Modal Logic & Correspondence Theory

Παρουσίαση διπλωματικής εργασίας

Ναταλία Κωτσάνη

NTUA

July 18, 2016

Presentation Outline

Propositional Logic: Syntax

- Σύμβολα λογικών συνδέσμων (connectives): $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$
- Παρενθέσεις: (,)
- Σύμβολα προτάσεων ή προτασιακές μεταβλητές (variables): αριθμήσιμο σύνολο συμβόλων $A_1, A_2, \ldots, A_n$

Definition (Προτασιακοί Τύποι)

Προτασιακοί τύποι είναι οι εκφράσεις που ορίζονται επαγωγικά ως εξής:

1. Οι προτασιακές μεταβλητές είναι προτασιακοί τύποι.
2. Αν ϕ, ψ είναι προτασιακοί τύποι, τότε οι εκφράσεις $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$ και $\neg\phi$ είναι προτασιακοί τύποι.
3. Μόνο οι προτάσεις που σχηματίζονται από εφαρμογές των (1) και (2) είναι προτασιακοί τύποι.

Example

$(A_1 \wedge A_2) \rightarrow A_1$

First-Order Logic (FOL): Syntax

Η πρωτοβάθμια λογική είναι ικανή να εκφράσει με περισσότερη λεπτομέρεια από την προτασιακή ένα μεγάλο εύρος μαθηματικών εννοιών.

Α΄. Λογικά Σύμβολα (Logical Symbols)

1. παρενθέσεις: (,)
2. σύμβολα προτασιακών συνδέσμων (connectives): $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$
3. μεταβλητές (variables): $v_1, v_2, \ldots$
4. σύμβολο ισότητας: $=$ (προαιρετικά)

Β΄. Παράμετροι (Parameters)

1. σύμβολα ποσόδειξης (quantifier symbol): $\forall$, $\exists$
2. σύμβολα κατηγορημάτων (predicate symbols): $P_1^n, P_2^n, \ldots$
3. σύμβολα συναρτήσεων (function symbols): $f_1^n, f_2^n, \ldots$

Example

$\forall v_1(\neg(v_1 = 0) \rightarrow (\exists v_2(v_1 = Sv_2)))$

Second-Order Logic (SOL): Syntax

Επεκτείνουμε την εκφραστικότητα της πρωτοβάθμιας λογικής επιτρέποντας την ποσόδειξη σε σύμβολα κατηγορημάτων ή συναρτήσεων.

Α΄. Λογικά Σύμβολα (Logical Symbols)

1. παρενθέσεις: (,)
2. σύμβολα προτασιακών συνδέσμων (connectives): $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$
3. μεταβλητές (individual variables): $v_1, v_2, \ldots$
4. σύμβολο ισότητας: $=$ (προαιρετικά)

Β΄. Παράμετροι (Parameters)

1. σύμβολο ποσόδειξης (quantifier symbol): $\forall$
2. σύμβολα κατηγορημάτων (predicate symbols): $P_1^n, P_2^n, \ldots$
3. σύμβολα συναρτήσεων (function symbols): $f_1^n, f_2^n, \ldots$
4. μεταβλητές κατηγορημάτων (predicate variables): $X_1^n, X_2^n, \ldots$
5. μεταβλητές συναρτήσεων (function variables): $F_1^n, F_2^n, \ldots$

Example

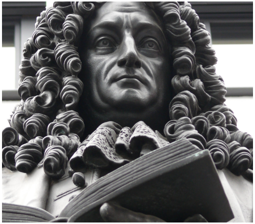
$\forall P \exists x (Px \rightarrow \forall x Px)$

Presentation Outline

Basic Modal Logic 1

- Σύμφωνα με τον Leibniz, *αναγκαίο* είναι οτιδήποτε αληθές σε κάθε *πιθανό κόσμο* ενώ *πιθανό* είναι οτιδήποτε αληθές σε κάποιον *πιθανό κόσμο*.
- Ο τελεστής $\Diamond$ αποτελεί το δυικό τροπικό ανάλογο (dual modality), ο οποίος κατά τη συλλογιστική του Αριστοτέλη ορίζεται ως $\Diamond P \equiv \neg\Box\neg P$ και $\Box P \equiv \neg\Diamond\neg P$.

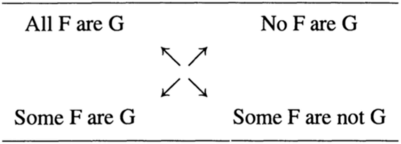
Αριστοτέλης, 384-322 π.Χ.



Gottfried Wilhelm (von) Leibniz, 1646-1716.

Basic Modal Logic 2

- Στο τροπικό τετράγωνο των αντιθέτων για κατηγορήματα, τα σχήματα (schemes) είναι:
  - αντιβαίνοντα (contraries) κατά μήκος της πρώτης γραμμής
  - υπο-αντιβαίνοντα (subcontraries) κατά μήκος της δεύτερης γραμμής
  - υπο-εναλλακτικά (subalternatives) κάθε στήλης
  - αντιφατικά (contradictories) στις διαγωνίους.



Το τροπικό τετράγωνο των αντιθέτων για κατηγορήματα (the square of opposition for categorical statements) [FM98, pp.8].

Syntax of modal propositional logic 1

Definition (Propositional Modal Formulas)

Το σύνολο των *τύπων* της προτασιακής τροπικής λογικής, ορίζεται σύμφωνα με τους παρακάτω κανόνες:

1. Οι προτασιακές μεταβλητές και οι σταθερές $\top$, $\bot$ είναι τύποι.
2. Αν X τύπος τότε και ο $\neg X$ τύπος.
3. Αν X και Y τύποι τότε και οι $X \vee Y$, $X \wedge Y$, $X \rightarrow Y$ τύποι
4. Αν X τύπος τότε και οι $\Box X$, $\Diamond X$ τύποι.

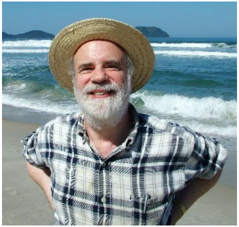
Example

Οι προτάσεις $P \rightarrow \Diamond P$, $((\Box P \wedge \Diamond Q) \rightarrow \Diamond(P \wedge Q))$ είναι τύποι.

Semantics of modal propositional logic $_2$

Η ερμηνεία της τροπικής γλώσσας:

- ονομάζεται ερμηνεία των πιθανών κόσμων (possible worlds semantics, Kripke semantics)
- θα γίνει στο πλαίσιο *σχεσιακών δομών* (relational structures)
- θα δοθεί σε δύο επίπεδα:
    - *πλαίσια* (frames): εγκυρότητα (validity)
    - *μοντέλα* (models): ικανοποιησιμότητα (satisfiability), αλήθεια (truth)



Saul Aaron Kripke, 1940 (Princeton, CUNY).

Basic Notions of Modal Logic $_1$

Definition (Frame)

Πλαίσιο θα ονομάζουμε το ζεύγος $\mathfrak{F} = \langle W, R \rangle$, όπου:

- W μη κενό σύνολο που περιέχει τους *πιθανούς κόσμους (possible worlds, states)*, και
- R δυαδική σχέση στο W, *προσβασιμότητα* (accessibility relation).

πλαίσιο $\longrightarrow$ κατευθυνόμενο γράφημα (directed graph)

Definition (Graph)

Γράφημα ή *γράφο* θα ονομάζουμε το ζεύγος $\mathfrak{G} = (V, E)$, όπου:

- V μη κενό σύνολο που περιέχει τους *κόμβους* ή *κορυφές* (nodes, vertices)
- $E \subseteq [V^2]$, *ακμές* (edges, lines).

Basic Notions of Modal Logic 2

Definition (Possible Worlds Model, ’60)

Μοντέλο (model) θα ονομάζουμε την τριάδα $\mathfrak{M} = \langle W, R, V \rangle$, όπου:

- ◦ V συνάρτηση που ονομάζουμε *αποτίμηση* (valuation). Η V αντιστοιχίζει σε κάθε προτασιακή μεταβλητή p ένα υποσύνολο $V(p)$ του W. [1]

- Το $\mathfrak{M} = \langle W, R, V \rangle$ βασίζεται (based) $\mathfrak{F} = \langle W, R \rangle$.
- Μοντέλο με αφετηρία (pointed model) $\mathfrak{M}, s$: στο μοντέλο $\mathfrak{M}$ επισυνάπτεται ένας *αρχικός* κόσμος s (vantage point).

[1] Μπορούμε να σκεφτούμε τη συνάρτηση αποτίμησης $V(p)$ ως το σύνολο των κόσμων του μοντέλου μας όπου η πρόταση p είναι αληθής.

Models & Satisfiability 1

Definition (Satisfiability in a Model at a State)

Επαγωγικός ορισμός της *ικανοποιησιμότητας* ή *αλήθειας* μιας πρότασης ϕ στο μοντέλο $\mathfrak{M}$ στον κόσμο w, Φ:

- $\mathfrak{M}, w \Vdash p$ αν και μόνο αν $w \in V(p), p \in \Phi$
- $\mathfrak{M}, w \Vdash \bot$ ποτέ
- $\mathfrak{M}, w \Vdash \neg\phi$ αν και μόνο αν δεν ισχύει ότι $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$
- $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi \vee \psi$ αν και μόνο αν $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$ ή $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$
- $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\phi$ αν και μόνο αν για κάποιο $v \in W$ όπου wRv, ισχύει ότι $\mathfrak{M}, v \Vdash \phi$
- $\mathfrak{M}, w \Vdash \Box\phi$ αν και μόνο αν για κάθε $v \in W$ όπου wRv, ισχύει ότι $\mathfrak{M}, v \Vdash \phi$.

Παραδείγματα ερμηνείας των τροπικών τελεστών.

Models & Satisfiability $_2$

Definition (Satisfiability of a set of formulas)

Ένα σύνολο τύπων Σ ικανοποιήσιμο σε κάποιον κόσμο w του μοντέλου $\mathfrak{M}$, συμβολίζουμε $\mathfrak{M}, w \Vdash \Sigma$, αν κάθε τύπος του Σ ικανοποιήσιμος στον κόσμο w.

- Αν το μοντέλο $\mathfrak{M}$ δεν ικανοποιεί την πρόταση ϕ στον κόσμο w, ϕ *ψευδής* στον κόσμο w του $\mathfrak{M}$, γράφουμε $\mathfrak{M}, w \nVdash \phi$.
- Επεκτείνουμε το πεδίο τιμών της V στους τύπους της τροπικής λογικής έτσι ώστε $V(\phi)$ το σύνολο των κόσμων όπου ο τύπος ϕ είναι αληθής: $V(\phi) = \{w | \mathfrak{M}, w \Vdash \phi\}$.

Models & Satisfiability $_3$

Definition (Global Truthfullness)

Ένας τύπος ϕ (ή σύνολο Σ τύπων) *καθολικά αληθής* (globally true) σ’ ένα μοντέλο $\mathfrak{M}$, αν είναι ικανοποιήσιμος σε όλους τους κόσμους τους μοντέλου, ισοδύναμα αν $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$ για κάθε $w \in W$ ($\mathfrak{M}, w \Vdash \Sigma$ για κάθε $w \in W$).

Definition (Satisfiability in a Model)

Ο τύπος ϕ (ή σύνολο Σ τύπων) ικανοποιήσιμος σ’ ένα μοντέλο $\mathfrak{M}$, αν υπάρχει κάποιος κόσμος $w \in W$ έτσι ώστε $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$ ($\mathfrak{M}, w \Vdash \Sigma$).

Frames & Validity 1

Definition (Validity in a Frame at a State)

Ένας τύπος ϕ είναι *έγκυρος στον κόσμο* w του πλαισίου $\mathfrak{F}$, συμβολίζουμε ως $\mathfrak{F}, w \Vdash \phi$, ϕ ισχύει στον κόσμο w κάθε μοντέλου $(\mathfrak{F}, V)$ που βασίζεται στο $\mathfrak{F}$.

Definition (Validity in a Frame)

Ένας τύπος ϕ είναι *έγκυρος στο πλαίσιο* $\mathfrak{F}$, συμβολίζουμε ως $\mathfrak{F} \Vdash \phi$, αν το τύπος ϕ είναι έγκυρος σε κάθε κόσμο κάθε μοντέλου $(\mathfrak{F}, V)$ που βασίζεται στο $\mathfrak{F}$.

Definition (Validity in a Class of Frames)

Ένας τύπος ϕ είναι *έγκυρος στην κλάση πλαισίων* F, και θα συμβολίζουμε ως $F \Vdash \phi$, αν το τύπος ϕ είναι έγκυρος σε κάθε πλαίσιο $\mathfrak{F}$ της κλάσης F. Το σύνολο όλων των έγκυρων τροπικών τύπων της κλάσης F θα το συμβολίζουμε με Λ_F και θα το ονομάζουμε ως *λογική* της κλάσης F.

Frames & Validity $_2$

Definition (Validity)

Θα λέμε ότι ένας τύπος ϕ είναι *έγκυρος*, και θα συμβολίζουμε ως $\Vdash \phi$, αν το τύπος ϕ είναι έγκυρος στην κλάση όλων των πλαισίων.

Definition (Validity of a Set of Formulas in a Frame)

Ένα σύνολο τροπικών τύπων Γ θα λέμε ότι είναι *έγκυρο στο πλαίσιο* $\mathfrak{F}$ αν κάθε τύπος του συνόλου Γ είναι έγκυρος στο πλαίσιο $\mathfrak{F}$.

Definition (Validity of a Set of Formulas in a Class of Frames)

Ένα σύνολο τροπικών τύπων Γ θα λέμε ότι είναι *έγκυρο στην κλάση πλαισίων* F αν Γ έγκυρο σε κάθε πλαίσιο που ανήκει στην κλάση F.

Frames & Definability

προσδιορισιμότητα (definability): κλάσεις πλαισίων $\longrightarrow$ τροπικοί τύποι

Definition (Definability)

Ο τροπικός τύπος ϕ *προσδιορίζει* ή *χαρακτηρίζει* (defines, characterizes) την κλάση πλαισίων K αν για κάθε πλαίσιο $\mathfrak{F}$, όπου $\mathfrak{F}$ ανήκει στο K, ισχύει $\mathfrak{F} \Vdash \phi$ και αντίστροφα. Επιπλέον, το σύνολο τροπικών τύπων Γ προσδιορίζει την κλάση K αν για κάθε $\mathfrak{F}$ στο K ισχύει ότι $\mathfrak{F} \Vdash \Gamma$ και αντίστροφα.

Definition (Modal Definability)

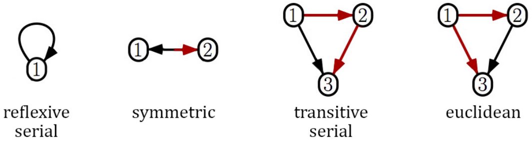
Μια κλάση πλαισίων είναι *(τροπικά) προσδιορίσιμη* (modally definable) αν υπάρχει σύνολο τροπικών τύπων που να την προσδιορίζει.

Systems of modal logic 1

Definition (Conditions of Frame Collections)

Έστω $\mathfrak{F} = \langle W, R \rangle$ πλαίσιο. Τότε θα λέμε ότι το πλαίσιο είναι:

1. *ανακλαστικό* (reflexive): αν Rxx, για κάθε $x \in W$,
2. *συμμετρικό* (symmetric): αν Rxy συνεπάγεται Ryx, για κάθε $x, y \in W$,
3. *μεταβατικό* (transitive): αν Rxy, Ryw συνεπάγεται Rxw, για κάθε $x, y, w \in W$,
4. *σειριακό* (serial): αν για κάθε $x \in W$ υπάρχει $y \in W$ τέτοιο ώστε Rxy
5. *ευκλείδιο* (euclidean): αν Rxy, Rxw συνεπάγεται Ryw, για κάθε $x, y, w \in W$.

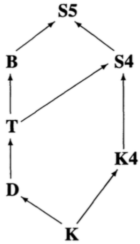


Παραδείγματα πλαισίων.

Systems of modal logic 2

Logic	Frame Conditions
K	no conditions
D	serial
T	reflexive
B	reflexive, symmetric
K4	transitive
S4	reflexive, transitive
S5	reflexive, symmetric, transitive

Οι συνήθεις τροπικές λογικές [FM98, pp. 19].



Σχέσεις εγκλεισμού μεταξύ των λογικών [FM98, pp. 20].

Presentation Outline

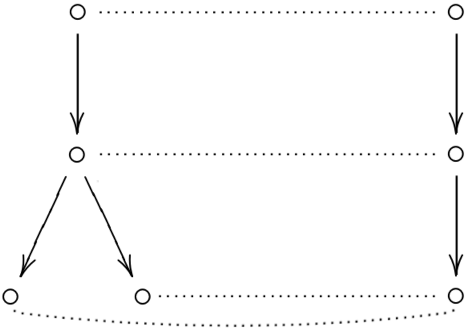
Correspondence Theory

Η αντιστοίχιση της τροπικής με την πρωτοβάθμια λογική προϋποθέτει:

- ένα μετασχηματισμό σε συντακτικό επίπεδο (syntactic) και
- μία ερμηνεία (semantics) όπου αποδεικνύεται η ισοδυναμία.

Η αντιστοίχιση θα δοθεί σε δύο επίπεδα, όπως ακριβώς και η ερμηνεία.

Bisimulation examples 1



Παράδειγμα αμφιπροσομοίωσης σε γράφους (1).

Bisimulation in graphs 1

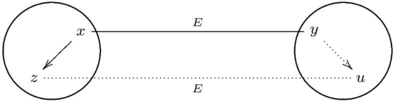
Definition (Bisimulation)

Θα ονομάζουμε *αμφιπροσομοίωση (bisimulation)* μία μη κενή δυαδική σχέση E μεταξύ δύο γράφων με αφετηρία, $\mathfrak{G}, s$ και $\mathfrak{H}, t$ έτσι ώστε sEt και για κάθε δύο κόμβους x, y των $\mathfrak{G}, \mathfrak{H}$ αν xEy τότε:

(i) για κάθε z στο $\mathfrak{G}$: Rxz, υπάρχει u στο $\mathfrak{H}$ έτσι ώστε Ryu και zEu, και

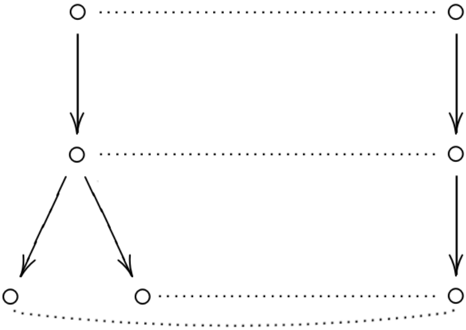
(ii) για κάθε u στο $\mathfrak{H}$: Ryu, υπάρχει z στο $\mathfrak{G}$ έτσι ώστε Rxz και zEu.

Αν sEt θα λέμε τους s και t *αμφιόμοιους* (bisimilar).



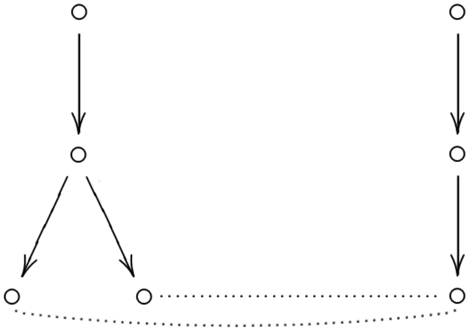
Αμφιπροσομοίωση [VB10, pp. 26].

Bisimulation examples $_1$



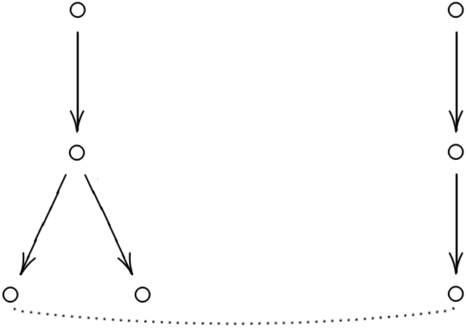
Παράδειγμα αμφιπροσομοίωσης σε γράφους (1).

Bisimulation examples $_2$



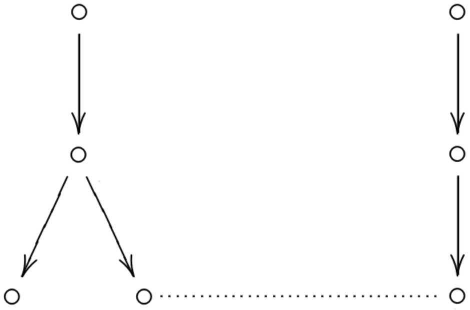
Παράδειγμα αμφιπροσομοίωσης σε γράφους (2).

Bisimulation examples 3



Παράδειγμα αμφιπροσομοίωσης σε γράφους (3).

Bisimulation examples $_4$



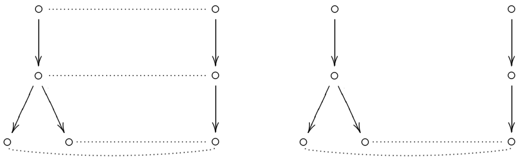
Παράδειγμα αμφιπροσομοίωσης σε γράφους (4).

Bisimulation in graphs 2

Definition (Surjective bisimulation)

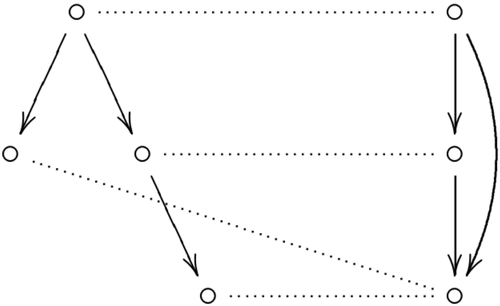
Η αμφιπροσομοίωση E μεταξύ των γράφων $\mathfrak{G}, s$ και $\mathfrak{H}, t$, θα λέγεται *επί-αμφιπροσομοίωση* (surjective bisimulation), αν για κάθε κόμβο x του $\mathfrak{G}$ υπάρχει y του $\mathfrak{H}$ έτσι ώστε Rxy, και για κάθε κόμβο y του $\mathfrak{H}$ υπάρχει x του $\mathfrak{G}$, έτσι ώστε Rxy. Δηλαδή E και E^{-1} επί.

- Αν από τις αφετηρίες s, t είναι προσβάσιμοι όλοι οι κόμβοι των γράφων, κάθε αμφιπροσομοίωση μεταξύ τους είναι επι-αμφιπροσομοίωση (πχ. ρίζες δένδρων).



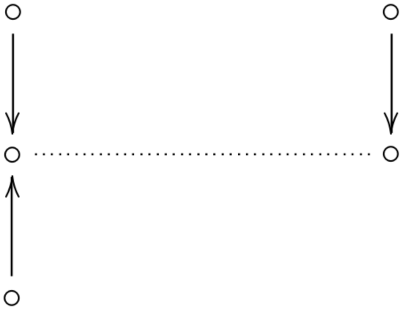
Αμφιπροσομοίωση μεταξύ δένδρων.

Bisimulation examples 5



Παράδειγμα επί-αμφιπροσομοίωσης σε γράφους [VB10, pp.26].

Bisimulation examples $_6$

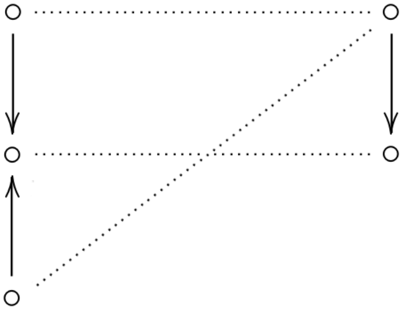


Παράδειγμα όχι επί-αμφιπροσομοίωσης σε γράφους (1).

Bisimulation examples 7

Παράδειγμα όχι επί-αμφιπροσομοίωσης σε γράφους (2).

Bisimulation examples 8



Παράδειγμα επί-αμφιπροσομοίωσης σε γράφους (3).

Bisimulation 1

Definition (Bisimulation)

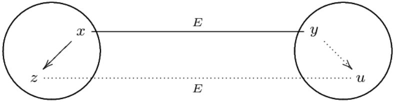
Θα ονομάζουμε *αμφιπροσομοίωση (bisimulation)* μία μη κενή δυαδική σχέση E μεταξύ δύο μοντέλων με αφετηρία $\mathfrak{M}, s$ και $\mathfrak{N}, t$ έτσι ώστε sEt και για κάθε δύο κόσμους x, y των $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ αν xEy τότε:

(i) οι x, y ικανοποιούν τις ίδιες προτασιακές μεταβλητές,

(ii) για κάθε z στο $\mathfrak{M}$: Rxz, υπάρχει u στο $\mathfrak{N}$ έτσι ώστε Ryu και zEu

(iii) για κάθε u στο $\mathfrak{N}$: Ryu, υπάρχει z στο $\mathfrak{M}$ έτσι ώστε Rxz και zEu

Αν sEt τότε θα λέμε τους s και t *αμφιόμοιους* (bisimilar) και θα γράφουμε $E : \mathfrak{M}, s \leftrightarrows \mathfrak{N}, t$.



Αμφιπροσομοίωση [VB10, pp. 26].

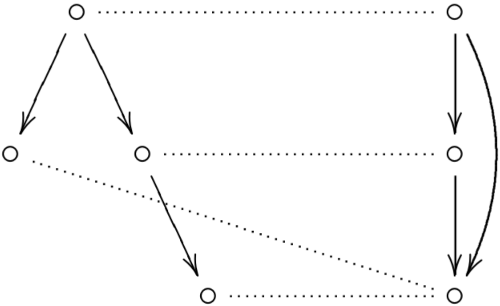
Bisimulation $_2$

Definition (Surjective bisimulation)

Η αμφιπροσομοίωση E μεταξύ των μοντέλων $\mathfrak{M}, s$ και $\mathfrak{N}, t$, θα λέγεται *επί-αμφιπροσομοίωση* (surjective bisimulation), αν για κάθε κόσμο x του $\mathfrak{M}$ υπάρχει y του $\mathfrak{N}$ έτσι ώστε xEy, και για κάθε κόσμο y του $\mathfrak{N}$ υπάρχει x του $\mathfrak{M}$, έτσι ώστε xEy. Δηλαδή E και E^{-1} επί.

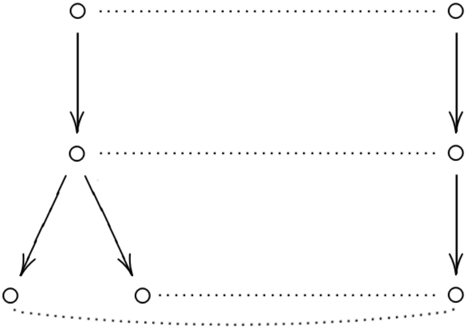
- Αν από τις αφετηρίες s, t είναι προσβάσιμοι (reachable) όλοι οι κόσμοι των μοντέλων, κάθε αμφιπροσομοίωση μεταξύ τους είναι επι-αμφιπροσομοίωση (πχ. ρίζες δένδρων).

Bisimulation examples 1



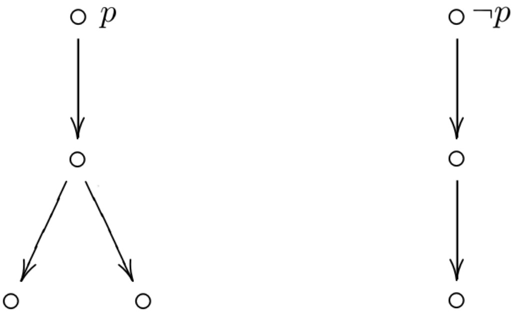
Παράδειγμα ύπαρξης αμφιπροσομοίωσης σε μοντέλα [VB10, pp. 26].

Bisimulation examples $_2$



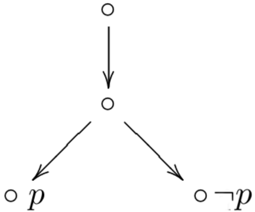
Παράδειγμα ύπαρξης αμφιπροσομοίωσης σε μοντέλα.

Bisimulation examples $_3$



Παράδειγμα μη αμφιόμοιων ριζών δένδρων.

Bisimulation examples $_4$

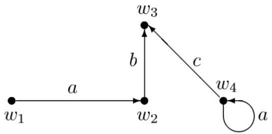


Παράδειγμα μη αμφιόμοιων ριζών δένδρων [VB10, pp. 27].

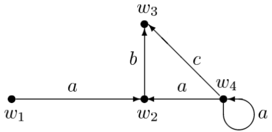
Labeled Transition System (LTS)

Definition (Labeled Transition System (LTS))

Σύστημα μετάβασης (transition system) ονομάζουμε το ζεύγος $\langle W, \{R_a | a \in A\}\rangle$ όπου W μη κενό σύνολο καταστάσεων, A μη κενό σύνολο *ετικετών* (labels) και για κάθε $a \in A$, $R_a \subseteq W \times W$.

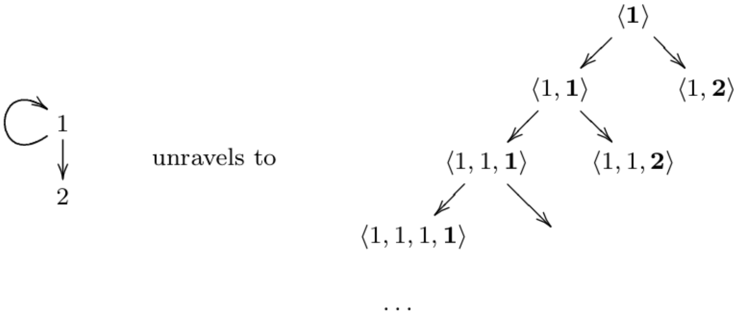


Παράδειγμα ντετερμινιστικού συστήματος μετάβασης [BdRV01, pp. 4].



Παράδειγμα μη ντετερμινιστικού συστήματος μετάβασης [BdRV01, pp. 4].

Tree Unraveling



Παράδειγμα δενδρικού αναπτύγματος [VB10, pp. 27].

The tree model property of modal logic

Theorem (Tree Unraveling)

Κάθε μοντέλο με αφετηρία $\mathfrak{M}, s$ έχει αμφιπροσομοίωση με τη ρίζα ενός δενδροειδούς μοντέλου το οποίο κατασκευάζεται ως εξής:

(i) *κάθε πεπερασμένο μονοπάτι που μπορούμε να ανακτήσουμε κατά τη συστηματική*[2] *προσπέλαση του μοντέλου $\mathfrak{M}$, με αφετηρία τον κόσμο s, αποτελεί και έναν κόσμο του νέου μοντέλου*

(ii) *κάθε μονοπάτι, ισοδύναμα κόσμος του νέου μοντέλου, έχει προσβάσιμο μονοπάτι-κόσμο στο νέο μοντέλο, κάθε μονοπάτι με μεγαλύτερο μήκος κατά ένα βήμα από αυτό (αν υπάρχει)*

(iii) *η αποτίμηση κάθε μονοπατιού-κόσμου του νέου μοντέλου ταυτίζεται με την αποτίμηση του τελευταίου κόμβου του μονοπατιού κατά την προσπέλαση του μοντέλου $\mathfrak{M}$*

Το μοντέλο αυτό θα ονομάζουμε δενδρικό ανάπτυγμα (tree unraveling).

[2] Η προσπέλαση πραγματοποιείται με αφετηρία τη ρίζα, βήμα προς βήμα, στους γείτονες που απέχουν απόσταση ίση με μία κίνηση, σύμφωνα με τη συνάρτηση μετάβασης R του μοντέλου $\mathfrak{M}$.

Invariance Lemma

Απομένει να συνδέσουμε την έννοια της αμφιπροσομοίωσης με την τροπική γλώσσα.

Lemma (Invariance Lemma)

Για κάθε αμφιπροσομοίωση E *μεταξύ των μοντέλων* $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ *και για κάθε δύο κόσμους* x, y *όπου* xEy *θα ισχύει για όλους τους τροπικούς τύπους* ϕ *ότι:*

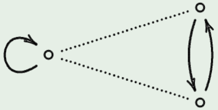
$$\mathfrak{M}, x \models \phi \text{ αν και μόνο αν } \mathfrak{N}, y \models \phi.$$

Invariance Lemma application in models

ορίσιμη (definable) ιδιότητα υπάρχει πρόταση της τροπικής λογικής που ικανοποιείται σε ένα μοντέλο/πλαίσιο αν και μόνο αν το μοντέλο/πλαίσιο έχει αυτήν την ιδιότητα.

- Πώς αποδεικνύουμε ότι κάποια ιδιότητα είναι *μη ορίσιμη* (undefinable) στην τροπική γλώσσα σε επίπεδο μοντέλων;
- Αναζητούμε μοντέλο $\mathfrak{M}, s$ με την ιδιότητα να ισχύει στον κόσμο s, αλλά όχι στον αμφιόμοιό του t, του $\mathfrak{N}, t$.

Example



Η ανακλαστικότητα, Rxx, ή η μη ανακλαστικότητα, $\neg Rxx$, δεν μπορεί να οριστεί στην τροπική γλώσσα σε επίπεδο μοντέλων [VB10, pp. 26].

Undefinable properties in frames

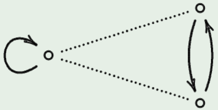
- Η ανακλαστικότητα, Rxx, είναι ορίσιμη στην τροπική λογική σε επίπεδο πλαισίων: $\Box p \to p$.
- Η μη ανακλαστικότητα, $\neg Rxx$, δεν είναι.

Example

Έστω ότι υπάρχει τροπικός τύπος ϕ που ορίζει το $\neg Rxx$.

- Στο δεξί πλαίσιο, για κάθε αποτίμηση το ϕ ικανοποιείται.
- Για κάθε αποτίμηση στο αριστερό πλαίσιο υπάρχει αποτίμηση στο δεξί πλαίσιο που να κάνει τα δύο μοντέλα αμφιόμοια.

Άρα για κάθε αποτίμηση στο αριστερό πλαίσιο το ϕ ικανοποιείται.



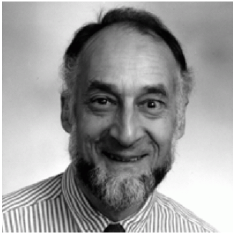
Η $\neg Rxx$ δεν μπορεί να οριστεί στην τροπική γλώσσα σε επίπεδο πλαισίων.

Hennessy - Milner theorem

Theorem (Hennessy - Milner)

Αν οι κόσμοι s, t ικανοποιούν τους ίδιους τροπικούς τύπους, σε δύο πεπερασμένα μοντέλα $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ τότε υπάρχει αμφιπροσομοίωση μεταξύ των δύο μοντέλων που συνδέει τους κόσμους s και t.

Matthew Hennessy (Edinburgh, Waterloo, Sussex, Trinity College).



Arthur John Robin Gorell Milner, 1934-2010 (Stanford, Cambridge, Edinburgh).

The standard translation 1

Definition (Standard Translation)

Έστω x πρωτοβάθμια μεταβλητή. Η συνήθης μετάφραση (standard translation) ST_x θα μετασχηματίζει τροπικούς τύπους σε πρωτοβάθμιους του συνόλου $\mathcal{L}^1(\Phi)$ ως εξής:

$$
\begin{gathered}
ST_x(p) = Px \\
ST_x(\bot) = x \neq x \\
ST_x(\neg\phi) = \neg ST_x(\phi) \\
ST_x(\phi \vee \psi) = ST_x(\phi) \vee ST_x(\psi) \\
ST_x(\Diamond\phi) = \exists y(Rxy \wedge ST_y(\phi)) \\
ST_x(\Box\phi) = \forall y(Rxy \rightarrow ST_y(\phi))
\end{gathered}
$$

The standard translation $_2$

Example

Για παράδειγμα, αν έχουμε τον τύπο $\Diamond(\Box p \to q)$, σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό η συνήθης μετάφραση είναι:

$$\begin{gathered}
\Diamond(\Box p \to q) = \\
\exists y_1 (Rxy_1 \wedge ST_{y_1}(\Box p \to q) = \\
\exists y_1 (Rxy_1 \wedge (ST_{y_1}(\Box p) \to ST_{y_1}(q))) = \\
\exists y_1 (Rxy_1 \wedge (\forall y_2 (Ry_1 y_2 \to ST_{y_2}(p)) \to Qy_1)) = \\
\exists y_1 (Rxy_1 \wedge (\forall y_2 (Ry_1 y_2 \to Py_2) \to Qy_1))
\end{gathered}$$

Οι τροπικοί τελεστές μεταφράζονται ως δεσμευμένοι ποσοδείκτες (bounded quantifiers) ώστε να δρουν μόνο στους γειτονικούς κόσμους (*τοπική δράση* των τροπικών τελεστών στην πρωτοβάθμια γλώσσα).

Local and Global Correspondence on Models

Theorem (Local and Global Correspondence on Models)

Έστω ϕ τροπικός τύπος. Τότε:

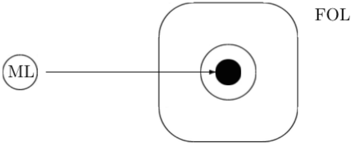
(i) *Για όλα τα μοντέλα $\mathfrak{M}$ και όλους τους κόσμους w του $\mathfrak{M}$: $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$ αν και μόνο αν $\mathfrak{M} \models ST_x(\phi)[w]$*

(ii) *Για όλα τα μοντέλα $\mathfrak{M}$: $\mathfrak{M} \Vdash \phi$ αν και μόνο αν $\mathfrak{M} \models \forall x ST_x(\phi)$.*

Modal Fragment 1

Definition (Modal Fragment)

Το *τροπικό μέρος* (modal fragment) της πρωτοβάθμιας λογικής είναι το σύνολο $\{ST(\phi)|\phi$ είναι τροπικός τύπος$\}$. Κάποιες φορές ο ορισμός επεκτείνεται και στους τύπους της πρωτοβάθμιας λογικής που είναι λογικά ισοδύναμοι με το σύνολο $ST(\phi)$[3].



Το τροπικό μέρος [VB10, pp. 76].

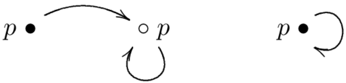
[3] Ο εσωτερικός κύκλος με σκίαση αναφέρεται στο τροπικό μέρος με τη «στενότερη» έννοια ενώ ο εξωτερικός περιλαμβάνει όλους τους πρωτοβάθμιους τύπους που είναι ισοδύναμοι με το προαναφερθέν σύνολο.

Modal Fragment $_2$

Το τροπικό μέρος αποτελεί γνήσιο υποσύνολο της πρωτοβάθμιας λογικής.

Example

Η ιδιότητα της *γνήσιας διαδοχής* $\exists y(Rxy \wedge \neg Ryx)$ (proper succession) δεν ανήκει στο τροπικό μέρος, ούτε είναι σημασιολογικά ισοδύναμη με κάποια πρόταση που ανήκει στο τροπικό μέρος.



Η γνήσια διαδοχή δεν μπορεί να οριστεί στην τροπική γλώσσα [VB10, pp. 77].

The Modal Invariance Theorem

Theorem (Van Benthem Characterization Theorem)

Για τους τύπους της πρωτοβάθμιας λογικής $\phi = \phi(x)$, με μία ελεύθερη μεταβλητή, τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

i *ο τύπος ϕ είναι ισοδύναμος με έναν τροπικό τύπο,*

ii *ο τύπος ϕ παραμένει αναλλοίωτος ως προς την αμφιπροσομοίωση.*

Η τροπική γλώσσα θεωρείται το «αναλλοίωτο ως προς αμφιπροσομοίωση» (bisimulation-invariant) μέρος της πρωτοβάθμιας λογικής.

Johan van Benthem, 1949, (Stanford, Amsterdam, Groningen).

Importing results

Η *γέφυρα* μεταξύ της πρωτοβάθμιας και της τροπικής λογικής θα μας βοηθήσει να «εισάγουμε» ιδέες, αποτελέσματα και αποδεικτικές τεχνικές.

Example

Μπορεί να αποδείξει κανείς ότι στην τροπική λογική, όπως και στην πρωτοβάθμια, ισχύει η ιδιότητα της *συμπάγειας* (compactness)[4] και η ιδιότητα των Löwenheim-Skolem[5] [BdRV01, pp. 86].

Η τροπική λογική είναι *αποκρίσιμη* (decidable) σε αντίθεση με την πρωτοβάθμια λογική.

---

[4] Αν Θ είναι σύνολο πρωτοβάθμιων τύπων και κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του Θ είναι ικανοποιήσιμο (satisfiable), τότε το σύνολο Θ είναι ικανοποιήσιμο.

[5] Αν ένα σύνολο πρωτοβάθμιων τύπων έχει ένα άπειρο μοντέλο τότε έχει ένα αριθμήσιμα άπειρο μοντέλο.

Exceeding the expressive power of first order logic

Οι τύποι:

- $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$ (Löb's formula, L)
- $\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$ (mcKinsey formula)

δεν μπορούν να εκφραστούν στην πρωτοβάθμια γλώσσα.

Martin Hugo Löb, 1921-2006 (Leeds, Amsterdam).

John Charles Chenoweth McKinsey, 1908-1953 (Stanford, New York, RAND corporation).

Löb’s formula (L) 1

Example (L defines the class of transitive & conversely well founded frames)

Έστω $\mathfrak{F} = (W, R)$ μεταβατικό και αντιστρόφως καλά ορισμένο, και L μη έγκυρη στο $\mathfrak{F}$.

1. $(\mathfrak{F}, V), w \nVdash \Box(\Box p \to p) \to \Box p$
2. $w \Vdash \Box(\Box p \to p)$, but $w \nVdash \Box p$ $\quad_{(1)}$
3. $\exists w_1 \colon wRw_1,\ w_1 \nVdash p$ and $w_1 \Vdash \Box p \to p$ $\quad_{(2)}$
4. $w_1 \nVdash \Box p$ $\quad_{(3)}$
5. $\exists w_2 \colon w_1 R w_2,\ w_2 \nVdash p$ $\quad_{(3)}$ επομένως από μεταβατικότητα wRw_2
6. $\exists w_3 \colon w_2 R w_3$ and $w_3 \nVdash p$ $\quad_{(6)}$ επομένως από μεταβατικότητα $w_1 R w_3$
7. ...
8. υπάρχει άπειρη ακολουθία $wRw_1Rw_2Rw_3R\ldots$

Άτοπο επειδή $\mathfrak{F}$ αντιστρόφως καλά ορισμένο.

Löb's formula (L) 2

Example (L defines the class of transitive & conversely well founded frames)

Έστω L έγκυρη στο $\mathfrak{F}$ και $\mathfrak{F}$ μεταβατικό και μη αντιστρόφως καλά ορισμένο. Θα πρέπει να βρούμε w: $(\mathfrak{F}, V), w \nVdash L$

1. $\mathfrak{F}$ μεταβατικό και υπάρχει ακολουθία $w_0 R w_2 R w_3 R \ldots$
2. $V(p) = W \setminus \{x \in W \mid$ υπάρχει άπειρη ακολουθία με αφετηρία x$\}$
3. $\Box p \to p$ έγκυρο σε όλους τους κόσμους του μοντέλου
4. $(\mathfrak{F}, V), w_0 \Vdash \Box(\Box p \to p) \quad (3)$

Άτοπο επειδή $(\mathfrak{F}, V), w_0 \nVdash \Box p$

Löb's formula (L) 3

Example (L defines the class of transitive & conversely well founded frames)

Η κλάση πλαισίων που προσδιορίζει ο L δεν είναι *θεμελιώδης* (elementary) διότι αν υπάρχει πρωτοβάθμιος τύπος ισοδύναμος με τον L, έστω λ:

1. κάθε μοντέλο στο οποίο αληθεύει ο λ θα πρέπει να είναι μεταβατικό
2. $\sigma_n(x_0, x_1, ..., x_n) = \bigwedge x_i R x_{i+1}$
3. κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του $\Sigma = \{\lambda\} \cup \{\forall xyz((Rxy \wedge yRz) \to Rxz)\} \cup \{\sigma_n \mid n \in \omega\}$ είναι ικανοποιήσιμο σε μια πεπερασμένη γραμμική διάταξη, άρα και στην κλάση των μεταβατικών και αντιστρόφως καλά ορισμένων πλαισίων
4. το Σ έχει μοντέλο $_{compactness(3)}$

Άτοπο επειδή το Σ δεν είναι ικανοποιήσιμο σε κάθε αντιστρόφως καλά ορισμένο $\mathfrak{F}$.

Second-order translation

Theorem

Σε κάθε πλαίσιο $\mathfrak{F}$ *και σε κάθε κόσμο* w *ισχύει ότι*[6]*:*
$\mathfrak{F}, w \Vdash \phi$ *αν και μόνο αν* $\mathfrak{F} \models \forall P_1 ... \forall P_n ST_x(\phi)[w]$
$\mathfrak{F} \Vdash \phi$ *αν και μόνο αν* $\mathfrak{F} \models \forall P_1 ... \forall P_n ST_x(\phi)$.

Definition (Second-order translation)

Θα ονομάζουμε δευτεροβάθμια μετάφραση το μετασχηματισμό των τροπικών τύπων σε δευτεροβάθμιους του συνόλου $\mathcal{L}^2(\Phi)$ σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα.

- Η έννοια «για κάθε αποτίμηση» εκφράζεται μέσω δευτεροβάθμιας ποσόδειξης.

[6] Οι δευτεροβάθμιοι ποσοδείκτες δεσμεύουν τις δευτεροβάθμιες μεταβλητές P_i που αντιστοιχούν στις προτασιακές μεταβλητές p_i του τύπου ϕ.

Positive & negative formulas

Definition (Positive, negative formula)

Η εμφάνιση (occurrence) της προτασιακής μεταβλητής p είναι *θετική/αρνητική* (positive/negative) αν:

- βρίσκεται στο *εύρος* (in the scope) ενός ζυγού/αρνητικού αριθμού τελεστών άρνησης (negation signs)[7].

Ένας τύπος ϕ *είναι θετικός/αρνητικός στην* p, εάν όλες οι εμφανίσεις της p στον ϕ είναι θετικές/αρνητικές.
Ένας τύπος είναι *θετικός/αρνητικός* αν είναι θετικός/αρνητικός, σε όλες τις προτασιακές μεταβλητές που περιέχει.

Example

p αρνητική: $\Diamond(p \to q) \equiv \Diamond(\neg p \wedge q)$

[7] Ο τύπος ϕ θα πρέπει να περιλαμβάνει μόνο πρωταρχικούς (primitive) συνδέσμους · αν όχι θα πρέπει να κατασκευάσουμε ισοδύναμο τύπο.

Upward & downward monotonicity

Definition (Upward & downward monotonicity)

Ένας τροπικός τύπος ϕ θα λέγεται *ανοδικά/καθοδικά μονότονος* (upward/downward monotone) στην μεταβλητή p εάν η αλήθεια του διατηρείται σε *επεκτάσεις/περιορισμούς* (extensions/shrinkings) της αποτίμησης της p[8].

Theorem

Έστω ϕ τροπικός τύπος. Τότε:

1. *αν ϕ θετικός στην p, τότε ϕ ανοδικά μονότονος στην p, και*
2. *αν ϕ αρνητικός στην p, τότε ϕ καθοδικά μονότονος στην p.*

[8] Ισοδύναμα, η επέκταση της $V(p)$ επεκτείνει/περιορίζει τη $V(\phi)$ ή τη διατηρεί αμετάβλητη.

Very simple Sahlqvist antecedent

Definition (Very simple Sahlqvist formula)

Στη βασική τροπική γλώσσα, θα ορίζουμε ως *απλό πρωταρχικό τύπο Sahlqvist* (very simple Sahlqvist antecedent), κάθε τύπο που μπορεί να κατασκευαστεί από τους τελεστές $\top$, $\bot$, $\wedge$, $\Diamond$ και τις προτασιακές μεταβλητές, και ως *απλό τύπο Sahlqvist* (very simple Sahlqvist formula), κάθε συνεπαγωγή της μορφής $\phi \to \psi$, όπου ϕ πρωταρχικός τύπος Sahlqvist και ψ θετικός τύπος.

Example

$p \to \Diamond p$

$(p \wedge \Diamond\Diamond q) \to \Box\Diamond(p \wedge q)$

The substitution algorithm 1

Ο τύπος K_4: $\Box p \to \Box\Box p$, μετασχηματίζεται σε $[1]p \to [2][3]p$.

Φάση 1η Ανάλυση της *προκείμενης πρότασης* (antecedent).
Το p αληθεύει μόνο[9] στους R-απόγονους του x, $Pu := Rxu$

Φάση 2η Ανάλυση του *συμπεράσματος* (consequent).
$\Box\Box p \equiv \forall y(Rxy \to \forall z(Ryz \to Pz))$

Φάση 3η Η Pz γίνεται Rxz.

Ο τύπος: $\forall y(Rxy \to \forall z(Ryz \to Rxz))$, είναι ισοδύναμος με τη μεταβατικότητα (transitivity).
Παρατηρούμε ότι:

- το $[2]$ αντιστοιχεί στο "$\forall y(Rxy \to$",
- το $[3]$ στο "$\forall z(Ryz \to$" και
- το $[1]$ στο "Rxz".

[9] Αν το συμπέρασμα ισχύει για την ελάχιστη αποτίμηση, τότε θα ισχύει, λόγω μονοτονίας, και για όλες τις υπόλοιπες που καθιστούν την προκείμενη αληθή.

The substitution algorithm $_2$

Theorem

Υπάρχει αποδοτικός αλγόριθμος ο οποίος μεταφράζει όλα τα τροπικά αξιώματα της ειδικής μορφής $A \to B$ σε αντίστοιχες πρωτοβάθμιες ιδιότητες, όπου

- *το A αποτελείται από βασικούς τύπους $\Box \ldots \Box p$ με χρήση μόνο των τελεστών $\vee$, $\wedge$, $\Diamond$ και*
- *το B είναι θετικό (positive): αποτελείται από προτασιακές μεταβλητές και τους λογικούς τελεστές $\vee$, $\wedge$, $\Diamond$, $\Box$.*

- Οι τύποι αυτής της μορφής είναι τύποι Sahlqvist[10].

[10] Εμφανίζονται και σε λίγο πιο γενική μορφή.

First order correspondence in frames

Theorem (Sahlqvist Theorem)

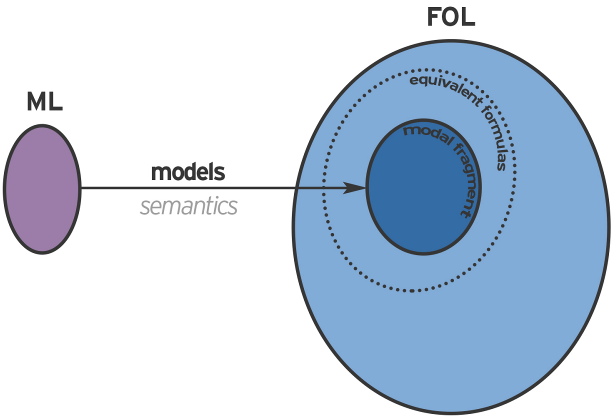
Έστω χ τύπος Sahlqvist στη βασική τροπική γλώσσα. Τότε ο τύπος χ αντιστοιχεί τοπικά σε έναν πρωτοβάθμιο τύπο $c_\chi(x)$. Επιπλέον, ο τύπος c_χ είναι αποδοτικά υπολογίσιμος *(effectively computable) από τον τύπο χ.*

Theorem (Chagrova's Theorem)

Είναι μη αποκρίσιμο πρόβλημα το αν ένας τυχαίος τύπος από τη βασική τροπική γλώσσα έχει πρωτοβάθμιο αντίστοιχο.

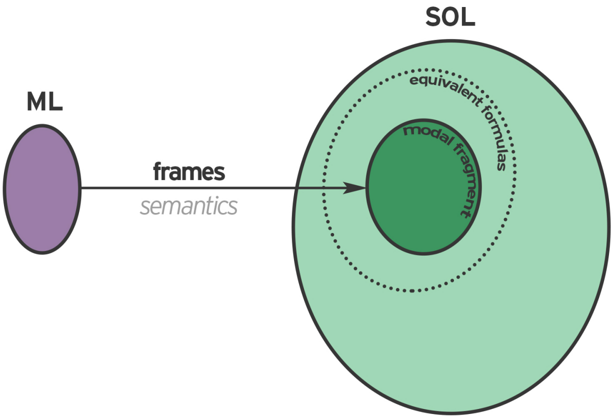
Presentation Outline

Synopsis



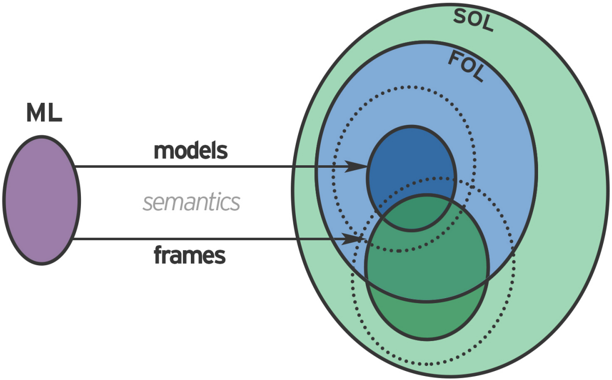
Το τροπικό μέρος σε επίπεδο μοντέλων.

Synopsis



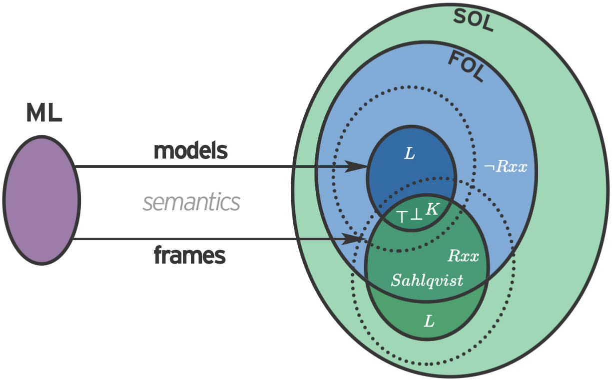
Το τροπικό μέρος σε επίπεδο πλαισίων.

Synopsis



Το τροπικό μέρος σε επίπεδο μοντέλων και πλαισίων.

Synopsis



Το τροπικό μέρος σε επίπεδο μοντέλων και πλαισίων με παραδείγματα γνωστών τύπων.

References

[BBW06] Patrick Blackburn, Johan F. A. K. van Benthem, and Frank Wolter. *Handbook of Modal Logic, Volume 3 (Studies in Logic and Practical Reasoning)*. Elsevier Science Inc., New York, NY, USA, 2006.

[BdRV01] Patrick Blackburn, Maarten de Rijke, and Yde Venema. *Modal Logic*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2001.

[Che80] Brian F. Chellas. *Modal Logic*. Cambridge University Press, 1980. Cambridge Books Online.

[Die06] R. Diestel. *Graph Theory*. Electronic library of mathematics. Springer, 2006.

[EE01] H. Enderton and H.B. Enderton. *A Mathematical Introduction to Logic*. Elsevier Science, 2001.

References

[FM98] M. Fitting and R.L. Mendelsohn. *First-Order Modal Logic*. Synthese Library Studies in Epistemology Logic, Methodology, and Philosophy of Science Volume 277. Springer, 1998.

[Gol92] Robert Goldblatt. *Logics of Time and Computation*. Number 7 in CSLI Lecture Notes. Center for the Study of Language and Information, Stanford, CA, 2 edition, 1992.

[Kol15] Yiorgos Koletsos. *Mathematical Logic*. Kallipos, 2015.

[VB10] J. Van Benthem. *Modal Logic for Open Minds*. CSLI lecture notes. Center for the Study of Language and Information, 2010.

Σας ευχαριστώ πολύ!!