

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Δ.Π.Μ.Σ. «Εφαρμοσμένες Μαθηματικές
Επιστήμες»

Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας Ρευστών



Μεταπτυχιακή Εργασία

«Αεροδυναμική μελέτη πτήσης ελικοπτέρου υπό την επίδραση πεδίου ταχύτητας που δημιουργείται από την αναπροσαρμογή του πεδίου ταχύτητας του ομόρρου μιας ανεμογεννήτριας»

Χρήστος Σκληρός

Επιβλέπων καθηγητής: Σπυρίδων Βουτσινάς

Αθήνα 2016

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Δ.Π.Μ.Σ. «Εφαρμοσμένες Μαθηματικές
Επιστήμες»
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας Ρευστών



Μεταπτυχιακή Εργασία

«Αεροδυναμική μελέτη πτήσης ελικοπτέρου υπό την επίδραση πεδίου ταχύτητας που δημιουργείται από την αναπροσαρμογή του πεδίου ταχύτητας του ομόρρου μιας ανεμογεννήτριας»

Χρήστος Σκληρός

Επιβλέπων καθηγητής: Σπυρίδων Βουτσινάς

Αξιολογήθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την/...../.....

- 1.
- 2.
- 3.

Αθήνα 2016

.....
Χρήστος Σκληρός

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απογορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ' ολοκλήρου ή τμήματος αυτής για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν το συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευτεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Να πεθαίνεις κάθε μέρα. Να
γεννιέσαι κάθε μέρα. Ν' αρνιέσαι ό,τι
έχεις κάθε μέρα. Η ανώτατη αρετή δεν
είναι να 'σαι ελεύτερος, παρά να
μάχεσαι για ελευτερία. Μην
καταδέχεσαι να ρωτάς: "Θα νικήσουμε;
Θα νικηθούμε;" Πολέμα!

(Νίκος Καζαντζάκης, Ασκητική)

Ευχαριστίες

Η συγκεκριμένη μεταπτυχιακή εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια του Δ.Π.Μ.Σ.
«Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες» στο εργαστήριο Μηχανικής των Ρευστών
της σχολής Μ.Μ. του Ε.Μ.Π.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Βουτσινά για την
ουσιαστική καθοδήγηση και τις καίριες συμβουλές που παρείχε καθόλη τη διάρκεια
της εκπόνησης της εργασίας.

Επίσης, η παρούσα εργασία δε θα ολοκληρωνόταν χωρίς τη σημαντική συμβολή του
κ. Πέτρου Χασαπόγιαννη μαζί με τον οποίο περάσαμε αρκετές ώρες συζητώντας τη
λειτουργία του αεροδυναμικού κώδικα και διάφορους τρόπους προσέγγισης του
προβλήματος. Αποφασιστική ήταν επίσης και η βοήθεια που παρείχε ο Θεολόγος
στον συμβουλές για τη λειτουργία διαφόρων σημείων του κώδικα.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου και τους φίλους μου που ήταν
δίπλα μου καθόλη την τριετή περίοδο του μεταπτυχιακού.

Πίνακας Περιεχομένων

Σύνοψη

Abstract

Περίληψη

Summary

Κεφάλαιο 1: Δυναμική ασυμπίεστης μη συνεκτικής ροής

Κεφάλαιο 2 : Η αριθμητική μέθοδος

Κεφάλαιο 3: Η μοντελοποίηση του προβλήματος

Κεφάλαιο 4: Προσομοίωση πτήσης με ταχύτητα 39.9 m/s

Κεφάλαιο 5: Προσομοίωση πτήσης με ταχύτητα 50.5 m/s

Κεφάλαιο 6: Συμπεράσματα

Βιβλιογραφία

Παράρτημα

Περιεχόμενα

Σύνοψη.....	10
Περίληψη.....	11
Εισαγωγή.....	12
Η διατύπωση του προβλήματος.....	12
Περιγραφή της αριθμητικής μεθόδου που χρησιμοποιήθηκε.....	12
Κεφάλαιο 1: Δυναμική ασυμπίεστης μη συνεκτικής ροής.....	14
1.1 Κινηματική και δυναμική ρευστού.....	14
1.1.1 Ροϊκή συνάρτηση.....	14
1.1.2 Εξισώσεις κίνησης.....	16
1.1.3 Ολοκληρώματα κίνησης.....	16
1.1.4 Στοιχειώδη κύματα σε σφαιρική σταγόνα.....	17
1.1.5 Ρυθμός μεταβολής υλικών παραγώγων.....	19
1.1.6 Αστρόβιλη ροή.....	21
1.1.7 Μοντέλα απλή δισδιάστατης ροής.....	22
1.2 Τρισδιάστατη ροή.....	28
1.2.1 Ειδικές τετριμένες λύσεις.....	28
1.2.2 Το παράδοξο του <i>d'Alembert</i>	29
1.2.3 Απεικόνιση μιας πηγής μέσα σε μια σφαίρα.....	31
1.2.4 Ροή που περνά από ένα τυχαίο σώμα.....	32
1.2.5 Ασταθής ροή.....	34
1.2.6 Προστιθένη μάζα σωμάτων που κινούνται εντός ρευστού.....	35
1.3 Τυρβώδης ροή.....	37
1.3.1 Δινοσωλήνες.....	37
1.3.2 Επαγόμενο πεδίο ταχύτητας.....	38
1.3.3 Ο νόμος των <i>Biot-Savart</i>	39
1.3.4 Δινοπέταλο.....	40
1.3.5 Φύλλο στροβιλότητας.....	42
1.4 Θεωρία λεπτών αεροτομών.....	44
1.4.1 Το πρόβλημα του πάχους της αεροτομής.....	46
1.4.2 Το πρόβλημα της κυρτότητας της αεροτομής.....	48
1.4.3 Επίπεδη πλάκα σε γωνία προσβολής.....	52
1.4.4 Συνδιαστικά αεροδυναμικά χαρακτηριστικά.....	53
Κεφάλαιο 2: Η Αριθμητική Μέθοδος.....	55
2.1 Μαθηματικό υπόβαθρο.....	55
2.1.1 Το θεώρημα διαχωρισμού του Helmholtz.....	55

2.1.2 Το θεώρημα του <i>Kelvin</i>	56
2.1.3 Επαγόμενο δυναμικό και ταχύτητα από συνεχή διανομή πηγών	57
2.1.4 Επαγόμενο δυναμικό και ταχύτητα από συνεχή διανομή διπόλων	58
2.1.5 Επαγόμενο δυναμικό και ταχύτητα από συνεχή διανομή στροβιλότητας ..	59
2.2 Επίλυση των εξισώσεων της ροής και υπολογισμός των αεροδυναμικών φορτίων	60
2.2.1 Οι εξισώσεις της ροής	60
2.2.2 Η παραγωγή και η εξέλιξη του κοντινού και του μακρινού ομόρρου	67
2.2.3 Υπολογισμός των αεροδυναμικών φορτίων σε λεπτά σώματα	71
2.2.4 Πτέρυγα με πάχος	73
2.2.5 Ο ομόρρος ως φύλλο στροβιλότητας.....	75
2.2.6 Είδη σωμάτων και πλεγμάτων	76
2.2.7 Βαθμοί ελευθερίας των διανομών πηγών και διπόλων στη πτέρυγα	77
2.2.8 Υπολογισμός των φορτίων σε σώματα με πάχος	80
Κεφάλαιο 3: Η μοντελοποίηση του προβλήματος	83
3.1 Η ανεμογεννήτρια και ο τρόπος παραγωγής του τυρβώδους ανέμου	84
3.2 Το ελικόπτερο	91
Κεφάλαιο 4: Προσομοίωση πτήσης με ταχύτητα 39.9 m/s	93
4.1 Υπολογισμός του συντελεστή άντωσης	93
4.2 Υπολογισμός του συντελεστή οπισθέλκουσας	96
4.3 Υπολογισμός του συντελεστή κάθετης δύναμης	99
4.4 Υπολογισμός του συντελεστή εφαπτομενικής δύναμης.....	102
4.5 Υπολογισμός του συντελεστή ροπής πρόνευσης	105
4.6 Υπολογισμός συντελεστή πίεσης.....	108
4.6.1 Κατανομή του συντελεστή πίεσης στο 75% του πτερυγίου	108
4.6.2 Κατανομή του συντελεστή πίεσης στο 87% του πτερυγίου	111
Κεφάλαιο 5: Προσομοίωση πτήσης με ταχύτητα 50.5 m/s	115
5.1 Υπολογισμός του συντελεστή άντωσης	115
5.2 Υπολογισμός του συντελεστή οπισθέλκουσας	118
5.3 Υπολογισμός του συντελεστή κάθετης δύναμης	121
5.4 Υπολογισμός του συντελεστή εφαπτομενικής δύναμης.....	124
5.5 Υπολογισμός του συντελεστή ροπής πρόνευσης	127
5.6 Υπολογισμός συντελεστή πίεσης.....	130
5.6.1 Κατανομή του συντελεστή πίεσης στο 75% του πτερυγίου	130
5.6.2 Κατανομή του συντελεστή πίεσης στο 87% του πτερυγίου	133
Κεφάλαιο 6: Συμπεράσματα.....	137

Βιβλιογραφία	145
---------------------------	------------

Σύνοψη

Οι απαιτήσεις για τη χρήση ελικοπτέρου σε διάφορες πτητικές αποστολές συνεχώς αυξάνονται και σε συνδυασμό με τη πρόοδο σημειώνεται σε άλλους τεχνολογικούς κλάδους που επαφίονται στη σχεδίαση ενός ελικοπτέρου (επιστήμη των υλικών, στροβιλοκινητήρες, ηλεκτρονικά συστήματα, αυτοματισμοί κ.α.) απαιτούν τη μελέτη και ανάλυση των αεροδυναμικών φαινομένων σε ολοένα και περισσότερες και πιο πολύπλοκες συνθήκες πτήσης.

Οι πειραματικές μέθοδοι παράγουν συνήθως πιο έγκυρα αποτελέσματα, ωστόσο η πραγματοποίηση ενός πειράματος με τέτοιο τρόπο ώστε τα αποτελέσματα που παράγονται να είναι αρκετά ικανοποιητικά, καθώς και να μπορούν να εξετάσουν διάφορες πολύπλοκες περιπτώσεις πτήσεων, τις καθιστούν χρονοβόρες και με μεγάλες απαιτήσεις σε ανθρώπινους και υλικούς πόρους. Συνεπώς επιλέγονται οι υπολογιστικές τεχνικές αεροδυναμικής ανάλυσης (CFD, panel method κ.α.), οι οποίες στερούνται λίγο σε ακρίβεια αποτελεσμάτων αλλά υπερκαλύπτουν όλα τα μειονεκτήματα των πειραματικών μεθόδων.

Στη συγκεκριμένη εργασία, με εφαρμογή της υπολογιστικής μεθόδου των συνοριακών στοιχείων, μελετάται η πτήση ενός ελικοπτέρου υπό την επίδραση ενός πεδίου ταχύτητας, που παράγεται αναπροσαρμόζοντας το πεδίο ταχύτητας του ομόρρου που παράγεται από τη λειτουργία μιας ανεμογεννήτριας. Οι περιπτώσεις που εξετάζονται προσομοιώνουν δύο περιπτώσεις οριζόντιας πτήσης με ταχύτητες 39.9 m/s και 50.5 m/s στην ίδια απόσταση από την πηγή του πλάγιου πεδίου ταχύτητας, με μοντελοποίηση των πτερυγίων ως ανωστικές επιφάνειες με πάχος. Τα αποτελέσματα που παράγονται συγκρίνονται με περιπτώσεις πτήσης σε αδιατάραχτη ροή αέρα.

Η παρούσα εργασία δεν προσομοιώνει την πτήση του ελικοπτέρου στον ομόρρου της ανεμογεννήτριας, ωστόσο μελετά την αεροδυναμική συμπεριφορά του ελικοπτέρου όταν λειτουργεί σε ένα πεδίο ταχύτητας που γεννάται από το πεδίο ταχύτητας του ομόρρου της ανεμογεννήτριας.

Περίληψη

Η παρούσα εργασία μελετά τα αεροδυναμικά χαρακτηριστικά ενός ελικοπτέρου όταν αυτό λειτουργεί υπό την επίδραση ενός πεδίου ταχύτητας που γεννάται αναπροσαρμόζοντας το πεδίο ταχύτητας του ομόρρου μιας ανεμογεννήτριας. Για την προσομοίωση του ελικοπτέρου χρησιμοποιήθηκε το κύριο στροφέιο του ελικοπτέρου BO-105, σε σύμκρινση 40%. Για τη δημιουργία του ομόρρου της ανεμογεννήτριας χρησιμοποιήθηκε μια ανεμογεννήτρια με τρία πτερύγια που το καθένα έχει μήκος 63m. Το πεδίο ταχύτητας, το οποίο χρησιμοποιήθηκε για τις προσομοιώσεις, δημιουργήθηκε έχοντας ως βάση το πεδίο ταχύτητας του ομόρρου της ανεμογεννήτριας, κρατώντας αμετάβλητες τις εντάσεις των ταχυτήτων και μικραίνοντας τις αποστάσεις των σημείων στο $\frac{1}{4}$ της απόστασης τους. Για την προσομοίωση χρησιμοποιήθηκαν οι κώδικες GENUVP, hGast, και rpm_free, που έχουν αναπτυχθεί στο εργαστήριο Μηχανική των Ρευστών της σχολής Μηχανολόγων Μηχανικών του ΕΜΠ.

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζεται αναλυτικά η θεωρία της δυναμικής της ασυμπίεστης μη συνεκτικής ροής ρευστού. Παρουσιάζονται οι εξισώσεις που περιγράφουν τη ροή του ρευστού και τον τρόπο που αυτές επιλύονται. Επίσης αναλύονται οι έννοιες της πηγής και του διπόλου, οι οποίες αποτελούν σημαντικό τμήμα της αριθμητικής μεθόδου που αναλύεται στο επόμενο κεφάλαιο.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται ο τρόπος με τον οποίο διακριτοποιούνται οι εξισώσεις πρόβληματος της αλληλεπίδρασης στροφείου που περιστρέφεται σε ροή αέρα, καθώς και τον τρόπο που διακριτοποιούνται τα στερεά σώματα του προβλήματος. Επιπλέον, αναλύεται η αριθμητική μέθοδος που χρησιμοποιείται, ο τρόπος που υπολογίζονται τα αεροδυναμικά φορτία, καθώς και διάφορες περιπτώσεις μορφής που μπορεί να έχει ένα σώμα (πτερύγιο με πάχος, πτερύγιο με αμελητέο πάχος κ.α.). Η διακριτοποίηση του προβλήματος και ο καθορισμός της συγκεκριμένης περίπτωσης προσομοίωσης υλοποιείται από τους κώδικες που περιγράφονται προηγουμένως, με κατάλληλη ρύθμιση των αρχείων δεδομένων.

Στο τρίτο κεφάλαιο, παρουσιάζεται συνοπτικά ο τρόπος που διεξάχθηκαν οι διάφορες περιπτώσεις προσομοίωσης. Πιο συγκεκριμένα φαίνεται το στροφέιο της ανεμογεννήτριας που χρησιμοποιήθηκε καθώς και ο τρόπος κατά τον οποίο μορφοποιήθηκε ο ομόρρος προκειμένου να προσαρμοστεί στον αεροδυναμικό κώδικα.

Στο τέταρτο και στο πέμπτο κεφάλαιο της εργασίας παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων με ταχύτητες πτήσης 39.9 m/s και 50.5 m/s αντίστοιχα σε οριζόντια πτήση. Δηλαδή υπάρχουν διαγράμματα που δείχνουν τη μεταβολή των αεροδυναμικών συντελεστών (συντελεστής άντωσης, συντελεστής οπισθέλκουσας, συντελεστής πίεσης κ.α.) σε σχέση με τη θέση του αζιμούθιου σε διάφορες ακτινικές και χορδικές θέσεις ενός πτερυγίου.

Στο τελευταίο κεφάλαιο εμπεριέχονται συμπεράσματα, παρατηρήσεις και σχόλια για τη μελέτη που πραγματοποιήθηκε. Επίσης συγκρίνονται κάποια στοιχεία των δύο διαφορετικών περιπτώσεων που εξετάστηκαν και τελικά προτείνονται ιδέες για μελλοντική μελέτη και έρευνα.

Εισαγωγή

Η διατύπωση του προβλήματος

Υπάρχουν διάφορα αντικρουόμενα θέματα που αφορούν τη σύγχρονη σχεδίαση ενός ελικοπτέρου. Η σχεδίαση ενός ελικοπτέρου ασχολείται με την μελέτη και λειτουργία όλων των τμημάτων του ελικοπτέρου, τα φορτία που αναπτύσσονται στα πτερύγια των στροφείων και της ατράκτου, τα επίπεδα κραδασμών, τον εσωτερικό και εξωτερικό θόρυβο, καθώς και χαρακτηριστικά ευστάθειας και ελέγχου. Πολλές φορές η αεροδυναμική μελέτη ενός ελικοπτέρου ανάγεται σε πολύ μεγάλο βαθμό στην αεροδυναμική μελέτη του κυρίου στροφείου. Σημαντικό αντικείμενο της μελέτης των ελικοπτέρων αποτελεί και η ανάλυση της συμπεριφοράς τους υπό την επίδραση πλάγιων ανέμων και γενικότερα πεδίων ταχύτητας που εμπεριέχουν αναταράξεις.

Στην παρούσα εργασία, αρχικά δημιουργούμε το πεδίο ταχύτητας του ομόρρου μιας ανεμογεννήτριας σε λειτουργία, και αφού δημιουργήσουμε ένα ομοιόμορφο πλέγμα του πεδίου ταχύτητας, μικραίνουμε τις αποστάσεις των σημείων του στο $\frac{1}{4}$ των αρχικών, κρατώντας σταθερές τις εντάσεις των ταχυτήτων. Κατ' αυτόν τον τρόπο, οποίος περιγράφεται αναλυτικά στο 3^ο κεφάλαιο, παράγουμε ένα πεδίο ταχύτητας με διαταραχές και στις τρεις διεθύνσεις, που έχει παρόμοια μορφή και ίδιες εντάσεις ταχυτήτων με το πεδίο ταχύτητας του ομόρρου της ανεμογεννήτριας. Τελικά, προσθέτουμε ένα πλάγιο άνεμο, που προσομοιώνει την επ' άπειρο πλάγια ταχύτητα και προσομοιώνουμε την πτήση ενός ελικοπτέρου κάθετα στη ροή του πλάγιου ανέμου.

Πρέπει να σημειωθεί ότι η συγκεκριμένη μελέτη, δεν αποτελεί την προσομοίωση της πτήσης ενός ελικοπτέρου κάθετα στον ομόρρου μιας ανεμογεννήτριας σε λειτουργία, αφού ωστόσο δημιουργείται ένας πλάγιος άνεμος με διαταραχές, ο οποίος γεννάται από το πεδίο ταχύτητας του ομόρρου της ανεμογεννήτριας. Η συγκεκριμένη μελέτη μας επιτρέπει την προσομοίωση της πτήσης του ελικοπτέρου σε μεγάλο εύρος του νέου πεδίου ταχύτητας, και τελικά μπορούμε να εξάγουμε αρκετές χρήσιμες πληροφορίες, που ανάγονται στο αρχικό πρόβλημα της πτήσης ενός ελικοπτέρου κάθετα στον ομόρρου μιας ανεμογεννήτριας σε λειτουργία.

Περιγραφή της αριθμητικής μεθόδου που χρησιμοποιήθηκε

Η ροή δυναμικού γύρω από μια αεροτομή έχει μεγάλη σπουδαιότητα στη θεωρία της πτήσης. Η εξίσωση που διέπει τη ροή δυναμικού είναι η διαφορική εξίσωση *Laplace*, μια γραμμική μερική διαφορική εξίσωση. Χρησιμοποιώντας μια από τις εξισώσεις του *Green*, προκύπτουν οι λύσεις της εξίσωσης *Laplace* στη μορφή ορισμένων ολοκληρωμάτων. Οι αριθμητικές μέθοδοι που βασίζονται στην προηγούμενη παρατήρηση ονομάζονται μέθοδοι συνορικών στοιχείων (*panel methods*).

Οι μέθοδοι των συνορικών στοιχείων είναι αριθμητικές μέθοδοι που βασίζονται σε απλοποιημένες υποθέσεις ως προς τις φυσικές ιδιότητες της ροής αέρα γύρω από μια πτέρυγα. Το ιξώδες της ροής θεωρείται αμελητέο και το συνολικό αποτέλεσμα του ιξώδους της ροής συνοψίζεται στην απαίτηση η ροή να εγκαταλείπει την πτέρυγα από το χείλος εκφυγής ομοιόμορφα. Η συμπιεστότητα του αέρα θεωρείται αμελητέα, όπως και ο στροβιλισμός της ταχύτητας. Με τις συγκεκριμένες υποθέσεις, συνεπώς το πεδίο ταχύτητας περιγράφεται ως το βαθμωτό δυναμικό του δυναμικού της ταχύτητας, $\vec{Q} = \nabla \cdot \Phi$, και το αποτέλεσμα που προκύπτει ονομάζεται ροή δυναμικού. Η απαίτηση της διατήρησης της

μάζας στο πεδίο ροής καθιστά την εξίσωση *Laplace* ($\nabla^2\Phi = 0$), την εξίσωση που διέπει τη ροή δυναμικού.

Προκειμένου να επιλυθεί το πρόβλημα της ροής δυναμικού γύρω από ένα στερεό αντικείμενο, χρησιμοποιούμε τη συνοριακή συνθήκη μη εισχώρησης. Χρησιμοποιώντας τη εξίσωση *Green* η λύση της εξίσωσης *Laplace* είναι ένα ορισμένο ολοκλήρωμα στο σύνορο του στερεού σώματος. Τα συγκεκριμένα ολοκλήρωμα εμπεριέχουν κατανομές τετριμένων λύσεων της εξίσωσης *Laplace* στην επιφάνεια του σώματος. Ένας γραμμικός συνδυασμός των τετριμένων λύσεων είναι επίσης μια λύση της διαφορική εξίσωσης. Ο συνδυασμών απλών λύσεων της εξίσωσης παρέχει την πολυπλοκότητα που είναι απαραίτητη για την ικανοποίηση συνοριακών συνθηκών σωμάτων με πολύπλοκη γεωμετρία. Συνήθεις τετριμένες λύσεις (ιδιομορφίες) που χρησιμοποιούνται είναι οι κατανομές πηγών, στροβίλων και διπόλων.

Η διαδικασία που χρησιμοποιείται για την επίλυση προβλημάτων με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων ξεκινά με την τοποθέτηση επίπεδων στοιχείων στην επιφάνεια του στερεού σώματος που θέλουμε να μελετήσουμε, και διανέμοντας κατάλληλα κατανομές ιδιομορφιών στα επίπεδα στοιχεία, με άγνωστες όμως τις εντάσεις τους. Αφού κάθε τετριμένη λύση αποτελεί λύση της εξίσωσης *Laplace*, επίσης λύση αποτελεί και ο γραμμικός συνδυασμός τους. Επιπλέον, η συνθήκη μη εισχώρησης πρέπει να ισχύει για ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων, τα σημεία ελέγχου. Συνεπώς καταλήγουμε σε ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων που η επίλυση του καθορίζει την τιμή της έντασης των ιδιομορφιών.

Κύριο ρόλο στην αλληλεπίδραση μεταξύ των σωμάτων έχει η στροβιλότητα του ομόρρου των ανωστικών σωμάτων που μπορεί να προσπίπτει σε σώματα που ακολουθούν. Η διαχείριση των φύλλων στροβιλότητας γίνεται μέσω της αναπαράστασής του με ελεύθερα στοιχεία στροβιλότητας, που καθώς δεν προαπαιτεί την ύπαρξη συνδετικής δομής, διευκολύνει κατά πολύ τους υπολογισμούς, ιδιαίτερα σε περιπτώσεις πρόσπτωσης της στροβιλότητας σε στερεά σώματα. Η χρονική και χωρική εξέλιξη της στροβιλότητας ικανοποιεί τις εξισώσεις του *Helmholtz*, που συμπεριλαμβάνουν και μία μη γραμμική εξίσωση μεταφοράς με όρους διάδοσης, παραμόρφωσης και διάχυσης.

Επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων προκύπτουν οι άγνωστες εντάσεις των διανομών πηγών και διπόλων και είναι δυνατός ο άμεσος υπολογισμός του πεδίου ταχυτήτων. Ο υπολογισμός των πιέσεων στα στερεά όρια είναι ένα πρόβλημα πλήρως αποσυζευγμένο από τον υπολογισμό του πεδίου ροής και γίνεται με ολοκλήρωση της απόκλισης των εξισώσεων ορμής.

Κεφάλαιο 1: Δυναμική ασυμπίεστης μη συνεκτικής ροής

1.1 Κινηματική και δυναμική ρευστού

1.1.1 Ροϊκή συνάρτηση

Οι ροϊκές γραμμές έχουν την ιδιότητα ότι η στιγμιαία ταχύτητα του ρευστού σε κάθε σημείο είναι εφαπτομενική της ροϊκής γραμμής στο συγκεκριμένο σημείο. Μια επιφάνεια που αποτελείται εξολοκλήρου από ροϊκές γραμμές ονομάζεται στιγμιαία ροϊκή επιφάνεια, ή όταν έχει κατάλληλο σχήμα (δηλ. όταν οι ροϊκές γραμμές διέρχονται μέσω μιας δεδομένης κλειστής καμπύλης του ρευστού), ονομάζεται ροϊκός σωλήνας. Η κίνηση ενός συγκεκριμένου στοιχείου ρευστού στο χώρο περιγράφει την πορεία του στο χρόνο και στο χώρο. Στην περίπτωση της αδιατάραχτης ροής, οι πορείες των στοιχείων ρευστού συμπίπτουν με τις στιγμιαίες ροϊκές γραμμές.

Οι ροϊκές γραμμές δίνονται από τομές ροϊκών επιφανειών οι οποίες περιγράφονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= a \\ g(x, y, z) &= b \end{aligned} \quad (2.1)$$

και αν $\vec{v} = (u, v, w)$ είναι η ταχύτητα του ρευστού, οι ροϊκές γραμμές περιγράφονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} uf_x + vf_y + wf_z &= 0 \\ ug_x + vg_y + wg_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

από τις οποίες καταλήγουμε στις σχέσεις:

$$\begin{aligned} u &= \lambda(f_y g_z - f_z g_y) \\ v &= \lambda(f_z g_x - f_x g_z) \\ w &= \lambda(f_x g_y - f_y g_x) \end{aligned} \quad (2.3)$$

όπου λ είναι μια αυθαίρετη σταθερά.

Για ασυμπίεστα ρευστά, από την (2.3) προκύπτει:

$$\vec{v} = \nabla f \times \nabla g \quad (2.4)$$

Για δισδιάστατες ροές έχουμε ότι, $g = -z$, $f = \bar{\Psi}$, έτσι η σχέση (2.4) συνεπάγεται:

$$u = -\Psi_y, \quad v = \Psi_x \quad (2.5)$$

Η συνάρτηση $\bar{\Psi}$ ονομάζεται ροϊκή συνάρτηση διότι οι ροϊκές γραμμές της ροής είναι το σύνολο των ισοσταθμικών καμπυλών που δίνονται από τη σχέση $\bar{\Psi}(x, y, t) = f(t)$ με $f(t)$ τυχαίο. Η συγκεκριμένη παρατήρηση γίνεται ξεκάθαρη αν παρατηρήσουμε ότι η διαφορική εξίσωση των ροϊκών γραμμών είναι:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \quad (2.6)$$

Μέσω της εξίσωσης (2.5) , εξίσωση (2.6) καταλήγει στην εξίσωση:

$$\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x} dx + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial y} dy = 0 \quad (2.7)$$

ή

$$d\Psi = 0 \quad (2.8)$$

ή

$$\bar{\Psi}(x, y, z) = f(t) \quad (2.9)$$

κατά μήκος μια ροϊκής γραμμής.

Προκειμένου να δείξουμε τη σημασία της ροϊκής συνάρτησης, εισάγουμε σε μια επιφάνεια στην οποία εκτείνονται οι ροϊκές γραμμές, καρτεσιανές συντεταγμένες (α, β) , η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας σε κάθε στοιχειώδη επιφάνεια $dS = hkd\alpha d\beta$ είναι

$$v_n = \frac{f_\alpha g_\beta - f_\beta g_\alpha}{hk} \quad (2.10)$$

Συνεπώς η αποβολή ρευστού διαμέσου ενός τμήματος επιφανείας S που φράσσεται από τα ίχνη των συναρτήσεων

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= f_1, & f(x, y, z) &= f_2 \\ g(x, y, z) &= g_1, & g(x, y, z) &= g_2 \end{aligned} \quad (2.11)$$

δίνεται από τη σχέση:

$$Q = \iint_S v_n dS = \iint_S (f_\alpha g_\beta - f_\beta g_\alpha) d\alpha d\beta = \int_{g_1}^{g_2} \int_{f_1}^{f_2} df dg = (f_2 - f_1)(g_2 - g_1) \quad (2.12)$$

Παρατηρούμε ότι η τιμή του ρυθμού αποβολής ρευστού Q είναι ανεξάρτητη της επιλογής των μονοπατιών που ενώνουν τις τιμές των f_1 και f_2 και τις τιμές των g_1 και g_2 .

Στην περίπτωση της δισδιάστατης ροής, ο ρυθμός παροχής ρευστού ανα μονάδα μήκος κατά μήκος ενός τόξου AB είναι: $\Psi_A - \Psi_B$. Στην περίπτωση αξονοσυμμετρικής ροής, ο ρυθμός παροχής ρευστού διαμέσου της επιφάνειας που δημιουργείται μέσω ενός περιστρεφόμενου τόξου AB γύρω από τον άξονα συμμετρίας είναι $2\pi(\Psi_A - \Psi_B)$. Τελικά, $g = -\varphi$ και $F = \Psi$, και οι συνιστώσες της ακτινικής και της αξονικής ταχύτητας είναι:

$$u = \frac{1}{r} \Psi_z, \quad w = -\frac{1}{r} \Psi_r \quad (2.13)$$

Στη συγκεκριμένη περίπτωση η γωνία φ είναι η αζιμουθιακή γωνία. Σημειώνουμε επίσης ότι ένας δινοσωλήνας δεν είναι δυνατό να τελειώνει στο εσωτερικό του ρευστού, είτε πρέπει να είναι κλειστός, είτε να τελιώνει στο σύνορο του ρευστού είτε να επεκτείνεται στο άπειρο.

Τελικά, σημειώνουμε ότι υπάρχει πιθανότητα η ροϊκή συνάρτηση $\bar{\Psi}$ να είναι μια συνάρτηση που παίρνει διάφορες τιμές σε διάφορες θέσεις, όταν πηγές μάζας υπάρχουν εντός του πεδίου ροής.

1.1.2 Εξισώσεις κίνησης

Υπενθυμίζουμε ότι η εξίσωση της διατήρησης της μάζας είναι:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.14)$$

όπου ρ , η πυκνότητα του ρευστού.

Η εξίσωση κίνησης, δηλ. η εξίσωση *Euler*, είναι:

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = \rho \vec{F} - \nabla p \quad (2.15)$$

όπου \vec{F} είναι η δύναμη του σώματος ανά μονάδα όγκου και p είναι η πίεση.

Επίσης, η εξίσωση της διατήρησης της εσωτερικής ενέργειας e είναι:

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \right] \left(e + \frac{(\vec{v})^2}{2} \right) = \rho (\vec{F})^2 \cdot \vec{v} - \nabla p \cdot \vec{v} - p \nabla \cdot \vec{v} \quad (2.16)$$

και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.2) η εξίσωση (2.16) γίνεται:

$$\rho \left[\frac{\partial e}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) e \right] = -p \nabla \cdot \vec{v} \quad (2.17)$$

1.1.3 Ολοκληρώματα κίνησης

Η εξίσωση (2.2) μπορεί να γραφεί:

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{(\vec{v})^2}{2} \right) - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) \right] = \rho \vec{F} - \nabla p \quad (2.18)$$

Όταν η δύναμη του σώματος \vec{F} είναι συντηρητική, (δηλ. $\vec{F} = -\nabla U$) και η κίνηση είναι αδιατάρακτη, είναι δυνατή η ολοκλήρωση της εξίσωσης (2.18) κατά μήκος μιας ροϊκής γραμμής, και στη συγκεκριμένη περίπτωση κατά μήκος μιας ροϊκής γραμμής έχουμε:

$$\frac{(\vec{v})^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U = \text{const.} \quad (2.19)$$

Επιπλέον, όταν η δύναμη του σώματος είναι συντηρητική και η ροή αστρόβιλη

$$\nabla \times \vec{v} = 0 \quad \text{ή} \quad \vec{v} = \nabla \Phi \quad (2.20)$$

όπου το δυναμικό της ταχύτητας Φ μπορεί να είναι συνάρτηση μια μεταβλητής ή πολλών μεταβλητών αναλόγως αν η περιοχή είναι απλά συνεκτική ή όχι, η ολοκλήρωση της εξίσωσης (2.18) στην περίπτωση μη μόνιμης ροής είναι δυνατή σε κάθε κατεύθυνση και κατ' αυτόν τον τρόπο λαμβάνουμε τη εξίσωση Bernoulli:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{(\vec{v})^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U = \bar{F}(t) \quad (2.21)$$

Σε κάθε περίπτωση η εξίσωση (2.18) για αδιατάραχτη ροή και για συντηρητικές δυνάμεις, γίνεται:

$$\nabla \left[\frac{(\vec{v})^2}{2} + U + \frac{p}{\rho} \right] = \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) \quad (2.22)$$

Στην περίπτωση της δισδιάστατης ροής η εξίσωση (2.19) γίνεται:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{(\vec{v})^2}{2} + U + \frac{p}{\rho} \right) &= v \bar{\Omega} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{(\vec{v})^2}{2} + U + \frac{p}{\rho} \right) &= -u \bar{\Omega} \end{aligned} \quad (2.23)$$

όπου, $\bar{\Omega} \equiv \nabla \times \vec{v} = \Omega \hat{i}_z$. (2.24)

Χρησιμοποιώντας τη ροϊκή συνάρτηση $\bar{\Psi}$, η εξίσωση (2.23) γίνεται:

$$\frac{(\vec{v})^2}{2} + U + \frac{p}{\rho} + \Omega \bar{\Psi} = \text{const.} \quad (2.25)$$

1.1.4 Στοιχειώδη κύματα σε σφαιρική σταγόνα

Ως μια εφαρμογή του ολοκληρώματος Bernoulli (2.21), θεωρείστε μικρές ταλαντώσεις μια σφαιρικής σταγόνας ενός ασυμπίεστου ρευστού υπό την επίδραση στοιχειωδών δυνάμεων. Η επιφάνεια της σταγόνας δίδεται σε σφαιρικές πολικές συντεταγμένες (r, θ, φ) μέσω της συνάρτησης $r = r(\theta, \varphi)$ και είναι:

$$S = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sqrt{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi} \right)^2} r \sin \theta d\theta d\varphi \quad (2.26)$$

Για μικρές αποκλίσεις από μια σφαιρική επιφάνεια ακτίνας R , έχουμε $r = R + \zeta$, $|\zeta| \ll R$, έτσι η σχέση (2.26) προσεγγίζεται από τη σχέση:

$$S \approx \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sqrt{(R + \zeta)^2 + \left\{ \left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi} \right)^2 \right\}} \sin \theta d\theta d\varphi \quad (2.27)$$

για την οποία μικρές μεταβολές στην επιφάνεια δίνονται από τη σχέση:

$$\begin{aligned}\delta S &\approx \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[2(R+\zeta)\delta\zeta + \frac{\partial\zeta}{\partial\theta} \frac{\partial\delta\zeta}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial\zeta}{\partial\theta} \frac{\partial\delta\zeta}{\partial\theta} \right] \sin\theta d\theta d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[2(R+\zeta) - \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\zeta}{\partial\theta} \right) - \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2\zeta}{\partial\theta^2} \right] \delta\zeta \sin\theta d\theta d\varphi\end{aligned}\quad (2.28)$$

Αν R_1 και R_2 είναι οι κύριες ακτίνες καμπυλότητας και παρατητηρώντας ότι:

$$\delta S = \iint \delta\zeta \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) R(R+2\zeta) \sin\theta d\theta d\varphi \quad (2.29)$$

καταλήγουμε, λαμβάνοντας υπόψιν μας και τη σχέση (2.28):

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{2}{R} - \frac{2\zeta}{R^2} - \frac{1}{R^2} \left[\frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2\zeta}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\zeta}{\partial\theta} \right) \right] \quad (2.30)$$

Τότε χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα *Bernoulli* (2.21) έχουμε:

$$\rho \frac{\partial\Phi}{\partial t} + T \left[\frac{2}{R} - \frac{2\zeta}{R^2} - \frac{1}{R^2} \left\{ \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\zeta}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2\zeta}{\partial\theta^2} \right\} \right] = \text{const.} \quad (2.31)$$

όπου T είναι η επιφανειακή τάση και Φ είναι το δυναμικό της ταχύτητας που δίνεται από τη σχέση: $\vec{v} = \nabla\Phi$ (2.32)

Παραγωγίζοντας τη σχέση (2.31) ως προς το χρόνο και χρησιμοποιώντας κινηματικές οριακές συνθήκες στην επιφάνεια της σταγόνας,

$$r = R: \quad \frac{\partial\zeta}{\partial t} = \frac{\partial\Phi}{\partial r} \quad (2.33)$$

(οι οποίες δηλώνουν ότι ένα στοιχείο ρευστού που βρίσκεται στην επιφάνεια παραμένει συνεχώς εκεί), καταλήγουμε στη σχέση:

$$r = R: \quad \rho \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + \frac{T}{R^2} \left[2 \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} \right\} \right] = 0 \quad (2.34)$$

Αν θέσουμε

$$\Phi = e^{-i\omega t} f(r, \theta, \varphi) \quad (2.35)$$

με

$$f(r, \theta, \varphi) = r^l Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (2.36)$$

όπου $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ είναι οι σφαιρικές αρμονικές που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial Y_{lm}}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 Y_{lm}}{\partial\varphi^2} + l(l+1)Y_{lm} = 0 \quad (2.37)$$

και

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

$$P_l^m(\cos \theta) = \sin^m \theta \frac{d^m P_l(\cos \theta)}{d(\cos \theta)^m}; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l; \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (2.38)$$

όπου $P_l^m(\cos \theta)$ είναι τα αντίστοιχα πολυώνυμα Legendre και $P_l(\cos \theta)$ είναι τα πολυώνυμα Legendre.

Συνεπώς η εξίσωση (2.34) γίνεται:

$$\omega^2 = \frac{T(l-1)(l+2)}{\rho R^3} \quad (2.39)$$

Άρα για δεδομένο l , υπάρχουν $(2l+1)$ διαφορετικές ιδιοσυναρτήσεις, οι συγκεκριμένες συχνότητες έχουν μια εκφυλιστική περίπτωση αφού

$$l = 0, 1: \quad \omega = 0 \quad (2.40)$$

Η περίπτωση $l=0$ αντιστοιχεί σε ακτινικές παραμορφώσεις και στην περίπτωση του ασυμπίεστου ρευστού τέτοιες παραμορφώσεις είναι αδύνατες. Η περίπτωση $l=1$ αντιστοιχεί στη περίπτωση της παραμόρφωσης ολόκληρης της σταγόνας.

1.1.5 Ρυθμός μεταβολής υλικών παραγώγων

Θεωρούμε το γραμμικό ολοκλήρωμα ενός βαθμωτού πεδίου $F(\vec{x}, t)$

$$\int_P^Q F d\vec{x} \quad (2.41)$$

κατά μήκος μιας υλικής καμπύλης, η οποία ενώνει τα σημεία P και Q . Αφού η συγκεκριμένη καμπύλη κινείται μαζί με το ρευστό και αποτελείται από τα ίδια στοιχεία ρευστού, το παραπάνω ολοκλήρωμα είναι μόνο συνάρτηση του χρόνου t . Προκειμένου να υπολογίσουμε το ρυθμό μεταβολής του στο χρόνο, υποθέτουμε ότι η καμπύλη PQ μετατοπίζεται και γίνεται η καμπύλη $P'Q'$ σε χρόνο $t + \delta t$.

Τότε προκύπτει ότι:

$$\frac{d}{dt} \int_P^Q F(\vec{x}, t) d\vec{x} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \left[\int_{P'}^{Q'} F(\vec{x}, t + \delta t) d\vec{x} - \int_P^Q F(\vec{x}, t) d\vec{x} \right] \quad (2.42)$$

Χωρίζουμε τις καμπύλες PQ και $P'Q'$ σε n τμήματα στα σημεία P_i και P'_i , $i = 0, 1, \dots, n$, αντίστοιχα, τέτοια ώστε το τμήμα $P_i P_{i+1}$ της καμπύλης PQ τη χρονική στιγμή t

μετακινείται και γίνεται το τμήμα $P_i'P_{i+1}'$ της καμπύλης $P'Q'$ τη χρονική στιγμή $t + \delta t$ και προκύπτει:

$$\int_P^Q F(\vec{x}, t) d\vec{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} F(\vec{x}_i, t) \overrightarrow{P_i P_{i+1}} \quad (2.43)$$

$$\int_P^Q F(\vec{x}', t) d\vec{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} F(\vec{x}_i', t) \overrightarrow{P_i' P_{i+1}'}$$

όπου \vec{x}_i και \vec{x}_i' είναι τα διανύσματα θέσης των σημείων P_i και P_{i+1}' αντίστοιχα.

Γράφοντας:

$$F(\vec{x}_i', t + \delta t) \approx F(\vec{x}_i, t + \delta t) + (\overrightarrow{P_i P_{i+1}'} \cdot \nabla) F(\vec{x}_i, t + \delta t) + O(|\overrightarrow{P_i P_{i+1}'}|^2)$$

$$\approx F(\vec{x}_i, t) + \frac{\partial F(\vec{x}_i, t)}{\partial t} \delta t + \vec{v}(\vec{x}_i, t) \cdot \nabla F(\vec{x}_i, t) + O(\delta t^2) \quad (2.44)$$

$$\overrightarrow{P_i' P_{i+1}'} \approx \overrightarrow{P_i P_{i+1}} + [\vec{v}(\vec{x}_{i+1}, t) - \vec{v}(\vec{x}_i, t)] \delta t$$

$$\approx \overrightarrow{P_i P_{i+1}} + (\overrightarrow{P_i P_{i+1}} \cdot \nabla) \vec{v}(\vec{x}_i, t) \delta t$$

προκύπτει:

$$F(\vec{x}_i', t + \delta t) \overrightarrow{P_i' P_{i+1}'} - F(\vec{x}_i, t) \overrightarrow{P_i P_{i+1}} =$$

$$\left\{ \left[\frac{\partial F(\vec{x}_i, t)}{\partial t} + \vec{v}(\vec{x}_i, t) \cdot \nabla F(\vec{x}_i, t) \right] \overrightarrow{P_i P_{i+1}} + F(\vec{x}_i, t) (\overrightarrow{P_i P_{i+1}} \cdot \nabla) \vec{v}(\vec{x}_i, t) \right\} \delta t + O(\delta t^2) \quad (2.45)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.43) και (2.45), η σχέση (2.42) συνεπάγεται:

$$\frac{d}{dt} \int_P^Q F d\vec{x} = \int_P^Q \frac{DF}{Dt} d\vec{x} + \int_P^Q F (d\vec{x} \cdot \nabla) \vec{v} \quad (2.46)$$

Στην περίπτωση που το πεδίο $\vec{F}(\vec{x}, t)$ είναι διανυσματικό

$$\vec{F}(\vec{x}, t) = F_1(\vec{x}, t) \vec{i}_x + F_2(\vec{x}, t) \vec{i}_y + F_3(\vec{x}, t) \vec{i}_z \quad (2.47)$$

χρησιμοποιείται διαδοχικά η εξίσωση (2.46)

$$\frac{d}{dt} \int_P^Q \vec{F} d\vec{x} = \int_P^Q \frac{D\vec{F}}{Dt} d\vec{x} + \int_P^Q \vec{F} (d\vec{x} \cdot \nabla) \vec{v} \quad (2.48)$$

1.1.6 Αστρόβιλη ροή

Η κυκλοφορία ορίζεται ως:

$$\Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{s} \quad (2.49)$$

όπου C είναι μια κλειστή καμπύλη η οποία αποτελείται από όμοια στοιχεία ρευστού. Αν υποθέσουμε ότι η περιοχή είναι απλά συνεκτική και χρησιμοποιώντας το θεώρημα του *Stokes* η σχέση (2.49) γίνεται:

$$\Gamma = \iint_S (\nabla \times \vec{v}) \cdot n dS = \iint_S \vec{\Omega} \cdot n dS \quad (2.50)$$

όπου S είναι μια επιφάνεια που φράσσεται από την κλειστή καμπύλη C , και n είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στη στοιχειώδη επιφάνεια dS . Επομένως, η κυκλοφορία γύρω από κάθε αναγώγιμη κλειστή καμπύλη ισούται με το ολοκλήρωμα της στροβιλότητας σε μια ανοιχτή επιφάνεια που φράσσεται από μια καμπύλη.

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.48) προκύπτει:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_C \frac{D\vec{v}}{Dt} \cdot d\vec{s} + \oint_C \vec{v} \cdot (d\vec{s} \cdot \nabla \vec{v}) \quad (2.51)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.15) η εξίσωση (2.51) γίνεται:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} - \oint_C \left(\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \left(\frac{1}{2} (\vec{v})^2 \right) \right) \cdot d\vec{s} \quad (2.52)$$

Στην περίπτωση που οι δυνάμεις του σώματος είναι συντηρητικές και το ρευστό είναι βαροτροπικό (δηλ. $\frac{\nabla p}{\rho}$ μπορεί να γραφεί ως τέλειο διαφορικό), η σχέση (2.52) συνεπάγεται:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \iint_S \vec{\Omega} \cdot n dS = 0 \quad (2.53)$$

το οποίο συνεπάγεται ότι η κυκλοφορία γύρω από μια κλειστή υλική καμπύλη και η αντοχή του δινοσωλήνα που την οποία περικλείεται είναι αμετάβλητες. Επομένως υπό την επίδραση συντηρητικών δυνάμεων όλες οι κινήσεις ενός ιδεατού βαροτροπικού ρευστού που ξεκίνησε από κατάσταση ηρεμίας ή ομοιόμορφης ροής παραμένουν μόνιμα αστρόβιλες.

Κατά συνέπεια τα προβλήματα συνοριακών τιμών αστρόβιλων ροών καθορίζονται πλήρως από την εξίσωση *Laplace* του δυναμικού της ταχύτητας Φ

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (2.54)$$

Είναι αξιοσημείωτο ότι οι εξισώσεις (2.13), οι οποίες είναι μη γραμμικές μπορούν να αποφευχθούν κατά τη μελέτη της κινηματικής αστρόβιλης ροής ενός ιδεατού ρευστού που διέπεται από την εξίσωση *Laplace*. Αφού υπολογιστεί το πεδίο ταχύτητας η πίεση μπορεί να υπολογιστεί μέσω της εξίσωσης *Bernoulli* (2.21), η μόνη εξίσωση στην οποία εκδηλώνεται η μη γραμμικότητα της εξίσωσης *Euler*.

Σε μια απλά συνεκτική περιοχή, όλες οι κλειστές καμπύλες C είναι αναγώγιμες (δηλ. μπορούν να συρρικνωθούν σε ένα σημείο χωρίς να βγουν εκτός της περιοχής, και έχουμε:

$$\Gamma = \iint_S \bar{\Omega} \cdot n dS = \oint_C d\Phi = 0 \quad (2.55)$$

και συνεπώς η συνάρτηση Φ έχει μοναδική τιμή. Αντιθέτως, στην περίπτωση στη περίπτωση της διπλά συνδεδεμένης περιοχής μερικές κλειστές καμπύλες C δεν είναι αναγώγιμες και συνεπώς η συνάρτηση Φ μπορεί να παίρνει πολλαπλές τιμές για μη αναγώγιμες καμπύλες C , οι διάφορες τιμές του δυναμικού Φ διαφέρουν μεταξύ τους κατά πολλαπλάσια της κυκλοφορίας.

Από την εξίσωση (2.54) εξάγονται ορισμένα χρήσιμα αποτελέσματα της θεωρίας του δυναμικού της ταχύτητας, τα οποία αποδεικνύονται εύκολα:

- Το δυναμικό Φ δε δύναται να έχει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο στο εσωτερικό του ρευστού.
- Η λύση του εξωτερικού προβλήματος *Neumann* (το οποίο στις παραγώγους του δυναμικού Φ , περιγράφεται στο σύνορο), σε μια απλά συνδεδεμένη περιοχή είναι μοναδική με διαφορετική σταθερά κάθε φορά.
- Η λύση του εξωτερικού προβλήματος *Neumann* σε μια διπλά συνδεδεμένη περιοχή είναι ορίζεται μοναδικά (με διαφορετική σταθερά κάθε φορά) μόνο όταν η κυκλοφορία έχει προσδιοριστεί.

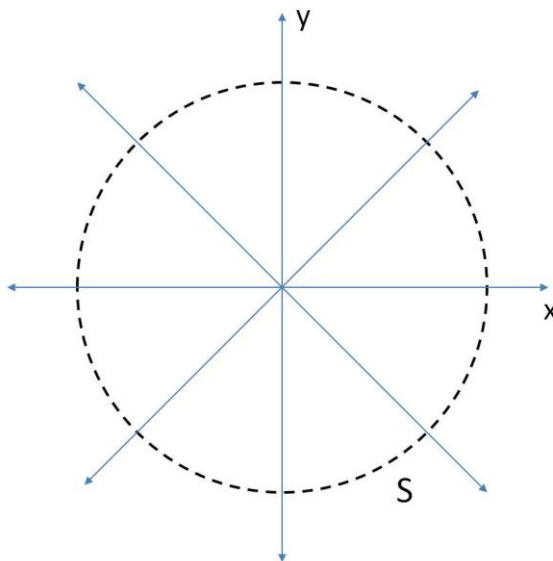
Η έλλειψη σαφούς εμφάνισης μεταβλητής χρόνου στην εξίσωση (2.54) υποδεικνύει ότι η στιγμιαία κατάσταση της ροής εξαρτάται μόνο στις στιγμιαίες οριακές συνθήκες και όχι στην εξέλιξη της ροής.

Επομένως, όταν ένα άκαμπτο σώμα κινείται σε ένα ρευστό το οποίο δε θα κινούταν διαφορετικά, το πεδίο ταχύτητας προσδιορίζεται κατά μοναδικό τρόπο από τη στιγμιαία ταχύτητα του σώματος (και από το σχήμα του σώματος), αλλά ούτε η επιτάχυνση, ούτε η εξέλιξη της κίνησης επιρεάζουν το πεδίο ταχύτητας. (Η τελευταία παρατήρηση έχει νόημα μόνο όταν δε λαμβάνεται υπόψιν η συμπίεστικότητα του ρευστού, όπως έγινε στην εξίσωση (2.54), και έτσι η ταχύτητα του ήχου θεωρείται άπειρη.

1.1.7 Μοντέλα απλή δισδιάστατης ροής

Αφού η εξίσωση *Laplace* (2.54) είναι γραμμική είναι δυνατό να οικοδομηθούν μερικά μοντέλα ροής παραθέτοντας ορισμένες τετριμένες λύσεις της εξίσωσης (2.54). Αρχικά θεωρούμε ορισμένα μοντέλα απλής δισδιάστατης ροής.

1.1.7.1 Η ροή πηγής



Εικόνα 1 Ροή πηγής

Θεωρούμε μια ροή που ξεκινά από ένα πηγαίο σημείο και επεκτείνεται ακτινικά. Η συνθήκη μη συμπιεστότητας :

$$\frac{\partial}{\partial r}(ru_r) = 0 \quad (2.56)$$

συνεπάγεται:

$$u_r = \frac{A}{r} \quad (2.57)$$

όπου A είναι αυθαίρετη σταθερά.

Η συνθήκη διατήρησης της μάζας:

$$q = \int_0^{2\pi} u_r \cdot r d\theta = \text{const.} \quad (2.58)$$

αν χρησιμοποιηθεί στη σχέση (2.57) δίνει:

$$A = \frac{q}{2\pi} \quad (2.59)$$

και χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.59), η σχέση (2.57) γίνεται:

$$u_r = \frac{q}{2\pi r} \quad (2.60)$$

Επιπλέον χρησιμοποιώντας τις σχέσεις ((2.4) και (2.20))

$$u_r = \frac{\partial \Psi}{r \partial \theta} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad (2.61)$$

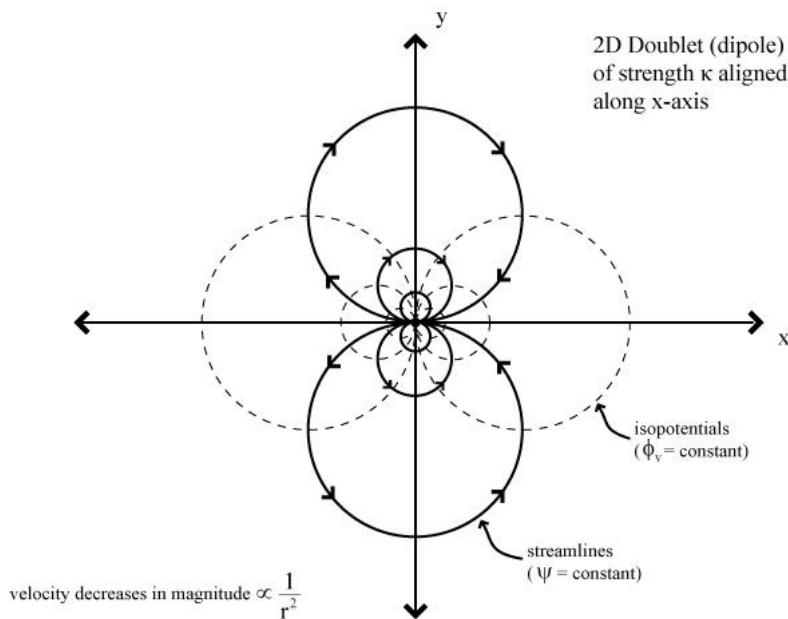
έχουμε για τη ροϊκή συνάρτηση και για τη συνάρτηση δυναμικού της ταχύτητας :

$$\bar{\Psi} = \frac{q\theta}{2\pi} \quad (2.62)$$

$$\Phi = \frac{q}{2\pi} \ln r$$

q ονομάζεται ένταση της πηγής. Η ροϊκή συνάρτηση $\bar{\Psi}$ παίρνει διάφορες τιμές στις διάφορες θέσεις, λόγω της ύπαρξης ενός μη μηδενικού όγκου που ρέει κατά μήκος μιάς κλειστής καμπύλης γύρω από την πηγή.

1.1.7.2 Η ροή διπόλου



Εικόνα 2 Ροή διπόλου

Θεωρούμε την παράθεση μιας καταβόθρας έντασης $-q$ στο σημείο $(-a, 0)$ και μια πηγής έντασης q στο σημείο $(a, 0)$. Από την εξίσωση (2.62) έχουμε ότι για το δυναμικό της ταχύτητας της συνδιασμένης ροής:

$$\Phi = \frac{q}{2\pi} \ln \sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \cos \theta} - \frac{q}{2\pi} \ln \sqrt{r^2 + a^2 + 2ra \cos \theta} \quad (2.63)$$

$$= \frac{q}{4\pi} \ln \left[1 - \frac{4ra \cos \theta}{r^2 + a^2 + 2ra \cos \theta} \right]$$

Αν το a είναι αρκετά μικρό τότε, η εξίσωση (2.63) προσεγγίζεται:

$$\Phi \approx \frac{q}{4\pi} \left(-\frac{4a \cos \theta}{r} \right) \quad (2.64)$$

Θεωρούμε το όριο:

$$\lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ q \rightarrow \infty}} q \cdot 2a = \mu = \text{finite} \quad (2.65)$$

και έτσι, η εξίσωση (2.64) μέσω της σχέσης (2.65) γίνεται:

$$\Phi = -\frac{\mu \cos \theta}{2\pi r} \quad (2.66)$$

Συνεπώς η ροϊκή συνάρτηση της ροής διπόλου δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{\Psi} = \frac{\mu \sin \theta}{2\pi r} \quad (2.67)$$

Και σε καρτεσιανές συντεταγμένες, οι εξισώσεις (2.66) και (2.67) γίνονται:

$$\begin{aligned} \Phi &= -\frac{\mu x}{2\pi(x^2 + y^2)} \\ \Psi &= \frac{\mu y}{2\pi(x^2 + y^2)} \end{aligned} \quad (2.68)$$

Επομένως, τα ισοδυναμικά που δίδονται από $\Phi = \text{const.}$ είναι οι ομοαξονικοί κύκλοι:

$$x^2 + y^2 = 2k_1x \quad (2.69)$$

και οι ροϊκές γραμμές που δίδονται από $\Psi = \text{const.}$ είναι οι ομοαξονικοί κύκλοι:

$$x^2 + y^2 = 2k_2y \quad (2.70)$$

Η πρώτη οικογένεια ομοαξονικών κύκλων έχει κέντρα $(k_1, 0)$ και ακτίνα k_1 , και η δεύτερη οικογένεια έχει κέντρα $(k_2, 0)$ και ακτίνα k_2 . Οι δύο οικογένειες είναι αμοιβαία ορθογώνιες.

1.1.7.3 Τυρβώδης ροή

Θεωρούμε τη ροή που προκύπτει από τις ροϊκές γραμμές ομόκεντρων κύκλων. Το δυναμικό της ταχύτητας και η ροϊκή συνάρτηση της συγκεκριμένης ροής είναι:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{\Gamma \theta}{2\pi} \\ \bar{\Psi} &= -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \end{aligned} \quad (2.71)$$

όπου Γ είναι η κυκλοφορία της ροής.

1.1.7.4 Δίπολα σε ομοιόμορφη ροή

Το δυναμικό της ταχύτητας και η ροϊκή συνάρτηση για μια ομοιόμορφη ροή με ταχύτητα (U, V) είναι:

$$\begin{aligned}\Phi &= Ux + Vy \\ \bar{\Psi} &= -Vx + Uy\end{aligned}\quad (2.72)$$

Για ένα δίπολο σε ομοιόμορφη ροή $(U, 0)$, προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση για τη ροϊκή συνάρτηση:

$$\bar{\Psi} = Ur \sin \theta - \frac{\mu}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r} = U \sin \theta \left(r - \frac{\mu}{2\pi U} \frac{1}{r} \right) \quad (2.73)$$

Οι συνιστώσες της ταχύτητας είναι:

$$\begin{aligned}u_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = U \left(1 - \frac{\mu}{2\pi U} \frac{1}{r^2} \right) \cos \theta \\ u_\theta &= -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = -U \left(1 + \frac{\mu}{2\pi U} \frac{1}{r^2} \right) \sin \theta\end{aligned}\quad (2.74)$$

από τις οποίες φαίνονται τα στάσιμα σημεία που δίνονται από $\vec{v} = \vec{0}$, στο σημείο $r = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi U}}$ και $\theta = 0, \pi$. Η εξίσωση (2.74) αναπαριστά επίσης τη ροή που περνά από ένα κύλινδρο ακτίνας

$$a = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi U}} \quad (2.75)$$

καθώς η κινηματική συνθήκη:

$$r = a: u_r = 0 \quad (2.76)$$

ικανοποιείται αυτόματα στο συγκεκριμένο στερεό σώμα.

Άρα η ροϊκή συνάρτηση (2.73) γράφεται:

$$\bar{\Psi} = U \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) r \sin \theta \quad (2.77)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.77) στη σχέση (2.21) προκύπτει η ακόλουθη συνθήκη για την πίεση στον κύλινδρο:

$$r = a: \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho U^2} = C_p = 1 - \left(\frac{u_\theta}{U} \right)^2 = 1 - 4 \sin^2 \theta \quad (2.78)$$

η οποία είναι συμμετρική στη διεύθυνση της ροής, προκειμένου στη συγκεκριμένη περίπτωση ροής να μην υπάρχει ούτε οπισθέλκουσα ούτε άνωση στον κύλινδρο.

1.1.7.5 Ομοιόμορφη ροή που περνά από ένα κύλινδρο με κυκλοφορία

Η ροϊκή συνάρτηση που περνά από ένα κύλινδρο με κυκλοφορία είναι, χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.71) και (2.77):

$$\bar{\Psi} = Ur \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \left(\frac{r}{a} \right) - \frac{Ua^2}{r} \sin \theta \quad (2.79)$$

και οι συνιστώσες της ταχύτητας είναι:

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = U \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta \\ u_\theta &= -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = -U \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi r} \end{aligned} \quad (2.80)$$

από τις οποίες υπολογίζονται τα στάσιμα σημεία για $u_r = 0$, $u_\theta = 0$ στα σημεία $r = a$, $\theta = \sin^{-1} \left(\frac{\Gamma}{4\pi Ua} \right)$. Για $r \geq a$, τα στάσιμα σημεία δίνονται από τις εξισώσεις:

$$\cos \theta = 0 \quad \text{ή} \quad \theta = \pm \frac{\pi}{2} \quad (2.81)$$

και

$$U \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) = \pm \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (2.82)$$

οι οποίες δίνουν πραγματικές τιμές για το r , αν $\Gamma \geq 4\pi Ua$. Για τα δύο στάσιμα σημεία r_1, r_2 ισχύει $r_1 r_2 = a^2$. Επομένως το ένα από τα δύο στάσιμα σημεία βρίσκεται εκτός του κύκλου με ακτίνα $r = a$ και το άλλο εντός. Συνεπώς, η εφαπτομενική του κυλίνδρου είναι:

$$r = a: u_\theta = - \left(2U \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi a} \right) \quad (2.83)$$

σε κάθε σημείο στην ίδια κατεύθυνση με την κυκλοφορία Γ .

Για $r = a$, από την εξίσωση (2.82) τα στάσιμα σημεία δίνονται από τη σχέση:

$$\Gamma = -4\pi Ua \sin \theta \quad (2.84)$$

Στην περίπτωση όπου $\Gamma = 4\pi Ua \sin a$, τα στάσιμα σημεία υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$-\sin \theta = \sin a \quad \text{ή} \quad \theta = -a \quad \text{και} \quad \pi + a \quad (2.85)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.80) στη σχέση (2.21), προκύπτει η ακόλουθη συνθήκη για την πίεση στον κύλινδρο:

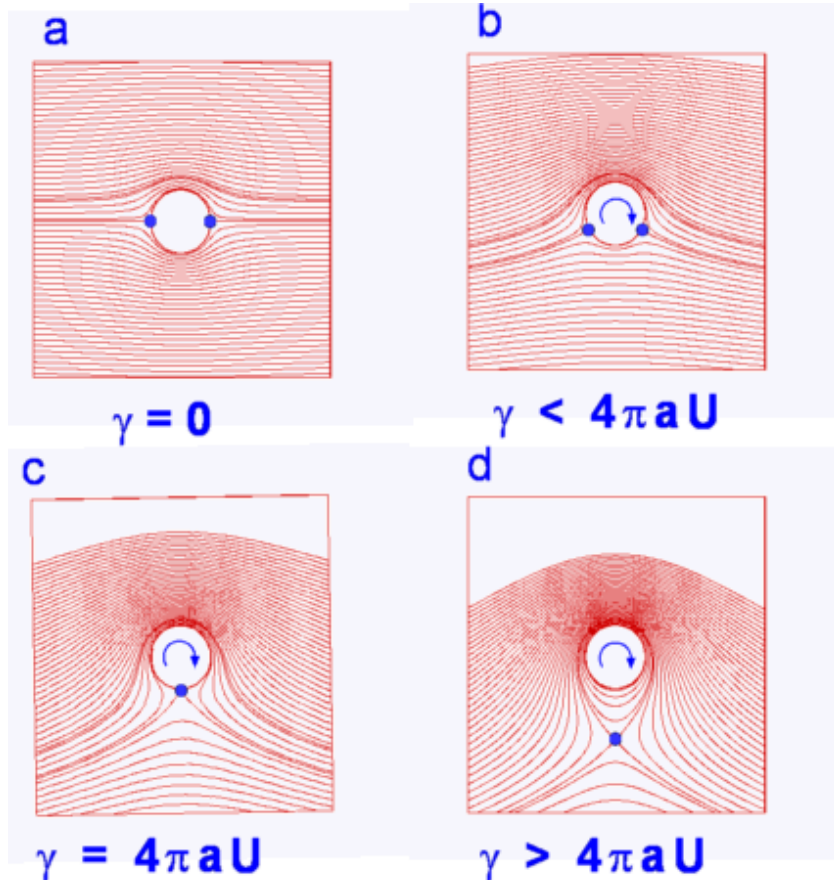
$$r = a: p = H - 4U^2 \sin^2 \theta - \frac{\Gamma^2}{4\pi a^2} - \frac{\Gamma U}{\pi a} \sin \theta \quad (2.86)$$

όπου H : αυθαίρετη σταθερά.

Η καθαρή ισχύς του κυλίνδρου έχει την κατεύθυνση του άξονα y , καλείται άνωση και δίνεται από τη σχέση:

$$L = -\int_0^{2\pi} p \sin \theta \cdot a d\theta = \rho U \Gamma \quad (2.87)$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο από το σχήμα της τομής του κυλίνδρου.



Εικόνα 3 Θέση των στάσιμων σημείων αναλόγως της μεταβλητής γ

1.2 Τρισδιάστατη ροή

Εξαιτίας του γεγονότος ότι η περιοχή που καλύπτεται από ένα ρευστό ελιανι υποχρεωτικά διπλά συνδεδεμένη στην περίπτωση του δισδιάστατου πεδίου ροής και απλά συνδεδεμένη στο τρισδιάστατο πεδίο ροής σημαντικές διαφορές στις ιδιότητες των δύο περιπτώσεων αναμένεται να προκύψουν.

1.2.1 Ειδικές τετριμμένες λύσεις

Όπως και στην περίπτωση της δισδιάστατης ροής ρευστού, είναι δυνατό να κατασκευαστούν περίπλοκα τρισδιάστατα πεδία ροής, συνθέτοντας, ορισμένες τετριμμένες λύσεις της εξίσωσης *Laplace*.

1.2.1.1 Η ροή πηγής

Χρησιμοποιώντας τις σφαιρικές συντεταγμένες (R, θ, φ) , έχουμε για τη συνάρτηση δυναμικού της ταχύτητας:

$$\Phi(R) = \frac{A}{R} \quad (2.88)$$

και χρησιμοποιώντας τη συνθήκη διατήρησης της μάζας:

$$q = \oiint_S \nabla \Phi \cdot n dS = \text{const.} \quad (2.89)$$

η εξίσωση (2.88) συνεπάγεται:

$$A = -\frac{q}{4\pi} \quad (2.90)$$

Τελικά από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} u_R &= \frac{\partial \Phi}{\partial R} = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \theta} \\ u_\theta &= \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \frac{-1}{R \sin \theta} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial R} \end{aligned} \quad (2.91)$$

η ροϊκή συνάρτηση είναι:

$$\bar{\Psi} = -\frac{q \cos \theta}{4\pi} \quad (2.92)$$

1.2.1.2 Η ροή διπόλου

Η ροή διπόλου μπορεί να δημιουργηθεί από τη ροή πηγής παραγωγίζοντας τη συνάρτηση δυναμικού της ταχύτητας που αντιστοιχεί στη ροή πηγής σε αντίθετη κατεύθυνση από εκείνη του άξονα διπόλων. Επομένως προκύπτει:

$$\Phi = -\frac{d}{dx} \left(-\frac{q/4\pi}{\sqrt{x^2 + r^2}} \right) dx = -\frac{\mu \cos \theta}{4\pi R^2} \quad (2.93)$$

όπου $\mu = \lim_{\substack{dx \rightarrow 0 \\ q \rightarrow \infty}} q \cdot dx$. (2.94)

Από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} u_R &= \frac{\partial \Phi}{\partial R} = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \theta} \\ u_\theta &= \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \frac{-1}{R \sin \theta} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial R} \end{aligned} \quad (2.95)$$

και η ροϊκή συνάρτηση είναι:

$$\bar{\Psi} = \frac{\mu \sin^2 \theta}{4\pi R} \quad (2.96)$$

1.2.2 Το παράδοξο του d'Alembert

Θα αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει συνισταμένη δύναμη από το ρευστό προς ένα στερεό τυχαίου σχήματος το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα μέσα σε ένα ακίνητο ιδανικό ρευστό χωρίς σύνορο.

Θεωρούμε ένα πεπερασμένο σώμα, που φράσσεται από μια επιφάνεια S και κινείται με σταθερή ταχύτητα \vec{V} μέσα σε ένα ρευστό χωρίς σύνορο, που ηρεμεί, και καταλαμβάνει μια περιοχή \mathcal{V} μέχρι το άπειρο. Τότε το πρόβλημα συνοριακών τιμών για τον υπολογισμό του δυναμικού της ταχύτητας Φ είναι:

$$\nabla^2 \Phi = 0 \text{ στο } \mathcal{V} \quad (2.97)$$

με συνοριακές συνθήκες:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial n} &= \vec{V} \cdot \vec{n} \text{ στο } \mathcal{V} \\ |\nabla \Phi| &\rightarrow 0 \text{ στο άπειρο} \end{aligned} \quad (2.98)$$

όπου \vec{n} είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα του S με κατεύθυνση προς το εξωτερικό του S .

Η δύναμη από το ρευστό προς το σώμα είναι:

$$\vec{F} = - \iint_S n p dS \quad (2.99)$$

και σε διακριτή μορφή:

$$F_j = - \iint_S n_j p dS \quad (2.100)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση *Bernoulli* η εξίσωση (2.100) γίνεται:

$$F_j = -p_\infty \iint_S n_j dS + \rho \iint_S n_j \frac{\partial \Phi}{\partial t} dS + \frac{1}{2} \rho \iint_S n_j (\nabla \Phi)^2 dS \quad (2.101)$$

όπου p_∞ είναι η πίεση στο άπειρο.

Τελικά οδηγούμαστε στα εξής αποτελέσματα:

$$\begin{aligned} \iint_S n_j dS &= 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = -\nabla \Phi \cdot \vec{V} = -V_i u_i \\ \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \Phi)^2 &= 2u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 2 \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i u_j) \end{aligned} \quad (2.102)$$

$$\begin{aligned} \iint_S n_j (\nabla \Phi)^2 dS &= \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial x_j} (\nabla \Phi)^2 d\vec{v} - \iint_{\Sigma} n_j (\nabla \Phi)^2 d\Sigma \\ &= 2 \iint_S n_i u_i u_j dS + 2 \iint_{\Sigma} n_i u_i u_j d\Sigma - \iint_{\Sigma} n_j (\nabla \Phi)^2 d\Sigma \\ &= 2U_i \iint_S n_i u_j dS \end{aligned}$$

όπου Σ είναι η επιφάνεια που εκτείνεται στο άπειρο και περικλείει την περιοχή, και για την εξαγωγή της τελευταίας σχέσης, χρησιμοποιήθηκαν οι συνοριακές συνθήκες (2.98).

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.102), η εξίσωση (2.101) γίνεται:

$$\begin{aligned} F_j &= \rho U_i \iint_S (n_i u_j - n_j u_i) dS \\ &= \rho U_i \iint_S \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dS + \rho U_i \iint_\Sigma (n_i u_j - n_j u_i) d\Sigma = 0 \end{aligned} \quad (2.103)$$

λαμβάνοντας υπόψιν τις συνοριακές συνθήκες (2.98) και το γεγονός ότι το πεδίο ταχύτητας είναι αστρόβιλο ($\nabla \times \vec{v} = 0$). Επομένως, σε ένα πεπερασμένο σώμα τυχαίου σχήματος το οποίο κινείται ομαλά μέσα σε ένα ιδανικό ρευστό που ηρεμεί, η συνισταμένη δύναμη που του ασκείται από το ρευστό είναι μηδέν. Το συγκεκριμένο αποτέλεσμα καλείται παράδοξο του *d'Alembert* καθώς έρχεται σε αντίθεση με την εμπειρία. Η πλάνη δεν οφείλεται τόσο στο γεγονός ότι δε λήφθηκε υπόψιν η επίδραση του ιξώδους παρά στο γεγονός ότι θεωρήθηκε ότι δεν υπάρχει στροβιλότητα στο ρευστό εκτός του σώματος. Επομένως, το συγκεκριμένο αποτέλεσμα έχει εφαρμογή στο βελτιστοποιημένο σώμα στο οποίο υπάρχει μόνο μια μικρή διαταραχή που περιέχει στροβιλότητα.

1.2.3 Απεικόνιση μιας πηγής μέσα σε μια σφαίρα

Θα υπολογίσουμε την απεικόνιση μιας πηγής έντασης m στο σημείο $(0, 0, a)$ σε μια σφαίρα ακτίνας b ($b < a$) με κέντρο την ίδια την πηγή. Στην περίπτωση που δεν υπάρχει η πηγή το δυναμικό της πηγής είναι $\frac{m}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta}}$, και επομένως για τη ροή υπό την παρουσία της σφαίρας έχουμε:

$$\phi = \phi_1 + \frac{m}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta}} \quad (2.104)$$

όπου

$$\begin{aligned} r > b &: \nabla^2 \phi_1 = 0 \\ r \rightarrow \infty &: \nabla \phi \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (2.105)$$

Μπορούμε να γράψουμε:

$$\phi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta) \quad (2.106)$$

όπου $P_n(z)$ είναι τα πολυώνυμα *Legendre*. Επομένως από τις σχέσεις (2.104) και (2.106), για $r < a$ έχουμε:

$$\phi = \sum \left[\frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta) + \frac{mr^n}{a^{n+1}} P_n(\cos \theta) \right] \quad (2.107)$$

Και με τις οριακές συνθήκες της σφαίρας:

$$r = b : \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \quad (2.108)$$

έχουμε:

$$B_n = \frac{mn}{b(n+1)} \left(\frac{b^2}{a} \right)^{n+1} \quad (2.109)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.109) η εξίσωση (2.107) γίνεται:

$$\phi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m}{b} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \left(\frac{b^2}{a} \right) \frac{1}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta) \quad (2.110)$$

Παρατηρούμε ότι ο πρώτος όρος της εξίσωσης (2.110) γράφεται:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m}{b} \left(\frac{b^2}{a} \right)^{n+1} \frac{1}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta) &= \frac{mb}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b^2}{a} \right)^n \frac{1}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta) \\ &= \frac{\left(mb/a \right)}{\sqrt{r^2 + \left(b^2/a \right)^2 - 2r \left(b^2/a \right) \cos \theta}} \quad (2.111) \end{aligned}$$

και αντιστοιχεί σε μια πηγή έντασης mb/a που βρίσκεται στο σημείο $(0, 0, b^2/a)$. Στη συνέχεια ο δεύτερος όρος της εξίσωσης (2.110) γράφεται:

$$\begin{aligned} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m}{b(n+1)} \left(\frac{b^2}{a} \right)^{n+1} \frac{1}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta) &= - \frac{m}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{b^2/a} \frac{z^n P_n(\cos \theta) dz}{r^{n+1}} \\ &= - \frac{m}{b} \int_0^{b^2/a} \frac{dz}{\sqrt{r^2 + z^2 - 2rz \cos \theta}} \quad (2.112) \end{aligned}$$

ο οποίος αντιστοιχεί σε μια ομοιόμορφη γραμμική καταβόθρα έντασης m/b ανα μονάδα μήκους από το σημείο $(0, 0, 0)$ μέχρι το σημείο $(0, 0, b^2/a)$. Το αντικατοπτρικό σύστημα αντιστοιχεί σε ένα σύστημα που εμπεριέχει μια πηγή έντασης mb/a στο σημείο $(0, 0, b^2/a)$ και την προηγούμενη γραμμική καταβόθρα.

1.2.4 Ροή που περνά από ένα τυχαίο σώμα

Χρησιμοποιούμε το θεώρημα του *Green* στην περιοχή \mathcal{V} η οποία ακαλύπτει το χώρο μεταξύ του σώματος και μιας σφαίρας που εκτείνεται στο άπειρο και εμπεριέχει το σώμα. Προκύπτει ότι η συνεισφορά του ολοκληρώματος της επιφάνειας της σφαίρας που εκτείνεται στο άπειρο,

στο δυναμικό της ταχύτητας, είναι μια σταθερά. Άρα αν αγνοήσουμε τη συγκεκριμένη συνεισφορά έχουμε:

$$\oiint_{S_0} (\Phi_1 \nabla \Phi_2 - \Phi_2 \nabla \Phi_1) \cdot ndS = \iiint_{\mathcal{V}} (\Phi_1 \nabla^2 \Phi_2 - \Phi_2 \nabla^2 \Phi_1) d\vec{x} \quad (2.113)$$

όπου S_0 είναι η επιφάνεια του σώματος.

Αν θεωρήσουμε

$$\Phi_1 = \frac{1}{R}, \quad \Phi_2 = \Phi \quad \text{και} \quad \nabla^2 \Phi = 0, \quad (2.114)$$

με $R = |\vec{x} - \vec{x}'|$, συμβολίζουμε την απόσταση μεταξύ ενός σημείου ενδιαφέροντος $P(\vec{x})$ και ενός στοιχείου επιφάνειας $dS(\vec{x}')$ του σώματος, τότε η εξίσωση γίνεται:

$$\oiint_{S_0} \left[\frac{1}{R} \nabla \Phi - \Phi \nabla \left(\frac{1}{R} \right) \right] \cdot ndS = \iiint_{\mathcal{V}} \left[\frac{1}{R} \nabla^2 \Phi - \Phi \nabla^2 \left(\frac{1}{R} \right) \right] d\vec{x} \quad (2.115)$$

Όταν το σημείο $P(\vec{x})$ είναι εκτός της περιοχής \mathcal{V} , τότε η εξίσωση (2.115) συνεπάγεται:

$$\oiint_{S_0} \left[\frac{1}{R} \nabla \Phi - \Phi \nabla \left(\frac{1}{R} \right) \right] \cdot ndS = 0 \quad (2.116)$$

Όταν το σημείο $P(\vec{x})$ είναι εντός της περιοχής \mathcal{V} , τότε το περικλείουμε από μια μικρή σφαίρα ακτίνας ε , και η εξίσωση (2.115) γίνεται:

$$-\oiint_{\varepsilon} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial R} + \frac{\Phi}{R^2} \right) dS + \oiint_{S_0} \left[\frac{1}{R} \nabla \Phi - \Phi \nabla \left(\frac{1}{R} \right) \right] \cdot ndS = 0 \quad (2.117)$$

Και όσο $\varepsilon \rightarrow 0$, η προηγούμενη εξίσωση γίνεται:

$$\Phi(P) = \frac{1}{4\pi} \oiint_{S_0} \left[\frac{1}{r} \nabla \Phi - \Phi \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right] \cdot ndS \quad (2.118)$$

όπου φαίνεται ακριβώς πως υπολογίζεται το δυναμικό της ταχύτητας Φ σε όλη την έκταση του ρευστού από τις συνθήκες που επικρατούν στο στερεό σώμα.

Ισχύει ότι:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} - x_i' \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{2} x_i' x_j' \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\frac{1}{r} \right) + \dots \quad (2.119)$$

η παραπάνω ακολουθία είναι συγκλίνουσα για $r' < r$, στη συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε $|\vec{x}| = r$, $|\vec{x}'| = r'$. (2.120)

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.119), η εξίσωση (2.118) γίνεται:

$$\Phi(P) = \frac{c}{r} + c_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{r} \right) + c_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\frac{1}{r} \right) + \dots \quad (2.121)$$

όπου

$$c = -\frac{1}{4\pi} \oiint_{s_0} n \cdot \nabla \Phi dS$$

$$c_i = \frac{1}{4\pi} \oiint_{s_0} (x_i' n \cdot \nabla \Phi - n_i \Phi) dS \quad (2.122)$$

$$c_{ij} = \frac{1}{4\pi} \oiint_{s_0} \left(-\frac{1}{2} x_i' x_j' n \cdot \nabla \Phi - x_i' n_j \Phi \right) dS$$

κλπ.

Επομένως το πεδίο ροής σε μεγάλες αποστάσεις από ένα κινούμενο σώμα εκφράζεται από το κινούμενο σώμα καθώς αποτελείται από το άθροισμα πολύπλοκων πεδίων ροής, οι συντελεστές των οποίων είναι διάφορα ολοκληρώματα πάνω στο κινούμενο σώμα. Σε μεγάλες αποστάσεις από το κινούμενο σώμα η επικρατούσα κίνηση του κινούμενου σώματος στο ρευστό είναι ισοδύναμη με την επίδραση μιας σημειακής δύναμης, και η λεπτομερής κατανομή των επιφανειακών δυνάμεων του σώματος θεωρείται αμελητέα.

1.2.5 Ασταθής ροή

Σαν παράδειγμα ασταθούς ροής θεωρούμε μια άπειρη μάζα ρευστού, η οποία αρχικά ηρεμεί και έχει σφαιρικό σχήμα ακτίνας R_0 . Το ρευστό αναγκάζεται να κινηθεί προς τα έξω λόγω μιας πίεσης που εφαρμόζεται ομοιόμορφα στο εξωτερικό του ρευστού, δεν υπάρχει πίεση στο άπειρο και δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις στο σώμα. Αφού η κίνηση του ρευστού είναι συμμετρικά σφαιρική, η εξίσωση *Laplace* για το δυναμικό της ταχύτητας παίρνει τη μορφή:

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right) = 0 \quad (2.123)$$

με κινηματικές συνθήκες στην επιφάνεια του ρευστού:

$$R = R(t): \quad \frac{\partial \Phi}{\partial R} = \frac{dR}{dt} \quad (2.124)$$

Η εξίσωση (2.124) δείχνει ότι η ακτίνα της σφαιρικής κοιλότητας που περικλείει το ρευστό αυξάνεται με ρυθμό ίσο με την τοπική ταχύτητα του ρευστού, έτσι ώστε το ρευστό ποτέ δεν ξεπερνά τα όρια της σφαιρικής κοιλότητας, και η οποία αποτελείται από τα ίδια στοιχεία του ρευστού.

Από τις εξισώσεις (2.123) και (2.124) συνεπάγεται:

$$\Phi(R, t) = -\frac{R^2(t)}{R} R' \quad (2.125)$$

όπου οι τόνοι συμβολίζουν παραγώγιση ως προς το χρόνο t .

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.125), η εξίσωση *Bernoulli* γίνεται:

$$p + \frac{1}{2} \left(\frac{R^2 R'}{R^2} \right)^2 - \frac{R^2 R'' + 2RR'^2}{R} = 0 \quad (2.126)$$

Χρησιμοποιώντας την αδιαβατική εξίσωση κατάστασης των αερίων

$$\frac{p_1}{p_0} = \left(\frac{R_0^3}{R_1^3} \right)^\gamma \quad (2.127)$$

όπου γ είναι ο λόγος ειδικής θερμότητας του αερίου εντός της σφαιρικής κοιλότητας και p_1 είναι η πίεση στο $R = R_1$, και από την εξίσωση (2.126) για $R = R$ έχουμε:

$$RR'' + \frac{3}{2} R'^2 = \frac{p_0}{\rho_0} \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} \quad (2.128)$$

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση (2.128) και χρησιμοποιώντας

$$R = R_0 : R' = 0 \quad (2.129)$$

έχουμε:

$$R'^2 = \frac{2a_0^2}{3(\gamma-1)} \left[\left(\frac{R_0}{R} \right)^3 - \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} \right] \quad (2.130)$$

όπου

$$a_0 = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} \quad (2.131)$$

είναι η ταχύτητα του ήχου.

Σύμφωνα με την εξίσωση (2.130) η ταχύτητα τείνει στο άπειρο, όσο $R \rightarrow 0$, το οποίο υποδεικνύει ότι οι προσεγγίσεις που έγιναν κατά τη διαφορίση της εξίσωσης (2.130) θα καταρρεύσουν όσο $R \rightarrow 0$.

1.2.6 Προστιθένη μάζα σωμάτων που κινούνται εντός ρευστού

Η επίδραση που έχει ένα ρευστό, σε ένα στερεό που κινείται μέσα σε αυτό, είναι η αλλαγή της αδράνειας του. Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε μια σφαίρα ακτίνας a η οποία κινείται ασταθώς μέσα σε ένα ρευστό με ταχύτητα $\vec{U} = U\hat{i}_x$. Επομένως για το δυναμικό της ταχύτητας έχουμε:

$$\Phi = \frac{U(t)a^3 \cos \theta}{2 R^2} = \frac{1}{2} a^3 \frac{(\vec{U} \cdot \vec{R})}{R^3} \quad (2.132)$$

Η κινητική ενέργεια του ρευστού που κινείται λόγω της σφαίρας είναι:

$$T = \frac{1}{2} \rho \iiint_{\theta} (\nabla \Phi)^2 d\vec{x} = -\frac{1}{2} \rho \oiint_S \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS \quad (2.133)$$

όπου S είναι η επιφάνεια της σφαίρας και το κάθετο διάνυσμα n έχει κατεύθυνση προς το ρευστό.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.132), η εξίσωση (2.133) γίνεται:

$$T = -\frac{\rho}{2} \oiint_S \frac{U_a \cos \theta}{2} (-U \cos \theta) dS = \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi a^3 \rho}{3} \right) U^2 \quad (2.134)$$

Είναι προφανές από την εξίσωση (2.134) ότι η κινητική ενέργεια του ρευστού μπορεί να θεωρηθεί προστιθέμενη μάζα.

$$m_a = \frac{2\pi \rho a^3}{3} \quad (2.135)$$

του στερεού που κινείται στο ρευστό. Παρατηρούμε ότι η συγκεκριμένη μάζα είναι η μισή μάζα υγρού που εκτοπίστηκε από τη σφαίρα.

Για να γίνει πιο εμφανής η δυναμική συνεισφορά της προστιθέμενης μάζας, υπολογίζουμε τη δύναμη που ασκείται από το ρευστό στη σφαίρα.

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.132) και παρατηρώντας ότι:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{1}{2} a^3 \left[\frac{\dot{U} \cos \theta}{R^2} + \frac{U^2}{R^3} - \frac{3U^2 \cos^2 \theta}{R^3} \right] \quad (2.136)$$

με

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial t} = \vec{U} \quad (2.137)$$

και η πίεση σε ένα σημείο της σφαίρας υπολογίζεται από την εξίσωση *Bernoulli* και είναι:

$$p|_{R=a} = p_\infty - \frac{\rho}{8} U^2 (4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - \frac{\rho}{2} (\dot{U} a \cos \theta + U^2 - 3U^2 \cos^2 \theta) \quad (2.138)$$

όπου p_∞ είναι η σταθερή πίεση στο άπειρο.

Η δύναμη που ασκείται επομένως από το ρευστό στη σφαίρα είναι:

$$\vec{F} = \iint_S n p|_{R=a} dS = -i_x \iint_S p|_{R=a} \cos \theta dS - i_y \iint_S p|_{R=a} \sin \theta dS \quad (2.139)$$

και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.138) έχουμε:

$$\vec{F} = -\left(\frac{2\pi\rho a^3}{3}\right)\dot{U}i_x \quad (2.140)$$

η οποία είναι η αδρανειακή δύναμη του επιταχυνόμενου ρευστού με μάζα ίση με την προστιθέμενη μάζα που δίνεται από την εξίσωση (2.135) και έχει κατεύθυνση αντίθετη της κίνησης της σφαίρας.

1.3 Τυρβώδης ροή

1.3.1 Δινοσωλήνες

Οι εξισώσεις κίνησης *Euler* για ένα ασυμπίεστο ρευστό είναι:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{v} &= 0 \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p \end{aligned} \quad (2.141)$$

και η στροβιλότητα δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{\Omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v} \quad (2.142)$$

Οι γραμμές στροβιλότητας είναι εκείνες που είναι παντού εφαπτομενικές με το τοπικό διάνυσμα στροβιλότητας. Η επιφάνεια του ρευστού που σχηματίζεται από όλες τις γραμμές στροβιλότητας που διαπερνούν μια αναγώγιμη κλειστή καμπύλη εντός του ρευστού ονομάζεται δινοσωλήνας. Θεωρούμε το ολοκλήρωμα της στροβιλότητας σε μια ανοιχτή επιφάνεια S η οποία φράσσεται από την ίδια κλειστή καμπύλη και βρίσκεται εξολοκλήρου εντός του ρευστού

$$\iint_S \vec{\Omega} \cdot n dS \quad (2.143)$$

όπου $n dS$ είναι ένα στοιχείο επιφανείας.

Από τη σχέση (2.142) έχουμε:

$$\nabla \cdot \vec{\Omega} = 0 \quad (2.144)$$

από το οποίο προκύπτει ότι το παραπάνω ολοκλήρωμα έχει την ίδια τιμή για κάθε ανοιχτή επιφάνεια που βρίσκεται εντός του ρευστού και φράσσεται από κάθε κλειστή καμπύλη που βρίσκεται εντός του δινοσωλήνα και το περικλείει μόνο μία φορά, και ονομάζεται αντοχή του δινοσωλήνα. Επομένως οι δινοσωλήνες έχουν σταθερή αντοχή και είτε είναι κλειστοί σωλήνες είτε δεν τελειώνουν πουθενά εντός του ρευστού. Επιπλέον αφού κάθε δινοσωλήνας αποτελείται πάντοτε από τα ίδια στοιχεία ρευστού, ο όγκος του διατηρείται. Συνεπώς κάθε παραμόρφωση του δινοσωλήνα θα επιδινώσει την τοπική στροβιλότητα.

Για τη στροβιλότητα η εξίσωση (2.141) δίνει:

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{\Omega}) \quad (2.145)$$

η οποία χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.141) γίνεται:

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{\Omega} = (\vec{\Omega} \cdot \nabla) \vec{v} \quad (2.146)$$

Εαν, $d\vec{l}$ είναι ένα απειροστά μικρό γραμμικό υλικό στοιχείο, προκύπτει η ακόλουθη κινηματική εξίσωση που διέπει την παραμόρφωση και τον προσανατολισμό του γραμμικού στοιχείου:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \right] d\vec{l} = (d\vec{l} \cdot \nabla) \vec{v} \quad (2.147)$$

Επομένως, συνεπάγεται από την εξίσωση (2.146) ότι η στροβιλότητα $\vec{\Omega}$ μεταβάλλεται όπως ένα διάνυσμα που αντιπροσωπεύει ένα γραμμικό υλικό στοιχείο που συμπίπτει στιγμιαία με ένα στοιχείο με ένα στοιχείο από την τοπική τυρβώδη γραμμή. Συνεπώς, οι τυρβώδεις γραμμές κινούνται μαζί με το ρευστό.

Οι όροι που βρίσκονται στο δεξί μέλος της εξίσωσης (2.146) αντιπροσωπεύουν την παραμόρφωση της τυρβώδους γραμμής. Το συγκεκριμένο γεγονός οδηγεί στη συγκέντρωση και στην αύξηση της έντασης της στροβιλότητας, ανεξαρτήτως πόσο διασκορπισμένη η στροβιλότητα ήταν αρχικά. Σαν παράδειγμα βλέπουμε τον στρόβιλο που δημιουργείται στο σιφόνι όπου η επιμήκυνση των γραμμών τύρβης λόγω της αναρρόφησης δημιουργεί συγκέντρωση στροβιλότητας.

Στην περίπτωση της δισδιάστατης ροής, η εξίσωση (2.145) και (2.146) συνεπάγεται:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \Omega = 0 \quad (2.148)$$

όπου Ω είναι η συνιστώσα της στροβιλότητας κάθετη στη ροή.

1.3.2 Επαγόμενο πεδίο ταχύτητας

Παρατηρούμε από την εξίσωση (2.141) ότι το πεδίο ταχύτητας είναι σωληνοειδές κα άρα έχουμε:

$$\vec{v} = -\vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (2.149)$$

τότε η στροβιλότητα γράφεται:

$$-\vec{\Omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad (2.150)$$

Παρατηρούμε ότι το διανυσματικό δυναμικό \vec{A} δεν είναι μοναδικά ορισμένο από την εξίσωση (2.149) όταν η ταχύτητα \vec{v} είναι γνωστή. Στην πραγματικότητα

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \chi \quad (2.151)$$

αναπαριστά το ίδιο πεδίο. Όμως είναι πάντοτε δυνατό να επιλέγεται το χ έτσι ώστε:

$$\nabla^2 \chi = \nabla \cdot \vec{A} \quad (2.152)$$

ώστε:

$$\nabla \cdot \bar{A}' = 0 \quad (2.153)$$

και συνεπώς μέσω της εξίσωσης (2.150) προκύπτει:

$$\nabla \cdot \bar{A} = \bar{\Omega} \quad (2.154)$$

από την παραπάνω σχέση έχουμε:

$$\bar{A} = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\mathcal{V}'} \frac{\bar{\Omega}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\mathcal{V}'(\vec{r}') \quad (2.155)$$

Όπου μπορεί να αποδειχθεί ότι $\nabla \cdot \bar{A} = 0$ σύμφωνα με την εξίσωση (2.153) αν η στροβιλότητα μηδενίζεται στο άπειρο. Τελικά, χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.155) στην εξίσωση (2.149) προκύπτει η ακόλουθη σχέση για το πεδίο ταχύτητας:

$$\vec{v} = \frac{1}{4\pi} \nabla_r \times \iiint_{\mathcal{V}'} \frac{\bar{\Omega}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\mathcal{V}'(\vec{r}') \quad (2.156)$$

1.3.3 Ο νόμος των *Biot-Savart*

Από την εξίσωση (2.155) παρατηρούμε ότι για ένα δινοσωλήνα έχουμε:

$$\delta \bar{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\bar{\Omega}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} (n \delta S \cdot d\vec{l}) \quad (2.157)$$

Παρατηρούμε επίσης ότι:

$$d\vec{l} = \frac{\bar{\Omega}}{|\bar{\Omega}|} dl, \quad \Gamma = n \cdot \bar{\Omega} dS \quad (2.158)$$

όπου Γ είναι η κυκλοφορία γύρω από το δινοσωλήνα, και η σχέση (2.157) γίνεται

$$\delta \bar{A}(\vec{r}) = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{d\vec{l}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (2.159)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.159), η εξίσωση (2.149) συνεπάγεται:

$$\delta \vec{v}(\vec{r}) = \nabla_r \times \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{d\vec{l}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (2.160)$$

από την οποία προκύπτει:

$$\vec{v}(\vec{r}) = \frac{\Gamma}{4\pi} \iiint_{\mathcal{V}'} \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (2.161)$$

1.3.4 Δινοπέταλο

Στην περίπτωση της αξονοσυμμετρικής ροής με κυλινδρικές πολικές συντεταγμένες (r, θ, z) , το πεδίο ταχύτητας είναι:

$$\vec{v} = u_r(r, z, t)\vec{i}_r + u_z(r, z, t)\vec{i}_z \quad (2.162)$$

Επομένως οι ροϊκές γραμμές βρίσκονται σε επίπεδα $\theta = \text{const.}$ και η στροβιλότητα δίνεται από τη σχέση: $\vec{\Omega} = \Omega \hat{i}_\theta$, όπου:

$$\Omega = \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \quad (2.163)$$

Συνεπώς στην περίπτωση της αξονοσυμμετρικής ροής οι δινοσωλήνες έχουν σχήμα δακτυλίου με κέντρο τον άξονα συμμετρίας. Κατα τη διάρκεια της κίνησης του ρευστού τα δινοπέταλα θα διευρυνθούν και θα συναντηθούν στον άξονα συμμετρίας. Ωστόσο αφού το ρευστό είναι ασυμπίεστο ο όγκος των δινοπετάλων πρέπει να παραμείνει σταθερός προκειμένου η στροβιλότητα Ω να είναι ανάλογη με το μήκος του δακτυλίου $2\pi r$. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, η εξίσωση (2.146) γίνεται:

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\Omega}{r} \right) = 0 \quad (2.164)$$

Έστω ένα αυθαίρετα λεπτό κυκλικό φύλλο στροβιλότητας. Χρησιμοποιώντας, την αξονοσυμμετρική ροϊκή συνάρτηση $\bar{\Psi}$ λαμβάνοντας υπόψιν ότι:

$$u_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial z}, \quad u_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial r} \quad (2.165)$$

έχουμε από την εξίσωση (2.163)

$$\frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial r} + r\Omega = 0 \quad (2.166)$$

Εκτός του δακτυλίου υπάρχει αστρόβιλη ροή έτσι η εξίσωση (2.166) γίνεται:

$$\frac{\partial^2 \bar{\Psi}'}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Psi}'}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\Psi}'}{\partial r} + r\Omega = 0 \quad (2.167)$$

Θέτοντας

$$\Psi = \chi r, \quad \Psi' = \chi' r \quad (2.168)$$

οι εξισώσεις (2.166) και (2.167) καταλήγουν στις σχέσεις:

$$\frac{\partial^2 \vec{\chi}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \vec{\chi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial r} - \frac{\chi}{r^2} + \vec{\Omega} = 0 \quad (2.169)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\chi}'}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \bar{\chi}'}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\chi}'}{\partial r} - \frac{\chi'}{r^2} = 0 \quad (2.170)$$

στις οποίες, $\chi \cos \theta$ είναι το δυναμικό της κατανομής μάζας πυκνότητας $\Omega \cos \frac{\theta}{4\pi}$ που καταλαμβάνει τον ίδιο χώρο με ένα δισκοπέταλο.

Τότε προκύπτει:

$$\chi \cos \theta = \frac{r_0 \Omega \sigma}{4\pi} \int_{\theta}^{2\pi+\theta} \frac{\cos \theta' d\theta'}{\left[(z-z')^2 + r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta-\theta') \right]^{1/2}} \quad (2.171)$$

όπου σ είναι η τομή του πυρήνα του δισκοπέταλου, και r_0 είναι η ακτίνα του δισκοπέταλου.

Θέτοντας

$$\theta' - \theta = \varepsilon \quad (2.172)$$

η εξίσωση (2.171) γίνεται:

$$\chi \cos \theta = \frac{r_0 \Omega \sigma}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos \varepsilon d\varepsilon}{\left[(z-z')^2 + r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \varepsilon \right]^{1/2}} \quad (2.173)$$

Άρα από την εξίσωση (2.168) προκύπτει:

$$\Psi = \frac{\Omega \sigma r r_0}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos \varepsilon d\varepsilon}{\left[(z-z')^2 + r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \varepsilon \right]^{1/2}} \quad (2.174)$$

Θέτοντας

$$\left. \begin{aligned} k &= \frac{2(rr_0)^{1/2}}{\left[(z-z')^2 + (r+r_0)^2 \right]^{1/2}} \\ 2\eta &= \varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (2.175)$$

η εξίσωση (2.174) γίνεται:

$$\Psi = \sigma \Omega \frac{(rr_0)^{1/2}}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(2 \cos^2 \eta - 1)}{(1 - k^2 \cos^2 \eta)^{1/2}} d\eta \quad (2.176)$$

ή

$$\Psi = \sigma \Omega \frac{(rr_0)^{1/2}}{\pi} \left[\left(\frac{2}{k} - k \right) K(k) - \frac{2}{k} E(k) \right] \quad (2.177)$$

όπου

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\eta}{(1-k^2 \cos^2 \eta)^{1/2}}, \quad E(k) = \int_0^{2\pi} (1-k^2 \cos^2 \eta)^{1/2} d\eta \quad (2.178)$$

είναι τα ελλειπτικά ολοκληρώματα πρώτου και δευτέρου είδους αντίστοιχα.

Παρατηρούμε ότι στην επιφάνεια του δακτυλίου είναι: $z \sim z'$, $r \sim r_0$, $k \sim 1$ με αποτέλεσμα:

$$\left. \begin{aligned} K(k) &= \ln \frac{4}{(1-k^2)^{1/2}} + \frac{1}{2}(1-k^2)^{1/2} \left[\ln \frac{4}{(1-k^2)^{1/2}} - 1 \right] \\ E(k) &= 1 + \frac{1}{2}(1-k^2) \left[\ln \frac{4}{(1-k^2)^{1/2}} - \frac{1}{2} \right] \end{aligned} \right\} (2.179)$$

από την εξίσωση (2.177) για τις συνιστώσες της ταχύτητας προκύπτει:

$$u_r = \frac{\Gamma}{\pi} \left[\frac{2r_0}{\alpha} - \frac{3\alpha}{4r_0} \left(\ln \frac{8r_0}{\alpha} - \frac{3}{2} \right) \right] \frac{z-z'}{2r_0\alpha} \quad (2.180)$$

$$u_z = \frac{\Gamma}{2\pi r_0} \left(\ln \frac{8r_0}{\alpha} - 1 \right) \quad (2.181)$$

όπου α είναι η ακτίνα του ουρήνα της δίνης, και $\Gamma = r_0 \Omega$. Σημειώνουμε ότι για $z = z'$, $u_r = 0$ ώστε η ακτίνα του δακτυλίου να παραμένει αμετάβλητη.

Επομένως, ένα απομονωμένο δινοπέταλο εντός ενός ιδανικού ρευστού χωρίς σύνορα θα κινείται χωρίς σημαντική αλλαγή μεγέθους, σε κατεύθυνση παράλληλη στο επίπεδο στο οποίο βρίσκεται, και με σταθερή ταχύτητα. Η εξίσωση (2.181) δείχνει επίσης ότι η αξονική ταχύτητα είναι μεγαλύτερη για μικρές τιμές του r_0 . Προκειμένου να γίνει πιο κατανοητό το τελευταίο συμπέρασμα, θεωρούμε δύο παρόμοια δινοπέταλα που απέχουν ίδια απόσταση από ένα κοινό άξονα συμμετρίας. Η επαγόμενη ταχύτητα του δινοσωλήνα που βρίσκεται πίσω έχει μεγάλη εξερχόμενη ακτινική συνιστώσα στη θέση του δινοπετάλου που βρίσκεται μπροστά, με αποτέλεσμα η ακτίνα του τελευταίου να αυξάνεται σταδιακά. Και σύμφωνα με την εξίσωση (2.181) αυτό οδηγεί στην μείωση της ταχύτητας του, και αντιστρόφως, υπάρχει αντίστοιχη αύξηση στην ταχύτητα κίνησης του δινοπετάλου που βρίσκεται πιο πίσω, το οποίο συνεπώς προσπερνά το μεγαλύτερο δινοπέταλο που βρίσκεται πιο μπροστά και γίνεται με τη σειρά του το «μπροστά» δινοπέταλο. Η συγκεκριμένη ακολουθία συνεχίζει να επαναλαμβάνεται.

1.3.5 Φύλλο στροβιλότητας

Επιφάνειες στις οποίες η στροβιλότητα είναι άπειρη και η εφαπτομενική συνιστώσα του πεδίου ταχύτητας είναι ασυνεχής δεν είναι μόνο κινηματικά πιθανές αλλά είναι πιθανό να

εμφανιστούν στο όριο της εξαφάνισης της στροβιλότητας όσο οι ασυνέχειες είναι είναι συνεπείς με την ολοκληρωτική μορφή των εξισώσεων *Euler* της ροής.

Ένα παράδειγμα της επιφανειακής συγκέντρωσης της στροβιλότητας το πεδίο ροής που σχηματίζεται το κατάντι της πτέρυγας ενός αεροσκάφους. Έστω

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon} \bar{\Omega} dn = \bar{\Gamma} = \text{const.} \quad (2.182)$$

όπου l είναι η κάθετη απόσταση του φύλλου στροβιλότητας και το ολοκλήρωμα είναι εντός κάποιας μικρής ακτίνας ε που εμπεριέχει την επιφάνεια. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.182), εξίσωση (2.161) γίνεται:

$$\vec{v}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \times \bar{\Gamma}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dS(\vec{r}') \quad (2.183)$$

όπου για ένα επίπεδο φύλλο ομοιόμορφης στροβιλότητας η εξίσωση (2.183) γίνεται:

$$\vec{v}(\vec{r}) = \frac{\bar{\Gamma}}{4\pi} \times \int_s \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dS(\vec{r}') \quad (2.184)$$

ή

$$\vec{v}(\vec{r}) = \frac{\bar{\Gamma}}{4\pi} \times n \left[\int_s \frac{n \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dS(\vec{r}') \right] = \frac{1}{2} \bar{\Gamma} \times n \quad (2.185)$$

όπου n είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα του φύλλου στροβιλότητας με κατεύθυνση την πλευρά στην οποία βρίσκεται το σημείο \vec{r} . Επομένως η ταχύτητα του ρευστού που παράγεται από το φύλλο στροβιλότητας είναι ομοιόμορφη και παράλληλη με το φύλλο σε κάθε πλευρά, αλλά με αντίθετες κατευθύνσεις στην κάθε πλευρά. Η εφαρμογή της ολοκληρωτικής μορφής της εξίσωσης *Euler* σε ένα στοιχείο του φύλλου στροβιλότητας δείχνει ότι η πίεση καθώς επίσης και η κάθετη συνιστώσα του πεδίου ταχύτητας είναι συνεχείς και στις δυο πλευρές του φύλλου στροβιλότητας.

Επισημάνεται επίσης, ότι ακόμα και όταν η κυκλοφορία $\bar{\Gamma}$ δεν είναι σταθερή και το φύλλο δεν είναι σταθερό προκύπτει από την εξίσωση (2.183), η ακόλουθη εξίσωση για το τοπικό πήδημα δια μέσου του φύλλου στροβιλότητας στο επαγωγόμενο πεδίο ταχύτητας:

$$[\vec{v}] = \bar{\Gamma} \times n \quad (2.186)$$

Θεωρούμε στη συνέχεια ένα φύλλο στροβιλότητας με σχήμα κυλίνδρου αυθαίρετης ακτίνας, στο οποίο η κυκλοφορία $\bar{\Gamma}$ όπως ορίστηκε στην εξίσωση (2.182) είναι ομοιόμορφη και η κυκλοφορία σχηματίζει δεξιές γωνίες με τις γεννήτριες του κυλίνδρου (με τις γραμμές στροβιλότητας να σχηματίζουν επίπεδες καμπύλες, έχοντας όλες το ίδιο σχήμα, και να έχουν τροχιά γύρω από τον κύλινδρο. Άρα από την εξίσωση (2.183) προκύπτει:

$$\vec{v}(\vec{r}) = -\frac{\vec{\Gamma}}{4\pi} \oint_{c-\infty}^{\infty} \frac{(\vec{r}-\vec{r}') \times \overline{d\vec{l}}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} ds(\vec{r}') \quad (2.187)$$

όπου $ds(\vec{r}')$ είναι ένα στοιχείο μήκους μιας γεννήτριας και $\overline{d\vec{l}}(\vec{r}')$ ένα διάνυσμα με μήκος ίσο με μια γραμμή στροβιλότητας. Η παράλληλη συνιστώσα του στοιχείου $(\vec{r}-\vec{r}')$ στις γεννήτριες, δεν έχει συνεισφορά στο ολοκλήρωμα ως προς το S , έτσι η εξίσωση (2.187) γίνεται:

$$\vec{v}(\vec{r}) = -\frac{\vec{\Gamma}}{2\pi} \nabla \oint_{c-\infty}^{\infty} \frac{\vec{p} \times \overline{d\vec{l}}(\vec{r}')}{p^2} \quad (2.188)$$

όπου \vec{p} είναι η προβολή του $(\vec{r}-\vec{r}')$ σε μία τομή του κυλίνδρου. $\frac{\vec{p} \times \overline{d\vec{l}}(\vec{r}')}{p^2}$ είναι η γωνία η οποία σχηματίζει το σημείο \vec{r} με το $\overline{d\vec{l}}$ στην τομή του κυλίνδρου, έτσι ώστε σε κάθε σημείο \vec{r} , εντός του κυλίνδρου, η ταχύτητα \vec{v} είναι παράλληλη είναι παράλληλη στις γεννήτριες και έχει ομοιόμορφη κυκλοφορία $\vec{\Gamma}$, ενώ σε κάθε σημείο \vec{r} εκτός του κυλίνδρου η ταχύτητα μηδενίζεται.

1.4 Θεωρία λεπτών αεροτομών

Θεωρούμε το πρόβλημα του υπολογισμού της κατανομής της πίεσης μιας δεδομένης αεροτομής. Η θεωρία που αναπτύσσεται δίνει μια προσεγγιστική λύση του προβλήματος και λαμβάνει υπόψιν της μοναδικής κατανομής που αναπαριστά την κάθε αεροτομή, η οποία ικανοποιεί τις κινηματικές οριακές συνθήκες υπό την παρουσία ενός στροβίλου ή την αποβολή ελεύθερων στροβίλων.

Θεωρούμε μια αδιατάραχτη ροή σε μια στατική αεροτομή. Τότε προκύπτει το πρόβλημα οριακών τιμών για το δυναμικό της ταχύτητας Φ :

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (2.189)$$

$$\nabla \Phi \cdot \nabla F = 0 \quad \text{στο } F(x, y) = 0 \quad (2.190)$$

$$|\nabla \Phi| \rightarrow V_{\infty} \quad \text{στο άπειρο} \quad (2.191)$$

$$\text{η συνθήκη Kutta στο χείλος εκφυγής} \quad (2.192)$$

όπου η πλάγια όψη της αεροτομής δίνεται από:

$$F(x, y) = \varepsilon \eta(x) - y = 0, \quad \varepsilon \ll 1. \quad (2.193)$$

Η κινηματική συνθήκη (2.190) δείχνει ότι η ροή είναι εφαπτομενική προς την επιφάνεια του σώματος και έχουμε ότι:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Phi_y}{\Phi_x} &= \varepsilon \frac{d\eta_u}{dx} \text{ στο } y = \varepsilon\eta_u(x) \\ \frac{\Phi_y}{\Phi_x} &= \varepsilon \frac{d\eta_l}{dx} \text{ στο } y = \varepsilon\eta_l(x) \end{aligned} \right\} (2.194)$$

όπου οι δείκτες u και l υποδηλώνουν την πάνω και την κάτω πλευρά της αεροτομής αντίστοιχα. Σημειώνουμε ότι:

$$\left. \begin{aligned} \eta_u(x) &= [\eta_t(x) + \eta_c(x)] - \alpha x \\ \eta_l(x) &= [-\eta_t(x) + \eta_c(x)] - \alpha x \end{aligned} \right\} (2.195)$$

όπου οι δείκτες t και c υποδηλώνουν το πάχος και την καμπυλότητα της αεροτομής αντίστοιχα.

Αν θέσουμε

$$\Phi = V_\infty x + \varepsilon\phi(x, y) \quad (2.196)$$

οι σχέσεις (2.189), (2.191) και (2.194) καταλήγουν ύστερα από γραμμικοποίηση:

$$\begin{aligned} \phi_{xx} + \phi_{yy} &= 0 \\ y = 0^+ : \phi_y &= V_\infty \frac{d\eta_u}{dx} \\ y = 0^- : \phi_y &= V_\infty \frac{d\eta_l}{dx} \\ \phi_x, \phi_y &\Rightarrow 0 \text{ στο άπειρο} \end{aligned} \quad (2.197)$$

Η υπόθεση μικρών διαταραχών απαιτεί τόσο η γωνία προσβολής όσο και το πάχος της αεροτομής να είναι αρκετά μικρά.

Χωρίζουμε τις σχέσεις (2.197) σε τρία απλούστερα προβλήματα: Έστω

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 \quad (2.198)$$

όπου

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi_1 &= 0 \\ \text{i. } y = 0^\pm : \phi_{1y} &= \pm V_\infty \frac{d\eta_t}{dx}, \quad 0 \leq x \leq l \quad (2.199) \\ |\nabla \phi_1| &\rightarrow 0 \text{ στο άπειρο} \\ \nabla^2 \phi_2 &= 0 \\ \text{ii. } y = 0^\pm : \phi_{2y} &= V_\infty \frac{d\eta_c}{dx}, \quad 0 \leq x \leq l \quad (2.200) \\ |\nabla \phi_2| &\rightarrow 0 \text{ στο άπειρο} \\ &\text{η συνθήκη Kutta στο } x = l \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi_3 &= 0 \\ \text{iii. } y = 0^\pm : \phi_{3y} &= -V_\infty a, \quad 0 \leq x \leq l \quad (2.201) \\ |\nabla \phi_3| &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

συνθήκη Kutta στο $x = l$

Στην κινηματική συνθήκη (2.199) το \pm αντιστοιχεί στην πάνω και στην κάτω πλευρά της αεροτομής. Επομένως, το ϕ_1 αντιστοιχεί στο πρόβλημα του πάχους της αεροτομής, το ϕ_2 στο πρόβλημα της κυρτότητας της αεροτομής και το ϕ_3 στο πρόβλημα της γωνίας προβολής.

Η πίεση πάνω στην αεροτομή (υπό τη μορφή του αδιάστατου συντελεστή πίεσης) είναι:

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2} = 1 - \frac{V^2}{V_\infty^2} \phi_x \quad (2.202)$$

1.4.1 Το πρόβλημα του πάχους της αεροτομής

Το συγκεκριμένο πρόβλημα αντιστοιχεί σε μια συμμετρική αεροτομή σε μηδενική γωνία προσβολής.

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= 0 \\ y = 0^\pm : \phi_y &= \pm V_\infty \frac{d\eta_t}{dx}, \quad 0 \leq x \leq l \quad (2.203) \\ |\nabla \phi| &\rightarrow 0 \text{ στο άπειρο} \end{aligned}$$

Στη συγκεκριμένη περίπτωση δεν ισχύει η συνθήκη Kutta καθώς δεν υπάρχει κυκλοφορία γύρω από την αεροτομή.

Το πρόβλημα του πάχους είναι ισοδύναμο με την επαλληλία ομοιόμορφης ροής με την κατανομή πηγών και έτσι έχουμε:

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^l q(\xi) \ln \left[(x - \xi)^2 + y^2 \right]^{1/2} d\xi \quad (2.204)$$

και οι συνιστώσες της ταχύτητας είναι:

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{q(\xi) \cdot (x - \xi)}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi \\ v(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{q(\xi) \cdot y}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi \end{aligned} \right\} (2.205)$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (2.205) και (2.199) η κινηματική συνθήκη γίνεται:

$$v(x, 0^+) = \lim_{y \rightarrow 0} \pm \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{q(\xi) \cdot y}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi \right] = \pm V_\infty \frac{d\eta_t}{dx}, \quad 0 \leq x \leq l \quad (2.206)$$

και όταν θέτουμε

$$\eta = \frac{\xi - x}{y} \quad (2.207)$$

η (2.206) γίνεται:

$$v(x, 0^+) = \lim_{y \rightarrow 0} \pm \frac{1}{2\pi} \int_{\eta_0}^{\eta_l} \frac{q(\xi) d\eta}{1 + \eta^2} = \pm V_\infty \frac{d\eta_t}{dx} \quad (2.208)$$

όπου

$$\eta_{0,l} = \eta(x=0, l) \quad (2.209)$$

Επομένως,

$$v(x, 0^+) = \mp \frac{1}{2\pi} q(x) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\eta}{1 + \eta^2} = \pm V_\infty \frac{d\eta_t}{dx} \quad (2.210)$$

άπο την οποία συνεπάγεται ότι:

$$\frac{1}{2} q(x) = V_\infty \frac{d\eta_t}{dx} \quad (2.211)$$

Σημειώνουμε ότι σε κάθε σημείο της λωρίδας της αεροτομής το πήδημα της ταχύτητας V διαμέσου της λωρίδας είναι ίσο με την ένταση της πηγής στο συγκεκριμένο σημείο. Επομένως, η εξίσωση (2.205) γίνεται:

$$\phi(x, y) = \frac{V_\infty}{\pi} \int_0^l \frac{d\eta_t}{dx}(\xi) \ln \left[(x-\xi)^2 + y^2 \right]^{1/2} d\xi \quad (2.212)$$

Θεωρώντας

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{l}{2}(1 + \cos \theta), \quad -\pi \leq \theta \leq \pi \\ \xi &= \frac{l}{2}(1 + \cos \varphi), \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi \end{aligned} \right\} \quad (2.213)$$

η εξίσωση (2.205) στο σημείο $y = 0$, ειδικότερα η εξίσωση:

$$u(x, 0) = \frac{V_\infty}{\pi} \int_0^l \frac{d\eta_t}{dx}(\xi) \frac{d\xi}{x-\xi}, \quad 0 \leq x \leq l \quad (2.214)$$

συνεπάγεται:

$$u(\theta) = -\frac{V_\infty}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\eta_t}{dx}(\varphi) \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi - \cos \theta} d\varphi \quad (2.215)$$

Λαμβάνοντας υπόψιν ότι $\frac{d\eta_t}{dx}(\theta)$ είναι περιττή συνάρτηση του θ , έχουμε:

$$\frac{d\eta_t}{dx}(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \quad (2.216)$$

Η εξίσωση (2.216) δείχνει ότι η συνάρτηση $\frac{d\eta_t}{dx}$ μηδενίζεται στα σημεία $\theta = 0, \pi$ και

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\eta_t}{dx}(\theta) \sin n\theta d\theta \quad (2.217)$$

Όταν χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις (2.216) η εξίσωση (2.215) γίνεται

$$\frac{u(\theta)}{V_{\infty}} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta \quad (2.218)$$

για την οποία έχουμε χρησιμοποιήσει το αποτέλεσμα

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin n\varphi \cdot \sin \varphi}{\cos \theta - \cos \varphi} d\varphi = \cos n\theta \quad (2.219)$$

όπου $u(\theta)$ είναι άρτια συνάρτηση του θ .

1.4.2 Το πρόβλημα της κυρτότητας της αεροτομής

Το συγκεκριμένο πρόβλημα αντιστοιχεί σε μια αεροτομή με κυρτότητα σε μηδενική γωνία προσβολής. Έχουμε δηλαδή:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (2.220)$$

$$y = 0^{\pm} : \phi_y = V_{\infty} \frac{d\eta_c}{dx} \quad (2.221)$$

$$|\nabla \phi| \rightarrow 0 \text{ στο άπειρο} \quad (2.222)$$

$$\text{συνθήκη Kutta στο } x = l \quad (2.223)$$

Το πρόβλημα της κυρτότητας της αεροτομής είναι ισοδύναμο με την επαλληλία μιας ομοιόμορφης ροής και μιας κατανομής στροβιλότητας και έτσι έχουμε:

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^l \gamma(\xi) \tan^{-1} \frac{y}{x - \xi} d\xi \quad (2.224)$$

από την οποία προκύπτουν οι συνιστώσες της ταχύτητας

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{\gamma(\xi) \cdot y}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi \\ v(x, y) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{\gamma(\xi) \cdot (x-\xi)}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi \end{aligned} \right\} (2.225)$$

και παρατηρούμε από τις εξισώσεις (2.225) ότι:

$$u(x, 0^\pm) = \lim_{y \rightarrow 0}^\pm \frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{\gamma(\xi) \cdot y}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi = \pm \frac{\gamma(x)}{2} (2.226)$$

άρα σε κάθε σημείο για όλο το μηκος της αεροτομής το πηδημα της ταχύτητας στην αεροτομή ισούται με την ένταση της στροβιλότητας στο συγκεκριμένο σημείο.

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (2.225) από την κινηματική συνθήκη (2.200) προκύπτει:

$$\lim_{x \rightarrow \infty}^\pm \left[-\frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{\gamma(\xi) \cdot (x-\xi)}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi \right] = V_\infty \frac{d\eta_c}{dx}, \quad 0 \leq x \leq l (2.227)$$

από την οποία προκύπτει:

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{\gamma(\xi)}{x-\xi} d\xi = V_\infty \frac{d\eta_c}{dx}, \quad 0 \leq x \leq l (2.228)$$

και επειδή η συνθήκη *Kutta* απαιτεί να μην υπάρχει πηδημα της ταχύτητας στο σημείο $x = l$, από την εξίσωση (2.226) προκύπτει ότι: $\gamma(l) = 0$.

Θέτοντας

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{l}{2}(1 + \cos \theta), \quad -\pi \leq \theta \leq \pi \\ \xi &= \frac{l}{2}(1 + \cos \varphi), \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi \end{aligned} \right\} (2.229)$$

η εξίσωση (2.228) γίνεται

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\gamma(\varphi)}{2V_\infty} \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi - \cos \theta} d\varphi = \frac{d\eta_c}{dx}(\theta) (2.230)$$

Παρατηρώντας ότι $\frac{d\eta_c}{dx}(\theta)$ είναι μια άρτια συνάρτηση του θ , έχουμε:

$$\frac{d\eta_c}{dx}(\theta) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n\theta (2.231)$$

όπου

$$B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\eta_c}{dx}(\theta) \cos n\theta \cdot d\theta (2.232)$$

Έστω

$$\gamma(\theta) = \gamma_1(\theta) + \gamma_2(\theta) + \frac{K}{\sin \theta} \quad (2.233)$$

όπου, παρατηρώντας ότι:

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi}{\cos \varphi - \cos \theta} = 0 \quad (2.234)$$

ο τελευταίος όρος στο δεξί μέλος της εξίσωσης (2.233) αναπαριστά την ομογενή λύση της (2.230).

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.233) στην εξίσωση (2.230), επιλέγουμε γ_1 και γ_2 τέτοια ώστε:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \gamma_1(\varphi) \frac{\sin \varphi}{2V_\infty \cos \varphi - \cos \theta} d\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n\theta \quad (2.235)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \gamma_2(\varphi) \frac{\sin \varphi}{2V_\infty \cos \varphi - \cos \theta} d\varphi = \frac{B_0}{2} \quad (2.236)$$

και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.219), η εξίσωση (2.235) γίνεται:

$$\gamma_1(\theta) = -2V_\infty \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\theta \quad (2.237)$$

Επίσης, αφού ισχύει:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi - \cos \theta} d\varphi = 1 \quad (2.238)$$

από την εξίσωση (2.236) προκύπτει:

$$\gamma_2(\theta) = V_\infty B_0 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad (2.239)$$

Και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (2.237) και (2.239), η εξίσωση (2.233) γίνεται:

$$\gamma(\theta) = -2V_\infty \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\theta + V_\infty B_0 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{K}{\sin \theta} \quad (2.240)$$

Εφαρμόζοντας τη συνθήκη *Kutta*

$$\gamma(x=l) = \gamma(\theta=0) = 0 \quad (2.241)$$

ώστε να μην υπάρχει πήδημα της ταχύτητας στο σημείο $x=l$ από την εξίσωση (2.240), προκύπτει:

$$K = -V_\infty B_0 \quad (2.242)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.242), η εξίσωση (2.240) γίνεται:

$$\gamma(\theta) = -2V_\infty \left(\frac{B_0}{2} \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\theta \right) \quad (2.243)$$

Στη συνέχεια η πίεση της αεροτομής, χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.226), είναι:

$$C_p(x, 0^\pm) = -\frac{2u(x, 0^\pm)}{V_\infty} = \mp \frac{\gamma(x)}{V_\infty} \quad (2.244)$$

και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.243), η (2.244) γίνεται:

$$C_p(\theta) = 2 \left[\frac{B_0}{2} \cdot \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\theta \right] \quad (2.245)$$

Η άντωση της αεροτομής είναι:

$$L = \frac{\rho V_\infty^2}{2} \int_0^l [C_p(x, 0^-) - C_p(x, 0^+)] dx \quad (2.246)$$

και λαμβάνοντας υπόψιν μας την εξίσωση (2.244) η άντωση είναι:

$$L = \rho V_\infty \int_0^l \gamma(x) dx \quad (2.247)$$

Η ροπή πρόνευσης (ως προς το χείλος προσβολής) είναι:

$$M = -\rho V_\infty \int_0^l \gamma(x) x dx \quad (2.248)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.229), οι εξισώσεις (2.247) και (2.248) γίνονται:

$$L = \frac{\rho l}{2V_\infty} \int_0^\pi \gamma(\theta) \sin \theta d\theta \quad (2.249)$$

$$M = -\frac{\rho l^2}{4V_\infty} \int_0^\pi \gamma(\theta) \cdot (1 + \cos \theta) \sin \theta d\theta \quad (2.250)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.243), οι εξισώσεις (2.249) και (2.250) γίνονται:

$$L = -(B_0 + B_1) \pi \cdot \frac{\rho l}{2} \quad (2.251)$$

$$M = \frac{\rho l^2}{4} \left[\frac{\pi}{4} B_0 + \frac{\pi}{2} B_1 + \frac{\pi}{4} B_2 \right] \quad (2.252)$$

Γράφοντας την (2.252):

$$M = \frac{\rho l^2}{4} \left[\frac{\pi}{4} (B_0 + B_1) + \frac{\pi}{4} (B_1 + B_2) \right] \quad (2.253)$$

και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.251), έχουμε:

$$M = -\frac{L}{4} + \frac{\rho l^2}{4} \frac{\pi}{4} (B_1 + B_2) \quad (2.254)$$

η οποία σχέση μας δείχνει την άντωση που ασκείται στο $1/4$ της χορδής, που είναι το αεροδυναμικό κέντρο.

1.4.3 Επίπεδη πλάκα σε γωνία προσβολής

Έχουμε:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (2.255)$$

$$y = 0^\pm : y_{3y} = -V_\infty \alpha, \quad 0 \leq x \leq l \quad (2.256)$$

$$|\nabla \phi_3| \rightarrow 0 \text{ στο άπειρο} \quad (2.257)$$

$$\text{ισχύει η συνθήκη Kutta στο } x = l \quad (2.258)$$

Το πρόβλημα της αεροτομής σε γωνία προσβολής, όπως και το πρόβλημα της κυρτότητας της αεροτομής, είναι ισοδύναμο με την επαλληλία ομοιόμορφης ροής και μιας κατανομής στροβιλότητας, έτσι έχουμε:

$$\phi(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^l \gamma(\xi) \tan^{-1} \frac{y}{x-\xi} d\xi \quad (2.259)$$

και οι συνιστώσες της ταχύτητας είναι:

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{\gamma(\xi) \cdot y}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi \\ v(x, y) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{\gamma(\xi) \cdot (x-\xi)}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi \end{aligned} \right\} \quad (2.260)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.260) η κινηματική συνθήκη (2.256), συνεπάγεται:

$$\lim_{y \rightarrow 0^\pm} \left[-\frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{\gamma(\xi) \cdot (x-\xi)}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi \right] = -V_\infty \alpha, \quad 0 \leq x \leq l \quad (2.261)$$

από την οποία προκύπτει ότι:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{\gamma(\xi)}{x-\xi} d\xi = V_\infty \alpha, \quad 0 \leq x \leq l \quad (2.262)$$

Θέτοντας:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{l}{2}(1 + \cos \theta), \quad -\pi \leq \theta \leq \pi \\ \xi &= \frac{l}{2}(1 + \cos \varphi), \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi \end{aligned} \right\} (2.263)$$

η εξίσωση (2.262), γίνεται:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\gamma(\varphi) \sin \varphi}{\cos \varphi - \cos \theta} d\varphi - 2V_\infty \alpha (2.264)$$

και η εξίσωση (2.264) συνεπάγεται:

$$\gamma(\theta) = \frac{K}{\sin \theta} - 2V_\infty \alpha \frac{\cos \theta}{\sin \theta} (2.265)$$

Από την εξίσωση Kutta $\gamma(0) = 0$ και την εξίσωση (2.265) έχουμε:

$$K = 2V_\infty \alpha (2.266)$$

και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.266), η εξίσωση (2.265), γίνεται:

$$\gamma(\theta) = \frac{2V_\infty \alpha}{\sin \theta} (1 - \cos \theta) (2.267)$$

Η πίεση της αεροτομής δίνεται από την εξίσωση (2.244) και είναι:

$$C_p(\theta) = \frac{-\gamma(\theta)}{V_\infty} = -2\alpha \left(\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right) (2.268)$$

Επομένως η άντωση της αεροτομής και η ροπή πρόνευσης (ως προς το χείλος προσβολής) είναι:

$$L = \frac{\rho l / 2}{V_\infty} \int_0^\pi \gamma(\theta) \sin \theta d\theta = \pi \alpha \rho l (2.269)$$

$$M = -\frac{2}{V_\infty} \frac{\rho l^2}{4} \int_0^\pi \gamma(\theta) (1 + \cos \theta) \sin \theta d\theta = -\frac{\rho l^2}{4} \pi \alpha = -\frac{L}{4} (2.270)$$

Η εξίσωση (2.270) δείχνει ότι το σύστημα των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα είναι ισοδύναμο με την ανττική δύναμη με σημείο εφαρμογής το $1/4$ της χορδής. Επομένως, το συγκεκριμένο σημείο είναι το αεροδυναμικό κέντρο της αεροτομής.

1.4.4 Συνδιαστικά αεροδυναμικά χαρακτηριστικά

Τελικά από τις σχέσεις (2.216) και (2.231) προκύπτει:

$$\frac{d\eta}{dx}(x) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta (2.271)$$

όπου

$$B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\eta}{dx}(\theta) \cos n\theta d\theta \quad (2.272)$$

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\eta}{dx}(\theta) \sin n\theta d\theta$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.218), (2.245) και (2.268) έχουμε για την πίεση της αεροτομής:

$$C_p = 2 \left[\frac{B_0}{2} \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\theta - \alpha \left(\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta \right] \quad (2.273)$$

από την οποία προκύπτουν η άντωση της αεροτομής και η ροπή πρόνευσης (ως προς το χείλος προσβολής)

$$L = \frac{\rho l}{2} [2\pi\alpha - \pi(B_0 - B_1)] \quad (2.274)$$

$$M = \frac{\rho l^2}{4} \left[-\frac{\pi a}{2} + \frac{\pi}{4}(B_0 + B_1) + \frac{\pi}{4}(B_1 + B_2) \right] = -\frac{L}{4} + \frac{\rho l^2}{4} \left[\frac{\pi}{4}(B_1 + B_2) \right] \quad (2.275)$$

Παρατηρούμε ότι το $\frac{1}{4}$ της χορδής είναι πάλι το αεροδυναμικό κέντρο της χορδής.

Κεφάλαιο 2: Η Αριθμητική Μέθοδος

2.1 Μαθηματικό υπόβαθρο

2.1.1 Το θεώρημα διαχωρισμού του Helmholtz

Θεώρημα

Ένα συνεχές διανυσματικό πεδίο $\vec{\alpha}$ μπορεί να αναλυθεί σε ένα άθροισμα ενός όρου δυναμικού και ενός όρου στροβιλότητας

$$\vec{\alpha} = -\vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla} \times \vec{\omega} \quad (2.1)$$

όπου ϕ ονομάζεται το βαθμωτό δυναμικό και $\vec{\omega}$ το βαθμωτό δυναμικό.

Απόδειξη

Έχουμε τη διανυσματική ταυτότητα

$$\nabla^2 \vec{v} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \quad (2.2)$$

Αρχικά ορίζουμε

$$\vec{v}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{\alpha}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (2.3)$$

όπου V είναι όγκος που εκτείνεται στο άπειρο, συνεπώς το διανυσματικό πεδίο $\vec{\alpha} \rightarrow 0$ γρηγορότερα από ότι το κλάσμα $1/r^2 \rightarrow 0$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \nabla^2 v_i &= -\frac{1}{4\pi} \int_V \alpha_i(\vec{r}') \nabla_r^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_V \alpha_i(\vec{r}') (-4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')) dV' \quad (2.4) \\ &= \alpha_i(\vec{r}) \end{aligned}$$

από το οποίο προκύπτει άμεσα το αποτέλεσμα, δηλαδή $\vec{\alpha} = -\vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla} \times \vec{\omega}$, όπου $\phi = -\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ και $\vec{\omega} = -\vec{\nabla} \times \vec{v}$.

Πόρισμα 1

Η απόκλιση και η στροβιλότητα ενός πεδίου ροής ορίζουν κατά μοναδικό τρόπο το πεδίο ροής.

Πόρισμα 2

Στην περίπτωση που το πεδίο ροής είναι αστρόβιλο υπάρχει βαθμωτή συνάρτηση τέτοια ώστε: $\vec{\alpha} = -\vec{\nabla}\phi$.

$$\vec{\nabla} \times \vec{\alpha} = 0 \Rightarrow \exists \phi \text{ τέτοια ώστε } \vec{\alpha} = -\vec{\nabla}\phi \quad (2.5)$$

Πόρισμα 3

Στην περίπτωση που το πεδίο ροής έχει σωληνοειδή μορφή τότε υπάρχει διανυσματική συνάρτηση $\vec{\omega}$ τέτοια ώστε $\vec{\alpha} = \vec{\nabla} \times \vec{\omega}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\alpha} = 0 \Rightarrow \exists \vec{\omega} \text{ τέτοια ώστε } \vec{\alpha} = \vec{\nabla} \times \vec{\omega} \quad (2.6)$$

2.1.2 Το θεώρημα του Kelvin

Θεώρημα

Έστω ένα αστρόβιλο ασυμπίεστο ρευστό σταθερής πυκνότητας το οποίο κινείται υπό την παρουσία μιας συντηρητικής δύναμης $\vec{g} = -\nabla\lambda$ ανά μονάδα μάζας. Και $C(t)$ μια κλειστή καμπύλη η οποία ποτελείται από τα ίδια σωματίδια ρευστού κατά την εξέλιξη του χρόνου, τότε η κυκλοφορία

$$\Gamma = \int_{C(t)} \vec{u} \cdot d\vec{x} \quad (2.7)$$

γύρω από την καμπύλη $C(t)$ είναι ανεξάρτητη του χρόνου.

Απόδειξη

Έχουμε το λήμμα:

$$\frac{d}{dt} \int_{C(t)} \vec{u} \cdot d\vec{x} = \int_{C(t)} D_t \vec{u} \cdot d\vec{x} \quad (2.8)$$

Και χρησιμοποιώντας την εξίσωση του Euler προκύπτει:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = - \int_{C(t)} \nabla \left(\frac{p}{\rho} + \lambda \right) \cdot d\vec{x} = - \left[\frac{p}{\rho} + \lambda \right]_C \quad (2.9)$$

Όπου με $\left[\right]_C$ συμβολίζεται η μεταβολή της ποσότητας ανά χρονικό κύκλο της καμπύλης C , ωστόσο η αλλαγή της ποσότητας $\frac{p}{\rho} + \lambda$ είναι μηδενική, καθώς p , ρ και λ είναι σταθερές συναρτήσεις εξαρτώμενες από τη θέση. Συνεπώς αποδείχθηκε το θεώρημα.

2.1.3 Επαγόμενο δυναμικό και ταχύτητα από συνεχή διανομή πηγών

Θεωρούμε μια διανομή πηγών έντασης $\sigma(x)$ ανά μονάδα μήκους, η οποία διανέμεται κατά μήκος του άξονα x όπως φαίνεται στο σχήμα. Η επαγόμενη ταχύτητα και το επαγόμενο δυναμικό από μια τέτοια διανομή σε κάποιο σημείο $P(x_0, y_0)$ δίνεται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\Phi(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \sigma(x) \ln \sqrt{(x_0 - x)^2 + y_0^2} dx \quad (2.10)$$

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \sigma(x) \frac{x_0 - x}{(x_0 - x)^2 + y_0^2} dx \quad (2.11)$$

$$v(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \sigma(x) \frac{y_0}{(x_0 - x)^2 + y_0^2} dx \quad (2.12)$$

Από τη σχέση (2.12) που δίνει την κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας παρατηρούμε ότι καθώς το σημείο υπολογισμού y_0 πλησιάζει στο μηδέν η ολοκληρωτέα ποσότητα μηδενίζεται εκτός από την περίπτωση όπου $x_0 = x$. Επομένως η τιμή του ολοκληρώματος εξαρτάται μόνο από τη συνεισφορά του σημείου αυτού. Συνεπώς η διανομή $\sigma(x)$ μπορεί να βγει έξω από το ολοκλήρωμα και να αντικατασταθεί με $\sigma(x_0)$. Τέλος είναι φανερό ότι η τιμή της κάθετης δύναμης καθώς πλησιάζουμε τον άξονα των x από θετικά y είναι αντίθετη από αυτήν που προκύπτει αν πλησιάζουμε τον άξονα από τα αρνητικά y . Από τη σχέση (2.12) προκύπτει:

$$v(x_0, 0+) = v^+ = \lim_{y_0 \rightarrow 0^+} \frac{\sigma(x_0)}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{y_0}{(x_0 - x)^2 + y_0^2} dx \quad (2.13)$$

για τον υπολογισμό αυτού του ολοκληρώματος εισάγουμε μια νέα μεταβλητή λ τέτοια ώστε:

$$\lambda = \frac{x_0 - x}{y_0} \quad (2.14)$$

$$d\lambda = -\frac{dx}{y_0} \quad (2.15)$$

Έτσι το μετασχηματιζόμενο ολοκλήρωμα μετατρέπεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
 v(x_0, 0^+) &= \lim_{y_0 \rightarrow 0^+} \frac{\sigma(x_0)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\lambda}{1+\lambda^2} = \frac{\sigma(x_0)}{2\pi} \tan^{-1} \lambda \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \\
 &= \frac{\sigma(x_0)}{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = \frac{\sigma(x_0)}{2\pi}
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Συνεπώς η ταχύτητα $v(x_0, 0^\pm)$ γράφεται:

$$v(x_0, 0^\pm) = \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x_0, 0^\pm) = \pm \frac{\sigma(x_0)}{2} \tag{2.17}$$

Βλέπουμε τελικά ότι μια γραμμή διανομής πηγών αποτελεί γραμμή πηδήματος της κάθετης ταχύτητας και η τιμή αυτού του πηδήματος είναι:

$$v^+ - v^- = \sigma(x) \tag{2.18}$$

2.1.4 Επαγόμενο δυναμικό και ταχύτητα από συνεχή διανομή διπόλων

Θεωρούμε μια συνεχή διανομή διπόλων $\mu(x)$, η οποία έχει κατεύθυνση την κατεύθυνση του άξονα y ($\vec{\mu} = (0, \mu)$). Η επαγόμενη ταχύτητα και το επαγόμενο δυναμικό αυτής της διανομής σε ένα σημείο $P(x_0, y_0)$ δίνεται από τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

$$\Phi(x_0, y_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \mu(x) \frac{y_0}{(x_0 - x)^2 + y_0^2} dx \tag{2.19}$$

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \mu(x) \frac{(x_0 - x)y_0}{[(x_0 - x)^2 + y_0^2]^2} dx \tag{2.20}$$

$$v(x_0, y_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \mu(x) \frac{(x_0 - x)^2 - y_0^2}{[(x_0 - x)^2 + y_0^2]^2} dx \tag{2.21}$$

Πλησιάζοντας τον άξονα των y από θετικές και αρνητικές τιμές παρατηρούμε, λόγω της ομοιότητας των σχέσεων (2.12) και (2.19), ότι μια γραμμή διανομής διπόλων ισοδυναμεί με γραμμή πηδήματος δυναμικού. Από την παραπάνω αναλογία έχουμε ότι:

$$\Phi(x_0, 0^\pm) = \mp \frac{\mu(x_0)}{2} \tag{2.22}$$

Αυτό οδηγεί σε ασυνέχεια της εφαπτομενικής ταχύτητας κατά μήκος του άξονα των x η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$u(x_0, 0^\pm) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x_0, 0^\pm) = \mp \frac{1}{2} \frac{d\mu(x_0)}{dx} \quad (2.23)$$

Δεδομένου ότι η διανομή διπόλων ξεκινά από το σημείο x_1 , η κυκλοφορία $\Gamma(\)$ γύρω από μια καμπύλη που περιβάλλει το τμήμα $x_1 x_0$ είναι ίση με:

$$\Gamma(x_0) = \int_{x_1}^{x_0} u(x, 0^+) dx + \int_{x_1}^{x_0} u(x, 0^-) dx = -\mu(x_0) \quad (2.24)$$

και άρα ίση με το πήδημα του δυναμικού στο σημείο x_0 :

$$\Gamma(x_0) = \Phi(x_0, 0^+) - \Phi(x_0, 0^-) = -\mu(x_0) = \Delta\Phi(x_0) \quad (2.25)$$

2.1.5 Επαγόμενο δυναμικό και ταχύτητα από συνεχή διανομή στροβιλότητας

Όμοια με προηγουμένως η επαγόμενη ταχύτητα και το επαγόμενο δυναμικό σε κάποιο σημείο $P(x_0, y_0)$ από μια συνεχή διανομή στροβιλότητας $\gamma(\)$ περιγράφεται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\Phi(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \gamma(x) \tan^{-1} \frac{y_0}{(x_0 - x)} dx \quad (2.26)$$

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \gamma(x) \frac{y_0}{(x_0 - x)^2 + y_0^2} dx \quad (2.27)$$

$$v(x_0, y_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \gamma(x) \frac{x_0 - x}{(x_0 - x)^2 + y_0^2} dx \quad (2.28)$$

Σε αυτήν την περίπτωση η u συνιστώσα της ταχύτητας είναι ίδια με την v συνιστώσα της ταχύτητας που επάγει μια διανομή πηγών (2.12). Επομένως κατ' αναλογία με την περίπτωση 2.1.3 στην περίπτωση της διανεμημένης στροβιλότητας θα έχουμε ένα πήδημα της εφαπτομενικής συνιστώσας της ταχύτητας κατά μήκος της γραμμής στην οποία έχουμε διανήμει τη στροβιλότητα. Η εφαπτομενική συνιστώσα της ταχύτητας για δύο σημεία που πλησιάζουν τον άξονα των x από θετικά και αρνητικά y αντίστοιχα γράφεται:

$$u(x_0, 0^\pm) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x_0, 0^\pm) = \pm \frac{\gamma(x_0)}{2} \quad (2.29)$$

Το πήδημα αντίστοιχα του δυναμικού σ' ένα σημείο x_0 πάνω στον άξονα των x γράφεται βάσει της (2.29):

$$\Delta\Phi(x_0) = \Phi(x_0, 0^+) - \Phi(x_0, 0^-) = \int_{x_1}^{x_0} \frac{\gamma(x)}{2} dx - \int_{x_1}^{x_0} -\frac{\gamma(x)}{2} dx \quad (2.30)$$

Η κυκλοφορία γύρω από το τμήμα $x_1 x_0$ ως το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της ταχύτητας είναι ίση με το πήδημα του δυναμικού στο σημείο x_0 :

$$\Gamma(x_0) = \Delta\Phi(x_0) \quad (2.31)$$

Τέλος από τη σύγκριση των σχέσεων (2.23) και (2.29) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι μια διανομή στροβιλότητας $\gamma(x)$ είναι ισοδύναμη με μια διανομή διπόλων τέτοια ώστε να ικανοποιείται η παρακάτω διαφορική εξίσωση:

$$\gamma(x) = -\frac{d\mu(x)}{dx} \quad (2.32)$$

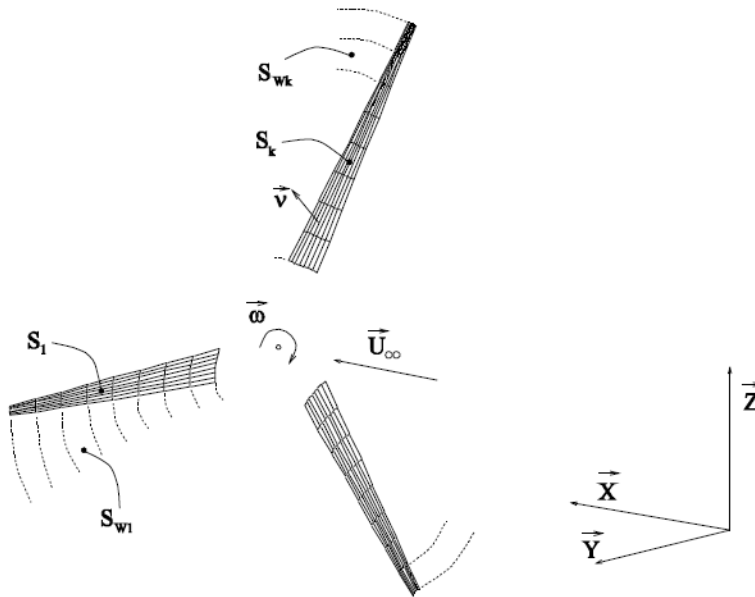
2.2 Επίλυση των εξισώσεων της ροής και υπολογισμός των αεροδυναμικών φορτίων

2.2.1 Οι εξισώσεις της ροής

Θεωρούμε μη μόνιμη ροή, ενός μη συνεκτικού ασυμπίεστου ρευστού ρευστού γύρω από ένα συνδυασμό N_B τρισδιάστατων σωμάτων B_k (πτερύγια) με σύνορα S_k , $k = 1, \dots, N_B$. Καθένα μέρος του συνδυασμού σωμάτων μπορεί να είναι είτε μη-ανωστικό ή ανωστικό, όπου στη δεύτερη περίπτωση απαραίτητα θα παράγει ομόρρου. Προκειμένου να περιγράψουμε τη γεωμετρία της ροής, εισάγεται ένα σταθερό σύστημα αναφοράς. Όλα τα μεγέθη της ροής ορίζονται βάση του συγκεκριμένου συστήματος.

Έστω D το ροϊκό πεδίο, S το σύνορό του και \vec{n} το μοναδιαίο προς τα έξω κάθετο διάνυσμα του συνόρου S . Η παρουσία των ανωστικών σωμάτων B_k στη ροή έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία ομόρρου, το οποίο αποβάλλεται από τις γραμμές αποβολής της ροής, οι οποίες στην περίπτωση ενός σώματος που έχει τη μορφή πτέρυγας θα συμπεριλαμβάνουν το χείλος εκφυγής του. Η επιφάνεια του ομόρρου θεωρείται ένα ενεργό σύνορο του προβλήματος. Επομένως αν S_{Wk} , $k = 1, \dots, N_B$, είναι οι επιφάνειες των ομόρρων που παράγονται από τα N_B σώματα και \vec{n}_{Wk} είναι αντίστοιχα τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα των επιφανειών S_{Wk} , τότε:

$$\partial D \equiv S = \bigcup_{k=1}^{N_B} S_k + \bigcup_{k=1}^{N_B} S_{wk} \quad (2.33).$$



Εικόνα 4 Συμβολισμοί μεγεθών σε στροφέιο

Αν συμβολίσουμε με $\vec{u}(\vec{x}, t)$ το πεδίο ταχύτητας, σύμφωνα με το θεώρημα διαχωρισμού του Helmholtz, έχουμε:

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{U}_\infty(\vec{x}, t) + \nabla \varphi(\vec{x}, t) + \vec{u}_\omega(\vec{x}, t), \quad \vec{x} \in D \quad (2.34)$$

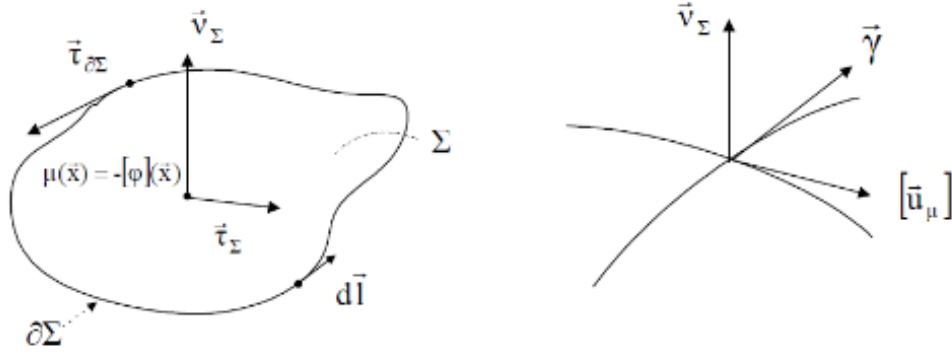
όπου $\vec{U}_\infty(\vec{x}, t)$ είναι το πεδίο ταχύτητας της αδιατάραχτης ροής στο άπειρο, $\varphi(\vec{x}, t)$ είναι το δυναμικό διαταραχής που προκαλείται από την παρουσία στερεών συνόρων και $\vec{u}_\omega(\vec{x}, t)$ είναι επαγόμενη ταχύτητα που εκφράζει τη συνεισφορά του στροβιλού τμήματος της ροής.

Εργαζόμενοι στο πλαίσιο της δυναμικής θεωρίας της ροής το δυναμικό του πεδίου ταχύτητας αναπαρίσταται από επιφανειακές διανομές πηγών και διπόλων. Για σώματα με πάχος χρησιμοποιούμε πηγές, ενώ για σώματα που το πάχος τους θεωρείται αμελητέο χρησιμοποιούμε δίπολα. Προκειμένου ένα σώμα να προκαλεί άνωση, η χρήση διπόλων είναι απαραίτητη τόσο στην επιφάνεια του σώματος όσο και στον ομόρρο του.

Υπενθυμίζεται ότι μια δινομή διπόλων $\mu(\vec{x})$, $\vec{x} \in S$ ορισμένη σε μια επιφάνεια S , δημιουργεί μια ασυνέχεια του δυναμικού του πεδίου:

$$\mu(\vec{x}) = -\varphi^+(\vec{x}) - \varphi^-(\vec{x}), \quad \vec{x} \in S \quad (2.35)$$

όπου $\varphi^+(\vec{x}) = \varphi^+(\vec{x}) - \varphi^-(\vec{x})$, $\vec{x} \in S$ είναι το πήδημα του δυναμικού στην επιφάνεια S .



Εικόνα 5 Ορισμός επιφανειακής κατανομής διπόλων

Το δυναμικό διαταραχής του πεδίου σε ένα σημείο \vec{x}_0 είναι:

$$\varphi_\mu(\vec{x}_0, t) = - \int_S \frac{\mu(\vec{x}, t) \cdot \vec{v}(\vec{x}, t) \cdot (\vec{x}_0 - \vec{x})}{4\pi |\vec{x}_0 - \vec{x}|^3} dS(\vec{x}) \quad (2.36)$$

Παραγωγίζοντας τη σχέση (2.36) προκύπτει το αντίστοιχο πεδίο ταχύτητας $\vec{u}_\mu(\vec{x}, t)$. Και χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Stokes το πεδίο ταχύτητας παίρνει τη μορφή:

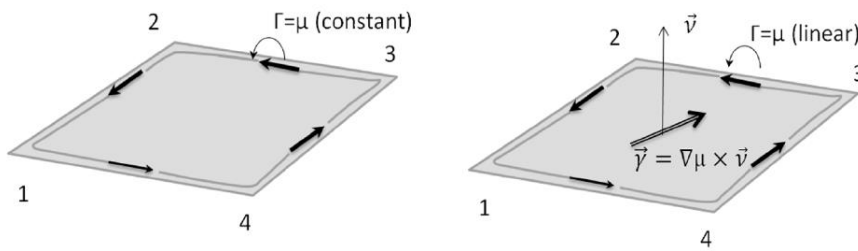
$$\begin{aligned} \vec{u}_\mu(\vec{x}_0, t) &= \nabla \varphi_\mu(\vec{x}_0, t) = \\ &= \int_S \frac{(\mu(\vec{x}, t) \times \vec{v}(\vec{x}, t)) \times (\vec{x}_0 - \vec{x})}{4\pi |\vec{x}_0 - \vec{x}|^3} dS(\vec{x}) + \oint_{\partial S} \mu(\vec{x}, t) \frac{d\vec{l}(\vec{x}, t) \times (\vec{x}_0 - \vec{x})}{4\pi |\vec{x}_0 - \vec{x}|^3} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Όσο το σημείο \vec{x}_0 πλησιάζει την επιφάνεια S η ταχύτητα γίνεται ασυνεχής. Συγκεκριμένα, αν $\llbracket \vec{u}_\mu \rrbracket(\vec{x}_0, t) = \vec{u}_\mu^+(\vec{x}_0, t) - \vec{u}_\mu^-(\vec{x}_0, t)$, $\vec{x}_0 \in S$ είναι το πήδημα της ταχύτητας στην επιφάνεια S , τότε:

$$\llbracket \vec{u}_\mu \rrbracket(\vec{x}_0, t) \cdot \vec{v}(\vec{x}_0, t) = 0, \quad \vec{x}_0 \in S \quad (2.38)$$

$$\vec{v}(\vec{x}_0, t) \times \llbracket \vec{u}_\mu \rrbracket(\vec{x}_0, t) = \nabla_S \mu(\vec{x}_0, t) \times \vec{v}(\vec{x}_0, t) = \vec{\gamma}(\vec{x}_0, t), \quad \vec{x}_0 \in S \quad (2.39)$$

όπου, $\vec{\gamma}(\vec{x}, t)$ είναι η ένταση της επιφανειακής στροβιλότητας και $\nabla_S(\bullet) = (\nabla(\bullet) \cdot \vec{\tau}_S) \vec{\tau}_S$ είναι ο επιφανειακός διαφορικός τελεστής. Από τις σχέσεις (2.37), (2.38) και (2.39) συνεπάγεται ότι μια επιφάνεια, στην οποία έχει οριστεί μια διανομή διπόλων, αντιστοιχεί σε ένα φύλλο στροβιλότητας, δηλαδή σε μια επιφάνεια με ασυνέχεια εφαπτομενικής ταχύτητας. Σημειώνουμε επίσης ότι αναλόγως αν η διανομή διπόλων είναι σταθερή ή μεταβαλλόμενη οι ακόλουθες δύο αναπαραστάσεις στροβιλότητας προκύπτουν.



Εικόνα 6 Επαγόμενη στροβιλότητα

Παρομοίως, για μια επιφανειακή διανομή πηγών σ οι αντίστοιχες εξισώσεις της συνάρτησης δυναμικού και της ταχύτητας είναι:

$$\varphi_{\sigma}(\vec{x}_0, t) = - \int_S \frac{\sigma(\vec{x}, t)}{4\pi |\vec{x}_0 - \vec{x}|} dS(\vec{x}) \quad (2.40)$$

$$\vec{u}_{\sigma} = \int_S \frac{\sigma(\vec{x}, t)(\vec{x}_0 - \vec{x})}{4\pi |\vec{x}_0 - \vec{x}|^3} dS(\vec{x})$$

Ακολουθώντας τους συμβολισμούς των σχέσεων (2.36) και (2.40) το δυναμικό διαταραχής του πεδίου ροής D είναι:

$$\varphi(\vec{x}_0, t) = - \sum_{k=1}^{N_B} \int_{S_k} \frac{\sigma_k(\vec{x}, t)}{4\pi |\vec{x}_0 - \vec{x}|} dS(\vec{x})$$

$$- \sum_{k=1}^{N_B} \left\{ \int_{S_k} \frac{\mu_k(\vec{x}, t) \vec{v}(\vec{x}, t) \cdot (\vec{x}_0 - \vec{x})}{4\pi |\vec{x}_0 - \vec{x}|^3} dS(\vec{x}) + \int_{S_{Wk}} \frac{\mu_{Wk}(\vec{x}, t) \vec{v}_W(\vec{x}, t) \cdot (\vec{x}_0 - \vec{x})}{4\pi |\vec{x}_0 - \vec{x}|^3} dS_W(\vec{x}) \right\} \quad (2.41)$$

όπου, $\sigma_k(\vec{x}, t)$ είναι η κατανομή πηγών του κ-οστού σώματος (1^{ος} όρος)

$\mu_k(\vec{x}, t)$ είναι η κατανομή διπόλων του κ-οστού ανωστικού σώματος (2^{ος} όρος)

$\mu_{Wk}(\vec{x}, t)$ είναι η κατανομή διπόλων του ομόρρου που προκαλείται από το κ-οστό ανωστικό σώμα (3^{ος} όρος)

Λόγω της μη μόνιμης ροής οι άγνωστες διανομές πηγών και διπόλων $\sigma_k(\vec{x}, t)$, $\mu_k(\vec{x}, t)$ και $\mu_{Wk}(\vec{x}, t)$ εξαρτώνται από το χρόνο. Εκτός αυτού επειδή οι ομόρροι S_{Wk} των ανωστικών σωμάτων είναι επιφάνειες ελεύθερα κινούμενων υλικών σωμάτων, η γεωμετρία του προβλήματος επίσης εξαρτάται από το χρόνο. Συνεπώς το πρόβλημα που τίθεται είναι ένα πρόβλημα ελευθέρου και συνεχώς μεταβαλλόμενου συνόρου με άγνωστες τις επιφανειακές διανομές πηγών και διπόλων καθώς επίσης και τη γεωμετρία των ομόρρων S_{Wk} των ανωστικών σωμάτων.

Προκειμένου να προσδιορίσουμε τα άγνωστα πεδία χρησιμοποιούμε δύο ειδών συνθήκες:

1. κινηματικές συνθήκες και πιο συγκεκριμένα τη συνθήκη μη εισχώρησης σε όλες τις στερεές επιφάνειες και τις συνθήκες που περιγράφουν την υλική κίνηση των ομόρρων των ανωστικών σωμάτων
2. δυναμικές συνθήκες, δηλαδή την απαίτηση για μηδενικό πηδύμα της πίεσης στον ομόρρου των ανωστικών σωμάτων.

Έστω $\vec{U}_B(\vec{x}, t)$ η κατανομή της ταχύτητας στο σώμα των στερεών σωμάτων, στην οποία συμπεριλαμβάνεται τόσο το μέρος της ταχύτητας που οφείλεται στο πτερύγιο ως στερεό σώμα, αλλά και το μέρος της ταχύτητας που οφείλεται στο πτερύγιο ως ελαστικό σώμα. Τότε η συνθήκη μη εισχώρησης για κάθε στερεό σώμα γράφεται:

$$\vec{v}(\vec{x}_0, t) \cdot \nabla \varphi(\vec{x}_0, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}(\vec{x}_0, t) = \vec{v}(\vec{x}_0, t) \cdot (\vec{U}_{Bk} - \vec{U}_\infty - \vec{U}_\omega), \vec{x}_0 \in S_k, k = 1, \dots, N_B \quad (2.42)$$

Για τον υπολογισμό της διαταραχής του πεδίου ταχύτητας χρησιμοποιείται η (2.37), η οποία παίρνει μια πιο εύχρηστη μορφή αν χρησιμοποιηθεί μια τμηματικά σταθερή διανομή διπόλων. Στη συγκεκριμένη περίπτωση το πρώτο μέλος στη δεξιά πλευρά της σχέσης (2.42) ισούται με μηδέν. Οι εναπομείναντες όροι είναι η συνεισφορά ενός κλειστού δινοσωλήνα (δινοπετάλου) το οποίο ορίζεται στο σύνορο ∂S της επιφάνειας S .

Έστω ότι η εξίσωση:

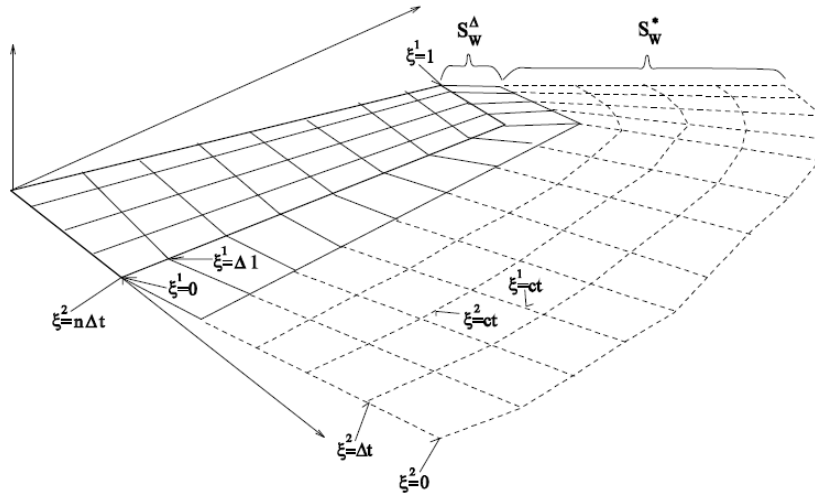
$$\vec{x}_w \in S_w : \vec{x}_w = \vec{x}_w(\xi^1, \xi^2, t), \xi^1 \in [-1, 1], \xi^2 \geq 0 \quad (2.43)$$

είναι μια παραμετρική αναπαράσταση ενός φύλλου στροβιλότητας S_w , που προέρχεται από ένα ανωστικό σώμα κατά μήκος του χείλους εκφυγής του και πιθανότητα των ακροπτερυγίων του (δηλ. τις γραμμές εκφυγής στροβιλότητας). Προφανώς, το φύλλο στροβιλότητας S_w μπορεί να θεωρηθεί σα μια επιφάνεια που σχηματίζεται από μια ακολουθία υλικών γραμμών που εκφεύγουν από τη γραμμή εκφυγής. Προκειμένου να παρακολουθήσουμε την εξέλιξη της αποβαλλόμενης στροβιλότητας, ένα σημείο $\vec{x}_w = \vec{x}_w(\xi^1, \xi^2, t)$ ορίζεται ως η θέση ενός υλικού σημείου τη χρονική στιγμή t που προβλήθηκε τη χρονική στιγμή ξ^2 από το σημείο ξ^1 κατά μήκος της αντίστοιχης γραμμής εκφυγής. Συνεπώς, οι γραμμές $\xi^1 = ct$ σχηματίζονται από τα υλικά στοιχεία που εκφεύγουν από το ίδιο σημείο της γραμμής εκφυγής.

Η εξέλιξη του ομόρρου $S_w(t)$ στο χρόνο καθορίζεται από την ακόλουθη κινηματική εξίσωση:

$$\frac{d\vec{x}_w(\xi, t)}{dt} = \vec{U}_m(\vec{x}_w, t) = \vec{U}_\infty(\vec{x}_w, t) + \nabla \varphi(\vec{x}_w, t) + \vec{U}_\omega(\vec{x}_w, t), \xi = (\xi^1, \xi^2) \quad (2.44)$$

όπου $\vec{U}_m(\vec{x}_w, t)$ είναι το διάνυσμα της μέσης ταχύτητας του φύλλου στροβιλότητας, και η συνθήκη μηδενικού πηδύματος πίεσης στο φύλλο στροβιλότητας.



Εικόνα 7 Ο ομόρρους ενός λεπτού ανωστικού σώματος

Εφαρμόζοντας την εξίσωση Bernoulli και στις δύο πλευρές του κάθε φύλλου στροβιλότητας S_{Wk} , και λαμβάνοντας υπόψιν ότι $p(\vec{x}_W, t) = 0$, έχουμε ότι:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{U}_m(\vec{x}_W, t) \cdot \left[\vec{u}_\mu \right](\vec{x}_W, t) = 0 \quad (2.45)$$

όπου $\left[\vec{u}_\mu \right](\vec{x}_W, t)$ είναι το πηδύμα της ταχύτητας στην επιφάνεια του ομόρρου.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.35) και (2.38) και (2.39) έχουμε ότι:

$$\mu_W(\xi, t) = -\varphi(\xi, t) \quad \text{και} \quad \left[\vec{u}_\mu \right](\xi, t) = \nabla_{S_W} \mu_W(\xi, t) \quad (2.46)$$

Επομένως αν,

$$\frac{d_m(\cdot)}{dt} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + (\vec{U}_m \cdot \nabla_{S_W})(\cdot) \quad (2.47)$$

είναι η επιφανειακή υλική παράγωγος, τότε μέσω της (2.45) συνεπάγεται η ακόλουθη συνθήκη:

$$\frac{d_m \mu_W}{dt} = 0 \quad (2.48)$$

Από τη συνθήκη (2.48) προκύπτει ότι η κατανομή διπόλων, η οποία ορίζει ένα φύλλο στροβιλότητας διατηρείται υλικά και ότι η συγκεκριμένη συνθήκη είναι ισοδύναμη με το θεώρημα του Kelvin. Όσον αφορά την περίπτωση ενός φύλλου στροβιλότητας $S_W(t)$ που εκφεύγει από ένα ανωστικό σώμα η συνθήκη (2.48) μπορεί να χρησιμοποιηθεί με δύο τρόπους.

Αρχικά σύμφωνα με τη χρονική εξέλιξη του φύλλου στροβιλότητας που ορίζεται από τη σχέση (2.43) έχουμε ότι:

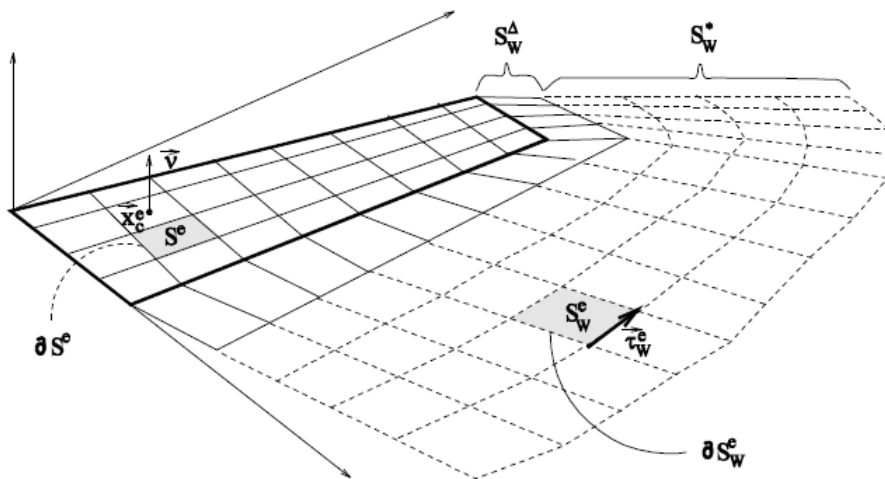
$$\mu_W(\vec{x}_W(\xi^1, \xi^2, t), t) = \mu_W(\vec{x}_W(\xi^1, \xi^2, \xi^2), \xi^2) \quad (2.49)$$

Η εξίσωση (2.49) δείχνει ουσιαστικά ότι η ένταση της διανομής διπόλων η οποία μεταφέρεται από το υλικό στοιχείο ξ ισούται με την τιμή που είχε το συγκεκριμένο υλικό στοιχείο τη στιγμή που αποβλήθηκε από τη γραμμή εκφυγής του σώματος. Επιπλέον η συνθήκη (2.49) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υπολογισθεί η ένταση της στροβιλότητας η οποία αποβάλλεται από τη γραμμή αποβολής στροβιλότητας κάθε στιγμή. Στην περίπτωση μιας προσέγγισης με τμηματικά σταθερή διανομή διπόλων με βάση συνθήκη (2.49) προκύπτουν σε ίσες τιμές $\mu_w(\xi, t)$ και $\mu_{wk}(\xi, t)$ δύο σημείων στο σώμα και στον ομόρρου αντίστοιχα, γειτονικά ως προς τη γραμμή εκφυγής.

Θεωρητικά αποτελέσματα, καθώς και πειραματικά και αριθμητικά στοιχεία υποδεικνύουν ότι κατά τη χρονική εξέλιξη, το ελεύθερο φύλλο στροβιλότητας χάνει τη λειότητά του εξαιτίας της ιδιόζουσας μορφής των ολοκληρωμάτων που συμμετέχουν στον υπολογισμό της κλίσης του δυναμικού διαταραχής $\nabla\varphi(\vec{x}_w, t)$. Προκειμένου να ξεπεραστεί η συγκεκριμένη δυσκολία εισάγεται μια γενικευμένη στροβιλότητα. Βάσει της σχέσης (2.38) και (2.39) το γενικευμένο πεδίο στροβιλότητας που συνδέεται με ένα φύλλο στροβιλότητας ορίζεται ως:

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_{S_w}(\vec{x}, t) &= \nabla \times \vec{u}_\mu(\vec{x}, t) = \\ &= \underbrace{\delta_{S_w}(\vec{x} - \vec{x}_{S_w}) \left[\nabla \mu_w(\vec{x}_{S_w}, t) \times \vec{v}(\vec{x}_{S_w}, t) \right]}_{\text{surface term}} + \underbrace{\delta_{\partial S_w}(\vec{x} - \vec{x}_{\partial S_w}) \vec{\tau}(\vec{x}_{\partial S_w}, t) \mu_w(\vec{x}_{\partial S_w}, t)}_{\text{line term}} \end{aligned} \quad (2.50)$$

οπού $\delta_{S_w}(\cdot)$ και $\delta_{\partial S_w}(\cdot)$ συμβολίζουν συνάρτηση Dirac στην εσωτερική επιφάνεια και στη γραμμή του συνόρου αντίστοιχα του φύλλου στροβιλότητας $S_w(t)$ και $\vec{\tau}(\cdot, t)$ είναι το μοναδιαίο εφαπτομενικό διάνυσμα στο σύνορο $\partial S_w(t)$. Τελικά το γενικευμένο πεδίο στροβιλότητας επιτρέπει την εφαρμογή του ομόρρου με στοιχεία στροβιλότητας.



Εικόνα 8 Το πλέγμα των σωμάτων και του ομόρρου

2.2.2 Η παραγωγή και η εξέλιξη του κοντινού και του μακρινού ομόρρου

Έστω ότι τόσο στην πτέρυγα S όσο και στον ομόρρου της S_w , ορίζεται πλέγμα το οποίο διαιρεί τη μεν πτέρυγα σε τμήματα S^e , $e = 1, E$ τον δε ομόρρου σε S_w^e , $e = 1, E_w$ (όπου E και E_w το πλήθος των τμημάτων στην πτέρυγα και στον ομόρρου της) με σύνορα ∂S^e και ∂S_w^e αντίστοιχα. Πάνω σε κάθε τμήμα της πτέρυγας και του ομόρρου της θεωρούμε τμηματικά σταθερή διανομή διπόλων με εντάσεις $\mu^e(t)$ και $\mu_w^e(t)$ αντίστοιχα. Κατ' αυτόν τον τρόπο η επαγόμενη ταχύτητα υπολογίζεται ως άθροισμα συνεισφορών από τα δινοπέταλα που ορίζονται σε κάθε ένα από τα τμήματα του πλέγματος. Συνεπώς η συνθήκη μη εισχώρησης γράφεται στη μορφή:

$$\begin{aligned} \vec{v}(\vec{x}_0, t) \cdot \sum_{e=1}^E \mu^e(t) \oint_{\partial S^e} \frac{d\vec{l}(\vec{x}) \times (\vec{x}_0 - \vec{x})}{4\pi |\vec{x}_0 - \vec{x}|^3} = -\vec{v}(\vec{x}_0, t) \cdot \sum_{e=1}^{E_w} \mu_w^e(t) \oint_{\partial S_w^e} \frac{d\vec{l}(\vec{x}) \times (\vec{x}_0 - \vec{x})}{4\pi |\vec{x}_0 - \vec{x}|^3} \\ + \vec{v}(\vec{x}_0, t) \cdot (\vec{U}_B(\vec{x}_0, t) - \vec{U}_\infty(\vec{x}_0, t) - \vec{U}_w(\vec{x}_0, t)) \end{aligned} \quad (2.51)$$

Η συγκεκριμένη συνθήκη δίνει τις διακριτές εξισώσεις για τον υπολογισμό των αγνώστων εντάσεων των διπόλων $\mu^e(t)$, $e = 1, E$. Αυτές προκύπτουν από την εφαρμογή της στο κέντρο $\vec{x}_c = \vec{x}_0$ του κάθε τμήματος S .

Για τις εντάσεις των διπόλων του ομόρρου $\mu_w^e(t)$ όπως ήδη αναφέραμε ισχύει η (2.48), δηλαδή το κάθε επιφανειακό στοιχείο διατηρεί την ένταση που είχε όταν αποβαλλόταν από τη γραμμή εκφυγής. Συνεπώς οι πραγματικά άγνωστες τιμές περιορίζονται στις εντάσεις $\mu_w^e(t)$ των στοιχείων των διπόλων που μεταφέρονται από τα τμήματα που μόλις αποβλήθηκαν στον ομόρρου και επομένως διανύονται κατά μήκος της γραμμής εκφυγής. Να σημειωθεί ότι για κάθε εγκάρσια τομή της πτέρυγας (δηλαδή για κάθε τομή κατά τη χορδή), η κυκλοφορία ισούται με την τομή του μ στο τελευταίο στοιχείο (δηλαδή σε αυτό που εφάπτεται με την ακμή εκφυγής). Κατ' αυτόν τον τρόπο συμπληρώνεται το σύστημα των εξισώσεων για τις άγνωστες εντάσεις $\mu^e(t)$ και $\mu_w^e(t)$.

Η αριθμητική επίλυση του προβλήματος γίνεται με βηματική ολοκλήρωση στο πεδίο του χρόνου με χρονικό βήμα Δt . Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε χρονικό βήμα αποβάλλεται καθ' όλο το μήκος της γραμμής αποβολής στροβιλότητα με σειρά επιφανειακών στοιχείων που αποτελεί το νέο τμήμα ομόρρου. Επειδή αυτή η λωρίδα στοιχείων του ομόρρου είναι σε επαφή με την πτέρυγα ονομάζουμε το τμήμα αυτό του ομόρρου «κοντινό», ενώ το υπόλοιπο «μακρινό». Να επαναλάβουμε ότι το «μακρινό» τμήμα είναι γνωστό από τα προηγούμενα χρονικά βήματα.

Συμβολίζουμε με S_w^Δ και S_w^* , το κοντινό και το μακρινό τμήμα του ομόρρου αντίστοιχα, του φύλλου στροβιλότητας της πτέρυγας. κολούθως το δυναμικό που συνολικά επάγεται από τον ομόρρου διαχωρίζεται σε δύο όρους: το δυναμικό $\varphi_w^\Delta(\vec{x}, t)$ που επάγεται από τον

«κοντινό» ομόρρου και το δυναμικό $\varphi_w^*(\vec{x}, t)$ που επάγεται από το «μακρινό» ομόρρου. Έτσι το συνολικό δυναμικό διαταραχής γράφεται:

$$\varphi_\mu(\vec{x}_0, t) = -\int_s \frac{\vec{\mu}(\vec{x}, t) \cdot \vec{v}(\vec{x}, t) \cdot (\vec{x}_0 - \vec{x})}{4\pi |\vec{x}_0 - \vec{x}|^3} dS(\vec{x}) - \int_{s_w(t)} \frac{\vec{\mu}_w(\vec{x}, t) \cdot \vec{v}_w(\vec{x}, t) \cdot (\vec{x}_0 - \vec{x})}{4\pi |\vec{x}_0 - \vec{x}|^3} dS_w(\vec{x}) \quad (2.52)$$

$$\varphi(\vec{x}, t) = \varphi_s(\vec{x}, t) + \varphi_w^\Delta(\vec{x}, t) + \varphi_w^*(\vec{x}, t) \quad (2.53)$$

όπου $\varphi_s(\vec{x}, t)$ το δυναμικό που επάγεται από την πτέρυγα.

Ο διαχωρισμός του ομόρρου σε άγνωστο και γνωστό τμήμα ή ακόμα σε νέο και παλιό επιτρέπει να χρησιμοποιούμε διαφορετικού είδους προσεγγίσεις. Συγκεκριμένα για το μεν κοντινό τμήμα διατηρούμε την προσέγγισή του ως ως φύλλο στροβιλότητας ενώ για το μακρινό εισάγουμε μια προσέγγιση με στοιχείο στροβιλότητας.

Με δεδομένο ότι χρησιμοποιούμε τμηματικά σταθερή στροβιλότητα, έχουμε δύο επιλογές; ή να χρησιμοποιήσουμε γραμμικά στοιχεία, δηλαδή ευθύγραμμα τμήματα στροβιλότητας, ή σημειακά, δηλαδή σημειακές δίνες. Στην πρώτη περίπτωση θα έχουμε ένα στοιχείο για κάθε πλευρά του πλέγματος στον ομόρρου ενώ στη δεύτερη ένα στοιχείο ανά πλακίδιο. Για λόγους οικονομίας υπολογισμών προτιμάμε τη δεύτερη επιλογή.

Αφετηρία αποτελεί ο νόμος των *Biot-Savart* που εκφράζει την επαγόμενη ταχύτητα από μια διανομή στροβιλότητας:

$$\vec{U}_\omega(\vec{x}_0, t) = \int_{D_\omega(\vec{x}, t)} \frac{\vec{\omega}(\vec{x}, t) \times (\vec{x}_0 - \vec{x})}{4\pi |\vec{x}_0 - \vec{x}|^3} dD(\vec{x}) \quad (2.54)$$

όπου $D_\omega(\vec{x}_0, t)$ είναι το χωρίο στο οποίο διανέμεται η ελεύθερη στροβιλότητα $\vec{\omega}(\vec{x}, t)$. Εφόσον η στροβιλότητα προσεγγίζεται ως σύνολο σημειακών δινών, τότε:

$$\vec{\omega}(\vec{x}, t) \approx \sum_{j \in J(t)} \vec{\Omega}_j(t) \cdot \delta(\vec{x} - \vec{Z}_j(t)) \quad (2.55)$$

όπου $\vec{\Omega}_j(t)$ και $\vec{Z}_j(t)$ συμβολίζουν τις εντάσεις και τις θέσεις των στοιχείων στροβιλότητας, ενώ $J(t)$ είναι ένα σύνολο δεικτών που υποδηλώνει το πλήθος των στοιχείων στροβιλότητας. Στην εξίσωση (2.55) με $\delta(\)$ συμβολίζεται η συνάρτηση *Dirac* που σα βασική ιδιότητα έχει ότι:

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(\vec{x}) \delta(\vec{x}_0 - \vec{x}) dD = f(\vec{x}_0) \quad (2.56)$$

όπου αντικαθιστώντας την εξίσωση (2.55) στην (2.54) το ολοκλήρωμα μετατρέπεται σε άθροισμα:

$$\vec{U}_\omega(\vec{x}, t) = \sum_{j \in J(t)} \frac{\vec{\Omega}_j(t) \times (\vec{x} - \vec{Z}_j(t))}{4\pi |\vec{x} - \vec{Z}_j(t)|^3} \quad (2.57)$$

Παρατηρούμε ότι το πεδίο ταχύτητας που προκύπτει δεν είναι ομαλό αφού στην περιοχή της κάθε δίνης η ταχύτητα αυξάνει εκθετικά, και γι' αυτό αντί της σχέσης (2.55) που κάθε άλλο παρά ομαλή είναι, εισάγουμε μια προσέγγιση καλύτερης ποιότητας ώστε το τελικό πεδίο ταχύτητας να μην παρουσιάζει απειρισμούς. Αυτό ισοδυναμεί με την αντικατάσταση της συνάρτησης *Dirac* με μια ομαλή προσέγγισή της ζ_ε που με όρους φυσικούς παίζει τον πόλο χωρικής κατανομής της στροβιλότητας σε μια μικρή περιοχή γύρω από την κάθε δίνη χωριστά. Τα εύρος της διανομής καθορίζει η παράμετρος ε . Υπάρχουν πολλές εναλλακτικές δυνατότητες. Μια από ευτές που χρησιμοποιείται συχνά είναι η εκθετική:

$$\zeta_\varepsilon(\vec{r}_j) = \frac{1}{\varepsilon^3} \exp\left(-\left(\frac{|\vec{r}_j|}{\varepsilon}\right)^3\right), \quad \vec{r}_j = \vec{x} - \vec{Z}_j(t) \quad (2.58)$$

Οπότε για τη στροβιλότητα του ομόρρου έχουμε:

$$\vec{\omega}_w(\vec{x}, t) = \sum_{j \in J(t)} \vec{\Omega}_j(t) \cdot \zeta_\varepsilon(\vec{x} - \vec{Z}_j(t)) \quad (2.59)$$

που καταλήγει στο ακόλουθο πεδίο ταχύτητας:

$$\vec{U}_w(\vec{x}, t) = \sum_{j \in J(t)} \frac{\vec{\Omega}_j(t) \times (\vec{x} - \vec{Z}_j(t))}{4\pi |\vec{x} - \vec{Z}_j(t)|^3} \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{|\vec{x} - \vec{Z}_j(t)|^3}{\varepsilon^3}\right)\right) \quad (2.60)$$

Απομένει να διευκρινίσουμε πως ορίζονται τα $\vec{\Omega}_j(t)$ και $\vec{Z}_j(t)$. Για μεν την ένταση έχουμε τη σχέση (2.50), που στη περίπτωση τμηματικά σταθερής διανομής διπόλων καταλήγει στη σχέση:

$$\vec{\omega}_w(\vec{x}, t) = \nabla \times \vec{U}_w(\vec{x}, t) = \sum_{e=1}^{E_w} \delta_{\partial \mathcal{D}_w^e}(\vec{x} - \vec{x}_w) \cdot \vec{\mu}_w^e(t) \cdot \vec{z}_w^e(\vec{x}_w, t) \quad (2.61)$$

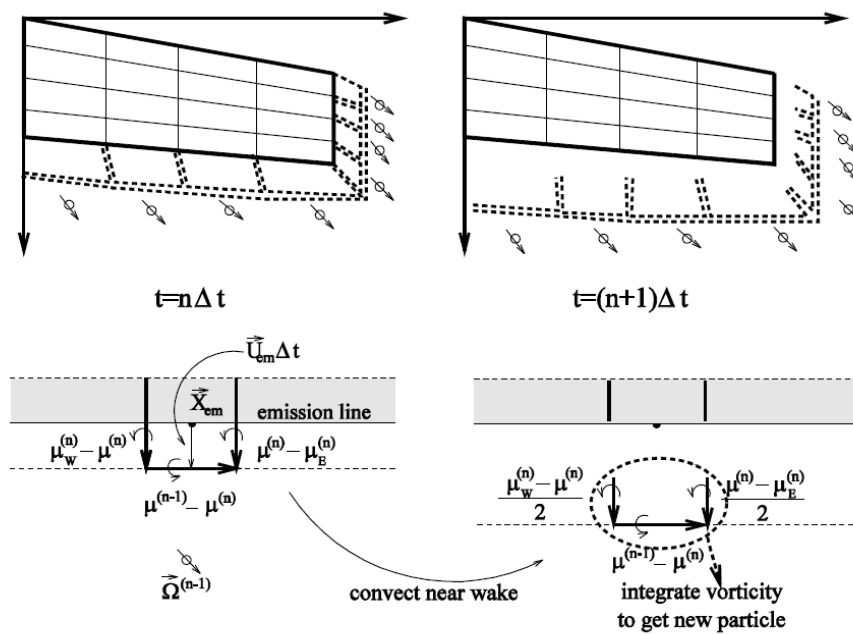
Χρειάζεται στο σημείο αυτό να προσέξουμε ότι υπάρχει διαφορά μεταξύ του $\vec{\Omega}(t)$ στη σχέση (2.59) και της στροβιλότητας $\vec{\omega}_w$ στη σχέση (2.61). Για γραμμικά στοιχεία θα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε με το μήκος του τμήματος. Τώρα όσον αφορά τη θέση, αυτή επιλέγεται να είναι το μέσον του τμήματος.

Βέβαια όπως έχει προαναφερθεί από κάθε πλακίδιο του ομόρρου θέλουμε να αντιστοιχίσουμε ένα μόνο στοιχείο στροβιλότητας. Αυτό ισοδυναμεί με το να αθροίσουμε τη γραμμική στροβιλότητα που διανέμεται στο περίγραμμα κάθε πλακιδίου. Η άθροιση αυτή υπόκειται στις φυσικές συνθήκες που εξασφαλίζουν την ισοδυναμία της αρχικής (πρίν την άθροιση) με την τελική κατάσταση. Πρόκειται για τις αναλλοίωτες της ροής και που ως προς τη στροβιλότητα αντιστοιχούν στις χωρικές ροπές κατανομής. Με αυτό σα βάση προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned}\bar{\Omega} &= \sum_i \bar{\Omega}_i \\ \bar{\Omega} \times \bar{Z} &= \sum_i \bar{\Omega}_i \times \bar{Z}_i \quad (2.62) \\ (\bar{\Omega} \times \bar{Z}) \times \bar{Z} &= \sum_i (\bar{\Omega}_i \times \bar{Z}_i) \times \bar{Z}_i\end{aligned}$$

όπου $\bar{\Omega}_i, \bar{Z}_i, i=1, \dots$ είναι τα αθροιζόμενα στοιχεία και $\bar{\Omega}, \bar{Z}$ το τελικό αποτέλεσμα.

Άθροιση αυτού του τύπου χρειαζόμαστε όταν στο τέλος κάθε χρονικού βήματος μετατρέπουμε τον κοντινό ομόρρου σε μακρινό. τη σχετική διαδικασία δίνει σχηματικά το παρακάτω σχήμα όπου για ένα πλακίδιο του κοντινού ομόρρου ορίζονται οι εντάσεις της στροβιλότητας στο περίγραμμα. Για να είναι η διαδικασία συνεπής προσέξτε ότι τα πλευρικά τμήματα στροβιλότητας μοιράζονται εξ'ίσου οπότε για κάθε πλακίδιο αθροίζουμε το μισό.



Εικόνα 9 Εξέλιξη του κοντινού και μακρινού ομόρρου

Έχοντας ταθίσει τον ομόρρου με τα στοιχεία στροβιλότητας που περιέχει η χρονική του εξέλιξη θα καθορίζεται πλήρως από την εξέλιξη των $\bar{\Omega}_i$ και \bar{Z}_i . Οι εξισώσεις που περιγράφουν την εξέλιξη αυτή είναι οι υλικές εξισώσεις για τις τροχιέςστοιχείων του ρευστού και για τη στροβιλότητα:

$$\frac{D\bar{Z}_i(t)}{Dt} = \vec{u}(\bar{Z}_i, t), j \in J(t) \quad (2.63)$$

$$\frac{D\bar{\Omega}_i(t)}{Dt} = (\bar{\Omega}_i(t) \cdot \nabla) \cdot \vec{u}(\bar{Z}_i, t), j \in J(t) \quad (2.64)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις αφορούν μόνο το μακρινό τμήμα του ομόρρου. Για το κοντινό τμήμα το οποίο έχουμε υποθέσει ότι αποτελεί φύλλο στροβιλότηταςακολουθούμε

διαφορετική προσέγγιση. Αν \vec{U}_{em} είναι η μέση ταχύτητα κατά μήκος της ακμής εκφυγής \vec{X}_{em} , τότε η γεωμετρία του κοντινού ομόρρου S_w^Δ καθορίζεται από την ακόλουθη κινηματική συνθήκη:

$$\vec{X}^\Delta = \vec{X}_{em} + \Delta t \cdot \vec{U}_{em}$$

όπου $\vec{X}^\Delta - \vec{X}_{em}$ εκφράζει το εύρος του S_w^Δ σε διανυσματική μορφή.

2.2.3 Υπολογισμός των αεροδυναμικών φορτίων σε λεπτά σώματα

Για τον υπολογισμό των μη μόνιμων αεροδυναμικών φορτίων στην πτέρυγα υπάρχουν δύο εναλλακτικές δυνατότητες. Στην πρώτη τα φορτία υπολογίζονται με απ' ευθείας χρήση της εξίσωσης *Bernoulli*. Εφαρμόζοντας την εξίσωση *Bernoulli* μεταξύ της πάνω και της κάτω πλευράς της πτέρυγας στο σημείο $\vec{x} \in S$ παίρνουμε για το πήδημα της πίεσης κατά μήκος της επιφάνειας του περυγίου:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\vec{x}, t) + \vec{U}_m(\vec{x}, t) \cdot \llbracket \vec{u} \rrbracket(\vec{x}, t) = -\frac{p}{\rho} \quad (2.65)$$

όπου $\varphi = \mu$ η διανομή διπόλων πάνω στην πτέρυγα, $\vec{U}_m(\vec{x}, t)$ η μέση ταχύτητα μεταξύ πάνω και κάτω πλευράς, $\llbracket \vec{u} \rrbracket(\vec{x}, t) = \nabla \varphi(\vec{x}, t)$ η τοπική ασυνέχεια της ταχύτητας και p το πήδημα της πίεσης. Για τον υπολογισμό του $\llbracket \vec{u} \rrbracket(\vec{x}, t) = -\nabla \mu(\vec{x}, t)$ χρησιμοποιείται ένα μηδενικής τάξης σχήμα διαφορών, που είναι και το μόνο αφού η κατανομή μ είναι τμηματικά σταθερή.

Στο διακριτό πρόβλημα η (2.65) λαμβάνεται σε κάθε σημείο ελέγχου (δηλαδή στο κέντρο κάθε πλακιδίου της πτέρυγας). Αν υποθέσουμε ότι $p^e, e=1, E$ είναι το υπολογιζόμενο πήδημα της πίεσης σε κάθε σημείο ελέγχου του k σώματος, η δύναμη πάνω σε κάθε τμήμα ℓ είναι:

$$\vec{F}^e(t) = \vec{v}^e \cdot p^e \cdot S^e \quad (2.66)$$

Η διανομή της δύναμης και το εκπέτασμα της πτέρυγας προκύπτει από την ολοκλήρωση των δυνάμεων σε κάθε λωρίδα (αντίστοιχη της αεροτομής) της πτέρυγας και δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{strip}(t) &= \sum_e \vec{v}^e \cdot p^e \cdot S^e \\ F_{n, strip} &= \left(\sum_e \vec{v}^e \cdot p^e \cdot S^e \right) \cdot \vec{e}_n \quad (2.67) \\ F_{t, strip} &= \left(\sum_e \vec{v}^e \cdot p^e \cdot S^e \right) \cdot \vec{e}_t \end{aligned}$$

όπου \vec{e}_n, \vec{e}_t , είναι το μανδαίο κάθετο και παράλληλο στο επίπεδο του δρομέα διάνυσμα αντίστοιχα. Όπου στις δύο τελευταίες εξισώσεις της σχέσης (2.67) η άθροιση γίνεται πάνω στο πλήθος των εξισώσεων που απαρτίζουν τη λωρίδα.

Αντίστοιχα η ροπή στρέψης του κάθε στοιχείου της πτέρυγας δίνει από τη σχέση

$$M_{strip} = \left(\sum_e \left(\vec{r}_0^e \times \vec{v} \right) \cdot \vec{p}^e \cdot S^e \right) \cdot \vec{e}_p \quad (2.68)$$

στην οποία \vec{r}_0^e το διάνυσμα θέσης του εκάστοτε σημείου ελέγχου ως προς το διαμήκη άξονα της πτέρυγας, γύρω από τον οποίο υπολογίζεται η ροπή στρέψης και \vec{e}_p το μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος αυτού του άξονα.

Λόγω του ιδιόμορφου χαρακτήρα της ροής (απειρισμός της ταχύτητας) στη ακμή πρόσπτωσης της πτέρυγας, μια επιπλέον δύναμη «αναρρόφησης» (suction force) προστίθεται στη δύναμη που υπολογίζεται μέση της (2.67). Η συγκεκριμένη δύναμη υπολογίζεται μέσω του θεωρήματος του Joukowski:

$$\delta \vec{F}_{suction} = \rho \vec{V}_{LE} \times \vec{\Gamma}_{LE} \cdot b_{strip} \quad (2.69)$$

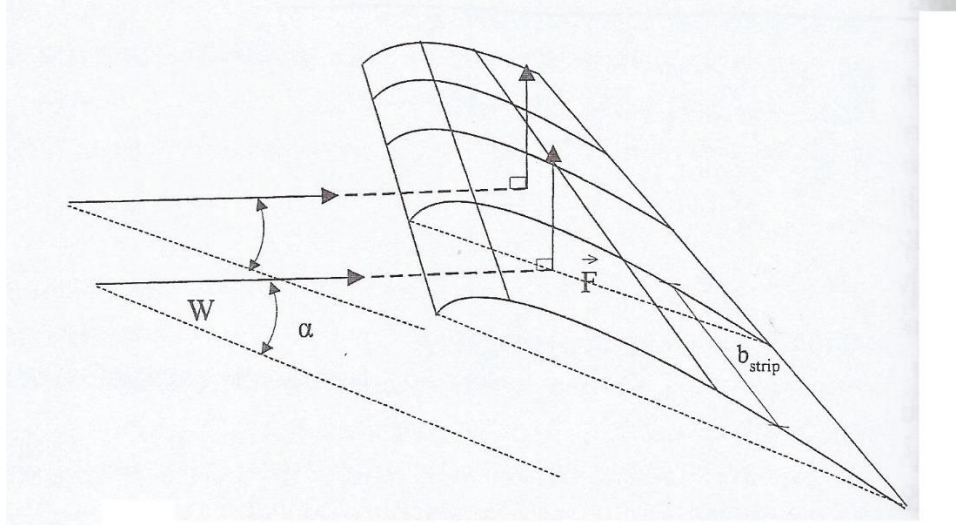
και αναπαριστά την επαγόμενη αντίσταση του πτερυγίου. Στην κάτι (2.69) η \vec{V}_{LE} συμβολίζει το διάνυσμα της ταχύτητας υπολογισμένο κατά μήκος της ακμής πρόσπτωσης του πτερυγίου και $\vec{\Gamma}_{LE}$ το διάνυσμα του στροβίλου που διέρχεται από την ακμή πρόσπτωσης, ενώ b_{strip} είναι το εύρος της κάθε λωρίδας.

Τα φορτία που υπολογίζονται μέσω των παραπάνω σχέσεων δεν περιλαμβάνουν τις επιδράσεις λόγω συνεκτικότητας, όπως και την επίδραση της αποκόλλησης της ροής που γίνεται όλο και ισχυρότερη καθώς οι γωνίες πρόσπτωσης αυξάνουν. Μια εναλλακτική λύση υπολογισμού των φορτίων, ώστε να λαμβάνουν υπόψιν σε αυτά τέτοιου είδους επιδράσεις στηρίζεται στη χρήση ενός εμπειρικού μοντέλου όπως είναι του ONERA. Το σχήμα αυτό βασίζεται στον προσδιορισμό της φαινόμενης γωνίας πρόσπτωσης και ταχύτητας σε κάθε λωρίδα της πτέρυγας οπότε οπότε στη συνέχεια προσδιορίζονται τελικά οι δυνάμεις. Αρχικά υπολογίζουμε το διάνυσμα της συνολικής «μη συνεκτικής» δύναμης με χρήση των σχέσεων (2.67) και (2.69). Στη συνέχεια βάσει του θεωρήματος Joukowski, καθορίζεται η κατεύθυνση του διανύσματος της φαινόμενης ταχύτητας σε κάθε «λωρίδα» ως η κάθετη στο διάνυσμα της δύναμης. Με αυτόν τον τρόπο υπολογίζεται η γωνία πρόσπτωσης της επερχόμενης ροής σε κάθε «λωρίδα» και μέσω αυτής από μετρημένες πολικές για τα C_L, C_D, C_M υπολογίζονται οι δυνάμεις, και η ροπή στρέψης από τις σχέσεις:

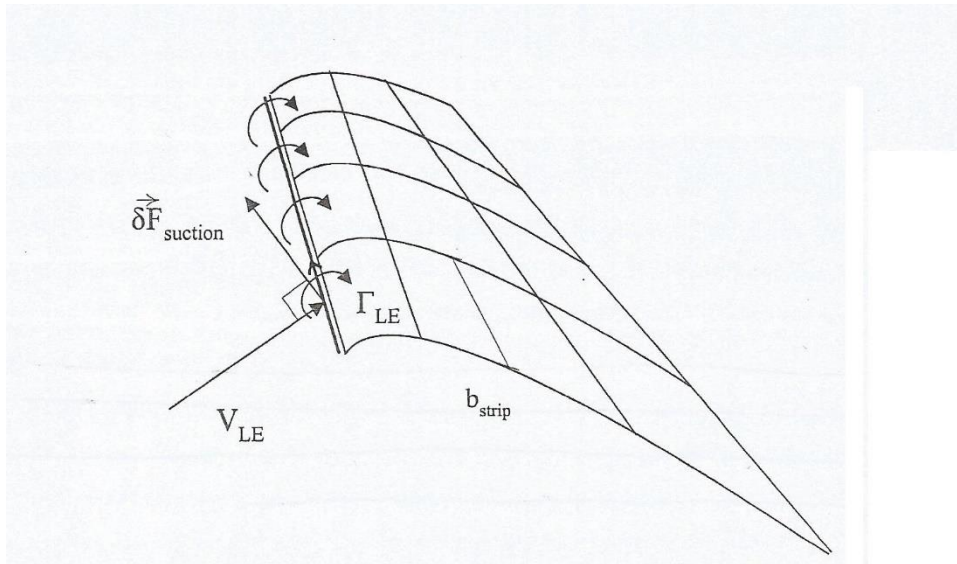
$$\begin{aligned} F_{n\ strip} &= \frac{\rho}{2} C_n(\alpha) \cdot W^2 \cdot c \cdot b_{strip} = \frac{\rho}{2} (C_l(\alpha) \cdot \cos \varphi + C_d(\alpha) \cdot \sin \varphi) \cdot W^2 \cdot c \cdot b_{strip} \\ F_{t\ strip} &= \frac{\rho}{2} C_t(\alpha) \cdot W^2 \cdot c \cdot b_{strip} = \frac{\rho}{2} (C_l(\alpha) \cdot \sin \varphi - C_d(\alpha) \cdot \cos \varphi) \cdot W^2 \cdot c \cdot b_{strip} \quad (2.70) \\ M_{strip} &= \frac{\rho}{2} C_m(\alpha) \cdot W^2 \cdot c^2 \cdot b_{strip} \end{aligned}$$

Σημειώνεται ότι στις εξισώσεις (2.70) εκτός από την κατεύθυνση της φαινόμενης ταχύτητας απαραίτητη είναι και η γνώση του μέτρου της W . Αυτό είναι δυνατό να προσδιοριστεί με διάφορους τρόπους. Στην πράξη η καλύτερη δυνατή συμφωνία με πειραματικά δεδομένα επιτυγχάνεται όταν η W (ως μέτρο μόνο) λαμβάνεται ως η μέση τιμή των μέσων

ταχυτήτων \vec{U}_m κατά μήκος της εκάστοτε «λωρίδας».



Εικόνα 10 Η δύναμη αναρρόφησης



Εικόνα 11 Η γωνία πρόσπτωσης

2.2.4 Πτέρυγα με πάχος

Στην περίπτωση της αεροτομής θεωρούμε ρευστό ασυμπίστο και μη συνεκτικό και τη ροή αστρόβιλη σχεδόν παντού. Στην περίπτωση της αεροτομής το «σχεδόν παντού». σημαίνει παντού εκτός από μία ή δύο γραμμές ασυνέχειας της ταχύτητας, που ταυτίστηκαν με τον ομόροου. Στην περίπτωση της λεπτής πτέρυγας η ασυνέχεια της ταχύτητας εντοπίστηκε σε μία ή δύο επιφάνειες. Συνεπώς και στην περίπτωση της πτέρυγας με πάχος το «σχεδόν παντού» σημαίνει παντού εκτός από μία ή δύο επιφάνειες ασυνέχειας της ταχύτητας.

Το φύλλο στροβιλότητας (ομόρρους) ενός ανωστικού σώματος, αναπαρίσταται υλικά, σύμφωνα με τη *Langrangian* διατύπωση, είτε ως επιφανειακή διανομή στροβιλότητας σε πλέγμα δισοσωλήνων είτε ως χωρική διανομή στροβιλότητας συγκεντρωμένη σημειακά σε στοιχεία στροβιλότητας.

Με την υλική αναπαράσταση της ροής δίνεται η δυνατότητα της λεπτομερούς προσέγγισης των φαινομένων συναγωγής στον ομόροου. Φαινόμενα όπως η έντονη παραμόρφωση και η αναδίπλωση του φύλλου στροβιλότητας σε περιοχές όπως είναι για παράδειγμα το

ακροπτερύγιο, μπορούν να αναπαραχθούν από τη συγκέντρωση πολλών στοιχείων στροβιλότητας σε περιορισμένο χώρο. Σε αντίθετη περίπτωση, όπου η επίλυση των εξισώσεων του φύλλου στροβιλότητας (εξισώσεις *Helmholtz*) βασίζεται σε πλεγματικές μεθοδολογίες, αντίστοιχα φαινόμενα μπορούν να προκύψουν μόνο με εκλέπτυνση του χωρικού πλέγματος επιβαρύνοντας σημαντικά την υπολογιστική διαδικασία. Η απουσία χωρικού πλέγματος που θα επέβαλε η επιλογή μιας *Eulerian* θεώρησης έχει ως άμεση συνέπεια την εξοικονόμηση σε χρόνο, σε μνήμη υπολογιστή και τον εκμηδενισμό του σφάλματος αριθμητικής παρεμβολής στον υπολογισμό της χωρικής διανομής στροβιλότητας.

Με τον τρόπο που περιγράφεται η χωρική στροβιλότητα εισάγεται μέσω αρχικών συνθηκών και συνεπώς θεωρείται γνωστή. Το οποίο βρίσκεται σε συνέπεια με τη θεώρηση του μη συνεκτικού ρευστού, σύμφωνα με την οποία δεν υπάρχει μηχανισμός παραγωγής στροβιλότητας. Βέβαια ο τρόπος παραγωγής του φύλλου στροβιλότητας αποτελεί πλέον μέρος της ίδιας της λύσης καθώς η γεωμετρία του είναι άγνωστη και προκύπτει βηματικά στο χρόνο από τη λύση των εξισώσεων *Helmholtz*. Έτσι όμως μπορούν να συμπεριληφθούν με τρόπο γενικό ακόμα και περιπτώσεις πολύπλοκης γεωμετρίας του φύλλου στροβιλότητας. Το κόστος στην περίπτωση αυτή είναι σχετικά μεγάλοι χρόνοι υπολογιστή και οι αυξημένες απαιτήσεις μνήμης, καθώς σε κάθε χρονικό βήμα απαιτούνται απολογισμοί επαγωγής ταχυτήτων από όλα π'ς όλα τα στοιχεία στροβιλότητας, το πλήθος των οποίων αυξάνει σε κάθε χρονικό βήμα. Όπως προαναφέρθηκε στην αρχή της παραγράφου το πρόβλημα αυτό μπορεί να αντιμετωπιστεί θεωρώντας προδιαγεγραμμένη τη γεωμετρία του ομόρρου, με τα όσα όμως συνεπάγεται αυτή η επιλογή.

Οι στροβιλές μεθοδολογίες αναλόγως του τρόπου με τον οποίο προσεγγίζεται ο ομόρρος ενός ανωστικού σώματος, διακρίνονται σε δύο βασικές κατηγορίες στις μεθόδους προδιαγεγραμμένου ομόρρου (*prescribed wake*) και στις μεθόδους ελεύθερου ομόρρου (*free wake*).

Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν οι μεθοδολογίες όπου η γεωμετρία του ομόρρου είναι προδιαγεγραμμένη και αποτελείται από ένα επιφανειακό πλέγμα στροβιλότητας που σχηματίζεται από ευθύγραμμα τμήματα δινοσωλήνων. Η γεωμετρία του επιφανειακού πλέγματος περιγράφεται με τη χρήση περιορισμένου πλήθους βαθμών ελευθερίας. Συνήθως πρόκειται για ελικοειδείς επιφάνειες όπου προδιαγράφεται το βήμα της έλικας. Επιπλέον βαθμοί ελευθερίας μπορεί να περιγράφουν τον τρόπο αναδίπλωσης του ομόρρου σε περιοχές που παρουσιάζονται έντονα τρισδιάστατα φαινόμενα όπως στο ακροπτερύγιο. Η εμπειρία από παρατηρήσεις συστηματικών πειραμάτων μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη λεπτομερέστατη αναπαράσταση των αναδιπλώσεων του φύλλου στροβιλότητας οδηγώντας σε ικανοποιητικές προλέξεις της ροής. Με το συγκεκριμένο τρόπο γίνεται σημαντική εξοικονόμηση υπολογισμών και αποφεύγοντας αριθμητικές αστάθειες.

Στη δεύτερη περίπτωση ο ομόρρος θεωρείται ελεύθερος. Αποτελείται είτε από πλέγμα δινοσωλήνων (*vortex lattice*, δινοπλέγματα), είτε από στοιχεία στροβιλότητας (*vortex particles*) και η γεωμετρία του καθορίζεται από την επίλυση των κινηματικών και δυναμικών εξισώσεων για την ελεύθερη στροβιλότητα. Οι μεθοδολογίες αυτές σε σχέση με τις αντίστοιχες του προδιαγεγραμμένου ομόρρου αναπαράγουν καλύτερα τις σύνθετες δομές της τρισδιάστατης ροής. Ο πιο αποτελεσματικός τρόπος διαχείρισης του ελεύθερου ομόρρου είναι αυτός που βασίζεται στη λογική των στοιχείων στροβιλότητας. Η μέθοδος αυτή αρχικά προτάθηκε από τον *Rebas* και τα σημαντικά της πλεονεκτήματα έναντι της μεθόδου δινοπλεγμάτων είναι ότι αίρει τα προβλήματα λειότητας της γεωμετρίας της επιφάνειας που προκρίπτουν στην τελευταία, καθώς επίσης και ότι αντιμετωπίζει ιδανικά την ανάλυση ροών όπου η στροβιλότητα προσπίπτει σε στερεά σώματα.

2.2.5 Ο ομόρρους ως φύλλο στροβιλότητας

Η εμφάνιση άνωσης ή ισοδύναμα κυκλοφορίας στο πρόβλημα της ροής μη συνεκτικού ρευστού γύρω από ανωστικό σώμα γίνεται με την επιβολή της δυναμικής συνθήκης Kutta-Joukowski. Στα πλαίσια της μη συνεκτικής θεωρίας επιβάλλεται ο ορισμός επιφανειών που εκφεύγουν από το στερεό σύνορο του σώματος και παρουσιάζουν ασυνέχεια (πήδημα) στην εφαπομενική ταχύτητα, συνεπώς και στο δυναμικό, με αποτέλεσμα την ανάπτυξη κυκλοφορίας γύρω από μία κλειστή καμπύλη που περικλείει το σώμα. Αυτή η επιφάνεια ασυνέχειας του δυναμικού είναι ο ομόρρους της πτέρυγας και αποτελεί το μη συνεκτικό ανάλογο ενός στρώματος διάτμησης. Τη χρονική στιγμή t σε μια τομή της πτέρυγας, η ασυνέχεια του δυναμικού στον ομόρρου στην ακμή εκφυγής, μεταξύ της κάτω πλευράς (pressure side, δείκτης «-») και της πάνω πλευράς (suction side, δείκτης «+») θα ισούται με την κυκλοφορία γύρω από την πτέρυγα σε αυτή την τομή:

$$\Phi_w^t = \Phi_{w+}^t - \Phi_{w-}^t = \Gamma^t \quad (2.71)$$

Η ένταση της διαφοράς του πηδήματος του δυναμικού $\Phi_w(\vec{x}_w)$ καθορίζει την ένταση δινοσωλήνα $\mu_w(\vec{x}_w)$ στο υλικό σημείο $\vec{x}_w \in S_w$ του ομόρρου:

$$\mu_w(\vec{x}_w) = -\Phi_w(\vec{x}_w) = -(\Phi_w^+ - \Phi_w^-), \quad \vec{x}_w \in S_w \quad (2.72)$$

Ενώ η θέση ενός σημείου του ομόρρου θα καθορίζεται από τη μέση ταχύτητα:

$$\frac{d\vec{x}_w}{dt} = \frac{1}{2} \left\{ \vec{u}^+(\vec{x}_w, t) + \vec{u}^-(\vec{x}_w, t) \right\} = \vec{u}_{mean}(\vec{x}_w, t) \quad (2.73)$$

Η ασυνέχεια του δυναμικού κατά μήκος της ακμής εκφυγής ανωστικού σώματος επεκτείνεται στη συνέχεια σε επιφάνεια, που αποτελεί τον ομόρρου του σώματος, με τέτοιο τρόπο ώστε να ικανοποιεί το θεώρημα του Kelvin περί υλικής διατήρησης της κυκλοφορίας. Η αρχή διατήρησης της κυκλοφορίας του Kelvin επιβάλλει την υλική διατήρηση της κυκλοφορίας κατά μήκος των αποβαλλόμενων γραμμών στροβιλότητας. Αυτό σημαίνει ότι η ένταση της διανομής διπόλων που μεταφέρεται σε ένα υλικό σημείο κατά μήκος της γραμμής στροβιλότητας συντηρεί την ένταση που είχε αυτό το υλικό σημείο κατά την εκπομπή του από την ακμή εκφυγής. Έτσι τη χρονική στιγμή t το υλικό σημείο $\vec{x}_w((\eta, t_0), t)$ που αποβλήθηκε τη χρονική στιγμή t_0 από την η -γραμμή στροβιλότητας, θα έχει ένταση $\Phi_w^t(\vec{x}_w((\eta, t_0), t))$ ίση με την ένταση που έχει η κυκλοφορία $\Gamma(\eta, t_0)$ στην η -γραμμή στροβιλότητας τη στιγμή t_0 :

$$\Phi_w^t(\vec{x}_w((\eta, t_0), t)) = \Gamma(\eta, t_0) \quad (2.74)$$

Η συνθήκη Kutta-Joukowski επιβάλλει τη συνέχεια των πιέσεων στην ακμή εκφυγής της πτέρυγας καθώς το ασυμπίεστο ρευστό δεν μπορεί να παραλάβει ορθές τάσεις:

$$p^+ = p^- \rightarrow p = 0 \quad (2.75)$$

Αποτελεί τη δυναμική συνθήκη του προβλήματος και μαζί με την κινηματική συνθήκη μη εισχώρησης ορίζουν πλήρως ένα σύστημα τόσων εξισώσεων όσες είναι και οι εντάσεις των αγνώστων διανομών πηγών και διπόλων. Η συνθήκη μηδενισμού του πηδήματος της πίεσης

καθορίζει ποσοτικά τη στροβιλότητα που αποβάλλεται στον ομόρρο της πτέρυγας ή ισοδύναμα την κυκλοφορία πάνω σε αυτή. Είναι μη γραμμική συνθήκη λόγω της ύπρξης του τετραγωνικού όρου της ταχύτητας στον όρο της κινητικής ενέργειας στην εξίσωση *Bernoulli*. Αποτέλεσμα είναι το πρόβλημα να μετατρέπεται σε μη γραμμικό (σε αντίθεση με το δισδιάστατο πρόβλημα όπου η αντίστοιχη συνθήκη είναι γραμμική).

Η δυναμική συνθήκη μηδενισμού των πιέσεων στον ομόρρο βρίσκεται σε απόλυτη συμφωνία με το θεώρημα διατήρησης της κυκλοφορίας του *Kelvin*. Πράγματι σύμφωνα με το θεώρημα του *Kelvin* θα πρέπει:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0 \rightarrow \frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \vec{u} \cdot (\nabla \Gamma) = 0 \rightarrow \frac{\partial \Phi(x_w, t)}{\partial t} + \vec{u}(x_w, t) \cdot (\nabla \Phi(x_w, t)) \quad (2.76)$$

όπου θεωρώντας ότι η ταχύτητα στον ομόρρο είναι ουσιαστικά η μέση ταχύτητα της πάνω και κάτω πλευράς, θα έχουμε:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0 \rightarrow \frac{\partial \Phi(x_w, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \vec{u}^{++}(x_w, t) + \vec{u}^{--}(x_w, t) \right\} \cdot \left\{ \vec{u}^{++}(x_w, t) - \vec{u}^{--}(x_w, t) \right\} \quad (2.77)$$

$$\frac{\partial \Phi^+(x_w, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} u^{++2}(x_w, t) = \frac{\partial \Phi^-(x_w, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} u^{--2}(x_w, t) \rightarrow \quad (2.78)$$

$$\frac{p^+}{\rho} = \frac{p^-}{\rho} \rightarrow \frac{p}{\rho} = 0 \rightarrow p = 0$$

δηλαδή το θεώρημα του *Kelvin* ισοδυναμεί με τη συνθήκη του μηδενισμού των πιέσεων στον ομόρρο της πτέρυγας με την προϋπόθεση ότι η ταχύτητα υπολογίζεται ως ο μέσος όρος της ταχύτητας στην πάνω και κάτω πλευρά του φύλλου στροβιλότητας.

2.2.6 Είδη σωμάτων και πλεγμάτων

Στα πλαίσια της δυναμικής θεωρίας της ροής, η παρουσία στερεών σωμάτων αναπαρίσταται από κατανομή πηγών και διπόλων. Τα κλειστά σώματα (όπως άτρακτοι και πτερύγια με πάχος) αναπαρίστανται από κατανομές πηγών. Τα ανοιχτά σώματα όπως λεπτές ανωστικές επιφάνειες αναπαριστούνται μόνο από κατανομές διπόλων. Σε κάθε περίπτωση η ένταση των διανομών πηγών ή διπόλων καθορίζεται από την οριακή συνθήκη μη εισχώρησης.

Η δυναμική θεωρία της ροής διακρίνει δύο περιπτώσεις ροών:

- **Μη ανωστικές ροές** στις οποίες το βαθμωτό δυναμικό όπως επίσης και οι χωρικές του παράγωγοι είναι συνεχείς σε όλο το πεδίο ροής
- **Ανωστικές ροές** στις οποίες το βαθμωτό δυναμικό είναι ασυνεχές διασχίζοντας μία ή δύο επιφάνειες στο πεδίο ροής. Οι συγκεκριμένες επιφάνειες ασυνέχειας αντιστοιχούν σε πολύ λεπτά φύλλα διατμητικών τάσεων που αντιπροσωπεύουν τον ομόρρο της ροής. Αφού το βαθμωτό δυναμικό είναι ασυνεχές ο ομόρρος της ροής θα αναπαρίσταται από διανομές διπόλων στην επιφάνειά του. Στην περίπτωση της ασυμπίεστης ροής που εξετάζουμε διασχίζοντας τον ομόρρο η ταχύτητα της ροής έχει μόνο ασυνέχεια κατά την εφαπτομενική διεύθυνση (η κατάκόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας πρέπει να είναι συνεχής καθώς δεν υπάρχουν διανομές πηγών στον ομόρρο) και η πίεση πρέπει να είναι συνεχής.

Στον κώδικα που χρησιμοποιείται, τα στερεά σώματα ορίζονται με τη χρήση επιφανειακών πλεγμάτων. Η μορφοποίηση της γεωμετρίας πραγματοποιείται με το διαχωρισμό

«αριθμητικών»σωμάτων ή τμημάτων. Ένα φυσικό σώμα μπορεί να δημιουργηθεί από ένα ή περισσότερα «αριθμητικά» σώματα. Η συγκεκριμένη τεχνική επιτρέπει την δημιουργία παραπάνω του ενός πλέγματος σε κάθε σώμα καθώς επίσης και σώματα με κινούμενα μέρη (π.χ. πτέρυγα με υπεραντωτική διάταξη χείλους εκφυγής, σε ένα τμήμα του εκπετάσματος). Αναλόγως των χαρακτηριστικών του κάθε τμήματος ενός φυσικού σώματος υπάρχει διαφορετικός τρόπος σύνδεσης των διαφόρων φυσικών σωμάτων.

Σύμφωνα με τη μορφοποίηση που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, για το κάθε σώμα ορίζεται ένας αριθμός λωρίδων (1:NCWB-1) και κάθε λωρίδα θα περιέχει NNBB-1 κυψέλες. Η συγκεκριμένη μορφοποίηση είναι σημαντική κατά τον υπολογισμό των φορτίων.

Αναλόγως των χαρακτηριστικών της ροής τα σώματα διακρίνονται:

- I. Αναλόγως εάν το σώμα παράγει ομόρρου
 1. Μη ανωστικά σώματα που δεν παράγουν ομόρρου
 2. Ανωστικά σώματα που παράγουν ομόρρου
- II. Αναλόγως τον τύπο της διανομής πηγών ή διπόλων που φέρουν
 1. Τμηματικά σταθερή διανομή πηγών (άτρακτοι)
 2. Τμηματικά σταθερή διανομή διπόλων (λεπτά ανωστικά σώματα)
 3. Τμηματικά γραμμική διανομή διπόλων και τμηματικά σταθερή διανομή πηγών (ανωστικά σώματα με πάχος)
 4. Ειδικής μορφής τμηματικά γραμμική διανομή διπόλων και τμηματικά σταθερή διανομή πηγών (ακροπτερύγια)
 5. Τμηματικά γραμμική διανομή διπόλων (spoilers)

Τα σώματα II-2 και II-5 δημιουργούν ομόρρου.

Για κάθε σώμα ο ομόρρους είναι μια λωρίδα κυψελών που μπορεί να περιέχει το χείλος εκφυγής, τη ρίζα της πτέρυγας και το ακροπτερύγιο. Η αποβολή του ομόρρου από το χείλος προσβολής ορίζεται μόνο για σώματα τύπου II-2 , II-3 , II-5.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ο τρόπος που αναπαρίσταται ο κοντινός ομόρρους μια πτέρυγας με πάχος.

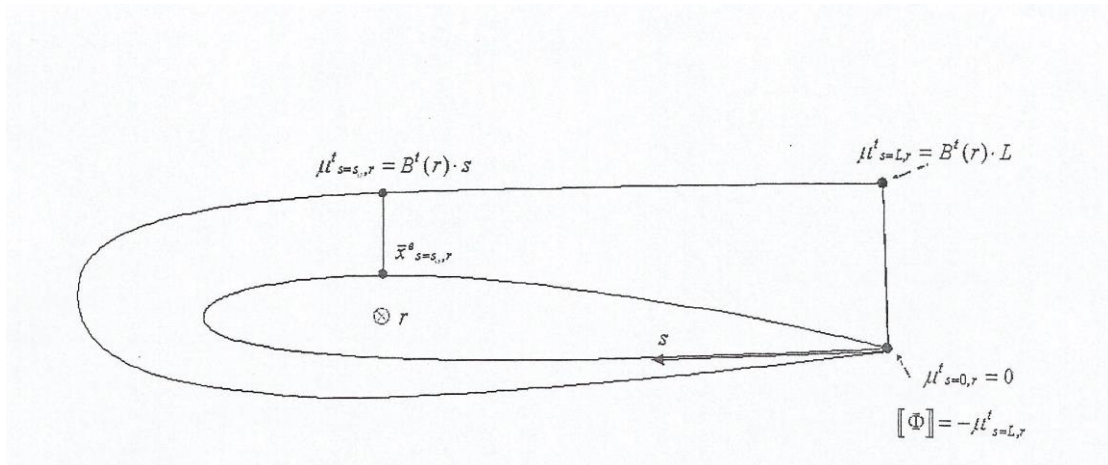
2.2.7 Βαθμοί ελευθερίας των διανομών πηγών και διπόλων στη πτέρυγα

Οι διανομές πηγών και διπόλων πάνω στην πτέρυγα καθορίζονται από τα εξής:

1. Τους βαθμούς ελευθερίας που χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση της γεωμετρίας των στοιχείων του πλέγματος. Η επιφάνεια ενός σώματος μπορεί να αναπαρίσταται με επίπεδα ή καμπύλα στοιχεία. Με τη χρήση καμπύλων στοιχείων η αναπαράσταση αυτή είναι ακριβέστερη και μάλιστα στη συγκεκριμένη περίπτωση η λύση του προβλήματος επιτυγχάνεται με τον ορισμό λιγότερων στοιχείων σε σχέση με αυτά που απαιτούνται όταν θεωρούμε επίπεδα στοιχεία. Σε αυτή την περίπτωση οι υπολογισμοί είναι ημιαναλυτικοί. Αντίθετα στην περίπτωση θεώρησης επίπεδων στοιχείων οι υπολογισμοί είναι αναλυτικοί και συνεπώς οι απαιτήσεις υπολογιστικού χρόνου είναι χαμηλές.
2. Τη θέση στην οποία τοποθετούνται οι ιδιομορφίες σε σχέση με την πραγματική επιφάνεια των σωμάτων, και συνεπώς σε σχέση με τα σημεία που ικανοποιείται η συνθήκη μη εισχώρησης. Η βέλτιστη επιλογή είναι η τοποθέτηση τους πάνω στην

πραγματική επιφάνεια, εκεί όπου απαιτείται γνώση του πεδίου ταχυτήτων και του πεδίου πιέσεων και ικανοποιείται η συνθήκη μη εισχώρησης. Στην περίπτωση αυτή προκύπτει σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων. Με κύριο πίνακα που έχει ισχυρή διαγώνιο και συνεπώς το σύστημα είναι καλής ποιότητας.

3. Τη γεωμετρική διάσταση του χώρου που ορίζεται η κατανομή των ιδιομορφιών. Οι ιδιομορφίες μπορεί να είναι συγκεντρωμένες σε σημείο, ή κατανεμημένες σε γραμμικό, επιφανειακό, ή χωρικό στοιχείο. Προφανώς η πολυπλοκότητα των υπολογισμών αυξάνει καθώς πηγαίνουμε σε διάσταση μεγαλύτερης τάξης. Η πιο συνηθισμένη επιλογή είναι αυτή της επιφανειακής κατανομής ιδιομορφιών που μπορεί να αναπαράγει με ακρίβεια το πεδίο ροής χωρίς να επιβαρύνει σημαντικά τους υπολογισμούς μας. Μάλιστα όταν η απόσταση μεταξύ της ιδιομορφίας και ενός σημείου του χώρου γίνει σημαντική οι υπολογισμοί μας σε αυτό το σημείο είναι δυνατό να αναχθούν σε υπολογισμούς από σημειακά συγκεντρωμένη ιδιομορφία, που έχουν απλούστερη μορφή.
4. Τους βαθμούς ελευθερίας της μορφής των διανομών των ιδιομορφιών σε κάθε στοιχείο. Η συνέχεια στη διανομή της ιδιομορφίας στα όρια ενός στοιχείου επιτυγχάνεται με διγραμμική, ή μεγαλύτερης τάξης διανομή, αυτό έχει σα συνέπεια την εισαγωγή άγνωστων παραμέτρων που ο αριθμός τους θα πρέπει να βρίσκεται σε ισορροπία με τις εξισώσεις του προβλήματος. Η επιλογή τμηματικά σταθερών διανομών έχει το πλεονέκτημα των απλούστερων συνήθως υπολογισμών.



Εικόνα 12 Γραμμική μεταβολή διανομής διπόλων σε μια εγκάρσια διατομή

Στη μέθοδο που ακολουθούμε κάνουμε τις ακόλουθες επιλογές.

1. Θεωρούμε επίπεδα στοιχεία
2. Τοποθετούμε τις διανομές ιδιομορφιών στην πραγματική επιφάνεια των σωμάτων
3. Επιλέγουμε επιφανειακές κατανομές για τις διανομές ιδιομορφιών πηγών και διπόλων στα σώματα και στον κοντινό ομόρρο και συγκεντρωμένες κατανομές σε σημεία για τη διανομή στροβιλότητας στον ομόρρο.
4. Θεωρούμε τμηματικά σταθερές διανομές πηγών για τα στοιχεία του πλέγματος. Επίσης θεωρούμε κατανομή διπόλων τμηματικά σταθερή κατά την r -κατεύθυνση του πλέγματος και γραμμική κατά την s -κατεύθυνση. Σύμφωνα με τα παραπάνω στο στοιχείο ℓ τοποθετείται επιφανειακή κατανομή πηγών και

διπόλων και σε τυχαίο σημείο $\vec{x}^e(s, r) \in S^e$ υπολογίζονται οι εντάσεις αντίστοιχα:

$$\sigma^e(\vec{x}^e)ct, \vec{x}^e \in S^e \quad (2.79)$$

$$\begin{aligned} \mu^e(\vec{x}^e(s, r)) &= B(r) \cdot s, \vec{x}^e \in S^e \\ B(r) &= B_{j=ICIRC(e)} = ct, r_j \leq r \leq r_{j+1}, j = 1, ICIRC(NTE) \end{aligned} \quad (2.80)$$

Η κλίση της διανομής διπόλων $B(r)$ μεταβάλλεται κατά την ακτινική διεύθυνση, ενώ έχει σταθερή τιμή $B_{ICIRC(e)} = ct$ κατά την s-κατεύθυνση για όλα τα σημεία ελέγχου \vec{x}_{CP}^e κατά το εύρος της ακτινικής λωρίδας.

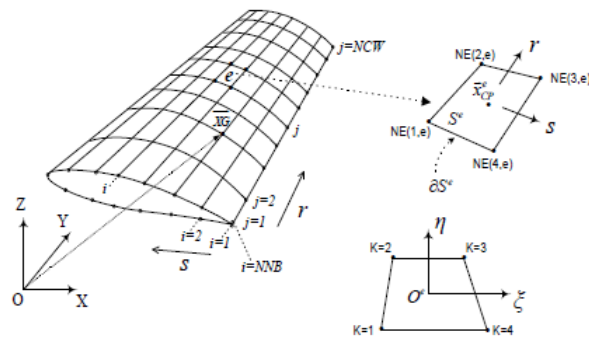
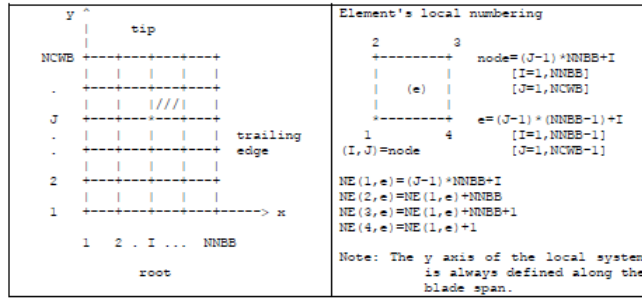
Με τον τρόπο αυτό ο καθορισμός της διανομής διπόλων στο γεωμετρικό πλέγμα ανάγεται σε πρόβλημα υπολογισμού των άγνωστων σταθερών B_j . Επιλέγοντας τμηματικά σταθερή κατανομή για τη διανομή διπόλων στην ακτινική κατεύθυνση, προσεγγίζεται αντίστοιχα με τμηματικά σταθερή κατανομή και η κυκλοφορία του σώματος. Αυτό σημαίνει ότι η καμπύλη φόρτισης του σώματος προσεγγίζεται τόσο ακριβέστερα όσο πιο πυκνή είναι η διακριτοποίηση της γεωμετρίας κατά το εύρος του.

Ορλιζοντας με αυτόν τον τρόπο τις κατανομές των ιδιομορφιών εισάγονται *NDTF* (*Total Number of Degrees of Freedom*) βαθμοί ελευθερίας:

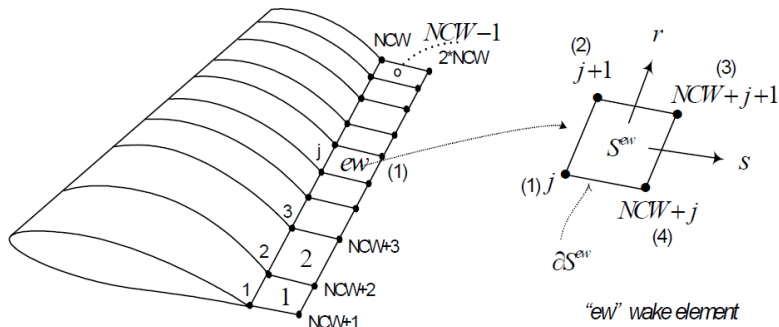
$$NDFT = NTE_\sigma + (NCW - 1)$$

όπου *NTE* είναι ο αριθμός των αγνώστων εντάσεων των τμηματικά σταθερών επιφανειακών πηγών στα *NTE* στοιχεία του γεωμετρικού πλέγματος του σώματος και *NCW-1*, ο αριθμός των τιμών κλίσεων της κατανομής διπόλων, που είναι ίσος με τον αριθμό των θέσεων κατά γ που ορίζεται στη διακριτοποίηση του σώματος. Αυτό το σύστημα των *NDFT* αγνώστων είναι πλήρως ορισμένο καθώς μπορούν να οριστούν *NTE* το πλήθος εξισώσεις που να ικανοποιούν την κινηματική συνθήκη μη εισχώρησης και *NCW-1* εξισώσεις που να ικανοποιούν τη δυναμική συνθήκη Kutta-Joukowski.

GRID DEFINITION OF A NUMERICAL BODY



Εικόνα 13 Διακριτοποίηση της γεωμετρίας ενός σώματος με πάχος



Εικόνα 14 διακριτοποίηση του κοντινού ομόρρου

2.2.8 Υπολογισμός των φορτίων σε σώματα με πάχος

Σε κάθε χρονικό βήμα, μετά την επίλυση των εξισώσεων του συστήματος είναι δυνατός ο υπολογισμός της δύναμης που αναπτύσσεται λόγω της ροής πάνω σε κάθε στοιχείο σώματος. Έχοντας υπολογίσει τις διανομές των πηγών και των διπόλων σε όλα τα επιφανειακά στοιχεία που απαρτίζουν τα σώματα και γνωρίζοντας την προϊστορία του

δυναμικού η εφαρμογή της εξίσωσης *Bernoulli*, στο απόλυτο σύστημα αναφοράς, στο τυχαίο στοιχείο που ανήκει σε σώμα κινούμενο με σχετική ταχύτητα $\vec{U}_B^e(\vec{x}, t)$ επιβάλλει:

$$\frac{\partial \Phi^e(\vec{x}, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{u}^e(\vec{x}, t)^2 + \frac{p^e(\vec{x}, t)}{\rho} - \vec{u}^e(\vec{x}, t) \cdot \vec{U}_B^e(\vec{x}, t) = c(t) \quad (2.81)$$

όπου ο δείκτης e υποδηλώνει ότι όλα τα μεγέθη αναφέρονται στο στοιχείο .

Ο μη μόνιμος όρος αυτής της σχέσης υπολογίζεται ακολούθως:

$$\frac{\partial \Phi^e(\vec{x}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \Phi_\infty^e(\vec{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_{\sigma, \mu}^e(\vec{x}, t)}{\partial t} \quad (2.82)$$

Στην περίπτωση της μόνιμης ροής ο όρος $\frac{\partial \Phi_\infty^e(\vec{x}, t)}{\partial t}$ μηδενίζεται, αλλιώς πρέπει να υπολογιστεί σύμφωνα με τα δεδομένα του κάθε προβλήματος, ενώ ο υπολογισμός του όρου $\frac{\partial \Phi_{\sigma, \mu}^e(\vec{x}, t)}{\partial t}$ γίνεται εύκολα καθώς σε κάθε χρονική στιγμή υπολογίζουμε τις τιμές του δυναμικού $\partial \Phi_\sigma^e(\vec{x}, t)$, $\partial \Phi_\mu^e(\vec{x}, t)$ και συνεπώς και τη χρονική μεταβολή τους.

Η εξίσωση (2.81) χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της πίεσης p^e σε κάθε τετράπλευρο στοιχείο της γεωμετρίας του σώματος. Ο υπολογισμός του συντελεστή πίεσης στο στοιχείο e γίνεται με την αδιαστατοποίηση της πίεσης p^e ως προς μια κατάλληλη πίεση αναφοράς P_{ref}^e . Προκειμένου να είναι δυνατή η σύγκριση του συντελεστή πίεσης C_p^e των αριθμητικών προλέξεων με τα πειραματικά δεδομένα θα πρέπει να είναι γνωστή η P_{ref}^e που χρησιμοποιήθηκε για την αδιαστατοποίηση των πειραματικών αποτελεσμάτων.

Κλείνοντας την αναφορά στον τρόπο υπολογισμού των πιέσεων αξίζει να σημειωθεί ότι η ακρίβεια στην αναπαράσταση της γεωμετρίας του εξεταζόμενου σώματος επηρεάζει άμεσα τους υπολογισμούς των πιέσεων, τόσο στο χείος προσπτώσης όπου εμφανίζονται οι μέγιστες τιμές πιέσεων, όσο και στην ακμή εκφυγής, όπου η ικανοποίηση της εξίσωσης των πιέσεων αποτελεί τη βασική συνθήκη για την παραγωγή στροβιλότητας και την ορθή επίλυση του προβλήματος.

Γνωρίζοντας την πίεση p^e ο υπολογισμός της κάθετης δύναμης που αναπτύσσεται στο συγκεκριμένο στοιχείο γίνεται απ' ευθείας:

$$\vec{F}_n^e(\vec{x}, t) = (p^e(\vec{x}, t) \cdot A^e) \cdot \vec{n}^e \quad (2.83)$$

Οδηγώντας στην εμφάνιση ροπής $Q^e(\vec{x}, t)$ ως προς την αρχή των αξόνων:

$$Q^e(\vec{x}, t) = \vec{x} \times \vec{F}_n^e(\vec{x}, t) \quad (2.84)$$

Σημειώνεται ότι στους υπολογισμούς των φορτίων δεν υπεισέρχονται συνεκτικές διορθώσεις, οπότε η συνολική δύναμη και η ροπή που αναπτύσσονται στο σώμα (NB) στο απόλυτο σύστημα αναφοράς είναι:

$$\vec{F}^{NB}(t) = \sum_{e=1, NTEB(NB)} \vec{F}_n^e(x, t) \quad (2.85)$$

$$\vec{Q}^{NB}(t) = \sum_{e=1, NTEB(NB)} \vec{Q}_n^e(x, t) \quad (2.86)$$

Κεφάλαιο 3: Η μοντελοποίηση του προβλήματος

Το πρόβλημα που μελετάται στην παρούσα εργασία είναι η προσομοίωση πτήσης ενός ελικοπτέρου υπό την επίδραση ενός πεδίου ταχύτητας, το οποίο γεννάται από την κατάλληλη αναπροσαρμογή του πεδίου ταχύτητας του ομόρρου που δημιουργείται από τη λειτουργία μιας ανεμογεννήτριας. Για την ανάλυση του προβλήματος υπολογίστηκαν τα φορτία που αναπτύσσονται στα πτερύγια και στη συνέχεια συγκρίθηκαν με την περίπτωση της πτήσης του ελικοπτέρου σε αδιατάραχη ροή αέρα.

Η προσέγγιση του προβλήματος έγινε σε τρεις φάσεις:

- Αρχικά, έγινε η προσομοίωση της λειτουργίας μιας ανεμογεννήτριας, από την οποία μας ενδιέφερε η πληροφορία για το πεδίο ταχύτητας του ομόρρου που δημιουργείται.
- Στη συνέχεια αφού εξάγουμε το πεδίο ταχύτητας του ομόρρου,
 - (1) αρχικά το δημιουργούμε ένα ομοιόμορφο πλέγμα στο οποίο κατανέμονται οι ταχύτητες διαταραχών,
 - (2) στη συνέχεια αναδιατάσσουμε τα στοιχεία του πλέγματος, προκειμένου το ελικοπτερο να ταξιδεύει κάθετα στη ροή του πεδίου ταχύτητας διαταραχών
 - (3) τελικά μικραίνουμε τις αποστάσεις των σημείων του πλέγματος στο $\frac{1}{4}$ των αρχικών κρατώντας σταθερές τις εντάσεις των ταχυτήτων.
- Τελικά προσομοιώνουμε την πτήση ενός ελικοπτέρου κάθετα στο νέο πεδίο ταχύτητας που δημιουργήσαμε και υπολογίζουμε τα αεροδυναμικά φορτία που δέχονται τα φορτία του κύριου στροφείου.

Οι ιδιομορφίες της συγκεκριμένης προσέγγισης είναι:

- ο ομόρρος της ανεμογεννήτριας που εισάγεται στην προσομοίωση της πτήσης του ελικοπτέρου δεν εξελίσσεται
- οι άξονες περιστροφής του ελικοπτέρου και της ανεμογεννήτριας είναι κάθετοι μεταξύ τους
- τα στροφεία του ελικοπτέρου και της ανεμογεννήτριας περιστρέφονται με διαφορετικές περιστροφικές ταχύτητες

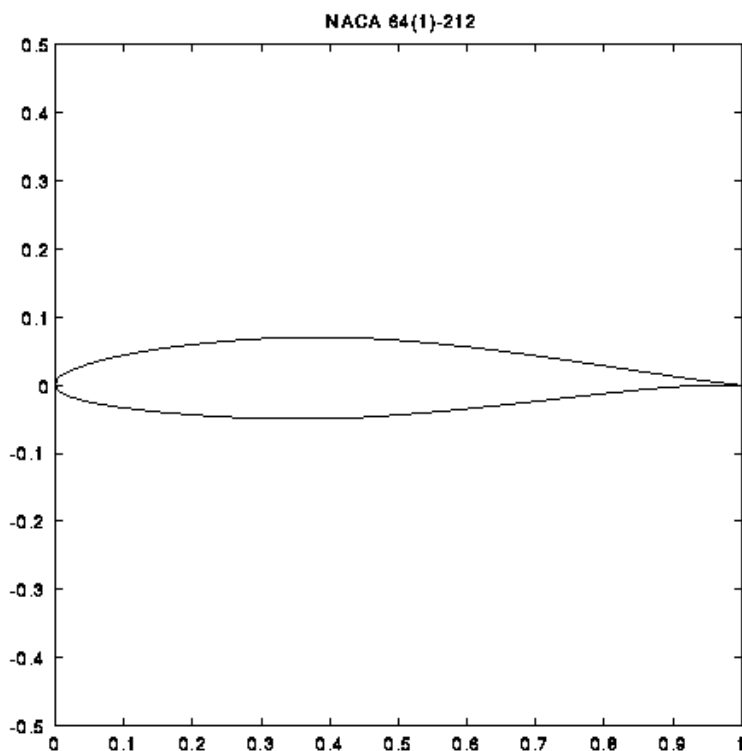
Το γεγονός ότι το στροφείο του ελικοπτέρου και της ανεμογεννήτριας περιστρέφονται με διαφορετικές περιστροφικές ταχύτητες είναι η αιτία που μας αναγκάζει να προσεγγίσουμε το πρόβλημα σε τρεις φάσεις. Το πρόβλημα ότι οι άξονες περιστροφής του ελικοπτέρου και της ανεμογεννήτριας είναι κάθετοι μεταξύ τους αντιμετωπίστηκε με την κατάλληλη αναδιάταξη των κόμβων του πεδίου ταχύτητας και τέλος κατά τη διάρκεια της προσομοίωσης της πτήσης ενός ελικοπτέρου προστέθηκε ένας πλάγιος άνεμος έντασης $v_\infty = 10 \text{ m/s}$, για να προσομοιώσουμε την επ' άπειρο ταχύτητα του ομόρρου της ανεμογεννήτριας.

Το γεγονός ότι δημιουργήσαμε το νέο πεδίο ροής μικραίνοντας τις αποστάσεις των σημείων του πλέγματος του πεδίου ταχύτητας του ομόρρου της ανεμογεννήτριας, οφείλεται στο γεγονός, ότι το υπολογιστικό κόστος που απαιτείται για την προσομοίωση της πτήσης ενός ελικοπτέρου κάθετα σε όλο το εύρος του ομόρρου μιας ανεμογεννήτριας ξεπερνά τα πλαίσια της παρούσας εργασίας. Η προσομοίωση της πτήσης ενός ελικοπτέρου σε ένα πεδίο ταχύτητας, που παράχθηκε με τον τρόπο που περιγράφεται σαφώς και δεν αποτελεί

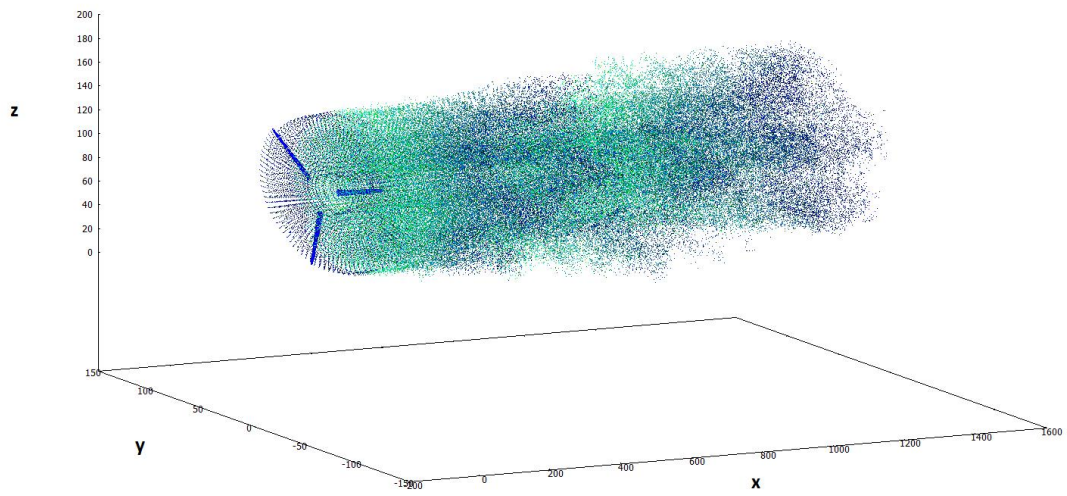
προσομοίωση πτήσης ελικοπτέρου κάθετα σε ομόρρου ανεμογεννήτριας, ωστόσο μας επιτρέπει να παρατηρήσουμε την αεροδυναμική συμπεριφορά του ελικοπτέρου σε μεγάλο εύρος ενός πεδίου ροής που έχει τη συγκεκριμένη μορφή πεδίου ταχύτητας.

3.1 Η ανεμογεννήτρια και ο τρόπος παραγωγής του τυρβώδους ανέμου

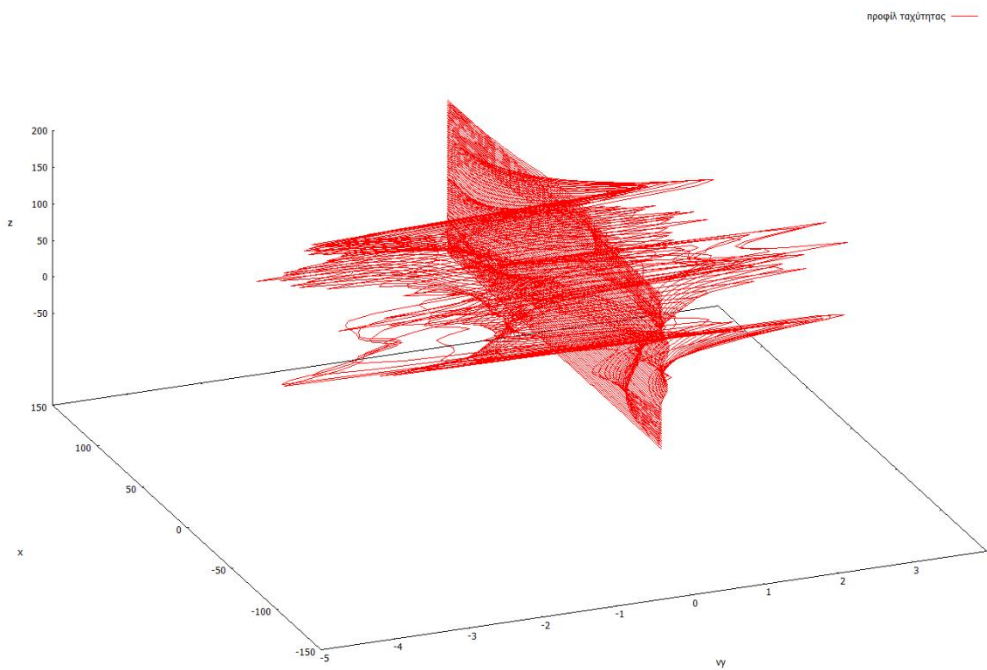
Για να προσεγγίσουμε τον ομόρρου της ανεμογεννήτριας δημιουργούμε μέσω του κώδικα GENUVP η ανεμογεννήτρια NREL, τα πτερύγια της οποίας προσομοιώνονται ως λεπτές ανωστικές επιφάνειες με ακτίνα $R = 63m$ και αεροτομή NACA 64212. Η ανεμογεννήτρια περιστρέφεται με περιστροφική ταχύτητα $\omega = 1.0032 \text{ rad/sec}$ και δέχεται μετωπικό άνεμο έντασης $v_\infty = 10 \text{ m/s}$.



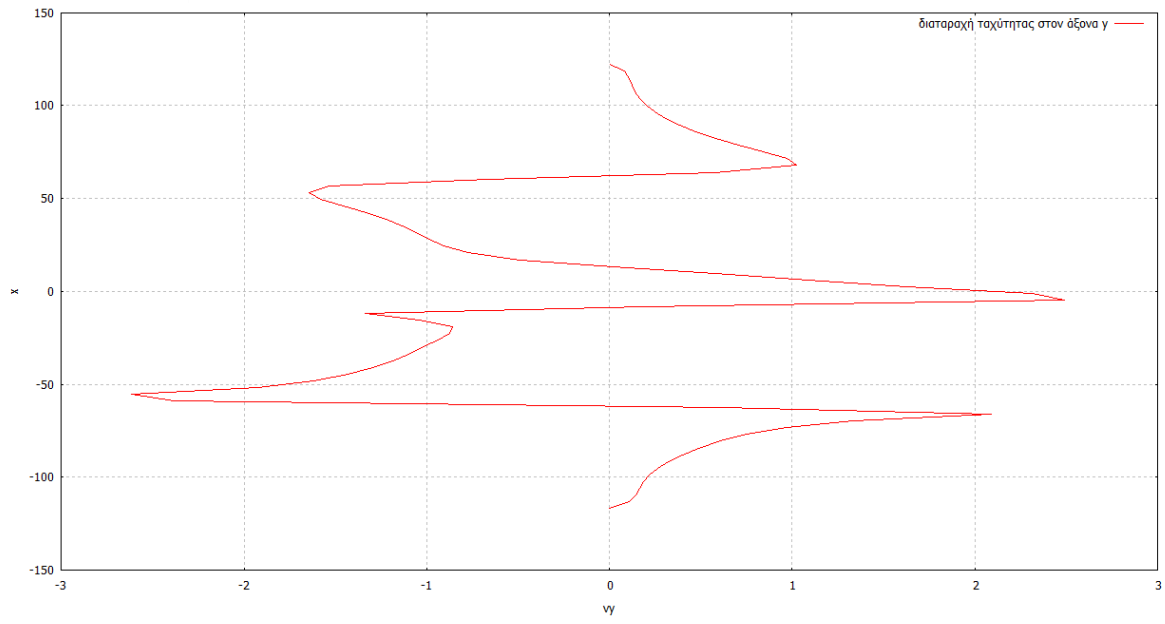
Εικόνα 15 Η πλάγια όψη της αεροτομής NACA 64212



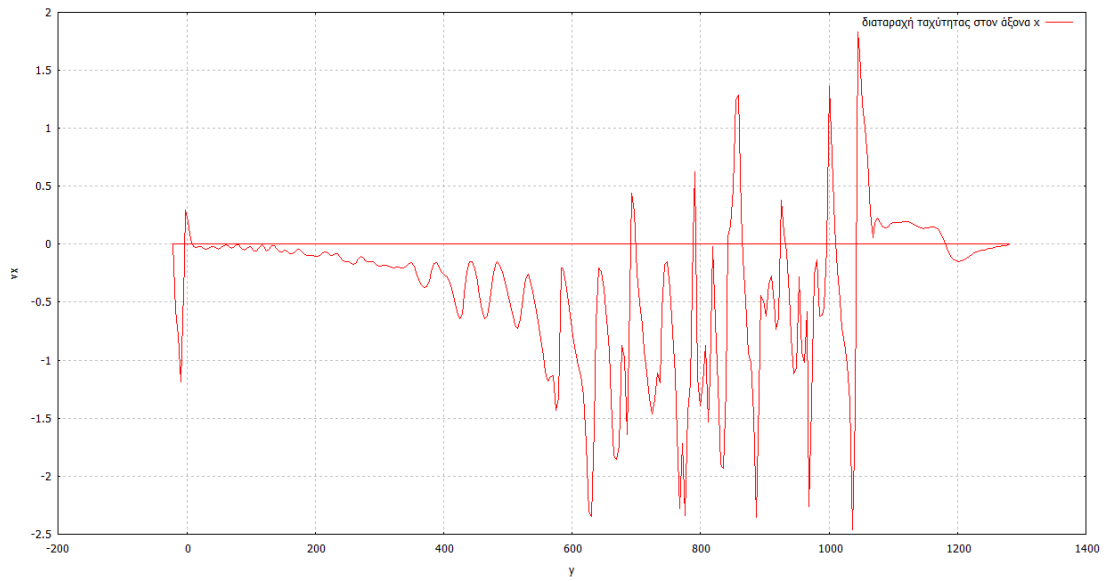
Εικόνα 16 Απεικόνιση του ομόρρου της ανεμογεννήτριας



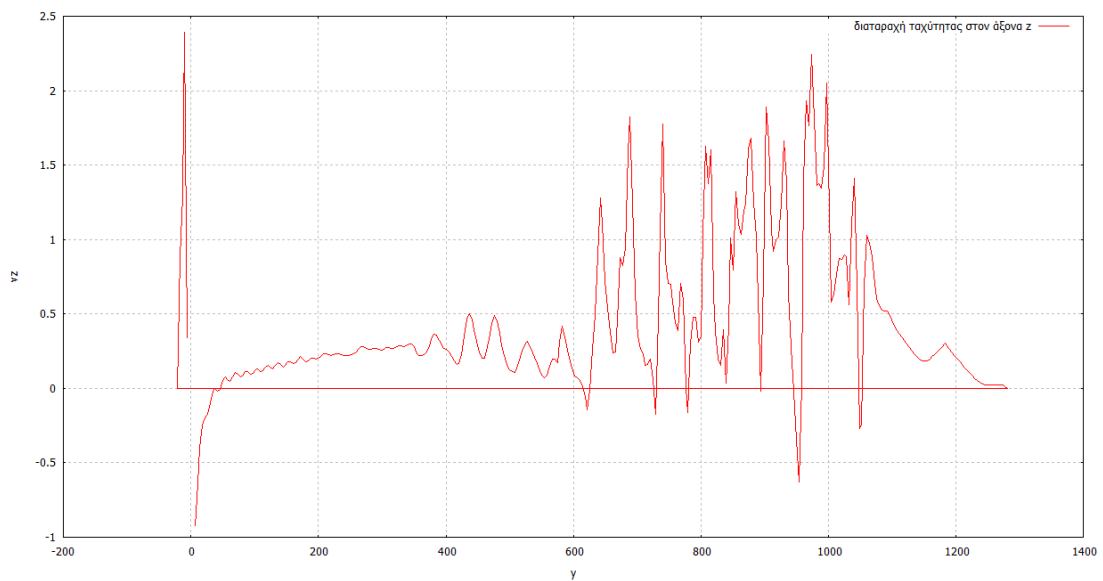
Εικόνα 17 Η ταχύτητα του ομόρρου της ανεμογεννήτριας στην y -διεύθυνση στο σημείο εισόδου του ελικοπτέρου



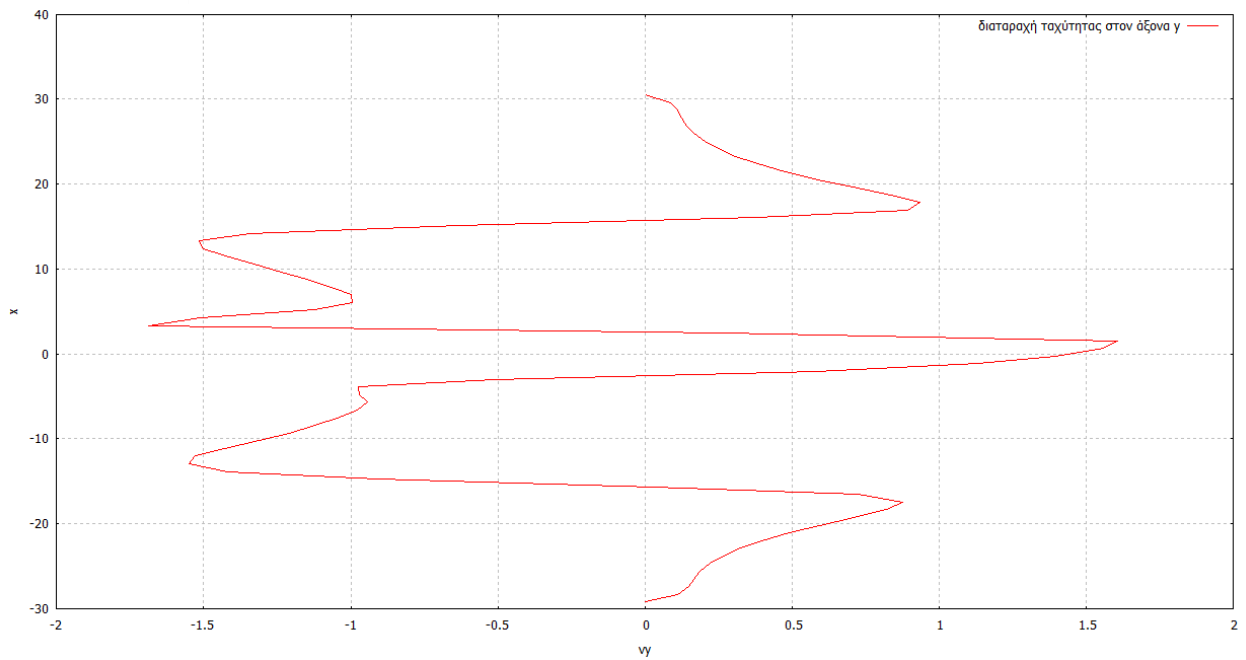
Εικόνα 18 Η ταχύτητα του ομόρρου της ανεμογεννήτριας στην γ -διεύθυνση στο σημείο εισόδου του ελικοπτέρου



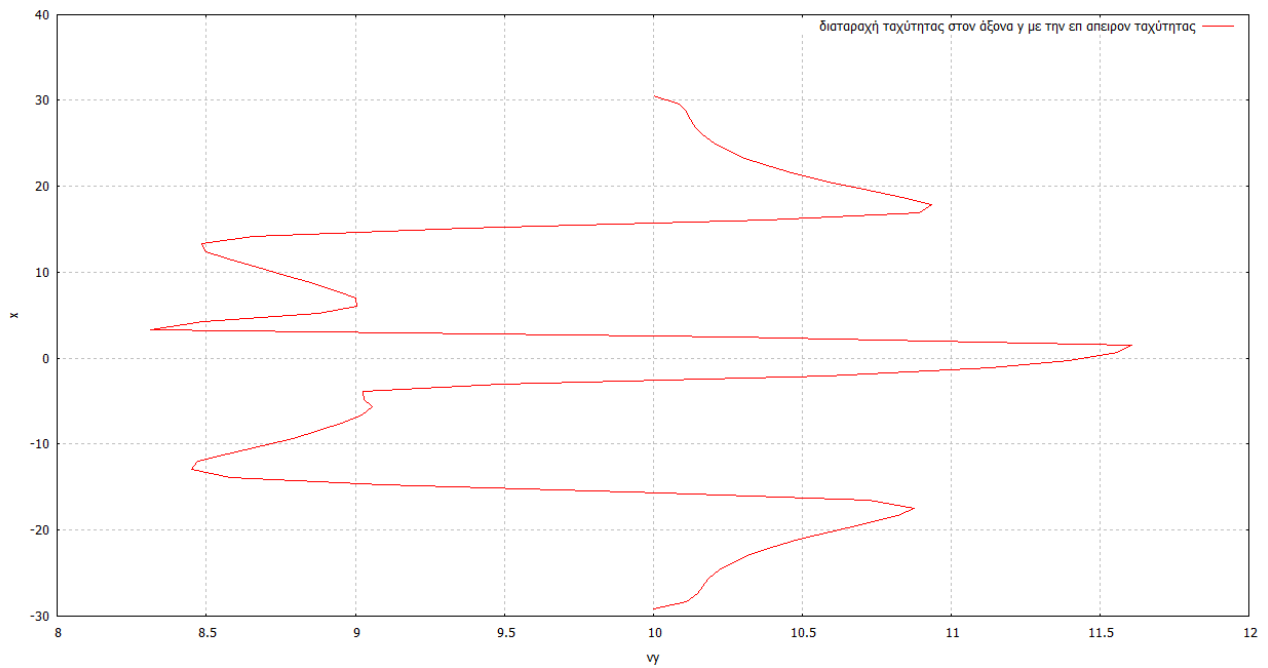
Εικόνα 19 Η ταχύτητα του ομόρρου της ανεμογεννήτριας στην x -διεύθυνση στο σημείο εισόδου του ελικοπτέρου



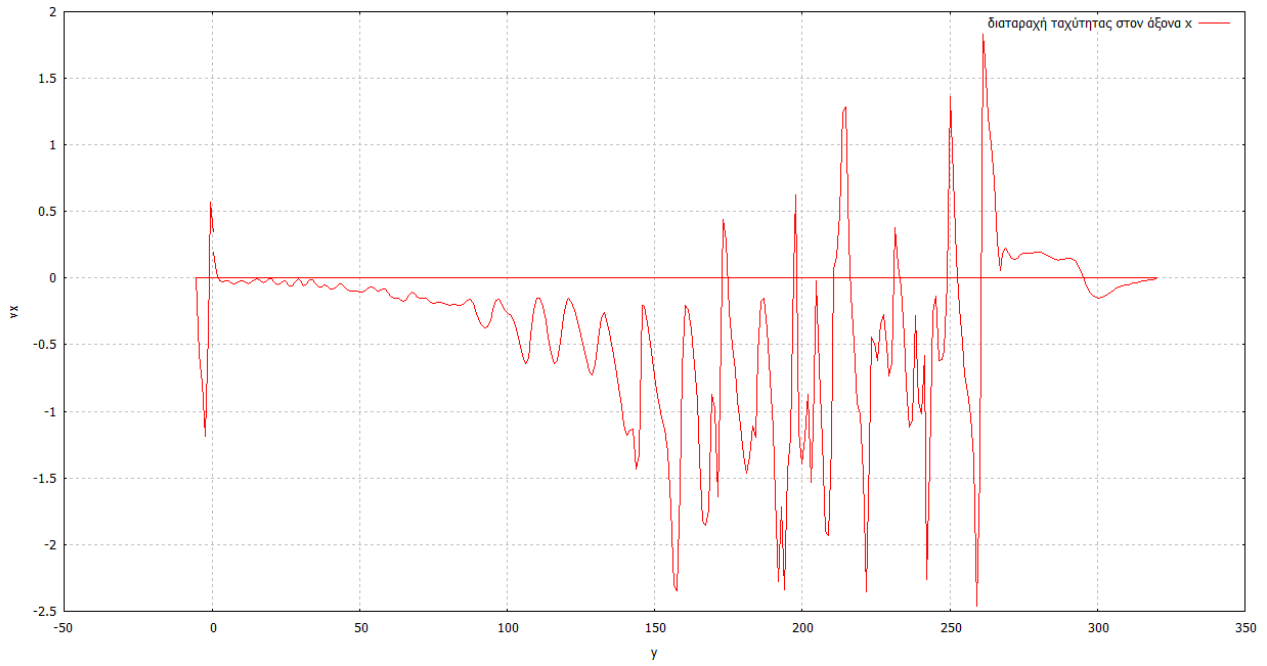
Εικόνα 20 Η ταχύτητα του ομόρρου της ανεμογεννήτριας στην z -διεύθυνση στο σημείο εισόδου του ελικοπτέρου



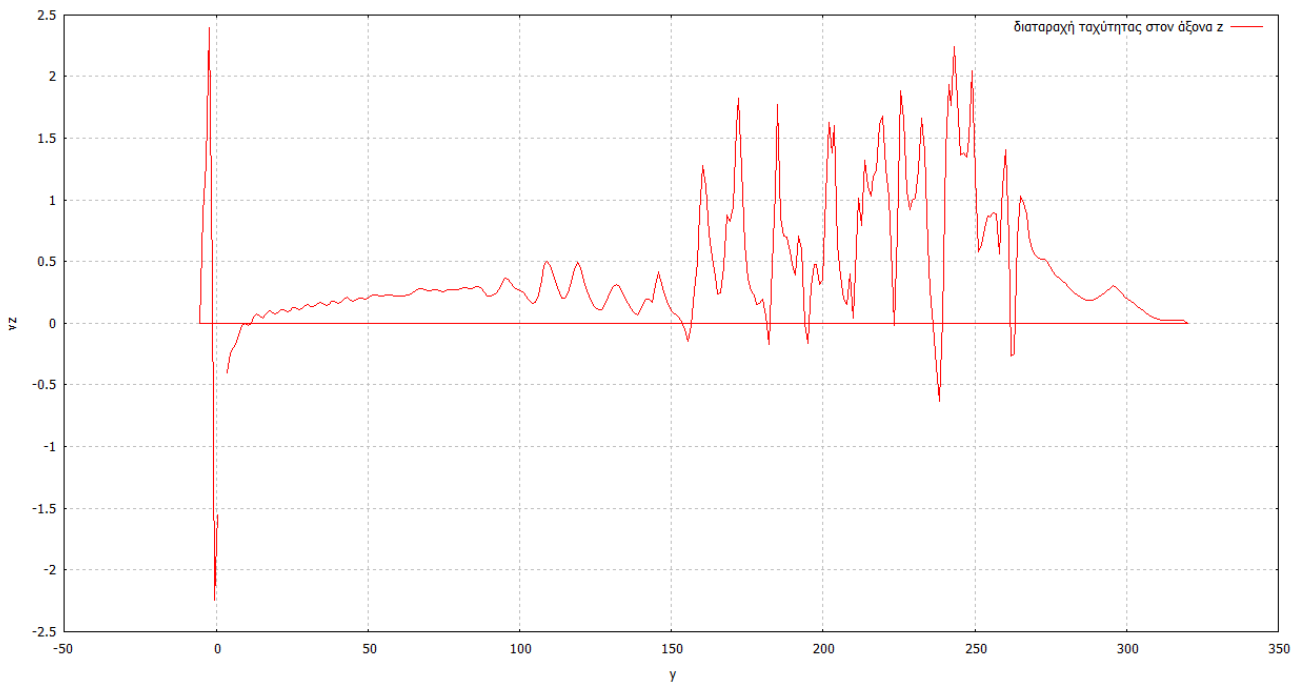
Εικόνα 21 Η ταχύτητα του νέου πεδίου ταχυτήτων που μελετάται στην y -διεύθυνση στο σημείο εισόδου του ελικοπτέρου



Εικόνα 22 Η ταχύτητα του νέου πεδίου ταχυτήτων που μελετάται στην y -διεύθυνση, υπό την επίδραση της επ' άπειρον ταχύτητας στο σημείο εισόδου του ελικοπτέρου



Εικόνα 23 Η ταχύτητα του νέου πεδίου ταχυτήτων που μελετάται στην x-διεύθυνση στο σημείο εισόδου του ελικοπτέρου



Εικόνα 24 Η ταχύτητα του νέου πεδίου ταχυτήτων που μελετάται στην z-διεύθυνση στο σημείο εισόδου του ελικοπτέρου

Ο ομόρρους που δημιουργείται εκτείνεται σε μια απόσταση περίπου 1300m κατά τη διεύθυνση του άξονα x , όπως φαίνεται στα σχήματα. Ο αεροδυναμικός κώδικας GENUVP προκειμένου να μπορεί να διαχειριστεί και να εκτελέσει τους απαραίτητους υπολογισμούς, απαιτεί ο ομόρρους που δημιουργείται να διαμορφωθεί σε μορφή πλέγματος είτε κυλινδρικού, είτε παραλληλεπίπεδου σχήματος. Επιπλέον στο πλέγμα που δημιουργείται πρέπει σε κάθε σημείο-κορυφή, να αντιστοιχούν τρεις συντεταγμένες που ορίζουν τη θέση του σημείου στο χώρο και ακόμα τρεις συντεταγμένες που ορίζουν τις συνιστώσες της ταχύτητάς του.

Η διαμόρφωση του πλέγματος γίνεται με τη χρήση του κώδικα `vrm_free`, ο οποίος χρησιμοποιεί την τεχνική *particle mesh* για την προσομοίωση στοιχείων στροβιλότητας. Η τεχνική *particle mesh* βασίζεται στο γεγονός ότι η αλληλεπίδραση των στοιχείων

στροβιλότητας μπορεί να μελετηθεί με την επίλυση της εξίσωσης *Poisson* $\nabla^2 \bar{\Psi} = -\bar{\omega}$. Για κάθε στοιχείο στροβιλότητας του ομόρρου ορίζεται η στροβιλότητά του $\bar{\Omega}$,

$$\bar{\omega} = \frac{1}{dx \cdot dy \cdot dz} \sum_{VP}^{NVR} \bar{\Omega}_{VP} \cdot \zeta \left(\bar{X}_{ijk} - \bar{X}_{VP} \right),$$

προβάλλεται το μέγεθος $\bar{\omega}$ στα εσωτερικά σημεία του πλέγματος. Άρα χρησιμοποιώντας το γρήγορο μετασχηματισμό *Fourier* επιλύουμε την εξίσωση *Poisson* και έτσι υπολογίζονται οι τιμές της συνάρτησης $\bar{\Psi}$ και στις τρεις κατευθύνσεις για κάθε εσωτερικό σημείο του πλέγματος. Στη συνέχεια επιλύοντας την εξίσωση $\bar{V} = \text{rot} \bar{\Psi}$ υπολογίζονται οι ταχύτητες στους κόμβους και με εφαρμογή πεπερασμένων διαφορών υπολογίζονται και οι παράγωγοι των ταχυτήτων. Τελικά με παρεμβολή των ταχυτήτων και των παραμορφώσεων των κόμβων του πλέγματος υπολογίζονται υπολογίζονται αντίστροφα οι ταχύτητες και οι παραμορφώσεις των στοιχείων στροβιλότητας. Πρέπει επίσης να λάβουμε υπόψιν μας τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος, δηλαδή τις τιμές της συνάρτησης $\bar{\Psi}$ στα όρια του πλέγματος. Συνεπώς το πλέγμα που δημιουργείται ορίζει το πεδίο ταχύτητας του τυρβώδους ανέμου.

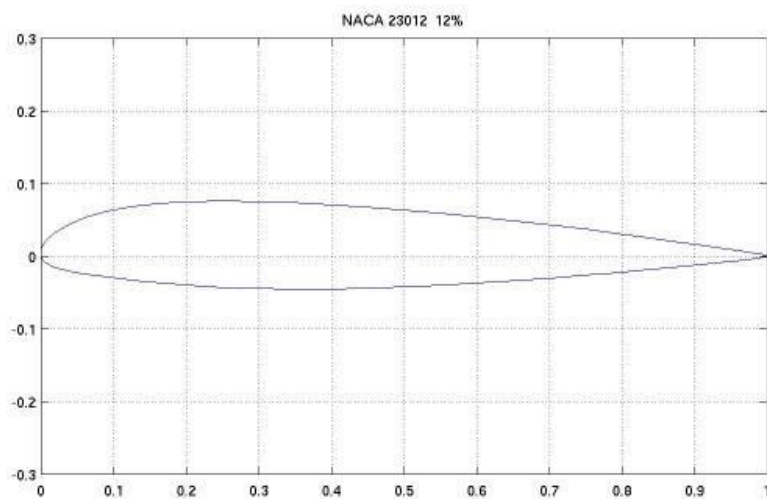
Ο κώδικας `vrm_free` όταν παράγει το πλέγμα που αντιστοιχεί στον τυρβώδη άνεμο, γράφει πρώτα τα σημεία του πλέγματος στον x -άξονα από τα αρνητικά προς τα θετικά, στη συνέχεια στον y -άξονα από τα αρνητικά προς τα θετικά και τελικά στον z -άξονα από τα αρνητικά προς τα θετικά. Η εφαρμογή που εξετάζουμε απαιτεί την περιστροφή του πλέγματος κατά 90° ώστε το ελικόπτερο να πετά κάθετα στον ομόρρο της ανεμογεννήτριας. Επίσης ο κώδικας `hGast` δέχεται το πλέγμα του πεδίου ταχύτητας του τυρβώδους ανέμου, διαβάζοντας τα στοιχεία του αρχικά κατά τον y -άξονα από τα αρνητικά προς τα θετικά, στη συνέχεια κατά τον z -άξονα από τα αρνητικά προς τα θετικά και στη συνέχεια κατά τον x -άξονα από τα αρνητικά προς τα θετικά. Γι' αυτό το λόγο αναδιατάσσουμε κατάλληλα τα στοιχεία τον προσανατολισμό του πλέγματος του τυρβώδους ανέμου, καθώς και τον τρόπο που διαβάζονται τα στοιχεία του.

Συνεπώς, το ελικόπτερο εισέρχεται σε μια περιοχή τυρβώδους ανέμου που δημιουργείται από τη λειτουργία μιας ανεμογεννήτριας και δεχόμενο έναν πλάγιο άνεμο έντασης $v_{gen} = 10 \text{ m/s}$, που προσομοιώνει την επ' άπειρο ταχύτητα της ανεμογεννήτριας, λειτουργεί

σε μια περιοχή που δέχεται ένα πλάγιο άνεμο έντασης από 7 m/s έως 13 m/s στην y -διεύθυνση και διαταραχές έντασης $\pm 2.5 \text{ m/s}$ κατά τις διευθύνσεις x και z .

3.2 Το ελικόπτερο

Προκειμένου να προσομοιώσουμε το ελικόπτερο χρησιμοποιούμε μόνο το κύριο στροφέιο του. Επιλέξαμε το στροφέιο του ελικοπτέρου BO-105 το οποίο χρησιμοποιείται σε κλίμακα 1:2.46 η ακτίνα του κάθε πτερυγίου είναι $R = 2 \text{ m}$, με αεροτομή NACA 23012 και ταχύτητα περιστροφής του στροφείου $\omega = 109.9 \text{ rad/sec}$. Τα πτερύγια του κύριου στροφείου μοντελοποιήθηκαν τόσο ως ανωστικές επιφάνειες με πάχος.



Εικόνα 25 Η πλάγια όψη της αεροτομής NACA 23012

Η προσομοίωση της πτήσης γίνεται τόσο σε συνθήκες αδιατάραχτης ροής όσο και σε συνθήκες πτήσης εντός της περιοχής του ομόρρου της ανεμογεννήτριας.

Στην περίπτωση που η πτήση του ελικοπτέρου γίνεται εντός του πλάγιου πεδίου ταχύτητας, δημιουργείται ένα πλαίσιο τριγώνου σχήματος κατά τους άξονες y και z με μήκος πλευράς 20m, το οποίο μας δίνει το εύρος του τυρβώδους ανέμου που αλληλεπιδρά με το

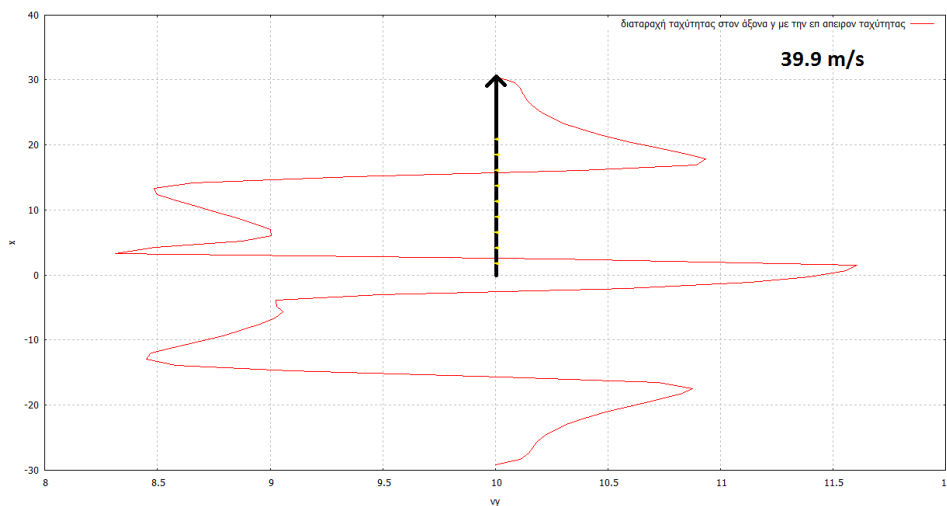
ελικόπτερο. Όσον αφορά την κατεύθυνση x καθ' όλη τη διάρκεια της προσομοίωσης κινείται σε όλο το εύρος του πεδίου ταχύτητας που βρίσκεται στη συγκεκριμένη διεύθυνση.

Δοκιμάζονται δύο ταχύτητες πτήσης του ελικοπτέρου, $v_1 = 39.9 \text{ m/s}$ και $v_2 = 50.5 \text{ m/s}$.

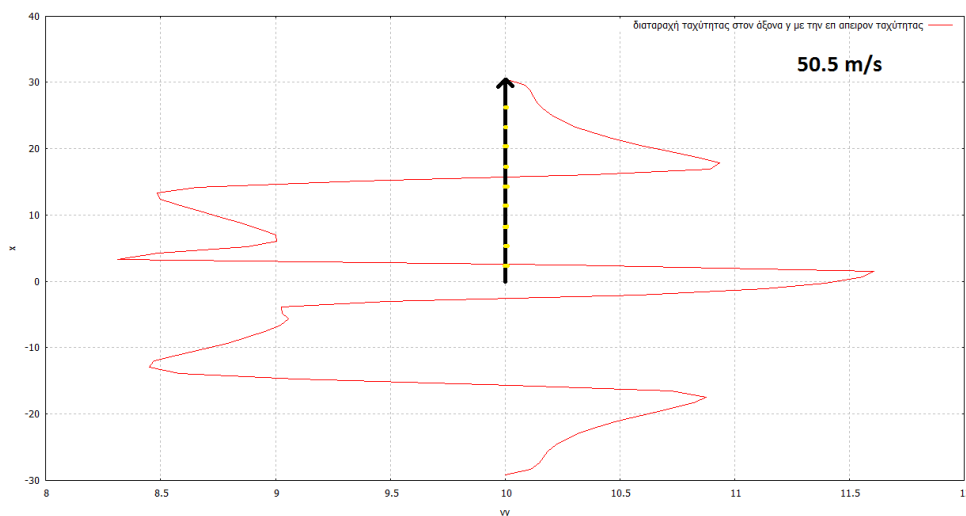
Σκοπός μας είναι να μελετήσουμε και να εξάγουμε διάφορα συμπεράσματα συγκρίνοντας τις αλλαγές που προκύπτουν στα αεροδυναμικά φορτία αναλόγως:

- την επίδραση του τυρβώδους ανέμου στα αεροδυναμικά φορτία που δέχονται τα πτερύγια, σε σχέση με πτήση σε αδιατάραχη ροή
- τις περιπτώσεις διαφορετικών ταχυτήτων πτήσεως.

Το ελικόπτερο εισήχθει κατά τον y -άξονα σε απόσταση 45m από την πηγή του πλάγιου πεδίου σε απόσταση 30m κατά τον z -άξονα και σε απόσταση 30m κατά τον x -άξονα και λειτούργησε για χρόνο 0.6 sec σε κάθε περίπτωση.



Εικόνα 26 Αναπαράσταση της πτήσης του ελικοπτέρου με ταχύτητα 39.9 m/s



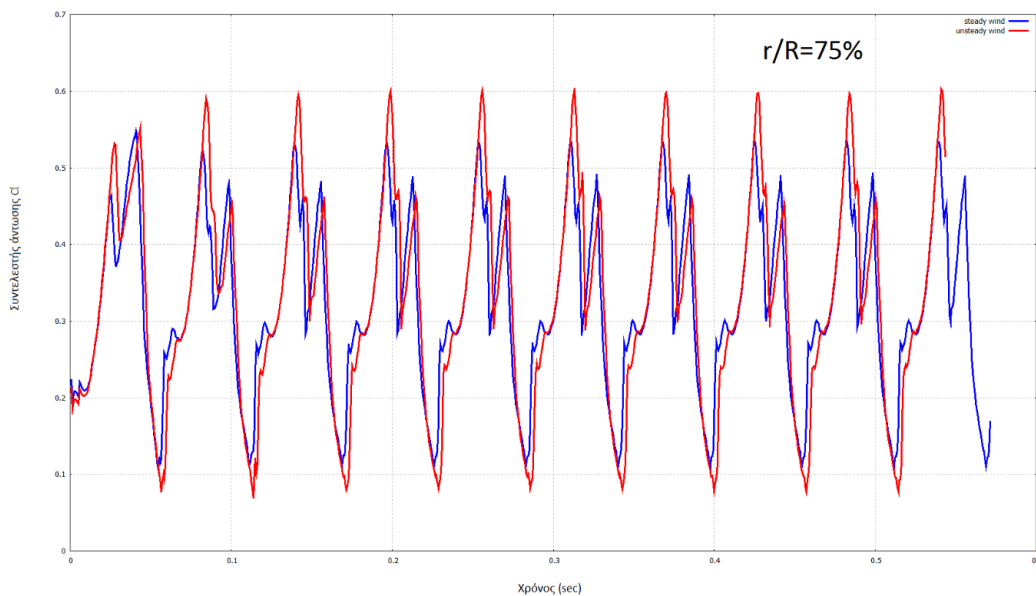
Εικόνα 27 Αναπαράσταση της πτήσης του ελικοπτέρου με ταχύτητα 50.5 m/s

Κεφάλαιο 4: Προσομοίωση πτήσης με ταχύτητα 39.9 m/s

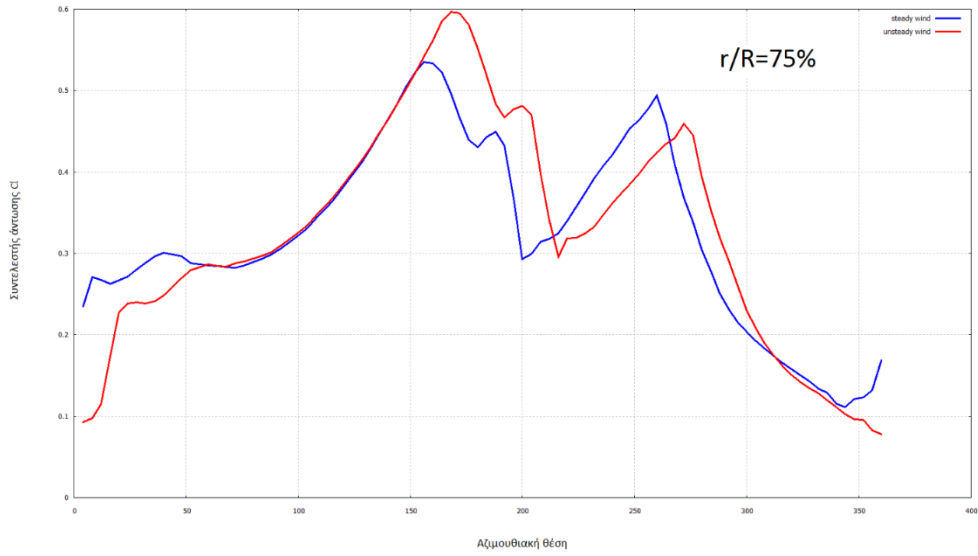
Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των υπολογισμών των αεροδυναμικών φορτίων που αναπτύσσονται στο στροφέιο του ελικοπτέρου με ταχύτητα πτήσης $v = 39.9 \text{ m/s}$. Τα αποτελέσματα που ακολουθούν συγκρίνουν την περίπτωση της πτήσης σε αδιατάραχτη ροή αέρα και την περίπτωση της λειτουργίας του ελικοπτέρου εντός του πεδίου ταχύτητας που έχουμε δημιουργήσει. Παρουσιάζονται, οι συντελεστές άντωσης, οπισθέλκουσας, ο συντελεστής κάθετης δύναμης, ο συντελεστής εφαπτομενικής δύναμης και ο συντελεστής ροπής πρόνευσης σε τρεις ακτινικές θέσεις ενός πτερυγίου (75%, 87%, 92%) για κάθε θέση του αζιμουθίου, καθώς και η εξέλιξη τους στο χρόνο για δέκα περιστροφές του στροφέιου. Επίσης παρουσιάζεται η κατανομή του συντελεστή πίεσης κατά μήκος της χορδής του πτερυγίου σε δύο ακτινικές θέσεις (75%, 87%) για έξι θέσεις του αζιμουθίου ($0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 270^\circ, 300^\circ$). Τέλος παρουσιάζεται η χρονική εξέλιξη της άντωσης, της ώσης και της ροπής πρόνευσης ολόκληρου του στροφέιου καθώς και η εξέλιξη τους κατά μια πλήρη περιστροφή.

Στα διαγράμματα, η μπλε γραμμή συμβολίζει την περίπτωση της αδιατάραχτης ροής και η κόκκινη την περίπτωση πτήσης υπό την επίδραση του πεδίου ταχύτητας που δημιουργήσαμε, όπου φαίνεται με λεπτομέρεια η 8^η περιστροφή.

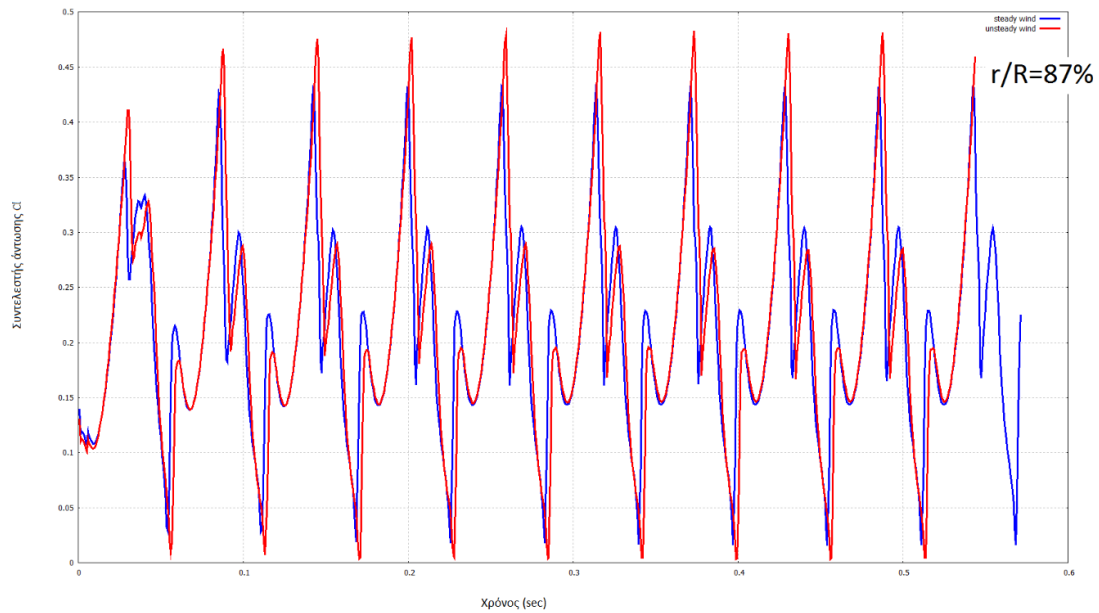
4.1 Υπολογισμός του συντελεστή άντωσης



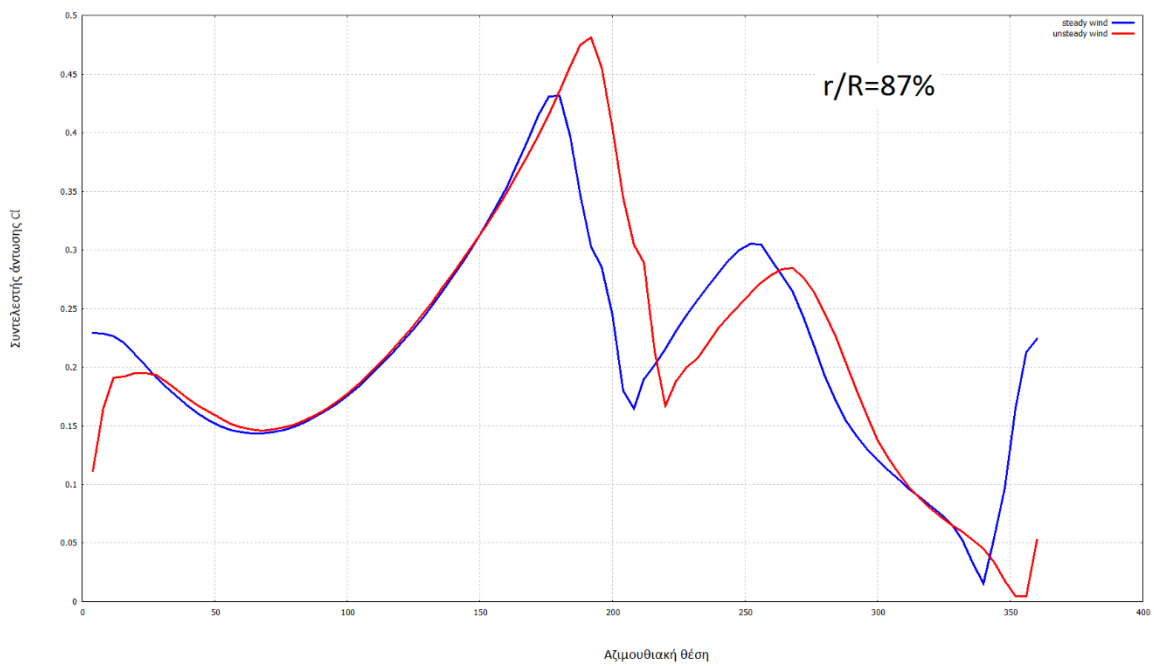
Εικόνα 28 Εξέλιξη του συντελεστή άντωσης στο χρόνο στο 75% του πτερυγίου για ταχύτητα πτήσης 39.9m/s



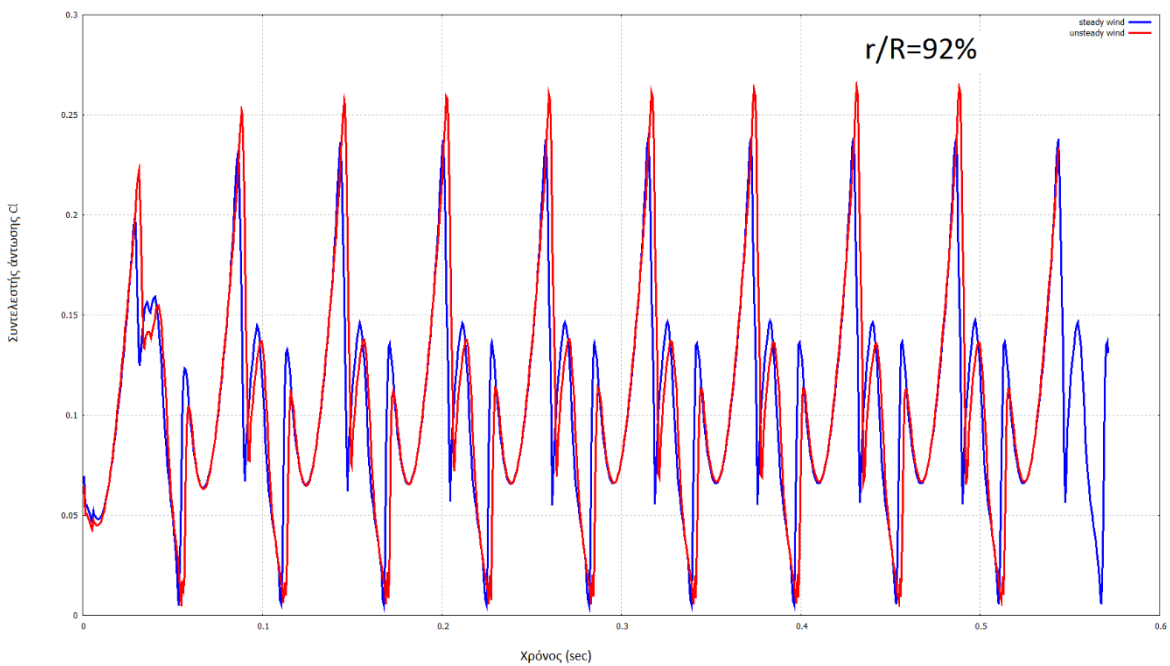
Εικόνα 29 Εξέλιξη του συντελεστή άντωσης κατά μια πλήρη περιστροφή στο 75% του περυγίου για ταχύτητα πτήσης 39.9m/s



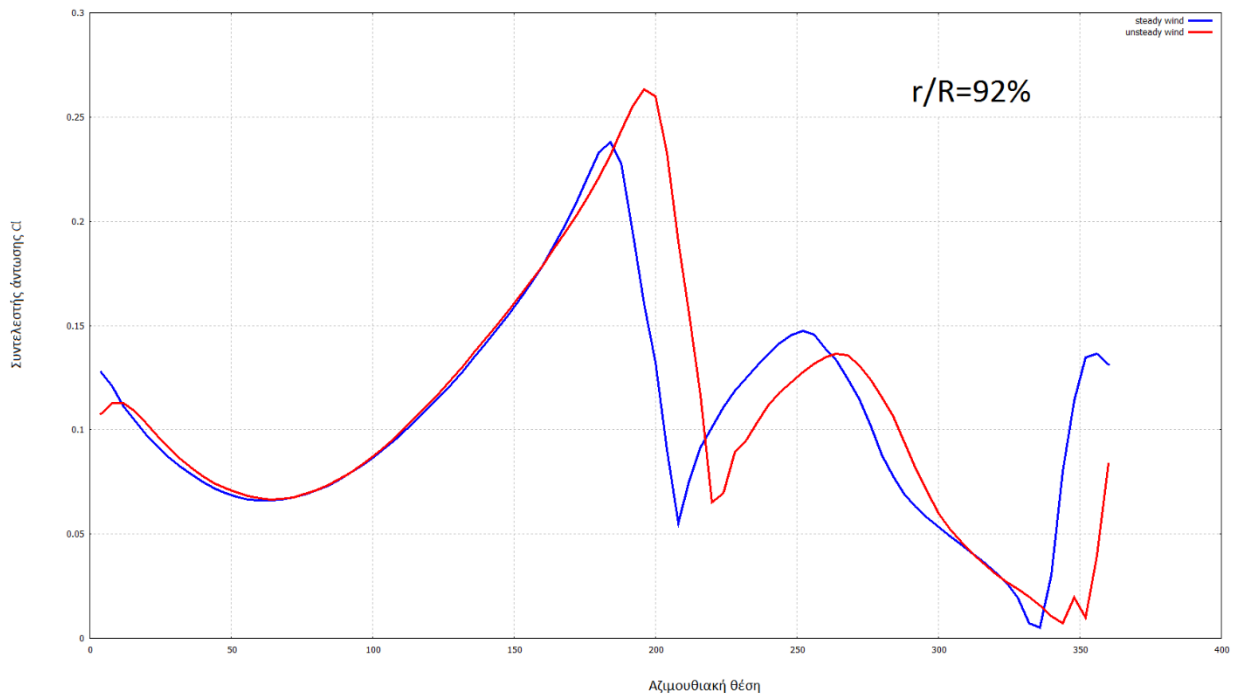
Εικόνα 30 Εξέλιξη του συντελεστή άντωσης στο χρόνο στο 87% του περυγίου για ταχύτητα πτήσης 39.9m/s



Εικόνα 31 Εξέλιξη του συντελεστή άντωσης κατά μια πλήρη περιστροφή στο 87% του πτερυγίου για ταχύτητα πτήσης 39.9m/s

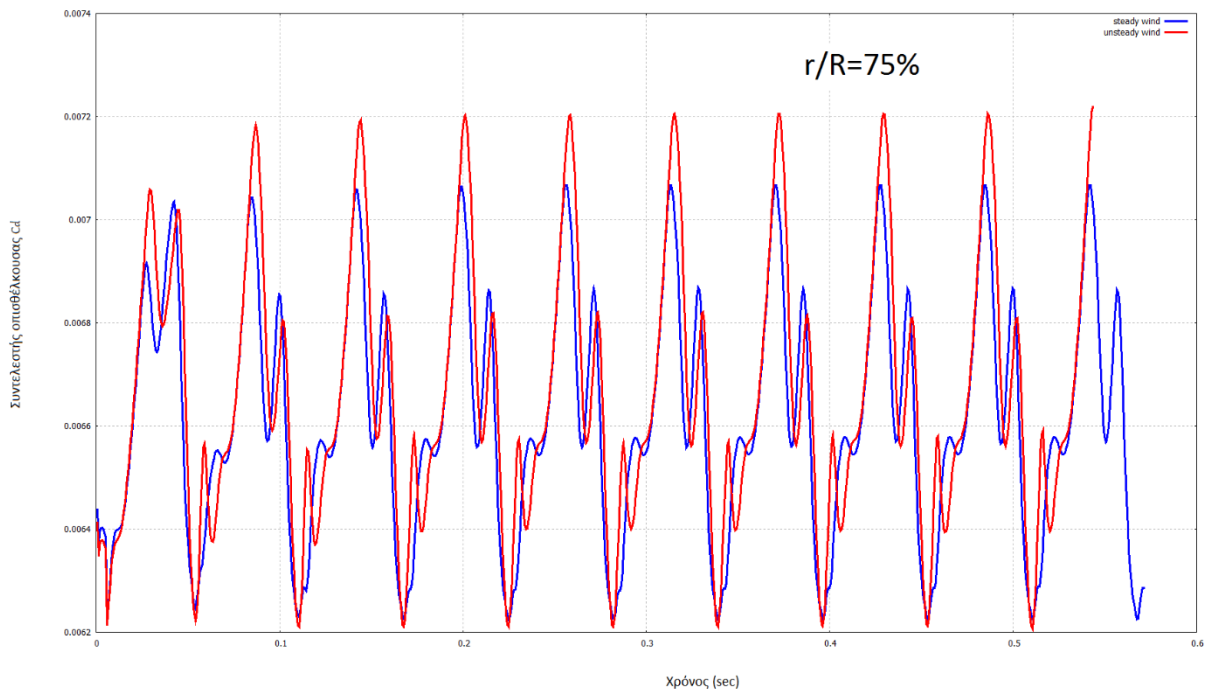


Εικόνα 32 Εξέλιξη του συντελεστή άντωσης στο χρόνο στο 92% του πτερυγίου για ταχύτητα πτήσης 39.9m/s

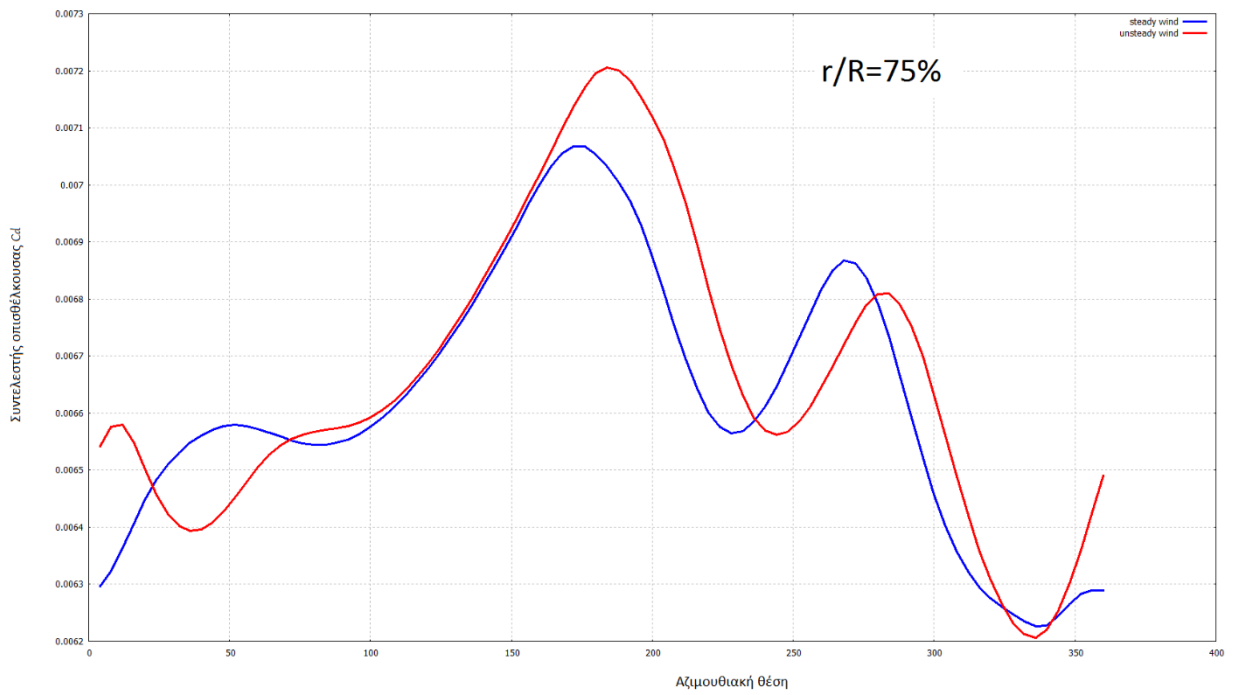


Εικόνα 33 Εξέλιξη του συντελεστή άντωσης κατά μια πλήρη περιστροφή στο 92% του πτερυγίου για ταχύτητα πτήσης 39.9m/s

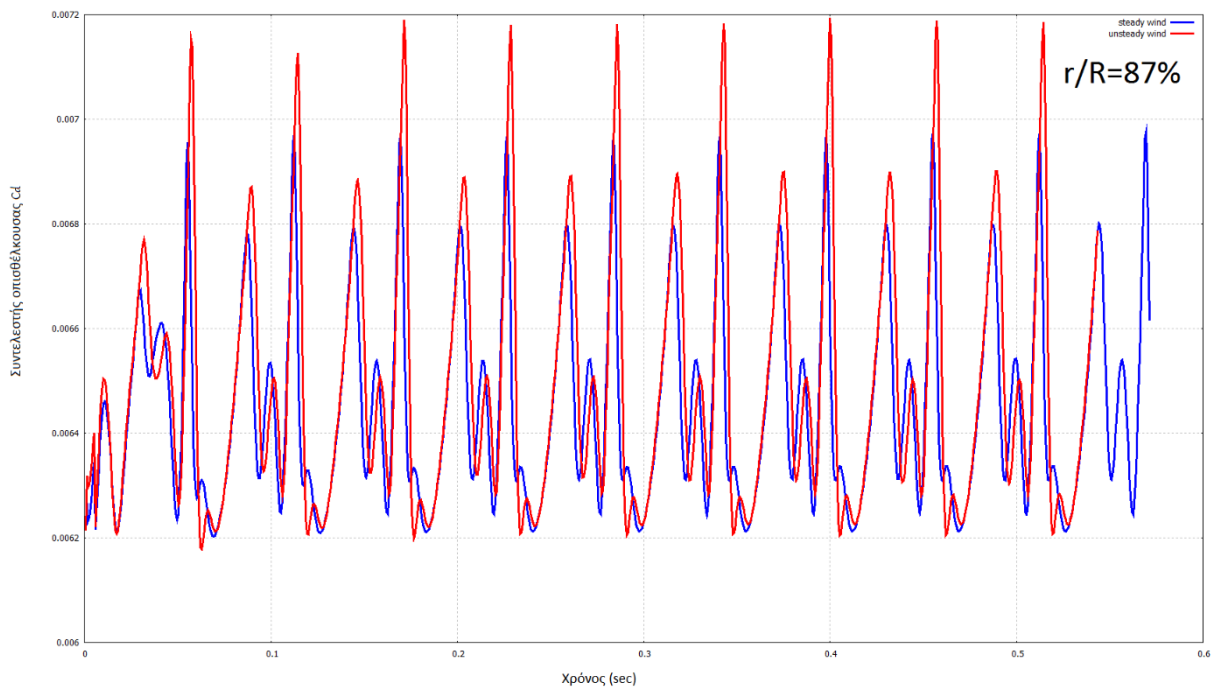
4.2 Υπολογισμός του συντελεστή οπισθέλκουσας



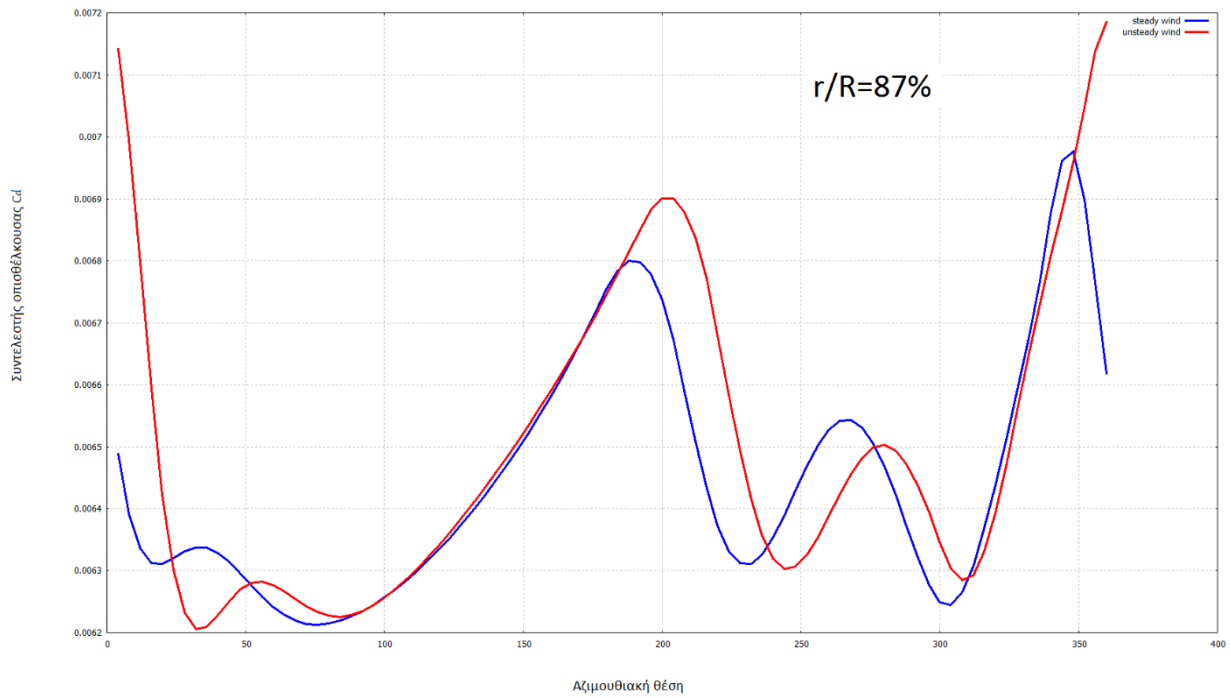
Εικόνα 34 Εξέλιξη του συντελεστή οπισθέλκουσας στο χρόνο στο 75% του πτερυγίου για ταχύτητα πτήσης 39.9m/s



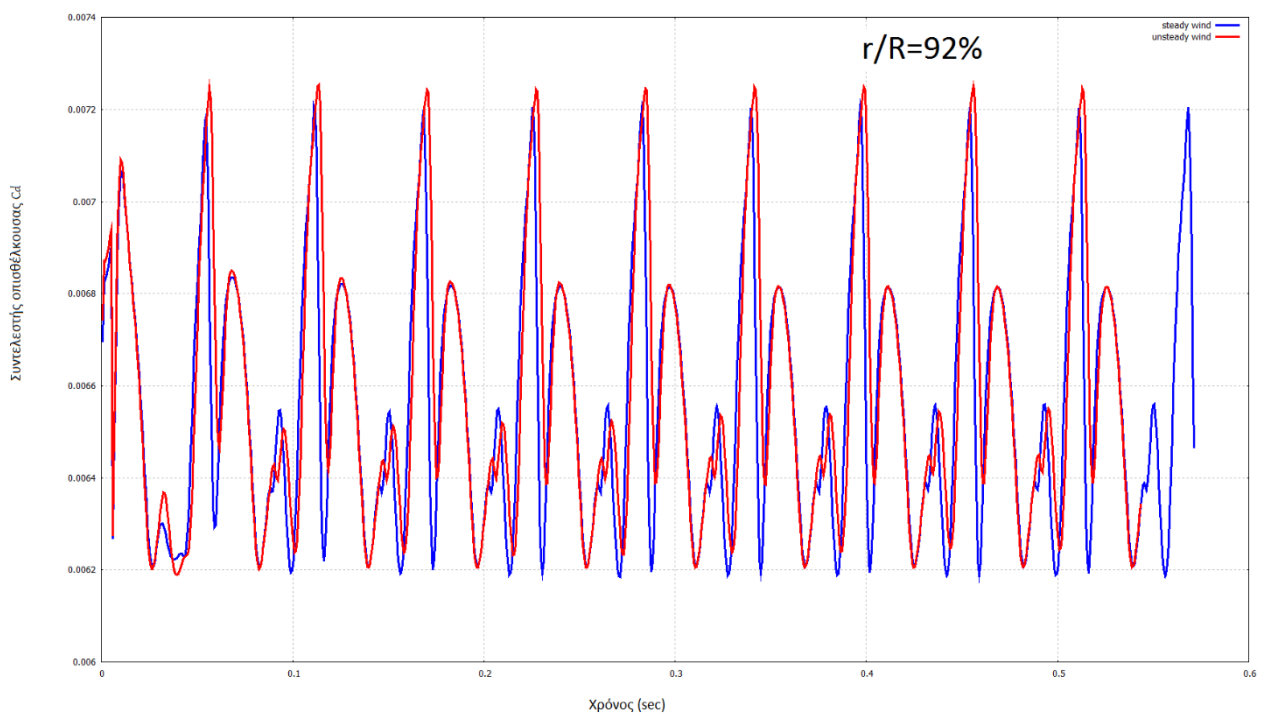
Εικόνα 35 Εξέλιξη του συντελεστή οπισθέλκουσας κατά μια πλήρη περιστροφή στο 75% του πτερυγίου για ταχύτητα πτήσης 39.9m/s



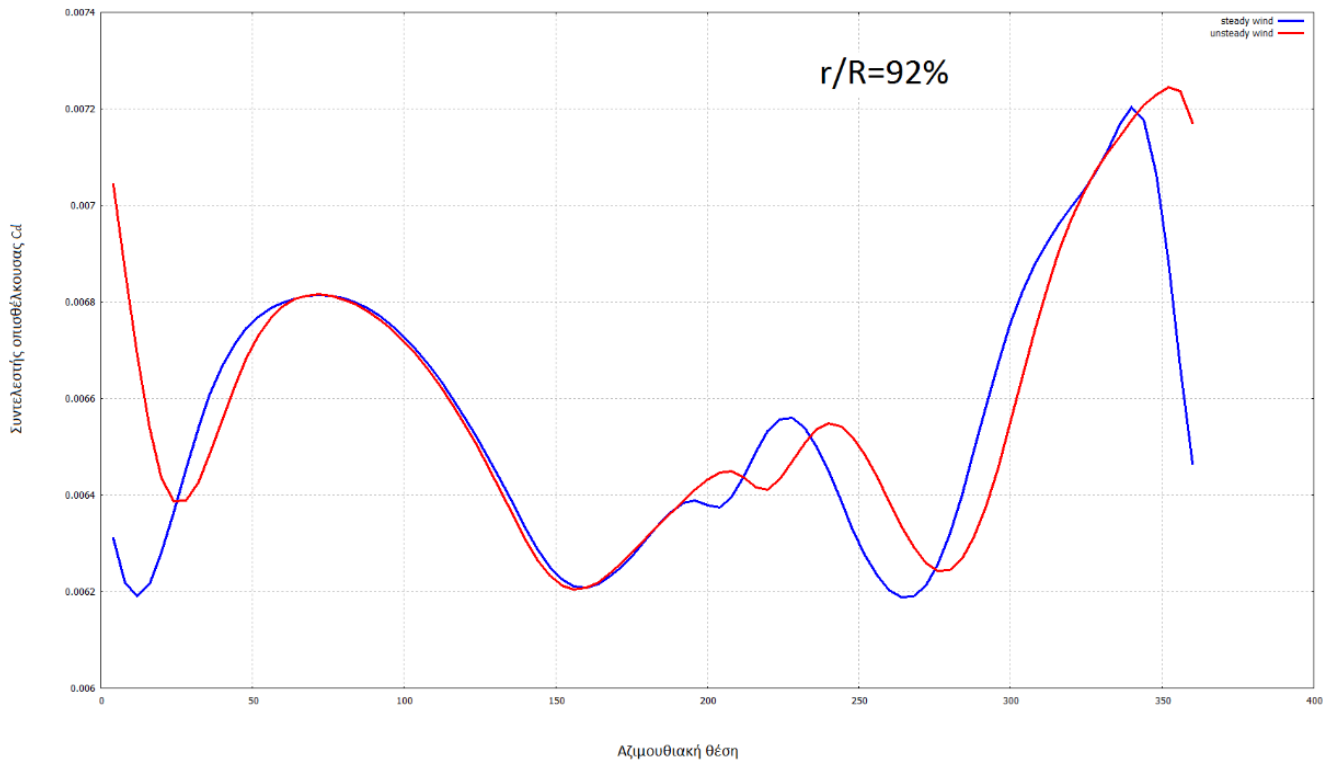
Εικόνα 36 Εξέλιξη του συντελεστή οπισθέλκουσας στο χρόνο στο 87% του πτερυγίου για ταχύτητα πτήσης 39.9m/s



Εικόνα 37 Εξέλιξη του συντελεστή οπισθέλκουσας κατά μια πλήρη περιστροφή στο 87% του πτερυγίου για ταχύτητα πτήσης 39.9m/s

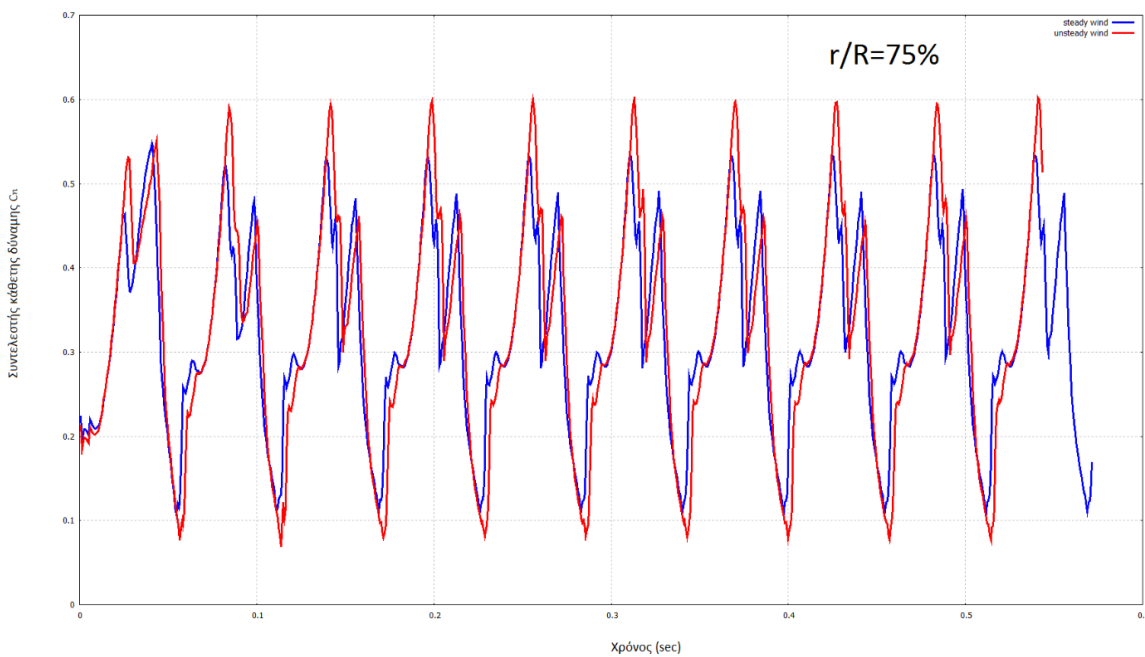


Εικόνα 38 Εξέλιξη του συντελεστή οπισθέλκουσας στο χρόνο στο 92% του πτερυγίου για ταχύτητα πτήσης 39.9m/s

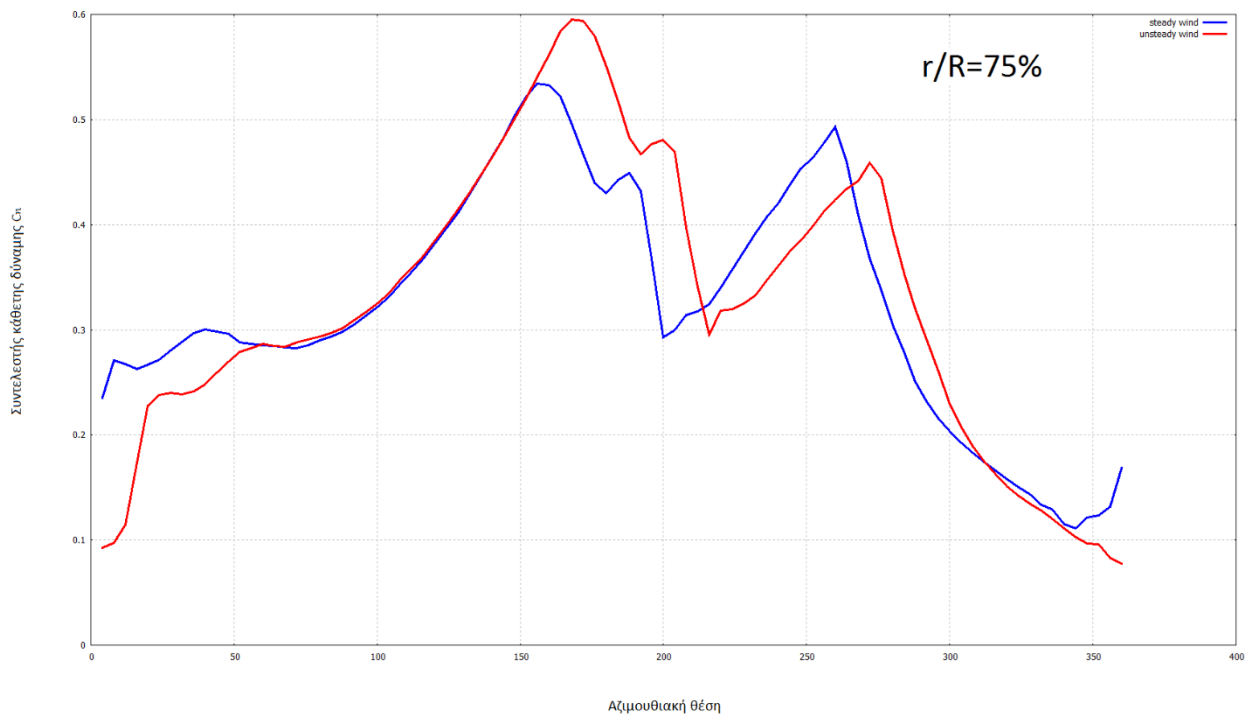


Εικόνα 39 Εξέλιξη του συντελεστή οπισθέλκουσας κατά μια πλήρη περιστροφή στο 92% του πτερυγίου για ταχύτητα πτήσης 39.9m/s

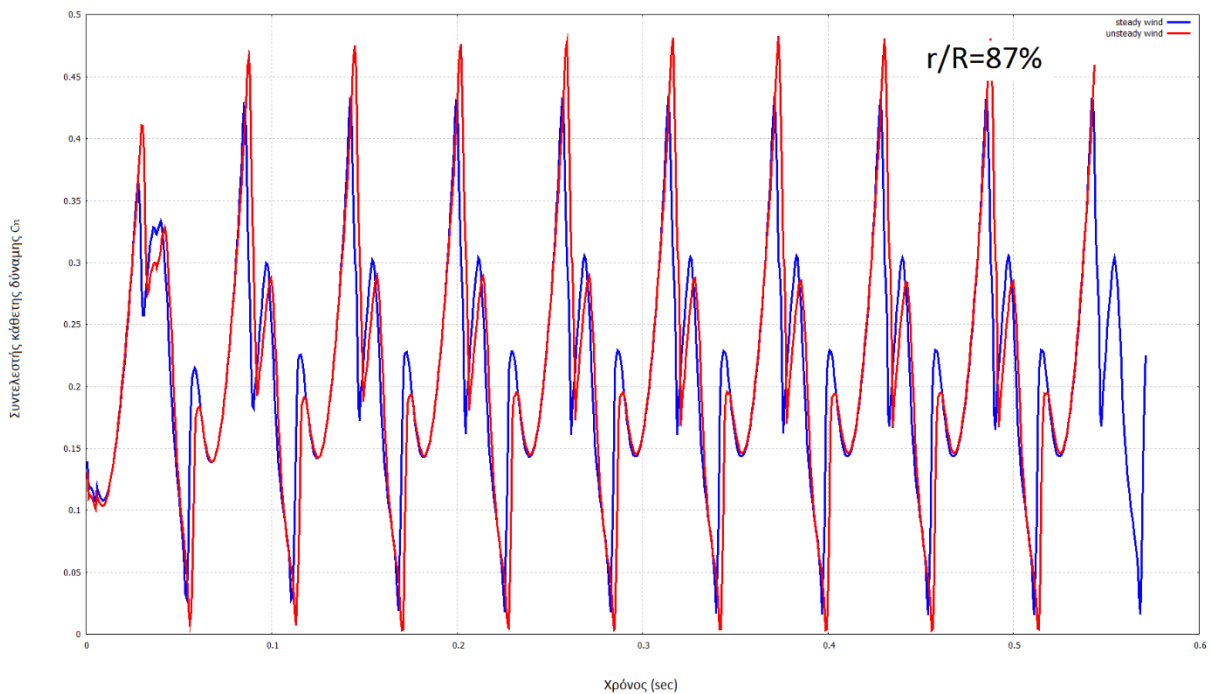
4.3 Υπολογισμός του συντελεστή κάθετης δύναμης



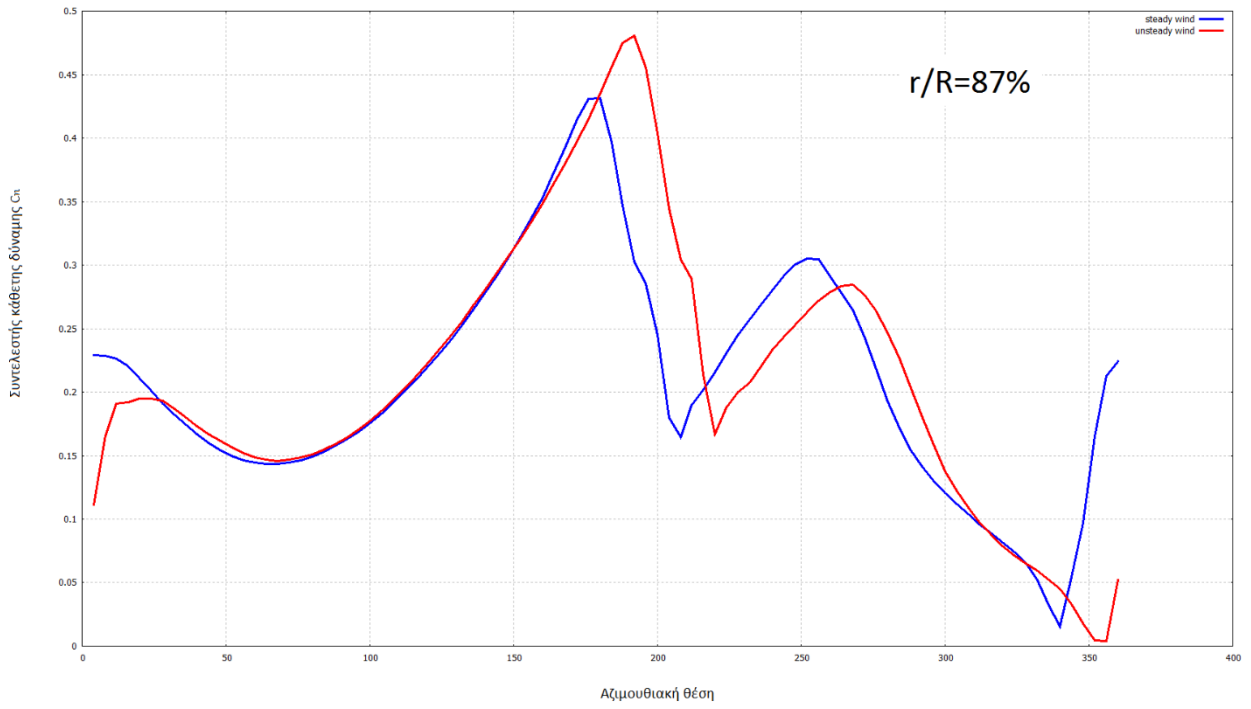
Εικόνα 40 Εξέλιξη του συντελεστή κάθετης δύναμης στο χρόνο στο 75% του πτερυγίου για ταχύτητα πτήσης 39.9m/s



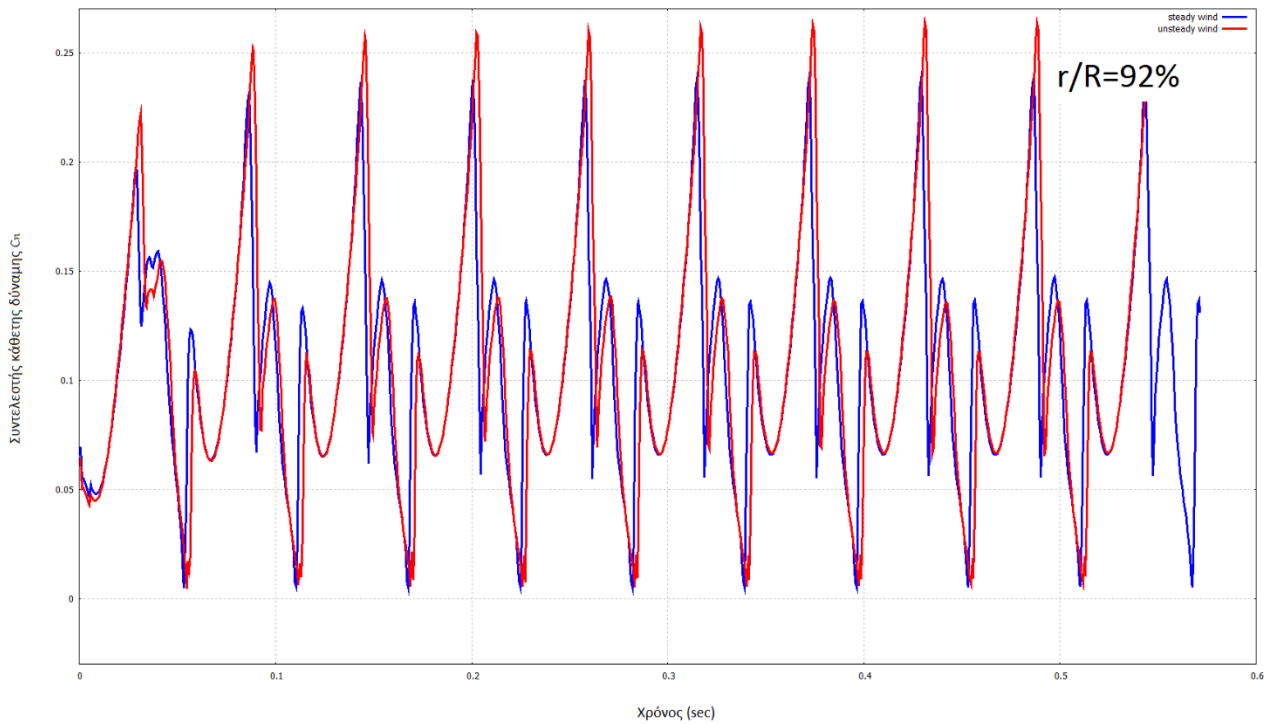
Εικόνα 41 Εξέλιξη του συντελεστή κάθετης δύναμης κατά μια πλήρη περιστροφή στο 75% του περυγίου για ταχύτητα πτήσης 39.9m/s



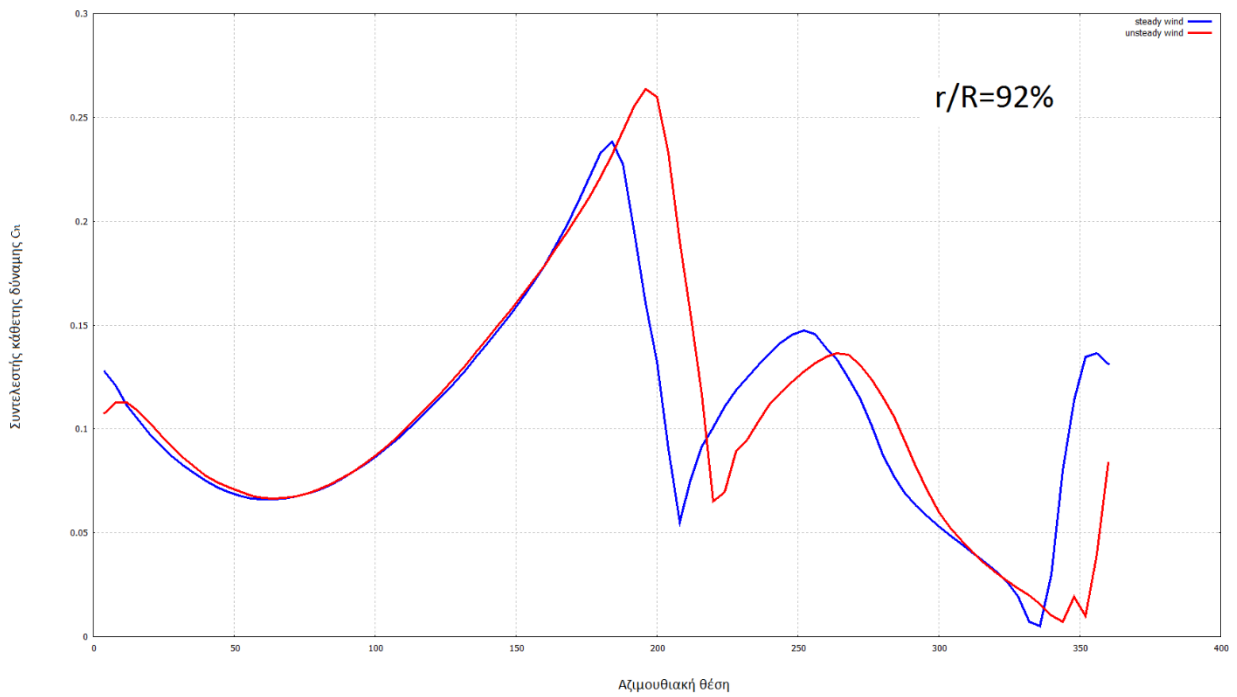
Εικόνα 42 Εξέλιξη του συντελεστή κάθετης δύναμης στο χρόνο στο 87% του περυγίου για ταχύτητα πτήσης 39.9m/s



Εικόνα 43 Εξέλιξη του συντελεστή κάθετης δύναμης κατά μια πλήρη περιστροφή στο 87% του περυγίου για ταχύτητα πτήσης 39.9m/s

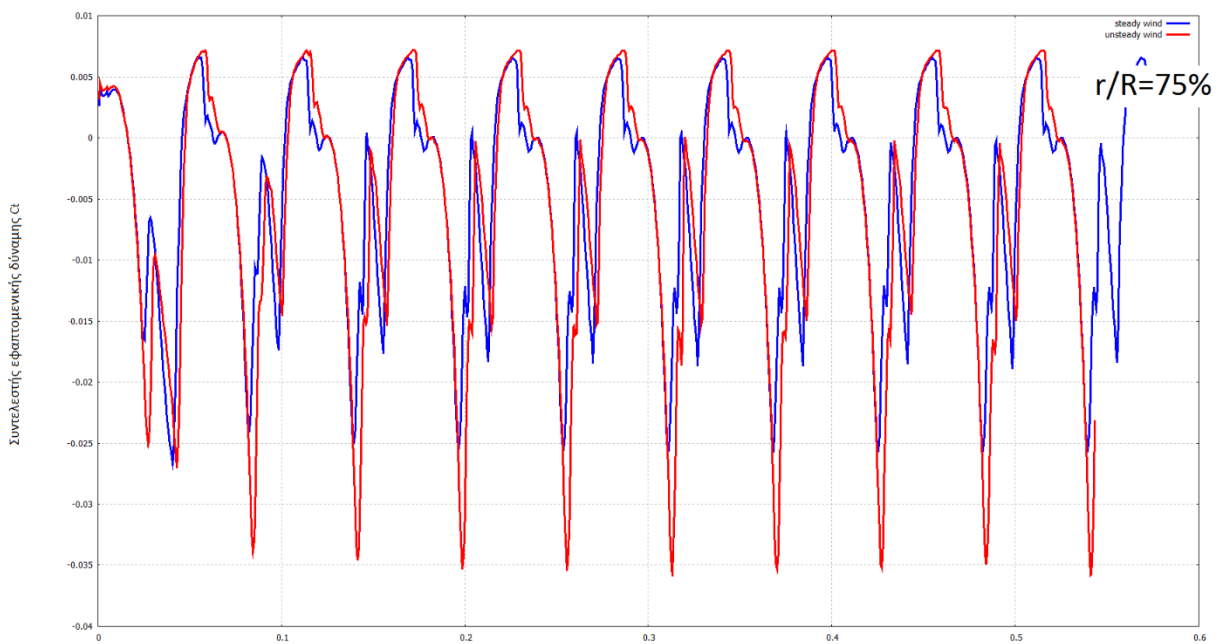


Εικόνα 44 Εξέλιξη του συντελεστή κάθετης δύναμης στο χρόνο στο 92% του περυγίου για ταχύτητα πτήσης 39.9m/s

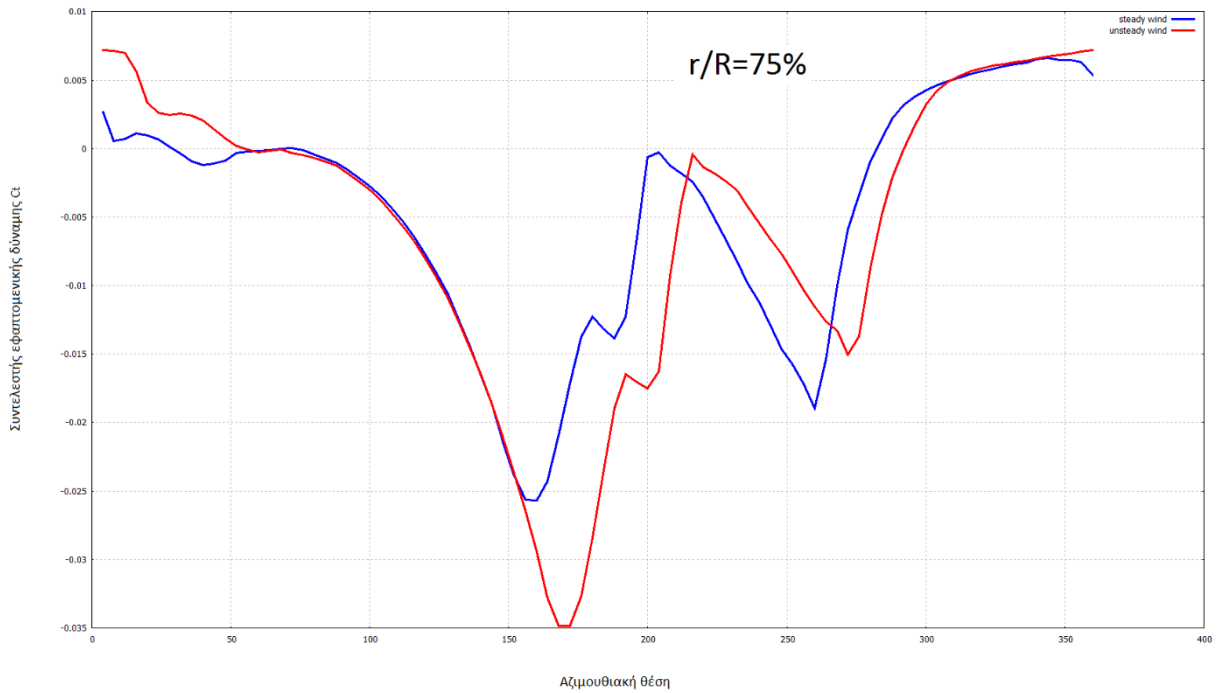


Εικόνα 45 Εξέλιξη του συντελεστή κάθετης δύναμης κατά μια πλήρη περιστροφή στο 92% του πτερυγίου για ταχύτητα πτήσης 39.9m/s

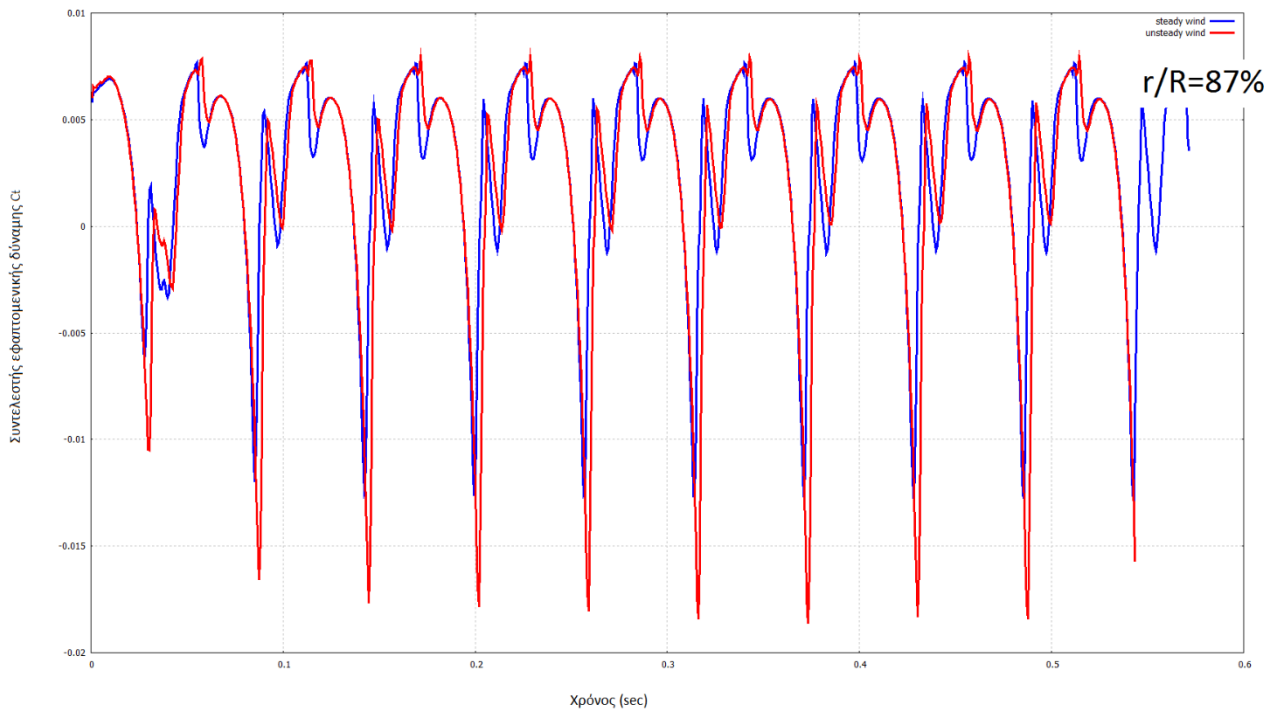
4.4 Υπολογισμός του συντελεστή επαπτομενικής δύναμης



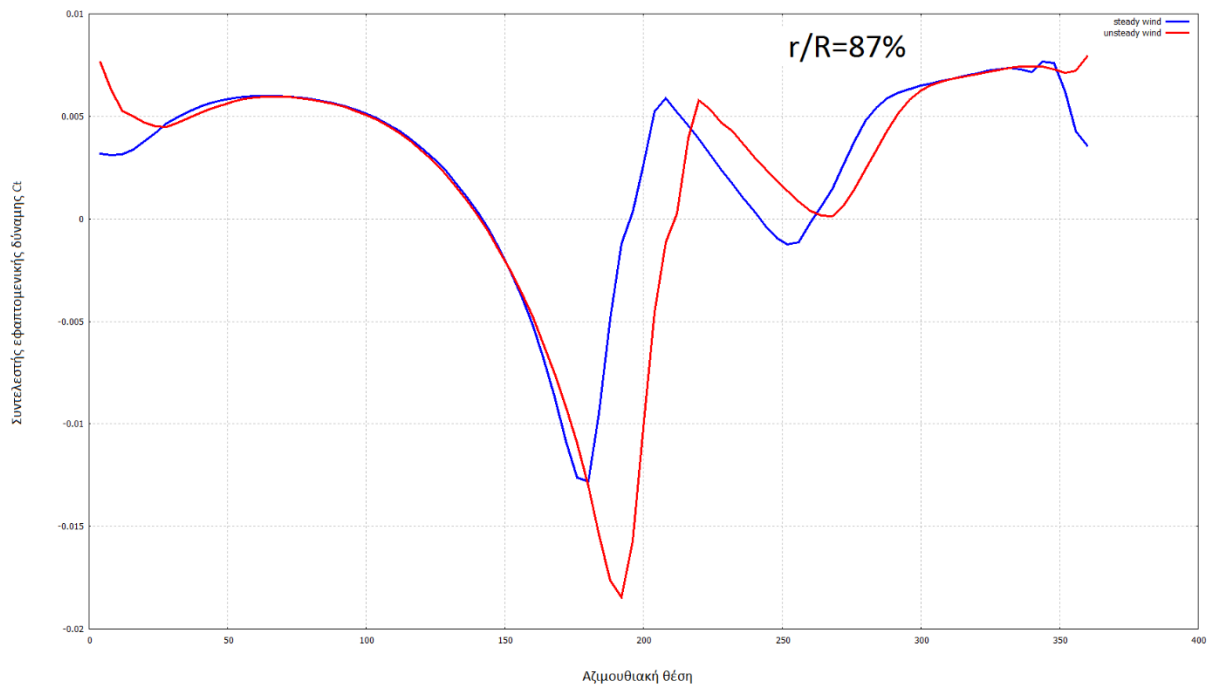
Εικόνα 46 Εξέλιξη του συντελεστή επαπτομενικής δύναμης στο χρόνο στο 75% του πτερυγίου για ταχύτητα πτήσης 39.9m/s



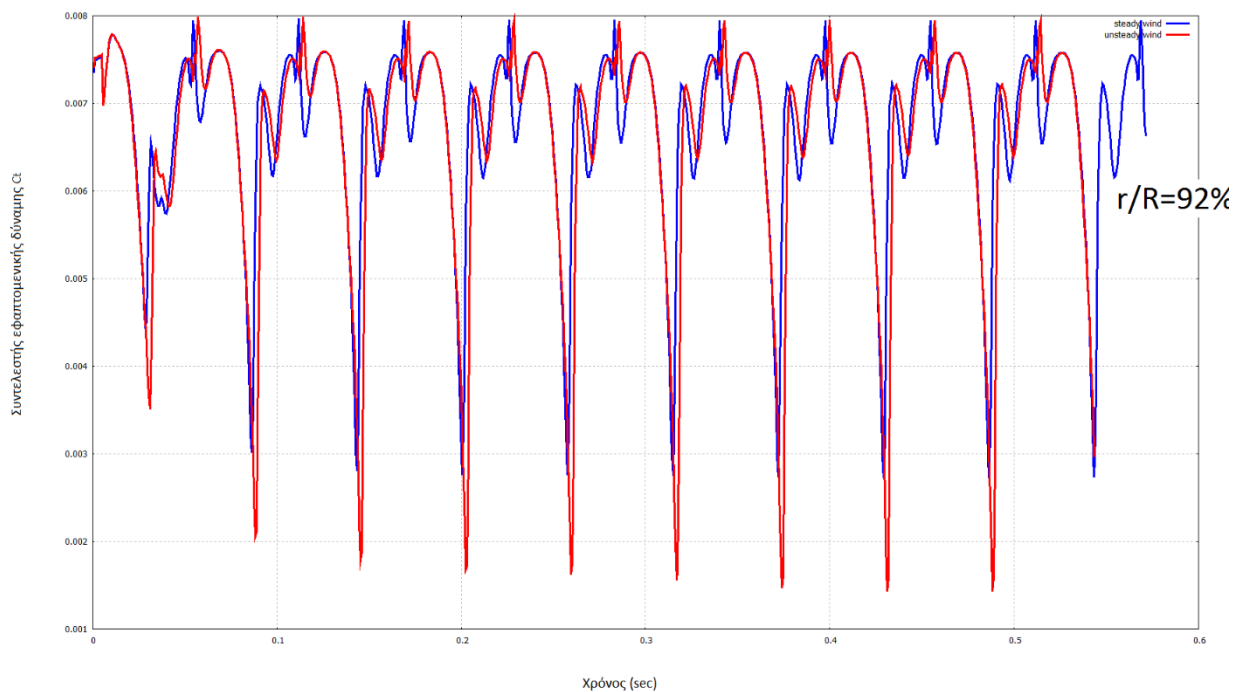
Εικόνα 47 Εξέλιξη του συντελεστή εραπτομενικής δύναμης κατά μια πλήρη περιστροφή στο 75% του πτερυγίου για ταχύτητα πτήσης 39.9m/s



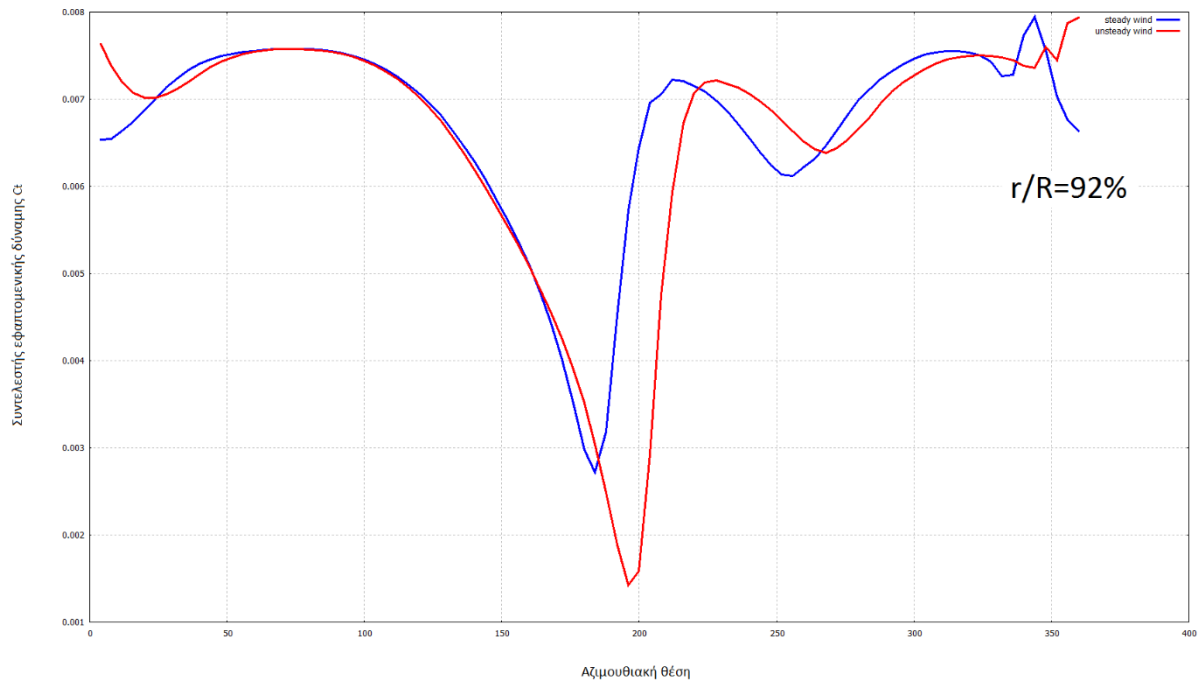
Εικόνα 48 Εξέλιξη του συντελεστή εραπτομενικής δύναμης στο χρόνο στο 87% του πτερυγίου για ταχύτητα πτήσης 39.9m/s



Εικόνα 49 Εξέλιξη του συντελεστή εφαιπτομενικής δύναμης κατά μια πλήρη περιστροφή στο 87% του πτερυγίου για ταχύτητα πτήσης 39.9m/s

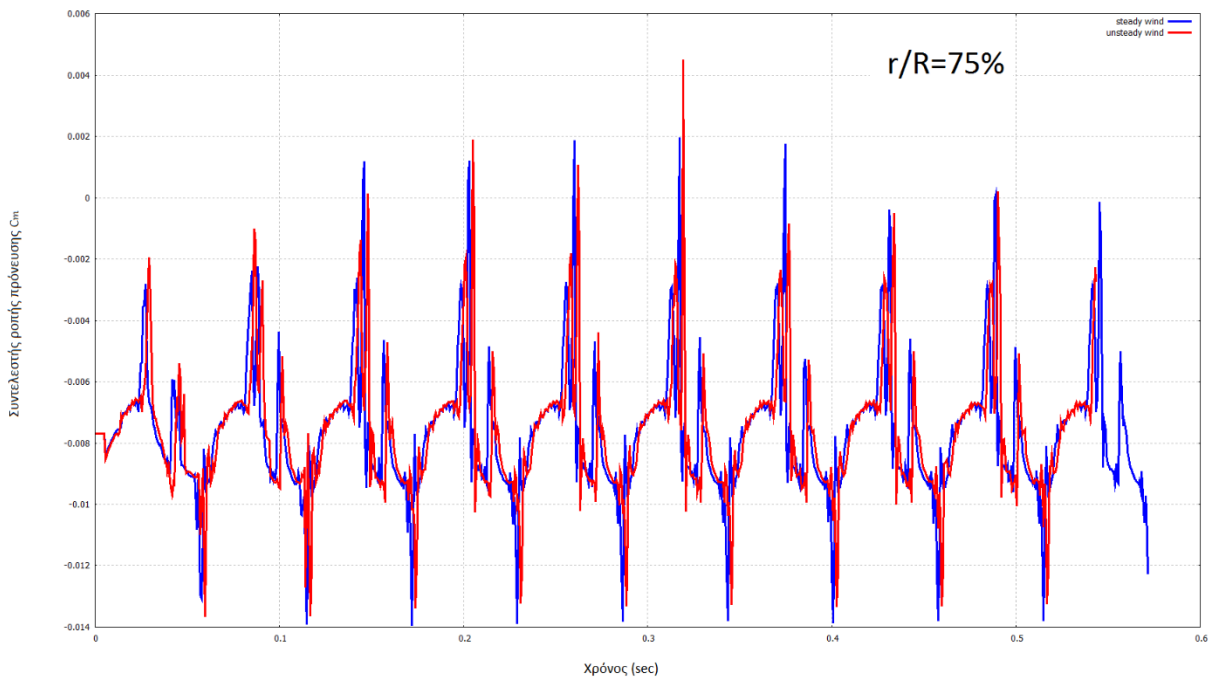


Εικόνα 50 Εξέλιξη του συντελεστή εφαιπτομενικής δύναμης στο χρόνο στο 92% του πτερυγίου για ταχύτητα πτήσης 39.9m/s

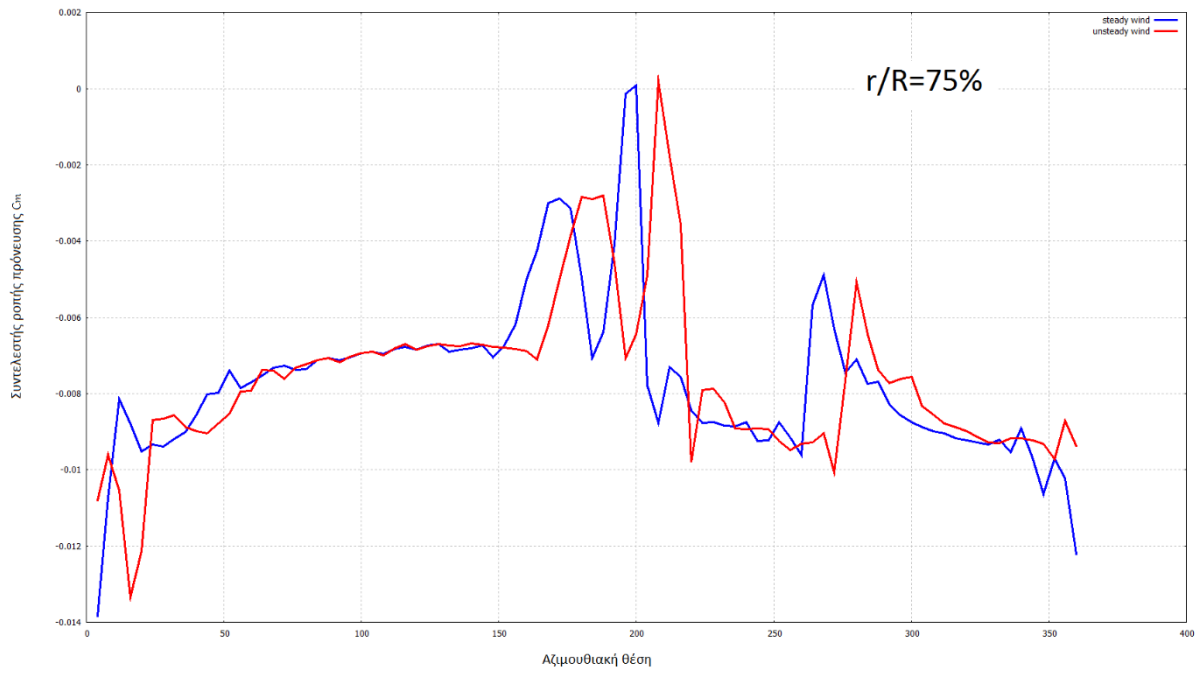


Εικόνα 51 Εξέλιξη του συντελεστή εφαιπομενικής δύναμης κατά μια πλήρη περιστροφή στο 92% του πτερυγίου για ταχύτητα πτήσης 39.9m/s

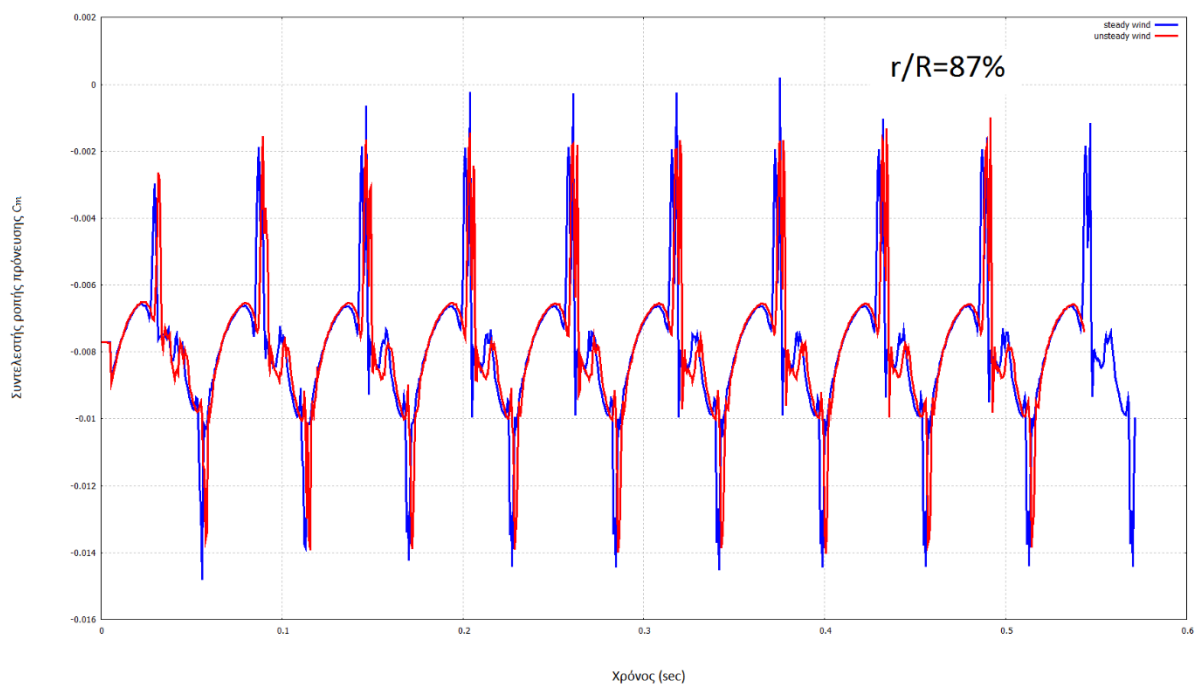
4.5 Υπολογισμός του συντελεστή ροπής πρόνευσης



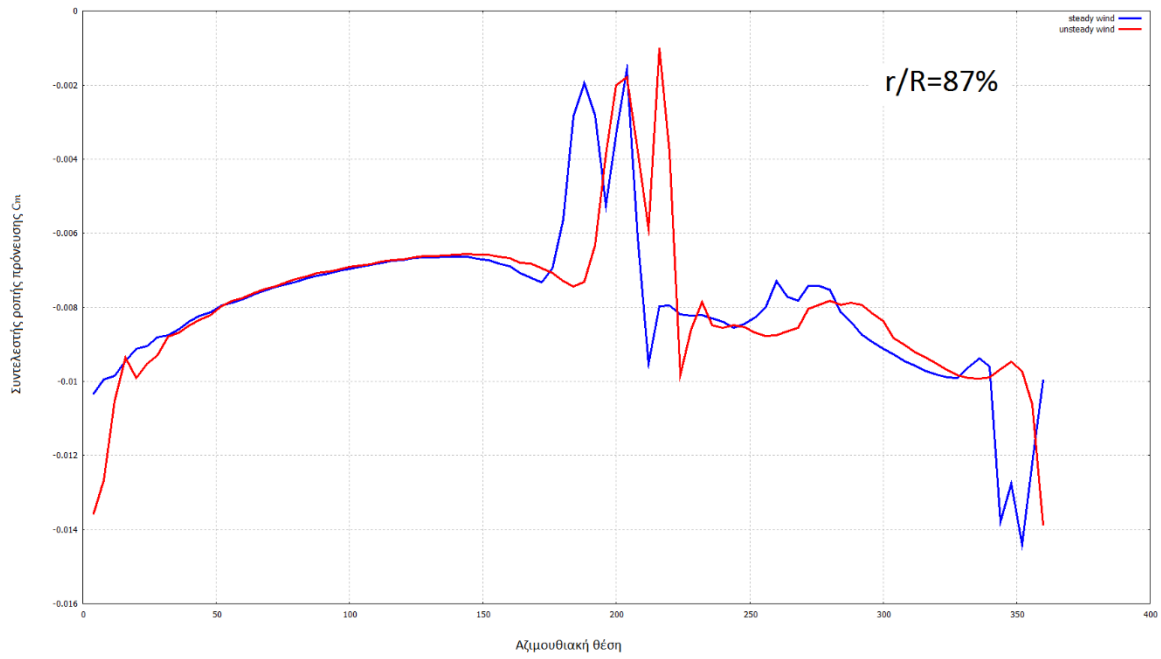
Εικόνα 52 Εξέλιξη του συντελεστή ροπής πρόνευσης στο χρόνο στο 75% του πτερυγίου για ταχύτητα πτήσης 39.9m/s



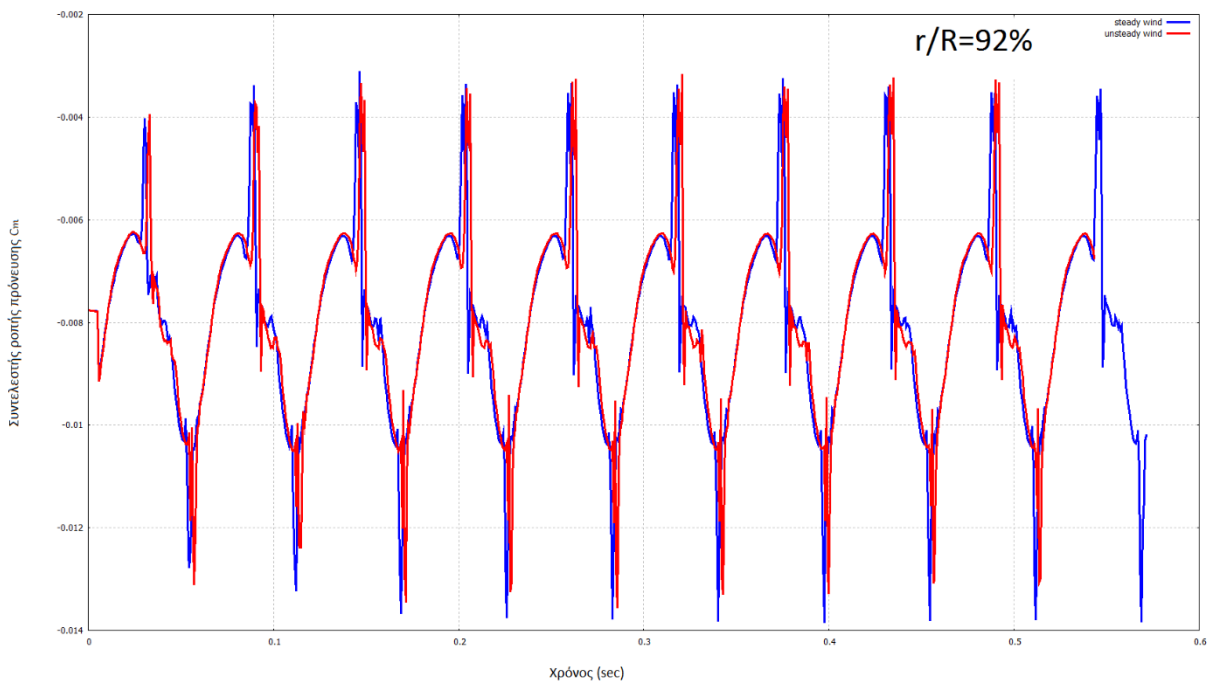
Εικόνα 53 Εξέλιξη του συντελεστή ροπής πρόνευσης κατά μια πλήρη περιστροφή στο 75% του πτερυγίου για ταχύτητα πτήσης 39.9m/s



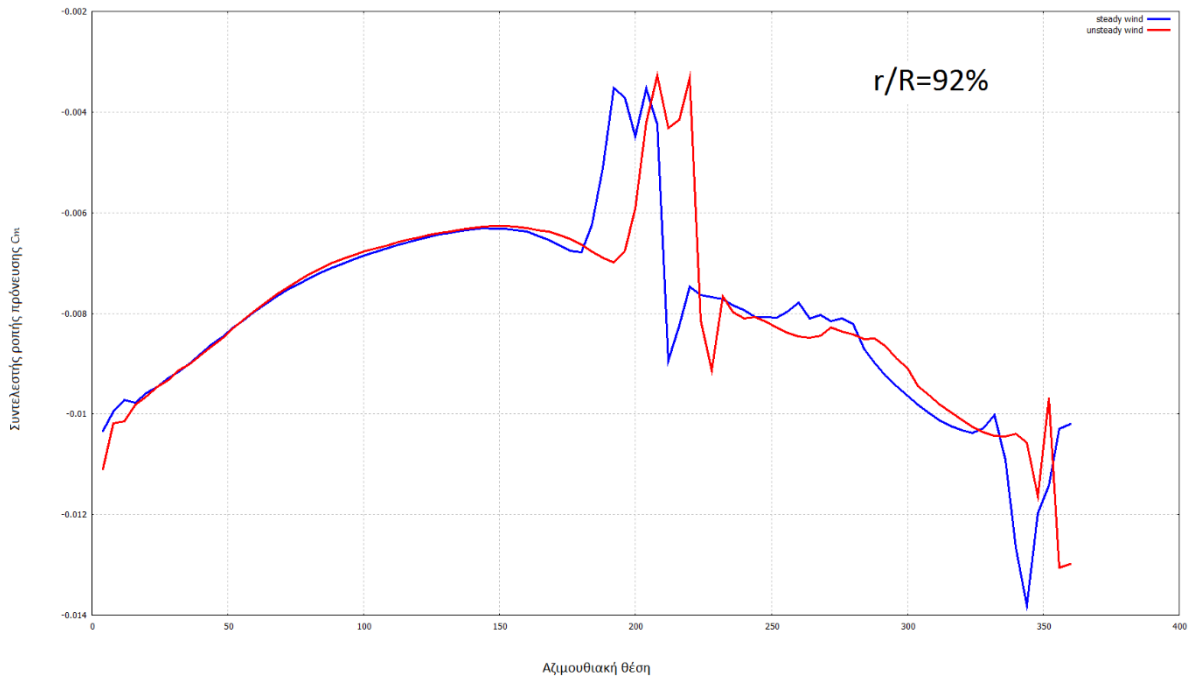
Εικόνα 54 Εξέλιξη του συντελεστή ροπής πρόνευσης στο χρόνο στο 87% του πτερυγίου για ταχύτητα πτήσης 39.9m/s



Εικόνα 55 Εξέλιξη του συντελεστή ροπής πρόνευσης κατά μια πλήρη περιστροφή στο 87% του πτερυγίου για ταχύτητα πτήσης 39.9m/s



Εικόνα 56 Εξέλιξη του συντελεστή ροπής πρόνευσης στο χρόνο στο 92% του πτερυγίου για ταχύτητα πτήσης 39.9m/s

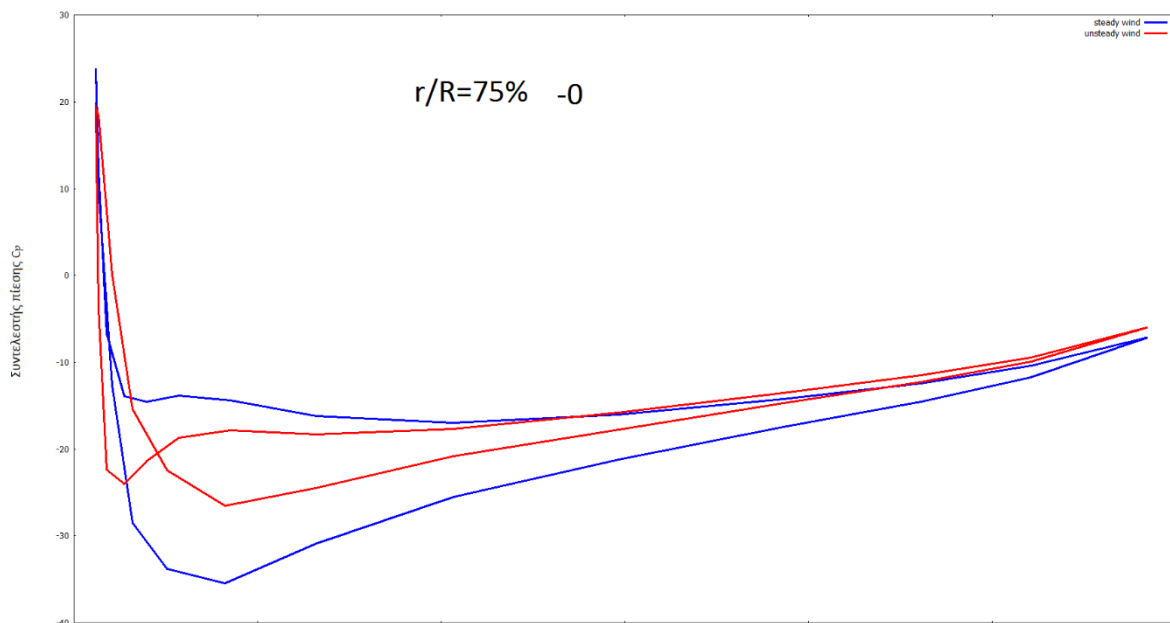


Εικόνα 57 Εξέλιξη του συντελεστή ροπής πρόνευσης κατά μια πλήρη περιστροφή στο 87% του πτερυγίου για ταχύτητα πτήσης 39.9m/s

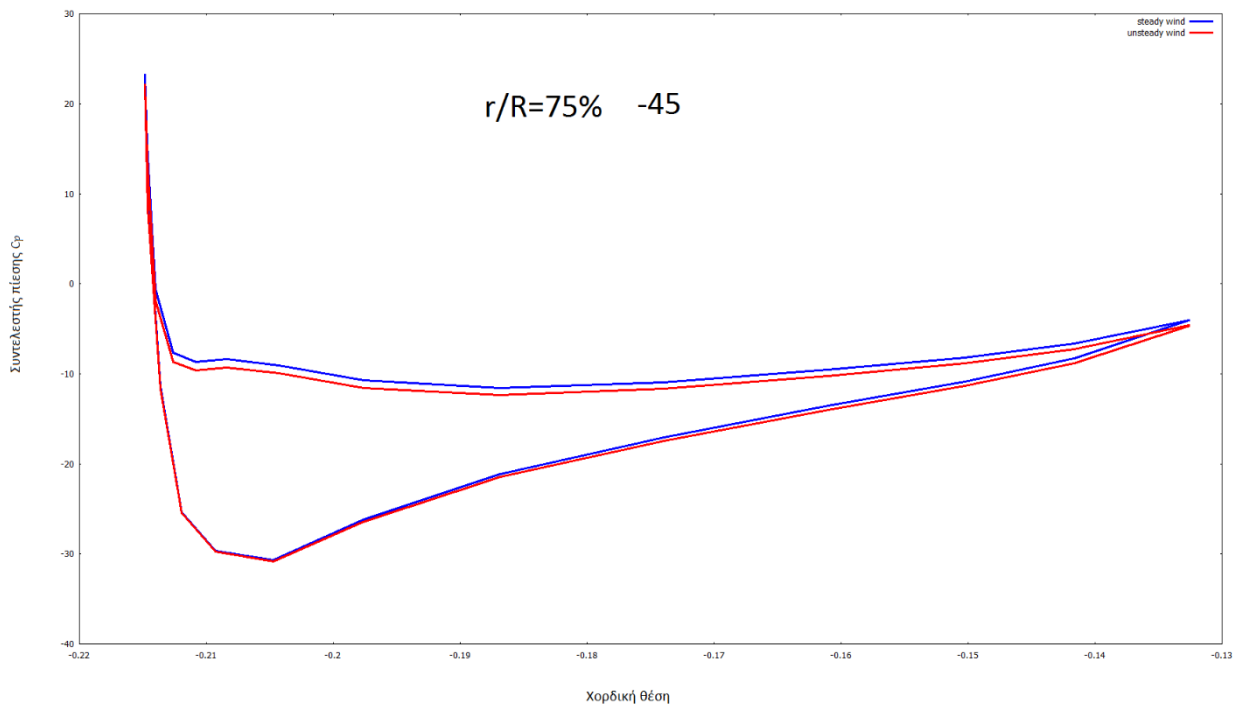
4.6 Υπολογισμός συντελεστή πίεσης

Τα διαγράμματα που ακολουθούν παρουσιάζουν την κατανομή του συντελεστή πίεσης κατά μήκος της χορδής του πτερυγίου σε δύο ακτινικές θέσεις (75%, 87%), για διάφορες θέσεις του αζιμουθίου (0°, 45°, 90°, 120°, 270°, 300°). Ο κώδικας υπολογίζει τους συντελεστές πίεσης, πολλαπλασιασμένους επί μια σταθερά που έχει τιμή περίπου 33.3.

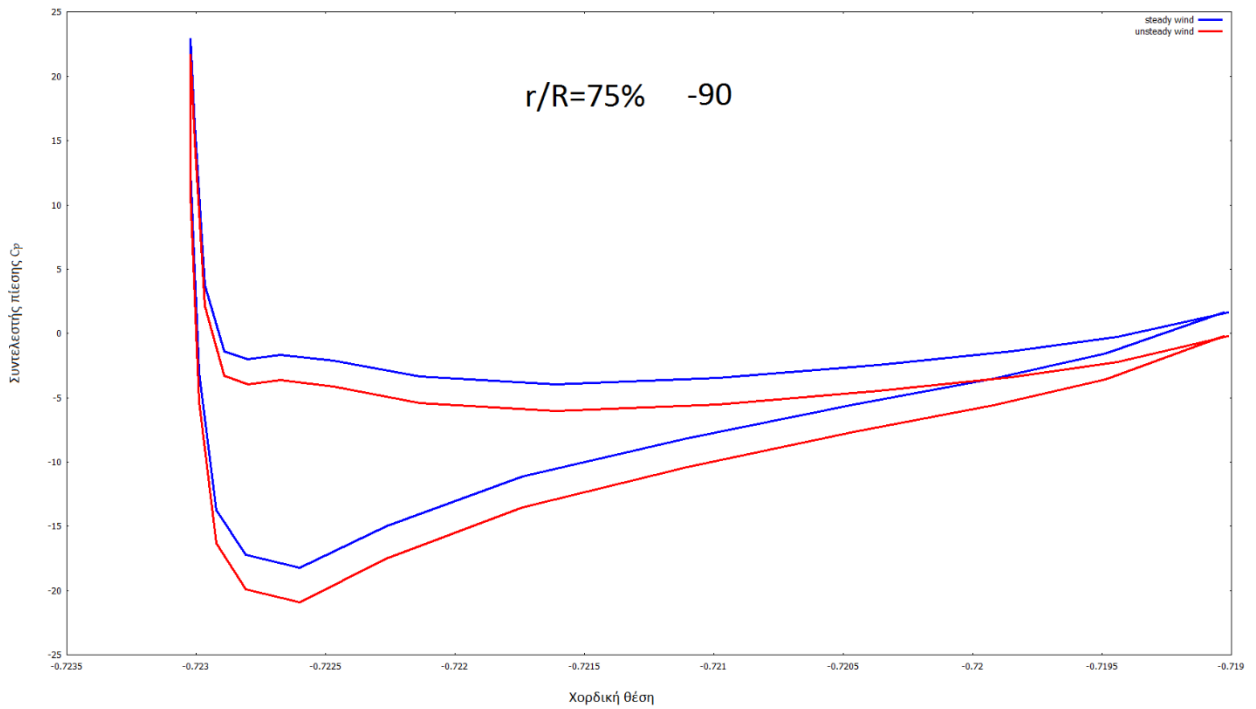
4.6.1 Κατανομή του συντελεστή πίεσης στο 75% του πτερυγίου



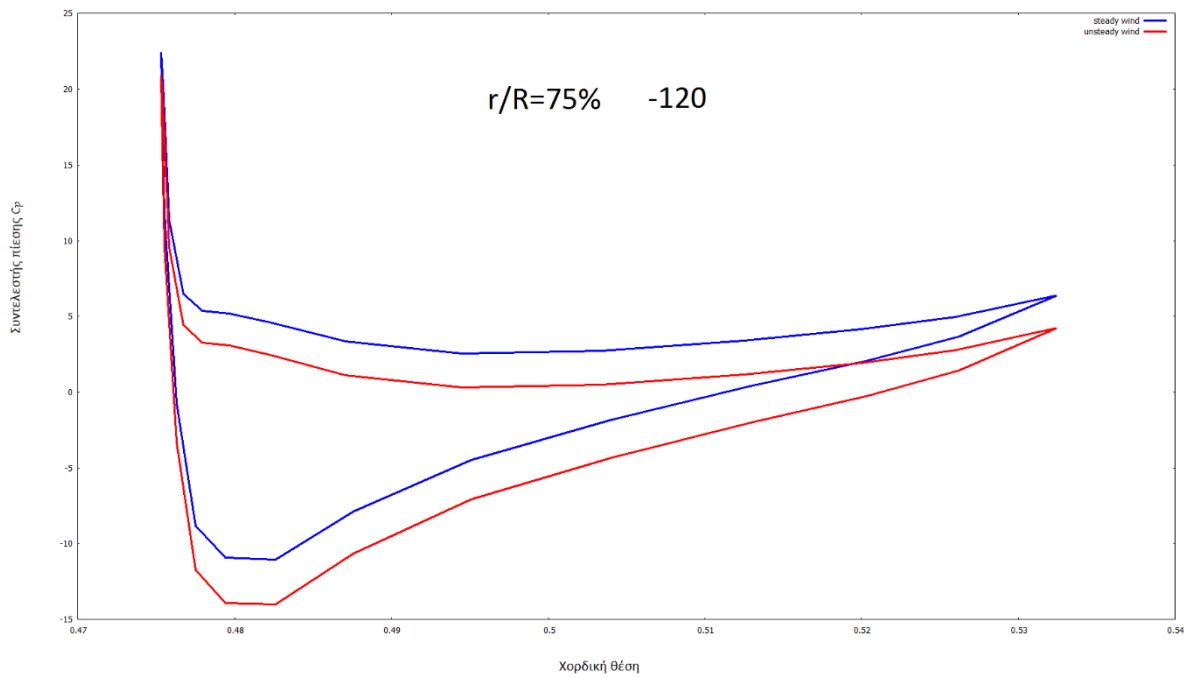
Εικόνα 58 Κατανομή του συντελεστή πίεσης κατά μήκος της χορδής του πτερυγίου, στο 75% του πτερυγίου για αζιμουθιακή θέση 0° για ταχύτητα πτήσης 39.9m/s



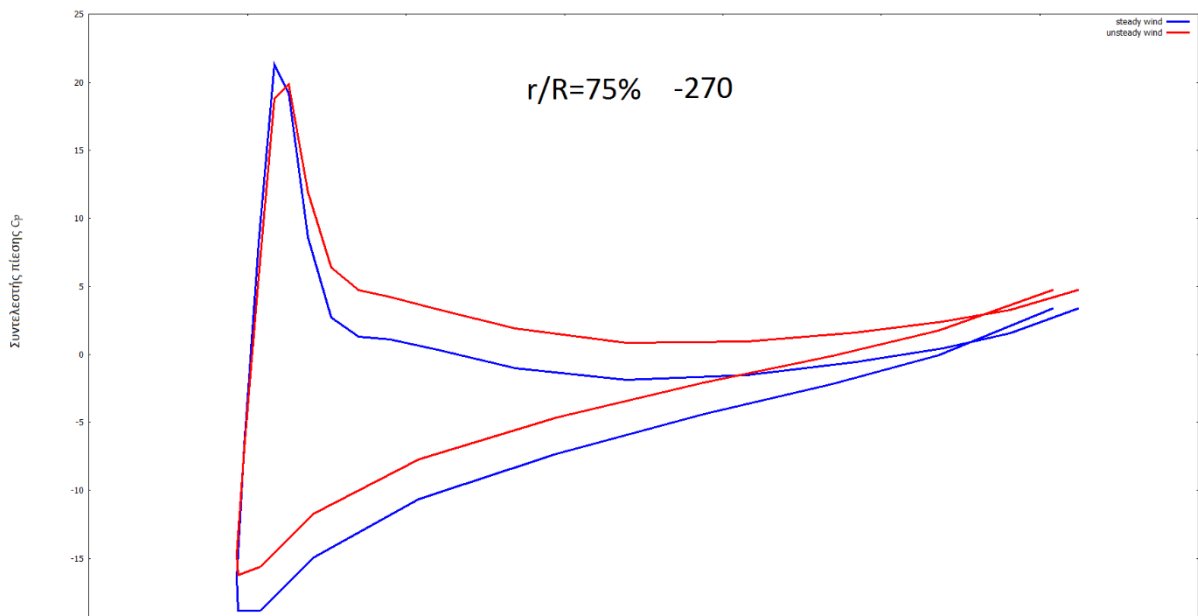
Εικόνα 59 Κατανομή του συντελεστή πίεσης κατά μήκος της χορδής του πτερυγίου, στο 75% του πτερυγίου για αζιμουθιακή θέση 45° για ταχύτητα πτήσης 39.9m/s



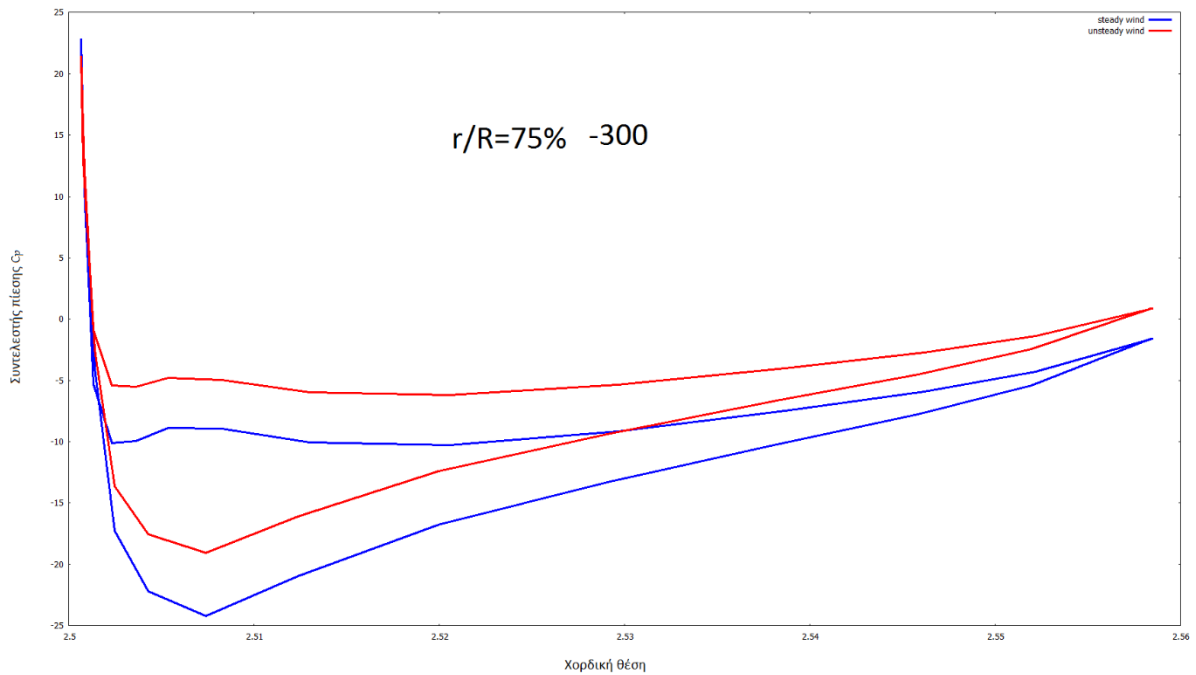
Εικόνα 60 Κατανομή του συντελεστή πίεσης κατά μήκος της χορδής του πτερυγίου, στο 75% του πτερυγίου για αζιμουθιακή θέση 90° για ταχύτητα πτήσης 39.9m/s



Εικόνα 61 Κατανομή του συντελεστή πίεσης κατά μήκος της χορδής του πτερυγίου, στο 75% του πτερυγίου για αζιμουθιακή θέση 120° για ταχύτητα πτήσης 39.9m/s

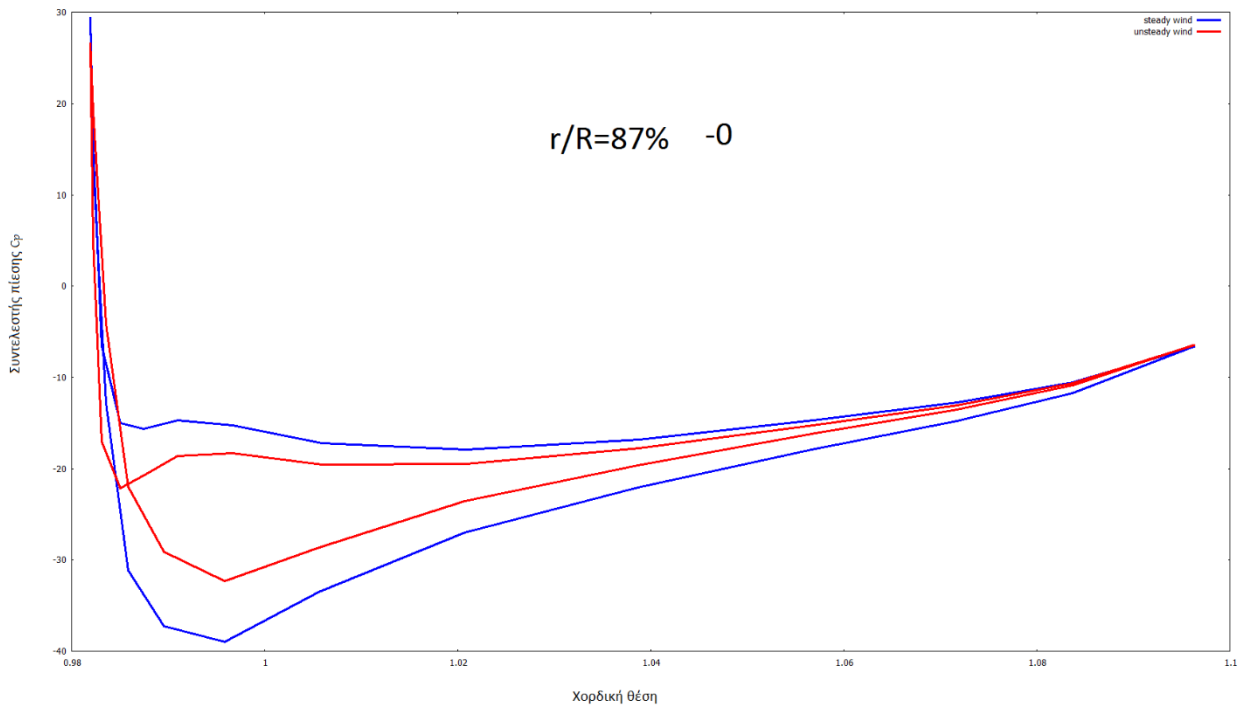


Εικόνα 62 Κατανομή του συντελεστή πίεσης κατά μήκος της χορδής του πτερυγίου, στο 75% του πτερυγίου για αζιμουθιακή θέση 270° για ταχύτητα πτήσης 39.9m/s

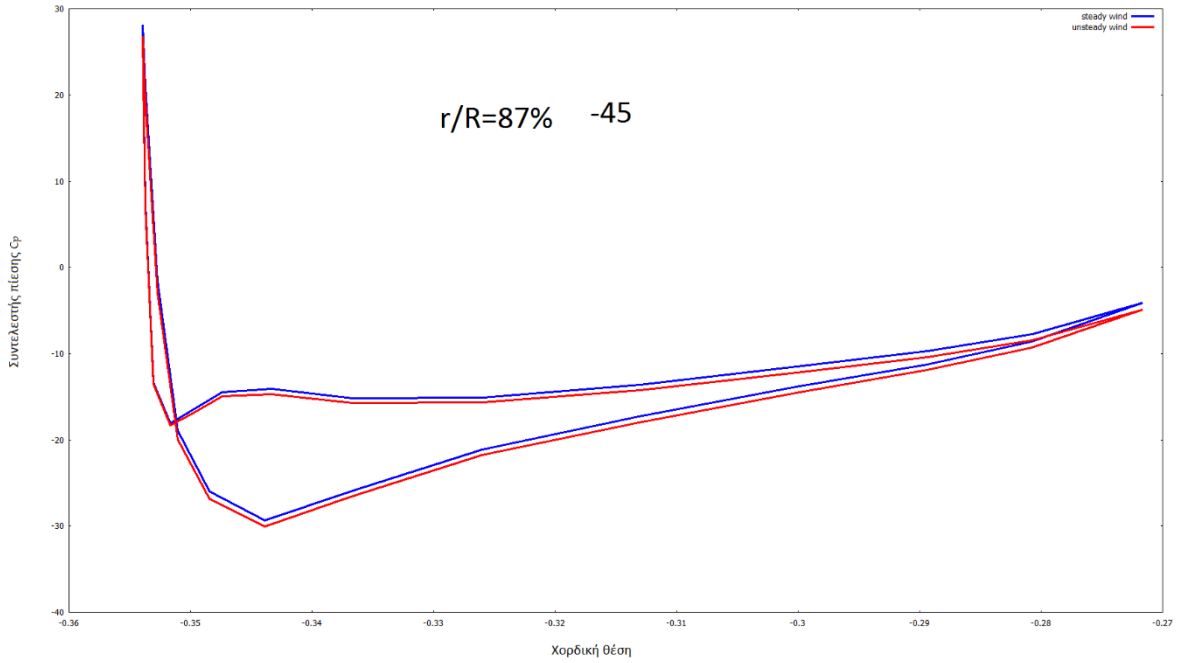


Εικόνα 63 Κατανομή του συντελεστή πίεσης κατά μήκος της χορδής του πτερυγίου, στο 75% του πτερυγίου για αζιμουθιακή θέση 300° για ταχύτητα πτήσης 39.9m/s

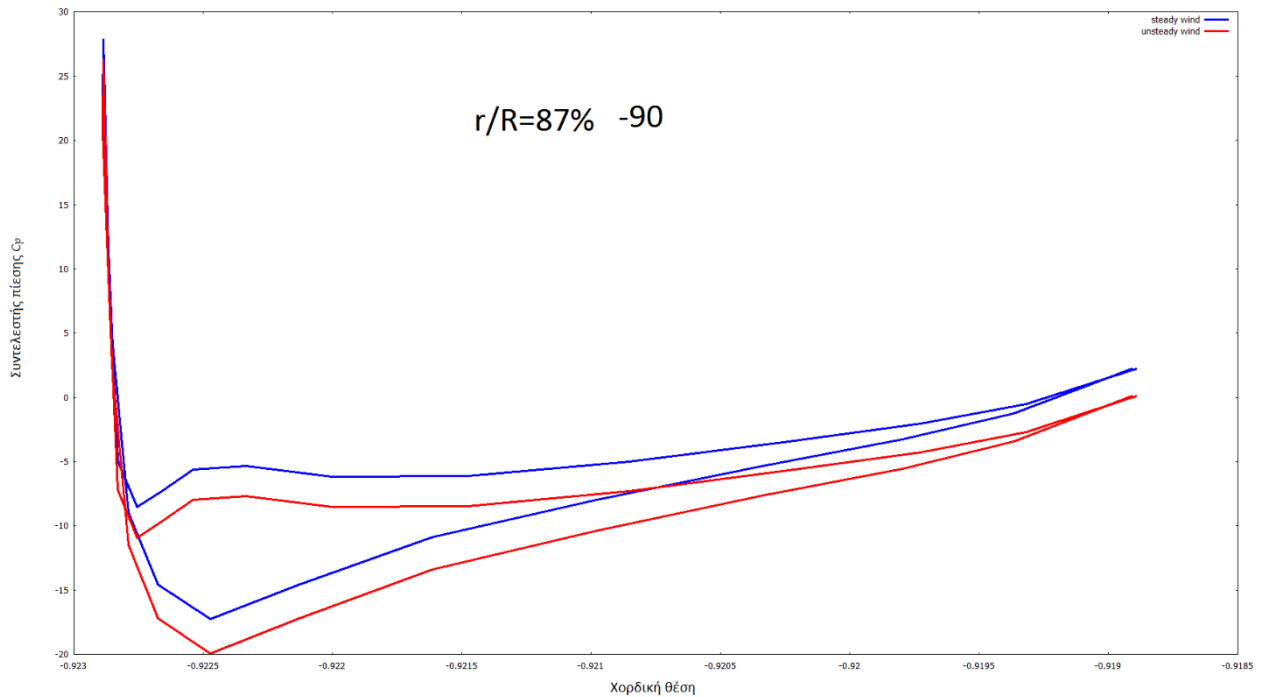
4.6.2 Κατανομή του συντελεστή πίεσης στο 87% του πτερυγίου



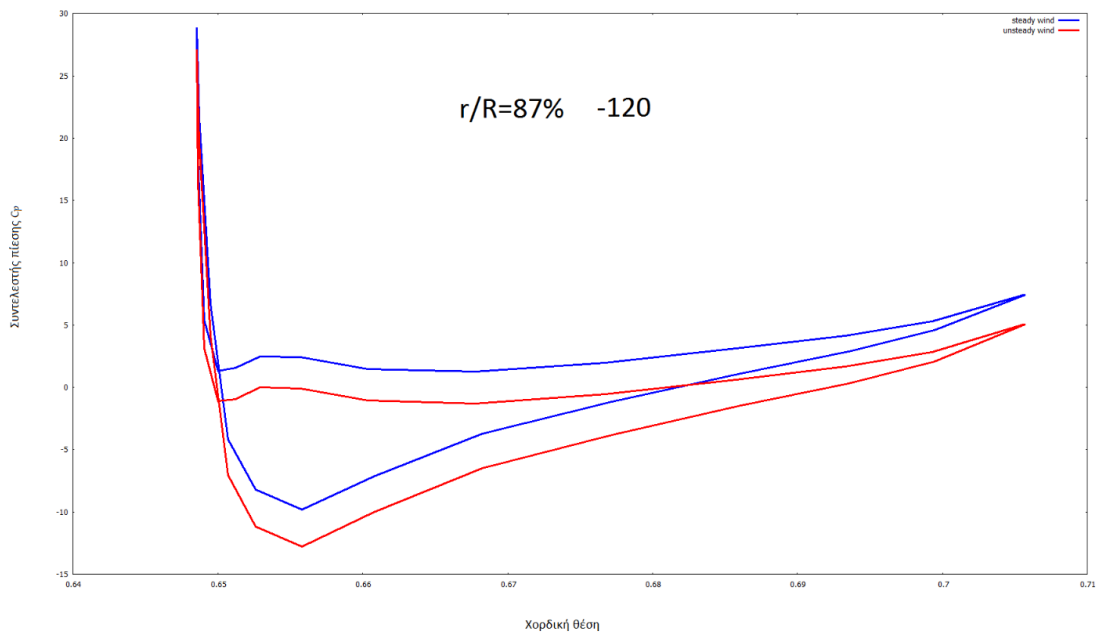
Εικόνα 64 Κατανομή του συντελεστή πίεσης κατά μήκος της χορδής του πτερυγίου, στο 87% του πτερυγίου για αζιμουθιακή θέση 0° για ταχύτητα πτήσης 39.9m/s



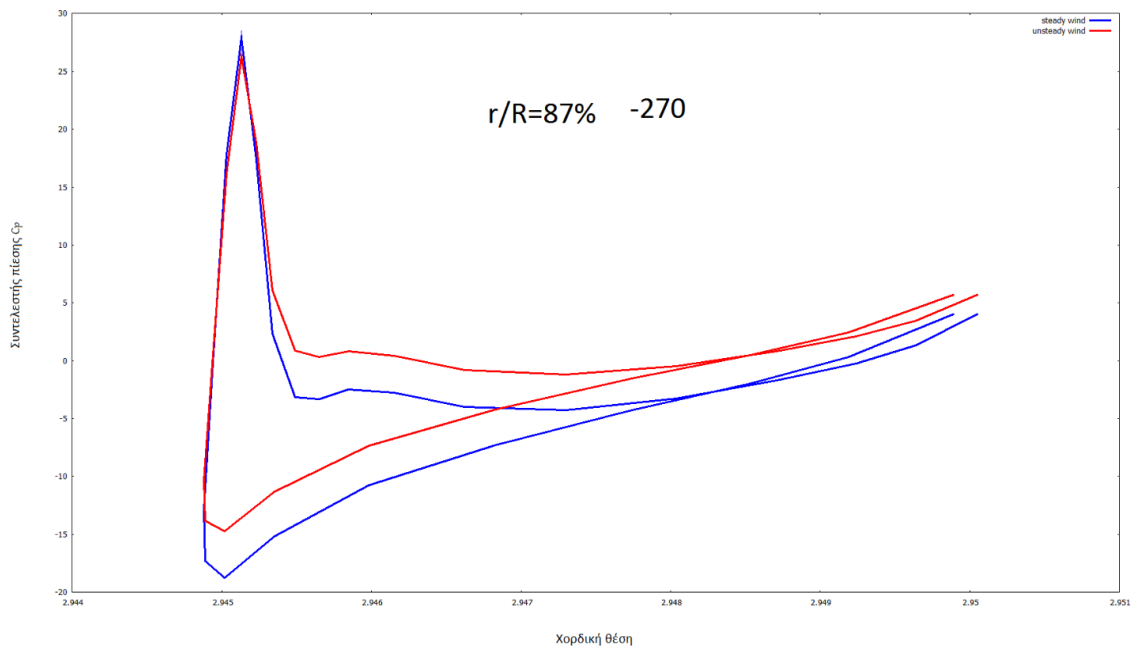
Εικόνα 65 Κατανομή του συντελεστή πίεσης κατά μήκος της χορδής του πτερυγίου, στο 87% του πτερυγίου για αξιμουθιακή θέση 45° για ταχύτητα πτήσης 39.9m/s



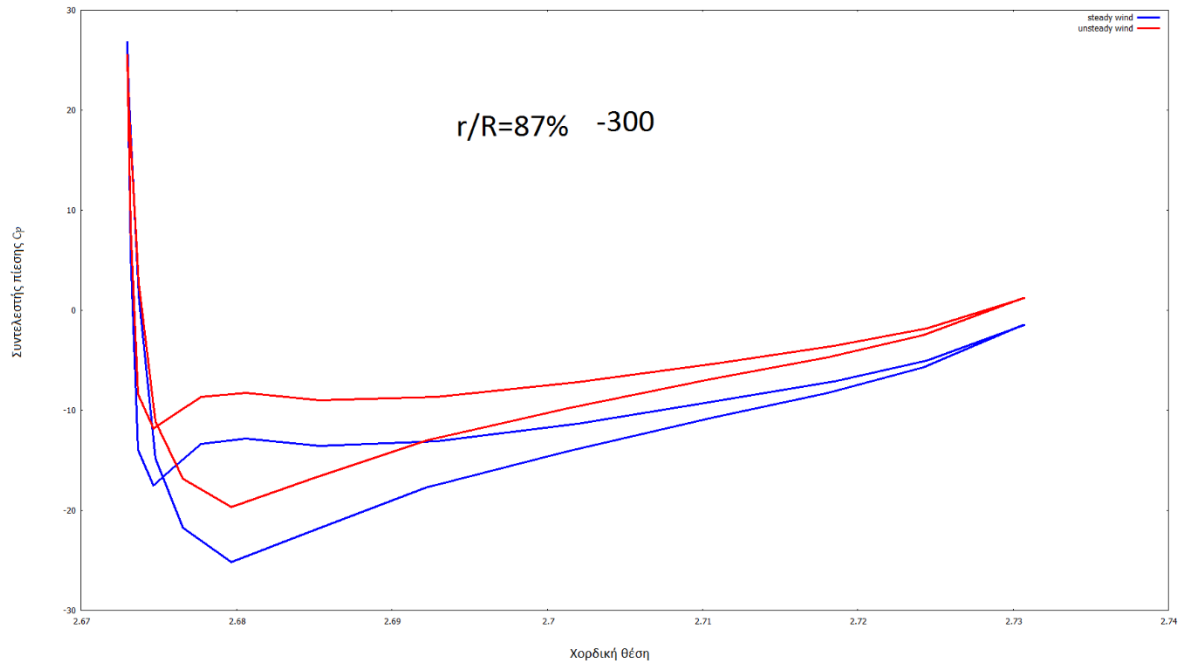
Εικόνα 66 Κατανομή του συντελεστή πίεσης κατά μήκος της χορδής του πτερυγίου, στο 87% του πτερυγίου για αξιμουθιακή θέση 90° για ταχύτητα πτήσης 39.9m/s



Εικόνα 67 Κατανομή του συντελεστή πίεσης κατά μήκος της χορδής του πτερυγίου, στο 87% του πτερυγίου για αζιμουθιακή θέση 120° για ταχύτητα πτήσης 39.9m/s



Εικόνα 68 Κατανομή του συντελεστή πίεσης κατά μήκος της χορδής του πτερυγίου, στο 87% του πτερυγίου για αζιμουθιακή θέση 270° για ταχύτητα πτήσης 39.9m/s



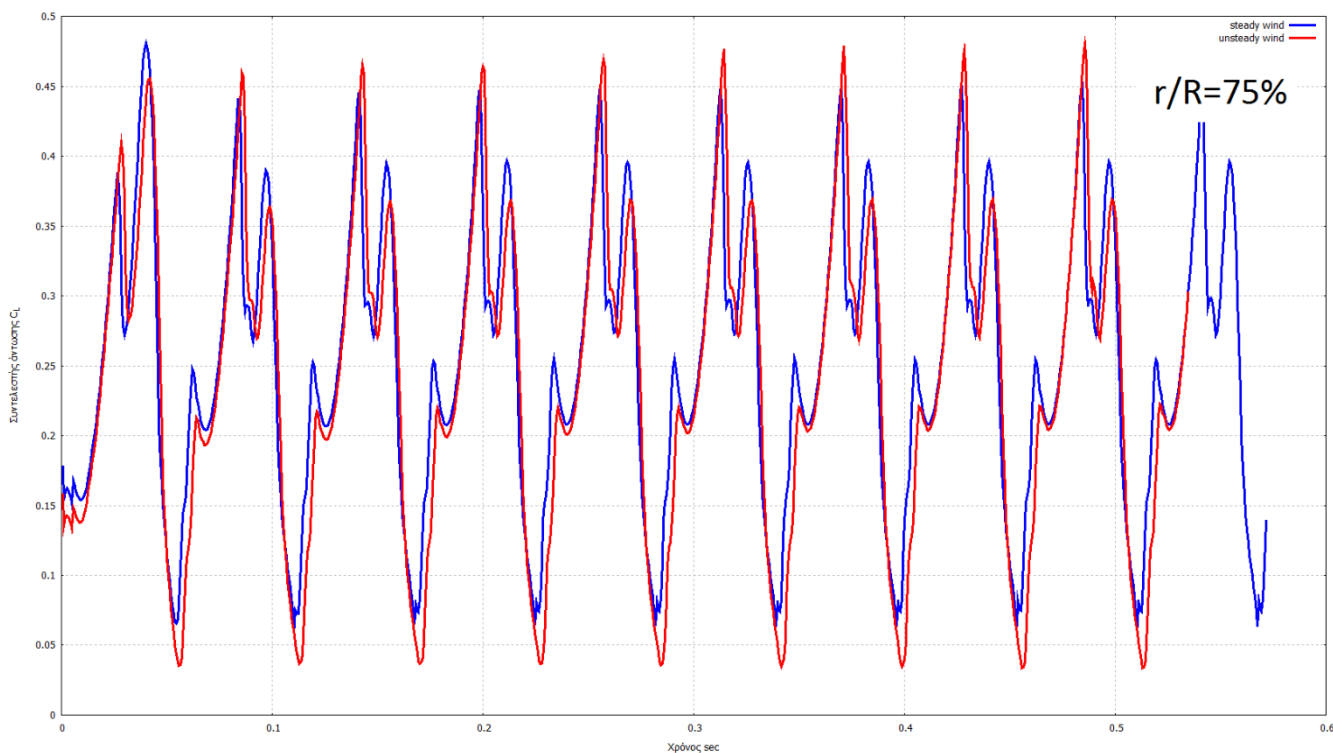
Εικόνα 69 Κατανομή του συντελεστή πίεσης κατά μήκος της χορδής του πτερυγίου, στο 87% του πτερυγίου για αζιμουθιακή θέση 300° για ταχύτητα πτήσης 39.9m/s

Κεφάλαιο 5: Προσομοίωση πτήσης με ταχύτητα 50.5 m/s

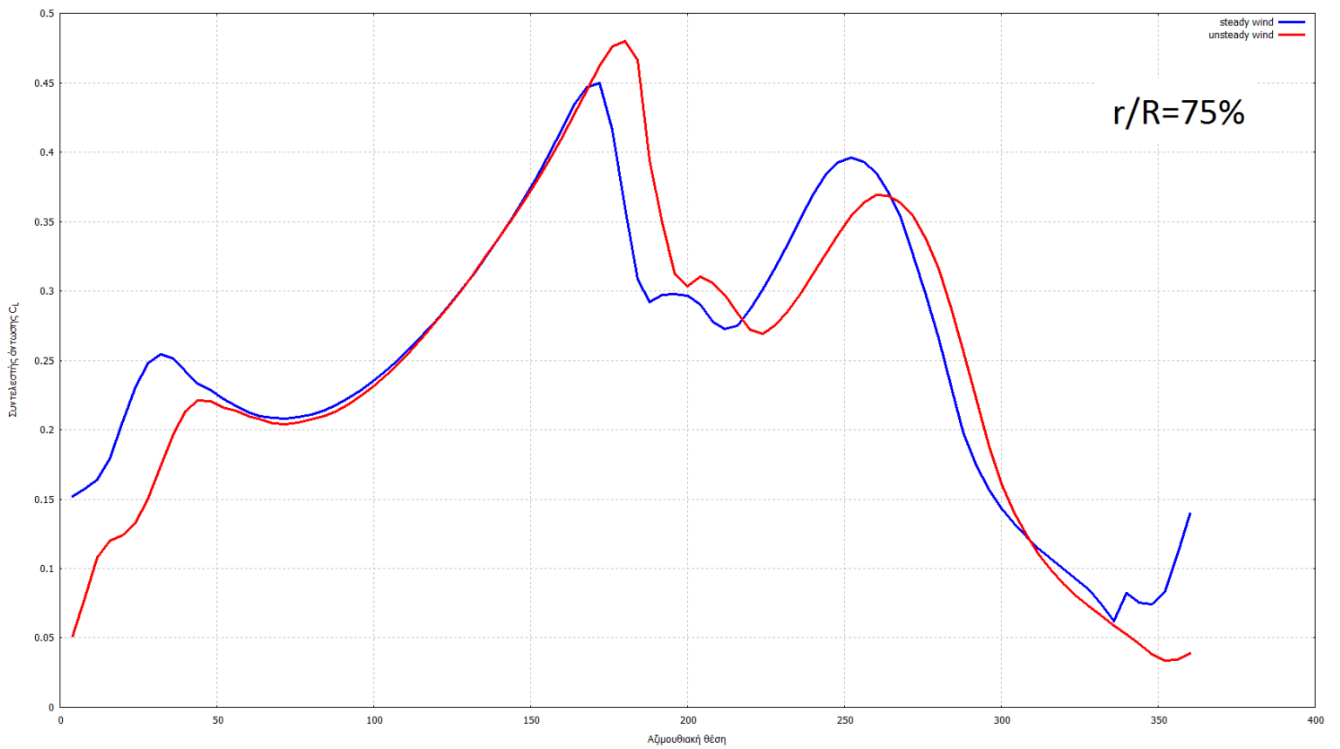
Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των υπολογισμών των αεροδυναμικών φορτίων που αναπτύσσονται στο στροφέιο του ελικοπτέρου με ταχύτητα πτήσης $v = 50.5\text{ m/s}$. Τα αποτελέσματα που ακολουθούν συγκρίνουν την περίπτωση της πτήσης σε αδιατάραχτη ροή αέρα και την περίπτωση της λειτουργίας του ελικοπτέρου εντός του πεδίου ταχύτητας που έχουμε δημιουργήσει. Παρουσιάζονται, οι συντελεστές άντωσης, οπισθέλκουσας, ο συντελεστής κάθετης δύναμης, ο συντελεστής εφαπτομενικής δύναμης και ο συντελεστής ροπής πρόνευσης σε τρεις ακτινικές θέσεις ενός πτερυγίου (75%, 87%, 92%) για κάθε θέση του αζιμουθίου, καθώς και η εξέλιξη τους στο χρόνο για δέκα περιστροφές του στροφέιου. Επίσης παρουσιάζεται η κατανομή του συντελεστή πίεσης κατά μήκος της χορδής του πτερυγίου σε δύο ακτινικές θέσεις (75%, 87%) για έξι θέσεις του αζιμουθίου (0° , 45° , 90° , 120° , 270° , 300°). Τέλος παρουσιάζεται η χρονική εξέλιξη, της άντωσης, της ώσης και της ροπής πρόνευσης ολόκληρου του στροφέιου καθώς και η εξέλιξή τους κατά μια πλήρη περιστροφή.

Στα διαγράμματα, η μπλε γραμμή συμβολίζει την περίπτωση της αδιατάραχτης ροής και η κόκκινη την περίπτωση πτήσης υπό την επίδραση του πεδίου ταχύτητας που δημιουργήσαμε, όπου φαίνεται με λεπτομέρεια η 8η περιστροφή.

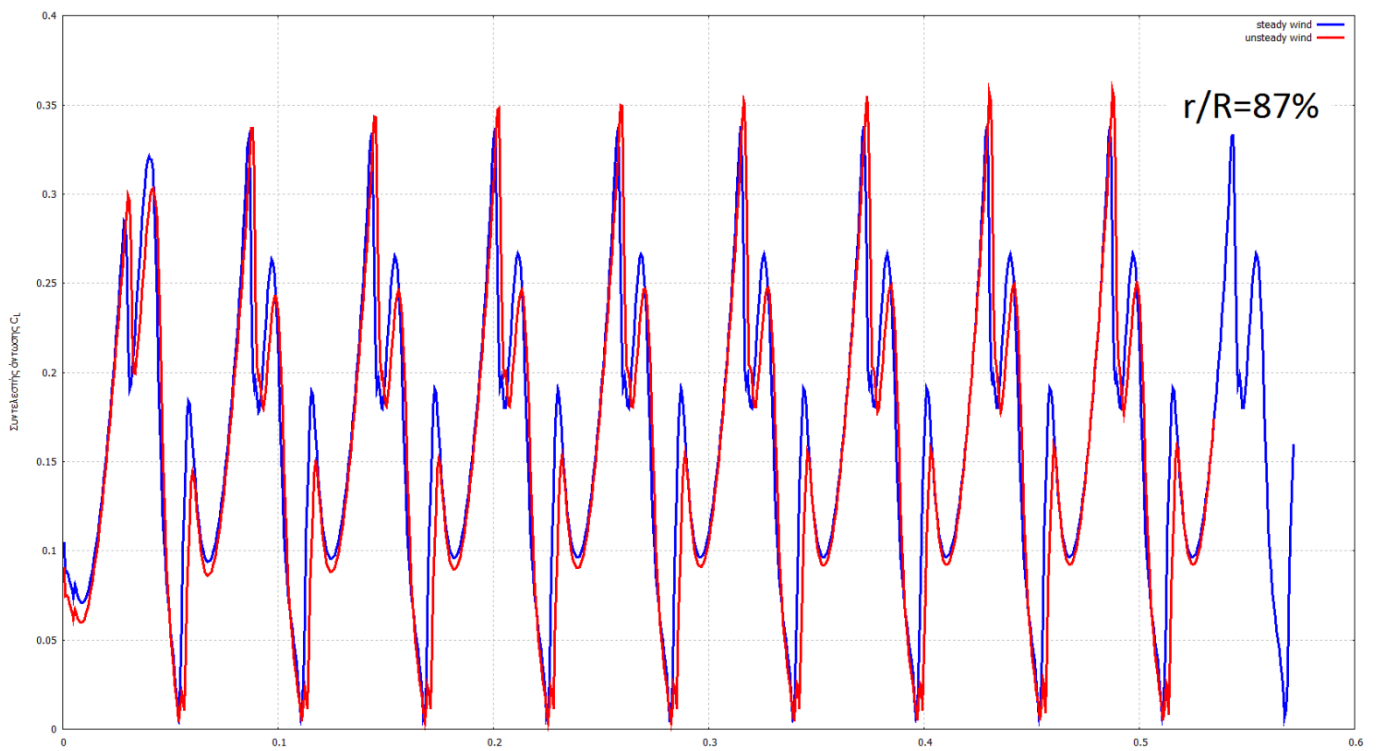
5.1 Υπολογισμός του συντελεστή άντωσης



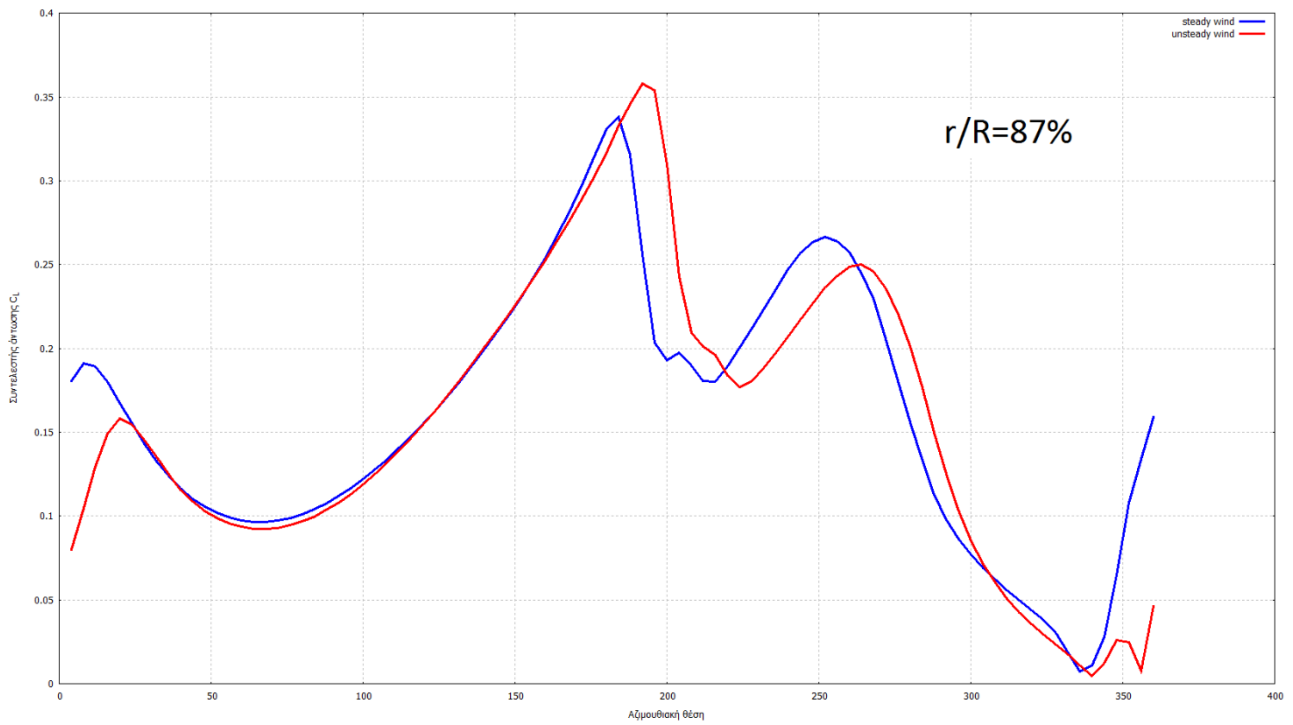
Εικόνα 70 Εξέλιξη του συντελεστή άντωσης στο χρόνο στο 75% του πτερυγίου για ταχύτητα πτήσης 50.5 m/s



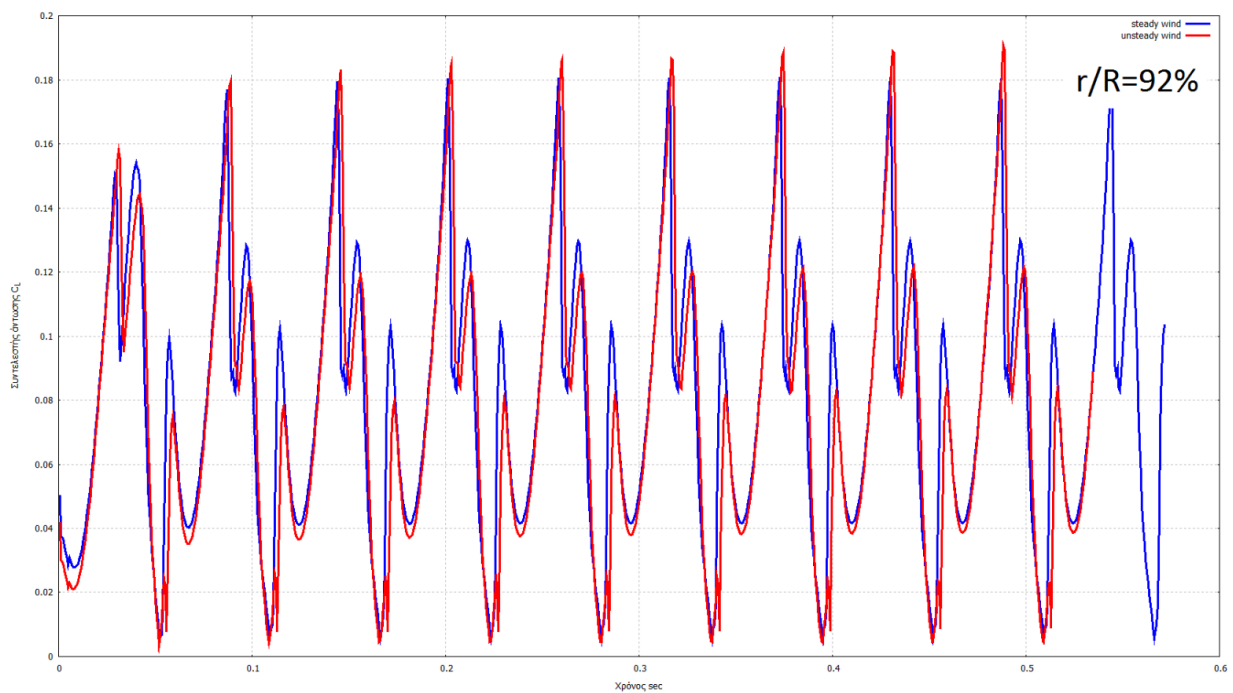
Εικόνα 71 Εξέλιξη του συντελεστή άντωσης κατά μια πλήρη περιστροφή στο 75% του πτερυγίου για ταχύτητα πτήσης 50.5m/s



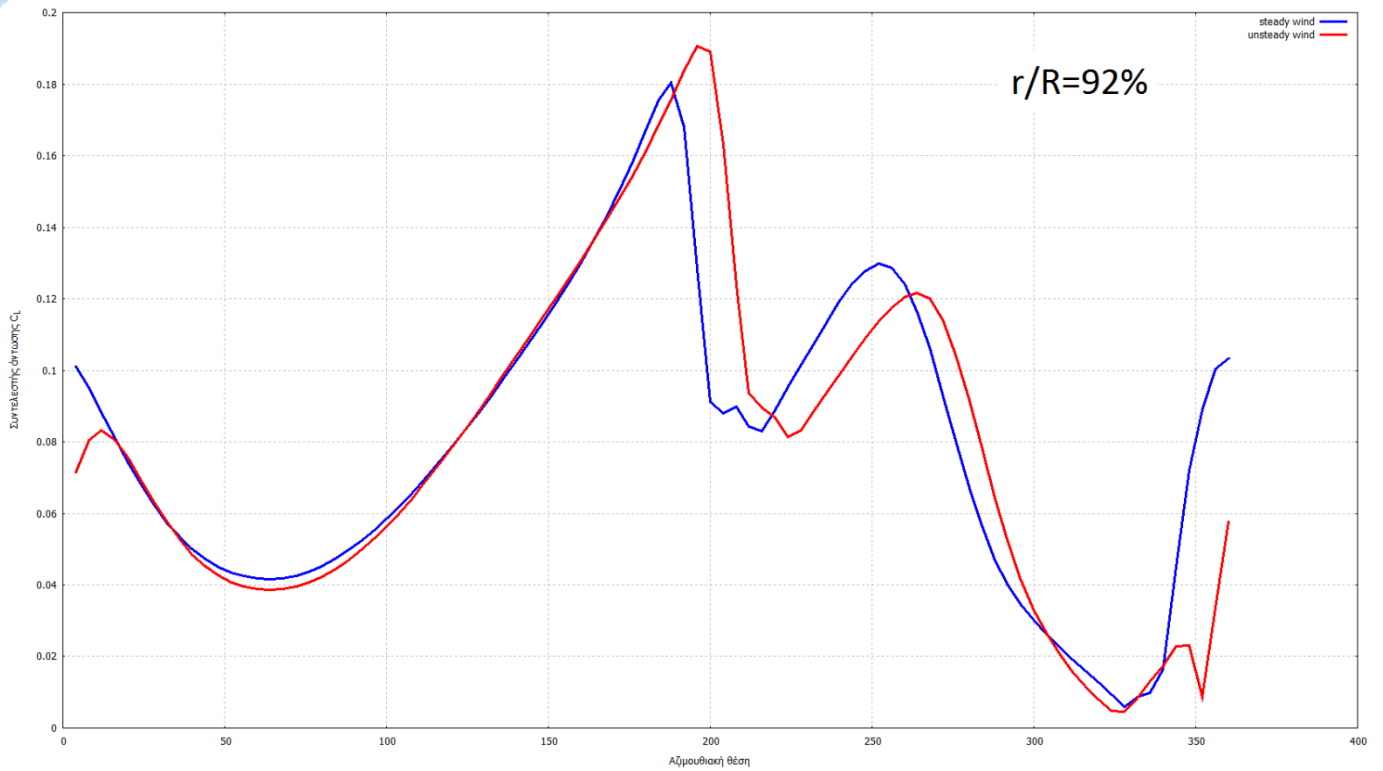
Εικόνα 72 Εξέλιξη του συντελεστή άντωσης στο χρόνο στο 87% του πτερυγίου για ταχύτητα πτήσης 50.5m/s



Εικόνα 73 Εξέλιξη του συντελεστή άντωσης κατά μια πλήρη περιστροφή στο 87% του πτερυγίου για ταχύτητα πτήσης 50.5m/s

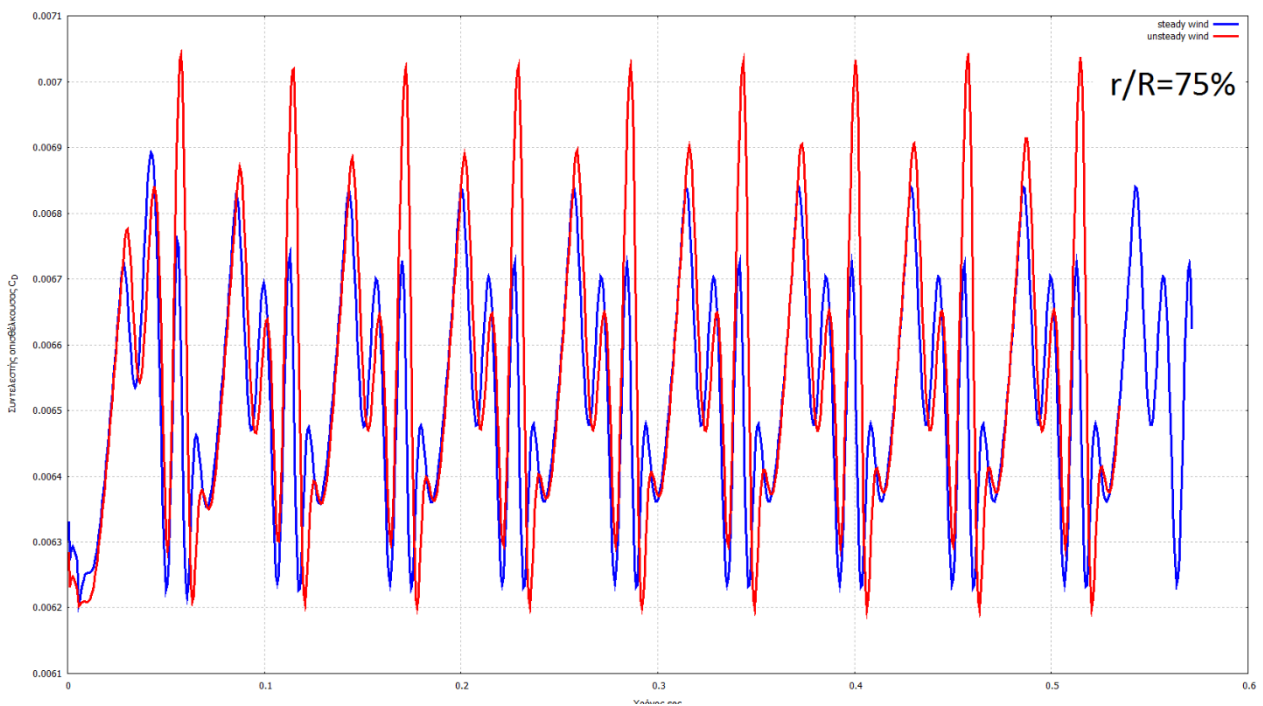


Εικόνα 74 Εξέλιξη του συντελεστή άντωσης στο χρόνο στο 92% του πτερυγίου για ταχύτητα πτήσης 50.5m/s

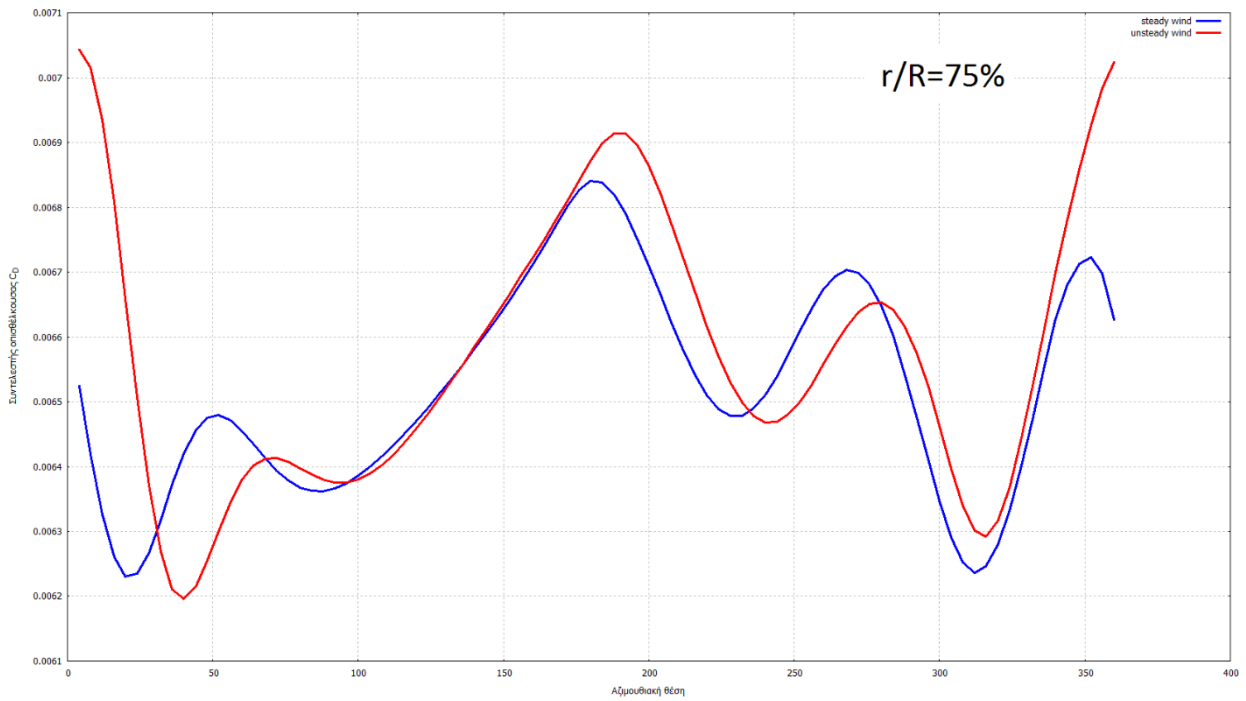


Εικόνα 75 Εξέλιξη του συντελεστή άντωσης κατά μια πλήρη περιστροφή στο 92% του πτερυγίου για ταχύτητα πτήσης 50.5m/s

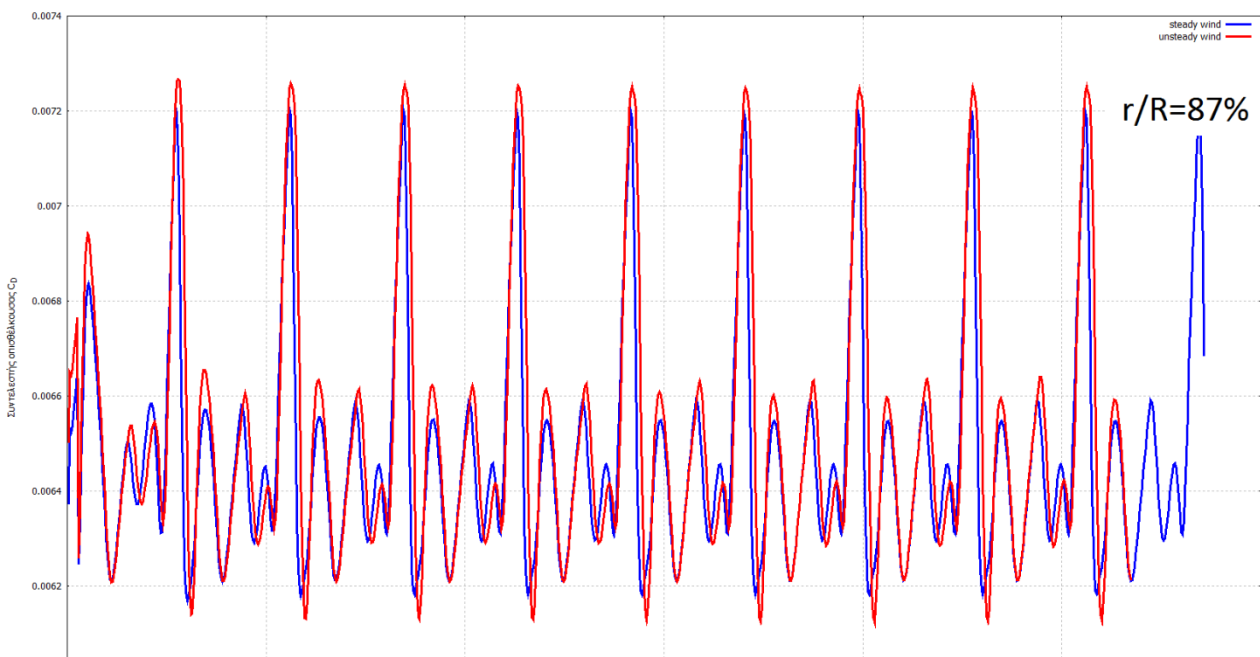
5.2 Υπολογισμός του συντελεστή οπισθέλκουσας



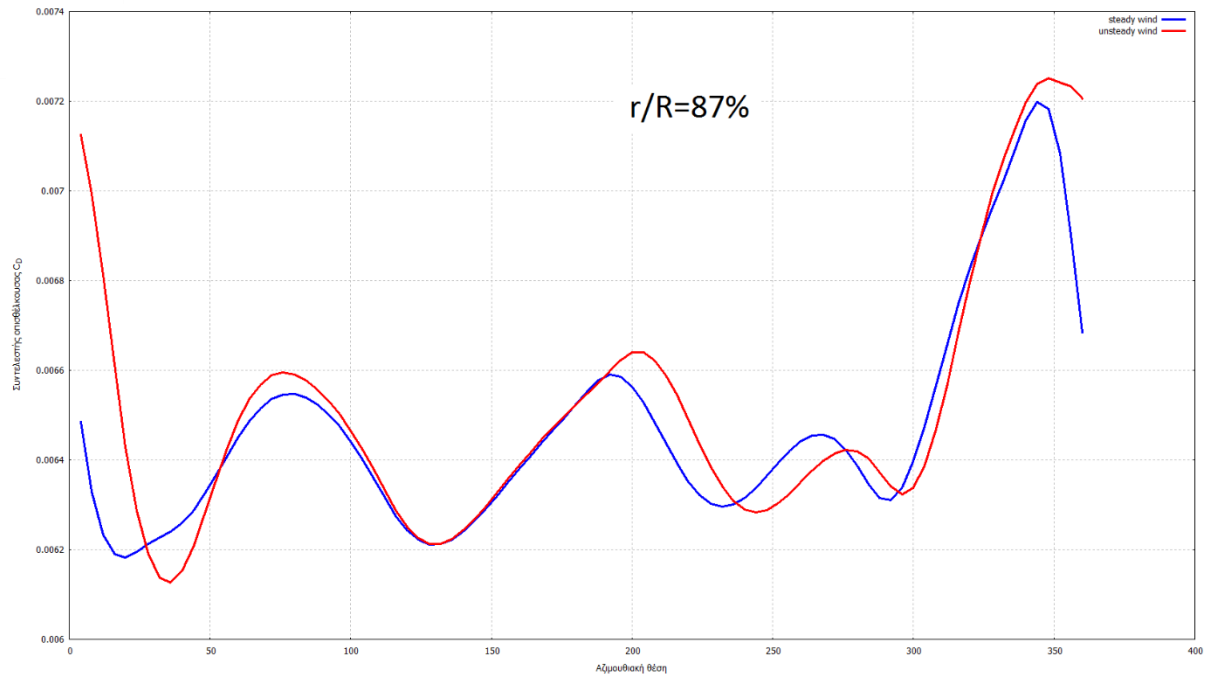
Εικόνα 76 Εξέλιξη του συντελεστή οπισθέλκουσας στο χρόνο στο 75% του πτερυγίου για ταχύτητα πτήσης 50.5m/s



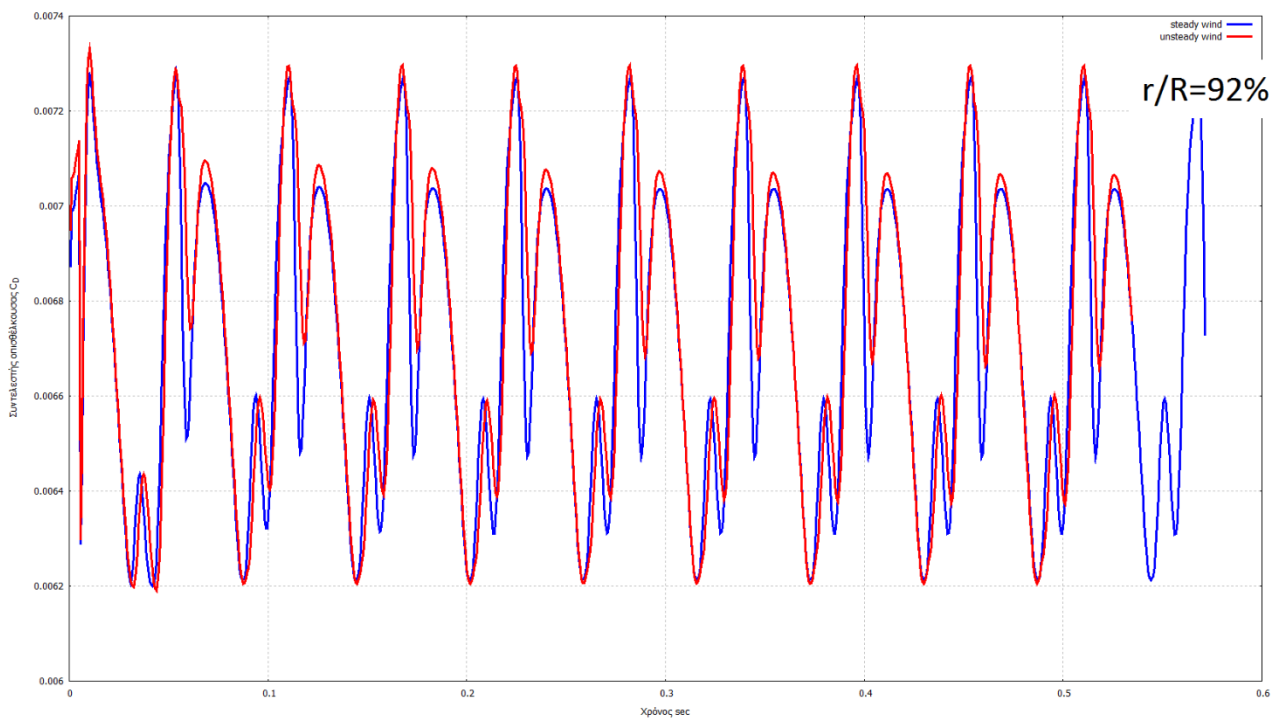
Εικόνα 77 Εξέλιξη του συντελεστή οπισθέλκουσας κατά μια πλήρη περιστροφή στο 75% του περυγίου για ταχύτητα πτήσης 50.5m/s



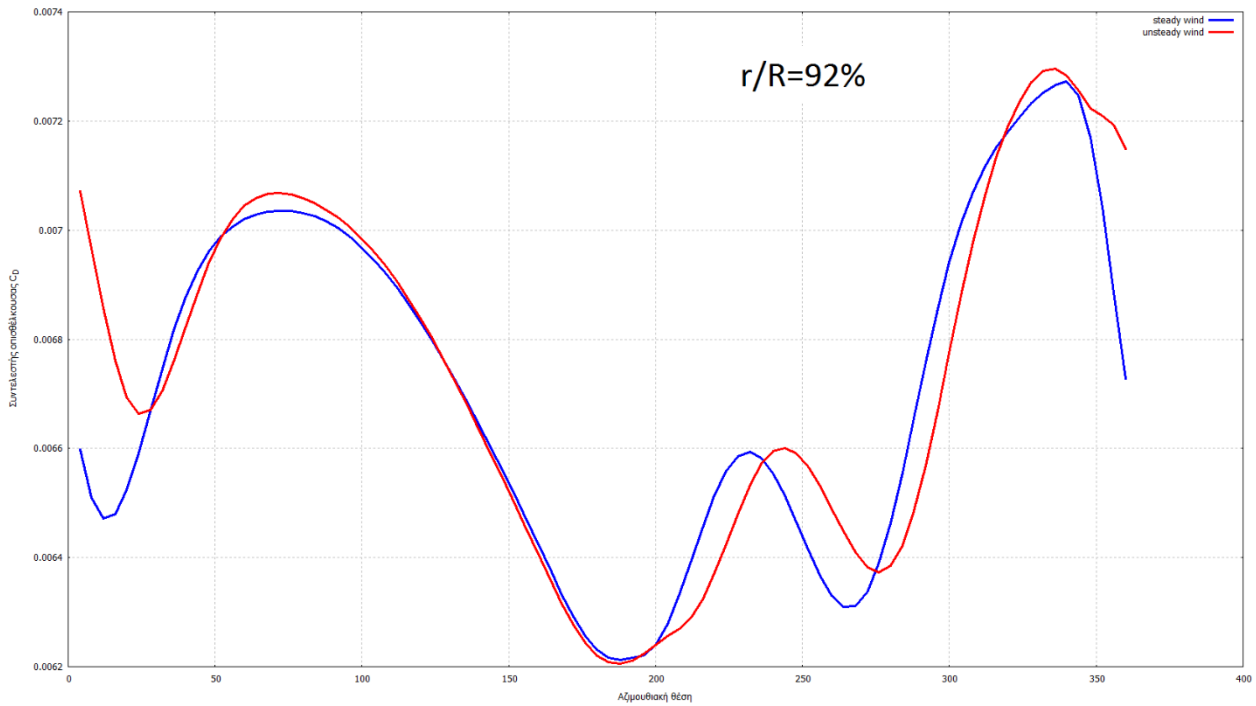
Εικόνα 78 Εξέλιξη του συντελεστή οπισθέλκουσας στο χρόνο στο 87% του περυγίου για ταχύτητα πτήσης 50.5m/s



Εικόνα 79 Εξέλιξη του συντελεστή οπισθέλκουσας κατά μια πλήρη περιστροφή στο 87% του πτερυγίου για ταχύτητα πτήσης 50.5m/s

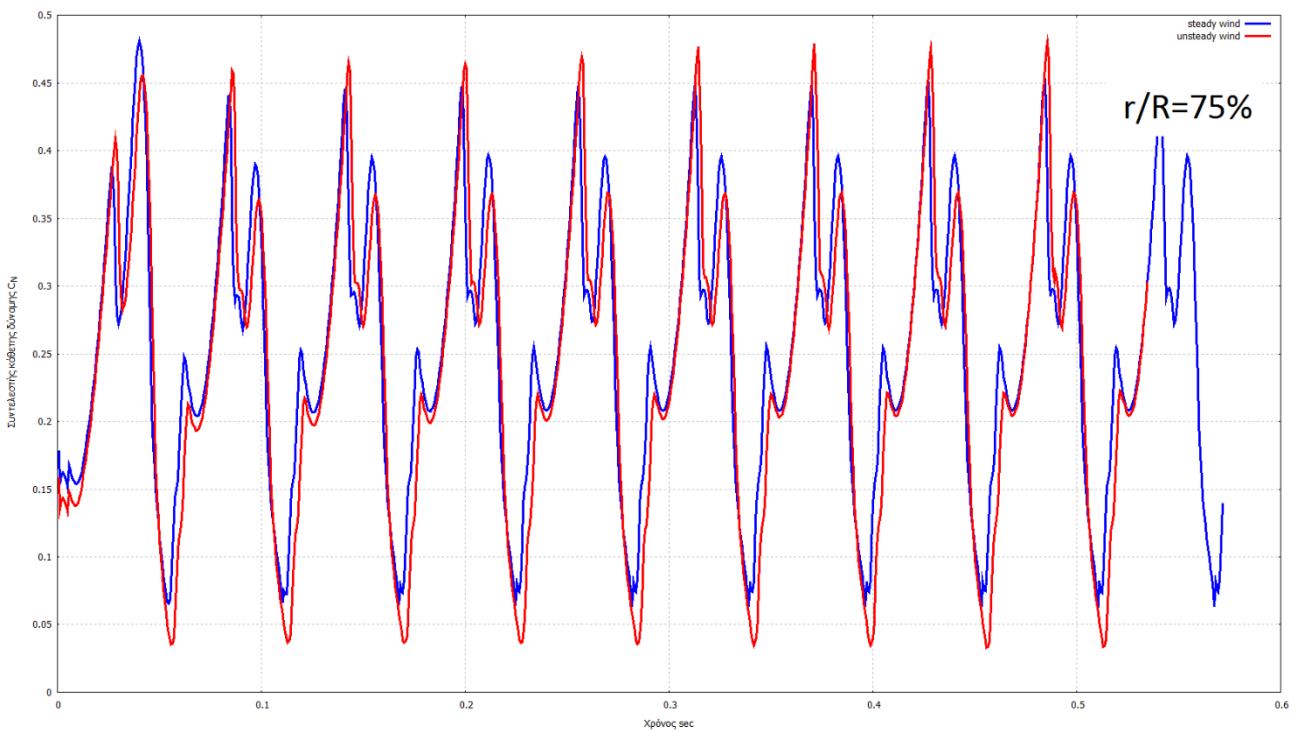


Εικόνα 80 Εξέλιξη του συντελεστή οπισθέλκουσας στο χρόνο στο 92% του πτερυγίου για ταχύτητα πτήσης 50.5m/s

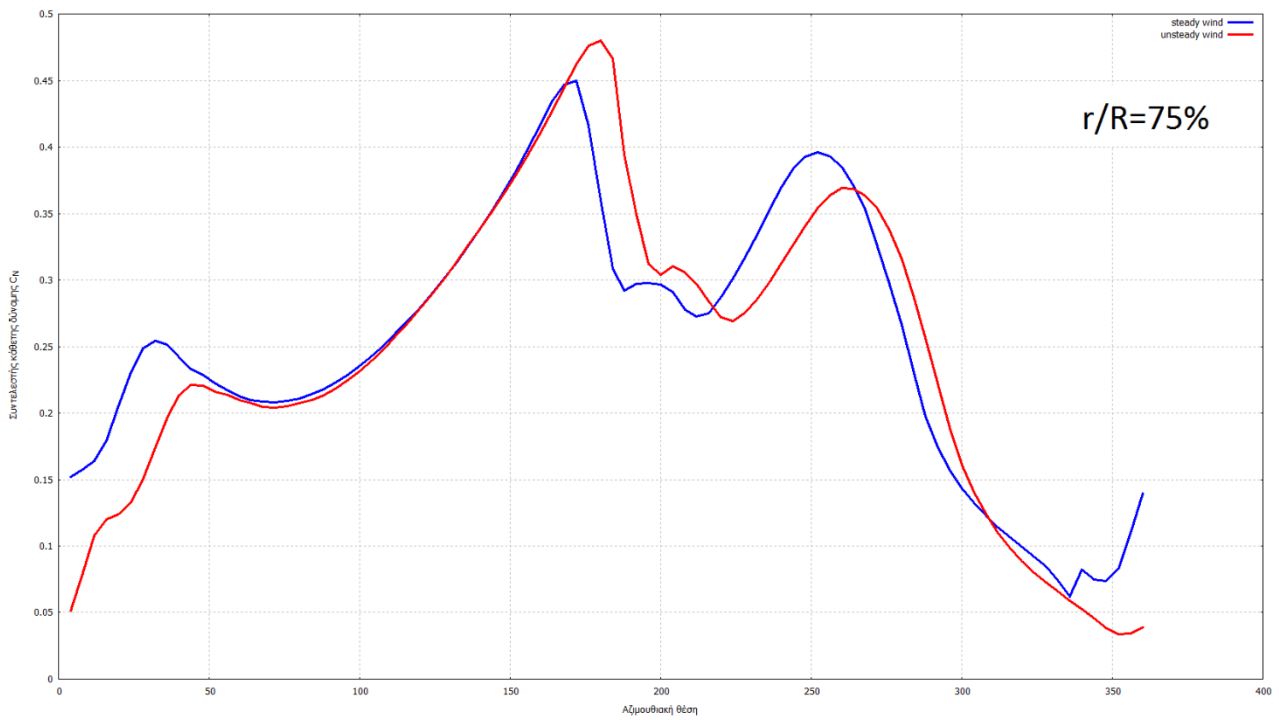


Εικόνα 81 Εξέλιξη του συντελεστή οπισθέλκουσας κατά μια πλήρη περιστροφή στο 92% του πτερυγίου για ταχύτητα πτήσης 50.5m/s

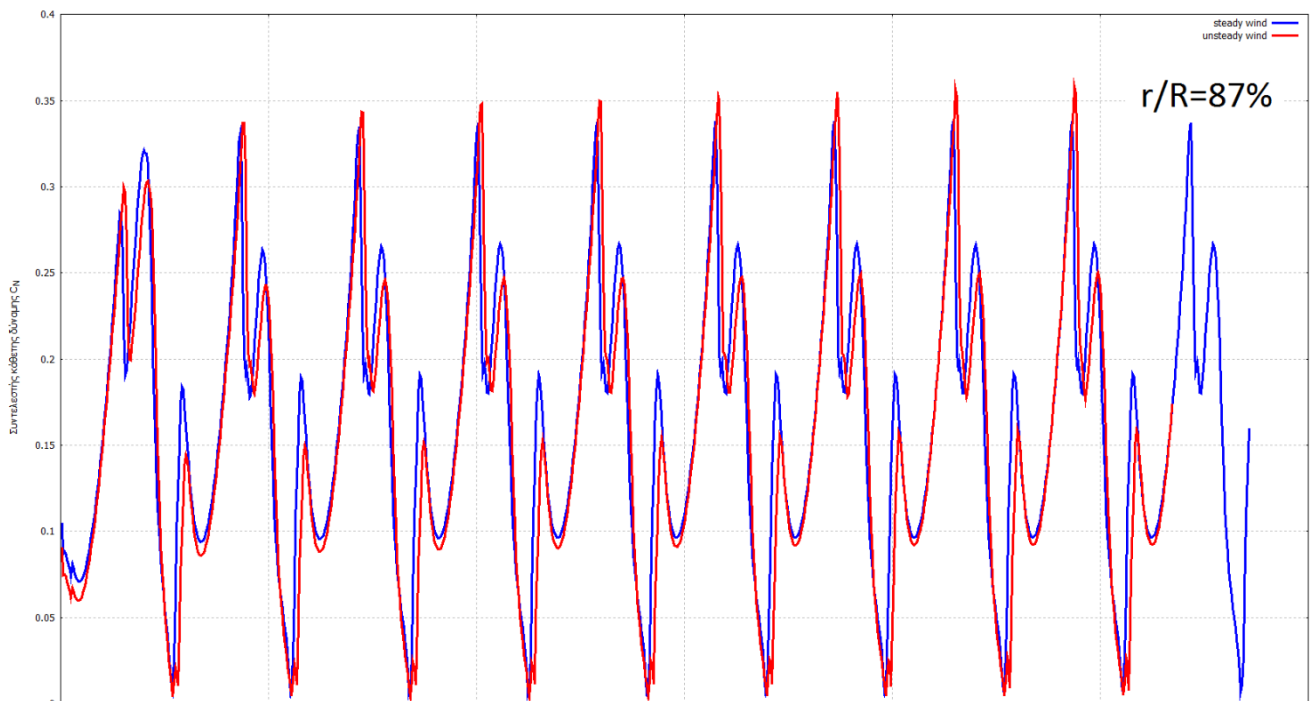
5.3 Υπολογισμός του συντελεστή κάθετης δύναμης



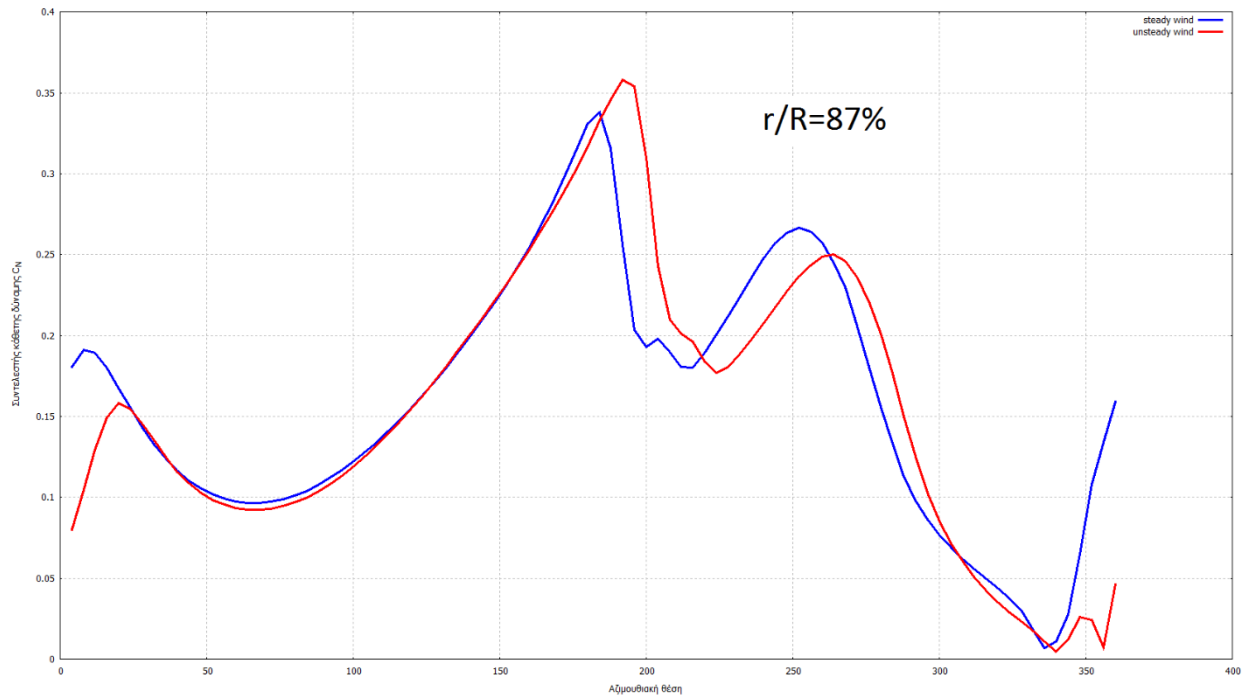
Εικόνα 82 Εξέλιξη του συντελεστή κάθετης δύναμης στο χρόνο στο 75% του πτερυγίου για ταχύτητα πτήσης 50.5m/s



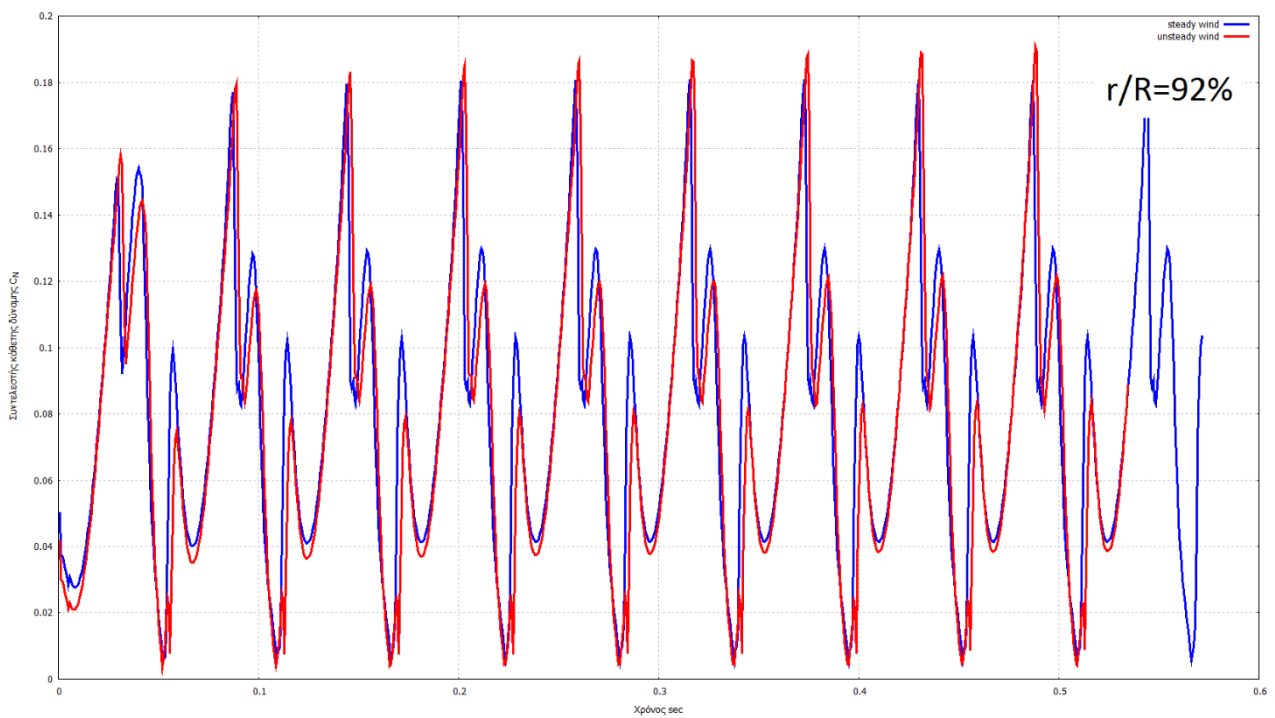
Εικόνα 83 Εξέλιξη του συντελεστή κάθετης δύναμης κατά μια πλήρη περιστροφή στο 75% του πτερυγίου για ταχύτητα πτήσης 50.5m/s



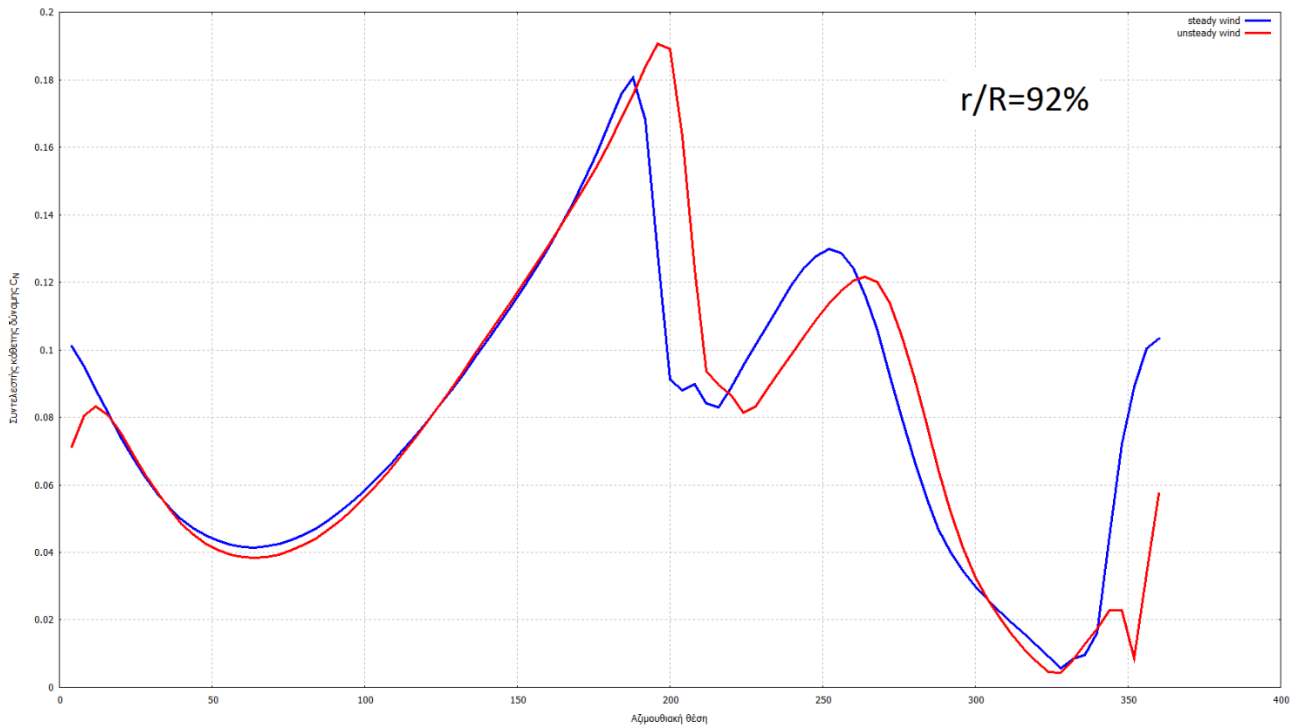
Εικόνα 84 Εξέλιξη του συντελεστή κάθετης δύναμης στο χρόνο στο 87% του πτερυγίου για ταχύτητα πτήσης 50.5m/s



Εικόνα 86 Εξέλιξη του συντελεστή κάθετης δύναμης κατά μια πλήρη περιστροφή στο 87% του πτερυγίου για ταχύτητα πτήσης 50.5m/s

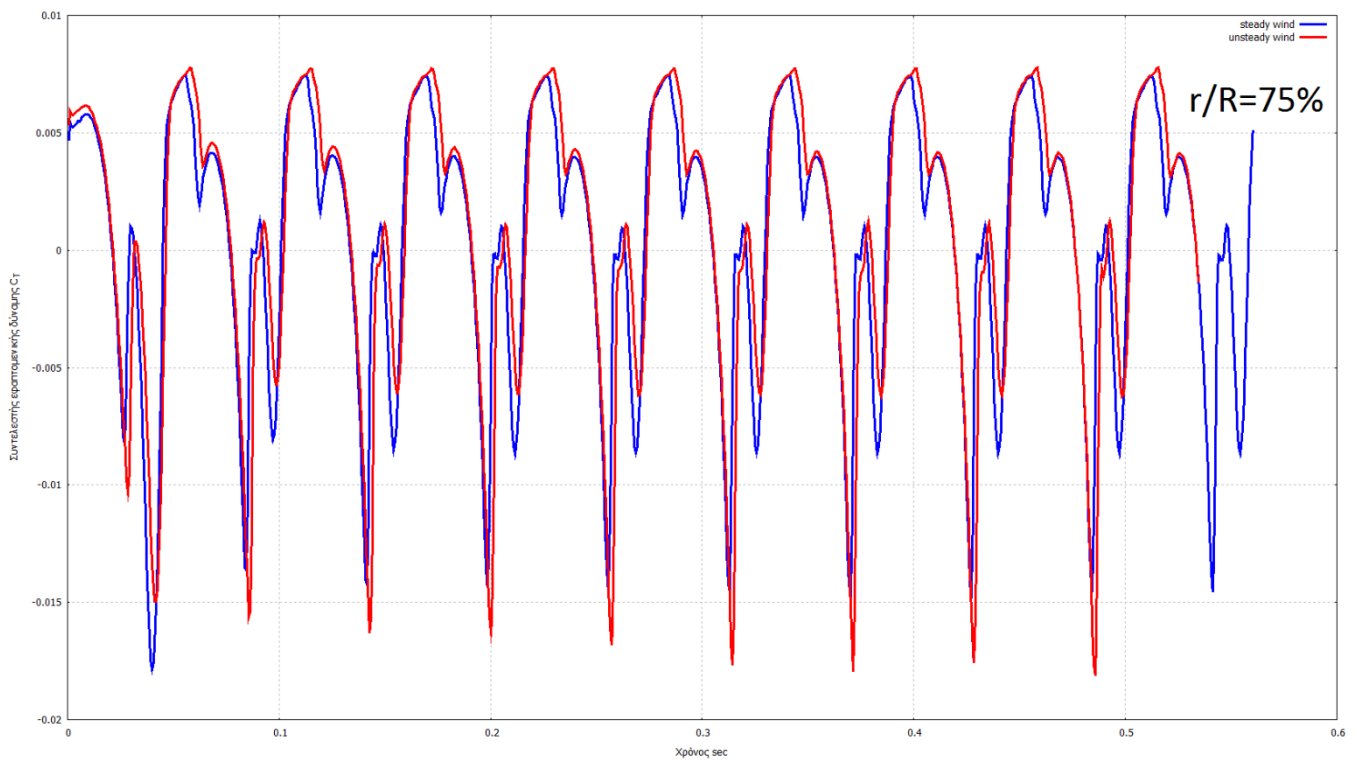


Εικόνα 85 Εξέλιξη του συντελεστή κάθετης δύναμης στο χρόνο στο 92% του πτερυγίου για ταχύτητα πτήσης 50.5m/s

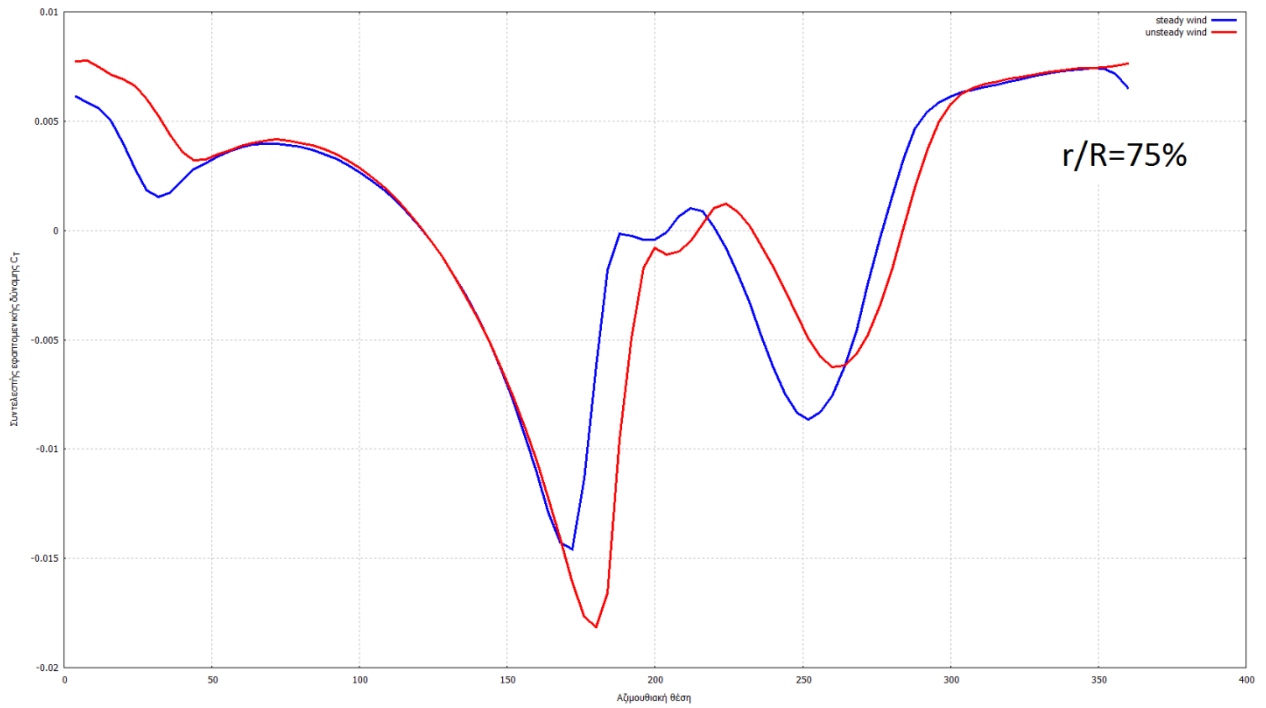


Εικόνα 87 Εξέλιξη του συντελεστή κάθετης δύναμης κατά μια πλήρη περιστροφή στο 92% του περυγίου για ταχύτητα πτήσης 50.5m/s

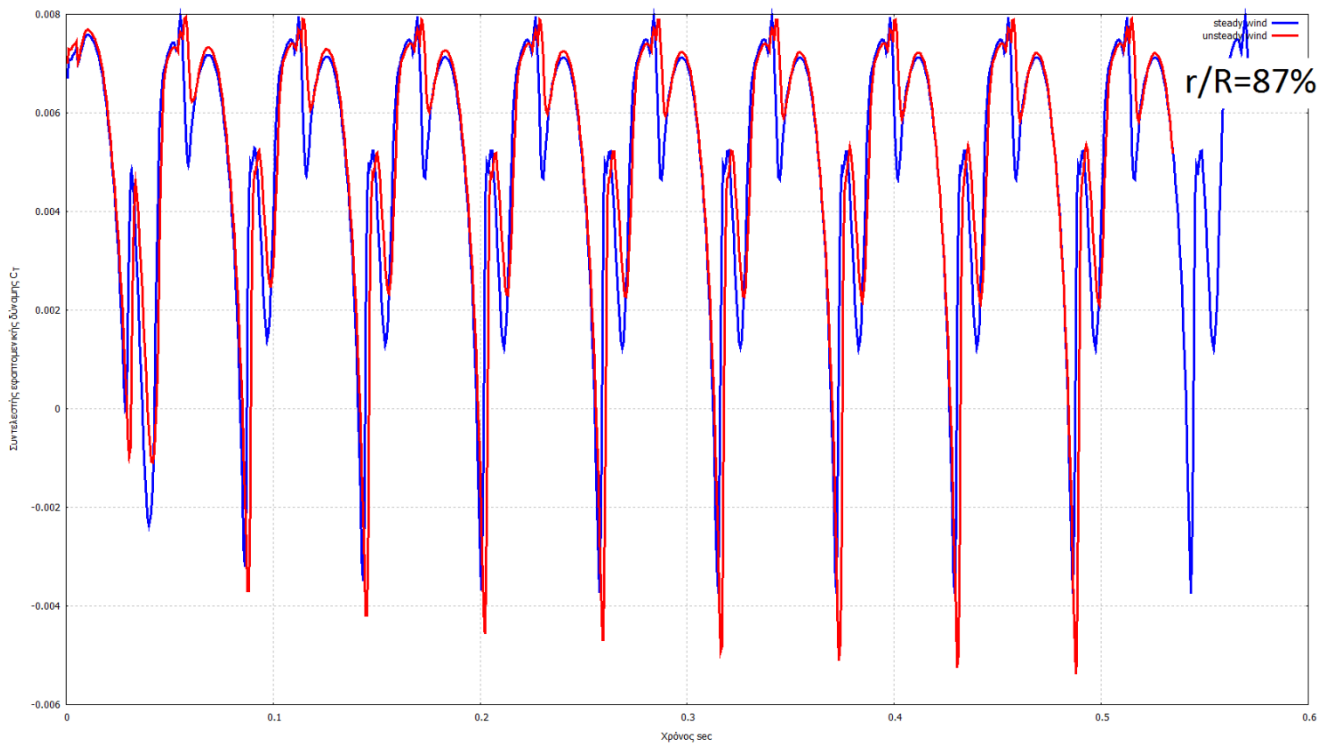
5.4 Υπολογισμός του συντελεστή εφαπτομενικής δύναμης



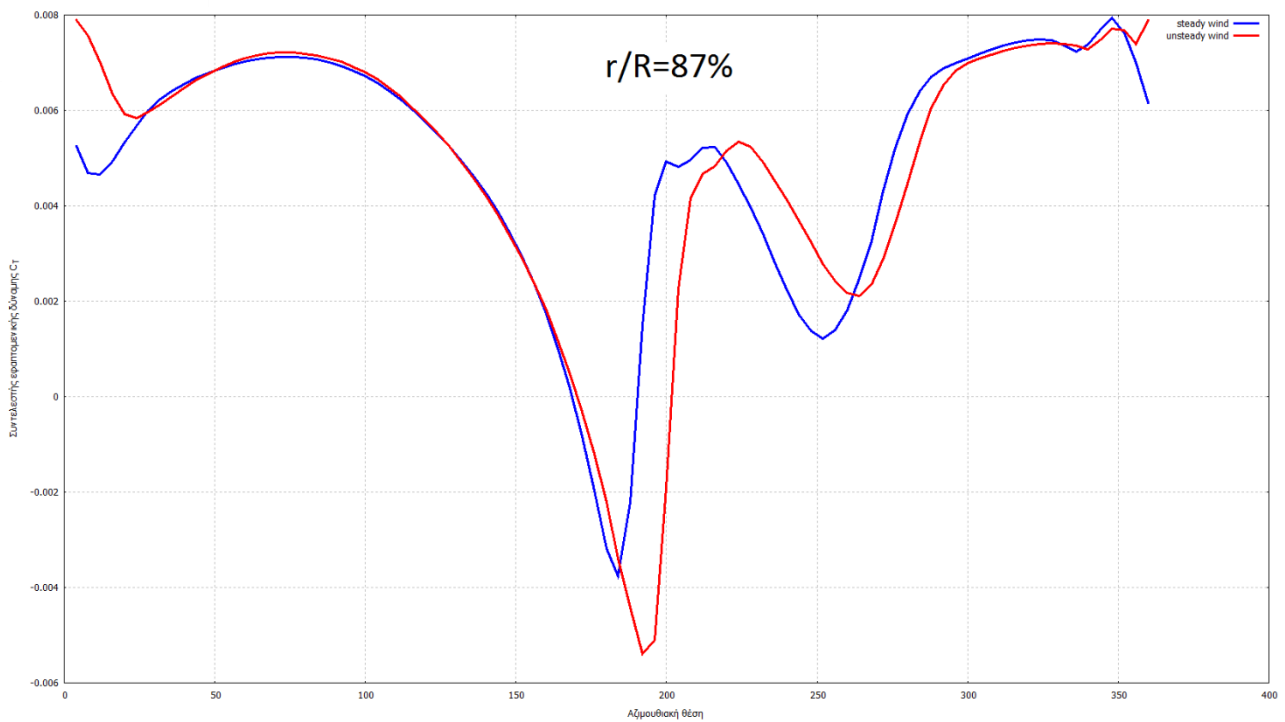
Εικόνα 88 Εξέλιξη του συντελεστή εφαπτομενικής δύναμης στο χρόνο στο 75% του περυγίου για ταχύτητα πτήσης 50.5m/s



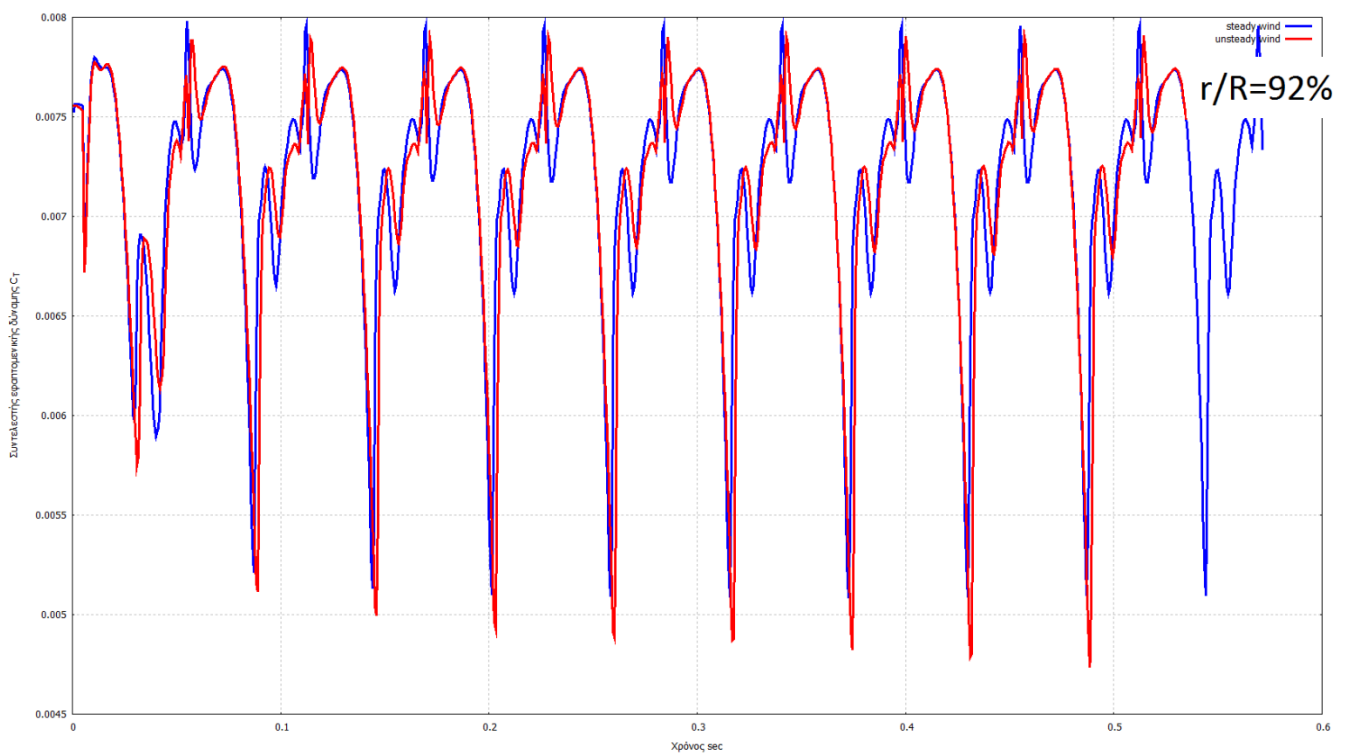
Εικόνα 89 Εξέλιξη του συντελεστή εφαιπτομενικής δύναμης κατά μια πλήρη περιστροφή στο 75% του πτερυγίου για ταχύτητα πτήσης 50.5m/s



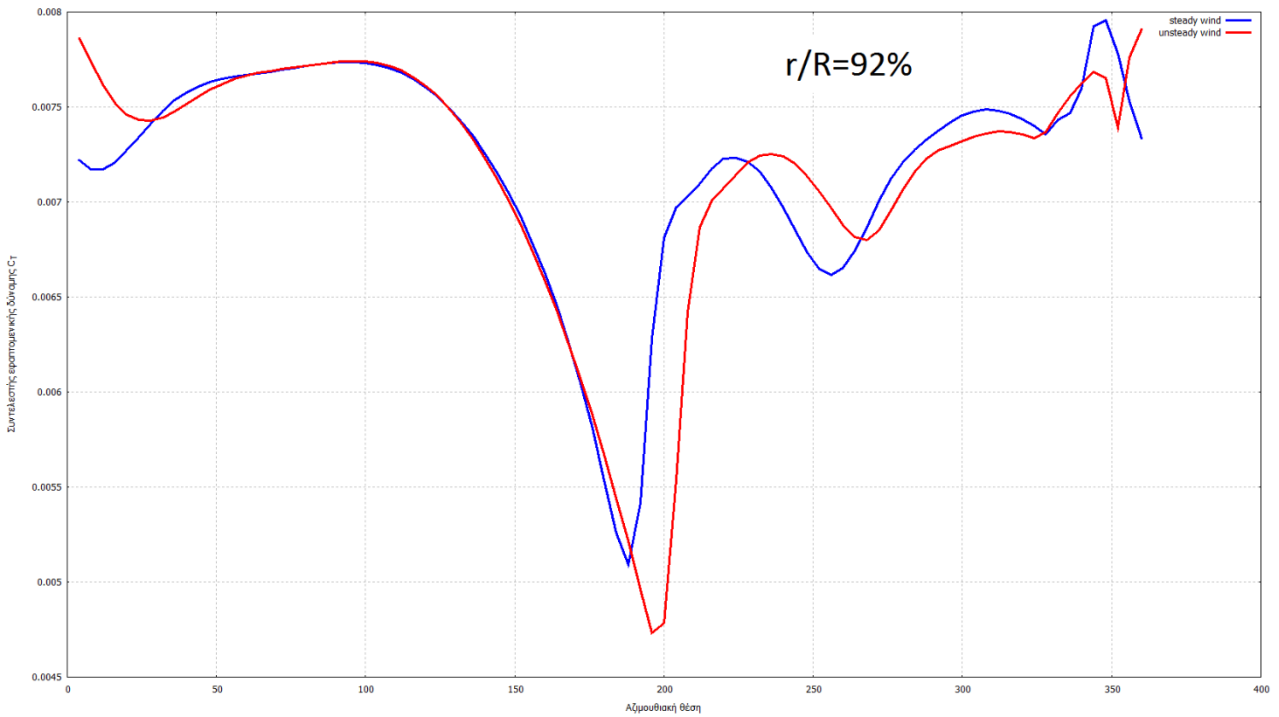
Εικόνα 90 Εξέλιξη του συντελεστή εφαιπτομενικής δύναμης στο χρόνο στο 87% του πτερυγίου για ταχύτητα πτήσης 50.5m/s



Εικόνα 91 Εξέλιξη του συντελεστή εραπτομενικής δύναμης κατά μια πλήρη περιστροφή στο 87% του πτερυγίου για ταχύτητα πτήσης 50.5m/s

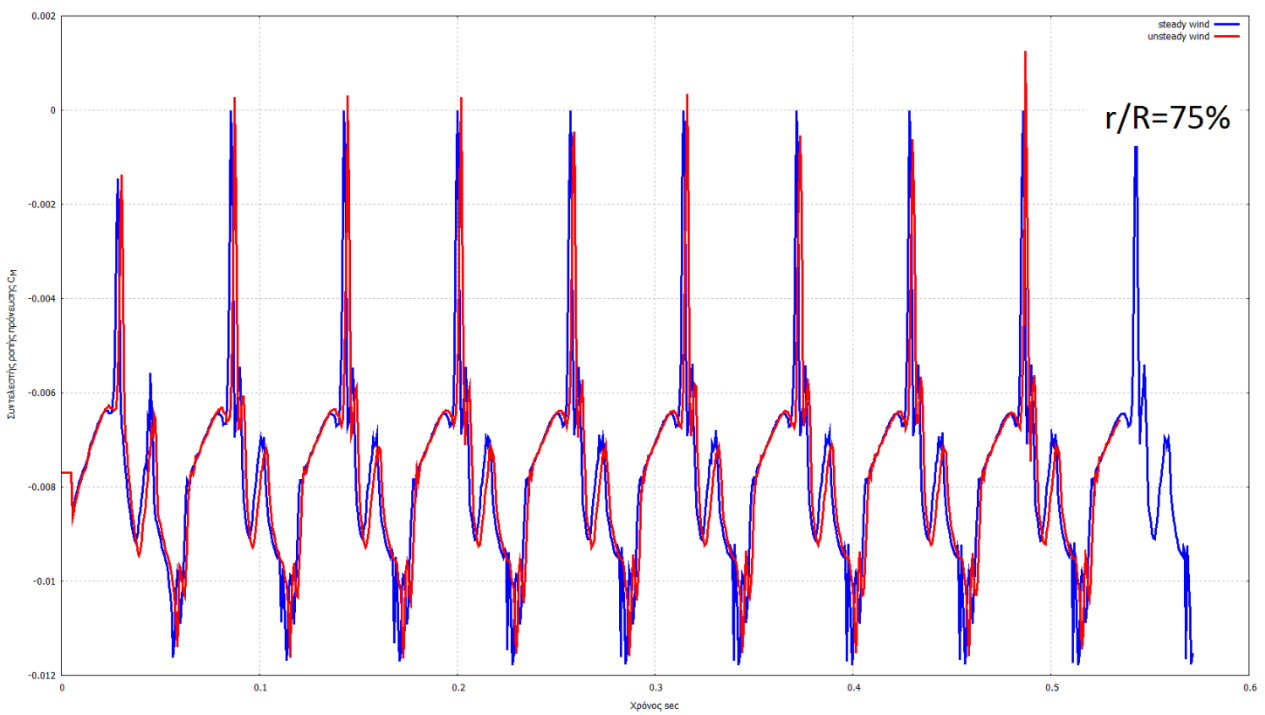


Εικόνα 92 Εξέλιξη του συντελεστή εραπτομενικής δύναμης στο χρόνο στο 92% του πτερυγίου για ταχύτητα πτήσης 50.5m/s

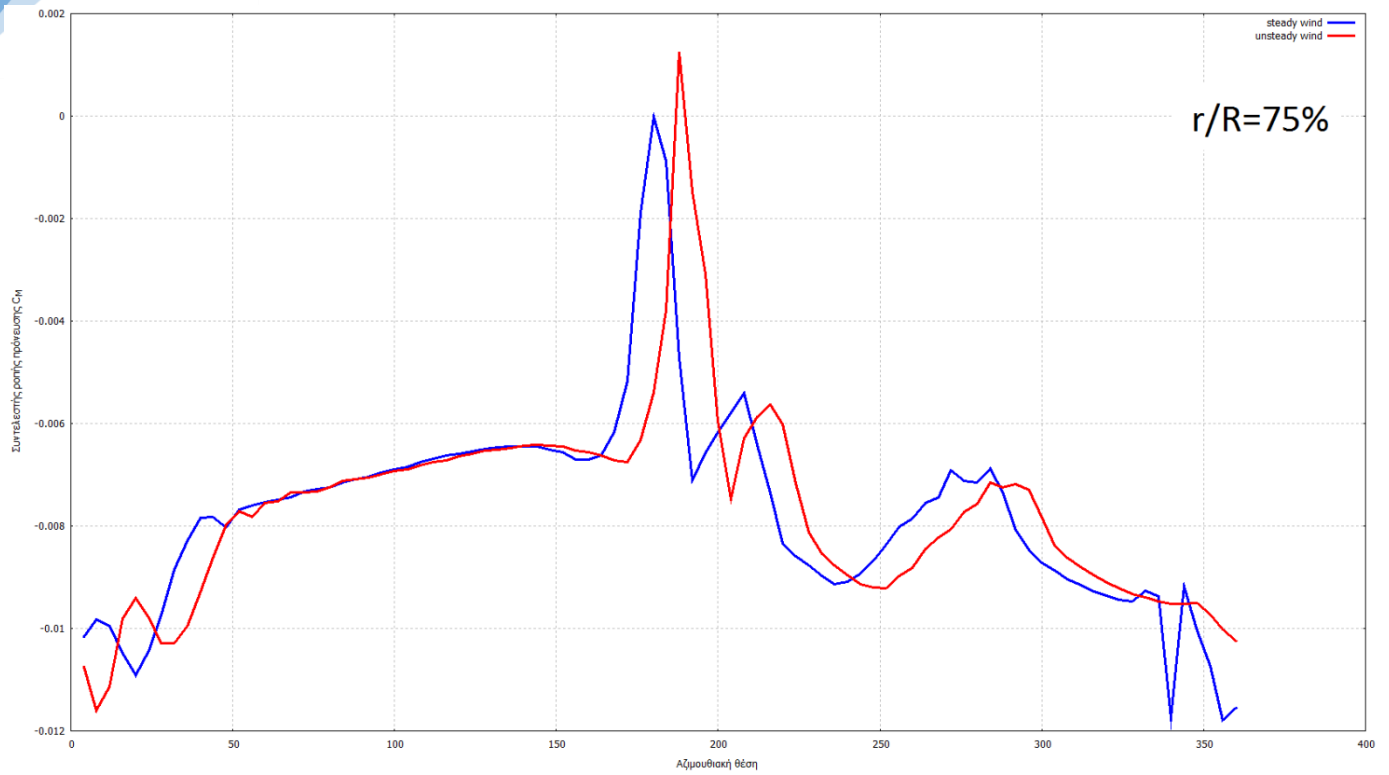


Εικόνα 93 Εξέλιξη του συντελεστή εφαιπτομενικής δύναμης κατά μια πλήρη περιστροφή στο 92% του πτερυγίου για ταχύτητα πτήσης 50.5m/s

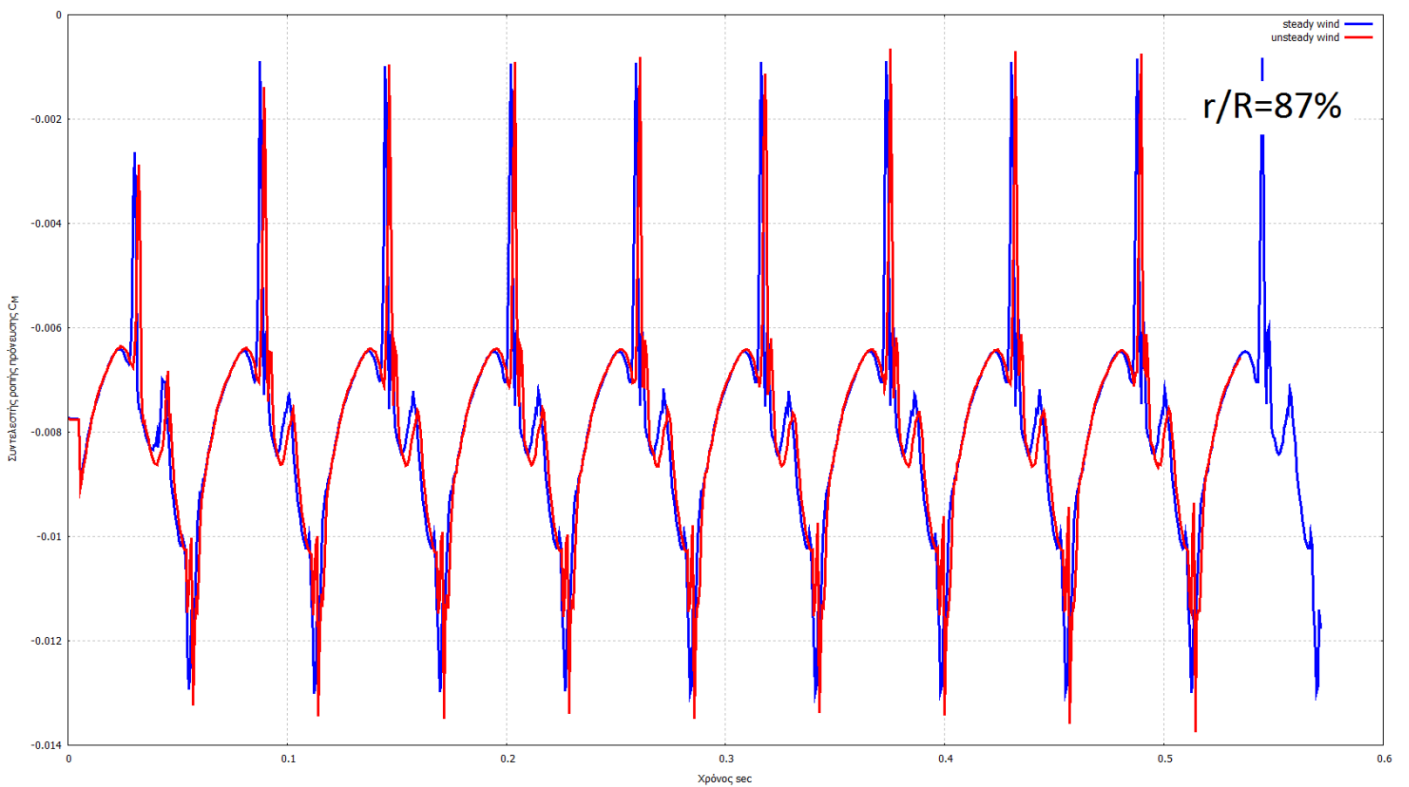
5.5 Υπολογισμός του συντελεστή ροπής πρόνευσης



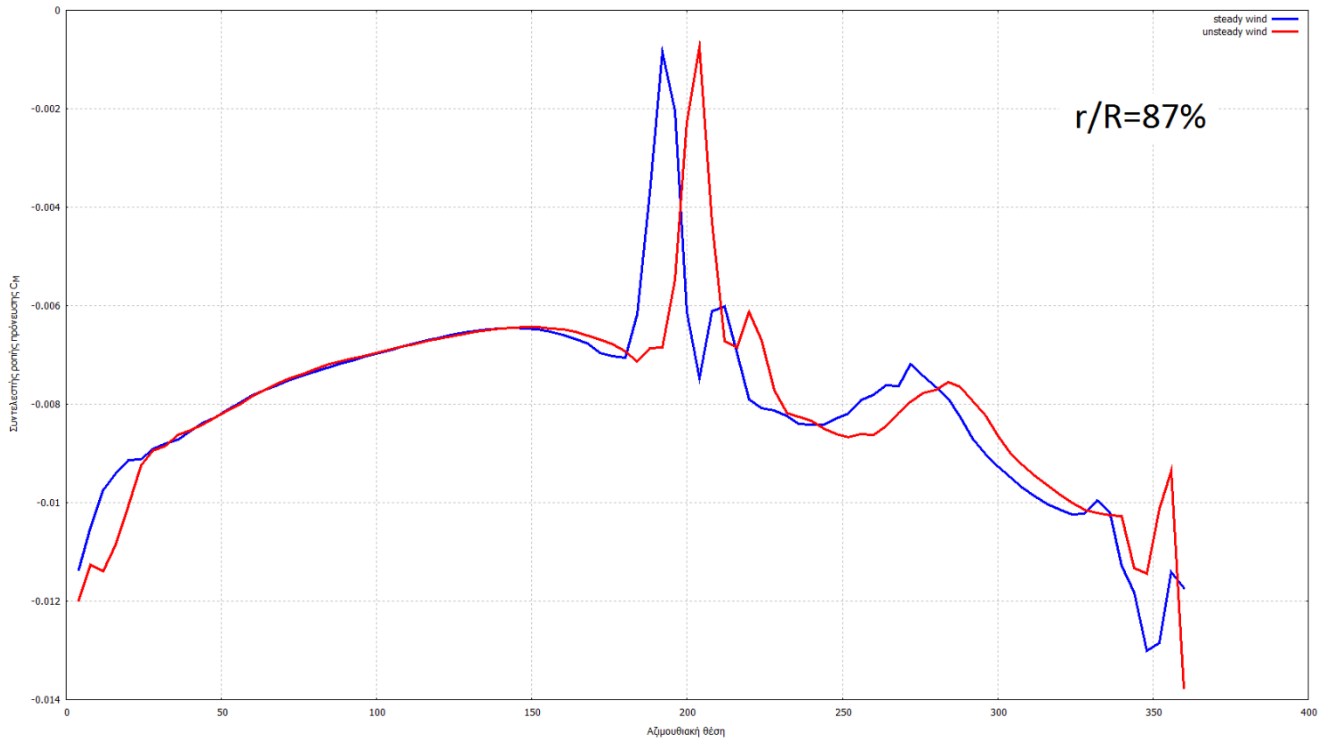
Εικόνα 94 Εξέλιξη του συντελεστή ροπής πρόνευσης στο χρόνο στο 75% του πτερυγίου για ταχύτητα πτήσης 50.5m/s



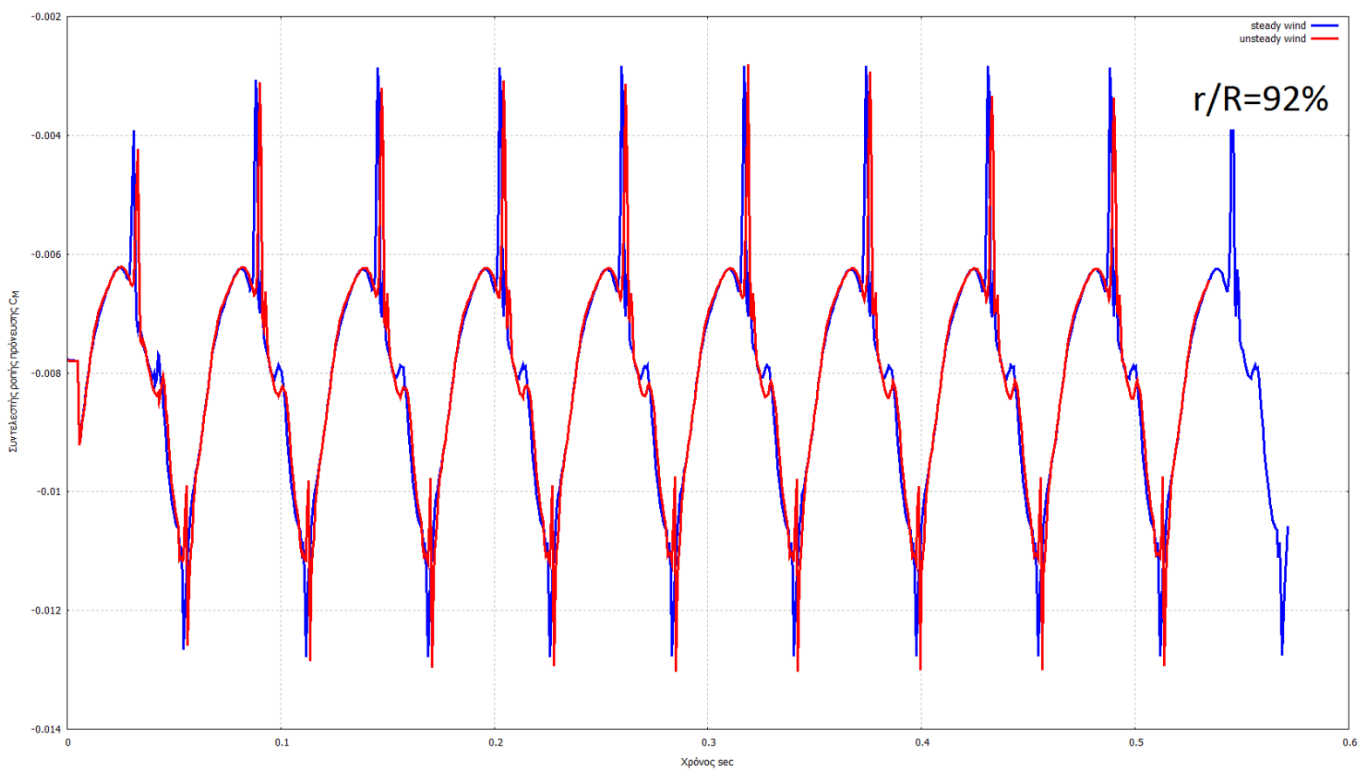
Εικόνα 95 Εξέλιξη του συντελεστή ροπής πρόνευσης κατά μια πλήρη περιστροφή στο 75% του περυγίου για ταχύτητα πτήσης 50.5m/s



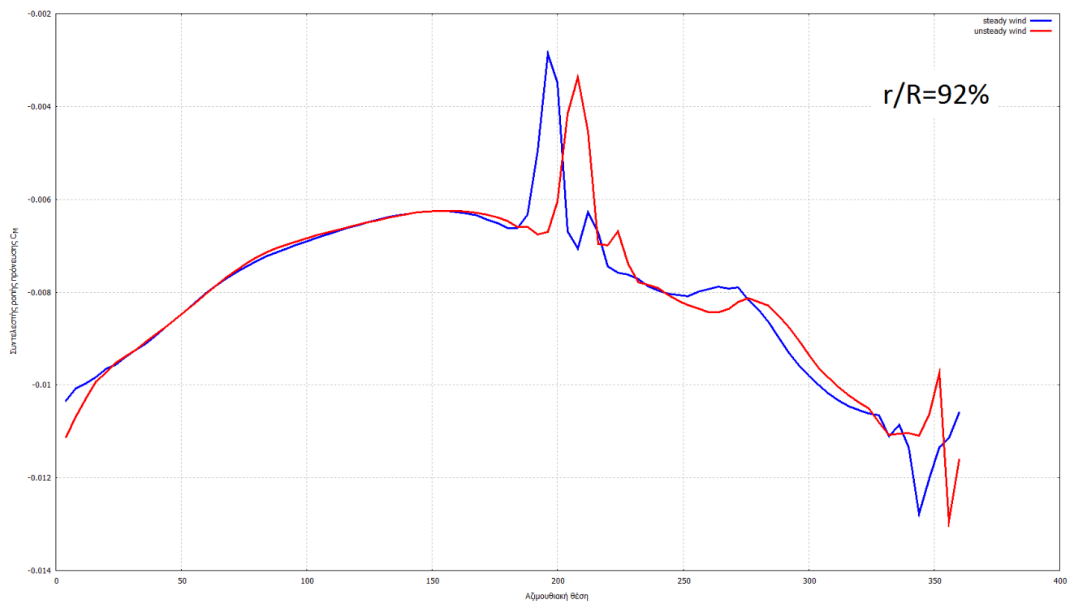
Εικόνα 96 Εξέλιξη του συντελεστή ροπής πρόνευσης στο χρόνο στο 87% του περυγίου για ταχύτητα πτήσης 50.5m/s



Εικόνα 97 Εξέλιξη του συντελεστή ροπής πρόνωσης κατά μια πλήρη περιστροφή στο 87% του πτερυγίου για ταχύτητα πτήσης 50.5m/s



Εικόνα 98 Εξέλιξη του συντελεστή ροπής πρόνωσης στο χρόνο στο 92% του πτερυγίου για ταχύτητα πτήσης 50.5m/s

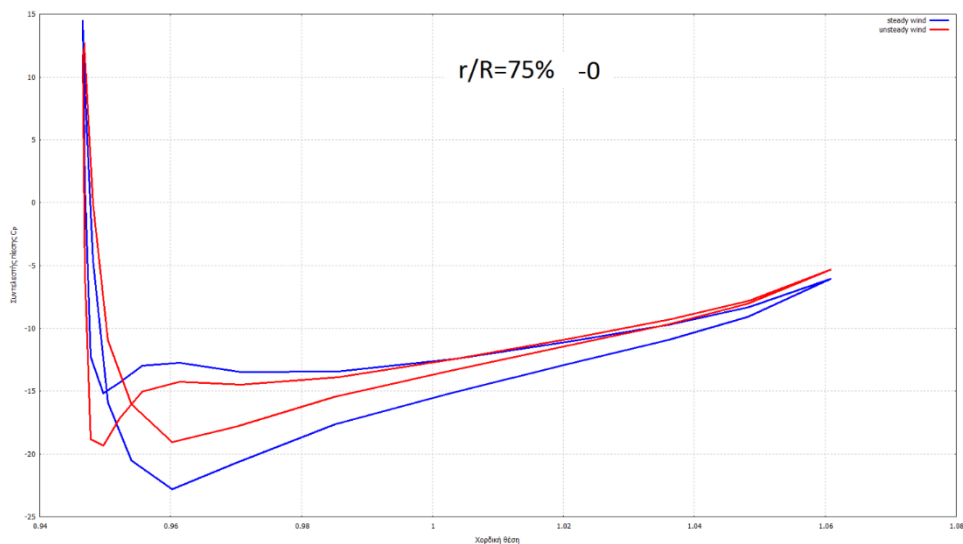


Εικόνα 99 Εξέλιξη του συντελεστή ροπής πρόννευσης κατά μια πλήρη περιστροφή στο 87% του πτερυγίου για ταχύτητα πτήσης 50.5m/s

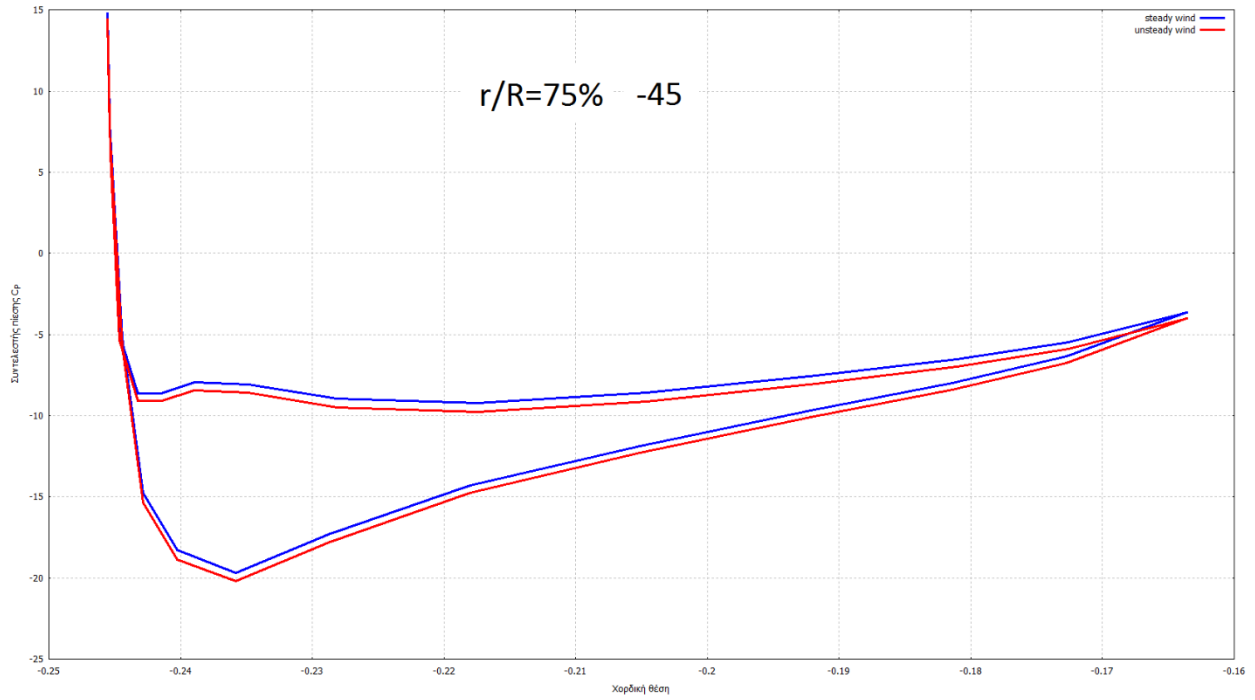
5.6 Υπολογισμός συντελεστή πίεσης

Τα διαγράμματα που ακολουθούν παρουσιάζουν την κατανομή του συντελεστή πίεσης κατά μήκος της χορδής του πτερυγίου σε δύο ακτινικές θέσεις (75%, 87%), για διάφορες θέσεις του αξιμουθίου (0°, 45°, 90°, 120°, 270°, 300°). Ο κώδικας υπολογίζει τους συντελεστές πίεσης, πολλαπλασιασμένους επί μια σταθερά που έχει τιμή περίπου 33.3.

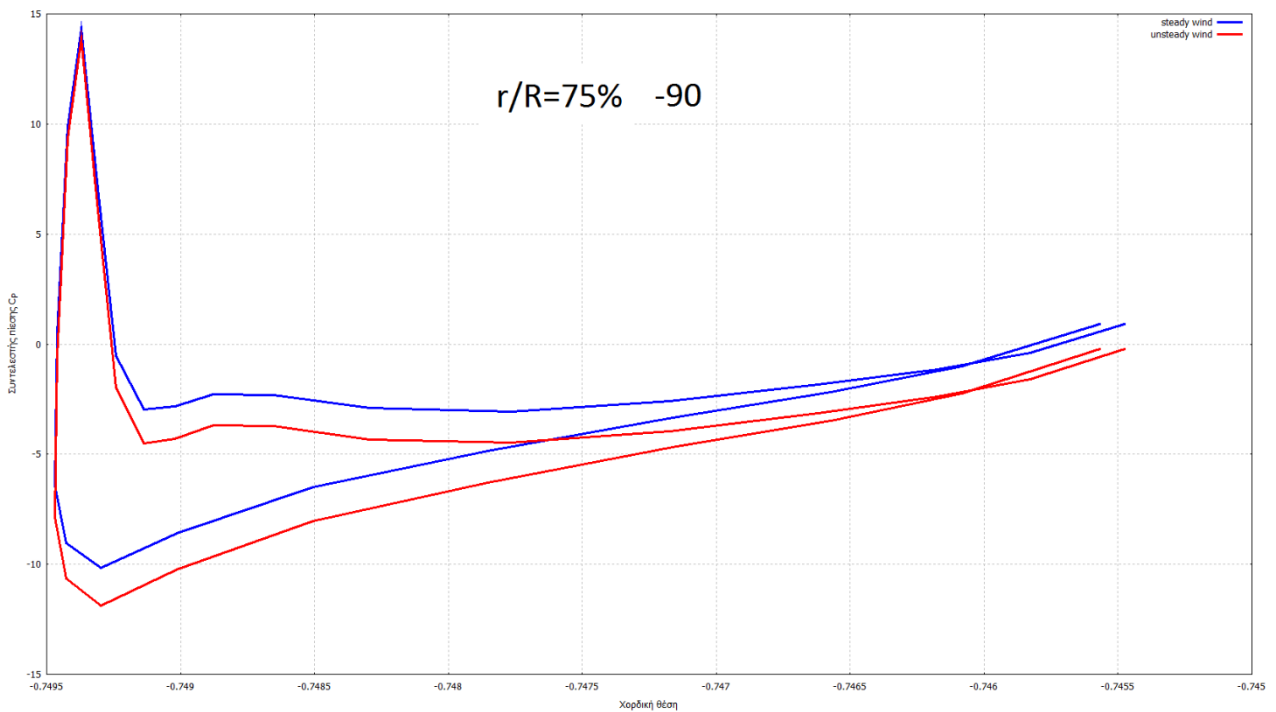
5.6.1 Κατανομή του συντελεστή πίεσης στο 75% του πτερυγίου



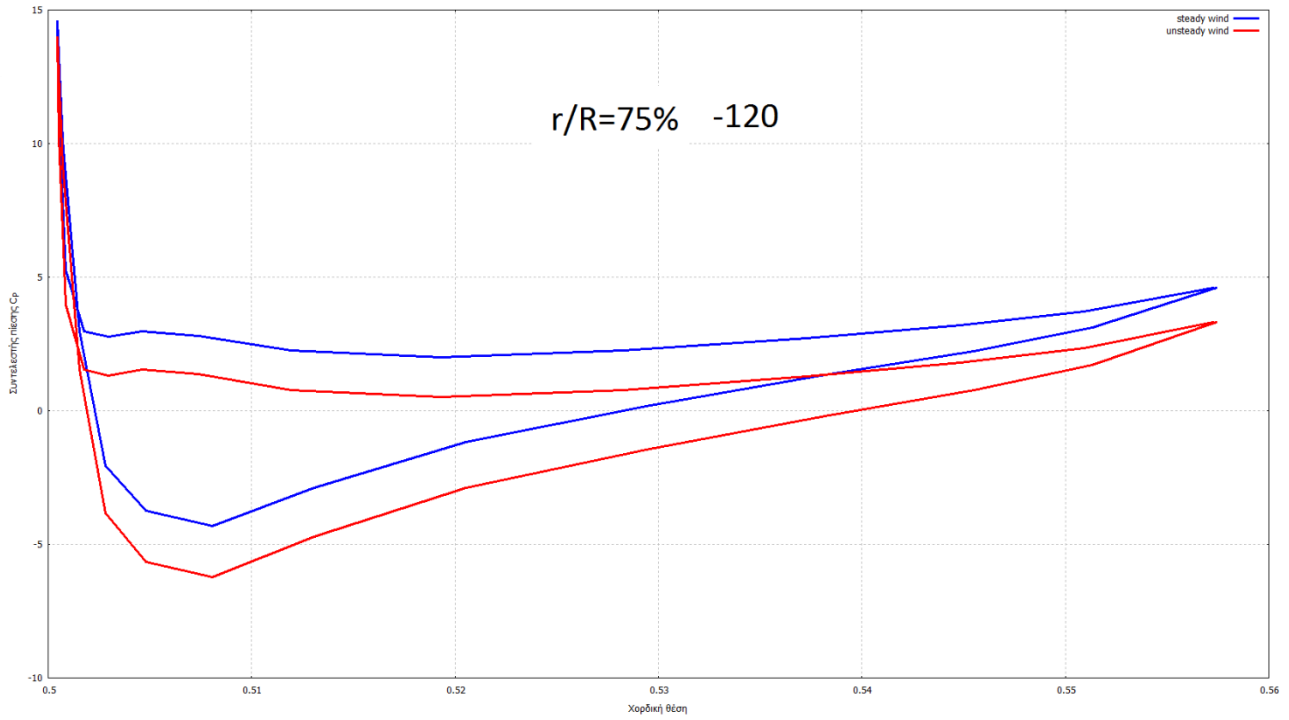
Εικόνα 100 Κατανομή του συντελεστή πίεσης κατά μήκος της χορδής του πτερυγίου, στο 75% του πτερυγίου για αξιμουθιακή θέση 0° για ταχύτητα πτήσης 50.5m/s



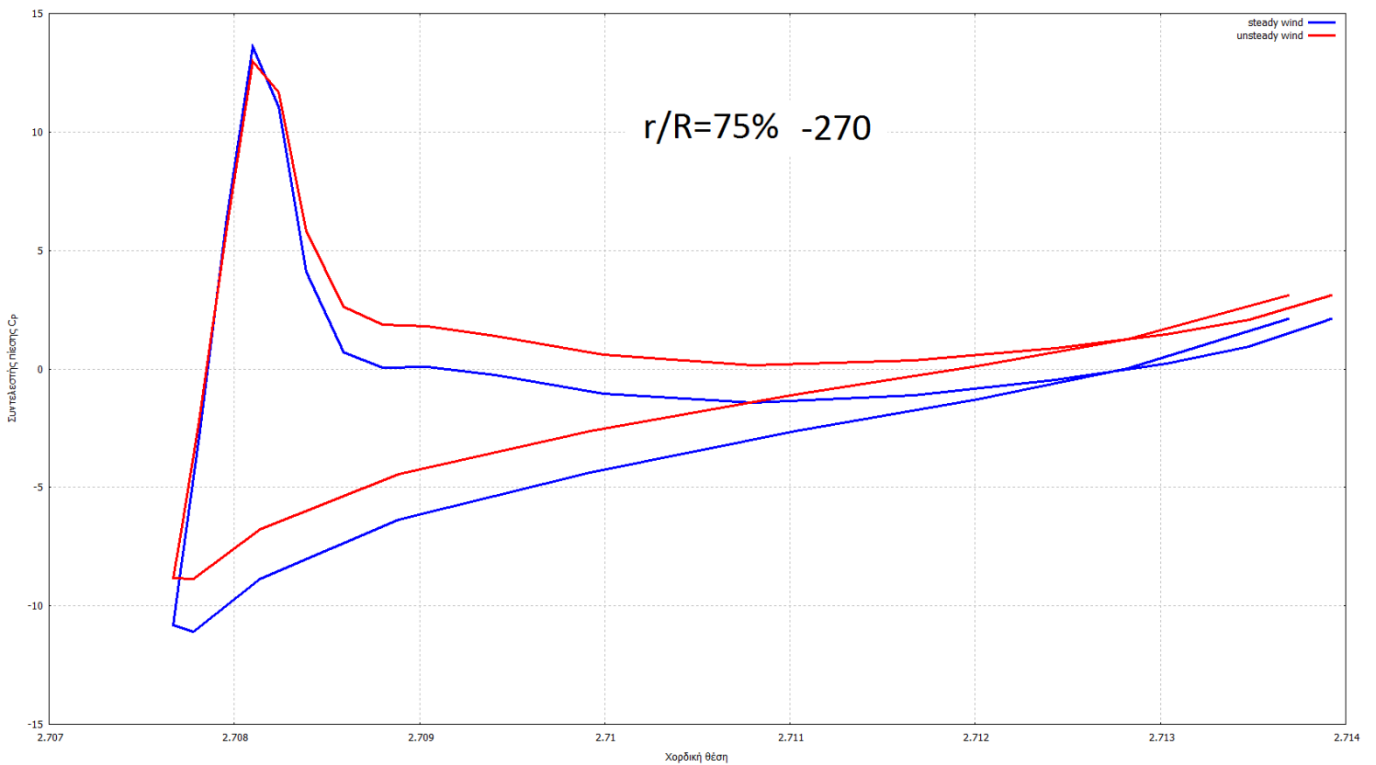
Εικόνα 101 Κατανομή του συντελεστή πίεσης κατά μήκος της χορδής του πτερυγίου, στο 75% του πτερυγίου για αζιμουδιακή θέση 45° για ταχύτητα πτήσης 50.5m/s



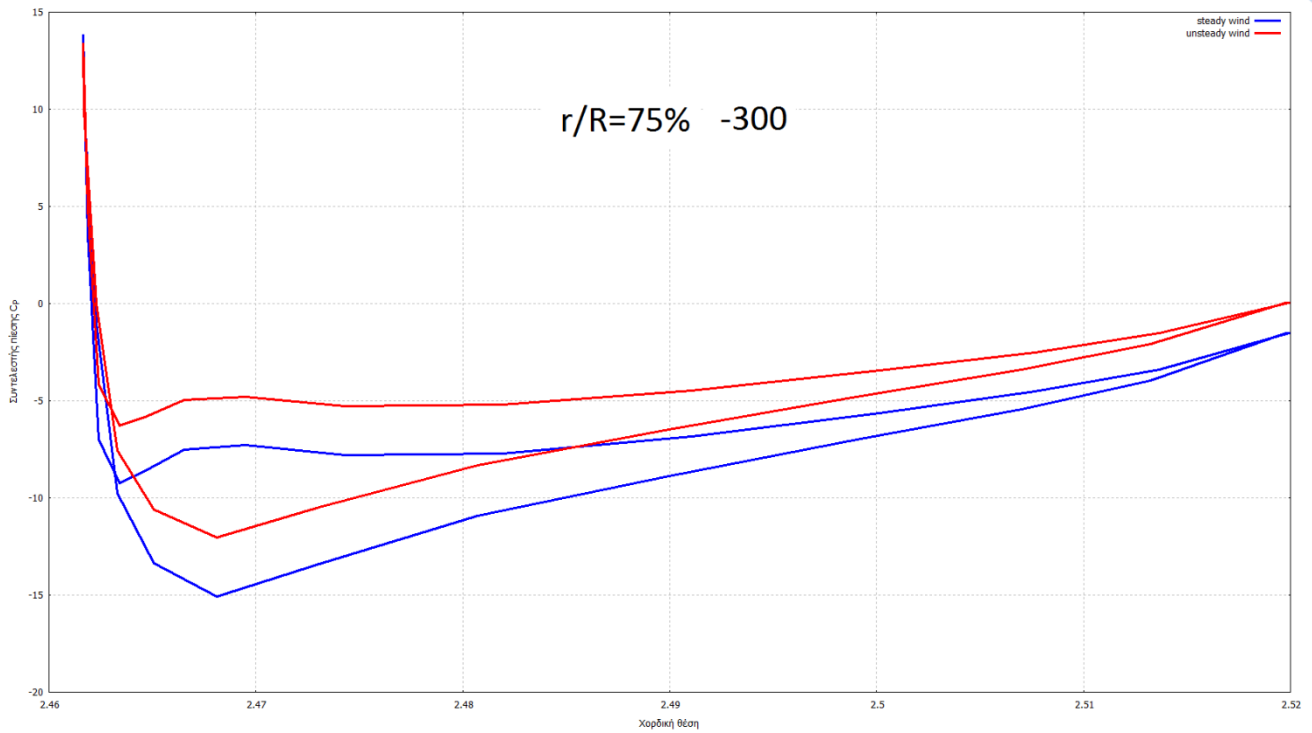
Εικόνα 102 Κατανομή του συντελεστή πίεσης κατά μήκος της χορδής του πτερυγίου, στο 75% του πτερυγίου για αζιμουδιακή θέση 90° για ταχύτητα πτήσης 50.5m/s



Εικόνα 103 Κατανομή του συντελεστή πίεσης κατά μήκος της χορδής του πτερυγίου, στο 75% του πτερυγίου για αξιμουθιακή θέση 120° για ταχύτητα πτήσης 50.5m/s

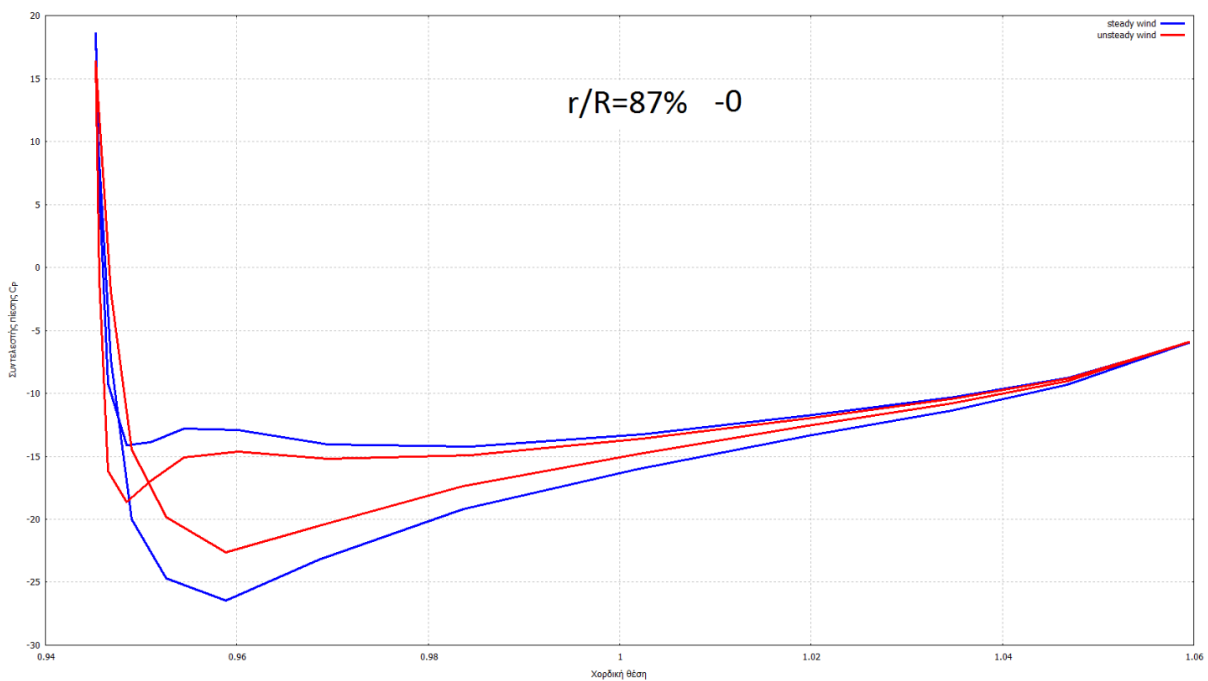


Εικόνα 104 Κατανομή του συντελεστή πίεσης κατά μήκος της χορδής του πτερυγίου, στο 75% του πτερυγίου για αξιμουθιακή θέση 270° για ταχύτητα πτήσης 50.5m/s

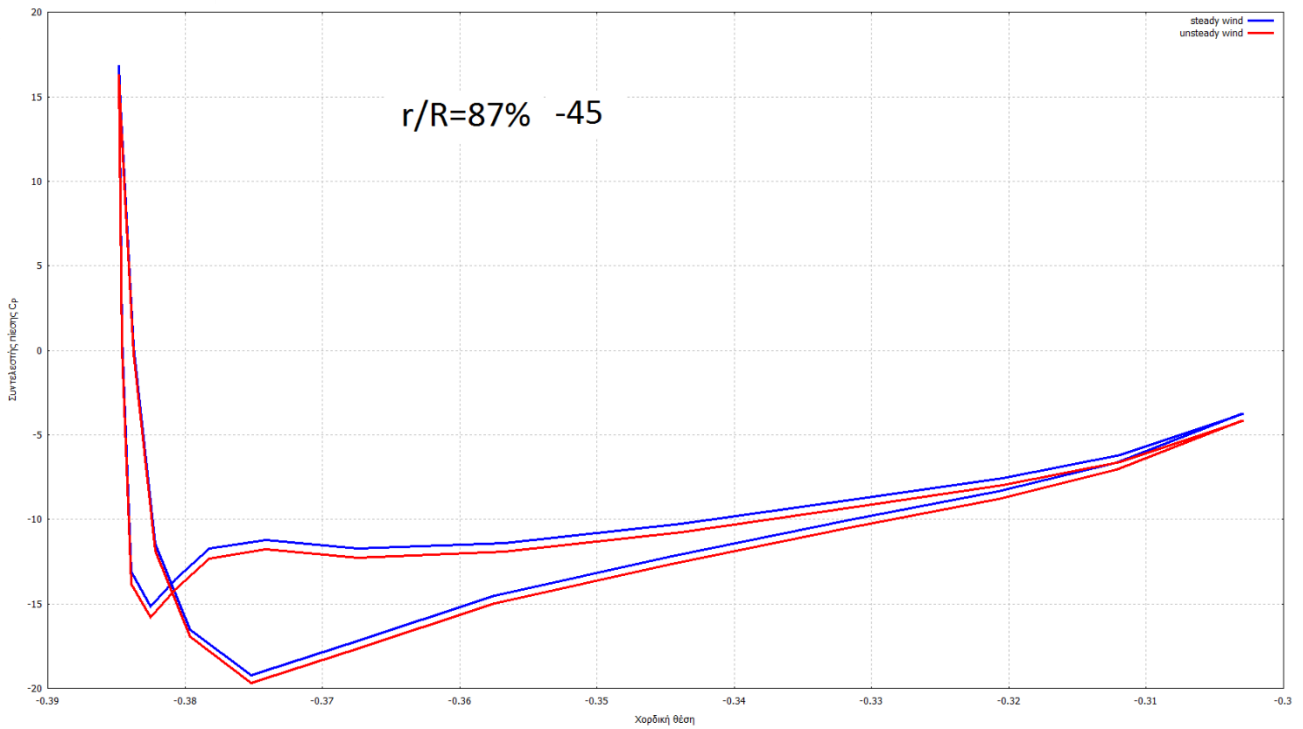


Εικόνα 105 Κατανομή του συντελεστή πίεσης κατά μήκος της χορδής του πτερυγίου, στο 75% του πτερυγίου για αζιμουθιακή θέση 300° για ταχύτητα πτήσης 50.5m/s

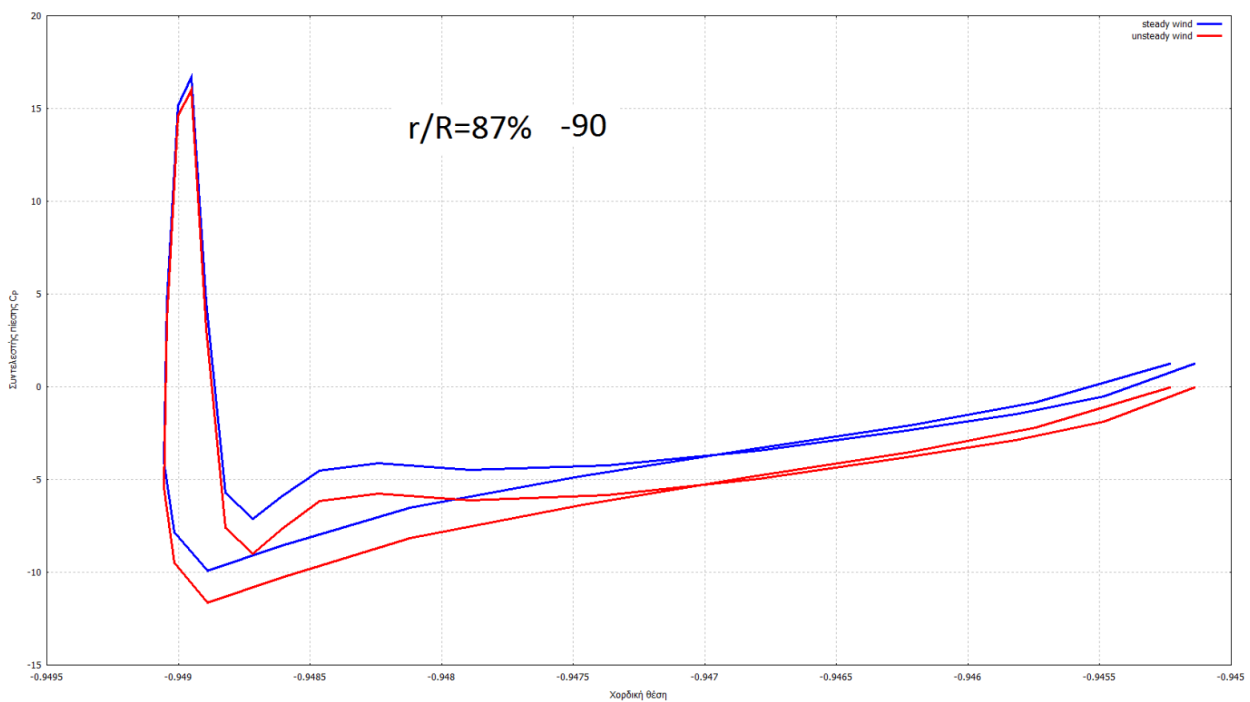
5.6.2 Κατανομή του συντελεστή πίεσης στο 87% του πτερυγίου



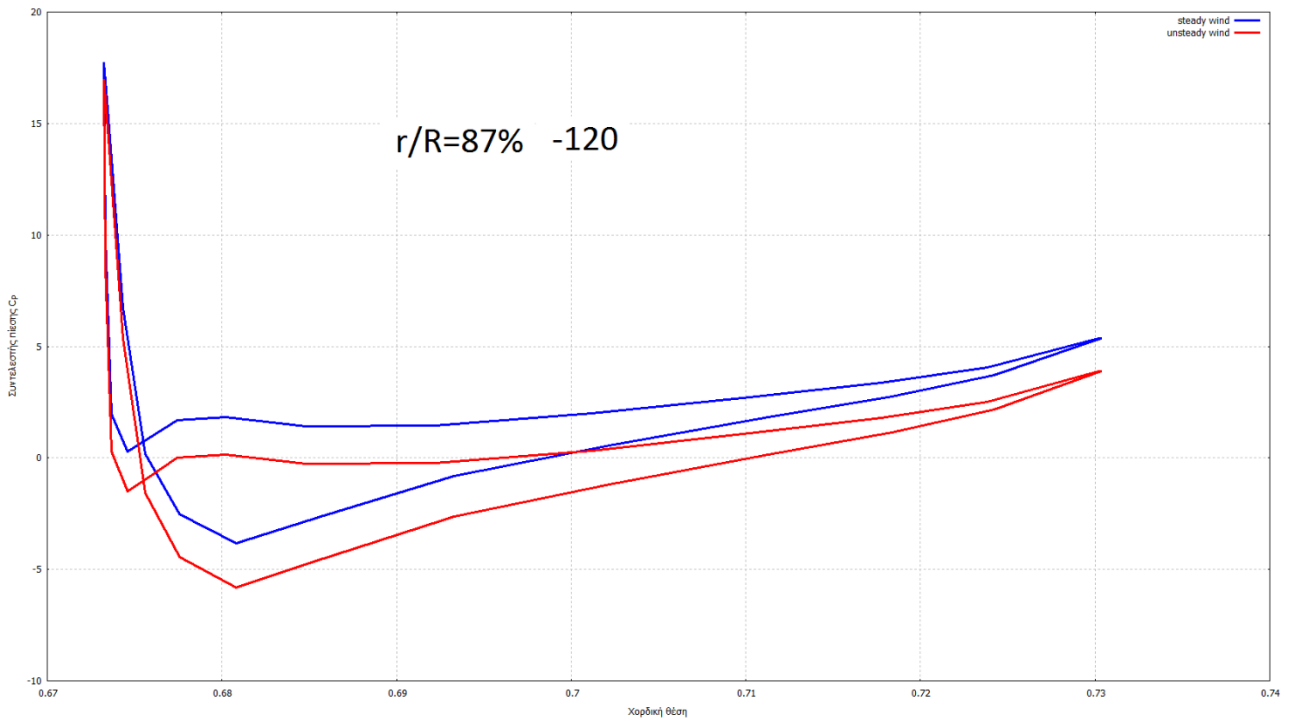
Εικόνα 106 Κατανομή του συντελεστή πίεσης κατά μήκος της χορδής του πτερυγίου, στο 87% του πτερυγίου για αζιμουθιακή θέση 0° για ταχύτητα πτήσης 50.5m/s



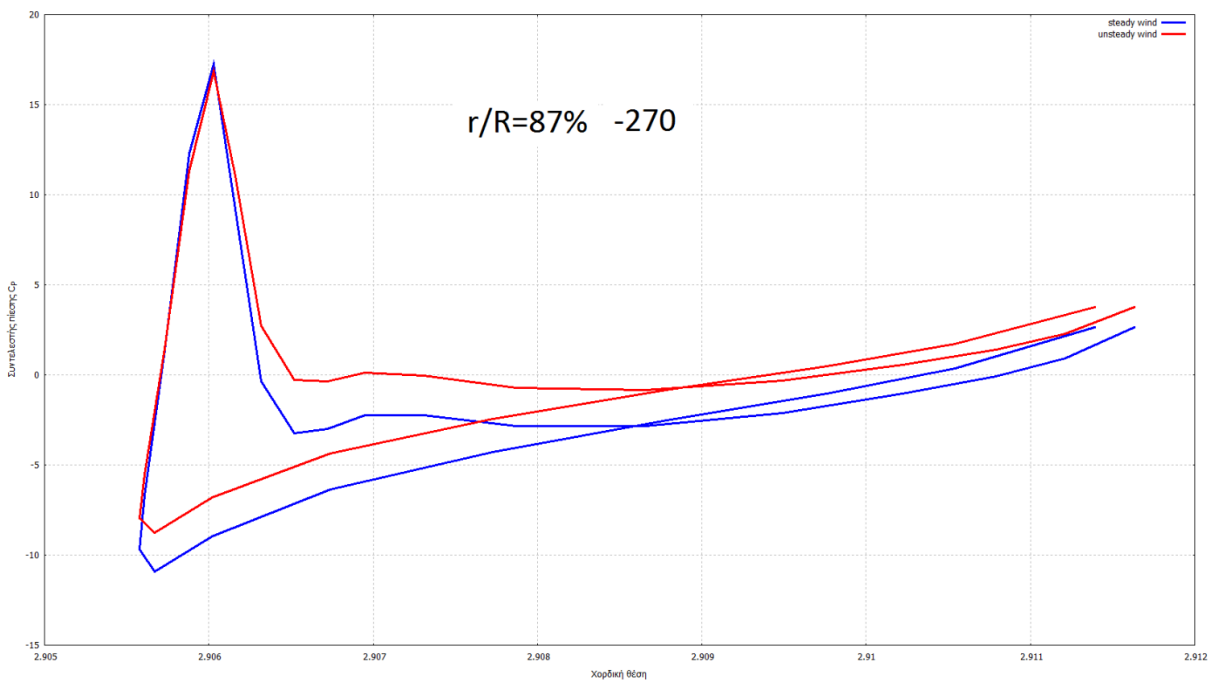
Εικόνα 107 Κατανομή του συντελεστή πίεσης κατά μήκος της χορδής του πτερυγίου, στο 87% του πτερυγίου για αξιμουθιακή θέση 45° για ταχύτητα πτήσης 50.5m/s



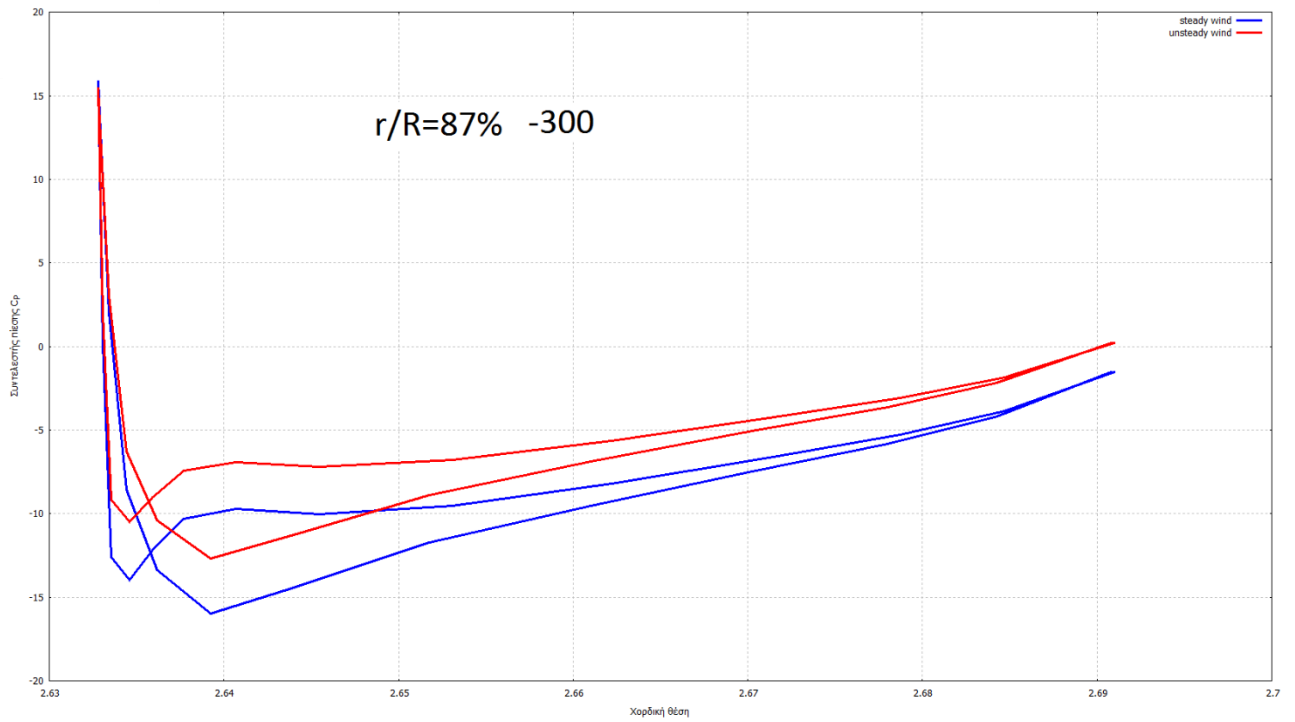
Εικόνα 108 Κατανομή του συντελεστή πίεσης κατά μήκος της χορδής του πτερυγίου, στο 87% του πτερυγίου για αξιμουθιακή θέση 90° για ταχύτητα πτήσης 50.5m/s



Εικόνα 109 Κατανομή του συντελεστή πίεσης κατά μήκος της χορδής του πτερυγίου, στο 87% του πτερυγίου για αζιμουθιακή θέση 120° για ταχύτητα πτήσης 50.5m/s



Εικόνα 110 Κατανομή του συντελεστή πίεσης κατά μήκος της χορδής του πτερυγίου, στο 87% του πτερυγίου για αζιμουθιακή θέση 270° για ταχύτητα πτήσης 50.5m/s



Εικόνα 111 Κατανομή του συντελεστή πίεσης κατά μήκος της χορδής του πτερυγίου, στο 87% του πτερυγίου για αζιμουθιακή θέση 300° για ταχύτητα πτήσης 50.5m/s

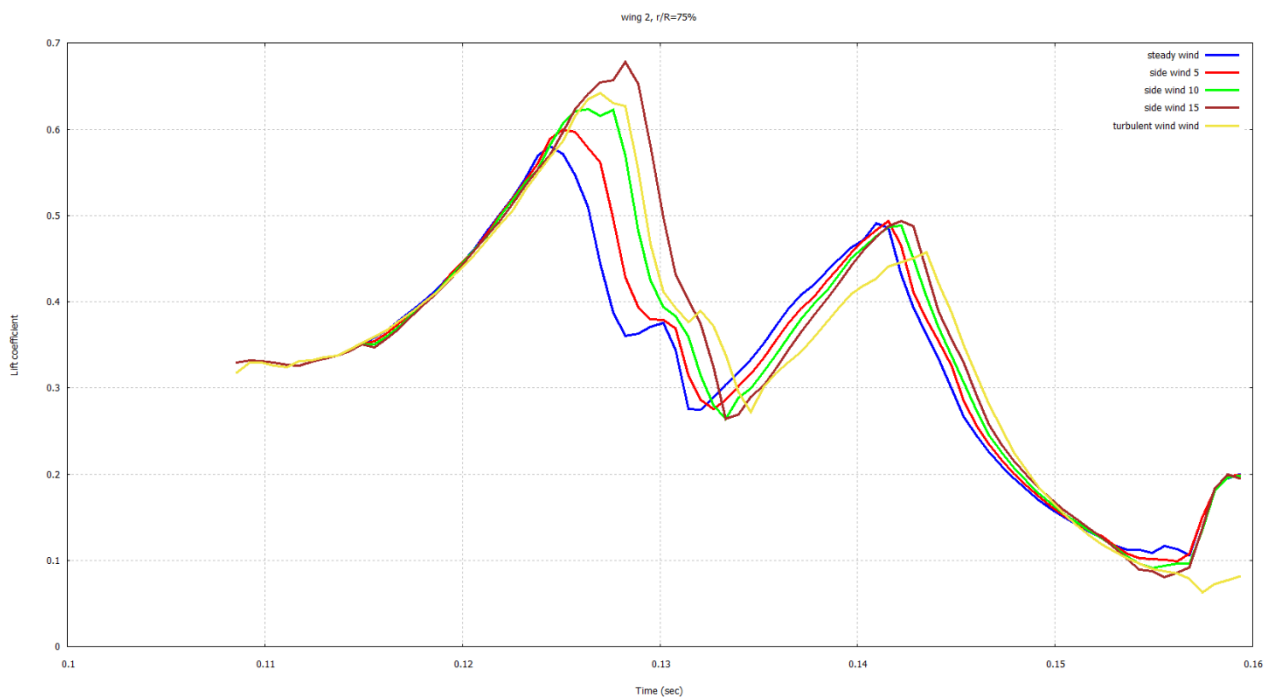
Κεφάλαιο 6: Συμπεράσματα

Παρατηρώντας το προφίλ ταχύτητας κατά την γ -διεύθυνση που δημιουργείται, συμπεραίνουμε ότι καθόλη τη διάρκεια της πτήσης του ελικοπτέρου εντός του πεδίου ταχύτητας που έχουμε δημιουργήσει, το ελικόπτερο δεχεται ένα πλάγιο άνεμο που η έντασή του κειμένεται από 7 m/s έως 13 m/s .

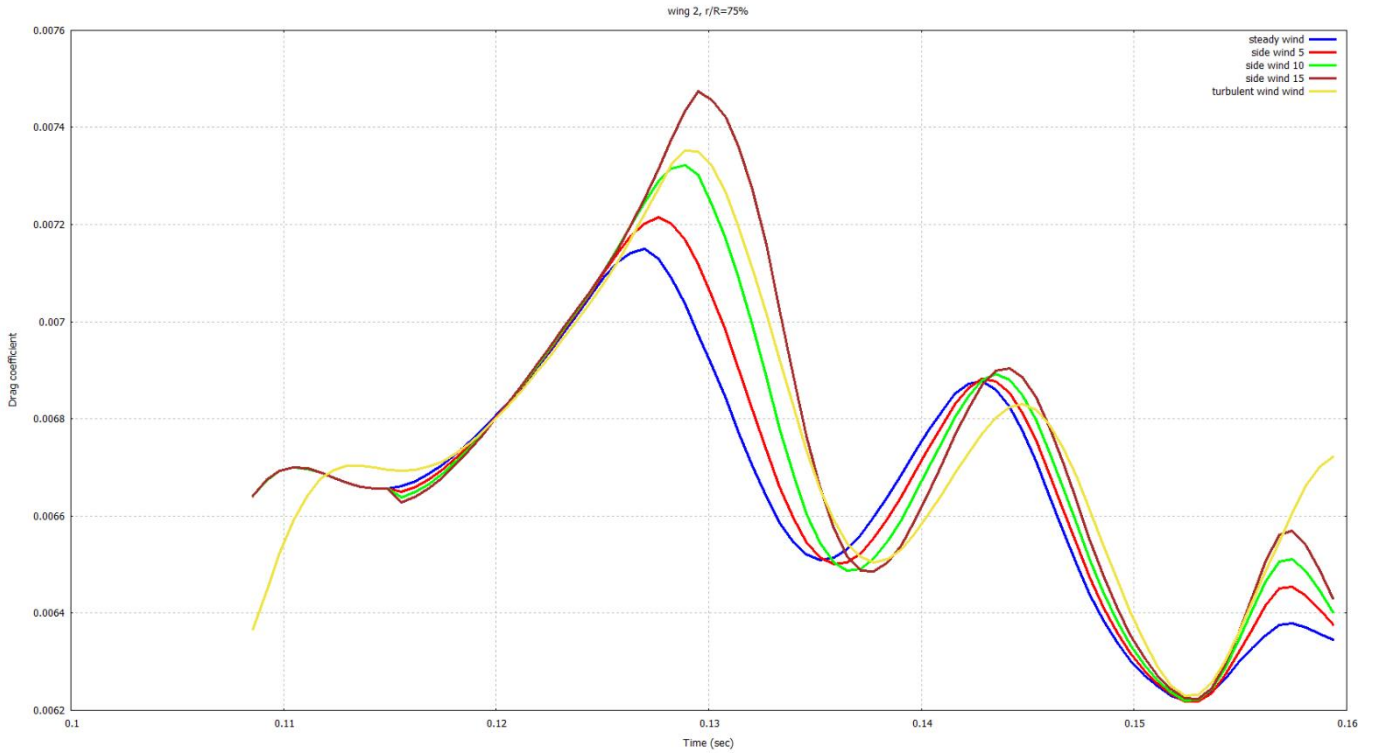
Κατά τη διάρκεια της λειτουργίας του ελικοπτέρου υπό την επίδραση του πεδίου ταχύτητας που έχουμε δημιουργήσει, το ελικόπτερο άρχισε τη λειτουργία του εντός του τυρβώδους ανέμου και καθόλη τη διάρκεια της πτήσης του ήταν εντός του τυρβώδους ανέμου. Συνεπώς, θέλουμε να καταγράψουμε τη συμπεριφορά του ελικοπτέρου κατά τη μετάβασή του από συνθήκες πτήσης αδιατάρακτης ροής σε συνθήκες πτήσης κατά τις οποίες δέχεται έναν πλάγιο άνεμο ίσης έντασης με την ένταση που έχει ο τυρβώδης άνεμος του ομόρρου της ανεμογεννήτριας. Στη συνέχεια, θα συγκρίνουμε τις τιμές των φορτίων που αναπτύσσονται με τις τιμές των φορτίων που υπολογίστηκαν κατά την προσομοίωση πτήσης εντός τυρβώδους ανέμου, με σκοπό να καταλάβουμε κατά πόσο μια βίαιη μετάβαση από συνθήκες αδιατάρακτης ροής σε συνθήκες πλάγιου ανέμου επηρεάζει την αεροδυναμική συμπεριφορά του στροφείου.

Κατά τη διάρκεια της πτήσης του ελικοπτέρου σε αδιάτακτη ροή αέρα με ταχύτητα πτήσης $v_{\infty} = 39.9 \text{ m/s}$ και αφού έχουν ολοκληρωθεί δύο περιστροφές του στροφείου, στην έναρξη της τρίτης περιστροφής το ελικόπτερο δέχεται πλάγιο άνεμο έντασης (5 m/s , 10 m/s , 15 m/s) που διαρκεί για $\frac{1}{4}$ της περιόδου περιστροφής.

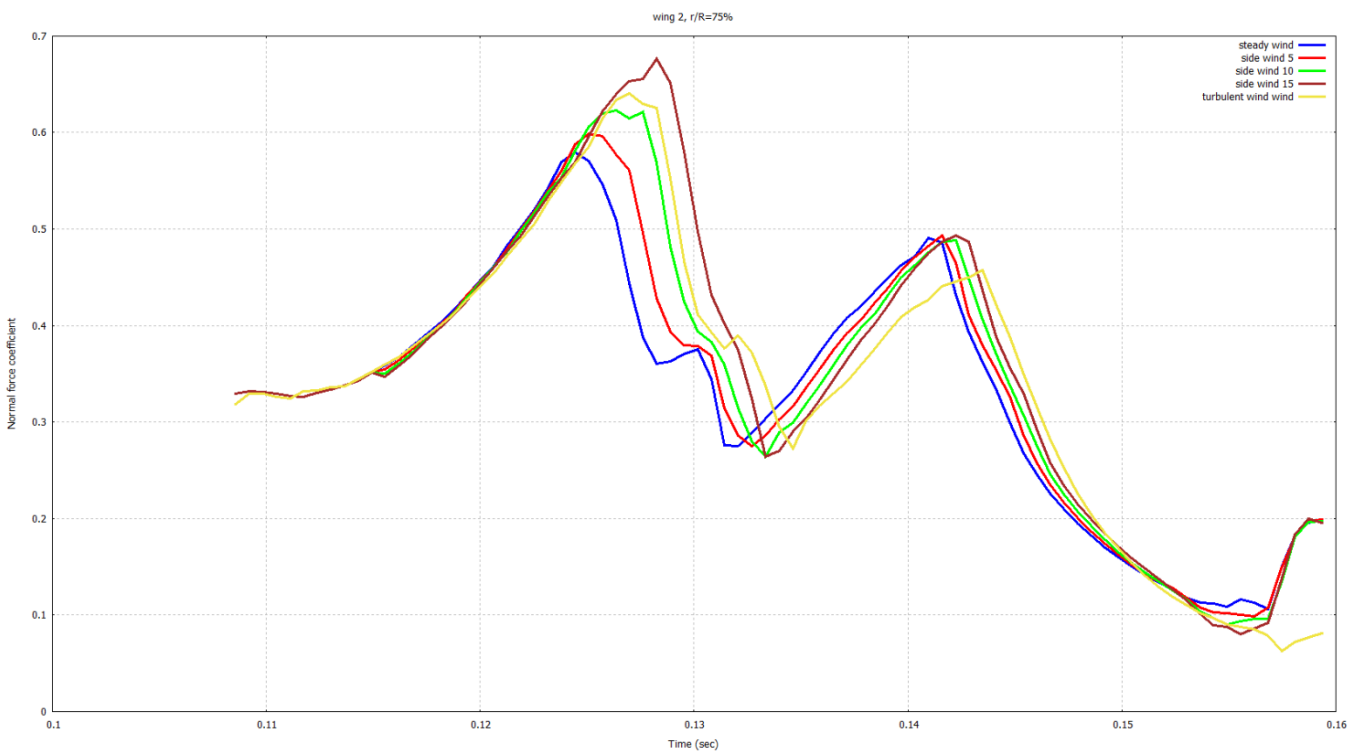
Στο 75% του πτερυγίου



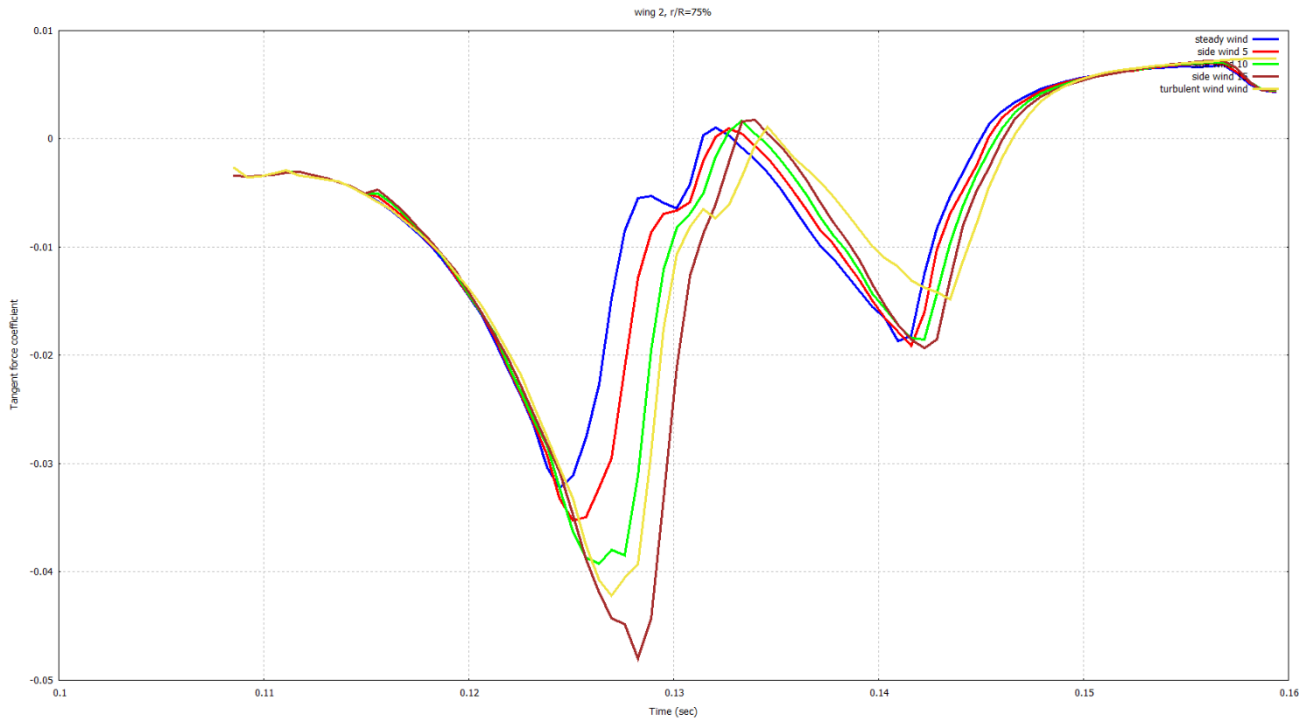
Εικόνα 112 Εξέλιξη του συντελεστή άντωσης σε περιπτώσεις αδιατάρακτης ροής, τυρβώδους ανέμου και πλάγιου ανέμου στο 75% του πτερυγίου για ταχύτητα πτήσης 39.9 m/s



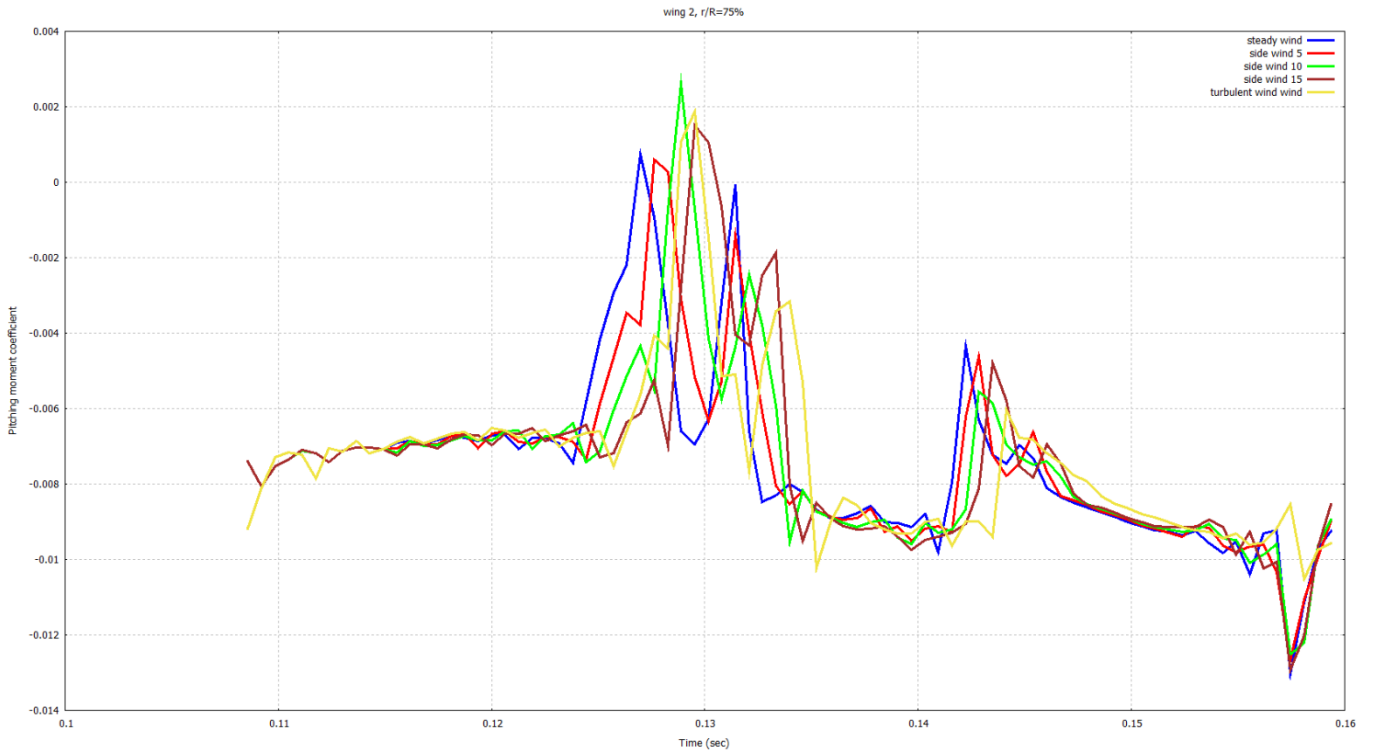
Εικόνα 114 Εξέλιξη του συντελεστή οπισθέλκουσας σε περιπτώσεις αδιατάραχτης ροής, τυρβώδους ανέμου και πλάγιου ανέμου στο 75% του πτερυγίου για ταχύτητα πτήσης 39.9m/s



Εικόνα 113 Εξέλιξη του συντελεστή κάθετης δύναμης σε περιπτώσεις αδιατάραχτης ροής, τυρβώδους ανέμου και πλάγιου ανέμου στο 75% του πτερυγίου για ταχύτητα πτήσης 39.9m/s

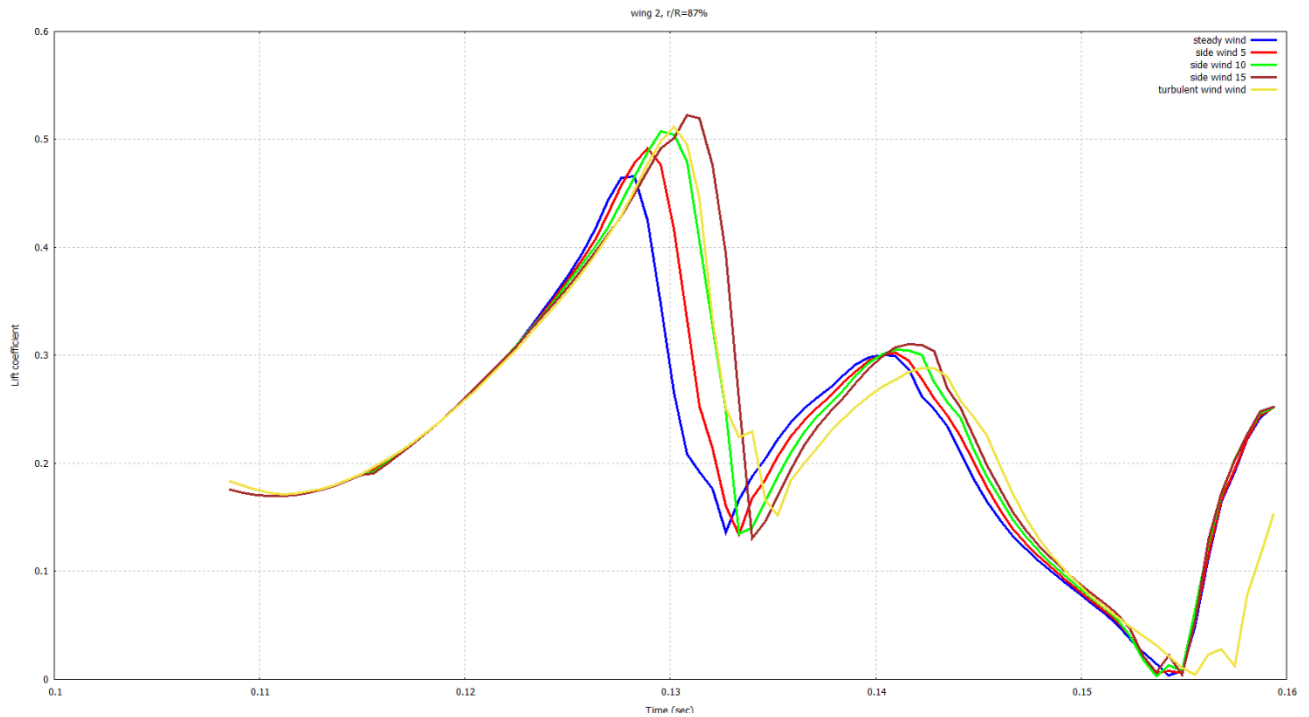


Εικόνα 115 Εξέλιξη του συντελεστή εφαπτομενικής δύναμης σε περιπτώσεις αδιατάραχτης ροής, τυρβώδους ανέμου και πλάγιου ανέμου στο 75% του πτερυγίου για ταχύτητα πτήσης 39.9m/s

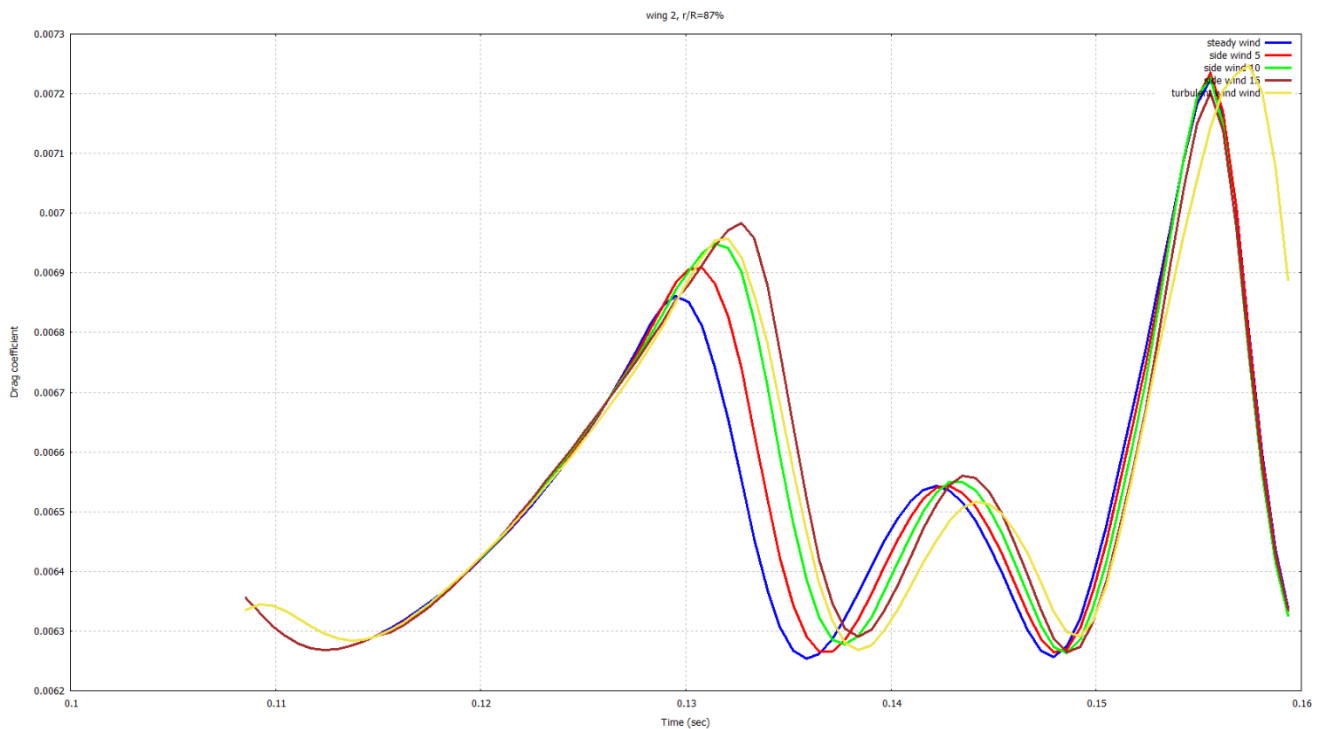


Εικόνα 116 Εξέλιξη του συντελεστή ροπής πρόνευσης σε περιπτώσεις αδιατάραχτης ροής, τυρβώδους ανέμου και πλάγιου ανέμου στο 75% του πτερυγίου για ταχύτητα πτήσης 39.9m/s

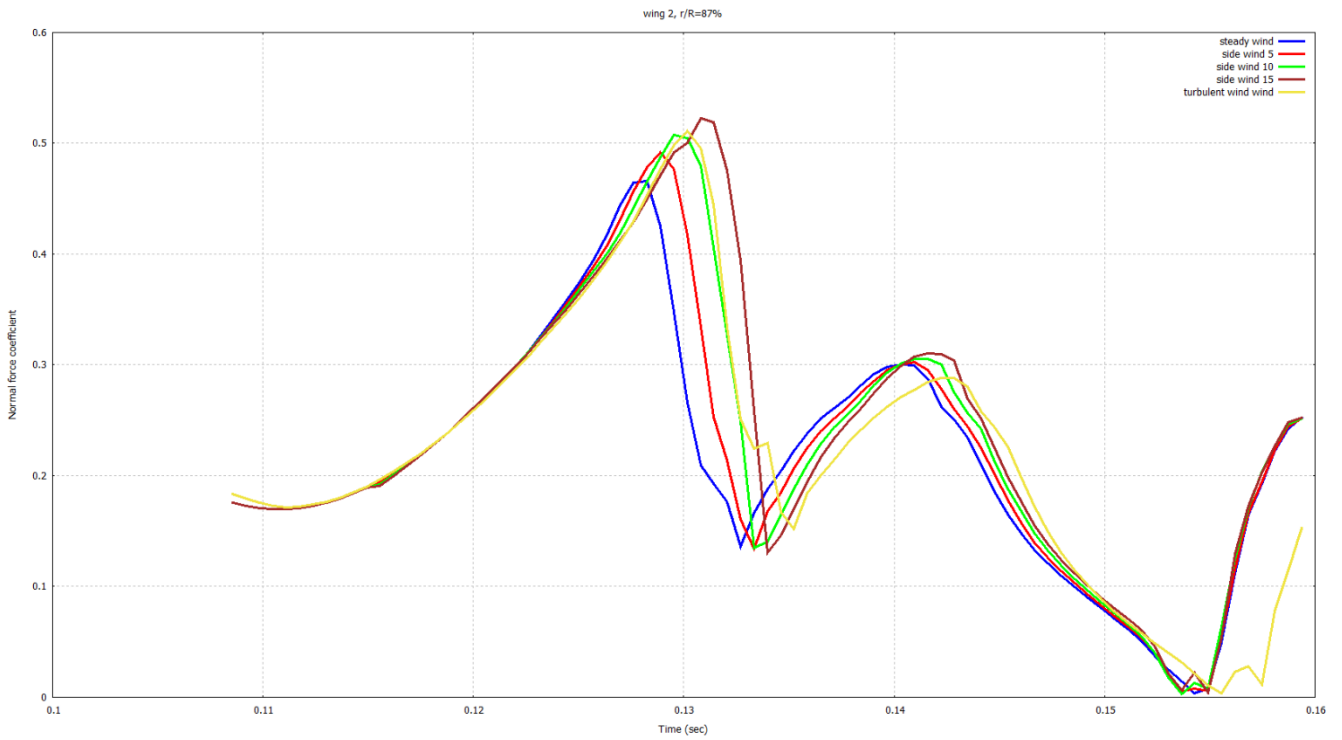
Στο 87% του πτερυγίου



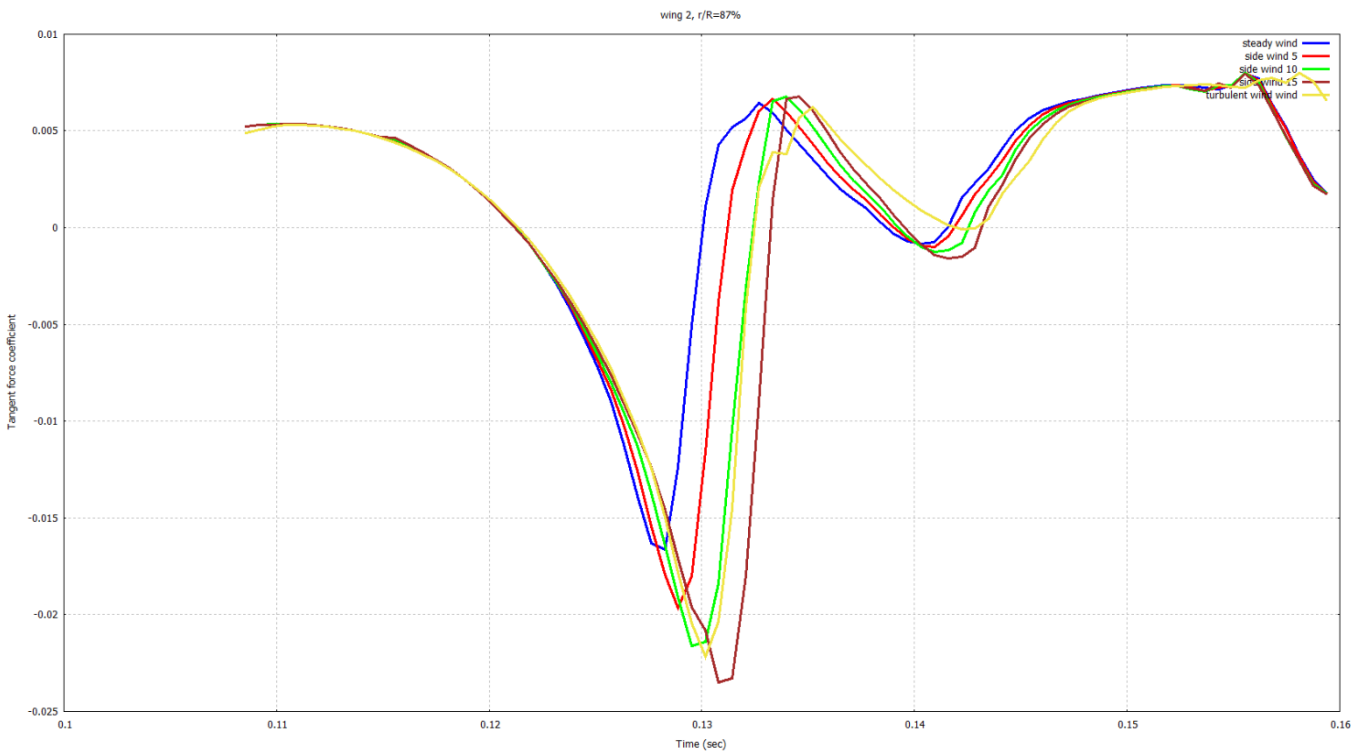
Εικόνα 117 Εξέλιξη του συντελεστή άντωσης σε περιπτώσεις αδιατάραχτης ροής, τυρβώδους ανέμου και πλάγιου ανέμου στο 87% του πτερυγίου για ταχύτητα πτήσης 39.9m/s



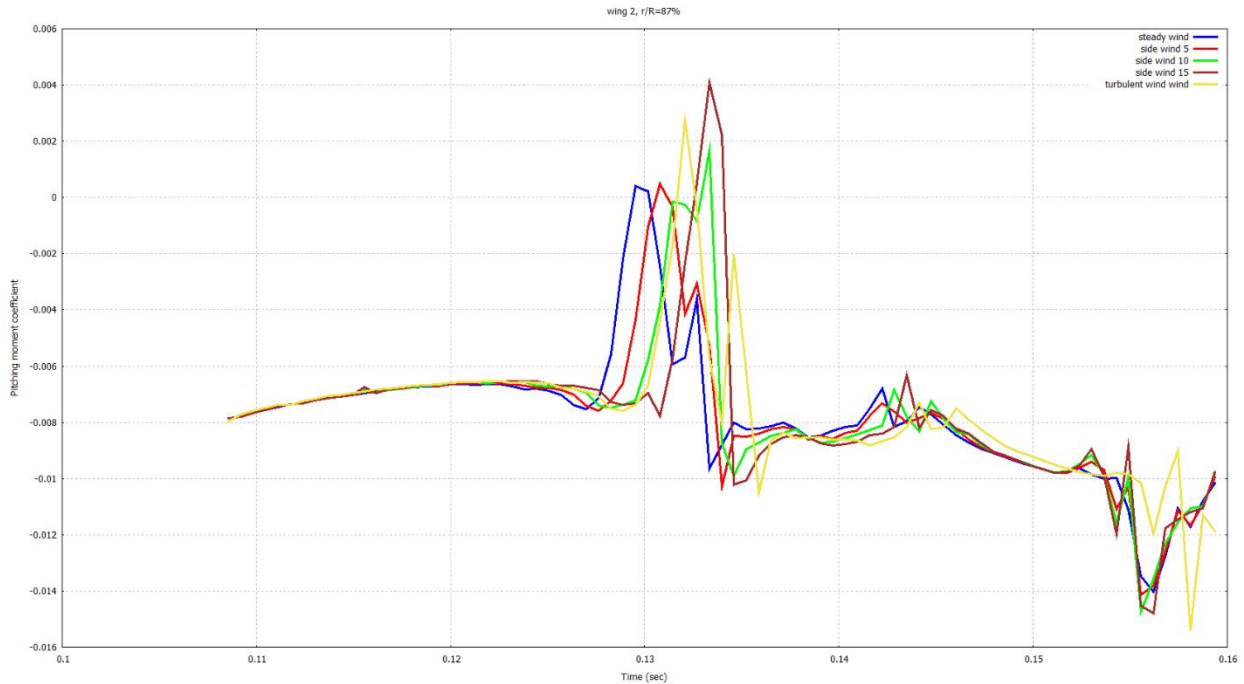
Εικόνα 118 Εξέλιξη του συντελεστή οπισθέλκουσας σε περιπτώσεις αδιατάραχτης ροής, τυρβώδους ανέμου και πλάγιου ανέμου στο 87% του πτερυγίου για ταχύτητα πτήσης 39.9m/s



Εικόνα 119 Εξέλιξη του συντελεστή κάθετης δύναμης σε περιπτώσεις αδιατάραχτης ροής, τυρβώδους ανέμου και πλάγιου ανέμου στο 87% του πτερυγίου για ταχύτητα πτήσης 39.9m/s



Εικόνα 120 Εξέλιξη του συντελεστή εφαπτομενικής δύναμης σε περιπτώσεις αδιατάραχτης ροής, τυρβώδους ανέμου και πλάγιου ανέμου στο 87% του πτερυγίου για ταχύτητα πτήσης 39.9m/s



Εικόνα 121 Εξέλιξη του συντελεστή ροπής πρόνευσης σε περιπτώσεις αδιατάραχτης ροής, τυρβώδους ανέμου και πλάγιου ανέμου στο 87% του πτερυγίου για ταχύτητα πτήσης 39.9m/s

Παραθέτουμε τα διαγράμματα από το πτερύγιο το οποίο «αντλαμβάνεται» τον πλάγιο άνεμο καλύτερα και συγκρίνουμε τα φορτία που αναπτύσσονται σε δύο ακτινικές θέσεις και συγκρίνουμε την περίπτωση της αδιατάραχτης ροής, τις τρεις περιπτώσεις στιγμιαίου πλάγιου ανέμου και την περίπτωση πτήσης εντός του τυρβώδους ανέμου.

Παρατηρούμε ότι η ένταση των φορτίων που αντιπροσωπεύουν την περίπτωση πτήσης εντός του τυρβώδους ανέμου είναι πάντοτε μικρότερη από την περίπτωση πλάγιου ανέμου έντασης 15 m/s και μεγαλύτερη από την περίπτωση πλάγιου ανέμου 5 m/s . Η συγκεκριμένη παρατήρηση συμφωνεί με την αρχική μας υπόθεση ότι το πεδίο ταχύτητας του τυρβώδους ανέμου, στην κατεύθυνση y , έχει ένταση από 7 m/s έως 13 m/s . Επίσης, διαπιστώνουμε ότι μια απότομη προσβολή ενός πλάγιου ανέμου στο ελικόπτερο δεν θα επιφέρει καποια ραγδαία μεταβολή στην αεροδυναμική συμπεριφορά του. Συνεπώς, τη στιγμή που το ελικόπτερο εισέρχεται εντός του τυρβώδους ανέμου από συνθήκες πτήσης αδιατάραχτης ροής, οι τιμές των αεροδυναμικών του φορτίων θα μεταβληθούν με την ίδια ένταση που μεταβάλλονται εντός του τυρβώδους ανέμου.

Τελικά, η μεταβολή των αεροδυναμικών φορτίων ενός ελικοπτέρου που πετά εντός τυρβώδους ανέμου που δημιουργείται από τη λειτουργία ανεμογεννήτριας που δημιουργεί συνθήκες πλάγιου ανέμου από 7 m/s έως 13 m/s και διαταραχές ταχυτήτων στις κατευθύνσεις x και z εντάσεως $\pm 2.5 m/s$, σε σχέση με τα φορτία που αναπτύσσονται κατά την πτήση του ελικοπτέρου σε αδιατάραχτη ροή αέρα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

	75%		87%		92%	
	39.9 m/s	50.5 m/s	39.9 m/s	50.5 m/s	39.9 m/s	50.5 m/s
Lift	+13.2%	+6.6%	+9.3%	+5.8%	+8.3%	+5.5%
Drag	+1.8%	+1.16%	+1.4%	+0.7%	0%	0%
Normal force	+15.3%	+6.6%	+6.8%	+5.8%	+12.5%	+5.5%
Tangent force	-34.6%	-21.4%	-38.4%	-42.5%	-41.6	-8.5%

Πίνακας 1 Ποσοστιαία μεταβολή αεροδυναμικών συντελεστών κατά την επίδραση του τυρβώδους ανέμου

	75%		87%	
	39.9 m/s	50.5 m/s	39.9 m/s	50.5 m/s
0°	28.5%	21.7%	15.7%	16.6%
45°	0%	0%	0%	0%
90°	22.2%	20%	17.6%	20%
120°	30%	50%	30%	50%
270°	10.5%	33%	21%	16.6%
300°	25%	20%	20%	18.7%

Πίνακας 2 Ποσοστιαία μεταβολή του συντελεστή πίεσης κατά την επίδραση του τυρβώδους ανέμου

Όπως έχουμε αναφέρει, η συγκεκριμένη μελέτη δεν αποτελεί μια μελέτη πτήσης ενός ελικοπτέρου κάθετα στον ομόρρο που δημιουργεί μια ανεμογεννήτρια. Η παρούσα εργασία παρουσιάζει τη μελέτη που πραγματοποιήθηκε κατά την πτήση ενός ελικοπτέρου υπό την επίδραση ενός πλάγιου πεδίου ταχύτητας το οποίο δημιουργήθηκε έχοντας ως βάση το πεδίο ταχύτητας του ομόρρο μιας ανεμογεννήτριας.

Η συγκεκριμένη εργασία μας επέτρεψε να μελετήσουμε την αεροδυναμική συμπεριφορά του ελικοπτέρου σε ένα μεγάλο εύρος του πεδίου ταχύτητας που δημιουργήσαμε.

Βιβλιογραφία

Ελληνική

- [1] Σπύρος Βουτσινάς: Μη μόνιμη Αεροδυναμική, Αεροελαστικότητα, Αερακουστική
Πανεπιστημιακές Σημειώσεις
Εκδόσεις ΕΜΠ
- [2] Αθανασιάδης Ν.: Μηχανική Ρευστών
Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα, 1989
- [3] Σωκράτης Τσαγγάρης: Μηχανική των Ρευστών
Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα, 2005
- [4] Μανωλάς Δημήτριος: Επιτάχυνση πλεγματικής μεθόδου στοιχείων στροβιλότητας και εφαρμογή σε μεγάλης κλίμακας προσομοιώσεις
Διπλωματική Εργασία
Εκδόσεις ΕΜΠ, Αθήνα 2007
- [5] Παπαδάκης Γεώργιος: Αλληλεπίδραση στροβιλότητας-στερεού συνόρου σε δρομείς ελικοπτερου και υβριδικών αεροσκαφών
Διπλωματική Εργασία
Εκδόσεις ΕΜΠ
- [6] Νικόλαος Καραμπετάκης: Εισαγωγή στη fortran 90/95/2003
Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη 2011
2η Έκδοση

Ξενόγλωσση

- [7] Robert L. S., Gary Z. W., John K. V.: Elementary Fluid Mechanics
John Wiley & Sons, Canada 2006
7th Edition
- [8] White F. M.: Fluid Mechanics
Mc Graw Hill, New York 2008
7th Edition
- [9] Bhimsen K. S.: Theoretical Fluid Dynamics
John Wiley & Sons, Canada 1998

2nd Edition

[10] L. M. Milne-Thomson: Theoretical Hydrodynamics

MACMILLAN & CO LTD, London 1962

4th Edition

[11] Bramwell A. R. S., Done G., Balmfor D.: Bramwell's Helicopter Dynamics

Butterworth-Heinwmann, Oxford 2001

2nd Edition

[12] Leishman J. G.: Principles of Helicopter Aerodynamics

Cambridge University Press, New York 2006

2nd Edition

[13] Seddon J., Newman S.: Basic Helicopter Aerodynamics

John Wiley & Sons, Ltd, United Kingdom 2011

3rd Edition

[14] Conlisk A. T.: Modern helicopter rotor aerodynamics

Elsevier Science Ltd, Ohio 2001

[15] Elger D. F., Williams B. G., Crowe C. T., Roberson J. A.: Engineering Fluid Mechanics

John Wiley & Sons, USA 2013

10th Edition

[16] Mohd N., Barakos G. N.: Computational aerodynamics of hovering helicopter rotor

Jurnal Mekanikal, June 2012 No 34, 16-46

[17] Kolja Kindler, Erik Goldhahn, Friedrich Leopold, Markus Raffel: Recent developments in background oriented methods for rotor blade tip vortex measurements

13th Int Symp on Applications of Laser Techniques to Fluid Mechanics

Lisbon, Portugal, 26-29 June, 2006

[18] H. van der Ven, O.J. Boelens, J.C. Kok, B.B. Prananta, M.P.C. van Rooij: Simulation of a rotor in forward flight using topology-based refinement of multi-block structured meshes

38th European Rotorcraft Forum

Amsterdam, the Netherlands, September 4-6, 2012

[19] M.H.L. Hounjet, J.C. Le Balleur, D. Blaise, G. Bernardini, A. Pisoni: Maturation of a full potential based rotor flow field code

26th European Rotorcraft Forum

The Hague, The Netherlands on September 26-29, 2000

[20] H. van der Ven, O.J. Boelens: High-order simulation of a rotor in forward flight using a fourdimensional adaptive flow solver

34th European Rotorcraft Forum

Liverpool, UK, 16-18 September, 2008. Revision August 2009 based on new simulations

[21] J. van Muijden and A. Elsenaar: Numerical prediction capabilities and analysis of flow development for a supersonic civil transport at low speed

CEAS Conference

Cambridge UK, 10-12 June 2002

[22] A.J. Spyropoulos, A.P. Fragias, D.P. Margaritis, D.G. Papanikas: INFLUENCE OF ARBITRARY VORTICAL WAKE EVOLUTION ON FLOWFIELD AND NOISE GENERATION OF HELICOPTER ROTORS

ICAS 2000 CONGRESS

[23] X. K. Zioutis, A. I. Spyropoulos, D. P. Margaritis, D. G. Papanikas: EFFECTS OF HELICOPTER ROTOR WAKE CHARACTERISTICS ON BLADE AIRLOADS

25TH INTERNATIONAL CONGRESS OF THE AERONAUTICAL SCIENCES

[24] Daniel G. Opoku: Aeroelastic and aeroacoustic modeling of rotorcraft

Department of mechanical and aerospace engineering

Carleton University Ottawa, Ontario, September 2002

[25] C. K. Zioutis, A. I. Spyropoulos, A. P. Fragias, D. P. Margaritis & D. G. Papanikas: Influence of Helicopter Rotor Wake Modeling on Blade Airload Predictions

International Journal of Engineering (IJE), Volume (3): Issue (6)

[26] W. R. Splettstoesser, G. Niesl, F. Ccnedese, F. Nitti, D. G. Papanikas: Experimental Results of the European HELINOISE Aeroacoustic Rotor Test

Helinoise Project

[27] Hanno Heller: Into the Physics of Rotor Aeroacoustics - Highlights of recent European Helicopter Noise Research

FIFTH INTERNATIONAL CONGRESS ON SOUND AND VIBRATION

DECEMBER 15-18, 1997 ADELAIDE, SOUTH AUSTRALIA

[28] Larry L. Erickson: Panel Methods—An Introduction

Ames Research Center

Moffett Field, California 2005

[29] Larry R. Nyhoff, Sanford C. Leestma: FORTRAN 90FOR ENGINEERS & SCIENTISTS

Prentice-Hall, Inc.

New Jersey 1997

[30] T.M.R. Ellis: FORTRAN 77 programming

Addison-Wesley Publishing Company

Great Britain, 1991