ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΕΙΚΤΕΣ ΙΚΑΝΟΤΗΤΑΣ ΔΙΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΕ ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΚΑΙ ΜΗ ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΞΙ ΣΙΓΜΑ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

της

ΜΑΡΙΑΣ ΠΕΤΡΟΓΙΑΝΝΟΥ

Α.Μ.:
09110019

Επιβλέπων: Κουκουβίνος Χρήστος,
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, 2016

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF APPLIED MATHEMATICS AND PHYSICS SCIENCES

PROCESS CAPABILITY INDICES FOR NORMAL AND NON NORMAL DISTRIBUTIONS AND SIX-SIGMA METHODOLOGY

THESIS

by

MARIA PETROGIANNOU

I.D.:
09110019

Supervisor professor: Koukouvinos Christos,
Professor N.T.U.A.

Athens, 2016

Περίληψη

Το σύγχρονο ανταγωνιστικό περιβάλλον επιβάλλει σε κάθε επιχείρηση να υιοθετήσει προγράμματα και να εφαρμόσει ειδικές μεθοδολογίες με σκοπό τη συνεχόμενη βελτίωση της παραγωγικής διαδικασίας και την υψηλή ποιότητα των παραγόμενων προϊόντων της. Για τη μέτρηση της απόδοσης και της ικανότητας μιας διεργασίας να παράγει προϊόντα σύμφωνα με τις προδιαγραφές, άλλες επιχειρήσεις χρησιμοποιούν τους δείκτες επίδοσης διεργασίας οι οποίοι υπολογίζονται σε συνεχή βάση με χρήση των στατιστικών δεδομένων που συγκεντρώνουν και άλλες υιοθετούν την ποιοτική μεθοδολογία «6 Σίγμα». Αντικείμενο μελέτης αυτής της εργασίας αποτελούν οι δείκτες ικανότητας διεργασίας για την κανονική κατανομή και για μη κανονική κατανομή.

Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται παρουσίαση, ανάπτυξη και εκτίμηση των κυριότερων δεικτών επίδοσης διεργασίας για κανονικές διεργασίες.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται και εξετάζεται η σχέση μεταξύ των δεικτών επίδοσης μιας διεργασίας και της μεθόδου «6 Σίγμα».

Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται παρουσίαση των μεθόδων υπολογισμού δεικτών ικανότητας για μη κανονικές κατανομές.

Τέλος, στο τελευταίο κεφάλαιο γίνεται παρουσίαση της Poisson παλινδρόμησης και απόδειξη του ολικού ποσοστού των ελαττωματικών προϊόντων σε ένα προφίλ Poisson παλινδρόμησης υπό μια διακριτή κατάσταση και υπό μια συνεχή κατάσταση και στη συνέχεια με τη βοήθεια αυτού του ποσοστού υπολογίζονται και οι αντίστοιχοι δείκτες ικανότητας διεργασίας.

Abstract

The contemporary competitive environment boosts almost every modern enterprise to adopt programs and apply special techniques aiming at the continuous improvement of the productive process and the high quality of its products. The assessment of the efficiency and capability of a process to produce units fulfilling the desired specifications, is achieved either by the calculation of well established process capability indices (evaluated in a continuous framework via the available data in each time instance) or by adopting the most integrated and widely accepted "6 Sigma" program.

In the current thesis we present the main process capability indices for normal and non-normal distribution.

In the first chapter we present the most popular process capability indices that have been proposed for normal processes and discuss how they can be estimated through the available data.

In the second chapter we focus on the relationship between the process capability indices and the "6 Sigma" method.

In the third chapter we present the methods which are used to estimate process capability indices for non-normal processes.

In the last chapter we present Poisson regression and we prove the total percentage of nonconforming items in a Poisson regression profile under a discrete state and under a continuous state and also with this percentage the corresponding process capability indices were estimated.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η εκπόνηση και η ολοκλήρωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας πραγματοποιήθηκε υπό την επίβλεψη του Καθηγητή του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, κ. Χρήστου Κουκουβίνου, τον οποίο ευχαριστώ θερμά για την καθοδήγησή του σε όλη τη διάρκεια συγγραφής της εργασίας, καθώς και τη δυνατότητα που μου προσέφερε να ασχοληθώ με ένα ιδιαίτερα ενδιαφέρον θέμα.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω την υποψήφια διδάκτωρ Λάππα Αγγελική, για την πολύτιμη βοήθεια και το συνεχές ενδιαφέρον της, η οποία δίνοντας ιδέες και χρήσιμες παρατηρήσεις συνέβαλε καθοριστικά σε όλη την πορεία της μελέτης μου.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για την υποστήριξη, τα εφόδια που μου προσέφερε και την ενθάρρυνση της στην ολοκλήρωση της προσπάθειας μου.

Περιεχόμενα

Περίληψη v

Abstract vii

Ευχαριστίες ix

Κατάλογος Πινάκων xv

Κατάλογος Σχημάτων xvii

Κεφάλαιο 1ο : Δείκτες ικανότητας διεργασίας για την κανονική κατανομή

1.1 Εισαγωγή 19

1.2 Ο δείκτης επίδοσης C_p 23

1.2.1 Ορισμός και χρήση του δείκτη C_p 23

1.2.2 Εκτίμηση του Δείκτη Ικανότητας Διαδικασίας C_p 27

1.2.3 Διαστήματα εμπιστοσύνης για το δείκτη C_p 29

1.2.4 Έλεγχος υποθέσεων για το δείκτη C_p 30

1.2.5 Αδυναμίες του δείκτη C_p 32

1.3 Δείκτες Ικανότητας Διεργασίας για μια εκτός κέντρου διεργασία 32

1.3.1 Ορισμός και χρήση του δείκτη C_{pk} 32

1.3.2 Εκτίμηση του δείκτη ικανότητας διεργασίας C_{pk} 37

1.3.3 Διαστήματα εμπιστοσύνης για το δείκτη C_{pk} 37

1.3.4 Έλεγχοι υποθέσεων για το δείκτη ικανότητας C_{pk} 38

1.3.5 Αδυναμίες του δείκτη ικανότητας C_{pk} 39

1.4 Ο Δείκτης Ικανότητας Διεργασίας C_{pm} 39

1.4.1 Ορισμός και ιδιότητες του δείκτη C_{pm} 40

1.4.2 Εκτίμηση του δείκτη ικανότητας διεργασίας C_{pm} 42

1.4.3 Διαστήματα εμπιστοσύνης για το δείκτη C_{pm} 43

1.4.4 Έλεγχος υποθέσεων για το δείκτη ικανότητας C_{pm} 45

1.4.5 Αδυναμίες του δείκτη ικανότητας C_{pm} 47

1.5 Ο Δείκτης Ικανότητας Διεργασίας C_{pmk} 47

1.5.1 Ορισμός και χαρακτηριστικά του δείκτη C_{pmk} 47

1.5.2 Εκτίμηση του δείκτη ικανότητας C_{pmk} 49

1.5.3 Διαστήματα εμπιστοσύνης του δείκτη C_{pmk} 51

1.5.4 Αδυναμίες του δείκτη C_{pmk} 52

1.6 Ανάλυση της ικανότητας της διεργασίας χρησιμοποιώντας ένα διάγραμμα ελέγχου 53

1.7 Δείκτες Απόδοσης Διεργασίας 54

Κεφάλαιο 2ο : Μέθοδος «6 Σίγμα»

2.1 Γενική εισαγωγή 59

2.2 Ορισμοί για τη μέθοδο «6 Σίγμα» 60

2.3 Στόχος και χαρακτηριστικά της μεθόδου «6 Σίγμα» 62

2.4 Σύγκριση Διοίκησης Ολικής Ποιότητας και μεθόδου «6 Σίγμα» 63

2.5 Στρατηγικές και Μεθοδολογίες «6 Σίγμα» 65

2.6 Οφέλη από τη μεθόδου «6 Σίγμα» 68

2.7 Μειονεκτήματα της μεθόδου «6 Σίγμα» 69

Κεφάλαιο 3ο : Δείκτες ικανότητας διεργασίας για μη κανονικές κατανομές

3.1 Εισαγωγή 71

3.2 Μέθοδοι υπολογισμού δεικτών ικανότητας για μη κανονικές κατανομές 75

3.2.1 Γράφημα πιθανότητας 75

3.2.2 Κατανομή – Ανεξάρτητα διαστήματα ανοχής 76

3.2.3 Μέθοδος σταθμισμένης μεταβλητής 77

3.2.4 Μέθοδος Clements 78

3.2.5 Ποσοστιαία μέθοδος Burr 80

3.2.6 Τεχνικές μετασχηματισμού 83

3.2.6.1 Box-Cox μετασχηματισμός 83

3.2.6.2 Johnson μετασχηματισμός 85

3.3 Ένα κριτήριο σύγκρισης μεταξύ των μεθόδων Clements, Box-Cox, Burr 88

3.4 Εκτελέσεις προσομοίωσης μεταξύ μεθόδων Clements, Box-Cox, Burr 90

3.5 Επίλογος 95

Κεφάλαιο 4ο : Poisson Παλινδρόμηση

4.1 Εισαγωγή 97

4.2 Η Poisson κατανομή 99

4.3 Λογαριθμοκανονικά μοντέλα 102

4.4 Εκτίμηση και Έλεγχος 104

4.4.1 Εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας 104

4.4.2 Έλεγχος των συντελεστών β 105

4.5 Ελεγχοσυνάρτηση Deviance 106

4.6 Υπόλοιπα 108

4.6.1 Υπόλοιπα Pearson 109

4.6.2 Υπόλοιπα Deviance 109

4.7 Προφίλ Poisson παλινδρόμησης 110

Βιβλιογραφία 117

Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 1.2.1 : Αποτίμηση και ανταπόκριση σε σχέση με τις τιμές του δείκτη C_p 24

Πίνακας 1.2.2 : Καθορισμός μέγεθος δείγματος και κρίσιμης τιμής για τον έλεγχο $H_0 : C_p=C_{p0}$ 32

Πίνακας 1.3.1 : Συνθήκες ποιότητας και C_{pk} τιμές 36

Πίνακας 1.4.1 : Πίνακας ιδιοτήτων του δείκτη C_{pm} 42

Πίνακας 1.4.2 : Τιμές των $C_{pm}(high)/C_{pm}(low)$ και $c/C_{pm}(low)$ για α=β=0.05 και α=β=0.10 46

Πίνακας 1.5.1 : Ιδιότητες του δείκτη C_{pmk} 48

Πίνακας 1.7.1 : Αποτελέσματα του $\boldsymbol{P_{pk}}$ 55

Πίνακας 1.7.2 : Οι δείκτες C_p , C_{pk} και P_{pk} για τις τρεις διεργασίες 56

Πίνακας 2.1 : Σύγκριση μεταξύ της Διοίκησης Ολικής Ποίοτητας και της μεθόδου «6 σίγμα» 63

Πίνακας 3.1 : Δείκτες ικανότητας διεργασίας χρησιμοποιώντας τη μέθοδο ποσοστημορίων Burr (πίνακας σε αναφορά των Ahmad, Abdollahian, Zeephongsekul 2007-2008). 82

Πίνακας 3.2 : Ο μέσος και η τυπική απόκλιση για 30 C_{pu} τιμές με n=100 με τη μέθοδο Weibull (πίνακας σε αναφορά των Ahmad, Abdollahian, Zeephongsekul 2007-2008). 91

Πίνακας 3.3 : Ο μέσος και η τυπική απόκλιση για 30 C_{pu} τιμές με n=100 με τη μέθοδο Γάμμα (πίνακας σε αναφορά των Ahmad, Abdollahian, Zeephongsekul 2007-2008). 92

Πίνακας 3.4 : Ο μέσος και η τυπική απόκλιση για 30 C_{pu} τιμές με n=100 με τη Λογαριθμοκανονική μέθοδο (πίνακας σε αναφορά των Ahmad, Abdollahian, Zeephongsekul 2007-2008)..... 92

Πίνακας 4.1 : Χτυπήματα ιπτάμενων βομβών στο Λονδίνο κατα τη διάρκεια του δεύτερου παγκόσμιου πολέμου 99

Κατάλογος Σχημάτων

Σχήμα 1.2.1 Σχέση των C_p παραμέτρων 23

Σχήμα 1.2.2 Πιθανότητα παραγωγής ελαττωματικού προϊόντος για μ=Μ. 26

Σχήμα 1.2.3 Λειτουργική Καμπύλη για a) n=30, C=1.33, b) n=70, C=1.46 31

Σχήμα 1.3.1 Σχέση των C_p και των C_{pk} 35

Σχήμα 1.7.1 Τρεις διεργασίες με κακό δείκτη $\boldsymbol{P_p}$ 57

Σχήμα 3.1 Δείκτες ικανότητας διεργασίας για μη κανονικά κατανεμημένα χαρακτηριστικά ποιότητας 74

Σχήμα 3.2 Κανονική κατανομή με εύρος διαστήματος τιμών 99.73% και μη-κανονική κατανομή με εύρος διαστήματος τιμών και πάλι 99.73% 75

Σχήμα 3.3 Σχήμα Box-Cox μετασχηματισμού για r = -1,0, 0.5,1,2,3.....85

Σχήμα 3.4 Box plot για την εκτίμηση C_{pu} τιμών με τιμή στόχο $C_{pu} = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$ για την κατανομή Weibull 93

Σχήμα 3.5 Box plot για την εκτίμηση C_{pu} τιμών με τιμή στόχο $C_{pu} = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$ για την κατανομή Γάμμα 93

Σχήμα 3.6 Box plot για την εκτίμηση C_{pu} τιμών με τιμή στόχο $C_{pu} = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$ για τη λογαριθμικανονική κατανομή.....94

Δείκτες Ικανότητας Διεργασίας για την Κανονική Κατανομή

1.1 Εισαγωγή

Στο σύγχρονο ανταγωνιστικό περιβάλλον, προκειμένου να πετύχουμε τη συνεχόμενη βελτίωση της παραγωγικής διαδικασίας, απαιτείται η υψηλή ποιότητα των παραγόμενων προϊόντων της. Για αυτόν το λόγο, έχει επιβάλλει η κάθε επιχείρηση να υιοθετήσει προγράμματα και να εφαρμόσει ειδικές μεθοδολογίες προκειμένου να παράγει προϊόντα που βρίσκονται εντός των ορίων προδιαγραφών. Αναμφισβήτητα ο Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας αποτελεί ένα πολύ σημαντικό βοήθημα κάθε παραγωγικής επιχείρησης που επηρεάζει αποφάσεις σχετικά με τις προδιαγραφές, την παραγωγική διαδικασία και τον έλεγχο των παραγόμενων προϊόντων. Για να μπορέσει η χρήση του Στατιστικού Ελέγχου Ποιότητας να είναι αποτελεσματική, θα πρέπει να ενσωματωθεί σε ένα πλαίσιο λειτουργίας και διοίκησης της επιχείρησης. Πολλές βιομηχανικές επιχειρήσεις χρησιμοποιούν ένα από τα πιο χρήσιμα εργαλεία του Στατιστικού Ποιοτικού Ελέγχου, που λέγονται δείκτες ικανότητας μιας διεργασίας.

Οι δείκτες ικανότητας μιας διεργασίας χρησιμοποιούνται ευρέως και δίνουν με έναν εύχρηστο και άμεσο τρόπο μια άμεση ένδειξη για το πως μπορεί να βελτιωθεί η παραγωγική διαδικασία και να αποκτήσουν υψηλή ποιότητα τα προϊόντα της εκάστοτε επιχείρησης. Οι παραπάνω δείκτες χρησιμοποιούνται για τη μέτρηση της ικανότητας μιας παραγωγικής διαδικασίας να κατασκευάσει προϊόντα τα οποία ικανοποιούν κάποιες προδιαγραφές. Οι προδιαγραφές αυτές είναι άμεσα συνδεδεμένες με ένα ποιοτικό, μετρήσιμο χαρακτηριστικό (π.χ. μήκος, βάρος, διάμετρος) των παραγόμενων από τη διεργασία προϊόντων, οι τιμές του οποίου είναι επιθυμητό να βρίσκονται εντός κάποιων προκαθορισμένων, από τη φάση σχεδιασμού τους, ορίων. Τα όρια αυτά ονομάζονται όρια προδιαγραφών.

Σε κάθε παραγωγική διεργασία, ανεξάρτητα από το πόσα καλά σχεδιασμένη είναι και το πόσο προσεκτικά επιβλέπεται και συντηρείται, θα υπάρχει πάντα μια μορφή φυσικής μεταβλητότητας που θα τη συνοδεύει. Δηλαδή όσο καλά ρυθμισμένα και αν είναι τα μηχανήματα, όσο ικανοί και αν είναι οι χειριστές των μηχανημάτων, όσο ικανοποιητική είναι η πρώτη ύλη, ποτέ δύο παραγόμενα προϊόντα δε θα είναι ίδια. Θα υπάρχει σίγουρα κάποιο μετρήσιμο μέγεθος που θα έχει διαφορετική τιμή για τα δύο αυτά προϊόντα. Αυτή η φυσική μεταβλητότητα είναι το αθροιστικό αποτέλεσμα πολλών μικρών αιτιών οι οποίες αναφέρονται ως κοινές ή τυχαίες αιτίες μεταβλητότητας (common or chance causes of variation). Μια διεργασία η οποία λειτουργεί μόνο με την παρουσία φυσικής μεταβλητότητας λέμε ότι είναι εντός ελέγχου διεργασία (in control process), ή ότι λειτουργεί σε ευσταθή κατάσταση (stable state).

Βέβαια σε μια διεργασία, εκτός από τις μορφές μεταβλητότητας που οφείλονται σε τυχαίες αιτίες, μπορεί να εμφανίζονται περιστασιακά και άλλες μορφές μεταβλητότητας που αφορούν τη συστηματική αλλαγή στο επίπεδο κάποιου ή κάποιων ποιοτικών χαρακτηριστικών (quality characteristics) που καθορίζουν την τελική ποιότητα του προϊόντος. Αυτές οι μορφές οφείλονται σε κακή χρήση των μηχανημάτων από τους χειριστές, σε λανθασμένα ρυθμισμένες μηχανές, σε κακή ποιότητα ή ελαττωματική πρώτη ύλη. Κάτω από αυτές τις συνθήκες θα λέμε ότι η διεργασία λειτουργεί με την παρουσία ειδικής μεταβλητότητας και ότι είναι εκτός ελέγχου διεργασία (out of control process) ή ότι λειτουργεί σε ασταθή κατάσταση (unstable state).

Εξίσου σημαντικά με τη φυσική και ειδική μεταβλητότητα είναι τα όρια προδιαγραφών (specification limits) των ποιοτικών χαρακτηριστικών του προϊόντος τα οποία καθορίζονται στη φάση σχεδιασμού τους, όπως επίσης εκεί ορίζεται και μια επιθυμητή τιμή για το ποιοτικό χαρακτηριστικό που αναφέρεται ως τιμή στόχος (target value, T) που βρίσκεται ανάμεσα στο διάστημα των ορίων προδιαγραφών δηλαδή στο διάστημα [LSL,USL] όπου LSL, USL είναι το κάτω και το άνω όριο προδιαγραφών αντίστοιχα. Εντός αυτών των ορίων πρέπει να βρίσκονται οι τιμές του ποιοτικού χαρακτηριστικού για κάθε παραγόμενο προϊόν προκειμένου να είναι ποιοτικά αποδεκτό. Κάτω από συνθήκες φυσικής μεταβλητότητας η συντριπτική πλειοψηφία των τιμών του ποιοτικού χαρακτηριστικού στα παραγόμενα

προϊόντα βρίσκεται εντός των ορίων προδιαγραφών. Όμως κάτω από συνθήκες ειδικής μεταβλητότητας δεν ισχύει το ίδιο μιας και η εμφάνιση της μπορεί να επιφέρει αλλαγή στην κατανομή των τιμών του ποιοτικού χαρακτηριστικού.

Σε μια διεργασία η έγκαιρη ανίχνευση της εμφάνισης ειδικών αιτιών μεταβλητότητας, προκειμένου να προχωρήσουμε σε έρευνα και να προβούμε στις απαραίτητες διορθωτικές ενέργειες προτού κατασκευαστούν αρκετά προϊόντα μη συμμορφούμενα (nonconforming) με τις προδιαγραφές, αποτελεί κύριο αντικείμενο του Στατιστικού Ελέγχου Ποιότητας. Μια από τις πιο διαδεδομένες τεχνικές ανίχνευσης αιτιών μεταβλητότητας σε μια διεργασία είναι τα διαγράμματα ελέγχου (control charts).

Αναμφίβολα η ανάλυση της ικανότητας της διεργασίας είναι ένα μέρος από τη συνολική προσπάθεια βελτίωσης της ποιότητας των παραχθέντων προϊόντων που έχει μεγάλη ζωτική σημασία. Μερικές από τις κυριότερες χρήσεις των δεδομένων από μια ανάλυση ικανότητας της διεργασίας είναι τα ακόλουθα:

1. Η πρόβλεψη κατά πόσο καλά η διεργασία βρίσκεται εντός των ορίων ανοχής.
2. Η μείωση της μεταβλητότητας της διεργασίας.
3. Η παροχή βοήθειας στον καθορισμό διαστημάτων στη δειγματοληψία για την παρακολούθηση της διεργασίας.
4. Η παροχή βοήθειας στους κατασκευαστές/σχεδιαστές του προϊόντος στην επιλογή ή μετατροπή της διεργασίας.
5. Η επιλογή μεταξύ ανταγωνιζόμενων προμηθευτών και άλλων πτυχών της διαχείρισης της αλυσίδας προμηθειών.
6. Ο καθορισμός των απαιτήσεων για νέο εξοπλισμό.
7. Ο σχεδιασμός της ακολουθίας των διεργασιών παραγωγής, όταν υπάρχει μια διαδραστική επίδραση την διεργασιών στα όρια ανοχής.

Είναι πολύ σημαντικό να μπορέσουμε να καθορίσουμε το βαθμό αποτελεσματικότητας της διεργασίας που παράγει προϊόντα με τιμές X εντός των ορίων προδιαγραφών, για αυτό λόγο κρίνεται απαραίτητη η χρήση των δεικτών ικανότητας διεργασίας (process capability indices).

Οι δείκτες επίδοσης διεργασιών είναι μη αρνητικές συναρτήσεις των ποσοτήτων μ, σ, LSL, USL και T της διεργασίας. Μια σημαντική ιδιότητα τους είναι ότι δεν επηρεάζονται από τις μονάδες μέτρησης του ποιοτικού χαρακτηριστικού με αποτέλεσμα να επιτρέπουν τη σύγκριση διαδικασιών με διαφορετικές μονάδες μέτρησης. Μεγάλη τιμή ενός δείκτη επίδοσης διεργασίας αποτελεί συνήθως ένδειξη ότι η διαδικασία είναι ικανή δηλαδή ότι παράγει προϊόντα με τιμές X εντός των ορίων προδιαγραφών και όσο το δυνατό πιο κοντά στην τιμή στόχο T. Αυτό όμως δεν είναι απόλυτο. Προφανώς μια ιδανική διαδικασία είναι εκείνη της οποίας ο μέσος είναι ίσος με την τιμή στόχο και η τυπική απόκλιση είναι ίση με το μηδέν. Αυτό πρακτικά είναι αδύνατον να επιτευχθεί και για το λόγο αυτό στόχος μας είναι να επιτύχουμε διαδικασίες που θα έχουν όσο το δυνατόν μικρότερη τυπική απόκλιση, με μέσο που θα βρίσκεται όσο το δυνατόν κοντύτερα στην τιμή στόχο και ταυτόχρονα όσο το δυνατόν κοντύτερα στο μέσο του διαστήματος προδιαγραφών.

Ο δείκτης ικανότητας θα πρέπει να υπολογίζεται υπό τις ακόλουθες σημαντικές υποθέσεις:

1) Το ποιοτικό χαρακτηριστικό ακολουθεί την κανονική κατανομή.

2) Η διαδικασία είναι υπό στατιστικό έλεγχο, δηλαδή μέσα στα όρια προδιαγραφών

3) Στην περίπτωση δίπλευρων προδιαγραφών, ο μέσος της διαδικασίας είναι κεντραρισμένος μεταξύ του άνω και του κάτω όριου προδιαγραφών.

Γενικά, θέλουμε οι παρατηρήσεις του χαρακτηριστικού που μελετάμε να είναι ανεξάρτητες.

Οι παραπάνω υποθέσεις είναι κρίσιμες για την ακρίβεια και την εγκυρότητα των τιμών των δεικτών ικανότητας μιας διεργασίας κι αν δεν ισχύουν τότε οι τιμές αυτές μπορεί να προκύπτουν εσφαλμένες (Montgomery (2009, 6th edition)).

Στο κεφάλαιο αυτό θα γίνει μια συνοπτική παρουσίαση των κυριότερων δεικτών επίδοσης διεργασίας. Αυτοί είναι οι δείκτες C_p , C_{pk} , C_{pm} , C_{pmk} , p_p, p_{pk} που παρουσιάζονται εκτενώς παρακάτω. Κάθε ένας από αυτούς προτάθηκε

με σκοπό να ξεπεράσει κάποιες από τις αδυναμίες των δεικτών που είχαν προταθεί προηγουμένως.

1.2 Ο δείκτης επίδοσης C_p

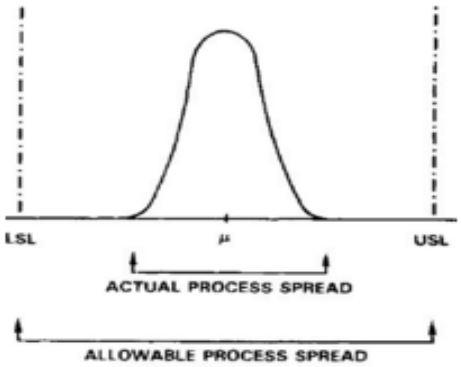
1.2.1 Ορισμός και χρήση του δείκτη C_p

Ο δείκτης C_p αναπτύχθηκε για διεργασίες που ακολουθούν την κανονική κατανομή. Είναι γνωστό ότι η παρατηρούμενη τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής X που ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(\mu,\sigma^2)$ βρίσκεται με μεγάλη βεβαιότητα (με πιθανότητα 99.73%) στο διάστημα $(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)$ δηλαδή εντός διαστήματος εύρους 6σ. Έτσι ο δείκτης C_p μπορεί να οριστεί περιγραφικά ως εξής:

$$C_p = \frac{\text{Επιτρεπτό εύρος διεργασίας (Allowable Process Spread)}}{\text{Πραγματικό εύρος διεργασίας (Actual Process Spread)}} \qquad (1.2.1)$$

δηλαδή $C_p = \frac{USL-LSL}{6\sigma}$ (1.2.2) όπου USL, LSL άνω και κάτω όριο προδιαγραφών και σ είναι η τυπική απόκλιση της διεργασίας.

Αυτός ο δείκτης εκφράζει τη σχέση του εύρους των ορίων προδιαγραφών ενός προϊόντος *(USL-LSL)* με το φυσικό εύρος τιμών της διεργασίας [(μ+3σ)-(μ-3σ)] = 6σ.



Σχήμα 1.2.1 Σχέση των C_p παραμέτρων

Η ποσότητα

$P = \left(\frac{1}{Cp}\right) \cdot 100\% = \left(\frac{6\sigma}{USL-LSL}\right) \cdot 100\%$ (1.2.3) δηλώνει το ποσοστό του εύρους των ορίων προδιαγραφών που χρησιμοποιεί η διεργασία.

Είναι εμφανές ότι επιθυμούμε υψηλή τιμή του δείκτη C_p σε μια διεργασία, κατ' επέκταση μικρή τυπική απόκλιση, δηλαδή μικρή φυσική μεταβλητότητα, επομένως και μικρή τιμή του δείκτη P (ποσά αντιστρόφως ανάλογα).

Ο πίνακας 1.2.1 που παρουσιάστηκε από το Mizuno (1988), δίνει κατευθυντήριες οδηγίες σε διάφορες τιμές του δείκτη C_p που ακολουθούνται στις Η.Π.Α. .

Συγκεκριμένα η τιμή του δείκτη C_p = 1.33 = 4/3 δηλώνει ότι το εύρος 6σ καταλαμβάνει το 75% του εύρους των ορίων προδιαγραφών.

Πίνακας 1.2.1 Αποτίμηση και ανταπόκριση σε σχέση με τις τιμές του δείκτη C_p

C_p	**Αποτίμηση – Ανταπόκριση**
$1.33 \leq C_p$	Επιτυχημένη διεργασία – Δε χρειάζεται συνεχής παρακολούθηση. Πιθανή επιτάχυνση παραγωγής προϊόντων.
$1 \leq Cp \leq 1.33$	Η διεργασία χρειάζεται παρακολούθηση. – Κίνδυνος παραγωγής αυξημένου αριθμού ελαττωματικών προϊόντων.
$C_p < 1$	Αποτυχημένη διεργασία – Χρειάζεται αναθεώρηση του σχεδιασμού (μηχανές, προδιαγραφές).

Στις περιπτώσεις μονόπλευρων προδιαγραφών, χρησιμοποιούμε μονόπλευρους δείκτες ικανότητας διεργασίας, οι οποίες ορίζονται ως ακολούθως:

$$c_{pl} = \frac{\mu - LSL}{3\sigma} = \frac{Κάτω\ επιτρεπτό\ εύρος\ διεργασίας}{Κάτω\ πραγματικό\ εύρος\ διεργασίας} \qquad (1.2.4)$$

(μόνο κάτω όριο προδιαγραφής υπάρχει)

$$c_{pu} = \frac{USL - \mu}{3\sigma} = \frac{Άνω\ επιτρεπτό\ εύρος\ διεργασίας}{Άνω\ πραγματικό\ εύρος\ διεργασίας} \qquad (1.2.5)$$

(μόνο άνω όριο προδιαγραφής υπάρχει)

Οι εκτιμήσεις $\widehat{c_{pl}}$, $\widehat{c_{pu}}$ βρίσκονται αντικαθιστώντας τα *μ* και *σ* στις εξισώσεις αυτές με τις εκτιμήσεις $\hat{\mu}$ και $\hat{\sigma}$ αντίστοιχα.

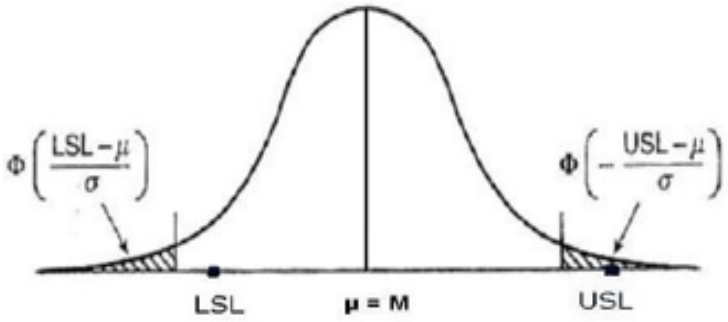
Στη συνέχεια θα θεωρούμε ότι οι τιμές του ποιοτικού χαρακτηριστικού *X* που μελετάμε ακολουθούν την κανονική κατανομή με μέση τιμή *μ* και τυπική απόκλιση *σ* και ότι έχουν καθοριστεί τα όρια προδιαγραφών *LSL* και *USL* στη φάση σχεδιασμού της διεργασίας.

Η πιθανότητα p_c να παραχθεί ένα προϊόν εντός των ορίων προδιαγραφών ονομάζεται απόδοση της διεργασίας και δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$\begin{aligned} p_c = \ & 1 - p_{nc} \ = \ 1 - [\,P(X > USL) + P(X < LSL)] \ = \\ & = 1 - [1 - P(LSL < X < USL)] \ = \ P(LSL < X < USL) = \\ & = \Phi\left(\frac{USL-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{LSL-\mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

(1.2.6)

όπου *Φ(·)* είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυποποιημένης κανονικής κατανομής *N(0,1)* και p_{nc} η πιθανότητα να παραχθεί ένα μη συμμορφωμένο προϊόν (Σχήμα 1.2.2)



Σχήμα 1.2.2 Πιθανότητα παραγωγής ελαττωματικού προϊόντος για μ=Μ

Παρακάτω θα δείξουμε πως, γνωρίζοντας την τιμή του δείκτη C_p , μπορούμε να υπολογίσουμε το όριο το οποίο δεν είναι δυνατόν να υπερβεί η απόδοση της διεργασίας.

Στην περίπτωση όπου μ = M = $\frac{LSL+USL}{2}$

διαπιστώνουμε ότι LSL = μ – 3σC_p και USL = μ + 3σC_p ,

επομένως έχουμε ότι

$$p_c = \Phi\left(\frac{USL-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{LSL-\mu}{\sigma}\right) = \Phi(3C_p) - \Phi(-3C_p) = 2\Phi(3C_p) - 1$$

Άρα, $p_c = 2\Phi(3C_p) - 1$ (1.2.7)

Στη γενική περίπτωση και εφόσον έχουμε ότι LSL < μ < USL θα έχουμε

$$\mu - LSL \leq \frac{USL-LSL}{2}$$

και $$USL - \mu \leq \frac{USL-LSL}{2}$$

οπότε $\Phi\left(\frac{\mu-LSL}{\sigma}\right) \leq \Phi(3C_p)$ και $\Phi\left(\frac{USL-\mu}{\sigma}\right) \leq \Phi(3C_p)$

και επομένως θα ισχύει ότι

$p_c \leq 2\Phi(3C_p) - 1$ (1.2.8)

Δηλαδή η υψηλότερη απόδοση που μπορεί να έχει μια διεργασία είναι $2\Phi(3C_p) - 1$.

Τέλος, να θυμίσουμε ότι στην πράξη παρατηρούμε μια εκτίμηση του δείκτη ικανότητας διεργασίας, η οποία υπόκειται σε σφάλμα κατά την εκτίμηση αφού εξαρτάται από στατιστικά δείγματα. Ένας σωστός τρόπος είναι να εκτιμούμε οποιοδήποτε δείκτη ικανότητας χρησιμοποιώντας ένα διάστημα εμπιστοσύνης, όπως θα δούμε παρακάτω.

1.2.2 Εκτίμηση του Δείκτη Ικανότητας Διαδικασίας C_p

Η μοναδική παράμετρος που περιέχεται στον ορισμό του δείκτη C_p είναι η τυπική απόκλιση σ της διεργασίας. Συνήθως η παράμετρος αυτή είναι άγνωστη και θα πρέπει να την εκτιμήσουμε.

Έστω ότι η διεργασία αποδίδει προϊόντα των οποίων οι τιμές του ποιοτικού χαρακτηριστικού X κατανέμονται κανονικά με μέση τιμή μ και τυπική απόκλιση σ . Τότε συλλέγουμε ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n έστω $X_1,\ldots,X_n$ από την υπό εξέταση διαδικασία και εκτιμούμε τη διασπορά σ^2 μέσω της αμερόληπτης δειγματικής διασποράς

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \qquad (1.2.9)$$

όπου $$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \qquad (1.2.10)$$

Στη συνέχεια εκτιμούμε την τυπική απόκλιση σ μέσω της δειγματικής τυπικής απόκλισης S και τέλος το δείκτη C_p μέσω της εκτιμήτριας

$$\widehat{Cp} = \frac{USL-LSL}{6S} \qquad (1.2.11)$$

Είναι φανερό ότι η εκτιμήτρια S δεν είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του σ, ούτε η $\widehat{Cp}$ είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του δείκτη C_p αφού

$$E\left(\widehat{Cp}\right) = E\left(\frac{USL-LSL}{6S}\right) = \frac{USL-LSL}{6} E\left(\frac{1}{S}\right) \qquad (1.2.12)$$

Και επιπλέον $E\left(\frac{1}{S}\right) \neq \frac{1}{E(S)}$ (1.2.13)

Είναι προφανές ότι

$$(n-1)\left(\frac{Cp}{\widehat{Cp}}\right)^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim X^2_{n-1} \qquad (1.2.14)$$

Οπότε $\sqrt{n-1}\,\frac{Cp}{\widehat{Cp}} \sim X_{n-1}$ (1.2.15)

Αφού η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας *f(x)* της κατανομής ***Xn*** δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = \frac{1}{2^{\left(\frac{n}{2}\right)-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\, e^{-\left(\frac{x^2}{2}\right)} x^{n-1}, \qquad x > 0,\ \ n > 0 \qquad (1.2.16)$$

(βλέπε Johnson et al. (1994)) είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $g_{\widehat{c_p}}(y)$ του εκτιμητή $\hat{C}_p$ δίνεται από τον τύπο

$$g_{\widehat{c_p}}(y) = \frac{2\left(Cp\sqrt{f/2}\right)^f}{\Gamma\left(\frac{f}{2}\right)} y^{-f-1}\, e^{-\frac{f c_p^2}{2y^2}}\, I_{(0,\infty)}(y) \qquad (1.2.17)$$

Όπου $f = n - 1$. Με ολοκλήρωση της παραπάνω προκύπτει ότι

$$E\left(\widehat{Cp}\right) = c(n)\, Cp \qquad (1.2.18)$$

με $$c_n = \sqrt{\frac{f}{2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{f-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{f}{2}\right)} = \sqrt{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \qquad (1.2.19)$$

και

$$E\left(\hat{C}_p{}^2\right) = \frac{f}{f-2}\, c_p^2 = \frac{n-1}{n-3}\, c_p^2 \qquad (1.2.20)$$

Συνεπώς,

$$Var\left(\widehat{C_p}\right) = \left(\frac{f}{f-2} - c^2(n)\right) \cdot c_p^2 = \left(\frac{n-1}{n-3} - c^2(n)\right) \cdot c_p^2 \qquad (1.2.21)$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι ο $\widehat{C_p}$ δεν είναι αμερόληπτος εκτιμητής του Cp , αλλά είναι ασυμπτωτικά αμερόληπτος αφού $\lim_{n\to\infty} c(n) = 1$. Ακόμα το μέσο τετραγωνικό σφάλμα δίνεται από τη σχέση

$$MSE\left(\widehat{C_p}\right) = E\left[\left(\widehat{C_p} - C_p\right)^2\right] = 2C_p^2\left(\frac{n-2}{n-3} - c(n)\right) \qquad (1.2.22)$$

και συνεπώς ο $\widehat{C_p}$ είναι συνεπής εκτιμητής του C_p .

Οι προαναφερθείσες ιδιότητες του εκτιμητή C_p μπορούν να βρεθούν στα άρθρα των Chou et al. (1989, 1990), Chou and Owner (1989), Kane (1986), Li et al (1990) και Kotz and Johnson (1993).

Ο δείκτης C_p δείχνει πόσο ικανή είναι η μηχανή που παράγουμε συνεχόμενα προϊόντα εντός της απαιτούμενης διακύμανσης (Ανοχή).

1.2.3 Διαστήματα εμπιστοσύνης για το δείκτη C_p

Η εύρεση ενός 100(1-α)% διαστήματος εμπιστοσύνης για το δείκτη C_p επιτυγχάνεται αντικαθιστώντας το *σ* με το *s* στην εξίσωση για το C_p , έτσι ώστε να πάρουμε τη σημειακή εκτίμηση του $\widehat{C_p}$ και υποθέτοντας ότι το ποιοτικό χαρακτηριστικό ακολουθεί κανονική κατανομή. Έτσι παίρνουμε τη σχέση

$$\frac{USL-LSL}{6s}\sqrt{\frac{X^2_{1-\frac{a}{2};n-1}}{n-1}} \le C_p \le \frac{USL-LSL}{6s}\sqrt{\frac{X^2_{\frac{a}{2};n-1}}{n-1}} \qquad (1.2.23)$$

ή

$$\widehat{C_p}\sqrt{\frac{X^2_{1-\frac{a}{2};n-1}}{n-1}} \le C_p \le \widehat{C_p}\sqrt{\frac{X^2_{\frac{a}{2};n-1}}{n-1}} \qquad (1.2.24)$$

όπου $X^2_{1-\frac{a}{2};n-1}$ και $X^2_{\frac{a}{2};n-1}$ είναι τα κάτω α/2 και άνω α/2 ποσοστιαία σημεία της $X^2_{(n-1)}$, με (n-1) βαθμούς ελευθερίας.

1.2.4 Έλεγχος υποθέσεων για το δείκτη C_p

Σύμφωνα με τον Kane 1986, στην ανάλυση της ικανότητας μιας διεργασίας, ο έλεγχος της διεργασίας που μας ενδιαφέρει είναι ο εξής:

- H_0 : Η διεργασία δεν είναι ικανή
- H_1 : Η διεργασία είναι ικανή

Η παραπάνω υπόθεση είναι ισοδύναμη με την υπόθεση (1.2.25)

- H_0 : $C_p \leq c_0$
- H_1 : $C_p > c_0$

όπου c_0 είναι μια κρίσιμη τιμή για το δείκτη c_p που συνήθως έχει τιμή 1.33 ή 1.67. Η περιοχή απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης (κρίσιμη περιοχή) είναι της μορφής $\widehat{C_p} > c$, όπου c είναι μια θετική τιμή (κρίσιμη τιμή). Για σφάλμα τύπου *I* ίσο με *α* προκύπτει ότι

$$\alpha = P_{c_{p=c_o}}\left(\widehat{C_p} > c\right) = P_{c_{p=c_o}}\left[(n-1)\left(\frac{C_p}{\widehat{C_p}}\right)^2 \leq (n-1)\left(\frac{C_p}{c}\right)^2\right] =$$

$$P\left[X^2_{n-1} \leq (n-1)\left(\frac{c_0}{c}\right)^2\right] \qquad (1.2.26)$$

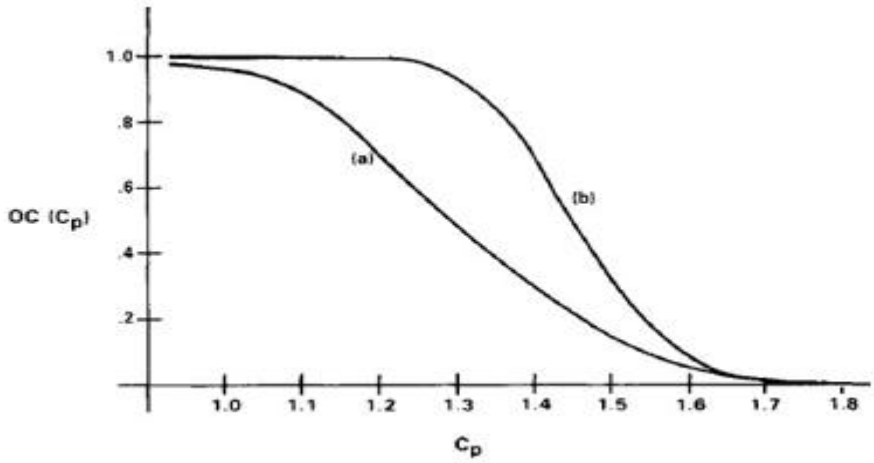
Οπότε $$c = c_0\sqrt{\frac{n-1}{X^2_{n-1,1-a}}} \qquad (1.2.27)$$

Η συνάρτηση ισχύος του ελέγχου δίνεται από τον τύπο: (1.1.28)

$$P(\text{Απόρριψης } H_0) = \pi(C_p) = P\left(\widehat{C_p} > c\right) = P\left[X^2_{n-1} \leq (n-1)\left(\frac{C_p}{c}\right)^2\right]$$

Και η λειτουργική χαρακτηριστική καμπύλη του ελέγχου δίνεται από τη σχέση:

$$OC(C_p) = 1 - \pi(C_p) \qquad (1.1.29)$$



Σχήμα 1.2.3 Λειτουργική Καμπύλη για a) n=30, C=1.33, b) n=70, C=1.46

Σύμφωνα με τον Kane (1986) η επιλογή της κατάλληλης κρίσιμης τιμής *c* πρέπει να βασιστεί σε μια αποδεκτή τιμή Cp(high) του δείκτη Cp , την οποία μπορούμε να την αποδεχτούμε με πιθανότητα (1-α), και σε μια μη αποδεκτή τιμή Cp(low) του δείκτη Cp, την οποία μπορούμε να την απορρίψουμε με πιθανότητα (1-β), με $\mathrm{Cp(low)} \leq \mathrm{Cp(high)}$. Επόμένως, αν ο δείκτης Cp έχει τιμή μεγαλύτερη της τιμής Cp(high) τότε η διεργασία θα θεωρείται ικανή, ενώ αν ο δείκτης έχει τιμή Cp μικρότερη της τιμής Cp(low) τότε η διεργάσια θα θεωρείται μη ικανή.Ο πίνακας 1.2.2 δίνει τις τιμές του λόγου Cp(high) / Cp(low) και c / Cp(low) για διάφορα μεγέθη δειγμάτων και α=β=0.05 ή α=β=0.10.

Πίνακας 1.2.2 Καθορισμός μέγεθος δείγματος και κρίσιμης τιμής για τον έλεγχο $H_0 : C_p=C_{p0}$

Μέγεθος δείγματος, n	(α) $\alpha=\beta=0.10$ $\frac{C_p(High)}{C_p(Low)}$	$\frac{C}{C_p(Low)}$	(β) $\alpha=\beta=0.05$ $\frac{C_p(High)}{C_p(Low)}$	$\frac{C}{C_p(Low)}$
10	1.88	1.27	2.26	1.27
20	1.53	1.20	1.73	1.26
30	1.41	1.16	1.55	1.21
40	1.34	1.14	1.46	1.18
50	1.30	1.13	1.40	1.16
60	1.27	1.11	1.36	1.15
70	1.25	1.10	1.33	1.14
80	1.23	1.10	1.30	1.13
90	1.21	1.10	1.28	1.12
100	1.20	1.09	1.26	1.11

1.2.5 Αδυναμίες του δείκτη C_p

Το βασικότερο μειονέκτημα του δείκτη Cp είναι ότι δε λαμβάνει υπόψη το μέσο της διεργασίας. Συνεπώς δεν επηρεάζεται από τη διαφορά του μέσου από την κεντρική τιμή της ζώνης προδιαγραφών (τιμή-στόχος) της διεργασίας. Επίσης, για να υπολογιστεί ο δείκτης Cp θα πρέπει να υπάρχουν και τα δύο όρια προδιαγραφών του προϊόντος, τα οποία όμως δεν καθορίζονται και τα δύο. Ο δείκτης Cp δεν παρέχει ουσιαστικές ενδείξεις για την πραγματική απόδοση της διεργασίας.

1.3 Δείκτες Ικανότητας Διεργασίας για μια εκτός - κέντρου Διεργασία

1.3.1 Ορισμός και χρήση του δείκτη C_{pk}

Αιτία για την εισαγωγή αυτού του δείκτη ήταν οι αδυναμίες που παρουσίασε ο δείκτης C_p . Όπως θα δούμε παρακάτω, ο δείκτης C_{pk} παρέχει περισσότερες

πληροφορίες για την ικανότητα μιας διεργασίας συγκριτικά με το δείκτη C_p . Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι, κατά τον υπολογισμό του λαμβάνει υπόψη του, πέρα από την τυπική απόκλιση σ της διαδικασίας και το μέσο μ της διαδικασίας.

Από τον ορισμό του δείκτη επίδοσης διεργασίας C_p , που παρουσιάστηκε στην αμέσως προηγούμενη ενότητα, είναι προφανές ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο όταν έχουν καθοριστεί και τα δύο όρια προδιαγραφών δηλαδή το κάτω όριο LSL και το άνω όριο USL. Ωστόσο υπάρχουν περιπτώσεις όπου για ένα προϊόν καθορίζεται μόνο το ένα όριο προδιαγραφών (one-sided specifications) και έτσι ο υπολογισμός του δείκτη C_p είναι αδύνατος. Γι΄ αυτό το λόγο έχουν προταθεί οι δείκτες C_{pk}, C_{pl}, C_{pu} .

Συγκεκριμένα, ο δείκτης C_{pk} είναι ένας συνδυασμός από τους δείκτες C_{pl} και C_{pu}. Ο δείκτης C_{pu} χρησιμοποιείται όταν έχει καθοριστεί μόνο το ανώτερο όριο προδιαγραφών και ο δείκτης C_{pl} έχει προταθεί για τις περιπτώσεις που έχει καθοριστεί μόνο το κατώτερο όριο προδιαγραφών. Οι ορισμοί των C_{pl} , C_{pu} δίνονται από τους παρακάτω τύπους:

$$C_{pl} = \frac{\mu - LSL}{3\sigma} = \frac{\text{Κάτω επιτρεπτό εύρος μετρήσεων}}{\text{Κάτω πραγματικό εύρος μετρήσεων}} \qquad (1.3.1)$$

$$C_{pu} = \frac{USL - \mu}{3\sigma} = \frac{\text{Άνω επιτρεπτό εύρος μετρήσεων}}{\text{Άνω πραγματικό εύρος μετρήσεων}} \qquad (1.3.2)$$

Ο δείκτης C_{pk} ορίζεται ως $C_{pk} = min\,(C_{pl}, C_{pu})$. (1.3.3)

Συνεπώς, με βάση τους παραπάνω τύπους μπορούμε να γράψουμε τον ορισμό του C_{pk} ως εξής:

$$C_{pk} = min\left(C_{pl}, C_{pu}\right) = \min\left(\frac{\mu - LSL}{3\sigma}, \frac{USL - \mu}{3\sigma}\right) = \frac{d - |\mu - M|}{3\sigma} \qquad (1.3.4)$$

όπου $d = \frac{USL - LSL}{2}$ (1.3.5) και $M = \frac{USL + LSL}{2}$ (1.3.6)

Δηλαδή το M ορίζεται ως η κεντρική τιμή του διαστήματος που ορίζουν τα όρια προδιαγράφων σύμφωνα με τον Kotz και Lovelace (1998).

Ο δείκτης ικανότητας C_{pk} δηλώνει την ικανότητα της διεργασίας προς τη μεριά του ορίου προδιαγραφών που ευθύνεται για την παραγωγή του μεγαλύτερου ποσοστού ελαττωματικών προϊόντων και μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε περιπτώσεις που για ένα προϊόν καθορίζεται μόνο ένα όριο προδιαγραφών (one-sided specifications), δηλαδή αποτελεί έναν μονόπλευρο δείκτη για το όριο προδιαγραφής που είναι πλησιέστερο στο μέσο της διεργασίας. Η τιμή του δείκτη C_{pk} ορίζεται να είναι ίση με μηδέν όταν ο μέσος της διεργασίας βρίσκεται εκτός των ορίων προδιαγραφών και έτσι ο δείκτης C_{pk} δεν μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές (Boyles 1991).

Με τη βοήθεια του πρώτου ορισμού, προκύπτει και ένας δεύτερος ορισμός ως εξής, σχέση (1.3.7) :

$$C_{pk} = \frac{d-|\mu-M|}{3\sigma} = \frac{\frac{(USL-LSL)}{2} - \left|\mu - \frac{USL+LSL}{2}\right|}{3\sigma} = C_p \left[1 - \frac{\left|\mu - \frac{USL+LSL}{2}\right|}{d}\right] = C_p\,(1-k)$$

όπου (βλέπε Αντζουλάκος (2006)) $k = \frac{\left|\mu - \frac{USL+LSL}{2}\right|}{d}$

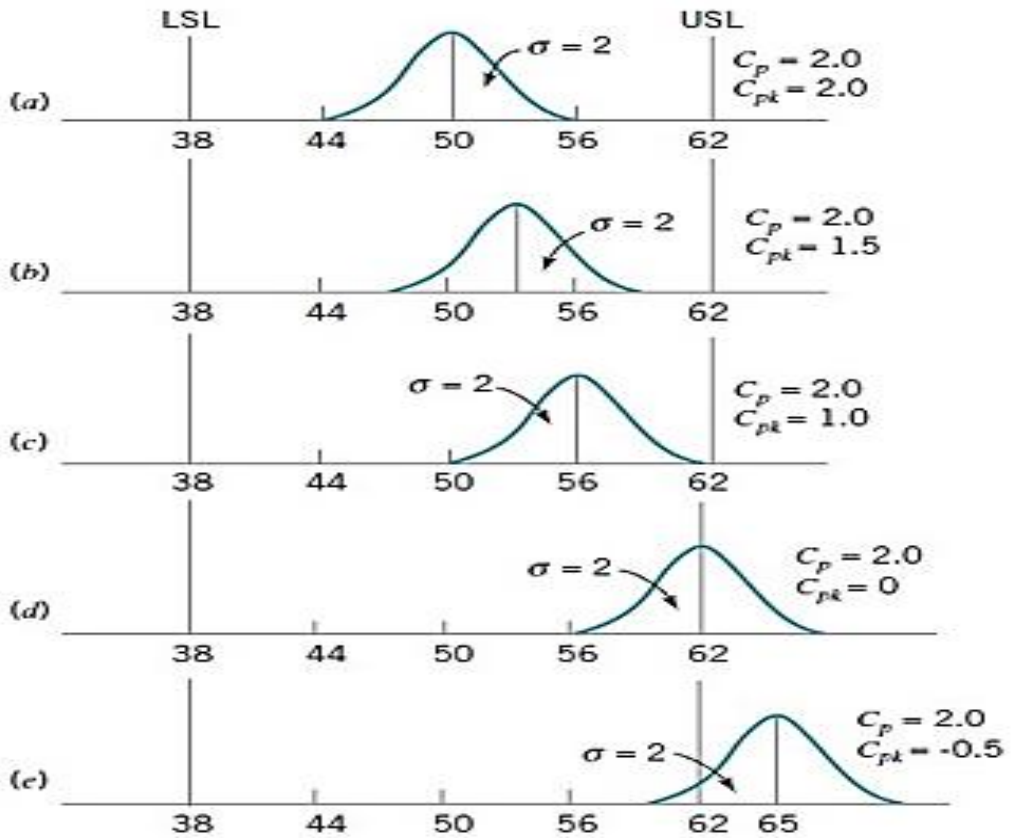
Ο δεύτερος ορισμός περιγράφει την ικανότητα της διεργασίας λαμβάνοντας υπόψη του μόνο τη θέση της διεργασίας (και όχι τη μεταβλητότητα της) και μετράει την απόσταση του μέσου της διεργασίας από το μέσο του διαστήματος που ορίζουν τα όρια προδιαγραφών, σε σχέση με τα όρια προδιαγραφών.

Παρατηρώντας τον ορισμό του k μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε πως η τιμή του βρίσκεται πάντοτε στο διάστημα [0,1] με την προϋπόθεση πως ο μέσος βρίσκεται εντός της περιοχής που ορίζουν τα όρια προδιαγραφών.

Γενικά,

- Αν $C_{pk} = C_p$ η διεργασία κεντράρεται στο μέσο των προδιαγραφών.
- Αν $C_{pk} < C_p$ η διεργασία είναι εκτός κέντρου.

Ο C_{pk} σε σχέση με τον C_p είναι ένα ευθύ μέτρο του πόσο εκτός κέντρου εκτελείται η διεργασία. Πολλές συνήθεις περιπτώσεις απεικονίζονται στο Σχήμα 1.3.1. Γνωρίζουμε ότι ο C_p απλά μετρά το εύρος των προδιαγραφών σχετικά με το άνοιγμα 6σ στη διεργασία και δε λαμβάνει υπόψη του που βρίσκεται ο μέσος της διεργασίας σε σχέση με τις προδιαγραφές. Αυτό φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα. Για παράδειγμα, οι δύο κανονικές κατανομές στο σχήμα έχουν $C_p = 2.0$, αλλά η διεργασία στο Σχήμα 1.3.1.b έχει εμφανώς μικρή ικανότητα από το Σχήμα 1.3.1.a επειδή δεν εκτελείται στο μέσο του διαστήματος μεταξύ των προδιαγραφών.



Σχήμα 1.3.1 Σχέση των C_p και των C_{pk}

Για αυτόν το λόγο λέμε ότι ο C_p μετρά την πιθανή ικανότητα της διεργασίας, ενώ ο C_{pk} μετρά την πραγματική ικανότητα.

Το Σχήμα 1.3.1.d απεικονίζει την περίπτωση στην οποία ο μέσος της διεργασίας είναι ακριβώς ίσος με ένα από τα όρια προδιαγραφών, το οποίο οδηγεί σε $C_{pk} = 0$. Το Σχήμα 1.3.1.e απεικονίζει την περίπτωση που όταν $C_{pk} < 0$, συμπεραίνουμε ότι ο μέσος της διεργασίας βρίσκεται εκτός των ορίων προδιαγραφών. Προφανώς, αν $C_{pk} < -1$, τότε ολόκληρη η διεργασία βρίσκεται εκτός των ορίων προδιαγραφών.

Μια διεργασία καλείται «φτωχή», αν $C_{pk} < 0.67$. Άρα, ικανότητα της διεργασίας είναι φτωχή και η γραμμή παραγωγής θα πρέπει να σταματήσει αμέσως. Μια διεργασία καλείται «ανεπαρκής» αν $0.67 \leq C_{pk} < 1.0$, οπότε η διεργασία δεν είναι επαρκής όσον αφορά τις ανοχές της παραγωγής, είτε η διακύμανση (σ^2) της διεργασίας πρέπει να μειωθεί είτε ο μέσος της διεργασίας πρέπει να μετακινηθεί κοντινότερα στην τιμή στόχο. Μια διεργασία καλείται «ικανή» αν $1.00 \leq C_{pk} < 1.33$ που σημαίνει ότι πρέπει να δοθεί προσοχή όσον αφορά την κατανομή της διεργασίας, δηλαδή χρειάζεται έλεγχος της διεργασίας. Μια διεργασία θεωρείται «ικανοποιητική» αν $1.33 \leq C_{pk} < 1.50$ το οποίο δηλώνει ότι η ποιότητα της διεργασίας είναι ικανοποιητική, μπορεί να επιτραπεί αντικατάσταση υλικού και δεν απαιτείται αυστηρός έλεγχος της ποιότητας. Η διεργασία καλείται εξαιρετική, αν $1.50 \leq C_{pk} < 2.00$. Τέλος, αν $2.00 \leq C_{pk}$ η διεργασία καλείται άριστη. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι πέντε συνθήκες ποιότητας και οι αντίστοιχες C_{pk} τιμές τους.

Πίνακας 1.3.1 Συνθήκες ποιότητας και C_{pk} τιμές

Συνθήκη Ποιότητας	C_{pk} τιμή
Φτωχή	$C_{pk} < 0.67$
Ανεπαρκής	$0.67 \leq C_{pk} < 1.0$
Ικανή	$1.00 \leq C_{pk} < 1.33$
Ικανοποιητική	$1.33 \leq C_{pk} < 1.50$
Άριστη	$1.50 \leq C_{pk} < 2.00$
Εξαιρετική	$2.00 \leq C_{pk}$

1.3.2 Εκτίμηση του Δείκτη Ικανότητας Διεργασίας C_{pk}

Για να μπορέσουμε να εκτιμήσουμε το δείκτη C_{pk} , πρέπει να κάνουμε αντικατάσταση της μέσης τιμής με το δειγματικό μέσο $\bar{X}$ και της τυπικής απόκλισης με τη δειγματική απόκλιση s. Η εκτίμηση του C_{pk} είναι:

$$\hat{C}_{pk} = \min\left(\hat{C}_{pl}, \hat{C}_{pu}\right) = \min\left(\frac{\bar{X}-LSL}{3s}, \frac{USL-\bar{X}}{3s}\right) = \frac{d-|\bar{X}-M|}{3s} = \hat{C}_p(1-k)$$

(1.3.8)

όπου $d = \frac{USL-LSL}{2}$, $M = \frac{USL+LSL}{2}$, $\hat{C}_{pu} = \frac{USL-\bar{X}}{3s}$,

$\hat{C}_{pl} = \frac{\bar{X}-LSL}{3s}$, $k = \frac{2|M-\bar{X}|}{USL-LSL}$, $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$, $s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{n-1}}$

Οι εκτιμήτριες $\hat{C}_{pl}$, $\hat{C}_{pu}$ δεν είναι αμερόληπτες εκτιμήτριες των C_{pl}, C_{pu} καθώς ισχύει $E\left(\frac{1}{s}\right) \neq \frac{1}{E(s)}$.

1.3.3 Διάστημα Εμπιστοσύνης για το Δείκτη Ικανότητας C_{pk}

Η κατασκευή διαστημάτων εμπιστοσύνης για το δείκτη ικανότητας C_{pk} παρουσιάζει αρκετές δυσκολίες διότι η κατανομή του εκτιμητή $\hat{C}_{pk}$ εμπλέκει την από κοινού κατανομή δύο μη κεντρικών t κατανομών.

Ο Heavlin (1988) πρότεινε το ακόλουθο 100(1-α)% διάστημα εμπιστοσύνης για το δείκτη ικανότητας C_{pk} , που αποτελεί τη σχέση (1.3.9)

$$\left(\hat{C}_{pk} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{n-1}{9n(n-3)} + \hat{C}_{pk}{}^2\frac{1}{2(n-3)}\left(1+\frac{6}{n-1}\right)}\ ,\ \hat{C}_{pk} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{n-1}{9n(n-3)} + \hat{C}_{pk}{}^2\frac{1}{2(n-3)}\left(1+\frac{6}{n-1}\right)}\right)$$

Οι Franklin and Wasserman (1992) πρότειναν το ακόλουθο 100(1-α)% διάστημα εμπιστοσύνης για το δείκτη ικανότητας C_{pk}

$$\left(\hat{C}_{pk} - z_{\alpha}\sqrt{\frac{1}{9n} + \hat{C}_{pk}{}^{2}\frac{1}{2(n-1)}}\ ,+\infty\ \right) \qquad (1.3.10)$$

το οποίο δίνει αρκετά ακριβή αποτελέσματα για $n \geq 30$.

Ο Bisell (1990) υποθέτοντας ότι η κατανομή του εκτιμητή $\hat{C}_{pk}$ είναι κανονική πρότεινε το ακόλουθο 95% διάστημα εμπιστοσύνης για το δείκτη C_{pk}

$$\hat{C}_{pk}\left(1 \pm 1.96\sqrt{\frac{1}{9n\hat{C}_{pk}{}^{2}} + \frac{1}{2(n-1)}}\ \right) \qquad (1.3.11)$$

που παρέχει ικανοποιητική ακρίβεια.

Οι Nagata and Nagahata (1992) ανέπτυξαν το ακόλουθο 100(1-α)% διάστημα εμπιστοσύνης για το δείκτη C_{pk} ,

$$\left(\hat{C}_{pk} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{C}_{pk}{}^{2}}{2(n-1)} + \frac{1}{9n}}\ ,\hat{C}_{pk} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{C}_{pk}{}^{2}}{2(n-1)} + \frac{1}{9n}}\ \right) \qquad (1.3.12)$$

1.3.4 Έλεγχοι Υποθέσεων για το Δείκτη Ικανότητας C_{pk}

Στην ανάλυση της ικανότητας μιας διεργασίας ο έλεγχος υπόθεσης που μας ενδιαφέρει είναι ο ακόλουθος:

- H_0 : Η διεργασία δεν είναι ικανή
- H_1 : Η διεργασία είναι ικανή

Η παραπάνω υπόθεση είναι ισοδύναμη με την υπόθεση (1.3.13)

- H_0 : $C_{pk} \leq c_0$
- H_1 : $C_{pk} > c_0$

όπου c_0 είναι μια κρίσιμη τιμή για το δείκτη C_{pk} που συνήθως έχει τιμή 1.33 ή 1.67. Η περιοχή απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης (κρίσιμη περιοχή) είναι της μορφής $\widehat{C_{pk}} > c$, όπου c είναι μια θετική τιμή.

1.3.5 Αδυναμίες του Δείκτη Ικανότητας C_{pk}

Οι πληροφορίες που μας δίνει ο δείκτης C_{pk} , αναφέρονται κυρίως στην ικανότητα της διεργασίας προς τη μεριά εκείνου του ορίου προδιαγραφών που παράγει περισσότερα ελαττωματικά προϊόντα. Ο δείκτης C_{pk}, σε αντίθεση με το δείκτη ικανότητας C_p , αν και λαμβάνει υπόψη του και τις δύο παραμέτρους της διεργασίας μ και σ , δε μας πληροφορεί για το πόσο κοντά βρίσκεται ο μέσος στην κεντρική τιμή της περιοχής προδιαγραφών. Μια άλλη αδυναμία του C_{pk} είναι ότι μπορεί να αυξηθεί ανεξέλεγκτα, ανεξάρτητα από την τιμή του μέσου και αυτό γιατί η τυπική απόκλιση πέραν του ότι αγνοεί την τιμή στόχο, τείνει να είναι και πολύ μικρή. Για αυτό ακριβώς το λόγο, υπάρχει ο δείκτης C_{pm} που μελετάτε παρακάτω.

1.4 Ο Δείκτης Ικανότητας Διεργασίας C_{pm}

Το αδύνατο σημείο των δεικτών C_p, C_{pk} , όπως έχουμε ήδη αναφέρει είναι ότι δε λαμβάνουν υπόψη τους την προκαθορισμένη τιμή στόχο της διεργασίας. Αυτοί οι δείκτες παρόλο που μας ενημερώνουν για την ικανότητας της διεργασίας να παράγει προϊόντα εντός των ορίων προδιαγραφών, δεν μας παρέχουν καμία πληροφορία σχετικά με το πόσο κοντά στην τιμή στόχο βρίσκονται οι παρατηρήσεις μας, δηλαδή δε μας πληροφορούν σχετικά με την ποιότητα των προϊόντων μας. Αυτήν την αδυναμία τους έρχεται να καλύψει ο δείκτης C_{pm} , ο οποίος δε δηλώνει μόνο την ικανότητα της διεργασίας, αλλά και την ποιότητα των παραγόμενων προϊόντων.

Σύμφωνα με το δείκτη C_{pm} , για να είναι μια διαδικασία ικανή δεν αρκεί να παράγει προϊόντα, το μεγαλύτερο ποσοστό των οποίων να βρίσκονται εντός του διαστήματος που ορίζουν τα όρια προδιαγραφών, αλλά θα πρέπει ο μέσος της κατανομής να βρίσκεται όσο το δυνατόν κοντά στην τιμή στόχο *T* ώστε να παράγονται προϊόντα υψηλής ποιότητας. Σε αντίθετη περίπτωση,

όταν δηλαδή οι τιμές των προϊόντων που παράγονται βρίσκονται πολύ κοντά στα όρια προδιαγραφών τότε έχουμε προϊόντα χαμηλής ποιότητας. Με αυτόν τον τρόπο ο δείκτης C_{pm} δηλώνει την ικανότητα της διεργασίας αλλά και την ποιότητα των προϊόντων που παράγονται.

1.4.1 Ορισμός και ιδιότητες του δείκτη C_{pm}

Ο δείκτης ικανότητας C_{pm} ορίζεται από τη σχέση:

$$C_{pm} = \frac{USL-LSL}{6\tau} = \frac{USL-LSL}{6\sqrt{\sigma^2+(\mu-T)^2}} = \frac{d}{3\sqrt{\sigma^2+(\mu-T)^2}} \qquad (1.4.1)$$

Όπου $\tau = \sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}$ είναι η τετραγωνική ρίζα της αναμενόμενης τυπικής απόκλισης από την τιμή στόχο $T = \frac{1}{2}(USL + LSL)$ και $d = \frac{USL-LSL}{2}$.

Ισχύει $\tau^2 = E[(x-T)^2] = E[(x-\mu)^2] + (\mu - T)^2 = \sigma^2 + (\mu - T)^2$ (1.4.2)

Διαπιστώνουμε ότι ο δείκτης C_{pm} διαφέρει από το δείκτη C_p , που δίνεται από τη σχέση

$$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma}$$

Μόνο στον παρονομαστή όπου η ποσότητα $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ έχει αντικατασταθεί από την ποσότητα $\tau = \sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}$ ($\tau \geq \sigma$) .

Παρατηρούμε ότι οι δύο αυτοί δείκτες C_p , C_{pm} είναι ακριβώς ίδιοι στην περίπτωση που η τιμή στόχος είναι ίση με τη μέση τιμή μ της διεργασίας.

Στην περίπτωση όπου $M=T$ οι τρεις δείκτες μπορούν να συνδεθούν με μία και μόνο σχέση που είναι η ακόλουθη

$$C_{pm} = \frac{C_p}{\sqrt{1+9(C_p - C_{pk})^2}} \tag{1.4.3}$$

Ακόμα, σύμφωνα με τους Kotz and Lovelace (1998) ισχύουν και οι παρακάτω δύο τύποι που δείχνουν πως συνδέονται οι δείκτες C_{pm}, C_p, C_{pk}

$$C_{pm} = \frac{C_p}{\sqrt{1+\left(\frac{\mu-T}{\sigma}\right)^2}} = \frac{C_{pk}}{\left(1-\frac{|\mu-M|}{d}\right)\sqrt{1+\left(\frac{\mu-T}{\sigma}\right)^2}} \tag{1.4.4}$$

Από τον παραπάνω τύπο προκύπτει ότι για $\mu = T = M$ έχουμε ότι $C_{pm} = C_p = C_{pk}$ και επιπλέον για $|\mu - T| \neq 0$ θα ισχύει $C_{pm} < C_p$ ενώ για $|\mu - T| \to \infty$ έχουμε ότι $C_{pm} \to 0$.

Επίσης αφού $\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2} \geq |\mu - T|$ έχουμε ότι

$$C_{pm} \leq \frac{USL-LSL}{6|\mu-T|} \tag{1.4.5}$$

Συνεπώς, για σταθερή τιμή της ποσότητας $|\mu - T|$ ο δείκτης ικανότητας C_{pm} είναι άνω φραγμένος σε αντίθεση με τους δείκτες C_p, C_{pk} που μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή μειώνοντας ή αυξάνοντας απλά την τιμή της τυπικής απόκλισης σ . Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι μια αναγκαία αλλά όχι ικανή συνθήκη για να ισχύει ότι $C_{pm} \geq 1$ είναι η

$$|\mu - T| \leq \frac{USL-LSL}{6} \tag{1.4.6}$$

Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι αν $C_{pm} \geq 1$ τότε η ελάχιστη απόσταση που μπορεί να έχει ο δειγματικός μέσος μ της διεργασίας, είναι μικρότερη από το 1/6 του εύρους του διαστήματος των ορίων προδιαγραφών. Αυτό σημαίνει ότι ο μέσος μ βρίσκεται εντός της περιοχής των προδιαγραφών και πιο συγκεκριμένα στο μεσαίο τρίτο της περιοχής αυτής.

Στο παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται σύμφωνα με τον Αντζουλάκο (2006) οι πιο βασικές ιδιότητες του δείκτη C_{pm} .

Πίνακας 1.4.1 : Πίνακας ιδιοτήτων του δείκτη C_{pm}

$\mu = T \Leftrightarrow C_{pm} = C_p$
$\mu = T = M \Leftrightarrow C_{pm} = C_p = C_{pk}$
$\mu \neq T \Leftrightarrow C_{pm} < C_p$
$\lvert\mu - T\rvert \to \infty \Rightarrow C_{pm} \to 0$
$\sigma \downarrow \Rightarrow C_{pm} \uparrow$
$\lvert\mu - T\rvert \downarrow \Rightarrow C_{pm} \uparrow$
$C_p \geq \max(C_{pk}, C_{pm})$

1.4.2 Εκτίμηση του Δείκτη Ικανότητας Διεργασίας C_{pm}

Έχουν προταθεί δύο διαφορετικές εκτιμήτριες για την εκτίμηση του δείκτη C_{pm}.

Έστω ότι μια διεργασία αποδίδει προϊόντα των οποίων οι τιμές του ποιοτικού χαρακτηριστικού X που μελετάμε ακολουθούν την κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και τυπική απόκλιση σ, δηλαδή $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ και έχουν καθοριστεί τα όρια προδιαγραφών *LSL* και *USL* στη φάση σχεδιασμού της διεργασίας. Τότε συλλέγουμε ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ από την εξέταση διαδικασία και εκτιμούμε την ποσότητα τ μέσω της στατιστικής συνάρτησης, σχέση (1.4.7)

$$\tilde{\tau} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - T)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1} + \frac{n(\bar{X} - T)^2}{n-1}} = \sqrt{S^2 + \frac{n(\bar{X} - T)^2}{n-1}}$$

Η εκτιμήτρια $\tilde{C}_{pm}$ του δείκτη C_{pm} που προτάθηκε από τους Chan, Cheng, Spiring (1988) ορίζεται ως

$$\tilde{C}_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\tilde{\tau}} \qquad (1.4.8)$$

Εναντιθέτως, η εκτιμήτρια $\hat{C}_{pm}$ που προτάθηκε από τον Boyles (1991) ορίζεται μέσω του επόμενου τύπου

$$\hat{C}_{pm} = \frac{USL-LSL}{6\hat{\tau}} \tag{1.4.9}$$

όπου $\hat{\tau}$ η εκτιμήτρια της ποσότητας τ η οποία δίνεται από την έκφραση

$$\hat{\tau} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-T)^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n} + (\bar{X}-T)^2} =$$

$$\sqrt{\frac{n-1}{n}S^2 + (\bar{X}-T)^2} = \sqrt{\frac{n-1}{n}}\ \tilde{\tau} \tag{1.4.10}$$

(βλέπε Kotz and Johnson (1993))

Οι δύο εκτιμήτριες $\tilde{C}_{pm}$ και $\hat{C}_{pm}$ έχουν παρόμοιες στατιστικές ιδιότητες μιας και συνδέονται μέσω της σχέσης

$$\hat{C}_{pm} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\ \tilde{C}_{pm} \tag{1.4.11}$$

και συμπίπτουν ασυμπτωτικά ($n \to \infty$).

Οι Subbaiah and Taam (1993) κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι η εκτιμήτρια $\tilde{C}_{pm}$ είναι προτιμότερη για σημειακή εκτιμήτρια ενώ η εκτιμήτρια $\hat{C}_{pm}$ είναι προτιμότερη όταν απαιτείται ο υπολογισμός διαστήματος εμπιστοσύνης.

1.4.3 Διάστημα Εμπιστοσύνης του Δείκτη Ικανότητας C_{pm}

Διαστήματα εμπιστοσύνης για το δείκτη C_{pm} έχουν δοθεί από τον Boyles (1991), ο οποίος αρχικά παρατήρησε ότι η ποσότητα

$$\frac{n\hat{\tau}_B}{\sigma^2} \sim X_n^2(\lambda) \tag{1.4.12}$$

όπου $\lambda = \frac{n(\mu-T)^2}{\sigma^2} = n\zeta^2$

Στη συνέχεια απέδειξε ότι η ποσότητα $\frac{\hat{\tau}_B}{\tau} \sim \frac{X_\nu^2}{\nu}$ (1.4.13)

όπου $\nu = \frac{n(1+\zeta^2)^2}{1+2\zeta^2}$

Για μεγάλα ν έχουμε ότι $\frac{\hat{\tau}_B}{\tau} \sim N\left(1, \frac{1}{2\nu}\right)$ (1.4.14)

Κάνοντας χρήση των παραπάνω αποτελεσμάτων μπορούμε να κατασκευάσουμε προσεγγιστικά διαστήματα εμπιστοσύνης για το δείκτη C_{pm} παρατηρώντας τη σχέση

$$\frac{C_{pm}}{\hat{C}_{pm(B)}} = \frac{\hat{\tau}_B}{\tau} \qquad (1.4.15)$$

Ακόμα, ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας $\hat{\nu}$ του ν είναι ίσος με

$$\hat{\nu} = \frac{n\left(1+\hat{\zeta}^2\right)^2}{1+2\hat{\zeta}^2} \qquad (1.4.16) \qquad \text{όπου} \qquad \hat{\zeta} = \frac{\bar{X}-T}{\sqrt{(n-1)S^2/n}}$$

Έτσι ένα προσεγγιστικό κάτω 100(1-α)% διάστημα εμπιστοσύνης για το δείκτη C_{pm} είναι το ακόλουθο

$$\left(\hat{C}_{pm(B)}\sqrt{\frac{X^2_{\hat{\nu},1-\alpha}}{\hat{\nu}}}\ ,\infty \right) \qquad (1.4.17)$$

και για μεγάλα $\hat{\nu}$ το

$$\left(\hat{C}_{pm(B)}\left(1 - z_\alpha\sqrt{\frac{1}{2\hat{\nu}}}\right)\ ,\infty \right) \qquad (1.4.18)$$

1.4.4 Έλεγχος Υποθέσεων για το Δείκτη Ικανότητας C_{pm}

‘Εχουμε ήδη αναφέρει ότι στην ανάλυση της ικανότητας μιας διεργασίας ο έλεγχος υπόθεσης που μας ενδιαφέρει είναι ο ακόλουθος:

- H_0 : Η διεργασία δεν είναι ικανή
- H_1 : Η διεργασία είναι ικανή

Για τον έλεγχο υποθέσεων με βάση το δείκτη C_{pm} ο Kane (1986) θεώρησε ότι *μ=T* . Έτσι στηριζόμενοι σ’ αυτήν την παραδοχή οι Chan et al (1988) διαμόρφωσαν τον ακόλουθο έλεγχο υποθέσεων

- H_0 : $C_{pm} < C_{pm}(low)$ (1.4.19)
- H_1 : $C_{pm} > C_{pm}(high)$

Στην περίπτωση που *μ=T* η στατιστική συνάρτηση είναι

$$W = \frac{(n-1)\hat{\tau}^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim X_n^2 \qquad (1.4.20)$$

και $$W = \frac{(n-1)C_{pm}^2}{\hat{C}_{pm}^2} \qquad (1.4.21)$$

Συνεπώς, $$P\left(\hat{C}_{pm} \geq c\right) = P\left(X_n^2 \leq (n-1)C_{pm}^2/c^2\right) \qquad (1.4.22)$$

Απαιτώντας η συνάρτηση ισχύος να επιβεβαιώνει τα σημεία $(C_{pm}(low), \alpha)$ και $(C_{pm}(high), 1-\beta)$ και χρησιμοποιώντας ως περιοχή απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης (κρίσιμη περιοχή) μια περιοχή της μορφής $\hat{C}_{pm} \geq c$ προκύπτει άμεσα ότι

$$\alpha = \pi\left(C_{pm}(low)\right) = P\left[X_n^2 \leq \frac{(n-1)C_{pm}^2(low)}{c^2}\right] \qquad (1.4.23)$$

$$1-\beta = \pi\left(C_{pm}(high)\right) = P\left[X_n^2 \leq \frac{(n-1)C_{pm}^2(high)}{c^2}\right] \qquad (1.4.24)$$

Από τις δύο παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι

$$\frac{C_{pm}(high)}{C_{pm}(low)} = \sqrt{\frac{X^2_{n,\beta}}{X^2_{n,1-\alpha}}} \tag{1.4.25}$$

και $$c = C_{pm}(low)\sqrt{\frac{n-1}{X^2_{n,1-\alpha}}} \tag{1.4.26}$$

Οι Chan et al. (1988) έδωσαν τον ακόλουθο πίνακα όπου για δεδομένα α, β, $C_p(low)$, $C_p(high)$ μπορούμε να καθορίσουμε το μέγεθος του δείγματος n και την κρίσιμη τιμή c για τον έλεγχο της υπόθεσης

$$H_0 : C_{pm} < C_{pm}(low) \quad --- \quad H_1 : C_{pm} > C_{pm}(high)$$

Πίνακας 1.4.2 : Τιμές των $C_{pm}(high)/C_{pm}(low)$ και $c/C_{pm}(low)$ για α=β=0.05 και α=β=0.10

n	$\alpha=\beta=0.10$		$\alpha=\beta=0.05$	
	$C_{pm}(high)/C_{pm}(low)$	$C/C_{pm}(low)$	$C_{pm}(high)/C_{pm}(low)$	$C/C_{pm}(low)$
10	1.8127	1.3601	2.1555	1.5113
20	1.5111	1.2357	1.7014	1.3233
30	1.3979	1.1865	1.5385	1.2523
40	1.3354	1.1587	1.4503	1.2129
50	1.2946	1.1402	1.3935	1.1872
60	1.2655	1.1259	1.3532	1.1688
70	1.2433	1.1167	1.3228	1.1548
80	1.2258	1.1086	1.2988	1.1437
90	1.2115	1.1020	1.2794	1.1347
100	1.1995	1.0964	1.2632	1.1271
110	1.1893	1.0916	1.2494	1.1207
120	1.1805	1.0875	1.2375	1.1151
130	1.1728	1.0839	1.2272	1.1102
140	1.1660	1.0806	1.2180	1.1059
150	1.1599	1.0778	1.2098	1.1020
160	1.1544	1.0752	1.2025	1.0985
170	1.1495	1.0728	1.1959	1.0954
180	1.1450	1.0707	1.1898	1.0925
190	1.1408	1.0687	1.1843	1.0899
200	1.1370	1.0669	1.1792	1.0875

1.4.5 Αδυναμίες του Δείκτη Ικανότητας C_{pm}

Το βασικότερο μειονέκτημα του δείκτη ικανότητας C_{pm} είναι ότι αν και λαμβάνει υπόψη του τη θέση του μέσου *μ* της διεργασίας σε σχέση με την τιμή στόχο *T* , δε λαμβάνει καθόλου υπόψη του τη θέση του *μ* σε σχέση με τα όρια προδιαγραφών. Δηλαδή αγνοεί πόσο απέχει ο δειγματικός μέσος από την κεντρική τιμή της περιοχής των προδιαγραφών, πράγμα που έχει αντίκτυπο στην απόδοση μιας διεργασίας.

1.5 Ο Δείκτης Ικανότητας Διεργασίας C_{pmk}

Αυτός ο δείκτης, που εισήχθη αρχικά από τους Choi, Owen (1990) και στη συνέχεια από τους Pearn , Kotz, Johnson (1992), είναι ένας συνδυασμός του δείκτη C_{pk} και του δείκτη C_{pm} , μιας και όπως θα δούμε παρακάτω ο αριθμητής του προκύπτει από εκείνον του C_{pk} και ο παρονομαστής του από εκείνον του C_{pm} .

1.5.1 Ορισμός και χαρακτηριστικά του δείκτη C_{pmk}

Σε αντίθεση με τους άλλους δείκτες μπορεί να χρησιμοποιηθεί όταν η κατανομή δεν είναι κανονική και οι παρατηρήσεις μας δεν είναι ανεξάρτητες. Είναι ο μόνος δείκτης που λαμβάνει υπόψη του την τυπική απόκλιση *σ* , πόσο απέχει ο δειγματικός μέσος *μ* από την κεντρική τιμή στόχο *T* αλλά και από την κεντρική τιμή του διαστήματος των ορίων προδιαγραφών χωρίς να είναι απαραίτητο το άνω όριο προδιαγραφών *USL* να είναι συμμετρικό με το κάτω όριο προδιαγραφών *LSL*.

Ορίζεται από τη σχέση

$$C_{pmk} = \frac{min(USL-\mu,\mu-LSL)}{3\tau} = \frac{min(USL-\mu,\mu-LSL)}{3\sqrt{\sigma^2+(\mu-T)^2}} \qquad (1.5.1)$$

Ισοδύναμες μορφές ορισμού:

$$C_{pmk} = \frac{C_{pk}}{\sqrt{1+\left(\frac{\mu-T}{\sigma}\right)^2}} = \left(1 - \frac{|\mu-M|}{d}\right) C_{pm} = \frac{d-|\mu-M|}{3\sqrt{\sigma^2+(\mu-T)^2}}$$

(1.5.2)

Υπάρχει και μια ενδιαφέρουσα σχέση που συνδέει τους τέσσερις δείκτες C_{pmk}, C_{pm}, C_p, C_{pk} είναι η ακόλουθη

$$C_{pmk} = \frac{C_{pm}C_{pk}}{C_p} \tag{1.5.3}$$

Ο λόγος για τον οποίο προτάθηκε ο δείκτης ικανότητας C_{pmk} είναι ότι ο δείκτης C_{pm} λαμβάνει υπόψη του τη θέση του μέσου *μ* της διεργασίας σε σχέση με την τιμή στόχο *T* όμως δε λαμβάνει καθόλου υπόψη τη θέση του μέσου *μ* σε σχέση με τα όρια προδιαγραφών *(LSL,USL)* . Ο δείκτης ικανότητας C_{pmk} χωρίς τον όρο $(\mu\text{-}T)^2$ στον παρονομαστή, η ύπαρξη του οποίου δείχνει ότι ο μέσος της διεργασίας δεν ταυτίζεται με την τιμή στόχο, είναι ίδιος με το δείκτη C_{pk}. Με αυτόν τον τρόπο εξασφαλίζεται μεγαλύτερη ευαισθησία στο δείκτη ικανότητας C_{pmk} σε σχέση με το δείκτη C_{pk} σε απομακρύνσεις του μέσου *μ* από την τιμή στόχο *T*.

Στον ακόλουθο πίνακα 1.5.1 παρουσιάζονται συγκεντρωτικά οι βασικότερες ιδιότητες του δείκτη C_{pmk} (βλέπε Αντζουλάκος (2006)).

Πίνακας 1.5.1 : Ιδιότητες του δείκτη C_{pmk}

$\mu = \mathrm{M} \Rightarrow C_{pmk} = C_{pm} (C_{pk} = C_p)$
$\mu = \mathrm{M} \Rightarrow C_{pmk} = C_{pk} (C_{pm} = C_p)$
$\mu = \mathrm{T} = \mathrm{M} \Rightarrow C_{pmk} = C_{pk} = C_{pm} = C_p \Rightarrow C_{pmk} \leq C_{pm}$

Σ' αυτό το σημείο αξίζει να σημειώσουμε ότι αν $\sigma \to 0$, $\mu \to T$ τότε $C_{pmk} \to \infty$ και ο τύπος του γίνεται

$$C_{pmk} = \frac{USL-LSL}{6|\mu-T|} - \frac{1}{3} \tag{1.5.4}$$

Άρα, για κάθε τιμή του δείκτη C_{pmk} υπάρχει το εξής όριο

$$|\mu - T| < \frac{USL-LSL}{2(1+3C_{pmk})} \tag{1.5.5}$$

Τέλος, αν ισχύει $C_{pmk} = 1 \leftrightarrow |\mu - T| < \frac{USL-LSL}{8}$ (1.5.6)

1.5.2 Εκτίμηση του Δείκτη Ικανότητας C_{pmk}

Οι Pearn, Kotz and Johnson (1992), προκειμένου να εκτιμήσουν το δείκτη C_{pmk} , πρότειναν την παρακάτω εκτιμήτρια που προκύπτει από τον ορισμό του δείκτη C_{pmk} .

$$\hat{C}_{pmk} = min\frac{(\bar{X}-LSL, USL-\bar{X})}{3\sqrt{\frac{n}{n-1}S^2+(\bar{X}-T)^2}} =$$

$$min\left(\frac{(\bar{X}-LSL)}{3\sqrt{\frac{n}{n-1}S^2+(\bar{X}-T)^2}}, \frac{(USL-\bar{X})}{3\sqrt{\frac{n}{n-1}S^2+(\bar{X}-T)^2}}\right) =$$

$$\frac{d-|\bar{X}-M|}{3\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n}+(\bar{X}-T)^2}} \tag{1.5.7}$$

Από τον παραπάνω ορισμό της $\hat{C}_{pmk}$ μπορούμε να συμπεράνουμε ότι αυτή δεν είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του δείκτη C_{pmk} .

Η πιθανότητα να παραχθεί μη-ελαττωματικό προϊόν για $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ισούται με $p_c = P(LSL < X < USL) = \Phi\left(\frac{USL-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{LSL-\mu}{\sigma}\right)$ (1.5.8)

- Αν $LSL \leq \mu \leq M$ τότε από τη σχέση $C_{pmk} = \frac{(\mu-LSL)}{3\sqrt{\sigma^2+(\mu-T)^2}}$ (1.5.9)

  παίρνουμε ότι $\sigma = \sqrt{\left(\frac{\mu-LSL}{3C_{pmk}}\right)^2 - (\mu-T)^2}$ (1.5.10)

Επομένως (βλέπε Περάκης (2001)) έχουμε ότι

$$p_c = \Phi\left(\frac{USL-\mu}{\sqrt{\left(\frac{\mu-LSL}{3C_{pmk}}\right)^2-(\mu-T)^2}}\right) - \Phi\left(\frac{LSL-\mu}{\sqrt{\left(\frac{\mu-LSL}{3C_{pmk}}\right)^2-(\mu-T)^2}}\right)$$

(1.5.11)

- Αν $M \leq \mu \leq USL$ τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$p_c = \Phi\left(\frac{USL-\mu}{\sqrt{\left(\frac{USL-\mu}{3C_{pmk}}\right)^2-(\mu-T)^2}}\right) - \Phi\left(\frac{LSL-\mu}{\sqrt{\left(\frac{USL-\mu}{3C_{pmk}}\right)^2-(\mu-T)^2}}\right)$$

(1.5.12)

- Αν $\mu = M = T$ έχουμε ότι

$$USL - \mu = \mu - LSL = \frac{USL-LSL}{2} \qquad (1.5.13)$$

Επομένως, οι δύο προαναφερθέντες τύποι ανάγονται στον τύπο

$$p_c = 2\Phi\left(3C_{pmk}\right) - 1 \qquad (1.5.14)$$

Η τιμή της πιθανότητας p_c στο δεξί μέλος της παραπάνω σχέσης είναι η μέγιστη τιμή της μιας και η τιμή της πιθανότητας p_c μεγιστοποιείται για σταθερή τιμή του δείκτη C_{pmk} αν $\mu = M = T$.

1.5.3 Διαστήματα Εμπιστοσύνης του Δείκτη C_{pmk}

Οι Chen and Hsu (1995) μελέτησαν την ασυμπτωματική κατανομή του εκτιμητή $\hat{C}_{pmk}$ και έδωσαν ασυμπτωτικά κάτω 100(1-α)% διαστήματα εμπιστοσύνης για το δείκτη C_{pmk} όταν $\mu = M$ και όταν $\mu \neq M$.

- Αν $\mu = M$ ένα προσεγγιστικό κάτω 100(1-α)% διάστημα εμπιστοσύνης για το C_{pmk} είναι

$$\left(\hat{C}_{pmk}\sqrt{\frac{X^2_{\hat{\nu},1-\alpha}}{\hat{\nu}}}, \infty\right) \qquad (1.5.15)$$

όπου $\hat{\nu} = \frac{n\left(1+\hat{\zeta}^2\right)^2}{1+2\hat{\zeta}^2}$ και $\hat{\zeta} = \frac{\bar{X}-T}{\sqrt{(n-1)S^2/n}}$

- Αν $\mu \neq M$ ένα προσεγγιστικό κάτω 100(1-α)% διάστημα εμπιστοσύνης για το C_{pmk} είναι

$$\hat{C}_{pmk} \pm Z_{\alpha/2}\frac{\hat{\sigma}_{pmk}}{\sqrt{n}} \qquad (1.5.16)$$

όπου το $\hat{\sigma}_{pmk}$ δίνεται από τη σχέση που ακολουθεί

$$\hat{\sigma}^2_{pmk} = \left(\frac{1}{9(1+\lambda^2)} + \frac{2\lambda}{3(1+\lambda^2)^{3/2}}\right)\hat{C}_{pmk} + \frac{144\lambda^2+(USL-LSL)\left(\frac{m_4}{S_n^4}-1\right)}{144(1+\lambda^2)^2}\hat{C}^2_{pmk}$$

και $\lambda = \frac{\bar{X}-T}{S}$ και $m_4 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^4$

Όσον αφορά τους ελέγχους υποθέσεων για το δείκτη C_{pmk} αξίζει να σημειωθεί ότι οι μόνοι που ανέπτυξαν μια μεθοδολογία για αυτούς ήταν οι Pearn et al. (2001), που όμως δεν έχουν αναλυθεί επαρκώς.

1.5.4 Αδυναμίες του Δείκτη C_{pmk}

Ο λόγος για τον οποίο υπερτερεί ο δείκτης C_{pmk} έναντι όλων των προγενέστερων δεικτών του είναι ότι είναι ο μόνος δείκτης ο οποίος συνδυάζει όλα τα στατιστικά δεδομένα *μ, σ, T, USL* και *LSL*. Αυτό όμως συνεπάγεται ότι έχει περίπλοκο τύπο και έχει σαν αποτέλεσμα να δυσκολεύεται η εύρεση εκτιμητριών και συνεπώς και η εύρεση διαστημάτων εμπιστοσύνης, όπως φάνηκε και παραπάνω.

1.6 Ανάλυση της ικανότητας της διεργασίας χρησιμοποιώντας ένα διάγραμμα ελέγχου

Οι δείκτες ικανότητας της διεργασίας δεν απεικονίζουν απαραίτητα την πιθανή ικανότητα της διεργασίας επειδή δεν εξετάζουν το θέμα του στατιστικού ελέγχου, ή δείχνουν συστηματικά μοτίβα στην έξοδο της διεργασίας, έτσι αν εξαλειφθούν θα μειώσουν την μεταβλητότητα στο ποιοτικό χαρακτηριστικό. Τα διαγράμματα ελέγχου είναι εξαιρετικά αποτελεσματικά από την άποψη αυτή. Το διάγραμμα ελέγχου μπορεί να θεωρηθεί ως η κύρια τεχνική της ανάλυσης της ικανότητας της διεργασίας.

Αμφότερα τα διαγράμματα ελέγχου μεταβλητών και ιδιοτήτων μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην ανάλυση της ικανότητας της διεργασίας. Τα διαγράμματα $\bar{X}$ και R θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν οποτεδήποτε είναι δυνατόν, επειδή παρέχουν μεγαλύτερη ισχύ και καλύτερες πληροφορίες σε σχέση με τα διαγράμματα ελέγχου μεταβλητών. Ωστόσο, αμφότερα τα p διαγράμματα και c (ή u) διαγράμματα είναι χρήσιμα στην ανάλυση της ικανότητας της διεργασίας. Να υπενθυμίσουμε ότι για να χρησιμοποιήσουμε το p διάγραμμα πρέπει να υπάρχουν προδιαγραφές σχετικά με τα ποιοτικά χαρακτηριστικά. Τα $\bar{X}$ και R διαγράμματα μας επιτρέπουν να μελετήσουμε διεργασίες χωρίς να λάβουμε υπόψη τις προδιαγραφές.

Τα $\bar{X}$ και R διαγράμματα ελέγχου επιτρέπουν την ανάλυση της στιγμιαίας μεταβλητότητας (βραχυπρόθεσμη ικανότητα διεργασίας) και της μεταβλητότητας στο πέρασμα του χρόνου (μακροπρόθεσμη ικανότητα διεργασίας). Είναι ιδιαίτερα χρήσιμο τα δεδομένα για την μελέτη της ικανότητας της διεργασίας να συλλέγονται σε δύο διαφορετικές χρονικές περιόδους (όπως διαφορετικές μετατοπίσεις, διαφορετικές ημέρες κτλ).

1.7 Δείκτες Απόδοσης Διεργασίας

Το 1991, ιδρύθηκε η Ομάδα Δράσης της Αυτοκινητοβιομηχανίας (*Automotive Industry Action Group* (AIAG)) και αποτελείται από αντιπροσώπους των «μεγάλων τριών» αυτοκινητοβιομηχανιών (*Ford*, *General Motors*, και *Chrysler*) και την Αμερικανική Εταιρεία για τον Έλεγχο Ποιότητας (τώρα Αμερικανική Εταιρεία Ποιότητας). Ένας από τους στόχους τους ήταν να τυποποιήσουν τις απαιτήσεις αναφοράς από τους προμηθευτές και γενικότερα της βιομηχανίας. Η AIAG προτείνει τη χρήση των C_p και C_{pk}, όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου, με τυπική απόκλιση η οποία εκτιμάται από το $\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}$. Όταν η διεργασία είναι εκτός ελέγχου, η

AIAG συνιστά τη χρήση των **Δεικτών Απόδοσης Διεργασίας** (*Process Performance Indices*) P_p και P_{pk}, όπου για παράδειγμα,

$$\hat{P}_p = \frac{USL-LSL}{6s} \tag{1.7.1}$$

και $$\hat{P}_{pk} = min\left\{\frac{USL-\bar{X}}{6s}, \frac{\bar{X}-LSL}{6s}\right\} \tag{1.7.2}$$

όπου $s = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i-\bar{X})^2}{(n-1)}}$ η δειγματική τυπική απόκλιση.

Ο δείκτης P_p χρησιμοποιεί και την διακύμανση εντός των υποομάδων και την διακύμανση μεταξύ των υποομάδων και υποδηλώνει πόσο ικανή είναι η διεργασία να παράγει εντός των ορίων προδιαγραφών σε μια συγκεκριμένη περίοδο. Ο $\widehat{\mathrm{P}}_{pk}$ υπολογίζεται με παρόμοιο τρόπο όπως το C_{pk} και δεν χρειάζεται περαιτέρω εξήγηση.

Το Αμερικανικό Ινστιτούτο Εθνικών Προτύπων στο ANSI Standard Z1 στην Ανάλυση Ικανότητας Διεργασίας (*Process Capability Analysis (1996)*) δηλώνει ότι οι P_p και P_{pk} θα πρέπει να χρησιμοποιούνται ακόμη και όταν η διεργασία είναι εκτός ελέγχου.

Τώρα είναι σαφές, ότι όταν η διεργασία είναι κανονικά κατανεμημένη και εντός ελέγχου, ο $\widehat{\mathrm{P}}_p$ είναι ουσιαστικά $\hat{\mathrm{C}}_p$ και ο $\widehat{\mathrm{P}}_{pk}$ είναι ουσιαστικά $\hat{\mathrm{C}}_{pk}$, επειδή για μία σταθερή διεργασία η διαφορά μεταξύ των *S* και $\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}$ είναι ελάχιστη. Ωστόσο, να σημειωθεί ότι αν η διεργασία δεν είναι εντός ελέγχου, οι δείκτες P_p και P_{pk} δεν έχουν καμία ουσιαστική ερμηνεία σε σχέση με την ικανότητα της διεργασίας, επειδή δεν μπορούν να προβλέψουν την απόδοση της διεργασίας. Επιπρόσθετα, οι στατιστικές τους ιδιότητες δεν είναι προσδιορίσιμες, και έτσι κανένα έγκυρο συμπέρασμα δεν μπορεί να γίνει όσον αφορά τις πραγματικές (ή

πληθυσμιακές) τιμές. Επίσης, οι P_p και P_{pk} δεν παρέχουν κίνητρα ή ενθαρρύνσεις στις εταιρίες που τα χρησιμοποιούν για να φέρουν τις διεργασίες εντός ελέγχου. Για περιπτώσεις όπου οι διεργασίες φαίνονται να είναι σταθερές προκύπτει ο ακόλουθος Πίνακας1.7.1

Πίνακας 1.7.1 : Αποτελέσματα του P_{pk}

Αποτελέσματα	**Ερμηνεία**
P_p και P_{pk} > 1.67	Η διεργασία πληρεί τις απαιτήσεις του πελάτη. Μετά την αποδοχή, ξεκινά η παραγωγή και ακολουθεί το Αποδεκτό Σχέδιο Ελέγχου.
1.33 < P_{pk} ≤ 1.67	Η διεργασία μπορεί να μην πληρεί τις απαιτήσεις του πελάτη. Μετά τη μερική αποδοχή, ξεκινά η παραγωγή με πρόσθετη προσοχή στο χαρακτηριστικό μέχρι να επιτευχθεί C_{pk} ≥ 1.33.
P_{pk} < 1.33	Η διεργασία είναι υποτυπώδης ώστε να πληρεί τις απαιτήσεις του πελάτη. Πρέπει να δοθεί μεγάλη σημασία στη βελτίωση της διεργασίας και να καταγραφεί σε ένα διορθωμένο Σχέδιο Δράσης. Απαιτείται αυξημένη επιθεώρηση και έλεγχος μέχρι να επιτευχθεί C_{pk} ≥ 1.33. Ένα αναθεωρημένο σχέδιο ελέγχου για αυτές τις προσωρινές ενέργειες πρέπει να αξιολογηθεί και να εγκριθεί από τον πελάτη.

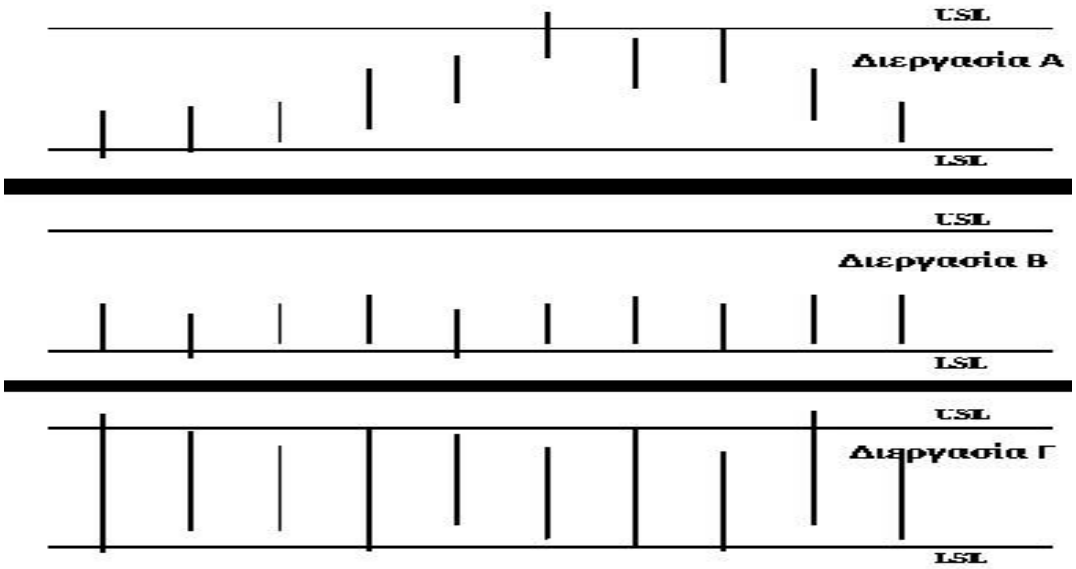
Οι απαιτήσεις στη βιομηχανία είναι ότι η τιμή της P_{pk} θα πρέπει να υπερβαίνει το 1.67. Αν P_{pk} < 1.67, ο σύνδεσμος των C_p , C_{pk} και P_{pk} θα δώσουν μια ένδειξη του ποιός είναι υπεύθυνος βελτίωσης της ικανότητας.

Για παράδειγμα, θεωρούμε τρεις διεργασίες Α, Β και Γ με τους αντίστοιχους δείκτες C_p , C_{pk} και P_{pk} όπως φαίνεται στον Πίνακα 1.7.2 .

Το Σχήμα 1.7.1 παρουσιάζει τις τρεις διεργασίες με βάση τον Πίνακα 1.7.2 .

Πίνακας 1.7.2 : Οι δείκτες C_p , C_{pk} και P_{pk} για τις τρεις διεργασίες

Διεργασία Α	Διεργασία Β	Διεργασία Γ
$P_{pk} = 0.8$	$P_{pk} = 0.8$	$P_{pk} = 0.8$
$C_{pk} = 1.67$	$C_{pk} = 0.8$	$C_{pk} = 0.8$
$C_p = 1.67$	$C_p = 1.67$	$C_p = 0.8$



Σχήμα 1.7.1 Τρεις διεργασίες με κακό δείκτη P_p

Το Σχήμα 1.7.1 και ο Πίνακας 1.7.2 μας δείχνουν ότι η Διεργασία Α είναι εκτός ελέγχου και έχει προσδιορισμένες αιτίες. Όπου είναι δυνατόν, η διεργασία πρέπει να τεθεί εντός ελέγχου μιας και πρωταρχικός στόχος είναι η παραγωγή. Η Διεργασία Β έχει λανθασμένη ρύθμιση της διεργασίας και αν φέρουμε τη διεργασία εντός ελέγχου ο δείκτης P_{pk} είναι αποδεκτός. Η Διεργασία Γ δεν είναι ικανή να παράγει διαδοχικά προϊόντα εντός της

επιτρεπόμενης ανοχής, έτσι αυτή η διεργασία χρειάζεται τροποποίηση. Πρωταρχικός μας στόχος βελτίωσης της διεργασίας είναι η μηχανική.

Οι Kotz και Lovelace (1998) συνιστούν ανεπιφύλακτα κατά την χρήση των P_p και P_{pk}, υποδεικνύοντας ότι αυτοί οι δείκτες είναι στην πραγματικότητα ένα βήμα προς τα πίσω στην ποσοτικοποίηση της ικανότητας της διεργασίας. Οι ίδιοι αναφέρουν τη χρήση των P_p και P_{pk}, μέσω προτύπων ποιότητας ή κατευθυντήριων γραμμών βιομηχανίας ως αδιάλυτη «στατιστική τρομοκρατία» (δηλαδή, η χρήση ή η κατάχρηση των στατιστικών μεθόδων σε συνδυασμό με τις απειλές και/ή τον εκφοβισμό για την επίτευξη του στόχου των επιχειρήσεων).

Μέθοδος «6 Σίγμα»

2.1. Γενική εισαγωγή

Η μέθοδος «6 Σίγμα» **(6 sigma)** συνδυάζει την ομαλή συνύπαρξη της δημιουργικότητας, της καινοτομίας και της βέλτιστης παραγωγικότητας σε οποιαδήποτε επιχείρηση ή οργανισμό εφαρμόζεται. Κύριος σκοπός της μεθόδου «6 Σίγμα» είναι η απόκτηση γνώσης στο πώς θα βελτιωθούν οι διαδικασίες έτσι ώστε όλα να γίνονται καλύτερα, γρηγορότερα και σε χαμηλότερο κόστος. Η μέθοδος χρησιμοποιείται στις μέρες μας για τη βελτίωση κάθε τομέα των επιχειρήσεων, από την παραγωγή μέχρι τη διεύθυνση προσωπικού και από την τεχνική υποστήριξη μέχρι το τμήμα εξυπηρέτησης. Αυτό είναι εφικτό, δεδομένου ότι η «6 Σίγμα» δύναται να χρησιμοποιηθεί για κάθε δραστηριότητα της επιχείρησης στην οποία τα στοιχεία του κόστους, χρόνου και ποιότητας αποτελέσματος είναι παρόντα παντού.

Σε αντίθεση με άλλες μεθόδους για την αύξηση της παραγωγικότητας ή και της ποιότητας, η «6 Σίγμα» είναι σχεδιασμένη να δίνει πραγματικά ποσοτικά αποτελέσματα τα οποία είναι εμφανή στην κερδοφορία της επιχείρησης. Η στατιστική απεικόνιση της «6 Σίγμα» περιγράφει ποσοτικά πως κάθε διαδικασία αποδίδει. Η επιτυχής εφαρμογή της «6 Σίγμα», προϋποθέτει ότι σε κάθε μια διαδικασία το ελαττωματικό αποτέλεσμα της δε πρέπει να ξεπερνά τα 3.4 ελαττώματα ανα εκατομμύριο. Το ελαττωματικό «προϊόν» βάσει της «6 Σίγμα» είναι οτιδήποτε που δε συνάδει με τις απαιτήσεις των πελατών. Ο θεμελιώδης στόχος της μεθόδου «6 Σίγμα» είναι η εφαρμογή μιας ποσοτικοποιημένης στρατηγικής με εστίαση στη βελτιστοποίηση των διαδικασιών και στη μείωση των αποκλίσεων μέσω των διαφόρων επιμέρους «6 Σίγμα» εργασιών-projects.

Πιο συγκεκριμένα, η έννοια της «6 Σίγμα» προσδιορίζεται ως μια επιχειρησιακή διαδικασία που επιτρέπει στους οργανισμούς να βελτιωθούν με το σχεδιασμό και τον έλεγχο των καθημερινών επιχειρησιακών δραστηριοτήτων με τρόπους που ελαχιστοποιούν τα ελαττώματα και τους πόρους, αυξάνοντας την ικανοποίηση των τελικών χρηστών.

Η μέθοδος αυτή καθοδηγεί τους οργανισμούς να κάνουν λιγότερα λάθη στις λειτουργίες τους, μειώνοντας τα σφάλματα στην ποιότητα στα πιο πρόωρα πιθανά περιστατικά. Η «6 Σίγμα» παρέχει συγκεκριμένες μεθοδολογίες για τον επανασχεδιασμό της διαδικασίας ή και τον σχεδιασμό εκ νέου της διαδικασίας, έτσι ώστε οι ατέλειες και τα λάθη να μην προκύψουν ξανά σε αρχικές φάσεις. Έχει χαρακτήρα δηλαδή προληπτικό. Αυτό συνδυάζεται παράλληλα και με τη χρήση της μεθοδολογίας DMAIC (Define, Measure, Analyze, Improve, Control – ορισμός, μέτρηση, ανάλυση, βελτίωση και έλεγχος) που είναι μια μεθοδολογία για τις ήδη υφιστάμενες διαδικασίες οι οποίες επιδέχονται αλλαγές προς βελτίωση ή με τη χρήση της μεθοδολογίας DMADV (Define, Measure, Analyze, Design, Verify – ορισμός, μέτρηση, ανάλυση, σχεδιασμός και επαλήθευση) για την ανάπτυξη και το σχεδιασμό νέων διαδικασιών ή προϊόντων βάσει της «6 Σίγμα».

2.2. Ορισμοί για τη μέθοδο «6 Σίγμα»

Η μέθοδος «6 Σίγμα» είναι μια πλήρης τεχνική επιχειρησιακής βελτίωσης. Αποτελείται από ένα σύνολο πρακτικών που βελτιώνουν την αποδοτικότητα, μειώνοντας τη μεταβλητότητα μέσα από συγκεκριμένες διαδικασίες, και αποβάλλουν τις ατέλειες και την ανεπάρκεια σε καθημερινή βάση. Έχει ως σκοπό να αυξηθούν τα κέρδη των εταιριών όπου εφαρμόζεται και να υπάρξει και αύξηση όσον αφορά την ικανοποίηση των τελικών χρηστών.

Στις αρχές της δεκαετίας του 1980, η μέθοδος «6 Σίγμα» πήρε την οριστική μορφή της όταν στέλεχος της εταιρίας Motorola επινόησε τον όρο έξι σίγμα για τη διαδικασία ποιοτικής διαχείρισης που χρησιμοποίησαν οι Ιάπωνες και λόγω της ικανότητας της έχει γίνει εξαιρετικά δημοφιλής σε πολλές εταιρίες και μικρές επιχειρήσεις σε όλο το κόσμο. Η Motorola όχι μόνο εφάρμοσε αυτό το σύστημα όσον αφορά την οργάνωση της αλλά κατέχει και τα δικαιώματα δημιουργού.

Παρακάτω αναφέρονται διάφοροι ορισμοί που του αποδόθηκαν.

Ο Defeo (1999) περιγράφει ότι η «6 Σίγμα» είναι μια προσανατολισμένη προς τα δεδομένα μέθοδος για την επίτευξη σχεδόν τέλειας ποιότητας και διαφέρει από άλλες ποιοτικές προσπάθειες επειδή βρίσκει τα λάθη προτού να συμβούν.

Οι Harry et al (2000) προσδιορίζουν την έννοια της «6 Σίγμα» ως μια επιχειρησιακή διαδικασία που δίνει την ικανότητα στις επιχειρήσεις να βελτιώσουν δραστικά την κατώτατη γραμμή τους με το σχεδιασμό και τον έλεγχο των καθημερινών επιχειρησιακών δραστηριοτήτων με τρόπους που ελαχιστοποιούν τα ελαττωματικά και τους πόρους, αυξάνοντας έτσι την ικανοποίηση των πελατών.

Οι Breyfogle et al (2001) βασίζουν τον ορισμό τους για την «6 Σίγμα» στην προσέγγιση εκπαίδευσης ποιότητας, αποκαλούμενη και ως «Εξυπνότερες Λύσεις» . Αυτές καθορίζουν ότι η μεθοδολογία «6 Σίγμα» αποτελεί μια στρατηγική επιχειρησιακή πρωτοβουλία που αναμειγνύει την επιχείρηση με αποδεδειγμένα στατιστικά εργαλεία προκειμένου να επιτευχθεί βελτίωση της αποδοτικότητας και της αποτελεσματικότητας της οργάνωσης στο να καλύπτει τις ανάγκες των πελατών. Δηλαδή η ανώτερη διοίκηση εστιάζει σε όσες διαδικασίες βρέθηκαν κρίσιμες ως προς την ποιότητα για να υπάρξει σημαντική βελτίωση ως προς την απόδοση, στην ανάπτυξη νέων προϊόντων, στο μερίδιο αγοράς, στην ικανοποίηση των πελατών και στο πλούτο των μετοχών. Σύμφωνα με τα παραπάνω ο στόχος δεν είναι απλά η βελτίωση, αλλά η δημιουργία ενός οικονομικού όφελους για τον πελάτη και τον προμηθευτή.

Ο Mario Perez Wilson (1999) όρισε η «6 Σίγμα» ως ένα βελτιστοποιημένο επίπεδο απόδοσης προσέγγισης μηδέν ατελειών σε μια διαδικασία που παράγει ένα προϊόν, μια υπηρεσία ή μια συναλλαγή. Αναφέρει ότι το «6 Σίγμα» είναι ένα αποτέλεσμα, όχι τα μέσα που χρησιμοποιούνται προκειμένου να επιτευχθεί αυτό. Δηλαδή δε θεωρεί η «6 Σίγμα» ως μεθοδολογία αλλά ως στόχο.

2.3. Στόχος και χαρακτηριστικά της μεθόδου «6 Σίγμα»

Κύριος στόχος της μεθόδου «6 Σίγμα» είναι η απόκτηση γνώσης προκειμένου να έχουμε βελτίωση σε κάθε τομέα των επιχειρήσεων και των οργανισμών ώστε να κάνουν λιγότερα λάθη στις λειτουργίες τους, μειώνοντας τα σφάλματα στην ποιότητα στα πιο πρόωρα πιθανά περιστατικά.

Η μοναδικότητα της μεθόδου έγκειται σε δύο στοιχεία :

- Στην ακρίβεια των μετρήσεων μιας και γίνεται χρήση στατιστικής ανάλυσης.
- Στην ικανότητα της εφαρμογής εμπράκτως τόσο στην γραμμή παραγωγής όσο και σε οποιαδήποτε υπηρεσία της επιχείρησης.

Η μέθοδος «6 Σίγμα» παρέχει τη δυνατότητα να έχουμε μια ξεκάθαρη εικόνα για την παραγωγή και ταυτόχρονα να προσδιορίζουμε με ακρίβεια την επιτυχία της μεθόδου ως προς τα οικονομικά οφέλη της επιχείρησης, μιας και είναι σχεδιασμένη έτσι ώστε να δίνει ποσοτικά αποτελέσματα τα οποία είναι εμφανή στην κερδοφορία της επιχείρησης.

Στην ποιοτική μεθοδολογία «6 Σίγμα» η απόδοση μιας διεργασίας αναφέρεται ως **επίπεδο ποιότητας σίγμα**.

Ένα ποιοτικό επίπεδο σίγμα προσφέρει έναν δείκτη του πόσο συχνά τα ελαττώματα είναι πιθανό να εμφανιστούν. Όσο πιο υψηλό το επίπεδο σίγμα είναι, τόσο λιγότερο πιθανό είναι μια διαδικασία να δημιουργήσει ελαττώματα (Breyfogle 1999, Breyfogle et al 2001, Okland 1999). Δηλαδή όσο πιο υψηλό το επίπεδο ποιότητας σίγμα τόσο καλύτερα εκτελείται και αναπτύσσεται η διεργασία, εμφανίζεται αύξηση της αποδοτικότητας και ελαχιστοποιούνται οι ατέλειες. Συνεπώς, επιτυγχάνεται ο άμεσος σκοπός που είναι η βέλτιστη ικανοποίηση των καταναλωτών αφού το τελικό προϊόν είναι αποδεκτό ως προς την ποιότητα και το κόστος του. Ως εκ τούτου αυξάνονται και οι οικονομικές απολαβές της επιχείρησης.

Για να υπάρξει μακροπρόθεσμη επιτυχία μιας επιχείρησης μέσω της μεθόδου «6 Σίγμα» θα πρέπει να έχουμε υψηλά επίπεδα παραγωγικότητας, ποιότητας και καινοτομίας. Επομένως, δεν πρέπει να παρατηρείται εφησυχασμός από

την πλευρά της επιχείρησης, εναντιθέτως θα πρέπει να υπάρχει συνεχή και αδιάκοπη αναζήτηση για αποδοτικότερες λύσεις ώστε να ικανοποιείται πλήρως το καταναλωτικό κοινό.

Ελαττωματικό προϊόν βάσει της «6 Σίγμα» είναι οτιδήποτε δε συνάδει με τις απαιτήσεις των πελατών. Η επιτυχής εφαρμογή της «6 Σίγμα» προϋποθέτει ότι σε κάθε διαδικασία το ελαττωματικό αποτέλεσμα της δεν πρέπει να ξεπερνά τα 3.4 ελαττώματα ανά εκατομμύριο.

Η μέθοδος «6 Σίγμα», συνεπώς, είναι ένας τρόπος για να βελτιωθούν οι διαδικασίες στην εργασία και στην κατασκευή και ο κύριος στόχος της είναι να αποβάλει τις ατέλειες προκειμένου ατέλειες και λάθη να μην προκύψουν ξανά σε αρχικές φάσεις. Έχει δηλαδή προληπτικό χαρακτήρα.

2.4. Σύγκριση της Διοίκησης Ολικής Ποιότητας και της μεθόδου «6 Σίγμα»

Στην παρούσα ενότητα θα συγκρίνουμε τη Διοίκηση Ολικής Ποιότητας και τη μέθοδο «6 σίγμα». Στον ακόλουθο πίνακα παρουσιάζονται σημαντικές διαφορές μεταξύ της Διοίκησης Ολικής Ποιότητας και της μεθόδου «6 σίγμα».

Πίνακας 2.1 : Σύγκριση μεταξύ της Διοίκησης Ολικής Ποίοτητας και της μεθόδου «6 σίγμα»

Διοίκηση Ολικής Ποιότητας	**Μέθοδος «6 Σίγμα»**
Εστιάζει στην ποιότητα.	Εστιάζει στους στρατηγικούς στόχους και τους εφαρμόζει με πρόγραμμα. Καθοδηγείται από το όφελος.
Παρακολουθεί αόριστα - τυχαία την πρόοδο της παραγωγής.	Σίγουρη εξασφάλιση ότι η επένδυση παράγει το αναμενόμενο κέρδος.

Είναι ένας λειτουργικός τομέας μέσα στην επιχείρηση.	Εστιάζει στη λειτουργική αξία των υπαλλήλων παρά στο λειτουργικό καταμερισμό εργασίας.
Δίνει έμφαση στην επίλυση του προβλήματος.	Δημιουργεί νέο περιβάλλον που προάγει τις συνεχόμενες προσπάθειες βελτίωσης της ποιότητας.
Οι υπάλληλοι συμμετέχουν στα καθημερινά τους καθήκοντα που είναι προγραμματισμός, βελτίωση και έλεγχος.	Οι πόροι που εξασφαλίζονται αλλάζουν τις βασικές επιχειρησιακές διαδικασίες καθώς και όλη την επιχείρηση.
Η ποιότητα είναι μια μόνιμη, πλήρους απασχόλησης εργασία.	Η εργασία «6 Σίγμα» είναι μερικής απασχόλησης, προσωρινή.
Στοχεύει στην τυποποιημένη απόδοση.	Εστιάζει στην απόδοση της παγκόσμιας τάξης, δηλαδή σε ποσοστό λάθους 3.4.
Αναπτύσσεται από το τεχνικό προσωπικό.	Βασίζεται στα κρίσιμα ποιοτικά χαρακτηριστικά (Critical to Quality Characteristics, CTQs).
Παρέχει ένα απεριόριστο σύνολο εργαλείων και τεχνικών χωρίς να γνωρίζει πως να τα χρησιμοποιεί αποτελεσματικά.	Παρέχει ένα επιλεγμένο υποσύνολο εργαλείων και τεχνικών που μπορεί να τα χρησιμοποιεί ώστε να επιτύχει τα επιθυμητά αποτελέσματα.
Οι στόχοι που θέτονται από το ποιοτικό τμήμα της επιχείρησης βασίζονται σε ποιοτικά κριτήρια.	Οι στόχοι που καθορίζονται βασίζονται στην ικανοποίηση των πελατών και στη στρατηγική της ανώτερης διοίκησης της επιχείρησης. Οι στόχοι είναι μετρήσιμοι και αναθεωρούνται όταν διαπιστωθεί ότι η διεργασία δε βελτιώνεται.
Στοχεύει στα μακροπρόθεσμα αποτελέσματα. Η αναμενόμενη απόδοση δεν είναι πλήρως καθορισμένη.	Το «6 Σίγμα» είναι ένας συνδυασμός βραχυπρόθεσμων και μακροπρόθεσμων αποτελεσμάτων, σύμφωνα με τις επιχειρησιακές

	απαιτήσεις.
Επενδύει στις εγκαταστάσεις ή στον εξοπλισμό και εκτελεί συνεχώς πολυδάπανες επιθεωρήσεις στην παραγωγική διαδικασία με στόχο τη βελτίωση του προϊόντος ή της διεργασίας χωρίς όμως να επιφέρει τα επιθυμητά αποτελέσματα.	Επενδύει στο ανθρώπινο δυναμικό, στην εκπαίδευση του, στη χρήση στατιστικών εργαλείων και τεχικών για τη μείωση της μεταβλητότητας των διεργασιών και την ικανοποίηση των πελατών. Δεν επενδύει όμως σε πολυδάπανες αγορές εξοπλισμού.

2.5. Στρατηγικές και Μεθοδολογίες «6 Σίγμα»

Η μεθοδολογία «6 Σίγμα» περιλαμβάνει τρεις στρατηγικές, οι οποίες εστιάζουν στις διεργασίες της επιχείρησης. Η πρώτη στρατηγική αναφέρεται στη βελτίωση των διεργασιών και έχει σκοπό να μειώσει τη μεταβλητότητα της υπάρχουσας διεργασίας και να ικανοποιηθεί ο πελάτης και είναι απαραίτητη για τη διατήρηση της βιωσιμότητας μιας επιχείρησης. Η δεύτερη στρατηγική είναι ο σχεδιασμός/επανασχεδιασμός διεργασιών και χρησιμοποιείται όταν η επιχείρηση διαπιστώσει την ευκαιρία παραγωγής ενός νέου προϊόντος, υπηρεσίας είτε όταν αναγνωρίσει ότι η βελτίωση της υπάρχουσας διεργασίας δε θα φέρει τα επιθυμητά αποτελέσματα ή όταν θέλει να αντικαταστήσει και όχι να διορθώσει μία ή περισσότερες διεργασίες. Τέλος, η τρίτη στρατηγική είναι η διαχείρηση των διεργασιών σε όλα τα προγράμματα και τις δραστηριότητες της επιχείρησης. Από όλες τις στρατηγικές η τελευταία είναι η πιο εξελίξιμη μιας και περιέχει αλλαγές στη διοίκηση και στη νοοτροπία μέσα στην επιχείρηση και συνεπώς μέσω της εφαρμογής της μεθόδου «6 Σίγμα» η διοίκηση της εκάστοτε επιχείρησης αποκτά πιο εξελιγμένες και βαθύτερες γνώσεις για τις διαδικασίες, τους υπαλλήλους και τους πελάτες της.

Υπάρχουν δύο μεθοδολογίες διαχείρισης του προγράμματος επίλυσης προβλήματος που συνοδεύονται με τη μέθοδο «6 Σίγμα» οι οποίες είναι γνωστές με τα αρχικά **DMAIC** και **DMADV**.

Η πρώτη μεθοδολογία, DMAIC, χρησιμοποιείται στη στρατηγική βελτίωσης των διεργασιών, λειτουργεί καλύτερα στην περίπτωση που έχουμε ένα πρόβλημα με μια άγνωστη λύση στα υπάρχοντα προϊόντα, τις υπηρεσίες ή τις διαδικασίες και περιγράφει την εφαρμογή των παρακάτω πέντε σταδίων για την επίλυση ενός προβλήματος που αντιμετωπίζει μια επιχείρηση ή ένας οργανισμός.

- Καθορισμός (Define), όπου προσδιορίζονται οι στόχοι που ικανοποιούν τις απαιτήσεις των πελατών και η στρατηγική των επιχειρήσεων.
- Μέτρηση (Measure), όπου μετρούνται τα ελαττώματα που παράγονται σχετικά με τα προσδιορισμένα κρίσιμα ποιοτικά χαρακτηριστικά και καθορίζονται οι βασικές εσωτερικές διεργασίες που τα επηρεάζουν.
- Ανάλυση (Analyze), όπου αναλύονται τα στοιχεία που έχουμε συλλέξει, προσδιορίζονται οι παράγοντες που προκαλούν τις ατέλειες και τα ελαττώματα και διαπιστώνεται η ικανότητα της διεργασίας.
- Βελτίωση (Improve), όπου τροποποιείται και βελτιστοποιείται η υπάρχουσα διεργασία για να παραμείνει στο μέγιστο αποδεκτό εύρος όπου θα έχουν μειωθεί αν όχι εξαλειφθεί τα ελαττώματα. Μια τεχνική για τη συνεχή βελτίωση μιας διεργασίας είναι ο σχεδιασμός πειραμάτων.
- Έλεγχος (Control), όπου αποτελεί το τελευταίο στάδιο σ΄ αυτήν τη μεθοδολογία και στοχεύει στη διατήρηση των βελτιώσεων και στην εξασφάλιση ότι η τροποποιημένη διεργασία επιτρέπει στις βασικές μεταβλητές να παραμείνουν μέσα στο μέγιστο αποδεκτό εύρος.

Ως κρίσιμα ποιοτικά χαρακτηριστικά ορίζονται εκείνα τα χαρακτηριστικά του προϊόντος ή των υπηρεσιών που επηρεάζουν δραστικά το κόστος ή την ικανοποίηση και τις προσδοκίες των πελατών.

Να σημειώσουμε ότι η παραπάνω μεθοδολογία είναι υποδηλωτική του «κύκλου του Deming» ο οποίος είναι γνωστός με τα αρχικά **PDCA** (Plan-Do-Control-Act) και ως βασική ιδέα έχει την πειθαρχημένη και κυκλική προσέγγιση προκειμένου να υπάρχει συνεχή βελτίωση. Αν και οι δύο στοχεύουν στην βελτίωση της ποιότητας μέσω μιας καθορισμένης διεργασίας

πρόληψης της αποτυχίας η διαφορά τους έγκειται στο σημείο ότι το PDCA εφαρμόζεται σε οποιοδήποτε τύπο διεργασίας ενώ το DMAIC απαιτεί στοιχεία και στοχεύει πάντα στην επίτευξη ποιοτικού ελέγχου «6 Σίγμα» από άποψη αποτυχιών.

Η δεύτερη σημαντική μεθοδολογία της μεθόδου «6 Σίγμα» είναι το DMADV όπου η χρήση της οδηγεί σε μια πιο προβλέψιμη διαδικασία και τελικά σ' ένα υψηλότερο ποιοτικά νέο προϊόν. Χρησιμοποιείται στη στρατηγική σχεδιασμός/επανασχεδιασμός διεργασιών και αποτελείται και αυτή από πέντε στάδια που σκοπό έχουν το σχεδιασμό ενός νέου προϊόντος ή μιας νέας διεργασίας που ικανοποιούν τους πελάτες και παρουσιάζονται παρακάτω.

- Καθορισμός (Define). Αρχικά καθορίζονται οι στόχοι που πρέπει να συνάδουν με τις απαιτήσεις του πελάτη και την επιχειρησιακή στρατηγική και χαρτογραφούνται οι υπάρχουσες λειτουργίες της επιχείρησης καθώς και πως θα επηρεασθούν από τις νέες διεργασίες/ προϊόντα οι οποίες θα προκύψουν.
- Μέτρηση (Measure). Σ΄ αυτό το στάδιο προσδιορίζονται οι βασικές εσωτερικές διεργασίες που επηρεάζουν τα προσδιορισμένα κρίσιμα ποιοτικά χαρακτηριστικά και μετριούνται οι ατέλειες που παράγονται από αυτά, με σκοπό τη μέτρηση της απόδοσης και την εναρμόνιση με τις απαιτήσεις του πελάτη.
- Ανάλυση (Analyze).Σ΄ αυτό το στάδιο γίνεται ανάλυση και αξιολόγηση της διεργασίας με σκοπό το σχεδιασμό των καλύτερων εναλλακτικών λύσεων που μπορούν να μειώσουν τα ελαττώματα εφόσον έχουν προσδιοριστεί οι βασικές μεταβλητές που τα προκαλούν.
- Σχεδιασμός (Design). Εδώ γίνεται ο σχεδιασμός και η εφαρμογή των νέων διεργασιών όπως επίσης και η βελτιστοποίηση της υπάρχουσας διεργασίας ώστε να μείνει στο μέγιστο αποδεκτό εύρος.
- Επαλήθευση (Verify). Αυτό είναι το τελευταίο στάδιο της μεθοδολογίας που αποσκοπεί στην επαλήθευση ότι ο στόχος που ορίστηκε επιτεύχθηκε, ότι διατηρήθηκε η απόδοση και ότι η νέα διεργασία

επιτρέπει στις βασικές μεταβλητές να παραμείνουν μέσα στο μέγιστο αποδεκτό εύρος.

2.6. Οφέλη από τη Μέθοδο «6 Σίγμα»

Μέσω της εφαρμογής της μεθόδου «6 Σίγμα», με προγράμματα βελτίωσης ή σχεδιασμού που προσδιορίζονται και εκτελούνται από τους υπαλλήλους της επιχείρησης, έχουν παρατηρηθεί τεράστια επιχειρησιακά οφέλη σε πολλές εταιρίες και οργανώσεις ανα τον κόσμο.

Οι επιχειρήσεις αυτές έχουν διαπιστώσει τα παρακάτω οφέλη.

- Μείωση των ελαττωμάτων και των ατελειών που βοήθησε στην αποτελεσματική διαχείριση και επένδυση των πόρων της επιχείρησης.
- Σημαντική αύξηση των κερδών λόγω της μείωσης των απωλειών που οδήγησε σε ραγδαίες αλλαγές μέσα στο ανταγωνιστικό περιβάλλον.
- Καλύτερη κατανόηση των απαιτήσεων των πελατών μέσω των νέων μέτρων που βρέθηκαν και εφαρμόστηκαν με επακόλουθο τα γρήγορα και υψηλής ποιότητας επιθυμητά αποτελέσματα.
- Καθορισμός των στόχων απόδοσης και εστίαση σε εκείνους που έχουν ως προτεραιότητα την ικανοποίηση του πελάτη.
- Αύξηση της ικανοποίησης, της εμπιστοσύνης των πελατών, διατήρηση των ήδη υπάρχοντων και παρατήρηση νέων πελατών.
- Σημαντική μείωση των δαπανών.
- Αύξηση της ποιότητας, της απόδοσης και της παραγωγικότητας τους με αποτέλεσμα να έχουν ανταγωνιστικό πλεονέκτημα έναντι των άλλων επιχειρήσεων.
- Τεχνογνωσία και εμπειρία με συνέπεια τη βελτίωση των ικανοτήτων, την αποτελεσματικότητα της εργασίας και την καλύτερη απόδοση όλου του προσωπικού.
- Βελτίωση των εσωτερικών διαδικασιών με τη στενή επικοινωνία, την ομαδική εργασία και την ενεργή συμμετοχή όλων.

- Αξιολόγηση των ατελειών που συνδέονται με την ανάπτυξη και την παραγωγή του προϊόντος ή της υπηρεσίας.
- Καθιέρωση κοινής ορολογίας και κοινής γλώσσας ανάμεσα στα τμήματα της επιχείρησης σε παγκόσμιο επίπεδο.

2.7. Μειονεκτήματα της Μεθόδου «6 Σίγμα»

Αν και στην πλειοψηφία των επιχειρήσεων η μέθοδος «6 Σίγμα» έχει βοηθήσει ώστε να γίνουν ανταγωνιστικοί στην αγορά και να μειώσουν τις δαπάνες τους αξίζει να σημειώσουμε ορισμένα μειονεκτήματα που υπάρχουν.

- Το κόστος εφαρμογής της μεθόδου είναι αρκετά μεγάλο.
- Οι μεθοδολογίες και οι τεχνικές που εφαρμόζονται σ΄ αυτήν είναι ανεπαρκείς στο να βελτιώσουν και να επιταχύνουν το ρυθμό ανάπτυξης της διεργασίας.
- Η έλλειψη χρόνου κατάλληλης οργάνωσης, εκπαίδευσης του προσωπικού και χρήσης των στατιστικών εργαλείων.
- Για την επιτυχή εφαρμογή της μεθόδου θα πρέπει να υπάρχει η απαραίτητη υποστήριξη και ο ενθουσιασμός από όλους τους υπαλλήλους όλων των επιπέδων.
- Υπάρχουν φορές που δε μετριέται η αποτελεσματικότητα της μεθόδου «6 Σίγμα».
- Αμφισβητείται η οργανωτική δομή της μεθόδου «6 Σίγμα».
- Είναι μια ριζική μακροπρόθεσμη μεθοδολογία που απαιτεί δέσμευση.
- Κάποιοι υποστηρίζουν ότι ο καθορισμός της ποιότητας ως τη μειωμένη ύπαρξη ελαττωμάτων και ατελειών απεικονίζει μια περιορισμένη άποψη της ποιότητας. Στην πραγματικότητα ακόμα και οι μηδέν ατέλειες υπολείπονται.

Δείκτες Ικανότητας Διεργασίας για Μη Κανονικές Κατανομές

3.1. Εισαγωγή

Στο σημερινό ανταγωνιστικό επιχειρηματικό περιβάλλον γίνεται πιο κρίσιμη από ποτέ η ακριβής εκτίμηση και αξιολόγηση της διαδικασίας απωλειών που οφείλεται στη μη συμμόρφωση με τις προδιαγραφές των πελατών. Για την εκτίμηση αυτών των απωλειών, ο τομέας της βιομηχανίας κάνει ευρεία χρήση των δεικτών ικανότητας της διεργασίας. Ο καθορισμός της εμφάνισης της ικανότητας για μια σταθερή διαδικασία χρησιμοποιεί δείκτη ικανότητας που απαιτεί ότι τα δεδομένα της υποκείμενης διαδικασίας θα πρέπει να ακολουθούν κανονική κατανομή. Ωστόσο, αν τα δεδομένα ακολουθούν μη κανονική κατανομή η μέτρηση της ικανότητας της διαδικασίας χρησιμοποιώντας κοινότοπες, συμβατικές μεθόδους μπορεί να οδηγήσει σε εσφαλμένα αποτελέσματα.

Διαφορετικοί δείκτες ικανότητας διεργασίας όπως η εκατοστιαία μέθοδος του Clements, J. A. (1989) και η μέθοδος μετασχηματισμού των δεδομένων έχουν προταθεί για την αντιμετώπιση των μη κανονικών καταστάσεων. Αν και αυτές οι μέθοδοι εφαρμόζονται στην πράξη στο χώρο της βιομηχανίας, δεν υπάρχει αρκετή αναλυτική βιβλιογραφία για την πρόσβαση με ακρίβεια και ορθότητα αυτών των μεθόδων, που αφορούν τις ήπιες ή σοβαρές παρεκκλίσεις από την κανονικότητα. Μη κανονικά κατανεμημένες διεργασίες δεν είναι ασυνήθιστες στην πράξη. Συνδυάζοντας αυτό το γεγονός με τα παραπλανητικά αποτελέσματα από την εφαρμογή των βασικών δεικτών ικανότητας σε μη κανονικές διεργασίες, μιας και παλιότερα τους διαχειρίζονταν όπως και στις κανονικές κατανομές, αναγκάστηκαν οι ακαδημαϊκοί και εκείνοι που τους εφάρμοζαν στην πράξη να εφεύρουν τα χαρακτηριστικά των δεικτών ικανότητας διεργασίας για μη κανονικά δεδομένα (Kotz and Johnson, 2002; Spiring, et al., 2003; Yum and Kim, 2011).

Η βιβλιογραφική κριτική έδειξε ότι η έρευνα για δείκτες ικανότητας διεργασίας υπο μη κανονικότητα έχει διαχωριστεί σε δύο κύρια ρεύματα:

1) εξέταση των δεικτών ικανότητας διεργασίας και η συμπεριφορά τους για ποικίλες βασικές κατανομές και
2) κατασκευή νέας γενιάς δεικτών ικανότητας διεργασίας και/ή ανάπτυξη νέων προσεγγίσεων ειδικά σχεδιασμένων για αποτελέσματα που αφορούν μη κανονικές κατανομές.

Αν και πολλές προσπάθειες έχουν γίνει για αυτές τις μελέτες, δεν υπάρχει ακόμα καμμία σίγουρη προσέγγιση ή σίγουροι καθιερωμένοι δείκτες ικανότητας που να έχουν γίνει αποδεκτοί από τους ακαδημαϊκούς ή αυτούς που τους εφαρμόζουν εμπράκτως όταν έχουν να διαχειριστούν μη κανονικά δεδομένα.

Το πρώην κύριο ρεύμα της έρευνας εστιάζει στην εξερεύνηση των ιδιοτήτων διαφορετικών δεικτών ικανότητας διεργασίας υπό διαφορετικές συνθήκες και παρέχει συγκρίσεις μεταξύ αυτών και προτείνει κάποιους από αυτούς για ειδικές περιστάσεις. Αυτές οι ειδικές περιστάσεις μπορεί να είναι παραδείγματος χάρη διαφορετικές βασικές κατανομές διεργασίας, μονόπλευρα ή αμφίπλευρα όρια προδιαγραφών, το αντίστοιχο ποσοστό μη συμμορφωμένων δεικτών ικανότητας διεργασίας. Το τελευταίο κύριο ρεύμα της έρευνας κάνει προσπάθειες να παρέχει νέες προσεγγίσεις ή νέους δείκτες ικανότητας διεργασίας οι οποίοι θα είναι πιο σθεναρά εφαρμόσιμοι στα μη κανονικά δεδομένα. Ωστόσο, δεν υπάρχει ευρεία πληροφόρηση για το πως αυτοί οι νέοι δείκτες είναι χρησιμοποιήσιμοι από επαγγελματίες, ιδιαίτερα για κάποιους από τους νέους δείκτες που απαιτούν μια περαιτέρω περίπλοκη στατιστική γνώση και πιθανότατα προκαλούν σύγχυση και στους επαγγελματίες.

Το δεύτερο κύριο ρεύμα έρευνας για τους δείκτες ικανότητας διεργασίας μπορεί να κατηγοριοποιηθεί σε πέντε ομάδες (Shore, 1998; Kotz and Johnson, 2002) :

1. Μέθοδοι μετασχηματισμού δεδομένων.
2. Ανάπτυξη προσεγγίσεων ελέγχου ποιότητας για μη-κανονικές κατανομές.
3. Εφαρμογή κατανομής για εμπειρικά δεδομένα.
4. Ανάπτυξη κατανομής ελεύθερων διαδικασιών.
5. Κατασκευή νέων δεικτών ικανότητας διεργασίας.

Ο μέσος της διεργασίας *μ*, η τυπική απόκλιση της διεργασίας *σ* και οι προδιαγραφές προϊόντος είναι βασικές πληροφορίες που χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση των δεικτών ικανότητας διεργασίας. Ωστόσο, οι προδιαγραφές προϊόντος είναι διαφορετικές σε διαφορετικά προϊόντα. Ένας πρώτης γραμμής διαχειριστής μιας διεργασίας δεν μπορεί να εκτιμήσει την απόδοση της διαδικασίας χρησιμοποιώντας μόνο τα *μ* και *σ*. Γι΄ αυτόν το λόγο ο Juran (1979) συνδύασε τις παραμέτρους διεργασίας με τις προδιαγραφές προϊόντος και εισήγαγε την έννοια των δεικτών ικανότητας διεργασίας. Από τότε, οι πιο κοινοί δείκτες έχουν εφαρμοστεί από την κατασκευαστική βιομηχανία και είναι ο δείκτης ικανότητας διεργασίας C_p και η αναλογία για μη κεντραρισμένη διεργασία C_{pk} που ορίστηκαν ως

$$C_p = \frac{Επιτρεπτό\ πλάτος\ της\ διεργασίας}{Πραγματική\ διεργασία} = \frac{U_t - L_t}{6\sigma} \tag{3.1}$$

$$C_p = \min\{C_{pu}, C_{pl}\} \tag{3.2}$$

με $$C_{pu} = \frac{U_t - \mu}{3\sigma}, \qquad C_{pl} = \frac{\mu - L_t}{3\sigma} \tag{3.3}$$

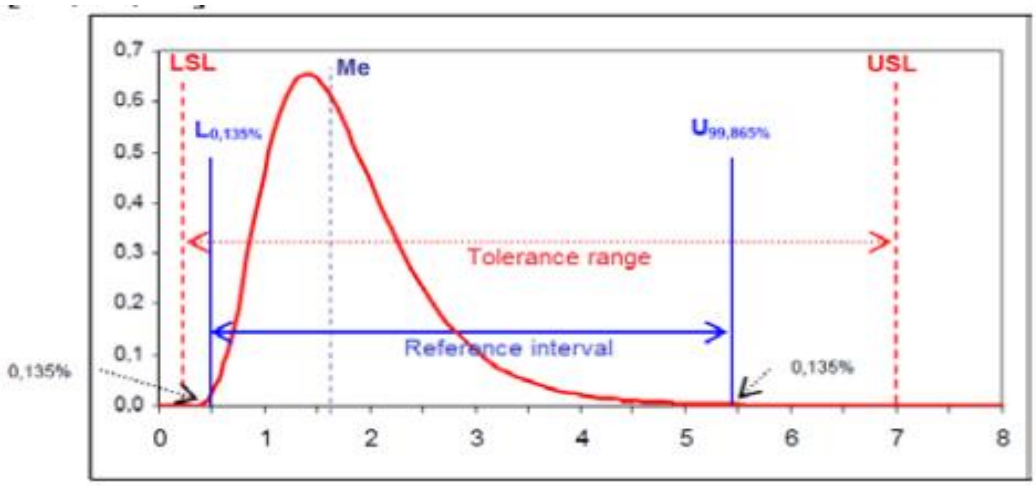
όπου U_t και L_t είναι τα άνω και κάτω όρια ανοχής αντίστοιχα και C_{pu} , C_{pl} αφορέρονται στους άνω και κάτω μονόπλευρους δείκτες ικανότητας. Στις πραγματικές κατασκευαστικές διεργασίας, τα *μ* και *σ* είναι άγνωστα και είναι συχνα εκτιμημένα χρησιμοποιώντας ιστορικά δεδομένα (F.

K. Wang, 2006). Ας σημειωθεί ότι ο C_p είναι εφαρμόσιμος για να προσδιορίσει την ικανότητα διεργασίας για διμερείς προδιαγραφές ενώ οι C_{pu} και C_{pl} είναι εφαρμόσιμοι για να προσδιορίσουν την ικανότητα διεργασίας για μονομερείς προδιαγραφές.

Οι δείκτες ικανότητας C_p και C_{pk} είναι απαραίτητοι για τις στατιστικές μετρήσεις και οι ερμηνείες τους βασίζονται στην εγκυρότητα βέβαιων υποθέσεων. Κάποιες από τις βασικές υποθέσεις των παραδοσιακών δεικτών ικανότητας διαδικασιών είναι ότι :

- Η διεργασία που εξετάζεται πρέπει να είναι υπό έλεγχο και σταθερή.
- Τα αποτελέσματα των διεργασιών πρέπει να είναι ανεξάρτητα και κανονικά κατανεμημένα.

Ωστόσο, αυτές οι υποθέσεις συνήθως δεν ικανοποιούνται στην πράξη. Πολλές φυσικές διεργασίες παράγουν μη-κανονικά δεδομένα και αυτοί που ασχολούνται με τη διατήρηση της ποιότητας στις διάφορες διεργασίες χρειάζεται να επαληθεύσουν ότι οι παραπάνω υποθέσεις αντέχουν πριν τη χρησιμοποίηση κάθε τεχνικών για τους δείκτες ικανότητας προκειμένου να προσδιορίσουν την ικανότητα των διεργασιών τους.



Σχήμα 3.1: Δείκτες ικανότητας διεργασίας για μη κανονικά κατανεμημένα χαρακτηριστικά ποιότητας

3.2 Μέθοδοι υπολογισμού δεικτών ικανότητας για μη κανονικές κατανομές

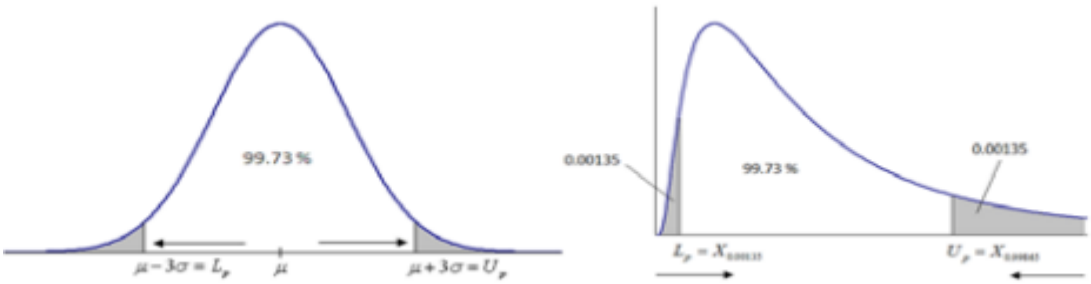
Οι μη κανονικά κατανεμημένες διεργασίες δεν είναι ασυνήθιστες στην πράξη. Συνδυάζοντας αυτό το γεγονός με τα παραπλανητικά αποτελέσματα από την εφαρμογή βασικών δεικτών ικανότητας διεργασίας σε μη κανονικές διεργασίας ενώ αντιμετωπίζονται αυτές σαν κανονική κατανομή, ενισχύοντας τους ακαδημαϊκούς και αυτούς που τους χρησιμοποιούν στην πράξη να εφεύρουν τα χαρακτηριστικά των δεικτών ικανότητας διεργασίας με μη-κανονικά δεδομένα.

Η κατάσταση, όπου η κατανομή για τη ποιότητα του χαρακτηριστικού που παρακολουθείται δεν είναι αντίστοιχη με την κανονική κατανομή μπορεί κατ' αρχάς να αντιμετωπιστεί με τους παρακάτω τρόπους:

i. Χρήση διαφορετικού θεωρητικού μοντέλου κατανομής.
ii. Μετασχηματισμός δεδομένου σε μια μεταβλητή που προέρχεται από κανονική κατανομή.

3.2.1 Γράφημα πιθανότητας

Μια δημοφιλής προσέγγιση για τον υπολογισμό δεικτών ικανότητας διεργασίας είναι η χρήση γραφήματος κανονικής κατανομής που επιτρέπει την έρευνα των υποθέσεων της κανονικότητας. Όπως και με την κανονική κατανομή όπου πλάτος ανοίγματος διεργασίας 0.135 και 99.865 ενδοτεταρτημοριακό εύρος, ένας υποκατάστατος δείκτης ικανότητας διεργασίας μπορεί να βρεθεί από κατάλληλη κατανομή πιθανότητας:



Σχήμα 3.2 : Κανονική κατανομή με εύρος διαστήματος τιμών 99.73% και μη-κανονική κατανομή με εύρος διαστήματος τιμών και πάλι 99.73%

$$C_p = \frac{USL-LSL}{Upper0.135\%-Lower0.135\%centiles} = \frac{USL-LSL}{U_p-L_p} \quad (3.4)$$

όπου U_p και L_p είναι 0.135 και 99.865 εκατοστημόρια αντίστοιχα.

Εξαιτίας της διαμέσου που προτιμάται ως παράμετρος θέσης για τις ασύμμετρες κατανομές, οι C_{pu} και C_{pl} ορίζονται ως

$$C_{pu} = \frac{USL-median}{x_{0.99865}-median} \quad (3.5)$$

$$C_{pl} = \frac{median-LSL}{median-x_{0.99865}} \quad (3.6)$$

Επειδή αυτή η μέθοδος είναι γραφική, μπορεί να παρουσιάζει λάθη. Οι N παρατηρήσεις απεικονίζονται στο διάγραμμα κατά μήκος του x(i) με τα αντίστοιχα ζεύγη της εμπειρικής συνάρτησης κατανομής ((i)/N). Η παρεμβολική γραμμή είναι το καλύτερο ταίριασμα για μια συνάρτηση που αφορά την αναμενόμενη ιδιότητα της ποιότητας της συνάρτησης πιθανότητας. Τεταρτημόρια που αντιστοιχούν στο (0.00135; 0.50; 0.99865) μπορούν να βρεθούν και να παρουσιαστούν αν το στατιστικό λογισμικό δεν είναι περίπλοκο.

3.2.2 Κατανομή – Ανεξάρτητα διαστήματα ανοχής

Οι Chan et al. (1988) επινόησαν μια μέθοδο που χρησιμοποιεί κατανομή – ανεξάρτητα διαστήματα ανοχής για να υπολογίσει τα C_p και C_{pk} για μη-κανονικές κατανεμημένες διεργασίες:

$$C_p = \frac{USL-LSL}{6\sigma} = \frac{USL-LSL}{\frac{3}{2}(4\sigma)} = \frac{USL-LSL}{3(2\sigma)} \quad (3.7)$$

Αυτό σημαίνει $$C_p = \frac{USL-LSL}{\omega} = \frac{USL-LSL}{\frac{3}{2}\omega_2} = \frac{USL-LSL}{3\omega_3} \quad (3.8)$$

$$C_{pk} = \frac{\min\,[(USL-\mu,\ \ \mu-LSL)]}{\omega/2} \tag{3.9}$$

όπου το ω είναι η ανοχή του πλάτους του διαστήματος. Αν 99% αξιοπιστίας απαιτείται, το διάστημα εξασφαλίζει το 75% της απόδοσης του στατιστικού πληθυσμού. Η μέθοδος συνεπώς είναι η μοναδική που δίνει διαφορετικό αποτέλεσμα αν και μόνο αν η υποκείμενη κατανομή είναι κανονική. Σ' αυτήν την περίπτωση, το 99.73% των τιμών του χαρακτηριστικού ποιότητας είναι μέσα στο εύρος ανοχής ±3s , το $C_p = 1$ σημαίνει ότι 99.72% των τιμών είναι μέσα εις τις προδιαγραφές. Στη σχέση (3.7) το 6 στον παρονομαστή είναι γενικά εξαρτώμενο από το μέγεθος του δείγματος, εκτός από το *s* που είναι εκτιμώμενο και εντός του χαρακτηριστικού ποιότητας της κατανομής. Ο περιορισμός της μη κανονικότητας μπορεί να μετριαστεί από την επιλογή κατάλληλου ποσοστού αντικειμένων εντός των ορίων προδιαγραφών, παραδείγματος χάρη, για το 99%, το 5.15 ίσως χρησιμοποιείται, μια έγκυρη σταθερά για πολλές κατανομές πιθανότητας με ασυμμετρία από το 0 στο 3.111 και κύρτωση από το 1 στο 5.997.

3.2.3 Μέθοδος σταθμισμένης μεταβλητής

Οι Choi και Bai (1996) πρότειναν μια ευρετική μέθοδο σταθμισμένης μεταβλητής για διόρθωση δεικτών ικανότητας κατανομής σύμφωνα με την λοξότητα του πληθυσμού. Έστω ότι P_x είναι η πιθανότητα μια μεταβλητή X να είναι μικρότερη ή ίση με το μέσο του πληθυσμού

$$P_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(\bar{X} - X_i) \tag{3.10}$$

όπου $I(x) = 1$ όταν $x > 0$ και $I(x) = 0$ όταν $x < 0$.

Οι δείκτες ικανότητας διεργασίας είναι τότε ορισμένοι ως

$$C_p = \frac{USL-LSL}{6\omega W_x} \tag{3.11}$$

όπου $W_x = \sqrt{1 + |1 - 2P_x|}$.

Γι' αυτό, $$C_{pu} = \frac{USL-\mu}{2\sqrt{2P_x\sigma}} \quad (3.12)$$

$$C_{pl} = \frac{\mu-LSL}{3\sqrt{2(1-P_x)\sigma}} \quad (3.13)$$

3.2.4 Μέθοδος Clements

Η μέθοδος Clements είναι δημοφιλής μεταξύ των επαγγελματιών που ασχολούνται με τον έλεγχο ποιότητας στο χώρο της βιομηχανίας. Ο Clements (1989) πρότεινε το *6σ* στην εξίσωση (3.7) να αντικατασταθεί με τα μήκη του διαστήματος μεταξύ των ανώτερων και κατώτερων ποσοστιαίων σημείων της κατανομής X, ο παρονομαστής δηλαδή να είναι $U_p - L_p$

$$C_p = \frac{USL-LSL}{U_p-L_p} \quad (3.14)$$

όπου U_p είναι το ανώτερο 99.865 ποσοστό και L_p είναι το κατώτερο 0.135 ποσοστό των παρατηρήσεων αντίστοιχα. Εφόσον, ο μέσος *M* είναι η προτιμώμενη κεντρική τιμή για μια παραμορφωμένη «λοξή» κατανομή, αυτός επίσης όρισε

$$C_{pu} = \frac{USL-M}{U_p-M} \quad (3.15)$$

$$C_{pl} = \frac{M-LSL}{M-L_p} \quad (3.16)$$

και $$C_{pk} = \min\{C_{pu}, C_{pl}\} \quad (3.17)$$

Η μέθοδος Clements χρησιμοποιεί τους τυπικούς εκτιμητές της ασυμμετρίας και της κύρτωσης που βασίζονται στις τρίτες και τέταρτες κεντρικές στιγμές,

που και οι δύο είναι αναξιόπιστες για μικρά μεγέθη δείγματος. Αυτές οι τρίτες και τέταρτες στιγμές είναι συνηθισμένες στο ταίριασμα κατάλληλης Pearson κατανομής χρησιμοποιώντας το σύνολο των δεδομένων. Τα άνω και κάτω ποσοστημόρια έχουν ληφθεί από την επιλεγμένη Pearson κατανομή. Οι Wu et al. (1998) διεξήγαγαν έρευνα υποδεικνύοντας ότι η μέθοδος Clements δεν μπορεί με ακρίβεια να υπολογήσει την ικανότητα των δεικτών, ειδικά όταν τα δεδομένα της κατανομής είναι παραμορφώσιμα. Οι δείκτες ικανότητας διεργασίας έχουν επινοηθεί για μια κλάση από τις κατανομές Pearson, όπως είναι η βήτα, η γάμμα και η Student.

<u>Προσέγγιση για των υπολογισμό δεικτών ικανότητας διεργασίας:</u>

i. Όρια προδιαγραφών *USL, LSL*
ii. $\bar{x}$, s , Sk (ασυμμετρία), Ku (κύρτωση)
iii. Τυποποιημένα ποσοστημόρια L'_{p}, U'_p (για επιλεγμένο *p* και γνωστό *Sk* , *Ku* που μπορεί να ληφθεί από τους πίνακες (J. A. Clements, Process capability indices for non-normal calculations, Qual. Prog. 22 (1989), 49-55), ή μέσω λογισμικού).
iv. Τυποποιημένος μέσος *M* που λαμβάνεται από τους πίνακες.
v. $\mathrm{L_p}$, $\mathrm{U_p}$: $\mathrm{L_p} = \bar{\mathrm{x}} - \mathrm{s} \cdot L'_{\mathrm{p}}$, $\mathrm{U_p} = \bar{\mathrm{x}} + \mathrm{s} \cdot U'_p$
vi. M : $M = \bar{\mathrm{x}} + \mathrm{s} \cdot M'$
vii. C_p , C_{pk} από τις εξισώσεις (3.14) και (3.17)

Οι Pearn και Kotz (1994) επέκτειναν τη μέθοδο εισάγοντας τους δείκτες C_{pm} , $C_{\mathrm{pm*}}$, C_{pmk} ορίζοντας τους ως :

$$C_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{\left(\frac{\mathrm{Up} - \mathrm{Lp}}{6}\right)^2 + (M - T)^2}} \tag{3.18}$$

$$C_{pm*} = \frac{\min\,(USL - T, T - LSL)}{3\sqrt{\left(\frac{\mathrm{Up} - \mathrm{Lp}}{6}\right)^2 + (M - T)^2}} \tag{3.19}$$

$$C_{pmk} = min\left[\begin{array}{c}\dfrac{USL-M}{3\sqrt{\left(\frac{\mathrm{Up-M}}{3}\right)^2+(M-T)^2}} \\ \dfrac{M-LSL}{3\sqrt{\left(\frac{\mathrm{M-Lp}}{3}\right)^2+(M-T)^2}}\end{array}\right] \quad (3.20)$$

3.2.5 Ποσοστιαία μέθοδος Burr

Ο Burr (1942) πρότεινε μια κατανομή που καλείται Burr XII κατανομή προκειμένου να επιτύχει τα απαιτούμενα ποσοστημόρια μιας τυχαίας μεταβλητής *X*. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας Burr XII με μεταβλητή *Y* είναι

$$f(y|c,k) = \begin{cases} \frac{cky^{c-1}}{(1+y^c)^{k+1}} & \text{όταν } y \geq 0,\ c \leq 1,\ k \geq 1 \\ 0 & \text{όταν } y < 0 \end{cases} \quad (3.21)$$

όπου τα *c* και *k* αναφέρονται στους συντελεστές ασυμμετρίας και κύρτωσης στην Burr κατανομή αντίστοιχα.

Οι Liu και Chen (2006) παρουσίασαν μια τροποποίηση που βασίζεται στην μέθοδο του Clements, μέσω της οποίας αντί να χρησιμοποιούν την καμπύλη του Pearson για τα ποσοστημόρια, αυτοί τα αντικατέστησαν με ποσοστημόρια από μια κατάλληλη Burr κατανομή. Η προτεινόμενη μέθοδος περιγράφεται συνοπτικά από τα ακόλουθα βήματα:

1. Εκτίμηση του μέσου του δείγματος $\bar{x}$, της τυποποιημένης απόκλισης του δείγματος s , της ασυμμετρίας s_3 και της κύρτωσης s_4 από ένα πραγματικό δείγμα δεδομένων. Να σημειωθεί ότι

$$s_3 = \frac{n}{(n-1)(n-2)} \sum \left(\frac{x_j - \bar{x}}{s}\right)^3 \tag{3.22}$$

$$s_4 = \frac{n(n+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)} \sum \left(\frac{x_j - \bar{x}}{s}\right)^4 - \frac{3(n-1)^2}{(n-2)(n-3)} \tag{3.23}$$

2. Υπολογισμός των τυποποιημένων στιγμών της ασυμμετρίας α_3 και της κύρτωσης α_4 ως

$$\alpha_3 = \frac{(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} s_3 \tag{3.24}$$

$$\alpha_4 = \frac{(n-2)(n-3)}{(n^2-1)} s_4 + 3\frac{(n-1)}{(n+1)} \tag{3.25}$$

Η κύρτωση ορίζεται από τη σχέση (3.25) που είναι συνηθέστερα γνωστή ως υπερβολή εφόσον αυτό προσαρμόζει τη συνηθισμένη παραπάνω τιμή κύρτωσης και την παρακάτω τιμή από +3.00 (η οποία δείχνει την έλλειψη κύρτωσης που είναι η κατανομή που λέγεται μεσοκύρτωση). Αρνητικές τιμές φανερώνουν μια πλατυκύρτωτη κατανομή με υψηλή τυπική απόκλιση, θετικές τιμές λεπτοκυρτωτική κατανομή με μικρή τυπική απόκλιση.

3. Χρήση των τιμών από τις σχέσεις α_3 και α_4 προκειμένου να επιλεχθούν οι κατάλληλοι Burr παράμετροι *c* και *k* . Έπειτα γίνεται χρήση της Burr κατανομής XII για να επιτύχουμε την κατανομή της τυποποιημένης μεταβλητής

$$Z = \frac{Y-\mu}{\sigma} \tag{3.26}$$

όπου το *Y* είναι η επιλεγμένη Burr μεταβλητή, *μ* και *σ* η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση του αντίστοιχα. Οι μέσοι και οι τυπικές αποκλίσεις, όπως επίσης και οι συντελεστές ασυμμετρίας και κύρτωσης, για μια μεγάλη συλλογή από Burr κατανομές που βρίσκονται στον πίνακα 3.1 με $U_t = 32$ και $L_t = 4$ που βρίσκεται παρακάτω.

Πίνακας 3.1 : Δείκτες ικανότητας διεργασίας χρησιμοποιώντας τη μέθοδο ποσοστημορίων Burr (πίνακας σε αναφορά των Ahmad, Abdollahian, Zeephongsekul 2007-2008).

Procedure	Parameters	Calculated values
Enter specifications:		
Upper tolerance limit	U_t	32
Lower tolerance limit	L_t	4
Estimate sample statistics:		
Sample size	n	100
Mean	$\bar{x}$	10.5
Standard deviation	s	3.142
Skewness	s_3	1.14
Kurtosis	s_4	2.58
Use s_3 and s_4 to calculate:		
Standardized moment of skewness	α_3	1.12
Standardized moment of kurtosis	α_4	4.97
Based on α_3 and α_4, select c and k:		
	c	2.347
	k	4.429
Use the estimated Burr XII distribution to obtain:		
standardized lower percentile	$Z_{0.00135}$	-1.808
standardized median	$Z_{0.5}$	-0.140
standardized upper percentile	$Z_{0.99865}$	4.528

Από αυτόν τον πίνακα, τα τυποποιημένα 0.00135, 0.5, 0.99865 ποσοστημόρια, αντιστοιχούν στα $Z_{0.00135}$, $Z_{0.5}$, $Z_{0.99865}$. Αποκτούμε τα αντίστοιχα ποσοστημόρια του *X* από το ταίριασμα των δύο τυποποιημένων τιμών και αυτό είναι

$$\frac{X-\bar{x}}{s} = \frac{Y-\mu}{\sigma} \tag{3.27}$$

4. Από τη σχέση (3.27) , οι εκτιμήσεις για χαμηλά, μεσαία και υψηλά ποσοστημόρια είναι

$$L_p = \bar{x} + sZ_{0.00135} \tag{3.28}$$

$$M = \bar{x} + sZ_{0.5} \tag{3.29}$$

$$U_p = \bar{x} + sZ_{0.99865} \tag{3.30}$$

5. Υπολογισμός των δεικτών ικανότητας διεργασίας χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (3.14) και (3.17) της μεθόδου Clements.

Αντί να χρησιμοποιούμε τις στιγμές της ασυμμετρίας και της κύρτωσης όπως έχουμε κάνει εδώ, άλλες μέθοδοι όπως η μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας, η μέθοδος της πιθανότητας-σταθμισμένων στιγμών και η μέθοδος των L-στιγμών χρησιμοποιούνται επίσης για την εκτίμηση μιας Burr κατανομής. Ωστόσο, η επιλογή μας καθορίζεται από το γεγονός ότι οι επαγγελματίες που ασχολούνται με τον έλεγχο ποιότητας με μικρό υπόβαθρο στη θεωρητική στατιστική θα βρίσκουν τη διαδικασία εκτίμησης που υιοθετείται εδώ, η οποία είναι απλώς μια στιγμή που ταιριάζει σε μια διεργασία, πολύ πιο εύκολα να κατανοηθεί και να εφαρμοστεί. Τα χαρακτηριστικά της στιγμής είναι πολύ πιο συνηθισμένα εξαιτίας της απλότητας τους και της ταχύτητας υπολογισμού.

3.2.6 Τεχνικές μετασχηματισμού

3.2.6.1 Box-Cox μετασχηματισμός

Τα μειονεκτήματα από ένα απλό μετασχηματισμό δύναμης (ασυνέχεια γύρω από το μηδέν και μη-ευθυγραμμισμένες μετασχηματισμένες κλίμακες) μετριάστηκαν από το μετασχηματισμό του Box-Cox (1964) $X^{(\lambda)}$, μια γραμμική μεταβλητή ενός απλού μετασχηματισμού δύναμης $X_p^{(\lambda)}$. Η υποχρεωτικά θετική μεταβλητή απόκρισης X δίνεται από τον παρακάτω τύπο

$$X^{(\lambda)} = \begin{cases} \frac{X^{\lambda}-1}{\lambda} & \gamma\iota\alpha\ \lambda \neq 0 \\ \ln(X) & \gamma\iota\alpha\ \ \lambda = 0 \end{cases} \tag{3.31}$$

Για τον προσδιορισμό της ποιότητας και το βέλτιστο λ, διαγράμματα διασποράς και διαγράμματα ποσοστημορίου μπορούν να σχεδιαστούν, με ελέγχους κανονικότητας μετά το μετασχηματισμό δύναμης πολύ πιο κατάλληλα. Ένας πολύ γνωστός έλεγχος αυτός του Shapiro-Wilk είναι ισοδύναμος με τον έλεγχο της σημαντικότητας της εφαπτομένης σε ένα διάγραμμα ποσοστημορίων, δηλαδή η γραμμικότητα μπορεί να αναλυθεί επίσης. Η οικογένεια μετασχηματισμών Box-Cox εξαρτάται από το λ που

εκτιμάται από την εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας ή από την εκτίμηση ελαχίστων τετραγώνων. Για $\lambda = 1$ το προσθετικό μοντέλο μέτρησης είναι κατάλληλο ενώ για $\lambda = 0$ προσθετικό μοντέλο θα προτιμώταν. Πρώτον, το *λ* είναι επιλεγμένο από ένα επιλεγμένο εύρος και ακολούθως γίνονται οι υπολογισμοί

$$L_{max} = -\frac{1}{2}\ln\hat{\sigma}^2 + \ln J(\lambda, X) = \frac{1}{2}\ln\hat{\sigma}^2 + (\lambda - 1)\sum_{i=1}^{n}\ln X_i \qquad (3.32)$$

όπου

$$J(\lambda, X) = \prod_{i=1}^{n}\frac{\partial W_i}{\partial X_i} = \prod_{i=1}^{n} X_i^{\lambda-1} \qquad \forall\, \lambda \qquad (3.33)$$

Έτσι αυτό γίνεται $\ln J(\lambda, X) = (\lambda - 1)\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$ (3.34)

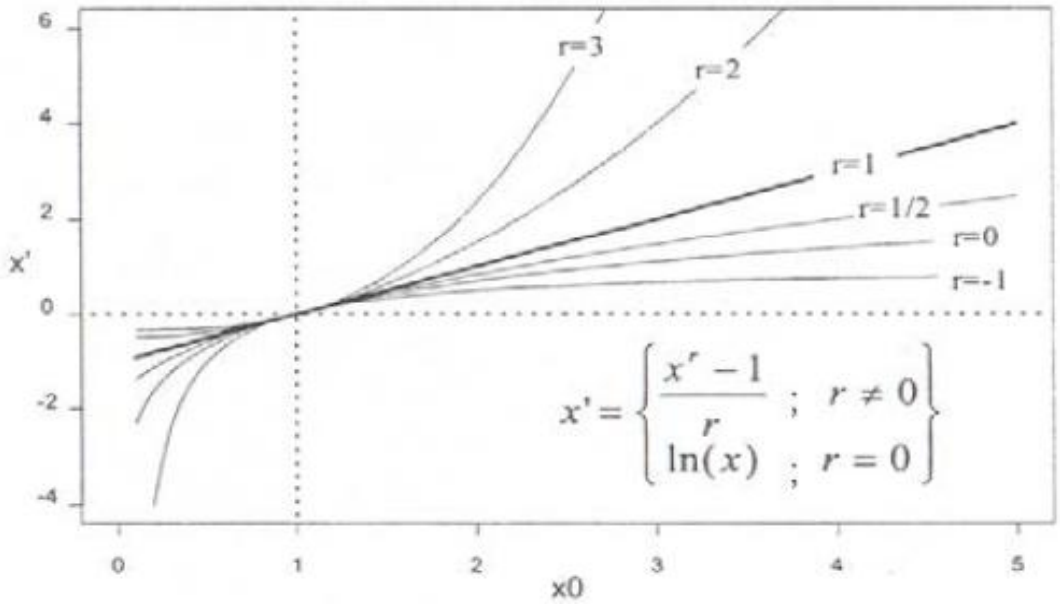
Η $\hat{\sigma}^2$ εκτίμηση για επιλεγμένα λ είναι $\hat{\sigma}^2 = \frac{S(\lambda)}{n}$ (3.35)

όπου $S(\lambda)$ είναι το υπόλοιπο του αθροίσματος τετραγώνων στην ανάλυση της μεταβλητής $X(\lambda)$. Μετά τον υπολογισμό του $L_{max}(\lambda)$ για διάφορα λ στη σειρά , κάνουμε το διάγραμμα του $L_{max}(\lambda)$ με το λ . Η εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας για το λ είναι υπολογισμένη από τη μεγιστοποίηση του $L_{max}(\lambda)$ ως προς λ. Με το βέλτιστο λ^*, κάθε *X* στα όρια προδιαγραφών μετασχηματίζεται σε μια κανονική τιμή με τη βοήθεια της εξίσωσης (3.31).

Ο μετασχηματισμός Box-Cox εκτιμάει το λ από την ελαχιστοποίηση της τυπικής απόκλισης της κανονικοποιημένης μεταβλητής μετασχηματισμού; το λογισμικό είναι ικανό για την εκτίμηση πολλών από αυτών. Το *y* είναι μια μετασχηματισμένη μεταβλητή του χαρακτηριστικού ποιότητας *x*.

Το λ υποδηλώνει το σχήμα της συνάρτησης και επιτρέπει την εύρεση της $F(x)$ ικανοποιώντας τη μέγιστη κανονικότητα ή τη συνθήκη συμμετρίας. Διαφορετικά σχήματα από τη συνάρτηση μετασχηματισμού του Box-Cox (συμβολίζοντας ως *r*) για ποικίλα λ απεικονίζονται στο Σχήμα 3.3 που ακολουθεί παρακάτω. Ο στόχος είναι να βρεθεί το *r* που ικανοποιεί τη μέγιστη συμμετρία που «μετριέται» από την ασυμμετρία ή (καλύτερα) από τη

μέγιστη κανονικότητα που «μετριέται» από την πιθανοφάνεια, μετα από μετασχηματισμό. Η μέγιστη συμμετρία (συνθήκη ασυμμετρίας στο μηδέν) ή η συνθήκη μέγιστης πιθανοφάνειας υπολογίζονται επαναληπτικά.



Σχήμα 3.3 : Σχήμα Box-Cox μετασχηματισμού για r = -1,0, 0.5,1,2,3

3.2.6.2 Johnson μετασχηματισμός

Όταν οι παρατηρήσεις δεν είναι κανονικά κατανεμημένες, ο μετασχηματισμός Johnson (1949) μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Τα δεδομένα τότε θα ακολουθούν τυποποιημένη κανονική κατανομή $N(0,1)$. Αυτός ο τύπος είναι

$$z = \gamma + \eta \cdot \tau(x; \varepsilon, \lambda) \tag{3.35}$$

με $\eta > 0,\ -\infty < \gamma < \infty,\ \lambda > 0, -\infty < \varepsilon < \infty$

όπου z είναι μια τυποποιημένη κανονική τυχαία μεταβλητή και x μια μεταβλητή προσαρμοσμένη χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό Johnson. Οι τέσσερις παράμετροι που εκτιμώνται είναι γ, η, ε, λ με τη τ μια αυθαίρετη συνάρτηση που παίρνει μια από τις τρεις πακατάτω μορφές. Ο μετασχηματισμός Johnson γι' αυτό επιλέγει ένα τύπο που εξαρτάται από το

εάν η τυχαία μεταβλητή είναι «λογαριθμοκανονική», «φραγμένη» είτε «μη-φραγμένη».

Λογαριθμοκανονικό σύστημα

$$\tau_1(x;\varepsilon,\lambda) = \log\left(\frac{x-\varepsilon}{\lambda}\right),\ \ x \geq \varepsilon \tag{3.36}$$

Η ονομαζόμενη λογαριθμοκανονική Johnson κατανομή συνδέεται με ένα λογαριθμοκανονικό σύστημα. Οι παράμετροι που εκτιμώνται είναι

$$\hat{\eta} = 1.645\left[\left(\frac{x_{0.95}-x_{0.5}}{x_{0.5}-x_{0.05}}\right)\right]^{-1} \tag{3.37}$$

$$\hat{\gamma}^* = \hat{\eta}\log\left(\frac{1-e^{-1.645/\hat{\eta}}}{x_{0.5}-x_{0.05}}\right) \tag{3.38}$$

$$\hat{\varepsilon} = x_{0.5} = \exp\left(-\hat{\gamma}^*/\hat{\eta}\right) \tag{3.39}$$

όπου το 100*α*% εκατοστημόριο υπολογίζεται σαν την *α(n+1)*-οστή τιμή από *n* παρατηρήσεις. Αν αυτό είναι απαραίτητο, η γραμμική παρεμβολή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δώσει το επιθυμητό εκατοστημόριο.

Μη φραγμένο σύστημα

$$\tau_2(x;\varepsilon,\lambda) = \sin h^{-1}\left(\frac{x-\varepsilon}{\lambda}\right)\ ,\quad -\infty < x < \infty \tag{3.40}$$

Οι καμπύλες είναι μη φραγμένες και το σύστημα αποτελείται και από Student και από κανονική κατανομή μεταξύ άλλων. Οι Hahn και Shapiro (1967) εφάρμοσαν έναν πίνακα για τα $\hat{\gamma}$ και $\hat{\eta}$ που βασίζονται σε δοσμένες ασυμμετρίες και κυρτώσεις.

Φραγμένο σύστημα

$$\tau_3(x;\varepsilon,\lambda) = \log\left(\frac{x-\varepsilon}{\lambda+\varepsilon-x}\right)\ ,\quad \varepsilon \leq x \leq \varepsilon+\lambda \tag{3.41}$$

Το σύστημα περιέχει φραγμένες κατανομές, όπως είναι η γάμμα και η βήτα. Επειδή το καθένα μπορεί να είναι φραγμένο από κάτω από το ε ή φραγμένο από πάνω από το *(λ+ε)*, τα παρακάτω μπορεί να συμβούν:

- *Το εύρος διακύμανσης είναι γνωστό*: και τα δύο τελικά σημεία έχουν καθοριστεί, οι παράμετροι έχουν αποκτηθεί από

$$\hat{\eta} = \frac{z_{1-a'} - z_a}{\log\left(\frac{\left(x_{1-a'} - \varepsilon\right)(\varepsilon+\lambda-x_a)}{(x_a-\varepsilon)\left(\varepsilon+\lambda-x_{1-a'}\right)}\right)} \tag{3.42}$$

$$\hat{\gamma} = z_{1-a'} - \hat{\eta}\log\left(\frac{x_{1-a'} - \varepsilon}{\varepsilon+\lambda-x_{1-a'}}\right) \tag{3.43}$$

- *Ένα γνωστό τελικό σημείο*: επιπρόσθετη εξίσωση (δίνεται από τους αντίστοιχους μέσους) απαιτείται για συμπλήρωμα του $\hat{\eta}$ και $\hat{\gamma}$, δίνεται ως

$$\hat{\lambda} = (x_{0.5} - \varepsilon)\begin{pmatrix} (x_{0.5} - \varepsilon)(x_\alpha - \varepsilon) + (x_{0.5} - \varepsilon) \\ (x_{1-\alpha} - \varepsilon) - 2(x_\alpha - \varepsilon)(x_{1-\alpha} - \varepsilon) \end{pmatrix} *$$

$$* \left[(x_{0.5} - \varepsilon)^2 - (x_\alpha - \varepsilon)(x_{1-\alpha} - \varepsilon)\right]^{-1} \tag{3.44}$$

- *Κανένα τελικό σημείο δεν είναι γνωστό*: τέσσερα εκατοστημόρια πρέπει να συγκριθούν με αυτά από την κανονική κατανομή. Η εξίσωση για $i = 1,2,3,4$ είναι:

$$z_i = \hat{\gamma} + \hat{\eta}\log\left(\frac{x_i - \hat{\varepsilon}}{\hat{\varepsilon}+\hat{\lambda}-x_i}\right) \tag{3.45}$$

Όντας μη γραμμική, αυτή λύνεται αριθμητικά.

Ο Hill (1976) μαζί με άλλους σχεδίασε έναν αλγόριθμο που υπολογίζει τα τέσσερα πρώτα κεντρικά σημεία της X από τους παραπάνω αναφερόμενους τύπους της κατανομής. Οι δείκτες ικανότητας διεργασίας έχουν ποσοτικοποιηθεί από τις (3.1) και (3.2).

3.3 Ένα κριτήριο σύγκρισης μεταξύ των μεθόδων Clements, Box-Cox και Burr

Διαφορετικά κριτήρια σύγκρισης οδηγούν σε διαφορετικά αποτελέσματα. Ένα ευρέως αναγνωρισμένο κριτήριο για την αντιμετώπιση προβλήματος της μη κανονικότητας για την εκτίμηση δεικτών ικανότητας διεργασίας δίνεται από τους Rivera et al. (1995). Αυτοί χρησιμοποίησαν τα άνω όρια ανοχής για τις βασικές κατανομές ώστε να υπολογίσουν τον πραγματικό αριθμό των μη συμμορφωμένων αντικειμένων και ισοδύναμους C_{pk} δείκτες. Οι εκτιμημένες C_{pk} τιμές είναι υπολογισμένες από τα δεδομένα και έπειτα συγκρίνονται με τις τιμές στόχους των C_{pk} . Μια παρόμοια στρατηγική έχει χρησιμοποιηθεί και από τους Tang et al (1999) προκειμένου να έχουν ένα κριτήριο σύγκρισης για το μονόπλευρο δείκτη C_{pu} και τους Liu and Chen (2006) για τις μελέτες των μη κανονικών δεικτών ικανότητας διεργασίας. Για μια τιμή στόχο C_{pu} , το κλάσμα των μη επιβεβαιωμένων αντικειμένων από μια κανονική κατανομή μπορεί να καθοριστεί χρησιμοποιώντας

Κλάσμα για μη – συμμορφούμενα μέρη = Φ(-3$*$ C_{pu}) (3.46)

όπου η Φ(x) αναφέρεται στην αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυποποιημένης κανονικής μεταβλητής.

Ο δείκτης ικανότητας διεργασίας C_{pu} με μονόπλευρο όριο ανοχής χρησιμοποιείται σαν κριτήριο σύγκρισης. Η Weibull, η Γάμμα και η Λογαριθμοκανονική κατανομή χρησιμοποιούνται για να ερευνήσουν την επίδραση των μη κανονικών δεδομένων σε δείκτες ικανότητας διεργασίας. Αυτές οι κατανομές είναι γνωστές να έχουν τιμές παραμέτρων που παρουσιάζουν ήπια παρέκκλιση από την κανονικότητα. Αυτοί οι παράμετροι είναι επιλεγμένοι να συγκρίνουν τα αποτελέσματα προσομοίωσης με τα υπάρχοντα αποτελέσματα χρησιμοποιώντας ίδιους παραμέτρους σαν τους Tang and Than (1999) και τους Liu and Chen (2006).

Οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας της Weibull, της Γάμμα και της Λογαριθμοκανονικής κατανομής είναι

Weibull(α,β), α>0, β>0 :

$$f(x|\alpha,\beta) = \frac{\alpha}{\beta} x^{\alpha-1} e^{-x^{\alpha}/\beta},\ x \geq 0 \tag{3.47}$$

Gamma(α,β), α>0, β>0 :

$$f(x|\alpha,\beta) = \frac{1}{\gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1},\ x \geq 0 \tag{3.48}$$

Lognormal(μ,σ^2), $-\infty \leq \mu \leq \infty$:

$$f(x|\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 x}} e^{-(\ln x-\mu)^2/\sigma^2},\ x \geq 0 \tag{3.49}$$

Στη μελέτη προσομοίωσης, για σκοπούς σύγκρισης, οι τιμές στόχοι του C_{pu} 0.5, 1.0, 1.5 και 2.0 και η Weibull κατανομή με α=1.2 και β=1.0, η Γάμμα κατανομή με α=1.0 και β=1.0 και η λογαριθμοκανονική κατανομή με μ=0 και σ^2=1.0 χρησιμοποιούνται. Η αντίστοιχη $\mathrm{U_t}$ τιμή για κάθε κατανομή είναι

$$U_t = C_{pu}\,(X_{0.99865} - X_{0.5}) + X_{0.5} \tag{3.50}$$

όπου $X_{0.99865}$ και $X_{0.5}$ είναι τα προσδιορισμένα ποσοστημόρια της αντίστοιχης κατανομής. Για παράδειγμα, αν $C_{pu} = 1.5$ και έστω ότι η κατανομή είναι Weibull με τιμές παραμέτρων α=1.2 και β=1 , χρησιμοποιώντας οποιοδήποτε στατιστικό πακέτο βρίσκουμε δύο ποσοστημόρια τα οποία είναι $X_{0.99865} = 4.8236$ και $X_{0.5} = 0.7368$ αντίστοιχα. Έπειτα χρησιμοποιώντας την σχέση (3.50) βρίσκουμε την αντίστοιχη $\mathrm{U_t}$ τιμή που ισούται με 6.867.

Η εκτίμηση 30 δειγμάτων, μεγέθους 100 το καθένα, για κάθε κατανομή γίνεται ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα ώστε να υπολογιστεί η αντίστοιχη C_{pu} για κάθε δείγμα.

1. Επιλογή μιας κατανομής με γνωστές παραμέτρους, για παράδειγμα, Weibull κατανομή με α=1.2 και β=1.
2. Εύρεση του $X_{0.99865}$ και του $X_{0.5}$ γι' αυτήν την κατανομή με χρήση κάποιου στατιστικού πακέτου.
3. Επιλογή μιας τιμής στόχου C_{pu} , έστω ότι $C_{pu} = 1.5$.

4. Χρήση της σχέσης (3.50) για τον υπολογισμό του U_t , το οποίο ισούται με 6.867 σε αυτό το παράδειγμα.
5. Έπειτα κάνουμε συγκρίσεις μεταξύ των τριών μεθόδων, Clements, Box-Cox και Burr χρησιμοποιώντας την ακόλουθη σειρά βημάτων.
6. Προσομοίωση τιμών από την υποβόσκουσα κατανομή.
7. Χρήση κάθε μεθόδου για την εκτίμηση των $X_{0.99865}$ και $X_{0.5}$.
8. Για την τιμή στόχο C_{pu}, έστω 1.5, και την αντίστοιχη U_t τιμή, έστω 6.867, υπολογίζουμε τις C_{pu} τιμές κάνοντας χρήση και των τριών μεθόδων.
9. Σύγκριση αυτών των υπολογισμένων C_{pu} τιμών χρησιμοποιώντας τις τυπικές, συνηθισμένες στατιστικές μετρήσεις και γραφικές παραστάσεις για να αποφασίσουμε ποιά, μεταξύ των τριών μεθόδων, οδηγεί στην πιο ακριβή εκτίμηση σχετικά με την τιμή στόχο C_{pu} .

Το κύριο κριτήριο που χρησιμοποιείται για τη σύγκριση μεταξύ των τριών μεθόδων είναι να προσδιοριστεί η ακρίβεια των εκτιμήσεων της ικανότητας διεργασίας. Η καλύτερη και πιο κατάλληλη μέθοδος είναι αυτή που θα έχει το μέσο των εκτιμημένων C_{pu} τιμών πλησιέστερα στην τιμή στόχο και θα έχει τη μικρότερη μεταβλητότητα, υπολογισμένη από την τυπική απόκλιση των εκτιμημένων τιμών.

3.4 Εκτελέσεις προσομοίωσης μεταξύ των μεθόδων Clements, Box-Cox και Burr

Όπως αναφέραμε και στην παράγραφο 3.3, θα μελετήσουμε 30 δείγματα, το μέγεθος του καθενός είναι 100, από τις κατανομές Weibull, Γάμμα και Λογαριθμοκανονική. Μετά από κάθε είδος προσομοίωσης, τα απαραίτητα στατιστικά μέτρα, όπως είναι ο μέσος, η τυπική απόκλιση, η διάμεσος, η παραμόρφωση, η κύρτωση, τα άνω και κάτω 0.135 ποσοστημόρια λαμβάνονται. Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε το δείκτη C_{pu} ως κριτήριο σύγκρισης. Ο δείκτης ικανότητας για μη κανονικά δεδομένα πρέπει να είναι

συμβατό με αυτό που υπολογίστηκε κάτω από την υπόθεση της κανονικότητας, δίνοντας το ίδιο κλάσμα για μη κανονικά μέρη. Οι εκτιμητές για το δείκτη C_{pu} προσδιορίζονται με χρήση των μεθόδων Burr, Clements και Box-Cox με τα βήματα που περιγράφηκαν στην προηγούμενη ενότητα. Η μέση τιμή όλων των 30 εκτιμημένων τιμών και οι τυπικές τους αποκλίσεις είναι υπολογισμένες και παρουσιάζονται στους Πίνακες 3.2 - 3.4.

Προκειμένου να βρούμε την πιο κατάλληλη μέθοδο για να πραγματευόμαστε τη μη-κανονικότητα που μελετάτε μέσω από τις κατανομές Weibull, Γάμμα και Λογαριθμικανονική, παρουσιάζουμε τα box-plots των εκτιμημένων C_{pu} τιμών χρησιμοποιώντας όλες αυτές τις τρεις μεθόδους (Σχήματα 3.4 – 3.6). Τα box-plots είναι ικανά να παρουσιάσουν γραφικά τη σημαντικότητα των χαρακτηριστικών των εκτιμημένων C_{pu} τιμών, όπως τη διάμεσο, το ενδο-τεταρτημοριακό εύρος και την ύπαρξη ακραίων τιμών. Αυτά τα γραφήματα αποδεικνύουν ότι οι μέσοι χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Burr είναι πλησιέστερα στις τιμές στόχους C_{pu} και η έκταση των τιμών είναι μικρότερη από αυτή που θα παίρναμε χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Clements, γι' αυτό αποδεικνύεται καλύτερη προσέγγιση. Η μέθοδος Box-Cox δίνει παρόμοια αποτελέσματα για μικρότερες τιμές στόχους.

Πίνακας 3.2 : Ο μέσος και η τυπική απόκλιση για 30 C_{pu} τιμές με n=100 με τη μέθοδο Weibull (πίνακας σε αναφορά των Ahmad, Abdollahian, Zeephongsekul 2007-2008).

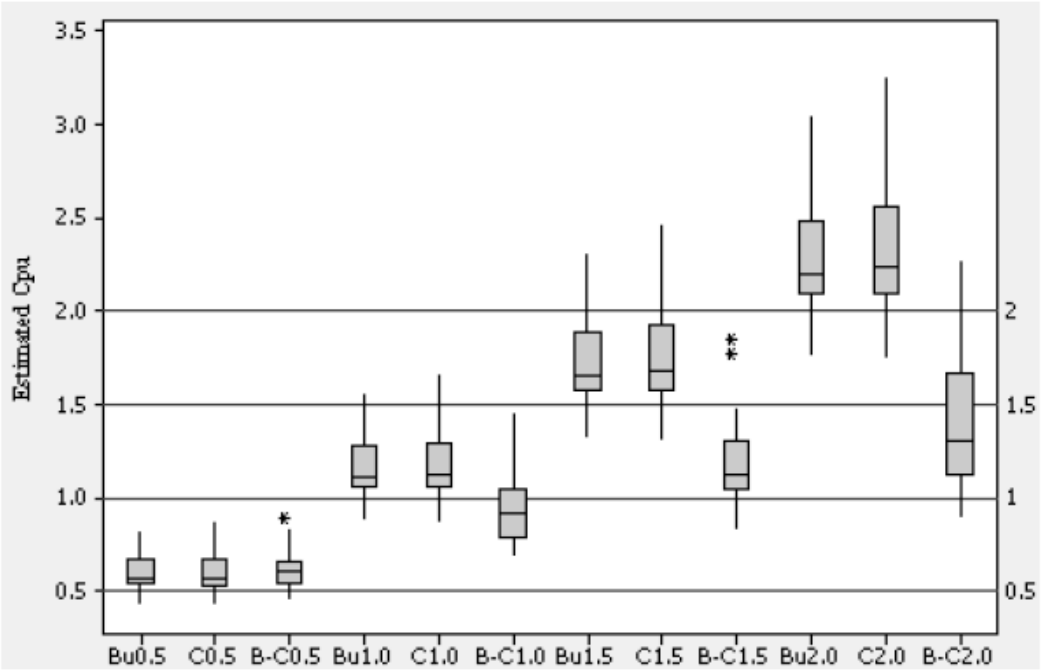
		Burr		Clements		Box-Cox	
C_{pu}	U_t	mean	Std	mean	Std	mean	Std
0.5	2.780	0.596	0.090	0.590	0.099	0.621	0.100
1.0	4.824	1.152	0.159	1.159	0.175	0.956	0.194
1.5	6.867	1.708	0.228	1.727	0.252	1.204	0.283
2.0	8.910	2.264	0.297	2.296	0.328	1.407	0.367

Πίνακας 3.3 : Ο μέσος και η τυπική απόκλιση για 30 C_{pu} τιμές με n=100 με τη μέθοδο Γάμμα (πίνακας σε αναφορά των Ahmad, Abdollahian, Zeephongsekul 2007-2008).

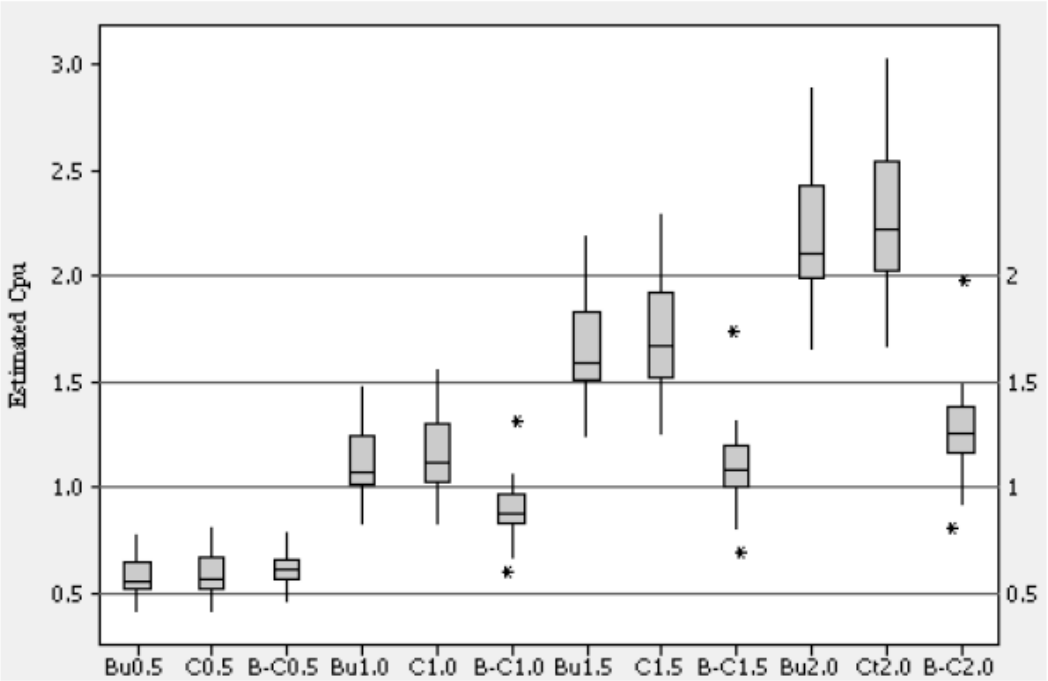
		Burr		Clements		Box-Cox	
C_{pu}	U_t	mean	Std	mean	Std	mean	Std
0.5	3.650	0.578	0.091	0.593	0.105	0.611	0.075
1.0	6.608	1.117	0.166	1.159	0.188	0.897	0.132
1.5	9.565	1.655	0.241	1.725	0.271	1.099	0.185
2.0	12.522	2.194	0.316	2.290	0.354	1.262	0.233

Πίνακας 3.4 : Ο μέσος και η τυπική απόκλιση για 30 C_{pu} τιμές με n=100 με τη Λογαριθμοκανονική μέθοδο (πίνακας σε αναφορά των Ahmad, Abdollahian, Zeephongsekul 2007-2008).

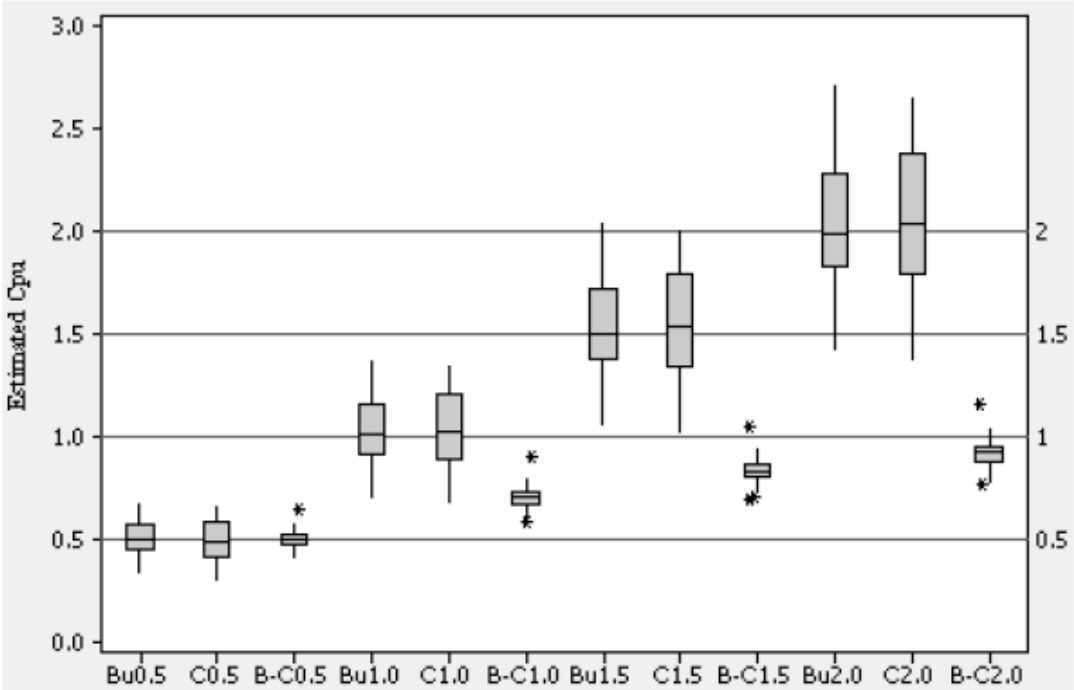
		Burr		Clements		Box-Cox	
C_{pu}	U_t	mean	Std	mean	Std	mean	Std
0.5	4.482	0.499	0.084	0.496	0.097	0.503	0.048
1.0	8.339	1.024	0.166	1.031	0.183	0.710	0.061
1.5	12.009	1.523	0.243	1.541	0.265	0.832	0.070
2.0	15.679	2.022	0.320	2.050	0.348	0.921	0.076



Σχήμα 3.4 : Box plot για την εκτίμηση C_{pu} τιμών με τιμή στόχο $C_{pu} = 0.5$, $1.0, 1.5, 2.0$ για την κατανομή Weibull.



Σχήμα 3.5 : Box plot για την εκτίμηση C_{pu} τιμών με τιμή στόχο $C_{pu} = 0.5$, $1.0, 1.5, 2.0$ για την κατανομή Γάμμα.



Σχήμα 3.6 : Box plot για την εκτίμηση C_{pu} τιμών με τιμή στόχο $C_{pu} = 0.5$, $1.0, 1.5, 2.0$ για τη λογαριθμικανονική κατανομή.

Όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη ενότητα, η επίδοση των κριτηρίων σχετίζεται με την ακρίβεια ενός δοσμένου μεγέθους δείγματος. Για τον προσδιορισμό της ακρίβειας, κοιτάμε το μέσο των εκτιμημένων C_{pu} τιμών και εστιάζουμε και στην τυπική απόκλιση αυτών των τιμών χρησιμοποιώντας στη συγκεκριμένη περίπτωση τις προαναφερθείσες τρεις μεθόδους. Κοιτάζοντας τα αποτελέσματα που απεικονίζονται στους πίνακες 3.2 – 3.4 καταλήγουμε στα παρακάτω αποτελέσματα.

1. Η μέθοδος Burr είναι αυτή στην οποία ο μέσος της εκτιμημένης τιμής αποκλίνει λιγότερο από την τιμή στόχο C_{pu} .
2. Η τυπική απόκλιση των εκτιμημένων C_{pu} τιμών χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Burr είναι μικρότερη από αυτή της μεθόδου Clements.
3. Η μέθοδος Box-Cox δεν επιφέρει αποτελέσματα κοντά σε καμία από τις τιμές στόχους C_{pu} , με εξαίρεση τις μικρότερες τιμές στόχους.

Γενικά σε όλες τις ασκήσεις προσομοίωσης, παρατηρείται ότι τα μεγαλύτερα μεγέθη δείγματος αποδίδουν καλύτερες εκτιμήσεις σε όλες τις μεθόδους. Επομένως, το μέγεθος του δείγματος έχει μια επίδραση στην ικανότητα εκτίμησης της διαδικασίας. Έχει επίσης παρατηρηθεί ότι μεγαλύτερες τιμές στόχοι C_{pu} οδηγούν σε ελαφρώς χειρότερες εκτιμήσεις για όλες τις μεθόδους.

3.5 Επίλογος

Γενικά, οι μέθοδοι μπορούν να διαχωριστούν σε δύο κατηγορίες. Η πρώτη κατηγορία αποτελείται από το γράφημα πιθανότητας, την κατανομή ανεξαρτήτως ανοχής διαστημάτων, τη μέθοδο σταθμισμένης μεταβλητής που μπορούν να κατηγοριοποιηθούν ως μέθοδοι μη-μετασχηματισμού. Η δεύτερη κατηγορία αποτελείται από τεχνικές μετασχηματισμού: Clements, Burr, Box-Cox και Johnson. Η απόδοση του μέρους σύγκρισης και στις δύο κατηγορίες αφορά την ακρίβεια και την ορθότητα με σεβασμό στο μέγεθος του δείγματος.

Οι τεχνικές μετασχηματισμού πρέπει να χρησιμοποιηθούν για να ελέγξουν την ικανότητα διεργασίας για $n \geq 100$. Παρ' όλα αυτά, η κυριαρχία του Box-Cox είναι εμφανής ως προς τις γραφικές παραστάσεις, ειδικά για τη λογαριθμοκανονική κατανομή που είναι αναμενόμενη καθώς αυτή παρέχει ακριβείς μετασχηματισμούς σε φυσικούς λογαρίθμους. Στη περίπτωση της λογαριθμοκανονικής κατανομής τα αποτελέσματα συγκλίνουν στην κανονικότητα. Συγκρίνοντας τις Box-Cox και Johnson μεθόδους, η πρώτη είναι πιο ακριβής καθώς απαιτεί τη μεγιστοποίηση της λογαριθμικής συνάρτησης πιθανοφάνειας ώστε να δώσει ακριβή λ ενώ η δεύτερη λειτουργεί σε εκτιμήσεις των πρώτων τεσσάρων κεντρικών στιγμών. Η μέθοδος γραφήματος πιθανότητας συστείνεται για διεργασίες με μικρές αποκλίσεις από την κανονικότητα, μπορεί ακόμα να προβλέψει ανωμαλίες όπως η διτροπικότητα και τα ακραία σημεία. Ακόμα, η ποσοστιαία μέθοδος Burr είναι ισάξια με το μετασχηματισμό Box-Cox. Οι επιδόσεις τους για μικρά μεγέθη δείγματος, ειδικά για 30 μεγέθη δείγματος με $n = 50$, έχουν αναλυθεί ώστε να καθοριστεί ποιά είναι η καλύτερη μέθοδος για δείγματα που συχνά συναντώνται στην πράξη.

Poisson Παλινδρόμηση

4.1 Εισαγωγή

Η κατανομή Poisson , είναι μία διακριτή συνάρτηση κατανομής που εκφράζει την πιθανότητα ενός δεδομένου αριθμού γεγονότων που συμβαίνουν σε ένα σταθερό διάστημα χρόνου ή/και χώρου αν αυτά τα γεγονότα συμβαίνουν με ένα γνωστό μέσο ρυθμό και είναι ανεξάρτητα από το χρονικό διάστημα από την τελευταία περίπτωση.Η κατανομή Poisson μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για τον αριθμό γεγονότων σε άλλα καθορισμένα διαστήματα όπως η απόσταση, η επιφάνεια ή ο όγκος.

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι κάποιος παίρνει 4 αλληλογραφίες ημερησίως κατά μέσο όρο. Θα υπάρξει, ωστόσο, μία ορισμένη διάδοση: μερικές φορές λίγα περισσότερα, μερικές φορές λίγο λιγότερα, πότε-πότε τίποτα. Δεδομένου μόνο του μέσου ρυθμού, για ένα ορισμένο διάστημα παρακολούθησης (αριθμό αλληλογραφίας ανά μέρα, τηλεφωνήματα ανά ώρα, κτλ.), και υποθέτοντας ότι η διαδικασία, ή ο συνδυασμός των διαδικασιών, που παράγουν τα γεγονότα είναι ουσιαστικά τυχαίος, η κατανομή Poisson καθορίζει πόσο πιθανό είναι ότι ο αριθμός θα είναι 3, ή 5, ή 10, ή κάποιος άλλος αριθμός, κατά την διάρκεια μίας περιόδου παρατήρησης. Αυτό σημαίνει ότι προβλέπει τον αριθμό διάδοσης γύρω από ένα γνωστό ρυθμό εξάπλωσης.

Αποτελεί μια επέκταση του βασικού μοντέλου παλινδρόμησης. Το μοντέλο της γραμμικής παλινδρόμησης μπορεί να εκφραστεί ως

$$\mu = E(Y) = x'\beta \tag{4.1}$$

όπου Y μια συνεχής τυχαία μεταβλητή της κανονικής κατανομής $N(\mu, \sigma^2)$ και $x' = (x_0, x_1, \dots, x_k)$ οι ανεξάρτητες μεταβλητές με $x_0 = 1$.

Το ένα πρόβλημα που προκύπτει σε αυτό το απλό μοντέλο είναι τι γίνεται αν η Y δεν ακολουθεί την κανονική κατανομή. Αυτό συνήθως λύνεται με κατάλληλο μετασχηματισμό της Y, όπως γίνεται με τη χρήση του λογαρίθμου για παράδειγμα. Το άλλο πρόβλημα είναι τι μπορούμε να κάνουμε αν η Y είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή. Σχετικά με αυτό, διαπιστώνουμε ότι στην

πραγματικότητα καμία μεταβλητή δεν είναι συνεχής. Πάντα υπάρχει ένας βαθμός στρογγυλοποίησης στις μετρήσεις, το οποίο σημαίνει ότι οι τιμές που διαθέτουμε είναι διακριτές. Αυτό όμως αγνοείται όταν οι διαβαθμίσεις της κλίμακας μέτρησης είναι μικρές σε σχέση με τις τυπικές τιμές των παρατηρήσεων. Όμως υπάρχουν περιπτώσεις που η εξαρτημένη μεταβλητή Y είναι πράγματι διακριτή και το γεγονός αυτό δεν μπορεί να αγνοηθεί.Έστω για παράδειγμα ότι η εξαρτημένη μας μεταβλητή είναι η Y = αριθμός ατυχημάτων ανά εβδομάδα σε μια διασταύρωση μιας γειτονιάς. Οι τιμές της Y λογικά θα είναι μικρές σε εύρος : 0,1,2,... ίσως μέχρι 10. Οι διαβαθμίσεις όμως δεν είναι μικρές και προφανώς αυτή η Y δεν μπορεί να θεωρηθεί συνεχής. Για την περιγραφή τέτοιων συμβάντων που αναφέρονται σε έναν αριθμό γεγονότων χρησιμοποιείται η κατανομή Poisson με συνάρτηση πιθανότητας

$$P(Y = y) = \frac{e^{-\mu}\mu^{y}}{y!}\ ,\ \ y = 0,1,2,\dots\ ,\ \mu > 0 \qquad (4.2)$$

Η αναμενόμενη τιμή και η διασπορά αυτής της κατανομής είναι

$$E(Y) = \mu \qquad (4.3) \qquad \text{και} \qquad V(Y) = \mu \qquad (4.4)$$

Αν υποθέσουμε ακόμη ότι αγνοούμε το γεγονός ότι η Y είναι διακριτή και ότι η Poisson αναμένεται να είναι καταλληλότερη της κανονικής κατανομής, τότε αν κάνουμε προσαρμογή του γνωστού μοντέλου της γραμμικής παλινδρόμησης θα διαπιστώσουμε ότι παραβιάζεται η απαίτηση της σταθερής διασποράς $V(Y) = \sigma^2$ για όλες τις παρατηρήσεις. Η πραγματική διασπορά $V(Y) = E(Y)$ θα μεταβάλλεται στα μοντέλα παλινδρόμησης, όπου η μέση τιμή $E(Y)$ εξαρτάται από την τιμή ενός διανύσματος των επεξηγηματικών μεταβλητών.Το μοντέλο παλινδρόμησης Poisson είναι προσαρμοσμένο ως προς την ιδιομορφία της εξαρτημένης μεταβλητής Y .

4.2 Η Poisson κατανομή

Μια τυχαία μεταβλητή Y λέγεται ότι έχει μια Poisson κατανομή με παράμετρο μ αν αυτό παίρνει ακέραιες τιμές $y = 0,1,2 \ldots$ με πιθανότητα $\Pr\{Y = y\} = \frac{e^{-\mu}\mu^{y}}{y!}$ για $\mu > 0$. Η μέση τιμή και η διασπορά αυτής της κατανομής είναι $E(Y) = Var(Y) = \mu$. Αφού η μέση τιμή είναι ίση με τη διασπορά, οποιοσδήποτε παράγοντας που επηρεάζει τη μία θα επηρεάζει και την άλλη. Έτσι, η συνήθης υπόθεση της ομοσκεδαστικότητας δεν είναι κατάλληλη για τα Poisson δεδομένα.

Το κλασσικό κείμενο στη θεωρία πιθανοτήτων από τον Feller (1957) περιλαμβάνει έναν αριθμό παραδειγμάτων με παρατηρήσεις προσαρμοσμένες στην Poisson κατανομή, περιλαμβάνοντας δεδομένα από διάρκεια του δεύτερου Παγκόσμιου Πολέμου. Η πόλη διαιρέθηκε σε 576 μικρές περιοχές και ο αριθμός των περιοχών χτύπησε ακριβώς *k* φορές προσμετρήθηκε. Υπήρχε ένα σύνολο από 573 χτυπήματα, έτσι ο μέσος αριθμός χτυπημάτων ανα περιοχή ήταν 0.9323 . Οι παρατηρούμενες συχνότητες στον πίνακα 4.1 είναι σημειωμένες σύμφωνα με μια κατανομή Poisson με μέση τιμή $\mu = 0.9323$. Άλλα παραδείγματα γεγονότων που ταιριάζει αυτή η κατανομή είναι ραδιενεργές διασπάσεις, χρωμοσωμικές ανταλλαγές στα κύτταρα, ο αριθμός των τηλεφωνημάτων σε ένα λανθασμένο αριθμό και ο αριθμός των βακτηρίων σε διαφορετικές περιοχές μιας απολιθωμένης πλάκας.

Πίνακας 4.1 : Χτυπήματα ιπτάμενων βομβών στο Λονδίνο κατα τη διάρκεια του δεύτερου παγκόσμιου πολέμου

Χτυπήματα	0	1	2	3	4	5+
Παρατηρούμενα	229	211	93	35	7	1
Αναμενόμενα	226.7	211.4	98.6	30.6	7.1	1.6

Η Poisson κατανομή μπορεί να προκύψει σαν μια περιορισμένη μορφή μιας διωνυμικής κατανομής αν κανείς σκεφθεί την κατανομή ενός αριθμού επιτυχιών σε έναν μεγάλο αριθμό από δοκιμές Bernoulli με μια μικρή

πιθανότητα επιτυχίας σε κάθε δοκιμή. Ειδικότερα, αν $Y \sim B(n, \pi)$ τότε η κατανομή των Y καθώς $n \to \infty$ και $\pi \to 0$ με $\mu = n\pi$ παραμένει σταθερή προσέγγιση μιας Poisson κατανομής με μέση τιμή μ. Έτσι, η Poisson κατανομή παρέχει μια προσέγγιση της διωνυμικής κατανομής για την ανάλυση σπάνιων γεγονότων, όπου π είναι μικρό και n είναι μεγάλο.

Για το παράδειγμα με τις ιπτάμενες βόμβες, μπορούμε να σκεφθούμε την κάθε μέρα σαν ένα μεγάλο αριθμό προσπαθειών όπου κάθε συγκεκριμένη περιοχή έχει μόνο μια μικρή πιθανότητα επιτυχίας. Υποθέτοντας ανεξαρτησία ως προς τις μέρες θα οδηγούμασταν σε μια διωνυμική κατανομή, η οποία είναι καλά προσεγγισμένη από την Poisson κατανομή.

Μια εναλλακτική προέλευση της Poisson κατανομής είναι από την άποψη μιας στοχαστικής διεργασίας που περιγράφει κάτι μη επίσημα όπως ακολουθεί. Υποθετικά γεγονότα συμβαίνουν τυχαία στο χρόνο με τέτοιον τρόπο που οι ακόλουθες συνθήκες εξασφαλίζονται:

- Η πιθανότητα τουλάχιστον ενός περιστατικού για ένα συμβάν σε ένα δοσμένο χρονικό διάστημα είναι ανάλογη με το μήκος του διαστήματος.
- Η πιθανότητα δύο ή περισσότερων περιστατικών για ένα συμβάν σε ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα είναι ασήμαντη, αμελητέα.
- Οι αριθμοί των περιστατικών για ένα συμβάν σε ασυνεχή χρονικά διαστήματα είναι αμοιβαία ανεξάρτητοι.

Έχουμε ότι η πιθανότητα κατανομής ενός αριθμού περιστατικών για έναν συμβάν σε ένα καθορισμένο χρονικό διάστημα είναι Poisson με μέση τιμή $\mu = \lambda t$, όπου λ είναι το ποσοστό του περιστατικού για ένα συμβάν ανά μονάδα χρόνου και t είναι το μήκος του χρονικού διαστήματος. Μια διεργασία που ικανοποιεί τις τρεις παραδοχές που αναφέρονται παραπάνω καλείται Poisson διεργασία.

Στο παράδειγμα με τις ιπτάμενες βόμβες δεν είναι παράλογες. Όσο περισσότερο διαρκεί ο πόλεμος, τόσο μεγαλύτερη η πιθανότητα μια περιοχή που μελετάμε να χτυπηθεί τουλάχιστον μια φορά. Επίσης, η πιθανότητα ότι η ίδια περιοχή θα χτυπηθεί δύο φορές την ίδια μέρα είναι, ευτυχώς, πολύ μικρή. Ίσως λιγότερο προφανές, αν οι βομβαρδισμοί σε μια περιοχή μια

οποιαδήποτε μέρα είναι ανεξάρτητοι με το τι συμβαίνει στις γειτονικές περιοχές, έρχεται σε αντίθεση μια συνηθισμένη πίστη ότι οι ρίψεις βομβών γίνονται σε συστάδες.

Το πιο σημαντικό κίνητρο για τη Poisson κατανομή από την άποψη της στατιστικής εκτίμησης είναι η σχέση μεταξύ της μέσης τιμής και της διασποράς.

Μια χρήσιμη ιδιότητα της κατανομής Poisson είναι ότι το άθροισμα των ανεξάρτητων Poisson τυχαίων μεταβλητών είναι επίσης Poisson. Συγκεκριμένα, αν Y_1 και Y_2 είναι ανεξάρτητες με $Y_i \sim Poisson(\mu_i)$ για $i = 1,2$ τότε $Y_1 + Y_2 \sim Poisson(\mu_1 + \mu_2)$ (4.5)

Αυτό το αποτέλεσμα γενικεύει ένα προφανές τρόπο για το υπολογισμό του αθροίσματος περισσότερων από δύο Poisson παρατηρήσεων.

Μια σημαντική πρακτική συνέπεια για αυτό το αποτέλεσμα είναι ότι μπορούμε να αναλύσουμε μεμονωμένα ή ομαδοποιημένα δεδομένα με ισοδύναμα αποτελέσματα. Συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι έχουμε μια ομάδα από n_{i} μεμονωμένα σημεία με τιμές συμμεταβλητών που ταυτίζονται . Έστω ότι Y_{ij} δηλώνει τον αριθμό των γεγονότων που πραγματοποιούνται από την j-οστή μονάδα της i-οστής ομάδας και Y_i δηλώνει τον τελικό αριθμό γεγονότων στην ομάδα i. Στη συνέχεια, κάτω από τη συνηθισμένη υπόθεση της ανεξαρτησίας,

αν $Y_{ij} \sim P(\mu_i)$ για $j = 1,2, \dots, n_j$ τότε $Y_i \sim P(n_i \mu_i)$ (4.6)

Δηλαδή αν μεμονωμένες μετρήσεις Y_{ij} είναι Poisson με μέση τιμή μ_i , η τελική ομάδα Y_i είναι Poisson με μέση τιμή $n_i \mu_i$. Από την πλευρά της εκτίμησης, βρίσκουμε ακριβώς την ίδια συνάρτηση πιθανοφάνειας αν εμείς δουλεύουμε με μεμονωμένες μετρήσεις Y_{ij} ή με ομάδα μετρήσεων Y_i .

4.3 Λογαριθμοκανονικά μοντέλα

Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα δείγμα από *n* παρατηρήσεις $y_1, y_2, \dots, y_n$ το οποίο μπορεί να αντιμετωπιστεί σαν σχέσεις από ανεξάρτητες Poisson τυχαίες μεταβλητές με $Y_i \sim P(\mu_i)$ και υποθέτουμε ότι θέλουμε να έχουμε τη μέση τιμή μ_i (και για αυτό και τη διασπορά) εξαρτημένη από ένα διάνυσμα επεξηγηματικών μεταβλητών x_i .

Μπορούσαμε να είχαμε ένα απλό γραμμικό μοντέλο της μορφής

$$\mu_i = x_i'\beta \tag{4.7}$$

αλλά αυτό το μοντέλο έχει το μειονέκτημα ότι η γραμμική πρόγνωση στη δεξιά πλευρά δεν θεωρεί καμία πραγματική τιμή, ενώ η μέση τιμή της Poisson κατανομής στη δεξιά πλευρά, η οποία συμβολίζει έναν αναμενόμενο υπολογισμό, πρέπει να είναι μη αρνητική.

Μια προς τα εμπρός λύση σε αυτό το πρόβλημα είναι να μοντελοποιήσουμε αντ' αυτού το λογάριθμο της μέσης τιμής χρησιμοποιώντας ένα γραμμικό μοντέλο. Έτσι, παίρνουμε τους λογαρίθμους υπολογίζοντας τα

$$\eta_i = \log(\mu_i) \tag{4.8}$$

και υποθέτουμε ότι η μετασχηματισμένη μέση τιμή ακολουθεί ένα γραμμικό μοντέλο $\eta_i = x_i'\beta$ (4.9)

Συνεπώς, θεωρούμε ένα γενικευμένο γραμμικό μοντέλο με λογάριθμο. Συνδυάζοντας αυτά τα δύο βήματα σε ένα μπορούμε να γράψουμε το λογαριθμο-γραμμικό μοντέλο σαν $\log(\mu_i) = x_i'\beta$ (4.10)
η οποία καλείται λογαριθμική συνάρτηση σύνδεσης (log link function).

Σε αυτό το μοντέλο ο συντελεστής παλινδρόμησης β_j συμβολίζει την αναμενόμενη αλλαγή στο λογάριθμο της μέσης τιμής για κάθε μονάδα που αλλάζει στην προβλεπόμενη x_j μεταβλητή. Με άλλα λόγια η αύξηση της x_j κατά μια μονάδα σχετίζεται με μια αύξηση του β_j στο λογάριθμο της μέσης τιμής.

Ο περιορισμός μ>0 που επιβάλλεται στην κατανομή Poisson σημαίνει ότι $\log(.)$ δεν μπορεί να είναι η ταυτότητα $\mu_i = x_i'\beta$ η οποία γενικώς δεν τηρεί

τον περιορισμό αυτό. Πρέπει να είναι μια μη αρνητική συνάρτηση και η συνηθισμένη επιλογή παρουσιάζεται παρακάτω.

Περνώντας τον εκθέτη μέσα στην εξίσωση (4.10) βρίσκουμε ένα πολλαπλασιαστικό μοντέλο για τη μέση τιμή:

$$\mu_i = \exp\{x_i'\beta\} \tag{4.11}$$

Σε αυτό το μοντέλο, ένας εκθετικός συντελεστής παλινδρόμησης $\exp\{\beta_j\}$ συμβολίζει μια πολλαπλασιαστική επίδραση της j – οστής πρόβλεψης στη μέση τιμή.

Ένα περαιτέρω πλεονέκτημα από τη χρήση του λογαρίθμου πηγάζει από την εμπειρική παρατήρηση ότι με τον υπολογισμό των δεδομένων οι επιδράσεις των προβλέψεων είναι καλύτερα πολλαπλασιαστικά από ότι προσθετικά. Αυτό αποτελεί μια τυπική παρατήρηση ότι έχουμε μικρές επιδράσεις για μικρές μετρήσεις και μεγάλες επιδράσεις για μεγάλες μετρήσεις. Αν η επίδραση είναι στην πραγματικότητα ανάλογη με τη μέτρηση, δουλεύοντας με τη λογαριθμική κλίμακα οδηγούμαστε με ένα περισσότερο απλοϊκό μοντέλο.

Το μοντέλο παλινδρόμησης Poisson έχει τις ακόλουθες προϋποθέσεις:

- $Y_i \sim Poisson(\mu_i)$ με i=1,2,…,k
- $\mu_i = \exp\{x_i'\beta\}$
- Ανεξαρτησία μεταξύ των παρατηρήσεων.
- Οι μετρήσεις τόσο της εξαρτημένης όσο και των ανεξάρτητων μεταβλητών δεν υπόκεινται σε σφάλματα μέτρησης.

Οι συμμεταβλητές x_i και οι αντίστοιχοι συντελεστές β ορίζονται όπως και στο γενικό γραμμικό μοντέλο. Το μοντέλο (4.10) θυμίζει γραμμικό αλλά προφανώς είναι μη γραμμικό σε ό,τι αφορά τις παραμέτρους και γι' αυτό η προσαρμογή του απαιτεί ειδικές μεθόδους υπολογισμών. Η προσαρμογή του μοντέλου στα δεδομένα γίνεται με τη μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας.

4.4 Εκτίμηση και Έλεγχος

Το λογαριθμο-γραμμικό Poisson μοντέλο που περιγράφηκε στην προηγούμενη ενότητα είναι ένα γενικευμένο γραμμικό μοντέλο με σφάλμα της Poisson κατανομής και συνάρτηση λογαριθμικής σύνδεσης. Η εκτίμηση της μέγιστης πιθανοφάνειας και οι έλεγχοι που ακολουθούν παρακάτω θα μας δώσουν σημαντικά αποτελέσματα.

4.4.1 Εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας για *n* ανεξάρτητες Poisson παρατηρήσεις προέρχεται από την εξίσωση (4.2).

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας *L* ενός δείγματος τιμών $y_1, y_2, \dots, y_n$ με συμμεταβλητές $x_i' = (x_{i0}, x_{i1}, \dots, x_{ik})$ που αντιστοιχούν στις y_i όπου $x_{i0} \equiv 1$, δίνεται από τη σχέση

$$L = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\mu_i} \mu_i^{y_i}}{y_i!} \qquad (4.12)$$

Η λογαριθμοποιημένη συνάρτηση πιθανοφάνειας δίνεται από τη σχέση

$$l = \ln L(\beta) = \sum_{i=1}^{n} [-\mu_i + y_i \ln \mu_i - \ln(y_i!)] \qquad (4.13)$$

όπου οι μ_i εξαρτώνται απο τις συμμεταβλητές (ανεξάρτητες μεταβλητές) x_i και από ένα διάνυσμα από *p* παραμέτρους, το *β* , μέσω της λογαριθμικής συνάρτησης σύνδεσης (4.10).

Η τελευταία σχέση λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (4.11) γίνεται

$$l = \sum_{i=1}^{n} [-e^{x_i' \beta} + y_i x_i' \beta - \ln(y_i!)] \qquad (4.14).$$

Επομένως,

$$\frac{\partial l}{\partial \beta_j} = \sum_{i=1}^{n} (-x_{ij} e^{x_i' \beta} + y_i x_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} [x_{ij} (y_i - e^{x_i' \beta})] \qquad (4.15)$$

Οι εκτιμήτριες μέγιστης πιθανοφάνειας των β_j προκύπτουν από την επίλυση των εξισώσεων

$$\sum_{i=1}^{n}[\, x_{ij}(y_i - e^{x_i'\hat{\beta}})] = 0, \qquad j = 0,1,\dots,k \tag{4.16}$$

οι οποίες μπορούν να εκφραστούν ως

$$X'(y - \hat{\mu}) = 0 \tag{4.17}$$

όπου $\hat{\mu} = (\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_n)'$ με $\hat{\mu}_i = x_i'\hat{\beta}$

Η εξίσωση (4.17) έχει την ίδια μορφή με αυτή προκύπτει από το γνωστό γενικό γραμμικό μοντέλο. Εκεί όμως ισχύει ότι $\hat{\mu} = X\hat{\beta}$ και η εξίσωση γίνεται $X'(y - X\hat{\beta}) = 0$ που είναι γραμμική ως προς τα β και η οποία λύνεται αναλυτικά. Όμως, η εξίσωση (4.17) είναι μη-γραμμική ως προς τα β καθώς $\hat{\mu}_i = e^{x_i'\hat{\beta}}$ και λύνεται μόνο με επαναληπτικές μεθόδους.

4.4.2 Έλεγχος των συντελεστών β

Από το $\frac{\partial l}{\partial \beta_j}$ προκύπτει ότι $\frac{\partial^2 l}{\partial \beta_j \partial \beta_k} = \sum_{i=1}^{n}[-\ x_{ij}x_{ik}e^{x_i'\beta}]$ (4.18)

και επομένως ο πίνακας $-\frac{\partial^2 l}{\partial \beta^2}$ με (j, k) στοιχείο $-\frac{\partial^2 l}{\partial \beta_j \partial \beta_k}$ παίρνει τη μορφή $X'VX$, όπου $V = diag(e^{x_i'\beta})$. Αν $\hat{V}$ συμβολίζεται ο αντίστοιχος πίνακας μετά την αντικατάσταση των β από τα $\hat{\beta}$, τότε $X'\hat{V}X$ είναι ο παρατηρούμενος πίνακας πληροφορίας $I(\hat{\beta})$. Η θεωρία της μεθόδου μέγιστης πιθανοφάνειας δείχνει ότι η αναμενόμενη διασπορά του συντελεστή $\hat{\beta}_j$, δηλαδή η $\hat{V}(\hat{\beta}_j)$, είναι το j-οστό διαγώνιο στοιχείο του $I^{-1}(\hat{\beta})$ με αντίστοιχο τυπικό σφάλμα $se\left(\hat{\beta}_j\right) = \left(\hat{V}(\hat{\beta}_j)\right)^{1/2} = \left(I^{-1}(\hat{\beta})_{jj}\right)^{1/2}$ (4.19)

Γνωρίζουμε ότι οι εκτιμήτριες της μέγιστης πιθανοφάνειας ακολουθούν ασυμπτωτικά την κανονική κατανομή, οπότε έχουμε προσεγγιστικά ότι

$$\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\left(I^{-1}(\hat{\beta})_{jj}\right)^{1/2}} \sim N(0,1)\,, \qquad \mathrm{j} = 0,1,2,\dots,\mathrm{k} \tag{4.20}$$

που χρησιμοποιείται για τον έλεγχο Wald της μηδενικής υπόθεσης $H_0 : \beta_j = 0$ με εναλλακτική $H_1 : \beta_j \neq 0$.

Εναλλακτικά συγκρίνουμε τα δυο μοντέλα, το ένα μοντέλο με τη μεταβλητή με συντελεστή β_j στο μοντέλο και το άλλο χωρίς αυτήν και έτσι κρίνουμε αν είναι αναγκαία η παρουσία αυτής της μεταβλητής.

Η μεταβολή της μεγιστοποιημένης τιμής του λογαρίθμου της πιθανοφάνειας μας δίνει ένα στατιστικό έλεγχο για τη μηδενική υπόθεση $H_0 : \beta_j = 0$.

Πιο συγκεκριμένα, έστω

$$l_1 = \max l(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p) \quad \text{και} \quad l_0 = \max l(\beta_1, \dots, \beta_{j-1}, \beta_{j+1}, \dots, \beta_p)$$

για τα μοντέλα με και χωρίς το β_j . Τότε ισχύει ασυμπτωτικά

$$-2(l_0 - l_1) \sim X_1^2 \tag{4.21}$$

Μεγάλη τιμή της ελεγχοσυνάρτησης οδηγεί στην απόρριψη της H_0.

Αντίθετα με τη γραμμική παλινδρόμηση, ο έλεγχος αυτός δεν ισοδυναμεί με τον έλεγχο του Wald.

Η σχέση (4.20) μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την κατασκευή ενός 100(1-α)% διαστήματος εμπιστοσύνης για την παράμετρο β_j , όπως το $\widehat{\beta_j} \pm z_{\frac{a}{2}} \cdot se(\widehat{\beta_j})$, όπου το $z_{\frac{a}{2}}$ συμβολίζει το άνω 100(α/2) ποσοστιαίο σημείο της N(0,1) τυποποιημένης κανονικής κατανομής.

4.5 Ελεγχοσυνάρτηση Deviance

Το μοντέλο επιβάλλει μια δομή στα δεδομένα μέσω της σχέσης $\mu_i = \exp\{x_i'\beta\}$. Αν δεν έχουμε κάποια δομή τότε έχουμε απλώς ανεξάρτητες τιμές από διαφορετικές κατανομές Poisson , $Y_i \sim Poisson(\mu_i)$, όπου μ_i έχουν μόνο το περιορισμό $\mu_i > 0$, οπότε θα εκτιμάται από το $\tilde{\mu}_i = y_i$. Σε

αυτήν την περίπτωση η μεγιστοποιημένη τιμή του λογαρίθμου της πιθανοφάνειας είναι

$$\tilde{l} = \sum_{i=1}^{n} (-\tilde{\mu}_i + y_i \ln \tilde{\mu}_i - \ln y_i!)$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} y_i + \sum_{i=1}^{n} (y_i \ln y_i) - \sum_{i=1}^{n} (\ln y_i!) \quad (4.22)$$

Η μεγιστοποιημένη τιμή με όλες τις συμμεταβλητές για αυτό το μοντέλο είναι

$$l(\hat{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} \left(-\hat{\mu}_i + y_i \ln \hat{\mu}_i - \ln y_i!\right) \quad (4.23)$$

με $\hat{\mu}_i = \exp\{x_i' \hat{\beta}\}$

Ορίζουμε $D(\hat{\beta}) = -2\left\{ l(\hat{\beta}) - \tilde{l} \right\}$

$$= 2\left\{\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \hat{\mu}_i\right) + \sum_{i=1}^{n} y_i \ln(y_i / \hat{\mu}_i)\right\} \quad (4.24)$$

Ισχύει όμως ότι $\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \hat{\mu}_i\right) = 0$ οπότε η παραπάνω σχέση γίνεται

$$D(\hat{\beta}) = 2\left\{\sum_{i=1}^{n} y_i \ln(y_i / \hat{\mu}_i)\right\} \quad (4.25)$$

η οποία είναι η ελεγχοσυνάρτηση «deviance» του μοντέλου ή αλλιώς η «απόκλιση» του μοντέλου.

Το μοντέλο με $\tilde{\mu}_i = y_i$, όπου i=1,2,…,n έχει τόσες παραμέτρους όσες παρατηρήσεις και ονομάζεται κορεσμένο μοντέλο (saturated model) ή πλήρες μοντέλο. Έχει την καλύτερη προσαρμογή στα δεδομένα συγκριτικά με τα άλλα μοντέλα.

Η ελεγχοσυνάρτηση «deviance» μετρά την απώλεια προσαρμογής όταν επιβάλλουμε τη δομή $\mu_i = \exp\{x_i' \beta\}$.

Επιπλέον η ελεγχοσυνάρτηση deviance μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για τη σύγκριση δύο μοντέλων.

Έστω λοιπόν $\hat{\beta}$ και $\hat{\beta}^*$ οι εκτιμήτριες μέγιστης πιθανοφάνειας δύο μοντέλων M και M^* αντίστοιχα, που είναι εμφωλευμένα (nested) δηλαδή $\mathrm{M}^* \subset \mathrm{M}$ που

σημαίνει ότι όλες οι μεταβλητές του μοντέλου M^* περιέχονται και στο μοντέλο M. Με άλλα λόγια αυτό σημαίνει το μοντέλο M^* προκύπτει από το μοντέλο M με κάποιους επιπλέον περιορισμούς όπως είναι $\beta_i = \beta_j = \cdots = 0$.

Τότε ο έλεγχος είναι

H_0 : ισχύει το μοντέλο M^* έναντι της H_1 : ισχύει το μοντέλο M.

Τότε ο έλεγχος με βάση το λόγο των μεγιστοποιημένων πιθανοφανειών είναι

$$-2\{\, l(\hat{\beta}^*) - l(\hat{\beta})\} \sim X_q^2 \qquad (4.26)$$

ασυμπτωτικά, όπου q το πλήθος περιορισμών (π.χ. αν $\beta_2 = \beta_4 = \beta_7 = 0$ τότε q=3).

Για μεγάλες τιμές της ελεγχοσυνάρτησης απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση.

Η παραπάνω σχέση με τη βοήθεια της ελεγχοσυνάρτησης deviance εκφράζεται ως

$$\{\, D(\hat{\beta}^*) - D(\hat{\beta})\} \sim X_q^2 \qquad (4.27)$$

Αυτή η μορφή είναι πολύ χρήσιμη καθώς τα περισσότερα προγράμματα που εκτελούν την παλινδρόμηση Poisson δίνουν τις τιμές της deviance για τα διάφορα υπό εξέταση μοντέλα και όχι της λογαριθμοποιημένης συνάρτησης πιθανοφάνειας.

4.6 Υπόλοιπα

Η εξέταση των υπολοίπων που εκφράζουν τη συμφωνία μεταξύ των παρατηρήσεων y_i και των αντίστοιχων προσαρμοσμένων τιμών $\hat{y}_i$ ή $\hat{\mu}_i$ είναι ιδιαίτερα χρήσιμη καθώς προσφέρει πληροφορίες για την καταλληλότητα του μοντέλου που δε φαίνονται στον ολικό έλεγχο με την ελεγχοσυνάρτηση deviance.

Χρησιμοποιούνται δύο είδη υπολοίπων:

- Τα υπόλοιπα Person

- Τα υπόλοιπα deviance

4.6.1 Υπόλοιπα Pearson

Παρατηρώντας τα συνήθη υπόλοιπα

$$y_i - \hat{y}_i = y_i - \hat{\mu}_i \ , \quad i = 1,2, \dots, n \tag{4.28}$$

διαπιστώνουμε ότι οι *n* διαφορές δεν είναι συγκρίσιμες, μιας και οι διασπορές τους $V(y_i) = \mu_i$ είναι άνισες.

Γι' αυτό διαιρούμε με τις εκτιμήσεις των τυπικών αποκλίσεων και έτσι έχουμε

$$r_i^P = \frac{y_i - \hat{\mu}_i}{\sqrt{\hat{\mu}_i}} \tag{4.29}$$

που ονομάζονται κατά Pearson υπόλοιπα.

Η ονομασία αυτή προκύπτει από το γεγονός ότι το άθροισμα τετραγώνων αυτών των υπολοίπων

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{y_i - \hat{\mu}_i}{\sqrt{\hat{\mu}_i}} \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - \hat{\mu}_i)^2}{\hat{\mu}_i} \tag{4.30}$$

είναι ο γνωστός έλεγχος X^2-καλής προσαρμογής του Pearson.

4.6.2 Υπόλοιπα Deviance

Τα υπόλοιπα deviance ορίζονται ως

$$r_i^D = sgn(y_i - \hat{\mu}_i)\{d_i(\hat{\beta})\}^{1/2}, \qquad i = 1, \dots, n \tag{4.31}$$

όπου $sgn(y_i - \hat{\mu}_i)$ είναι το πρόσημο της διαφοράς $y_i - \hat{\mu}_i$, δηλαδή είναι η συνάρτηση που δίνει στην ποσότητα $\{d_i(\hat{\beta})\}^{1/2}$ θετικό πρόσημο, όταν $y_i \geq \hat{\mu}_i$ και αρνητικό όταν $y_i \leq \hat{\mu}_i$. Η ποσότητα

$$d_i(\hat{\beta}) = 2[y_i \ln(y_i/\hat{\mu}_i) - (y_i - \hat{\mu}_i)] \tag{4.32}$$

αποτελεί τη συμβολή της παρατήρησης *i* στην ελεγχοσυνάρτηση deviance

$$D(\hat{\beta}) = 2\sum_{i=1}^{n}\left[y_i \ln\left(\frac{y_i}{\hat{\mu}_i}\right) - (y_i - \hat{\mu}_i)\right] = \sum_{i=1}^{n} d_i(\hat{\beta})$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(r_i^D)^2 \tag{4.33}$$

Οπότε η $D(\hat{\beta})$ ισούται με το άθροισμα τετραγώνων των υπολοίπων deviance. Το ίδιο συμβαίνει και με την (4.30) ελεγχοσυνάρτηση του Pearson που ισούται με το άθροισμα τετραγώνων των υπολοίπων r_i^P.

4.7 Προφίλ Poisson παλινδρόμησης

Έχουμε $x_{\mathrm{i}} = (\mathrm{x}_{\mathrm{i1}}, \mathrm{x}_{\mathrm{i2}}, \dots, \mathrm{x}_{\mathrm{ip}})^{\mathrm{T}}$ για $i = 1,2,\dots,n$

όπου p οι μεταβλητές πρόβλεψης για καθένα από τα n ανεξάρτητα πειραματικά σύνολα.

Το μοντέλο της Poisson παλινδρόμησης υποθέτει πως η εξαρτημένη μεταβλητή των παρατηρήσεων, y_i , μοντελοποιείται σαν μια Poisson τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή λ_i και κάθε λ_i είναι μια συνάρτηση των x_{i}, $i = 1,2,\dots,n$. Να σημειωθεί ότι η υπόθεση της σταθερής διασποράς της κλασσικής γραμμικής παλινδρόμησης παραβιάζεται επειδή τα y_i έχουν τις μέσες τιμές τους ίσες με τις διασπορές. Στη Poisson παλινδρόμηση, αυτή η συνάρτηση είναι η λογαριθμική συνάρτηση, έτσι το μοντέλο ορίζεται ως :

$$g(\lambda_i) = \log(\lambda_i) = \beta_1 \mathrm{x_{i1}} + \beta_2 \mathrm{x_{i2}} + \cdots + \beta_p \mathrm{x_{ip}} \quad (4.34)$$

όπου $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)^{\mathrm{T}}$ είναι το διάνυσμα της παραμέτρου παλινδρόμησης. Το μοντέλο της Poisson παλινδρόμησης είναι ένα γενικευμένο γραμμικό μοντέλο με Poisson σφάλμα και μια λογαριθμική συνάρτηση σύνδεσης. Είναι σύνηθες να θέτουμε $x_{\mathrm{i1}} \equiv 1$ προκειμένου το β_i να είναι ανακομμένο από το μοντέλο. Η εναλλακτική συνάρτηση (4.34), που κατευθείαν καθορίζει το λ_i, είναι :

$$\lambda_i = \exp(x_i^T \beta) = \exp(\eta_i) \quad (4.35)$$

όπου $\eta_i = x_i^T \beta = \sum_{k=1}^{p} \beta_\kappa x_{ik} = \log(\lambda_i)$ είναι ο σύνηθες γραμμικός συνδυασμός των προβλέψεων για το επίπεδο i .

Η μεταβλητή απόκρισης είναι y_i , η οποία ακολουθεί μια Poisson κατανομή με παράμετρο λ_i .

Οι παράμετροι της εξίσωσης (4.35) μπορούν να εκτιμηθούν από τη μέθοδο της μέγιστης πιθανόφανειας.

Χρησιμοποιείται η ακόλουθη συνάρτηση μέγιστης πιθανοφάνειας για την εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου:

$$L(\lambda, y) = \prod_{i=1}^{n} \left[e^{-\lambda_i} \frac{(\lambda_i)^{y_i}}{y_i!} \right] = e^{-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} \frac{\prod_{i=1}^{n} (\lambda_i)^{y_i}}{\prod_{i=1}^{n} y_i!} \quad (4.36)$$

όπου $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)^{\mathrm{T}}$ και $\mathrm{y} = (\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2, \dots, \mathrm{y}_n)^{\mathrm{T}}$.

Παίρνοντας το λογάριθμο στην εξίσωση (4.36) και χρησιμοποιώντας την $\eta_i = x_i^T \beta = \sum_{k=1}^{p} \beta_\kappa x_{ik} = \log(\lambda_i)$ μπορούμε να ξαναεκφράσουμε τη λογαριθμική πιθανοφάνεια ως:

$$l(\lambda, y) = -\sum_{i=1}^{n} \exp(x_i^T \beta) + \sum_{i=1}^{n} y_i \ln(\exp(x_i^T \beta)) - \sum_{i=1}^{n} \ln(y_i!) \quad (4.37)$$

Παίρνοντας την παράγωγο ως προς το διάνυσμα β καταλήγουμε ότι οι παράμετροι της Poisson παλινδρόμησης μπορούν να εκτιμηθούν όπως ακόλουθα:

$$\hat{\beta} = \left(X^T \widehat{W} X\right)^{-1} X^T \widehat{W} q \quad (4.38)$$

Στην εξίσωση (4.38) , $\mathrm{X} = (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_n)^{\mathrm{T}}$ είναι ένας πίνακας n x p , $\widehat{W} = diag[\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_\mathrm{n}]$ είναι ένας n x n διαγώνιος πίνακας και $q = \widehat{\beta} + \widehat{W}^{-1}(y - \widehat{\mu})$.

Για μεγάλο n, το $\hat{\beta}$ είναι κατανεμημένο ασυμπτωτικά σαν μια p-διάστατη κανονική κατανομή $\mathrm{N_p}\,(\,\beta\,, (X^T W X)^{-1})$ όπου

$$S = (X^T W X)^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & p\sigma_1\sigma_2 \\ p\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

Απόδειξη του ολικού ποσοστού των ελαττωματικών προϊόντων σε ένα προφίλ Poisson παλινδρόμησης υπό μια διακριτή κατάσταση:

$$P_{profile} = \Pr\left(\cup_{i=1}^{n}(Y_i < LSL, Y_i > USL)\right) \quad (4.39)$$

$$P_{profile} = 1 - \left[\Pr\left(\cap_{i=1}^{n}(LSL < Y_i < USL)\right)\right] \quad (4.40)$$

Επειδή οι μεταβλητές απόκρισης (Y_i) είναι ανεξάρτητες σε κάθε επίπεδο των επεξηγηματικών μεταβλητών, η εξίσωση (4.40) θα μπορούσε να γραφεί ως

$$P_{profile} = 1 - \prod_{i=1}^{n}[Pr(LSL < Y_i < USL)] \quad (4.41)$$

Στη συνέχεια, έχουμε

$$P_{profile} = 1 - \prod_{i=1}^{n}[1 - Pr(Y_i < LSL\,, Y_i > USL\,)] \quad (4.42)$$

Επειδή $Pr(Y_i < LSL\,, Y_i > USL\,)$ είναι η πιθανότητα των ελαττωματικών προϊόντων σε κάθε επίπεδο, συμπεραίνουμε ότι

$$P_{profile} = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - \lambda_i) \quad (4.43)$$

Ο Castagliola (1996) έχει προτείνει μια μέθοδο για την εκτίμηση δεικτών ικανότητας διεργασίας για μη-κανονικά δεδομένα. Έδειξε πως μπορεί να χρησιμοποιηθεί μια Burr κατανομή για την εκτίμηση της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής και κατά συνέπεια πως υπολογίζεται το ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων. Επίσης, οι Hosseinifard και Abbasi (2012) χρησιμοποίησαν την ίδια προσέγγιση για να υπολογίσουν την ικανότητα δείκτη για μη κανονικά προφίλ. Ο προτεινόμενος δείκτης είναι ο παρακάτω:

$$C_{p(Y_i)} = \frac{1}{3}\Phi^{-1}\left[0.5 + 0.5\left(F_{Y_i}(USL) - F_{Y_i}(LSL)\right)\right] \quad (4.44)$$

όπου Φ^{-1} είναι αντίστροφη αθροιστική κατανομή της τυποποιημένης κανονικής κατανομής N(0,1). Να σημειωθεί ότι η παραπάνω εξίσωση (4.44) υπολογίζει δείκτες ικανότητας διεργασίας για κάθε επίπεδο. Αυτή η μέθοδος χρησιμοποιεί συναρτήσεις αθροιστικής κατανομής και υπολογίζει το ποσοστό μη ελαττωματικών προϊόντων ως $\left[F_{Y_i}(USL) - F_{Y_i}(LSL)\right]$.

Παρόμοια, έχουμε και το ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων στην Poisson παλινδρόμηση. Ως εκ τούτου, ο δείκτης ικανότητας διεργασίας για τα προφίλ της Poisson παλινδρόμησης θα καθοριστεί για κάθε επίπεδο από την ακόλουθη εξίσωση:

$$C_{p(Y_i)} = \frac{1}{3}\Phi^{-1}[0.5 + 0.5(1 - \lambda_i)] \tag{4.45}$$

όπου το λ_i ορίζεται στην εξίσωση (4.35).

Αντικαθιστώντας στην (4.43) το λ_i με το $2\Phi\left(3C_{p(Y_i)} - 1\right)$ που βασίζεται στην εξίσωση (4.45) οδηγούμαστε στην παρακάτω σχέση

$$P_{profile} = 1 - \prod_{i=1}^{n}\left(2\Phi\left(3C_{p(Y_i)}\right) - 1\right) \tag{4.46}$$ ■

Συνεπώς, τώρα ο γενικός δείκτης ικανότητας διεργασίας ορίζεται από την ακόλουθη εξίσωση, χρησιμοποιώντας το ολικό ποσοστό των ελαττωματικών αντικειμένων:

$$C_{p(Y_i)} = \frac{1}{3}\Phi^{-1}\left[0.5 + 0.5\left(1 - P_{profile}\right)\right] \tag{4.47}$$

Απόδειξη του ολικού ποσοστού των ελαττωματικών προϊόντων σε ένα προφίλ Poisson παλινδρόμησης υπό μια συνεχή κατάσταση:

Θα υπολογίσουμε το ολικό ποσοστό ελαττωματικών αντικειμένων για Poisson προφίλ στηριζώμενοι στην εξίσωση (4.46). Για αυτόν τον υπολογισμό θα υπολογίσουμε το φυσικό λογάριθμο στα δύο μέλη του συμπληρώματος της εξίσωσης (4.46) στο εύρος της επεξηγηματικής μεταβλητής, η οποία ορίζεται ως “i". Σαν αποτέλεσμα, εμείς έχουμε

$$P_{profile}^{c} = \prod_{i=1}^{n}\left[1 - e^{\beta_0+\beta_1 x_i}\right] \tag{4.48}$$

Παίρνοντας το λογάριθμο και από τα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης έχουμε

$$\ln\left[P_{profile}^{c}\right] = \ln\left[\prod_{i=1}^{n}\left[1 - e^{\beta_0+\beta_1 x_i}\right]\right] \tag{4.49}$$

Απλοποιώντας την παραπάνω έχουμε

$$\ln\left[P_{profile}^{c}\right] = \sum_{i=1}^{n}\ln\left[1 - e^{\beta_0+\beta_1 x_i}\right] \tag{4.50}$$

Επειδή είναι συνεχής το άθροισμα θα γίνει ολοκλήρωμα. Γι’ αυτό

$$\ln\left[P_{profile}^{c}\right] = \int_{i=1}^{n}\ln\left[1 - e^{\beta_0+\beta_1 x_i}\right]dx \tag{4.51}$$

Περνώντας το εκθετικό και στα δύο μέλη έχουμε

$$P_{profile}^{c} = e^{\int_{i=1}^{n}\ln\left[1-e^{\beta_0+\beta_1 x_i}\right]dx} \tag{4.52}$$

Τελικά, η πιθανότητα για ελαττωματικά αντικείμενα υπογίζεται ως:

$$P_{profile}^{c} = 1 - e^{\int_{i=1}^{n}\ln\left[1-e^{\beta_0+\beta_1 x_i}\right]dx} \tag{4.53}$$ ■

Έτσι, αν αντικαταστήσουμε το αποτέλεσμα της εξίσωσης (4.53) στην εξίσωση (4.47) θα πάρουμε το δείκτη ικανότητας διεργασίας υπό μια συνεχή κατάσταση.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Αντζουλάκος, Δ. Λ. (2006). Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας, Σημειώσεις παραδόσεων του μαθήματος του Στατιστικού Ελέγχου Ποιότητας στα πλαίσια του Μ.Π.Σ. στην Εφαρμοσμένη Στατιστική, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

[2] Bissell, A.F. (1990). How Reliable is Your Capability Index?. *Applied Statistics*, 39, 331-340.

[3] Boyles, R.A. (1991). The Taguchi Capability Index. *Journal of Quality Technology*, 23, 17-26.

[4] Boyles, R.A. (1995). C_{pm} for Asymmetric Tolerances. Manuscript, Precision Castparts Corp., PortlBand, OR.

[5] G.E.P. Box and D.R.Cox An Analysis of transformations *Journal of the Royal Statistical Society.* Series B(Methodological) Vol.26,No.2(1964), pp.211-252

[6] Breyfogle F.W. (1999): Implementing Six Sigma: Smarter solutions using statistical methods, John Wiley & Sons, New York

[7] Breyfogle, III, F.W., Cupello, J.M, and Meadows, B. 2001. Managing Six Sigma: A practical guide to understanding, assessing, and implementing the strategy that yields bottom-line success. Danvers, MA: John Wiley & Sons, Inc. .

[8] I. W. Burr, Parameters for a general system of distribution to match a grid of α3 a α4, *Commun. Stat.* 2:1 (1973) 1-21.

[9] Castagliola, P. (1996). Evaluation of non-normal process capability indices using Burr's distribution. *Quality Engineering*, 8, 587-593.

[10] Chan, L.K., Cheng, S.W. and Spiring, F.A. (1988). A New Measure of Process Capability Cpm. *Journal of Quality Technology*, 20, 162-175.

[11] L. K. Chan, S. W. Cheng, F. A. Spiring, A graphical technique for process capability, Trans. *ASQC Annu. Qual. Congr*. 42 (1988) 268–275.

[12] Chen, S.M. and Hsu, N.F. (1995). The Asymptotic Distribution of the Process Capability Index Cpmk. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 24, 1279-1291.

[13] Choi, B.C and Owen,D.B (1990). *A study of a new Process Capability Index Communications in Statistics-Theory and Methods,19(4),1231-1245*.

[14] I. S. Choi, D. S. Bai, Process capability indices for skewed populations, *Proc. 20th Int. Conf. Comp. Ind. Eng*. (1996) 1211-1214

[15] Chou, Y. M. and Owen, D. B. (1989). On the Distributions of the Estimated ProcessCapability Indices. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 18, 4549-4560.

[16] Chou, Y. M., Owen, D. B. and Borrego, A. S. A. (1990). Lower Confidence Limits on Process Capability Indices. Journal of Quality Technology, 22, 223-229.

[17] Clements, J.A.(1989).Process capability calculations for non-normal distributions.Quality Progress,September,95-100.)

[18] Defeo, J.A.(1999). “Six Sigma : Road Map for Survival.” H.B.R. Focus Vol.76.

[19] William Feller An Introduction to Probability Theory and its Applications (Volume 1) John Wiley & Sons Inc. 1957

[20] Franklin, L. A. and Wasserman, G. S. (1992). A Note on the Conservative Nature of the Tables of Lower Confidence Limits for Cpk with a Suggested Correction. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 21, 1165-1169.

[21] Hahn, G. J., and S. S. Shapiro (1967). Statistical Models in Engineering, Wiley, New York.

[22] Harry, Mikel and Schroeder, Richard (2000). Six Sigma: The Breakthrough Management Strategy Revolutionizing the World's Top Corporations. 1st edition. New York: Dell

[23] Heavlin, W.D. (1988). Statistical Properties of Capability Indices. Technical Report no 320, Tech. Library, Advanced Micro Devices, Inc., Sunnyvale, CA.

[24] I. D. Hill, R. Hill, R. L. Holder, Algorithm AS99: Fitting Johnson curves by moments*, J. R. Stat. Soc.* 25:2 (1976) 180-189.

[25] S. Z. Hosseinifard & B. Abbasi (2012) Process Capability Analysis in Non Normal Linear Regression Profiles *Communications in Statistics-Simulation and Computation 41* (10), 1761-1784

[26] Hsiang, T. C. and Taguchi, G. (1985).A Tutorial on Quality Control and Assurance: The Taguchi Methods. Proceedings of the ASA Annual Meeting, Las Vegas, Nevada.

[27] Johnson,N.L.1949.Systems of frequency curves generated by methods of translation.*Biometrika* 36: 149-176.

[28] N. L. Johnson, S. Kotz, W. L. Pearn, Flexible process capability indices, Pak. *J. Stat.* 10 (1992) 23-31.

[29] Johnson, N. L., Kotz, S. & Balakrishnan, N. (1994), Continuous univariate distributions, John Wiley. 5

[30] Johnson, N.L. and Kotz, S. (1995). Comment on: Percentages of units within specification limits associated with given values of Cpk and Cpm (by Chan L.K. and Tang J.H.). Communications in Statistics-Simulation and Computation, 24.

[31] Juran, J.M. (1979) Quality Control Handbook. McGraw-Hill, New York.

[32] Kane, V.E. (1986). Process Capability Indices. *Journal of Quality Technology*, 18, 41-52.

[33] Κουκουβίνος, Χ. (2008). Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας. Ε.Μ.Π.

[34] Kotz, S. and Johnson, N.L. (1993). *Process Capability Indices.* Chapman and Hall, London.

[35] Kotz, S., and Lovelace, C. R. (1998). *Process Capability Indices in Theory and Practice*, Arnold, London.

[36] Kotz, S., and N. L. Johnson (2002). “Process Capability Indices: A Review 1992–2000” (with Discussion), *Journal of Quality Technology*, Vol. 34(1), pp. 2–19. Available at www.asq.org/pub/jqt.

[37] Kocherlakota, S. (1992). Process Capability Index: Recent Developments, Sankhya: The Indian Journal of Statistics, 54, 352-369.

[38] Kirmani, S.N.U.A., Kocherlakota, K. and Kocherlakota, S. (1991). Estimation of σ and the Process Capability Index Based on Subsamples. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 20, 275-291.

[39] Kushler, R.H. and Hurley, P. (1992) Confidence Bounds for Capability Indices. *Journal of Quality Technology,* 24, 188-195.

[40] Li, H., Owen, D.B. and Borrego, S.A. (1990). Lower Confidence Limits on Process Capability Indices Based on the Range. *Communications in Statistics –Simulation and Computation,* 19, 1-24.

[41] Pei-His Liu and Fei-Long Chen (2006). Process capability analysis of non-normal process data using the Burr XII distribution. *Int J Adv Manuf Technol* 27: 975-984

[42] Mizuno, S. (1988) *Company-wide Total Quality Control*, Asian Productively Organization, Tokyo.

[43] Montgomery, D. C. (2009). *Introduction to Statistical Quality Control*, 6th edition, John Wiley & Sons, Hoboken, NJ.

[44] Nagata, Y. and Nagahata, H. (1992). Approximation Formulas for the Confidence Intervals of Process Capability Indices. *Reports of Statistical Approx. Research*, JUSE 39, 15-29.

[45] Nagata, Y. and Nagahata, H. (1994). Approximation formulas for the lower confidence limits of process capability indices, *Okayama Economic Review*, 25, 301- 314.

[46] Oakland, J. (2008), *Statistical Process Control*, Butterworth-Heinemann, Oxford, 6th edition

[47] Pearn, W.L., Kotz, S. and Johnson, N.L. (1992). Distributional and Inferential Properties of Process Capability Indices. Journal of Quality Technology, 24, 216231.

[48] W.L. Pearn and S. Kotz (1994). Applications of Clements' method for calculating second and third generation process capability indices for non-normal Pearsonian populations, *Quality Engineering*, 7.

[49] Pearn, W.L., Yang, S.L., Chen, K.S. and Lin, P.C. (2001). Testing Process Capability Using the Index Cpmk with an Application. International Journal of Reliability,*Quality and Safety Engineering*, 8, 15-34.

[50] Perakis,M. (2001). Inferential Problems Connected with Process Capability Indices.Deparment of Statistics,Athens University of Economics and Business,September 2001

[51] Perez-Wilson, Mario (1999). Six sigma : understanding the concept, implications and challenges. Advanced Systems Consultants, Scottsdale, Ariz

[52] Thomas Pyzdek (2003) *The Six Sigma Handbook USA* 2nd edition

[53] L.A .R.Rivera, N.F.Hubele and F.D.Lawrence (1995).C_{pk} index estimation using data transformation. *Comput Ind Engng* 29: 55-58

[54] Shapiro, S. S. (1980). How to Test Normality and Other Distributional Assumptions, Vol 3, The ASQC Basic References in Quality Control: Statistical Techniques, ASQC, Milwaukee, WI.

[55] Shore, H., 1998. A new approach to analyzing non-normal quality data with application to process capability analysis. *International Journal of Production Research* 36; 1917-1933

[56] Spiring, F., Leung, B., Cheng, L. & Yeung, A. (2003). A Bibliography of Process Capability Papers. Quality and Reliability Engineering International, 19, 445-460. Sullivan, L. P. (1984). Reducing Variability: A New Approach to Quality. *Quality Progress*, 17, 15–21.

[57] Subbaiah, P. and Taam, W. (1993). Inference on the Capability Index, Communications in Statistics-Theory and Methods, 22(2), 537-560.

[58] L.C.Tang,S.E Than (1999). Computing process capability indices for non-normal data: a review and comparative study.*Qual Reliab Engng Int* 15: 339-353

[59] Yum, B.-J. and Kim, K.-W. (2011), A bibliography of the literature on process capability indices: 2000–2009. *Qual. Reliab. Engng. Int.,* 27: 251–268. doi: 10.1002/qre.1115

[60] F.K Wang (2006). Quality evaluation of a manufactured product withmultiple characteristics.*Qual Relib Engng Int* 22: 225-236

[61] H.H Wu.,J.. Wang and T.L.Liu (1998).Discussions of the Clements-based process capability indices.In: *Proceedings* of the 1998 CHE National Conference pp.561-566.