ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ

Ανάλυση Αξιοπιστίας Υπό Τυχαία Σεισμική Καταπόνηση με τη Μέθοδο των Υποσυνόλων

Μεταπτυχιακή εργασία
του Ιωάννη Λ. Κακαλέτρη

Επιβλέπων: Επικ. Καθηγητής Βησ. Παπαδόπουλος

ΑΘΗΝΑ 2016

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Βησσαρίων Παπαδόπουλο για την πολύτιμη καθοδήγηση του καθ' όλη τη διάρκεια της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας. Η υπομονή του σε συνδυασμό με τις ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις του αποτέλεσαν σημαντικά στοιχεία για την ολοκλήρωση της.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τον μεταδιδακτορικό ερευνητή Δημήτρη Γιοβάνη για τη συνεχή παρακολούθηση της εξέλιξης της εργασίας. Οι προγραμματιστικές του συμβουλές, οι υποδείξεις του καθώς και οι γνώσεις του πάνω στο αντικείμενο της εργασίας, υπήρξαν καθοριστικής σημασίας για το νέο πεδίο που κλήθηκα να κατανοήσω.

Ακόμη θα ήθελα να ευχαριστήσω τον υποψήφιο διδάκτορα Γιάννη Καλογερή για την ευγενική και ουσιαστική συνδρομή του όποτε τη χρειάστηκα.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου και τους φίλους μου για την υπομονή και την υποστήριξη τους καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης αυτής της εργασίας.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η εφαρμογή της μεθόδου των υποσυνόλων για την εκτίμηση μικρών πιθανοτήτων αστοχίας μιας κατασκευής η οποία υποβάλλεται σε τυχαία σεισμική φόρτιση και επιπλέον παρουσιάζει αβεβαιότητες ως προς την ικανότητα της.

Στο πρώτο κεφάλαιο, γίνεται μια περιγραφή κάποιων βασικών εννοιών της θεωρίας των πιθανοτήτων και της στατιστικής.

Στη συνεχεία, στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται η έννοια και τα βασικά χαρακτηριστικά της τυχαίας διαδικασίας καθώς και ο τρόπος προσομοίωσης της μέσω της μεθόδου της φασματικής απεικόνισης. Επιπλέον παρατίθενται κάποιες βασικές έννοιες και ιδιότητες των Μαρκοβιανών αλυσίδων, που αποτελούν μια ειδική περίπτωση στοχαστικών διαδικασιών.

Στο τρίτο κεφάλαιο, αναφερόμαστε στην ανάλυση αξιοπιστίας και περιγράφουμε τη βασική προσομοίωση Monte Carlo όπως επίσης και μια τροποποιημένη μορφή του αρχικού αλγορίθμου Metropolis.

Στο τέταρτο κεφάλαιο, γίνεται μια αναλυτική περιγραφή της μεθόδου των υποσυνόλων, που αποτελεί και το βασικό κομμάτι της εργασίας.

Ενώ στο πέμπτο κεφάλαιο, παρουσιάζεται το πρόβλημα στο όποιο την εφαρμόσαμε καθώς και τα αποτελέσματα τα οποία προέκυψαν.

Τέλος, παρατίθενται τα συμπεράσματα στα οποία καταλήξαμε από τη εφαρμογή της μεθόδου.

Λέξεις Κλειδιά

Μέθοδος των Υποσυνόλων, Τροποποιημένος αλγόριθμος Metropolis, Μαρκοβιανές Αλυσίδες, Μέθοδος Φασματικής Απεικόνισης, Βασική Προσομοίωση Monte Carlo

ABSTRACT

The purpose of this thesis is to estimate small failure probabilities of a structure using the Subset Simulation Method. The structure is subjected to uncertain ground motions and additionally presents uncertainties to its capacity.

In the first chapter, the basic concepts of Probability Theory and Statistics are presented.

In the second chapter, the definition and the characteristics of a stochastic process are presented, as well as its simulation with the spectral representation method. Moreover basic concepts and properties of Markov chains are listed, which are a special case of random processes.

In the third chapter, an introduction to reliability analysis takes place. Subsequently, the descriptions of the Standard Monte Carlo simulation method as well as the Modified Metropolis algorithm are presented.

In the fourth chapter, the basic concepts of the Subset Simulation are thoroughly presented, which is the main piece of this thesis.

In the fifth chapter, the description of the problem on which the method is applied is presented, as well as the corresponding derived results.

Finally, the conclusions obtained from the Subset Simulation procedure are discussed in detail.

Key – Words

Subset Simulation, Modified Metropolis algorithm, Markov Chains, Spectral Representation Method, Standard Monte Carlo Simulation

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ 3
ΠΕΡΙΛΗΨΗ 5
ABSTRACT 7
ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ 9
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 11
Θεωρία Πιθανοτήτων και Στατιστική 11
1.1. Εισαγωγή 11
1.2. Δειγματικός Χώρος και Ενδεχόμενα 11
1.2.1. Πράξεις Ενδεχομένων και οι Ιδιότητες τους 12
1.3. Ορισμός της Πιθανότητας 15
1.3.1. Κλασικός ορισμός της πιθανότητας 15
1.3.2. Στατιστικός ορισμός της πιθανότητας 16
1.3.3. Αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας 17
1.4. Δεσμευμένη Πιθανότητα 17
1.5. Τυχαίες Μεταβλητές 18
1.5.1. Συναρτήσεις κατανομής τυχαίων μεταβλητών 19
1.5.2. Παράμετροι κατανομής τυχαίων μεταβλητών 21
1.5.3. Κατανομές μιας τυχαίας μεταβλητής 23
1.6. Εκτίμηση Παραμέτρων 29
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 35
Τυχαίες Διαδικασίες 35
2.1. Ορισμός 35
2.2. Μέσες τιμές και Συναρτήσεις Τυχαίων Διαδικασιών 36
2.3. Στάσιμες Τυχαίες Διαδικασίες 40
2.4. Εργοδικές Τυχαίες Διαδικασίες 42
2.5. Φάσμα Ισχύος 45
2.6. Προσομοίωση Τυχαίων Διαδικασιών με τη Μέθοδο της Φασματικής Απεικόνισης 46
2.7. Μαρκοβιανές Αλυσίδες 49
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 57
Ανάλυση Αξιοπιστίας 57

3.1. Εισαγωγή 57
3.2. Χρονικά Ανεξάρτητη Ανάλυση Αξιοπιστίας 58
3.3. Βασική Προσομοίωση Monte Carlo 64
3.4. Μέθοδοι Markov Chain Monte Carlo 69
3.4.1. Τροποποιημένος αλγόριθμος Metropolis 70
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 77
Μέθοδος Προσομοίωσης Υποσυνόλων 77
4.1. Εισαγωγή 77
4.2. Βασική Ιδέα της Προσομοίωσης Υποσυνόλων 79
4.3. Η Διαδικασία της Προσομοίωσης Υποσυνόλων 83
4.3.1. Παρουσίαση αλγορίθμου σε βήματα 83
4.4. Στατιστικές Ιδιότητες των Εκτιμητών 89
4.5. Ζητήματα ως προς την Εφαρμογή της Μεθόδου 93
4.5.1. Επιλογή των προτεινόμενων μονοδιάστατων κατανομών 93
4.5.2. Επιλογή της δεσμευμένης πιθανότητας αστοχίας $\boldsymbol{p0}$ 95
4.5.3. Εργοδικότητα της μεθόδου των υποσυνόλων 96
4.6. Ανάλυση Ευαισθησίας μέσω της Μεθόδου των Υποσυνόλων 98
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 99
Εφαρμογή 99
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ 113
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 115

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Θεωρία Πιθανοτήτων και Στατιστική

1.1. Εισαγωγή

Η Θεωρία των Πιθανοτήτων έχει ως αντικείμενο τη μελέτη μαθηματικών υποδειγμάτων (προτύπων ή μοντέλων) γνωστά ως ***στοχαστικά υποδείγματα*** τα οποία χρησιμοποιούνται για την περιγραφή των τυχαίων πειραμάτων (ή φαινομένων). Βασικό χαρακτηριστικό των πειραμάτων αυτών είναι ότι οι συνθήκες κάτω από τις οποίες πραγματοποιούνται δεν προκαθορίζουν το αποτέλεσμα αλλά μόνο το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων. Στην αδυναμία προκαθορισμού του αποτελέσματος έγκειται το στοιχείο της τυχαιότητας. Ένα απλό πείραμα τύχης είναι η ρίψη ενός νομίσματος όπου αν και δεν μπορούμε να προβλέψουμε το αποτέλεσμα, γνωρίζουμε ότι θα είναι κορώνα ή γράμματα.

Αντίθετα όταν οι συνθήκες κάτω από τις οποίες πραγματοποιείται ένα πείραμα καθορίζουν το αποτέλεσμα, το πείραμα είναι γνωστό ως ***αιτιοκρατικό*** (ή προσδιοριστικό). Για την περιγραφή τέτοιων πειραμάτων αρκούν τα αιτιοκρατικά μαθηματικά υποδείγματα. Παράδειγμα ενός τέτοιου μαθηματικού μοντέλου αποτελούν οι νόμοι της βαρύτητας που περιγράφουν την πτώση ενός σώματος.

1.2. Δειγματικός Χώρος και Ενδεχόμενα

Το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης λέγεται ***δειγματικός χώρος*** και συμβολίζεται με Ω και τα στοιχεία του λέγονται δειγματικά σημεία ή απλά σημεία. Έτσι, το κάθε δυνατό αποτέλεσμα ενός πειράματος τύχης είναι ένα σημείο του Ω. Εάν τα σημεία του δειγματικού χώρου ενός τυχαίου πειράματος είναι άπειρα, αλλά αριθμήσιμα, δηλαδή μπορούν να αντιστοιχισθούν με τους φυσικούς αριθμούς έναν προς έναν, τότε αυτός λέγεται ***άπειρος αριθμήσιμος δειγματικός χώρος***. Εάν τα άπειρα σημεία του δειγματικού χώρου δεν μπορούν να αντιστοιχισθούν με τους φυσικούς αριθμούς έναν προς έναν, τότε ο δειγματικός χώρος λέγεται ***άπειρος μη αριθμήσιμος***. Επιπλέον ένας πεπερασμένος ή άπειρος αριθμήσιμος δειγματικός χώρος λέγεται ***διακριτός***, ενώ ένας άπειρος μη αριθμήσιμος δειγματικός χώρος λέγεται ***συνεχής***.

Πολλές φορές, σε ένα πείραμα τύχης συμβαίνει να μην ενδιαφέρει αυτό καθαυτό το αποτέλεσμα, αλλά το αν το αποτέλεσμα αυτό ανήκει σε ένα δεδομένο υποσύνολο, έστω Α, του Ω. Ένα τέτοιο υποσύνολο Α του Ω, δηλαδή ένα σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης, λέγεται ***ενδεχόμενο ή γεγονός***. Εάν το αποτέλεσμα ενός πειράματος τύχης είναι στοιχείο του Α, λέμε ότι συνέβη ή πραγματοποιήθηκε το ενδεχόμενο Α.

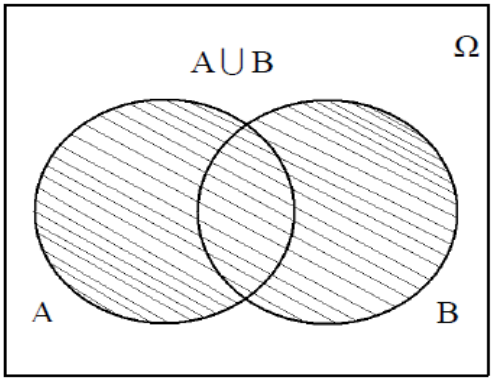
Ένα ενδεχόμενο το οποίο περιλαμβάνει μόνο ένα στοιχείο του Ω λέγεται ***απλό ή στοιχειώδες ενδεχόμενο***. Ο ίδιος ο δειγματικός χώρος Ω θεωρείται ότι είναι ένα ενδεχόμενο, το οποίο πραγματοποιείται πάντα, για αυτό το λόγο ονομάζεται ***βέβαιο ενδεχόμενο***. Αντίθετα το κενό σύνολο Ø ονομάζεται ***αδύνατο ενδεχόμενο***, επειδή κανένα στοιχείο του δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί.

Η παράσταση του δειγματικού χώρου, των ενδεχομένων και των πράξεων τους γίνεται με τα ***διαγράμματα Venn.*** Σε αυτά με ορθογώνιο συμβολίζεται ο δειγματικός χώρος Ω, ενώ με περίπου κυκλικά σχήματα τα ενδεχόμενα.

1.2.1. Πράξεις Ενδεχομένων και οι Ιδιότητες τους

Οι σημαντικότερες πράξεις μεταξύ ενδεχομένων και μερικές βασικές ιδιότητες τους παρουσιάζονται παρακάτω:

- Η ***ένωση δύο ενδεχομένων*** Α και Β συμβολίζεται $A \cup B$ και είναι το σύνολο όλων των στοιχείων που ανήκουν ή στο Α ή στο Β ή και στα δύο. Είναι $A \cup B = \{x \in \Omega | x \in A \text{ ή } x \in B\}$.

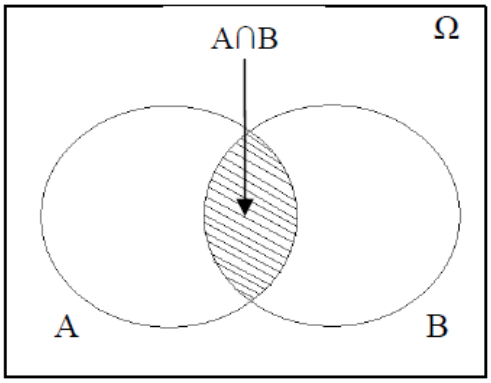


Σχήμα 1.1. Ένωση ενδεχομένων

Για την ένωση δύο ενδεχομένων ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

1) $A \subseteq A \cup B$ 2) $B \subseteq A \cup B$ 3) Αν $A \subseteq B$ $\tau\acute{o}\tau\varepsilon$ $A \cup B = B$

- Η ***τομή δύο ενδεχομένων*** Α και Β συμβολίζεται $A \cap B$ και είναι το σύνολο όλων των στοιχείων που ανήκουν και στο Α και στο Β. Είναι $A \cap B = \{x \in \Omega | x \in A \; και \; x \in B\}$.

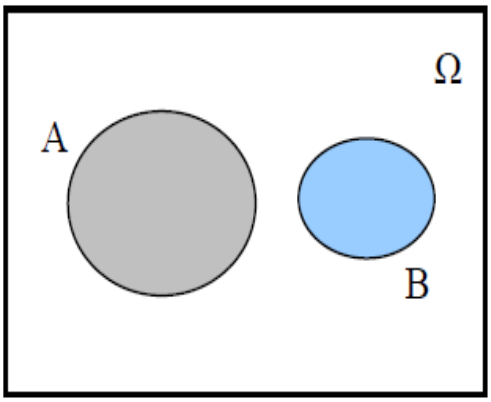


Σχήμα 1.2. Τομή ενδεχομένων

Για την τομή δύο ενδεχομένων ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

1) $A \cap B \subseteq A$ 2) $A \cap B \subseteq B$ 3) Αν $A \subseteq B \; τότε \; A \cap B = A$

Όταν ισχύει $A \cap B = \emptyset$ δηλαδή όταν τα δύο ενδεχόμενα Α και Β δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο, λέγονται ***ασυμβίβαστα*** ή ***ξένα*** ή ***αμοιβαίως αποκλειόμενα***.

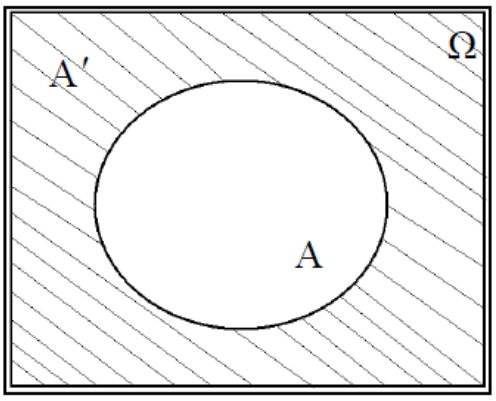


Σχήμα 1.3. Ασυμβίβαστα ενδεχόμενα

Χρήσιμα παραδείγματα ασυμβίβαστων ενδεχομένων είναι τα εξής:

1) $A \; και \; A'$ 2) $A - B \; και \; B - A$ 3) $A - B \; και \; A \cap B$ 4) $B - A \; και \; A \cap B$

- Το ***συμπληρωματικό ή αντίθετο*** ενδεχόμενο του Α συμβολίζεται A' και είναι το σύνολο που αποτελείται από τα στοιχεία του Ω που δεν ανήκουν στο Α. Είναι $A' = \{x \in \Omega | x \notin A\}$.

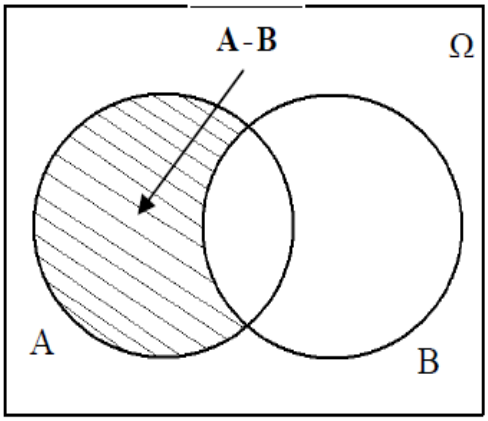


Σχήμα 1.4. Συμπληρωματικό ενδεχόμενο

Για το συμπληρωματικό ενδεχόμενο ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

1) $A \cap A' = \emptyset$ 2) $A \cup A' = \Omega$ 3) $\emptyset' = \Omega$ 4) $(A')' = A$

- Η ***διαφορά*** του Β από το Α συμβολίζεται $A - B$ και είναι το σύνολο που αποτελείται από τα στοιχεία του Α που δεν ανήκουν στο Β. Είναι $A - B = \{x \in \Omega | x \in A \; \kappa\alpha\iota \; x \notin B\}$.



Σχήμα 1.5. Διαφορά Ενδεχομένων

Για τη διαφορά $A - B$ (ή $B - A$) ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

1) $A - B = A \cap B'$ 2) $\Omega - A = A'$ 3) $A - B \subseteq A$ 4) $A - B \subseteq B'$

5) $B - A \subseteq B$ 6) $B - A \subseteq A'$

Επίσης για Α, Β, Γ ⊆ Ω ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$	Αντιμεταθετική ιδιότητα
$A \cup (B \cup \Gamma) = (A \cup B) \cup \Gamma$	$A \cap (B \cap \Gamma) = (A \cap B) \cap \Gamma$	Προσεταιριστική ιδιότητα
$A \cup (B \cap \Gamma) =$ $(A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$	$A \cap (B \cup \Gamma) =$ $(A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$	Επιμεριστική ιδιότητα
$(A \cup B)' = A' \cap B'$	$(A \cap B)' = A' \cup B'$	Τύποι De Morgan

1.3. Ορισμός της Πιθανότητας

Μετά την περιγραφή του δειγματικού χώρου Ω που είναι σχετικός με το αποτέλεσμα ενός πειράματος, σειρά έχει ο προσδιορισμός μιας πιθανότητας για κάθε ενδεχόμενο του Ω. Παρακάτω παρουσιάζονται τρείς ορισμοί της πιθανότητας.

1.3.1. Κλασικός ορισμός της πιθανότητας

Ο απλούστερος ορισμός της πιθανότητας ενός ενδεχομένου Α δόθηκε από τον Laplace και είναι γνωστός ως ***κλασικός ορισμός***. Σύμφωνα με αυτόν, αν N(Ω) είναι το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης και N(A) είναι το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου $A \subseteq \Omega$ (δηλαδή το πλήθος των «ευνοϊκών» περιπτώσεων για την πραγματοποίηση του Α) τότε, η πιθανότητα ενός γεγονότος Α ορίζεται ως εξής:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} \tag{1.1}$$

Για να ισχύει ο κλασικός ορισμός, θα πρέπει να υπάρχουν οι εξής προϋποθέσεις οι οποίες ταυτόχρονα αποτελούν και τις αδυναμίες του ορισμού:

1) Το πείραμα τύχης που μελετάμε να έχει πεπερασμένο δειγματικό χώρο.
2) Όλα τα στοιχειώδη ενδεχόμενα να έχουν την ίδια ακριβώς πιθανότητα να συμβούν (ισοπίθανα).

Επέκταση της κλασικής πιθανότητας στην περίπτωση που ο δειγματικός χώρος είναι συνεχής (μη αριθμήσιμος) αποτελεί η ***γεωμετρική πιθανότητα*** που ορίζεται ως εξής: Ας θεωρήσουμε ένα μη αριθμήσιμο δειγματικό χώρο *Ω* οριζόμενο από μία περιοχή του (μονοδιαστάτου ή δισδιαστάτου ή τρισδιαστάτου) χώρου στην οποία οποιεσδήποτε στοιχειώδεις περιοχές είναι εξίσου πιθανές (ισοπίθανες) και ένα οποιοδήποτε ενδεχόμενο *A* οριζόμενο από μία περιοχή του δειγματικού χώρου *Ω*. Η πιθανότητα του *A* δίδεται από τη σχέση:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} \tag{1.2}$$

Όπου μ(Α) και μ(Ω) είναι το μέτρο (μήκος ή εμβαδόν ή όγκος) των περιοχών *A* και *Ω* αντίστοιχα.

1.3.2. Στατιστικός ορισμός της πιθανότητας

Οι προϋποθέσεις που απαιτούνται για να ισχύει ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας περιορίζουν σημαντικά το πεδίο εφαρμογών της Θεωρίας Πιθανοτήτων. Έτσι ο Von Mises στην προσπάθειά του να αντιμετωπίσει το πρόβλημα ορισμού πιθανότητας σε οποιουσδήποτε δειγματικούς χώρους διατύπωσε τον ακόλουθο ***εμπειρικό ορισμό της πιθανότητας***.

Ας υποθέσουμε ότι ένα στοχαστικό πείραμα (ή φαινόμενο) με δειγματικό χώρο *Ω* μπορεί να επαναληφθεί κάτω από τις ίδιες συνθήκες απεριόριστο αριθμό φορών και ας θεωρήσουμε ένα οποιοδήποτε ενδεχόμενο $A \subseteq \Omega$. Έστω ότι σε Ν επαναλήψεις του στοχαστικού πειράματος (ή φαινομένου) το ενδεχόμενο *A* έχει πραγματοποιηθεί η_N (*A*) φορές. Η σχετική συχνότητα του *A*, δίδεται από το λόγο:

$$\frac{\eta_N(A)}{N}$$

Στην περίπτωση που υπάρχει το όριο της σχετικής συχνότητας όταν το Ν τείνει στο άπειρο αυτό ορίζει, σύμφωνα με τον Von Mises, την πιθανότητα του Α:

$$P(A) = \lim_{N\to\infty} \frac{\eta_N(A)}{N} \tag{1.3}$$

Ο ορισμός αυτός είναι γνωστός ως ***στατιστικός ορισμός*** και ικανοποιεί την αντίληψη που διαισθητικά έχει κανείς για την έννοια της πιθανότητας. Ωστόσο αδυναμίες παρουσιάζει και αυτός ο ορισμός, που σχετίζονται με την υπόθεση ότι ένα στοχαστικό πείραμα μπορεί να επαναληφθεί κάτω από τις ίδιες συνθήκες απεριόριστο αριθμό φορών.

1.3.3. Αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας

Αποφεύγουμε τις αδυναμίες των δύο παραπάνω ορισμών με τον ***αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας*** ο οποίος ενσωματώνει και επεκτείνει τις ιδιότητες του κλασικού και στατιστικού ορισμού. Συγκεκριμένα, η θεμελίωση που πρότεινε ο Kolmogorov δεν πραγματοποιείται μέσω κάποιου τύπου υπολογισμού της πιθανότητας ενός ενδεχομένου Α, αλλά περιγράφει τις ιδιότητες που πρέπει να έχει μια συνολοσυνάρτηση οριζόμενη για κάθε ενδεχόμενο ώστε να μπορεί να θεωρηθεί ως πιθανότητα.

Ορισμός: Έστω Ω ένας δειγματικός χώρος στοχαστικού πειράματος (ή φαινομένου). Μια συνάρτηση η οποία σε κάθε ενδεχόμενο Α ⊆ Ω αντιστοιχεί (εκχωρεί) έναν πραγματικό αριθμό P(A) καλείται πιθανότητα αν ικανοποιεί τα εξής αξιώματα:

1) $P(A) \geq 0$ για κάθε ενδεχόμενο Α ⊆ Ω
2) $P(\Omega) = 1$
3) Αν A_j, j = 1, 2, 3, ….., είναι ξένα ανά δύο σύνολα, τότε

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)$$

Το τρίτο αξίωμα του ορισμού μας λέει ότι αν τα σύνολα Α και Β είναι ξένα, τότε ισχύει ο απλός προσθετικός νόμος $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Αντίστοιχα, αν τα Α και Β δεν είναι αναγκαστικά ξένα, τότε ισχύει το προσθετικό θεώρημα $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

1.4. Δεσμευμένη Πιθανότητα

Η ανάγκη εισαγωγής της δεσμευμένης πιθανότητας (conditional probability) οφείλεται στις περιπτώσεις όπου μερική γνώση, ως προς την έκβαση, ενός τυχαίου (στοχαστικού) πειράματος μειώνει την αβεβαιότητα συρρικνώνοντας το δειγματικό χώρο. Συγκεκριμένα έστω Α και Β δύο ενδεχόμενα τέτοια ώστε $P(A) > 0$. Τότε η δεσμευμένη πιθανότητα του Β, δεδομένου ότι συνέβη (πραγματοποιήθηκε) το Α, η οποία συμβολίζεται με $P(B|A)$, δίνεται από τη σχέση:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \tag{1.4}$$

Η P(B|A) λέγεται επίσης και πιθανότητα υπό συνθήκη του B δεδομένου του A. Πρακτικά αν γνωρίζουμε ότι το A έχει πραγματοποιηθεί, τότε αυτό αντικαθιστά το Ω στον υπολογισμό της πιθανότητας του B, δηλαδή η δεσμευμένη πιθανότητα του B, P(B|A), είναι στην ουσία η πιθανότητα του B στο δειγματικό χώρο A. Έτσι συνοψίζοντας ο υπολογισμός της δεσμευμένης πιθανότητας P(B|A) μπορεί να γίνει είτε χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.4) είτε υπολογίζοντας την πιθανότητα του B στο νέο δειγματικό χώρο A.

Στην περίπτωση που είναι P(B|A) = P(B), λέμε ότι το γεγονός B είναι ***ανεξάρτητο*** από το γεγονός A. Δηλαδή, η γνώση του ότι το γεγονός A πραγματοποιήθηκε δεν δίνει καινούργιες πληροφορίες για την επανεκτίμηση της πιθανότητας του γεγονότος B. Αν υποθέσουμε ότι και P(B) > 0, τότε το ότι το B είναι ανεξάρτητο του A συνεπάγεται και το ότι το A είναι ανεξάρτητο του B. Επιπλέον από τη σχέση (1.4) και τη σχέση P(B|A) = P(B) προκύπτει ότι για δύο ανεξάρτητα γεγονότα A και B η πιθανότητα ταυτόχρονης εμφάνισης τους είναι ίση με το γινόμενο των επιμέρους πιθανοτήτων: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

1.5. Τυχαίες Μεταβλητές

Τα στοιχειώδη ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου ενός στοχαστικού πειράματος (ή φαινομένου) μπορεί να είναι αριθμοί, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση που εκφράζουν ένα ποσοτικό χαρακτηριστικό του στοχαστικού πειράματος. Επιπλέον, σε ένα στοχαστικό πείραμα το ενδιαφέρον και από πρακτική άποψη εστιάζεται στην πραγματοποίηση ή μη αριθμητικών μεγεθών τα οποία αντιστοιχούν σε δειγματικά σημεία. Σχετικά θέτουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός: Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός στοχαστικού πειράματος. Μια πραγματική συνάρτηση X που ορίζεται στο δειγματικό χώρο Ω καλείται τυχαία μεταβλητή (τ.μ.). Η συνάρτηση αυτή αντιστοιχεί σε κάθε δειγματικό σημείο $\omega \in \Omega$ έναν πραγματικό αριθμό x = X (ω) .

Όταν οι τιμές που μπορεί να πάρει μια τυχαία μεταβλητή αποτελούν αριθμήσιμο σύνολο, τότε η τυχαία μεταβλητή λέγεται ***διακριτή***. Αντίστοιχα όταν η τυχαία μεταβλητή μπορεί να πάρει οποιαδήποτε πραγματική τιμή λέγεται ***συνεχής***.

1.5.1. Συναρτήσεις κατανομής τυχαίων μεταβλητών

Η πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή X να πάρει κάποια τιμή x_i, αν είναι διακριτή, ή να βρίσκεται σε ένα διάστημα τιμών dx, αν είναι συνεχής, μπορεί να μεταβάλλεται στο σύνολο των διακεκριμένων τιμών ή σε διαφορετικά διαστήματα και δίνεται ως συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής X.

Για διακριτή τυχαία μεταβλητή X που παίρνει τις τιμές x_1, x_2, x_3, …., x_m, η συνάρτηση αυτή λέγεται ***συνάρτηση μάζας πιθανότητας*** (probability mass function), ορίζεται ως:

$$f_X(x_i) = P(X = x_i)$$

Και ικανοποιεί τις εξής συνθήκες:

$$f_X(x_i) \geq 0 \quad \text{και} \quad \sum_{i=1}^{m} f_X(x_i) = 1 \qquad (1.5)$$

Αντίστοιχα, για συνεχή τυχαία μεταβλητή X (X ∈ R) ορίζεται η ***συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας*** (probability density function) $f_X(x)$ που ικανοποιεί τις συνθήκες:

$$f_X(x) \geq 0 \quad \text{και} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1 \qquad (1.6)$$

Η κατανομή πιθανότητας μιας τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται επίσης από την ***αθροιστική συνάρτηση κατανομής*** (cumulative distribution function) $F_X(x)$, που δηλώνει την πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή X να πάρει τιμές μικρότερες ή ίσες από κάποια τιμή x.

Για διακριτή τυχαία μεταβλητή X είναι: $F_X(x_i) = P(X \leq x_i) = \sum_{x \leq x_i} f_X(x) \quad (1.7)$

Για συνεχή τυχαία μεταβλητή X είναι: $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du \quad (1.8)$

Σε πολλά προβλήματα χρειάζεται να ορίσουμε τη συνδυασμένη μεταβλητότητα δύο τυχαίων μεταβλητών X και Y, δηλαδή την κοινή κατανομή πιθανότητας τους. Έστω οι διακριτές τυχαίες μεταβλητές X, Y με δυνατές διακεκριμένες τιμές x_1, x_2, x_3, …., x_n, και y_1, y_2, y_3, …., y_m, αντίστοιχα. Η ***από κοινού συνάρτηση μάζας πιθανότητας*** $f_{XY}(x, y)$ ορίζεται για κάθε ζεύγος δυνατών τιμών (x_i, y_i) ως:

$$f_{XY}(x_i, y_i) = P(X = x_i, Y = y_i) \qquad (1.9)$$

και η ***κοινή αθροιστική συνάρτηση κατανομής*** ορίζεται ως:

$$F_{XY}(x_i, y_i) = P(X \leq x_i, Y \leq y_i) = \sum_{x \leq x_i} \sum_{y \leq y_i} f_{XY}\,(x_i, y_i) \qquad (1.10)$$

Αντίστοιχα για δύο συνεχείς τυχαίες μεταβλητές X, Y η ***από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας*** θα πρέπει να ικανοποιεί τις εξής συνθήκες:

$$f_{XY}(x, y) \geq 0 \quad \text{και} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)\, dydx = 1 \qquad (1.11)$$

και η ***κοινή αθροιστική συνάρτηση κατανομής*** (joint cumulative distribution function) για δύο συνεχείς τυχαίες μεταβλητές ορίζεται ως:

$$F_{XY}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{XY}\,(u, v) dvdu \qquad (1.12)$$

Δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y συνεχείς ή διακριτές είναι ***ανεξάρτητες*** αν για κάθε δυνατό ζεύγος τιμών τους (x, y) ισχύει:

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y) \qquad (1.13)$$

Με ανάλογο τρόπο ορίζονται οι συναρτήσεις κοινής κατανομής για περισσότερες τυχαίες μεταβλητές καθώς και η ανεξαρτησία τους.

Γενικεύοντας την έννοια της δεσμευμένης πιθανότητας δύο ενδεχομένων A και B σε τυχαίες μεταβλητές μπορούμε να ορίσουμε τη δεσμευμένη συνάρτηση μάζας πιθανότητας και τη δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας. Συγκεκριμένα για διακριτές τυχαίες μεταβλητές X, Y με από κοινού συνάρτηση μάζας πιθανότητας $f_{XY}(x_i,\, y_i)$, ορίζουμε τη ***δεσμευμένη συνάρτηση μάζας πιθανότητας*** της διακριτής τ.μ. X, όταν γνωρίζουμε ότι η τ.μ. Y έχει την τιμή y_i ως:

$$f_{X|Y}(x_i|y_i) = \frac{f_{XY}(x_i, y_i)}{f_Y(y_i)} \qquad (1.14)$$

Αντίστοιχα για συνεχείς τ.μ. X, Y με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{XY}(x, y)$, ορίζουμε τη ***δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας*** της συνεχούς τ.μ. X, όταν Y= y ως:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)} \qquad (1.15)$$

1.5.2. Παράμετροι κατανομής τυχαίων μεταβλητών

Η κατανομή πιθανότητας περιγράφει πλήρως τη συμπεριφορά της τυχαίας μεταβλητής, αλλά συνήθως στην πράξη δεν είναι γνωστή ή απαραίτητη. Όταν μελετάμε μια τυχαία μεταβλητή μας ενδιαφέρει κυρίως να προσδιορίζουμε κάποια βασικά χαρακτηριστικά της κατανομής της, όπως η κεντρική τάση και η μεταβλητότητα της τυχαίας μεταβλητής. Αυτά τα χαρακτηριστικά είναι οι παράμετροι της κατανομής της τυχαίας μεταβλητής.

Μέση Τιμή

Αν X είναι μια διακριτή τ.μ. που παίρνει m διακριτές τιμές x_1, x_2, x_3, …., x_m, με συνάρτηση μάζας πιθανότητας $f_X(x_i)$, η μέση τιμή της, που συμβολίζεται $\mu_X \equiv E[X]$ ή απλά μ, δίνεται ως:

$$\mu \equiv E[X] = \sum_{i=1}^{m} x_i f_X(x_i) \tag{1.16}$$

Αντίστοιχα αν X συνεχής τ.μ. με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$, η μέση τιμή της δίνεται ως:

$$\mu \equiv E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \tag{1.17}$$

Κάποιες βασικές ιδιότητες της μέσης τιμής είναι:

1. Αν η τ.μ. X παίρνει μόνο μια σταθερή τιμή c είναι $\mathrm{E[X]} = \mathrm{c}$.
2. Αν X είναι μια τ.μ. και c είναι μια σταθερά: $\mathrm{E[cX]}$ = c $\mathrm{E[X]}$.
3. Αν X και Y είναι δύο τ.μ.: $\mathrm{E[X+Y]}$= $\mathrm{E[X]}$ + $\mathrm{E[Y]}$.
4. Αν X και Y είναι δύο ανεξάρτητες τ.μ.: $\mathrm{E[XY]}$ = $\mathrm{E[X]E[Y]}$.

Οι ιδιότητες (2) και (3) δηλώνουν πως η μέση τιμή έχει τη γραμμική ιδιότητα, δηλαδή ισχύει $\mathrm{E[aX+bY]}$= a $\mathrm{E[X]}$ + b $\mathrm{E[Y]}$.

Η μέση τιμή αναφέρεται και ως ροπή πρώτης τάξης.

Διασπορά

Η διασπορά ή διακύμανση (variance) μιας τ.μ. Χ και κυρίως η ***τυπική απόκλιση*** (standard deviation) που είναι η τετραγωνική ρίζα της διασποράς, εκφράζουν τη μεταβλητότητα της τ.μ. Χ γύρω από τη μέση τιμή. Αν Χ είναι μια τ.μ. (διακριτή ή συνεχής) με μέση τιμή μ, τότε η διασπορά της που συμβολίζεται $\sigma_x^2 \equiv Var[X]$ ή απλά σ^2 δίνεται ως:

$$\sigma^2 \equiv E[(X-\mu)^2] = E[X^2] - \mu^2 \qquad (1.18)$$

Κάποιες βασικές ιδιότητες της διασποράς είναι:

1. Αν η τ.μ. Χ παίρνει μόνο μια σταθερή τιμή c είναι $Var[c]$ = 0.
2. Αν Χ είναι μια τ.μ. και c είναι μια σταθερά: $Var[X+c]$ = $Var[X]$ και $Var[cX]$ = $c^2\, Var[X]$.
3. Αν Χ και Υ είναι δύο ανεξάρτητες τ.μ.: $Var[X+Y]$ = $Var[X]$ + $Var[Y]$.

Οι ιδιότητες (2) και (3) δηλώνουν πως η διασπορά δεν έχει τη γραμμική ιδιότητα. Όταν όμως οι δύο τ.μ. είναι ανεξάρτητες η διασπορά έχει τη ψευδογραμμική ιδιότητα, δηλαδή ισχύει $Var[aX+bY]$ = $a^2Var[X]$ + $b^2Var[Y]$.

Η διασπορά αναφέρεται και ως κεντρική ροπή δεύτερης τάξης.

Συχνά για την περιγραφή των ιδιοτήτων μιας τ.μ. Χ δεν αρκεί μόνο η μέση τιμή και η διασπορά (που βασίζονται στην πρώτη και δεύτερη δύναμη της Χ), αλλά πρέπει να καταφύγουμε σε μεγαλύτερες δυνάμεις της Χ. Γενικά ορίζονται οι ροπές $E[X^n]$ και οι κεντρικές ροπές $E[(x-\mu_x)^n]$ για κάθε τάξη n.

Συνδιασπορά ή Συνδιακύμανση

Όταν μελετάμε δύο τ.μ. Χ και Υ που δεν είναι ανεξάρτητες, έχει ενδιαφέρον να προσδιορίσουμε πόσο ισχυρά συσχετίζεται η μια με την άλλη. Για αυτό ορίζουμε τη συνδιασπορά ή συνδιακύμανση (covariance) των τ.μ. Χ και Υ, που συμβολίζεται $\sigma_{XY} \equiv Cov[X,Y]$, και ορίζεται ως:

$$\sigma_{XY} \equiv E\big[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)\big] = E[XY] - \mu_x\mu_y \qquad (1.19)$$

Αν οι δύο τ.μ. Χ και Υ συσχετίζονται ισχυρά και θετικά, δηλαδή όταν αυξάνει η μία αυξάνει και η άλλη, τότε η συνδιασπορά παίρνει μεγάλη θετική τιμή σε σχέση με τις τιμές των Χ και Υ. Αντίθετα αν οι δύο τ.μ. Χ και Υ συσχετίζονται ισχυρά και αρνητικά, δηλαδή όταν αυξάνει η μία μειώνεται η άλλη, τότε η συνδιασπορά παίρνει μεγάλη αρνητική τιμή. Αν οι Χ και Υ είναι ανεξάρτητες εύκολα μπορεί να δειχθεί ότι $\sigma_{XY} = 0$.

Το μειονέκτημα της συνδιασποράς είναι ότι η τιμή της εξαρτάται από τις μονάδες μέτρησης των τ.μ. Χ και Υ. Για αυτό όταν θέλουμε να μετρήσουμε τη συσχέτιση δύο τ.μ. Χ και Υ, χρησιμοποιούμε συνήθως το ***συντελεστή συσχέτισης*** (correlation coefficient), που συμβολίζεται $\rho_{XY} \equiv Corr[X, Y]$ ή απλά ρ και προκύπτει από την κανονικοποίηση της συνδιασποράς με το γινόμενο των τυπικών αποκλίσεων των Χ και Υ και ορίζεται ως:

$$\rho = \frac{Cov[X, Y]}{\sigma_x \sigma_y} \tag{1.20}$$

Παραθέτουμε κάποιες ιδιότητες του συντελεστή συσχέτισης:

1. $-1 \leq \rho \leq 1$
2. Αν οι τ.μ. Χ και Υ είναι ανεξάρτητες είναι ρ = 0, αλλά αν ρ = 0, αυτό δε δηλώνει ότι οι Χ και Υ είναι ανεξάρτητες αλλά απλά ότι δεν είναι γραμμικά συσχετισμένες (μπορεί δηλαδή να είναι μη-γραμμικά συσχετισμένες).
3. $\rho = -1$ ή $\rho = 1$ αν και μόνο αν $Y = aX + b$ για κάποιους αριθμούς a, b.

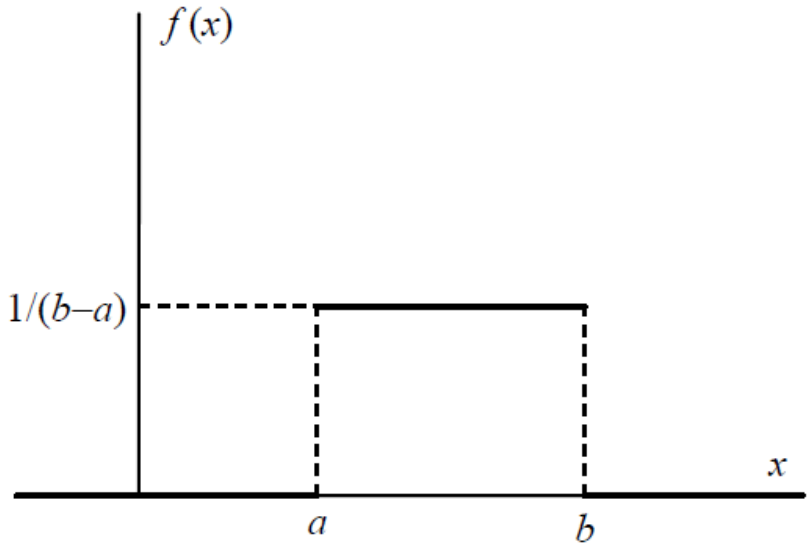
1.5.3. Κατανομές μιας τυχαίας μεταβλητής

Στη μελέτη μιας τ.μ. μας βοηθάει να έχουμε κάποια πρότυπα για την κατανομή της, δηλαδή κάποιες γνωστές συναρτήσεις $f_X(x)$ της τ.μ. Χ με γνωστές παραμέτρους. Επίσης σε πολλά πραγματικά προβλήματα η κατανομή μιας τ.μ. μπορεί να περιγραφεί ικανοποιητικά από κάποια γνωστή κατανομή. Παραθέτουμε παρακάτω παραδείγματα κατανομών που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα εργασία.

Ομοιόμορφη Κατανομή

Η απλούστερη συνεχής κατανομή πιθανότητας είναι η ομοιόμορφη (uniform distribution) η οποία εκχωρεί ίσες (ομοιόμορφες) πιθανότητες στα στοιχειώδη δυνατά αποτελέσματα ενός τυχαίου πειράματος με συνεχή δειγματικό χώρο Ω. Συγκεκριμένα, ας θεωρήσουμε μια συνεχή τυχαία μεταβλητή X ορισμένη στον δειγματικό χώρο Ω με πεδίο τιμών το διάστημα [α, b], όπου α < b πραγματικοί αριθμοί. Τότε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της ομοιόμορφης κατανομής είναι:

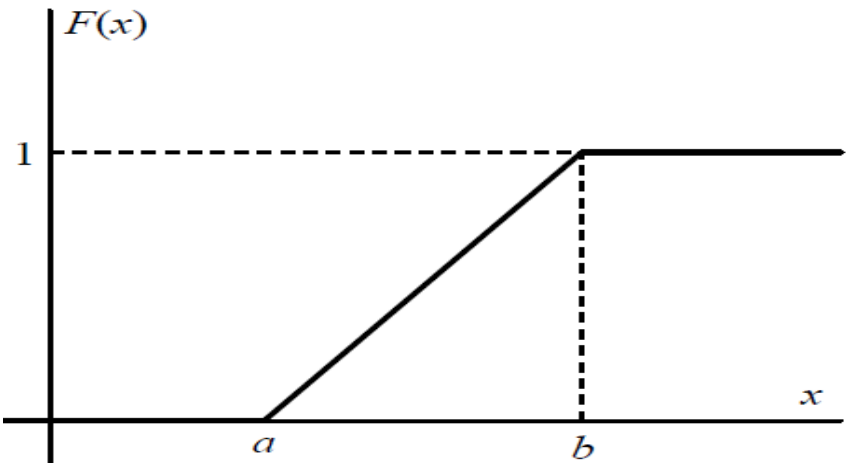
$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases} \qquad (1.21)$$



Σχήμα 1.6. Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ομοιόμορφης κατανομής

Και η αθροιστική συνάρτηση κατανομής:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & x > b \end{cases} \qquad (1.22)$$



Σχήμα 1.7. Αθροιστική συνάρτηση ομοιόμορφης κατανομής

Ο συμβολισμός που χρησιμοποιείται για να δείξουμε ότι μια τ.μ. Χ ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα [a, b] είναι $X \sim U[a, b]$. Η μέση τιμή και η διασπορά της Χ δίνονται από τις εξής σχέσεις:

$$\mu = E[X] = \frac{\alpha + \beta}{2} \tag{1.23}$$

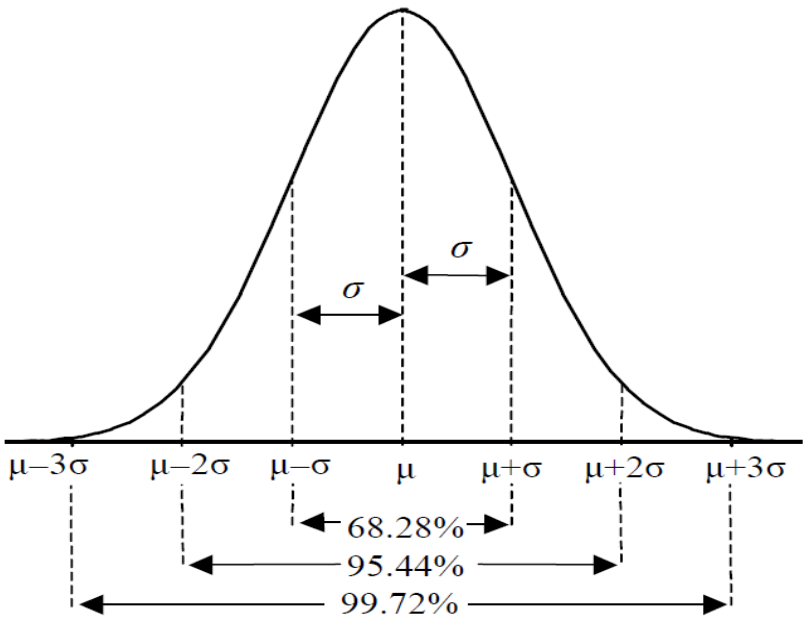
$$\sigma^2 = Var[X] = \frac{(b-a)^2}{12} \tag{1.24}$$

<u>Κανονική Κατανομή</u>

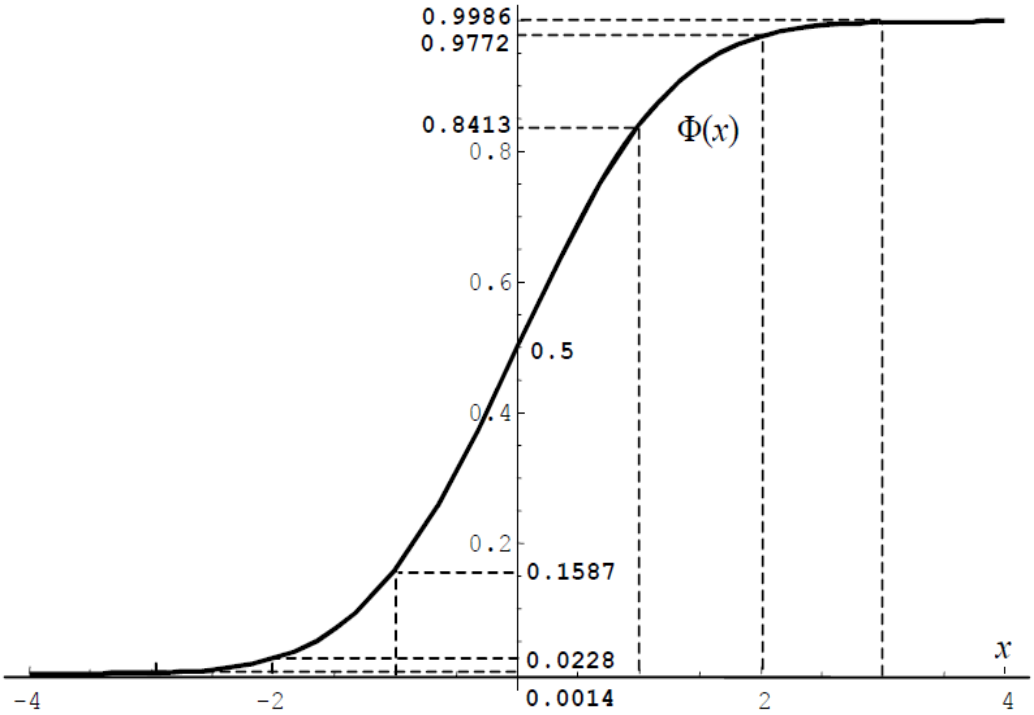
Η κανονική κατανομή είναι η σπουδαιότερη κατανομή της Θεωρίας Πιθανοτήτων και της Στατιστικής και αποτελεί τη βάση για πολλά στατιστικά μοντέλα και συμπεράσματα. Η σπουδαιότητα της οφείλεται κυρίως στο ότι περιγράφει ικανοποιητικά την κατανομή πολλών τυχαίων πραγματικών μεγεθών που παίρνουν συνεχείς αριθμητικές τιμές, αλλά προσεγγίζει ικανοποιητικά και πολλές διακριτές κατανομές. Σε πολλά τυχαία μεγέθη που μελετάμε παρατηρούμε ότι οι τιμές τους 'μαζεύονται' συμμετρικά γύρω από μια κεντρική τιμή και 'αραιώνουν' καθώς απομακρύνονται από αυτήν την κεντρική τιμή. Η κατάλληλη <u>συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας</u> για μια κατανομή τέτοιου τύπου 'τομή καμπάνας' είναι αυτή της κανονικής κατανομής (normal distribution) που ορίζεται ως:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \qquad -\infty < x < \infty \tag{1.25}$$

Όπου οι παράμετροι μ και σ^2 που ορίζουν την κανονική κατανομή είναι η μέση τιμή και η διασπορά αντίστοιχα και συμβολικά γράφουμε $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Η <u>αθροιστική συνάρτηση κατανομής</u> $F_X(x)$ δίνεται από το ολοκλήρωμα της $f_X(x)$ όπως ορίστηκε στην (1.8).



Σχήμα 1.8. Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας κανονικής κατανομής



Σχήμα 1.9. Αθροιστική συνάρτηση κανονικής κατανομής

Φαίνεται ότι περίπου το 68% των τιμών της X βρίσκονται στο διάστημα $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ και περίπου το 95% των τιμών της X βρίσκονται στο διάστημα $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η ***τυπική κανονική κατανομή*** (standard normal distribution) που είναι η πιο απλή μορφή της κανονικής κατανομής, δηλαδή για μ = 0 και σ = 1. Για να ξεχωρίσουμε την τ.μ. που ακολουθεί τυπική κατανομή τη συμβολίζουμε με Z και είναι $Z \sim N(0,1)$. Η <u>συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυπικής κανονικής κατανομής</u> είναι:

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] \qquad -\infty < z < \infty \tag{1.26}$$

Ενώ η <u>αθροιστική συνάρτηση κατανομής</u> της συμβολίζεται με $\Phi(z)$ και προκύπτει από την ολοκλήρωση της $\varphi(z)$ σύμφωνα πάλι με την (1.8).

Οι τιμές της $\Phi(z)$ για διάφορες τιμές του z είναι πολύ χρήσιμες στη στατιστική για αυτό και δίνονται σε στατιστικό πίνακα σε κάθε βιβλίο στατιστικής. Κάθε τ.μ. X που ακολουθεί κανονική κατανομή μπορεί να μετασχηματιστεί στη Z με τον απλό μετασχηματισμό:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \implies Z \equiv \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1) \tag{1.27}$$

Μπορούμε λοιπόν να υπολογίσουμε οποιαδήποτε πιθανότητα για τη X από την $\Phi(z)$. Γενικά η πιθανότητα για $X \in [a, b]$ είναι:

$$P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \tag{1.28}$$

Στους λόγους που αναφέρθηκαν παραπάνω για τη σπουδαιότητα της κανονικής κατανομής, θα πρέπει να προστεθεί και η ιδιότητα της κανονικής κατανομής να 'έλκει' τα αθροίσματα τυχαίων μεταβλητών, που δεν είναι απαραίτητα κανονικές, δηλαδή η κατανομή των αθροισμάτων να προσεγγίζει την κανονική κατανομή. Οι περιορισμοί για να ισχύει αυτό είναι οι τυχαίες μεταβλητές να είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, να έχουν πεπερασμένη διασπορά και το άθροισμα να είναι αρκετά μεγάλο. Κάτω από αυτές τις συνθήκες ισχύει το ***κεντρικό οριακό θεώρημα***

(central limit theorem). Συγκεκριμένα, έστω οι τ.μ. X_i, i = 1, …., n, για n μεγάλο (συνήθως θεωρούμε n > 30) που έχουν κατανομές με μέσες τιμές μ_i και διασπορές σ_i^2 για i = 1, …., n, αντίστοιχα. Τότε ισχύει:

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2) \tag{1.29}$$

όπου η μέση τιμή της τ.μ. του αθροίσματος Y είναι $\mu_Y = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$ και η διασπορά $\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$.

<u>Κολοβή κανονική κατανομή (truncated normal distribution)</u>

Είναι η πιθανοτική κατανομή μιας κανονικά κατανεμημένης τυχαίας μεταβλητής της οποίας οι τιμές είναι είτε άνω φραγμένες είτε κάτω φραγμένες ή και τα δύο. Συγκεκριμένα έστω $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ και ας υποθέσουμε ότι θέλουμε $Y \in [a_1, a_2]$, όπου $-\infty < a_1 < a_2 < \infty$. Η πιθανότητα η τ.μ. να βρίσκεται εντός του διαστήματος αυτού είναι $\Phi\left(\frac{a_2-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a_1-\mu}{\sigma}\right)$. Έτσι η τ.μ. Y για $Y \in [a_1, a_2]$ ακολουθεί μια κολοβή κανονική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

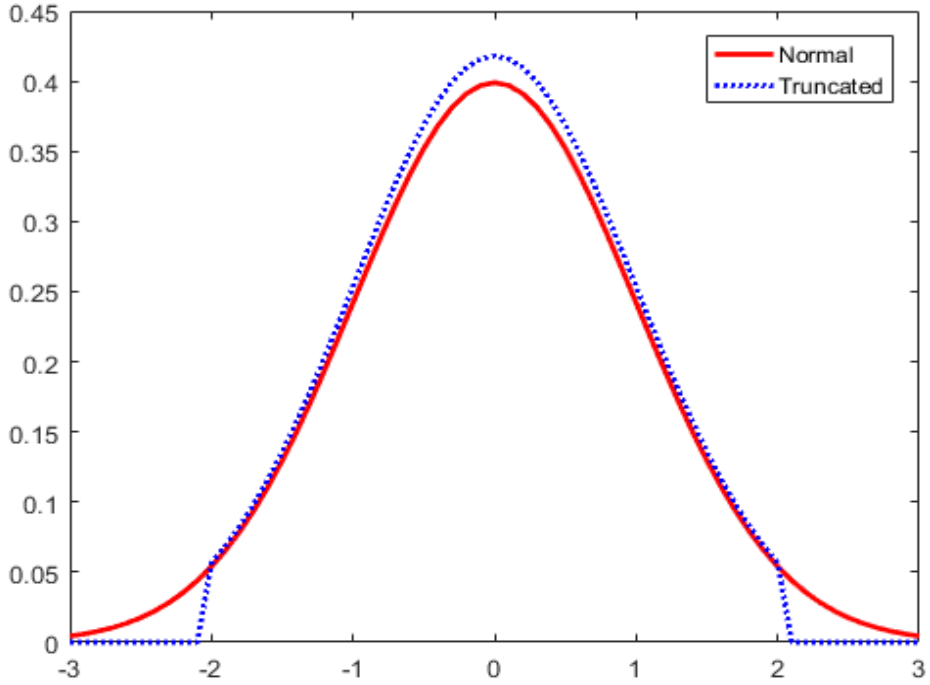
$$f(y; \mu, \sigma, a_1, a_2) = \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{a_2-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a_1-\mu}{\sigma}\right)} & \alpha_1 \le y \le a_2 \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases} \tag{1.30}$$

Έστω $\alpha = \frac{a_1-\mu}{\sigma}$, $\beta = \frac{a_2-\mu}{\sigma}$ και Z = $\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$ τότε η μέση τιμή της κατανομής αυτής είναι:

$$\mu + \frac{\varphi(\alpha) - \varphi(\beta)}{Z}\sigma \tag{1.31}$$

Και η διακύμανση:

$$\sigma^2\left[1 + \frac{\alpha\varphi(\alpha) - \beta\varphi(\beta)}{Z} - \left(\frac{\varphi(\alpha) - \varphi(\beta)}{Z}\right)^2\right] \tag{1.32}$$



Σχήμα 1.10. Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας κολοβής κανονικής κατανομής

1.6. Εκτίμηση Παραμέτρων

Οι στατιστικές δείγματος που υπολογίζονται από τα δεδομένα που έχουν συλλεχθεί, όπως η δειγματική μέση τιμή $\bar{x}$ και η δειγματική διασπορά s^2, χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση των σχετικών παραμέτρων πληθυσμού μ και σ^2 αντίστοιχα. Γενικά από τις παρατηρήσεις του δείγματος μπορούμε να υπολογίσουμε τη σημειακή εκτίμηση (point estimation) και την εκτίμηση διαστήματος (interval estimation) της παραμέτρου μιας τ.μ..

Η ***σημειακή εκτίμηση*** μιας παραμέτρου είναι η στατιστική που υπολογίζουμε από το δείγμα, δηλαδή είναι μια τιμή, που υπολογίζεται με βάση τα δεδομένα του δείγματος και αντιπροσωπεύει την πραγματική τιμή της σχετικής παραμέτρου του πληθυσμού. Συγκεκριμένα, έστω X μια τ.μ. με αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F_X(x;\theta)$ που εξαρτάται από την παράμετρο θ την οποία θέλουμε να εκτιμήσουμε. Έστω ακόμα ότι έχουμε παρατηρήσεις $\{x_1, \dots, x_n\}$ της X από ένα δείγμα μεγέθους n. Τότε η σημειακή εκτίμηση της θ δίνεται από τη συνάρτηση $g(x_1, \dots, x_n)$ των

τιμών του δείγματος που λέγεται ***εκτιμήτρια συνάρτηση***. Η ***εκτιμήτρια*** (estimator) της θ από το δείγμα είναι $\hat{\theta} = g(x_1, \dots, x_n)$.

Επειδή οι παρατηρήσεις $\{x_1, \dots, x_n\}$ αλλάζουν κάθε φορά που μελετάμε διαφορετικό δείγμα μεγέθους n, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι παρατηρήσεις $\{x_1, \dots, x_n\}$ είναι τιμές των τ.μ. $\{X_1, \dots, X_n\}$, που είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και ακολουθούν την ίδια κατανομή $F_X(x; \theta)$. Άρα η παράμετρος $\hat{\theta}$ είναι συνάρτηση αυτών των τ.μ..

Είναι φανερό ότι για διαφορετικά δείγματα δηλαδή για διαφορετικές παρατηρήσεις $\{x_1, \dots, x_n\}$ η εκτιμήτρια συνάρτηση της παραμέτρου $\hat{\theta}$ παίρνει διαφορετικές τιμές, δηλαδή η <u>$\hat{\theta}$ είναι η ίδια μια τυχαία μεταβλητή</u> με κάποια κατανομή και έχει μέση τιμή $\mu_{\hat{\theta}} = E(\hat{\theta})$ και διασπορά $\sigma^2_{\hat{\theta}} = Var(\hat{\theta})$.

Δύο σημαντικές παράμετροι μιας τ.μ. Χ που θέλουμε να εκτιμήσουμε είναι η μέση τιμή μ και η διασπορά σ^2.

<u>Εκτίμηση μέσης τιμής</u>

Είναι φυσικό ως εκτιμήτρια της μ να ορίσουμε τη δειγματική μέση τιμή που ορίζεται από τη σχέση:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{1.33}$$

<u>Εκτίμηση διασποράς</u>

Όπως για τη μέση τιμή έτσι και για τη διασπορά σ^2 η εκτιμήτρια είναι η δειγματική διασπορά που ορίζεται από τη σχέση:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \tag{1.34}$$

Βέβαια μπορεί κάποιος να ορίσει την εκτιμήτρια της σ^2 ως:

$$\tilde{s}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \tag{1.35}$$

Για μεγάλο n οι δύο εκτιμήτριες συγκλίνουν στην ίδια τιμή.

Παραπάνω ορίσαμε κάπως αυθαίρετα εκτιμήτριες της μέσης τιμής μ και της διασποράς σ^2 χωρίς να γνωρίζουμε αν είναι 'καλές' εκτιμήτριες ή όχι. Γενικά όταν ορίζουμε μια εκτιμήτρια $\hat{\theta}$ κάποιας παραμέτρου θ θέλουμε να ελέγξουμε αν είναι κατάλληλη και για αυτό θέτουμε κάποια κριτήρια ή ιδιότητες που πρέπει να πληροί για να είναι 'καλή' εκτιμήτρια. Παρακάτω περιγράφονται ορισμένες επιθυμητές ιδιότητες μιας εκτιμήτριας $\hat{\theta}$.

<u>Αμεροληψία</u>

Η $\hat{\theta}$ είναι αμερόληπτη (unbiased) αν η μέση τιμή της είναι ίση με την παράμετρο θ, δηλαδή αν ισχύει:

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

Αλλιώς λέγεται μεροληπτική με μεροληψία:

$$b(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$$

Η δειγματική μέση τιμή $\bar{x}$ και η δειγματική διασπορά s^2 είναι αμερόληπτες εκτιμήτριες της μέσης τιμής μ και της διασποράς σ^2 μιας τ.μ. Χ ενός πληθυσμού αντίστοιχα.

Αντίθετα η δειγματική διασπορά $\tilde{s}^2$ είναι μεροληπτική εκτιμήτρια της σ^2 με μεροληψία:

$$b(\tilde{s}^2) = -\frac{\sigma^2}{n}$$

Τώρα αν η εκτιμήτρια δεν είναι αμερόληπτη, όμως η μεροληψία τείνει στο μηδέν καθώς το πλήθος των παρατηρήσεων n τείνει στο άπειρο, τότε η εκτιμήτρια ονομάζεται ***ασυμπτωτικά αμερόληπτη*** (asymptotically unbiased) και ισχύει:

$$\lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}) = \theta$$

Όπως γίνεται άμεσα αντιληπτό η δειγματική διασπορά $\tilde{s}^2$ είναι μια ασυμπτωτικά αμερόληπτη εκτιμήτρια.

Από μόνη της η ιδιότητα της αμεροληψίας ή ασυμπτωτικής αμεροληψίας ενός εκτιμητή, δεν εξασφαλίζει τη σύγκλιση της εκτίμησης στην πραγματική τιμή, την εξασφαλίζει μόνο κατά μέσο όρο.

Συνέπεια

Η ιδιότητα αυτή ορίζει πως όσο αυξάνει το μέγεθος του δείγματος τόσο μεγαλώνει η πιθανότητα η εκτίμηση να είναι 'κοντά' στην πραγματική τιμή της παραμέτρου, όπου το 'κοντά' σημαίνει ότι η διαφορά της εκτιμούμενης από την πραγματική τιμή της παραμέτρου είναι μικρότερη από κάποια αυθαίρετα μικρή απόσταση ε. Δηλαδή η $\hat{\theta}$ είναι συνεπής (consistent) αν ισχύει:

$$P\left(\left|\theta - \hat{\theta}\right| < \varepsilon\right) \to 1 \qquad \text{όταν } n \to \infty$$

Επειδή όμως ο έλεγχος της παραπάνω συνθήκης δεν είναι εύκολος, συνήθως χρησιμοποιούμε την επόμενη πρόταση.

Πρόταση: Μια εκτιμήτρια $\hat{\theta}$ θα είναι συνεπής αν ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες:

- Να είναι ασυμπτωτικά αμερόληπτη, δηλαδή $\lim_{n\to\infty} E\left(\hat{\theta}\right) = \theta$
- Και η διασπορά της να τείνει στο μηδέν καθώς το N τείνει στο άπειρο, δηλαδή $\lim_{n\to\infty} Var\left(\hat{\theta}\right) = 0.$

Η εκτιμήτρια $\bar{x}$ της μέσης τιμής μ μιας τ.μ. X είναι συνεπής. Συγκεκριμένα, η διασπορά της $\bar{x}$ θα πρέπει να εξαρτάται από το n έτσι ώστε καθώς ο αριθμός των παρατηρήσεων μεγαλώνει η διασπορά να μικραίνει. Πράγματι για τη διασπορά $\sigma_{\bar{x}}^2$ ισχύει:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = Var(\bar{x}) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(x_i) = \frac{1}{n^2}(n\sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Δηλαδή η διασπορά της εκτιμήτριας $\bar{x}$ είναι ανάλογη της διασποράς σ^2 της τ.μ. X και αντιστρόφως ανάλογη του αριθμού των παρατηρήσεων n. Την τυπική απόκλιση $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ της $\bar{x}$ θα την ονομάζουμε ***σταθερό σφάλμα*** (standard error) της εκτιμήτριας $\bar{x}$.

Η τ.μ. $\bar{x}$ λοιπόν έχει κάποια κατανομή με μέση τιμή $\mu_{\bar{x}} = \mu$ και διασπορά $\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$

Αποτελεσματικότητα

Η αποτελεσματικότητα αναφέρεται στη διασπορά της εκτιμήτριας και δίνεται συγκριτικά. Μια εκτιμήτρια $\hat{\theta}_1$ της *θ* είναι πιο αποτελεσματική (effective) από μια άλλη εκτιμήτρια $\hat{\theta}_2$ αν έχει μικρότερη διασπορά, δηλαδή:

$$\sigma^2_{\hat{\theta}_1} < \sigma^2_{\hat{\theta}_2}$$

Επάρκεια

Μια εκτιμήτρια της παραμέτρου *θ* είναι επαρκής (adequate) όταν χρησιμοποιεί όλη την πληροφορία από το δείγμα που σχετίζεται με τη *θ*.

Η εκτιμήτρια $\bar{x}$ της μέσης τιμής *μ* μιας τ.μ. Χ είναι επαρκής γιατί χρησιμοποιεί όλες τις παρατηρήσεις που μετρήθηκαν στο δείγμα.

Στον ορισμό των εκτιμητριών $\bar{x}$ και s^2 ή $\tilde{s}^2$ δεν κάναμε κάποια υπόθεση για την κατανομή της τ.μ. Χ και άρα μπορούμε να τις χρησιμοποιήσουμε για οποιαδήποτε τ.μ. Χ που παρατηρούμε.

Τέλος αξίζει να αναφέρουμε ότι συχνά χρησιμοποιείται ως μέτρο διασποράς ενός δείγματος ο ***συντελεστής μεταβλητότητας*** (coefficient of variation) ο οποίος συμβολίζεται ως CV και είναι ο λόγος της δειγματικής τυπικής απόκλισης προς τη δειγματική μέση τιμή, δηλαδή:

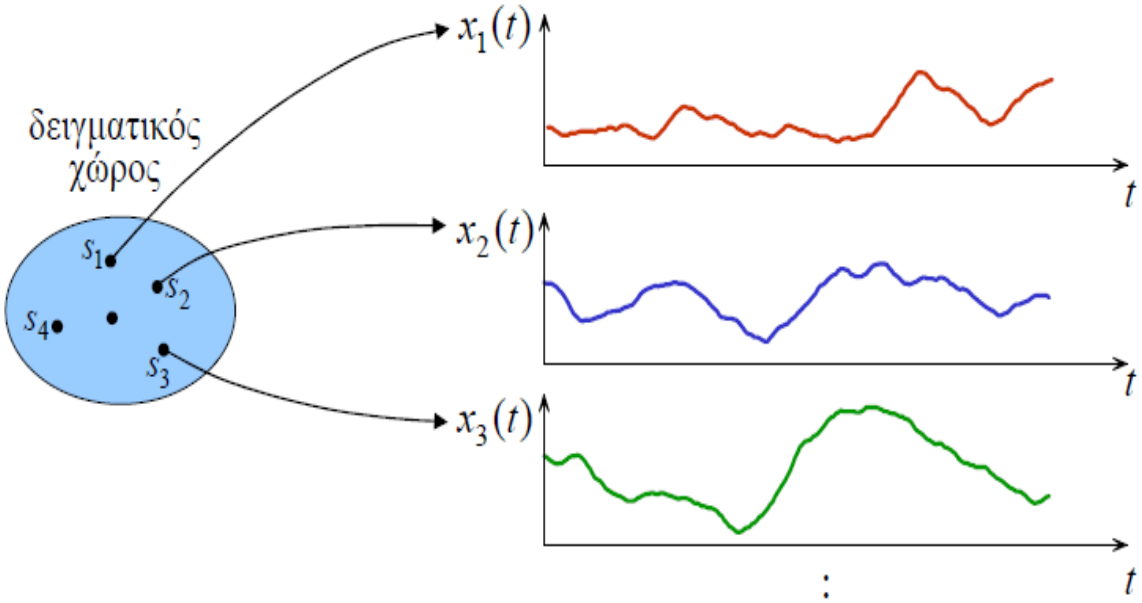
$$CV = \frac{s}{\bar{x}} \tag{1.36}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Τυχαίες Διαδικασίες

2.1. Ορισμός

Η έννοια της τυχαίας διαδικασίας, βασίζεται στην επέκταση της έννοιας της τυχαίας μεταβλητής, ώστε να συμπεριλάβει το χρόνο. Σε κάθε αποτέλεσμα s_i ενός πειράματος τύχης αντιστοιχούμε, σύμφωνα με κάποιο κανόνα, τη χρονική συνάρτηση $x_i(t)$. Η οικογένεια όλων αυτών των συναρτήσεων καλείται ***τυχαία διαδικασία*** και δηλώνεται με X(t).



Σχήμα 2.1. Τυχαία διαδικασία

Με άλλα λόγια μια τυχαία διαδικασία είναι μια απεικόνιση του δειγματικού χώρου S σε ένα σύνολο από συναρτήσεις $x(t; s_i)$ $\left(\text{ή } x_i(t)\right)$, που κάθε μια ονομάζεται <u>δείγμα συνάρτησης ή υλοποίηση της διαδικασίας</u>.

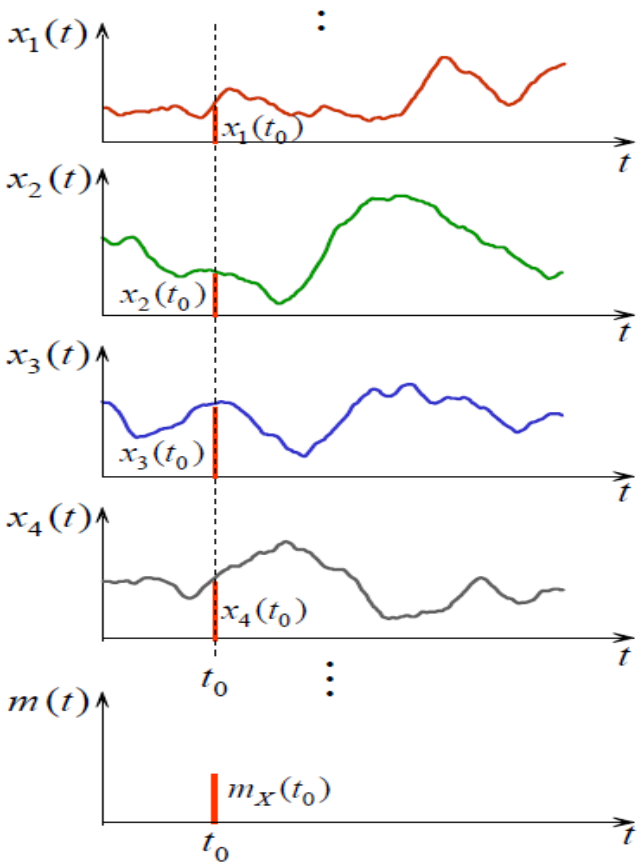
Για κάθε χρονική στιγμή t_0, έχουμε N διαφορετικές πιθανές τιμές $x(t_0; s_i)$. Οι τιμές αυτές συμβολίζονται γενικά $x_i(t_0)$ και αποτελούν στην ουσία τα στοιχεία μιας τυχαίας μεταβλητής $X(t_0)$. Δηλαδή, σε κάθε χρονική στιγμή, η τιμή μιας τυχαίας διαδικασίας είναι μια τυχαία μεταβλητή.

Άρα μία τυχαία διαδικασία είναι μια ακολουθία από τυχαίες μεταβλητές $\{X(t_1), X(t_2), \dots\}$, όπου όταν η παράμετρος του χρόνου t παίρνει διακριτές τιμές η διαδικασία ονομάζεται <u>τυχαία διαδικασία διακριτού χρόνου</u>, ενώ όταν παίρνει συνεχείς τιμές η διαδικασία καλείται <u>τυχαία διαδικασία συνεχούς χρόνου</u>.

2.2. Μέσες τιμές και Συναρτήσεις Τυχαίων Διαδικασιών

Όπως αναφέραμε για κάθε χρονική στιγμή t_0 η τυχαία διαδικασία μεταπίπτει σε μια τυχαία μεταβλητή $X(t_0)$, με στοιχεία $[x_1(t_0), x_2(t_0), x_3(t_0), x_4(t_0), \dots]$, στην οποία αντιστοιχεί μια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{X(t_0)}(x)$. Έτσι, η ***στατιστική μέση τιμή*** μίας τυχαίας διαδικασίας X(t) είναι μία νομοτελειακή συνάρτηση του χρόνου $\mu_{X(t)}$ η οποία σε κάθε χρονική στιγμή t_0 είναι ίση με τη μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής $X(t_0)$, συγκεκριμένα:

$$\mu_{X(t_0)} \equiv E[X(t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X(t_0)}(x) dx \tag{2.1}$$

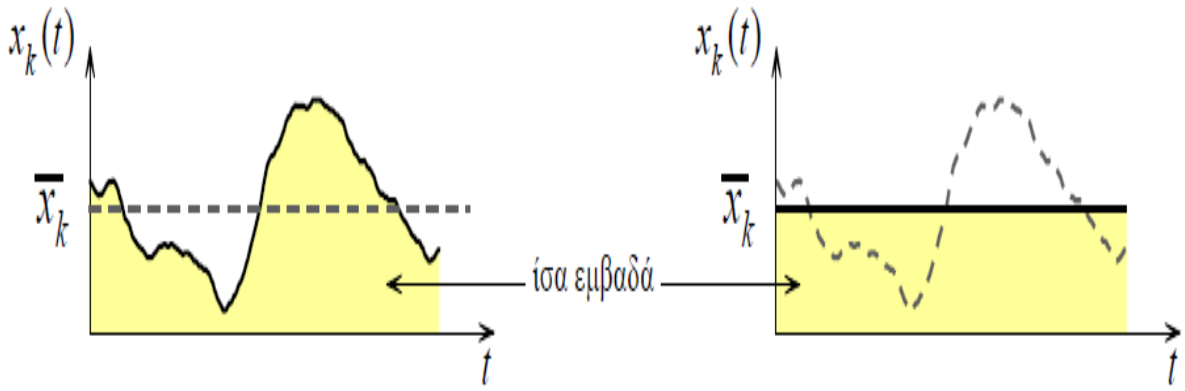


Σχήμα 2.2. Στατιστική μέση τιμή

Γενικά παρατηρούμε ότι ο στατιστικός μέσος όρος εξαρτάται από τη χρονική στιγμή t_0.

Αντίστοιχα όταν εξετάζουμε μια υλοποίηση της τυχαίας διαδικασίας, $x_k(t)$, τότε την αναλύουμε στο χρόνο χρησιμοποιώντας χρονικά μεγέθη. Δηλαδή ο ***χρονικός μέσος όρος*** της τυχαίας υλοποίησης, $x_k(t)$, είναι:

$$\bar{x}_k = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x_k(t)dt \qquad (2.2)$$



Σχήμα 2.3. Χρονικός μέσος όρος

Ο χρονικός μέσος όρος είναι ένας πραγματικός αριθμός ανεξάρτητος του χρόνου *t* αλλά, εν γένει, εξαρτάται από την επιμέρους υλοποίηση που επιλέχθηκε.

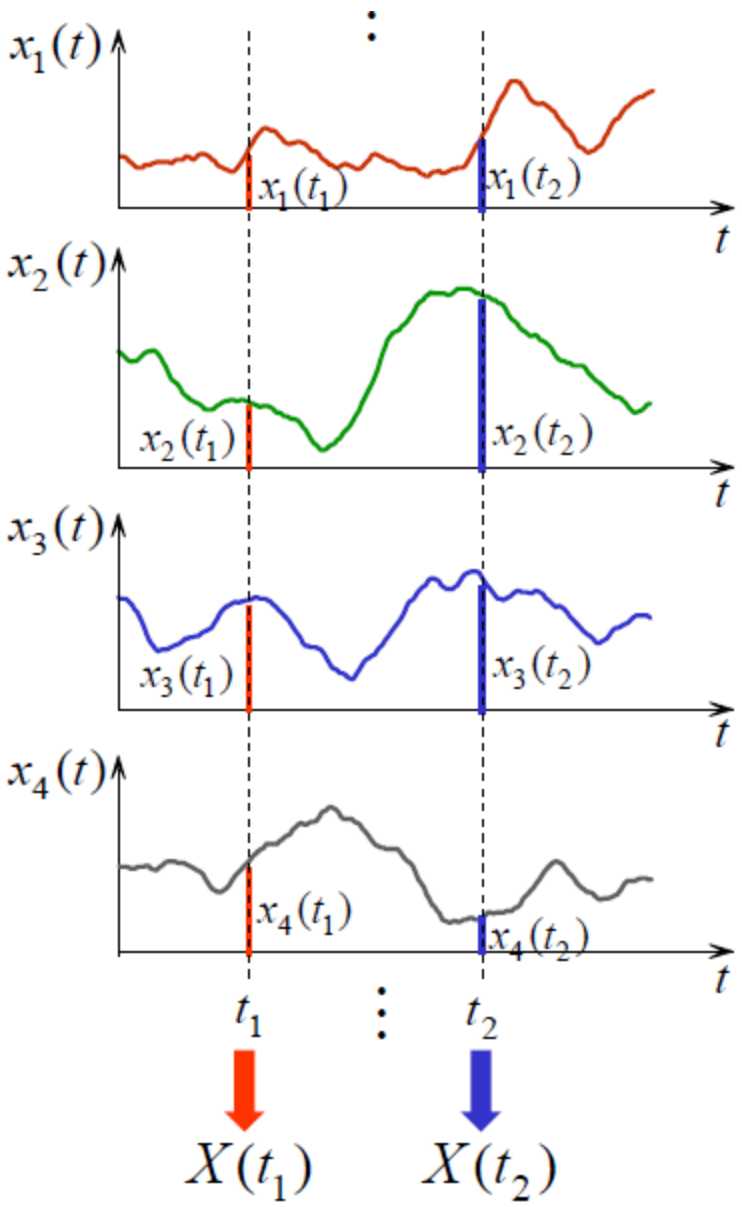
Στη συνέχεια παρατίθενται κάποιες βασικές συναρτήσεις των τυχαίων (στοχαστικών) διαδικασιών.

<u>Συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης (Autocorrelation function)</u>

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης μιας τυχαίας διαδικασίας, X(t), περιγράφει τη συσχέτιση μεταξύ τιμών της διαδικασίας σε διαφορετικές χρονικές στιγμές, ως συνάρτηση των χρονικών στιγμών αυτών ή της μεταξύ τους διαφοράς.

Συγκεκριμένα για τις χρονικές στιγμές t_1 και t_2 ορίζονται οι τυχαίες μεταβλητές $X(t_1)$ και $X(t_2)$ με στοιχεία $[x_1(t_1), x_2(t_1), x_3(t_1), x_4(t_1), \dots]$ και $[x_1(t_2), x_2(t_2), x_3(t_2), x_4(t_2), \dots]$ αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, $f_{X(t_1)X(t_2)}(x_1, x_2)$, ορίζουμε τη ***στατιστική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης***:

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 \, f_{X(t_1)X(t_2)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \qquad (2.3)$$



Σχήμα 2.4. Τυχαίες μεταβλητές της διαδικασίας σε διαφορετικές χρονικές στιγμές t_1 και t_2

Αντίστοιχα όταν εξετάζουμε μια υλοποίηση της τυχαίας διαδικασίας, $x_k(t)$, έχουμε τη ***χρονική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης***, που αφορά την υλοποίηση αυτή, και ορίζεται από τη σχέση:

$$R_{x_k}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x_k(t)x_k(t+\tau)dt \tag{2.4}$$

<u>Συνάρτηση Αυτοσυνδιακύμανσης (Autocovariance function)</u>

Σε μια τυχαία διαδικασία, X(t), η συνάρτηση αυτοσυνδιακύμανσης μας δίνει τη συνδιακύμανση της διαδικασίας με τον εαυτό της ανά ζεύγη χρονικών στιγμών και ορίζεται ως:

$$C_{XX}(t_1, t_2) = E\big[\big(X(t_1) - \mu_X(t_1)\big)\big(X(t_2) - \mu_X(t_2)\big)\big] \tag{2.5}$$

Αν $t_1 = t_2 = t_k$ τότε η αυτοσυνδιακύμανση, $C_X(t_k, t_k)$, ισούται με την διακύμανση της τυχαίας μεταβλητής $X(t_k)$, τη χρονική στιγμή t_k. Δηλαδή ισχύει:

$$C_{XX}(t_k, t_k) = Var[X(t_k)] = E\left[\big(X(t_k) - \mu_X(t_k)\big)^2\right] \tag{2.6}$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση αυτοσυνδιακύμανσης και η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης συνδέονται με την εξής σχέση:

$$C_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(t_1, t_2) - \mu_X(t_1)\mu_X(t_2) \tag{2.7}$$

Σύμφωνα με την οποία αν η μέση τιμή της τυχαίας διαδικασίας $X(t)$, σε κάποια από τις χρονικές στιγμές t_1, t_2, είναι μηδενική τότε η αυτοσυνδιακύμανση είναι ίση με την αυτοσυσχέτιση.

Επιπλέον όταν η αυτοσυνδιακύμανση, $C_X(t_1, t_2)$, κανονικοποιηθεί ως προς το γινόμενο των τυπικών αποκλίσεων των τυχαίων μεταβλητών $X(t_1), X(t_2)$, τότε προκύπτει ο ***συντελεστής αυτοσυσχέτισης*** (autocorrelation coefficient).

$$\rho_X(t_1) = \frac{C_X(t_1, t_2)}{\sigma_X(t_1)\sigma_X(t_2)} \tag{2.8}$$

Συνάρτηση Ετεροσυσχέτισης (Cross-correlation function)

Η συνάρτηση ετεροσυσχέτισης είναι ένα μέτρο της ομοιότητας δύο τυχαίων διαδικασιών X(t), Y(t) ως συνάρτηση της καθυστέρησης (lag) της μιας ως προς την άλλη και ορίζεται ως:

$$R_{XY}(t_1, t_2) = E[X(t_1)Y(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x\, y\, f_{X(t_1)Y(t_2)}(x, y) dx dy \qquad (2.9)$$

Όταν $R_{XY}(t_1, t_2) = 0$ για κάθε t_1, t_2 τότε οι δυο τυχαίες διαδικασίες X(t), Y(t) είναι ορθογώνιες μεταξύ τους.

Συνάρτηση Ετεροσυνδιακύμανσης (Cross-covariance function)

Σε δύο τυχαίες διαδικασίες X(t), Y(t) η συνάρτηση ετεροσυνδιακύμανσης μας δίνει τη συνδιακύμανση της μιας διαδικασίας ως προς την άλλη ανά ζεύγη χρονικών στιγμών και ορίζεται ως:

$$C_{XY}(t_1, t_2) = E\big[\big(X(t_1) - \mu_X(t_1)\big)\big(Y(t_2) - \mu_Y(t_2)\big)\big] \qquad (2.10)$$

Όταν $C_{XY}(t_1, t_2) = 0$ για κάθε t_1, t_2 τότε οι δυο τυχαίες διαδικασίες X(t), Y(t) είναι ασυσχέτιστες μεταξύ τους.

2.3. Στάσιμες Τυχαίες Διαδικασίες

Η έννοια της ***στασιμότητας*** μιας τυχαίας διαδικασίας συνδέεται με την έννοια της 'στατιστικής χρονικής σταθερότητας', δηλαδή όταν οι στατιστικές ιδιότητες της τυχαίας διαδικασίας είναι ανεξάρτητες του χρόνου.

Συγκεκριμένα, όταν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{X(t_0)}(x)$ μιας τυχαίας διαδικασίας είναι ανεξάρτητη του χρόνου, δηλαδή για κάθε τιμή t_0 και για κάθε Δt ισχύει:

$$f_{X(t_0)}(x) = f_{X(t_0+\Delta_t)}(x) \qquad (2.11)$$

Τότε η διαδικασία ονομάζεται ***στάσιμη διαδικασία πρώτης τάξης*** και η στατιστική μέση τιμή και διακύμανση της είναι σταθερές, ανεξάρτητες του χρόνου.

$$\mu_{X(t)} = \mu_X = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\eta} \qquad Var\big(X(t)\big) = Var(X) = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\eta}$$

Αντίστοιχα όταν η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{X(t_1)X(t_2)}(x_1, x_2)$ μιας τυχαίας διαδικασίας είναι ανεξάρτητη του χρόνου δηλαδή:

$$f_{X(t_1)X(t_2)}(x_1, x_2) = f_{X(t_1+\Delta_t)X(t_2+\Delta_t)}(x_1, x_2) \qquad \forall \Delta_t$$

Τότε η διαδικασία ονομάζεται ***στάσιμη διαδικασία δεύτερης τάξης*** και η στατιστική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $R_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(\tau)$, δεν εξαρτάται από τις χρονικές στιγμές t_1 και t_2 αλλά μόνο από τη διαφορά (lag) τους $\tau = \Delta_t = t_1 - t_2$. Αν μια διαδικασία είναι στάσιμη δεύτερης τάξης, τότε είναι και πρώτης τάξης.

Τώρα αν για όλα τα n, για όλα τα $(t_1, t_2, t_3, \dots, t_n)$ και για όλα τα Δ_t ισχύει:

$$f_{X(t_1)X(t_2)X(t_3)\dots X(t_n)}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$
$$= f_{X(t_1+\Delta_t)X(t_2+\Delta_t)X(t_3+\Delta_t)\dots X(t_n+\Delta_t)}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

Τότε η διαδικασία ονομάζεται ***αυστηρά στάσιμη διαδικασία*** (strict–sense stationary).

Τέλος μια τυχαία διαδικασία ονομάζεται ***στάσιμη με την ευρεία έννοια*** (WSS: wide sense stationary), αν ικανοποιούνται οι εξής συνθήκες:

- $\mu_{X(t)} = \mu_X = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\eta}$
- $R_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(\tau) \qquad \acute{o}\pi o\upsilon\ \tau = \Delta_t = t_1 - t_2$

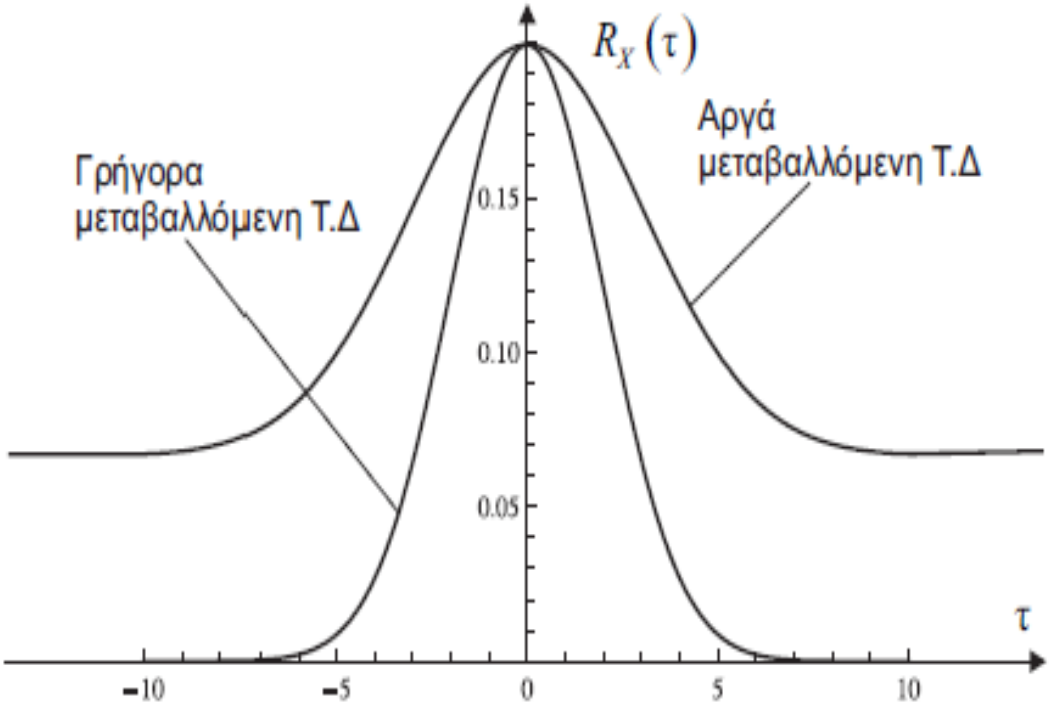
Δηλαδή όπως παρατηρούμε μια διαδικασία η οποία είναι στάσιμη δεύτερης τάξης ονομάζεται διαδικασία στάσιμη με την ευρεία.

Οι αυστηρά στάσιμες τυχαίες διαδικασίες αποτελούν <u>υποσύνολο</u> των στάσιμων διαδικασιών με την ευρεία έννοια.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι ιδιότητες της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης μιας στάσιμης με την ευρεία έννοια τυχαίας διαδικασίας.

1. Είναι φραγμένη ως προς την αρχή της $|R_{XX}(\tau)| \leq R_{XX}(0)$
2. Έχει άρτια συμμετρία $R_{XX}(\tau) = R_{XX}(-\tau)$
3. Για $\tau = 0$ είναι η ισχύς της τυχαίας διαδικασίας δηλαδή $R_{XX}(0) = E[X^2(t)]$
4. Εάν για κάποιο t_0 ισχύει $R_{XX}(t_0) = R_{XX}(0)$ τότε για κάθε ακέραιο k ισχύει $R_{XX}(k \cdot t_0) = R_{XX}(0)$

Επιπλέον όσο πιο γρήγορα μεταβάλλεται χρονικά η $X(t)$, τόσο περισσότερο μειώνεται η $R_{XX}(\tau)$ από τη μέγιστη τιμή της $R_{XX}(0)$ με την αύξηση του τ.



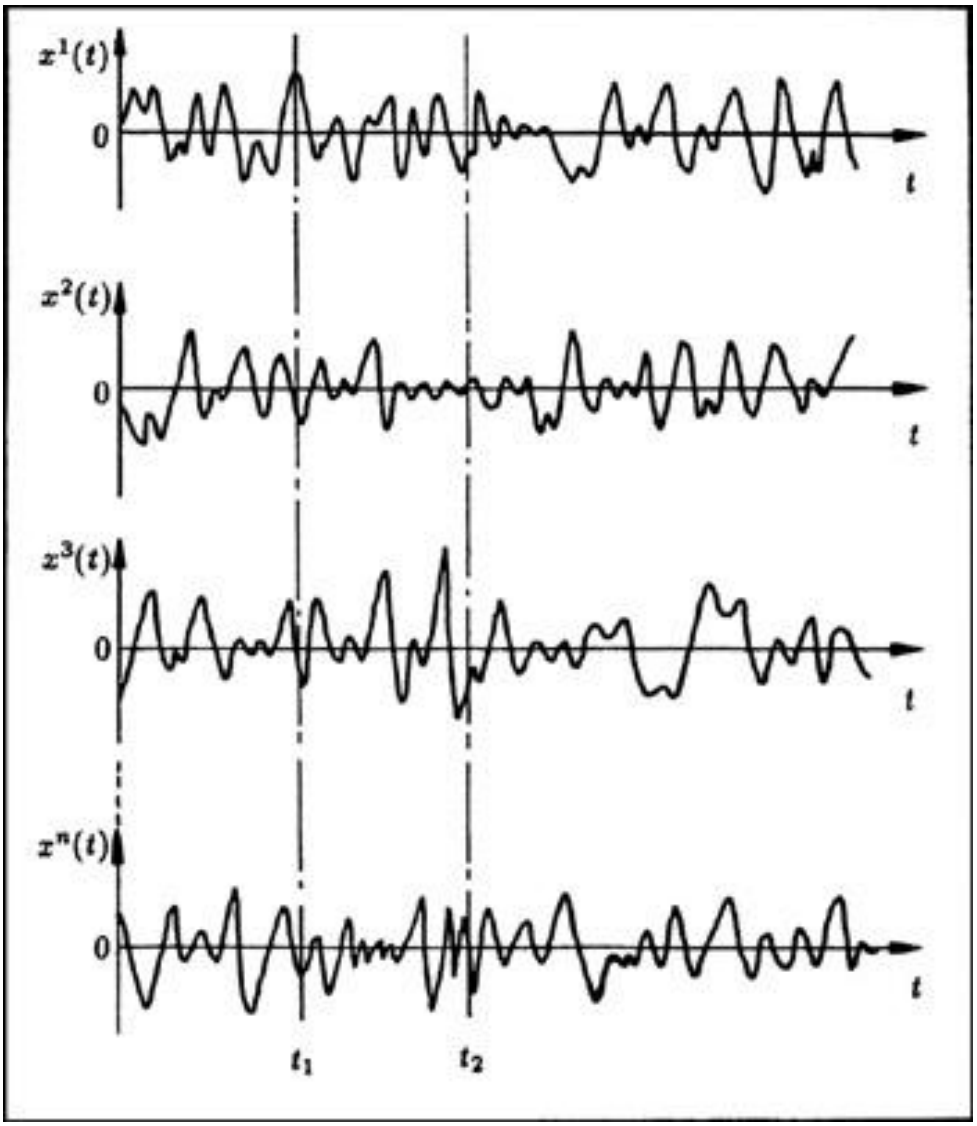
Σχήμα 2.5. Συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης αργά και γρήγορα μεταβαλλόμενης τυχαίας διαδικασίας (Τ.Δ) [11].

2.4. Εργοδικές Τυχαίες Διαδικασίες

Η στατιστική μέση τιμή και η στατιστική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης μιας τυχαίας διαδικασίας αναφέρονται σε <u>όλες</u> τις συναρτήσεις δείγματα (υλοποιήσεις) της διαδικασίας. Ωστόσο, στην πράξη έχουμε διαθέσιμο ένα σύνολο παρατηρήσεων από μία μόνο πραγματοποίηση της διαδικασίας, και από τις παρατηρήσεις αυτές καλούμαστε να εκτιμήσουμε τα παραπάνω μεγέθη.

Έστω μια τυχαία διαδικασία για την οποία έχουμε μια συλλογή από n υλοποιήσεις. Στην περίπτωση αυτή θα μπορούσαμε να κάνουμε μια εκτίμηση της μέσης τιμής ως εξής:

$$\hat{\mu}_{X(t_0)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i(t_0) \qquad \forall\, t_0$$



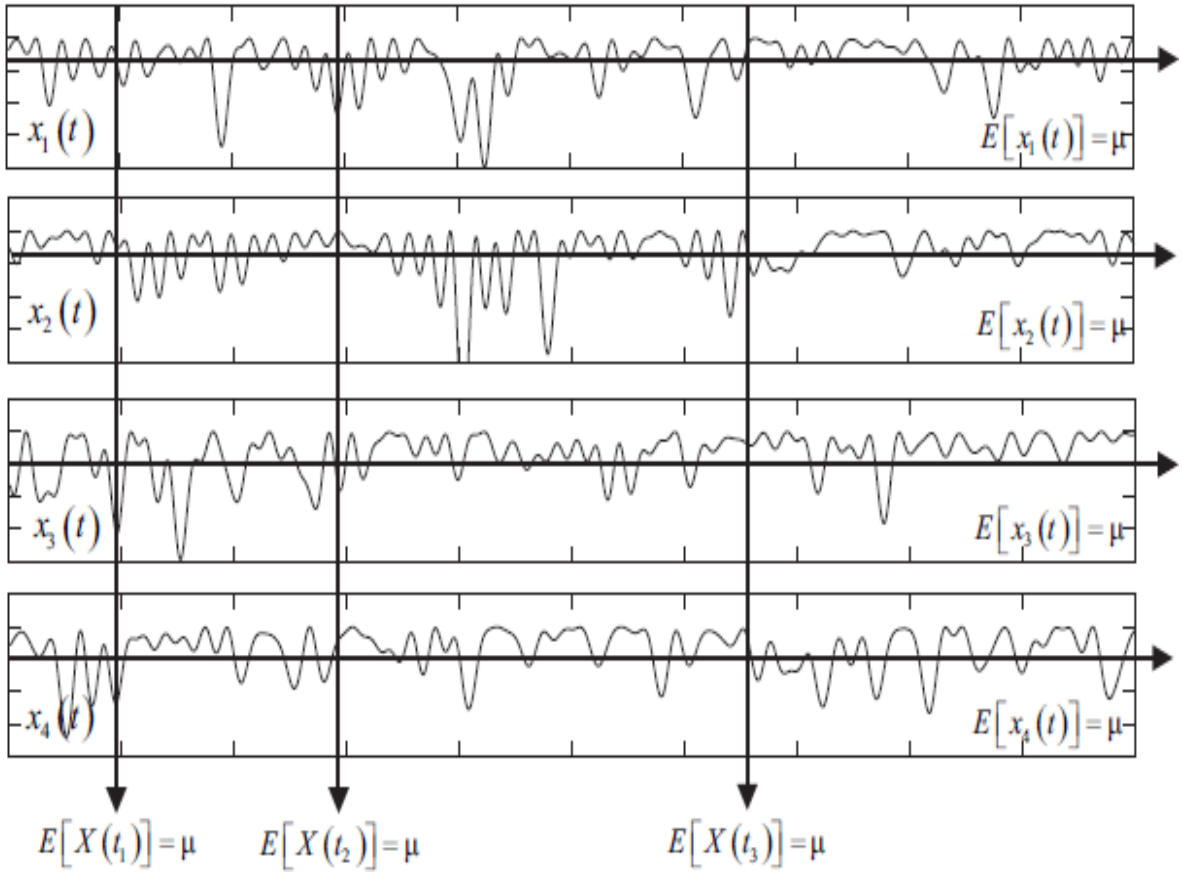
Σχήμα 2.6. n υλοποιήσεις της τυχαίας διαδικασίας $X(t)$

Όταν όμως έχουμε διαθέσιμη μόνο μία πραγματοποίηση της τυχαίας διαδικασίας, η παραπάνω εκτίμηση δεν έχει νόημα. Έτσι η μέση τιμή εκτιμάται από το χρονικό μέσο όρο $\bar{x}_k$ (ή $E[x_k(t)]$) της τυχαίας υλοποίησης και το ερώτημα που δημιουργείται είναι αν ο μέσος όρος αυτός συγκλίνει στην πραγματική μέση τιμή.

Αν ο χρονικός μέσος όρος ισούται με τη στατιστική μέση τιμή δηλαδή:

$$E[X(t)] = E[x_k(t)]$$

Τότε η τυχαία διαδικασία, $X(t)$ ονομάζεται ***εργοδική ως προς τη μέση τιμή*** (ergodic in the mean).



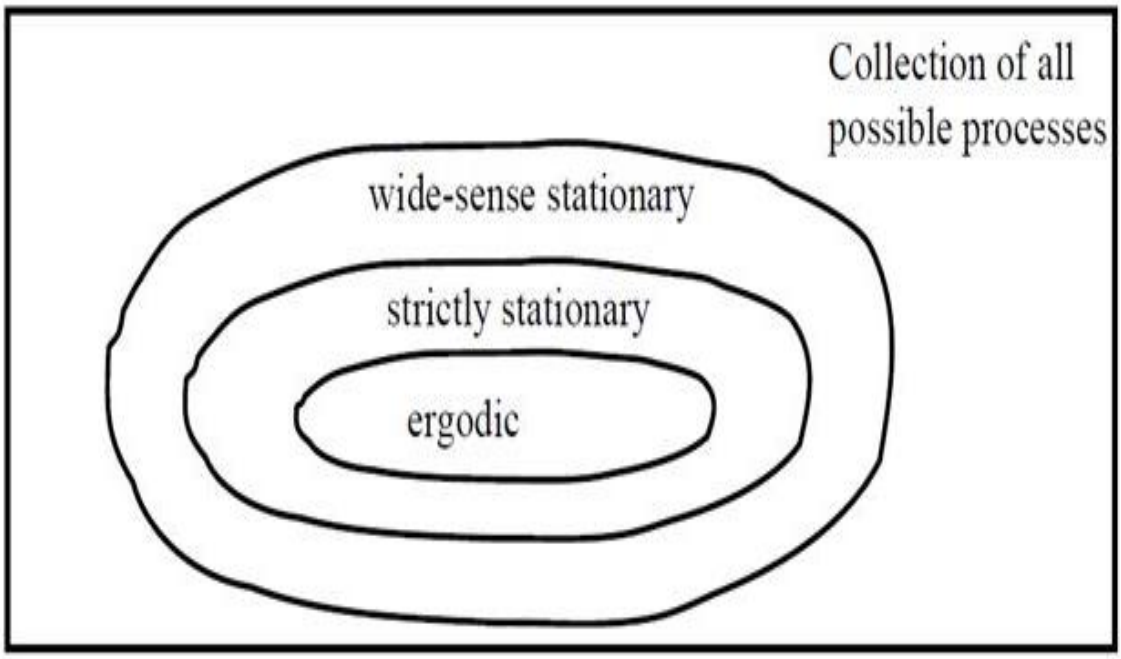
Σχήμα 2.7. Εργοδική διαδικασία ως προς τη μέση τιμή [11].

Αντίστοιχα αν η στατιστική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης ισούται με χρονική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης δηλαδή:

$$R_{XX}(\tau) = R_{x_k}(\tau)$$

Τότε η τυχαία διαδικασία, $X(t)$ καλείται ***εργοδική ως προς τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης*** (autocorrelation ergodic).

Η σχέση μεταξύ τυχαίων, στάσιμων με την ευρεία έννοια, αυστηρά στάσιμων και εργοδικών διαδικασιών παριστάνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 2.8. Κατηγορίες τυχαίων διαδικασιών και η μεταξύ τους σχέση

Η ιδιότητα της εργοδικότητας είναι πολύ σημαντική διότι μας επιτρέπει να εκτιμήσουμε τα στατιστικά μεγέθη μιας τυχαίας διαδικασίας από τα χρονικά μεγέθη μιας υλοποίησης της. Στην πράξη όμως είναι δύσκολο να δείξουμε την εργοδικότητα μιας διαδικασίας και συνήθως δουλεύουμε με την παραδοχή ότι η διαδικασία είναι εργοδική μέχρι να διαψευστούμε.

2.5. Φάσμα Ισχύος

Η ανάλυση Φουριέ (Fourier) είναι ένα μαθηματικό εργαλείο που μας μετατρέπει ένα σήμα από το χώρο του χρόνου στο χώρο των συχνοτήτων. Δηλαδή, θα μπορούσε να μας γράψει ένα σήμα $x(t)$ ως συνάρτηση ημιτόνων κάποιων συγκεκριμένων συχνοτήτων και τότε θα μπορούσαμε να κάνουμε πράγματα που στο πεδίο του χρόνου θα ήταν αδύνατα.

Γενικά η ανάλυση Φουριέ είναι ίσως το βασικότερο εργαλείο ανάλυσης σημάτων, η οποία μας δίνει πληροφορίες για το συχνοτικό τους περιεχόμενο, δηλαδή για το ποιες συχνότητες υπάρχουν στο σήμα. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι μας πληροφορεί για το πόσα και ποια ημίτονα, δηλαδή με ποιο πλάτος, συχνότητα

και φάση, πρέπει να προσθέσουμε μεταξύ τους για να πάρουμε το συνολικό σήμα που αναλύουμε.

Σε μια τυχαία διαδικασία στάσιμη με την ευρεία έννοια η περιγραφή της στο πεδίο της συχνότητας γίνεται μέσω της ***φασματικής πυκνότητας ισχύος*** (power spectral density) ή αλλιώς του ***φάσματος ισχύος*** (power spectrum). Για την ακρίβεια το φάσμα ισχύος εκφράζει την κατανομή της ισχύος της τυχαίας διαδικασίας στις διάφορες συχνότητες.

Για την εύρεση της φασματικής πυκνότητας ισχύος μιας στάσιμης με την ευρεία έννοια τυχαίας διαδικασίας ισχύει το θεώρημα των ***Wiener-Khinchin***. Σύμφωνα με το οποίο αν μια διαδικασία είναι στάσιμη με την ευρεία έννοια τότε η φασματική πυκνότητα ισχύος είναι ο μετασχηματισμός Φουριέ της στατιστικής συνάρτησης αυτοσυσχέτισης.

$$S_X(f) = F\{R_{XX}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau) e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau \qquad (2.12)$$

Παρακάτω παρουσιάζονται κάποιες ιδιότητες του φάσματος ισχύος.

- $S_X(f) \geq 0$
- $S_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau) d\tau$
- $E[X^2(t)] = R_{XX}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) df$
- $S_X(f) = S_X(-f)$

2.6. Προσομοίωση Τυχαίων Διαδικασιών με τη Μέθοδο της Φασματικής Απεικόνισης

Υπάρχουν διάφοροι μέθοδοι προσομοίωσης μιας τυχαίας διαδικασίας, ωστόσο στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε μόνο με τη μέθοδο ***φασματικής απεικόνισης (spectral representation)***.

Στη γενική περίπτωση, η μέθοδος της φασματικής απεικόνισης επεκτείνει την τυχαία διαδικασία $X(t)$ ως άθροισμα τριγωνομετρικών συναρτήσεων με τυχαίες φάσεις και πλάτη. Η εκδοχή όπου μόνο οι φάσεις είναι τυχαίες υιοθετείται στις περισσότερες εφαρμογές γιατί οδηγεί σε υλοποιήσεις της διαδικασίας όπου είναι εργοδικές ως προς τη μέση τιμή και την αυτοσυσχέτιση. Τα πλάτη των τριγωνομετρικών συναρτήσεων είναι ντετερμινιστικά και εξαρτώνται μόνο από το φάσμα ισχύος της τυχαίας διαδικασίας $X(t)$.

Με άλλα λόγια αν γνωρίζουμε το φάσμα ισχύος $S_X(\omega)$ μιας τυχαίας διαδικασίας, τότε μπορούμε να δημιουργήσουμε υλοποιήσεις της σύμφωνα με τη σχέση:

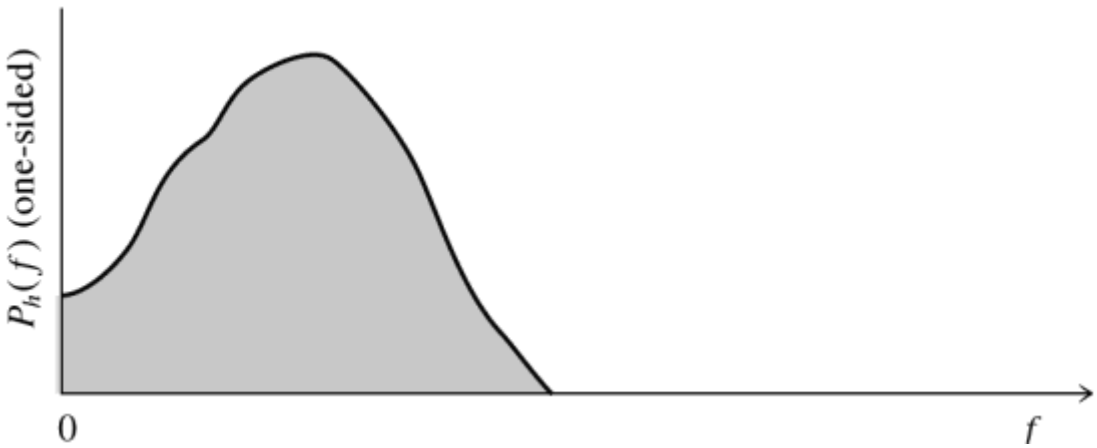
$$\hat{f}^{(i)}(t) = \sqrt{2}\sum_{n=0}^{N-1} A_n \cos\left(\omega_n t + \varphi_n{}^{(i)}\right) \qquad (2.13)$$

Ωστόσο, εδώ χρειάζεται μια προσοχή για το αν το φάσμα ισχύος είναι μιας όψης (one-sided) ή διπλής όψης (two-sided). Αν είναι <u>μιας όψης (one-sided)</u> τότε:

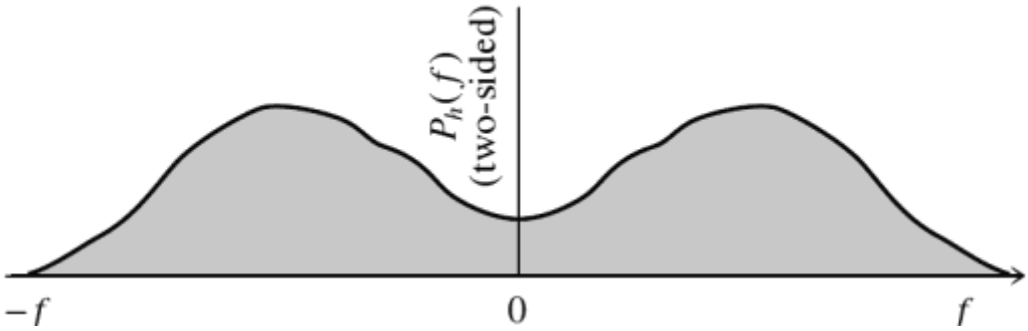
$$A_n = \sqrt{S_X(\omega_n)\Delta\omega}$$

Ενώ αν είναι <u>διπλής όψης (two-sided)</u>:

$$A_n = \sqrt{2S_X(\omega_n)\Delta\omega}$$



Σχήμα 2.9. Μιας όψης (one-sided) φάσμα ισχύος



Σχήμα 2.10. Διπλής όψης (two-sided) φάσμα ισχύος

Επιπλέον

- $\omega_n = n\Delta\omega$
- $\Delta\omega = \frac{\omega_u}{N}$
- $A_0 = 0$ ή $S_X(\omega_0 = 0) = 0$

Όπου $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Η παράμετρος ω_u ονομάζεται 'συχνότητα αποκοπής' και παριστάνει ένα άνω φίλτρο στην συνάρτηση πυκνότητας φασματικής ισχύος πέρα από το οποίο αυτή μπορεί να θεωρηθεί μηδενική λόγω των αμελητέων τιμών που λαμβάνει. Για συγκεκριμένη τιμή ω_u το βήμα των συχνοτήτων $\Delta\omega \to 0$ καθώς $N \to \infty$ ενώ για δεδομένο αριθμό όρων N το $\Delta\omega$ είναι σταθερό. Επιπλέον ${\varphi_0}^{(i)}, {\varphi_1}^{(i)}, \dots, {\varphi_{N-1}}^{(i)}$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες φάσεις ομοιόμορφα κατανεμημένες στο διάστημα $[0, 2\pi]$ και παράγονται από μια γεννήτρια τυχαίων αριθμών.

Κάθε υλοποίηση που παράγεται από την εξίσωση (2.13) έχει τις ακόλουθες ιδιότητες [16]:

1. Είναι ασυμπτωτικά κανονική τυχαία διαδικασία καθώς $N \to \infty$ λόγω του κεντρικού οριακού θεωρήματος.
2. Η μέση τιμή και η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της είναι ταυτόσημες με τις στατιστικές ιδιότητες της τυχαίας διαδικασίας καθώς $N \to \infty$.
3. Κάτω από την υπόθεση ότι $A_0 = 0$ ή $S_X(\omega_0 = 0) = 0$, αποδεικνύεται ότι η υλοποίηση $\hat{f}^{(i)}(t)$ είναι περιοδική με περίοδο $T_0 = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$.

Τέλος, πρέπει να αναφερθεί ότι σύμφωνα με το θεώρημα ***Shannon-Nyquist*** ένα σήμα με μέγιστη συχνότητα ω_u, μπορεί να ανακτηθεί από τα δείγματα του, αν δειγματοληπτηθεί με συχνότητα $\omega_s > 2\omega_u$ δηλαδή με περίοδο $T_s < \frac{\pi}{\omega_u}$. Έτσι με αυτό τον τρόπο αποφεύγουμε το φαινόμενο των επικαλύψεων (aliasing).

Άρα στη δική μας περίπτωση στη σχέση (2.13) θα πρέπει το βήμα του χρόνου, Δt, να ικανοποιεί την εξής συνθήκη:

$$\Delta t < \frac{\pi}{\omega_u}$$

2.7. Μαρκοβιανές Αλυσίδες

Όπως αναφέραμε στην αρχή του κεφαλαίου μια στοχαστική (τυχαία) διαδικασία είναι μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών ορισμένων σε ένα χώρο πιθανοτήτων (Ω, F, P). Εάν υπάρχει αριθμήσιμο πλήθος των μελών της οικογένειας τότε η διαδικασία συμβολίζεται με $X_1, X_2, X_3, \ldots$, ενώ αν το πλήθος δεν είναι αριθμήσιμο, τότε η διαδικασία συμβολίζεται με $\{X(t): t \geq 0\}$ ή $\{X(t)\}_{t\geq 0}$. Στην πρώτη περίπτωση η στοχαστική διαδικασία ονομάζεται διαδικασία διακριτού χρόνου ενώ στη δεύτερη περίπτωση διαδικασία συνεχούς χρόνου.

Επιπλέον ο χώρος των καταστάσεων S μιας στοχαστικής διαδικασίας, είναι ο χώρος που δημιουργείται από όλες τις πιθανές τιμές X_i. Εάν $S = (0, 1, 2, \ldots)$ αναφερόμαστε σε μια διακριτών καταστάσεων διαδικασία, ενώ αν $S = (-\infty, \infty)$ τότε η στοχαστική διαδικασία καλείται μια διαδικασία με πραγματικές τιμές. Δηλαδή αν $X_n = s_j$ για κάποιο $s_j \in S$, λέμε ότι η τυχαία μεταβλητή X_n βρίσκεται στην κατάσταση s_j στο χρόνο n.

Οι ***Μαρκοβιανές στοχαστικές διαδικασίες*** αποτελούν μια από τις σημαντικότερες ειδικές περιπτώσεις στοχαστικών διαδικασιών. Έχουν την Μαρκοβιανή ιδιότητα, δηλαδή η πιθανότητα η διαδικασία να μετακινηθεί στο μέλλον (την επόμενη χρονική στιγμή) σε οποιαδήποτε κατάσταση, εξαρτάται μόνο από την

παρούσα θέση και δεν απαιτείται επιπλέον πληροφορία που αφορά το παρελθόν. Οι Μαρκοβιανές στοχαστικές διαδικασίες που είναι σε διακριτό χρόνο και με διακριτό χώρο καταστάσεων καλούνται ***Μαρκοβιανές αλυσίδες***.

Έτσι μπορούμε να ορίσουμε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα σαν μια ακολουθία $X_0, X_1, X_2, \dots$ διακεκριμένων τυχαίων μεταβλητών με την ιδιότητα ότι η υπό συνθήκη κατανομή της X_{n+1} όταν δίνονται οι $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n$ εξαρτάται μόνο από την τιμή της X_n δηλαδή:

$$P\left(X_{n+1} = s_j | X_n = s_i,\ X_{n-1} = s_{i_{n-1}}, \dots, X_0 = s_{i_0}\right) = P\left(X_{n+1} = s_j | X_n = s_i\right).$$

Στη συνέχεια παρατίθενται κάποιες βασικές έννοιες και ορισμοί των Μαρκοβιανών αλυσίδων.

<u>Ορισμός 2.1.</u>

Έστω ο χώρος καταστάσεων $S = (0, 1, 2, \dots, k)$ και η Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n\}$ με τιμές από τον S. Οι υπό συνθήκη πιθανότητες

$$p_{ij}(n) = P(X_n = j | X_{n-1} = i) \quad \mu\varepsilon\ i, j = 1, 2, \dots, k \quad \kappa\alpha\iota\ n = 1, 2, \dots,$$

που εκφράζουν την πιθανότητα η Μαρκοβιανή αλυσίδα τη χρονική στιγμή n να μεταβεί στην κατάσταση j, δεδομένου ότι την προηγούμενη χρονική στιγμή $n-1$ βρισκόταν στην κατάσταση i, ονομάζονται <u>πιθανότητες μετάβασης</u> της Μαρκοβιανής αλυσίδας. Ο πλέον βολικός τρόπος αναφοράς σε αυτές τις πιθανότητες είναι με τη μορφή ενός πίνακα $P(n)$ ο οποίος έχει πεπερασμένες διαστάσεις όταν ο χώρος καταστάσεων S είναι πεπερασμένος. Δηλαδή

$$P(n) = \begin{pmatrix} p_{11}(n) & p_{12}(n) & \cdots & p_{1k}(n) \\ p_{21}(n) & p_{22}(n) & \cdots & p_{2k}(n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{k1}(n) & p_{k2}(n) & \cdots & p_{kk}(n) \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας $P(n)$ ονομάζεται πίνακας μετάβασης της Μαρκοβιανής αλυσίδας για το διάστημα $[n-1, n)$.

Ορισμός 2.2.

Μια Μαρκοβιανή αλυσίδα στην οποία η πιθανότητα μετάβασης από μια κατάσταση σε μια άλλη είναι ανεξάρτητη του χρόνου μετάβασης λέγεται στατική ή ομογενής. Τότε

$$p_{ij} = P(X_n = j | X_{n-1} = i) \quad \mu\varepsilon\ i, j = 1, 2, \dots, k \quad \kappa\alpha\iota\ n = 1, 2, \dots,$$

Και ο αντίστοιχος πίνακας μετάβασης είναι

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kk} \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας πιθανοτήτων μεταβάσεων P (ή $P(n)$) είναι ένας στοχαστικός πίνακας, με την έννοια ότι:

- Τα στοιχεία του είναι μη αρνητικά, δηλαδή $p_{ij} \geq 0$ για κάθε $i, j \in S$
- Τα αθροίσματα των γραμμών του είναι ίσα με ένα, δηλαδή $\sum_{j \in S} p_{ij} = 1$, για κάθε $i \in S$

Στη συνέχεια του κεφαλαίου, όταν θα αναφερόμαστε σε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα, θα εννοούμε ότι πρόκειται για μια ομογενή αλυσίδα.

Ορισμός 2.3.

Για κάθε δυο ακεραίους $m, k \geq 0$, ο πίνακας $P(m, m+k)$ με στοιχεία

$$p_{ij}(m, m+k) = P(X_{m+k} = j | X_m = i), \quad \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ i, j \in S$$

ονομάζεται πίνακας πιθανοτήτων μεταβάσεων σε k βήματα και τα στοιχεία του ονομάζονται πιθανότητες μεταβάσεων σε k βήματα μεταξύ των καταστάσεων της Μαρκοβιανής αλυσίδας.

Προφανώς $P(m, m+1) = P$. Επιπλέον όμως, ο $P(m, m+k)$ δεν εξαρτάται από το m όπως συνεπάγεται από τις εξισώσεις Chapman-Kolmogorov. Συγκεκριμένα από τις εξισώσεις αυτές παίρνουμε ότι:

$$P(m, m+k) = P(0, k) = P^k$$

Αν επιπλέον, για κάθε χρόνο $n = 0,1,2,\ldots$, συμβολίσουμε με $\mu^{(n)} = \left(\mu_i{}^{(n)} : i \in S\right)$ το διάνυσμα πιθανότητας της κατανομής της διακριτής τυχαίας μεταβλητής X_n δηλαδή, $\mu_i{}^{(n)} = P(X_n = i)$, για κάθε $i \in S$ και κάθε $n = 0,1,2,\ldots$, τότε έχουμε το εξής αποτέλεσμα:

$$\mu^{(m+k)} = \mu^{(k)} P^k \quad \text{και άρα} \quad \mu^{(k)} = \mu^{(0)} P^k$$

<u>Ορισμός 2.4.</u>

Δοθέντων των καταστάσεων $i, j \in S$ και του χρόνου $n \geq 1$, συμβολίζουμε την πιθανότητα ώστε, όταν η αλυσίδα αρχίσει στην κατάσταση i, να <u>επισκεφτεί στο χρόνο n για πρώτη φορά την κατάσταση j</u>, με

$$f_{ij}(n) = P(X_n = j, X_{n-1} \neq j, \ldots, X_1 \neq j, | X_0 = i)$$

και την πιθανότητα ώστε, όταν η αλυσίδα αρχίσει στην κατάσταση i, να <u>επισκεφθεί κάποτε την κατάσταση j για πρώτη φορά</u> με

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}(n)$$

<u>Ορισμός 2.5.</u>

Μια κατάσταση $i \in S$ καλείται <u>επαναληπτική</u> αν οπωσδήποτε η αλυσίδα επιστρέφει κάποια (μελλοντική) χρονική στιγμή στην κατάσταση αυτή, από την οποία έχει ξεκινήσει αρχικά, δηλαδή

$$f_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}(n) = 1$$

Αν όμως το ενδεχόμενο αυτό δεν είναι σίγουρο, δηλαδή η προηγούμενη πιθανότητα είναι αυστηρά μικρότερη της μονάδας, η κατάσταση i ονομάζεται παροδική.

Στην περίπτωση που η κατάσταση i είναι επαναληπτική έχει νόημα να συζητάμε για το μέσο χρόνο της πρώτης επαναφοράς ο οποίος προκύπτει από τη σχέση

$$\tau_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}(n)$$

εάν τ_i είναι πεπερασμένος αριθμός τότε η κατάσταση i καλείται θετικά (ή μη μηδενικά) επαναληπτική, αλλιώς καλείται ασαφώς (ή μηδενικά) επαναληπτική.

Ορισμός 2.6.

Η περίοδος $d(i)$ μιας κατάστασης $i \in S$ ορίζεται ως

$$d(i) = gcd\{n \geq 1 : p_{ii}(n) > 0\}.$$

Η κατάσταση i ονομάζεται περιοδική αν $d(i) \geq 2$ και απεριοδική αν $d(i) = 1$.

Με άλλα λόγια, η περίοδος της κατάστασης i είναι ο μεγαλύτερος κοινός διαιρέτης του συνόλου των χρόνων, για τους οποίους η αλυσίδα μπορεί (δηλαδή με πιθανότητα μη μηδενική) να επιστρέψει ξανά στην κατάσταση i από την οποία ξεκινά.

Επιπλέον, μια αλυσίδα λέγεται απεριοδική αν όλες οι καταστάσεις της είναι απεριοδικές, διαφορετικά η αλυσίδα λέγεται περιοδική.

Ορισμός 2.7.

Έστω δυο καταστάσεις $i, j \in S$. Τότε λέμε ότι η κατάσταση i επικοινωνεί με την κατάσταση j, αν υπάρχει χρόνος $n \geq 1$ τέτοιος ώστε $p_{ij}(n) > 0$.

Όταν η κατάσταση i επικοινωνεί με την κατάσταση j, γράφουμε $i \to j$. Αν επιπλέον και η κατάσταση j επικοινωνεί με την κατάσταση i, γράφουμε $i \leftrightarrow j$ και λέμε ότι οι καταστάσεις i και j επικοινωνούν μεταξύ τους.

Ο ορισμός των επικοινωνούντων μεταξύ τους καταστάσεων εισάγει μια σχέση ισοδυναμίας " $\leftrightarrow$ " στο $S \times S$.

Ορισμός 2.8.

Μια Μαρκοβιανή αλυσίδα ονομάζεται αδιαχώριστη αν κάθε δυο καταστάσεις της $i, j \in S$ επικοινωνούν μεταξύ τους (δηλαδή, $i \leftrightarrow j$). Διαφορετικά η αλυσίδα ονομάζεται διαχωρίσιμη.

Με άλλα λόγια, μια Μαρκοβιανή αλυσίδα ονομάζεται αδιαχώριστη, αν ανεξαρτήτως της κατάστασης που ξεκινάει, θα επισκεφτεί κάθε άλλη κατάσταση σε πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων με θετική πιθανότητα.

Ορισμός 2.9.

Ένα διάνυσμα σειράς $\pi = (\pi_j : j \in S)$ λέγεται ότι αποτελεί μια στάσιμη κατανομή της Μαρκοβιανής αλυσίδας, αν το π ικανοποιεί τις εξής σχέσεις:

- $\pi_j \geq 0$, για κάθε $j \in S$ και $\sum_{j \in S} \pi_j = 1$
- $\pi P = \pi$, με την έννοια ότι ισχύει η εξής εξίσωση:

$$\sum_{i \in S} \pi_i P_{ij} = \pi_j, \text{ για κάθε } j \in S$$

Παρατηρούμε ότι η πρώτη συνθήκη μας λέει ότι το π είναι ένα διάνυσμα πιθανότητας, ενώ η δεύτερη συνεπάγεται για το διάνυσμα πιθανότητας της κατανομής της διακριτής τυχαίας μεταβλητής X_n ότι αν $\mu^{(0)} = \pi$, τότε $\mu^{(n)} = \pi P^n = \pi$, για κάθε $n > 0$, δηλαδή, το διάνυσμα π αποτελεί ένα αναλλοίωτο μέτρο πιθανότητας για τη Μαρκοβιανή αλυσίδα.

Αν όλες οι καταστάσεις μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας είναι είτε παροδικές είτε ασαφώς επαναληπτικές, τότε δεν υπάρχει καμία στάσιμη κατανομή για την αλυσίδα αυτή.

Αν υπάρχει μια στάσιμη κατανομή π, τότε όλες οι καταστάσεις i με $\pi_i > 0$ είναι επαναληπτικές.

Κάθε αδιαχώριστη Μαρκοβιανή αλυσίδα έχει μια μοναδική στάσιμη κατανομή αν και μόνο αν όλες οι καταστάσεις είναι θετικά επαναληπτικές. Στην περίπτωση αυτή, η μοναδική στάσιμη κατανομή π δίνεται ως:

$$\pi_i = \tau_i^{-1}, \quad \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ i \in S$$

Όπου τ_i είναι ο μέσος χρόνος επαναφοράς της κατάστασης i.

<u>Ορισμός 2.10.</u>

Μια κατάσταση i ονομάζεται <u>εργοδική,</u> αν είναι θετικά επαναληπτική και απεριοδική και μια μαρκοβιανή αλυσίδα ονομάζεται εργοδική, αν όλες οι καταστάσεις της είναι εργοδικές.

Κάθε εργοδική και αδιαχώριστη Μαρκοβιανή αλυσίδα έχει μοναδική στάσιμη κατανομή, $\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = \tau_j^{-1}, \quad \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ i,j \in S.$

Γενικά όμως μπορεί να αποδειχθεί ότι μια αδιαχώριστη και απεριοδική Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι εργοδική αν και μόνο αν έχει μια μοναδική στάσιμη κατανομή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Ανάλυση Αξιοπιστίας

3.1. Εισαγωγή

Η διατύπωση του προβλήματος της αξιοπιστίας ανάγεται στο εξής φιλοσοφικό ερώτημα: "Πόσο σίγουρος είμαι για αυτό που ισχυρίζομαι;". Δυστυχώς ή ευτυχώς, το μόνο βέβαιο που προκύπτει από αυτό το ερώτημα είναι ότι κανείς ποτέ δεν μπορεί να είναι απολύτως σίγουρος για αυτό που ισχυρίζεται. Σε μια φιλοσοφική συζήτηση, η αβεβαιότητα δεν ενοχλεί, αντίθετα αποτελεί το σπόρο που της δίνει περιεχόμενο. Ωστόσο, στο χώρο του πολιτικού μηχανικού, οι ισχυρισμοί του είναι καταδικασμένοι να δοκιμάζονται πάντα στην πράξη παράγοντας αγαθό κατά την επιτυχία τους και τραγωδία κατά την αποτυχία τους. Έτσι καθίσταται επιτακτική η ανάγκη προσέγγισης του παραπάνω ερωτήματος με μια προσπάθεια ποσοτικοποίησης των αβεβαιοτήτων που υπεισέρχονται στο σχεδιασμό μιας κατασκευής, στην κατεύθυνση της ικανοποίησης της απαίτησης για όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ασφάλεια.

Ο επιστημονικός κλάδος που ασχολείται με το αντικείμενο αυτό ονομάζεται ***ανάλυση αξιοπιστίας*** και έχει ως στόχο τον υπολογισμό της πιθανότητας μη αστοχίας της κατασκευής υπό την παραδοχή ότι τόσο οι δράσεις όσο και οι αντιστάσεις της είναι μεγέθη πιθανοτικά. Η ανάλυση αξιοπιστίας οδηγεί σε μέτρα ασφαλείας (κανονισμούς) που ο μηχανικός πρέπει να λάβει υπ' όψιν του έτσι ώστε να είναι σίγουρος ότι η κατασκευή θα ανταπεξέλθει στις απαιτήσεις για τις οποίες σχεδιάστηκε.

Υπάρχουν διαφορετικά επίπεδα ανάλυσης αξιοπιστίας μιας κατασκευής, τα οποία χαρακτηρίζονται από την έκταση της πληροφορίας που υπάρχει και χρησιμοποιείται γύρω από το δομικό πρόβλημα. Συγκεκριμένα η ανάλυση αξιοπιστίας μιας κατασκευής μπορεί να διακριθεί σε τέσσερα επίπεδα, ανάλογα με το βαθμό πολυπλοκότητας της διατύπωσης της, τα οποία είναι τα εξής:

Επίπεδο Ι: Οι μέθοδοι αξιοπιστίας που χρησιμοποιούν μόνο μια χαρακτηριστική τιμή για κάθε μια αβέβαιη παράμετρο και στη συνέχεια εισάγουν ένα σύνολο από μερικούς συντελεστές ασφαλείας προκειμένου να παραχθεί μια βάση για τον σχεδιασμό καλούνται μέθοδοι επιπέδου Ι. Σε αυτό το επίπεδο δεν υπάρχουν

υπολογισμοί για την πιθανότητα αστοχίας συνεπώς θα λέγαμε ότι δεν μπορεί να χαρακτηριστεί ως πραγματική ανάλυση αξιοπιστίας.

Επίπεδο ΙΙ: Οι μέθοδοι αξιοπιστίας που χρησιμοποιούν δύο τιμές για κάθε στοχαστική παράμετρο, συνήθως τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση, και που περιλαμβάνουν και ένα μέτρο συσχέτισης μεταξύ των παραμέτρων, συνήθως την συνδιασπορά, καλούνται μέθοδοι επιπέδου ΙΙ. Η ανάλυση αξιοπιστίας στο δεύτερο αυτό επίπεδο αποδεικνύεται ότι είναι ακριβής και αποτελεσματική μόνο για απλές κατασκευές, όπου είναι δυνατή η προσέγγιση της επιφάνειας αστοχίας με αναλυτικές εκφράσεις.

Επίπεδο ΙΙΙ: Οι μέθοδοι αξιοπιστίας που βασίζονται στη συνάρτηση κοινής κατανομής πιθανότητας (joint probability distribution) όλων των τυχαίων μεταβλητών που περιγράφουν τις αβεβαιότητες που υπεισέρχονται σε μια κατασκευή, καλούνται μέθοδοι επιπέδου ΙΙΙ. Πρόκειται για μεθόδους καθαρά στατιστικής ανάλυσης κατά τις οποίες οι έλεγχοι για την ασφάλεια γίνονται για όλο το σύστημα της κατασκευής με ταυτόχρονη χρήση των κατανομών πιθανότητας των μεταβλητών του συστήματος.

Επίπεδο ΙV: Μια μέθοδος αξιοπιστίας που συγκρίνει ένα υποψήφιο δομικό σχεδιασμό με ένα δομικό σχεδιασμό αναφοράς σύμφωνα με τις αρχές οικονομικής ανάλυσης από μηχανική άποψη κάτω από συνθήκες αβεβαιότητας και επιπλέον εξετάζει τα κόστη και τα οφέλη της κατασκευής, τη συντήρηση και την επισκευή της, τις επιπτώσεις της αστοχίας της κλπ. καλείται μέθοδος επιπέδου ΙV. Τέτοιες μέθοδοι είναι κατάλληλες για κατασκευές που είναι υψίστης οικονομικής σημασίας.

3.2. Χρονικά Ανεξάρτητη Ανάλυση Αξιοπιστίας

Η έμφυτη πιθανοτική φύση των παραμέτρων σχεδιασμού, όπως οι ιδιότητες των υλικών, τα γεωμετρικά δεδομένα και οι συνθήκες φόρτισης που υπεισέρχονται στην ανάλυση των κατασκευών, είναι ένας σημαντικός παράγοντας που επηρεάζει την ασφάλεια των κατασκευών αφού υποδηλώνει ότι πάντα θα υπάρχουν αβεβαιότητες ως προς τις τιμές αυτών των παραμέτρων. Είναι συνεπώς απαραίτητη η αναζήτηση μέτρων ασφαλείας, όσο το δυνατόν περισσότερο επιστημονικά τεκμηριωμένων, τα οποία πρέπει να συνοδεύουν τις αποφάσεις που λαμβάνει ο μηχανικός.

Η αξιοπιστία μιας κατασκευής L ορίζεται ως το συμπληρωματικό της πιθανότητας αστοχίας και παριστά την πιθανότητα μη αστοχίας μιας κατασκευής.

$$L = 1 - P_f \tag{3.1}$$

Όπου P_f είναι η πιθανότητα αστοχίας της κατασκευής. Στην περίπτωση της χρονικά ανεξάρτητης ανάλυσης αξιοπιστίας, όπου οι μεταβλητές που υπεισέρχονται είναι ανεξάρτητες του χρόνου και ανεξάρτητες μεταξύ τους, η πιθανότητα αστοχίας μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$P_f = P(R \leq S) = P(R \leq x|_{S=x}) = \sum_x [P(R \leq x|_{S=x}) \cdot P(S = x)] \Rightarrow$$

$$P_f = \int_{-\infty}^{\infty} F_R(x) f_S(x) dx \tag{3.2}$$

όπου R είναι η μεταβλητή που εκφράζει την αντίσταση, S είναι η μεταβλητή που εκφράζει την δράση, $F_R(x)$ είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της R και $f_S(x)$ η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της S. Οι μεταβλητές R, S είναι εκφρασμένες σε έναν κοινό άξονα x, ο οποίος παριστάνει το σύνολο των τιμών που αυτές μπορούν να πάρουν.

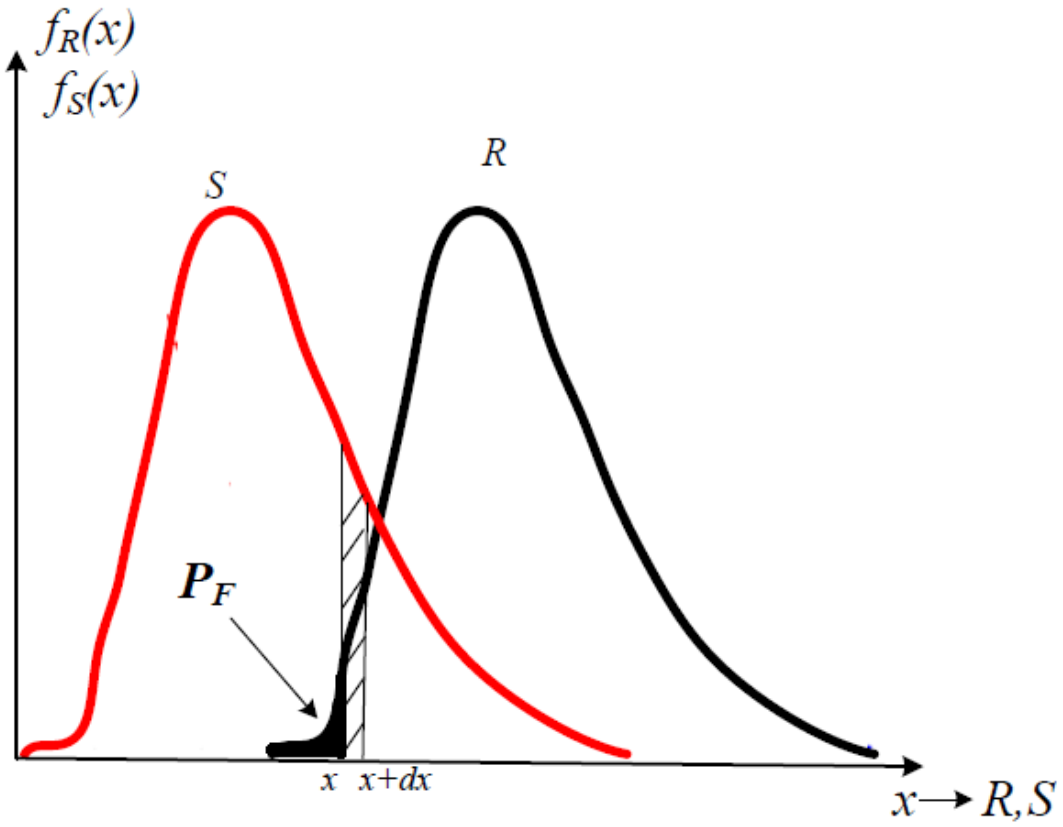
Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της R υπολογίζεται από τη σχέση:

$$F_R(x) = \int_{-\infty}^{x} f_R(R) dR \tag{3.3}$$

όπου $f_R(R)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της μεταβλητής R.

Με βάση τη σχέση (3.3) η (3.2) γίνεται:

$$P_f = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{S} f_R(R) f_S(S) dR dS \tag{3.4}$$



Σχήμα 3.1. Σχηματική απεικόνιση της πιθανότητας να είναι η αντοχή R μικρότερη από την τιμή x της δράσης S.

Στο παραπάνω σχήμα παρουσιάζεται η γεωμετρική ερμηνεία της πιθανότητας αστοχίας. Για μια δεδομένη τιμή x της δράσης S, η πιθανότητα αστοχίας, P_f, είναι το γινόμενο της μαυρισμένης επιφάνειας, το εμβαδόν της οποίας είναι ίσο με την τιμή $F_R(x)$, επί τη γραμμοσκιασμένη επιφάνεια η οποία παριστάνει την τιμή $f_S(x)dx$. Σύμφωνα με τη σχέση (3.2), η συνολική πιθανότητα αστοχίας είναι το άθροισμα των γινομένων των δύο αυτών επιφανειών για όλα τα x.

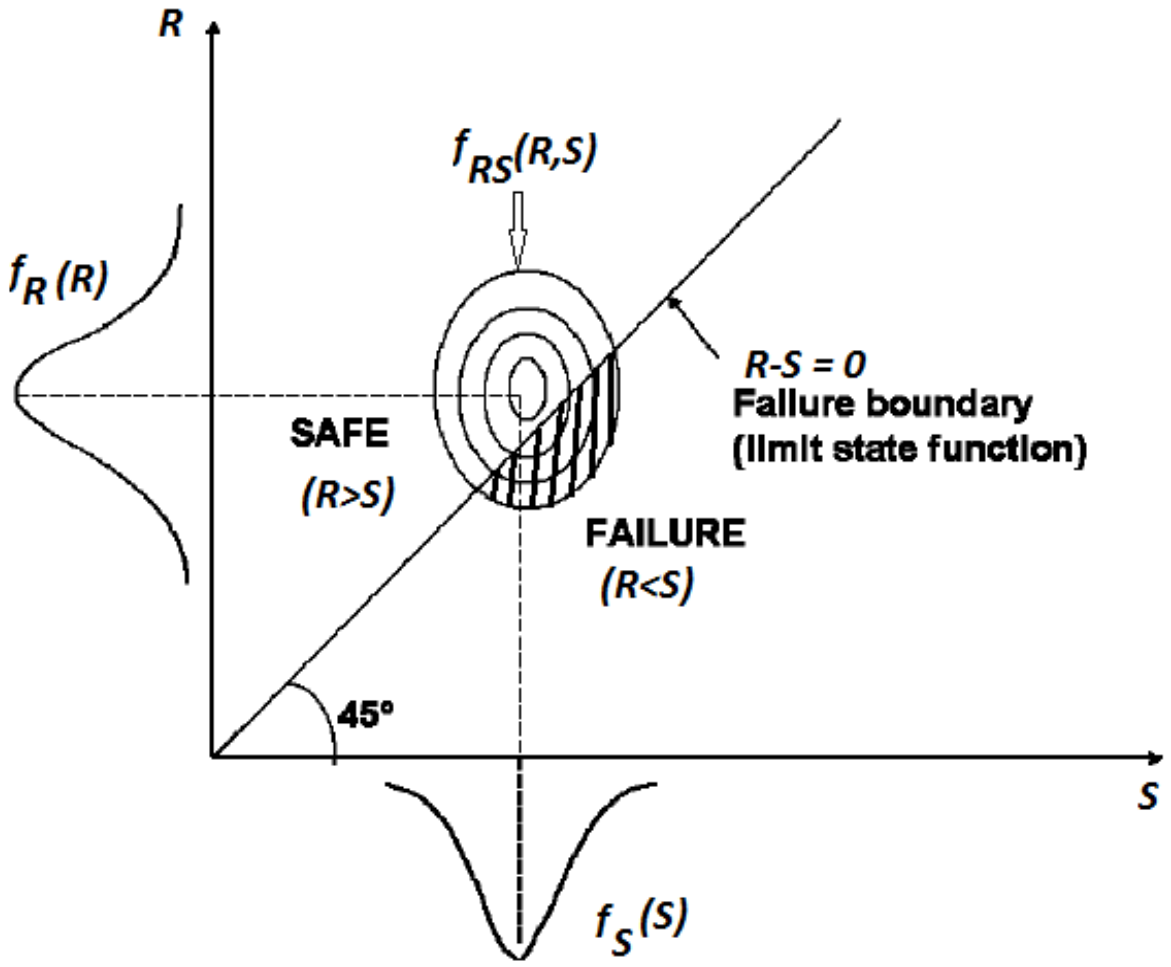
Η διατύπωση της πιθανότητας αστοχίας, P_f, μπορεί να εκφραστεί εναλλακτικά ως εξής: Ορίζουμε μια συνάρτηση αστοχίας ή αλλιώς ***συνάρτηση οριακής κατάστασης*** (limit state function), $G(R,S)$, εκφρασμένη στο χώρο των μεταβλητών R και S, που συνήθως διατυπώνεται ως $G(R,S) = R - S$. Η συνάρτηση αυτή χωρίζει τον παραμετρικό χώρο σε μια ασφαλή περιοχή αν $G(R,S) > 0$ και σε μια μη ασφαλή περιοχή αν $G(R,S) \leq 0$. Τότε η σχέση (3.4) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$P_f = \int_{G(R,S)\leq 0} f_{RS}(R,S)dRdS$$

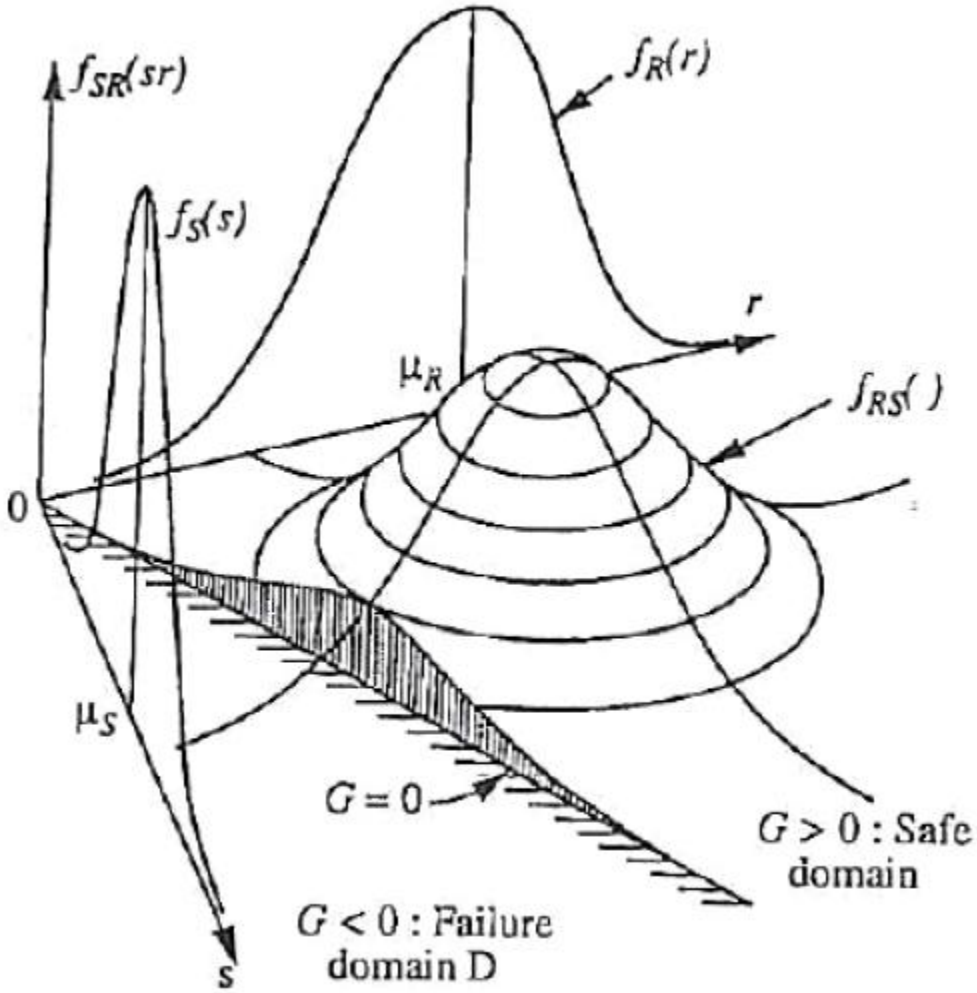
και στην περίπτωση που οι μεταβλητές R και S είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους ως

$$P_f = \int_{G(R,S)\leq 0} f_{RS}(R,S)dRdS = \int_{G(R,S)\leq 0} f_R(R)f_S(S)dRdS \qquad (3.5)$$

όπου $f_{RS}(R,S)$ είναι η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των μεταβλητών R και S.



Σχήμα 3.2. Σχηματική απεικόνιση της πιθανότητας αστοχίας



Σχήμα 3.3. Τρισδιάστατη απεικόνιση μιας πιθανής κοινής συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας $f_{RS}(R,S)$ και της συνάρτησης οριακής κατάστασης που χωρίζει τον παραμετρικό χώρο σε μια ασφαλή και σε μια μη ασφαλή περιοχή.

Στο σχήμα (3.2.), η πιθανότητα αστοχίας περιγράφεται από τη γραμμοσκιασμένη περιοχή που ορίζεται από τη συνάρτηση οριακής κατάστασης, $(G(R,S) = 0)$ και την κοινή δισδιάστατη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, $f_{RS}(R,S)$, προς το μέρος της μη ασφαλούς περιοχής, δηλαδή της περιοχής όπου ισχύει η ανισότητα $G(R,S) \leq 0$.

Στη στοιχειώδη περίπτωση όπου οι αβέβαιες παράμετροι είναι δύο και ανεξάρτητες μεταξύ τους ο υπολογισμός του ολοκληρώματος της σχέσης (3.5) είναι απλός. Ωστόσο στη γενικότερη περίπτωση πολύπλοκων κατασκευών όπου εμπλέκεται ένας μεγάλος αριθμός βασικών και συσχετιζόμενων τυχαίων μεταβλητών ο υπολογισμός του ολοκληρώματος περιπλέκεται σημαντικά.

Συγκεκριμένα εκφράζοντας τη συνάρτηση αστοχίας ως $G(X)$, όπου $X = [X_1, \dots, X_n]$ είναι το διάνυσμα των βασικών τυχαίων μεταβλητών, η σχέση (3.5) πλέον γράφεται ως εξής:

$$P_f = \int_{G(X) \leq 0} f_X(X) dX \tag{3.6}$$

όπου $f_X(X)$ είναι η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας. Ο υπολογισμός του παραπάνω ολοκληρώματος καθίσταται πολύπλοκος έως αδύνατος στην περίπτωση που η $G(X)$ είναι μια ανομοιογενής επιφάνεια με μη γραμμικά όρια και η οποία δεν μπορεί να προσεγγιστεί από μια αναλυτική έκφραση.

Εν κατακλείδι, διάφορες μέθοδοι επίλυσης του προβλήματος της αξιοπιστίας έχουν αναπτυχθεί κατά τη διάρκεια των τελευταίων δεκαετιών. Γενικά μπορούν να διακριθούν σε τρεις κατηγορίες:

- Αναλυτικές Μέθοδοι
- Προσεγγιστικές Μέθοδοι
- Μέθοδοι Προσομοίωσης

Οι αναλυτικές μέθοδοι μπορούν να εφαρμοστούν μόνο σε απλές κατασκευές με γραμμικώς ελαστική συμπεριφορά και υπό στατική φόρτιση και συνεπώς αδυνατούν να δώσουν λύση στα πραγματικά προβλήματα. Ωστόσο έβαλαν τις βάσεις για τη διατύπωση των άλλων δυο κατηγοριών, στις οποίες έχει επικεντρωθεί μεγαλύτερη ερευνητική προσπάθεια.

Οι προσεγγιστικές μέθοδοι πρώτης και δεύτερης τάξεως (First Order Reliability Method (FORM), Second Order Reliability Method (SORM) για τις οποίες δεν θα γίνει κάποια περαιτέρω αναφορά) είναι μέθοδοι αξιοπιστίας επιπέδου ΙΙ. Δηλαδή, απαιτούν γνώση μόνο των μέσων τιμών και των διασπορών των βασικών μεταβλητών ενώ είναι απαραίτητος και ο ορισμός μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης οριακής κατάστασης (συνάρτηση αστοχίας). Αποδεικνύονται ότι είναι ιδιαίτερα αποτελεσματικές μόνο για απλές κατασκευές όπου είναι δυνατή η προσέγγιση της συνάρτησης οριακής κατάστασης με αναλυτικές μεθόδους.

Σε μεγάλα και πολύπλοκα συστήματα με μεγάλο αριθμό βασικών μεταβλητών οι μέθοδοι της προσομοίωσης (simulation methods), οι οποίες είναι μέθοδοι αξιοπιστίας επιπέδου III, παρουσιάζουν σαφή πλεονεκτήματα. Στην πραγματικότητα, οι μέθοδοι αυτές είναι οι μόνες ικανές να χειριστούν ρεαλιστικά προβλήματα αξιοπιστίας των κατασκευών όπου απαιτούνται μη γραμμικές αναλύσεις. Σε αυτές τις μεθόδους απαιτείται ένα μεγάλο δείγμα ως προς τις τιμές των τυχαίων (βασικών) μεταβλητών και άρα ισοδύναμα ένας μεγάλος αριθμός αναλύσεων, αφού η λύση προκύπτει ως προϊόν στατιστικής σύγκλισης. Αυτό παράλληλα είναι και το βασικό τους μειονέκτημα που τις καθιστά σχεδόν απαγορευτικές, από πλευράς υπολογιστικού χρόνου και ισχύος. Οι διάφορες μέθοδοι προσομοίωσης διαφέρουν μεταξύ τους ως προς τον τρόπο με τον οποίο δημιουργούν τα δείγματα, δηλαδή ως προς τον τρόπο δειγματοληψίας τους.

3.3. Βασική Προσομοίωση Monte Carlo

Η προσομοίωση Monte Carlo (MCS) γενικά, είναι μια τεχνική που προσπαθεί να επιλύσει ένα μοντέλο με τυχαίους ή ψευδοτυχαίους αριθμούς. Ο όρος “Monte Carlo” εισήχθη από τους John von Neumann και Stan Ulam κατά τη διάρκεια του δεύτερου παγκοσμίου πολέμου σαν κωδική ονομασία για τη μυστική εργασία που γινόταν στα εργαστήρια του Los Alamos και αφορούσε στη συμπεριφορά διαχεόμενων νετρονίων σε ραδιενεργό υλικό. Από τότε η μέθοδος Monte Carlo έχει χρησιμοποιηθεί για την επίλυση πολυδιάστατων ολοκληρωμάτων σε ασαφή χωρία, ολοκληρωτικών εξισώσεων και συστημάτων διαφορικών εξισώσεων όταν οι αναλυτικές μέθοδοι αδυνατούν να δώσουν λύση.

Στην παράγραφο αυτή θα αναφερθούμε στη ***βασική προσομοίωση Monte Carlo***, όπου από μαθηματική άποψη μας επιτρέπει να εκτιμήσουμε την αναμενόμενη (μέση) τιμή μιας ποσότητας που μας ενδιαφέρει. Πιο συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι στόχος μας είναι να εκτιμήσουμε την αναμενόμενη τιμή $E_\pi[h(x)]$ μιας συνάρτησης $h: X \to R$ όπου $x = [x_1, \dots, x_d]$ είναι το διάνυσμα των τυχαίων μεταβλητών με $x \in X \subset R^d$ και κοινή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $\pi(x)$. Γνωρίζουμε ότι η ακριβής τιμή προκύπτει από τη σχέση:

$$E_\pi[h(x)] = \int_X h(x)\pi(x)\,dx \tag{3.7}$$

Η ιδέα πίσω από τη βασική προσομοίωση Monte Carlo είναι μια απλή εφαρμογή του ***νόμου των μεγάλων αριθμών*** που αναφέρει ότι, αν $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)}$ είναι ανεξάρτητα και πανομοιότυπα κατανεμημένα (ισόνομα) δείγματα, σύμφωνα με την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $\pi(x)$, τότε η δειγματική μέση τιμή $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} h\left(x^{(i)}\right)$ συγκλίνει στην πραγματική μέση τιμή $E_\pi[h(x)]$ καθώς το $N \to \infty$.

Επομένως, αν ο αριθμός των δειγμάτων N είναι αρκετά μεγάλος η πραγματική μέση τιμή μπορεί να εκτιμηθεί με μεγάλη ακρίβεια από την αντίστοιχη δειγματική μέση τιμή δηλαδή:

$$E_\pi[h(x)] \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} h\left(x^{(i)}\right) \tag{3.8}$$

Η σημασία της βασικής προσομοίωσης Monte Carlo στο πρόβλημα της αξιοπιστίας, δηλαδή στην επίλυση του ολοκληρώματος $\int_F \pi(x)dx$ (ίδια σχέση με (3.6) όπου F υποδηλώνει την περιοχή αστοχίας στον παραμετρικό χώρο X), προκύπτει από την απλή παρατήρηση ότι η πιθανότητα αστοχίας P_f μπορεί να γραφεί ως η αναμενόμενη τιμή (προσδοκία) ενός δείκτη $I_F(x)$.

Όπου $I_F(x) = \begin{cases} 1, & \alpha\nu\ x \in F \\ 0, & \alpha\nu\ x \notin F \end{cases}$

Δηλαδή,

$$P_F = \int_F \pi(x)dx = \int_X I_F(x)\pi(x)dx = E_\pi[I_F(x)] \tag{3.9}$$

όπου X, όπως αναφέραμε, ορίζει τον παραμετρικό χώρο. Επομένως, η πιθανότητα αστοχίας P_F μπορεί να εκτιμηθεί χρησιμοποιώντας τη βασική προσομοίωση Monte Carlo, δηλαδή σύμφωνα με τη σχέση (3.8), ως εξής:

$$P_F \approx \hat{P}_F^{MCS} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} I_F\left(x^{(i)}\right) \tag{3.10}$$

όπου $x^{(1)}, \dots, x^{(N)}$ είναι ανεξάρτητα και πανομοιότυπα κατανεμημένα δείγματα προσομοιωμένα σύμφωνα με την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $\pi(x)$.

Έτσι η εκτίμηση της πιθανότητας αστοχίας P_F που προκύπτει από τη βασική προσομοίωση Monte Carlo είναι απλά το κλάσμα του συνολικού αριθμού των δειγμάτων που οδηγούν στην αστοχία $\sum_{i=1}^{N} I_F\left(x^{(i)}\right)$, δηλαδή δείγματα που οδηγούν σε μια μη αποδεκτή κατάσταση της κατασκευής, προς το συνολικό αριθμό των δειγμάτων, N.

Παρατηρούμε ότι η $\hat{P}_F^{MCS}$ αποτελεί μια <u>αμερόληπτη εκτιμήτρια</u> της πιθανότητας αστοχίας δηλαδή όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η εκτιμήτρια $\hat{P}_F^{MCS}$ είναι κατά μέσο όρο ίση με την πραγματική τιμή P_F. Μαθηματικά αυτό σημαίνει $E\left[\hat{P}_F^{MCS}\right] = P_F$. Πράγματι, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $x^{(i)} \sim \pi(x)$ καθώς και τη σχέση (3.9) προκύπτει:

$$\begin{aligned} E\left[\hat{P}_F^{MCS}\right] &= E\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} I_F\left(x^{(i)}\right)\right] \\ &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E\left[I_F\left(x^{(i)}\right)\right] \\ &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E_\pi\left[I_F(x)\right] = P_F \end{aligned} \tag{3.11}$$

Το κύριο πλεονέκτημα της βασικής προσομοίωσης Monte Carlo σε σχέση με την αριθμητική ολοκλήρωση είναι ότι δεν εξαρτάται από τις d διαστάσεις του προβλήματος.

Στην ανάλυση αξιοπιστίας, το τυπικό μέτρο της ακρίβειας μιας αμερόληπτης εκτιμήτριας $\hat{P}_F$ της πιθανότητας αστοχίας είναι ο <u>συντελεστής μεταβλητότητας</u> της (coefficient of variation (c.o.v)), ο οποίος συμβολίζεται ως $\delta(\hat{P}_F)$ και ορίζεται ως ο λόγος της τυπικής απόκλισης της $\hat{P}_F$ προς τη μέση τιμή της $\hat{P}_F$. Δηλαδή :

$$\delta(\hat{P}_F) = \frac{\sqrt{Var[\hat{P}_F]}}{E[\hat{P}_F]} \tag{3.12}$$

όπου Var δηλώνει τη διακύμανση της $\hat{P}_F$. Όσο μικρότερος είναι συντελεστής μεταβλητότητας τόσο πιο ακριβής είναι η εκτίμηση $\hat{P}_F$.

Είναι απλό να υπολογίσουμε τη <u>διακύμανση</u> της εκτίμησης που προκύπτει από τη βασική προσομοίωση Monte Carlo, συγκεκριμένα:

$$\begin{aligned} Var[\hat{P}_F^{MCS}] &= Var\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} I_F(x^{(i)})\right] \\ &= \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N} Var[I_F(x^{(i)})] \\ &= \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\left(E\left[I_F(x^{(i)})^2\right] - E[I_F(x^{(i)})]^2\right) \\ &= \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}(P_F - P_F^2) = \frac{P_F(1-P_F)}{N} \end{aligned} \tag{3.13}$$

Στην παραπάνω σχέση χρησιμοποιήθηκε η ταυτότητα $I_F(x)^2 = I_F(x)$. Από τις σχέσεις (3.11) και (3.13) η (3.12) που υπολογίζει τον συντελεστή μεταβλητότητας της εκτιμήτριας γίνεται:

$$\delta(\hat{P}_F^{MCS}) = \frac{\sqrt{Var[\hat{P}_F^{MCS}]}}{E[\hat{P}_F^{MCS}]} = \sqrt{\frac{1-P_F}{NP_F}}\,. \tag{3.14}$$

Όπως παρατηρούμε ο συντελεστής μεταβλητότητας της εκτιμήτριας, $\delta\left(\hat{P}_F^{MCS}\right)$, εξαρτάται μόνο από την πιθανότητα αστοχίας P_F και το συνολικό αριθμό των δειγμάτων N και είναι ανεξάρτητος των διαστάσεων d του προβλήματος. Επομένως όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, αντίθετα από την αριθμητική ολοκλήρωση, η βασική προσομοίωση Monte Carlo δεν υποφέρει από την "κατάρα" της διαστατικότητας (curse of dimensionality) και αποτελεί πολύ ισχυρή μέθοδο για τη διαχείριση πολυδιάστατων προβλημάτων.

Ωστόσο, η μέθοδος αυτή παρουσιάζει ένα πολύ σημαντικό μειονέκτημα. Συγκεκριμένα είναι αναποτελεσματική στην εκτίμηση μικρών πιθανοτήτων αστοχίας. Για τυπικά προβλήματα αξιοπιστίας των κατασκευών, η πιθανότητα αστοχίας P_F είναι πολύ μικρή, $P_F \ll 1$. Με άλλα λόγια, η κατασκευή θεωρείται ότι έχει σχεδιαστεί κατάλληλα έτσι ώστε η αστοχία της να αποτελεί ένα σπάνιο γεγονός.

Αν η P_F είναι πολύ μικρή τότε προκύπτει από τη σχέση (3.14) ότι:

$$\delta\left(\hat{P}_F^{MCS}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{NP_F}} \,. \tag{3.15}$$

Αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός των δειγμάτων N που απαιτούνται για πετύχουμε ένα αποδεκτό επίπεδο ακρίβειας είναι αντιστρόφως ανάλογος από την πιθανότητα αστοχίας P_F και έτσι αυτομάτως πολύ μεγάλος, $N \propto \frac{1}{P_F} \gg 1$.

Για παράδειγμα αν θέλουμε να εκτιμήσουμε την $P_F = 10^{-4}$ με συντελεστή μεταβλητότητας της τάξεως του 10% τότε η βασική προσομοίωση Monte Carlo απαιτεί δείγμα μεγέθους $N = 10^6$. Επιπλέον κάθε αξιολόγηση του δείκτη $I_F\left(x^{(i)}\right)$, $i = 1, \dots, N$ στη σχέση (3.10) απαιτεί την εκτέλεση μιας ανάλυσης της κατασκευής για να ελεγχθεί ένα το δείγμα $x^{(i)}$ ανήκει στην περιοχή αστοχίας ή όχι. Όπως γίνεται εμφανές η υπολογιστική προσπάθεια, που απαιτείται για την εκτέλεση αυτού του πλήθους των αναλύσεων της κατασκευής, είναι σημαντική. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η βασική προσομοίωση Monte Carlo να καθίσταται μη εφαρμόσιμη στην ανάλυση αξιοπιστίας.

Αυτή η ανεπάρκεια της μεθόδου έδωσε κίνητρο στους ερευνητές για την δημιουργία πιο προχωρημένων αλγορίθμων προσομοίωσης για την αποτελεσματική εκτίμηση μικρών πιθανοτήτων αστοχίας σε πολυδιάστατα προβλήματα.

Τέλος, αξίζει να αναφέρουμε ότι παρά το μειονέκτημα της μεγάλης υπολογιστικής ισχύς και του χρόνου που απαιτεί, η βασική προσομοίωση Monte Carlo είναι μια πολύ ισχυρή μέθοδος και συχνά χρησιμοποιείται για τον έλεγχο άλλων μεθόδων αξιοπιστίας.

3.4. Μέθοδοι Markov Chain Monte Carlo

Οι μέθοδοι προσομοίωσης ***Markov Chain Monte Carlo*** είναι μια κατηγορία αλγορίθμων που χρησιμοποιούνται για δειγματοληψία από πολύπλοκες κατανομές οι οποίες δεν μπορούν να δειγματοληπτηθούν απευθείας, τουλάχιστον όχι αποτελεσματικά. Αυτές οι μέθοδοι βασίζονται στο να δημιουργήσουν μια Μαρκοβιανή αλυσίδα η οποία να έχει ως στάσιμη κατανομή την κατανομή που μας ενδιαφέρει, δηλαδή αυτή από την οποία θέλουμε να πάρουμε δείγματα. Δημιουργώντας συνεχώς δείγματα από τη Μαρκοβιανή αλυσίδα, από ένα σημείο και μετά αυτά θα προέρχονται από την κατανομή που μας ενδιαφέρει ωστόσο όμως, όπως είναι αντιληπτό, δεν θα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

Στην παρούσα εργασία, από αυτή την κατηγορία αλγορίθμων, θα ασχοληθούμε μόνο με τον τροποποιημένο αλγόριθμο Metropolis ο οποίος χρησιμοποιείται στη μέθοδο προσομοίωσης που περιγράφεται στο επόμενο κεφάλαιο και η οποία αποτελεί το στόχο αυτής της εργασίας, με σκοπό τη δειγματοληψία από δεσμευμένες κατανομές.

Ο τροποποιημένος αλγόριθμος Metropolis βασίζεται στον πρωτότυπο αλγόριθμο Metropolis και η τροποποίηση έγκειται στο γεγονός ότι παρατηρήθηκε, πως ο δεύτερος δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε πολυδιάστατα προβλήματα καθώς οι καταστάσεις της Μαρκοβιανής αλυσίδας που παράγει συσχετίζονται πολύ ισχυρά.

3.4.1. Τροποποιημένος αλγόριθμος Metropolis

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να δημιουργήσουμε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με στάσιμη κατανομή:

$$\pi(\theta|F) = \frac{\pi(\theta)I_F(\theta)}{P(F)} = \frac{I_F(\theta)}{P(F)}\prod_{k=1}^{d}\pi_k(\theta_k), \qquad (3.16)$$

όπου $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_d] \in \Theta \subset R^d$ αντιπροσωπεύει μια αβέβαιη κατάσταση του συστήματος με κοινή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $\pi(\theta)$, F είναι η περιοχή αστοχίας εντός του παραμετρικού χώρου και I_F είναι ένας δείκτης όπου αν $\theta \in F$ τότε $I_F(\theta) = 1$ ενώ αν $\theta \notin F$ τότε $I_F(\theta) = 0$.

Χωρίς σημαντική απώλεια της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $\pi(\theta) = \prod_{k=1}^{d}\pi_k(\theta_k)$, δηλαδή οι συνιστώσες (τυχαίες μεταβλητές) του θ (τυχαίο διάνυσμα) είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Ο τροποποιημένος αλγόριθμος Metropolis διαφέρει από τον πρωτότυπο ως προς τον τρόπο όπου η υποψήφια κατάσταση $\xi = [\xi_1, \dots, \xi_d]$ δημιουργείται. Αντί να χρησιμοποιεί μια d-διαστάσεων προτεινόμενη κοινή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ώστε να αποκτήσει άμεσα την υποψήφια κατάσταση, χρησιμοποιεί μια ακολουθία από μονοδιάστατες προτεινόμενες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας. Συγκεκριμένα κάθε συνιστώσα ξ_k της υποψήφιας κατάστασης δημιουργείται ξεχωριστά χρησιμοποιώντας μια μονοδιάστατη προτεινόμενη κατανομή η οποία έχει κέντρο την αντίστοιχη συνιστώσα θ_k της τωρινής κατάστασης. Στη συνέχεια με κάποιο κριτήριο, το οποίο παρουσιάζουμε παρακάτω, καταλήγουμε στο αν δεχόμαστε την εκάστοτε υποψήφια συνιστώσα ή όχι και με τι πιθανότητα. Τέλος ελέγχουμε αν η d-διαστάσεων προτεινόμενη κατάσταση, δηλαδή στο σύνολο της, που δημιουργήθηκε με αυτόν τον τρόπο ανήκει στην περιοχή αστοχίας F, αν ναι τότε τη δεχόμαστε ως την επόμενη κατάσταση της Μαρκοβιανής αλυσίδας διαφορετικά απορρίπτεται και τωρινό δείγμα επαναλαμβάνεται. Συνοψίζοντας ο τροποποιημένος αλγόριθμος Metropolis έχει ως εξής [19]:

Τροποποιημένος αλγόριθμος Metropolis

Δεδομένα:

- $\theta^{(1)} \in F$, αρχική κατάσταση της Μαρκοβιανής αλυσίδας.
- N, συνολικός αριθμός καταστάσεων της αλυσίδας, δηλαδή αριθμός δειγμάτων.
- $\pi_1(\cdot), \dots, \pi_d(\cdot)$, περιθωριακές συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των $\theta_1, \dots, \theta_d$, αντίστοιχα.
- $q_1\left(\cdot\,|\theta_1^{(i)}\right), \dots, q_d\left(\cdot\,|\theta_d^{(i)}\right)$, όπου $i = 1, \dots, N$, οι μονοδιάστατες προτεινόμενες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας με κέντρο την αντίστοιχη συνιστώσα της τωρινής κατάστασης, οι οποίες έχουν την ιδιότητα της συμμετρίας $q_k\left(\xi_k^{(i)}|\theta_k^{(i)}\right) = q_k\left(\theta_k^{(i)}|\xi_k^{(i)}\right)$, όπου $k = 1, \dots, d$. Για την επιλογή των προτεινόμενων αυτών κατανομών θα αναφερθούμε αναλυτικά στο επόμενο κεφάλαιο.

Αλγόριθμος:

for $i = 1, \dots, N$

% Δημιούργησε μια υποψήφια κατάσταση ξ

for $k = 1, .., d$

Προσομοίωσε $\tilde{\xi}_k$ από $q_k\left(\cdot\,|\theta_k^{(i)}\right)$

Υπολόγισε το ποσοστό αποδοχής

$$r_k = \frac{\pi_k\left(\tilde{\xi}_k\right)}{\pi_k\left(\theta_k^{(i)}\right)}$$

Δημιούργησε μια τιμή U_k ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $[0,1]$

Όρισε την k συνιστώσα της υποψήφιας κατάστασης με την αποδοχή ή την απόρριψη της $\tilde{\xi}_k$,

$$\xi_k = \begin{cases} \tilde{\xi}_k & \alpha\nu\ U_k < r_k \quad \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ \ min\{1, r_k\} \\ \theta_k^{(i)} & \alpha\nu\ U_k \geq r_k \quad \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ 1 - min\{1, r_k\} \end{cases}$$

end for

Ήλεγξε αν $\xi \in F$ από την ανάλυση του συστήματος και αποδέξου ή απέρριψε το θέτοντας

$$\theta^{(i+1)} = \begin{cases} \xi & \alpha\nu\ \xi \in F \\ \theta^{(i)} & \alpha\nu\ \xi \notin F \end{cases}$$

end for

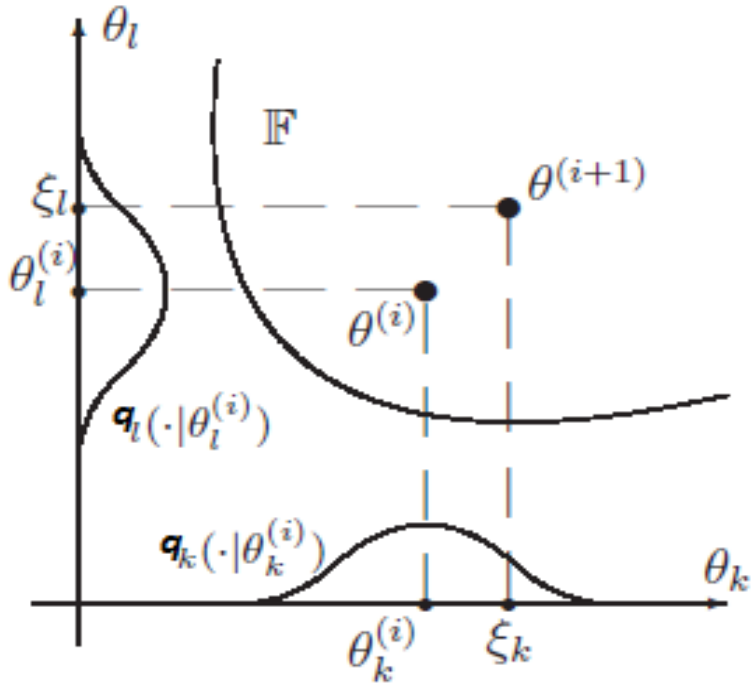
<u>Αποτελέσματα:</u>

- $\theta^{(1)}, \dots, \theta^{(N)}$, N καταστάσεις της Μαρκοβιανής αλυσίδας με στάσιμη κατανομή $\pi(\cdot\,|F)$.

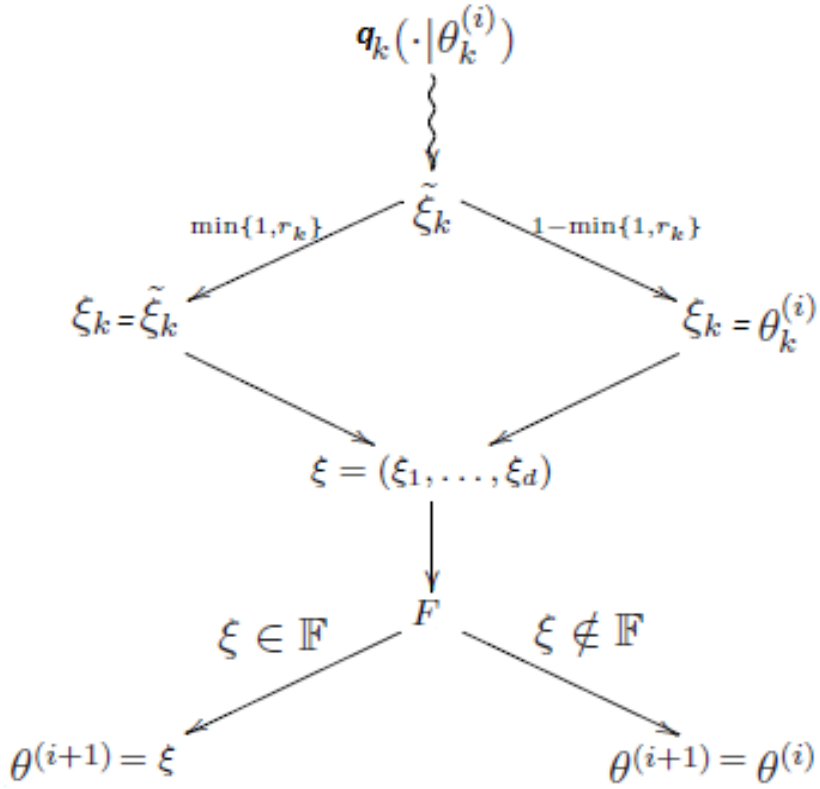
Στα σχήματα (3.4.), (3.5.) παρουσιάζεται σχηματικά ο τροποποιημένος αλγόριθμος Metropolis.

Επομένως αν δημιουργούμε συνεχώς δείγματα από μια Μαρκοβιανή αλυσίδα ξεκινώντας ουσιαστικά από οποιοδήποτε 'σπόρο' $\theta^{(1)} \in F$, τότε για μεγάλο N η κατανομή του $\theta^{(N)}$ θα προσεγγίζει την $\pi(\cdot\,|F)$. Ωστόσο, σε οποιαδήποτε πρακτική εφαρμογή είναι πολύ δύσκολο να ελέγξουμε αν η Μαρκοβιανή αλυσίδα έχει συγκλίνει στη στάσιμη κατανομή της.

Αν τώρα ο 'σπόρος' $\theta^{(1)} \sim \pi(\cdot\,|F)$, όπως συμβαίνει στον αλγόριθμο που περιγράψαμε παραπάνω, τότε όλες οι καταστάσεις $\theta^{(i)}$ αυτομάτως θα κατανέμονται σύμφωνα με την κατανομή στόχο, $\theta^{(i)} \sim \pi(\cdot\,|F)$, δεδομένου ότι αυτή είναι και η στάσιμη κατανομή της Μαρκοβιανής αλυσίδας. Αυτό καλείται και ***τέλεια δειγματοληψία*** (perfect sampling) και για του λόγου το αληθές, η απόδειξη ότι η κατανομή $\pi(\cdot\,|F)$ είναι η στάσιμη κατανομή της Μαρκοβιανής αλυσίδας που δημιουργήθηκε από τον τροποποιημένο αλγόριθμο Metropolis παρουσιάζεται παρακάτω [20].



Σχήμα 3.4. Ενδεικτική απεικόνιση Τροποποιημένου αλγορίθμου Metropolis για δείγματα που αποτελούνται από δύο συνιστώσες.



Σχήμα 3.5. Σχηματική απεικόνιση των βημάτων του Τροποποιημένου αλγορίθμου Metropolis.

Απόδειξη

Αν η υποψήφια κατάσταση ξ είχε απορριφθεί τότε $\theta^{(i+1)} = \theta^{(i)} \sim \pi(\cdot\,|F)$ και έτσι δεν υπάρχει κάτι να αποδείξουμε. Υποθέτουμε λοιπόν ότι η ξ είναι αποδεκτή, $\theta^{(i+1)} = \xi$, έτσι ώστε η μετακίνηση από το $\theta^{(i)}$ στο $\theta^{(i+1)}$ είναι μια κατάλληλη μετάβαση μεταξύ δυο διακριτών σημείων στο F. Έστω $f(\cdot)$ υποδηλώνει τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του $\theta^{(i+1)}$, στόχος μας είναι να δείξουμε ότι $f\left(\theta^{(i+1)}\right) = \pi\left(\theta^{(i+1)}|F\right)$. Τότε,

$$f\left(\theta^{(i+1)}\right) = \int_F \pi\left(\theta^{(i)}|F\right) t\left(\theta^{(i+1)}|\theta^{(i)}\right) d\theta, \tag{3.17}$$

όπου $t\left(\theta^{(i+1)}|\theta^{(i)}\right)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μετάβασης από το $\theta^{(i)}$ στο $\theta^{(i+1)} \neq \theta^{(i)}$. Σύμφωνα με το πρώτο βήμα του τροποποιημένου αλγορίθμου Metropolis, οι συνιστώσες του , $\theta^{(i+1)} = \xi$ δημιουργούνται ανεξάρτητα και για αυτό η $t\left(\theta^{(i+1)}|\theta^{(i)}\right)$ μπορεί να εκφραστεί ως γινόμενο,

$$t\left(\theta^{(i+1)}|\theta^{(i)}\right) = \prod_{k=1}^{d} t_k\left(\theta_k^{(i+1)}|\theta_k^{(i)}\right), \tag{3.18}$$

όπου $t_k\left(\theta_k^{(i+1)}|\theta_k^{(i)}\right)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μετάβασης της k συνιστώσας. Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (3.16), (3.17) και (3.18) παίρνουμε

$$f\left(\theta^{(i+1)}\right) = \frac{1}{P(F)} \int_F \prod_{k=1}^{d} \pi\left(\theta_k^{(i)}\right) t_k\left(\theta_k^{(i+1)}|\theta_k^{(i)}\right) d\theta. \tag{3.19}$$

Το κλειδί στο να οδηγηθούμε στο ότι $f\left(\theta^{(i+1)}\right) = \pi\left(\theta^{(i+1)}|F\right)$ είναι να αποδείξουμε ότι ισχύει

$$\pi\left(\theta_k^{(i)}\right) t_k\left(\theta_k^{(i+1)}|\theta_k^{(i)}\right) = \pi\left(\theta_k^{(i+1)}\right) t_k\left(\theta_k^{(i)}|\theta_k^{(i+1)}\right). \tag{3.20}$$

Αν $\theta_k^{(i+1)} = \theta_k^{(i)}$ τότε η (3.20) είναι τετριμμένη. Υποθέτουμε ότι $\theta_k^{(i+1)} \neq \theta_k^{(i)}$ έτσι $\theta_k^{(i+1)} = \xi_k = \tilde{\xi}_k$. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μετάβασης, $t_k\left(\theta_k^{(i+1)}|\theta_k^{(i)}\right)$ διαφέρει από την προτεινόμενη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $q_k\left(\theta_k^{(i+1)}|\theta_k^{(i)}\right)$ γιατί εμπλέκεται το βήμα αποδοχής-απόρριψης της υποψήφιας κατάστασης. Για να μετακινηθούμε από το $\theta_k^{(i)}$ στο $\theta_k^{(i+1)}$ δεν αρκεί μόνο να δημιουργήσουμε το $\theta_k^{(i+1)}$ από την κατανομή $q_k\left(\cdot\,|\theta_k^{(i)}\right)$, αλλά και να το αποδεχτούμε με πιθανότητα $min\left\{1, \frac{\theta_k^{(i+1)}}{\theta_k^{(i)}}\right\}$. Επομένως,

$$t_k\left(\theta_k^{(i+1)}|\theta_k^{(i)}\right) = q_k\left(\theta_k^{(i+1)}|\theta_k^{(i)}\right)\, min\left\{1, \frac{\theta_k^{(i+1)}}{\theta_k^{(i)}}\right\}. \tag{3.21}$$

Χρησιμοποιώντας την (3.21), την ιδιότητα της συμμετρίας της προτεινόμενης συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας, $q_k\left(\theta_k^{(i+1)}|\theta_k^{(i)}\right) = q_k\left(\theta_k^{(i)}|\theta_k^{(i+1)}\right)$ και την ταυτότητα $a \cdot min\left\{1, \frac{b}{a}\right\} = b \cdot min\left\{1, \frac{a}{b}\right\}$ για κάθε $a, b > 0$ τότε,

$$\begin{aligned}
\pi\left(\theta_k^{(i)}\right) t_k\left(\theta_k^{(i+1)}|\theta_k^{(i)}\right) &= q_k\left(\theta_k^{(i+1)}|\theta_k^{(i)}\right) \pi\left(\theta_k^{(i)}\right) min\left\{1, \frac{\theta_k^{(i+1)}}{\theta_k^{(i)}}\right\} \\
&= q_k\left(\theta_k^{(i)}|\theta_k^{(i+1)}\right) \pi\left(\theta_k^{(i+1)}\right) min\left\{1, \frac{\theta_k^{(i)}}{\theta_k^{(i+1)}}\right\} \\
&= \pi\left(\theta_k^{(i+1)}\right) t_k\left(\theta_k^{(i)}|\theta_k^{(i+1)}\right) \qquad (3.22)
\end{aligned}$$

Επομένως η σχέση (3.20) αποδείχθηκε. Άρα τώρα,

$$\begin{aligned}
f\left(\theta^{(i+1)}\right) &= \frac{1}{P(F)} \int_F \prod_{k=1}^{d} \pi\left(\theta_k^{(i+1)}\right) t_k\left(\theta_k^{(i)}|\theta_k^{(i+1)}\right) d\theta \\
&= \frac{1}{P(F)} \prod_{k=1}^{d} \pi\left(\theta_k^{(i+1)}\right) \int_F t\left(\theta^{(i)}|\theta^{(i+1)}\right) d\theta = \pi\left(\theta^{(i+1)}|F\right),
\end{aligned}$$

Αφού $\int_F t\left(\theta^{(i)}|\theta^{(i+1)}\right) d\theta = 1$ και $I_F\left(\theta^{(i+1)}\right) = 1$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Μέθοδος Προσομοίωσης Υποσυνόλων

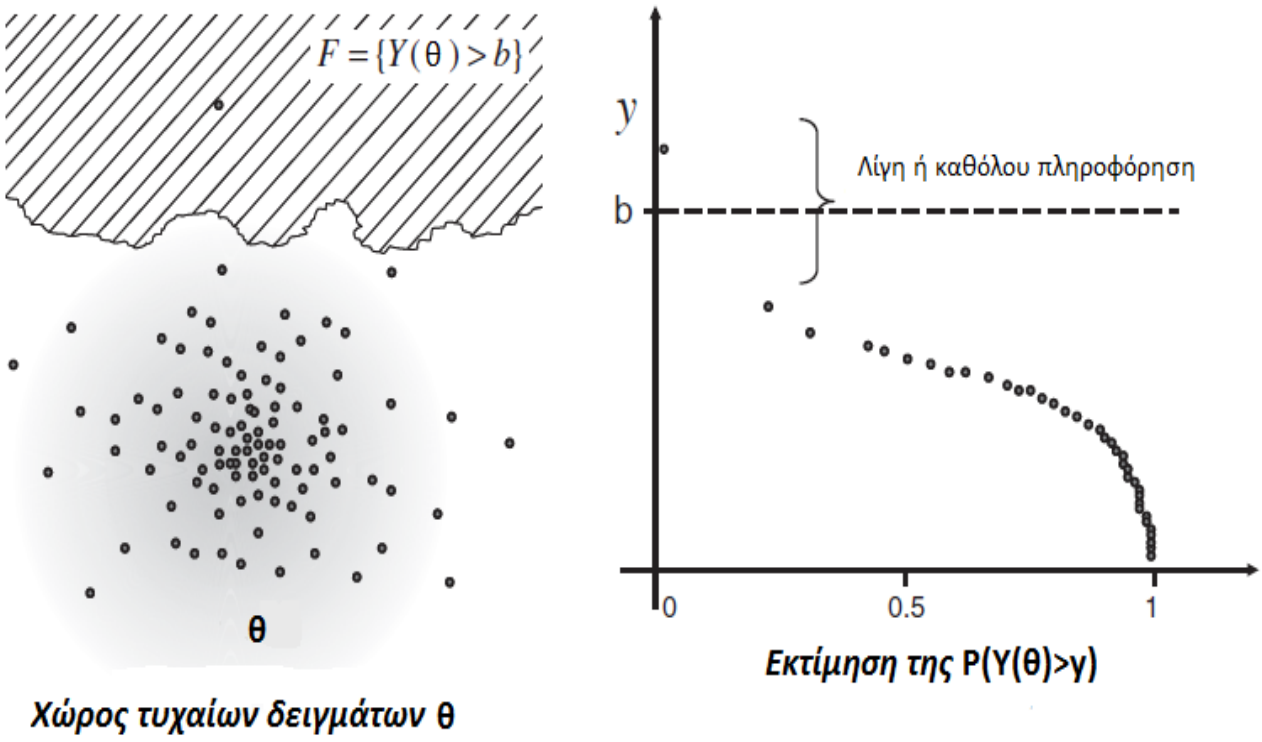
4.1. Εισαγωγή

Ο προσδιορισμός της αξιοπιστίας ενός συστήματος, όπως ήδη έχουμε αναφέρει, περιλαμβάνει τον υπολογισμό της πιθανότητας αστοχίας P_F η οποία δίνεται από την ακόλουθη έκφραση:

$$P_F = P(\theta \in F) = \int I_F(\theta)\pi(\theta)d\theta \qquad (4.1)$$

όπου $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_n] \in \Theta \subset R^n$ αντιπροσωπεύει μια αβέβαιη κατάσταση του συστήματος (τυχαίο διάνυσμα) με κοινή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $\pi(\theta)$ για την οποία υποθέτουμε, χωρίς σημαντική απώλεια της γενικότητας, ότι $\pi(\theta) = \prod_{j=1}^{n} \pi_j(\theta_j)$, δηλαδή ότι οι συνιστώσες του θ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Επιπλέον όπου F είναι η περιοχή αστοχίας εντός του παραμετρικού χώρου Θ και I_F είναι ένας δείκτης όπου αν $\theta \in F$ τότε $I_F(\theta) = 1$ ενώ αν $\theta \notin F$ τότε $I_F(\theta) = 0$.

Το παραπάνω ολοκλήρωμα, σε περιπτώσεις πολυδιάστατων προβλημάτων, δεν μπορεί να αξιολογηθεί αναλυτικά. Για το λόγο αυτό καταφεύγουμε σε μεθόδους προσομοίωσης οι οποίες προσφέρουν έναν εφικτό τρόπο υπολογισμού της πιθανότητας αστοχίας P_F. Συγκεκριμένα, στο προηγούμενο κεφάλαιο έγινε αναφορά στη βασική προσομοίωση Monte Carlo η οποία όπως είδαμε δεν εξαρτάται από τις n διαστάσεις του προβλήματος, καθιστώντας την έτσι μια πολύ ισχυρή μέθοδο για πολυδιάστατα προβλήματα. Ωστόσο, διαπιστώσαμε ότι είναι αναποτελεσματική στην εκτίμηση μικρών πιθανοτήτων αστοχίας επειδή ο αριθμός των δειγμάτων, και ως εκ τούτου ο αριθμός των αναλύσεων του συστήματος, που απαιτούνται για να επιτύχουμε μια συγκεκριμένη ακρίβεια είναι ανάλογος του $1/P_F$. Ουσιαστικά, για την εκτίμηση μικρών πιθανοτήτων αστοχίας χρειάζονται πληροφορίες από σπάνια δείγματα τα οποία ανήκουν στην περιοχή αστοχίας και κατά μέσο όρο απαιτούνται πολλά δείγματα μέχρι να πάρουμε κάποιο από αυτά.



Σχήμα 4.1. Απεικόνιση της εκτίμησης μικρών πιθανοτήτων αστοχίας μέσω της βασικής προσομοίωσης Monte Carlo. Στο αριστερό σχήμα η γραμμοσκιασμένη περιοχή δηλώνει την περιοχή αστοχίας F η οποία ορίζεται ως η περιοχή όπου ένα επιλεγμένο μέγεθος απόκρισης συναρτήσει του δείγματος, $Y(\theta)$, υπερβαίνει μια προκαθορισμένη οριακή τιμή b.

Γενικά η ανάπτυξη αποτελεσματικών μεθόδων προσομοίωσης για την εκτίμηση μικρών πιθανοτήτων αστοχίας σε πολυδιάστατους παραμετρικούς χώρους παραμένει ένα δύσκολο πρόβλημα.

Μια αποτελεσματική και κομψή μέθοδος προσομοίωσης σπάνιων γεγονότων και εκτίμησης των αντίστοιχων μικρών πιθανοτήτων τους καθώς και αρκετά ισχυρή σε πολυδιάστατα προβλήματα, είναι η ***προσομοίωση υποσυνόλων (Subset Simulation)***. Η μέθοδος αυτή αναπτύχθηκε από τους ***Siu-Kui Au*** και ***James Beck*** [1] για την ανάλυση αξιοπιστίας των κατασκευών, ωστόσο έχει αποδειχθεί αρκετά χρήσιμη και σε άλλου είδους προβλήματα που συσχετίζονται με την ανάλυση ευαισθησίας και το βέλτιστο σχεδιασμό των κατασκευών. Συγκεκριμένα σε αυτή τη μέθοδο, η πιθανότητα αστοχίας εκφράζεται ως ένα γινόμενο δεσμευμένων πιθανοτήτων που αντιστοιχούν σε κάποια επιλεγμένα ενδιάμεσα γεγονότα αστοχίας, ο υπολογισμός των οποίων απαιτεί την προσομοίωση πιο συχνών γεγονότων,

δηλαδή απαιτεί λιγότερα δείγματα και κατ' επέκταση λιγότερες αναλύσεις. Έτσι το πρόβλημα του υπολογισμού μιας μικρής πιθανότητας αστοχίας στον αρχικό πιθανοτικό χώρο αντικαθίσταται από μια αλληλουχία προσομοιώσεων πιο συχνών γεγονότων σε δεσμευμένους πιθανοτικούς χώρους. Ο υπολογισμός των δεσμευμένων πιθανοτήτων δεν μπορεί γίνει αποτελεσματικά από κοινές τεχνικές και έτσι χρησιμοποιείται μια Markov Chain Monte Carlo μέθοδος και συγκεκριμένα ο τροποποιημένος αλγόριθμος Metropolis.

4.2. Βασική Ιδέα της Προσομοίωσης Υποσυνόλων

Έστω ότι συμβολίζουμε με F το γεγονός αστοχίας το οποίο καθορίζει την περιοχή αστοχίας στον αβέβαιο παραμετρικό χώρο. Τότε μια μειούμενη ακολουθία γεγονότων αστοχίας μπορεί να οριστεί ως εξής:

$$F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_m = F$$

έτσι ώστε

$$F_k = \bigcap_{i=1}^{k} F_i, \qquad k = 1, \dots, m$$

Για παράδειγμα, αν η αστοχία ενός συστήματος ορίζεται ως η υπέρβαση μιας δοθείσας ικανότητας C από μια αβέβαιη απαίτηση D δηλαδή, $F = \{D > C\}$ τότε μια μειούμενη αλληλουχία γεγονότων αστοχίας μπορεί εύκολα να οριστεί ως $F_i = \{D > C_i\}$, όπου $C_1 < C_2 < \cdots < C_m = C$. Από τον ορισμό τώρα της δεσμευμένης πιθανότητας έχουμε

$$P_F = P(F_m) = P\left(\bigcap_{i=1}^{m} F_i\right) = P\left(F_m | \bigcap_{i=1}^{m-1} F_i\right) P\left(\bigcap_{i=1}^{m-1} F_i\right)$$

$$= P(F_m | F_{m-1}) P\left(\bigcap_{i=1}^{m-1} F_i\right) = \cdots$$

$$= P(F_1) \prod_{i=1}^{m-1} P(F_{i+1} | F_i) \tag{4.2}$$

Όπως γίνεται αντιληπτό η σχέση (4.2) εκφράζει την πιθανότητα αστοχίας ως το γινόμενο μιας αλληλουχίας δεσμευμένων πιθανοτήτων, $P(F_{i+1}|F_i)$ όπου $i = 1, \dots, m-1$ και της πιθανότητας $P(F_1)$. Η ιδέα της προσομοίωσης υποσυνόλων είναι να εκτιμήσει την πιθανότητα αστοχίας P_F μέσω της εκτίμησης αυτών των ποσοτήτων. Παρατηρούμε ότι για σπάνια γεγονότα αστοχίας, όπου η πιθανότητα τους P_F είναι μικρή, επιλέγοντας κατάλληλα τα ενδιάμεσα γεγονότα αστοχίας, F_i, μπορεί οι δεσμευμένες πιθανότητες που εμπλέκονται στην (4.2) να γίνουν αρκετά μεγάλες ώστε να μπορούν να υπολογιστούν αποτελεσματικά από διαδικασίες προσομοίωσης. Έτσι, αποφεύγεται το πρόβλημα της προσομοίωσης σπάνιων γεγονότων στον αρχικό πιθανοτικό χώρο και αντικαθίσταται από μια αλληλουχία προσομοιώσεων πιο συχνών γεγονότων σε δεσμευμένους πιθανοτικούς χώρους. Από τα παραπάνω είναι φυσιολογικό να δημιουργηθούν τα εξής δύο ερωτήματα:

1. Πώς επιλέγουμε τα ενδιάμεσα γεγονότα αστοχίας F_i, $(i = 1, \dots, m-1)$;
2. Πώς εκτιμούμε τις πιθανότητες $P(F_1)$ και $P(F_{i+1}|F_i)$, $(i = 1, \dots, m-1)$;

Η <u>πρώτη ερώτηση</u> σχετικά με την επιλογή των ενδιάμεσων γεγονότων αστοχίας αντιμετωπίζεται, πρώτον με την παραμετροποίηση του στοχευόμενου γεγονότος αστοχίας F με μια παράμετρο έτσι ώστε μεταβάλλοντας την τιμή της να δημιουργείται μια ακολουθία ενδιάμεσων γεγονότων αστοχίας F_i και δεύτερον με την επιλογή συγκεκριμένης αλληλουχίας τιμών της ορισμένης αυτής παραμέτρου. Η στρατηγική της μεθόδου των υποσυνόλων είναι να υποθέσουμε ότι η περιοχή αστοχίας F μπορεί να παρασταθεί ως η υπέρβαση μιας καθορισμένης οριακής τιμής b από ένα κρίσιμο μέγεθος απόκρισης Y, δηλαδή:

$$F = \{Y > b\} \tag{4.3}$$

έτσι, η αλληλουχία των ενδιάμεσων γεγονότων αστοχίας μπορεί να δημιουργηθεί ως εξής:

$$F_i = \{Y > b_i\} \tag{4.4}$$

όπου $0 < b_1 < \cdots < b_m = b$ είναι μια αυξανόμενη ακολουθία ενδιάμεσων οριακών τιμών. Ωστόσο, η επιλογή των ενδιάμεσων αυτών οριακών τιμών επηρεάζει τις τιμές των δεσμευμένων πιθανοτήτων και έτσι την αποτελεσματικότητα της μεθόδου των υποσυνόλων. Συγκεκριμένα, αν $b_{i-1} \ll b_i$ τότε η πιθανότητα $P(F_i|F_{i-1}) = P(Y > b_i|Y > b_{i-1})$ θα είναι πολύ μικρή και έτσι θα έρθουμε αντιμέτωποι με το πρόβλημα της προσομοίωσης ενός σπάνιου γεγονότος όπως ακριβώς και στη βασική προσομοίωση Monte Carlo. Άρα, οι ενδιάμεσες οριακές τιμές πρέπει να επιλεγούν αρκετά κοντά ώστε οι δεσμευμένες πιθανότητες να μην είναι πολύ μικρές. Από την άλλη πλευρά τώρα, δε θα πρέπει να είναι και πολύ κοντά επειδή τότε θα απαιτείται ένας μεγάλος αριθμός επιπέδων m για την επίτευξη του στοχευόμενου γεγονότος αστοχίας. Επομένως μια συνετή επιλογή θα πρέπει να επιτύχει μια ισορροπία μεταξύ των δυο αυτών περιπτώσεων.

Κάποιος μπορεί να σκεφτεί ότι θα ήταν δύσκολο να γνωρίζουμε εκ των προτέρων τι ενδιάμεσες οριακές τιμές πρέπει να επιλέξουμε έτσι ώστε να προκύψουν λογικές τιμές των δεσμευμένων πιθανοτήτων. Ωστόσο, το ζήτημα αυτό μπορεί να επιλυθεί επιλέγοντας τις ενδιάμεσες οριακές τιμές προσαρμοστικά έτσι ώστε η εκτιμώμενη δεσμευμένη πιθανότητα αστοχίας να μην είναι πολύ μικρή. Συγκεκριμένα υποθέτουμε ότι στοχεύουμε σε μια καθορισμένη δεσμευμένη πιθανότητα αστοχίας την οποία συμβολίζουμε με p_0. Κατά την υλοποίηση τώρα της μεθόδου έστω ότι δημιουργούνται N δείγματα δεσμευμένα ως προς το γεγονός $\{Y > b_{i-1}\}$ και άρα αντίστοιχα ως προς αυτά έχουν υπολογιστεί N τιμές του κρίσιμου μεγέθους απόκρισης Y. Τότε η ενδιάμεση οριακή τιμή b_i μπορεί να επιλεγεί ως η $[(1 - p_0)N]$ μεγαλύτερη τιμή από τις N του μεγέθους Y έτσι ώστε τελικά να υπάρχουν ακριβώς p_0N δείγματα των οποίων το μέγεθος Y να υπερβαίνει την b_i. Αυτόματα, η παραπάνω διαδικασία μας οδηγεί στο ότι η δεσμευμένη πιθανότητα αστοχίας $P(Y > b_i|Y > b_{i-1})$ είναι ίση με p_0. Εδώ θα πρέπει να συμπληρώσουμε ότι υποθέσαμε ότι οι τιμές των p_0 και N επιλέχθηκαν έτσι ώστε το γινόμενο p_0N να είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός.

Αυτή η προσαρμοστική στρατηγική αντιστρέφει τον τρόπο με τον οποίο επιλύεται το πρόβλημα της αξιοπιστίας. Δηλαδή, αντί να εκτιμάμε τις πιθανότητες

$P(Y > b_1)$ και $P(Y > b_i | Y > b_{i-1})$ $(i = 2, \dots, m)$ για καθορισμένες τιμές $b_1, \dots, b_m$ αυτό που εφαρμόζεται είναι να εκτιμάμε τις ενδιάμεσες οριακές τιμές $b_1, \dots, b_m$ για μια καθορισμένη επιλογή πιθανοτήτων που στοχεύουν στην

$$p_0 = P(Y > b_1) = P(Y > b_2 | Y > b_1) = \cdots = P(Y > b_m | Y > b_{m-1}) \qquad (4.5)$$

Όσον αφορά το <u>δεύτερο ερώτημα</u> η (μη δεσμευμένη) πιθανότητα $P(F_1) = P(Y > b_1)$ μπορεί να εκτιμηθεί από μια βασική προσομοίωση Monte Carlo δηλαδή

$$P(F_1) \approx \hat{P}_1 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} I_{F_1}\left(x^{(k)}\right) \qquad (4.6)$$

όπου $x^{(1)}, \dots, x^{(N)}$ είναι ανεξάρτητα και πανομοιότυπα κατανεμημένα δείγματα προσομοιωμένα σύμφωνα με την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας τους $\pi(\cdot)$. Η ίδια στρατηγική δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τις δεσμευμένες πιθανότητες $P(Y > b_i | Y > b_{i-1})$ $(i = 2, \dots, m)$, επειδή γενικά δεν υπάρχει ένας διαθέσιμος αποτελεσματικός αλγόριθμος που να δημιουργεί ανεξάρτητα και πανομοιότυπα κατανεμημένα δείγματα δεσμευμένα ως προς το γεγονός $\{Y > b_{i-1}\}$. Παρ' όλα αυτά μπορούμε να δημιουργήσουμε με αποτελεσματικό τρόπο δεσμευμένα δείγματα χρησιμοποιώντας μια μέθοδο Markov Chain Monte Carlo και συγκεκριμένα τον τροποποιημένο αλγόριθμο Metropolis που περιγράψαμε στην παράγραφο (3.4.1). Ωστόσο πλέον τα δείγματα που θα παραχθούν, όπως γίνεται αντιληπτό, <u>δε θα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους</u>. Τέλος μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα δείγματα αυτά με τον ίδιο τρόπο όπως στη βασική προσομοίωση Monte Carlo για να εκτιμήσουμε τις δεσμευμένες πιθανότητες δηλαδή

$$P(F_i | F_{i-1}) \approx \hat{P}_i = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} I_{F_i}\left(x_{i-1}^{(k)}\right) \qquad (4.7)$$

όπου όλα τα δείγματα $x_{i-1}^{(1)}, \dots, x_{i-1}^{(N)}$ είναι πανομοιότυπα κατανεμημένα σύμφωνα με την δεσμευμένη κατανομή $\pi(\cdot\,|F_{i-1})$ αλλά όχι ανεξάρτητα. Εδώ θα πρέπει να υπενθυμίσουμε ότι η δεσμευμένη κατανομή $\pi(\cdot\,|F_{i-1})$ αποτελεί και τη στάσιμη κατανομή της Μαρκοβιανής αλυσίδας που δημιουργήθηκε από τον τροποποιημένο

Metropolis όπως αποδείξαμε στην παράγραφο (3.4.1) και ως εκ τούτου η μέθοδος των υποσυνόλων έχει την ιδιότητα της τέλειας δειγματοληψίας. Αυτό ίσως γίνει πιο εύκολα αντιληπτό στην επόμενη παράγραφο όπου παρουσιάζεται η διαδικασία της μεθόδου.

4.3. Η Διαδικασία της Προσομοίωσης Υποσυνόλων

Στην παράγραφο αυτή θα περιγράψουμε τη μέθοδο των υποσυνόλων για να εκτιμήσουμε την πιθανότητα αστοχίας η οποία μπορεί να θεωρηθεί ως η συμπληρωματική αθροιστική συνάρτηση κατανομής (ΣΑΣΚ) (complementary cumulative distribution function) για ένα μέγεθος απόκρισης ενός συστήματος που υπόκειται σε αβεβαιότητες. Συγκεκριμένα η ΣΑΣΚ μπορεί να χρησιμοποιηθεί απευθείας για την εκτίμηση της πιθανότητας αστοχίας όπου δηλαδή η απόκριση υπερβαίνει μια καθορισμένη οριακή τιμή.

4.3.1. Παρουσίαση αλγορίθμου σε βήματα

Έστω $X = [X_1, \dots, X_n]$ είναι το σύνολο των τυχαίων μεταβλητών που καθορίζει πλήρως την απόκριση $Y = h(X)$ της οποίας η συμπληρωματική αθροιστική συνάρτηση κατανομής (ΣΑΣΚ) θέλουμε να εκτιμηθεί, δηλαδή:

$$\bar{F}_Y(y) = P(Y > y) = 1 - F_Y(y) \tag{4.8}$$

όπου με $\bar{F}_Y(y)$ συμβολίζεται η ΣΑΣΚ της Y και με $F_Y(y)$ η αθροιστική συνάρτηση κατανομής (ΑΣΚ) της Y, ενώ όπου y είναι μια οριακή τιμή.

Χωρίς σημαντική απώλεια της γενικότητας υποθέτουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές $\{X_1, \dots, X_n\}$ είναι ανεξάρτητες και αυτό σημαίνει ότι η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας τους μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\pi(X) = \pi_1(X_1) \cdots \pi_n(X_n) \tag{4.9}$$

Έστω ότι η καθορισμένη δεσμευμένη πιθανότητα αστοχίας σε κάθε επίπεδο προσομοίωσης την οποία συμβολίσαμε με p_0, όπου $p_0 \in (0,1)$, (θα αναφερθούμε σε επόμενη παράγραφο, συγκεκριμένα στην 4.5, για το ποια είναι η βέλτιστη επιλογή

της) καθώς και ο αριθμός των δειγμάτων N σε κάθε επίπεδο επιλέχθηκαν με τέτοιο τρόπο ώστε:

$$N_c = p_0 N \qquad (\alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma\ \alpha\lambda\upsilon\sigma\acute{\iota}\delta\omega\nu) \tag{4.10}$$

$$N_s = p_0^{-1} \qquad (\alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma\ \delta\varepsilon\iota\gamma\mu\acute{\alpha}\tau\omega\nu\ \sigma\varepsilon\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \alpha\lambda\upsilon\sigma\acute{\iota}\delta\alpha) \tag{4.11}$$

να είναι θετικοί ακέραιοι. Ο λόγος αυτής της δέσμευσης θα γίνει αντιληπτός κατά την παρουσίαση των επόμενων βημάτων, απλά σημειώνουμε ότι

$$N_c N_s = N \tag{4.12}$$

Ακολουθεί μια τυπική διαδικασία της μεθόδου των υποσυνόλων που εκτιμάει μια αλληλουχία οριακών τιμών b που αντιστοιχούν σε ένα σύνολο προκαθορισμένων πιθανοτήτων υπέρβασης $P(Y > b)$. Το αποτέλεσμα είναι να προκύψει μια εκτίμηση της συμπληρωματικής αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της Y [4].

<u>Επίπεδο Προσομοίωσης 0 (Βασική Προσομοίωση Monte Carlo)</u>

1. Δημιουργούμε δείγματα $\left\{X_k^{(0)} : k = 1, \dots, N\right\}$ σύμφωνα με τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας π (κάθε δείγμα από αυτά, όπως αναφέραμε στην αρχή, έχει n τυχαίες μεταβλητές). Στη συνέχεια υπολογίζουμε τις αντίστοιχες τιμές της απόκρισης $\left\{Y_k^{(0)} = h\left(X_k^{(0)}\right) : k = 1, \dots, N\right\}$.
2. Ταξινομούμε τις τιμές $\left\{Y_k^{(0)} = h\left(X_k^{(0)}\right) : k = 1, \dots, N\right\}$ σε αύξουσα σειρά για να πάρουμε τη λίστα $\left\{b_k^{(0)} : k = 1, \dots, N\right\}$. Η τιμή $b_k^{(0)}$ δίνει την εκτίμηση της οριακής τιμής b που αντιστοιχεί σε πιθανότητα υπέρβασης $p_k^{(0)} = P(Y > b)$ όπου

$$p_k^{(0)} = \frac{N - k}{N} \qquad k = 1, \dots, N \tag{4.13}$$

Κατασκευάζουμε το διάγραμμα με τα ζεύγη τιμών $\left\{\left(b_k^{(0)}, p_k^{(0)}\right) : k = 1, \dots, N - N_c\right\}$ το οποίο μας δίνει την εκτίμηση της ΣΑΣΚ του μεγέθους Y για

πιθανότητες που κυμαίνονται από $(1 - N^{-1})$ έως p_0. Το διάγραμμα για πιθανότητες μικρότερες από p_0 θα εκτιμηθεί περαιτέρω από υψηλότερα επίπεδα προσομοίωσης.

3. Στη συνέχεια ορίζουμε

$$b_1 = b_{N-N_c}^{(0)} \tag{4.14}$$

Έστω $\left\{X_{j0}^{(1)} : j = 1, \dots, N_c\right\}$ είναι τα $N_c = p_0 N$ δείγματα του X που αντιστοιχούν στις τιμές $\left\{b_{N-N_c+j}^{(0)} : j = 1, \dots, N_c\right\}$. Αυτά τα δείγματα χρησιμοποιούντα ως *'σπόροι' στο επίπεδο προσομοίωσης 1* για τη δημιουργία επιπλέον δειγμάτων δεσμευμένων ως προς το γεγονός $F_1 = \{Y > b_1\}$.

Επίπεδο Προσομοίωσης $i = 1, \dots, m - 1$ (Τροποποιημένος Metropolis)

1. Από κάθε σπόρο $X_{j0}^{(i)}$ $(j = 1, \dots, N_c)$ από το προηγούμενο επίπεδο προσομοίωσης $(i - 1)$, δημιουργούμε $N_s = {}^{1}/_{p_0}$ δεσμευμένα δείγματα $\left\{X_{jk}^{(i)} : k = 1, \dots, N_s\right\}$ με δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $\pi(\cdot\,|F_i)$, με τη χρήση του τροποποιημένου αλγορίθμου Metropolis. Εδώ θα πρέπει να επιστρέψουμε στην παράγραφο 3.4.1 όπου γίνεται η περιγραφή του. Εν συντομία θα θυμίσουμε μόνο, ότι κάθε συνιστώσα, από τις n, του υποψήφιου δείγματος δημιουργείται ξεχωριστά χρησιμοποιώντας μια μονοδιάστατη προτεινόμενη κατανομή $\{q\}$ η οποία έχει κέντρο την αντίστοιχη συνιστώσα του τωρινού δείγματος. Ωστόσο αυτό που δεν έχει διευκρινιστεί ούτε στην παράγραφο 3.4.1, αλλά θα γίνει στην 4.5, είναι το πώς επιλέγουμε αυτές τις μονοδιάστατες προτεινόμενες κατανομές γεγονός που αποτελεί ζωτικής σημασίας για την επιτυχία της μεθόδου των υποσυνόλων.

Επιστρέφοντας τώρα στη διαδικασία, μετά τη χρήση του τροποποιημένου Metropolis έχουμε N_c Μαρκοβιανές αλυσίδες όπου κάθε μια έχει N_s δείγματα.

Ο συνολικός αριθμός των δειγμάτων στο επίπεδο i παραμένει ίσος με N καθώς $N_c N_s = N$. Οι σπόροι $X_{j0}^{(i)}$ απορρίπτονται μετά τη χρήση.

2. Έστω $Y_{jk}^{(i)} = h\left(X_{jk}^{(i)}\right)$, όπου έχουν υπολογιστεί κατά τη διάρκεια του τροποποιημένου Metropolis. Ταξινομούμε τις τιμές $\left\{Y_{jk}^{(i)}: j = 1, \dots, N_c; k = 1, \dots, N_s\right\}$ σε αύξουσα σειρά για να πάρουμε τη λίστα $\left\{b_k^{(i)}: k = 1, \dots, N\right\}$. Η τιμή $b_k^{(i)}$ δίνει την εκτίμηση της οριακής τιμής b που αντιστοιχεί σε πιθανότητα υπέρβασης $p_k^{(i)} = P(Y > b)$ όπου

$$p_k^{(i)} = (p_0)^i \frac{N-k}{N} \qquad k = 1, \dots, N \tag{4.15}$$

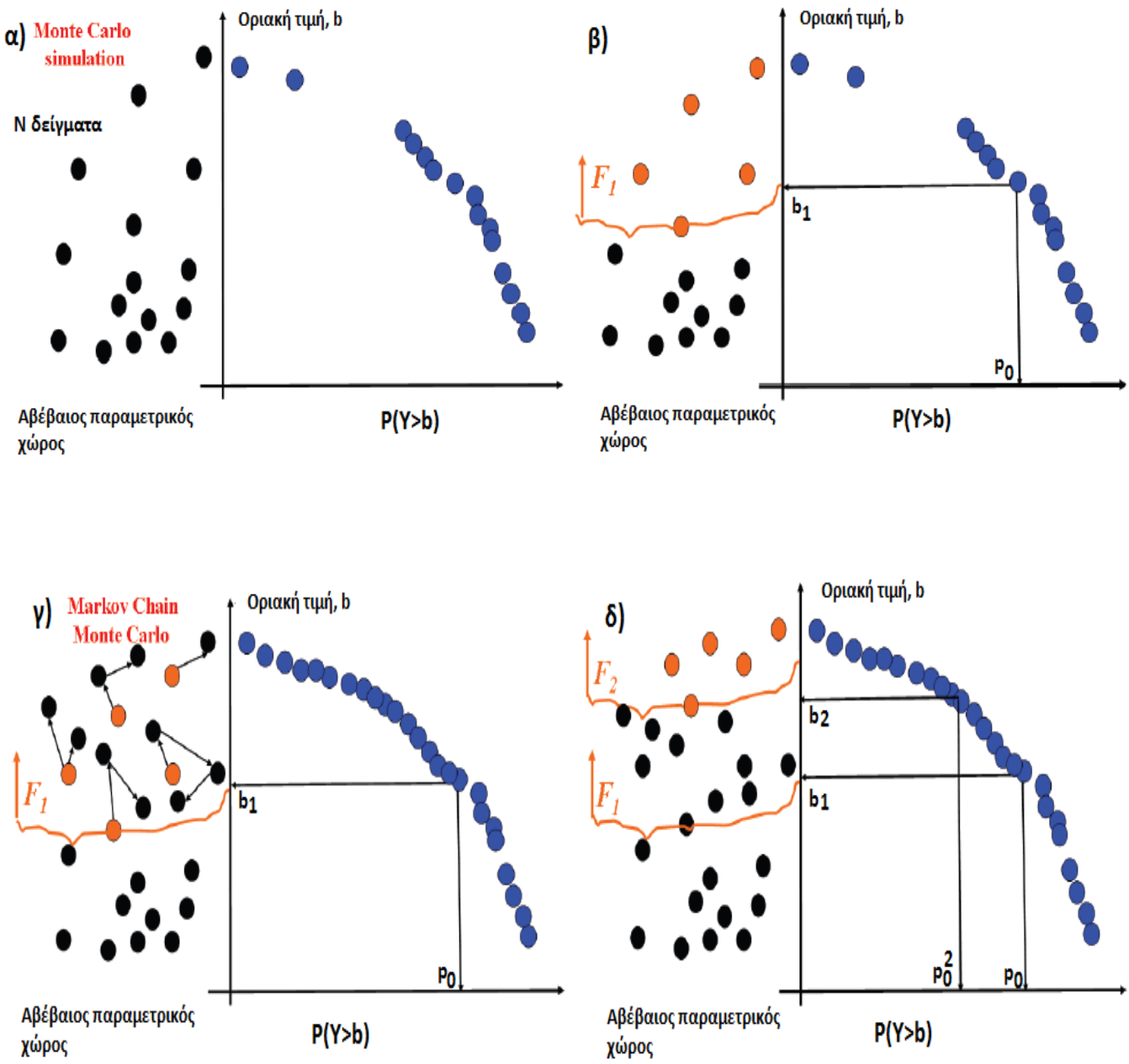
Τοποθετούμε τα ζεύγη των τιμών $\left\{\left(b_k^{(i)}, p_k^{(i)}\right): k = 1, \dots, N - N_c\right\}$ ως συνέχεια του προηγούμενου διαγράμματος και παίρνουμε την εκτίμηση της ΣΑΣΚ του μεγέθους Y για πιθανότητες που κυμαίνονται από $(p_0)^i(1 - N^{-1})$ έως $(p_0)^{i+1}$.

3. Στη συνέχεια ορίζουμε

$$b_{i+1} = b_{N-N_c}^{(i)} \tag{4.16}$$

Έστω $\left\{X_{j0}^{(i+1)}: j = 1, \dots, N_c\right\}$ είναι τα $N_c = p_0 N$ δείγματα του X που αντιστοιχούν στις τιμές $\left\{b_{N-N_c+j}^{(i)}: j = 1, \dots, N_c\right\}$. Αυτά τα δείγματα χρησιμοποιούνται ως σπόροι για τη δημιουργία επιπλέον δειγμάτων δεσμευμένων ως προς το γεγονός $F_{i+1} = \{Y > b_{i+1}\}$. Παραλείπουμε αυτό το βήμα αν $i = m - 1$ (το μεγαλύτερο επίπεδο προσομοίωσης).

Στο σχήμα 4.2. δίνεται μια γραφική απεικόνιση της διαδικασίας.



Σχήμα 4.2. Απεικόνιση της διαδικασίας της μεθόδου των υποσυνόλων: α) Βασική Προσομοίωση Monte Carlo, β) Προσαρμοστική επιλογή του b_1, γ) Μέθοδος MCMC, δ) Προσαρμοστική επιλογή b_2.

<u>Παρατηρήσεις Διαδικασίας</u>

1. Όπως είπαμε η οριακή τιμή b_i προσδιορίζεται από τα δείγματα που δημιουργήθηκαν στο επίπεδο $(i-1)$. Τα δείγματα όπου έχουν $Y > b_i$ ακολουθούν τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας q και είναι δεσμευμένα ως προς το γεγονός $F_i = \{Y > b_i\}$. Αυτά τα δείγματα παρέχουν σπόρους για τη δημιουργία επιπλέον

δειγμάτων δεσμευμένων ως προς το γεγονός F_i μέσω του τροποποιημένου Metropolis. Από τη στιγμή που οι σπόροι ήδη κατανέμονται με τη στοχευόμενη στάσιμη κατανομή, το ίδιο θα ισχύει και για τα μεταγενέστερα δείγματα της Μαρκοβιανής αλυσίδας (απόδειξη στην παράγραφο 3.4.1). Άρα δε χρειάζεται να απορρίψουμε τα πρώτα δείγματα της αλυσίδας περιμένοντας πότε θα συγκλίνει στη στάσιμη κατανομή της. Ακολουθεί τη στάσιμη κατανομή της από την αρχή.

2. Από το επίπεδο προσομοίωσης 1 και μετά, τα δείγματα N που δημιουργούνται από τον τροποποιημένο Metropolis σε κάθε επίπεδο, αποτελούνται από N_c Μαρκοβιανές αλυσίδες κάθε μια από τις οποίες έχει N_s δείγματα. Αυτή η στρατηγική των πολλαπλών αλυσίδων είναι λιγότερο τρωτή σε προβλήματα εργοδικότητας σε σύγκριση με το να δημιουργούσαμε μια μόνο αλυσίδα με N δείγματα από ένα μόνο σπόρο. Πιο αναλυτικά για το συγκεκριμένο θέμα να αναφερθούμε στη παράγραφο 4.5.

3. Οι σπόροι $\left\{X_{j0}^{(i)}: j = 1, \dots, N_c\right\}$ που χρησιμοποιούνται για τη δημιουργία δεσμευμένων δειγμάτων στο επίπεδο i απορρίπτονται μετά τη χρήση τους. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μειώνεται η συσχέτιση μεταξύ των δειγμάτων στα διαφορετικά επίπεδα προσομοίωσης. Η πληροφορία από αυτούς τους σπόρους χάνεται, ωστόσο ο αριθμός τους είναι αρκετά μικρός συγκριτικά με το συνολικό αριθμό των δειγμάτων. Τέλος ο αλγόριθμος θα μπορούσε να τροποποιηθεί ώστε να ενσωματώνει τους σπόρους αυτούς ως δεσμευμένα δείγματα και έτσι σε κάθε επίπεδο προσομοίωσης να απαιτούνται $(N - N_c)$ επιπλέον δείγματα αντί για N.

4. Η παραπάνω βηματική περιγραφή του αλγορίθμου έχει ως στόχο

$$P(Y > b_1) \approx P(Y > b_2 | Y > b_1) \approx \cdots \approx P(Y > b_m | Y > b_{m-1}) \approx p_0 \quad (4.17)$$

Επιπλέον ο ίδιος αριθμός δειγμάτων N χρησιμοποιείται σε κάθε επίπεδο προσομοίωσης. Αυτές οι επιλογές απλοποιούν τον αλγόριθμο, ωστόσο είναι δυνατό να υιοθετηθούν διαφορετικές δεσμευμένες πιθανότητες και/ή διαφορετικός αριθμός δειγμάτων στα διάφορα επίπεδα προσομοίωσης.

4.4. Στατιστικές Ιδιότητες των Εκτιμητών

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζουμε τις στατιστικές ιδιότητες των εκτιμητών $\hat{P}_i$ και $\hat{P}_F$ [1] που προκύπτουν από την υπόθεση ότι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα που δημιουργείται από τον τροποποιημένο αλγόριθμο Metropolis είναι εργοδική (παράγραφος 4.5). Στην πράξη έτσι όπως υλοποιείται η μέθοδος θα έπρεπε να αξιολογηθούν οι στατιστικές ιδιότητες των οριακών τιμών $\left\{b_k^{(i)}\right\}$ ωστόσο αυτές δεν έχουν αναπτυχθεί ακόμα πιθανώς γιατί είναι δύσκολο να προκύψουν και ίσως τα αποτελέσματα να σχετίζονται με τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του μεγέθους Y που είναι άγνωστη σε πρώτη φάση. Έτσι σε αυτή την παράγραφο θεωρούμε ότι τα ενδιάμεσα γεγονότα αστοχίας έχουν επιλεγεί εκ των προτέρων. Βέβαια στην περίπτωση όπου οι ενδιάμεσες οριακές τιμές επιλέγονται προσαρμοστικά, όπως στη διαδικασία που περιγράψαμε, και ως εκ τούτου θα μεταβάλλονται σε διαφορετικές προσομοιώσεις (διαφορετικές υλοποιήσεις της μεθόδου), τα αποτελέσματα που θα προκύψουν θα είναι ικανοποιητικά εφόσον η μεταβλητότητα των τιμών αυτών δεν είναι σημαντική. Παρ' όλα αυτά αυτή η προσεγγιστική ανάλυση δικαιολογείται δεδομένου ότι στόχος μας είναι να έχουμε μια εκτίμηση της ποιότητας της εκτιμώμενης πιθανότητας βασιζόμενοι στις διαθέσιμες πληροφορίες από μια μόνο προσομοίωση.

Εκτιμητής $\hat{P}_1$

Ο εκτιμητής $\hat{P}_1$ έχει υπολογιστεί χρησιμοποιώντας ανεξάρτητα και πανομοιότυπα κατανεμημένα δείγματα N που έχουν δημιουργηθεί από τη βασική προσομοίωση Monte Carlo. Συγκλίνει σχεδόν σίγουρα στην P_1 (Ισχυρός Νόμος των Μεγάλων Αριθμών), είναι αμερόληπτος, είναι συνεπής και ακολουθεί την κανονική κατανομή καθώς $N \to \infty$ (Κεντρικό Οριακό Θεώρημα). Ο συντελεστής μεταβλητότητας (coefficient of variation) του $\hat{P}_1$ ορίζεται ως ο λόγος της τυπικής απόκλισης του προς τη μέση τιμή του και δίνεται από:

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{1 - P_1}{P_1 N}} \tag{4.18}$$

Εκτιμώμενες δεσμευμένες πιθανότητες $\hat{P}_i$ $(2 \leq i \leq m)$

Για τον υπολογισμό των εκτιμώμενων δεσμευμένων πιθανοτήτων χρησιμοποιούνται τα δείγματα των Μαρκοβιανών αλυσίδων σύμφωνα με τη σχέση (4.7) από την οποία και παρατηρούμε ότι οι εκτιμητές αυτοί είναι αμερόληπτοι. Επιπλέον παρά το γεγονός ότι τα δείγματα των Μαρκοβιανών αλυσίδων είναι εξαρτημένα οι εκτιμητές $\hat{P}_i$ έχουν τις ίδιες ιδιότητες με τους εκτιμητές που χρησιμοποιούν ανεξάρτητα δείγματα, δηλαδή ότι ακριβώς αναφέραμε για τον $\hat{P}_1$.

Αν και τα δείγματα που δημιουργούνται από διαφορετικές αλυσίδες είναι γενικώς εξαρτημένα, γιατί οι σπόροι από τους οποίους δημιουργούνται οι αλυσίδες μπορεί να είναι εξαρτημένοι, για λόγους απλότητας στην ανάλυση θεωρούμε ότι είναι ασυσχέτιστα μέσω του δείκτη I_{F_i}, δηλαδή $E\left[I_{F_i}(\theta)I_{F_i}(\theta')\right] - P(F_i|F_{i-1})^2 = 0$ αν τα θ και θ' είναι από διαφορετικές αλυσίδες.

Μια έκφραση του συντελεστή μεταβλητότητας του δεσμευμένου εκτιμητή $\hat{P}_i$ είναι η εξής:

$$\delta_i = \sqrt{\frac{1 - P_i}{P_i N}(1 + \gamma_i)} \tag{4.19}$$

όπου

$$\gamma_i = 2 \sum_{k=1}^{N_s - 1} \left(1 - \frac{k}{N_s}\right) \rho_i(k) \tag{4.20}$$

είναι ένας συντελεστής που αντιπροσωπεύει τη συσχέτιση μεταξύ των δειγμάτων των Μαρκοβιανών αλυσίδων στο επίπεδο προσομοίωσης $(i - 1)$ και $\rho_i(k)$ είναι ο συντελεστής συσχέτισης των δειγμάτων κατά μήκος μιας αλυσίδας που διαφέρουν σε k βήματα και ο οποίος δίνεται από τη σχέση :

$$\rho_i(k) = \frac{R_i(k)}{R_i(0)} \tag{4.21}$$

όπου

$$R_i(k) = E\left[I\left(Y_{j,r}^{(i-1)} > b_i\right) I\left(Y_{j,r+\kappa}^{(i-1)} > b_i\right)\right] - P_i^2 \qquad (4.22)$$

είναι η αυτοσυνδιακύμανση μεταξύ $I\left(Y_{j,r}^{(i-1)} > b_i\right)$ και $I\left(Y_{j,r+\kappa}^{(i-1)} > b_i\right)$ όπου i εκφράζει το επίπεδο προσομοίωσης, j εκφράζει τον αριθμό της αλυσίδας, r δηλώνει το δείγμα της αλυσίδας και k είναι ο αριθμός των βημάτων που απέχουν τα δείγματα της αλυσίδας.

Μια εκτίμηση της αυτοσυνδιακύμανσης $R_i(k)$ είναι η εξής:

$$R_i(k) \approx \hat{R}_i(k) = \left[\frac{1}{N_c(N_s - k)} \sum_{j=1}^{N_c} \sum_{r=1}^{N_s-k} I\left(Y_{j,r}^{(i-1)} > b_i\right) I\left(Y_{j,r+\kappa}^{(i-1)} > b_i\right)\right] - \hat{P}_i^2$$

$$(4.23)$$

Ενώ

$$R_i(0) = P_i(1 - P_i) \qquad (4.24)$$

Ο συντελεστής μεταβλητότητας του εκτιμητή $\hat{P}_i$ μπορεί να θεωρηθεί ίδιος με εκείνον του εκτιμητή $\hat{P}_1$ έχοντας όμως μόνο $N/(1+\gamma_i)$ ανεξάρτητα δείγματα. Έτσι η αποτελεσματικότητα του εκτιμητή που χρησιμοποιεί δεσμευμένα δείγματα Μαρκοβιανών αλυσίδων $(\gamma_i > 0)$ είναι μειωμένη σε σχέση με την περίπτωση όπου τα δείγματα να ήταν ανεξάρτητα $(\gamma_i = 0)$. Συγκεκριμένα μικρές τιμές του γ_i υποδηλώνουν μεγαλύτερη αποτελεσματικότητα. Η τιμή του εξαρτάται από την επιλογή των προτεινόμενων μονοδιάστατων συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας που χρησιμοποιούνται στον τροποποιημένο Metropolis (παράγραφος 4.5).

Εκτιμώμενη πιθανότητα αστοχίας $\hat{P}_F$

Αφού $\hat{P}_1 \to P(F_1)$ και $\hat{P}_i \to P(F_i|F_{i-1})$ $(2 \le i \le m)$ σχεδόν σίγουρα καθώς $N \to \infty$ τότε θα ισχύει και $\hat{P}_F \to P(F_1)\prod_{i=1}^{m-1} P(F_{i+1}|F_i) = P_F$. Ωστόσο λόγω της συσχέτισης μεταξύ των δεσμευμένων εκτιμητών $\{\hat{P}_i\}$ η εκτιμώμενη πιθανότητα αστοχίας $\hat{P}_F$ είναι μεροληπτική για πεπερασμένο N, αλλά ασυμπτωτικά

αμερόληπτη. Η συσχέτιση αυτή οφείλεται στο ότι οι Μαρκοβιανές αλυσίδες σε ένα δεδομένο επίπεδο προσομοίωσης ξεκινούν από σπόρους που επιλέγονται από το προηγούμενο επίπεδο. Μια απευθείας σχέση για το συντελεστή μεταβλητότητας της $\hat{P}_F$ που να λαμβάνει την τελευταία συσχέτιση υπόψη δεν έχει προκύψει ακόμα, ωστόσο μπορεί προσεγγιστικά να οριοθετηθεί.

Το <u>άνω όριο</u> του συντελεστή μεταβλητότητας της $\hat{P}_F$ δίνεται από τη σχέση:

$$\delta_U = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\delta_i\delta_j} \tag{4.25}$$

και αντιστοιχεί στην περίπτωση όπου οι εκτιμώμενες δεσμευμένες πιθανότητες $\{\hat{P}_i\}$ συσχετίζονται πολύ ισχυρά.

Το <u>κάτω όριο</u> του συντελεστή μεταβλητότητας της $\hat{P}_F$ δίνεται από τη σχέση:

$$\delta_L = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\delta_i^2} \tag{4.26}$$

και αντιστοιχεί στην περίπτωση όπου οι εκτιμώμενες δεσμευμένες πιθανότητες $\{\hat{P}_i\}$ είναι ανεξάρτητες.

Για να αποκτήσουμε μια ιδέα σχετικά με τον αριθμό των δειγμάτων που απαιτούνται για να επιτύχουμε μια συγκεκριμένη ακρίβεια ως προς την εκτίμηση της πιθανότητας αστοχίας $\hat{P}_F$, εξετάζουμε την περίπτωση όπου $P(F_1) = P(F_i|F_{i-1}) = p_0$. Υποθέτουμε ότι ο συντελεστής μεταβλητότητας, $\delta_i = \sqrt{\frac{1-P_i}{P_i N}(1+\gamma_i)}$ είναι ο ίδιος για όλα τα επίπεδα προσομοίωσης (άρα γ_i = σταθερά) και ότι ο αριθμός των επιπέδων προσομοίωσης για να επιτύχουμε τη στοχευόμενη πιθανότητα αστοχίας είναι $m = \log P_F / \log p_0$. Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι για να επιτύχουμε ένα συγκεκριμένο συντελεστή μεταβλητότητας δ της εκτιμώμενης

πιθανότητας αστοχίας $\hat{P}_F$, ο συνολικός αριθμός των δειγμάτων που απαιτούνται είναι:

$$N_T \approx mN = |\log P_F|^r \frac{(1+\gamma)(1-p_0)}{p_0|\log p_0|^r \delta^2} \qquad 2 \leq r \leq 3 \qquad (4.27)$$

όπου γ είναι ο μέσος όρος των γ_i. Βλέπουμε ότι $N_T \propto |\log P_F|^r$ και συγκριτικά με μια βασική προσομοίωση Monte Carlo όπου $N_T \propto 1/P_F$ παρατηρούμε ότι υπάρχει ουσιαστική βελτίωση στην αποτελεσματικότητα της εκτίμησης μικρών πιθανοτήτων.

4.5. Ζητήματα ως προς την Εφαρμογή της Μεθόδου

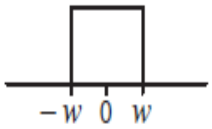
Σε αυτή την παράγραφο θα ασχοληθούμε με τις λεπτομέρειες εφαρμογής της μεθόδου των υποσυνόλων οι οποίες επηρεάζουν άμεσα την αποτελεσματικότητα της.

4.5.1. Επιλογή των προτεινόμενων μονοδιάστατων κατανομών

Οι προτεινόμενες μονοδιάστατες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας $\{q\}$ που χρησιμοποιούνται στον τροποποιημένο Metropolis για τη δημιουργία δειγμάτων από δεσμευμένες κατανομές $\pi(\cdot\,|F_i)$, επηρεάζουν την απόκλιση της υποψήφιας κατάστασης ως προς την τωρινή και καθορίζουν την αποτελεσματικότητα των δειγμάτων των Μαρκοβιανών αλυσίδων να συμπληρώσουν την περιοχή αστοχίας. Προσομοιώσεις έχουν δείξει ότι η αποτελεσματικότητα της μεθόδου δεν εξαρτάται από την μορφή των προτεινόμενων κατανομών και έτσι χρησιμοποιούνται αυτές που είναι πιο εύκολα διαχειρίσιμες όπως για παράδειγμα η ομοιόμορφη ή η κανονική κατανομή με κέντρο το τωρινό βήμα. Από την άλλη πλευρά, το εύρος των προτεινόμενων αυτών κατανομών (γύρω από το τωρινό δείγμα) επηρεάζει την εξάρτηση μεταξύ των δειγμάτων καθώς και την αποτελεσματικότητα τους ως προς την εξερεύνηση του παραμετρικού χώρου. Αν το εύρος είναι πολύ μικρό, ο ρυθμός αποδοχής της υποψήφιας κατάστασης θα είναι υψηλός, ωστόσο όμως το επόμενο δείγμα θα είναι αρκετά κοντά στο τωρινό αυξάνοντας έτσι την εξάρτηση τους. Αντίθετα αν το εύρος είναι πολύ μεγάλο, ο ρυθμός αποδοχής μειώνεται καθιστώντας το επόμενο βήμα τις περισσότερες φορές ίδιο με το τωρινό γεγονός που οδηγεί πάλι στην αύξηση της συσχέτισης τους. Η επιλογή λοιπόν του εύρους των προτεινόμενων

κατανομών θα πρέπει να επιτυγχάνει μια ισορροπία μεταξύ του ρυθμού αποδοχής της υποψήφιας κατάστασης και της συσχέτισης μεταξύ των δειγμάτων λόγω της εγγύτητας τους.

Μια παράμετρος w [4] που μπορεί να χαρακτηρίσει το εύρος των προτεινόμενων κατανομών, κανονικής ή ομοιόμορφης μορφής παρουσιάζεται στον πίνακα 4.1.

Μορφή	**ΣΠΠ [1]** $q(x;0)$	**Υποψήφια κατάσταση [2]** $\tilde{\xi}_k = \theta_k + \Delta$
Κανονική	$-\infty < x < \infty,\ w = s$ $q = \frac{1}{\sqrt{2\pi}w}\exp\left(-\frac{x^2}{2w^2}\right)$	$\Delta = wZ$
Ομοιόμορφη 	$-w < x < w,\ w = \sqrt{3}s$ $q = \frac{1}{2w}$	$\Delta = w(2U - 1)$

Πίνακας 4.1. Ορισμένες επιλογές της προτεινόμενης κατανομής

[1] : $s =$ τυπική απόκλιση
[2] : U ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $[0,1]$, $Z \sim N(0,1)$

Γενικά το να βρούμε ένα βέλτιστο εύρος για τις προτεινόμενες μονοδιάστατες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας είναι κάτι μη τετριμμένο και εξαρτάται από τη φύση του προβλήματος που μελετάμε. Μια λεπτομερής μελέτη προς αυτή την κατεύθυνση και συγκεκριμένα για τη βέλτιστη κλιμάκωση του τροποποιημένου αλγορίθμου Metropolis έγινε από τους ***Konstantin M. Zuev***, ***James L. Beck***, ***Siu-Kui Au*** και ***Lambros S. Katafygiotis.*** Από τις παρατηρήσεις που έκαναν κατέληξαν στην ακόλουθη, κοντά στη βέλτιστη, στρατηγική κλιμάκωσης [19] :

Σε κάθε δεσμευμένο επίπεδο προσομοίωσης, επιλέξτε το εύρος των προτεινόμενων κατανομών με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε ο αντίστοιχος ρυθμός αποδοχής της υποψήφιας κατάστασης να είναι μεταξύ 30% και 50%.

Συνήθως ξεκινάμε δίνοντας στην παράμετρο w κάθε προτεινόμενης κατανομής, τιμή ίση με την τυπική απόκλιση της αντίστοιχης τυχαίας παραμέτρου. Για παράδειγμα αν $\theta_k \sim N(0,1)$ τότε σαν προτεινόμενη κατανομή, από την οποία θα προκύψει η αντίστοιχη υποψήφια συνιστώσα $\tilde{\xi}_k$, μπορούμε να επιλέξουμε μια ομοιόμορφη με κέντρο το θ_k και μέγιστο μήκος βήματος $w = 1$. Στη συνέχεια ελέγχουμε κατά πόσο πληρείται η παραπάνω συνθήκη και αναλόγως τροποποιούμε την τιμή της παραμέτρου w.

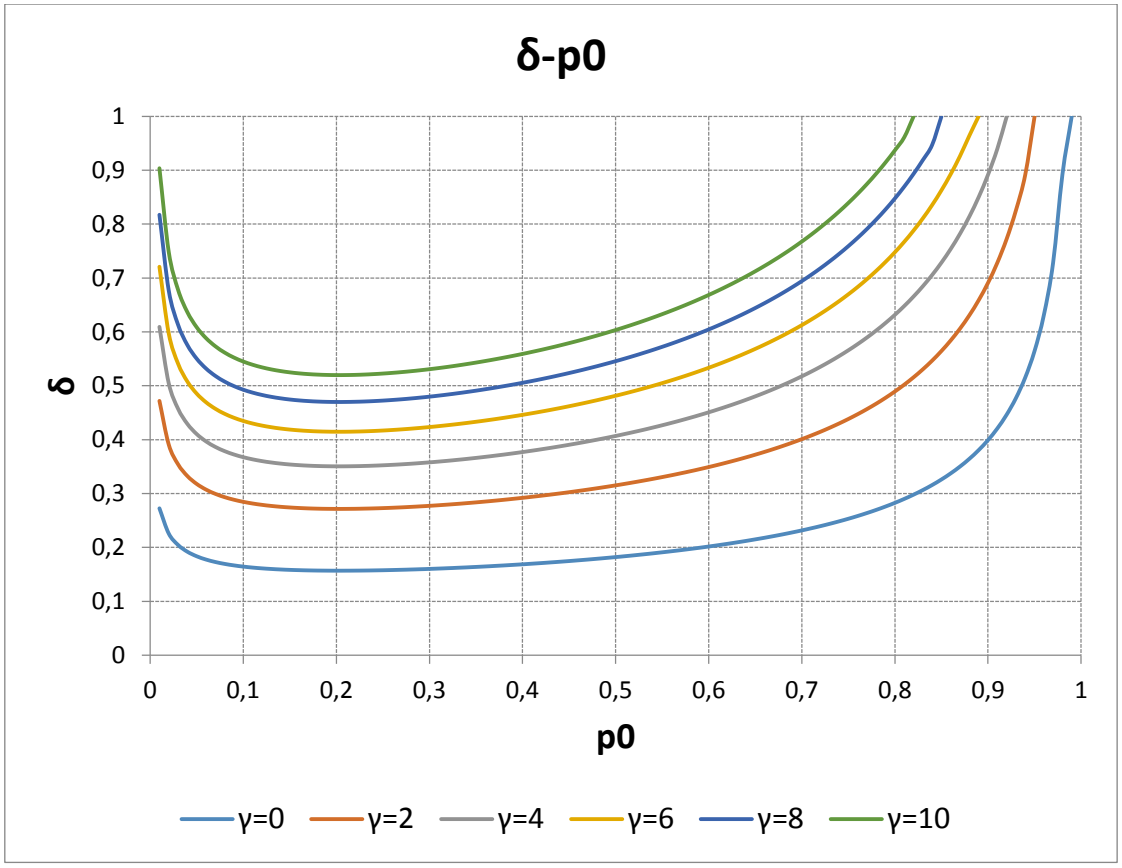
4.5.2. Επιλογή της δεσμευμένης πιθανότητας αστοχίας p_0

Η παράμετρος p_0 ρυθμίζει πόσες ενδιάμεσες περιοχές αστοχίας F_i απαιτούνται για την επίτευξη της στοχευόμενης περιοχής αστοχίας F. Μια πολύ μικρή τιμή της δεσμευμένης πιθανότητας αστοχίας p_0 οδηγεί σε μικρότερο συνολικό αριθμό δεσμευμένων επιπέδων αλλά ταυτόχρονα απαιτεί ένα μεγάλο αριθμό δειγμάτων N σε κάθε ένα από αυτά, έτσι ώστε να προκύψει μια ακριβής εκτίμηση των $\{b_i\}$. Αντίθετα μια αύξηση της τιμής της p_0 σημαίνει ότι χρειάζονται λιγότερα δείγματα για μια ακριβή εκτίμηση σε κάθε επίπεδο, ωστόσο αυξάνεται ο αριθμός των απαιτούμενων επιπέδων. Σε αυτή την παράγραφο θα δούμε μια θεωρητική βάση για τη βέλτιστη επιλογή της p_0, με στόχο τη μείωση του συντελεστή μεταβλητότητας της εκτιμώμενης πιθανότητας αστοχίας $\hat{P}_F$.

Από τη σχέση (4.27) λύνοντας ως προς δ^2 προκύπτει:

$$\delta^2 \approx \frac{1-p_0}{p_0|\log p_0|^r} \cdot \frac{|\log P_F|^r}{N_T}(1+\gamma) \qquad 2 \le r \le 3 \qquad (4.28)$$

όπου παρατηρούμε ότι ο συντελεστής μεταβλητότητας της $\hat{P}_F$ εξαρτάται από την p_0 μόνο μέσω του πρώτου όρου. Επιπλέον αριθμητικά παραδείγματα έχουν δείξει ότι για $r = 2$ παίρνουμε μια καλή προσέγγιση του συντελεστή μεταβλητότητας της $\hat{P}_F$. Στη συνέχεια παρατίθεται το διάγραμμα 4.1 όπου παρουσιάζει τη μεταβλητότητα του δ συναρτήσει της p_0 για $P_F = 10^{-3}$, $N_T = 3000$, $\gamma = 0, 2, 4, 6, 8, 10$ και $r = 2$ σύμφωνα με τη σχέση (4.28).



Διάγραμμα 4.1. Μεταβλητότητα του δ συναρτήσει του p_0 για $P_F = 10^{-3}$, $N_T = 3000$, $\gamma = 0, 2, 4, 6, 8, 10$ και $r = 2$ σύμφωνα με την (4.28).

Από το διάγραμμα αυτό προκύπτει ότι επιλέγοντας την p_0 στο διάστημα $[0.1, 0.3]$ θα οδηγηθούμε σε παρόμοια αποτελεσματικότητα, έτσι δεν είναι απαραίτητο να βρούμε την ακριβή βέλτιστη τιμή $[19]$. Επίσης παρατηρούμε ότι η τάση του διαγράμματος είναι αναλλοίωτη σε σχέση με τις διάφορες τιμές του συντελεστή γ και αυτό γιατί οι επιδράσεις του είναι πολλαπλασιαστικές. Το ίδιο θα παρατηρούσαμε αν μεταβάλλαμε και τις τιμές των P_F και N_T.

4.5.3. Εργοδικότητα της μεθόδου των υποσυνόλων

Πρακτικά η εργοδικότητα είναι ένα ζήτημα του κατά πόσον τα δείγματα των Μαρκοβιανών αλυσίδων μπορούν να συμπληρώσουν αποτελεσματικά τις σημαντικές περιοχές του χώρου αστοχίας. Αν υπάρχει μια σημαντική περιοχή όπου τα δείγματα δεν την 'επισκέπτονται', τότε η συνεισφορά της στην πιθανότητα αστοχίας δε θα αντικατοπτριστεί στην εκτίμηση και ως εκ τούτου αυτή θα είναι σημαντικά μεροληπτική.

Για μια Μαρκοβιανή αλυσίδα που ξεκινάει από ένα σημείο, προβλήματα εργοδικότητας μπορεί να προκύψουν εξαιτίας της ύπαρξης μη συνδεόμενων περιοχών αστοχίας οι οποίες χωρίζονται από ασφαλείς περιοχές το μέγεθος των οποίων είναι μεγάλο συγκριτικά με το εύρος των προτεινόμενων κατανομών. Για να μεταβεί η αλυσίδα από τη μια περιοχή αστοχίας στην άλλη, θα πρέπει η υποψήφια κατάσταση να βρίσκεται στη δεύτερη περιοχή, ωστόσο αυτό θα είναι αδύνατον να συμβεί εάν το εύρος των προτεινόμενων κατανομών είναι μικρό συγκριτικά με την ασφαλή περιοχή μεταξύ των δυο αυτών χώρων.

Συγκριτικά με τη μια αλυσίδα, η στρατηγική των πολλαπλών αλυσίδων που υιοθετείται από τη μέθοδο των υποσυνόλων την καθιστά λιγότερο τρωτή σε προβλήματα εργοδικότητας που προκύπτουν από την ύπαρξη ασύνδετων περιοχών αστοχίας. Συγκεκριμένα η μέθοδος των υποσυνόλων αρχίζει στο επίπεδο 0 με μια βασική προσομοίωση Monte Carlo, η οποία έχει την εργοδική ιδιότητα, δημιουργώντας δείγματα ανεξάρτητα και ισόνομα σε όλο τον παραμετρικό χώρο. Από τα δείγματα αυτά, εκείνα που αποτελούν σπόρους για το επίπεδο προσομοίωσης 1 αναμένεται να συμπληρώνουν επαρκώς την περιοχή F_1, διαφορετικά η μεταβλητότητα της b_1 θα είναι μεγάλη και συνεπώς η μεταβλητότητα της b_m δεν θα είναι αποδεκτή, καθώς τα σφάλματα θα συσσωρεύονται μέσα από τα επόμενα επίπεδα προσομοίωσης. Επιπλέον οι σπόροι αυτοί μπορεί ενδεχομένως να κατανεμηθούν σε διαφορετικά σημαντικά τμήματα της περιοχής F_1 τα οποία πιθανώς να είναι ασύνδετα. Κάθε αλυσίδα που θα ξεκινήσει σε αυτές τις ασύνδετες περιοχές θα τις συμπληρώσει τουλάχιστον τοπικά και έτσι μέσα από το συνδυασμό όλων των αλυσίδων θα ληφθεί υπόψη η συνεισφορά τους στην εκτίμηση της πιθανότητας αστοχίας. Ωστόσο αυτό υποθέτει ότι ασήμαντες περιοχές αστοχίας (αυτές με αμελητέα συνεισφορά) σε χαμηλότερα επίπεδα προσομοίωσης παραμένουν ασήμαντες και στα υψηλότερα επίπεδα. Διαφορετικά μπορεί να μην υπάρχουν αρκετοί σπόροι (εάν υπάρχουν) στα χαμηλότερα επίπεδα προσομοίωσης, ώστε να δημιουργηθούν περισσότερα δείγματα τα οποία να αντιπροσωπεύσουν τη συνεισφορά των περιοχών αυτών στα υψηλότερα επίπεδα.

Τα παραπάνω υποδηλώνουν ότι η μέθοδος των υποσυνόλων είναι πιθανό να οδηγήσει σε έναν εργοδικό εκτιμητή, ωστόσο δεν προσφέρει καμία εγγύηση για αυτό. Το αν θα προκύψουν προβλήματα εργοδικότητας εξαρτάται από τη φύση του προβλήματος και την επιλογή των προτεινόμενων κατανομών.

4.6. Ανάλυση Ευαισθησίας μέσω της Μεθόδου των Υποσυνόλων

Τα δείγματα των Μαρκοβιανών αλυσίδων που δημιουργούνται μέσω της μεθόδου των υποσυνόλων μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να πάρουμε πληροφορίες σχετικά με το αν η αστοχία συνδέεται με κάποια συγκεκριμένη αβέβαιη παράμετρο (ή μια ομάδα παραμέτρων). Διαισθητικά, αν η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $p(x_r|F)$ μιας αβέβαιης παραμέτρου ως προς την αστοχία είναι αρκετά διαφορετική ως προς την αρχική της (μη δεσμευμένη) κατανομή $p(x_r)$, τότε η παράμετρος αυτή θα πρέπει να έχει σημαντική επίδραση στην αστοχία [4]. Για αυτό το σκοπό μελετάμε την ποσότητα $P(F|X_r = x_r)$ καθώς το x_r μεταβάλλεται και βλέπουμε πόσο ευαίσθητη είναι η πιθανότητα αστοχίας στο να επηρεάζεται από την παράμετρο αυτή. Συγκεκριμένα, η $P(F|x_r)$ μπορεί να συσχετιστεί με την $p(x_r|F)$ μέσω του ***θεωρήματος του Bayes***, δηλαδή:

$$P(F|x_r) = \frac{p(x_r|F)P(F)}{p(x_r)} \tag{4.29}$$

Η σχέση (4.29) υποδηλώνει ότι αν η μορφή της $p(x_r|F)$ είναι αρκετά διαφορετική από της $p(x_r)$ τότε η $P(F|x_r)$ θα μεταβάλλεται σημαντικά για κάθε x_r και έτσι η τυχαία παράμετρος X_r επηρεάζει την αστοχία. Αντίθετα αν $p(x_r|F) \sim p(x_r)$, η επίδραση της X_r είναι αμελητέα.

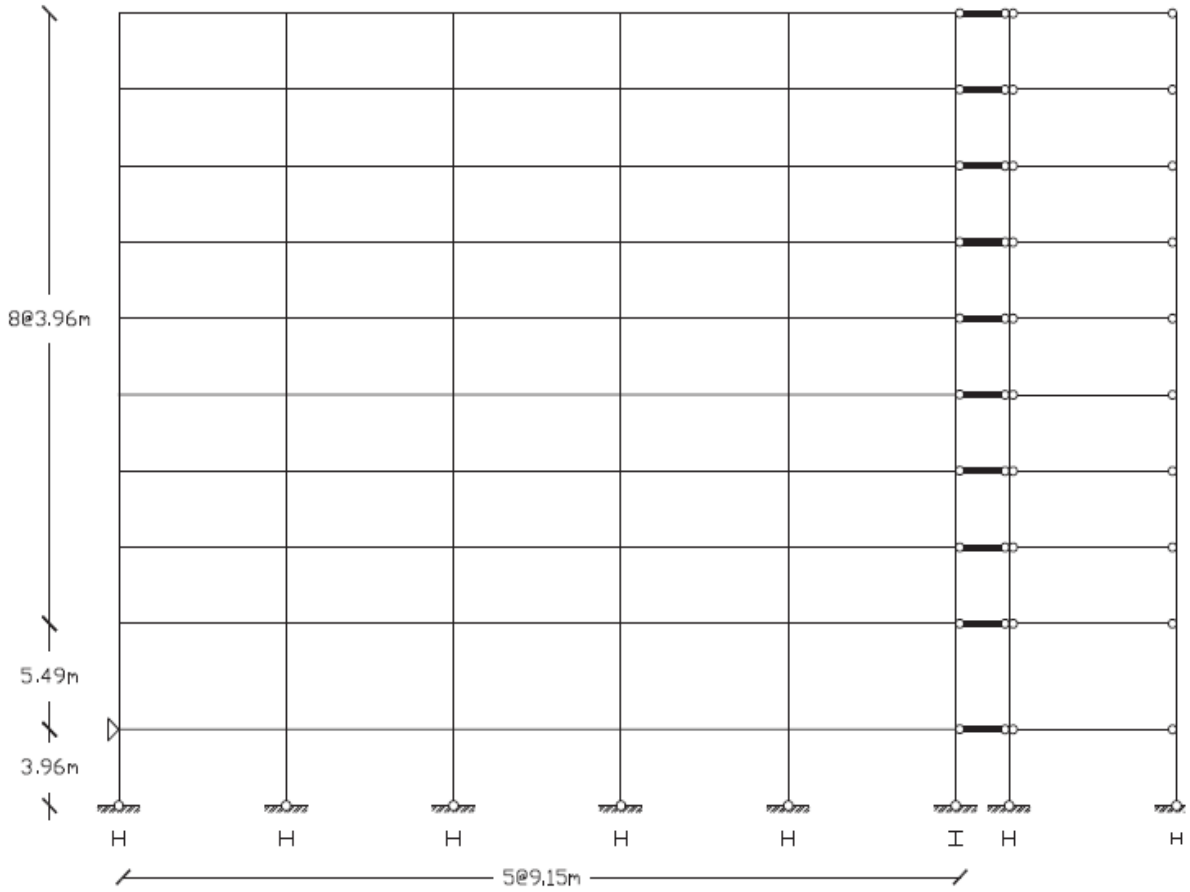
Τέλος, μπορεί να μην είναι πάντα αποτελεσματικό να μελετήσουμε την ποσότητα $p(x_r|F)$ ή την $P(F|x_r)$ γιατί σε αρκετά προβλήματα, ειδικά σε εκείνα με μεγάλο αριθμό τυχαίων μεταβλητών, κάποιες αβέβαιες παράμετροι έχουν επιρροή μόνο ως ομάδα και όχι ως μεμονωμένες. Σε τέτοιες περιπτώσεις μπορεί να είναι πιο χρήσιμο να μελετήσουμε τη συσχέτιση μεταξύ αυτών των παραμέτρων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Εφαρμογή

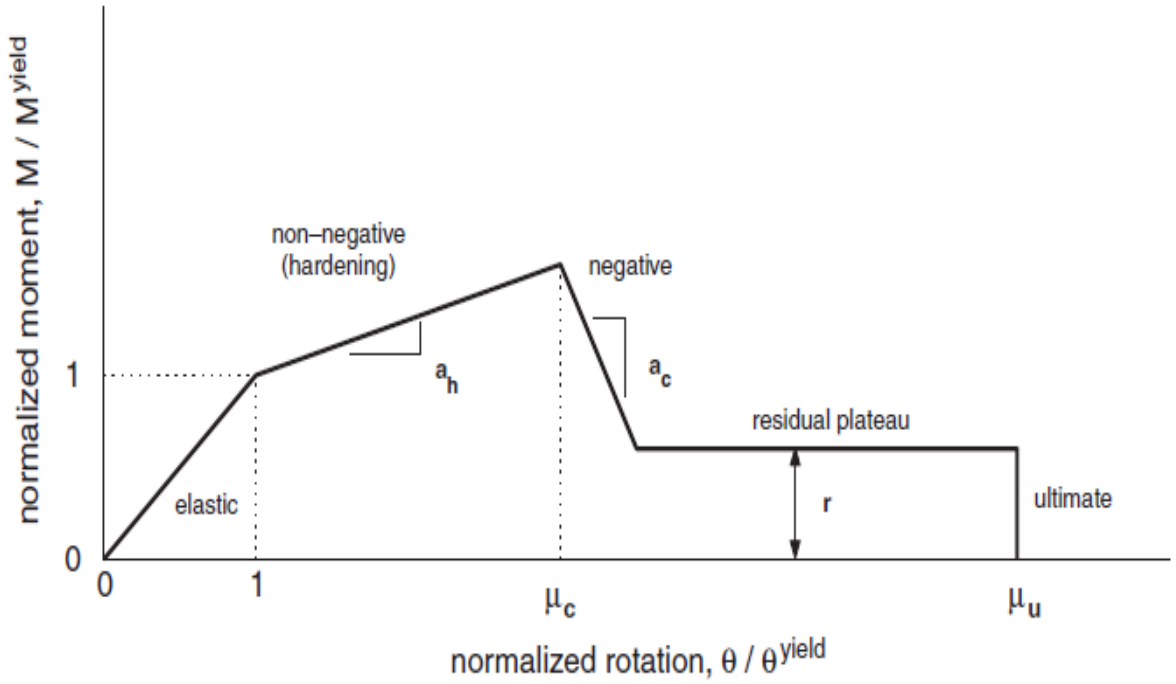
Η μέθοδος των υποσυνόλων εφαρμόστηκε για την εκτίμηση μιας πιθανότητας αστοχίας, της τάξεως $P_F = 10^{-3}$, μιας κατασκευής η οποία υποβλήθηκε σε τυχαία σεισμική φόρτιση και επιπλέον παρουσίαζε αβεβαιότητες ως προς την ικανότητα της.

Συγκεκριμένα, θεωρήθηκε μια εννιαώροφη πλαισιακή (πλαίσια ροπής) μεταλλική κατασκευή με έναν όροφο υπογείου [17], η οποία έχει θεμελιώδη ιδιοπερίοδο $T_1 = 2.35\ s$. Οι δοκοί της προσομοιώνονται με στοιχεία συγκεντρωμένης πλαστικότητας επιτρέποντας έτσι το σχηματισμό πλαστικών αρθρώσεων στα άκρα αυτών, ενώ τα υποστυλώματα θεωρούνται ελαστικά. Επιπλέον η επιρροή των φαινομένων Ρ−Δ έχει ληφθεί υπόψη ενώ τα εσωτερικά πλαίσια βαρύτητας έχουν άμεσα ενσωματωθεί (σχήμα 4.3).



Σχήμα 4.3. Εννιαώροφη πλαισιακή μεταλλική κατασκευή.

Ο κανονικοποιημένος καταστατικός νόμος ροπών-στροφών των πλαστικών αρθρώσεων παρουσιάζεται στο σχήμα 4.4 ο οποίος είναι συμμετρικός για θετικές και αρνητικές στροφές. Επιπλέον, υπό ανακυκλιζόμενη φόρτιση παρουσιάζει μέτριες στενώσεις των βρόχων υστέρησης χωρίς καμία ανακυκλική υποβάθμιση [17].



Σχήμα 4.4. Κανονικοποιημένο διάγραμμα ροπών-στροφών πλαστικής άρθρωσης.

Αρχικά ο νόμος αυτό επιτρέπει ελαστική συμπεριφορά μέχρι α_{My} φορές την ονομαστική ροπή διαρροής M_y και στη συνέχεια παρουσιάζει κράτυνση με κλίση α_h μέχρι την κανονικοποιημένη στροφή (ή πλαστιμότητα στροφών) μ_c από όπου ξεκινάει η μείωση της αντοχής με κλίση α_c. Τη μείωση αυτή διαδέχεται μια παραμένουσα αντοχή καθυστερώντας την αστοχία της πλαστικής άρθρωσης μέχρι τη μέγιστη κανονικοποιημένη στροφή μ_u (μέγιστη πλαστιμότητα στροφών). Οι έξι αυτές παράμετροι που απαιτούνται για την περιγραφή του διαγράμματος θεωρούνται ως τυχαίες μεταβλητές ανεξάρτητες μεταξύ τους που ακολουθούν την κανονική κατανομή. Η μέση τιμή και ο συντελεστής μεταβλητότητας για κάθε μια από αυτές καθώς και ένα κάτω και άνω όριο, τα οποία έχουν προκύψει με $\pm$ 1.5 τυπική απόκλιση από τις μέσες τιμές τους με σκοπό οι τυχαίες μεταβλητές να μην πάρουν τιμές χωρίς φυσική σημασία, παρουσιάζονται στον πίνακα 4.2 [9]. Τέλος, οι μεταβλητές αυτές μεταβάλλονται ομοιόμορφα σε όλη την κατασκευή.

	Μέση Τιμή	Συντελεστής Μεταβλητότητας	Κάτω όριο	Άνω όριο
a_{M_y}	1.0	0.20	0.70	1.30
a_h	0.1	0.40	0.04	0.16
μ_c	3.0	0.40	1.20	4.80
a_c	−0.5	0.40	−0.80	−0.20
r	0.5	0.40	0.20	0.80
μ_u	6.0	0.40	2.40	9.60

Πίνακας 4.2. Χαρακτηριστικά τυχαίων μεταβλητών.

Για τη δημιουργία των σεισμικών φορτίσεων χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος της φασματικής απεικόνισης που περιγράφτηκε στην παράγραφο 2.6. Για κάθε μια υλοποίηση χρησιμοποιήθηκαν 101 ανεξάρτητες τυχαίες φάσεις ομοιόμορφα κατανεμημένες στο διάστημα $[0,2\pi]$, όπου δημιουργήθηκαν από μια γεννήτρια τυχαίων αριθμών, ενώ επιλέχθηκε το ίδιο φάσμα ισχύος που αντιστοιχεί στο σεισμό του El Centro (σχήμα 4.5) και προκύπτει με βάση την προτεινόμενη από τους ***Clough-Penzien*** συνάρτηση πυκνότητας φασματικής ισχύος.

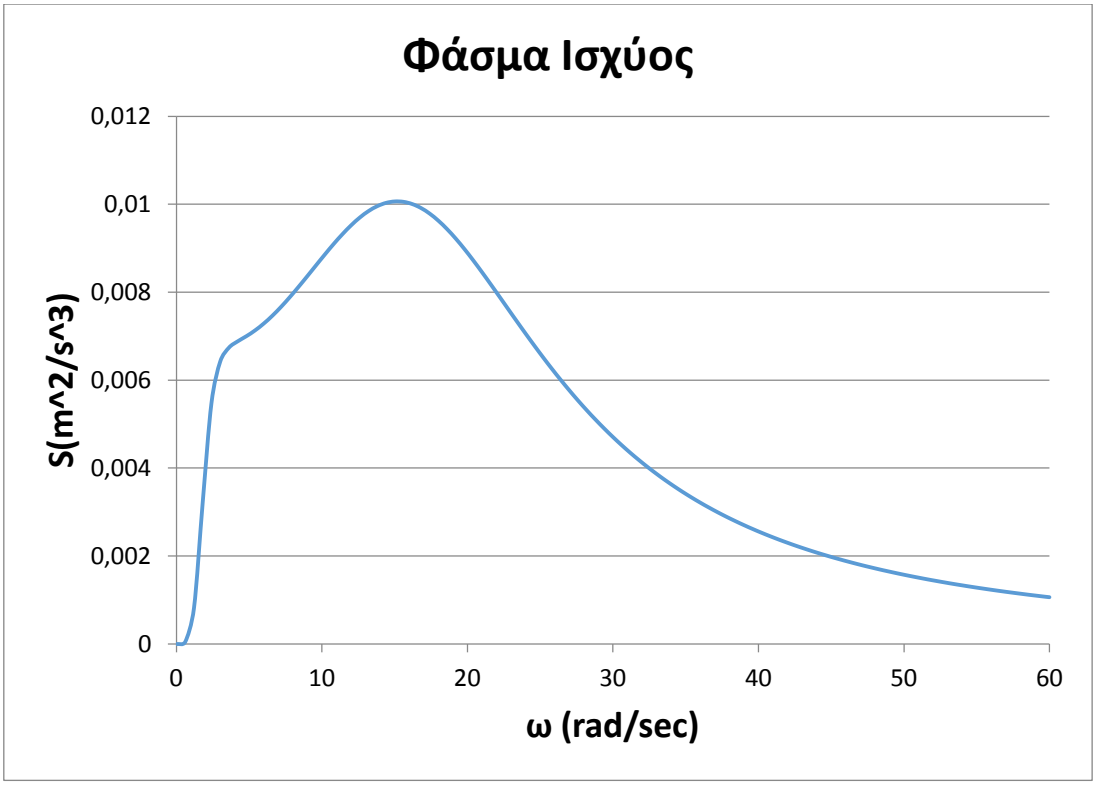
$$S_{\ddot{U}_g}(\omega) = S_w \frac{(\omega_k^4 + 4\zeta_k^2\omega_k^2\omega^2)}{(\omega_k^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta_k^2\omega_k^2\omega^2} * \frac{\omega^4}{\left(\omega_p^2 - \omega^2\right)^2 + 4\zeta_p^2\omega_p^2\omega^2} \qquad (4.30)$$

Όπου $S_w = 0.0029\, m^2/s^3$ είναι η σταθερή φασματική πυκνότητας ισχύος μιας διαδικασίας λευκού θορύβου, ενώ $\omega_k = 19\, rad/s$, $\zeta_k = 0.65$, και $\omega_p = 2.0\, rad/s$, $\zeta_p = 0.6$ αποτελούν παραμέτρους ενός βαθυπερατού (lowpass) και ενός υψιπερατού (highpass) φίλτρου αντίστοιχα.

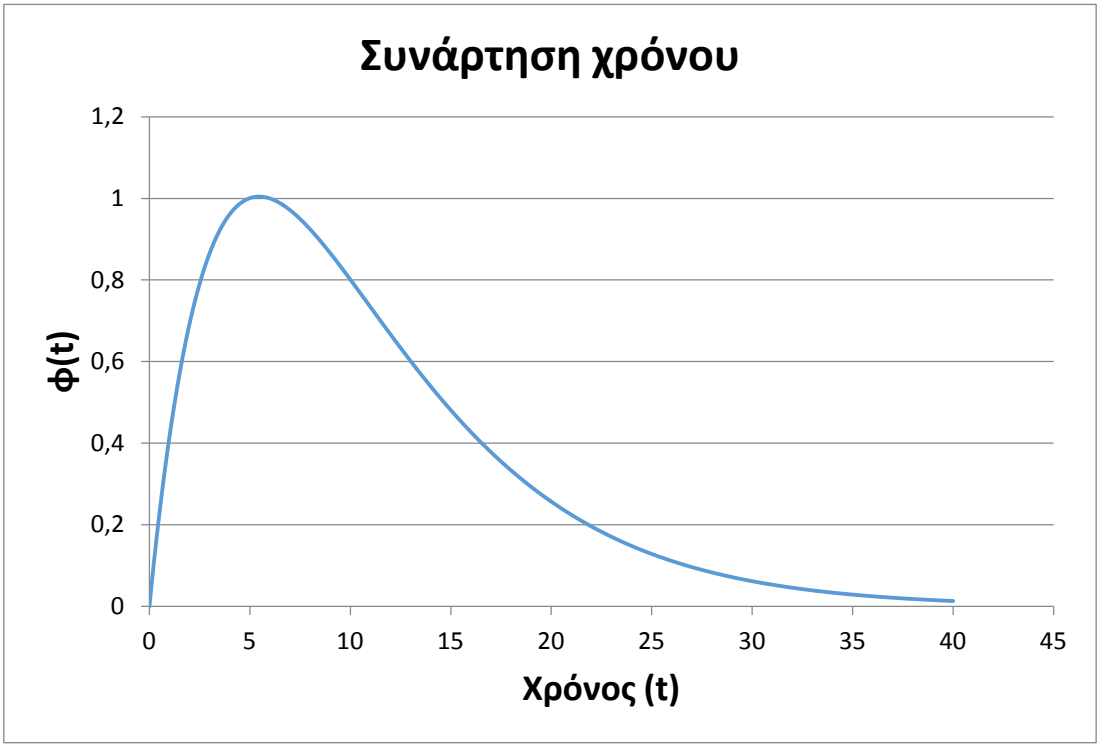
Όλες οι καταγραφές επιλέχθηκαν να είναι διάρκειας 40 δευτερολέπτων και για να προσομοιωθεί ο μεταβατικός χαρακτήρας τους, πολλαπλασιάστηκαν με μια συνάρτηση χρόνου που προτείνεται από τους Hsu και Bernard (σχήμα 4.6).

$$\varphi(t) = \delta \cdot t \cdot \exp(-\beta \cdot t) \qquad \text{όπου } \delta = \beta \cdot \exp(1) \qquad (4.31)$$

Όπου $\delta = 0.5$ και $\beta = 0.184$.



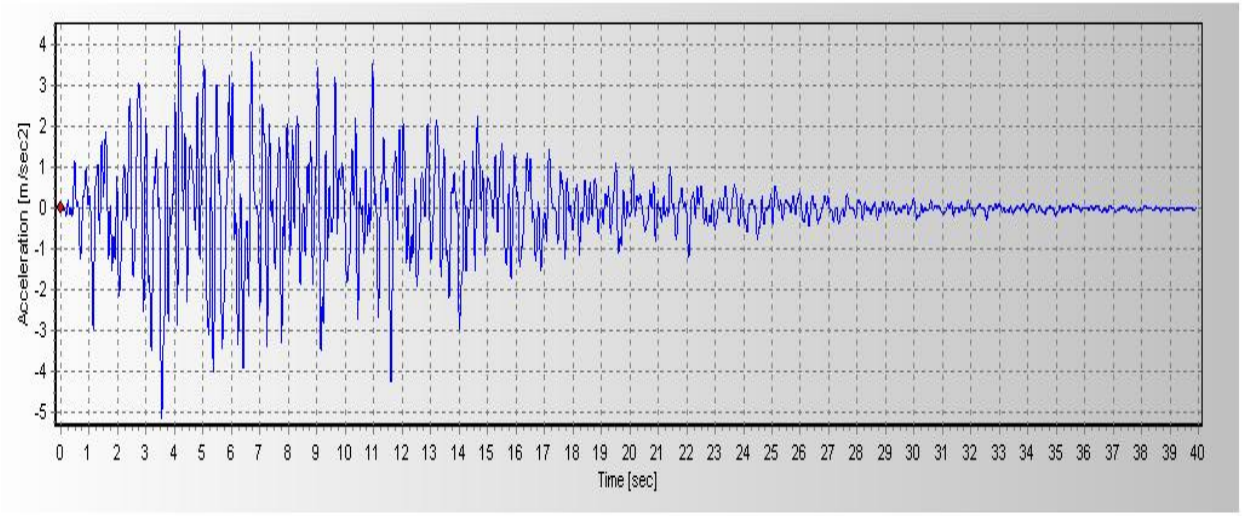
Σχήμα 4.5. Φάσμα Ισχύος El Centro



Σχήμα 4.6. Συνάρτηση χρόνου σύμφωνα με τους Hsu και Bernard

Κάθε υλοποίηση σεισμικής καταγραφής κλιμακώθηκε αυθαίρετα με ένα συντελεστή λ = 3.5 ώστε να πάρουμε μεγαλύτερες αποκρίσεις της κατασκευής. Ενδεικτικά στο

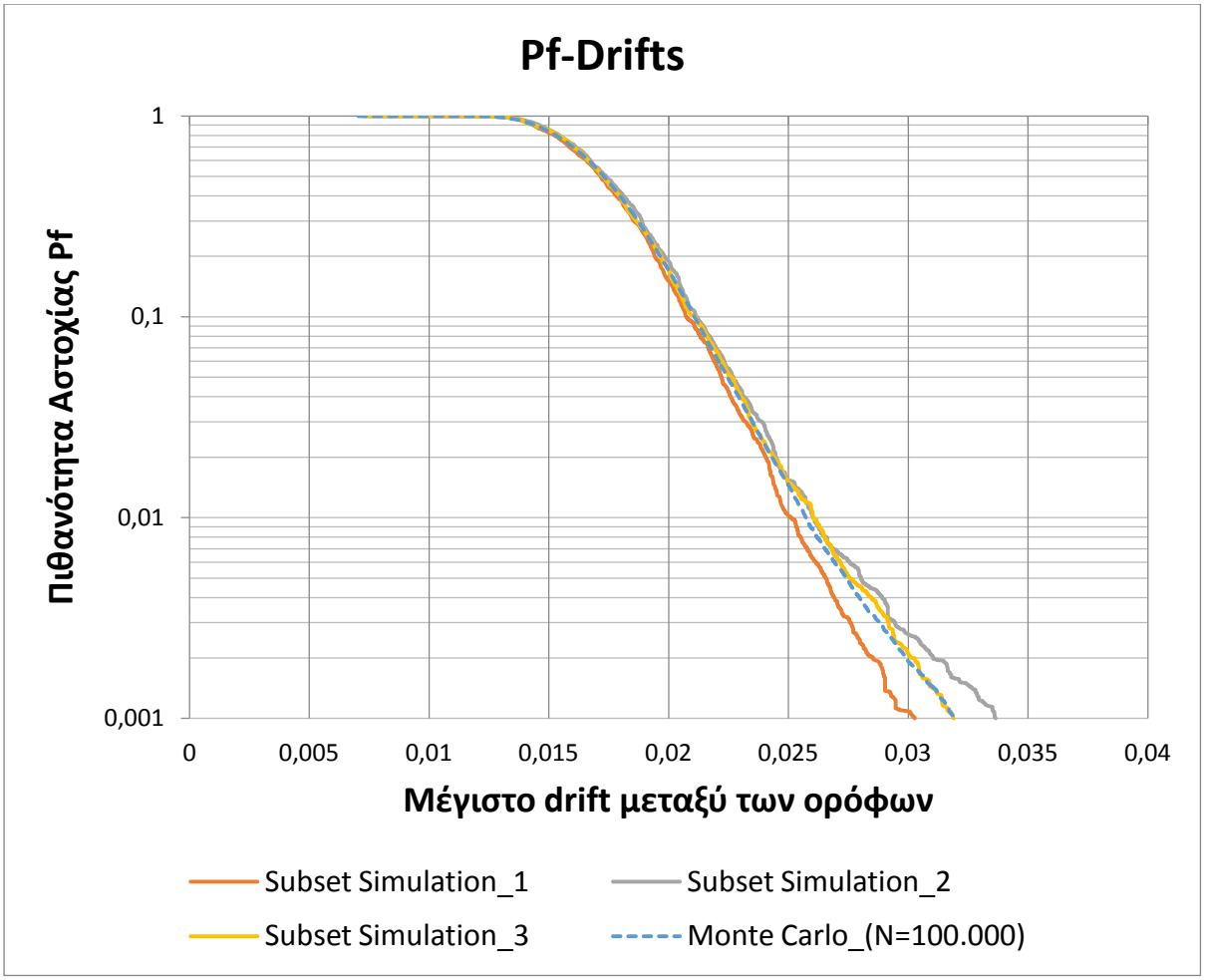
σχήμα 4.7 παρουσιάζεται μια υλοποίηση σεισμικής καταγραφής με βάση τα παραπάνω.



Σχήμα 4.7. Υλοποίηση επιταχυνσιογραφήματος

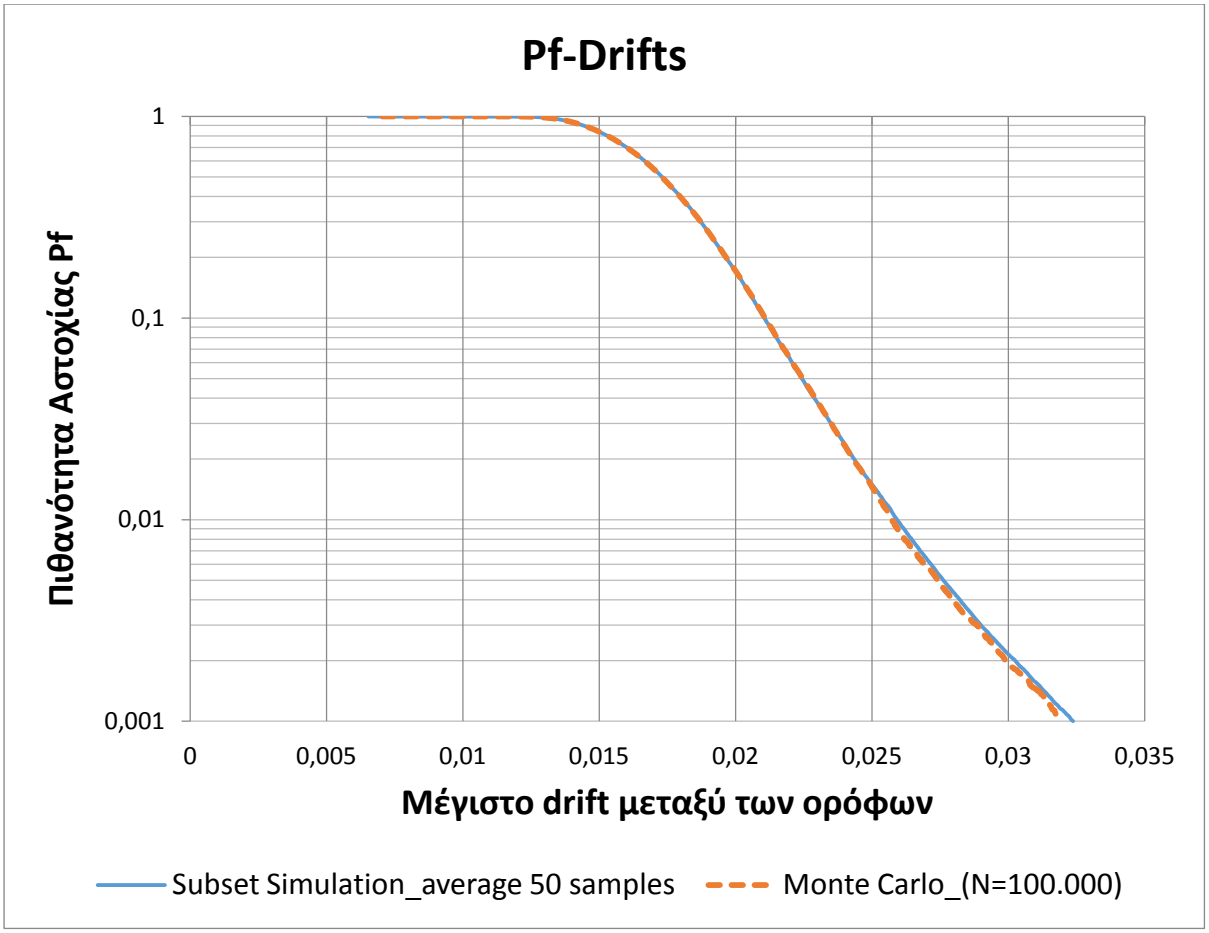
Για την εφαρμογή της μεθόδου των υποσυνόλων επιλέχθηκαν η δεσμευμένη πιθανότητα αστοχίας ίση με $p_0 = 0.1$, τρία επίπεδα προσομοίωσης (με σκοπό να φτάσουμε μέχρι $P_F = 10^{-3}$) με $N = 1000$ δείγματα σε κάθε επίπεδο και ως μέτρο απόκρισης το μέγιστο drift μεταξύ των ορόφων. Επιπλέον οι προτεινόμενες κατανομές επιλέχθηκε να είναι ομοιόμορφες με πλάτος 2 για κάθε μια από τις 6 μεταβλητές του διαγράμματος ροπών στροφών των πλαστικών αρθρώσεων και 0.8 για κάθε μια από τις 101 τυχαίες φάσεις των σεισμικών καταγραφών. Τα παραπάνω πλάτη προέκυψαν έτσι ώστε σε κάθε δεσμευμένο επίπεδο προσομοίωσης το ποσοστό αποδοχής της υποψήφιας κατάστασης να είναι μεταξύ 30% και 50%.

Για την προσομοίωση του μοντέλου της κατασκευής καθώς και για την εκτέλεση των μη γραμμικών δυναμικών αναλύσεων χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό OpenSees [13] ενώ με τη χρήση του λογισμικού Matlab έγινε η υλοποίηση της διαδικασίας της μεθόδου των υποσυνόλων. Παρακάτω παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν.



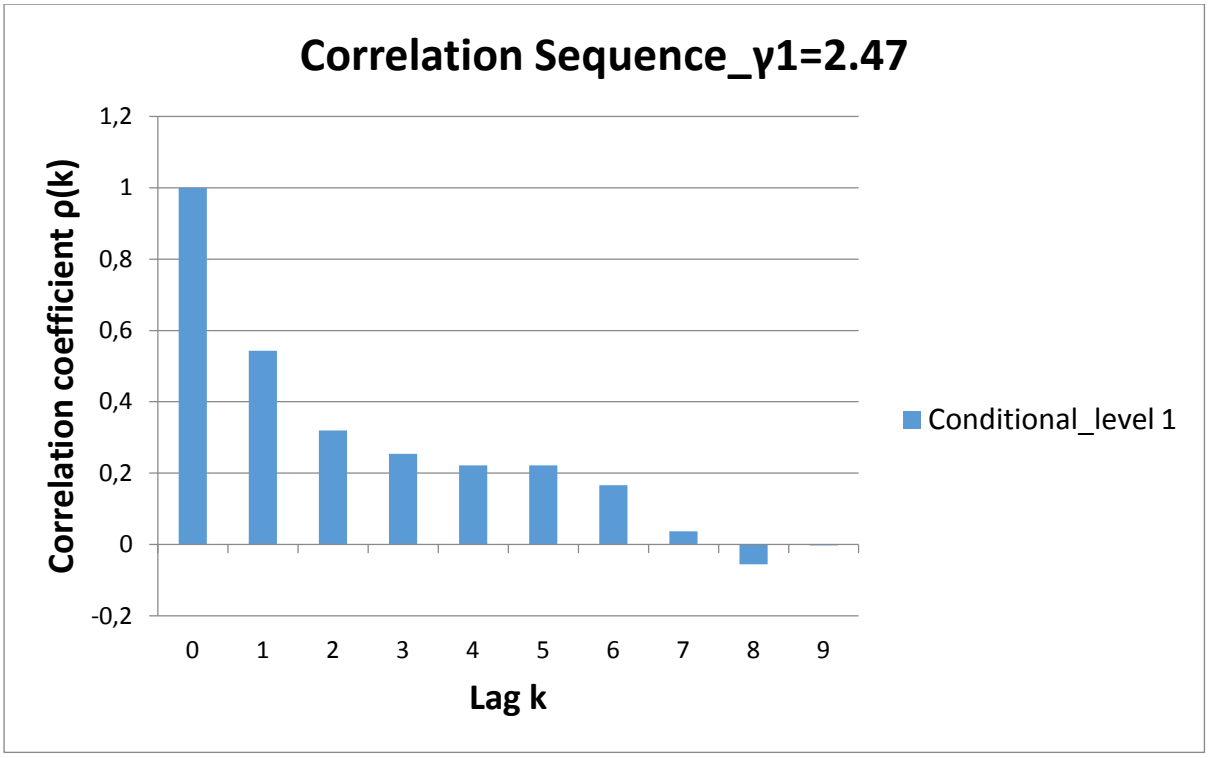
Στο παραπάνω διάγραμμα απεικονίζονται οι εκτιμώμενες πιθανότητες αστοχίας από τρεις ανεξάρτητες προσομοιώσεις της μεθόδου των υποσυνόλων για διάφορες οριακές τιμές του drift. Συνολικά σε κάθε μια από αυτές χρησιμοποιήθηκαν N=3000 δείγματα. Επιπλέον για σύγκριση απεικονίζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από μια βασική προσομοίωση Monte Carlo με N=100.000 δείγματα (έτσι ώστε ο συντελεστής μεταβλητότητας στην πιθανότητας αστοχίας $P_F = 10^{-3}$ να είναι 10%). Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα που παίρνουμε από τη μέθοδο των υποσυνόλων δεν διαφέρουν σημαντικά από αυτά της προσομοίωσης Monte Carlo.

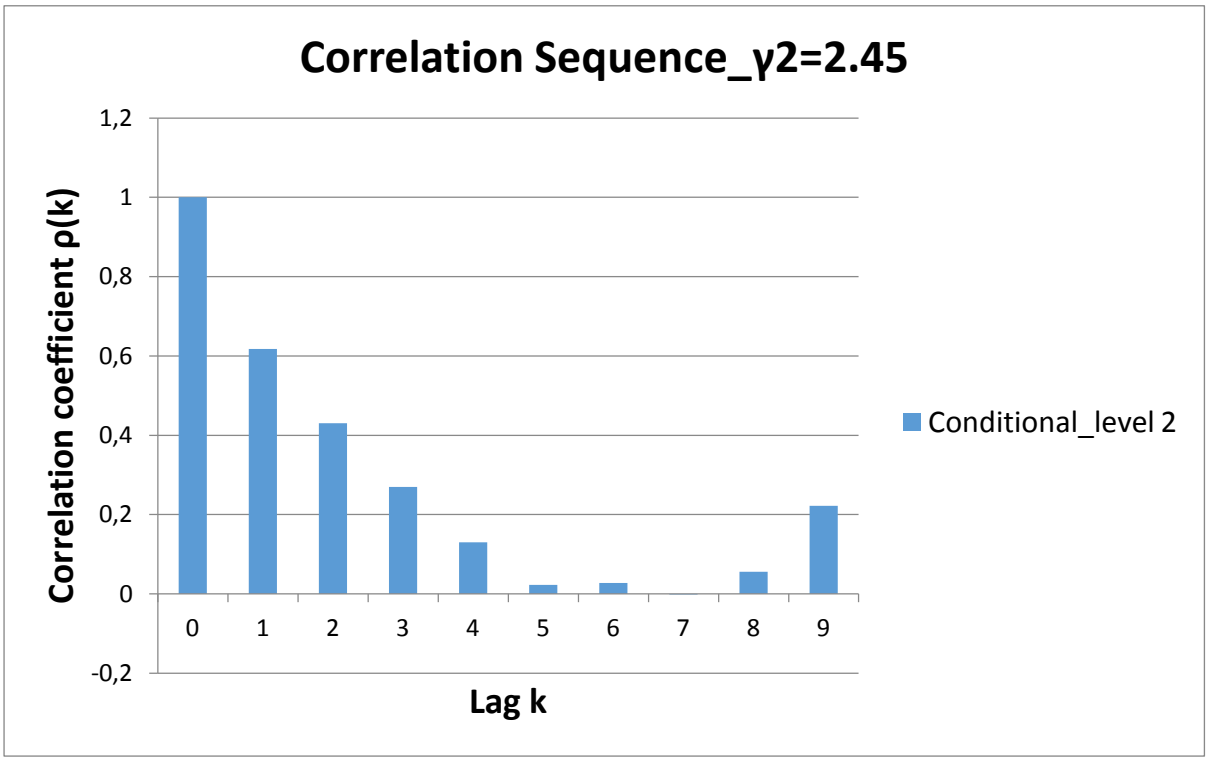
Για να ερευνήσουμε τη μεροληψία των εκτιμώμενων πιθανοτήτων αστοχίας, υλοποιήθηκαν 50 ανεξάρτητες προσομοιώσεις της μεθόδου των υποσυνόλων και υπολογίστηκε ο δειγματικός μέσος όρος αυτών. Τα αποτελέσματα αποτυπώνονται στο παρακάτω διάγραμμα.



Παρατηρούμε ότι ο δειγματικός μέσος όρος των εκτιμώμενων πιθανοτήτων αστοχίας σχεδόν ταυτίζεται με τα 'ακριβή' αποτελέσματα της προσομοίωσης Monte Carlo γεγονός που υποδηλώνει ότι η μεροληψία λόγω της συσχέτισης μεταξύ των εκτιμώμενων δεσμευμένων πιθανοτήτων στα διάφορα επίπεδα προσομοίωσης είναι αμελητέα. Έτσι η εκτιμώμενη πιθανότητα αστοχίας που προκύπτει από τη μέθοδο των υποσυνόλων είναι πρακτικά αμερόληπτη.

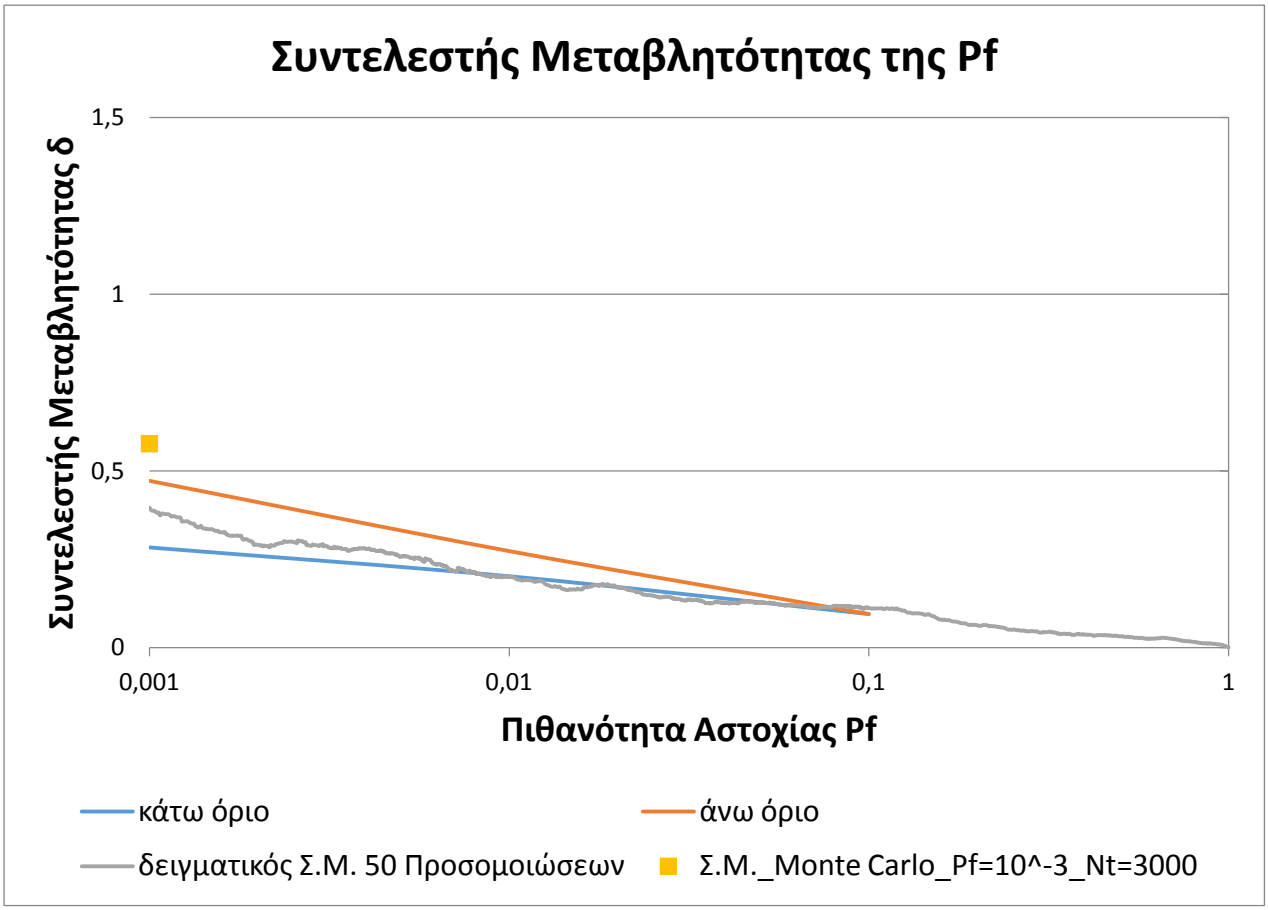
Από μια προσομοίωση της μεθόδου των υποσυνόλων απεικονίζεται παρακάτω ο εκτιμώμενος συντελεστής συσχέτισης, χρησιμοποιώντας τα δείγματα των αλυσίδων που διαφέρουν σε k βήματα σύμφωνα με τη σχέση (4.21), για κάθε δεσμευμένο επίπεδο (προφανώς για το level0 όπου είναι μια βασική προσομοίωση Monte Carlo ο συντελεστής συσχέτισης είναι μηδέν). Επίσης αποτυπώνονται και οι τιμές του γ_i, που προκύπτουν σύμφωνα με την (4.20).





Στη συνέχεια προκειμένου να ελέγξουμε την πραγματική μεταβλητότητα του δείγματος καθώς και την εγκυρότητα των ορίων που δόθηκαν για τον συντελεστή μεταβλητότητας της $\hat{P}_F$ (σχέσεις $(4.25), (4.26)$), υπολογίζεται ο δειγματικός συντελεστής μεταβλητότητας των εκτιμώμενων πιθανοτήτων αστοχίας από 50

ανεξάρτητες προσομοιώσεις της μεθόδου. Τα αποτελέσματα απεικονίζονται στο παρακάτω διάγραμμα μαζί με τις μέσες εκτιμήσεις του συντελεστή που προκύπτουν αντίστοιχα από τις σχέσεις (4.25) και (4.26).

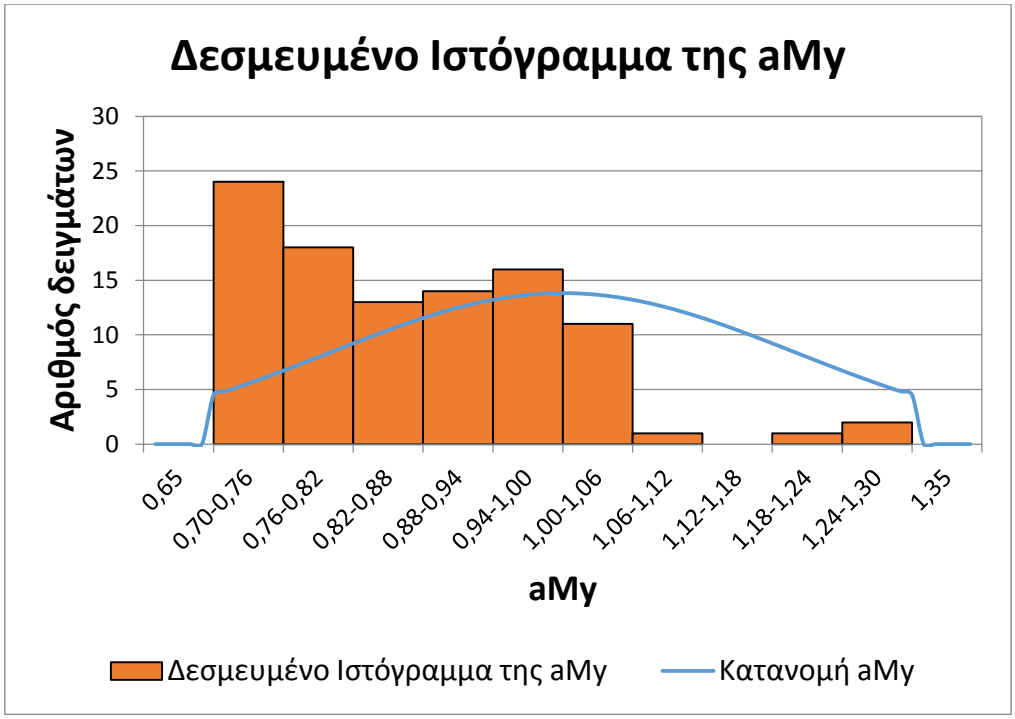


Παρατηρούμε ότι ο πραγματικός συντελεστής μεταβλητότητας μέχρι και την πιθανότητα αστοχίας $P_F = 10^{-2}$ ακολουθεί το κάτω όριο ενώ κινούμενοι σε μικρότερες πιθανότητες προσεγγίζεται καλύτερα από τον μέσο όρο των δυο ορίων και αυτό γιατί οι επιδράσεις της συσχέτισης συσσωρεύονται καθώς αυξάνονται τα επίπεδα προσομοίωσης. Επιπλέον για να συγκρίνουμε την αποτελεσματικότητα της μεθόδου των υποσυνόλων σε σχέση με μια προσομοίωση Monte Carlo υπολογίσαμε το συντελεστή μεταβλητότητας της εκτίμησης για $P_F = 10^{-3}$ που προκύπτει από μια Monte Carlo με συνολικό αριθμό δειγμάτων N=3000 (όσα δηλαδή και σε μια προσομοίωση με τη μέθοδο των υποσυνόλων). Παρατηρούμε ότι από τη μέθοδο των υποσυνόλων προκύπτει $c.o.v = 38\%$ ενώ από την MC $c.o.v = 58\%$. Η διαφορά αυτή γίνεται όλο και μεγαλύτερη καθώς πηγαίνουμε προς μικρότερες πιθανότητες καθώς ο συντελεστής μεταβλητότητας της μεθόδου των υποσυνόλων

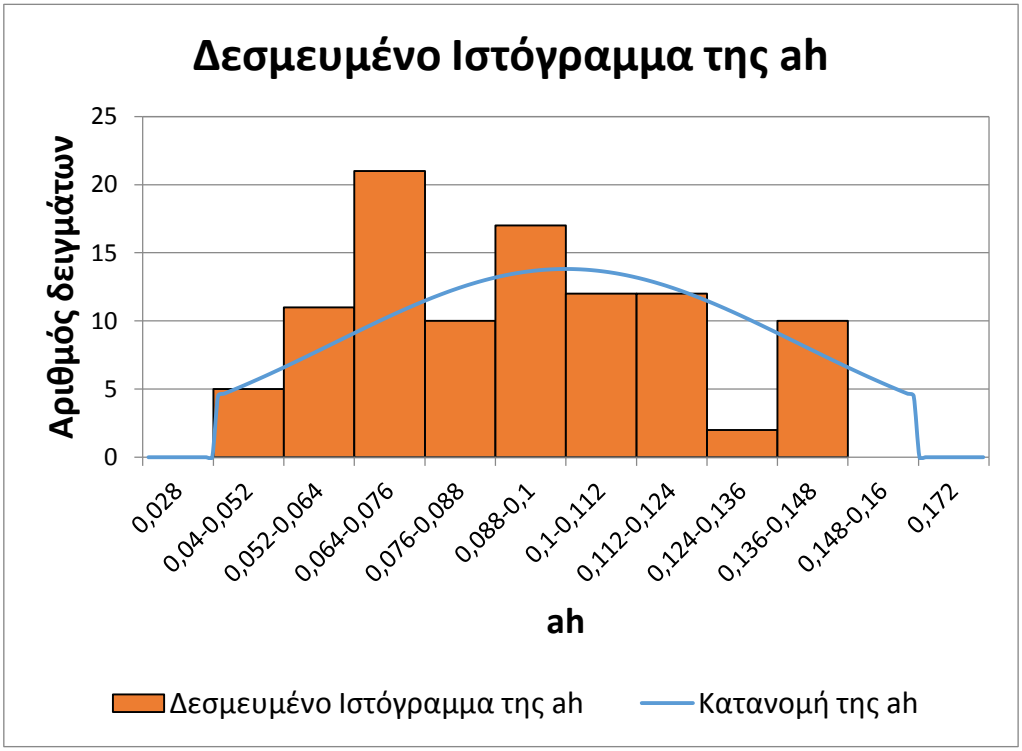
αυξάνεται περίπου με γραμμικό τρόπο με το λογάριθμο της μειούμενης πιθανότητας αστοχίας ενώ της Monte Carlo αυξάνεται εκθετικά. Έτσι όσο η στοχευόμενη πιθανότητας αστοχίας γίνεται μικρότερη η μέθοδος των υποσυνόλων γίνεται όλο και πιο αποτελεσματική από την MC.

Στη συνέχεια από μια προσομοίωση της μεθόδου των υποσυνόλων και θεωρώντας ως γεγονός αστοχίας την υπέρβαση του drift που προκύπτει για πιθανότητα αστοχίας $P_F = 10^{-3}$, συγκεκριμένα drift = 3.4%, προκύπτουν 100 δείγματα που οδηγούν στην αστοχία (όπως ήταν αναμενόμενο). Κανονικά θα έπρεπε να είχαμε ορίσει ένα συγκεκριμένο όριο του drift το οποίο αν η μέθοδος το ξεπερνούσε θα έπρεπε να τερματιζόταν. Ωστόσο στην παρούσα εργασία για λόγους οικονομίας υπολογιστικού χρόνου αποφασίστηκε να υλοποιηθεί η διαδικασία επιλέγοντας ακριβώς 3 επίπεδα προσομοίωσης, εκτιμώντας δηλαδή τις b_1, b_2 και b_3.

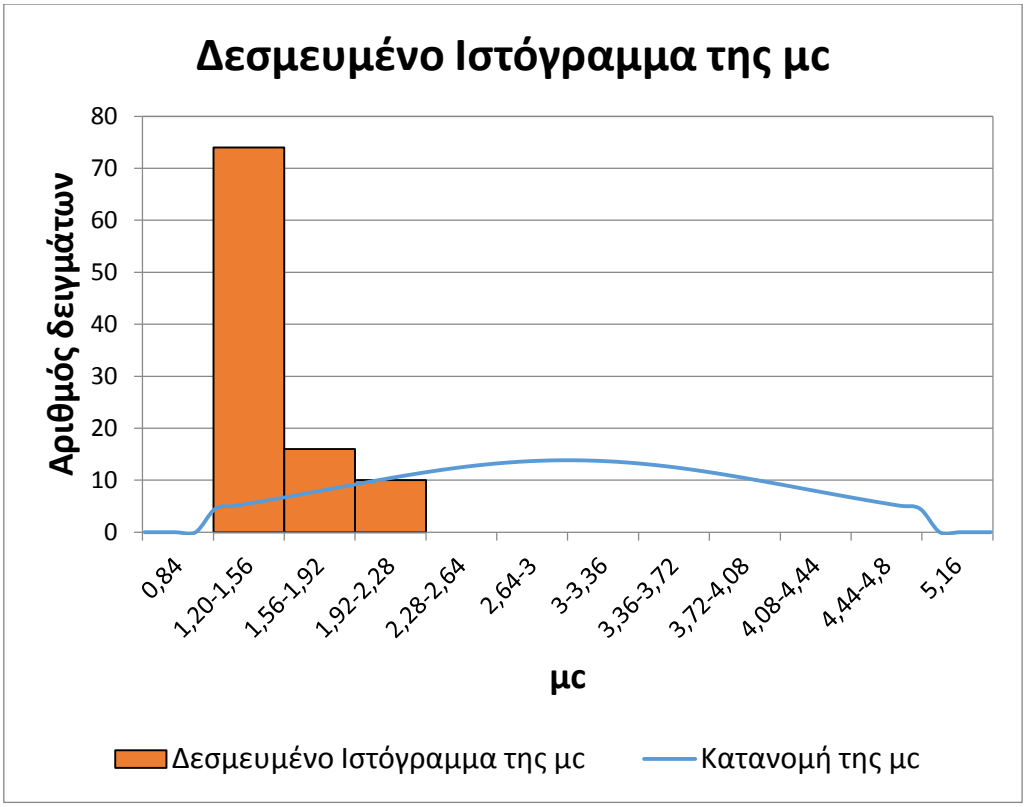
Από τα 100 αυτά δείγματα (των 107 τυχαίων μεταβλητών το καθένα) που οδηγούν στην αστοχία, δηλαδή υπερβαίνουν το drift = 3.4%, υπολογίστηκαν τα δεσμευμένα ιστογράμματα (που δίνουν μια προσέγγιση της δεσμευμένης κατανομής) των 6 αβέβαιων παραμέτρων που αντιστοιχούν στο διάγραμμα ροπών-στροφών των πλαστικών αρθρώσεων. Αυτά τα συγκρίναμε με τις αρχικές κατανομές των παραμέτρων με σκοπό να ελέγξουμε αν κάποια από αυτές έχει σημαντική επίδραση ως προς την αστοχία. Αυτό δεν έχει νόημα να γίνει για κάθε μια από τις φάσεις του σεισμού αφού δεν αναμένεται να έχουν κάποια επιρροή ως μεμονωμένες. Ωστόσο έγινε μια προσπάθεια να ελέγξουμε αν αυτές ευθυγραμμίζονται με κάποιο τρόπο ώστε να οδηγούν στην αστοχία. Συγκεκριμένα υπολογίστηκε ο συντελεστής συσχέτισης τους $\rho(k)$ για διάφορες τιμές του k (lag) για κάθε ένα από τα 100 δείγματα και στη συνέχεια πήραμε το μέσο όρο αυτών. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν για κάθε τιμή του k ήταν πολύ κοντά στο μηδέν γεγονός που σημαίνει ότι οι φάσεις είναι ασυσχέτιστες μεταξύ τους.



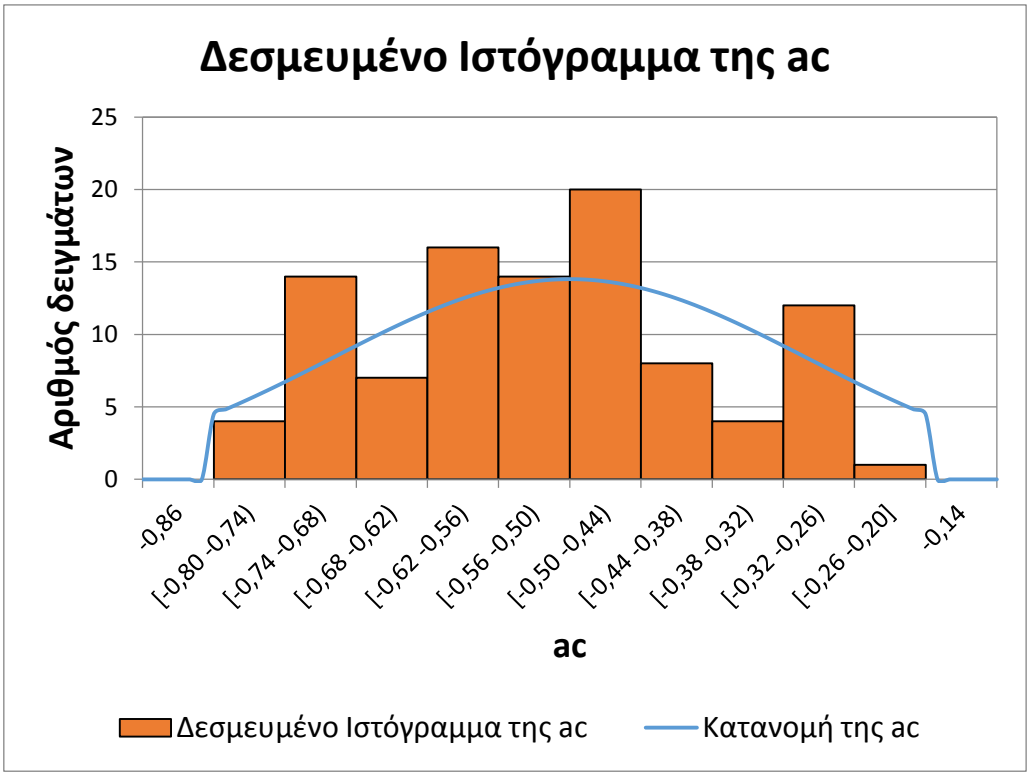
Βλέπουμε ότι το δεσμευμένο ιστόγραμμα της α_{My} έχει μετατοπιστεί σταδιακά προς το αριστερό μισό της αρχικής της μη δεσμευμένης κατανομής γεγονός που υποδηλώνει ότι η παράμετρος αυτή επηρεάζει την αστοχία.



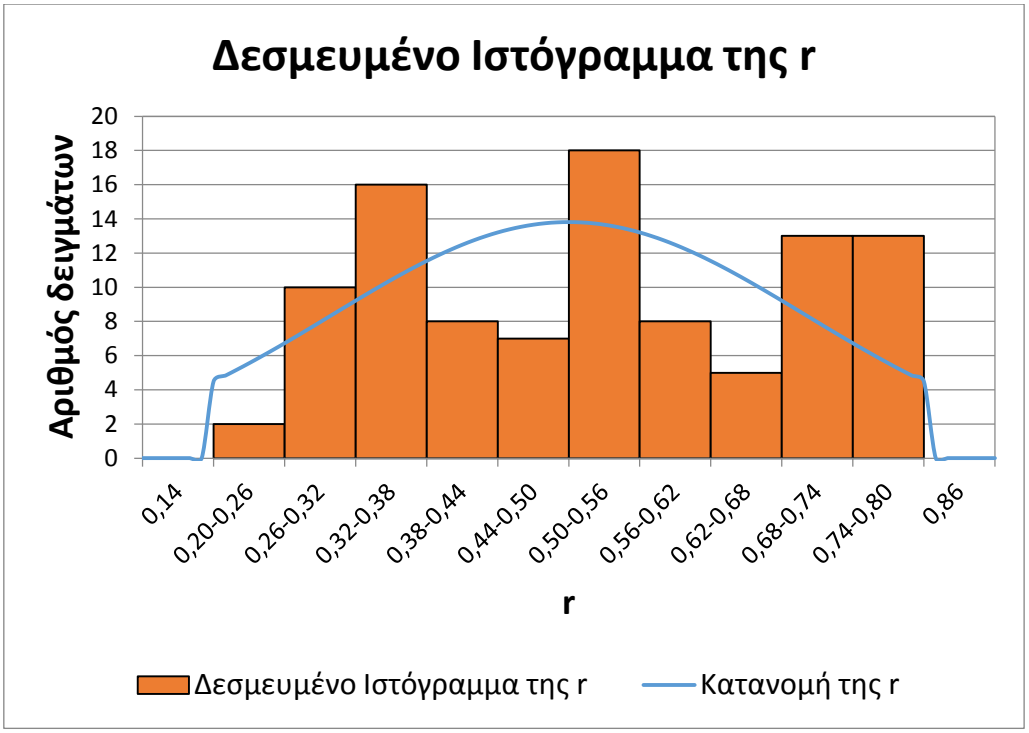
Παρατηρούμε ότι το δεσμευμένο ιστόγραμμα της α_h δεν παρουσιάζει σημαντική διαφορά από την αρχική της κατανομή υποδηλώνοντας έτσι ότι η παράμετρος αυτή δεν έχει επιρροή στον καθορισμό της αστοχίας.



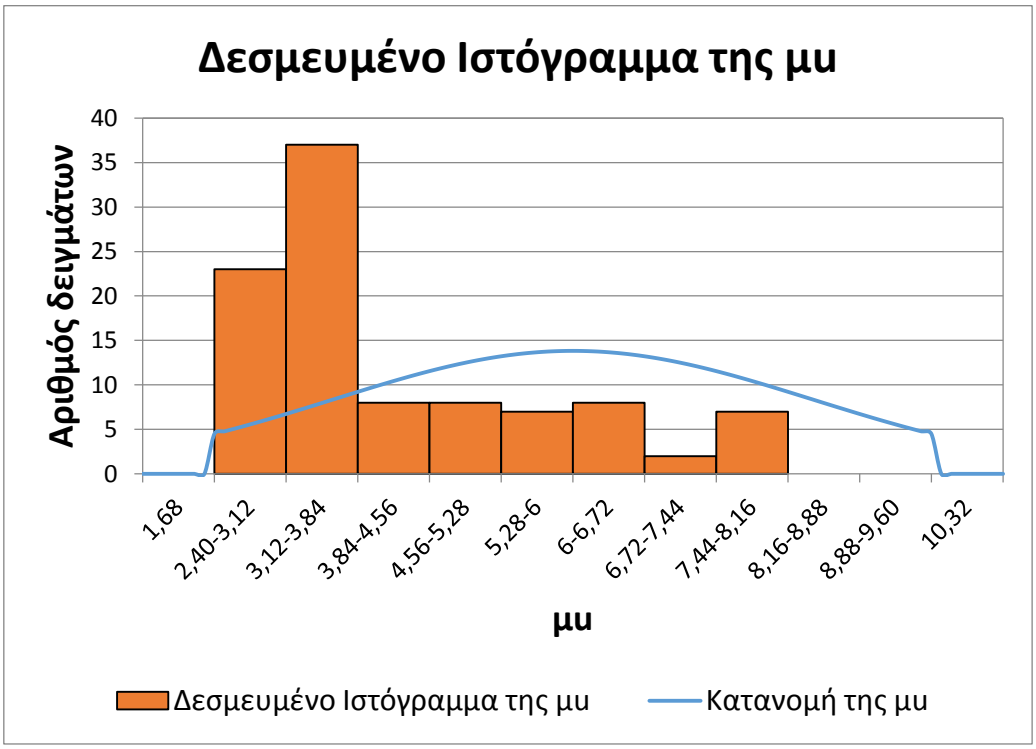
Εδώ το δεσμευμένο ιστόγραμμα της μ_c έχει μετατοπιστεί πλήρως προς το αριστερό άκρο της αρχικής της κατανομής γεγονός που υποδεικνύει ότι η αστοχία είναι πολύ ευαίσθητη ως προς αυτή την παράμετρο.



Για την τυχαία μεταβλητή α_c προκύπτουν τα ίδια συμπεράσματα με αυτά της α_h.



Ομοίως και για την τυχαία μεταβλητή r διαπιστώνουμε ότι δεν έχει σημαντική επιρροή στην αστοχία.



Εδώ παρατηρούμε μια ολίσθηση του δεσμευμένου ιστογράμματος της τυχαίας μεταβλητής μ_u προς τις χαμηλές τιμές της αρχικής της κατανομής, οπότε θεωρούμε ότι αποτελεί μια μεταβλητή που επηρεάζει την αστοχία.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν η εφαρμογή της μεθόδου των υποσυνόλων (Subset Simulation) για την εκτίμηση μικρών πιθανοτήτων αστοχίας μιας κατασκευής η οποία υποβαλλόταν σε τυχαία σεισμική φόρτιση και επιπλέον παρουσίαζε αβεβαιότητες ως προς την ικανότητα της.

Αρχικά η μέθοδος αυτή επιλύει το πρόβλημα του υπολογισμού μιας μικρής πιθανότητας αστοχίας στον αρχικό πιθανοτικό χώρο αντικαθιστώντας το από μια αλληλουχία προσομοιώσεων πιο συχνών γεγονότων σε δεσμευμένους πιθανοτικούς χώρους. Για την αποτελεσματική εκτίμηση των δεσμευμένων πιθανοτήτων γίνεται χρήση του τροποποιημένου αλγορίθμου Metropolis. Η επιτυχία τώρα της μεθόδου βασίζεται στην επιλογή του εύρους των προτεινόμενων κατανομών, το οποίο θα πρέπει να επιλέγεται έτσι ώστε σε κάθε δεσμευμένο επίπεδο προσομοίωσης ο αντίστοιχος ρυθμός αποδοχής της υποψήφιας κατάστασης να είναι μεταξύ 30% και 50%. Επιπλέον επιλέγοντας τιμή για τη δεσμευμένη πιθανότητα αστοχίας p_0 στο διάστημα $[0.1, 0.3]$ οδηγούμαστε σε παρόμοια αποτελεσματικότητα έτσι δεν είναι απαραίτητο να βρούμε την ακριβή βέλτιστη τιμή. Επίσης τα δείγματα των Μαρκοβιανών αλυσίδων που δημιουργούνται μέσω της μεθόδου των υποσυνόλων μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να πάρουμε πληροφορίες σχετικά με το αν η αστοχία συνδέεται με κάποια συγκεκριμένη αβέβαιη παράμετρο.

Για την εφαρμογή που υλοποιήθηκε στην εργασία αυτή ακολουθώντας όλα τα παραπάνω διαπιστώθηκε ότι τα αποτελέσματα που παίρνουμε από μια προσομοίωση της μεθόδου των υποσυνόλων με συνολικό αριθμό δειγμάτων N=3.000, δεν διαφέρουν σημαντικά από αυτά της προσομοίωσης Monte Carlo που προκύπτουν από N=100.000 δείγματα. Επίσης από την προσομοίωση 50 ανεξάρτητων προσομοιώσεων της μεθόδου και παίρνοντας το μέσο όρο αυτών καταλήξαμε ότι η εκτιμώμενη πιθανότητα αστοχίας που προκύπτει είναι πρακτικά αμερόληπτη. Δηλαδή η μεροληψία λόγω της συσχέτισης μεταξύ των εκτιμώμενων δεσμευμένων πιθανοτήτων στα διάφορα επίπεδα προσομοίωσης είναι αμελητέα. Παράλληλα, από τις 50 αυτές προσομοιώσεις υπολογίστηκε ο δειγματικός συντελεστής μεταβλητότητας ο οποίος φάνηκε μέχρι και την πιθανότητα αστοχίας

$P_F = 10^{-2}$ να ακολουθεί το κάτω εκτιμώμενο όριο ενώ κινούμενοι σε μικρότερες πιθανότητες να προσεγγίζεται καλύτερα από τον μέσο όρο του άνω και κάτω εκτιμώμενου ορίου. Αυτό συμβαίνει γιατί οι επιδράσεις της συσχέτισης συσσωρεύονται καθώς αυξάνονται τα επίπεδα προσομοίωσης. Ωστόσο τόσο οι θεωρητικές εκτιμήσεις (άνω και κάτω όριο) του συντελεστή όσο και αυτός που υπολογίστηκε από τις 50 προσομοιώσεις, καταδεικνύουν μια ουσιαστική βελτίωση της αποτελεσματικότητας σε σχέση με μια βασική προσομοίωση Monte Carlo, η οποία γίνεται όλο και μεγαλύτερη όσο στοχεύουμε στην εκτίμηση μικρότερων πιθανοτήτων. Τέλος για μια προσομοίωση της μεθόδου έγινε η κατασκευή των δεσμευμένων ιστογραμμάτων, για τις 6 μεταβλητές του διαγράμματος ροπών-στροφών της πλαστικής άρθρωσης, με βάση τα δείγματα που οδηγούσαν στην αστοχία. Παρατηρήσαμε ότι από τις μεταβλητές αυτές επιρροή στην αστοχία έχουν οι α_{My}, μ_u και περισσότερο η μ_c. Ενώ για τις φάσεις των σεισμικών καταγραφών των αντίστοιχων δειγμάτων οδηγηθήκαμε ότι δεν ευθυγραμμίζονται (δεν συσχετίζονται) με κάποιο τρόπο ώστε να οδηγούν στην αστοχία.

Εν κατακλείδι η μέθοδος των υποσυνόλων των *Siu-Kui Au* και *James Beck* παρέχει ένα χρήσιμο εργαλείο για την αξιολόγηση της σεισμικής απόδοσης των κατασκευών μέσω της αποτελεσματικής εκτίμησης μικρών πιθανοτήτων αστοχίας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Au, S. K., & Beck, J. L. (2001). Estimation of small failure probabilities in high dimensions by subset simulation.

2. Au, S. K., & Beck, J. L. (2003). Subset Simulation and its Application to Seismic Risk Based on Dynamic Analysis.

3. Au, S. K., Ching, J. & & Beck, J. L. (2006). Application of subset simulation methods to reliability benchmark problems.

4. Au, S. K., & Wang, Y. (2014). Engineering Risk Assessment with Subset Simulation. John Wiley & Sons.

5. Au, S. K. (2005). Reliability-based design sensitivity by efficient simulation.

6. Beck, J. L., & Zuev, K. M. (2015). Rare Event Simulation.

7. Δαμιανού, Χ., Παπαδάτος, Ν., Χαραλαμπίδης, Χ. Α. (2003). Εισαγωγή στις Πιθανότητες και τη Στατιστική.

8. Faber, H. M. Basics of Structural Reliability.

9. Fragiadakis, M., & Vamvatsikos, D. (2009). Fast performance uncertainty estimation via pushover and approximate IDA.

10. Κοκολάκης, Γ. Ε. – Σημειώσεις Στοχαστικών Ανελίξεων.

11. Μαθιόπουλος, Π. – Τυχαίες διαδικασίες και θόρυβος. ΕΚΠΑ

12. Matlab – Parallel Computing Toolbox User's Guide.

13. Pacific Earthquake Research Center, Open System for Earthquake Engineering Simulation – OpenSEES.

14. Seismosoft 2013, SeismoSignal – A computer program for signal processing of time – histories, available from URL: www.seismosoft.com

15. Sorensen, D. J. (2004) – Structural Reliability Theory.

16. Stefanou, G. (2009) – The stochastic finite element method: Past, present and future.

17. Vamvatsikos, D., & Fragiadakis, M. (2009). Incremental dynamic analysis for estimating seismic performance sensitivity and uncertainty.

18. Yunghsiang S. Han. – Random Processes.

19. Zuev, K. M., Beck, J. L., Au, S. K., & Katafygiotis, L. S. (2012). Bayesian Post-Processor and other Enhancements of Subset Simulation for Estimating Failure Probabilities in High Dimensions.

20. Zuev, K. M. (2015). Subset Simulation Method for Rare Event Estimation: An Introduction.