



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΤΥΠΑ FRIEDMANN ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΑΣΤΟΛΗ  
ΤΟΥ ΣΥΜΠΑΝΤΟΣ**

**ΒΛΑΣΣΟΠΟΥΛΟΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ**

**ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Δ. ΓΚΙΝΤΙΔΗΣ**

**ΑΘΗΝΑ 2016**



## **ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ**

Θα ήθελα να ευχαριστήσω από καρδιάς, όσους ανθρώπους με στήριξαν κατά τη διάρκεια των σπουδών μου και με βοήθησαν να ξεπεράσω τις δυσκολίες που παρουσιάστηκαν στην φοιτητική μου πορεία. Ιδιαίτερα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον ομότιμο καθηγητή του Ε.Μ.Π, κύριο Δημήτριο Τζανετή, για την πολύτιμη βοήθειά του και τη στήριξή του. Επίσης ευχαριστώ τον επιβλέποντα καθηγητή μου κύριο Γκιντίδη Δρόσο, που δέχτηκε να με αναλάβει για την περαίωση της εργασίας μου καθώς επίσης και τα άλλα δύο μέλη της εξεταστικής επιτροπής, τον Αναπληρωτή Καθηγητή κύριο Αντώνη Χαραλαμπόπουλο και τον Επίκουρο Καθηγητή κύριο Ιάσονα Καραφύλλη. Επιπλέον ευχαριστίες απευθύνω στον αγαπητό μου φίλο Νικολακάκη Ιωάννη για την αγάπη που μοιραστήκαμε για τη κοσμολογία και το σύμπαν και για τις υπέροχες συζητήσεις μας επί του θέματος, καθώς και στη κοπέλα μου Μπανάγου Μαρία που με έκανε να μη σταματώ να ελπίζω και να ονειρεύομαι. Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τους αγαπημένους μου γονείς για όσα μου προσέφεραν και για την στήριξη που μου παρείχαν κατά τη διάρκεια της ζωής μου.

### **Τριμελής εξεταστική επιτροπή:**

Δ. Γκιντίδης, Αν. Καθηγητής.

Α. Χαραλαμπόπουλος, Καθηγητής.

Ι. Καραφύλλης, Επ. Καθηγητής.



*Στη Μαρία*

# Περίληψη

Στην παρούσα εργασία, παρουσιάζονται και αναλύονται τα βασικότερα μαθηματικά πρότυπα της κοσμολογίας, που πηγάζουν από τη Γενική θεωρία της σχετικότητας και μοντελοποιούν την δυναμική εξέλιξη του Σύμπαντος σε μεγάλες κλίμακες. Τα πρότυπα αυτά, γνωστά ως μαθηματικά πρότυπα Friedmann, αποτελούνται από μη γραμμικές συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, οι οποίες συνιστούν ένα δυναμικό σύστημα και σκοπός της εργασίας είναι να περιγραφεί με επάρκεια η διαδικασία της μαθηματικής μοντελοποίησης, η αναλυτική ή αριθμητική επίλυση των εξισώσεων και η εξαγωγή και ανάλυση των συμπερασμάτων που προκύπτουν για το Σύμπαν από τη μελέτη των λύσεων. Παρότι δε παραλείπεται η αναφορά σε φυσικούς νόμους και η επεξήγηση των φυσικών ιδιοτήτων όλων των παραμέτρων, η εργασία επικεντρώνεται κυρίως στη διαδικασία μαθηματικής προτυποποίησης και ο στόχος της είναι κυρίως η παράθεση των ήδη γνωστών στην επιστημονική κοινότητα συμπερασμάτων για το σύμπαν, σύμφωνα με την υπάρχουσα βιβλιογραφία. Στο πρώτο κεφάλαιο, αναφέρονται βασικές κοσμολογικές αρχές και έννοιες, χρήσιμες για τη κατανόηση της διαδικασίας της μαθηματικής μοντελοποίησης στο συγκεκριμένο τομέα. Στο δεύτερο κεφάλαιο, παρουσιάζεται η εξαγωγή των κοσμολογικών προτύπων Friedmann, χωρίς κοσμολογική σταθερά, και η αναλυτική επίλυση των εξισώσεων για τις διάφορες περιπτώσεις. Στο κεφάλαιο 3, τα πρότυπα αναθεωρούνται εκ νέου, μέσω της εισαγωγής του κοσμολογικού όρου που οδηγεί σε λύσεις με επιταχυνόμενη συμπεριφορά. Στο τέταρτο κεφάλαιο, παρουσιάζεται η γενική μορφή των μοντέλων, για ένα οποιοδήποτε σύμπαν με οσοδήποτε αριθμό συνιστωσών και δείχνεται ότι τα μοντέλα των προηγούμενων κεφαλαίων είναι ειδικές περιπτώσεις της γενικής περίπτωσης. Ιδιαίτερη βαρύτητα δίνεται στην ανάλυση του 6-παραμετρικού μοντέλου  $\Lambda$ -CDM, όντας το πλέον αποδεκτό, και επιτυγχάνεται η αριθμητική του επίλυση από τον συγγραφέα, με χρήση MATLAB. Οι λύσεις συγκρίνονται με τα υπόλοιπα πρότυπα και σχολιάζεται η ακρίβεια σε κάθε περίπτωση. Στο κεφάλαιο 5 το σύστημα Friedmann αντιμετωπίζεται από σκοπιά ποιοτικής ανάλυσης και μελετώνται οι ασυμπτωτικές συμπεριφορές του Σύμπαντος υπό το πρίσμα αυτό, ενώ στο τελευταίο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα βασικότερα συμπεράσματα της μελέτης.

# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Γενικές αρχές κοσμολογίας</b>	<b>11</b>
1.1	Εισαγωγή . . . . .	11
1.2	Βασικές έννοιες . . . . .	12
1.3	Η κοσμολογική αρχή . . . . .	13
1.4	Ο νόμος του Hubble . . . . .	14
1.5	Η σταθερά Hubble . . . . .	17
1.6	Ανοιχτό και κλειστό σύμπαν . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Πρότυπα Friedmann χωρίς κοσμολογική σταθερά</b>	<b>22</b>
2.1	Γενική Θεωρία σχετικότητας και η μετρική RW . . . . .	22
2.2	Εξαγωγή των προτύπων Friedmann . . . . .	23
2.3	Η καταστατική εξίσωση . . . . .	26
2.4	Κανονικοποίηση παράγοντα κλίμακας . . . . .	28
2.5	Γραφικός ορισμός χρόνου Hubble . . . . .	29
2.6	Κρίσιμη πυκνότητα και παράμετρος επιβράδυνσης της διαστολής .	31
2.7	Επίλυση εξισώσεων Friedmann χωρίς κοσμολογική σταθερά $\Lambda=0$ .	34
2.7.1	Ακριβής λύση για άδειο σύμπαν . . . . .	34
2.7.2	Ακριβής επίλυση για μηδενική πίεση . . . . .	35
2.7.3	Λύση για ραδιενεργά σύμπαντα . . . . .	44
2.7.4	Συναρμοσμένη λύση ακτινοβολίας και μηδενικής πίεσης . . .	46
<b>3</b>	<b>Πρότυπα Friedmann με κοσμολογική σταθερά</b>	<b>52</b>
3.1	Η έννοια της κοσμολογικής σταθεράς . . . . .	52
3.2	Μορφή προτύπων με κοσμολογικό όρο . . . . .	54
3.3	Σύμπαντα με κοσμολογική σταθερά . . . . .	56
3.3.1	Στατικό σύμπαν Einstein . . . . .	56

3.3.2	Πρότυπα με ποικίλες τιμές της κοσμολογικής σταθεράς . . .	57
3.3.2.1	Πρότυπο De Sitter . . . . .	59
3.3.2.2	Πρότυπο Lemaitre . . . . .	60
3.3.2.3	Σύμπαν Eddington-Lemaitre . . . . .	61
<b>4</b>	<b>Πρότυπα Friedmann για σύμπαντα με N συνιστώσες</b>	<b>63</b>
4.1	Εξαγωγή προτύπων με N συνιστώσες . . . . .	63
4.2	Ειδικές περιπτώσεις του γενικού μοντέλου . . . . .	66
4.2.1	Σύμπαν Einstein-De Sitter . . . . .	66
4.2.2	Μη σχετικιστική ύλη + Κοσμολογική σταθερά . . . . .	67
4.2.3	Μη σχετικιστική ύλη + Κοσμολογική σταθερά + Όρος καμ- μπυλότητας . . . . .	69
4.2.4	Πρότυπο $\Lambda$ -CDM . . . . .	71
4.2.5	Πρότυπο Benchmark . . . . .	72
4.3	Αριθμητική ανάλυση του προτύπου Benchmark . . . . .	74
4.3.1	Η μέθοδος αριθμητικής ολοκλήρωσης Simpson . . . . .	75
4.3.2	Η μέθοδος Runge Kutta . . . . .	76
4.3.3	Αριθμητικός υπολογισμός με τη μέθοδο Simpson . . . . .	78
4.3.4	Επίλυση της διαφορικής εξίσωσης Friedmann μέσω της με- θόδου Runge-Kutta . . . . .	80
<b>5</b>	<b>Ποιοτική Ανάλυση του συστήματος Friedmann</b>	<b>86</b>
5.1	Εξαγωγή του δυναμικού συστήματος . . . . .	87
5.2	Προσδιορισμός κρίσιμων σημείων . . . . .	89
5.3	Ανάλυση ευστάθειας . . . . .	92
5.4	Αριθμητικά παραδείγματα . . . . .	98
<b>6</b>	<b>Συμπεράσματα μελέτης</b>	<b>101</b>



# Κατάλογος σχημάτων

1.4.1	Οι επιστήμονες που δούλεψαν πάνω στην θεωρία ενός διαστελλόμενου σύμπαντος. Αριστερά: Wilson και Penzias μπροστά από την κεραία που τους οδήγησε στην ιστορική τους ανακάλυψη. Δεξιά : Edwin Hubble, G.Lemaitre, Alexander Friedmann. . . . .	15
1.6.1	Η γεωμετρία του σύμπαντος ανάλογα με την παράμετρο πυκνότητας $\Omega_0$ . Στα επιβραδυνόμενα μοντέλα η καμπυλότητα του σύμπαντος συνδέεται άμεσα με την κατάληξη του (ανοιχτό, κλειστό, οριακά ανοιχτό). . . . .	20
2.5.1	Γραφικός ορισμός χρόνου Hubble [14] . . . . .	31
2.7.1	Γραφική παράσταση $a(t)$ για κλειστό σύμπαν, για διάφορες τιμές της παραμέτρου $\Omega_0$ (2, 1.5, 1.2, 1.1) και $H_0^{-1} = 14.43 Gyr$ . Παρατηρούμε ότι όσο μεγαλύτερη η τιμή της παραμέτρου, τόσο πιο σύντομη η κατάρρευση του σύμπαντος. . . . .	40
2.7.2	Γραφική παράσταση συντελεστή κοσμικής κλίμακας οριακά ανοικτού σύμπαντος $\Omega_0 = 1$ . . . . .	41
2.7.3	Η γραφική παράσταση του συντελεστή κοσμικής κλίμακας σε ανοικτό σύμπαν για διάφορες τιμές της παραμέτρου $\Omega_0 < 1$ (0.05, 0.1, 0.5, 0.7, 0.999). . . . .	43
4.2.1	Οι περιπτώσεις του σύμπαντος Lemaitre (Loitering), του στατικού σύμπαντος Einstein, του καταρρέοντος σύμπαντος και η περίπτωση του Big Bounce (βλ. παράγραφο 4.2.3). . . . .	70
4.3.1	Σφάλμα μεθόδου Runge Kutta για το σύμπαν EdS . . . . .	82
4.3.2	Γραφική παράσταση σύμπαντος Benchmark . . . . .	84
5.4.1	Το πεδίο φάσεως για την περίπτωση $\omega = -2/3$ . . . . .	98
5.4.2	Το πεδίο φάσεως για την περίπτωση της μη σχετικιστικής ύλης με $\omega = 0$ . . . . .	99
5.4.3	Το πεδίο φάσεως για την περίπτωση $\omega = -2$ . . . . .	100
6.0.1	Σύγκριση προτύπου Benchmark με το πρότυπο χαμηλής πυκνότητας με $\Omega_{m,0} = 0.03$ . Πράσινο: Benchmark, Κόκκινο: Χαμηλής πυκνότητας . . . . .	102
6.0.2	Γραφικές παραστάσεις λύσεων διαφόρων προτύπων. Ροζ: $\Omega_{m,0} = 0.3$ , $\Omega_{\Lambda,0} = 1.7$ (Loitering), Μπλε: Benchmark, Κόκκινο : $\Omega_{m,0} = 0.3$ , $\Omega_{\Lambda,0} = 0.7$ (πολύ κοντά στο Benchmark), Καφέ: $\Omega_{m,0} = 1.5$ , Πράσινο : $\Omega_{m,0} = 1.0$ (EdS). Εδώ θεωρήσαμε ότι $a(0) = 1$ (σήμερα), προκειμένου να αναπαραστήσουμε τις λύσεις δίνοντας αναφορά στην σημερινή εποχή. . . . .	103

# Κατάλογος πινάκων

1.1	Μετρήσεις σταθεράς και χρόνου Hubble . . . . .	18
2.1	Χρόνοι σύνθλιψης, μέγιστης διαστολής και ηλικίες σύμπαντος για τις διάφορες τιμές του $\Omega_0$ σε κλειστό σύμπαν. . . . .	39
2.2	Ηλικία ανοικτού σύμπαντος για διάφορες τιμές του $\Omega_0$ και χρόνο Hubble $H_0^{-1} = 14.43 Gyr$ . . .	43
4.1	Οι τιμές των παραμέτρων $\Omega_{i,0}$ που θα χρησιμοποιηθούν στο παρόν κείμενο. Για τις τιμές των $\Omega_{m,0}$ και $\Omega_{\Lambda,0}$ χρησιμοποιήθηκαν τα αποτελέσματα της αποστολής Planck [9] ενώ για την τιμή της $\Omega_{r,0}$ χρησιμοποιήθηκε η ευρέως διαδεδομένη τιμή που για παράδειγμα φαίνεται στο εγχειρίδιο της Barbara Ryden, [22]. . . . .	73
4.2	$\tau_e$ και ηλικία για διάφορα σύμπαντα ανάλογα με τις τιμές των $\Omega_{\omega_i,0}$ των συνιστωσών τους όπως προκύπτουν από την εφαρμογή της μεθόδου Simpson. Το πρότυπο Benchmark δίνει ηλικία που προσεγγίζει πολύ καλά το αποτέλεσμα της αποστολής Planck'15 ( $13.799 \pm 0.021 \times 10^9 years$ ) . . .	80
4.3	Ενδεικτικές τιμές των αριθμητικών λύσεων των διάφορων προτύπων.(ανά 10000 βήματα).Στήλη2: Benchmark, Στήλη3: μόνο ύλη (EdS), Στήλη4: ύλη με θετική καμπυλότητα, Στήλη4: ύλη με αρνητική καμπυλότητα, Στήλη5: Ύλη + $\Lambda > 0$ ( $\kappa=0$ ) , Στήλη6: Ύλη + ακτινοβολία, Στήλη7: Loitering = Ύλη + $\Lambda > 0$ ( $\kappa > 0$ ) . . . . .	83
5.1	Είδος ευστάθειας για τα τρία κρίσιμα σημεία (EdS,dS,M) ανάλογα με τις τιμές της παραμέτρου $\omega$ που σχετίζεται με την καταστατική εξίσωση της ύλης. Συμβολίζουμε με E.K : (ασυμπτωτικά) ευσταθής κόμβος, A.K : ασταθής κόμβος, Σ.Σ : σαγματικό σημείο. . . . .	97

# Κεφάλαιο 1

## Γενικές αρχές κοσμολογίας

### 1.1 Εισαγωγή

Το 1915, ο Albert Einstein, παρουσίασε την γενική θεωρία σχετικότητας, έναν επαναστατικό τρόπο που εξηγούσε κομψά και με περίσσια ακρίβεια τη φυσιολογία της βαρύτητας σε μεγάλες κλίμακες, εκεί που οι νόμοι του Νεύτωνα κατέρρεαν. Οι εξισώσεις της θεωρίας του, συνδέουν την γεωμετρία του χωροχρόνου με την κατανομή της μάζας (ισοδύναμα ενέργειας) σε αυτόν, περιγράφοντας την βαρύτητα σαν μια φυσιολογική γεωμετρική αντίδραση του ίδιου του χωροχρόνου στην παρουσία μάζας (καμπύλωση). Η γενική θεωρία σχετικότητας (Γ.Θ.Σ), αν και αρχικά αμφισβητούμενη, εξαιτίας του γιγάντιου νοητικού άλματος που απαιτούσε από τον άνθρωπο του 20ου αιώνα, έχει ελεγχθεί πειραματικά πολλάκις επιτυχώς και τη χρησιμοποιούμε μέχρι και σήμερα για να περιγράψουμε το σύμπαν σε μεγάλες κλίμακες. Όπως και η νευτώνεια θεωρία γενικεύτηκε από την Γ.Θ.Σ, έτσι και η θεωρία του Einstein ίσως σύντομα γενικευτεί, παρόλα αυτά, από το 1915 μέχρι σήμερα, οι εξισώσεις και οι λύσεις της παραμένουν η πιο αντικειμενική εικόνα που έχει ο άνθρωπος για το Σύμπαν.

Η επίλυση των εξισώσεων της θεωρίας στην αρχική τους μορφή, δε δίνει ευσταθείς στατικές λύσεις για το Σύμπαν. Αυτό σημαίνει, ότι σύμφωνα με τη θεωρία, το Σύμπαν οφείλει να είναι εξελισσόμενο, συγκεκριμένα να διαστέλλεται. Κάτι τέτοιο φαινόταν παράλογο στον ίδιο τον Einstein και αδυνατούσε να το δεχτεί. Έτσι, πιστεύοντας τυφλά στην υπόθεση ενός αιώνιου στατικού σύμπαντος, εισήγαγε στις εξισώσεις έναν μαθηματικό όρο, σαν ad hoc συνθήκη, ο ρόλος του οποίου ήταν να εξισορροπεί την κατάρρευση που θα ερχόταν στο σύμπαν από τις αμοιβαίες βαρυτικές έλξεις των επί μέρους δομών του. Ο όρος αυτός είναι γνωστός ως κοσμολογική σταθερά και ουσιαστικά συμπύκνωση όση δύναμη χρειαζόταν προκειμένου να διατηρεί το σύμπαν στατικό. Όμως η εισαγωγή της κοσμολογικής σταθεράς στις εξισώσεις προκάλεσε σαφείς αντιδράσεις από την επιστημονική κοινότητα

καθώς ένας τέτοιος όρος έμοιαζε περισσότερο σαν τέχνασμα, παρά σαν κάτι ρεαλιστικό με φυσικό νόημα.

Γεννηθείς το 1888, ο Ρώσος μαθηματικός Alexander Friedmann, έμαθε να προκαλεί από μικρός το κατεστημένο. Περί το 1920 ξεκίνησε την έρευνά του για το Σύμπαν, με αφετηρία τις εξισώσεις της Γ.Θ.Σ, αρχικά χωρίς τον όρο της κοσμολογικής σταθεράς. Ο Friedmann, όντας μαθηματικός, προσέγγισε το πρόβλημα στην γενική του μορφή και μελέτησε από μαθηματική σκοπιά τις εξισώσεις του Einstein, περιγράφοντας πώς διαφορετικά μοντέλα θα μπορούσαν να δημιουργηθούν χωρίς την κοσμολογική σταθερά ή ακόμα και για οποιαδήποτε τιμή της. Για τον Friedmann η κατάρρευση δεν ήταν αναγκαία, εφόσον ο δυναμισμός προήλθε από μια αρχική ώθηση που θα εξισορροπούσε τις ελκτικές βαρυτικές δυνάμεις και θα επέτρεπε στο Σύμπαν να διαστέλλεται είτε επ' άπειρον, είτε μέχρι ένα μέγιστο ώστε μετά να επέλθει κατάρρευση. Αν και αρχικά ο Einstein απέρριψε την θεωρία του Ρώσου μαθηματικού, όταν μετά από μερικά χρόνια ήρθαν στο προσκήνιο τα τεκμήρια (Hubble 1929, Wilson-Penzias 1965) ότι το σύμπαν διαστέλλεται και επιβεβαιώθηκε η θεωρία της Μεγάλης Έκρηξης, που πρώτος είχε προτείνει ο G.Lemaitre το 1927, τα μαθηματικά πρότυπα Friedmann επανήλθαν δυναμικά στο προσκήνιο.

Σήμερα, το ότι το σύμπαν διαστέλλεται, είναι όσο βέβαιο ότι η Γη κινείται, η έρευνα συνεχίζεται και τα μοντέλα με βάση τις εξισώσεις Friedmann ανανεώνονται και χρησιμοποιούνται για να αποκαλύπτουν όλο και περισσότερες κρυφές πτυχές του Σύμπαντος.

## 1.2 Βασικές έννοιες

Η κοσμολογία, είναι ο επιστημονικός κλάδος που ασχολείται με την μελέτη του σύμπαντος, λαμβάνοντας το υπόψη σαν «όλον». Αυτό σημαίνει ότι μελετά το σύμπαν σε κλίμακες τέτοιες ώστε να θεωρείται μια ενιαία υπόσταση, της οποίας οι δομικοί λίθοι κατά κάποιον τρόπο συνδέονται μεταξύ τους.

Στις συγκεκριμένες κλίμακες, τον ρόλο του «δομικού λίθου» οφείλει να λάβει ο γαλαξίας. Ένας γαλαξίας είναι μια δομή, που αποτελείται κατά μέσο όρο από περίπου  $10^{11}$  άστρα, τα οποία σχηματίζουν το γαλαξιακό σύστημα, εξαιτίας της αμοιβαίας βαρυτικής τους έλξης. Σε μεγαλύτερες κλίμακες, οι γαλαξίες τείνουν να συγκροτήσουν συστήματα που ονομάζονται *σμήνη*, τα οποία περιλαμβάνουν μερικούς, μέχρι μερικές χιλιάδες γαλαξίες. Υπάρχουν ενδείξεις για σμήνη σμηνών, αλλά όχι για ανώτερης τάξης δομές (σμήνη σμηνών σμηνών κτλ). Αυτό σημαίνει ότι το Σύμπαν δεν επαναλαμβάνει επ' άπειρον το ίδιο μοτίβο της συγκρότησης δομών (τύπου fractal), αλλά σε μεγάλες κλίμακες τείνει να είναι ομογενές.

### 1.3 Η κοσμολογική αρχή

Βασική αρχή της κοσμολογίας είναι ότι το σύμπαν είναι ομογενές και ισότροπο.

- *Ομοιογένεια* σημαίνει, ότι κάθε νοητή σφαίρα με ακτίνα κατά πολύ μεγαλύτερη από τις μεταξύ αποστάσεις των γαλαξιών που περικλείει (αποστάσεις της τάξης εκατομμυρίων ετών φωτός) θα περιέχει τον ίδιο αριθμό γαλαξιών με οποιαδήποτε άλλη όμοια της σφαίρα, κάθε χρονική στιγμή.
- *Ισοτροπία* στο σύμπαν σημαίνει, ότι ως προς οποιονδήποτε «γαλαξία αναφοράς» το σύμπαν φαίνεται το ίδιο προς οποιαδήποτε κατεύθυνση, δηλαδή έχουμε την ίδια κατανομή γαλαξιών ανεξαρτήτου διεύθυνσης.

Το γεγονός ότι το σύμπαν είναι ομογενές και ισότροπο παντού, συνυπολογίζοντας το ότι οι νόμοι της Φυσικής είναι ίδιοι σε κάθε σημείο του σύμπαντος συνιστά την «Κοσμολογική Αρχή» (cosmological principle), η οποία είναι καίριας σημασίας στα μαθηματικά μοντέλα, καθώς αφενός απλοποιεί τις εξισώσεις και αφετέρου επιβεβαιώνει την έννοια της συμμετρίας της φύσης. Πρόκειται για παραδοχή που επιβεβαιώνεται εκπληκτικά από τις παρατηρήσεις και από μαθηματική σκοπιά ανάγει όλες τις μερικές διαφορικές εξισώσεις των μοντέλων σε συνήθεις, γεγονός που απλοποιεί εξαιρετικά την κατάσταση και αφήνει περιθώρια δημιουργίας περιπλοκότερων προτύπων για το σύμπαν, χωρίς να καθίσταται αδύνατη η μαθηματική τους μελέτη εξαιτίας των πολλών μεταβλητών, μιας και η βελτίωση ενός μοντέλου συνήθων διαφορικών εξισώσεων έχει σαφώς περισσότερα περιθώρια ως προς την αντιμετώπισή του. Θα δειχθεί, ότι αν το σύμπαν ακολουθεί όντως την Κοσμολογική Αρχή, τότε χρειάζονται τρεις μόνο συναρτήσεις μιας μεταβλητής (του χρόνου) προκειμένου κανείς να έχει μια πλήρη εικόνα για την δυναμική του, την κινηματική του και σαν επακόλουθο την γεωμετρία του και την κατάληξη του.

Ένα από τα πιο πρόσφατα επιχειρήματα που ενισχύουν την Κοσμολογική Αρχή, πηγάζει από το πείραμα της αυστραλιανής ομάδας WiggleZ Dark Energy Survey [23], που διεξήχθη το 2012. Στο συγκεκριμένο πείραμα, μελετήθηκε ένα δείγμα περισσότερων από 200 000 γαλαξιών και διαπιστώθηκε ότι ο μέσος αριθμός γαλαξιών που περιέχεται σε μια οποιαδήποτε νοητή σφαίρα, γίνεται τυχαίος όσο αυξάνει η ακτίνα της σφαίρας. Αυτό σημαίνει, ότι όσο αυξάνει η κλίμακα στο σύμπαν, η κατανομή τείνει να γίνει ομοιόμορφη και δεν εμφανίζεται επ' άπειρον το φαινόμενο της ομαδοποίησης της ύλης (clustering), γεγονός που ισοδυναμεί με ομοιογένεια σε μεγάλες κλίμακες και ενδυναμώνει την Κοσμολογική Αρχή.

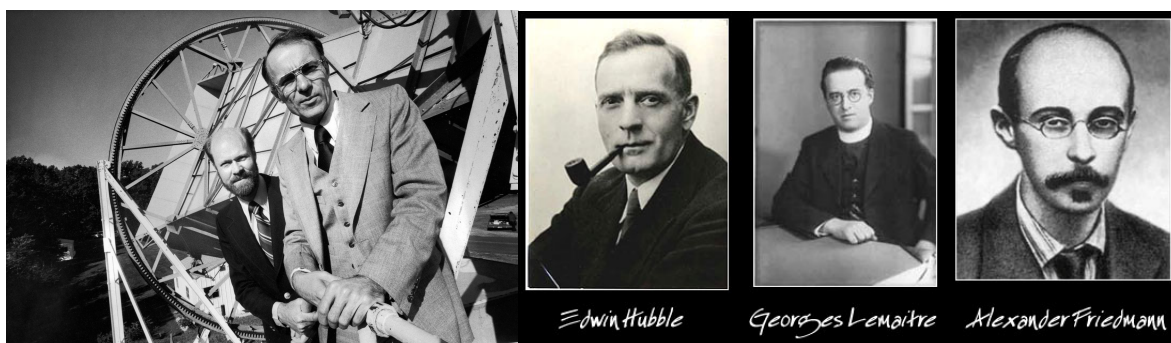
Παρόλα αυτά, η ιδέα της Κοσμολογικής Αρχής λαμβάνεται κυρίως υπόψιν από τα κλασικά μοντέλα αφού, από μαθηματική σκοπιά, είναι δυνατόν να υπάρξουν και

μοντέλα για σύμπαντα ομογενή και σχεδόν ισότροπα, ή σχεδόν ομογενή. Η χαρτογράφηση της κοσμικής ακτινοβολίας υποβάθρου στις χαμηλότερης τάξης προσεγγίσεις υποδεικνύει ότι, σε μεγάλες κλίμακες, θα πρέπει να ισχύει η ανεξαρτησία κατανομής ύλης από την κατεύθυνση στον ουρανό. Είναι εφικτό όμως να δημιουργηθούν κοσμολογικά πρότυπα με ελαφρές διακυμάνσεις ισοτροπίας, αλλά με την ομοιογένεια να συνεχίζει να ισχύει. Τέτοια σύμπαντα καλούνται *ομογενή* [29]. Μη ομογενή μοντέλα εμφανίζουν μεγάλο δείκτη δυσκολίας όσον αφορά στην κατασκευή τους, αλλά και χαμηλή σημασία από φυσική σκοπιά. Η μαθηματική τους αντιμετώπιση, γίνεται εφικτή μονάχα στο όριο μικρών διαταραχών (ρυτιδώσεις χωροχρόνου).

## 1.4 Ο νόμος του Hubble

Ο πρώτος επιστήμονας που ασχολήθηκε σοβαρά και από μαθηματικής και από φυσικής πλευράς με την δημιουργία μιας θεωρίας διαστελλόμενου σύμπαντος, ήταν ο ιερέας - φυσικός Abbé Georges Lemaître. Σύμφωνα με τον Sidney van den Bergh [28] ο Lemaître τον Αύγουστο του 1961 είπε στον ίδιο, ότι το γεγονός ότι ήταν ιερέας, τον έκανε να νιώσει ελαφρά προϊδεασμένος αναφορικά με την ιδέα της ύπαρξης μιας στιγμής δημιουργίας στο σύμπαν. Αν αυτή η δήλωση έγινε πράγματι, τότε ο Lemaître θα πρέπει να ένιωσε πολύ περήφανος όταν το 1927 βρήκε παρατηρησιακά, αλλά και θεωρητικά τεκμήρια περί διαστολής του σύμπαντος. Οι παρατηρησιακές του ανακαλύψεις, βασιζόνταν στις αποστάσεις και στις ακτινικές ταχύτητες 42 γαλαξιών, ενώ η θεωρία του βασιζόταν στην φαινόμενη αστάθεια του σύμπαντος και στην αυξητική τάση των διαταραχών. Τα αποτελέσματά του δημοσιεύτηκαν στα γαλλικά και σε ένα όχι και τόσο γνωστό επιστημονικό περιοδικό, δυο χρόνια πριν γίνει το έργο του Hubble (1929) επιστημονική επανάσταση. Ο Edwin Hubble ήταν ο επιστήμονας, που τόσο η σκληρή του δουλειά, όσο και οι κοινωνικές συνθήκες, είχαν σαν αποτέλεσμα να τον αφήσουν γνωστό στην ιστορία της επιστήμης ως τον άνθρωπο που απέδειξε ότι το σύμπαν διαστέλλεται. Αυτό που παρατήρησε, ήταν ότι όλοι οι γαλαξίες απομακρύνονται μεταξύ τους (σχετική μετατόπιση προς το ερυθρό στο φάσμα φωτός των γαλαξιών). Αυτό ήταν ένα καλό επιχείρημα για το ότι το σύμπαν διαστέλλεται (αργότερα τεκμηριώθηκε η άποψη αυτή μέσω της ανακάλυψης υπολειμμάτων της κοσμικής ακτινοβολίας υποβάθρου από τους Wilson & Penzias- 1965)[20, 19].

Εφαρμόζοντας την κοσμολογική αρχή σε ένα διαστελλόμενο σύμπαν, το συμπέρασμα είναι ότι θα πρέπει να υπάρχει ένας παράγοντας, ο οποίος θα είναι ίδιος για κάθε ζεύγος γαλαξιών στο σύμπαν και θα καθορίζει τον τρόπο με τον οποίο θα



Σχήμα 1.4.1: Οι επιστήμονες που δούλεψαν πάνω στην θεωρία ενός διαστελλόμενου σύμπαντος. Αριστερά: Wilson και Penzias μπροστά από την κεραία που τους οδήγησε στην ιστορική τους ανακάλυψη. Δεξιά : Edwin Hubble, G.Lemaitre, Alexander Friedmann.

απομακρύνονται μεταξύ τους, εξαιτίας της διαστολής, κάτι που μπορεί να θεωρηθεί σαν μεγέθυνση της κλίμακας. Ο παράγοντας αυτός ονομάζεται «παράγοντας (ή συντελεστής) κοσμικής κλίμακας» (universal scale factor) ή απλώς «παράγοντας κλίμακας» (scale factor) και συμβολίζεται με  $R(t)$ . Ο προσδιορισμός αυτής της συνάρτησης είναι και ο βασικός στόχος στην κοσμολογία καθώς το συγκεκριμένο μέγεθος καθορίζει πλήρως την δυναμική εξέλιξη του σύμπαντος. Σημειώνεται ότι η επίδραση της διαστολής είναι πρακτικά μηδενική στο εσωτερικό των δομών σε μικρότερες κλίμακες, για παράδειγμα στο εσωτερικό ενός γαλαξία, εξαιτίας των ισχυρών βαρυτικών έλξεων μεταξύ των επιμέρους σωμάτων.

Κατά Gauss, ένας χώρος λέγεται καμπύλος όταν δεν ικανοποιεί τα αξιώματα της Ευκλείδειας γεωμετρίας. Η γενίκευση της ευθείας γραμμής σε έναν τέτοιου είδους χώρο είναι αυτό που αναφέρεται ως *γεωδαισιακή γραμμή*, δηλαδή η καμπύλη μιας επιφανείας που ελαχιστοποιεί την απόσταση μεταξύ οποιονδήποτε δύο σημείων της. Ο χωρόχρονος, όπως είναι γνωστό από την γενική θεωρία σχετικότητας, είναι ένας καμπύλος χώρος εξαιτίας της παρουσίας ύλης και ενέργειας, συνεπώς, οι γεωδαισιακές γραμμές που συνδέουν δύο σημεία του χωροχρόνου, εν γένει δεν θα είναι ευθύγραμμες και συνεπώς η μετρική δεν θα μπορούσε να είναι ευκλείδεια. Αποδεικνύεται, ότι το φως ελαχιστοποιεί την διαδρομή που ακολουθεί καθώς διασχίζει τον χωρόχρονο, δηλαδή ακολουθεί πάντα γεωδαισιακές.

Καθώς το σύμπαν διαστέλλεται κατά παράγοντα  $R(t)$ , σύμφωνα με τη Γενική θεωρία της σχετικότητας, είναι εφικτό να δειχθεί, ότι για ένα φωτόνιο που εκπέμπεται από μια φωτεινή πηγή (έστω ενός γαλαξία) και κατευθύνεται προς έναν δέκτη (έστω ένα αστεροσκοπείο), κατά μήκος της γαιωδαισιακής που ακολουθεί, θα ισχύει:

$$fR(t) = const, \quad (1.4.1)$$

όπου  $f$ , η συχνότητά του φωτονίου. Δηλαδή το γινόμενο της συχνότητας επί τον παράγοντα κοσμικής κλίμακας παραμένει πάντα σταθερό.

Θεωρώντας τώρα ότι το φωτόνιο εκπέμπεται από τον γαλαξία την χρονική στιγμή  $t_1$  με συχνότητα  $f_1$  (και αντίστοιχο μήκος κύματος  $\lambda_1$ ) και φτάνει στον δέκτη όπου θεωρείται σαν σημείο αναφοράς την χρονική στιγμή  $t$  με συχνότητα  $f$  (και αντίστοιχο μήκος κύματος  $\lambda$ ), τότε από την (1.4.1) προκύπτει:

$$fR(t) = f_1R(t_1) \Rightarrow \frac{R(t)}{R(t_1)} = \frac{f_1}{f} = \frac{\lambda}{\lambda_1} = \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda_1} + 1 = z + 1, \quad (1.4.2)$$

όπου τέθηκε  $\frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda_1} = z$ , ως η σχετική μετατόπιση του μήκους κύματος του φωτονίου.

Όμως, αν ο γαλαξίας απομακρύνεται από τον παρατηρητή με ταχύτητα  $v$  (αρκετά μικρή σε σχέση με την ταχύτητα του φωτός), τότε ισχύει ότι

$$\frac{v}{c} = z, \quad (1.4.3)$$

και συνδυάζοντας τις (1.4.2)-(1.4.3) κανείς λαμβάνει:

$$v = cz = c \left( \frac{R(t)}{R(t_1)} - 1 \right). \quad (1.4.4)$$

Θεωρώντας τώρα ότι το χρονικό διάστημα  $\Delta t = (t_1 - t)$ , είναι πολύ μικρό και αναπτύσσοντας την συνάρτηση  $R(t)$ , σε σειρά Taylor γύρω από το  $t_1$  προκύπτει:

$$\frac{R(t)}{R(t_1)} = 1 + (t_1 - t) \frac{\dot{R}(t)}{R(t_1)} + \dots, \quad (1.4.5)$$

και κρατώντας μόνο τον γραμμικό όρο η (1.4.4) γίνεται:

$$v = c(t_1 - t) \frac{\dot{R}(t)}{R(t_1)} \approx d \frac{\dot{R}(t)}{R(t)}, \quad (1.4.6)$$

εφόσον το  $\Delta t$  είναι μικρό.<sup>1</sup> Επειδή η επιλογή της χρονικής στιγμής  $t$  είναι τυχούσα, η σχέση (1.4.6) ισχύει για κάθε  $t$ . Θέτοντας  $H(t) = \dot{R}(t)/R(t)$  προκύπτει ο νόμος Hubble:

---

<sup>1</sup> $t_1 \approx t$



$$v = H(t)d, \quad (1.4.7)$$

και η συνάρτηση  $H(t)$  καλείται *παράμετρος Hubble*.

Η σχετική ταχύτητα του γαλαξία που απομακρύνεται εκ διαστολής από έναν παρατηρητή, ακολουθεί τον νόμο (1.4.7), που υποδηλώνει ότι είναι ανάλογη της απόστασης του γαλαξία αυτού από τον παρατηρητή. Ο νόμος αυτός ισχύει για την πλειοψηφία των γαλαξιών του σύμπαντος. Η ακρίβεια του πέφτει [14]:

1. για πολύ κοντινούς γαλαξίες, καθώς σε τέτοιες κλίμακες θα πρέπει να ληφθούν υπόψιν και οι ανεξάρτητες της διαστολής κινήσεις των γαλαξιών.
2. για πολύ μακρινούς γαλαξίες, καθώς το φως που εκπέμπουν είναι αρχέγονο και οι συνθήκες τότε ήταν σαφώς διαφορετικές όσον αφορά στις πραγματικές κινήσεις των γαλαξιών.

Η πειραματική επιβεβαίωση του παραπάνω νόμου γίνεται βάσει του φαινομένου Doppler, που εμφανίζουν τα μήκη κύματος φωτός που εκπέμπουν οι γαλαξίες.

## 1.5 Η σταθερά Hubble

Θέτοντας  $t = t_0$  (σήμερα), η παράμετρος Hubble λαμβάνει την τιμή

$$H_0 = \dot{R}_0/R_0. \quad (1.5.1)$$

Το μέγεθος αυτό ονομάζεται σταθερά Hubble και είναι βασικότατης κοσμολογικής σημασίας, καθώς είναι ένα κοσμολογικό μέγεθος που είναι μετρήσιμο πειραματικά μέσω διαστημικών αποστολών. Η πλέον σύγχρονη αποστολή τέτοιου τύπου είναι η αποστολή Planck. Στη συγκεκριμένη αποστολή στις 14 Μαΐου 2009 εκτοξεύθηκε στο διάστημα, το διαστημικό αστεροσκοπείο Planck και μέχρι και σήμερα μέσω αυτού, μετρώνται οι ανισοτροπίες της Κοσμικής Ακτινοβολίας Υποβάθρου, σε πολύ υψηλά και πολύ χαμηλά μήκη κύματος. Μέσω των μετρήσεων αυτών επιτυγχάνεται η εξαγωγή των βασικότερων πληροφοριών σχετικά με την αρχέγονη αυτήν ακτινοβολία και η αποστολή αναμένεται να παρέχει απαντήσεις σε μερικά από τα πιο καίρια κοσμολογικά ερωτήματα για το παρελθόν και την εξέλιξη του σύμπαντος, με εξαιρετική ακρίβεια. Ένα από τα βασικότερα δεδομένα που προκύπτουν από την αποστολή είναι περιορισμοί για τις βασικότερες κοσμολογικές

σταθερές, μεταξύ των οποίων και της σταθεράς Hubble. Μόλις το 2015 δημοσιεύτηκαν οι τελευταίες αναλύσεις των δεδομένων του διαστημικού αστεροσκοπίου Planck, [9]. Στη τελευταία στήλη του πίνακα 4, σελίδα 31, του συγκεκριμένου άρθρου φαίνεται ότι η τιμή της σταθεράς Hubble με τη βέλτιστη δυνατή ακρίβεια είναι:

$$H_0 = 67.74 \pm 0.46 (km/s) / Mpc. \quad (1.5.2)$$

Στον πίνακα 1.1 φαίνονται συγκεντρωτικά οι μετρήσεις της σταθεράς αυτής από την αποστολή Planck, αλλά και από παλαιότερες παρόμοιες αποστολές άλλων διαστημικών αστεροσκοπειών.

Έτος	Αποστολή	$H_0 [(km/sec) / Mpc]$	$H_0^{-1} [Gyr]$
2015	Planck	$67.74 \pm 0.46$	14.43
21-03-2013	Planck	$67.80 \pm 0.77$	14.42
20-12-2012	WMAP	$69.32 \pm 0.80$	14.10
2010	WMAP	$71.0 \pm 2.5$	13.77
2006-2008	Chandra	$77.6^{+14.9}_{-12.5}$	12.60
2001-2005	Hubble	$72 \pm 8$	13.58
πριν το '96		50 – 90	10.86 – 19.55

Πίνακας 1.1: Μετρήσεις σταθεράς και χρόνου Hubble

Βασικότατο επίσης είναι το φυσικό μέγεθος  $H_0^{-1} = 1/H_0$ , που καλείται *χρόνος Hubble*, η φυσική ερμηνεία του οποίου θα δοθεί στη συνέχεια.

Από τον ρυθμό διαστολής του σύμπαντος, συνάγεται ότι θα πρέπει να υπήρχε κάποια χρονική στιγμή στο παρελθόν, όπου όλοι οι γαλαξίες θα βρίσκονταν πολύ κοντά μεταξύ τους, συγκεντρωμένοι σε μια ανωμαλία (singularity) του χωροχρόνου, με θεωρητικά άπειρη πυκνότητα και μηδενικό όγκο. Δηλαδή:

$$\exists t = \tau : R(\tau) = 0,$$

(μηδενικός παράγοντας κοσμικής κλίμακας). Κατά την θεωρία της μεγάλης έκρηξης, η στιγμή αυτή ήταν η δημιουργία του σύμπαντος, όπου μια κοσμική έκρηξη πυροδότησε την διαστολή του. Σύμφωνα με τα κλασσικά απλούστερα μοντέλα, η διαστολή εξηγείται ως αποτέλεσμα των υπολειμμάτων της αρχικής ώθησης της έκρηξης και εξαιτίας της βαρυτικής έλξης, οφείλει να επιβραδύνεται (βλ. πρότυπα κεφ2). Στα πιο σύγχρονα μοντέλα όμως, που εμπεριέχουν την κοσμολογική σταθερά (η οποία επανήλθε στο προσκήνιο πρόσφατα) αυτό δεν είναι απαραίτητα

ορθό (κεφ.3). Εξάλλου, οι σύγχρονες παρατηρήσεις υποδεικνύουν ότι η διαστολή είναι επιταχυνόμενη.

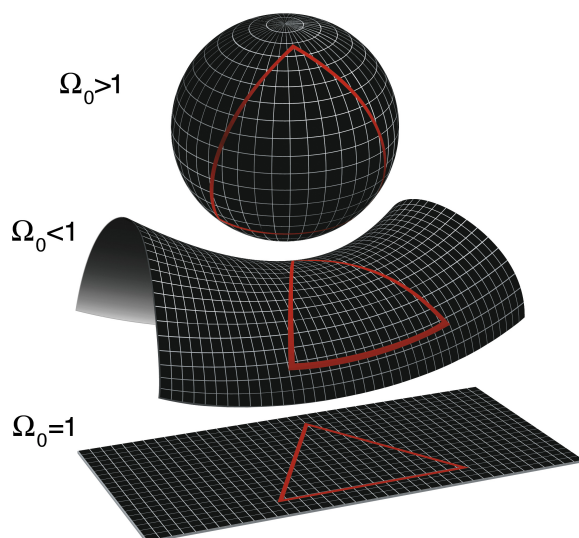
## 1.6 Ανοιχτό και κλειστό σύμπαν

Τα μοντέλα Friedmann, τα οποία και θα αναλυθούν διεξοδικά στην συνέχεια, δίνουν διαφορετικές καταλήξεις για το σύμπαν. Θα δειχθεί ότι είναι δυνατόν, είτε το σύμπαν να συνεχίσει να διαστέλλεται για πάντα (ανοιχτά μοντέλα), είτε η βαρυτική έλξη να επικρατήσει και να το εξαναγκάσει να καταρρεύσει ως προς τον εαυτό του σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα (κλειστά μοντέλα). Στα κλασσικά μοντέλα Friedmann, η περίπτωση ανοιχτού σύμπαντος συνεπάγεται ότι το σύμπαν έχει άπειρη χωρική έκταση, ενώ η περίπτωση κλειστού συνεπάγεται πεπερασμένη χωρική έκταση. Κάτι τέτοιο δεν ισχύει σε όλα τα μοντέλα, για παράδειγμα στα μοντέλα Lemaitre (βλ. παρ. 3.3.3.2).

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι και μέθοδοι για να διαπιστωθεί αν το σύμπαν είναι ανοιχτό ή κλειστό βάσει των μοντέλων. Ένας από αυτούς, είναι ο υπολογισμός της παρούσας πυκνότητας του σύμπαντος και η σύγκρισή της με την τιμή της «κρίσιμης πυκνότητας». Αν η τιμή της παρούσας πυκνότητας υπολογιστεί μεγαλύτερη από την τιμή της κρίσιμης, τότε η βαρυτική έλξη θα επαρκεί για να κάνει το σύμπαν να καταρρεύσει (Μεγάλη σύνθλιψη- Big Crunch) και άρα θα έχουμε κλειστό σύμπαν, διαφορετικά θα έχουμε την περίπτωση του ανοιχτού σύμπαντος. Η εξαγωγή του τύπου της κρίσιμης πυκνότητας θα πραγματοποιηθεί παρακάτω, ως επίσης και η μαθηματική διερεύνηση των περιπτώσεων αυτών. Ένας ισοδύναμος τρόπος για να αποφανθεί κανείς περί του τύπου του σύμπαντος, είναι η μέτρηση του ρυθμού κατά τον οποίο το σύμπαν επιβραδύνεται. Αυτό γίνεται μέσω της παραμέτρου πυκνότητας, η οποία συμβολίζεται με  $\Omega_0$ . Στα απλούστερα μοντέλα η μεταβλητή  $\Omega_0$  ορίζεται σαν τον λόγο της τωρινής πυκνότητας προς την κρίσιμη πυκνότητα του σύμπαντος. Έτσι, σύμφωνα με τα προλεγόμενα, αν  $\Omega_0 < 1$ , τότε το σύμπαν θα είναι ανοικτό, ενώ αν  $\Omega_0 > 1$ , κλειστό.

Φυσικά η βαρυτική έλξη επάγει φυσιολογικά μια επιβράδυνση στην διαστολή, η οποία αντικατοπτρίζεται από την παράμετρο επιβράδυνσης  $q_0$  που και θα οριστεί πλήρως στην συνέχεια. Θα δειχθεί επίσης ότι το σύμπαν είναι δυνατόν να είναι θεωρητικά κλειστό, όμως εξαιτίας της παρουσίας κοσμολογικής σταθεράς να συνεχίσει να διαστέλλεται αντί να καταρρεύσει.

Στην ουσία, στα κλασσικά (επιβραδυνόμενα) μοντέλα, οι έννοιες της κλειστότητας και της ανοικτότητας είναι άμεσα συνδεδεμένες με την καμπυλότητα του σύμπαντος  $k$ . Θεωρητικά, το σύμπαν σε μακροσκοπική κλίμακα δύναται να έχει τρία είδη καμπυλότητας: αρνητική, θετική ή και μηδέν. Μιλώντας για καμπυλότητα σε



Σχήμα 1.6.1: Η γεωμετρία του σύμπαντος ανάλογα με την παράμετρο πυκνότητας  $\Omega_0$ . Στα επιβραδυνόμενα μοντέλα η καμπυλότητα του σύμπαντος συνδέεται άμεσα με την κατάληξη του (ανοιχτό, κλειστό, οριακά ανοιχτό).

τέτοια επίπεδα, εννοείται η μακροσκοπική σχηματική φυσιολογία του χώρου και όχι του χωροχρόνου, είναι λοιπόν δυνατόν ένα σύμπαν να είναι σε τέτοιες κλίμακες επίπεδο, υπό την έννοια ότι ο χώρος θεωρείται ευκλείδειος σε μεγάλες κλίμακες και αυτό συμβαίνει όταν η παράμετρος  $k$  είναι μηδενική. Εφόσον το σύμπαν έχει αρνητική καμπυλότητα, σύμφωνα με τα κλασικά κοσμολογικά πρότυπα, θα διαστέλλεται αιώνια. Σε ένα τέτοιο σύμπαν δύο παράλληλες δέσμες φωτός θα αποκλίνουν και ο χώρος θα έχει τέτοια δομή ώστε να μην είναι δυνατόν να καταρρευσει. Στην περίπτωση όμως που το σύμπαν έχει θετική καμπυλότητα (το φυσικό ανάλογο σε δύο διαστάσεις είναι η επιφάνεια μιας σφαίρας), τότε η δομή του χώρου επιβάλλει κατάρρευση και δύο παράλληλες δέσμες φωτός θα συγκλίνουν. Το τελευταίο και πιθανότερο σενάριο για την καμπυλότητα και άρα για το μέλλον του σύμπαντος είναι να είναι μηδενική. Τότε ο χώρος σε μεγάλες κλίμακες θα συμπεριφέρεται σαν ευκλείδειος και δύο παράλληλες δέσμες φωτός θα παραμένουν παράλληλες. Και σε αυτήν την περίπτωση η διαστολή θα είναι αιώνια. Φυσικά, το “σχήμα” του σύμπαντος είναι άμεσα συνδεδεμένο με την ποσότητα ενέργειας που περιέχει και άρα και με την πυκνότητα της, οπότε η μελέτη όλων των προαναφερθέντων παραμέτρων, προκειμένου να εξαχθούν συμπεράσματα για το μέλλον του, είναι ισοδύναμες. Στην περίπτωση όμως μοντέλων με κοσμολογικό όρο  $\Lambda$ , η καμπυλότητα του σύμπαντος δεν συνεπάγεται και την κατάληξή του, ούτε συνεπάγεται από αυτήν αλλά απλώς είναι ένας από τους παράγοντες που συνεισφέρουν ή δρουν κατασταλτικά στην διαστολή. Θα δειχθεί στην συνέχεια της εργασίας, ότι είναι δυνατόν να έχει το σύμπαν θετική καμπυλότητα, αλλά να συνεχίσει να διαστέλλεται αιώνια (βλ. κεφ3).

Μέσω των προτύπων Friedmann μελετάται κάθε δυνατή κατάληξη του σύμπαντος και τα αποτελέσματα κάθε μοντέλου συγκρίνονται με τις παρατηρήσεις, με σκοπό να εξαχθεί ένα μοντέλο για το σύμπαν που συμφωνεί όσον το δυνατόν περισσότερο με αυτό που παρατηρείται. Στην παρούσα εργασία, σκοπός είναι η μαθηματική παρουσίαση και ανάλυση μερικών εκ των προτύπων αυτών, καθώς και η παράθεση των συμπερασμάτων που θα προκύψουν απ' την ανάλυση τους.

## Κεφάλαιο 2

# Πρότυπα Friedmann χωρίς κοσμολογική σταθερά

### 2.1 Γενική Θεωρία σχετικότητας και η μετρική RW

Στο σημείο αυτό, θα περιγραφεί εν συντομία μια γενική εικόνα της φιλοσοφίας της Γενικής Θεωρίας Σχετικότητας (Γ.Θ.Σ), χωρίς να γίνει εμβάθυνση ή αυστηρή εξαγωγή των εξισώσεων, καθώς κάτι τέτοιο θα ξέφευγε από τα πλαίσια και τους σκοπούς της παρούσας εργασίας. Παρόλα αυτά, θα γίνει μια παρουσίαση των βασικών εξισώσεων της θεωρίας, καθώς θα πρέπει να γίνει κατανοητή τόσο η μαθηματική τους, όσο και η φυσική τους σημασία, προκειμένου να επιτευχθεί η εξαγωγή των μοντέλων Friedmann, μέσω της σχετικιστικής προσέγγισης. Για το σκοπό αυτό, χρησιμοποιήθηκαν κυρίως οι πηγές [14,22] της βιβλιογραφίας.

Η Γ.Θ.Σ είναι η καλύτερη και η πληρέστερη θεωρία βαρύτητας που έχει στην διάθεση του αυτήν την στιγμή ο άνθρωπος. Η κεντρική ιδέα της θεωρίας είναι ότι ο χώρος και ο χρόνος σχηματίζουν μια ενιαία τετραδιάστατη πολλαπλότητα, τον χωρόχρονο, με μια μετρική-τανυστή  $g_{\mu\nu}$ . Από την άλλη, οι εξισώσεις πεδίου του Einstein, συνδέουν την μετρική αυτή (γεωμετρία χωροχρόνου), με την ενέργεια και την ύλη του σύμπαντος. Η  $g_{\mu\nu}$  είναι ένας *συμμετρικός* τανυστής με 16 συνιστώσες και άρα μόνο οι 10 αρκούν για να περιγραφεί. Επιπλέον, δεχόμενοι την Κοσμολογική Αρχή, σε μεγάλες κλίμακες έχουμε  $g_{0i} = g_{i0} = 0$  και  $g_{00} = 1$ .

Έτσι η απόσταση μεταξύ δύο γεγονότων του χωροχρόνου δίνεται πλέον από την:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + g_{ij} dx^i dx^j. \quad (2.1.1)$$

Κατά αυτόν τον τρόπο έχει επιτευχθεί μια διαμέριση του τετραδιάστατου χωροχρόνου σε χωρικές υπέρ-επιφάνειες, που είναι ομογενείς και ισότροπες σε δεδο-

μένη χρονική στιγμή, κάτι που απλοποιεί εξαιρετικά την κατάσταση.

Εισάγοντας τώρα σφαιρικές συντεταγμένες, έχουμε ότι ένα σημείο στο χωρόχρονο γράφεται  $(r, \theta, \phi, ct)$ .

Από τους Robertson και Walker αποδείχθηκε (ανεξάρτητα) ότι η μοναδική μετρική που ενσωματώνει τις έννοιες της ισοτροπίας και της ομοιογένειας για ένα διαστελλόμενο σύμπαν είναι η

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R^2/(1 - kr^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin^2\theta R^2 \end{pmatrix}. \quad (2.1.2)$$

Επομένως:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t)[dr^2/(1 - kr^2) + r^2(d\theta + \sin^2\theta d\phi^2)], \quad (2.1.3)$$

όπου  $R(t)$ , είναι ο παράγοντας κοσμικής κλίμακας και  $k \in \{-1, 0, 1\}$ , η παράμετρος καμπυλότητας.

Εδώ όσον αφορά στις διαστάσεις των μεγεθών, θα πρέπει να σημειωθεί ότι ενώ  $[R] = L$ , έχουμε ότι  $[r] = 1$ , ως επίσης  $[k] = 1$ .

Η ισχύς της κοσμολογικής αρχής πλέον γίνεται ξεκάθαρη. Σε ένα ομογενές και ισότροπο σύμπαν, τα μόνα στοιχεία που χρειάζονται για την περιγραφή της γεωμετρίας του, είναι τα μεγέθη  $R(t)$  και  $k$ . Θα πρέπει να τονιστεί ξανά ότι το σύμπαν που παρατηρούμε σε όχι εξαιρετικά μεγάλες κλίμακες, δεν εμφανίζεται ισότροπο και ομογενές, όπως ακριβώς ένα στερεό σώμα φαίνεται συνεχές φαινομενικά, αλλά μικραίνοντας την κλίμακα αποκαλύπτονται ασυνέχειες μεταξύ των δομικών του λίθων. Έτσι η μετρική Robertson-Walker (RW)<sup>1</sup> ισχύει μόνο σε μεγάλες κλίμακες ( $100Mpc^2$ ).

## 2.2 Εξαγωγή των προτύπων Friedmann

Δίνονται στο σημείο αυτό οι εξισώσεις πεδίου του Einstein χωρίς απόδειξη<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Στην βιβλιογραφία φαίνεται και ως FRW (Friedmann-Robertson-Walker)

<sup>2</sup>Αστρονομική μονάδα μέτρησης ( $1Mpc = 10^6pc = 3.26 \cdot 10^6$  έτη φωτός  $= 3.09 \times 10^{19}km$ )

<sup>3</sup>Για μια ολοκληρωμένη εικόνα της Γ.Θ.Σ ο αναγνώστης μπορεί να καταφύγει στα [7, 13]

$$\mathbf{R}_{\mu\nu} - 1/2g_{\mu\nu}R = 8\pi G/c^4 T_{\mu\nu}, \quad (2.2.1)$$

όπου στο πρώτο μέλος ο  $\mathbf{R}_{\mu\nu}$  είναι ο τανυστής Ricci<sup>4</sup> και εμπεριέχει συνδυασμούς των μερικών παραγώγων πρώτης και δεύτερης τάξης της  $g_{\mu\nu}$  ενώ  $R = g^{\mu\nu}\mathbf{R}_{\mu\nu}$  (Ricci scalar).

Στο δεύτερο μέλος έχουμε τον τανυστή ορμής-ενέργειας  $T_{\mu\nu}$  (για τέλειο ρευστό) και κατά τον τρόπο αυτόν επιτυγχάνεται η προλεγόμενη σύνδεση της γεωμετρίας του χωροχρόνου με την μάζα και την ενέργεια. Οι εξισώσεις αυτές, στην δεδομένη μορφή, δεν εμπεριέχουν τον όρο της κοσμολογικής σταθεράς ο οποίος θα εισαχθεί στη συνέχεια προκειμένου να αναλυθούν τα επιταχυνόμενα πρότυπα (κεφ.3). Στη μετρική RW έχουμε τις ακόλουθες μη μηδενικές συνιστώσες των  $g_{\mu\nu}$  και  $g^{\mu\nu}$ <sup>5</sup> οι οποίες θα ανήκουν στην κύρια διαγώνιο του τανυστή:

$$g_{00} = 1, \quad g_{11} = -R^2/(1 - kr^2), \quad g_{22} = -r^2R^2, \quad g_{33} = -\sin^2\theta R^2$$

$$g^{00} = 1, \quad g^{11} = -(1 - kr^2)/R^2, \quad g^{22} = -1/(r^2R^2), \quad g^{33} = -1/(\sin^2\theta R^2),$$

ενώ οι συνιστώσες του  $\mathbf{R}_{\mu\nu}$ , όπως φαίνεται και στο κεφάλαιο 3 του βιβλίου του J.N. Islam, *An Introduction to mathematical cosmology*, είναι οι ακόλουθες[14]:

$$\mathbf{R}_{00} = -3(\ddot{R}/R),$$

$$\mathbf{R}_{11} = (\dot{R}R + \dot{R}^2 + 2kc^2)/(1 - kr^2),$$

$$\mathbf{R}_{22} = r^2(R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2kc^2),$$

$$\mathbf{R}_{33} = r^2\sin^2\theta(R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2kc^2).$$

Έτσι μετά από πράξεις και χρησιμοποιώντας τους τανυστικούς κανόνες άθροισης επαναλαμβανόμενων δεικτών προκύπτει:

$$g^{\mu\nu}\mathbf{R}_{\mu\nu} = -6(R\ddot{R} + \dot{R}^2 + kc^2)/R^2. \quad (2.2.2)$$

<sup>4</sup>Η έντονη γραφή στον τανυστή Ricci χρησιμοποιείται προκειμένου να αποφευχθεί η σύγχυση μεταξύ αυτού και του συντελεστή κοσμική κλίμακας  $R(t)$

<sup>5</sup> $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 1$



Επιπλέον, για τις αντίστοιχες συνιστώσες του ταυυστή ορμής/ενέργειας ισχύει :

$$T_{00} = \varepsilon, \quad T_{11} = (pR^2)/(1 - kr^2), \quad T_{22} = pr^2 R^2, \quad T_{33} = pr^2(\sin^2\theta)R^2,$$

Όπου  $\varepsilon = \rho c^2$ , η πυκνότητα ενέργειας και  $p$ , η πίεση.<sup>6</sup>

Συνεπώς οι εξισώσεις πεδίου Einstein για  $\mu = \nu = 0$ , δίνουν ύστερα από πράξεις την

$$\dot{R}^2 + kc^2 = \frac{8}{3}\pi G\varepsilon R/c^2, \quad (2.2.3)$$

ενώ για  $\mu = \nu = 1$  την:

$$2R\ddot{R} + \dot{R}^2 + kc^2 = -8\pi GpR^2/c^2, \quad (2.2.4)$$

στην οποία αν μέσω της (2.2.3) αντικατασταθεί ο όρος  $\dot{R}^2 + kc^2$ , προκύπτει η παρακάτω εξίσωση:

$$\ddot{R} = -(4\pi G/3)(\varepsilon + 3p)R/c^2. \quad (2.2.5)$$

Για  $\mu = \nu = 2$  και για  $\mu = \nu = 3$  δεν προκύπτουν άλλες ανεξάρτητες από τις προηγούμενες εξισώσεις. Τέλος παραγωγίζοντας την (2.2.3) ως προς τον χρόνο και απαλείφοντας τον όρο  $\ddot{R}$  με την βοήθεια της (2.2.5) έπεται η επιπλέον ακόλουθη διαφορική εξίσωση:

$$\dot{\varepsilon} + 3\frac{\dot{R}}{R}(p + \varepsilon) = 0. \quad (2.2.6)$$

Στην εξίσωση (2.2.3) η αδιάστατη παράμετρος  $k \in \{-1, 0, 1\}$  αντιπροσωπεύει τις τρεις διαφορετικές περιπτώσεις καμπυλότητας για το σύμπαν, συνεπώς, για κάθε μια από αυτές τις τιμές υπάρχει και μια διαφορική εξίσωση:

---

<sup>6</sup>Παρατηρούμε ότι  $[\varepsilon] = [p] = ML^{-1}T^{-2}$

$$\dot{R}^2 = c^2 + (8\pi G/3)\varepsilon R^2/c^2, \quad (2.2.7)$$

$$\dot{R}^2 = (8\pi G/3)\varepsilon R^2/c^2, \quad (2.2.8)$$

$$\dot{R}^2 = -c^2 + (8\pi G/3)\varepsilon R^2/c^2. \quad (2.2.9)$$

Η (2.2.5) εμφανίζεται συχνά στην βιβλιογραφία ως εξίσωση επιτάχυνσης ενώ οι (2.2.7) - (2.2.9) είναι οι εξισώσεις *Friedmann*. Επίσης, ένα ακόμα δεδομένο είναι η εξίσωση (2.2.6) η οποία ονομάζεται *εξίσωση διατήρησης*. Επειδή κάθε μια από τις (2.2.7) - (2.2.9) είναι εξαρτημένες με την (2.2.5) και οι άγνωστες συναρτήσεις είναι τρεις, είναι αναγκαία η εύρεση μιας επιπλέον εξίσωσης προκειμένου να επιλυθεί το σύστημα. Η εξίσωση αυτή θα είναι η καταστατική εξίσωση για τα τέλεια αέρια, μια αλγεβρική σχέση που θα συνδέει τις συναρτήσεις της πίεσης  $p$  και της πυκνότητας ενέργειας  $\varepsilon$ .

Τότε, για κάθε μια από τις τρεις τιμές της παραμέτρου  $k$ , προκύπτει και ένα σύστημα δύο ανεξάρτητων διαφορικών εξισώσεων και μιας αλγεβρικής βοηθητικής εξίσωσης, με τρεις άγνωστες συναρτήσεις, το οποίο αν επιλυθεί θα παρέχει τις συναρτήσεις του παράγοντα κοσμικής κλίμακας, της πίεσης και της πυκνότητας, σε κάθε περίπτωση. Αυτά είναι τα (κλασσικά) **πρότυπα Friedmann χωρίς κοσμολογική σταθερά** ( $\Lambda = 0$ ), τα οποία και θα αναλυθούν πλήρως στο κεφάλαιο αυτό.

## 2.3 Η καταστατική εξίσωση

Όσον αφορά στην καταστατική εξίσωση, παρότι εν γένει οι καταστατικές εξισώσεις είναι δυνατόν να είναι μη γραμμικές και περίπλοκες, στην κοσμολογία είναι γνωστό ότι η σχέση αυτή είναι απλή και μάλιστα γραμμική [22], της μορφής

$$p = \omega\varepsilon, \quad (2.3.1)$$

με  $\omega \leq 1$ .

Αυτό οφείλεται κυρίως στην παραδοχή ότι το σύμπαν σε μεγάλες κλίμακες αντιμετωπίζεται σαν τέλειο ρευστό.

Για παράδειγμα για ένα αέριο σωματιδίων μη σχετικιστικής μάζας και χαμηλής πυκνότητας ισχύει <sup>7</sup>

$$p = nK_B T = \frac{\rho K T}{\mu} \approx \frac{K T}{\mu c^2} \varepsilon, \quad (2.3.2)$$

όπου  $\mu$ , η μέση μάζα των μορίων του αερίου  $T$ , η θερμοκρασία του και  $K$ , σταθερά. Επίσης, από την θερμοδυναμική:

$$3K T = \mu \langle v^2 \rangle, \quad (2.3.3)$$

όπου  $\langle v^2 \rangle$  η μέση τετραγωνική ταχύτητα του αερίου. Συνεπώς:

$$p \approx \frac{\langle v^2 \rangle}{3c^2} \varepsilon = \omega \varepsilon. \quad (2.3.4)$$

Έτσι η τιμή της σταθεράς  $\omega$  εξαρτάται από τον λόγο  $\langle v^2 \rangle / c^2$  και άρα σε ένα σύμπαν όπου κυριαρχεί η μη σχετικιστική ύλη, ήτοι  $\langle v^2 \rangle / c^2 \ll 1$ , θα ισχύει ότι  $p \approx 0$ .

Αντιθέτως, σε ένα σύμπαν που κυριαρχεί η ακτινοβολία είναι  $\langle v^2 \rangle / c^2 = 1$  και άρα,  $p = \varepsilon/3$ .

Ενδιαφέρον επίσης παρουσιάζει η περίπτωση όπου,  $\omega < -1/3$ , αφού τότε από την εξίσωση επιτάχυνσης (2.2.5) προκύπτει ότι,  $\ddot{R} > 0$ , δηλαδή τότε η τιμή του  $\omega$  αντιστοιχεί σε συστατικό του σύμπαντος που συνεισφέρει στην επιτάχυνση της διαστολής (σκοτεινή ενέργεια).

Στην πορεία θα εφαρμοστούν τα αποτελέσματα αυτά, προκειμένου να επιλυθούν αναλυτικά (ή και αριθμητικά) οι εξισώσεις Friedmann για διάφορα σύμπαντα.

Επίσης τονίζεται, ότι παρόλα αυτά, υπάρχουν και μοντέλα που λαμβάνουν υπόψιν μη γραμμικές καταστατικές εξισώσεις (βλ. [24]).

<sup>7</sup>Η προσέγγιση στην (2.3.2) έγινε δεδομένου ότι σχεδόν όλη η ενέργεια του μη σχετικιστικού αερίου αποτελείται από την μάζα των σωματιδίων του.

## 2.4 Κανονικοποίηση παράγοντα κλίμακας

Στο σημείο αυτό και στο εξής, εισάγεται ο αδιάστατος συντελεστής κοσμικής κλίμακας,  $a(t) = R(t)/R(t_0)$ , που κανονικοποιείται έτσι ώστε να είναι,

$$a(t_0) = a_0 = 1.$$

Κάτι τέτοιο, έχει σαν αποτέλεσμα να δίνεται αναφορά στο παρόν, όσον αφορά στη διαστολή (σε σχέση με την τιμή του παράγοντα κλίμακας σήμερα).

Εισάγοντας την κανονικοποίηση στην εξίσωση Friedmann (2.2.3) προκύπτει η εξίσωση:

$$\dot{a}^2 = -kc^2/R_0^2 + (8\pi G/3)\varepsilon a^2/c^2. \quad (2.4.1)$$

Έτσι το μαθηματικό πρότυπο θα λάβει την παρακάτω μορφή:

$$\ddot{a} = -(4\pi G/3)(\varepsilon + 3p)a/c^2, \quad (2.4.2)$$

$$\dot{a}^2 = c^2/R_0^2 + (8\pi G/3)\varepsilon a^2/c^2, \quad (2.4.3)$$

$$\dot{a}^2 = (8\pi G/3)\varepsilon a^2/c^2, \quad (2.4.4)$$

$$\dot{a}^2 = -c^2/R_0^2 + (8\pi G/3)\varepsilon a^2/c^2, \quad (2.4.5)$$

$$\dot{\varepsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(p + \varepsilon) = 0, \quad (2.4.6)$$

$$p = \omega\varepsilon. \quad (2.4.7)$$

Προκειμένου να επιλυθεί το σύστημα των παραπάνω διαφορικών εξισώσεων ως πρόβλημα αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.), δύναται να θεωρηθεί ότι η αρχική συνθήκη είναι η  $a(0) = 0$ , στην πλειοψηφία των περιπτώσεων. Τότε, οι λύσεις που θα προκύψουν θα αφορούν σε σύμπαντα που είχαν στιγμή δημιουργίας (Μεγάλη Έκρηξη).

Όπως θα γίνει φανερό και παρακάτω υπάρχουν λύσεις των εξισώσεων και για σύμπαντα που δεν είχαν στιγμή δημιουργίας στο παρελθόν, για παράδειγμα το σύμπαν Einstein της παραγράφου (2.7.1), εξίσωση (2.7.2). Στην περίπτωση αυτή μπορεί να θεωρηθεί ότι η εξίσωση έχει λύση για  $a(0) = 1$ , όπου  $t = 0$  τίθεται η σημερινή τιμή.

## 2.5 Γραφικός ορισμός χρόνου Hubble

Το πρώτο βήμα της μελέτης των μοντέλων του Friedmann σε αυτήν την μορφή είναι να μελετηθούν τις ιδιότητες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $a(t)$ , ο προσδιορισμός της οποίας είναι καίριο κοσμολογικό πρόβλημα.

Επιστρέφοντας στην εξίσωση διατήρησης (2.4.6), προσθέτοντας  $\dot{p}$  και στα δύο μέλη και ύστερα την πολλαπλασιάζοντας με  $a^3$  προκύπτει ότι:

$$\dot{p}a^3 = \frac{d}{dt}[a^3(\epsilon + p)]. \quad (2.5.1)$$

Εν συνεχεία, πολλαπλασιάζοντας με  $\dot{a}^{-1}$  και συμπυκνώνοντας παραγώγους αθροισμάτων η παράγωγος μεταβλητής  $t$  μετατρέπεται εύκολα σε παράγωγο μεταβλητής  $a$  και εν κατακλείδι:

$$\frac{d(\epsilon a^3)}{da} = -3pa^2. \quad (2.5.2)$$

Από την τελευταία αυτή εξίσωση γίνεται κατανοητό, ότι για θετικές τιμές της πίεσης και για κάθε αύξηση του παράγοντα κλίμακας, η πυκνότητα θα πρέπει να μειώνεται τουλάχιστον όσο γρήγορα αυξάνεται ο όρος  $a^3$ . Τούτο, διότι αν θεωρηθεί ότι η πίεση ήταν 0, δηλαδή το αριστερό μέλος της εξίσωσης ήταν μηδενικό, τότε προκειμένου να είναι το γινόμενο  $\epsilon a^3$  σταθερό, (αφού η παράγωγος ως προς  $a$  θα ήταν μηδέν) θα πρέπει η πυκνότητα να μειώνεται ακριβώς όπως αυξάνεται ο όρος  $a^3$ . Κατά συνέπεια, για να είναι αρνητική η παράγωγος, η πυκνότητα θα πρέπει να μειώνεται τουλάχιστον όπως το  $a^{-3}$ . Έτσι καθώς  $a \rightarrow \infty$  (δηλαδή  $a^{-1} \rightarrow 0$ ), η ποσότητα  $\epsilon a^2$  μηδενίζεται όσο γρήγορα μηδενίζεται και το  $a^{-1}$ . Φαίνεται όμως ο όρος  $\epsilon a^2$  στις τρεις εξισώσεις του Friedmann και αυτό, ανάλογα με την κάθε περίπτωση καμπυλότητας, οδηγεί στα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Για  $k = -1$ , τότε  $\dot{a}^2 > 0$ , συνεπώς η  $a(t)$  παραμένει αύξουσα<sup>8</sup>. Επιπλέον από την (2.4.3) είναι  $a(t) \rightarrow c/R_0 t$ , όταν  $t \rightarrow \infty$ , που σημαίνει ότι ο παράγοντας κλίμακας τείνει να γίνει ομοιόμορφος με μηδενική επιτάχυνση (ευθεία) για πολύ μεγάλους χρόνους (ανοιχτό σύμπαν).
- Για  $k = 0$ , προκύπτει και πάλι αύξοντας παράγοντας κλίμακας και ίδια ασυμπτωτική συμπεριφορά για  $t \rightarrow \infty$ , αλλά με βραδύτερη αύξηση από την περίπτωση αρνητικής καμπυλότητας.
- Για  $k = 1$ , όταν  $\varepsilon a^2 = (3c^4)/(8\pi G R_0^2)$ , θα είναι,  $\dot{a} = 0$ , δηλαδή θα παρουσιάζεται τοπικό μέγιστο (εφόσον τα κοίλα στρέφονται προς τα κάτω όπως θα δειχθεί ακριβώς παρακάτω) και άρα εν συνεχεία θα φθίνει έως ότου τμήσει τον άξονα του χρόνου σε πεπερασμένο διάστημα (κλειστό σύμπαν).

Για τη δεύτερη παράγωγο, αν θεωρηθεί ότι  $\varepsilon + 3p > 0$ , τότε από την (2.4.2) είναι ξεκάθαρο ότι  $\ddot{a}(t_0)/a(t_0) = \ddot{a}(t_0) < 0$ , για  $t = t_0$  (σήμερα). Συνεπώς σε κάθε περίπτωση καμπυλότητας, η συνάρτηση οφείλει να στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο  $t = t_0$ .

Επίσης η εφαπτομένη ευθεία στο σημείο αυτό, θα πρέπει να τέμνει τον άξονα του χρόνου σε σημείο, πιο μακριά από το παρόν απ' ότι θα τον έτεμνε η ίδια η συνάρτηση. Αυτό σημαίνει, ότι αν η διαστολή ήταν ομοιόμορφη, η ηλικία του σύμπαντος θα ήταν προφανώς μεγαλύτερη. Θέτοντας χωρίς βλάβη,  $t = \tau = 0$  το σημείο που τέμνει η  $a(t)$  τον άξονα (δημιουργία του σύμπαντος), θα είναι  $a(0) = 0$ . Αναφορικά με την αρχική αυτή συνθήκη σημειώνεται εδώ, ότι η εξίσωση (2.4.5) ικανοποιείται, καθώς σύμφωνα με τα προλεγόμενα, όταν  $a \rightarrow 0$ , προκύπτει ότι  $\varepsilon a^2 \rightarrow +\infty$ , (δεδομένου ότι  $\varepsilon a^2 \sim a^{-1}$ ). Έτσι, στην αρχή της εξέλιξης του σύμπαντος παρότι ο όρος  $\dot{a}^2$  απειρίζεται, παραμένει θετικός και το πρόβλημα αρχικών τιμών έχει λύση.

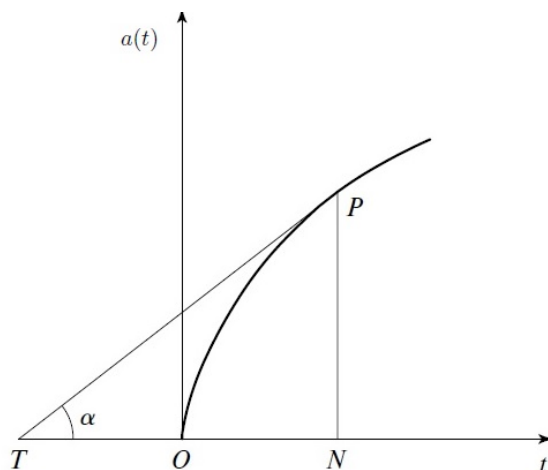
Συνοψίζοντας τα παραπάνω, η συνάρτηση του παράγοντα κλίμακας και της εφαπτόμενης ευθείας απεικονίζονται στο σχήμα ( 2.5.1).

Έτσι, αν  $\alpha$  η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη με τον άξονα του χρόνου, τότε:

$$\tan\alpha = \dot{a}(t_0) = 1/(TN) \Rightarrow (TN) = 1 / \dot{a}(t_0) = R(t_0) / \dot{R}(t_0) = H_0^{-1},$$

όπου  $(TN)$ , η ηλικία που θα είχε το σύμπαν, αν η διαστολή του ήταν ομοιόμορφη. Αυτό φανερώνει άμεσα το φυσικό νόημα του χρόνου Hubble. Συνεπώς, συνάγεται άμεσα ότι η ηλικία ενός σύμπαντος που η διαστολή του στρέφει τα κοίλα προς τα

<sup>8</sup>Επειδή  $\dot{a}^2 > 0$  και  $\dot{a} \geq 0$  έχουμε  $\dot{a} > 0$



Σχήμα 2.5.1: Γραφικός ορισμός χρόνου Hubble [14]

κάτω, οφείλει να είναι μικρότερη από τον χρόνο Hubble, ο οποίος προσδιορίζεται μετρώντας την σταθερά Hubble. Έτσι μέσω των προτύπων Friedmann προέκυψε ένα άνω φράγμα για την ηλικία του σύμπαντος<sup>9</sup>. Από τον πίνακα 1.1 προκύπτει ότι ένα επιβραδυνόμενο σύμπαν, δεν μπορεί να έχει ηλικία μεγαλύτερη από  $14.43 Gyr$ , σύμφωνα με τις μετρήσεις της αποστολής Planck 2015.

## 2.6 Κρίσιμη πυκνότητα και παράμετρος επιβράδυνσης της διαστολής

Ανακαλώντας τον ορισμό της σταθεράς Hubble και δεδομένου της προαναφερθείσας κανονικοποίησης του παράγοντα κοσμικής κλίμακας, θα ισχύει:

$$H_0 = \dot{a}(t_0). \quad (2.6.1)$$

Είναι οπότε εφικτό η (2.4.1) να εκφραστεί ως

$$\frac{3c^2 H_0^2}{8\pi G} = -\frac{3kc^4}{8\pi G R_0^2} + \varepsilon_0. \quad (2.6.2)$$

Η διαστατική ανάλυση της εξίσωσης (2.6.2) υποδεικνύει ότι:

<sup>9</sup> Αν γνωρίζαμε ότι η διαστολή ήταν επιταχυνόμενη, τότε η συνάρτηση θα έστρεφε τα κοίλα προς τα άνω και προφανώς ο χρόνος Hubble θα ήταν κάτω φράγμα για την ηλικία του σύμπαντος.

$$\left[ \frac{3c^2 H_0^2}{8\pi G} \right] = \left[ \frac{3kc^4}{8\pi G R_0^2} \right] = [\varepsilon_0] = ML^{-1}T^{-2},$$

και άρα πρόκειται για μια εξίσωση που συνδέει πυκνότητες ενέργειας. Θέτουμε

$$(3c^2 H_0^2)/8\pi G = \varepsilon_c, \quad (2.6.3)$$

και

$$(3c^4)/(8\pi G R_0^2) = A > 0, \quad (2.6.4)$$

άρα

$$\varepsilon_c = -Ak + \varepsilon_0 \Leftrightarrow \varepsilon_0 - \varepsilon_c = Ak. \quad (2.6.5)$$

Από την τελευταία αυτή σχέση διακρίνονται οι τρεις παρακάτω περιπτώσεις:

- Αν  $\varepsilon_0 > \varepsilon_c$ , τότε  $k > 0$ , και άρα το σύμπαν θα είναι κλειστό (θετική καμπυλότητα).
- Αν  $\varepsilon_0 < \varepsilon_c$ , τότε  $k < 0$ , και άρα το σύμπαν θα είναι ανοικτό (αρνητική καμπυλότητα).
- Αν  $\varepsilon_0 = \varepsilon_c$ , τότε  $k = 0$ , και το σύμπαν θα είναι οριακά ανοικτό (μηδενική καμπυλότητα).

Το μέγεθος  $\varepsilon_c$  αναπαριστά την κρίσιμη πυκνότητα και το φυσικό νόημα των παραπάνω περιπτώσεων επικεντρώνεται στο ότι αν η σημερινή πυκνότητα ενέργειας, σε σύμπαν χωρίς κοσμολογική σταθερά, ξεπερνά το όριο αυτό, τότε προφανώς οι βαρυτικές επιδράσεις κάποια στιγμή θα υπερνικήσουν την ώθηση της διαστολής και θα εξαναγκάσουν το σύμπαν να καταρρεύσει σε Μεγάλη Σύνθλιψη. Στην αντίθετη περίπτωση, η βαρυτική έλξη δεν θα επαρκεί για να προκαλέσει ένα τέτοιο τέλος και η διαστολή θα συνεχιστεί επ' άπειρον.

Αναπτύσσεται τώρα σε σειρά Taylor η συνάρτηση  $a(t)$  σε μια περιοχή του  $t_0$ , προκειμένου να οριστεί μια χρήσιμη παράμετρος.



$$\begin{aligned}
a(t) &= 1 + (t - t_0)\dot{a}(t_0) + \frac{1}{2}(t - t_0)^2\ddot{a}(t_0) + \dots \Rightarrow \\
a(t) &= 1 + (t - t_0)H_0 + \frac{1}{2}(t - t_0)^2\frac{\ddot{a}(t_0)}{\dot{a}^2(t_0)}H_0^2 + \dots \Rightarrow \\
a(t) &= 1 + (t - t_0)H_0 - \frac{1}{2}(t - t_0)^2q_0H_0^2 + \dots, \tag{2.6.6}
\end{aligned}$$

όπου

$$q_0 = -\frac{\ddot{a}(t_0)}{\dot{a}^2(t_0)}. \tag{2.6.7}$$

Το μέγεθος αυτό ονομάζεται *παράμετρος επιβράδυνσης* και είναι φανερό από την (2.6.6) ότι ο παράγοντας,  $\frac{1}{2}(t - t_0)^2q_0H_0^2$ , εφόσον αφαιρείται συνεισφέρει στην μείωση των τιμών της συνάρτησης  $a(t)$  και άρα και στην επιβράδυνση της. Σημειώνεται επίσης το γεγονός, ότι η παράμετρος  $q_0$  είναι αδιάστατη.

Είναι ακόμη δυνατόν να οριστεί κατά φυσιολογικό τρόπο και η συνάρτηση επιβράδυνσης που αφορά στις τιμές της παραμέτρου επιβράδυνσης κάθε χρονική στιγμή:

$$q(t) = -\frac{\ddot{a}(t)a(t)}{\dot{a}^2(t)}. \tag{2.6.8}$$

Θέτοντας τώρα στην εξίσωση επιτάχυνσης (2.4.2)  $t = t_0$ , προκύπτει:

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_0 &= -\frac{4\pi G}{3c^2}(\varepsilon_0 + 3p_0) \Rightarrow \\
\varepsilon_0 + 3p_0 &= -\frac{3c^2}{4\pi G}\ddot{a}_0 = \frac{3c^2}{4\pi G}q_0H_0^2. \tag{2.6.9}
\end{aligned}$$

όπως θα αναλυθεί στην παράγραφο 2.7.1, είναι δυνατόν να θεωρηθεί λογική η παραδοχή ότι η πίεση, υπό την επικράτεια μη σχετικιστικής ύλης, είναι αμελητέα σε σχέση με την πυκνότητα ενέργειας, ήτοι:

$$\varepsilon_0 = \frac{3c^2}{4\pi G}q_0H_0^2. \tag{2.6.10}$$

Έτσι διαιρώντας κατά μέλη τις (2.6.10) και (2.6.3) αποδεικνύεται ο ορισμός που δόθηκε πρόχειρα στην παράγραφο (1.6) για την παράμετρο  $q_0$ :

$$q_0 = \frac{\varepsilon_0}{2\varepsilon_c}. \quad (2.6.11)$$

Συνεπώς ορίζοντας την αδιάστατη παράμετρο,  $\Omega_0 = \varepsilon_0/\varepsilon_c$ , επιπλέον θα ισχύει:

$$\Omega_0 = 2q_0. \quad (2.6.12)$$

## 2.7 Επίλυση εξισώσεων Friedmann χωρίς κοσμολογική σταθερά $\Lambda=0$

### 2.7.1 Ακριβής λύση για άδειο σύμπαν

Μια πρώτη κίνηση προκειμένου να λάβει κανείς αναλυτικές λύσεις από τις εξισώσεις, είναι μελετηθεί ένα εντελώς θεωρητικό σύμπαν με μηδενική πυκνότητα ενέργειας και άρα και πίεση. Στο σύμπαν αυτό δύναται να θεωρηθεί ότι η καμπυλότητα είναι διάφορη του μηδενός, αλλά θα δειχθεί εύκολα ότι σε αυτήν την περίπτωση πρέπει να είναι αρνητική. Από την θεώρηση αυτή, στόχος είναι να ληφθούν κάποιες δυνατές μαθηματικές λύσεις των διαφορικών εξισώσεων.

Οι εξισώσεις (2.4.3)-(2.4.5) για  $\varepsilon = 0$ , λαμβάνουν την ακόλουθη βολική μορφή:

$$\dot{a}^2 = c^2/R_0^2, \quad (2.7.1)$$

$$\dot{a}^2 = 0, \quad (2.7.2)$$

$$\dot{a}^2 = -c^2/R_0^2. \quad (2.7.3)$$

- Η (2.7.2) δίνει τετριμμένη λύση για τον παράγοντα κλίμακας την  $a(t) = const$ ;  $k = 0$ . Εφόσον,  $a(t_0) = 1$ , τότε,  $a(t) = 1$ , και άρα,  $a(0) \neq 0$ , και στο δεδομένο σύμπαν δεν συνέβη Big Bang. Πρόκειται για ένα αιώνιο στατικό σύμπαν με μηδενική καμπυλότητα, στο οποίο ισχύει η μετρική Minkowski δεδομένου ότι είναι ευκλείδειος χώρος. Επίσης τότε η Γ.Θ.Σ εκφυλίζεται σε ειδική θεωρία σχετικότητας.

- Η (2.7.3) δεν δίνει λύση καθότι ο  $a(t)$  προκύπτει φανταστικός.
- Ενδιαφέρον παρουσιάζει η (2.7.1) η οποία δίνει εφικτή λύση. Με άμεση ολοκλήρωση της εξίσωσης προκύπτει εύκολα η λύση:

$$a(t) = \pm \frac{c}{R_0} t, \quad (2.7.4)$$

το οποίο είναι ένα σύμπαν που είτε διαστέλλεται είτε συστέλλεται.

Από την (2.7.1) έχουμε ότι,  $H_0 = \frac{c}{R_0}$  και συνεπώς η ηλικία του σύμπαντος είναι ακριβώς ο χρόνος Hubble. Το σύμπαν με παράγοντα κλίμακας που δίνεται από την (2.7.4) ονομάζεται *σύμπαν Milne* και στο κεφάλαιο 5 θα μελετηθεί σαν ενδεχόμενη ασυμπτωτική κατάσταση.

Άδεια σύμπαντα, φαίνονται να χρίζουν «άδειου» ενδιαφέροντος, αφού όπως πολύ εύστοχα αναφέρει η Barbara Raydenn, ένα σύμπαν δίχως ύλη δεν περιέχει και νοήμονα όντα για να παρατηρούν τις ιδιότητες του.[22]

Παρόλα αυτά στην περίπτωση που η πυκνότητα ενέργειας είναι αμελητέα συγκριτικά με την κρίσιμη πυκνότητα, τότε η λύση (2.7.4) αποτελεί μια ενδιαφέρουσα προσέγγιση.

## 2.7.2 Ακριβής επίλυση για μηδενική πίεση

Όπως αναφέρθηκε, στόχος είναι να επιτευχθεί η επίλυση των εξισώσεων, προκειμένου να προκύψει κατά βάση η συνάρτηση του παράγοντα κοσμικής κλίμακας  $a(t)$  και μια όσον το δυνατόν πιο αντικειμενική εικόνα του σύμπαντος. Βασικό παράγωγο αυτού, θα είναι ο προσδιορισμός της ηλικίας του σύμπαντος σε κάθε περίπτωση. Η ηλικία του σύμπαντος, σύμφωνα με τις παρούσες επιστημονικές μετρήσεις, έχει εκτιμηθεί πολλάκις με διαφορετικές μεθόδους οι οποίες όλες συγκλίνουν στον αριθμό 13, 8 δισεκατομμύρια χρόνια, με ένα εύρος σφάλματος ανάλογα με την μέθοδο της μέτρησης. Η ακριβέστερη πιο πρόσφατη μέτρηση πραγματοποιήθηκε βασιζόμενη στο μοντέλο  $\Lambda$ CDM (Lambda-CDM) το οποίο θεωρείται και το πιο ακριβές από τα μοντέλα τύπου Friedmann και θα παρουσιαστεί στην συνέχεια (κεφάλαιο 4). Η ακριβής τιμή που δίνει το μοντέλο αυτό είναι  $13.798 \pm 0.037$  δισεκατομμύρια χρόνια και συμφωνεί εξαιρετικά και με τους περιορισμούς που θέτει η κοσμική ακτινοβολία υποβάθρου.

Αρχικά αναζητούνται αναλυτικές λύσεις. Μια άμεση αναλυτική επίλυση μπορεί να επιτευχθεί, αν μέσω της καταστατικής αλγεβρικής εξίσωσης απαλειφθεί κατάλληλα η συνάρτηση  $p$  της πίεσης από τις εξισώσεις. Όπως προαναφέρθηκε στην

παράγραφο (2.3) ανάλογα με την κατάσταση του αερίου, δηλαδή με τα συστατικά (συνιστώσες) του σύμπαντος, η πίεση λαμβάνει διαφορετικές μορφές. Όμως, όπως θα δειχθεί και στα κεφάλαια 3 και 4 στο σύμπαν δεν υπάρχει μοναδικό συστατικό, αλλά για την ακρίβεια συνυπάρχουν σε συγκεκριμένη αναλογία η σκοτεινή ενέργεια, η μη σχετικιστική ύλη, η ακτινοβολία και η ψυχρή σκοτεινή ύλη, τουλάχιστον στα βασικά μοντέλα. Υπάρχουν και μοντέλα με ακόμα περισσότερες συνιστώσες, οι οποίες όμως δεν έχουν επιβεβαιωθεί ως προς την ύπαρξη τους ακόμα.

Στα απλούστερα μοντέλα, που δεν λαμβάνεται υπόψιν η ύπαρξη της σκοτεινής ενέργειας, θεωρείται ότι στο σύμπαν στην παρούσα φάση επικρατεί η ύπαρξη της μη σχετικιστικής ύλης σε σχέση με την σχετικιστική. Στο πρώιμο σύμπαν δε, αυτό που επικρατούσε ήταν η ακτινοβολία οπότε και τότε η μη σχετικιστική ύλη θα μπορούσε κατά προσέγγιση να θεωρηθεί αμελητέα στα μοντέλα. Είναι σαφές, ότι ανάλογα με το συστατικό που επικρατεί στο σύμπαν θα αλλάζει και η πίεση σε αυτό και προφανώς και η πυκνότητα ενέργειας, άρα και ο παράγοντας κοσμικής κλίμακας.

Είναι εύλογο σαν ένα πρώτο βήμα να θεωρηθεί ένα σύμπαν το οποίο περιείχε ανέκαθεν μόνο μη σχετικιστική ύλη. Αν και εκ πρώτης όψεως αυτή η προσέγγιση μπορεί να μη μοιάζει και τόσο ρεαλιστική, έχει πολλά πλεονεκτήματα. Καταρχάς όπως θα δειχθεί και στη συνέχεια της εργασίας, δεδομένου ότι η ακτινοβολία στο σύμπαν είναι της τάξης του  $10^{-5}$  κατά την παρούσα εποχή, η απόκλιση ενός μοντέλου που την αγνοεί σε σχέση με ένα άλλο που τη λαμβάνει υπόψιν είναι φανερά μικρή. Επιπλέον, είναι γνωστό ότι η μη σχετικιστική ύλη κυριαρχούσε στο μεγαλύτερο μέρος της ιστορίας του Σύμπαντος μέχρι σήμερα, συνεπώς η λύση θα αποτελεί μια ικανοποιητική προσέγγιση για την δεδομένη περίοδο. Τέλος, μέσω της συγκεκριμένης προσέγγισης, το σύστημα επιδέχεται άμεση ολοκλήρωση αναλυτικά.

Σε ένα τέτοιο πρότυπο οπότε, η πίεση θα μπορούσε να αγνοηθεί ως αμελητέα, αφού, λόγω της καταστατικής εξίσωσης (2.4.7), ισχύει ότι  $p \approx 0$ . Συνεπώς, για ένα σύμπαν με μη σχετικιστική ύλη ως μοναδικό συστατικό, η (2.5.2) ολοκληρώνεται άμεσα και με παρούσες συνθήκες  $\varepsilon(t_0) = \varepsilon_0$  και  $a(t_0) = 1$  προκύπτει η πυκνότητα ενέργειας εκφρασμένη συναρτήσει του παράγοντα κοσμικής κλίμακας μέσω της:

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{a^3}. \quad (2.7.5)$$

Η ενημέρωση των εξισώσεων Friedmann με την παραπάνω σχέση δίνει:

$$\dot{a}^2 = -\frac{kc^2}{R_0^2} + \frac{8\pi G}{3c^2 a} \varepsilon_0. \quad (2.7.6)$$

Από τις (2.6.10) και (2.4.2) για  $t = t_0$ , είναι φανερό ότι:

$$\frac{c^2 k}{R_0^2} = (2q_0 - 1)H_0^2, \quad (2.7.7)$$

ή

$$\frac{c^2 k}{R_0^2} = (\Omega_0 - 1)H_0^2, \quad (2.7.8)$$

και μέσω της σχέσης αυτής απαλείφεται ο όρος,  $-kc^2/R_0^2$ , από την (2.7.6), παίρνοντας

$$\dot{a}^2 = (1 - \Omega_0)H_0^2 + \frac{8\pi G}{3c^2 a} \varepsilon_0, \quad (2.7.9)$$

αλλά λόγω της (2.6.10):

$$\begin{aligned} \dot{a}^2 &= (1 - \Omega_0)H_0^2 + \Omega_0 H_0^2 a^{-1} \Rightarrow \\ \dot{a} &= H_0(1 - \Omega_0 + \Omega_0 a^{-1})^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.7.10)$$

Η (2.7.10) είναι μια πρώτης τάξης συνήθης διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών και άρα ο χρόνος  $t$  δίνεται υπό ολοκληρωτική μορφή ως:

$$\begin{aligned} (1 - \Omega_0 + \Omega_0 a^{-1})^{-1/2} da &= H_0 dt \Rightarrow \\ t &= H_0^{-1} \int_0^a (1 - \Omega_0 + \Omega_0 a^{-1})^{-1/2} da. \end{aligned} \quad (2.7.11)$$

Η εξίσωση (2.7.11) ισχύει για κάθε  $k \in \{-1, 0, 1\}$  και παρέχει την τιμή  $t_0$ , που είναι η ηλικία ενός σύμπαντος που περιέχει σαν μοναδικό συστατικό, μη σχετικιστική ύλη σε κάθε μια από τις τρεις περιπτώσεις καμπυλότητας. Για να γίνει ο υπολογισμός αυτός, αρκεί να υπολογιστεί το ορισμένο ολοκλήρωμα της (2.7.11) από  $a = 0$  έως  $a = a_0 = 1$  δεδομένου ότι οι τιμές των σταθερών παραμέτρων  $H_0^{-1}$  και  $\Omega_0$  είναι γνωστές από την παρατήρηση. Διακρίνονται εδώ λοιπόν τρεις περιπτώσεις για το σύμπαν (κλειστό, οριακά ανοιχτό και ανοιχτό σύμπαν)

**Κλειστό σύμπαν** ( $k = +1 \Leftrightarrow \varepsilon_0 > \varepsilon_c \Leftrightarrow \Omega_0 > 1$ ) Στην περίπτωση αυτή συμφέ-  
ρει να γίνει ο μετασχηματισμός

$$1 - \cos u = \frac{2(\Omega_0 - 1)}{\Omega_0} a \Rightarrow a(u) = \frac{\Omega_0}{2(\Omega_0 - 1)}(1 - \cos u). \quad (2.7.12)$$

Τότε,  $da = \frac{\Omega_0}{2(\Omega_0 - 1)}(\sin u) du$ , και όταν,  $a \rightarrow 0$ , τότε  $u \rightarrow 0$ , ενώ όταν,  $a \rightarrow 1$ , τότε  $u \rightarrow \arccos(2\Omega_0^{-1} - 1)$ , άρα:

$$t = \frac{1}{2}\Omega_0(\Omega_0 - 1)^{-1}H_0^{-1} \int_0^u \left(1 - \Omega_0 + \frac{2\Omega_0 - 2}{1 - \cos u}\right)^{-1/2} \sin u du \Rightarrow$$

$$t = \frac{1}{2}\Omega_0(\Omega_0 - 1)^{-3/2}H_0^{-1} \int_0^u \left(\frac{1 + \cos u}{1 - \cos u}\right)^{-1/2} \sin u du \Rightarrow$$

$$t = \frac{1}{2}\Omega_0(\Omega_0 - 1)^{-3/2}H_0^{-1} \int_0^u \frac{(1 - \cos^2 u)^{1/2}}{1 + \cos u} \sin u du \Rightarrow$$

$$t = \frac{1}{2}\Omega_0(\Omega_0 - 1)^{-3/2}H_0^{-1} \int_0^u \frac{(\sin^2 u)^{1/2}}{1 + \cos u} \sin u du \Rightarrow$$

$$t = \frac{1}{2}\Omega_0(\Omega_0 - 1)^{-3/2}H_0^{-1} \int_0^u \frac{\sin^2 u}{1 + \cos u} du \Rightarrow$$

$$t = \frac{1}{2}\Omega_0(\Omega_0 - 1)^{-3/2}H_0^{-1} \int_0^u (1 - \cos u) du \Rightarrow$$

$$t = \frac{1}{2}\Omega_0(\Omega_0 - 1)^{-3/2}H_0^{-1}(u - \sin u), \quad (2.7.13)$$

$\Omega_0$	Ηλικία Σύμπαντος (Gyr)	Μέγιστο Διαστολής(Gyr)	Σύνθλιψη (Gyr)
1.1	9.44	788.45	1576.9
1.2	9.26	304.14	608.28
1.5	8.82	96.17	193.22
2.0	8.24	45.33	90.66

Πίνακας 2.1: Χρόνοι σύνθλιψης, μέγιστης διαστολής και ηλικίες σύμπαντος για τις διάφορες τιμές του  $\Omega_0$  σε κλειστό σύμπαν.

και άρα για την ηλικία του σύμπαντος αρκεί να τεθεί,  $u = \arccos(2\Omega_0^{-1} - 1)$ , και χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα,  $\sin(\arccos\alpha) = \sqrt{1 - \alpha^2}$ , τελικά:

$$t_0 = \left\{ \frac{1}{2} \Omega_0 (\Omega_0 - 1)^{-3/2} \left( \arccos(2\Omega_0^{-1} - 1) - 2\Omega_0^{-1} (\Omega_0 - 1)^{1/2} \right) \right\} H_0^{-1}. \quad (2.7.14)$$

Δηλαδή προκύπτει η ηλικία ενός σύμπαντος με θετική καμπυλότητα που περιέχει μόνο μη σχετικιστική ύλη, συναρτήσει των παραμέτρων  $H_0^{-1}$  και  $\Omega_0$ , οι οποίες είναι προσδιορίσιμες.

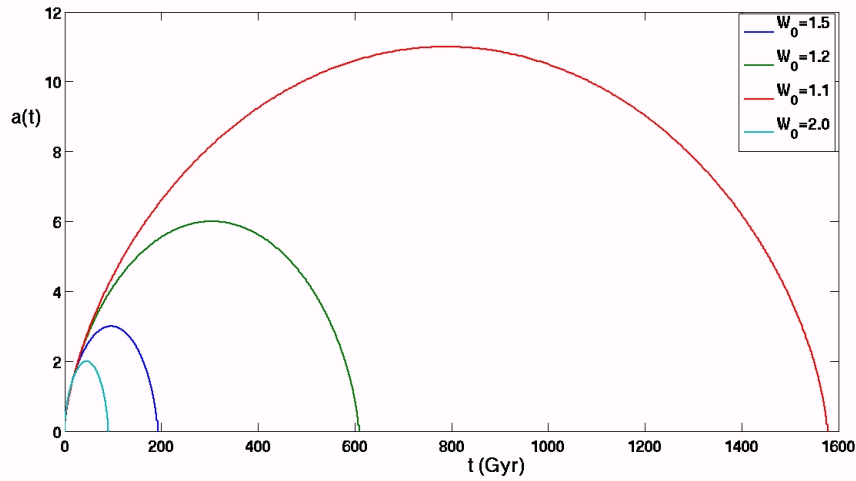
Η (2.7.14) ουσιαστικά υποδηλώνει ότι το σύμπαν έχει την ηλικία που θα είχε αν η διαστολή ήταν ομοιόμορφη καθ'όλη τη διάρκεια της εξέλιξής του, επί έναν συντελεστή - συνάρτηση της παραμέτρου επιβράδυνσης, μικρότερο της μονάδας, ο οποίος επιδρά μειωτικά στον χρόνο Hubble και άρα μειώνει την ηλικία. Κάτι τέτοιο είναι λογικό αφού δεδομένου ότι η συνάρτηση  $a(t)$  στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω, η διαστολή στο παρελθόν ήταν ταχύτερη αφού ανάλογα με την τιμή της παραμέτρου  $\Omega_0$ , η συνάρτηση

$$\phi(\Omega_0) \equiv \frac{1}{2} \Omega_0 (\Omega_0 - 1)^{-3/2} \left( \arccos(2\Omega_0^{-1} - 1) - 2\Omega_0^{-1} (\Omega_0 - 1)^{1/2} \right),$$

φαίνεται να μειώνει την ηλικία του σύμπαντος.

Προκύπτει εύκολα από την (2.7.12) ότι η συνάρτηση  $a(u)$  λαμβάνει μέγιστη τιμή όταν,  $u = \pi$  και μηδενίζεται όταν,  $u = 0$  και  $u = 2\pi$ .

Από αυτό συνάγεται ότι εφόσον μιλάμε για ένα κλειστό σύμπαν, ο παράγοντας κοσμικής κλίμακας μεγιστοποιείται σε χρόνο,  $t_{max} = \frac{\pi}{2} \Omega_0 (\Omega_0 - 1)^{-3/2} H_0^{-1}$ , όπου τότε λήγει και η διαστολή του σύμπαντος και ξεκινά η περίοδος συστολής. Η συστολή θα λήξει σε singularity (Μεγάλη Σύνθλιψη) όταν,  $t = \tau = \pi \Omega_0 (\Omega_0 - 1)^{-3/2} H_0^{-1}$ . Είναι ξεκάθαρο από τα παραπάνω ότι η συνάρτηση του παράγοντα κοσμικής κλίμακας είναι φραγμένη και μάλιστα



**Σχήμα 2.7.1:** Γραφική παράσταση  $a(t)$  για κλειστό σύμπαν, για διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\Omega_0$  (2, 1.5, 1.2, 1.1) και  $H_0^{-1} = 14.43 \text{Gyr}$ . Παρατηρούμε ότι όσο μεγαλύτερη η τιμή της παραμέτρου, τόσο πιο σύντομη η κατάρρευση του σύμπαντος.

$$\sup \{a(t)\} = \max \{a(t)\} = a(t = t_{max}) = \frac{\pi}{2} \Omega_0 (\Omega_0 - 1)^{-3/2} H_0^{-1} = \frac{\Omega_0}{\Omega_0 - 1}.$$

**Οριακά ανοικτό σύμπαν** ( $k = 0 \Leftrightarrow \varepsilon_0 = \varepsilon_c \Leftrightarrow \Omega_0 = 1$ ) Θέτοντας στην (2.7.11),  $\Omega_0 = 1$ , εύκολα προκύπτει ότι:

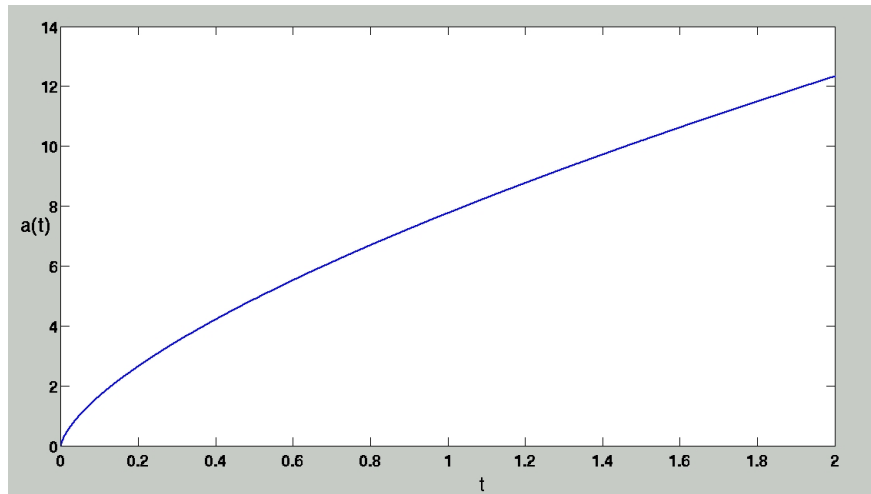
$$t = H_0^{-1} \int_0^a \sqrt{a} da = \frac{2}{3} H_0^{-1} a^{3/2}, \quad (2.7.15)$$

και άρα η λύση για την συνάρτηση  $a(t)$  θα είναι:

$$a(t) = \left( \frac{3}{2} H_0 t \right)^{2/3}. \quad (2.7.16)$$

Η συνάρτηση αυτή είναι μη φραγμένη, γεγονός που επισφραγίζει την αιώνια διαστολή.





Σχήμα 2.7.2: Γραφική παράσταση συντελεστή κοσμικής κλίμακας οριακά ανοικτού σύμπαντος  $\Omega_0 = 1$

Θέτοντας,  $t = t_0$ , αμέσως προκύπτει η ηλικία ενός μηδενικής καμπυλότητας σύμπαντος (flat universe) που περιείχε ανέκαθεν μη σχετικιστική ύλη :

$$t_0 = \frac{2}{3}H_0^{-1}. \quad (2.7.17)$$

Εδώ ο συντελεστής - συνάρτηση του  $\Omega_0$  είναι σταθερή και ίση με  $2/3$ . Αυτό οφείλεται προφανώς στην μηδενική καμπυλότητα του συγκεκριμένου σύμπαντος.

Με  $H_0^{-1} = 14.43Gyr$ , το συγκεκριμένο σύμπαν, δημιουργήθηκε πριν από περίπου  $9.62Gyr$ . Το μοντέλο αυτό είναι γνωστό στην βιβλιογραφία ως σύμπαν Einstein - de Sitter (EdS) και θα παρουσιαστεί στο κεφάλαιο 5 ως οριακή κατάσταση.

**Ανοικτό σύμπαν** ( $k = -1 \Leftrightarrow \varepsilon_0 < \varepsilon_c \Leftrightarrow \Omega_0 < 1$ ) Δεδομένου ότι στο ανοικτό σύμπαν θα είναι  $\Omega_0 < 1$  και άρα στην (2.7.13) ο όρος  $(\Omega_0 - 1)^{-3/2} = i(1 - \Omega_0)^{-3/2}$  είναι φανταστικός, είναι μαθηματικώς απαραίτητο να τεθεί,  $u = i\lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  προκειμένου να απλοποιηθεί η ανάλυση. Τότε:

$$t = i\frac{1}{2}\Omega_0(1 - \Omega_0)^{-3/2}H_0^{-1}(i\lambda - \sin(i\lambda)) \Rightarrow$$

$$t = i^2\frac{1}{2}\Omega_0(1 - \Omega_0)^{-3/2}H_0^{-1}\lambda + \frac{1}{2}\Omega_0(1 - \Omega_0)^{-3/2}H_0^{-1}(-i\sin(i\lambda)) \Rightarrow$$

$$t = -\frac{1}{2}\Omega_0(1 - \Omega_0)^{-3/2}H_0^{-1}\lambda + \frac{1}{2}\Omega_0(1 - \Omega_0)^{-3/2}H_0^{-1}\sinh\lambda \Rightarrow$$

$$t = \frac{1}{2} \Omega_0 (1 - \Omega_0)^{-3/2} H_0^{-1} (\sinh \lambda - \lambda), \quad (2.7.18)$$

με  $\Omega_0 < 1$ .

και από την (2.7.12):

$$1 - \cos(i\lambda) = \frac{2(\Omega_0 - 1)}{\Omega_0} a \Rightarrow$$

$$\cosh \lambda - 1 = \frac{2(1 - \Omega_0)}{\Omega_0} a \Rightarrow a = \left( \frac{\Omega_0}{2 - 2\Omega_0} \right) [\cosh \lambda - 1]. \quad (2.7.19)$$

Έτσι και σε αυτήν περίπτωση η συνάρτηση  $a(t)$  είναι μη φραγμένη και θα αυξάνει μονοτονικά επ' άπειρον. Είναι δυνατόν χρησιμοποιώντας μια δεύτερης τάξης προσέγγιση Taylor για την,  $\sinh \lambda - \lambda \approx \frac{\lambda^3}{3!}$ , να εκφραστεί η  $a(t)$  προσεγγιστικά χωρίς την χρήση της παραμέτρου  $\lambda$  και να δειχθεί ότι η συνάρτηση όντως στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω.

Όταν,  $t \gg 1$  και άρα,  $\lambda \gg 1$ , ισχύουν ικανοποιητικά οι προσεγγίσεις:  $\cosh \lambda - 1 \approx \sinh \lambda - \lambda \approx \cosh \lambda \approx \sinh \lambda \approx \frac{1}{2} \exp \lambda$  και τότε η σχέση,  $t = t(\lambda)$ , είναι δυνατόν να λάβει την προσεγγιστική μορφή:

$$t = \frac{1}{4} H_0^{-1} \Omega_0 (1 - \Omega_0)^{-3/2} \exp \lambda, \quad (2.7.20)$$

Με  $\lambda \gg 1$

Έτσι, καθώς  $t \rightarrow \infty$  ισχύει:

$$a(t) \rightarrow \frac{1}{2} \Omega_0 (1 - \Omega_0)^{-1} \exp \lambda \rightarrow \frac{1}{2} \Omega_0 (1 - \Omega_0)^{-1} H_0 \Omega_0^{-1} (1 - \Omega_0)^{3/2} t = \frac{1}{2} H_0 \sqrt{1 - \Omega_0} t. \quad (2.7.21)$$

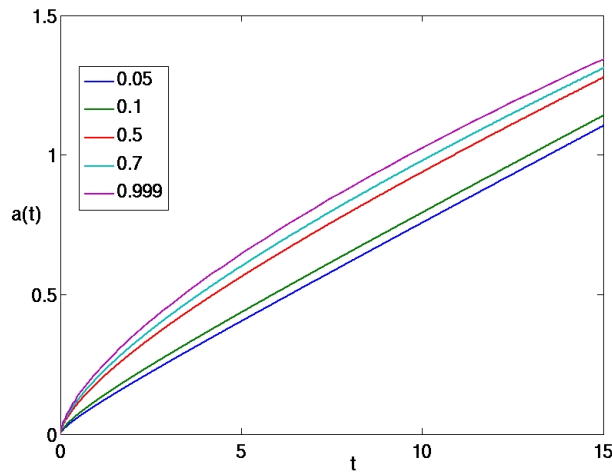
Η τιμή της παραμέτρου,  $\lambda = \lambda_0$  (σήμερα), υπολογίζεται από την σχέση (2.7.19) θέτοντας,  $a_0 = 1$  και άρα θα είναι

$$\lambda_0 = \cosh^{-1} \{2\Omega_0^{-1} - 1\}. \quad (2.7.22)$$

Οπότε, για την ηλικία του σύμπαντος  $t_0$ , ύστερα από πράξεις:

$\Omega_0$	$t_0$
0.01	14.14
0.05	13.49
0.1	12.96
0.5	10.87
0.8	10.04
0.9	9.82

Πίνακας 2.2: Ηλικία ανοικτού σύμπαντος για διάφορες τιμές του  $\Omega_0$  και χρόνο Hubble  $H_0^{-1} = 14.43Gyr$



Σχήμα 2.7.3: Η γραφική παράσταση του συντελεστή κοσμικής κλίμακας σε ανοικτό σύμπαν για διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\Omega_0 < 1$  (0.05, 0.1, 0.5, 0.7, 0.999).

$$t_0 = H_0^{-1} \left[ (1 - \Omega_0)^{-1} - \frac{1}{2} \Omega_0 (1 - \Omega_0)^{-3/2} \cosh^{-1} \{ 2\Omega_0^{-1} - 1 \} \right]. \quad (2.7.23)$$

Στον πίνακα 2.2 φαίνεται πώς μεταβάλλεται η ηλικία του σύμπαντος ανάλογα με την παράμετρο  $\Omega_0$  και συνεπώς την πυκνότητα της ύλης. Όσο μεγαλύτερη η παράμετρος, τόσο πιο κοντά στην κρίσιμη πυκνότητα είναι η σημερινή τιμή της πυκνότητας ενέργειας και άρα τόσο πιο μικρή θα είναι η ηλικία.

Επίσης για μικρές τιμές της παραμέτρου  $\Omega_0$  προκύπτει ότι η ταχύτητα της διαστολής στο παρελθόν δεν ήταν κατά πολύ μεγαλύτερη από αυτήν που παρατηρείται σήμερα και άρα η ηλικία του σύμπαντος δεν διαφέρει σημαντικά από τον χρόνο Hubble (αρκετά ομοιόμορφη διαστολή). Αυτό εξηγεί και το γεγονός, ότι σε ένα σύμπαν μηδενικής καμπυλότητας ( $\Omega_0 = 1$ ) ο ρυθμός διαστολής είναι μικρότερος. Σε κάθε περίπτωση συμπεραίνουμε, ότι όσο μεγαλύτερη είναι η πυκνότητα ενέργειας σε ένα σύμπαν που περιέχει μόνο μη σχετικιστική ύλη, τόσο μικρότερη θα είναι και η ηλικία του σύμπαντος αυτού.

### 2.7.3 Λύση για ραδιενεργά σύμπαντα

Όταν το κοσμικό ρευστό κυβερνάται από ακτινοβολία, κάτι το οποίο συνέβαινε στο πρώιμο σύμπαν, όπως προαναφέρθηκε, η καταστατική εξίσωση (2.3.1) γίνεται

$$p = \frac{1}{3}\varepsilon. \quad (2.7.24)$$

Έτσι η (2.2.6) με ολοκλήρωση δίνει:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{1}{a^4}. \quad (2.7.25)$$

Για την σημερινή τιμή της πυκνότητας ενέργειας από την (2.6.10) και με χρήση της παρούσας καταστατικής έχουμε:

$$\varepsilon_0 = \frac{3}{8\pi G} q_0 c^2 H_0^2. \quad (2.7.26)$$

Η εξίσωση (2.6.2) λόγω της (2.7.26) παράγει το δεδομένο:

$$-\frac{kc^2}{R_0^2} = H_0^2(1 - q_0), \quad (2.7.27)$$

και έτσι οι εξισώσεις Friedmann γίνονται:

$$\dot{a}^2 = H_0^2(1 - q_0) + q_0 H_0^2 a^{-2} \Rightarrow t = H_0^{-1} \int_0^a (1 - q_0 + q_0 a^{-2})^{-1/2} da \quad (2.7.28)$$

Υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα κατά τα γνωστά στην σχέση (2.7.28) λαμβάνονται αναλυτικές λύσεις για ανοικτό, κλειστό και οριακά ανοικτό σύμπαν με ακτινοβολία. Κάτι τέτοιο δεν θα ήταν αρκετά χρήσιμο αφού το κύριο συστατικό του σύμπαντος σήμερα προφανώς και δεν είναι η ακτινοβολία. Παρόλα αυτά, όπως ειπώθηκε, για χρονικές στιγμές  $0 < t \ll 1$  (δηλαδή κοντά στην δημιουργία του σύμπαντος), το μοντέλο αυτό παρουσιάζει ενδιαφέρον και άρα είναι χρήσιμη η μελέτη της συμπεριφοράς της λύσεως κοντά στο  $t = 0$ .

**Συμπεριφορά λύσεως για  $t \approx 0$** 

Για εξαιρετικά μικρούς χρόνους, ήτοι  $t \approx 0$  η καμπυλότητα του σύμπαντος είναι δυνατόν να θεωρηθεί μηδενική. Αν το σύμπαν σε μια πολύ μικρή περιοχή της γέννησής του περιείχε μη σχετικιστική ύλη, τότε θα προέκυπτε ότι η πυκνότητα  $\varepsilon$  θα ήταν ίση με  $\varepsilon_0 a^{-3}$  και άρα το γινόμενο  $\varepsilon a^2$  ίσο με  $\varepsilon_0 a^{-1}$ . Θέτοντας προς χάριν λιτότητας  $\xi \equiv 4\pi G / 3c^2$  οι εξισώσεις Friedmann λαμβάνουν την μορφή που ισχύει για οποιοδήποτε σχήματος σύμπαν:

$$\dot{a}^2 = 2\xi\varepsilon_0 a^{-1}. \quad (2.7.29)$$

Ολοκληρώνοντας την (2.7.29), εύκολα λαμβάνεται η λύση κοντά στην γέννηση ενός σύμπαντος με μη σχετικιστική ύλη

$$a(t) = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} (2\xi\varepsilon_0)^{1/2} t^{2/3}. \quad (2.7.30)$$

Έτσι συμπεραίνεται ότι στο πρώιμο στάδιο ενός τέτοιου σύμπαντος, ισχύει:

$$a \propto t^{2/3}, \quad (2.7.31)$$

ανεξάρτητα από το είδος καμπυλότητας που θα αναπτύξει στην συνέχεια.

Στην πραγματικότητα, η φυσική υποδεικνύει, ότι το σύμπαν σε πρώιμα στάδια περιείχε αποκλειστικά σχετικιστική ύλη (ακτινοβολία). Τότε η πυκνότητα  $\varepsilon$  θα ήταν ίση με  $\varepsilon_0 a^{-4}$  και άρα το γινόμενο  $\varepsilon a^2$  ίσο με  $\varepsilon_0 a^{-2}$ . Άρα στην περίπτωση αυτή θα ισχύει ότι

$$\dot{a}^2 = 2\xi\varepsilon_0 a^{-2} \Rightarrow a(t) = (8\xi\varepsilon_0)^{1/4} t^{1/2}. \quad (2.7.32)$$

Άρα

$$a \propto t^{1/2}. \quad (2.7.33)$$

Συνεπώς, σε ένα σύμπαν με ακτινοβολία κοντά στην γέννηση, ο παράγοντας κοσμικής κλίμακας εξελίσσεται με τον ίδιο τρόπο που εξελίσσεται και ο όρος  $t^{1/2}$ . Κάτι

τέτοιο δεν ισχύει στα πληθωριστικά μοντέλα, τα οποία δεν αποτελούν αντικείμενο μελέτης της παρούσας εργασίας.

### 2.7.4 Συναρμοσμένη λύση ακτινοβολίας και μηδενικής πίεσης

Στην παράγραφο αυτή, αναζητείται λύση για τις συναρτήσεις πυκνότητας και παράγοντα κοσμικής κλίμακας, για ένα σύμπαν που στο πρώιμο στάδιο του περιείχε ακτινοβολία, σταδιακά άρχισε να αυξάνει η ποσότητα μη σχετικιστικής ύλης, σε ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα τα ποσοστά ακτινοβολίας και ύλης εξισώθηκαν και σήμερα κυβερνά η μη σχετικιστική ύλη. Γενικευμένα μοντέλα τέτοιου τύπου μελέτησαν οι Chernin(1965,1968), McIntosh (1968) καθώς και οι Landsberg & Park (1975).

Η διαδικασία ανάλυσης ξεκινάει υποθέτοντας αυθαίρετα, ότι η συνάρτηση της πυκνότητας ενέργειας έχει την εξής μορφή:

$$\varepsilon = Aa^{-4}(a^2 + b)^{1/2}, \quad (2.7.34)$$

όπου  $A$  και  $b$  πραγματικές θετικές σταθερές.

Παρόλα αυτά, μια επιλογή τέτοιου τύπου συνάρτησης δεν είναι και τόσο αυθαίρετη αφού:

- Όταν  $a \ll 1$ , τότε,  $a^2 + b \approx b$  και άρα,  $\varepsilon \propto a^{-4}$ , που είναι η περίπτωση ραδιενεργού σύμπαντος.
- Όταν  $a \gg 1$ , τότε,  $a^2 + b \approx a^2$  και άρα,  $\varepsilon \propto a^{-3}$ , που είναι η περίπτωση μηδενικής πίεσης.

Επίσης όταν,  $b \rightarrow 0$ , τότε από (2.7.34),  $A \rightarrow \varepsilon_0$ .

Οι εξισώσεις Friedmann αποδεικνύεται ότι δύναται να γραφτούν στην μορφή:

$$\dot{a}^2 = -kc^2 + 2\xi\varepsilon a^2. \quad (2.7.35)$$

Αντικαθιστώντας την συνάρτηση της υπόθεσης (2.7.34) στην (2.7.35) προκύπτει:

$$\dot{a}^2 = -kc^2 + 2\xi Aa^{-2}(a^2 + b)^{1/2} \Rightarrow \dot{a} = \sqrt{-kc^2 + 2\xi Aa^{-2}(a^2 + b)^{1/2}}. \quad (2.7.36)$$

Και αυτή η εξίσωση είναι χωριζομένων μεταβλητών οπότε:

$$\frac{da}{\sqrt{-kc^2 + 2\xi A a^{-2}(a^2 + b)^{1/2}}} = dt \Rightarrow$$

$$t = \int_0^a \frac{da}{\sqrt{-kc^2 + 2\xi A a^{-2}(a^2 + b)^{1/2}}} \Rightarrow$$

$$t = \int_0^a \frac{ada}{\sqrt{-kc^2 a^2 + 2\xi A (a^2 + b)^{1/2}}}. \quad (2.7.37)$$

Θέτοντας τώρα,  $x = (a^2 + b)^{1/2}$ , αντικαθίσταται,  $-kc^2 a^2 = kc^2 b - kc^2 x^2$  και  $ada = x dx$ .

Επίσης όταν,  $a \rightarrow 0$ , τότε,  $x \rightarrow b^{1/2}$ , οπότε η (2.7.37) γίνεται:

$$t = \int_{b^{1/2}}^{(a^2+b)^{1/2}} \frac{x dx}{\sqrt{kc^2 b - kc^2 x^2 + 2\xi A x}}, \quad (2.7.38)$$

και το πρόβλημα ανάγεται σε υπολογισμό ολοκληρώματος.

Διακρίνονται και σε αυτήν την περίπτωση οι παρακάτω υποπεριπτώσεις, ανάλογα με την τιμή της παραμέτρου καμπυλότητας  $k$ :

**Θετική καμπυλότητα** ( $k = 1$ ) Θέτοντας την παράμετρο  $k$  ίση με την μονάδα και ύστερα από κατάλληλους τριγωνομετρικούς μετασχηματισμούς, προκειμένου να υπολογιστεί αναλυτικά το ολοκλήρωμα της (2.7.38), λαμβάνεται η σχέση,  $a = a(t)$  σε παραμετρική μορφή ως:

$$a(u) = \left\{ \left( \frac{\xi A}{c^2} + \frac{\varsigma}{c^2} \sin u \right)^2 - b \right\}^{1/2}, \quad (2.7.39)$$

$$\varsigma = \sqrt{bc^2 + \frac{\xi^2 A^2}{c^2}}, \quad (2.7.40)$$

$$tc^3 = \xi A \left[ u - \sin^{-1} \left\{ \frac{b^{1/2}c^2 - \xi A^2}{c\varsigma} \right\} \right] - c\varsigma \left[ \cos u - \cos \left( \sin^{-1} \left\{ \frac{b^{1/2}c^2 - \xi A^2}{c\varsigma} \right\} \right) \right], \quad (2.7.41)$$

με,  $u(0) = \sin^{-1} \left\{ \frac{b^{1/2}c^2 - \xi A^2}{c\varsigma} \right\}$ , την τιμή της παραμέτρου  $u$ , τη στιγμή της γέννησης του σύμπαντος.

Για την ηλικία του σύμπαντος, τίθεται στην (2.7.39),  $a = a_0 = 1$ , και άρα για τη σημερινή τιμή της παραμέτρου  $u$ :

$$u_0 = \sin^{-1} \left\{ \frac{c^4 b^{1/2} - \xi \varsigma A}{\varsigma c^2} \right\}. \quad (2.7.42)$$

Συνεπώς

$$t_0 = c^{-3} \xi A \left[ \sin^{-1} \left\{ \frac{c^4 b^{1/2} - \xi \varsigma A}{\varsigma c^2} \right\} - \sin^{-1} \left\{ \frac{b^{1/2}c^2 - \xi A^2}{c\varsigma} \right\} \right] - c^{-2} \varsigma \left[ \cos \left\{ \sin^{-1} \left\{ \frac{c^4 b^{1/2} - \xi \varsigma A}{\varsigma c^2} \right\} \right\} - \cos \left( \sin^{-1} \left\{ \frac{b^{1/2}c^2 - \xi A^2}{c\varsigma} \right\} \right) \right]. \quad (2.7.43)$$

Οι σταθερές  $A$  και  $b$  υπολογίζονται από μετρήσεις διαστημικών αποστολών των παραμέτρων Hubble και επιβράδυνσης.

Στην περίπτωση αυτή θα είναι:

$$a(t = 0) = a \left( u = \sin^{-1} \left\{ \frac{b^{1/2}c^2 - \xi A^2}{c\varsigma} \right\} \right) = 0,$$

και

$$\max \{a(u)\} = a(u = \pi/2) = \left\{ \left( \frac{\xi A}{c^2} + \frac{\varsigma}{c^2} \right)^2 - b \right\}^{1/2},$$



και άρα στο σημείο αυτό σταματάει η διαστολή του σύμπαντος (συγκεκριμένα την χρονική στιγμή:)

$$t_{max} = \xi A \left[ \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \left\{ \frac{b^{1/2} c^2 - \xi A^2}{c \varsigma} \right\} \right] + c \varsigma \cos \left( \sin^{-1} \left\{ \frac{b^{1/2} c^2 - \xi A^2}{c \varsigma} \right\} \right).$$

Ο κύκλος ζωής αυτού του σύμπαντος λήγει σε Μεγάλη Σύνθλιψη όταν  $t = 2t_{max}$ , δηλαδή τότε θα είναι:

$$a(2t_{max}) = 0.$$

**Μηδενική καμπυλότητα** ( $k = 0$ ) Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος (2.7.38) εδώ είναι πιο εύκολος και άμεσος και δίνει για την συνάρτηση κοσμικής κλίμακας την λύση:

$$a(t) = \sqrt{(b^{4/3} + wt)^{4/3} - b}, \quad (2.7.44)$$

όπου

$$w \equiv \frac{3}{2} (2\xi A)^{1/2}.$$

**Αρνητική καμπυλότητα** ( $k = -1$ ) Η ανάλυση εδώ είναι όμοια με την πρώτη περίπτωση θετικής καμπυλότητας και δίνει:

$$a(u) = \left\{ \left( -\frac{\xi A}{c^2} + \frac{\varsigma}{c^2} \cosh u \right)^2 - b \right\}^{1/2}, \quad (2.7.45)$$

$$\varsigma = \sqrt{bc^2 + \frac{\xi^2 A^2}{c^2}}, \quad (2.7.46)$$

$$tc^3 = \xi A \left[ u - \cosh^{-1} \left\{ \frac{b^{1/2}c^2 + \xi A^2}{c\xi} \right\} \right] - c\xi \left[ \sinh u - \sinh \left( \cosh^{-1} \left\{ \frac{b^{1/2}c^2 + \xi A^2}{c\xi} \right\} \right) \right]. \quad (2.7.47)$$

### Λύση Πίεσης

Παραγωγίζοντας την (2.7.36) και εκτελώντας πράξεις προκύπτει η:

$$\ddot{a} = -\xi A a^{-3} (a^2 + 2b)(a^2 + b)^{-1/2}, \quad (2.7.48)$$

και με την βοήθεια της (2.4.2):

$$3p = -(\xi a)^{-1} \ddot{a} - \varepsilon. \quad (2.7.49)$$

Έτσι από την (2.7.48) και από την αρχική υπόθεση (2.7.34) για την πυκνότητα ενέργειας η πίεση δύναται να εκφραστεί από την

$$p = \frac{bA}{3} a^{-4} (a^2 + b)^{-1/2}, \quad (2.7.50)$$

όπου ανάλογα με την περίπτωση για την παραμετρική συνάρτηση του παράγοντα κοσμικής κλίμακας εκφράζεται συναρτήσει της παραμέτρου  $u$ .

Η καταστατική εξίσωση δίνεται επίσης σε παραμετρική μορφή από τις (2.7.34) και (2.7.50) ενώ ο λόγος πίεσης / πυκνότητας από την:

$$\frac{p}{\varepsilon} = \frac{b}{3} (a^2 + b)^{-1}. \quad (2.7.51)$$

Είναι φανερό ότι όταν,  $a \rightarrow 0$ , τότε,  $p/\varepsilon \rightarrow 1/3$ , ενώ όταν,  $a \gg 1$ , τότε,  $p/\varepsilon \rightarrow 0$ , αποτελέσματα που συμφωνούν με το γεγονός ότι κοντά στην γέννηση του σύμπαντος επικρατούσε η σχετικιστική ύλη, ενώ όταν μεγάλωσαν κατά πολύ οι κλίμακες η μη σχετικιστική ύλη.

Σε κάθε περίπτωση, για μικρούς χρόνους, θα είναι,  $a \propto t^{1/2}$  γεγονός που συμφωνεί και με την (2.7.32). Στην περίπτωση μηδενικής καμπυλότητας για μεγάλους χρόνους έχουμε ότι,  $a \propto t$ . Όταν η καμπυλότητα είναι θετική διαπιστώνεται εύκολα,

ότι οι μεγάλες τιμές για τον χρόνο και τον παράγοντα κοσμικής κλίμακας, προκύπτουν όταν οι τιμές της παραμέτρου  $u$  είναι μεγάλες και τότε οι όροι  $ca$  αλλά και  $c^2t$  συμπεριφέρονται όπως ο όρος  $\xi e^u$  και άρα η  $a(t)$  απειρίζεται όπως το  $ct$  υπό συνθήκες μηδενικής πίεσης, όταν  $k = -1$ .

## Κεφάλαιο 3

# Πρότυπα Friedmann με κοσμολογική σταθερά

### 3.1 Η έννοια της κοσμολογικής σταθεράς

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, παρουσιάστηκαν μερικά από τα βασικά πρότυπα τύπου Friedmann, οι ρίζες των οποίων πηγάζουν από τις εξισώσεις πεδίου της Γ.Θ.Σ και από την Κοσμολογική Αρχή, που εκφράζεται μέσω της μετρικής Robertson - Walker. Τα μοντέλα που συζητήθηκαν δεν εμπεριείχαν τον όρο της κοσμολογικής σταθεράς του Einstein, ο οποίος, όπως αναφέρθηκε στα κεφάλαια 1 και 2, τον εισήγαγε προκειμένου να λάβει στατικές λύσεις από τις κοσμολογικές του εξισώσεις. Όταν η ιδέα του διαστελλόμενου σύμπαντος ήρθε στο προσκήνιο όμως, περί το 1930, ο ίδιος δήλωσε ότι η κοσμολογική σταθερά ήταν «το μεγαλύτερο λάθος της ζωής του». Αν δεν την είχε εισάγει και εμπιστευόταν τα συμπεράσματα που του υποδείκνυε η θεωρία, θα είχε διαπιστώσει την δυναμικότητα του σύμπαντος, που από μόνη της ήταν σαφώς μεγάλη ανακάλυψη, άσχετα με το αν το σύμπαν συστέλλεται ή διαστέλλεται.

Παρόλα αυτά, η επιστήμη «διαστέλλεται» όπως το σύμπαν, αλλά και «γυρίζει» όπως η γη. Το μεγαλύτερο λάθος του Einstein, αυτή η ad hoc συνθήκη, η κοσμολογική σταθερά, αναβίωσε ύστερα από τόσα χρόνια σήμερα που οι παρατηρήσεις υπονοούν ότι το σύμπαν διαστέλλεται επιταχυνόμενα και ότι η ορατή ύλη δεν είναι το μόνο υπαρκτό συστατικό του σύμπαντος.

Η σκοτεινή ενέργεια, είναι νεαρή έννοια και η πραγματική της φύση είναι ένα επίπονο αίνιγμα για τους σύγχρονους επιστήμονες. Είναι σήμερα γνωστό, ότι η διαστολή θα πρέπει να είναι επιταχυνόμενη και σύμφωνα με τα μοντέλα Friedmann και την σχετικότητα, κάτι τέτοιο θα ήταν μαθηματικώς εφικτό μονάχα υπό την παρουσία της κοσμολογικής σταθεράς, η οποία αυτήν την φορά θα συνείσφερε

στη διαστολή του σύμπαντος. Παρόλα αυτά, η σκοτεινή ενέργεια παραμένει ένα υποθετικό είδος ενέργειας που έχει ισχυρή αρνητική πίεση, αποτέλεσμα ποιοτικά ανάλογο με μια δύναμη που δρα κατασταλτικά στην βαρύτητα σε μεγάλες κλίμακες. Κάτι τέτοιο φυσικά παραμένει μοντέλο και η εισαγωγή του μεγέθους αυτού χρησιμοποιείται για να επεξηγήσει την παρατήρηση του επιταχυνόμενως διαστελλόμενου σύμπαντος.

Στις αρχές της δεκαετίας του '90, όλοι πίστευαν με βεβαιότητα ότι το σύμπαν διαστέλλεται επιβραδυνόμενα και δέχονταν τα μοντέλα που περιγράφηκαν παραπάνω σαν πραγματικότητα. Είτε η πυκνότητα ενέργειας, που παρατηρείται σήμερα στο σύμπαν, θα ξεπερνούσε την κρίσιμη πυκνότητα και το σύμπαν θα κατέρρεε, είτε όχι και θα συνέχιζε την αιώνια διαστολή. Σε κάθε περίπτωση η συνάρτηση του παράγοντα κοσμικής κλίμακας, θα έπρεπε να στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω, δηλαδή η διαστολή να επιβραδύνεται. Το 1998 όμως, οι αστρονόμοι Adam Ries και Krieger-Eisenhower, χρησιμοποιώντας δεδομένα από το διαστημικό τηλεσκόπιο Hubble (HST) για την μεταβολή της λαμπρότητας μακρινών νεφελωμάτων σουπερνόβα (supernova nebulas), έδειξαν ότι πολλά χρόνια πριν, το σύμπαν διαστελλόταν πιο αργά από ότι σήμερα. Συνεπώς, η διαστολή οφείλει να είναι επιταχυνόμενη και άρα η ύπαρξη μιας συνιστώσας που θα συνεισφέρει στη διαστολή, έγινε απαραίτητη.

Τρεις είναι οι πιθανές εξηγήσεις των αποτελεσμάτων αυτών.

- Το πρώτο σενάριο, είναι η θεωρία σχετικότητας να παράγει λανθασμένα αποτελέσματα, που δεν συγκλίνουν τελικά σε μεγάλες κλίμακες τόσο με την παρατήρηση, ήτοι πρόκειται για ένα μοντέλο που δεν μπορεί να εξηγήσει, παρά μόνο να προσεγγίσει με *ad hoc* προσθήκες, την πραγματικότητα. Στην περίπτωση αυτή, τα αποτελέσματα που αναφέρονται, όχι μόνο στην εργασία αυτή, αλλά και στην επιστήμη γενικότερα, θα πρέπει να αντικατασταθούν ριζικά από νέα θεωρία βαρύτητας, που θα συμφωνεί περισσότερο με την παρατήρηση. Κάτι τέτοιο όμως, σύμφωνα με την επιστημονική μέθοδο, θα γίνει μόνο μετά από την εξάντληση ανάλυσης των παρόντων μοντέλων και αυτή τότε θα είναι η ουσία της θεωρητικής υπόστασης της εικόνας που είχε η επιστήμη τόσο καιρό για το σύμπαν. Αν δεν εξαντλούνταν η θεωρία μέσω της χρήσης της, ώστε να οδηγήσει σε αντιφάσεις και να κινητοποιήσει την επιστημονική κοινότητα να την αντικαταστήσει, πιθανό να μην ήταν δυνατόν να σχηματοποιηθεί και η πραγματική εικόνα για τον κόσμο.
- Το δεύτερο σενάριο, προϋποθέτει την ύπαρξη ενός νέου είδους δυναμικής ενέργειας ή πεδίου, κάτι που θα γεμίζει τον χώρο σε όλη του την έκταση και η επίδρασή του στην διαστολή του σύμπαντος είναι η αντίθετη αυτής της κλασικής μάζας και ενέργειας. Κάποιοι θεωρητικοί έχουν ονομάσει κιόλας

την ύπαρξη αυτή «πεμπτουσία» επηρεασμένοι από το πέμπτο στοιχείο της αρχαίας ελληνικής φιλοσοφίας. Στη βιβλιογραφία, όταν κανείς αναφέρεται σε σκοτεινή ενέργεια, συνήθως τη συσχετίζει με ένα τέτοιου είδους πεδίο. Κατά αυτόν τον τρόπο η πυκνότητά της δεν θα είναι σταθερή, όπως στο τρίτο σενάριο.

- Το τρίτο σενάριο σχετικά με την φύση της σκοτεινής ενέργειας, είναι η επιτάχυνση να οφείλεται σε μια φυσιολογική συμπεριφορά του κενού χώρου. Ο Albert Einstein ήταν ο πρώτος που διαπίστωσε ότι ο κενός χώρος δεν είναι εντελώς κενός. Έτσι, τα μοντέλα με κοσμολογική σταθερά της σχετικότητας, κάνουν μια επιπλέον πρόβλεψη: ο κενός χώρος δεν είναι πραγματικά κενός, αλλά περιέχει την δικιάς του φύσης ενέργεια. Επειδή όμως αυτή η ενέργεια εμφανίζεται σαν ιδιότητα του ίδιου του χώρου, δεν θα απλώνεται καθώς ο χώρος διαστέλλεται. Διαστολή όμως σημαίνει επιπλέον κενός χώρος και άρα επιπλέον ποσότητα της συγκεκριμένης ενέργειας, συνεπώς το σύμπαν θα διαστέλλεται όλο και ταχύτερα. Το συγκεκριμένο σενάριο, είναι αυτό που υποστηρίζει την θεωρία σχετικότητας και ταυτίζει την σκοτεινή ενέργεια με την κοσμολογική αυτή σταθερά.

Παρόλα αυτά, η φύση της ενέργειας αυτής, αποτελεί ακόμα αίνιγμα και το μόνο σίγουρο είναι ότι κάτι ωθεί το σύμπαν σε επιταχυνόμενη διαστολή. Καθώς η έρευνα στον συγκεκριμένο τομέα της φυσικής εμβαθύνει, και όσο περισσότερες πληροφορίες για την σκοτεινή ενέργεια ανακαλύπτει το ανθρώπινο είδος, τόσο περισσότερο θα βελτιώνονται και τα μαθηματικά πρότυπα Friedmann.

Στην παρούσα φάση όμως, εισάγοντας κοσμολογικό όρο στα μοντέλα Friedmann, προκύπτουν επιταχυνόμενες λύσεις οι οποίες αξίζει να μελετηθούν.

Παρακάτω αναλύονται τα μοντέλα αυτά με την εισαγωγή του κοσμολογικού όρου, κυρίως σύμφωνα με το σύγγραμμα του J.N.Islam [14].

## 3.2 Μορφή προτύπων με κοσμολογικό όρο

Η διαδικασία εισαγωγής του όρου θα γίνει από την οπτική γωνία του Einstein, ο οποίος τον εισήγαγε προκειμένου να αποκτήσει στατικές λύσεις, δεδομένου ότι στατικές λύσεις για τις (2.2.1) υπό την παρουσία μάζας και ενέργειας δεν υπάρχουν. Συνεπώς, προκειμένου να προκύψει στατική λύση θα πρέπει οι (2.2.1) να τροποποιηθούν ως:

$$\mathbf{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G/c^4 T_{\mu\nu}, \quad (3.2.1)$$

όπου  $\Lambda$  η κοσμολογική σταθερά με  $[\Lambda] = L^{-2}$ .<sup>1</sup>

Αν  $\Lambda = 0$ , τότε τα μοντέλα εκφυλίζονται σε αυτά του κεφαλαίου 2 οπότε στο κεφάλαιο αυτό θα αναζητηθούν λύσεις της (3.2.1) για μη μηδενικές τιμές της  $\Lambda$ . Η διαδικασία εξαγωγής είναι όμοια και συγκεκριμένα προκύπτουν οι παρακάτω μετατροπές εξισώσεων

$$(2.2.3) \Rightarrow 3(\dot{R}^2 + c^2 k) = 8\pi G \varepsilon R^2 / c^2 + c^2 \Lambda R^2, \quad (3.2.2)$$

$$(2.2.4) \Rightarrow 2R\ddot{R} + \dot{R}^2 + kc^2 = -8\pi G p R^2 / c^2 + c^2 \Lambda R^2. \quad (3.2.3)$$

Άρα τα πρότυπα Friedmann με κοσμολογική σταθερά θα έχουν την παρακάτω μορφή:

$$\ddot{a} = -(4\pi G/3)(\varepsilon + 3p)a/c^2 + c^2 \Lambda/3, \quad (3.2.4)$$

$$\dot{a}^2 = c^2/R_0^2 + (8\pi G/3)\varepsilon a^2/c^2 + c^2 \Lambda/3, \quad (3.2.5)$$

$$\dot{a}^2 = (8\pi G/3)\varepsilon a^2/c^2 + c^2 \Lambda/3, \quad (3.2.6)$$

$$\dot{a}^2 = -c^2/R_0^2 + (8\pi G/3)\varepsilon a^2/c^2 + c^2 \Lambda/3, \quad (3.2.7)$$

$$\dot{\varepsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(p + \varepsilon) = 0, \quad (3.2.8)$$

$$p = \omega\varepsilon. \quad (3.2.9)$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις γίνεται αντιληπτό, ότι το να προστεθεί ο κοσμολογικός αυτός όρος είναι γεγονός ισοδύναμο με το να ληφθεί υπόψιν μια επιπλέον συνιστώσα στο σύμπαν με πυκνότητα ενέργειας

<sup>1</sup>Πολλές φορές η κοσμολογική σταθερά επιλέγεται έτσι ώστε να έχει διαστάσεις  $T^{-2}$ . Τότε ο όρος που εμφανίζεται στις εξισώσεις Friedmann είναι  $\Lambda/3$  αντί για  $c^2 \Lambda/3$  έτσι ώστε η εξίσωση να περιέχει όρο με διαστάσεις  $T^{-2}$ .

$$\varepsilon_{\Lambda} = \frac{c^4}{8\pi G} \Lambda. \quad (3.2.10)$$

Παρακάτω θα εισαχθεί ο όρος αυτός στην γενικευμένη μορφή των προτύπων (κεφάλαιο 4).

## 3.3 Σύμπαντα με κοσμολογική σταθερά

### 3.3.1 Στατικό σύμπαν Einstein

Για να μην επέλθει κατάρρευση σε ένα σύμπαν όπου η αρνητικά προσημασμένη βαρυτική έλξη το ωθεί προς σύνθλιψη, θα πρέπει να υπάρχει μια θετική αντίδραση η οποία συμπυκνώνεται στον κοσμολογικό όρο.

Επιπλέον, η έννοια της στατικότητας συνεπάγεται άμεσα ότι η συνάρτηση του συντελεστή κλίμακας είναι σταθερή.

Άρα στο σύμπαν του Einstein θα ήταν:

$$a(t) = 1. \quad (3.3.1)$$

Τότε θα ίσχυε ότι,  $\dot{a}(t) = \ddot{a}(t) = 0$  και άρα σε συνθήκες αμελητέας πίεσης οι (3.2.5)-(3.2.7) γίνονται:

$$-\frac{c^2 k}{R_0^2} + \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon + \frac{c^2 \Lambda}{3} = 0, \quad (3.3.2)$$

και η εξίσωση επιτάχυνσης

$$-\frac{4\pi G}{3c^2} \varepsilon + \frac{c^2 \Lambda}{3} = 0. \quad (3.3.3)$$

Κάτι τέτοιο δίνει τα εξής αποτελέσματα

$$\varepsilon = \frac{c^4 \Lambda}{4\pi G}, \quad (3.3.4)$$

$$k = \Lambda R_0^2. \quad (3.3.5)$$



Από την (3.3.4) στο σύμπαν Einstein πρέπει κανείς να επιλέξει την κοσμολογική σταθερά έτσι ώστε  $\Lambda = 4\pi G\varepsilon/c^4$ .

Από την (3.3.5) δε, εφόσον  $\Lambda > 0$ , προκύπτει ότι  $k > 0$ , άρα ένα τέτοιο σύμπαν θα είχε αναγκαστικά θετική καμπυλότητα.

Ο Friedmann απέδειξε ότι η κατάσταση στατικού σύμπαντος είναι ασταθής. Το συγκεκριμένο συμπέρασμα προκύπτει θεωρώντας την λύση στην μορφή

$$a(t) = 1 + \delta a(t),$$

με  $0 < \delta a \ll 1$  μια διαταραχή της λύσης [15].

### 3.3.2 Πρότυπα με ποικίλες τιμές της κοσμολογικής σταθεράς

Βάσει των παρόντων επιστημονικών δεδομένων στην κοσμολογία, οι στατικές λύσεις των εξισώσεων των προτύπων για το σύμπαν δεν παρουσιάζουν ιδιαίτερο κοσμολογικό ενδιαφέρον. Αντίθετα, οι λύσεις κοσμολογικών μοντέλων με κοσμολογική σταθερά που πυροδοτεί δυναμικά σύμπαντα είναι βασικότερες. Δυναμικές λύσεις με κοσμολογική σταθερά πρώτος μελέτησε ο Lemaitre, οπότε μοντέλα Friedmann τέτοιου τύπου ονομάζονται συχνά μοντέλα Lemaitre, προς τιμήν του Γάλλου φυσικού.

Όπως αναφέρθηκε και στην παράγραφο (3.2) η εισαγωγή του κοσμολογικού όρου έχει σαν φυσικό ισοδύναμο την εισαγωγή ενός πλασματικού ρευστού. Το ρευστό αυτό θα έχει τανυστή ορμής / ενέργειας [14]:

$$\hat{T}_{\mu\nu} = (\varepsilon_\Lambda + p_\Lambda)u_\mu u_\nu - p_\Lambda g_{\mu\nu} = \frac{c^4}{8\pi G} \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (3.3.6)$$

Συνεπώς οι εξισώσεις πεδίου του Einstein γράφονται εναλλακτικά και ως:

$$\mathbf{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G/c^4 \left( T_{\mu\nu} + \hat{T}_{\mu\nu} \right). \quad (3.3.7)$$

Ακολουθώντας τα ίδια βήματα εξαγωγής είναι δυνατόν να λάβει κανείς την αντίστοιχη εξίσωση της (2.6.2) η οποία εδώ γράφεται:

$$\varepsilon_c = \frac{3c^2 H_0^2}{8\pi G} = -\frac{3kc^4}{8\pi G R_0^2} + \varepsilon_0 + \frac{c^4}{8\pi G} \Lambda. \quad (3.3.8)$$

Ανακαλώντας τον ορισμό της παραμέτρου πυκνότητας  $\Omega_0$  και διαιρώντας την παραπάνω σχέση με την κρίσιμη πυκνότητα  $\varepsilon_c$  προκύπτει:

$$1 = -\frac{kc^2}{H_0^2 R_0^2} + \Omega_0 + \frac{c^2}{3H_0^2} \Lambda \Leftrightarrow \frac{kc^2}{H_0^2 R_0^2} = \Omega_0 - 1 + \frac{c^2}{3H_0^2} \Lambda. \quad (3.3.9)$$

Ενώ η εξίσωση (2.6.9) μετατρέπεται στην:

$$\varepsilon_0 + 3p_0 = \frac{3c^2}{8\pi G} \Omega_0 H_0^2 + \frac{c^4}{4\pi G} \Lambda, \quad (3.3.10)$$

και η (2.7.7) στην:

$$\frac{c^2 k}{R_0^2} - \Lambda c^2 = (\Omega_0 - 1) H_0^2. \quad (3.3.11)$$

Έστω τώρα ένα σύμπαν με μηδενική πίεση, αλλά μη μηδενική κοσμολογική σταθερά. Τότε, από τις (3.3.9), (3.3.10), (3.3.11) και από το γεγονός ότι οι εξισώσεις (2.4.6) και 2.5.2) παραμένουν ανέπαφες από την εισαγωγή του όρου, αντί για την (2.7.10) είναι δυνατόν να δειχθεί ότι λαμβάνεται η:

$$\dot{a}^2 = c^2 a^{-1} \left[ -k R_0^2 a + \frac{\Lambda a^3}{3} + \delta \right], \quad (3.3.12)$$

όπου:

$$\delta = H_0^2 c^{-2} - \frac{\Lambda}{3} + \frac{k}{R_0^2} = const. \quad (3.3.13)$$

### 3.3.2.1 Πρότυπο De Sitter

Το πρότυπο αυτό αντιστοιχεί στην ειδική περίπτωση της (3.3.12), όπου  $k = 0$  και  $\delta = 0$ .

Κάνοντας χρήση των εξισώσεων (3.3.10) και (3.3.11), απαλείφεται η  $\Omega_0$  και συνεπώς για  $p_0 = 0$ :

$$8\pi G\varepsilon_0 = 3c^2 \left[ \frac{c^2 k}{R_0^2} + H_0^2 \right] - \Lambda c^4. \quad (3.3.14)$$

Έτσι αν  $k = 0$  και  $\delta = 0$ , από την (3.3.13) συνεπάγεται ότι:

$$H_0^2 = \frac{1}{3}c^2\Lambda, \quad (3.3.15)$$

και τελικά από την (3.3.14) προκύπτει ότι  $\varepsilon_0 = 0$ , δηλαδή το σύμπαν De Sitter έχει μηδενική πυκνότητα ενέργειας, αλλά μη μηδενική πυκνότητα σκοτεινής ενέργειας. Η λύση για τον παράγοντα κοσμικής κλίμακας σε ένα τέτοιου είδους σύμπαν, προκύπτει εύκολα από την (3.3.12) με ολοκλήρωση και το αποτέλεσμα θα είναι ότι

$$a(t) \propto \exp \left\{ (\Lambda/3)^{1/2} tc \right\} \quad (3.3.16)$$

Δηλαδή, σε ένα σύμπαν που περιέχει μόνο θετική κοσμολογική σταθερά, η κλίμακα αυξάνει εκθετικά, αφού δεν υπάρχει βαρύτητα να αντιστέκεται στην δράση της σκοτεινής ενέργειας. Το πρότυπο De Sitter για  $\Lambda = 0$  δίνει την τετριμμένη περίπτωση που περιγράφηκε στην παράγραφο (2.7.1).

Μια παρόμοια μορφή λύσεως, εμφανίζεται στην θεωρία σταθεράς κατάστασης των *Bondi & Gold* (1948) και *Fred Hoyle* (1948) με μόνη διαφορά ότι στην θεωρία αυτή υπάρχει μια συνεχή παραγωγή ύλης στο σύμπαν που οφείλεται στο περίφημο *C-πεδίο* [11, 12, 6].

Μια ενδιαφέρουσα ιδιότητα των προτύπων τέτοιας φύσεως είναι ότι ο παράγοντας κλίμακας δεν μηδενίζεται σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα στο παρελθόν και άρα δε συνέβη Μεγάλη Έκρηξη στο συγκεκριμένο σύμπαν (προκύπτει από την (3.3.16)).

Σημειώνεται ότι ο *Hoyle*, καθηγητής του *Stephen Hawking* και βασικός υποστηρικτής της θεωρίας της σταθεράς κατάστασης, ήταν αυτός που εισήγαγε τον όρο «Big Bang» με σαφή τόνο ειρωνείας, καθότι αρνιόταν να πιστέψει μια στιγμή δημιουργίας στο παρελθόν του σύμπαντος.

Τέλος, για την μετρική που προκύπτει από την (3.3.16) είναι δυνατόν να δειχθεί ότι οι ισομετρίες της αποτελούν μια 10-παραμετρική ομάδα, κάτι που ισοδυναμεί με τις δυνατές περιστροφές σε έναν πενταδιάστατο χώρο με μετρική της οποίας τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου είναι  $(1, -1, -1, -1, -1)$  και μηδενικά όλα τα υπόλοιπα στοιχεία. Αυτή η αλγεβρική ομάδα είναι γνωστή ως ομάδα De Sitter.

### 3.3.2.2 Πρότυπο Lemaitre

Το μοντέλο αυτό αντιστοιχεί σε λύση της (3.3.12) με  $k = 1$  και  $\delta > \delta_0$  όπου  $\delta_0$  είναι η τιμή που παίρνει η συγκεκριμένη σταθερά όταν τεθεί  $\Lambda = \Lambda_E = 4\pi G\varepsilon/c^4$  (σύμπαν Einstein). Από την παραγώγιση της (3.3.12) κανείς λαμβάνει την :

$$\ddot{a} = \frac{1}{3}c^2\Lambda a - \frac{c^2\delta}{2a^2}. \quad (3.3.17)$$

Στο μοντέλο αυτό η αρχική συνθήκη είναι  $a(0) = 0$  και η συνάρτηση είναι αύξουσα και τέτοια ώστε,  $a(t) \propto t^{2/3}$ . Έτσι για μικρές τιμές του χρόνου:

$$a(t) = \varrho t^{2/3} \quad (3.3.18)$$

με  $\varrho = \text{const}$ .

Αντικαθιστώντας οπότε στην (3.3.17) θα προκύψει η παρακάτω έκφραση για τη δεύτερη παράγωγο του συντελεστή κλίμακας:

$$\ddot{a} = \frac{1}{3}c^2\Lambda\varrho t^{2/3} - \frac{c^2\delta}{2\varrho^2}t^{-4/3}. \quad (3.3.19)$$

Εδώ, όταν  $t \rightarrow 0^+$ , τότε  $\frac{1}{3}c^2\Lambda\varrho t^{2/3} \rightarrow 0$ , ενώ  $-\frac{c^2\delta}{2\varrho^2}t^{-4/3} \rightarrow -\infty$  και οπότε συμπεραίνεται ότι κοντά στην γέννηση, η επιτάχυνση της διαστολής είναι αφενός πολύ μεγάλη, αλλά αφετέρου επιβραδυνόμενη. Αυτό σημαίνει, ότι η συνάρτηση θα στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω.

Η δεύτερη παράγωγος  $\ddot{a}$  δε, μηδενίζεται όταν  $\frac{1}{3}c^2\Lambda\varrho t^{2/3} = \frac{c^2\delta}{2\varrho^2}t^{-4/3}$  δηλαδή όταν  $t = T = [3\delta / (2\varrho^2\Lambda)]^{1/2}$  και άρα  $\dot{a}_{min} = \dot{a}(T)$  ενώ από την (3.3.17) γίνεται σαφές ότι τότε  $a = a_T = (3\delta/2\Lambda)^{1/3}$ .

Άρα, το σημείο  $(T, a_T)$  είναι σημείο καμπής και η συνάρτηση στρέφει τα κοίλα προς τα άνω για τιμές του χρόνου μεγαλύτερες από  $T$ . Έτσι, η διαστολή στο σημείο αυτό, ξεκινά να επιταχύνεται και τελικά καταλήγει να συμπεριφέρεται όπως

σε ένα σύμπαν De Sitter. Ενδιαφέρον στην λύση αυτή, παρουσιάζει το γεγονός ότι υπάρχει μια  $\epsilon$  – περιοχή του σημείου καμπής, μη αμελητέου εύρους, όπου η κατάσταση της διαστολής παραμένει σχεδόν σταθερή.

Αυτό οφείλεται στην πτώση τιμών της παραγώγου λίγο πριν φτάσει το κοίλο μέρος της συνάρτησης στο σημείο καμπής και οι αρχικά χαμηλές τιμές της πρώτης παραγώγου του κυρτού εκθετικού μέρους. Έτσι παρουσιάζεται μια περίοδος καθυστέρησης αύξησης ταχύτητας κατά την διαστολή.

Η περιοχή αυτή του άξονα του χρόνου αναγράφεται ως *coasting period*.

Λαμβάνοντας υπόψιν τις μικρές διακυμάνσεις στις μεταβολές των τιμών του παράγοντα κλίμακας, από την τιμή  $a = a_T = (3\delta/2\Lambda)^{1/3}$  η εξίσωση Friedmann (3.3.12) για ένα σύμπαν θετικής καμπυλότητας ( $k = 1$ ) αποδεικνύεται ότι μετατρέπεται στην ακόλουθη προσεγγιστική διαφορική εξίσωση[14]:

$$\dot{a}^2 \approx \frac{c^2}{R_0^2} \left( -1 + \left( \frac{9\delta^2\Lambda}{4} \right)^{1/3} + \Lambda \left[ a - \left( \frac{3\delta}{2\Lambda} \right)^{1/3} \right]^2 \right), \quad (3.3.20)$$

Με λύση την :

$$a(t) = R_0 \left( \frac{3\delta}{2\Lambda} \right)^{1/3} \left\{ 1 + \left[ 1 - \left( \frac{9\delta^2\Lambda}{4} \right)^{-1/3} \right]^{1/2} \sinh \left( \Lambda^{1/2}(t - t_m)c \right) \right\}, \quad (3.3.21)$$

όπου  $t_m$ , είναι η χρονική στιγμή όπου η ταχύτητα της διαστολής ελαχιστοποιείται. Η σχέση αυτή φανερώνει την συμπεριφορά της λύσης καθώς το σύμπαν διανύει το μεταβατικό στάδιο (*coasting period*). Εδώ φαίνεται ξεκάθαρα, ότι στα πρότυπα τέτοιου τύπου με κοσμολογική σταθερά, ένα σύμπαν παρότι έχει θετική καμπυλότητα, συνεχίζει να διαστέλλεται χωρίς να επέρχεται κατάρρευση.

Αν στο  $\delta$  δοθούν τιμές κοντά στην τιμή  $2/(3\Lambda)^{1/2}$ , τότε μπορεί κανείς να ρυθμίσει το *coasting period*, έτσι ώστε η διάρκειά του να είναι μεγάλη.

### 3.3.2.3 Σύμπαν Eddington-Lemaitre

Πρόκειται για οριακή περίπτωση των μοντέλων Lemaitre, και έλαβε το όνομα του επειδή ασχολήθηκε μαζί του εκτενώς ο Eddington (1930). Ουσιαστικά είναι η περίπτωση όπου  $k = 1$  και  $\delta = 2/(3\Lambda)^{1/2}$ , δηλαδή οι τιμές από το στατικό σύμπαν Einstein.

Το πρότυπο αυτό έχει απείρως μεγάλο σε διάρκεια coasting period, οπότε αν  $a(0) = 0$  τότε  $a(t) \rightarrow (3\delta/2\Lambda)^{1/3}$ , καθώς  $t \rightarrow \infty$ , ενώ αν  $a(0) = (3\delta/2\Lambda)$ , τότε  $a(t) \rightarrow \infty$ , καθώς  $t \rightarrow \infty$ , καταλήγοντας μέσω εκθετικής αύξησης στην προσέγγιση της συμπεριφοράς De Sitter.

Το μοντέλο αυτό υποδεικνύει την μαθηματική αστάθεια του σύμπαντος Einstein, καθώς υπό μικρές διαταραχές ένα σύμπαν με κοσμολογική σταθερά που λαμβάνει την τιμή του Einstein, είτε θα αρχίσει να διαστέλλεται εκθετικά προς το άπειρο εγκαταλείποντας την αρχικά σταθερή του κατάσταση, είτε θα ξεκινήσει διαστολή από Big Bang και θα καταλήξει ασυμπτωτικά στην σταθερή τιμή του παράγοντα κοσμικής κλίμακας.

Σε κάθε περίπτωση, έχει δειχθεί, ότι ακόμα και με την κατάλληλη τιμή του κοσμολογικού όρου, δεν είναι δυνατόν, εφόσον υπάρχουν μικρές διαταραχές, να υπάρξει αιώνιο στατικό σύμπαν.

Επιπλέον περιπτώσεις συμπάντων με κοσμολογική σταθερά, θα μελετηθούν στο αμέσως επόμενο κεφάλαιο, ως ειδικές περιπτώσεις του γενικού μοντέλου που θα παρουσιαστεί στη συνέχεια.

## Κεφάλαιο 4

# Πρότυπα Friedmann για σύμπαντα με $N$ συνιστώσες

### 4.1 Εξαγωγή προτύπων με $N$ συνιστώσες

Τα μοντέλα τα οποία μελετήθηκαν στην εργασία αυτή, κατά βάση, δεν ήταν παρά ειδικές περιπτώσεις συμπάντων με μία ή το πολύ δύο συνιστώσες (ύλη - ακτινοβολία ή ύλη - κοσμολογική σταθερά). Στο κεφάλαιο αυτό, θα δοθεί η γενική εικόνα των κοσμολογικών προτύπων καθώς το σύμπαν μπορεί να θεωρηθεί ως μια συνάθροιση οσοδήποτε αριθμού συνιστωσών. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιήθηκε κυρίως το σύγγραμμα [22].

Οι συνιστώσες που θα λαμβάνονται υπόψιν, εξαρτώνται άμεσα από τις υπάρχουσες φυσικές θεωρήσεις και ανακαλύψεις και είναι δυνατόν να δημιουργηθούν έτσι διαφορετικά μοντέλα τύπου Friedmann.

Ξεκινώντας την ανάλυση για τη γενική περίπτωση, ένα σύμπαν με  $N$  συνιστώσες, οι οποίες έχουν πυκνότητες ενέργειας  $\varepsilon_i$  με  $i = 1, \dots, N$ , έχει πιέσεις που δίνονται από τις καταστατικές εξισώσεις ως:

$$p_i = \omega_i \varepsilon_i. \quad (4.1.1)$$

Συνδυάζοντας την καταστατική εξίσωση με την εξίσωση διατήρησης, προκύπτει ότι η πυκνότητα θα δίνεται σαν συνάρτηση του συντελεστή κλίμακας μέσω της σχέσης

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{i,0} a^{-3-3\omega_i}, \quad (4.1.2)$$

με  $\varepsilon_{i,0}$  τις αντίστοιχες τιμές πυκνοτήτων την σημερινή εποχή<sup>1</sup>.

Είναι προφανές, ότι η πυκνότητα  $\varepsilon$  που εμφανίζεται στις εξισώσεις Friedmann, δεν είναι παρά το άθροισμα όλων των πυκνοτήτων  $\varepsilon_i$  ενώ η πίεση, το άθροισμα όλων των πιέσεων που δίνονται από την καταστατική εξίσωση (4.1.1).

Συνεπώς, για ένα σύμπαν με  $N$  συστατικά, τα πρότυπα λαμβάνουν την παρακάτω γενικευμένη μορφή :

$$\ddot{a} = -(4\pi G/3) \sum_{i=1}^N [(1 + 3\omega_i)\varepsilon_{i,0}a^{-3-3\omega_i}] a/c^2, \quad (4.1.3)$$

$$\dot{a}^2 = c^2/R_0^2 + (8\pi G/3) \sum_{i=1}^N (\varepsilon_{i,0}a^{-3-3\omega_i}) a^2/c^2, \quad (4.1.4)$$

$$\dot{a}^2 = (8\pi G/3) \sum_{i=1}^N (\varepsilon_{i,0}a^{-3-3\omega_i}) a^2/c^2, \quad (4.1.5)$$

$$\dot{a}^2 = -c^2/R_0^2 + (8\pi G/3) \sum_{i=1}^N (\varepsilon_{i,0}a^{-3-3\omega_i}) a^2/c^2, \quad (4.1.6)$$

$$\dot{\varepsilon}_i + 3\frac{\dot{a}}{a}(p_i + \varepsilon_i) = 0, \quad (4.1.7)$$

$$p_i = \omega_i\varepsilon_i, \quad (4.1.8)$$

ή ισοδύναμα

$$\ddot{a} = -(4\pi G/3) \sum_{i=1}^N [(1 + 3\omega_i)\varepsilon_{i,0}a^{-2-3\omega_i}] /c^2, \quad (4.1.9)$$

$$\dot{a}^2 = -kc^2/R_0^2 + (8\pi G/3) \sum_{i=1}^N (\varepsilon_{i,0}a^{-1-3\omega_i}) /c^2 ; k \in \{-1, 0, 1\}, \quad (4.1.10)$$

$$\dot{\varepsilon}_i + 3\frac{\dot{a}}{a}(p_i + \varepsilon_i) = 0, \quad (4.1.11)$$

<sup>1</sup>Για παράδειγμα η  $\varepsilon_{2,0}$  είναι η τιμή της πυκνότητας ενέργειας του συστατικού 2, σήμερα.



$$p_i = \omega_i \varepsilon_i. \quad (4.1.12)$$

Εν συνεχεία ορίζονται τα εξής αδιάστατα μεγέθη:

$$\Omega_{i,0} = \frac{\varepsilon_{i,0}}{\varepsilon_c}, \quad (4.1.13)$$

$$\Omega_k = -\frac{\kappa c^2}{R_0^2 H_0^2}, \quad (4.1.14)$$

με

$$\sum_{i=1}^N (\Omega_{i,0}) = \Omega_0. \quad (4.1.15)$$

Ανακαλώντας τώρα την σχέση (3.3.9) και βάσει των παραπάνω ορισμών γίνεται εμφανές ότι θα ισχύει:

$$\Omega_0 + \Omega_k = 1. \quad (4.1.16)$$

Έγινε έτσι φανερό ότι η σχέση (4.1.16) είναι ισοδύναμη με την (3.3.9) που είναι η αντίστοιχη σχέση για τις πυκνότητες ενέργειας με κοσμολογική σταθερά και θεωρώντας ότι η παράμετρος  $\Omega_0 = \sum_{i=1}^N (\Omega_{i,0})$  περιέχει σαν όρο αθροίσματος τον κοσμολογικό όρο,

$$\Omega_k = 1 - \sum_{i=1}^N (\Omega_{i,0}). \quad (4.1.17)$$

Εν συνεχεία, χρησιμοποιώντας τις (2.6.3), (4.1.13), (4.1.14) η (4.1.10) γίνεται:

$$\dot{a}^2 = H_0^2 \left[ \left[ 1 - \sum_{i=1}^N (\Omega_{i,0}) \right] + \sum_{i=1}^N (\Omega_{i,0} a^{-1-3\omega_i}) \right], \quad (4.1.18)$$

ή

$$\dot{a}^2 = H_0^2 \left[ 1 + \sum_{i=1}^N \Omega_{i,0} (a^{-1-3\omega_i} - 1) \right]. \quad (4.1.19)$$

Αν επιπλέον κανονικοποιηθεί και η μεταβλητή του χρόνου ως,

$$\tau = H_0 t, \quad (4.1.20)$$

προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση:

$$\frac{da(\tau)}{d\tau} = \left( 1 + \sum_{i=1}^N \Omega_{i,0} (a^{-1-3\omega_i} - 1) \right)^{1/2}, \quad (4.1.21)$$

η οποία είναι η *αδιάστατη γενική εξίσωση Friedmann* και η ηλικία του σύμπαντος δίνεται σε κάθε περίπτωση σε ολοκληρωτική μορφή από την

$$\tau_0 = \int_0^1 \left( 1 + \sum_{i=1}^N \Omega_{i,0} (a^{-1-3\omega_i} - 1) \right)^{-1/2} da. \quad (4.1.22)$$

Η γενικότητα της εξίσωσης (4.1.21) γίνεται εμφανής αν μελετηθούν μερικά παραδείγματα συμπάντων. Ισχύει για ομογενή και ισότροπα εξελισσόμενα σύμπαντα με οσοδήποτε πλήθος συστατικών, οποιοδήποτε είδος καμπυλότητας και με το κάθε συστατικό να έχει δεδομένη καταστατική εξίσωση πυκνότητας - πίεσης.

Ο αναλυτικός υπολογισμός του ολοκληρώματος στην (4.1.22) δεν είναι εφικτός στην γενική περίπτωση. Για κατάλληλες όμως δοθείσες τιμές των  $\Omega_{i,0}$ , είναι δυνατόν να υπολογιστούν αριθμητικές λύσεις. Παρουσιάζονται παρακάτω συνοπτικά οι διάφορες περιπτώσεις.

## 4.2 Ειδικές περιπτώσεις του γενικού μοντέλου

### 4.2.1 Σύμπαν Einstein-De Sitter

Σε ένα σύμπαν που περιέχει μόνο μη σχετικιστική ύλη, όπου  $i = 1$  και  $\Omega_{1,0} = \Omega_{m,0} = \Omega_0$  η (4.1.22) γίνεται

$$\tau_0 = \int_0^1 \left( 1 - \Omega_0 + \frac{\Omega_0}{a} \right)^{-1/2} da. \quad (4.2.1)$$

Όταν το σύμπαν έχει μηδενική καμπυλότητα θα είναι  $\Omega_0 = 1$ , οπότε

$$\tau_0 = \int_0^1 a^{1/2} da, \quad (4.2.2)$$

και η λύση του συγκεκριμένου μοντέλου είναι η (2.7.15).

Εάν η καμπυλότητα του σύμπαντος είναι θετική, η λύση δίνεται από τις (2.7.12), (2.7.13), ενώ αν είναι αρνητική από τις (2.7.19), (2.7.20).

#### 4.2.2 Μη σχετικιστική ύλη + Κοσμολογική σταθερά

Ένα σύμπαν με μηδενική καμπυλότητα και με μοναδικές συνιστώσες μη σχετικιστική ύλη και κοσμολογική σταθερά, παρουσιάζει υψηλό ενδιαφέρον καθώς προσεγγίζει πολύ καλά την εικόνα του Σύμπαντος την σημερινή εποχή. Προκειμένου η καμπυλότητα να είναι μηδενική στο συγκεκριμένο σύμπαν, θα ισχύει:

$$\Omega_{\Lambda,0} = 1 - \Omega_{m,0}. \quad (4.2.3)$$

Η εξίσωση (4.1.21) τότε λαμβάνει τη μορφή:

$$\frac{da(\tau)}{d\tau} = (1 + \Omega_{m,0} (a^{-1} - 1) + \Omega_{\Lambda,0} (a^2 - 1))^{1/2}, \quad (4.2.4)$$

ή

$$\frac{da(\tau)}{d\tau} = \left( \frac{\Omega_{m,0}}{a} + \Omega_{\Lambda,0} a^2 \right)^{1/2}, \quad (4.2.5)$$

και αντίστοιχα η ηλικία του σύμπαντος θα δίνεται από την ,

$$\tau_0 = \int_0^1 \left( \frac{\Omega_{m,0}}{a} + \Omega_{\Lambda,0} a^2 \right)^{-1/2} da. \quad (4.2.6)$$

Η εξίσωση (4.2.3) υποδεικνύει ότι,  $\Omega_{\Lambda,0} > 0$ , όταν  $0 < \Omega_{m,0} < 1$  και  $\Omega_{\Lambda,0} < 0$ , όταν  $\Omega_{m,0} > 1$ .

Στην περίπτωση που  $\Omega_{\Lambda,0} > 0$ , το σύμπαν διαστέλλεται αιώνια (θετική κοσμολογική σταθερά), ενώ στην περίπτωση που  $\Omega_{\Lambda,0} < 0$ , η κοσμολογική σταθερά συνεισφέρει ως ελκτική δύναμη και το σύμπαν καταρρέει. Η διαστολή στην δεύτερη περίπτωση, θα σταματήσει όταν  $\frac{da(\tau)}{d\tau} = 0$ , δηλαδή όταν:

$$a = a_{max} = \left( -\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{\Lambda,0}} \right)^{1/3},$$

και η κατάρρευση θα επέλθει όταν:

$$\tau = \tau_{crunch} = \frac{2\pi}{3\sqrt{\Omega_{m,0} - 1}}.$$

Για παράδειγμα σε ένα σύμπαν με,  $\Omega_{\Lambda,0} = -1$  και άρα,  $\Omega_{m,0} = 2$ , η κατάρρευση επέρχεται την χρονική στιγμή:  $\tau = \frac{2\pi}{3}$  και  $a_{max} = 2^{1/3}$ .

Η εξίσωση Friedmann, σε αυτήν την περίπτωση, ολοκληρώνεται και δίνει την λύση [22]:

$$\tau = \frac{2}{3\sqrt{\Omega_{m,0} - 1}} \arcsin \left( \frac{a}{a_{max}} \right)^{3/2}, \quad (4.2.7)$$

ή για τον συντελεστή κοσμικής κλίμακας:

$$a(t) = \left( \frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0} - 1} \sin^2 \left( \frac{3}{2} \sqrt{\Omega_{m,0} - 1} \tau \right) \right)^{1/3}. \quad (4.2.8)$$

Στην περίπτωση τώρα που,  $\Omega_{\Lambda,0} > 0$  και συνεπώς,  $0 < \Omega_{m,0} < 1$  και πάλι η εξίσωση Friedmann ολοκληρώνεται και η λύση δίνεται ως:

$$\tau = \frac{2}{3\sqrt{1-\Omega_{m,0}}} \ln \left[ \left( \frac{a}{a_{m\Lambda}} \right)^{3/2} + \sqrt{1 + \left( \frac{a}{a_{m\Lambda}} \right)^3} \right], \quad (4.2.9)$$

όπου,  $a_{m\Lambda} = \left( \frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{\Lambda,0}} \right)^{1/3}$ , η τιμή του παράγοντα κλίμακας την εποχή που οι τιμές για τις πυκνότητες μη σχετικιστικής ύλης και κοσμολογικής σταθεράς ήταν εξισωμένες.

Για τον παράγοντα κοσμικής κλίμακας, αποδεικνύεται ότι η λύση είναι η [22, 14, 16]:

$$a(\tau) = \left( \frac{\Omega_{m,0}}{1-\Omega_{m,0}} \right)^{1/3} \left( \sinh \left[ \frac{3\sqrt{1-\Omega_{m,0}}}{2} \tau \right] \right)^{2/3}. \quad (4.2.10)$$

Για την ηλικία του σύμπαντος σε αυτήν την περίπτωση, αρχικά εισάγεται στην (4.2.9) η τιμή του  $a_{m\Lambda}$  και τίθεται  $a = a_0 = 1$ . Έτσι:

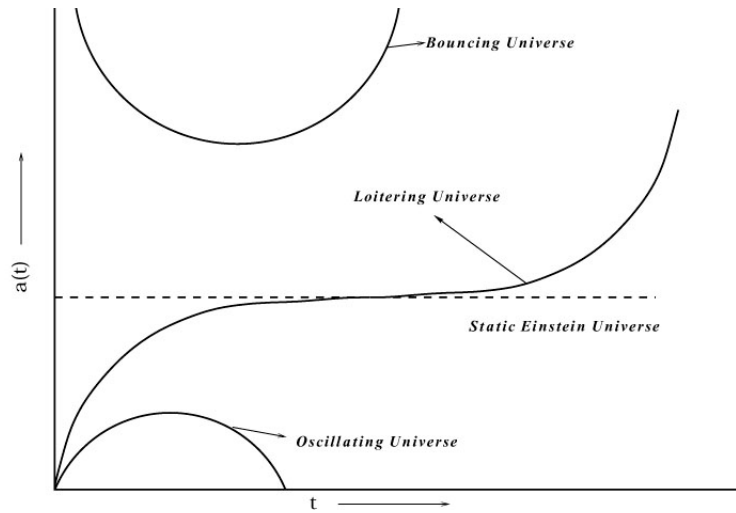
$$\tau_0 = \frac{2}{3\sqrt{1-\Omega_{m,0}}} \ln \left( \frac{\sqrt{1-\Omega_{m,0}} + 1}{\sqrt{\Omega_{m,0}}} \right). \quad (4.2.11)$$

Αν υποθέσουμε για παράδειγμα ότι,  $\Omega_{m,0} = 0.3$ , προκύπτει ότι  $\tau_0 = 0.9641$ , οπότε με χρόνο Hubble,  $14.43 Gyr$ , θα είναι,  $t_0 = 13.91 Gyr$ . Αυτή η προσέγγιση είναι πολύ ικανοποιητική, όπως θα φανεί και στην συνέχεια, κατά την ανάλυση του προτύπου Benchmark.

### 4.2.3 Μη σχετικιστική ύλη + Κοσμολογική σταθερά + Όρος καμπυλότητας

Στην περίπτωση που η καμπυλότητα είναι διάφορη του μηδενός, προκύπτουν πολύ ενδιαφέρουσες περιπτώσεις για την εξέλιξη της διαστολής, καθώς η καμπύλωση του σύμπαντος μπορεί να οδηγήσει σε ποικίλες καταστάσεις, ανάλογα με το πρόσημο της και τους συνδυασμούς με το πρόσημο της κοσμολογικής σταθεράς  $\Lambda$ .

Η εξίσωση (4.1.21) θα λάβει την εξής μορφή:



Σχήμα 4.2.1: Οι περιπτώσεις του σύμπαντος Lemaitre (Loitering), του στατικού σύμπαντος Einstein, του καταρρέοντος σύμπαντος και η περίπτωση του Big Bounce (βλ. παράγραφο 4.2.3 ).

$$\frac{da}{d\tau} = \sqrt{\frac{\Omega_{m,0}}{a} + (1 - \Omega_{m,0} - \Omega_{\Lambda,0}) + \Omega_{\Lambda,0}a^2}. \quad (4.2.12)$$

Στην παραπάνω εξίσωση, αν θεωρηθεί ότι οι όροι  $\Omega_{m,0}$  και  $\Omega_{\Lambda,0}$  είναι θετικοί, αλλά έχουν τιμές έτσι ώστε να ισχύει  $\Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} > 1$ , δηλαδή η καμπυλότητα να είναι θετική (από σχέσεις (4.1.14),(4.1.17)), προκύπτει ότι για  $a \ll 1$  υπάρχουν επιλογές για τους όρους αυτούς, ώστε η υπόριζη ποσότητα να γίνεται αρνητική. Αυτό συνεπάγεται, ότι τέτοια σύμπαντα έχουν περιορισμό ως προς τις τιμές που μπορεί να λάβει ο scale factor τους. Ας υποθέσουμε ένα τέτοιο σύμπαν με αρχικές συνθήκες  $a \gg 1$  και  $H < 0$ , δηλαδή ξεκινά να συστέλλεται από κατάσταση που η κοσμολογική σταθερά είναι η κυρίαρχη συνιστώσα. Τότε, καθώς το σύμπαν συστέλλεται ο όρος  $(1 - \Omega_{m,0} - \Omega_{\Lambda,0})$  γίνεται κυρίαρχος στην εξίσωση (4.2.12) και σαν αποτέλεσμα η συστολή σταματά. Συνεπώς, υπάρχει ελάχιστη τιμή για τον συντελεστή κοσμικής κλίμακας και στη συνέχεια το σύμπαν ωθείται σε διαστολή. Το φαινόμενο αυτό φαίνεται στην βιβλιογραφία ως «*Big Bounce*» (Μεγάλη Ώθηση). Στο συγκεκριμένο σύμπαν δε συνέβη Big Bang, δηλαδή

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, a(\tau) \neq 0.$$

Έτσι η λύση του παραπάνω σύμπαντος προκύπτει από ένα Π.Α.Τ που αποτελείται από την εξίσωση (4.2.12) και την αρχική συνθήκη  $a(0) = const$ , (χωρίς βλάβη,  $a(0) = 1$ ).

Ένα άλλο ενδεχόμενο, είναι ένα σύμπαν που εμφανίζει το λεγόμενο *coasting period* (μεταβατικό στάδιο), που αναφέρθηκε στην παράγραφο (3.3.2.2). Το σύμπαν αυτό φαίνεται στην βιβλιογραφία και ως «*loitering universe*», σε ελεύθερη μετάφραση: «αργόσχολο σύμπαν».

Στο δεδομένο σύμπαν, αρχικά κυριαρχεί η μη σχετικιστική ύλη και άρα  $a \propto t^{2/3}$ . Στη συνέχεια, ο συντελεστής κοσμικής κλίμακας διανύει μια περίοδο στην οποία παραμένει σχεδόν σταθερός και τελικά ο κοσμολογικός όρος γίνεται κυρίαρχος με αποτέλεσμα το σύμπαν να διαστέλλεται εκθετικά. Μια αναλυτική λύση της (4.2.12) είναι η (3.3.21), ενώ στη συνέχεια θα δοθούν και αριθμητικές λύσεις (βλ. παράγραφο 4.3.3, πίνακα 4.3 )

#### 4.2.4 Πρότυπο $\Lambda$ -CDM

Το μοντέλο αυτό, είναι το πλέον σύγχρονο και αποδεκτό και λαμβάνει υπόψη σαν συστατικά του σύμπαντος, μη σχετικιστική ύλη (βαρυονική και ψυχρή) , σχετικιστική ύλη (φωτόνια και νετρίνα) καθώς και σκοτεινή ενέργεια, η οποία όπως ειπώθηκε αντιστοιχεί στον κοσμολογικό όρο που συνεισφέρει στην αιώνια διαστολή του σύμπαντος. Στον πίνακα 4.1 φαίνονται οι τιμές από τις πιο σύγχρονες μετρήσεις της επιστημονικής κοινότητας, από την αποστολή Planck. Όπως φαίνεται στον πίνακα, το ποσοστό της ολικής πυκνότητας ενέργειας που αντιστοιχεί σε σκοτεινή ενέργεια είναι  $\Omega_{\Lambda,0} = 69.1 \pm 1.2\%$  [9].

Είναι επίσης γνωστό ότι η σκοτεινή ύλη, είναι μια μορφή μη ορατής ύλης, που συνεισφέρει σε βαρυτικές επιδράσεις σε γαλαξιακές κλίμακες και αποτελεί το 26.8 της πυκνότητας ενέργειας του σύμπαντος, ενώ η κλασσική ορατή ύλη (άτομα, χημικά στοιχεία, αέρια και πλάσμα), δηλαδή τα στοιχεία από τα οποία συντίθενται τα άστρα, οι πλανήτες και ο ίδιος ο άνθρωπος, μόλις το 4.9%.

Στην γενική περίπτωση, όπου η καμπυλότητα του σύμπαντος είναι δυνατόν να λάβει οποιαδήποτε τιμή και η καταστατική εξίσωση της σκοτεινής ενέργειας δεν είναι συγκεκριμένη, η εξίσωση (4.2.5) γίνεται:

$$\frac{da(\tau)}{d\tau} = \left( \frac{\Omega_{m,0}}{a} + \Omega_k + \frac{\Omega_{r,0}}{a^2} + \Omega_{\Lambda,0} a^{-1-3\omega_\Lambda} \right)^{1/2}. \quad (4.2.13)$$

Αυτό είναι το γενικό πρότυπο  $\Lambda$ -CDM και ανάλογα με την ερμηνεία της κοσμολογικής σταθεράς και την καμπυλότητα του σύμπαντος προκύπτουν διαφορετικές εκδοχές. Το πιο διαδεδομένο μοντέλο τύπου  $\Lambda$ -CDM, είναι το 6-παραμετρικό μοντέλο  $\Lambda$ -CDM ή μοντέλο *Benchmark*, το οποίο αναλύεται στη συνέχεια. Παρότι το

συγκεκριμένο μοντέλο παραμένει το πιο διάσημο και έγκυρο στον επιστημονικό κόσμο, υπάρχουν πάρα πολλές προσεγγίσεις στις οποίες λαμβάνονται υπόψιν επιπλέον συστατικά για το σύμπαν, ειδικά σε πρώιμα στάδια του. Μερικά παραδείγματα φαίνονται στα [17, 18, 26, 30, 3].

### 4.2.5 Πρότυπο Benchmark

Στην ειδική αυτήν περίπτωση του μοντέλου  $\Lambda$ -CDM, θεωρείται ότι η καμπυλότητα του σύμπαντος είναι μηδενική και ότι  $\omega_\Lambda = -1$ .

Έτσι η εξίσωση (4.2.13) γίνεται:

$$\frac{da(\tau)}{d\tau} = \left( \frac{\Omega_{m,0}}{a} + \frac{\Omega_{r,0}}{a^2} + \Omega_{\Lambda,0}a^2 \right)^{1/2}. \quad (4.2.14)$$

Από τον πίνακα (4.1) είναι φανερό ότι την σημερινή εποχή η σκοτεινή ενέργεια κυριαρχεί στο σύμπαν και μάλιστα είναι:

$$\frac{\varepsilon_{\Lambda,0}}{\varepsilon_{m,0}} = \frac{\Omega_{\Lambda,0}}{\Omega_{m,0}} = \frac{0.7}{0.3} = \frac{7}{3}. \quad (4.2.15)$$

Μιας και το σύμπαν όμως εξελίσσεται, είναι προφανές ότι υπήρχε μια στιγμή στο παρελθόν, που ο λόγος  $\frac{\varepsilon_\Lambda(a)}{\varepsilon_m(a)}$  ήταν ίσος με την μονάδα, δηλαδή οι πυκνότητες της μη σχετικιστικής ύλης και της σκοτεινής ενέργειας ήταν ίσες. Επειδή όμως η πυκνότητα της κοσμολογικής σταθεράς θεωρείται σταθερή, αλλά η πυκνότητα της ύλης μειώνεται όπως ο  $a^{-3}$ , για το λόγο των πυκνοτήτων μια τυχαία στιγμή με συντελεστή κοσμικής κλίμακας  $a$ , θα ισχύει ότι:

$$\frac{\varepsilon_\Lambda(a)}{\varepsilon_m(a)} = \frac{\varepsilon_{\Lambda,0}}{\varepsilon_{m,0}/a^3} = \frac{\varepsilon_{\Lambda,0}}{\varepsilon_{m,0}} a^3. \quad (4.2.16)$$

Οπότε είναι προφανές, ότι πρέπει  $a = a_{m\Lambda} = \left(\frac{3}{7}\right)^{1/3} \approx 0.75$ , που σημαίνει ότι η ύλη και ο κοσμολογικής όρος είχαν ίσες πυκνότητας ενέργειας όταν η κλίμακα του σύμπαντος ήταν στο 75% της σημερινής τιμής. Αμέσως μετά, η κοσμολογική σταθερά γίνεται κυρίαρχη συνιστώσα.



$\Omega_{m,0}$	0.3089
$\Omega_{\Lambda,0}$	0.6911
$\Omega_{r,0}$	8.4e-5

**Πίνακας 4.1:** Οι τιμές των παραμέτρων  $\Omega_{i,0}$  που θα χρησιμοποιηθούν στο παρόν κείμενο. Για τις τιμές των  $\Omega_{m,0}$  και  $\Omega_{\Lambda,0}$  χρησιμοποιήθηκαν τα αποτελέσματα της αποστολής Planck [9] ενώ για την τιμή της  $\Omega_{r,0}$  χρησιμοποιήθηκε η ευρέως διαδεδομένη τιμή που για παράδειγμα φαίνεται στο εγχειρίδιο της Barbara Ryden, [22].

Ομοίως, για τη σχέση ύλης-ακτινοβολίας:

$$\frac{\varepsilon_{m,0}}{\varepsilon_{r,0}} = \frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{r,0}} = \frac{0.3}{8.4 * 10^{-5}} \approx 3600, \quad (4.2.17)$$

και άρα, μια τυχαία στιγμή με συντελεστή κοσμικής κλίμακας  $a$  ισχύει:

$$\frac{\varepsilon_m(a)}{\varepsilon_r(a)} = \frac{\varepsilon_{m,0}/a^3}{\varepsilon_{r,0}/a^4} = \frac{\varepsilon_{m,0}}{\varepsilon_{r,0}} a. \quad (4.2.18)$$

Οπότε, από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι ο λόγος πυκνοτήτων γίνεται μονάδα όταν  $a = a_{rm} = 2.8 \times 10^{-4}$ .

Έτσι, όταν το σύμπαν έχει συνιστώσες με διαφορετικά  $\omega$ , η σχέση

$$\varepsilon_\omega(a) = \varepsilon_{\omega,0} a^{-3(1+\omega)},$$

μας δείχνει ότι όταν  $a \rightarrow 0$  στο σύμπαν κυριαρχεί η συνιστώσα με το μεγαλύτερο  $\omega$  (εδώ η ακτινοβολία με  $\omega = 1$ ) και όταν  $a \rightarrow \infty$  κυριαρχεί η συνιστώσα με το μικρότερο  $\omega$  (κοσμολογική σταθερά).

Όπως ειπώθηκε και προηγουμένως, στο μοντέλο Benchmark οι συνιστώσες στο σύμπαν είναι κοσμολογική σταθερά, μη σχετικιστική ύλη και σχετικιστική ύλη (ακτινοβολία) με τις μετρήσεις των τιμών τους για  $\tau = \tau_0$ , όπως φαίνεται στον πίνακα (4.1). Συνεπώς, σύμφωνα με τα προλεγόμενα, ένα μοντέλο που περιέχει μόνο μη σχετικιστική ύλη μπορεί να θεωρηθεί μια καλή προσέγγιση όταν  $a_{rm} \ll a \ll a_{m\Lambda}$ . Για εποχές κοντά στην τιμή  $a_{rm}$  απαιτείται χρήση ενός μοντέλου με δύο συνιστώσες, την ύλη και τη ακτινοβολία, ενώ για εποχές με τιμές του συντελεστή κοσμικής κλίμακας κοντά στην τιμή  $a_{m\Lambda}$ , ικανοποιητική προσέγγιση είναι ένα μοντέλο με ύλη και κοσμολογικό όρο. Τέλος, για  $a \gg a_{m\Lambda}$  η καλύτερη προσέγγιση είναι το σύμπαν DeSitter. Επομένως, η λύση του μοντέλου Benchmark, που λαμβάνει υπόψιν και τις τρεις αυτές συνιστώσες, θα πρέπει να συμπεριφέρεται

σε κάθε εποχή κατά προσέγγιση όπως επιβάλει η εκάστοτε κυρίαρχη συνιστώσα στην εποχή αυτή. Θα γίνει εμφανές ακολούθως, ότι τα αποτελέσματα που θα προκύψουν από τον αριθμητικό υπολογισμό, πράγματι ικανοποιούν τα ανωτέρω (βλ. εικόνα (4.3.2)).

### 4.3 Αριθμητική ανάλυση του προτύπου Benchmark

Το πρότυπο Benchmark, είναι ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα του γενικού μοντέλου Friedmann και συγκεκριμένα του βασικού μοντέλου  $\Lambda$ -CDM και η επίλυση του δίνει πολύ χρήσιμα αποτελέσματα, τα οποία είναι δυνατόν να συγκριθούν και με τα πειραματικά δεδομένα [8], όπως για παράδειγμα από παρατηρήσεις μακρινών *supernovae*. Επειδή η αναλυτική του επίλυση είναι αδύνατη, στην παράγραφο αυτή θα παρουσιαστεί η διαδικασία αριθμητικής του επίλυσης, με χρήση κατάλληλου λογισμικού.

Το πρώτο βήμα είναι να υπολογιστεί αριθμητικά το ολοκλήρωμα :

$$\int_0^{\tau_0} d\tau = \int_0^1 \left( 1 + \sum_{i=1}^N \Omega_{i,0} (a^{-1-3\omega_i} - 1) \right)^{-1/2} da \quad (4.3.1)$$

Επειδή όμως η ολοκληρωτέα ποσότητα δεν ορίζεται όταν  $a = 0$ , η διαδικασία θα εκτελεστεί προσεγγιστικά, από μια στιγμή  $\tau_e$  μετά το Big Bang, μέχρι σήμερα, όπου ως γνωστόν,  $a(\tau_0) = 1$ .

Για την αρχική τιμή  $\tau_e$ , παρότι θα πρέπει να είναι πολύ μικρή, θα πρέπει σαφώς να αποφευχθούν εποχές πριν από  $10^{-32} \text{ sec}$ , δεδομένου ότι σε τέτοιες χρονικές στιγμές ίσχυαν φαινόμενα πληθωρισμού και κβαντικής βαρύτητας, κάτι το οποίο δεν λαμβάνεται υπόψιν στα κλασικά μοντέλα, τα οποία είναι αντικείμενο αυτής της εργασίας.

Προκειμένου να γίνει ο υπολογισμός οπότε, θα θεωρηθεί ότι το άνω άκρο ολοκλήρωσης στο δεύτερο μέλος της (4.3.1) είναι μεγαλύτερο του μηδενός, αλλά πολύ μικρό, συνεπώς μια καλή επιλογή είναι  $a = 10^{-6}$ . Έτσι η (4.3.1) γίνεται

$$\int_0^{\tau_0} d\tau \simeq \int_{10^{-6}}^1 \left( 1 + \sum_{i=1}^N \Omega_{i,0} (a^{-1-3\omega_i} - 1) \right)^{-1/2} da, \quad (4.3.2)$$

ή

$$\tau_0 \simeq \int_{10^{-6}}^1 f(a) da. \quad (4.3.3)$$

Θα ολοκληρωθεί οπότε αριθμητικά το ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους της εξίσωσης (4.3.2) προκειμένου να υπολογιστεί η ηλικία του σύμπαντος Benchmark. Για την χρονική εξέλιξη του παράγοντα κοσμικής κλίμακας, στην παράγραφο (4.3.4) θα χρησιμοποιηθεί η μέθοδος Runge Kutta.

Ο υπολογισμός θα γίνει και στις δύο περιπτώσεις μέσω MATLAB, παρόλα αυτά δύναται να χρησιμοποιηθεί οποιαδήποτε γλώσσα (FORTRAN, C++, κτλ).

Ακόμα η επίλυση μπορεί να γίνει και με χρήση EXCELL, μέσω του τύπου τραπεζίου. Είναι βασικότατης σημασίας το γεγονός ότι οι εξισώσεις έχουν κανονικοποιηθεί ώστε να είναι αδιάστατες, καθώς κάτι τέτοιο συνεισφέρει θετικά στην αποφυγή ανεπιθύμητων σφαλμάτων, δεδομένου ότι η μεταβλητή του χρόνου  $t$  είναι μεγάλης τάξης, ενώ ο  $a(t)$  μικρής. Η κανονικοποίηση οδηγεί σε αδιάστατα μεγέθη τάξεως της μονάδας γεγονός πολύ βολικό προκειμένου να εξαλειφθούν τα σφάλματα εξαιτίας των μετατροπών μονάδων. Η ακρίβεια των αποτελεσμάτων είναι δυνατόν να ελεγχθεί εύκολα, εφαρμόζοντας την ίδια μέθοδο για κάποιο από τα απλά πρότυπα που έχει αναλυτική λύση (πχ το σύμπαν EdS), προκειμένου να συγκριθούν τα αναλυτικά με τα αριθμητικά αποτελέσματα. Έχει επίσης ενδιαφέρον να εκτελέσει κανείς τη διαδικασία για ποικίλες τιμές των παραμέτρων, δηλαδή για διαφορετικά σύμπαντα και να συγκριθούν τα αποτελέσματα με αυτά που δίνει το πρότυπο Benchmark.

Παρακάτω δίνεται μια σύντομη περιγραφή των μεθόδων Simpson και Runge Kutta βασιζόμενη στα συγγράμματα [1, 2].

### 4.3.1 Η μέθοδος αριθμητικής ολοκλήρωσης Simpson

Η μέθοδος Simpson, είναι μια αριθμητική μέθοδος, που υπολογίζει προσεγγιστικά την τιμή ενός ορισμένου ολοκληρώματος μιας συνάρτησης, η οποία προσεγγίζεται μέσω πολυωνύμων δευτέρου βαθμού. Ο απλός τύπος Simpson για μια συνάρτηση  $f$  είναι:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + f_2), \quad (4.3.4)$$

όπου,  $h = \frac{b-a}{n}$  και  $f_0 = f(x_0) = f(a), f_1 = f(x_1) = f(x_0 + h), f_2 = f(x_2) = f(b)$  με  $n + 1$  τον αριθμό των σημείων (κόμβων)  $\{x_i\}_{i=0}^n$  του διαστήματος  $[a, b]$ .

Το σφάλμα της διαδικασίας αποδεικνύεται ότι είναι

$$e_s = \frac{h^5}{90} |f^{(4)}(\xi)|,$$

όπου  $\xi$ , κάποιο σημείο στο διάστημα  $[a, b]$ .

Η ακρίβεια της μεθόδου αυξάνει αν αυξηθούν τα σημεία της διαμέρισης του διαστήματος. Τότε χρησιμοποιείται ο σύνθετος τύπος Simpson ο οποίος γράφεται:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left[ f(x_0) + 2 \sum_{j=1}^{n/2-1} f(x_{2j}) + 4 \sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1}) + f(x_n) \right], \quad (4.3.5)$$

όπου,  $x_j = a + jh$ , για  $j = 0, 1, \dots, n - 1$ , με  $h = \frac{b-a}{n}$ ,  $x_0 = a$ ,  $x_n = b$ , ενώ εδώ το σφάλμα ικανοποιεί την σχέση:

$$|E(f)| \leq \frac{h^4}{180} (b - a) \left\| f^{(4)} \right\|_{\infty}. \quad (4.3.6)$$

### 4.3.2 Η μέθοδος Runge Kutta

Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = f(x, y), \quad (4.3.7)$$

$$y(t_0) = y_0. \quad (4.3.8)$$

Προκειμένου το πρόβλημα να λυθεί αριθμητικά σε ένα διάστημα  $[a, b]$ , ορίζονται διακριτές τιμές  $x_n$  με  $n = 1, 2, \dots, N$  τέτοιες ώστε,

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b,$$

με βήμα  $h = x_{n+1} - x_n$ , και συνεπώς η λύση θα υπολογίζεται προσεγγιστικά ως:

$$y_n \approx y(x_n), \quad (4.3.9)$$

σε κάθε σημείο  $n$ . Συχνά θεωρούμε ότι το βήμα δίνεται ως,

$$h = \frac{b - a}{N}. \quad (4.3.10)$$

Στην μέθοδο Runge-Kutta 4ης τάξης χρησιμοποιείται ο εξής αλγόριθμος:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (4.3.11)$$

όπου

$$k_1 = f(x_n, y_n),$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right),$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right),$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3).$$

Το τοπικό σφάλμα αποκοπής της μεθόδου στο  $x_{k+1}$ , δηλαδή το σφάλμα για ένα βήμα ξεκινώντας από το  $\bar{y}_k = y(x_k)$ , ορίζεται με

$$e_{k+1} = y(x_{k+1}) - \bar{y}_{k+1}, \quad (4.3.12)$$

όπου  $\bar{y}_{k+1}$ , η προσέγγιση που υπολογίζεται από την μέθοδο. Για μια μέθοδο τάξης  $m$ , το σφάλμα είναι τάξης  $h_k^{m+1}$ , λόγω κατασκευής της μεθόδου. Συνεπώς εδώ το τοπικό σφάλμα αποκοπής θα είναι της τάξης του  $h_k^5$ .

### 4.3.3 Αριθμητικός υπολογισμός με τη μέθοδο Simpson

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, το πρώτο βήμα της αριθμητικής ανάλυσης είναι να υπολογιστεί μέσω της σύνθετης μεθόδου Simpson η τιμή  $\tau_0$  για τις διάφορες περιπτώσεις συμπάντων και ειδικότερα για το πρότυπο Benchmark. Στην συνέχεια θα επιλυθεί η διαφορική εξίσωση Friedmann μέσω της μεθόδου Runge Kutta. Εναλλακτικά κανείς, θα μπορούσε να επαναλάβει την μέθοδο Simpson διαδοχικά για διαφορετικές τιμές του κάτω άκρου ολοκλήρωσης της (4.3.2), προκειμένου να λάβει μια τιμή του ολοκληρώματος (δηλαδή του χρόνου) για κάθε άκρο ολοκλήρωσης (δηλαδή του παράγοντα κοσμικής κλίμακας). Έτσι θα προέκυπτε μια χρονική εξέλιξη του scale factor, χρησιμοποιώντας μόνο την μέθοδο Simpson. Για μια τέτοια αντιμετώπιση ο αναγνώστης παραπέμπεται στο άρθρο [8].

Για τον υπολογισμό εδώ θα χρησιμοποιηθεί το πρόγραμμα simpsons.m που υλοποιεί την μέθοδο Simpson στο MATLAB και είναι το ακόλουθο:

---

```
function I = simpsons(f, a, b, n)

h=(b-a)/n;
xi=a:h:b;
I= h/3*(f(xi(1))+2*sum(f(xi(3:2:end-2))))
+4*sum(f(xi(2:2:end)))+f(xi(end)));

end
```

---

Εν συνεχεία θα πρέπει να οριστεί κατάλληλα η παρακάτω συνάρτηση του προβλήματος:

$$f(a) = 1/\sqrt{\frac{\Omega_{m,0}}{a} + \frac{\Omega_{r,0}}{a^2} + \Omega_{\Lambda,0}a^2 + 1 - \Omega_0}, \quad (4.3.13)$$

για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων  $\Omega_{i,0}$ , ανάλογα με το πρότυπο που θα επιλυθεί.

Είναι σημαντικό σαν πρώτο βήμα, να ελεγχθεί η ακρίβεια του αλγορίθμου Simpson στην πράξη, εκτελώντας τον υπολογισμό για μια περίπτωση που υφίσταται η αναλυτική λύση, για παράδειγμα στην απλή περίπτωση ενός σύμπαντος μηδενικής καμπυλότητας με μοναδική συνιστώσα την μη σχετικιστική ύλη (σύμπαν EdS), δηλαδή με συνάρτηση κοσμικής κλίμακας που δίνεται από την εξίσωση (2.7.16) από την οποία,  $\tau_0 = 2/3$ . Στο συγκεκριμένο μοντέλο, είναι  $\Omega_{r,0} = \Omega_{\Lambda,0} = 0$  και  $\Omega_{m,0} = \Omega_0 = 1$ , οπότε η συνάρτηση  $f$  γίνεται:

$$f(a) = 1/\sqrt{1/a}. \quad (4.3.14)$$

Ορίζοντας την στην γραμμή εντολών του MATLAB και καλώντας την συνάρτηση `simpsons` προκύπτει το ακόλουθο αποτέλεσμα:

```
>>format long
>>f=@(x) 1./sqrt(1./x);
>>I=simpsons(f,0.000001,1,50000)
```

```
I= 0.6666666663178341
```

Εδώ επιλέχθηκε  $N = 50000$ , δηλαδή  $h \sim 10^{-5}$  και όπως φαίνεται εύκολα, η διαφορά από την πραγματική τιμή είναι,  $2/3 - |I| \approx 3.5 * 10^{-9}$ , δηλαδή πολύ ικανοποιητική.

Στο πρότυπο Benchmark τώρα, σύμφωνα με τις μετρήσεις της πιο πρόσφατης αποστολής Planck (2015) [9], όπως φαίνεται και στον πίνακα (4.1), θα είναι:

$\Omega_{m,0} = 0.3089$ ,  $\Omega_{r,0} = 0.6911$ ,  $\Omega_{\Lambda,0} = 8.4 * 10^{-5}$ ,  $\Omega_0 = 1$  (μηδενική καμπυλότητα), οπότε η συνάρτηση  $f$  γίνεται

$$f(a) = 1/\sqrt{\frac{0.3089}{a} + \frac{8.4 * 10^{-5}}{a^2} + 0.6911a^2}. \quad (4.3.15)$$

Σύμπαν	$\Omega_0$	$\Omega_{m,0}$	$\Omega_{r,0}$	$\Omega_{\Lambda,0}$	$\Omega_{\kappa}$	$\tau_0$	$t_0$ (Gyr)
Matter only	1	1	0	0	0	0.6666	9.61
Radiation only	1	0	1	0	0	0.5	7.22
Matter+ $\Lambda$	1	0.3	0	0.7	0	0.9641	13.91
Benchmark	1	0.3089	8.4e-5	0.6911	0	0.9559	13.7973
Matter+curvature1	1.5	1.5	0	0	-0.5	0.6113	8.821
Matter+curvature2	0.5	0.5	0	0	0.5	0.7535	10.87
Matter+Lambda+curvature1	1.5	0.7	0	0.8	-0.5	0.8262	11.92
Matter+Lambda+curvature2	0.5	0.3	0	0.2	0.5	0.8440	12.18
Lambda+curvature1	0.5	0	0	0.5	0.5	1.2464	17.99

Πίνακας 4.2:  $\tau_e$  και ηλικία για διάφορα σύμπαντα ανάλογα με τις τιμές των  $\Omega_{\omega_i,0}$  των συνιστωσών τους όπως προκύπτουν από την εφαρμογή της μεθόδου Simpson. Το πρότυπο Benchmark δίνει ηλικία που προσεγγίζει πολύ καλά το αποτέλεσμα της αποστολής Planck'15 ( $13.799 \pm 0.021 \times 10^9 \text{ years}$ )

Οπότε ορίζοντας την στην γραμμή εντολών του MATLAB και καλώντας την συνάρτηση simpsons, το αποτέλεσμα θα είναι το παρακάτω:

```
>>format long
>>f=@(x) 1./sqrt(0.3089./x+8.4*10^-5./x.^2+0.6911.*x.^2);
>>I=simpsons(f,0.000001,1,50000)
```

I= 0.955855844431214

Δηλαδή, υπολογίστηκε ότι,  $\tau_0 = 0.955855844431214$  και πολλαπλασιάζοντας με χρόνο Hubble  $H_0^{-1} = 14.432519 \text{ Gyr}$ , προκύπτει η ηλικία του σύμπαντος,  $t_0 = \tau_0 H_0^{-1} = 13.7973 \text{ Gyr}$ , τιμή που απέχει μόλις 0.03% από τον υπολογισμό της αποστολής Planck [9].

Στον πίνακα (4.2) αναγράφονται οι τιμές των  $\tau_0$  και οι αντίστοιχες ηλικίες  $t_0$  για διάφορα σύμπαντα ανάλογα με τις συνιστώσες τους.

#### 4.3.4 Επίλυση της διαφορικής εξίσωσης Friedmann μέσω της μεθόδου Runge-Kutta

Σύμφωνα με τα προλεγόμενα στην παράγραφο 4.3.2, η εξίσωση Friedmann

$$a' = \left( 1 + \sum_{i=1}^N \Omega_{i,0} (a^{-1-3\omega_i} - 1) \right)^{1/2} = f(\tau, a),$$



είναι δυνατόν να επιλυθεί αριθμητικά, για δεδομένες τιμές των παραμέτρων  $\Omega_{i,0}$  με χρήση της μεθόδου Runge Kutta.

Παρακάτω, θα εκτελεστεί η επίλυση για διάφορα σύμπαντα και ιδιαίτερη σημασία θα δοθεί κυρίως στην περίπτωση του προτύπου Benchmark. Παρόλα αυτά, τονίζεται και πάλι, ότι αξίζει να εκτελεστεί ο αριθμητικός υπολογισμός ακόμα και για τις περιπτώσεις στις οποίες υπάρχουν αναλυτικές λύσεις, προκειμένου να συγκριθούν οι αριθμητικές με τις ακριβείς λύσεις. Τα αποτελέσματα συγκεντρώνονται στον πίνακα (4.3) για τις διάφορες περιπτώσεις συμπάντων και στο σχήμα (6.0.2) φαίνονται συγκεντρωμένες οι γραφικές τους παραστάσεις.

Αναζητείται λύση για την διαφορική εξίσωση Friedmann στο διάστημα  $[0, 2]^2$  θεωρώντας ότι  $a(0) \simeq 10^{-6}$ . Επιλέγεται βήμα  $h = 2 * 10^{-5}$  ( $N=100000$ ) και χρησιμοποιείται το ακόλουθο πρόγραμμα με όνομα rk4.m που υλοποιεί την 4-παραμετρική μέθοδο Runge Kutta στο *MATLAB*.

---

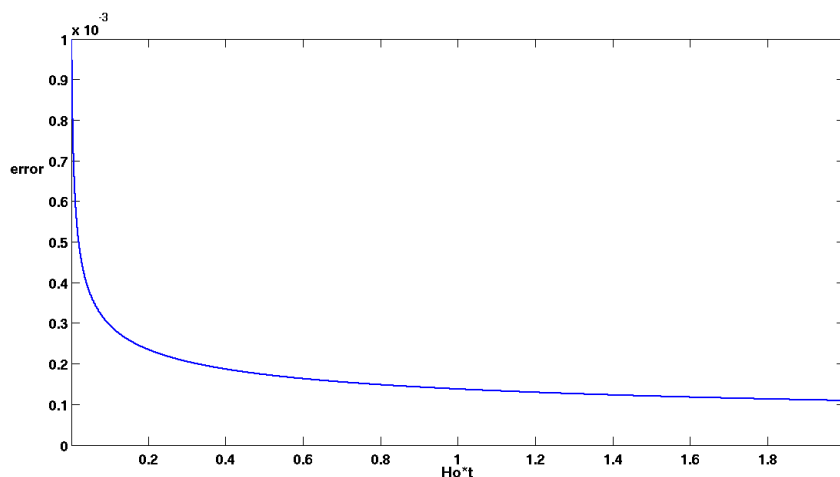
```
function [T,Y] = rk4(f,a,b,ya,m)
h = (b - a)/m;
T = zeros(1,m+1);
Y = zeros(1,m+1);
T(1) = a;
Y(1) = ya;
for j=1:m,
    tj = T(j);
    yj = Y(j);
    k1 = h*feval(f,tj,yj);
    k2 = h*feval(f,tj+h/2,yj+k1/2);
    k3 = h*feval(f,tj+h/2,yj+k2/2);
    k4 = h*feval(f,tj+h,yj+k3);
    Y(j+1) = yj + (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6;
    T(j+1) = a + h*j;
end
```

---

Η συνάρτηση  $f$  στο συγκεκριμένο πρόβλημα θα είναι η:

---

<sup>2</sup>Το άνω άκρο  $n$  του διαστήματος  $[0,n]$  είναι ελεύθερο, παρόλα αυτά όσο μεγαλώνει, για να πετύχουμε την επιθυμητή ακρίβεια στον υπολογισμό, καλό είναι να αυξήσουμε και τον αριθμό βημάτων.



Σχήμα 4.3.1: Σφάλμα μεθόδου Runge Kutta για το σύμπαν EdS

$$f(\tau, a) = \sqrt{\frac{\Omega_{m,0}}{a} + \frac{\Omega_{r,0}}{a^2} + \Omega_{\Lambda,0}a^2 + 1 - \Omega_0}, \quad (4.3.16)$$

ανάλογα με το ποιο σύμπαν είναι αντικείμενο μελέτης.

Όπως και στην περίπτωση του υπολογισμού του ολοκληρώματος στην παράγραφο (4.3.3) έτσι και εδώ αξίζει να ελεγχθεί η ακρίβεια της μεθόδου Runge Kutta και άρα θα εκτελεστεί αρχικά ο υπολογισμός για το σύμπαν EdS, στο οποίο η (4.3.16) γίνεται

$$f(\tau, a) = a^{-1/2}. \quad (4.3.17)$$

Μέσω των παρακάτω εντολών, ορίζεται η ακριβής λύση, εκτελείται ο προσεγγιστικός υπολογισμός και δημιουργείται η γραφική παράσταση του σφάλματος, δηλαδή της απόλυτης διαφοράς της προσεγγιστικής από την ακριβή λύση (σχ.4.3.1).

```
>> x = [0:0.00002:2];
>> y = (3/2.*x).^(2/3);
>> [t, a]=rk4('f',0,2,0.000001,100000);
>> plot(t, abs(y-a))
```

Από την γραφική παράσταση για την χρονική εξέλιξη του σφάλματος είναι φανερό ότι μετά τα πρώτα βήματα,  $error \sim 10^{-4}$ .

$\tau$	$a(\tau)$					
	Benchmark	EdS	$\Omega_{m,0} = \Omega_0 = 0.5$	$\Omega_{m,0} = 0.3$ $\Omega_{\Lambda,0} = 0.7, k = 0$	$\Omega_{m,0} = 0.999916,$ $\Omega_{r,0} = 8.4 * 10^{-5}, k = 0$	$\Omega_{m,0} = 0.8,$ $\Omega_{\Lambda,0} = 2, \Omega_{k,0} = -1.8$
0	1.000e-6	1.000e-6	1.000e-6	1.000e-6	1.000e-6	1.000e-6
0.2	0.3129	0.4483	0.3804	0.3022	0.4506	0.3386
0.4	0.5011	0.7115	0.5257	0.4897	0.7161	0.4786
0.6	0.6766	0.9323	0.8433	0.6639	0.9363	0.5836
0.8	0.8569	1.1294	1.0463	0.8426	1.1330	0.6876
1	1.0522	1.3105	1.2400	1.0364	1.3138	0.8127
1.2	1.2711	1.4798	1.4271	1.2535	1.4830	0.9786
1.4	1.5213	1.6400	1.6093	1.5019	1.6430	1.2064
1.6	1.8109	1.7927	1.7876	1.7898	1.7955	1.5202
1.8	2.1488	1.9399	1.9627	2.1260	1.9418	1.9492
2	2.5449	2.0802	2.1352	2.5205	2.0828	2.5310

**Πίνακας 4.3:** Ενδεικτικές τιμές των αριθμητικών λύσεων των διάφορων προτύπων.(ανά 10000 βήματα).Στήλη2: Benchmark, Στήλη3: μόνο ύλη (EdS), Στήλη4: ύλη με θετική καμπυλότητα, Στήλη5: ύλη με αρνητική καμπυλότητα, Στήλη6:  $\Upsilon_{λη} + \Lambda > 0$  ( $\kappa=0$ ), Στήλη7:  $\Upsilon_{λη} + \text{ακτινοβολία}$ , Στήλη8: Loitering =  $\Upsilon_{λη} + \Lambda > 0$  ( $\kappa > 0$ )

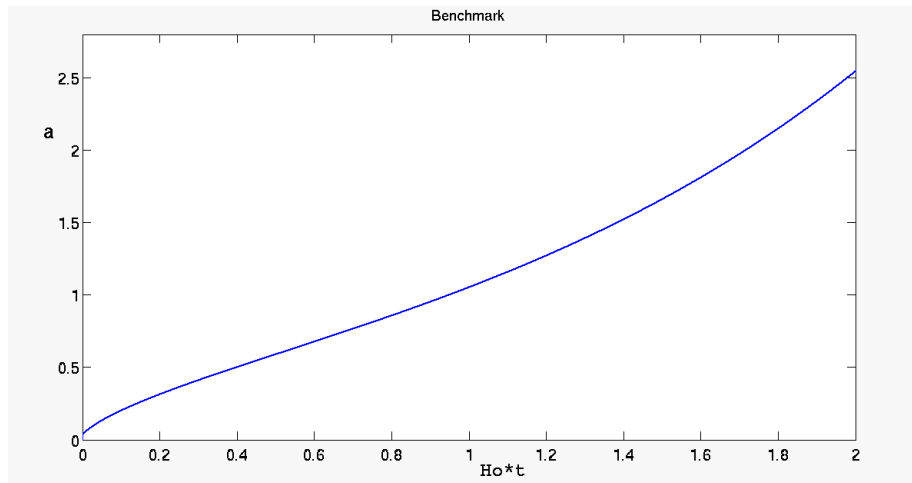
Για το πρότυπο Benchmark τώρα, η συνάρτηση  $f$  διαμορφώνεται κατάλληλα εισάγοντας τις γνωστές τιμές για τις πυκνότητες ενέργειας:

$$f(\tau, a) = \sqrt{\frac{0.3089}{a} + \frac{8.4 * 10^{-5}}{a^2} + 0.6911a^2}. \tag{4.3.18}$$

Εν συνεχεία, ο υπολογισμός εκτελείται ξανά για την νέα συνάρτηση  $f$  και τελικά δημιουργείται η γραφική παράσταση της χρονικής εξέλιξης του παράγοντα κοσμικής κλίμακας (σχήμα 4.3.2) μέσω των ακόλουθων εντολών στο MATLAB.

```
>> [t , a]=rk4 ( ' f ' , 0 , 2 , 0.000001 , 100000 );
>> plot ( t , a )
```

Η διαδικασία δύναται να επαναληφθεί για διάφορα πρότυπα κατά τον ίδιο τρόπο, αντικαθιστώντας τις κατάλληλες τιμές των παραμέτρων  $\Omega_{i,0}$ . Στον πίνακα (4.3) φαίνονται συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα για τις εκάστοτε αριθμητικές λύσεις.



Σχήμα 4.3.2: Γραφική παράσταση σύμπαντος Benchmark

## Εύρεση Σημείου Καμπής

Από την εξίσωση Friedmann (4.3.16) για το πρότυπο Benchmark, θα είναι:

$$a' = \sqrt{\frac{0.3089}{a} + \frac{8.4 * 10^{-5}}{a^2} + 0.6911a^2}. \quad (4.3.19)$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση ως προς  $\tau$  έπεται ότι:

$$a'' = \frac{1}{2a'} \left( \frac{0.3089}{a} + \frac{8.4 * 10^{-5}}{a^2} + 0.6911a^2 \right)'. \quad (4.3.20)$$

Άρα, για να μηδενίζεται η δεύτερη παράγωγος αρκεί:

$$\left( \frac{0.3089}{a} + \frac{8.4 * 10^{-5}}{a^2} + 0.6911a^2 \right)' = 0, \quad (4.3.21)$$

ή

$$1.3822a^4 - 0.3089a - 16.8 * 10^{-5} = 0. \quad (4.3.22)$$

Η τριτοβάθμια πολυωνυμική εξίσωση (4.3.22) επιλύεται εύκολα στο MATLAB, με χρήση της μεθόδου Newton-Raphson, [1] επιλέγοντας σαν αρχική τιμή την  $a = 0.5$  και σαν αποτέλεσμα λαμβάνει κανείς την μια από τις δύο πραγματικές της λύσεις:

$$a = 0.607033.$$

Μελετώντας τις τιμές από τον υπολογισμό της Runge Kutta, αλλά και την γραφική παράσταση της λύσεως, εύκολα διαπιστώνεται ότι αυτή η τιμή αντιστοιχεί κατά προσέγγιση στην

$$\tau \simeq 0.52. \tag{4.3.23}$$

Και άρα μια προσέγγιση για το σημείο καμπής της συνάρτησης κοσμικής κλίμακας είναι το  $(0.5, 0.6)$ . Δηλαδή η διαστολή άρχισε να γίνεται επιταχυνόμενη όταν το σύμπαν είχε ηλικία περίπου  $7.2Gyr$ .

## Κεφάλαιο 5

# Ποιοτική Ανάλυση του συστήματος Friedmann

Στα προηγούμενα κεφάλαια έγινε σαφές ότι, οι εξισώσεις Friedmann, σε συνδυασμό με την εξίσωση διατήρησης αποτελούν ένα σύστημα δυο ανεξάρτητων εξισώσεων με τρεις άγνωστες συναρτήσεις: του συντελεστή κοσμικής κλίμακας, της πυκνότητας ενέργειας και της πίεσης. Με τη βοήθεια της καταστατικής εξίσωσης, το σύστημα λύνεται αναλυτικά ή αριθμητικά, όπως παρουσιάστηκε στην πορεία της εργασίας και σε κάθε περίπτωση λαμβάνεται μια έκφραση για τις συναρτήσεις αυτές, από τις οποίες συνεπάγονται χρήσιμα συμπεράσματα.

Στο κεφάλαιο αυτό, θα εξεταστεί μια διαφορετική προσέγγιση όσον αφορά στην αντιμετώπιση του δυναμικού αυτού συστήματος, καθώς θα αναλυθεί ποιοτικά, ακολουθώντας σαν πρότυπο την ανάλυση του άρθρου «A Dynamical Study of The Friedmann Equations» των Jean-Philippe Uzan και Roland Lehoucq[27]. Σκοπός είναι να προσδιοριστεί το πεδίο φάσεων και να διερευνηθούν τα κρίσιμα σημεία ως προς την ευστάθεια τους, προκειμένου να μελετηθούν οι ασυμπτωτικές καταστάσεις του σύμπαντος.

Έστω λοιπόν ένα σύμπαν με όρο καμπυλότητας, κοσμολογική σταθερά και ύλη, στο οποίο ορίζονται οι εξής μεταβλητές :

$$\Omega = \frac{8\pi G\varepsilon}{3c^2 H^2}, \quad (5.0.1)$$

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H^2}, \quad (5.0.2)$$

$$\Omega_k = \frac{-kc^2}{a^2 R_0^2 H^2}, \quad (5.0.3)$$

οι οποίες ικανοποιούν την σχέση:

$$\Omega + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1. \quad (5.0.4)$$

Η καταστατική εξίσωση του παγκόσμιου ρευστού, διαπιστώθηκε ότι είναι μια σχέση της μορφής,  $p = \omega \varepsilon$  και στην περίπτωση της μη σχετικιστικής ύλης τέθηκε,  $\omega = 0$ . Παρόλα αυτά παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον να μελετηθεί το πρόβλημα και στην γενική του περίπτωση όπου το  $\omega$  λαμβάνει μια οποιαδήποτε τιμή καθώς έτσι θα είναι εφικτό να μελετηθούν οι διαφορετικές ασυμπτωτικές συμπεριφορές ενός σύμπαντος, ανάλογα με την καταστατική του εξίσωση. Συνεπώς εδώ θα θεωρηθεί, ότι στην καταστατική εξίσωση η συνιστώσα που αντιστοιχεί στην μεταβλητή  $\Omega$  έχει τυχούσα τιμή για την παράμετρο  $\omega$ , η οποία όμως δεν θα μπορεί να λάβει τις τιμές  $\omega_1 = -1$  και  $\omega_2 = -1/3$ , μιας και αυτές αντικατοπτρίζουν ρευστά κοσμολογικής σταθεράς και καμπυλότητας, αντίστοιχα, οι όροι των οποίων έχουν οριστεί ξεχωριστά παραπάνω. Σημειώνεται ότι από την καταστατική εξίσωση προκύπτει για τις δεδομένες μεταβλητές  $\Omega_i$ :

$$\varepsilon' = -3(\omega + 1)\varepsilon. \quad (5.0.5)$$

## 5.1 Εξαγωγή του δυναμικού συστήματος

Αρχικά, μια σημαντική παρατήρηση είναι ότι:

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2. \quad (5.1.1)$$

Έτσι χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραμέτρου επιβράδυνσης από το κεφάλαιο 2 προκύπτει η παρακάτω σχέση:

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = -(1 + q), \quad (5.1.2)$$

όπου εδώ η παράμετρος επιβράδυνσης ορίζεται ως

$$q \equiv \frac{3\omega + 1}{2} (1 - \Omega_k) - \frac{3\omega + 3}{2} \Omega_\Lambda. \quad (5.1.3)$$

Στο σημείο αυτό είναι βολικό να γίνει ο μετασχηματισμός  $s = \ln a$ . Τότε, κάθε μέγεθος  $X$  θα έχει παράγωγο ως προς  $s$  που θα δίνεται από τη σχέση

$$\frac{dX}{ds} \equiv X' = \frac{\dot{X}}{H}. \quad (5.1.4)$$

Έτσι η (5.1.2) απλοποιείται ως:

$$\frac{H'}{H} = -(1 + q), \quad (5.1.5)$$

ενώ

$$a' = a. \quad (5.1.6)$$

Οπότε, αν παραγωγισθούν τα μεγέθη  $\Omega$ ,  $\Omega_\Lambda$  και  $\Omega_k$  ως προς τη νέα αδιάστατη λογαριθμική μεταβλητή  $s$  και χρησιμοποιώντας την έκφραση (5.1.5) για την παράγωγο  $H'$  καθώς και την (5.0.5), προκύπτει το σύστημα:

$$\Omega' = (2q + 2 - 3(\omega + 1)) \Omega, \quad (5.1.7)$$

$$\Omega'_\Lambda = 2(1 + q) \Omega_\Lambda, \quad (5.1.8)$$

$$\Omega'_k = 2q \Omega_k, \quad (5.1.9)$$



με

$$\Omega' + \Omega'_\Lambda + \Omega'_k = 0, \quad (5.1.10)$$

σαν άμεση συνέπεια της σχέσης (5.0.4).

Επειδή όμως υπάρχει η σχέση (5.0.4), η μεταβλητή  $\Omega$  υπολογίζεται αλγεβρικά (εφόσον υπολογιστούν τα  $\Omega_\Lambda$  και  $\Omega_k$ ), οπότε μελετάται μονάχα το σύστημα των (5.1.8) και (5.1.9).

Έτσι το σύστημα που θα μελετηθεί θα είναι το:

$$\Omega'_k = 2q\Omega_k = f(\Omega_\Lambda, \Omega_k; \omega), \quad (5.1.11)$$

$$\Omega'_\Lambda = 2(1+q)\Omega_\Lambda = g(\Omega_\Lambda, \Omega_k; \omega). \quad (5.1.12)$$

Το παραπάνω είναι το *δυναμικό σύστημα Friedmann* και πρόκειται για ένα  $2 \times 2$  πρώτης τάξης δυναμικό σύστημα.

**Ορισμός 1.** Έστω το δυναμικό σύστημα

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}). \quad (5.1.13)$$

Όταν η διανυσματική συνάρτηση  $\mathbf{f}$  δεν εξαρτάται άμεσα από την μεταβλητή του χρόνου, δηλαδή είναι  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ , τότε το δυναμικό σύστημα (5.1.13) καλείται *αυτόνομο*.

Είναι προφανές σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, ότι το σύστημα Friedmann είναι αυτόνομο. Ο αυτόνομος χαρακτήρας του συστήματος Friedmann, παρέχει τη δυνατότητα να αναχθεί η μελέτη του προβλήματος στο πεδίο των  $n = 2$  διαστάσεων, και όχι στο χώρο των λύσεων, που είναι τριών διαστάσεων.

## 5.2 Προσδιορισμός κρίσιμων σημείων

**Ορισμός 2.** Ένα σημείο  $\mathbf{x}_0$  στο οποίο ισχύει  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ , ονομάζεται κρίσιμο (ή στάσιμο) σημείο του συστήματος (5.1.13)

Η σημασία των κρίσιμων σημείων, έγκειται στο γεγονός ότι όλες οι τροχιές στον χώρο φάσεων έχουν συμπεριφορά που καθορίζεται από την θέση και τη φύση των σημείων αυτών. Επίσης ισχύουν τα ακόλουθα:

- Από κάθε σημείο  $\mathbf{x}_0$  του χώρου φάσεων περνά μοναδική τροχιά.
- Τροχιά που ξεκινά από μη κρίσιμο σημείο δεν μπορεί να φτάσει σε κρίσιμο σημείο σε πεπερασμένο χρόνο.
- Τροχιά που περνά από μη κρίσιμο σημείο μια τουλάχιστον φορά, δεν μπορεί να ξαναπεράσει, εκτός αν η τροχιά είναι κλειστή (περιοδική λύση).

Το πρώτο βήμα μελέτης του συστήματος Friedmann, είναι η εύρεση των κρίσιμων σημείων και ο προσδιορισμός του είδους τους. Σύμφωνα με τον ορισμό 2 αναζητούνται τα σημεία για τα οποία ισχύει,  $\Omega'_k = \Omega'_\Lambda = 0$ , ή ισοδύναμα,  $g(\Omega_\Lambda, \Omega_k; \omega) = f(\Omega_\Lambda, \Omega_k; \omega) = 0$ . Τα σημεία αυτά αντιπροσωπεύουν σημεία ισορροπίας και είναι δυνατόν να είναι ασταθή ή ευσταθή.

Μηδενίζοντας τα δεύτερα μέλη των εξισώσεων (5.1.8), (5.1.9) του δυναμικού συστήματος, προκύπτουν:

$$q\Omega_k = 0, \quad (5.2.1)$$

$$(1 + q)\Omega_\Lambda = 0. \quad (5.2.2)$$

Και από την σχέση (5.1.3) για το  $q$  έπεται ότι τα κρίσιμα σημεία του συστήματος θα είναι τα ακόλουθα:

$$(\Omega_k, \Omega_\Lambda) \in \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}. \quad (5.2.3)$$

Κάθε μια από αυτές τις λύσεις αντιπροσωπεύει ένα σύμπαν με διαφορετικά χαρακτηριστικά. Τα τρία αυτά σύμπαντα δεν είναι άλλα από τα σύμπαντα Einstein de Sitter (μόνο μη σχετικιστική ύλη), De Sitter (μόνο κοσμολογική σταθερά) και Milne (άδειο σύμπαν) τα οποία και μελετήθηκαν στα κεφάλαια 2 και 3. Παρακάτω αναφέρονται οι τρεις αυτές περιπτώσεις αναλυτικά.

**Σύμπαν Einstein De Sitter (EdS)** -  $(\Omega_k, \Omega_\Lambda) = (0, 0)$

Πρόκειται για ένα σύμπαν χωρίς κοσμολογική σταθερά και με μηδενική καμπυλότητα, γεγονός που συνεπάγεται την δομή ευκλείδειου χώρου.

Από την (5.0.4) προκύπτει αμέσως ότι  $\Omega = 1$  και από την (5.1.3),  $q = (3\omega + 1)/2$ , ενώ άμεση ολοκλήρωση της εξίσωσης Friedmann

δίνει ότι,  $a(t) = C_1 t^{2/(3\omega+3)}$ , ήτοι επιβραδυνόμενη μονότονη αύξηση.

**Σύμπαν De Sitter (dS)** -  $(\Omega_k, \Omega_\Lambda) = (0, 1)$

Άδειο σύμπαν μόνο με θετική κοσμολογική σταθερά.

Εδώ είναι  $\Omega = 0$  και  $q = -1$  ενώ η ολοκλήρωση δίνει  $a(t) = C_2 \exp\left\{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t\right\}$ , δηλαδή μη φραγμένη εκθετική αύξηση.

**Σύμπαν Milne (M)** -  $(\Omega_k, \Omega_\Lambda) = (1, 0)$

Άδειο σύμπαν με αρνητική καμπυλότητα. Εδώ,  $\Omega = 0$  και  $q = 0$  ενώ  $a(t) = C_3 t$ , γραμμική εξέλιξη.

Ενδιαφέρον επίσης παρουσιάζει η μελέτη των ευθειών που διαμερίζουν το επίπεδο φάσεων:

**ι) Η ευθεία  $\Omega_k = 0$ :** Στην περίπτωση αυτή το σύστημα εκφυλλίζεται στην ακόλουθη διαφορική εξίσωση για την εξέλιξη του όρου  $\Omega_\Lambda$

$$\Omega'_\Lambda = 3(\omega + 1)(1 - \Omega_\Lambda)\Omega_\Lambda. \quad (5.2.4)$$

Οπότε αν αρχικά η καμπυλότητα του σύμπαντος είναι μηδενική, η εξέλιξη του σύμπαντος σε όλη της τη διάρκεια θα διαδραματίζεται επί της ευθείας  $\Omega_k = 0$  και το σύμπαν θα συγκλίνει είτε στην  $\Omega_\Lambda = 1$  (κρίσιμο σημείο dS), δηλαδή επικράτεια σκοτεινής ενέργειας, είτε στην  $\Omega_\Lambda = 0$  (κρίσιμο σημείο EdS), δηλαδή αφανισμό σκοτεινής ενέργειας.

Από τη θεωρία συνάγεται, ότι καμιά ολοκληρωτική γραμμή δεν είναι δυνατόν να τμήσει την ευθεία αυτή. Η ευθεία  $\Omega_k = 0$  συνεπώς ορίζει *αλλαγή τοπολογίας*. Αν  $\Omega_k > 0$  (αρνητική καμπυλότητα) διαπιστώνεται ότι είναι άπειρο χωρικά, ενώ αν  $\Omega_k < 0$  πεπερασμένο [21].

Επίσης αν  $\omega = -1$  τότε το ρευστό συμπεριφέρεται σαν κοσμολογική σταθερά αφού,  $\Omega'_\Lambda = 0$ , επί της συγκεκριμένης ευθείας.

**ii) Η ευθεία  $\Omega_\Lambda = 0$ :** Στην ευθεία αυτή το σύστημα γίνεται

$$\Omega'_\kappa = (3\omega + 1)(1 - \Omega_\kappa)\Omega_\kappa. \quad (5.2.5)$$

Όμοια με την προηγούμενη περίπτωση, αν απουσιάζει ο κοσμολογικός όρος, τότε η σύγκλιση θα είναι είτε στο σύμπαν EdS είτε στο Milne.

**iii) Η ευθεία  $\Omega = 0$ :** Επειδή το  $\Omega$  είναι μη αρνητικό η ευθεία αυτή είναι φράγμα για το επίπεδο φάσεων. Εδώ ισχύει ότι  $q = -\Omega_\Lambda$  οπότε:

$$\Omega'_\Lambda = 2(1 - \Omega_\Lambda)\Omega_\Lambda, \quad (5.2.6)$$

και το σύμπαν συγκλίνει είτε στο Milne είτε στο De Sitter.

### 5.3 Ανάλυση ευστάθειας

Εφόσον η αρχή  $(0, 0)$  αποτελεί κρίσιμο σημείο (το οποίο συνεπάγεται ότι  $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$ ), αν το σύστημα γίνεται να γραφεί στην μορφή

$$\Omega'_\kappa = c_{11}\Omega_\kappa + c_{12}\Omega_\Lambda + R_1(\Omega_\kappa, \Omega_\Lambda), \quad (5.3.1)$$

$$\Omega'_\Lambda = c_{21}\Omega_\kappa + c_{22}\Omega_\Lambda + R_2(\Omega_\kappa, \Omega_\Lambda), \quad (5.3.2)$$

με

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{R_1}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{R_2}{r} = 0, \quad (5.3.3)$$

όπου  $r = \sqrt{\Omega_k^2 + \Omega_\Lambda^2}$ , τότε το σύστημα καλείται *σχεδόν γραμμικό* [2] γύρω από το σημείο  $(0, 0)$  και γραμμικοποιείται με γραμμικοποίηση του το σύστημα:

$$\Omega'_\kappa = c_{11}\Omega_k + c_{12}\Omega_\Lambda, \quad (5.3.4)$$

$$\Omega'_\Lambda = c_{21}\Omega_k + c_{22}\Omega_\Lambda. \quad (5.3.5)$$

**Πρόταση.** Το σύστημα Friedmann (5.1.11)-(5.1.12) είναι σχεδόν γραμμικό με

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_k f(\bar{\Omega}_k, \bar{\Omega}_\Lambda) & \partial_\Lambda f(\bar{\Omega}_k, \bar{\Omega}_\Lambda) \\ \partial_k g(\bar{\Omega}_k, \bar{\Omega}_\Lambda) & \partial_\Lambda g(\bar{\Omega}_k, \bar{\Omega}_\Lambda) \end{pmatrix}.$$

*Απόδειξη.* Θέτουμε  $\Omega_\kappa = \bar{\Omega}_\kappa + \omega_\kappa$  και  $\Omega_\Lambda = \bar{\Omega}_\Lambda + \omega_\Lambda$  όπου  $(\bar{\Omega}_\kappa, \bar{\Omega}_\Lambda)$  ένα από τα παραπάνω σταθερά σημεία και  $(\omega_\kappa, \omega_\Lambda)$  μια μικρή απόκλιση γύρω από το σημείο αυτό. Αναπτύσσοντας τις συναρτήσεις  $f$  και  $g$  σε σειρά Taylor γύρω από το σταθερό σημείο  $(\bar{\Omega}_\kappa, \bar{\Omega}_\Lambda)$  κανείς λαμβάνει:

$$f(\Omega_k, \Omega_\Lambda) = f(\bar{\Omega}_k, \bar{\Omega}_\Lambda) + \omega_k \partial_k f(\bar{\Omega}_k, \bar{\Omega}_\Lambda) + \omega_\Lambda \partial_\Lambda f(\bar{\Omega}_k, \bar{\Omega}_\Lambda) + R_1(\Omega_k, \Omega_\Lambda), \quad (5.3.6)$$

$$g(\Omega_k, \Omega_\Lambda) = g(\bar{\Omega}_k, \bar{\Omega}_\Lambda) + \omega_k \partial_k g(\bar{\Omega}_k, \bar{\Omega}_\Lambda) + \omega_\Lambda \partial_\Lambda g(\bar{\Omega}_k, \bar{\Omega}_\Lambda) + R_2(\Omega_k, \Omega_\Lambda), \quad (5.3.7)$$

με τα υπόλοιπα Taylor  $R_i$ ,  $i = 1, 2$  να ικανοποιούν τη σχέση,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{R_i(\Omega_k, \Omega_\Lambda)}{\sqrt{\Omega_k^2 + \Omega_\Lambda^2}} = 0. \quad (5.3.8)$$

Εισάγοντας τοπικό σύστημα συντεταγμένων,  $(\omega_\kappa, \omega_\Lambda) = (\Omega_\kappa - \bar{\Omega}_\kappa, \Omega_\Lambda - \bar{\Omega}_\Lambda)$ , θα είναι,  $f(\Omega_k, \Omega_\Lambda) = \omega'_\kappa$  και  $g(\Omega_k, \Omega_\Lambda) = \omega'_\Lambda$ . Επιπλέον επειδή το  $(\bar{\Omega}_\kappa, \bar{\Omega}_\Lambda)$  είναι κρίσιμο σημείο προκύπτει αμέσως ότι,  $f(\bar{\Omega}_k, \bar{\Omega}_\Lambda) = g(\bar{\Omega}_k, \bar{\Omega}_\Lambda) = 0$ . Οπότε οι παραπάνω εξισώσεις λαμβάνουν την μορφή:

$$\omega'_\kappa = \omega_k \partial_k f(\bar{\Omega}_k, \bar{\Omega}_\Lambda) + \omega_\Lambda \partial_\Lambda f(\bar{\Omega}_k, \bar{\Omega}_\Lambda) + R_1(\omega_\kappa + \bar{\Omega}_k, \omega_\Lambda + \bar{\Omega}_\Lambda), \quad (5.3.9)$$

$$\omega'_\Lambda = \omega_k \partial_k g(\bar{\Omega}_k, \bar{\Omega}_\Lambda) + \omega_\Lambda \partial_\Lambda g(\bar{\Omega}_k, \bar{\Omega}_\Lambda) + R_2(\omega_\kappa + \bar{\Omega}_k, \omega_\Lambda + \bar{\Omega}_\Lambda). \quad (5.3.10)$$

Άρα το σύστημα είναι σχεδόν γραμμικό με γραμμικοποίηση:

$$\omega'_k = \omega_k \partial_k f(\bar{\Omega}_k, \bar{\Omega}_\Lambda) + \omega_\Lambda \partial_\Lambda f(\bar{\Omega}_k, \bar{\Omega}_\Lambda), \quad (5.3.11)$$

$$\omega'_\Lambda = \omega_k \partial_k g(\bar{\Omega}_k, \bar{\Omega}_\Lambda) + \omega_\Lambda \partial_\Lambda g(\bar{\Omega}_k, \bar{\Omega}_\Lambda), \quad (5.3.12)$$

ή σε μητρωϊκή γραφή :

$$\begin{pmatrix} \omega'_k \\ \omega'_\Lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_k f(\bar{\Omega}_k, \bar{\Omega}_\Lambda) & \partial_\Lambda f(\bar{\Omega}_k, \bar{\Omega}_\Lambda) \\ \partial_k g(\bar{\Omega}_k, \bar{\Omega}_\Lambda) & \partial_\Lambda g(\bar{\Omega}_k, \bar{\Omega}_\Lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_k \\ \omega_\Lambda \end{pmatrix} = P(\bar{\Omega}_k, \bar{\Omega}_\Lambda) \begin{pmatrix} \omega_k \\ \omega_\Lambda \end{pmatrix}, \quad (5.3.13)$$

οπότε

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_k f(\bar{\Omega}_k, \bar{\Omega}_\Lambda) & \partial_\Lambda f(\bar{\Omega}_k, \bar{\Omega}_\Lambda) \\ \partial_k g(\bar{\Omega}_k, \bar{\Omega}_\Lambda) & \partial_\Lambda g(\bar{\Omega}_k, \bar{\Omega}_\Lambda) \end{pmatrix}. \quad (5.3.14)$$

□

Σημειώνεται ότι εάν η ιακοβιανή ορίζουσα του πίνακα P σε ένα κρίσιμο σημείο ενός τέτοιου συστήματος είναι μη μηδενική, τότε το σημείο αυτό καλείται *υπερβολικό*. Λαμβάνοντας υπόψιν αυτήν την παρατήρηση, παρατίθεται το παρακάτω χρήσιμο θεώρημα:

**Θεώρημα 3.** (Hartman-Grobman) Έστω  $(\xi, \eta)$  υπερβολικό κρίσιμο σημείο του σχεδόν γραμμικού συστήματος

$$x' = f(x, y), \quad y' = g(x, y). \quad (5.3.15)$$

Τότε σε μια γειτονιά του  $(\xi, \eta)$  το (5.3.15) και το αντίστοιχο γραμμικοποιημένο σύστημα έχουν **τοπολογικά ισοδύναμα** επίπεδα φάσεων, δηλαδή το ίδιο είδος ευστάθειας, εκτός της περίπτωσης που το  $(\xi, \eta)$  είναι κέντρο για το γραμμικοποιημένο σύστημα.

Βάσει του παραπάνω θεωρήματος, το οποίο καλείται και θεώρημα γραμμικοποίησης, το σύστημα Friedmann έχει την ίδια συμπεριφορά ευστάθειας με το (5.3.13) σε περιοχές κοντά στα κρίσιμα σημεία, εφόσον αυτά είναι υπερβολικά και δεν είναι κέντρα για το γραμμικοποιημένο σύστημα. Έτσι μελετώντας την ευστάθεια

για το γραμμικοποιημένο σύστημα (5.3.13) θα προκύψει σύμφωνα με το θεώρημα και το είδος της ευστάθειας για το σχεδόν γραμμικό σύστημα Friedmann. Γενικά ισχύει το παρακάτω:

**Θεώρημα 4.** Ένα κρίσιμο σημείο είναι (i) ασυμπτωτικά ευσταθές αν τα πραγματικά μέρη των ιδιοτιμών του  $P$  είναι όλα αρνητικά, (ii) ευσταθές, αν ο  $P$  έχει ένα τουλάχιστον ζεύγος φανταστικών ιδιοτιμών πολλαπλότητας 1 και για τις υπόλοιπες ιδιοτιμές, ισχύει ο χαρακτηρισμός της περίπτωσης (i), (iii) ασταθές, σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση. Αν οι ιδιοτιμές του  $P$  είναι πραγματικές και ομόσημες τότε το σημείο λέγεται κόμβος, ενώ αν είναι ετερόσημες σαγματικό σημείο.

Παρακάτω φαίνονται αναλυτικά οι περιπτώσεις για τα τρία κρίσιμα σημεία του συστήματος Friedmann:

**1.EdS (0,0)** Για  $\omega \in (-\infty, -1) \cup (-1, -1/3) \cup (-1/3, \infty)$ , η Ιακωβιανή είναι διάφορη του μηδενός, συνεπώς το σημείο είναι υπερβολικό και η ανάλυση ευστάθειας του σχεδόν γραμμικού συστήματος, θα συνάδει με την αντίστοιχη ανάλυση του γραμμικοποιημένου του (εφόσον το σημείο δεν είναι κέντρο). Ο πίνακας  $P$  εδώ γίνεται:

$$P_{EdS} = \begin{pmatrix} 3\omega + 1 & 0 \\ 0 & 3\omega + 3 \end{pmatrix}. \quad (5.3.16)$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα στην περίπτωση αυτή θα είναι,  $\lambda_1 = 3\omega + 1$  και  $\lambda_2 = 3\omega + 3$ . Οπότε ανάλογα με την τιμή του  $\omega$  χωρίζονται εδώ οι ακόλουθες υποπεριπτώσεις:

- $\omega \in (-\infty, -1)$ , Εδώ  $\lambda_1 < 0$  και  $\lambda_2 < 0$  οπότε με,  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ , το σημείο (0,0) σε αυτήν την περίπτωση είναι (ασυμπτωτικά)ευσταθής κόμβος. Έτσι για τέτοιες τιμές του  $\omega$  η κατάληξη θα είναι το σύμπαν EdS.
- $\omega \in (-1, -1/3)$ , Στην περίπτωση αυτή είναι,  $\lambda_1 < 0$  και  $\lambda_2 > 0$ , οπότε  $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ , άρα το σημείο (0,0) σε αυτήν την περίπτωση είναι σαγματικό σημείο. Συνεπώς για τέτοιες τιμές του  $\omega$  το σύμπαν EdS δεν είναι δυνατή κατάληξη.

- $\omega \in (-1/3, +\infty)$ , Εδώ θα είναι,  $\lambda_1 > 0$  και  $\lambda_2 > 0$ , οπότε το σημείο  $(0, 0)$  σε αυτήν την περίπτωση είναι *ασταθής κόμβος*. Άρα και εδώ για τέτοιες τιμές του  $\omega$  το σύμπαν EdS δεν είναι δυνατή κατάληξη.

Τα ιδιοδιανύσματα σε αυτήν την περίπτωση είναι το  $u_{\lambda_1} = (1, 0)$  που αντιστοιχεί στην ευθεία,  $\Omega_\kappa = 0$  και το  $u_{\lambda_2} = (0, 1)$  που αντιστοιχεί στην ευθεία,  $\Omega_\Lambda = 0$

**2. dS (0,1)** Για  $\omega \in (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$  η Ιακωβιανή ορίζουσα είναι και πάλι μη μηδενική οπότε:

$$P_{dS} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -3\omega - 1 & -3\omega - 3 \end{pmatrix}. \quad (5.3.17)$$

Οι ιδιοτιμές εδώ θα είναι  $\lambda_1 = -2$  και  $\lambda_2 = -3\omega - 3$ .

Για το σημείο αυτό:

- $\omega \in (-\infty, -1)$ , τότε,  $\lambda_1 < 0$  και  $\lambda_2 > 0$ , άρα το  $(0,1)$  είναι *σαγματικό σημείο* και το σύμπαν dS δεν είναι δυνατή κατάληξη για τέτοιες τιμές της παραμέτρου.
- $\omega \in (-1, \infty)$ , τότε,  $\lambda_1 < 0$  και  $\lambda_2 < 0$ , άρα το σημείο εδώ είναι *(ασυμπτωτικά) ευσταθής κόμβος* άρα το σύμπαν καταλήγει να συμπεριφέρεται όπως το dS

Τα ιδιοδιανύσματα εδώ είναι το  $u_{\lambda_1} = (1, -1)$ , που αντιστοιχεί στην ευθεία  $\Omega = 0$  και το  $u_{\lambda_2} = (0, 1)$  που αντιστοιχεί στην  $\Omega_\Lambda = 0$

**3. Milne (1,0)** Ομοίως για  $\omega \in (-\infty, -1/3) \cup (-1/3, \infty)$  η Ιακωβιανή ορίζουσα δεν μηδενίζεται και ο πίνακας γράφεται:

$$P_M = \begin{pmatrix} -1 - 3\omega & -3\omega - 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (5.3.18)$$

Οι ιδιοτιμές εδώ θα είναι  $\lambda_1 = 2$  και  $\lambda_2 = -3\omega - 1$ .

Οπότε για το  $(0, 1)$  οι περιπτώσεις είναι οι ακόλουθες:

- $\omega \in (-\infty, -1/3)$ , τότε  $\lambda_1 > 0$  και  $\lambda_2 > 0$  άρα το σημείο  $(1,0)$  είναι *ασταθής κόμβος* και το σύμπαν Milne δεν είναι δυνατή κατάληξη.



$\omega$	$(-\infty, -1)$	$-1$	$(-1, -1/3)$	$-1/3$	$(-1/3, +\infty)$
EdS	E.K	-	Σ.Σ	-	A.K
dS	Σ.Σ	E.K	E.K	E.K	E.K
M	A.K	A.K	A.K	A.K	Σ.Σ

Πίνακας 5.1: Είδος ευστάθειας για τα τρία κρίσιμα σημεία (EdS,dS,M) ανάλογα με τις τιμές της παραμέτρου  $\omega$  που σχετίζεται με την καταστατική εξίσωση της ύλης. Συμβολίζουμε με E.K : (ασυμπτωτικά) ευσταθής κόμβος , A.K : ασταθής κόμβος, Σ.Σ : σαγματικό σημείο.

- $\omega \in (-1/3, \infty)$  , τότε  $\lambda_1 > 0$  και  $\lambda_2 < 0$  άρα το  $(1,0)$  εδώ είναι *σαγματικό σημείο* οπότε ούτε σε αυτήν την περίπτωση το σύμπαν έχει το Milne σαν ασυμπτωτική συμπεριφορά.

Εδώ τα ιδιοδιανύσματα θα είναι τα  $u_{\lambda_1} = (1, 0)$  και  $u_{\lambda_2} = (0, 1)$ .

Τέλος στην ειδική περίπτωση που  $\omega \in \{-1, -1/3\}$ , δηλαδή που το παγκόσμιο ρευστό συμπεριφέρεται είτε σαν κοσμολογική σταθερά είτε σαν όρος καμπυλότητας, επαναορίζοντας τις μεταβλητές (5.0.1)-(5.0.3) το  $\Omega$  απορροφάται είτε από το  $\Omega_\kappa$  είτε από το  $\Omega_\Lambda$  οπότε είναι εφικτό να τεθεί χωρίς βλάβη,  $\Omega = 0$  και να θεωρηθεί επιπλέον ότι ισχύει,  $\Omega_\kappa + \Omega_\Lambda = 1$ .

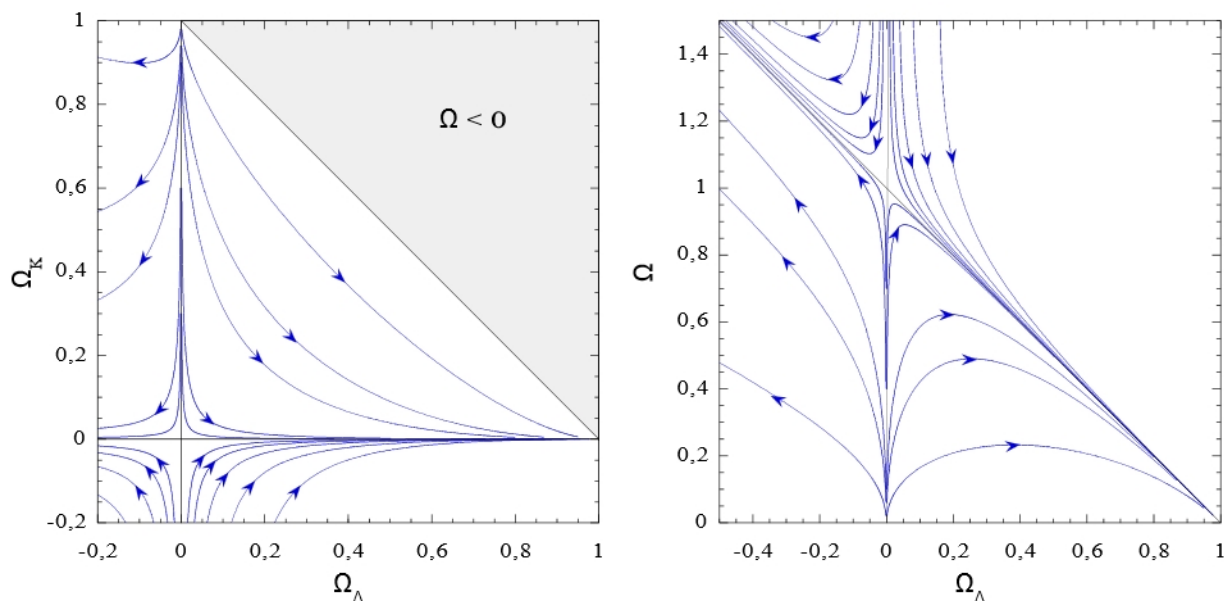
Και στις δύο περιπτώσεις είναι,  $q = \Omega_\kappa - 1 = -\Omega_\Lambda$  οπότε το δυναμικό σύστημα γίνεται:

$$\Omega'_\kappa = 2(\Omega_\kappa - 1)\Omega_\kappa, \tag{5.3.19}$$

$$\Omega'_\Lambda = 2(1 - \Omega_\Lambda)\Omega_\Lambda. \tag{5.3.20}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις δεν είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες εξαιτίας της συνθήκης,  $\Omega_\kappa + \Omega_\Lambda = 1$ . Συνεπώς για  $\omega = -1$  ή για  $\omega = -1/3$ , τα κρίσιμα σημεία εδώ είναι τα  $(1, 0)$  (ασταθής κόμβος) και  $(0, 1)$  (ασυμπτωτικά ευσταθής κόμβος).

Αξίζει να σημειωθεί, ότι εφόσον δεν απουσιάζει ο κοσμολογικός όρος, το σύμπαν Milne δεν είναι ποτέ ευσταθές κατά συνέπεια δεν είναι δυνατή κατάληξη για το σύμπαν ανεξαρτήτου τιμής για την παράμετρο  $\omega$ . Επίσης είναι ξεκάθαρο ότι η κοσμολογική σταθερά τείνει να επικρατήσει της ύλης μόνο όταν  $\omega > -1$ , ενώ αντίθετα η ύλη κυριαρχεί για  $\omega < -1$ . Ο όρος καμπυλότητας δεν μπορεί ποτέ να γίνει κυρίαρχος καθώς θα υποσκελίζεται από την ύλη αν  $\omega < -1$  και από την κοσμολογική σταθερά διαφορετικά. Κατ'επέκταση, η σκοτεινή ενέργεια τείνει να επικρατήσει σε ένα σύμπαν με  $\omega > -1$  ανεξαρτήτως της αρχικής της πυκνότητας. Επειδή



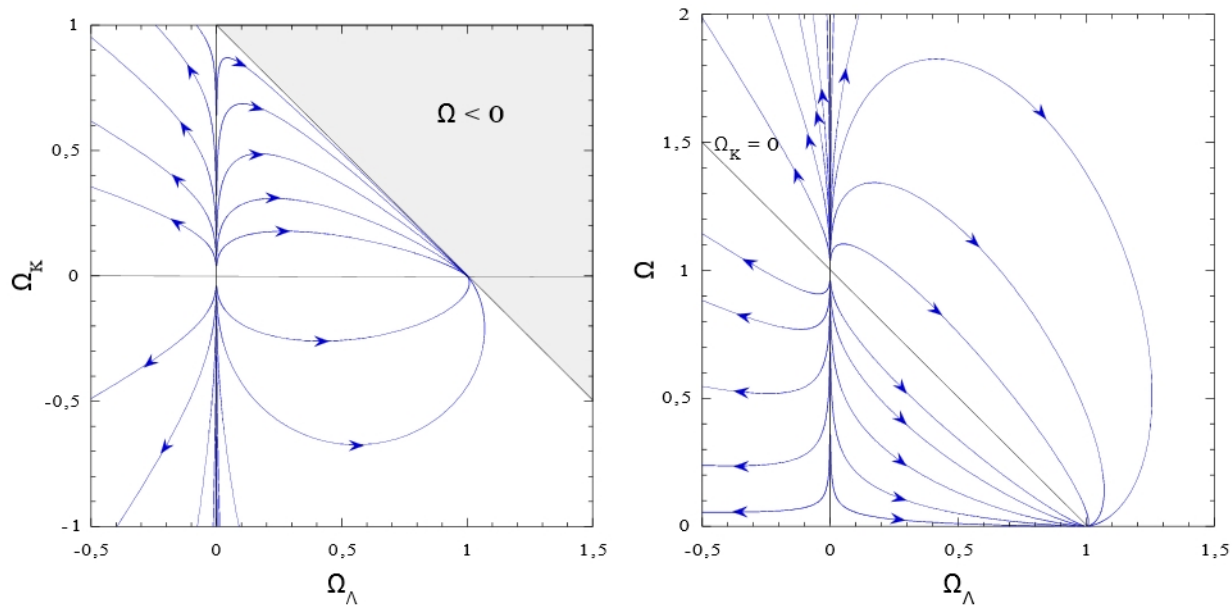
Σχήμα 5.4.1: Το πεδίο φάσεως για την περίπτωση  $\omega = -2/3$

στην πραγματικότητα για την ορατή ύλη ισχύει,  $\omega = 0$ , διαπιστώνουμε ότι η κατάληξη για το σύμπαν είναι αναγκαστικά το σύμπαν DeSitter. Κάτι τέτοιο δεν θα ισχύει αν η καταστατική συμπεριφορά της ύλης, καθώς το σύμπαν αύξανε κλίμακα, μεταβαλλόταν, με αποτέλεσμα να υπάρχει πιθανότητα το  $\omega$  να λάβει τιμές στο διάστημα  $(-\infty, 1)$  και το σύμπαν να ξεκινούσε πορεία σύγκλισης στο σύμπαν EdS. Φυσικά ένα τέτοιο ενδεχόμενο δεν έχει αποδειχτεί, ούτε όμως θεωρείται και πιθανό να ισχύει.

## 5.4 Αριθμητικά παραδείγματα

Προκειμένου να δημιουργηθεί το πεδίο φάσεων για τις διάφορες περιπτώσεις χρησιμοποιείται στο MATLAB και εδώ η 4-παραμετρική μέθοδος Runge Kutta για δυναμικά συστήματα. Η ανάλυση γίνεται δύο φορές σε κάθε περίπτωση, ώστε να δημιουργηθεί το επίπεδο  $(\Omega_\Lambda, \Omega_\kappa)$  αλλά και το  $(\Omega, \Omega_\Lambda)$ .

Στο σχήμα (5.4.2) φαίνεται η περίπτωση που αντιστοιχεί στην τιμή  $\omega = 0$ , δηλαδή στον κλασικό τρόπο συμπεριφοράς της ύλης. Είναι ξεκάθαρο και γραφικά πλέον ότι το σημείο  $(0, 0)$  είναι ασταθές, ενώ το  $(0, 1)$  ευσταθές. Στο σχήμα (5.4.1) από την άλλη, φαίνεται το πεδίο φάσεων για την περίπτωση που  $\omega = -2/3$ , που θα μπορούσε να αντιστοιχεί στην περίπτωση κοσμικών χορδών, [30, 31]. Τέλος στο σχήμα (5.4.3) διακρίνει κανείς την πιο θεωρητική περίπτωση στην οποία  $\omega = -2$  δηλαδή  $\omega < -1$ . Στην περίπτωση αυτήν και μόνον, το σύμπαν EdS είναι ευσταθές. Κάτι το οποίο είναι αξιοσημείωτο είναι ότι για  $\omega > -1$  και για  $\Omega_\Lambda \simeq 0$  (περίοδος

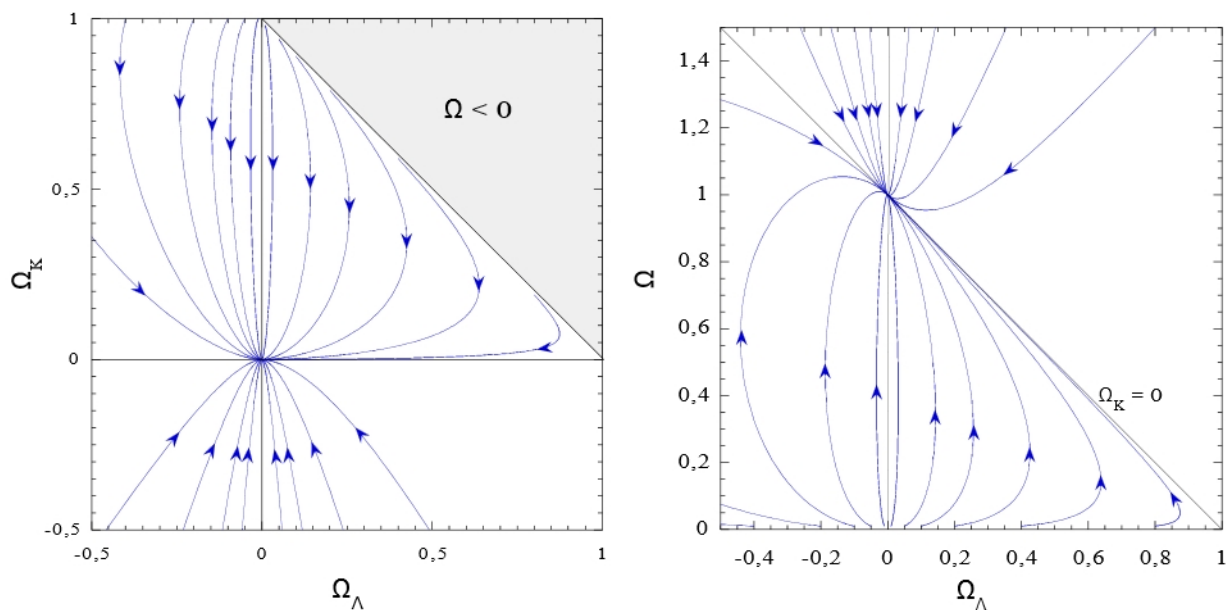


Σχήμα 5.4.2: Το πεδίο φάσεων για την περίπτωση της μη σχετικιστικής ύλης με  $\omega = 0$

κυριαρχίας ύλης - ακτινοβολίας) το σημείο  $(0, 0)$  είναι πάντα ασταθές. Αυτό συνεπάγεται ότι όταν απουσιάζει η σκοτεινή ενέργεια η κατάσταση μηδενικής καμπυλότητας είναι ασταθής. Σήμερα όμως παρατηρείται ότι η καμπυλότητα του Σύμπαντος είναι σχεδόν μηδενική.

Αναδύεται λοιπόν το εξής παράδοξο: Πώς γίνεται να παρατηρείται στο σύμπαν σχεδόν μηδενική καμπυλότητα, δεδομένου ότι για τόσα δισεκατομμύρια χρόνια που κυριαρχεί η ύλη, με  $\omega \in (-1/3, +\infty)$ , το σημείο  $(0, 0)$  είναι ασταθής κόμβος; Για να συμβαίνει κάτι τέτοιο θα πρέπει οι αρχικές συνθήκες να ήταν άριστα ρυθμισμένες. Το συγκεκριμένο παράδοξο είναι γνωστό ως το *πρόβλημα της επιπεδότητας*[4].

Μια λύση είναι η εξής : Υπήρχε μια περίοδος αμέσως μετά τη Μεγάλη Έκρηξη που η ύλη είχε καταστατική εξίσωση με  $\omega < -1$ . Έτσι το  $(0, 0)$  σε αυτήν την περίοδο θα είναι ευσταθής κόμβος και κανείς μπορεί να ρυθμίσει τη διάρκεια αυτής της περιόδου κατάλληλα ώστε να προκύψουν οι κατάλληλες αρχικές συνθήκες. Στην συνέχεια, κατά τη διάρκεια της βασικής εξέλιξης του σύμπαντος το EdS, γίνεται ασταθής κόμβος και η εξέλιξη συνεχίζεται πολύ κοντά στην ευθεία  $\Omega_k = 0$  προς το σύμπαν dS που είναι ευσταθής κόμβος. Έτσι εξηγείται η παρατήρηση ότι το σύμπαν σήμερα είναι σχεδόν μηδενικής καμπυλότητας, καθώς την περίοδο που το EdS ήταν ευσταθές, η καμπυλότητα πλησίασε τόσο πολύ την μηδενική τιμή, που δεν πρόλαβε να αποκλίνει τόσο μέχρι η σκοτεινή ενέργεια να αυξηθεί και να επέλθει η σύγκλιση στο dS, και άρα και σύγκλιση ξανά σε μηδενική καμπυλότητα. Μια ενσάρκωση αυτής της θεώρησης είναι η *θεωρία του πληθωρισμού* [22, 14, 4]. Αυτό που θεωρητικά έκανε ο πληθωρισμός, είναι ότι άλλαξε τις ιδιότητες ευστά-



Σχήμα 5.4.3: Το πεδίο φάσεων για την περίπτωση  $\omega = -2$

θειας των κρίσιμων σημείων του συστήματος Friedmann. Συγκεκριμένα, κατά τη διάρκεια της περιόδου του πληθωρισμού, θεωρείται ότι κυριαρχούσε ένα ρευστό με αρνητική πίεση με αποτέλεσμα τη σύγκλιση στην ευθεία μηδενικής καμπυλότητας. Επιπλέον, όσο μεγαλύτερη ήταν η διάρκεια της περιόδου αυτής, τόσο περισσότερο θα προσέγγισε και η καμπυλότητα το μηδενισμό. Στην συνέχεια το σύμπαν οδηγείται σε αλλαγή περιόδου - στη φάση κυριαρχίας της κλασσικής ύλης και άρα σε απόκλιση από την κατάσταση μηδενικής καμπυλότητας λόγω αστάθειας, ενώ τελικά η καμπυλότητα θα τείνει και πάλι στο μηδέν, λόγω αύξησης της σκοτεινής ενέργειας και ευστάθειας του  $dS$ .

Παρόλα αυτά, η λύση στο πρόβλημα της επιπεδότητας είναι μόνο ένα από τα πολλά χαρακτηριστικά της θεωρίας πληθωρισμού, η οποία όμως δεν θα αναλυθεί εδώ.

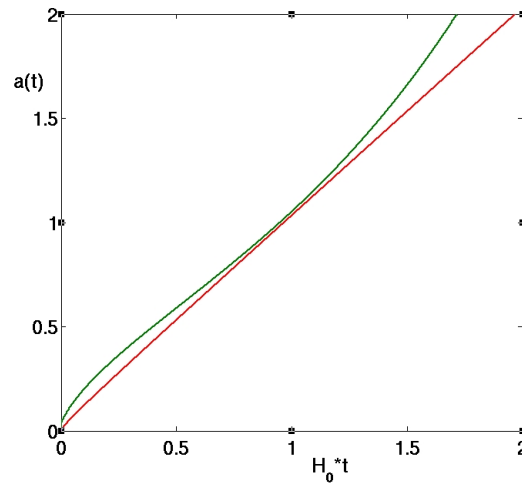
## Κεφάλαιο 6

# Συμπεράσματα μελέτης

Μελετώντας τα πλέον αξιοσημείωτα πρότυπα Friedmann για τη δυναμική του σύμπαντος, στην εργασία αυτή, προέκυψαν διάφορα ενδιαφέροντα συμπεράσματα αναφορικά με τον τρόπο διαστολής, την ηλικία, τη γεωμετρία και τις πιθανές καταλήξεις για το σύμπαν. Αν όντως συμπεράσματα τέτοιου τύπου είναι αληθή, τότε μοιάζει πραγματικά μεγαλειώδες το γεγονός ότι από την συγκεκριμένη μαθηματική μοντελοποίηση προκύπτουν τόσο σημαντικά συμπεράσματα για τον Κόσμο.

Στα προηγούμενα κεφάλαια, έγινε ξεκάθαρο ότι ανάλογα με τα συστατικά ενός σύμπαντος, αυτό θα συμπεριφέρεται και με διαφορετικό τρόπο ως προς τη διαστολή του, η οποία μπορεί να στρέφει τα κοίλα είτε προς τα πάνω, είτε προς τα κάτω. Τα επιβραδυνόμενα μοντέλα του δευτέρου κεφαλαίου, αν και μη ιδανικά, αποτελούν ενδιαφέρουσες προσεγγίσεις για την περίοδο κυριαρχίας μη σχετικιστικής ύλης. Κάτι τέτοιο φαίνεται και από τη σύγκριση των τιμών των αριθμητικών λύσεων του μοντέλου Benchmark και του σύμπαντος της τέταρτης στήλης στον πίνακα (4.3), οι οποίες αν και αρχικά έχουν μικρή απόκλιση στη συνέχεια δεν αποτελούν καλή προσέγγιση. Πιο συγκεκριμένα, θεωρώντας για παράδειγμα ένα σύμπαν αρνητικής καμπυλότητας, που περιέχει μόνο ύλη, αλλά χαμηλής πυκνότητας για παράδειγμα με  $\Omega_{m,0} = 0.03$ , τότε εκτελώντας τον υπολογισμό μέσω της μεθόδου Simpson προκύπτει για την ηλικία του σύμπαντος μια τιμή πολύ κοντά στην πρόβλεψη Benchmark ( $\tau_0 = 0.9543$ ). Το πόσο καλά προσεγγίζει το σύμπαν σε πρώιμα στάδια ένα τέτοιο μοντέλο, φαίνεται και στο σχήμα (6.0.1).

Επίσης αναφορικά με την ύπαρξη ακτινοβολίας στα μοντέλα, πάλι από τον πίνακα (4.3) προκύπτει ότι το σύμπαν EdS, ειδικά μετά από κάποιο χρονικό διάστημα, δεν διαφέρει σχεδόν καθόλου από το σύμπαν που περιέχει και ακτινοβολία (στήλη 6), ενώ η απόκλιση του σύμπαντος Benchmark από ένα σύμπαν μόνο με κοσμολογική σταθερά και ύλη, όπως φαίνεται και στο σχήμα 6.0.2, είναι μηδαμινή. Από αυτό, συμπεραίνεται άμεσα, ότι η προσέγγιση απουσίας ακτινοβολίας από τα μοντέλα, δεδομένου ότι έχει την τιμή που φαίνεται στον πίνακα (4.1), είναι ικανοποιητική



Σχήμα 6.0.1: Σύγκριση προτύπου Benchmark με το πρότυπο χαμηλής πυκνότητας με  $\Omega_{m,0} = 0.03$ . Πράσινο: Benchmark, Κόκκινο: Χαμηλής πυκνότητας

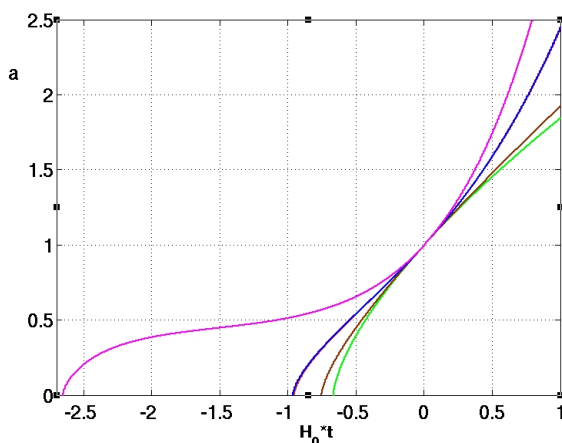
και συνεπώς η αναλυτική λύση (4.2.10) με  $\Omega_{m,0} = 0.3$  είναι η πλέον αντιπροσωπευτική αναλυτική λύση που παρουσιάστηκε στην εργασία αυτή.

Στα κεφάλαια 3 και 4, δείχθηκε ότι είναι δυνατόν, ανεξάρτητα του είδους καμπυλότητας, υπό την παρουσία θετικού κοσμολογικού όρου, το σύμπαν να συνεχίσει να διαστέλλεται αιώνια, συγκλίνοντας στο σύμπαν deSitter, χωρίς να επέλθει κατάρρευση, ενώ ακόμα και ένα αρνητικής καμπυλότητας σύμπαν δύναται να καταρρεύσει υπό την παρουσία αρνητικής κοσμολογικής σταθεράς.

Ανακαλώντας όλες τις αναλυτικές λύσεις των εξισώσεων για τον παράγοντα κοσμικής κλίμακας, που παρουσιάστηκαν κατά τη διάρκεια της εργασίας, γίνεται εμφανές ότι η ηλικία οποιουδήποτε σύμπαντος προκύπτει στην μορφή:

$$t_0 = \phi(\Omega) H_0^{-1}, \quad (6.0.1)$$

όπου η συνάρτηση  $\phi(\Omega)$  ποικίλει ανάλογα με το πρότυπο. Στα πρότυπα όπου,  $0 < \phi(\Omega) < 1$ , η ηλικία του σύμπαντος είναι μικρότερη από τον χρόνο Hubble, ενώ αν  $\phi(\Omega) > 1$ , τότε είναι μεγαλύτερη. Στο κεφάλαιο 2, η συγκεκριμένη συνάρτηση ερμηνεύτηκε ως ένας μειωτικός όρος για την ηλικία του σύμπαντος σε σχέση με τον χρόνο Hubble και για παράδειγμα στην περίπτωση οριακά ανοικτού σύμπαντος, η τιμή της είναι σταθερή και ίση με  $2/3$ . Δείχθηκε, ότι γενικά στα πρότυπα του δευτέρου κεφαλαίου η συγκεκριμένη συνάρτηση θα είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση του  $\Omega_0$ , δηλαδή όσο μεγαλύτερη η πυκνότητα ενέργειας της ύλης, τόσο μικρότερη και η ηλικία του σύμπαντος και θα ανήκει στην πρώτη κατηγορία, δηλαδή  $0 < \phi(\Omega) < 1$ . Στην οριακή περίπτωση που  $\phi(\Omega) = 1$  έχουμε το σύμπαν Milne που διαστέλλεται ομοιόμορφα και η ηλικία θα είναι ακριβώς ο χρόνος Hubble.



**Σχήμα 6.0.2:** Γραφικές παραστάσεις λύσεων διαφόρων προτύπων. Ροζ:  $\Omega_{m,0} = 0.3$ ,  $\Omega_{\Lambda,0} = 1.7$ (Loitering), Μπλε: Benchmark, Κόκκινο:  $\Omega_{m,0} = 0.3$ ,  $\Omega_{\Lambda,0} = 0.7$  (πολύ κοντά στο Benchmark), Καφέ:  $\Omega_{m,0} = 1.5$ , Πράσινο:  $\Omega_{m,0} = 1.0$ (EdS). Εδώ θεωρήσαμε ότι  $a(0) = 1$  (σήμερα), προκειμένου να αναπαραστήσουμε τις λύσεις δίνοντας αναφορά στην σημερινή εποχή.

Η περίπτωση μη φραγμένης συνάρτησης  $\phi$ , με  $\phi(\Omega) > 1$  απαιτεί κοσμολογικό όρο, ή εν γένει συστατικό που θα συνεισφέρει στη διαστολή, κάτι τέτοιο όμως παρότι αναγκαίο, δεν είναι και ικανό, καθώς επί παραδείγματι το πρότυπο Benchmark ανήκει στην πρώτη κατηγορία συμπάντων, σύμφωνα με την ταξινόμηση βάση της συγκεκριμένης συνάρτησης.

Στο σχήμα (6.0.2), έχει δημιουργηθεί στο MATLAB η γραφική παράσταση για διάφορα σύμπαντα, δίνοντας αναφορά στο παρόν (θεωρήθηκε ότι  $a(0) = 1$ ). Η ροζ καμπύλη αντιστοιχεί σε ένα σύμπαν Lemaitre με  $\Omega_{m,0} = 0.3$  και  $\Omega_{\Lambda,0} = 1.7$ , (συνεπώς με θετική καμπυλότητα) και γίνεται φανερό ότι σε αυτήν την περίπτωση η ηλικία του συγκεκριμένου σύμπαντος είναι μεγαλύτερη από το χρόνο Hubble. Κρατώντας την τιμή της πυκνότητας της ύλης σταθερή και αυξάνοντας τον κοσμολογικό όρο, παρατηρείται ότι η ηλικία του σύμπαντος αυξάνεται, δηλαδή η συνάρτηση  $\phi$  σε αυτήν την περίπτωση είναι γνησίως αύξουσα ως προς  $\Omega_{\Lambda,0}$ .

Συμπερασματικά, σύμφωνα με τους κοσμολογικούς περιορισμούς που επάγει κατά κύριο λόγο η Κοσμική Ακτινοβολία Υποβάθρου, το βέλτιστο μοντέλο από τα παρόντα μοντέλα είναι το μοντέλο Benchmark. Το πρότυπο αυτό, λαμβάνει υπόψιν του το σύμπαν ως μηδενικής καμπυλότητας, και δίνει μια ηλικία  $\simeq 13.8 Gyr$ , μέχρις στιγμής αποδεκτή από την ευρεία πλειοψηφία της επιστημονικής κοινότητας. Τα πρόσφατα αποτελέσματα της αποστολής Planck επιβεβαιώνουν το αποτέλεσμα αυτό στην πράξη, παρόλα αυτά αφήνουν και ανοιχτό το ενδεχόμενο δημιουργίας νέων μοντέλων, που λαμβάνουν υπόψιν κβαντική βαρύτητα. Το σύμπαν κατά το δεδομένο πρότυπο δεν πρόκειται να καταρρεύσει σε Μεγάλη Σύνθλιψη, εκτός και αν μέσω της μελέτης της σκοτεινής ενέργειας αποδειχθεί ότι κατά την περίοδο επικρατείας της, αλλάξει για κάποιο λόγο η συμπεριφορά της, ή επικρατήσει άλλο συ-

στατικό με ελκτικό χαρακτήρα που στις προηγούμενες περιόδους ήταν αμελητέο, οπότε και τότε το σύμπαν θα οδηγηθεί σε συστολή, κάτι τέτοιο όμως παραμένει μια απλή εικασία και σαφώς δεν υπάρχουν ενδείξεις που να την υποστηρίζουν.

Σύμφωνα με τα συμπεράσματα του κεφαλαίου 5 και αν το πρότυπο Benchmark αντικατοπτρίζει όντως την πραγματικότητα, τότε η κατάληξη του Σύμπαντος θα είναι το σύμπαν deSitter ως το μόνο ευσταθές σύμπαν υπό την παρουσία κοσμολογικού όρου.

Υπό το πρίσμα αυτό, τα σενάρια κατάληξης του σύμπαντος από φυσικής πλευράς είναι δύο:

- Η Μεγάλη Απόσχιση (The Big Rip), κατά την οποία τελικά οποιαδήποτε δομή ύλης διαλύεται, αφού εξαιτίας της υπέρ-εκθετικής διαστολής του χώρου από ένα χρονικό σημείο και ύστερα, όλοι οι δεσμοί χάνουν την ισχύ τους. Στο σενάριο αυτό, ο συντελεστής κοσμικής κλίμακας, λαμβάνει άπειρη τιμή σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα. Αν υποθεθεί ότι η μορφή της ύλης σε τέτοιες καταστάσεις αλλάζει, τότε παραμένει ανοιχτό το ενδεχόμενο δημιουργίας, μιας ή και περισσότερων ανωμαλιών (singularities) επί του χωροχρόνου και συνεπώς πιθανότητα νέας Μεγάλης Έκρηξης.
- Ο Μεγάλος Παγετός (The Big Freeze), κατά τον οποίον το σύμπαν ψύχεται όλο και περισσότερο καθώς διαστέλλεται, μέχρι να φτάσει ασυμπτωτικά στο απόλυτο μηδέν. Τούτο διότι, αύξηση της κλίμακας, συνεπάγεται μείωση της πυκνότητας της ύλης και άρα μείωση της πίεσης και συνεπώς μείωση της θερμοκρασίας. Στο σενάριο αυτό τα άστρα αναμένεται να δημιουργούνται κανονικά για  $10^{12}$  με  $10^{14}$  χρόνια, αλλά τελικά η απαιτούμενη ποσότητα αερίων για την αστρική δημιουργία παύει να υπάρχει. Καθώς τα υπάρχοντα άστρα στερεύουν από καύσιμα και καταρρέουν σε μαύρες τρύπες, το σύμπαν καταλήγει να γίνεται όλο και σκοτεινότερο. Τελικά, οι μαύρες τρύπες, γίνονται οι κυρίαρχες δομές στο σύμπαν, μέχρι να εξατμιστούν με εξαιρετικά αργό ρυθμό, απελευθερώνοντας τη λεγόμενη ακτινοβολία Hawking.

Όποια και να είναι η πραγματικότητα για την κατάληξη του Σύμπαντος, η έρευνα επί του θέματος συνεχίζεται και θα συνεχίζεται και η βελτίωση των προτύπων Friedmann θα εξαρτάται άμεσα από την επιστημονική πρόοδο στο πεδίο της Θεωρητικής Φυσικής και των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών.



# Βιβλιογραφία

- [1] Ι. Χρυσοβέργης Α. Μπακόπουλος. *Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση*. Εκδόσεις Συμεών, 2009.
- [2] Σταυρακάκης Ν. *Συνήθειες Διαφορικές εξισώσεις: Γραμμική και μη Γραμμική Θεωρία -με Εφαρμογές από τη Φύση και τη Ζωή*. Εκδόσεις Παπασωτηρίου, 1997.
- [3] Tawfik A. The hubble parameter in the early universe with viscous qcd matter and finite cosmological constant. *Annalen der Physik* 523, 2011.
- [4] Guth A. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. *Phys. Rev. D* 23, 347, 1981.
- [5] T. Harko A. Tawfik. Quark-hadron phase transitions in viscous early universe. *Physical Review D* 85 (8): 084032, 2011.
- [6] Bondi and Gold. The steady-state theory of the expanding universe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society and Vol. 108 and p.252*, 1948.
- [7] S. Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Addison-Wesley, 2003.
- [8] Jodi Christiansen and Andy Siver. Computing accurate age and distance factors in cosmology. *American Journal of Physics*, 2012.
- [9] Planck Collaboration. Planck 2015 results. xiii. cosmological parameters. *Cornell University Library*, 2015.
- [10] Viktor Ya. Frenkel Eduard A. Tropp and Artur D. Chernin. Alexander a. friedmann: The man who made the universe expand. *Cambridge University Press*, 2006.
- [11] F.Hoyle and J.V. Norlikar. The c-field as a direct particle field. DOI: 10.1098/rspa.1964.0225, 1964.

- [12] F. Hoyle. A new model for the expanding universe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Vol. 108, p.372, 1948.*
- [13] A. Krasinski J. Plebanski. *An Introduction to General Relativity and Cosmology.* Cambridge University Press, 2012.
- [14] Islam J.N. *An Introduction to Mathematical Cosmology.* Cambridge University Press, 2001.
- [15] RoyMaartens John D Barrow, George F R Ellis and Christos G Tsagas. On the stability of einstein static universe. *Classical and Quantum Gravity, Volume 20, Number 11, 2003.*
- [16] Dragan Huterer Joshua Frieman, Michael Turner. Dark energy and the accelerating universe. *Ann.Rev.Astron.Astrophys.46:385-432,2008, 2008.*
- [17] Eric V. Linder and Dragan Huterer. How many dark energy parameters? *Phys.Rev.D72:043509,2005, 2005.*
- [18] T. Padmanabhan. Accelerated expansion of the universe driven by tachyonic matter,. *Phys.Rev.D 66 (2002) 021301, 2002.*
- [19] A.A.; R. W. Wilson Penzias. A measurement of the flux density of cas a at 4080 mc/s. *Astrophysical Journal, vol. 142, p.1149, October 1965.*
- [20] R. W. Penzias, A. A.; Wilson. A measurement of excess antenna temperature at 4080 mc/s. *Astrophysical Journal, vol. 142, p.419-421, July 1965.*
- [21] M. J. Reboucas and G. I. Gomero. Cosmic topology: A brief overview. *Brazilian Journal of Physics, vol. 34, no. 4A, 2004.*
- [22] Barbara Ryden. *Introduction to Cosmology.* Addison Wesley, 2003.
- [23] Morag I. Scrimgeour et al. The wigglez dark energy survey: the transition to large-scale cosmic homogeneity. *Cornell university library, 2012.*
- [24] Yisong Yang Shouxin Chen, Gary W. Gibbons. Explicit integration of friedmann's equation with nonlinear equations of state. 2015.
- [25] F. Steiner. Solution of the friedmann equation determining the time evolution, acceleration and the age of the universe. *Volume 13, Universitat Ulm, 2008.*
- [26] M.; Mansour H.; Harko T. Tawfik, A.; Wahba. Viscous quark-gluon plasma in the early universe. *Annalen der Physik 523 (3): 194., 2011.*

- [27] Jean-Philippe Uzan and Roland Lehoucq. A dynamical study of the friedmann equations. *Eur. J. Phys.* 22 (2001) 371-384, 2001.
- [28] Sidney van den Bergh. The curious case of lemaitre's equation no24. *The Journal of the Royal Astronomical Society of Canada. Royal Astronomical Society of Canada* 07/2011; 105:151, 2011.
- [29] Georg F R Ellis & Henk van Elst. Cosmological models: Cargese lectures 1998. *NATOAdv.StudyInst.Ser.C.Math.Phys.Sci.541:1-116*, 2008.
- [30] V.V. Kuzmichev V.E. Kuzmichev. Low-velocity cosmic strings in accelerating universe. 2012.
- [31] V.V. Kuzmichev V.E. Kuzmichev. Two-component perfect fluid in frw universe. *Acta Physica Polonica Series B (Impact Factor: 0.85)*. 04/2012; 43(9), 2012.