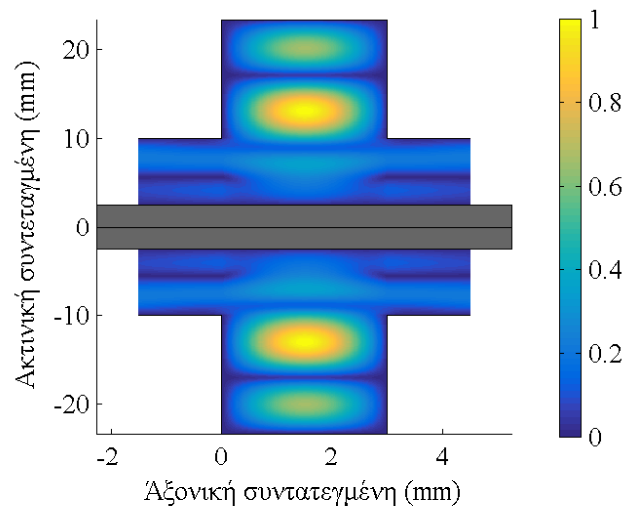
### 6.2.3 Έλεγχος εξισώσεων και κώδικα για ομοαξονική γεωμετρία

Προχωράμε τώρα στον υπολογισμό της συχνότητας συντονισμού και του συντελεστή ποιότητας ορισμένων συντονιζόμενων ρυθμών για δύο χαρακτηριστικές γεωμετρίες, με σκοπό τη σύγκριση με τα αποτελέσματα που δίνει ο εμπορικός κώδικας CASCADE. Ο έλεγχος και σε αυτή την περίπτωση θα περιοριστεί σε γεωμετρίες χωρίς διπλεκτρικά δαχτυλίδια, καθώς όπως έχουμε εξηγήσει ο κώδικας CASCADE δεν μπορεί να επιλύσει τέτοιες γεωμετρίες. Όπως και στην ενότητα 6.1.3, έτσι και εδώ στόχος είναι η επαλήθευση των εξισώσεων και του κώδικα και όχι μια λεπτομερής μελέτη των ρυθμών που υποστηρίζει η συγκεκριμένη γεωμετρία.

Η πρώτη γεωμετρία για την οποία συγκρίνουμε τα αποτελέσματα είναι μια απλή ομοαξονική γεωμετρία με ένα δαχτυλίδι. Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της είναι τα εξής:  $r_{\text{in}} = 10.0$  mm,  $r_{\text{coax}} = 2.5$  mm,  $d_1 = 3.0$  mm,  $r_1 = 23.3$  mm. Στον Πίνακα 6.3 παραθέτουμε τα χαρακτηριστικά των συντονιζόμενων ρυθμών που υπολογίσαμε για τους δύο κώδικες. Ο πίνακας περιλαμβάνει συντονιζόμενους ρυθμούς TE, TM, καθώς και υβριδικούς ρυθμούς. Τα αποτελέσματα μεταξύ των δύο κωδίκων, όπως βλέπουμε στον πίνακα, βρίσκονται σε συμφωνία με ικανοποιητική ακρίβεια. Το προφίλ της αξιωματικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου για τον υβριδικό ρυθμό που ταλαντώνεται στα 56.658 GHz παρουσιάζεται στο Σχήμα 6.9.

Πίνακας 6.3: Συντονιζόμενοι ρυθμοί στην ομοαξονική γεωμετρία ενός δαχτυλιδιού.

Αξιμουθιακός δείκτης $m$	Συχνότητα (GHz) κώδικα NESTOR	Τιμή $Q$ κώδικα NESTOR	Συχνότητα (GHz) κώδικα CASCADE	Τιμή $Q$ κώδικα CASCADE
0 (TE)	53.759	62.2	53.756	61.6
0 (TE)	66.010	37.0	66.011	37.0
0 (TM)	62.541	42.0	62.550	41.7
0 (TM)	56.823	77.0	56.830	76.8
5	56.658	125	56.663	125
5	64.530	96.5	64.528	96.6

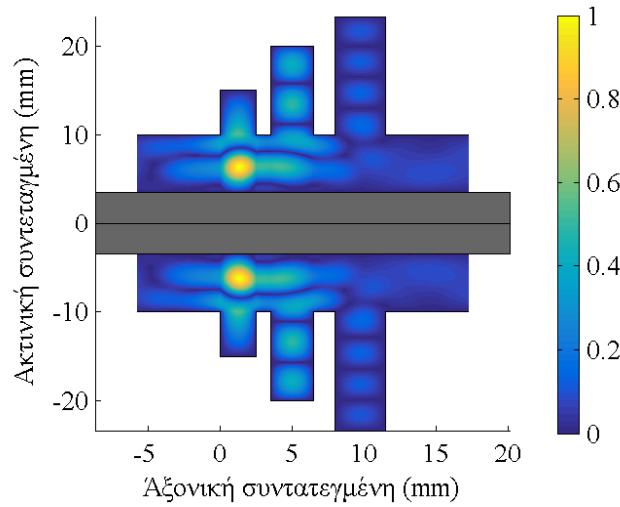


Σχήμα 6.9: Αξιμουθιακή συνιστώσα ηλεκτρικού πεδίου  $E_\phi(r, z)$  του υβριδικού ρυθμού που ταλαντώνεται στα 56.658 GHz.

Συνεχίζουμε τον έλεγχο για μια πιο σύνθετη γεωμετρία που περιλαμβάνει τώρα τρία δαχτυλίδια. Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της νέας γεωμετρίας είναι τα εξής:  $r_{in} = 10.0$  mm,  $r_{coax} = 3.5$  mm,  $d_1 = 2.5$  mm,  $r_1 = 15.0$  mm,  $d_2 = 3.0$  mm,  $r_2 = 20.0$  mm,  $s_2 = 3.5$  mm,  $d_3 = 3.5$  mm,  $r_3 = 23.3$  mm,  $s_3 = 8.0$  mm. Στον Πίνακα 6.4 παραθέτουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα για ορισμένους συντονιζόμενους ρυθμούς που υπολογίσαμε. Μεταξύ των δύο κωδίκων υπάρχει καλή συμφωνία, αν και όχι τόσο ικανοποιητική όπως στις άλλες περιπτώσεις. Αυτή η μικρή απόκλιση οφείλεται στο γεγονός ότι στα αποτελέσματα με τον κώδικα NESTOR δεν ήταν δυνατό να συμπεριλάβουμε μεγάλο αριθμό ρυθμών στα δαχτυλίδια που βρίσκονται στην αποκοπή. Έτσι, τα αποτελέσματα που δίνουμε δεν έχουν συγκλίσει στην απαιτούμενη ακρίβεια ως προς τον αριθμό των ρυθμών που λαμβάνουμε υπ' όψιν στα δαχτυλίδια. Ο περιορισμός αυτός δεν έχει κάποια ουσιαστική επίπτωση στους πρακτικούς υπολογισμούς και οφείλεται στον τρόπο που χειρίζεται η MATLAB τις συναρτήσεις Bessel όταν το όρισμα γίνει μιγαδικό. Αντί των συναρτήσεων Bessel μπορεί να γίνει χρήση των συναρτήσεων Hankel που η υλοποίησή τους στη MATLAB για μιγαδικά ορίσματα παρουσιάζει καλύτερη συμπεριφορά. Παρ' όλα αυτά, η συμφωνία των αποτελεσμάτων είναι αρκετά καλή ώστε να καταλήξουμε στην επαλήθευση των εξισώσεων και του κώδικα για την ομοαξονική γεωμετρία. Τέλος,

Πίνακας 6.4: Συντονιζόμενοι ρυθμοί στην ομοαξονική γεωμετρία των τριών δαχτυλιδιών.

Αξιομοιαιακός δείκτης $m$	Συχνότητα (GHz) κώδικα NESTOR	Τιμή $Q$ κώδικα NESTOR	Συχνότητα (GHz) κώδικα CASCADE	Τιμή $Q$ κώδικα CASCADE
0 (TE)	62.465	301	62.433	303
0 (TE)	48.289	65.4	48.286	65.6
0 (TM)	61.388	186	61.406	192
0 (TM)	54.485	60.3	54.496	59.8
5	62.490	520	62.451	510
5	52.516	18.7	52.535	18.5

Σχήμα 6.10: Αξιομοιαιακή συνιστώσα ηλεκτρικού πεδίου  $E_\phi(r, z)$  του υβριδικού ρυθμού που ταλαντώνεται στα 62.490 GHz.

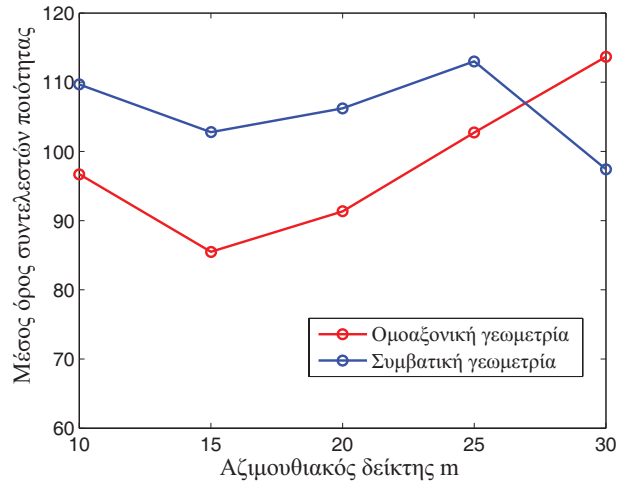
στο Σχήμα 6.10 δίνουμε το προφίλ της αξιομοιαιακής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου του ρυθμού που ταλαντώνεται στα 62.490 GHz.

#### 6.2.4 Σύγκριση ομοαξονικής με συμβατική γεωμετρία διαύλου δέσμης

Στην παρούσα ενότητα θα εξετάσουμε μια ομοαξονική γεωμετρία πραγματικού διαύλου δέσμης σε σύγκριση με μία όμοια γεωμετρία που δεν διαθέτει ομοαξονικό στέλεχος. Συγκεκριμένα, θα μελετήσουμε τη γεωμετρία του ομοαξονικού γυροτρονίου 170 GHz, 2 MW, που μελετάται πειραματικά στο ινστιτούτο IHM του ΚΙΤ σε λειτουργία μικρού χρονικού παλμού [114].

Στα πειράματα λειτουργίας του συγκεκριμένου ομοαξονικού γυροτρονίου δεν παρατηρούνται παρασιτικές ταλαντώσεις υψηλής συχνότητας που θα μπορούσαν να αποδοθούν στον δίαυλο της δέσμης. Θα επιχειρήσουμε επομένως να εξετάσουμε αν αυτή η καλή συμπεριφορά του διαύλου δέσμης σχετίζεται με δομικά πλεονεκτήματα της ομοαξονικής γεωμετρίας ή οφείλεται σε συγκυριακούς λόγους.

Τα χαρακτηριστικά της απλοποιημένης γεωμετρίας σταθερής ακτίνας, που μελετάμε και ομοιάζει σημαντικά με την πραγματική γεωμετρία του ομοαξονικού γυροτρονίου, παραλείπονται και πάλι για λόγους βιομηχανικής ιδιοκτησίας. Η τιμή της σχετικής επιτρεπτότητας που θεωρούμε για τα διηλεκτρικά δαχτυλίδια είναι:

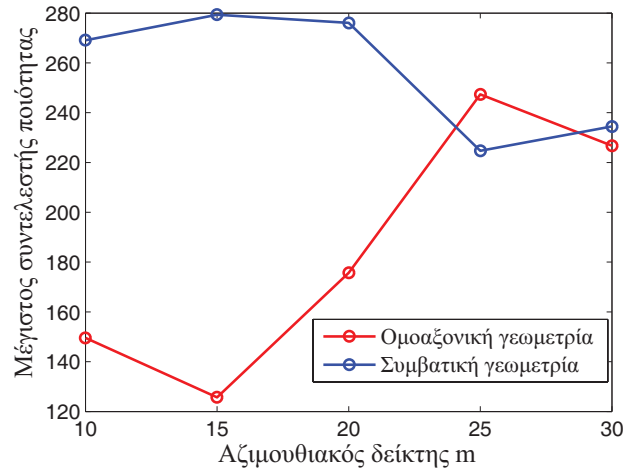


Σχήμα 6.11: Μέση τιμή συντελεστών ποιότητας των συντονιζόμενων ρυθμών για τις εξεταζόμενες τιμές του αζιμουθιακού δείκτη στις δύο διαφορετικού είδους γεωμετρίες.

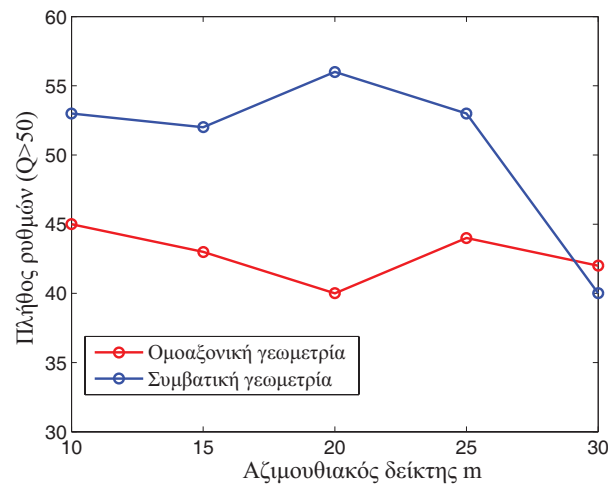
$\varepsilon_r = 20 - 14j$ . Η συμβατική γεωμετρία που χρησιμοποιούμε για την άμεση σύγκρισή της έχει τα ίδια χαρακτηριστικά χωρίς όμως να διαθέτει ομοαξονικό στέλεχος.

Η σύγκριση των δύο γεωμετριών θα γίνει μόνο ως προς τα «κρύα» χαρακτηριστικά τους, καθώς δεν έχει νόημα η σύγκριση μεγεθών που εμπλέκουν την αλληλεπίδραση, μιας και ένα υποθετικό συμβατικό γυροτρόνιο με παρόμοια γεωμετρία διαύλου δέσμης θα παρουσίαζε άλλες παραμέτρους δέσμης σε σχέση με το ομοαξονικό. Συγκεκριμένα, θα εξετάσουμε μόνο τις μεταβολές των συντελεστών ποιότητας που προκύπτουν από την επίλυση του προβλήματος ιδιοτιμών. Μία πληρέστερη μελέτη θα απαιτούσε επίσης και τη μελέτη της αποθηκευμένης ενέργειας ή ισοδύναμα τις συνολικές απώλειες ισχύος του κάθε ρυθμού, για να βρεθεί η τελική συμπεριφορά των ρευμάτων εκκίνησης που είναι το μέγεθος που μας ενδιαφέρει. Η σύγκριση όμως πεδιακών μεγεθών, όπως οι απώλειες και η αποθηκευμένη ενέργεια, για διαφορετικούς ρυθμούς απαιτεί την αναγωγή τους σε μία κοινή βάση. Η κοινή βάση που προσφέρει μια ορθή σύγκριση των διαφορετικών ρυθμών τυπικά είναι το πεδίο πάνω στην ηλεκτρονική δέσμη. Όμως θέλοντας να συγκρίνουμε δύο διαφορετικού είδους γεωμετρίες γυροτρονίων, εκ των οποίων η μία υποθετική, κρίνουμε ότι δεν είναι αντιπροσωπευτικό να αποδώσουμε τα χαρακτηριστικά δέσμης και εν προκειμένω την ακτίνα της δέσμης της πραγματικής γεωμετρίας στην υποθετική. Έτσι, περιορίζομαστε στη μελέτη των συντελεστών ποιότητας, οι οποίοι σε κάθε περίπτωση δείχνουν την τάση μεταβολής των ρευμάτων εκκίνησης, καθώς τα δύο αυτά μεγέθη είναι αντιστρόφως ανάλογα.

Για τη σύγκριση των δύο γεωμετριών, υπολογίζουμε όλους τους συντονιζόμενους ρυθμούς στην επικίνδυνη περιοχή συχνοτήτων 135-160 GHz και για συντελεστή ποιότητας  $Q > 50$ . Η περιοχή συχνοτήτων είναι ίδια με αυτή του γυροτρονίου για το ITER όπως υπολογίστηκε στην ενότητα 5.2, καθώς η αξονική θέση του διαύλου δέσμης και το μαγνητοστατικό πεδίο είναι παρόμοια μεταξύ των δύο γυροτρονίων. Οι υπολογισμοί επικεντρώνονται στους υψηλότερους αζιμουθιακούς δείκτες, καθώς όπως έχουμε δείξει στην ενότητα 5.2 αυτοί είναι που προσφέρουν καλή σύζευξη με την ηλεκτρονική δέσμη. Μιας και θέλουμε να εξετάσουμε τη μεταβολή των



Σχήμα 6.12: Μέγιστος συντελεστής ποιότητας για τις εξεταζόμενες τιμές του αζιμουθιακού δείκτη στις δύο διαφορετικού είδους γεωμετρίες.

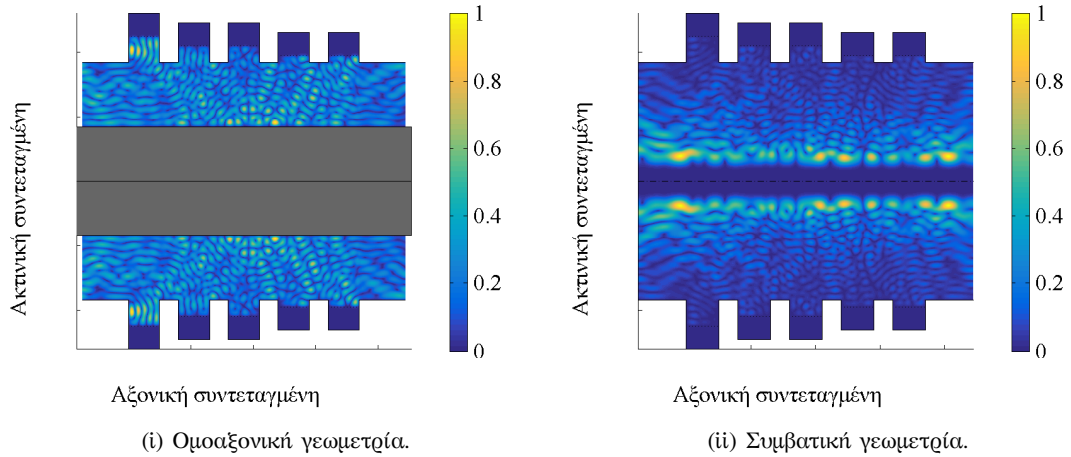


Σχήμα 6.13: Πλήθος ρυθμών που βρέθηκαν στην περιοχή συχνοτήτων 135-160 GHz με  $Q > 50$  στις δύο γεωμετρίες για τις εξεταζόμενες τιμές του αζιμουθιακού δείκτη.

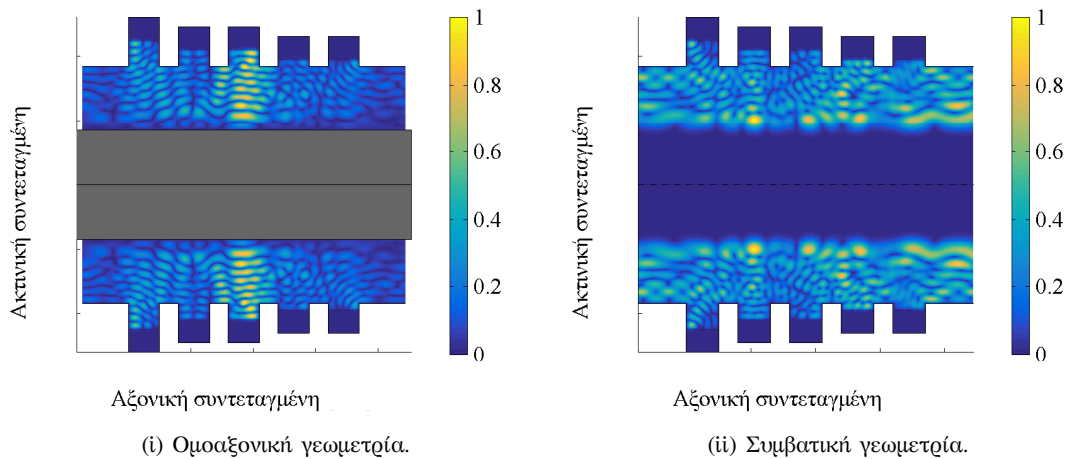
χαρακτηριστικών σε σχέση και με τη μεταβολή του αζιμουθιακού δείκτη υπολογίζουμε τους ρυθμούς για τις τιμές  $m = 10, 15, 20, 25$  και  $30$ .

Στο Σχήμα 6.11 παρουσιάζουμε τη μέση τιμή των συντελεστών ποιότητας όλων των συντονιζόμενων ρυθμών για τις εξεταζόμενες τιμές του αζιμουθιακού δείκτη. Παρατηρούμε ότι η ομοαξονική γεωμετρία παρουσιάζει συντελεστές ποιότητας με περίπου 15% χαμηλότερη τιμή σε σχέση με τη συμβατική γεωμετρία. Η εικόνα αντιστρέφεται όταν πλησιάζουμε σε πολύ μεγάλους αζιμουθιακούς δείκτες κοντά στο 30. Στο Σχήμα 6.12 παρουσιάζουμε τον συντελεστή ποιότητας των ρυθμών με τις μεγαλύτερες απώλειες. Για μικρές τιμές του  $m$ , οι τιμές του  $Q$  είναι σχεδόν διπλάσιες για τη συμβατική γεωμετρία σε σχέση με την ομοαξονική, ενώ καθώς μεγαλώνει ο αζιμουθιακός δείκτης οι δύο καμπύλες τείνουν να συμπίψουν. Τέλος, στο Σχήμα 6.13 δείχνουμε το πλήθος των ρυθμών που βρέθηκαν στη συγκεκριμένη





Σχήμα 6.14: Προφίλ αξιμουθιακής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου των ρυθμών με τον μέγιστο συντελεστή ποιότητας στην ομοαξονική και στη συμβατική γεωμετρία για αξιμουθιακό δείκτη  $m = 10$ .



Σχήμα 6.15: Προφίλ αξιμουθιακής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου των ρυθμών με τον μέγιστο συντελεστή ποιότητας στην ομοαξονική και στη συμβατική γεωμετρία για αξιμουθιακό δείκτη  $m = 30$ .

περιοχή αναζήτησης. Φαίνεται ότι στην ομοαξονική γεωμετρία για τους χαμηλούς αξιμουθιακούς δείκτες το πλήθος των ρυθμών είναι μικρότερο, καθώς πολλοί ρυθμοί έχουν μετακινηθεί εκτός της περιοχής αναζήτησης. Το γεγονός αυτό εμφανίζει τη διαφορά στους μέσους όρους των συντελεστών ποιότητας (Σχήμα 6.11) όχι τόσο μεγάλη όσο είναι για κάθε ρυθμό ξεχωριστά (π.χ. για τον μέγιστο στο Σχήμα 6.12), αφού πολλοί ρυθμοί με χαμηλό συντελεστή ποιότητας έχουν βρεθεί εκτός περιοχής αναζήτησης.

Η συμπεριφορά αυτή για τους μεγάλους αξιμουθιακούς δείκτες μπορεί να εξηγηθεί με βάση τα προφίλ πεδίου των ρυθμών. Για παράδειγμα, στο Σχήμα 6.14 παρουσιάζουμε το προφίλ της αξιμουθιακής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου των ρυθμών με τον μέγιστο συντελεστή ποιότητας στις δύο γεωμετρίες για τον αξιμουθιακό δείκτη  $m = 10$ . Παρατηρούμε, ότι στη συμβατική γεωμετρία η καυστική ακτίνα του ρυθμού είναι μικρή, και επομένως στην αντίστοιχη ομοαξονική γεωμετρία

το ομοαξονικό στέλεχος επηρεάζει σημαντικά τους ρυθμούς. Αντίθετα, στο Σχήμα 6.15 για τον αζιμουθιακό δείκτη  $m = 30$  η καυστική ακτίνα των ρυθμών είναι μεγάλη και στην ομοαξονική γεωμετρία ελάχιστα μόνο επηρεάζει το ομοαξονικό στέλεχος. Για ακόμα μεγαλύτερους αζιμουθιακούς δείκτες αναμένεται πλήρης ταύτιση μεταξύ των ρυθμών, καθώς αυτοί δεν θα βλέπουν καθόλου το ομοαξονικό στέλεχος. Η ταύτιση αυτή υποδηλώνεται ήδη στις καμπύλες για τους συντελεστές ποιότητας, καθώς αυτές τείνουν να συμπέσουν, όσο πλησιάζουμε στους μεγάλους αζιμουθιακούς δείκτες, που αντιστοιχούν και σε μεγαλύτερες καυστικές ακτίνες των ρυθμών.

Σαν γενικό συμπέρασμα της παρούσας μελέτης μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η ομοαξονική γεωμετρία παρουσιάζοντας μεγαλύτερες τιμές συντελεστών ποιότητας και λιγότερους υποψήφιους για διέγερση ρυθμούς, εμφανίζει πλεονέκτημα σε σχέση με την αντίστοιχη όμοια συμβατική γεωμετρία. Παρ' όλα αυτά, καθώς όπως δείξαμε οι δύο γεωμετρίες γίνονται ισοδύναμες για μεγάλους αζιμουθιακούς δείκτες, το πλεονέκτημα αυτό τείνει να αντισταθμιστεί από το γεγονός ότι οι πλέον επικίνδυνοι για παρασιτική διέγερση ρυθμοί είναι αυτοί με μεγάλη καυστική ακτίνα λόγω καλύτερης σύζευξης με την ηλεκτρονική δέσμη.

Γενικά, η παρασιτική αλληλεπίδραση είναι ένα φαινόμενο που πέρα από τους συντελεστές ποιότητας εξαρτάται ισχυρά από τις συχνότητες συντονισμού και τα προφίλ πεδίου των ρυθμών. Σε ιδιαίτερα πολύπλοκες γεωμετρίες όπως αυτή ενός διαύλου δέσμης, το μεγάλο πλήθος των ρυθμών και η ευρεία γκάμα χαρακτηριστικών τους, εισάγει μια παράμετρο στοχαστικότητας που τείνει να αναιρέσει τα αποτελέσματα που αφορούν μόνο τους συντελεστές ποιότητας των ρυθμών. Έτσι, το σαφές πλεονέκτημα της ομοαξονικής γεωμετρίας σε σχέση με τη συμβατική είναι εξαιρετικά δύσκολο να ποσοτικοποιηθεί. Επομένως, από την παρούσα μελέτη το βασικό συμπέρασμα που εξάγουμε είναι ότι η ομοαξονική γεωμετρία και όσον αφορά μόνο τους συντελεστές ποιότητας των ρυθμών φαίνεται πως είναι σαφώς καλύτερη στην κατάπνιξη των παρασιτικών αλληλεπιδράσεων. Αν και τα πειράματα με ομοαξονικά γυροτρόνια είναι σαφώς λιγότερα, μία ένδειξη για το συγκεκριμένο πλεονέκτημα της ομοαξονικής γεωμετρίας που βρέθηκε στην ενότητα αυτή είναι πιθανώς η λιγότερο συχνή πειραματική εμφάνιση παρασιτικών στο ομοαξονικό γυροτρόνιο.

---

## ΚΥΡΙΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΕΣ ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ

---

Στο κεφάλαιο αυτό συνοψίζουμε τα κυριότερα αποτελέσματα που επετεύχθησαν στα πλαίσια της παρούσας διατριβής. Κατόπιν, παρουσιάζουμε ορισμένες προτάσεις για μελλοντική έρευνα που συμπληρώνουν και επεκτείνουν την παρούσα εργασία.

### 7.1 Κύρια αποτελέσματα

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζουμε συνοπτικά τα κύρια αποτελέσματα της παρούσας εργασίας. Αυτά ομαδοποιούνται σε τρεις γενικές κατηγορίες και παρουσιάζονται στις αντίστοιχες υποενότητες. Στην πρώτη κατηγορία εντάσσεται η θεωρητική συνεισφορά της εργασίας που περιλαμβάνει την ανάπτυξη του μαθηματικού μοντέλου και του αντίστοιχου αριθμητικού κώδικα για τη μοντελοποίηση της γεωμετρίας του διαύλου δέσμης. Η δεύτερη κατηγορία περιλαμβάνει την ανάπτυξη του σχήματος προσομοίωσης της αλληλεπίδρασης δέσμης-κύματος που αναπτύξαμε για τη γεωμετρία του διαύλου δέσμης. Τέλος, στην τρίτη κατηγορία αποτελεσμάτων παρουσιάζουμε συνοπτικά τα συμπεράσματα που εξήχθησαν από τα αριθμητικά αποτελέσματα και τη μελέτη συγκεκριμένων γεωμετριών και διαμορφώσεων διαύλου δέσμης.

#### 7.1.1 Ανάπτυξη μαθηματικού μοντέλου και σχετικού κώδικα

Η κύρια συνεισφορά της παρούσας διατριβής είναι η ανάπτυξη ενός βελτιωμένου ηλεκτρομαγνητικού μοντέλου για τη θεωρητική μελέτη του διαύλου δέσμης γυροτρονίων. Η νέα αυτή θεωρητική προσέγγιση του διαύλου δέσμης προσφέρει μια εντελώς καινούρια οπτική στο πρόβλημα των παρασιτικών ταλαντώσεων, αίρει τους περιορισμούς των προηγούμενων μοντέλων και θέτει τις βάσεις για την επίτευξη πλήρως ρεαλιστικών προσομοιώσεων του διαύλου της δέσμης.

Η βασική καινοτομία που εισήχθη στα πλαίσια της παρούσας εργασίας είναι η εφαρμογή οριακών συνθηκών εξερχόμενων κυμάτων στα άκρα του διαύλου της

δέσμης. Η εφαρμογή οριακών συνθηκών αυτού του είδους αποτελεί την πλέον ρεαλιστική επιλογή, καθώς με τον τρόπο αυτό το μοντέλο του διαύλου προσεγγίζει στον βέλτιστο βαθμό την πραγματική κατάσταση. Για πρώτη φορά στην παρούσα εργασία εφαρμόζονται στον δίαυλο της δέσμης τέτοιου είδους οριακές συνθήκες, οι οποίες χρησιμοποιούνται κατά κόρον στα ηλεκτρομαγνητικά μοντέλα της κοιλότητας.

Για την εφαρμογή των συγκεκριμένων οριακών συνθηκών έγινε ανάπτυξη των πεδίων με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Fourier στην αξονική διεύθυνση. Κατόπιν, εφαρμόστηκαν οι οριακές συνθήκες στη διεπαφή μεταξύ κυλίνδρου και δαχτυλιδιών σύμφωνα με τη γενικευμένη μέθοδο ταιριάσματος των ρυθμών. Έτσι, έγινε δυνατό το ταιρίασμα των αξονικών ιδιο-ρυθμών με συνεχές φάσμα του αξονικού κυματαριθμού στο εσωτερικό του κυλίνδρου με τους ιδιο-ρυθμούς διακριτού φάσματος μέσα στα δαχτυλίδια. Τα γενικευμένα ολοκληρώματα σύζευξης που προέκυψαν, υπολογίστηκαν σε κλειστή μορφή με τεχνικές περιγραμμικής ολοκλήρωσης στο μιγαδικό επίπεδο και τη θεωρία των ολοκληρωτικών υπολοίπων. Η όλη διαδικασία που περιγράφεται με λεπτομέρειες στο Κεφάλαιο 2 κατέληξε σε ένα τελικό σύστημα γραμμικών εξισώσεων για τους άγνωστους συντελεστές των ιδιο-ρυθμών στα δαχτυλίδια.

Παραλλαγή της συγκεκριμένης διαδικασίας σε παρόμοιες διατάξεις έχει αναπτυχθεί ξανά στη βιβλιογραφία [77–79], αλλά για συγκεκριμένου είδους ρυθμούς (π.χ. για συμμετρικούς ρυθμούς TM στο [78], ή για ρυθμούς με  $m = 1$  στο [79]) και με περιορισμούς στη γεωμετρία (π.χ. δαχτυλίδια σταθερού πάχους στο [79]). Επίσης, στις προηγούμενες εφαρμογές της μεθόδου η διάταξη διεγείροταν εξωτερικά είτε από έναν προσπίπτοντα ρυθμό είτε από φορτισμένα σωματίδια μιας δέσμης. Για πρώτη φορά στην εργασία αυτή, η διάταξη αντιμετωπίστηκε σαν ηλεκτρομαγνητική κοιλότητα και αναζητήθηκαν οι συντονιζόμενοι ρυθμοί όλων των ειδών που αυτή υποστηρίζει.

Καθώς η γεωμετρία είναι ανοιχτή στα άκρα, οι συντονιζόμενοι ρυθμοί παρουσιάζουν απώλειες περίθλασης, ενώ ενδεχομένως να υπάρχουν και διπλεκτρικές απώλειες λόγω των διπλεκτρικών δαχτυλιδιών. Για τον λόγο αυτό η συχνότητα συντονισμού γίνεται μιγαδική, όπου το φανταστικό μέρος εκφράζει τον ρυθμό απόσβεσης των πεδίων. Έτσι, για την επίλυση του προβλήματος εύρεσης των συντονιζόμενων ρυθμών έγινε αναλυτική επέκταση της συχνότητας στο μιγαδικό επίπεδο και τροποποιήθηκε καταλλήλως η διαδρομή ολοκλήρωσης των γενικευμένων ολοκληρωμάτων προκειμένου να εφαρμοστούν οι οριακές συνθήκες εξερχόμενων κυμάτων. Κατόπιν, οι μιγαδικές ιδιοσυχνότητες του προβλήματος υπολογίστηκαν από την εύρεση των μιγαδικών ριζών της ορίζουσας του συστήματος. Το αριθμητικό μέρος του προβλήματος εύρεσης των μιγαδικών ριζών μιας μιγαδικής υπερβατικής εξίσωσης αντιμετωπίστηκε με έναν αλγόριθμο ελαχιστοποίησης Nelder-Mead. Η όλη διαδικασία αναπτύχθηκε με λεπτομέρειες στο Κεφάλαιο 3 και συζητήθηκε το φυσικό νόημα των συντονιζόμενων ρυθμών με μιγαδική ιδιοσυχνότητα.

Το θεωρητικό μοντέλο που αναπτύξαμε υλοποιήθηκε σε κώδικα υπολογιστή που ονομάσαμε NESTOR. Η ανάπτυξη του κώδικα έγινε στο περιβάλλον της MATLAB με την προγραμματιστική τεχνική της διανυσματοποίησης (vectorization), η οποία προσφέρει πλεονεκτήματα ταχύτητας και αναγνωσιμότητας του κώδικα για εφαρμογές που απαιτούν μεγάλο αριθμό πράξεων μεταξύ πινάκων, όπως στην περίπτωσή μας. Τα αποτελέσματα του κώδικα συγκρίθηκαν με αυτά που δίνει ο εμπορικός κώδικας CASCADE για έναν αριθμό χαρακτηριστικών γεωμετριών χωρίς διπλεκτρικά δαχτυλίδια. Η συμφωνία μεταξύ των αποτελεσμάτων ήταν πάρα πολύ

καλή και επιβεβαιώθηκε η ορθή ανάπτυξη του θεωρητικού μοντέλου και του κώδικα.

Ένα επιπλέον χαρακτηριστικό του μοντέλου που αναπτύξαμε, είναι η μοντελοποίηση της εσοχής κενού που συναντάται στις ρεαλιστικές διατάξεις των διαύλων δέσμης. Το συγκεκριμένο γεωμετρικό χαρακτηριστικό επηρεάζει σημαντικά τα προφίλ πεδίου σε σχέση με θεωρητικά μοντέλα που το αγνοούσαν. Η αυξημένη κυμάτωση που δημιουργείται στα προφίλ πεδίου επηρεάζει την αλληλεπίδραση με την ηλεκτρονική δέσμη και κατά συνέπεια τους υπολογισμούς για τα ρεύματα εκκίνησης. Έτσι, για τη ρεαλιστική προσομοίωση των διαύλων δέσμης είναι απαραίτητη η συμπερίληψη του συγκεκριμένου γεωμετρικού χαρακτηριστικού.

Τέλος, το ηλεκτρομαγνητικό μοντέλο και ο κώδικας επεκτάθηκαν για δύο παραλλαγές της αρχικής γεωμετρίας. Η πρώτη παραλλαγή αφορά την εφαρμογή οριακής συνθήκης ολικής ανάκλασης στο δεξί άκρο, ενώ η δεύτερη συνιστά επέκταση του μοντέλου και του κώδικα για ομοαξονικές γεωμετρίες. Και στις δύο περιπτώσεις ελέγχθηκαν τα αποτελέσματα του κώδικα με αυτά που δίνει ο εμπορικός κώδικας CASCADE. Η συμφωνία μεταξύ των δύο κωδίκων βρέθηκε να είναι πολύ καλή και επιβεβαιώθηκαν έτσι για τις δύο περιπτώσεις ο φορμαλισμός και η υλοποίησή του.

### 7.1.2 Προσομοίωση της αλληλεπίδρασης δέσμης-κύματος στον δίαυλο της δέσμης

Αφού ολοκληρώθηκε η ανάπτυξη του ηλεκτρομαγνητικού μοντέλου για τον δίαυλο της δέσμης, στη συνέχεια αναπτύχθηκε ένα σχήμα για την προσομοίωση της αλληλεπίδρασης δέσμης-πεδίων στη διάταξη του διαύλου. Το σχήμα αυτό χρησιμοποιεί το πακέτο προσομοίωσης της κοιλότητας EURIDICE, που έχει αναπτυχθεί στο εργαστήριο Ηλεκτρονικής δέσμης, Πλάσματος και μη Γραμμικής οπτικής του Ε.Μ.Π. Ουσιαστικά, αναπτύχθηκε μια διαδικασία μετασχηματισμού των συντονιζόμενων ρυθμών στον δίαυλο της δέσμης σε ισοδύναμους ως προς την αλληλεπίδραση γυροτρονίου ρυθμούς της κοιλότητας. Έτσι, γίνονται άμεσα διαθέσιμα όλα τα υπολογιστικά εργαλεία του πακέτου EURIDICE, όπως ο γραμμικός κώδικας ISTART που υπολογίζει τα ρεύματα εκκίνησης των ρυθμών. Επίσης, για τους ασταθείς ρυθμούς με τον κώδικα Envidiki μπορεί να υπολογιστεί το τελικό επίπεδο ισχύος της αλληλεπίδρασης στη μη γραμμική περιοχή.

Το σχήμα αλληλεπίδρασης που αναπτύξαμε βασίζεται αναγκαστικά σε ορισμένες παραδοχές και προσεγγίσεις, με τη βασικότερη να είναι η προσέγγιση δεδομένου πεδίου (fixed-field approximation), στην οποία υποτίθεται ότι το προφίλ πεδίου του συντονιζόμενου ρυθμού δεν τροποποιείται από την αλληλεπίδραση με την ηλεκτρονική δέσμη. Η συγκεκριμένη παραδοχή ισχύει κατά προσέγγιση μόνο για την εμπρός αλληλεπίδραση, μιας και δεν μπορεί να προσομοιώσει ορθά την πίσω αλληλεπίδραση που τροποποιεί σε μεγάλο βαθμό το αξονικό προφίλ των ρυθμών. Παρ' όλα αυτά, για πρώτη φορά υπολογίζονται έστω και κατά προσέγγιση τα ρεύματα εκκίνησης για την εμπρός αλληλεπίδραση σε γεωμετρίες διαύλων δέσμης με ρεαλιστικές παραμέτρους που προσεγγίζουν διατάξεις πραγματικών γυροτρονίων. Έτσι, έγινε προσπάθεια να απαντηθεί το ερώτημα, εάν οι παρατηρούμενες παρασιτικές συχνότητες που είχαν τα χαρακτηριστικά της εμπρός αλληλεπίδρασης και είχαν αποδοθεί σε παρασιτική αλληλεπίδραση μετά την κοιλότητα, μπορούν να προέρχονται από τον δίαυλο της δέσμης. Για το σκοπό αυτό, μελετούνται λεπτομερώς δύο διατάξεις διαύλων δέσμης πραγματικών γυροτρονίων που έχουν μελετηθεί ή μελετώνται την περίοδο αυτή πειραματικά.

### 7.1.3 Αριθμητικά αποτελέσματα για διαύλους δέσμης πραγματικών γυροτρονίων

Τα κύρια συμπεράσματα από την επεξεργασία των αριθμητικών αποτελεσμάτων, που εξήχθησαν με βάση το ηλεκτρομαγνητικό μοντέλο για τον δίαυλο της δέσμης και το σχήμα προσομοίωσης που αναπτύξαμε, παρουσιάζονται εν συντομία σε αυτή την ενότητα.

Προκειμένου να απαντηθεί το ερώτημα εάν μπορούν να διεγερθούν παρασιτικοί ρυθμοί με την εμπρός αλληλεπίδραση στον δίαυλο της δέσμης, πραγματοποιήθηκαν εκταταμένες αριθμητικές μελέτες για τους διαύλους δέσμης των γυροτρονίων 170 GHz, 1 MW για το ITER και 140 GHz, 1 MW για το W7-X. Υπολογίστηκαν τα χαρακτηριστικά των συντονιζόμενων ρυθμών και τα ρεύματα εκκίνησής τους για κάθε αζιμουθιακό δείκτη. Από την επεξεργασία των αποτελεσμάτων εξήχθησαν σημαντικά ποιοτικά συμπεράσματα.

Το βασικότερο ποιοτικό συμπέρασμα που εξήχθη από τα αριθμητικά αποτελέσματα, είναι ότι ρυθμοί με υψηλές τιμές του αζιμουθιακού δείκτη έχουν χαμηλότερα ρεύματα εκκίνησης και παρουσιάζουν επομένως μεγαλύτερο κίνδυνο για παρασιτική διέγερση. Κατ' αρχάς δείξαμε, ότι οι μέγιστες τιμές των συντελεστών ποιότητας των ρυθμών είναι περίπου στα ίδια επίπεδα τόσο για τους συμμετρικούς όσο και για τους υβριδικούς ρυθμούς με υψηλό αζιμουθιακό δείκτη. Έπειτα, τα αποτελέσματα για τα ρεύματα εκκίνησης έδωσαν αισθητά χαμηλότερες τιμές για τους αζιμουθιακούς δείκτες στην περιοχή τιμών  $m = 20 - 30$ . Οι χαμηλότερες αυτές τιμές των ρευμάτων εκκίνησης αποδείχθηκε ότι οφείλονται, αφ' ενός στην καλύτερη σύζευξη με την ηλεκτρονική δέσμη, όταν η ακτίνα της τελευταίας προσεγγίζει την καυστική ακτίνα των ρυθμών, και αφ' ετέρου στη μικρότερη αποθηκευμένη ενέργεια που έχουν οι ρυθμοί με υψηλό αζιμουθιακό δείκτη. Το συμπέρασμα αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό, καθώς αμφισβητεί τη χρησιμότητα των αζιμουθιακών ρυτιδώσεων στα μεταλλικά δαχτυλίδια, τα οποία έχουν εισαχθεί ακριβώς για να καταπιέσουν τους συμμετρικούς ρυθμούς TE. Άλλωστε, όπως ήδη έχουμε παρουσιάσει στην ενότητα 1.4.2, σε ορισμένα γυροτρόνια οι παρασιτικές ταλαντώσεις επιμένουν παρά την εισαγωγή των αζιμουθιακών ρυτιδώσεων.

Οι τιμές των ρευμάτων εκκίνησης που αφορούν την εμπρός αλληλεπίδραση της ηλεκτρονικής δέσμης με τους συντονιζόμενους ρυθμούς και που υπολογίστηκαν για τις περιπτώσεις των γυροτρονίων για το ITER και το W7-X, ήταν σχετικά υψηλές. Οι ελάχιστες τιμές τους βρέθηκαν να είναι τουλάχιστον 3-4 φορές μεγαλύτερες από το ονομαστικό ρεύμα των γυροτρονίων. Έτσι, η αριθμητική μελέτη δεν εντόπισε ασταθείς ρυθμούς και σαν συμπέρασμα καταλήγουμε ότι παρασιτικοί ρυθμοί με την εμπρός αλληλεπίδραση είναι μάλλον δύσκολο να διεγερθούν στις συγκεκριμένες διατάξεις. Παρ' όλα αυτά, η διέγερση παρασιτικών ρυθμών με αυτού του είδους την αλληλεπίδραση δεν θα πρέπει να αποκλειστεί, καθώς τα ελάχιστα ρεύματα εκκίνησης που υπολογίστηκαν βρέθηκαν να είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με το ονομαστικό, ενώ κατά τις προσομοιώσεις έγιναν αναγκαστικές απλοποιήσεις που ενδεχομένως επηρεάζουν τα αποτελέσματα. Για παράδειγμα, αναφέρουμε την υπόθεση σταθερής ακτίνας που τείνει να υποεκτιμά τους συντελεστές ποιότητας και την προσέγγιση δεδομένου πεδίου που δεν προσομοιώνει με ακρίβεια την αλληλεπίδραση. Επίσης, αναφέρουμε το γεγονός ότι η διπλεκτρική επιτρεπτότητα για την περίπτωση του W7-X ήταν άγνωστη, καθώς και ότι προσομοιώθηκαν μόνο οι ονομαστικές τιμές των παραμέτρων των γυροτρονίων. Στις πειραματικές συνθήκες

οι τιμές αυτές των παραμέτρων (π.χ. μαγνητοστατικό πεδίο, παράμετροι της δέσμης) είναι ιδιαίτερα σύνθετες να μεταβάλλονται σε ένα μεγάλο εύρος μέχρι να επιτευχθούν οι βέλτιστες επιδόσεις. Έτσι, τα αποτελέσματα για τα ρεύματα εκκίνησης μένει να επιβεβαιωθούν από ακριβέστερες μελέτες, που λαμβάνουν υπ' όψιν τους τα παραπάνω χαρακτηριστικά.

Πέρα από τους υπολογισμούς των ρευμάτων εκκίνησης, πραγματοποιήθηκαν παραμετρικές μελέτες μεταβολής των γεωμετρικών και φυσικών χαρακτηριστικών του διαύλου δέσμης. Συγκεκριμένα, μελετήθηκε η εξάρτηση των συντελεστών ποιότητας από τις τιμές του πραγματικού και του φανταστικού μέρους της επιτρεπτότητας των διπλεκτρικών δαχτυλιδιών. Τα αποτελέσματα έδειξαν μια αξιοσημείωτη συμπεριφορά των απωλειών σε σχέση με τις τιμές της επιτρεπτότητας. Συγκεκριμένα, βρέθηκε μια ισχυρή εξάρτηση των απωλειών, τόσο από το πραγματικό όσο και από το φανταστικό μέρος της επιτρεπτότητας. Επίσης, σημαντικό εύρημα είναι ότι για μεγάλο εύρος τιμών των παραμέτρων, οι απώλειες μειώνονται όσο το φανταστικό μέρος της διπλεκτρικής επιτρεπτότητας αυξάνει. Η μη αναμενόμενη αυτή συμπεριφορά αποδόθηκε στην ισχυρή εξάρτηση των απωλειών από τον βαθμό διείδυσης των πεδίων μέσα στο διπλεκτρικό, ο οποίος εξαρτάται από τον συντελεστή ανάκλασης στη διεπαφή κενού-διπλεκτρικού. Έτσι, επιβεβαιώθηκαν προηγούμενες μελέτες [60, 61], που είχαν καταδείξει επίσης το συγκεκριμένο φαινόμενο. Στα πλαίσια της παραμετρικής αυτής μελέτης, παρήχθη ο διδιάστατος χάρτης μεταβολής των συντελεστών ποιότητας ως προς τη μεταβολή του πραγματικού και φανταστικού μέρους της επιτρεπτότητας για το γυροτρόνιο του ITER. Διπλεκτρικά υλικά με χαμηλές τιμές του πραγματικού και φανταστικού μέρους της επιτρεπτότητας δίνουν περισσότερες απώλειες, όσο το φανταστικό μέρος δεν πέφτει κάτω από την τιμή 0.25, όπου για χαμηλότερες τιμές οι διπλεκτρικές απώλειες μειώνονται ραγδαία. Ο χάρτης αυτός αναμένεται να είναι χρήσιμος για την κατάλληλη επιλογή διπλεκτρικού υλικού στα μελλονικά Ευρωπαϊκά γυροτρόνια για το ITER.

Επίσης, πραγματοποιήθηκε παραμετρική μελέτη της εξάρτησης των ρευμάτων εκκίνησης από το πάχος των διπλεκτρικών δαχτυλιδιών. Παρόλο που οι απώλειες των ρυθμών βρέθηκαν αναμενόμενα να είναι ανάλογες με το πάχος των διπλεκτρικών δαχτυλιδιών, τα ρεύματα εκκίνησης δεν ακολούθησαν την αντίστοιχη συμπεριφορά. Η αύξηση του πάχους των δαχτυλιδιών πέρα από ένα σημείο, οδήγησε σε σχετική μείωση των ρευμάτων εκκίνησης παρά την αύξηση των απωλειών. Η πιο σύνθετη αυτή συμπεριφορά για μεγάλες τιμές του πάχους των διπλεκτρικών σε σχέση με το πάχος των μεταλλικών δαχτυλιδιών, οφείλεται στην πιο ομαλή και λιγότερο κυματωμένη μορφή των αξονικών προφίλ πεδίου, η οποία και ευνοεί περισσότερο την αλληλεπίδραση. Έτσι, για τη συγκεκριμένη γεωμετρία και τον αζιμουθιακό δείκτη που εξετάστηκε προτείνεται μια ισορροπημένη επιλογή του πάχους μεταξύ των διπλεκτρικών και μεταλλικών δαχτυλιδιών, που δίνει περισσότερο κυματωμένα προφίλ πεδίου και μεγαλύτερες τιμές των ρευμάτων εκκίνησης.

Με βάση το μοντέλο της γεωμετρίας με οριακή συνθήκη ολικής ανάκλασης στο δεξί άκρο, έγινε μια αδρή εκτίμηση της αύξησης των συντελεστών ποιότητας λόγω της μείωσης της ακτίνας των μεταλλικών δαχτυλιδιών που εν γένει αγνοείται στο μοντέλο. Έτσι, στην ενότητα 6.1.4 εκτιμήθηκε ότι οι συντελεστές ποιότητας της γεωμετρίας του διαύλου δέσμης στο γυροτρόνιο για το W7-X μπορεί να είναι στην πραγματικότητα έως και 20% μεγαλύτεροι λόγω της μείωσης της ακτίνας του τελευταίου δαχτυλιδιού. Επομένως, τα ρεύματα εκκίνησης που υπολογίσαμε στο Κεφάλαιο 5 για τις απλοποιημένες γεωμετρίες σταθερής ακτίνας, μπορεί να έχουν

μια αύξηση περίπου 20% σε σχέση με την πραγματική κατάσταση, ακριβώς λόγω της υπόθεσης σταθερής ακτίνας.

Τέλος, με βάση την επέκταση του μοντέλου και του κώδικα για ομοαξονικές γεωμετρίες, συγκρίναμε τους συντελεστές ποιότητας της γεωμετρίας διαύλου του Ευρωπαϊκού ομοαξονικού γυροτρονίου 170 GHz, 2 MW με τους αντίστοιχους συντελεστές ποιότητας μιας όμοιας συμβατικής γεωμετρίας που δεν διαθέτει ομοαξονικό στέλεχος. Τα αποτελέσματα έδειξαν υψηλότερες απώλειες των ρυθμών στην ομοαξονική γεωμετρία, ιδιαίτερα για τους χαμηλούς αζιμουθιακούς δείκτες. Για πολύ υψηλούς αζιμουθιακούς δείκτες, όπου η καυστική ακτίνα των ρυθμών γίνεται μεγαλύτερη από την ακτίνα του ομοαξονικού στελέχους, οι δύο γεωμετρίες τείνουν να γίνουν ισοδύναμες, αφού τα πεδία δεν αισθάνονται το ομοαξονικό στέλεχος. Το αποτέλεσμα αυτό δείχνει ενδεχομένως την καλύτερη συμπεριφορά των ομοαξονικών διαύλων δέσμης, κάτι που μέχρι στιγμής τείνει να επιβεβαιώνεται και πειραματικά, αν και τα πειράματα ομοαξονικών γυροτρονίων είναι σαφώς πιο λίγα.

Αν και από την αριθμητική μελέτη των πραγματικών διαύλων δέσμης εξήχθησαν σημαντικά ποιοτικά συμπεράσματα, έγινε επίσης αισθητή η έλλειψη της δυνατότητας εξαγωγής γενικών πορισμάτων με ποσοτικό χαρακτήρα που ισχύουν καθολικά και με ακρίβεια για κάθε γεωμετρία διαύλου δέσμης. Είναι γεγονός, ότι το φαινόμενο των παρασιτικών ταλαντώσεων εξαρτάται ταυτόχρονα από ένα πλήθος παραγόντων, όπως τα γεωμετρικά και φυσικά χαρακτηριστικά του διαύλου δέσμης, το μαγνητοστατικό πεδίο και οι παράμετροι της ηλεκτρονικής δέσμης. Καθώς, τα πεδία στον δίαυλο της δέσμης και η αλληλεπίδραση της ηλεκτρονικής δέσμης με αυτά έχουν έναν αυξημένο βαθμό πολυπλοκότητας, επιμέρους μεταβολές των παραμέτρων ενδέχεται να δίνουν διαφορετική συμπεριφορά για κάποια άλλη διαμόρφωση γυροτρονίου. Έτσι, προκύπτει η ανάγκη ανάπτυξης ενός αριθμητικού εργαλείου που θα έχει τη δυνατότητα να προσομοιώνει ρεαλιστικά και να αποφαινεται για συγκεκριμένες γεωμετρίες διαύλου δέσμης και διαμόρφωση των παραμέτρων. Ένας τέτοιος κώδικας μπορεί να βασίζεται σε μεγάλο βαθμό στο μαθηματικό μοντέλο που αναπτύξαμε στην παρούσα διατριβή, αφού εμπλουτιστεί με τις κατάλληλες επεκτάσεις. Στην επόμενη ενότητα προτείνουμε μελλοντικές επεκτάσεις της παρούσας εργασίας που υπόσχονται να εκπληρώσουν τον συγκεκριμένο στόχο.

## 7.2 Μελλοντικές επεκτάσεις

Στην ενότητα αυτή, παραθέτουμε προτάσεις για πιθανή μελλοντική έρευνα που επεκτείνουν και συμπληρώνουν τα αποτελέσματα της παρούσας διατριβής. Οι προτάσεις αυτές αφορούν κυρίως τη βελτίωση του ηλεκτρομαγνητικού μοντέλου και του αριθμητικού κώδικα και υπόσχονται τη μελλοντική ανάπτυξη ενός αριθμητικού εργαλείου που θα προσομοιώνει πραγματικούς διαύλους δέσμης με ρεαλιστικό τρόπο. Ένας τέτοιος αριθμητικός κώδικας θα μπορεί να χρησιμεύσει ως εργαλείο σχεδίασης και επιβεβαίωσης στον υπολογιστή της ασφαλούς λειτουργίας πραγματικών διαύλων δέσμης.

Συγκεκριμένα, προτείνουμε μια επέκταση του ηλεκτρομαγνητικού μοντέλου, που θα λαμβάνει υπό όψιν του τη μείωση της ακτίνας των μεταλλικών δαχτυλιδιών προς την κοιλότητα, γεωμετρικό χαρακτηριστικό που συναντάται απαραίτητα σε κάθε δίαυλο δέσμης. Επίσης, προτείνουμε την ανάπτυξη ενός αυτοσυνεπούς σχήματος προσομοίωσης της αλληλεπίδρασης στον δίαυλο της δέσμης



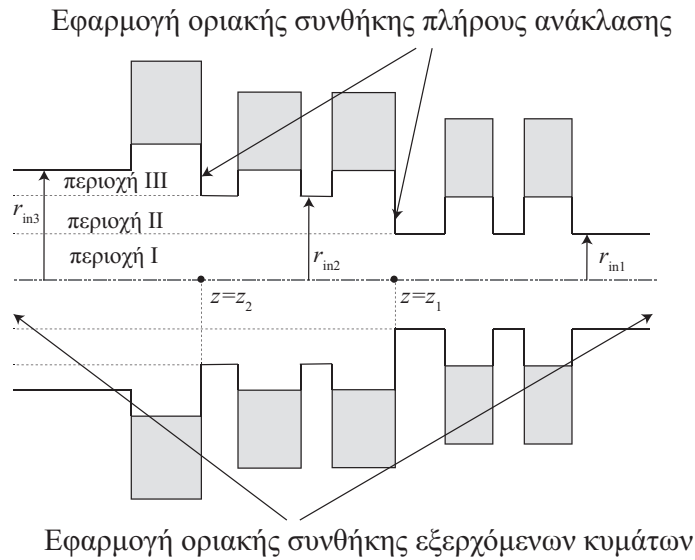
που θα επιτρέψει να συμπεριληφθούν στις δυνατότητες του κώδικα η ορθή προσομοίωση της πίσω αλληλεπίδρασης (backward interaction) και η μεγαλύτερη ακρίβεια στις προσομοιώσεις της εμπρός αλληλεπίδρασης (forward interaction). Τέλος, προτείνουμε μία μέθοδο μοντελοποίησης διπλεκτρικών δαχτυλιδιών με μεταβαλλόμενη επιτρεπτότητα κατά την ακτινική διεύθυνση, τα οποία λόγω σταδιακής προσαρμογής μπορούν να προσφέρουν αυξημένες απώλειες για τους ρυθμούς. Στις υποενότητες που ακολουθούν περιγράφουμε με περισσότερες λεπτομέρειες τις μεθόδους που προτείνουμε να ακολουθηθούν για την υλοποίηση των παραπάνω προτάσεων.

### 7.2.1 Μοντελοποίηση της μεταβολής της ακτίνας των μεταλλικών δαχτυλιδιών

Όπως αναλύσαμε με λεπτομέρεια στην ενότητα 1.5.1, τόσο στις θεωρητικές μελέτες μοντελοποίησης του διαύλου δέσμης εναλλασσόμενων-μεταλλικών δαχτυλιδιών [53–61] όσο και στις αντίστοιχες μελέτες παρόμοιων διατάξεων [77–79], δεν λαμβάνεται υπ' όψιν η μεταβολή της εσωτερικής ακτίνας των μεταλλικών δαχτυλιδιών. Γενικά κατά τη γνώση μας, δεν έχουν αναπτυχθεί στη βιβλιογραφία μοντέλα, που χρησιμοποιούν αναλυτικό φορμαλισμό ανάπτυξης των πεδίων στην αξονική διεύθυνση και συμπεριλαμβάνουν το εν λόγω ή κάποιο αντίστοιχο γεωμετρικό χαρακτηριστικό. Για παράδειγμα, στο [78] η υπόθεση της σταθερής εσωτερικής ακτίνας αναφέρεται ως περιορισμός της εν λόγω μεθόδου.

Στην υποενότητα αυτή προτείνουμε μια πρωτότυπη μέθοδο μοντελοποίησης του συγκεκριμένου γεωμετρικού χαρακτηριστικού. Η μέθοδος αυτή βασίζεται στη γενικευμένη μέθοδο ταιριάσματος των ρυθμών με ανάπτυξη των πεδίων σε ιδιο-ρυθμούς της αξονικής διεύθυνσης. Στο Σχήμα 7.1 παρουσιάζεται μια γεωμετρία με μεταβαλλόμενη εσωτερική ακτίνα των μεταλλικών δαχτυλιδιών. Στη συγκεκριμένη ιδεατή γεωμετρία έχουμε κλιμακωτή μεταβολή της ακτίνας σε δύο βήματα. Στην πραγματική γεωμετρία διαύλου δέσμης του Σχήματος 1.13 συμπεριλαμβάνονται, για παράδειγμα, 12 διπλεκτρικά δαχτυλίδια με τρία βήματα μεταβολής της ακτίνας των μεταλλικών δαχτυλιδιών.

Με αναφορά στο Σχήμα 7.1 για να εφαρμόσουμε τη γενικευμένη μέθοδο ταιριάσματος των ρυθμών με αξονική ανάπτυξη των πεδίων πρέπει να χωρίσουμε τη γεωμετρία σε τρεις διαφορετικές περιοχές. Στην Περιοχή I αναπτύσσουμε τα πεδία με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Fourier, σύμφωνα με τη σχέση (2.2.2) του Κεφαλαίου 2, εφαρμόζοντας οριακές συνθήκες εξερχόμενων κυμάτων και στα δύο άκρα. Στις Περιοχές II και III χρησιμοποιούμε διαφορετική ανάπτυξη των πεδίων, εφαρμόζοντας οριακή συνθήκη πλήρους ανάκλασης στο δεξί άκρο και οριακή συνθήκη εξερχόμενων κυμάτων στο αριστερό. Ο φορμαλισμός για αυτόν τον συνδυασμό οριακών συνθηκών έχει αναπτυχθεί στην ενότητα 6.1 του Κεφαλαίου 6 και βασίζεται στον ημιτονικό και συνημιτονικό μετασχηματισμό Fourier για την ανάπτυξη των πεδίων. Κατόπιν, εφαρμόζουμε τη γενικευμένη μέθοδο ταιριάσματος των ρυθμών στις κυλινδρικές επιφάνειες  $r = r_{in1}$ ,  $r = r_{in2}$  και  $r = r_{in3}$ . Η μέθοδος είναι άμεση επέκταση της μεθόδου που χρησιμοποιήσαμε στα Κεφάλαια 2 και 6. Η ουσιαστική διαφορά έγκειται στην εφαρμογή της μεθόδου στις κυλινδρικές επιφάνειες  $r = r_{in1}$  και  $r = r_{in2}$ , όπου θα πρέπει να ταιριαστούν τα πεδία μεταξύ δύο περιοχών με συνεχές φάσμα κυματαριθμών. Για παράδειγμα, στην ημίαιρη κυλινδρική επιφάνεια  $r = r_{in1}$ ,  $z < z_1$  θα πρέπει να ταιριαστούν τα πεδία που εκφράζονται με ένα συνεχές φάσμα του



Σχήμα 7.1: Σχήμα μεταβολής της ακτίνας.

αξονικού κυματαριθμού μέσω του μετασχηματισμού Fourier με τα αντίστοιχα πεδία που εκφράζονται μέσω των ημιτονικών και συνημιτονικών μετασχηματισμών Fourier. Από τη διαδικασία της μεθόδου ταιριάσματος των ρυθμών προκύπτουν επιπλέον ολοκληρωτικές εξισώσεις στο πεδίο των κυματαριθμών, οι οποίες όμως μπορούν να επιλυθούν αναλυτικά, αφού μετατραπούν σε ένα γραμμικό σύστημα με τη βοήθεια τεχνικών ολοκλήρωσης στο μιγαδικό επίπεδο. Η όλη διαδικασία εμφανίζει κάποιες ομοιότητες με τη μέθοδο Wiener-Hopf [76] και η σχέση μεταξύ των δύο μεθόδων οφείλει να διερευνηθεί εις βάθος.

Αν και η εφαρμογή της μεθόδου για γεωμετρίες με ένα βήμα μεταβολής της ακτίνας είναι άμεση, για δύο ή και παραπάνω βήματα ο φορμαλισμός των πεδίων γίνεται αρκετά πολύπλοκος. Είναι μάλλον πιθανό ότι λόγω πολυπλοκότητας δεν είναι δυνατή η ανάπτυξη ενός φορμαλισμού που θα περιλαμβάνει αυθαίρετο αριθμό βημάτων μεταβολής της ακτίνας. Η αντίστοιχη τεχνική πολλαπλής εφαρμογής των οριακών συνθηκών σε πολλές διαδοχικές επιφάνειες, όταν τα πεδία αναπτύσσονται στην εγκάρσια διεύθυνση, είναι ο φορμαλισμός των μπτρών σκέδασης [52]. Στην περίπτωση μας όμως δεν μπορεί να εφαρμοστεί η τεχνική των μπτρών σκέδασης, καθώς τώρα η εφαρμογή της τεχνικής πρέπει να γίνει κατά την ακτινική διεύθυνση. Στη διεύθυνση αυτή δεν έχουμε εξάρτηση της μορφής αθροίσματος επίπεδων κυμάτων όπως έχουμε κατά την αξονική διεύθυνση για την περίπτωση εγκάρσιας ανάπτυξης των πεδίων, αλλά έχουμε άθροισμα κυλινδρικών κυμάτων που το μέτρο τους εξαρτάται από την ακτινική θέση. Έτσι, αντίστοιχη διαδοχική εφαρμογή των οριακών συνθηκών κατά μήκος της εγκάρσιας διεύθυνσης σύμφωνα με τη τεχνική των μπτρών σκέδασης δεν είναι δυνατή. Επίσης, σημειώνουμε ότι για κάθε επιπλέον βήμα μεταβολής της ακτίνας, πέρα από τους αγνώστους που αντιστοιχούν στους αξονικούς ρυθμούς μέσα στα δαχτυλίδια, εισάγονται περισσότεροι άγνωστοι στο σύστημα, οι οποίοι αντιστοιχούν σε εγκάρσιους ρυθμούς της διάταξης. Ο αυξημένος αριθμός των αγνώστων ενδέχεται για πολλά βήματα μεταβολής της ακτίνας να γίνεται ιδιαίτερα μεγάλος και η μέθοδος να γίνεται υπολογιστικά μη συμφέρουσα.

Παρά τις δυσκολίες που περιγράψαμε, εκτιμούμε ότι η ανάπτυξη του

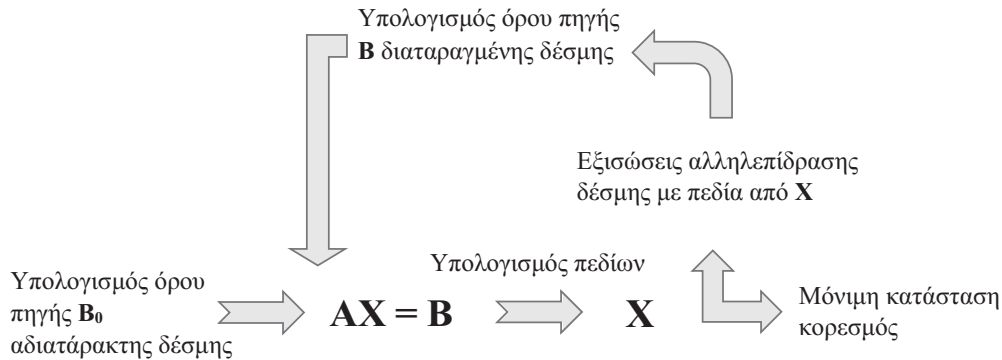
φορμαλισμού για 2-3 βήματα μεταβολής της ακτίνας είναι απολύτως εφικτή και θα προσδώσει σε μεγάλο βαθμό το χαρακτηριστικό της ρεαλιστικότητας στις προσομοιώσεις γεωμετρικών διαύλου δέσμης. Ουσιαστικά, η μεταβολή της ακτίνας των μεταλλικών δαχτυλιδιών είναι το τελευταίο σημαντικό γεωμετρικό χαρακτηριστικό που δεν λαμβάνεται υπ' όψιν στις προσομοιώσεις. Κατά την άποψή μας, η χρησιμότητα των αξιμουθιακών ρυτιδώσεων στα μεταλλικά δαχτυλίδια, γεωμετρικό χαρακτηριστικό που επίσης αγνοείται, θα πρέπει να διερευνηθεί, καθώς η επίδρασή τους στους ρυθμούς με υψηλό αξιμουθιακό δείκτη δεν έχει μελετηθεί. Άλλωστε, όπως έχουμε δείξει στην παρούσα διατριβή, αρκετά πιο επικίνδυνοι από τους συμμετρικούς ρυθμούς TE είναι οι υβριδικοί ρυθμοί με μεγάλο αξιμουθιακό δείκτη. Συμπερασματικά, η μελλοντική επέκταση του μοντέλου που περιλαμβάνει βήματα μεταβολής της ακτίνας των μεταλλικών δαχτυλιδιών, πέρα από το ακαδημαϊκό ενδιαφέρον της μεθόδου, θα προσδώσει τον χαρακτήρα της ρεαλιστικότητας στις προσομοιώσεις των γεωμετρικών διαύλου δέσμης.

### 7.2.2 Ανάπτυξη αυτοσυνεπούς σχήματος προσομοίωσης της αλληλεπίδρασης στον διάυλο της δέσμης

Μία βασική παραδοχή που κάναμε στο Κεφάλαιο 4 ήταν η προσέγγιση δεδομένου πεδίου (fixed-field approximation). Κατά την παραδοχή αυτή αγνοείται η επίδραση της ηλεκτρονικής δέσμης στο σχήμα των προφίλ πεδίου των ρυθμών, για τα οποία υποτίθεται ότι παραμένουν όμοια με αυτά της ψυχρής κοιλότητας (cold-cavity approximation). Όπως εξηγήσαμε αναλυτικά στην ενότητα 4.1, η συγκεκριμένη παραδοχή ισχύει κατά προσέγγιση μόνο για την εμπρός αλληλεπίδραση. Αντιθέτως, η ορθή προσομοίωση της πίσω αλληλεπίδρασης απαιτεί ένα αυτόσυνεπές σχήμα προσομοίωσης της αλληλεπίδρασης, στο οποίο συμπεριλαμβάνεται η επίδραση της ηλεκτρονικής δέσμης στα προφίλ πεδίου των ρυθμών. Στην υποενότητα αυτή θα περιγράψουμε σχηματικά πως μπορεί να υλοποιηθεί ένα τέτοιο αυτόσυνεπές σχήμα προσομοίωσης της αλληλεπίδρασης, με βάση το ηλεκτρομαγνητικό μοντέλο του διαύλου δέσμης που έχουμε αναπτύξει.

Η διαμορφωμένη ηλεκτρονική δέσμη συνιστά μια κατανεμημένη πηγή ρεύματος, η οποία παράγει τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία μέσα στη διάταξη. Στη διατριβή αυτή, τα πεδία στη διάταξη του διαύλου δέσμης είτε προέρχονται από εξωτερικά προσπίπτοντες ρυθμούς όπως στο Κεφάλαιο 2, είτε αποτελούν τους ιδιο-ρυθμούς που υποστηρίζει η κρύα διάταξη (Κεφάλαιο 3). Για να ληφθεί υπ' όψιν η επίδραση της ηλεκτρονικής δέσμης στα πεδία, θα πρέπει κατ' αρχάς να υπολογιστούν τα πεδία που παράγει μια στοιχειώδης εγκάρσια ρευματική πηγή μέσα στον διάυλο της δέσμης. Ο υπολογισμός αυτός μπορεί να γίνει σε αναλυτική μορφή με τη βοήθεια της συνάρτησης Green. Αντίστοιχος υπολογισμός με τη γενικευμένη μέθοδο ταιριάσματος των ρυθμών για ρευματική κατανομή με αξονική διεύθυνση έχει γίνει στο [78] για διατάξεις λυχνιών οδεύοντος κύματος. Ο όρος πηγής της διαμορφωμένης ηλεκτρονικής δέσμης υπολογίζεται κατόπιν εύκολα σαν κατανομή στοιχειωδών ρευματικών πηγών. Έτσι, όπως μπορούμε να δούμε και στο [78], παρουσία της διαμορφωμένης δέσμης το τελικό σύστημα εξισώσεων γίνεται μη ομογενές και ο όρος πηγής εκφράζεται στο δεξί μέλος  $\mathbf{B}$  του γραμμικού συστήματος εξισώσεων  $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$ .

Έχοντας λοιπόν έναν αναλυτικό υπολογισμό του όρου πηγής για κάθε διαμόρφωση της ηλεκτρονικής δέσμης, το αυτόσυνεπές σχήμα προσομοίωσης της αλληλεπίδρασης που προτείνουμε συνοψίζεται στο Σχήμα 7.2. Αρχικά, όταν



Σχήμα 7.2: Αυτοσυνεπές σχήμα προσομοίωσης.

Ξεκινά η προσομοίωση, η ηλεκτρονική δέσμη εισέρχεται αδιατάρακτη στη διάταξη και επομένως υπολογίζεται ο αρχικός όρος πηγής  $\mathbf{B}_0$ , καθώς τα ηλεκτρόνια ταλαντώνονται στην κυκλοτρονική συχνότητα. Κατόπιν, υπολογίζονται τα πεδία που παράγει η αδιατάρακτη δέσμη επιλύοντας το γραμμικό σύστημα εξισώσεων της διάταξης. Στη συνέχεια, μπορούν να ολοκληρωθούν αριθμητικά οι εξισώσεις κίνησης για τα ηλεκτρόνια υπό την επίδραση των πεδίων που έχουν υπολογιστεί στο προηγούμενο βήμα.

Οι αναλυτικές εκφράσεις των πεδίων στη διάταξη είναι γνωστές και δίνονται από τις σχέσεις που έχουμε υπολογίσει στην ενότητα 2.3. Όπως έχουμε σχολιάσει και στην ενότητα 4.2.1, ουσιαστικά τα πεδία στη διάταξη αποτελούνται από ένα άθροισμα συζευγμένων εγκάρσιων ρυθμών του ίδιου αξιμουθιακού δείκτη των οποίων τα σχετικά πλάτη υπολογίζονται από το διάνυσμα των αγνώστων. Η ολοκλήρωση των εξισώσεων κίνησης υπό την επίδραση πολλών εγκάρσιων ρυθμών συναντάται επίσης και στις πολυρυθμικές προσομοιώσεις (multi-mode simulations) της κοιλότητας του γυροτρονίου. Η διαφορά στον δίαυλο της δέσμης είναι ότι οι εγκάρσιοι ρυθμοί είναι συζευγμένοι, ενώ το γεγονός ότι αφορούν τον ίδιο αξιμουθιακό δείκτη απλοποιεί την επιλογή των αρχικών φάσεων των ηλεκτρονίων [11].

Αφού ολοκληρωθούν οι εξισώσεις κίνησης, στη συνέχεια υπολογίζεται ο νέος όρος πηγής της διαμορφωμένης δέσμης και για κάθε χρονικό βήμα επαναλαμβάνεται η ίδια διαδικασία. Σε περίπτωση ισχυρής αλληλεπίδρασης, το σύστημα θα ισορροπήσει, όταν τα πλάτη των πεδίων αυξηθούν και οδηγήσουν στον κορεσμό τις μη γραμμικές εξισώσεις κίνησης των ηλεκτρονίων. Η αλληλεπίδραση τότε φτάνει στη μόνιμη κατάσταση και η προσομοίωση μπορεί να σταματήσει.

Λόγω της ιδιαιτερότητας του διαύλου της δέσμης και της πολυπλοκότητας της γεωμετρίας του, ενδέχεται να προκύψουν αρκετές δυσκολίες στην υλοποίηση ενός τέτοιου αυτοσυνεπούς σχήματος προσομοίωσης. Για παράδειγμα, το γεγονός ότι το μαγνητοστατικό πεδίο στην περιοχή του διαύλου μεταβάλλεται ισχυρά κατά την αξονική διεύθυνση, επιβάλλει να συμπεριληφθούν στις εξισώσεις κίνησης η ακτινική συνιστώσα του μαγνητοστατικού πεδίου που επηρεάζει την αξονική ταχύτητα. Επίσης, η κυκλοτρονική συχνότητα μεταβάλλεται και αυτή κατά την αξονική διεύθυνση με αποτέλεσμα να μην είναι σαφής η αρχική επιλογή συχνότητας του όρου πηγής. Πιθανώς, στον δίαυλο της δέσμης να είναι απαραίτητη και η συμπερίληψη στις εξισώσεις κίνησης συνιστωσών του πεδίου που συνήθως

δεν παίζουν ρόλο στην αλληλεπίδραση γυροτρονίου, όπως η αξονική συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου ή και άλλες. Αντίστοιχες δυσκολίες έχουν εμφανιστεί και στους κώδικες αλληλεπίδρασης της κοιλότητας, όταν αυτοί επεκτάθηκαν για να προσομοιώνουν την αλληλεπίδραση στην περιοχή μετά την κοιλότητα. Στις περισσότερες περιπτώσεις όμως, οι δυσκολίες αυτές αντιμετωπίστηκαν με επιτυχία. Έτσι, η ανάπτυξη ενός αυτοσυνεπούς μοντέλου προσομοίωσης της αλληλεπίδρασης με βάση το πλεκτρομαγνητικό μοντέλο που αναπτύξαμε στην παρούσα διατριβή, θεωρούμε ότι είναι εφικτή και θα προσφέρει τη δυνατότητα ακριβούς προσομοίωσης της αλληλεπίδρασης στον δίαυλο της δέσμης.

### 7.2.3 Μοντελοποίηση διπλεκτρικών δαχτυλιδιών με μεταβαλλόμενη επιτρεπτικότητα στην ακτινική διεύθυνση

Μία ακόμη επέκταση που θα μπορούσε να υλοποιηθεί, είναι η ανάπτυξη του φορμαλισμού για την προσομοίωση γεωμετριών που περιλαμβάνουν δαχτυλίδια με μεταβαλλόμενη διπλεκτρική επιτρεπτικότητα κατά την ακτινική διεύθυνση. Διπλεκτρικά δαχτυλίδια με μεταβλητή περιεκτικότητα στα επιμέρους υλικά από τα οποία αποτελούνται, παρουσιάζουν και αντίστοιχη μεταβολή του πραγματικού και φανταστικού μέρους της επιτρεπτότητας. Έτσι, μπορεί να επιτευχθεί μια βαθμιαία προσαρμογή μεταξύ της διεπαφής κενού-διπλεκτρικού και με τον τρόπο αυτό να μειωθεί ο συντελεστής ανάκλασης αυξάνοντας σε μεγάλο βαθμό τη διείσδυση των πεδίων και τις διπλεκτρικές απώλειες. Αν και η δυνατότητα κατασκευής κατάλληλων για τον δίαυλο της δέσμης κεραμικών υλικών με ακτινικά μεταβαλλόμενη επιτρεπτικότητα δεν έχει διερευνηθεί, ένα θεωρητικό μοντέλο θα μπορούσε να δείξει τις δυνατότητες αυτής της ιδέας και κατά πόσο αξίζει να επιχειρηθεί η παρασκευή και η χρήση τέτοιου είδους διπλεκτρικών.

Στο θεωρητικό κομμάτι ο φορμαλισμός για να προσομοιωθούν υλικά με μεταβαλλόμενη ακτινικά διπλεκτρική επιτρεπτικότητα, θα μπορούσε να γίνει με τη βοήθεια της αριθμητικής μεθόδου των γραμμών μεταφοράς (Transmission Line Method, TLM) [92]. Αντίθετα με την αξονική εξάρτηση των πεδίων μέσα στο δαχτυλίδι, η οποία γράφεται εύκολα σε αναλυτική μορφή, η ακτινική εξάρτηση περιλαμβάνει τη μεταβαλλόμενη ακτινικά επιτρεπτικότητα  $\varepsilon(r)$  και δεν μπορεί να γραφεί απλά σαν άθροισμα των κυλινδρικών συναρτήσεων Bessel. Έτσι, σύμφωνα με τη μέθοδο TLM το πρόβλημα στην ακτινική διεύθυνση διακριτοποιείται σε πολλά δαχτυλίδια ομοιόμορφης επιτρεπτότητας και μικρού πάχους  $\delta r$ , όπου ισχύει η ανισότητα  $\delta r/r \ll 1$ . Κατόπιν, κάθε στοιχειώδες κυλινδρικό δαχτυλίδι μοντελοποιείται σαν ένα στοιχείο γραμμής μεταφοράς και εξάγονται οι τελικές εξισώσεις του τηλεγραφητή, οι οποίες επιλύονται αριθμητικά. Αντίστοιχη διαδικασία για τη μοντελοποίηση των αξονικών ρυτιδώσεων του ομοαξονικού στέλεχους της κοιλότητας των γυροτρονίων, μπορεί να βρεθεί στο [93]. Λόγω της καθαρά αριθμητικής επίλυσης του προβλήματος στην ακτινική διεύθυνση μέσα στα δαχτυλίδια, ο κώδικας αναμένεται να επιβαρυνθεί με επιπλέον υπολογισμούς. Μένει να δειχτεί με προσομοιώσεις υλικών που παρουσιάζουν μεταβαλλόμενη επιτρεπτικότητα, εάν μπορεί να επιτευχθεί σε σημαντικό βαθμό βελτίωση της απορρόφησης των διπλεκτρικών δαχτυλιδιών.



---

## ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ FOURIER ΣΤΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

---

### Π.1 Υπολογισμός του ολοκληρώματος $I_1$

Κατά την εφαρμογή της γενικευμένης μεθόδου ταιριάσματος των ρυθμών, όπου ένα συνεχές φάσμα ιδιο-ρυθμών στο εσωτερικό του κυλίνδρου ταιριάζεται με ένα διακριτό φάσμα ιδιο-ρυθμών στα δαχτυλίδια, προκύπτουν τα γενικευμένα ολοκληρώματα  $I_1$ - $I_4$  όπως περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 2. Στη συνέχεια, περιγράφουμε αναλυτικά τη μέθοδο υπολογισμού του ολοκληρώματος  $I_1$  και τη μετατροπή του σε συγκλίνουσα σειρά κλειστής μορφής μέσω τεχνικών ολοκλήρωσης στο μιγαδικό επίπεδο. Αντίστοιχη μέθοδος εφαρμόζεται και στα υπόλοιπα ολοκληρώματα  $I_2$ - $I_4$ .

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα Fourier  $I_1$  δίνεται από τον τύπο:

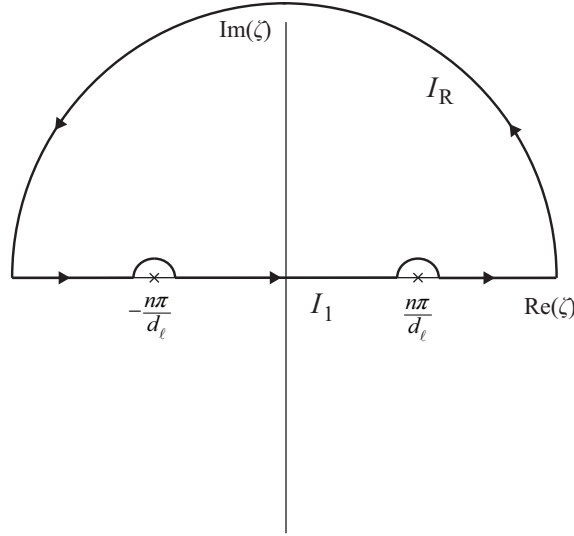
$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\zeta^2 J_m(k_{\perp} r_{\text{in}})}{k_{\perp} J'_m(k_{\perp} r_{\text{in}})} e^{j\zeta(s_{\ell} - s_{\lambda})} F_{n\ell}(-\zeta) F_{\nu\lambda}(\zeta) d\zeta, \quad (\text{Π.1.1})$$

όπου η  $F_{n\ell}(\zeta)$  έχει οριστεί στην (2.2.19). Ξεχωρίζουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Για  $\ell = \lambda$  δηλαδή για  $s_{\ell} = s_{\lambda}$  έχουμε:

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\zeta^2 J_m(k_{\perp} r_{\text{in}})}{k_{\perp} J'_m(k_{\perp} r_{\text{in}})} \frac{1 + (-1)^{n+\nu} - (-1)^n e^{j\zeta d_{\ell}} - (-1)^{\nu} e^{-j\zeta d_{\ell}}}{[\zeta^2 - (n\pi/d_{\ell})^2][\zeta^2 - (\nu\pi/d_{\ell})^2]} d\zeta. \quad (\text{Π.1.2})$$

- Εάν  $n + \nu$  είναι περιττό, τότε ο αριθμητής του κλάσματος γίνεται  $-(-1)^n 2j \sin(\zeta d_{\ell})$ . Επομένως, όλη η υπο ολοκλήρωση παράσταση γίνεται περιττή και έτσι στην περίπτωση αυτή  $I_1 = 0$ .
- Εάν  $n + \nu$  είναι άρτιο, τότε ο αριθμητής γίνεται  $2 - (-1)^n e^{-j\zeta d_{\ell}} - (-1)^{\nu} e^{j\zeta d_{\ell}}$ . Στην περίπτωση αυτή, επιβιώνει μόνο το άρτιο μέρος των εκθετικών όρων και το ολοκλήρωμα μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα ως εξής:


 Σχήμα Π.1: Πόλοι για  $\zeta = \pm \frac{n\pi}{d_\ell}$ ,  $n = \nu$  στο μιγαδικό επίπεδο.

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\zeta^2 J_m(k_\perp r_{\text{in}})}{k_\perp J'_m(k_\perp r_{\text{in}})} \frac{2(1 - (-1)^n e^{j\zeta d_\ell})}{[\zeta^2 - (n\pi/d_\ell)^2][\zeta^2 - (\nu\pi/d_\ell)^2]} d\zeta. \quad (\text{Π.1.3})$$

Εξετάζουμε αρχικά τους πόλους του δεύτερου κλάσματος. Παρατηρούμε ότι για  $\zeta = \pm \frac{n\pi}{d_\ell}$ ,  $\zeta = \pm \frac{\nu\pi}{d_\ell}$  ο αριθμητής μηδενίζεται, επομένως πόλοι υπάρχουν μόνο στην περίπτωση όπου  $n = \nu$ . Στην περίπτωση αυτή κλείνουμε το μονοπάτι ολοκλήρωσης στο άπειρο και υπολογίζουμε τη συνεισφορά των πόλων στο μιγαδικό επίπεδο (Σχήμα Π.1). Από τα παραπάνω έχουμε ότι:

$$I_1 - \pi j \text{Res}(\zeta = -\frac{n\pi}{d_\ell}) - \pi j \text{Res}(\zeta = \frac{n\pi}{d_\ell}) + I_R = 0. \quad (\text{Π.1.4})$$

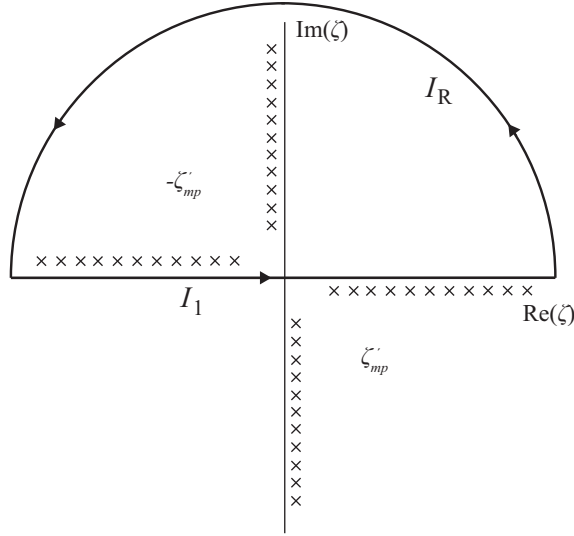
Η συνεισφορά της ολοκλήρωσης  $I_R$  στο άπειρο τείνει στο 0 σύμφωνα με το λήμμα Jordan. Για τον υπολογισμό των ολοκληρωτικών υπολοίπων για  $\zeta = \pm \frac{n\pi}{d_\ell}$  έχουμε:

$$\begin{aligned} \text{Res}(\zeta = \frac{n\pi}{d_\ell}) &= \lim_{\zeta \rightarrow \frac{n\pi}{d_\ell}} (\zeta - \frac{n\pi}{d_\ell}) \frac{\zeta^2 J_m(k_\perp r_{\text{in}})}{2\pi k_\perp J'_m(k_\perp r_{\text{in}})} \frac{2(1 - (-1)^n e^{j\zeta d_\ell})}{[\zeta^2 - (n\pi/d_\ell)^2][\zeta^2 - (\nu\pi/d_\ell)^2]} \\ &\stackrel{0}{=} -\frac{j}{2\pi} \frac{J_m(k_n r_{\text{in}})}{k_n J'_m(k_n r_{\text{in}})} \frac{d_\ell}{2}. \end{aligned} \quad (\text{Π.1.5})$$

Ομοίως η συνεισφορά του άλλου πόλου για  $\zeta = -\frac{n\pi}{d_\ell}$  υπολογίζεται σε:

$$\begin{aligned} \text{Res}(\zeta = -\frac{n\pi}{d_\ell}) &= \lim_{\zeta \rightarrow -\frac{n\pi}{d_\ell}} (\zeta + \frac{n\pi}{d_\ell}) \frac{\zeta^2 J_m(k_\perp r_{\text{in}})}{2\pi k_\perp J'_m(k_\perp r_{\text{in}})} \frac{2(1 - (-1)^n e^{j\zeta d_\ell})}{[\zeta^2 - (n\pi/d_\ell)^2][\zeta^2 - (\nu\pi/d_\ell)^2]} \\ &\stackrel{0}{=} -\frac{j}{2\pi} \frac{J_m(k_n r_{\text{in}})}{k_n J'_m(k_n r_{\text{in}})} \frac{d_\ell}{2}. \end{aligned} \quad (\text{Π.1.6})$$





Σχήμα Π.2: Πόλοι για  $\zeta = \pm z'_{mp}$  στο μιγαδικό επίπεδο και διαδρομή ολοκλήρωσης.

Τελικά, από την (Π.1.4) έχουμε ότι η συνεισφορά των πόλων  $\zeta = \pm \frac{n\pi}{d_\ell}$  είναι:

$$I_1 = \frac{J_m(k_n r_{in})}{k_n J'_m(k_n r_{in})} \frac{d_\ell}{2}. \quad (\text{Π.1.7})$$

- Εάν  $n = \nu = 0$  τότε υπάρχει μόνο ένας απλός πόλος για  $\zeta = 0$ . Ομοίως, κλείνουμε τη διαδρομή ολοκλήρωσης στο άνω ημιεπίπεδο όπως στο Σχήμα Π.1. Το ολοκληρωτικό υπόλοιπο του πόλου για  $\zeta = 0$  δίνεται ως εξής:

$$\text{Res}(\zeta = 0) = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{\zeta^3 J_m(k_\perp r_{in})}{2\pi k_\perp J'_m(k_\perp r_{in})} \frac{2(1 - (-1)^n e^{j\zeta d_\ell})}{\zeta^4} \Big|_0 = -\frac{j d_\ell}{\pi} \frac{J_m(k_0 r_{in})}{k_0 J'_m(k_0 r_{in})}. \quad (\text{Π.1.8})$$

Επομένως, η συνεισφορά του πόλου για  $\zeta = 0$  όταν  $n = \nu = 0$  είναι:

$$I_1 = \frac{J_m(k_0 r_{in})}{k_0 J'_m(k_0 r_{in})} d_\ell. \quad (\text{Π.1.9})$$

Συνεχίζουμε τώρα εξετάζοντας τους πόλους λόγω του πρώτου κλάσματος της (Π.1.3). Οι πόλοι του κλάσματος είναι οι ποσότητες  $\zeta = \pm z'_{mp}$  όπου:

$$z'_{mp} = \sqrt{\omega^2 \epsilon_0 \mu_0 - \left(\frac{\chi'_{mp}}{r_{in}}\right)^2}, \quad (\text{Π.1.10})$$

και  $\chi'_{mp}$  είναι η  $p$ -οστή ρίζα της παραγώγου της συνάρτησης Bessel 1ου είδους τάξης  $m$ . Προκειμένου να μετακινήσουμε τους πόλους από τον πραγματικό άξονα, εφαρμόζουμε την αρχή οριακής απορρόφησης (limiting absorption principle) [95] και εισάγουμε ένα πολύ μικρό αρνητικό φαναστικό μέρος στη διηλεκτρική σταθερά. Οι πόλοι στο μιγαδικό επίπεδο μετακινούνται όπως στο Σχήμα Π.2. Παίρνοντας το όριο

του φαναστικού μέρους στο 0 και αφού η συνεισφορά της διαδρομής ολοκλήρωσης στο άπειρο είναι μηδενική έχουμε το αποτέλεσμα:

$$I_1 = \sum_p 2\pi j \text{Res}(\zeta = -\zeta'_{mp}), \quad (\text{Π.1.11})$$

$$\begin{aligned} \text{Res}(\zeta = -\zeta'_{mp}) &= \lim_{\zeta \rightarrow -\zeta'_{mp}} (\zeta + \zeta'_{mp}) \frac{\zeta^2 J_m(k_{\perp} r_{\text{in}})}{2\pi k_{\perp} J'_m(k_{\perp} r_{\text{in}})} \frac{2(1 - (-1)^n e^{j\zeta d_{\ell}})}{[\zeta^2 - (n\pi/d_{\ell})^2][\zeta^2 - (v\pi/d_{\ell})^2]} \\ &\stackrel{0}{=} \frac{\zeta'_{mp} J_m(\chi'_{mp})}{2\pi J''_m(\chi'_{mp}) r_{\text{in}}} \frac{2(1 - (-1)^n e^{j\zeta'_{mp} d_{\ell}})}{[\zeta'^2_{mp} - (n\pi/d_{\ell})^2][\zeta'^2_{mp} - (v\pi/d_{\ell})^2]}. \end{aligned} \quad (\text{Π.1.12})$$

Επομένως, η συνεισφορά των πόλων για  $\zeta = -\zeta'_{mp}$  στο  $I_1$  είναι:

$$I_1 = \sum_p j \frac{\zeta'_{mp} J_m(\chi'_{mp})}{J''_m(\chi'_{mp}) r_{\text{in}}} \frac{2(1 - (-1)^n e^{-j\zeta'_{mp} d_{\ell}})}{[\zeta'^2_{mp} - (n\pi/d_{\ell})^2][\zeta'^2_{mp} - (v\pi/d_{\ell})^2]}. \quad (\text{Π.1.13})$$

Εκτός από τους πόλους λόγω των ριζών της  $J'_m(k_{\perp} r_{\text{in}})$  υπάρχει επίσης πόλος, όταν μηδενίζεται η  $k_{\perp}$ , δηλαδή για  $\zeta = \lambda_0 = \pm \sqrt{\omega^2 \epsilon_0 \mu_0}$ . Αυτό συμβαίνει μόνο για  $m = 0$ , καθώς για  $|m| \neq 0$  ο μηδενισμός του παρονομαστή εξουδετερώνεται από τον αριθμητή. Η διαδρομή ολοκλήρωσης περικλείει τον πόλο  $\zeta = -\lambda_0$  αφού έχουμε εισάγει όπως και προηγουμένως ένα μικρό φαναστικό μέρος στη διπλεκτρική σταθερά. Το ολοκληρωτικό υπόλοιπο του πόλου υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \text{Res}(\zeta = -\lambda_0) &= \lim_{\zeta \rightarrow -\lambda_0} (\zeta + \lambda_0) \frac{\zeta^2 J_0(k_{\perp} r_{\text{in}})}{2\pi k_{\perp} J'_0(k_{\perp} r_{\text{in}})} \frac{2(1 - (-1)^n e^{j\zeta d_{\ell}})}{[\zeta^2 - (n\pi/d_{\ell})^2][\zeta^2 - (v\pi/d_{\ell})^2]} \\ &\stackrel{0}{=} -\frac{\lambda_0}{2\pi r_{\text{in}}} \frac{2(1 - (-1)^n e^{-j\lambda_0 d_{\ell}})}{[\lambda_0^2 - (n\pi/d_{\ell})^2][\lambda_0^2 - (v\pi/d_{\ell})^2]}. \end{aligned} \quad (\text{Π.1.14})$$

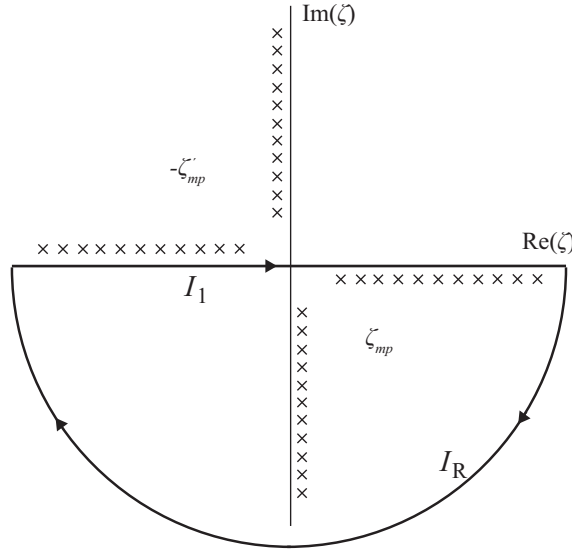
Επομένως, η συνεισφορά του πόλου για  $\zeta = -\lambda_0$  όταν  $m = 0$  στο  $I_1$  είναι:

$$I_1 = 2\pi j \text{Res}(\zeta = -\lambda_0) = -j \frac{\lambda_0}{r_{\text{in}}} \frac{2(1 - (-1)^n e^{-j\lambda_0 d_{\ell}})}{[\lambda_0^2 - (n\pi/d_{\ell})^2][\lambda_0^2 - (v\pi/d_{\ell})^2]}. \quad (\text{Π.1.15})$$

- Για  $\ell \neq \lambda$  δηλαδή για  $s_{\ell} \neq s_{\lambda}$  και συγκεκριμένα για  $s_{\ell} > s_{\lambda}$ :

Στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχουν πόλοι για  $\zeta = \pm \frac{n\pi}{d_{\ell}}$ ,  $\zeta = \pm \frac{v\pi}{d_{\lambda}}$ . Οι εκθετικοί όροι  $e^{j\zeta(s_{\ell} - s_{\lambda})}$ ,  $e^{j\zeta(s_{\ell} - s_{\lambda} + d_{\ell} - d_{\lambda})}$ ,  $e^{j\zeta(s_{\ell} - s_{\lambda} + d_{\ell})}$ ,  $e^{j\zeta(s_{\ell} - s_{\lambda} - d_{\lambda})}$  που εμφανίζονται θα πρέπει να τείνουν στο 0, όταν κλείνουμε τη διαδρομή ολοκλήρωσης στο άπειρο. Πράγματι, αν κλείσουμε στο άνω ημιεπίπεδο, αφού έχουμε υποθέσει ότι  $s_{\ell} > s_{\lambda}$  και λόγω διάταξης της γεωμετρίας, όλοι οι όροι τείνουν στο 0. Στην περίπτωση αυτή οι πόλοι για  $\zeta = -\zeta'_{mp}$  δίνουν ολοκληρωτικό υπόλοιπο:

$$\begin{aligned} \text{Res}(\zeta = -\zeta'_{mp}) &= \lim_{\zeta \rightarrow -\zeta'_{mp}} (\zeta + \zeta'_{mp}) \frac{\zeta^2 J_m(k_{\perp} r_{\text{in}})}{2\pi k_{\perp} J'_m(k_{\perp} r_{\text{in}})} e^{j\zeta(s_{\ell} - s_{\lambda})} F_{n\ell}(-\zeta) F_{v\lambda}(\zeta) \\ &\stackrel{0}{=} \frac{\zeta'_{mp} J_m(\chi'_{mp})}{2\pi J''_m(\chi'_{mp}) r_{\text{in}}} e^{-j\zeta'_{mp}(s_{\ell} - s_{\lambda})} \frac{1 + (-1)^{n+v} e^{-j\zeta'_{mp}(d_{\ell} - d_{\lambda})} - (-1)^n e^{-j\zeta'_{mp} d_{\ell}} - (-1)^v e^{j\zeta'_{mp} d_{\lambda}}}{[\zeta'^2_{mp} - (n\pi/d_{\ell})^2][\zeta'^2_{mp} - (v\pi/d_{\lambda})^2]}. \end{aligned} \quad (\text{Π.1.16})$$


 Σχήμα Π.3: Πόλοι για  $\zeta = \zeta'_{mp}$  και κλείσιμο διαδρομής στο κάτω ημιεπίπεδο.

Επομένως, η συνεισφορά των πόλων για  $\zeta = -\zeta'_{mp}$  όταν  $s_\ell > s_\lambda$  είναι:

$$I_1 = \sum_p 2\pi j \text{Res}(\zeta = -\zeta'_{mp}) = \sum_p j \frac{\zeta'_{mp} J_m(\chi'_{mp})}{J'_m(\chi'_{mp}) r_{in}} e^{-j\zeta'_{mp}(s_\ell - s_\lambda)} \frac{1 + (-1)^{n+\nu} e^{-j\zeta'_{mp}(d_\ell - d_\lambda)} - (-1)^n e^{-j\zeta'_{mp}d_\ell} - (-1)^\nu e^{j\zeta'_{mp}d_\lambda}}{[\zeta'^2_{mp} - (n\pi/d_\ell)^2][\zeta'^2_{mp} - (\nu\pi/d_\lambda)^2]} \quad (\text{Π.1.17})$$

Ομοίως, ο πόλος για  $\zeta = -\lambda_0$  όταν  $m = 0$  και για  $s_\ell > s_\lambda$  δίνει συνεισφορά:

$$I_1 = 2\pi j \text{Res}(\zeta = -\lambda_0) = -j \frac{\lambda_0}{r_{in}} e^{-j\lambda_0(s_\ell - s_\lambda)} \frac{1 + (-1)^{n+\nu} e^{-j\lambda_0(d_\ell - d_\lambda)} - (-1)^n e^{-j\lambda_0d_\ell} - (-1)^\nu e^{j\lambda_0d_\lambda}}{[\lambda_0^2 - (n\pi/d_\ell)^2][\lambda_0^2 - (\nu\pi/d_\lambda)^2]} \quad (\text{Π.1.18})$$

- Όταν  $\ell \neq \lambda$  και για  $s_\ell < s_\lambda$ :

Στην περίπτωση αυτή και πάλι δεν υπάρχουν πόλοι για  $\zeta = \pm \frac{n\pi}{d_\ell}$ ,  $\zeta = \pm \frac{\nu\pi}{d_\lambda}$ . Τώρα προκειμένου οι εκθετικοί όροι να τείνουν στο 0, πρέπει να κλείσουμε τη διαδρομή στο κάτω ημιεπίπεδο όπως στο Σχήμα Π.3. Από τη διαδρομή ολοκλήρωσης περικλείονται οι πόλοι  $\zeta = \zeta'_{mp}$ , των οποίων τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα είναι:

$$\text{Res}(\zeta = \zeta'_{mp}) = \lim_{\zeta \rightarrow \zeta'_{mp}} (\zeta - \zeta'_{mp}) \frac{\zeta^2 J_m(k_\perp r_{in})}{2\pi k_\perp J'_m(k_\perp r_{in})} e^{j\zeta(s_\ell - s_\lambda)} F_{n\ell}(-\zeta) F_{\nu\lambda}(\zeta) \quad (\text{Π.1.19})$$

$$\stackrel{0}{=} \frac{\zeta'_{mp} J_m(\chi'_{mp})}{2\pi J'_m(\chi'_{mp}) r_{in}} e^{j\zeta'_{mp}(s_\ell - s_\lambda)} \frac{1 + (-1)^{n+\nu} e^{j\zeta'_{mp}(d_\ell - d_\lambda)} - (-1)^n e^{j\zeta'_{mp}d_\ell} - (-1)^\nu e^{-j\zeta'_{mp}d_\lambda}}{[\zeta'^2_{mp} - (n\pi/d_\ell)^2][\zeta'^2_{mp} - (\nu\pi/d_\lambda)^2]}$$

Επομένως, η συνεισφορά των πόλων για  $\zeta = \zeta'_{mp}$  όταν  $s_\ell < s_\lambda$  είναι:

$$I_1 = \sum_p 2\pi j \text{Res}(\zeta = \zeta'_{mp}) = \sum_p j \frac{\zeta'_{mp} J_m(\chi'_{mp})}{J'_m(\chi'_{mp}) r_{in}} e^{j\zeta'_{mp}(s_\ell - s_\lambda)} \frac{1 + (-1)^{n+\nu} e^{j\zeta'_{mp}(d_\ell - d_\lambda)} - (-1)^n e^{j\zeta'_{mp}d_\ell} - (-1)^\nu e^{-j\zeta'_{mp}d_\lambda}}{[\zeta'^2_{mp} - (n\pi/d_\ell)^2][\zeta'^2_{mp} - (\nu\pi/d_\lambda)^2]} \quad (\text{Π.1.20})$$

Τέλος, δίνουμε και τη συνεισφορά του πόλου για  $\zeta = \lambda_0$  όταν  $m = 0$ :

$$I_1 = 2\pi j \text{Res}(\zeta = \lambda_0) = -j \frac{\lambda_0}{r_{in}} e^{j\lambda_0(s_\ell - s_\lambda)} \frac{1 + (-1)^{n+\nu} e^{j\lambda_0(d_\ell - d_\lambda)} - (-1)^n e^{j\lambda_0d_\ell} - (-1)^\nu e^{-j\lambda_0d_\lambda}}{[\lambda_0^2 - (n\pi/d_\ell)^2][\lambda_0^2 - (\nu\pi/d_\lambda)^2]} \quad (\text{Π.1.21})$$

Συνδυάζοντας όλες τις προηγούμενες περιπτώσεις σε μία κοινή αναλυτική έκφραση έχουμε ότι η τιμή του ολοκληρώματος  $I_1$  δίνεται από τον τύπο:

$$I_1 = \sum_{p=1}^{\infty} j\zeta'_{mp} \frac{J_m(\chi'_{mp})}{r_{in} J'_m(\chi'_{mp})} A(n, \nu, \ell, \lambda, \zeta'_{mp}) + \delta_{\ell\lambda} \delta_{n\nu} (1 + \delta_{n0}) \frac{d_\ell J_m(k_{n\ell}^{(2)} r_{in})}{2k_{n\ell}^{(2)} J'_m(k_{n\ell}^{(2)} r_{in})} - j\delta_{m0} \frac{\lambda_0}{r_{in}} A(n, \nu, \ell, \lambda, \lambda_0), \quad (\text{Π.1.22})$$

όπου η  $A(n, \nu, \ell, \lambda, \zeta)$  ορίζεται ως:

$$A(n, \nu, \ell, \lambda, \zeta) = \frac{e^{j\zeta|s_\ell - s_\lambda|} + (-1)^{n+\nu} e^{j\zeta|s_\ell - s_\lambda + d_\ell - d_\lambda|} - (-1)^\nu e^{j\zeta|s_\ell - s_\lambda - d_\lambda|} - (-1)^n e^{j\zeta|s_\ell - s_\lambda + d_\lambda|}}{[\zeta^2 - (n\pi/d_\ell)^2][\zeta^2 - (\nu\pi/d_\lambda)^2]} \quad (\text{Π.1.23})$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζονται και οι αναλυτικές εκφράσεις των υπόλοιπων ολοκληρωμάτων  $I_2$ ,  $I_3$  και  $I_4$ .

## Π.2 Υπολογισμός του ολοκληρώματος $I_5$

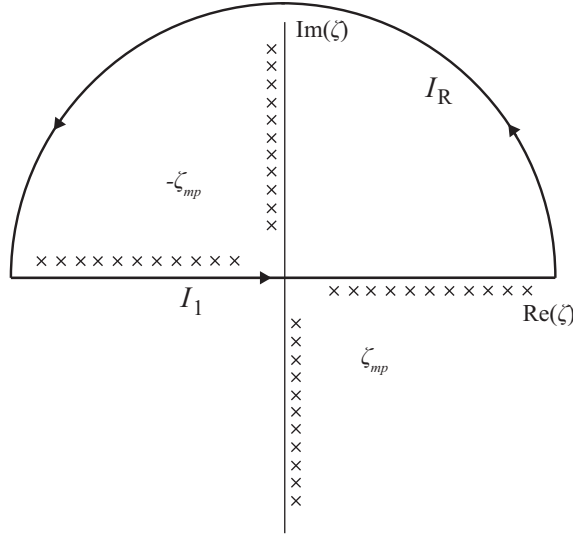
Υπολογίζουμε τώρα αναλυτικά με περιγραμμική ολοκλήρωση στο μιγαδικό επίπεδο το ολοκλήρωμα  $I_5$ , το οποίο εμφανίζεται στον αναλυτικό προσδιορισμό του αξονικού ηλεκτρικού πεδίου  $E_z$ . Το γενικευμένο αυτό ολοκλήρωμα, όπως και τα υπόλοιπα ολοκληρώματα  $I_6 - I_{10}$ , που ανακύπτουν στις αναλυτικές εκφράσεις των συνιστωσών του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, διαφέρει στη μορφή από τα ολοκληρώματα  $I_1 - I_4$  και γι' αυτό περιγράφεται εδώ λεπτομερειακά η διαδικασία υπολογισμού του. Το γενικευμένο ολοκλήρωμα  $I_5$  δίνεται από τον τύπο:

$$I_5 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\zeta}{k_\perp^2} \frac{J_m(k_\perp r)}{J_m(k_\perp r_{in})} \frac{e^{j\zeta(z - s_\ell)} - (-1)^n e^{j\zeta(z - s_\ell - d_\ell)}}{(n\pi/d_\ell)^2 - \zeta^2} d\zeta. \quad (\text{Π.2.1})$$

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα δεν έχει κλαδικά σημεία, επομένως μπορούμε να κλείσουμε τη διαδρομή ολοκλήρωσης στο άπειρο. Χωρίζουμε στις εξής περιπτώσεις:

- Για  $z > s_\ell + d_\ell$  έχουμε:

Στην περίπτωση αυτή υπάρχουν μόνο οι πόλοι για  $\zeta = \zeta_{mp}$  λόγω των μηδενισμών της συνάρτησης Bessel που βρίσκεται στον παρονομαστή. Επομένως, η συνεισφορά των πόλων για  $\zeta = -\zeta_{mp}$  είναι:


 Σχήμα Π.4: Πόλοι για  $\zeta = \pm\zeta_{mp}$  στο μιγαδικό επίπεδο και διαδρομή ολοκλήρωσης.

$$I_5 = \sum_p 2\pi j \text{Res}(\zeta = -\zeta_{mp}) = \sum_p j \frac{J_m(k_\perp r)}{J'_m(\chi_{mp}) \chi_{mp}} \frac{e^{-j\zeta_{mp}(z-s_\ell)} - (-1)^n e^{-j\zeta_{mp}(z-s_\ell-d_\ell)}}{[\zeta_{mp}^2 - (n\pi/d_\ell)^2]}. \quad (\text{Π.2.2})$$

Υπάρχει επίσης ο επιπλέον πόλος όταν  $k_\perp = 0$ , δηλαδή για  $\zeta = -\lambda_0$ . Εάν  $m = 0$ , τότε η συνεισφορά του είναι:

$$I_5 = 2\pi j \text{Res}(\zeta = -\lambda_0) = \frac{j}{2} \frac{e^{-j\lambda_0(z-s_\ell)} - (-1)^n e^{-j\lambda_0(z-s_\ell-d_\ell)}}{[\lambda_0^2 - (n\pi/d_\ell)^2]}. \quad (\text{Π.2.3})$$

Για  $m \neq 0$ , η συνεισφορά τότε γίνεται:

$$I_5 = 2\pi j \text{Res}(\zeta = -\lambda_0) = \frac{j}{2} \left(\frac{r}{r_{\text{in}}}\right)^{|m|} \frac{e^{-j\lambda_0(z-s_\ell)} - (-1)^n e^{-j\lambda_0(z-s_\ell-d_\ell)}}{[\lambda_0^2 - (n\pi/d_\ell)^2]}. \quad (\text{Π.2.4})$$

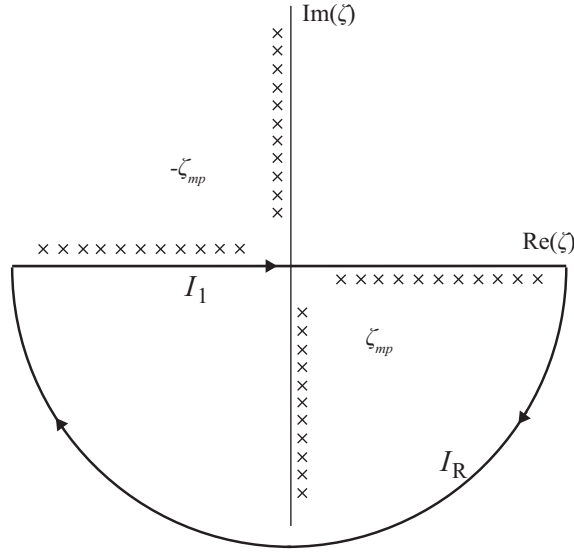
- Για  $z < s_\ell$  έχουμε:

Στην περίπτωση αυτή ο δρόμος ολοκλήρωσης, για να εκμεταλλευτούμε το λήμμα Jordan, θα πρέπει να κλείσει στο κάτω ημιεπίπεδο. Επομένως, τώρα η συνεισφορά των πόλων που περικλείονται από τη διαδρομή ολοκλήρωσης για  $\zeta = \zeta_{mp}$  είναι:

$$I_5 = - \sum_p 2\pi j \text{Res}(\zeta = \zeta_{mp}) = - \sum_p j \frac{J_m(k_\perp r)}{J'_m(\chi_{mp}) \chi_{mp}} \frac{e^{j\zeta_{mp}(z-s_\ell)} - (-1)^n e^{j\zeta_{mp}(z-s_\ell-d_\ell)}}{[\zeta_{mp}^2 - (n\pi/d_\ell)^2]}. \quad (\text{Π.2.5})$$

Για τον επιπλέον πόλο, όταν  $k_\perp = 0$ , δηλαδή για  $\zeta = \lambda_0$ , η συνεισφορά του όταν  $m = 0$  είναι:

$$I_5 = -2\pi j \text{Res}(\zeta = \lambda_0) = -\frac{j}{2} \frac{e^{j\lambda_0(z-s_\ell)} - (-1)^n e^{j\lambda_0(z-s_\ell-d_\ell)}}{[\lambda_0^2 - (n\pi/d_\ell)^2]}. \quad (\text{Π.2.6})$$



Σχήμα Π.5: Πόλοι για  $\zeta = \pm\zeta_{mp}$  στο μιγαδικό επίπεδο και διαδρομή ολοκλήρωσης.

Για  $m \neq 0$ , η συνεισφορά τότε γίνεται:

$$I_5 = -2\pi j \text{Res}(\zeta = \lambda_0) = -\frac{j}{2} \left( \frac{r}{r_{in}} \right)^{|m|} \frac{e^{j\lambda_0(z-s_\ell)} - (-1)^n e^{j\lambda_0(z-s_\ell-d_\ell)}}{[\lambda_0^2 - (n\pi/d_\ell)^2]}. \quad (\text{Π.2.7})$$

- Για  $s_\ell < z < s_\ell + d_\ell$  ο υπολογισμός του ολοκληρώματος γίνεται ως εξής:

Στην περίπτωση αυτή το ολοκλήρωμα πρέπει να σπάσει σε δύο επιμέρους ολοκληρώματα, τα οποία υπολογίζονται ξεχωριστά. Έτσι, έχουμε  $I_5 = I_{5\alpha} + I_{5\beta}$ , όπου:

$$I_{5\alpha} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\zeta}{k_\perp^2} \frac{J_m(k_\perp r)}{J_m(k_\perp r_{in})} \frac{e^{j\zeta(z-s_\ell)}}{(n\pi/d_\ell)^2 - \zeta^2} d\zeta, \quad (\text{Π.2.8})$$

$$I_{5\beta} = -\frac{(-1)^n}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\zeta}{k_\perp^2} \frac{J_m(k_\perp r)}{J_m(k_\perp r_{in})} \frac{e^{j\zeta(z-s_\ell-d_\ell)}}{(n\pi/d_\ell)^2 - \zeta^2} d\zeta. \quad (\text{Π.2.9})$$

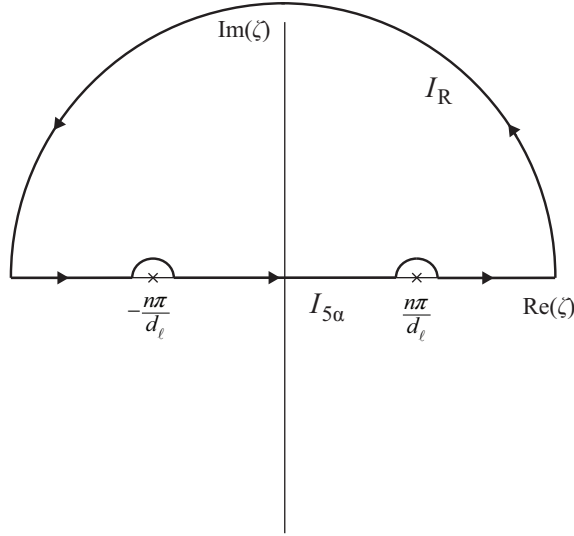
□ Ο υπολογισμός του  $I_{5\alpha}$  γίνεται ως εξής:

Εκτός από τους πόλους λόγω των μηδενισμών των συναρτήσεων Bessel του παρονομαστή και της  $k_\perp^2$ , οι οποίοι υπολογίζονται όπως στην περίπτωση  $z > s_\ell$  που δόθηκε προηγουμένως, υπάρχουν και επιπλέον πόλοι για  $\zeta = \pm \frac{n\pi}{d_\ell}$ . Σύμφωνα με το Σχήμα Π.6 το οποίο δείχνει τους πόλους και τη διαδρομή ολοκλήρωσης, το  $I_{5\alpha}$  υπολογίζεται σύμφωνα με τον τύπο:

$$I_{5\alpha} = \pi j \text{Res}(\zeta = -\frac{n\pi}{d_\ell}) + \pi j \text{Res}(\zeta = \frac{n\pi}{d_\ell}), \quad (\text{Π.2.10})$$

όπου τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα των πόλων υπολογίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} \text{Res}(\zeta = \frac{n\pi}{d_\ell}) &= \lim_{\zeta \rightarrow \frac{n\pi}{d_\ell}} (\zeta - \frac{n\pi}{d_\ell}) \frac{\zeta J_m(k_\perp r)}{2\pi k_\perp^2 J_m(k_\perp r_{in})} \frac{e^{j\zeta(z-s_\ell)}}{(n\pi/d_\ell)^2 - \zeta^2} \\ &\stackrel{0}{=} -\frac{n\pi}{d_\ell} \frac{J_m(k_\perp r)}{2\pi k_\perp^2 J_m(k_\perp r_{in})} \frac{d_\ell}{2n\pi} e^{j\frac{n\pi}{d_\ell}(z-s_\ell)}, \end{aligned} \quad (\text{Π.2.11})$$


 Σχήμα Π.6: Πόλοι για  $\zeta = \pm \frac{n\pi}{d_\ell}$  στο μιγαδικό επίπεδο.

$$\begin{aligned} \text{Res}(\zeta = -\frac{n\pi}{d_\ell}) &= \lim_{\zeta \rightarrow -\frac{n\pi}{d_\ell}} (\zeta + \frac{n\pi}{d_\ell}) \frac{\zeta J_m(k_\perp r)}{2\pi k_\perp^2 J_m(k_\perp r_{in})} \frac{e^{j\zeta(z-s_\ell)}}{(n\pi/d_\ell)^2 - \zeta^2} \\ &\stackrel{0}{=} -\frac{n\pi}{d_\ell} \frac{J_m(k_n r)}{2\pi k_n^2 J_m(k_n r_{in})} \frac{d_\ell}{2n\pi} e^{-j\frac{n\pi}{d_\ell}(z-s_\ell)}. \end{aligned} \quad (\text{Π.2.12})$$

Επομένως, η συνεισφορά των πόλων για  $\zeta = \pm \frac{n\pi}{d_\ell}$  στο  $I_{5\alpha}$  συνολικά είναι:

$$I_{5\alpha} = -\frac{j}{2} \frac{J_m(k_n r)}{k_n^2 J_m(k_n r_{in})} \cos\left[\frac{n\pi}{d_\ell}(z-s_\ell)\right]. \quad (\text{Π.2.13})$$

Εάν  $n = 0$ , τότε υπάρχει ένας απλός πόλος για  $\zeta = 0$  και στην περίπτωση αυτή το  $I_{5\alpha}$  είναι:

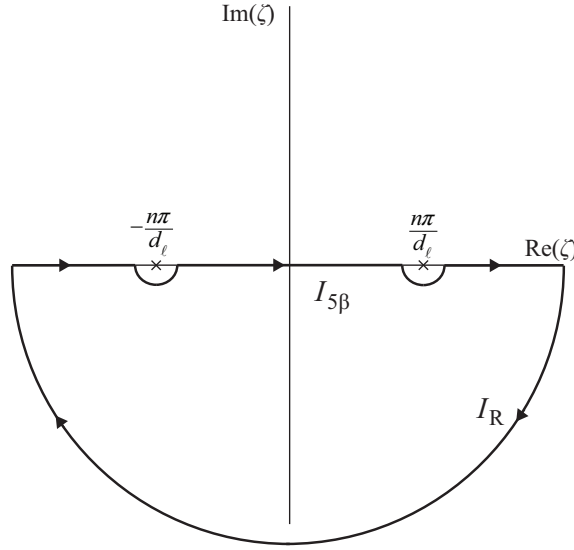
$$I_{5\alpha} = \pi j \text{Res}(\zeta = 0) = -\frac{j}{2} \frac{J_m(k_0 r)}{k_0^2 J_m(k_0 r_{in})}. \quad (\text{Π.2.14})$$

□ Για τον υπολογισμό του  $I_{5\beta}$  ενεργούμε τώρα ως εξής:

Κατ' αρχάς, υπάρχουν πόλοι λόγω των μηδενισμών της συνάρτησης Bessel του παρονομαστή και της  $k_\perp^2$ , οι οποίοι δίνονται ακριβώς με τις ίδιες σχέσεις όπως και στην περίπτωση  $z < s_\ell + d_\ell$  που εξετάστηκε προηγουμένως. Επιπλέον υπάρχουν οι πόλοι για  $\zeta = \pm \frac{n\pi}{d_\ell}$ . Λόγω της μορφής του εκθετικού όρου, κλείνουμε τώρα το δρόμο ολοκλήρωσης στο κάτω ημιεπίπεδο όπως στο Σχήμα Π.7. Από το σχήμα προκύπτει ότι το ολοκλήρωμα δίνεται από τον τύπο:

$$I_{5\beta} = -\pi j \text{Res}(\zeta = -\frac{n\pi}{d_\ell}) - \pi j \text{Res}(\zeta = \frac{n\pi}{d_\ell}), \quad (\text{Π.2.15})$$

$$\begin{aligned} \text{Res}(\zeta = \frac{n\pi}{d_\ell}) &= \lim_{\zeta \rightarrow \frac{n\pi}{d_\ell}} (\zeta - \frac{n\pi}{d_\ell}) (-1)(-1)^n \frac{\zeta J_m(k_\perp r)}{2\pi k_\perp^2 J_m(k_\perp r_{in})} \frac{e^{j\zeta(z-s_\ell-d_\ell)}}{(n\pi/d_\ell)^2 - \zeta^2} \\ &\stackrel{0}{=} (-1)^n \frac{n\pi}{d_\ell} \frac{J_m(k_n r)}{2\pi k_n^2 J_m(k_n r_{in})} \frac{d_\ell}{2n\pi} e^{j\frac{n\pi}{d_\ell}(z-s_\ell-d_\ell)}, \end{aligned} \quad (\text{Π.2.16})$$


 Σχήμα Π.7: Πόλοι για  $\zeta = \pm \frac{n\pi}{d_\ell}$  στο μιγαδικό επίπεδο.

$$\begin{aligned} \text{Res}(\zeta = -\frac{n\pi}{d_\ell}) &= \lim_{\zeta \rightarrow -\frac{n\pi}{d_\ell}} (\zeta + \frac{n\pi}{d_\ell}) (-1) (-1)^n \frac{\zeta J_m(k_\perp r)}{2\pi k_\perp^2 J_m(k_\perp r_{\text{in}})} \frac{e^{j\zeta(z-s_\ell-d_\ell)}}{(n\pi/d_\ell)^2 - \zeta^2} \\ &\stackrel{0}{=} (-1)^n \frac{n\pi}{d_\ell} \frac{J_m(k_n r)}{2\pi k_n^2 J_m(k_n r_{\text{in}})} \frac{d_\ell}{2n\pi} e^{-j\frac{n\pi}{d_\ell}(z-s_\ell-d_\ell)}. \end{aligned} \quad (\text{Π.2.17})$$

Αθροίζουμε συνολικά τη συνεισφορά των δύο πόλων και παίρνουμε:

$$I_{5\beta} = -(-1)^n \frac{j}{2} \frac{J_m(k_n r)}{k_n^2 J_m(k_n r_{\text{in}})} \cos \left[ \frac{n\pi}{d_\ell} (z - s_\ell - d_\ell) \right]. \quad (\text{Π.2.18})$$

Για την περίπτωση όπου  $n = 0$ , υπάρχει ένας απλός πόλος για  $\zeta = 0$  και το  $I_{5\beta}$  είναι τότε:

$$I_{5\beta} = -\pi j \text{Res}(\zeta = 0) = -\frac{j}{2} \frac{J_m(k_0 r)}{k_0^2 J_m(k_0 r_{\text{in}})}. \quad (\text{Π.2.19})$$

Έχοντας πλέον υπολογίσει όλες τις υποπεριπτώσεις που συνθέτουν το ολοκλήρωμα συγκεντρώνουμε τα προηγούμενα αποτελέσματα στον επόμενο γενικό τύπο:

$$I_5 = \begin{cases} \sum_p j \frac{J_m(\chi_{mp} \frac{r}{r_{\text{in}}})}{J'_m(\chi_{mp}) \chi_{mp}} \frac{-\text{sgn}(z - s_\ell) e^{-j\chi_{mp}|z-s_\ell|} + \text{sgn}(z - s_\ell - d_\ell) (-1)^n e^{-j\chi_{mp}|z-s_\ell-d_\ell|}}{(n\pi/d_\ell)^2 - \chi_{mp}^2} \\ + \frac{j}{2} \left( \frac{r}{r_{\text{in}}} \right)^{|m|} \frac{-\text{sgn}(z - s_\ell) e^{-j\lambda_0|z-s_\ell|} + \text{sgn}(z - s_\ell - d_\ell) (-1)^n e^{-j\lambda_0|z-s_\ell-d_\ell|}}{(n\pi/d_\ell)^2 - \lambda_0^2}, & -\infty < z < \infty \\ -\frac{j}{2} \frac{J_m(k_n r)}{k_n^2 J_m(k_n r_{\text{in}})} \left[ \cos \left[ \frac{n\pi}{d_\ell} (z - s_\ell) \right] + (-1)^n \cos \left[ \frac{n\pi}{d_\ell} (z - s_\ell - d_\ell) \right] \right], & s_\ell < z < s_\ell + d_\ell \end{cases} \quad (\text{Π.2.20})$$



### Π.3 Υπολογισμός του ολοκληρώματος $I_1^{(bc)}$

Σε αυτή την παράγραφο θα περιγράψουμε με λεπτομέρειες τη διαδικασία αναλυτικού υπολογισμού του ολοκληρώματος  $I_1^{(bc)}$ , το οποίο εμφανίζεται στο πρόβλημα με οριακή συνθήκη ολικής ανάκλασης στο δεξί άκρο όπως αναπτύχθηκε στο Κεφάλαιο 6. Ο αναλυτικός υπολογισμός θα γίνει και πάλι με τη μέθοδο περιγραμμικής ολοκλήρωσης στο μιγαδικό επίπεδο και τον υπολογισμό των ολοκληρωτικών υπολοίπων όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις ολοκληρωμάτων. Παρ' όλα αυτά, το συγκεκριμένο ολοκλήρωμα διαφέρει σε σχέση με τις προηγούμενες περιπτώσεις και γι' αυτό παραθέτουμε με λεπτομέρειες τη διαδικασία υπολογισμού του. Η ίδια διαδικασία εφαρμόζεται και στα υπόλοιπα ολοκληρώματα  $I_2^{(bc)}$ ,  $I_3^{(bc)}$ ,  $I_4^{(bc)}$  της παραγράφου 6.1.

Το ολοκλήρωμα ορίζεται ως εξής:

$$I_1^{(bc)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\zeta^2 J_m(k_{\perp} r_{in})}{k_{\perp} J'_m(k_{\perp} r_{in})} e^{j\zeta(s_{\ell} - s_{\lambda})} F_{n\ell}(\zeta, s_{\ell}, z_0) F_{\nu\lambda}(\zeta, s_{\lambda}, z_0) d\zeta, \quad (\text{Π.3.1})$$

όπου η βοηθητική συνάρτηση  $F_{n\ell}(\zeta, s_{\ell}, z_0)$  δίνεται από τη σχέση:

$$F_{n\ell}(\zeta, s_{\ell}, z_0) = \frac{\sin[\zeta(s_{\ell} - z_0)] - (-1)^n \sin[\zeta(s_{\ell} + d_{\ell} - z_0)]}{(n\pi/d_{\ell})^2 - \zeta^2}. \quad (\text{Π.3.2})$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος, κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι η υπό ολοκλήρωση ποσότητα είναι άρτια, επομένως το ολοκλήρωμα μπορεί να γραφεί τώρα ορισμένο στον πραγματικό άξονα ως εξής:

$$I_1^{(bc)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\zeta^2 J_m(k_{\perp} r_{in})}{k_{\perp} J'_m(k_{\perp} r_{in})} e^{j\zeta(s_{\ell} - s_{\lambda})} F_{n\ell}(\zeta, s_{\ell}, z_0) F_{\nu\lambda}(\zeta, s_{\lambda}, z_0) d\zeta. \quad (\text{Π.3.3})$$

- Για  $\ell = \lambda$  ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

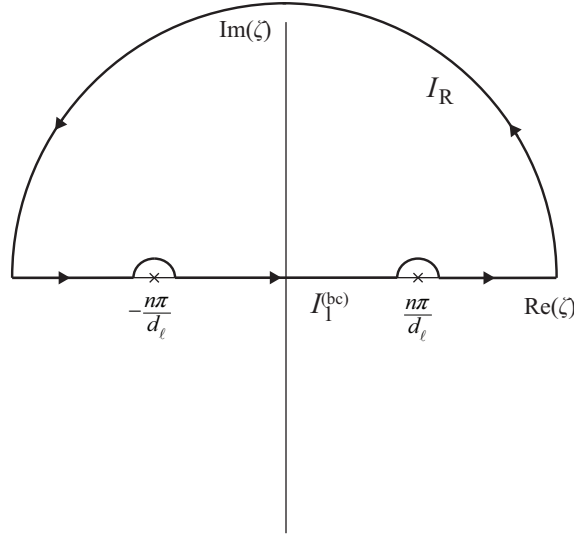
Στην περίπτωση αυτή, αν αναπτύξουμε τις συναρτήσεις ημιτόνου της  $F_{n\ell}(\zeta, s_{\ell}, z_0) F_{\nu\lambda}(\zeta, s_{\lambda}, z_0)$  σε εκθετικούς όρους και κρατήσουμε μόνο τα άρτια μέρη των εκθετικών, καθώς τα περιττά μέρη δεν επιβιώνουν, έχουμε:

$$F_{n\ell}(\zeta, s_{\ell}, z_0) F_{\nu\lambda}(\zeta, s_{\lambda}, z_0) = -\frac{1}{2 \left[ \zeta^2 - (n\pi/d_{\ell})^2 \right] \left[ \zeta^2 - (\nu\pi/d_{\lambda})^2 \right]} \left[ e^{2j\zeta(z_0 - s_{\ell})} \left[ (-1)^{n+\nu} e^{-2j\zeta d_{\ell}} - [(-1)^n + (-1)^{\nu}] e^{-j\zeta d_{\ell}} + 1 \right] + [(-1)^n + (-1)^{\nu}] e^{j\zeta d_{\ell}} - 1 - 1^{n+\nu} \right]. \quad (\text{Π.3.4})$$

Θα εξετάσουμε αρχικά τους πόλους που οφείλονται στην παράσταση (Π.3.4). Εύκολα φαίνεται ότι για  $n \neq \nu$  η (Π.3.4) δεν έχει πόλους για  $\zeta = \pm \frac{n\pi}{d_{\ell}}$ , καθώς μηδενίζεται ο αριθμητής και εξουδετερώνει τους μηδενισμούς του παρονομαστή.

Έστω τώρα ότι  $n = \nu \neq 0$ . Η παράσταση έχει δύο πόλους όταν  $\zeta = \pm \frac{n\pi}{d_{\ell}}$ , για τους οποίους σύμφωνα με το Σχήμα Π.8 ισχύει:

$$I_1^{(bc)} - \pi j \text{Res}(\zeta = -\frac{n\pi}{d_{\ell}}) - \pi j \text{Res}(\zeta = \frac{n\pi}{d_{\ell}}) + I_R = 0. \quad (\text{Π.3.5})$$


 Σχήμα Π.8: Πόλοι για  $\zeta = \pm \frac{n\pi}{d_\ell}$ ,  $n = \nu$  στο μιγαδικό επίπεδο.

Το  $I_R$  σύμφωνα με το λήμμα Jordan τείνει στο μηδέν καθώς κλείνουμε το ολοκλήρωμα στο άνω ημιεπίπεδο, ενώ τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα για  $\zeta = \pm \frac{n\pi}{d_\ell}$  υπολογίζονται ως εξής:

$$\text{Res}(\zeta = \frac{n\pi}{d_\ell}) = \lim_{\zeta \rightarrow \frac{n\pi}{d_\ell}} (\zeta - \frac{n\pi}{d_\ell}) \frac{\zeta^2 J_m(k_\perp r_{in})}{\pi k_\perp J'_m(k_\perp r_{in})} F_{n\ell}(\zeta, s_\ell, z_0) F_{\nu\lambda}(\zeta, s_\lambda, z_0) \quad (\text{Π.3.6})$$

$$\stackrel{0}{=} -\frac{j}{2\pi} \frac{J_m(k_{n\ell}^{(2)} r_{in})}{k_{n\ell}^{(2)} J'_m(k_{n\ell}^{(2)} r_{in})} \frac{d_\ell}{2}, \quad (\text{Π.3.7})$$

$$\text{Res}(\zeta = -\frac{n\pi}{d_\ell}) = \lim_{\zeta \rightarrow -\frac{n\pi}{d_\ell}} (\zeta + \frac{n\pi}{d_\ell}) \frac{\zeta^2 J_m(k_\perp r_{in})}{\pi k_\perp J'_m(k_\perp r_{in})} F_{n\ell}(\zeta, s_\ell, z_0) F_{\nu\lambda}(\zeta, s_\lambda, z_0) \quad (\text{Π.3.8})$$

$$\stackrel{0}{=} -\frac{j}{2\pi} \frac{J_m(k_{n\ell}^{(2)} r_{in})}{k_{n\ell}^{(2)} J'_m(k_{n\ell}^{(2)} r_{in})} \frac{d_\ell}{2}. \quad (\text{Π.3.9})$$

Συνδυάζοντας τα αποτελέσματα, προκύπτει ότι η συνεισφορά των πόλων για  $\zeta = \pm \frac{n\pi}{d_\ell}$  όταν  $n = \nu \neq 0$  είναι:

$$I_1^{(bc)} = 2\pi j \text{Res}(\zeta = \pm \frac{n\pi}{d_\ell}) = \frac{J_m(k_{n\ell}^{(2)} r_{in})}{k_{n\ell}^{(2)} J'_m(k_{n\ell}^{(2)} r_{in})} \frac{d_\ell}{2}. \quad (\text{Π.3.10})$$

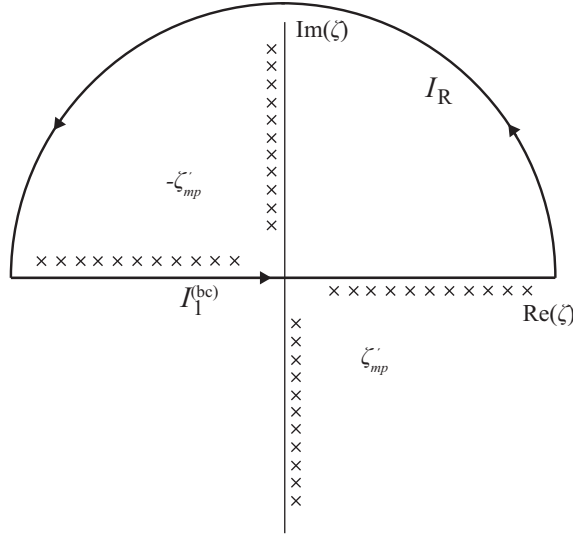
Εάν  $n = \nu = 0$ , τότε υπάρχει μόνο ένας πόλος για  $\zeta = 0$ . Τώρα ισχύει ότι:

$$I_1^{(bc)} - \pi j \text{Res}(\zeta = 0) + I_R = 0. \quad (\text{Π.3.11})$$

Το ολοκληρωτικό υπόλοιπο στην περίπτωση αυτή είναι:

$$\text{Res}(\zeta = 0) = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \zeta \frac{\zeta^2 J_m(k_\perp r_{in})}{\pi k_\perp J'_m(k_\perp r_{in})} F_{n\ell}(\zeta, s_\ell, z_0) F_{\nu\lambda}(\zeta, s_\lambda, z_0) \quad (\text{Π.3.12})$$

$$\stackrel{0}{=} -\frac{j}{\pi} \frac{J_m(k_{0\ell}^{(2)} r_{in})}{k_{0\ell}^{(2)} J'_m(k_{0\ell}^{(2)} r_{in})} d_\ell. \quad (\text{Π.3.13})$$



Σχήμα Π.9: Πόλοι για  $\zeta = \pm z'_{mp}$  στο μιγαδικό επίπεδο και διαδρομή ολοκλήρωσης.

Επομένως, η συνεισφορά του πόλου στην περίπτωση αυτή γίνεται:

$$I_1^{(bc)} = \pi j \text{Res}(\zeta = 0) = \frac{J_m(k_{0\ell}^{(2)} r_{in})}{k_{0\ell}^{(2)} J'_m(k_{0\ell}^{(2)} r_{in})} d\ell. \quad (\text{Π.3.14})$$

Συνεχίζουμε τώρα για να υπολογίσουμε τη συνεισφορά των υπολοίπων πόλων που οφείλονται στο πρώτο κλάσμα της υπό ολοκλήρωση ποσότητας και είναι οι πόλοι  $\pm z'_{mp}$  όπως δίνονται από την (Π.1.10). Εφαρμόζουμε όπως και στην παράγραφο Π.1 την αρχή οριακής απορρόφησης και μετακινούμε τους πόλους από τον πραγματικό άξονα. Έτσι, σύμφωνα με το Σχήμα Π.9 το ολοκλήρωμα δίνεται από το άθροισμα των ολοκληρωτικών υπολοίπων:

$$I_1^{(bc)} = \sum_p 2\pi j \text{Res}(\zeta = -z'_{mp}), \quad (\text{Π.3.15})$$

$$\begin{aligned} \text{Res}(\zeta = -z'_{mp}) &= \lim_{\zeta \rightarrow -z'_{mp}} (\zeta + z'_{mp}) \frac{\zeta^2 J_m(k_{\perp} r_{in})}{\pi k_{\perp} J'_m(k_{\perp} r_{in})} A_1(\zeta) \\ &\stackrel{0}{=} \frac{z'_{mp} J_m(\chi'_{mp})}{\pi J'_m(\chi'_{mp}) r_{in}} A_1(-z'_{mp}), \end{aligned} \quad (\text{Π.3.16})$$

όπου η βοηθητική συνάρτηση  $A_1(\zeta)$  δίνεται από την έκφραση:

$$A_1(\zeta) = -\frac{1}{2 \left[ \zeta^2 - (n\pi/d\ell)^2 \right] \left[ \zeta^2 - (v\pi/d\lambda)^2 \right]} \cdot \left[ e^{2j\zeta(z_0 - s\ell)} \left[ (-1)^{n+\nu} e^{-2j\zeta d\ell} - [(-1)^n + (-1)^\nu] e^{-j\zeta d\ell} + 1 \right] + [(-1)^n + (-1)^\nu] e^{j\zeta d\ell} - 1 - 1^{n+\nu} \right]. \quad (\text{Π.3.17})$$

Λόγω των εκθετικών όρων της (Π.3.17), ικανοποιείται πάντα το λήμμα Jordan όταν κλείνουμε στο άνω ημιεπίπεδο, καθώς οι εκθέτες είναι πάντα θετικοί, μιας και το σημείο ολικής ανάκλασης  $z_0$  για γεωμετρικούς λόγους βρίσκεται πάντα πιο δεξιά από

τα αυλάκια. Έτσι, δεν χρειάζεται να πάρουμε δεύτερη περίπτωση, όπου κλείνουμε στο κάτω ημιεπίπεδο όπως κάναμε στην παράγραφο Π.1.

Με βάση τα παραπάνω, η συνεισφορά στο ολοκλήρωμα των πόλων για  $\zeta = -\zeta'_{mp}$  είναι:

$$I_1^{(bc)} = \sum_p 2j \frac{\zeta'_{mp} J_m(\chi'_{mp})}{J_m''(\chi'_{mp}) r_{in}} A_1(-\zeta'_{mp}). \quad (\text{Π.3.18})$$

Διακρίνουμε μια ακόμα ειδική περίπτωση όταν  $m = 0$ , καθώς υπάρχει ένας επιπλέον πόλος, όταν μηδενίζεται ο όρος  $k_{\perp}$ , δηλαδή όταν  $\zeta = \pm \lambda_0 = \pm \sqrt{\omega^2 \epsilon_0 \mu_0}$ . Για  $m \geq 1$  δεν υπάρχει ο επιπλέον αυτός πόλος, καθώς εξουδετερώνεται από τον αριθμητή. Το ολοκληρωτικό υπόλοιπο του πόλου αυτού είναι:

$$\begin{aligned} \text{Res}(\zeta = -\lambda_0) &= \lim_{\zeta \rightarrow -\lambda_0} (\zeta + \lambda_0) \frac{\zeta^2 J_0(k_{\perp} r_{in})}{\pi k_{\perp} J_0'(k_{\perp} r_{in})} A_1(\zeta) \\ &\stackrel{0}{=} -\frac{\lambda_0}{\pi r_{in}} A_1(-\lambda_0). \end{aligned} \quad (\text{Π.3.19})$$

Επομένως, η συνεισφορά του πόλου αυτού στο ολοκλήρωμα είναι:

$$I_1^{(bc)} = 2\pi j \text{Res}(\zeta = -\lambda_0) = -j \frac{\lambda_0}{r_{in}} 2A_1(-\lambda_0). \quad (\text{Π.3.20})$$

- Συνεχίζουμε τον υπολογισμό για  $\ell \neq \lambda$  τώρα:

Στην περίπτωση αυτή, αν υποθέσουμε ότι  $\ell > \lambda$ , η παράσταση  $F_{n\ell}(\zeta, s_{\ell}, z_0) F_{\nu\lambda}(\zeta, s_{\lambda}, z_0)$ , που εμφανίζεται στο ολοκλήρωμα μετά την παράλειψη των περιττών όρων που δεν επιβιώνουν, μπορεί να γραφεί:

$$\begin{aligned} A_2^+(\zeta) &= F_{n\ell}(\zeta, s_{\ell}, z_0) F_{\nu\lambda}(\zeta, s_{\lambda}, z_0) = -\frac{1}{2 \left[ \zeta^2 - (n\pi/d_{\ell})^2 \right] \left[ \zeta^2 - (\nu\pi/d_{\lambda})^2 \right]} \\ &\left[ e^{j\zeta(2z_0 - s_{\ell} - s_{\lambda})} \left[ 1 + (-1)^{n+\nu} e^{-j\zeta(d_{\ell} + d_{\lambda})} - (-1)^n e^{-j\zeta d_{\ell}} - (-1)^{\nu} e^{-j\zeta d_{\lambda}} \right] \right. \\ &\left. - e^{j\zeta(s_{\ell} - s_{\lambda})} - (-1)^{n+\nu} e^{j\zeta(s_{\ell} - s_{\lambda} + d_{\ell} - d_{\lambda})} + (-1)^n e^{j\zeta(s_{\ell} - s_{\lambda} + d_{\ell})} + (-1)^{\nu} e^{j\zeta(s_{\ell} - s_{\lambda} - d_{\lambda})} \right]. \end{aligned} \quad (\text{Π.3.21})$$

Με την προϋπόθεση ότι  $\ell > \lambda$ , οι εκθέτες των εκθετικών όρων είναι θετικοί και μπορούμε να κλείσουμε τη διαδρομή ολοκλήρωσης στο άνω ημιεπίπεδο όπως στο Σχήμα Π.9, καθώς το λήμμα Jordan εξασφαλίζει τον μηδενισμό της συνεισφοράς της διαδρομής ολοκλήρωσης στο άπειρο. Επομένως στην περίπτωση αυτή, η συνεισφορά των πόλων που περικλείει η διαδρομή ολοκλήρωσης είναι:

$$I_1^{(bc)} = \sum_p 2\pi j \text{Res}(\zeta = -\zeta'_{mp}). \quad (\text{Π.3.22})$$

Τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα των πόλων υπολογίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} \text{Res}(\zeta = -\zeta'_{mp}) &= \lim_{\zeta \rightarrow -\zeta'_{mp}} (\zeta + \zeta'_{mp}) \frac{\zeta^2 J_m(k_{\perp} r_{in})}{\pi k_{\perp} J_m'(k_{\perp} r_{in})} A_2^+(\zeta) \\ &\stackrel{0}{=} \frac{\zeta'_{mp} J_m(\chi'_{mp})}{\pi J_m''(\chi'_{mp}) r_{in}} A_2^+(-\zeta'_{mp}). \end{aligned} \quad (\text{Π.3.23})$$

Επίσης, υπάρχει και ο επιπλέον πόλος όταν  $m = 0$  για  $\zeta = -\lambda_0$ , ο οποίος δίνει συνεισφορά στο ολοκλήρωμα:

$$I_1^{(\text{bc})} = 2\pi j \text{Res}(\zeta = -\lambda_0) = -j \frac{\lambda_0}{r_{\text{in}}} 2A_2^+(-\lambda_0). \quad (\text{Π.3.24})$$

Εξετάζουμε τώρα την περίπτωση όπου  $\ell < \lambda$ . Στην περίπτωση αυτή, για να μπορούμε να κλείσουμε τη διαδρομή στο άνω ημιεπίπεδο, παραλείπουμε τους περιττούς όρους και τους επανεισάγουμε γράφοντας τώρα την παράσταση  $F_{n\ell}(\zeta, s_\ell, z_0)F_{\nu\lambda}(\zeta, s_\lambda, z_0)$  ως εξής:

$$A_2^-(\zeta) = F_{n\ell}(\zeta, s_\ell, z_0)F_{\nu\lambda}(\zeta, s_\lambda, z_0) = -\frac{1}{2\left[\zeta^2 - (n\pi/d_\ell)^2\right]\left[\zeta^2 - (\nu\pi/d_\lambda)^2\right]} \cdot \left[ e^{j\zeta(2z_0-s_\ell-s_\lambda)} \left[ 1 + (-1)^{n+\nu} e^{-j\zeta(d_\ell+d_\lambda)} - (-1)^n e^{-j\zeta d_\ell} - (-1)^\nu e^{-j\zeta d_\lambda} \right] - e^{j\zeta(s_\lambda-s_\ell)} - (-1)^{n+\nu} e^{j\zeta(s_\lambda-s_\ell+d_\lambda-d_\ell)} + (-1)^n e^{j\zeta(s_\lambda-s_\ell-d_\ell)} + (-1)^\nu e^{j\zeta(s_\lambda-s_\ell+d_\lambda)} \right]. \quad (\text{Π.3.25})$$

Επομένως, τώρα η συνεισφορά των πόλων για  $\zeta = -\zeta'_{mp}$  στο ολοκλήρωμα είναι:

$$I_1^{(\text{bc})} = 2\pi j \sum_p \text{Res}(\zeta = -\zeta'_{mp}) = 2\pi j \lim_{\zeta \rightarrow -\zeta'_{mp}} (\zeta + \zeta'_{mp}) \frac{\zeta^2 J_m(k_\perp r_{\text{in}})}{\pi k_\perp J'_m(k_\perp r_{\text{in}})} A_2^-(\zeta) \stackrel{0}{=} \sum_p 2j \frac{\zeta'_{mp} J_m(\chi'_{mp})}{J'_m(\chi'_{mp}) r_{\text{in}}} A_2^-(-\zeta'_{mp}). \quad (\text{Π.3.26})$$

Η συνεισφορά του επιπλέον πόλου για  $\zeta = -\lambda_0$  όταν  $m = 0$  είναι:

$$I_1^{(\text{bc})} = 2\pi j \text{Res}(\zeta = -\lambda_0) = -j \frac{\lambda_0}{r_{\text{in}}} 2A_2^-(-\lambda_0). \quad (\text{Π.3.27})$$

Για να συγχωνεύσουμε τις δύο περιπτώσεις  $\ell > \lambda$  και  $\ell < \lambda$  ορίζουμε την  $A_2(\zeta)$ , ώστε να περιλαμβάνει και τις δύο βοηθητικές συναρτήσεις  $A_2^+(\zeta)$  και  $A_2^-(\zeta)$ :

$$A_2(\zeta) = -\frac{1}{2\left[\zeta^2 - (n\pi/d_\ell)^2\right]\left[\zeta^2 - (\nu\pi/d_\lambda)^2\right]} \cdot \left[ e^{j\zeta(2z_0-s_\ell-s_\lambda)} \left[ 1 + (-1)^{n+\nu} e^{-j\zeta(d_\ell+d_\lambda)} - (-1)^n e^{-j\zeta d_\ell} - (-1)^\nu e^{-j\zeta d_\lambda} \right] - e^{j\zeta|s_\ell-s_\lambda|} - (-1)^{n+\nu} e^{j\zeta|s_\ell-s_\lambda+d_\ell-d_\lambda|} + (-1)^n e^{j\zeta|s_\ell-s_\lambda+d_\ell|} + (-1)^\nu e^{j\zeta|s_\ell-s_\lambda-d_\lambda|} \right]. \quad (\text{Π.3.28})$$

Συνοψίζοντας τώρα όλες τις προηγούμενες υποπεριπτώσεις, η αναλυτική μορφή του ολοκληρώματος μπορεί να εκφραστεί με τον τύπο:

$$I_1^{(\text{bc})} = \begin{cases} \sum_p 2j \frac{\zeta'_{mp} J_m(\chi'_{mp})}{r_{\text{in}} J'_m(\chi'_{mp})} A_1(-\zeta'_{mp}) - 2j \frac{\lambda_0}{r_{\text{in}}} A_1(-\lambda_0) \delta_{m0} + \frac{J_m(k_{n\ell}^{(2)} r_{\text{in}})}{k_{n\ell}^{(2)} J'_m(k_{n\ell}^{(2)} r_{\text{in}})} \frac{d_\ell}{2} \delta_{n\nu} (1 + \delta_{n0}), & \ell = \lambda \\ \sum_p 2j \frac{\zeta'_{mp} J_m(\chi'_{mp})}{r_{\text{in}} J'_m(\chi'_{mp})} A_2(-\zeta'_{mp}) - 2j \frac{\lambda_0}{r_{\text{in}}} A_2(-\lambda_0) \delta_{m0}, & \ell \neq \lambda \end{cases}. \quad (\text{Π.3.29})$$





---

## ΛΙΣΤΑ ΣΥΜΒΟΛΩΝ

---

$A_c(\zeta)$	Συνάρτηση κατανομής πλάτους ρυθμών TM συνεχούς φάσματος του αξονικού κυματαριθμού
$A_h(\zeta)$	Συνάρτηση κατανομής πλάτους ρυθμών TE συνεχούς φάσματος του αξονικού κυματαριθμού
$A_E$	Συντελεστής πλάτους προσπίπτοντος ρυθμού TM
$A_H$	Συντελεστής πλάτους προσπίπτοντος ρυθμού TE
<b>B</b>	Μαγνητική επαγωγή
$b$	Λόγος μέγιστης τιμής του ηλεκτρικού πεδίου γενικά στη γεωμετρία του διαύλου δέσμης προς τη μέγιστη τιμή του πεδίου πάνω στη δέσμη
$C_{mp}$	Συντελεστής κανονικοποίησης ρυθμών $TE_{mp}$ (EURIDICE)
$c$	Ταχύτητα του φωτός
$\text{Det}[A]$	Ορίζουσα πίνακα A
$d_\ell$	Πάχος $\ell$ -οστού δαχτυλιδιού
<b>E</b>	Ηλεκτρικό πεδίο
$E_{n\ell}$	Συντελεστής πλάτους αξονικού ρυθμού TM τάξης $n$ στο $\ell$ -οστό δαχτυλίδι
$E_r^{(\text{res})}$	Ακτινική συνιστώσα ηλεκτρικού πεδίου του τοπικού συστήματος συντεταγμένων που βρίσκεται σε συντονισμό με την κίνηση των ηλεκτρονίων
$E_\phi^{(\text{res})}$	Αξιμουθιακή συνιστώσα ηλεκτρικού πεδίου του τοπικού συστήματος συντεταγμένων που βρίσκεται σε συντονισμό με την κίνηση των ηλεκτρονίων
$E_\phi^{(\text{NESTOR})}$	Αξιμουθιακή συνιστώσα ηλεκτρικού πεδίου του τοπικού συστήματος συντεταγμένων στη γεωμετρία του διαύλου δέσμης όπως υπολογίζεται από τον κώδικα NESTOR
$e$	Στοιχειώδες φορτίο ηλεκτρονίου
$\mathbf{e}_p^e$	Εγκάρσιο ιδιοδιάνυσμα ρυθμών TM τάξης $p$
$\mathbf{e}_p^h$	Εγκάρσιο ιδιοδιάνυσμα ρυθμών TE τάξης $p$
$F_C(z)$	Συνημιτονικός μετασχηματισμός Fourier
$F_S(z)$	Ημιτονικός μετασχηματισμός Fourier
$f$	Συχνότητα
$f(z)$	Αξονικό προφίλ πεδίου
$f_{\text{res}}$	Συχνότητα συντονισμού ρυθμού κοιλότητας



$G_m^e(k_{\perp}, r)$	Συνάρτηση ακτινικής εξάρτησης ρυθμών TM της ομοαξονικής γεωμετρίας
$G_m^h(k_{\perp}, r)$	Συνάρτηση ακτινικής εξάρτησης ρυθμών TE της ομοαξονικής γεωμετρίας
$H_{n\ell}$	Συντελεστής πλάτους αξονικού ρυθμού TE τάξης $n$ στο $\ell$ -οστό δαχτυλίδι
$I_b$	Ρεύμα ηλεκτρονικής δέσμης
$I_{st}$	Ρεύμα εκκίνησης συντονιζόμενου ρυθμού
$I_i(n, \ell, \nu, \lambda)$	Γενικευμένα ολοκληρώματα Fourier σύζευξης συνεχούς με διακριτό φάσμα
$I_i^{(bc)}(n, \ell, \nu, \lambda)$	Γενικευμένα ολοκληρώματα Fourier σύζευξης συνεχούς με διακριτό φάσμα (με οριακή συνθήκη ολικής ανάκλασης)
$I_i^{coax}(n, \ell, \nu, \lambda)$	Γενικευμένα ολοκληρώματα Fourier σύζευξης συνεχούς με διακριτό φάσμα για την ομοαξονική γεωμετρία
$\text{Im}(x)$	Φανταστικό μέρος μιγαδικού αριθμού $x$
$J_{con}$	Πυκνότητα ρεύματος αγωγιμότητας
$J_m(x)$	Συνάρτηση Bessel 1ου είδους τάξης $m$
$K_{\perp}$	Εγκάρσιος κυματαριθμός προσπίπτοντος ρυθμού TE
$k_{\parallel}$	Αξονικός κυματαριθμός με διακριτό φάσμα
$k_{\perp}$	Εγκάρσιος κυματαριθμός συνεχούς φάσματος
$k_{\perp mp}$	Εγκάρσιος κυματαριθμός ρυθμού $TE_{mp}$
$k_{n\ell}$	Εγκάρσιος κυματαριθμός τάξης $n$ στην εσοχή του $\ell$ -οστού δαχτυλιδιού
$k_{n\ell}^{(2)}$	Εγκάρσιος κυματαριθμός τάξης $n$ στην εσοχή του $\ell$ -οστού δαχτυλιδιού
$k_{n\ell}^{(3)}$	Εγκάρσιος κυματαριθμός τάξης $n$ στο $\ell$ -οστό διπλεκτρικό δαχτυλίδι
$L$	Συνολικός αριθμός δαχτυλιδιών
$\ell$	Δείκτης αρίθμησης δαχτυλιδιού
$m$	Αζιμουθιακός δείκτης
$m_e$	Μάζα ηλεκτρονίου
$N_m(x)$	Συνάρτηση Bessel 2ου είδους (Neumann) τάξης $m$
$n$	Δείκτης αξονικού ρυθμού στο δαχτυλίδι
$P_{abs}$	Ισχύς που απορροφάται στα διπλεκτρικά δαχτυλίδια
$P^{TE}$	Ισχύς που σκεδάζεται (διαδίδεται ή ανακλάται) σε ρυθμούς TE
$P^{TM}$	Ισχύς που σκεδάζεται (διαδίδεται ή ανακλάται) σε ρυθμούς TM

---

$P_{\text{inc}}^{\text{TE}}$	Προσπίπτουσα ισχύς ρυθμού TE
$P_{\text{inc}}^{\text{TM}}$	Προσπίπτουσα ισχύς ρυθμού TM
$P_{\text{loss}}$	Ισχύς απωλειών συντονιζόμενου ρυθμού
$P_{nl}^{(2)}(k_{nl}^{(2)} r)$	Ακτινικό προφίλ πεδίου αξονικού ρυθμού TM τάξης $n$ στην εσοχή του $\ell$ -οστού δαχτυλιδιού
$P_{nl}^{(3)}(k_{nl}^{(3)} r)$	Ακτινικό προφίλ πεδίου αξονικού ρυθμού TM τάξης $n$ στο $\ell$ -οστό διπλεκτρικό δαχτυλίδι
$\rho_{\perp}$	Εγκάρσια συνιστώσα σχετικιστικής ορμής
$Q$	Συνολικός συντελεστής ποιότητας
$Q_{\text{diff}}$	Συντελεστής ποιότητας απωλειών περίθλασης
$Q_{\text{dielec}}$	Συντελεστής ποιότητας διπλεκτρικών απωλειών
$Q_{\text{EQUIV}}$	Ισοδύναμος συντελεστής ποιότητας συνδυασμού κωδίκων NESTOR-EURIDICE
$Q_{\text{min}}$	Ελάχιστη τιμή συντελεστή ποιότητας για την οποία αναζητούνται συντονιζόμενοι ρυθμοί
$Q_{\text{ohm}}$	Συντελεστής ποιότητας ωμικών απωλειών στα τοιχώματα
$Q_{\text{tot}}$	Συνολικός συντελεστής ποιότητας
$Q_{nl}^{(2)}(k_{nl}^{(2)} r)$	Ακτινικό προφίλ πεδίου αξονικού ρυθμού TE τάξης $n$ στην εσοχή του $\ell$ -οστού δαχτυλιδιού
$Q_{nl}^{(3)}(k_{nl}^{(3)} r)$	Ακτινικό προφίλ πεδίου αξονικού ρυθμού TE τάξης $n$ στο $\ell$ -οστό διπλεκτρικό δαχτυλίδι
$R_b$	Ακτινική θέση δέσμης
$R_c$	Καυστική ακτίνα ρυθμού
$R_o$	Ακτίνα κυλινδρικού κυματοδηγού
$\text{Re}(x)$	Πραγματικό μέρος μιγαδικού αριθμού $x$
$\text{Res}(\zeta = \zeta_{mp})$	Ολοκληρωτικό υπόλοιπο πόλου για $\zeta = \zeta_{mp}$
$r_{\text{coax}}$	Ακτίνα ομοαξονικού στελέχους
$r_{d\ell}$	Εσωτερική ακτίνα $\ell$ -οστού διπλεκτρικού δαχτυλιδιού
$r_{\ell}$	Εξωτερική ακτίνα $\ell$ -οστού δαχτυλιδιού
$r_{\text{in}}$	Ακτίνα μεταλλικών δαχτυλιδιών γεωμετρίας διαύλου
$s$	Τάξη αρμονικής αλληλεπίδρασης
$s_{\ell}$	Αξονική θέση αρχής $\ell$ -οστού δαχτυλιδιού
$t$	Χρονική μεταβλητή
$\mathbf{u}$	Αδιάστατη σχετικιστική ορμή
$V(t)$	Συντελεστής πλάτους ρυθμού EURIDICE
$V_{\text{acc}}$	Εφαρμοζόμενη τάση καθόδου-ανόδου
$V_b$	Τάση ηλεκτρονικής δέσμης
$\mathbf{v}$	Διάνυσμα ταχύτητας ηλεκτρονίου
$W_{\text{em}}$	Αποθηκευμένη ηλεκτρομαγνητική ενέργεια ρυθμού

$W_{emEURIDICE}$	Αποθηκευμένη ηλεκτρομαγνητική ενέργεια ισοδύναμου ρυθμού κοιλότητας του κώδικα EURIDICE
$z_0$	Αξονική θέση εφαρμογής της οριακής συνθήκης ολικής ανάκλασης
$\alpha$	Λόγος ταχυτήτων (pitch factor)
$\beta$	Αξονικός κυματαριθμός προσπίπτοντος ρυθμού TE
$\beta_{TM}$	Αξονικός κυματαριθμός προσπίπτοντος ρυθμού TM
$\gamma$	Σχετικιστικός παράγοντας
$\gamma_0$	Σχετικιστικός παράγοντας των ηλεκτρονίων στην είσοδο της περιοχής αλληλεπίδρασης
$\delta_{ij}$	Δέλτα του Kronecker
$\epsilon_0$	Διηλεκτρική επιτρεπτότητα του κενού
$\epsilon_\ell$	Επιτρεπτότητα $\ell$ -οστού διηλεκτρικού δαχτυλιδιού
$\epsilon_i$	Φανταστικό μέρος διηλεκτρικής επιτρεπτότητας
$\epsilon_r$	Σχετική διηλεκτρική επιτρεπτότητα
$\zeta$	Αξονικός κυματαριθμός συνεχούς φάσματος
$\eta_{el}$	ηλεκτρονική απόδοση αλληλεπίδρασης
$\kappa$	Λόγος μέσης τιμής του μέτρου του εγκάρσιου προς το αξονικό ηλεκτρικό πεδίο κατά μήκος της θέσης της δέσμης
$\lambda$	Δείκτης αρίθμησης δαχτυλιδιού
$\mu_0$	Μαγνητική διαπερατότητα του κενού
$\nu$	Δείκτης αξονικού ρυθμού στο δαχτυλίδι
$\Pi_e$	Ηλεκτρικό δυναμικό Hertz
$\Pi_m$	Μαγνητικό δυναμικό Hertz
$\Pi_e^{inc}$	Ηλεκτρικό δυναμικό Hertz προσπίπτοντος ρυθμού TM
$\Pi_m^{inc}$	Μαγνητικό δυναμικό Hertz προσπίπτοντος ρυθμού TE
$\sigma$	αγωγιμότητα
$\chi_{mp}$	Ιδιοτιμή ρυθμού $TM_{mp}$ στον κυλινδρικό κυματοδηγό
$\chi'_{mp}$	Ιδιοτιμή ρυθμού $TE_{mp}$ στον κυλινδρικό κυματοδηγό
$\omega$	Κυκλική μιγαδική συχνότητα
$\omega_{cut}$	Συχνότητα αποκοπής κυματοδηγού

---

---

## ΔΗΜΟΣΙΕΥΣΕΙΣ

---

### Άρθρα σε επιστημονικά περιοδικά με κριτές

I. Chelis, K. Avramidis, and J. Vomvoridis, "Resonant Modes of Disk-Loaded Cylindrical Structures With Open Boundaries", *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol.63, no.6, pp. 1781-1790, Jun. 2015.

I.Gr. Pagonakis, F. Albajar, S. Alberti, K. Avramidis, T. Bonicelli, A. Bruschi, J. Chelis, F. Cismondi, G. Gantenbein, V. Hermann, K. Hesch, J.-P. Hogge, J.Jelonnek, J. Jin, S. Illy, Z.C. Ioannidis, G.P. Latsas, F. Legrand, M. Lontano, B. Piosczyk, Y. Rozier, T. Rzesnicki, M. Thumm, I. G. Tigelis, M. Q. Tran, and J. L. Vomvoridis, "Status of the development of the EU-1 MW gyrotron for ITER", *Fusion Engineering and Design*, Vol. 96-97, pp 149-154, Oct. 2015.

### Ανακοινώσεις σε συνέδρια

J. Chelis, and J. Vomvoridis, "Electromagnetic modelling of dielectric loaded aperiodic gyrotron beam tunnels", *EC17 - 17th Joint Workshop on Electron Cyclotron Emission and Electron Cyclotron Resonance Heating*, Deurne, the Netherlands, Apr. 2012.

I. Chelis, K. Avramidis, and J. Vomvoridis, "Simulation of parasitic gyrotron interaction in beam tunnels", *38th International Conference on Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves (IRMMW-THz)*, Mainz, Germany, Sept. 2013.

F. Albajar, G. Aiello, S. Alberti, F. Arnold, K. Avramidis, M. Bader, R. Batista, R. Bertizzolo, T. Bonicelli, F. Braunmueller, C. Brescan, A. Bruschi, B. von Burg, K. Camino, G. Carannante, V. Casarin, A. Castillo, F. Cauvard, C. Cavaliere, M. Cavinato, R. Chavan, J. Chelis, F. Cismondi, D. Combescure, C. Darbos, P. Dharmesh, D. Farina, D. Fasel, L. Figini, M. Gagliardi, F. Gandini, G. Gantenbein, T. Gassmann, R. Gessner, T.P. Goodman, V. Gracia, G. Grossetti, C. Heemskerk, M. Henderson, V. Hermann, J.P. Hogge, S. Illy, Z. Ioannidis, J. Jelonnek, J. Jin, W. Kasperek, J. Koning, A.S. Krause, J.D. Landis, G. Latsas, F.Li, F. Mazzocchi, A. Meier, A. Moro, R. Nousiainen, S. Nowak<sup>4</sup>, J. van Oosterhout, J. Pacheco, I. Pagonakis, P. Platania,

---

E. Poli, A.K. Preis, D. Ronden, Y. Rozier, T. Rzesnicki, G. Saibene, F. Sanchez, F. Sartori, O. Sauter, T. Scherer, C. Schlatter, S. Schreck, A. Serikov, U. Siravo, C. Sozzi, P. Spaeh, A. Spichiger, D. Strauss, K. Takahashi, M. Thumm, J. Tigelis, O. Toshimichi, A. Vaccaro, M.Q. Tran, B. Weinhorst, "Status of Europe's contribution to the ITER EC system", *18th Joint Workshop on Electron Cyclotron Emission and Electron Cyclotron Resonance Heating*, Nara, Japan, Apr. 2014.

S. Illy, K. Avramidis, G. Gantenbein, K. Hesch, J. Jelonnek, J. Jin, I. Pagonakis, B. Piosczyk, T. Rzesnicki, M. Thumm, S. Alberti, J. -P. Hogge, M. Q. Tran, V. Hermann, F. Legrand, Y. Rozier, J. L. Vomvoriadis, **J. Chelis**, Z. C. Ioannidis, G. P. Latsas, I. G. Tigelis, F. Albajar, T. Bonicelli, F. Cismondi, "Progress on the development of the EU-1MW gyrotron for ITER", *41st IEEE International Conference on Plasma Science (ICOPS 2014)*, Marriott Wardman Park, Washington DC, May 2014.

J. Jelonnek, G. Aiello, K. Avramidis, J. Franck, G. Gantenbein, G. Grossetti, K. Hesch, S. Illy, J. Jin, P. Kalaria, I. Pagonakis, T. Rzesnicki, S. Ruess, A. Samartsev, T. Scherer, D. Strauss, C. Wu, M. Thumm, S. Alberti, F. Braunmueller, J. Genoud, J.-P. Hogge, C. Schlatter, T.-M. Tran, M. Q. Tran, **I. Chelis**, J. Vomvoriadis, Z. C. Ioannidis, G. Latsas, I. G. Tigelis, A. Bruschi, M. Lontano, V. Hermann, F. Legrand, Y. Rozier, F. Albajar, T. Bonicelli, F. Cismondi, "From W7 -X towards ITER and Beyond: Status and Progress in EU Fusion Gyrotron Developments", *16th International Vacuum Electronics Conference (IVEC 2015)*, Beijing, China, Apr. 2015.

I. Pagonakis, K. Avramidis, G. Gantenbein, K. Hesch, S. Illy, J. Jelonnek, J. Jin, B. Piosczyk, T. Rzesnicki, A. Samartsev, M. Thumm, S. Alberti, F. Braunmueller, J.-P. Hogge, C. Schlatter, T. M. Tran, M. Q. Tran, **J. Chelis**, J. L. Vomvoriadis, Z. C. Ioannidis, G. P. Latsas, I. G. Tigelis, A. Bruschi, M. Lontano V. Hermann, F. Legrand, Y. Rozier, F. Albajar, T. Bonicelli, F. Cismondi, "Progress of the development of the European gyrotron for ITER - First experimental results-", *2015 IEEE International Conference on Plasma Science (ICOPS 2015)*, Antalya, Turkey, May 2015.

G. Gantenbein, K. Avramidis, S. Illy, J. Jin, M. Losert, I. G. Pagonakis, T. Rzesnicki, A. Samartsev, M. Thumm, J. Jelonnek, S. Alberti, F. Braunmueller, J.-P. Hogge, C. Schlatter, M. Q. Tran, **J. Chelis**, J. L. Vomvoriadis, Z. C. Ioannidis, G. P. Latsas, I. G. Tigelis, A. Bruschi, M. Lontano, V. Hermann, Y. Rozier, F. Albajar, T. Bonicelli, F. Cismondi, "Towards a European 1 MW, 170 GHz Gyrotron Prototype for ITER", *JA-EU-US RF Heating Technology Workshop*, Ryogoku, Japan, Aug. 31-Sept. 2, 2015.

G. Gantenbein, K. Avramidis, S. Illy, J. Jin, M. Losert, I. G. Pagonakis, T. Rzesnicki, M. Thumm, J. Jelonnek, S. Alberti, F. Braunmueller, J.-P. Hogge, C. Schlatter, M. Q. Tran, **J. Chelis**, J. L. Vomvoriadis, Z. C. Ioannidis, G. P. Latsas, I. G. Tigelis, A. Bruschi, M. Lontano, V. Hermann, Y. Rozier, F. Albajar, T. Bonicelli, P.-E. Frigot, C. Lechte and W. Kasperek, "Status and recent results of the European 1 MW, 170 GHz gyrotron prototype for ITER", *19th Joint Workshop on Electron Cyclotron Emission and Electron Cyclotron Resonance Heating*, Gandhinagar Gujarat, India, Apr. 2016.

G.P. Latsas, A. I. Zisis, **I. G. Chelis**, and I. G. Tigelis, "Numerical study of the parasitic oscillations in gyrotron beam tunnels", *41st International Conference on Infrared*,

*Millimeter, and Terahertz Waves (IRMMW-THz)*, Copenhagen, Denmark, Sept. 2016.

K. A. Avramidis, I. Gr. Pagonakis, **I. G. Chelis**, G. Gantenbein, Z. C. Ioannidis, D. V. Peponis, T. Rzesnicki, and J. Jelonnek, "Simulations of the experimental operation of the EU 170 GHz, 1 MW short-pulse prototype gyrotron for ITER", *41st International Conference on Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves (IRMMW-THz)*, Copenhagen, Denmark, Sept. 2016.

J.-P. Hogge, S. Alberti, F. Braunmueller, C. Schlatter, M. Q. Tran, K. Avramidis, G. Gantenbein, S. Illy, Z. C. Ioannidis, J. Jelonnek, J. Jin, T. Kobarg, M. Losert, I. G. Pagonakis, T. Rzesnicki, M. Schmid, M. Thumm, V. Hermann, Y. Rozier, **J. Chelis**, J. L. Vomvouridis, G. P. Latsas, I. G. Tigelis, A. Zisis, W. Bin, A. Bruschi, M. Lontano, W. Kasperek, C. Lechte, F. Albajar, T. Bonicelli and P.-E. Frigot "Status and experimental results of the European 1 MW, 170 GHz Industrial CW Prototype Gyrotron for ITER", *41st International Conference on Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves (IRMMW-THz)*, Copenhagen, Denmark, September 2016.

## Εκθέσεις πεπραγμένων ΕΠΕΘΣ

**J. G. Chelis**, and J. L. Vomvouridis, "Analytic modelling of corrugated gyrotron beam tunnels", *Annex in Fusion Project, Association EURATOM-Hellenic Republic, Annual Report 2010*.

**J. G. Chelis**, and J. L. Vomvouridis, "Electromagnetic modelling of aperiodic finite sized gyrotron beam tunnel", *Annex in Fusion Project, Association EURATOM-Hellenic Republic, Annual Report 2011*.

**J. G. Chelis**, and J. L. Vomvouridis, "Analytic Complex eigenfrequencies of cold gyrotron beam-tunnel structures", *Annex in Fusion Project, Association EURATOM-Hellenic Republic, Annual Report 2012*.

**J. G. Chelis**, and J. L. Vomvouridis, "Simulation of forward beam-wave interaction in gyrotron beam tunnels", *Annex in Fusion Project, Association EURATOM-Hellenic Republic, Annual Report 2013*.

**J. G. Chelis**, and J. L. Vomvouridis, "Starting-current calculations of resonant modes in the beam tunnel of the 140 GHz gyrotron for W7-X", *Annex in Fusion Project, Association EURATOM-Hellenic Republic, Annual Report 2013*.

**I. G. Chelis**, and J. L. Vomvouridis, "Final Report on task WP13-DAS-03-HCD-EC-03-02/HELLAS", *Report on the development requirements of gyrotrons up to 250 GHz, EFDA PPP&T*, December 2013.

**I. G. Chelis**, K. A. Avramidis, J. L. Vomvouridis, Z. C. Ioannidis, G. P. Latsas, and I. G. Tigelis, "Study of parasitic gyrotron interaction in the beam tunnel of the 170 GHz 1 MW gyrotron for ITER", *Final Report for F4E Grant GRT-432*, May 2014.

---

**I. G. Chelis**, I. G. Tigelis and J. L. Vomvouridis, "Intermediate report on the theoretical studies on parasitic oscillations, beam tunnels, general boundary conditions", *Final Report on Task HCD-4.2.3-05, Eurofusion*, December 2014.

**I. G. Chelis**, and I. G. Tigelis, "Theoretical calculations on coaxial-cavity design for improved interaction efficiency and more robust design", *Final Report on Task HCD-4.2.2-02, Eurofusion*, December 2014.



---

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

---

- [1] G. Faillon, G. Kornfeld, E. Bosch, and M. Thumm, "Microwave tubes," in *Vacuum Electronics: Components and Devices*, J. Eichmeier and M. Thumm, Eds. Berlin Heidelberg: Springer, 2008.
- [2] Ι. Α. Βουβορίδης, *Μικροκυματικές πηγές ισχύος*. Αθήνα: Συμεών, 2009.
- [3] V. Granatstein and I. Alexeff, *High-power Microwave Sources*. Boston-London: Artech House, 1987.
- [4] V. Granatstein and A. V. Gaponov-Grekhov, *Applications of high-power microwaves*. Boston-London: Artech House, 1994.
- [5] M. V. Kartikeyan, E. Borie, and M. Thumm, *Gyrotrons - High Power Microwave and Millimeter Wave Technology*. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2004.
- [6] K. R. Chu, "The electron cyclotron maser," *Rev. Mod. Phys.*, vol. 76, pp. 489–540, May 2004.
- [7] Γ. Αναστασίου, *Ενίσχυση μικροκυματικής γκαουσιανής δέσμης γυροτρονίου μέσω αλληλεπίδρασης με επίπεδη ηλεκτρονική δέσμη*, διδακτορική διατριβή, Ε.Μ.Π, Αθήνα, Δεκέμβριος, 2010.
- [8] K. R. Chu and J. L. Hirshfeld, "Comparative study of the axial and azimuthal bunching mechanisms in electromagnetic cyclotron instabilities," *Phys. Fluids*, vol. 21, no. 3, pp. 461–466, 1978.
- [9] A. W. Fliflet and M. E. Read, "Use of weakly irregular waveguide theory to calculate eigenfrequencies, Q values, and RF field functions for gyrotron oscillators," *Int. J. Electronics*, vol. 51, no. 4, pp. 475–484, 1981.
- [10] E. Borie, "Computations of radio-frequency behaviour," in *Gyrotron Oscillators*, C. Edgecombe, Ed. London: Taylor & Francis, 1993.

- [11] Κ. Α. Αβραμίδης, *Σχεδίαση και προσομοίωση ομοαξονικών γυροτρονίων (Με έμφαση στη λειτουργία 2ης αρμονικής)*, διδακτορική διατριβή, Ε.Μ.Π, Αθήνα, Μάρτιος, 2006.
- [12] O. Dumbrajs and G. S. Nusinovich, “Cold-cavity and self-consistent approaches in the theory of mode competition in gyrotrons,” *IEEE Trans. Plasma Sci.*, vol. 20, no. 3, pp. 133–138, Jun. 1992.
- [13] H. Saito, T. M. Tran, K. E. Kreisler, and R. J. Temkin, “Analytical treatment of linearized self-consistent theory of a gyromonotron with a non-fixed structure,” *Int. J. Electron.*, vol. 61, no. 6, pp. 895–903, 1986.
- [14] S. Alberti *et al.*, “Experimental study from linear to chaotic regimes on a terahertz-frequency gyrotron oscillator,” *Phys. Plasmas*, vol. 19, no. 12, pp. 1–11, 2012.
- [15] Y. Y. Lau, K. R. Chu, L. R. Barnett, and V. L. Granatstein, “Gyrotron travelling wave amplifier: I. analysis of oscillations,” *Int. J. Infrared Millim. Waves*, vol. 2, no. 3, pp. 373–393, 1981.
- [16] G. Gantenbein *et al.*, “Experimental investigations and analysis of parasitic RF oscillations in high-power gyrotrons,” *IEEE Trans. Plasma Sci.*, vol. 38, no. 6, pp. 1168–1177, Jun. 2010.
- [17] C. Darbos *et al.*, “ECRH system for ITER,” *AIP Conf. Proc.*, vol. 1187, no. 1, pp. 531–538, 2009.
- [18] M. Thumm, “Recent advances in the worldwide fusion gyrotron development,” *IEEE Trans. Plasma Sci.*, vol. 42, no. 3, pp. 590–599, Mar. 2014.
- [19] J. Jelonnek *et al.*, “From W7-X towards ITER and beyond: Status and progress in EU fusion gyrotron developments,” in *2015 IEEE Int. Vacuum Electr. Conf. (IVEC)*, Beijing, China, Apr. 2015.
- [20] K. Sakamoto *et al.*, “Study of sub-terahertz high power gyrotron for ECH&CD system of DEMO,” in *2015 IEEE Int. Conf. Plasma Sci. (ICOPS)*, Antalya, Turkey, May 2015.
- [21] V. E. Zapevalov *et al.*, “Preliminary design of powerful gyrotrons for IGNITOR and DEMO,” in *40th International Conference on Infrared Millimeter and Terahertz Waves (IRMMW-THz)*, Hong Kong, China, Aug. 2015.
- [22] E. A. Nanni, A. B. Barnes, R. G. Griffin, and R. J. Temkin, “THz dynamic nuclear polarization NMR,” *IEEE Trans. THz Sci. Tech.*, vol. 1, no. 1, pp. 145–163, Sep. 2011.
- [23] M. Y. Glyavin, T. Idehara, and S. P. Sabchevski, “Development of THz gyrotrons at IAP RAS and FIR UF and their applications in physical research and high-power THz technologies,” *IEEE Trans. THz Sci. Tech.*, vol. 5, no. 5, pp. 788–797, Sep. 2015.
- [24] M. Thumm, “State-of-the-art of high power gyro-devices and free electron masers. update 2014.” Karlsruhe Institute of Technology, Scientific Reports 7693, 2015.

- [25] G. Nusinovich, *Introduction to the Physics of Gyrotrons*. Baltimore and London: Johns Hopkins University Press, 2004.
- [26] G. S. Nusinovich, M. E. Read, O. Dumbrajs, and K. E. Kreischer, "Theory of gyrotrons with coaxial resonators," *IEEE Trans. Electron Devices*, vol. 41, no. 3, pp. 433–438, Mar. 1994.
- [27] C. Iatrou, S. Kern, and A. Pavelyev, "Coaxial cavities with corrugated inner conductor for gyrotrons," *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 44, no. 1, pp. 56–64, Jan. 1996.
- [28] Z. C. Ioannidis, K. A. Avramidis, and I. G. Tigelis, "Selectivity properties of coaxial gyrotron cavities with mode converting corrugations," *IEEE Trans. Electron Devices*, vol. 63, no. 3, pp. 1299–1306, Mar. 2016.
- [29] T. Rzesnicki *et al.*, "2.2-MW record power of the 170-GHz european preprototype coaxial-cavity gyrotron for ITER," *IEEE Trans. Plasma Sci.*, vol. 38, no. 6, pp. 1141–1149, Jun. 2010.
- [30] I. G. Pagonakis *et al.*, "Status of the EU 170 GHz/2 MW/CW coaxial cavity gyrotron for ITER: The dummy gun experiment," in *35th International Conference on Infrared Millimeter and Terahertz Waves (IRMMW-THz)*, Rome, Italy, Sep. 2010.
- [31] V. K. Lygin, V. N. Manuilov, A. N. Kuftin, A. B. Pavelyev, and B. Piosczyk, "Inverse magnetron injection gun for a coaxial 1.5 MW, 140 GHz gyrotron," *Int. J. Electron.*, vol. 79, no. 2, pp. 227–235, 1995.
- [32] O. Dumbrajs and G. S. Nusinovich, "Coaxial gyrotrons: past, present, and future (review)," *IEEE Trans. Plasma Sci.*, vol. 32, no. 3, pp. 934–946, Jun. 2004.
- [33] P. Sprangle, J. L. Vomvoridis, and W. M. Manheimer, "Theory of the quasioptical electron cyclotron maser," *Phys. Rev. A*, vol. 23, pp. 3127–3138, Jun. 1981.
- [34] K. D. Loukopoulos and J. L. Vomvoridis, "Axially non-uniform beam-tunnel geometries preserving the cross-section of a sheet beam," in *Joint 29th Int. Conf. Infr. Mill. Waves and 12th Int. Conf. THz Electronics*, M. Thumm and W. Wiesback, Eds., Karlsruhe, Germany, Sep. 2004, pp. 655–656.
- [35] K. Sakamoto *et al.*, "Development of 170 and 110 GHz gyrotrons for fusion devices," *Nuclear Fusion*, vol. 43, no. 8, pp. 729–737, 2003.
- [36] W. Lawson, J. P. Calame, B. P. Hogan, M. Skopec, C. D. Striffler, and V. L. Granatstein, "Performance characteristics of a high-power X-band two-cavity gyrotron," *IEEE Trans. Plasma Sci.*, vol. 20, no. 3, pp. 216–223, Jun. 1992.
- [37] S. Alberti *et al.*, "Experimental measurements on a 100 GHz frequency tunable quasioptical gyrotron." *Phys. Fluids B*, vol. 2, no. 7, pp. 1654–1661, Jul. 1990.
- [38] J. P. Hogge, T. M. Tran, and P. J. Paris, "Operation of a quasi-optical gyrotron with a gaussian output coupler." *Phys. Plasmas*, vol. 3, no. 9, pp. 3492–3500, Sep. 1996.

- [39] M. Pedrozzi, S. Alberti, J. P. Hogge, M. Q. Tran, and T. M. Tran, "Electron beam instabilities in gyrotron beam tunnels," *Phys. Plasmas*, vol. 5, no. 6, pp. 2421–2430, Jun. 1998.
- [40] I. Antakov, I. Gachev, and E. Zasytkin, "Self-excitation of spurious oscillations in the drift region of gyrotrons and their influence on gyrotron operation," *IEEE Trans. Plasma Sci.*, vol. 22, no. 5, pp. 878–882, Oct. 1994.
- [41] H. Shoyama *et al.*, "High-efficiency oscillation of 170 GHz high-power gyrotron at TE<sub>31,8</sub> mode using depressed collector," *Jpn. J. Appl. Phys.*, vol. 40, no. 8B, pp. L906–L908, 2001.
- [42] G. Gantenbein *et al.*, "Experimental results of series gyrotrons for the stellarator W7-X," in *22nd IAEA Fusion Energy Conf.*, Geneva, Switzerland, Oct. 2008.
- [43] K. Felch, M. Blank, P. Borchard, P. Cahalan, S. Cauffman, and H. Jory, "Recent test results on a 95 GHz, 2 MW gyrotron," in *33rd International Conference on Infrared Millimeter and Terahertz Waves (IRMMW-THz)*, Pasadena, California, USA, Sep. 2008.
- [44] A. Schlaich, "Time-dependent spectrum analysis in high power gyrotrons," διδακτορική διατριβή, Karlsruhe Institute of Technology, 2015.
- [45] K. Felch, M. Blank, P. Borchard, P. Cahalan, and S. Cauffman, "Recent high-power gyrotron activities at 95, 110 and 170 GHz," in *Proc. IVEC 2012*, Monterey, California, USA, Apr. 2012, pp. 109–110.
- [46] A. Schlaich *et al.*, "Examination of parasitic after-cavity oscillations in the W7-X series gyrotron SN4R," in *36th International Conference on Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves (IRMMW-THz)*, Houston, USA, Oct. 2011.
- [47] A. R. Choudhury, D. D'Andrea, and M. Thumm, "Study of dynamic after cavity interaction in gyrotrons - Part II: influence of a nonuniform magnetic field," *IEEE Trans. Electron Devices*, vol. 62, no. 1, pp. 192–199, Jan. 2015.
- [48] K. A. Avramidis *et al.*, "A comparative study on the modeling of dynamic after-cavity interaction in gyrotrons," *Phys. Plasmas*, vol. 22, no. 5, pp. 1–12, 2015.
- [49] M. Schmid *et al.*, "Recent achievements on tests of series gyrotrons for W7-X and planned extension at the KIT gyrotron test facility," *Fusion Engineering and Design*, vol. 88, no. 6 – 8, pp. 945 – 949, Oct. 2013.
- [50] K. Felch, M. Blank, P. Borchard, and S. Cauffman, "Progress in the development of 117.5 GHz and 170 GHz gyrotrons," in *39th International Conference on Infrared Millimeter and Terahertz Waves (IRMMW-THz)*, Tucson, AZ, USA, Sep. 2014.
- [51] I. G. Pagonakis *et al.*, "Status of the development of the EU 170 GHz 1 MW CW gyrotron," *Fusion Engineering and Design*, vol. 96-97, pp. 149–154, Oct. 2015.

- [52] J. M. Neilson, P. E. Latham, M. Caplan, and W. G. Lawson, "Determination of the resonant frequencies in a complex cavity using the scattering matrix formulation," *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 37, no. 8, pp. 1165–1170, Aug. 1989.
- [53] I. G. Tigelis, M. Pedrozzi, P. G. Cottis, and J. L. Vomvoridis, "Calculation of eigenmodes in a nonperiodic corrugated waveguide," *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 45, no. 2, pp. 236–244, Feb. 1997.
- [54] I. Tigelis, J. Vomvoridis, and S. Tzima, "High-frequency electromagnetic modes in a dielectric-ring loaded beam tunnel," *IEEE Trans. Plasma Sci.*, vol. 26, no. 3, pp. 922–930, Jun. 1998.
- [55] G. Anastasiou, G. Latsas, I. Tigelis, M. Dehler, P. Queffelec, and N. Dasyras, "Calculation of the electromagnetic waves in nonperiodic corrugated waveguides with dielectric loading," *IEEE Trans. Plasma Sci.*, vol. 32, no. 3, pp. 1310–1317, Jun. 2004.
- [56] Γ. Λάτσας, *Διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων σε μεταλλικούς κυματοδηγούς και αλληλεπίδραση με ηλεκτρονικές δέσμες*, διδακτορική διατριβή, Τμ. Φυσικής, Ε.Κ.Π.Α., Αθήνα, 2006.
- [57] G. Latsas, J. Vomvoridis, K. Avramides, and I. Tigelis, "Beam-wave interaction in corrugated structures in the small-signal regime," *IEEE Trans. Plasma Sci.*, vol. 37, no. 10, pp. 2020–2030, Oct. 2009.
- [58] Μ. Μωραΐτου, *Μελέτη των χαρακτηριστικών διάδοσης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων σε δίαυλο δέσμης ομοαξονικού γυροτρονίου*, διδακτορική διατριβή, Τμ. Φυσικής, Ε.Κ.Π.Α., Αθήνα, 2012.
- [59] G. P. Latsas, M. D. Moraitou, Z. C. Ioannidis, and I. G. Tigelis, "Calculations on the beam-wave interactions in coaxial gyrotron beam tunnels," *IEEE Trans. Plasma Sci.*, vol. 38, no. 6, pp. 1185–1192, Jun. 2010.
- [60] G. P. Latsas, Z. C. Ioannidis, and I. G. Tigelis, "Dependence of parasitic modes on geometry and attenuation in gyrotron beam tunnels," *IEEE Trans. Electron Devices*, vol. 40, no. 6, pp. 1538–1544, Jun. 2012.
- [61] M. D. Moraitou, G. P. Latsas, Z. C. Ioannidis, and I. G. Tigelis, "Parasitic oscillations in coaxial gyrotron beam tunnels," *IEEE Trans. Electron Devices*, vol. 60, no. 4, pp. 1469–1475, Apr. 2013.
- [62] J. Yu, T. M. Antonsen, and G. S. Nusinovich, "Excitation of backward waves in beam tunnels of high-power gyrotrons," *IEEE Trans. Plasma Sci.*, vol. 38, no. 6, pp. 1193–1199, Jun. 2010.
- [63] L. Thorndahl, S. Alberti, J.-P. Hogge, F. Li, and T. Tran, "Comparative study of dielectric loaded structures for suppressing gyro-BWO instabilities in gyrotron beam-ducts (BD) using HFSS," in *36th International Conference on Infrared, Millimeter and Terahertz Waves (IRMMW-THz)*, Houston, Texas, USA, Oct. 2011.

- [64] N. Kumar, M. K. Alaria, U. Singh, A. Bera, T. P. Singh, and A. K. Sinha, "Design of beam tunnel for 42 GHz, 200 kW gyrotron," *J. Infrared Millim. Terahertz Waves*, vol. 31, no. 5, pp. 601–607, 2010.
- [65] N. Kumar, U. Singh, T. P. Singh, and A. K. Sinha, "Suppression criteria of parasitic mode oscillations in a gyrotron beam tunnel," *Phys. Plasmas*, vol. 18, no. 2, pp. 1–5, 2011.
- [66] N. Kumar, U. Singh, V. Yadav, A. Kumar, and A. Sinha, "Numerical design and analysis of parasitic mode oscillations for 95 GHz gyrotron beam tunnel," *Infrared Phys. Tech.*, vol. 58, pp. 80–85, 2013.
- [67] A. Samartsev *et al.*, "Numerical simulation of parasitic gyro-BWO interaction in a gyrotron beam tunnel," in *36th International Conference on Infrared Millimeter and Terahertz Waves (IRMMW-THz)*, Houston, Texas, USA, Oct. 2011.
- [68] J. Neudorfer, A. Stock, R. Schneider, S. Roller, and C. D. Munz, "Efficient parallelization of a three-dimensional high-order particle-in-cell method for the simulation of a 170 GHz gyrotron resonator," *IEEE Trans. Plasma Sci.*, vol. 41, no. 1, pp. 87–98, Jan. 2013.
- [69] L. Ives, J. Neilson, and W. Vogler, "Cascade - an advanced computational tool for waveguide components and window design," in *Proc. Particle Accelerator Conf.*, vol. 1, 2003, pp. 269–271.
- [70] G. L. James, "Analysis and design of TE<sub>11</sub>-to-HE<sub>11</sub> corrugated cylindrical waveguide mode converters," *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 29, no. 10, pp. 1059–1066, Oct. 1981.
- [71] M. Botton, T. Antonsen, B. Levush, K. Nguyen, and A. Vlasov, "MAGY: a time-dependent code for simulation of slow and fast microwave sources," *IEEE Trans. Plasma Sci.*, vol. 26, no. 3, pp. 882–892, Jun. 1998.
- [72] S. Y. Park and J. L. Hirshfeld, "Theory of wakefields in a dielectric-lined waveguide," *Phys. Rev. E*, vol. 62, pp. 1266–1283, Jul. 2000.
- [73] A. N. Vlasov and T. M. Antonsen, "Numerical solution of fields in lossy structures using MAGY," *IEEE Trans. Electron Devices*, vol. 48, no. 1, pp. 45–55, Jan. 2001.
- [74] R. Collin, *Foundations for Microwave Engineering, 2nd ed.* New York, NY: McGraw-Hill, 1992.
- [75] W. Main *et al.*, "Electromagnetic properties of open and closed overmoded slow-wave resonators for interaction with relativistic electron beams," *IEEE Trans. Plasma Sci.*, vol. 22, no. 5, pp. 566–577, Oct. 1994.
- [76] R. Mittra and S. Lee, *Analytical techniques in the theory of guided waves*, ser. Macmillan series in electrical science. Macmillan, 1971.
- [77] H. Henke, "Impedances of a set of cylindrical resonators with beam pipes," *Part. Accel.*, vol. 25, pp. 183–199, Nov. 1987.

- [78] L. Schachter and J. A. Nation, "Propagation of electromagnetic and space-charge waves in quasiperiodic structures," *Phys. Plasmas*, vol. 2, no. 3, pp. 889–901, Mar. 1995.
- [79] H. S. Lee and H. J. Eom, "Scattering from a cylindrical waveguide with rectangular corrugations," *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 49, no. 2, pp. 315–320, Feb. 2001.
- [80] S. Banna, J. A. Nation, L. Schachter, and P. Wang, "The interaction of symmetric and asymmetric modes in a high-power traveling-wave amplifier," *IEEE Trans. Plasma Sci.*, vol. 28, no. 3, pp. 798–811, Jun. 2000.
- [81] T. Shintake, "Nose-cone removed pillbox cavity for high power klystron amplifiers," *IEEE Trans. Electron Devices*, vol. 38, no. 4, pp. 917–923, Apr. 1991.
- [82] H. E. Brandt and H. S. Uhm, "Cubic dispersion relation for a relativistic backward-wave oscillator," *IEEE Trans. Plasma Sci.*, vol. 16, no. 2, pp. 264–269, Apr. 1988.
- [83] J. Y. Choe and H. S. Uhm, "Theory of gyrotron amplifiers in disc or helix-loaded waveguides," *Int. J. Electron.*, vol. 53, no. 6, pp. 729–741, 1982.
- [84] B. G. Danly *et al.*, "Development and testing of a high-average power, 94-GHz gyrokystron," *IEEE Trans. Plasma Sci.*, vol. 28, no. 3, pp. 713–726, Jun. 2000.
- [85] T. P. Wangler, *RF Linear Accelerators*. New York, NY: Wiley, 2008.
- [86] U. Papziner and F. Arndt, "Field theoretical computer-aided design of rectangular and circular iris coupled rectangular or circular waveguide cavity filters," *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 41, no. 3, pp. 462–471, Mar. 1993.
- [87] D. Wagner *et al.*, "Bragg reflection band stop filter for ECE on wega," *J. Infrared Millim. Terahertz Waves*, vol. 32, no. 12, pp. 1424–1433, 2011.
- [88] J. Chelis and J. Vomvouridis, "Electromagnetic modelling of dielectric loaded aperiodic gyrotron beam tunnels," in *EC17 - 17th Joint Workshop on Electron Cyclotron Emission and Electron Cyclotron Resonance Heating*, Deurne, The Netherlands, Apr. 2012.
- [89] J. P. Calame, M. Garven, B. G. Danly, B. Levush, and K. T. Nguyen, "Gyrotron-traveling wave-tube circuits based on lossy ceramics," *IEEE Trans. Electron Devices*, vol. 49, no. 8, pp. 1469–1477, Aug. 2002.
- [90] M. Blank, B. G. Danly, B. Levush, and D. E. Pershing, "Experimental investigation of W-band (93 GHz) gyrokystron amplifiers," *IEEE Trans. Plasma Sci.*, vol. 26, no. 3, pp. 409–415, Jun. 1998.
- [91] J. D. Jackson, *Classical electrodynamics*, 3rd ed. New York, NY: Wiley, 1999.
- [92] T. Itoh, *Numerical Techniques for Microwave and Millimeter-Wave Passive Structures*. New York, NY: Wiley, 1989.

- [93] S. Savaidis, Z. Ioannidis, and N. Stathopoulos, "Hybrid field/transmission-line model for the study of coaxial corrugated waveguides," *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 60, no. 10, pp. 2972–2978, Oct. 2012.
- [94] A. Nosich, "The method of analytical regularization in wave-scattering and eigenvalue problems: foundations and review of solutions," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 41, no. 3, pp. 34–49, Jun. 1999.
- [95] A. Nosich, "Radiation conditions, limiting absorption principle, and general relations in open waveguide scattering," *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, vol. 8, no. 3, pp. 329–353, 1994.
- [96] G. Carrier, M. Krook, and C. Pearson, *Functions of a Complex Variable: Theory and Technique*. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005.
- [97] L. A. Weinstein, *Open resonators and open waveguides*, P. Beckmann, Ed. Boulder, Colo.: Golem Press, 1969.
- [98] V. P. Shestopalov and Y. V. Shestopalov, *Spectral Theory and Excitation of Open Structures*, ser. IEE Electromag. Waves. London, U.K.: IEE Press, 1996.
- [99] T. T. Wu, "Theory of the microstrip," *J. Appl. Phys.*, vol. 28, no. 3, pp. 299–302, Mar. 1957.
- [100] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing*, 3rd ed. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 2007.
- [101] P. Queffelec, M. Le Floch, and P. Gelin, "Nonreciprocal cell for the broadband measurement of tensorial permeability of magnetized ferrites: direct problem," *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 47, no. 4, pp. 390–397, Apr. 1999.
- [102] S. Steinberg, "Meromorphic families of compact operators," *Arch. Ration. Mech. Anal.*, vol. 31, no. 5, pp. 372–379, 1968.
- [103] G. Annino, M. Cassettari, and M. Martinelli, "A new concept of open TE<sub>011</sub> cavity," *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 57, no. 4, pp. 775–783, Apr. 2009.
- [104] E. Borie and O. Dumbrajs, "Calculation of eigenmodes of tapered gyrotron resonators," *Int. J. Electron.*, vol. 60, no. 2, pp. 143–154, 1986.
- [105] A. W. Fliflet, R. C. Lee, S. H. Gold, W. M. Manheimer, and E. Ott, "Time-dependent multimode simulation of gyrotron oscillators," *Phys. Rev. A*, vol. 43, pp. 6166–6176, Jun. 1991.
- [106] S. Kern *et al.*, "Simulation and experimental investigations on dynamic after cavity interaction (ACI)," in *35th International Conference on Infrared Millimeter and Terahertz Waves (IRMMW-THz)*, Rome, Italy, Sept 2010.



- [107] K. A. Avramides, I. G. Pagonakis, C. T. Iatrou, and J. L. Vomvoridis, "EURIDICE: A code-package for gyrotron interaction simulations and cavity design," in *EC17 - 17th Joint Workshop on Electron Cyclotron Emission and Electron Cyclotron Resonance Heating*, Deurne, The Netherlands, Apr. 2012.
- [108] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, 9th ed. New York, NY: Dover, 1964.
- [109] A. Kazemipour *et al.*, "Design and calibration of a compact quasi-optical system for material characterization in millimeter/submillimeter wave domain," *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 64, no. 6, pp. 1438–1445, Jun. 2015.
- [110] J. Baker-Jarvis, E. Vanzura, and W. Kissick, "Improved technique for determining complex permittivity with the transmission/reflection method," *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 38, no. 8, pp. 1096–1103, Aug 1990.
- [111] J. Jelonnek *et al.*, "Progress on 140 GHz, 1 MW, CW series gyrotrons for W7-X," in *37th International Conference on Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves (IRMMW-THz)*, Wollongong, Australia, Sept. 2012.
- [112] O. Dumbrajs and G. S. Nusinovich, "Cold-cavity and self-consistent approaches in the theory of mode competition in gyrotrons," *IEEE Trans. Plasma Sci.*, vol. 20, no. 3, pp. 133–138, Jun. 1992.
- [113] J. Ock and H. J. Eom, "Radiation of a Hertzian dipole in a short-ended conducting circular cylinder with narrow circumferential slots," *Progress In Electromagnetics Research Letters*, vol. 2, pp. 11–20, 2008.
- [114] T. Rzesnicki *et al.*, "2 MW, 170 GHz coaxial-cavity short-pulse gyrotron - Investigations on electron beam instabilities and parasitic oscillations," in *38th International Conference on Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves (IRMMW-THz)*, Mainz, Germany, Sept 2013.