



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

*Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
& Φυσικών Επιστημών*

Διπλωματική εργασία:

Ομάδες Πινάκων

Ονοματεπώνυμο: Παναγιώτης Χριστόπουλος

Επιβλέπων καθηγητής: Α. Φελλούρης, Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εξεταστική επιτροπή: Π. Ψαρράκος, Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Π. Στεφανέας, Λέκτορας Ε.Μ.Π.

Αθήνα 2016

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών &
Φυσικών Επιστημών

Διπλωματική εργασία:

Ομάδες Πινάκων

Ονοματεπώνυμο: Παναγιώτης Χριστόπουλος

Επιβλέπων καθηγητής: Α. Φελλούρης, Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εξεταστική επιτροπή: Π. Ψαρράκος, Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Π. Στεφανέας, Λέκτορας Ε.Μ.Π.

Αθήνα 2016

Πρόλογος

Στην συγκεκριμένη διπλωματική εργασία θα ασχοληθούμε με τις ομάδες πινάκων, που ουσιαστικά είναι σύνολα, των οποίων όλα τα στοιχεία είναι αντιστρέψιμοι πίνακες και τα σύνολα αυτά, εφοδιασμένα με την πράξη του πολλαπλασιασμού πινάκων ($\cdot$), αποτελούν ομάδες. Επίσης θα μελετήσουμε τις αναπαραστάσεις των ομάδων πινάκων.

Στο Κεφάλαιο 1 γίνεται μια εισαγωγή στην Ανάλυση Πινάκων, θεμελιώνεται το σύνολο των πινάκων με στοιχεία από το σώμα K και οι πράξεις που ορίζονται στο σύνολο αυτό μεταξύ των πινάκων. Στη συνέχεια ορίζουμε συγκεκριμένες κατηγορίες πινάκων, που θα μας απασχολήσουν στα επόμενα κεφάλαια και αναφέρονται βασικές ιδιότητες των πινάκων και της ορίζουσας.

Στο Κεφάλαιο 2 ορίζουμε την έννοια του διανυσματικού χώρου, του διανυσματικού υπόχωρου, του χώρου με εσωτερικό γινόμενο, του χώρου με νόρμα και της γραμμικής απεικόνισης.

Στο Κεφάλαιο 3 μελετάμε τη δομή της ομάδας, ορίζουμε την έννοια της υποομάδας, μελετάμε απεικονίσεις μεταξύ ομάδων που διατηρούν δομές και ορίζουμε τις έννοιες του ομομορφισμού, του μονομορφισμού, του επιμορφισμού και του ισομορφισμού ομάδων.

Στο Κεφάλαιο 4 μελετάμε τις ομάδες πινάκων. Αρχικά ορίζουμε τα σύνολα που αποτελούν τις ομάδες πινάκων. Στη συνέχεια γίνεται μια τοπολογική μελέτη των ομάδων, ορίζουμε τις τοπολογικές ομάδες, τις Lie ομάδες και μελετάμε τις ιδιότητες και τις αναπαραστάσεις των ομάδων πινάκων.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1 – Πίνακες	9
1.1 Βασικοί ορισμοί	9
1.2 Ορίζουσα ενός πίνακα	22
Κεφάλαιο 2 – Διανυσματικοί χώροι & Γραμμικές απεικονίσεις	23
2.1 Διανυσματικοί χώροι	23
2.2 Γραμμικές απεικονίσεις	27
Κεφάλαιο 3 – Θεωρία Ομάδων	31
3.1 Βασικοί ορισμοί	31
3.2 Υποομάδες	43
3.3 Απεικονίσεις που διατηρούν δομές	44
3.4 Αναπαραστάσεις ομάδων	45
Κεφάλαιο 4 – Ομάδες Πινάκων	51
4.1 Βασικοί ορισμοί	51
4.2 Πεπερασμένες συνεχείς ομάδες	55
4.3 Τοπολογικές ομάδες	61
4.4 Συνεκτική & συμπαγής ομάδα	65
4.5 Lie ομάδες	66
4.6 Αναπαράσταση μιας συνεχούς ομάδας	73
4.7 Η αξονική ομάδα περιστροφών $SO(2)$	74
4.7.1 Οι γεννήτορες της αξονικής ομάδας περιστροφών $SO(2)$	75
4.8 Η ομάδα περιστροφών $SO(3)$	78

4.9 Η ειδική ορθομοναδιαία ομάδα $SU(2)$	85
4.10 Οι γεννήτορες των ομάδων $U(n)$ & $SU(n)$	91
4.11 Η Lie άλγεβρα μιας Lie ομάδας	94
4.12 Η ειδική ορθομοναδιαία ομάδα $SU(3)$	100
4.13 Φυσικές εφαρμογές των ομάδων $SU(2)$ & $SU(3)$	101
Βιβλιογραφία	105

Κεφάλαιο 1

Πίνακες

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τους πίνακες και τις στοιχειώδεις ιδιότητές τους. Οι πίνακες εμφανίζονται στη θεωρία των γραμμικών συστημάτων, στη θεωρία των γραμμικών απεικονίσεων κι έχουν εφαρμογή σε όλους τους κλάδους των Μαθηματικών.

1.1 Βασικοί ορισμοί

Ορισμοί: Μία ορθογώνια παράταξη $\mu \cdot \nu$ στοιχείων από το σώμα K σε μ οριζόντιες σειρές (που λέγονται **γραμμές**) και σε ν κατακόρυφες σειρές (που λέγονται **στήλες**) της μορφής:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\nu} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\mu 1} & \cdots & a_{\mu\nu} \end{bmatrix}$$

λέγεται **πίνακας τύπου $\mu \times \nu$** . Ένας πίνακας συμβολίζεται με ένα κεφαλαίο γράμμα ή με το γενικό στοιχείο a_{ij} σε

παρένθεση. Δηλαδή γράφουμε $A=(a_{ij})_{\mu \times \nu}$ ή $A=(a_{ij})$ ή απλώς A .

Τα στοιχεία a_{ij} λέγονται **στοιχεία του πίνακα A** και οι δείκτες i και j δηλώνουν τη γραμμή και τη στήλη αντίστοιχα που ανήκει το στοιχείο a_{ij} .

Όταν $\mu = \nu$, τότε ο πίνακας A λέγεται **τετραγωνικός πίνακας $\nu \times \nu$** .

Το σύνολο όλων των πινάκων τύπου $\mu \times \nu$ με στοιχεία από το σώμα K συμβολίζεται με $M_{\mu \times \nu}(K)$ και το σύνολο όλων των $\nu \times \nu$ τετραγωνικών πινάκων με στοιχεία από το σώμα K συμβολίζεται με $M_{\nu}(K)$.

Ορισμός: Στο σύνολο $M_{\mu \times \nu}(K)$ όλων των πινάκων τύπου $\mu \times \nu$ με στοιχεία από το σώμα K ορίζεται η **πρόσθεση πινάκων** (+) να είναι η απεικόνιση:

$$+ : M_{\mu \times \nu}(K) \times M_{\mu \times \nu}(K) \rightarrow M_{\mu \times \nu}(K)$$

$$(A, B) \rightarrow + (A, B) = A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

όπου οι πίνακες $A, B \in M_{\mu \times \nu}(K)$ με $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ και ο πίνακας $A+B=(a_{ij}+b_{ij})$ λέγεται **άθροισμα των πινάκων A, B** και κάθε του στοιχείο προκύπτει από το άθροισμα των αντίστοιχων στοιχείων των πινάκων A και B .

Ορισμός: Έστω οι πίνακες $A, B \in M_{\mu \times \nu}(K)$ με $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$. Η σχέση της ισότητας στο σύνολο $M_{\mu \times \nu}(K)$ των πινάκων τύπου $\mu \times \nu$ με στοιχεία από το σώμα K ορίζεται ως εξής:

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \forall i = 1, 2, \dots, \mu \text{ και } \forall j = 1, 2, \dots, \nu$$

δηλαδή δύο **πίνακες A, B** είναι **ίσοι** μεταξύ τους όταν τα αντίστοιχα στοιχεία των πινάκων A, B είναι ίσα μεταξύ τους.

Θεώρημα 1 Η πράξη της πρόσθεσης πινάκων (+) στο σύνολο $M_{\mu \times \nu}(K)$ όλων των πινάκων τύπου $\mu \times \nu$ με στοιχεία από το σώμα K ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

α) προσεταιριστική ιδιότητα: $(A+B)+\Gamma=A+(B+\Gamma)$, $\forall A, B, \Gamma \in M_{\mu \times \nu}(K)$,

β) αντιμεταθετική ιδιότητα: $A+B=B+A$, $\forall A, B \in M_{\mu \times \nu}(K)$,

γ) υπάρχει ο **μηδενικός πίνακας** $O=(0)_{\mu \times \nu}$, του οποίου όλα τα στοιχεία είναι μηδενικά (δηλαδή εξ' ορισμού ισχύει ότι: $A=O \Leftrightarrow a_{ij}=0$, $\forall i=1, 2, \dots, \mu$ και $\forall j=1, 2, \dots, \nu$) και αποτελεί το ουδέτερο στοιχείο για την πρόσθεση πινάκων (+), δηλαδή $\forall A \in M_{\mu \times \nu}(K)$ ισχύει ότι: $A+O=O+A=A$,

δ) $\forall A \in M_{\mu \times \nu}(K)$ υπάρχει ο **αντίθετος πίνακας** $-A=(-a_{ij})_{\mu \times \nu}$ ώστε να ισχύει: $A+(-A)=(-A)+A=O$.

Απόδειξη α) Έστω οι πίνακες $A, B, \Gamma \in M_{\mu \times \nu}(K)$ με $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, $\Gamma=(c_{ij})$. Από τον ορισμό της πρόσθεσης πινάκων (+) στο σύνολο $M_{\mu \times \nu}(K)$ των πινάκων τύπου $\mu \times \nu$ με στοιχεία από το σώμα K και λόγω της προσεταιριστικής ιδιότητας της πρόσθεσης (+) στοιχείων που ανήκουν στο σώμα K (επειδή το σύνολο K αποτελεί σώμα, εξ' ορισμού ισχύει ότι $\forall a, b, c \in K: (a+b)+c=a+(b+c)$) έπεται ότι:

$$(A+B)+\Gamma=(a_{ij}+b_{ij})+(c_{ij})=(a_{ij})+(b_{ij}+c_{ij})=A+(B+\Gamma)$$

και επομένως ικανοποιείται η προσεταιριστική ιδιότητα.

β) Έστω οι πίνακες $A, B \in M_{\mu \times \nu}(K)$ με $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$. Από τον ορισμό της πρόσθεσης πινάκων (+) στο σύνολο $M_{\mu \times \nu}(K)$ των πινάκων τύπου $\mu \times \nu$ με στοιχεία από το σώμα K και λόγω της αντιμεταθετικής ιδιότητας της πρόσθεσης (+) στοιχείων που ανήκουν στο σώμα K (επειδή το σύνολο K αποτελεί σώμα, εξ' ορισμού ισχύει ότι $\forall a, b \in K: a+b=b+a$) έπεται ότι:

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})=(b_{ij}+a_{ij})=B+A$$

κι επομένως ικανοποιείται η αντιμεταθετική ιδιότητα.

γ) Έστω ο πίνακας $A \in M_{\mu \times \nu}(K)$ με $A=(a_{ij})$. Ορίζουμε τον πίνακα $O=(0)_{\mu \times \nu}$, του οποίου όλα τα στοιχεία είναι μηδενικά και προφανώς ανήκει στο σύνολο $M_{\mu \times \nu}(K)$ των πινάκων τύπου $\mu \times \nu$ με στοιχεία από το σώμα K . Από τον ορισμό της πρόσθεσης πινάκων (+) και λόγω της ιδιότητας του ουδέτερου στοιχείου που ανήκει στο σώμα K (επειδή το σύνολο K αποτελεί σώμα, $\exists 0 \in K$ που αποτελεί το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης (+) στοιχείων του σώματος K κι εξ' ορισμού ισχύει ότι $\forall a \in K: a+0=0+a=a$) έπεται ότι:

$$A+O=(a_{ij}+0)=(0+a_{ij})=O+A=(0+a_{ij})=(a_{ij})=A$$

κι επομένως $\exists O \in M_{\mu \times \nu}(K)$ τ.ω. $\forall A \in M_{\mu \times \nu}(K): A+O=O+A=A$.

δ) Έστω ο πίνακας $A \in M_{\mu \times \nu}(K)$ με $A=(a_{ij})$. Ορίζουμε τον πίνακα $-A=(-a_{ij})_{\mu \times \nu}$ του οποίου τα στοιχεία είναι τα αντίθετα στοιχεία του πίνακα A και προφανώς ανήκει στο σύνολο $M_{\mu \times \nu}(K)$ των πινάκων τύπου $\mu \times \nu$ με στοιχεία από το σώμα K . Από τον ορισμό της πρόσθεσης πινάκων (+) και λόγω της ιδιότητας των αντιθέτων στοιχείων που ανήκουν στο σώμα K (επειδή το σύνολο K αποτελεί σώμα, ορίζεται το αντίθετο στοιχείο κι εξ' ορισμού ισχύει ότι $\forall a \in K, \exists -a \in K: a+(-a)=(-a)+a=0$) έπεται ότι:

$$A+(-A)=(a_{ij}+(-a_{ij}))=((-a_{ij})+a_{ij})=(-A)+A=((-a_{ij})+a_{ij})= (0)=O.$$

Επομένως $\forall A \in M_{\mu \times \nu}(K), \exists -A \in M_{\mu \times \nu}(K): A+(-A)=(-A)+A=O$.

■

Παρατηρήσεις α) Από τον ορισμό και τις ιδιότητες της πρόσθεσης πινάκων (+) που περιγράφονται στο παραπάνω θεώρημα, προκύπτει άμεσα ότι το άθροισμα τριών ή περισσότερων πινάκων ίδιου τύπου είναι το ίδιο με οποιαδήποτε σειρά κι αν εκτελεστούν οι επιμέρους προσθέσεις.

β) Με βάση το Θεώρημα 1, θα δούμε αργότερα ότι το σύνολο $M_{\mu \times \nu}(K)$ των πινάκων τύπου $\mu \times \nu$ με στοιχεία από το σώμα K αποτελεί αβελιανή προσθετική ομάδα.

Ορισμός: Στο σύνολο $M_{\mu \times \nu}(K)$ όλων των πινάκων τύπου $\mu \times \nu$ με στοιχεία από το σώμα K ορίζεται ο **βαθμωτός πολλαπλασιασμός στοιχείου / αριθμού με πίνακα** ($\bullet$) να είναι η απεικόνιση:

$$\bullet : K \times M_{\mu \times \nu}(K) \rightarrow M_{\mu \times \nu}(K)$$

$$(\lambda, A) \rightarrow \bullet(\lambda, A) = \lambda \bullet A = (\lambda \bullet a_{ij})$$

όπου το στοιχείο / αριθμός $\lambda \in K$, ο πίνακας $A \in M_{\mu \times \nu}(K)$ με $A = (a_{ij})$ και ο πίνακας $\lambda \bullet A = (\lambda \bullet a_{ij})$ λέγεται **γινόμενο του στοιχείου / αριθμού λ με τον πίνακα A** και κάθε στοιχείο του πίνακα $\lambda \bullet A$ προκύπτει από το βαθμωτό γινόμενο των αντίστοιχων στοιχείων του πίνακα A με τον αριθμό λ .

Θεώρημα 2 Η πράξη του βαθμωτού πολλαπλασιασμού ($\bullet$) στοιχείου με πίνακα από το σύνολο $M_{\mu \times \nu}(K)$ όλων των πινάκων τύπου $\mu \times \nu$ με στοιχεία από το σώμα K ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$\alpha) \lambda \bullet (A + B) = \lambda \bullet A + \lambda \bullet B, \quad \forall \lambda \in K \text{ και } \forall A, B \in M_{\mu \times \nu}(K) \text{ με } A = (a_{ij}), B = (b_{ij}),$$

$$\beta) (\lambda + \mu) \bullet A = \lambda \bullet A + \mu \bullet A, \quad \forall \lambda, \mu \in K \text{ και } \forall A \in M_{\mu \times \nu}(K) \text{ με } A = (a_{ij}),$$

$$\gamma) \lambda \bullet (\mu \bullet A) = (\lambda \bullet \mu) \bullet A, \forall \lambda, \mu \in K \text{ και } \forall A \in M_{\mu \times \nu}(K) \text{ με } A = (a_{ij}),$$

$$\delta) 1 \bullet A = A, \forall A \in M_{\mu \times \nu}(K) \text{ με } A = (a_{ij}), \text{ όπου το } 1 \in K \text{ αποτελεί το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού στοιχείων του σώματος } K \text{ κι εξ' ορισμού ισχύει ότι } \forall a \in K : a \bullet 1 = 1 \bullet a = a.$$

Απόδειξη α) Έστω $\lambda \in K$ κι έστω οι πίνακες $A, B \in M_{\mu \times \nu}(K)$ με $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$. Από τον ορισμό και τις ιδιότητες της πρόσθεσης πινάκων (+) και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού ($\bullet$) στοιχείου με πίνακα από το σύνολο $M_{\mu \times \nu}(K)$ των πινάκων τύπου $\mu \times \nu$ με στοιχεία από το σώμα K και λόγω της επιμεριστικής ιδιότητας του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση στοιχείων που ανήκουν στο σώμα K (επειδή το σύνολο K αποτελεί σώμα, εξ' ορισμού ισχύει ότι $\forall a, b, c \in K : a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c$) έπεται ότι:

$$\lambda \bullet (A + B) = (\lambda \bullet (a_{ij} + b_{ij})) = (\lambda \bullet a_{ij} + \lambda \bullet b_{ij}) = (\lambda \bullet a_{ij}) + (\lambda \bullet b_{ij}) = \lambda \bullet A + \lambda \bullet B.$$

β) Έστω $\lambda, \mu \in K$ κι έστω ο πίνακας $A \in M_{\mu \times \nu}(K)$ με $A = (a_{ij})$. Από τον ορισμό και τις ιδιότητες της πρόσθεσης πινάκων (+) και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού ($\bullet$) στοιχείου με πίνακα από το σύνολο $M_{\mu \times \nu}(K)$ των πινάκων τύπου $\mu \times \nu$ με στοιχεία από το σώμα K και λόγω της επιμεριστικής ιδιότητας του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση στοιχείων που ανήκουν στο σώμα K (επειδή το σύνολο K αποτελεί σώμα, εξ' ορισμού ισχύει ότι $\forall a, b, c \in K : (a + b) \bullet c = a \bullet c + b \bullet c$) έπεται ότι:

$$(\lambda + \mu) \bullet A = ((\lambda + \mu) \bullet (a_{ij})) = (\lambda \bullet a_{ij} + \mu \bullet a_{ij}) = (\lambda \bullet a_{ij}) + (\mu \bullet a_{ij}) = \lambda \bullet A + \mu \bullet A.$$

γ) Έστω $\lambda, \mu \in K$ κι έστω ο πίνακας $A \in M_{\mu \times \nu}(K)$ με $A = (a_{ij})$. Από τον ορισμό του βαθμωτού πολλαπλασιασμού $(\bullet)$ στοιχείου με πίνακα από το σύνολο $M_{\mu \times \nu}(K)$ όλων των πινάκων τύπου $\mu \times \nu$ με στοιχεία από το σώμα K και λόγω της προσεταιριστικής ιδιότητας του πολλαπλασιασμού $(\bullet)$ στοιχείων που ανήκουν στο σώμα K (επειδή το σύνολο K αποτελεί σώμα, εξ' ορισμού ισχύει ότι $\forall a, b, c \in K: a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$) έπεται ότι:

$$\lambda \bullet (\mu \bullet A) = (\lambda \bullet (\mu \bullet a_{ij})) = ((\lambda \bullet \mu) \bullet (a_{ij})) = (\lambda \bullet \mu) \bullet A$$

δ) Έστω ο πίνακας $A \in M_{\mu \times \nu}(K)$ με $A = (a_{ij})$. Από τον ορισμό του βαθμωτού πολλαπλασιασμού $(\bullet)$ στοιχείου με πίνακα από το σύνολο $M_{\mu \times \nu}(K)$ όλων των πινάκων τύπου $\mu \times \nu$ με στοιχεία από το σώμα K και λόγω της ιδιότητας του ουδετέρου στοιχείου που ανήκει στο σώμα K (επειδή το σύνολο K αποτελεί σώμα, $\exists 1 \in K$ που αποτελεί το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού $(\bullet)$ στοιχείων του σώματος K κι εξ' ορισμού ισχύει ότι $\forall a \in K: a \bullet 1 = 1 \bullet a = a$) έπεται ότι:

$$1 \bullet A = (1 \bullet a_{ij}) = (a_{ij}) = A$$

■

Παρατήρηση Με βάση το Θεώρημα 2, θα δούμε αργότερα ότι το σύνολο $M_{\mu \times \nu}(K)$ των πινάκων τύπου $\mu \times \nu$ με στοιχεία από το σώμα K , εφοδιασμένο με τις πράξεις της πρόσθεσης πινάκων $(+)$ και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού $(\bullet)$ στοιχείου με πίνακα, αποκτά τη δομή διανυσματικού χώρου πάνω στο σώμα K .

Ορισμός: Έστω οι πίνακες $A \in M_{\mu \times \nu}(K)$, $B \in M_{\nu \times \rho}(K)$ με $A = (a_{ij})_{\mu \times \nu}$ και $B = (b_{ij})_{\nu \times \rho}$. Το **γινόμενο των πινάκων** $(\bullet)$ A, B είναι ο πίνακας

$A \cdot B = (c_{ij})_{\mu \times \rho}$, τύπου $\mu \times \rho$ με στοιχεία από το σώμα K , όπου το γενικό του στοιχείο δίνεται από τη σχέση:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{iv}b_{vj} = \sum_{k=1}^v a_{ik}b_{kj}$$

και προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό των στοιχείων της i -οστής γραμμής του πίνακα A με τα αντίστοιχα στοιχεία της j -οστής στήλης του πίνακα B κι άθροιση των γινομένων που προκύπτουν.

Από τον ορισμό του γινομένου πινάκων $(\cdot)$ είναι προφανές ότι ο πίνακας $A \cdot B$ ορίζεται μόνο όταν ο αριθμός των στηλών του πίνακα A ισούται με τον αριθμό των γραμμών του πίνακα B . Επίσης όπως φαίνεται άμεσα δεν ικανοποιείται η αντιμεταθετική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού πινάκων, αφού ο πίνακας $B \cdot A$ μπορεί να μην ορίζεται καν. Για τις ανάγκες της παρούσας διπλωματικής εργασίας θα περιοριστούμε στο γινόμενο πινάκων που ανήκουν στο σύνολο $M_n(K)$, δηλαδή το σύνολο όλων των $n \times n$ τετραγωνικών πινάκων με στοιχεία από το σώμα K .

Η αφετηρία του ορισμού του γινομένου πινάκων $(\cdot)$ είναι η θεωρία των γραμμικών απεικονίσεων που θα μελετήσουμε αργότερα. Θα δούμε ότι σε κάθε γραμμική απεικόνιση αντιστοιχίζεται ένας πίνακας κι αντιστρόφως. Επιπλέον αν οι πίνακες A και B είναι αντίστοιχοι των γραμμικών απεικονίσεων f και g , τότε ο πίνακας που ορίζουμε ως γινόμενο $A \cdot B$ είναι ο αντίστοιχος πίνακας της απεικόνισης $f \circ g$.

Θεώρημα 3 Έστω οι πίνακες A, B, Γ που είναι κατάλληλα επιλεγμένοι έτσι ώστε να ορίζονται οι παρακάτω πράξεις. Η πράξη του γινομένου πινάκων $(\cdot)$ με στοιχεία από το σώμα K ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

α) προσεταιριστική ιδιότητα: $(A \cdot B) \cdot \Gamma = A \cdot (B \cdot \Gamma)$,

β) επιμεριστικές ιδιότητες: $A \cdot (B + \Gamma) = A \cdot B + A \cdot \Gamma$ και

$$(A + B) \cdot \Gamma = A \cdot \Gamma + B \cdot \Gamma,$$

γ) Αν $A \cdot B = O \not\Rightarrow A = O$ ή $B = O$.

Απόδειξη

α) Έστω οι πίνακες $A \in M_{\mu \times \nu}(K)$, $B \in M_{\nu \times \rho}(K)$, $\Gamma \in M_{\rho \times \kappa}(K)$, με $A = (a_{ij})_{\mu \times \nu}$, $B = (b_{ij})_{\nu \times \rho}$ και $\Gamma = (c_{ij})_{\rho \times \kappa}$. Από τον ορισμό του γινομένου πινάκων $(\cdot)$ με στοιχεία από το σώμα K και λόγω της προσεταιριστικής ιδιότητας του πολλαπλασιασμού στοιχείων που ανήκουν στο σώμα K (επειδή το σύνολο K αποτελεί σώμα, εξ' ορισμού ισχύει ότι $\forall a, b, c \in K: (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$) έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} (A \cdot B) \cdot \Gamma &= \left(\sum_{k=1}^{\nu} a_{ik} b_{kj} \right)_{\mu \times \rho} \cdot (c_{ij})_{\rho \times \kappa} = \left(\sum_{j=1}^{\rho} \left(\sum_{k=1}^{\nu} a_{ik} b_{kj} \right) \cdot (c_{jz}) \right)_{\mu \times \kappa} = \\ &= \left(\sum_{j=1}^{\rho} \sum_{k=1}^{\nu} a_{ik} b_{kj} c_{jz} \right)_{\mu \times \kappa} = \left(\sum_{k=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{\rho} a_{ik} b_{kj} c_{jz} \right)_{\mu \times \kappa} = \\ &= \left(\sum_{k=1}^{\nu} a_{ik} \left(\sum_{j=1}^{\rho} b_{kj} c_{jz} \right) \right)_{\mu \times \kappa} = (a_{ij})_{\mu \times \nu} \cdot \left(\sum_{j=1}^{\rho} b_{kj} c_{jz} \right)_{\nu \times \kappa} = \\ &= A \cdot (B \cdot \Gamma). \end{aligned}$$

β) Έστω οι πίνακες $A \in M_{\mu \times \nu}(K)$, $B \in M_{\nu \times \rho}(K)$, $\Gamma \in M_{\nu \times \rho}(K)$, με $A = (a_{ij})_{\mu \times \nu}$, $B = (b_{ij})_{\nu \times \rho}$ και $\Gamma = (c_{ij})_{\nu \times \rho}$. Από τον ορισμό του γινομένου πινάκων $(\cdot)$ με στοιχεία από το σώμα K και λόγω της επιμεριστικής ιδιότητας του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση στοιχείων που ανήκουν στο σώμα K (επειδή το σύνολο K αποτελεί σώμα, εξ' ορισμού ισχύει ότι $\forall a, b, c \in K: a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$) έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} A \cdot (B + \Gamma) &= (a_{ij})_{\mu \times \nu} \cdot (b_{ij} + c_{ij})_{\nu \times \rho} = \left(\sum_{k=1}^{\nu} a_{ik} (b_{kj} + c_{kj}) \right)_{\mu \times \rho} = \\ &= \left(\sum_{k=1}^{\nu} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^{\nu} a_{ik} c_{kj} \right)_{\mu \times \rho} = \left(\sum_{k=1}^{\nu} a_{ik} b_{kj} \right)_{\mu \times \rho} + \\ &+ \left(\sum_{k=1}^{\nu} a_{ik} c_{kj} \right)_{\mu \times \rho} = A \cdot B + A \cdot \Gamma. \end{aligned}$$

γ) Θέλουμε να δείξουμε ότι αν: $A \cdot B = O \not\Rightarrow A = O$ ή $B = O$. Αρκεί να βρούμε δύο πίνακες A, B με $A \neq O$ και $B \neq O$ και τέτοιους ώστε το γινόμενό τους να είναι μηδενικός πίνακας.

Πράγματι, για $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ έχουμε ότι το γινόμενο τους είναι ο μηδενικός πίνακας $A \cdot B = O = (0)_{3 \times 2}$ με $A \neq O$ και $B \neq O$.

■

Ορισμός: Ένας τετραγωνικός πίνακας του οποίου όλα τα στοιχεία είναι μηδενικά, εκτός από τα στοιχεία που βρίσκονται στην κύρια διαγώνιο, που είναι άσσοι, λέγεται **μοναδιαίος** ή **ταυτοτικός πίνακας** και συμβολίζεται με:

$$I_v = (\delta_{ij})_{v \times v} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

όπου $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = j \\ 0, & \text{αν } i \neq j \end{cases}$ είναι η συνάρτηση δέλτα του Kronecker. Ένας μοναδιαίος πίνακας αποτελεί το ουδέτερο στοιχείο του γινομένου πινάκων ($\cdot$), δηλαδή ισχύει ότι:

$$A \cdot I_v = I_v \cdot A = A, \forall A \in M_v(K)$$

$$A \cdot I_v = A, \forall A \in M_{\mu \times v}(K)$$

$$I_v \cdot A = A, \forall A \in M_{v \times \rho}(K)$$

Ορισμός: Αν ο πίνακας A είναι ένας $v \times v$ τετραγωνικός πίνακας και υπάρχει πίνακας $X \in M_v(K)$ τέτοιος ώστε:

$$A \cdot X = X \cdot A = I_v$$

τότε λέμε ότι ο **πίνακας** A είναι **αντιστρέψιμος** ή **ομαλός** ή **μη ιδιάζων** ή αντιστρέφεται κι ο πίνακας X είναι ο **αντίστροφος πίνακας** του πίνακα A και χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $X = A^{-1}$.

Ορισμός: Για κάθε $n \times n$ τετραγωνικό πίνακα A ορίζουμε τις **δυνάμεις** του, ως εξής:

$$A^0 = I_n, A^1 = A \text{ και } A^k = A^{k-1} \cdot A \quad \forall k \in \mathbb{N} \text{ με } k \geq 2$$

Με βάση τους παραπάνω ορισμούς, προκύπτει το παρακάτω πόρισμα, η απόδειξη του οποίου παραλείπεται, γιατί είναι άμεση εφαρμογή των παραπάνω ορισμών:

Πόρισμα 1 Ισχύουν οι εξής σχέσεις:

- 1) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$, $\forall A, B$ αντιστρέψιμους πίνακες,
- 2) $(A^{-1})^{-1} = A$, $\forall A$ αντιστρέψιμο πίνακα,
- 3) $(A^{-1})^k = A^{-k} = (A^k)^{-1}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ και $\forall A$ αντιστρέψιμο πίνακα,
- 4) $A^k \cdot A^\lambda = A^{k+\lambda}$ $\forall k, \lambda \in \mathbb{Z}$ και $\forall A \in M_n(K)$,
- 5) $(A^k)^\lambda = A^{k \cdot \lambda}$, $\forall k, \lambda \in \mathbb{Z}$ και $\forall A \in M_n(K)$,
- 6) $(\lambda \cdot A)^k = \lambda^k \cdot A^k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\forall \lambda \in K$ και $\forall A \in M_n(K)$, όπου για $k < 0$ έχουμε ότι: $(\lambda \cdot A)^{-k} = \lambda^{-k} \cdot A^{-k}$, $\forall \lambda \in K^*$.

Ορισμός: Αν $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(K)$, τότε ο πίνακας που προκύπτει από τον πίνακα A με εναλλαγή μεταξύ γραμμών και στηλών, λέγεται **ανάστροφος πίνακας** του πίνακα A , συμβολίζεται με A^T και ισχύει ότι:

$$A^T = (a_{ji}) \in M_{n \times m}(K)$$

Από τον ορισμό του ανάστροφου πίνακα, προκύπτει το παρακάτω πόρισμα, η απόδειξη του οποίου παραλείπεται, γιατί είναι άμεση εφαρμογή του παραπάνω ορισμού:

Πόρισμα 2 Ισχύουν οι εξής σχέσεις:

$$1) (A+B)^T = A^T + B^T, \quad \forall A, B \in M_{\mu \times \nu}(K),$$

$$2) (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T, \quad \forall A \in M_{\mu \times \nu}(K) \text{ και } \forall B \in M_{\nu \times \rho}(K),$$

$$3) (\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T, \quad \forall \lambda \in K \text{ και } \forall A \in M_{\mu \times \nu}(K),$$

$$4) (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T, \quad \forall A \text{ αντιστρέψιμο πίνακα},$$

$$5) (A^T)^T = A, \quad \forall A \in M_{\mu \times \nu}(K),$$

$$6) (I_\nu)^T = I_\nu, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}.$$

Ορισμοί: Αν ο πίνακας A είναι ένας $\nu \times \nu$ τετραγωνικός πίνακας και τέτοιος ώστε να ικανοποιείται η σχέση:

$$A \cdot A^T = A^T \cdot A = I_\nu$$

τότε λέμε ότι ο πίνακας A είναι **ορθογώνιος**.

Αν ο πίνακας A είναι ένας $\nu \times \nu$ τετραγωνικός πίνακας και τέτοιος ώστε να ικανοποιείται η σχέση:

$$A \cdot A^+ = A^+ \cdot A = I_\nu$$

όπου με $A^+ = (A^*)^T$ συμβολίζεται ο αναστροφosuzyγής του πίνακα A , τότε λέμε ότι ο πίνακας A είναι **ορθομοναδιαίος** (unitary).

Παρατήρηση Στη βιβλιογραφία, αντί του ορθομοναδιαίου πίνακα μπορεί να συναντήσουμε το χαρακτηρισμό μοναδιακός ή πιο σπάνια απλώς μοναδιαίος.

Ακολουθούν μερικά παραδείγματα ορθογωνίων και ορθομοναδιαίων πινάκων, που θα τα ξανασυναντήσουμε στο Κεφάλαιο 4 Ομάδες Πινάκων.

Παράδειγμα Οι παρακάτω πίνακες είναι ορθογώνιοι:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & -\sin \theta \end{bmatrix}, \\ & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \\ & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \\ & \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}, \\ & \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma & \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \sin \beta \\ -\sin \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha \sin \gamma & -\sin \alpha \cos \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & -\sin \alpha \sin \beta \\ -\sin \beta \cos \gamma & -\sin \beta \sin \gamma & \cos \beta \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Οι παρακάτω πίνακες είναι ορθομοναδιαίοι:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \\ & \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}, \\ & \begin{bmatrix} \cos \theta & i \sin \theta \\ i \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\sin \theta & i \cos \theta \\ i \cos \theta & -\sin \theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & e^{i\alpha} \\ e^{-i\alpha} & 0 \end{bmatrix}, \\ & \begin{bmatrix} e^{i\alpha} \cos \theta & -e^{i(\beta-\gamma)} \sin \theta \\ e^{i\gamma} \sin \theta & e^{i(\beta-\alpha)} \cos \theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e^{i\alpha} \cos \theta & -e^{-i\gamma} \sin \theta \\ e^{i\gamma} \sin \theta & e^{-i\alpha} \cos \theta \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ορισμοί: Ένας $n \times n$ τετραγωνικός πίνακας H που ισούται με τον αναστροφουσυζυγή του, δηλαδή ισχύει ότι:

$$H = H^+$$

λέγεται **ερμιτιανός** (hermitian) **πίνακας**.

1.2 Ορίζουσα ενός πίνακα

Ορισμός: Έστω ένας $n \times n$ τετραγωνικός πίνακας $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$. Η συνάρτηση $\det : M_n(K) \rightarrow K$, που είναι μια συνάρτηση των n^2

$$A \rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

στοιχείων του πίνακα A και λέγεται **ορίζουσα** (determinant) του πίνακα A .

Πρόταση 1 Η ορίζουσα του ανάστροφου πίνακα A^T ενός πίνακα A ισούται με την ορίζουσα του πίνακα A , δηλαδή ισχύει ότι:

$$\det(A^T) = \det(A)$$

Πρόταση 2 Ισχύει ότι: $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$, $\forall A, B \in M_n(K)$.

Θεώρημα 4 Ο αντίστροφος A^{-1} ενός πίνακα $A \in M_n(K)$ υπάρχει, αν και μόνο αν η ορίζουσά του είναι μη μηδενική, δηλαδή ισχύει ότι:

$$A \text{ αντιστρέψιμος} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

Αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, τότε ο αντίστροφος πίνακας A^{-1} δίνεται από τη σχέση:

$$A^{-1} = \text{adj}(A) / \det(A)$$

όπου $\text{adj}(A)$ είναι ο **προσαρτημένος** ή **συμπληρωματικός πίνακας** του πίνακα A .

Κεφάλαιο 2

Διανυσματικοί χώροι & γραμμικές απεικονίσεις

2.1 Διανυσματικοί χώροι

Ορισμός: Ένα μη κενό σύνολο V , που είναι εφοδιασμένο με δύο πράξεις, την πρόσθεση: $+: V \times V \rightarrow V$ και το βαθμωτό

$$(x, y) \rightarrow x + y$$

πολλαπλασιασμό $\cdot: K \times V \rightarrow V$, έτσι ώστε να ικανοποιούνται

$$(\lambda, x) \rightarrow \lambda \cdot x$$

οι εξής ιδιότητες:

1) προσεταιριστική ιδιότητα: $(x + y) + z = x + (y + z)$, $\forall x, y, z \in V$
και $(\kappa \cdot \lambda) \cdot x = \kappa \cdot (\lambda \cdot x)$, $\forall x \in V$ και $\forall \kappa, \lambda \in K$,

2) αντιμεταθετική ιδιότητα: $x + y = y + x$, $\forall x, y \in V$,

3) ύπαρξη ουδετέρου στοιχείου: $\forall x \in V \exists 0 \in V: x + 0 = 0 + x = x$
και $\exists 1 \in K: 1 \cdot x = x$, $\forall x \in V$,

4) ύπαρξη αντιθέτου στοιχείου: $\forall x \in V, \exists -x \in V: x + (-x) =$
 $= (-x) + x = 0$,

5) επιμεριστική ιδιότητα ως προς την πρόσθεση (+) στο σύνολο V : $\lambda \bullet (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda \bullet \mathbf{x} + \lambda \bullet \mathbf{y}$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ και $\forall \lambda \in K$,

6) επιμεριστική ιδιότητα ως προς την πρόσθεση (+) στο σύνολο K : $(\kappa + \lambda) \bullet \mathbf{x} = \kappa \bullet \mathbf{x} + \lambda \bullet \mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x} \in V$ και $\forall \kappa, \lambda \in K$,

τότε το σύνολο V λέγεται **διανυσματικός χώρος** (vector space) ή **γραμμικός χώρος** (linear space) πάνω στο σώμα K .

Παρατήρηση Τα διανύσματα θα αναπαριστούνται με έντονη γραφή.

Παράδειγμα Το σύνολο $M_{\mu \times \nu}(K)$ όλων των $\mu \times \nu$ πινάκων με στοιχεία από το σώμα K , όπου $K = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, αποκτά τη δομή διανυσματικού χώρου πάνω στο σώμα K , αφού όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 1, στο σύνολο $M_{\mu \times \nu}(K)$ ορίζονται οι πράξεις της πρόσθεσης πινάκων (+) και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού ($\bullet$) στοιχείου με πίνακα και ικανοποιούνται όλες οι ιδιότητες του ορισμού του διανυσματικού χώρου.

Από τον ορισμό του διανυσματικού χώρου, προκύπτει το παρακάτω πόρισμα, η απόδειξη του οποίου παραλείπεται, γιατί είναι άμεση εφαρμογή του παραπάνω ορισμού:

Πόρισμα 1 Αν V είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα K , τότε ισχύουν οι εξής σχέσεις:

1) $\lambda \bullet \mathbf{0} = \mathbf{0}$, $\forall \lambda \in K$,

2) $0 \bullet \mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\forall \mathbf{x} \in V$,

3) $\lambda \bullet \mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda = \mathbf{0}$ ή $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\forall \mathbf{x} \in V$ και $\forall \lambda \in K$,

4) $(-\lambda) \bullet \mathbf{x} = \lambda \bullet (-\mathbf{x}) = -(\lambda \bullet \mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x} \in V$ και $\forall \lambda \in K$.

Υπάρχουν υποσύνολα ενός διανυσματικού χώρου V πάνω στο σώμα K , πέραν του ίδιου του διανυσματικού χώρου V και του τετριμμένου χώρου $\{\mathbf{0}\}$, που είναι εφοδιασμένα με τις πράξεις του διανυσματικού χώρου V κι είναι διανυσματικοί χώροι πάνω στο σώμα K . Αυτά τα υποσύνολα παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον αφού είναι διανυσματικοί χώροι μέσα σε άλλο διανυσματικό χώρο. Έτσι λοιπόν έχουμε:

Ορισμός: Ένα μη κενό σύνολο U , που είναι υποσύνολο ενός διανυσματικού χώρου V , λέγεται **διανυσματικός υπόχωρος** ή **γραμμικός υπόχωρος** ή απλά **υπόχωρος**, αν ικανοποιούνται οι εξής ιδιότητες:

- 1) $\lambda \cdot \mathbf{x} \in U, \forall \mathbf{x} \in U \text{ και } \forall \lambda \in K,$
- 2) $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in U, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in U,$
- 3) $\lambda \cdot \mathbf{x} + \mu \cdot \mathbf{y} \in U, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in U \text{ και } \forall \lambda, \mu \in K.$

Παρατήρηση Ο διανυσματικός χώρος V είναι ταυτόχρονα και υπόχωρος του εαυτού του, καθώς επίσης κι ο τετριμμένος υπόχωρος $\{\mathbf{0}\}$ είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου V . Κάθε άλλος υπόχωρος του διανυσματικού χώρου V λέγεται **γνήσιος υπόχωρος** αυτού.

Ορισμός: Το υποσύνολο $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ του διανυσματικού χώρου V πάνω στο σώμα K είναι μια **βάση** του **διανυσματικού χώρου** V αν:

- 1) τα στοιχεία $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ του διανυσματικού χώρου V είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, δηλαδή $\forall \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$ ισχύει η συνεπαγωγή: $\lambda_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \mathbf{u}_n = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0,$
- 2) $V = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n]$, δηλαδή τα στοιχεία $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ του διανυσματικού χώρου V παράγουν το διανυσματικό χώρο

V , όπου με $[u_1, u_2, \dots, u_n]$ συμβολίζουμε τη **γραμμική Θήκη**, που είναι ο ελάχιστος υπόχωρος του διανυσματικού χώρου V που περιέχει τα στοιχεία $u_1, u_2, \dots, u_n$.

Θεώρημα 1 Έστω V ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα K και το σύνολο $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ να είναι μια βάση του. Τότε κάθε στοιχείο $u \in V$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, δηλαδή $\forall u \in V \exists !$ (μοναδικοί) συντελεστές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$ τέτοιοι ώστε να ισχύει ότι:

$$u = \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \dots + \lambda_n \cdot u_n$$

Ορισμός: Ένας διανυσματικός χώρος V πάνω στο σώμα K , λέγεται **χώρος εσωτερικού γινομένου**, αν είναι εφοδιασμένος με την απεικόνιση εσωτερικού γινομένου: $\langle | \rangle : V \times V \rightarrow K$ και

$$(x, y) \rightarrow \langle x | y \rangle$$

ικανοποιούνται οι εξής ιδιότητες:

- 1) $\langle \lambda \cdot x + \mu \cdot y | z \rangle = \lambda \cdot \langle x | z \rangle + \mu \cdot \langle y | z \rangle, \forall x, y, z \in V$ και $\forall \lambda, \mu \in K$,
- 2) $\langle y | x \rangle = \overline{\langle x | y \rangle}, \forall x, y \in V$, όπου $\overline{\langle x | y \rangle}$ είναι ο συζυγής μιγαδικός του $\langle y | x \rangle$, (για $K = \mathbb{R}$ ισχύει ότι: $\langle y | x \rangle = \langle x | y \rangle$),
- 3) $\langle x | x \rangle \geq 0$ και $\langle x | x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0, \forall x \in V$.

Αν $K = \mathbb{R}$ και ο διανυσματικός χώρος V είναι πεπερασμένης διάστασης, δηλαδή $\dim(V) < +\infty$, τότε ο χώρος εσωτερικού γινομένου V λέγεται **Ευκλείδειος χώρος**, ενώ αν $K = \mathbb{C}$ και ο διανυσματικός χώρος V είναι πεπερασμένης διάστασης, τότε ο χώρος εσωτερικού γινομένου V λέγεται **ορθομοναδιαίος (unitary) χώρος**.

Πόρισμα 2 Αν ο διανυσματικός χώρος V είναι χώρος εσωτερικού γινομένου τότε ισχύουν οι εξής σχέσεις:

$$1) \langle \mathbf{x} | \lambda \cdot \mathbf{y} + \mu \cdot \mathbf{z} \rangle = \bar{\lambda} \cdot \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle + \bar{\mu} \cdot \langle \mathbf{x} | \mathbf{z} \rangle, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V \ \& \ \forall \lambda, \mu \in K,$$

$$2) \langle \mathbf{x} | \mathbf{0} \rangle = \langle \mathbf{0} | \mathbf{x} \rangle = 0, \forall \mathbf{x} \in V,$$

$$3) \langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x} \in V.$$

Ορισμός: Έστω V διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα K , στον οποίο ορίζεται η απεικόνιση νόρμα (norm) επί του διανυσματικού χώρου V : $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

$$\mathbf{x} \rightarrow \|\mathbf{x}\|$$

$$1) \|\mathbf{x}\| \geq 0 \text{ και } \|\mathbf{x}\| = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}, \forall \mathbf{x} \in V,$$

$$2) \|\lambda \cdot \mathbf{x}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|, \forall \mathbf{x} \in V \text{ και } \forall \lambda \in K, \text{ δηλαδή η απεικόνιση } \|\cdot\| \text{ είναι θετικά ομογενής,}$$

$$3) \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \text{ (τριγωνική ανισότητα).}$$

Τότε ο διανυσματικός χώρος V λέγεται **χώρος με νόρμα**.

Θεώρημα 2 Κάθε διανυσματικός χώρος εσωτερικού γινομένου γίνεται και διανυσματικός χώρος με νόρμα.

2.2 Γραμμικές απεικονίσεις

Ορισμός: Έστω οι διανυσματικοί χώροι X και Y πάνω στο σώμα K , όπου $K = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$. Η απεικόνιση $f : X \rightarrow Y$, λέγεται **γραμμική απεικόνιση** αν ικανοποιούνται οι εξής ιδιότητες:

- 1) προσθετική ιδιότητα: $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}), \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X,$
- 2) ομογενής ιδιότητα: $f(\lambda \bullet \mathbf{x}) = \lambda \bullet f(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in X \text{ και } \forall \lambda \in K,$
- 3) $f(\lambda \bullet \mathbf{x} + \mu \bullet \mathbf{y}) = \lambda \bullet f(\mathbf{x}) + \mu \bullet f(\mathbf{y}), \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X \text{ και } \forall \lambda, \mu \in K.$

Παρατήρηση Πολλές φορές αντί του όρου γραμμική απεικόνιση χρησιμοποιούνται και οι όροι **γραμμικός μετασχηματισμός** ή απλώς μετασχηματισμός ή **ομομορφισμός γραμμικών χώρων**. Στην περίπτωση που είναι $X = Y$, τότε χρησιμοποιείται ο όρος **γραμμικός τελεστής** ή απλώς τελεστής ή **ενδομορφισμός γραμμικών χώρων**.

Από τον ορισμό του διανυσματικού χώρου και της γραμμικής απεικόνισης, προκύπτει το παρακάτω πόρισμα, η απόδειξη του οποίου παραλείπεται, γιατί είναι άμεση εφαρμογή των παραπάνω ορισμών:

Πόρισμα 3 Έστω X και Y διανυσματικοί χώροι πάνω στο σώμα K και η γραμμική απεικόνιση $f : X \rightarrow Y$, τότε ισχύουν οι εξής σχέσεις:

- 1) $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0},$
- 2) $f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}), \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X,$
- 3) $f(-\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in X,$
- 4) $f(\lambda_1 \bullet \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \bullet \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_n \bullet \mathbf{x}_n) = \lambda_1 \bullet f(\mathbf{x}_1) + \lambda_2 \bullet f(\mathbf{x}_2) + \dots + \lambda_n \bullet f(\mathbf{x}_n), \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n \in X \text{ και } \forall \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K.$

Θεώρημα 3 Έστω X, Y, Z διανυσματικοί χώροι πάνω στο σώμα K και οι γραμμικές απεικονίσεις $f : X \rightarrow Y$ και $g : Y \rightarrow Z$. Τότε και η σύνθεση: $f \circ g : X \rightarrow Z$ είναι επίσης γραμμική απεικόνιση.

Αν θεωρήσουμε τους διανυσματικούς χώρους X και Y πάνω στο σώμα K με βάσεις $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ και $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m\}$ αντίστοιχα, και τη γραμμική απεικόνιση $f: X \rightarrow Y$, τότε υπάρχουν μοναδικοί συντελεστές $a_{ij} \in K$, με $1 \leq i \leq n$ και $1 \leq j \leq m$ τέτοιοι ώστε:

$$f(\mathbf{u}_i) = \sum_{j=1}^m a_{ji} \mathbf{v}_j, \text{ με } 1 \leq i \leq n \Leftrightarrow \begin{cases} f(\mathbf{u}_1) = a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{21}\mathbf{v}_2 + \dots + a_{m1}\mathbf{v}_m \\ f(\mathbf{u}_2) = a_{12}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 + \dots + a_{m2}\mathbf{v}_m \\ \vdots \\ f(\mathbf{u}_n) = a_{1n}\mathbf{v}_1 + a_{2n}\mathbf{v}_2 + \dots + a_{mn}\mathbf{v}_m \end{cases}$$

ή υπό μορφή πινάκων:

$$\begin{pmatrix} f(\mathbf{u}_1) \\ f(\mathbf{u}_2) \\ \vdots \\ f(\mathbf{u}_n) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow f(\mathbf{u}) = A^T \cdot \mathbf{v},$$

$$\text{όπου } A^T = (a_{ji}) \in M_{n \times m}(K), f(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} f(\mathbf{u}_1) \\ f(\mathbf{u}_2) \\ \vdots \\ f(\mathbf{u}_n) \end{pmatrix} \text{ και } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_m \end{pmatrix}.$$

Άρα στη γραμμική απεικόνιση f μεταξύ των διανυσματικών χώρων X και Y , οι οποίοι είναι πεπερασμένης διάστασης, $n \in \mathbb{N}$ και $m \in \mathbb{N}$ αντίστοιχα, ως προς τις βάσεις $\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ και $\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m\}$ μπορούμε να αντιστοιχίσουμε τον μοναδικό πίνακα $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(K)$, που είναι ο ανάστροφος πίνακας του πίνακα A^T , που είδαμε στη σχέση $f(\mathbf{u}) = A^T \cdot \mathbf{v}$. Έτσι λοιπόν έχουμε:

Ορισμός: Ο πίνακας $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(K)$ λέγεται **πίνακας της γραμμικής απεικόνισης** $f: X \rightarrow Y$ **ως προς τις βάσεις** $\mathbf{u}$ **και** $\mathbf{v}$ **των** διανυσματικών χώρων X και Y αντίστοιχα.

Ο πίνακας $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(K)$ της γραμμικής απεικόνισης $f: X \rightarrow Y$ ως προς τις βάσεις $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ των διανυσματικών χώρων X και Y αντίστοιχα, προσδιορίζει πλήρως την απεικόνιση f , υπό την έννοια ότι αν γνωρίζουμε τον πίνακα A της γραμμικής απεικόνισης f , τότε μπορούμε να

προσδιορίσουμε την εικόνα του τυχαίου στοιχείου $x \in X$ μέσω της γραμμικής απεικόνισης f .

Θεώρημα 4 Έστω $u = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ να είναι βάση του διανυσματικού χώρου X , διάστασης $n \in \mathbb{N}$. Τότε τα στοιχεία που προκύπτουν από τη σχέση: $v = P \cdot u$, με $P \in M_n(K)$, αποτελούν βάση του διανυσματικού χώρου X , αν και μόνο αν ο πίνακας $P \in M_n(K)$ είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή αν $P \in GL(n, K)$, και σ' αυτή την περίπτωση ο πίνακας P λέγεται **πίνακας μεταφοράς από τη βάση u στη νέα βάση v** .

Θεώρημα 5 Έστω η γραμμική απεικόνιση $f : X \rightarrow Y$ και ο πίνακας $A \in M_{m \times n}(K)$ της γραμμικής απεικόνισης f ως προς τις βάσεις $u = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ και $v = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ των διανυσματικών χώρων X και Y αντίστοιχα. Αν $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ και $y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ είναι βάσεις των διανυσματικών χώρων X και Y αντίστοιχα, τέτοιες ώστε: $x = P^T \cdot u$ και $y = Q^T \cdot v$, όπου $P \in GL(n, K)$ και $Q \in GL(m, K)$, τότε ο πίνακας $B \in M_{m \times n}(K)$ της γραμμικής απεικόνισης f ως προς τις βάσεις x και y των διανυσματικών χώρων X και Y αντίστοιχα, δίνεται από τη σχέση: $B = Q^{-1} \cdot A \cdot P$.

Κεφάλαιο 3

Θεωρία ομάδων

Η έννοια της αλγεβρικής δομής της ομάδας εμφανίστηκε στα μαθηματικά στις αρχές του 19^{ου} αιώνα. Η ανάπτυξη της αντίστοιχης θεωρίας οφείλεται στην πρωτοποριακή συμβολή των μαθηματικών Gauss, Cauchy, Abel, Hamilton, Galois, Sylvester, Caley και άλλων. Η θεωρία αυτή βρήκε εφαρμογή στη φυσική ύστερα από την θεμελίωση της κβαντομηχανικής το 1925. Η θεωρία των ομάδων έγινε χρήσιμη στη φυσική από τη στιγμή που διαπιστώθηκε ότι οι μετασχηματισμοί συμμετρίας, που αφήνουν ένα φυσικό σύστημα αναλλοίωτο, αποτελούν ομάδα.

3.1 Βασικοί ορισμοί

Ξεκινάμε μ' ένα σύνολο S στο οποίο ορίζεται μια διμελής πράξη $*$ κι έχουμε:

Ορισμός: Μια **διμελής πράξη** $*$ (πάνω) σ' ένα σύνολο S είναι μια απεικόνιση:

$$*: S \times S \rightarrow S$$

$$(a, b) \rightarrow *(a, b) = a * b$$

και τότε λέμε ότι το σύνολο S είναι εφοδιασμένο με τη διμελή πράξη $*$ και χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $(S, *)$.

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, κάθε διατεταγμένο ζεύγος (a, b) στοιχείων του συνόλου S , αντιστοιχίζεται σε κάποιο στοιχείο του S , το $a * b$, το οποίο λόγω του ορισμού της απεικόνισης είναι μοναδικό. Η απαίτηση ότι το στοιχείο $a * b$ (που είναι το αποτέλεσμα της πράξης $*$) πρέπει να ανήκει στο σύνολο S είναι γνωστή ως **συνθήκη κλειστότητας** κι όταν ισχύει, λέμε ότι το σύνολο S είναι κλειστό ως προς τη διμελή πράξη $*$. Επίσης απαιτούμε μια διμελής πράξη $*$ πάνω σ' ένα σύνολο S να ορίζεται για κάθε διατεταγμένο ζεύγος (a, b) στοιχείων του συνόλου S . Επομένως για να λέμε ότι ένα σύνολο S είναι εφοδιασμένο με μια διμελή πράξη $*$, πρέπει να ελέγξουμε δύο πράγματα: αν η πράξη $*$ είναι καλά ορισμένη κι αν η πράξη $*$ είναι κλειστή.

Ο χαρακτηρισμός “διατεταγμένο” για το ζεύγος (a, b) είναι πολύ σημαντικός, διότι παίζει ρόλο η σειρά (ποιο στοιχείο είναι πρώτο και ποιο δεύτερο), αφού επιτρέπει στο στοιχείο $a * b$ (που αντιστοιχίζεται το ζεύγος (a, b)) να είναι διαφορετικό από το στοιχείο $b * a$ (που αντιστοιχίζεται το ζεύγος (b, a)). Φυσικά μπορεί να ισχύει $a * b = b * a$, αλλά δεν σημαίνει κατ' ανάγκη ότι είναι πάντα ίσα μεταξύ τους.

Ορισμοί: Μια διμελής **πράξη** $*$ πάνω σ' ένα σύνολο S λέγεται **προσεταιριστική** αν (και μόνο αν): $(a * b) * c = a * (b * c)$, $\forall a, b, c \in S$.

Μια διμελής πράξη $*$ πάνω σ' ένα σύνολο S λέγεται **αντιμεταθετική** αν (και μόνο αν): $a * b = b * a$, $\forall a, b \in S$.

Παρατήρηση Αν η διμελής πράξη $*$ πάνω σ' ένα σύνολο S είναι προσεταιριστική, τότε παραστάσεις όπως η $a*b*c*d$, ορίζονται μονοσήμαντα $\forall a, b, c, d \in S$. Μπορούμε αν θέλουμε να παρεμβάλλουμε παρενθέσεις για υπολογιστικούς λόγους, αλλά το τελικό αποτέλεσμα θα είναι πάντα το ίδιο.

Στα πλαίσια της συγκεκριμένης διπλωματικής εργασίας ως διμελής πράξη $*$ θα είναι η πρόσθεση $(+)$, ο πολλαπλασιασμός $(\cdot)$ κι η σύνθεση $(\circ)$. Ακολουθούν μερικά παραδείγματα συνόλων εφοδιασμένων με μια διμελή πράξη $*$:

Παράδειγμα 1 Η συνήθης πρόσθεση $(+)$ είναι μια διμελής πράξη πάνω στα σύνολα $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, αφού η πράξη της πρόσθεσης $(+)$ είναι καλά ορισμένη (μπορούμε πάντα να προσθέτουμε μεταξύ τους δύο οποιαδήποτε στοιχεία των συνόλων $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$) και κλειστή σε κάθε ένα από τα σύνολα $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, αφού $\forall a, b \in \mathbb{N} \text{ ή } \mathbb{Z} \text{ ή } \mathbb{Q} \text{ ή } \mathbb{R} \text{ ή } \mathbb{C} \Rightarrow \exists !$ (μοναδικό) $\gamma \in \mathbb{N} \text{ ή } \mathbb{Z} \text{ ή } \mathbb{Q} \text{ ή } \mathbb{R} \text{ ή } \mathbb{C}$ αντίστοιχα, τ.ω. : $c = a + b$. Επομένως λέμε ότι τα σύνολα $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ είναι εφοδιασμένα με την πράξη της πρόσθεσης $(+)$.

Παράδειγμα 2 Ο συνήθης πολλαπλασιασμός $(\cdot)$ είναι μια διμελής πράξη πάνω στα σύνολα $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, αφού η πράξη του πολλαπλασιασμού $(\cdot)$ είναι καλά ορισμένη (μπορούμε πάντα να πολλαπλασιάζουμε μεταξύ τους δύο οποιαδήποτε στοιχεία των συνόλων $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$) και κλειστή σε κάθε ένα από τα σύνολα $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, αφού $\forall a, b \in \mathbb{N} \text{ ή } \mathbb{Z} \text{ ή } \mathbb{Q} \text{ ή } \mathbb{R} \text{ ή } \mathbb{C} \Rightarrow \exists !$ (μοναδικό) $c \in \mathbb{N} \text{ ή } \mathbb{Z} \text{ ή } \mathbb{Q} \text{ ή } \mathbb{R} \text{ ή } \mathbb{C}$ αντίστοιχα, τ.ω. : $c = a \cdot b$. Επομένως λέμε ότι τα σύνολα $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ είναι εφοδιασμένα με την πράξη του πολλαπλασιασμού $(\cdot)$.

Αντιπαράδειγμα Η συνήθης πρόσθεση (+) δεν είναι μια διμελής πράξη πάνω στο σύνολο $\mathbb{R}^*$ αφού η πράξη της πρόσθεσης (+) δεν είναι κλειστή στο σύνολο $\mathbb{R}^*$, επειδή $1 + (-1) = 0$ αλλά $0 \notin \mathbb{R}^*$, ενώ τα $1, -1 \in \mathbb{R}^*$. Επομένως το σύνολο των μη μηδενικών πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}^*$ δεν είναι εφοδιασμένο με την πράξη της πρόσθεσης (+).

Ορισμός: Ένα μη κενό σύνολο $G \neq \emptyset$ που είναι εφοδιασμένο με μια διμελή πράξη * λέγεται **ομάδα** (group) εάν ικανοποιούνται οι εξής ιδιότητες:

α) προσεταιριστική ιδιότητα: $(a * b) * c = a * (b * c), \forall a, b, c \in G,$

β) ύπαρξη ουδετέρου στοιχείου: $\exists e \in G$ τ.ω. $\forall a \in G : a * e = e * a = a,$

γ) ύπαρξη συμμετρικού στοιχείου: $\forall a \in G, \exists a' \in G : a * a' = a' * a = e.$

Παρατηρούμε ότι στον παραπάνω ορισμό δεν συμπεριλαμβάνεται η ιδιότητα της κλειστότητας ($\forall a, b \in G : a * b \in G$), διότι αυτό εξυπακούεται από τον ορισμό της διμελούς πράξης *. Στις εφαρμογές όμως, όταν ζητείται να αποδείξουμε ότι ένα σύνολο G αποτελεί ομάδα ως προς κάποια διμελή πράξη *, θα πρέπει πρώτα να ελέγξουμε ότι η πράξη * είναι καλά ορισμένη και κλειστή στο σύνολο G , ώστε να είμαστε σίγουροι ότι δεν θα βγούμε έξω από το σύνολο G όταν εφαρμόσουμε την πράξη αυτή.

Αν η πράξη * είναι η συνήθης πρόσθεση (+), το ουδέτερο στοιχείο e θα είναι το μηδενικό στοιχείο 0, το συμμετρικό στοιχείο a' θα είναι ο αντίθετος $-a$ και το αποτέλεσμα της πράξης $a + b$ θα λέγεται άθροισμα των a, b . Εντελώς ανάλογα, αν η πράξη * είναι ο συνήθης πολλαπλασιασμός ($\cdot$), το ουδέτερο στοιχείο e θα είναι το μοναδιαίο

στοιχείο 1, το συμμετρικό στοιχείο a' θα είναι ο αντίστροφος a^{-1} και το αποτέλεσμα της πράξης $a \bullet b$ θα λέγεται γινόμενο των a, b .

Σ' ένα σύνολο G μπορεί να ορίζονται πολλές διαφορετικές διμελείς πράξεις, κι όλες αυτές να δίνουν διαφορετικές ομάδες.

Θεώρημα 1 Σ' ένα σύνολο G που αποτελεί ομάδα με τη διμελή πράξη $*$, το ουδέτερο στοιχείο $e \in G$ και τα αντίστροφα στοιχεία $a' \in G$ ορίζονται μονοσήμαντα.

Απόδειξη α) Θα δείξουμε ότι σε ένα σύνολο G που αποτελεί ομάδα με τη διμελή πράξη $*$, υπάρχει ένα μοναδικό ταυτοτικό στοιχείο $e \in G$ τ.ω. $a * e = e * a = a$, $\forall a \in G$.

Έστω δύο στοιχεία $e, \varepsilon \in G$ τ.ω. $a * e = e * a = a$ και $a * \varepsilon = \varepsilon * a = a$, $\forall a \in G$. Θα δείξουμε ότι: $e = \varepsilon$.

Θεωρώντας το $e \in G$ ως ταυτοτικό στοιχείο ισχύει ότι: $\varepsilon * e = \varepsilon$.

Θεωρώντας το $\varepsilon \in G$ ως ταυτοτικό στοιχείο ισχύει ότι: $\varepsilon * e = e$.

Κι επειδή τα πρώτα μέλη των παραπάνω εξισώσεων είναι ίδια, αναγκαστικά και τα δεύτερα μέλη θα είναι ίσα, κι επομένως έχουμε ότι: $e = \varepsilon$, δηλαδή το ουδέτερο στοιχείο μιας ομάδας είναι μοναδικό.

β) Θα δείξουμε ότι σε ένα σύνολο G που αποτελεί ομάδα με τη διμελή πράξη $*$, υπάρχει ένα μοναδικό στοιχείο $a' \in G$ τ.ω. $a * a' = a' * a = e$, $\forall a \in G$.

Έστω ότι το στοιχείο $a \in G$ έχει δύο αντίστροφα στοιχεία, τα $a', a'' \in G$ τ.ω. $a * a' = a' * a = e$ και $a * a'' = a'' * a = e$, $\forall a \in G$. Θα δείξουμε ότι: $a' = a''$.

Επειδή $a * a' = e$ και $a * a'' = e$, κι επειδή τα δεύτερα μέλη των εξισώσεων αυτών είναι ίδια, αναγκαστικά και τα πρώτα μέλη θα είναι ίσα, κι επομένως έχουμε ότι: $a * a' = a * a''$.

Εφαρμόζοντας κατά μέλη από αριστερά το αντίστροφο στοιχείο $a' \in G$ και λόγω της προσεταιριστικής ιδιότητας και της ιδιότητας του ουδετέρου στοιχείου έχουμε ότι:

$a * a' = a * a'' \Rightarrow a' * (a * a') = a' * (a * a'') \Rightarrow (a' * a) * a' = (a' * a) * a'' \Rightarrow$
 $\Rightarrow e * a' = e * a'' \Rightarrow a' = a'',$ δηλαδή το συμμετρικό στοιχείο $a' \in G$
 του στοιχείου $a \in G$ είναι μοναδικό.

■

Ορισμός: Αν η πράξη $*$ της ομάδας G ικανοποιεί και την αντιμεταθετική ιδιότητα: $a * b = b * a$, $\forall a, b \in G$, τότε η ομάδα G λέγεται **αβελιανή** ή **αντιμεταθετική ομάδα**.

Για ένα πεπερασμένο σύνολο S , μια διμελής πράξη $*$ πάνω στο σύνολο S μπορεί να οριστεί και με τη βοήθεια ενός πίνακα, που λέγεται **πίνακας πράξης** ή και **πολλαπλασιαστικός πίνακας**.

Παράδειγμα Αν το σύνολο $S = \{e, a, b\}$ αποτελεί αντιμεταθετική ομάδα με τη διμελή πράξη $*$ τότε ο πίνακας πράξης είναι:

$*$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Ορισμοί: Μια ομάδα G που περιέχει πεπερασμένο πλήθος στοιχείων ονομάζεται **πεπερασμένη ομάδα**, ενώ αν έχει άπειρο πλήθος στοιχείων ονομάζεται **άπειρη ομάδα**. Μια άπειρη ομάδα ονομάζεται **διακεκριμένη** ή **συνεχής ομάδα** αν το πλήθος των στοιχείων της ομάδας G είναι αριθμήσιμο ή συνεχές (δηλαδή μη αριθμήσιμο) αντίστοιχα.

Το πλήθος των στοιχείων μιας ομάδας ονομάζεται **τάξη της ομάδας**.

Ακολουθούν μερικά αντιπροσωπευτικά παραδείγματα ομάδων τα οποία θα μας χρειαστούν στη συνέχεια για τη μελέτη των ομάδων πινάκων:

Παράδειγμα 3 Το σύνολο των ακεραίων αριθμών $\mathbb{Z} = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$ αποτελεί ομάδα με πράξη τη συνήθη πρόσθεση $(+)$ και μάλιστα είναι άπειρη διακεκριμένη αβελιανή ομάδα.

Λύση: Κατ' αρχάς (όπως δείξαμε και στο παράδειγμα 1 παραπάνω) το σύνολο $\mathbb{Z}$ είναι εφοδιασμένο με την πράξη της συνήθους πρόσθεσης $(+)$, αφού μπορούμε πάντα να προσθέσουμε δύο ακέραιους αριθμούς και το άθροισμα δύο οποιωνδήποτε ακεραίων αριθμών, είναι πάντα ακέραιος ($a+b \in \mathbb{Z}$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$). Για να δείξουμε ότι το σύνολο $\mathbb{Z}$ αποτελεί ομάδα με πράξη τη συνήθη πρόσθεση $(+)$, αρκεί να δείξουμε ότι ικανοποιούνται οι τρεις ιδιότητες του ορισμού της ομάδας. Πράγματι:

α) ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα, αφού $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$ έχουμε ότι: $(a+b)+c=a+(b+c)$,

β) υπάρχει ουδέτερο στοιχείο, το $0 \in \mathbb{Z}$ και $\forall a \in \mathbb{Z}$ ισχύει ότι:

$$a+0=0+a=a$$

γ) $\forall a \in \mathbb{Z}$ υπάρχει συμμετρικό στοιχείο, το $-a \in \mathbb{Z}$ κι ισχύει ότι:

$$a+(-a)=(-a)+a=0$$

Επομένως από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι το σύνολο των ακεραίων αριθμών $\mathbb{Z}$ αποτελεί ομάδα με πράξη τη συνήθη πρόσθεση $(+)$. Μάλιστα επειδή ικανοποιείται κι η αντιμεταθετική ιδιότητα, αφού $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ έχουμε ότι: $a+b=b+a$, η ομάδα $\mathbb{Z}$ είναι αβελιανή. Επειδή η ομάδα $\mathbb{Z}$ περιέχει άπειρα το πλήθος στοιχεία και το σύνολο των ακεραίων αριθμών $\mathbb{Z}$ είναι αριθμήσιμο, έχουμε ότι η ομάδα των ακεραίων αριθμών $\mathbb{Z}$ είναι άπειρη διακεκριμένη. ■

Αντιπαράδειγμα Το επαυξημένο σύνολο των μη αρνητικών φυσικών αριθμών $\mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \dots\}$ δεν αποτελεί ομάδα με πράξη τη συνήθη πρόσθεση (+), γιατί αν και το σύνολο $\mathbb{N} \cup \{0\}$ είναι εφοδιασμένο με την πράξη της συνήθους πρόσθεσης (+), αφού μπορούμε πάντα να προσθέσουμε δύο μη αρνητικούς φυσικούς αριθμούς και το άθροισμα δύο οποιωνδήποτε μη αρνητικών φυσικών αριθμών είναι πάντα μη αρνητικός φυσικός (δηλαδή $a + b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\forall a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$), όμως δεν ικανοποιείται η τρίτη ιδιότητα του ορισμού της ομάδας, αφού $\forall a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, δεν υπάρχει $a' \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ τ.ω. να ισχύει ότι: $a + a' = a' + a = 0$.

Παράδειγμα 4 Το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ με πράξη τη συνήθη πρόσθεση (+) αποτελεί μια άπειρη συνεχή ομάδα και μάλιστα είναι και αβελιανή.

Παράδειγμα 5 Το σύνολο $GL(n, K) = \{A \in M_n(K) : \det(A) \neq 0\}$ όλων των $n \times n$ τετραγωνικών πινάκων με στοιχεία από το σώμα K που έχουν ορίζουσα διάφορη του μηδενός, αποτελεί ομάδα με πράξη τον πολλαπλασιασμό πινάκων ($\bullet$).

Παράδειγμα 6 Το σύνολο όλων των ορθογωνίων πινάκων $O(n)$ διάστασης $n \times n$, με $n \in \mathbb{N}$, αποτελεί ομάδα με πράξη τον πολλαπλασιασμό πινάκων ($\bullet$).

Λύση: Έστω n ένας δεδομένος φυσικός αριθμός $n \in \mathbb{N}$. Κατ' αρχάς γνωρίζουμε ότι αν $A, B \in O(n)$ είναι δυο ορθογώνιοι πίνακες, τότε το γινόμενο τους $A \bullet B$ είναι καλά ορισμένη πράξη (αφού μπορούμε να τους πολλαπλασιάσουμε μεταξύ τους, άρα ορίζεται ο πίνακας $A \bullet B$) και μάλιστα το γινόμενο $A \bullet B$ είναι επίσης ένας ορθογώνιος πίνακας, αφού:

$$(A \cdot B)^T \cdot (A \cdot B) = (B^T \cdot A^T) \cdot (A \cdot B) = B^T \cdot (A^T \cdot A) \cdot B = B^T \cdot I_n \cdot B = B^T \cdot B = I_n,$$

κι επομένως το σύνολο των ορθογωνίων πινάκων $O(n)$ είναι κλειστό ως προς την πράξη του πολλαπλασιασμού πινάκων $(\cdot)$. Άρα το σύνολο των ορθογωνίων πινάκων $O(n)$ είναι εφοδιασμένο με την πράξη του πολλαπλασιασμού πινάκων $(\cdot)$. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι ικανοποιούνται οι τρεις ιδιότητες του ορισμού της ομάδας. Πράγματι:

α) ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα στον πολλαπλασιασμό πινάκων $(\cdot)$ κι επομένως ισχύει και για τους ορθογώνιους πίνακες, αφού οι ορθογώνιοι πίνακες αποτελούν υποσύνολο του συνόλου πινάκων. Άρα $\forall A, B, \Gamma \in O(n)$ έχουμε ότι:

$$(A \cdot B) \cdot \Gamma = A \cdot (B \cdot \Gamma)$$

β) υπάρχει ουδέτερο στοιχείο, ο πίνακας $I_n \in O(n)$ που είναι και ορθογώνιος πίνακας και $\forall A \in O(n)$ ισχύει ότι:

$$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$$

γ) εξ' ορισμού των ορθογωνίων πινάκων, $\forall A \in O(n)$ υπάρχει συμμετρικό στοιχείο, ο αντίστροφος πίνακας, που ταυτόχρονα είναι και ο ανάστροφος πίνακας του πίνακα A , με την ιδιότητα ότι ανήκει στο σύνολο των ορθογωνίων πινάκων $O(n)$. Δηλαδή $\forall A \in O(n)$, ο αντίστροφός του είναι κι αυτός ορθογώνιος πίνακας αφού:

$$(A^{-1})^T \cdot (A^{-1}) = (A^T)^{-1} \cdot (A^{-1}) = (A \cdot A^T)^{-1} = (I_n)^{-1} = I_n$$

$$\text{Ισχύει λοιπόν ότι } A^{-1} = A^T \in O(n) \text{ και } A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n.$$

Επομένως από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι το σύνολο των ορθογωνίων πινάκων $O(n)$ αποτελεί ομάδα με πράξη τον πολλαπλασιασμό πινάκων $(\cdot)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

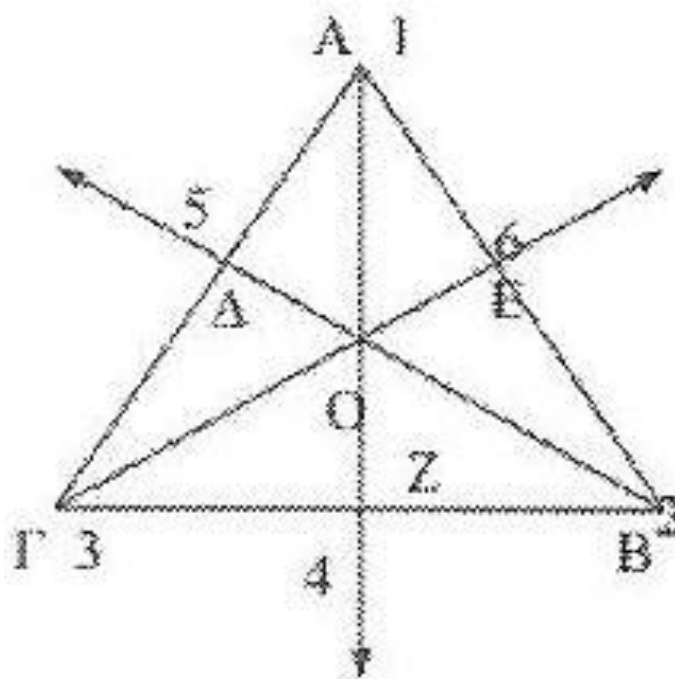
■

Παράδειγμα 7 Το σύνολο όλων των ορθομοναδιαίων πινάκων $U(n)$ διάστασης $n \times n$, με $n \in \mathbb{N}$, αποτελεί ομάδα με πράξη τον πολλαπλασιασμό πινάκων $(\bullet)$.

Παράδειγμα 8 Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\{1, e^{i2\pi/3}, e^{i4\pi/3}\}$ (που είναι οι κυβικές ρίζες της μονάδας, δηλαδή $z^3 = 1$), αποτελεί (πεπερασμένη) ομάδα τάξης 3 με πράξη τον πολλαπλασιασμό $(\bullet)$ όπως έχει οριστεί στο σύνολο $\mathbb{C}$. Γενικότερα, το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $U_n = \{1, \zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^{n-1}\}$, με $\zeta = e^{i2\pi/n}$, που είναι οι κορυφές του κανονικού n -γώνου, βασικής γωνίας $2\pi/n$, πάνω στον μοναδιαίο κύκλο $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, αποτελεί ομάδα με πράξη τον πολλαπλασιασμό $(\bullet)$ κι είναι αβελιανή τάξης n .

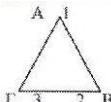
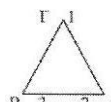
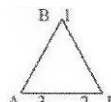
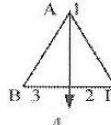
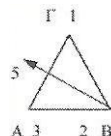
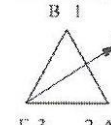
Παράδειγμα 9 Το σύνολο όλων των μετασχηματισμών συμμετρίας ενός ισοπλευρου τριγώνου που βρίσκεται σ' ένα επίπεδο, αποτελεί ομάδα με πράξη τη σύνθεση $(\circ)$.

Λύση: Αρχικά θα ορίσουμε το σύνολο όλων των μετασχηματισμών συμμετρίας του ισοπλεύρου τριγώνου. Έστω ένα ισοπλευρο τρίγωνο με κορυφές A, B, Γ που βρίσκεται σ' ένα επίπεδο. Συμβολίζουμε με Δ, E, Z τα μέσα των πλευρών $\Gamma A, AB, B\Gamma$ αντίστοιχα και με O συμβολίζουμε το κέντρο του τριγώνου. Με τους αριθμούς 1, 2, 3, 5, 6, 4 συμβολίζουμε αντίστοιχα τα σημεία $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z$ του επιπέδου, κι αναπαριστούν τα παραπάνω σημεία πριν την εφαρμογή του μετασχηματισμού συμμετρίας, ώστε να μπορούμε εύκολα να συγκρίνουμε την αρχική θέση του τριγώνου (που είναι οι αριθμοί) και την τελική (που είναι τα γράμματα). Σχηματικά έχουμε:



Αν κάνουμε μια στροφή στο τρίγωνο κατά γωνία 120° μοιρών (είτε κατά τη θετική φορά των δεικτών του ρολογιού, είτε κατά την αρνητική φορά) ως προς τον άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδο που βρίσκεται το τρίγωνο και διέρχεται από το σημείο O, παρατηρούμε ότι δεν έχει επέλθει καμία αλλαγή συνολοθεωρητικά, η νέα θέση του τριγώνου δεν διαφέρει από την αρχική όσον αφορά το σχήμα. Η μόνη διαφορά είναι στην αλλαγή των γραμμάτων A, B, Γ, Δ, Ε, Ζ. Η στροφή αυτή αποτελεί για το τρίγωνο έναν μετασχηματισμό συμμετρίας. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε αν στρέψουμε το τρίγωνο κατά 240° μοίρες. Οι περιστροφές γύρω από τους άξονες που διέρχονται από τα ευθύγραμμα τμήματα AZ, ΒΔ και ΓΕ κατά γωνία 180° μοιρών λέγονται **ανακλάσεις**. Συνολικά για το ισόπλευρο τρίγωνο υπάρχουν 6 μετασχηματισμοί συμμετρίας, που ταξινομούνται και συμβολίζονται ως εξής:

Πίνακας συμμετρικών μετασχηματισμών του ισοπλεύρου τριγώνου:

Σύμβολο	Πράξη	Αποτέλεσμα
e	Ο ταυτοτικός μετασχηματισμός που αφήνει το τρίγωνο αναλλοίωτο.	
r	Στροφή κατά γωνία 120° μοιρών, ως προς από τον άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδο που βρίσκεται το τρίγωνο και διέρχεται από το σημείο Ο.	
r^2	Στροφή κατά γωνία 240° μοιρών, ως προς από τον άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδο που βρίσκεται το τρίγωνο και διέρχεται από το σημείο Ο.	
σ_1	Ανάκλαση κατά τον άξονα 1-4.	
σ_2	Ανάκλαση κατά τον άξονα 2-5.	
σ_3	Ανάκλαση κατά τον άξονα 3-6.	

Στη συνέχεια ελέγχουμε ότι το σύνολο μετασχηματισμών συμμετρίας του ισοπλεύρου τριγώνου, που θα το συμβολίζουμε με $C_{3v} = \{e, r, r^2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, είναι εφοδιασμένο με τη σύνθεση των μετασχηματισμών ($\circ$). Βλέπουμε ότι αν εκτελέσουμε διαδοχικά δύο μετασχηματισμούς συμμετρίας, το τρίγωνο παραμένει αναλλοίωτο συνολοθεωρητικά. Έτσι λοιπόν η σύνθεση δυο οποιωνδήποτε μετασχηματισμών συμμετρίας είναι πάλι ένας μετασχηματισμός συμμετρίας, κι επομένως το σύνολο όλων των

μετασχηματισμών συμμετρίας του ισοπλεύρου τριγώνου C_{3v} είναι κλειστό ως προς την σύνθεση των μετασχηματισμών ($\circ$). Τέλος θα δείξουμε ότι ικανοποιούνται οι τρεις ιδιότητες του ορισμού της ομάδας. Πράγματι:

- α) ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα αφού η διαδοχική εφαρμογή των μετασχηματισμών συμμετρίας στο τρίγωνο υπακούει στην προσεταιριστική ιδιότητα,
- β) ως ουδέτερο στοιχείο ορίζουμε να είναι ο ταυτοτικός μετασχηματισμός e που αφήνει το τρίγωνο αμετάβλητο και προφανώς ανήκει στο σύνολο μετασχηματισμών συμμετρίας του ισοπλεύρου τριγώνου C_{3v} ,
- γ) για κάθε μετασχηματισμό συμμετρίας υπάρχει ο αντίστροφός του κι ανήκει στο σύνολο μετασχηματισμών συμμετρίας του ισοπλεύρου τριγώνου C_{3v} , με την έννοια ότι ο αντίστροφος ξαναφέρει το τρίγωνο στην αρχική του θέση.

Επομένως από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι το σύνολο των μετασχηματισμών συμμετρίας $C_{3v} = \{e, r, r^2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ ενός ισοπλευρου τριγώνου που βρίσκεται σ' ένα επίπεδο, αποτελεί ομάδα με πράξη τη σύνθεση των μετασχηματισμών ($\circ$).

■

3.2 Υποομάδες

Από τα παραδείγματα της παραπάνω παραγράφου παρατηρούμε ότι σε κάποιες περιπτώσεις, μερικές ομάδες εμπεριέχονται σε μεγαλύτερες ομάδες. Για παράδειγμα, το σύνολο των ακεραίων αριθμών $\mathbb{Z}$ που αποτελεί ομάδα με πράξη τη συνήθη πρόσθεση ($+$), περιέχεται στο σύνολο των ρητών αριθμών $\mathbb{Q}$, που επίσης αποτελεί ομάδα με πράξη τη

συνήθη πρόσθεση (+), το οποίο περιέχεται στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, που επίσης αποτελεί ομάδα με πράξη τη συνήθη πρόσθεση (+), το οποίο περιέχεται στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$, που επίσης αποτελεί ομάδα με πράξη τη συνήθη πρόσθεση (+). Γενικότερα έχουμε τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός: Έστω ένα σύνολο G , που αποτελεί ομάδα με μια διμελή πράξη $*$, κι έστω H ένα υποσύνολο του συνόλου G , το οποίο είναι κλειστό ως προς τη διμελή πράξη $*$ της ομάδας G , δηλαδή $\forall a, b \in H$, το $a*b \in H$. Αν το υποσύνολο H αποτελεί κι αυτό ομάδα με τη διμελή πράξη $*$, τότε το υποσύνολο H λέγεται **υποομάδα** (συμβολισμός: $H \leq G$).

3.3 Απεικονίσεις που διατηρούν δομές

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε απεικονίσεις της μορφής: $f: G \rightarrow G'$, όπου τα σύνολα G, G' αποτελούν ομάδες και μέσω αυτών των απεικονίσεων να συσχετίζεται η δομή της ομάδας G , με τη δομή της ομάδας G' .

Ορισμός: Έστω ένα σύνολο G , που αποτελεί ομάδα με μια διμελή πράξη $*$ κι έστω ένα σύνολο G' , που αποτελεί ομάδα με μια διμελή πράξη $\bullet$. Μια απεικόνιση $f: G \rightarrow G'$ με την ιδιότητα ότι:

$$f(a*b) = f(a) \bullet f(b), \forall a, b \in G \quad \mathbf{(3.1)}$$

λέγεται **ομομορφισμός ομάδων**.

Αν επιπλέον της σχέσης (3.1) η απεικόνιση f είναι και 1-1, τότε η απεικόνιση f λέγεται **μονομορφισμός ομάδων**.

Αν επιπλέον της σχέσης (3.1) η απεικόνιση f είναι και επί, δηλαδή να ισχύει ότι: $f(G) = G'$, τότε η απεικόνιση f λέγεται **επιμορφισμός ομάδων**.

Αν επιπλέον της σχέσης (3.1) η απεικόνιση f είναι 1-1 κι επί, τότε η απεικόνιση f λέγεται **ισομορφισμός ομάδων** και οι **ομάδες** G και G' λέγονται **ισομορφικές** ή **ισόμορφες** (συμβολισμός: $H \simeq G$).

Από τη σχέση (3.1) έχουμε ότι το στοιχείο $a * b \in G$, ενώ το στοιχείο $f(a) \bullet f(b) \in G'$, κι επομένως βλέπουμε ότι από τη σχέση αυτή συσχετίζονται οι διμελείς πράξεις των ομάδων G και G' , κι άρα κατ' επέκταση συσχετίζονται μεταξύ τους οι δομές των ομάδων G και G' .

Όταν οι ομάδες G και G' έχουν κι οι δύο πεπερασμένη τάξη αλλά έχουν διαφορετικά πλήθη στοιχείων, τότε σ' αυτή την περίπτωση δεν γίνεται οι ομάδες G και G' να είναι ισομορφικές, αφού δεν μπορούμε να βρούμε συνάρτηση $f: G \rightarrow G'$ που να είναι 1-1. Αν συμβεί να υπάρχουν συναρτήσεις $f: G \rightarrow G'$ που να είναι 1-1, συνήθως δείχνουμε ότι οι ομάδες G και G' δεν είναι ισόμορφες, δείχνοντας ότι η μία ομάδα έχει κάποια δομική ιδιότητα (όπως για παράδειγμα η ομάδα να είναι κυκλική ή αβελιανή ή πεπερασμένη, ή να έχει τάξη $k \in \mathbb{N}$, ή να έχει ακριβώς δύο στοιχεία τάξης $n \in \mathbb{N}$), την οποία δεν έχει η άλλη ομάδα.

3.4 Αναπαραστάσεις ομάδων

Οι έννοιες του διανυσματικού χώρου, της άλγεβρας, της ομάδας είναι αφηρημένες μαθηματικές δομές. Οποιοδήποτε συγκεκριμένο μαθηματικό σύστημα, με κατάλληλες ιδιότητες και πράξεις, λέμε ότι

αποτελεί μια πραγμάτωση (realization) μιας αφηρημένης μαθηματικής δομής εάν μπορούμε να ορίσουμε μια απεικόνιση ή αντιστοιχία μεταξύ της αφηρημένης δομής και του συγκεκριμένου μαθηματικού συστήματος, έτσι ώστε από την απεικόνιση αυτή, οι πράξεις της αφηρημένης δομής να “καθρεφτίζονται” στις πράξεις που έχουν ορισθεί στο μαθηματικό σύστημα. Σε κάθε συγκεκριμένη πραγμάτωση μπορεί να συμβεί οι πράξεις, που έχουν ορισθεί στο μαθηματικό σύστημα, να έχουν περισσότερες ιδιότητες απ’ ότι χρειάζονται για την πραγμάτωση. Αυτές οι επί πλέον ιδιότητες χαρακτηρίζουν την φύση της πραγμάτωσης. Μια αφηρημένη μαθηματική δομή μπορεί να πραγματωθεί κατά πολλούς και διαφορετικούς τρόπους. Η έννοια της ομάδας ουσιαστικά προήλθε από τις ιδιότητες των απεικονίσεων μεταξύ των συνόλων. Γι’ αυτό λοιπόν κι η έννοια της πραγμάτωσης μιας ομάδας στηρίζεται σ’ αυτές τις απεικονίσεις και ο ορισμός της έχει ως εξής:

Ορισμός: Έστω μια ομάδα G με μια πράξη $*$, που έχει τα στοιχεία $A, B, C, \dots$ και S να είναι κάποιο σύνολο με στοιχεία $x, y, z, \dots$. Ως $M(S)$ συμβολίζουμε το σύνολο των μετασχηματισμών του S : $M(S) = \{ f \mid f : S \rightarrow S, f = \text{αμφιμονοσήμαντος κι επί} \}$. Εάν μπορούμε να βρούμε μια απεικόνιση T τέτοια ώστε:

$$T : G \rightarrow M(S)$$

$$T : A \in G \rightarrow T(A) = T_A \in M(S)$$

με την ιδιότητα ότι σε κάθε στοιχείο $A \in G$ αντιστοιχεί ένας μετασχηματισμός T_A του S , δηλαδή $T_A : S \rightarrow S$, ο οποίος είναι αμφιμονοσήμαντος κι επί, έτσι ώστε η σύνθεση $(\circ)$ δύο μετασχηματισμών T_A, T_B , δηλαδή $T_A \circ T_B$, να υπάρχει και να είναι ο μετασχηματισμός $T_{A \circ B}$, δηλαδή $T_A \circ T_B = T_{A \circ B}$, τότε λέμε ότι έχουμε μια **πραγμάτωση** της **ομάδας** G μέσα από τους μετασχηματισμούς του συνόλου S .

Το περιεχόμενο της σχέσης $T_A \circ T_B = T_{A \circ B}$ μπορεί να εκφρασθεί λέγοντας ότι η πράξη $\circ$ της ομάδας G παριστάνεται από την σύνθεση ($\circ$) των αντίστοιχων μετασχηματισμών. Επίσης μπορούμε να δούμε ότι επειδή η σύνθεση των μετασχηματισμών ικανοποιεί την προσεταιριστική ιδιότητα, γι' αυτό απαιτείται κι η πράξη $\circ$ της ομάδας G να ικανοποιεί την προσεταιριστική ιδιότητα.

Μια ενδιαφέρουσα κατηγορία πραγμάτωσης μιας ομάδας είναι αυτή που λέγεται αναπαράσταση (representation) ή πιο σωστά γραμμική αναπαράσταση που προκύπτει όταν το σύνολο S είναι ένας (πραγματικός ή μιγαδικός) γραμμικός διανυσματικός χώρος V και οι μετασχηματισμοί $T_A, T_B, \dots$ είναι μη ιδιάζοντες (nonsingular) γραμμικοί μετασχηματισμοί (τελεστές) σ' αυτόν τον χώρο. Από τη θεωρία της Γραμμικής Άλγεβρας γνωρίζουμε ότι σε κάθε τελεστή T , που επενεργεί σ' ένα διανυσματικό χώρο V , αντιστοιχεί ένας τετραγωνικός πίνακας τάξης $n \in \mathbb{N}$ ως προς κάποια βάση, όπου $n = \dim(V)$ η διάσταση του διανυσματικού χώρου V .

Η έννοια της αναπαράστασης συνδυάζει δυο βασικές αλγεβρικές δομές: της ομάδας και του διανυσματικού χώρου. Από τον συνδυασμό αυτό προκύπτουν πίνακες, που αναπαριστούν τα στοιχεία της ομάδας. Η μελέτη αυτών των πινάκων γίνεται με την βοήθεια της θεωρίας των αναπαραστάσεων.

Μελετάμε στη συνέχεια τις αναπαραστάσεις πεπερασμένων ομάδων. Έστω μια πεπερασμένη ομάδα $G = \{A, B, C, \dots\}$ με μια πράξη $\circ$ κι ένα σύνολο πινάκων $M_n(K)$ που είναι τετραγωνικοί, μη ιδιάζοντες και της ίδιας τάξης $n \in \mathbb{N}$. Το σύνολο των πινάκων $M_n(K)$ επιλέγεται έτσι ώστε μεταξύ της ομάδας G και του συνόλου $M_n(K)$ να υπάρχει μια αντιστοιχία $T: G \rightarrow M_n(K)$ με την ιδιότητα ότι: $\forall A, B \in G \Rightarrow T_A \bullet T_B = T_{A \circ B}$, όπου $T_A \bullet T_B$ είναι το γινόμενο πινάκων $T(A), T(B)$. Η απεικόνιση T , (ουσιαστικά το σύνολο των πινάκων $M_n(K)$), ονομάζεται **αναπαράσταση** της ομάδας G . Η τάξη των πινάκων του συνόλου $M_n(K)$ ονομάζεται **διάσταση της αναπαράστασης**. Οι πίνακες αυτοί μπορούν να θεωρηθούν σαν αναπαραστάσεις κάποιων τελεστών, που επενεργούν σ' ένα διανυσματικό χώρο V διαστάσεως n , αφού ένας τελεστής $T: V \rightarrow V$, ως προς μια βάση

$\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ μπορεί να λάβει την μορφή τετραγωνικού πίνακα διάστασης $n \in \mathbb{N}$ με στοιχεία (t_{ij}) . Επομένως σε κάθε τελεστή T αντιστοιχεί ένας πίνακας $T = (t_{ij})$ ως προς μια δεδομένη βάση και κάθε στοιχείο A της ομάδας G μπορούμε να το δούμε σαν τελεστή T_A πάνω σ' ένα διανυσματικό χώρο.

Είναι δυνατόν σε δυο διαφορετικά στοιχεία A, B της ομάδας G να αντιστοιχεί ο ίδιος πίνακας, δηλαδή $T_A = T_B$. Όταν όμως όλοι οι πίνακες είναι διακεκριμένοι μεταξύ τους, δηλαδή η απεικόνιση T είναι αμφιμονοσήμαντη κι επί, τότε το σύνολο των πινάκων $M_n(K)$ αποτελεί ομάδα και οι **ομάδες** G και $M_n(K)$ είναι **ισομορφικές**. Σ' αυτή την περίπτωση η αναπαράσταση λέγεται **πιστή** (faithful) **αναπαράσταση**. Εάν όμως οι πίνακες δεν είναι διακεκριμένοι, τότε η απεικόνιση T δεν είναι αμφιμονοσήμαντη, είναι όμως ένας ομομορφισμός μεταξύ της ομάδας G και του συνόλου $M_n(K)$ και η **αναπαράσταση** ονομάζεται **εκφυλισμένη** ή **μη πιστή** (unfaithful).

Η απλούστερη αναπαράσταση είναι εκείνη όπου κάθε στοιχείο A της ομάδας G αντιστοιχεί τον ταυτοτικό πίνακα I οποιασδήποτε τάξης. Η αναπαράσταση αυτή ονομάζεται **ταυτοτική αναπαράσταση** της G , είναι μη πιστή και χωρίς ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

Εάν οι πίνακες μιας αναπαράστασης είναι ορθομοναδιαίοι, διάστασης $n \times n$, με $n \in \mathbb{N}$, τότε η **αναπαράσταση** λέγεται **μοναδιαία** (unitary), αναπαράσταση.

Παράδειγμα Έστω μια ομάδα $G = \{A, B, C, \dots\}$ με τα στοιχεία της να είναι ομαλοί πίνακες (π. χ. $GL(n, K), U(n)$, διάστασης $n \times n$ με $n \in \mathbb{N}$), δηλαδή έχουμε μια ομάδα πινάκων, και $V = \mathbb{C}$ (ο διανυσματικός χώρος των μιγαδικών αριθμών) και $T_A = \det(A)$ η απεικόνιση που αντιστοιχίζει κάθε πίνακα A στην ορίζουσά του $\det(A)$. Αυτή η απεικόνιση ορίζει μια μη τετριμμένη μονοδιάστατη αναπαράσταση αφού ισχύει ότι: $\det(A) \cdot \det(B) = \det(A \cdot B)$, η οποία αποτελεί βασική ιδιότητα των πινάκων.

Μια χαρακτηριστική ιδιότητα των αναπαραστάσεων είναι ότι το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας $G = \{A, B, C, \dots\}$ με πράξη $*$ αναπαρίσταται από τον ταυτοτικό πίνακα I κι ότι η αναπαράσταση διατηρεί την πράξη της αντιστροφής. Πράγματι αν συμβολίσουμε με E το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας G , εξ' ορισμού ισχύει ότι: $A * E = E * A = A$, $\forall A \in G$, οπότε θα πρέπει να ισχύει μια αντίστοιχη σχέση στο σύνολο των πινάκων $M_n(K)$ αφού αποτελούν μια αναπαράσταση της ομάδας G , οπότε θα έχουμε: $T_E \cdot T_A = T_A \cdot T_E = T_A$. Αυτή όμως η σχέση ικανοποιείται μόνο όταν ο πίνακας T_E είναι ο ταυτοτικός πίνακας I . Οπότε σε κάθε αναπαράσταση το ουδέτερο στοιχείο E της ομάδας G θα αναπαρίσταται από τον ταυτοτικό πίνακα I κι έχουμε ότι $T_E = I$. Όσον αφορά την πράξη της αντιστροφής, αν στη σχέση $T_A \cdot T_B = T_{A * B}$ θέσουμε $B = A^{-1}$, βλέπουμε ότι: $T_A \cdot T_{A^{-1}} = T(A \cdot A^{-1}) = T_E = I \Rightarrow T(A^{-1}) = (T_A)^{-1}$. Οπότε η αναπαράσταση διατηρεί την πράξη της αντιστροφής.

Κεφάλαιο 4

Ομάδες Πινάκων

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με σύνολα που αποτελούνται από συγκεκριμένους τύπους πινάκων, που αποτελούν ομάδες και κατόπιν θα αναφέρουμε τις στοιχειώδεις ιδιότητές τους.

4.1 Βασικοί ορισμοί

Ορισμός: Ένα σύνολο $G = \{A, B, C, \dots\}$, του οποίου όλα τα στοιχεία είναι ομαλοί πίνακες διάστασης $n \times n$, για δεδομένο $n \in \mathbb{N}$ (έτσι ώστε να ορίζεται ο αντίστροφος πίνακας X^{-1} , $\forall X \in G$), και είναι εφοδιασμένο με την πράξη του πολλαπλασιασμού πινάκων $(\bullet)$, αποτελεί μια **ομάδα πινάκων** με πράξη τον πολλαπλασιασμό πινάκων $(\bullet)$.

Στο Παράδειγμα 5 του Κεφαλαίου 3 είδαμε ότι το σύνολο $GL(n, K) = \{A \in M_n(K) : \det(A) \neq 0\}$ όλων των $n \times n$ τετραγωνικών πινάκων με στοιχεία από το σώμα K , που έχουν ορίζουσα διάφορη του μηδενός,

αποτελεί ομάδα με πράξη τον πολλαπλασιασμό των πινάκων ($\cdot$). Η ομάδα αυτή έχει ορισμένες υποομάδες, οι οποίες είναι πολύ σημαντικές, τόσο στα μαθηματικά, όσο και στη φυσική. Οι υποομάδες αυτές, που αποτελούν ομάδες πινάκων, ταξινομούνται ως εξής:

A) η **Γενική Γραμμική Ομάδα** $GL(n)$ (General Linear Group). Η ομάδα αυτή αποτελείται από όλους τους ομαλούς πίνακες που ανήκουν στο σύνολο $M_n(K)$ των $n \times n$ τετραγωνικών πινάκων με στοιχεία από το σώμα K και χωρίζεται σε δύο κατηγορίες, ανάλογα με το αν τα στοιχεία των πινάκων είναι πραγματικοί ή μιγαδικοί αριθμοί:

A1) **Πραγματική Γενική Γραμμική Ομάδα** $GL(n, \mathbb{R})$. Η ομάδα αυτή αποτελείται από όλους τους ομαλούς πίνακες που ανήκουν στο σύνολο $M_n(\mathbb{R})$ των $n \times n$ τετραγωνικών πινάκων με πραγματικά στοιχεία. Ο αριθμός των ανεξαρτήτων παραμέτρων κάθε πίνακα είναι n^2 , αφού ο μόνος περιορισμός που πρέπει να ικανοποιείται είναι $\det(A) \neq 0$.

A2) **Μιγαδική Γενική Γραμμική Ομάδα** $GL(n, \mathbb{C})$. Η ομάδα αυτή αποτελείται από όλους τους ομαλούς πίνακες που ανήκουν στο σύνολο $M_n(\mathbb{C})$ των $n \times n$ τετραγωνικών πινάκων με μιγαδικά στοιχεία. Ο αριθμός των ανεξαρτήτων παραμέτρων κάθε πίνακα είναι $2n^2$.

B) **Ειδική Γραμμική Ομάδα** $SL(n)$, (Special Linear Group). Οι ειδικές γραμμικές ομάδες ονομάζονται επίσης και μονομήκεις (unimodular). Η ομάδα αυτή αποτελείται από όλους τους ομαλούς πίνακες που ανήκουν στο σύνολο $M_n(K)$ των $n \times n$ τετραγωνικών πινάκων με στοιχεία από το σώμα K , των οποίων η ορίζουσα είναι $+1$ και χωρίζεται σε δύο κατηγορίες, ανάλογα με το αν τα στοιχεία των πινάκων είναι πραγματικοί ή μιγαδικοί αριθμοί:

B1) **Πραγματική Ειδική Γραμμική Ομάδα** $SL(n, \mathbb{R})$. Η ομάδα αυτή αποτελείται από όλους τους ομαλούς πίνακες που ανήκουν στο

σύνολο $M_n(\mathbb{R})$ των $n \times n$ τετραγωνικών πινάκων με πραγματικά στοιχεία, των οποίων η ορίζουσα είναι $+1$. Ο αριθμός των ανεξαρτήτων παραμέτρων είναι $n^2 - 1$.

B2) **Μιγαδική Ειδική Γραμμική Ομάδα** $SL(n, \mathbb{C})$. Η ομάδα αυτή αποτελείται από όλους τους ομαλούς πίνακες που ανήκουν στο σύνολο $M_n(\mathbb{C})$ των $n \times n$ τετραγωνικών πινάκων με μιγαδικά στοιχεία, των οποίων η ορίζουσα είναι $+1$. Ο αριθμός των ανεξαρτήτων παραμέτρων είναι $2(n^2 - 1)$.

Γ) **Ορθομοναδιαία Ομάδα** $U(n)$ (Unitary Group). Η ομάδα αυτή αποτελείται από όλους τους ορθομοναδιαίους (unitary) πίνακες που ανήκουν στο σύνολο $M_n(K)$ των $n \times n$ τετραγωνικών πινάκων με στοιχεία από το σώμα K . Ως γνωστόν, οι ορθομοναδιαίοι πίνακες έχουν την ιδιότητα να διατηρούν το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων, και κατά συνέπεια το μέτρο ενός διανύσματος στο μιγαδικό χώρο $\mathbb{C}$. Για την ορθομοναδιαία ομάδα $U(n)$ έχουμε ότι:

- α) οι παράμετροί της είναι φραγμένες και μάλιστα ισχύει: $|u_{ij}| < 1$,
- β) ο αριθμός των ανεξαρτήτων παραμέτρων είναι n^2 .

Δ) **Ειδική Ορθομοναδιαία Ομάδα** $SU(n)$ (Special Unitary Group). Η ομάδα αυτή αποτελείται από όλους τους ορθομοναδιαίους (unitary) πίνακες που ανήκουν στο σύνολο $M_n(K)$ των $n \times n$ τετραγωνικών πινάκων με στοιχεία από το σώμα K , των οποίων η ορίζουσα είναι $+1$. Ο αριθμός των ανεξαρτήτων παραμέτρων είναι $n^2 - 1$.

Ε) **Ορθογώνια Ομάδα** $O(n)$ (Orthogonal Group). Η ομάδα αυτή αποτελείται από όλους τους ορθογώνιους πίνακες που ανήκουν στο σύνολο $M_n(K)$ των $n \times n$ τετραγωνικών πινάκων με στοιχεία από το σώμα K . Όπως έχουμε δει στο Κεφάλαιο 1, ένας ορθογώνιος πίνακας $O \in M_n(K)$ ικανοποιεί τη σχέση: $O^T \cdot O = I_n$. Επειδή ένας ορθογώνιος πίνακας έχει την ίδια ορίζουσα με τον ανάστροφό του, δηλαδή ισχύει ότι: $\det(O) = \det(O^T)$, κι εξ' ορισμού των ορθογωνίων πινάκων ισχύει

ότι: $O^T \cdot O = I_n$, έπεται ότι: $\det(O) = \pm 1$, δηλαδή η ορθογώνια ομάδα $O(n)$ χωρίζεται σε δύο υποσύνολα και δεν μπορούμε να πάμε από το ένα στο άλλο κατά συνεχή τρόπο. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις, ανάλογα με το αν τα στοιχεία των πινάκων είναι πραγματικοί ή μιγαδικοί αριθμοί κι έχουμε:

E1) Πραγματική Ορθογώνια Ομάδα $O(n, \mathbb{R})$. Η ομάδα αυτή αποτελείται από όλους τους ορθογώνιους πίνακες που ανήκουν στο σύνολο $M_n(\mathbb{R})$ των $n \times n$ τετραγωνικών πινάκων με πραγματικά στοιχεία. Ο αριθμός των ανεξαρτήτων παραμέτρων είναι $n(n - 1)/2$.

E2) Μιγαδική Ορθογώνια Ομάδα $O(n, \mathbb{C})$. Η ομάδα αυτή αποτελείται από όλους τους ορθογώνιους πίνακες που ανήκουν στο σύνολο $M_n(\mathbb{C})$ των $n \times n$ τετραγωνικών πινάκων με μιγαδικά στοιχεία. Ο αριθμός των ανεξαρτήτων παραμέτρων είναι $n(n - 1)$.

ΣΤ) Ειδική Ορθογώνια Ομάδα $SO(n)$ (Special Orthogonal Group). Η ομάδα αυτή αποτελείται από όλους τους ορθογώνιους πίνακες που ανήκουν στο σύνολο $M_n(K)$ των $n \times n$ τετραγωνικών πινάκων με στοιχεία από το σώμα K , των οποίων η ορίζουσα είναι $+1$ και χωρίζεται σε δύο κατηγορίες, ανάλογα με το αν τα στοιχεία των πινάκων είναι πραγματικοί ή μιγαδικοί αριθμοί:

ΣΤ1) Μιγαδική Ειδική Ορθογώνια υποομάδα $SO(n, \mathbb{C})$. Η ομάδα αυτή αποτελείται από όλους τους ορθογώνιους πίνακες που ανήκουν στο σύνολο $M_n(\mathbb{C})$ των $n \times n$ τετραγωνικών πινάκων με μιγαδικά στοιχεία, των οποίων η ορίζουσα είναι $+1$ κι αποτελεί μια υποομάδα της μιγαδικής ορθογώνιας ομάδας $O(n, \mathbb{C})$ με $n(n - 1) - 1$ ανεξάρτητες παραμέτρους.

ΣΤ2) Πραγματική Ειδική Ορθογώνια υποομάδα $SO(n, \mathbb{R})$. Η ομάδα αυτή αποτελείται από όλους τους ορθογώνιους πίνακες που ανήκουν στο σύνολο $M_n(\mathbb{R})$ των $n \times n$ τετραγωνικών πινάκων με πραγματικά στοιχεία, των οποίων η ορίζουσα είναι $+1$ κι

αποτελεί μια υποομάδα της πραγματικής ορθογώνιας ομάδας $O(n, \mathbb{R})$ με $n(n-1)/2 - 1$ ανεξάρτητες παραμέτρους.

Z) **Συμπλεκτική ομάδα** $S_p(2n)$ (Symplectic Group). Η ομάδα αυτή αποτελείται από τους πίνακες που αφήνουν αναλλοίωτη μια αντισυμμετρική διγραμμική μορφή. Οι πίνακες αυτοί επιδρούν μόνο σε χώρους άρτιας διάστασης και χωρίζεται σε δύο κατηγορίες, ανάλογα με το αν τα στοιχεία των πινάκων είναι πραγματικοί ή μιγαδικοί αριθμοί:

Z1) **Πραγματική Συμπλεκτική Ομάδα** $S_p(2n, \mathbb{R})$. Η ομάδα αυτή αποτελείται από τους πίνακες με πραγματικά στοιχεία που αφήνουν αναλλοίωτη μια αντισυμμετρική διγραμμική μορφή. Ο αριθμός των ανεξαρτήτων παραμέτρων είναι $n(2n+1)$.

Z2) **Μιγαδική Συμπλεκτική Ομάδα** $S_p(2n, \mathbb{C})$. Η ομάδα αυτή αποτελείται από τους πίνακες με μιγαδικά στοιχεία που αφήνουν αναλλοίωτη μια αντισυμμετρική διγραμμική μορφή. Ο αριθμός των ανεξαρτήτων παραμέτρων είναι $2n(2n+1)$.

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία που ακολουθήθηκε στα Παραδείγματα 5, 6 και 7 του Κεφαλαίου 3, προκύπτει άμεσα ότι τα παραπάνω σύνολα αποτελούν ομάδες με πράξη τον πολλαπλασιασμό πινάκων ($\bullet$).

4.2 Πεπερασμένες συνεχείς ομάδες

Τα στοιχεία μιας συνεχούς ομάδας μπορούν να χαρακτηρισθούν από ένα σύνολο πραγματικών παραμέτρων $a_1, a_2, \dots, a_n$, εκ των οποίων μια τουλάχιστον παράμετρος μεταβάλλεται κατά συνεχή τρόπο σ' ένα ορισμένο διάστημα. Το σύνολο των παραμέτρων πρέπει να είναι ικανό

και αναγκαίο για να προσδιορίσει όλα τα στοιχεία της ομάδας. Έστω r το πλήθος των συνεχών παραμέτρων, όπου $1 \leq r \leq n$. Εάν ο αριθμός r είναι πεπερασμένος, τότε η συνεχής ομάδα λέγεται **πεπερασμένη συνεχής ομάδα** και το r ονομάζεται **τάξη της συνεχούς ομάδας**. (Έχουμε δει στο Κεφάλαιο 3 ότι και στην περίπτωση της πεπερασμένης ομάδας, ως τάξη ομάδας ορίζεται να είναι το πλήθος των στοιχείων της).

Παράδειγμα 1 Το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ αποτελεί μια άπειρη συνεχή ομάδα με πράξη τη συνήθη πρόσθεση (+), τάξης 1, διότι κάθε πραγματικός αριθμός x μπορεί να προσδιοριστεί από μια παράμετρο, που είναι το ίδιο το x , το οποίο μεταβάλλεται με συνεχή τρόπο, αφού παίρνει τιμές στο διάστημα $[-\infty, +\infty]$.

Το σύνολο των πινάκων της μορφής: $M_a = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, με $a \in \mathbb{R}$ αποτελεί μια άπειρη συνεχή ομάδα με πράξη τον πολλαπλασιασμό πινάκων ($\bullet$), τάξης 1, διότι κάθε πίνακας M_a προσδιορίζεται από την παράμετρο a , που μεταβάλλεται με συνεχή τρόπο και για $\forall a, \beta \in \mathbb{R}$ ικανοποιείται η σχέση: $M_a \bullet M_\beta = M_{a+\beta}$, σύμφωνα και με τον πολλαπλασιασμό πινάκων ($\bullet$). Μάλιστα η ομάδα αυτή είναι ισομορφική ως προς την ομάδα των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ και αποτελεί μια αναπαράσταση του συνόλου των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ στο σύνολο των 2×2 τετραγωνικών πινάκων κι αντίστροφα.

Παράδειγμα 2 Θεωρούμε το γραμμικό μετασχηματισμό από μια μεταβλητή x , στη μεταβλητή y , που είναι της μορφής: $y = ax + \beta$, με $a, \beta \in \mathbb{R}$ και $a \neq 0$. Το σύνολο όλων αυτών των μετασχηματισμών αποτελεί μια 2-παραμετρική ομάδα (δηλαδή μια άπειρη συνεχή ομάδα τάξης 2) με πράξη τη σύνθεση μετασχηματισμών ($\circ$) και τα στοιχεία της ομάδας

αυτής συμβολικά τα παριστάνουμε με $T(\alpha, \beta)$, έτσι ώστε:
 $T(\alpha, \beta) \cdot x = y = \alpha x + \beta$, όπου η πράξη της σύνθεσης μετασχηματισμών ($\circ$) ορίζεται ως εξής:

$T(\alpha_1, \beta_1) \circ T(\alpha_2, \beta_2) \cdot x = T(\alpha_1, \beta_1) \circ (\alpha_2 x + \beta_2) = \alpha_1(\alpha_2 x + \beta_2) + \beta_1 = \alpha_1 \alpha_2 x + \alpha_1 \beta_2 + \beta_1 = T(\alpha_3, \beta_3) \cdot x$, όπου $\alpha_3 = \alpha_1 \alpha_2$ και $\beta_3 = \alpha_1 \beta_2 + \beta_1$. Κάνοντας τις επιμέρους πράξεις, εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα:

$(T(\alpha_1, \beta_1) \circ T(\alpha_2, \beta_2)) \circ T(\alpha_3, \beta_3) \cdot x = T(\alpha_1, \beta_1) \circ (T(\alpha_2, \beta_2) \circ T(\alpha_3, \beta_3)) \cdot x$. Το ουδέτερο στοιχείο της σύνθεσης μετασχηματισμών ($\circ$) είναι το $T(1, 0) = 1$, αφού ισχύει ότι:
 $T(1, 0) \cdot x = 1x + 0 = x$, ενώ το συμμετρικό (ή αντίστροφο) στοιχείο του μετασχηματισμού $T(\alpha, \beta)$ είναι το $T^{-1}(\alpha, \beta) = T(1/\alpha, -\beta/\alpha)$ αφού ισχύει ότι:

$T(1/\alpha, -\beta/\alpha) \circ T(\alpha, \beta) \cdot x = T(1/\alpha, -\beta/\alpha) \circ (\alpha x + \beta) = (1/\alpha)(\alpha x + \beta) - \beta/\alpha = x = 1x + 0 = T(1, 0) \cdot x, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ με } \alpha \neq 0$.

Παράδειγμα 3 Θεωρούμε το σύνολο όλων των μετατοπίσεων σ' ένα τρισδιάστατο πραγματικό διανυσματικό χώρο της μορφής: $x' = x + \alpha$, $y' = y + \beta$, $z' = z + \gamma$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Το σύνολο όλων αυτών των μετατοπίσεων αποτελεί μια 3-παραμετρική ομάδα, (δηλαδή μια άπειρη συνεχή ομάδα τάξης 3), με πράξη τη πρόσθεση μετατοπίσεων (+) και τα στοιχεία της ομάδας αυτής συμβολικά τα παριστάνουμε με $T(\alpha, \beta, \gamma)$, όπου η πράξη της πρόσθεσης μετατοπίσεων (+) ορίζεται ως εξής:

$T(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) + T(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = T(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$, όπου $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$, $\beta_3 = \beta_1 + \beta_2$, $\gamma_3 = \gamma_1 + \gamma_2$. Κάνοντας τις επιμέρους πράξεις, εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα:

$(T(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) + T(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)) + T(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3) = T(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) +$
 $+ (T(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) + T(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3))$. Το ουδέτερο στοιχείο της
 πρόσθεσης μετατοπίσεων (+) είναι το $T(0, 0, 0)$, ενώ το
 συμμετρικό (ή αντίθετο) στοιχείο του μετασχηματισμού
 $T(\alpha, \beta, \gamma)$ είναι το $T(-\alpha, -\beta, -\gamma)$ αφού ισχύει ότι:
 $T(-\alpha, -\beta, -\gamma) + T(\alpha, \beta, \gamma) = T(0, 0, 0), \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 4 Θεωρούμε ένα γραμμικό ομογενή μετασχηματισμό δύο
 μεταβλητών της μορφής: $x' = a_{11}x + a_{12}y, y' = a_{21}x + a_{22}y$ ή
 υπό μορφή πινάκων:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{u}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}, \text{ με } a_{ij} \in \mathbb{R} \text{ και } \det(\mathbf{A}) \neq 0.$$

Το σύνολο όλων αυτών των μετασχηματισμών αποτελεί
 μια 4-παραμετρική ομάδα, (δηλαδή μια άπειρη συνεχή
 ομάδα τάξης 4), με πράξη τη σύνθεση μετασχηματισμών
 $(\circ)$. Η ομάδα αυτή ονομάζεται **πραγματική γενική
 γραμμική ομάδα 2 διαστάσεων** και συμβολίζεται με:
 $GL(2, \mathbb{R})$. Τα στοιχεία της ομάδας αυτής συμβολικά τα
 παριστάνουμε με T_A ή $T(A)$, έτσι ώστε: $T(A) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}$,
 που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό του πίνακα A
 με το διάνυσμα στήλη $\mathbf{u}$. Η πράξη της σύνθεσης
 μετασχηματισμών $(\circ)$ ορίζεται ως εξής: $T_{A \cdot B} \cdot \mathbf{u} = (T(A) \circ$
 $\circ T(B)) \cdot \mathbf{u} = (A \cdot B) \cdot \mathbf{u}$, κι επομένως ανάγεται σε
 πολλαπλασιασμό πινάκων $(\cdot)$. Επειδή ισχύει η
 προσεταιριστική ιδιότητα στον πολλαπλασιασμό πινάκων
 $(\cdot)$, προκύπτει άμεσα ότι και στη σύνθεση $(\circ)$ γραμμικών
 κι ομογενών μετασχηματισμών δύο μεταβλητών έχουμε
 ότι ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα:

$(T(A) \circ T(B)) \circ T(\Gamma) \cdot \mathbf{u} = T(A) \circ (T(B) \circ T(\Gamma)) \cdot \mathbf{u}$. Το ουδέτερο
 στοιχείο της σύνθεσης μετασχηματισμών $(\circ)$ είναι η

ταυτοτική απεικόνιση με $T(I)=I$, αφού ισχύει ότι: $T(I) \bullet u = I \bullet u = u$, ενώ το συμμετρικό (ή αντίστροφο) στοιχείο του μετασχηματισμού $T(A)$ είναι το $T^{-1}(A)=T(A^{-1})$ αφού ισχύει ότι: $T(A^{-1}) \circ T(A) \bullet u = (A^{-1} \bullet A) \bullet u = I \bullet u = T(I) \bullet u$, $\forall A \in M_2(\mathbb{R})$ με $\det(A) \neq 0$.

Παράδειγμα 5 Μπορούμε να γενικεύσουμε το παράδειγμα 4, αν θεωρήσουμε ένα γραμμικό ομογενή μετασχηματισμό n μεταβλητών της μορφής: $x_i' = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$, με $1 \leq i \leq n$, ή υπό μορφή πινάκων:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow u' = A \bullet u, \text{ με } a_{ij} \in \mathbb{R} \text{ και}$$

$\det(A) \neq 0$. Το σύνολο όλων αυτών των μετασχηματισμών αποτελεί μια n^2 -παραμετρική ομάδα, (δηλαδή μια άπειρη συνεχή ομάδα τάξης n^2), με πράξη τη σύνθεση μετασχηματισμών ($\circ$). Η ομάδα αυτή ονομάζεται **πραγματική γενική γραμμική ομάδα n διαστάσεων** και συμβολίζεται με: $GL(n, \mathbb{R})$.

Παράδειγμα 6 Το σύνολο όλων των περιστροφών γύρω από έναν άξονα αποτελεί μια άπειρη συνεχή ομάδα τάξης 1 με πράξη τη σύνθεση μετασχηματισμών ($\circ$), της οποίας η παράμετρος είναι η γωνία περιστροφής θ , που μεταβάλλεται με συνεχή τρόπο και παίρνει τιμές στο διάστημα $[-\pi, \pi)$ ή $[0, 2\pi)$. Η ομάδα αυτή ονομάζεται **πραγματική ειδική ορθογώνια ομάδα 2 διαστάσεων** και συμβολίζεται με $SO(2, \mathbb{R})$. Θεωρούμε ένα γραμμικό ομογενή μετασχηματισμό δύο μεταβλητών της μορφής: $x' = x \cos \theta - y \sin \theta$, $y' = x \sin \theta + y \cos \theta$ ή υπό μορφή πινάκων:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{u}' = A \cdot \mathbf{u}, \text{ με } \theta \in [-\pi, \pi) \text{ ή } \theta \in [0, 2\pi).$$

Παρατηρούμε ότι ισχύει: $\det(A) = 1$. Το σύνολο όλων αυτών των μετασχηματισμών, που πρακτικά είναι το σύνολο όλων των περιστροφών γύρω από τον άξονα OZ, αποτελεί μια μονοπαραμετρική ομάδα, (δηλαδή μια άπειρη συνεχή ομάδα τάξης 1), με πράξη τη σύνθεση μετασχηματισμών ($\circ$). Αν παραστήσουμε τα στοιχεία της ομάδας αυτής συμβολικά με T_A ή $T(A)$, έτσι ώστε: $T(A) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}' = A \cdot \mathbf{u}$, που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό του πίνακα A με το διάνυσμα στήλη $\mathbf{u}$, τότε η πράξη της σύνθεσης μετασχηματισμών ($\circ$) ορίζεται ως εξής: $T_{A \circ B} \cdot \mathbf{u} = (T(A) \circ T(B)) \cdot \mathbf{u} = (A \cdot B) \cdot \mathbf{u}$, κι επομένως ανάγεται σε πολλαπλασιασμό πινάκων ($\cdot$). Επειδή ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα στον πολλαπλασιασμό πινάκων ($\cdot$), προκύπτει άμεσα ότι και στη σύνθεση ($\circ$) των περιστροφών γύρω από τον άξονα OZ έχουμε ότι ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα:

$(T(A) \circ T(B)) \circ T(\Gamma) \cdot \mathbf{u} = T(A) \circ (T(B) \circ T(\Gamma)) \cdot \mathbf{u}$. Το ουδέτερο στοιχείο της σύνθεσης μετασχηματισμών ($\circ$) είναι η ταυτοτική απεικόνιση με $T(I) = I$, αφού ισχύει ότι: $T(I) \cdot \mathbf{u} = I \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$, ενώ το συμμετρικό (ή αντίστροφο) στοιχείο του μετασχηματισμού $T(A)$ είναι το $T^{-1}(A) = T(A^{-1})$, αφού ισχύει ότι: $T(A^{-1}) \circ T(A) \cdot \mathbf{u} = (A^{-1} \cdot A) \cdot \mathbf{u} = I \cdot \mathbf{u} = T(I) \cdot \mathbf{u}, \forall A \in M_2(\mathbb{R})$ με $\det(A) = 1$.

Παράδειγμα 7 Το σύνολο όλων των περιστροφών γύρω από όλους τους άξονες, που διέρχονται από ένα σταθερό σημείο του χώρου αποτελεί μια άπειρη συνεχή ομάδα τάξης 3 με πράξη τη σύνθεση μετασχηματισμών ($\circ$), της οποίας οι παράμετροι είναι οι γωνίες Euler α, β, γ , που

μεταβάλλονται με συνεχή τρόπο και παίρνουν τιμές στο διάστημα $[-\pi, \pi)$ ή $[0, 2\pi)$. Η ομάδα αυτή ονομάζεται **πραγματική ειδική ορθογώνια ομάδα 3 διαστάσεων** και συμβολίζεται με $SO(3, \mathbb{R})$. Υπό μορφή πινάκων τα στοιχεία των μετασχηματισμών αυτών έχουν τη μορφή:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma - \sin\alpha \sin\gamma & \cos\alpha \cos\beta \sin\gamma + \sin\alpha \cos\gamma & \cos\alpha \sin\beta \\ -\sin\alpha \cos\beta \cos\gamma - \cos\alpha \sin\gamma & -\sin\alpha \cos\beta \sin\gamma + \cos\alpha \cos\gamma & -\sin\alpha \sin\beta \\ -\sin\beta \cos\gamma & -\sin\beta \sin\gamma & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

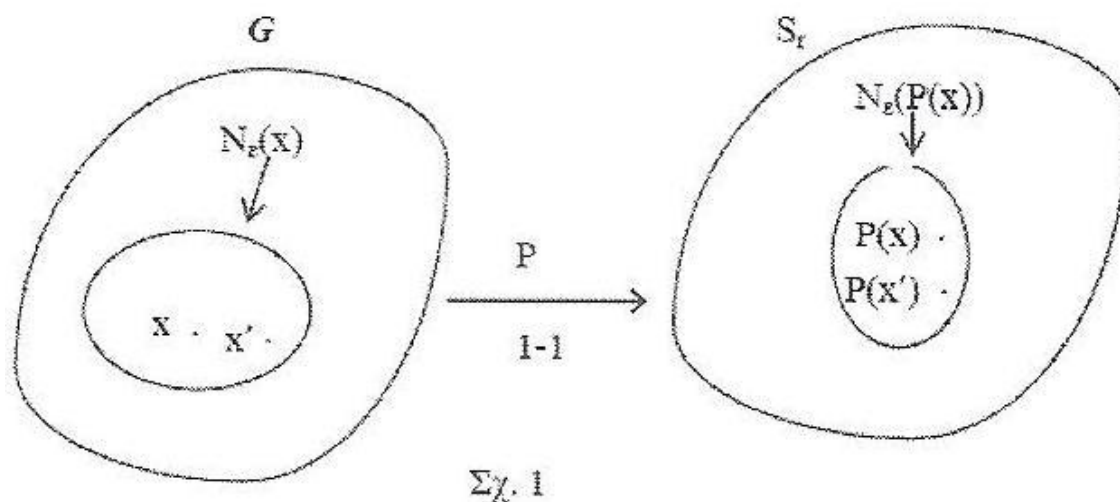
$$\Leftrightarrow \mathbf{u}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}, \text{ με } \theta \in [-\pi, \pi) \text{ ή } \theta \in [0, 2\pi).$$

Παρατήρηση Επειδή ο πίνακας $\mathbf{A}$ των Παραδειγμάτων 6 και 7 εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου (που είναι η γωνία), συνήθως στη βιβλιογραφία, αντί για $\mathbf{A}$, χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $R(\theta)$ και $R(\alpha, \beta, \gamma)$ αντίστοιχα, γιατί όπως θα δούμε και παρακάτω η γωνιακή εξάρτηση παίζει σημαντικό ρόλο στην αναπαράσταση της συγκεκριμένης κατηγορίας ομάδων.

4.3 Τοπολογικές ομάδες

Επειδή η μετάβαση από ένα στοιχείο μιας συνεχούς ομάδας σ' ένα άλλο γίνεται κατά συνεχή τρόπο, χρειάζεται να εισάγουμε μια τοπολογία στην ομάδα έτσι ώστε να μπορούμε να μιλάμε για τη συνέχεια της διμελούς πράξης που ορίζεται στην ομάδα, θεωρώντας την σαν απεικόνιση δυο μεταβλητών. Για απλότητα θα περιοριστούμε σε ομάδες των οποίων τα στοιχεία μπορούν να τεθούν σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με τα σημεία ενός υποσυνόλου S_r , ενός r -διάστατου πραγματικού χώρου $\mathbb{R}^r$ εσωτερικού γινομένου, από το οποίο ορίζεται μια νόρμα (norm) $\|\bullet\|$. Το υποσύνολο S_r θα ονομάζεται **παραμετρικός χώρος**. Έστω ένα σύνολο G εφοδιασμένο με μια διμελή πράξη $*$, που αποτελεί

ομάδα, έστω $P : G \rightarrow S_r$ μια 1-1 κι επί απεικόνιση από το σύνολο G στον παραμετρικό χώρο S_r κι έστω $P(x)$ το σημείο του παραμετρικού χώρου S_r που αντιστοιχεί σε κάποιο στοιχείο x της ομάδας G , δηλαδή είναι η εικόνα του στοιχείου $x \in G$. Θεωρούμε στη συνέχεια μια ε -περιοχή (ή ε -γειτονιά) $N_\varepsilon(x)$ του σημείου $x \in G$ και μια ε -περιοχή (ή ε -γειτονιά) $N_\varepsilon(P(x))$ του σημείου $P(x)$ του παραμετρικού χώρου S_r . Σχηματικά έχουμε:



όπου εξ' ορισμού της **ε -περιοχής** έχουμε ότι: $N_\varepsilon(x) = \{x' \in G : \|x' - x\| < \varepsilon\}$ και $N_\varepsilon(P(x)) = \{P(x') \in S_r : \|P(x') - P(x)\| < \varepsilon\}$.

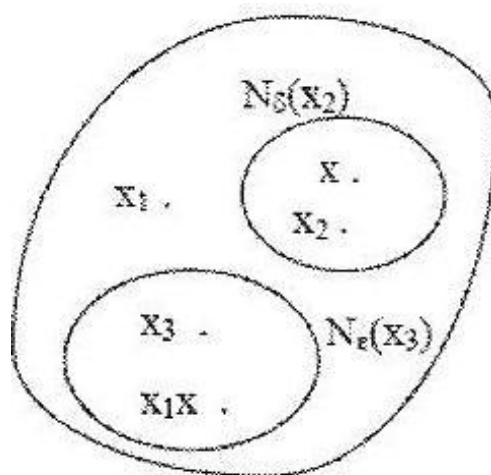
Θα δώσουμε τώρα τον ορισμό της συνέχειας της διμελούς πράξης $*$ που ορίζεται σε μια ομάδα καθώς επίσης και τον ορισμό της συνέχειας της αντιστροφής των στοιχείων της ομάδας.

Ορισμός: Έστω ένα σύνολο G εφοδιασμένο με μια διμελή πράξη $*$ που αποτελεί ομάδα κι έστω $x_1, x_2, x_3 \in G$ τέτοια ώστε: $x_1 * x_2 = x_3$. Η **διμελής πράξη $*$** είναι **συνεχής ως προς το στοιχείο $x_2 \in G$** αν:

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ τ. ω. $\forall x \in N_\delta(x_2)$ το $x_1 * x \in N_\varepsilon(x_3) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ τ. ω. αν $\|P(x) - P(x_2)\| < \delta \Rightarrow \|P(x_1 * x) - P(x_3)\| < \varepsilon$

(εντελώς παρόμοια ορίζεται η συνέχεια της διμελούς πράξης $*$ ως προς το στοιχείο $x_1 \in G$).

Η διαισθητική ερμηνεία του παραπάνω ορισμού είναι ότι μια μικρή αλλαγή στους παράγοντες του γινομένου $x_1 * x_2$ επιφέρει μικρή αλλαγή στο αποτέλεσμα x_3 . Σχηματικά έχουμε:

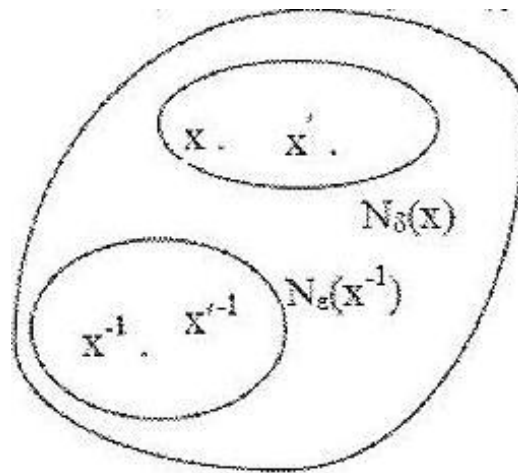


Σχ. 2

Ορισμός: Έστω ένα σύνολο G εφοδιασμένο με μια διμελή πράξη $*$ που αποτελεί ομάδα κι έστω $x, x' \in G$. Από τον ορισμό της ομάδας έπεται ότι: $\exists x^{-1}, x'^{-1} \in G$. Η **διμελής πράξη $*$** είναι **συνεχής ως προς το αντίστροφο στοιχείο** του $x \in G$ αν:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ τ. ω. } \forall x' \in N_\delta(x) \text{ το } x'^{-1} \in N_\varepsilon(x^{-1})$$

Η διαισθητική ερμηνεία του παραπάνω ορισμού είναι ότι μια μικρή αλλαγή στο στοιχείο x επιφέρει μικρή αλλαγή στο αντίστροφο στοιχείο x^{-1} . Σχηματικά έχουμε:



Σχ. 3

Σαν τοπολογική ομάδα ορίζουμε μια ομάδα στην οποία η διμελής πράξη $*$ και η αντιστροφή των στοιχείων της ομάδας είναι συνεχείς απεικονίσεις. Με πιο αυστηρή μαθηματική γραφή έχουμε:

Ορισμός: Ένα μη κενό σύνολο $G \neq \emptyset$ που είναι εφοδιασμένο με μια διμελή πράξη $*$ λέγεται **τοπολογική ομάδα** εάν ικανοποιούνται οι εξής ιδιότητες:

α) το σύνολο G αποτελεί ομάδα,

β) το σύνολο G είναι τοπολογικός χώρος,

γ) η απεικόνιση $f : G \rightarrow G$ και η απεικόνιση $h : G \times G \rightarrow G$

$$x \rightarrow f(x) = x^{-1}$$

$$(x, y) \rightarrow x * y$$

να είναι και οι δύο συνεχείς ως προς την τοπολογία που ορίζει ο τοπολογικός χώρος.

4.4 Συνεκτική & συμπαγής ομάδα

Ορισμοί: Θεωρούμε δυο τυχαία στοιχεία x_1, x_2 μιας τοπολογικής ομάδας G με εικόνες $P(x_1)$ και $P(x_2)$ στον παραμετρικό χώρο S_r . Εάν μπορούμε να συνδέσουμε τα σημεία $P(x_1)$ και $P(x_2)$ με μια καμπύλη που βρίσκεται εξ' ολοκλήρου στον παραμετρικό χώρο S_r , τότε ο παραμετρικός χώρος S_r λέγεται **συνεκτικός χώρος**, διαφορετικά λέγεται **μη συνεκτικός χώρος**. Έστω G μια ομάδα της οποίας ο παραμετρικός χώρος είναι συνεκτικός και θεωρούμε μια καμπύλη c , που συνδέει τα σημεία $P(x_1)$ και $P(x_2)$. Το σύνολο των στοιχείων x της ομάδας G , των οποίων οι εικόνες $P(x)$ είναι σημεία της καμπύλης c , θα ονομάζεται **καμπύλη που συνδέει τα στοιχεία** x_1 και x_2 . Μια ομάδα G λέγεται **συνεκτική ομάδα** εάν για δύο δεδομένα στοιχεία της ομάδας G υπάρχει μια καμπύλη που συνδέει αυτά τα δύο στοιχεία, δηλαδή όταν ο παραμετρικός χώρος S_r είναι συνεκτικός.

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η ιδιότητα της συνεκτικότητας είναι διαφορετική από τη συνέχεια της ομάδας, η οποία εξαρτάται από τη συνεχή μεταβολή μιας ή περισσότερων παραμέτρων της ομάδας. Έτσι μια συνεχής ομάδα μπορεί να μην είναι συνεκτική, κι αυτό συμβαίνει όταν ο παραμετρικός χώρος S_r είναι μη συνεκτικός, όταν για παράδειγμα αποτελείται από δύο ή περισσότερα διακεκριμένα υποσύνολα, έτσι ώστε κάθε υποσύνολο να είναι συνεκτικό αλλά να μην μπορούμε να πάμε από το ένα υποσύνολο στο άλλο χωρίς να βγούμε έξω από τον παραμετρικό χώρο S_r .

Ορισμοί: Μια συνεχής συνεκτική ομάδα λέγεται **πολλαπλά συνεκτική ομάδα**, αν υπάρχουν κλειστές καμπύλες στον παραμετρικό χώρο S_r , οι οποίες δεν μπορούν να συσταθούν και να εκφυλιστούν σε ένα σημείο χωρίς να εγκαταλείψουν τον χώρο,

ή ισοδύναμα όταν υπάρχουν καμπύλες οι οποίες δεν μπορούν να παραμορφωθούν κατά συνεχή τρόπο για να συμπέσουν. Αυτό διαισθητικά συμβαίνει όταν ο χώρος περιέχει κενά. Εάν τα κενά είναι σε πλήθος k , τότε ο **χώρος** λέγεται **k -πολλαπλά συνεκτικός**.

Εάν μια τοπολογική ομάδα έχει r συνεχείς παραμέτρους και $n-r$ διακεκριμένες, τότε ο παραμετρικός της χώρος S_r θα αποτελείται από $n-r$ διακεκριμένους υπόχωρους. Στην περίπτωση αυτή και η ομάδα G θα αποτελείται από $n-r$ διακεκριμένα υποσύνολα, τα οποία βρίσκονται σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με τους $n-r$ διακεκριμένους υπόχωρους του παραμετρικού χώρου S_r . Τις αναλυτικές ιδιότητες της ομάδας τις μελετάμε μόνο σ' εκείνο το υποσύνολο της ομάδας που περιέχει το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας G .

Ορισμός: Μια τοπολογική ομάδα λέγεται **συμπαγής ομάδα** αν ο παραμετρικός της χώρος S_r είναι συμπαγής χώρος, δηλαδή κλειστός και φραγμένος χώρος.

4.5 Lie ομάδες

Θα δούμε στη συνέχεια ότι μια Lie ομάδα είναι μια λεία πολλαπλότητα G , η οποία είναι ταυτόχρονα και ομάδα με μια διμελή πράξη $*$, έτσι ώστε η διμελής πράξη $*$ της ομάδας G , καθώς κι η απεικόνιση της αντιστροφής να είναι λείες απεικονίσεις. Η δομή της ομάδας G προσδίδει ιδιαίτερα πλούσια χαρακτηριστικά στις πολλαπλότητες αυτές. Για παράδειγμα η μελέτη του εφαπτόμενου χώρου αρκεί να γίνει μόνο στο ουδέτερο στοιχείο της ομάδας. Τα πιο σημαντικά παραδείγματα Lie ομάδων είναι οι ομάδες πινάκων, δηλαδή κλειστές

υποομάδες της γενικής γραμμικής ομάδας $GL(n)$. Μια ιδιαίτερα σημαντική κλάση διανυσματικών πεδίων σε μια Lie ομάδα είναι τα αριστερά αναλλοίωτα διανυσματικά πεδία. Μέσω αυτών ορίζεται ένα αλγεβρικό αντικείμενο, η Lie άλγεβρα μιας Lie ομάδας, που θα δούμε αργότερα. Έτσι ορίζεται ένα Lie γινόμενο στον εφαπτόμενο χώρο της στο ουδέτερο στοιχείο. Ιδιαίτερα χρήσιμες καμπύλες σε μια Lie ομάδα είναι οι μονοπαραμετρικές υποομάδες, και μέσω αυτών ορίζεται η εκθετική απεικόνιση, όπου για την περίπτωση των ομάδων πινάκων αυτή είναι η πιο συνηθισμένη εκθετική απεικόνιση πινάκων.

Οι Lie ομάδες αποτελούν μια εξαιρετικά σημαντική κλάση πολλαπλοτήτων με μεγάλο εύρος εφαρμογών στη γεωμετρία, στη φυσική, στην αρμονική ανάλυση, στις διαφορικές εξισώσεις αλλά και σε άλλους κλάδους των μαθηματικών όπως στη στατιστική και στη θεωρία ελέγχου. Οι Lie ομάδες χρησιμοποιήθηκαν από τον Felix Klein για τη θεμελίωση της γεωμετρίας στο πρόγραμμα του Erlangen. Ο σπόρος της θεωρίας των Lie ομάδων βρίσκεται στις προσπάθειες του Sophus Lie, περί το 1870, να αναπτύξει μια θεωρία συμμετριών για την επίλυση συστημάτων διαφορικών εξισώσεων. Η αρχική ονομασία που έδωσε ο Lie στις συμμετρίες αυτές ήταν συνεχείς ομάδες. Ο όρος Lie ομάδα δόθηκε το 1893 από τον μαθητή του Lie, Arthur Tresse, αλλά η πιο ευρεία χρήση του οφείλεται στον Henri Cartan περί το 1930. Ο στόχος του Lie ήταν η ανάπτυξη μιας θεωρίας ανάλογης αυτής του Evariste Galois, σύμφωνα με την οποία, τη θέση της λύσης μιας πολυωνυμικής εξίσωσης με ριζικά θα έπαιρνε μια πεπερασμένη ομάδα συμμετριών μιας διαφορικής εξίσωσης. Οι διαφορικές εξισώσεις που μελετούσε τότε ο Lie είναι γνωστές ως εξισώσεις τύπου Lie, τυπικό παράδειγμα των οποίων είναι η εξίσωση Riccati. Τα απλούστερα παραδείγματα Lie ομάδων είναι οι ομάδες ισομετρικών των $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, H^n (όπου H είναι το σύνολο των υπερμιγαδικών αριθμών (quaternionions), δηλαδή το σύνολο των αριθμών που είναι της μορφής: $q = x + iy + jz + kw$, με $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ και $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k$, $ji = -k$, $ki = j$, $ik = -j$, $jk = i$, $kj = -i$), απ' όπου προκύπτουν η ορθογώνια ομάδα $O(n)$, η μοναδιαία ομάδα $U(n)$ και η συμπλεκτική ομάδα $S_p(n)$.

Έστω μια τοπολογική ομάδα G , που είναι τάξης r , κι έστω τα στοιχεία $x_1, x_2, x_3, x_4 \in G$ τέτοια ώστε: $x_1 * x_2 = x_3$ και $x_4 = x_1^{-1}$. Λόγω της εξάρτησης των στοιχείων $x_1, x_2, x_3, x_4 \in G$ της τοπολογικής ομάδας G από τις r συνεχείς παραμέτρους έχουμε ότι:

$$x_1 \equiv x_1(a_1, a_2, \dots, a_r)$$

$$x_2 \equiv x_2(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r)$$

$$x_3 \equiv x_3(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r)$$

$$x_4 \equiv x_4(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r)$$

και λόγω των σχέσεων $x_1 * x_2 = x_3$ και $x_4 = x_1^{-1}$ οι παράμετροι των στοιχείων x_3, x_4 μπορούν να εκφραστούν σαν συναρτήσεις των παραμέτρων των στοιχείων x_1, x_2 , δηλαδή:

$\gamma_i \equiv \gamma_i(a_1, a_2, \dots, a_r; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r)$ και $\delta_i \equiv \delta_i(a_1, a_2, \dots, a_r)$, με $i = 1, 2, \dots, r$

Ορισμός: Μια τοπολογική ομάδα G ονομάζεται **Lie ομάδα r διαστάσεων**

αν υπάρχει μια γειτονιά N του ουδέτερου στοιχείου $e \in G$, έτσι ώστε οι συνεχείς παράμετροι του γινομένου δυο στοιχείων και οι παράμετροι του αντιστρόφου ενός στοιχείου της γειτονιάς N να είναι συνεχείς διαφορίσιμες συναρτήσεις των παραμέτρων των στοιχείων, δηλαδή αναλυτικές συναρτήσεις. Πιο συγκεκριμένα τα γ_i και δ_i των παραπάνω σχέσεων είναι αναλυτικές συναρτήσεις των a_i και β_i για στοιχεία της γειτονιάς N , με την προϋπόθεση ότι τα στοιχεία $x_3, x_4 \in N$, όταν και τα $x_1, x_2 \in N$.

Παρατήρηση Ισοδύναμα, μια Lie ομάδα ορίζεται ως εξής: αν G είναι μια λεία πολλαπλότητα, τότε η G είναι Lie ομάδα αν:

α) η G είναι ομάδα,

β) οι απεικονίσεις $f: G \times G \rightarrow G$ & $h: G \rightarrow G$ είναι λείες.

$$(x, y) \rightarrow x * y \quad x \rightarrow x^{-1}$$

κι επειδή σε κάθε Lie ομάδα οι πράξεις της ομάδας είναι λείες απεικονίσεις, θα είναι και συνεχείς, οπότε οι Lie ομάδες είναι τοπολογικές ομάδες.

Για απλότητα και χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να επιλέξουμε τις συνεχείς παραμέτρους μιας Lie ομάδας έτσι ώστε η εικόνα του ουδέτερου στοιχείου $e \in G$ της ομάδας να είναι η αρχή των αξόνων του παραμετρικού χώρου S_r , δηλαδή $e \equiv x(0, 0, \dots, 0)$. Με αυτή την παραμετρικοποίηση, ένα στοιχείο x που είναι γειτονικό του ουδέτερου στοιχείου $e \in G$, μπορεί ν' αναπτυχθεί σε σειρά Taylor γύρω από την αρχή, κι αυτό μπορεί να γίνει χάρη στις αναλυτικές ιδιότητες της Lie ομάδας ως εξής:

$$x(a_1, a_2, \dots, a_r) = x(0, 0, \dots, 0) + \sum_{\kappa=1}^r a_{\kappa} \left(\frac{\partial x}{\partial a_{\kappa}} \right)_{a_{\kappa}=0} + \frac{1}{2} \sum_{\kappa=1}^r \sum_{\lambda=1}^r a_{\kappa} a_{\lambda} \left(\frac{\partial^2 x}{\partial a_{\kappa} \partial a_{\lambda}} \right)_{a_{\kappa}=0, a_{\lambda}=0} + \dots,$$

όπου η έκφραση $\left(\frac{\partial x}{\partial a_{\kappa}} \right)_{a_{\kappa}=0}$ στον παραπάνω τύπο σημαίνει: $\left(\frac{\partial x(0, 0, \dots, 0)}{\partial a_{\kappa}} \right)_{a_{\kappa}=0}$,

δηλαδή παραγωγίζουμε το $x(a_1, a_2, \dots, a_r)$ ως προς a_{κ} και μετά θέτουμε $a_1 = a_2 = \dots = a_r = 0$, ή ισοδύναμα, πρώτα θέτουμε $a_i = 0$, με $i \neq \kappa$, και μετά παραγωγίζουμε ως προς a_{κ} και τέλος θέτουμε $a_{\kappa} = 0$. Αν περιοριστούμε μέχρι τους όρους 1ης τάξης και θέσουμε $X_{\kappa} = i J_{\kappa} = \left(\frac{\partial x}{\partial a_{\kappa}} \right)_{a_{\kappa}=0}$ **(4.1)**,

επειδή $i^2 = -1$ έχουμε: $x(a_1, a_2, \dots, a_r) = x(0, 0, \dots, 0) + i \sum_{\kappa=1}^r a_{\kappa} J_{\kappa}$.

Για το στοιχείο x που αντιστοιχεί στις τιμές των παραμέτρων έχουμε ότι:

$$a_i = \begin{cases} \varepsilon, & \text{για } i = k \\ 0, & \text{για } i \neq k \end{cases}, \text{ με } \varepsilon = \text{απειροστό}$$

Δηλαδή έχουμε: $x = x(0, \dots, \varepsilon, \dots, 0) = x(0, 0, \dots, 0) + i \varepsilon J_k = e + i \varepsilon J_k$.

Για ένα οποιοδήποτε άλλο στοιχείο της μορφής $x = x(0, \dots, a_{\kappa}, \dots, 0)$, που είναι απομακρυσμένο από το ουδέτερο στοιχείο $e \in G$, μπορούμε να θέσουμε $a_{\kappa} = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} (\varepsilon N)$, κι επειδή:

$$x(0, \dots, \varepsilon N, \dots, 0) = \underbrace{x(0, \dots, \varepsilon, \dots, 0) \cdot x(0, \dots, \varepsilon, \dots, 0) \cdot \dots \cdot x(0, \dots, \varepsilon, \dots, 0)}_{N \text{ φορές}} =$$

$$= \underbrace{(e + i\varepsilon J_k) \cdot (e + i\varepsilon J_k) \cdot \dots \cdot (e + i\varepsilon J_k)}_{N \text{ φορές}} = (e + i\varepsilon J_k)^N,$$

θα έχουμε ότι:

$$x(0, \dots, a_k, \dots, 0) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} x(0, \dots, \varepsilon N, \dots, 0) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} (e + i\varepsilon J_k)^N = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[e + i \left(\frac{a_k}{N} \right) J_k \right]^N = \exp(i a_k J_k),$$

το οποίο πρόεκυψε σύμφωνα με το γνωστό όριο: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n} \right)^n = e^\alpha$.

Συνεπώς έχουμε: $x = x(a_1, a_2, \dots, a_r) = \exp(i a_1 J_1) \exp(i a_2 J_2) \dots \exp(i a_r J_r) =$

$$= \exp\left(\sum_{k=1}^r i a_k J_k\right) \quad (4.2)$$

Έτσι λοιπόν, όλα τα στοιχεία της Lie ομάδας που ανήκουν στο υποσύνολο που περιέχει το ουδέτερο στοιχείο $e \in G$, μπορούν να προκύψουν από τους **απειροστούς τελεστές** J_k δίνοντας κατάλληλες τιμές στις παραμέτρους $a_1, a_2, \dots, a_r$. Γι' αυτό τον λόγο οι απειροστοί τελεστές J_k λέγονται **γεννήτορες της ομάδας**. Μια Lie ομάδα με r συνεχείς παραμέτρους έχει r γεννήτορες.

Πρόταση 1 Τα απειροστά στοιχεία μιας Lie ομάδας G αποτελούν από μόνα τους μια αβελιανή ομάδα.

Απόδειξη Πράγματι, αν $x_k \equiv x(0, \dots, \varepsilon_k, \dots, 0) = e + i\varepsilon_k J_k$ και $x_\lambda \equiv x(0, \dots, \varepsilon_\lambda, \dots, 0) = e + i\varepsilon_\lambda J_\lambda$, τότε $x_k x_\lambda = x_\lambda x_k = e + i(\varepsilon_k J_k + \varepsilon_\lambda J_\lambda)$, που είναι κι αυτό ένα απειροστό στοιχείο της Lie ομάδας G .

■

Ακολουθούν μερικά παραδείγματα Lie ομάδων:

Παράδειγμα 8 Τα σύνολα $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, H^n$ είναι Lie ομάδες με πράξη την πρόσθεση (+) και τα σύνολα $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \mathbb{C}^n \setminus \{0\}, H^n \setminus \{0\}$ είναι Lie ομάδες με πράξη τον πολλαπλασιασμό ($\bullet$).

Παράδειγμα 9 Ο μοναδιαίος κύκλος S_1 είναι μια Lie ομάδα, και μάλιστα μπορούμε να ταυτίσουμε τον κύκλο S_1 με το σύνολο $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, κάνοντας την αντιστοιχία:

$$(\cos\theta, \sin\theta) \rightarrow e^{i\theta}, \text{ όπου } i = \sqrt{-1}.$$

Παράδειγμα 10 Η πραγματική γενική γραμμική ομάδα $GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\}$, που αποτελείται από όλους τους $n \times n$ αντιστρέψιμους πίνακες με πραγματικά στοιχεία, είναι Lie ομάδα.

Λύση: Γνωρίζουμε ότι η πραγματική γενική γραμμική ομάδα $GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\}$, είναι μια πολλαπλότητα διάστασης n^2 . Θα δείξουμε ότι οι πράξεις του γινομένου πινάκων $(\bullet)$ και του αντιστρόφου ενός πίνακα $A \in GL(n, \mathbb{R})$ είναι λείες απεικονίσεις. Πράγματι, έστω δύο πίνακες $A, B \in GL(n, \mathbb{R})$ με $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, τότε το γινόμενό τους είναι, σύμφωνα με τον ορισμό του γινομένου πινάκων $(\bullet)$, ο πίνακας $A \bullet B = (c_{ij})$, όπου το γενικό του στοιχείο δίνεται από τη σχέση: $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$, δηλαδή τα στοιχεία του πίνακα του γινομένου πινάκων $(\bullet)$ είναι πολυώνυμα, για τα οποία γνωρίζουμε ότι είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμα σε όλο το $\mathbb{R}$, και συνεπώς ο πολλαπλασιασμός πινάκων $\bullet : GL(n, \mathbb{R}) \times GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ είναι λεία συνάρτηση.

$$(A, B) \rightarrow A \bullet B$$

Επίσης γνωρίζουμε ότι ο αντίστροφος πίνακας A^{-1} δίνεται από τη σχέση: $A^{-1} = \text{adj}(A) / \det(A)$, όπου $\text{adj}(A)$ είναι ο προσαρτημένος πίνακας του πίνακα A , κι επομένως τα στοιχεία του πίνακα A^{-1} θα είναι πάλι πολυώνυμα. Άρα η απεικόνιση $GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$

$$A \rightarrow A^{-1}$$

είναι λεία συνάρτηση.

Επομένως η ομάδα $GL(n, \mathbb{R})$ είναι Lie ομάδα. (Ακριβώς με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι οι ομάδες $GL(n, \mathbb{C})$ και $GL(n, \mathbb{H})$ είναι Lie ομάδες).

■

Παράδειγμα 11 Η ειδική γραμμική ομάδα $SL(n, K) = \{A \in GL(n, K) : \det(A) = 1\}$, με $K = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ ή $\mathbb{H}$, που είναι υποομάδα της γενικής γραμμικής ομάδας $GL(n, K)$ κι αποτελείται από όλους τους $n \times n$ αντιστρέψιμους πίνακες που έχουν ορίζουσα ίση με 1, είναι Lie ομάδα.

Παράδειγμα 12 Η ορθογώνια ομάδα $O(n, K) = \{A \in GL(n, K) : A \cdot A^T = I_n\}$, με $K = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ ή $\mathbb{H}$, που αποτελείται από όλους τους $n \times n$ ορθογώνιους πίνακες με πραγματικά στοιχεία, είναι Lie ομάδα.

Παράδειγμα 13 Η ειδική ορθογώνια ομάδα $SO(n) = \{A \in O(n) : \det(A) = 1\}$, που είναι υποομάδα της ορθογώνιας ομάδας $O(n)$ κι αποτελείται από όλους τους $n \times n$ ορθογώνιους πίνακες που έχουν ορίζουσα ίση με 1, είναι Lie ομάδα.

Παράδειγμα 14 Η ορθομοναδιαία ομάδα $U(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) : A \cdot A^+ = I_n\}$ (όπου με A^+ συμβολίζεται ο αναστροφосуζυγής του πίνακα A), που αποτελείται από όλους τους $n \times n$ ορθομοναδιαίους πίνακες, είναι Lie ομάδα.

Παράδειγμα 15 Η ειδική μοναδιαία ομάδα $SU(n) = \{A \in U(n) : \det(A) = 1\}$, που είναι υποομάδα της ορθομοναδιαίας ομάδας $U(n)$ κι αποτελείται από όλους τους $n \times n$ ορθομοναδιαίους πίνακες που έχουν ορίζουσα ίση με 1, είναι Lie ομάδα.

Παράδειγμα 16 Η συμπλεκτική ομάδα $S_p(n) = \{A \in GL(n, H) : A \cdot A^+ = I_n\}$ ή αλλιώς $S_p(n) = \{A \in U(2n) : A^T \cdot J = J \cdot A^{-1}, \text{ όπου } J = \begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}\}$ είναι Lie ομάδα.

4.6 Αναπαράσταση μιας συνεχούς ομάδας

Ορισμός: Θεωρούμε ένα σύνολο πινάκων $M(x)$ που είναι μια αναπαράσταση της Lie ομάδας G , δηλαδή για $x_1, x_2, x_3, x_4 \in G$ τέτοια ώστε: $x_1 * x_2 = x_3$ και $x_4 = x_1^{-1} \Leftrightarrow x_1 * x_4 = e$, οπότε έχουμε ότι: $M(x_1) \cdot M(x_2) = M(x_3)$ και $M(x_1) \cdot M(x_4) = M(e)$. Η αναπαράσταση M λέγεται **συνεχής αναπαράσταση** όταν:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} M(x) \rightarrow M(x_0)$$

Παρατήρηση Η ομάδα G είναι ομομορφική με την ομάδα M των πινάκων, οι οποίοι μπορούν να προσδιοριστούν από τις ίδιες παραμέτρους που προσδιορίζουν τα στοιχεία της ομάδας G .

Εάν περιοριστούμε στη μελέτη των συνεχών αναπαραστάσεων μιας συμπαγούς ομάδας, τότε ισχύουν τα παρακάτω σημαντικά θεωρήματα, που παρατίθενται χωρίς απόδειξη:

Θεώρημα 1 Κάθε αναπαράσταση έχει μια ισοδύναμη αναπαράσταση, της οποίας οι πίνακες είναι ορθομοναδιαίοι (unitary) και η αναπαράσταση λέγεται **ορθομοναδιαία**.

Θεώρημα 2 Κάθε μοναδιαία **αναπαράσταση** είναι πλήρως **αναγωγίσιμη**, δηλαδή κάθε πίνακας της αναπαράστασης μπορεί να γραφεί υπό μορφή block, όπως για παράδειγμα:

$$M(x) = \begin{bmatrix} M^1(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & M^s(x) \end{bmatrix}$$

Θεώρημα 3 Κάθε μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση είναι πεπερασμένης διαστάσεως.

4.7 Η αξονική ομάδα περιστροφών $SO(2)$

Θεωρούμε το σύνολο των περιστροφών ενός κύκλου γύρω από τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδο του κύκλου. Κάθε στοιχείο αυτού του συνόλου προσδιορίζεται από μια παράμετρο, που είναι η γωνία περιστροφής θ , και παίρνει τιμές στο διάστημα $[0, 2\pi)$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι το σύνολο αυτό αποτελεί μια μονοπαραμετρική, συνεχή, συνεκτική, συμπαγή, αβελιανή Lie ομάδα που είναι γνωστή σαν **αξονική ομάδα περιστροφών** και συμβολίζεται με $SO(2)$. Επειδή οι περιστροφές κατά γωνία θ και κατά γωνία $\theta + 2n\pi$, με $n \in \mathbb{N}$, είναι ταυτόσημες, ο παραμετρικός χώρος S_r είναι το υποσύνολο $[0, 2\pi)$ των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$. Η ομάδα αυτή είναι απείρως πολλαπλά συνεκτική, διότι υπάρχουν άπειρες το πλήθος καμπύλες που συνδέουν δυο τυχαία στοιχεία της ομάδας, που δεν μπορούν να συμπέσουν με συνεχή παραμόρφωση χωρίς να εγκαταλείψουν τον χώρο. Η καμπύλη που διαγράφει τον κύκλο n φορές δεν ταυτίζεται με εκείνη την καμπύλη που τον διαγράφει $n+1$ φορές.

Αν συμβολίσουμε με $R(\theta)$ ένα στοιχείο αυτής της ομάδας, τότε έχουμε ότι:

$$R(\theta_1) \cdot R(\theta_2) = R(\theta_2) \cdot R(\theta_1) = \begin{cases} R(\theta_1 + \theta_2), & \text{εάν } \theta_1 + \theta_2 < 2\pi \\ R(\theta_1 + \theta_2 - 2\pi), & \text{εάν } \theta_1 + \theta_2 \geq 2\pi \end{cases}$$

Το ουδέτερο στοιχείο είναι ο ταυτοτικός πίνακας $R(0) = I_2$ και το συμμετρικό στοιχείο του $R(\theta)$ είναι το $R(2\pi - \theta)$.

Εάν στο επίπεδο του κύκλου θεωρήσουμε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων με αρχή το κέντρο του κύκλου, τότε οι μετασχηματισμοί των σημείων (x, y) υπό τις περιστροφές της ομάδας $SO(2)$ μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να δώσουν μια αναπαράσταση της ομάδας $SO(2)$. Η επίδραση ενός στοιχείου $R(\theta)$ πάνω στο ζεύγος (x, y) είναι:

$$R(\theta)(x, y) \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας του μετασχηματισμού στο δεξί μέλος της παραπάνω σχέσης είναι ένας ορθογώνιος πίνακας τάξης 2. Σε κάθε στοιχείο $R(\theta)$ της ομάδας μπορούμε να αντιστοιχίσουμε αμφιμονοσήμαντα έναν 2×2 ορθογώνιο πίνακα που έχει ορίζουσα +1. Το σύνολο όλων των ορθογωνίων πινάκων τάξης 2 με ορίζουσα +1 αποτελεί ομάδα, που είναι ισομορφική με την αξονική ομάδα περιστροφών, κι επομένως είναι μια αναπαράσταση 2 διαστάσεων. Η ομάδα αυτή των πινάκων συμβολίζεται με το ίδιο σύμβολο $SO(2)$.

4.7.1 Οι γεννήτορες της αξονικής ομάδας περιστροφών $SO(2)$

Ως γνωστόν η ομάδα $SO(2)$ είναι μια μονοπαραμετρική ομάδα κι επομένως θα έχει έναν μόνο γεννήτορα, η μορφή του οποίου θα εξαρτάται από την αναπαράσταση της ομάδας $SO(2)$ που μελετάμε. Τα παραδείγματα που ακολουθούν θα αποσαφηνίσουν τα παραπάνω.

Παράδειγμα 17 Θεωρούμε την ομάδα S_1 , με πράξη τον πολλαπλασιασμό $(\cdot)$, που αποτελείται από τους μιγαδικούς αριθμούς που είναι της μορφής: $x = \exp(i\theta)$, με $\theta \in [0, 2\pi)$, και ορίζουν τον μοναδιαίο κύκλο στο μιγαδικό επίπεδο. Η ομάδα αυτή είναι ισομορφική με την αξονική ομάδα των περιστροφών $SO(2)$, διότι αν $z = x + iy$ ένας μιγαδικός αριθμός, τότε αν τον εκφράσουμε σε πολική μορφή προκύπτει ότι:

$$z = r \cos \alpha + i r \sin \alpha = r(\cos \alpha + i \sin \alpha) = r \exp(i\alpha)$$

και τότε λοιπόν για το γινόμενο xz έχουμε ότι:

$$xz = \exp(i\theta) r \exp(i\alpha) = r \exp(i(\theta + \alpha)) = w$$

που παριστάνει ένα μιγαδικό αριθμό $w \in \mathbb{C}$ που έχει μέτρο $|w| = |z| = r$ και όρισμα $\arg(w) = \theta + \alpha$, κι επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο μιγαδικός αριθμός $w \in \mathbb{C}$ έχει προκύψει από τον μιγαδικό αριθμό $z \in \mathbb{C}$, μέσω περιστροφής του $z \in \mathbb{C}$.

Επομένως σύμφωνα με τη σχέση (4.1) για $x = \exp(i\theta)$

$$\text{έχουμε ότι: } J = \frac{1}{i} \left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \right)_{\theta=0} = \frac{1}{i} \left(\frac{\partial \exp(i\theta)}{\partial \theta} \right)_{\theta=0} = \frac{1}{i} i = 1$$

και από τη σχέση (4.2) για $r = 1$ έχουμε ότι: $x = \exp(i\alpha_k J_k)$ και συνεπώς κάθε στοιχείο της ομάδας μπορεί να γραφεί στη μορφή $x = \exp(i\theta)$.

Παράδειγμα 18 Θεωρούμε την ομάδα όλων των ορθογωνίων πινάκων τάξης 2 με ορίζουσα +1. Τα στοιχεία αυτής της ομάδας έχουν την

$$\text{μορφή: } x = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Για να υπολογίσουμε το γεννήτορα, σύμφωνα με τη σχέση (4.1) βρίσκουμε ότι:

$$J = \frac{1}{i} \left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \right)_{\theta=0} = \frac{1}{i} \begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & -\sin \theta \end{bmatrix}_{\theta=0} = \frac{1}{i} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

που είναι ο σ_2 spin πίνακας του Pauli κι εφαρμόζοντας τη σχέση (4.2) αποδεικνύεται ότι κάθε 2×2 ορθογώνιος πίνακας που έχει ορίζουσα +1 μπορεί να γραφεί σαν:

$$R(\theta) = \exp(i\theta\sigma_2)$$

Παράδειγμα 19 Θεωρούμε έναν κύκλο ακτίνας ρ κι έστω ότι το x μετρά την απόσταση κατά μήκος της περιφέρειας. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη πάνω στην περιφέρεια και $R(\theta)$ η περιστροφή της συνάρτησης f κατά γωνία θ γύρω από τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου και είναι κάθετος στο επίπεδο του. Επειδή η συνάρτηση f ορίζεται μόνο πάνω στην περιφέρεια του κύκλου, η επίδραση της περιστροφής $R(\theta)$ είναι να μεταθέτει το όρισμα της συνάρτησης κατά $\rho\theta$, δηλαδή: $R(\theta)f(x) = f(x + \rho\theta)$
Και τότε ο γεννήτορας J είναι ένας τελεστής, του οποίου η επίδραση πάνω στην $f(x)$ είναι:

$$Jf(x) = \frac{1}{i} \left(\frac{\partial (R(\theta)f(x))}{\partial \theta} \right)_{\theta=0} = \frac{1}{i} \left(\frac{\partial (f(x + \rho\theta))}{\partial \theta} \right)_{\theta=0} = -i\rho \frac{\partial f(x)}{\partial x}$$

$$\text{Άρα: } Jf(x) = -i\rho \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Rightarrow J = -i\rho \frac{\partial}{\partial x}$$

Παρατήρηση Στο Παράδειγμα 19 βλέπουμε ότι ο γεννήτορας J είναι ανάλογος του κλασικού τελεστή της ορμής $P_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$, όπου $\hbar$ είναι η σταθερά h του Planck διαιρεμένη με το 2π , δηλαδή $\hbar = h/2\pi$. Έτσι ένας τελεστής που είναι στοιχείο της ομάδας $SO(2)$ και που επενεργεί πάνω στην ομάδα των συναρτήσεων f , μπορεί να γραφεί σαν: $R(\theta) = \exp\left(\rho\theta \frac{\partial}{\partial x}\right)$, με την έννοια ότι: $R(\theta)f(x) = f(x + \rho\theta)$.

Παράδειγμα 20 Έστω f μια συνάρτηση δυο μεταβλητών x, y και $R(\theta)$ ο ορθογώνιος μετασχηματισμός του συστήματος συντεταγμένων (x, y) . Η επίδραση του ορθογώνιου μετασχηματισμού $R(\theta)$ πάνω στην συνάρτηση f δίνεται από την σχέση: $R(\theta)f(x, y) = f(x', y') = f(x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta)$.

Για το γεννήτορα J έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} Jf(x, y) &= \frac{1}{i} \left(\frac{\partial (R(\theta) f(x, y))}{\partial \theta} \right)_{\theta=0} \\ &= \frac{1}{i} \left(\frac{\partial (f(x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta))}{\partial \theta} \right)_{\theta=0} = \\ &= \frac{1}{i} \left(\frac{\partial f}{\partial x} (-x \sin \theta + y \cos \theta) + \frac{\partial f}{\partial y} (-x \cos \theta - y \sin \theta) \right)_{\theta=0} = \\ &= -i \left(\frac{\partial f}{\partial x} y + \frac{\partial f}{\partial y} (-x) \right) \end{aligned}$$

$$\text{Άρα: } Jf(x, y) = -i \left(\frac{\partial f}{\partial x} y + \frac{\partial f}{\partial y} (-x) \right) \Rightarrow J = -i \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) = -L_z / \hbar$$

όπου $L_z = i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right)$ και είναι η συνιστώσα του τελεστή της στροφορμής που είναι κάθετη στο επίπεδο Oxy .

Έτσι λοιπόν, ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός των συντεταγμένων του επιπέδου Oxy δίνεται από τη σχέση:

$$R(\theta) = \exp(-i\theta L_z / \hbar)$$

4.8 Η ομάδα περιστροφών $SO(3)$

Θεωρούμε έναν τρισδιάστατο πραγματικό διανυσματικό χώρο V με εσωτερικό γινόμενο $(\cdot)$ και το σύνολο όλων των ορθογώνιων

μετασχηματισμών (τελεστών) που δρουν πάνω στο διανυσματικό χώρο V . (Εξ' ορισμού ισχύει ότι ένας γραμμικός **μετασχηματισμός** λέγεται **ορθογώνιος** όταν διατηρεί τις γωνίες και τα μήκη των διανυσμάτων του διανυσματικού χώρου V , ή ισοδύναμα όταν διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο). Το σύνολο όλων αυτών των ορθογωνίων μετασχηματισμών αποτελεί ομάδα, που θα τη συμβολίζουμε με $O(3)$. Η ομάδα αυτή ισοδύναμα μπορεί να ορισθεί ως η ομάδα όλων των 3×3 ορθογωνίων πινάκων. Οι δυο αυτές ομάδες είναι ισομορφικές. Έστω R ένας ορθογώνιος πίνακας, δηλαδή ικανοποιεί τη σχέση: $R \cdot R^T = R^T \cdot R = I_3 = E_3$, όπου I_3 ή E_3 είναι ο μοναδιαίος (ή ταυτοτικός) πίνακας. Επειδή ισχύει ότι: $\det(R) = \det(R^T)$, έχουμε:

$$\det(R \cdot R^T) = \det(R) \cdot \det(R^T) = \det^2(R) \Rightarrow \det(R \cdot R^T) = \det^2(R)$$

$$\text{Όμως } \det(R \cdot R^T) = \det(I_3) = 1 \Rightarrow \det(R \cdot R^T) = 1,$$

κι αφού τα πρώτα μέλη είναι ίσα στις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι:

$$\det^2(R) = 1 \Rightarrow \det(R) = \pm 1$$

Έτσι λοιπόν οι ορθογώνιοι πίνακες της ομάδας $O(3)$ χωρίζονται σε δυο σύνολα, το ένα σύνολο περιέχει τους ορθογώνιους πίνακες που έχουν ορίζουσα $+1$ και το άλλο σύνολο περιέχει τους ορθογώνιους πίνακες που έχουν ορίζουσα -1 . Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι το πρώτο σύνολο που περιέχει τους ορθογώνιους πίνακες που έχουν ορίζουσα $+1$ αποτελεί ομάδα με πράξη τον πολλαπλασιασμό πινάκων ($\bullet$) και την ομάδα, που θα την λέμε **ομάδα περιστροφών**, και θα τη συμβολίζουμε με $SO(3)$.

Παρατήρηση Το σύνολο που περιέχει τους ορθογώνιους πίνακες που έχουν ορίζουσα -1 δεν αποτελεί ομάδα με πράξη τον πολλαπλασιασμό πινάκων ($\bullet$), αφού δεν περιέχει τον ταυτοτικό πίνακα I_3 , που είναι το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού πινάκων ($\bullet$).

Θεωρώντας τον ισομορφισμό που συνδέει τους ορθογώνιους πίνακες με τους ορθογώνιους μετασχηματισμούς, βλέπουμε ότι ένας ορθογώνιος πίνακας με ορίζουσα +1 αντιστοιχεί σε γνήσια (proper) περιστροφή του συστήματος συντεταγμένων. Ένας ορθογώνιος πίνακας με ορίζουσα -1 αντιστοιχεί σ' έναν ορθογώνιο μετασχηματισμό, ο οποίος μπορεί να εκφρασθεί σαν γινόμενο μιας γνήσιας περιστροφής και μιας αντιστροφής. Οι μετασχηματισμοί αυτοί ονομάζονται μη γνήσιες (improper) περιστροφές. Ο πίνακας που αντιστοιχεί στην πράξη της αντιστροφής είναι ο αντίθετος του ταυτοτικού πίνακα I_3 ή E_3 , δηλαδή:

$$B = -I_3 = -E = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

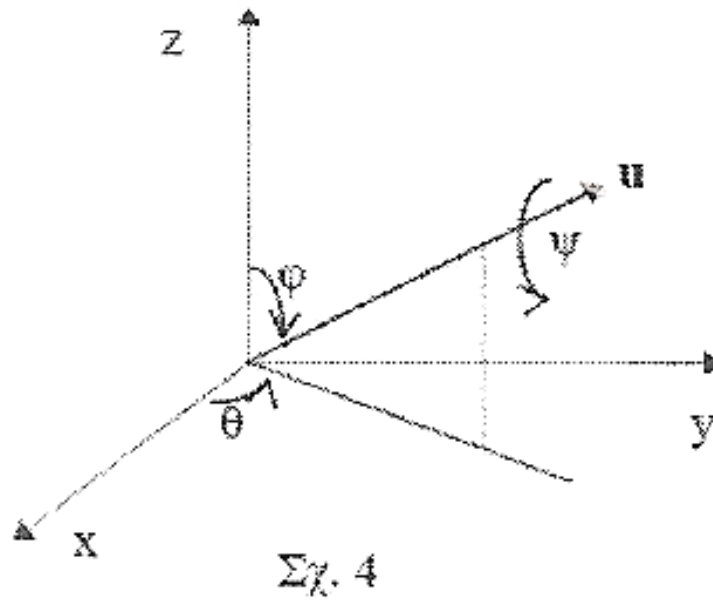
Οι πίνακες B και I_3 αποτελούν ομάδα με πράξη τον πολλαπλασιασμό πινάκων ($\bullet$), τάξης 2.

Επειδή ο πίνακας της αντιστροφής μετατίθεται με όλους του πίνακες περιστροφών, ισχύει η σχέση: $O(3) = SO(3) \otimes \{I_3, B\}$.

Η ομάδα $\{I_3, B\}$ έχει μόνο δύο μονοδιάστατες αναπαραστάσεις, που είναι μη αναγωγίσιμες, κι επομένως οι αναπαραστάσεις της ομάδας $O(3)$ μπορούν εύκολα να προκύψουν από τις αναπαραστάσεις της ομάδας περιστροφών $SO(3)$, σύμφωνα με τη θεωρία των τανυστικών γινομένων ομάδων και γι' αυτό θα μελετήσουμε μόνο μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις της ομάδας περιστροφών $SO(3)$. Η ομάδα $O(3)$ ονομάζεται **ομάδα περιστροφών - αντιστροφών** 3 διαστάσεων. Οι παράμετροι της ομάδας περιστροφών $SO(3)$ μπορούν να εκλεγούν με διάφορους τρόπους.

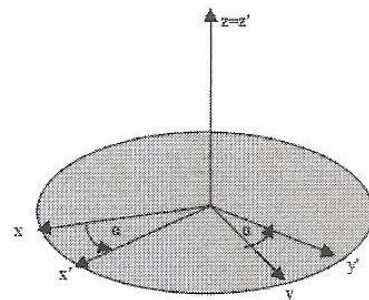
Έστω (x, y, z) ένα σημείο του τρισδιάστατου καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων $Oxyz$. Μια περιστροφή προσδιορίζεται από έναν άξονα u και μια γωνία $\psi \in [0, 2\pi)$ και θα τη συμβολίζουμε με $R_u(\psi)$. Ο άξονας u χρειάζεται δυο παραμέτρους για να προσδιοριστεί η διεύθυνση του, έστω τις πολικές γωνίες (θ, ϕ) , όπου τα διαστήματα των γωνιών είναι:

$0 \leq \theta < 2\pi$, $0 \leq \phi < 2\pi$, και ισχύει ότι οι περιστροφές $R_u(\psi)$ και $R_u(\psi - 2\pi)$ ταυτίζονται. Σχηματικά έχουμε:

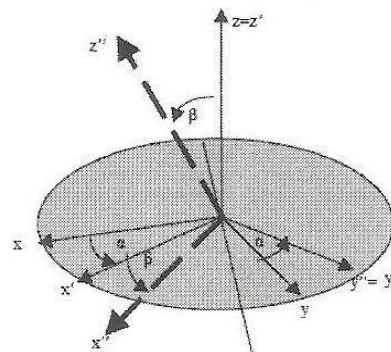


Ένας άλλος τρόπος είναι να προσδιορίσουμε τις περιστροφές είναι χρησιμοποιώντας τις γωνίες του Euler. Ως γνωστόν, κάθε περιστροφή μπορεί να γραφεί σαν γινόμενο τριών περιστροφών ως προς τους άξονες του συστήματος συντεταγμένων, ακολουθώντας την εξής διαδικασία:

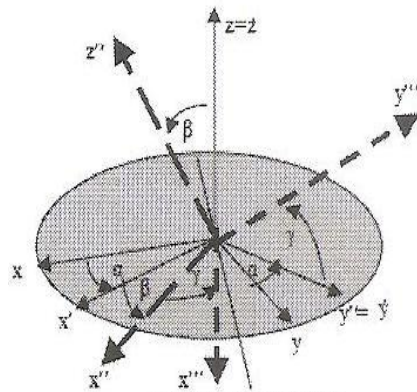
- α) περιστροφή κατά γωνία α γύρω από τον άξονα OZ , οπότε προκύπτει το σύστημα $Ox'y'z'$, όπου $z'=z$:



- β) περιστροφή κατά γωνία β γύρω από τον άξονα Oy' , οπότε προκύπτει το σύστημα $Ox''y''z''$, όπου $y''=y'$:



γ) περιστροφή κατά γωνία γ γύρω από τον άξονα Oz'', οπότε προκύπτει το σύστημα Ox'''y'''z''', όπου z'''=z'':



Έτσι λοιπόν μια περιστροφή R γράφεται ως γινόμενο:

$$R = R(\alpha, \beta, \gamma) = R_{z''}(\gamma) \circ R_{y'}(\beta) \circ R_z(\alpha)$$

Μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$R_{y'}(\beta) = R_z(\alpha) \circ R_y(\beta) \circ R_z(-\alpha)$$

$$\begin{aligned} R_{z''}(\gamma) &= R_{y'}(\beta) \circ R_{z'}(\gamma) \circ R_{y'}(-\beta) = (\text{επειδή } z' = z, \text{ θα ισχύει: } R_{z'}(\gamma) = R_z(\gamma)) \\ &= R_{y'}(\beta) \circ R_z(\gamma) \circ R_{y'}(-\beta) = (\text{επειδή } R_{y'}(\beta) = R_z(\alpha) \circ R_y(\beta) \circ R_z(-\alpha)) \\ &= \{R_z(\alpha) \circ R_y(\beta) \circ R_z(-\alpha)\} \circ R_z(\gamma) \circ \{R_z(\alpha) \circ R_y(-\beta) \circ R_z(-\alpha)\} \end{aligned}$$

Επίσης η περιστροφή $R(\alpha, \beta, \gamma)$ μπορεί να εκφραστεί και σαν συνάρτηση περιστροφών γύρω από τους αρχικούς άξονες του συστήματος αναφοράς Oxyz: $R = R(\alpha, \beta, \gamma) = R_z(\alpha) \circ R_y(\beta) \circ R_z(\gamma)$, όπου:

$$R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}$$

$$R_z(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

κι αν πάρουμε το γινόμενο των παραπάνω πινάκων στη σχέση $R = R(\alpha, \beta, \gamma) = R_z(\alpha) \circ R_y(\beta) \circ R_z(\gamma)$, έχουμε ότι:

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma - \sin\alpha \sin\gamma & \cos\alpha \cos\beta \sin\gamma + \sin\alpha \cos\gamma & \cos\alpha \sin\beta \\ -\sin\alpha \cos\beta \cos\gamma - \cos\alpha \sin\gamma & -\sin\alpha \cos\beta \sin\gamma + \cos\alpha \cos\gamma & -\sin\alpha \sin\beta \\ -\sin\beta \cos\gamma & -\sin\beta \sin\gamma & \cos\beta \end{bmatrix}$$

που είναι ένας ορθογώνιος πίνακας με ορίζουσα +1 κι αποτελεί το γενικό στοιχείο της ομάδας περιστροφών $SO(3)$. Οι γεννήτορες της ομάδας περιστροφών $SO(3)$ υπό μορφή 3×3 πινάκων βρίσκονται εάν θεωρήσουμε περιστροφές γύρω από τους άξονες Ox, Oy, Oz .

Για την περιστροφή κατά γωνία α γύρω από τον άξονα Oz , αν στον παραπάνω πίνακα $R(\alpha, \beta, \gamma)$, που αποτελεί το γενικό στοιχείο της ομάδας περιστροφών $SO(3)$, θέσουμε $\beta = \gamma = 0$, βρίσκουμε ότι:

$$R(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και σύμφωνα με τη σχέση (4.1) έχουμε ότι:

$$J_z = \frac{1}{i} \left(\frac{\partial R(\alpha)}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} = \frac{1}{i} \begin{bmatrix} -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ -\cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\alpha=0} = -i \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Για την περιστροφή κατά γωνία β γύρω από τον άξονα Oy , αν θέσουμε $\alpha = \gamma = 0$ στον πίνακα $R(\alpha, \beta, \gamma)$, βρίσκουμε ότι:

$$R(\beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}$$

και σύμφωνα με τη σχέση (4.1) έχουμε ότι:

$$J_y = \frac{1}{i} \left(\frac{\partial R(\beta)}{\partial \beta} \right)_{\beta=0} = \frac{1}{i} \begin{bmatrix} -\sin\beta & 0 & \cos\beta \\ 0 & 0 & 0 \\ -\cos\beta & 0 & -\sin\beta \end{bmatrix}_{\beta=0} = -i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Για την περιστροφή κατά γωνία γ γύρω από τον άξονα Ox έχουμε ότι:

$$R(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}$$

και σύμφωνα με τη σχέση (4.1) έχουμε ότι:

$$J_x = \frac{1}{i} \left(\frac{\partial R(\gamma)}{\partial \gamma} \right)_{\gamma=0} = \frac{1}{i} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\gamma & -\cos\gamma \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \end{bmatrix}_{\gamma=0} = -i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{bmatrix}$$

Οι γεννήτορες της ομάδας περιστροφών $SO(3)$ μπορούν επίσης να προκύψουν πιο γενικά, θεωρώντας μια περιστροφή κατά γωνία $\psi \in [0, 2\pi)$ γύρω από έναν άξονα u . Η ομάδα των περιστροφών $R_u(\psi)$, που είναι υποομάδα της ομάδας περιστροφών $SO(3)$, είναι ισομορφική με την αξονική ομάδα περιστροφών $SO(2)$ κι επομένως από τη σχέση:

$$J = -i \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) = -L_z / \hbar \quad (\mathbf{4.3}), \text{ που δείξαμε στο Παράδειγμα 20}$$

της προηγούμενης παραγράφου έχουμε ότι: $J_u = -L_u / \hbar$, όπου $L_u = \mathbf{L} \cdot \mathbf{u}_0$, είναι η συνιστώσα του τελεστή της στροφορμής $\mathbf{L}$ ως προς τη διεύθυνση $\mathbf{u}$ και $\mathbf{u}_0$ το αντίστοιχο μοναδιαίο διάνυσμα.

Κι επομένως επειδή κάθε περιστροφή μπορεί να εκφραστεί σαν γινόμενο τριών περιστροφών γύρω από τους άξονες του συστήματος συντεταγμένων $Oxyz$, έχουμε τους τρεις τελεστές:

$$J_x = -L_x / \hbar, J_y = -L_y / \hbar, J_z = -L_z / \hbar$$

Οπότε κάθε περιστροφή μπορεί να γραφεί:

$$R_u(\psi) = \exp(i\psi J_u) = \exp(-i\psi L_u / \hbar)$$

Η πλήρης ομάδα περιστροφών - αντιστροφών $O(3)$ έχει τέσσερις παραμέτρους $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, όπου α, β, γ είναι οι παράμετροι της ομάδας περιστροφών $SO(3)$ και δ είναι η τιμή της ορίζουσας ενός στοιχείου και μπορεί να πάρει τις τιμές ± 1 . Έτσι ο παραμετρικός χώρος της ομάδας περιστροφών - αντιστροφών $O(3)$ αποτελείται από δύο μη συνεκτικές

περιοχές, είναι 4-παραμετρικός με τρεις συνεχείς παραμέτρους και μια διακεκριμένη. Επομένως η ομάδα περιστροφών - αντιστροφών $O(3)$ είναι μια συνεχής, συμπαγής Lie ομάδα, αλλά όχι όμως συνεκτική.

4.9 Η ειδική ορθομοναδιαία ομάδα $SU(2)$

Έστω V διανυσματικός χώρος 2 διαστάσεων επί του σώματος των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$, κι έστω u ένα διάνυσμα αυτού του χώρου. Μια περιστροφή σ' αυτόν το διανυσματικό χώρο V μετασχηματίζει το διάνυσμα u στο διάνυσμα v και συνδέονται με τη σχέση:

$$v = T \cdot u \Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

όπου τα a, b, c, d είναι μιγαδικοί αριθμοί κι επομένως ο πίνακας μετασχηματισμού A περιέχει 8 πραγματικές παραμέτρους. Εάν θεωρήσουμε τώρα εκείνες τις περιστροφές T που αφήνουν αναλλοίωτα τα μέτρα των διανυσμάτων έτσι ώστε: $u_1 u_1^* + u_2 u_2^* = v_1 v_1^* + v_2 v_2^*$, και σ' αυτή την περίπτωση ο πίνακας μετασχηματισμού T της παραπάνω σχέσης πρέπει να είναι ορθομοναδιαίος πίνακας, δηλαδή να ικανοποιείται η σχέση:

$$T \cdot T^+ = I_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |a|^2 + |b|^2 = 1, |c|^2 + |d|^2 = 1, ac^* + bd^* = 0 \quad (4.5)$$

κι επειδή οι συντελεστές a, b, c, d είναι μιγαδικοί αριθμοί, η τελευταία σχέση παραπάνω ισοδυναμεί με δύο συνθήκες (λόγω της ισότητας πραγματικού και φανταστικού μέρους στην ισότητα μιγαδικών αριθμών) κι επομένως οι σχέσεις (4.5) είναι στην πραγματικότητα 4. Έτσι λοιπόν ο αριθμός των παραμέτρων της σχέσης (4.4) ανάγεται από 8 σε 4.

Για $a = e^{i\alpha} \cos\theta$, $b = -e^{i(\beta-\gamma)} \sin\theta$, $c = e^{i\gamma} \sin\theta$, $d = e^{i(\beta-\alpha)} \cos\theta$, με $\alpha, \beta, \gamma, \theta \in \mathbb{R}$ βλέπουμε ότι ικανοποιούνται οι σχέσεις (4.5) κι έτσι ο πίνακας T μετασχηματισμού παίρνει τη μορφή:

$$T(\alpha, \beta, \gamma, \theta) = \begin{bmatrix} e^{i\alpha} \cos\theta & -e^{i(\beta-\gamma)} \sin\theta \\ e^{i\gamma} \sin\theta & e^{i(\beta-\alpha)} \cos\theta \end{bmatrix}$$

Το σύνολο όλων αυτών των μετασχηματισμών αποτελεί την ομάδα $U(2)$, η οποία είναι ισομορφική προς την ομάδα των ορθομοναδιαίων πινάκων τάξης 2. Η ομάδα $U(2)$ είναι 4-παραμετρική, συνεχής, συνεκτική, συμπαγής και Lie ομάδα.

Η υποομάδα της ομάδας $U(2)$ με ορίζουσα +1 είναι ειδικού ενδιαφέροντος για την φυσική. Από τον πίνακα μετασχηματισμού $T(\alpha, \beta, \gamma, \theta)$ αν απαιτήσουμε η ορίζουσά του να είναι ίση με 1 προκύπτει ότι: $\det(T) = 1 \Rightarrow e^{i\beta}[(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2] = 1 \Rightarrow e^{i\beta} = 1 \Rightarrow \beta = 0$, δηλαδή η σχέση αυτή ισχύει μόνο για $\beta = 0$ κι επομένως ο πίνακας μετασχηματισμού $T(\alpha, \beta, \gamma, \theta)$ παίρνει την μορφή:

$$T(\alpha, \gamma, \theta) = \begin{bmatrix} e^{i\alpha} \cos\theta & -e^{-i\gamma} \sin\theta \\ e^{i\gamma} \sin\theta & e^{-i\alpha} \cos\theta \end{bmatrix}$$

Κάνοντας την παραμετροποίηση $\kappa = -\theta$, $\lambda = -\gamma$ κι επειδή $\sin\theta = -\sin(-\theta)$ & $\cos\theta = \cos(-\theta)$ αν αντικαταστήσουμε στον παραπάνω πίνακα μετασχηματισμού προκύπτει ότι:

$$T(\alpha, \kappa, \lambda) = \begin{bmatrix} e^{i\alpha} \cos(-\kappa) & -e^{-i(-\lambda)} \sin(-\kappa) \\ e^{i(-\lambda)} \sin(-\kappa) & e^{-i\alpha} \cos(-\kappa) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\alpha} \cos\kappa & e^{i\lambda} \sin\kappa \\ -e^{i(-\lambda)} \sin\kappa & e^{-i\alpha} \cos\kappa \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Τέλος, αν θέσουμε $a = e^{i\alpha} \cos\theta$ και $b = e^{i\lambda} \sin\theta$, ο πίνακας μετασχηματισμού παίρνει τη μορφή:

$$T(a, b) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{bmatrix}, \text{ με } |a|^2 + |b|^2 = 1$$

Η υποομάδα αυτή των μετασχηματισμών, με αναπαράσταση τους πίνακες της παραπάνω μορφής, ονομάζεται **ειδική μοναδιαία ομάδα** και θα τη συμβολίζουμε με $SU(2)$. Επειδή ισχύει ότι: $\det(T) = 1$, η ειδική

μοναδιαία ομάδα $SU(2)$ είναι 3-παραμετρική. Όμως και η ομάδα περιστροφών $SO(3)$ είναι 3-παραμετρική κι αυτό μας κάνει να υποψιαζόμαστε μήπως υπάρχει σχέση μεταξύ αυτών των δύο ομάδων. Η ομάδα $SO(3)$, σαν ομάδα περιστροφών στο χώρο $\mathbb{R}^3$ αφήνει αναλλοίωτη την ποσότητα $x^2+y^2+z^2$ ενώ η ειδική μοναδιαία ομάδα $SU(2)$ αφήνει αναλλοίωτη την ποσότητα $|u_1|^2+|u_2|^2$. Είναι επομένως λογικό να εξετάσουμε εάν η ειδική μοναδιαία ομάδα $SU(2)$ αφήνει αναλλοίωτη και την ποσότητα $x^2+y^2+z^2$, και γι' αυτό θεωρούμε έναν πίνακα $M \in M_n(\mathbb{C})$, που είναι γραμμικός συνδυασμός των τριών πινάκων του Pauli, δηλαδή:

$$M = x\sigma_1 + y\sigma_2 + z\sigma_3 \Rightarrow M = \begin{bmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{bmatrix}, \text{ με } x, y, z \in \mathbb{R} \quad (4.7)$$

του οποίου η ορίζουσα είναι $-(x^2+y^2+z^2)$, κι είναι η ποσότητα που θέλουμε να ελέγξουμε ότι παραμένει αναλλοίωτη.

Αν εφαρμόσουμε το μετασχηματισμό ομοιότητας: $M \rightarrow M' = T \cdot M \cdot T^+$, για

$$T = T(a, b) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{bmatrix}, \text{ με } |a|^2 + |b|^2 = 1, \text{ έχουμε:}$$

$$\begin{bmatrix} z' & x' - iy' \\ x' + iy' & -z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^* & -b \\ b^* & a \end{bmatrix}$$

$$\text{όπου: } x' = x[(a^2 + a^{*2} - b^2 - b^{*2})/2] + y[(a^2 - a^{*2} + b^2 - b^{*2})/2] + z(ab + a^*b^*),$$

$$y' = ix[(a^2 - a^{*2} - b^2 + b^{*2})/2] + y[(a^2 + a^{*2} + b^2 + b^{*2})/2] - iz(ab - a^*b^*),$$

$$z' = -x(a^*b + ab^*) + iy(a^*b - ab^*) + z(aa^* - bb^*).$$

Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι οι συντελεστές των x, y, z , είναι πραγματικοί αριθμοί. Επειδή ο μετασχηματισμός ομοιότητας διατηρεί την τιμή της ορίζουσας έχουμε:

$$\det(M) = \det(M') \Rightarrow -(x^2 + y^2 + z^2) = -(x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

και συνεπώς βλέπουμε ότι ο μετασχηματισμός T διατηρεί αναλλοίωτη την ποσότητα $x^2 + y^2 + z^2$. Έτσι λοιπόν από τα παραπάνω οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι οι ομάδες $SU(2)$ και $SO(3)$ μπορεί να είναι ισομορφικές

ή ομομορφικές. Για να το διαπιστώσουμε αυτό θα θεωρήσουμε μερικές απλές περιπτώσεις.

Θέτουμε στη σχέση (4.6) $\kappa=0$ και $\lambda=0$ οπότε προκύπτει:

$$T_z = T(\alpha, 0, 0) = \begin{bmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{bmatrix}$$

Παίρνουμε τώρα τους unitary μετασχηματισμούς των πινάκων του Pauli κι έχουμε:

$$T_z \sigma_1 T_z^+ = \begin{bmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & e^{i2\alpha} \\ e^{-i2\alpha} & 0 \end{bmatrix}$$

κι εκφράζουμε το αποτέλεσμα αυτό συναρτήσει των πινάκων του Pauli πολλαπλασιάζοντας με x , οπότε προκύπτει τελικά:

$$\begin{aligned} x T_z \sigma_1 T_z^+ &= x \begin{bmatrix} 0 & e^{i2\alpha} \\ e^{-i2\alpha} & 0 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 0 & \cos 2\alpha + i \sin 2\alpha \\ \cos 2\alpha - i \sin 2\alpha & 0 \end{bmatrix} = \\ &= x \cos 2\alpha \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - x \sin 2\alpha \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = x \sigma_1 \cos 2\alpha - x \sigma_2 \sin 2\alpha \end{aligned}$$

κι εντελώς παρόμοια βρίσκουμε ότι:

$$T_z y \sigma_2 T_z^+ = y \sigma_1 \sin 2\alpha + y \sigma_2 \cos 2\alpha$$

$$T_z z \sigma_3 T_z^+ = z \sigma_3$$

Εάν ξεκινούσαμε με το ήμισυ της γωνίας α , δηλαδή εάν για α θέταμε $\alpha/2$, τότε από τη σχέση (4.7) και το μετασχηματισμό ομοιότητας: $M \rightarrow M' = T \cdot M \cdot T^+$, θα είχαμε ότι:

$$\begin{aligned} M' &= T_z \cdot M \cdot T_z^+ \Rightarrow x' \sigma_1 + y' \sigma_2 + z' \sigma_3 = T_z (x \sigma_1 + y \sigma_2 + z \sigma_3) T_z^+ = \\ &= T_z x \sigma_1 T_z^+ + T_z y \sigma_2 T_z^+ + T_z z \sigma_3 T_z^+ = \\ &= (x \sigma_1 \cos \alpha - x \sigma_2 \sin \alpha) + (y \sigma_1 \sin \alpha + y \sigma_2 \cos \alpha) + (z \sigma_3) = \\ &= (x \cos \alpha + y \sin \alpha) \sigma_1 + (y \cos \alpha - x \sin \alpha) \sigma_2 + z \sigma_3, \end{aligned}$$

απ' όπου τελικά προκύπτουν οι σχέσεις:

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \quad y' = y \cos \alpha - x \sin \alpha, \quad z' = z,$$

οι οποίες δηλώνουν ότι ο 2×2 unitary μετασχηματισμός $T_z(\alpha/2)$

αντιστοιχεί με τον πίνακα περιστροφής: $R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, δηλαδή:

$$T_z(\alpha/2) = \begin{bmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha/2} \end{bmatrix} \rightarrow R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ακολουθώντας την ίδια ακριβώς διαδικασία βρίσκουμε και τις παρακάτω αντιστοιχίες:

$$T_y(\beta/2) = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\beta}{2}) & \sin(\frac{\beta}{2}) \\ -\sin(\frac{\beta}{2}) & \cos(\frac{\beta}{2}) \end{bmatrix} \rightarrow R_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}$$

$$T_x(\gamma/2) = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\gamma}{2}) & i\sin(\frac{\gamma}{2}) \\ i\sin(\frac{\gamma}{2}) & \cos(\frac{\gamma}{2}) \end{bmatrix} \rightarrow R_x(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma \\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}$$

όπου ο πίνακας περιστροφής $T_y(\beta/2)$ προήλθε από τη σχέση (4.6), κάνοντας τις εξής αντικαταστάσεις: $\alpha=0$, $\kappa=\beta/2$, $\lambda=0$, ενώ για τον πίνακας περιστροφής $T_x(\gamma/2)$ αντικαταστήσαμε στη σχέση (4.6): $\alpha=0$, $\kappa=\beta/2$, $\lambda=\pi/2$.

Γενικότερα, μπορούμε να δούμε ότι ο πίνακας μετασχηματισμού $T_\kappa(\psi/2)$ έχει τη γενική μορφή: $T_\kappa(\psi/2) = I_3 \cos(\psi/2) + i\sigma_\kappa \sin(\psi/2)$, με $\kappa=x, y, z$, $\sigma_x = \sigma_1$, $\sigma_y = \sigma_2$, $\sigma_z = \sigma_3$.

$$\text{Η αντιστοιχία } T_z(\alpha/2) = \begin{bmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha/2} \end{bmatrix} \rightarrow R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ δεν}$$

είναι αμφιμονοσήμαντη, διότι όταν το α στον πίνακα $R_z(\alpha)$ μεταβάλλεται από 0 έως 2π , η παράμετρος στον πίνακα $T_z(\alpha/2)$, μεταβάλλεται από 0 έως π και ισχύει ότι: $R_z(\alpha+2\pi) = R_z(\alpha)$ και $T_z(\pi+\alpha/2) = -T_z(\alpha/2)$. Επομένως οι πίνακες $T_z(\alpha/2)$ και $T_z(\pi+\alpha/2) = -T_z(\alpha/2)$ αντιστοιχούν κι οι δύο στον πίνακα $R_z(\alpha)$ και συνεπώς οι ομάδες $SU(2)$ και $SO(3)$ είναι ομομορφικές.

Κάθε περιστροφή $R(\alpha, \beta, \gamma)$, που είναι στοιχείο της ομάδας περιστροφών $SO(3)$ και αντιστοιχεί στις γωνίες Euler α, β, γ , μπορεί να τεθεί σε αντιστοιχία με τα στοιχεία της ομάδας $SU(2)$ ως εξής:

$$R(\alpha, \beta, \gamma) \rightarrow T_z(\gamma/2) \cdot T_y(\cos\beta/2) \cdot T_z(\alpha/2) =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{i\gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\frac{\beta}{2}) & \sin(\frac{\beta}{2}) \\ -\sin(\frac{\beta}{2}) & \cos(\frac{\beta}{2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha/2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\frac{\beta}{2}) \exp(i\frac{\alpha+\gamma}{2}) & -\sin(\frac{\beta}{2}) \exp(i\frac{\gamma-\alpha}{2}) \\ \sin(\frac{\beta}{2}) \exp(i\frac{\alpha-\gamma}{2}) & \cos(\frac{\beta}{2}) \exp(-i\frac{\alpha+\gamma}{2}) \end{bmatrix}$$

και παρατηρούμε ότι ο 2×2 πίνακας που τελικά προκύπτει στην παραπάνω σχέση έχει τη γενική μορφή ενός πίνακα της ομάδας $SU(2)$, όπως δίνεται από την εξίσωση (4.6).

Τέλος, οι γεννήτορες της ομάδας $SU(2)$ βρίσκονται από τις γενικές εκφράσεις των στοιχείων:

$$T_z(\alpha) = \begin{bmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{bmatrix}, T_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}, T_x(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos\gamma & i\sin\gamma \\ i\sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}$$

κι έχουμε:

$$J_z(\alpha) = \frac{1}{i} \left(\frac{\partial T_z(\alpha)}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\begin{bmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{bmatrix} \right)_{\alpha=0} = \frac{1}{i} \begin{bmatrix} i e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & -i e^{-i\alpha} \end{bmatrix}_{\alpha=0} =$$

$$= -i \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \sigma_z$$

$$J_y(\beta) = \frac{1}{i} \left(\frac{\partial T_y(\beta)}{\partial \beta} \right)_{\beta=0} = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \right)_{\beta=0} =$$

$$= \frac{1}{i} \begin{bmatrix} -\sin\beta & \cos\beta \\ -\cos\beta & -\sin\beta \end{bmatrix}_{\beta=0} = -i \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \sigma_y$$

$$J_x(\gamma) = \frac{1}{i} \left(\frac{\partial T_x(\gamma)}{\partial \gamma} \right)_{\gamma=0} = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\begin{bmatrix} \cos\gamma & i\sin\gamma \\ i\sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \right)_{\gamma=0} =$$

$$= \frac{1}{i} \begin{bmatrix} -\sin\gamma & i \cos\gamma \\ i \cos\gamma & -\sin\gamma \end{bmatrix}_{\gamma=0} = -i \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \sigma_x$$

Παρατήρηση Τα διανύσματα που είναι της μορφής των διανυσμάτων $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ της σχέσης (4.4) ονομάζονται **spinor** στην Κβαντομηχανική.

4.10 Οι γεννήτορες των ομάδων $U(n)$ & $SU(n)$

Έχουμε δει ότι η ομάδα $U(n)$ αποτελείται από το σύνολο όλων των ορθομοναδιαίων πινάκων (με μιγαδικά στοιχεία) τάξης $n \in \mathbb{N}$, ενώ η ομάδα $SU(n)$ αποτελείται από το σύνολο των ορθομοναδιαίων πινάκων τάξης $n \in \mathbb{N}$ που έχουν ορίζουσα $+1$. Προφανώς η ομάδα $SU(n)$ είναι υποομάδα της ομάδας $U(n)$. Επειδή ένας ορθομοναδιαίος πίνακας τάξης $n \in \mathbb{N}$, έχει n^2 πραγματικά ανεξάρτητα στοιχεία, η ομάδα $U(n)$ είναι μια συνεχής, συνεκτική, n^2 -παραμετρική, συμπαγής, Lie ομάδα. Τα στοιχεία της ομάδας $SU(n)$ ικανοποιούν μια επί πλέον συνθήκη: η ορίζουσα τους πρέπει να είναι $+1$. Επομένως η ομάδα $SU(n)$ είναι μια συνεχής, συνεκτική, $(n^2 - 1)$ -παραμετρική, συμπαγής, Lie ομάδα.

Γνωρίζουμε από την Ανάλυση Πινάκων ότι εάν H είναι ένας **ερμιτιανός** (hermitian) **πίνακας**, τότε:

- εξ' ορισμού ικανοποιείται η σχέση: $H = H^+$, δηλαδή ο πίνακας H ισούται με τον αναστροφosuζυγή του (ο οποίος συμβολίζεται με H^+),
- και ο πίνακας e^{iH} είναι ορθομοναδιαίος, και μάλιστα ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή εάν U είναι ένας ορθομοναδιαίος πίνακας, τότε μπορεί να γραφεί στην μορφή: $U = e^{iH}$, όπου H ένας ερμιτιανός πίνακας,

- κάθε γραμμικός συνδυασμός ερμιτιανών πινάκων με πραγματικούς συντελεστές είναι ερμιτιανός πίνακας, κι επομένως υπάρχουν το πολύ n^2 ανεξάρτητοι ερμιτιανοί πίνακες τάξης $n \in \mathbb{N}$, από τους γραμμικούς συνδυασμούς των οποίων (και με τη βοήθεια της εκθετικής συνάρτησης) μπορεί να προκύψει κάθε ορθομοναδιαίος πίνακας U .

Οι γεννήτορες της ομάδας $U(n)$, που είναι n^2 το πλήθος, μπορούν να προκύψουν ως εξής: έστω $H_1, H_2, \dots, H_N$ ένα σύνολο n^2 ανεξαρτήτων ερμιτιανών πινάκων με $N=n^2$ και a_j (όπου $1 \leq j \leq N$) n^2 πραγματικοί παράμετροι. Τότε κάθε ορθομοναδιαίος πίνακας τάξης $n \in \mathbb{N}$ μπορεί να γραφεί στη μορφή: $U = \exp\left(\sum_{j=1}^N (ia_j H_j)\right)$, δηλαδή όλα τα στοιχεία της ομάδας $U(n)$ μπορούν να παραχθούν από το δεξί μέλος της παραπάνω σχέσης (που είναι ουσιαστικά η σχέση (4.2)), δίνοντας όλες τις δυνατές τιμές στις $N=n^2$ πραγματικές παραμέτρους a_j . Επομένως οι $N=n^2$ το πλήθος ανεξάρτητοι ερμιτιανοί πίνακες H_j είναι οι γεννήτορες της ομάδας $U(n)$. Προφανώς δεν είναι οι μοναδικοί, αφού οποιοσδήποτε $N=n^2$ γραμμικοί συνδυασμοί αυτών των ερμιτιανών πινάκων μπορούν εξ' ίσου καλά να χρησιμοποιηθούν σαν γεννήτορες της ομάδας $U(n)$.

Γνωρίζουμε ότι αν A είναι ένας τετραγωνικός πίνακας, τότε: $\det(e^A) = e^{\text{tr}(A)}$, όπου $\text{tr}(A)$ το ίχνος του πίνακα A , που εξ' ορισμού είναι το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων του πίνακα A . Από τη σχέση: $U = e^{iH}$, έπεται ότι: $\det(U) = \det(e^{iH}) = e^{i \text{tr}(H)}$. Επειδή τα διαγώνια στοιχεία ενός ερμιτιανού πίνακα H είναι πραγματικοί αριθμοί, προκύπτει άμεσα ότι και το ίχνος του θα είναι πραγματικός αριθμός, έστω $\text{tr}(H) = a \in \mathbb{R}$, κι επομένως η ορίζουσα $\det(U) = e^{i \text{tr}(H)} = e^{ia}$ έχει μέτρο 1, δηλαδή:

$$|\det(U)| = |e^{ia}| = 1$$

Τώρα για την ομάδα $SU(n)$ γράφουμε τα στοιχεία της στη μορφή: $U_0 = \exp(iH_0)$, κι επειδή $\det(U_0) = 1$, θα πρέπει να ισχύει:

$\exp(i\text{tr}(H_0)) = 1 \Leftrightarrow \text{tr}(H_0) = 0$, κι άρα υπάρχουν το πολύ $n^2 - 1$ ανεξάρτητοι ερμιτιανοί πίνακες με ίχνος μηδέν, που είναι κατάλληλα επιλεγμένοι έτσι ώστε να αποτελούν τους γεννήτορες της ομάδας $SU(n)$.

Πρακτικά είναι πιο βολικό να διαλέξουμε πρώτα τους $n^2 - 1$ γεννήτορες της ομάδας $SU(n)$ και μετά να προσθέσουμε τον ταυτοτικό πίνακα I_n για να προκύψουν οι n^2 γεννήτορες της ομάδας $U(n)$.

Για παράδειγμα, οι τρεις γεννήτορες της ομάδας $SU(2)$ μπορούν να είναι οι τρεις πίνακες του Pauli (που περιγράφουν το spin στην κβαντομηχανική):

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

και παρατηρούμε ότι οι παραπάνω πίνακες είναι κι οι τρεις ανεξάρτητοι μεταξύ τους, ερμιτιανοί τάξης 2 και το ίχνος τους είναι μηδέν.

Για τους γεννήτορες της ομάδας $U(2)$ μπορούμε να διαλέξουμε τους πίνακες: $I_2, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$.

Στη συνέχεια, με χρήση των παραπάνω πινάκων, μπορούμε να βρούμε τους γεννήτορες της ομάδας $SU(2)$ και μ' ένα διαφορετικό τρόπο: επειδή έχουμε ότι: $U = e^{iH} \Rightarrow \det(U) = e^{i\text{tr}(H)} = 1 \Rightarrow \text{tr}(H) = 0$ κι επειδή τα διαγώνια στοιχεία ενός ερμιτιανού πίνακα είναι πραγματικά, η μορφή του πίνακα H θα είναι:

$$H = \begin{bmatrix} \alpha & \beta + i\gamma \\ \beta - i\gamma & -\alpha \end{bmatrix}, \text{ με } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

κι έχουμε λοιπόν σ' αυτή την περίπτωση ότι:

$$H = \begin{bmatrix} \alpha & \beta + i\gamma \\ \beta - i\gamma & -\alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \alpha \sigma_3 + \beta \sigma_1 - \gamma \sigma_2$$

και συνεπώς κάθε ερμιτιανός πίνακας H τάξης 2, του οποίου το ίχνος του είναι μηδέν, εκφράζεται συναρτήσεως των τριών βασικών πινάκων του Pauli $\sigma_x = \sigma_1, \sigma_y = \sigma_2, \sigma_z = \sigma_3$.

4.11 Η Lie άλγεβρα μιας Lie ομάδας

Θεωρούμε μια Lie ομάδα G με r παραμέτρους $a_1, a_2, \dots, a_r$ και συνεπώς με r γεννήτορες $J_1, J_2, \dots, J_r$. Από τα προηγούμενα είδαμε ότι κάθε στοιχείο της Lie ομάδας μπορεί να εκφρασθεί υπό την μορφή:

$$x(a_1, a_2, \dots, a_r) = \exp(ia_1 J_1) \exp(ia_2 J_2) \dots \exp(ia_r J_r) = \exp\left(\sum_{k=1}^r ia_k J_k\right) \quad (4.2)$$

Όταν η ομάδα G είναι πεπερασμένη, τότε όλες οι ιδιότητες μπορούν να προκύψουν από τη δομή του πολλαπλασιαστικού της πίνακα (ή πίνακα πράξης). Στην περίπτωση μιας Lie ομάδας θα δούμε ότι οι μεταθέτες (commutators) των γεννητόρων της ομάδας καθορίζουν τη δομή της ομάδας. Πράγματι, αν θεωρήσουμε δύο συγκεκριμένα στοιχεία της Lie ομάδας της μορφής:

$$x(0, \dots, a_k, \dots, 0) = \exp(ia_k J_k)$$

$$x(0, \dots, a_\lambda, \dots, 0) = \exp(ia_\lambda J_\lambda)$$

τότε το γινόμενο αυτών των δύο στοιχείων, που είναι ίσο με: $\exp(ia_k J_k) \exp(ia_\lambda J_\lambda)$, πρέπει να ανήκει στην ομάδα G κι επομένως πρέπει να εκφράζεται υπό την μορφή που περιγράφεται στη σχέση (4.2) με κατάλληλες τιμές των παραμέτρων a_k . Επειδή οι γεννήτορες μιας Lie ομάδας γενικά δεν μετατίθενται, δεν υπάρχει κάποιος απλός τρόπος για να γράψουμε το γινόμενο αυτό. Μπορούμε όμως να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι ένα τέτοιο γινόμενο περιέχει τον μεταθέτη των J_k και J_λ . Για να ανήκει το γινόμενο $\exp(ia_k J_k) \exp(ia_\lambda J_\lambda)$ στην ομάδα G , θα πρέπει ο **μεταθέτης** $[J_k, J_\lambda] = J_k J_\lambda - J_\lambda J_k$ να είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των γεννητόρων, δηλαδή:

$$[J_k, J_\lambda] = \sum_{j=1}^r c_{kl}^j J_j \quad (4.8),$$

όπου c_{kl}^j συγκεκριμένοι συντελεστές και $$

σταθερές της Lie ομάδας και δεν εξαρτώνται από τις αναπαραστάσεις της. Έτσι λοιπόν, οι δομικές σταθερές c_{kl}^j μιας Lie ομάδας δεν είναι μοναδικές αφού κι οι γεννήτορες μιας Lie ομάδας δεν είναι μοναδικοί.

Είδαμε προηγουμένως ότι κάθε γραμμικός συνδυασμός γεννητόρων με πραγματικούς συντελεστές μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν γεννήτορας της ομάδας. Είναι επομένως προφανές ότι οι r γεννήτορες της Lie ομάδας αποτελούν βάση ενός γραμμικού διανυσματικού χώρου L , διαστάσεως r .

Η σχέση (4.8) μας παρέχει και μια δεύτερη πράξη εσωτερικής σύνθεσης μεταξύ των στοιχείων του διανυσματικού χώρου L , έτσι ώστε ο διανυσματικός χώρος L να είναι άλγεβρα, και μάλιστα Lie άλγεβρα, αφού ικανοποιούνται οι απαραίτητες ιδιότητες:

α) $\forall x, y \in L$ το $[x, y] \in L$, όπου $[x, y] = xy - yx$,

β) $\forall x, y \in L$ ισχύει ότι: $[x, y] = -[y, x]$,

γ) $\forall x, y, z \in L$ ισχύει η σχέση: $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$, (η οποία είναι γνωστή ως **ταυτότητα Jacobi**).

Επειδή οι μεταθέτες των γεννητόρων της Lie ομάδας G ικανοποιούν τις παραπάνω ιδιότητες, ισχύουν οι εξής σχέσεις μεταξύ των δομικών σταθερών c_{kl}^j :

$$c_{kl}^j = -c_{lk}^j$$

$$\sum_{m=1}^r [c_{kl}^m c_{jm}^s + c_{lj}^m c_{km}^s + c_{jk}^m c_{lm}^s] = 0 \quad (4.9),$$

κι επειδή οι γεννήτορες J_k είναι ερμιτιανοί, από τη σχέση (4.8) συμπεραίνουμε ότι οι δομικές σταθερές c_{kl}^j είναι καθαρά φανταστικοί αριθμοί. Η πρώτη σχέση από τις σχέσεις (4.9) οφείλεται στην ιδιότητα της αντιμεταθετικότητας, ενώ η δεύτερη σχέση οφείλεται στην προσεταιριστική ιδιότητα της εσωτερικής πράξης των μεταθετών.

μπορέσουμε να βρούμε r τετραγωνικούς πίνακες που να είναι τάξης, έστω $\rho \in \mathbb{N}$, και να ικανοποιούν τις σχέσεις μεταθέσεως (4.8) με τις δεδομένες δομικές σταθερές c_{kl}^j τότε, αν τους πίνακες αυτούς τους χρησιμοποιήσουμε στη θέση των γεννητόρων J_k στη σχέση (4.2), τότε θα έχουμε μια **ρ -διάστασης αναπαράσταση της Lie ομάδας G** . Αυτό μπορεί να διατυπωθεί κι ως εξής: Κάθε αναπαράσταση μιας Lie άλγεβρας μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δώσει μια αναπαράσταση της αντίστοιχης Lie ομάδας.

Σαν παράδειγμα των παραπάνω θα χρησιμοποιήσουμε την ομάδα $SU(2)$, για την οποία βρήκαμε ότι οι τρεις πίνακες του Pauli: $\sigma_x = \sigma_1$, $\sigma_y = \sigma_2$, $\sigma_z = \sigma_3$, είναι οι γεννήτορές της κι ικανοποιούν τις σχέσεις μεταθέσεως:

$$[\sigma_j, \sigma_k] = 2i \sum_l \varepsilon_{jkl} \sigma_l$$

όπου ε_{jkl} (που είναι γνωστό ως **σύμβολο των Levi - Civita**) είναι ο αντισυμμετρικός τανυστής τάξης 3, του οποίου όλα τα στοιχεία είναι μηδέν, εκτός από τα στοιχεία: $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = -\varepsilon_{213} = -\varepsilon_{132} = -\varepsilon_{321} = 1$. Οι συνιστώσες του τανυστή ε_{jkl} , πολλαπλασιασμένες με $2i$, αποτελούν τις δομικές σταθερές c_{kl}^j της ομάδας $SU(2)$. Η Lie άλγεβρα της ομάδας $SU(2)$ αποτελείται από το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών των πινάκων $\sigma_x = \sigma_1$, $\sigma_y = \sigma_2$, $\sigma_z = \sigma_3$ που έχουν πραγματικούς συντελεστές.

Μια άλλη αναπαράσταση της ομάδας $SU(2)$ αποτελούν και οι πίνακες:

$$\lambda_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \lambda_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \lambda_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$= e^{i\theta}$, με αντίστοιχο μοναδικό γεννήτορα τον $J = 1$. Ο γεννήτορας J παράγει το διανυσματικό χώρο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, ο οποίος είναι και Lie άλγεβρα με πράξη τον πολλαπλασιασμό $(\bullet)$, ο οποίος ορίζει την τετριμμένη Lie παρένθεση: $[a, b] = ab - ba = 0$. Προφανώς εδώ οι δομικές σταθερές c_{kl}^j είναι όλες μηδέν.

Παράδειγμα 22 Για τη Lie ομάδα αξονικών περιστροφών $SO(2)$ (που έχουμε ήδη μελετήσει στο Παράδειγμα 18, στην Παράγραφο 4.7.1) θεωρούμε την αναπαράσταση:

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

με αντίστοιχο μοναδικό γεννήτορα: $J = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$.

Ο γεννήτορας J παράγει το διανυσματικό υπόχωρο U των 2×2 πινάκων με φανταστικά στοιχεία, δηλαδή: $U = \{A \in M_2(\mathbb{C}) : A = a \bullet J, \text{ με } a \in \mathbb{R}\}$. Αυτός ο διανυσματικός υπόχωρος U αποτελεί και Lie άλγεβρα με πράξη την τετριμμένη Lie παρένθεση: $[J, J] = JJ - JJ = 0 = 0 \bullet J$.

Προφανώς οι δομικές σταθερές c_{kl}^j είναι όλες μηδέν.

Παράδειγμα 23 Για τη Lie ομάδα αξονικών περιστροφών $SO(2)$ (που έχουμε ήδη μελετήσει στο Παράδειγμα 19, στην Παράγραφο 4.7.1) θεωρούμε την αναπαράσταση:

$$R(\theta) = \exp\left(\rho \theta \frac{\partial}{\partial x}\right)$$

με αντίστοιχο μοναδικό γεννήτορα τον $J = -i\rho \frac{\partial}{\partial x}$.

Ο γεννήτορας J παράγει το διανυσματικό χώρο των τελεστών $U = \{F : F = a \bullet J, \text{ με } a \in \math$

Προφανώς κι εδώ οι δομικές σταθερές c_{kl}^j είναι όλες μηδέν.

Παράδειγμα 24 Για τη Lie ομάδα αξονικών περιστροφών $SO(2)$ (που έχουμε ήδη μελετήσει στο Παράδειγμα 20, στην Παράγραφο 4.7.1) θεωρούμε την αναπαράσταση:

$$R(\theta) = \exp\left(-i\theta \frac{L_z}{\hbar}\right)$$

με αντίστοιχο μοναδικό γεννήτορα:

$$J = -i \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) = -L_z / \hbar$$

Ο γεννήτορας J παράγει το διανυσματικό χώρο των τελεστών $U = \{F: F = \alpha \bullet J, \text{ με } \alpha \in \mathbb{R}\}$, ο οποίος είναι και Lie άλγεβρα με πράξη την τριτομμένη Lie παρένθεση:

$$[F, G] = FG - GF = \alpha \bullet J \beta \bullet J - \beta \bullet J \alpha \bullet J = \alpha \beta (J - J) = 0$$

Προφανώς και εδώ οι δομικές σταθερές c_{kl}^j είναι όλες μηδέν.

Παράδειγμα 25 Για τη Lie ομάδα περιστροφών $SO(3)$ (που έχουμε ήδη μελετήσει στην Παράγραφο 4.8) θεωρούμε τους γεννήτορες:

$$J_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, J_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix}, J_z = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Οι γεννήτορες J_x, J_y, J_z παράγουν το διανυσματικό υπόχωρο U των 3×3 πινάκων με φανταστικά στοιχεία, δηλαδή: $U = \{M: M = \alpha \bullet J_x + \beta \bullet J_y + \gamma \bullet J_z, \text{ με } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$. Ο διανυσματικός αυτός υπόχωρος $$

$$[J_x, J_y] = iJ_z, [J_y, J_z] = iJ_x, [J_z, J_x] = iJ_y$$

Από τις σχέσεις αυτές προκύπτουν οι δομικές σταθερές c_{kl}^j , οι οποίες ταυτίζονται με τον αντισυμμετρικό τανυστή των Levi – Cività, δηλαδή έχουμε ότι: $c_{kl}^j = \epsilon_{ikl}$.

Ορισμός: Ο ελάχιστος αριθμός των γεννητόρων μιας Lie ομάδας που μετατίθενται μεταξύ τους ονομάζεται **τάξη της Lie ομάδας**.

Παράδειγμα Η τάξη της ομάδας περιστροφών $SO(3)$ είναι 1, διότι κανένα ζεύγος από τους γεννήτορες L_x, L_y, L_z δεν μετατίθενται.
Η τάξη της αξονικής ομάδας περιστροφών $SO(2)$ είναι επίσης 1.

Ορισμός: Ένας γεννήτορας που μετατίθεται με όλους τους γεννήτορες μιας Lie ομάδας ονομάζεται **τελεστής Casimir** και ισχύει ότι ο αριθμός των ανεξαρτήτων τελεστών Casimir μιας Lie ομάδας ισούται με την τάξη της ομάδας κι ότι ένας τέτοιος τελεστής μπορεί να κατασκευαστεί παίρνοντας έναν κατάλληλο διγραμμικό συνδυασμό των γεννητόρων.

Παράδειγμα Η ομάδα περιστροφών $SO(3)$ έχει έναν μόνο τελεστή Casimir, τον: $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$, που μετατίθεται με καθ' έναν από τους L_x, L_y, L_z .
Η ομάδα $SU(2)$ έχει επίσης έναν τελεστή Casimir, που είναι ο: $\sigma^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2$.

4.12 Η ειδική ορθομοναδιαία ομάδα SU(3)

Η ομάδα SU(3) αποτελείται από όλους τους μοναδιαίους πίνακες τάξης 3 που έχουν ορίζουσα +1. Έχει $3^2 - 1 = 8$ γεννήτορες, οι οποίοι συνήθως συμβολίζονται με $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_8$ και μπορούν να επιλεγούν με πολλούς τρόπους αλλά έχει καθιερωθεί να χρησιμοποιούνται οι εξής πίνακες:

$$\lambda_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \lambda_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \lambda_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \lambda_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \lambda_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \lambda_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Οι μεταθέτες των γεννητόρων είναι: $[\lambda_j, \lambda_k] = 2i \sum_l c_{jkl} \lambda_l$,

όπου οι μόνες μη μηδενικές συνιστώσες του τανυστή c_{jkl} είναι:

$$c_{123} = 1, c_{147} = c_{516} = c_{246} = c_{257} = c_{345} = c_{637} = 1/2, c_{458} = c_{678} = \sqrt{3}/2$$

4.13 Φυσικές εφαρμογές των ομάδων SU(2) & SU(3)

Είναι γνωστό από την φυσική ότι η κατάσταση ενός ηλεκτρονίου περιγράφεται από τις γνωστές κυματοσυναρτήσεις $Y_l^m(\theta, \varphi)$ που ονομάζονται σφαιρικές αρμονικές. Οι **κυματοσυναρτήσεις** αυτές γεννούν την μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση $D^{(l)}$ της ομάδας περιστροφών SO(3) βάσει της σχέσεως:

$$R(\alpha, \beta, \gamma) Y_l^m(\theta, \varphi) = \sum_{m'=-l}^l Y_l^{m'}(\theta, \varphi) D_{m'm}^{(l)}(\alpha, \beta, \gamma)$$

Οι κυματοσυναρτήσεις που περιγράφουν το spin ενός ηλεκτρονίου, και που ονομάζονται **spin συναρτήσεις**, γεννούν τις αναπαραστάσεις της ομάδας SU(2). Ας θεωρήσουμε τώρα ένα ηλεκτρόνιο με spin στροφορμής $s = \sigma/2\hbar$, όπου $\sigma \equiv (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ και σ_i οι spin πίνακες του Pauli. Οι δύο ορθοκανονικές spin συναρτήσεις, που συμβολίζονται με $\chi(1/2)$ και $\chi(-1/2)$, είναι συγχρόνως ιδιοσυναρτήσεις των τελεστών s^2 και s_z . Κάτω από έναν ορθογώνιο μετασχηματισμό συντεταγμένων, οι spin αυτές συναρτήσεις υφίστανται έναν μοναδιαίο μετασχηματισμό στον 2 διαστάσεων μιγαδικό χώρο Hilbert, που παράγεται από τα βασικά διανύσματα $\chi(1/2)$ και $\chi(-1/2)$. Ο χώρος αυτός λέγεται **χώρος spinor** και κάθε διάνυσμα του (που είναι γραμμικός συνδυασμός των βασικών διανυσμάτων) λέγεται **spinor**. Οι spin συναρτήσεις $\chi(1/2)$ και $\chi(-1/2)$ γεννούν μια αναπαράσταση 2 διαστάσεων της ομάδας SU(2), η οποία ταυτίζεται με την αναπαράσταση D.

Ας θεωρήσουμε στη συνέχεια την περίπτωση δυο ηλεκτρονίων. Αφού οι spin συναρτήσεις του κάθε ηλεκτρονίου μετασχηματίζ

Η ομάδα $SU(2)$ βρίσκει άλλη μια σπουδαία εφαρμογή στη διατύπωση του ισοτοπικού spin των στοιχειωδών σωματιδίων. Στον μακρύ κατάλογο των στοιχειωδών σωματιδίων, μπορούμε να δούμε ότι υπάρχει ένας μεγάλος αριθμός ζευγών, τέτοιων ώστε τα δύο μέλη κάθε ζεύγους έχουν πρακτικά ταυτόσημες ιδιότητες, εκτός από το ηλεκτρικό φορτίο τους. Ένα παράδειγμα των παραπάνω είναι το ζεύγος, που αποτελείται από ένα πρωτόνιο και ένα νετρόνιο, των οποίων όλες σχεδόν οι ιδιότητες είναι ίδιες εκτός από τις ηλεκτρομαγνητικές. Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε το πρωτόνιο και το νετρόνιο σαν δυο καταστάσεις ενός νουκλεονικού πεδίου. Συμβολίζουμε τις καταστάσεις με $|p\rangle$ και $|n\rangle$ κι ορίζουμε ένα τελεστή τ_3 , που ικανοποιεί τις παρακάτω εξισώσεις ιδιοτιμών: $\tau_3|p\rangle = 1/2|p\rangle$ & $\tau_3|n\rangle = -1/2|n\rangle$.

Οι καταστάσεις $|p\rangle$ και $|n\rangle$ γεννούν ένα χώρο Hilbert 2 διαστάσεων στον οποίο ο τελεστής τ_3 θα έχει την ίδια αναπαράσταση όπως και ο σ_z . Κατά αναλογία με το πρόβλημα του spin του ηλεκτρονίου, κάνουμε την υπόθεση ότι υπάρχει ένας τελεστής τ , που θα ονομάζεται τελεστής του ισοτοπικού spin, και δίνεται από τη σχέση: $\tau^2 = \tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2$, όπου τ_1, τ_2, τ_3 είναι οι συνιστώσες του διανυσματικού τελεστή τ . Ο μαθηματικός φορμαλισμός είναι ακριβώς παρόμοιος με το πρόβλημα του spin του ηλεκτρονίου. Όπως θεωρούμε το ηλεκτρόνιο σαν ένα σωματίο με δύο καταστάσεις: “spin πάνω” και “spin κάτω”, και όχι σαν δύο διαφορετικά σωματίδια, έτσι πρέπει να θεωρούμε το ζεύγος του πρωτονίου και του νετρονίου σαν δυο διαφορετικές καταστάσεις ενός σωματίου, του νουκλεονίου. Η σύμπτωση μεταξύ των δυο περιπτώσεων δεν είναι τυχαία, αλλά προκύπτει από το γεγονός ότι στην κβαντομηχανική, που σε αντί

Βιβλιογραφία

Κεφάλαιο 1 – Πίνακες

1. Α. ΦΕΛΛΟΥΡΗΣ, Γραμμική Άλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία

Κεφάλαιο 2 – Διανυσματικοί χώροι & Γραμμικές απεικονίσεις

1. Α. ΦΕΛΛΟΥΡΗΣ, Γραμμική Άλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία

Κεφάλαιο 3 – Θεωρία Ομάδων

1. J. FRALEIGH, Εισαγωγή στην Άλγεβρα

Κεφάλαιο 4 – Ομάδες Πινάκων

1. A. BAKER, Matrix Groups: An Introduction to Lie Group Theory
2. M. CURTIS, Matrix Groups
3. Δ. ΣΟΥΡΛΑΣ, Θεωρία Ομάδων και Θεωρία Τελεστών

