ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ιδιοτιμές στην άλγεβρα των Οκτονίων

Διπλωματική εργασία

της

Μαρίας Καμπιτάκη

Επιβλέπων : Ανάργυρος Φελλούρης Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Ιούλιος 2016

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ιδιοτιμές στην άλγεβρα των Οκτονίων

Διπλωματική εργασία

της

Μαρίας Καμπιτάκη

Επιβλέπων : Ανάργυρος Φελλούρης Καθηγητής ΕΜΠ

Ανάργυρος Φελλούρης	Ψαρράκος Παναγιώτης	Στεφανέας Πέτρος
Αν.Καθηγητής	Καθηγητής	Λέκτορας

Αθήνα, Ιούλιος 2016

.....

Μαρία Καμπιτάκη

Διπλωματούχος μαθηματικός Εφαρμογών ΣΕΜΦΕ

ΕΜΠ

©2016, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς το συγγραφέα. Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Ευχαριστίες

Ολοκληρώνοντας την διπλωματική μου εργασία, θα ήθελα να ευχαριστήσω αρχικά τον καθηγητή μου, κύριο Ανάργυρο Φελλούρη για την συνεργασία και την καθοδήγησή του καθ' όλη την διάρκεια εκπόνησης της. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου και τον αδελφό μου για την στήριξη τους όλα αυτά τα χρόνια. Τέλος, δεν θα μπορούσα να παραλείψω να ευχαριστήσω τον φίλο μου Γιώργο, για την πολύτιμη βοήθεια του.

Περίληψη

Τα οκτόνια συνθέτουν μια μη προσεταιριστική, μη μεταθετική διαιρετική άλγεβρα με νόρμα πάνω στους πραγματικούς, μπορούμε να πούμε ότι είναι μια μεγαλύτερη και καλύτερη εκδοχή των μιγαδικών αριθμών, με κάποιες ιδιαίτερες ιδιότητες. Μεγαλύτερη διότι υπάρχουν περισσότερες τετραγωνικές ρίζες του -1. Καλύτερη γιατί ένας οκτονιονικός φορμαλισμός παρέχει φυσικές εξηγήσεις σε αρκετά ενδιαφέροντα αποτελέσματα τόσο στην φυσική όσο και στα μαθηματικά. Ιδιαίτερη, επειδή οι κανόνες είναι πιο περίπλοκοι, εδώ η σειρά παίζει ρόλο. Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα μελετήσουμε το πρόβλημα των ιδιοτιμών στην άλγεβρα των οκτονίων. Στο πρώτο κεφάλαιο θα αναφέρουμε διάφορα αριθμητικά συστήματα και κυρίως θα ασχοληθούμε με τις ιδιότητες των τετράδων και των οκτονίων. Στο δεύτερο κεφάλαιο, το οποίο αποτελεί και το κύριο μέρος αυτής της εργασίας, θα μελετήσουμε το πρόβλημα των ιδιοτιμών των οκτονίων. Αρχικά θα κάνουμε μια ανασκόπηση στο τυπικό πρόβλημα ιδιοτιμών για πραγματικούς και μιγαδικούς ερμιτιανούς πίνακες, και στην συνέχεια θα θεωρήσουμε το πρόβλημα ιδιοτιμών για τις τετράδες. Τέλος, αφού κάνουμε μια σύντομη παρουσίαση των ιδιοτήτων των ερμιτιανών πινάκων οκτονίων, θα εξετάσουμε το πρόβλημα ιδιοτιμών για 2x2 και 3x3 ερμιτιανούς πίνακες οκτονίων.

Abstract

The octonions compose a non-associate, non-translational division algebra, with norm over the real numbers, we could say that they are a bigger and better version of the complex numbers, albeit with some subtle properties. Bigger, because there are more square roots of -1. Better, because an octonionic formalism provides natural explanations for several intriguing results in both mathematics and physics. Subtle, because the rules are more complicated, order matters. Some readers may be familiar with the quaternions, which lie halfway between the complex numbers and the octonions. The objective of this thesis is the octonionic eigenvalue problem. The first chapter discusses several different number systems, emphasizing the quaternions, the octonions and their properties. Chapter 2 is the heart of this thesis, taking a detailed look at the eigenvalue problem. We begin with a review of the standard eigenvalue problem for real and complex Hermitian matrices, and then consider the quaternionic problem. A brief discussion of the octonionic matrices appears also in this chapter, after which the octonionic eigenvalue problem is consider for 2x2 and 3x3 octonionic Hermitian matrices.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1 : **Από τους πραγματικούς αριθμούς στους αριθμούς Grassmann.**.....1

1.1 Το σώμα των πραγματικών αριθμών ($\mathbb{R}$, +, ·) - Αξιωματική θεμελίωση 4

1.2: Το σώμα των μιγαδικών αριθμών..... 9

1.3: Η άλγεβρα των τετράδων (Quaternions) 16

1.4: Τα οκτόνια ή αριθμοί του Cayley (Octonions) 30

1.5: Άλλα αριθμητικά συστήματα 42

1.5.1 Η μέθοδος Cayley-Dickson 42

1.5.2 Sedenions 44

1.5.3 Το θεώρημα Hurwitz 46

1.5.4 Split complex numbers (Υπερβολικοί αριθμοί ή αριθμοί Lorentz)..... 47

1.5.5 Split Quaternions..... 49

1.5.6 Split octonions 51

1.5.7 Υποάλγεβρες των Split octonions..... 52

1.6: Οι άλγεβρες Clifford και Grassmann 53

1.6.1: Οι άλγεβρες Clifford 53

1.6.2: Οι άλγεβρες Grassmann 55

Κεφάλαιο 2 : Το πρόβλημα ιδιοτιμών οκτονίων.....57

2.1: Το τυπικό πρόβλημα ιδιοτιμών..... 59

2.2: Ιδιοτιμές τετράδων..... 63

2.3: Πίνακες οκτονίων 66

2.3.1: $\mathbf{2} \times \mathbf{2}$ ερμιτιανοί πίνακες οκτονίων 68

2.3.2: $\mathbf{3} \times \mathbf{3}$ ερμιτιανοί πίνακες οκτονίων 70

2.3.3: Ορθογωνιότητα και παραγοντοποίηση 72

2.4: Ιδιοτιμές $\mathbf{2} \times \mathbf{2}$ ερμιτιανών πινάκων οκτονίων 77

2.4.1: Το πρόβλημα των πραγματικών ιδιοτιμών..... 77

2.4.2: Το πρόβλημα μη πραγματικών ιδιοτιμών..... 82

2.4.2.1: Αριστερό πρόβλημα ιδιοτιμών 82

2.4.2.2: Δεξί πρόβλημα ιδιοτιμών..... 86

2.4.2.3: Επιπλέον ιδιότητες..... 89

2.5: Ιδιοτιμές $\mathbf{3} \times \mathbf{3}$ ερμιτιανών πινάκων οκτονίων 93

2.5.1: Το πρόβλημα των πραγματικών ιδιοτιμών 93
2.5.2: Το πρόβλημα μη πραγματικών ιδιοτιμών 105
2.5.3: Το πρόβλημα ιδιοτιμών Jordan 109
2.5.4: Διαγωνοποίηση πινάκων Jordan με την F_4 118
2.6 Εφαρμογές 121
Βιβλιογραφία 125

Κεφάλαιο 1

Από τους πραγματικούς αριθμούς στους αριθμούς Grassmann.

Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε πώς από τους πραγματικούς αριθμούς φτάσαμε στις άλγεβρες Clifford και Grassmann. Στην πρώτη ενότητα θα ορίσουμε το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ και κάποιες βασικές του ιδιότητες. Η συνήθης περιγραφή των πραγματικών αριθμών είναι η ταύτισή τους με τα σημεία μιας ευθείας γραμμής. Ενώ αυτό που τους διακρίνει από τους ρητούς αριθμούς είναι η πληρότητά τους ως προς την ύπαρξη ριζών θετικών αριθμών (π.χ το $\sqrt{2}$ που είναι πραγματικός δεν είναι ρητός), καθώς και η ύπαρξη αριθμών όπως το e και το π που παίζουν θεμελιώδη ρόλο στα μαθηματικά.

Ωστόσο έχοντας ολοκληρώσει με τον ορισμό του θεμελιώδους αριθμητικού συστήματος $\mathbb{R}$, παρατηρούμε ότι υπάρχει μια αλγεβρική εξίσωση που ακόμα δεν μπορούμε να λύσουμε. Το απλούστερο παράδειγμα είναι η εξίσωση

$$x^2+1=0 \tag{1.1}$$

Της οποίας οι λύσεις, αν υπάρχουν, θα είναι τετραγωνικές ρίζες του -1. Θα χρειαστεί λοιπόν να επεκτείνουμε το σύνολο των πραγματικών σε ένα σύνολο, όπου η εξίσωση (1.1) να έχει λύση.

Οι εξισώσεις της μορφής αυτής αποκτούν νόημα με την εισαγωγή των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$. Οι μιγαδικοί αριθμοί, όπως θα περιγράψουμε κ αναλυτικά στην Ενότητα 1.2, αποτελούνται από πραγματικούς αριθμούς και πραγματικά πολλαπλάσια του $i=\sqrt{-1}$. Επιπλέον, όλες οι πολυωνυμικές εξισώσεις n-οστής τάξης έχουν ακριβώς n λύσεις στον $\mathbb{C}$ (συμπεριλαμβανομένων των πολλαπλοτήτων αυτών). Οι μιγαδικοί αριθμοί είναι ένα ουσιώδες συστατικό στην τρέχουσα αντίληψη για τον κόσμο γύρω μας, αποδεικνύεται ότι η κβαντομηχανική είναι μια εκ φύσεως μιγαδική θεωρία.

Δεν έχουμε τελειώσει όμως εδώ, συνεχίζοντας πέρα από τους μιγαδικούς οι κανόνες είναι ελαφρώς διαφορετικοί, όπως διαπιστώνεται από το παράδοξο φαινόμενο

$$i=\sqrt{-1}=\sqrt{\frac{1}{-1}}=\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}=\frac{1}{i}=-i \tag{1.2}$$

το οποίο μας αναγκάζει να αναθεωρήσουμε τους κανόνες του πολλαπλασιασμού των ριζών.

Οι κανόνες αυτοί μπορούν να αλλάξουν, αν πρώτα από όλα δεχθούμε ότι υπάρχουν αριθμοί οι οποίοι δεν αντιμετατίθενται. Όσο αντιφατικό και αν φαίνεται, υπάρχει ένας καλός λόγος να υποψιαστούμε ότι τέτοιοι αριθμοί θα μπορούσαν να είναι χρήσιμοι, αφού υπάρχουν πολλές φυσικές πράξεις που η σειρά παίζει ρόλο. Ένα μαθηματικό παράδειγμα είναι ο πολλαπλασιασμός πινάκων, όπου γενικά AB≠BA. Όπως θα δούμε στην Ενότητα 1.3 η επιλογή αυτή οδηγεί στις τετράδες (quaternions), $\mathbb{H}$, μια μη-αντιμεταθετική επέκταση της θεωρίας των μιγαδικών αριθμών.

Για να προχωρήσουμε παραπέρα θα χρειαστεί να δεχθούμε ότι υπάρχουν αριθμοί που δεν ικανοποιούν την προσεταιριστική ιδιότητα. Για παράδειγμα ο πολλαπλασιασμός πινάκων είναι προσεταιριστικός, αλλά το εξωτερικό γινόμενο δεν είναι. Δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το $\vec{u} \times \vec{v} \times \vec{w}$ χωρίς να γνωρίζουμε ποιο εξωτερικό γινόμενο να υπολογίσουμε πρώτο. Όπως θα δούμε παρακάτω στην Ενότητα 1.4 αυτή η επιλογή οδηγεί στα οκτόνια ή οκτάδες ή αριθμοί Cayley (octonions), $\mathbb{O}$.

Και εδώ θα πρέπει να σταματήσουμε. Εάν συνεχίζαμε θα έπρεπε να θεωρήσουμε ότι δεν υπάρχει η διαίρεση. Οι τέσσερις άλγεβρες $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{O}$ είναι οι μόνες χωρίς μηδενικούς διαιρέτες οι οποίοι είναι μη μηδενικά στοιχεία που το γινόμενό τους είναι παρόλα αυτά μηδέν.

Τα οκτόνια είναι λοιπόν η μεγαλύτερη άλγεβρα-διαιρέτης. Αυτή η μαθηματική δομή θα αποτελέσει τελικά το κλειδί στην κατανόηση των βασικών δομικών στοιχείων της φύσης, των θεμελιωδών σωματιδίων όπως τα ηλεκτρόνια και τα κουαρκ (quarks).

Στην ενότητα 1.5. θα ορίσουμε την μέθοδο Cayley-Dickson, τους υπερβατικούς αριθμούς, τους split quaternions, split octonions και ολοκληρώνουμε το κεφάλαιο με την ενότητα 1.6 όπου ορίζουμε τις άλγεβρες Clifford και Grassmann.

1.1 Το σώμα των πραγματικών αριθμών ($\mathbb{R}$, +, ·) - Αξιωματική θεμελίωση

I. Αξιώματα δομής

Το σώμα των πραγματικών αριθμών είναι ένα σύνολο $\mathbb{R}$ εφοδιασμένο με δύο εσωτερικές πράξεις

$$+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (a, b) \to a + b \tag{1.3}$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (a, b) \to a \cdot b \tag{1.4}$$

οι οποίες ικανοποιούν τις ακόλουθες ιδιότητες :

1. $a + b = b + a$, για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ (1.5)

   (αντιμεταθετική ιδιότητα),

2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ (1.6)

   (προσεταιριστική ιδιότητα),

3. υπάρχει $0 \epsilon \mathbb{R}$: $a + 0 = a$, για κάθε $a \epsilon \mathbb{R}$, (1.7)

4. αν $\alpha \epsilon \mathbb{R}$, υπάρχει $-\alpha \epsilon \mathbb{R} : \alpha + (-\alpha) = 0$ (1.8)

(δηλαδή το $(\mathbb{R}, +)$ είναι **αβελιανή** ομάδα)

5. $ab = ba$, *για κάθε* $a, b \epsilon \mathbb{R}$ (1.9)

(αντιμεταθετική ιδιότητα),

6. $(ab)c = a(bc)$, για κάθε $a, b, c \epsilon \mathbb{R}$ (1.10)

(προσεταιριστική ιδιότητα),

7. $a(b + c) = ab + ac$, *για κάθε* $a, b, c \epsilon \mathbb{R}$ (1.11)

(επιμεριστική ιδιότητα),

8. *υπάρχει* $1 \epsilon \mathbb{R} : 1a = a$, *για κάθε* $a \epsilon \mathbb{R}$, (1.12)

9. *αν* $a \epsilon \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$,*τότε υπάρχει* $a^{-1} \epsilon \mathbb{R} : aa^{-1} = 1$ (1.13)

ΙΙ. Αξιώματα διατάξεως

Δεχόμαστε ότι υπάρχει ένα μη κενό υποσύνολο P του $\mathbb{R}$, το οποίο ονομάζουμε σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών και ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

(1) $\alpha, \beta \in P$, $\alpha + \beta \in P$ (1.14)

(2) αν $\alpha, \beta \in P$, τότε $\alpha \cdot \beta \in P$ (1.15)

(3) αν $\alpha \in \mathbb{R}$, τότε ισχύει ακριβώς μία από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\alpha \in \mathbb{R}, \qquad \alpha = 0, \qquad -\alpha \in P \tag{1.16}$$

Η τελευταία λέγεται και ***ιδιότητα της τριχοτομίας***, γιατί διαμερίζει το $\mathbb{R}$ σε τρία υποσύνολα $P, -P := \{-a : a \in P\}$ και το μονοσύνολο $\{0\}$. Τα στοιχεία του συνόλου P λέγονται ***θετικοί αριθμοί***, ενώ τα στοιχεία του συνόλου $-P$ λέγονται ***αρνητικοί αριθμοί***. Λόγω του (3) τα σύνολα P και $-$P δεν έχουν κοινά στοιχεία. Χρησιμοποιούμε επίσης και τους συμβολισμούς

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}, \qquad \mathbb{R}^*_+ = P, \qquad \mathbb{R}^*_- = -P,$$

$$\mathbb{R}_+ = P \cup \{0\}, \quad \mathbb{R}_- = -P \cup \{0\}, \quad \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\}. \tag{1.17}$$

Με χρήση του συνόλου P μπορούμε να ορίσουμε τους θετικούς και αρνητικούς αριθμούς ως εξής:

(i) $\alpha > 0$, αν, και μόνον αν, $\alpha \in P$, δηλαδή, αν ο α είναι θετικός αριθμός.

(ii) $\alpha < 0$, αν, και μόνον αν, $-a \in P$, δηλαδή, αν ο α είναι αρνητικός

Επιπλέον μπορούμε να ορίσουμε στο $\mathbb{R}$ μία ***σχέση (ολικής) διάταξης*** που συμβολίζεται με ≥ και ορίζεται ως εξής:

$$\alpha \geq \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta \in P \text{ ή } \alpha = \beta \ (\Leftrightarrow \alpha - \beta \in \mathbb{R}_+) \qquad (1.18)$$

αφού εύκολα αποδεικνύονται οι ακόλουθες ιδιότητες:

(i) $\alpha \geq \alpha$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, ***(αυτοπαθής ή ανακλαστική ιδιότητα)*** (1.19)

(ii) $\alpha \geq \beta$ και $\beta \geq \alpha \Rightarrow \alpha = \beta$, ***(αντισυμμετρική ιδιότητα)*** (1.20)

(iii) $\alpha \geq \beta$ και $\beta \geq \gamma \Rightarrow \alpha \geq \gamma$, ***(μεταβατική ιδιότητα)*** (1.21)

(iv) για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$\alpha \geq \beta$ ή $\beta \geq \alpha$, ***(ιδιότητα ολικής διάταξης)*** (1.22)

Μία ακόμη σχέση ολικής διάταξης στο $\mathbb{R}$ ορίζεται ως εξής:

$$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \beta \geq \alpha \ . \qquad (1.23)$$

III. Το αξίωμα της πληρότητας

Έχουμε ήδη θεωρήσει το σύνολο $\mathbb{R}$ ως ένα ολικά διατεταγμένο σώμα, οπότε έχει νόημα να προχωρήσουμε στους επόμενους ορισμούς:

Ορισμός :

(α) Ένα υποσύνολο S του $\mathbb{R}$ είναι **άνω φραγμένο**, αν υπάρχει πραγματικός αριθμός K που να είναι μεγαλύτερος ή ίσος προς κάθε στοιχείο του συνόλου S, δηλαδή, αν για κάποιο K ε $\mathbb{R}$ ισχύει

$$x \leq K, \text{ για κάθε } x \in S . \qquad (1.24)$$

Ο αριθμός K λέμε ότι είναι **άνω φράγμα** του συνόλου S.

(β) Ένα υποσύνολο S του $\mathbb{R}$ είναι **κάτω φραγμένο**, αν υπάρχει πραγματικός αριθμός Λ που είναι μικρότερος ή ίσος προς κάθε στοιχείο του συνόλου S, δηλαδή, αν για κάποιο Λ ε $\mathbb{R}$ ισχύει

$$x \geq \Lambda, \text{ για κάθε } x \in S \qquad (1.25)$$

Ο αριθμός K λέμε ότι είναι ένα **κάτω φράγμα** του συνόλου S .

(γ) Ένα υποσύνολο του S του $\mathbb{R}$ είναι **φραγμένο**, αν είναι άνω και κάτω φραγμένο.

Με όσα είπαμε παραπάνω, μπορούμε να διατυπώσουμε το αξίωμα της πληρότητας ή συνέχειας. Έχουμε σχετικά:

Αξίωμα της πληρότητας ή συνέχειας: *Κάθε μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ που είναι άνω φραγμένο έχει ένα ελάχιστο άνω φράγμα. Κάθε μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ που είναι κάτω φραγμένο έχει ένα μέγιστο κάτω φράγμα.*

Μέσω όλων αυτών των αξιωμάτων κατασκευάζεται το σύνολο των πραγματικών αριθμών, το οποίο περιέχει τους φυσικούς , τους ακέραιους,

τους ρητούς και τους άρρητους. Έτσι στο $\mathbb{R}$ λύνεται και η εξίσωση $x^2 = 2$, η οποία δεν έχει λύση στους ρητούς

1.2: Το σώμα των μιγαδικών αριθμών

Ιστορικά, η ανάγκη της επίλυσης εξισώσεων δευτέρου και τρίτου βαθμού απετέλεσε την αφετηρία της επέκτασης των πραγματικών αριθμών στο σώμα $\mathbb{C}$ των μιγαδικών, το οποίο περιέχει τους πραγματικούς αριθμούς και στο οποίο επιλύονται οι εξισώσεις δευτέρου και τρίτου βαθμού.

Ο Cardano το 1545 θεώρησε την εξίσωση $x^2 + 2x + 2 = 0$ και έγραψε τις ρίζες στη μορφή $-1 \pm \sqrt{-1}$, σημειώνοντας ότι η παραπάνω εξίσωση θα μπορούσε μα λυθεί σε ένα σύνολο «μιγαδικών αριθμών» στο οποίο θα ισχύει η ισότητα $\sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1$.

Ο Euler το 1777 εισήγαγε το συμβολισμό i και $-i$ για τις δύο διαφορετικές ρίζες του -1, τους αριθμούς της μορφής $a + bi$ και την έκφραση $e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta$. Έτσι ο Euler είχε θεωρήσει το σύνολο

$$\mathbb{C} = \{a + bi: a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\} \qquad (1.26)$$

το οποίο περιέχει τους πραγματικούς αριθμούς και μπορεί να πάρει τη δομή αλγεβρικού σώματος, αν του ορίσουμε τις πράξεις

$$+: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}\ ,\ (a + bi, c + di) \to (a + bi) + (c + di) \coloneqq (a + c) + (b + d)i \qquad (1.27)$$

$$\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}\ ,\ (a + bi, c + di) \to (a + bi) \cdot (c + di) := (ac - bd) + (ad + bc)i \quad (1.28)$$

Ο Wessel το 1797, ο Gauss το 1799 και ο Argand το 1806 θεώρησαν τους μιγαδικούς αριθμούς ως σημεία του επιπέδου δίνοντας τους έτσι γεωμετρική ερμηνεία.

Ο Hamilton το 1833 συνέλαβε την ιδέα της παράστασης των μιγαδικών αριθμών με διατεταγμένα ζεύγη πραγματικών αριθμών. Έτσι ουσιαστικά θεώρησε τον ισομορφισμό

$$\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2\ ,\ a + bi \to \phi(a + bi) = (a, b) \quad (1.29)$$

και μέσω αυτού όρισε τη δομή αλγεβρικού σώματος πάνω στο $\mathbb{C}^2$ με τις πράξεις

$$(a, b) + (c, d) = (a + c\ ,\ b + d) \quad (1.30)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd\ ,\ ad + bc) \quad (1.31)$$

Έτσι το $\mathbb{C}^2$ αποκτά τη δομή αλγεβρικού σώματος που περιέχει μια ισόμορφη εικόνα του $\mathbb{R}$ και επιπλέον με τη πράξη

$$\lambda(a\ ,\ b) = (\lambda\alpha\ ,\ \lambda b) \quad (1.32)$$

ουσιαστικά θεώρησε το $\mathbb{C}^2$ ως διανυσματικό χώρο πάνω στο $\mathbb{R}$.

Το σώμα των μιγαδικών αριθμών περιέχει μια ισομορφική εικόνα του σώματος των πραγματικών αριθμών μέσω της απεικόνισης

$$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ \ x \to \phi\left(x\right) \coloneqq \left(x,0\right). \tag{1.33}$$

Το διατεταγμένο ζευγάρι $\left(0,1\right)$ έχει την ιδιότητα

$$(0,1)^2 \coloneqq\ (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) \equiv -1 \tag{1.34}$$

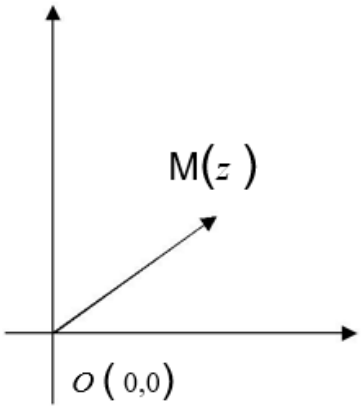
ορίζεται ως φανταστική μονάδα και συμβολίζεται με το γράμμα i , δηλαδή είναι $i^2 = -1$, οπότε στο σώμα $\mathbb{C}$ έχει λύση η εξίσωση $z^2 + 1 = 0$. Έτσι έχουμε την ταύτιση $\left(x ,0\right) = x$ και

$$\left(x , y \right) = \left(x ,0 \right) + \left(0, y \right) = \left(x ,0 \right) + y \left(0,1\right) \equiv x + yi\ . \tag{1.35}$$

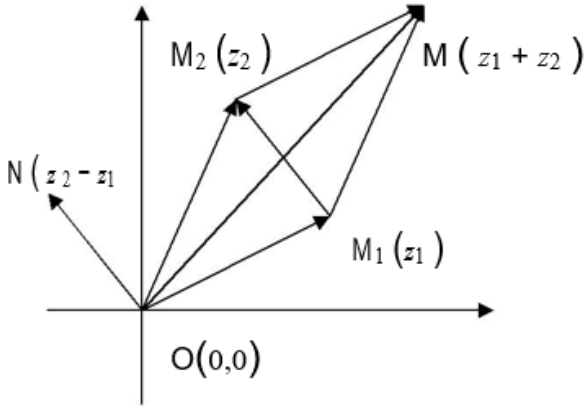
Οι μιγαδικοί αριθμοί αναπαρίστανται γεωμετρικά στο Καρτεσιανό επίπεδο μέσω της απεικόνισης

$$f : \mathbb{C} \to \Pi\ ,\ \ z = x + yi \to f\left(z\right) \coloneqq \mathrm{M}\left(x , y\right). \tag{1.36}$$

Το σημείο Μ λέγεται **εικόνα** του μιγαδικού αριθμού στο Καρτεσιανό επίπεδο. Κάθε μιγαδικός αριθμός αντιστοιχίζεται αμφιμονοσήμαντα στη διανυσματική ακτίνα **ΟΜ** του σημείου Μ.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Σχετικά με τις πράξεις μιγαδικών αριθμών και το συζυγή ισχύουν οι ιδιότητες:

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ και $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$, (1.37)
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ και $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$. (1.38)

Επίσης σε κάθε μιγαδικό αριθμό $z = x + yi$ αντιστοιχίζουμε το **μέτρο** του που είναι η απόσταση του σημείου Μ που τον αναπαριστά γεωμετρικά στο επίπεδο από την αρχή των αξόνων. Είναι δηλαδή

$$|z| = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (1.39)$$

Ισχύουν οι ιδιότητες:

- $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ (1.40)

- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ (1.41)
- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ και $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$, αν $z_2 \neq 0$, (1.42)
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (**τριγωνική ανισότητα**) (1.43)
- $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2|$ (1.44)

Αν $z = x + yi$, ο πραγματικός αριθμός x ονομάζεται **πραγματικό μέρος** του μιγαδικού αριθμού z , ενώ ο πραγματικός αριθμός y ονομάζεται **φανταστικό μέρος** του z .

Γράφουμε

$$x = \mathrm{Re}\, z \text{ και } y = \mathrm{Im}\, z \,. \tag{1.45}$$

Χρησιμοποιώντας τον συζυγή του μιγαδικού αριθμού z έχουμε τις ισότητες:

$$x = Re\, z = \frac{z+\bar{z}}{2} \text{ και } y = \mathrm{Im}\, z = \frac{z-\bar{z}}{2i} \tag{1.46}$$

Η πολική ή τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού

Τον μιγαδικό αριθμό $z = x + yi$ μπορούμε να τον γράψουμε στη μορφή

$$z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right), \tag{1.47}$$

όπου

$$\mathrm{r} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z| \tag{1.48}$$

είναι το **μέτρο** του μιγαδικού αριθμού z , ενώ η γωνία θ προκύπτει από τις εξισώσεις

$$\cos\theta = \frac{x}{r}\ ,\ \sin\theta = \frac{y}{r} \qquad (1.49)$$

Αν θ είναι μία λύση των εξισώσεων (1.49), τότε και όλες οι γωνίες της μορφής $\theta+2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ είναι επίσης λύσεις. Κάθε λύση θ των εξισώσεων λέγεται **όρισμα**

του μιγαδικού αριθμού z και συμβολίζεται με $\arg z$, ενώ αν $\theta \in [0, 2\pi)$, τότε λέγεται **πρωτεύον όρισμα** του z και συμβολίζεται με $\mathrm{Arg}\ z$. Για το μιγαδικό αριθμό 0 δεν ορίζεται όρισμα.

Για παράδειγμα, ο μιγαδικός αριθμός $z = 1+i$ έχει μέτρο $|z|=\sqrt{2}$, οπότε για την εύρεση του ορίσματος αυτού έχουμε τις εξισώσεις:

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \qquad (1.50)$$

οπότε η τριγωνομετρική μορφή του $z = 1+i$ είναι $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

Ομοίως, ο μιγαδικός αριθμός $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ έχει μέτρο 1 και όρισμα θ με

$$\cos\theta = -\frac{1}{2} \text{ και } \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \qquad (1.51)$$

οπότε έχει τριγωνομετρική μορφή

$$z = 1\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\ \sin\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3} + i\ \sin\frac{2\pi}{3}\ . \qquad (1.52)$$

Κάθε θετικός πραγματικός αριθμός $z = x > 0$ έχει όρισμα θ = 0, οπότε γράφεται ως $z = x(\cos 0 + i\ \sin 0)$, ενώ ο αριθμός $z = x < 0$ έχει όρισμα θ = π και γράφεται ως $z = |x|(\cos\pi + i\ \sin\pi)$. Για τον μιγαδικό αριθμό $z = yi$ έχουμε

$$\arg(yi) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, \alpha\nu\ y > 0 \\ \frac{3\pi}{2}, \alpha\nu\ y < 0 \end{cases}, \tag{1.53}$$

οπότε

$$z = yi = \begin{cases} y\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\ \sin\frac{\pi}{2}\right), \alpha\nu\ y > 0, \\ |y|\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\ \sin\frac{3\pi}{2}\right), \alpha\nu\ y < 0 \end{cases}. \tag{1.54}$$

Αν $z = \mathrm{r}(\cos\theta + i\ \sin\theta)$, $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, τότε:

- $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + \sin(\theta_1 + \theta_2)]$, (1.55)
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\ \sin(\theta_1 + \theta_2)]$, (1.56)
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}[\cos(-\theta) + i\ \sin(-\theta)]$, (1.57)
- $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta), \mathrm{n} \in \mathbb{N}$ (1.58)

  (τύπος του De Moirve).

Έτσι σχετικά με το όρισμα προκύπτουν οι παρακάτω ισότητες, οι οποίες ισχύουν πάντοτε modulo 2π, αφού το όρισμα του μιγαδικού αριθμού, σύμφωνα με όσα είπαμε, δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένο.

- $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)(mod 2\pi)$, (1.59)
- $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)(mod 2\pi)$, (1.60)
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z(mod 2\pi)$, (1.61)
- $\arg(z^n) = n\arg z(mod 2\pi), n \in \mathbb{N}$. (1.62)

Η **απόσταση** μεταξύ δύο σημείων $M_1(z_1)$,$M_2(z_2)$ του επιπέδου δίνεται από την σχέση

$$d(M_1, M_2) = M_1M_2 = |z_1 - z_2|. \tag{1.63}$$

1.3: Η άλγεβρα των τετράδων (Quaternions) [13]

Ο Hamilton μετά το 1833 και επί δέκα χρόνια προσπαθούσε να ορίσει τη δομή αλγεβρικού σώματος πάνω στον $\mathbb{R}^3$, το οποίο να περιέχει μια ισόμορφη εικόνα του $\mathbb{R}^2$, χωρίς επιτυχία. Συγκεκριμένα, θεώρησε τις πράξεις

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3) \tag{1.64}$$

$$\lambda(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \lambda\alpha_3) \tag{1.65}$$

και χρησιμοποίησε τους συμβολισμούς

$$x_1 = (1,0,0),\ x_2 = (0,1,0),\ x_3 = (0,0,1) \tag{1.66}$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) \tag{1.67}$$

Χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα έγραψε την ισότητα

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \alpha_i \beta_j x_i x_j \tag{1.68}$$

και παρατήρησε ότι ο πολλαπλασιασμός ορίζεται πλήρως, αν είναι γνωστά τα γινόμενα

$$x_i x_j = \delta_{ij1} x_1 + \delta_{ij2} x_2 + \delta_{ij3} x_3,\ \ i, j = 1,2,3 \tag{1.69}$$

Αποφάσισε ότι το x_1 πρέπει να λειτουργεί ως μονάδα, ότι $x_2x_3 = x_3x_2$ και κατασκεύασε τον πίνακα

	x_1	x_2	x_3
x_1	x_2	x_2	x_3
x_2	x_3	$x_1 + (\beta - \beta^{-1})x_2$	βx_3
x_3	x_4	βx_3	$x_1 + \beta x_2 + x_3$

Με αυτόν τον πίνακα παρατήρησε ότι

$$(\alpha, \beta\alpha, \beta) \cdot (-\beta\gamma, \gamma, 0) = (0,0,0) \tag{1.70}$$

δηλαδή υπάρχουν μηδενοδιαιρέτες, κάτι που δεν μπορεί να ισχύει σε ένα σώμα.

Ο Hamilton επανήλθε στις τετράδες το 1843 θεωρώντας τα 1, i, j στις θέσεις των x_1, x_2, x_3 και τον πίνακα

	1	i	j
1	1	i	j
i	i	-1	
j	j		-1

στον οποίο άφησε τα γινόμενα ij και ji απροσδιόριστα, αλλά και πάλι απέτυχε. Αυτό βέβαια ήταν φυσικό να συμβεί, γιατί με την υπόθεση της μεταθετικότητας οποιοσδήποτε ορισμός των γινομένων ij και ji της μορφής

$$ij = ji = x1 + yi + zj,\ \ x, y, z \in \mathbb{R}\ , \tag{1.71}$$

οδηγεί σε αντίφαση, ως εξής:

Έχουμε

$$(ij)i = j(ii) = j(-1) = -j \tag{1.72}$$

$$(ij)i = (x1 + yi + zj)i = xi + yi^2 + z(ji) \tag{1.73}$$

$$= xi + y(-1) + z(x + yi + zj) \tag{1.74}$$

$$= (zx - y)1 + (x + zy)i + z^2 j \tag{1.75}$$

Επομένως, έχουμε $z^2 = -1,\ \ z \in \mathbb{R}$, που είναι άτοπο.

Έτσι οδηγήθηκε στην ιδέα της θεώρησης τετράδων συμβολίζοντας

$$1 = (1,0,0,0), i = (0,1,0,0), j = (0,0,1,0), k = (0,0,0,1), \tag{1.76}$$

όπου το $k = ij$ είναι μία ακόμη τετραγωνική ρίζα του -1.

Οπότε μέσω της προσεταιριστικής ιδιότητας έλαβε:

$$k^2 = ijij = i(ji)j = i(-ij)j = -iijj = -i^2 j^2 = -(-1)(-1) = -1 \tag{1.77}$$

$$ik = i(ij) = i^2 j = -j, \tag{1.78}$$

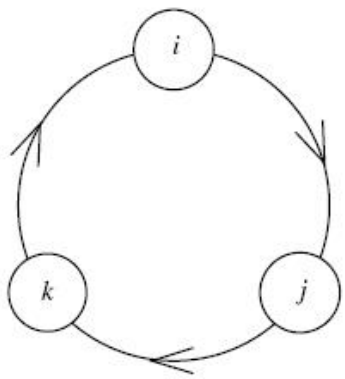
$$ki = (ij)i = -ji^2 = j, \tag{1.79}$$

$$jk = j(ij) = (ji)j = -ij^2 = (-i)(-1) = i\,. \qquad (1.80)$$

Θα αναφερόμαστε στο i,j και k σαν φαντατικές τετραδικές (quaternionic) μονάδες (σημειώστε ότι αυτές οι μονάδες αντί-αντιμετατίθενται (anticommutes) με την έννοια ότι αλλάζοντας την σειρά αλλάζει και το πρόσημο, δηλαδή $ij = -ji$).

Έτσι θεώρησε τον πίνακα

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1



Σχήμα 1.3.1 Ο πολλαπλασιαστικός πίνακας τετράδων.

Πολλαπλασιάζοντας δυο από αυτές τις μονάδες τετράδων κατά την διεύθυνση του τόξου παίρνουμε την τρίτη, ενώ πολλαπλασιάζοντας αντίστροφα του τόξου παίρνουμε την τρίτη με αρνητικό πρόσημο.

Με την θεώρηση αυτή ο Hamilton εγκατέλειψε μια πολύ βασική ιδιότητα της άλγεβρας, την μεταθετική ιδιότητα, ανοίγοντας έτσι το δρόμο για την

θεώρηση αλγεβρικών δομών στις οποίες δεν ισχύει η μεταθετικότητα. Έτσι εισήγαγε την άλγεβρα των τετράδων (quaternions)

$$\mathbb{H} = \{\alpha + \beta_i + \gamma_j + \delta_k : \alpha, \beta, \gamma, \delta \epsilon \mathbb{R}\} \tag{1.81}$$

η οποία είναι διευρυμένη με το ταυτοτικό στοιχείο 1 και τρεις φανταστικές μονάδες και μπορεί να αναπαρασταθεί από τέσσερις πραγματικούς αριθμούς (α, β, γ, δ). Μια τετράδα q συνήθως γράφεται

$$q = \alpha + \beta_i + \gamma_j + \delta_k \tag{1.82}$$

που μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα σημείο ή διάνυσμα στον $\mathbb{R}^4$. Μπορεί επίσης να γραφτεί στην μορφή

$$q = (\alpha + \beta_i) + (\gamma + \delta_i)j \tag{1.83}$$

από την οποία παρατηρούμε ότι μια τετράδα μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα ζεύγος μιγαδικών αριθμών

$$(q_{1\mathbb{C}}, q_{2\mathbb{C}}) = (q_1 + q_2 i, q_3 + q_4 i) \tag{1.84}$$

ή ισοδύναμα μπορούμε να γράψουμε

$$\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j \tag{1.85}$$

σε άμεση αναλογία με την κατασκευή του $\mathbb{C}$ από τον $\mathbb{R}$.

Ο πολλαπλασιαστικός πίνακας των τετράδων είναι, σχεδόν, το εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων. Η μόνη διαφορά είναι ότι το τετράγωνο των φανταστικών τετράδων είναι αρνητικός αριθμός, ενώ το εξωτερικό γινόμενο διανύσματος με τον εαυτό του είναι μηδέν. Κάνοντας την προφανή ταύτιση των διανυσμάτων $\vec{u}, \vec{w}$ με τις φανταστικές τετράδες, έχουμε

$$\vec{u} = u_x\hat{\imath} + u_y\hat{\jmath} + u_z\hat{k} \leftrightarrow u = u_x i + u_y j + u_z k \tag{1.86}$$

(όμοια για το $\vec{w}$), τότε το φανταστικό μέρος του τετραδικού γινομένου uw είναι το εξωτερικό γινόμενο $\vec{u} \times \vec{w}$, δηλαδή

$$\vec{u} \times \vec{w} \leftrightarrow Im(uw) \tag{1.87}$$

ενώ το πραγματικό μέρος είναι

$$-\vec{u} \cdot \vec{w} = Re(uw) \tag{1.88}$$

Έτσι, το γινόμενο τετράδων μπορεί να θεωρηθεί σαν ένας συνδυασμός εσωτερικού και εξωτερικού γινομένου. Στην πραγματικότητα, η χρήση του $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$, για την καρτεσιανή βάση διανυσμάτων προέρχεται από τις τετράδες, που προηγούνται της χρήσης των διανυσμάτων.

Ορίζουμε τον μεταθέτη (commutator) δυο τετράδων p και q ως

$$[p, q] = pq - qp \tag{1.89}$$

ο οποίος ποσοτικοποιεί την έλλειψη αντιμεταθετικότητας των τετράδων. Για παράδειγμα έχουμε $[i, j] = 2k$. Ωστόσο οι τετράδες είναι προσεταιριστικές, αρκεί να ελέγξουμε ότι $(ij)k = -1 = i(jk)$. Όπως πάντα ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα για τον πολλαπλασιασμού και την πρόσθεση [14].

Έστω δυο τετράδες q, q'є $\mathbb{H}$ οι πράξεις ορίζονται από:

- $q + q' = \left(\alpha + \beta_i + \gamma_j + \delta_k\right) + \left(\alpha' + \beta'_i + \gamma'_j + \delta'_k\right) =$

$$= \alpha + \alpha' + (\beta + \beta')i + (\gamma + \gamma')j + (\delta + \delta')k \tag{1.90}$$

- $\lambda \cdot q = \lambda\left(\alpha + \beta_i + \gamma_j + \delta_k\right) = \lambda\alpha + (\lambda\beta)i + (\lambda\gamma)j + (\lambda\delta)k$ (1.91)

- $q \cdot q' = \left(\alpha + \beta_i + \gamma_j + \delta_k\right) \cdot \left(\alpha' + \beta'_i + \gamma'_j + \delta'_k\right) =$

$$= \alpha'' + \beta'' i + \gamma'' j + \delta'' k \tag{1.92}$$

όπου,

$$\alpha'' = \alpha\alpha' - \beta\beta' - \gamma\gamma' - \delta\delta' \tag{1.93}$$

$$\beta'' = \alpha\beta' + \beta\alpha' + \gamma\delta' - \delta\gamma' \tag{1.94}$$

$$\gamma'' = \alpha\gamma' + \gamma\alpha' + \delta\beta' - \beta\delta' \tag{1.95}$$

$$\delta'' = \alpha\delta' + \delta\alpha' + \beta\gamma' - \gamma\beta' \tag{1.96}$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)[(\alpha')^2 + (\beta')^2 + (\gamma')^2 + (\delta')^2]$$
$$= (\alpha'')^2 + (\beta'')^2 + (\gamma'')^2 + (\delta'')^2 \tag{1.97}$$

οπότε για την απεικόνιση

$$N: \mathbb{H} \to \mathbb{R}, q = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \to N(q) = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 \tag{1.98}$$

ισχύει

$$N(qq') = N(q)N(q') \tag{1.99}$$

δηλαδή η άλγεβρα των τετράδων είναι ένα παράδειγμα άλγεβρας συνθέσεων (composition algebra), όπως είναι επίσης και οι πραγματικοί αριθμοί, οι μιγαδικοί αριθμοί και μία ακόμη άλγεβρα διάστασης 8, η άλγεβρα των οκτονίων (octonions).

Η τελευταία προέκυψε από την προσπάθεια ορισμού αλγεβρικής δομής σώματος στον $\mathbb{R}^8$, η οποία οδήγησε στον ορισμό δομής άλγεβρας στον $\mathbb{R}^8$ με απώλεια της προσεταιριστικης ιδιότητας, και την οποία θα δούμε αναλυτικά στο επόμενο κεφάλαιο.

Η συζυγής της τετράδας $q = a + bi + cj + dk$, ορίζεται ως εξής:

$$\bar{q} = a - bi - cj - dk, \tag{1.100}$$

και ικανοποιεί την ισότητα:

$$|q|^2 = q\bar{q} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = N(q). \tag{1.101}$$

και την ταυτότητα:

$$\overline{qq'} = \bar{q}'\bar{q} \tag{1.102}$$

Η μοναδική τετράδα με νόρμα μηδέν είναι η μηδενική, και κάθε μη μηδενική τετράδα $q = a + bi + cj + dk \neq 0$, έχει την αντίστροφή της που ορίζεται ως εξής:

$$q^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}(a - bi - cj - dk) \tag{1.103}$$

ή ισοδύναμα:

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2} \tag{1.104}$$

Εφόσον οι τετράδες αντιστρέφονται, γραμμικές εξισώσεις όπως η

$$c = az + b, \tag{1.105}$$

όπου τώρα $a, b, c, z \epsilon \mathbb{H}$, μπορούν να επιλυθούν ως προς z αρκεί το $a \neq 0$, αλλά δεν είναι πλέον οι μόνες γραμμικές εξισώσεις. Θεωρούμε για παράδειγμα την εξίσωση

$$d = ax + xb, \tag{1.106}$$

όπου τώρα $a, b, d \epsilon \mathbb{C}$ και $x \epsilon \mathbb{H}$. Μια προφανής λύση είναι η

$$x_0 = \frac{d}{a + b} \tag{1.107}$$

δεδομένου ότι $a + b \neq 0$. Σημειώστε ότι ο x_0 είναι μιγαδικός.

Στην ειδική περίπτωση όπου $d = 0, a = i = b$, κάθε γραμμικός συνδυασμός του j και k είναι λύση της εξίσωσης.

Θεωρούμε τώρα την γενική περίπτωση: Αν $a + \bar{b} \neq 0$, τότε η μόνη λύση είναι η μιγαδική λύση x_0, αλλά αν $a + \bar{b} = 0$ υπάρχουν επιπλέον τετραδικές ομογενείς λύσεις που μπορούν να προστεθούν στην ειδική λύση x_0, που ως εκ τούτου δεν είναι μοναδική. Η κατάσταση περιπλέκεται αν κάποια ή όλα τα a, b, c μπορούν να είναι τετράδες αντί για μιγαδικοί.

Είναι σημαντικό να αντιληφθούμε ότι $\pm i, \pm j, \kappa\alpha\iota \pm k$ δεν είναι οι μόνες τετραγωνικές ρίζες του -1. Το τετράγωνο κάθε φανταστικής τετράδας είναι αρνητικός αριθμός, οπότε αρκεί να επιλέξουμε την νόρμα να ισούται με 1 με σκοπό να πάρουμε την τετραγωνική ρίζα του -1. Οι φανταστικές τετράδες νόρμας 1 σχηματίζουν μια σφαίρα, στην παρακάτω παράσταση έχουμε το σύνολο των σημείων

$$q_2{}^2 + q_3{}^2 + q_4{}^2 = 1 \tag{1.108}$$

(με $q_1 = 0$). Κάθε τέτοια φανταστική τετραδική μονάδα u μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να κατασκευάσουμε μια μιγαδική υποάλγεβρα του $\mathbb{H}$, που επίσης συμβολίζεται με $\mathbb{C}$

$$\mathbb{C} = a + bu \tag{1.109}$$

όπου $a, b \epsilon \mathbb{R}$. Επιπλέον, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του Euler και να γράψουμε

$$e^{u\theta} = \cos\theta + u\sin\theta \tag{1.110}$$

Αυτό σημαίνει ότι κάθε τετράδα μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$q = re^{u\theta} \tag{1.111}$$

όπου $r = |q|$, και το u συμβολίζει την διεύθυνση του φανταστικού μέρους του q.

Μια χρήσιμη τεχνική λοιπόν, για να λύσουμε προβλήματα, όπως οι γραμμικές εξισώσεις που αναφέραμε παραπάνω, οι οποίες περιέχουν και μιγαδικούς αριθμούς και τετράδες, είναι να χωρίσουμε τις τετράδες σε ένα ζεύγος μιγαδικών αριθμών. Θα την δούμε αναλυτικά στα παραδείγματα που ακολουθούν.

Πρώτα όμως, θα ορίσουμε την συζυγία (conjugation, η συζυγία με p είναι διαφορετική από τον συζυγή του p, ο οποίος είναι $\bar{p}$) μιας τετράδας q με μια τετράδα p ως pqp^{-1}. Η νόρμα του p δεν μας ενδιαφέρει εδώ, έτσι μπορούμε να υποθέσουμε ότι $|p| = 1$, στην περίπτωση αυτή $p^{-1} = \bar{p}$.

Παράδειγμα 1.3.1: Συζυγία μιας τετράδας με το i.

Γράφουμε το q στη μορφή ζεύγους μιγαδικών αριθμών

$$q = q_{1\mathbb{C}} + q_{2\mathbb{C}} j \tag{1.112}$$

Τότε το i αντιμετατίθεται με τους μιγαδικούς αριθμούς $q_{1\mathbb{C}}, q_{2\mathbb{C}}$, αλλά αντί-αντιμετατίθεται (anticommutes) με το j. Έτσι

$$iq\bar{\imath} = iq_{1\mathbb{C}}\bar{\imath} + iq_{2\mathbb{C}} j\bar{\imath} = iq_{1\mathbb{C}}\bar{\imath} - iq_{2\mathbb{C}}\bar{\imath}\, j = q_{1\mathbb{C}} - q_{2\mathbb{C}}\, j \tag{1.113}$$

Έτσι η συζυγία με i αφήνει ανέπαφο το μιγαδικό επίπεδο, αλλά παράγει μια περιστροφή κατά π στο επίπεδο jk. Ανάλογα αποτελέσματα θα έχουμε για συζυγία με μια οποιαδήποτε φανταστική τετραδική μονάδα όπως το u .

Παράδειγμα 1.3.2: Συζυγία τετράδας με $e^{i\theta}$.

Εναλλάσσοντας τους ρόλους του i και j στο προηγούμενο παράδειγμα, η συζυγία με j δίνει μια περιστροφή κατά π στο ki-επίπεδο, τέτοια ώστε

$$je^{i\theta}\bar{\jmath} = e^{i\theta} \tag{1.114}$$

πολλαπλασιάζοντας από δεξιά και τις δυο πλευρές με j, παίρνουμε την παρακάτω πολύ σημαντική σχέση

$$je^{-i\theta} = e^{i\theta} j \tag{1.115}$$

Έτσι,

$$e^{i\theta} q e^{-i\theta} = e^{i\theta} q_{1\mathbb{C}} e^{-i\theta} + e^{i\theta} q_{2\mathbb{C}} j e^{-i\theta}$$

$$= e^{i\theta} q_{1\mathbb{C}} e^{-i\theta} + e^{i\theta} q_{2\mathbb{C}} e^{i\theta} j$$

$$= q_{1\mathbb{C}} + q_{2\mathbb{C}} e^{2i\theta} j \tag{1.116}$$

που αντιστοιχεί σε μια περιστροφή κατά 2θ στο επίπεδο jk.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, ο Hamilton εγκατέλειψε το νόμο της μεταθετικότητας για τον ορισμό των τετράδων με σκοπό να ορίσει μία αλγεβρική δομή που να πλησιάζει τη δομή σώματος. Η δομή αυτή είναι **διαιρετική άλγεβρα** και η μοναδική ιδιότητα που δεν ικανοποιεί για να είναι σώμα, είναι η μεταθετικότητα του πολλαπλασιασμού. Όμως, μπορούμε να δούμε ότι η μη ικανοποίηση της μεταθετικότητας προκύπτει κατά φυσικό τρόπο από μία γεωμετρική θεώρηση.

Θεωρούμε τις στροφές της μοναδιαίας σφαίρας $S(O,1)$ του χώρου όπου O είναι η αρχή των αξόνων. Έστω f μία στροφή της σφαίρας $S(O,1)$ κατά γωνία $\frac{\pi}{2}$, γύρω από τον άξονα των z, όπου (O,i,j,k) είναι ένα Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς . Έστω g μία στροφή της σφαίρας $S(O,1)$ κατά γωνία $\frac{\pi}{2}$ γύρω από τον άξονα των x. Έστω επίσης $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ και $C(0,0,1)$ οι τομές της σφαίρας $S(O,1)$ με τους θετικούς ημιάξονες Ox, Oy, Oz, αντίστοιχα. Τότε έχουμε

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} \Gamma \tag{1.117}$$

$$A \xrightarrow{g} A \xrightarrow{f} B\,, \tag{1.118}$$

δηλαδή οι στροφές f και g δεν ικανοποιούν τη μεταθετική ιδιότητα ως προς την σύνθεση απεικονίσεων.

Γενικά, η στροφή R_θ της σφαίρας $S(O,1)$ κατά γωνία θ γύρω από έναν άξονα που διέρχεται από το κέντρο της μπορεί να παρασταθεί από μία τετράδα

$$q = a + bi + cj + dk, \tag{1.119}$$

με

$$a = \tan\frac{\theta}{2}\,, b = a\cos\alpha\,, c = a\cos\beta\,, d = a\cos\gamma, \tag{1.120}$$

όπου $\cos\alpha\,, \cos\beta\,, \cos\gamma$ είναι τα συνημίτονα κατεύθυνσης του άξονα περιστροφής. Γράφοντας κάθε σημείο της σφαίρας $S(O,1)$ στη μορφή

$xi + yj + zk$, με $x^2 + y^3 + z^2 = 1$, η στροφή R_θ μπορεί να δοθεί στη μορφή

$$r_\theta(xi + yj + zk) = q(xi + yj + zk)q^{-1}. \tag{1.121}$$

Για παράδειγμα, στις στροφές f και g αντιστοιχούν οι τετράδες $q_f = 1 + k$ και $q_g = 1 + i$. Έτσι για το σημείο $A(1,0,0)$ το οποίο μπορεί να παρασταθεί από την τετράδα i, έχουμε

$$f(A) = q_f i {q_f}^{-1} = (1 + k)i(1 + k)^{-1} = \tfrac{1}{2}(1 + k)i(1 - k) = j. \tag{1.122}$$

$$g\big(f(A)\big) = g(j) = q_g j {q_g}^{-1} = \frac{1}{2}(1 + i)j(1 - i) = k. \tag{1.123}$$

$$g(A) = q_g i {q_g}^{-1} = \frac{1}{2}(1 + i)i(1 - i) = i. \tag{1.124}$$

$$f\big(g(A)\big) = f(i) = q_f i {q_f}^{-1} = \frac{1}{2}(1 + k)i(1 - k) = j. \tag{1.125}$$

Ο Gauss ανακάλυψε την σχέση μεταξύ τετράδων και στροφών της μοναδιαίας σφαίρας $S(O,1)$ το 1819, αλλά δεν δημοσίευσε αυτό το

αποτέλεσμα. Η δημοσίευση έγινε σε μια εργασία του Rodrigues το 1840, τρία χρόνια πριν την εργασία του Hamilton για τις τετράδες.

Όπως είδαμε, οι τετράδες είναι στοιχεία του $\mathbb{R}^4$, αυτό υποδηλώνει μία πιθανή χρήση των τετράδων στη θεωρία της σχετικότητας. Όμως η τετράδα $q = a + bi + cj + dk$ έχει νόρμα (μέτρο)

$$|q|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \tag{1.126}$$

ενώ η σχετικότητα απαιτεί μία νόρμα της μορφής

$$-a^2 + b^2 + c^2 + d^2. \tag{1.127}$$

Για τον λόγο αυτό ο J. Synge (1972) εισήγαγε τις επονομαζόμενες **τετράδες του Minkowski ή minquats**

$$q = q_4 + q_1 i + q_2 j + q_3 k\ , \tag{1.128}$$

όπου q_4 είναι καθαρά φανταστικός αριθμός. Όμως, το γινόμενο δύο τετράδων του Minkowski δεν είναι επίσης τετράδα του Minkowski, οπότε οι τετράδες του MInkowski δεν αποτελούν άλγεβρα. Βέβαια, οι τετράδες του Hamilton, αν οριστούν πάνω στους μιγαδικούς ορίζουν την άλγεβρα των **biquaternions**.

Τέλος, να αναφέρουμε ότι οι τετράδες αποτέλεσαν την πρώτη φυσική γλώσσα του ηλεκτρομαγνητισμού. Η σύγχρονη γλώσσα της διανυσματικής ανάλυσης δεν είχε ανακαλυφθεί μέχρι τα μέσα του 1880, όπου και επικράτησε, μέχρι σήμερα ο ηλεκτρομαγνητισμός διδάσκεται σχεδόν αποκλειστικά με την χρήση διανυσματικών μεθόδων. Οι τετράδες έκαναν την επανεμφάνισή τους τα τελευταία χρόνια, καθώς παρέχουν μια φυσική γλώσσα με την οποία μπορούμε να περιγράψουμε χωρικές περιστροφές, επί του

παρόντος χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές αεροναυπηγικής και ρομποτικής και σε βιντεοπαιχνίδια.

1.4: Τα οκτόνια ή αριθμοί του Cayley (Octonions)

Μετά την ανακάλυψη των τετράδων ο Hamilton έγραψε στον J. T. Graves για την ανακάλυψη του. Ο Graves απάντησε με μια σειρά επιστολών από τις οποίες διαπιστώνουμε ότι ο Graves και ο Hamilton γνώριζαν από το 1844 τα οκτόνια και ότι ο πολλαπλασιασμός που όρισε ο Graves δεν ήταν προσεταιριστικός. Ωστόσο ο Hamilton δεν δημοσίευσε κάποιο από αυτά τα αποτελέσματα. Στη συνέχεια παραθέτουμε ένα απόσπασμα από αυτές τις επιστολές:

«I shall be curious to know whether you can devise any good way of representing what I call octaves (or octonions). According to the scheme of the product of two octaves which I sent in my last letter, the whole system of imaginary products of two factors would be as follows:

$$\left\{\begin{array}{ll} i^2 = j^2 = k^2 = l^2 = m^2 = n^2 = o^2 = -1, & i = jk = lm = on = -kj = -ml = -no, \\ j = ki = ln = mo = -ik = -nl = -o, & mk = ij = lo = nm = -ij = -ol = -mn, \\ l = mi = nj = ok = -im = -jn = -ko, & m = il = oj = kn = -li = -jo = -nk, \\ n = il = io = mk = -li = -oi = -km, & o = ni = jm = kl = -in = -mj = -lk. \end{array}\right\}$$

Το 1845 ο A. Cayley σε ένα άρθρο του, έκανε μία όμοια κατασκευή πάνω στις ελλειπτικές συναρτήσεις. Ο Cayley παρατήρησε επίσης ότι αυτή η

αλγεβρική δομή είναι μία άλγεβρα συνθέσεων (**composition algebra**). Έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε ότι εδώ έχουμε το πρώτο παράδειγμα μη προσεταιριστικής άλγεβρας.

Τα οκτόνια (**octonions**) $\mathbb{O}$ είναι μία μη προσεταιριστική, μη μεταθετική, διαιρετική άλγεβρα με νόρμα πάνω στους πραγματικούς αριθμούς. Μία βάση της αποτελούν τα στοιχεία $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}, \boldsymbol{kl}, \boldsymbol{jl}, \boldsymbol{il}, \boldsymbol{l}$ μαζί με την μονάδα $\mathbf{1}$. Κάθε στοιχείο της βάσης, που είναι διαφορετικό του 1, έχει τετράγωνο ίσο με -1,

$$i^2 = j^2 = k^2 = l^2 = (kl)^2 = (jl)^2 = (il)^2 = -1, \tag{1.129}$$

δηλαδή έχουμε μία γενίκευση των μιγαδικών αριθμών με επτά φανταστικές μονάδες. Ο πλήρης πίνακας πολλαπλασιασμού των οκτονίων μπορεί να αποδοθεί κατάλληλα με ένα προβολικό επίπεδο επτά σημείων που δίνεται παρακάτω, σύμφωνα με τους εξής κανόνες:

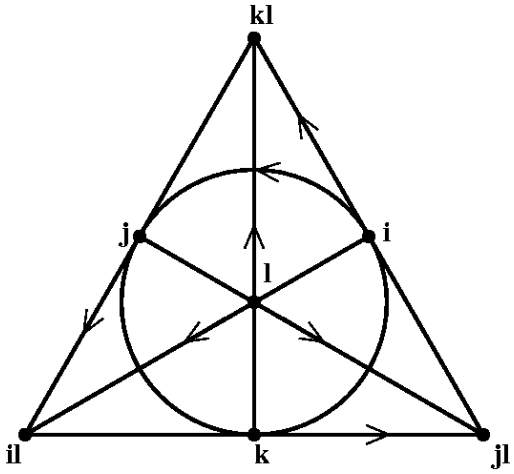
Το γινόμενο δύο οποιονδήποτε από τα επτά στοιχεία $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}, \boldsymbol{kl}, \boldsymbol{jl}, \boldsymbol{il}, \boldsymbol{l}$, δίνεται από το τρίτο στοιχείο της ευθείας που τα συνδέει. Παρατηρούμε ότι κάθε γραμμή αντιστοιχεί σε μια τετραδική τριάδα $\{i, j, k\}$. Το πρόσημο καθορίζεται από τα σημειούμενα βέλη τα οποία, όπως βλέπουμε στο σχήμα 1.4.1, έχουν φορά προς τις κορυφές του ισόπλευρου τριγώνου. Για παράδειγμα έχουμε:

$$i \cdot j = k,\ i \cdot l = il,\ j \cdot l = jl\ ,\ k \cdot l = kl,\ j \cdot i = -k, \tag{1.130}$$

$$l \cdot kl = k,\ kl \cdot k = l, \tag{1.131}$$

καθένα γινόμενο από αυτά αντι-αντιμετατίθεται (anticommutes), που σημαίνει ότι αντιστρέφοντας την σειρά παίρνουμε αρνητικό πρόσημο [32,33].

	i	j	k	l	il	jl	kl
i	-1	k	$-j$	il	$-l$	$-kl$	jl
j	$-k$	-1	i	jl	kl	$-l$	$-il$
k	j	$-i$	-1	kl	$-jl$	il	$-l$
l	$-il$	$-jl$	$-kl$	-1	i	j	k
il	l	$-kl$	jl	$-i$	-1	$-k$	j
jl	kl	l	$-il$	$-j$	k	-1	$-i$
kl	$-jl$	il	l	$-k$	$-j$	i	-1



Σχήμα 1.4.1 Ο πολλαπλασιαστικός πίνακας οκτονίων

Σε αναλογία με την προηγούμενη κατασκευή του $\mathbb{C}$ και του $\mathbb{H}$, ένα οκτόνιο x μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα ζεύγος τετράδων, $(x_{1\mathbb{H}}, x_{2\mathbb{H}})$, τέτοιο ώστε

$$\mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}\, l. \tag{1.132}$$

Ένα οκτόνιο συνήθως γράφεται στην μορφή

$$x = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k + x_5 kl + x_6 jl + x_7 il + x_8 l\,, \tag{1.133}$$

όπου $x_m \epsilon \mathbb{R}$, και μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα σημείο ή διάνυσμα στον $\mathbb{R}^8$.

Ισοδύναμα λοιπόν,

$$\mathbb{O} = \{x = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k + x_5 kl + x_6 jl + x_7 il + x_8 l : x_m \epsilon \mathbb{R}\}. \tag{1.134}$$

Το x_1 αποτελεί το πραγματικό μέρος του x, και όλα τα υπόλοιπα το φανταστικό. Εδώ είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι το φανταστικό μέρος του x, είναι επίσης φανταστικό. Πράγμα που διαφέρει από την καθιερωμένη

χρήση αυτών των όρων για τους μιγαδικούς, όπου το $Im(z)$ ισούται με τον συντελεστή του i, που είναι πραγματικός. Αυτή η σύμβαση δεν είναι πιθανή εδώ, αφού το φανταστικό μέρος έχει επτά βαθμούς ελευθερίας και μπορεί να θεωρηθεί σαν διάνυσμα στον $\mathbb{R}^7$.

Ισχύει

$$Re(x) = \frac{1}{2}(x + \bar{x}) \tag{1.135}$$

$$Im(x) = \frac{1}{2}(x - \bar{x}) \tag{1.136}$$

Ορίζουμε τον συζυγή $\bar{x}$, ενός οκτονίου x, ως τον (πραγματικό) γραμμικό χάρτη ο οποίος αντιστρέφει το πρόσημο κάθε φανταστικής μονάδας. Έτσι

$$\bar{x} = x_1 - x_2 i - x_3 j - x_4 k - x_5 kl - x_6 jl - x_7 il - x_8 l. \tag{1.137}$$

και ικανοποιεί

$$\overline{xy} = \bar{y}\bar{x}\,. \tag{1.138}$$

Η νόρμα ενός οκτονίου $|x|$ ορίζεται ως

$$|x|^2 = x\bar{x} = {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + {x_4}^2 + {x_5}^2 + {x_6}^2 + {x_7}^2 + {x_8}^2. \tag{1.139}$$

Και εδώ, τα μόνα οκτόνια με νόρμα μηδέν είναι τα μηδενικά, και κάθε μη μηδενικό οκτόνιο έχει μοναδικό αντίστροφο.

Συγκεκριμένα

$$x^{-1} = \frac{\bar{x}}{|x|^2}\,, \tag{1.140}$$

που όπως και στις άλλες διαιρετικές άλγεβρες, η νόρμα ικανοποιεί την ταυτότητα

$$|xy| = |x||y|. \tag{1.141}$$

Μία αξιοσημείωτη ιδιότητα των οκτονίων είναι ότι είναι μη προσεταιριστικά. Το οποίο μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε συγκρίνοντας τις παρακάτω ισότητες

$$(i\,j)(l) = +(k)(l) = +kl \tag{1.142}$$

$$(i)(j\,l) = (i)(jl) = -kl. \tag{1.143}$$

Ωστόσο, τα οκτόνια εναλλάσσονται (alternative), που σημαίνει ότι γινόμενα που δεν περιέχουν πάνω από δύο ανεξάρτητα οκτόνια ικανοποιούν την προσεταιριστική ιδιότητα. Συγκεκριμένα,

$$(xy)y = xy^2, \tag{1.144}$$

$$(xy)x = x(yx) \tag{1.145}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{O}$. Το οποίο επεκτείνεται και σε γινόμενα συζυγών, έτσι ώστε

$$(xy)\bar{y} = x|y|^2 \tag{1.146}$$

$$(xy)\bar{x} = x(y\bar{x}). \tag{1.147}$$

Ο μεταθέτης (commutator) που ορίσαμε στην ενότητα 1.3 για τις τετράδες, επεκτείνεται φυσικά και στα οκτόνια. Για να ποσοτικοποιήσουμε την έλλειψη της προσεταιριστικότητας εισάγουμε τον προσεταιριστή (associator). Ο προσεταιριστής τριών οκτονίων δίνεται από την σχέση

$$[x, y, z] = (xy)z - x(yz) \tag{1.148}$$

και η εναλλακτικότητα (alternativity) μπορεί να γραφεί ως

$$[x, y, z] = 0 = [x, y, y]. \tag{1.149}$$

Και ο μεταθέτης και ο προσεταιριστής είναι αμιγώς φανταστικοί και εν γένει αντισυμμετρικοί, που σημαίνει ότι εναλλάσσοντας δύο όρους αλλάζει το αποτέλεσμα με αρνητικό πρόσημο, το ίδιο προκύπτει αντικαθιστώντας κάθε μεταβλητή με τον συζυγή της, αφού τα πραγματικά μέρη δεν παίζουν ρόλο.

Μια συνέπεια της εναλλακτικότητας (alternativity) είναι ότι ικανοποιούνται οι ταυτότητες Moufang

$$\left\{\begin{aligned} &(xyx)z = x\big(y(xz)\big), \\ &z(xyx) = \big((zx)y\big)x, \\ &(xy)(zx) = x(yz)x. \end{aligned}\right\} \tag{1.150}$$

οι οποίες προκύπτουν από την προσεταιριστική (associator) ταυτότητα

$$[x, y, zx] = x[x, y, z]. \tag{1.151}$$

Πολώνοντας (polarizing) την σχέση

$$|x|^2 = x\bar{x} = {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + {x_4}^2 + {x_5}^2 + {x_6}^2 + {x_7}^2 + {x_8}^2. \tag{1.152}$$

παίρνουμε το εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^8$, συγκεκριμένα

$$p \cdot q = \frac{1}{2}(|p + q|^2 - |p|^2 - |q|^2) = p\bar{q} + q\bar{p} = \bar{p}q + \bar{q}p. \tag{1.153}$$

όπου για τις δυο τελευταίες ισότητες χρησιμοποιήσαμε τις ιδιότητες του μεταθέτη (commutator), που συνεπάγονται ότι $[p, \bar{q}] = [\bar{p}, q]$. Αν το u και το w είναι δύο φανταστικά οκτόνια τότε

$$-u \cdot w = uw + wu = \{u, w\} \tag{1.154}$$

όπου η τελευταία ισότητα ορίζει τον αντιμεταθέτη (anticommutator). Έτσι δύο φανταστικά οκτόνια είναι ορθογώνια αν, και μόνο αν, ο αντιμεταθέτης μηδενίζεται. Επιπλέον, εάν το u είναι ένα φανταστικό οκτόνιο, και το x είναι ορθογώνιο στο u, τότε $x\bar{u} + u\bar{x} = 0$, δηλαδή

$$x \perp u \Rightarrow xu = u\bar{x} \tag{1.155}$$

για $x \epsilon \mathbb{O}$ και $u \epsilon Im\mathbb{O}$, αφού $\bar{u} = -u$.

Η αναλογία με τα διανύσματα στις τρείς διαστάσεις που αναφέρθηκε στην ενότητα 1.3, ισχύει και στις επτά διαστάσεις. Προσδιορίζοντας τα u, w με $\vec{u}, \vec{w}$, όχι μόνο υπάρχει εσωτερικό γινόμενο, το οποίο δίνεται από την παραπάνω σχέση ή ισοδύναμα από την $-\vec{u}\vec{w} = Re(uw)$, αλλά υπάρχει και εξωτερικό γινόμενο που ορίζεται από την σχέση $\vec{u} \times \vec{w} = Re(uw)$. Το εσωτερικό γινόμενο υπάρχει σε όλες τις διαστάσεις, δεν ισχύει όμως το ίδιο και για το εξωτερικό γινόμενο. Σε μεγαλύτερες διαστάσεις, όπου ο κανόνας του δεξιού χεριού δεν ισχύει, δεν γνωρίζουμε προς ποια κατεύθυνση δείχνει το εξωτερικό γινόμενο. Την λύση δίνει ο πίνακας πολλαπλασιασμού των τετράδων και των οκτονίων, και αποδεικνύεται ότι το εξωτερικό γινόμενο υπάρχει μόνο στις τρεις και στις επτά διατάσεις.

Όπως και στις τετράδες, οι μονάδες $\boldsymbol{i, j, k, kl, jl, il, l}$ δεν είναι οι μόνες τετραγωνικές ρίζες του -1. Ή πιο σωστά, το τετράγωνο κάθε φανταστικού οκτονίου είναι αρνητικός αριθμός, είναι απαραίτητο λοιπόν να επιλέξουμε τη νόρμα να ισούται με 1 με σκοπό να πάρουμε την τετραγωνική ρίζα -1. Τα φανταστικά οκτόνια σχηματίζουν μια σφαίρα (σφαίρα με 6 βαθμούς ελευθερίας S^6, $S^6 = \{x \epsilon \mathbb{R}^7 : \|x\| = r\}$) στον 7-διάστατο χώρο των οκτονίων.

Κάθε τέτοια μονάδα φανταστικού οκτονίου $\hat{s}$, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να κατασκευάσουμε μία μιγαδική υποάλγεβρα του $\mathbb{O}$, που μπορούμε επίσης να την συμβολίσουμε με $\mathbb{C}$, και η οποία παίρνει την μορφή

$$\mathbb{C} = \{a + b\hat{s}\} \tag{1.156}$$

όπου $a, b \in \mathbb{R}$. Μπορούμε και εδώ να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του Euler για να γράψουμε

$$e^{\hat{s}\theta} = \cos\theta + \hat{s}\sin\theta \tag{1.157}$$

έτσι κάθε οκτόνιο μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$x = re^{\hat{s}\theta} \tag{1.158}$$

όπου

$$r = |x|. \tag{1.159}$$

Δυο φανταστικές μονάδες οκτονίων $\hat{s}$ και $\hat{t}$, με διαφορετικές διευθύνσεις (δηλαδή $\hat{t} \neq -\hat{s}$) ορίζουν μια τετραδική υποάλγεβρα του $\mathbb{O}$, που επίσης συμβολίζεται με $\mathbb{H}$ και παίρνει την μορφή

$$\mathbb{H} = \{a + b\hat{s} + c\hat{t} + d\hat{s}\hat{t}\}, \tag{1.160}$$

όπου $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Μια σημαντική τεχνική όταν δουλεύουμε με οκτόνια είναι να χρησιμοποιούμε τα λεγόμενα γενικευμένα (generic) οκτόνια. Κάθε μεμονωμένο οκτόνιο x μπορεί να θεωρηθεί ότι βρίσκεται πάνω στον $\mathbb{C}$, που σημαίνει ότι

$$x = x_1 + x_2 i, \tag{1.161}$$

ένα δεύτερο οκτόνιο y βρίσκεται πάνω στον $\mathbb{H}$, αλλά προσθέτει μία μόνο μια νέα διεύθυνση, δηλαδή

$$y = y_1 + y_2 i + y_3 j, \tag{1.162}$$

ενώ ένα τρίτο μπορούμε να θεωρήσουμε ότι παίρνει την μορφή

$$z = z_1 + z_2 i + z_3 j + z_4 k + z_8 l, \tag{1.163}$$

δηλαδή ένα γενικό στοιχείο του $\mathbb{H}$ συν μια επιπλέον διεύθυνση. Μόνο με τέσσερα ή και περισσότερα οκτόνια είναι απαραίτητο να χρησιμοποιήσουμε και τις οκτώ διαστάσεις του $\mathbb{O}$. Με μία τέτοια προσέγγιση γίνεται προφανές ότι κάθε γινόμενο που περιέχει το πολύ δυο ξεχωριστά οκτόνια (ή τους συζυγής τους) πρέπει να προσεταιρίζεται (associate) και βρίσκεται πάνω στο $\mathbb{H}$. Αυτό που περιγράψαμε ισοδυναμεί με την εναλλακτικότητα.

Συχνά είναι χρήσιμο να θεωρούμε τα οκτόνια σαν διανύσματα στον $\mathbb{R}^8$. Η νόρμα ενός οκτονίου είναι ακριβώς η ίδια με αυτήν του διανύσματός της. Το εσωτερικό γινόμενο προκύπτει από την νόρμα με μια διαδικασία γνωστή ως πόλωση (polarization), ως εξής

Έστω $\vec{u}, \vec{w}$, είναι διανύσματα στον $\mathbb{R}^4$, έχουμε

$$|\vec{u} + \vec{w}|^2 = (\vec{u} + \vec{w})(\vec{u} + \vec{w})$$

$$= \vec{u}\vec{u} + 2\vec{u}\vec{w} + \vec{w}\vec{w}$$

$$= |\vec{u}|^2 + |\vec{w}|^2 + 2\vec{u}\vec{w} \tag{1.164}$$

η οποία μπορεί να λυθεί ως προς τον τελευταίο όρο. Ανάλογα το εσωτερικό γινόμενο δύο τετράδων δίνεται από την σχέση (1.153). Για φανταστικές

τετράδες, η ορθογωνιότητα (orthogonality) είναι ισοδύναμη με την αντιμεταθετικότητα (anticommutativity), που σημαίνει ότι

$$x \cdot y = 0 \Leftrightarrow xy = -yx,\ (x, y)\ \epsilon\ Im\mathbb{O} \tag{1.165}$$

που με την σειρά του συνεπάγεται ότι

$$\overline{xy} = \bar{y}\bar{x} = yx = -xy, \tag{1.166}$$

έτσι η ορθογωνιότητα των φανταστικών οκτονίων είναι ισοδύναμη με το γινόμενο τους, όντας καθαρά φανταστικό. Επομένως, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το εσωτερικό γινόμενο για να εξασφαλίσουμε ότι το γινόμενο $\hat{s}\hat{t}$ στην (1.160) είναι καθαρά φανταστικό. Εάν όχι, απλά αντικαθιστούμε το $\hat{t}$ με την ορθογώνια συνιστώσα $\hat{t} - (\hat{t}\hat{s})\hat{s}$ (ανακλιμακώμενο (rescaled) ώστε να έχει νόρμα 1).

Το εξωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων στον $\mathbb{R}^3$ δείχνει στην μοναδική διεύθυνση (ως προς το πρόσημο) που είναι ορθογώνια στο επίπεδο, διευρυμένο από τα δοσμένα διανύσματα. Σε μεγαλύτερες διαστάσεις δεν υπάρχει εν γένει τέτοια διεύθυνση, υπάρχουν αρκετές διευθύνσεις κάθετες σε ένα δοσμένο επίπεδο. Είναι επομένως εκπληκτικό το γεγονός ότι περιορίζοντας το γινόμενο των οκτονίων σε φανταστικά οκτόνια προκύπτει ένα εξωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^7$ με τις συνήθεις ιδιότητες (γραμμικότητα, αντιμεταθετικότητα (anticommutativity), και ορθογωνιότητα (orthogonality) σε κάθε αρχικό διάνυσμα. Υπάρχει επίσης και μία συνθήκη για την νόρμα του εξωτερικού γινομένου. Αξιοσημείωτα, τέτοια γινόμενα υπάρχουν μόνο στον $\mathbb{R}^3$ και στον $\mathbb{R}^7$, που αντιστοιχούν στις φανταστικές τετράδες και στα οκτόνια, αντίστοιχα.

Ένας τρόπος να προσδιορίσουμε μία μοναδική διεύθυνση στον $\mathbb{R}^n$ είναι να δώσουμε $n-1$ διευθύνσεις ορθογώνιες σε αυτό. Συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι υπάρχει ένα "γενικευμένο εξωτερικό γινόμενο" στον $\mathbb{R}^n$ που περιέχει $n-1$ διανύσματα. Το επαγόμενο γινόμενο περιγράφεται πιο εύκολα σε διαφορική μορφή. Όμως υπάρχει ακριβώς ένα ακόμα "γενικευμένο εξωτερικό γινόμενο" για περισσότερα από δύο διανύσματα, συγκεκριμένα ένα γινόμενο τριών διανυσμάτων στον $\mathbb{R}^8$, το οποίο επίσης αποδεικνύεται ότι σχετίζεται με τα οκτόνια. Αυτό το τριπλό εξωτερικό γινόμενο ορίζεται ως

$$x \times y \times z = \frac{1}{2}\big(x(\bar{y}z) - z(\bar{y}x)\big), \tag{1.167}$$

για κάθε οκτόνιο x, y, z. (Να σημειώσουμε ότι αυτό δεν είναι ένα επαναληπτικό γινόμενο, αλλά ένα γινόμενο που ορίζεται απευθείας από τρείς παράγοντες.) Το πραγματικό μέρος του γινομένου αυτού ορίζει την προσεταιριστική 3-form Φ (τριαδική μορφή Φ), συγκεκριμένα

$$\Phi(x, y, z) = Re(x \times y \times z) = \frac{1}{2}Re([x, \bar{y}]z) \tag{1.168}$$

την οποία θα χρησιμοποιήσουμε αργότερα.

Όπως και στις τετράδες, μία χρήσιμη στρατηγική για να λύσουμε προβλήματα είναι να χωρίσουμε τα οκτόνια σε μιγαδικά ή τετραδικά μέρη. Έχουμε

$$\begin{aligned} x &= x_{1\mathbb{H}} + x_{2\mathbb{H}}l \\ &= x_{1\mathbb{C}} + x_{2\mathbb{C}}i + x_{3\mathbb{C}}j + x_{4\mathbb{C}}k \end{aligned} \tag{1.169}$$

όπου $x_{1\mathbb{H}}, x_{2\mathbb{H}} \epsilon \mathbb{H}$ και $x_{1\mathbb{C}}, x_{2\mathbb{C}}, x_{3\mathbb{C}}, x_{4\mathbb{C}} \epsilon \mathbb{C}$, και με την αρχική παραδοχή ότι το $\mathbb{H}$ είναι μία τετραδική υποάλγεβρα που παράγεται από τα i, j, k, αλλά και το $\mathbb{C}$ είναι η μιγαδική υποάλγεβρα που ορίζεται από το l.

Παρακάτω θα αναφέρουμε μερικά παραδείγματα συζυγίας (conjugation) οκτονίων

Παράδειγμα 1.4.1: Συζυγία οκτονίου με το l.

Αρχικά να αναφέρουμε ότι εδώ δεν τίθεται θέμα προσεταιριστικότητας εφόσον εμπλέκονται μόνο δυο οκτόνια, συγκεκριμένα το x και το l. Ο ευκολότερος τρόπος να δουλέψουμε είναι να αναπτύξουμε το x όπως στην σχέση (1.133), σημειώνοντας ότι το l αντιμετατίθεται (anticommutes) με κάθε όρο εκτός από τον πρώτο και τον τελευταίο, έτσι έχουμε

$$ly\bar{l} = y_1 - y_2 i - y_3 j - y_4 k - y_5 kl - y_6 jl - y_7 il + y_8 l\,. \qquad (1.170)$$

Στην ειδική περίπτωση όπου $q \epsilon \mathbb{H}$ έχουμε

$$lq\bar{l} = \bar{q} \qquad (1.171)$$

ομοίως

$$l(ql)\bar{l} = \bar{q}l \qquad (1.172)$$

ή ισοδύναμα

$$lq = \bar{q}l \qquad (1.173)$$

$$l(ql) = -\bar{q}\,. \qquad (1.174)$$

Οι δύο τελευταίες εκφράσεις αποτελούν κομμάτια ενός γενικού πολλαπλασιαστικού κανόνα, ο οποίος μπορεί να εκφραστεί στην μορφή

$$(x_{1\mathbb{H}} + x_{2\mathbb{H}}l)(y_{1\mathbb{H}} + y_{2\mathbb{H}}) = (x_{1\mathbb{H}}y_{1\mathbb{H}} - \overline{y_{2\mathbb{H}}}x_{2\mathbb{H}}) + (y_{2\mathbb{H}}x_{1\mathbb{H}} + x_{2\mathbb{H}}\overline{y_{1\mathbb{H}}})l \quad (1.175)$$

συμπληρωματικά η (1.171) και η (1.172) μπορούν να γραφούν στην μορφή

$$l(y_{1\mathbb{H}} + y_{2\mathbb{H}}l)\bar{l} = \overline{y_{1\mathbb{H}}} + \overline{y_{2\mathbb{H}}}l\,. \quad (1.176)$$

Παράδειγμα 1.4.2: Συζυγία οκτονίου με $e^{i\theta}$.

Αυτό προκύπτει άμεσα από τον αντίστοιχο υπολογισμό για τις τετράδες. Γράφουμε το x σε όρους τεσσάρων μιγαδικών αριθμών, όπως και παραπάνω. Αναζητώντας αρχικά την τετραδική υποάλγεβρα που περιλαμβάνει το i και το l, και στην συνέχεια αντικαθιστούμε το i με το j και το k και οδηγούμαστε στην εξής ισότητα

$$e^{l\theta}xe^{-l\theta} = e^{l\theta}x_{1\mathbb{C}}e^{-l\theta} + e^{l\theta}x_{2\mathbb{C}}ie^{-l\theta} + e^{l\theta}x_{3\mathbb{C}}je^{-l\theta} + e^{l\theta}x_{4\mathbb{C}}ke^{-l\theta}$$

$$= x_{1\mathbb{C}} + x_{2\mathbb{C}}e^{2l\theta}i + x_{3\mathbb{C}}e^{2l\theta}j + x_{4\mathbb{C}}e^{2l\theta}k\,. \quad (1.177)$$

Όπως θα δούμε αργότερα αυτή η πράξη αντιστοιχεί με περιστροφή κατά 2θ σε τρία επίπεδα ταυτόχρονα(!).

1.5: Άλλα αριθμητικά συστήματα

1.5.1 Η μέθοδος Cayley-Dickson

Έχουμε κατασκευάσει τους μιγαδικούς αριθμούς, τις τετράδες και τα οκτόνια διπλασιάζοντας μια μικρότερη άλγεβρα. Έχουμε

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i\,, \tag{1.178}$$

$$\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j\,, \tag{1.179}$$

$$\mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}l\,, \tag{1.180}$$

Μπορούμε να δώσουμε έμφαση σε αυτόν τον συμβολισμό, χρησιμοποιώντας έναν ελαφρώς διαφορετικό συμβολισμό. Ένας μιγαδικός αριθμός z είναι ισοδύναμος με ένα ζευγάρι πραγματικών αριθμών, το πραγματικό και το φανταστικό μέρος. Έτσι μπορούμε να γράψουμε

$$z = (x, y) \tag{1.181}$$

που αντιστοιχεί στον κλασικό συμβολισμό $z = x + yi$. Βρίσκουμε τον συζυγή πολλαπλασιάζουμε και παίρνουμε

$$\overline{(a, b)} = (a, -b) \tag{1.182}$$

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, bc + ad) \tag{1.183}$$

$$(a, b)\overline{(a, b)} = (a^2 + b^2, 0) \tag{1.184}$$

Μία τετράδα q μπορεί να γραφεί σαν ένα ζεύγος μιγαδικών αριθμών

$$q = (z, w) \tag{1.185}$$

που αντιστοιχεί στο $q = z + wj$. Ο συζυγής παίρνει τώρα την μορφή

$$\overline{(a, b)} = (\bar{a}, -b) \tag{1.186}$$

Για τον πολλαπλασιασμό κάνοντας πράξεις έχουμε

$$(a, b)(c, d) = (a + bj)(c + dj) = \left(ac - b\bar{d}, ad + b\bar{c}\right), \tag{1.187}$$

με $a, b, c, d \epsilon \mathbb{C}$. Άρα

$$(a, b)\overline{(a, b)} = (|a|^2 + |b|^2, 0) \tag{1.188}$$

Τέλος μπορούμε να γράψουμε ένα οκτόνιο p σαν ένα ζεύγος τετράδων (q, r) [27], στο οποίο αντιστοιχεί το $p = q + rl$, έχουμε

$$\overline{(a, b)} = (\bar{a}, -b) \tag{1.189}$$

$$(a, b)(c, d) = \left(ac - \bar{d}b, da + b\bar{c}\right) \tag{1.190}$$

$$(a, b)\overline{(a, b)} = (|a|^2 + |b|^2, 0) \tag{1.191}$$

Όλες οι παραπάνω κατασκευές αποτελούν ειδικές περιπτώσεις της μεθόδου Cayley-Dickson, για την οποία ισχύει

$$\overline{(a, b)} = (\bar{a}, -b) \tag{1.192}$$

$$(a, b)(c, d) = \left(ac - \varepsilon\bar{d}b, da + b\bar{c}\right) \tag{1.193}$$

$$(a, b)\overline{(a, b)} = (|a|^2 + \varepsilon|b|^2, 0) \tag{1.194}$$

όπου $\varepsilon = \pm 1$. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτήν την μέθοδο για την παραγωγή μεγαλύτερων αλγεβρών από μικρότερες άλγεβρες, επιλέγοντας σε κάθε βήμα κατάλληλο ε.

1.5.2 Sedenions

Θα δούμε τώρα τι θα συμβεί αν συνεχίσουμε την παραπάνω διαδικασία. Ορίζουμε τα sedenions θεωρώντας τα ως ζεύγη οκτονίων,

$$s = (p, q) \tag{1.195}$$

με $p, q \epsilon \mathbb{O}$. Ο πολλαπλασιασμός των sedenions ορίζεται από την μέθοδο Cayley-Dickson, με $\varepsilon = 1$, οπότε έχουμε

$$\overline{(a,b)} = (\bar{a}, -b) \tag{1.196}$$

$$(a,b)(c,d) = \left(ac - \bar{d}b, da + b\bar{c}\right) \tag{1.197}$$

$$(a,b)\overline{(a,b)} = (|a|^2 + |b|^2, 0) \tag{1.198}$$

Εάν ορίσουμε το ειδικό στοιχείο

$$e = (0,1) \tag{1.199}$$

μπορούμε επίσης να γράψουμε

$$s = p + qe \tag{1.200}$$

αφού

$$(p,0)(1,0) = (p,0), \tag{1.201}$$

$$(q,0)(0,1) = (0,q). \tag{1.202}$$

Τα sedenions δεν είναι ούτε μεταθετικά ούτε προσεταιριστικά, αφού περιέχουν "αντίγραφο" των οκτονίων, και έχουν θετικά ορισμένο εσωτερικό γινόμενο, η νόρμα $s\bar{s}$ κάθε μη μηδενικού sedenion s είναι αυστηρά θετική. Ωστόσο τα sedenions περιέχουν μηδενικούς διαιρέτες τα οποία είναι μη μηδενικά στοιχεία που το γινόμενό τους είναι παρόλα αυτά μηδέν. Για παράδειγμα έχουμε

$$\begin{aligned}(il + je)(jl + ie) &= (il, j)(jl, i) \\ &= \left((il)(jl) + ij, i(il) - j(jl)\right) \\ &= (-k + k, -l + l) = 0. \end{aligned} \tag{1.203}$$

Έτσι, τα sedenions δεν αποτελούν μία σύνθετη άλγεβρα, διότι δεν ικανοποιούν την ταυτότητα

$$|pq| = |p||q| \tag{1.204}$$

ούτε άλγεβρα διαιρέτη, αφού, για παράδειγμα, μηδενικοί διαιρέτες όπως $il + je$, δεν έχουν αντίστροφο.

1.5.3 Το θεώρημα Hurwitz

Μια σύνθετη άλγεβρα K διαθέτει μία νόρμα, που είναι μια μη εκφυλισμένη μορφή που ικανοποιεί την ταυτότητα

$$|pq|^2 = |p|^2|q|^2 \tag{1.205}$$

για όλα τα $p, q \in K$. Το θεώρημα Hurwitz δημοσιεύθηκε μετά θάνατον από τον Adolf Hurwitz το 1923, αναφέροντας ότι οι πραγματικοί, οι μιγαδικοί, οι τετράδες και τα οκτόνια είναι οι μόνες πραγματικές σύνθετες άλγεβρες με θετικά ορισμένες νόρμες και συνεπώς οι μοναδικές σύνθετες άλγεβρες χωρίς μηδενικούς διαιρέτες. Επομένως, οι μοναδικές σύνθετες άλγεβρες που περιέχουν το $\mathbb{R}$ είναι $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$.

Γενικότερα, όλες οι πραγματικές άλγεβρες μπορούν να αποκτηθούν με την μέθοδο Cayley-Dickson και πρέπει να έχουν διάσταση 1,2,4 ή 8. Σύνθετες άλγεβρες διάστασης 1 ή 2 είναι αντιμεταθετικές και προσεταιριστικές, σύνθετες άλγεβρες διάστασης 4 είναι προσεταιριστικές αλλά όχι αντιμεταθετικές, και σύνθετες άλγεβρες διάστασης 8 δεν είναι τίποτα από τα δύο. Η απόδειξη του θεωρήματος Hurwitz συμπυκνώνεται στο να δείξουμε ότι

η μέθοδος Cayley-Dickson μπορεί να παράγει μια σύνθετη άλγεβρα ξεκινώντας από μια προσεταιριστική άλγεβρα.

Το θεώρημα Hurwitz, ωστόσο, αφήνει ανοιχτό το ενδεχόμενο ύπαρξης και άλλων σύνθετων αλγεβρών εκτός από τις $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{O}$, εφόσον η νόρμα δεν είναι θετικά ορισμένη (ή αρνητικά ορισμένη). Επιπλέον, όλες αυτές οι άλγεβρες μπορούν να κατασκευαστούν χρησιμοποιώντας την μέθοδο Cayley-Dickson με κατάλληλη επιλογή του ε σε κάθε βήμα. Ξεκινώντας με του πραγματικούς που έχουν διάσταση 1, μπορούμε να εφαρμόσουμε την μέθοδο Cayley-Dickson μέχρι και τρεις φορές. Ωστόσο είναι αξιοσημείωτο ότι προκύπτουν μόνο τρεις διαφορετικές νέες σύνθετες άλγεβρες, οι ονομαζόμενες διαιρεμένες εκδοχές (split version) της σύνθετης άλγεβρας.

1.5.4 Split complex numbers (Υπερβολικοί αριθμοί ή αριθμοί Lorentz)

Η άλγεβρα που προκύπτει με εφαρμογή της μεθόδου Cayley-Dickson στους πραγματικούς αριθμούς με $\varepsilon = -1$ είναι γνωστή ως υπερβολικοί αριθμοί και συμβολίζεται με $\mathbb{C}'$, και ικανοποιεί

$$\mathbb{C}' = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}L \tag{1.206}$$

όπου εδώ

$$L^2 = 1 \tag{1.207}$$

αντί για -1. Παρακάτω θα αναφέρουμε τις ιδιότητες αυτών των αριθμών.

Ένα γενικό στοιχείο του $\mathbb{C}'$ παίρνει την μορφή $a + bL$, με $a, b \in \mathbb{R}$. Όπως και οι συνήθεις μιγαδικοί αριθμοί, έτσι και οι υπερβατικοί αριθμοί είναι και αντιμεταθετικοί και προσεταιριστικοί. Η νόρμα (υψωμένη στο τετράγωνο) δίνεται από την σχέση

$$|a + bL|^2 = (a + bL)(a + bL) = a^2 - b^2 \tag{1.208}$$

η οποία δεν είναι θετικά προσανατολισμένη. Συγκεκριμένα, το $\mathbb{C}'$ περιέχει μηδενικούς διαιρέτες, για παράδειγμα

$$(1 + L)(1 - L) = 1 - L^2 = 0. \tag{1.209}$$

Επιπλέον

$$\left(\frac{1}{2}(1 \pm L)\right)^2 = \frac{1}{2}(1 \pm L) \tag{1.210}$$

έτσι ώστε το $\frac{1}{2}(1 \pm L)$ να λειτουργεί ως τελεστής ορθογώνιας προβολής, διαιρώντας το $\mathbb{C}'$ σε δύο κενούς υπόχωρους.

Μια άλλη αξιοσημείωτη ιδιότητα του $\mathbb{C}'$ είναι ότι υπάρχουν τέσσερις τετραγωνικές ρίζες της μονάδας. Όχι μόνο το τετράγωνο του ± 1 κάνει 1, αλλά και του $\pm L$. Γενικότερα, από τις σχέσεις

$$(a + bL)^2 = (a^2 + b^2) + 2abL \tag{1.211}$$

και

$$(a^2 + b^2) \pm 2ab = (a \pm b)^2 \geq 0 \tag{1.212}$$

παρατηρούμε ότι ένας υπερβατικός αριθμός μπορεί μόνο να είναι το τετράγωνο ενός άλλου υπερβατικού αριθμού, αν το πραγματικό του μέρος είναι μεγαλύτερο ίσο του φανταστικού μέρους. Συγκεκριμένα, το ίδιο το L, δεν μπορεί να είναι το τετράγωνο κανενός υπερβατικού αριθμού.

Το εσωτερικό γινόμενο στην σχέση (1.208) μας θυμίζει αυτό της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας σε δυο διαστάσεις, με διάνυσμα χωροχρόνου (x, t) σε δισδιάστατο χώρο Minkowski που αντιστοιχεί στον υπερβατικό αριθμό

$x + tL$. Η υπερβολική φύση της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας [15] μας δίνει

$$e^{L\beta} = \cosh(\beta) + L\sinh(\beta) \tag{1.213}$$

που επίσης μπορεί να επαληθευτεί αναλύοντας το $exp(L\beta)$ σε σειρά δυνάμεων (power series), γι' αυτό τον λόγο καλούνται υπερβολικοί αριθμοί. Οι υπερβολικοί αριθμοί όχι μόνο παριστάνουν τα σημεία στον δισδιάστατο χώρο Minkowski, αλλά μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να περιγράψουν τους μετασχηματισμούς Lorentz ανάμεσα σε συστήματα αναφοράς, που δεν είναι τίποτα παραπάνω από υπερβολικές περιστροφές.

1.5.5 Split Quaternions

Επαναλαμβάνοντας την παραπάνω διαδικασία παίρνουμε τις split quaternions, τις οποίες συμβολίζονται με $\mathbb{H}'$, και

$$\mathbb{H}' = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}L. \tag{1.214}$$

Με σκοπό να διακρίνουμε αυτές τις διαφορετικές άλγεβρες, εδώ για την φανταστική μονάδα αντί για i, θα χρησιμοποιήσουμε το K. Έτσι, το $\mathbb{H}'$ αποτελείται από γραμμικούς συνδυασμούς του $1, K, L$ και του KL, μένει τώρα να υπολογίσουμε τον πλήρη πολλαπλασιαστικό πίνακα. Έχουμε

$$K^2 = -1,\ L^2 = +1, \tag{1.215}$$

$$(K)(K) = KL = -(L)(K), \tag{1.216}$$

$$(KL)^2 = KLKL = -KKLL = +1, \tag{1.217}$$

$$K(KL) = -L = -(KL)K, \tag{1.218}$$

$$(KL)L = K = -L(KL). \tag{1.219}$$

Οι split quaternions είναι προσεταιριστικοί, αλλά όχι αντιμεταθετικοί.

Ένα τυπικό στοιχείο $Q \epsilon \mathbb{H}'$ είναι της μορφής

$$Q = Q_1 + Q_2 K + Q_3 KL + Q_4 L \tag{1.220}$$

και η νόρμα (στο τετράγωνο)

$$|Q|^2 = Q\bar{Q} = {Q_1}^2 + {Q_2}^2 - {Q_3}^2 - {Q_4}^2 \tag{1.221}$$

	I	***J***	***K***	***KL***	***JL***	***IL***	***L***
I	*-1*	*K*	*-J*	*JL*	*-KL*	*-L*	*IL*
J	*-K*	*-1*	*I*	*-IL*	*-L*	*KL*	*JL*
K	*J*	*-I*	*-1*	*-L*	*IL*	*-JL*	*KL*
KL	*-JL*	*IL*	*L*	*1*	*-I*	*J*	*K*
JL	*KL*	*L*	*-IL*	*I*	*1*	*-K*	*J*
IL	*L*	*-KL*	*JL*	*-J*	*K*	*1*	*I*
L	*-IL*	*-JL*	*-KL*	*-K*	*-J*	*-I*	*1*

Σχήμα 1.5.1 Ο πολλαπλασιαστικός πίνακας των split octonions.

ο οποίος έχει ίχνος (signature) (2,2), που σημαίνει ότι δυο από τα στοιχεία της βάσης έχουν (τετραγωνική) ρίζα +1, συγκεκριμένα το 1 και το K, και δυο έχουν -1, το KL και το L.

Τα split quaternios μπορούν επίσης να αποκτηθούν ως

$$\mathbb{H}' = \mathbb{C}' \oplus \mathbb{C}' K \tag{1.222}$$

έτσι υπάρχουν μόνο δυο σύνθετες άλγεβρες με τέσσερις διαστάσεις πάνω στους πραγματικούς, συγκεκριμένα η $\mathbb{H}$ και η $\mathbb{H}'$. Αυτό σημαίνει, ότι δεν έχει

σημασία αν στην μέθοδο Cayley-Dickson ορίσουμε αρχικά $\varepsilon = +1$ και μετά $\varepsilon = -1$, ή το αντίστροφο. Ωστόσο, να σημειώσουμε ότι τα split quaternions περιέχουν και υπερβατικούς αριθμούς $\mathbb{C}'$ και τους συνήθεις μιγαδικούς αριθμούς $\mathbb{C}$.

1.5.6 Split octonions

Εάν επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία ακόμα μία φορά προκύπτουν τα split octonions, τα οποία συμβολίζονται με $\mathbb{O}'$, ως εξής

$$\mathbb{O}' = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}L \tag{1.223}$$

όπου εδώ για τις φανταστικές μονάδες στο $\mathbb{H}$ χρησιμοποιούμε το I, J, K. Έτσι το $\mathbb{O}'$ περιέχει γραμμικούς συνδυασμούς των $\{1, I, J, K, KL, JL, IL, L\}$, και πάλι μένει να υπολογίσουμε τον πλήρη πολλαπλασιαστικό πίνακα, το αποτέλεσμα φαίνεται στο Σχ. 1.5.1. Τα split octonions δεν είναι προσεταιριστικά, αλλά εναλλάσσονται (alternative).

Εύκολα αποδεικνύεται ότι το εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{O}'$ έχει ίχνος (signature) (4,4), οι συμβάσεις μας είναι τέτοιες ώστε τα στοιχεία βάσης που περιλαμβάνουν το L να έχουν (τετραγωνική) νόρμα -1, και όλα τα υπόλοιπα $+1$.

Τα split octonions μπορούν επίσης να αποκτηθούν από

$$\mathbb{O}' = \mathbb{H}' \oplus \mathbb{H}'J \tag{1.224}$$

πάλι εδώ υπάρχουν μόνο δύο σύνθετες άλγεβρες οκτώ διαστάσεων πάνω στους πραγματικούς, συγκεκριμένα $\mathbb{O}$ και $\mathbb{O}'$. Αντίστοιχα με πριν, τα split octonions $\mathbb{O}'$ περιέχουν και split quaternions $\mathbb{H}'$ και συνήθεις τετράδες $\mathbb{H}$.

1.5.7 Υποάλγεβρες των Split octonions

Σε αντίθεση με τα συνήθη οκτόνια, τα split octonions έχουν υποάλγεβρες που είναι οι ίδιες σύνθετες άλγεβρες. Η καθαυτή σύνθετη ιδιότητα εάν διατηρείται σε μία πλήρη άλγεβρα διατηρείται σε όλες τις υποάλγεβρες. Όμως η απαίτηση η νόρμα να είναι μη εκφυλισμένη δεν διατηρείται, τέτοιες υποάλγεβρες είναι όλες κενές (σε διάφορους βαθμούς).

Έχουμε ήδη δει τα $\frac{1}{2}(1 \pm L)$ είναι προβολικοί τανυστές στο $\mathbb{C}'$. Αυτό σημαίνει ότι η υποάλγεβρα $\langle 1 + L \rangle$ (συμπεριλαμβάνοντας όλα τα πραγματικά πολλαπλάσια του $1 + L$) είναι κλειστή στον πολλαπλασιασμό, και είναι επομένως μία υποάλγεβρα του $\mathbb{C}' \subset \mathbb{O}'$. Αυτή η υποάλγεβρα είναι ισομορφική με τους πραγματικούς αριθμούς, αφού το $\frac{1}{2}(1 \pm L)$, δρα σαν ταυτοτικό στοιχείο, αλλά δεν είναι ισομετρικό στους πραγματικούς αριθμούς, αφού $|1 + L| = 0$. Όλα τα στοιχεία αυτής της υποάλγεβρας είναι κενά, που σημαίνει ότι έχουν μηδενική νόρμα.

Άλλα κενά στοιχεία του $\mathbb{O}'$ επίσης παράγουν μονοδιάστατες κενές υποάλγεβρες όπως η $\langle I + IL \rangle$. Σε αυτή την περίπτωση, όχι μόνο $|I + IL| = 0$, αλλά επίσης $(I + IL)^2 = 0$, όλα τα γινόμενα σε αυτή την υποάλγεβρα είναι μηδέν.

Μπορούμε να συνδυάσουμε τέτοιες κενές υποάλγεβρες με διάφορους τρόπους. Η δισδιάστατη υποάλγεβρα $\langle I + IL, J - JL \rangle$ έχει επίσης όλα τα γινόμενα μηδενικά, ενώ για την δισδιάστατη υποάλγεβρα $\langle 1 + L, I + IL \rangle$ δεν ισχύει το ίδιο. Αυτή η τελευταία υποάλγεβρα έχει την ιδιάζουσα ιδιότητα ότι υπάρχουν στοιχεία που το γινόμενό τους είναι μηδέν, αλλάζοντας όμως την σειρά πολλαπλασιασμού είναι διάφορο του μηδενός, για παράδειγμα

$$(1+L)(I+IL)=0 \tag{1.225}$$

$$(I+IL)(1+L)=2(I+IL). \tag{1.226}$$

Όμοια, υπάρχουν τρισδιάστατες κενές υποάλγεβρες $\langle I+L, I+IL, J-JL\rangle$ και $\langle 1+L, I+IL, K-KL\rangle$ καθώς επίσης και κενές υποάλγεβρες σε τέσσερις διαστάσεις $\langle 1+L, I+IL, J+JL, K-KL\rangle$.

Καθεμία από τις παραπάνω υποάλγεβρες είναι ολικώς κενές, κάθε στοιχείο έχει νόρμα μηδέν. Υπάρχουν επίσης υποάλγεβρες του $\mathbb{O}'$ που είναι μόνο μερικώς κενές, κάθε τέτοια υποάλγεβρα περιέχει το ταυτοτικό στοιχείο 1.

Η πιο γνωστή από αυτές τις υποάλγεβρες είναι τα τρισδιάστατα ternions, που παράγονται από $\{1, L, I+IL\}$, και τα 6-διάστατα sextenions, τα οποία παράγονται από $\{1, I, IL, L, J+JL, K-KL\}$, υπάρχουν επίσης 4-διάστατες υποάλγεβρες που παράγονται από $\{1, L, I+IL, K-KL\}$.

1.6: Οι άλγεβρες Clifford και Grassmann

1.6.1: Οι άλγεβρες Clifford

Γενίκευση των σωμάτων $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ και της άλγεβρας $\mathbb{H}$ των τετράδων αποτελούν οι άλγεβρες Clifford, οι οποίες εισήχθησαν το 1878 από τον Clifford (1845-1879). Οι άλγεβρες Clifford $\boldsymbol{C_n}$ ορίζονται πάνω σε έναν πραγματικό διανυσματικό χώρο V και είναι προσεταιριστικές άλγεβρες που παράγονται από την μονάδα $e_0 \equiv 1$ και τους γραμμικώς ανεξάρτητους γεννήτορες

$$e_1, e_2, \dots, e_n, \tag{1.227}$$

οι οποίοι ικανοποιούν τις συνθήκες

$$e_i{}^2 = -1,\ i = 1,2,\dots,n \tag{1.228}$$

$$e_i e_j = -e_j e_i,\ i \neq j \tag{1.229}$$

Μία βάση της παραγόμενης άλγεβρας αποτελούν τα στοιχεία

$$1, e_1, e_2, \dots, e_n\ ,\ i = 1,2,\dots,n \tag{1.230}$$

$$e_i e_j\ ,\ 1 \leq i < j \leq n \tag{1.231}$$

$$e_i e_j e_k\ , 1 \leq i < j < k \leq n \tag{1.232}$$

……

$$e_1 e_2 e_3 \cdots e_n\ . \tag{1.233}$$

Το πλήθος των στοιχείων της βάσης είναι 2^n, οπότε $dim\boldsymbol{C_n} = 2^n$, αφού

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n\ . \tag{1.234}$$

Έχουμε τις ισομορφίες

$$\boldsymbol{C_0} \cong \mathbb{R},\ \boldsymbol{C_1} \cong \mathbb{C},\ \boldsymbol{C_2} \cong \mathbb{H} \tag{1.235}$$

$$\boldsymbol{C_3} \cong \mathbb{H} \oplus \mathbb{H},\ \boldsymbol{C_4} \cong M_2(\mathbb{H}),\ \boldsymbol{C_5} \cong M_4(\mathbb{H}). \tag{1.236}$$

Κάθε άλγεβρα Clifford $\boldsymbol{C_k}$ είναι υποάλγεβρα της άλγεβρας Clifford $\boldsymbol{C_{k+1}}$, για κάθε $k = 0,1,2,\dots,n-1$.

Οι άλγεβρες Clifford βρίσκουν εφαρμογή στη Θεωρητική Φυσική και μέσω αυτών ορίζονται οι ομάδες Pin(k) και άλγεβρες Lie Spin(k).

1.6.2: Οι άλγεβρες Grassmann

Ο H.Grassmann (1809-1877) εισήγαγε το 1844 μία άλγεβρα, η οποία σήμερα είναι γνωστή ως **εξωτερική άλγεβρα** ή **άλγεβρα Grassmann**. Αυτή ορίζεται πάνω σε ένα πραγματικό διανυσματικό χώρο V και παράγεται από την μονάδα $\theta_0 \equiv 1$ και του γραμμικώς ανεξάρτητους γεννήτορες

$$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n, \tag{1.237}$$

οι οποίοι ικανοποιούν τις συνθήκες

$$\theta_i{}^2 \equiv \theta_i \wedge \theta_i = 0,\ i = 1,2, \dots, n \tag{1.238}$$

$$\theta_i \wedge \theta_j = -\theta_j \wedge \theta_i,\ i \neq j \tag{1.239}$$

Μία βάση της άλγεβρας Grassmann, συμβολικά Λ_n, αποτελούν τα 2^n στοιχεία

$$1, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n \tag{1.240}$$

$$\theta_i \wedge \theta_j,\ 1 \leq i < j \leq n \tag{1.241}$$

$$\theta_i \wedge \theta_j \wedge \theta_k,\ 1 \leq i < j < k \leq n \tag{1.242}$$

……

$$\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \dots \wedge \theta_n \tag{1.243}$$

Η άλγεβρα Grassmann Λ_n, γράφεται ως

$$\Lambda_n = \Lambda_{\bar{0}} \oplus \Lambda_{\bar{1}}\,, \tag{1.244}$$

όπου ονομάζουμε το $\Lambda_{\bar{0}}$ (αντίστοιχα, το $\Lambda_{\bar{1}}$) **άρτιο μέρος** (αντίστοιχα, **περιττό μέρος**) με στοιχεία γραμμικούς συνδυασμούς στοιχείων της βάσης που είναι γινόμενα άρτιου (αντίστοιχα περιττού) πλήθους γεννητόρων.

Οι άλγεβρες Grassmann βρίσκουν εφαρμογή στις θεωρίες της σουπερσυμμετρίας και της σουπερβαρύτητας της Θεωρητικής Φυσικής για τις οποίες πλαίσιο αναφοράς είναι ο σουπερχώρος, ο οποίος είναι της μορφής

$$\Lambda_{\bar{0}}{}^{4} \oplus \Lambda_{\bar{1}}{}^{4} \,. \tag{1.245}$$

Κεφάλαιο 2

Το πρόβλημα ιδιοτιμών οκτονίων

Η εύρεση ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων ενός δοσμένου πίνακα είναι μια από τις βασικές τεχνικές στην γραμμική άλγεβρα με αμέτρητες εφαρμογές. Η απλούστερη περίπτωση είναι αυτή των μιγαδικών ερμιτιανών πινάκων, που αποτελεί μια γενίκευση της συνήθους περίπτωσης των πραγματικών συμμετρικών πινάκων. Αυτή η απλή περίπτωση είναι ωστόσο πολύ σημαντική, για παράδειγμα στην κβαντομηχανική, οπού το γεγονός ότι αυτοί οι πίνακες έχουν πραγματικές ιδιοτιμές τους επιτρέπει να αναπαριστούν φυσικά παρατηρήσιμες ποσότητες.

Το πρόβλημα των ιδιοτιμών συνήθως διατυπώνεται σε ένα χώρο, ή στους πραγματικούς αριθμούς $\mathbb{R}$, ή στους μιγαδικούς αριθμούς $\mathbb{C}$. Θεωρούμε εδώ την γενίκευση και σε άλλες άλγεβρες διαιρέτες εφοδιασμένες με νόρμα,

συγκεκριμένα στις τετράδες $\mathbb{H}$ και στα οκτόνια $\mathbb{O}$. Οι περισσότερες από τις βασικές ιδιότητες διατηρούνται υπό την προϋπόθεση ότι επανερμηνεύονται ώστε να λαμβάνουν υπόψιν την έλλειψη αντιμεταθετικότητας του $\mathbb{H}$ και του $\mathbb{O}$, και την έλλειψη προσεταιριστικότητας του $\mathbb{O}$.

Το κύριο αποτέλεσμα είναι η λύση του προβλήματος των πραγματικών ιδιοτιμών ερμιτιανών πινάκων οκτονίων 3×3, που είναι επίσης γνωστοί και ως πίνακες Jordan. Αυτοί οι πίνακες έχουν 24 πραγματικές ιδιοτιμές, που αντιστοιχούν σε ιδιοδιανύσματα τα οποία είναι ανεξάρτητα στον $\mathbb{R}$. Δείχνουμε ότι αυτές οι ιδιοτιμές δεν ικανοποιούν την χαρακτηριστική εξίσωση, παρόλο που ο ίδιος ο πίνακας την ικανοποιεί. Αντιθέτως βρίσκονται γενικά σε 6 σύνολα πολλαπλότητας 4 αντί των αναμενόμενων 3 συνόλων πολλαπλότητας 8 [19]. Ακόμα θα δείξουμε πώς να γενικεύουμε την έννοια της ορθογωνιότητας στην μη προσεταιριστική περίπτωση, ανακτώντας την τυπική παραγοντοποίηση ενός ερμιτιανού πίνακα σε όρους των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων του.

Θα ξεκινήσουμε στην Ενότητα 2.1 με μια ανασκόπηση του τυπικού προβλήματος ιδιοτιμών για πραγματικούς και μιγαδικούς ερμιτιανούς πίνακες, και στην συνέχεια θα μελετήσουμε το πρόβλημα ιδιοτιμών τετράδων στην Ενότητα 2.2. Μια σύντομη συζήτηση για τις ιδιότητες των πινάκων οκτονίων φαίνεται στην Ενότητα 2.3, μετά την οποία το πρόβλημα ιδιοτιμών οκτονίων θεωρείται για 2×2 και 3×3 ερμιτιανούς πίνακες στην Ενότητα 2.4 και στην Ενότητα 2.5 αντίστοιχα. Τέλος, θα περιγράψουμε το πρόβλημα ιδιοτιμών πινάκων Jordan στην ενότητα 2.5.3 και πως αυτοί διαγωνοποιούνται μέσω της ομάδας F_4, στην ενότητα 2.5.4.

2.1: Το τυπικό πρόβλημα ιδιοτιμών

Θα ξεκινήσουμε με μια ανασκόπηση του τυπικού προβλήματος ιδιοτιμών για πραγματικούς και μιγαδικούς ερμιτιανούς πίνακες.

Ορισμός 2.1.1: Έστω $\Pi_\nu(K)$ το σύνολο των $\nu \times \nu$ τετραγωνικών πινάκων με στοιχεία από το σώμα K. Ένας πίνακας $A \epsilon \Pi_\nu(K)$ ορίζει ένα γραμμικό μετασχηματισμό $T : K^n \to K^n$ τέτοιο ώστε

$$x \to Tx = y \; \mu\varepsilon \; Y = AX, x \epsilon K^n, X \epsilon \Pi_{n\times 1} \qquad (2.1)$$

Ονομάζουμε **ιδιοτιμές** του πίνακα A τις ιδιοτιμές του γραμμικού μετασχηματισμού T και **ιδιοδιανύσματα** του πίνακα A τα διανύσματα στήλες που αντιστοιχούν στα ιδιοδιανύσματα του T. Άρα ο αριθμός $\lambda \epsilon K$ είναι μια ιδιοτιμή του A αν υπάρχει διάνυσμα $X \epsilon \Pi_{n\times 1}$ με $X \neq 0$ τέτοιο ώστε

$$AX = \lambda X \text{ ή } \iota\sigma o\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu\alpha \; (A - \lambda I)X = 0 \qquad (2.2)$$

όπου $I \epsilon \Pi_\nu(K)$ ο μοναδιαίος πίνακας.

Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A λέγονται **χαρακτηριστικά ποσά** του A.

Ιδιόχωρος ενός πίνακα A είναι το σύνολο όλων των ιδιοδιανυσμάτων με την ίδια ιδιοτιμή, συμπεριλαμβανομένου και του μηδενικού διανύσματος. Ο ιδιόχωρος E_λ μίας ιδιοτιμής λ είναι προφανώς υπόχωρος του $\Pi_{n\times 1}$. Αν $A = (\alpha_{ij}), i, j = 1,2, \dots, n$ και $X = [x_1 x_2 \cdots x_n]^T$ η (2.2) γράφεται αναλυτικά:

$$(a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0$$

$$a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2.3)$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0.$$

Το σύστημα (2.3) είναι ομογενές με n αγνώστους τις συνιστώσες του X. Σύμφωνα με γνωστό θεώρημα το σύστημα αυτό θα έχει και μη μηδενικές λύσεις X αν, και μόνο αν, (βαθμός) $\beta(A-\lambda I) < n$, ισοδύναμα αν, και μόνο αν,

$$det(A-\lambda I) = 0 \qquad (2.4)$$

Η (2.4) γράφεται αναλυτικά:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.5)$$

Η (2.5) ονομάζεται **χαρακτηριστική εξίσωση** του πίνακα A. Το α' μέλος της (2.4) πολλαπλασιασμένο επί $(-1)^n$ (ώστε ο συντελεστής του λ^n να είναι η μονάδα), δηλαδή το

$$X_A(\lambda) = (-1)^n det(A-\lambda I) = det(A-\lambda I) \qquad (2.6)$$

λέγεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του A. Από την (2.4) προσδιορίζονται οι ιδιοτιμές λ του πίνακα A. Αντικαθιστώντας στο σύστημα (2.3) τις ιδιοτιμές, παίρνουμε για κάθε μία από αυτές και ένα σύστημα που οι μη μηδενικές λύσεις του (την ύπαρξή τους εξασφαλίζει η συνθήκη (2.4)) είναι τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή αυτή.

Το πρόβλημα λοιπόν των ιδιοτιμών όπως ορίζεται συνήθως, έγκειται στο να βρούμε λύσεις λ, υ στην εξίσωση

$$A\upsilon = \lambda\upsilon \tag{2.7}$$

για ένα δοσμένο τετραγωνικό πίνακα A, ο οποίος υποθέτουμε εδώ ότι είναι μιγαδικός και ερμιτιανός (δηλαδή $A^\dagger = A$, όπου $A^\dagger$ ο ανάστροφος συζυγής του A, δηλαδή $A^\dagger = (\bar{A})^T$). Παρακάτω θα αναφέρουμε τις βασικές ιδιότητες του προβλήματος ιδιοτιμών για $n \times n$ μιγαδικούς ερμιτιανούς πίνακες.

Λήμμα 2.1.1: Ένας $n \times n$ μιγαδικός ερμιτιανός πίνακας A έχει n πραγματικές ιδιοτιμές (υπολογίζοντας και την πολλαπλότητα).

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε μόνο ότι οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές. Έστω ότι A, λ, υ ικανοποιούν την (2.7), με $A^\dagger = A$. Τότε

$$\bar{\lambda}\upsilon^\dagger\upsilon = (A\upsilon)^\dagger\upsilon = \upsilon^\dagger A\upsilon = \lambda\upsilon^\dagger\upsilon \tag{2.8}$$

τέτοιο ώστε αν $\upsilon \neq 0$ έχουμε $\upsilon^\dagger\upsilon \neq 0$, και άρα $\bar{\lambda} = \lambda$. ■

Λήμμα 2.1.2: Τα ιδιοδιανύσματα ενός $n \times n$ μιγαδικού ερμιτιανού πίνακα A που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνια.

Απόδειξη: Έστω υ_m ένα ιδιοδιάνυσμα του $A^\dagger = A$ με ιδιοτιμή λ_m, για $m = 1,2$. Από το προηγούμενο Λήμμα έχουμε ότι $\lambda_m \epsilon \mathbb{R}$. Τότε

$$\lambda_1 {\upsilon_1}^\dagger \upsilon_2 = (A\upsilon_1)^\dagger \upsilon_2 = {\upsilon_1}^\dagger A\upsilon_2 = \lambda_2 {\upsilon_1}^\dagger \upsilon_2 \tag{2.9}$$

Τότε είτε $\lambda_1 = \lambda_2$ είτε ${\upsilon_1}^\dagger \upsilon_2 = 0$. ■

Λήμμα 2.1.3: Για κάθε $n \times n$ μιγαδικό ερμιτιανό πίνακα A, υπάρχει μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^n$, η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του A.

Απόδειξη: Εάν όλες οι ιδιοτιμές έχουν πολλαπλότητα ένα, το αποτέλεσμα προκύπτει από το προηγούμενο Λήμμα. Η μέθοδος ορθοκανονικοποίησης των Gram-Schmidt μπορεί να χρησιμοποιηθεί για κάθε ιδιόχωρο που αντιστοιχεί σε μία ιδιοτιμή με πολλαπλότητα μεγαλύτερη της μονάδας. ■

Τα παραπάνω Λήμματα είναι ισοδύναμα με το τυπικό αποτέλεσμα ότι ένας μιγαδικός ερμιτιανός πίνακας μπορεί πάντα να διαγωνοποιηθεί μέσω μιας ορθομοναδιαίας απεικόνισης. Είναι σημαντικό για τα παρακάτω να παρατηρήσουμε ότι η μορφή των αποδείξεων που δόθηκαν προηγουμένως βασίζονται στην αντιμεταθετικότητα και την προσεταιριστικότητα του $\mathbb{C}$.

Συνδυάζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα, είναι εύκολο να δούμε ότι κάθε μιγαδικός ερμιτιανός πίνακας A επιδέχεται μια παραγοντοποίηση σε όρους μίας ορθοκανονικής βάσης ιδιοδιανυσμάτων.

Θεώρημα 2.1.1: Έστω ένας $n \times n$ μιγαδικός ερμιτιανός πίνακας A. Τότε ο A μπορεί να γραφεί ως

$$A = \sum_{m=1}^{n} \lambda_m \upsilon_m {\upsilon_m}^{\dagger} \tag{2.10}$$

όπου $\{\upsilon_m : m = 1, \dots, n\}$ είναι μία ορθοκανονική βάση ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές λ_m.

Απόδειξη: Από προηγούμενο Λήμμα υπάρχει μία ορθοκανονική βάση διανυσμάτων $\{\upsilon_m\}$, τα οποία αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές λ_m, δηλαδή

$$Av_m = \lambda_m v_m \tag{2.11}$$

$$v_m{}^{\dagger} v_n = \delta_{mn} \tag{2.12}$$

όπου το δ_{mn} είναι το δ του Kronecker. Αυτό το ανάπτυγμα προκύπτει από τις άλλες ιδιότητες ελέγχοντας ότι

$$\left(\sum_{m=1}^{n} \lambda_m v_m v_m{}^{\dagger}\right) v_k = \lambda_k v_k \tag{2.13}$$

Αλλά αυτό προκύπτει από ευθύ υπολογισμό χρησιμοποιώντας την ορθοκανονικότητα. ■

Επιπλέον, το σύνολο των ιδιοτιμών $\{\lambda_m\}$ είναι μοναδικό, και τα (μοναδιαία) ιδιοδιανύσματα είναι μοναδικά ως προς ορθομοναδιαίες απεικονίσεις σε ξεχωριστούς ιδιόχωρους.

2.2: Ιδιοτιμές τετράδων

Εφαρμόζοντας την εξίσωση (2.7) για ερμιτιανούς πίνακες A στον $\mathbb{H}$ προκύπτει ένα μη αναμενόμενο αποτέλεσμα, οι ιδιοτιμές δεν είναι απαραίτητα πραγματικές. Ένα παράδειγμα δίνεται από

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ -j & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-j \\ k-i \end{pmatrix} = (1-j) \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

Επιπλέον, εξαιτίας της έλλειψης αντιμεταθετικότητας στον $\mathbb{H}$, πολλαπλάσια των ιδιοδιανυσμάτων δεν είναι απαραίτητα ιδιοδιανύσματα. Για παράδειγμα, το διάνυσμα

$$v_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 - i \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 + i \\ 1 - i & 0 \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

με ιδιοτιμή $\sqrt{2}$, αλλά το jv_1 δεν είναι ιδιοδιάνυσμα του A_1.

Από το παραπάνω παράδειγμα παρατηρούμε ότι πρέπει να διακρίνουμε ανάμεσα σε δεξί και αριστερό πολλαπλασιασμό. Αφού

$$A(vq) = (Av)q \tag{2.17}$$

λόγω προσεταιριστικότητας, δεξιά πολλαπλάσια των ιδιοδιανυσμάτων είναι πράγματι ιδιοδιανύσματα. Για παράδειγμα, το $v_1 j$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A_1, παραπάνω, με την ίδια ιδιοτιμή $\sqrt{2}$.

Όμοια, πρέπει προσεκτικά να διακρίνουμε το αριστερό πρόβλημα ιδιοτιμών (2.7) και το δεξιό πρόβλημα ιδιοτιμών

$$Av = v\lambda \tag{2.18}$$

Προκύπτει ότι όλες οι δεξιές ιδιοτιμές των ερμιτιανών πινάκων τετράδων είναι πραγματικές.

Λήμμα 2.2.1: Οι δεξιές ιδιοτιμές ενός $n \times n$ ερμιτιανού πίνακα τετράδων $A = A^\dagger$ είναι πραγματικές.

Απόδειξη: Αυτό προκύπτει αντίστοιχα με το (2.8). Συγκεκριμένα,

$$\bar{\lambda}(v^\dagger v) = \left(\bar{\lambda} v^\dagger\right) v = (Av)^\dagger v = (v^\dagger A) v = v^\dagger (Av) = v^\dagger (v\lambda) = (v^\dagger v)\lambda \tag{2.19}$$

και προκύπτει το ζητούμενο αφού $v^\dagger v \in \mathbb{R}$. ■

Στα παραπάνω το $\bar{\lambda}$ είναι τώρα η συζυγής της τετράδας λ και το † συμβολίζει την τετραδική συζυγία. Εφόσον οι ιδιοτιμές αποδείχθηκαν πραγματικές, η ορθογωνιότητα των ιδιοδιανυσμάτων αντιστοιχεί σε αυτήν που ορίσαμε για τους μιγαδικούς αριθμούς.

Λήμμα 2.2.2: Δεξιά ιδιοδιανύσματα ενός $n \times n$ ερμιτιανού πίνακα τετράδων A που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνια.

Απόδειξη: Είναι αντίστοιχη με το (2.9). Συγκεκριμένα,

$$\lambda_1({v_1}^\dagger v_2) = (\lambda_1 {v_1}^\dagger) v_2 = (A v_1)^\dagger v_2 = ({v_1}^\dagger A) v_2$$

$$= {v_1}^\dagger (A v_2) = {v_1}^\dagger (v_2 \lambda_2) = ({v_1}^\dagger v_2)\lambda_2 \qquad (2.20)$$

έτσι ώστε, αφού $\lambda \epsilon \mathbb{R}$, ή $\lambda_1 = \lambda_2$ ή ${v_1}^\dagger v_2 = 0$. ■

Τέλος, αφού οι δεξιές ιδιοτιμές είναι πραγματικές, δεξιά πολλαπλάσια των ιδιοδιανυσμάτων παραμένουν ιδιοδιανύσματα.

Συγκεντρώνοντας όλα τα παραπάνω, προκύπτει μια παραγοντοποίηση κάθε τετραδικού ερμιτιανού πίνακα A της μορφής (2.10), όπου οι πραγματικές ιδιοτιμές $\{\lambda_m\}$ και οι ιδιόχωροι τους είναι μοναδικοί.

Λήμμα 2.2.3: Για κάθε $n \times n$ ερμιτιανό πίνακα τετράδων A, υπάρχει μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{H}^n$ η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του A.

Θεώρημα 2.2.1: Έστω A ένας $n \times n$ ερμιτιανός πίνακας τετράδων. Τότε ο A μπορεί να αναπτυχθεί όπως στην (2.10), όπου $\{v_m : m = 1, \dots, n\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση ιδιοδιανυσμάτων του A, με πραγματικές ιδιοτιμές λ_m.

Οι αποδείξεις των παραπάνω είναι ακριβώς ίδιες με αυτές των μιγαδικών αριθμών. Για ιδιοτιμές πολλαπλότητας ένα, τα (μοναδιαία) ιδιοδιανύσματα είναι μοναδικά ως προς μια δεξιά τετραδική φάση.

Το δεξιό πρόβλημα ιδιοτιμών στον $\mathbb{H}$ είναι επομένως, απλά μια άμεση επέκταση του μιγαδικού προβλήματος ιδιοτιμών [29,30,31]. Το αριστερό πρόβλημα ιδιοτιμών αποδεικνύεται ότι έχει αξιοσημείωτο ενδιαφέρον και θα το εξετάσουμε παρακάτω [18].

2.3: Πίνακες οκτονίων

Η έλλειψη προσεταιριστικότητας περιπλέκει την διαχείριση πινάκων με οκτονιονικά στοιχεία. Ενώ ο πολλαπλασιασμός πινάκων ορίζεται για πίνακες με τυχαίο μέγεθος με τον συνήθη τρόπο, εδώ θα περιοριστούμε σε 2×2 και 3×3 ερμιτιανούς πίνακες οκτονίων από άλγεβρες Jordan.

Κάθε μιγαδικός αριθμός $x = x_1 + ix_2$ μπορεί να γραφεί σαν ένας πίνακας πραγματικών $\begin{pmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}$, που μας επιτρέπει να γράψουμε τον πολλαπλασιασμό ενός μιγαδικού πίνακα σε όρους πραγματικών πινάκων. Αυτή η διαδικασία γενικεύεται και στις τετράδες, αλλά αποτυγχάνει στα οκτόνια, όπως ήταν αναμενόμενο, αφού ο πολλαπλασιασμός οκτονίων δεν είναι προσεταιριστικός. Ένας μιγαδικός αριθμός μπορεί επίσης να γραφτεί σαν ένα πραγματικό διάνυσμα $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, το οποίο οδηγεί στην αναπαράσταση του μιγαδικού πολλαπλασιασμού ως το γινόμενο ενός πραγματικού πίνακα με ένα

πραγματικό διάνυσμα, και αυτή η τελευταία διαδικασία μπορεί να γενικευτεί στα οκτόνια.

Μία παρόμοια διαδικασία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αναπαραστήσουμε πίνακες πάνω σε μία από αυτές τις διαφορετικές άλγεβρες, σαν πίνακες πάνω σε κάθε μικρότερη τέτοια άλγεβρα. Υπό αυτόν τον μετασχηματισμό ένας μιγαδικός ερμιτιανός πίνακας απεικονίζεται σε ένα συμμετρικό πραγματικό πίνακα, και οι τετραδικοί και οι οκτονιονικοί (octonionic) ερμιτιανοί πίνακες μπορούν να μετασχηματιστούν είτε σε ένα πραγματικό συμμετρικό πίνακα είτε σε ένα μιγαδικό ερμιτιανό πίνακα. Για παράδειγμα, ένας $n \times n$ οκτονιονικός ερμιτιανός πίνακας μπορεί να απεικονιστεί σε έναν $8n \times 8n$ συμμετρικό πραγματικό πίνακα ή σε έναν $4n \times 4n$ μιγαδικό ερμιτιανό πίνακα. Φαίνεται ωστόσο ότι μπορούμε να υποβιβάσουμε το πρόβλημα ιδιοτιμών στην πραγματική περίπτωση, κάτι τέτοιο όμως είναι παραπλανητικό για διάφορους λόγους.

Πρώτον, ενώ η πραγματική διατύπωση εγγυάται την ύπαρξη πραγματικών ιδιοτιμών, δεν αποκλείει την πιθανότητα να υπάρχουν και μη πραγματικές ιδιοτιμές. Αυτό συμβαίνει επειδή το γενικό πρόβλημα ιδιοτιμών σε μία άλγεβρα διαιρέτη εφοδιασμένη με νόρμα μετασχηματίζεται σε εξίσωση πινάκων, το οποίο απλά υποβιβάζεται σε ένα συνηθισμένο πρόβλημα ιδιοτιμών για πραγματικές ιδιοτιμές. Όπως θα δούμε, οι οκτονιονικοί ερμιτιανοί πίνακες επιδέχονται δεξιές ιδιοτιμές που δεν είναι πραγματικές.

Δεύτερον, στην πραγματική διατύπωση δεν είναι πολύ εύκολο να προσδιορίσουμε την πολλαπλότητα των πραγματικών ιδιοτιμών. Κάποιος θα περίμενε n οκτονιονικά ιδιοδιανύσματα με το πολύ n διαφορετικές

πραγματικές ιδιοτιμές. Η πραγματική διατύπωση του προβλήματος ιδιοτιμών μας εγγυάται $8n$ ανεξάρτητα (στον $\mathbb{R}$) ιδιοδιανύσματα με πραγματικές ιδιοτιμές, αλλά δεν είμαστε βέβαιοι ότι οι $8n$ ιδιοτιμές εμφανίζονται με πολλαπλότητα 8 (ή πολλαπλάσιο αυτού). Στην πραγματικότητα, θα δούμε παρακάτω ότι αυτό δεν ισχύει.

Το τελευταίο μειονέκτημα αυτής της προσέγγισης είναι ότι η ορθογωνιότητα των ιδιοδιανυσμάτων με διαφορετικές ιδιοτιμές δεν προέρχεται από την αντίστοιχη πρόταση για τα πραγματικά, μετασχηματισμένα ιδιοδιανύσματα. Αυτό συμβαίνει γιατί ο μετασχηματισμός δεν διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο, το οποίο είναι πραγματικό στην μία περίπτωση ενώ στην άλλη όχι. Ωστόσο, τα πραγματικά μέρη των εσωτερικών γινομένων ικανοποιούν

$$v^{\dagger}w + w^{\dagger}v = 0 \tag{2.21}$$

Όπως θα δούμε παρακάτω, υπάρχει μια πιο ισχυρή συνθήκη ορθογωνιότητας σε ιδιοδιανύσματα με διαφορετικές ιδιοτιμές, που γενικεύει την συνήθη έννοια της ορθογωνιότητας.

Για όλους αυτούς τους λόγους λοιπόν, επιλέγουμε να δουλέψουμε απευθείας με πίνακες οκτονίων.

2.3.1: 2×2 ερμιτιανοί πίνακες οκτονίων

Θεωρούμε αρχικά την περίπτωση όπου A και v (αλλά όχι απαραίτητα το λ) στην (2.18) βρίσκονται σε έναν υπόχωρο τετράδων. Τότε ισχύει ακόμα η

σχέση (2.19) αφού η εναλλακτικότητα (alternativity) μας επιτρέπει να μετατοπίσουμε τις παρενθέσεις και καταλήγουμε ότι η λ είναι πραγματική.

Για παράδειγμα, αφού τα διαγώνια στοιχεία ενός 2×2 ερμιτιανού πίνακα A είναι πραγματικά, οι συνιστώσες του πάντα βρίσκονται πάνω σε έναν μιγαδικό υπόχωρο του $\mathbb{O}$, και επομένως ο A προφανώς έχει ιδιοδιανύσματα που βρίσκονται στον ίδιο μιγαδικό υπόχωρο, και τα οποία έχουν πραγματικές ιδιοτιμές. Ο πολλαπλασιασμός (από δεξιά) αυτών των ιδιοδιανυσμάτων με ένα τυχαίο οκτόνιο q οδηγεί σε ένα καινούργιο ιδιοδιάνυσμα, που βρίσκεται πάνω στον τετραδικό υπόχωρο διευρυμένο από την απλή οκτονιονική διεύθυνση στον A και το οκτονιονικό πολλαπλάσιο q. Επιπλέον, αυτό το καινούργιο ιδιοδιάνυσμα έχει την ίδια πραγματική ιδιοτιμή με το αρχικό ιδιοδιάνυσμα, που σημαίνει ότι

$$Av = v\lambda \Rightarrow A(vq) = (Av)q = (v\lambda)q = (vq)\lambda \tag{2.22}$$

αφού A και v μιγαδικοί και λ πραγματικός.

Ωστόσο, η χρήση της προσεταιριστικότητας στο μέσο της παραγώγισης της (2.19) δεν επιτρέπεται γενικά, έτσι οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι υπάρχουν ερμιτιανοί οκτονιονικοί πίνακες που επιτρέπουν δεξιές ιδιοτιμές που δεν είναι πραγματικές. Και μπορούμε να το επιβεβαιώσουμε με το παρακάτω παράδειγμα

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j + il \\ l - k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ l \end{pmatrix}(1 - kl) \tag{2.23}$$

2.3.2: 3×3 ερμιτιανοί πίνακες οκτονίων

Εδώ θα εξετάσουμε την περίπτωση 3×3 οκτονιονικών ερμιτιανών πινάκων. Δεν είναι άμεσα φανερό ότι αυτοί οι πίνακες έχουν καλά ορισμένη ορίζουσα, πόσο μάλλον μια χαρακτηριστική εξίσωση. Επομένως πρώτα πρέπει να θυμηθούμε κάποιες από τις ιδιότητες αυτών των πινάκων, πριν προχωρήσουμε στο πρόβλημα των ιδιοτιμών. Όπως και στους 2×2 πίνακες για τα οκτόνια θα υπάρχουν λύσεις του προβλήματος ιδιοτιμών με μη πραγματικές ιδιοτιμές.

Από εδώ και στο εξής θα αναφερόμαστε στους 3×3 οκτονιονικούς ερμιτιανούς πίνακες ως **πίνακες Jordan**, οι οποίοι συνθέτουν την εξαιρετική (exceptional) άλγεβρα Jordan (επίσης γνωστή ως άλγεβρα Albert) υπό το γινόμενο Jordan [34]

$$A \circ B \coloneqq \frac{1}{2}(AB + BA) \tag{2.24}$$

που είναι αντιμεταθετικό, αλλά όχι προσεταιριστικό. Μια ειδική περίπτωση είναι

$$A^2 \equiv A \circ A \tag{2.25}$$

και ορίζουμε

$$A^3 \coloneqq A^2 \circ A = A \circ A^2 \tag{2.26}$$

Με αυτούς τους ορισμούς οι πίνακες Jordan ικανοποιούν την συνήθη χαρακτηριστική εξίσωση [16]

$$A^3 - (trA)A^2 + \sigma(A)A - (detA)I = 0 \tag{2.27}$$

όπου το $\sigma(A)$ ορίζεται από

$$\sigma(A) \coloneqq \frac{1}{2}\left((trA)^2 - tr(A^2)\right) \tag{2.28}$$

και όπου η ορίζουσα του A ορίζεται αφηρημένα σε όρους γινομένου Freudenthal. Το γινόμενο Freudenthal [36] δυο πινάκων Jordan A και B δίνεται από

$$A * B = A \circ B - \frac{1}{2}\left(Atr(B) + Btr(A)\right) + \frac{1}{2}\left(tr(A)tr(B) - tr(A \circ B)\right) \tag{2.29}$$

Η ορίζουσα μπορεί να ορισθεί ως

$$det(A) = \frac{1}{3}tr\left((A * A) \circ A\right) \tag{2.30}$$

Συγκεκριμένα, αν

$$A = \begin{pmatrix} p & a & \bar{b} \\ \bar{a} & m & c \\ b & \bar{c} & n \end{pmatrix} \tag{2.31}$$

με $p, m, n \in \mathbb{R}$ και $a, b, c \in \mathbb{O}$, τότε

$$trA = p + m + n$$

$$\sigma(A) = pm + pn + mn - |a|^2 - |b|^2 - |c|^2 \tag{2.32}$$

$$detA = pmn + b(ac) + \overline{b(ac)} - n|a|^2 - m|b|^2 - p|c|^2$$

2.3.3: Ορθογωνιότητα και παραγοντοποίηση

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, αφού ο A βρίσκεται σε ένα μιγαδικό υπόχωρο του $\mathbb{O}$, επιδέχεται ένας πλήρες σύνολο με μιγαδικά ιδιοδιανύσματα με πραγματικές ιδιοτιμές, που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αποκτήσουμε την παραγοντοποίηση (2.10). Θα δούμε επίσης και μια παραγοντοποίηση με όρους της γενικής λύσης του προβλήματος των πραγματικών ιδιοτιμών.

Η γενική λύση όπως θα δείξουμε παρακάτω δίνεται από την σχέση $\upsilon = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 \\ \bar{\alpha}(\lambda - p) \end{pmatrix} \xi,\ \ \upsilon = \begin{pmatrix} \alpha(\lambda - m) \\ |\alpha|^2 \end{pmatrix} \xi.$ Επιλέγοντας την πρώτη μορφή, παίρνουμε ένα πλήρες σύνολο ιδιοδιανυσμάτων. Θεωρώντας δύο λύσεις $\lambda_\pm$ στην σχέση $det(\lambda I - A) = \lambda^2 - (trA)\lambda + detA = 0$, παίρνουμε

$$\upsilon_\pm = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 \\ \bar{\alpha}(\lambda_\pm - p) \end{pmatrix} \xi_\pm \tag{2.33}$$

Ελέγχουμε αν τα ιδιοδιανύσματα αυτά είναι ορθογώνια, ευθύς υπολογισμός δίνει

$$\upsilon_+{}^\dagger \upsilon_- = -|\alpha|^2 \alpha[\alpha, \xi_+, \xi_-] \tag{2.34}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε

$$a[a, x, y] = -a[\bar{a}, y, \bar{x}] \equiv [a, \bar{a}y, \bar{x}] = [\bar{x}, a, \bar{a}y] = (\bar{x}a)(\bar{a}y) - |a|^2 \bar{x}y \tag{2.35}$$

ή ισοδύναμα

$$a\big((\overline{ax})y\big) = (\bar{x}a)(\bar{a}y) \tag{2.36}$$

για κάθε οκτόνιο a, x, y. Άρα τα ιδιοδιανύσματα δεν είναι απαραίτητα ορθογώνια με την παραδοσιακή έννοια, εκτός από το πρόβλημα των ιδιοτιμών τετράδων όπου ο προσεταιριστής αυτόματα απαλείφεται.

Εκ πρώτης όψεως, αυτή η φαινομενική έλλειψη ορθογωνιότητας αποκλείει μια παραγοντοποίηση της μορφής (2.10). Ωστόσο, εξαιτίας της έλλειψης προσεταιριστικότητας, αυτό που χρειάζεται για να ισχύει η σχέση (2.10) είναι μια γενικευμένη έννοια της ορθογωνιότητας, συγκεκριμένα

Ορισμός 2.3.1: Έστω υ και w δύο διανύσματα οκτονίων. Θα λέμε ότι το w είναι **ορθογώνιο** στο υ αν

$$(\upsilon\upsilon^{\dagger})w = 0 \tag{2.37}$$

Τα διανύσματα $\{\upsilon, w\}$ είναι **ορθοκανονικά** αν επιπλέον ισχύει

$$\upsilon^{\dagger}\upsilon = 1 = w^{\dagger}w \tag{2.38}$$

Ευθύς υπολογισμός δείχνει ότι τα ιδιοδιανύσματα $\upsilon_{\pm}$ παραπάνω, είναι όντως ορθογώνια μεταξύ τους με αυτή την έννοια, το οποίο παρέχει μια υπολογιστική απόδειξη του ακόλουθου λήμματος

Λήμμα 2.3.1: Αν υ και w είναι ιδιοδιανύσματα ενός 2×2 οκτονιονικού ερμιτιανού πίνακα A που αντιστοιχούν σε διαφορετικές πραγματικές ιδιοτιμές, τότε το υ και το w είναι μεταξύ τους ορθογώνια με την έννοια (2.37)

Απόδειξη: Μπορούμε να γράψουμε

$$\upsilon = \hat{\upsilon}\alpha, \quad w = \hat{w}\beta \qquad (\hat{\upsilon}, \hat{w} \in \mathbb{C}, \alpha, \beta \in \mathbb{O})$$

όπου ο $\mathbb{C} \subset \mathbb{O}$ είναι ο μιγαδικός υπόχωρος που περιέχει τα στοιχεία του A. Αλλά τότε $\upsilon\upsilon^{\dagger} = |\alpha|^2\hat{\upsilon}\hat{\upsilon}^{\dagger}$, και

$$(vv^{\dagger}w) = |a|^2(\hat{v}\hat{v}^{\dagger})(\hat{w}\beta)$$

που είναι προσεταιριστικά αφού εμπλέκονται μόνο δύο οκτονιονικές διευθύνσεις. Αλλά $\hat{v}^{\dagger}\hat{w} = 0$ με τις συνήθεις ιδιότητες των πραγματικών.

■

Με σκοπό να υπάρχει η παραγοντοποίηση στη μορφή (2.10), χρειαζόμαστε επίσης μια διανυσματική εκδοχή της εναλλακτικότητας (alternativity), που στην πραγματικότητα ισχύει για οκτονιονικά διανύσματα κάθε μεγέθους [35].

Πρόταση 2.3.1: Για κάθε οκτονιονικό διάνυσμα $v \epsilon \mathbb{O}^n$,

$$(vv^{\dagger})v = v(v^{\dagger}v) \tag{2.39}$$

Αυτή η πρόταση δείχνει συγκεκριμένα ότι κάθε κανονικοποιημένο διάνυσμα v είναι ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $vv^{\dagger}$ με ιδιοτιμή 1, όπως απαιτείται στην (2.10). Συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι η παραγοντοποίηση (2.10) διατηρείται αναλλοίωτη για πραγματικές ιδιοτιμές. Έτσι έχουμε

Θεώρημα 2.3.1: Έστω A ένας 2×2 οκτονιονικός ερμιτιανός πίνακας, τότε ο A μπορεί να αναπτυχθεί όπως στην (2.10), όπου $\{v_1, v_2\}$ είναι ορθοκανονικά (όπως στην (2.38)) ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν σε πραγματικές ιδιοτιμές λ_m.

Απόδειξη: Υπό την προϋπόθεση ότι οι πραγματικές ιδιοτιμές του A είναι διακεκριμένες, το Λήμμα 2.3.1 εγγυάται την ύπαρξη ορθοκανονικών ιδιοδιανυσμάτων, που είναι επίσης ιδιοδιανύσματα της παραγοντοποίησης (2.10) με τις ίδιες ιδιοτιμές, και προκύπτει το ζητούμενο. Αλλά αν ο A έχει μια επαναλαμβανόμενη ιδιοτιμή, θα

πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του ταυτοτικού πίνακα, για τον οποίο και διατηρείται το αποτέλεσμα. ■

Χρησιμοποιώντας την ίδια τεχνική που χρησιμοποιήσαμε στο Λήμμα 2.3.1, είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι

$$(\upsilon\upsilon^{\dagger})(\upsilon\upsilon^{\dagger}) = (\upsilon^{\dagger}\upsilon)(\upsilon\upsilon^{\dagger}) \tag{2.40}$$

για κάθε $\upsilon \in \mathbb{O}^2$, και ότι

$$(\upsilon\upsilon^{\dagger})(ww^{\dagger}) = 0 \tag{2.41}$$

αν υ και w είναι ιδιοδιανύσματα του A με διακεκριμένες πραγματικές ιδιοτιμές, αφού κάθε όρος της παρένθεσης βρίσκεται στον $\mathbb{C}$. Η παραγοντοποίηση στο προηγούμενο θεώρημα είναι σε όρους ορθοκανονικών ταυτοδυναμιών (idempotents) $\upsilon_i{\upsilon_i}^{\dagger}$. Επίσης έχουμε

$$\frac{\upsilon\upsilon^{\dagger}}{\upsilon^{\dagger}\upsilon} + \frac{ww^{\dagger}}{w^{\dagger}w} = I \tag{2.42}$$

το οποίο θα μπορούσαμε να πάρουμε απευθείας χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το αριστερό μέλος έχει επαναλαμβανόμενη ιδιοτιμή 1. Επιπλέον, αφού από το λήμμα 2.3.1 ο A και το υ περιέχουν μόνο δύο οκτονιονικές διευθύνσεις,

$$(A\upsilon)\upsilon^{\dagger} = A(\upsilon\upsilon^{\dagger}) \tag{2.43}$$

το οποίο οδηγεί στην ακόλουθη εναλλακτική διατύπωση του Θεωρήματος 2.3.1

$$A = A\left(\sum_{i=1}^{2} v_i {v_i}^{\dagger}\right) = \sum_{i=1}^{2} A(v_i {v_i}^{\dagger}) = \sum_{i=1}^{2} (Av_i){v_i}^{\dagger} = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i v_i {v_i}^{\dagger} \qquad (2.44)$$

Όπως θα δούμε παρακάτω, αυτό το όρισμα στηρίζεται σθεναρά στο Λήμμα 2.3.2, το οποίο δεν ισχύει στην περίπτωση πινάκων 3×3.

Δεν έχουμε συζητήσει ακόμα αν τα ορθοκανονικά διανύσματα στο προηγούμενο Θεώρημα συγκροτούν μια βάση στον $\mathbb{O}^2$. Για κάθε ορθοκανονικό διάνυσμα, ισχύει το ακόλουθο Λήμμα

Λήμμα 2.3.2: Έστω $v, w \in \mathbb{O}^2$ είναι ορθοκανονικά με την έννοια (2.38), και έστω g να είναι κάθε διάνυσμα στον $\mathbb{O}^2$. Τότε

$$g = (vv^{\dagger})g + (ww^{\dagger})g \qquad (2.45)$$

Απόδειξη: Προκύπτει άμεσα από την (2.42). ■

Στην προσεταιριστική περίπτωση αυτό το Λήμμα δείχνει πώς να γράφουμε κάθε διάνυσμα g σε όρους συνιστωσών κατά μήκος του v και w, έτσι ορίζουμε το $\{v, w\}$ σαν μία βάση. Κάτι τέτοιο θα μπορούσαμε να πούμε και στην μη προσεταιριστική περίπτωση, αν και η "συνισταμένη" του g "κατά μήκος" του v δεν δείχνει πλέον στην διεύθυνση του v. Ωστόσο αυτή η ορολογία είναι πολύ ελκυστική, καθώς μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο ορθοκανονικοποίησης των Gram-Schmidt για να προσδιορίσουμε την συνιστώσα ενός διανύσματος το οποίο είναι ορθογώνιο σε ένα άλλο.

Πρόταση 2.3.2: Έστω $v, w \in \mathbb{O}^2$. Τότε

$$(vv^{\dagger})\left(w - \frac{(vv^{\dagger})}{v^{\dagger}v} w\right) = 0 \qquad (2.46)$$

Απόδειξη: Προκύπτει από την εναλλακτικότητα τον 2×2 οκτονιονικών ερμιτιανών πινάκων και την σχέση (2.40). ■

2.4: Ιδιοτιμές 2×2 ερμιτιανών πινάκων οκτονίων

2.4.1: Το πρόβλημα των πραγματικών ιδιοτιμών

Θεωρούμε το πρόβλημα ιδιοτιμών $Av = v\lambda$ πάνω στον $\mathbb{O}$, και αναζητούμε (μόνο) λύσεις με πραγματικές ιδιοτιμές, που σημαίνει, $\lambda \epsilon \mathbb{R}$.

Δεν υπάρχουν εκπλήξεις σε αυτήν την περίπτωση, ή μάλλον η μόνη έκπληξη είναι ότι δεν μπορούμε να δείξουμε ότι η λ είναι πραγματική, αλλά υποθέτουμε αυτή την ιδιότητα ξεχωριστά. Πρώτα από όλα, υπάρχει μόνο ένα ανεξάρτητο οκτόνιο στον A, οι συνιστώσες του A ζουν σε μία μιγαδική υποάλγεβρα $\mathbb{C} \subset \mathbb{O}$. Ο γενικός 2×2 οκτονιονικός ερμιτιανός πίνακας μπορεί να γραφεί

$$A = \begin{pmatrix} p & \bar{a} \\ a & m \end{pmatrix} \tag{2.47}$$

όπου $a \epsilon \mathbb{C}$, $p, m \epsilon \mathbb{R}$ και υποθέτουμε ότι $a \neq 0$ (αν $a = 0$, το πρόβλημα ιδιοτιμών είναι τετριμμένο), και ικανοποιεί την χαρακτηριστική εξίσωση

$$A^2 - (trA)A + (detA)I = 0 \tag{2.48}$$

όπου trA συμβολίζει το ίχνος του A, και όπου δεν υπάρχει δυσκολία στο να προσδιορίσουμε την ορίζουσα του A ως συνήθως μέσω

$$detA = pm - |a|^2 \tag{2.49}$$

Θέτοντας

$$\upsilon = \binom{x}{y} \tag{2.50}$$

με $x, y \epsilon \mathbb{O}$ η εξίσωση ιδιοτιμών $A\upsilon = \upsilon\lambda$ παίρνει την μορφή

$$px + \bar{a}y = \lambda x \tag{2.51}$$

$$ax + my = \lambda y \tag{2.52}$$

καθεμία από τις οποίες αρκεί για να δείξουμε ότι τα a, x, y είναι προσεταιριστικά, και έτσι βρίσκονται σε κάποια τετραδική υποάλγεβρα $\mathbb{H} \subset \mathbb{O}$.

Είναι χρήσιμο να γράψουμε τις ιδιότητες αυτές σε όρους συνιστωσών. Από τις σχέσεις (2.51) και (2.52) παίρνουμε

$$(\lambda - p)(\lambda - m)x = \bar{a}(\lambda - m)y = \bar{a}(ax) = |a|^2 x \tag{2.53}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $p, m, \lambda \epsilon \mathbb{R}$, έτσι ώστε

$$\left((\lambda - p)(\lambda - m) - |a|^2\right)x = 0 \tag{2.54}$$

ομοίως για το y και προκύπτει

$$y = \frac{\bar{a}x}{|a|^2}(\lambda - p) \tag{2.55}$$

$$x = \frac{ay}{|a|^2}(\lambda - m) \tag{2.56}$$

Υποθέτοντας ότι $x \neq 0$ $(\upsilon \neq 0)$ παίρνουμε την συνήθη χαρακτηριστική εξίσωση

$$det(A - \lambda I) = \lambda^2 - (trA)\lambda + detA = 0 \tag{2.57}$$

για τις ιδιοτιμές του A.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι τα ιδιοδιανύσματα των 2×2 οκτονιονικών ερμιτιανών πινάκων (2.47) με ιδιοτιμή λ, μπορούν να γραφούν σε μία από τις δύο μορφές

$$\upsilon = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 \\ \alpha(\lambda - p) \end{pmatrix} \xi, \qquad \upsilon = \begin{pmatrix} \bar{\alpha}(\lambda - m) \\ |\alpha|^2 \end{pmatrix} \xi \tag{2.58}$$

όπου $\xi \in \mathbb{O}$ αυθαίρετο και το λ είναι μια από τις δύο λύσεις της (2.57), να σημειώσουμε ότι αν $a \neq 0,\ x \neq 0 \neq y$ και οι δύο λύσεις της (2.57) είναι διακεκριμένες. Αυτό δείχνει ότι όλα τα ιδιοδιανύσματα 2×2 ερμιτιανών πινάκων με πραγματικές ιδιοτιμές προκύπτουν από τα συνήθη μιγαδικά ιδιοδιανύσματα πολλαπλασιάζοντας από δεξιά με ένα τυχαίο οκτόνιο.

Έτσι με μία πρώτη ματιά, θα μπορούσαμε να πούμε ότι το πρόβλημα των ιδιοτιμών 2×2 οκτονιονικών ερμιτιανών πινάκων με πραγματικές ιδιοτιμές περιορίζεται στην τετραδική περίπτωση. Όμως, κάθε ιδιοδιάνυσμα θα πρέπει πράγματι να είναι τετραδικό με την παραπάνω έννοια, αλλά διαφορετικά ιδιοδιανύσματα μπορούν, μαζί με τον A, να ορίσουν διαφορετικές τετραδικές υποάλγεβρες.

Αφού ο A είναι μιγαδικός, μπορούμε να ξεκινήσουμε λύνοντας το μιγαδικό πρόβλημα ιδιοτιμών, που μας επιτρέπει να γράψουμε

$$A = \lambda_1 \upsilon_1 {\upsilon_1}^\dagger + \lambda_2 \upsilon_2 {\upsilon_2}^\dagger \tag{2.59}$$

όπου τα λ_m είναι πραγματικοί, και όπου οι συνιστώσες και του A και του υ_m βρίσκονται στο $\mathbb{C}$. Εάν θέσουμε

$$w_m = \upsilon_m \xi_m \tag{2.60}$$

για κάθε οκτόνιο $\xi_m \epsilon \mathbb{O}$, είναι προφανές ότι το w_m είναι επίσης ένα ιδιοδιάνυσμα του A με ιδιοτιμή λ_m, εδώ δεν υπάρχει θέμα προσεταιριστικότητας, αφού ο A και ένα ξ_m ορίζουν (το πολύ) μία τετραδική υποάλγεβρα του $\mathbb{O}$. Επιπλέον, αν κανονικοποιήσουμε το ξ_m θέτοντας

$$|\xi_m| = 1 \tag{2.61}$$

μπορούμε να αντικαταστήσουμε το υ_m με w_m στην (2.59) χωρίς να αλλάξει τίποτα.

Ισχυριζόμαστε ότι όλα τα ιδιοδιανύσματα υ του A είναι της μορφής (2.60). Ένας τρόπος να το αποδείξουμε αυτό, είναι να παρατηρήσουμε ότι, στον $\mathbb{H}$, μπορούμε να φτιάξουμε τουλάχιστον μία πραγματική συνιστώσα του υ, πολλαπλασιάζοντας από δεξιά με μια κατάλληλη (τετραδική) φάση, που δεν επηρεάζει με άλλο τρόπο την εξίσωση ιδιοτιμών. Αλλά τότε η εξίσωση ιδιοτιμών υποχρεώνει την άλλη συνιστώσα να βρίσκεται στον $\mathbb{C}$, όχι απλώς στον $\mathbb{H}$. Έτσι, το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού του υ με αυτή την φάση είναι ένα από τα μιγαδικά ιδιοδιανύσματα του A. Αντιστρέφοντας αυτή την διαδικασία αποδεικνύεται ο ισχυρισμός.

Λήμμα 2.4.1: Έστω A ένας 2×2 μιγαδικός ερμιτιανός πίνακας. Τότε w είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του A με πραγματική ιδιοτιμή λ αν και μόνο αν $w = \upsilon\xi$, όπου $\xi \epsilon \mathbb{O}$ τυχαίο και υ είναι ένα μιγαδικό ιδιοδιάνυσμα του A με την ίδια ιδιοτιμή.

Αφού ένας 2×2 οκτονιονικός ερμιτιανός πίνακας περιέχει μόνο ένα ανεξάρτητο οκτόνιο, μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας

ότι κάθε τέτοιος πίνακας είναι μιγαδικός, και έτσι μπορούμε να εφαρμόσουμε το παραπάνω λήμμα σε αυτόν.

Μέχρι στιγμής η προσεταιριστικότητα δεν υπήρξε πρόβλημα, αφού ένα απλό ιδιοδιάνυσμα περιέχει μόνο α και ξ, έχει δηλαδή συνιστώσες που ζουν σε μία τετραδική υποάλγεβρα του $\mathbb{O}$. Έτσι αν υ_m είναι τα μιγαδικά ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές λ_m, με $m = 1,2$, τότε φυσικά

$$\upsilon_1{}^\dagger \upsilon_2 = 0 \tag{2.62}$$

που σημαίνει ότι το υ_1 είναι ορθογώνιο στο υ_2. Ωστόσο με το w_m όπως στην (2.60), έχουμε

$$w_1{}^\dagger w_2 = (\upsilon_1 \xi_1)^\dagger (\upsilon_2 \xi_2) = \left(\bar{\xi}_1 \upsilon_1{}^\dagger\right)(\upsilon_2 \xi_2) \tag{2.63}$$

που δεν είναι απαραίτητα μηδέν, αφού δεν μπορούμε εν γένει να μετακινήσουμε την παρένθεση. Ένα απλό αντιπαράδειγμα μπορεί να κατασκευαστεί χρησιμοποιώντας

$$\upsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \qquad \upsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \tag{2.64}$$

και θέτοντας $\xi_1 = j,\ \xi_2 = l$.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει στην ενότητα 2.3 και παρατηρώντας ξανά την σχέση (2.59), στην οποία μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είτε υ_m ή w_m (θεωρώντας $|\xi_m| = 1$), η έννοια της ορθογωνιότητας δίνεται από

$$\upsilon \perp w \Leftrightarrow (\upsilon \upsilon^\dagger) w = 0 \tag{2.65}$$

και εύκολα διαπιστώνουμε ότι διατηρείται μεταξύ κάθε δύο ιδιοδιανυσμάτων του A με διαφορετικές ιδιοτιμές. Στην προσεταιριστική περίπτωση, μπορούμε να μετακινήσουμε την παρένθεση στην (2.65), αλλά δεν ισχύει εν γένει [17].

2.4.2: Το πρόβλημα μη πραγματικών ιδιοτιμών [18]

Ο γενικός 2×2 οκτονιονικός ερμιτιανός πίνακας μπορεί να γραφεί όπως στην (2.47) με $p, m \epsilon \mathbb{R}$ και $\alpha \epsilon \mathbb{O}$, και ικανοποιεί την χαρακτηριστική εξίσωση (2.60), η οποία μπορεί να γραφεί ως

$$A^2 - (trA)A + (detA)I = 0 \tag{2.66}$$

όπου $trA = p + m$ συμβολίζει το ίχνος του A, και όπου δεν υπάρχει δυσκολία στο να προσδιορίσουμε την ορίζουσα του A όπως συνήθως μέσω της σχέσης

$$detA = pm - |a|^2 \tag{2.67}$$

αφού οι συνιστώσες του A βρίσκονται σε μία μιγαδική υποάλγεβρα $\mathbb{C} \subset \mathbb{O}$. Αν $\alpha = 0$, το πρόβλημα ιδιοτιμών είναι τετριμμένο, έτσι υποθέτουμε $\alpha \neq 0$. Επίσης γράφουμε το υ στην μορφή (2.50), με $x, y \epsilon \mathbb{O}$.

2.4.2.1: Αριστερό πρόβλημα ιδιοτιμών

Όπως έχουμε αναφέρει, ακόμα και οι τετραδικοί ερμιτιανοί πίνακες έχουν αριστερές ιδιοτιμές που δεν είναι πραγματικές, όπως φαίνεται και στο παρακάτω παράδειγμα

$$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+j \\ k+i \end{pmatrix} = (1+j)\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} \tag{2.68}$$

Ευθύς υπολογισμός μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε ποιοι ερμιτιανοί πίνακες A έχουν αριστερές ιδιοτιμές που δεν είναι πραγματικές. Εισάγοντας την (2.50) στην αριστερή εξίσωση ιδιοτιμών (2.7) προκύπτει

$$(\lambda - p)x = ay, \qquad (\lambda - m)y = \bar{a}x \tag{2.69}$$

που με την σειρά του δίνει

$$\frac{\bar{a}\big((\lambda - p)x\big)}{|a|^2} = y = \frac{\big(\bar{\lambda} - m\big)(\bar{a}x)}{|\lambda - m|^2} \tag{2.70}$$

Υποθέτοντας, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $x \neq 0$ και παίρνοντας την νόρμα και στις δύο πλευρές προκύπτει

$$|\alpha|^2 = |\lambda - p||\lambda - m| \tag{2.71}$$

που συνεπάγεται ότι

$$\frac{\bar{\alpha}\big((\lambda - p)x\big)}{|\lambda - p|} = \frac{\big(\bar{\lambda} - m\big)(\bar{a}x)}{|\lambda - m|} \tag{2.72}$$

Η εξίσωση χωρίζεται σε δυο ανεξάρτητα μέρη, στους όρους του αριθμητή που περιέχουν το φανταστικό μέρος του λ, το οποίο είναι μη μηδενικό από υπόθεση (έχουμε υποθέσει, χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $Re(\lambda) = 0$, αντικαθιστώντας το A με $A - Re(\lambda)I$) και σε αυτούς που δεν είναι. Κοιτώντας αρχικά το τελευταίο παίρνουμε

$$p = m \tag{2.73}$$

που με την σειρά του ανάγει την (2.72) στην

$$\bar{a}(\lambda x) = \bar{\lambda}(\bar{a}x) \tag{2.74}$$

η οποία επιβάλει στο α να είναι καθαρά φανταστικός (και ορθογώνιο στο λ), αλλά δεν μας δίνει καμία συνθήκη για το x.

Συμβολίζουμε τον 2×2 ταυτοτικό πίνακα με I, θέτοντας

$$J(r) = \begin{pmatrix} 0 & -r \\ r & 0 \end{pmatrix} \tag{2.75}$$

με το r να είναι καθαρά φανταστικό μοναδιαίο οκτόνιο αν και μόνο αν $r^2 = -1$, έχουμε:

Λήμμα 2.4.2: Το σύνολο των 2×2 ερμιτιανών πινάκων A για τους οποίους υπάρχουν μη πραγματικές ιδιοτιμές είναι

$$A_2 = \{A = pI + qJ(r): p, q \in \mathbb{R}, q \neq 0, r^2 = -1\} \tag{2.76}$$

Το σύνολο A_2 έχει μερικές αξιοσημείωτες ιδιότητες, που θα συζητηθούν περαιτέρω παρακάτω. Μπορούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, να θέσουμε $r = i$, και έτσι ο A παίρνει την μορφή

$$A = \begin{pmatrix} p & -iq \\ iq & p \end{pmatrix} \tag{2.77}$$

Ας βρούμε την γενική λύση του αριστερού προβλήματος ιδιοτιμών για αυτούς τους πίνακες. Γράφοντας τον A όπως στην (2.77) και το υ όπως στην (2.50), η αριστερή εξίσωση ιδιοτιμών γίνεται

$$\frac{\lambda - p}{q} x = -iy \tag{2.78}$$

$$\frac{\lambda - p}{q} y = ix \tag{2.79}$$

Παίρνοντας την νόρμα και στις δυο πλευρές προκύπτει άμεσα

$$|x|^2 = |y|^2 \tag{2.80}$$

και χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να κανονικοποιήσουμε και τα δυο ως προς 1. Και έτσι παίρνουμε

$$\frac{\lambda - p}{q} = -(iy)\bar{x} = (ix)\bar{y}$$

$$= -[i, y, \bar{x}] - i(y\bar{x}) = [i, x, \bar{y}] + i(x\bar{y}) \tag{2.81}$$

Αλλά τότε

$$[z, y, \bar{x}] = -[z, y, x] = [z, x, y] = -[z, x, \bar{y}] \tag{2.82}$$

για κάθε z, οι δυο προσεταιριστές (associators) είναι ίσοι, και μένει

$$x \cdot y = x\bar{y} + y\bar{x} = 0 \tag{2.83}$$

Έτσι, το x και το y αντιστοιχούν σε ορθοκανονικά διανύσματα στον $\mathbb{O}$, όπως και στον $\mathbb{R}^8$. Αυτό το επιχείρημα είναι πλήρως αντιστρέψιμο, κάθε κατάλληλα κανονικοποιημένα x και y που είναι ορθογώνια παράγουν ένα ιδιοδιάνυσμα του A. Έτσι έχουμε δείξει ότι όλοι οι πίνακες στο A_2 έχουν τα ίδια αριστερά ιδιοδιανύσματα.

Λήμμα 2.4.3: Το σύνολο των αριστερών ιδιοδιανυσμάτων για κάθε πίνακα $A \epsilon A_2$ είναι

$$V_2 = \left\{ \binom{x}{y} : |x|^2 = |y|^2 : x \cdot y = 0 \right\} \tag{2.84}$$

Με δοσμένα τα x και y, η αριστερή ιδιοτιμή δίνεται σε κάθε περίπτωση είτε από την (2.78) είτε από την (2.79). Επιπλέον, πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με ένα οκτόνιο, το σύνολο V_2 διατηρείται, και έτσι πίνακες στο A_2 έχουν την ιδιότητα ότι πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με αριστερά ιδιοδιανύσματα, παράγεται άλλο ένα αριστερό ιδιοδιάνυσμα (αλλά με

διαφορετική ιδιοτιμή). Από τις σχέσεις (2.78), ή την (2.79) και την (2.80) έπεται ότι

$$|\lambda - p| = q \tag{2.85}$$

αντικαθιστώντας την στην (2.78) ή στην (2.79) και πολλαπλασιάζοντας και τις δυο πλευρές με i, και χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες

$$a \cdot (xb) = b \cdot (\bar{x}a) \tag{2.86}$$

$$(ax) \cdot (bx) = |x|^2 a \cdot b \tag{2.87}$$

για κάθε $a, b, x \in \mathbb{O}$ (όπου το $\cdot$ συμβολίζει το εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{O}$ όπως ορίζεται από την σχέση (1.153)), στην συνέχεια δείχνουμε ότι από την σχέση (2.83) υποχρεωτικά $\lambda \cdot i = 0$, ή πιο γενικά

$$\lambda \cdot \alpha = 0 \tag{2.88}$$

Ωστόσο, η (2.85) και η (2.88) είναι οι μόνοι περιορισμοί για το λ, με την έννοια ότι η (2.78) ή η (2.79) μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να κατασκευάσουμε ιδιοδιανύσματα έχοντας μια οποιαδήποτε ιδιοτιμή που ικανοποιεί τις δύο αυτές συνθήκες.

2.4.2.2: Δεξί πρόβλημα ιδιοτιμών

Όπως συζητήσαμε στο αντίστοιχο κεφάλαιο, οι δεξιές ιδιοτιμές των τετραδικών ερμιτιανών πινάκων πρέπει να είναι πραγματικές, το οποίο είναι ένα ισχυρό επιχείρημα υπέρ της τοποθέτησης των ιδιοτιμών στα δεξιά. Ωστόσο, όπως επίσης έχουμε επισημάνει στο αντίστοιχο κεφάλαιο, υπάρχουν

οκτονιονικοί ερμιτιανοί πίνακες που έχουν ιδιοτιμές που δεν είναι πραγματικές, όπως φαίνεται και στο ακόλουθο παράδειγμα

$$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j - il \\ l + k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j \\ l \end{pmatrix}(1 + kl) \tag{2.89}$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία που εφαρμόσαμε στα αριστερά ιδιοδιανύσματα, μπορούμε να προσδιορίσουμε ποιοι πίνακες A έχουν δεξιές ιδιοτιμές που δεν είναι πραγματικές. Βάζοντας την (2.50) στην δεξιά εξίσωση ιδιοτιμών (2.18) προκύπτει

$$x(\lambda - p) = ay, \quad y(\lambda - m) = \bar{a}x \tag{2.90}$$

από το οποίο παίρνουμε

$$\frac{\bar{a}\big(x(\lambda - p)\big)}{|a|^2} = y = \frac{(\bar{a}x)\big(\bar{\lambda} - m\big)}{|\lambda - m|^2} \tag{2.91}$$

Παίρνοντας την νόρμα και στις δυο πλευρές (και υποθέτοντας ότι $x \neq 0$) καταλήγουμε ξανά στην σχέση (2.71) από την οποία συνεπάγεται

$$\frac{\bar{a}\big(x(\lambda - p)\big)}{|\lambda - p|} = \frac{(\bar{a}x)(\lambda - m)}{|\lambda - m|} \tag{2.92}$$

Όπως ακριβώς και στο πρόβλημα αριστερών ιδιοτιμών, αυτή η εξίσωση χωρίζεται σε δυο ανεξάρτητα μέρη, στους όρους του αριθμητή που περιέχουν το φανταστικό μέρος του λ, που είναι μη μηδενικό από υπόθεση, και σε εκείνα που δεν είναι. Κοιτώντας αρχικά την τελευταία πάλι αναγκαστικά $p = m$, το οποίο με την σειρά του υποχρεώνει την $|y| = |x|$. Η συνθήκη τώρα είναι

$$\bar{a}(x\lambda) = (\bar{a}x)\bar{\lambda} \tag{2.93}$$

έτσι ώστε το $\bar{a}, Im(\lambda)$, και το x αντιπροσεταιρίζονται (antiassociate). Συγκεκριμένα, αυτό υποχρεώνει και το a και το x να είναι καθαρά φανταστικά, καθώς και

$$\lambda \cdot a = 0 \tag{2.94}$$

$$\lambda \cdot x = 0 = a \cdot x \tag{2.95}$$

με αντίστοιχες ταυτότητες να ισχύουν και για το y (αυτό συνεπάγεται επίσης ότι $\alpha\lambda \cdot x = 0$, που σημαίνει ότι το x (και το y) πρέπει να είναι ορθογώνια στην τετραδική υποάλγεβρα που παράγεται από το λ και το α). Αλλά η (2.94) και η (2.95) αποτελούν τις συνθήκες για το λ και το υ, όχι για το A. Συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι η αναγκαία και ικανή συνθήκη για πίνακες ώστε να έχουν μη πραγματικές ιδιοτιμές είναι $A \epsilon A_2$.

Λήμμα 2.4.4: Το σύνολο των 2×2 ερμιτιανών πινάκων A για τους οποίους υπάρχουν μη πραγματικές δεξιές ιδιοτιμές είναι το A_2 όπως αυτό ορίστηκε στην (2.76)

Έτσι, όλοι οι 2×2 ερμιτιανοί πίνακες A που έχουν μη πραγματικές δεξιές ιδιοτιμές, έχουν επίσης και μη πραγματικές αριστερές ιδιοτιμές, και αντίστροφα.

Πόρισμα 2.4.1: Ένας 2×2 οκτονιονικός ερμιτιανός πίνακας έχει δεξιές ιδιοτιμές που δεν είναι πραγματικές αν, και μόνο αν, αριστερές ιδιοτιμές που δεν είναι πραγματικές.

Επιστρέφοντας στα ιδιοδιανύσματα, αντικαθιστούμε $p = m$ στην (2.90) και παίρνουμε

$$\bar{x}(ay) = \bar{y}(\bar{a}x) \tag{2.96}$$

και εφαρμόζοντας τις συνθήκες για το a, x και το y έχουμε τώρα

$$x \cdot y = 0 \tag{2.97}$$

όπως ακριβώς και στα αριστερά ιδιοδιανύσματα. Όλα τα δεξιά ιδιοδιανύσματα με μη πραγματικές ιδιοτιμές βρίσκονται ως εκ τούτου στο V_2, το αντίστροφο δεν ισχύει (αφού τα δεξιά ιδιοδιανύσματα δεν έχουν πραγματικό μέρος). Επιπλέον, δεν είναι όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του V_2 ιδιοδιανύσματα για κάθε δοσμένο πίνακα A (αφού τα δεξιά ιδιοδιανύσματα δεν έχουν "τετραδικό" μέρος).

Συγκεντρώνοντας τα παραπάνω, τυπικές λύσεις του δεξιού προβλήματος ιδιοτιμών για τον A όπως στην (2.77), μπορούν να γραφούν ως

$$\upsilon = n\binom{j}{k\bar{s}}, \qquad \lambda_\upsilon = p + q\bar{s} \tag{2.98}$$

$$w = n\binom{k\bar{s}}{j}, \qquad \lambda_w = p - q\bar{s} \tag{2.99}$$

όπου $p, q, n \in \mathbb{R}$ και όπου

$$s = \cos\theta + kl\sin\theta \tag{2.100}$$

Το παράδειγμα που δόθηκε στην (2.89) είναι μια ειδική περίπτωση του πρώτου σκέλους της (2.99) με $p = q = n = 1$ και $\theta = \pi/2$.

2.4.2.3: Επιπλέον ιδιότητες [18]

Θα καταγράψουμε μερικές περαιτέρω ιδιότητες του προβλήματος μη πραγματικών ιδιοτιμών 2×2 πινάκων, χωρίς απόδειξη.

- Οι ιδιοτιμές του δεξιού προβλήματος ιδιοτιμών ικανοποιούν την χαρακτηριστική εξίσωση

$$\lambda^2 - \lambda(trA) + (detA) = [\bar{a}, x, y]\frac{(\lambda - p)}{|y|^2} = [a, y, x]\frac{(\lambda - m)}{|x|^2} \qquad (2.101)$$

Αν ο προσεταιριστής (associator) $[a, x, y]$ απαλείφεται, τότε το λ ικανοποιεί την συνήθη χαρακτηριστική εξίσωση και ως εκ τούτου είναι πραγματικό (αφού ο A είναι μιγαδικός ερμιτιανός). Διαφορετικά, συγκρίνοντας τα πραγματικά και φανταστικά μέρη των δύο τελευταίων όρων της εξίσωσης (2.101) παίρνουμε μια εναλλακτική παραγώγιση του $|y| = |x|$, και προκύπτει $p = m$, όπως ήταν αναμενόμενο. Επιπλέον, αφού το αριστερό μέρος της (2.101) βρίσκεται σε μια μιγαδική υποάλγεβρα του $\mathbb{O}$, το ίδιο ισχύει και για το δεξιό, και τότε είναι εύκολο να λύσουμε ως προς λ, θεωρώντας τα πραγματικά και τα φανταστικά του μέρη. Η γενικευμένη χαρακτηριστική εξίσωση (2.101) τότε δίνει την ακόλουθη εξίσωση για το λ

$$\big(Re(\lambda)\big)^2 - Re(\lambda)(trA) + (detA) = \big(Im(\lambda)\big)^2 < 0 \qquad (2.102)$$

μαζί με τον περιορισμό

$$\frac{[\bar{a}, x, y]}{|x||y|} = 2Im(\lambda) \qquad (2.103)$$

Η σαφής μορφή των ιδιοτιμών που δίνεται από την (2.98) και την (2.99) επαληθεύει ότι δεν υπάρχουν επιπλέον περιορισμοί στο λ εκτός από τους (2.94) και (2.102). Επιπλέον, έχοντας δείξει στην προηγούμενη ενότητα ότι το a και το x (και επομένως και το y) είναι καθαρά φανταστικοί, η (2.103) δίνει μια εναλλακτική παραγώγιση όπου το λ είναι ορθογώνιο με το a, που είναι η (2.102) καθώς και για στο x και το y, που είναι η (2.103).

- Αν $Av = \lambda_v v$ με $v^\dagger v = 1$ και $[a, x, y] = 0$, τότε

$$A = \lambda_v v v^\dagger + \lambda_w w w^\dagger \tag{2.104}$$

όπου

$$w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \;\; v = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \epsilon\, V_2 \tag{2.105}$$

και όπου $\lambda_v = \lambda$ προκύπτει λύνοντας την (2.78) ή την (2.79), και το λ_w από το λ_v εναλλάσσοντας το x το y.

Θα επεξηγήσουμε αυτό το αποτέλεσμα επιστρέφοντας στο παράδειγμα (2.68), για το οποίο παίρνουμε την παραγοντοποίηση

$$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} = \frac{(1+j)}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}^\dagger + \frac{(1-j)}{2}\begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix}^\dagger \tag{2.106}$$

όπου ο παράγοντας 2 οφείλεται στην κανονικοποίηση των ιδιοδιανυσμάτων. Η παραπάνω κατασκευή αποτυγχάνει αν $[i, x, y] \neq 0$.

- Κάθε $A\, \epsilon\, A_2$ με (κανονικοποιημένο) $v\, \epsilon\, V_2$ τέτοιο ώστε $Av = v\lambda_v$ μπορεί να αναπτυχθεί ως

$$A = \lambda_v (v v^\dagger) + \lambda_w (w w^\dagger) \tag{2.107}$$

όπου το w ορίζεται από την (2.105) και ικανοποιεί $Aw = w\lambda_w$.

Όπως και προηγουμένως, μπορούμε να υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι ο A δίνεται από την σχέση (2.77) και το v και το w από την (2.98) και (2.99) αντίστοιχα. Επιστρέφοντας στο παράδειγμα (2.89) προκύπτει η παραγοντοποίηση

$$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} = \frac{(1+kl)}{2}\left(\begin{pmatrix} j \\ l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j \\ l \end{pmatrix}^\dagger\right) + \frac{(1-kl)}{2}\left(\begin{pmatrix} l \\ j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l \\ j \end{pmatrix}^\dagger\right) \tag{2.108}$$

Ενώ ισχύει ότι

$$(\upsilon\upsilon^{\dagger})w = \upsilon(\upsilon^{\dagger}w) \tag{2.109}$$

για κάθε υ, w που συσχετίζονται με την (2.105) (αλλά όχι απαραίτητα στον V_2), η παραγοντοποίηση (2.107) είναι εκπληκτική γιατί οι ιδιοτιμές $\lambda_\upsilon, \lambda_w$ δεν αντιμετατίθενται ούτε προσεταιρίζονται με τους υπόλοιπους όρους. Συγκεκριμένα, παρόλο που η (2.109) ισούται εδώ με μηδέν, έχουμε

$$\left(\lambda_\upsilon(\upsilon\upsilon^{\dagger})\right)w \neq 0 \tag{2.110}$$

- Κάθε $A \epsilon A_2$ με (κανονικοποιημένο) $\upsilon \epsilon V_2$ τέτοιο ώστε $A\upsilon = \upsilon\lambda_\upsilon$ μπορεί να αναπτυχθεί ως

$$A = (\upsilon\lambda_\upsilon)\upsilon^{\dagger} + (w\lambda_w)w^{\dagger} \tag{2.111}$$

  όπου το w ορίζεται από την (2.105) και ικανοποιεί $Aw = w\lambda_w$.

Η παραγοντοποίηση (2.111) μας εκπλήσσει λιγότερο σε σχέση με την (2.107), αρκεί κάποιος να αντιληφθεί ότι η ορθογωνιότητα στην μορφή

$$\left((\upsilon\lambda)\upsilon^{\dagger}\right)w = (\upsilon\lambda)(\upsilon^{\dagger}w) = 0 \tag{2.112}$$

ισχύει για κάθε $\lambda \epsilon \mathbb{O}$ και $\upsilon, w \epsilon V_2$ που ικανοποιούν την (2.105).

2.5: Ιδιοτιμές 3×3 ερμιτιανών πινάκων οκτονίων

2.5.1: Το πρόβλημα των πραγματικών ιδιοτιμών [17]

Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε την περίπτωση 3×3 οκτονιονικών ερμιτιανών πινάκων, δεν είναι προφανές ότι οι 3×3 οκτονιονικοί ερμιτιανοί πίνακες έχουν καλά ορισμένη χαρακτηριστική εξίσωση. Επομένως, αρχικά θα υπενθυμίσουμε κάποιες από τις ιδιότητες αυτών των πινάκων πριν προχωρήσουμε στο πρόβλημα των ιδιοτιμών. Όπως και στην περίπτωση των 2×2 οκτονιονικών ερμιτιανών πινάκων θα υπάρχουν λύσεις με μη πραγματικές ιδιοτιμές, εδώ θα εξετάσουμε μόνο το πρόβλημα με πραγματικές ιδιοτιμές.

Όπως έχουμε αναφέρει και στην ενότητα 2.3 οι 3×3 οκτονιονικοί ερμιτιανοί πίνακες καλούνται πίνακες Jordan, από την εξαιρετική (exceptional) άλγεβρα Jordan, γνωστή και ως άλγεβρα Albert, υπό το γινόμενο Jordan.

Οι πίνακες Jordan ικανοποιούν την συνήθη χαρακτηριστική εξίσωση [16]

$$A^3 - (trA)A^2 + \sigma(A)A - (detA)I = 0 \tag{2.113}$$

όπου το $\sigma(A)$ ορίζεται από

$$\sigma(A) = \frac{1}{2}\left((trA)^2 - tr(A^2)\right) = tr(A * A) \tag{2.114}$$

και όπου η ορίζουσα του A έχει ορισθεί αυθαίρετα σε όρους των γινομένων Jordan και Freudenthal στην ενότητα 2.3. Συγκεκριμένα, αν

$$A = \begin{pmatrix} p & a & \bar{b} \\ \bar{a} & m & c \\ b & \bar{c} & n \end{pmatrix} \tag{2.115}$$

με $p, m, n \epsilon \mathbb{R}$ και $a, b, c \epsilon \mathbb{O}$ τότε

$$trA = p + m + n \tag{2.116}$$

$$\sigma(A) = pm + pn + mn - |a|^2 - |b|^2 - |c|^2 \tag{2.117}$$

$$detA = pmn + b(ac) + \overline{b(ac)} - n|a|^2 - m|b|^2 - p|c|^2 \tag{2.118}$$

Ένας $n \times n$ ερμιτιανός πίνακας πάνω σε κάθε άλγεβρα διαιρέτη εφοδιασμένη με νόρμα μπορεί να ξαναγραφεί ως ένας συμμετρικός πραγματικός πίνακας $kn \times kn$, όπου το k συμβολίζει την διάσταση της διαιρετικής άλγεβρας. Επομένως, είναι σαφές ότι ένας 3×3 οκτονιονικός ερμιτιανός πίνακας πρέπει να έχει $8 \times 3 = 24$ πραγματικές ιδιοτιμές [37]. Ωστόσο, όπως μόλις αποδείξαμε, αντί να έχουμε (το πολύ) τρεις διακεκριμένες πραγματικές ιδιοτιμές, καθεμία πολλαπλότητας οκτώ, υπάρχουν (το πολύ) έξι διακεκριμένες πραγματικές ιδιοτιμές με πολλαπλότητα τέσσερα η καθεμία.

Ο λόγος ύπαρξης αυτής της ιδιαίτερης ιδιότητας είναι ότι , κάπως απροσδόκητα, μια πραγματική ιδιοτιμή λ ενός πίνακα Jordan A δεν ικανοποιεί εν γένει την χαρακτηριστική εξίσωση (2.113) [19]. Για να το δούμε αυτό πιο ξεκάθαρα θεωρούμε την συνήθη χαρακτηριστική εξίσωση

$$Av = \lambda v \tag{2.119}$$

με τον A όπως τον έχουμε ορίσει στην (2.115), το $\lambda \epsilon \mathbb{R}$ και όπου

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{2.120}$$

Μετά από πράξεις παίρνουμε

$$(\lambda - p)x = ay + \bar{b}z \tag{2.121}$$

$$(\lambda - m)y = cz + \bar{a}x \tag{2.122}$$

$$(\lambda - n)z = bx + \bar{c}y \tag{2.123}$$

έτσι ώστε

$$(\lambda - p)(\lambda - m)y = (\lambda - p)(cz + \bar{a}x) = (\lambda - p)cz + \bar{a}\left(ay + \bar{b}z\right) \tag{2.124}$$

από την οποία προκύπτει

$$[(\lambda - p)(\lambda - m) - |a|^2]y = \bar{a}\left(\bar{b}z\right) + (\lambda - p)cz \tag{2.125}$$

Υποθέτουμε αρχικά ότι $\lambda \neq p$. Χρησιμοποιώντας την σχέση (2.121), την (2.125) στην (2.123) προκύπτει

$$[(\lambda - p)(\lambda - m) - |a|^2](\lambda - p)(\lambda - n)z =$$

$$= [(\lambda - p)(\lambda - m) - |a|^2](\lambda - p)(bx + \bar{c}y)$$

$$= [(\lambda - p)(\lambda - m) - |a|^2]b\left(ay + \bar{b}z\right) + (\lambda - p)\bar{c}\left[\bar{a}\left(\bar{b}z\right) + (\lambda - p)cz\right]z$$

$$= b\left[a\left(\bar{a}\left(\bar{b}z\right) + (\lambda - p)cz\right)\right] + [(\lambda - p)(\lambda - m) - |a|^2]b\left(\bar{b}z\right)$$
$$+ (\lambda - p)\bar{c}\left[\bar{a}\left(\bar{b}z\right) + (\lambda - p)cz\right]$$

$$= (\lambda - p)\left[(\lambda - m)|b|^2 z + (\lambda - p)|c|^2 z + b\left(a(cz)\right) + \bar{c}\left(\bar{a}\left(\bar{b}z\right)\right)\right] \tag{2.126}$$

Αναπτύσσοντας και συγκρίνοντας με τις σχέσεις (2.116), (2.117) και (2.118) [18] προκύπτει τελικά

$[det(\lambda I - A)]z = [\lambda^3 - (trA)\lambda^2 + \sigma(A)\lambda - detA]z$

$$= b\big(a(cz)\big) + \bar{c}\left(\bar{a}\big(\bar{b}z\big)\right) - \big[b(ac) + (\bar{c}\bar{a})\bar{b}\big]z \tag{2.127}$$

Τώρα θα δούμε την περίπτωση $\lambda = p$. Ισχύει η (2.125), η οποία εδώ παίρνει την μορφή

$$-|a|^2 y = \bar{a}\big(\bar{b}z\big) \tag{2.128}$$

Εισάγοντας την (2.128) στην (2.122) μπορούμε να λύσουμε ως προς x και προκύπτει

$$-|a|^2 x = a(cz) + (p - m)\bar{b}z \tag{2.129}$$

Τέλος, εισάγοντας την (2.128) και την (2.129) στην σχέση (2.123) έχουμε

$$-\big(|a|^2(p - n) + |b|^2(p - m)\big)z = b\big(a(cz)\big) + \bar{c}\big(\bar{a}\big(\bar{b}\big)z\big) \tag{2.130}$$

Συγκρίνοντάς την με τις σχέσεις (2.116), (2.117) και (2.118) και χρησιμοποιώντας $p = m$, παρατηρούμε ότι η (2.127) ισχύει και σε αυτή την περίπτωση, και άρα ισχύει εν γένει.

Αν τα a, b, c και z προσεταιρίζονται (associate), το δεξιό μέλος της (2.127) απαλείφεται και το λ πράγματι ικανοποιεί την χαρακτηριστική εξίσωση (2.113), κάτι τέτοιο, όμως, δεν ισχύει γενικά. Ωστόσο, αφού το αριστερό μέλος της (2.127) είναι πραγματικό πολλαπλάσιο του z, το ίδιο θα πρέπει να ισχύει και για το δεξιό, έτσι ώστε

$$b\big(a(cz)\big) + \bar{c}\left(\bar{a}\big(\bar{b}z\big)\right) - \big[b(ac) + (\bar{c}\bar{a})\bar{b}\big]z = rz \tag{2.131}$$

για κάποιο $r \epsilon \mathbb{R}$, η οποία μπορεί να λυθεί ώστε να προκύψει μια τετραγωνική εξίσωση για το r, καθώς και περιορισμοί για το z.

Λήμμα 2.5.1: Οι πραγματικές ιδιοτιμές του 3×3 οκτονιονικού ερμιτιανού πίνακα A ικανοποιούν την μετασχηματισμένη χαρακτηριστική εξίσωση

$$det(\lambda\, I - A) = \lambda^3 - (trA)\lambda^2 + \sigma(A)\lambda - detA = r \tag{2.132}$$

όπου το r είναι μια από τις δυο ρίζες της εξίσωσης

$$r^2 + 4\Phi(a,b,c)r - |[a,b,c]|^2 = 0 \tag{2.133}$$

με a, b, c όπως ορίζονται από την (2.115) και όπου

$$\Phi(a,b,c) = \frac{1}{2} Re\big([a,\bar{b}]c\big) \tag{2.134}$$

Απόδειξη: Τα παραπάνω αποτελέσματα προέκυψαν χρησιμοποιώντας Mathematica για να λύσουμε την (2.131) με r πραγματικό και η τεράδα z δοσμένη σε όρους γενικευμένων τετράδων a, b, c [20] .

Επιπλέον, υπό την προϋπόθεση ότι $[a,b,c] \neq 0$, καθένα από τα x, y και z μπορεί να αποδειχθεί ότι αναλύεται σε όρους τεσσάρων πραγματικών παραμέτρων.

Πόρισμα 2.5.1: Με τον A και το r όπως έχουν ορισθεί παραπάνω, και θεωρώντας $[a,b,c] \neq 0$,

$$z = (\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta)\left(1 + \frac{[a,b,c]r}{|[a,b,c]|^2}\right) \tag{2.135}$$

με $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Παρόμοιο ανάπτυγμα ισχύει και για το x και το y.

Οι πραγματικοί παράμετροι $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ μπορούν ελεύθερα να προσδιοριστούν για μια (μη μηδενική) συνιστώσα, έστω z, οι υπόλοιπες συνιστώσες x, y έχουν παρόμοια μορφή που ορίζεται πλήρως από τις σχέσεις (2.121), (2.122) και (2.123).

Πόρισμα 2.5.2: Οι πραγματικές ιδιοτιμές του $\bar{A}$ είναι ίδιες με αυτές του A.

Απόδειξη: Ευθύς υπολογισμός (ή από τις (2.116) – (2.118)) δείχνει ότι

$$det\bar{A} = detA - 4\Phi(a,b,c) \tag{2.136}$$

Αλλά $-4\Phi(a,b,c)$ είναι ακριβώς το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης (2.133), και αντικαθιστώντας το A με $\bar{A}$ απλώς αλλάζει το πρόσημο του r δηλαδή, $r[\bar{A}] = -r[A]$. Έτσι, οι δυο πιθανές τιμές της $detA + r[A]$ είναι ακριβώς ίδιες με εκείνες της $det\bar{A} + r[\bar{A}]$. Αφού, $tr\bar{A} = trA$ και $\sigma(\bar{A}) = \sigma(A)$, η σχέση (2.132) παραμένει η ίδια. ■

Οι λύσεις της (2.132) είναι πραγματικές, αφού ο αντίστοιχος 24×24 πραγματικός πίνακας έχει 24 πραγματικές ιδιοτιμές. Θα αναφερόμαστε στις τρείς πραγματικές λύσεις της (2.132) που αντιστοιχούν σε μια (single) τιμή του r, σαν μια οικογένεια ιδιοτιμών του A. Έτσι, υπάρχουν δυο οικογένειες πραγματικών ιδιοτιμών, που καθεμία αντιστοιχεί σε τέσσερα ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα στον $\mathbb{R}$.

Θα αναφέρουμε μερικές ενδιαφέρουσες ιδιότητες αυτού του αποτελέσματος. Αν ο A είναι στην πραγματικότητα μιγαδικός, τότε η μόνη λύση της (2.133) είναι $r = 0$, και παίρνουμε την συνήθη χαρακτηριστική εξίσωση με ένα μοναδικό σύνολο τριών πραγματικών ιδιοτιμών. Αν ο A είναι τετραδικός, τότε η μόνη λύση της εξίσωσης (2.133) είναι $r = 0$, οι οποία οδηγεί στο σύνηθες σύνολο τριών πραγματικών ιδιοτιμών και των αντίστοιχων τετραδικών ιδιοδιανυσμάτων. Ωστόσο, αν τα a, b, c περιέχουν μόνο δυο ανεξάρτητες φανταστικές τετραδικές διευθύνσεις (στην περίπτωση αυτή $\Phi(a,b,c) = 0 = [a,b,c]$), θα υπάρχει επίσης μια μη μηδενική λύση για το r, η οποία οδηγεί σε

ένα δεύτερο σύνολο τριών πραγματικών ιδιοτιμών. Από το προηγούμενο πόρισμα, βλέπουμε ότι αυτό το δεύτερο σύνολο ιδιοτιμών περιέχει ακριβώς τις συνήθης ($r = 0$) ιδιοτιμές του $\bar{A}$. Επιπλέον, αφού

$$A(lv) = l(\bar{A}v) \tag{2.137}$$

αν αυτές οι συνιστώσες του A και του v βρίσκονται στον $\mathbb{H}$ και για $l \epsilon \mathbb{O}$ φανταστικό και ορθογώνιο στο $\mathbb{H}$, τα ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στο $r \neq 0$ είναι ακριβώς l φορές τα τετραδικά ($r \neq 0$) ιδιοδιανύσματα του $\bar{A}$. Με αυτή την έννοια, το πρόβλημα ιδιοτιμών οκτονίων για A τετραδικό ισοδυναμεί με το πρόβλημα ιδιοτιμών τετράδων και για τον A και για τον $\bar{A}$. Τέλος, αν ο A είναι οκτονιονικός (έτσι ώστε συγκεκριμένα $[a, b, c] \neq 0$), υπάρχουν δύο διακεκριμένες λύσεις για το r, και άρα δυο διαφορετικά σύνολα πραγματικών ιδιοτιμών με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. Να σημειώσουμε ότι αν $detA = 0 \neq [a, b, c]$, όλες οι ιδιοτιμές του A θα είναι μηδενικές.

Η τελευταία έκπληξη έγκειται στην συνθήκη ορθογωνιότητας για ιδιοδιανύσματα v, w τα οποία αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές. Όπως και στην περίπτωση πινάκων 2×2, δεν ισχύει ότι $v^{\dagger}w = 0$, παρόλο που το πραγματικό μέρος αυτής της έκφρασης απαλείφεται, δηλαδή,

$$v^{\dagger}w + w^{\dagger}v = 0 \tag{2.138}$$

Ωστόσο, όπως και στην περίπτωση 2×2 πινάκων αυτό που χρειάζεται για να διασφαλίσουμε μια παραγοντοποίηση της μορφής

$$A = \sum_{m=1}^{3} \lambda_m v_m {v_m}^{\dagger} \tag{2.139}$$

είναι η (2.65), και ένας εκτενής ευθύς υπολογισμός επιβεβαιώνει ότι η (2.65) ισχύει δεδομένου ότι και τα δυο ιδιοδιανύσματα αντιστοιχούν στην ίδια τιμή r.

Λήμμα 2.5.2: Αν υ και w ιδιοδιανύσματα του 3×3 οκτονιονικού ερμιτιανού πίνακα A τα οποία αντιστοιχούν σε διαφορετικές πραγματικές ιδιοτιμές στην ίδια οικογένεια (ίδια τιμή r), τότε υ και w είναι αμοιβαία ορθογώνια με την έννοια (2.65) δηλαδή, $(\upsilon\upsilon^{\dagger})w = 0$.

Απόδειξη: Η μετασχηματισμένη χαρακτηριστική εξίσωση (2.132) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να απαλείψουμε κυβικές και μεγαλύτερες δυνάμεις του λ από κάθε παράσταση. Επιπλέον, δοσμένων δύο διακεκριμένων ιδιοτιμών $\lambda_1 \neq \lambda_2$, αφαιρώντας τις δυο εκδοχές της (2.132) και παραγωγίζοντας το αποτέλεσμα προκύπτει η παρακάτω εξίσωση

$$\left({\lambda_1}^2 + \lambda_1\lambda_2 + {\lambda_2}^2\right) - trA(\lambda_1 + \lambda_2) + \sigma(A) = 0 \qquad (2.140)$$

απαλείφοντας τους τετραγωνικούς όρους σε μια από τις ιδιοτιμές.

Το αποτέλεσμα προκύπτει από μακροσκελή υπολογισμό για τον οποίο χρησιμοποιήσαμε Mathematica [20]. ■

Έτσι, για πίνακες Jordan παίρνουμε δυο παραγοντοποιήσεις της μορφής (2.139), που αντιστοιχούν σε δυο σύνολα πραγματικών ιδιοτιμών, για καθεμία από τις οποίες τα ιδιοδιανύσματα προσαρμοσμένα σε ορθογώνιους μετασχηματισμούς διατηρούν την μορφή (2.135) για το z.

Θεώρημα 2.5.1: Έστω A ένας 3×3 οκτονιονικός ερμιτιανός πίνακας, τότε ο A μπορεί να αναπτυχθεί όπως στην (2.139), όπου $\{\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3\}$ είναι ορθοκανονικά

(υπό την (2.65)) ιδιοδιανύσματα του A τα οποία αντιστοιχούν σε πραγματικές ιδιοτιμές λ_m, οι οποίες ανήκουν στην ίδια οικογένεια (ίδια τιμή r).

Απόδειξη: Ορίζουμε μια οικογένεια πραγματικών ιδιοτιμών του A ορίζοντας το r. Αν οι ιδιοτιμές είναι διακεκριμένες τότε το προηγούμενο λήμμα εγγυάται την ύπαρξη ορθοκανονικών ιδιοδιανυσμάτων, που είναι επίσης και ιδιοδιανύσματα της παραγοντοποίησης (2.139) με τις ίδιες ιδιοτιμές, και προκύπτει το ζητούμενο.

Αν οι ιδιοτιμές είναι ίδιες, οι οικογένεια περιέχει μια (single) πραγματική ιδιοτιμή λ με πολλαπλότητα τρία. Τότε $tr(A) = 3\lambda$ και $\sigma(A) = 3\lambda^2$. Αναπτύσσοντας αυτές τις δύο εξισώσεις σε όρους συνιστωσών του A όπως στην (2.115), και εισάγοντας την πρώτη στην δεύτερη προκύπτει μια τετραγωνική εξίσωση για το λ, η διακρίνουσα D της εξίσωσης αυτής ικανοποιεί $D \leq 0$. Αλλά το λ έχει υποτεθεί πραγματικό, άρα θα πρέπει $D = 0$, το οποίο με την σειρά του επιβάλλει ο A να είναι πολλαπλάσιο του ταυτοτικού πίνακα, για τον οποίο και ισχύει το αποτέλεσμα.

Η τελευταία περίπτωση είναι όταν μια ιδιοτιμή, έστω μ, έχει πολλαπλότητα δύο και μια άλλη έχει πολλαπλότητα ένα. Έστω υ ένα (κανονικοποιημένο) ιδιοδιάνυσμα με ιδιοτιμή μ, θεωρούμε τον πίνακα

$$X = A - \alpha\upsilon\upsilon^{\dagger} \tag{2.141}$$

με $\alpha \in \mathbb{R}$. Για τις περισσότερες τιμές του α, το X θα έχει τρείς διακεκριμένες πραγματικές ιδιοτιμές, των οποίων τα ιδιοδιανύσματα θα είναι ορθογώνια με βάση το προηγούμενο θεώρημα. Αλλά αυτό σημαίνει ότι τα ιδιοδιανύσματα του X είναι επίσης ιδιοδιανύσματα του

A, η απαιτούμενη παραγοντοποίηση του A προκύπτει από αυτήν του X απλά λύνοντας την (2.141) ως προς A. ■

Να σημειώσουμε συγκεκριμένα ότι για κάποιους τετραδικούς πίνακες με ορίζουσα ίση με μηδέν μία, και μόνο μία, από αυτές τις δύο παραγοντοποιήσεις θα περιέχει μηδενική ιδιοτιμή.

Στην περίπτωση πινάκων 2×2 ισχύει,

$$(\upsilon\upsilon^{\dagger})(\upsilon\upsilon^{\dagger}) = (\upsilon^{\dagger}\upsilon)(\upsilon\upsilon^{\dagger}) \tag{2.142}$$

η οποία μας δείχνει ότι για κανονικοποιημένο υ, το $\upsilon\upsilon^{\dagger}$ τετραγωνίζει στον εαυτό του, είναι δηλαδή ταυτοδύναμο. Η παραγοντοποίηση που είναι ανάλογη με την (2.139) στην περίπτωση πινάκων 2×2 είναι λοιπόν μια ταυτοδύναμη παραγοντοποίηση, όμως, η σχέση (2.142) δεν ισχύει για πίνακες 3×3, επομένως η παραγοντοποίηση του θεωρήματος 2.5.1 δεν είναι ταυτοδύναμη.

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι αν u, υ και w είναι ορθοκανονικά με την έννοια της (2.65) τότε

$$uu^{\dagger} + \upsilon\upsilon^{\dagger} + ww^{\dagger} = I \tag{2.143}$$

αφού το αριστερό μέλος έχει ιδιοτιμή 1 με πολλαπλότητα τρία. Αυτό μας επιτρέπει να δούμε το $\{u, \upsilon, w\}$ σαν μια βάση του $\mathbb{O}^3$ με την ακόλουθη έννοια

Λήμμα 2.5.3: Έστω $u, \upsilon, w \in \mathbb{O}^3$ ορθοκανονικά με την έννοια (2.65) και έστω g κάθε διάνυσμα στον $\mathbb{O}^3$. Τότε

$$g = (uu^{\dagger})g + (\upsilon\upsilon^{\dagger})g + (ww^{\dagger})g \tag{2.144}$$

Απόδειξη: Προκύπτει άμεσα από την (2.143). ■

Ωστόσο, μια άλλη συνέπεια της αποτυχίας της (2.142) στην περίπτωση πινάκων 3×3, είναι ότι δεν ισχύει η μέθοδος κανονικοποίησης Gram-Schmidt. Φαίνεται να είναι τυχαίο ότι παρόλα αυτά μπορούμε να βρούμε ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα για τους πίνακες 3×3 με επαναλαμβανόμενες ιδιοτιμές. Υποψιαζόμαστε ότι αυτό μπορεί να μην ισχύει γενικά, ίσως ήδη στην περίπτωση πινάκων 4×4 με μια ιδιοτιμή πολλαπλότητας τρία.

Μπορούμε να συσχετίσουμε την έννοια της ορθοκανονικότητας με την συνήθη, παρατηρώντας ότι n διανύσματα στον $\mathbb{O}^n$ τα οποία είναι ορθοκανονικά με την έννοια (2.65) ικανοποιούν την παρακάτω εξίσωση

$$vv^\dagger + \cdots + ww^\dagger = I \tag{2.145}$$

Αν ορίσουμε ένα πίνακα U του οποίου οι στήλες είναι ακριβώς $v, \ldots, w$, τότε η παραπάνω διατύπωση είναι ισοδύναμη με την

$$UU^\dagger = I \tag{2.146}$$

Στις τετράδες οι αντίστροφοι του αριστερού πίνακα είναι ίδιοι με αυτούς του δεξιού, και θα ισχύει επίσης

$$U^\dagger U = I \tag{2.147}$$

ή ισοδύναμα

$$v^\dagger v = 1 = \cdots = w^\dagger w, \qquad v^\dagger w = 0 = \cdots \tag{2.148}$$

που είναι απλά η συνήθης έννοια της ορθογωνιότητας. Αυτές οι δύο έννοιες δεν είναι ισοδύναμες στα οκτόνια, έτσι οδηγούμαστε στο να θεωρήσουμε το προηγούμενο ως θεμελιώδες.

Μπορούμε τώρα να γράψουμε ξανά την εξίσωση ιδιοτιμών στην μορφή

$$AU = UD \tag{2.149}$$

όπου D είναι ένας διαγώνιος πίνακας του οποίου τα στοιχεία είναι πραγματικές ιδιοτιμές (και αφού είναι πραγματικές δεν έχει σημασία αν τις βάλουμε από δεξιά). Πολλαπλασιάζοντας την (2.149) από αριστερά με $U^\dagger$, προκύπτει

$$U^\dagger(AU) = U^\dagger(UD) = (U^\dagger U)D \tag{2.150}$$

αφού ο D πραγματικός, αλλά αυτό δεν οδηγεί σε διαγωνοποίηση του A, αφού όπως αναφέραμε παραπάνω ο $U^\dagger U$ δεν είναι εν γένει ίσος με τον ταυτοτικό πίνακα. Ωστόσο, το θεώρημα 2.5.1 μπορεί να ξαναγραφεί ως

$$A = UDU^\dagger \tag{2.151}$$

έτσι ώστε, με την έννοια αυτή ο A είναι διαγωνοποιήσιμος. Επιπλέον, πολλαπλασιασμός της (2.149) από δεξιά με $U^\dagger$ δείχνει ότι

$$(AU)U^\dagger = (UD)U^\dagger = A = A(UU^\dagger) \tag{2.152}$$

και αυτός ο ισχυρισμός της προσεταιριστικότητας μπορεί να θεωρηθεί σαν μια επαναδιατύπωση του θεωρήματος 2.5.1. Στην περίπτωση πινάκων 2×2, η προσεταιριστικότητα ισχύει για ένα απλό ιδιοδιάνυσμα υ δηλαδή,

$$(A\upsilon)\upsilon^\dagger = A(\upsilon\upsilon^\dagger) \tag{2.153}$$

από το οποίο προκύπτει

$$A = A\left(\sum_{m=1}^{2} \upsilon_m {\upsilon_m}^\dagger\right) = \sum_{m=1}^{2} A(\upsilon_m {\upsilon_m}^\dagger) = \sum_{m=1}^{2} (A\upsilon_m){\upsilon_m}^\dagger = \sum_{m=1}^{2} \lambda_m \upsilon_m {\upsilon_m}^\dagger \tag{2.154}$$

Ωστόσο, η σχέση (2.153) δεν ισχύει για πίνακες 3×3, και δεν γνωρίζουμε μια αντίστοιχη απόδειξη του θεωρήματος 2.5.1.

Στην αρχική απόδειξη για την ορθογωνιότητα πινάκων 3×3 χρησιμοποιήσαμε Mathematica για να εκτελέσουμε έναν εκτενή, αλλά όχι ακριβή, αλγεβρικό υπολογισμό. Αν και αργότερα ο Okubo [21] έδωσε μια αναλυτική απόδειξη αυτού του αποτελέσματος, ο υπολογισμός με Mathematica παρόλα αυτά αποδεικνύει ένα αποτέλεσμα που θα είχε παραμείνει απλώς μία υπόθεση [20].

2.5.2: Το πρόβλημα μη πραγματικών ιδιοτιμών [13]

Χωρίς να μπορούμε να λύσουμε (κάποια εκδοχή) της χαρακτηριστικής εξίσωσης στην περίπτωση 3×3 οκτονιονικών ερμιτιανών πινάκων, δεν είναι πιθανό να προσδιορίσουμε γενικά όλες τις μη πραγματικές ιδιοτιμές ενός δοσμένου οκτονιονικού ερμιτιανού πίνακα. Επομένως, είναι κατατοπιστικό να εξετάσουμε διάφορα σαφή παραδείγματα.

Παράδειγμα 1ο

Θεωρούμε τον πίνακα

$$B = \begin{pmatrix} p & iq & kqs \\ -iq & p & jq \\ -kqs & -jq & p \end{pmatrix} \tag{2.155}$$

όπου

$$s = \cos\theta + kl\sin\theta \tag{2.156}$$

Να σημειώσουμε ότι ο B είναι τετραδικός αν $\theta = 0$. Ο B έχει πραγματικές ιδιοτιμές, οι οποίες αντιστοιχούν σε ορθοκανονικές βάσεις ιδιοδιανυσμάτων [20], αλλά έχει επίσης και ιδιοδιανύσματα με μη πραγματικές ιδιοτιμές. Για παράδειγμα:

$$\lambda_{\hat{u}} = p \pm q\bar{s}, \qquad \hat{u}_{\pm} = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ j \end{pmatrix} S_{\pm} \tag{2.157}$$

$$\lambda_{\hat{u}} = p \pm q\bar{s}, \qquad \hat{u}_{\pm} = \begin{pmatrix} j \\ 2ks \\ i \end{pmatrix} S_{\pm} \tag{2.158}$$

$$\lambda_{\hat{w}} = p \mp 2q\bar{s}, \qquad \hat{w}_{\pm} = \begin{pmatrix} j \\ -ks \\ i \end{pmatrix} S_{\pm} \tag{2.159}$$

όπου

$$S_{\pm} = \begin{cases} -kl \\ 1 \end{cases} \tag{2.160}$$

Αυτά τα ιδιοδιανύσματα και οι ιδιοτιμές μειώνονται σε σχέση με τις πραγματικές όταν $\theta \to 0$. Τα ιδιοδιανύσματα αυτά, κάπως απροσδόκητα, όταν κανονικοποιηθούν δίνουν μια παραγοντοποίηση της μορφής (2.139). Είναι επίσης αξιοσημείωτο ότι παραγοντοποιούνται ως εξής

$$B = \sum_{\alpha=1}^{3} (\upsilon_{\alpha}\lambda_{\alpha})\upsilon_{\alpha}{}^{\dagger} \tag{2.161}$$

Παράδειγμα 2ο

Ένα σχετικό παράδειγμα δίνεται από τον πίνακα

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} p & qi & \frac{q}{2}ks \\ -qi & p & \frac{q}{2}j \\ -\frac{q}{2}ks & -\frac{q}{2}jp & \end{pmatrix} \tag{2.162}$$

με το s όπως ορίσθηκε στην (2.156). Επιλέγουμε θ τέτοιο ώστε

$$s = \frac{\sqrt{5}}{3} - \frac{2}{3}kl \tag{2.163}$$

το οποίο δίνει

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} p & qi & \frac{q}{6}\left(\sqrt{5}k + 2l\right) \\ -qi & p & \frac{q}{2}j \\ -\frac{q}{6}\left(\sqrt{5}k + 2l\right) & -\frac{q}{2}j & p \end{pmatrix} \tag{2.164}$$

Οι δύο οικογένειες των πραγματικών ιδιοτιμών του $\hat{B}$ αποδεικνύεται ότι είναι $\left\{p \pm q, p \mp \frac{q}{2}\left(1 + \sqrt{3}\right), p \mp \frac{q}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$. Μερικά ιδιοδιανύσματα του $\hat{B}$ τα οποία αντιστοιχούν στις μη πραγματικές ιδιοτιμές είναι

$$\lambda_{u_1} = \left(p + \frac{\sqrt{5}}{2}q\right) - \frac{q}{2}kl, \quad u_1 = \begin{pmatrix} 3k \\ \sqrt{5}j - 2il \\ 1 + \sqrt{5}kl \end{pmatrix} \tag{2.165}$$

$$\lambda_{u_2} = \left(p + \frac{\sqrt{5}}{2}q\right) + \frac{q}{2}kl, \quad u_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{5}k + 2l \\ 3j \\ \sqrt{5} - kl \end{pmatrix} \tag{2.166}$$

$$\lambda_{v_1} = \left(p - \frac{\sqrt{5}}{3}q\right) + \frac{2q}{3}kl, \quad v_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{5}j - 2il \\ 3k \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.167}$$

$$\lambda_{\upsilon_2} = \left(p - \frac{\sqrt{5}}{3}q\right) - \frac{2q}{3}kl, \qquad \upsilon_2 = \begin{pmatrix} 3j \\ \sqrt{5}k + 2l \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.168}$$

$$\lambda_{w_1} = \left(p - \frac{\sqrt{5}}{6}q\right) - \frac{q}{6}kl, \qquad w_1 = \begin{pmatrix} 3k \\ \sqrt{5}j - 2il \\ -7 - \sqrt{5}kl \end{pmatrix} \tag{2.169}$$

$$\lambda_{w_2} = \left(p - \frac{\sqrt{5}}{6}q\right) + \frac{q}{6}kl, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{5}k + 2l \\ 3j \\ -3\sqrt{5} - 3kl \end{pmatrix} \tag{2.170}$$

Ωστόσο, δεν έχουμε καταφέρει να βρούμε κάποια παραγοντοποίηση για το $\hat{B}$ που να περιέχει αυτά τα διανύσματα. Είναι ενδιαφέρον ότι για παράδειγμα, το υ_1 είναι ορθογώνιο και στο u_1 και στο w_1 (με την έννοια (2.65)), αλλά το u_1 και το w_1 δεν είναι ορθογώνια. Στην πραγματικότητα, έχουμε δείξει χρησιμοποιώντας Mathematica, ότι δεν υπάρχουν τριπλά ιδιοδιανύσματα που να περιέχουν το w_1 το οποίο είναι ορθογώνιο με την έννοια (2.65), εκτός και αν το w_1 είναι ειδικό σε κάποια έννοια που μπορεί να προσδιοριστεί, καταλήγουμε λοιπόν στο ότι ούτε η σχέση (2.65) ούτε η (2.139) είναι γενικά αληθείς για ιδιοδιανύσματα των οποίων οι ιδιοτιμές δεν είναι πραγματικές. Είναι περίεργο, ωστόσο, ότι το άθροισμα των τετραγώνων (των εξωτερικών γινομένων) και των έξι (κανονικοποιημένων) διανυσμάτων είναι πράγματι (δύο φορές) η ταυτότητα.

Παράδειγμα 3ο

Σε όλα τα παραδείγματα που είδαμε έως τώρα, οι ιδιοτιμές ανήκαν σε μια υποάλγεβρα του $\mathbb{O}$ ορισμένη από τον προσεταιριστή (associator) $[a, b, c]$ (με

a, b, c όπως στην (2.115)). Θα δώσουμε τώρα ένα παράδειγμα [22] για το οποίο δεν ισχύει κάτι τέτοιο.

Θεωρούμε

$$C = \begin{pmatrix} p & iq & -q(j - il - jl) \\ -iq & p & q(1 + k + l) \\ q(j - il - jl) & -q(1 - k - l)p & \end{pmatrix} \tag{2.171}$$

ο οποίος έχει ένα ιδιοδιάνυσμα

$$\upsilon = \begin{pmatrix} j \\ l \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.172}$$

με ιδιοτιμή

$$\lambda_\upsilon = p + qlk \tag{2.173}$$

Ωστόσο, ο προσεταιριστής παίρνει την μορφή

$$\frac{[a, b, c]}{q^3} = [i, (j - il - jl), (1 + k + l)] = 2(l - k) \tag{2.174}$$

2.5.3: Το πρόβλημα ιδιοτιμών Jordan [23]

Στα προηγούμενα κεφάλαια εξετάσαμε το αριστερό και το δεξί πρόβλημα ιδιοτιμών για 2×2 και 3×3 οκτονιονικούς ερμιτιανούς πίνακες. Στην περίπτωση 3×3 οκτονιονικών ερμιτιανών πινάκων ακόμα και αν υποθέσαμε ότι οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές, το πρόβλημα ιδιοτιμών δεν συμπεριφέρεται όπως θα ήταν αναμενόμενο. Για αυτή την περίπτωση, υπάρχουν έξι, αντί για τρεις, πραγματικές ιδιοτιμές [19], οι οποίες συμμετέχουν σε δυο ανεξάρτητες οικογένειες καθεμία από τις οποίες περιέχει τρεις πραγματικές ιδιοτιμές που ικανοποιούν μια μετασχηματισμένη χαρακτηριστική εξίσωση αντί για την

συνήθη. Επιπλέον, τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα δεν είναι ορθογώνια με την συνήθη έννοια, αλλά ικανοποιούν μια γενικευμένη έννοια της ορθογωνιότητας [20,21]. Τέλος, όλοι αυτοί οι πίνακες έχουν μια παραγοντοποίηση σε όρους (τα "τεράγωνα" των) ορθοκανονικών διανυσμάτων. Ωστόσο, εξαιτίας των προβλημάτων της προσεταιριστικότητας αυτοί οι πίνακες δεν είναι ταυτοδύναμοι (δηλαδή πίνακες που τετραγωνίζουν στον εαυτό τους).

Εδώ θα περιγράψουμε ένα σχετικό πρόβλημα ιδιοτιμών για 3×3 οκτονιονικούς ερμιτιανούς πίνακες οι οποίοι δεν έχουν τις συνήθης ιδιότητες: Υπάρχουν τρεις πραγματικές ιδιοτιμές, οι οποίες λύνουν την χαρακτηριστική εξίσωση και οδηγούν σε μια παραγοντοποίηση σε όρους ορθογώνιων "ιδιοδιανυσμάτων" που είναι πράγματι πρωτεύουσες ταυτοδυναμίες (primitive idempotents).

Θεωρούμε το πρόβλημα του ιδιοπίνακα

$$A \circ V = \lambda V \tag{2.175}$$

όπου ο V είναι οκτονιονικός ερμιτιανός πίνακας και το $\circ$ συμβολίζει το γινόμενο Jordan [24,25]

$$A \circ B = \frac{1}{2}(AB + BA) \tag{2.176}$$

το οποίο είναι αντιμεταθετικό αλλά όχι προσεταιριστικό. Επιπλέον, θέσαμε τον περιορισμό στο V να είναι πρωτεύουσα ταυτοδυναμία, όπως αναφέραμε παραπάνω, αυτό μας εξασφαλίζει ότι το πρόβλημα ιδιοτιμών Jordan (1.175) ανάγεται στο κλασικό πρόβλημα ιδιοτιμών (2.18) στην μη οκτονιονική περίπτωση. Αφού A και V είναι πίνακες Jordan, το αριστερό μέλος της (2.175) είναι ερμιτιανό, άρα αναγκαστικά το λ θα είναι πραγματικός.

Υποθέτουμε αρχικά ότι ο A είναι διαγώνιος. Τότε τα διαγώνια στοιχεία p, m, n είναι σαφώς ιδιοτιμές, με προφανείς διαγώνιους ιδιοπίνακες. Υπάρχουν, όμως, και άλλες ιδιοτιμές, για παράδειγμα

$$\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{p+m}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.177}$$

έτσι οι μέσοι $\frac{(p+m)}{2}, \frac{(m+n)}{2}, \frac{(n+p)}{2}$, είναι επίσης ιδιοτιμές. Ωστόσο, στους αντίστοιχους ιδιοπίνακες, οι οποίοι σχετίζονται με την παραγοντοποίηση Peirce [26,27], τα στοιχεία της διαγωνίου τους είναι μόνο μηδέν, και έτσι δεν τετραγωνίζουν στον εαυτό τους. Για να αποκλείσουμε αυτή την περίπτωση, περιορίζουμε τον V στην (2.175) στο επίπεδο Cayley, που εξασφαλίζει ότι οι ιδιοπίνακες είναι πρωτεύσουσες ταυτοδυναμίες, όπως θα δούμε πράγματι αντιστοιχούν σε "ιδιοδιανύσματα" υ. Να υπενθυμίσουμε ότι αυτή η συνθήκη υποχρεώνει τις συνιστώσες του V να βρίσκονται σε μια τετραδική υποάλγεβρα του $\mathbb{O}$ (που βασίζεται στο V) αν και για τις συνιστώσες του A ίσως δεν ισχύει το ίδιο.

Στην συνέχεια θεωρούμε την χαρακτηριστική εξίσωση (2.113) στην μορφή

$$-det(A - \lambda I) = \lambda^3 - (trA)\lambda^2 + \sigma(A)\lambda - (detA)I = 0 \tag{2.178}$$

Αρχικά δεν είναι προφανές ότι όλες οι λύσεις λ της εξίσωσης αυτής είναι πραγματικές. Για να γίνει λοιπόν ξεκάθαρο, σημειώνουμε ότι ο A μπορεί να γραφεί ξανά ως ένας 24×24 πραγματικός συμμετρικός πίνακας, του οποίου οι ιδιοτιμές είναι φυσικά πραγματικές. Ωστόσο, όπως έχουμε ήδη αναφέρει στα προηγούμενα κεφάλαια, οι ιδιοτιμές αυτές δεν ικανοποιούν την

χαρακτηριστική εξίσωση (2.178), αλλά μια μετασχηματισμένη χαρακτηριστική εξίσωση της μορφής

$$det(A - \lambda I) + r = 0 \tag{2.179}$$

όπου το r είναι μια από τις ρίζες μιας τετραγωνικής εξίσωσης που βασίζεται στον A, συγκεκριμένα η (2.133). Όπως έχει αποδειχθεί (με χρήση Mathematica [figure 5, 20]) αυτές οι λύσεις όχι μόνο είναι πραγματικές, αλλά έχουν και αντίθετα πρόσημα (ή τουλάχιστον μια μηδενική λύση). Επίσης, μπορούμε να δούμε άμεσα χρησιμοποιώντας στοιχειώδης γραφικές τεχνικές ότι, αν η κυβική εξίσωση (2.179) έχει τρεις πραγματικές λύσεις για μια θετική και μια αρνητική τιμή του r, έχει επίσης τρεις πραγματικές λύσεις για όλες τις τιμές του r, συμπεριλαμβανομένης και της μηδενικής $r = 0$. Και έτσι αποδεικνύεται ότι η (2.178) έχει πράγματι τρεις πραγματικές λύσεις.

Εναλλακτικά, αφού η F_4 διατηρεί και την ορίζουσα και το ίχνος (και επομένως και το σ) [16,28], δεν επηρεάζει την χαρακτηριστική εξίσωση. Εφόσον η ομάδα F_4 μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να διαγωνοποιήσουμε τον πίνακα A [16,23,28] (βλέπε ενότητα 2.5), και αφού τα επαγόμενα διαγώνια στοιχεία προφανώς ικανοποιούν την χαρακτηριστική εξίσωση έχουμε μια άλλη, έμμεση, απόδειξη ότι η χαρακτηριστική εξίσωση έχει τρεις πραγματικές λύσεις. Επιπλέον, με αυτό το επιχείρημα δείχνουμε ότι αυτές οι τρεις λύσεις αντιστοιχούν ακριβώς σε τρεις πραγματικές ιδιοτιμές των οποίων οι ιδιοπίνακες βρίσκονται σε ένα επίπεδο Cayley. Επομένως, θα αναφερόμαστε με τον όρο "ιδιοτιμή" σε αυτές τις τρεις λύσεις της χαρακτηριστικής εξίσωσης (2.178) αποκλείοντας αυστηρά τους μέσους τους. Με τον παραπάνω ισχυρισμό δείχνουμε ότι αυτές οι ιδιοτιμές αντιστοιχούν σε λύσεις του V στην

(2.175) που βρίσκονται στο επίπεδο Cayley, το οποίο και θα επαληθεύσουμε παρακάτω.

Περιορίζοντας τις ιδιοτιμές με αυτόν τον τρόπο, έχει γίνει αντιστοίχιση με το κλασικό πρόβλημα ιδιοτιμών υπό την ακόλουθη έννοια: Αν τα στοιχεία του A και οι συνιστώσες του $\upsilon \neq 0$ βρίσκονται σε μια τετραδική υποάλγεβρα των οκτονίων, τότε το πρόβλημα ιδιοτιμών Jordan (2.175) μαζί με τον περιορισμό στο επίπεδο Cayley γίνεται

$$A\upsilon\upsilon^{\dagger} + \upsilon\upsilon^{\dagger}A = 2\lambda\upsilon\upsilon^{\dagger} \tag{2.180}$$

Πολλαπλασιάζοντας την (2.180) από δεξιά με υ και απλοποιώντας το αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας το ίχνος από την (2.180) οδηγούμαστε άμεσα στην σχέση $A\upsilon = \lambda\upsilon$ (με $\lambda \epsilon \mathbb{R}$) δηλαδή, από την εξίσωση ιδιοτιμής Jordan συνεπάγεται η συνήθης εξίσωση ιδιοτιμής. Αφού ο αντίστροφος είναι άμεσος, το πρόβλημα ιδιοτιμών Jordan (2.175) (υπό τον περιορισμό το V να βρίσκεται στο επίπεδο Cayley, αλλά ο A να είναι οκτονιονικός) φαίνεται να είναι μια λογική γενίκευση του συνήθους προβλήματος ιδιοτιμών.

Τώρα θα δείξουμε πως από την (2.175) μπορούμε να κατασκευάσουμε ιδιοπίνακες V περιορισμένους στο επίπεδο Cayley και με πραγματικές ιδιοτιμές λ που να ικανοποιούν την χαρακτηριστική εξίσωση (2.178). Από τον ορισμό της ορίζουσας έχουμε για λ πραγματικό που ικανοποιεί την (2.178)

$$0 = det(A - \lambda I) = (A - \lambda I) \circ \big((A - \lambda I) * (A - \lambda I)\big) \tag{2.181}$$

Έτσι, θέτοντας

$$\mathcal{Q}_{\lambda} = (A - \lambda I) * (A - \lambda I) \tag{2.182}$$

έχουμε

$$(A - \lambda I) \circ \mathcal{Q}_\lambda = 0 \tag{2.183}$$

έτσι ώστε το $\mathcal{Q}_\lambda$ είναι λύση της (2.175).

Λόγω της ταυτότητας

$$(X * X) * (X * X) = (detX)X \tag{2.184}$$

έχουμε

$$\mathcal{Q}_\lambda \circ \mathcal{Q}_\lambda = 0 \tag{2.185}$$

Αν $\mathcal{Q}_\lambda \neq 0$, μπορούμε να κανονικοποιήσουμε ξανά το $\mathcal{Q}_\lambda$ **ορίζοντας**

$$P_\lambda = \mathcal{Q}_\lambda \,/\, tr(\,\mathcal{Q}_\lambda\,) \tag{2.186}$$

Κάθε επαγόμενο P_λ βρίσκεται στο επίπεδο Cayley είναι δηλαδή, μια πρωτεύουσα ταυτοδυναμία (primitive idepontent). Λόγω της (2.185) και της γνωστής σχέσης $X = \upsilon\upsilon^\dagger$ μπορούμε να γράψουμε

$$P_\lambda = \upsilon_\lambda {\upsilon_\lambda}^\dagger \tag{2.187}$$

και καλούμε το υ_λ το γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα του A με ιδιοτιμή λ. Να σημειώσουμε ότι το λ δεν ικανοποιεί εν γένει ούτε την (2.7) ούτε την (2.18). Ισχύει

$$A \circ \upsilon_\lambda {\upsilon_\lambda}^\dagger = \lambda \upsilon_\lambda {\upsilon_\lambda}^\dagger \tag{2.188}$$

καθώς και

$${\upsilon_\lambda}^\dagger \upsilon_\lambda = 1 \tag{2.189}$$

Γράφοντας όλους τους όρους και χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες

$$\tilde{X} = X - tr(X)I = -2I * X \tag{2.190}$$

$$\left(\tilde{X} \circ X\right) \circ (X * X) = (detX)\tilde{X} \tag{2.191}$$

από όπου με υπολογισμό προκύπτει άμεσα ότι

$$\mathcal{Q}_\lambda \circ (A \circ \mathcal{Q}_\mu) = (\mathcal{Q}_\lambda \circ A) \circ \mathcal{Q}_\mu \tag{2.192}$$

Αν λ, μ οι λύσεις της χαρακτηριστικής εξίσωσης (2.178), τότε χρησιμοποιώντας την (2.183) οδηγούμαστε στην

$$\mu(\mathcal{Q}_\lambda \circ \mathcal{Q}_\mu) = \lambda(\mathcal{Q}_\lambda \circ \mathcal{Q}_\mu) \tag{2.193}$$

Αν τώρα υποθέσουμε ότι $\lambda \neq \mu$ και $\mathcal{Q}_\lambda \neq 0 \neq \mathcal{Q}_\mu$, αυτός ο υπολογισμός δείχνει ότι οι ιδιοπίνακες που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνιοι υπό την παρακάτω έννοια

$$P_\lambda \circ P_\mu = 0 \tag{2.194}$$

όπου έχουμε κανονικοποιήσει τους ιδιοπίνακες.

Τώρα θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου $\mathcal{Q}_\lambda = 0$. Αρχικά έχουμε

$$tr(\mathcal{Q}_\lambda) = tr\big((A - \lambda I) * (A - \lambda I)\big) = \sigma(A - \lambda I) \tag{2.195}$$

Συμβολίζοντας τις τρείς πραγματικές λύσεις της χαρακτηριστικής εξίσωσης (2.178) με λ, μ, ν έτσι ώστε

$$trA = \lambda + \mu + \nu \tag{2.196}$$

$$\sigma(A) = \lambda(\mu + \nu) + \mu\nu \tag{2.197}$$

τότε έχουμε

$$\sigma(A - \lambda I) = \sigma(A) - 2\lambda trA + 3\lambda^2 = (\lambda - \mu)(\lambda - \nu) \tag{2.198}$$

Αλλά από την (2.185) και από τη γνωστή σχέση $X * X = O = trX \Leftrightarrow X = 0$, $\mathcal{Q}_\lambda = 0$ αν και μόνο αν $tr(\mathcal{Q}_\lambda) = 0$. Επομένως, χρησιμοποιώντας την (2.195) και την (2.198) βλέπουμε ότι $\mathcal{Q}_\lambda = 0$ αν, και μόνο αν, το λ είναι λύση της (2.178) με πολλαπλότητα μεγαλύτερη του ένα. Θα επιστρέψουμε σε αυτή την περίπτωση παρακάτω.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι εάν δεν υπάρχουν επαναλαμβανόμενες λύσεις της χαρακτηριστικής εξίσωσης (2.178), το πρόβλημα ιδιοπινάκων οδηγεί στην παραγοντοποίηση

$$A = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i P_i \tag{2.199}$$

σε όρους ορθογώνιων πρωτευουσών ταυτοδυναμιών, οι οποίες εκφράζουν κάθε πίνακα Jordan A ως άθροισμα τετραγώνων τετραδικών στηλών. Για να γίνει αυτό ξεκάθαρο, εύκολα μπορεί κανείς να διαπιστώσει ότι $tr(B) = 0 = \sigma(B)$, όπου $B = A - \sum \lambda_i P_{\lambda_i}$, αλλά αυτό συνεπάγεται ότι $tr(B^2) = 0$, άρα $B = 0$. Δίνουμε έμφαση στο ότι οι συνιστώσες των ιδιοπινάκων P_{λ_i} δεν βρίσκονται απαραίτητα στην ίδια τετραδική υποάλγεβρα, και ότι ο A είναι οκτονιονικός. Παρόλα αυτά, είναι αξιοσημείωτο ότι ο A παραγοντοποιείται σε όρους οι οποίοι είναι μεμονωμένα τετραδικοί.

Τώρα επιστρέφουμε στην περίπτωση $\mathcal{Q}_\lambda = 0$, που αντιστοιχεί σε επαναλαμβανόμενες ιδιοτιμές. Αν λ είναι μια λύση της χαρακτηριστικής εξίσωσης (2.178) πολλαπλότητας τρία, τότε $trA = 3\lambda$ και $\sigma(A) = 3\lambda^2$, και άρα [17] $A = \lambda I$, η οποία έχει μια τετριμμένη παραγοντοποίηση σε ορθοκανονικές

πρωτεύουσες ταυτοδυναμίες (primitive idempotents). Μας έχει μείνει η περίπτωση όπου έχουμε πολλαπλότητα δύο, που αντιστοιχεί στο $A \neq \lambda I$ και $\mathcal{Q}_\lambda = 0$.

Αφού $\mathcal{Q}_\lambda = 0$, το $A - \lambda I$ βρίσκεται (κανονικοποιημένο) σε ένα επίπεδο Cayley, και έχουμε

$$A - \lambda I = \pm w w^\dagger \tag{2.200}$$

με τις συνιστώσες του w να ανήκουν σε κάποια τετραδική υποάλγεβρα του $\mathbb{O}$. Ενώ το $ww^\dagger$ είναι πράγματι ένας ιδιοπίνακας του A, με ιδιοτιμή $\mu = tr(A) - 2\lambda \neq \lambda$. Ωστόσο, είναι εύκολο να κατασκευάσουμε ένα διάνυσμα υ που να είναι ορθογώνιο στο w, υπό μια κατάλληλη έννοια. Για παράδειγμα, αν

$$w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ r \end{pmatrix} \tag{2.201}$$

με $r \in \mathbb{R}$, τότε επιλέγοντας

$$\upsilon = \begin{pmatrix} |y|^2 \\ -y\bar{x} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.202}$$

προκύπτει

$$\upsilon\upsilon^\dagger \circ ww^\dagger = 0 \tag{2.203}$$

και μόνο ελάχιστοι μετασχηματισμοί απαιτούνται για να εφαρμόσουμε αυτό το παράδειγμα στην γενική περίπτωση. Αλλά η (2.200) συνεπάγεται τώρα ότι

$$A \circ \upsilon\upsilon^\dagger = \lambda \upsilon\upsilon^\dagger \tag{2.204}$$

και έτσι έχουμε κατασκευάσει έναν ιδιοπίνακα του A με ιδιοτιμή λ.

Μπορούμε τώρα να αλλάξουμε ελαφρώς τον A προσθέτοντας $\varepsilon\, \upsilon\upsilon^{\dagger}$, έτσι αλλάζουμε την ιδιοτιμή του $\upsilon\upsilon^{\dagger}$ με ε. Ο επαγόμενος πίνακας θα έχει τρείς άνισες ιδιοτιμές, και έτσι θα παραγοντοποιείται όπως στην (2.199) σε όρους ορθογώνιων πρωτευουσών ταυτοδυναμιών. Αυτές οι ταυτοδυναμίες θα είναι επίσης ιδιοπίνακες του A, και έτσι παράγεται μια ορθογώνια παραγοντοποίηση του A πρωτεύσουσας ταυτοδυναμίας. Συνοψίζοντας, παραγοντοποιήσεις ανάλογες με την (2.199) μπορούν επίσης να προκύψουν όταν υπάρχει επαναλαμβανόμενη ιδιοτιμή, αλλά οι όροι που αντιστοιχούν σε αυτήν δεν μπορούν να γραφούν σε όρους των προβολών P_{λ}, και φυσικά η παραγοντοποίηση του αντίστοιχου ιδιόχωρου δεν είναι μοναδική [25].

2.5.4: Διαγωνοποίηση πινάκων Jordan με την F_4

Η ομάδα F_4 είναι η αυτομορφική ομάδα του γινομένου Jordan και του Freudenthal δηλαδή, αν $X, Y \in \mathbb{H}_3(\mathbb{O})$ και $\varphi \in F_4$, τότε

$$\varphi(X \circ Y) = \varphi(X) \circ \varphi(Y) \tag{2.205}$$

$$\varphi(X * Y) = \varphi(X) * \varphi(Y) \tag{2.206}$$

Θα μπορούσαμε να πούμε ότι η F_4 μας επιτρέπει να αλλάζουμε βάση στον $\mathbb{H}_3(\mathbb{O})$, χωρίς να επηρεάζεται η κανονικοποίηση ή το εσωτερικό γινόμενο. Έχουμε ήδη δει ότι πράγματι υπάρχει ένα πρόβλημα ιδιοτιμών πίνακα Jordan $X \in \mathbb{H}_3(\mathbb{O})$, με ακριβώς τρείς πραγματικές ιδιοτιμές (συμπεριλαμβανομένης της πολλαπλότητας). Επομένως, περιμένουμε ότι θα μπορέσουμε να βρούμε μία βάση στην οποία ο X θα είναι διαγώνιος. Θα δείξουμε εδώ ότι αυτή η υπόθεση

είναι σωστή, και ότι κάθε πίνακας Jordan μπορεί να διαγωνοποιηθεί χρησιμοποιώντας μετασχηματισμούς F_4.

Ξεκινάμε με ένα πίνακα Jordan της μορφής (2.115) και θα δείξουμε πως διαγωνοποιείται με πεπλεγμένους μετασχηματισμούς F_4. Γνωρίζουμε ότι ένα σύνολο γεννητόρων για την F_4 μπορεί να αποκτηθεί θεωρώντας τις υποομάδες $SO(9)$, οι οποίες με την σειρά τους μπορούν να γενικευθούν σε 2×2 οκτονιονικούς ερμιτιανούς πίνακες με ίχνος μηδέν [16].

Όπως και στην συνήθη διαδικασία διαγωνοποίησης, είναι αρχικά απαραίτητο να λύσουμε την χαρακτηριστική εξίσωση ιδιοτιμών. Έστω λ μια λύση της (2.113) και έστω $\upsilon\upsilon^{\dagger} \neq 0$ μια λύση της (2.175) με ιδιοτιμή λ (πολλαπλότητας ένα, χωρίς βλάβη της γενικότητας). Επιπλέον υποθέτουμε ότι η φάση υ επιλέγεται έτσι ώστε

$$\upsilon = \begin{pmatrix} x \\ y \\ r \end{pmatrix} \tag{2.207}$$

όπου $x, y \in \mathbb{O}$ και $r \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε

$$M_1 = \frac{1}{N_1}\begin{pmatrix} -r & 0 & x \\ 0 & N_1 & 0 \\ \bar{x} & 0 & r \end{pmatrix} \tag{2.208}$$

$$M_2 = \frac{1}{N_2}\begin{pmatrix} N_2 & 0 & 0 \\ 0 & -N_1 & y \\ 0 & \bar{y} & N_1 \end{pmatrix} \tag{2.209}$$

όπου οι σταθερές κανονικοποίησης δίνονται από ${N_1}^2 = |x|^2 + r^2$ και ${N_2}^2 = {N_1}^2 + |y|^2 = \upsilon^{\dagger}\upsilon \neq 0$. Αν $N_1 = 0$, τότε ο A είναι ήδη block διαγώνιος.

Βλέπουμε ότι

$$M_2 M_1 \upsilon = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.210}$$

και αφού όλα μέχρι στιγμής είναι τετραδικά αυτό συνεπάγεται

$$M_2 M_1 \upsilon\upsilon^\dagger M_1 M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \varepsilon_3 \tag{2.211}$$

εφόσον δεν τίθεται θέμα προσεταιριστικότητας.

Όμως η συζυγία για καθένα από τα M_i είναι ένας μετασχηματισμός F_4 (ο οποίος είναι καλά ορισμένος αφού κάθε M_i ξεχωριστά έχει συνιστώσες που βρίσκονται σε μια μιγαδική υποάλγεβρα του $\mathbb{O}$) σε αυτήν ακριβώς την μορφή γεννητόρων αναφερθήκαμε νωρίτερα. Επιπλέον, η F_4 είναι η αυτομορφική ομάδα του γινομένου Jordan (2.176). Έτσι, αφού

$$(A - \lambda\upsilon\upsilon^\dagger) \circ \upsilon\upsilon^\dagger = 0 \tag{2.212}$$

τότε αφού εφαρμόσουμε τον (πεπλεγμένο) μετασχηματισμό F_4 παίρνουμε

$$(M_2(M_1(A - \lambda I)M_1)M_2) \circ \varepsilon_3 = 0 \tag{2.213}$$

και άρα

$$M_2(M_1 A M_1)M_2 = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \tag{2.214}$$

όπου

$$X = \begin{pmatrix} s & z \\ \bar{z} & t \end{pmatrix} \tag{2.215}$$

είναι ένας 2×2 οκτονιονικός ερμιτιανός πίνακας, με $z \in \mathbb{O}$ και $s, t \in \mathbb{R}$.

Το τελευταίο βήμα ισοδυναμεί με την διαγωνοποίηση του X, η οποία είναι εύκολη. Έστω μ κάθε ιδιοτιμή του X (που στην πραγματικότητα σημαίνει ότι είναι άλλη μια λύση της (2.113)) και θέτουμε

$$M_3 = \frac{1}{N_3}\begin{pmatrix} \mu - t & 0 & 0 \\ 0 & t - \mu & z \\ 0 & \bar{z} & N_3 \end{pmatrix} \tag{2.216}$$

όπου $N_3 = (\mu - t)^2 + |z|^2$. Αν $N_3 = 0$, ο X είναι ήδη διαγώνιος. Τελικά προκύπτει

$$M_3(M_2(M_1 A M_1)M_2)M_3 = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & tr(X) - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \tag{2.217}$$

και καταφέραμε λοιπόν να διαγωνοποιήσουμε τον A χρησιμοποιώντας την F_4 όπως είχαμε ισχυριστεί.

2.6 Εφαρμογές

Τα μοντέλα οκτονίων επί του παρόντος είναι η εστία πολλής δουλείας στην φυσική κοινότητα (βλ. Okubo [32], Gursey [33], Ward [46] και Dixon [39]). Ο Yaglom [47, $\sigma\varepsilon\lambda.$ 94,107] κάνει λόγο για μια "octonion boom" η οποία μοιάζει να επιταχύνεται. Ιστορικά μιλώντας, οι εφευρέτες των τετράδων, των οκτονίων και σχετικών αλγεβρών (ο Hamilton, ο Cayley, ο Graves, ο Grassmann, ο Jordan, ο Clifford και άλλοι) δούλευαν από φυσική σκοπιά και ήθελαν οι παρατηρήσεις τους να είναι χρήσιμες για την λύση φυσικών προβλημάτων [47]. Ωστόσο, η σύνδεση μεταξύ φυσικής και οκτονίων είναι μια λογική σκέψη, αλλά όχι ακόμα μια επιβεβαιωμένη υποψία.

Είναι εύκολο να αντιληφθούμε πόσο δελεαστική είναι η ύπαρξη ενός οκτονίου, αφού υπάρχουν πολλά φαινόμενα στην στοιχειώδη σωματιδιακή χώρα τα οποία έχουν 8-fold συμμετρίες. Ένας άλλος λόγος έγκειται στο ότι δεν μπορούμε να προχωρήσουμε πέρα από τα οκτόνια χωρίς να θυσιάσουμε τις βασικές αριθμητικές πράξεις.

Φυσικά ο πολλαπλασιασμός στην οκτονιονική αριθμητική, όπως έχουμε δει, αποτυγχάνει στο να είναι είτε αντιμεταθετικός είτε προσεταιριστικός. Το γεγονός όμως, αυτό μπορεί να αποδειχθεί χρήσιμο. Εάν λοιπόν, ο πολλαπλασιασμός εξαρτάται από την σειρά των στοιχείων που πολλαπλασιάζονται ακόμα και από το πώς ομαδοποιούνται, τότε μονομιάς η γεωμετρία εισάγεται στον υπολογισμό με ένα οργανικό τρόπο. Η Αρχή της Απροσδιοριστίας θα μπορούσε τότε να προκύψει με φυσικό τρόπο από σχετικιστικές θεωρήσεις, μετατρέποντας την κβαντική θεωρία σαν μια συνέπεια μιας βασικής 8-διάστατης μεθόδου κρυφών μεταβλητών, πολύ κοντά στις θεωρίες των de Broglie και Bohm. Η αβεβαιότητα των μετρήσεων θα είναι το πόρισμα της αδυναμίας μας να διατάξουμε απόλυτα τα ενδεχόμενα ή να ελέγξουμε απόλυτα με ποιόν τρόπο αυτά ομαδοποιούνται.

Απλοϊκά, οι μετρήσεις είναι πραγματικοί αριθμοί, όμως οι μιγαδικοί αριθμοί είναι πλέον πανταχού παρόν στην φυσική (π.χ στην οπτική (optics) και στην επιστήμη των ηλεκτρονίων). Καθώς οι μιγαδικοί αριθμοί επεκτείνουν τους πραγματικούς οι τετράδες του Hamilton παρέχουν ένα χρήσιμο τετραδιάστατο εργαλείο με άμεσες εφαρμογές στην οπτική και την μηχανική. Ο Dirac παρατήρησε ότι οι τετράδες μπορούν να εξηγήσουν τέτοια τρισδιάστατα φαινόμενα.

Υπάρχουν μόνο τέσσερις άλγεβρες διαιρέτες στους πραγματικούς. Εκτός από τα οκτόνια, οι υπόλοιπες (πραγματικοί, μιγαδικοί και τετράδες) έχουν αποδειχθεί χρήσιμες στην φυσική, ως έχουν οι άλγεβρες Clifford οι οποίες τις γενικεύουν. Το γεγονός αυτό μετατρέπει τα οκτόνια σε ένα φυσικό στόχο για τους φυσικούς και τους μαθηματικούς [39]. Μέχρι τώρα, δεν φαίνεται να είναι ξεκάθαρη η κατάσταση στην οποία τα οκτόνια έχουν έναν ουσιαστικό τρόπο εφαρμογής στην φυσική [46, vii]. Ωστόσο, ο Freudenthal [40] και ο Tits [45] ανακάλυψαν ότι οι πέντε απλές ιδιάζουσες (singular) ομάδες Lie (οι οποίες δεν βρίσκονται στις τέσσερις άπειρες οικογένειες) σχετίζονται με ισομετρίες οκτονιονικών πεδίων [47, σελ. 107].

Οι τετράδες και τα οκτόνια μπορούν να χρησιμοποιηθούν επίσης, για να αποδείξουμε θεωρήματα εκφράζοντας έναν ακέραιο σαν άθροισμα τεσσάρων ή οκτώ τετραγώνων (βλ. Hardy and Wright [41], Coxeter [38]).

Μια ιδιαιτέρως ενδιαφέρουσα ενδεχόμενη εφαρμογή για την γεωμετρική άλγεβρα, η οποία συμπεριλαμβάνει τα οκτόνια, μπορεί να βρεθεί στην περίφημη Υπόθεση των Τεσσάρων Χρωμάτων, η οποία ισχυρίζεται ότι κάθε επίπεδος χάρτης μπορεί να έχει τις περιοχές τους "χρωματισμένες" χρησιμοποιώντας τέσσερις διακεκριμένες επιγραφές (labels) έτσι ώστε οι περιοχές οι οποίες μοιράζονται κοινή συνοριακή ακμή (edge) να λαμβάνουν διακεκριμένα χρώματα (για περισσότερες λεπτομέρειες βλ. [48] και [44]).

Αυτό το πρόβλημα έχει έντονη φυσική χροιά (Kauffman and Saleur [43], Bar Natan [49]). Πράγματι, η ουσία του προβλήματος θεωρείται πλέον ότι περιλαμβάνει μια αδύναμη μορφή προσεταιριστικότητας [42], και επομένως μια σύνδεση με τα οκτόνια είναι εύλογη. Ο Cayley ήταν ο πρώτος που έγραψε

για το Πρόβλημα Τεσσάρων Χρωμάτων [44], οπότε θα ήταν μια ευτυχής συγκυρία η οκτονιονική του αριθμητική να παίξει ρόλο στην λύση του.

Ερμηνεύοντας αλγεβρικά τα τρία χρώματα, η Υπόθεση των Τεσσάρων Χρωμάτων μπορεί να ορισθεί σε όρους διάφορων ερμηνειών της προσεταιριστικότητας. Αναζητώντας μια νέα απόδειξη για την Υπόθεση των Τεσσάρων Χρωμάτων, ή την πιο ισχυρή μορφή της, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε την άπειρη περίπτωση, κάτι το οποίο μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε τεχνικές της συναρτησιακής ανάλυσης. Επιπλέον, στην απειροδιάστατη περίπτωση, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τα οκτόνια αντί για τον μιγαδικό ή τον τετραδικό χώρο Hilbert.

Παρόλο λοιπόν, που τα οκτόνια δεν ικανοποιούν ούτε την προσεταιριστική ούτε την αντιμεταθετική ιδιότητα, μπορούμε να κάνουμε οτιδήποτε αρκεί να ορίσουμε τα πάντα προσεκτικά.

Βιβλιογραφία

[1] Cayley A., Note on a system of Imaginaries, Philosophical Magazine Vol. XXX, (1847).

[2] Cayley A., On the 8-square imaginaries, Amer. Jour. Math. 4, (1881).

[3] Cayley A., Remarques sur la Notition des foncions Algebriques, J. fur reine und angew Math. 50, (1885).

[4] Cayley A., A memoir on the theory of Matrices, Philos. Transactions, Vol. CXVIII, London, (1858).

[5] Clifford W., Aplications of Grassmann's extensive algebra, Amer. Jour. Math. 1, (1878).

[6] Grassmann H., Die lineale Ausdehnungslehre, Leipzing (Wiegand), (1844) and (1878).

[7] Hamilton W. R., On conjugate functions, Report of the British Association for the Advancement of Sciences, (1834).

[8] Hamilton W. R., Theory of conjugate Functions or Algebraic Couples, with a Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the Science of Pure Time, Read November 4th (1833) and June 1st (1835), Transactions of the Royal Irish Academy, Vol.XVII, (1837).

[9] Hamilton W. R., Lectures on Quaternions, Dublin, (1853).

[10] Hamilton W. R., Preface to 'Lecture on Quaternions', Mathematical papers, Vol. III.

[11] Hamilton W. R., The mathematical papers, Vol. III, Algebra, Cambridge, (1967).

[12] Freeman W. H. and Co., Jacobson Basic Algebra I, S. Francisco, (1974).

[13] Dray T., and Manogue C. A., The Geometry of the Octonions, World Scientific, (2015).

[14] Crowe M. J., A History of Vector Analysis, University of Notre Dame, Notre Dame, (1967).

[15] Dray T., The Geometry of Special Relativity, CRC Press / A K Peters, Boca Raton, FL, (2012).

[16] Harvey F. R., Spinors and Calibrations, Academic Press, Boston, (1990).

[17] Dray T. and Manogue C. A., The octonionic eigenvalue problem, Adv. Appl. Clifford Algebras 8, (1998).

[18] Dray T., Janesky J., and Manogue C. A., Octonionic Hermitian Matrices with non-real eigenvalues, Adv. Appl. Clifford Algebras 10, (2000).

[19] Ogievetskii O. V., The characteristic equation for 3x3 matrices over octaves, Russian Math. Surveys 36, (1981).

[20] Dray T., and Manogue C. A., Finding octonionic eigenvectors using Mathematica, Comput. Phys. Comm. 115, (1998).

[21] Okubo S., Eigenvalue problem for symmetric 3x3 octonionic matrix, Adv. Appl. Clifford Algebras 9, (1999).

[22] Dray T., Janesky J., and Manogue C. A., Some properties of 3x3 octonionic Hermitian matrices with non-real eigenvalues, Oregon State University preprint, (2000).

[23] Dray T., and Manogue C. A., The exceptional Jordan eigenvalue problem, Internat. J. Theoret. Phys. 38, (1999).

[24] Jordan P., Uber die Multiplikation quantenmechanischer Groben Z., Phys. 80, (1933).

[25] Jordan P., von Neumann J. and Wingner E., On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism, Ann. Math. 35, (1934).

[26] Jacobson N., Structure and Representations of Jordan Algebras, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. 39, (1968).

[27] Schafer R. D., An Introduction to Nonassociative Algebras, Academic Press, New York, (1966).

[28] Freudenthal H., Lie groups in the foundations of geometry, Adv. Math. 1, (1964).

[29] Lee H. C., Eigenvalues and Canonical Forms of Matrices with Quaternion Coefficients, Proc. Roy. Irish Acad. A52, (1949).

[30] Brener J. L., Matrices of Quaternions, Pacific J. Math 1, (1951).

[31] Cohn P. M., Skew Field Constructions, Cambridge University Press, (1977).

[32] Okubo S., Introduction to Octonion an Other Non-Associative Algebras in Physics, Cambridge University Press, Cambridge, (1995).

[33] Feza Gursey and Chia-Hsiung Tze, On the Role of Division, Jordan and Related Algebras in Particle Physics, World Scientific, Singapore, (1996).

[34] Nathan Jacobson, Structure and Representations of Jordan Algebras, American Mathematical Society, Providence, (1968).

[35] Manogue C. A. and Sudbery A., General Solutions of Covariant Superstring Equations of Motion, Phys. Rev. D40, (1989).

[36] Jordan P., von Neumann, and Wigner E., Ann. Math 36, 29, (1934), Freudenthal H., Adv. Math. 1, 145, (1964).

[37] Goldstine H. H. and Horwitz L. P., On a Hilbert space with Nonassociative Scalars, Proc. Nat. Aca. 48, (1962).

[38] Coxeter H. S. M., Integral Cayley Numbers, Duke Math. J. 13, (1946).

[39] Dixon G. M., Division Algebras: Octonions, Quaternions, Complex Numbers and the Algebraic Design of Physics, Kluwer, Dordrecht, (1994).

[40] Freudenthal H., Zur ebenen Oktavegeometrie, Proc. Kon. Akad. Wet. Amsterdam A56, (1953).

[41] Hardy G. H. and Wright E. M., An Introduction to the Theory of Numbers, Clarendon Press, Oxford, (1959).

[42] -,Map coloring and the vector cross product, Combin J. Th. B48, (1990).

[43] Kauffman L. H. and Saleur H., An algebraic approach to the planar coloring problem, Commun. Math. Phys. 152, (1993).

[44] Saaty T. L. and Kainen P. C., The Four-Color Problem, Dover Publ., New York, (1986).

[45] Tits J., Le plan projectif des octaves et les groups de Lie exceptionels, Bull. Acad. Roy. Belg. Sci. 39, (1953).

[46] Ward J. P., Quaternions and Cayley Numbers, Kluwer, Dordrecht, (1997).

[47] Yaglom I. M., Felix Klein and Sophus Lie: Evolution of the Idea of Symmetry in the Nineteenth Century, Birkhauser, Boston, (1988).

[48] Appel K. I. and Haken, Every Planar Map is Four Colorable, American Mathematical Society, Providence, RI, (1989).

[49] Bar-Natan D., Lie algebras and the four color theorem, Combinatorica 17, (1997).