ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Τροπική Λογική
&
Θεωρία Αντιστοίχισης

Ναταλία Κωτσάνη

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ

Άρης Παγουρτζής · Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2016

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Τροπική Λογική & Θεωρία Αντιστοίχισης

Ναταλία Κωτσάνη

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή
την 18η Ιουλίου 2016.

....	....	....
Άρης Παγουρτζής	Ευστάθιος Ζάχος	Αλέξανδρος Αρβανιτάκης
Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Επ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Συνεπίβλεψη:
Αντώνης Αχιλλέως
Μεταδιδακτορικός Ερευνητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2016

Η εικόνα του εξωφύλλου είναι του M. S. Escher.
Το κομμάτι λείπει από τον Shel Silverstein.

στο Κομμάτι που λείπει
και στο Μεγάλο Ο
που στάθηκε για λίγο

Τροπική Λογική & Θεωρία Αντιστοίχισης

Ναταλία Κωτσάνη
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Διπλωματική εργασία
Ιούλιος 2016

Περίληψη

Η αναγκαιότητα και η πιθανότητα είναι οι σημαντικότεροι και ευρέως χρησιμοποιούμενοι τροπικοί τελεστές. Ερμηνεύοντας την πρόταση «αναγκαίως φ» ως ότι φ αληθής σε κάθε πιθανό κόσμο και «πιθανώς φ» ότι φ αληθής σε κάποιον πιθανό κόσμο, η σημασιολογία της τροπικής λογικής μπορεί να δοθεί στο πλαίσιο γραφοθεωρητικών δομών και ονομάζεται σημασιολογία των πιθανών κόσμων. Όντας απλή από συντακτική σκοπιά, η γλώσσα της τροπικής λογικής, μετατρέπεται σε χρήσιμο εργαλείο μελέτης γραφοθεωρητικών δομών.

Παρότι και οι γλώσσες της κλασικής λογικής προσφέρουν τη δυνατότητα μελέτης σχεσιακών δομών, ο τρόπος προσέγγισης είναι διαφορετικός. Οι κλασικές γλώσσες της λογικής, επεξεργάζονται τις σχεσιακές δομές από τη θέση ενός εξωτερικού παρατηρητή, ενώ οι τροπικοί τύποι εισχωρούν εντός των σχεσιακών δομών. Η θεωρία αντιστοίχισης, μας παρέχει τα απαραίτητα εργαλεία ώστε να μεταφράζουμε τροπικούς τύπους σε πρωτοβάθμιες και δευτεροβάθμιες γλώσσες, οικοδομώντας γέφυρες που μας βοηθούν να εισάγουμε τεχνικές και αποτελέσματα.

Στην εργασία αυτή, μελετούμε την κατασκευή αυτής της γέφυρας μεταξύ της τροπικής και της κλασικής λογικής. Αρχικά, παρουσιάζουμε το συντακτικό και τη σημασιολογία της προτασιακής, πρωτοβάθμιας, δευτεροβάθμιας και τροπικής λογικής, ορίζοντας θεμελιώδεις έννοιες. Στη συνέχεια εισάγουμε την έννοια της αμφιπροσομοίωσης (bisimulation), αποδεικνύουμε τα βασικά αποτελέσματα της θεωρίας αντιστοίχισης, και περιγράφοντας τον τρόπο με τον οποίο πραγματοποιείται τελικά μετάφραση, αντιστοιχίζουμε την τροπική λογική με ένα μέρος (modal fragment) της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας λογικής, ανάλογα με το επίπεδο στο οποίο γίνεται η ερμηνεία της τροπικης γλώσσας.

Modal Logic & Correspondence Theory

Natalia Kotsani
School of Applied Mathematics and Physical Sciences
National Technical University of Athens

Diploma Thesis
July 2016

Abstract

A modality qualifies the truth of a judgment. Necessarily and possibly are the most important and best known modal qualifiers. Viewing "necessarily φ" as a claim that φ is true in all possible worlds, and "possibly φ" as a claim that φ is true in some possible world, modal logic can be given a graph-based relational semantics, the Possible world semantics. This simple technical device with intuitive appeal, turns modal logic to an interesting tool for talking about graph-like structures.

Modal languages are syntactically simple languages in which relational structures can be described, constrained, and reasoned about. But although both modal and classical languages talk about relational structures, they do so very differently. Rather than standing outside a relational structure and scanning the information it contains from some celestial vantage point, modal formulas are evaluated inside structures, at a particular state. Whereas modal languages take an internal perspective, classical languages, with their quantifiers and variable binding, are the prime example of how to take an external perspective on relational structures. In spite of this, there is a standard translation of any modal language into its corresponding classical language, which provides a bridge enabling techniques and results to be imported and exported.

We study the construction of this bridge, according to correspondence theory. Initially, we present the basic modal and classical language, syntactically and semantically, defining some basic notions. Furthermore, we prove some basic invariance results, introduce bisimulations and, by describing translations, we characterise modal logic as a fragment of first- and second-order classical logic.

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ

Τους καθηγητές μου,
Στάθη Ζάχο για τις απαντήσεις στα πώς, τα πότε, τα γιατί,
της πληροφορικής και της ζωής,
Άρη Παγουρτζή για την ακούραστη καθοδήγηση,
Κωνσταντίνο Κούτρα για την προτροπή και τις ιδέες,
Αντώνη Αχιλλέως για την υποστήριξη,
Αντώνιο Συμβώνη για την εμπιστοσύνη,
Αλέκο Αρβανιτάκη για την αμεσότητα,
Δημήτρη Φωτάκη για τη μεθοδικότητα,
Αποστόλη Παπανικολάου για τα μαθηματικά της τέχνης, και
Γιώργο Λαγουδάκο για την τέχνη της γεωμετρίας.

Την Αγγέλα Χαλκή για τη διαρκή κινητοποίηση και τις αφυπνίσεις,
τον Πέτρο Ποτίκα και την ομάδα μελέτης λογικής
για τις ατέλειωτες ώρες λογισμών (και παραλογισμών),
το Μάρκο Επιτρόπου, Σωτήρη Δήμο, Ελένη Μπακάλη, Δημήτρη Σακαβάλα, Μανώλη
Βλατάκη και όλα τα μέλη του corelab για τα ιδεο-ανακατώματα
εντός και εκτός του εργαστηρίου,
τ’ ανταμώματα, τα μαγειρέματα και το τσάι αλγορίθμων,
την αυλή στην Κινέττα και την ταράτσα στο Λυκαβηττό,
το Δημήτρη Βερδελή, τον Άρη Λεονταρίτη και το Μίλτο Καραμανλή για τις
βουνοκορφές και τα μανιταρομαζέματα,
το Μανώλη Ζαμπετάκη για τις αστρο-(παρατη)ρήσεις,
τον Αριστοτέλη Παναγιωτόπουλο για τα κύματα,
τον Αλέξανδρο Γεωργακόπουλο για τους γρίφους πίσω απ’ τους αριθμούς,
τους encardia γιατί οι παρέες ταξιδεύουν τους ρυθμούς,
το Γιάννη Σωτηρόπουλο για το ki. Και το do,
τα (ξ)αδέλφια μου για τα αξέχαστα χρόνια,
τις Μεγάλες Τρίτες για τις εύστοχες παρεμβάσεις,
τη Λένα Βλασταρά για την e-φεύρεση της τυπογραφίας,

το Θανάση Λιανέα για την ανακάλυψη του διακτινισμού (10.000 χιλιομέτρων και άνω),

τη μητέρα μου Ειρήνη, που χάρη σ’ εκείνη έμαθα ν’ αγαπώ να ρωτώ,
να μαθαίνω, και να μαθαίνω να μαθαίνουν,
τον πατέρα μου Γιάννη, που μ’ έμαθε να αγαπώ τις εξερευνήσεις,
και να μην επιστρέφω απ’ τον ίδιο δρόμο,
την Κονδυλία και τον Κώστα,
την Αριστέα και τον Ευγενή,
για την αγάπη άνευ όρων.

Περιεχόμενα

Κατάλογος σχημάτων

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Κάποιες αλήθειες μοιάζουν να συνέβησαν *τυχαία* (απλώς *ρευστές*, *συγκυριακές* ή *άστατες*), όπως τα ρούχα που φοράμε, η γλώσσα που μιλάμε ή η εποχή που γεννηθήκαμε· όλα αυτά θα μπορούσε να ήταν απλώς διαφορετικά. Κάποιες άλλες μοιάζουν να είναι *αναγκαίες* όπως το ότι είμαστε αυτοί που είμαστε, και όχι... κάποιοι άλλοι. Οι έννοιες της *πιθανότητας* (possibility), της *συγκυρίας* (contingency) και της *αναγκαιότητας* (necessity) αποτελούν τις πιο σημαντικές και ευρέως γνωστές *τροπικές έννοιες* (modal notions)· ο *διάλογος* με αυτές αποτελεί έναν από τους πυρήνες της *παραδοσιακής* λογικής μέχρι και τον 19ο αιώνα.

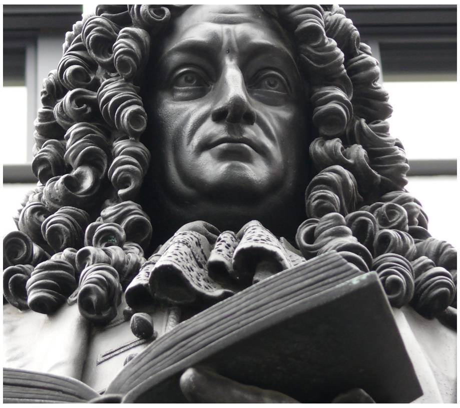
Οι θεμελιωτές της σύγχρονης λογικής, όπως ο Boole και ο Frege, άφησαν τις τροπικές έννοιες έξω από το έργο τους. Ο Frege μάλιστα, στο βιβλίο του Begriffsschrift (1879) φαίνεται να θεωρεί πως οι τροπικές έννοιες αποτελούν εξω-λογικά αντικείμενα, καθώς ό,τι είναι *αναγκαία αληθές* θα είναι αληθές συν κάποιες «αυτοβιογραφικές» αναφορές, υποστηρικτικές αυτής της πεποίθησης. Έτσι, η σύχρονη λογική ενσωμάτωσε ως προεκτάσεις της τις επεκτείνουσες (extensional) έννοιες της *άρνησης* (negation) και *ποσόδειξης* (quantification) ενώ εξοστράκισε αυτές που αφορούσαν το εσωτερικό περιεχόμενο των αντικειμένων της (intensional), τις τροπικές. Αποτέλεσμα αυτών των αλληλεπιδράσεων ήταν η γνωστή μας *λογική των προτάσεων* (propositional) και των *κατηγορημάτων* (predicate), οι οποίες περιγράφουν ιδιότητες και σχέσεις αντικειμένων σε αμετάβλητες καταστάσεις, που αναπαρίστανται από τα μοντέλα. Ο ιστορικός αυτός περιορισμός της «ατζέντας» των λογικών και τα θεμελιώδη εργαλεία του, απεδείχθη ευεργετικός στην αναζήτηση των θεμελίων των μαθηματικών, με εξαιρετικά αποτελέσματα σχετικά με την αποδειξιμότητα, την πληρότητα, την υπολογισιμότητα (Hilbert, Post, Godel, Tarski, Turing, Wittgenstein κ.α.)· πλούσια σοδειά για ένα σχετικά περιορισμένο, τότε, επιστημονικό πεδίο, τη Λογική.

Αν και οι επεκτάσεις της άρνησης και της ποσόδειξης απεδείχθησαν επαρκείς για την ανάλυση των εννοιών της απόδειξης και της αλήθειας στο «αιώνιο βασίλειο της αφαίρεσης» η τροπική λογική επανήλθε γρήγορα στο προσκήνιο, ξεδιπλώνοντας ένα πέπλο εννοιών πίσω και πέρα από την «κοινή» αλήθεια. Έννοιες όπως η γνώση, η πεποίθηση, η αναγκαιότητα, η πιθανότητα, η υποχρέωση, η δράση, η παροδικότητα, φαίνονταν πια άρρηκτα συνδεδεμένες με κάθε έκφανση της καθημερινής χρήσης της γλώσσας μας όπου κάθε πρότασή μας, αντηχεί πάνω σ' έναν ιστό προσδοκιών, κοινωνικών σχέσεων, στόχων, συναισθημάτων. Μάλιστα, ο Frege δεν ήταν αντίθετος με την προσέγγιση αυτή καθ' εαυτή, καθώς σε μια περίφημη «αναλογία» αντιστοιχίζει την *τυπική γλώσσα* (formal language) μ' ένα μικροσκόπιο, ακριβές μεν, με περιορισμένη σφαίρα των εφαρμογών, σε αντίθεση με τη φυσική γλώσσα (natural language) που θυμίζει το, λιγότερο ακριβές, ανθρώπινο μάτι, καθολικό δε ως προς την αντίληπτική του ικανότητα.

Πρώτος ο C. I. Lewis, στο βιβλίο του το 1918 [LEW18], εισάγει τα σύμβολα $\Box$ και $\Diamond$ για να συμβολίσει την αναγκαιότητα (necessity) και την πιθανότητα (possibility). Σύμφωνα με τον Lewis, η έκφραση $\Box\phi$ διαβάζεται ως «η πρόταση ϕ είναι αναγκαία αληθής» ενώ η έκραση $\Diamond\phi$ διαβάζεται ως «η πρόταση ϕ είναι πιθανώς αληθής». Το 1933 ο Kurt Godel χρησιμοποιεί τους τροπικούς τελεστές (modal operators) του Lewis ώστε να τυποποιήσει την έννοια της μαθηματικής αποδειξιμότητας, ενώ ο Alfred Tarski χρησιμοποιεί τους τύπους της τροπικής λογικής για το χαρακτηρισμό υποσυνόλων σε τοπολογικούς χώρους. Στις δεκαετίες που ακολούθησαν, προτάθηκε μια πληθώρα τροπικών τελεστών στην προσπάθεια των επιστημόνων να διαχειριστούν την έννοια της αλήθειας σε χώρους πιθανών καταστάσεων (temporal logic, deontic logic, epistemic logic κ.α.). Οι διαφορετικές αυτές λογικές, άνοιξαν το δρόμο

Η *Τροπική Λογική* (Modal Logic) γεννήθηκε στις αρχές του 20ου αιώνα ως κλάδος της μαθηματικής λογικής, με σκοπό την εφαρμογή της στην ανάλυση φιλοσοφικών εννοιών και προβλημάτων. Σήμερα, αποτελεί σημαντικό εργαλείο για τους φοιτητές με διεπιστημονικά ενδιαφέροντα (φιλοσοφία, μαθηματικά, επιστήμη υπολογιστών, γλωσσολογία κ.α.), καθώς βρίσκεται στο σταυροδρόμι πολλών επιστημονικών πεδίων.

Σχήμα 1.1: Αριστοτέλης, 384-322 π.Χ.



Σχήμα 1.2: Gottfried Wilhelm (von) Leibniz, 1646-1716.

Στην παρούσα εργασία, μετά από μια σύντομη εισαγωγή στο *συντακτικό* (syntax) και τη *σημασιολογία* (semantics) της προτασιακής, της πρωτοβάθμιας και της δευτεροβάθμιας λογικής[1] και τη διατύπωση βασικών θεωρημάτων, θα δοθεί το συντακτικό της τροπικής λογικής και θα δοθεί η ερμηνεία της γλώσσας σε δύο επίπεδα. Στη συνέχεια, θα αναπτυχθούν τα βασικά σημεία της *θεωρίας αντιστοίχισης* (correspondence theory) και θα δοθεί μετάφραση της τροπικής λογικής στην πρωτοβάθμια και τη δευτεροβάθμια γλώσσα, ανάλογα με το επίπεδο που δίνεται η ερμηνεία της γλώσσας. Ακόμη, θα αναζητηθούν μη ορίσιμες ιδιότητες στην τροπική γλώσσα, θα αναζητηθεί η μορφή των τύπων που έχουν πρωτοβάθμιο αντίστοχο και θα διατυπωθούν σημαντικά θεωρήματα της θεωρίας αντιστοίχισης. Τέλος, θα δοθούν σχήματα που θα συνοψίζουν τα βασικότερα σημεία της θεωρίας αντιστοίχισης.

[1]Για μία εκτενέστερη μελέτη της προτασιακής, πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας λογικής, μπορεί κανείς να ανατρέξει στο [**?**, END]αθώς μία τέτοια ανάλυση ξεπερνά τους στόχους της παρούσας εργασίας.

Κεφάλαιο 2

Κλασική Λογική

2.1 Προτασιακή Λογική

Στο κεφάλαιο αυτό θα ορίσουμε μία τυπική γλώσσα μέσω της οποίας θα μπορούμε να μεταφράζουμε προτάσεις της φυσικής μας γλώσσας. Οι τυπικές γλώσσες έχουν, σε αντίθεση με τις φυσικές γλώσσες, αυστηρούς κανόνες σχηματισμού των προτάσεων· για το λόγο αυτό μας βοηθούν να αποφύγουμε τις ανακρίβειες και τις αμφισημίες των φυσικών γλωσσών. Το τίμημα γι' αυτό είναι η περιορισμός στην εκφραστικότητα (expressiveness) των τυπικών γλωσσών [EE01, p. 12].

Για να περιγράψουμε μία τυπική γλώσσα θα χρειαστεί να προσδιορίσουμε το *αλφάβητο* (alphabet), τις *γραμματικά σωστές* εκφράσεις της γλώσσας (grammatically-correct, well-formed formulas) και τέλος τον τρόπο με τον οποίο θα γίνεται η *μετάφραση* (translation) από τη φυσική στην τυπική γλώσσα. Η απόδοση νοήματος (meaning assignment) στις γραμματικά σωστές προτάσεις της τυπικής μας γλώσσας, η οποία πραγματοποιείται αποκλειστικά στο τελευταίο επίπεδο, αποτελεί τη γέφυρα μεταξύ του «γνωστού», ως εκείνη τη στιγμή, γλωσσικού μας σύμπαντος με το «άγνωστο». Είναι παρ' όλα αυτά εφικτό να μεταχειριστούμε τις γραμματικά σωστές προτάσεις αγνοώντας οποιαδήποτε πιθανή σημασία τους.

Συντακτικό

Το αλφάβητο της προτασιακής λογικής αποτελείται από:

- τα *σύμβολα των προτασιακών συνδέσμων* (sentencial connective symbols): $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$,
- τα σύμβολα $($, $)$, και
- τα *σύμβολα των προτάσεων ή προτασιακές μεταβλητές* (sentence symbols): ένα αριθ-

μήσιμο σύνολο συμβόλων $A_1, A_2, ..., A_n$[1].

Τα σύμβολα προτασιακών συνδέσμων μαζί με τις παρενθέσεις αποτελούν τα *λογικά σύμβολα* (logical symbols) της γλώσσας, η σημασία των οποίων δεν αλλάζει κατά τη μετάφρασή τους στη φυσική μας γλώσσα και αντίστροφα. Τα σύμβολα των προτασιακών μεταβλητών αποτελούν τα *μη λογικά σύμβολα* (nonlogical symbols), παραμέτρους με μεταβλητή σημασία οι οποίες, όπως θα δούμε, επιδέχονται διάφορες ερμηνείες.

Ο παρακάτω πίνακας συγκεντρώνει όλα τα σύμβολα της γλώσσας της προτασιακής λογικής, τις ονομασίες τους καθώς και τις μεταφράσεις των λογικών συμβόλων στη φυσική γλώσσα.

Σύμβολο	Όνομα	Μετάφραση
(	αριστερή παρένθεση	στίξη
)	δεξιά παρένθεση	στίξη
$\neg$	άρνηση	όχι
$\wedge$	σύζευξη	και
$\vee$	διάζευξη	ή
$\rightarrow$	συνεπαγωγή	εάν ..., τότε
$\leftrightarrow$	ισοδυναμία	αν και μόνο αν
A_1	πρώτη προτασιακή μεταβλητή	
A_2	δεύτερη προτασιακή μεταβλητή	
...	...	...
A_n	νιοστή προτασιακή μεταβλητή	
...	...	...

Σχήμα 2.1: Η γλώσσα του προτασιακού λογισμού (the languange of sentential logic) [EE01, p. 14].

Μπορούμε να θεωρήσουμε όλα τα σύμβολα αυτά ως σύνολα, αριθμούς ή εν γένει αντικείμενα από ένα σύμπαν γλωσσικών αντικειμένων [EE01, p. 15]. Στην τελευταία περίπτωση, είναι πιθανό να ταυτίζονται με τα «ονόματά» τους. Σε μία διαφορετική προσέγγιση, οι προτασιακές μεταβλητές είναι τύποι σε μία διαφορετική γλώσσα.

Definition 2.1.1 *Έκφραση* (expression) θα ονομάζουμε κάθε πεπερασμένη ακολουθία συμβόλων της γλώσσας. Επιπλέον, αν α και β είναι ακολουθίες συμβόλων της γλώσσας, τότε

[1] Σε μια πιο λιτή προσέγγιση θα χρησιμοποιούσαμε μία προτασιακή μεταβλητή A και τον τόνο $'$. Η άπειρη ακολουθία $A_1, A_2, ..., A_n$ μετασχηματίζεται τότε στην $A, A', A'', ...$ και το το πλήθος των διακριτών συμβόλων της πρότασιακής γλώσσας περιορίζεται σε έξι σύμβολα. Θα μπορούσαμε επίσης να θεωρήσουμε ως σύνολο προτασιακών μεταβλητών, οποιοδήποτε αριθμήσιμο ή όχι απειροσύνολο.

$\alpha\beta$ θα είναι η ακολουθία που αποτελείται αρχικά από τα σύμβολα της ακολουθίας α και στη συνέχεια από τα σύμβολα της ακολουθίας β.

Παραδείγματα εκφράσεων αποτελούν οι $((\rightarrow A_2$ και $(A_1 \wedge A_2)$, ενώ αν οι εκφράσεις α και β ταυτίζονται με τις εκφράσεις $\alpha \equiv (\neg A_1)$ και $\beta \equiv A_2$ τότε $(\alpha \rightarrow \beta) \equiv ((\neg A_1) \rightarrow A_2)$.

Μεταφράζοντας[2] την πρόταση A_1 ως «ο Μπάνι είναι κουνέλι» και την πρόταση A_2 «ο Μπάνι τρώει τα καρότα», διαπιστώνουμε ότι η έκφραση $(A_1 \wedge A_2)$ μπορεί να μεταφραστει στη φυσική γλώσσα ως «ο Μπάνι είναι κουνέλι και τρώει καρότα», ενώ η μετάφραση της $((\rightarrow A_2$ δεν είναι κατανοητή. Επόμενος στόχος μας, θα ήταν να αφαιρέσουμε από τη γλώσσα μας όλες εκείνες τις εκφράσεις που δε βγάζουν νόημα και να κρατήσουμε μόνο τις *γραμματικά σωστές* (grammatically correct), τις οποίες θα ονομάζουμε *προτασιακούς τύπους* (propositional formulas).

Definition 2.1.2 (Propositional Formulas, Well-formed formulas, wff) *Προτασιακοί τύποι* είναι οι εκφράσεις που ορίζονται επαγωγικά, ως εξής:

1. Οι προτασιακές μεταβλητές είναι προτασιακοί τύποι.
2. Αν ϕ και ψ προτασιακοί τύποι τότε οι εκφράσεις $(\neg\phi), (\phi \wedge \psi), (\phi \vee \psi)$ είναι προτασιακοί τύποι.
3. Μόνο οι εκφράσεις που σχηματίζονται από εφαρμογές των (1) και (3) είναι τύποι.

Ο παραπάνω *γενικευμένος επαγωγικός*[3] ορισμός αποτελεί ένα μηχανισμό κατασκευής προτασιακών τύπων· μία έκφραση θα είναι προτασιακός τύπος αν η κατασκευή της ακολουθεί αυτό το μηχανισμό.

Για παράδειγμα, η εκφραση $((\neg A_1) \rightarrow (A_1 \wedge A_3))$ είναι προτασιακός τύπος, διότι έχει έχει κατασκευαστεί ως εξής:

(i) Τα A_1, A_3 είναι προτασιακοί τύποι λόγω του (1).

(ii) Τα $(\neg A_1), (A_1 \wedge A_3)$ είναι προτασιακοί τύποι λόγω των (2), (i).

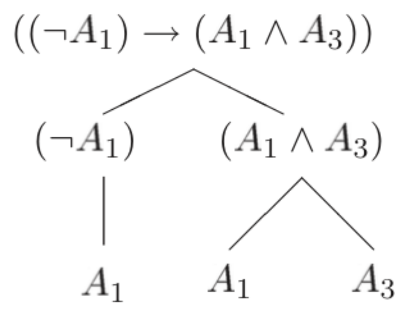
(iii) Τα $((\neg A_1) \rightarrow (A_1 \wedge A_3))$ είναι προτασιακοί τύποι λόγω των (2), (ii).

Μπορούμε να απεικονίσουμε την κατασκευή κάθε προτασιακού τύπου σε μορφή δένδρου, όπως στο παρακάτω σχήμα.

---

[2] Δε θα πρέπει να συγχέουμε μία πρόταση στη φυσική μας γλώσσα, με τη μετάφρασή της στην τυπική γλώσσα, καθώς η πρώτη θα είναι ενδεχομένως *αληθής* (true) ή *ψευδής* (false), ενώ η δεύτερη δεν είναι τίποτα περισσότερο από μία ακολουθία συμβόλων. Η ερμηνεία των προτάσεων της τυπικής γλώσσας μπορεί να μεταβάλεται ανάλογα με το πλαίσιο (context)· μπορεί να ερμηνευθεί ως μια αληθής πρόταση στην ελληνική γλώσσα ενώ σε διαφορετικό πλαίσιο να έχει άλλη ερμηνεία.

[3] Είναι επαγωγικός επειδή μας δίνει ένα σύνολο αρχικών εκφράσεων, τις προτασιακές μεταβλητές, που τις ονομάζει προτασιακούς τύπους ενώ στη συνέχεια μας δίνει κάποιους κανόνες σχηματισμού καινούριων τύπων ξεκινώντας από ήδη κατασκευασμένους προτασιακούς τύπους.



Σχήμα 2.2: Η κατασκευή ενός προτασιακού τύπου σε μορφή δένδρου (the modal square of opposition) [Kol15, p. 9].

Εναλλακτικά[4], μπορούμε να ορίσουμε τους προτασιακούς τύπους ως εξής:

Definition 2.1.3 Το σύνολο των προτασιακών τύπων, Π, είναι το μικρότερο σύνολο για το οποίο ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

1. Κάθε προτασιακή μεταβλητή ανήκει στο Π.
2. Αν $\phi, \psi \in \Pi$ τότε $(\phi \wedge \psi), (\phi \vee \psi), (\phi \rightarrow \psi), (\neg\phi) \in \Pi$

Θα λέμε δηλαδή ότι το σύνολο Π είναι κλειστό στις διαδικασίες σχηματισμού σύνθετων τύπων.

Το επόμενο θεώρημα μας εξασφαλίζει τη μοναδική αναγνωσιμότητα των προτασιακών τύπων, δηλαδή ότι χρησιμοποιήσαμε όσες παρενθέσεις χρειάζονταν ώστε η ανάγνωση των προτασιακών τύπων να μην μπορεί να γίνει με *αμφίσημο* (ambiguous) τρόπο.

Theorem 2.1.4 Για κάθε προτασιακό τύπο ϕ μία και μόνο μία από τις ακόλουθες συνθήκες ικανοποιείται:

1. Η ϕ είναι προτασιακή μεταβλητή.
2. Υπάρχει ένας μοναδικός προτασιακός τύπος ψ τέτοιος ώστε $\phi \equiv (\neg\psi)$.
3. Υπάρχει ένα μοναδικό ζεύγος προτασιακών τύπων ψ_1, ψ_2 και μοναδικό σύμβολο λογικού συνδέσμου $\triangle$ έτσι ώστε $\phi \equiv (\psi_1 \triangle \psi_2)$ και $\triangle \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, δηλαδή μια σύζευξη δεν μπορεί διάζευξη ή συνεπαγωγή κ.ο.κ.

[4] Η απόδειξη της ισοδυναμίας των δύο ορισμών των προτασιακών τύπων, μπορεί για παράδειγμα να βρεθεί στο [Kol15, p. 10].

Η απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος, αλλά και σχετικός αλγόριθμος που αποφασίζει για το αν μία έκφραση είναι προτασιακός τύπος, μπορεί να βρεθεί στο [EE01, p. 29].

Χάριν απλοποίησης του *συμβολισμού* (notation) θα υιοθετήσουμε τις ακόλουθες συμβάσεις:

1. Οι εξωτερικές παρενθέσεις μπορούν να παραλείπονται, δηλαδή θα γράφουμε $\phi \wedge \psi$ αντί για $(\phi \wedge \psi)$.

2. Το σύμβολο της άρνησης εφαρμόζεται στα «γειτονικά» του, δηλαδή $\neg\phi \wedge \psi$ ισοδυναμεί με $(\neg\phi) \wedge \psi$ και όχι $\neg(\phi \wedge \psi)$

3. Τα σύμβολα $\vee, \wedge$ εφαρμόζονται στα «γειτονικά» τους, δεδομένης της εφαρμογής της παρατήρησης (2), δηλαδή ο τύπος $\neg\phi \vee \psi \rightarrow \phi \vee \psi$ ισοδυναμεί με $(\neg\phi \vee \psi) \rightarrow (\phi \vee \psi)$.

Σημασιολογία

Μέχρι τώρα η μελέτη της γλώσσας ήταν καθαρά *συντακτική* (syntactic) καθώς δεν έχουμε δώσει στους προτασιακούς τύπους κάποια *ερμηνεία* ή *σημασιολογία* (semantics). Παρ' ό,τι μπορούμε να χειριστούμε τους προτασιακούς τύπους αγνοώντας κάθε πιθανή ερμηνεία τους, είναι καιρός να «αποκαταστήσουμε» το λόγο για τον οποίο κατασκευάσαμε αυτήν την τυπική γλώσσα, να προσδιορίσουμε τον τρόπο με τον οποίο αποκτά της σημασία της.

Πριν προχωρήσουμε όμως στην ερμηνεία της γλώσσας, ας αναρωτηθούμε τι σημαίνει ένας προτασιακός τύπος να προκύπτει λογικά από κάποιον ή κάποιους άλλους προτασιακούς τύπους. Ανεξαρτήτως της μετάφρασης των προτασιακών μεταβλητών, έστω A_1 και A_2, θα θέλαμε αν ο προτασιακός τύπος $A_1 \wedge A_2$ είναι *αληθής*, τότε και ο A_1 να είναι αληθής. Καθώς δε θα ήταν εύκολο να αναλογιστούμε όλες τις πιθανές μεταφράσεις, δεχόμαστε ότι κάθε προτασιακός τύπος μπορεί να έχει μία από τις εξής δύο[5] *αληθοτιμές* (truth values): *αληθής* T (true) και *ψευδής* F (false)[6].

Definition 2.1.5 *Απονομή αλήθειας* (truth assignment) v, ονομάζουμε κάθε συνάρτηση:

$$v : \mathcal{S} \rightarrow \{F, T\}.$$

[5] Από το σημείο αυτό και στο εξής, η τυπική μας γλώσσα θα χαρακτηρίζεται ως *δίτιμη λογική* (two-valued logic). Οι γλώσσες της λογικής χαρακτηρίζονται ως *δίτιμες, τρίτιμες* (three-valued logic) κ.ο.κ. ανάλογα με την *πληθικότητα* (cardinality) του συνόλου των αληθοτιμών τους. Καθώς υπάρχουν σύνολα με άπειρα στοιχεία, μπορούμε να έχουμε λογικές με $\aleph_0$ αληθοτιμές ή ακόμη το σύνολο των αληθοτιμών τους να είναι ισοπληθικό με το $[0, 1]$.

[6] Δεν έχει σημασία πως συμβολίζουμε τις δύο αυτές αληθοτιμές, θα μπορούσαν να ήταν και οι αριθμοί 0 και 1.

από το σύνολο προτασιακών μεταβλητών $\mathcal{S}$ στο σύνολο των αληθοτιμών.

Μία απονομή αλήθειας αποτελεί έναν «κόσμο» μέσα στον οποίο μία προτασιακή μεταβλητή αποκτά τη σημασία της και, αντιστοιχίζοντας σ' αυτήν την αληθοτιμή T ή F, μας αποδεσμεύει από τις μεταφράσεις στη φυσική γλώσσα που δόθηκαν στην προηγούμενη υποενότητα.

Άπαξ και δοθεί μία απονομή αλήθειας, οι τιμές αλήθειας των σύνθετων προτάσεων θα καθορίζονται βάση των *αληθοπινάκων* (truthtables).

α	β	$(\neg\alpha)$	$(\alpha \wedge \beta)$	$(\alpha \vee \beta)$	$(\alpha \to \beta)$	$(\alpha \leftrightarrow \beta)$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T

Σχήμα 2.3: Οι αληθοπίνακες (truthtables) για την ερμηνεία των προτασιακών τύπων [EE01, p. 21].

Παρατηρούμε ότι:

- η άρνηση αντιστρέφει την τιμή αλήθειας της πρότασης,
- η σύζευξη είναι αληθής αν αμφότερες οι προτάσεις είναι αληθείς,
- η διάζευξη[7] είναι ψευδής αν αμφότερες οι προτάσεις είναι ψευδείς,
- η συνεπαγωγή είναι ψευδής αν η υπόθεση είναι αληθής και το συμπέρασμα ψευδές[8], και
- η ισοδυναμία είναι αληθής αν αμφότερες οι προτάσεις είναι είτε αληθείς ή ψευδείς.

[7]Πρόκειται για τη *μη αποκλειστική διάζευξη* (inclusive disjunction), σύμφωνα με την οποία αρκεί μία από τις προτάσεις να είναι αληθής, χωρίς να μας ενδιαφέρει η αληθοτιμή της άλλης πρότασης. Στην *αποκλειστική* (exclusive disjunction) διάζευξη, αποκλείεται η αλήθεια της μίας πρότασης δεδομένης της αλήθειας της άλλης, θα πρέπει δηλαδή η μία πρόταση να είναι αληθής και η άλλη ψευδής.

[8]Ο τρόπος συμπλήρωσης του πίνακα για την περίπτωση της συνεπαγωγής είναι άμεσος αν σκεφτούμε ότι θα πρέπει η πρόταση $\alpha \wedge \beta \to \beta$ να είναι πάντα αληθής· για παράδειγμα αν α ψευδής και β αληθής, τότε θα πρέπει $F \to T$ αληθής. Εναλλακτικά, θεωρούμε την πρόταση «αν x περιττός τότε x_2 περιττός», την οποία για να διαψεύσουμε δε θα θέλαμε να σκεφτούμε περιπτώσεις όπου ο x άρτιος. Εν γένει, θα μπορούσαμε να πούμε ότι αν α ψευδής, τότε $\alpha \to \beta$ τετριμμένα αληθής, αν δηλαδή «σπάσει» η συνθήκη της πρότασης, τότε η πρόταση δεν μπορεί να διαψευθεί.

Απομένει η επέκταση της συνάρτησης v, έτσι ώστε το πεδίο ορισμού της να περιλαμβάνει όλους τους προτασιακούς τύπους.

Definition 2.1.6 Έστω $\overline{\mathcal{S}}$ σύνολο προτασιακών τύπων[9]. Η επέκταση $\overline{v}$ της απονομής αλήθειας v, η οποία αντιστοιχίζει κάθε προτασιακό τύπο με μία αληθοτιμή,

$$\overline{v} : \overline{\mathcal{S}} \to \{F, T\}.$$

ορίζεται, με γενικευμένη επαγωγή στον τρόπο κατασκευής των προτασιακών τύπων, για κάθε $A \in \mathcal{S}$ και για κάθε $\alpha, \beta \in \overline{\mathcal{S}}$, ως ακολούθως:

1. $\overline{v}(A) = v(A)$[10]

2. $$\overline{v}((\neg\alpha)) = \begin{cases} T, \text{ αν } \overline{v}(\alpha) = F \\ F, \text{ αλλιώς} \end{cases}$$

3. $$\overline{v}((\alpha \wedge \beta)) = \begin{cases} T, \text{ αν } \overline{v}(\alpha) = T \text{ και } \overline{v}(\beta) = T \\ F, \text{ αλλιώς} \end{cases}$$

4. $$\overline{v}((\alpha \vee \beta)) = \begin{cases} T, \text{ αν } \overline{v}(\alpha) = T \text{ ή } \overline{v}(\beta) = T \text{ (ή και τα δύο)} \\ F, \text{ αλλιώς} \end{cases}$$

5. $$\overline{v}((\alpha \to \beta)) = \begin{cases} F, \text{ αν } \overline{v}(\alpha) = T \text{ και } \overline{v}(\beta) = F \\ T, \text{ αλλιώς} \end{cases}$$

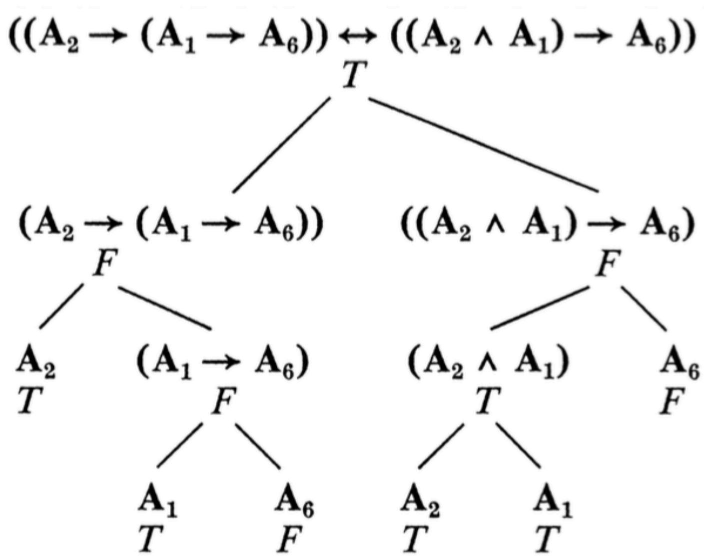
[9] Το $\overline{\mathcal{S}}$ μπορεί επίσης να οριστεί ως το σύνολο των προτασιακών τύπων με προτασιακές μεταβλητές που ανήκουν στο $\mathcal{S}$.

[10] Επομένως η $\overline{v}$ είναι επέκταση της v.

6.
$$\overline{v}((\alpha \leftrightarrow \beta)) = \begin{cases} T, \text{ αν } \overline{v}(\alpha) = \overline{v}(\beta) \\ F, \text{ αλλιώς} \end{cases}$$

Theorem 2.1.7 Για κάθε απονομή αλήθειας v υπάρχει μοναδική επέκταση $\overline{v}$.

Ο υπολογισμός της $\overline{v}(\alpha)$ του προτασιακού τύπου $((A_2 \to (A_1 \to A_6)) \leftrightarrow ((A_2 \wedge A_1) \to A_6))$ μπορεί να πραγματοποιηθεί μέσω της δενδρικής δομής της κατασκευής του τύπου, δουλεύοντας από τα φύλλα προς τη ρίζα του δένδρου, ως εξής:



Σχήμα 2.4: Υπολογισμός της αληθοτιμής προτασιακού τύπου μέσω της δενδρικής δομής [EE01, p. 22].

Definition 2.1.8 Θα λέμε ότι μία απονομή αλήθειας v *ικανοποιεί* (satisfies)[11] τον τύπο ϕ αν $\overline{v}(\phi) = T$.

Definition 2.1.9 Έστω Σ σύνολο προτασιακών τύπων και τ προτασιακός τύπος. Θα λέμε ότι το Σ *ταυτολογικά συνεπάγεται* (tautologically implies) τον τύπο τ, και θα γράφουμε $\Sigma \models \tau$, αν κάθε απονομή αλήθειας v για τις προτασιακές μεταβλητές των Σ, τ που ικανοποιεί κάθε στοιχείο του Σ ικανοποιεί και τον τύπο τ.

[11] Για να συμβεί αυτό, θα πρέπει το πεδίο ορισμού της συνάρτησης v να περιλαμβάνει όλες τις προτασιακές μεταβλητές που περιέχονται στον τύπο ϕ.

Ο ορισμός αυτός περιγράφει σε μία τυπική γλώσσα τη διασθητική σημασία της «εξαγωγής συμπερασμάτων»· το γεγονός ότι οι υποθέσεις μας είναι αληθείς διασφαλίζει την αλήθεια του συμπεράσματος.

Αν Σ είναι το κενό σύνολο $\emptyset$, τότε είναι τετριμμένα αληθές ότι κάθε αποτίμηση ικανοποιεί κάθε μέλος του $\emptyset$, διότι δεν υπάρχει κάποιο μέλος του κενού συνόλου $\emptyset$ ώστε να μην ικανοποιείται. Επομένως $\emptyset \vDash \tau$ αν και μόνο αν κάθε αποτίμηση για τις προτασιακές μεταβλητές που περιέχονται στον τύπο τ, ικανοποιεί τον τ.

Definition 2.1.10 Θα ονομάζουμε έναν προτασιακό τύπο τ *ταυτολογία* (tautology) και θα γράφουμε $\vDash \tau$ αν κάθε αποτίμηση ικανοποιεί τον προτασιακό τύπο τ.

Για παράδειγμα ο τύπος $((A_2 \to (A_1 \to A_6)) \leftrightarrow ((A_2 \wedge A_1) \to A_6))$ ικανοποιείται και από τις οκτώ πιθανές αποτιμήσεις για τις μεταβλητές $\{A_1, A_2, A_6\}$ και επομένως είναι ταυτολογία.

Μια άλλη ειδική περίπτωση είναι όταν δεν υπάρχει αποτίμηση που να ικανοποιεί τον προτασιακό τύπο τ, επομένως είναι τετριμμένα αληθές ότι $\Sigma \vDash \tau$. Για παράδειγμα ισχύει τετριμμένα ότι $\{A, (\neg A)\} \vDash B$.

Συγκεντρωτικός πίνακας με τις βασικές ταυτολογίες του προτασιακού λογισμού βρίσκεται στο [EE01, p. 26].

Παράδειγμα $\{A, (A \to B)\} \vDash B$
Υπάρχουν τέσσερεις πιθανές αποτιμήσεις των μεταβλητών $\{A, B\}$, από τις οποίες μόνο η $v(A) = v(B) = T$ ικανοποιεί αμφότερα τα $\{A, (A \to B)\}$. Η συγκεκριμένη αποτίμηση ικανοποιεί και το B.

Επιπλέον, αν το Σ είναι μονοσύνολο, έστω $\{\sigma\}$, τότε θα γράφουμε $\sigma \vDash \tau$ αντί για $\{\sigma\} \vDash \tau$.

Definition 2.1.11 Θα λέμε ότι δύο προτασιακοί τύποι τ, σ είναι *ταυτολογικά ισοδύναμοι* (tautologically equivalent) και θα γράφουμε $\sigma \vDash\dashv \tau$ αν $\sigma \vDash \tau$ και $\tau \vDash \sigma$.

Βασικά θεωρήματα

Συμπάγεια

Theorem 2.1.12 (Compactness Theorem) Έστω Σ άπειρο σύνολο προτασιακών τύπων τέτοιο ώστε για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο τέτοιο ώστε για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο Σ_0 του Σ υπάρχει αποτίμηση του που ικανοποιεί κάθε στοιχείο του Σ_0. Τότε υπάρχει αποτίμηση που ικανοποιεί κάθε στοιχείο του Σ.

Ισοδύναμα αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του Σ είναι ικανοποιήσιμο, τότε το Σ είναι ικανοποιήσιμο.

Σύνδεσμοι

Παρά την απουσία κάποιου γενικού ορισμού της έννοιας *σύνδεσμος* (connective), οι συγκεκριμένοι πέντε σύνδεσμοι που επιλέχθηκαν δεν είναι οι μοναδικοί. Για παράδειγμα, μπορεί κανείς να αποδείξει ότι αν επεκτείναμε τη γλώσσα με έναν τριαδικό προτασιακό σύνδεσμο ♯, έτσι ώστε $\overline{V}((\sharp\phi\psi\tau))$ να είναι ό,τι και η πλειοψηφία των $\overline{V}(\phi)$, $\overline{V}(\psi)$, $\overline{V}(\tau)$ δε θα κερδίζαμε τίποτα· κάθε προτασιακός τύπος στην «επεκταμένη γλώσσα» είναι ταυτολογικά ισοδύναμος με έναν προτασιακό τύπο της αρχικής μας γλώσσας καθώς $\overline{V}((\sharp\phi\psi\tau))$ ταυτολογικά ισοδύναμος με τον τύπο $((\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \tau) \vee (\psi \wedge \tau))$ [EE01, p. 45].

Definition 2.1.13 Κάθε συνάρτηση $\mathcal{B} : \{T, F\}^n \to \{T, F\}$ ονομάζεται *συνάρτηση Boole n θέσεων* ή *προτασιακός σύνδεσμος n θέσεων* (Boolean function). Θεωρούμε τις τιμές T, F ως συναρτήσεις Boole 0 θέσεων.

Κάθε προτασιακός τύπος ορίζει μία συνάρτηση Boole. Για παράδειγμα, για τον προτασιακό τύπο $\alpha \equiv A_1 \wedge A_2$ προκύπτει ο παρακάτω πίνακας, όπου οι 2^2 γραμμές του αντιστοιχούν στις 2^2 πιθανές αποτιμήσεις των $\{A_1 \wedge A_2\}$ που καθορίζουν την τιμή της συνάρτησης Boole B_α.

$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2$	
F	F	F	$B_\alpha(F, F) = F$
F	T	F	$B_\alpha(F, T) = F$
T	F	F	$B_\alpha(T, F) = F$
T	T	T	$B_\alpha(T, T) = T$

Σχήμα 2.5: Ορισμός συνάρτησης Boole από προτασιακό τύπο [EE01, p. 46].

Για κάθε φυσικό αριθμό n υπάρχουν 2^{2^n} συναρτήσεις Boole ή σύνδεσμοι n θέσεων.

- 0 θέσεων: Υπάρχουν δύο, οι $\top$, $\bot$, οι οποίοι δεν αποτελούν προτασιακές μεταβλητές, αλλά *σταθερές* (constants), λογικά σύμβολα με $\overline{v}(\top) = T$ και $\overline{v}(\bot) = F$ για κάθε v. Για παράδειγμα $A \to \bot \vDash\Dashv \neg A$
- 1 θέσης: από τους 2^{2^1} μόνο η άρνηση έχει ενδιαφέρον
- 2 θέσεων: εκτός των $\wedge, \vee, \to$ οι υπόλοιποι δίνονται στον παρακάτω πίνακα[12].

[12]Ουσιαστικά, από τους 16 οι δέκα τελευταίοι είναι σύνδεσμοι 2 θέσεων.

Σύμβολο	Ισοδύναμος τύπος	Παρατηρήσεις
	$\top$	σταθερά με τιμή , σύνδεσμος 0 θέσεων
	$\bot$	σταθερά με τιμή F, σύνδεσμος 0 θέσεων
	A	πρώτη προβολή
	B	δεύτερη προβολή
	$\neg A$	άρνηση, σύνδεσμος 1 θέσης
	$\neg B$	άρνηση, σύνδεσμος 1 θέσης
$\wedge$	$A \wedge B$	και
$\rightarrow$	$A \rightarrow B$	συνεπαγωγή
$\vee$	$A \vee B$	ή
$\leftrightarrow$	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$	ισοδυναμία
$\leftarrow$	$B \rightarrow A$	αντίστροφη ισοδυναμία
$+$	$(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$	αποκλειστική διάζευξη (xor)
$\downarrow$	$\neg(A \vee B)$	ούτε A ούτε B (nor)
$\uparrow$	$\neg(A \wedge B)$	είτε όχι A ή όχι B (nand)
$<$	$((\neg A) \wedge B)$	$F < T$ (διάταξη)
$>$	$(A \wedge (\neg B))$	$T > T$ (διάταξη)

Σχήμα 2.6: Η γλώσσα του προτασιακού λογισμού (the languange of sentential logic) [EE01, p. 14].

Definition 2.1.14 Έστω S σύνολο προτασιακών συνδέσμων. Θα λέμε ότι το S είναι *επαρκές* ή *πλήρες* (complete) αν κάθε συνάρτηση Boole μπορεί να πραγαμοτοποιηθεί από έναν προτασιακό τύπο που περιέχει συνδέσμους μόνο από το S.

Δεδομένου ενός πλήρους συνόλου συνδέσμων, κάθε προτασιακός τύπος είναι ταυτολογικά ισοδύναμος με κάποιον που περιέχει συνδέσμους μόνο από αυτό το σύνολο. Ισοδύναμα, για κάθε προτασιακό τύπο ϕ μπορούμε να κατασκευάσουμε προτασιακό τύπο α που να περιέχει μόνο συνδέσμους ενός πλήρους συνόλου και να πραγματοποιεί την ίδια συνάρτηση Boole B_ϕ, δηλαδή $\phi \models\!\!\!\dashv \alpha$.

Το σύνολο $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ είναι επαρκές.

Definition 2.1.15 *Διαζευκτική κανονική μορφή* (disjunctive normal form) καλείται κάθε μορφή $\gamma_1 \vee \ldots \vee \gamma_k$ όπου $\gamma_i \equiv \beta_{i_1} \wedge \ldots \wedge \beta_{i_{n_i}}$ και κάθε β_{i_j} είναι προτασιακή μεταβλητή ή άρνηση προτασιακής μεταβλητής.

Definition 2.1.16 *Συζευκτική κανονική μορφή* (conjunctive normal form) καλείται κάθε μορφή $\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_k$ όπου $\gamma_i \equiv \beta_{i_1} \vee \ldots \vee \beta_{i_{n_i}}$ και κάθε β_{i_j} είναι προτασιακή μεταβλητή ή άρνηση προτασιακής μεταβλητής.

Theorem 2.1.17 Για κάθε προτασιακό τύπο μπορούμε να βρούμε έναν ταυτολογικά ισοδύναμο σε διαζευκτική κανονική μορφή.

Theorem 2.1.18 Για κάθε προτασιακό τύπο μπορούμε να βρούμε έναν ταυτολογικά ισοδύναμο σε συζευτική κανονική μορφή.

Τα θεωρήματα που προηγήθηκαν οδηγούν με φυσικό τρόπο στον προσδιορισμό επαρκών συνόλων συνδέσμων μικρότερης πληθικότητας.

Theorem 2.1.19 Το σύνολο $\{\wedge, \vee, \neg\}$ είναι επαρκές.

Καθώς $(\phi \vee \psi) \vDash\Dashv \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$ και $(\phi \wedge \psi) \vDash\Dashv \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$ μπορούμε να βελτιώσουμε το αποτέλεσμα.

Theorem 2.1.20 Τα σύνολα $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$ είναι επαρκή.

2.2 Πρωτοβάθμια Λογική

Η αναζήτηση ενός εκφραστικά πλουσιότερου μοντέλου «εξαγωγής συμπερασμάτων» μας οδήγησε στην *πρωτοβάθμια λογική* (first-order logic). Υπάρχουν συλλογισμοί, όπως και το επόμενο παράδειγμα, η ορθότητα των οποίων δεν εξαρτάται από τη θέση των προτάσεων ως προς τους λογικούς συνδέσμους, και συνεπώς δεν μπορεί να προκύψει μέσω των αληθοπινάκων. Αρχικά, θα δώσουμε μία σκιαγράφηση των χαρακτηριστικών που θα θέλαμε η πρωτοβάθμια γλώσσα να μπορεί να εκφράσει και στη συνέχεια θα περιγράψουμε τυπικά το συντακτικό της γλώσσας και τον τρόπο με τον οποίο θα πραγματοποιείται η ερμηνεία των τύπων.

Συντακτικό

Όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί.
Ο Σωκράτης είναι άνθρωπος.
Άρα ο Σωκράτης είναι θνητός. [Kol15, p. 47]

Παρατηρούμε ότι η ορθότητα του παραπάνω συλλογισμού εξαρτάται από τις ιδιότητες των αντικειμένων και από τη σημασία της έκφρασης «όλοι». Για να εκφράσουμε επομένως τον παραπάνω συλλογισμό σε μία τυπική γλώσσα, θα χρειαζόμασταν ένα *κατηγόρημα* (predicate) μιας θέσης, H, που θα συμβολίζει την ιδιότητα «είναι άνθρωπος», ένα κατηγόρημα μίας θέσης, M, για την ιδιότητα «είναι θνητός», και μία *σταθερά* (constant) s που θα την ονομάσουμε «Σωκράτης». Επίσης θα χρειαστούμε ένα σύμβολο, $\forall$, που θα μεταφράζει την έκφραση «για κάθε»· το σύμβολο αυτό θα ονομάζουμε σύμβολο *ποσόδειξης* ή *ποσοδείκτη*. Σύμφωνα με την υπόθεση αυτή, η πρόταση «ο Σωκράτης είναι άνθρωπος» θα μεταφραστεί ως Hs και η πρόταση «όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί» ως $\forall v_1(Hv_1 \to Mv_1)$.

Αναλυτικότερα, το συντακτικό της πρωτοβάθμιας λογικής αποτελείται από τα ακόλουθα σύμβολα.

Α΄. Λογικά Σύμβολα (Logical Symbols)

1. Παρενθέσεις (parentheses): $($, $)$
2. Σύμβολα προτασιακών συνδέσμων (connectives): $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$
3. Μεταβλητές (variables): $v_1, v_2, ...$
4. Σύμβολο ισότητας: $=$

Β΄. Παράμετροι (Parameters)

1. Σύμβολα ποσόδειξης ή ποσοδείκτες (quantifier symbol): *καθολικός* (universal) $\forall$, *υπαρξιακός* (existential) $\exists$
2. Σύμβολα σταθερών (constant symbols): σύνολο συμβόλων, μπορεί να είναι και το κενό σύνολο
3. Σύμβολα κατηγορημάτων (predicate symbols): $P_1^n, P_2^n, ...$
4. Σύμβολα συναρτήσεων (function symbols): $f_1^n, f_2^n, ...$

Για να περιγράψουμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα, θα πρέπει να προσδιορίσουμε τις παραμέτρους, δηλαδή τα κατηγορήματα και τις συναρτήσεις, και να δηλώσουμε το αν θα περιλαμβάνει σύμβολο ισότητας ή όχι. Πρωτοβάθμια γλώσσα για παράδειγμα, μπορεί να είναι η γλώσσα της *βασικής θεωρίας αριθμών* (number theory)· περιέχει σύμβολο ισότητας, ένα σύμβολο κατηγορήματος μιας θέσης, $<$, τη σταθερά 0, ένα σύμβολο συνάρτησης μίας θέσης, S, που θα συμβολίζει τη συνάρτηση του *επόμενου* (successor) και τα σύμβολα συνάρτησης δύο θέσεων $+$ για την πρόσθεση, $\cdot$ για τον πολλαπλασιασμό και E για την ύψωση σε δύναμη. Για παράδειγμα, η πρόταση:

«Κάθε μη μηδενικός φυσικός αριθμός είναι επόμενος κάποιου φυσικού αριθμού.»

στη θεωρία αριθμών, μεταφράζεται στην πρωτοβάθμια λογική ως:

$$\forall v_1(\neg(v_1 = 0) \rightarrow (\exists v_2(v_1 = Sv_2)))$$

Έκφραση (expression) θα ονομάζουμε κάθε πεπερασμένη ακολουθία συνόλων της γλώσσας.

[12] Η παρουσία του συμβόλου ισότητας είναι προαιρετική· κάοοιες γλώσσες το περιέχουν και κάποιες όχι. Το σύμβολο ισότητας είναι ένα σύμβολο κατηγορήματος δύο θέσεων που όμως διαφέρει από τα υπόλοιπα καθώς δε θεωρείται παράμετρος αλλά λογικό σύμβολο.

[12] Οι σταθερές της πρωτοβάθμιας λογικής παίζουν το ρόλο των ονομάτων στη φυσική μας γλώσσα. Θεωρούνται και σύμβολα συναρτήσεων 0-θέσεων.

Definition 2.2.1 (Term) Ορίζουμε ποιες εκφράσεις είναι *όροι* (terms) με τον εξής επαγωγικό ορισμό:

(i) Οι μεταβλητές και τα σύμβολα σταθερών είναι όροι.

(ii) Αν f_i^n είναι σύμβολο συνάρτησης n θέσεων και $t_1, t_2, .., t_n$ είναι όροι τότε $f_i^n(t_1, ..., t_n)$ είναι όρος.

Παραδείγματα όρων στη γλώσσα της θεωρίας αριθμών είναι $+v_2S0$, $SSS0$.

Definition 2.2.2 *Ατομικό τύπο* (atomic formula) θα ονομάζουμε κάθε έκφραση της μορφής $Pt_1...t_n$, όπου P σύμβολο κατηγορήματος n θέσεων και $t_1, ..., t_n$ όροι.

Διαισθητικά, τα αντικείμενα που υποδηλώνονται από τους όρους $t_1, ..., t_n$ ικανοποιούν τη σχέση R.

Για παράδειγμα, ο $= v_1v_2$ είναι ατομικός τύπος.

Definition 2.2.3 (well-formed formulas, wff's) Ο ορισμός των τύπων (formulas, well-formed formulas, wff's) της δευτεροβάθμιας λογικής θα δοθεί επαγωγικά.

1. Κάθε ατομικός τύπος είναι τύπος.

2. Αν ϕ_1, ϕ_2 είναι τύποι, τότε οι εκφράσεις $(\phi_1 \wedge \phi_2)$, $(\phi_1 \vee \phi_2)$ $(\phi_1 \rightarrow \phi_2)$, $(\phi_1 \leftrightarrow \phi_2)$, $(\neg\phi_1)$ είναι τύποι.

3. Αν x μεταβλητή και ϕ τύπος, τότε οι εκφράσεις $\exists x\phi$ και $\forall x\phi$ είναι τύποι.

4. Τύποι είναι μόνο οι εκφράσεις που σχηματίζονται σύμφωνα με τους κανόνες 1, 2, 3.

Definition 2.2.4 (Free variable) Όταν η εμφάνιση μιας μεταβλητής βρίσκεται εντός του βεληνεκούς ενός ποσοδείκτη $\forall x$, $\exists x$ τότε θα ονομάζουμε την εμφάνιση *δεσμευμένη*. Όταν η εμφάνιση δεν είναι δεσμευμένη θα είναι *ελεύθερη* (free).

Για παράδειγμα στον τύπο $(\forall x(x < y)) \wedge (x = y))$, η εμφάνιση της x στον τύπο $(x < y)$ είναι δεσμευμένη ενώ στον τύπο $(x = y)$ είναι ελεύθερη.

Definition 2.2.5 Αν $\phi(x)$ τύπος και t όρος, θα λέμε ότι η x είναι *αντικαταστάσιμη* από τον t στο $\phi(x)$ αν καμία ελεύθερη εγγραφή της x στο $\phi(x)$ δε βρίσκεται εντός του βεληνεκούς ενός ποσοδείκτη $\forall y$ ή $\exists y$ όπου y εμφανίζεται στον y. Δηλαδή μετά την αντικατάσταση $\phi(t)$ καμιά μεταβλητή δε δεσμεύεται.

Οι δύο παραπάνω έννοιες ορίζονται και επαγωγικά [EE01, p. 76]

Σημασιολογία

Στον προτασιακό λογισμό, η ερμηνεία των τύπων της γλώσσας δόθηκε μέσω της αποτίμησης, στην πρωτοβάθμια λογική θα γίνει μέσω των *δομών* (structures). Οι δομές θα προσδιορίζουν:

- σε τι «αντικείμενα» αναφέρεται ο καθολικός ποσοδείκτης $\forall$, και
- τι υποδηλώνουν οι υπόλοιποι παράμετροι, δηλαδή τα σύμβολα κατηγορημάτων και συναρτήσεων.

Definition 2.2.6 (Structure) *Δομή* (structure), $\mathfrak{A}$, θα ονομάζουμε κάθε συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο παραμέτρων τέτοιο ώστε η $\mathfrak{A}$ αντιστοιχεί:

1. στον καθολικό ποσοδείκτη $\forall$, ένα μη κενό σύνολο $|\mathfrak{A}|$ που θα ονομάζουμε *πεδίο* (domain, universe) της δομής[13],
2. σε κάθε κατηγόρημα P n-θέσεων[14] μία σχέση n-θέσεων $P^{\mathfrak{A}} \subseteq |\mathfrak{A}|^n$,
3. σε κάθε σύμβολο σταθεράς, c, ένα στοιχείο $c^{\mathfrak{A}}$ του πεδίου $|\mathfrak{A}|$
4. σε κάθε σύμβολο σταθεράς n-θέσεων, f, έναν τελεστή n θέσεων $f^{\mathfrak{A}}$ στο $|\mathfrak{A}|$, δηλαδή $f^{\mathfrak{A}} : |\mathfrak{A}|^n \to |\mathfrak{A}|$.

Η ιδέα είναι ότι η δομή ερμηνεύει τις παραμέτρους της γλώσσας· το $\forall$ σημαίνει για κάθε στοιχείο του πεδίου $|\mathfrak{A}|$, το c σημαίνει το σημείο $c^{\mathfrak{A}}$ και ο ατομικός τύπος $Pt_1...t_n$ σημαίνει πως η n-άδα των σημείων $t_1, ..., t_n$ ανήκουν στη σχέση $P^{\mathfrak{A}}$.

Για παράδειγμα, η γλώσσα της *συνολοθεωρίας* (set theory) έχει εκτός από την παράμετρο $\forall$, το σύμβολο κατηγορήματος δύο θέσεων $\in$, που μεταφράζεται ως «ανήκει στο» ή «είναι στοιχείο του», η ισότητα ανήκει στη γλώσσα, δεν έχει σύμβολα συναρτήσεων και κάποις φορές περιλαμβάνει το σύμβολο σταθεράς $\emptyset$. Έστω η δομή $\mathfrak{A}$ όπου $|\mathfrak{A}|$ το σύνολο των φυσικών αριθμών, και $\in^{\mathfrak{A}}$ το σύνολο των ζευγών $\langle m, n \rangle$ τέτοια ώστε $m < n$. Επομένως η παράμετρος $\in$ μεταφράζεται ως «είναι μικρότερος από». Μπορούμε πλέον να μεταφράζουμε τις προτάσεις της τυπικής γλώσσας στη φυσική μας γλώσσα και να αποφανθούμε για την αλήθεια ή το ψεύδος των προτάσεων. Για παράδειγμα η πρόταση:

$$\exists x \forall y \neg y \in x$$

μεταφράζεται ως:

«υπάρχει φυσικός αριθμός τέτοιος ώστε δεν υπάρχει μικρότερος φυσικός αριθμός»

[13]Το πεδίο της δομής, αποτελεί το «σύμπαν» των αντικειμένων στα οποία αναφερόμαστε μέσω της πρωτοβάθμιας γλώσσας.

[14]Το $P^{\mathfrak{A}}$, είναι σύνολο n-άδων των στοιχείων του πεδίου.

ή ισοδύναμα ότι το σύνολο των φυσικών αριθμών έχει ελάχιστο στοιχείο, η οποία είναι αληθής πρόταση. Λέμε ότι η πρόταση $\exists x \forall y \neg y \in x$ είναι αληθής στη δομή $\mathfrak{A}$ ή ότι η δομή $\mathfrak{A}$ είναι *μοντέλο* (model) της πρότασης. Το *αξίωμα του ζεύγους* (pair-set axiom) της συνολοθεωρίας που εξασφαλίζει την ύπαρξη συνόλου με τουλάχιστον δύο στοιχεία:

$$\forall x \forall y \exists z \forall t (t \in z \leftrightarrow t = x \vee t = y)$$

είναι ψευδής στο $\mathfrak{A}$ καθώς δεν υπάρχει φυσικός αριθμός m τέτοιος ώστε για κάθε n, $n < m$ αν και μόνο αν $n = 1$.

Definition 2.2.7 Έστω $V = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ το σύνολο των μεταβλητών της γλώσσας $\mathfrak{L}$ και ερμηνεία $\mathfrak{A}$. Τότε θα ονομάζουμε *αποτίμηση* (valuation) στην $\mathfrak{A}$ κάθε συνάρτηση $s : V \to |\mathfrak{A}|$. Επειδή μέσω μιας αποτίμησης s κάθε μεταβλητή παριστάνει κάποιο στοιχείο της δομής, το ίδιο θα συμβαίνει και για κάθε όρο της γλώσσας. Το στοιχείο της δομής που παριστάνει ο όρος t μέσω της αποτίμησης, και το οποίο θα συμβολίζουμε με $\overline{s}(t)$ το ορίζουμε με επαγωγή στους όρους ως εξής:

(i) αν t είναι μια μεταβλητή x, θέτουμε $\overline{s}(t) = s(x)$,

(ii) αν t είναι μια σταθερά c, θέτουμε $\overline{s}(t) = c^{\mathfrak{A}}$,

(iii) αν $t_1, ..., t_n$ είναι όροι, για τους οποίος ήδη γνωρίζουμε τα $\overline{s}(t_1), ..., \overline{s}(t_n)$, και f σύμβολο συνάρτησης n θέσεων τότε $\overline{s}(f(t_1, ..., t_n)) = f^{\mathfrak{A}}(\overline{s}(t_1), ..., \overline{s}(t_n))$.

Παρατηρούμε ότι λόγω του (i) η $\overline{s}$ είναι επέκταση της s.
Δοθέντων των $\mathfrak{A}$ και s όπως πιο πάνω, είμαστε πλέον σε θέση να ορίσουμε επαγωγικά τι σημαίνει η δομή $\mathfrak{A}$ να ικανοποιεί τον τύπο ϕ με την αποτίμηση s, δηλαδή $\models_{\mathfrak{A}} \phi[s]$, [Kol15, p. 56], [EE01, p. 83].

Βασικά θεωρήματα

Το θεώρημα *ορθότητας* (soundness) μας εξασφαλίζει ότι οι υποθέσεις μας, οδηγούν σε σωστά συμπεράσματα [EE01, p. 131].

Theorem 2.2.8 (Soundness) Αν $T \vdash \phi$ τότε $T \models \phi$.

Δηλαδή αν ϕ είναι θεώρημα της θεωρίας T τότε η ϕ αληθεύει σε όλες τις δομές που είναι μοντέλα της T.

Το θεώρημα της *πληρότητας* (completeness) αποδεικνύει ότι αυτά που μπορούμε να αποδείξουμε σε μια θεωρία είναι ακριβώς αυτά που αληθεύουν σε όλα τα μοντέλα της θεωρίας και ανήκει στα θεμελιώδη θεωρήματα της μαθηματικής λογικής.

Theorem 2.2.9 (Completeness, Gödel 1930) Αν $\Sigma \models \phi$ τότε $\Sigma \vdash \phi$.

Κλείνουμε την ενότητα αυτή με το θεώρημα *συμπάγειας* (compactness).

Theorem 2.2.10 (Compactness) Αν T πεπερασμένα ικανοποιήσιμο τότε T ικανοποιήσιμο.

Παρατηρούμε ότι μέσω της πρωτοβάθμιας γλώσσας καταφέραμε να τυποποιήσουμε τη γλώσσα μαθηματικών πεδίων όπως η συνολοθεωρία ή η θεωρία αριθμών. Με τον τρόπο αυτό, μας έδωσε τη δυνατότα να αναφερόμαστε όχι μόνο σε μαθηματικά αντικείμενα, όπως σύνολα ή ομάδες, ή αριθμοί, αλλά στα θεωρήματα ή τις προτάσεις της συνολοθεωρίας ή της θεωρίας αριθμών. Ο όρος που χρησιμοποιούμε για να αναφερόμαστε σε αυτό το «ανώτερο» επίπεδο είναι *μεταμαθηματικά* (metamathematics). Το αντικείμενο των μεταμαθηματικών, επομένως, είναι η μελέτη των προτάσεων ή η διατύπωση προτάσεων που αφορούν προτάσεις στις οποίες καταλήγει ένας μαθηματικός που μελετά για παράδειγμα τη συνολοθεωρία ή τη θεωρία αριθμών.

2.3 Δευτεροβάθμια Λογική

Μπορούμε να επεκτείνουμε την εκφραστική δυνατότητα της πρωτοβάθμιας γλώσσας επιτρέποντας την ποσόδειξη σε σύμβολα κατηγορημάτων ή συναρτήσεων. Αυτό προϋποθέτει να περιέχονται στη γλώσσα συμβόλα κατηγορημάτων και συναρτήσεων με τη μορφή μεταβλητών.

Για παράδειγμα, ο τύπος

$$\exists x(Px \to \forall x Px)$$

είναι έγκυρος τύπος όπου οι $\forall$ και P είναι παράμετροι. Αφού είναι αληθής ανεξαρτήτως της ερμηνείας της παραμέτρου P και η πρόταση:

$$\forall P \exists x(Px \to \forall x Px)$$

θα θέλαμε να θεωρείται έγκυρη.

Συντακτικό

Η γλώσσα της *δευτεροβάθμιας λογικής* (second-order logic) αποτελείται από τη γλώσσα της πρωτοβάθμιας λογικής, με το σύνολο των λογικών συμβόλων να περιλαμβάνει μεταβλητές κατηγορημάτων και συναρτήσεων.

Α΄. Λογικά Σύμβολα (Logical Symbols)

1. παρενθέσεις: $($, $)$
2. σύμβολα προτασιακών συνδέσμων (connectives): $\neg, \wedge, \vee, \to$

3. μεταβλητές (individual variables): $v_1, v_2, \dots$
4. μεταβλητές κατηγορημάτων (predicate variables): $X_1^n, X_2^n, \dots$
5. μεταβλητές συναρτήσεων (function variables): $F_1^n, F_2^n, \dots$
6. σύμβολο ισότητας: $=$ (προαιρετικά)

Β΄. Παράμετροι (Parameters)

1. σύμβολο ποσόδειξης (quantifier symbol): $\forall$
2. σύμβολα κατηγορημάτων (predicate symbols): $P_1^n, P_2^n, \dots$
3. σύμβολα συναρτήσεων (function symbols): $f_1^n, f_2^n, \dots$

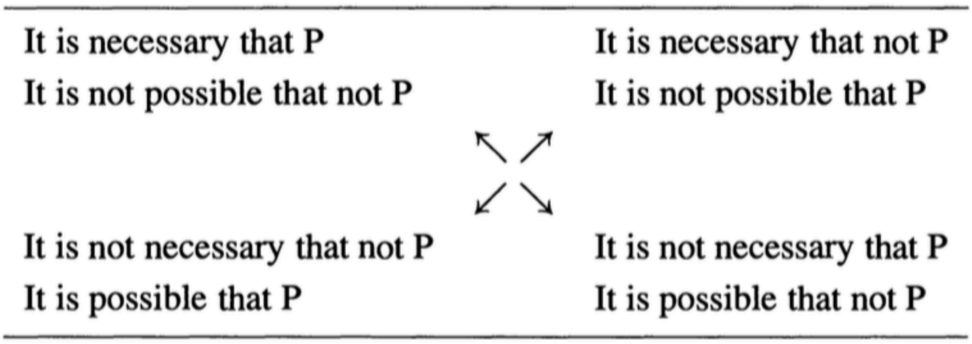
Σημασιολογία

Η έννοια της δομής που είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, έχει την ίδια σημασία και στη δευτεροβάθμια γλώσσα με την προϋπόθεση πως θα πρέπει να την επεκτείνουμε με φυσικό τρόπο έτσι ώστε να ερμηνεύει και τις μεταβλητές κατηγορημάτων και συναρτήσεων [EE01, p. 283].

Κεφάλαιο 3

Τροπική Λογική

Όπως κάθε τυπική γλώσσα, έτσι και η τροπική λογική έχει αλφάβητο, συντακτικό και σημασιολογία. Σύμφωνα με τις σκέψεις του Leibniz, αναγκαίο είναι οτιδήποτε αληθές σε κάθε *πιθανό κόσμο* ενώ πιθανό είναι οτιδήποτε αληθές σε κάποιον *πιθανό κόσμο*. Συνεκδοχικά, θα λέγαμε[1] ότι κάποια πρόταση της μορφής $\Box A$ (necessarily A) είναι αληθής αν και μόνο αν η πρόταση A είναι αληθής σε κάθε πιθανό κόσμο, ενώ η πρόταση $\Diamond A$ (possibly A) είναι αληθής αν υπάρχει κάποιος κόσμος στον οποίο αληθεύει η πρόταση A. Ο τελεστής $\Diamond$ αποτελεί το δυικό τροπικό ανάλογο (dual modality), ο οποίος κατά τη συλλογιστική του Αριστοτέλη δεν μπορεί να ορίζεται διαφορετικά από: $\Diamond P \equiv \neg\Box\neg P$ και $\Box P \equiv \neg\Diamond\neg P$.



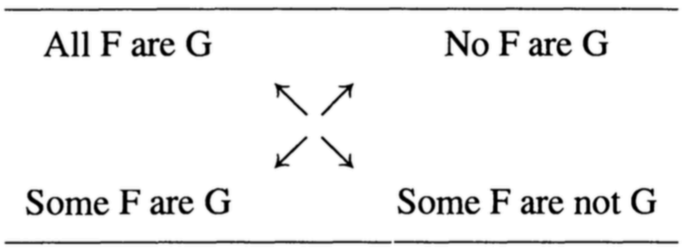
Σχήμα 3.1: Το τροπικό τετράγωνο των αντιθέτων (the modal square of opposition) [FM98, p. 7].

Είναι ενδιαφέρον το γεγονός ότι πολλές έννοιες της φυσικής μας γλώσσας συνδέονται μέσω της δυαδικότητας (πάντοτε - ενίοτε, ήδη - όχι ακόμη, υποχρέωση - δυνατότητα), καθώς και οι γνωστοί μας καθολικοί και υπαρξιακοί ποσοδείκτες: $\forall x \alpha \leftrightarrow \neg\exists x \neg\alpha$. Θα μπορούσε μάλιστα να ισχυριστεί κανείς ότι το φαινόμενο αυτό είναι τόσο διάχυτο

[1] Ο τελεστής $\Box$ έχει πολλές πιθανές *αναγνώσεις*· αναγκαιότητα, γνώση, υποχρέωση, κ.α.

στην ανθρώπινη σκέψη που θα μπορούσε να αποτελέσει επιχείρημα για τον πρωτογενή (primitive) χαρακτήρα της «τροπικότητας» (modality) [VB10, p. 12].

Το τροπικό τετράγωνο είναι ανάλογο με το παρακάτω τετράγωνο αντιθέσεων για κατηγορήματα.



Σχήμα 3.2: Το τετράγωνο των αντιθέτων για κατηγορήματα (the square of opposition for categorical statements). [FM98, p. 8]

Και στις δύο περιπτώσεις τα *σχήματα* (schemes) κατά μήκος της πρώτης γραμμής είναι *αντιβαίνοντα* (contraries), αφού δεν μπορούν να είναι αληθή και τα δύο, και της δεύτερης γραμμής είναι *υπο-αντιβαίνοντα* (subcontraries), καθώς δεν μπορούν να είναι ψευδή και τα δύο. Επιπλέον, τα σχήματα κάθε στήλης χαρακτηρίζονται ως *υπο-εναλλακτικά* (subalternatives), επειδή αυτά της δεύτερης γραμμής συνεπάγονται από την πρώτη γραμμή, ενώ στις διαγωνίους είναι *αντιφατικά* (contradictories) καθώς δεν μπορούν να έχουν την ίδια αληθοτιμή.

3.1 Συντακτικό

Θα ορίσουμε το συντακτικό της βασικής τροπικής γλώσσας (basic modal language), έτσι ώστε να αποτελεί μια επέκταση της κλασικής προτασιακής λογικής με τους τροπικούς τελεστές $\Box$ και $\Diamond$ (modal operators), ως τελεστές μίας θέσης (unary). Ο παρακάτω ορισμός των τύπων (formulas) της τροπικής λογικής, θα γίνει επαγωγικά.

Definition 3.1.1 (Propositional Modal Formulas) Το σύνολο των *τύπων* της προτασιακής τροπικής λογικής, ορίζεται σύμφωνα με τους παρακάτω κανόνες:

1. Οι προτασιακές μεταβλητές και οι σταθερές $\top$, $\bot$ είναι τύποι.

2. Αν X τύπος τότε και ο $\neg X$ τύπος.

3. Αν X και Y τύποι τότε και οι $X \vee Y$, $X \wedge Y$, $X \to Y$ τύποι

4. Αν X τύπος τότε και οι $\Box X$, $\Diamond X$ τύποι.

Για παράδειγμα, οι προτάσεις $P \to \Diamond P$, $((\Box P \wedge \Diamond Q) \to \Diamond(P \wedge Q))$ είναι τύποι της προτασιακής τροπικής λογικής.

Με βάση την παραπάνω παρατήρηση σχετικά με τη δυαδικότητα των τροπικών τελεστών, και με χρήση των γνωστών τύπων της κλασικής λογικής

- $\phi \wedge \psi \equiv \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$
- $\phi \to \psi \equiv \neg\phi \vee \psi$
- $\top \equiv \neg\bot$

μπορούμε πλέον να ορίσουμε τη βασική τροπική γλώσσα ως εξής:

Definition 3.1.2 (Basic Modal Language) Η *βασική τροπική γλώσσα* ορίζεται ως το σύνολο των προτασιακών μεταβλητών (proposition variables) Φ, τα στοιχεία του οποίου αναφέρονται ως $p, q, r, \ldots$, και ενός εναδικού (unary) τροπικού τελεστή $\Diamond$ (diamond). Τότε το σύνολο των τύπων της τροπικής λογικής (well-formed formulas) δίνεται από τον κανόνα (όπου p προτασιακή μεταβλητή):

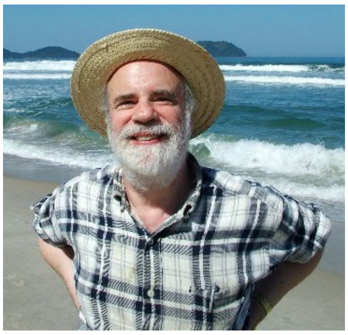
$$\phi ::= p \mid \bot \mid \neg\phi \mid \psi \vee \phi \mid \Diamond\phi.$$

3.2 Σημασιολογία

Παρά την εκτεταμένη, μέχρι στιγμής, χρήση εννοιών *σημασιολογικού* (semantics) χαρακτήρα, όπως η έννοια της *αλήθειας*, δεν έχουμε αποδώσει στις έννοιες αυτές μαθηματικό περιεχόμενο. Για την επίτευξη του στόχου αυτού, θα ερμηνεύσουμε την τροπική γλώσσα στο πλαίσιο *σχεσιακών δομών* (relational structures)[2]. Η σημασιολογία της γλώσσας θα δοθεί σε δύο επίπεδα, στο επίπεδο των *πλαισίων* (frames) και των *μοντέλων* (models). Και τα δυο επίπεδα είναι εξίσου σημαντικά· το πρώτο διότι συνδέεται με την έννοια της εγκυρότητας (validity), ενώ στο δεύτερο ορίζεται η θεμελιώδη έννοια της ικανοποιησιμότητας (satisfiability) και της αλήθειας (truth).

Σύμφωνα με την παραπάνω προσέγγιση των τροπικών τελεστών, για την ερμηνεία της τροπικής λογικής θα χρειαστούμε ένα σύνολο *πιθανών κόσμων* (possible worlds), στους οποίους οι προτάσεις της γλώσσας μας να μπορούν να χαρακτηρίζονται ως αληθείς ή ψευδείς. Επιπλέον, θα χρειαστούμε μία αποτίμηση V (valuation) που να αντιστοιχίζει σε κάθε κόσμο ένα σύνολο από προτάσεις που αληθεύουν στον κόσμο αυτόν. Τέλος, θα ορίσουμε μια δυαδική σχέση R (relation) μεταξύ των κόσμων.

[2] Αν και δημιουργήθηκαν αρκετά τυπικά συστήματα για την ερμηνεία της τροπικής λογικής (formal semantics), κυριάρχησε αυτό των πιθανών κόσμων (possible worlds semantics) που εισήγαγε ο Kripke, και ανεξάρτητα ο Hintikka, τη δεκαετία του ’60 [FM98, p. 11].



Σχήμα 3.3: Saul Aaron Kripke, 1940.

Έχουν δοθεί διάφορες ερμηνείες για την έννοια των πιθανών κόσμων, από μεταφυσικούς ή φανταστικούς κόσμους μέχρι καταστάσεις υπολογισμού ή θέσεις σε παιχνίδια στρατηγικής. Ανάλογα με την εκάστοτε ερμηνεία, η σχέση ισοδυναμίας μπορεί να είναι είτε καθολική, δηλαδή κάθε κόσμος να σχετίζεται με όλους τους υπόλοιπους, ή να έχει περιορισμούς οι οποίοι διαμορφώνονται για παράδειγμα από τις μελλοντικές πιθανές καταστάσεις του παιχνιδιού, τις σχέσεις γειτνίασης σημείων του χώρου ή ακόμη τις *επιστημικές καταστάσεις* (epistemic states) με βάση τις πληροφορίες στις οποίες μπορεί να έχει πρόσβαση κάθε οντότητα. Μια γεωμετρική ερμηνεία της γλώσσας της τροπικής λογικής η οποία εξυπηρετεί και τους στόχους της παρούσας εργασίας, μπορεί να δοθεί μέσω των γραφημάτων (graphs)· οι κόσμοι αποτελούν τους κόμβους του γραφήματος, ενώ η δυαδική σχέση τις ακμές του γράφου. Αυτές οι *σχεσιακές* δομές (relational structures) στη βιβλιογραφία αναφέρονται ως *μοντέλα Kripke* (Kripke models) ή *σχεσιακά μοντέλα* (relational models) [BdRV01, p. 42].

Definition 3.2.1 (Frame) *Πλαίσιο* θα ονομάζουμε το ζεύγος $\mathfrak{F} = \langle W, R \rangle$, όπου W είναι ένα μη κενό σύνολο, τα μέλη του οποίου θα ονομάζουμε *πιθανούς κόσμους (possible worlds, states)*, και R μία δυαδική σχέση στο W, την οποία θα καλούμε *προσβασιμότητα* (accessibility relation).

Επομένως, ένα πλαίσιο για την προτασιακή τροπική λογική, δεν είναι τίποτα παραπάνω από μια σχεσιακή δομή εφοδιασμένη με μία δυαδική σχέση. Μπορούμε να φανταστούμε ένα πλαίσιο ως ένα *κατευθυνόμενο γράφημα* (directed graph).

Definition 3.2.2 (Graph) *Γράφημα* ή *γράφο* (graph) θα ονομάζουμε ένα ζεύγος $\mathfrak{G} = (V, E)$, όπου $V,$ σύνολα έτσι ώστε $E \subseteq [V^2]$, δηλαδή τα στοιχεία του E είναι υποσύνολα του V πλήθικότητας 2. Υποθέτουμε ότι $V \cap E = \emptyset$. Τα στοιχεία του συνόλου V θα ονομάζουμε *κόμβους* ή *κορυφές* (nodes, vertices) του γραφήματος και του E *ακμές* (edges, lines).

Παρατηρούμε ότι η έννοια των πιθανών κόσμων, και συνεκδοχικά του πλαισίου, παρ' ό,τι αφορά στην ορολογία δε μας δεσμεύει ως προς την υπόστασή τους· οι πιθανοί κόσμοι μπορεί να είναι αριθμοί, σύνολα, πρόσωπα, αντικείμενα κ.α. Επιπλέον, αν $\Gamma, \Delta \in W$ θα γράφουμε $\Gamma R \Delta$ αν $(\Gamma, \Delta) \in R$ και θα λέμε ότι ο κόσμος Δ είναι προσβάσιμος (accessible) από τον κόσμο Γ.

Definition 3.2.3 (Possible Worlds Model) *Μοντέλο* θα ονομάζουμε ένα πλαίσιο εφοδιασμένο με μία συνάρτηση V, ισοδύναμα κάθε τριάδα $\mathfrak{M} = \langle W, R, V \rangle$, όπου η V αντιστοιχίζει σε κάθε προτασιακή μεταβλητή p ένα υποσύνολο $V(p)$ του W[3]. Η συνάρτηση V θα ονομάζεται *αποτίμηση* (valuation) [4]. Δοθέντος ενός μοντέλου $\mathfrak{M}$ θα λέμε ότι το $\mathfrak{M}$ βασίζεται (based) στο πλαίσιο $\mathfrak{F}$. Επιπλέον, θα αναφερόμαστε σε μοντέλο με αφετηρία (pointed model) M, s, όταν στο μοντέλο επισυνάπτεται ένας *αρχικός* κόσμος s (vantage point) [VB10, p. 15].

Προσεγγίζοντας τις έννοιες των πλαισίων και των μοντέλων από μία αμιγώς δομική σκοπιά, θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε πως ένα πλαίσιο $\mathfrak{F}$, και ένα μοντέλο $\mathfrak{M}$ που βασίζεται σ' ένα πλαίσιο $\mathfrak{F}$, αποτελούν απλώς δύο σχεσιακά μοντέλα που πηγάζουν από το ίδιο «σύμπαν», αφού τα μοντέλα δεν είναι παρά πλαίσια εφοδιασμένα με μία συλλογή εναδικών σχέσεων, V. Στην πραγματικότητα όμως οι δυο αυτές έννοιες χρησιμοποιούνται διαφορετικά. Τα πλαίσια αποτελούν ενδιαφέρουσες μαθηματικές οντότητες που χρησιμοποιούμε ως εργαλεία για να καταστήσουμε τις θεμελιώδεις υποθέσεις μας μαθηματικά ακριβείς. Ο ορισμός των μοντέλων προϋποθέτει την ύπαρξη της συνάρτησης αποτίμησης, η οποία ουσιαστικά προσδίδει στα πλαίσια περιεχόμενο: την *ενδεχόμενη* (contingent) πληροφορία. Για παράδειγμα «Βρέχει την Τρίτη ή όχι;», «Είναι τη χρονική στιγμή t_6 το σύστημα write-enabled;» κ.α. Πράγματι, χωρίς την έννοια του μοντέλου, οι ισχυρισμοί μας στην τροπική γλώσσα θα ήταν αμετάβλητοι (invariant) παρά τις ενδεχόμενες αλλαγές στην πληροφορία που περιέχουν οι προτάσεις μας. Δεδομένης αυτής της διάκρισης που κάναμε μεταξύ των πλαισίων, όπου σχετίζονται με τη θεμελιώδη πληροφορία, και των μοντέλων, τα οποία αφορούν στο περιγραφικό περιεχόμενο μιας πρότασης, μπορούμε να ορίσουμε σε τροπικό, πλέον, επίπεδο την έννοια της *εγκυρότητας* (validity) μια πρότασης. Προϋπόθεση γι' αυτό, αποτελεί η ερμηνεία της τροπικής γλώσσας στο επίπεδο των μοντέλων.

3.2.1 Μοντέλα & Ικανοποιησιμότητα

Definition 3.2.4 (Satisfiability in a Model at a State) Έστω w κόσμος στο μοντέλο $\mathfrak{M} = \langle W, R, V \rangle$ και Φ σύνολο προτασιακών μεταβλητών (propositional letters). Θα ορίσουμε επαγωγικά την έννοια της ικανοποιησιμότητας μιας πρότασης ϕ στο μοντέλο $\mathfrak{M}$ ως εξής:

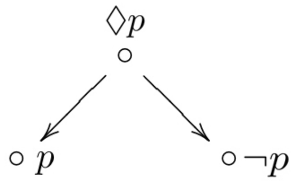
[3]Διαισθητικά, το σύνολο $V(p)$ αποτελείται από το σύνολο των κόμβων του γραφήματος του μοντέλου μας, στους οποίους η μεταβλητή p είναι αληθής.

[4]Μπορούμε να σκεφτούμε τη συνάρτηση αποτίμησης $V(p)$ ως το σύνολο των κόσμων του μοντέλου μας όπου η πρόταση p είναι αληθής.

- $\mathfrak{M}, w \Vdash p$ αν και μόνο αν $w \in V(p), p \in \Phi$
- $\mathfrak{M}, w \Vdash \perp$ ποτέ
- $\mathfrak{M}, w \Vdash \neg\phi$ αν και μόνο αν δεν ισχύει ότι $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$
- $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi \vee \psi$ αν και μόνο αν $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$ ή $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$
- $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\phi$ αν και μόνο αν για κάποιο $v \in W$ όπου wRv, ισχύει ότι $\mathfrak{M}, v \Vdash \phi$

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι $\mathfrak{M}, w \Vdash \Box\phi$ αν και μόνο αν για κάθε $v \in W$ όπου wRv, ισχύει ότι $\mathfrak{M}, v \Vdash \phi$.

Ακολουθούν δύο παραδείγματα για την ερμηνεία των τροπικών τελεστών $\Box$, $\Diamond$.



Σχήμα 3.4: Παραδείγματα ερμηνείας των τροπικών τελεστών.

Θα λέμε ότι ένα σύνολο τύπων Σ είναι αληθές σε κάποιον κόσμο w του μοντέλου $\mathfrak{M}$ και θα συμβολίζουμε με $\mathfrak{M}, w \Vdash \Sigma$, αν κάθε στοιχείο του συνόλου Σ είναι αληθές στον κόσμο w.

Αν το μοντέλο $\mathfrak{M}$ δεν ικανοποιεί την πρόταση ϕ στον κόσμο w, τότε θα γράφουμε ότι $\mathfrak{M}, w \nVdash \phi$ και θα λέμε ότι η πρόταση ϕ είναι ψευδής στον κόσμο w του μοντέλου $\mathfrak{M}$. Για πρακτικούς λόγους, θα επεκτείνουμε το πεδίο τιμών της συνάρτησης αποτίμησης V από τις προτασιακές μεταβλητές στους τύπους της τροπικής λογικής έτσι ώστε η $V(\phi)$ να υποδηλώνει το σύνολο των κόσμων όπου η πρόταση ϕ είναι αληθής, δηλαδή: $V(\phi) = \{w | \mathfrak{M}, w \Vdash \phi\}$.

Παρατηρούμε ότι ο παραπάνω ορισμός της έννοιας της ικανοποιησιμότητας είναι εγγενώς τοπικός, καθώς η αποτίμηση των τύπων (και κατ' επέκταση ο προσδιορισμός της αληθοτιμής των τύπων) στο επίπεδο των μοντέλων γίνεται σε μια συγκεκριμένη κατάσταση (την παρούσα κατάσταση), μετά την προσπέλαση των προσβάσιμων κόμβων. Ισοδύναμα, κάθε τροπικός τελεστής εξασφαλίζει την προσπέλαση (το πολύ) των $R-$*προσβάσιμων* κόσμων από τον κόσμο εκκίνησης. Αξίζει να σημειωθεί πως ο ευρύτερος «χαρακτήρας» της τροπικής λογικής είναι άρρηκτα συνυφασμένος με τις σχεσιακές δομές που ενυπάρχουν στον ορισμό της ικανοποιησιμότητας.

Definition 3.2.5 (Global Truthfullness) Ένας τύπος ϕ (ή ένα σύνολο Σ από τύπους, αντίστοιχα) θα λέμε ότι είναι *καθολικά αληθής* (globally true) σ' ένα μοντέλο $\mathfrak{M}$, αν είναι ικανοποιήσιμος σε όλους τους κόσμους τους μοντέλου, ισοδύναμα αν $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$ για κάθε $w \in W$ ($\mathfrak{M}, w \Vdash \Sigma$ για κάθε $w \in W$).

Definition 3.2.6 (Satisfiability in a Model) Θα λέμε ότι ο τύπος ϕ (ή ένα σύνολο Σ από τύπους, αντίστοιχα) είναι ικανοποιήσιμος σ' ένα μοντέλο $\mathfrak{M}$, αν υπάρχει κάποιος κόσμος $w \in W$ έτσι ώστε να ισχύει $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$ ($\mathfrak{M}, w \Vdash \Sigma$).

Ο τρόπος με τον οποίο διατυπώθηκαν οι παραπάνω ορισμοί, καθρεφτίζει την προσπάθειά μας να εκφράσουμε σε μία τυπική γλώσσα τη φιλοσοφική θέση[5] πως αναγκαιότητα σημαίνει αλήθεια σε όλους τους πιθανούς κόσμους, ενώ πιθανότητα σημαίνει αλήθεια σε κάποιον πιθανό κόσμο. Ο τοπικός χαρακτήρας της έννοιας της ικανοποιησιμότητας, μπορεί να φαίνεται σ' ένα πρώτο επίπεδο περιοριστικός, με μια βαθύτερη ανάγνωση όμως αναδεικνύεται ως ισχυρή πηγή δύναμης. Η ευελιξία στον προσδιορισμό της σχέσης R μπορεί να παράγει πλαίσια στα οποία η πρόσβασιμότητα μεταξύ των κόσμων διαφέρει σημαντικά. Για παράδειγμα επιλέγοντας $R = W \times W$ επιτρέπουμε κάθε κόσμο να συνδέεται με όλους τους υπόλοιπους· αυτό αντικατοπτρίζει την ιδέα του Leibniz στην πιο καθαρή της μορφή. Αν πάλι επιλέξουμε $R = \emptyset$ τότε κανένας κόσμος δε συνδέεται με κανέναν. Ανάμεσα στα δύο ακραία αυτά παραδείγματα, υπάρχουν πολλές ενδιαφέρουσες επιλογές που θα αναλυθούν περαιτέρω στην επόμενη ενότητα.

3.2.2 Πλαίσια & Εγκυρότητα

Με την αποδέσμευσή μας από τη συνάρτηση αποτίμησης, συνεπώς και από την πληροφορία που περιέχουν οι τύποι της τροπικής λογικής, απλώνεται μπροστά μας ο δρόμος προς την αναζήτηση περισσότερο θεμελιωδών εννοιών που αφορούν τη σχεσιακή πλέον δομή των πλαισίων στο σύνολό της. Η έννοια της εγκυρότητας (validity) θα μας προτρέψει να αναρωτηθούμε πότε μία έννοια είναι αληθής σε κάθε κόσμο κάθε μοντέλου που μπορούμε να «χτίσουμε» πάνω σε ένα δεδομένο πλαίσιο· το γεγονός αυτό αποτελεί το έναυσμα ώστε να εμβαθύνουμε στην «αρχιτεκτονική» των πλαισίων.

Definition 3.2.7 (Validity in a Frame at a State) Θα λέμε ότι ένας τύπος ϕ είναι *έγκυρος στον κόσμο* w του πλαισίου $\mathfrak{F}$, και θα συμβολίζουμε ως $\mathfrak{F}, w \Vdash \phi$, αν το τύπος ϕ ισχύει στον κόσμο w κάθε μοντέλου $(\mathfrak{F}, V)$ που βασίζεται στο $\mathfrak{F}$.

Definition 3.2.8 (Validity in a Frame) Θα λέμε ότι ένας τύπος ϕ είναι *έγκυρος στο πλαίσιο* $\mathfrak{F}$, και θα συμβολίζουμε ως $\mathfrak{F} \Vdash \phi$, αν το τύπος ϕ είναι έγκυρος σε κάθε κόσμο κάθε μοντέλου $(\mathfrak{F}, V)$ που βασίζεται στο $\mathfrak{F}$.

[5]συχνά αποδίδεται στον Leibniz

Definition 3.2.9 (Validity in a Class of Frames) Θα λέμε ότι ένας τύπος ϕ είναι *έγκυρος στην κλάση πλαισίων* F, και θα συμβολίζουμε ως $F \Vdash \phi$, αν το τύπος ϕ είναι έγκυρος σε κάθε πλαίσιο $\mathfrak{F}$ της κλάσης F. Το σύνολο όλων των έγκυρων τροπικών τύπων της κλάσης F θα το συμβολίζουμε με Λ_F και θα το ονομάζουμε ως *λογική* της κλάσης F.

Remark: Η ουσιαστική διαφορά της έννοιας της εγκυρότητας από την έννοια της ικανοποιησιμότητας, και συνεπώς από την έννοια της αλήθειας (truth), φαίνεται στο εξής παράδειγμα: αν $\phi \vee \psi$ αληθές στον κόσμο w τότε ϕ ή ψ αληθές στον κόσμο w, όμως αν $\phi \vee \psi$ έγκυρο στο πλαίσιο $\mathfrak{F}$ αυτό δε σημαίνει ότι ϕ ή ψ έγκυρο στο $\mathfrak{F}$ (το $p \vee \neg p$ αποτελεί ένα απλό αντιπαράδειγμα).

Definition 3.2.10 (Validity) Θα λέμε ότι ένας τύπος ϕ είναι *έγκυρος*, και θα συμβολίζουμε ως $\Vdash \phi$, αν το τύπος ϕ είναι έγκυρος στην κλάση όλων των πλαισίων.

Οι παραπάνω ορισμοί της εγκυρότητας μπορούν να επεκταθούν σε σύνολα τροπικών τύπων ως εξής:

Definition 3.2.11 (Validity of a Set of Formulas in a Frame) Ένα σύνολο τροπικών τύπων Γ θα λέμε ότι είναι *έγκυρο στο πλαίσιο* $\mathfrak{F}$ αν κάθε τύπος του συνόλου Γ είναι έγκυρος στο πλαίσιο $\mathfrak{F}$.

Definition 3.2.12 (Validity of a Set of Formulas in a Class of Frames) Ένα σύνολο τροπικών τύπων Γ θα λέμε ότι είναι *έγκυρο στην κλάση πλαισίων* F αν Γ έγκυρο σε κάθε πλαίσιο που ανήκει στην κλάση F.

Τέλος, θα ορίσουμε την έννοια της προσδιορισιμότητας (definability), μέσω της οποίας θα αντιστοιχίσουμε επακριβώς κλάσεις πλαισίων με τροπικούς τύπους, ως προς τον άξονα της εγκυρότητας.

Definition 3.2.13 (Definability) Θα λέμε ότι ο τροπικός τύπος ϕ *προσδιορίζει* ή *χαρακτηρίζει* (defines, characterizes) την κλάση πλαισίων K αν για κάθε πλαίσιο $\mathfrak{F}$, όπου $\mathfrak{F}$ ανήκει στο K, ισχύει $\mathfrak{F} \Vdash \phi$ και αντίστροφα. Επιπλέον, θα λέμε ότι το σύνολο τροπικών τύπων Γ προσδιορίζει την κλάση K αν για κάθε $\mathfrak{F}$ στο K ισχύει ότι $\mathfrak{F} \Vdash \Gamma$ και αντίστροφα.

Definition 3.2.14 (Modal Definability) Θα λέμε ότι μια κλάση πλαισίων είναι *(τροπικά) προσδιορίσιμη* (modally definable) αν υπάρχει σύνολο τροπικών τύπων τέτοιο ώστε να την προσδιορίζει.

3.2.3 Λογική Συνεπαγωγή

Στην κλασική λογική η έννοια *συνεπάγεται* (follows from) είναι θεμελιώδης. Με την έκφραση *«ένας τύπος X συνεπάγεται από ένα σύνολο τύπων S»* εννοούμε ότι ο X είναι αληθής αν τα στοιχεία του S είναι αληθή. Ειδικότερα, στην κλασική προτασιακή λογική, λέμε ότι ο τύπος X αποτελεί λογική συνέπεια (logical consequence) του συνόλου τύπων S και συμβολίζουμε με $S \models X$ όταν για κάθε απόδοση αληθοτιμών στα προτασιακά σύμβολα, αν κάθε στοιχείο του S είναι αληθής τύπος, τότε και ο τύπος X είναι αληθής. Η έννοια της λογικής συνεπαγωγής καθιστά ευκολότερη τη διατύπωση πολλών σημαντικών αποτελεσμάτων της κλασικής λογικής[6] [FM98, p. 21], όπως η ιδιότητα της συμπάγειας [7].

Στην τροπική λογική τα πράγματα είναι πιο σύνθετα· θα θέλαμε να διατηρήσουμε τη διαισθητική ερμηνεία της συνεπαγωγής, το γεγονός όμως ότι ένα τροπικό μοντέλο μπορεί να έχει πληθώρα κόσμων περιπλέκει τα πράγματα. Θα πρέπει να προσδιορίσουμε αν ο τύπος θα αποτελεί λογική συνέπεια του συνόλου S αν ο X είναι αληθής σε κάθε κόσμο που αληθεύουν τα στοιχεία του S ή σε όλα τα μοντέλα όπου τα στοιχεία του S είναι έγκυρα.

3.3 Συστήματα τροπικής λογικής

Κατά τη διάρκεια του 20ου αιώνα γεννήθηκαν πολλές τροπικές λογικές από τα διαφορετικά αξιωματικά συστημάτα που προτάθηκαν· αφενός λόγω των ποικίλων εφαρμογών που άρχιζαν να αναδύονται και αφετέρου επειδή η διαίσθησή μας όσον αφορά στην προσέγγιση της αναγκαιότητας της αλήθειας (necessary truth) δεν είχε αναπτυχθεί στο σύνολό της [FM98, p. 18]. Μία από τις πρώτες «επιτυχίες» της σημασιολογίας των πιθανών κόσμων ήταν ο χαρακτηρισμός των τροπικών λογικών μέσω μαθηματικών συνθηκών των πλαισίων τους. Παρά την ευρεία χρήση των μοντέλων, η σημασία των πλαισίων έγκειται στο γεγονός ότι σε αυτά *εφαρμόζονται* οι συνθήκες (conditions).

Definition 3.3.1 (Properties of Frame Collections) Έστω $\mathfrak{F} = \langle W, R \rangle$ πλαίσιο. Τότε θα λέμε ότι το πλαίσιο είναι:

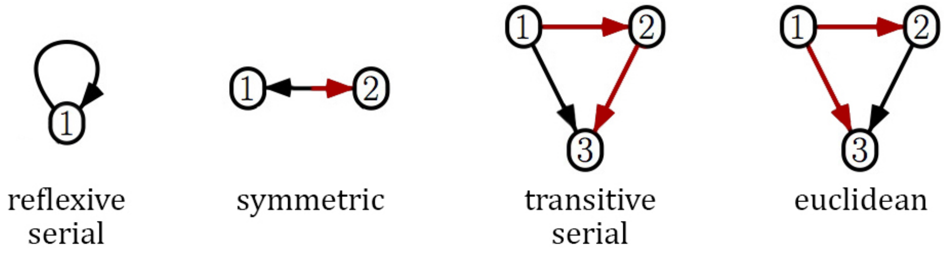
1. *ανακλαστικό* (reflexive): αν $\Gamma R \Gamma$, για κάθε $\Gamma \in W$,
2. *συμμετρικό* (symmetric): αν $\Gamma R \Delta$ συνεπάγεται $\Delta R \Gamma$, για κάθε $\Gamma, \Delta \in W$,
3. *μεταβατικό* (transitive): αν $\Gamma R \Delta$, $\Delta R \Omega$ συνεπάγεται $\Gamma R \Omega$, για κάθε $\Gamma, \Delta, \Omega \in W$,
4. *σειριακό* (serial): αν για κάθε $\Gamma \in W$ υπάρχει $\Delta \in W$ τέτοιο ώστε $\Gamma R \Delta$.

Για παράδειγμα, η λογική T χαρακτηρίζεται από την κλάση των ανακλαστικών πλαισίων[8].

[6] Ο θεμελιώδης ρόλος των σχέσεων συνεπαγωγής έγινε ευρέως αποδεκτός μετά τη μελέτη του Alfred Tarski.

[7] Αν $S \models X$ τότε για κάποιο πεπερασμένο υποσύνολο $S_0 \subseteq S$ θα ισχύει ότι $S_0 \models X$.

[8] T θα ονομάζουμε από εδώ και στο εξής και την κλάση των ανακλαστικών πλαισίων· η ερμηνεία θα προσδιορίζεται από τα συμφραζόμενα.



Σχήμα 3.5: Παραδείγματα πλαισίων.

Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζονται οι συνήθεις τροπικές λογικές (standard modal logics) για τις ευρύτερα χρησιμοποιούμενες κλάσεις πλαισίων.

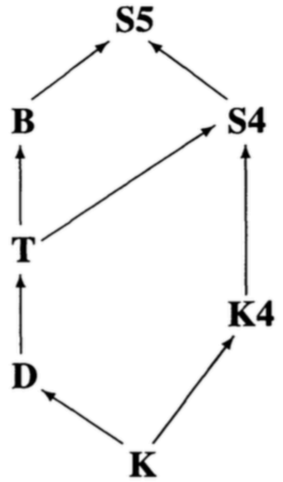
Logic	Frame Conditions
K	no conditions
D	serial
T	reflexive
B	reflexive, symmetric
K4	transitive
S4	reflexive, transitive
S5	reflexive, symmetric, transitive

Σχήμα 3.6: Οι συνήθεις τροπικές λογικές [FM98, p. 19]

Για παράδειγμα, ο τύπος $\Box(P \wedge Q) \rightarrow (\Box P \wedge \Box Q)$ είναι αληθής σε κάθε κόσμο κάθε μοντέλου, ισοδύναμα θα λέμε ότι είναι K-έγκυρος (K-valid). Ο τύπος $\Box P \rightarrow \Box\Box P$ είναι αληθής σε κάθε μοντέλο που έχει μεταβατικό πλαίσιο, είναι δηλαδή K4-έγκυρο (K4-valid) και συνεκδοχικά S4- και S5-έγκυρο, αφού τα συστήματα $S4$ και $S5$ περιλαμβάνουν τη μεταβατικότητα στις συνθήκες τους. Το $\Box P \rightarrow P$ είναι T-έγκυρο, το $P \rightarrow \Box\Diamond P$ είναι B-έγκυρο και το $\Diamond P \rightarrow \Box\Diamond P$ είναι S5-έγκυρο. Αν ένας τύπος είναι K4-έγκυρος, και συνεπώς αληθής σε όλα τα μεταβατικά πλαίσια, τότε θα είναι και S4-έγκυρος. Επομένως, θα λέμε ότι η λογική K4 είναι υπο-λογική (sublogic) της S4 όπως και η B της S5. Τετριμμένα η K είναι υπο-λογική όλων των άλλων. Επιπλέον, κάθε ανακλαστική σχέση είναι σειριακή, επομένως η D είναι υπο-λογική της T. Οι σχέσεις αυτές απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα.

3.4 Αναλλοίωτο & εκφραστική δύναμη

Η *εκφραστική δύναμη* κάθε γλώσσας (expressive power) μπορεί να μετρηθεί μέσω της δυνατότητας της γλώσσας να διαχωρίζει καταστάσεις· ισοδύναμα από το πλήθος των καταστάσεων που η κάθε γλώσσα μπορεί να *αντιλαμβάνεται* ως διαφορετικές. [VB10, p. 25].



Σχήμα 3.7: Σχέσεις εγκλεισμού μεταξύ των λογικών [FM98, p. 20].

Για παράδειγμα, μία γλώσσα που περιλαμβάνει μόνο τις εκφράσεις «ναι» και «όχι» κατανέμει όλες τις πιθανές καταστάσεις σε δύο μεγάλες κλάσεις, ενώ πλουσιότερες γλώσσες δημιουργούν περισσότερες κλάσεις. Επομένως, προκειμένου να προσδιορίσουμε την εκφραστική δυνατότητα μίας γλώσσας, αναζητητούμε έναν κατάλληλο μετασχηματισμό μεταξύ των μοντέλων που διατηρεί αναλλοίωτες τις επιθυμητές ιδιότητες της γλώσσας. Για παράδειγμα, στην πρωτοβάθμια γλώσσα, ο μετασχηματισμός που διατηρεί όλες τις βασικές ιδιότητες αναλλοίωτες είναι ο ισομορφισμός[9] (isomorphism). Αξίζει να σημειωθεί ότι σύμφωνα με το «χρυσό κανόνα» της λογικής («Golden Rule») ο λόγος της εκφραστικής δύναμης μιας γλώσσας και της υπολογιστικής πολυπλοκότητας που *απαιτεί* [10] είναι σταθερός! [VB10, p. 25]

[9]Η πρωτοβάθμια λογική δεν μπορεί να διαχωρίσει ένα αντικείμενο α σε ένα μοντέλο M από την εικόνα του $f(\alpha)$, όπου f ισομορφισμός, σε ένα μοντέλο N ισομορφικό του M ως προς f.

[10]Η πρωτοβάθμια λογική έχει μεγαλύτερη εκφραστική δύναμη από την τροπική λογική όμως οι ταυτολογίες της είναι *μη αποκρίσιμο* (undecidable) ενώ στην τροπική λογική είναι *αποκρίσιμο* (decidable) πρόβλημα.

Κεφάλαιο 4

Θεωρία Αντιστοίχισης

Η αντιστοίχιση της τροπικής με την πρωτοβάθμια λογική προϋποθέτει έναν κατάλληλο μετασχηματισμό ο οποίος υλοποιείται σε συντακτικό επίπεδο (syntactic), καθώς και μία ερμηνεία (semantics) στα πλαίσια της οποίας αποδεικνύεται η ισοδυναμία. Από τεχνική σκοπιά, τα δύο αυτά προαπαιτούμενα συνοψίζονται σε *έναν* ορισμό και *ένα* θεώρημα. Δεδομένου ότι η ερμηνεία της τροπικής λογικής δόθηκε σε δύο επίπεδα, σε δύο επίπεδα θα δοθεί και η αντιστοίχιση της τροπικής λογικής με την πρωτοβάθμια.

4.1 Αμφιπροσομοίωση

Κατά την αναζήτηση των σχέσεων μεταξύ διαφορετικών δομών και των τελεστών που δημιουργούν καινούριες δομές με αφετηρία τις ήδη ορισμένες, αναδύονται ερωτήματα που αφορούν στο κατά πόσο ορισμένες ιδιότητητες των δομών διατηρούνται αναλλοίωτες (invariant) μετά την εφαρμογή των τελεστών αυτών. Εν γένει, λέμε ότι σε μια δομή μια ιδιότητα *διατηρείται* (preserved) από μία σχέση ή έναν τελεστή, όταν μετά την εφαρμογή του η ιδιότητα παραμένει εν ισχύ στην προκύπτουσα δομή. Αν μάλιστα η ιδιότητα αυτή διατηρείται και κατά την αντίστροφη πορεία, τότε χαρακτηρίζουμε την ιδιότητα αυτή ως *αναλλοίωτη* (invariance).

Η ιδιότητα της τροπικής λογικής που θα θέλαμε προσδιορίσουμε τις προϋποθέσεις κατά τις οποίες διατηρείται αναλλοίωτη, είναι η ικανοποιησιμότητα των τροπικών τύπων· θα θέλαμε δηλαδή να ξέρουμε πότε δύο δομές ή δύο σημεία διακριτών δομών είναι *μη διαχωρίσιμες* (indistinguishable), με την έννοια ότι ικανοποιούν τους ίδιους τροπικούς τύπους. Απομένει η αναζήτηση ενός μετασχηματισμού που θα διατηρεί αναλλοίωτη την ικανοποιησιμότητα, αποτελώντας παράλληλα μέτρησης της εκφραστικής δυνατότητας της γλώσσας.

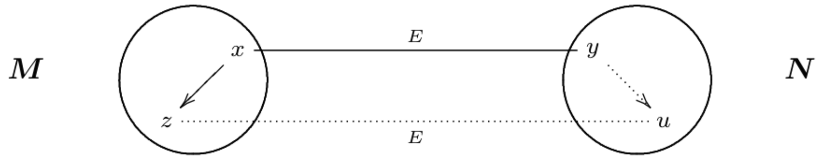
Definition 4.1.1 (Bisimulation in graphs) Θα ονομάζουμε *αμφιπροσομοίωση (bisimulation)* μία μη κενή δυαδική σχέση E μεταξύ δύο γράφων με αφετηρία, $\mathfrak{G}, s$ και $\mathfrak{H}, t$ έτσι ώστε

sEt και για κάθε δύο κόμβους x, y των $\mathfrak{G}, \mathfrak{H}$ αν xEy τότε:

(i) για κάθε z στο $\mathfrak{G}$: Rxz, υπάρχει u στο $\mathfrak{H}$ έτσι ώστε Ryu και zEu, και

(ii) για κάθε u στο $\mathfrak{H}$: Ryu, υπάρχει z στο $\mathfrak{G}$ έτσι ώστε Rxz και zEu.

Αν sEt θα λέμε τους s και t *αμφιόμοιους* (bisimilar).

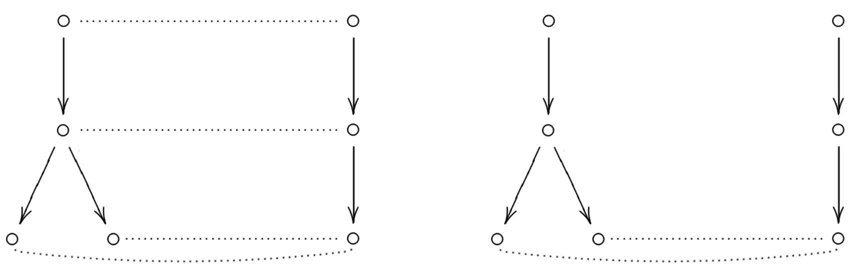


Σχήμα 4.1: Αμφιπροσομοίωση [**?**, p. 26]

Ακολουθούν παραδείγματα αμφιπροσομοίωσης μεταξύ γραφημάτων.

Σχήμα 4.2: Παραδείγματα αμφιπροσομοίωσης σε γραφήματα.

Definition 4.1.2 (Surjective bisimulation in graphs) Η αμφιπροσομοίωση E μεταξύ των γράφων $\mathfrak{G}, s$ και $\mathfrak{H}, t$, θα λέγεται *επί-αμφιπροσομοίωση* (surjective bisimulation), αν για κάθε κόμβο x του $\mathfrak{G}$ υπάρχει y του $\mathfrak{H}$ έτσι ώστε Rxy, και για κάθε κόμβο y του $\mathfrak{H}$ υπάρχει x του $\mathfrak{G}$, έτσι ώστε Rxy. Δηλαδή E και E^{-1} επί.



Σχήμα 4.3: Παράδειγμα επι-αμφιπροσομοίωσης και όχι επι-αμφιπροσομοίωσης μεταξύ δένδρων.

Αν από τις αφετηρίες s, t είναι προσβάσιμοι όλοι οι κόμβοι των γράφων, κάθε αμφιπροσομοίωση μεταξύ τους είναι επι-αμφιπροσομοίωση (πχ. ρίζες δένδρων).

Στη συνέχεια επεκτείνουμε τον ορισμό της αμφιπροσομοίωσης σε μοντέλα.

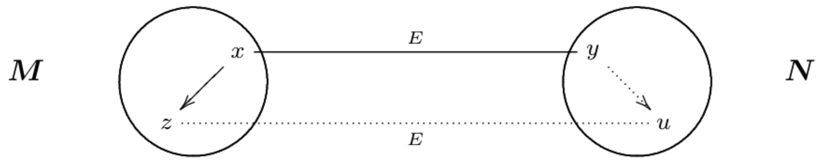
Definition 4.1.3 (Bisimulation) Θα ονομάζουμε *αμφιπροσομοίωση (bisimulation)* μία μη κενή δυαδική σχέση E μεταξύ δύο μοντέλων με αφετηρία $\mathfrak{M}, s$ και $\mathfrak{N}, t$ έτσι ώστε sEt και για κάθε δύο κόσμους x, y των $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ αν xEy τότε:

(i) οι x, y ικανοποιούν τις ίδιες προτασιακές μεταβλητές,

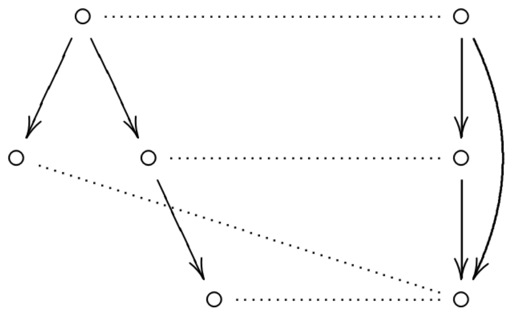
(ii) για κάθε z στο $\mathfrak{M}$: Rxz, υπάρχει u στο $\mathfrak{N}$ έτσι ώστε Ryu και zEu

(iii) για κάθε u στο $\mathfrak{N}$: Ryu, υπάρχει z στο $\mathfrak{M}$ έτσι ώστε Rxz και zEu

Αν sEt τότε θα λέμε τους s και t *αμφιόμοιους* (bisimilar) και θα γράφουμε $E : \mathfrak{M}, s \leftrightarrows \mathfrak{N}, t$.

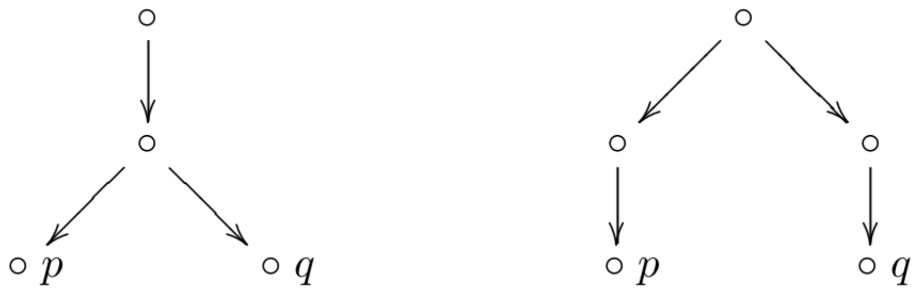


Σχήμα 4.4: Αμφιπροσομοίωση [VB10, pp. 26].



Σχήμα 4.5: Παράδειγμα ύπαρξης αμφιπροσομοίωσης [VB10, p. 26].

Definition 4.1.4 (Surjective bisimulation) Η αμφιπροσομοίωση E μεταξύ των μοντέλων $\mathfrak{M}, s$ και $\mathfrak{N}, t$, θα λέγεται *επί-αμφιπροσομοίωση* (surjective bisimulation), αν για κάθε κόσμο x του $\mathfrak{M}$ υπάρχει y του $\mathfrak{N}$ έτσι ώστε xEy, και για κάθε κόσμο y του $\mathfrak{N}$ υπάρχει x του $\mathfrak{M}$, έτσι ώστε xEy. Δηλαδή E και E^{-1} επί.



Σχήμα 4.6: Παράδειγμα αδυναμίας προσδιορισμού αμφιπροσομοίωσης μεταξύ των ριζών των δένδρων [VB10, p. 27].

Αν από τις αφετηρίες s, t είναι προσβάσιμοι (reachable) όλοι οι κόσμοι των μοντέλων, κάθε αμφιπροσομοίωση μεταξύ τους είναι επι-αμφιπροσομοίωση (πχ. ρίζες δένδρων).

Διαισθητικά, η αμφιπροσομοίωση αποτελεί μία σχέση μεταξύ μοντέλων η οποία πιστοποιεί ότι σε επίπεδο *αποτίμησης*, οι συσχετιζόμενοι κόσμοι, αφενός ταυτίζονται ως προς την *ατομική πληροφορία* που περιέχουν και αφετέρου έχουν αντίστοιχες πιθανές μεταβάσεις. Είναι ενδιαφέρον το πώς ο παραπάνω ορισμός, επι της ουσίας, ελέγχει τις πιθανές αυτές μεταβάσεις, σε τοπικό επίπεδο.

Definition 4.1.5 (Tree Unraveling) Κάθε μοντέλο με αφετηρία $\mathfrak{M}, s$ είναι αμφιόμοιο με ένα δενδροειδές μοντέλο το οποίο κατασκευάζουμε ως εξής:

(i) κάθε πεπερασμένο μονοπάτι που μπορούμε να ανακτήσουμε κατά τη *συστηματική*[1] προσπέλαση του μοντέλου $\mathfrak{M}$, με αφετηρία τον κόσμο s, αποτελεί και έναν κόσμο του νέου μοντέλου

(ii) κάθε μονοπάτι, ισοδύναμα κόσμος του νέου μοντέλου, έχει προσβάσιμο μονοπάτι-κόσμο στο νέο μοντέλο, κάθε μονοπάτι με μεγαλύτερο μήκος κατά *ένα* βήμα από αυτό (αν υπάρχει)

(iii) η αποτίμηση κάθε μονοπατιού-κόσμου του νέου μοντέλου ταυτίζεται με την αποτίμηση του τελευταίου κόμβου του μονοπατιού κατά την προσπέλαση του μοντέλου $\mathfrak{M}$

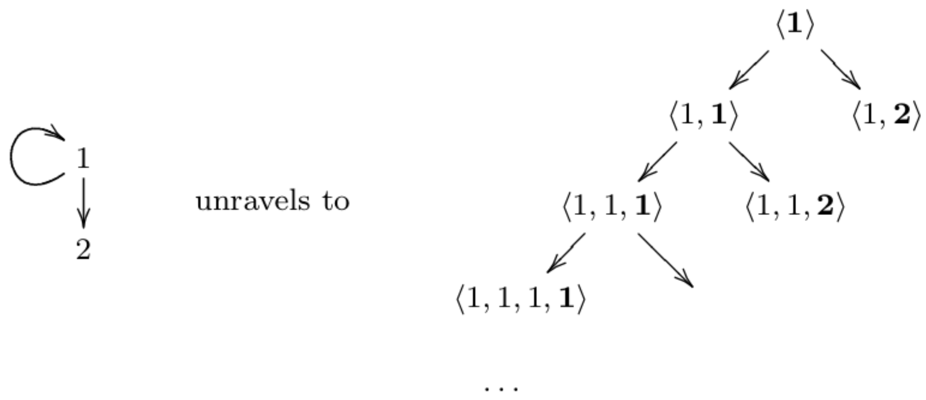
Το μοντέλο αυτό θα ονομάζουμε *δενδρικό ανάπτυγμα* (tree unraveling).

Παρατηρήσεις:

[1]Η προσπέλαση πραγματοποιείται με αφετηρία τη ρίζα, βήμα προς βήμα, στους γείτονες που απέχουν απόσταση ίση με μία κίνηση, σύμφωνα με τη συνάρτηση μετάβασης R του μοντέλου $\mathfrak{M}$.

- Το δενδρικό ανάπτυγμα, απο γραφοθεωρητική σκοπιά, είναι δέντρο[2] (tree) με ρίζα τον κόσμο s.
- Τα τρία βήματα κατασκευής κάθε δενδρικού αναπτύγματος αντιστοιχούν, ένα προς ένα, στα τρία θεμελιώδη συστατικά του ορισμού του μοντέλου: το σύνολο των πιθανών κόσμων W, τη σχέση πρόσβασης R και την αποτίμηση V.
- Οι δενδρικές δομές, ως *κανονικές μορφές* (normal forms) των τροπικών μοντέλων, προσφέρουν εύληπτες αναπαραστάσεις [VB10, p. 27].

Η αμφιπροσομοίωση μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για τη σύμπτυξη μοντέλων [VB10, p. 25].



Σχήμα 4.7: Παράδειγμα δενδρικού αναπτύγματος [VB10, p. 25].

Απομένει να συνδέσουμε την έννοια της αμφιπροσομοίωσης με την τροπική γλώσσα.

Lemma 4.1.6 (Invariance Lemma) Για κάθε αμφιπροσομοίωση E μεταξύ των μοντέλων $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ και για κάθε δύο κόσμους x, y όπου xEy θα ισχύει ότι:

$$\mathfrak{M}, x \models \phi \text{ αν και μόνο αν } \mathfrak{N}, y \models \phi \text{ για όλους τους τροπικούς τύπους } \phi$$

Proof Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο μήκος του τύπου. Αρχικά, θα μετασχηματίσουμε τον ισχυρισμό ως εξής: «Κάθε τροπικός τύπος ϕ διατηρείται αναλλοίωτος *κατά μήκος* όλων των αμφιόμοιων συνδέσμων (bisimulation links)».
Επαγωγική βάση

[2]Κάθε γράφημα που δεν περιέχει *κύκλους* (acyclic) ονομάζεται *δάσος* (forest). *Συνδεδεμένο* (connected) ονομάζεται κάθε μη κενό γράφημα του οποίου κάθε δύο κόμβοι συνδέονται με *μονοπάτι* (path). Κάθε συνδεδεμένο δάσος ονομάζεται *δέντρο* (tree).

- Αν ο τύπος ϕ είναι προτασιακή μεταβλητή, έστω p, τότε ο ισχυρισμός αποτελεί άμεσο πόρισμα του πρώτου σκέλους του ορισμού της αμφιπροσομοίωσης.

- $\neg\phi$: Τότε από την επαγωγική υπόθεση για τον τύπο ϕ ισχύει ο ισχυρισμός. Έστω xEy και $\mathfrak{M}, x \models \neg\phi$, επομένως δεν ισχύει ότι $\mathfrak{M}, x \models \phi$. Από την επαγωγική υπόθεση για το ϕ δεν ισχύει ότι $\mathfrak{N}, y \models \phi$. Άρα $\mathfrak{N}, y \models \neg\phi$. Ομοίως αποδεικνύεται και το αντίστροφο.

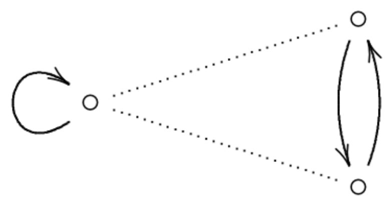
- Οι περιπτώσεις $\phi \vee \psi$, $\phi \wedge \psi$, $\phi \to \psi$ αποδεικνύονται με αντίστοιχο τρόπο.

- $\diamond\phi$: Έστω xEy και $\mathfrak{M}, x \models \Diamond\phi$. Τότε υπάρχει κόσμος z τέτοιος ώστε $xR^{\mathfrak{M}}z$ και $\mathfrak{M}, z \models \phi$. Από τον ορισμό της αμφιπροσομοίωσης θα υπάρχει κόσμος u τέτοιος ώστε $yR^{\mathfrak{N}}u$ και zEu. Τότε από την επαγωγική υπόθεση για τον τύπο ϕ στο σύνδεσμο zEu προκύπτει ότι $\mathfrak{N}, u \models \phi$, επομένως $\mathfrak{N}, y \models \Diamond\phi$.

$\square$

Ως άμεση εφαρμογή του ορισμού της αμφιπροσομοίωσης μπορεί κανείς να αποδείξει ότι κάποια ιδιότητα *δεν μπορεί να οριστεί* (undefinable) στην τροπική γλώσσα. Αρκεί κανείς να προσδιορίσει κάποιο μοντέλο $\mathfrak{M}, s$ με την εν λόγω ιδιότητα να ισχύει στον κόσμο s, αλλά όχι στον αμφιόμοιό του κόσμο, t, του μοντέλου $\mathfrak{N}, t$.

Για παράδειγμα, η αμφιπροσομοίωση μεταξύ του κύκλου ενός και δύο σημείων που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, αποδεικνύει ότι η άρνηση της ανακλαστικότητας $\neg Rxx$ (irreflexivity) είναι μη ορίσιμη[3] στην τροπική γλώσσα σε επίπεδο μοντέλων· παρατηρούμε ότι στους δυο κόσμους του ενός μοντέλου ισχύει η άρνηση της ανακλαστικότητας ενώ στο μοναδικό κόσμο του άλλου μοντέλου ισχύει η άρνησή της $\neg(\neg Rxx)$.



Σχήμα 4.8: Η μη ανακλαστικότητα δεν μπορεί να οριστεί στην τροπική γλώσσα [VB10, p. 26].

Ούτε όμως και σε επίπεδο πλαισίων.

Proof Έστω ότι υπάρχει τροπικός τύπος ϕ που ορίζει το $\neg Rxx$. Στο δεξί πλαίσιο, για κάθε αποτίμηση το ϕ ικανοποιείται. Για κάθε αποτίμηση στο αριστερό πλαίσιο υπάρχει

[3]Ορίσιμη είναι μια ιδιότητα στην τροπική γλώσσα αν υπάρχει πρόταση της τροπικής λογικής που ικανοποιείται σε ένα μοντέλο/πλαίσιο αν και μόνο αν το μοντέλο/πλαίσιο έχει αυτήν την ιδιότητα.

αποτίμηση στο δεξί πλαίσιο που να κάνει τα δύο μοντέλα αμφιόμοια. Άρα για κάθε αποτίμηση στο αριστερό πλαίσιο το ϕ ικανοποιείται, άτοπο. $\square$

Η ανακλαστικότητα, Rxx, είναι ορίσιμη στην τροπική λογική σε επίπεδο πλαισίων: $\Box p \to p$.

Theorem 4.1.7 (Hennessy - Milner) Αν οι κόσμοι s, t ικανοποιούν τους ίδιους τροπικούς τύπους, σε δύο *πεπερασμένα* μοντέλα M, N τότε υπάρχει αμφιπροσομοίωση μεταξύ των δύο μοντέλων που συνδέει τους κόσμους s και t.

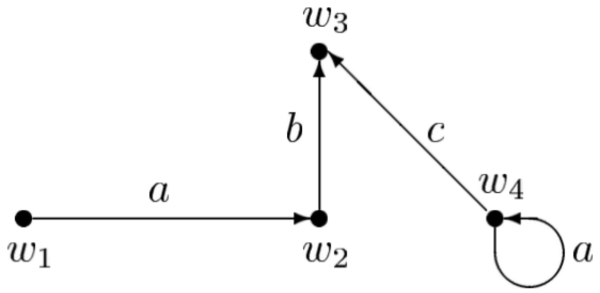
Σχήμα 4.9: Matthew Hennessy.

Σχήμα 4.10: Arthur John Robin Gorell Milner, 1934-2010.

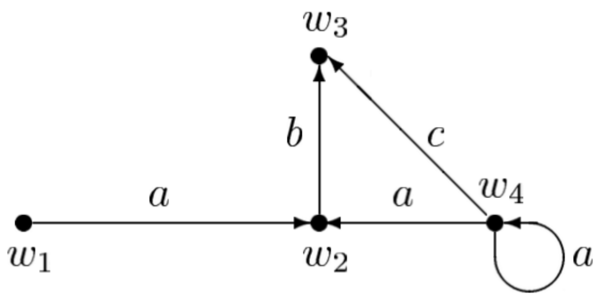
Ως αμφιπροσομοίωση Ε θεωρούμε την *τροπική ισοδυναμία* (modal equivalence), με την έννοια ότι ικανοποιούν τους ίδιους τροπικούς τύπους. Αυτή η σχέση συνδέει τους τύπους s και t και διατηρεί τις προτασιακές μεταβλητές. Στη συνέχεια, θεωρούμε sEt και sRu στο μοντέλο M. Έστω ότι δεν υπάρχει κόσμος v στο μοντέλο N τέτοιος ώστε να ισχύει tRv και uEv. Επομένως, για όλους τους πεπερασμένους επόμενους κόσμους v του t στο μοντέλο N υπάρχει τροπικός τύπος α_v αληθής στον κόσμο u στο μοντέλο M αλλά ψευδής στον κόσμο v του μοντέλου N. Έστω a η σύζευξη όλων των τύπων. Τότε ο τύπος α θα είναι αληθής στον κόσμο u του μοντέλου M και επομένως $\Diamond\alpha$ αληθής στον κόσμο s του μοντέλου M. Από την υπόθεσή μας για τη σχέση E θα ισχύει ότι $N, t \models \Diamond\alpha$ και συνεπώς ο κόσμος t έχει έναν r απόγονο v όπου το α ισχύει. Άτοπο, διότι κατά την κατασκευή του α έχουμε έναν ψευδές τύπο στη σύζευξη για κάθε $R-$. $\square$

Definition 4.1.8 (Labeled Transition System (LTS)) *Επισημειωμένο σύστημα μετάβασης* (transition system) ονομάζουμε το ζεύγος $\langle W, \{R_a | a \in A\}\rangle$ όπου W μη κενό σύνολο καταστάσεων, A μη κενό σύνολο *ετικετών* (labels) και για κάθε $a \in A, R_a \subseteq W \times W$.

Τα συστήματα μετάβασης αποτελούν αφηρημένα υπολογιστικά μοντέλα (model of computation)· οι καταστάσεις τους αποτελούν υπολογιστικές καταστάσεις, οι ετικέτες, προγράμματα (programs), και κάθε $(u, v) \in R_a$ πιστοποιεί πως υπάρχει εκτέλεση του προγράμματος a η οποία ξεκινά από την κατάσταση u και τερματίζει στην κατάσταση v [BdRV01, p. 23]. Οι καταστάσεις αναπαρίστανται συνήθως ως κόμβοι και οι μεταβάσεις R_a ως κατευθυνόμενες ακμές ενός γράφου. Ένα σύστημα μετάβασης χαρακτηρίζεται ως *ντετερμινιστικό* (deterministic) όταν κάθε κατάσταση έχει το πολύ μία προσβάσιμη κατάσταση σύμφωνα με τη σχέση μετάβασης, για κάθε ετικέτα, ενώ στα *μη-ντετερμινιστικά* (non-deterministic) μπορεί να έχει περισσότερες. Στην πρώτη περίπτωση οι σχέσεις μετάβασης θα πρέπει να είναι *μερικές συναρτήσεις* (partial functions).



Σχήμα 4.11: Παράδειγμα ντετερμινιστικού συστήματος μετάβασης [BdRV01, p. 4].



Σχήμα 4.12: Παράδειγμα μη ντετερμινιστικού συστήματος μετάβασης [BdRV01, p. 4].

Μπορούμε να φανταστούμε τους τύπους της τροπικής λογικής σαν αυτόματα [BdRV01, p. 67]. Η αποτίμηση ενός τροπικού τύπου ανάγεται στον υπολογισμό ενός αυτομάτου: η διαδικασία υπολογισμού ξεκινά από μία τυχαία κατάστασή του (state) και συνεχίζεται, βήμα προς βήμα, με τον προσδιορισμό της αποτίμησης της επόμενης κατάστασης, σύμφωνα πάντα με τη συνάρτηση μετάβασης. Η αναζήτηση της ενδεχόμενης πληροφορίας πραγματοποιείται *τοπικά* (locally), στους γείτονες που απέχουν απόσταση ίση με ένα βήμα, μία κίνηση, ακολουθώντας τις μεταβάσεις (transitions). Χάριν παραδείγματος, ας υποθέσουμε ότι βρισκόμαστε στη θέση w ενός αυτομάτου σε ένα μοντέλο $\mathfrak{M}$ και κάποιος μας μετακινεί στη θέση w' ενός διαφορετικού μοντέλου $\mathfrak{M}'$. Αν οι δύο αυτοί κόσμοι είναι *αμφιόμοιοι* (bisimilar), τότε δε θα είμαστε σε θέση να αντιληφθούμε αυτήν την αλλαγή. Το γεγονός αυτό αποτελεί απόρροια του ορισμού της *αμφιπροσομοίωσης* (bisimulation), ο οποίος ελέγχει την πληροφορία και του παρόντος κόσμου μας αλλά και των προσβάσιμων κόσμων, όπως αυτοί καθορίζονται από τις πιθανές μεταβάσεις· το ίδιο συμβαίνει και στα αυτόματα. Από διαφορετική οπτική σκοπιά, η έννοια της αμφιπροσομοίωσης αποτελεί το εργαλείο με το οποίο μπορούμε να «ξεγελάσουμε» ένα αυτόματο, αφού κάθε δύο αμφιόμοιοι κόσμοι είναι *υπολογιστικά* ισοδύναμοι. Συνοψίζοντας, οι δύο αυτές όψεις της έννοιας της αμφιπροσομοίωσης αναδεικνύουν το θεμελιώδη χαρακτήρα της και τη μετουσιώνουν σε μια φυσική έννοια ισοδυναμίας ιδιαιτέρως χρήσιμη, όχι μόνο για τις μαθηματικές, αλλά και τις υπολογιστικές αναζητήσεις μας.

4.2 Από την Τροπική στην Πρωτοβάθμια Λογική

Αρχικά, θα προσδιορίσουμε τη *γλώσσα αντιστοίχισης* (correspondence language), τη γλώσσα δηλαδή στην οποία θα «μεταφράσουμε» τους τροπικούς τύπους. Αν Φ σύνολο προτασιακών μεταβλητών, τότε θα συμβολίζουμε με $\mathcal{L}^1(\Phi)$ την πρωτοβάθμια γλώσσα (με ισότητα) με κατηγορήματα μίας θέσης $P_0, P_1, ...$ που αντιστοιχούν στις προτασιακές μεταβλητές $p_0, p_1, ...$ του συνόλου Φ και μία $(n+1)$-αδική σχέση R. Θα συμβολίζουμε με $\alpha(x)$ έναν τύπο α της πρωτοβάθμιας λογικής, μία ελεύθερη μεταβλητή, x.

Definition 4.2.1 (Standard Translation) Έστω x πρωτοβάθμια μεταβλητή. Η συνήθης μετάφραση (standard translation) ST_x θα μετασχηματίζει τροπικούς τύπους σε πρωτοβάθμιους του συνόλου $\mathcal{L}^1(\Phi)$ ως εξής:

$$\begin{aligned}
ST_x(p) &= Px\\
ST_x(\bot) &= x \neq x\\
ST_x(\neg\phi) &= \neg ST_x(\phi)\\
ST_x(\phi \vee \psi) &= ST_x(\phi) \vee ST_x(\psi)\\
ST_x(\Diamond\phi) &= \exists y(Rxy \wedge ST_y(\phi))\\
ST_x(\Box\phi) &= \forall y(Rxy \rightarrow ST_y(\phi))
\end{aligned}$$

Για παράδειγμα, αν έχουμε τον τύπο $\Diamond(\Box p \rightarrow q)$, σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό η συνήθης μετάφραση είναι:

$$\begin{gathered}
\Diamond(\Box p \rightarrow q) =\\
\exists y_1(Rxy_1 \wedge ST_{y_1}(\Box p \rightarrow q) =\\
\exists y_1(Rxy_1 \wedge (ST_{y_1}(\Box p) \rightarrow ST_{y_1}(q))) =\\
\exists y_1(Rxy_1 \wedge (\forall y_2(Ry_1y_2 \rightarrow ST_{y_2}(p)) \rightarrow Qy_1)) =\\
\exists y_1(Rxy_1 \wedge (\forall y_2(Ry_1y_2 \rightarrow Py_2) \rightarrow Qy_1))
\end{gathered}$$

Παρατηρούμε ότι τροπικοί τελεστές μεταφράζονται ως *δεσμευμένοι ποσοδείκτες* (bounded quantifiers) ώστε να δρουν μόνο στους γειτονικούς κόσμους· με τον τρόπο αυτόν θα περιγραφεί η *τοπική δράση* των τροπικών τελεστών στην πρωτοβάθμια γλώσσα.

Επιπλέον, η συνήθης μετάφραση, σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, καθιστά τα μοντέλα των πιθανών κόσμων ερμηνευτικές δομές που υπηρετούν και την τροπική αλλά και την πρωτοβάθμια λογική. Ένα μοντέλο της $\mathcal{L}^1(\Phi)$ θα πρέπει να παρέχει ερμηνεία για τη δυαδική σχέση R και το κατηγόρημα μίας θέσης της γλώσσας, ενώ ένα τροπικό μοντέλο περιέχει εξ' ορισμού μία δυαδική σχέση R για την ερμηνεία του σχεσιακού συμβόλου (relation symbol) R και μια συνάρτηση αποτίμησης $V(p_i)$ για την ερμηνεία του κατηγορήματος μιας θέσης P_i. Συνεπώς, τα μοντέλα της πρωτοβάθμιας αλλά και της τροπικής λογικής δε διαφέρουν από μαθηματική σκοπιά καθώς αποτελούν και τα δύο σχεσιακές δομές. Το γεγονός αυτό διατυπώνει με σαφήνεια και το επόμενο θεώρημα κάνοντας χρήση της ανάθεσης $x := w$, που αντιστοιχίζει σε κάθε πρωτοβάθμια μεταβλητή x τον τρέχοντα κόσμο w και συμβολίζεται με $ST_x(\phi)[w]$. Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή [BdRV01, p. 85].

Theorem 4.2.2 (Local and Global Correspondence on Models) Έστω ϕ τροπικός τύπος. Τότε:

(i) Για όλα τα μοντέλα $\mathfrak{M}$ και όλους τους κόσμους w του $\mathfrak{M} : \mathfrak{M}, w \Vdash \phi$ αν και μόνο αν $\mathfrak{M} \models ST_x(\phi)[w]$

(ii) Για όλα τα μοντέλα $\mathfrak{M} : \mathfrak{M} \Vdash \phi$ αν και μόνο αν $\mathfrak{M} \models \forall x ST_x(\phi)$

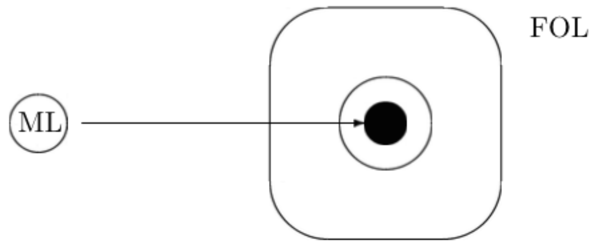
Επομένως, όταν η ερμηνεία δίνεται σε επίπεδο μοντέλων, οι τροπικοί τύποι είναι ισοδύναμοι με τύπους πρωτοβάθμιας λογικής με μία ελεύθερη μεταβλητή. Η συνήθης μετάφραση *προβάλει* την τροπική λογική σε ένα γνήσιο υποσύνολο της πρωτοβάθμιας λογικής το οποίο στη βιβλιογραφία αναφέρεται ως *τροπικό μέρος* (modal fragment)· τους τύπους που περιέχονται στο σύνολο αυτό ονομάζουμε τροπικούς τύπους [VB10, p. 76].

Definition 4.2.3 (Modal Fragment) Το *τροπικό μέρος* (modal fragment) της πρωτοβάθμιας λογικής είναι το σύνολο $\{ST(\phi) | \phi \text{ είναι τροπικός τύπος}\}$. Κάποιες φορές ο ορισμός επεκτείνεται και στους τύπους της πρωτοβάθμιας λογικής που είναι λογικά ισοδύναμοι με το σύνολο $ST(\phi)$[4].

Το τροπικό μέρος αποτελεί γνήσιο υποσύνολο της πρωτοβάθμιας λογικής. Για παράδειγμα, η ιδιότητα της *γνήσιας διαδοχής* $\exists y(Rxy \wedge \neg Ryx \wedge Py)$ (proper succession) δεν ανήκει στο τροπικό μέρος, ούτε είναι σημασιολογικά ισοδύναμη με κάποια πρόταση που ανήκει στο τροπικό μέρος. Για την απόδειξη του παραπάνω ισχυρισμού, αρκεί να αποδείξουμε ότι η ιδιότητα της γνήσιας διαδοχής δεν παραμένει αναλλοίωτη ως προς μία

[4]Στο σχήμα 4.13 ο εσωτερικός κύκλος με σκίαση αναφέρεται στο τροπικό μέρος με τη «στενότερη» έννοια ενώ ο εξωτερικός περιλαμβάνει όλους τους πρωτοβάθμιους τύπους που είναι ισοδύναμοι με το προαναφερθέν σύνολο.

[4]Αν θεωρήσουμε κάποιον κόσμο x στον οποίο ισχύει η πρόταση p, τότε υπάρχει προσβάσιμος κόσμος από τον x όπου ισχύει η πρόταση p ($\exists \psi(Rxy \wedge \neg Ryx \wedge Py)$).



Σχήμα 4.13: Το τροπικό μέρος [VB10, p. 76].

αμφιπροσομοίωση. Στο σχήμα 4.14, παρατηρούμε ότι ενώ ο σκιασμένος κόσμος του πρώτου μοντέλου είναι αμφιόμοιος με το μοναδικό κόσμο του δεύτερου, στον πρώτο ισχύει η ιδιότητα της γνήσιας διαδοχής ενώ στο δεύτερο όχι.

Σχήμα 4.14: Η γνήσια διαδοχή δεν μπορεί να οριστεί στην τροπική γλώσσα [VB10, p. 77].

Theorem 4.2.4 (Van Benthem Characterization Theorem) Για τους τύπους της πρωτοβάθμιας λογικής $\phi = \phi(x)$, με μία ελεύθερη μεταβλητή, τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

i ο τύπος ϕ είναι ισοδύναμος με έναν τροπικό τύπο,

ii ο τύπος ϕ παραμένει αναλλοίωτος ως προς την αμφιπροσομοίωση.

Σχήμα 4.15: Johan van Benthem, 1949.

Συνεπώς, η τροπική γλώσσα μπορεί να θεωρηθεί ως το «αναλλοίωτο ως προς αμφιπροσομοίωση» (bisimulation-invariant) μέρος της πρωτοβάθμιας λογικής, το οποίο μας οδηγεί με φυσικό τρόπο στην αναζήτηση ιδιοτήτων που ικανοποιούν ένα, αρκετά περιορισμένο, σημασιολογικό κριτήριο «μεταφοράς» (transfer), σε σχέση με τον ισομορφισμό (isomorphism) [VB10, p. 77]. Η συνήθης μετάφραση μπορεί να μετασχηματιστεί έτσι ώστε να *προβάλει* (mapping) κάθε τροπικό τύπο σε ένα μικρό μέρος της $\mathcal{L}^1(\Phi)$, το *μέρος πεπερασμένων μεταβλητών* (finite-variable fragment)[5] [BdRV01, p. 86].

4.3 Εισάγοντας αποτελέσματα

Η *γέφυρα* μεταξύ της πρωτοβάθμιας και της τροπικής λογικής θα μας βοηθήσει να «εισάγουμε» ιδέες, αποτελέσματα και αποδεικτικές τεχνικές. Παραδείγματος χάριν, μπορεί να αποδείξει κανείς ότι στην τροπική λογική, όπως και στην πρωτοβάθμια, ισχύει η ιδιότητα της *συμπάγειας* (compactness)[6] και η ιδιότητα των Löwenheim-Skolem[7] [BdRV01, p. 86].

Μια σημαντική διαφορά είναι ότι η τροπική λογική είναι *αποκρίσιμη* (decidable) σε αντίθεση με την πρωτοβάθμια λογική. Ένας τροπικός τύπος είναι *έγκυρος* (valid) αν είναι αληθής σε όλους τους κόσμους σε όλα τα μοντέλα. Θα ονομάζουμε *ελάχιστη τροπική λογική* (minimal modal logic) το σύνολο των έγκυρων τύπων της τροπικής λογικής. Για τον προσδιορισμό της εγκυρότητας ενός λογικού τύπου, οι λογικοί αναζητούν αλγοριθμικές «μηχανικές» μεθόδους· η σύνδεση μεταξύ της *λογικής συμπερασματολογίας* (logical deduction) και του *υπολογισμού* (computation) είναι μια ιδέα που έχει ρίζες στο Μεσαίωνα [VB10, p. 37]. Η εγκυρότητα ενός τύπου της *προτασιακής λογικής* (propositional logic) μπορεί πράγματι να ελεγχθεί μέσα από μία αλγοριθμική διαδικασία, που δεν είναι άλλη από τη συστηματική συμπλήρωση του πίνακα αληθείας του δοθέντος λογικού τύπου. Όμως το πρόβλημα της εγκυρότητας δεν είναι εν γένει αποκρίσιμο· στην *κατηγορηματική λογική* (predicate logic) δεν υπάρχει συστηματική διαδικασία ελέγχου που να μπορεί να απαντήσει αυτό το ερώτημα, το πρόβλημα της εγκυρότητας είναι δηλαδή *μη αποκρίσιμο* (undecidable). Ανάμεσα στην προτασιακή και την κατηγορηματική λογική υπάρχουν αποκρίσιμες λογικές, όπως η *λογική εναδικών κατηγορημάτων* (monadic predicate logic)[8]. Ένα ακόμη παράδειγμα μίας αποκρίσιμης γλώσσας που βρίσκεται ανάμεσα, απο πλευράς εκφραστικότητας, στην προτασιακή και την κατηγορηματική λογική,

[5] Δοθείσας ταξινόμησης των μεταβλητών της $\mathcal{L}^1(\Phi)$, τότε το μέρος n-μεταβλητών (n-variable fragment) είναι το σύνολο των $\mathcal{L}^1(\Phi)$ τύπων που περιλαμβάνουν μόνο τις πρώτες n μεταβλητές. Με συνετή χρήση μεταβλητών, μια τροπική γλώσσα με τελεστές το πολύ n θέσεων, μπορεί να μεταφραστεί στο μέρος $n+1$ μεταβλητών της $\mathcal{L}^1(\Phi)$.

[6] Αν Θ είναι σύνολο πρωτοβάθμιων τύπων και κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του Θ είναι ικανοποιήσιμο (satisfiable), τότε το σύνολο Θ είναι ικανοποιήσιμο.

[7] Αν ένα σύνολο πρωτοβάθμιων τύπων έχει ένα άπειρο μοντέλο τότε έχει ένα αριθμήσιμα άπειρο μοντέλο.

[8] Η λογική εναδικών κατηγορημάτων περιέχει μόνο κατηγορήματα μίας θέσης.

είναι η τροπική λογική.

Theorem 4.3.1 Η ελάχιστη τροπική λογική είναι αποκρίσιμη.

Η εγκυρότητα είναι αποκρίσιμο πρόβλημα και για ισχυρότερες τροπικές λογικές αλλά θα πρέπει να περιοριστούμε σε συγκεκριμένες κλάσεις μοντέλων. Τέλος, αξίζει να σημειώσουμε ότι το ερώτημα αν μία τροπική λογική είναι αποκρίσιμη είναι μη αποκρίσιμο [VB10, p. 46].

4.4 Από την Τροπική στη Δευτεροβάθμια Λογική

Όπως είδαμε στην ενότητα 2.2.2, η έννοια της εγκυρότητας κατάφερε να αποδεσμεύσει την τροπική γλώσσα από τις αποτιμήσεις, προσφέροντάς μας τη δυνατότητα να εξερευνήσουμε τη δομή των πλαισίων. Το επόμενο βήμα προς αυτήν την κατεύθυνση είναι η υπέρβαση της εκφραστικής δύναμης της πρωτοβάθμιας λογικής. Αρχικά, θα παρουσιάσουμε παραδείγματα τροπικών τύπων που περιγράφουν ιδιότητες πλαισίων και δεν μπορούν να εκφραστούν στην πρωτοβάθμια γλώσσα. Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι οι τροπικοί τύποι αντιστοιχούν εν γένει σε δευτεροβάθμιες συνθήκες πλαισίων και θα προσδιορίσουμε τις ειδικές περιπτώσεις, όπως η ανακλαστικότητα ή η μεταβατικότητα, όπου αρκούν πρωτοβάθμιες συνθήκες για την περιγραφή τους. Θα ονομάζουμε *θεμελιώδεις* (elementary) εκείνες τις κλάσεις πλαισίων που μπορεί να περιγράψει η πρωτοβάθμια γλώσσα.

Το πρώτο παράδειγμα είναι ο τύπος του Löb $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$ (Löb's formula, L)[9] που κατέχει σημαντική θέση στην *αποδεικτική λογική* (provability logic)[10]. Θα δείξουμε ότι ο τύπος L χαρακτηρίζει την κλάση πλαισίων (W, R) έτσι ώστε η σχέση R να είναι μεταβατική και η αντίθετη σχέση της R είναι *καλά θεμελιωμένη* (well-founded)[11]. Επομένως η αντίθετη σχέση της R θα είναι καλά θεμελιωμένη όταν δεν υπάρχει άπειρο R-μονοπάτι με αφετηρία οποιονδήποτε κόσμο, εξαιρουμένων των κύκλων, και τελικά θα αποδείξουμε ότι αυτή η κλάση πλαισίων δεν είναι θεμελιώδης.

Theorem 4.4.1 $F \models \Box(\Box\phi \to \phi) \to \Box\phi$ αν και μόνο αν

(i) η R είναι μεταβατική, και

[9] Ο τύπος αυτός πήρε το όνομα του Martin Hugo Löb καθώς εκείνος απέδειξε ότι αποτελεί θεώρημα για την αποδεικτική λογική της αριθμητικής Peano (Peano arithmetic).

[10] Η αποδεικτική λογική αποτελεί έναν κλάδο της τροπικής λογικής όπου το $\Box p$ διαβάζεται ως *«ο τύπος p είναι αποδείξιμος»* σε κάποιο τυπικό σύστημα.

[11] Μία σχέση R είναι καλά θεμελιωμένη όταν δεν υπάρχει άπειρη ακολουθία κόσμων $...Rw_2Rw_1Rw_0$.

(ii) η R είναι *αντιστρόφως καλά ορισμένη* (reverse well-founded)[12].

Ακολουθεί η σκιαγράφηση της απόδειξης.

Proof

Αρχικά, θεωρούμε πλαίσιο $\mathfrak{F} = \langle W, R \rangle$, όπου η R μεταβατική και αντίθετα καλά θεμελιωμένη σχέση και ότι ο τύπος L δεν είναι έγκυρος στο $\mathfrak{F}$, προς απαγωγή σε άτοπο. Επομένως υπάρχει αποτίμηση στο V και κόσμος w τέτοιος ώστε $(\mathfrak{F}, V), w \nVdash \Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p$· ισοδύναμα $w \Vdash \Box(\Box p \rightarrow p)$ αλλά $w \nVdash \Box p$·. Από το δεύτερο συμπέρασμα συνεπάγεται ότι ο κόσμος w θα πρέπει να έχει προσβάσιμο κόσμο w_1 τέτοιον ώστε $w_1 \nVdash p$ και από το πρώτο ότι σε κάθε προσβάσιμο κόσμο του w, άρα και στον w_1, ισχύει ότι $\Box p \rightarrow p$, δηλαδή $w_1 \Vdash (\Box p \rightarrow p)$. Συνεπώς $w_1 \nVdash \Box p$, που σημαίνει ότι θα πρέπει να υπάρχει w_2 προσβάσιμος από τον w_1 τέτοιος ώστε $w_2 \nVdash p$. Αφού η σχέση R είναι μεταβατική, τότε ο κόσμος w_2 θα είναι προσβάσιμος και από τον κόσμο w. Επαναλαμβάνοντας το προηγούμενο επιχείρημα, θα πρέπει να υπάρχει w_3 τέτοιος ώστε $w_2 R w_3$ και $w_3 \nVdash p$ κ.ο.κ. Επομένως κατασκευάσαμε ακολουθία $w_R w_1 R w_2 R w_3 R...$, το οποίο είναι άτοπο αφού η αντίθετη σχέση της R είναι καλά θεμελιωμένη.

Για το αντίστροφο έστω L έγκυρη στο $\mathfrak{F}$ και $\mathfrak{F}$ μεταβατικό και μη αντιστρόφως καλά ορισμένο. Θα πρέπει να βρούμε w: $(\mathfrak{F}, V), w \nVdash L$. Όμως $\mathfrak{F}$ μεταβατικό και υπάρχει ακολουθία $w_0 R w_2 R w_3 R...$. Θέτουμε $V(p) = W \setminus \{x \in W \mid$ υπάρχει άπειρη ακολουθία με αφετηρία $x\}$. Τότε $\Box p \rightarrow p$ έγκυρο σε όλους τους κόσμους του μοντέλου. Τελικά $(\mathfrak{F}, V), w_0 \Vdash \Box(\Box p \rightarrow p)$. Άτοπο επειδή $(\mathfrak{F}, V), w_0 \nVdash \Box p$. □

Ακολουθεί η απόδειξη ότι η κλάση πλαισίων που αναφέρθηκε παραπάνω δεν μπορεί να εκφραστεί σε πρωτοβάθμια γλώσσα, δεν είναι δηλαδή *βασική* (elementary) [BdRV01, p. 132].

Proof Έστω ότι υπάρχει πρωτοβάθμιος τύπος ισοδύναμος με τον L, έστω λ. Τότε κάθε μοντέλο στο οποίο αληθεύει ο λ θα πρέπει να είναι μεταβατικό. Έστω $\sigma_n(x_0, x_1, ..., x_n) = \bigwedge x_i R x_{i+1}$ πρωτοβάθμιος τύπος που εξασφαλίζει ότι υπάρχει R μονοπάτι μήκους n από τα $x_1, ..., x_n$. Κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του $\Sigma = \{\lambda\} \cup \{\forall xyz((Rxy \wedge yRz) \rightarrow Rxz)\} \cup \{\sigma_n \mid n \in \omega\}$ είναι ικανοποιήσιμο σε μια πεπερασμένη γραμμική διάταξη, άρα και στην κλάση των μεταβατικών και αντιστρόφως καλά ορισμένων πλαισίων. Όμως από θεώρημα συμπάγειας το Σ έχει μοντέλο. Άτοπο επειδή το Σ δεν είναι ικανοποιήσιμο σε κάθε αντιστρόφως καλά ορισμένο $\mathfrak{F}$. □

Επιπλέον, μπορεί κανείς να αποδείξει ότι ο τύπος του mcKinsey $\Box\Diamond p \rightarrow \Diamond\Box p$, δεν μπορεί να εκφραστεί στην πρωτοβάθμια γλώσσα [BdRV01, p. 134].

Το γεγονός ότι οι τροπικοί τύποι προσδιορίζουν δευτεροβάθμιες ιδιότητες πλαισίων δε θα πρέπει να μας ξαφνιάζει· η έννοια της εγκυρότητας προϋποθέτει την ποσόδειξη πάνω σε

[12]Μία σχέση ονομάζεται *αντιστρόφως καλά ορισμένη* (reverse well-founded), όταν δεν υπάρχουν αλυσίδες της μορφής $x_1 R x_2 R....$

Σχήμα 4.16: Martin Hugo Löb, 1921-2006.

Σχήμα 4.17: John Charles Chenoweth McKinsey, 1908-1953.

υποσύνολα πλαισίων και συνεπώς αποτελεί μία εγγενώς δευτεροβάθμια έννοια [VB10, p. 102] [BdRV01, p. 137]. Το πραγματικό μυστήριο έγκειται στο γεγονός ότι κάποιες φορές μπορούν να εκφραστούν στην πρωτοβάθμια γλώσσα.

Στο επίπεδο των πλαισίων, επομένως, η προτασιακή τροπική λογική μπορεί να θεωρηθεί ως *ισχυρό μέρος* (strong fragment) της *κλασικής μοναδικής δευτεροβάθμιας λογικής* (classical monadic second-order logic). Από διαφορετική σκοπιά, η *μοναδική δευτεροβάθμια ποσόδειξη* (monadic second-order quantification) είναι στενά συνδεδεμένη με την έννοια της εγκυρότητας, καθιστώντας την *προσδιορισιμότητα εντός πλαισίου* (frame-definability) μία εξαιρετικά ισχυρή έννοια. Επομένως, είδαμε ότι σε *επίπεδο μοντέλων* (level of models) η τροπική γλώσσα μπορεί να *μεταφραστεί* σε πρωτοβάθμια γλώσσα, ενώ σε *επίπεδο πλαισίων* (level of models) η τροπική γλώσσα μπορεί να *μεταφραστεί* σε δευτεροβάθμια γλώσσα.

Theorem 4.4.2 Σε κάθε πλαίσιο $\mathfrak{F}$ και σε κάθε κόσμο w ισχύει ότι[13]:
$\mathfrak{F}, w \Vdash \phi$ αν και μόνο αν $\mathfrak{F} \models \forall P_1 ... \forall P_n ST_x(\phi)[w]$
$\mathfrak{F} \Vdash \phi$ αν και μόνο αν $\mathfrak{F} \models \forall P_1 ... \forall P_n ST_x(\phi)$

Ακολουθεί η σκιαγράφηση της απόδειξης του παραπάνω θεωρήματος.

Proof Έστω $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ τυχαίο μοντέλο που βασίζεται στο πλαίσιο $\mathfrak{F}$ και έστω w κόσμος του $\mathfrak{F}$. Τότε ισχύει ότι $(\mathfrak{F}, V), w \Vdash \phi$ αν και μόνο αν $\mathfrak{F} \models ST_x(\phi)[w, P_1, ..., P_n]$, όπου ο συμβολισμός $[w, P_1, ..., P_n]$ σημαίνει την ανάθεση του w στις ελεύθερες πρωτοβάθμιες μεταβλητές x της συνήθους μετάφρασης ST_x και των $V(p_1), ..., V(p_n)$ στις ελεύθερες μεταβλητές της δευτεροβάθμιας *μοναδικής* (monadic) λογικής. Παρατηρούμε ότι η εν λόγω ισοδυναμία δεν αποτελεί κάτι καινούριο, παρά μία δευτεροβάθμια αναδιατύπωση του θεωρήματος 2.5.7. Επομένως, το πρώτο μέρος του θεωρήματος προκύπτει με χρήση καθολικών ποσοδεικτών, $\forall$, στις ελεύθερες μεταβλητές $P_1, ..., P_n$. Το δεύτερο

[13]Οι δευτεροβάθμιοι ποσοδείκτες δεσμεύουν τις δευτεροβάθμιες μεταβλητές P_i που αντιστοιχούν στις προτασιακές μεταβλητές p_i του τύπου ϕ.

μέρος προκύπτει από το πρώτο χρησιμοποιώντας καθολικούς ποσοδείκτες στους κόσμους του πλαισίου [14]. □

Definition 4.4.3 (Second-order translation) Θα ονομάζουμε δευτεροβάθμια μετάφραση το μετασχηματισμό των τροπικών τύπων σε δευτεροβάθμιους του συνόλου $\mathcal{L}^2(\Phi)$ σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα.

Η δευτεροβάθμια λογική έχει κάποιες ιδαιτερότητες: οι ταυτολογίες της δεν είναι αξιωματικοποιήσημες σε υψηλό βαθμό και, επιπλέον, δεν ισχύουν αρκετές από τις γνωστές ιδιότητες της πρωτοβάθμιας λογικής [VB10, p. 103].

4.5 Τύποι με πρωτοβάθμιο αντίστοιχο

Είδαμε ότι οι τροπικές γλώσσες αποτελούν ισχυρό εργαλείο για τον προσδιορισμό πλαισίων· είδαμε παραδείγματα τροπικά ορίσιμων *κλάσεων πλαισίων* (frame classes) που δεν μπορούν να οριστούν σε πρωτοβάθμια γλώσσα, καθιστώντας την εγκυρότητα μία έννοια φύσει δευτεροβάθμια. Ποια είναι όμως τα όρια της τροπικής ορισιμότητας; Θα μπορούσαμε στην τροπική γλώσσα να ορίσουμε όλες τις πρωτοβάθμιες κλάσεις πλαισίων; Και πώς θα αποδεικνύουμε ότι μια κλάση πλαισίων δεν είναι τροπικά ορίσιμη; Τέλος, γιατί αρκετοί τροπικοί τύποι ορίζουν πρωτοβάθμιες ιδιότητες πλαισίων;

Σε πολλές περιπτώσεις, οι δευτεροβάθμιες ιδιότητες πλαισίων που προκύπτουν από δευτεροβάθμιες μεταφράσεις, ισοδυναμούν με απλούστερες πρωτοβάθμιες ιδιότητες. Υπάρχουν αλγόριθμοι που να μας επιτρέπουν να υπολογίσουμε αυτά τις πρωτοβάθμιες, αυτές, αντίστοιχες ιδιότητες;

Πράγματι, υπάρχει μια μεγάλη κλάση τύπων, οι τύποι του Sahlqvist, καθένας απ' τους οποίους προσδιορίζει μία πρωτοβάθμια συνθήκη στα πλαίσια, υπολογίσιμη μέσω του αλγόριθμου των Sahlqvist-Van Benthem. Κάθε τύπος Sahlqvist είναι πλήρης (complete) ως προς την κλάση των πρωτοβάθμιων πλαισίων που προσδιορίζει. Το μέρος Sahlqvist (Sahlqvist fragment) επομένως αποτελεί ένα χρήσιμο θεωρητικό και πρακτικό εργαλείο [BdRV01, p. 150], που δημιουργεί νέα ερωτήματα, όπως το αν το μέρος αυτό περιλαμβάνει όλους τους τροπικούς τύπους με πρωτοβάθμια αντίστοιχα, ή ακόμη το ποιές πρωτοβάθμιες ιδιότητες μπορούν να εκφραστούν μέσω των τύπων Sahlqvist.

Definition 4.5.1 Στην πρωτοβάθμια γλώσσα, θα ονομάζουμε *θετική* (positive), και αντίστοιχα *αρνητική* (negative), μία ελεύθερη εμφάνιση (occurrence) της προτασιακής μεταβλητής p, αν η p βρίσκεται στο *εύρος* (in the scope) ενός ζυγού, αντίστοιχα αρνητικού,

[14] Αν $\alpha(x)$ είναι *τοπικό ανάλογο* (local correspondent) του τροπικού τύπου ϕ, τότε $\forall x\alpha(x)$ είναι *καθολικό ανάλογο* (global correspondent) του τύπου ϕ. Επομένως αν ο τύπος ϕ έχει πρωτοβάθμιο τοπικό ανάλογο, τότε έχει και πρωτοβάθμιο καθολικό ανάλογο [BdRV01, p. 151].

αριθμού συμβόλων άρνησης (negation signs). Θα λέμε πως ένας τροπικός τύπος ϕ *είναι θετικός στην* (is positive in) p, αντίστοιχα *αρνητικός στην* (is negative in) p, εάν όλες οι εμφανίσεις της μεταβλητής p στον τύπο ϕ είναι θετικές, αντίστοιχα αρνητικές. Θα ονομάζουμε έναν τροπικό τύπο *θετικό* (positive), αντίστοιχα *αρνητικό* (negative) αν είναι θετικός, αντίστοιχα αρνητικός, σε όλες τις προτασιακές μεταβλητές που εμφανίζονται σε αυτόν.
Αντίστοιχα, στη δευτεροβάθμια γλώσσα, θα ονομάζουμε *θετική* (positive), και αντίστοιχα *αρνητική* (negative), μία ελεύθερη εμφάνιση του κατηγορήματος μία θέσης (unary predicate variable) P, αν η P βρίσκεται στο *εύρος* (in the scope) ενός ζυγού, αντίστοιχα αρνητικού, αριθμού τελεστών άρνησης (negation signs). Θα λέμε πως ένας τροπικός τύπος ϕ *είναι θετικός στο* (is positive in) P, αντίστοιχα *αρνητικός στην* (is negative in) p, εάν όλες οι εμφανίσεις του P στον τύπο ϕ είναι θετικές, αντίστοιχα αρνητικές. Θα ονομάζουμε έναν τροπικό τύπο *θετικό* (positive), αντίστοιχα *αρνητικό* (negative) αν είναι θετικός, αντίστοιχα αρνητικός, σε όλα τα κατηγορήματα μίας θέσης που εμφανίζονται σε αυτόν.

Για το χαρακτηρισμό μίας μεταβλητής p ως θετικής ή αρνητικής θα πρέπει να σκεφτόμαστε σε επίπεδο *πρωταρχικών συνδέσμων* (primitive connectives)[15]. Για παράδειγμα η εμφάνιση της μεταβλητής p στον τύπο $\Diamond(p \to q)$ είναι αρνητική, καθώς ο δοσμένος τύπος ισοδυναμεί με τον τύπο $\Diamond(\neg p \lor q)$ όπου η μεταβλητή p βρίσκεται στο εύρος ενός τελεστή άρνησης

Definition 4.5.2 (Upward & downward monotonicity) Ένας τροπικός τύπος ϕ θα λέγεται *ανοδικά/καθοδικά μονότονος* (upward/downward monotone) στην μεταβλητή p εάν η αλήθεια του διατηρείται σε *επεκτάσεις/περιορισμούς* (extensions/shrinkings) της αποτίμησης της p[16].

Theorem 4.5.3 Έστω ϕ τροπικός τύπος. Τότε:

1. αν ϕ θετικός στην p, τότε ϕ ανοδικά μονότονος στην p, και
2. αν ϕ αρνητικός στην p, τότε ϕ καθοδικά μονότονος στην p.

Definition 4.5.4 Στη βασική τροπική γλώσσα, θα ορίζουμε ως *απλό πρωταρχικό τύπο Sahlqvist* (very simple Sahlqvist antecedent), κάθε τύπο που μπορεί να κατασκευαστεί από τους τελεστές $\top, \bot, \land, \Diamond$ και τις προτασιακές μεταβλητές, και ως *απλό τύπο Sahlqvist* (very simple Sahlqvist formula), κάθε συνεπαγωγή της μορφής $\phi \to \psi$, όπου ϕ πρωταρχικός τύπος Sahlqvist και ψ θετικός τύπος.

Παραδείγματα απλών τύπων Sahlqvist είναι οι τύποι $p \to \Diamond p$ και $(p \land \Diamond\Diamond q) \to \Box\Diamond(p \land q)$.

[15] Πρωταρχικοί είναι οι σύνδεσμοι $\neg, \land, \lor$.
[16] Ισοδύναμα, η επέκταση της $V(p)$ επεκτείνει/περιορίζει τη $V(\phi)$ ή τη διατηρεί αμετάβλητη.

Ο Αλγόριθμος αντικατάστασης (substitution algorithm)

Το επόμενο παράδειγμα, σκιαγραφεί έναν αλγόριθμο που κατασκευάζει αντίστοιχα πρωτοβάθμια πλαίσια.

Παράδειγμα
Έστω το αξίωμα K_4:

$$\Box p \to \Box\Box p,$$

το οποίο με κατάλληλη αρίθμηση των τελεστών $\Box$ παίρνει τη μορφή

$$[1]p \to [2][3]p.$$

Ο τυχαίος κόσμος x μας δίνει μία τοπική συνθήκη που θα πρέπει να ισχύει, επομένως το ζητούμενο πλαίσιο θα προκύψει προτάσσοντας τον καθολικό ποσοδείκτη $\forall x$.

Φάση 1η: Ανάλυση της *προκείμενης πρότασης* (antecedent). Ο αμεσότερος τρόπος ώστε να καταστήσουμε την προκείμενη πρόταση, $\Box p$, αληθή είναι να αληθεύει το p μόνο στους R-απόγονους του $x\cdot$ αυτή είναι και η *ελάχιστη αποτίμηση* (minimal valuation), προϋπόθεση, ώστε $\Box p$ αληθής. Επομένως, ορίζουμε ως:

$$Pu \coloneqq Rxu.$$

Παρατηρούμε ότι το u είναι ελεύθερη μεταβλητή, η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για διάφορες *αντικαταστάσεις* (substitutions).

Φάση 2η: Ανάλυση του *συμπεράσματος* (consequent). Η πρόταση $\Box\Box p$, ισοσυναμεί με την:

$$\forall y(Rxy \to \forall z(Ryz \to Pz)).$$

Φάση 3η: Εφαρμογή της ελάχιστης αποτίμησης. Στο παράδειγμα αυτό, η Pz γίνεται Rxz και ο τελικός τύπος:

$$\forall y(Rxy \to \forall z(Ryz \to Rxz)),$$

είναι ισοδύναμος με τη μεταβατικότητα (transitivity). Παρατηρούμε ότι το $[2]$ αντιστοιχεί στο "$\forall y(Rxy \to$", το $[3]$ στο "$\forall z(Ryz \to$" και το $[1]$ στο "Rxz".
Συνοπτικά, η προκείμενη του τροπικού αξιώματος καθορίζει μία ελάχιστη αποτίμηση, η οποία αντικαθίσταται στη δομή του συμπεράσματος.

Theorem 4.5.5 Υπάρχει αποδοτικός αλγόριθμος ο οποίος μεταφράζει όλα τα τροπικά αξιώματα της ειδικής μορφής $A \to B$ σε αντίστοιχες πρωτοβάθμιες ιδιότητες, όπου

- το A αποτελείται από βασικούς τύπους $\Box ... \Box p$ με χρήση μόνο των τελεστών $\vee$, $\wedge$, $\Diamond$ και
- το B είναι *θετικό* (positive): αποτελείται από προτασιακές μεταβλητές και τους λογικούς τελεστές $\vee$, $\wedge$, $\Diamond$, $\Box$.

Ακολουθεί η περιγραφή της απόδειξης του θεωρήματος.

Proof

Η μία κατεύθυνση της αντιστοιχίας είναι εύκολη καθώς ο κατασκευαστικός αυτός αλγόριθμος χρησιμοποιεί ταυτολογίες και πρωτοβάθμιες αντικαταστάσεις για δευτεροβάθμιους ποσοδείκτες. Για το αντίστροφο, θεωρούμε ότι η προκείμενη, A, είναι αληθής σε ένα πλαίσιο, ανεξαρτήτως αποτίμησης, έστω V. Τότε, λόγω της συντακτικής ανάλυσης της μορφής των A, υπάρχει ελάχιστη αποτίμηση, έστω V^- που επαληθεύει την προκείμενη και μπορεί να γραφεί στην πρωτοβάθμια γλώσσα. Επομένως η V^- επαληθεύει και το συμπέρασμα, . Επειδή το συμπέρασμα είναι θετικό, έχει την ιδιότητα της *μονοτονίας* (monotonicity), δηλαδή η αλήθεια του δε μεταβάλεται κατά την επέκταση V της αποτίμησης V^-. Άρα το B είναι αληθές στη V και $A \to B$ αληθές στο δοσμένο πλαίσιο. Για το αντίστροφο μπορεί κανείς να ανατρέξει στο [VB10, p. 106]. $\Box$

Το αποτέλεσμα αυτό δεν επεκτείνεται με άμεσο τρόπο, καθώς το να χρησιμοποιήσουμε $\Diamond$ στο εύρος ενός $\Box$ καταστρέφει το όλο εγχείρημα. Για παράδειγμα το αξίωμα Geach $\Diamond\Box p \to \Box\Diamond$ έχει πρωτοβάθμιο αντίστοιχο, ενώ το αξίωμα McKinsey $\Box\Diamond \to p\Diamond\Box$ δεν έχει. Η αναζήτηση του *ορίου* μεταξύ του συνόλου των τύπων που έχουν πρωτοβάθμια αντίστοιχα κι εκείνων που δεν έχουν, αποτελεί το κεντρικό θέμα της θεωρίας αντιστοίχισης.

Theorem 4.5.6 Έστω $\chi \equiv \phi \to \psi$ απλός τύπος Sahlqvist στη βασική τροπική γλώσσα. Τότε ο τύπος χ αντιστοιχεί τοπικά σε έναν πρωτοβάθμιο τύπο $c_\chi(x)$. Επιπλέον, ο τύπος c_χ είναι αποδοτικά υπολογίσιμος (effectively computable) από τον τύπο χ.

Για την απόδειξη μπορεί κανείς να ανατρέξει στο [BdRV01, p. 158].

Ακολουθεί, χωρίς απόδειξη, το βασικό *περιοριστικό* (limitative) θεώρημα της ενότητας αυτής.

Theorem 4.5.7 (Chagrova's Theorem) Είναι μη αποκρίσιμο πρόβλημα το αν ένας τυχαίος τύπος από τη βασική τροπική γλώσσα έχει πρωτοβάθμιο αντίστοιχο.

Συνεπώς, ακόμα και για τη βασική τροπική γλώσσα είναι αδύνατο να γράψουμε πρόγραμμα το οποίο, με είσοδο έναν τυχαίο τροπικό τύπο, να τερματίζει σε πεπερασμένο χρόνο δίνοντάς μας ως έξοδο είτε το ζητούμενο πρωτοβάθμιο αντίστοιχο, αν υπάρχει, ή αρνητική απάντηση, σε αντίθετη περίπτωση. Ως πόρισμα του παραπάνω αποτελέσματος, το μέρος Sahlqvist δεν μπορεί να περιλαμβάνει όλους τους τροπικούς τύπους με πρωτοβάθμια αντίστοιχα. Καθότι είναι εύκολο να πιστοποιήσουμε το αν ένας τύπος είναι Sahlqvist όπως και να υπολογίσουμε τα πρωτοβάθμια αντίστοιχα των τύπων Sahlqvist, επομένως αν όλοι οι τροπικοί τύποι με πρωτοβάθμια αντίστοιχα ήταν Sahlqvist τότε θα καταλήγαμε σε άτοπο, δεδομένου του θεωρήματος της Chagrova.

Το επόμενο εύλογο ερώτημα που προκύπτει είναι αν κάθε τροπικός τύπος με πρωτοβάθμιο αντίστοιχο ισοδυναμεί με κάποιον τύπο Sahlqvist. Η απάντηση στο ερώτημα αυτό θα δοθεί μέσω του παρακάτω παραδείγματος.

Example
Η σύζευξη των τύπων:
(M) $\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$
(4) $\Diamond\Diamond q \to \Diamond q$
δεν ισοδυναμεί με κάποιον τύπο Sahlqvist και έχει πρωτοβάθμιο αντίστοιχο.

Ο τύπος (M) είναι ο τύπος McKinsey, και ο τύπος (4) το *αξίωμα μεταβατικότητας* (transitivity axiom). Μπορεί κανείς να αποδείξει ότι ο τύπος $M \wedge 4$ δεν ισοδυναμεί με κάποιο τύπο Sahlqvist δείχνοντας ότι δεν έχει κάποιο τοπικό πρωτοβάθμιο αντίστοιχο. Με την απόδειξη της ισοδυναμίας:

$$\mathfrak{F} \Vdash M \text{ iff } \mathfrak{F} \models \forall x \exists y (Rxy \wedge \forall z (Ryz \to z = y))$$

μπορούμε να δείξουμε ότι ο τύπος $M \wedge 4$ δεν έχει πρωτοβάθμιο αντίστοιχο. Για την αναλυτική απόδειξη, ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο [BdRV01, p. 169].

Υπάρχει όμως τροπικός τύπος με τοπικό πρωτοβάθμιο αντίστοιχο που να μην ισοδυναμεί με κάποιο τύπο Sahlqvist; Αντιπαράδειγμα για το ερώτημα αυτό, είναι ο τύπος $\Box M \wedge 4$, ο οποίος έχει τροπικό πρωτοβάθμιο αντίστοιχο και δεν ισοδυναμεί με κάποιο τύπο Sahlqvist.

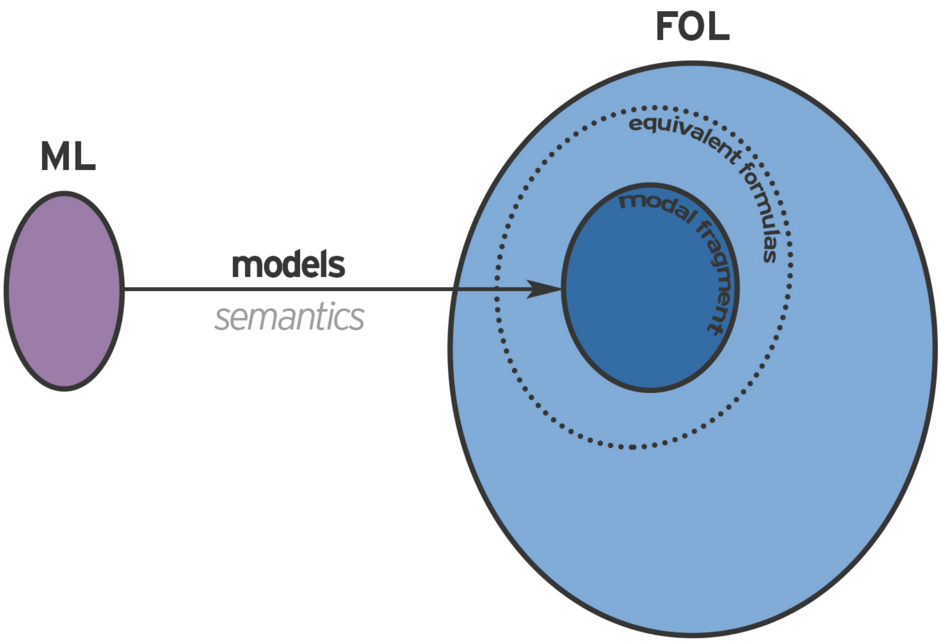
Συνεπώς, το μέρος Sahlqvist δεν περιλαμβάνει όλους τους τροπικούς τύπους με πρωτοβάθμια αντίστοιχα. Θα μπορούσαμε να επεκτείνουμε[17] το μέρος αυτό, δεν είναι όμως ξεκάθαρο αν το αποτέλεσμα της επέκτασης αυτής είναι εξίσου χρήσιμο. Καθώς το μέρος Sahlqvist ικανοποιεί ένα αντίστοιχο θεώρημα πληρότητας θα θέλαμε το ίδιο να συμβαίνει και με τις επεκτάσεις του· δε γνωρίζουμε όμως απλές επεκτάσεις του Sahlqvist που να ικανοποιούν το ζητούμενο αυτό [BdRV01, p. 170].

[17] Η επέκταση του μέροςτος Salhqvist δεν μπορεί να προκύψει αφαιρώντας κάποιους περιορισμούς από τον ορισμό του, καθώς μας εξασφαλίζουν την αδυναμία εύρεσης πρωτοβάθμιου αντίστοιχου [BdRV01, p. 171].

Κεφάλαιο 5

Σύνοψη

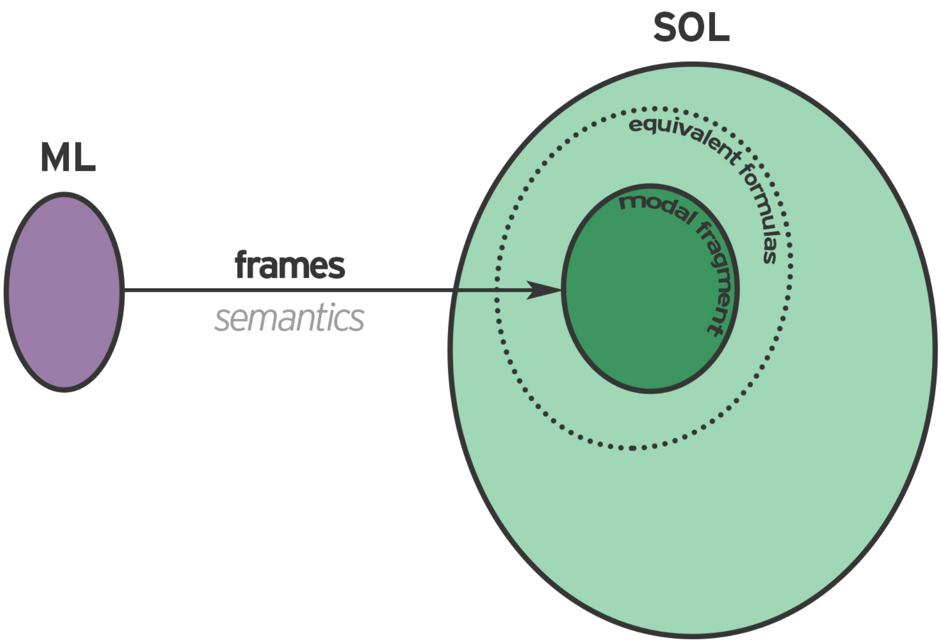
Η αντιστοίχιση της τροπικής λογικής στην πρωτοβάθμια, στο επίπεδο μοντέλων, φαίνεται στο σχήμα 5.1:



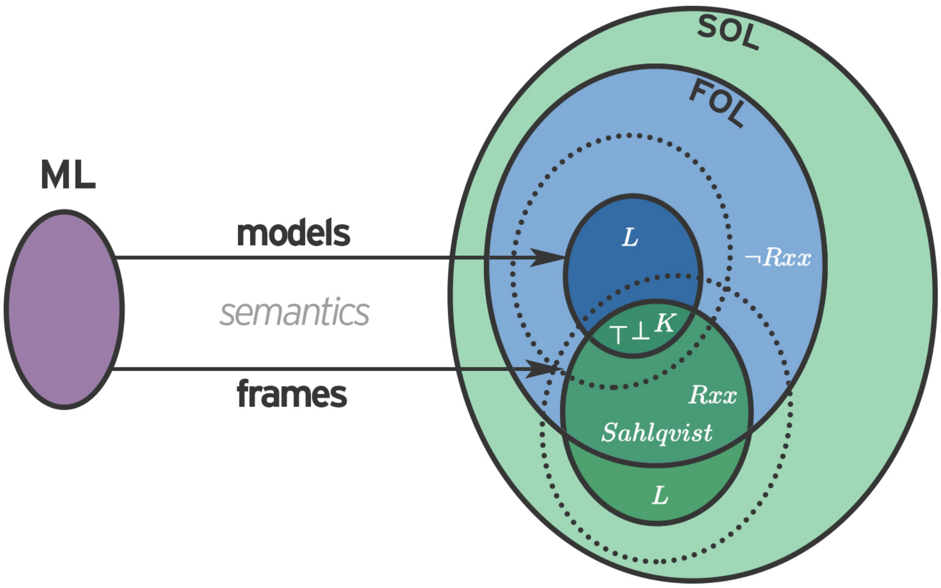
Σχήμα 5.1: Το τροπικό μέρος σε επίπεδο μοντέλων.

Στο σχήμα 5.2 απεικονίζεται η αντιστοίχιση της τροπικής λογικής σε επίπεδο πλαισίων.

Τέλος, το σχήμα 5.3, απεικονίζει την αντιστοίχιση της τροπικής λογικής με την πρωτοβάθμια και τη δευτεροβάθμια, δίνοντας μερικά παραδείγματα γνωστών τύπων, όπως οι τύποι Sahlqvist και Löb.



Σχήμα 5.2: Το τροπικό μέρος σε επίπεδο πλαισίων.



Σχήμα 5.3: Το τροπικό μέρος σε επίπεδο μοντέλων και πλαισίων με παραδείγματα γνωστών τύπων.

Βιβλιογραφία

[BBW06] Patrick Blackburn, Johan F. A. K. van Benthem, and Frank Wolter. *Handbook of Modal Logic, Volume 3 (Studies in Logic and Practical Reasoning)*. Elsevier Science Inc., New York, NY, USA, 2006.

[BdRV01] Patrick Blackburn, Maarten de Rijke, and Yde Venema. *Modal Logic*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2001.

[Che80] Brian F. Chellas. *Modal Logic*. Cambridge University Press, 1980. Cambridge Books Online.

[Die06] R. Diestel. *Graph Theory*. Electronic library of mathematics. Springer, 2006.

[EE01] H. Enderton and H.B. Enderton. *A Mathematical Introduction to Logic*. Elsevier Science, 2001.

[FM98] M. Fitting and R.L. Mendelsohn. *First-Order Modal Logic*. Synthese Library Studies in Epistemology Logic, Methodology, and Philosophy of Science Volume 277. Springer, 1998.

[Gol92] Robert Goldblatt. *Logics of Time and Computation*. Number 7 in CSLI Lecture Notes. Center for the Study of Language and Information, Stanford, CA, 2 edition, 1992.

[Kol15] Yiorgos Koletsos. *Mathematical Logic*. Kallipos, 2015.

[vB84] J. van Benthem. Correspondence theory. In D. Gabbay and F. Guenthner, editors, *Handbook of Philosophical Logic: Volume II: Extensions of Classical Logic*, pages 167–247. Reidel, Dordrecht, 1984.

[VB10] J. Van Benthem. *Modal Logic for Open Minds*. CSLI lecture notes. Center for the Study of Language and Information, 2010.