



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Τομέας Μαθηματικών

Αριθμητικό Πεδίο Πολυωνυμικών Πινάκων

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Συγγραφέας:

Αθηνά Τσαγκάρη

Επιβλέπων Καθηγητής:

Παναγιώτης Ψαρράκος

Τομέας Μαθηματικών

Αθήνα

Ιούλιος 2016



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Τομέας Μαθηματικών

Αριθμητικό Πεδίο Πολυωνυμικών Πινάκων

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Αθηνά Τσαγκάρη

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή:

- Βασίλειος Κανελλόπουλος, Αναπληρωτής Καθηγητής
- Ανάργυρος Φελλούρης, Αναπληρωτής Καθηγητής
- Παναγιώτης Ψαρράκος, Καθηγητής/Επιβλέπων Καθηγητής

Αθήνα

Ιούλιος 2016

Περιεχόμενα

1	Βασικοί Ορισμοί και Προαπαιτούμενα.	8
2	Ορισμός και Βασικές Ιδιότητες.	14
2.1	Ορισμός	14
2.2	Βασικές Ιδιότητες.	16
2.3	Αριθμητικό Πεδίο και Παραγοντοποίηση	26
2.4	Πρωτοβάθμια Πολυώνυμα με Ερμιτιανούς Συντελεστές	29
3	Το σύνορο, τα γωνιακά και τα μεμονομένα σημεία	32
3.1	Σύνоро και Τοπική Διάσταση.	32
3.2	Γωνιακά και Μεμονωμένα Σημεία	40
3.3	Διαγώνιοι Πολυωνυμικοί Πίνακες.	47
4	Το Αριθμητικό Πεδίο των Αυτόσυζυγών Τετραγωνικών Πολυωνυμικών Πινάκων	52
4.1	Η μη Μονική Υπόθεση	52
4.2	Η Μονική Περίπτωση	55
4.3	Ιδιοτιμές στο Σύνορο	60
4.4	Μη Διαφορίσιμα Οριακά Σημεία	65
4.5	Τύποι Ιδιοτιμών	72
4.6	Αποσβενόμενα Συστήματα Ταλάντωσης	73
4.7	Συστήματα με Μεταβλητή Απόσβεση	75
4.8	Γυροσκοπικά Συστήματα	76

Πρόλογος

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η μελέτη του αριθμητικού πεδίου των πολυωνυμικών πινάκων. Το αριθμητικό πεδίο πολυωνυμικού πίνακα είναι, ουσιαστικά, μια γενίκευση του αριθμητικού πεδίου του σταθερού πίνακα και παίζει σημαντικό ρόλο στα συστήματα ταλάντωσης με υπεραπόσβεση τα οποία έχουν πεπερασμένους βαθμούς ελευθερίας.

Το πρώτο κεφάλαιο είναι μια εισαγωγή στο αριθμητικό πεδίο $W(P(\lambda))$ ενός τετραγωνικού πολυωνυμικού $P(\lambda)$, που περιλαμβάνει βασικές του ιδιότητες καθώς και άλλους χρήσιμους ορισμούς.

Στο δεύτερο κεφάλαιο ορίζουμε, αρχικά, το αριθμητικό πεδίο πολυωνυμικού πίνακα και τις βασικές του ιδιότητες. Στη συνέχεια, δίνονται παραγοντοποιήσεις τέτοιων πολυωνύμων βασισμένες στις γεωμετρικές ιδιότητες του $W(P(\lambda))$ και μελετάμε αριθμητικό πεδίο πολυωνυμικών πινάκων για γραμμικούς πολυωνυμικούς πίνακες με συντελεστές ερμιτιανούς πίνακες.

Στο τρίτο κεφάλαιο μελετάμε το σχήμα του $W(P(\lambda))$ χρησιμοποιώντας την έννοια της τοπικής διάστασης. Επίσης, μελετάμε κάποιες αλγεβρικές ιδιότητες των γωνιακών σημείων του αριθμητικού πεδίου καθώς και των μεμονομένων σημείων. Τέλος, μελετώνται και οι ειδικές περιπτώσεις των διαγώνιων πολυωνυμικών πινάκων.

Το τέταρτο κεφάλαιο εστιάζει στους πολυωνυμικούς πίνακες της μορφής $P(\lambda) = I\lambda^2 + A_1\lambda + A_0$, (όπου A_0 και A_1 είναι $n \times n$ ερμιτιανοί πίνακες και λ μια μιγαδική μεταβλητή). Αναπτύσσονται ιδιότητες του αριθμητικού πεδίου χρησιμοποιώντας τη στενή σχέση ανάμεσα στο $W(P(\lambda))$ το κλασικό αριθμητικό πεδίο του μιγαδικού πίνακα $A = A_0 + iA_1$. Στη συνέχεια, εξετάζονται οι ιδιοτιμές και τα μη διαφορίσιμα σημεία στο σύνολο του $W(P(\lambda))$ και τέλος παρουσιάζονται κάποιες εφαρμογές σε συστήματα ταλάντωσης.

Abstract

The aim of the present thesis is the study of the numerical range of matrix polynomials. The numerical range of matrix polynomials is a generalization of the numerical range of matrices, and it has important applications to overdamped vibration systems with finite number of degrees of freedom and it is also related to stability theory.

Chapter 1 introduces the concept of the numerical range and includes some of its basic properties, along with other useful definitions.

Chapter 2 begins with the definition of the numerical range of matrix polynomials $W(P(\lambda))$. Afterwards, a factorization result, based on geometric properties of the numerical range of matrix polynomials with not necessarily hermitian coefficients is proved and the set $W(P(\lambda))$ for a linear polynomial with hermitian matrices as coefficients is studied in detail.

In Chapter 3, we study the shape of $W(P(\lambda))$ by using the notion of local dimension. We also consider some algebraic properties of the sharp points of the numerical range of matrix polynomials and, also, isolated points of the numerical range. Finally, the special cases of diagonal matrix polynomials are also considered.

Chapter 4 focuses on matrix polynomials of the form $P(\lambda) = I\lambda^2 + A_1\lambda + A_0$, (where A_0 and A_1 are $n \times n$ hermitian matrices and λ is a complex variable). Properties of the numerical range are developed in detail taking advantage of the close connection between $W(P(\lambda))$ and the classical numerical range of the the complex matrix $A = A_0 + iA_1$. Eigenvalues and nondifferentiable points on the boundary are examined and a procedure for the numerical determination of $W(P(\lambda))$ is presented and used in several illustrations. Some extensions of the theory to more general polynomials are also discussed, as well as special cases describing vibrating systems.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή της διπλωματικής εργασίας κ. Παναγιώτη Ψαρράκο, Καθηγητή Ε.Μ.Π., για την πολύτιμη βοήθειά και στήριξη του στη διάρκεια αυτών των μηνών. Πάντα διαθέσιμος να προσφέρει απλόχερα τις γνώσεις και την εμπειρία του για να βοηθήσει ακαδημαϊκά και ψυχολογικά. Επίσης, το μεγαλύτερο ευχαριστώ το οφείλω στους γονείς, την οικογενειά μου αλλά και όλους τους φίλους μου για την συνεχή συμπαράσταση και υποστήριξή τους σε όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Κεφάλαιο 1

Βασικοί Ορισμοί και Προαπαιτούμενα.

Ξεκινάμε με κάποιους βασικούς ορισμούς, συμβολισμούς και ιδιότητες.

Συμβολίζουμε με \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{N} τα σύνολα των πραγματικών, μιγαδικών και φυσικών αριθμών αντίστοιχα. Για έναν μιγαδικό αριθμό $a \in \mathbb{C}$ συμβολίζουμε $\operatorname{Re}(a)$, $\operatorname{Im}(a)$ το πραγματικό και φανταστικό μέρος του a αντίστοιχα.

Τον δίσκο κέντρου a και ακτίνας ρ του μιγαδικού επιπέδου τον συμβολίζουμε με $\Delta(a, \rho)$.

Για ένα σύνολο \mathcal{B} , συμβολίζουμε με $\operatorname{Co}\{\mathcal{B}\}$ την κυρτή θήκη του \mathcal{B} . Το σύνορό του το συμβολίζουμε με $\partial\mathcal{B}$ και το εσωτερικό του με $\operatorname{Int}\mathcal{B}$.

Έστω τώρα ότι το \mathcal{B} είναι κλειστό υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου και έστω $\lambda_0 \in \mathcal{B}$. Η τοπική διάσταση του λ_0 στο \mathcal{B} ορίζεται ως το όριο

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \dim\{\mathcal{B} \cap \Delta(\lambda_0, h)\}, \quad h \in \mathbb{R}, h > 0.$$

Επομένως, κάθε μεμονωμένο σημείο του \mathcal{B} έχει τοπική διάσταση ίση με μηδέν και κάθε μη μεμονωμένο σημείο a του έχει τοπική διάσταση 2 αν και μόνο αν υπάρχει μία ακολουθία σημείων στο εσωτερικό του, που να συγκλίνει στο a .

Συμβολίζουμε \mathbb{C}^n τον διανυσματικό χώρο των n -διάστατων μιγαδικών διανυσμάτων και με $\mathbb{C}^{n \times m}$ το σύνολο των $n \times m$ μιγαδικών πινάκων.

Έστω $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$ και $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$, τότε με x^* , A^* συμβολίζονται το διάνυσμα γραμμή $x^* = \begin{bmatrix} \overline{x_1} & \dots & \overline{x_n} \end{bmatrix}$ και ο αναστροφοσυζηγής πίνακας του A , αντίστοιχα.

Το σύνολο των διανυσμάτων του \mathbb{C}^n έχουν μέτρο 1 τα συμβολίζουμε με \mathcal{S}_n . Δηλαδή,

$$\mathcal{S}_n = \{x \in \mathbb{C}^n : \|x\| = 1 \Leftrightarrow x^*x = 1\},$$

όπου $\|\cdot\|$ είναι η Ευκλείδεια διανυσματική νόρμα.

Με I_n συμβολίζουμε τον μοναδιαίο πίνακα διάστασης n .

Με $\text{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ συμβολίζουμε ένα διαγώνιο $n \times n$ πίνακα με διαγώνια στοιχεία a_1, \dots, a_n .

Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ένας τετραγωνικός πίνακας διάστασης n .

- (i) Ένας μιγαδικός αριθμός $\lambda \in \mathbb{C}$ ονομάζεται ιδιοτιμή του πίνακα A με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$, όταν $Ax = \lambda x$.
- (ii) Το πολυώνυμο βαθμού n , $p_A(x) = \det(xI_n - A)$, είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A .
- (iii) Το σύνολο των ιδιοτιμών του A ονομάζεται φάσμα του A και συμβολίζεται με $\sigma(A)$.
- (iv) Ο A λέγεται διαγωνοποιήσιμος όταν έχει n -γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.
- (v) Η ορίζουσα του A συμβολίζεται με $\det(A)$.
- (vi) Η τάξη του πίνακα A είναι το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών (ή στηλών) του A και συμβολίζεται με $\text{rank}(A)$.

- (vii) Έστω ότι ο $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ είναι αντιστρέψιμος. Τότε $\det(A) \neq 0$, $0 \notin \sigma(A)$, $\text{rank}(A) = n$. Ο αντίστροφος πίνακας του A συμβολίζεται με A^{-1} .
- (viii) Ο A ονομάζεται ερμιτιανός όταν $A^* = A$.
- (ix) Ο $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ονομάζεται ορθομοναδιαίος όταν $A^*A = I_n$.
- (x) Ο $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ονομάζεται κανονικός όταν $A^*A = AA^*$. Τότε υπάρχει ορθομοναδιαίος πίνακας $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ τέτοιος ώστε $A = UDU^*$, όπου D διαγώνιος.
- (xi) Αν $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ τότε οι πίνακες $H(A) = \frac{A + A^*}{2}$ και $S(A) = \frac{A - A^*}{2}$, ονομάζονται *ερμιτιανό* και *αντιερμιτιανό μέρος* του A , αντίστοιχα.

Απαραίτητος ορισμός για τον σκοπό αυτής της εργασίας αποτελεί αυτός του αριθμητικού πεδίου ενός τετραγωνικού πίνακα.

Ορισμός 1.0.1. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ένας τετραγωνικός πίνακας. Το *αριθμητικό πεδίο* του A είναι το σύνολο

$$F(A) = \{x^*Ax : x \in \mathcal{S}_n\}.$$

Η *αριθμητική ακτίνα* ενός $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ορίζεται ως

$$r(A) = \max\{|z| : z \in F(A)\}.$$

Η *εσωτερική αριθμητική ακτίνα* ενός $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ορίζεται ως

$$\tilde{r}(A) = \min\{|z| : z \in F(A)\}.$$

Ένα $a \in \partial F(A)$ καλείται *γωνιακό σημείο* του $F(A)$ αν υπάρχουν γωνίες θ_1, θ_2 με $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 < 2\pi$ και $\theta_2 - \theta_1 < \pi$, για τις οποίες

$$\text{Re}(e^{i\theta} a) = \max\{\text{Re}(b) : b \in F(e^{i\theta} A)\},$$

για κάθε $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$.

Ας δούμε κάποιες από τις βασικές ιδιότητες του αριθμητικού πεδίου.

Έστω $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

- (P1) Το $F(A)$ είναι κυρτό υποσύνολο του \mathbb{C} .
- (P2) Το $F(A)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του \mathbb{C} .
- (P3) $\sigma(A) \subseteq F(A)$, δηλαδή το αριθμητικό πεδίο περιέχει τις ιδιοτιμές του πίνακα.
- (P4) $F(A + \alpha I_n) = F(A) + \alpha$, $F(\alpha A) = \alpha F(A)$.
- (P5) $F(A + B) \subseteq F(A) + F(B)$.
- (P6) $F(A) = \{\alpha\}$ αν και μόνο αν $A = \alpha I_n$.
- (P7) Αν $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ορθομοναδιαίος, τότε $F(U^*AU) = F(A)$.
- (P8) $F(H(A)) = \text{Re}(F(A))$ και $F(S(A)) = i\text{Im}(F(A))$.
- (P9) Για κάθε κανονικό πίνακα A ισχύει $F(A) = \text{Co}(\sigma(A))$, δηλαδή το αριθμητικό πεδίο του είναι η κυρτή θήκη των ιδιοτιμών του.
- (P10) Αν ένας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ είναι ερμιτιανός, τότε το αριθμητικό πεδίο του είναι το κλειστό ευθύγραμμο τμήμα με άκρα την ελάχιστη και τη μέγιστη ιδιοτιμή του A .
- (P11) Αν το $a \in \mathbb{C}$ είναι ένα γωνιακό σημείο του $F(A)$, τότε το a είναι ιδιοτιμή του A .

Στη συνέχεια θα μας χρειαστεί και ο επόμενος ορισμός.

Ορισμός 1.0.2. Έστω (A_0, A_1, A_2) μια τριάδα $n \times n$ ερμιτιανών πινάκων. Το συνθετικό αριθμητικό πεδίο της τριάδας (A_0, A_1, A_2) ορίζεται ως

$$JNR(A_0, A_1, A_2) = \{(x^*A_0x, x^*A_1x, x^*A_2x) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathcal{S}_n\}.$$

Το σύνολο αυτό είναι κυρτό για $n \geq 3$ και αν $n = 2$ τότε είτε είναι κυρτό ή είναι η επιφάνεια ενός ελλειψοειδούς.

Στη συνέχεια δίνουμε τον ορισμό του πολυωνυμικού πίνακα.

Ορισμός 1.0.3. Πολυωνυμικός πίνακας βαθμού m ορίζεται η συνάρτηση από το σύνολο των μιγαδικών αριθμών \mathbb{C} στο σύνολο των $n \times k$ πινάκων, $\mathbb{C}^{n \times k}$,

$$P(\lambda) = A_m \lambda^m + A_{m-1} \lambda^{m-1} + \dots + A_1 \lambda + A_0, \quad A_m \neq 0,$$

όπου το λ είναι η μιγαδική μεταβλητή και $A_i \in \mathbb{C}^{n \times k}$, $\forall i = 1, \dots, m$.

Εμείς θα ασχοληθούμε μόνο με τετραγωνικούς πολυωνυμικούς πίνακες, δηλαδή όλοι οι πίνακες συντελεστές A_m, \dots, A_0 από εδώ και στο εξής θα είναι τετραγωνικοί.

Ένας τετραγωνικός πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ θα λέγεται ομαλός όταν η οριζουσα του, $\det(P(\lambda))$, δεν είναι ταυτοτικά μηδενική.

Οι ιδιοτιμές ενός τετραγωνικού πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $\det(P(\lambda)) = 0$. Αν λ_0 είναι μια ιδιοτιμή του $P(\lambda)$, τότε ένα μη μηδενικό $x_0 \in \mathbb{C}^n$ τέτοιο ώστε $P(\lambda_0)x_0 = 0$, είναι ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην λ_0 . (Θεωρούμε αποκλειστικά τις πεπερασμένες ιδιοτιμές του $P(\lambda)$). Η πολλαπλότητα της ιδιοτιμής ως ρίζας της ορίζουσας $\det(P(\lambda))$ ονομάζεται αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής. Το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν σε μια ιδιοτιμή ονομάζεται γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής. Τέλος, αν η αλγεβρική πολλαπλότητα μιας ιδιοτιμής ισούται με την γεωμετρική της πολλαπλότητα, τότε αυτή καλείται ημιαπλή.

Αν $P(\lambda) = A_m \lambda^m + A_{m-1} \lambda^{m-1} + \dots + A_1 \lambda + A_0$, $A_m \neq 0$, είναι ένας πολυωνυμικός πίνακας, τότε ο πολυωνυμικός πίνακας

$$P'(\lambda) = mA_m \lambda^{m-1} + (m-1)A_{m-1} \lambda^{m-2} + \dots + A_1, \quad A_m \neq 0,$$

είναι η παράγωγος του $P(\lambda)$.

Τέλος, αν $P(\lambda) = A_m\lambda^m + A_{m-1}\lambda^{m-1} + \dots + A_1\lambda + A_0$, $A_m \neq 0$, είναι ένας $n \times n$ πολυωνυμικός πίνακας, το συνθετικό αριθμητικό πεδίο των συντελεστών του ορίζεται ως

$$JNR(P) = \{(x^*A_0x, x^*A_1x, \dots, x^*A_mx) \in \mathbb{C}^n : x \in \mathcal{S}_n\}.$$

Κεφάλαιο 2

Ορισμός και Βασικές Ιδιότητες.

2.1 Ορισμός

Ορισμός 2.1.1. Εστω,

$$P(\lambda) = A_m \lambda^m + A_{m-1} \lambda^{m-1} + \dots + A_0,$$

ένας πολυωνυμικός πίνακας, όπου $A_i \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και λ είναι μια μιγαδική μεταβλητή. Ορίζουμε το αριθμητικό πεδίο του $P(\lambda)$ ως το σύνολο

$$\begin{aligned} W(P(\lambda)) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : x^* P(\lambda) x = 0, \text{ για κάποιο μη μηδενικό } x \in \mathbb{C}^n\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : x^* P(\lambda) x = 0, \text{ για κάποιο μη μηδενικό } x \in \mathcal{S}^n\}. \end{aligned}$$

Αν $P(\lambda) = \lambda I_n - A$, τότε το $W(P(\lambda))$ ισούται με το αριθμητικό πεδίο του

A (δηλ. $F(A)$). Πράγματι,

$$\begin{aligned}
 W(\lambda I_n - A) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : x^*(\lambda I_n - A)x = 0, \text{ για κάποιο μη μηδενικό } x \in \mathbb{C}^n\} \\
 &= \{\lambda \in \mathbb{C} : x^*Ax = \lambda, \text{ για κάποιο μη μηδενικό } x \in \mathbb{C}^n\} \\
 &= \{\lambda \in \mathbb{C} : x^*Ax = \lambda, x \in \mathcal{S}_n\} \\
 &= F(A).
 \end{aligned}$$

Υπ' αυτήν έννοια, το αριθμητικό πεδίο πολυωνυμικού πίνακα είναι μια γενίκευση του κλασικού αριθμητικού πεδίου.

Μια σημαντική εφαρμογή όπου το αριθμητικό πεδίο πολυωνυμικού πίνακα παίζει σημαντικό ρόλο είναι τα συστήματα ταλάντωσης με υπεραπόσβεση τα οποία έχουν πεπερασμένους βαθμούς ελευθερίας. Οι πολυωνυμικοί πίνακες σε αυτές τις περιπτώσεις είναι της μορφής $A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0$, όπου οι A_0, A_1, A_2 είναι $n \times n$ θετικά ορισμένοι πίνακες. Παραγοντοποιήσεις τέτοιων πολυωνύμων της μορφής $A(\lambda I - Y_1)(\lambda I - Y_2)$, που βασίζονται στις ιδιότητες του αριθμητικού τους πεδίου, είναι σημαντικές στη θεωρία των συστημάτων ταλάντωσης με υπεραπόσβεση. Μια γενίκευση των ιδεών αυτών σε πολυωνυμικούς πίνακες και πολυωνυμικούς τελεστές αυθαίρετων βαθμών οδηγεί στην ιδέα των υπερβολικών πολυωνύμων και σε σημαντικά αποτελέσματα παραγοντοποίησης που βασίζονται στις ιδιότητες του αριθμητικού πεδίου.

Άλλο ένα κίνητρο για τη μελέτη του αριθμητικού πεδίου πολυωνυμικών πινάκων έρχεται από τη θεωρία ευστάθειας. Θυμηθείτε ότι ένα βαθμωτό πολυώνυμο $p(\lambda)$ λέγεται ευσταθές αν όλες οι ρίζες του έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος. Με όρους αριθμητικού πεδίου, ευστάθεια σημαίνει ότι $W(P(\lambda)) \subseteq \{a \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(a) < 0\}$. Αν έχουμε k βαθμωτά πολυώνυμα $p_1(\lambda), p_2(\lambda), \dots, p_n(\lambda)$, είναι ενδιαφέρον να γνωρίζουμε αν όλα τα πολυώνυμα που προέρχονται από κυρτούς συνδυασμούς των δοθέντων k πολυωνύμων, δηλ. $q(\lambda) = \sum_{j=1}^k h_j p_j(\lambda)$ με $h_i \geq 0$ και $\sum h_i = 1$, είναι επίσης ευσταθή. Έστω ότι m είναι ο υψηλότερος βαθμός των πολυωνύμων $p_i(\lambda)$ και για $j = 0, 1, \dots, m$ έστω ότι A_j είναι ο διαγώνιος πίνακας του οποίου το i διαγώνιο στοιχείο ισούται με τον συντελεστή του λ^j

στο $p_i(\lambda)$. Αν $P(\lambda) = \sum_{j=1}^m A_j \lambda^j$, τότε είναι εύκολο να δούμε ότι το $q(x)$ είναι κυρτός συνδυασμός των $p_i(\lambda)$ αν και μόνο αν το $q(x)$ είναι της μορφής $x^* P(\lambda) x$ με $x \in \mathcal{S}_n$. Επομένως, όλοι οι κυρτοί συνδυασμοί των πολυωνύμων $p_i(\lambda)$ είναι ευσταθείς αν και μόνο αν $W(P(\lambda)) \subseteq \{a \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(a) < 0\}$. Έτσι, αποτελέσματα για ευσταθή πολυώνυμα μπορούν να μεταφερθούν σε αποτελέσματα για το $W(P(\lambda))$ και αντίστροφα.

Στη παράγραφο αυτή, αρχικά μελετάμε τη σχέση των γεωμετρικών ιδιοτήτων του $W(P(\lambda))$ με τις αλγεβρικές και αναλυτικές ιδιότητες του $P(\lambda)$.

2.2 Βασικές Ιδιότητες.

Οι επόμενες ιδιότητες του $W(P(\lambda))$ μπορούν άμεσα να επαληθευτούν.

Πρόταση 2.2.1. Έστω $P(\lambda) = A_m \lambda^m + A_{m-1} \lambda^{m-1} + \dots + A_0$, με $A_m \neq 0$.

(i) Το $W(P(\lambda))$ είναι κλειστό στο \mathbb{C} .

(ii) Για κάθε $a \in \mathbb{C}$ ισχύει $W(P(\lambda + a)) = W(P(\lambda)) - a$.

(iii) Αν $Q(\lambda) = \sum_{j=0}^m \lambda^j A_{m-j}$, τότε $W(Q(\lambda)) \setminus \{0\} = \{\mu^{-1} : \mu \in W(P(\lambda)), \mu \neq 0\}$.

λτ(i) Για κάθε $n \times r$ πίνακα S με τάξη r , $r < n$, $W(S^* P(\lambda) S) \subseteq W(P(\lambda))$.
Η ισότητα ισχύει όταν $r = n$.

(v) Αν οι πίνακες A_i , $i = 0, 1, \dots, m$ έχουν ένα κοινό ισοτροπικό διάνυσμα x_0 (δηλ. $x_0^* A_i x_0 = 0$, για κάθε $i = 1, \dots, m$), τότε $W(P(\lambda)) = \mathbb{C}$.

(vi) $\sigma(P(\lambda)) \subseteq W(P(\lambda))$.

Απόδειξη. (i) Έστω $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq W(P(\lambda))$ και υποθέτουμε ότι $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$.
Αρκεί να δείξουμε ότι $\lambda_0 \in W(P(\lambda))$.

Υπάρχει $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}_n : x_n^* P(\lambda_n) x_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots$

Από συνέχεια έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \lim x_n^* P(\lambda_n) x_n = 0 &\Rightarrow \\ \lambda_0 = \lim \lambda_n &\in W(P(\lambda)) \end{aligned}$$

(ii) Για κάθε $a \in \mathbb{C}$ είναι $W(P(\lambda+a)) = \{\lambda \in \mathbb{C} : x^* P(\lambda+a)x = 0, x \neq 0\}$.
Έτσι, ξεκινώντας από το δεύτερο μέλος έχουμε

$$\begin{aligned} W(P(\lambda)) - a &= \{\lambda - a \in \mathbb{C} : x^* P(\lambda)x = 0, x \neq 0\} \\ &= \{z \in \mathbb{C} : x^* P(z+a)x = 0, x \neq 0\} \\ &= W(P(z+a)). \end{aligned}$$

(iii) Έστω $\lambda_0 \neq 0$ με $\lambda_0 \in W(Q(\lambda))$. Τότε υπάρχει $x \neq 0$ τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} x^* Q(\lambda_0) x &= 0 \\ \Rightarrow x^* (A_0 \lambda_0^m + A_1 \lambda_0^{m-1} + \dots + A_{m-1} \lambda_0 + A_m) x &= 0 \\ \Rightarrow \lambda_0^m x^* (A_m \lambda_0^{-m} + A_{m-1} \lambda_0^{-(m-1)} + \dots + A_1 \lambda_0^{-1} + A_0) x &= 0 \\ \Rightarrow x^* (A_m \lambda_0^{-m} + A_{m-1} \lambda_0^{-(m-1)} + \dots + A_1 \lambda_0^{-1} + A_0) x &= 0, \end{aligned}$$

που δίνει ότι $\lambda_0^{-1} \in W(P(\lambda))$.

(iv) Έστω $\mu \in W(S^* P(\lambda) S)$

Άρα για κάποιο $x \in \mathbb{C}^n$ με $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} x^* S^* P(\mu) S x &= 0 \\ \Rightarrow (Sx)^* P(\mu(Sx)) &= 0, \quad Sx \neq 0 \\ \Rightarrow \mu &\in W(P(\lambda)) \end{aligned}$$

(v) Αν οι πίνακες $A_i, i = 0, 1, \dots, m$ έχουν ένα κοινό ισοτροπικό διάνυσμα x_0 ,

τότε για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ είναι $x_0^* P(\lambda) x_0 = x_0^* A_m x_0 \lambda^m + \dots + x_0^* A_1 x_0 \lambda + x_0^* A_0 x_0 = 0$. Επομένως, $\lambda \in W(P(\lambda))$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$.

(vi) Έστω $\mu \in \sigma(P(\lambda))$ και έστω $y \neq 0$ ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή μ . Τότε

$$P(\mu)y = 0 \Rightarrow y^* P(\mu)y = 0 \Rightarrow \mu \in W(P(\lambda)).$$

□

Είναι γνωστό ότι (ιδιότητες [P1], [P2]) ότι το κλασικό αριθμητικό πεδίο $F(A)$ είναι πάντα συμπαγές και κυρτό σύνολο. Η συνθήκη (i) της Πρότασης 2.2.1 δείχνει ότι το $W(P(\lambda))$ είναι κλειστό. Παρόλα αυτά, το σύνολο $W(P(\lambda))$ δεν είναι κατ' ανάγκην συνεκτικό ή φραγμένο όπως φαίνεται και στα παρακάτω παραδείγματα.

Παράδειγμα 2.2.1. Έστω $P(\lambda) = \lambda^m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - I$. Τότε, το σύνολο

$$\begin{aligned} W(P(\lambda)) &= \left\{ z \in \mathbb{C} : z^m x^* \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x - x^* I x = 0, x^* x = 1 \right\} \\ &= \left\{ z \in \mathbb{C} : z^m q - 1 = 0, \quad q \in F \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right) \right\} \\ &= \{ z \in \mathbb{C} : z^m q - 1 = 0, \text{ για κάποιο } q \in [-1, 1] \} \\ &= \left\{ r e^{i\theta} : r \geq 1, \theta = \frac{k\pi}{m}, k = 0, 1, \dots, 2m - 1 \right\} \end{aligned}$$

έχει $2m$ μή φραγμένες συνεκτικές συνιστώσες.

Κάποιος θα μπορούσε να αναρωτηθεί αν κάποια από τις συνεκτικές συνιστώσες είναι κυρτή. Το επόμενο παράδειγμα δείχνει πως αυτό δεν είναι αναγκαίο.

Παράδειγμα 2.2.2. Έστω $P(\lambda) = \lambda^m I - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Τότε, το σύνολο

$$\begin{aligned} W(P(\lambda)) &= \{z \in \mathbb{C} : z^m - q = 0, \text{ για κάποιο } q \in [-1, 1]\} \\ &= \{re^{i\theta} : 0 \leq r \leq 1, \theta = \frac{k\pi}{m}, k = 0, 1, \dots, 2m - 1\} \end{aligned}$$

έχει μία μοναδική, μη κυρτή συνιστώσα.

Στο σημείο αυτό εξετάζουμε το πότε είναι φραγμένο αυτό το σύνολο.

Θεώρημα 2.2.2. Έστω $P(\lambda) = A_m \lambda^m + A_{m-1} \lambda^{m-1} + \dots + A_0$, με $A_m \neq 0$. Τότε το $W(P(\lambda))$ είναι φραγμένο αν και μόνο αν $0 \notin F(A_m)$.

Απόδειξη. Έστω ότι $0 \notin F(A_m)$ και θέτουμε $\mu = \min\{|z|, z \in F(A_m)\} > 0$. Τότε υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$|x^* A_m x \lambda^m| \geq |\mu \lambda^m| > \sum_{i=0}^{m-1} |x^* A_k x \lambda^i|, \quad x \in \mathcal{S}_n, \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| > M.$$

Τότε $W(P(\lambda)) \subseteq \{t \in \mathbb{C}, |t| \leq M\}$, άρα φραγμένο.

Για το αντίστροφο, έστω ότι το $W(P(\lambda))$ είναι φραγμένο και έστω, για άτοπο, ότι $0 \in F(A_m)$. Έστω ένα διάνυσμα $x \in \mathcal{S}_n$ για το οποίο ισχύει $x^* A_m x = 0$. Τότε υπάρχει κάποιος πίνακας συντελεστής A_j , $0 \leq j \leq m - 1$ με $x^* A_j x \neq 0$ αλλιώς θα ήταν $W(P(\lambda)) = \mathbb{C}$ και το αριθμητικό πεδίο δεν θα ήταν φραγμένο. Αφού $A_m \neq 0$, μπορούμε να βρούμε μια ακολουθία μοναδιαίων διανυσμάτων $\{y_p\}_{p=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε $\lim_{p \rightarrow \infty} y_p = x$ και $y_p^* A_m y_p \neq 0$. Σταθεροποιώντας ένα $\delta > 0$ με $|y_p^* A_j y_p| \geq \delta$ έχουμε ότι αφού το $W(P(\lambda))$ είναι φραγμένο, η $m - j$ στοιχειώδης συμμετρική συνάρτηση των ριζών του πολυωνύμου $y_p^* P(\lambda) y_p$ που ισούται με $\pm \frac{y_p^* A_j y_p}{y_p^* A_m y_p}$, είναι επίσης φραγμένη για κάθε p γεγονός το οποίο έρχεται σε αντίφαση με την κατασκευή της $\{y_p\}_{p=1}^{\infty}$. \square

Στην ειδική περίπτωση που ο πολυωνυμικός πίνακας έχει μεγιστοβάθμιο συντελεστή μοναδιαίο πίνακα (δηλ. είναι μονικός) τότε το αριθμητικό του πεδίο

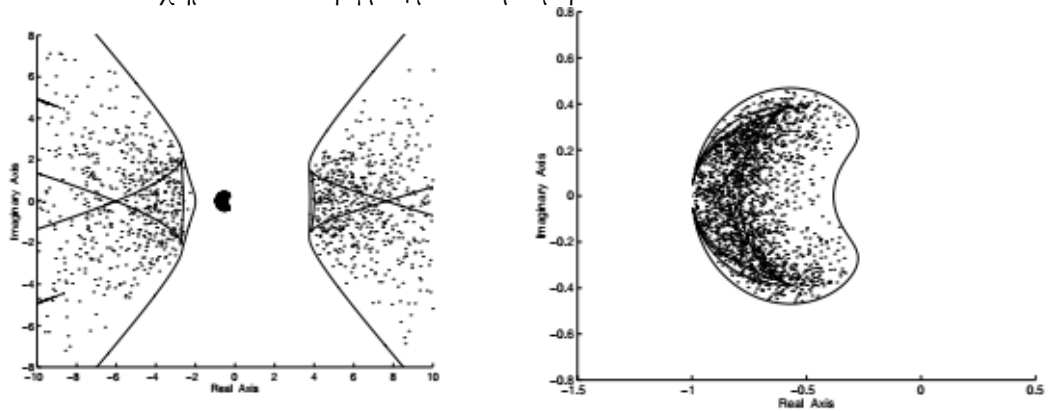
βρίσκεται σε ένα κυκλικό δακτύλιο όπως δείχνει το επόμενο θεώρημα.

Παράδειγμα 2.2.1. Έστω ο πολυωνυμικός πίνακας

$$P(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \lambda^2 + \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Το αριθμητικό πεδίο του $P(\lambda)$ δεν είναι φραγμένο αφού το αριθμητικό πεδίο του μεγιστοβάθμιου συντελεστή είναι το $[-1,1]$ το οποίο προφανώς περιέχει το 0.

Σχήμα 2.1: Μη φραγμένο αριθμητικό πεδίο



Θεώρημα 2.2.3. Αν $\mu \in W(P(\lambda))$ όπου $P(\lambda) = I\lambda^m + A_{m-1}\lambda^{m-1} + \dots + A_0$ είναι ένας μονικός πολυωνυμικός πίνακας, τότε

$$r_1 \leq |\lambda| \leq 1 + r_2,$$

με

$$r_1 = \frac{\tilde{r}(A_0)}{r(A_0) + \max_{k \neq 0} r(A_k)}, \quad r_2 = \max\{r(A_k) : k = 0, 1, \dots, m-1\}.$$

Απόδειξη. Για κάθε μοναδιαίο διάνυσμα $x \in \mathbb{C}^n$, οι ρίζες του πολυωνύμου

$$p(\lambda) = x^*P(\lambda)x = \lambda^m + (x^*A_{m-1}x)\lambda^{m-1} + \dots + x^*A_0x$$

βρίσκονται στο δίσκο $\Delta(0, 1 + r_q)$, όπου $r_q = \max\{|x^*A_kx| : k = 0, 1, \dots, m - 1\} \leq \max_k r(A_k)$. Τότε προφανώς $W(P(\lambda)) \subset \Delta(0, 1 + r_2)$.

Επίσης, όλες οι ρίζες του $p(\lambda)$ ικανοποιούν την ανισότητα

$$|\lambda| \geq \min_{k=0,1,\dots,m} \frac{|x^*A_0x|}{|x^*A_0x| + |x^*A_kx|}, \quad A_m = I$$

η οποία δίνει

$$|\lambda| \geq \frac{\min |x^*A_0x|}{\max |x^*A_0x| + \max_k |x^*A_kx|} = r_1.$$

□

Στη συνέχεια θα δούμε αποτελέσματα που αφορούν στον αριθμό των συνεκτικών συνιστωσών του $W(P(\lambda))$.

Από την κυρτότητα του $F(B)$ εύκολα βλέπουμε ότι το σύνολο $F(B) \setminus \{0\}$ είναι μη συνεκτικό αν και μόνο αν ο πίνακας μB είναι ένας αόριστος ερμιτιανός για κάποιο $\mu \in \mathbb{C}$. Αν αυτό συμβαίνει τότε το $F(B)$ είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα που περνά από την αρχή των αξόνων στο \mathbb{C} , επομένως το $F(B) \setminus \{0\}$ έχει δύο συνεκτικά μέρη. Είμαστε τώρα έτοιμοι να παρουσιάσουμε το αποτέλεσμα για τον αριθμό των συνεκτικών συνιστωσών (μερών) του $W(P(\lambda))$.

Θεώρημα 2.2.4. Έστω $P(\lambda) = A_m\lambda^m + A_{m-1}\lambda^{m-1} + \dots + A_0$, με $A_m \neq 0$ και έστω ότι το $W(P(\lambda))$ έχει r συνεκτικά μέρη.

- (i) Έστω ότι το $F(A_m) \setminus \{0\}$ είναι συνεκτικό, δηλαδή ότι ο πίνακας μA_m δεν είναι αόριστος ερμιτιανός πίνακας $\forall \mu \in \mathbb{C}$, έστω ότι s είναι ο ελάχιστος αριθμός διακεκριμένων ριζών του πολυωνύμου $x^*P(\lambda)x, \forall x \in \mathcal{S}_n$ και έστω ότι $x^*A_mx \neq 0$. Τότε $r \leq s \leq m$.
- (ii) Έστω ότι το $F(A_m) \setminus \{0\}$ έχει δύο ξένα μέρη $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$, δηλαδή ότι ο πίνακας μA_m είναι αόριστος ερμιτιανός πίνακας για κάποιο $\mu \in \mathbb{C}$, και

έστω ότι s_i είναι ο ελάχιστος αριθμός διακεκριμένων ριζών του πολυωνύμου $x^*P(\lambda)x, \forall x \in \mathcal{S}_n$ έτσι ώστε $x^*A_mx \in \mathcal{C}_i$ για $i = 1, 2$. Τότε $r \leq s_1 + s_2 \leq 2m$.

Απόδειξη. Έστω ότι \mathcal{C} είναι ένα συνεκτικό κομμάτι του $F(A_m) \setminus \{0\}$. Έστω επίσης $\hat{x} \in \mathcal{S}_n$ τέτοιο ώστε $\hat{x}^*A_m\hat{x} \in \mathcal{C}$ και το $\hat{x}^*P(\lambda)\hat{x}$ έχει k διακεκριμένες ρίζες, όπου

$$k = \min\{\text{αριθμός διακεκριμένων ριζών της εξίσωσης } x^*P(\lambda)x = 0 : x \in \mathcal{S}_n, x^*A_mx \in \mathcal{C}\}.$$

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ: Αν $y \in \mathcal{S}_n$ τέτοιο ώστε $y^*A_my \in \mathcal{C}$, τότε υπάρχει συνεχής συνάρτηση $z : [0, 1] \mapsto \mathcal{S}_n$ τέτοια ώστε $z(0) = \hat{x}, z(1) = \mu y$ για κάποιο $\mu \in \mathbb{C}, |\mu| = 1$ και $z(t)^*A_mz(t) \in \mathcal{C}, \forall t \in [0, 1]$.

Υποθέτουμε ότι ο ισχυρισμός ισχύει. Αφού οι λύσεις $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_m(t)$ της εξίσωσης $z(t)^*P(\lambda)z(t) = 0$ είναι συνεχείς συναρτήσεις του t , οι ρίζες του πολυωνύμου $y^*P(\lambda)y = z^*(1)P(\lambda)z(1)$ συνδέονται με αυτές του $\hat{x}^*P(\lambda)\hat{x} = z(0)^*P(\lambda)z(0)$ με συνεχείς καμπύλες στο $W(P(\lambda))$. Επομένως, οι ρίζες του πολυωνύμου $y^*P(\lambda)y$ πρέπει να βρίσκονται μέσα στις συνεκτικές συνιστώσες που περιέχουν και τις ρίζες του $\hat{x}^*P(\lambda)\hat{x}$. Άρα υπάρχουν το πολύ k συνεκτικές συνιστώσες, που καθορίζονται από τις διακεκριμένες ρίζες της εξίσωσης $\hat{x}^*P(\lambda)\hat{x}$.

Το μόνο που μένει είναι να αποδείξουμε τον ισχυρισμό. Αν το $y = c\hat{x}, c \in \mathbb{C}, c \neq 0$ τότε για μια σταθερή συνάρτηση z ο ισχυρισμός ισχύει. Αν τα δύο διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε έστω $h_0 = \hat{x}^*A_m\hat{x}$ και $h_1 = y^*A_my$. Αν $z^*(t)A_mz(t) \in \mathcal{C}, \forall t \in [0, 1]$ τότε αυτό σημαίνει ότι $z(t)^*A_mz(t) \neq 0, \forall t \in [0, 1]$. Για να κατασκευάσουμε μια κατάλληλη $z(t)$ θεωρούμε τις εξής περιπτώσεις: πρώτα έστω $h_0 \neq h_1$ και έστω ότι το ευθύγραμμο τμήμα που τα ενώνει δεν περιέχει το μηδέν. Τότε θέτουμε

$$z(t) = \frac{\sqrt{1-t^2}\hat{x} + t\mu y}{\|\sqrt{1-t^2}\hat{x} + t\mu y\|},$$

όπου το μ είναι όπως πριν και ικανοποιεί μια από τις ακόλουθες συνθήκες:

1. $\mu\hat{x}^*A_my + \bar{y}^*A_m\hat{x} = 0$,
2. $\mu\hat{x}^*A_my + \bar{y}^*A_m\hat{x} = M(h_1 - h_0)$ για κάποιο $M > 0$ αν $h_0 + n(h_1 - h_0) \neq 0$, $\forall n > 0$,
3. $\mu\hat{x}^*A_my + \bar{y}^*A_m\hat{x} = M(h_1 - h_0)$ για κάποιο $M < 0$ αν $h_0 + n(h_1 - h_0) \neq 0$, $\forall n < 0$.

Η ύπαρξη του μ που ικανοποιεί μια από τις παραπάνω μπορεί εύκολα να επιβεβαιωθεί.

Η συνάρτηση $z(t)$ είναι καλά ορισμένη από την γραμμική ανεξαρτησία των \hat{x}, y , το οποίο σημαίνει ότι $\sqrt{1 - t^2}\hat{x} + t\mu y \neq 0$, $\forall t \in [0, 1]$. Επιπλέον, από την επιλογή του μ

$$z(t)^*A_mz(t) = \frac{h_0 + t^2(h_1 - h_0) + t\sqrt{1 - t^2}(\mu\hat{x}^*A_my + \bar{y}^*A_m\hat{x})}{\|\sqrt{1 - t^2}\hat{x} + t\mu y\|}, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Σημειώνουμε ότι το σύνολο $\{z(t)^*A_mz(t) : t \in [0, 1]\}$ είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα εντός του $F(A_m)$ που δεν περνά από το 0 και ότι τα σημεία $z(0), z(1)$ μπορεί να μην είναι τα άκρα του.

Έστω τώρα ότι $h_0 \neq h_1$, και ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία αυτά περνά από το μηδέν. Στην περίπτωση αυτή ο πίνακας μA_m δεν είναι ερμιτιανός αόριστος για κανένα $\mu \in \mathbb{C}$ γιατί τότε τα h_0, h_1 θα βρίσκονταν σε διαφορετική συνεκτική συνιστώσα του συνόλου $F(A_m) \setminus \{0\}$. Επομένως, υπάρχει $\hat{y} \in \mathcal{S}_n$ τέτοιο ώστε $h_2 = \hat{y}^*A_m\hat{y}$ και τα σημεία h_i , $i = 0, 1, 2$ δεν είναι συνευθειακά. Τα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν τα h_2, h_1 και τα h_0, h_2 δεν περνούν από το μηδέν, οπότε και τα δύο βρίσκονται εντός του \mathcal{C} . Παρόμοια με την προηγούμενη περίπτωση, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια συνάρτηση $z_1(t)$, $t \in [0, 1]$ με $z_1(0) = \hat{x}$, $z_1(1) = \hat{\mu}\hat{y}$ με $z_1(t)^*A_mz_1(t) \neq 0$, $\forall t \in [0, 1]$ και μία $z_2(t)$, $t \in [0, 1]$ με $z_2(0) = \hat{\mu}\hat{u}$, $z_2(1) = \mu y$ και βέβαια $z_2(t)^*A_mz_2(t) \neq 0$, $\forall t \in [0, 1]$. Από τις δύο αυτές συναρτήσεις εύκολα προκύπτει η επιθυμητή z .

Τέλος, υποθέτουμε ότι $h_0 = h_1$. Αν το $F(A_m)$ είναι μονοσύνολο, τότε ο A_m είναι βαθμωτός πίνακας και στην περίπτωση αυτή $z(t) = \frac{\sqrt{1-t^2}\hat{x} + t\mu y}{\|\sqrt{1-t^2}\hat{x} + t\mu y\|}$. Αν το $F(A_m)$ δεν είναι μονοσύνολο τότε υπάρχει $\hat{y} \in \mathcal{S}_n$ τέτοιο ώστε $h_2 = \hat{y}^* A_m \hat{y} \in \mathcal{C}$ και το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα h_0, h_2 δεν περνά από το μηδέν. Τότε, όπως πριν κατασκευάζουμε z_1, z_2 και από αυτές την επιθυμητή z . \square

Από τα Θεωρήματα 2.2.2, 2.2.4 έχουμε

Πόρισμα 2.2.5. Έστω $P(\lambda) = A_m \lambda^m + A_{m-1} \lambda^{m-1} + \dots + A_0$, με $A_m \neq 0$ και έστω ότι $W(P(\lambda))$ φραγμένο. Τότε, το $W(P(\lambda))$ έχει το πολύ m συνεκτικές συνιστώσες.

Πρόταση 2.2.6. Έστω $P(\lambda) = A_m \lambda^m + A_{m-1} \lambda^{m-1} + \dots + A_0$, με $A_m \neq 0$ και έστω ότι $W(P(\lambda))$ φραγμένο με ακριβώς m συνεκτικές συνιστώσες $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m$. Τότε για κάθε $x \in \mathbb{C}^n$, η εξίσωση $x^* P(\lambda) x = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα σε κάθε Ω_j , $j = 1, \dots, m$.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 2.2.2 έχουμε ότι $0 \notin F(A_m)$, άρα το σύνολο $F(A_m) \setminus \{0\}$ είναι συνεκτικό. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $x_0 \in \mathbb{C}^n$ η εξίσωση $x_0^* P(\lambda) x_0 = 0$ έχει τις ρίζες της σε περιοχές $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_k$, $k < m$. Είδαμε, όμως, στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.4 ότι η εξίσωση $x^* P(\lambda) x = 0$, $\forall x$ δεν έχει ρίζες στο Ω_m . Επομένως το Ω_m δεν είναι συνεκτικό κομμάτι του $W(P(\lambda))$, που είναι άτοπο. \square

Στο τέλος αυτής της παραγράφου είναι χρήσιμο να αναφερθεί το επόμενο θεώρημα που αφορά στο είδος της συνεκτικότητας για πρωτοβάθμιους πολυωνυμικούς πίνακες. Σημειώνουμε εδώ ότι ένα σύνολο \mathcal{B} ονομάζεται απλά συνεκτικό όταν είναι συνεκτικό και δεν έχει τρύπες.

Θεώρημα 2.2.7. (i) Αν το αριθμητικό πεδίο $W(\lambda A - B)$ είναι φραγμένο, τότε είναι απλά συνεκτικό.

(ii) Αν το αριθμητικό πεδίο $W(\lambda A - B)$ είναι μη φραγμένο, τότε το σύνολο $W(\lambda A - B) \cup \{\infty\}$ είναι απλά συνεκτικό στο διευρυμένο επίπεδο $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (ή τη σφαίρα Riemann \mathcal{S}^2).

Απόδειξη. (i) Έστω ότι το $W(\lambda A - B)$ δεν είναι απλά συνεκτικό. Τότε έχει τρύπα, δηλαδή υπάρχει μιγαδικός αριθμός $\omega_0 \notin W(\lambda A - B)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\phi \in [0, 2\pi]$, υπάρχει πραγματικός $r_\phi > 0$ με

$$\omega_0 + r_\phi e^{i\phi} \in W(\lambda A - B).$$

Από το Θεώρημα 2.2.1β. ισχύει ότι $W(A(\lambda + \mu) - B) = W(\lambda A + B) - \mu$, $\mu \in \mathbb{C}$. Επομένως, χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\omega_0 = 0$. Τότε $0 \notin W(\lambda A - B)$ και $r_\phi e^{i\phi} \in W(\lambda A - B)$, ή ισοδύναμα $0 \notin F(B)$ και για κάθε $\phi \in [0, 2\pi]$ ισχύει $0 \in F(r_\phi e^{i\phi} A - B)$.

Αφού το $W(\lambda A - B)$ είναι φραγμένο, από το Θεώρημα 2.2.2 έχουμε ότι $0 \notin F(A)$ και αφού έχουμε ότι το 0 δεν ανήκει και στο $F(B)$, υπάρχουν δύο κώνοι

$$\mathcal{K}_1 = \{z \in \mathbb{C} : \theta_1 \leq \arg(z) \leq \tilde{\theta}_1, 0 < \tilde{\theta}_1 - \theta_1 \leq \psi_1 < \pi\}$$

και

$$\mathcal{K}_2 = \{z \in \mathbb{C} : \theta_2 \leq \arg(z) \leq \tilde{\theta}_2, 0 < \tilde{\theta}_2 - \theta_2 \leq \psi_2 < \pi\}$$

τέτοιοι ώστε $F(A) \subset \text{Int}\mathcal{K}_1$ και $-F(B) \subset \text{Int}\mathcal{K}_2$. Επίσης, υπάρχει γωνία $\phi_0 \in [0, 2\pi]$ τέτοια ώστε και τα δύο αριθμητικά πεδία $F(r_{\phi_0} e^{i\phi_0} A) \equiv r_{\phi_0} e^{i\phi_0} F(A)$ και $-F(B)$ να ανήκουν στο εσωτερικό ενός κώνου

$$\mathcal{K}_0 = \{z \in \mathbb{C} : \theta_0 \leq \arg(z) \leq \tilde{\theta}_0, 0 < \tilde{\theta}_0 - \theta_0 \leq \psi_0 < \pi\},$$

όπου το $\max\{\psi_1, \psi_2\} \leq \psi_0 < \pi$. Συνεπώς, από την ιδιότητα [P5]

$$F(r_{\phi_0} e^{i\phi_0} A - B) \subseteq r_{\phi_0} e^{i\phi_0} F(A) + F(-B) \subset \text{Int}K_0,$$

δεν περιέχει την αρχή των αξόνων, που είναι άτοπο και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

- (ii) Αν $W(\lambda A - B) = \mathbb{C}$ τότε αφού το σύνολο $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong \mathcal{S}^2$ είναι απλά συνεκτικό, δεν έχουμε κάτι να αποδείξουμε. Υποθέτουμε ότι το $W(\lambda A - B)$ δεν είναι φραγμένο, δηλαδή $0 \in F(A)$, και έστω επίσης $\lambda_0 \notin W(\lambda A - B)$. Αφού $W((\lambda + \lambda_0)A - B) = W(\lambda A - B) - \lambda_0$, τα σύνολα $W(\lambda A - B) \cup \{\infty\}$ και $W(\lambda A - (B - A\lambda_0)) \cup \{\infty\}$ είναι τοπολογικά ισομορφικά. Άρα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 \notin W(\lambda A - B)$ ή ότι ισοδύναμα, $0 \notin F(B)$. Από το θεώρημα 2.2.1γ. έχουμε

$$W(\lambda B - A) = \{\mu^{-1} : \mu \in W(\lambda A - B) \cup \{\infty\}\}$$

και η απεικόνιση $\Psi(\mu) = \mu^{-1}$ για $\mu \in W(\lambda A - B)$ και $\Psi(\infty) = 0$ είναι ομοιομορφισμός του $W(\lambda A - B) \cup \{\infty\}$ επί του $W(\lambda B - A)$. Από το (α.) της απόδειξης, το φραγμένο αριθμητικό πεδίο $W(\lambda B - A)$ είναι απλά συνεκτικό και αφού αυτή είναι τοπολογική ιδιότητα, και το σύνολο $W(\lambda A - B) \cup \{\infty\}$ είναι απλά συνεκτικό στο διευρυμένο επίπεδο $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

□

2.3 Αριθμητικό Πεδίο και Παραγοντοποίηση

Ξεκινάμε με κάποιους ορισμούς.

Ορισμός 2.3.1. (i) Ένας πολυωνυμικός πίνακας βαθμού m λέγεται υπερβολικός αν το αριθμητικό του πεδίο $W(P(\lambda))$ είναι φραγμένο υποσύνολο

του πραγματικού άξονα. Επιπλέον ένας πολυωνυμικός πίνακας λέγεται ι-σχυρά υπερβολικός αν είναι υπερβολικός και το αριθμητικό του πεδίο έχει ακριβώς m συνεκτικές συνιστώσες.

- (ii) Έστω $P(\lambda) = A_m\lambda^m + A_{m-1}\lambda^{m-1} + \dots + A_0$, με $A_m \neq 0$ ένας υπερβολικός πολυωνυμικός πίνακας και έστω $\lambda_1(x) \leq \dots \leq \lambda_m(x)$ οι ρίζες της εξίσωσης $x^*P(\lambda)x = 0$, $x \in \mathbb{C}, x \neq 0$. Το σύνολο

$$\Lambda_j = \{\lambda_j(x), x \in \mathbb{C}, x \neq 0\}$$

ονομάζεται η φασματική ζώνη του $P(\lambda)$.

- (iii) Ένας πίνακας $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ονομάζεται (δεξιά) ρίζα ενός πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda) = A_m\lambda^m + A_{m-1}\lambda^{m-1} + \dots + A_0$, με $A_m \neq 0$ όταν $P(B) = A_mB^m + A_{m-1}B^{m-1} + \dots + A_0 = 0$. Τότε, επίσης, λέμε ότι το $\lambda I - B$ είναι δεξιός διαιρέτης του $P(\lambda)$.

Από αυτόν τον ορισμό προκύπτει ότι οι πίνακες συντελεστές ενός υπερβολικού πολυωνυμικού πίνακα είναι ερμιτιανοί πίνακες. Αφού για τέτοιους πολυωνυμικούς πίνακες το αριθμητικό τους πεδίο είναι φραγμένο, από το Θεώρημα 2.2.2 άμεσα προκύπτει ότι ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής τους είναι ή θετικά ή αρνητικά ορισμένος ερμιτιανός πίνακας.

Θεώρημα 2.3.1. Έστω $P(\lambda) = A_m\lambda^m + A_{m-1}\lambda^{m-1} + \dots + A_0$, με $A_m \neq 0$ ένας υπερβολικός πολυωνυμικός πίνακας και έστω Λ_j , $j = 1, 2, \dots, m$ η j -φασματική του ζώνη.

- (i) Για κάθε $j = 1, 2, \dots, m$, το πολυώνυμο $P(\lambda)$ έχει μοναδική δεξιά ρίζα Z_j τέτοια ώστε $\sigma(Z_j) \subseteq \Lambda_j$. Επιπλέον, ο Z_j είναι όμοιος με ερμιτιανό πίνακα.

- (ii) Ο $P(\lambda)$ παραγοντοποιείται στη μορφή

$$P(\lambda) = A_m(\lambda I - Y_1) \cdots (\lambda I - Y_m),$$

όπου Y_1, \dots, Y_m είναι $n \times n$ πίνακες τέτοιοι ώστε $\sigma(Y_j) \subseteq \Lambda_j$ και ο Y_j είναι όμοιος με τον Z_j , ενώ $Y_m = Z_m$.

(iii) Αν επιπλέον, το $P(\lambda)$ ισχυρά υπερβολικό, τότε για κάθε μετάθεση τ των δεικτών $\{1, \dots, m\}$, υπάρχει μια παραγοντοποίηση

$$P(\lambda) = A_m(\lambda I - Y_1(\tau)) \cdots (\lambda I - Y_m(\tau)),$$

$$\mu \in \sigma(Y_j(\tau)) \subseteq \Lambda_{\sigma(j)}$$

Θεώρημα 2.3.2. Έστω $P(\lambda) = A_m \lambda^m + A_{m-1} \lambda^{m-1} + \dots + A_0$, με $A_m \neq 0$ με το $W(P(\lambda))$ να αποτελείται από ακριβώς m συνεκτικές συνιστώσες. Υποθέτουμε επιπλέον ότι $\text{Ker}(P(\lambda)) = \text{Ker}(P(\lambda))^*$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Τότε το $P(\lambda)$ παραγοντοποιείται στη μορφή

$$P(\lambda) = A_m(\lambda I - Y_1) \cdots (\lambda I - Y_m),$$

όπου οι πίνακες Y_j , $j = 1, \dots, m$ είναι $n \times n$ διαγωνοποιήσιμοι πίνακες.

Απόδειξη. Πρώτον επιβεβαιώνουμε ότι το $P(\lambda)$ έχει μόνο πρωτοβάθμιους στοιχειώδεις διαιρέτες, ή ισοδύναμα ότι το $P(\lambda)$ δεν έχει γενικευμένα ιδιοδιανύσματα. Δηλαδή δεν υπάρχουν $x, y \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$, τέτοια ώστε

$$P(\lambda_0)x = 0, \quad P'(\lambda_0)x + P(\lambda_0)y = 0,$$

για κάποιο $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. Για άτοπο, υποθέτουμε ότι υπάρχουν τέτοια $x, y \in \mathbb{C}^n$. Τότε

$$P'(\lambda_0)x + P(\lambda_0)y = 0 \Rightarrow x^* P'(\lambda_0)x + x^* P(\lambda_0)y = 0 \Rightarrow x^* P'(\lambda_0)x = 0,$$

το οποίο σημαίνει ότι το λ_0 είναι πολλαπλή ρίζα της εξίσωσης $x^* P(\lambda_0)x = 0$, το οποίο είναι άτοπο από την Πρόταση 2.2.6.

Από τη στιγμή που γνωρίζουμε ότι το $P(\lambda)$ έχει μόνο πρωτοβάθμιους στοι-

χειώδεις διαιρέτες, αυτό εγγυάται την ύπαρξη μιάς παραγοντοποίησης

$$P(\lambda) = A_m(\lambda I - Y_1) \cdots (\lambda I - Y_m),$$

όπου οι πίνακες Y_j είναι διαγωνοποιήσιμοι. \square

2.4 Πρωτοβάθμια Πολυώνυμα με Ερμιτιανούς Συντελεστές

Έστω $P(\lambda) = \lambda A - B$, όπου A, B είναι ερμιτιανοί $n \times n$ πίνακες. Υποθέτουμε ότι οι πίνακες A, B δεν έχουν κοινό ισοτροπικό διάνυσμα, διότι τότε από την Πρόταση 2.2.1 θα ίσχυε ότι $W(P(\lambda)) = \mathbb{C}$.

Θεώρημα 2.4.1. Έστω $P(\lambda) = \lambda A - B$, με $A = I_r \oplus (-I_s) \oplus 0_t$, $B = B_1 \oplus B_2 \oplus B_3$, $r \geq s$, $r + s + t = n$ και οι $B_1 \in \mathbb{C}^{r \times r}$, $B_2 \in \mathbb{C}^{s \times s}$ και ο $B_3 \in \mathbb{C}^{t \times t}$ είναι διαγώνιοι πίνακες. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι οι A, B δεν έχουν κοινό ισοτροπικό διάνυσμα. Τότε ισχύει ακριβώς μία από τις επόμενες περιπτώσεις.

- (i) Ο A είναι θετικά ορισμένος, δηλ. $A = I$, και $W(P(\lambda)) = F(B)$.
- (ii) Ο A είναι μη αντιστρέψιμος ημιορισμένος πίνακας. Τότε, $W(P(\lambda)) = [\alpha, +\infty)$ αν ο B_3 είναι θετικά ορισμένος, ενώ, $W(P(\lambda)) = (-\infty, \beta]$ αν ο B_3 είναι αρνητικά ορισμένος όπου $F(B_1) = [\alpha, \beta]$.
- (iii) Ο A είναι αόριστος και ο B είναι θετικά (αρνητικά) ορισμένος και $W(P(\lambda)) = \mathbb{R} \setminus [\alpha, \beta]$, όπου

$$F(B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}) = \left[\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta} \right] F(-B^{-\frac{1}{2}}(-A)(-B^{-\frac{1}{2}})) = \left[\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta} \right].$$

Στη περίπτωση αυτή το αριθμητικό πεδίο $W(P(\lambda))$ είναι η ένωση δύο ξένων μη φραγμένων διαστημάτων και $0 \notin W(P(\lambda))$.

(iv) Ο A είναι αόριστος και ο B είναι μη αντιστρέψιμος θετικά (αρνητικά) ημιορισμένος και $W(P(\lambda)) = \{\mu^{-1} : \mu \in W(\lambda B - A), \mu \neq 0\} \cup \{0\}$. Στη περίπτωση αυτή το αριθμητικό πεδίο $W(P(\lambda))$ είναι η ένωση δύο ξένων μη φραγμένων διαστημάτων και $0 \in W(P(\lambda))$.

(v) Οι A, B είναι αόριστοι και $W(P(\lambda)) = \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Η περίπτωση (i) είναι προφανής. Αν $s = 0$, τότε

$$\begin{aligned} W(P(\lambda)) &= \left\{ \frac{x^* B_1 x + z^* B_3 z}{x^* x} : x \in \mathbb{C}^r, z \in \mathbb{C}^t, x^* x \neq 0 \right\}, \\ &= \begin{cases} F(B_1) + [0, +\infty), & \text{αν ο } B_3 \text{ είναι θετικά ορισμένος,} \\ F(B_1) + (-\infty, 0], & \text{αν ο } B_3 \text{ είναι αρνητικά ορισμένος.} \end{cases} \end{aligned}$$

Έτσι η περίπτωση (ii) ισχύει.

Για να αποδείξουμε τις περιπτώσεις (iii) και (iv) θεωρούμε το αριθμητικό πεδίο $W(\lambda B - A)$ και κάνουμε χρήση της Πρότασης 2.2.1(iii).

Τέλος, για το (v) βλέπουμε ότι αν πάρουμε $u = e_1 + e_{r+1}$, τότε $u^* B u \neq 0$. Θεωρούμε τις ακολουθίες $u_k = e_1 + \frac{k}{k+1} e_{r+1}$ και $v_k = \frac{k}{k+1} e_1 + e_{r+1}$, $k = 1, 2, \dots$. Βλέπουμε ότι οι ακολουθίες $\frac{u_k^* B u_k}{u_k^* A u_k}$ και $\frac{v_k^* B v_k}{v_k^* A v_k}$ τείνουν στο $\pm\infty$ σε διαφορετικές κατευθύνσεις. Επομένως, το $W(P(\lambda))$ είναι άνω και κάτω μη φραγμένο. Με το ίδιο σκεπτικό για το $W(\lambda B - A)$ και κάνοντας χρήση της Πρότασης 2.2.1(iii), βλέπουμε ότι το $W(P(\lambda))$ περιέχει όλους τους θετικούς και όλους τους αρνητικούς αριθμούς. Προφανώς, $0 \in W(P(\lambda))$. Έτσι, $W(P(\lambda)) = \mathbb{R}$. \square

Γενικά ένας πολυωνυμικός πίνακας με ερμιτιανούς συντελεστές δεν έχει κατ' ανάγκην αριθμητικό πεδίο στον πραγματικό άξονα. Θα πρέπει να κάνουμε κάποιες ισχυρές υποθέσεις για έναν ερμιτιανό πολυωνυμικό πίνακα για να συμβεί κάτι τέτοιο. Η επόμενη πρόταση δείχνει μια τέτοια κατάσταση για δευτεροβάθμιους πίνακες.

Θεώρημα 2.4.2. Έστω $P(\lambda) = \lambda^2 A_2 + \lambda A_1 + A_0$, με τους πίνακες A_j , $j = 0, 1, 2$ να είναι ερμιτιανοί και $A_2 \neq 0$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(i) $W(P(\lambda)) \subseteq \mathbb{R}$.

(ii) $4(x^* A_0 x)(x^* A_2 x) \leq (x^* A_1 x)^2$, $\forall x \in \mathcal{S}_n$.

(iii) Για κάθε $x \in \mathcal{S}_n$ υπάρχει $\lambda(x) \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $x^* P(\lambda(x)) x \leq 0$.

Επιπλέον, αν ο A_2 είναι θετικά ορισμένος τότε οι 3 προηγούμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες με την

(iv) υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε ο $-P(\lambda)$ να είναι θετικά ημιορισμένος.

Η απόδειξη παράλειπεται.

Κεφάλαιο 3

Το σύνορο, τα γωνιακά και τα μεμονομένα σημεία

3.1 Σύνορο και Τοπική Διάσταση

Θεώρημα 3.1.1. Έστω $P(\lambda) = A_m\lambda^m + A_{m-1}\lambda^{m-1} + \dots + A_0$, με $A_m \neq 0$. Αν $\lambda_0 \in \partial W(P(\lambda))$, τότε το θ είναι συνοριακό σημείο του αριθμητικού πεδίου του πίνακα $P(\lambda_0)$ (δηλ. $\theta \in \partial F(P(\lambda_0))$).

Απόδειξη. Αφού το $W(P(\lambda))$ είναι κλειστό υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου, ισχύει ότι το συνοριακό σημείο του λ_0 είναι σημείο του συνόλου. Επομένως, υπάρχει μοναδιαίο διάνυσμα x_0 τέτοιο ώστε $x_0^*P(\lambda_0)x_0 = 0$. Έτσι βλέπουμε ότι $\theta \in F(P(\lambda_0))$ και αρκεί να δείξουμε ότι το θ δεν ανήκει στο εσωτερικό.

Θεωρούμε μια ακολουθία $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C} \setminus W(P(\lambda))$ που συγκλίνει στο λ_0 . Αν υπάρχει δίσκος $\Delta(0, \varepsilon) \subseteq F(P(\lambda_0))$, μπορούμε να βρούμε μοναδιαία διανύσματα x_1, x_2, x_3 τέτοια ώστε το θ να ανήκει στο εσωτερικό του τριγώνου

$$Co\{x_1^*P(\lambda_0)x_1, x_2^*P(\lambda_0)x_2, x_3^*P(\lambda_0)x_3\} \subset \Delta(0, \varepsilon).$$

Τότε για ε κατάλληλα μικρό οι κορυφές του τριγώνου είναι πολύ κοντά στο θ

και από την κυρτότητα των αριθμητικών πεδίων $F(P(\lambda_n))$, η ισότητα

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_i^* P(\lambda_n) x_i = x_i^* P(\lambda_0) x_i, \quad i = 1, 2, 3$$

δίνει ότι $0 \in F(P(\lambda_n))$, $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$. Επομένως, για κατάλληλο x έχουμε $x^* P(\lambda_n) x = 0 \Rightarrow \lambda_n \in W(P(\lambda))$ που είναι άτοπο από υπόθεση. \square

Το αντίστροφο του Θεωρήματος 3.1.1 δεν ισχύει όπως δείχνει το επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 3.1.1. Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ και θεωρούμε τον πολυωνυμικό πίνακα

$$P(\lambda) = \lambda^2 I - \lambda(I + A) + A = (\lambda - 1)(\lambda I - A).$$

Αφού $P(1) = 0 \Rightarrow 0 \in \partial F(P(1))$. Όμως $W(P(\lambda)) = F(A) = \Delta(1, \frac{1}{2})$ και ασφαλώς το 1 είναι εσωτερικό σημείο του $W(P(\lambda))$.

Τα δύο επόμενα θεωρήματα δείχνουν ότι οι ιδιότητες ενός $\lambda_0 \in W(P(\lambda))$ και του $0 \in F(P(\lambda_0))$ είναι ακόμα πιο στενά συνδεδεμένες.

Θεώρημα 3.1.2. Έστω $P(\lambda) = A_m \lambda^m + A_{m-1} \lambda^{m-1} + \dots + A_0$, με $A_m \neq 0$ και έστω $\lambda_0 \in W(P(\lambda))$ τέτοιο ώστε το 0 δεν είναι γωνιακό σημείο του $F(P(\lambda_0))$ και $0 \notin F'(P(\lambda_0))$. Αν η τοπική διάσταση του $\lambda_0 \in W(P(\lambda))$ είναι ίση με 1, τότε η τοπική διάσταση του 0 στο $F(P(\lambda_0))$ είναι επίσης 1.

Απόδειξη. Έστω ότι η τοπική διάσταση του $\lambda_0 \in W(P(\lambda))$ είναι ίση με 1 και ότι η τοπική διάσταση του 0 στο $F(P(\lambda_0))$ είναι 2. Προφανώς το λ_0 ανήκει στο σύνορο του $W(P(\lambda))$ και υπάρχει ένας πραγματικός ρ_0 τέτοιος ώστε $W(P(\lambda)) \cap \Delta(\lambda_0, \rho_0) \subseteq \partial W(P(\lambda))$.

Από το Θεώρημα 3.1.1, το 0 είναι συνοριακό σημείο του $F(P(\lambda_0))$. Από την κυρτότητα του $F(P(\lambda_0))$ [P1] και το γεγονός ότι το 0 είναι διαφορίσιμο σημείο του, υπάρχει μία ευθεία που περνά από το μηδέν, η οποία ορίζει δύο κλειστά ημιεπίπεδα $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ με $F(P(\lambda_0)) \subset \mathcal{H}_1$.

Για κάθε $\rho \in [0, \rho_0]$ και για κάθε $\theta \in [0, 2\pi]$, είτε $\lambda_0 + \rho e^{i\theta} \notin W(P(\lambda))$, ή $\lambda_0 + \rho e^{i\theta} \in \partial W(P(\lambda))$. Ισοδύναμα, για κάθε $\rho \in [0, \rho_0]$ και για κάθε $\theta \in [0, 2\pi]$ είτε $0 \notin F(P(\lambda_0 + \rho e^{i\theta}))$, ή $0 \in \partial F(P(\lambda_0 + \rho e^{i\theta}))$. Επιπλέον, το 0 δεν ανήκει στο $F(P'(\lambda_0))$ και το $P(\lambda_0 + \rho e^{i\theta})$ γράφεται

$$P(\lambda_0 + \rho e^{i\theta}) = P(\lambda_0) + \rho e^{i\theta} P'(\lambda_0) + \rho e^{i\theta} R(\lambda_0, \rho, \theta),$$

με $\|R(\lambda_0, \rho, \theta)\| = o(1)$ καθώς $\rho \rightarrow 0$. Έτσι για κατάλληλα μικρό ρ υπάρχει κώνος

$$\mathcal{K}_{\rho, \lambda_0} = \{z \in \mathbb{C} : \phi_1 \leq \arg(z) \leq \phi_2, 0 < \phi_2 - \phi_1 \leq \psi < \pi\}$$

τέτοιος ώστε

$$F(P'(\lambda_0) + R(\lambda_0, \rho, \theta)) \subset \mathcal{K}_{\rho, \lambda_0} \setminus \{0\}.$$

Για κατάλληλο $\theta \in [0, 2\pi]$, το $e^{i\theta} F(P'(\lambda_0) + R(\lambda_0, \rho, \theta))$ βρίσκεται στο εσωτερικό του \mathcal{H}_2 . Βλέπουμε λοιπόν ότι για κάθε μοναδιαίο διάνυσμα $x \in \mathbb{C}^n$,

$$x^* P(\lambda_0 + \rho e^{i\theta}) x = x^* P(\lambda_0) x + \rho e^{i\theta} x^* (P'(\lambda_0) + R(\lambda_0, \rho, \theta)) x,$$

όπου $\arg(\rho e^{i\theta} x^* (P'(\lambda_0) + R(\lambda_0, \rho, \theta)) x) \in [\phi_1 + \theta, \phi_2 + \theta]$. Έτσι, για κάθε $r = x_r^* P(\lambda_0) x_r \in F(P(\lambda_0))$ και για κάθε $\rho \in [0, \rho_0]$ τέτοια ώστε $r + \rho e^{i(\phi_1 + \theta)}, r + \rho e^{i(\phi_2 + \theta)} \in \mathcal{H}_2$, το σημείο

$$x_r^* P(\lambda_0 + \rho e^{i\theta}) x_r = r + \rho e^{i\theta} x_r^* (P'(\lambda_0) + R(\lambda_0, \rho, \theta)) x_r$$

επίσης βρίσκεται στο ημιεπίπεδο \mathcal{H}_2 . Συνεπώς, καθώς το ρ παίρνει τιμές από το 0 στο ρ_0 , το κομμάτι του $F(P(\lambda_0))$ που είναι κοντά στο μηδέν κινείται μέσα στο \mathcal{H}_2 . Έτσι λοιπόν, για κατάλληλο $\rho_\theta \in [0, \rho_0]$, το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό του

$$F(P(\lambda_0) + \rho_\theta e^{i\theta} (P'(\lambda_0) + R(\lambda_0, \rho, \theta))) \equiv F(P(\lambda_0 + \rho_\theta e^{i\theta})).$$

Αυτό όμως είναι άτοπο. □

Θεώρημα 3.1.3. Έστω $P(\lambda) = A_m \lambda^m + A_{m-1} \lambda^{m-1} + \dots + A_0$, με $A_m \neq 0$ και έστω $\lambda_0 \in W(P(\lambda))$ δεν είναι γωνιακό σημείο του $W(P(\lambda))$ ούτε κόμπος στο $\partial W(P(\lambda))$. Αν $0 \notin F(P'(\lambda_0))$ και η τοπική διάσταση του $\lambda_0 \in W(P(\lambda))$ είναι ίση με 2, τότε η τοπική διάσταση του 0 στο $F(P(\lambda_0))$ είναι επίσης 2.

Απόδειξη. Αν το λ_0 είναι εσωτερικό σημείο του $W(P(\lambda))$ τότε είναι γνωστό ότι το 0 είναι εσωτερικό σημείο του $F(P(\lambda_0))$, το οποίο σημαίνει ότι η τοπική διάστασή του στο $F(P(\lambda_0))$ είναι 2.

Αν $\lambda_0 \in \partial W(P(\lambda))$, τότε αφού δεν είναι γωνιακό σημείο ούτε κόμπος, υπάρχει γωνία $\phi_0 \in [0, 2\pi]$ τέτοια ώστε για κάθε $\phi \in (\phi_0, \phi_0 + \pi)$, υπάρχει ένα πραγματικό $r_\phi > 0$ τέτοιο ώστε το $\lambda_0 + r_\phi$ να ανήκει στο εσωτερικό του $W(P(\lambda))$.

Με σκοπό να καταλήξουμε σε άτοπο, υποθέτουμε ότι η τοπική διάσταση του 0 στο $F(P(\lambda_0))$ είναι 1.

Τότε από την ιδιότητα [P1] το αριθμητικό πεδίο $F(P(\lambda_0))$ είναι ευθύγραμμο τμήμα που περνά από την αρχή των αξόνων και χωρίζει το μιγαδικό επίπεδο σε δύο ημιεπίπεδα $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$.

Όπως πριν, το $P(\lambda_0 + \rho e^{i\phi})$ γράφεται

$$P(\lambda_0 + \rho e^{i\phi}) = P(\lambda_0) + \rho e^{i\phi} P'(\lambda_0) + \rho e^{i\phi} R(\lambda_0, \rho, \phi),$$

με $\|R(\lambda_0, \rho, \phi)\| = o(1)$ καθώς $\rho \rightarrow 0$. Έτσι για κατάλληλα μικρό ρ υπάρχει κώνος

$$\mathcal{K}_{\rho, \lambda_0} = \{z \in \mathbb{C} : \phi_1 \leq \arg(z) \leq \phi_2, 0 < \phi_2 - \phi_1 \leq \psi < \pi\}$$

τέτοιος ώστε

$$F(P'(\lambda_0) + R(\lambda_0, \rho, \phi)) \subset \mathcal{K}_{\rho, \lambda_0} \setminus \{0\}.$$

Μπορούμε να δούμε ότι, για κάποιο $\theta \in (\phi_0, \phi_0 + \pi)$, το αριθμητικό πεδίο $e^{i\theta} F(P'(\lambda_0) + R(\lambda_0, \rho, \phi))$ βρίσκεται στο εσωτερικό του ημιεπιπέδου \mathcal{H}_1 . Αφού,

$$F(P(\lambda_0 + \rho e^{i\theta})) \subseteq F(P(\lambda_0)) + \rho e^{i\theta} F(P'(\lambda_0) + R(\lambda_0, \rho, \phi)),$$

είναι φανερό ότι το $F(P(\lambda_0 + \rho_\theta e^{i\theta}))$, επίσης βρίσκεται στο εσωτερικό του \mathcal{H}_1 , επομένως, $0 \notin F(P(\lambda_0 + \rho_\theta e^{i\theta}))$. Το οποίο είναι άτοπο αφού το $\lambda_0 + \rho_\theta e^{i\theta}$ είναι σημείο του $W(P(\lambda))$. Η απόδειξη ολοκληρώθηκε. \square

Ειδικά για πρωτοβάθμιους τετραγωνικούς πολυωνυμικούς πίνακες έχουμε το επόμενο πόρισμα που προκύπτει άμεσα από τα Θεωρήματα 3.1.2, 3.1.3.

Πόρισμα 3.1.4. Έστω ότι το $W(\lambda A - B)$ είναι φραγμένο και έστω $\lambda_0 \in W(P(\lambda))$.

- (i) Αν το θ δεν είναι γωνιακό σημείο του $F(\lambda_0 A - B)$ και η τοπική διάσταση του λ_0 στο $W(\lambda A - B)$ είναι 1, τότε η τοπική διάσταση του θ στο $F(\lambda_0 A - B)$ είναι επίσης 1.
- (ii) Αν το λ_0 δεν είναι γωνιακό σημείο του $W(\lambda A - B)$ ή κόμπος στο σύνορο $\partial W(\lambda A - B)$ και η τοπική του διάσταση στο $W(\lambda A - B)$ είναι 2, τότε και η τοπική διάσταση του θ στο $F(\lambda_0 A - B)$ είναι 2.

Πρόταση 3.1.5. Έστω ένας πρωτοβάθμιος $n \times n$ πολυωνυμικός πίνακας $\lambda A - B$ και έστω ότι το $W(\lambda A - B)$ δεν είναι μονοσύνολο. Τότε το $W(\lambda A - B)$ δεν έχει μεμονωμένα σημεία.

Απόδειξη. Αν $0 \notin F(A)$, ή $0 \in F(A)$ και το σύνολο $F(A) \setminus \{0\}$ είναι συνεκτικό, τότε το $W(\lambda A - B)$ είναι συνεκτικό και έτσι δεν έχει μεμονωμένα σημεία.

Αν $0 \in F(A)$ και το σύνολο $F(A) \setminus \{0\}$ δεν είναι συνεκτικό, τότε υπάρχει μια γωνία $\phi_0 \in [0, 2\pi]$ τέτοια ώστε ο πίνακας $e^{i\phi_0} A$ να είναι ερμιτιανός. Το αριθμητικό πεδίο $W(\lambda A - B) = W(e^{i\phi_0}(\lambda A - B))$ είναι p -κυρτό και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. \square

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε εκτενέστερα στη περίπτωση που το αριθμητικό πεδίο έχει μεμονωμένα σημεία ή στην περίπτωση που είναι μονοσύνολο. Για τη συνέχεια θα χρειαστούμε το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 3.1.6. Έστω ένας πρωτοβάθμιος $n \times n$ πολυωνυμικός πίνακας $\lambda A - B$. Τότε η τοπική διάσταση κάθε σημείου $\mu \in W(\lambda A - B)$ είναι σταθερή.

Επιπλέον, αν κάθε σημείο του $W(\lambda A - B)$ έχει τοπική διάσταση στο $W(\lambda A - B)$ ίση με 1, τότε το $W(\lambda A - B)$ είτε βρίσκεται πάνω σε μια ευθεία είτε πάνω σε ένα κύκλο.

Απόδειξη. Από την προηγούμενη πρόταση, το $W(\lambda A - B)$ περιέχει μεμονομένα σημεία αν και μόνο αν το $W(\lambda A - B)$ είναι μονοσύνολο. Συνεπώς, για το πρώτο σκέλος του θεωρήματος αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\lambda_0 \in W(\lambda A - B)$ με τοπική διάσταση 1, και τότε, κάθε σημείο του $W(\lambda A - B)$ θα έχει τοπική διάσταση 1.

Έστω $\lambda_0 \in W(\lambda A - B)$ με τοπική διάσταση 1. Αν $0 \in F(A)$, τότε τα επιχειρήματα του Θεωρήματος 2.2.7β. ισχύουν και έτσι το μονοδιάστατο κομμάτι του $W(\lambda B - A)$ είναι μη κενό. Αν το $W(\lambda B - A)$ βρίσκεται πάνω σε καμπύλη, τότε ισχύει το ίδιο και για το $W(\lambda A - B)$. Έτσι, χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $0 \notin F(A)$. Αν $\lambda_0 \in W(\lambda A - B)$ έτσι ώστε το 0 να είναι γωνιακό σημείο του $F(\lambda_0 A - B)$, τότε από ιδιότητα [P11] το 0 είναι ιδιοτιμή του $\lambda_0 A - B$, οπότε και το λ_0 είναι ιδιοτιμή του πολυωνυμικού πίνακα $\lambda A - B$. Αφού $W(\lambda A - B) \neq \mathbb{C}$, ο πολυωνυμικός πίνακας $\lambda A - B$ έχει το πολύ n ιδιοτιμές, συνεπώς υπάρχει ένα $\lambda_0 \in W(\lambda A - B)$ τοπικής διάστασης 1, τέτοιο ώστε το 0 δεν είναι γωνιακό σημείο του $F(\lambda_0 A - B)$. Από τη στιγμή που ισχύει $W((\lambda + \lambda_0)A - B) = W(\lambda A - B) - \lambda_0$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\lambda_0 = 0$. Σύμφωνα με το Πρόσχημα 3.1.4α., η τοπική διάσταση του 0 στο $F(B)$ είναι 1. Από κυρτότητα του $F(B)$, βλέπουμε ότι το $F(B)$ είναι ευθύγραμμο τμήμα που περνά από την αρχή των αξόνων, επομένως υπάρχει γωνία $\phi_0 \in [0, 2\pi]$ τέτοια ώστε ο πίνακας $e^{i\phi_0} B$ να είναι ερμιτιανός. Επιπλέον,

$$W(\lambda A - B) \setminus \{0\} = \{\mu^{-1} : \mu \in W(e^{i\phi_0}(\lambda B - A))\},$$

όπου το αριθμητικό πεδίο $W(e^{i\phi_0}(\lambda B - A))$ είναι p -κυρτό και έχει μη κενό μονοδιάστατο μέρος. Άρα, είτε

$$W((\lambda B - A)) = \{t\alpha + (1 - t)\beta : 0 \leq t \leq 1\},$$

ή

$$W((\lambda B - A)) = \{t\alpha + (1 - t)\beta : t \geq 0 \text{ ή } t \geq 1\}$$

για κάποια $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Με ένα μετασχηματισμό Möbius η ευθεία μετασχηματίζεται ή σε ένα κύκλο ή σε μια ευθεία και η απόδειξη ολοκληρώνεται. \square

Θεώρημα 3.1.7. Έστω ένας πρωτοβάθμιος $n \times n$ πολυωνυμικός πίνακας $\lambda A - B$. Τότε, το αριθμητικό πεδίο $W(\lambda A - B)$ δεν έχει εσωτερικά σημεία αν και μόνο αν υπάρχουν ερμιτιανοί πίνακες H_1, H_2 , και μιγαδικοί αριθμοί a, b, g και d τέτοιοι ώστε $0 \notin F(H_1 + iH_2)$ και $A = aH_1 + bH_2$ και $B = gH_1 + dH_2$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το $W(\lambda A - B)$ δεν έχει εσωτερικά σημεία και έστω $\lambda_0 \in W(\lambda A - B)$. Τότε το 0 έχει τοπική διάσταση 1 στο $F(\lambda_0 A - B) = -F(B - \lambda_0 A)$. Από την κυρτότητα του αριθμητικού πεδίου, έπεται ότι υπάρχει γωνία $\phi_1 \in [0, 2\pi]$ τέτοια ώστε ο πίνακας $e^{i\phi_1}(B - \lambda_0 A)$ να είναι ερμιτιανός. Από την p -κυρτότητα του μονοδιάστατου, μη φραγμένου $W((B - \lambda_0 A)\lambda - A)$, έχουμε ότι υπάρχει γωνία $\phi_2 \in [0, 2\pi]$ για την οποία το αριθμητικό πεδίο $W((B - \lambda_0 A)\lambda - e^{i\phi_2}A)$ βρίσκεται σε μια ευθεία παράλληλη στον πραγματικό άξονα. Επομένως, υπάρχει $\gamma \in \mathbb{C}$ τέτοιος ώστε το

$$W((B - \lambda_0 A)\lambda - (e^{i\phi_2}A + \gamma B - \gamma A\lambda_0))$$

να βρίσκεται στον πραγματικό άξονα. Επίσης, το κλάσμα

$$\frac{x^*(e^{i\phi_2}A + \gamma B - \gamma A\lambda_0)x}{x^*(B - \lambda_0 A)x} = \frac{e^{i\phi_1}x^*(e^{i\phi_2}A + \gamma B - \gamma A\lambda_0)x}{e^{i\phi_1}x^*(B - \lambda_0 A)x}$$

είναι πραγματικός για κάθε μοναδιαίο διάνυσμα $x \in \mathbb{C}^n$, με $x^*(B - \lambda_0 A)x$. Η γραφή που θέλουμε για τους πίνακες A, B είναι προφανής αν οι πίνακες αυτοί είναι γραμμικά εξαρτημένοι. Έτσι υποθέτουμε ότι οι A, B είναι γραμμικά ανεξάρτητοι. Στην περίπτωση αυτή, το σύνολο

$$\{x \in \mathbb{C}^n : x^*(B - \lambda_0 A)x \neq 0, x \in \mathcal{S}_n\}$$

είναι πυκνό στη μοναδιαία σφαίρα του \mathbb{C}^n . Άρα, για κάθε μοναδιαίο διάνυσμα $x \in \mathbb{C}^n$, η ποσότητα $e^{i\phi_1} x^* (e^{i\phi_2} A + \gamma B - \gamma A \lambda_0) x$ είναι πραγματική και ο πίνακας $H_2 = e^{i\phi_1} (e^{i\phi_2} A + \gamma B - \gamma A \lambda_0)$ είναι ο ερμιτιανός. Έτσι, η επιθυμητή γραφή για τους A, B έχει

$$a = -e^{-i\phi_1} e^{-i\phi_2} g, \quad b = e^{-i\phi_1} e^{-i\phi_2},$$

$$g = e^{-i\phi_1} - e^{-i\phi_1} e^{-i\phi_2} \lambda_0 g, \quad d = \lambda_0 e^{-i\phi_1} e^{-i\phi_2}.$$

Τέλος, από τη συνθήκη $W(\lambda A - B) \neq \mathbb{C}$, έπεται άμεσα ότι για κάθε μοναδιαίο διάνυσμα $y \in \mathbb{C}^n$ είναι $(y^* H_1 y, y^* H_2 y) \neq (0, 0) \Rightarrow 0 \notin F(H_1 + iH_2)$.

Αντίστροφα, έστω ότι οι A, B έχουν την επιθυμητή μορφή με τους ερμιτιανούς H_1, H_2 να ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος. Αν $ad = bg$, τότε το πεδίο $W(\lambda A - B)$ είναι μονοσύνολο. Υποθέτουμε τώρα ότι $ad \neq bg$. Αφού $0 \notin F(H_1 + iH_2)$, το αριθμητικό πεδίο $W(\lambda H_1 - H_2)$ βρίσκεται στον πραγματικό άξονα. Αν $a = 0$ τότε $bg \neq 0$ και το πεδίο

$$W(bH_2\lambda - (gH_1 + dH_2)) = b^{-1}(d + gW(\lambda H_2 - H_1))$$

δεν έχει εσωτερικά σημεία. Αν $a \neq 0$, τότε θέτουμε $d' = d - \frac{bg}{a}$ και παρατηρούμε ότι το πεδίο

$$W(d'H_2\lambda - (aH_1 + bH_2 - 2)) = (d')^{-1}(b + aW(\lambda H_2 - H_1)),$$

δεν έχει εσωτερικά σημεία, ή ισοδύναμα, το $W(\lambda(aH_1 + bH_2) - d'H_2)$ δεν έχει εσωτερικά σημεία. Έτσι, το πεδίο

$$W(\lambda(aH_1 + bH_2) - \frac{g}{a}(aH_1 + bH_2) - d'H_2) = W(\lambda A - B)$$

επίσης δεν έχει εσωτερικά σημεία και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Πόρισμα 3.1.8. Έστω ένας πρωτοβάθμιος $n \times n$ πολυωνυμικός πίνακας $\lambda A - B$ με $W(\lambda A - B) \neq \mathbb{C}$. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα.

(i) Το αριθμητικό πεδίο $W(\lambda A - B)$ έχει μη κενό εσωτερικό.

- (ii) Το αριθμητικό πεδίο $W(\lambda A - B)$ ισούται με την κλειστότητα του εσωτερικού του.
- (iii) Ο πραγματικός γραμμικός χώρος που παράγεται από τους ερμιτιανούς πίνακες $H(A), \frac{1}{i}S(A), H(B)$ και $\frac{1}{i}S(B)$ έχει διάσταση τουλάχιστον 3.

3.2 Γωνιακά και Μεμονωμένα Σημεία

Για έναν πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda)$, τα συνοριακά σημεία του $W(P(\lambda))$, που παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον είναι τα γωνιακά σημεία. Ήδη γνωρίζουμε ότι τέτοια σημεία, για έναν πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, στο αριθμητικό του πεδίο $F(A)$, είναι πάντα ιδιοτιμές του A . Ας δούμε τι συμβαίνει στην περίπτωση των πολυωνυμικών πινάκων αφού πρώτα δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 3.2.1. Έστω $P(\lambda) = A_m \lambda^m + A_{m-1} \lambda^{m-1} + \dots + A_0$, με $A_m \neq 0$. Ένα σημείο $\lambda_0 \in W(P(\lambda))$ καλείται *γωνιακό σημείο* του $W(P(\lambda))$ αν για κάποια συνεκτική συνιστώσα Ω_s του $W(P(\lambda))$ υπάρχει δίσκος $\Delta(\lambda_0, r)$, $r > 0$ και δύο γωνίες ϕ_1, ϕ_2 με $0 \leq \phi_1 < \phi_2 \leq 2\pi$ και $\phi_2 - \phi_1 < \pi$ έτσι ώστε

$$\operatorname{Re}(e^{i\theta} \lambda_0) = \max\{\operatorname{Re}(z) : e^{-i\theta} z \in \Omega_s \cap \Delta(\lambda_0, r)\},$$

για κάθε $\theta \in [\phi_1, \phi_2]$.

Λήμμα 3.2.1. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ με $0 \in F(A)$ και έστω επίσης x_0 ένα μοναδιαίο διάνυσμα τέτοιο ώστε $x_0^* A x_0 = 0$.

(i) Αν η τετραγωνική μορφή $x^* A x$ έχει μη αρνητικά πραγματικά μέρη στο σύνολο $\{x \in \mathbb{C}^n : \|x - x_0\| < \varepsilon\}$ (δηλ. σε περιοχή του x_0), τότε ο πίνακας $A + A^*$ είναι θετικά ημιορισμένος.

(ii) Αν $x^* A x = 0, \forall x \in \{x \in \mathbb{C}^n : \|x - x_0\| < \varepsilon\}$, τότε $A = 0$.

Η απόδειξη είναι τεχνική και παραλείπεται. Παρόλα αυτά το λήμμα θα μας χρειαστεί στην απόδειξη του επόμενου θεωρήματος.

Θεώρημα 3.2.2. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ με $0 \in F(A)$ και έστω επίσης x_0 ένα μοναδιαίο διάνυσμα τέτοιο ώστε $x_0^* A x_0 = 0$. Τότε το 0 είναι γωνιακό σημείο του $F(A)$ αν και μόνο αν υπάρχουν $\varepsilon > 0, \phi_1, \phi_2$ τέτοια ώστε

$$\phi_1 \leq \arg(x^* A x) \leq \phi_2,$$

με $\phi_2 - \phi_1 < \pi, \forall x \in \{x \in \mathbb{C}^n : \|x - x_0\| < \varepsilon\}$.

Απόδειξη. Έστω ότι ισχύει η $\phi_1 \leq \arg(x^* A x) \leq \phi_2$. Αν $\omega_1 = \frac{\pi}{2} - \phi_1$ και $\omega_2 = \frac{3\pi}{2} - \phi_2$, τότε $0 < \omega_2 - \omega_1 < \pi$ και για τον πίνακα $e^{i\omega} A + e^{-i\omega} A^*$ έχουμε

$$x_0^*(e^{i\omega} A + e^{-i\omega} A^*)x_0 = 0$$

και

$$\operatorname{Re}(x^* e^{i\omega} A x) = \frac{1}{2} x^*(e^{i\omega} A + e^{-i\omega} A^*)x \leq 0,$$

για κάθε $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$ και για κάθε $x \in \{x \in \mathbb{C}^n : \|x - x_0\| < \varepsilon\}$. Έτσι, από το προηγούμενο Λήμμα ο πίνακας $e^{i\omega} A + e^{-i\omega} A^*$ είναι αρνητικά ημιορισμένος και

$$\max\{x^*(e^{i\omega} A + e^{-i\omega} A^*)x : \|x\| = 1\} = 0, \quad \forall \omega \in [\omega_1, \omega_2].$$

Επομένως,

$$\max\{\operatorname{Re} z : z \in e^{i\omega} F(A)\} = 0,$$

δηλαδή το μηδέν είναι γωνιακό σημείο του $F(A)$.

Αντίστροφα, αν το μηδέν είναι γωνιακό σημείο, μπορούμε να πάρουμε $\arg(x^* A x) \in [\phi_1, \phi_2]$, όπου $\phi_2 - \phi_1 = (\frac{3\pi}{2} - \omega_2) - (\frac{\pi}{2} - \omega_1) < \pi$. \square

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, δεν μπορούμε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι τα γωνιακά σημεία του αριθμητικού πεδίου ενός πολυωνυμικού πίνακα είναι ιδιοτιμές του, εκτός και αν θέσουμε κάποιες παραπάνω συνθήκες. Παρόλα αυτά, στην περίπτωση των πρωτοβάθμιων πολυωνύμων ισχύει ότι και στους απλούς πίνακες.

Θεώρημα 3.2.3. Έστω ότι το $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ είναι γωνιακό σημείο του αριθμητικού πεδίου του γραμμικού πολυωνυμικού πίνακα $\lambda A - B$. Τότε

(i) Το 0 είναι γωνιακό σημείο του $F(\lambda_0 A - B)$.

(ii) Το λ_0 είναι ιδιοτιμή του $\lambda A - B$.

Απόδειξη. Κάνοντας χρήση της Πρότασης 2.2.1 (ii) ισχύει

$$W((\lambda + \lambda_0)A - B) = W(\lambda A - B) - \lambda_0.$$

Αφού το λ_0 είναι γωνιακό σημείο του $W(\lambda A - B)$, έπεται ότι είναι και γωνιακό σημείο του $W((\lambda + \lambda_0)A - B) = W(\lambda A + (\lambda_0 A - B))$. Άρα, υπάρχει διάνυσμα x_0 τέτοιο ώστε $x_0^*(\lambda_0 A - B)x_0 = 0$ και $x_0^* A x_0 = k \neq 0$. Σημειώνουμε ότι δεν γίνεται να ισχύει $x_0^*(\lambda_0 A - B)x_0 = x_0^* A x_0 = 0$, αφού τότε οι συντελεστές θα είχαν κοινό ισοτροπικό διάνυσμα και θα ήταν $W(\lambda A + (\lambda_0 A - B)) = \mathbb{C}$. Αφού το 0 είναι γωνιακό σημείο του $W((\lambda A + (\lambda_0 A - B)))$, υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε μιγαδικό αριθμό

$$\mu_x = -\frac{x^*(\lambda_0 A - B)x}{x^* A x} \in \Delta(0, r) \cap W((\lambda A + (\lambda_0 A - B)))$$

έπεται ότι

$$\phi_1 \leq \arg\left(-\frac{x^*(\lambda_0 A - B)x}{x^* A x}\right) \leq \phi_2, \quad \phi_2 - \phi_1 < \pi.$$

Επιπλέον, από τη συνέχεια των συναρτήσεων $F_1(x) = x^* A x$ και $F_2(x) = x^*(\lambda_0 A - B)x$, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει περιοχή $\{x \in \mathbb{C}^n : \|x - x_0\| < \delta\}$ τέτοια ώστε για κάθε περιοχή $x \in \{x \in \mathbb{C}^n : \|x - x_0\| < \delta\}$, είναι

$$x^* A x \in \Delta(k, \varepsilon) \quad \text{και} \quad \mu_x \in \Delta(0, r).$$

Έτσι από την ισότητα

$$\arg(x^* A x) + \arg(\mu_x) = \arg(x^*(\lambda_0 A - B)x),$$

για ε κατάλληλα μικρό έχουμε $\arg(x^*(\lambda_0 A - B)x) \in [\theta_1, \theta_2]$, $\forall x \in \{x \in \mathbb{C}^n : \|x - x_0\| < \delta\}$ και για κατάλληλες γωνίες θ_1, θ_2 με $\theta_2 - \theta_1 < \pi$. Από το Θεώρημα 3.2.2 έπεται ότι το 0 είναι γωνιακό σημείο του $F(\lambda_0 A - B)$.

Για την απόδειξη του (ii) έχουμε ότι αφού το 0 είναι γωνιακό σημείο του $F(\lambda_0 A - B)$, είναι επίσης και ιδιοτιμή του πίνακα $\lambda_0 A - B$. Επομένως, $\det(\lambda_0 A - B) = 0$ το οποίο σημαίνει ότι το λ_0 είναι ιδιοτιμή του πολυωνυμικού πίνακα $\lambda A - B$. \square

Έστω $P(\lambda) = A_m \lambda^m + A_{m-1} \lambda^{m-1} + \dots + A_0$, με $A_m \neq 0$ και έστω $\lambda_0 \in W(P(\lambda))$. Τότε το σύνολο

$$M_{P(\lambda)}(\lambda_0) = \{x : x^* P(\lambda_0) x = 0, x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}\},$$

ονομάζεται το *συντροφικό σύνολο* του λ_0 .

Το επόμενο θεώρημα μας δίνει τις συνθήκες κάτω από τις οποίες ένα γωνιακό σημείο του αριθμητικού πεδίου ενός πολυωνυμικού πίνακα είναι επίσης ιδιοτιμή του πολυωνυμικού πίνακα.

Θεώρημα 3.2.4. Έστω $P(\lambda) = A_m \lambda^m + A_{m-1} \lambda^{m-1} + \dots + A_0$, με $A_m \neq 0$ και έστω λ_0 ένα γωνιακό σημείο του $W(P(\lambda))$. Αν υπάρχει διάνυσμα $x_0 \in M_{P(\lambda)}(\lambda_0)$ τέτοιο ώστε $x_0^* P'(\lambda_0) x_0 \neq 0$ και $x_0^* A_m x_0 \neq 0$, τότε το λ_0 είναι ιδιοτιμή του $P(\lambda)$.

Απόδειξη. Ορίζουμε τον πολυωνυμικό πίνακα

$$Q(\lambda) = P(\lambda + \lambda_0) = \lambda^m A_m + \dots + \lambda P'(\lambda_0) + P(\lambda_0).$$

Τότε $W(Q(\lambda)) = W(P(\lambda)) - \lambda_0$ και το 0 είναι γωνιακό σημείο του $W(Q(\lambda))$. Από το γεγονός ότι $x_0^* A_m x_0 \neq 0$ και τη συνέχεια της συνάρτησης $F(x) = x^* A x$, υπάρχει μια περιοχή του x_0 , $\mathcal{S}_{x_0, \varepsilon} = \{x \in \mathbb{C}^n : \|x - x_0\| < \varepsilon\}$, τέτοια ώστε $x^* A_m x \neq 0$, $\forall x \in \mathcal{S}_{x_0, \varepsilon}$. Επιπλέον, αφού

$$x_0^* Q'(0) x_0 = x_0^* P'(\lambda_0) x_0 \neq 0,$$

έπεται ότι το 0 είναι απλή ρίζα της εξίσωσης $x_0^*Q(\lambda)x_0 = 0$.

Αν $\lambda_1(x), \dots, \lambda_m(x)$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^*Q(\lambda)x = 0$ και $\lambda_m(x_0) = 0$, τότε οι $\lambda_1(x), \dots, \lambda_m(x)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις του $x \in \mathcal{S}_{x_0, \varepsilon}$ και το γινόμενο $P_{m-1}(x) = \lambda_1(x) \cdots \lambda_{m-1}(x)$ είναι μη μηδενικό στο x_0 . Αφού το 0 είναι γωνιακό σημείο του $W(Q(\lambda))$, μπορούμε να ορίσουμε θετικούς αριθμούς $\delta < \varepsilon$ και $\eta > 0$ όπου

$$\lambda_m(x) \in W(Q(\lambda)) \cap \Delta(0, \eta)$$

και

$$\arg(\lambda_m(x)) \in [\phi_1, \phi_2], \quad \phi_2 - \phi_1 < \pi, \quad \forall x \in \mathcal{S}_{x_0, \delta}.$$

Επιπλέον, από την συνέχεια της $P_{m-1}(x)$, για κατάλληλο $\eta > 0$, έχουμε

$$\arg((-1)^m P_{m-1}(x)) \in [\theta_1, \theta_2], \quad \forall x \in \mathcal{S}_{x_0, \delta},$$

με $\theta_2 - \theta_1 < \pi - (\phi_2 - \phi_1)$. Άρα, για το πηλίκο

$$\frac{x^*P(\lambda_0)x}{x^*A_m x} = (-1)^m P_{m-1}(x)\lambda_m(x)$$

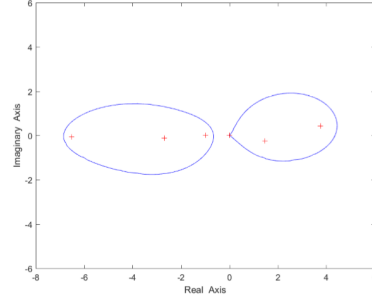
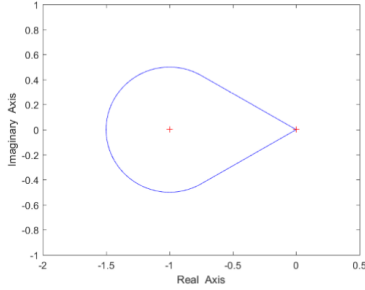
έχουμε

$$\arg\left(\frac{x^*P(\lambda_0)x}{x^*A_m x}\right) \in [\omega_1, \omega_2] \quad \forall x \in \mathcal{S}_{x_0, \delta},$$

όπου $\omega_2 - \omega_1 = (\theta_2 - \theta_1) + (\phi_2 - \phi_1) < \pi$. Άρα, το 0 είναι γωνιακό σημείο του $F(P(\lambda_0)) \equiv F(Q(0))$ το οποίο σημαίνει ότι είναι ιδιοτιμή του πίνακα $P(\lambda_0)$. Δηλαδή, το λ_0 είναι ιδιοτιμή του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$. \square

Παράδειγμα 3.2.1. $P(\lambda) = I\lambda^2 + \begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \\ i & -1 & 3i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} 10 & 10 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Στο σημείο αυτό αναφέρουμε μια πολύ ειδική περίπτωση, όπου το αριθμητικό πεδίο ενός πολυωνυμικού πίνακα είναι μονοσύνολο. Τότε θα δούμε στην παρακάτω πρόταση ότι και το πολυώνυμο είναι πολύ συγκεκριμένης μορφής.



Θεώρημα 3.2.5. Έστω $P(\lambda) = A_m \lambda^m + A_{m-1} \lambda^{m-1} + \dots + A_0$, $\mu \in A_m \neq 0$. Τότε, $W(P(\lambda)) = \{\alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ αν και μόνο αν $0 \notin F(A_m)$ και $P(\lambda) = A_m(\lambda I - \alpha I)^m$.

Απόδειξη. Αν $0 \notin F(A_m)$ και $P(\lambda) = A_m(\lambda I - \alpha I)^m$, τότε $\forall x \in \mathbb{C}^n$ $x^* P(\lambda)x = 0 \Rightarrow \lambda = \alpha \Rightarrow W(P(\lambda)) = \{\alpha\}$.

Για το αντίστροφο, έστω ότι $W(P(\lambda)) = \{\alpha\}$, τότε ασφαλώς ισχύει ότι $0 \notin F(A_m)$ από Πρόταση 2.2.2. Επίσης αν $W(P(\lambda)) = \{\alpha\}$ τότε τα πολυώνυμα $x^* P(\lambda)x$ πρέπει να είναι της μορφής $\mu(\lambda - \alpha)^m$, $\forall x \in \mathcal{S}_n$. Συγκεκριμένα, για κάθε $j = 0, 1, \dots, m-1$, $\frac{x^* A_j x}{x^* A_m x} = (-\alpha)^{m-j}$ και έτσι

$$x^*(A_j - (-\alpha)^{m-j} A_m)x = 0, \quad \forall x \in \mathcal{S}_n.$$

Έπεται ότι $A_j = (-\alpha)^{m-j} A_m$ και το αποτέλεσμα έπεται. \square

Ειδική περίπτωση γωνιακών σημείων του αριθμητικού πεδίου αποτελούν τα μεμονωμένα σημεία. Είδαμε στο Θεώρημα 3.2.5 ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να είναι το αριθμητικό πεδίο ενός πολυωνυμικού πίνακα μονοσύνολο, δηλαδή να είναι όλο ένα μεμονωμένο σημείο. Υπάρχουν παρόλα αυτά, περιπτώσεις όπου κάποιες συνεκτικές συνιστώσες είναι μεμονωμένα σημεία.

Θεώρημα 3.2.6. Έστω $P(\lambda) = A_m \lambda^m + A_{m-1} \lambda^{m-1} + \dots + A_0$, $\mu \in A_m \neq 0$ $\mu \in 0 \notin F(A_m)$. Αν το λ_0 είναι ένα μεμονωμένο σημείο του $W(P(\lambda))$, τότε:

(i) $P(\lambda_0) = 0$,

(ii) $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k P_k(\lambda)$ και $W(P_k(\lambda)) = W(P(\lambda)) \setminus \{\lambda_0\}$.

Αντίστροφα, από την παραγοντοποίηση στο (β.), όταν $\lambda_0 \notin W(P_k(\lambda))$, τότε το λ_0 είναι μεμονωμένο σημείο του $W(P(\lambda))$.

Απόδειξη. (i) Έστω $x_0 \in \mathbb{C}^n$ ένα μοναδιαίο διάνυσμα τέτοιο ώστε $x_0^* P(\lambda_0) x_0 = 0$. Αφού το 0 δεν ανήκει στο αριθμητικό πεδίο $F(A_m)$ ισχύει ότι για κάθε $y \in \mathbb{C}^n$ οι ρίζες του πολυωνύμου $y^* P(\lambda) y$ συνδέονται με συνεχείς καμπύλες με τις ρίζες του $x_0^* P(\lambda) x_0$ και οι συνεχείς καμπύλες βρίσκονται εντός του $W(P(\lambda))$. Έτσι, για κάθε $y \in \mathbb{C}^n$, το πολυώνυμο $y^* P(\lambda) y$ έχει μια ρίζα στη συνεκτική συνιστώσα $\{\lambda_0\}$ το οποίο σημαίνει $y^* P(\lambda_0) y = 0 \Rightarrow P(\lambda_0) = 0$.

(ii) Από το (ii) έπεται $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_0) P_1(\lambda)$, όπου $P_1(\lambda) = \lambda^{m-1} A_m + \dots$. Αν $\lambda_0 \notin W(P_1(\lambda))$ τότε η απόδειξη ολοκληρώθηκε. Αν όχι, τότε το λ_0 είναι επίσης μεμονωμένο σημείο του $W(P_1(\lambda))$. Τότε υπάρχει ένας θετικός ακέραιος k τέτοιος ώστε

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k P_k(\lambda), \quad \lambda_0 \notin W(P_k(\lambda)).$$

Αντίστροφα, από την παραγοντοποίηση στο (ii), ισχύει ότι $P(\lambda_0) = 0$ και $W(P(\lambda)) = \{\lambda_0\} \cup W(P_k(\lambda))$, όπου $\lambda_0 \notin W(P_k(\lambda))$. Έτσι είναι προφανές ότι το λ_0 είναι μεμονωμένο σημείο του $W(P(\lambda))$. \square

Πόρισμα 3.2.7. Έστω $P(\lambda) = A_m \lambda^m + A_{m-1} \lambda^{m-1} + \dots + A_0$, με $A_m \neq 0$ και έστω ότι $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ είναι μεμονωμένα σημεία του φραγμένου αριθμητικού πεδίου $W(P(\lambda))$. Τότε,

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \dots (\lambda - \lambda_s)^{k_s} P_0(\lambda), \quad (3.2.1)$$

όπου $W(P_0(\lambda)) = W(P(\lambda)) \setminus \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}$.

Αντίστροφα, από την παραγοντοποίηση 3.2.1, τα $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ είναι μεμονωμένα σημεία του αριθμητικού πεδίου $W(P(\lambda))$, όπου $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s \notin W(P_0(\lambda))$.

3.3 Διαγώνιοι Πολυωνυμικοί Πίνακες.

Διαγώνιος πολυωνυμικός πίνακας είναι ένας πολυωνυμικός πίνακας που όλοι οι συντελεστές του είναι διαγώνιοι πίνακες. Το αριθμητικό πεδίο ενός τετραγωνικού πολυωνυμικού πίνακα μπορεί να προσεγγιστεί από αριθμητικά πεδία διαγώνιων πολυωνυμικών πινάκων.

Θεώρημα 3.3.1. Έστω $P(\lambda) = \lambda^m A_m + \dots + \lambda A_1 + A_0$ ένας $n \times n$ πολυωνυμικός πίνακας. Τότε

$$\bigcup_{D_1} W(D_1(\lambda)) = W(P(\lambda)) = \bigcap_{D_2} W(D_2(\lambda)),$$

όπου η ένωση και η τομή λαμβάνονται για όλους τους διαγώνιους πολυωνυμικούς πίνακες $D_1(\lambda), D_2(\lambda)$ βαθμού m για τους οποίους ισχύει $JNR(D_1) \subseteq JNR(P) \subseteq JNR(D_2)$.

Πως όμως σχεδιάζουμε το αριθμητικό πεδίο ενός τετραγωνικού πολυωνυμικού πίνακα $D(\lambda) = \text{diag}\{d_1(\lambda), d_2(\lambda), \dots, d_n(\lambda)\}$.

Για κάθε επιλογή δεικτών $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_s \leq n$, συμβολίζουμε με

$$D(\lambda : k_1, k_2, \dots, k_s) = \text{diag}\{d_{k_1}(\lambda), d_{k_2}(\lambda), \dots, d_{k_s}(\lambda)\}.$$

Ισχύει ότι το αριθμητικό πεδίο ενός διαγώνιου πίνακα $\text{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $n > 3$, είναι η κυρτή θήκη των διαγωνίων στοιχείων του και αποτελείται από την ένωση κυρτών πολυγώνων με s , ($3 \leq s < n$) κορυφές. Συγκεκριμένα,

$$F(\text{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}) = \bigcup_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_s \leq n} F(\text{diag}\{a_{k_1}, a_{k_2}, \dots, a_{k_s}\})$$

Από την παρατήρηση αυτή, το πρόβλημα της σχεδίασης του αριθμητικού πεδίου ενός διαγώνιου πολυωνυμικού πίνακα, απλοποιείται.

Πρόταση 3.3.2. Έστω $D(\lambda)$ ένας $n \times n$ διαγώνιος πολυωνυμικός πίνακας

$\mu \in n > 3$ και έστω $s \in \{3, 4, \dots, n-1\}$. Τότε

$$W(D(\lambda)) = \bigcup_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_s \leq n} W((\lambda : k_1, k_2, \dots, k_s)).$$

Απόδειξη. Έστω $D(\lambda) = \text{diag}\{d_1(\lambda), d_2(\lambda), \dots, d_n(\lambda)\}$, $n > 3$ και ένας θετικός ακέραιος $s \in \{3, 4, \dots, n-1\}$. Τότε, $\lambda_0 \in W(D(\lambda))$ αν και μόνο αν

$$0 \in F(D(\lambda_0)) = \bigcup_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_s \leq n} F(\text{diag}\{d_{k_1}(\lambda_0), d_{k_2}(\lambda_0), \dots, d_{k_n}(\lambda_0)\}),$$

ή ισοδύναμα $\lambda_0 \in W((\lambda : k_1, k_2, \dots, k_s))$ για κάποιους δείκτες $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_s \leq n$. \square

Επιπλέον, για έναν $n \times n$ διαγώνιο πολυωνυμικό πίνακα $D(\lambda)$, το σύνορο $\partial W(D(\lambda))$ αποδεικνύεται ότι είναι υποσύνολο μιας πεπερασμένης ένωσης αριθμητικών πεδίων 2×2 πολυωνυμικών πινάκων. Αυτό είναι αρκετά χρήσιμο δεδομένου ότι το αριθμητικό πεδίο ενός 2×2 διαγώνιου πολυωνυμικού πίνακα δεν έχει εσωτερικά σημεία, οπότε είναι εύκολο να σχεδιαστεί.

Πρόταση 3.3.3. *Αν $D(\lambda)$ είναι ένας 2×2 διαγώνιος πολυωνυμικός πίνακας, τότε το $W(D(\lambda))$ δεν έχει εσωτερικά σημεία (δηλ. κάθε σημείο του $W(D(\lambda))$ έχει τοπική διάσταση 1).*

Απόδειξη. Έστω ότι ο $D(\lambda) = \text{diag}\{d_1(\lambda), d_2(\lambda)\}$ έχει βαθμό m με $d_1(\lambda) = b_m \lambda^m + \dots + b_1 \lambda + b_0$ και $d_2(\lambda) = c_m \lambda^m + \dots + c_1 \lambda + c_0$ και υποθέτουμε ότι $\text{Int}W(D(\lambda)) \neq \emptyset$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $\mu \in W(D(\lambda))$, το 0 είναι συνοριακό σημείο του $F(D(\mu))$. Από γνωστό θεώρημα έπεται ότι για κάθε $\lambda_0 \in \text{Int}W(D(\lambda))$, $0 \in F(D'(\lambda_0))$, ισοδύναμα, $\lambda_0 \in W(D'(\lambda))$. Χρησιμοποιώντας επαγωγή έχουμε,

$$\text{Int}W(D(\lambda)) \subseteq \text{Int}W(D'(\lambda)) \subseteq \text{Int}W(D^{(m-1)}(\lambda)).$$

Το αριθμητικό πεδίο του 2×2 γραμμικού πολυωνυμικού πίνακα

$$W(D^{(m-1)}(\lambda)) = \frac{1}{m}(m \operatorname{diag}\{b_m, c_m\}\lambda + \operatorname{diag}\{b_{m-1}, c_{m-1}\}),$$

που είναι

$$W(D^{(m-1)}) = \frac{1}{m} \left\{ -\frac{b_{m-1}t + c_{m-1}(1-t)}{b_mt + c_m(1-t)} : t \in (0, 1) \right\}$$

δεν έχει εσωτερικά σημεία και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. \square

Πρόταση 3.3.4. Αν $D(\lambda)$ είναι ένας $n \times n$ διαγώνιος πολυωνυμικός πίνακας, τότε

$$\partial W(D(\lambda)) \subseteq \bigcup_{1 \leq j < k \leq n} W(D(\lambda : j, k)).$$

Απόδειξη. Έστω $D(\lambda) = \operatorname{diag}\{d_1(\lambda), d_2(\lambda), \dots, d_n(\lambda)\}$ και έστω $\lambda_0 \in \partial W(D(\lambda))$. Τότε από το Θεώρημα 3.1.1 το 0 είναι συνοριακό σημείο του $F(D(\lambda_0)) = \mathcal{C}o\{d_1(\lambda_0), d_2(\lambda_0), \dots, d_n(\lambda_0)\}$. Επομένως $0 \in F(\operatorname{diag}\{d_j(\lambda_0), d_k(\lambda_0)\})$ για κάποια $j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ με $j < k$ και επομένως $\lambda_0 \in W(D(\lambda : j, k))$. \square

Άμεσα έχουμε το επόμενο πόρισμα

Πόρισμα 3.3.5. Το σύνορο του αριθμητικού πεδίου ενός διάγώνιου πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα είναι μια άπειρη ένωση ευθυγράμμων τμημάτων και κυκλικών τόξων.

Λήμμα 3.3.6. Έστω $P(\lambda) = \lambda^m A_m + \dots + \lambda A_1 + A_0$ ένας $n \times n$ πολυωνυμικός πίνακας και έστω ότι ο πίνακας $P(\mu)$ είναι κανονικός για κάθε $\mu \in \mathbb{C}$. Αν υπάρχει $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε ο πίνακας $P(\lambda_0)$ έχει n διακεκριμένες ιδιοτιμές, τότε υπάρχει ένας $n \times n$ ορθομοναδιαίος πίνακας U τέτοιος ώστε ο πολυωνυμικός πίνακας $U^* P(\lambda) U$ είναι διαγώνιος. (Συγκεκριμένα, οι συντελεστές A_0, A_1, \dots, A_m είναι ταυτόχρονα διαγωνιοποιήσιμοι με ορθομοναδιαία ομοιότητα.)

Απόδειξη. θεωρούμε τον πολυωνυμικό πίνακα $\tilde{P}(\lambda) = P(\lambda - \lambda_0)$. Τότε προφανώς, $\sigma(\tilde{P}) = \sigma(P) + \lambda_0$ και ο πίνακας $\tilde{P}(\mu)$ είναι κανονικός για κάθε $\mu \in \mathbb{C}$.

Έτσι, χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι ο πίνακας $P(0) = A_0$ έχει n διακεκριμένες ιδιοτιμές. Από την υπόθεση της κανονικότητας έχουμε ότι για μια πραγματική παράμετρο t ,

$$P(t)P^*(t) = P^*(t)P(t),$$

$$P(te^{i\theta})P^*(te^{i\theta}) = P^*(te^{i\theta})P(te^{i\theta}), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Παραγωγίζουμε αυτές τις εξισώσεις ως προς t , για $\theta = \frac{\pi}{2}$, των οποίων οι παράγωγοι στο $t = 0$ δίνουν

$$A_1A_0^* + A_0A_1^* = A_0^*A_1 + A_1^*A_0,$$

$$iA_1A_0^* - iA_0A_1^* = iA_0^*A_1 - iA_1^*A_0,$$

και έτσι $A_0A_1^* = A_1^*A_0$. Από υπόθεση, ο A_0 γράφεται $A_0 = U^*D_0U$ όπου ο U είναι $n \times n$ ορθομοναδιαίος και ο D_0 είναι $n \times n$ διαγώνιος με διακεκριμένα διαγώνια στοιχεία. Έτσι και ο A_1 είναι κανονικός πίνακας της μορφής $A_1 = U^*D_1U$ όπου ο D_1 είναι $n \times n$ διαγώνιος. Προφανώς οι πίνακες A_0, A_1 αντιμετατίθενται.

Έπειτα για $\theta = \frac{\pi}{4}$ παίρνουμε τις παραγώγους δεύτερης τάξης στο $t = 0$ και έχουμε

$$A_2A_0^* + A_0A_2^* + A_1A_1^* = A_0^*A_2 + A_2^*A_0 + A_1^*A_1,$$

$$iA_2A_0^* - iA_0A_2^* - iA_1A_1^* = iA_0^*A_2 - iA_2^*A_0 - iA_1^*A_1,$$

που δίνει $A_0A_2^* = A_2^*A_0$. Επομένως και ο A_2 είναι επίσης κανονικός πίνακας που αντιμετατίθεται με τον A_0 και υπάρχει $n \times n$ διαγώνιος D_2 τέτοιος ώστε $A_2 = U^*D_2U$. Συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία για $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{8}, \dots, \frac{\pi}{2m}$ καταλήγουμε στο ότι A_0, A_1, \dots, A_m είναι κανονικοί πίνακες που αντιμετατίθενται και διαγωνοποιούνται με ορθομοναδία ομοιότητα. \square

Στο σημείο αυτό έχουμε και το εξής πόρισμα του Θεωρήματος 3.1.7.

Πόρισμα 3.3.7. *Αν το αριθμητικό πεδίο ενός πρωτοβάθμιου τετραγωνικού*

πολυωνυμικού πίνακα $\lambda A - B$ δεν έχει εσωτερικά σημεία, τότε υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πίνακας T τέτοιος ώστε ο πολυωνυμικός πίνακας $T^*(\lambda A - B)T$ είναι διαγώνιος.

Η μελέτη του αριθμητικού πεδίου διαγώνιων πολυωνυμικών πινάκων οδηγεί στο επόμενο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 3.3.8. Έστω $Q(\lambda) = \lambda^m B_m + \dots + \lambda B_1 + B_0$ ένας 2×2 πολυωνυμικός πίνακας με αριθμητικό πεδίο $W(Q(\lambda)) \neq \mathbb{C}$. Αν το $W(Q(\lambda))$ δεν έχει εσωτερικά σημεία, τότε το $W(Q(\lambda))$ βρίσκεται πάνω σε μια αλγεβρική καμπύλη βαθμού το πολύ $2m$. Αν το $W(Q(\lambda))$ έχει εσωτερικά σημεία τότε είναι η ένωση δύο κλειστών συνόλων W_1, W_2 τέτοια ώστε το W_1 να βρίσκεται πάνω σε μια αλγεβρική καμπύλη βαθμού το πολύ $2m$ και το σύνορο ∂W_2 πάνω σε μια αλγεβρική καμπύλη βαθμού το πολύ $4m$.

Τέλος, έχουμε το:

Πόρισμα 3.3.9. Έστω ότι $Q(\lambda) = \text{diag}\{q_1(\lambda), q_2(\lambda)\}$ είναι ένας 2×2 διαγώνιος πολυωνυμικός πίνακας τέτοιος ώστε $W(Q(\lambda)) \neq \sigma(Q(\lambda)), \mathbb{C}$. Τότε το $W(Q(\lambda))$ βρίσκεται πάνω στη καμπύλη

$$\text{Re}q_1(\lambda)\text{Im}q_2(\lambda) - \text{Re}q_2(\lambda)\text{Im}q_1(\lambda) = 0.$$

Κεφάλαιο 4

Το Αριθμητικό Πεδίο των Αυτόσυζυγών Τετραγωνικών Πολυωνυμικών Πινάκων

4.1 Η μη Μονική Υπόθεση

Έστω $P(\lambda) = A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0$ ($A_2 \neq 0$) ένας $n \times n$ αυτοσυζυγής πολυωνυμικός τετραγωνικός πίνακας με αριθμητικό πεδίο $W(P)$ όπως στον Ορισμό 2.1.1. και έστω το μεικτό αριθμητικό πεδίο των συντελεστών του $JNR(A_0, A_1, A_2)$ όπως στον Ορισμό 1.0.2. Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^3$ και η εξίσωση $\alpha_2\lambda + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = 0$ έχει μη πραγματικές ρίζες λ_0 και $\bar{\lambda}_0$. Στη συνέχεια, για κάθε σημείο (b_0, b_1, b_2) , στο ανοιχτό ημιεπίπεδο:

$$\epsilon = \{t(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^3 : t \in (0, +\infty)\},$$

η εξίσωση $b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0 = 0$ έχει τις ίδιες ρίζες. Έτσι, αν ορίσουμε τον κώνο υποστήριξης $JNR(A_0, A_1, A_2)$ ως:

$$\mathcal{K} = \bigcup_{t>0} JNR(A_0, A_1, A_2)$$

Τότε:

$$\begin{aligned} W(P) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : x^*P(\lambda)x = 0, \quad x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0\}. \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \alpha_2\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = 0, \quad (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \in JNR(A_0, A_1, A_2)\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \alpha_2\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = 0, \quad (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \in \mathcal{K}\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \alpha_2\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = 0, \quad (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \in \partial JNR(A_0, A_1, A_2)\}. \end{aligned}$$

Κατά συνέπεια, δύο συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί λ_0 και $\bar{\lambda}_0$ ανήκουν στο $W(P)$, αν και μόνο αν η ευθεία

$$\epsilon = \{t(|\lambda_0|^2, -2Re(\lambda_0), 1) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\}$$

τέμνει το $JNR(A_0, A_1, A_2)$. Σημειώστε επίσης ότι $(0, 0, 0) \in JNR(A_0, A_1, A_2)$ αν και μόνο αν $(0, 0, 0) \in \mathcal{K}$ και σε αυτή την περίπτωση, $W(P) \equiv \mathbb{C}$.

Θεώρημα 4.1.1. Έστω $P(\lambda) = A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0$ ένας $n \times n$ αυτοσυζυγής πολυωνυμικός πίνακας με $W(P) \neq \mathbb{C}$ και έστω $\lambda_0 \in W(P) \setminus \mathbb{R}$ και $(b_0, b_1, b_2) \in \mathcal{K}$ τέτοιο ώστε $b_2\lambda_0^2 + b_1\lambda_0 + b_0 = 0$.

Τότε $\lambda_0 \in \partial W(P) \setminus \mathbb{R}$ αν και μόνο αν $(b_0, b_1, b_2) \in \partial \mathcal{K}$.

Απόδειξη. Αφού $W(P) \neq \mathbb{C}$, τότε $(0, 0, 0) \notin JNR(A_0, A_1, A_2)$ και αν $\lambda_0 \in \partial W(P) \setminus \mathbb{R}$ τότε υπάρχει μια ακολουθία $\{\lambda_\kappa\}_{\kappa \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \cup W(P))$ η οποία συγχλίνει στο λ_0 .

Η ακολουθία των ευθειών:

$$\epsilon_\kappa = \{t(|\lambda_\kappa|^2, -2Re\lambda_\kappa, 1) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\}, \quad \kappa \in \mathbb{N},$$

συγκλίνει προς την ευθεία

$$\epsilon_0 = \{t(|\lambda_0|^2, -2\operatorname{Re}\lambda_0, 1) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\}.$$

(Εδώ, η απόλυτη τιμή των $\tan(\epsilon_1, \epsilon_2)$ θεωρείται ως η απόσταση μεταξύ των ευθειών ϵ_1 και ϵ_2).

Αφού το $\lambda_\kappa \notin W(P)$ ($\kappa \in \mathbb{N}$) τότε οι ευθείες ϵ_κ δεν τέμνουν το μεικτό α-ριθμητικό πεδίο $JNR(A_0, A_1, A_2)$. Επομένως, η ϵ_0 είναι υποστηρικτική ευθεία του $JNR(A_0, A_1, A_2)$ και κατα συνέπεια το σημείο (b_0, b_1, b_2) είναι συνοριακό σημείο του \mathcal{K} .

Για το αντίστροφο, υποθετούμε ότι $(b_0, b_1, b_2) \in \partial\mathcal{K}$. Τότε, η $\epsilon_0 = \{t(b_0, b_1, b_2) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\}$ είναι μία υποστηρικτική ευθεία του $JNR(A_0, A_1, A_2)$ και υπάρχει μια ακολουθία ευθειών

$$\epsilon_\kappa = \{t(b_{0,\kappa}, b_{1,\kappa}, b_{2,\kappa}) \in \mathbb{R}^3 : b_{1,\kappa}^2 < 4b_{0,\kappa}b_{2,\kappa}, t \in \mathbb{R}\}, \quad \kappa \in \mathbb{N},$$

η οποία συγκλίνει στο ϵ_0 έτσι ώστε $\epsilon_\kappa \cap JNR(A_0, A_1, A_2) = \emptyset$ για κάθε $\kappa \in \mathbb{N}$.

Αν λ_κ και $\bar{\lambda}_\kappa$ είναι μη πραγματικές ρίζες της εξίσωσης

$$b_{2,\kappa}\lambda^2 + b_{1,\kappa}\lambda + b_{0,\kappa} = 0, \quad \kappa \in \mathbb{N},$$

η ακολουθία $\{\lambda_\kappa\}_{\kappa \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στο λ_0 (αφού οι ρίζες ενός πολυώνυμου είναι συνεχώς εξαρτημένες από τους συντελεστές του πολυωνύμου).

Επιπλέον, $\{\lambda_\kappa\}_{\kappa \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \cup W(P))$ και λ_0 είναι ένα συνοριακό σημείο του $W(P) \setminus \mathbb{R}$. □

4.2 Η Μονική Περίπτωση

Αν ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ είναι μονικός, λ.χ. $A_2 = I$ τότε το $JNR(A_0, A_1, A_2)$ δεν είναι παρά το απλό αριθμητικό πεδίο του πίνακα $A = A_0 + iA_1$.

Επιπλέον,

$$W(P) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = 0, \quad \alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R} \text{ και } \alpha_0 + i\alpha_1 \in F(A)\}.$$

Θεώρημα 4.2.1. Έστω $P(\lambda)$ ένας $n \times n$ μονικός αυτοσυζυγής πολυωνυμικός πίνακας με $P(\lambda) = I\lambda^2 + A_1\lambda + A_0$, έστω $\lambda_0 \in W(P) \setminus \mathbb{R}$ και έστω ότι $\alpha_0 + i\alpha_1 \in F(A)$ έτσι ώστε $\lambda_0^2 + \alpha_1\lambda_0 + \alpha_0 = 0$. Τότε $\lambda_0 \in \partial W(P) \setminus \mathbb{R}$ αν και μόνο αν $\alpha_0 + i\alpha_1 \in \partial F(A)$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τον κώνο \mathcal{K} . Το μεικτό αριθμητικό πεδίο $JNR(A_0, A_1, I)$ είναι ένα κυρτό υποσύνολο του επιπέδου

$$\{(u, v, 1) \in \mathbb{R}^3 : (u, v) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Κατά συνέπεια, $\partial JNR(A_0, A_1, I) \cap \partial \mathcal{K} = \{(u, v, 1) \in \mathbb{R}^3 : u + iv \in \partial F(A)\}$, και το αποτέλεσμα προκύπτει απευθείας. \square

Στο [1] παρουσιάζεται μία μέθοδος αριθμητικού προσδιορισμού σημείων του $\partial F(A)$. Χρησιμοποιώντας αυτή τη μέθοδο, θα μπορούσε να διατυπωθεί ένας αλγόριθμος που προσδιορίζει τα σημεία στο $\partial W(P)$ και χρησιμοποιείται στα επόμενα παραδείγματα. Βρίσκονται μοναδιαία διανύσματα $x \in \mathbb{C}^n$ τέτοια ώστε $x^*Ax \in \partial F(A)$, και στη συνέχεια οι μη πραγματικές ρίζες πολυωνύμων της μορφής

$$x^*P(\lambda)x = \lambda^2 + (x^*Ax_1)\lambda + x^*A_0x$$

είναι συνοριακά σημεία του $W(P)$. Έτσι, το $\partial W(P)$ είναι μια διπλή εικόνα της καμπύλης $\partial F(A)$. Δεδομένου ότι το $\partial F(A)$ μπορεί να περιλαμβάνει ευθύγραμμα τμήματα (κάτι που σίγουρα συμβαίνει όταν ο A είναι κανονικός), ειδική μέριμνα λαμβάνεται για τη δημιουργία σημείων στα εν λόγω τμήματα (βλ. βήμα 3 παρακάτω). Ο αλγόριθμος έχει την ακόλουθη μορφή:

Βήμα 1. Επιλέγει μια διαμέριση $0 = \theta_0, \theta_1, \dots, \theta_s = 2\pi$ του διαστήματος $[0, 2\pi]$ και ορίζει τον αριθμό των σημείων, R , τα οποία θα παρεμβάλλονται σε ευθύγραμμα τμήματα.

Βήμα 2. Για $k = 1, 2, \dots, s$ υπολογίζει τη μεγαλύτερη ιδιοτιμή λ_k του πίνακα

$$H_k = \cos \theta_k A_0 - \sin \theta_k A_1$$

και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα y_k .

Το σημείο $\alpha_0 + i\alpha_1 = y_k^* A_0 y_k + i y_k^* A_1 y_k - i y_k A y_k = y_k^* A y_k$ είναι ένα σημείο του $\partial F(A)$. Ελέγχει για ένα ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το k -οστό και $(k - 1)$ -οστό συνοριακό σημείο. Εάν δεν υπάρχει, μεταβαίνει στο βήμα 3. Αν υπάρχει, παρεμβάλει ένα σύνολο $R - 1$ σημείων στο ευθύγραμμο τμήμα και στη συνέχεια πηγαίνει στο βήμα 3.

Βήμα 3. Για κάθε k και για όλα τα παρεμβαλλόμενα σημεία σε ευθύγραμμο τμήματα υπολογίζει τις λύσεις του $\lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_0$. Αυτά είναι είτε μη πραγματικά σημεία του $\partial W(P)$, είτε πραγματικά σημεία του $W(P)$.

Στα παρακάτω παραδείγματα, παρατηρούνται οι σχετικές θέσεις του $F(A)$ και της παραβολής $D = \{u + iv \in \mathbb{C} : u, v \in \mathbb{R}, v^2 = 4u\}$. Σημειώστε επίσης ότι οι ιδιοτιμές του $P(\lambda)$ υποδηλώνονται, καθώς και το $\partial W(P)$. Αυτά τα

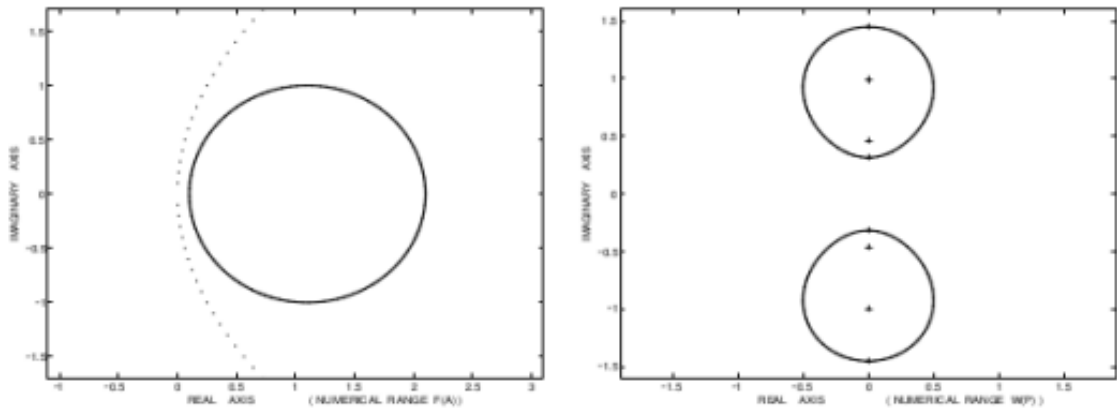
παραδείγματα θα είναι χρήσιμα σε αυτό που ακολουθεί.

Παράδειγμα 4.2.1. Έστω $P(\lambda) = I\lambda^2 + A_1\lambda + A_0$ με

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_0 = \begin{bmatrix} 1.1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.1 \end{bmatrix}.$$

Το πρώτο μέρος του σχήματος 4.1 δείχνει το σύνορο του $F(A)$ και την παραβολή D . Δεδομένου ότι το $F(A)$ είναι "μέσα" στη D . Το $\partial W(P)$ δεν έχει κανένα πραγματικό σημείο και αποτελείται από δύο συνεκτικές συνιστώσες.

Σχήμα 4.1: Αριθμητικό πεδίο με δύο συνεκτικές συνιστώσες



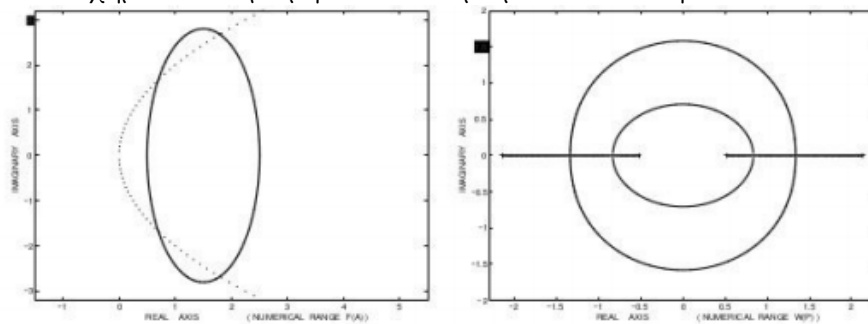
Παράδειγμα 4.2.2. Για τους συντελεστές

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2.8i \\ -2.8i & 0 \end{bmatrix}, \quad A_0 = \begin{bmatrix} 1.5 & 1 \\ 1 & 1.5 \end{bmatrix},$$

τα $\partial F(A)$ και $\partial W(P)$ είναι σχεδιασμένα στο σχήμα 4.2. Τώρα το $F(A)$ είναι ένας ελλειπτικός δίσκος που τέμνει την D , έτσι το σημείο του $F(A)$ "μέσα" στην

D τοποθετείται στο μη πραγματικό μέρος του $W(P)$, κλπ.

Σχήμα 4.2: Αριθμητικό πεδίο με μία συνεκτική συνιστώσα

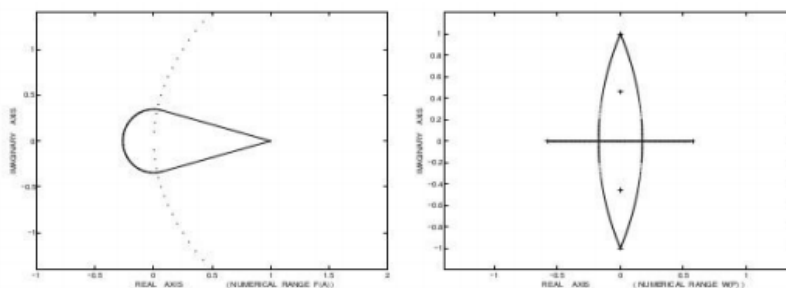


Παράδειγμα 4.2.3.

$$A_1 = (-i) \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & -0.2 \\ -0.2 & 0 & 0.2 \\ 0.2 & -0.2 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_0 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρήστε την παρουσία ευθύγραμμων τμημάτων στο $\partial F(A)$ στο σχήμα 4.3.

Σχήμα 4.3: Ευθύγραμμα τμήματα στο αριθμητικό πεδίο



Θα ήταν χρήσιμο να εισάγουμε την κλειστότητα των μη πραγματικών σημείων στο $W(P)$, $\mathcal{S} : \overline{W(P)} \setminus \mathbb{R}$.

Στη συνέχεια, το πραγματικό μέρος του $W(P)$ μπορεί να γραφτεί ως μια ξένη ένωση:

$$\mathbb{R} \cap W(P) = (\mathbb{R} \cap \mathcal{S}) \cup (W(P) \setminus \mathcal{S})$$

Πρόταση 4.2.1. Θεωρούμε ότι $\mathcal{S} \neq \emptyset$.

i) Αν $\alpha_0 + i\alpha_1 \in \mathcal{D} \cap F(A)$, τότε $-\frac{\alpha_1}{2} \in \mathbb{R} \cap \mathcal{S}$.

ii) Αντιστρόφως, αν $\lambda_0 \in \mathbb{R} \cap \mathcal{S}$, τότε υπάρχει ένα μη μηδενικό $x \in \mathbb{C}^n$ έτσι ώστε $\alpha_0 + i\alpha_1 := x^* A_0 x + i(x^* A_1 x) \in \mathcal{D} \cap F(A)$.

Απόδειξη. i) $\alpha_0 + i\alpha_1 \in F(A)$ συνεπώς υπάρχει ένα $x \neq 0$ έτσι ώστε $\alpha_0 = x^* A_0 x$, $\alpha_1 = x^* A_1 x$. Επιπλέον, αν $\alpha_0 + i\alpha_1 \in \mathcal{D}$ τότε υπάρχει ένα $x \neq 0$ έτσι ώστε $\alpha_1^2 = 4\alpha_0$.

Έτσι, $\lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 = (\lambda + \frac{\alpha_1}{2})^2$ και $-\frac{\alpha_1}{2} \in \mathbb{R} \cap W(P)$.

Αν $\mathbb{R} \cap W(P) = \{-\frac{\alpha_1}{2}\}$, τότε το $W(P)$ αποτελείται μόνο από ένα στοιχείο και συνεπάγεται ότι $-\frac{\alpha_1}{2} \in \mathbb{R} \cap \mathcal{S}$.

Αν $\mathbb{R} \cap W(P)$ δεν είναι μονοσύνολο και $-\frac{\alpha_1}{2}$ δεν ανήκει στο \mathcal{S} , τότε δεν υπάρχει ακολουθία μη πραγματικών σημείων του $W(P)$ που συγκλίνουν στο $-\frac{\alpha_1}{2}$.

Συνεπάγεται ότι, το $F(A)$ πρέπει να βρίσκεται 'εκτός' της \mathcal{D} και δεδομένου ότι το $F(A)$ είναι κυρτό, $\mathcal{D} \cap F(A) = \{\alpha_0 + i\alpha_1\}$. Αλλά αυτό θα υπονοούσε ότι $W(P) \subset \mathbb{R}$ και $\mathcal{S} = \emptyset$.

Άτοπο. Ως εκ τούτου, $-\frac{\alpha_1}{2} \in \mathbb{R} \cap \mathcal{S}$.

ii) Έστω πραγματικό $\lambda_0 \in \mathcal{S}$, τότε, αφού το $W(P)$ είναι κλειστό, $\lambda_0 \in W(P)$.

Επιπλέον, υπάρχει μια ακολουθία $\{\lambda_k\}$ με μη πραγματικά σημεία στο $W(P)$ που συγκλίνει στο λ_0 και ένα $x \neq 0$ τέτοιο ώστε $\lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 = 0$.

Τότε, υπάρχει μια αντίστοιχη ακολουθία $\{\alpha_{0k} + i\alpha_{1k}\} \subset F(A)$, και επίσης

στο \mathcal{D} , τέτοια ώστε $\alpha_{0k} + i\alpha_{1k} \rightarrow \alpha_0 + i\alpha_1 \in \mathcal{D}$.

Αφού το $F(A)$ είναι κλειστό, τότε $\alpha_0 + i\alpha_1 \in F(A)$.

□

4.3 Ιδιοτιμές στο Σύνορο

Θα διερευνηθούν οι ιδιοτιμές του $P(\lambda)$ στο $\partial W(P)$ για μονικό $P(\lambda)$. Ειδικότερα, οι ιδιοτιμές του $P(\lambda)$ στο $\partial W(P)$ συνδέονται άμεσα με τις ιδιοτιμές του A στο $\partial F(A)$.

Λήμμα 4.3.1. Έστω $y_0 \in \mathbb{C}^n$ ένα κοινό ιδιοδιάνυσμα των A_0 και A_1 που αντιστοιχεί στις ιδιοτιμές μ_0 και μ_1 , αντίστοιχα. Στη συνέχεια, οι λύσεις του $\lambda^2 + \mu_1\lambda + \mu_0 = 0$ είναι ιδιοτιμές του $P(\lambda)$ και y_0 το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα του $P(\lambda)$.

Τώρα θεωρούμε το μη πραγματικό μέρος του $\partial W(P)$.

Θεώρημα 4.3.1. Έστω $P(\lambda) = I\lambda^2 + A_1\lambda + A_0$ ένας $n \times n$ μονικός αυτοσυζυγής τετραγωνικός πολυωνυμικός πίνακας, έστω $\lambda_0 \in W(P) \setminus \mathbb{R}$ και έστω $\alpha_0 + i\alpha_1 \in F(A)$ τέτοια ώστε $\lambda_0^2 + \alpha_1\lambda_0 + \alpha_0 = 0$. Τότε, λ_0 είναι μια ιδιοτιμή του $P(\lambda)$ στο $\partial W(P)$ αν και μόνο αν $\alpha_0 + i\alpha_1$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα $A = A_0 + iA_1$ στο $\partial F(A)$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι λ_0 είναι μια ιδιοτιμή του $P(\lambda)$ στο $\partial W(P)$. Το 0 είναι ιδιοτιμή του $P(\lambda_0)$ στο σύνορο του $F(P(\lambda_0))$. Κατά συνέπεια, υπάρχει ένας ορθομοναδιαίος πίνακας V τέτοιος ώστε

$$V^*P(\lambda_0)V = I\lambda_0^2 + (V^*A_1V)\lambda_0 + V^*A_0V = 0_k \oplus T_0,$$

όπου $1 \leq k \leq n$, 0_k είναι ο $k \times k$ μηδενικός πίνακας και T_0 είναι ένας $(n - k) \times (n - k)$ αντιστρέψιμος άνω τριγωνικός πίνακας (που εξαρτάται από το λ_0).

Επομένως,

$$\begin{aligned} V^*(\operatorname{Re}\lambda_0 A_1 + A_0)V + iV^*(\operatorname{Im}\lambda_0 A_1)V &= 0_k \oplus T_0 - I\lambda_0^2 \\ &= 0_k \oplus T_0 + I(\alpha_1\lambda_0 + \alpha_0). \end{aligned}$$

Αφού συγκρίνουμε Ερμιτιανά και αντι-Ερμιτιανά μέρη, παίρνουμε

$$V^*A_1V = 2\operatorname{Re}\lambda_0 I_k \oplus H_1 = \alpha_1 I_k \oplus H_1$$

και

$$V^*A_0V = |\lambda_0|^2 I_k \oplus H_0 = \alpha_0 I_k \oplus H_0,$$

όπου H_0 και H_1 είναι $(n - k) \times (n - k)$ ερμιτιανοί πίνακες και I_k είναι ο $k \times k$ μοναδιαίος πίνακας. Έτσι,

$$V^*(A_0 + iA_1)V = (\alpha_0 + i\alpha_1)I_k \oplus (H_0 + iH_1)$$

και το $\alpha_0 + i\alpha_1$ είναι μια ιδιοτιμή του πίνακα $A = A_0 + iA_1$. Επιπλέον, από το Θεώρημα (), το $\alpha_0 + i\alpha_1$ είναι ένα συνοριακό σημείο του $F(A)$.

Για το αντίστροφο, υποθέστε ότι το $\alpha_0 + i\alpha_1 \in \partial F(A)$ είναι μία ιδιοτιμή του A . Το λ_0 είναι ένα συνοριακό σημείο του $W(P)$ και το $\alpha_0 + i\alpha_1$ είναι μια κανονική ιδιοτιμή του πίνακα A . Έτσι, υπάρχει ένας ορθομοναδιαίος πίνακας U , με πρώτη στήλη το y_0 (από το θεώρημα του Schur) τέτοιος ώστε

$$U^*AU = (\alpha_0 + i\alpha_1) \oplus T,$$

όπου ο T είναι ένας $(n - 1) \times (n - 1)$ άνω τριγωνικός πίνακας. Γράφουμε $H(T) = \frac{T+T^*}{2}$ και $S(T) = \frac{T-T^*}{2i}$, το Ερμιτιανό και το αντι-Ερμιτιανό μέρος του

πίνακα T αντίστοιχα. Τότε,

$$U^*A_0U + iU^*A_1U = \alpha_0 \oplus H(T) + i(\alpha_1 \oplus S(T)),$$

και συνεπώς,

$$U^*A_0U = \alpha_0 \oplus H(T) \text{ και } U^*A_1U = \alpha_1 \oplus S(T).$$

Επομένως, $A_0y_0 = \alpha_0y_0$ και $A_1y_0 = \alpha_1y_0$ και χρησιμοποιώντας το Λήμμα (), το λ_0 είναι ιδιοτιμή του $P(\lambda)$. \square

Αν το $\alpha_0 + i\alpha_1 \in \sigma(A) \cap F(A)$ και η εξίσωση $\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = 0$ έχει μια πραγματική ρίζα λ_0 , τότε από την απόδειξη του Θεωρήματος (), το λ_0 είναι μία ιδιοτιμή του $P(\lambda)$, αλλά μπορεί να ανήκει στο εσωτερικό του $W(P)$.

Σημειώνουμε ότι στο προηγούμενο θεώρημα, οι ιδιοτιμές $\lambda_0 \in \sigma(P) \cap \partial W(P)$ και $\alpha_0 + i\alpha_1 \in \sigma(A) \cap F(A)$ έχουν τα ίδια ιδιοδιανύσματα, δηλαδή

$$KerP(\lambda_0) \equiv Ker[(\alpha_0 + i\alpha_1)I - A].$$

Θεώρημα 4.3.2. Έστω λ_0 μια μη πραγματική ιδιοτιμή του $P(\lambda) = I\lambda^2 + A_1\lambda + A_0$ στο σύνορο του $W(P)$. Τότε:

- (i) η λ_0 είναι ημιαπλή ιδιοτιμή του $P(\lambda)$.
- (ii) οι λ_0 και $\bar{\lambda}_0$ έχουν τον ίδιο ιδιόχωρο, και
- (iii) αν λ_1 είναι μια ιδιοτιμή του $P(\lambda)$, $\lambda_1 \neq \lambda_0, \bar{\lambda}_0$, τότε οι ιδιόχωροι της λ_1 και της λ_0 είναι ορθογώνιοι, δηλαδή, $KerP(\lambda_1) \subset KerP(\lambda_0)^\perp$.

Απόδειξη.(i),(ii) Υπάρχει ένας ορθομοναδιαίος πίνακας V τέτοιος ώστε

$$V^*P(\lambda)V = I\lambda^2 + (\alpha_1I_k \oplus H_1)\lambda + \alpha_0I_k \oplus H_0, \quad 1 \leq k \leq n$$

Έστω ότι το λ_0 δεν ανήκει στο φάσμα του $(n-k) \times (n-k)$ αυτοσυζυγούς πολυωνυμικού πίνακα

$$Q(\lambda) := I\lambda^2 + H_1\lambda + H_0.$$

Για να το δούμε αυτό υποθέτουμε, αντιθέτως, ότι $\lambda_0 \in \sigma(Q)$. Τότε το λ_0 είναι ένα συνοριακό σημείο του αριθμητικού πεδίου $W(Q) \subset W(P)$. Συνεπάγεται ότι

$$\alpha_0 + i\alpha_1 \in \sigma(H_0 + iH_1) \cap \partial F(H_0 + iH_1),$$

και έτσι $\alpha_0 + i\alpha_1$ πρέπει να είναι μια κανονική ιδιοτιμή του πίνακα $H_0 + iH_1$. Έτσι, υπάρχει ένας $(n-k) \times (n-k)$ ορθομοναδιαίος πίνακας W τέτοιος ώστε:

$$W^*(H_0 + iH_1)W = (\alpha_0 + i\alpha_1) \oplus (S_0 + iS_1),$$

όπου S_0 και S_1 είναι $(n-k-1) \times (n-k-1)$ ερμιτιανοί πίνακες. Συνεπώς με το V όπως παραπάνω

$$(I_k \oplus W)^* V^*(A_0 + iA_1) V (I_k \oplus W) = (\alpha_0 + i\alpha_1) I_{k+1} \oplus (S_0 + iS_1)$$

και συνεπώς,

$$(I_k \oplus W)^* P(\lambda_0) V (I_k \oplus W) = 0_{k+1} \oplus T_1$$

για έναν $(n-k-1) \times (n-k-1)$ πίνακα T_1 , το οποίο είναι μια αντίφαση καθώς ο T_0 δεν είναι ομαλός. Επιπλέον, $\alpha_0 + i\alpha_1 \notin \sigma(H_0 + iH_1)$ και $\lambda_0 \notin \sigma(Q)$.

Το μέρος (i) τώρα ακολουθεί αφού $\lambda_0 \notin \sigma(Q)$ και

$$V^*P(\lambda)V = (\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0)I_k \oplus Q(\lambda).$$

Επιπλέον, αν λ_0 μια μη πραγματική λύση της $\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0$. Το μέρος (ii) προκύπτει επίσης επειδή, σε αυτήν την αναπαράσταση, οι λ_0 και $\bar{\lambda}_0$ έχουν τα ίδια ιδιοδιανύσματα.

(iii) Έστω λ_1 μια ιδιοτιμή του $P(\lambda)$, για την οποία ισχύει $\lambda_1 \neq \lambda_0, \bar{\lambda}_0$, με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $y \in \mathbb{C}^n$. Τότε $\lambda_1 \in \sigma(Q)$ και

$$P(\lambda_1)y = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\lambda_1^2 + \alpha_1\lambda_1 + \alpha_0)I_k & 0 \\ 0 & Q(\lambda_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^* \\ V_2^* \end{bmatrix} y = 0$$

όπου $V = [V_1 V_2]$ η εικόνα του V_1 είναι ο ιδιόχωρος του λ_0 (που είναι απαραίτητα ημιαπλός). Αφού $(\lambda_1^2 + \alpha_1\lambda_1 + \alpha_0) \neq 0$, $V_1^*y = 0$, δηλαδή, ο ιδιόχωρος του λ_1 είναι ορθογώνιος σε αυτόν του λ_0 .

□

Πόρισμα 4.3.1. Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ k διακριτές μη πραγματικές ιδιοτιμές του $P(\lambda)$ (με θετικά φανταστικά μέρη) στο $\partial W(P)$ και εστω m_1, m_2, \dots, m_k είναι οι αντίστοιχες αλγεβρικές πολλαπλότητες. Τότε, υπάρχει ένας ορθομοναδιαίος πίνακας V τέτοιος ώστε:

$$V^*P(\lambda)V = D(\lambda) \oplus Q(\lambda),$$

όπου $D(\lambda)$ ένας πολυωνυμικός πίνακας μεγέθους $m_1 + m_2 + \dots + m_k$ της μορφής

$$D(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \bar{\lambda}_1)I_{m_1} \oplus \dots \oplus (\lambda - \lambda_k)(\lambda - \bar{\lambda}_k)I_{m_k}$$

και $Q(\lambda)$ είναι μονικός αυτοσυζυγής πολυωνυμικός πίνακας τέτοιος ώστε:

$$\sigma(Q) = \sigma(P) \setminus \{\lambda_1, \bar{\lambda}_1, \lambda_2, \bar{\lambda}_2, \dots, \lambda_k, \bar{\lambda}_k\}.$$

4.4 Μη Διαφορίσιμα Οριακά Σημεία

Έστω $P(\lambda) = I\lambda^2 + A_1\lambda + A_0$ ένας $n \times n$ μονικός αυτοσυζυγής πολυωνυμικός πίνακας και $A = A_0 + iA_1$. Τα γωνιακά σημεία του $F(A)$ είναι ιδιοτιμές του πίνακα A στο $\partial F(A)$, και τα γωνιακά σημεία του $W(P)$ είναι ιδιοτιμές του $P(\lambda)$ στο $\partial W(P)$. Τώρα θεωρούμε, πιο γενικά, τα μη διαφορίσιμα σημεία στο $\partial W(P)$. Σημείωση: Αφού το $F(A)$ είναι κυρτό, τα γωνιακά σημεία του $F(A)$ είναι τα μοναδικά μη διαφορίσιμα σημεία του $\partial F(A)$.

Θεωρούμε ένα σημείο $\alpha_0 + i\alpha_1 \in \partial F(A)$ ($\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}$) τέτοιο ώστε η εξίσωση $\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = 0$ έχει δύο μη πραγματικές ρίζες λ_0 και $\bar{\lambda}_0$, όπου:

$$\lambda_0 = \frac{-\alpha_1 + i\sqrt{4\alpha_0 - \alpha_1^2}}{2}$$

Ας υποθέσουμε επίσης ότι $\mathcal{C} \subset \partial F(A)$ είναι μια συνεχής και πεπερασμένου μήκους καμπύλη που έχει το $\alpha_0 + i\alpha_1$ ως ένα τελικό σημείο. Για κάθε σημείο $\mu = \alpha_0 + i\alpha_1 + re^{i\phi}$ ($r \in (0, +\infty)$ και $\phi \in [0, 2\pi]$ στην \mathcal{C} , αρκετά κοντά στο $\alpha_0 + i\alpha_1$, η εξίσωση

$$\lambda^2 + (\alpha_1 + r \sin \phi)\lambda + \alpha_0 + r \cos \phi = 0$$

έχει δύο μη πραγματικές ρίζες λ_μ και $\bar{\lambda}_\mu$.

Αν $\mu \in \mathcal{C}$ συγκλίνει στο $\alpha_0 + i\alpha_1$, κατά μήκος της \mathcal{C} , τότε το r συγκλίνει στο 0 και η ϕ συγκλίνει σε μια γωνία $\phi_0 \in [0, 2\pi)$. Ας υποθέσουμε ότι $\phi_0 \neq 0, \pi$. Στη συνέχεια ένας υπολογισμός δίνει:

$$\lim_{\mu \rightarrow \alpha_0 + i\alpha_1} \tan \text{Arg}(\lambda_\mu - \lambda_0) = \frac{-2 \cot \phi_0 + \alpha_1}{\sqrt{4\alpha_0 - \alpha_1^2}}$$

Πρώτα εξετάζονται τα μη πραγματικά σημεία στο $\partial W(P)$.

Θεώρημα 4.4.1. Έστω $P(\lambda) = I\lambda^2 + A_1\lambda + A_0$ ένας $n \times n$ μονικός αυτοσυζυγής τετραγωνικός πολυωνυμικός πίνακας, έστω $\lambda_0 \in \partial W(P) \setminus \mathbb{R}$, και έστω

$\alpha_0 + \alpha_1 \in F(A)$ έτσι ώστε $\lambda_0^2 + \alpha_1 \lambda_0 + \alpha_0 = 0$. Τότε το λ_0 είναι μη διαφορίσιμο σημείο του $\partial W(P)$ αν και μόνο αν $\alpha_0 + i\alpha_1$ είναι ένα γωνιακό σημείο του $F(A)$.

Απόδειξη. Αν υποθέσουμε ότι $\alpha_0 + i\alpha_1$ είναι ένα κρίσιμο σημείο του $F(A)$ μη-δενικής γωνίας (δηλαδή, $\phi_1 = \phi_2$) τότε το $F(A)$ είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα και το $\alpha_0 + i\alpha_1$ αποτελεί άκρο του $F(A)$. Επιπλέον, το $F(A)$ δεν έχει εσωτερικά σημεία και, επίσης το $W(P)$ δεν έχει επίσης κανένα εσωτερικό σημείο. Δεδομένου ότι το $\alpha_0 + i\alpha_1$ αποτελεί άκρο του $F(A)$ (από την συνεχή εξάρτηση των ριζών των πολυωνύμων από τους συντελεστές), οι μη πραγματικές ρίζες λ_0 και $\bar{\lambda}_0$ είναι τελικά σημεία του $W(P) \setminus \mathbb{R}$ και ως εκ τούτου γωνιακά σημεία του $\partial W(P)$.

Τώρα, ας υποθέσουμε ότι το $\alpha_0 + i\alpha_1 \in \partial F(A)$ και δεν είναι γωνιακό σημείο μηδενικής γωνίας. Τότε, υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός $r > 0$ τέτοιος ώστε για κάθε $b_0 + ib_1 \in \mathcal{S}(\alpha_0 + i\alpha_1, r)$ ($b_0, b_1, \alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}$), η εξίσωση $\lambda^2 + b_1 \lambda + b_0 = 0$ έχει πραγματικές ρίζες. Επιπλέον, η καμπύλη $\partial F(A) \cap \mathcal{S}(\alpha_0 + i\alpha_1, r)$ είναι η ένωση των δύο καμπύλων C_1 και C_2 τέτοιων ώστε $C_1 \cap C_2 = \{\alpha_0 + i\alpha_1\}$. Το σημείο $\alpha_0 + i\alpha_1$ ή είναι γωνιακό σημείο ή διαφορίσιμο σημείο της $C_1 \cup C_2$.

Περίπτωση (i): Έστω ότι το $\alpha_0 + i\alpha_1$ είναι γωνιακό σημείο της $C_1 \cup C_2$, με γωνίες στήριξης ϕ_1 και ϕ_2 τέτοιες ώστε $0 < \phi_2 - \phi_1 \leq \psi_0 < \pi$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι οι C_1 και C_2 είναι κλειστά ευθύγραμμα τμήματα. Έπεται ότι αν $\phi_1, \phi_2 \neq 0$ ή π , τότε

$$\lim_{\mu_1 \rightarrow \alpha_0 + i\alpha_1} \tan \text{Arg}(\lambda_1 - \lambda_0) = -\frac{2 \cot \phi_1 + \alpha_1}{\sqrt{4\alpha_0 - \alpha_1^2}}$$

και

$$\lim_{\mu_2 \rightarrow \alpha_0 + i\alpha_1} \tan \text{Arg}(\lambda_2 - \lambda_0) = -\frac{2 \cot \phi_2 + \alpha_1}{\sqrt{4\alpha_0 - \alpha_1^2}}$$

όπου μ_1 και μ_2 είναι περιορισμένα να βρίσκονται πάνω στις C_1 και C_2 , αντίστοιχα, και $\lambda_1, \lambda_2 \in \partial W(P)$ είναι οι μη πραγματικές ρίζες των αντίστοιχων δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Αφού $0 < \phi_2 - \phi_1 \leq \psi_0 < \pi$,

έχουμε ότι $\cot \phi_1 \neq \cot \phi_2$ και επομένως

$$\left| \lim_{\mu_1 \rightarrow \alpha_0 + i\alpha_1} \tan \operatorname{Arg}(\lambda_1 - \lambda_0) - \lim_{\mu_2 \rightarrow \alpha_0 + i\alpha_1} \tan \operatorname{Arg}(\lambda_2 - \lambda_0) \right| \neq \pi.$$

Επομένως, το λ_0 είναι ένα μη διαφορίσιμο σημείο του $\partial W(P(\lambda))$.

Αν μια από τις δύο γωνίες ϕ_1 και ϕ_2 είναι ίση με 0 ή π , τότε προφανώς $\cot \phi_1 \neq \cot \phi_2$, και έχουμε το ίδιο συμπέρασμα.

Περίπτωση (ii): Έστω ότι το $\alpha_0 + i\alpha_1$ είναι ένα διαφορίσιμο σημείο του $\partial F(A)$ και ϕ_0 είναι η γωνία που δημιουργείται από την εφαπτομένη στην $C_1 \cup C_2$ στο $\alpha_0 + i\alpha_1$ με τη θετική φορά με τον πραγματικό άξονα. Αν $\phi_0 \neq 0, \pi$ τότε $\cot \phi_0 = \cot(\phi_0 + \pi)$ και συνεπώς παίρνοντας όρια πάνω στην C_1 και στην C_2 ,

$$\lim_{\mu_1 \rightarrow \alpha_0 + i\alpha_1} \tan \operatorname{Arg}(\lambda_1 - \lambda_0) = \lim_{\mu_2 \rightarrow \alpha_0 + i\alpha_1} \tan \operatorname{Arg}(\lambda_2 - \lambda_0)$$

Αφού $\phi_0 \neq 0$ ή π ,

$$(\operatorname{Im}\mu_1 - \alpha_1)(\operatorname{Im}\mu_2 - \alpha_1) < 0 \Rightarrow$$

$$\operatorname{Re}(\lambda_1 - \lambda_0)\operatorname{Re}(\lambda_2 - \lambda_0) < 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{\mu_1 \rightarrow \alpha_0 + i\alpha_1} \tan \operatorname{Arg}(\lambda_1 - \lambda_0) \neq \lim_{\mu_2 \rightarrow \alpha_0 + i\alpha_1} \tan \operatorname{Arg}(\lambda_2 - \lambda_0).$$

Έτσι,

$$\left| \lim_{\mu_1 \rightarrow \alpha_0 + i\alpha_1} \tan \operatorname{Arg}(\lambda_1 - \lambda_0) - \lim_{\mu_2 \rightarrow \alpha_0 + i\alpha_1} \tan \operatorname{Arg}(\lambda_2 - \lambda_0) \right| = \pi,$$

και το λ_0 είναι ένα διαφορίσιμο σημείο στο $\partial W(P)$.

Αν $\phi_0 = 0$ ή π , τότε

$$\lim_{\mu_j \rightarrow \alpha_0 + i\alpha_1} \tan \operatorname{Arg}(\lambda_j - \lambda_0) = \frac{\pi}{2} \text{ ή } \frac{3\pi}{2}, \quad j = 1, 2.$$

Επιπλέον, $(Re\mu_1 - \alpha_0)(Re\mu_2 - \alpha_0) < 0$ και $(Im\mu_1 - \alpha_1)(Im\mu_2 - \alpha_1) > 0$.

Συνεπώς, $Im(\lambda_1 - \lambda_0)Im(\lambda_2 - \lambda_0) < 0$.

Έτσι,

$$\lim_{\mu_1 \rightarrow \alpha_0 + i\alpha_1} Arg(\lambda_1 - \lambda_0) \neq \lim_{\mu_2 \rightarrow \alpha_0 + i\alpha_1} Arg(\lambda_2 - \lambda_0)$$

και λ_0 είναι ένα διαφορίσιμο σημείο στο $\partial W(P)$.

Η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

□

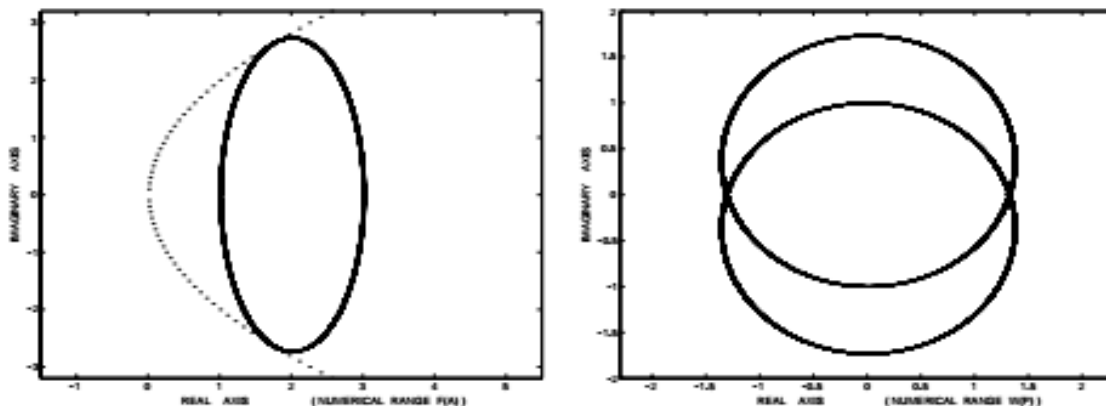
Σημεία ιδιαίτερου ενδιαφέροντος είναι τα σημεία όπου το $W(P)$ τέμνει τον πραγματικό άξονα. Τα επόμενα δύο παραδείγματα είναι βοηθητικά.

Παράδειγμα 4.4.1.

$$A_1 = i \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{4 + \sqrt{12}} \\ -\sqrt{4 + \sqrt{12}} & 0 \end{bmatrix}, A_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

Βλέπε σχήμα 4.4. Σημειώστε ότι το $F(A)$ απλά αγγίζει την παραβολή D και,

Σχήμα 4.4:



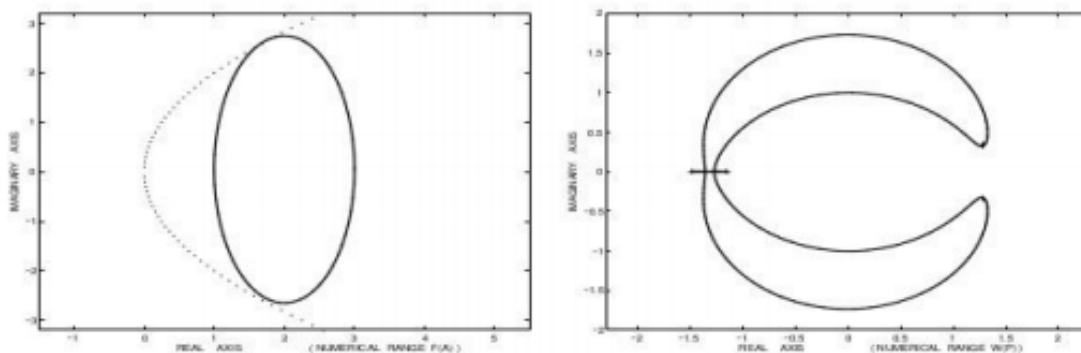
κατά συνέπεια, το $W(P) \cap \mathbb{R}$ αποτελείται από μεμονομένα σημεία.

Παράδειγμα 4.4.2. (είναι μια παραλλαγή του παραδείγματος 4)

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.05 & 2.7i \\ -2.7i & 0.05 \end{bmatrix}, A_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

Βλέπε σχήμα 4.5.

Σχήμα 4.5:



Θεώρημα 4.4.2. Έστω $P(\lambda) = I\lambda^2 + A_1\lambda + A_0$ ένας $n \times n$ μονικός αυτοσυζυγής πολωνυμικός πίνακας, έστω $\lambda_0 \in \mathbb{R} \cap (\partial W(P) \setminus \mathbb{R})$, και έστω $\alpha_0 + i\alpha_1 \in F(A)$ ($\alpha_0 + i\alpha_1 \in \mathbb{R}$ και $A = A_0 + iA_1$ τέτοια ώστε $\lambda_0^2 + \alpha_1\lambda_0 + \alpha_0 = 0$). Υποθέτουμε ότι ισχύουν οι επόμενες δύο προϋποθέσεις:

- (i) $\alpha_0 + i\alpha_1$ ένα μη διαφορίσιμο σημείο του $\partial F(A)$ έτσι ώστε η γραμμή υποστήριξής του, έχει μια γωνία ϕ_0 με τον πραγματικό άξονα τέτοια ώστε $\cot \phi_0 = \frac{\alpha_1}{2}$.
- (ii) το $F(A)$ δεν είναι ευθύγραμμο τμήμα σε μια γωνία ϕ_0 μέχρι τον πραγματικό άξονα γαι την οποία $\cot \phi_0 = \frac{\alpha_1}{2}$.

Στη συνέχεια η καμπύλη $\overline{\partial W(P) \setminus \mathbb{R}}$ τέμνει τον πραγματικό άξονα κάθετα στο λ_0 .

Απόδειξη. Αφού $\lambda_0 \in \mathbb{R} \cap \overline{\partial W(P)} \setminus \mathbb{R}$ τότε υπάρχει μια ακολουθία $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \partial W(P) \setminus \mathbb{R}$ που συγκλίνει στο λ_0 έτσι ώστε $Im \lambda_k > 0$ ($k \in \mathbb{N}$). Η ακολουθία

$$\{|\lambda_k|^2 - i2Re\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$$

συγκλίνει στο $\alpha_0 + i\alpha_1$ και, $|\lambda_k|^2 - i2Re\lambda_k \in \partial F(A)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Έτσι το $\alpha_0 + i\alpha_1$ είναι ένα συνοριακό σημείο του $F(A)$. Επιπλέον, λ_0 είναι μια διπλή ρίζα της εξίσωσης $\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = 0$, δηλαδή, $\lambda_0 = -\frac{\alpha_1}{2}$.

Για κάθε $k \in \mathbb{N}$, μπορούμε να γράψουμε:

$$|\lambda_k|^2 - iRe\lambda_k = |\lambda_{k+1}|^2 - i2Re\lambda_{k+1} + r_k e^{i\phi_k}$$

όπου $r_k > 0$ και $\phi_k \in [0, 2\pi)$. Στη συνέχεια, μετά από κάποιους υπολογισμούς, διαπιστώνεται ότι:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tan Arg(\lambda_k - \lambda_{k+1}) = \pm \infty$$

Αν η ακολουθία $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει σε μια γωνία $\phi_0 \in \frac{(0, 2\pi)}{\pi}$ έτσι ώστε $\cot \phi_0 \neq \frac{\alpha_1}{2}$, τότε

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \tan Arg(\lambda_k - \lambda_{k+1}) = \pm \infty$$

Ως εκ τούτου, η καμπύλη $\overline{\partial W(P)} \setminus \mathbb{R}$ τέμνει τον πραγματικό άξονα κάθετα στο λ_0 . Αν η ακολουθία $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in [0, 2\pi)$ συγκλίνει σε 0 ή π , τότε:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sin \phi_k = 0 \qquad \lim_{k \rightarrow +\infty} \cos \phi_k = \pm 1$$

και η (9) ισχύει.

Σημειώνουμε ότι εάν το $\alpha_0 + i\alpha_1$ είναι γωνιακό σημείο του $F(A)$ με υποστηρικτικές γωνίες $\phi_1 \neq \phi_2$, τότε $\cot \phi_1 \neq \frac{\alpha_1}{2}$ ή $\cot \phi_2 \neq \frac{\alpha_1}{2}$, και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. \square

Εάν το σημείο $\lambda_0 \in \overline{\mathbb{R} \cap \partial W(P)} \setminus \mathbb{R}$ είναι ένα μεμονωμένο σημείο του $W(P)$ τότε, προκύπτει ότι είναι μια ιδιοτιμή του $P(\lambda)$. Το επόμενο αποτέλεσμα αφορά τα ειδικά σημεία αυτού του είδους και ρίχνει κάποιο φως σχετικά με τις ειδικές περιπτώσεις του προηγούμενου θεωρήματος.

Θεώρημα 4.4.3. Έστω $P(\lambda)$ ένας πολυωνυμικός πίνακας, έστω $\lambda_0 \in \mathbb{R} \cap (\overline{\partial W(P)} \setminus \mathbb{R})$ και έστω $\alpha_0 + i\alpha_1 \in \partial F(A)$ ($\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}$ και $A = A_0 + iA_1$) έτσι ώστε $\lambda_0^2 + \alpha_1\lambda_0 + \alpha_0 = 0$. Αν λ_0 είναι ένα μεμονωμένο σημείο του $W(P) \cap \mathbb{R}$ και $\alpha_0 + i\alpha_1$ είναι ένα διαφορίσιμο σημείο του $\partial F(A)$ έτσι ώστε η υποστηρικτική γραμμή έχει μια γωνία ϕ_0 με τον πραγματικό άξονα, τότε, $\cot \phi_0 = \frac{\alpha_1}{2}$.

Απόδειξη. Θεωρούμε την παραβολή $\mathcal{D} = \{u + iv \in \mathbb{C} : u, v \in \mathbb{R}, v^2 = 4u\}$. Τότε, $v^2 - 4u < 0$ αν και μόνο αν το $u + iv$ βρίσκεται "μέσα" στην παραβολή \mathcal{D} .

Κατά συνέπεια, πρέπει να υπάρχουν μη πραγματικά σημεία στο $W(P)$.

Προφανώς, $\lambda_0 \in \partial W(P) \cap \mathcal{D}$. Δεδομένου ότι το λ_0 είναι ένα μεμονωμένο σημείο του $W(P) \cap \mathbb{R}$ και υπάρχουν μη πραγματικά σημεία στο $W(P)$, υπάρχει ένας πραγματικός $r > 0$ τέτοιος ώστε

$$[\partial F(A) \cap S(\alpha_0 + i\alpha_1, r)] \setminus \{\alpha_0 + i\alpha_1\}$$

να βρίσκεται "μέσα" στην παραβολή \mathcal{D} . Επιπλέον, $\alpha_0 + i\alpha_1$ είναι ένα διαφορίσιμο σημείο του $\partial F(A)$ και, κατά συνέπεια, οι καμπύλες \mathcal{D} και $\partial F(A)$ έχουν μια κοινή υποστηρικτική γραμμή στο σημείο $\alpha_0 + i\alpha_1$. Αν τα α_0 και α_1 είναι μη μηδενικά, τότε τα $\sin \phi_0$ και $\cos \phi_0$ είναι επίσης μη μηδενικά και

$$\tan \phi_0 \cot \phi_0 = 1 \Rightarrow \cot \phi_0 = \pm \frac{\alpha_1}{2}.$$

Επιπλέον, $\cot \phi_0 > 0$ αν και μόνο αν $\alpha_1 > 0$. Έτσι, η $\cot \phi_0 = \frac{\alpha_1}{2}$.

Τέλος, αν $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$, τότε $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$ και $\cot \phi_0 = \frac{\alpha_1}{2} = 0$. □

4.5 Τύποι Ιδιοτιμών

Έστω $P(\lambda) = I\lambda^2 + A_1\lambda + A_0$ ένας $n \times n$ μονικός αυτοσυζυγής πολυωνυμικός πίνακας και έστω το αριθμητικό του πεδίο $W(P)$. Μια πραγματική ιδιοτιμή $\lambda_0 \in \sigma(P)$ λέγεται ότι έχει θετικό (αρνητικό) τύπο αν $x^*P'(\lambda_0)x > 0$ ($x^*P'(\lambda_0)x < 0$) για κάθε μη μηδενικό $x \in \text{Ker}P(\lambda_0)$. Οι ιδιοτιμές που είναι είτε θετικές είτε αρνητικές λέγεται ότι, έχουν σαφή τύπο και είναι απαραίτητα ημιαπλές. Οι πραγματικές ιδιοτιμές του $P(\lambda)$, οι οποίες δεν έχουν καθορισμένο τύπο λέγονται μεικτού τύπου. Είναι εύκολο να εξακριβωθεί ότι, αν το $\lambda_0 \in \sigma(P) \cap \mathbb{R}$ είναι μεικτού τύπου, τότε υπάρχει ένα μη μηδενικό διάνυσμα $x_0 \in \text{Ker}P(\lambda_0)$ έτσι ώστε $x_0^*P'(\lambda_0)x_0 = 0$.

Με αυτή τη σημειογραφία, το $P(\lambda)$ είναι υπερβολικό εάν, για κάθε μη μηδενικό x , η $x^*P(\lambda)x = 0$ έχει δύο διακριτές πραγματικές ρίζες. Συγκεκριμένα, $W(P) \subset \mathbb{R}$. Ωστόσο, η τάξη των πολυωνύμων $P(\lambda)$ με όλες τις ιδιοτιμές πραγματικές και ορισμένου τύπου είναι ευρύτερη και, σε γενικές γραμμές, δεν έχουμε τον εγκλεισμό $W(P) \subset \mathbb{R}$. Τέτοια πολυώνυμα είναι σχεδόν-υπερβολικά. Για παράδειγμα, αν όλες οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές και διαφορετικές, τότε είναι αναγκαστικά ορισμένες και το σύστημα είναι σχεδόν υπερβολικό.

Πρόταση 4.5.1. *Αν λ_0 είναι μια ιδιοτιμή του $P(\lambda)$ στο $W(P) \setminus \mathcal{S}$ τότε το λ_0 έχει ένα καθορισμένο τύπο.*

Απόδειξη. Αν το λ_0 δεν έχει καθορισμένο τύπο, υπάρχει ένα μη μηδενικό $x \in \mathbb{C}^n$ τέτοιο ώστε $x^*P(\lambda)x = 0$. Αυτό σημαίνει ότι το $x^*P(\lambda)x = 0$ έχει μια διπλή ρίζα και ως εκ τούτου, ότι η $\alpha_1 + i\alpha_0 \in \mathcal{D} \cap F(A)$. Συνεπάγεται ότι $\lambda_0 = -\frac{\alpha_1}{2} \in \mathbb{R} \cap \mathcal{S}$ και αυτό έρχεται σε αντίθεση με τη διάσπαση της ένωσης. \square

Πόρισμα 4.5.1. *Αν όλες οι ιδιοτιμές του $P(\lambda)$ είναι πραγματικές και εκείνες στο \mathcal{S} έχουν καθορισμένο τύπο, τότε το $P(\lambda)$ είναι ένα ημι-υπερβολικό.*

4.6 Αποσβενόμενα Συστήματα Ταλάντωσης

Η ενότητα αυτή αποτελείται από κάποιες παρατηρήσεις βάζοντας αυτή τη συζήτηση στο πλαίσιο των γνωστών αποτελεσμάτων για τα συστήματα ταλάντωσης.

Για τους σκοπούς μας, ένα "σύστημα ταλάντωσης με απόσβεση" είναι ένας πολυωνυμικός πίνακας της μορφής $P(\lambda) = A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0$, με $A_2 > 0$, $A_1 \geq 0$, και $A_0 > 0$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, το $P(\lambda)$, μπορεί να θεωρηθεί μονικό. Έτσι, σε αυτή την ενότητα $P(\lambda) = I\lambda^2 + A_1\lambda + A_0$ με $A_1 \geq 0$ και $A_0 \geq 0$. Είναι φανερό ότι, για πολυωνυμικούς πίνακες αυτής της μορφής, το φάσμα βρίσκεται πάντα στο κλειστό αριστερό μισό του μιγαδικού επιπέδου. Ομοίως, το αριθμητικό πεδίο $W(P)$ είναι επίσης στο κλειστό αριστερό ημιεπίπεδο.

Ένα σύστημα ταλάντωσης με απόσβεση λέγεται ότι είναι ασθενώς αποσβενόμενο αν, για όλα τα μη μηδενικά $x \in \mathbb{C}^n$,

$$(x^* A_1 x)^2 < 4(x^* x)(x^* A_0 x).$$

Προφανώς, αυτό είναι απλά η περίπτωση στην οποία το $F(A)$ βρίσκεται "μέσα" στην παραβολή \mathcal{D} . Επιπλέον, το $W(P)$ έχει δύο συνεκτικές συνιστώσες, η μία βρίσκεται στο άνω ημιεπίπεδο και η άλλη είναι η αντανάκλασή της στο κάτω ημιεπίπεδο. Φυσικά, δεν υπάρχουν πραγματικές ιδιοτιμές. Υπενθυμίζουμε ότι υπάρχει μια παραγοντοποίηση $P(\lambda) = (I\lambda - Z^*)(I\lambda - Z)$, με το φάσμα Z (του Z^*) μέσα σε μια από τις συνεκτικές συνιστώσες του $W(P)$. Έπεται ότι για $\lambda \in \mathbb{R}$, $P(\lambda) > 0$.

Ένα σύστημα ταλάντωσης με απόσβεση λέγεται ότι είναι υπερ-αποσβενόμενο αν η παραπάνω ανισότητα αντιστρέφεται. Τότε το $F(A)$ βρίσκεται 'εκτός' της παραβολής \mathcal{D} και το $P(\lambda)$ είναι υπερβολικό. Ως εκ τούτου, το $W(P) \subset \mathbb{R}$ και όλες οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές. Σε αυτή την περίπτωση η παραγοντοποίηση

$$P(\lambda) = (I\lambda - Y)(I\lambda - Z)$$

είναι δυνατή με όλες τις ιδιοτιμές του Z αυστηρά μεγαλύτερες από όλες εκείνες

του Y . (Πιο γενικά, ένα αυτοσυζυγές πολυώνυμο μπορεί πάντα να γραφτεί σαν γινόμενο γραμμικών παραγόντων, αλλά ο διαχωρισμός των ιδιοτιμών του $P(\lambda)$ μεταξύ των δύο παραγόντων μπορεί να είναι περίπλοκος. Σημειώστε επίσης ότι τα υπερ-αποσβενόμενα συστήματα είναι πολύ σταθερά με την έννοια ότι όλα τα γειτονικά συστήματα, με την ίδια συμμετρία, επίσης υπερ-αποσβενόμενα. Τέλος, παρατηρούμε ότι τα κύρια υποσυστήματα υπερ-αποσβενόμενων συστημάτων είναι επίσης υπερ-αποσβενόμενα έτσι ώστε τα αριθμητικά πεδία τους είναι επίσης ένθετα.

Συχνά, τα συστήματα δεν είναι ούτε ασθενώς αποσβενόμενα ούτε υπερ-αποσβενόμενα. Το Παράδειγμα 4.6.1 είναι αυτού του είδους.

Παράδειγμα 4.6.1.

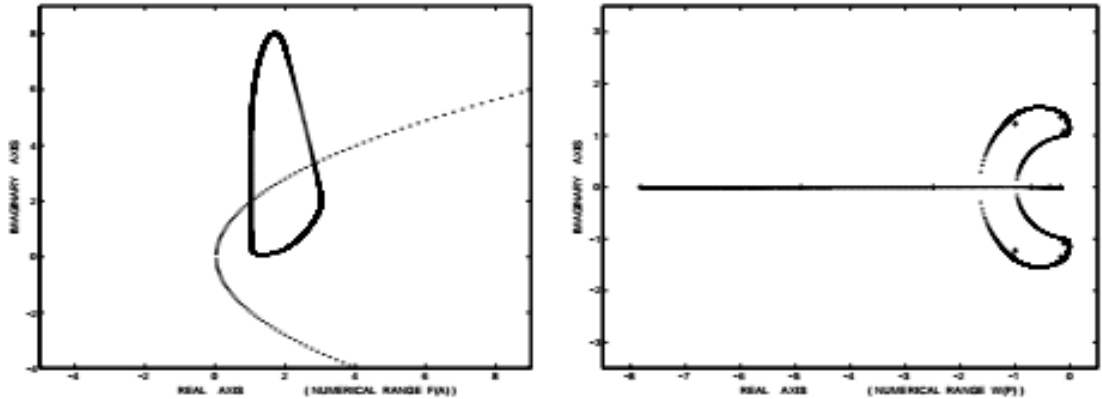
$$A_1 = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Φαίνεται ότι $A_1 > 0$. Τα $F(A)$ και $W(P)$ είναι σχεδιασμένα στο επόμενο σχήμα.

Μια βολική υπόθεση που γίνεται συχνά μέσα σε εφαρμογές είναι γνωστή ως αναλογική απόσβεση. Μετά τη μείωση στην περίπτωση $A_2 = I$, αυτό απλά σημαίνει ότι ο A_1 είναι ένας πραγματικός γραμμικός συνδυασμός του I και του A_0 . Σε αυτή την περίπτωση, το $F(A)$ είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα και το $W(P)$ αποτελείται από τμήματα του πραγματικού άξονα ή/και μη πραγματικών τόξων.

Πιο γενικά, αν υποθέσουμε ότι οι A_1 και A_0 μπορεί να είναι ταυτοχρόνως διαγώνιοι με μια ενιαία ομοιότητα, τότε $A = A_1 + iA_0$ είναι ένας κανονικός πίνακας και το $F(A)$ είναι ένα (πιθανώς υποβαθμισμένο) πολύγωνο. Οι υποθέσεις είναι τώρα ισοδύναμες με την υπόθεση ότι το $P(\lambda) = A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0$ μπορεί

Σχήμα 4.6: Αποσβενόμενο Σύστημα Ταλάντωσης



να μετατραπεί σε ένα διαγώνιο πολυωνυμικό πίνακα από την αντιστοιχία.

Τέλος, αν η κατάσταση $A_0 \geq 0$ είναι χαλαρή να δεχθεί οποιονδήποτε Ερμιτιανό A_0 , τότε είναι εύκολο να δούμε ότι κάθε ιδιοτιμή του $P(\lambda)$ στο ανοικτό δεξιό ημιεπιπέδο είναι κατ'ανάγκη πραγματική και καθορισμένου τύπου. Πρώτον, είναι ξεκάθαρο ότι οποιοδήποτε μη πραγματικό σημείο του $W(P)$ πρέπει να είναι στο κλειστό αριστερό ημιεπιπέδο. Είναι επίσης αλήθεια ότι ο αριθμός των ιδιοτιμών στο ανοικτό δεξιό ημιεπιπέδο είναι απλά ο αριθμός των αρνητικών ιδιοτιμών του A_0 .

4.7 Συστήματα με Μεταβλητή Απόσβεση

Έχει γίνει μια μελέτη των συστημάτων που εξαρτώνται από την παράμετρο της μορφής

$$P_s(\lambda) = I\lambda^2 + sA_1\lambda + A_0, \quad s > 0.$$

Ειδικότερα, όταν $A_1 > 0$, παρατηρήθηκε η μετάβαση από ένα ασθενώς σε ένα έντονα αποσβενόμενο σύστημα καθώς το s αυξάνεται. Το s -εξαρτώμενο αριθμητικό πεδίο παρέχει μια ενδιαφέρουσα οπτική αυτής της διαδικασίας. Υπάρχει

μια οικογένεια πινάκων $A(s) = A_0 + isA_1$, και σαφώς, το $s_1 > s_2$ σημαίνει ότι το $F(A(s_1))$ βρίσκεται 'ψηλότερα' από το $F(A(s_2))$. Τώρα, το $F(A(s))$ περιέχεται πάντοτε σε κάθετη λωρίδα με όρια που ορίζονται από τις ακραίες ιδιοτιμές του A_0 . Καθώς αυξάνεται το s , το $F(A(s))$ κινείται 'προς τα πάνω' (και επίσης αλλάζει σχήμα).

Ο αριθμός των πραγματικών ιδιοτιμών του $R(A)$ δεν αυξάνει αναγκαστικά με s . Έτσι, οι καμπύλες $\lambda(s)$ στο μιγαδικό λ -επίπεδο προαπεικονίζονται στο επίπεδο του $F(A(s))$ και μπορούν να τέμνουν την καμπύλη \mathcal{D} περισσότερο από μία φορά.

Αντίθετα, όσο το s αυξάνει, μετά την πρώτη πραγματική ιδιοτιμή, ας πούμε για $s = s_0$ (έτσι ώστε $F(A(s_0)) \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$), τότε υπάρχει τουλάχιστον μια πραγματική ιδιοτιμή για κάθε $s > s_0$.

4.8 Γυροσκοπικά Συστήματα

Όπως και με τα αποσβενόμενα συστήματα, ένα γυροσκοπικό σύστημα είναι, για εμάς, μια συνάρτηση τετραγωνικού πίνακα. Φυσικά τα μοντέλα οδηγούν, αρχικά, σε μια συνάρτηση της μορφής:

$$Q(\mu) = M\mu^2 + G\mu + K,$$

όπου M, G , και K πραγματικοί $n \times n$ πίνακες, όπου

$$M > 0, \quad G^T = -G, \quad K^T = K.$$

Ως συνθήτως, η απλοποίηση στην περίπτωση όπου $M = I$ είναι απλή. Για να συμπεριληφθούν αυτά τα συστήματα στις σημειώσεις μας, εισάγουμε μια νέα παράμετρο ιδιοτιμή $\lambda = i\mu$ και τον πολυωνυμικό πίνακα:

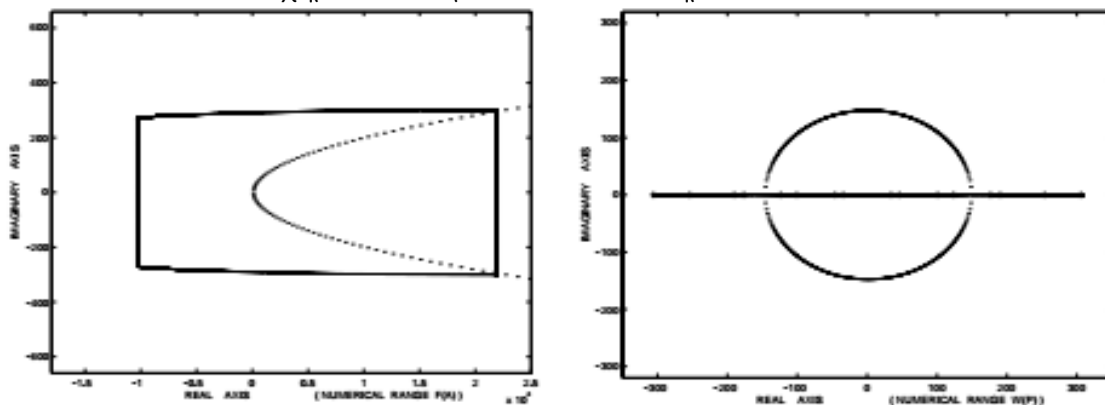
$$P(\lambda) = I\lambda^2 + iG\lambda - K := I\lambda^2 + A_1\lambda + A_0.$$

Αφού $(iG)^* = iG$, ο $P(\lambda)$ είναι ένας αυτοσυζυγής πολυωνυμικός πίνακας, και οι ιδέες μας μπορούν να εφαρμοστούν σε αυτή τη μορφή. Είναι γνωστό ότι το $\sigma(Q)$, και ως εκ τούτου και το $\sigma(P)$, έχει Χαμιλτονιανή συμμετρία, δηλαδή, οι ιδιοτιμές διανέμονται στο μιγαδικό επίπεδο συμμετρικά σε σχέση με αμφοτέρους τον πραγματικό και τον φανταστικό άξονα. Είναι εύκολα φανερό ότι το $W(P)$ απολαμβάνει την ίδια συμμετρία.

Παράδειγμα 4.8.1. Μια προσέγγιση του τρόπου εκτέλεσης των οκτώ βαθμών ελευθερίας σε ένα μηχανικό σύστημα (βλέπε (Mr) δίνει:

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & -G_1 \\ G_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_1 \end{bmatrix}.$$

Σχήμα 4.7: Γυροσκοπικό Σύστημα



Όπου,

$$M_1 = \text{diag} \left[0.2 \quad 0.8 \quad 0.2 \quad \frac{1}{9} \right], \quad G_1 = 150 \text{diag} \left[0.4 \quad 1.6 \quad 0.4 \quad \frac{7}{36} \right], \quad \text{και}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} -2800 & -1200 & 0 & -1200 \\ -1200 & -15600 & -1200 & 0 \\ 0 & -1200 & -2800 & 1200 \\ -1200 & 0 & -1200 & 561.48 \end{bmatrix}$$

Δεδομένου ότι οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές και διαφορετικές, το σύστημα είναι ημιυπερβολικό, αν και αυτό δεν μπορεί να υπολογισθεί απευθείας από τις ιδιότητες του $W(P)$.

Βιβλιογραφία

- [1] Peter Lancaster and Panayiotis Psarrakos, The Numerical range of Self-Adjoint Quadratic Matrix polynomials, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, **23** (2001) 615–631.
- [2] C.-K. Li and L. Rodman, Numerical range of matrix polynomials, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, **15** (1994) 1256–1265.
- [3] J. Maroulas and P. Psarrakos, The boundary of numerical range of matrix polynomials, *Linear Algebra Appl.*, **267** (1997) 101–111.
- [4] H. Nakazato and P. Psarrakos, On the shape of numerical range of matrix polynomials, *Linear Algebra Appl.*, **338** (2001) 105–123
- [5] Παναγιώτης Ψαρράκος, Θέματα Ανάλυσης Πινάκων, Ε.Μ. Πολυτεχνείο, Τομέας Μαθηματικών, (2015)