



## ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ  
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

*Εφαρμογή διαφορικής γεωμετρίας και σχετικού  
προγραμματισμού στη μοντελοποίηση προϊστορικών αγγείων*

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**Κάτσικας Χαρίλαος**

Επιβλέπων: **Κωνσταντίνος Παπαοδυσσεύς**

Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2016





## **ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ  
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

*Εφαρμογή διαφορικής γεωμετρίας και σχετικού  
προγραμματισμού στη μοντελοποίηση προϊστορικών αγγείων*

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**Κάτσικας Χαρίλαος**

Επιβλέπων: **Κωνσταντίνος Παπαοδυσσεύς**

Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή του Ιουλίου 2016

.....  
Κ. Παπαοδυσσεύς  
Καθηγητής Ε.Μ.Π

.....  
Ηλ. Κουκούτσης  
Επικ. Καθηγητής Ε.Μ.Π

.....  
Β. Λούμος  
Καθηγητής Ε.Μ.Π

Αθήνα, Ιούλιος 2016



.....

Κάτσικας Χαρίλαος

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός  
Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright© Κάτσικας Χαρίλαος , 2016.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται στον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευτεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.



## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία μελετήθηκε και εφαρμόστηκε μια νέα προσέγγιση για την αυτοματοποιημένη ανακατασκευή θραυσμένων αντικειμένων επί τη βάση της τρισδιάστατης (3D) αναπαράστασης των θραυσμάτων τους. Οι σχετικές μεθοδολογίες παρουσιάστηκαν για πρώτη φορά στη δημοσίευση [1]. Αφού, πραγματοποιήσουμε τρισδιάστατη σάρωση των προς-έλεγχο θραυσμάτων, επεξεργαζόμαστε καταλλήλως τις ψηφιακές αυτές απεικονίσεις, ώστε να ελέγξουμε για πιθανές συνενώσεις. Στα πλαίσια αυτής της διπλωματικής ήταν δεδομένα σύνολα τρισδιάστατων αναπαραστάσεων θραυσμάτων (οστράκων) ταφικών αγγείων της Μυκηναϊκής περιόδου που φυλάσσονται στις αποθήκες του Εθνικού Αρχαιολογικού Μουσείου. Ειδικές τεχνικές επεξεργασίας των αναπαραστάσεων των οστράκων εφαρμόστηκαν, ώστε αυτές να έρθουν σε κατάλληλη μορφή για την εφαρμογή της προαναφερθείσας μεθοδολογίας, όπως περιγράφεται αρκετά διεξοδικά στο αντίστοιχο κεφάλαιο της παρούσας διπλωματικής. Τέλος, προτάθηκε και μία μέθοδος για την απόκτηση πληροφορίας για τη γεωμετρία του αντικειμένου εκ περιστροφής, στο οποίο ανήκει το θραυσμένο κομμάτι. Η εφαρμογή αυτής της μεθοδολογίας προσέφερε λίαν ικανοποιητικά αποτελέσματα.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: ανασύνθεση θραυσμένων αντικειμένων, ταίριασμα αντικειμένων, 3D ανάλυση προτύπων, διαφορική και υπολογιστική γεωμετρία, επιφάνειες, καμπύλες, MATLAB

## **ABSTRACT**

In the present dissertation a new approach regarding the automated reconstruction of fragmented objects has been studied and applied. This approach employs the three – dimensional (3D) representations of their fragments. The specific methodologies were presented for the first time in publication [1]. At first, we begin with the three – dimensional scanning of the available fragmented object. Then, these representations undergo appropriate processing so as to be checked for possible matching. Within the context of this dissertation, sets three – dimensional fragment representations of burial vessels belonging to the Mycenaean period were used as data. These fragments are kept in the storerooms of the National Archaeological Museum. Special processing techniques of fragments' representations were employed in order to obtain the appropriate form for the application of the aforementioned methodology, as described in the relevant chapter of this dissertation. Last but not least, a new method, which will allow us to gather more information concerning the geometry of the original prehistoric vessel, is suggested. The application of this methodology produced satisfactory results.

KEY - WORDS: Fragmented objects reconstruction, Wall paintings reconstruction, Pattern recognition, 3D pattern analysis, Differential and Computational Geometry, Curves, Surfaces, MATLAB



## ***ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ***

*Θέλω να ευχαριστήσω, θερμά, τον καθηγητή μου, κ. Κωνσταντίνο Παπαοδυσσέα, για την ανάθεση της παρούσας διπλωματικής εργασίας και για την πολύτιμη επίβλεψή του κατά την διάρκεια της εκπόνησής της. Ακόμη, τον υποψήφιο διδάκτορα κ. Κανελλόπουλο Δημήτρη, ο οποίος μου παρείχε την απαραίτητη καθοδήγηση, όπου αυτή χρειάστηκε. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για τη στήριξη που μου παρείχε όλα αυτά τα χρόνια. Τέλος, φίλους και συμφοιτητές, για τη βοήθεια που μου παρείχαν καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.*



## Πίνακας περιεχομένων

<b>1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ</b> .....	13
<b>1.1 Στόχος της διπλωματικής</b> .....	13
<b>1.2 Περί των προϊστορικών οικισμών Τίρυνθας και Μυκηνών</b> .....	13
<b>1.3 Μαθηματικά και Αρχαιολογία</b> .....	16
<b>1.4 Υπολογιστική Αρχαιολογία (Computational Archaeology)</b> .....	16
<b>1.5 Ανασύνθεση αρχαιολογικών ευρημάτων και ανάκτηση πληροφορίας</b> .....	18
<b>1.6 συναφή εργα</b> .....	20
<b>2. ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΓΙΑ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΗ ΑΝΑΣΥΝΘΕΣΗ ΘΡΑΥΣΜΕΝΩΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ</b> .....	22
<b>2.1 Προκαταρκτική επεξεργασία του θραύσματος</b> .....	22
<b>2.2 Χρησιμοποιώντας τις έννοιες του «σταθερού» και «περιστρεφόμενου» θραύσματος</b> .	22
<b>2.3 Τέσσερα κριτήρια αντιστοιχίας</b> .....	24
<b>2.3.1 Το πρώτο κριτήριο αντιστοιχίας</b> .....	24
<b>2.3.2 Δεύτερο κριτήριο αντιστοιχίας: η απαγόρευση των τοπικών και συνολικών αλληλοεπικαλύψεων στο επίπεδο επαφής <math>V_k, m</math></b> .....	25
<b>2.3.3 Το τρίτο κριτήριο αντιστοιχίας: συσχετίζοντας την γεωμετρία της επιφάνειας επαφής με το μέγιστο επιτρεπόμενο όγκο του τομέα <math>V_k, m</math></b> .....	26
<b>2.3.4 Το τέταρτο κριτήριο αντιστοιχίας</b> .....	28
<b>2.4 Περιγραφή της διαδικασίας που εφαρμόζεται για την αυτοματοποιημένη ανασύνθεση των θραυσμένων αντικειμένων με βάση τα προαναφερθέντα κριτήρια</b> .....	29
<b>3. ΚΑΜΠΥΛΕΣ</b> .....	32
<b>3.1 Ορισμοί καμπύλης, ομαλής καμπύλης, επιβατικής ακτίνας και εφαπτομένου διανύσματος</b> .....	32
<b>3.1.1 Ορισμός καμπύλης στο χώρο <math>\mathbb{R}^n</math></b> .....	32
<b>3.1.2 Ορισμός <math>C^n, C^{n1}</math> και <math>C^n -</math> καμπύλης</b> .....	32
<b>3.1.3 Ορισμός επιβατικής ακτίνας σε τυχόν σημείο καμπύλης</b> .....	33
<b>3.1.4 Ορισμός εφαπτομένου και μοναδιαίου εφαπτομένου διανύσματος καμπύλης</b> ....	33
<b>3.2 Ορισμός καμπυλότητας καμπύλης και σχετικά χρήσιμα θεωρήματα</b> .....	34
<b>3.2.1 Η περίπτωση του κύκλου: μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα <math>T</math>, αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία κύκλου και <math>r''(s)</math>.</b> .....	34
<b>3.2.2 Η γενική περίπτωση καμπύλης. Ο εγγύτατος κύκλος και η καμπυλότης με παράμετρο το μήκος καμπύλης <math>s</math>.</b> .....	35

3.3 Η καμπυλότης στη γενική περίπτωση καμπύλης με τυχούσα παράμετρο.....	37
4. ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ .....	37
4.1. Παραμετρική και διανυσματική αναπαράσταση επιφάνειας.....	37
4.2. Θεμελιώδες διανυσματικό εσωτερικό γινόμενο.....	41
4.3. Το θεμελιώδες διανυσματικό γινόμενο ως κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια .....	43
4.4 Εμβαδόν επιφάνειας .....	44
4.5 επιφάνεια εκ περιστροφής.....	48
5. ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΤΩΝ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΩΝ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΝ ΤΩΝ ΘΡΑΥΣΜΑΤΩΝ.....	51
5.1 Διαδικασία εξαγωγής της ψηφιακής απεικόνισης θραυσμάτων .....	51
5.2 Ψηφιακή επεξεργασία τρισδιάστατης απεικόνισης θραυσμάτων .....	55
5.2.1 Εντοπίζοντας τις τρεις διαφορετικές επιφάνειες του θραύσματος .....	55
5.2.2 Εξάγοντας τα περιγράμματα της «άνω» και «κάτω» επιφάνειας των θραυσμάτων	60
6. ΜΙΑ ΚΑΙΝΟΤΟΜΩΣ ΠΡΟΤΑΣΗ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΞΟΙΚΟΝΟΜΗΣΗ ΠΟΛΥΤΙΜΟΥ «ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟΥ» ΧΡΟΝΟΥ.....	63
7. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ .....	68
8.0 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ .....	69

# 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

## 1.1 Στόχος της διπλωματικής

Στην παρούσα διπλωματική θα επεξηγηθούν και εφαρμοστούν μέθοδοι που έχουν αναπτυχθεί και χρησιμοποιηθεί για την αυτόματη ανασύνθεση αρχαιολογικών θραυσμένων αντικειμένων. Τα περισσότερα αρχαιολογικά αντικείμενα έχουν ανασκαφεί κατακερματισμένα σε χιλιάδες κομμάτια, γεγονός που κάνει την ανακατασκευή τους αφενός μια επίπονη και αφετέρου μια χρονοβόρα διαδικασία. Το σύστημα και η μεθοδολογία που παρουσιάζονται ακολούθως, αντλώντας τη μέγιστη δυνατή πληροφορία από το σχήμα του περιγράμματος των θραυσμάτων, εντοπίζουν πιθανές συνενώσεις μεταξύ αυτών. Σκοπός, επομένως, αυτής της εργασίας είναι η επεξεργασία των τρισδιάστατων απεικονίσεων θραυσμάτων αγγείων (οστράκων) αρχαιολογικού ενδιαφέροντος ώστε εν συνεχεία να αναζητηθούν πιθανές ενώσει μεταξύ αυτών. Επιπλέον, θα αναζητηθούν στοιχεία της εκ περιστροφής γεωμετρίας οστράκων ταφικών αγγείων της Μυκηναϊκής περιόδου, με σκοπό την ομαδοποίηση αυτών ανάλογα με τις ομοιότητες της γεωμετρίας αυτής. Προς την κατεύθυνση αυτή μελετήθηκαν οι ιδιότητες καμπυλών και επιφανιών στον τρισδιάστατο χώρο, ενώ επίσης πραγματοποιήθηκε σχετική υλοποίηση στον υπολογιστή.

## 1.2 Περί των προϊστορικών οικισμών Τίρυνθας και Μυκηνών

Οι από άκρου εις άκρου στην Ελληνική Επικράτεια, οι αρχαιολόγοι-ανασκαφείς έχουν ανακαλύψει και συνεχίζουν να ανακαλύπτουν τεράστιας ιστορικής σημασίας ευρήματα, τα οποία όμως, λόγω των φυσικών φθορών που έχουν υποστεί όλους τους αιώνες αλλά και εξαιτίας άλλων συνθηκών, όπως η ανθρώπινη παρέμβαση, έχουν βρεθεί θραυσμένα σε διάφορα κομμάτια. Αυτά μπορεί να είναι κομμάτια τοιχογραφιών, έργα τέχνης, πήλινα αγγεία, ή ακόμη εργαλεία και αντικείμενα καθημερινής χρήσης. Τέτοιου είδους θραύσματα έχουν ανασκαφεί στους αρχαιολογικούς χώρους των Μυκηνών, Κρήτης, Θήρας, Τίρυνθας και Πύλου.

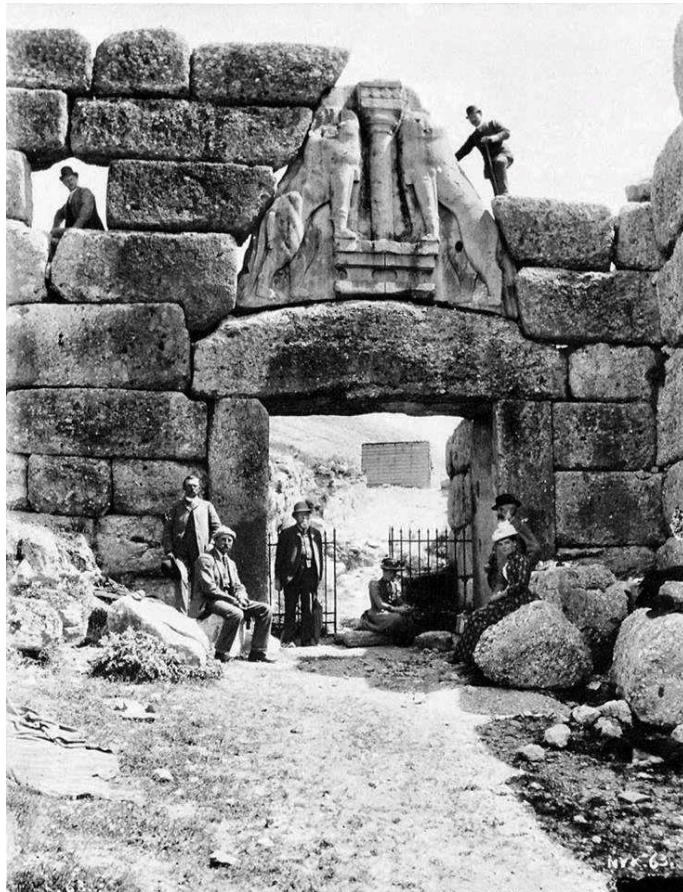
Πιο συγκεκριμένα, στην περιοχή της Τίρυνθας, οι έρευνες του Γερμανικού Αρχαιολογικού Ινστιτούτου και της Ελληνικής Αρχαιολογικής Υπηρεσίας, από το 1876 μέχρι σήμερα, έφεραν στο φως μια από τις σημαντικότερες μυκηναϊκές ακροπόλεις και ιχνηλάτησαν τα στάδια του πολιτισμού των προϊστορικών και ιστορικών περιόδων της Αργολίδας. Μετά τους πρωτεργάτες Heinrich Schliemann και Wilhelm Dörpfeld (1884-1885), το χώρο ερεύνησαν στο πρώτο μισό του εικοστού αιώνα οι Georg Karo και Kurt Müller. Στα τέλη της δεκαετίας του 1950 ο Έφορος Αρχαιοτήτων Αργολίδος Νικόλαος Βερδελής ανέλαβε το έργο της αποκατάστασης της δυτικής πλευράς της οχύρωσης που είχε καταρρεύσει και σκεπαστεί από τα μπάζα των παλαιών

ανασκαφών. Μετά το 1967 οι ανασκαφές ανατίθενται και πάλι στο Γερμανικό Αρχαιολογικό Ινστιτούτο, το οποίο υπό τη Διεύθυνση των Ulf Jantzen, Jörg Schäfer, Klaus Kilian και Joseph Manan συνεχίζει τις έρευνες συμπεριλαμβάνοντας την Κάτω Ακρόπολη και την Κάτω Πόλη. Τα συμπεράσματα των ανασκαφών αυτών αφήνουν να διαγραφεί μια σαφής εικόνα της εξέλιξης της αρχαίας Τίρυνθας.

Τα ευρήματα αυτά, μας παρείχαν ένα τεράστιο πλήθος πληροφοριών για την καθημερινή ζωή των κατοίκων του συγκεκριμένου οικισμού καθώς και τη θρησκεία, τη φύση και τα έθιμα ολόκληρου του μυκηναϊκού πολιτισμού. Τα τείχη της που κατασκευάστηκαν από μεγάλους ασβεστολιθικούς ογκόλιθους προκάλεσαν ήδη στην αρχαιότητα το θαυμασμό και την απορία. Έτσι δημιουργήθηκε ο μύθος πως τα έκτισαν οι Κύκλωπες, γίγαντες από τη Λυκία, για χάρη του ιδρυτή της Τίρυνθας, Αργείου πρίγκιπα Προίτου. Μέσα στα «κυκλώπεια» τείχη εκτός από τα μεγαλόπρεπα κτίρια υποδοχής υπήρχαν κτιριακά συγκροτήματα που χρησίμευαν για διοικητικές και τελετουργικές λειτουργίες, για αποθήκευση αγαθών και εργαστήρια, ενώ ένας περιορισμένος αριθμός κτιρίων χρησιμοποιούνταν ως κατοικίες των μελών της άρχουσας τάξης. Το κοινωνικό, πολιτικό και οικονομικό σύστημα που αντικατοπτρίζουν τα αρχαιολογικά ευρήματα είναι εύκολα αναγνώσιμο. Μια αστική κοινωνία διαρθρώνεται γύρω από την έδρα του ηγεμόνα που ελέγχει μια μεγάλη έκταση με πλούσια γεωργική και κτηνοτροφική παραγωγή και ρυθμίζει τη διακίνηση των αγαθών και την παραγωγή αντικειμένων που προορίζονται για λατρευτική χρήση, εξαγωγή ή ανταλλαγή σε επίπεδο επισήμων. Από τις πινακίδες της Γραμμικής Β΄ Γραφής, στις οποίες καταγράφονταν αρχιεικά στοιχεία σχετικά με τη διακίνηση των αγαθών, μαθαίνουμε ότι όλη η παραγωγή της περιοχής δικαιοδοσίας του εκάστοτε ηγεμόνα συνέρεε στο ανάκτορο, όπου γινόταν απογραφή και στη συνέχεια ένα μέρος της μοιραζόταν στους δικαιούχους παραγωγούς κατά την κρίση του ηγεμόνα, ενώ το υπόλοιπο αποτελούσε αντικείμενο διαχείρισης της ανώτερης αστικής τάξης. Το σύστημα αυτό της ανακατανομής των αγαθών είναι χαρακτηριστικό για τη μυκηναϊκή κοινωνία και αλληλένδετο με την εξωτερική μορφή των οικοδομικών συγκροτημάτων. Οι μυκηναϊκές οχυρώσεις και τα ανάκτορα είναι εργαλεία εντυπωσιασμού και επίδειξης δύναμης ενός ισχυρού πλουραλιστικού συστήματος. Επιπλέον, αξίζει να αναφερθεί πως οι τοιχογραφίες, οι οποίες πιθανότατα χρονολογούνται μεταξύ 14<sup>ου</sup> και 13<sup>ου</sup> αιώνα π.Χ., έχουν φιλοτεχνηθεί με την τεχνική της νωπογραφίας (buon fresco), δηλαδή, η απόδοση του έργου γινόταν πάνω στο νωπό ακόμα ασβεστολιθικό κονίαμα, γεγονός που αποδεικνύει ότι το επίπεδο τεχνογνωσίας και πολιτισμού του νησιού ήταν ιδιαίτερα υψηλό



Η «Μυκηναία» ,διατηρημένη τοιχογραφία από την Ακρόπολη των Μυκηνών



Φωτογραφία του Ερρίκου Σλήμαν και των συνεργατών του από τις ανασκαφές στην Μυκήνες το 1876.

### 1.3 Μαθηματικά και Αρχαιολογία

Από το 1950 και μετά, όπως στις περισσότερες επιστήμες, έτσι και στην Αρχαιολογία, η έρευνα εστιάστηκε σε εφαρμογές της χρήσης των Μαθηματικών και των Υπολογιστών.

Η μεταπολεμική περίοδος οδήγησε τις Ευρωπαϊκές χώρες στο να αναζητήσουν εφαρμογές των Μαθηματικών για την ανάπτυξη διάφορων επιστημών μέσα από την ίδρυση διάφορων Οργανισμών, αλλά και Πανεπιστημίων. Επομένως, άνοιξε ο δρόμος για την δημιουργία πολλών ερευνητικών θέσεων και στον τομέα της Αρχαιολογίας. Ώς και τα μέσα τις δεκαετίας του '60, η τάση της ποσοτικοποίησης (quantification) κυριάρχησε στην Αρχαιολογία, με την χρήση των βασικών αρχών της στατιστικής και των πιθανοτήτων, να αποτελούν τις κύριες μεθόδους επεξεργασίας των αρχαιολογικών δεδομένων.

Παράλληλα, οι πρωτοπόροι επιστήμονες ασχολήθηκαν με την τυποποίηση, την περιγραφή και την καταγραφή των αρχαιολογικών δεδομένων αποσκοπώντας στη δημιουργία μετέπειτα αρχαιολογικών βάσεων δεδομένων. Στη συνέχεια, οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές άρχισαν να κυριαρχούν και να εμφανίζονται σε κάθε πανεπιστήμιο και ερευνητικό κέντρο, οπότε και οι σχετικές έρευνες και εφαρμογές πολλαπλασιάστηκαν, οδηγώντας σε μια «Υπολογιστική Επανάσταση» στον τομέα αυτό και, αναπόφευκτα, δημιουργήθηκε ο κλάδος που στη συνέχεια θα ονομαζόταν Υπολογιστική Αρχαιολογία.

### 1.4 Υπολογιστική Αρχαιολογία (Computational Archaeology)

Η Υπολογιστική Αρχαιολογία περιγράφει τις αναλυτικές μεθόδους που βασίζονται στην χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή για τη μελέτη της μακροχρόνιας ανθρώπινης συμπεριφοράς και της συμπεριφοράς της εξέλιξης. Όπως και διάφοροι άλλοι υπο-κλάδοι επιστημών που έχουν το πρόθεμα «Υπολογιστική» στο όνομά τους (π.χ. Υπολογιστική Βιολογία, Υπολογιστική Φυσική και Υπολογιστική Κοινωνιολογία), ο όρος προορίζεται για (κυρίως μαθηματικές) μεθόδους που δεν θα μπορούσαν ρεαλιστικά να εφαρμοστούν χωρίς τη βοήθεια ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή.



Η Υπολογιστική Αρχαιολογία περιλαμβάνει τη χρήση των γεωγραφικών συστημάτων πληροφοριών (GIS), ορισμένες μορφές της στατιστικής και μαθηματικών μοντέλων, την προσομοίωση σε υπολογιστή της ανθρώπινης συμπεριφοράς και της εξελικτικής συμπεριφοράς, που είναι επίσης αδύνατον να υπολογιστεί χωρίς υπολογιστική βοήθεια.

Η Υπολογιστική Αρχαιολογία είναι επίσης γνωστή ως Αρχαιολογική Πληροφορική (Archaeological Informatics ή Archaeoinformatics).

Το περιεχόμενο της επιστημονικής αρχαιολογίας μπορεί να χωριστεί σε δύο μεγάλα ερευνητικά θέματα που συμπληρώνουν το ένα το άλλο:

1) Βασική θεωρητική έρευνα σχετικά με τη δομή, τις ιδιότητες και τις δυνατότητες των αρχαιολογικών δεδομένων, συμπερασματολογία και απόκτηση γνώσεων. Επίσης περιλαμβάνει τη μοντελοποίηση και την διαχείριση της ασάφειας και αβεβαιότητας σε αρχαιολογικά δεδομένα, της επίδρασης της κλίμακας, των βέλτιστων στρατηγικών δειγματοληψίας και των διάφορων χωροχρονικών επιπλοκών.

2) Ανάπτυξη αλγορίθμων και λογισμικού ηλεκτρονικών υπολογιστών (Εφαρμοσμένη επιστήμη Υπολογιστικής Αρχαιολογίας) που φέρνουν αυτή τη θεωρητική γνώση στη διάθεση του χρήστη.

Η Επιστήμη συμβάλλει σε πολλά θεμελιώδη ερευνητικά θέματα, που περιλαμβάνουν αλλά δεν περιορίζονται σε:

- ❖ Προηγμένη Στατιστική στην αρχαιολογία
- ❖ Χωρική και Χρονική ανάλυση αρχαιολογικών δεδομένων
- ❖ Προηγμένα πιθανοτικά μοντέλα, αβεβαιότητα και ασάφεια σε αρχαιολογικά δεδομένα, ανάλυση Bayes
- ❖ Αναπαράσταση γεωγραφικών δεδομένων, τρισδιάστατη ανάλυση,
- ❖ ανακατασκευή θραυσμένων αντικειμένων και έργων τέχνης
- ❖ Μοντελοποίηση αρχαίων τοποθεσιών
- ❖ Ψηφιακή αναπαράσταση και προσομοίωση
- ❖ Ψηφιακές ανασκαφές και εικονική πραγματικότητα
- ❖ Ηλεκτρονική μετάδοση δεδομένων

Η Υπολογιστική Αρχαιολογία είναι μια τυπική προσέγγιση στην απόκτηση γνώσεων σχετικών με την Αρχαιολογία. Είναι ένα διεπιστημονικό πεδίο εκ φύσεως, που

δανείζεται, ενισχύει και προσαρμόζει μεθόδους και θεωρίες από αρκετές άλλες επιστήμες, όπως η Επιστήμη των Υπολογιστών (π.χ. Αλγόριθμοι και Σχεδιασμός Λογισμικού, Σχεδιασμός Βάσεων Δεδομένων κλπ), η Γεωπληροφορική, η Τεχνητή Νοημοσύνη (Ασαφής Λογική, Επιβλεπόμενη Εκμάθηση και Ταξινόμηση), η Οικολογία, τα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά (Θεωρία Γραφημάτων, Θεωρία Πιθανοτήτων) και η Στατιστική.

### 1.5 Ανασύνθεση αρχαιολογικών ευρημάτων και ανάκτηση πληροφορίας

Η επιστημονική κοινότητα έχει αναλάβει την προσπάθεια να εφαρμόσει διάφορες μεθόδους για την επανασυναρμολόγηση αυτών των θραυσμένων ευρημάτων. Όπως επισημάνθηκε πρότερα, η διαδικασία είναι χρονοβόρα, απαιτεί άρτια εκπαιδευμένο προσωπικό και φυσικά ένα σημαντικό χρηματικό κεφάλαιο.

Το έργο αυτό, το οποίο συντελείται από μία μεγάλη γκάμα επιστημόνων, από αρχαιολόγους, ιστορικούς τέχνης, ζωολόγους, βοτανολόγους, χημικούς αλλά και συντηρητές αρχαιοτήτων είναι εξαιρετικά επίπονο. Ως εκ τούτου, τα τελευταία χρόνια, γίνονται προσπάθειες για την ανάπτυξη των διαφόρων αυτοματοποιημένων συστημάτων που θα μπορούσαν να συμβάλουν στην προσπάθεια αυτή. Οι μηχανικοί προσπαθούν να αναπτύξουν αλγόριθμους ώστε να πραγματοποιηθεί η εικονική αποκατάσταση των τοιχογραφιών ή των άλλων ευρημάτων στον εικονικό καμβά της οθόνης ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή. Ο ρόλος των διάφορων αλγορίθμων και συστημάτων που έχουν αναπτυχθεί είναι να επισημαίνουν πιθανές αντιστοιχίες των θραυσμάτων στους μελετητές και τους ειδικούς συντηρητές προκειμένου να διευκολυνθεί σε μεγάλο βαθμό η ανασυγκρότηση των ευρημάτων. Αυτά τα συστήματα προτείνουν όλες τις πιθανές αντιστοιχίες, προσπαθώντας ταυτόχρονα, όσο γίνεται, να μειώσουν τα αποτελέσματα που δίνουν λανθασμένες αντιστοιχίες. Οι διαδικασίες αυτές έχουν ως σκοπό να επιτευχθεί εικονική ανασύνθεση όπως ακριβώς θα έκαναν οι ειδικοί επιστήμονες αλλά με την μέγιστη δυνατή ακρίβεια συγκρίσεων, κυρίως χωρίς το ενδεχόμενο πιθανής φθοράς. Οι μέθοδοι αυτοί, σύμφωνα με του ειδικούς έχουν την προοπτική να αλλάξουν τον τρόπο που οι άνθρωποι χρησιμοποιούν την επιστήμη της αρχαιολογίας.

Όπως θα αναλυθεί στην παρούσα εργασία, γίνεται προσπάθεια ο υπολογιστής να μιμηθεί την προσέγγιση των αρχαιολόγων, έτσι ώστε να βρεθούν πιθανές ενώσεις μεταξύ των θραυσμάτων, ώστε να επιτευχθεί το καλύτερο αποτέλεσμα.

Αξίζει να σημειωθεί πως τμήματα τοιχογραφιών είναι πιθανό είτε να μην έχουν βρεθεί ακόμα είτε να έχουν καταστραφεί ολοσχερώς είτε ακόμη πως κομμάτια δύο ή περισσότερων τοιχογραφιών να έχουν αναμειχθεί, δυσχεραίνοντας ακόμη περισσότερο τη δουλειά επιστημόνων καθώς και υπολογιστών. Το πρόβλημα της εύρεσης ταιριάσματος μεταξύ των διάφορων θραυσμάτων της τοιχογραφίας, παρόλο που φαίνεται να μοιάζει με το πρόβλημα αυτόματου ταιριάσματος που μόλις αναφέραμε, στην πράξη είναι αρκετά πιο πολύπλοκο. Το

πρόβλημα αυτό περιλαμβάνει τον τομέα της ταξινόμησης προτύπων, ένας τομέας πάνω στον οποίο έχει γίνει μεγάλη έρευνα τις τελευταίες δεκαετίες.

Επειδή η έρευνα αφορά την αναγνώριση πολύ μεγάλου αριθμού αντικειμένων, έχουν συχνά διατυπωθεί υποθέσεις και δοκιμαστικές μέθοδοι που βασίζονται στην σχεδίαση με την βοήθεια υπολογιστή (Computer Aided Design). Επίσης, έχουν αναπτυχθεί αρκετοί αλγόριθμοι που χρησιμοποιούν γράφους όψεων (aspect graphs). Και σε αυτόν τον τομέα έχει γίνει μεγάλη επιστημονική πρόοδος τα τελευταία χρόνια.

Ανεξαρτήτως, όμως, της προόδου της έρευνας, ιδιαίτερα τα τελευταία χρόνια, στον εν λόγω τομέα, η ανθρώπινη γνώση και εμπειρία δε δύναται να αντικατασταθεί από κανένα λογισμικό ή σύστημα. Παρέχουν, όμως, στους επιστήμονες αρχαιολόγους και συντηρητές ένα πολύ δυνατό εργαλείο για να ανακαλύψουν ταιριάσματα που θα ήταν δύσκολο να βρεθούν με γυμνό μάτι, επιταχύνοντας, κατά αυτόν τον τρόπο, την επανασυναρμολόγηση.



**Τρισδιάστατη απεικόνιση θραυσμένου αρχαιολογικού αντικειμένου κατά την ψηφιακή του επεξεργασία**

## 1.6 συναφή έργα

Έχουν υπάρξει πολλές προσεγγίσεις για τη λύση του προβλήματος της αυτοματοποιημένης ανασύνθεσης των θραυσμένων αντικειμένων. Στο [1] αναφέρεται μια αποτελεσματική λύση για την αυτόματη τρισδιάστατη ανασύνθεση τους. Το άρθρο [2] προτείνει λύση στο πρόβλημα της ανασύνθεσης των θραυσμένων τοιχογραφιών, όταν η μόνη διαθέσιμη πληροφορία είναι ένα ζευγάρι διδιάστατων θραυσμένων εικόνων. Μπορεί η προσέγγιση αυτή να είναι αποτελεσματική, αλλά δυστυχώς έχει το μειονέκτημα της απουσίας πληροφορίας για την τρίτη διάσταση. Η διαδικασία που περιγράφεται στο [3] χρησιμεύει για την ανασύνθεση των διδιάστατων θραυσμάτων αντικειμένων. Πιο συγκεκριμένα, συγκρίνονται τα κυρτά - περιγράμματα των θραυσμάτων σε προοδευτικά αυξανόμενες κλίμακες ανάλυσης, χρησιμοποιώντας έναν σταδιακά δυναμικά προγραμματισμένο και ακολούθως αντιστοιχισμένο αλγόριθμο. Επιπλέον, στο [4] και [5] οι συγγραφείς αναλύουν δύο διαφορετικές μεθόδους για την ανασύνθεση θραυσμένων αγγείων. Στην πρώτη αυτή επιτυγχάνεται μέσω αξονικών συμμετρικών πολυωνυμικών μοντέλων επιφάνειας, ενώ η δεύτερη βασίζεται στη συνέχιση του μέσου χρώματος σε περιφερειακά εικονοκύτταρα αντίστοιχων θραυσμάτων. Το άρθρο [6] πραγματεύεται την ανασύνθεση αγγείων μέσω των ιδιοτήτων της καμπυλότητας των κομματιών, εντοπίζοντας τυχόν αντιστοιχίες συνεχόμενων περιγραμματικών εικονοκυττάρων των δύο θραυσμάτων. Στις δημοσιεύσεις [7-12] η λύση που προτείνεται για την ανασύνθεση τεμαχισμένων αντικειμένων βασίζεται στο περίγραμμα διδιάστατων και τρισδιάστατων απεικονίσεων των εγγράφων. Οι προσεγγίσεις στο πρόβλημα της τρισδιάστατης ανασύνθεσης των θραυσμένων αντικειμένων συχνά ενσωματώνουν στοιχεία από την επιφάνεια και σχήματα από πρότυπη αναπαράσταση με σκοπό να καθορίσουν τη σωστή ακολουθία βέλτιστων επιφανειακών ευθυγραμμίσεων που πιθανώς λύνουν το πρόβλημα της ανασύνθεσης. Δηλαδή, στο [15], οι συγγραφείς αρχικά ελαττώνουν την διάσταση του προβλήματος της επιφανειακής ευθυγράμμισης περιορίζοντας τη φυσιολογική ευθυγράμμιση της επιφάνειας και αναζητώντας ιδανική αντιστοιχία ζευγαριών μέσω ενός ειδικού είδους σχήματος τυχαίου δείγματος. Στα [16,17] παρουσιάζεται η αυτόματη τρισδιάστατη ανασύνθεση μέσω αποστάσεων σημείο προς σημείο μεταξύ κοινών ιδωμένων όψεων των θραυσμένων αντικειμένων. Η ιδανική ευθυγράμμιση μεταξύ συνεχόμενων σπασμένων όψεων εντοπίζεται μέσω προσομοιωμένης ανόπτησης. Στο [18], οι συγγραφείς εισάγουν μια μέθοδο τρισδιάστατης ανασύνθεσης η οποία βασίζεται στα χαρακτηριστικά της επιφάνειας των θραυσμάτων που υπολογίζονται μέσω κεντρικών τοπικών ολοκληρωμάτων μεγάλης κλίμακας. Ένας γραφικός τμηματοποιημένος αλγόριθμος εντοπίζει τις πιθανές επιφάνειες θραύσης. Έπειτα, μία λύση στην ανασύνθεση των [16] θραυσμάτων καθορίζεται μέσω μελλοντικών -κατά βάση- παγκόσμιων καταχωρήσεων για την αντιστοίχιση ζευγαριών θραυσμάτων, και ταυτοχρόνως βεβαιασμένων τοπικών καταχωρήσεων πολλαπλών θραυσμάτων. Η προσέγγιση που εισάγεται στο [19], διαφέρει από

τις προηγούμενες με την έννοια ότι η προτεινόμενη μέθοδος για την τρισδιάστατη ανασύνθεση θραυσμένων αντικειμένων δεν είναι βασισμένη στο μέλλον, αλλά βασίζεται στη δράση μιας επαναληπτικής διαδικασίας πάνω σε μια κατασκευή ενός πυκνού δυαδικού δέντρου συνημμένου στα σημεία των σπασμένων όψεων. Δηλαδή, οι συγγραφείς χρησιμοποιούν μια εναλλαγή μεταξύ ζευγαριών σημείων συνεχόμενων σπασμένων επιφανειών με σκοπό να καθοριστούν δυαδικές σχέσεις μεταξύ αυτών των επιφανειών. Για να καθοριστεί το μέγιστο σετ των γειτονικών σημείων που ικανοποιούν την ίδια δυαδική σχέση, οι συγγραφείς χρησιμοποιούν έναν ιεραρχικά ομαδοποιημένο αλγόριθμο ο οποίος επαναληπτικά δρα επάνω στην ομαδοποίηση του δυαδικού δέντρου με έναν τρόπο περιφερειακής ανάπτυξης, ούτως ώστε να ελαττώνει την πυκνότητά του. Το πρόβλημα της τρισδιάστατης ανασύνθεσης των θραυσμένων τοιχογραφιών συζητείται στο [20]. Οι συγγραφείς παρουσιάζουν ένα οικονομικό σύστημα για τη συλλογή και επεξεργασία πληροφοριών τρισδιάστατων θραυσμάτων. Το σύστημα της απόκτησης απαιτεί ελάχιστη επίβλεψη, όπου ένας μη επαγγελματίας χρήστης μπορεί να σαρώσει το λιγότερο 10 θραύσματα την ώρα. Το σύστημα εφαρμόζεται στις τοιχογραφίες του Ακρωτηρίου της Θήρας.

## 2. ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΓΙΑ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΗ ΑΝΑΣΥΝΘΕΣΗ ΘΡΑΥΣΜΕΝΩΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ

### 2.1 Προκαταρκτική επεξεργασία του θραύσματος

Στο κεφάλαιο αυτό, θα αναφερθούμε στην τρισδιάστατη ανασύνθεση. Στη μεθοδολογία αυτή, χρησιμοποιούνται αρκετές πληροφορίες, τις οποίες αντλούμε μέσω της διδιάστατης ανασύνθεσης, χρησιμοποιώντας όμως και τις επιφάνειες θραύσης των εξεταζόμενων κομματιών. Αρχικά, εκτελείται μία τρισδιάστατη (3D) σάρωση των διαθέσιμων θραυσμάτων. Έπειτα, για κάθε ένα από τα θραύσματα σημειώνεται η άνω επιφάνεια του, η κάτω επιφάνεια του και η πλευρική του επιφάνεια όπως περιγράφεται στην ενότητα 5.1. Επίσης, καθορίζεται ο άξονας ο οποίος περνάει από το «κέντρο βάρους» του θραύσματος, έχει τη μικρότερη ροπή αδράνειας και είναι κάθετος στην άνω και κάτω επίπεδη επιφάνεια. Επιπλέον, περιστρέφονται όλα τα κομμάτια έτσι ώστε οι κεντρικοί τους άξονες να είναι παράλληλοι προς τον άξονα  $z$ . Τέλος, για να αντιμετωπιστεί ο τυχαίος προσανατολισμός των θραυσμάτων, δημιουργείται ένα σύνολο περιστρεφόμενων εκδοχών για κάθε θραύσμα, με περιστροφή γύρω από τον κεντρικό του άξονα ( $z$ -άξονας) με μια μικρή γωνία  $\delta\theta$ . Η ενέργεια αυτή γίνεται μόνο μία φορά για κάθε θραύσμα.

### 2.2 Χρησιμοποιώντας τις έννοιες του «σταθερού» και «περιστρεφόμενου» θραύσματος

Έστω ότι δίνονται προς εξέταση δύο θραύσματα για τα οποία πρέπει να αποφανθούμε εάν ταιριάζουν και αν ναι, σε ποια σημεία, χρησιμοποιώντας όλη την τρισδιάστατη πληροφορία. Για την επίτευξη αυτού του σκοπού, ακολουθείται η εξής διαδικασία :

Αρχικά, ένα από τα δύο θραύσματα, το οποίο αποκαλούμε «σταθερό», τοποθετείται σε ένα σύστημα αναφοράς έτσι ώστε ο κεντρικός του άξονας να συμπίπτει με τον  $z$ -άξονα. Στη συνέχεια, μελετάται το μήκος σύγκρισης το οποίο μετρείται σε pixels και συμβολίζεται με  $L_c$ . Χρησιμοποιώντας τον όρο pixels υποδηλώνονται τα σημεία του ψηφιακού περιγράμματος της άνω επίπεδης επιφάνειας του θραύσματος. Εν συνεχεία, εξετάζεται μια ομάδα από διαδοχικά  $L_c$  Pixels ξεκινώντας από το πρώτο pixel της καμπύλης περιγράμματος  $C^F$  της επίπεδης

επιφάνειας του θραύσματος. Αυτά τα pixels του περιγράμματος ονομάζονται «σταθερή αλυσίδα» και συμβολίζονται με  $\Gamma_1^F$ , όπου  $F$ (fixed) σημαίνει «σταθερός» και «1» το pixel έναρξης της καμπύλης περιγράμματος  $C^F$ .

Ακολούθως, τοποθετείται το δεύτερο θραύσμα στο ίδιο καρτεσιανό σύστημα και πάλι έτσι, ώστε ο κεντρικός του άξονας να είναι παράλληλος στον  $z$  – άξονα και οι άνω επίπεδες επιφάνειες των δύο θραυσμάτων να βρίσκονται στο ίδιο, κάθετο στον  $z$ -άξονα, επίπεδο. Το δεύτερο θραύσμα έχει αυθαίρετο προσανατολισμό γύρω από τον κεντρικό του άξονα καθώς και μία αυθαίρετη θέση. Προηγουμένως, έχουν παραχθεί όλες οι περιστρεφόμενες εκδοχές του θραύσματος.

Για κάθε γωνία  $\theta_i$ , η κίνηση του περιστρεφόμενου θραύσματος γύρω από το σταθερό θραύσμα μεταφράζεται ως εξής:

Η καμπύλη περιγράμματος  $C^R$  της επίπεδης επιφάνειας του περιστρεφόμενου θραύσματος αποτελείται από  $M$  pixels έτσι ώστε το πρώτο pixel της  $C^F$  και το τελευταίο pixel της  $C^R$  να συμπίπτουν. Στη συνέχεια, ορίζεται η «τερματική επιφάνεια φραγμού»  $B_1^T$  ως το επίπεδο που διέρχεται από το τελευταίο pixel της σταθερής αλυσίδας, η οποία είναι παράλληλη προς τον κεντρικό άξονα του σταθερού θραύσματος και κάθετη προς την ευθεία που ενώνει το πρώτο και το τελευταίο pixel της σταθερής αλυσίδας.

Επιπροσθέτως, δημιουργείται μια περιστρεφόμενη αλυσίδα  $\Gamma_{1,M}^R$ , η οποία κινείται αριστερόστροφα στη  $C^R$  που ξεκινάει από το pixel  $M$  και τελειώνει στη διατομή της τερματικής επιφάνειας φραγμού με τη  $C^R$ , αν υπάρχει. Καθώς κινείται αριστερόστροφα στη  $C^R$ , αυξάνεται το μήκος της  $\Gamma_{1,M}^R$  και αν ο αριθμός των pixels υπερβαίνει ένα κατώφλι  $L^{EX}$ , τότε απορρίπτεται η πιθανή θέση αντιστοιχίας.

Στη συνέχεια, ορίζονται οι έννοιες του «σταθερού πετάσματος» και «περιστρεφόμενου πετάσματος» («fixed escarpment» και «rotated escarpment» αντίστοιχα). Για τον ορισμό τους, προσδιορίζεται πρώτα η «αρχική επιφάνεια φραγμού»  $B_1^S$ , ως το επίπεδο που διέρχεται από το πρώτο σημείο της σταθερής αλυσίδας, η οποία είναι παράλληλη προς την τελική επιφάνεια φραγμού  $B_1^T$ . Κατόπιν, ορίζεται ένα κοινό επίπεδο πυθμένα για το ζεύγος  $A, B$  το οποίο είναι το κάτω επίπεδο είτε του  $A$ , είτε του  $B$ . Στη συνέχεια, το «σταθερό πέτασμα»,  $E_1^F$ , είναι το επίπεδο που βρίσκεται στη πλευρική συνοριακή επιφάνεια του σταθερού θραύσματος που περικλείεται από την άνω επιφάνεια του θραύσματος, το κοινό κάτω επίπεδο που έχουμε ορίσει, καθώς και τα αρχικά και τελικά επίπεδα φραγμού. Ομοίως, ορίζουμε την έννοια του «περιστρεφόμενου πετάσματος»,  $E_{1,M}^R$ , ως την πλευρική οριακή επιφάνεια του περιστρεφόμενου θραύσματος, που περικλείεται από την άνω επιφάνεια, τη κάτω επιφάνεια, τα αρχικά και τελικά επίπεδα φραγμού.

Η προηγούμενη διαδικασία επαναλαμβάνεται αλλάζοντας το σημείο εκκίνησης της περιστρεφόμενης αλυσίδας η οποία κινείται από το pixel  $M$  στο pixel 1 της  $C^R$ , σχηματίζοντας έτσι ένα σύνολο από περιστρεφόμενες αλυσίδες και περιστρεφόμενα πετάσματα  $\Gamma_{1,M}^R, E_{1,M}^R, m = M, M - 1, \dots$  Τέλος, παράγονται δύο σύνολα των σταθερών αλυσίδων και των

σταθερών πετασμάτων μετακινώντας το σημείο εκκίνησης « $k$ » της σταθερής αλυσίδας κατά μήκος της  $C^F$ , δηλαδή,  $\Gamma_k^F, E_k^F, k = 1, 2, \dots$

Επομένως, για δύο δοσμένα θραύσματα, η ακριβής μορφή των σταθερών και περιστρεφόμενων πετασμάτων  $E_k^F, E_k^R, m$  εξαρτάται από το πρώτο και τελευταίο σημείο των  $\Gamma_k^F, \Gamma_{k,m}^R$ , τη θέση των κάτω επιπέδων τους σε σχέση με την κοινή άνω επιφάνειά τους και τη γωνία περιστροφής  $\theta_i$ . Ακόμη, εάν για μια συγκεκριμένη θέση του σταθερού πετάσματος δεν υπάρχει τομή μεταξύ της τελικής επιφάνειας  $B_k^T$  και του περιστρεφόμενου θραύσματος, τότε δεν ορίζεται περιστρεφόμενο πέτασμα. Για το σύστημα αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει ταίριασμα στην ειδική σχετική θέση των θραυσμάτων  $A, B$ .

### 2.3 Τέσσερα κριτήρια αντιστοιχίας

Αρχικά, για να εξεταστεί εάν δύο θραύσματα  $A, B$  ταιριάζουν, εφαρμόζεται κατάλληλα κάθε περιστρεφόμενη εκδοχή του  $B$  δίπλα στο  $A$  και ορίζονται οι πιθανές επιφάνειες επαφής μεταξύ τους. Σε κάθε πιθανή θέση ταιριάσματος εφαρμόζονται τέσσερα κριτήρια:

#### 2.3.1 Το πρώτο κριτήριο αντιστοιχίας

Έστω, δύο οποιαδήποτε θραύσματα  $A, B$  και όλα τα συναφή υπάρχοντα ζεύγη:

- 1) των σταθερών και περιστρεφόμενων αλυσίδων  $(\Gamma_k^F, \Gamma_{k,m}^R)$ ,
- 2) των σταθερών και περιστρεφόμενων πετασμάτων  $(E_k^F, E_{k,m}^R)$ ,
- 3) της αρχικής και τελικής επιφάνειας φραγμού  $(B_k^S, B_k^T)$ .

Επιπλέον, τα δύο θραύσματα τοποθετούνται στο ίδιο πλαίσιο αναφοράς έτσι ώστε η άνω επίπεδη επιφάνειά τους να βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο, κάθετα προς τον  $z$ -άξονα. Στη συνέχεια, συμβολίζεται με  $V_{k,m}$  η κλειστή περιοχή που οριοθετείται από:

- 1) τα σταθερά και περιστρεφόμενα πετάσματα του ίδιου ζεύγους  $(E_k^F, E_{k,m}^R)$ ,
- 2) της αρχικής και τελικής επιφάνειας φραγμού του ίδιου ζεύγους  $(B_k^S, B_k^T)$ ,
- 3) το κοινό άνω επίπεδο των δύο θραυσμάτων και
- 4) το κάτω επίπεδο του  $A$  ή  $B$  το οποίο είναι πλησιέστερο προς τη κοινή άνω επιφάνεια.

Έχει υπολογιστεί ο όγκος  $\tau_{k,m}$  όλων αυτών των κλειστών περιοχών  $V_{k,m}$ . Αν  $\tau_{k,m}$  είναι μικρότερο από ένα προκαθορισμένο κατώφλι  $\tau_T$ , τότε θεωρούμε την συγκεκριμένη θέση ως δυνατή θέση αντιστοιχίας των δύο θραυσμάτων  $A, B$ .



Σημειώνεται ότι η σωστή επιλογή του  $\tau_T$  εξαρτάται από το μήκος σύγκρισης  $L_C$ , την απόσταση της κοινής κάτω επιφάνειας με το άνω επίπεδο και το άνοιγμα μεταξύ των δύο θραυσμάτων που ταιριάζουν.

### 2.3.2 Δεύτερο κριτήριο αντιστοιχίας: η απαγόρευση των τοπικών και συνολικών αλληλοεπικαλύψεων στο επίπεδο επαφής $V_{k,m}$

Στην ιδανική περίπτωση, όπου δύο θραύσματα  $A, B$  ταιριάζουν κατάλληλα, δεν πρέπει να υπάρχει επικάλυψη στα μεταξύ τους σταθερά και περιστρεφόμενα πετάσματα. Ωστόσο, λόγω των αναπόφευκτων ανακρίβειών της ψηφιακής αναπαράστασης των θραυσμάτων, μπορεί κανείς να αναμένει επικαλύψεις μεταξύ αυτών των πετασμάτων ακόμη και στην περίπτωση ενός τέλει φυσικού ταιριάσματος. Ως εκ τούτου, εάν σε μια συγκεκριμένη θέση των θραυσμάτων  $A, B$  το Κριτήριο 1 ικανοποιείται, τότε απαιτείται η τοπική επικάλυψη μεταξύ του σταθερού πετάσματος  $E_k^F$  και του περιστρεφόμενου  $E_{k,m}^R$  να είναι μικρότερη από ένα αποδεκτό όριο  $\tau^O$ . Αν η επικάλυψη είναι μεγαλύτερη από το  $\tau^O$  πρέπει να λαμβάνεται υπόψη η αυθαιρεσία στην παράλληλη μετάφραση του θραύσματος  $B$ . Κατά συνέπεια, για να καταργηθεί αυτή η αυθαιρεσία πρέπει:

Για κάθε σημείο « $p$ » του περιστρεφόμενου πετάσματος, να λαμβάνεται ένα σημείο τομής του επιπέδου με τον κάθετο άξονα  $z$  περνώντας από το « $p$ » με το σταθερό πέτασμα. Επομένως, η ελάχιστη απόσταση του σημείου « $p$ » από όλα τα σημεία αυτής της τομής συμβολίζεται με  $\mu^p$  και  $\vec{\mu}^p$  θα είναι το αντίστοιχο διάνυσμα. Ανάμεσα σε όλα αυτά τα  $\vec{\mu}^p$  εντοπίζουμε αυτό με το μέγιστο μήκος, το οποίο συμβολίζεται με  $\vec{\mu}$ .

Παράλληλα μεταφράζεται το περιστρεφόμενο θραύσμα  $B$  με  $-\vec{\mu}$  και υπολογίζεται εκ νέου η επικάλυψη του όγκου. Αν η επικάλυψη του όγκου είναι μικρότερη από το  $\tau^O$  και το κριτήριο 1 εξακολουθεί να ικανοποιείται, τότε λαμβάνεται υπόψη η συνολική επικάλυψη των δυο θεωρούμενων θραυσμάτων. Δηλαδή, θα επιτρέπεται μια συνολική επικάλυψη μεταξύ των ψηφιακών αναπαραστάσεων των συγκεκριμένων θραυσμάτων και απαιτείται η επικάλυψη του όγκου να είναι μικρότερη από ένα κατάλληλο κατώφλι  $\tau^{FO}$ . Προφανώς, η ακριβής τιμή του ορίου αυτού εξαρτάται από τον όγκο των θραυσμάτων και την ποιότητα της χρησιμοποιούμενης μεθόδου για την ψηφιακή αναπαράσταση.

### 2.3.3 Το τρίτο κριτήριο αντιστοιχίας: συσχετίζοντας την γεωμετρία της επιφάνειας επαφής με το μέγιστο επιτρεπόμενο όγκο του τομέα $V_{k,m}$

Το τρίτο κριτήριο, λειτουργώντας ως «φίλτρο απόρριψης αντιστοιχιών», έχει επιταχύνει δραστικά την απόδοση της αυτόματης τρισδιάστατης (3D) ανασύνθεσης. Η βασική ιδέα μπορεί να περιγραφεί ως εξής: Έστω ότι σε μια ορισμένη θέση των θραυσμάτων  $A, B$  συμβαίνει τέλειο ταίριασμα, με την έννοια ότι  $tk, m$  είναι μηδέν ή ισοδύναμα τα πετάσματα  $E_k^F, E_{k,m}^F$  συμπίπτουν. Σε αυτή την ιδανική περίπτωση, σε κάθε σημείο των πετασμάτων τα μοναδιαία διανύσματα  $\vec{n}_F$  και  $\vec{n}_R$  είναι αντίθετα. Δεδομένου ότι πρέπει να λαμβάνεται υπόψη η παρουσία αναπόφευκτων κενών μεταξύ των θραυσμάτων που ταιριάζουν, λόγω της κατεργασίας του κατακερματισμένου αρχικού αντικειμένου και / ή λόγω φθοράς, θα υπάρχουν σίγουρα αποκλίσεις από αυτή την ιδανική κατάσταση. Στην πραγματικότητα, μπορεί κανείς να αναμένει διαισθητικά ότι αν υπάρχει μια σημαντική διαφοροποίηση των μοναδιαίων διανυσμάτων  $\hat{n}$  σε όλη την οριακή επιφάνεια του τομέα  $V_{k,m}$ , τότε ο όγκος του  $\tau_{k,m}$ , δεν μπορεί να είναι ικανοποιητικά μικρός. Με άλλα λόγια, στην περίπτωση αυτή, το κριτήριο 1 δεν ικανοποιείται. Μια αυστηρή διατύπωση αυτής της διαισθητικής δήλωσης περιγράφεται παρακάτω.

Τα θραύσματα  $A, B$  τοποθετούνται όπως περιγράφεται στην ενότητα 4.2 και ο όγκος  $\tau_{k,m}$  είναι μικρότερος από τη μέγιστη αποδεκτή τιμή  $T$ . Στη συνέχεια, το ολοκλήρωμα των γωνιών που ορίζεται μέσω του τύπου :

$$\mu = \oint_{\partial V_{k,m}} \arctan \left( \frac{\vec{n}^* \cdot \hat{j}}{\vec{n}^* \cdot \hat{i}} \right) dS, \text{ ικανοποιεί την ανισότητα (4.3.2), με την } r^T, r^O \text{ να είναι οι}$$

αποστάσεις των  $B_k^S, B_k^T$  από τον κεντρικό άξονα του  $E_k^F$ ,  $\Delta\theta = \theta_T - \theta_0$ , να είναι η δίεδρη γωνία που περικλείει το  $E_{k,m}^R$ ,  $\Delta z = T - S$ , η απόσταση μεταξύ των κοινών άνω και κάτω επιπέδων των θραυσμάτων και  $r(\theta, T), r(\theta, S)$ , το ανώτερο και το κατώτερο όριο των καμπυλών του  $E_{k,m}^R$ . Ισοδύναμα, εάν, για την τρέχουσα θέση των θραυσμάτων  $A, B$ , η μέση γωνία του κανονικού διανύσματος  $\partial V_{k,m}$  υπερβαίνει το άνω όριο (4.3.2), τότε η θέση αυτή δεν είναι μια πραγματική θέση αντιστοιχίας. Το κριτήριο αυτό απόρριψης έχει ληφθεί από την επίλυση του προβλήματος μεταβολής που αναφέρεται παρακάτω.

#### **Το πρόβλημα μεταβολής χρησιμοποιώντας το λογισμό των μεταβολών.**

Έστω μια περιοχή  $U$  με οριακή επιφάνεια  $\partial U$  που αντιπροσωπεύει το διάκενο μεταξύ δύο γειτονικών θραυσμάτων και τα τμήματα της πλευρικής τους επιφάνειας σε αυτή τη θέση,

αντίστοιχα. Το ολοκλήρωμα των γωνιών των μοναδιαίων διανυσμάτων στο  $\partial U$  εκφράζεται μέσω του ολοκληρώματος:

$$\mu = \oint_{\partial U} \arctan \left( \frac{\vec{n}^* \cdot \vec{j}}{\vec{n}^* \cdot \vec{i}} \right) dS.$$

Στη συνέχεια, το πρόβλημα είναι να βρεθούν τα άκρα της ποσότητας  $\mu$ , δεδομένου ότι ο όγκος  $V$  της περιοχής  $U$  οριοθετείται από την ανισότητα

$0 \leq V \leq V_M$ . Ως εκ τούτου, μπορούμε να διατυπώσουμε το πρόβλημα με τη χρήση του ολοκληρώματος Lagrangian

$$\iint_{ER} f \left( \vec{x}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right) dudv = \mu - \lambda V,$$

όπου  $(u, v)$  είναι οι ανεξάρτητες μεταβλητές της επιφάνειας  $\partial U$ ,  $\vec{x}(u, v)$  είναι το διάνυσμα θέσης ενός αυθαίρετου σημείου  $\partial U$  και  $\frac{\partial \vec{x}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}$  οι μερικές παράγωγοι ως προς  $\vec{x}$ . Ως εκ τούτου, το πρόβλημα μετατρέπεται σε εξεύρεση επιφάνειας  $ER$  (το περιστρεφόμενο πέτασμα) που τερματίζει στο όριο επιφάνειας φραγμού  $BS, BT$  και τα κοινά άνω και κάτω επίπεδα  $C, D$  έτσι ώστε

$$\delta \iint_{ER} f \left( \vec{x}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right) dudv = \mu - \lambda V,$$

Η διαμόρφωση προτείνει τη χρήση κυλινδρικών συντεταγμένων και η έκφραση του  $\partial U$  με  $\theta$  και  $z$  να είναι ανεξάρτητες μεταβλητές. Στην πραγματικότητα, η  $\vec{x}(r, \theta, z)$  είναι η θέση του διανύσματος ενός αυθαίρετου σημείου που βρίσκεται στο  $\partial U$  σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Η αρχή του διανύσματος  $\vec{x}$ , θεωρείται ότι είναι στο εσωτερικό της περιοχής  $U$  για να εξασφαλιστεί η μοναδικότητα της αξίας του  $\vec{x}$ . Σαφώς,

$$\vec{x}(\theta, z) = (r(\theta, z)\cos(\theta), r(\theta, z)\sin(\theta), z).$$

Σε καρτεσιανές συντεταγμένες, ο όγκος  $V$  της περιοχής  $U$  είναι

$$V = \iiint_U dx dy dz.$$

Με την εφαρμογή του Θεωρήματος «Stokes» παίρνουμε

$$V = \frac{1}{3} \int_S^T \int_{\theta_0}^{\theta_r} r(\theta, z)^2 - zr(\theta, z) * \frac{\partial}{\partial z} r(\theta, z) d\theta dz.$$

Το πρόβλημα τώρα μπορεί να αναφέρεται σε ένα αυστηρό τρόπο ως εξής:

“Εύρεση των ακροτάτων της  $\mu$  υπό τους περιορισμούς ότι  $V \leq V_M$ , όπου  $V_M$  είναι σταθερό, και οι επιφάνειες φραγμού  $B^S \subset \partial U$ ,  $B^T \subset \partial U$  είναι γνωστές και σταθερές επιφάνειες. Το σταθερό πέτασμα  $E^F$ , καθώς και η αρχική καμπύλη του περιστρεφόμενου πετάσματος  $E^R$  είναι επίσης γνωστά”. Με άλλα λόγια, το πρόβλημα είναι να καθοριστεί το περιστρεφόμενο πέτασμα που μεγιστοποιεί το  $|\mu|$  όταν  $V \leq V_M$ . Μια γενική λύση στο πρόβλημα αυτό δίνεται στο ακόλουθο θεώρημα:

**Θεώρημα.** Έστω ένας σταθερός ορθογώνιος σωλήνας  $T$ , δηλαδή ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο απείρου μήκους, που οριοθετεί ένα διδιάστατο (2D) τομέα  $E^F$  σε μια ορισμένη επιφάνεια  $S^F$ . Ας θεωρηθεί ότι η  $\Gamma^F$  είναι το σημείο τομής του  $E^F$  με τον  $T$ . Άλλωστε  $\Gamma^R$  είναι ένα συγκεκριμένο κομμάτι στην ομαλή καμπύλη  $T$  το οποίο δεν διασχίζει τη  $\Gamma^F$ . Ως εκ τούτου, ο τομέας  $\Omega$  που  $\Gamma^R$  και  $\Gamma^E$  καθορίζουν στο  $T$ . Προφανώς  $(\Omega) \geq 0$ . Δίνεται επίσης ένας σταθερός άξονας  $z$  ο οποίος είναι κάθετος προς 2 παράλληλα επίπεδα του  $T$ , όπου  $\Omega$  και  $E^F$  είναι μη-τεμνόμενα και τοποθετείται επί της άλλης πλευράς του  $\Gamma^R$  σε σχέση με το  $\Gamma^F$ . Επίσης, το κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων  $(r, \theta, z)$  έχει τον  $z$  ως άξονα. Αυτό το σύστημα  $\Gamma^F$  περικλείεται από μία δίεδρη γωνία που ξεκινά από το  $\theta_0$  και τελειώνει στο  $\theta_T$ . Εξετάζεται σε κάθε κομμάτι η λεία επιφάνεια  $E^R$  που οριοθετείται από τη  $\Gamma^R$ , με το μόνο περιορισμό ότι ο όγκος  $V$  της τρισδιάστατης (3D) περιοχής που περικλείεται από  $T$ ,  $E^F$  και  $E^R$  έχει ένα άνω φράγμα  $V \leq V_M$ . Στη συνέχεια, η ποσότητα που ορίζεται μέσω του τύπου

$$\mu = \oint_{E^R} \arctan\left(\frac{\vec{n}^* \cdot \hat{j}}{\vec{n}^* \cdot \hat{i}}\right) dS \mu - \oint_{E^F} \arctan\left(\frac{\vec{n}^* \cdot \hat{j}}{\vec{n}^* \cdot \hat{i}}\right) dS \quad \text{ικανοποιεί την ανισότητα,}$$

$$\left| \frac{\mu}{\Delta\theta\Delta z} \right| \leq \left| \ln\left(\frac{r_T}{r_0}\right) + \left| \frac{\Delta\theta}{2} + \frac{\Delta z}{6r^2} \left[ -r_0^2 + \frac{1}{\Delta\theta\Delta z} \int_{\theta_0}^{\theta_T} T \cdot r(\theta, T)^2 - r(\theta, S)^2 d\theta \right] \right| \right|$$

όπου  $r_T, r_0$  είναι τα μήκη των ακτινών των σημείων  $\Gamma^R$ , οι οποίες αντιστοιχούν σε  $\theta_0$  και  $\theta_T$  αντίστοιχα,  $\Delta\theta = \theta_T - \theta_0$ ,  $\Delta z = T - S$  είναι η απόσταση των δύο επιπέδων του  $T$  που είναι κάθετα στο  $z$  και  $r(\theta, T), r(\theta, S)$  είναι οι ακτίνες των τμημάτων των  $\Gamma^R$  για  $z = T$  και  $z = S$  αντίστοιχα.

### 2.3.4 Το τέταρτο κριτήριο αντιστοιχίας

Παρουσιάζεται ένα τέταρτο κριτήριο που είναι μια απαραίτητη προϋπόθεση για την πραγματική αντιστοίχιση των δύο θραυσμάτων  $A, B$ . Το περιεχόμενο αυτού του κριτηρίου μπορεί να περιγραφεί διαισθητικά ως εξής: Τα δύο θραύσματα είναι σε επαφή με το  $k$ -th pixel

της  $C^F$  και το  $M$ -th pixel της  $C^R$ . Σε αυτή τη θέση, οι αρχικές  $B_k^S$  και τελικές  $B_k^T$  επιφάνειες φραγμού είναι επακριβώς καθορισμένες. Κατά τη διαδικασία της δοκιμής, αν η θέση αυτή είναι μια πραγματική θέση αντιστοίχισης, ένα θραύσμα  $B$  περιστρέφεται γύρω από ένα κάθετο άξονα στο  $xy$ - επίπεδο που διέρχεται από το σημείο επαφής των δύο θραυσμάτων που προς στιγμήν το θεωρούν σταθερό. Καθώς το θραύσμα  $B$  περιστρέφεται, σε πολλές περιπτώσεις μπορεί να μην τέμνει το τελικό επίπεδο φραγμού, ή δύναται να το τέμνει έτσι ώστε να σχηματίζουν ένα περιστρεφόμενο πέτασμα  $E_{k,m}^R$  πάρα πολύ μεγάλο και πολύ «μακρινό» από το σταθερό πέτασμα. Ως εκ τούτου, τίθεται το ερώτημα πώς να συνδεθεί το μέγιστο επιτρεπόμενο πλάτος των  $E_{k,m}^R$  με τον μέγιστο αποδεκτό όγκο  $\tau^T$  του  $V_{k,m}$ . Υπό ορισμένες πολύ εύλογες συνθήκες, μπορεί κανείς να εκφράσει το πλάτος του  $E_{k,m}^R$  μέσω του μήκους της περιστρεφόμενης αλυσίδας  $\Gamma_{k,m}^R$ , δεδομένου ότι το κοινό επίπεδο πυθμένα παραμένει το ίδιο. Με άλλα λόγια, το παραπάνω ερώτημα επαναδιατυπώνεται:

Πόσο μακριά μπορεί να είναι η περιστρεφόμενη αλυσίδα  $\Gamma_{k,m}^R$ , δεδομένου ότι τα κριτήρια 1 και 3 ικανοποιούνται; Η απάντηση στο ερώτημα αυτό θα δοθεί στην ανάλυση που ακολουθεί.

**Πόρισμα 1.** Έστω ότι σε ένα επίπεδο, υπάρχουν μια καμπύλη  $\Gamma^F$  που αποκαλείται σταθερά, μια άλλη καμπύλη  $\Gamma^R$  που αποκαλείται περιστρεφόμενη και δύο παράλληλα φραγμένα ευθύγραμμα τμήματα, ένα αρχικό  $\varepsilon^I$  και ένα τελικό  $\varepsilon^T$ . Ας υποθέσουμε, άλλωστε, ότι η περιοχή του τομέα που ορίζεται από αυτές τις τέσσερις καμπύλες  $\Gamma^F$ ,  $\Gamma^R$ ,  $\varepsilon^I$ ,  $\varepsilon^T$  διατηρείται σταθερή, ίση με ένα και ότι το ολοκλήρωμα των γωνιών  $\int_{T_A}^{T_B} \arctan\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right) dt$  είναι επίσης γνωστό και ίσο με  $\gamma$ . Στη συνέχεια, αν η καμπύλη  $\Gamma^F$  είναι δεδομένη και είναι σταθερή, το μήκος της μεταβλητής καμπύλης  $\Gamma^R$  δεν μπορεί να υπερβαίνει την τιμή

$$\frac{a}{L_c/2} \sqrt{\frac{1}{\tan\left(\frac{\gamma}{T_B - T_A}\right)^2 + 1}}$$

#### 2.4 Περιγραφή της διαδικασίας που εφαρμόζεται για την αυτοματοποιημένη ανασύνθεση των θραυσμένων αντικειμένων με βάση τα προαναφερθέντα κριτήρια

Έστω  $N$  διαθέσιμα θραύσματα με επίπεδες επιφάνειες και οι τρισδιάστατες (3D) αναπαραστάσεις τους. Για να επιτευχθεί μια βέλτιστη ανασύνθεση αυτών των θραυσμάτων, εφαρμόζεται η διαδικασία που αποτελείται από τα βήματα που περιγράφονται παρακάτω:

➤ **Βήμα 1 - Επιλογή των κατάλληλων παραμέτρων**

Επιλέγεται ένα γωνιακό βήμα  $\delta\theta = 1^\circ$  για να παραχθούν όλες οι περιστρεμμένες εκδοχές του κάθε θραύσματος. Στην συνέχεια επιλέγεται το μήκος της καμπύλης επαφής στην άνω επιφάνεια  $L_C$  του σταθερού θραύσματος να είναι ένα ποσοστό 15% του μέσου μήκους/ περιμέτρου των οριακών καμπυλών των άνω επιφανειών όλων των θραυσμάτων. Επίσης υπολογίζεται η μέση περιοχή όλων των πλευρικών επιφανειών των θραυσμάτων και χρησιμοποιείται μαζί με την  $L_C$ , για να οριστεί το κατώφλι του όγκου  $\tau^T$  ώστε ένα μέγιστο μέσο κενό  $h$  mm ανάμεσα στα πραγματικά θραύσματα που ταιριάζουν να είναι αποδεκτό. Η διαδικασία ξεκινάει από μια πολύ μικρή τιμή του  $h$  ας πούμε  $h = 0.4\text{mm}$  ώστε να υπολογιστεί το σχεδόν τέλειο ταίριασμα ανάμεσα σε διπλανά κομμάτια. Έπειτα αυξάνεται το  $h$  μέχρι την τιμή  $1.2\text{mm}$ , ώστε να διερευνηθούν πιθανά ταιριάσματα με μεγαλύτερα κενά. Επιπλέον, για κάθε τιμή του  $h$  ορίζεται η περιοχή κατωφλίου που περικλείουν οι καμπύλες επαφής,  $E_R = h L_C$ , μαζί με το κατώφλι οριακής απόκλισης  $\gamma = \arctan\left(\frac{h}{L_C}\right)$  για τον υπολογισμό του  $L^{EX}$ .

➤ **Βήμα 2 – Η εφαρμογή των κριτηρίων θεωρώντας το μεγαλύτερο θραύσμα ως το σταθερό**

Επιλέγεται το θραύσμα με τη μεγαλύτερη άνω επίπεδη επιφάνεια, το οποίο το συμβολίζουμε με  $F_1$ , και το θέτουμε ως το σταθερό θραύσμα της εργασίας αντιστοίχισης. Κατόπιν, αναζητούνται πιθανές θέσεις που ταιριάζουν μεταξύ του  $F_1$  και όλων των άλλων θραυσμάτων, τα οποία περιστρέφονται και εφαρμόζονται τα αναπτυχθέντα κριτήρια με την ακόλουθη σειρά:

- 1) Πρώτα εφαρμόζεται το κριτήριο 4 ελέγχοντας τα γειτονικά μήκη των επαπτόμενων καμπυλών στις άνω επιφάνειες των θραυσμάτων.
- 2) Δεύτερον, αν το κριτήριο 4 ικανοποιείται, εξετάζεται αν οι επαπτόμενες επιφάνειες των θεωρούμενων δύο θραυσμάτων στην γειτονική θέση ικανοποιούν το κριτήριο 3 αναφορικά με τη γεωμετρική τους ομοιότητα.
- 3) Τρίτον, στην περίπτωση που το κριτήριο 3 έχει επίσης ικανοποιηθεί, το κριτήριο 2 ελέγχει κάποια πιθανή επικάλυψη μεταξύ των δύο θραυσμάτων, τόσο σε τοπικό επίπεδο όσο και συνολικά.
- 4) Αν τα δύο αυτά θραύσματα στη συγκεκριμένη σχετική θέση περάσουν τα 3 φίλτρα απόρριψης, τότε και μόνο τότε το σύστημα προβαίνει στην εξέταση του τελικού κριτηρίου 1 ελέγχοντας αν ο όγκος του κενού μεταξύ των 2 θραυσμάτων είναι μικρότερος από το προκαθορισμένο όριο  $\tau^T$ . Αν το κριτήριο 1 επίσης ικανοποιηθεί

στις σχετικές θέσεις των θραυσμάτων, τότε το σύστημα χαρακτηρίζει την ειδική σχετική θέση των θραυσμάτων ως ταιριαστή.

➤ **Βήμα 3 - Συγχώνευση των θραυσμάτων που ταιριάζουν για να παραχθεί μία «νησίδα»**

Αν η ανωτέρω εφαρμογή του βήματος 2 προσφέρει ταίριασμα του  $F_1$  με έναν αριθμό από άλλα θραύσματα, τότε συγχωνεύονται εικονικά αυτά τα ταιριαστά θραύσματα για να παραχθεί η «νησίδα»  $I_1$ .

Ακολούθως, η  $I_1$  μπαίνει στη θέση του  $F_1$  και επαναλαμβάνονται τα βήματα 2 και 3 έως ότου δεν αναφερθεί κανένα περαιτέρω ταίριασμα.

➤ **Βήμα - 4 Επαναλαμβάνοντας την διαδικασία ανασύνθεσης για τα μη ταιριαστά θραύσματα**

Μετά το τέλος του τρίτου βήματος είναι πιθανό να υπάρξουν θραύσματα τα οποία δεν ανήκουν στη «νησίδα»  $I_1$ . Ανάμεσά τους εντοπίζεται το θραύσμα με τη μεγαλύτερη άνω επιφάνεια, το οποίο θα παίξει το ρόλο του  $F_1$  και επαναλαμβάνονται τα βήματα 2,3 και 4 ούτως ώστε να ληφθεί ένα σύνολο «νησίδων»  $I_n$ . Η διαδικασία τελειώνει όταν τα μη ταιριαστά θραύσματα έχουν εξαντληθεί και δεν έχουν αναφερθεί περαιτέρω συζεύξεις.

➤ **Βήμα 5 - Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία για μια νέα τιμή της σταθεράς “ $h$ ”**

Με το πέρας του βήματος 4 εξάγεται ένας αριθμός «νησίδων»  $I_n$ , μερικά από τα οποία μπορεί να είναι απλά θραύσματα. Σε αυτό το σημείο αυξάνεται ελάχιστα η τιμή του  $h$ , με σκοπό να επιτραπεί ένα μεγαλύτερο κενό μεταξύ των δύο γειτονικών θραυσμάτων και επαναλαμβάνονται τα βήματα 1 έως 5.

## 3.ΚΑΜΠΥΛΕΣ

### 3.1 Ορισμοί καμπύλης, ομαλής καμπύλης, επιβατικής ακτίνας και εφαπτομένου διανύσματος

#### 3.1.1 Ορισμός καμπύλης στο χώρο $\mathbb{R}^n$

Ως καμπύλη στο χώρο  $\mathbb{R}^n$  θεωρούμε σύνολο σημείων, δηλαδή των διατεταγμένων  $n$ -άδων, των οποίων όλες οι συνιστώσες εξαρτώνται συναρτησιακά μόνο από μία ελεύθερη μεταβλητή, η οποία παίρνει τιμές σε ένα διάστημα  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Άρα, ισοδυνάμως, η καμπύλη είναι το σύνολο των σημείων  $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  που προκύπτουν από μία απεικόνιση  $I \rightarrow \mathbb{R}^n$  διατεταγμένη  $n$ -άδα, όπου  $t \in I$ .

#### 3.1.2 Ορισμός $C_n$ , $C_n^t$ και $C_{n-}$ καμπύλης

Μία καμπύλη λέγεται  $C_n$  ομαλή ή απλώς  $C_n$ , εάν η επιβατική της ακτίνα  $\vec{r}(t)$  έχει όλες τις παραγώγους, μέχρι και τάξεως  $n$ , και επιπρόσθετως η  $n$ -οστή παράγωγος του  $\vec{r}(t)$  είναι συνεχής. Επειδή, όπως είναι γνωστό, η ύπαρξη της παραγώγου τάξεως  $n$  εγγυάται τη συνέχεια της  $n-1$  τάξεως παραγώγου, συνεπάγεται πως μία  $C_n$  καμπύλη και είναι η ίδια συνεχής, αλλά και έχει όλες τις παραγώγους του  $\vec{r}(t)$  τάξεως από 1 έως  $n$  συνεχείς.

Εάν μία καμπύλη είναι μία ένωση  $C_n$  καμπυλών, θα λέγεται τμηματικώς  $C_n$  και συμβολίζεται με  $C_n^t$ . Είθισται η απλώς τμηματικώς συνεχής καμπύλη να λέγεται  $C_0^t$ .

Ορίζουμε ως  $C_{n-}$  καμπύλη, την καμπύλη η οποία έχει όλες τις παραγώγους μέχρι τάξη  $n-1$  συνεχείς, αλλά που η  $n$ -οστή τάξεως παράγωγος του  $\vec{r}(t)$  τμηματικώς υπάρχει, δηλαδή υπάρχει παντού εκτός ενδεχομένως από ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων.



### 3.1.3 Ορισμός επιβατικής ακτίνας σε τυχόν σημείο καμπύλης

Έστω τυχούσα καμπύλη  $C \subset \mathfrak{R}^n$  και  $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$  τυχαιο σημείο αυτής. Έστω  $O$  η αρχή των αξόνων,  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  μία ορθοκανονική βάση του  $\mathfrak{R}^n$ ,  $t$  η παράμετρος της καμπύλης και  $t_m$  η τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής  $t$  που αντιστοιχεί στο σημείο  $m$ . Η επιβατική ακτίνα στο  $m$  ορίζεται ως

$$\vec{r}(t_m) = \overrightarrow{OM} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n \quad (3.1)$$

### 3.1.4 Ορισμός εφαπτομένου και μοναδιαίου εφαπτομένου διανύσματος καμπύλης

Έστω η καμπύλη  $C \subset \mathfrak{R}^n$  με ανεξάρτητη μεταβλητή  $t$  και έστω  $M(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  τυχόν σημείο της  $C$ , όπου οι συναρτήσεις  $x_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα  $I$ . Τότε το διάνυσμα  $\vec{r}'(t) = x_1'(t)\vec{e}_1 + x_2'(t)\vec{e}_2 + \dots + x_n'(t)\vec{e}_n$  εφάπτεται στην καμπύλη στο σημείο  $M$ . Το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα στο τυχόν σημείο  $M$  της καμπύλης είναι το

$$\vec{T} = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}. \quad (3.2)$$

Εάν οι συναρτήσεις  $x_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο  $I$  τότε μπορεί να οριστεί η δεύτερη παράγωγος της επιβατικής ακτίνας, μέσω της σχέσεως  $\vec{r}''(t) = x_1''(t)\vec{e}_1 + x_2''(t)\vec{e}_2 + \dots + x_n''(t)\vec{e}_n$ . Οι παράγωγοι ανωτέρας τάξης του διανύσματος επιβατικής ακτίνας ορίζονται με επέκταση της παραπάνω σχέσης.

### 3.2 Ορισμός καμπυλότητας καμπύλης και σχετικά χρήσιμα θεωρήματα

#### 3.2.1 Η περίπτωση του κύκλου: μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα $\vec{T}$ , αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία κύκλου και $\vec{r}'(s)$ .

Οι παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου στο επίπεδο με παράμετρο την πολική γωνία, έστω  $\vartheta$ , έχουν ως εξής:

$$x(\vartheta) = x_0 + a \cos(\vartheta)$$

$$y(\vartheta) = y_0 + a \sin(\vartheta)$$

όπου  $x_0, y_0$  οι συντεταγμένες του κέντρου  $K$  του κύκλου,  $a$  η ακτίνα αυτού και  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Γεωμετρικά, η ανεξάρτητη μεταβλητή  $\vartheta$  είναι η προσανατολισμένη γωνία που σχηματίζει το μοναδιαίο διάνυσμα  $\vec{i}$  του άξονος  $x$ , με την επιβατική ακτίνα  $\vec{KM}$  όπου  $M$  τυχόν σημείο του κύκλου.

Το στοιχειώδες μήκος του κύκλου είναι  $ds = \sqrt{x'(\vartheta)^2 + y'(\vartheta)^2} d\vartheta = a d\vartheta$ . Συνεπώς, το μήκος αυτού είναι  $s = a \vartheta$ , όπως πρώτος παρατήρησε και απέδειξε ο μεγάλος Αρχιμήδης.

Με χρήση της παραμέτρου  $s$  οι εξισώσεις του κύκλου ανάγονται σε

$$x(s) = x_0 + a \cos\left(\frac{s}{a}\right)$$

$$y(s) = y_0 + a \sin\left(\frac{s}{a}\right)$$

Επομένως, το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα στον κύκλο τότε γίνεται

$$\vec{r}'(s) = -\sin\left(\frac{s}{a}\right)\vec{i} + \cos\left(\frac{s}{a}\right)\vec{j}. \quad (3.3)$$

Το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα συμβολίζεται και με  $\vec{T}$ . Σημειώνεται ότι στην περίπτωση που η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι το μήκος  $s$  του κύκλου τότε  $\vec{T} = \vec{r}'(s)$ , ενώ στη γενική περίπτωση τυχούσης μεταβλητής  $t$  ισχύει

$$\vec{T} = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}. \quad (3.4)$$

Παραγωγίζοντας την (3.3) προκύπτει

$$\begin{aligned}\vec{r}''(s) &= -\frac{1}{a} \cos\left(\frac{s}{a}\right)\vec{i} - \frac{1}{a} \sin\left(\frac{s}{a}\right)\vec{j} \Leftrightarrow \\ \vec{r}''(s) &= -\frac{1}{a^2}(\vec{r}(s) - x_0\vec{i} - y_0\vec{j}) = -\frac{1}{a^2}\overrightarrow{KM}.\end{aligned}$$

Επομένως  $\|\vec{r}''(s)\| = \frac{1}{a}$ , δηλαδή το μέτρο του διανύσματος του  $\vec{r}''(s)$  μας προσφέρει αμέσως την ακτίνα του κύκλου. Επιπλέον,

$$\vec{T}(s) \cdot \vec{T}(s) \equiv 1 \Rightarrow \frac{d}{ds}(\vec{T}(s) \cdot \vec{T}(s)) = 0 \Leftrightarrow \frac{d\vec{T}(s)}{ds} \cdot \vec{T}(s) = 0 \Leftrightarrow \vec{r}''(s) \cdot \vec{T}(s) = 0. \text{ Όλα τα}$$

ανωτέρω καταδεικνύουν ότι το διάνυσμα  $\vec{r}''(s)$  σε τυχόν σημείο  $M$  του κύκλου δείχνει προς το κέντρο του κύκλου  $K$  και

$$\overrightarrow{MK} = \frac{\vec{r}''(s)}{\|\vec{r}''(s)\|^2}. \quad (3.5)$$

Άρα, η γνώση ενός τυχόντος σημείου  $M$  του κύκλου και του διανύσματος  $\vec{r}''(s)$  σε αυτό το σημείο ορίζει μονοσήμαντα τον κύκλο.

### 3.2.2 Η γενική περίπτωση καμπύλης. Ο εγγύτατος κύκλος και η καμπυλότητα με παράμετρο το μήκος καμπύλης $s$ .

Έστω τυχούσα καμπύλη σε χώρο οσονδήποτε διαστάσεων της οποίας η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι το μήκος της  $s$ . Στο  $\mathcal{R}^2$  ισχύει

$$\vec{r}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j}$$

ενώ στο  $\mathcal{R}^3$

$$\vec{r}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j} + z(s)\vec{k}$$

Σημειώνεται ότι επειδή εξ υποθέσεως  $d\vec{r} = d\vec{s}$ ,  $\|\vec{r}'(s)\| \equiv \left\| \frac{d\vec{r}}{ds} \right\| \equiv \frac{\|d\vec{s}\|}{ds} = 1$  που σημαίνει ότι το

μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα  $\vec{T}(s)$  στο τυχόν σημείο  $A$  της καμπύλης είναι ίσο με  $\vec{r}'(s)$ , δηλαδή  $\vec{T}(s) = \vec{r}'(s) \forall s$ .

Εξ άλλου  $\frac{d\vec{T}(s)}{ds} = \vec{r}''(s)$ , οπότε ας θεωρήσουμε το μοναδικό κύκλο (Κ) ο οποίος περνάει

από το ίδιο σημείο  $A$ , έχει το ίδιο  $\frac{d\vec{T}(s)}{ds}$  στο  $A$  με τη δεδομένη καμπύλη και κείται στο ίδιο

επίπεδο με το  $\vec{T}(s)$ . Θα αποδείξουμε ότι εάν  $B$  είναι το σημείο  $\vec{r}(s + ds)$  και  $\vec{T}(s + ds)$  το

μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης στο Β τότε το Β ανήκει επίσης στον κύκλο (Κ), ενώ επίσης τα  $\vec{T}(s)$  και  $\vec{T}(s + ds)$  εφάπτονται στον (Κ) στα αντίστοιχα σημεία.

**Απόδειξη:** Ακολουθώντας τη συλλογιστική που αναπτύξαμε στην παράγραφο 3.22.1, μπορούμε να αποδείξουμε ότι το  $\frac{d\vec{T}(s)}{ds}$  είναι κάθετο στο  $\vec{T}(s)$ . Πράγματι, ισχύει ότι

$$\vec{T}(s) \cdot \vec{T}(s) \equiv 1 \Rightarrow \frac{d}{ds}(\vec{T}(s) \cdot \vec{T}(s)) = 0 \Leftrightarrow \frac{d\vec{T}(s)}{ds} \cdot \vec{T}(s) = 0 \Leftrightarrow \vec{r}''(s) \cdot \vec{T}(s) = 0.$$

Επομένως το  $\vec{T}(s)$  εφάπτεται και στον κύκλο (Κ) και στη δεδομένη καμπύλη αφού το

$$\frac{d\vec{T}(s)}{ds} = \vec{r}''(s) \text{ εξ υποθέσεως είναι κοινό και στη δεδομένη καμπύλη και στον (Κ). Επίσης}$$

$\vec{r}(s + ds) = \vec{r}(s) + \vec{r}'(s)ds = \vec{r}(s) + \vec{T}(s)ds$  γεγονός που αποδεικνύει ότι και το σημείο  $\vec{r}(s + ds)$ , δηλαδή το σημείο Β επίσης ανήκει στον (Κ). Όντως, αν  $O$  η αρχή των αξόνων

και  $K$  το κέντρο του (Κ), τα δεδομένα είναι ότι  $\vec{OB} = \vec{r}(s + ds)$ ,  $\vec{OA} = \vec{r}(s)$ , οπότε και

$$\vec{OB} - \vec{OA} = \vec{r}'(s)ds = \vec{T}(s)ds. \text{ Άλλα προφανώς } \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{KB} - \vec{KA}, \text{ οπότε}$$

$\vec{KB} = \vec{KA} + \vec{T}(s)ds$ . Επειδή, δε, ο (Κ) και η καμπύλη έχουν το ίδιο μοναδιαίο εφαπτόμενο στο Α, το Β ανήκει στον (Κ).

$$\text{Τέλος } \vec{T}(s + ds) = \vec{T}(s) + \frac{d\vec{T}}{ds} ds. \text{ Αλλά } \vec{T}(s) \text{ και } \frac{d\vec{T}}{ds} \text{ είναι κοινά και στον κύκλο (Κ) και}$$

στην καμπύλη. Άρα  $\vec{T}(s + ds)$  εφάπτεται επίσης στον κύκλο (Κ) στο σημείο Β. ο.ε.δ.

Ακριβώς επειδή ο κύκλος (Κ) έχει κοινά σημεία με την καμπύλη τα  $\vec{r}(s)$  και  $\vec{r}(s + ds)$  ως και κοινές εφαπτόμενες στα σημεία αυτά, ονομάζεται *εγγυτάτος κύκλος* διότι είναι η καλύτερη δευτέρας τάξεως προσέγγιση της καμπύλης.

**Ορισμός:** Ορίζουμε, εύλογα, την καμπυλότητα της καμπύλης στο σημείο

$A(\vec{r}(s))$  την καμπυλότητα του κύκλου (Κ). Επειδή δε, ο κύκλος (Κ) εξ υποθέσεως έχει κοινό  $\vec{r}''(s)$  με την καμπύλη, προφανώς η καμπυλότητα της καμπύλης στο σημείο

$$A(\vec{r}(s)) \text{ είναι } \left\| \vec{r}''(s) \right\|. \text{ Το κέντρο, δε, του εγγυτάτου κύκλου είναι το σημείο } \vec{r}(s) + \frac{\vec{r}''(s)}{\left| \vec{r}''(s) \right|^2}, \text{ η}$$

δε ακτίνα του (Κ) είναι  $\frac{1}{\left\| \vec{r}''(s) \right\|}$ , η οποία και λέγεται εγγυτάτη ακτίνα ή ακτίνα καμπυλότητας.

### 3.3 Η καμπυλότητα στη γενική περίπτωση καμπύλης με τυχούσα παράμετρο.

Έστω τυχούσα καμπύλη με τυχούσα ανεξάρτητη μεταβλητή  $t$ . Άρα στο  $\mathbb{R}^2$

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$$

Αν παραγωγίσουμε ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή έχουμε

$$\vec{r}'(t) = \frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{d\vec{r}(t)}{ds} |\vec{r}'(t)| \Leftrightarrow \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} = \frac{d\vec{r}(t)}{ds}, \text{ Αλλά}$$

$$\frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} = \vec{T}(t) \quad (\text{βλέπε 3.2}). \quad \text{Άρα} \quad \vec{T}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{ds}$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση ως προς  $t$  έχουμε

$$\frac{d\vec{T}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{r}(t)}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \left( \frac{d\vec{r}}{ds} \right) \frac{ds}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} |\vec{r}'(t)| \Leftrightarrow$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{\frac{d\vec{T}(t)}{dt}}{|\vec{r}'(t)|} \Leftrightarrow \left\| \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \right\| = \frac{\left\| \frac{d\vec{T}(t)}{dt} \right\|}{\left\| \vec{r}'(t) \right\|} = \frac{\left\| \frac{d\vec{T}(t)}{dt} \right\|}{\left\| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\|} = k \quad (3.6)$$

Όπου  $k$  η καμπυλότητα εκπεφρασμένη, στην τελευταία σχέση, ως προς την ανεξάρτητη παράμετρο  $t$ .

## 4. ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ

### 4.1. Παραμετρική και διανυσματική αναπαράσταση επιφάνειας

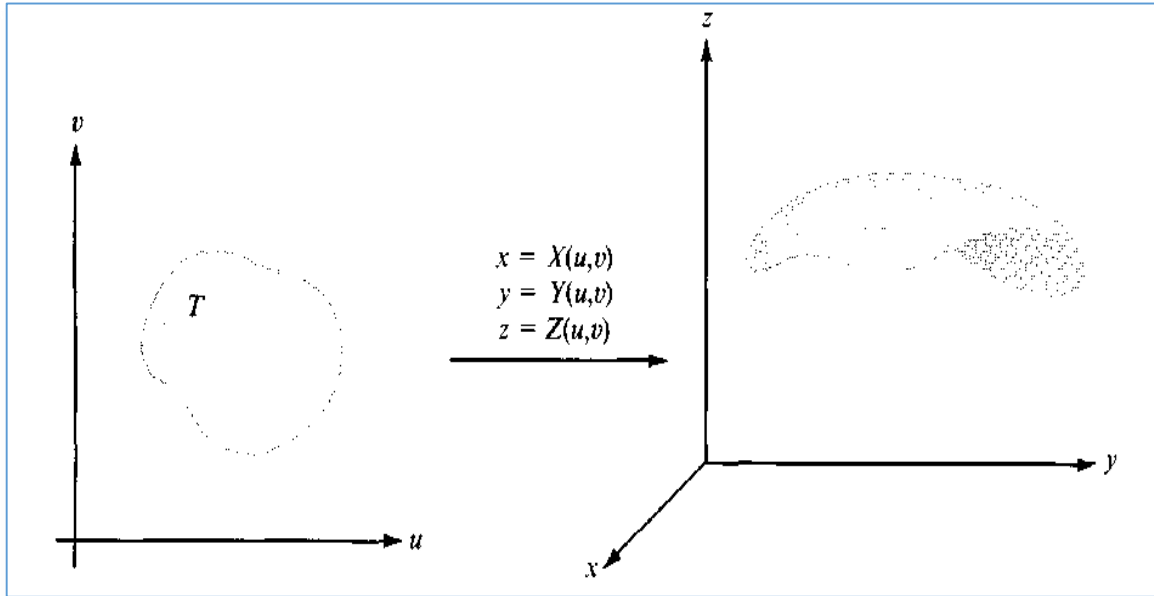
Σε γενικές γραμμές ως επιφάνεια ορίζεται η θέση ενός σημείου το οποίο κινείται στο χώρο με δύο βαθμούς ελευθερίας. Η θέση του σημείου αυτού, μπορεί να περιγράφει με μαθηματικούς τύπους με τρεις διαφορετικές μεθόδους. Η πρώτη είναι η πεπλεγμένη αναπαράσταση κατά την οποία η επιφάνεια περιγράφεται ως ένα σύνολο σημείων  $(x, y, z)$  που ικανοποιούν την εξίσωση  $F(x, y, z) = 0$ . Σε ορισμένες περιπτώσεις, καθίσταται εφικτό να εκφράσουμε τη μία από τις τρεις συντεταγμένες ως συνάρτηση των άλλων δύο, π.χ. τη συντεταγμένη  $z$  ως προς τις  $x, y$ . Όταν συμβαίνει αυτό, μπορούμε να έχουμε μια αναλυτική αναπαράσταση η οποία δίνεται από μία ή περισσότερες εξισώσεις της μορφής  $z = f(x, y)$ . Για παράδειγμα, έστω σφαίρα με ακτίνα 1 και κέντρο την αρχή των αξόνων. Η γραφική της παράσταση περιγράφεται από την εξίσωση  $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ , και λύνοντας ως προς  $z$  παίρνουμε τις εξής δύο εξισώσεις :

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad \text{ή} \quad z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad \text{όπου}$$

η πρώτη η εξίσωση περιγράφει την επιφάνεια του άνω ημισφαιρίου, ενώ η δεύτερη του κάτω. Η τρίτη μέθοδος που χρησιμοποιείται για την αναπαράσταση επιφανειών, η παραμετρική αναπαράσταση, είναι σαφώς πιο χρήσιμη όσον αφορά τη μελέτη ολοκληρωμάτων επιφάνειας. Στην παραμετρική αναπαράσταση, έχουμε τρεις εξισώσεις που εκφράζουν τις τρεις συντεταγμένες  $(x, y, z)$  συναρτήσει δύο παραμέτρων  $(u, v)$  :

$$x = X(u, v), \quad y = Y(u, v), \quad z = Z(u, v). \quad (4.1).$$

Εδώ το σημείο  $(u, v)$  κινείται πάνω σε ένα δυοδιάστατο σύνολο  $\mathbb{T}$  στο  $uv$ -επίπεδο ενώ τα αντίστοιχα σημεία  $(x, y, z)$  διαγράφουν μία επιφάνεια στο  $xyz$ -επίπεδο. Αυτή η μέθοδος για την περιγραφή της επιφάνειας είναι ανάλογη με την αναπαράσταση μίας καμπύλης χώρου με τρεις παραμετρικές εξισώσεις που αφορούν μία παράμετρο. Η ύπαρξη δύο παραμέτρων στην (1) καθιστά δυνατή τη μετάδοση των δύο βαθμών ελευθερίας στο σημείο  $(x, y, z)$  όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα (4.1). Ένας άλλος τρόπος να περιγράψουμε την ίδια ιδέα είναι να πούμε ότι η επιφάνεια είναι η εικόνα μιας περιοχής του επιπέδου  $\mathbb{T}$  κατά την αντιστοίχιση που ορίζεται στο (4.1)



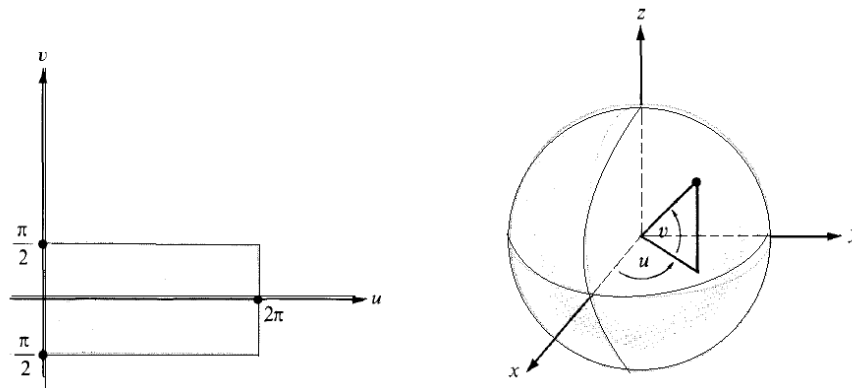
Σχήμα 4.1

Αν εισάγουμε το διάνυσμα απόστασης  $\vec{r}$  από την αρχή των αξόνων σε ένα τυχαίο σημείο  $(x, y, z)$  της επιφάνειας, μπορούμε να συνδυάσουμε τις 3 παραμετρικές εξισώσεις της (4.1) σε μία διανυσματική εξίσωση :

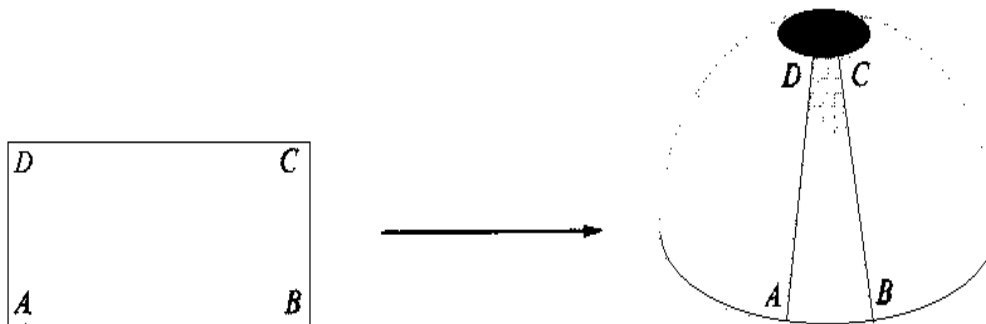
$$\vec{r}(u, v) = X(u, v)\mathbf{i} + Y(u, v)\mathbf{j} + Z(u, v)\mathbf{k}, \text{ όπου } (u, v) \in \mathbb{T} \quad (4.2)$$

Βεβαίως, υπάρχουν πολλές διαφορετικές παραμετρικές αναπαραστάσεις του ίδιου επιπέδου. Τη μία μπορούμε πάντα να την εξάγουμε από την αναλυτική  $z = f(x, y)$  και ορίζοντας  $x = X(u, v)$ ,  $y = Y(u, v)$ ,  $Z = Z(u, v)$ . Αν όμως μπορούμε να λύσουμε τις δύο πρώτες εξισώσεις τις (1.1) για τα  $u, v$  ως προς τα  $x, y$  και τα αντικαταστήσουμε στην τρίτη παίρνουμε την πεπλεγμένη μορφή  $z = f(x, y)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: παραμετρική εξίσωση σφαίρας



Σχήμα 4.2 παραμετρική αναπαράσταση σφαίρας



Σχήμα 4.3 μετασχηματισμός ορθογωνίου παραλληλογράμμου σε ημισφαίριο

Οι τρεις εξισώσεις είναι της μορφής :

$$\begin{aligned} x &= a \cos u \cos v, \\ y &= a \sin u \cos v, \\ z &= a \sin v \end{aligned} \quad (4.3)$$

και περιγράφουν μια σφαίρα ακτίνας  $a$  και κέντρο την αρχή των αξόνων. Αν υψώσουμε τις εξισώσεις αυτές, την κάθε μία ξεχωριστά, στο τετράγωνο και ύστερα τις προσθέσουμε τότε



παίρνουμε  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ , οπότε και γίνεται αντιληπτό ότι κάθε σημείο  $(x, y, z)$  που ικανοποιεί την (3) είναι σημείο της σφαίρας. Οι παράμετροι  $(u, v)$ , στο συγκεκριμένο παράδειγμα αναπαριστώνται από τις γωνίες, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.2. Έστω, λοιπόν, το τυχαίο σημείο  $(u, v)$  του ορθογωνίου παραλληλογράμμου  $\mathbb{T} = [0, 2\pi] \times [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$  (σχ. 4.2), τότε το σημείο αυτό είναι και της σφαίρας. Το πάνω ημισφαίριο αναπαριστά όλα τα σημεία του  $\mathbb{T}$  τα οποία ανήκουν στο  $[0, 2\pi] \times [0, \frac{1}{2}\pi]$ , ενώ το κάτω τα σημεία που ανήκουν στο  $[0, 2\pi] \times [-\frac{1}{2}\pi, 0]$ . Το σχ. 4.3 μας δίνει μία σαφή εικόνα πως το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο  $[0, 2\pi] \times [0, \frac{1}{2}\pi]$  μετασχηματίζεται σε άνω ημισφαίριο.

Γενικά, οι συναρτήσεις  $X, Y, Z$  είτε των παραμετρικών (4.1), είτε των διανυσματικών εξισώσεων (4.2) θεωρούνται συνεχείς στο  $\mathbb{T}$ . Η απεικόνιση του  $\mathbb{T}$  ως προς  $r$  ονομάζεται παραμετρική επιφάνεια και συμβολίζεται με  $r(T)$ . Η παραμετρική επιφάνεια  $r(T)$  μπορεί να εκφυλισθεί σε ένα σημείο ή σε μία επιφάνεια. Για παράδειγμα, αν οι συναρτήσεις  $X, Y, Z$  είναι σταθερές τότε  $r(T)$  εκφυλίζεται σε σημείο, ενώ αν οι  $X, Y$  είναι ανεξάρτητες ως προς  $v$  τότε εκφυλίζεται σε καμπύλη.

#### 4.2. Θεμελιώδες διανυσματικό εσωτερικό γινόμενο

Έστω επιφάνεια που περιγράφεται από τη διανυσματική εξίσωση :

$$\vec{r}(u, v) = X(u, v)\mathbf{i} + Y(u, v)\mathbf{j} + Z(u, v)\mathbf{k}, \text{ όπου } (u, v) \in \mathbb{T}$$

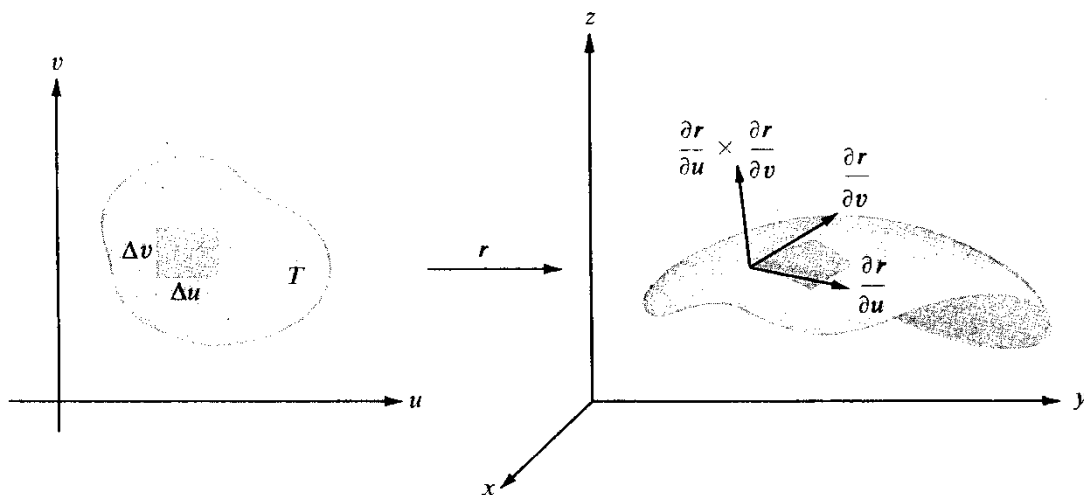
Αν οι  $X, Y, Z$  είναι παραγωγίσιμες στο  $\mathbb{T}$  τότε θεωρούμε τα δ διανύσματα :

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial u} &= \frac{\partial X}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial Y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial Z}{\partial u}\mathbf{k} \\ \frac{\partial r}{\partial v} &= \frac{\partial X}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial Y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial Z}{\partial v}\mathbf{k} \end{aligned}$$

Το εσωτερικό γινόμενο αυτών των δύο διανυσμάτων  $(\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v})$  ονομάζεται ως το θεμελιώδες διανυσματικό γινόμενο της απεικόνισης  $r$  και αναλυτικά έχουμε

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial u} \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial u} \\ \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} \frac{\partial Z}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial u} \\ \frac{\partial Z}{\partial v} & \frac{\partial X}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$= \frac{\partial(Y, Z)}{\partial(u, v)} \mathbf{i} + \frac{\partial(Z, X)}{\partial(u, v)} \mathbf{j} + \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} \mathbf{k} \quad (4.4)$$



Σχήμα 4.4 γεωμετρική αναπαράσταση των διανυσμάτων  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$  και  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$

Αν το  $(u, v)$  είναι σημείο του  $\mathbb{T}$  κατά το οποίο οι  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$  είναι συνεχείς, τότε το θεμελιώδες διανυσματικό γινόμενο είναι μη μηδενικό και η απεικόνιση του  $\mathbf{r}(u, v)$  ονομάζεται ομαλό σημείο του  $\mathbf{r}$ . Τα σημεία όπου μία εκ των δύο παραγώγων είναι δεν είναι συνεχής ή το εσωτερικό διάνυσμα  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = 0$  ονομάζονται ιδιάζοντα σημεία του  $\mathbf{r}$ . Μια επιφάνεια λέγεται ομαλή όταν όλα τα σημεία είναι ομαλά. Η σπουδαιότητα των προαναφερθέντων σημείων μπορεί να εξηγηθεί με τον παρακάτω τρόπο :

Έστω μία οριζόντια γραμμή μέσα του  $\mathbb{T}$ . Η γραμμική του απεικόνιση ως προς  $\mathbf{r}$  είναι μία καμπύλη( $u$ -καμπύλη) η οποία βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια  $\mathbf{r}(T)$ . Σκεφθείτε πως για σταθερό  $v$ , η παράμετρος  $u$  αντιπροσωπεύει το χρόνο, ενώ το διάνυσμα  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$  την ταχύτητα της επιφάνειας. Όταν το  $u$  μεταβάλλεται κατά  $\Delta u$ , το τυχαίο σημείο  $\mathbf{r}(u, v)$  μετακινείται πάνω στη  $u$ -καμπύλη κατά απόσταση με μέτρο  $\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right\| \Delta u$ , αφού το  $\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right\| \Delta u$  περιγράφει την ταχύτητα πάνω στην  $u$ -καμπύλη. Παρομοίως, για σταθερό  $u$ , ένα σημείο της  $v$ -καμπύλης για χρόνο  $\Delta v$  μετακινείται κατά απόσταση με μέτρο  $\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| \Delta v$ . Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο  $\mathbb{T}$  με

εμβαδόν  $\Delta u \Delta v$  εντοπίζεται σε ένα μέρος του  $\mathbf{r}(T)$  το οποίο μπορούμε να υπολογίσουμε προσεγγιστικά από το παραλληλόγραμμο που ορίζουν τα  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \Delta u$  και  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \Delta v$  (σχ. 4.4). Το εμβαδόν που καλύπτει το εν λόγω παραλληλόγραμμο είναι το αποτέλεσμα του εσωτερικού γινομένου των  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \Delta u$  και  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \Delta v$ ,

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \Delta u \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \Delta v \right\| = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| \Delta u \Delta v$$

#### 4.3. Το θεμελιώδες διανυσματικό γινόμενο ως κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια

Έστω μια ομαλή παραμετρική επιφάνεια  $\mathbf{r}(T)$  και  $C^*$  μία ομαλή καμπύλη στο  $\mathbb{T}$ . Τότε, η απεικόνιση  $C = \mathbf{r}(C^*)$  είναι και αυτή μία ομαλή καμπύλη, η οποία βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια. Θα αποδείξουμε πως το διάνυσμα  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$  είναι πάντα κάθετο σε κάθε σημείο του  $C$  (σχ. 4.4.)

Έστω, τώρα, ότι η καμπύλη  $C^*$  περιγράφεται από μια εξίσωση  $\mathbf{a}(t)$  με πεδίο ορισμού το διάστημα  $[\alpha, b]$

$$\mathbf{a}(t) = U(t)\mathbf{i} + V(t)\mathbf{j}.$$

Τότε η γραμμική απεικόνιση της καμπύλης  $C$  περιγράφεται από την αναλυτική σχέση

$$\boldsymbol{\rho}(t) = \mathbf{r}[\mathbf{a}(t)] = X[\mathbf{a}(t)]\mathbf{i} + Y[\mathbf{a}(t)]\mathbf{j} + Z[\mathbf{a}(t)]\mathbf{k}. \quad (4.5)$$

Θέλουμε να αποδείξουμε πως η παράγωγος  $\boldsymbol{\rho}'(t)$  είναι κάθετη στο διάνυσμα  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$  όταν οι μερικές παράγωγοι  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$  και  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$  επιλύονται στο διάστημα  $(U(t), V(t))$ . Για να υπολογίσουμε την παράγωγο  $\boldsymbol{\rho}'(t)$ , παραγωγίζουμε κάθε συνιστώσα του  $\boldsymbol{\rho}(t)$  σύμφωνα με τον κανόνα αλυσίδας, όποτε έχουμε

$$\boldsymbol{\rho}'(t) = \nabla X * \mathbf{a}'(t)\mathbf{i} + \nabla Y * \mathbf{a}'(t)\mathbf{j} + \nabla Z * \mathbf{a}'(t)\mathbf{k},$$

όπου οι κλίσεις των διανυσμάτων  $\nabla X$ ,  $\nabla Y$  και  $\nabla Z$  παίρνουν τιμές στο  $(U(t), V(t))$  και, επομένως, η (4.5) μπορεί να μετασχηματιστεί σε

$$\boldsymbol{\rho}'(t) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} * U'(t) + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} * V'(t),$$

οπού οι παράγωγοι  $\frac{\partial r}{\partial u}$  και  $\frac{\partial r}{\partial v}$  παίρνουν και αυτές τιμές στο  $(U(t), V(t))$ . Επομένως, αφού, οι παράγωγοι  $\frac{\partial r}{\partial u}$  και  $\frac{\partial r}{\partial v}$  είναι κάθετα κάθετη στο εσωτερικό γινόμενο  $\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}$  το ίδιο θα ισχύει και για την παράγωγο  $\rho'(t)$ . Κατά αυτόν τον τρόπο, αποδύκνείται πως το  $\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}$  είναι κάθετο στο  $C$ , όπως αρχικά υποθέσαμε. Για το λόγο αυτό το εσωτερικό γινόμενο  $\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}$  θεωρείται κάθετο στην επιφάνεια  $r(T)$ . Σε κάθε ομαλό σημείο  $P$  του  $r(T)$  το διάνυσμα  $\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}$  είναι μη μηδενικό. Το επίπεδο που διαγράφουν αυτά τα σημεία, το οποίο είναι κάθετο στο  $\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}$  ονομάζεται εφαπτόμενο επίπεδο στην επιφάνεια στο σημείο.

#### 4.4 Εμβαδόν επιφάνειας

Έστω  $S = r(T)$  η παραμετρική επιφάνεια που περιγράφεται από τη διανυσματική εξίσωση  $r$  και βρίσκεται σε χώρο  $\mathbb{T}$  στο  $uv$ -επίπεδο. Όπως αποδείχθηκε στο κεφάλαιο 4.2 το μήκος του θεμελιώδους εσωτερικού γινομένου  $\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}$  μπορεί να ερμηνευθεί ως ένας τοπικός μεγεθυντικός παράγοντας για το εμβαδόν (σχ. 4.4). Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο  $\mathbb{T}$  με εμβαδόν  $\Delta u \Delta v$  αντιστοιχεί σε ένα καμπυλόγραμμο παραλληλόγραμμο στο  $S$  με εμβαδόν που τείνει στην τιμή :

$$\left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\| \Delta u \Delta v$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω προκύπτει ότι το εμβαδόν μίας επιφάνειας  $S$ , που συμβολίζουμε ως  $\alpha(S)$  δίνεται από τον παρακάτω μαθηματικό τύπο

$$\alpha(S) = \iint_T \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\| \Delta u \Delta v \quad (4.6)$$

Με απλά λόγια, για να υπολογίσουμε το εμβαδόν μίας επιφάνειας  $S$ , πρώτα πρέπει να υπολογίσουμε το θεμελιώδες εσωτερικό γινόμενο και μετά να το ολοκληρώσουμε στο χώρο  $\mathbb{T}$ . Αντικαθιστώντας το  $\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}$  με την εξίσωση 4.4 έχουμε

$$\alpha(S) = \iint_T \sqrt{\left(\frac{\partial(Y,Z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(Z,X)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)}\right)^2} \Delta u \Delta v \quad (4.7)$$

Αν τώρα η επιφάνεια  $S$  περιγράφεται με την αναλυτική της μορφή από μία εξίσωση  $z = f(x, y)$

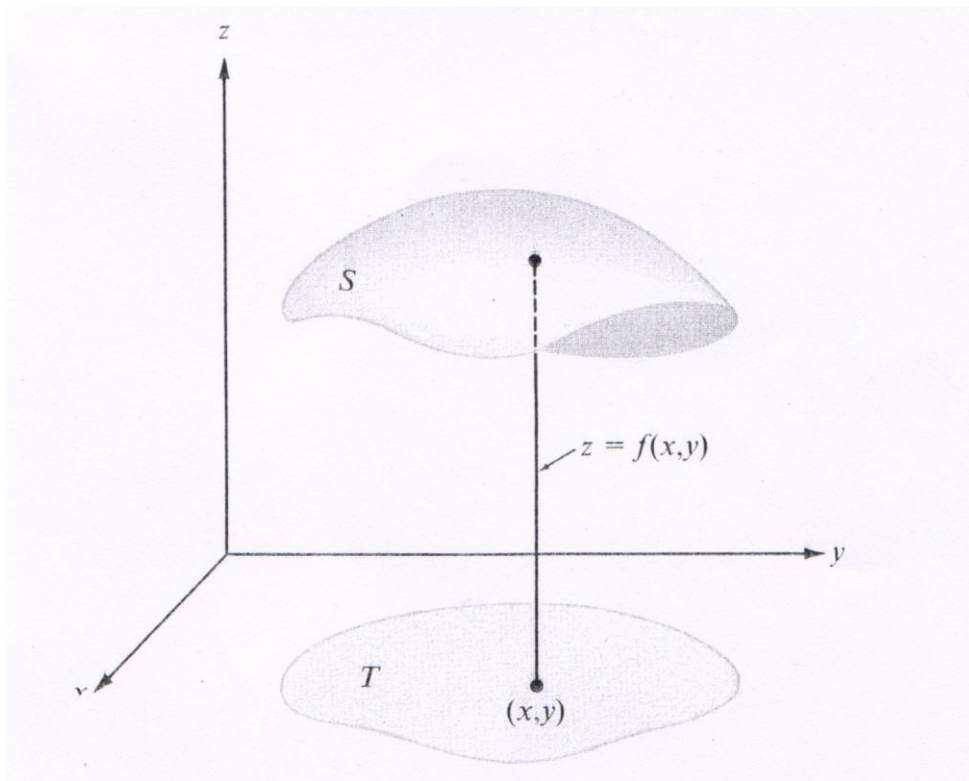
Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις μεταβλητές  $x, y$  ως παραμέτρους. Το θεμελιώδες εσωτερικό γινόμενο επομένως γίνεται :

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right\| = \left\| -\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k} \right\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

Οπότε και το επιφανειακό ολοκλήρωμα γράφεται :

$$\alpha(S) = \iint_T \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \Delta x \Delta y \quad (4.8), \text{ όπου}$$

ο χώρος  $\mathbb{T}$  είναι η προβολή της επιφάνειας  $S$  στο  $xy$ -επίπεδο, όπως φαίνεται και στο σχ.4.5



**Σχήμα 4.6** Επιφάνεια  $S$  με αναλυτική εξίσωση της μορφής  $z = f(x, y)$   
και  $\mathbb{T}$  η προβολή της  $S$  στο  $xy$ -επίπεδο

Αν η επιφάνεια  $S$  είναι παράλληλη στο  $xy$ - επίπεδο η συνάρτηση  $f$  γίνεται σταθερή και ,επομένως, η εξίσωση (4.7) μετασχηματίζεται σε

$$\alpha(S) = \iint_T \Delta x \Delta y, \quad \text{δηλαδή}$$

τη συνήθη εξίσωση υπολογισμού του εμβαδού επίπεδων χωριών.

Αν η (4.8) μετασχηματιστεί σε άλλη μορφή ,γίνεται ακόμη πιο εύκολα αντιληπτή η σημασία της γεωμετρικά. Έστω  $\gamma$ , η γωνία ανάμεσα σε στο κάθετο διάνυσμα  $\mathbf{N} = \frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y}$  και του μοναδιαίου διανύσματος  $\mathbf{k}$  (σχ 4.7). Αφού η  $z$  συνιστώσα του  $\mathbf{N}$  είναι ίση με τη μονάδα θα έχουμε

$$\cos \gamma = \frac{\mathbf{N} \cdot \mathbf{k}}{\|\mathbf{N}\| \|\mathbf{k}\|} = \frac{1}{\|\mathbf{k}\|} = \frac{1}{\left\| \frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y} \right\|},$$

και συνεπαγωγικά παίρνουμε

$$\left\| \frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y} \right\| = \frac{1}{\cos \gamma},$$

οπότε η (4.8) γράφεται και ως

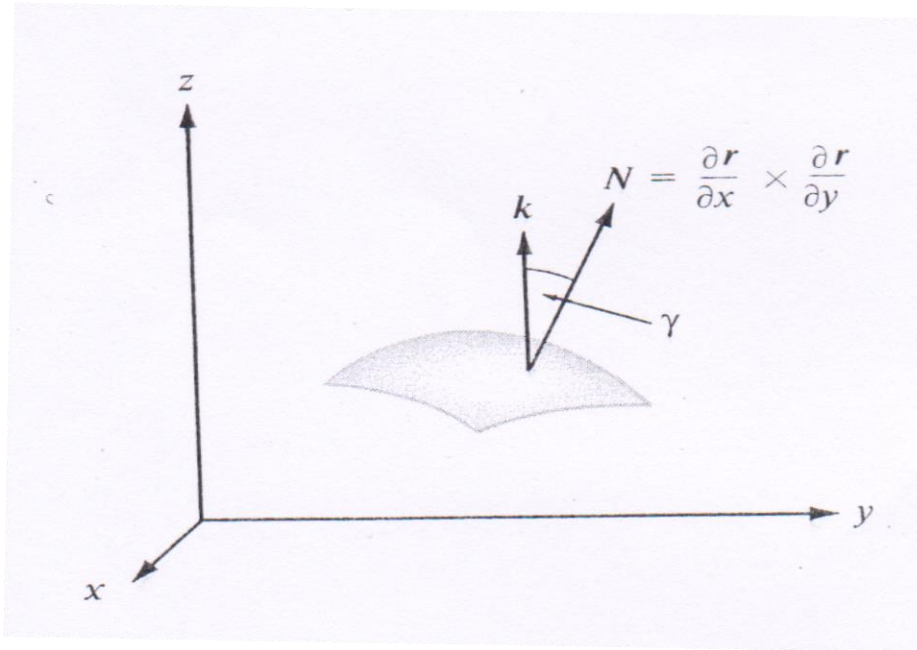
$$\alpha(S) = \iint_T \frac{1}{\cos \gamma} \Delta x \Delta y \quad (4.9)$$

Έστω τώρα επιφάνεια  $S$ , η οποία δεν είναι κάθετη στο  $xy$ - επίπεδο. Τότε, η γωνία  $\gamma$  είναι σταθερή και η παραπάνω εξίσωση ουσιαστικά περιγράφει :  $\text{εμβαδόν } S = \frac{\text{εμβαδόν } \mathbb{T}}{\cos \gamma}$  ή αλλιώς

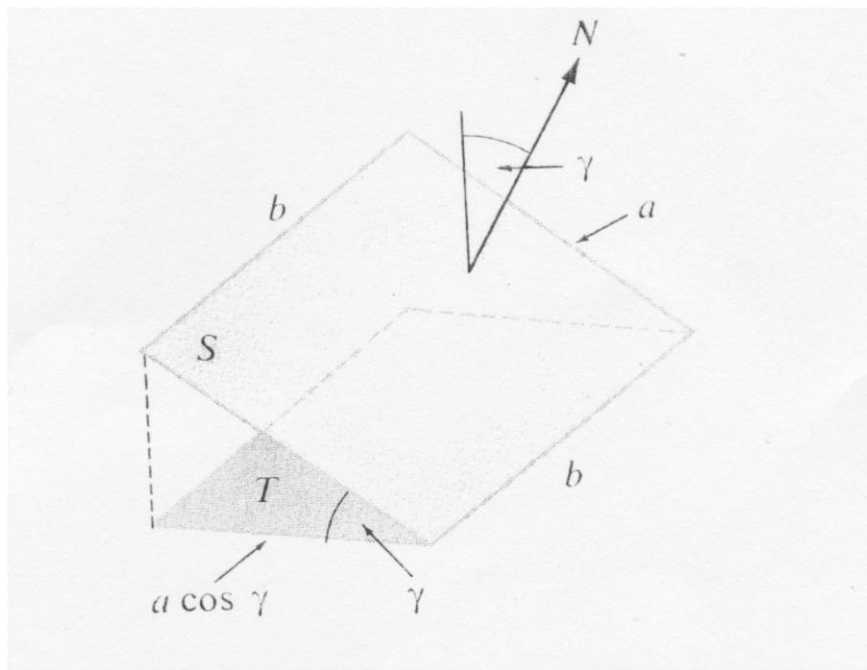
$$\alpha(\mathbb{T}) = \alpha(S) \cos \gamma \quad (4.10)$$

Και μας περιγράφει πως αν η κάθετη προβολή ενός χώρου  $S$  σε ένα χωρίο  $\mathbb{T}$  άλλου επιπέδου, σχηματίζοντας γωνία  $\gamma$  με το πρώτο επίπεδο, τότε, το εμβαδόν του  $\mathbb{T}$  ισούται με το εμβαδόν

του  $S$  πολλαπλασιασμένο με  $\cos \gamma$ . Η (4.10) είναι αληθής αν η  $S$  είναι ορθογώνιο, όπως φαίνεται και στο σχ. 4.9, αφού οι αποστάσεις στη μία κατεύθυνση μεταβάλλονται κατά  $\cos \gamma$  ενώ οι αυτές που έχουν κάθετη διεύθυνση παραμένουν αναλλοίωτες στην προβολή  $T$



Σχήμα 4.7 Το μήκος του διανύσματος  $\frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y}$  είναι  $1/\cos \gamma$



Σχήμα 4.8 Επιφάνεια  $S$  και η κάθετη προβολή της για σταθερή γωνία  $\gamma$

Ας υποθέσουμε ότι η αναλυτική εξίσωση της επιφάνειας  $S$  δίνεται από τη σχέση  $F(x, y, z) = 0$ . Αν τώρα αυτή η επιφάνεια μπορεί να απεικονισθεί «1 προς 1» στο  $xy$ -επίπεδο η εξίσωση  $F(x, y, z) = 0$  περιγράφει τη συνιστώσα  $z$  ως συνάρτηση των  $x, y$  συνιστώσεων. Έστω,  $z = f(x, y)$  με μερικές παραγώγους  $\frac{\partial f}{\partial x}$  και  $\frac{\partial f}{\partial y}$  συνδέονται με την  $F$  σύμφωνα με τις παρακάτω εξισώσεις :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Με τον περιορισμό όμως ότι  $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ . Αντικαθιστώντας την παραπάνω εξίσωση με την (4.8) προκύπτει ότι

$$a(S) = \iint_T \sqrt{\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}{\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|} + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} \Delta x \Delta y$$

#### 4.5 επιφάνεια εκ περιστροφής

Έστω  $C^*$  ομαλή καμπύλη. Η επιφάνεια  $S$ , που διαγράφει η καμπύλη αυτή, όταν περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα που δεν την τέμνει, ονομάζεται επιφάνεια εκ περιστροφής και η καμπύλη αυτή ονομάζεται γενέτειρα. Έστω η καμπύλη αυτή βρίσκεται στο  $xz$ -επίπεδο, όπως φαίνεται στο σχ. 4.9, περιστρέφεται περί τον άξονα  $z'z$  και έχουμε,

$$z = f(x), \quad x \geq 0$$

και περιστρέφεται περί τον άξονα  $z'z$ . Το τυχαίο σημείο  $M = (X(u), 0, Z(u))$ , της καμπύλης διαγράφει κύκλο στο  $xz$ -επίπεδο περιστρεφόμενο περί άξονα  $z'z$ , έχοντας περιστραφεί κατά  $v$  βρίσκεται πλέον στο σημείο με ίδια συντεταγμένη  $z$  και νέες  $x, y$ . Συνολικά για το νέο σημείο έχουμε,

$$r(u, v) = (X(u)\cos v \mathbf{i} + X(u)\sin v \mathbf{j} + Z(u)\mathbf{k})$$

Γενικά, δηλαδή, ισχύει :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Τώρα, οι μερικές παράγωγοι  $\frac{\partial r}{\partial u}, \frac{\partial r}{\partial v}$  γίνονται



$$\frac{\partial r}{\partial v} = -X(u)\sin v \mathbf{i} + X(u)\cos v \mathbf{j} + 0$$

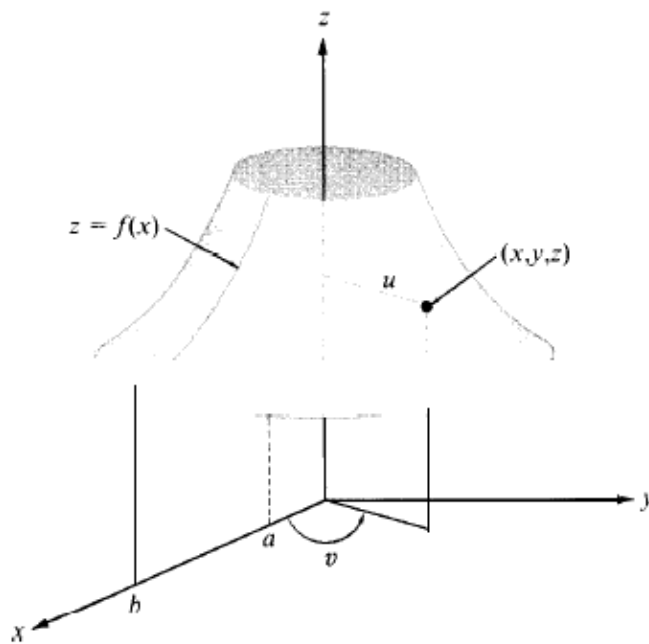
$$\frac{\partial r}{\partial u} = X'(u)\cos v \mathbf{i} + X'(u)\sin v \mathbf{j} + Z'(u)\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ X'(u)\cos v & X'(u)\sin v & Z'(u) \\ -X(u)\sin v & X(u)\cos v & 0 \end{vmatrix} = X(u)(Z'(u)\cos v \mathbf{i} - Z'(u)\sin v \mathbf{j} + X'(u)\mathbf{k})$$

επομένως,

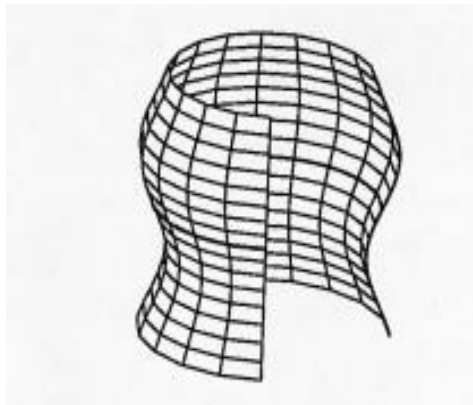
$$\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} = 0 \text{ αν και μονο αν } Z'(u) = X'(u) = 0$$

Άρα, γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι μια επιφάνεια εκ περιστροφής είναι ομαλή όταν  $Z'(u) \neq 0$  ή  $X'(u) \neq 0$ .



σχήμα 4.9 επιφάνειες εκ περιστροφής

Οι κύκλοι που διαγράφονται από σημεία της καμπύλης κατά την περιστροφή της λέγονται **παράλληλοι**, ενώ οι καμπύλες της επιφάνειας που είναι θέσεις της αρχικής καμπύλης κατά την περιστροφή της, λέγονται **μεσημβρινοί**. Κάθε σημείο της επιφάνειας είναι τομή ενός παράλληλου με ένα μεσημβρινό που είναι και οι παραμετρικές γραμμές της επιφάνειας που διέρχονται από το σημείο αυτό.

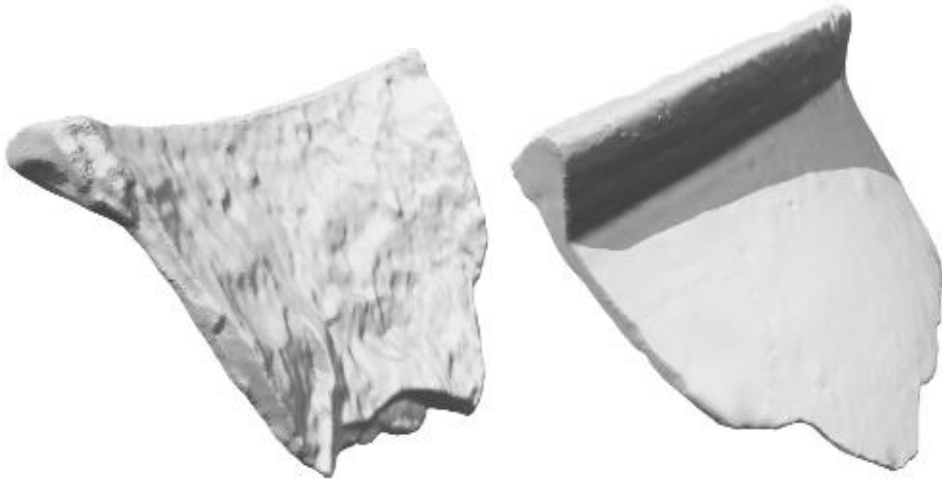


Σχ. 4.10 Παράλληλοι και μεσημβρινοί επιφάνειας εκ περιστροφής

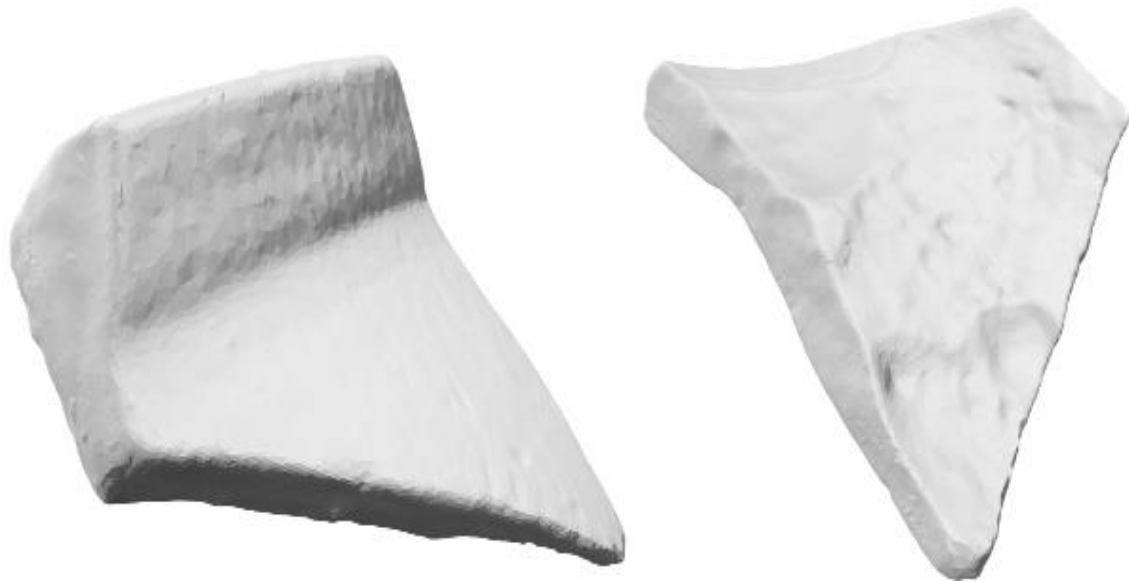
## 5. ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΑΝΑΚΤΗΣΗΣ ΚΑΙ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΤΩΝ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΩΝ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΝ ΤΩΝ ΘΡΑΥΣΜΑΤΩΝ

### 5.1 Διαδικασία εξαγωγής της ψηφιακής απεικόνισης θραυσμάτων

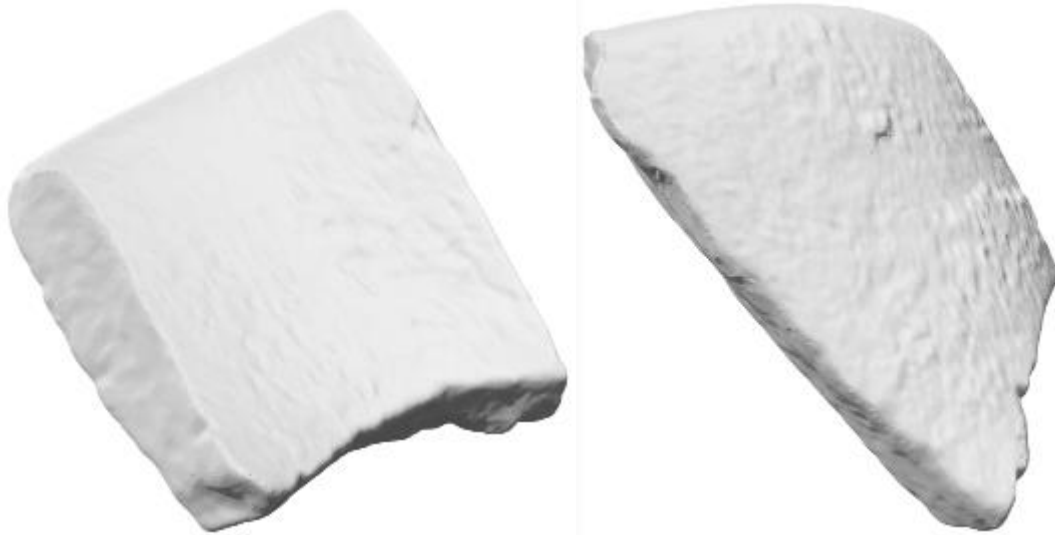
Με τον όρο τρισδιάστατη απεικόνιση ενός θραύσματος εννοούμε την ψηφιακή απεικόνισή του, η οποία προκύπτει από την σάρωσή του με κατάλληλο, τρισδιάστατο σαρωτή. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιήθηκε ένα σύστημα, που αποτελείται από δύο κάμερες και έναν προβολέα με ονομαστική ακρίβεια σάρωσης 3-7  $\mu\text{m}$ . Τα προς σάρωση θραύσματα τοποθετούνται σε μία πλάκα αναφοράς που φέρει φωτογραμμετρικούς στόχους. Η πλάκα αναφοράς έχει επίσης σαρωθεί και μετρηθεί κενή. Η μέση ακρίβεια αυτής της μέτρησης είναι 5  $\mu\text{m} / 1\text{m}$ . Η πλάκα αναφοράς τοποθετείται σε μία συσκευή περιστροφής και για κάθε γωνία περιστροφής της, μετρώνται οι συντεταγμένες των στόχων αναφοράς. Στη συνέχεια, τα θραύσματα τοποθετούνται πάνω στη πλάκα αναφοράς και οι συντεταγμένες των σημείων δειγματοληψίας στην επιφάνειά τους μετρώνται με βάση τις μετρήσεις της πλάκας αναφοράς. Οι συντεταγμένες των σημείων της επιφάνειας του θραύσματος βρίσκονται με φωτογραμμετρική ανασύνθεση της πληροφορίας που αντλείται από δύο διαφορετικές διδιάστατες (2D) προβολές, χρησιμοποιώντας τη μεθοδολογία του "δομημένου φωτός", όπως εκτενώς περιγράφεται στο [22]. Η διαδικασία σάρωσης πραγματοποιείται με ανάλυση δειγματοληψίας 0,14 mm. Επομένως, μέσω της τρισδιάστατης σάρωσης αποκτούμε μία ολοκληρωμένη εικόνα των γεωμετρικών χαρακτηριστικών της επιφάνειας του θραύσματος στο σύνολό της. Παρακάτω, ακολουθούν οι τρισδιάστατες απεικονίσεις ορισμένων θραυσμάτων όπως αυτές προέκυψαν μετά τη σάρωσή τους .



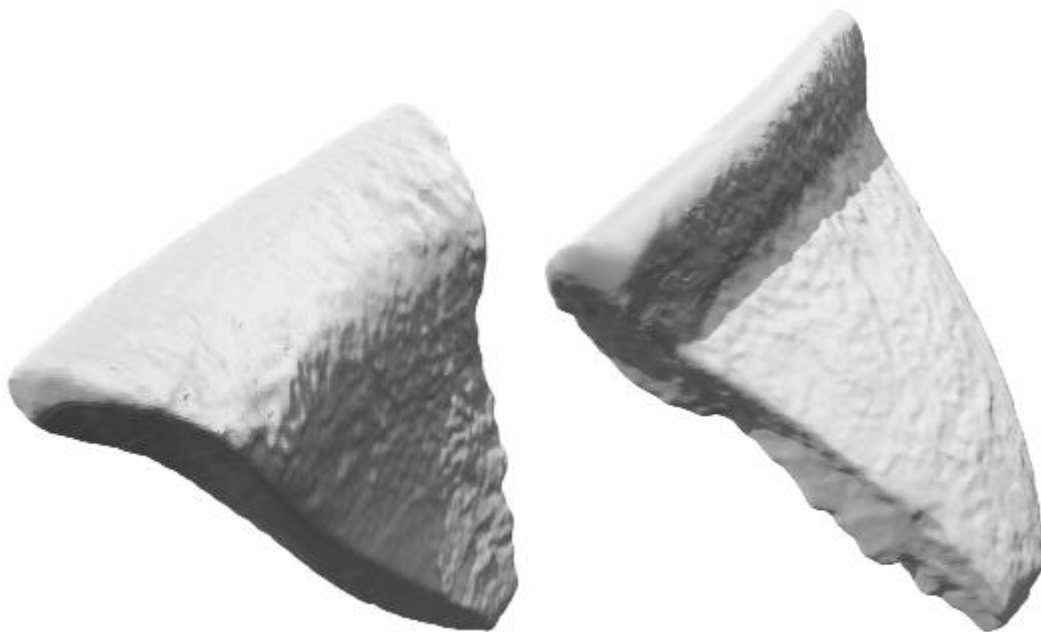
**Τρισδιάστατη απεικόνιση θραύσματος v0067**



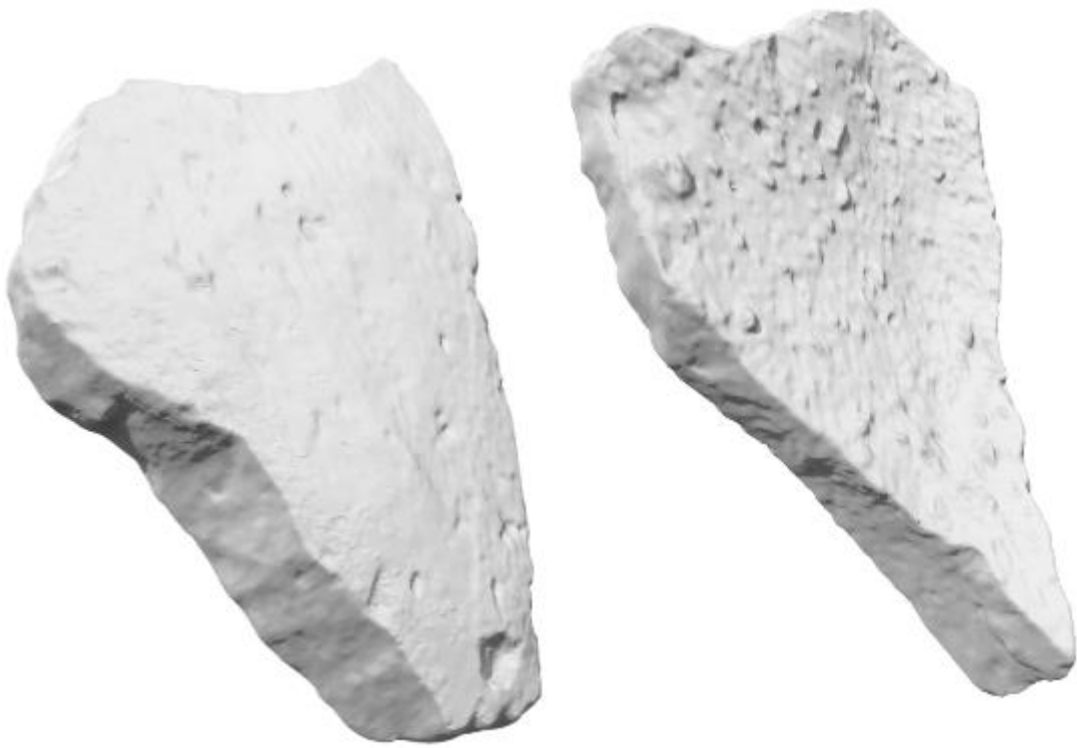
**Τρισδιάστατη απεικόνιση θραύσματος v0069**



**Τρισδιάστατη απεικόνιση θραύσματος v0071**



**Τρισδιάστατη απεικόνιση θραύσματος v0111**



**Τρισδιάστατη απεικόνιση θραύσματος v0122**



**Τρισδιάστατη απεικόνιση θραύσματος v0204**

## 5.2 Ψηφιακή επεξεργασία της τρισδιάστατης απεικόνισης θραυσμάτων

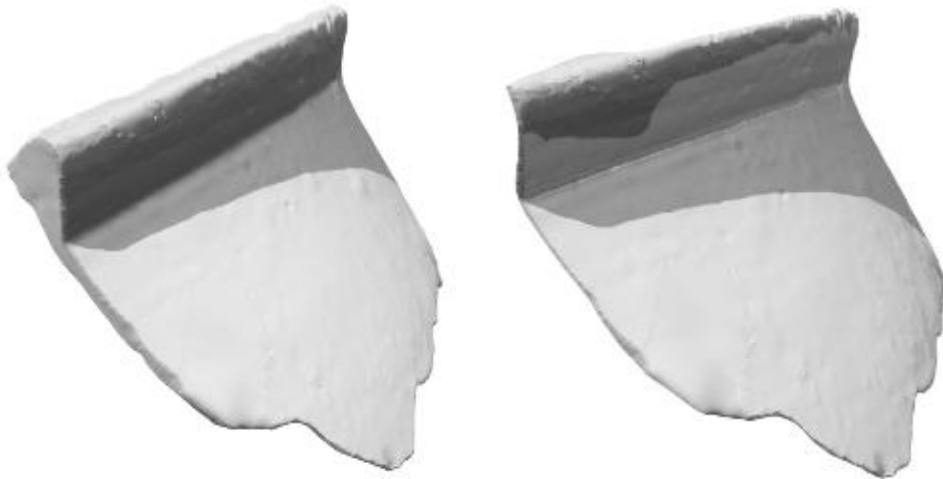
### 5.2.1 Εντοπίζοντας τις τρεις διαφορετικές επιφάνειες του θραύσματος

Η επεξεργασία της τρισδιάστατης (3D) αναπαράστασης των θραυσμάτων ξεκινάει με τον εντοπισμό των τριών επιφανειών του θραύσματος:

- 1) Της «άνω επιφάνειας» («upper surface») του θραύσματος
- 2) Της «κάτω επιφάνειας» («lower surface») του θραύσματος
- 3) Της «πλευρικής επιφάνειας» («lateral surface») του θραύσματος

Η διάκριση των τριών αυτών επιφανειών είναι απαραίτητη για την αυτόματη ανασύνθεση των θραυσμάτων. Το κριτήριο με το οποίο διακρίνουμε την «άνω» από την «κάτω» επιφάνεια είναι ότι η υφή της «άνω» επιφάνειας είναι συνήθως πιο λεία σε σχέση με την «κάτω» που είναι συνήθως πιο τραχιά. Τέλος, η επιφάνεια που ενώνει την «άνω» με την «κάτω» επιφάνεια είναι η «πλευρική», η οποία είναι λιγότερο ομαλή σε σχέση με τις άλλες λόγω της θραύσης αυτής καθαυτής, αλλά και της φθοράς.

#### 5.2.1.1. Παραδείγματα «άνω» επιφάνειας



άνω επιφάνεια θραύσματος v0067



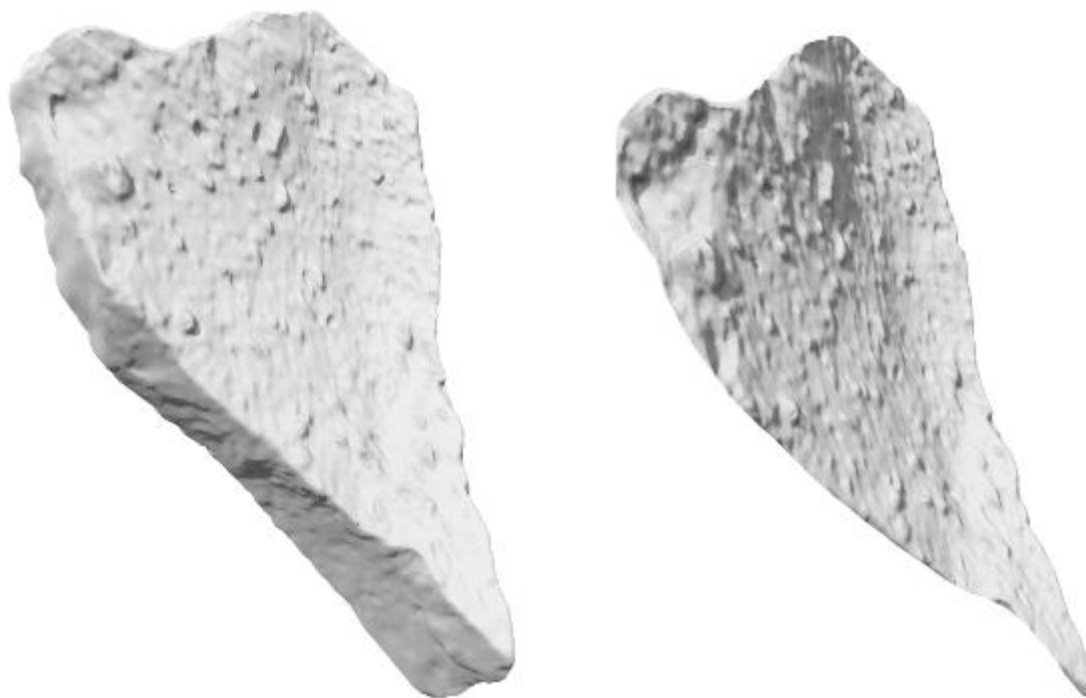
άνω επιφάνεια θραύσματος v0069



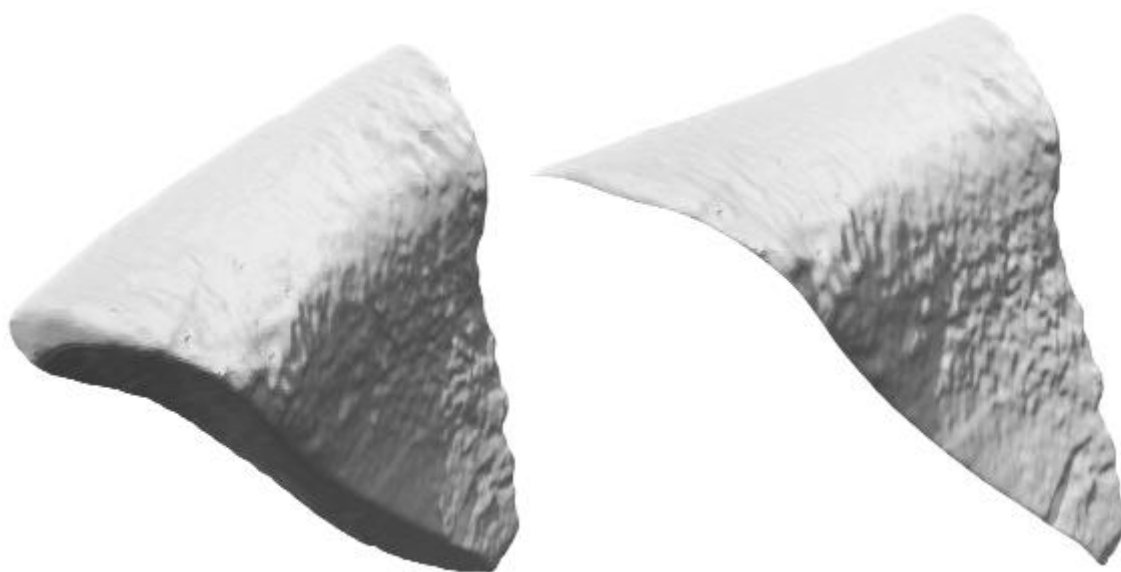
άνω επιφάνεια θραύσματος v0071



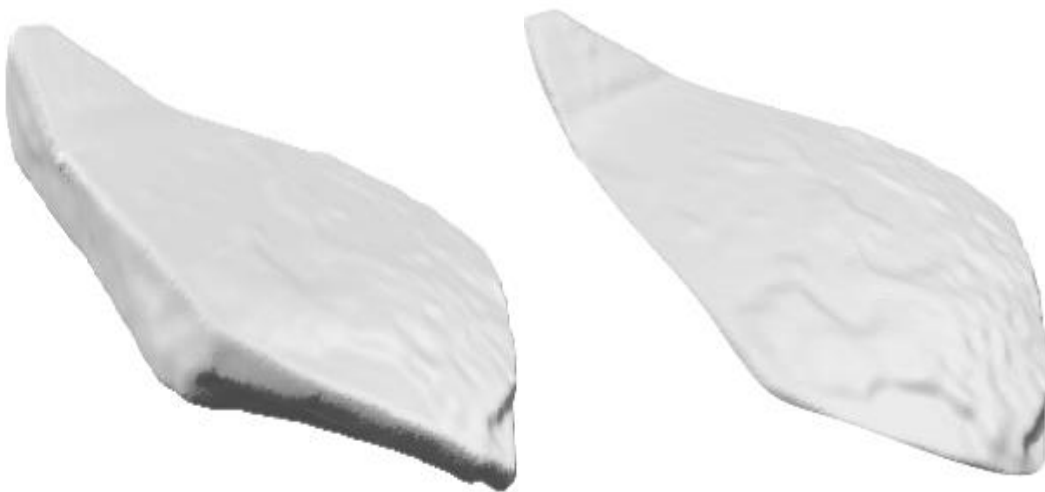
5.2.1.2. Παραδείγματα «κάτω» επιφάνειας



κάτω επιφάνεια θραύσματος v0122

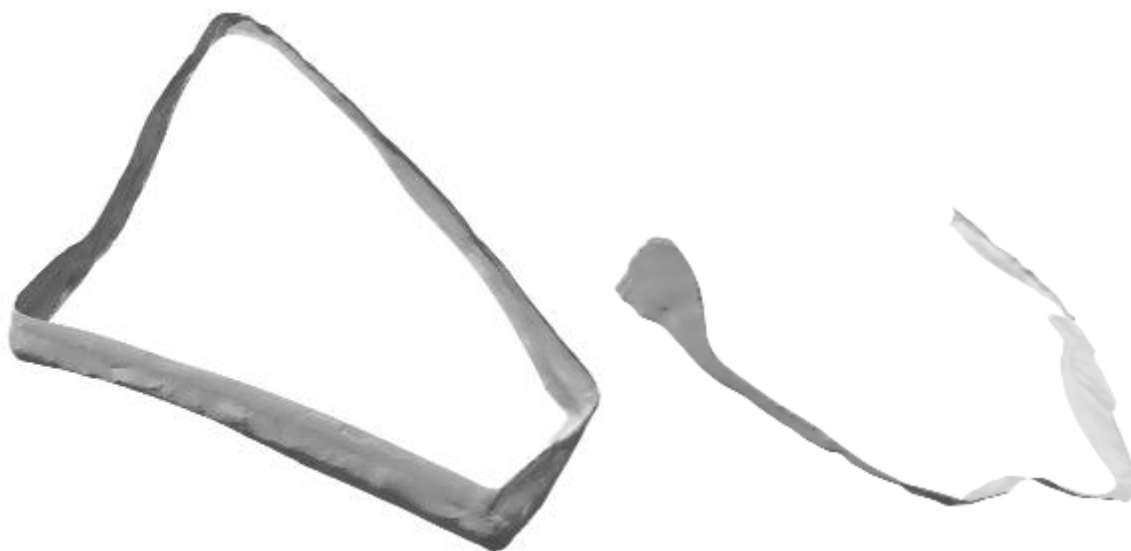


κάτω επιφάνεια θραύσματος v0111



**κάτω επιφάνεια θραύσματος v0204**

***5.2.1.3. Παραδείγματα «πλευρικής» επιφάνειας***



**Πλευρικές επιφάνειες θραυσμάτων v0069 και v0067**



**Πλευρικές επιφάνειες θραυσμάτων v0071 και v0111**



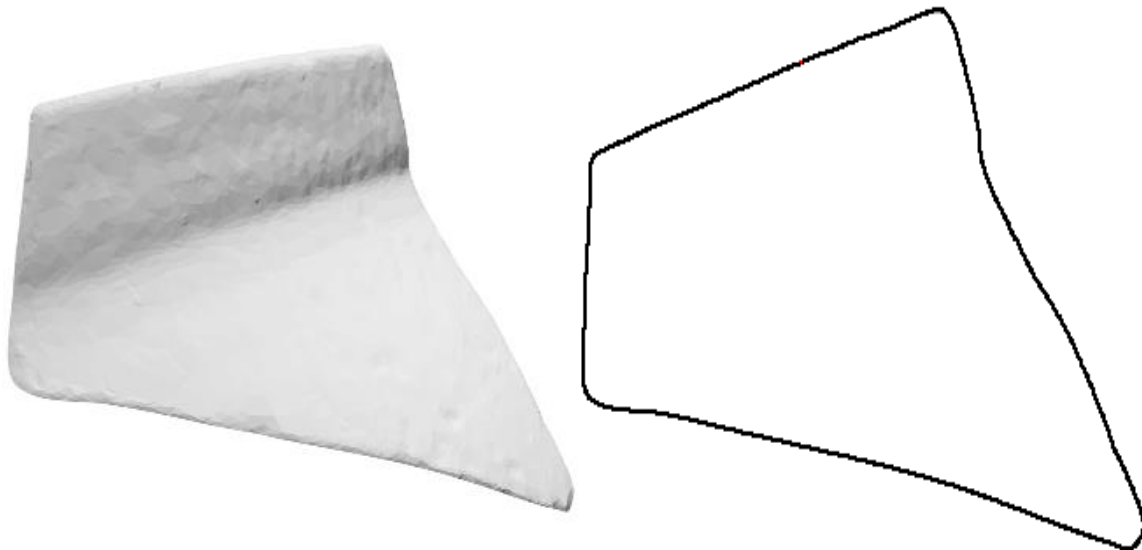
**Πλευρικές επιφάνειες θραυσμάτων v0122 και v0204**

### 5.2.2 Εξαγωγή των περιγραμμάτων της «άνω» και «κάτω» επιφάνειας των θραυσμάτων

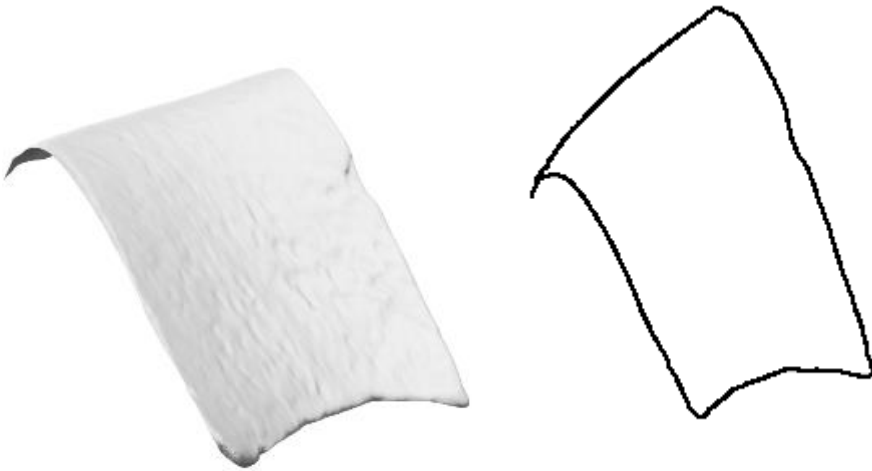
Το επόμενο βήμα στην επεξεργασία της 3D απεικόνισης των θραυσμάτων είναι η εξαγωγή των δύο κλειστών καμπυλών που είναι τα περιγράμματα της «άνω» και «κάτω» επιφάνειας του θραύσματος. Οι καμπύλες αυτές, όπως αναφέρθηκε στην ενότητα 2, θα χρησιμοποιηθούν στην αυτόματη ανασύνθεση.

Αφού προσδιορίσουμε τις τρεις επιφάνειες, εξάγουμε τις καμπύλες ως περιγράμματα των επιφανειών αυτών. Για τον εντοπισμό των καμπυλών αυτών είναι απαραίτητος ο μαθηματικός προσδιορισμός τους μέσω της μεταβολής του μοναδιαίου κάθετου διανύσματος των επιφανειών. Στη συνέχεια, αποθηκεύουμε την καμπύλη σε μορφή αλυσίδας σημείων, ώστε να χρησιμοποιηθούν στη μέθοδο της αυτόματης ανασύνθεσης.

#### 5.2.2.1 Παραδείγματα περιγράμματος «άνω» επιφάνειας

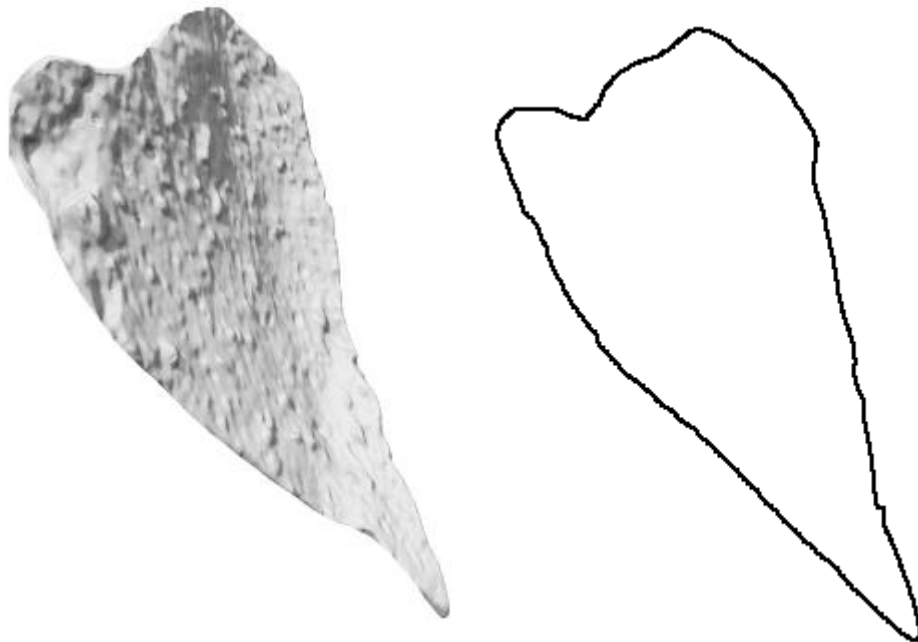


Περίγραμμα «άνω» επιφάνειας θραύσματος v0069



**Περίγραμμα «άνω» επιφάνειας θραύσματος v0071**

5.2.2.2 Παραδείγματα περιγράμματος «κάτω» επιφάνειας



**Περίγραμμα «κάτω» επιφάνειας θραύσματος v0122**



**Περίγραμμα «κάτω» επιφάνειας θραύσματος v0204**

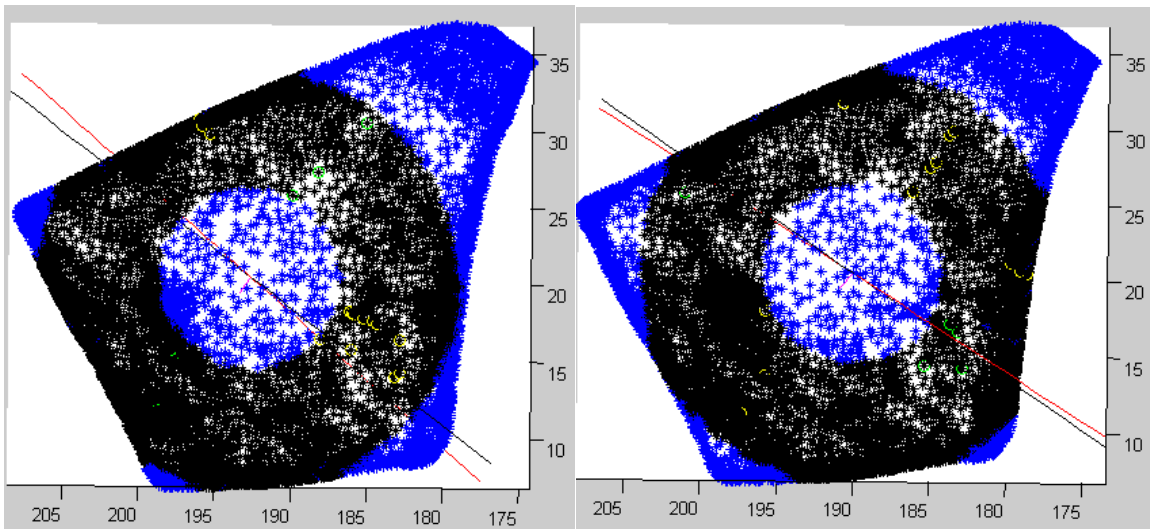
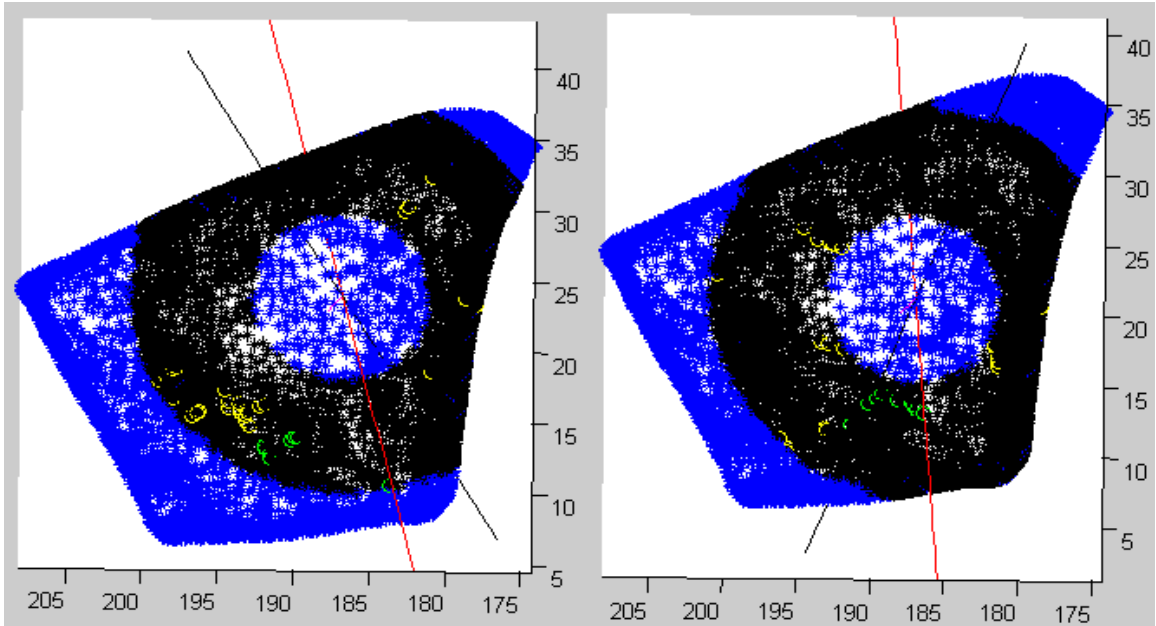
## 6. ΜΙΑ ΚΑΙΝΟΤΟΜΩΣ ΠΡΟΤΑΣΗ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΞΟΙΚΟΝΟΜΗΣΗ ΠΟΛΥΤΙΜΟΥ «ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟΥ» ΧΡΟΝΟΥ

Στη συγκεκριμένη ενότητα της παρούσας διπλωματικής εργασίας μελετήθηκε και εφαρμόστηκε μία νέα μέθοδος, η οποία αποσκοπεί στο να γλιτώσει τόσο το υπολογιστικό σύστημα, όσο και τον άνθρωπο, από περιττούς ελέγχους για πιθανά ταιριάσματα σε θραύσματα τα οποία, πιθανότατα, δεν προέρχονται από το ίδιο αντικείμενο. Βασιζόμενοι στη διαφορική γεωμετρία, (ενότητες 3 και 4) αναπτύξαμε έναν κώδικα στο περιβάλλον του MATLAB, ο οποίος μας δίνει πληροφορίες σχετικά με τη γεωμετρία ολόκληρου του αντικειμένου στο οποίο ανήκει το προς-έλεγχο όστρακο. Ο κώδικας που χρησιμοποιούμε βασίζεται στις ιδιότητες των επιφανειών εκ περιστροφής και στην καμπυλότητα της γενέτειράς τους (ενότητα 3 και 4) και επιστρέφει τη διεύθυνση του άξονα περιστροφής σε μορφή διανύσματος αλλά και την γενέτειρα (διατομή – προφίλ) του συγκεκριμένου οστράκου. Επαναλαμβάνοντας αυτή την διαδικασία τουλάχιστον 10-15 φορές σε διαφορετικές περιοχές του οστράκου, αν παρατηρήσουμε ότι υπάρχουν άξονες με παρόμοια διεύθυνση, στην πλειονότητα των τυχαίων αυτών περιοχών, τότε τους θεωρούμε αυτούς ως πιθανούς άξονες περιστροφής. Αφού επαναλάβουμε τη διαδικασία αυτή για όλα τα προς εξέταση όστρακα, θα ελέγξουμε για πιθανά ταιριάσματα πρώτα τα κομμάτια που έχουν παραπλήσιους πιθανούς άξονες περιστροφής και διατομή (προφίλ), ενώ παράλληλα θα απορρίψουμε άλλα που οι διατομές τους σε σχέση με τους άξονες περιστροφής τους είναι εντελώς διαφορετικές.

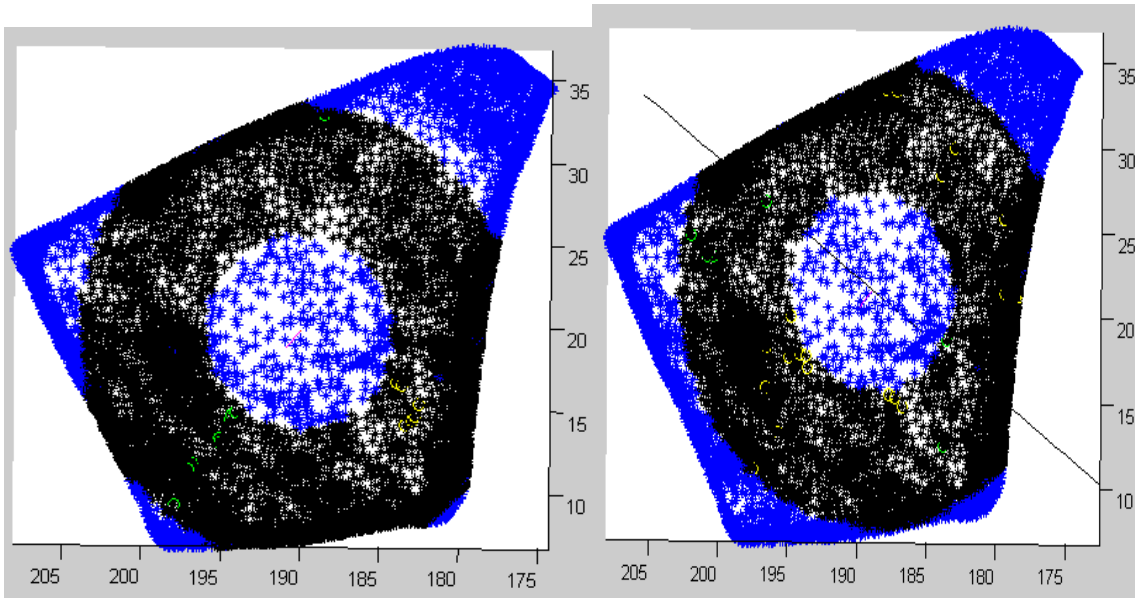
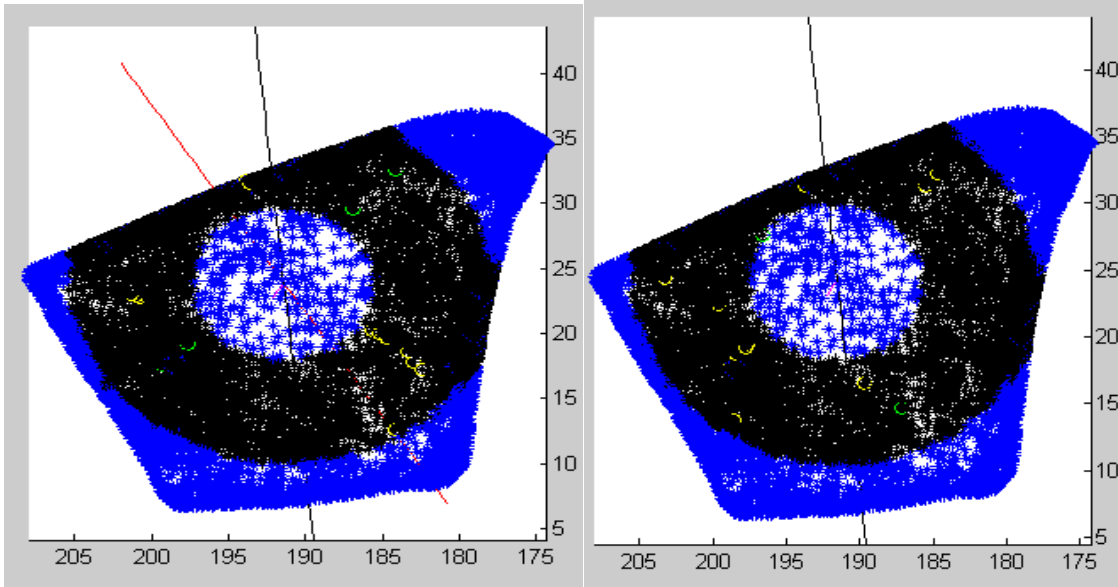
Παρακάτω, παραθέτουμε τα αποτελέσματα που μας έδωσε ο κώδικας για ένα συγκεκριμένο όστρακο:

Μαύρος Άξονας		
$x$	$y$	$z$
0.986713	0.099577	0.128385
0.566021	0.824388	0.002109
0.987119	0.094777	0.128895
0.904117	-0.36443	0.22307
0	0	0
-0.51852	0.84102	-0.15433
0.476202	0.87909	-0.02081
-0.85486	-0.51665	-0.04776
0.596742	0.790667	-0.13691
0.564056	0.825522	0.018827

Κόκκινος Άξονας		
$x$	$y$	$z$
0	0	0
0	0	0
0.843465	0.528915	0.093895
0.995347	0.079936	0.053807
0	0	0
0.538991	0.828022	0.154491
0	0	0
0.968689	0.245703	-0.03566
0.655173	0.754622	0.035974
0.535404	0.832033	-0.14513





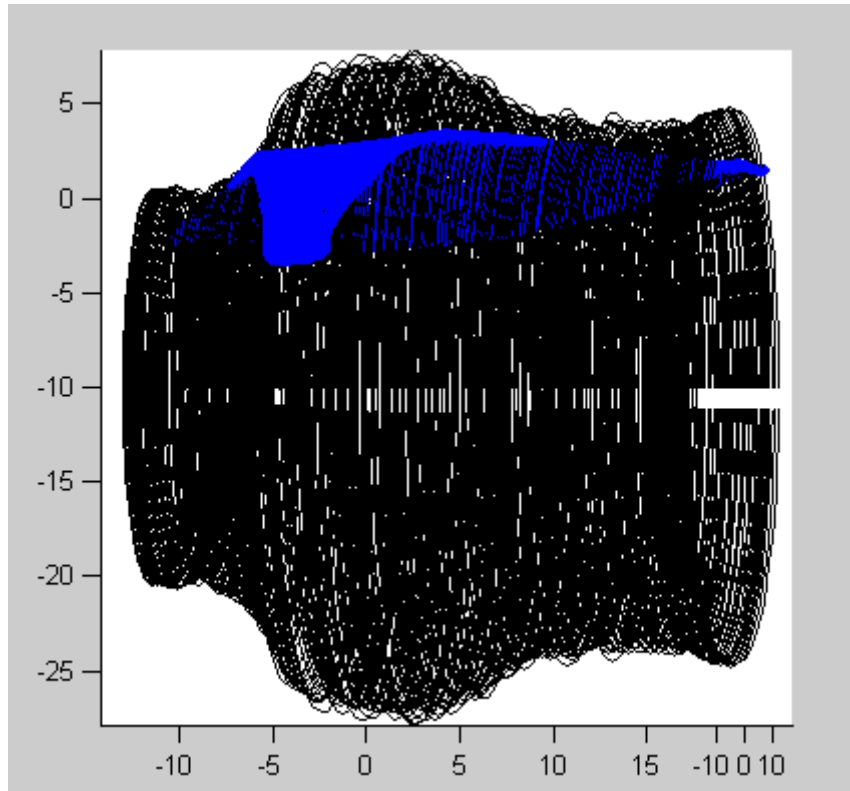


Όπως φαίνεται, έχουμε δύο πιθανούς άξονες περιστροφής και μια αντίστοιχη διατομή. Επομένως, αν σε άλλο όστρακο εμφανιστεί η ίδια μορφή άξονα περιστροφής και διατομής, τότε αυτόματα θα ελέγξουμε αυτά τα δύο θραύσματα για πιθανό ταίριασμα.

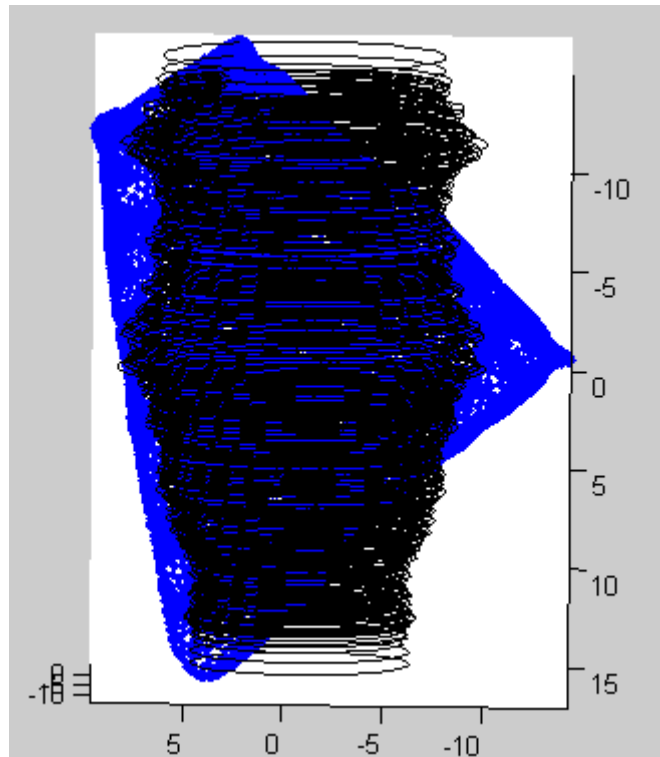
Αντιστρόφως στην περίπτωση ριζικά διαφορετικών διατομών – αξόνων, δεν προχωρούμε σε έλεγχο πιθανής προσαρμογής, γεγονός που επιταχύνει σε τεράστιο βαθμό την διαδικασία ανακατασκευής των θραυσμένων αγγείων.

Τέλος, μετά από αυτό το στάδιο, αναπτύξαμε και ένα δεύτερο κώδικα με στόχο να αποκτήσουμε πληροφορίες για το σχήμα ή ακόμη και το καλούπι του αγγείου που ανήκει το προς εξέταση θραύσμα. Πιο συγκεκριμένα, με βάση τους πιθανούς άξονες περιστροφής που λάβαμε από το προηγούμενο βήμα, στρέφουμε το θραύσμα και εξάγουμε την επιφάνεια εκ περιστροφής που διαγράφει το αντικείμενο. Σε ορισμένα μεγάλα κομμάτια, όπως το θραύσμα v0204, τα αποτελέσματα ήταν εντυπωσιακά .

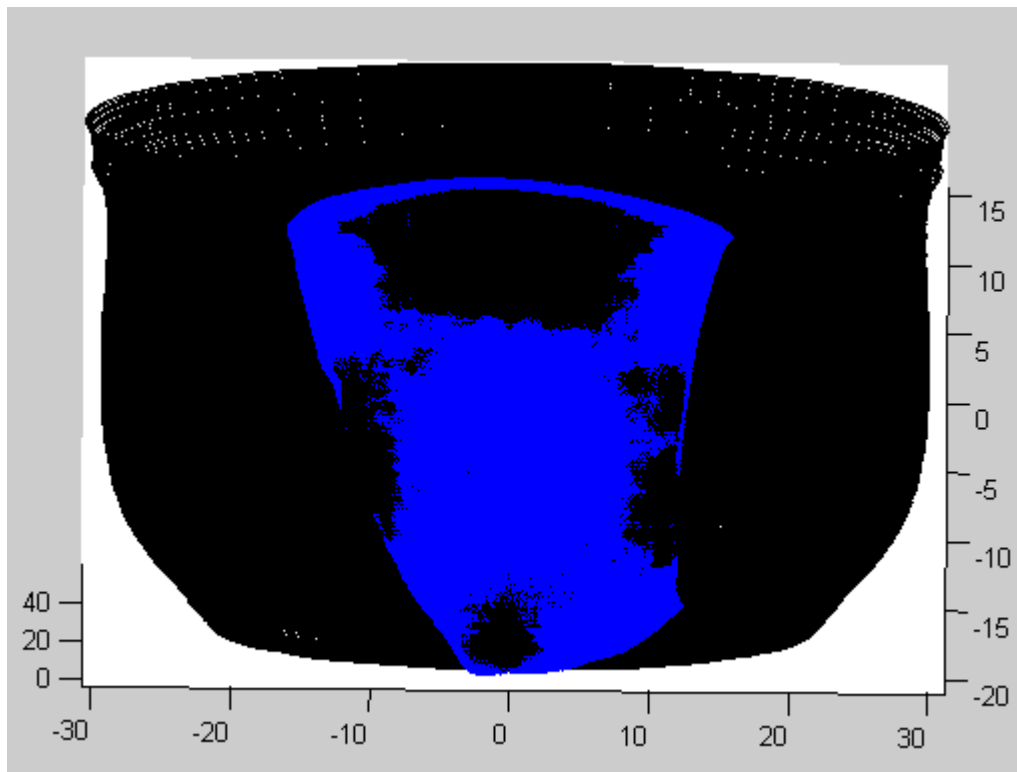
Ακολουθούν παραδείγματα εφαρμογής της συγκεκριμένης μεθοδολογίας σε άλλα όστρακα:



**Επιφάνεια εκ περιστροφής θραύσματος v0204**



**Επιφάνεια εκ περιστροφής θραύσματος v0061**



**Επιφάνεια εκ περιστροφής θραύσματος v0110**

## 7. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα διπλωματική καταρχήν πραγματοποιήθηκε η προκαταρτική επεξεργασία τρισδιάστατων απεικονίσεων θραυσμάτων (οστράκων) ταφικών αγγείων της Μυκηναϊκής περιόδου που σώζονται στο Εθνικό Αρχαιολογικό Μουσείο. Η προκαταρτική αυτή επεξεργασία έφερε τα θραύσματα σε μορφή απολύτως κατάλληλη, ώστε να εφαρμοστούν νέες μεθοδολογίες αυτοματοποιημένης ανασύνθεσης θραυσμένων αντικειμένων [1].

Αναλυτικότερα, η παρούσα διπλωματική εργασία εστίασε:

Στην ανάλυση και την μελέτη της μεθόδου ανακατασκευής θραυσμένων ευρημάτων σε 3 διαστάσεις που παρουσιάστηκε στη δημοσίευση [1]. Ακόμη, στον εντοπισμό της πιθανότερης επιφάνειας εκ περιστροφής στην οποία ανήκει κάθε όστρακο, με σκοπό την επιτάχυνση της διαδικασίας εύρεσης οστράκων που όντως ταιριάζουν. Προς τον σκοπό αυτό πραγματοποιήθηκε μελέτη αρχών και συμπερασμάτων της Διαφορικής Γεωμετρίας και ειδικότερα των επιφανειών εκ περιστροφής και της καμπυλότητας.

Οι συγκεκριμένες μεθοδολογίες, αφού μελετήθηκαν στο πλαίσιο αυτής της διπλωματικής, εφαρμόστηκαν στις προαναφερθείσες επεξεργασμένες τρισδιάστατες απεικονίσεις οστράκων. Η εφαρμογή αυτών των μεθοδολογιών προσέφερε σαφώς ικανοποιητικά αποτελέσματα.

## 8. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] C. Papaodysseus, T. Panagopoulos, M. Exarhos, C. Triantafillou, D. Fragoulis, C. Doulas, Contour-shape based reconstruction of fragmented, 1600 BC wall paintings, *IEEE Transactions on Signal Processing* 50 (6) (2002) 1277–1288.
- [2] C. Papaodysseus, D. Arabadjis, M. Exarhos, P. Rousopoulos, S.Zannos, M. Panagopoulos, L. Papazoglou- Manioudaki, Efficient solution to the 3D problem of automatic wall paintings reassembly
- [3] H.C. da Gama Leitao, J. Stolfi, A multiscale method for the reassembly of two-dimensional fragmented objects, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 24 (9) (2002) 1239–1251.
- [4] A. Willis, X. Orriols, D.B. Cooper, Accurately estimating shred 3D surface geometry with application to pot reconstruction, in: *ACVA '03 workshop of CVPR 2003*, pp. 1–7.
- [5] Y. Shogo, K. Shohei, K. Satoshi, I. Hidenori, An earthenware reconstruction method based on the matching of both contour curve and color pattern on the surface of potsherds, *Journal of the Institute of Image Electronics Engineers of Japan* 34 (2) (2005) 126–133.
- [6] G. Ucoluk, I.H. Toroslu, Automatic reconstruction of 3D surface objects, *Elsevier Computers & Graphics* 23 (4) (1999) 573–582.
- [7] A. Biswas, P. Bhowmick, B.B. Bhattacharya, Reconstruction of torn documents using contour maps, in: *IEEE Int. Conf. on Image Processing*, vol. 3, 2005, pp. 517–520.
- [8] P. de Smet, Reconstruction of ripped-up documents using fragment stack analysis procedures, *Elsevier Forensic Science International* 176 (2–3) (2008) 124–136.
- [9] F. Stanco, L. Tenze, G. Ramponi, A. de Polo, Virtual restoration of fragmented glass plate photographs, in: *12th IEEE Medit. Electrotechnical Conf.*, vol. 1, 2004, pp. 243–246.
- [10] A. Ukovic, G. Ramponi, Feature extraction and clustering for the computer-aided reconstruction of strip-cut shredded documents, *Journal of Electronic Imaging* 17 (1) (2008).
- [11] A. Ukovic, G. Ramponi, H. Doulaverakis, Y. Kompatsiaris, M.G. Strintzis, Shredded document reconstruction using MPEG-7 standard descriptors, in: *4th IEEE Int. Symp. on Signal Processing*, 2004, pp. 334–337.
- [12] L. Zhu, Z. Zhou, D. Hu, Globally consistent reconstruction of ripped-up documents, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 30 (1) (2008) 1–13.
- [13] P.J. Besl, H.D. McKay, A method for registration of 3-D shapes, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 14 (2) (1992) 239–256.
- [14] S. Linnainmaa, D. Harwood, L.S. Davis, Pose determination of a three-dimensional object using triangle pairs, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 10 (5) (1988) 634–647.

- [15] S. Winkelbach, M. Rilk, C. Schönlfelder, F.M. Wahl, Fast random sample matching of 3D fragments, in: Pattern Recognition, 26th DAGM Symposium, in: Lecture Notes in Computer Science, vol. 3175, Springer, Berlin, 2004, pp. 129–136.
- [16] G. Papaioannou, E.A. Karabassi, T. Theoharis, Reconstruction of three-dimensional objects through matching of their parts, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence 24 (1) (2002) 114–124.
- [17] G. Papaioannou, E.A. Karabassi, On the automatic assemblage of arbitrary broken solid artefacts, Elsevier Image and Vision Computing 21 (2003) 401–412.
- [18] Q.X. Huang, S. Flöry, N. Gelfand, M. Hofer, H. Pottmann, Reassembling fractured objects by geometric matching, ACM Transactions on Graphics 25 (3) (2006) 569–578.
- [19] S. Winkelbach, F.M. Wahl, Pairwise matching of 3D fragments using cluster trees, International Journal of Computer Vision 78 (1) (2008) 1–13. Springer.
- [20] B.J. Brown, C. Toler-Fraklin, D. Nehab, M. Burns, D. Dobkin, A. Vlachopoulos, C. Dumas, C. Rusinkiewicz, T. Weyrich, A system for high-volume acquisition and matching of fresco fragments: reassembling Thera wall paintings, ACM Transactions on Graphics 27 (3) (2008).
- [21] C. Papaodysseus, D. Arabadjis, M. Panagopoulos, P. Rousopoulos, M. Exarhos, E. Papazoglou, Automated reconstruction of fragmented objects using their 3D representation—application to important archaeological finds, in: IEEE Proc. of ICSP 08, 2008, pp. 769–772.
- [22] R.J. Valkenburg, A.M. McIvor, Accurate 3D measurement using a structured light system, Elsevier Image Vision and Computing 16 (2) (1998) 99–110.
- [23] W. Puech, A.G. Bors, I. Pitas, J.-M. Chassery, Projection distortion analysis for flattened image mosaicing from straight uniform generalized cylinders, Pattern Recognition 34 (8) (2001) 1657–1670.
- [24] C. Papaodysseus, T. Panagopoulos, M. Exarhos, C. Triantafillou, D. Fragoulis, C. Dumas, Image and pattern analysis of 1650 BC wall paintings and reconstruction, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 38 (4) (2008) 958–965.
- [25] Tom M. Apostol Calculus, Vol. 2: Multi-Variable Calculus and Linear Algebra with Applications to Differential Equations and Probability
- [26] Άλκηστης Παπαδημητρίου ,Αρχαία Τίρυνθα - Οι Δρόμοι Του Παισάνια