

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ



Διπλωματική εργασία της Ματίνας Παναγούλια

**Τίτλος: Μαθηματική μελέτη ταλαντώσεων με τη μέθοδο
της βαθμοελαστικότητας**

Επιβλέπων καθηγητής : Α.Χαραλαμπόπουλος

Αθήνα, 2016

Πρόλογος

Η εργασία, που ακολουθεί, μελετά το πρόβλημα της διάδοσης μιας κυματικής διαταραχής, κατά μήκος μιας χορδής, το υλικό της οποίας παρουσιάζει μικροδομή.

Η μελέτη γίνεται με δύο μεθόδους:

- Μέθοδος κλασικής ελαστικότητας
- Μέθοδος βαθμοελαστικότητας

και τρεις (3) διαφορετικούς τρόπους σύνδεσης της χορδής στα άκρα της.

Στο τέλος κάθε προβλήματος περιέχονται αριθμητικές εφαρμογές ώστε να είναι δυνατή η σύγκριση των δύο μεθόδων.

Θα ήταν παράλειψη αν δεν ευχαριστούσα τον κ.Χαραλαμπόπουλο, επιβλέποντα καθηγητή, για την άριστη συνεργασία μας και την βοήθεια που μου παρείχε στο νέο γνωστικό πεδίο της βαθμοελαστικότητας.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την Μαρία Κοντή για την βοήθειά της στο Mathematica.

Περιεχόμενα

	σελ.
Περίληψη	5
Εισαγωγή	7
Κεφάλαιο 1 ^ο :Διατύπωση του 1 ^{ου} προβλήματος	13
1.A. Επίλυση με τη μέθοδο της κλασικής ελαστικότητας	13
1.B. Επίλυση με τη μέθοδο της βαθμοελαστικότητας	15
Κεφάλαιο 2 ^ο : Διατύπωση του 2 ^{ου} προβλήματος	19
2.A. Επίλυση με τη μέθοδο της κλασικής ελαστικότητας	19
2.B. Επίλυση με τη μέθοδο της βαθμοελαστικότητας	20
2.Γ. Αριθμητικές εφαρμογές	23
2.Γ.1 1 ^η αριθμητική εφαρμογή	23
2.Γ.2 2 ^η αριθμητική εφαρμογή	31
2.Δ Συμπεράσματα	38
Κεφάλαιο 3 ^ο : Διατύπωση του 3 ^{ου} προβλήματος	41
3.A. Επίλυση με τη μέθοδο της κλασικής ελαστικότητας	41
3.B. Επίλυση με τη μέθοδο της βαθμοελαστικότητας	42
3.Γ. Αριθμητική εφαρμογή	47
3.Δ Συμπεράσματα	56
Βιβλιογραφία	59
Παράρτημα	61

1. Περίληψη

Όλα τα υλικά έχουν μία μικροδομή (microstructure) που γίνεται ορατή με συγκεκριμένη μεγέθυνση. Εντούτοις οι κλασικές θεωρίες αποδεικνύονται ανεπαρκείς για να προβλέψουν την μηχανική συμπεριφορά των γραμμικά ελαστικών μέσων, όταν πρόκειται για ειδικό τύπο μικροδομής. Οι θεωρίες της βαθμοελαστικότητας (gradient elasticity) λαμβάνοντας υπόψη τους την μικροδομή των υλικών, προσδιορίζουν με ακρίβεια τα φαινόμενα που παρατηρούνται, όπως αυτό αποδεικνύεται από τα πειραματικά δεδομένα.

Η παρούσα εργασία ασχολείται με τη εφαρμογή της θεωρίας της βαθμοελαστικότητας σε συγκεκριμένο πρόβλημα μικροδομής. Συγκεκριμένα, μελετάμε τη διάδοση μιας διαταραχής κατά μήκος μιας χορδής, το υλικό της οποίας παρουσιάζει μικροδομή.

Η μελέτη της διάδοσης της διαταραχής αφορά στο πεδίο των μετατοπίσεων και γίνεται με δύο θεωρίες:

- Με τη θεωρία της κλασικής ελαστικότητας
- Με τη θεωρία της βαθμοελαστικότητας

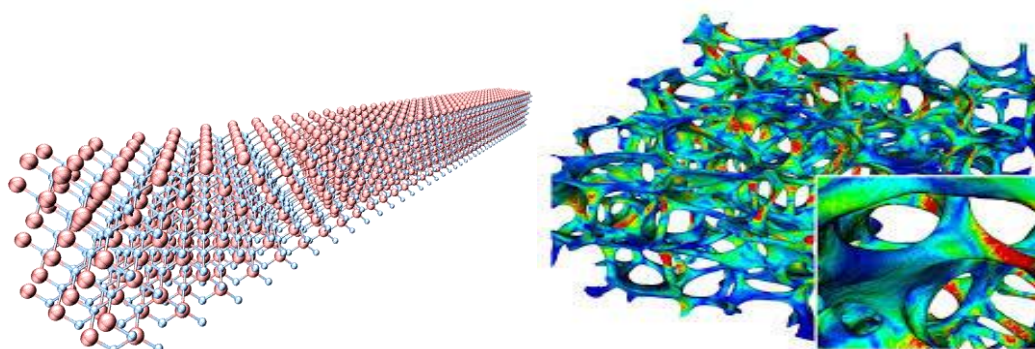
Στο τέλος κάθε εφαρμογής γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων με τα πειραματικά δεδομένα και εξετάζεται κατά πόσο η θεωρία της βαθμοελαστικότητας μας δίνει αποτελέσματα, τα οποία προσεγγίζουν πιστότερα το πείραμα και τις εφαρμογές, απ'ότι η θεωρία της κλασικής ελαστικότητας.

2. Εισαγωγή

Κλασικές θεωρίες μηχανικής του στερεού έχουν χρησιμοποιηθεί σε ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών σε διάφορους τομείς της μηχανικής, όπως χημικής, ηλεκτρολογικής, μηχανολογικής, γεωλογικής μηχανικής και σε έργα πολιτικού μηχανικού. Οι θεωρίες αυτές εφαρμόστηκαν σε κλίμακες κυμαινόμενες από nm σε m και αφορούσαν φαινόμενα και εφαρμογές που ήταν αντιληπτά με γυμνό μάτι. Πρόσφατα, οι κλασικές θεωρίες μηχανικής χρησιμοποιήθηκαν για να ερμηνεύσουν παρατηρήσεις που γίνονταν σε εξελιγμένα οπτικά και ηλεκτρονικά μικροσκόπια. Η επίδραση της μικροδομής (microstructure) στην μακροσκοπική μελέτη δεν λαμβάνεται υπόψη στις περιπτώσεις που κάνουμε την παραδοχή ότι το υλικό είναι ομογενές. Η ελαστική συμπεριφορά του υλικού μελετάται τότε με χρήση των νόμων της κλασικής ελαστικότητας. Εντούτοις, σε πολλές περιπτώσεις, μια τέτοια μελέτη μας οδηγεί σε συμπεράσματα τα οποία δεν είναι απολύτως ακριβή και παρουσιάζουν κάποια προσέγγιση. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι δεν έχουμε λάβει υπόψη μας την μικροδομή του υλικού.

Πολλά υλικά, είτε φυσικά είτε τεχνητά, παρουσιάζουν μικροδομή και οφείλουμε να μελετήσουμε τη συμπεριφορά τους σε μικροκλίμακα (π.χ. νανοϋλικά). Υλικά που παρουσιάζουν μικροδομή όπως πολυμερή, υγροί κρύσταλλοι, πορώδη υλικά κ.λπ. φαίνονται στο παρακάτω Σχήμα 1.

Όταν μελετάμε υλικά με μικροδομή, προκύπτει το πρόβλημα της μικροσυνέχειας, το οποίο έχει άμεση σχέση με την έννοια της κλίμακας του χρόνου και του μήκους, που ορίζουμε για να μελετήσουμε την συμπεριφορά των κυμάτων σε τέτοια υλικά. Λόγω της κλίμακας (της τάξης του νάνο ή μικρο), οι μεταβολές στα υλικά δεν μπορούν να γίνουν αντιληπτές από κλασικές θεωρίες. Ας σημειωθεί εδώ, ότι αυτές οι μεταβολές αυξάνονται όσο μειώνεται το μέγεθος του δείγματος ή του υλικού.



πλέγμα πολυμερούς

μικροδομή οστού ανθρώπινου σκελετού

Σχήμα 1

Διάφορες θεωρίες έχουν διατυπωθεί κατά καιρούς για την μοντελοποίηση της μηχανικής συμπεριφοράς μικροδομών.

Μερικές σποραδικές προσπάθειες ξεκινούν τον 19^ο αιώνα κυρίως με τον Cauchy, ο οποίος στη δεκαετία του 1850 πρότεινε τη χρήση ανώτερης τάξης μερικών διαφορικών εξισώσεων για να προσεγγίσει με μεγαλύτερη ακρίβεια την συμπεριφορά των κρυσταλλικών πλεγμάτων, όπου του μέγεθος του στοιχειώδους όγκου θα αποτελούσε μία επιπλέον καταστατική παράμετρο.

Οι προσπάθειες αυτές είχαν έναν διερευνητικό χαρακτήρα. Δεν στόχευαν τόσο στον προσδιορισμό ενός μαθηματικού μοντέλου, όσο στην αντίληψη και ερμηνεία ορισμένων φυσικών φαινομένων.

Οι κλασικές θεωρίες μελετούν μια κυματική διαταραχή χρησιμοποιώντας τη γνωστή κυματική εξίσωση. Η θεωρία της βαθμοελαστικότητας (gradient elasticity) χρησιμοποιεί ως μαθηματικό μοντέλο διαφορικές εξισώσεις ανώτερης τάξης. Στο πρόβλημα, που μελετάμε, στην κλασική κυματική εξίσωση προστίθενται δύο όροι παραγώγων 3^{ης} και 4^{ης} τάξης πολλαπλασιασμένοι με τις παραμέτρους h και g . Οι όροι αυτοί προσδιορίζουν την επιφανειακή και χωρική τάση αντίστοιχα, που αναπτύσσονται στην μικροδομή¹. Οι παράμετροι αυτές (g και h) έχουν διαστάσεις μήκους. Όσο το υλικό της χορδής παρουσιάζει ισχυρότερες ιδιότητες μικροδομής, τόσο οι παράμετροι αυτές τείνουν αριθμητικά στην μονάδα. Αντίθετα, για υλικά τα οποία έχουν ασθενείς ιδιότητες μικροδομής, οι καταστατικές παράμετροι μειώνονται και γενικά: $h \ll 1$ και $g \ll 1$.²

Προφανώς, για $h=0$ και $g=0$, μηδενίζονται οι παράγωγοι 3^{ης} και 4^{ης} τάξης και αναγόμαστε στην κλασική κυματική εξίσωση.

Το πεδίο της βαθμοελαστικότητας μοντελοποιεί με μεγάλη αξιοπιστία την μηχανική συμπεριφορά υλικών με μικροδομή. Στηρίζεται στην θεωρία της κλασικής ελαστικότητας, χρησιμοποιώντας τους νόμους και τα εργαλεία της. Στο πεδίο της βαθμοελαστικότητας, όμως, εισάγονται νέες παράμετροι και μεταβλητές για να προσδιορίσουν την χωρική συμπεριφορά και την μικροσυνέχεια του υλικού.

¹ Youn-Sha Chan_, Glaucio H. Paulino and Albert C. Fannjiang : Gradient Elasticity Theory for Mode III Fracture in Functionally Graded Materials – Part II: Crack Parallel to the Material Gradation

² A.Charalambopoulos, L.Gergidis,G.Kartalos: On the gradient elastic wave propagation in cylindrical waveguides with microstructure

Ξεκινώντας από τη συνθήκη ισορροπίας για τον τανυστή των τάσεων σ_{ij}

$$\sigma_{ij,i} + f_j = 0$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \text{όπου } i,j=x,y,z$$

εισάγεται η έννοια του τανυστή διπλών τάσεων μ_{ijk} , όπου $i,j,k=x,y,z$ και χρησιμοποιούνται θεωρήματα ενέργειας (π.χ. το θεώρημα διατήρησης δυναμικής ενέργειας) για τον προσδιορισμό της παρακάτω διαφορικής εξίσωσης που διέπει το μονοδιάστατο πρόβλημα:

$$(1 - g^2 \Delta) \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (1 - h^2 \Delta) \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1)$$

όπου Δ : ο ανηγμένος σε μία διάσταση τελεστής Laplace $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$

g, h : καταστατικές παράμετροι βαθμοελαστικότητας

μ : σταθερά Lamé

ρ : πυκνότητα

Στον παρακάτω Πίνακα 1 γίνεται διερεύνηση της εξίσωσης (1) για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων g και h .

	Περιπτώσεις	Διαφορική εξίσωση	Παρατηρήσεις
1	$g \neq 0, h \neq 0$	$(1 - g^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}) \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (1 - h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}) \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$	Μελετάται στην παρούσα εργασία
2	$g = 0, h = 0$	$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$	Κλασική κυματική εξίσωση
3	$g = 0, h \neq 0$	$\square u = - \frac{h^2}{c^2} \Delta \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$	\square : τελεστής d'Alembert
4	$g \neq 0, h = 0$	$(1 - g^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}) \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ή $\square u = g^2 \Delta^2 u$	\square : τελεστής d'Alembert
5	$g = h$	$(1 - g^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}) (\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}) = 0$	Γενική λύση: $u(x) = u_{\text{class}}(x) + Ae^{-x/g} + De^{x/g}$

Πίνακας 1

Κάποιες διευκρινίσεις για τον Πίνακα 1:

Περίπτωση 3 : $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (1 - h^2 \Delta) \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

Θέτουμε $\frac{\rho}{\mu} = \frac{1}{c^2}$: $\Delta u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{h^2}{c^2} \Delta \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Rightarrow$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = \frac{h^2}{c^2} \Delta \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) u = \frac{h^2}{c^2} \Delta \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

όμως $\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \square$, τελεστής d'Alembert

$$\square u = - \frac{h^2}{c^2} \Delta \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Περίπτωση 4 : $(1 - g^2 \Delta) \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

Θέτουμε $\frac{\rho}{\mu} = \frac{1}{c^2}$: $(1 - g^2 \Delta) \Delta u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Rightarrow$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u = g^2 \Delta^2 u \Rightarrow$$

$$\square u = g^2 \Delta^2 u$$

Περίπτωση 5 : $(1 - g^2 \Delta) \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (1 - h^2 \Delta) \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \xrightarrow{g=h}$

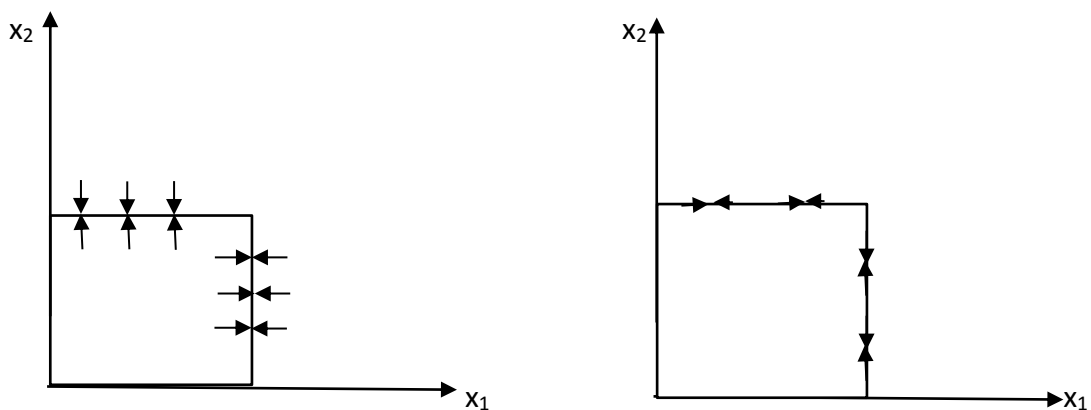
$$(1 - g^2 \Delta) \left(\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = 0$$

Άρα ο όρος $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ανήκει στον πυρήνα του τελεστή $(1 - g^2 \Delta)$ ο οποίος αποτελεί τον τροποποιημένο τελεστή Helmholtz. Όταν ο όρος αυτός μηδενιστεί μας δίνει την ιδιοσυνάρτηση της κλασικής ελαστικότητας και η γενική λύση θα είναι της μορφής:

$$u(x) = u_{\text{class}}(x) + Ae^{-x/g} + De^{x/g}$$

Στο σημείο αυτό, θα πρέπει να διευκρινίσουμε τον όρο "διπλές τάσεις" (double stresses). Δίνουμε μια σχηματική ερμηνεία (Σχήμα 2) όπου φαίνονται οι διπλές τάσεις που ασκούνται σε ένα δομικό στοιχείο του μικροϋλικού που μελετάμε.³

³ A.Charalambopoulos, L.Bokas: Investigation of initial-boundary value problems of gradient elasticity in the realm of implicit second order evaluation equations



Σχήμα 2

Η θεωρία της βαθμοελαστικότητας μαθηματικά περιγράφεται από τη θεωρία ιδιόμορφων διαταραχών. Ένα φυσικό πρόβλημα, πολλές φορές, περιγράφεται μαθηματικά από διαφορικές εξισώσεις που δεν είναι γραμμικές και οι αναλυτικές μέθοδοι δεν είναι ικανές να το επιλύσουν. Ένα τέτοιο πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί με χρήση προσεγγιστικών μεθόδων της θεωρίας διαταραχών. Γενικά, με χρήση μεθόδων διαταραχών, μπορούμε να βρούμε μια προσεγγιστική λύση όταν οι αρχικές εξισώσεις περιέχουν όρους που θεωρούνται μικροί συγκρινόμενοι με άλλους των ίδιων εξισώσεων. Η θεωρία **ιδιόμορφων διαταραχών** χρησιμοποιεί στοιχεία διαστατικής ανάλυσης (αδιαστατοποίηση), στοιχεία ασυμπτωτικής ανάλυσης (ασυμπτωτικές σειρές), αλλαγή κλίμακας κ.λπ. Ενδεικτικά αναφέρουμε δύο από αυτά.

Διαστατική ανάλυση : Η διαστατική ανάλυση βασίζεται στο γεγονός ότι ένας φυσικός νόμος είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες που χρησιμοποιούνται για την μέτρηση των φυσικών μεταβλητών. Μία προφανής συνέπεια είναι ότι οποιαδήποτε εξίσωση πρέπει να έχει τις ίδιες διαστάσεις τόσο στο αριστερό όσο και στο δεξιό μέλος της. Το θεώρημα Buckingham ή θεώρημα των π είναι το βασικό εργαλείο της διαστατικής ανάλυσης και περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο κάθε φυσικός νόμος που είναι ανεξάρτητος μονάδων και περιέχει m διαστατικές μεταβλητές μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως μία εξίσωση λιγότερων από m αδιάστατων μεταβλητών.⁴

Αλλαγή κλίμακας : Εφαρμόζοντας αυτή τη μέθοδο, επιλέγουμε, συνήθως, νέες αδιάστατες μεταβλητές και επαναπροσδιορίζουμε το πρόβλημα συναρτήσει αυτών των μεταβλητών. Αυτή η τεχνική είναι όχι μόνο χρήσιμη αλλά και απαραίτητη πολλές φορές, ειδικά όταν πρέπει να γίνουν συγκρίσεις των μεγεθών ποικίλων όρων σε μία εξίσωση αν για παράδειγμα θέλουμε να αμελήσουμε μικρούς όρους.

⁴ J.D.Logan, Applied mathematics, John Willey & Sons, Inc., 1997

Στην παρούσα εργασία, χρησιμοποιούμε δύο καταστατικές παραμέτρους βαθμοελαστικότητας. Άλλες θεωρίες χρησιμοποιούν διαφορετικό πλήθος παραμέτρων. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι η θεωρία Midlin αρχικά είχε εισάγει μεγάλο αριθμό τέτοιων παραμέτρων, τις οποίες αργότερα περιόρισε σε τρεις (3).

Κεφάλαιο 1°

Διατύπωση του 1^{ου} προβλήματος

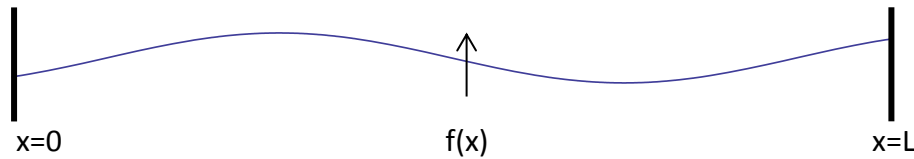
Θεωρούμε χορδή, μήκους L , που είναι δεμένη (ακίνητη) στα δύο άκρα της. Η στήριξη στα δύο άκρα είναι **χαλαρή**. Στην εργασία μας θα ασχοληθούμε με το πεδίο των μετατοπίσεων. Θα μελετήσουμε την διάδοση μιας διέγερσης $f(x)$ κατά μήκος της χορδής με δύο μεθόδους:

- Με τη μέθοδο της κλασικής ελαστικότητας
- Με τη μέθοδο της βαθμοελαστικότητας

1.Α. Επίλυση με τη μέθοδο της κλασικής ελαστικότητας

Η κυματική διαταραχή διαδίδεται κατά μήκος της χορδής κατά τον άξονα x , όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.

Το υλικό της χορδής έχει σταθερά Lamé μ και πυκνότητα ρ .



Σχήμα 3

Η μετατόπιση $u(x,t) = \hat{y} e^{sx-i\omega t}$ ικανοποιεί την κυματική εξίσωση

$$\left. \begin{aligned} \mu \Delta u &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ c^2 &= \frac{\mu}{\rho} \\ u_{xx} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Για την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης (1.1) χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των χωριζομένων μεταβλητών :

$$u(x,t) = X(x)T(t) \quad \text{με} \quad X(x) = e^{sx}$$

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow u_{xx} = X''(x)T(t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X(x) T''(t)$$

Αντικαθιστούμε στην (1.1):

$$X''(x)T(t) = \frac{1}{c^2} X(x)T''(t) \Rightarrow$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda$$

$$\text{Επίλυση της } \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \quad (1.2)$$

Συνοριακές συνθήκες :

Επειδή τα δύο άκρα παραμένουν ακίνητα:

- Συνθήκη ακινησίας άκρων : $u(0,t) = u(L,t) = 0$

Επειδή μελετάμε τη μετάδοση της διαταραχής στο πεδίο των μετατοπίσεων, η παραπάνω συνθήκη γράφεται:

- $X(0) = X(L) = 0$

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

$$\text{a. } \lambda < 0 \Rightarrow -\lambda > 0 \Rightarrow -\lambda = k^2 \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = k^2$$

$$X(x) = e^{sx} \Rightarrow X''(x) = \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} \Rightarrow X''(x) = s^2 X(x)$$

$$s^2 = k^2 \Rightarrow s = \pm k$$

Λύση της (1.2):

$$\left. \begin{aligned} X(x) &= A e^{kx} + B e^{-kx} \\ X(0) &= A + B \Rightarrow A + B = 0 \\ X(L) &= A e^{kL} + B e^{-kL} \Rightarrow A e^{kL} + B e^{-kL} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.2a)$$

Επιλύοντας τις (1.2a) : $A=B=0$

$$\text{b. } \lambda = 0$$

$$X''(0) = 0 \Rightarrow X(x) = Ax + B$$

$$X(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \quad (1.2b)$$

$$X(L) = 0 \Rightarrow AL = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$\text{c. } \lambda > 0 \Rightarrow \lambda = k^2 \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = -k^2 \Rightarrow$$

$$X(x) = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx)$$

$$\left. \begin{aligned} X(0) &= 0 \Rightarrow C_1 = 0 \\ X(L) &= 0 \Rightarrow C_1 \cos(kL) + C_2 \sin(kL) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.2c)$$

Για $C_2 \neq 0$, $\sin(kL) = 0$

$$k_n L = n\pi \Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{L}, n=1,2,\dots$$

Άρα η λύση του προβλήματος, με τη μέθοδο της κλασικής ελαστικότητας, είναι:

$$(k_n, u_n(x)) = \left(\frac{n\pi}{L}, \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right) \text{ και } \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \quad n=1,2,\dots \quad (1.A)$$

1.B. Επίλυση με τη μέθοδο της βαθμοελαστικότητας

Το διαδιδόμενο κύμα $u(x,t)$ ικανοποιεί την κυματική εξίσωση :

$$(1 - h^2 \Delta) \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (1 - g^2 \Delta) \mu \Delta u = f(x,t)$$

όπου g, h καταστατικές παράμετροι βαθμοελαστικότητας.

Η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση

$$(1 - g^2 \Delta) \mu u_{xx} = (1 - h^2 \Delta) \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Rightarrow$$

$$(1 - g^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}) \mu u_{xx} = (1 - h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}) \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.3)$$

Για την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης (1.3) χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των χωριζομένων μεταβλητών :

$$u(x,t) = X(x)T(t) \quad \mu\epsilon \quad X(x) = e^{sx}$$

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow u_{xx} = X''(x)T(t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X(x)T''(t)$$

Αντικαθιστούμε στην (1.3):

$$\mu (g^2 X^{(4)}(x)T(t) - X''(x)T(t)) + \rho (X(x)T''(t) - h^2 X''(x)T''(t)) = 0 \Rightarrow$$

$$\mu (g^2 X^{(4)}(x) - X''(x))T(t) + \rho (X(x) - h^2 X''(x))T''(t) = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{g^2 X^{(4)}(x) - X''(x)}{X(x) - h^2 X''(x)} = \frac{\rho T''(t)}{\mu T(t)} = -\lambda$$

$$\text{Επίλυση της } -\frac{g^2 X^{(4)}(x) - X''(x)}{X(x) - h^2 X''(x)} = -\lambda \quad (1.4)$$

Συνοριακές συνθήκες :

- συνθήκη ακινησίας των άκρων : $X(0) = X(L) = 0$
Επειδή οι διπλές τάσεις μηδενίζονται στο $x=0$ και στο $x=L$, ισοδύναμα μηδενίζεται η καμπυλότητα. Άρα:
- συνθήκη μηδενικής καμπυλότητας : $X''(0) = X''(L) = 0$

$$X(x) = e^{sx} \Rightarrow X''(x) = s^2 X(x) \Rightarrow X^{(4)}(x) = s^4 X(x)$$

Αντικαθιστούμε τις τελευταίες σχέσεις στην (1.4) και καταλήγουμε στη διτετράγωνη εξίσωση:

$$g^2 s^4 - (1 - \lambda h^2) s^2 - \lambda = 0 \Rightarrow$$

$$s^2 = \frac{(1 - \lambda h^2) \pm \sqrt{(1 - \lambda h^2)^2 + 4\lambda g^2}}{2g^2} \Rightarrow$$

$$\text{i. Για } s^2 = \frac{(1 - \lambda h^2) + \sqrt{(1 - \lambda h^2)^2 + 4\lambda g^2}}{2g^2} > 0 \Rightarrow$$

$$s_1 = s = \sqrt{\frac{(1 - \lambda h^2) + \sqrt{(1 - \lambda h^2)^2 + 4\lambda g^2}}{2g^2}} \quad \text{και } s_2 = -\sqrt{\frac{(1 - \lambda h^2) + \sqrt{(1 - \lambda h^2)^2 + 4\lambda g^2}}{2g^2}}$$

$$\text{ii. Για } s^2 = \frac{(1 - \lambda h^2) - \sqrt{(1 - \lambda h^2)^2 + 4\lambda g^2}}{2g^2} < 0 \Rightarrow$$

$$s^2 = i^2 \frac{\sqrt{(1 - \lambda h^2)^2 + 4\lambda g^2} - (1 - \lambda h^2)}{2g^2} \Rightarrow$$

$$s_3 = i \frac{\sqrt{\sqrt{(1 - \lambda h^2)^2 + 4\lambda g^2} - (1 - \lambda h^2)}}{g\sqrt{2}} = ia \quad \text{και}$$

$s_4 = -ia$ όπου

$$a = \frac{\sqrt{\sqrt{(1 - \lambda h^2)^2 + 4\lambda g^2} - (1 - \lambda h^2)}}{g\sqrt{2}}$$

Άρα η λύση της (1.4) είναι:

$$X(x) = \tilde{A} e^{sx} + \tilde{B} e^{-sx} + \tilde{C} e^{iax} + \tilde{D} e^{-iax} \quad \text{και } \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D} \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$X(x) = A \cosh(sx) + B \sinh(sx) + C \cos(ax) + D \sin(ax) \quad \text{και } A, B, C, D \in \mathbb{C} \quad (1.5)$$

Ο προσδιορισμός των αγνώστων παραμέτρων γίνεται με τη χρήση των συνοριακών συνθηκών:

$$\bullet X(0) = 0 \Rightarrow A + C = 0 \quad (1.5a)$$

$$\bullet X(L) = 0 \Rightarrow A \cosh(sL) + B \sinh(sL) + C \cos(aL) + D \sin(aL) = 0 \quad (1.5b)$$

$$\text{Από την (1.5): } X'(x) = sA \sinh(sx) + sB \cosh(sx) - aC \sin(ax) + aD \cos(ax)$$

$$X''(x) = s^2 A \cosh(sx) + s^2 B \sinh(sx) - a^2 C \cos(ax) - a^2 D \sin(ax)$$

$$\bullet X''(0) = 0 \Rightarrow s^2 A - a^2 C = 0 \quad (1.5c)$$

$$\bullet X''(L) = 0 \Rightarrow s^2 A \cosh(sL) + s^2 B \sinh(sL) - a^2 C \cos(aL) - a^2 D \sin(aL) = 0 \quad (1.5d)$$

Συνθήκη συμβατότητας για το ομογενές σύστημα των εξισώσεων (1.5a), (1.5b), (1.5c), (1.5d):

$$D_1 = 0, \text{ όπου}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \cosh(sL) & \sinh(sL) & \cos(aL) & \sin(aL) \\ s^2 & 0 & -a^2 & 0 \\ s^2 \cosh(sL) & s^2 \sinh(sL) & -a^2 \cos(aL) & -a^2 \sin(aL) \end{vmatrix}$$

$$D_1 = \sinh(sL)a^4 \sin(aL) + s^2 \sinh(sL)a^2 \sin(aL) + \sinh(sL)s^2 a^2 \sin(aL) + \sinh(sL)s^4 \sin(aL) \Rightarrow$$

$$D_1 = \sinh(sL) \sin(aL) [a^4 + 2s^2 a^2 + s^4] \Rightarrow$$

$$D_1 = \sinh(sL) \sin(aL) (a^2 + s^2)^2 \Rightarrow$$

$$D_1 = 0 \Leftrightarrow \sinh(sL) = 0 \text{ ή } \sin(aL) = 0$$

Αν $\sinh(sL) = 0 \Rightarrow s = 0$ απορρίπτεται

$$\text{Αν } \sin(aL) = 0 \Rightarrow a_n L = n\pi \Rightarrow a_n = \frac{n\pi}{L}$$

Προσδιορισμός απειρίας λύσεων:

Από τις (1.5a) και (1.5c) προκύπτει ότι

$$(1.5a) : C = -A$$

$$(1.5c) : A(a^2 + s^2) = 0$$

$$\text{Άρα } A = C = 0$$

(1.6)

Αντικαθιστούμε την (1.6) στις (1.5b) και (1.5d) :

$$(1.5b) : B \sinh(sL) + \overset{0}{D} \sin(aL) = 0 \Rightarrow$$

$$B \sinh(sL) = 0 \Rightarrow$$

$$B = 0$$

(1.7)

$$(1.5d) : s^2 \overset{0}{A} \cosh(sL) + s^2 \overset{0}{B} \sinh(sL) - a^2 \overset{0}{C} \cos(aL) - a^2 D \sin(aL) = 0 \Rightarrow$$

$$a^2 D \sin(aL) = 0$$

Η τελευταία σχέση, επειδή $\sin(aL) = 0$, ισχύει $\forall D \in \mathbb{R}$.

Τελικά η εξίσωση (1.5) της κυματοσυνάρτησης γίνεται:

$$X(x) = D \sin(ax) \text{ με } a_n = \frac{n\pi}{L}, n=1,2,\dots$$

(1.8)

Άρα η λύση του προβλήματος, με τη μέθοδο της βαθμοελαστικότητας, είναι:

$$(a_n, u_n(x)) = \left(\frac{n\pi}{L}, \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right), n=1,2,\dots$$

(1.B)

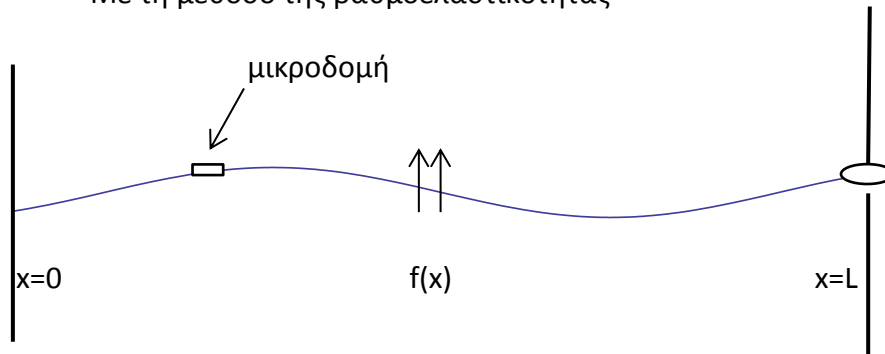
Συμπέρασμα: Στην περίπτωση που η χορδή είναι χαλαρά συνδεδεμένη στα δύο άκρα της, η λύση με τη μέθοδο της βαθμοελαστικότητας ταυτίζεται με αυτήν της κλασικής ελαστικότητας.

Κεφάλαιο 2^ο

Διατύπωση του 2^{ου} προβλήματος

Θεωρούμε χορδή, μήκους L , που είναι δεμένη (χαλαρή στήριξη) στο άκρο της $x=0$ ενώ στο άκρο της $x=L$, μέσω οδηγού, η χορδή έχει δυνατότητα κατακόρυφης κίνησης (Σχήμα 4). Θα μελετήσουμε την διάδοση μιας διέγερσης $f(x)$ κατά μήκος της χορδής με δύο μεθόδους:

- Με τη μέθοδο της κλασικής ελαστικότητας
- Με τη μέθοδο της βαθμοελαστικότητας



Σχήμα 4

2.Α. Επίλυση με τη μέθοδο της κλασικής ελαστικότητας

Όπως στο 1^ο πρόβλημα, εφαρμόζουμε την κυματική εξίσωση (1.1) και καταλήγουμε

στην σχέση (1.2) $\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$

Συνοριακές συνθήκες :

Το άκρο $x=0$ παραμένει ακίνητο και στο $x=L$, δεν υπάρχουν εγκάρσιες δυνάμεις, άρα η χορδή παραμένει οριζόντια :

- Συνθήκη ακινησίας : $X(0) = 0$
- Συνθήκη μηδενικής κλίσης : $X'(L) = 0$

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

$$\text{a. } \lambda < 0 \Rightarrow -\lambda > 0 \Rightarrow -\lambda = k^2 \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = k^2$$

$$X(x) = e^{sx} \Rightarrow X''(x) = \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} \Rightarrow X''(x) = s^2 X(x)$$

$$s^2 = k^2 \Rightarrow s = \pm k$$

Λύση της (1.2):

$$\left. \begin{aligned} X(x) &= A e^{kx} + B e^{-kx} \\ X'(x) &= kA e^{kx} - kB e^{-kx} \Rightarrow kA e^{kL} - kB e^{-kL} = 0 \\ X(0) &= A + B \Rightarrow A + B = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.2a)$$

Επιλύοντας τις (2.2a) : $kA (e^{kL} + e^{-kL}) = 0 \Rightarrow$

$$A = B = 0$$

b. $\lambda = 0$

Ομοίως, όπως στο 1^ο πρόβλημα, καταλήγουμε ότι

$$X(x) = Ax + B \Rightarrow$$

$$X'(x) = A$$

$$\left. \begin{aligned} X(0) = 0 &\Rightarrow B = 0 \\ X'(L) = 0 &\Rightarrow A = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.2b)$$

$$\text{c. } \lambda > 0 \Rightarrow \lambda = k^2 \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = -k^2 \Rightarrow$$

$$X(x) = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx)$$

$$X'(x) = -kC_1 \sin(kx) + kC_2 \cos(kx)$$

$$\left. \begin{aligned} -kC_1 \sin(kL) + kC_2 \cos(kL) &= 0 \\ X(0) = 0 &\Rightarrow C_1 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.2c)$$

Για $C_2 \neq 0$, $\cos(kL) = 0$

$$k_n L = (2n+1) \frac{\pi}{2} \Rightarrow k_n = (2n+1) \frac{\pi}{2L}, \quad n=0,1,2,\dots$$

Άρα η λύση του προβλήματος, με τη μέθοδο της κλασικής ελαστικότητας, είναι:

$$(k_n, u_n(x)) = \left((2n+1) \frac{\pi}{2L}, \sin(2n+1) \frac{\pi}{2L} x \right) \text{ και } \lambda_n = \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4L^2} \quad n=0,1,2,\dots \quad (2.A)$$

2.B. Επίλυση με τη μέθοδο της βαθμοελαστικότητας

Όπως στο 1^ο πρόβλημα, εφαρμόζουμε την εξίσωση (1.3) και καταλήγουμε στην

$$\text{σχέση (1.4) : } -\frac{g^2 X^{(4)}(x) - X''(x)}{X(x) - h^2 X''(x)} = -\lambda$$

Συνοριακές συνθήκες :

- συνθήκη ακινησίας στο $x=0$: $X(0) = 0$

- συνθήκη μηδενισμού διπλών τάσεων στο $x=0$: $X''(0) = 0$
- συνθήκη μηδενισμού διπλών τάσεων στο $x=L$: $X''(L) = 0$
- συνθήκη μηδενισμού τάσεων στο $x=L$: $-g^2 \mu X^{(3)}(L) + (\mu - \rho\omega^2 h^2) X'(L) = 0$

$$X(x) = e^{sx} \Rightarrow X''(x) = s^2 X(x) \Rightarrow X^{(4)}(x) = s^4 X(x)$$

Η διτετραγωνη εξίσωση, στην οποία καταλήγουμε, μας δίνει ομοίως τη λύση:

$$s^2 = \frac{(1 - \lambda h^2) \pm \sqrt{(1 - \lambda h^2)^2 + 4\lambda g^2}}{2g^2}$$

Θέτουμε

$$s = \sqrt{\frac{(1 - \lambda h^2) + \sqrt{(1 - \lambda h^2)^2 + 4\lambda g^2}}{2g^2}} \quad \text{και}$$

$$a = \frac{\sqrt{\sqrt{(1 - \lambda h^2)^2 + 4\lambda g^2} - (1 - \lambda h^2)}}{g\sqrt{2}}$$

και καταλήγουμε στην (1.5):

$$X(x) = A \cosh(sx) + B \sinh(sx) + C \cos(ax) + D \sin(ax) \quad \text{και } A, B, C, D \in \mathbb{C}$$

Ο προσδιορισμός των αγνώστων παραμέτρων γίνεται με τη χρήση των συνοριακών συνθηκών:

$$X'(x) = sA \sinh(sx) + sB \cosh(sx) - aC \sin(ax) + aD \cos(ax)$$

$$X''(x) = s^2 A \cosh(sx) + s^2 B \sinh(sx) - a^2 C \cos(ax) - a^2 D \sin(ax)$$

$$X^{(3)}(x) = s^3 A \sinh(sx) + s^3 B \cosh(sx) + a^3 C \sin(ax) - a^3 D \cos(ax)$$

$$\bullet \quad X(0) = 0 \Rightarrow A + C = 0 \quad (2.3a)$$

$$\bullet \quad X''(0) = 0 \Rightarrow s^2 A - a^2 C = 0 \quad (2.3b)$$

$$\bullet \quad X''(L) = 0 \Rightarrow s^2 A \cosh(sL) + s^2 B \sinh(sL) - a^2 C \cos(aL) - a^2 D \sin(aL) = 0 \quad (2.3c)$$

$$\bullet \quad -g^2 \mu [s^3 A \sinh(sL) + s^3 B \cosh(sL) + a^3 C \sin(aL) - a^3 D \cos(aL)] + (\mu - \rho\omega^2 h^2) [sA \sinh(sL) + sB \cosh(sL) - aC \sin(aL) + aD \cos(aL)] = 0 \quad (2.3d)$$

Επιλύουμε αρχικά το ομογενές σύστημα των εξισώσεων (2.3a) και (2.3b).

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ s^2 & -a^2 \end{vmatrix}$$

$$D_1 = -(a^2 + s^2) \neq 0$$

$$\text{Μοναδική λύση : } A = C = 0 \quad (2.4)$$

Οι εξισώσεις (2.3c) και (2.3d) ανάγονται στο ομογενές σύστημα :

$$\left. \begin{aligned} s^2 B \sinh(sL) - a^2 D \sin(aL) &= 0 \\ -g^2 \mu [s^3 B \cosh(sL) - a^3 D \cos(aL)] + (\mu - \rho\omega^2 h^2) [sB \cosh(sL) + aD \cos(aL)] &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} s^2 B \sinh(sL) - a^2 D \sin(aL) &= 0 \\ B s \cosh(sL) [(\mu - \rho \omega^2 h^2) - s^2 g^2 \mu] + a D \cos(aL) [(\mu - \rho \omega^2 h^2) + a^2 g^2 \mu] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} s^2 \sinh(sL) & -a^2 \sin(aL) \\ s \cosh(sL) [(\mu - \rho \omega^2 h^2) - s^2 g^2 \mu] & a \cos(aL) [(\mu - \rho \omega^2 h^2) + a^2 g^2 \mu] \end{vmatrix}$$

$$D_2 = s^2 a \sinh(sL) \cos(aL) (\mu - \rho \omega^2 h^2 + a^2 g^2 \mu) + s a^2 \cosh(sL) \sin(aL) (\mu - \rho \omega^2 h^2 - s^2 g^2 \mu)$$

Για να είναι συμβατό το σύστημα (2.5) πρέπει $D_2 = 0 \Rightarrow$

$$\frac{s \sinh(sL) \cos(aL)}{a \cosh(sL) \sin(aL)} = \frac{\mu - \rho \omega^2 h^2 - s^2 g^2 \mu}{\mu - \rho \omega^2 h^2 + a^2 g^2 \mu} \Rightarrow$$

$$\text{Συνθήκη συμβατότητας: } \frac{\tanh(sL)}{\tan(aL)} = \frac{\mu - \rho \omega^2 h^2 - s^2 g^2 \mu}{\mu - \rho \omega^2 h^2 + a^2 g^2 \mu} \cdot \frac{a}{s} \quad (2.6)$$

Λύσεις του συστήματος (2.5) :

$$B = D \cdot \frac{a^2}{s^2} \cdot \frac{\sin(aL)}{\sinh(sL)} \quad (2.7)$$

Με χρήση των (2.4) και (2.7) προσδιορίζουμε την εξίσωση της ιδιοσυνάρτησης $X(x)$:

$$X(x) = D \cdot \frac{a^2}{s^2} \cdot \frac{\sin(aL)}{\sinh(sL)} \sinh(sx) + D \sin(ax) \Rightarrow$$

$$X(x) = D \cdot \frac{a^2 \sin(aL) \sinh(sx) + s^2 \sinh(sL) \sin(ax)}{s^2 \sinh(sL)} \quad (2.B)$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε τιμές για τις σταθερές του προβλήματος (μ , ρ , ω , g και h), προσδιορίζουμε, με χρήση του Mathematica, τις ιδιοσυναρτήσεις και συγκρίνουμε τις δύο μεθόδους. Συγκεκριμένα :

- Από τη συνθήκη συμβατότητας (2.6) προσδιορίζουμε τις ιδιοτιμές λ_n για τις διάφορες τιμές του n .
- Από τη σχέση (2.B), για κάθε τιμή του λ_n , προσδιορίζουμε μία αντίστοιχη τιμή ιδιοσυνάρτησης $u_n(x)$ για τη βαθμοελαστικότητα.
- Συγκρίνουμε τις δύο μεθόδους, χρησιμοποιώντας επιπλέον τη σχέση (2.A).

2.Γ. Αριθμητικές εφαρμογές

Μέθοδος της κλασικής ελαστικότητας

Σε όλες τις εφαρμογές χρησιμοποιούμε $L = \pi$ m. Για τις διάφορες τιμές του n , η (2.A) :

$$\lambda_n = \frac{(2n+1)^2}{4} \quad n=0,1,2,\dots$$

$$u_n(x) = \sin\left(\frac{2n+1}{2} x\right) \quad (\Gamma.1)$$

Μέθοδος της βαθμοελαστικότητας

2.Γ.1. 1^η αριθμητική εφαρμογή

Χρησιμοποιούμε τα παρακάτω αριθμητικά δεδομένα:

ω	$g(m)$	$h(m)$	$\mu(GPa)$	$\rho(kg/m^3)$	$L(m)$
10^5	10^{-1}	10^{-2}	5.11	10^3	π

Πίνακας 2.1

Η σχέση (2.6) γίνεται :

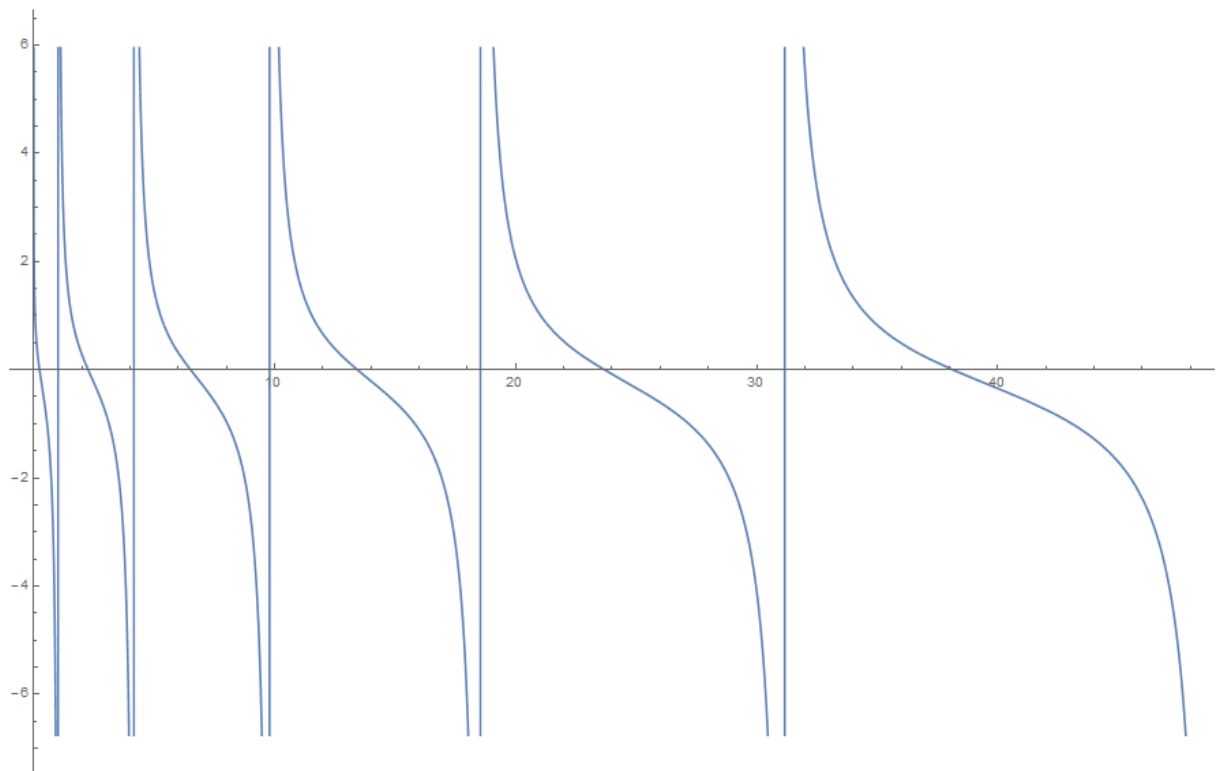
$$\frac{\text{Tanh} \left[5\sqrt{2} \pi \sqrt{1 + \sqrt{\left(1 - \frac{\lambda}{10000}\right)^2 + \frac{\lambda}{25} - \frac{\lambda}{10000}}}\right]}{\text{Tan} \left[5\sqrt{2} \pi \sqrt{-1 + \sqrt{\left(1 - \frac{\lambda}{10000}\right)^2 + \frac{\lambda}{25} + \frac{\lambda}{10000}}}\right]} = \frac{-5.11 + 2.555 \left[1 + \sqrt{\left(1 - \frac{\lambda}{10000}\right)^2 + \frac{\lambda}{25} - \frac{\lambda}{10000}} \right]}{5.11 + 2.555 \left[-1 + \sqrt{\left(1 - \frac{\lambda}{10000}\right)^2 + \frac{\lambda}{25} + \frac{\lambda}{10000}} \right]}$$

$$\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{\left(1 - \frac{\lambda}{10000}\right)^2 + \frac{\lambda}{25} + \frac{\lambda}{10000}}}{1 + \sqrt{\left(1 - \frac{\lambda}{10000}\right)^2 + \frac{\lambda}{25} - \frac{\lambda}{10000}}}}$$

Η γραφική επίλυσή της στο Mathematica (Σχήμα 4.1) δίνει τις ιδιοσυχνότητες :

	Κλασική ελαστικότητα	Βαθμοελαστικότητα
n	λ_n	λ_n
0	0.25	0.246741
1	2.25	2.26165
2	6.25	6.50998
3	12.25	13.4289
4	20.25	23.6751
5	30.25	38.1274

Πίνακας 2.2

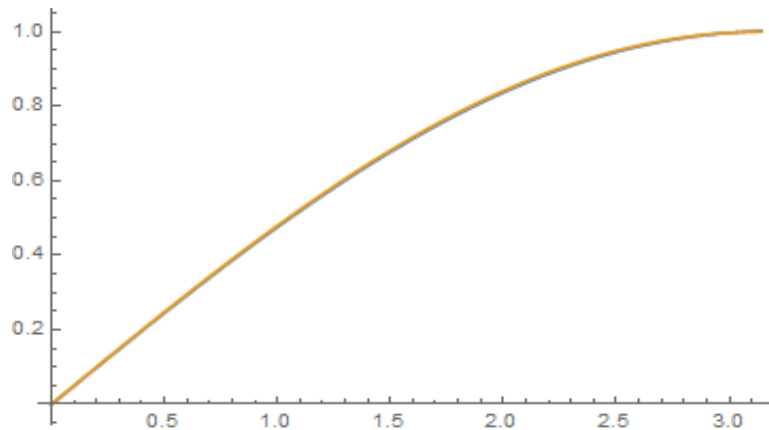


Σχήμα 4.1

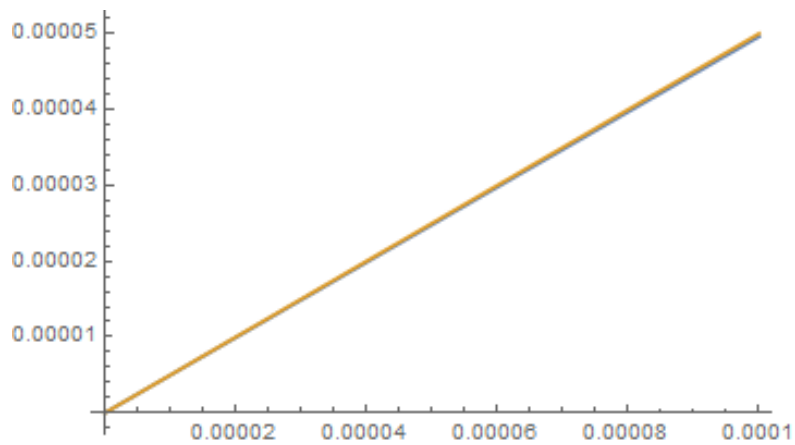
Αντικαθιστώντας τις τιμές των παραμέτρων και των ιδιοσυχνοτήτων στην (2.Β) παίρνουμε τα παρακάτω διαγράμματα για τις δύο περιπτώσεις:

- βαθμοελαστικότητα
- κλασική ελαστικότητα

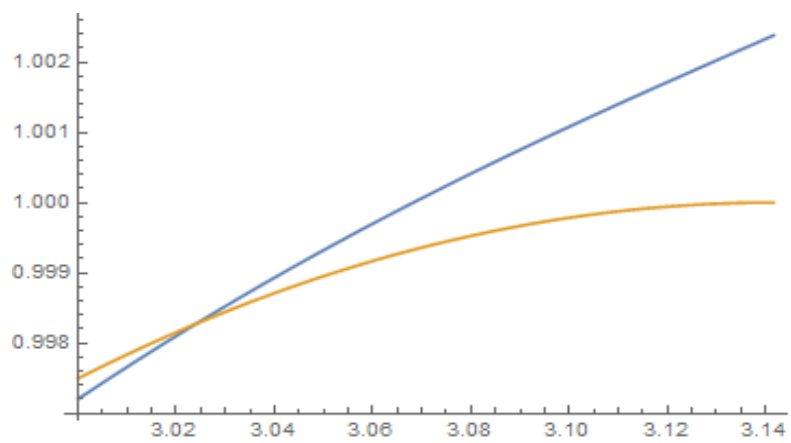
Για $n = 0$: Σχήμα 4.2.α, Σχήμα 4.2.β, Σχήμα 4.2.γ



Σχήμα 4.2.α

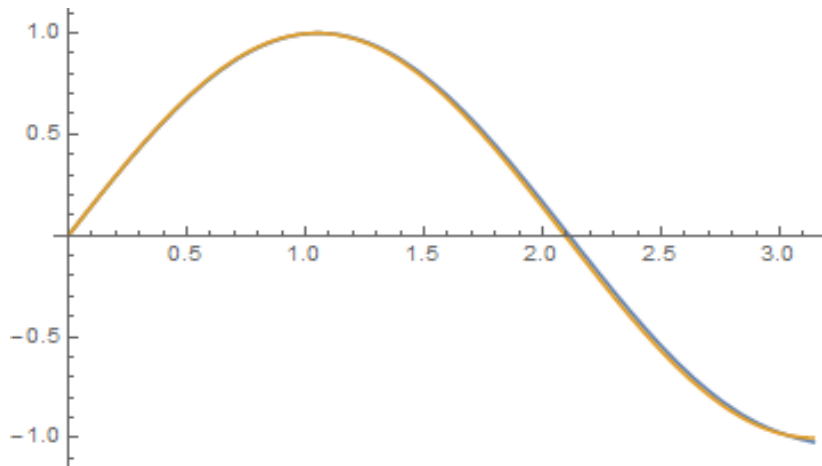


Σχήμα 4.2.β

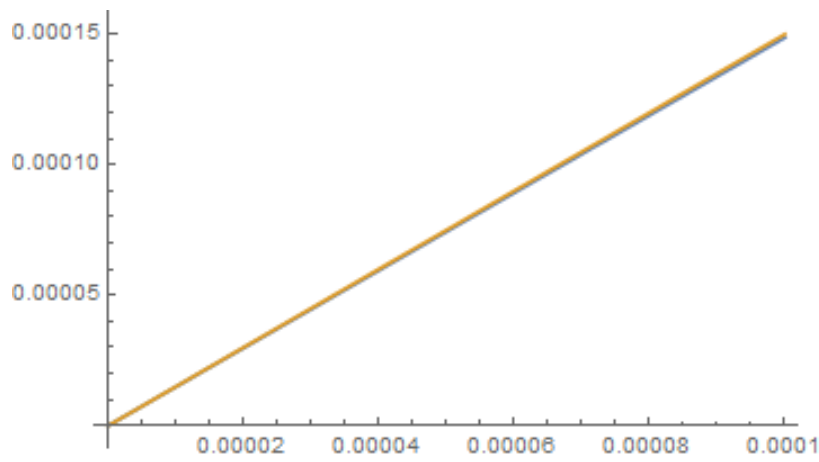


Σχήμα 4.2.γ

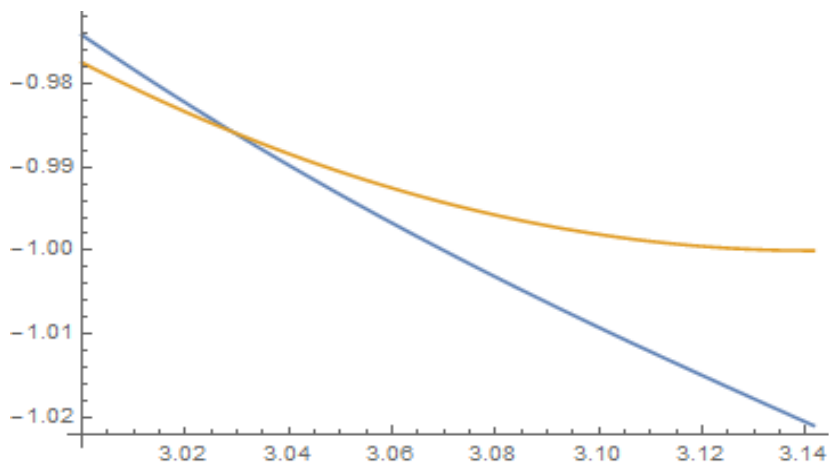
Για $n = 1$: Σχήμα 4.3.α, Σχήμα 4.3.β, Σχήμα 4.3.γ



Σχήμα 4.3.α

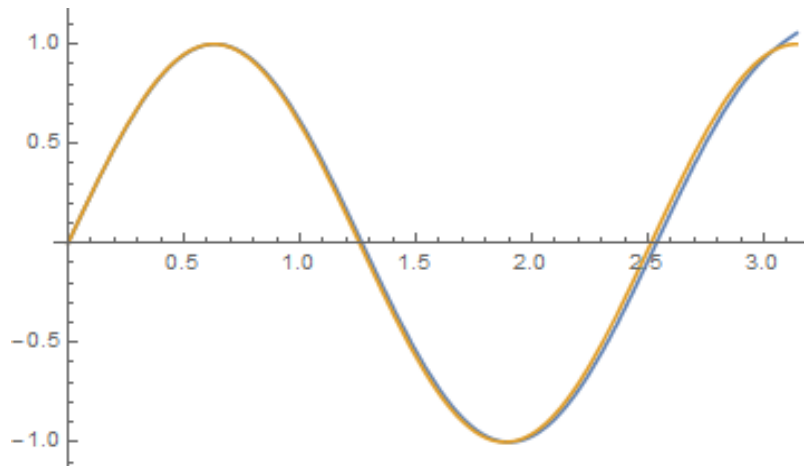


Σχήμα 4.3.β

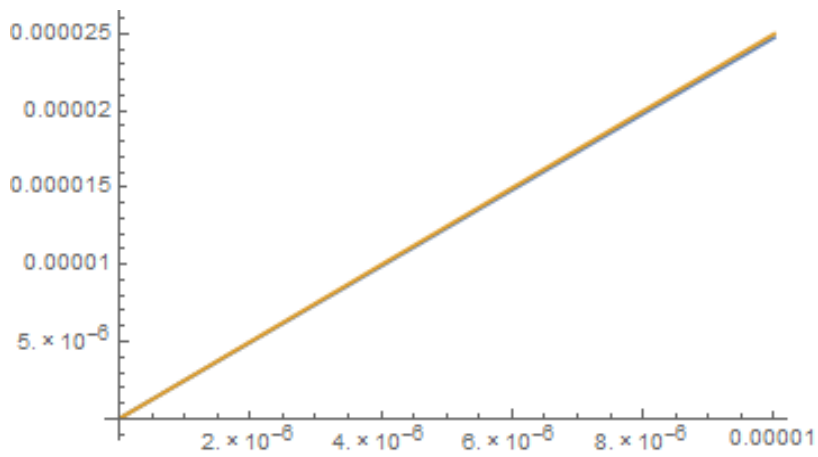


Σχήμα 4.3.γ

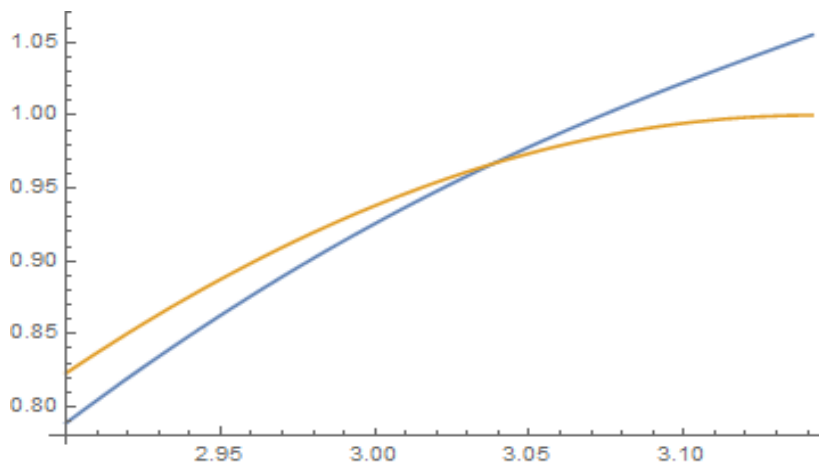
Για $n = 2$: Σχήμα 4.4.α, Σχήμα 4.4.β, Σχήμα 4.4.γ



Σχήμα 4.4.α

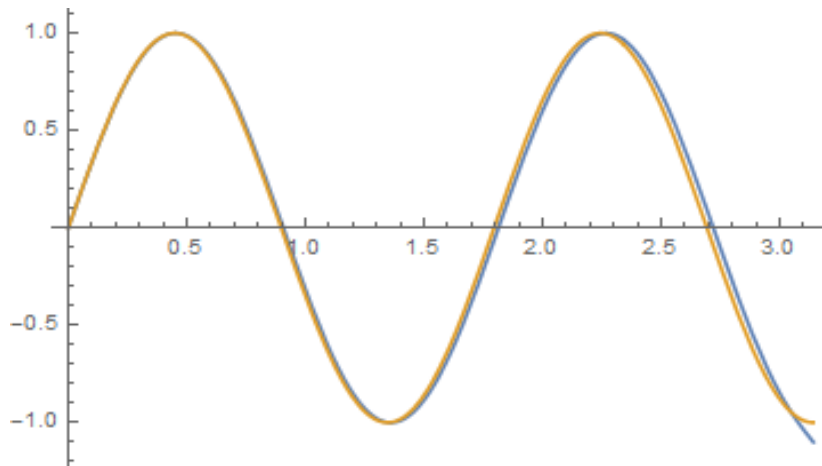


Σχήμα 4.4.β

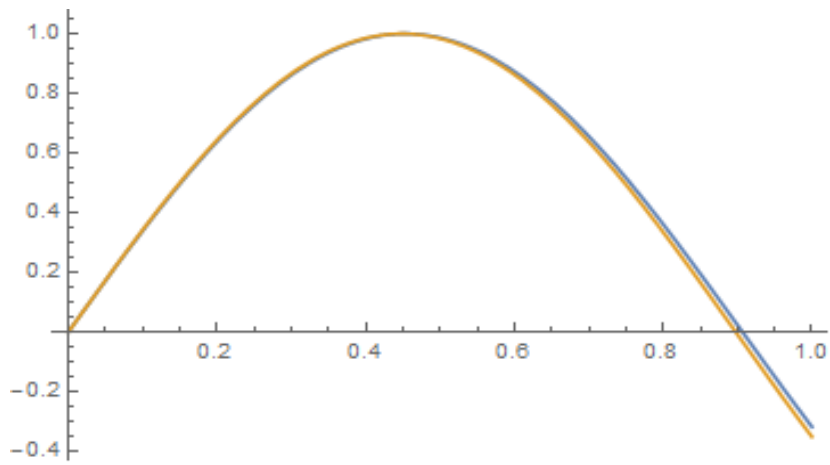


Σχήμα 4.4.γ

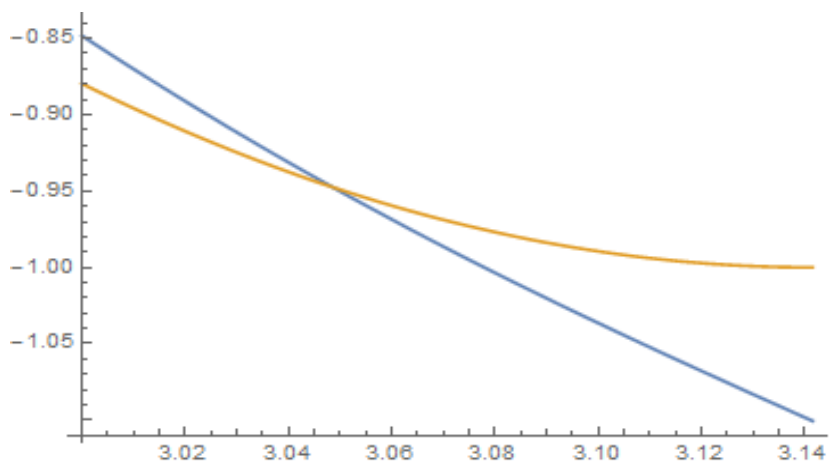
Για $n = 3$: Σχήμα 4.5.α, Σχήμα 4.5.β, Σχήμα 4.5.γ



Σχήμα 4.5.α

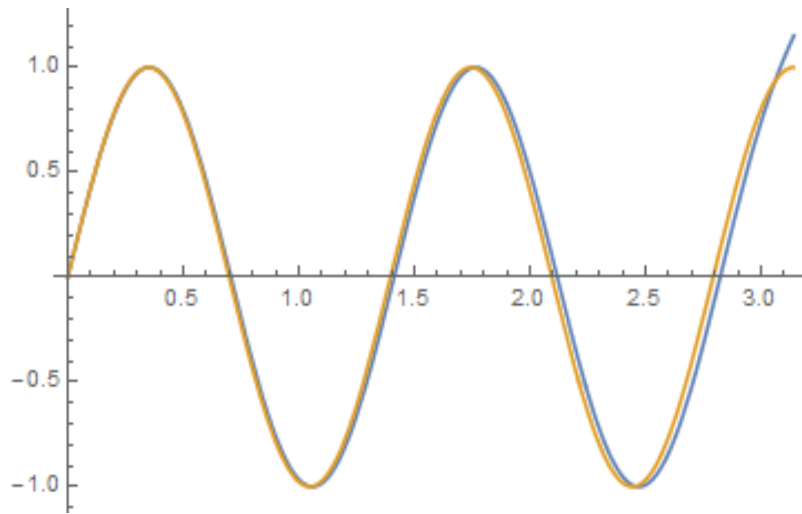


Σχήμα 4.5.β

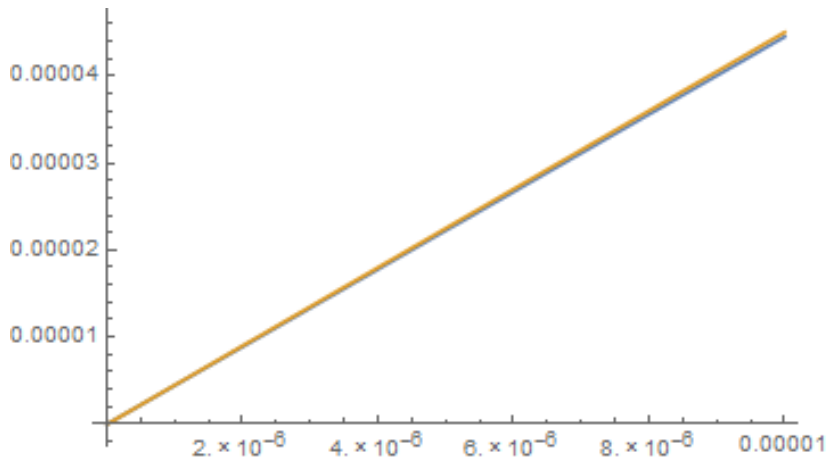


Σχήμα 4.5.γ

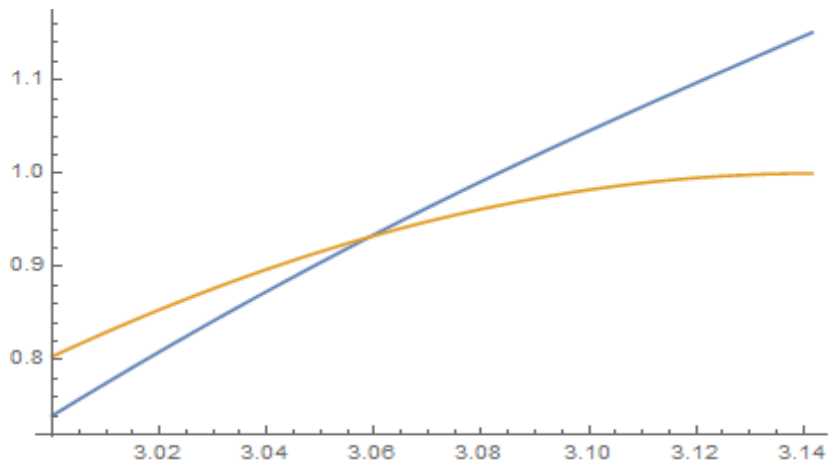
Για $n = 4$: Σχήμα 4.6.α, Σχήμα 4.6.β, Σχήμα 4.6.γ



Σχήμα 4.6.α

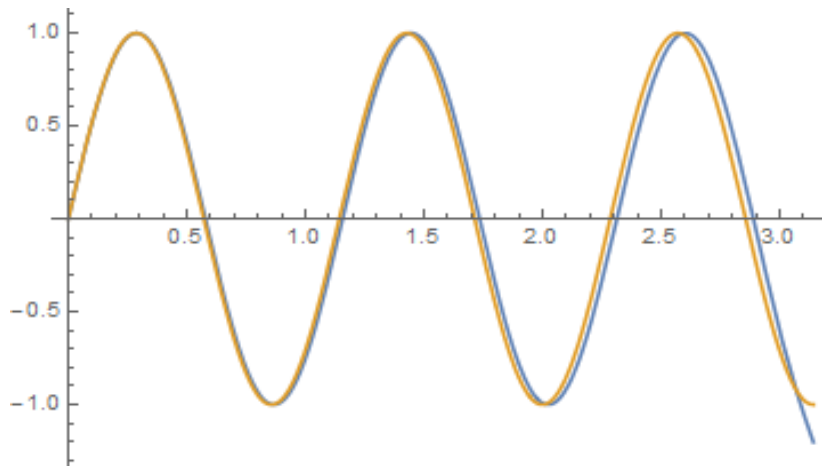


Σχήμα 4.6.β

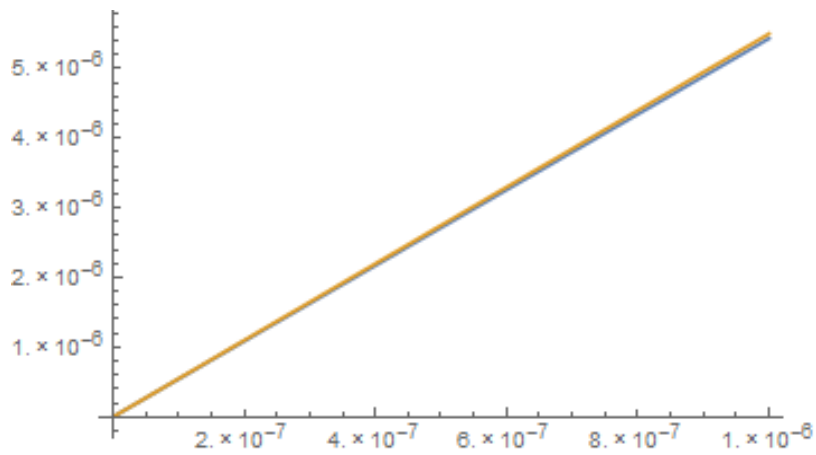


Σχήμα 4.6.γ

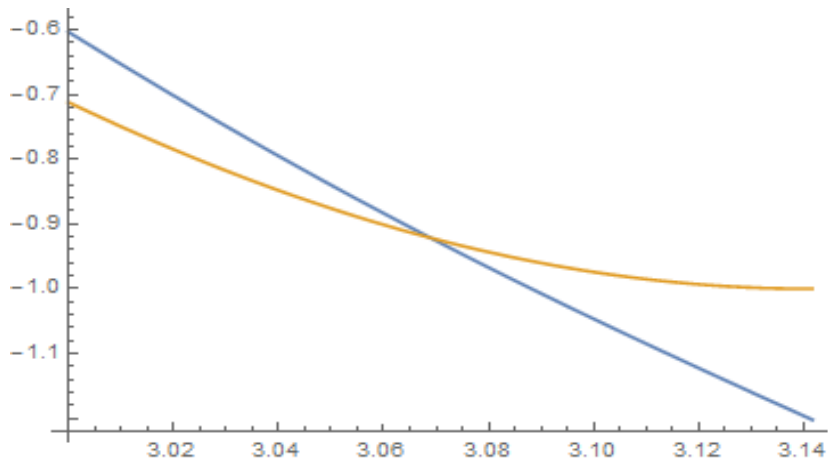
Για $n = 5$: Σχήμα 4.7.α, Σχήμα 4.7.β, Σχήμα 4.7.γ



Σχήμα 4.7.α



Σχήμα 4.7.β



Σχήμα 4.7.γ

Παρατηρήσεις :

- Το μέσο έχει μικρή πυκνότητα, η οποία είναι ίση με αυτή του νερού. ($\rho=1 \text{ kg/m}^3 = \rho_{H_2O}$).
- Στην περιοχή του $x=0$, οι καμπύλες των ιδιοσυναρτήσεων ταυτίζονται γιατί οι εξισώσεις τους ικανοποιούν τις ίδιες συνοριακές συνθήκες.
- Στην περιοχή $x=L$, οι καμπύλες των ιδιοσυναρτήσεων διαφοροποιούνται σημαντικά, γιατί οι εξισώσεις τους ικανοποιούν διαφορετικές συνοριακές συνθήκες και οι μετατοπίσεις ακολουθούν διαφορετικό μαθηματικό μοντέλο.

2.Γ.2. 2^η αριθμητική εφαρμογή

Χρησιμοποιούμε τα παρακάτω αριθμητικά δεδομένα:

ω	$g(m)$	$h(m)$	$\mu(GPa)$	$\rho(kg/m^3)$	$L(m)$
10^5	10^{-4}	10^{-2}	5.11	1200	π

Πίνακας 3.1

Σημείωση 1: Μεταβάλλουμε την πυκνότητα του μέσου και την παράμετρο g της βαθμοελαστικότητας.

Σημείωση 2: Αν παρατηρήσουμε τους πίνακες 2.1 και 3.1 και συγκρίνουμε τις ιδιοσυχνότητες στους πίνακες 2.2 και 3.2 αντίστοιχα, παρατηρούμε ότι οι πίνακες 2.1 και 3.1 αντιστοιχούν σε υλικό που παρουσιάζει σημαντικές ιδιότητες μικροδομής (οι παράμετροι g και h είναι της τάξης του 10^{-1} και 10^{-2} αντίστοιχα). Αντίθετα, το υλικό που χρησιμοποιούμε στην 2^η εφαρμογή και αντιστοιχεί στους πίνακες 2.2 και 3.2 παρουσιάζει μικρότερες ιδιότητες μικροδομής (οι παράμετροι g και h είναι της τάξης του 10^{-4} και 10^{-2} αντίστοιχα). Συνέπεια αυτού είναι οι μεγαλύτερες αποκλίσεις στις τιμές της ιδιοσυνάρτησης μεταξύ κλασικής ελαστικότητας και βαθμοελαστικότητας στην 1^η εφαρμογή σε σχέση με την δεύτερη.

Μέθοδος της βαθμοελαστικότητας

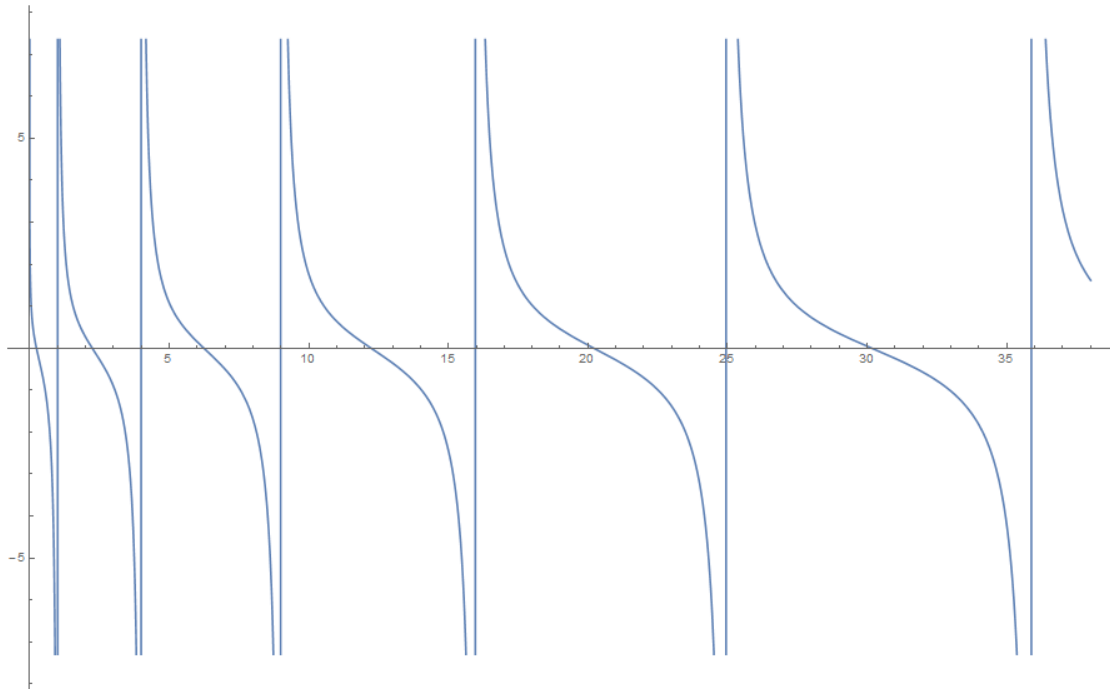
Η σχέση (2.6) γίνεται :

$$\frac{\text{Tanh} [5000\sqrt{2} \pi \sqrt{1 + \sqrt{\left(1 - \frac{\lambda}{10000}\right)^2 + \frac{\lambda}{25000000} - \frac{\lambda}{10000}}]}{\text{Tan} [5000\sqrt{2} \pi \sqrt{-1 + \sqrt{\left(1 - \frac{\lambda}{10000}\right)^2 + \frac{\lambda}{25000000} + \frac{\lambda}{10000}}]} = \frac{-5.11 + 2.555 \left[1 + \sqrt{\left(1 - \frac{\lambda}{10000}\right)^2 + \frac{\lambda}{25000000} - \frac{\lambda}{10000}}\right]}{5.11 + 2.555 \left[-1 + \sqrt{\left(1 - \frac{\lambda}{10000}\right)^2 + \frac{\lambda}{25000000} + \frac{\lambda}{10000}}\right]} \cdot \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{\left(1 - \frac{\lambda}{10000}\right)^2 + \frac{\lambda}{25000000} + \frac{\lambda}{10000}}}{1 + \sqrt{\left(1 - \frac{\lambda}{10000}\right)^2 + \frac{\lambda}{25000000} - \frac{\lambda}{10000}}}}$$

Η γραφική επίλυσή της στο Mathematica (Σχήμα 5.1) δίνει τις ιδιοσυχνότητες :

	Κλασική ελαστικότητα	Βαθμοελαστικότητα
n	λ_n	λ_n
0	0.25	0.249989
1	2.25	2.24945
2	6.25	6.24597
3	12.25	12.2348
4	20.25	20.2087
5	30.25	30.1582

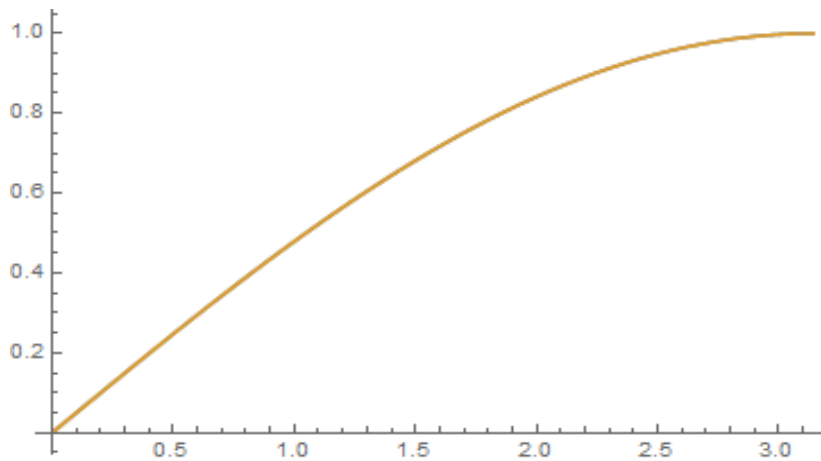
Πίνακας 3.2



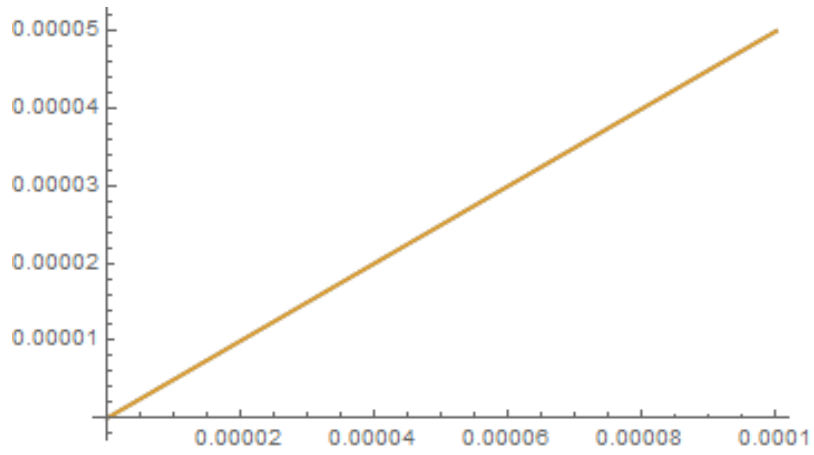
Σχήμα 5.1

Αντικαθιστώντας τις τιμές των παραμέτρων και των ιδιοσυχνοτήτων στην (2.Β) παίρνουμε τα παρακάτω διαγράμματα για τις δύο περιπτώσεις:

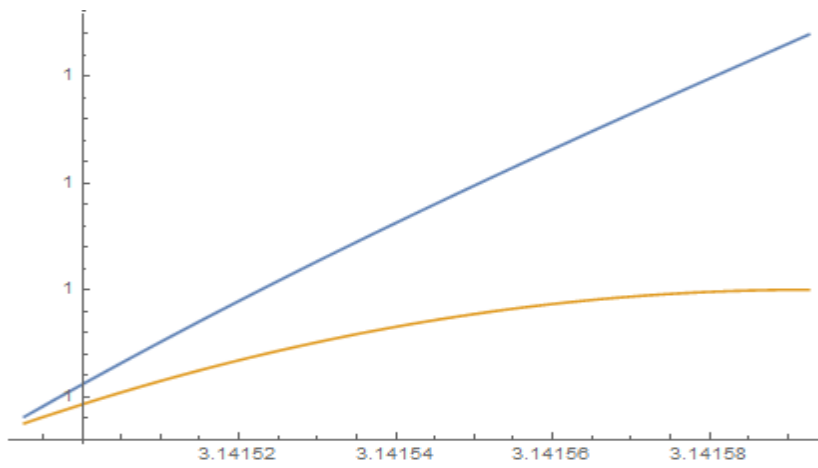
Για $n = 0$: Σχήμα 5.2.α, Σχήμα 5.2.β, Σχήμα 5.2.γ



Σχήμα 5.2.α

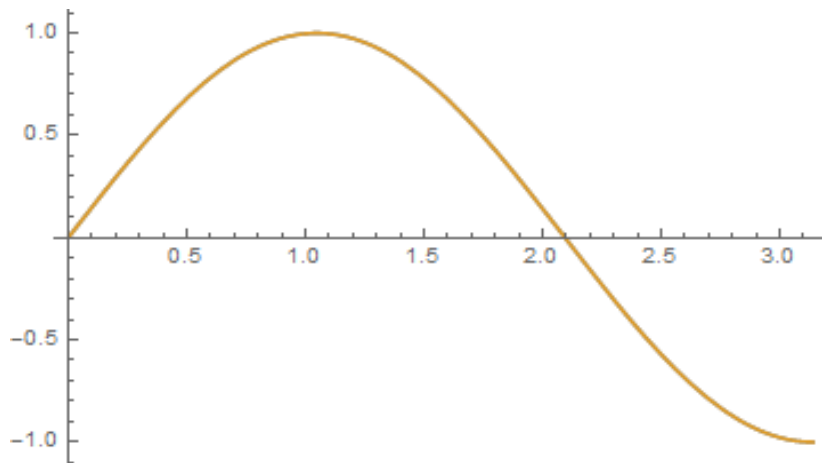


Σχήμα 5.2.β

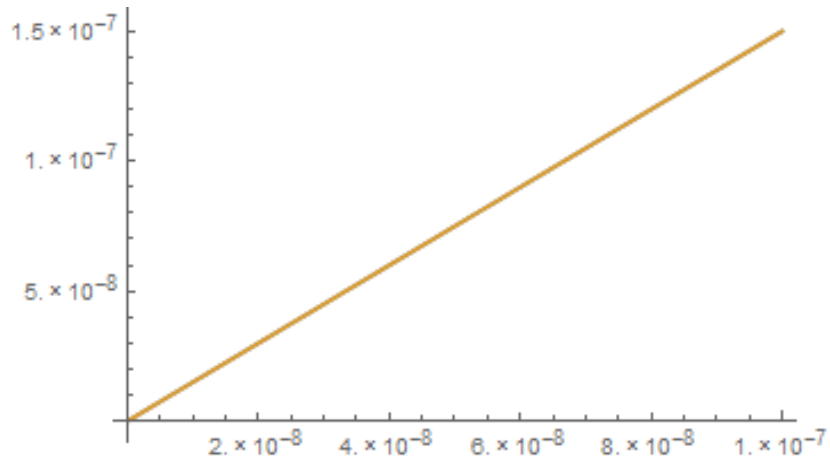


Σχήμα 5.2.γ

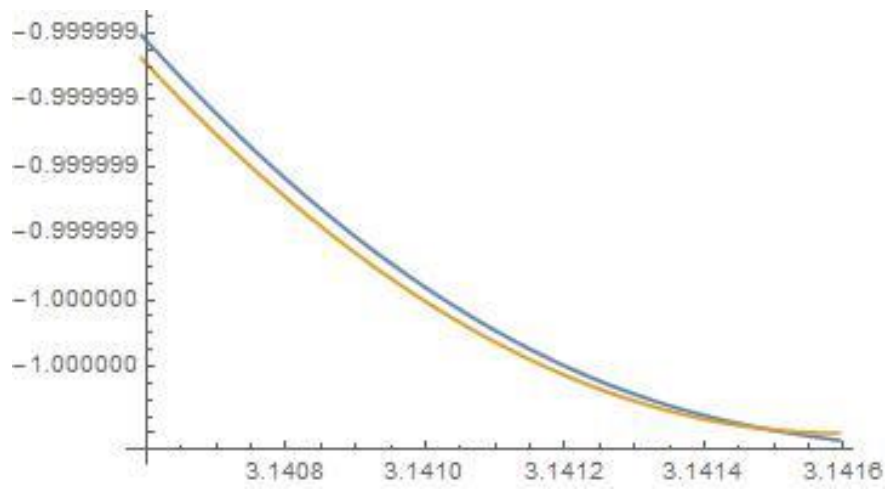
Για $n = 1$: Σχήμα 5.3.α, Σχήμα 5.3.β, Σχήμα 5.3.γ



Σχήμα 5.3.α

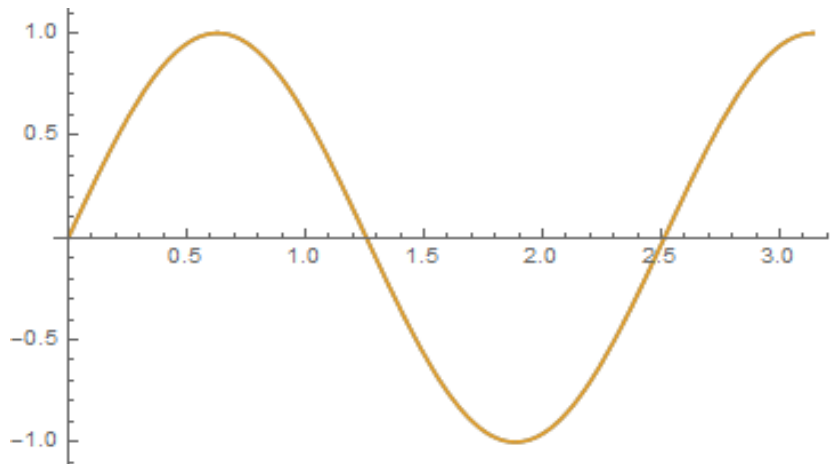


Σχήμα 5.3.β

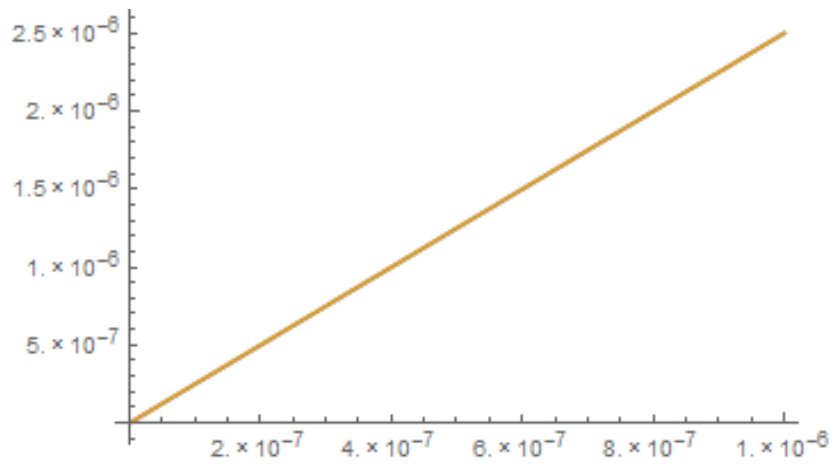


Σχήμα 5.3.γ

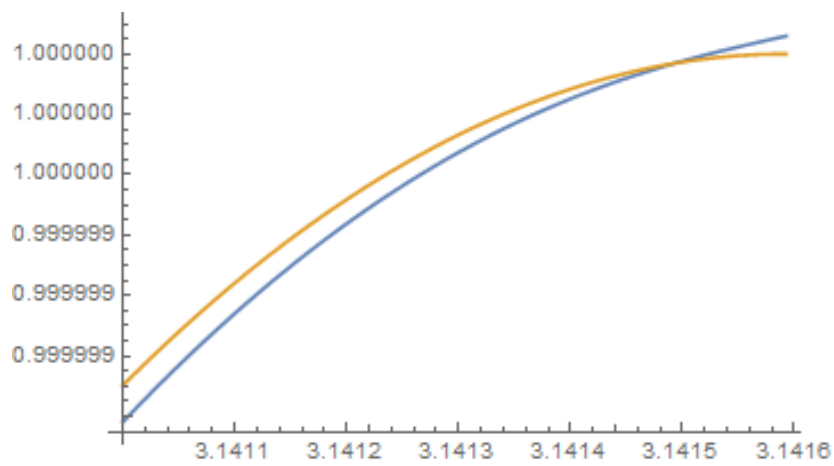
Για $n = 2$: Σχήμα 5.4.α, Σχήμα 5.4.β, Σχήμα 5.4.γ



Σχήμα 5.4.α

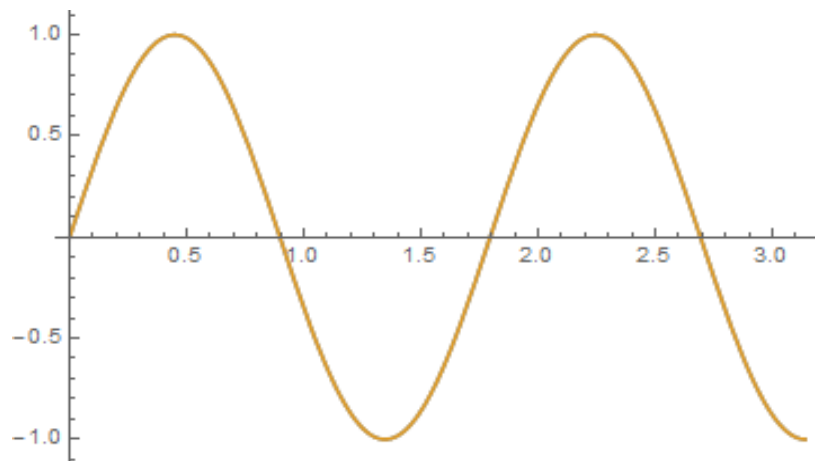


Σχήμα 5.4.β

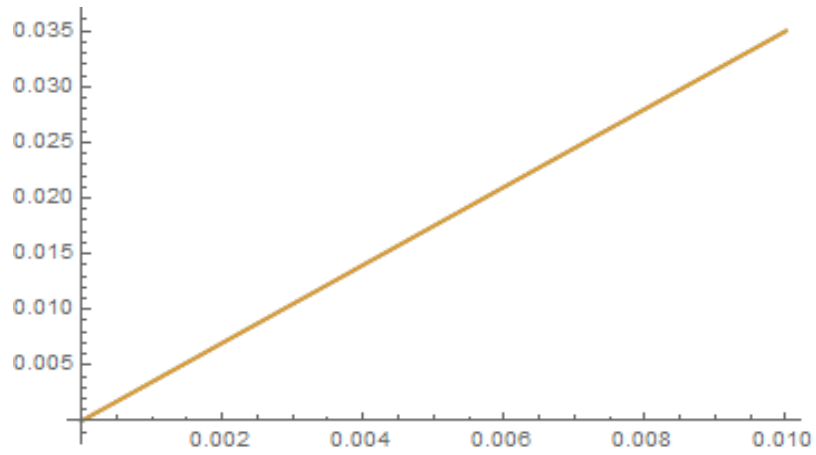


Σχήμα 5.4.γ

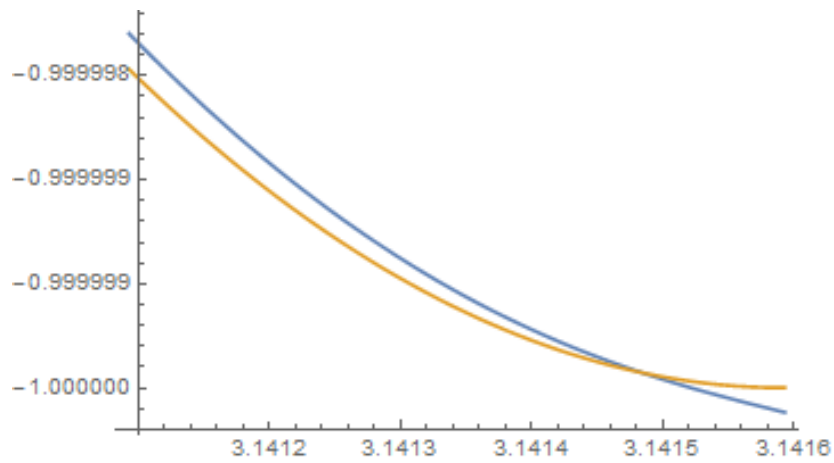
Για $n = 3$: Σχήμα 5.5.α, Σχήμα 5.5.β, Σχήμα 5.5.γ



Σχήμα 5.5.α

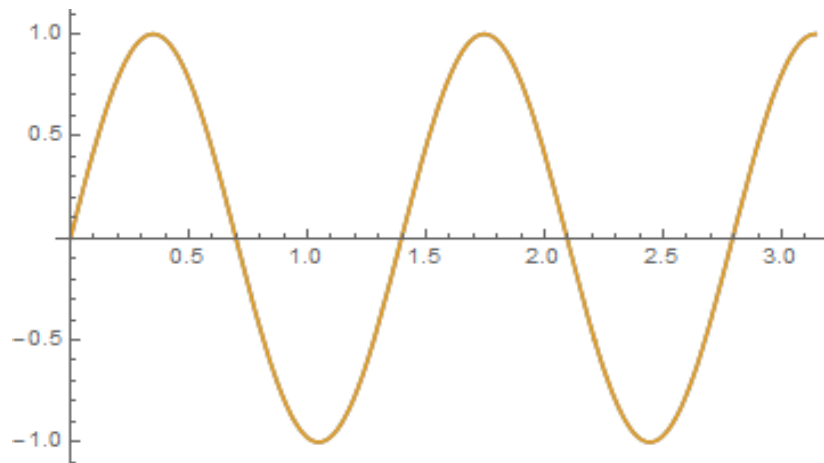


Σχήμα 5.5.β

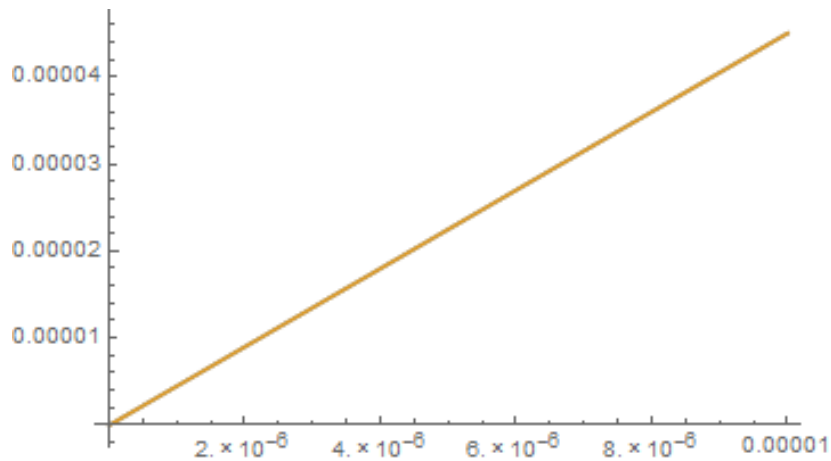


Σχήμα 5.5.γ

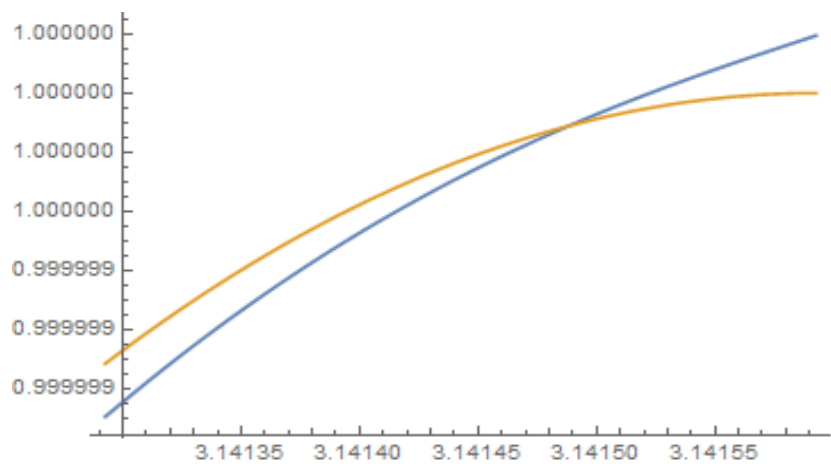
Για $n = 4$: Σχήμα 5.6.α, Σχήμα 5.6.β, Σχήμα 5.6.γ



Σχήμα 5.6.α



Σχήμα 5.6.β



Σχήμα 5.6.γ

2.Δ. Συμπεράσματα

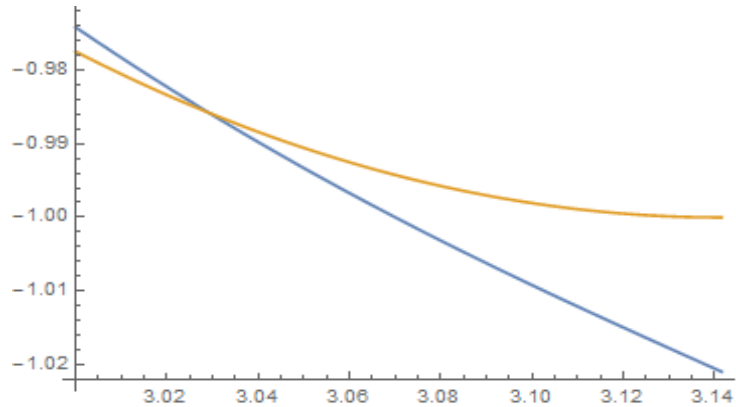
Παραθέτουμε συγκριτικά διαγράμματα ιδιοσυναρτήσεων για $n=1$ σε δύο περιπτώσεις:

Το πρώτο διάγραμμα (Σχήμα 4.3.γ) ,στο διάστημα $[3,\pi]$, δείχνει τις ιδιοσυναρτήσεις με την εφαρμογή των δύο μεθόδων. Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε ισχυρές ιδιότητες μικροδομής ($g=10^{-1}$ και $h=10^{-2}$)

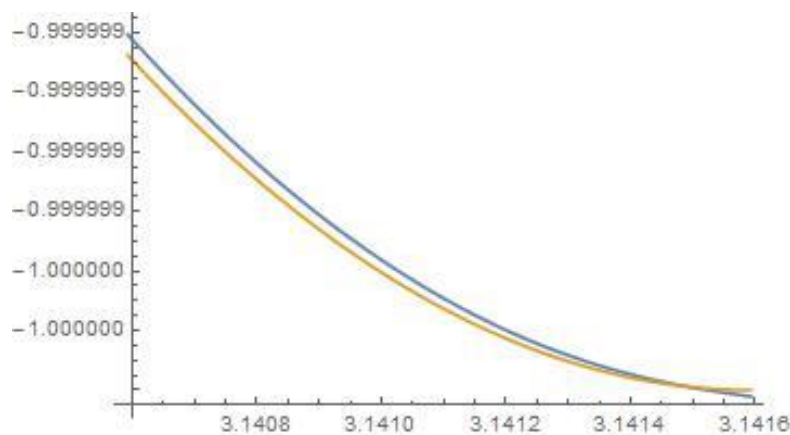
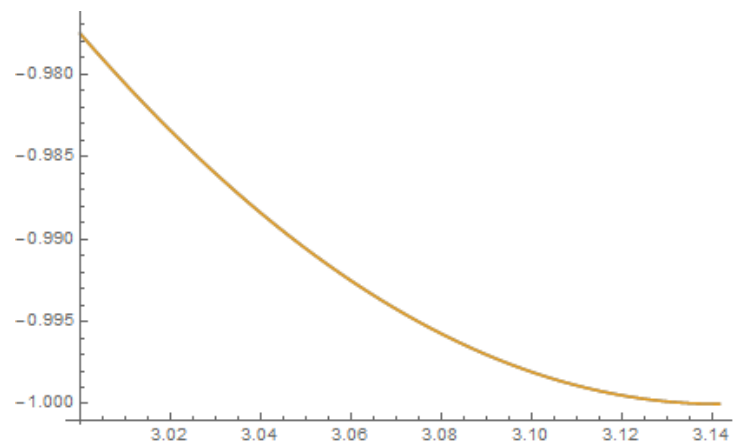
Τα δύο επόμενα διαγράμματα (Σχήμα 5.3.γ) αφορούν την περίπτωση που έχουμε ασθενείς ιδιότητες μικροδομής ($g=10^{-4}$ και $h=10^{-2}$) και μελετούν την ίδια ιδιοσυνάρτηση , σχεδιασμένη σε διαφορετικές κλίμακες στην περιοχή του $x=L$.

Παρατηρούμε σε αυτήν την περίπτωση, ότι στο διάστημα $[3, \pi]$, οι καμπύλες ταυτίζονται, ενώ στο διάστημα $[\pi - 0.001, \pi]$, οι δύο καμπύλες εμφανώς διαφοροποιούνται.

Όταν έχουμε, λοιπόν, υλικά με ιδιότητες μικροδομής, η μελέτη ενός φαινομένου σε μικροκλίμακα απαιτεί νέες θεωρίες για να μπορέσουμε να το μελετήσουμε με ακρίβεια.



Σχήμα 4.3.γ



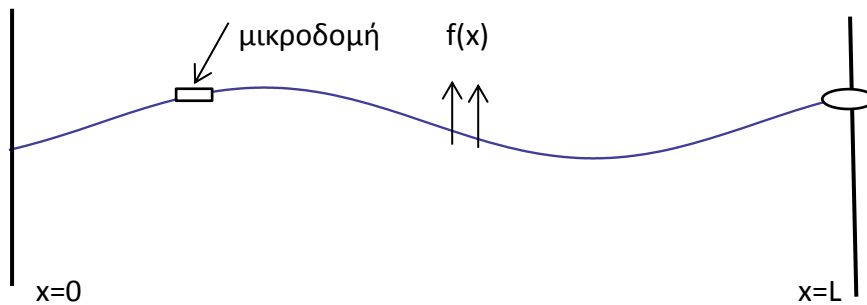
Σχήμα 5.3.γ

Κεφάλαιο 3^ο

Διατύπωση του 3^{ου} προβλήματος

Θεωρούμε χορδή, μήκους L , που είναι δεμένη (ισχυρή πάκτωση) στο άκρο της $x=0$ ενώ στο άκρο της $x=L$, μέσω οδηγού, η χορδή έχει δυνατότητα κατακόρυφης κίνησης (Σχήμα 6). Θα μελετήσουμε την διάδοση μιας διέγερσης $f(x)$ κατά μήκος της χορδής με δύο μεθόδους:

- Με τη μέθοδο της κλασικής ελαστικότητας
- Με τη μέθοδο της βαθμοελαστικότητας



Σχήμα 6

3.A. Επίλυση με τη μέθοδο της κλασικής ελαστικότητας

Οι συνοριακές συνθήκες είναι οι ίδιες, όπως στο 2^ο πρόβλημα (χαλαρή στήριξη), δηλ.:

- Συνθήκη ακινησίας : $X(0) = 0$
- Συνθήκη μηδενικής κλίσης : $X'(L) = 0$

Άρα επιλύοντας την εξίσωση:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

προκύπτουν ίδιες εξισώσεις για την ιδιοσυχνότητα και την ιδιοσυνάρτηση του κύματος, όπως στην (2.A) :

$$(k_n, u_n(x)) = \left((2n+1) \frac{\pi}{2L}, \sin\left(2n+1\right) \frac{\pi}{2L} x \right) \quad \text{και} \quad \lambda_n = \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4L^2} \quad n=0,1,2,\dots \quad \text{(3.A)}$$

3.B. Επίλυση με τη μέθοδο της βαθμοελαστικότητας

Όπως στο 2^ο πρόβλημα, εφαρμόζουμε την εξίσωση (1.3) και καταλήγουμε στην

$$\text{σχέση (1.4) : } -\frac{g^2 X^{(4)}(x) - X''(x)}{X(x) - h^2 X''(x)} = -\lambda$$

Συνοριακές συνθήκες :

- Συνθήκη ακινησίας στο $x=0$: $X(0) = 0$
- συνθήκη μηδενικής κλίσης στο $x=0$: $X'(0) = 0$
- συνθήκη μηδενισμού διπλών τάσεων στο $x=L$: $X''(L) = 0$
- συνθήκη μηδενισμού τάσεων στο $x=L$: $-g^2 \mu X^{(3)}(L) + (\mu - \rho \omega^2 h^2) X'(L) = 0$

$$X(x) = e^{sx} \Rightarrow X''(x) = s^2 X(x) \Rightarrow X^{(4)}(x) = s^4 X(x)$$

Η διτετράγωνη εξίσωση, στην οποία καταλήγουμε, μας δίνει ομοίως τη λύση:

$$s^2 = \frac{(1 - \lambda h^2) \pm \sqrt{(1 - \lambda h^2)^2 + 4\lambda g^2}}{2g^2}$$

Θέτουμε

$$s = \sqrt{\frac{(1 - \lambda h^2) + \sqrt{(1 - \lambda h^2)^2 + 4\lambda g^2}}{2g^2}} \quad \text{και}$$

$$a = \frac{\sqrt{\sqrt{(1 - \lambda h^2)^2 + 4\lambda g^2} - (1 - \lambda h^2)}}{g\sqrt{2}}$$

και καταλήγουμε στην (1.5):

$$X(x) = A \cosh(sx) + B \sinh(sx) + C \cos(ax) + D \sin(ax) \quad \text{και } A, B, C, D \in \mathbb{C}$$

Ο προσδιορισμός των αγνώστων παραμέτρων γίνεται με τη χρήση των συνοριακών συνθηκών:

$$X'(x) = sA \sinh(sx) + sB \cosh(sx) - aC \sin(ax) + aD \cos(ax)$$

$$X''(x) = s^2 A \cosh(sx) + s^2 B \sinh(sx) - a^2 C \cos(ax) - a^2 D \sin(ax)$$

$$X^{(3)}(x) = s^3 A \sinh(sx) + s^3 B \cosh(sx) + a^3 C \sin(ax) - a^3 D \cos(ax)$$

$$\bullet \quad X(0) = 0 \Rightarrow A + C = 0 \quad (3.1a)$$

$$\bullet \quad X'(0) = 0 \Rightarrow sB + aD = 0 \quad (3.1b)$$

$$\bullet \quad X''(L) = 0 \Rightarrow s^2 A \cosh(sL) + s^2 B \sinh(sL) - a^2 C \cos(aL) - a^2 D \sin(aL) = 0 \quad (3.1c)$$

$$\bullet \quad -g^2 \mu [s^3 A \sinh(sL) + s^3 B \cosh(sL) + a^3 C \sin(aL) - a^3 D \cos(aL)] + (\mu - \rho \omega^2 h^2) [sA \sinh(sL) + sB \cosh(sL) - aC \sin(aL) + aD \cos(aL)] = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 & -g^2 \mu s^3 A \sinh(sL) - g^2 \mu s^3 B \cosh(sL) - g^2 \mu a^3 C \sin(aL) + g^2 \mu a^3 D \cos(aL) + (\mu - \rho \omega^2 h^2) \\
 & sA \sinh(sL) + (\mu - \rho \omega^2 h^2) sB \cosh(sL) - (\mu - \rho \omega^2 h^2) aC \sin(aL) + (\mu - \rho \omega^2 h^2) aD \cos(aL) \\
 & = 0 \quad \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & sA \sinh(sL)[(\mu - \rho \omega^2 h^2) - s^2 g^2 \mu] + sB \cosh(sL)[(\mu - \rho \omega^2 h^2) - s^2 g^2 \mu] - aC \sin(aL)[(\mu - \rho \omega^2 h^2) + a^2 g^2 \mu] \\
 & + aD \cos(aL)[(\mu - \rho \omega^2 h^2) + a^2 g^2 \mu] = 0 \quad \textbf{(3.1d)}
 \end{aligned}$$

Για να είναι συμβατό το σύστημα των εξισώσεων (3.1a),(3.1b),(3.1c) και (3.1d) πρέπει

$$D_1 = 0 \Rightarrow$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & s & 0 & a \\ s^2 \cosh(sL) & s^2 \sinh(sL) & -a^2 \cos(aL) & -a^2 \sin(aL) \\ s \sinh(sL)[(\mu - \rho \omega^2 h^2) - s^2 g^2 \mu] & s \cosh(sL)[(\mu - \rho \omega^2 h^2) - s^2 g^2 \mu] & -a \sin(aL)[(\mu - \rho \omega^2 h^2) + a^2 g^2 \mu] & a \cos(aL)[(\mu - \rho \omega^2 h^2) + a^2 g^2 \mu] \end{vmatrix}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} s & 0 & a \\ s^2 \sinh(sL) & -a^2 \cos(aL) & -a^2 \sin(aL) \\ s \cosh(sL)[(\mu - \rho \omega^2 h^2) - s^2 g^2 \mu] & -a \sin(aL)[(\mu - \rho \omega^2 h^2) + a^2 g^2 \mu] & a \cos(aL)[(\mu - \rho \omega^2 h^2) + a^2 g^2 \mu] \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & s & a \\ s^2 \cosh(sL) & s^2 \sinh(sL) & -a^2 \sin(aL) \\ s \sinh(sL)[(\mu - \rho \omega^2 h^2) - s^2 g^2 \mu] & s \cosh(sL)[(\mu - \rho \omega^2 h^2) - s^2 g^2 \mu] & a \cos(aL)[(\mu - \rho \omega^2 h^2) + a^2 g^2 \mu] \end{vmatrix}$$

$$D_1 = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 D_1 = & s\{-a^3 \cos^2(aL)[(\mu - \rho \omega^2 h^2) + g^2 \mu a^2] - a^3 \sin^2(aL)[(\mu - \rho \omega^2 h^2) + a^2 g^2 \mu]\} + \\
 & + a\{-s^2 a \sin(aL) \sinh(sL)[(\mu - \rho \omega^2 h^2) + g^2 \mu a^2] + a^2 s \cos(aL) \cosh(sL)[(\mu - \rho \omega^2 h^2) - g^2 \mu s^2]\} -
 \end{aligned}$$

$$-s\{s^2a \cosh(sL) \cos(aL)[(\mu - \rho\omega^2h^2) + g^2\mu a^2] + sa^2\sinh(sL)(\sin(aL) [(\mu - \rho\omega^2h^2) - g^2\mu s^2] \} +$$

$$+a\{s^3\cos(aL)\cosh(sL)[(\mu - \rho\omega^2h^2) - g^2\mu s^2] - s^3\sin^2h(sL) [(\mu - \rho\omega^2h^2) - s^2g^2\mu] \} = 0 \Rightarrow$$

$$D_1 = -sa^3 [(\mu - \rho\omega^2h^2) + g^2\mu a^2] [\cos^2(aL) + \sin^2(aL)] + a^2s\{-s \sin(aL)\sinh(sL) [(\mu - \rho\omega^2h^2) + g^2\mu a^2] + a \cos(aL)\cosh(sL) [(\mu - \rho\omega^2h^2) - g^2\mu s^2] \} -$$

$$-s^2a\{s \cosh(sL) \cos(aL)[(\mu - \rho\omega^2h^2) + g^2\mu a^2] + a\sinh(sL)(\sin(aL) [(\mu - \rho\omega^2h^2) - g^2\mu s^2] \} +$$

$$+as^3 [(\mu - \rho\omega^2h^2) - g^2\mu s^2] [\cos^2h(sL) - \sin^2h(sL)] = 0 \Rightarrow$$

$$-sa^3 [(\mu - \rho\omega^2h^2) + g^2\mu a^2] + as^3 [(\mu - \rho\omega^2h^2) - g^2\mu s^2] +$$

$$+a^2s\{-s \sin(aL)\sinh(sL) [(\mu - \rho\omega^2h^2) + g^2\mu a^2] + a \cos(aL)\cosh(sL) [(\mu - \rho\omega^2h^2) - g^2\mu s^2] \} -$$

$$-s^2a\{s \cosh(sL) \cos(aL)[(\mu - \rho\omega^2h^2) + g^2\mu a^2] + a\sinh(sL)(\sin(aL) [(\mu - \rho\omega^2h^2) - g^2\mu s^2] \}$$

$$= 0 \Rightarrow$$

$$as[s^2(\mu - \rho\omega^2h^2) - s^4g^2\mu - a^2(\mu - \rho\omega^2h^2) - a^4g^2\mu] + a^2s[acos(aL)\cosh(sL) (\mu - \rho\omega^2h^2) -$$

$$- as^2\cos(aL)\cosh(sL)g^2\mu - s \sinh(sL) \sin(aL)(\mu - \rho\omega^2h^2) - sa^2\sinh(sL)(\sin(aL) g^2\mu] -$$

$$-as^2 [s\cos(aL)\cosh(sL)(\mu - \rho\omega^2h^2) + sa^2\cos(aL)\cosh(sL)g^2\mu + a\sinh(sL) \sin(aL)(\mu - \rho\omega^2h^2) -$$

$$as^2 \sinh(sL) \sin(aL) g^2\mu] = 0 \Rightarrow$$

$$as[(s^2 - a^2)(\mu - \rho\omega^2h^2) - g^2\mu(s^4 + a^4)] + as[a^2\cos(aL)\cosh(sL) (\mu - \rho\omega^2h^2) -$$

$$- a^2s^2\cos(aL)\cosh(sL)g^2\mu - as \sinh(sL) \sin(aL)(\mu - \rho\omega^2h^2) - sa^3\sinh(sL)(\sin(aL) g^2\mu -$$

$$-s^2 \cos(aL)\cosh(sL)(\mu - \rho\omega^2h^2) - s^2a^2\cos(aL)\cosh(sL)g^2\mu - sasinh(sL) \sin(aL)(\mu - \rho\omega^2h^2) +$$

$$as^3 \sinh(sL) \sin(aL) g^2\mu] = 0 \Rightarrow$$

$$as[(s^2 - a^2)(\mu - \rho\omega^2h^2) - g^2\mu(s^4 + a^4)] + as[(a^2 - s^2)\cos(aL)\cosh(sL) (\mu - \rho\omega^2h^2) -$$

$$2a^2s^2\cos(aL)\cosh(sL)g^2\mu - 2as \sinh(sL) \sin(aL)(\mu - \rho\omega^2h^2) + sa \sinh(sL)(\sin(aL) g^2\mu (s^2 -$$

$$a^2))] = 0$$

Στην τελευταία σχέση αντικαθιστούμε τις ποσότητες $(s^2 - a^2)$, $(s^4 + a^4)$ και με αυτές που προκύπτουν, κάνοντας χρήση των σχέσεων για τα s και a :

$$s = \frac{\sqrt{(1 - \lambda h^2) + \sqrt{(1 - \lambda h^2)^2 + 4\lambda g^2}}}{2g^2} \quad \text{και} \quad a = \frac{\sqrt{\sqrt{(1 - \lambda h^2)^2 + 4\lambda g^2} - (1 - \lambda h^2)}}{g\sqrt{2}}$$

$$s^2 - a^2 = \frac{1 - \lambda h^2}{g^2}$$

$$s^4 + a^4 = \frac{(1-\lambda h^2)^2 + 2\lambda g^2}{g^4} \text{ και}$$

$$as = \frac{\sqrt{\lambda}}{g}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{\lambda}}{g} \left[\frac{1-\lambda h^2}{g^2} (\mu - \rho\omega^2 h^2) - g^2 \mu \frac{(1-\lambda h^2)^2 + 2\lambda g^2}{g^4} \right] + \frac{\sqrt{\lambda}}{g} \left[- \frac{1-\lambda h^2}{g^2} \cos(aL) \cosh(sL) (\mu - \rho\omega^2 h^2) - \right. \\ & - 2 \frac{\lambda}{g^2} \cos(aL) \cosh(sL) g^2 \mu - 2 \frac{\sqrt{\lambda}}{g} \sinh(sL) \sin(aL) (\mu - \rho\omega^2 h^2) + \frac{\sqrt{\lambda}}{g} \sinh(sL) (\sin(aL) g^2 \mu \\ & \left. \frac{1-\lambda h^2}{g^2} \right] = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{\lambda}}{g} \left[\frac{1-\lambda h^2}{g^2} (\mu - \rho\omega^2 h^2) - \mu \frac{(1-\lambda h^2)^2 + 2\lambda g^2}{g^2} \right] + \frac{\sqrt{\lambda}}{g} \left[- \frac{1-\lambda h^2}{g^2} \cos(aL) \cosh(sL) (\mu - \rho\omega^2 h^2) - \right. \\ & 2\lambda \cos(aL) \cosh(sL) \mu - 2 \frac{\sqrt{\lambda}}{g} \sinh(sL) \sin(aL) (\mu - \rho\omega^2 h^2) + \frac{\sqrt{\lambda}}{g} \sinh(sL) (\sin(aL) \mu (1 - \\ & \left. \lambda h^2)) \right] = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{\lambda}}{g^3} \left[(1 - \lambda h^2) (\mu - \rho\omega^2 h^2) - \mu ((1 - \lambda h^2)^2 + 2\lambda g^2) \right] + \frac{\sqrt{\lambda}}{g} \left[- \frac{1-\lambda h^2}{g^2} \cos(aL) \cosh(sL) (\mu - \right. \\ & \rho\omega^2 h^2) - 2\lambda \cos(aL) \cosh(sL) \mu - 2 \frac{\sqrt{\lambda}}{g} \sinh(sL) \sin(aL) (\mu - \rho\omega^2 h^2) + \frac{\sqrt{\lambda}}{g} \sinh(sL) (\sin(aL) \mu \\ & \left. (1 - \lambda h^2)) \right] = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

Μετά από πράξεις και αναγωγές καταλήγουμε στην τελική σχέση που προκύπτει από τη συνθήκη συμβατότητας:

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{\lambda}}{g^3} \left[h^2 (1-\lambda h^2) (\lambda \mu - \rho\omega^2) - 2\mu \lambda g^2 \right] - \frac{\sqrt{\lambda}}{g^3} \cos(aL) \cosh(sL) \left[(1-\lambda h^2) (\mu - \rho\omega^2 h^2) + 2\mu \lambda g^2 \right] + \frac{\lambda}{g^2} \\ & \sinh(sL) \sin(aL) \left[\mu (1 - \lambda h^2) - 2(\mu - \rho\omega^2 h^2) \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Από τη σχέση (3.2) προσδιορίζουμε τα λ_n για τις διάφορες τιμές του n .

Επιλύουμε το ομογενές σύστημα των εξισώσεων (3.3a), (3.3b), (3.3c) και (3.3d):

$$B = -A \frac{s \sinh(sL) (\mu - \rho\omega^2 h^2 - g^2 \mu s^2) + a \sin(aL) (\mu - \rho\omega^2 h^2 + g^2 \mu a^2)}{s [\cosh(sL) (\mu - \rho\omega^2 h^2 - g^2 \mu s^2) - \cos(aL) (\mu - \rho\omega^2 h^2 + g^2 \mu a^2)]} \quad (3.3)$$

$$C = -A \quad (3.4)$$

$$D = A \frac{s \sinh(sL) (\mu - \rho\omega^2 h^2 - g^2 \mu s^2) + a \sin(aL) (\mu - \rho\omega^2 h^2 + g^2 \mu a^2)}{a [\cosh(sL) (\mu - \rho\omega^2 h^2 - g^2 \mu s^2) + \cos(aL) (\mu - \rho\omega^2 h^2 + g^2 \mu a^2)]} \quad (3.5)$$

Με χρήση των (3.3), (3.4) και (3.5) προσδιορίζουμε την εξίσωση της ιδιοσυνάρτησης $X(x)$:

$$\begin{aligned}
X(x) &= A \cosh(sx) - A \sinh(sx) \frac{s \sinh(sL)(\mu - \rho\omega^2 h^2 - g^2 \mu s^2) + a \sin(aL)(\mu - \rho\omega^2 h^2 + g^2 \mu a^2)}{s[\cosh(sL)(\mu - \rho\omega^2 h^2 - g^2 \mu s^2) - \cos(aL)(\mu - \rho\omega^2 h^2 + g^2 \mu a^2)]} \\
&- A \cos(ax) + A \sin(ax) \frac{s \sinh(sL)(\mu - \rho\omega^2 h^2 - g^2 \mu s^2) + a \sin(aL)(\mu - \rho\omega^2 h^2 + g^2 \mu a^2)}{a[\cosh(sL)(\mu - \rho\omega^2 h^2 - g^2 \mu s^2) - \cos(aL)(\mu - \rho\omega^2 h^2 + g^2 \mu a^2)]} \Rightarrow \\
X(x) &= A \cdot [\cosh(sx) - \sinh(sx) \frac{s \sinh(sL)(\mu - \rho\omega^2 h^2 - g^2 \mu s^2) + a \sin(aL)(\mu - \rho\omega^2 h^2 + g^2 \mu a^2)}{s[\cosh(sL)(\mu - \rho\omega^2 h^2 - g^2 \mu s^2) - \cos(aL)(\mu - \rho\omega^2 h^2 + g^2 \mu a^2)]} \\
&- \cos(ax) + \sin(ax) \frac{s \sinh(sL)(\mu - \rho\omega^2 h^2 - g^2 \mu s^2) + a \sin(aL)(\mu - \rho\omega^2 h^2 + g^2 \mu a^2)}{a[\cosh(sL)(\mu - \rho\omega^2 h^2 - g^2 \mu s^2) - \cos(aL)(\mu - \rho\omega^2 h^2 + g^2 \mu a^2)]}] \quad \text{(3.B)}
\end{aligned}$$

Ανακεφαλαιώνοντας :

- a. Προσδιορίζουμε τις ιδιοτιμές λ_n από τη σχέση(3.2) για τις διάφορες τιμές του n.

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{\lambda}}{g^3} [h^2 (1-\lambda h^2)(\lambda\mu - \rho\omega^2) - 2\mu\lambda g^2] - \frac{\sqrt{\lambda}}{g^3} \cos(aL) \cosh(sL) [(1-\lambda h^2)(\mu - \rho\omega^2 h^2) + 2\mu\lambda g^2] \\
&+ \frac{\lambda}{g^2} \sinh(sL) \sin(aL) [\mu(1-\lambda h^2) - 2(\mu - \rho\omega^2 h^2)] = 0
\end{aligned}$$

- b. Από τη σχέση (3.B) ,για κάθε τιμή του λ_n , προσδιορίζουμε μία αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση $u_n(x)$ για τη βαθμοελαστικότητα.

$$X(x) = A \cdot [\cosh(sx) - \sinh(sx)$$

$$\begin{aligned}
&\frac{s \sinh(sL)(\mu - \rho\omega^2 h^2 - g^2 \mu s^2) + a \sin(aL)(\mu - \rho\omega^2 h^2 + g^2 \mu a^2)}{s[\cosh(sL)(\mu - \rho\omega^2 h^2 - g^2 \mu s^2) - \cos(aL)(\mu - \rho\omega^2 h^2 + g^2 \mu a^2)]} - \cos(ax) + \\
&\sin(ax) \frac{s \sinh(sL)(\mu - \rho\omega^2 h^2 - g^2 \mu s^2) + a \sin(aL)(\mu - \rho\omega^2 h^2 + g^2 \mu a^2)}{a[\cosh(sL)(\mu - \rho\omega^2 h^2 - g^2 \mu s^2) - \cos(aL)(\mu - \rho\omega^2 h^2 + g^2 \mu a^2)]}]
\end{aligned}$$

- c. Χρησιμοποιούμε επιπλέον τη σχέση (3.A), προσδιορίζουμε την ιδιοσυνάρτηση $u_n(x)$ για την κλασική ελαστικότητα.

$$(k_n, u_n(x)) = ((2n+1) \frac{\pi}{2L}, \sin((2n+1) \frac{\pi}{2L} x)) \text{ και } \lambda_n = \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4L^2} \quad n=0,1,2,\dots$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας τιμές για τις παραμέτρους του προβλήματος (μ , ρ , ω , g και h), προσδιορίζουμε, με χρήση του Mathematica, τις ιδιοσυναρτήσεις και συγκρίνουμε τις δύο μεθόδους.

3.Γ. Αριθμητική εφαρμογή

Μέθοδος της κλασικής ελαστικότητας

Σε όλες τις εφαρμογές χρησιμοποιούμε $L = \pi$ m. Για τις διάφορες τιμές του n , η (3.A) :

$$\lambda_n = \frac{(2n+1)^2}{4} \quad n=0,1,2,\dots$$

$$u_n(x) = \sin\left(\frac{2n+1}{2} x\right) \quad (\Delta.1)$$

Μέθοδος της βαθμοελαστικότητας

Χρησιμοποιούμε τα παρακάτω αριθμητικά δεδομένα:

ω	$g(m)$	$h(m)$	$\mu(GPa)$	$\rho(kg/m^3)$	$L(m)$
10^5	10^{-1}	10^{-2}	5.11	10^3	π

Πίνακας 4.1

Η ρίζα s της αρχικής διτετράγωνης εξίσωσης είναι:

$$s = 5\sqrt{2} \sqrt{1 + \sqrt{\left(1 - \frac{\lambda}{10000}\right)^2 + \frac{\lambda}{25}} - \frac{\lambda}{10000}}$$

Αντικαθιστούμε στην σχέση (3.2) και καταλήγουμε :

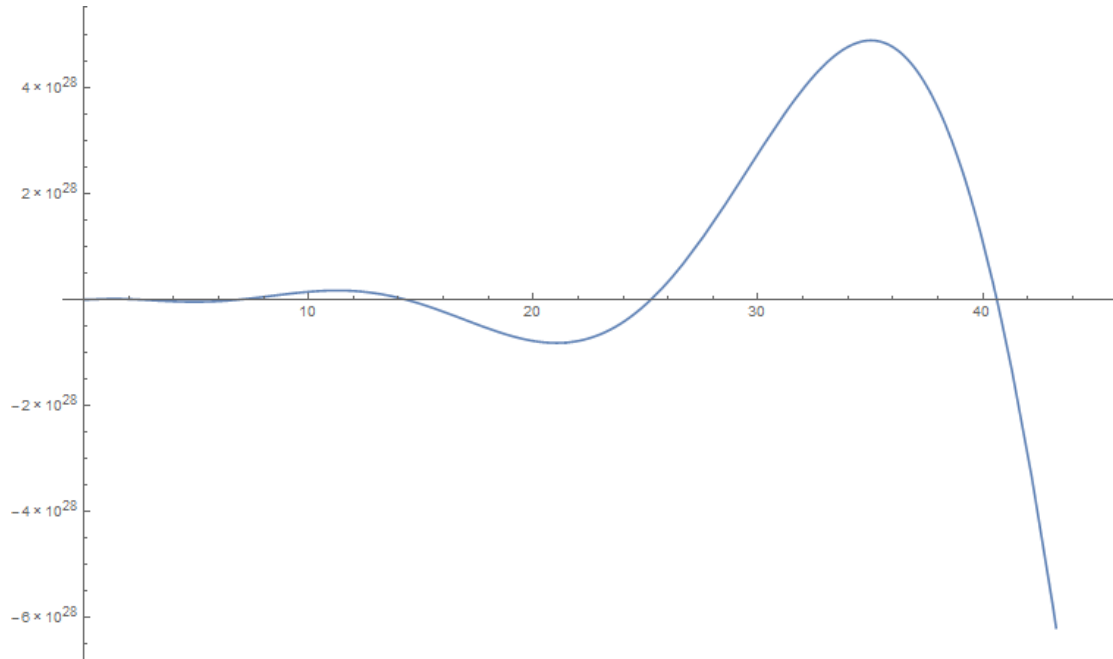
$$100(-8.22 \times 10^9 + 5.11 \times 10^9(1 - \frac{\lambda}{10000}))\lambda \sin\left[5\sqrt{2}\pi \sqrt{-1 + \sqrt{\left(1 - \frac{\lambda}{10000}\right)^2 + \frac{\lambda}{25}} + \frac{\lambda}{10000}}\right]$$

$$\sinh\left[5\sqrt{2}\pi \sqrt{1 + \sqrt{\left(1 - \frac{\lambda}{10000}\right)^2 + \frac{\lambda}{25}} - \frac{\lambda}{10000}}\right] + 1000\lambda(-1.022 \times 10^8\lambda + \frac{(1 - \frac{\lambda}{10000})(-10000000000000 + 5.11 \times 10^9\lambda)}{10000}) -$$

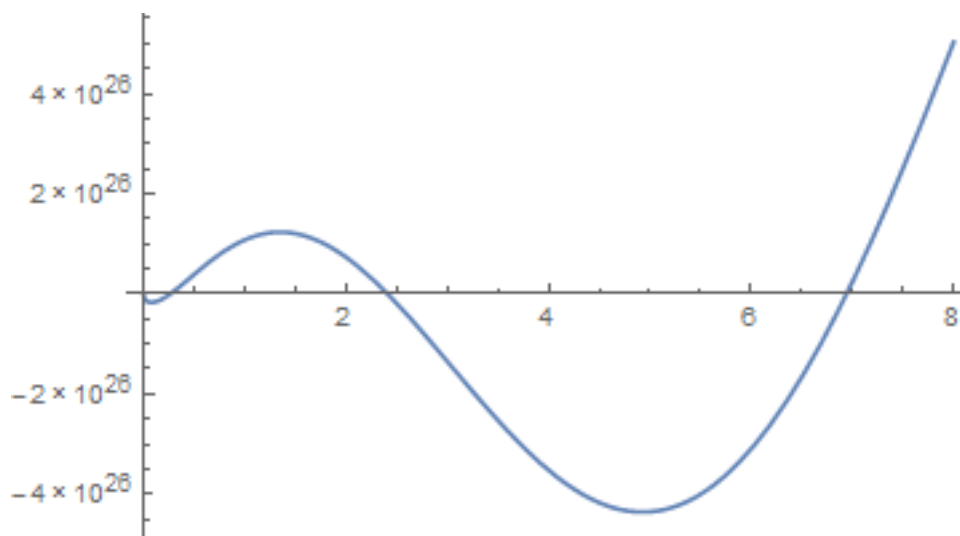
$$1000\sqrt{\lambda}(4.11 \times 10^9(1 - \frac{\lambda}{10000}) + 1.022 \times 10^8\lambda) \cos\left[5\sqrt{2}\pi \sqrt{-1 + \sqrt{\left(1 - \frac{\lambda}{10000}\right)^2 + \frac{\lambda}{25}} + \frac{\lambda}{10000}}\right]x$$

$$\text{Cosh}\left[5\sqrt{2}\pi \sqrt{1 + \sqrt{\left(1 - \frac{\lambda}{10000}\right)^2 + \frac{\lambda}{25} - \frac{\lambda}{10000}}}\right] = 0$$

Στα Σχήματα 6.1.α και 6.1.β φαίνεται η γραφική απεικόνιση του 1^{ου} μέλους της παραπάνω εξίσωσης, η οποία μας δίνει τις ιδιοσυχνότητες του Πίνακα 4.2:



Σχήμα 6.1.α



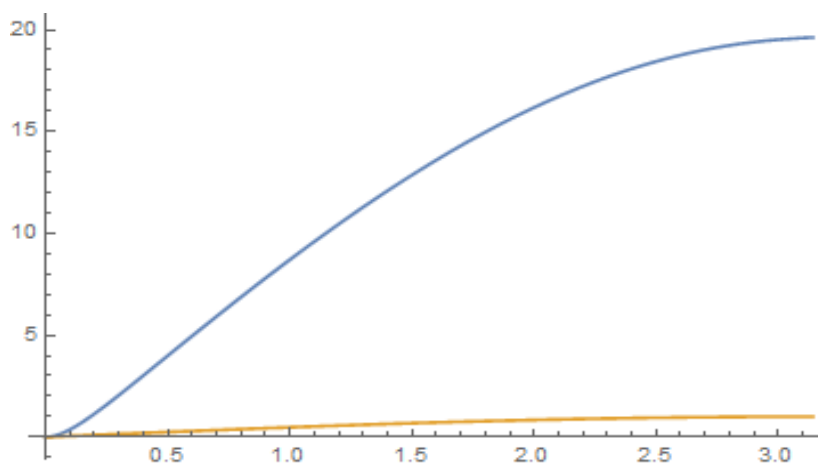
Σχήμα 6.1.β

	Κλασική ελαστικότητα	Βαθμοελαστικότητα
n	λ_n	λ_n
0	0.25	0.263101
1	2.25	2.41171
2	6.25	6.94213
3	12.25	14.3193
4	20.25	25.2385
5	30.25	40.6249

Πίνακας 4.2

Αντικαθιστώντας τις τιμές των παραμέτρων και των ιδιοσυχνοτήτων στην (3.Β) παίρνουμε τα παρακάτω διαγράμματα για τις δύο περιπτώσεις:

Για $n = 0$: Σχήμα 6.2.α, Σχήμα 6.2.β, Σχήμα 6.2.γ, Σχήμα 6.2.δ



Σχήμα 6.2.α

Σχήμα 6.2.α : Η γραφική παράσταση της ιδιοσυνάρτησης της βαθμοελαστικότητας ακολουθεί την (3.Β) για $A=1$. Ο προσδιορισμός της κανονικοποιημένης ιδιοσυνάρτησης γίνεται χρησιμοποιώντας τις σχέσεις:

$$E = \int_0^\pi |u_{\text{clas}}(x)|^2 dx \Rightarrow E = \frac{\pi}{2}$$

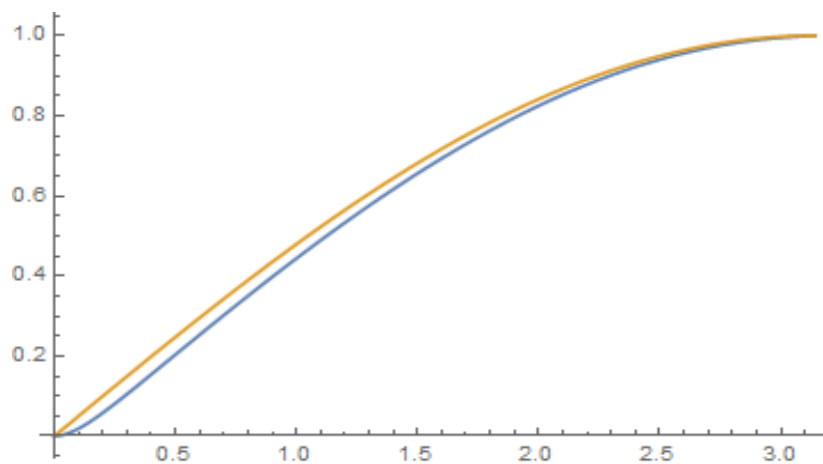
$$\tilde{E} = \int_0^\pi |u_{\text{grad}}(x)|^2 dx \Rightarrow \tilde{E} = 577.978$$

Η ιδιοσυνάρτηση της βαθμοελαστικότητας τελικά γίνεται:

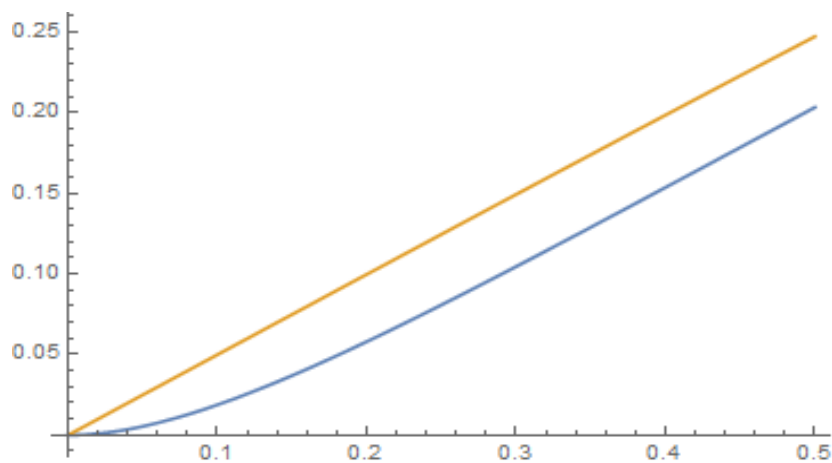
$$u_{\text{grad}}(x)' = \left(\frac{E}{\tilde{E}}\right)^{\frac{1}{2}} u_{\text{grad}}(x) \Rightarrow u_{\text{grad}}(x)' = 0.05213 u_{\text{grad}}(x)$$

Σχήμα 6.2.β, Σχήμα 6.2.γ, Σχήμα 6.2.δ :

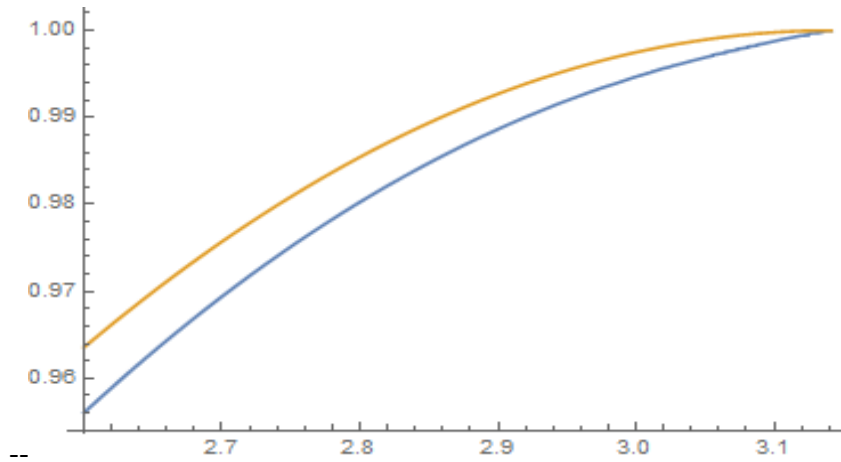
Συγκριτικά διαγράμματα ιδιοσυνάρτησης κλασικής ελαστικότητας και κανονικοποιημένης ιδιοσυνάρτησης βαθμοελαστικότητας $u_{\text{grad}}(x)'$



Σχήμα 6.2.β



Σχήμα 6.2.γ



Σχήμα 6.2.δ

Για $n = 1$: Σχήμα 6.3.α, Σχήμα 6.3.β, Σχήμα 6.3.γ

Όπως πριν (για $n=0$), χρησιμοποιούμε τις σχέσεις:

$$E = \int_0^\pi |u_{\text{clas}}(x)|^2 dx \Rightarrow E = \frac{\pi}{2}$$

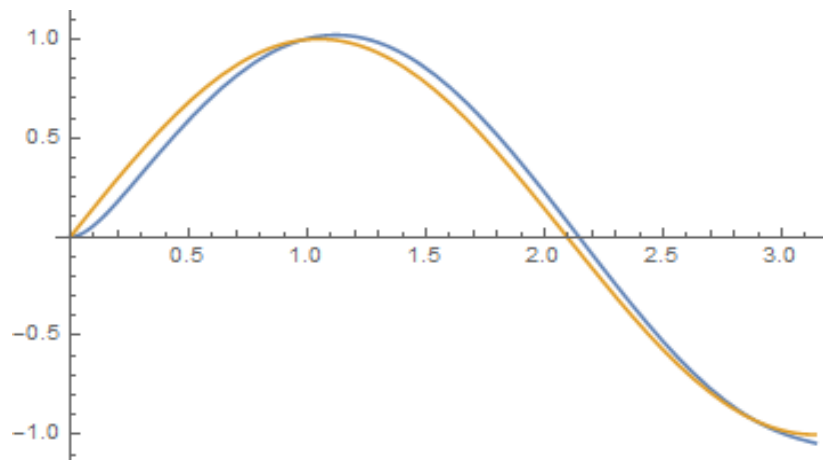
$$\tilde{E} = \int_0^\pi |u_{\text{grad}}(x)|^2 dx \Rightarrow \tilde{E} = 67.1001$$

Η ιδιοσυνάρτηση της βαθμοελαστικότητας τελικά γίνεται:

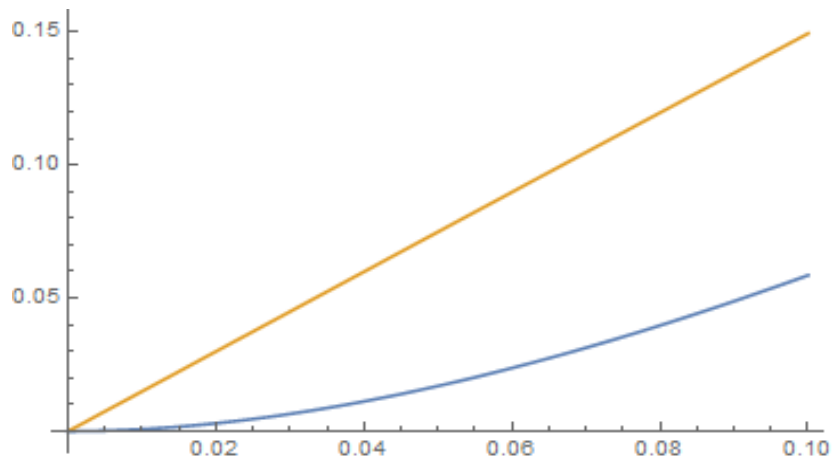
$$u_{\text{grad}}(x)' = \left(\frac{E}{\tilde{E}}\right)^{\frac{1}{2}} u_{\text{grad}}(x) \Rightarrow u_{\text{grad}}(x)' = 0.153002 u_{\text{grad}}(x)$$

Σχήμα 6.3.β, Σχήμα 6.3.γ, Σχήμα 6.3.δ :

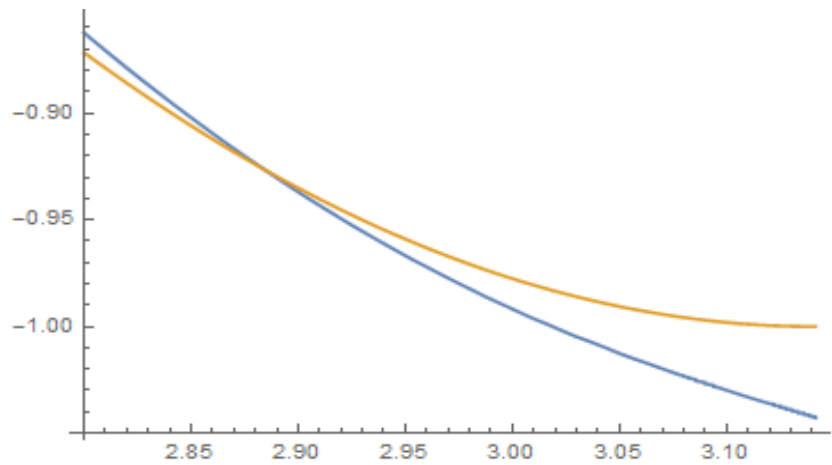
Συγκριτικά διαγράμματα ιδιοσυνάρτησης κλασικής ελαστικότητας και κανονικοποιημένης ιδιοσυνάρτησης βαθμοελαστικότητας $u_{\text{grad}}(x)'$



Σχήμα 6.3.α



Σχήμα 6.3.β



Σχήμα 6.3.γ

Για $n = 2$: Σχήμα 6.4.α, Σχήμα 6.4.β, Σχήμα 6.4.γ

Όπως πριν, χρησιμοποιούμε τις σχέσεις:

$$E = \int_0^\pi |u_{\text{clas}}(x)|^2 dx \Rightarrow E = \frac{\pi}{2}$$

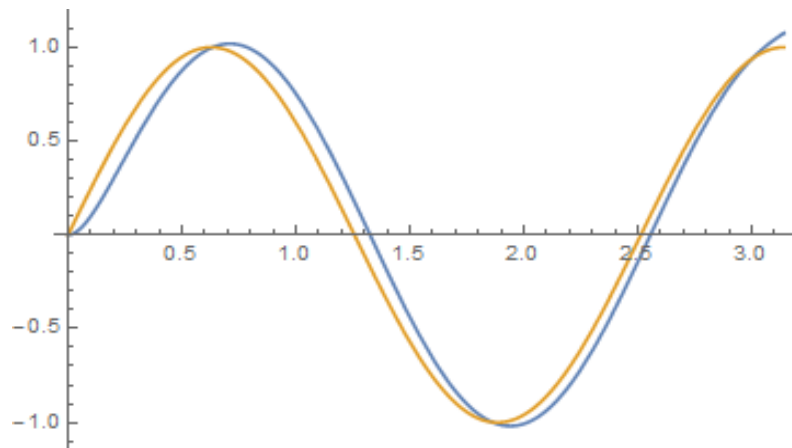
$$\tilde{E} = \int_0^\pi |u_{\text{grad}}(x)|^2 dx \Rightarrow \tilde{E} = 26.2193$$

Η ιδιοσυνάρτηση της βαθμοελαστικότητας τελικά γίνεται:

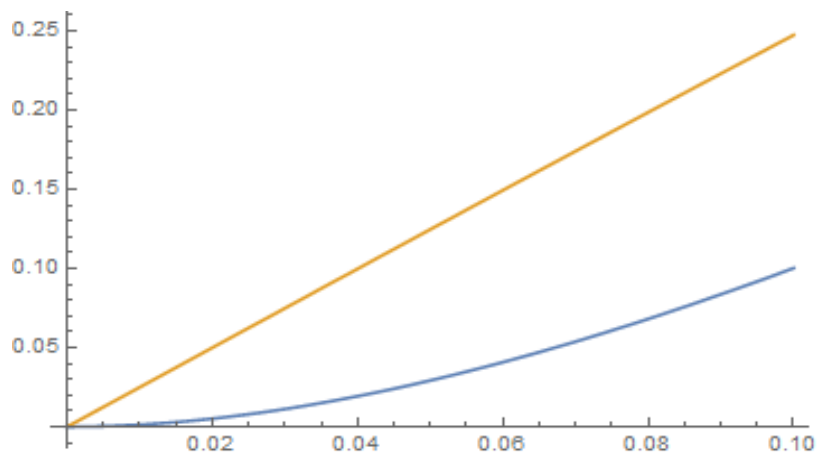
$$u_{\text{grad}}(x)' = \left(\frac{E}{\tilde{E}}\right)^{\frac{1}{2}} u_{\text{grad}}(x) \Rightarrow u_{\text{grad}}(x)' = 0.244765 u_{\text{grad}}(x)$$

Σχήμα 6.4.α, Σχήμα 6.4.β, Σχήμα 6.4.γ :

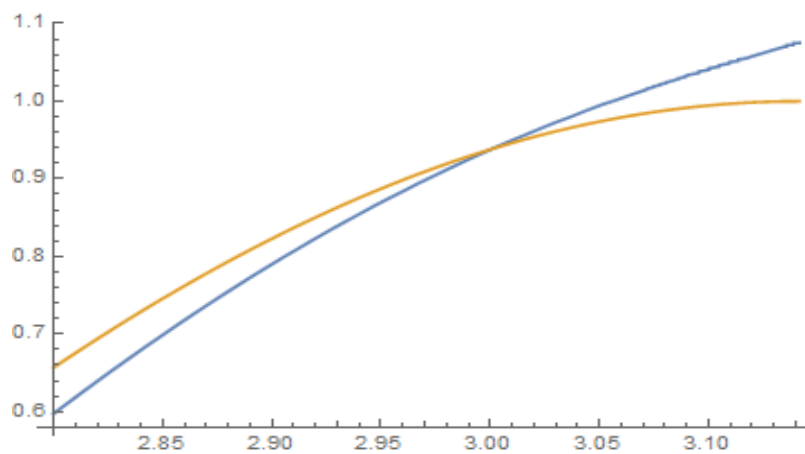
Συγκριτικά διαγράμματα ιδιοσυνάρτησης κλασικής ελαστικότητας και κανονικοποιημένης ιδιοσυνάρτησης βαθμοελαστικότητας $u_{\text{grad}}(x)$ '.



Σχήμα 6.4.α



Σχήμα 6.4.β



Σχήμα 6.4.γ

Για $n = 3$: Σχήμα 6.5.α, Σχήμα 6.5.β, Σχήμα 6.5.γ

Όπως πριν, χρησιμοποιούμε τις σχέσεις:

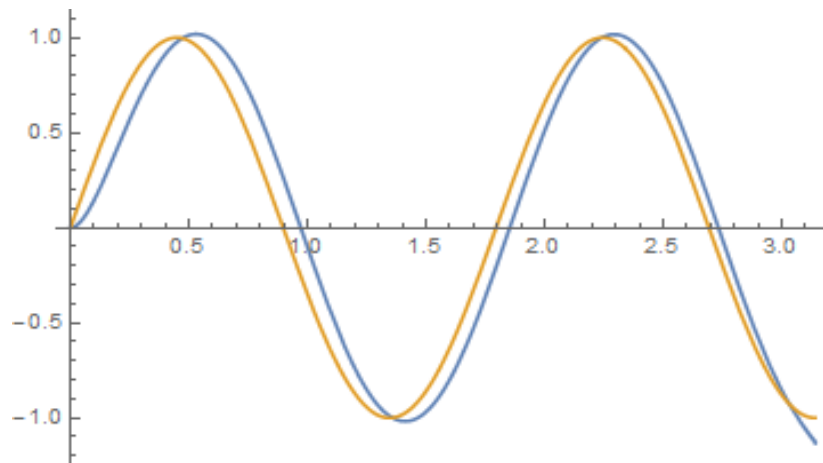
$$E = \int_0^\pi |u_{\text{clas}}(x)|^2 dx \Rightarrow E = \frac{\pi}{2}$$

$$\tilde{E} = \int_0^\pi |u_{\text{grad}}(x)|^2 dx \Rightarrow \tilde{E} = 14.9453$$

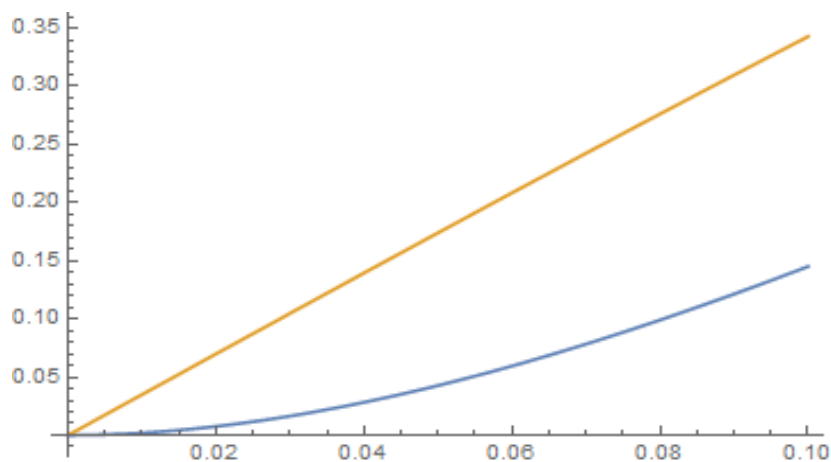
Η ιδιοσυνάρτηση της βαθμοελαστικότητας τελικά γίνεται:

$$u_{\text{grad}}(x)' = \left(\frac{E}{\tilde{E}}\right)^{\frac{1}{2}} u_{\text{grad}}(x) \Rightarrow u_{\text{grad}}(x)' = 0.324196 u_{\text{grad}}(x)$$

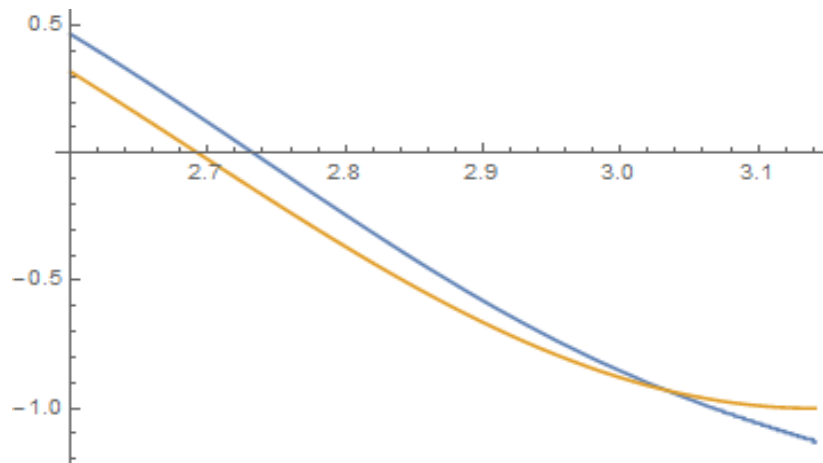
Σχήμα 6.5.β, Σχήμα 6.5.γ, Σχήμα 6.5.δ : Συγκριτικά διαγράμματα ιδιοσυνάρτησης κλασικής ελαστικότητας και κανονικοποιημένης ιδιοσυνάρτησης βαθμοελαστικότητας $u_{\text{grad}}(x)'$



Σχήμα 6.5.α



Σχήμα 6.5.β



Σχήμα 6.5.γ

Για $n = 4$: Σχήμα 6.6.α, Σχήμα 6.6.β, Σχήμα 6.6.γ

Όπως πριν, χρησιμοποιούμε τις σχέσεις:

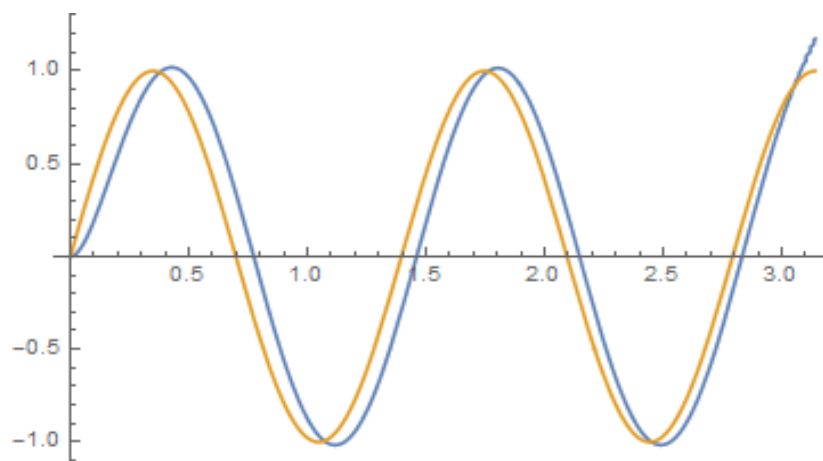
$$E = \int_0^{\pi} |u_{\text{clas}}(x)|^2 dx \Rightarrow E = \frac{\pi}{2}$$

$$\tilde{E} = \int_0^{\pi} |u_{\text{grad}}(x)|^2 dx \Rightarrow \tilde{E} = 10.2964$$

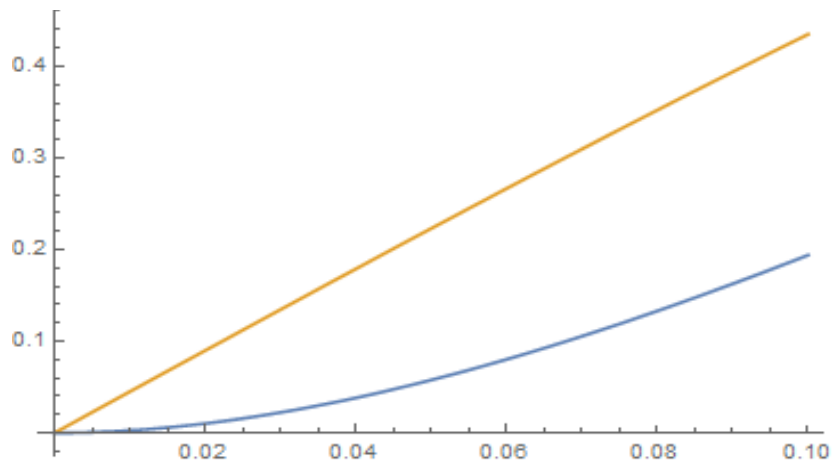
Η ιδιοσυνάρτηση της βαθμοελαστικότητας τελικά γίνεται:

$$u_{\text{grad}}(x)' = \left(\frac{E}{\tilde{E}}\right)^{\frac{1}{2}} u_{\text{grad}}(x) \Rightarrow u_{\text{grad}}(x)' = 0.390586 u_{\text{grad}}(x)$$

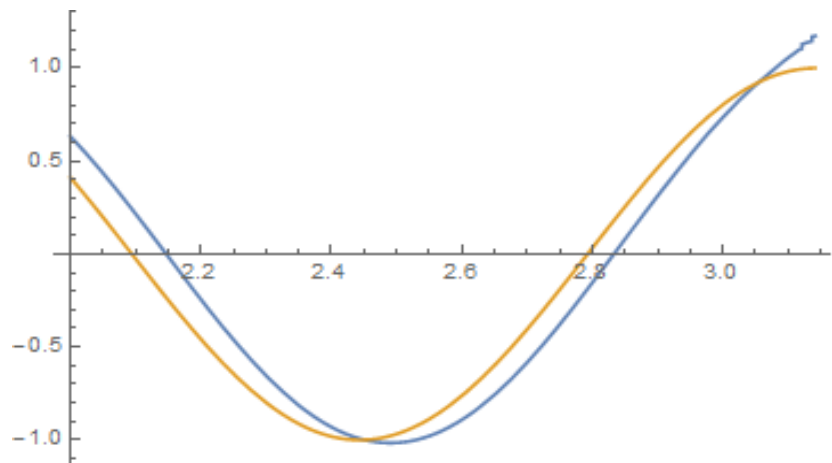
Σχήμα 6.6.β, Σχήμα 6.6.γ, Σχήμα 6.6.δ : Συγκριτικά διαγράμματα ιδιοσυνάρτησης κλασικής ελαστικότητας και κανονικοποιημένης ιδιοσυνάρτησης βαθμοελαστικότητας $u_{\text{grad}}(x)'$



Σχήμα 6.6.α



Σχήμα 6.6.β



Σχήμα 6.6.γ

3.Δ. Συμπεράσματα

Παρατηρούμε, σε όλα τα διαγράμματα στην περιοχή του π , ότι οι δύο καμπύλες παρουσιάζουν σημαντική απόκλιση μεταξύ τους στην μικροκλίμακα. Αν και στις δύο μεθόδους ισχύει η συνοριακή συνθήκη μηδενισμού των τάσεων, στην κλασική θεωρία αυτό μεταφράζεται ως $X'(L) = 0$, δηλαδή η κλίση της καμπύλης είναι μηδενική στο $x=L$.

Αντίθετα, στο πεδίο της βαθμοελαστικότητας, επειδή η εξίσωση που διέπει το φαινόμενο είναι διαφορετική, μηδενισμός των τάσεων δεν συνεπάγεται μηδενισμό της κλίσης, όπως φαίνεται παρακάτω από την συνοριακή συνθήκη.

$$-g^2 \mu X^{(3)}(L) + (\mu - \rho\omega^2 h^2) X'(L) = 0$$

Εντούτοις, από τη συνοριακή συνθήκη μηδενισμού των διπλών τάσεων, προκύπτει ότι $X''(L) = 0$, δηλαδή η καμπυλότητα είναι μηδενική, ή, διαφορετικά, η $X'(L)$ είναι σταθερή, και η καμπύλη έχει σταθερή κλίση στην περίπτωση της βαθμοελαστικότητας.

Βιβλιογραφία

- 1.** Youn-Sha Chan_, Glaucio H. Paulino and Albert C.Fannjiang: Gradient Elasticity Theory for Mode III Fracture in Functionally Graded Materials – Part II: Crack Parallel to the Material Gradation
- 2.** A.Charalambopoulos, L.Gergidis, G.Kartalos: On the gradient elastic wave propagation in cylindrical waveguides with microstructure
- 3.** A.Charalambopoulos, L.Bokas: Investigation of initial-boundary value problems of gradient elasticity in the realm of implicit second order evaluation equations
- 4.** Cemal Eringen: Microcontinuum Field Theories

Π α ρ ά ρ τ η μ α

Σε όλες τις παρακάτω εντολές με w συμβολίζουμε την κυκλική συχνότητα και με r την πυκνότητα του υλικού.

1. Πρόβλημα 2^ο : Για τον προσδιορισμό των ιδιοτιμών λ_n χρησιμοποιήθηκαν οι παρακάτω εντολές:

$$\text{In}[1]:= f[\lambda_] := \text{Tanh}[L * ((\text{Sqrt}[1 - \lambda * h^2 + \text{Sqrt}[(1 - \lambda * h^2)^2 + 4 * \lambda * g^2]]) / ((g * \text{Sqrt}[2]]))]$$

$$\text{In}[2]:= k[\lambda_] := \text{Tan}[L * ((\text{Sqrt}[-(1 - \lambda * h^2) + \text{Sqrt}[(1 - \lambda * h^2)^2 + 4 * \lambda * g^2]]) / ((g * \text{Sqrt}[2]]))]$$

$$\text{In}[3]:= a[\lambda_] := (m * ((1 - \lambda * h^2 + \text{Sqrt}[(1 - \lambda * h^2)^2 + 4 * \lambda * g^2]) / 2) - (m - r * w^2 * h^2))$$

$$\text{In}[4]:= b[\lambda_] := (m * (-(1 - \lambda * h^2) + \text{Sqrt}[(1 - \lambda * h^2)^2 + 4 * \lambda * g^2]) / 2) + (m - r * w^2 * h^2)$$

$$\text{In}[5]:= c[\lambda_] := \text{Sqrt}[((\text{Sqrt}[(1 - \lambda * h^2)^2 + 4 * \lambda * g^2] - (1 - \lambda * h^2)) / ((\text{Sqrt}[(1 - \lambda * h^2)^2 + 4 * \lambda * g^2] + (1 - \lambda * h^2))))]$$

$$\text{In}[6]:= \text{Plot}[(f[\lambda]/k[\lambda]) - (a[\lambda]/b[\lambda]) * c[\lambda], \{\lambda, 0, 48\}]$$

$$\text{In}[7]:= \text{FindRoot}[\frac{f[\lambda]}{k[\lambda]} - \frac{a[\lambda]c[\lambda]}{b[\lambda]}, \{\lambda, 1\}]$$

$$\text{In}[8]:= \text{FindRoot}[\frac{f[\lambda]}{k[\lambda]} - \frac{a[\lambda]c[\lambda]}{b[\lambda]}, \{\lambda, 2\}]$$

$$\text{In}[9]:= \text{FindRoot}[\frac{f[\lambda]}{k[\lambda]} - \frac{a[\lambda]c[\lambda]}{b[\lambda]}, \{\lambda, 6\}]$$

$$\text{In}[10]:= \text{FindRoot}[\frac{f[\lambda]}{k[\lambda]} - \frac{a[\lambda]c[\lambda]}{b[\lambda]}, \{\lambda, 13\}]$$

$$\text{In}[11]:= \text{FindRoot}[\frac{f[\lambda]}{k[\lambda]} - \frac{a[\lambda]c[\lambda]}{b[\lambda]}, \{\lambda, 25\}]$$

$$\text{In}[12]:= \text{FindRoot}[\frac{f[\lambda]}{k[\lambda]} - \frac{a[\lambda]c[\lambda]}{b[\lambda]}, \{\lambda, 38\}]$$

2. Πρόβλημα 2^ο : Για τον προσδιορισμό των ιδιοσυναρτήσεων $u(x)$ της βαθμοελαστικότητας, των ιδιοσυναρτήσεων $b(x)$ της κλασικής ελαστικότητας και την γραφική παράσταση αυτών, χρησιμοποιήθηκαν οι παρακάτω εντολές:

$$\text{In}[8]:= f[\lambda_] := \text{Sqrt}[(1 - \lambda * h^2) + \text{Sqrt}[(1 - \lambda * h^2)^2 + 4 * \lambda * g^2]] / (g * \text{Sqrt}[2])$$

$$\text{In}[9]:= k[\lambda_] := \text{Sqrt}[-(1 - \lambda * h^2) + \text{Sqrt}[(1 - \lambda * h^2)^2 + 4 * \lambda * g^2]] / (g * \text{Sqrt}[2])$$

$$\text{In}[10]:= u[x_] := (k[\lambda]^2 * \text{Sin}[k[\lambda] * L] * \text{Sinh}[f[\lambda] * x] + f[\lambda]^2 * \text{Sin}[k[\lambda] * x] * \text{Sinh}[f[\lambda] * L]) / (f[\lambda]^2 * \text{Sinh}[f[\lambda] * L])$$

In[11]:= b[x_]:= Sin[(2n + 1)Pi * x/(L * 2)]

In[13]:= Plot[{u[x], b[x]}, {x, 0, Pi}]

In[14]:= Plot[{u[x], b[x]}, {x, 0, 0.0001}]

In[16]:= Plot[{u[x], b[x]}, {x, Pi - 0.001, Pi}]

3. Πρόβλημα 3^ο : Για τον προσδιορισμό των ιδιοτιμών λ_n χρησιμοποιήθηκαν οι παρακάτω εντολές:

In[4]:= f[λ_]:= Sqrt[1 - λ * h^2 + Sqrt[(1 - λ * h^2)^2 + 4 * λ * g^2]]/(g * Sqrt[2])

In[5]:= k[λ_]:= Sqrt[-(1 - λ * h^2) + Sqrt[(1 - λ * h^2)^2 + 4 * λ * g^2]]/(g * Sqrt[2])

In[7]:= a[λ_]:= λ * Sin[k[λ] * L] * Sinh[f[λ] * L] *
(m * (1 - λ * h^2) - 2 * (m - r * w^2 * h^2))/(g^2)

In[8]:= b[λ_]:= Sqrt[λ] * (h^2 * (1 - λ * h^2) * (λ * m - r * w^2) - 2 * m * λ * g^2)/(g^3)

In[9]:= c[λ_]:= Sqrt[λ] * Cos[k[λ] * L] * Cosh[f[λ] * L] *
((m - r * w^2 * h^2) * (1 - λ * h^2) + 2 * m * λ * g^2) / (g^3)

In[11]:= Plot[a[λ] - c[λ] + b[λ], {λ, 0, 45}]

In[13]:= FindRoot[a[λ] - c[λ] + b[λ], {λ, 0.1}]

In[14]:= FindRoot[a[λ] - c[λ] + b[λ], {λ, 2}]

In[15]:= FindRoot[a[λ] - c[λ] + b[λ], {λ, 6}]

In[16]:= FindRoot[a[λ] - c[λ] + b[λ], {λ, 15}]

In[17]:= FindRoot[a[λ] - c[λ] + b[λ], {λ, 24}]

4. Πρόβλημα 3^ο : Για τον προσδιορισμό των ιδιοσυναρτήσεων $u(x)$ της βαθμοελαστικότητας, των ιδιοσυναρτήσεων $b(x)$ της κλασικής ελαστικότητας και την γραφική παράσταση αυτών, χρησιμοποιήθηκαν οι παρακάτω εντολές:

In[6]:= f[λ_]:= Sqrt[1 - λ * h^2 + Sqrt[(1 - λ * h^2)^2 + 4 * λ * g^2]]/(g * Sqrt[2])

In[9]:= k[λ_]:= Sqrt[-(1 - λ * h^2) + Sqrt[(1 - λ * h^2)^2 + 4 * λ * g^2]]/(g * Sqrt[2])

In[11]:= a[λ_]:= f[λ] * Sinh[f[λ] * L] + k[λ] * Sin[k[λ] * L]

In[12]:= c[λ_]:= (f[λ])^2 * Cosh[f[λ] * L] + (k[λ])^2 * Cos[k[λ] * L]

In[13]:= d[x_]:= Cosh[f[λ] * x] - Sinh[f[λ] * x] * c[λ]/(f[λ] * a[λ]) - Cos[k[λ] * x] + Sin[k[λ] * x] *
c[λ]/(k[λ] * a[λ])

In[15]:= b[x_]:= Sin[(2n + 1)Pi * x / (L * 2)]

In[16]:= Plot[{d[x], b[x]}, {x, 0, Pi}]

Για την κανονικοποίηση της ιδιοσυνάρτησης, στην περίπτωση που $n=0$ (σελ.49,σελ.50), χρησιμοποιούμε τις εντολές :

```
In[19]:= Integrate[(Sin[x/2])^2, {x, 0, Pi}]
```

```
In[20]:= Integrate[(Abs[-Cos[0.512269 * x] + Cosh[10.013 * x] + 19.5463 * Sin[0.512269 * x] - Sinh[10.013 * x]])^2, {x, 0, Pi}]
```

% The exact $A=(L/\tilde{L})^{1/2}=0.05213$ and $u(x)$ is multiplied by 0.05213 or divided by 19.1821

```
In[21]:= Plot[{d[x]/19.1821, b[x]}, {x, 0, Pi}]
```

```
In[22]:= Plot[{d[x]/19.1821, b[x]}, {x, 0, 0.5}]
```

```
In[23]:= Plot[{d[x]/19.1821, b[x]}, {x, 3, Pi}]
```