Μαθηματική Προτυποποίηση σε Σύγχρονες Τεχνολογίες και στην Οικονομία
Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

Ανίχνευση περιοδικοτήτων και μορφοκλασματικών συμμετριών σε οικονομικές χρονοσειρές

Μεταπτυχιακός φοιτητής: Θεόδωρος Δαγλής

Α.Μ. : 09314009

Επιβλέπων Καθηγητής: Δρ. Βασίλειος Κωνσταντούδης

Τριμελής επιτροπή: Δρ. Βασίλειος Κωνσταντούδης, Επ. Καθ. Παναγιώτης Μιχαηλίδης, Καθ. Αθανάσιος Γιαννακόπουλος

Περιεχόμενα

1.ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....3

2. ΑΝΑΛΥΣΗ.....8

2.1 Ανάλυση με Μορφοκλασματικές δομές – μορφοκλασματική ανάλυση: 9

2.2 Πολύ-μορφοκλασματική ανάλυση:.....18

2.3 Συνάρτηση συσχέτισης ύψους-ύψους:.....20

2.4 Φάσμα ισχύος (Μετασχηματισμός Fourier):.....26

3. ΔΕΔΟΜΕΝΑ..... 31

4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ: 32

4.1 Μηνιαίες νομισματικές ισοτιμίες και ασήμι:.....32

4.2 Μηνιαία δεδομένα νομισματικών μεγεθών: 48

4.3 Μηνιαία δεδομένα για το ακαθάριστο εγχώριο προϊόν και για τον δείκτη βιομηχανικής παραγωγής:.....54

4.4 Καταθέσεις ελληνικών τραπεζών: 65

5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ:..... 78

6. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ-ΑΝΑΦΟΡΕΣ: 80

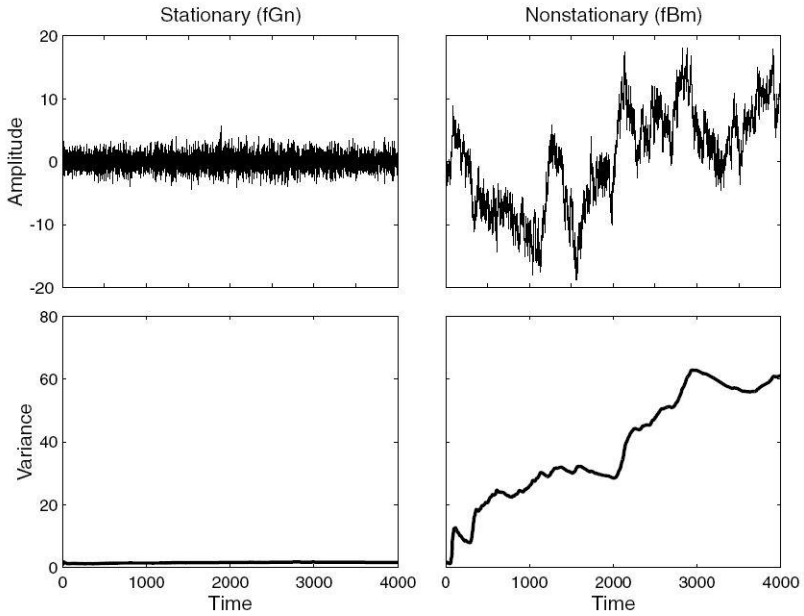
1.Εισαγωγή

Η ανάλυση αποτελεί μία συστηματική και διεξοδική μελέτη ενός θέματος ή ενός προβλήματος, προκειμένου να εξαγάγουμε κάποια αποτελέσματα και συμπεράσματα . Η ανάλυση οικονομικών δεδομένων σήμερα γίνεται όλο και πιο αναγκαία καθώς μέσα από αυτήν, μπορεί να γίνει καλύτερη και βαθύτερη κατανόηση των οικονομικών γεγονότων, καθώς και πρόβλεψη της μελλοντικής οικονομικής δραστηριότητας. Η οικονομική δραστηριότητα μίας επιχείρησης, ενός φορέα, ενός κράτους, είναι ένας από τους ζωτικότερους τομείς του και επομένως η σημασία της ανάλυσής του είναι προφανής. Η οικονομία, έχει πάρα πολλούς κλάδους τους οποίους μπορούμε να εξετάσουμε. Αποτελεί ένα αέναο δυναμικό σύστημα με μεγάλο εύρος δραστηριοτήτων και αυξανόμενη πολυπλοκότητα λόγω των κρίσεων που υφίστανται ανά περίοδο, (οικονομική ύφεση, πτώχευση επιχειρήσεων και εταιρειών, πόλεμοι, τρομοκρατία, αύξηση ανεργίας, εξάντληση υλικών και ενεργειακών πόρων), καθώς και λόγω του παγκόσμιου διαδικτύου που επιτρέπει την άμεση διάχυση της πληροφορίας και την πιο έντονη αλληλεπίδραση των επιχειρήσεων και φορέων σε παγκόσμιο επίπεδο πλέον. Η αυξανόμενη πολυπλοκότητα δημιούργησε την ανάγκη για λήψη αποφάσεων (στον οικονομικό τομέα) χρησιμοποιώντας στρατηγικές οι οποίες στηρίζονται σε μαθηματικές τεχνικές ανάλυσης των δεδομένων πολύ περισσότερο από ότι στο παρελθόν [1].

Με την εξέλιξη των υπολογιστών μετά τα μέσα του 20ου αιώνα, η ανάλυση άρχισε να γίνεται με χρήση κατάλληλων αλγορίθμων και η μελέτη έγινε πιο συστηματοποιημένη, με αποτέλεσμα όλο και πιο εξελιγμένες μέθοδοι να χρησιμοποιούνται (εκτός από τις υπόλοιπες επιστήμες), και στην οικονομία. Επομένως, έχουμε εκτίμηση, αξιολόγηση έως και πρόβλεψη της οικονομικής κατάστασης μίας εταιρείας, χρησιμοποιώντας τεχνικές μεθόδους εμπνευσμένες από τη στατιστική ανάλυση και τεχνητή νοημοσύνη [2]. Τέτοιες στατιστικές μέθοδοι είναι η πολλαπλή διακεκριμένη ανάλυση (multiple discriminant analysis (MDA)) η οποία χρησιμοποιεί το πρότυπο μοντέλο z-score), η logit analysis, η probit analysis , προτυποποίηση γραμμικής πιθανότητας (linear probability modeling). Από την άλλη, οι μέθοδοι τεχνητής νοημοσύνης είναι κατά κύριο λόγο τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα (ANN) [3], η θεωρία τραχύτητας συνόλου (rough set theory) [4] , η case based reasoning [5], SVM (support vector machines) [6], καθώς και συνδυασμός μεθόδων [7],[8],[9]. Η χρήση των μαθηματικών στην ανάλυση της οικονομίας είναι ζωτικής σημασίας, καθώς με τα μαθηματικά θεσπίζουμε μια πιο εμπεριστατωμένη ανάλυση, και ποσοτικοποιούμε τα αποτελέσματά μας. Για την ακρίβεια, όλο και πιο πολλές μαθηματικές μέθοδοι, καθώς και συνδυασμός τους (οι γνωστές υβριδικές μέθοδοι), χρησιμοποιούνται για την οικονομική ανάλυση, και μάλιστα όπως τονίζουν οι Juliana Yim and Heather Mitchell [10] και αντίστοιχα, οι Sangjae Lee,Wu Sung Choi [11] οι υβριδικές μέθοδοι (αυτές που συνδυάζουν στατιστικές και μη-παραμετρικές μεθόδους, είναι οι καλύτερες· δηλαδή αυτές που δίνουν τα καλύτερα αποτελέσματα.

Σε μια οικονομική ανάλυση, υπάρχουν πολλές μέθοδοι προσέγγισης, καθώς και πολλών ειδών δεδομένα για να αναλύσουμε. Κάποιος μπορεί να χρησιμοποιήσει αριθμοδείκτες, όπως ο πρωτοπόρος του κλάδου του Beaver (1967), όπως αναφέρουν οι Sofie Balcaen, Hubert Ooghe [12]. Από την άλλη, μπορεί να γίνει μία μικρο-οικονομική ανάλυση, περιοριζόμενοι αυστηρώς στον τομέα που εξετάζουμε, ενώ από την άλλη υπάρχει και η μακρο- οικονομική ανάλυση σύμφωνα με την οποία εξετάζουμε ένα σύνολο συστημάτων, δηλαδή την συνολική οικονομία. Για την ακρίβεια, σε αυτούς τους τομείς χρησιμοποιούνται ευρέως γραφήματα και γραμμικές σχέσεις [13]. Επίσης, υπάρχει και ο κλάδος της ανάλυσης χρονοσειρών (με πληθώρα εφαρμογές) , με την οποία ασχοληθήκαμε και εμείς.

Η ανάλυση χρονοσειρών είναι σχετικά πρόσφατος κλάδος, και η ανάλυσή τους έγινε πολύ πιο εύκολη με την χρήση και αξιοποίηση των υπολογιστών. Με τον όρο χρονοσειρά , εννοούμε ένα σύνολο από τιμές ενός μεγέθους που προκύπτουν από την μέτρηση σε διαδοχικές χρονικές στιγμές σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα εξέλιξης του μεγέθους. Δεδομένης μίας ή περισσοτέρων χρονοσειρών η ανάλυσή τους μπορεί να γίνει σε δύο στάδια. Στο πρώτο μπορούμε να κάνουμε μία ανάλυση με βάση τα όσα έχουν διαδραματιστεί ως τώρα, δηλαδή να εξετάσουμε αν εμφανίζονται περιοδικότητες ή αν έχουμε συσχέτιση κάποιων γεγονότων με πιθανές αλλαγές στις τιμές της χρονοσειράς, ενώ στο δεύτερο στάδιο, με βάση τα αποτελέσματα του πρώτου σταδίου να προχωρήσουμε σε πρόβλεψη της μελλοντικής συμπεριφοράς της χρονοσειράς μας. Γενικά, γίνεταιη διάκριση των χρονοσειρών (κατά κύριο λόγο), σε στάσιμες και σε μη-στάσιμες. Στάσιμες είναι οι χρονοσειρές που παρουσιάζουν μία στατικότητα δηλαδή οι στατιστικές παράμετροι χαρακτηρισμού των διακυμάνσεών τους (κυρίως μέση τιμή και διασπορά) δεν αλλάζουν με το χρόνο (π.χ. λευκός θόρυβος). Παράδειγμα τέτοιας χρονοσειράς βλέπουμε στο σχήμα 1α. Η άλλη κατηγορία χρονοσειρών είναι οι μη-στάσιμες, και είναι οι χρονοσειρές που δεν έχουν την παραπάνω ιδιότητα και δεν δίχνουν να έχουν μία στατική κατάσταση. Αντίθετα, επιδεικνύουν μεγάλης κλίμακας περιόδους αύξησης ή μείωσης της τιμής τους. Τέτοια χρονοσειρά φαίνεται από το σχήμα 1γ. Επίσης, αξίζει να σημειωθεί ότι μπορούμε να μετατρέψουμε μία μη-στάσιμη χρονοσειρά σε στάσιμη, με την μέθοδο των πρώτων διαφορών, όπου σε κάθε τιμή αφαιρούμε την προηγούμενή της. Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να εκμεταλλευτούμε τα πλεονεκτήματα και την πληροφορία που μπορεί να κρύβεται λόγω κάποιας τάσης (αυξητική ή μειωτική) μιας μη-στάσιμης χρονοσειράς, και με την μέθοδο των πρώτων διαφορών να εντοπίσουμε πιο εύκολα ακραίες διακυμάνσεις στην αντίστοιχη στάσιμη χρονοσειρά. Επομένως, χρησιμοποιώντας κάποιες τεχνικές μεθόδους μας δίνεται η δυνατότητα να έχουμε πληθώρα πληροφοριών και στο τέλος να κάνουμε και μια σύγκριση.

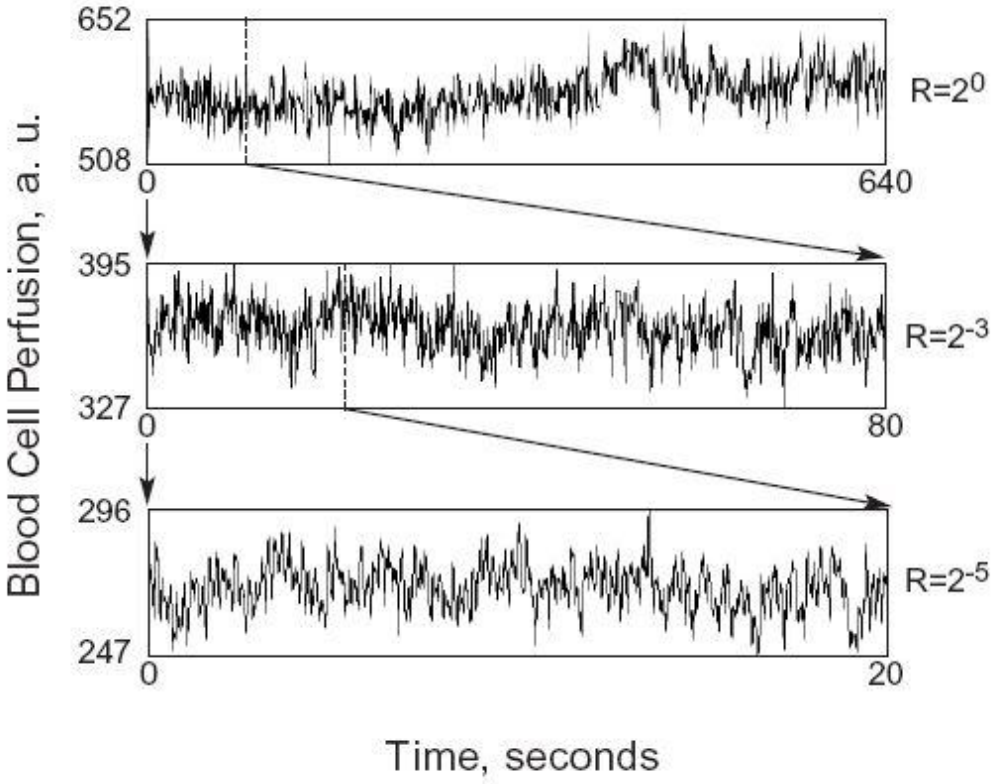


Σχήμα 1: Οι δύο εικόνες αριστερά αφορούν μία στάσιμη χρονοσειρά. Η πάνω εικόνα αριστερά 1α απεικονίζει μία στατική χρονοσειρά (λευκός θόρυβος). Η κάτω εικόνα αριστερά 1β, απεικονίζει την απόκλιση της χρονοσειράς, με λίγα λόγια, την τάση που έχει (μηδενική για μία στάσιμη χρονοσειρά). Αντίστοιχα, οι δύο εικόνες δεξιά αφορούν μία μη-στάσιμη χρονοσειρά. Η πάνω εικόνα δεξιά 1γ απεικονίζει μία μη-στατική χρονοσειρά. Η κάτω εικόνα δεξιά 1δ, απεικονίζει την απόκλιση της χρονοσειράς, με λίγα λόγια, την τάση που έχει (στο συγκεκριμένο παράδειγμα είναι αυξητική).

Το μεγάλο πλεονέκτημα μιας χρονοσειράς έιναι το γεγονός ότι κρύβει μέσα της πολλές πληροφορίες, οι οποίες μπορούν να μας βοηθήσουν στην διεξαγωγή σημαντικών συμπερασμάτων για την φύση του συστήματος που την παράγει και των μελλοντικών τάσεών του. Το μειονέκτημα των χρονοσειρών είναι ότι εκτός από πληθώρα δεδομένων, έχουμε συνήθως μία πολύπλοκη δυναμική συστήματος. κάτι που απαιτεί την χρήση προηγμένων μεθόδων και ιδιαίτερη προσοχή στην ανάλυσή μας. Όταν μιλάμε για ανάλυση εκατομμυρίων δεδομένων, είναι εμφανής η ανάγκη για χρήση των υπολογιστών. Η ανάλυση χρονοσειρών σήμερα, χρησιμοποιείται από ανάλυση φυσικών φαινομένων[14], μέχρι και σε συστήματα φυσιολογίας, παθήσεων και αντιμετώπισής[15] τους καθώς και οικονομικής ανάλυσης[16] (με την οποία ασχολούμαστε και εμείς). Όπως τονίζεται από τους Jan G. De Gooijer , Rob J. Hyndman [17] , θεσπίστηκε ο παγκόσμιος οργανισμός πρόβλεψης (International Institute of Forecasters), ο οποίος είχε σαν κύριο μέλημα την ανάλυση και την πρόβλεψη της συμπεριφοράς των δεδομένων χρονοσειρών. Ήδη το 2006 έχει γίνει τεράστια πρόοδος, πόσο μάλλον σήμερα. Στην ανάλυση οικονομικών χρονοσειρών, κάποιος μπορεί να χρησιμοποιεί δεδομένα από νομισματικές ισοτιμίες, από τιμές αγοράς, τιμές χρηματιστηρίου (δηλαδή τιμή πώλησης και αγοράς μετοχής), αλλά και δείκτες όπως δείκτες οικονομικής ανάπτυξης, ευημερία, κτλ.
Προκειμένου όμως να κάνουμε ανάλυση και πρόβλεψη της αγοράς, είναι αναγκαίο να έχουμε στην κατοχή μας τα αντίστοιχα δεδομένα (πολλές φορές και παραπάνω από ενός είδους στοιχεία για έλεγχο συσχετίσεων, κάλυψη μεγαλύτερου πεδίου μελέτης). Ύστερα από χρόνια μελέτης και έρευνας, έχει παρατηρηθεί ότι οι τιμές της αγοράς ακολουθούν κατά κύριο λόγο τυχαίους περιπάτους ή κάτι παρεμφερές με αυτούς [18], και επιπλέον, πως να εξαχθούν οι κανόνες για αποτελεσματικό τρόπο διεξαγωγής εμπορίου (trading), τα δεδομένα των τιμών (price information), δεν ήταν επαρκή [19]. Σε συνεχεία της εργασίας των Fama και Blume στην οποία αναφερθήκαμε πιο πάνω [19] , ακολούθησε μία περίοδος από αναλύσεις που διεξήχθησαν σε διάφορους τομείς της οικονομικής ανάλυσης χρονοσειρών. Έτσι, έχουμε μια ανάλυση εμπορευμάτων [20], συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης [21] , κανόνες διεξαγωγής εμπορίου (trading) [22], μέθοδοι ελέγχου [23], παγκόσμιο στοκ αγορών [24]. Όπως υποστηρίζει ο Stephen J. Taylor [23] η οικονομική ανάλυση των χρονοσειρών, χρήζει ιδιαίτερης προσοχής, και η ανάλυση πρέπει να γίνεται μεθοδικά και να μην αρκούμαστε σε απλά μοντέλα (τα οποία συχνά δεν είναι ικανοποιητικά). Επομένως, ο ίδιος τονίζει την ανάγκη να υπάρχει κάποιο θεωρητικό υπόβαθρο για κάθε μοντέλο που χρησιμοποιούμε, αλλά και την βελτιστοποίηση του κάθε μοντέλου. Σε κάθε περίπτωση όμως, η ανάλυση χρονοσειρών απαιτεί καλή γνώση θεωρητικού υποβάθρου, αλλά και τεχνική γνώση των εφαρμογών που θα τεθούν υπό κατασκευή για χρήση στην εκάστοτε ανάλυση.

Αναλυτικότερα, η προσέγγιση που κάναμε στην ανάλυση των χρονοσειρών μας, ήταν κατά κύριο λόγο με βάση τις μορφοκλασματικές δομές, και αυτό, καθώς όπως υποστηρίζει και ο Edgar E. Peters [25] , μπορούμε να κάνουμε μία ανάλυση η οποία θα μας δώσει την ποικιλία η οποία υποκρύπτεται στις αγορές. Είναι αναμενόμενο ότι δεν συμμετέχουν όλοι οι παράγοντες με την ίδια ισχύ, ούτε χρησιμοποιούν την ίδια στρατηγική, επομένως η σταθερότητα της αγοράς εξαρτάται άμεσα από αυτή την ποικιλία των παραγόντων. Παρατηρούμε ότι όσο πιο ‘’ώριμη’’ και πιο παλιά είναι μια αγορά, τόσο πιο σταθερή τείνει να παρουσιάζεται. Ένας αναλυτής όμως, στηρίζεται προφανώς στην προϊστορία της τιμής για να κάνει μια πρόβλεψη για την μελλοντική τιμή της, όμως οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται έχουν σαν στόχο την μακράς διάρκειας ενδεχόμενη ευημερία, και πολλές φορές η δυναμική του συστήματος δεν είναι ευέλικτη καθώς λόγω της πολυπλοκότητάς της, χάνει σε προσαρμοστικότητα. Επομένως, επέρχεται εδώ η ανάγκη για χρήσης των μορφοκλασματικών μεθόδων στην ανάλυση χρηματοοικονομικών χρονοσειρών τόσο για ανάλυση όσο και για πρόβλεψη. Στο σχήμα 2 παρατηρούμε ότι μία χρονοσειρά μπορεί να έχει την μορφοκλασματική ιδιότητα, δηλαδή να αυτό-επαναλλαμβάνεται στο χρόνο. Εάν μεγεθύνουμε σε κάποιο τμήμα αυτής της χρονοσειράς, (όπως βλέπουμε στο σχήμα 2), η χρονοσειρά έχει την ίδια ακριβώς δομή με την αρχική μας χρονοσειρά. Επομένως, αν τα τμήματα της χρονοσειράς είναι όμοια με την αρχική, θα μπορούσαμε αναλύοντας ένα από αυτά, να εξαγάγουμε ένα γενικότερο συμπέρασμα και για την ίδια την αρχική χρονοσειρά.

Γενικότερα, οι μορφοκλασματικές μέθοδοι, μας δείχνουν την γραμμική σχέση που υπάγεται όσο αλλάζουμε την κλίμακα που χρησιμοποιούμε για να εξετάσουμε τα δεδομένα μας. Εκτός αυτού, οι μορφοκλασματικές είναι μέθοδοι που έχουν σαν κύριο στόχο την προσπάθεια ανίχνευσης χαοτικών μοτίβων τα οποία επαναλαμβάνονται χρονικά. Επίσης, ιδιαίτερη σημασία δίνεται σήμερα σε στοχαστικά μοντέλα, όπως η στοχαστική κίνηση Brown, σε συνδυασμό με τις μορφοκλασματικές δομές, τα οποία χρησιμοποιούνται ιδιαίτερα στην φυσική, την ιατρική, και στην οικονομία [26]. Μέχρι και χρήση κβαντομηχανικής με στοχαστική κίνηση Brown έχει εφαρμοστεί προκειμένου να θεραπευθεί (όπως και οι ίδιοι οι Xiangyi Meng, Jian-Wei Zhang, Hong Guo [27] υποστηρίζουν στην έρευνά τους), η μη-λογικότητα που επικρατεί στην ανάλυση των αγορών.



Σχήμα 2: Μια χρονοσειρά η οποία έχει την μορφοκλασματική ιδιότητα. Αν εστιάσουμε σε ένα τμήμα της χρονοσειράς, παρατηρούμε ότι έχει όμοια δομή με την αρχική.

Εμείς, θέσαμε σαν κύριο στόχο τον εντοπισμό, την αναγνώριση, και επομένως την ανάλυση δύο ειδών συμμετριών. Η μία συμμετρία είναι η ανίχνευση πιθανών περιοδικοτήτων που εμφανίζονται στις χρονοσειρές μας και η δεύτερη η συμμετρία κλίμακας στην οποία οι ιδιότητες της σειράς παραμένουν αναλλοίωτες υπό αλλαγή κλίμακας εξέτασής της. Η δεύτερη συμμετρία έχει αποτελέσει το αντικείμενο της μορφοκλασματικής ανάλυσης .

Σύμφωνα με τους Jan G. De Gooijer , Rob J. Hyndman [17], τονίζεται ιδιαίτερα η ανάγκη για εύρεση, αναγνώριση, και ανάλυση των κυκλικών επαναλήψεων που μπορεί να υπάρχουν στα δεδομένα μας. Αυτή η ανάλυση είναι ιδιαίτερα σημαντική καθώς μπορούμε να κατανοήσουμε μηχανισμούς που κρύβονται πίσω από αυτή, να κάνουμε περαιτέρω ανάλυσή τους, και συσχετίσεις με άλλες παραμέτρους, και εν τέλει, να προβλέψουμε την συμπεριφορά τους, δεδομένου ότι είμαστε σε θέση να κατασκευάσουμε ένα συνεπές και ακριβές μοντέλο που να προσομοιώνει αυτή την επαναληπτικότητα. Η επαναληπτικότητα πολλές φορές ενέχει κινδύνουν παρανόησης, καθώς αν δεν συσχετιστούν καλά τα δεδομένα ώστε να κατανοήσουμε πλήρως τον μηχανισμό που δημιουργεί αυτή την κυκλικότητα, είναι πολύ πιθανό να πέσουμε σε λάθος. Έτσι, όσο σημαντική είναι η ανίχνευση περιοδικοτήτων, άλλο

τόσο σημαντική είναι και η σαφής αναγνώριση, εμπεριστατωμένη ανάλυση και καλή (σε βάθος) κατανόηση της περιοδικότητας (όπου αυτή υπάρχει). Για παράδειγμα, σε σχετική έρευνα που διεξήχθη από τους Francis Decroos, Kris Dierckens, Vincent Pollet, Ronald Rousseau, Hugo Tassington and Koen Verweyen [28] με χρήση μεθόδων που χρησιμοποιήσαμε και εμείς (ανάλυση μετασχηματισμού fourier), παρατήρησαν ότι μια περιοδικότητα (εξαμήνου) ήταν εμφανής, ενώ μία άλλη (εβδομαδιαία), ήταν λιγότερο ευκρινής και χρειαζόταν προσεκτική μελέτη και ανάλυση. Επομένως, είναι εμφανής η σημασία και η προσοχή που απαιτεί η εύρεση, ανάλυση και σε βάθος κατανόηση των περιοδικοτήτων, στην καθημερινή ζωή, και ειδικά στην οικονομία, καθώς από την μία οι άνθρωποι πολύ συχνά κάνουν κυκλικά και επαναλαμβανόμενα κάποιες πράξεις, οι οποίες δεν είναι ευκρινώς εμφανείς, και από την άλλη, υπάρχουν και περιπτώσεις, όπου η περιοδικότητα μπορεί στην πραγματικότητα να είναι ένα απλά τυχαίο γεγονός (ειδικά αν αυτό δεν έχει συμβεί πάνω από 2 φορές). Σε κάθε περίπτωση πάντως, η σημασία ανάλυσης της περιοδικότητας είναι αδιαμφισβήτητη και είναι εμφανές ότι η φύση, η ζωή και επομένως και η ανθρώπινη δραστηριότητα – ανθρώπινη κοινωνία, χαρακτηρίζεται σε μεγάλο βαθμό από την προσεγγιστική περιοδικότητα και την επαναληπτικότητα.

Από την άλλη πλευρά, η ανάλυση κλίμακας, και εν συνεχεία, η μορφοκλασματική ανάλυση είναι πολύ σημαντική, καθώς μας δίνει την δυνατότητα να συνδέσουμε τη συμπεριφορά της χρονοσειράς σε διάφορες κλίμακες χρόνου. Αυτό διαμέσου των νόμων κλίμακας, οι οποίοι κατ' ουσίαν εκφράζουν την αναλογικότητα των σχέσεων κάθε παραμέτρου που σχετίζεται με ένα αντικείμενο (ή σύστημα) με το μήκος κλίμακάς του. Αυτή είναι και η βασική αρχή που διέπει γενικότερα τους νόμους κλίμακας (scaling laws). Για παράδειγμα, όγκος ενός αντικειμένου διαφέρει ως προς το κυβικό μέγεθος l^3 και αντίστοιχα, η επιφάνειά του (εμβαδόν), ως προς το τετραγωνικό μέγεθος l^2 . Επομένως, ένα μικρότερο αντικείμενο έχει μεγαλύτερη τετραγωνική επιφάνεια από ότι όγκο, συγκριτικά με ένα μεγαλύτερο αντικείμενο με όμοιο γεωμετρικό σχήμα. Η σημασία των νόμων κλίμακας είναι πολύ μεγάλη, ειδικότερα τα τελευταία χρόνια, καθώς, όπως αναφέρει και A. Ghosh [29] , εξαρτόμαστε όλο και πιο πολύ από την σύγχρονη τεχνολογία και συνεχώς διαδραματίζεται μια αέναη τάση μείωσης όγκου των αντικειμένων και των μηχανημάτων. Επομένως, αυτή η συνεχής ‘’σμίκρυνση’’ των τεχνολογικών επιτευγμάτων, επανέφερε τον νόμο κλίμακα στο προσκήνιο της έρευνας, και η ανάγκη για καλύτερη κατανόηση αλλά και χρήση του, έγινε πιο αναγκαία από ποτέ, ακόμη και στην οικονομία. Την ίδια στιγμή, χρησιμοποιώντας τα χαρακτηριστικά των ιδιοτήτων κλίμακας, σε ένα μικρό σύστημα, και στην συνέχεια προσπαθώντας να τα μοντελοποιήσουμε σε ένα μεγαλύτερο γενικότερο, η επίτευξη αυτού του εγχειρήματος, αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο. Όπως τονίζουν και οι Sai Liang, Zhengling Qi, Shen Qu, Ji Zhu, Anthony S.F. Chiu, Xiaoping Jia, Ming Xu [30] , τα μοτίβα κλιμάκωσης (scaling patterns) χρησιμεύουν στην εξέταση της ποιότητας της οικονομικής στατιστικής. Επομένως, μπορούμε να έχουμε μία εικόνα από ένα ‘’δείγμα’’ για την ευρύτερη οικονομία. Επίσης, τα μοτίβα κλιμάκωσης μιας οικονομίας είναι σημαντικά και για την πρόβλεψη χαμένων ή αλλοιωμένων δεδομένων στην οικονομική στατιστική , χρησιμοποιώντας την κατανομή πιθανότητας για την εύρεση των χαμένων στοιχείων . Τέλος, τα μοτίβα κλιμάκωσης της οικονομικής στατιστικής, μας δείχνουν την σημαντική ετερογένεια των διάφορων στοιχείων που έχουν σχέση με την οικονομία. Επομένως, αυτό μας βοηθά να κάνουμε περαιτέρω αναλύσεις και πιθανόν διαμόρφωση πλήρους οικονομικής ανάλυσης.

2. Ανάλυση

Υπάρχουν πολλές μέθοδοι για να κάνει κάποιος ανάλυση δεδομένων (επομένως και οικονομικών). Οι μέθοδοι που χρησιμοποιήσαμε εμείς στην εργασία μας, ήταν η συνάρτηση συσχέτισης ύψους-ύψους, η πυκνότητα φάσματος ισχύος με χρήση μετασχηματισμού fourier και τέλος μορφοκλασματικές μέθοδοι , με έμφαση στην εφαρμογή της πολύ-μορφοκλασματικής ανάλυσης. Επιλέξαμε την συνάρτηση συσχέτισης ύψους-ύψους και την πυκνότητα φάσματος ισχύος (μετασχηματισμό Fourier), γιατί με αυτές μπορούμε να διαπιστώσουμε αν υπάρχουν και οι δύο προαναφερθείσες συμμετρίες της περιοδικότητας και της αλλαγής κλίμακας (μορφοκλασματική) στα δεδομένα μας. Για την μελέτη της πολυ-μορφοκλασματικότητας , εφαρμόσαμε τη μέθοδο καταμέτρησης κουτιών (box-counting) κατάλληλα τροποιοημένη στις ανάγκες και στη φύση των χρονοσειρών μας.

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, η εύρεση περιοδικοτήτων είναι πολύ σημαντική, καθώς σε πρώτη φάση, με μια βαθύτερη ανάλυση, μπορούμε να κατανοήσουμε καλύτερα τους μηχανισμούς που προκαλούν αυτή την περιοδικότητα , να κατανοήσουμε την σημασία ύπαρξής τους, καθώς και πως επηρεάζουν την οικονομία. Είναι γνωστό άλλωστε ότι κάθε κοινωνία, όπως άλλωστε και η φύση (π.χ ηλιακή δραστηριότητα (κοκκίαση), γήινη περιφορά (ημέρα, εποχές), κτλ), παρουσιάζουν μία περιοδικότητα στην δομή τους, επομένως το πρόβλημα έγκειται στο να κατανοήσουμε σε βάθος και να αναλύσουμε αυτή την περιοδικότητα που εμφανίζεται. Επομένως, καθώς η κοινωνία αποτελείται από ένα σύνολο παραγόντων συχνά με ισχυρή αλληλεπίδραση μεταξύ τους , πρέπει να είμαστε προσεκτικοί στην μελέτη μας, και να κατανοήσουμε σε βάθος την πιθανή ύπαρξη περιοδικοτήτων. Σε δεύτερη φάση, μπορούμε στοχεύσουμε σε μελλοντική πρόβλεψη (δεδομένου ότι έχει γίνει καλή και σε βάθος ανάλυση, αλλά και πλήρης κατανόηση των ιδιοτήτων των περιοδικοτήτων που ανιχνεύσαμε). Επομένως, η ύπαρξη περιοδικοτήτων, αποτελεί έναν πολύ σημαντικό παράγοντα στον οποίο εστιάσαμε και εμείς στην εργασία μας.

Μέσω των μορφοκλασματικών μεθόδων, ελέγχουμε αν υπάρχει συμμετρία υπό αλλαγή κλίμακας, δηλαδή αν υπάρχει ιδιότητα κλιμάκωσης των δεδομένων μας. Είναι ένα χαρακτηριστικό που χαρακτηρίζει την μορφοκλασματική ιδιότητα, δηλαδή την ιδιότητα της αυτό-ομοιότητας των δεδομένων και υπάρχει μάλιστα σχέση με τον νόμο δύναμης (ο οποίος βρίσκεται μέσω της φασματικής ανάλυσης). Επομένως, αν αλλάζοντας κλίμακα ανάλυσης, παρατηρούμε ότι υπάρχει συσχέτιση των αποτελεσμάτων που λαμβάνουμε με την κλίμακα ανάλυσης που χρησιμοποιήσαμε, τότε έχουμε την συμμετρία υπό αλλαγή κλίμακας. Επομένως, αφού αποφανθούμε αν έχουν τα δεδομένα μας περιοδικότητες και αναλύσουμε περαιτέρω αυτές τις περιοδικότητες, αφού αποφανθούμε για την ύπαρξη συμμετρίας υπό αλλαγή κλίμακας, αυτό που μένει να εξετάσουμε είναι αν υπάρχει συνύπαρξη αυτών των ιδιοτήτων (περιοδικότητα και συμμετρία υπό αλλαγής κλίμακας), και επομένως η ανάλυσή μας γίνεται πιο περίπλοκη, καθώς θα πρέπει να αποφανθούμε τόσο για την ύπαρξη του καθενός χωριστά, στην συνέχεια, αν υπάρχει συνύπαρξη και να εξετάσουμε με ποιον τρόπο δρα η καθεμία στα δεδομένα μας, και να κατανοήσουμε τον βαθύτερο μηχανισμό που κρύβεται πίσω από αυτές τις μεθόδους (και τον μηχανισμό πιθανής τους συνύπαρξης).

Παρακάτω, μετά από μία σύντομη εισαγωγή στη μορφοκλασματική γεωμετρία (2.1) θα εστιάσουμε στην πολυ-μορφοκλασματική ανάλυση και στο πώς αυτή επιτυγχάνεται με την μέθοδο καταμέτρησης κουτιών που θα εφαρμόσουμε στην ανάλυση των χρονοσειρών των δεδομένων μας (2.2). Ακολούθως, στην 2.3 θα ορίσουμε τη συνάρτηση συσχέτισης ύψους-ύψους και θα παρουσιάσουμε τις βασικές ιδιότητές της με έμφαση στην ανίχνευση

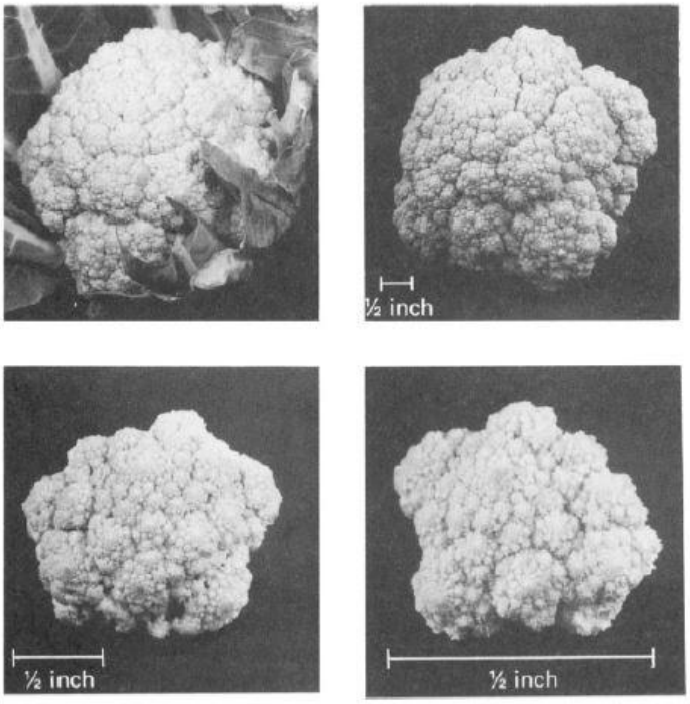
περιοδικότητας και μορφοκλασματικότητας στις χρονοσειρές. Στην τελευταία παράγραφο συτού του κεφαλαίου, θα περιγράψουμε τον μετασχηματισμό Fourier και το φάσμα ισχύος και των πώς σχετίζονται με τις συμμετρίες περιοδικότητας και κλιμάκωσης

2.1 Ανάλυση με Μορφοκλασματικές δομές – μορφοκλασματική ανάλυση:

Εδώ και πολλά χρόνια, οι επιστήμονες προσπαθούσαν με κάθε τρόπο να αναλύσουν την γεωμετρική φύση των αντικειμένων. Από τους αρχαίους έλληνες (Πλάτων, Πυθαγόριοι), μέχρι πρόσφατοι επιστήμονες. Η κατανόηση και ανάλυση των γεωμετρικών ιδιοτήτων ενός αντικειμένου είναι πολύ σημαντική και η σημασία της είναι εμφανής από μερικά παραδείγματα που θα αναφέρουμε παρακάτω. Η γεωμετρία γενικότερα, των φυσικών αντικειμένων, αναλύει την μορφολογία των αντικειμένων, τόσο αυτών του μικρό-κοσμου όπως τα άτομα, όσο και αυτών του μακρό-κοσμου ή ακόμα και του σύμπαντος, όπως κύματα, γραμμές, πλοία, τοπία, βουνά, ακτογραμμές, πλανήτες, ακόμα και γαλαξίες. Οι μαθηματικοί, προσπαθώντας να αντιμετωπίσουν τα προβλήματα που δεν μπορεί να λύσει η συμβατική (Ευκλείδεια) γεωμετρία, επέκτειναν την γεωμετρία σε ανώτερες διαστάσεις, όπως η γεωμετρία Lobachevsky και τέλος, το μεγαλύτερο υπέρ-σύνολο, η γεωμετρία Riemann η οποία περιέχει όλες τις ιδιότητες από κάθε γεωμετρία κατώτερης διάστασης. Αξίζει να σημειωθεί ότι σύμφωνα με σύγχρονες απόψεις κοσμολογίας, το σύμπαν μας υπακούει στους νόμους της γεωμετρίας Riemann[31]. Παρόλα αυτά, όμως, μπορεί η γεωμετρία Riemann να εξηγεί πολύ καλά τα μακρο-σκοπικά φαινόμενα, αλλά σε φυσικά φαινόμενα, θέλουμε μία καλύτερη, μια πιο σε βάθος ανάλυση των γεωμετρικών ιδιοτήτων των αντικειμένων. Για παράδειγμα, ένα σύννεφο, που δεν έχει σταθερό σχήμα, ή ακόμα πιο σημαντικό παράδειγμα, τα σύνορα μιας ακτογραμμής, πρέπει να είμαστε σε θέση να τα οριοθετήσουμε και να τα μετρήσουμε με μια σχετική ακρίβεια. Χαρακτηριστικά, κοιτώντας το παράδειγμα των συνόρων Πορτογαλίας-Ισπανίας, μία από τις Ισπανικές εγκυκλοπαίδειες θεωρεί το μήκος των συνόρων στα 616 μίλια, ενώ Πορτογαλική εγκυκλοπαίδεια, στα 758 μίλια. Ανάλογο πρόβλημα είναι και το μήκος των ακτογραμμών της Μεγάλης Βρετανίας, που αν κάποιος ψάξει μερικές πηγές, θα δει ότι κυμαίνονται τα αποτελέσματα, από 4500-5000 μίλια. Είναι εμφανής ότι η διαφορά των αποτελεσμάτων είναι ιδιαίτερα αισθητή και εδώ χρήζει η ανάγκη για εύρεση ενός εργαλείου που θα μας βοηθήσει να λύσουμε τέτοια προβλήματα με ακρίβεια. Έτσι, στις αρχές του 20^{ου} αιώνα, ο B. Mandelbrot εισήγαγε για πρώτη φορά την έννοια του μορφοκλασματικού σχήματος, ή αλλιώς fractal (η λέξη προέρχεται από την λατινική λέξη lagere, δηλαδή σπάω).

Ποιο είναι όμως αυτό το χαρακτηριστικό που καθορίζει αν κάποιο αντικείμενο πληροί τις ιδιότητες των fractal? Το κυριότερο χαρακτηριστικό που εξετάζουμε σε ένα αντικείμενο fractal είναι η διάσταση του, στην οποία θα αναφερθώ συντόμως. Μπορούμε, να υπολογίσουμε γενικά, τον βαθμό πολυπλοκότητας, με το να εκτιμήσουμε πόσο γρήγορα το μήκος ή το εμβαδό ή ο όγκος (ανάλογα με ποιο φυσικό μέγεθος εξετάζουμε), αυξάνεται, συγκριτικά με μικρές κλίμακες. Επομένως, η κύρια ιδέα ήταν ότι μπορούμε να βρούμε έναν νόμο δύναμης της μορφής $y \propto x^d$ ο οποίος συσχετίζει το μήκος/εμβαδό/ όγκο με την κλίμακα ανάλυσης που έχουμε επιλέξει. Επομένως, δεν είναι ανεξάρτητα της κλίμακας. Αυτό όμως μας εισάγει σιγά-σιγά στην έννοια της διάστασης , που όπως προανέφερα και πριν, είναι ένα από τα βασικότερα στοιχεία που χαρακτηρίζουν ένα fractal. Το πρόβλημα που έγκειται με την έννοια ‘’διάσταση’’ δεν είναι μόνο η δυσκολία της φύσης του αντικειμένου, αλλά και το πλήθος των διαστάσεων που έχουν οριστεί από τους μαθηματικούς. Έχουμε την τοπολογική διάσταση, την διάσταση Hausdorff, την μορφοκλασματική διάσταση (διάσταση fractal) , την διάσταση αυτό-ομοιότητας, την διάσταση box-counting , την διάσταση χωρητικότητας, την Ευκλείδεια διάσταση, και άλλες. Όλες λίγο πολύ σχετίζονται μεταξύ τους, με κάποιες από αυτές να λειτουργούν μόνο σε ορισμένες περιπτώσεις, ενώ σε άλλες, όχι. Εμείς, στα πλαίσια αυτής της εργασίας, θα περιοριστούμε σε τρεις βασικές διαστάσεις. Την διάσταση αυτό-ομοιότητας, την compass διάσταση (ή αλλιώς διάσταση διαίρεσης), και την διάσταση box-counting. Από αυτές τις τρεις, αυτή που έχει περισσότερες εφαρμογές στις επιστήμες, με την οποία ασχοληθήκαμε και εμείς εκτενέστερα και θα αναλύσουμε περαιτέρω, είναι η διάσταση box-counting.

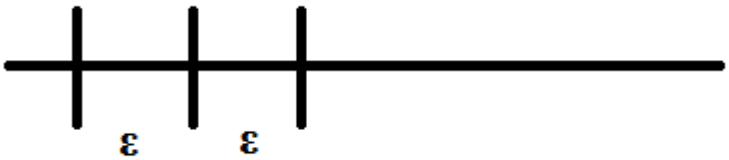
Ας ορίσουμε όμως μαθηματικώς, τι είναι διάσταση. Βασικό χαρακτηριστικό, (αλλά όχι μοναδικό), των fractals, είναι η ύπαρξη αυτό-ομοιότητας. Η ίδια η λέξη μας εξηγεί τι σημαίνει αυτό-ομοιότητα. Αν παρατηρήσουμε ένα σύνολο, για παράδειγμα, το κουνουπίδι της εικόνας παρακάτω (Σχήμα 1), παρατηρούμε ότι μακροσκοπικά, το σχήμα μας (κουνουπίδι), όσο μεγεθύνουμε στο εσωτερικό του, δηλαδή στα εσωτερικά μικρότερα συμπλέγματα, βλέπουμε το ίδιο το αρχικό μας μακροσκοπικό σχήμα. Με λίγα λόγια, το ίδιο σχήμα επαναλαμβάνεται όσο μεγεθύνουμε, δηλαδή όσο μικραίνουμε την κλίμακά μας. Αυτό συμβαίνει συνεχώς και περιγραφικά είναι το φαινόμενο που ορίζουμε ως αυτό-ομοιότητα. Επομένως έχουμε ένα φυσικό σχήμα που παρουσιάζει την ιδιότητα της αυτό-ομοιότητας. Παρόλα αυτά, εδώ τίθεται η ανάγκη για χρήση αυστηρών μαθηματικών ορισμών και όχι διαισθητικής παρατήρησης και ανάλυσης.



Σχήμα 3: Το μπρόκολο όπως φαίνεται στην πρώτη εικόνα ολόκληρο Α (πάνω αριστερά), στην συνέχεια ένα τμήμα του Α, έστω ότι το ονομάζουμε Β (πάνω δεξιά) μετά ένα τμήμα του Β, το Γ (κάτω αριστερά) και τέλος ένα τμήμα του Γ, το Δ (κάτω δεξιά). Τα Α,Β,Γ,Δ μοιάζουν μεταξύ τους και αυτό μας βοηθά να καταλάβουμε διαισθητικά την έννοια της αυτό-ομοιότητας.

Ας δούμε τώρα ένα απλό παράδειγμα. Μία ευθεία, μπορεί να τμηθεί σε τμήματα μήκους ε. Όπως παρατηρούμε στο σχήμα 4, το ευθύγραμμο τμήμα είναι αυτό-όμοιο, αφού κάθε τμήμα του είναι όμοιο με το αρχικό σχήμα , δηλαδή με την συνολική ευθεία. Ο αριθμός των τμημάτων N(ε) που συνθέτουν την ευθεία, είναι ανάλογος του ε που επιλέξαμε για την τμήση της ευθείας μας. Δηλαδή,

$N(\varepsilon) \sim \frac{1}{\varepsilon} = \varepsilon^{-1}$ (1)

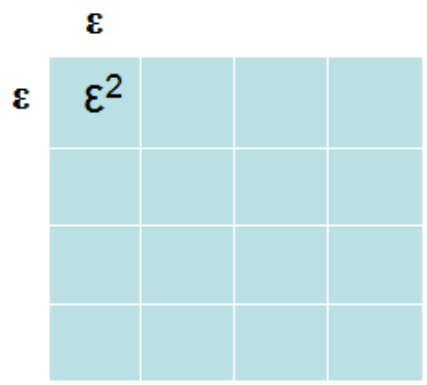


Σχήμα 4: Ευθεία που έχει τμηθεί δύο φορές κατά απόσταση ε.

Ας δοκιμάσουμε τώρα να ακολουθήσουμε όμοια διαδικασία για ένα τετράγωνο. Χωρίζουμε το τετράγωνο σε τμήματα (στο συγκεκριμένο παράδειγμα 16), πλευράς ε, και αντίστοιχα εμβαδού ε^2 . Παρατηρούμε ότι πάλι κάθε μικρό τετράγωνο είναι όμοιο με το αρχικό μας σχήμα. Τώρα όμως, ο αριθμός των τμημάτων N(ε) (επειδή

εξαρτάται πάλι από το ε) που συνθέτουν τον κύβο, είναι ανάλογος του ε^2 , το οποίο ε επιλέξαμε εμείς. Άρα,

$N(\varepsilon) \sim \frac{1}{\varepsilon^2} = \varepsilon^{-2}$ (2)



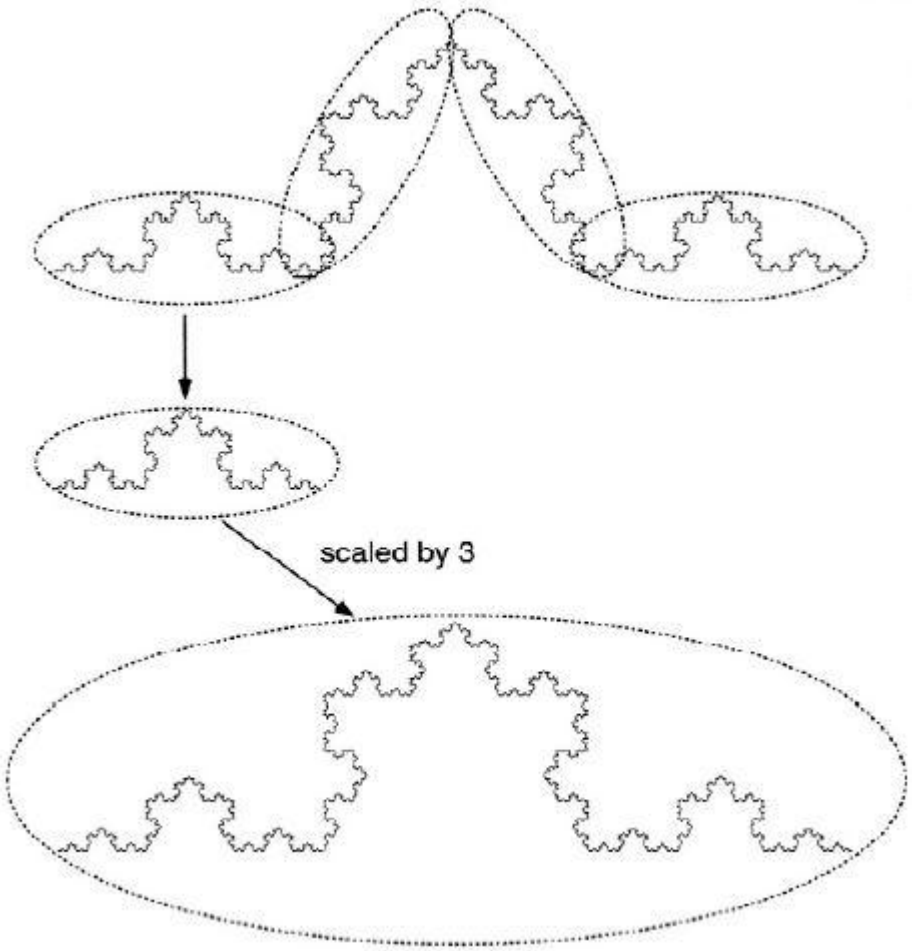
Σχήμα 5: Κύβος που έχει τμηθεί σε 16 τμήματα πλευράς ε και εμβαδού ε^2 .

Παρατηρούμε δηλαδή ότι από όσα αναφέραμε, μπορεί να βγει μια μαθηματική σχέση – ορισμός της διάστασης.

Αφού έχουμε ότι N(ε) ~ ε^{-d}, θα έχουμε, λογαριθμώντας, ότι :

$$d = \frac{\log(N(\varepsilon))}{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \qquad (3)$$

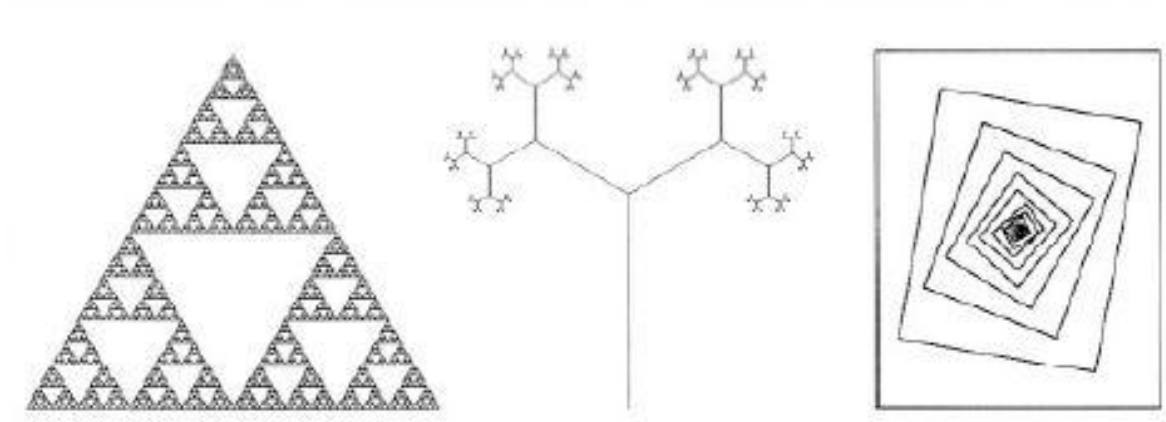
Για καλύτερη κατανόηση των εννοιών, θα χρησιμοποιήσουμε την γνωστή καμπύλη του Koch. Όπως φαίνεται και στο σχήμα Σχήμα 6, το μακροσκοπικό μας σχήμα (ολικό), αποτελείται από 4 όμοια μεταξύ τους τμήματα. Αν τώρα εστιάσουμε σε ένα από αυτά, έστω το πρώτο αριστερά, θα δούμε ότι το τμήμα αυτό είναι όμοιο με το αρχικό μακροσκοπικό μας. Επομένως, σε κάθε στάδιο, όσο και αν εστιάζουμε, θα παρατηρούμε την ιδιότητα της αυτό-ομοιότητας που σχολιάσαμε πριν. Παρόλα αυτά, δεν έχουμε πάντα (ακόμα και σε παρόμοια με αυτή της καμπύλης του Koch, όπου σε κάθε στάδιο, το σχήμα επαναλαμβάνεται), τον ίδιο βαθμό αυτό-ομοιότητας. Υπάρχουν γενικά πολλοί βαθμοί αυτό-ομοιότητας και συνεπώς, εδώ προκύπτει η ανάγκη για ποσοτικοποίηση.



Σχήμα 6: Η καμπύλη του Koch. Το ολικό σχήμα αποτελείται από τέσσερα όμοια μικρότερα τμήματα. Εστιάζοντας σε ένα από αυτά (τυχαία επιλέξαμε το πρώτο αριστερά), παρατηρούμε ότι είναι ίδιο με το αρχικό ολικό μας. Ικανοποιεί την ιδιότητα της αυτό-ομοιότητας.

Ας υποθέσουμε τώρα δύο άλλα παραδείγματα (Σχήμα 7). Το ένα είναι ένα βιβλίο (σχήμα 7-γ), το οποίο μέσα του θα έχει ζωγραφισμένο το ίδιο το βιβλίο, και στην συνέχεια, το ίδιο σχήμα θα επαναλαμβάνεται. Επίσης, ας φανταστούμε ένα δέντρο του οποίου τα φύλλα θα είναι όμοια μεταξύ τους , ακόμα και τα κλαδιά των φύλλων τους, όπως βλέπουμε στο Σχήμα 7-β. Σε αυτά τα δύο παραδείγματα, έχουμε αυτό-ομοιότητα, αλλά όχι σε κάθε σημείο. Επομένως, για το βιβλίο (Σχήμα 7-γ), μπορούμε να πούμε ότι ικανοποιεί την ιδιότητα αυτό-ομοιότητας μόνο σε ένα σημείο, άρα είναι self-similar σε ένα μόνο σημείο. Έχουμε επομένως ένα περιοριστικό σημείο. Όμοια, εύστοχα μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το δέντρο (Σχήμα 7-β), ικανοποιεί την αυτό-ομοιότητα μόνο ως προς τη μέση (κεντρικό κλαδί του). Άρα, δεν πληροί πλήρως και ολικώς την ιδιότητα του self-similar (αυτό-ομοιότητα), αλλά της αυτό-σεγγένειας (self-affine), αφού το κεντρικό του κλαδί δεν είναι όμοιο με το υπόλοιπο σχήμα, αλλά

μπορούμε να το φανταστούμε σαν ένα συγγενές αντίγραφο που συμπιέζεται σε μια γραμμή. Από την άλλη όμως, το τρίγωνο Sierpinski πληροί την ιδιότητα αυτό-ομοιότητας σε κάθε του σημείο (Σχήμα 7-α) και μαζί με την καμπύλη Koch (σχήμα 6), ονομάζονται ‘’αυστηρώς αυτό-ομοιότητας σχήματα’’ (strictly self similar) λόγω αυτής της ιδιότητάς τους. Τώρα, ως προς το κουνουπίδι που εξετάσαμε πιο πάνω, οφείλουμε να το εντάξουμε στην κατηγορία των φυσικών self-similar (αυτό-ομοιότητας) αντικειμένων, αλλά όχι των strictly self similar (αυστηρώς αυτό-ομοιότητας σχήματα).



Σχήμα 7: Το πρώτο σχήμα αριστερά (7-α), είναι το τρίγωνο του Sierpinski το οποίο ικανοποιεί την ιδιότητα της αυτό-ομοιότητας από όποιο σημείο και αν θεωρήσουμε. Για αυτό το λόγο ονομάζεται ‘’αυστηρώς αυτό-όμοιο σχήμα’’. Στο κέντρο (7-β), τα φύλλα του δέντρου έχουν την ιδιότητα της αυτό-ομοιότητας, επομένως το δέντρο έχει την ιδιότητα της αυτό-ομοιότητας μόνο σε δύο σημεία - για αυτό και λέγεται αυτό-συγγενές σχήμα. Και τέλος, τρίτο δεξιά (7-γ), είναι το βιβλίο που πληροί την ιδιότητα της αυτό-ομοιότητας μόνο από ένα σημείο, το κέντρο του.

Τέλος, για την διάσταση αυτό-ομοιότητας, θα δώσουμε έναν ορισμό που προκύπτει από όλα όσα προαναφέρθηκαν. Αν έχουμε ένα σχήμα με την ιδιότητα της αυτό-ομοιότητας, , υπάρχει μία σχέση ανάμεσα στον παράγοντα μείωσης s και στον αριθμό των τμημάτων α σε ένα σχήμα που διαιρέσαμε. Έτσι, έχουμε :

$$\alpha = \frac{1}{s^D} \quad (4)$$

Επομένως, βρίσκουμε ότι:

$$D = \frac{log\alpha}{\log\left(\frac{1}{s}\right)} \quad (5)$$

και η διάσταση αυτή (D), ονομάζεται διάσταση αυτό-ομοιότητας. Για να μην την μπερδέψουμε με άλλες διαστάσεις, συχνά την συμβολίζουμε D_s.

Η διάσταση διαίρεσης (compass):

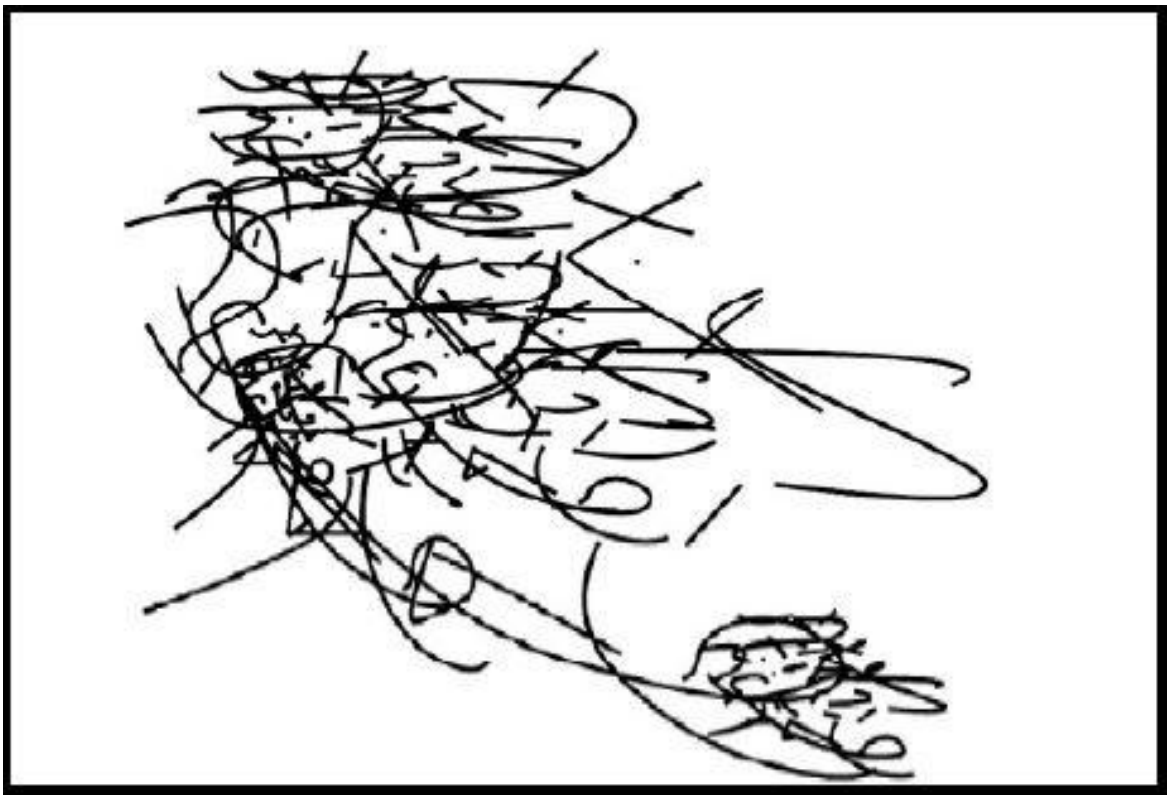
Στην περίπτωση που έχουμε ένα νησί, ή καλύτερα, μία ακτογραμμή και πρέπει να την μετρήσουμε, είμαστε υποχρεωμένοι να το μετρήσουμε πάνω σε έναν χάρτη παρά την ίδια την φυσική ακτογραμμή (ένα πολύ επίπονο και δύσκολο εγχείρημα). Επομένως, παίρνουμε μία διαίρεση σε μία συγκεκριμένη κλίμακα. Για παράδειγμα, αν έχουμε κλίμακα χάρτη 1:1.000.000 και η διαίρεσή μας 5cm, τότε η πραγματική απόσταση είναι 5.000.000 cm ή 50 km. Επομένως, χρησιμοποιώντας διαφορετικό μέγεθος διαίρεσης, παρατηρούμε ότι όσο πιο μικρό το μέγεθος διαίρεσης, τόσο πιο λεπτομερής είναι η αναπαράσταση και η εκτίμηση της ακτογραμμής. Το πολύγωνό μας είναι πιο ακριβές! Κάτι παρόμοιο προσπάθησε να κάνει και ο Αρχιμήδης, για να προσεγγίσει το εμβαδό του κύκλου, χρησιμοποιώντας πολύγωνα. Είναι μία προσεγγιστική μέθοδος της οποίας η ακρίβεια εξαρτάται από το μέγεθος της διαίρεσης που χρησιμοποιούμε. Έστω τώρα ότι παίρνουμε το παράδειγμα μίας συγκεκριμένης ακτογραμμής (πχ την μέτρηση της ακτογραμμής της Μεγάλης Βρετανίας), και εφαρμόσουμε την παραπάνω μέθοδο για πλήθος διαιρέσεων, αν φτιάξουμε την γραφική παράσταση της τιμής που πήραμε από την μέτρηση u, ως προς το 1/s, όπου s η διαίρεση που επιλέξαμε . Θέτουμε τις τιμές μας σε λογαριθμική κλίμακα (log(u) και log(1/s)) . Παρατηρούμε ότι τα σημεία δεν είναι σε μία ευθεία, και δεν μπορούμε να κάνουμε γραμμική προσαρμογή των σημείων. Αν όμως χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων, θα πάρουμε:

$$\mathrm{Log}(u) = d * \log\left(\frac{1}{s}\right) + b \qquad (6)$$

Τα d και b είναι σταθερές και για την ακρίβεια, η κλίση d είναι και η διάσταση που θέλαμε να βρούμε. Αν βρούμε το d, έχουμε τέλος, ότι D_s=1+d. Και άρα βρήκαμε την διάσταση διαίρεσης (compass dimension).

Η box-counting διάσταση:

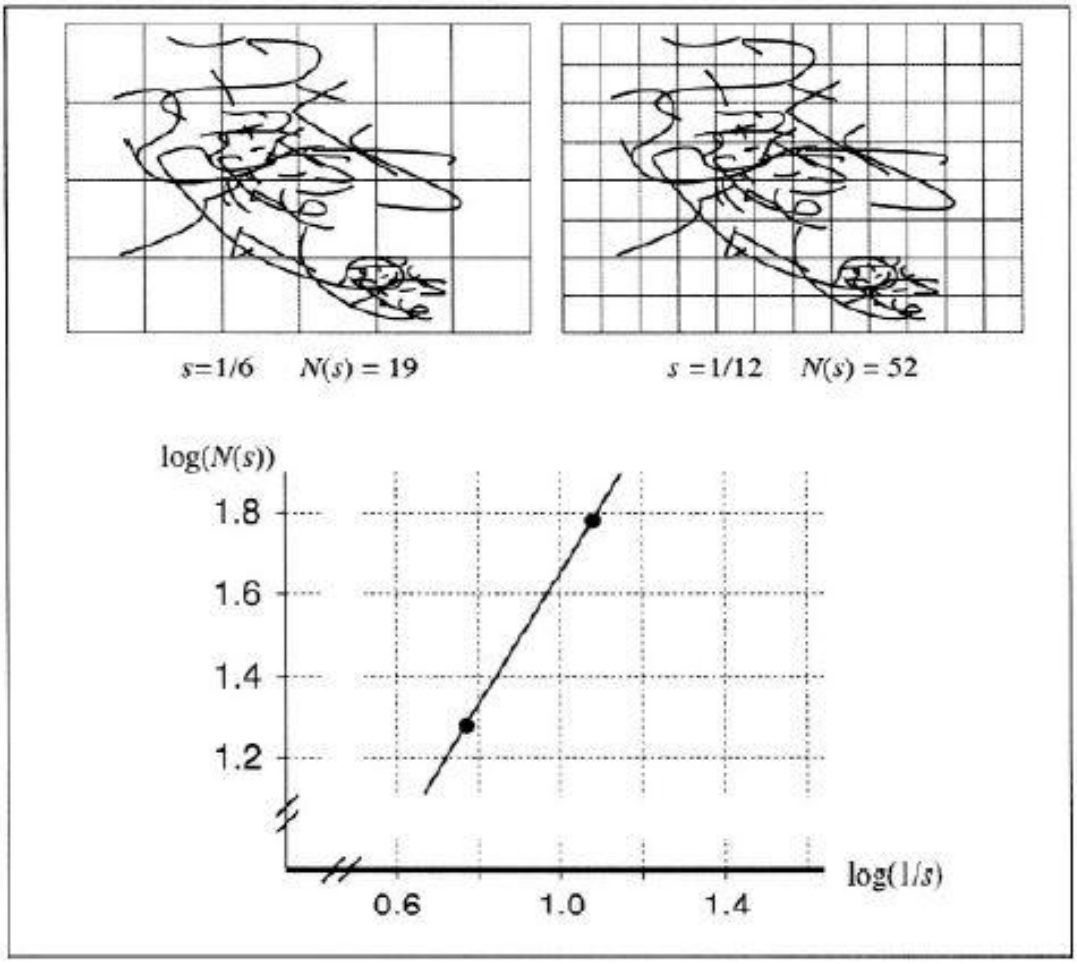
Τώρα θα ασχοληθούμε με την box-counting διάσταση η οποία αποτελεί και την κυριότερη διάσταση με την οποία ασχοληθήκαμε στα πλαίσια αυτής της εργασίας, αφού χρησιμοποιήσαμε κατά κύριο λόγο την μέθοδο ‘’box-counting’’. Η διάσταση box-counting σχετίζεται αρκετά με την διάσταση αυτό-ομοιότητας, με την οποία πολλές φορές ταυτίζονται οι τιμές τους, αλλά όχι πάντα. Έως τώρα είδαμε πως μπορούμε να αντιμετωπίσουμε μορφοκλασματικές δομές (fractals) αν έχουν την ιδιότητα της αυτό-ομοιότητας ή δομές σαν ακτογραμμές (όπου χρησιμοποιήσαμε την μέθοδο της compass ή αλλιώς διαίρεσης. Τώρα θα ασχοληθούμε με ένα μη αυτό-ομοιότητας σχήμα, που παρουσιάζει ‘’άγρια’’ - τραχεία δομή. Παράδειγμα αποτελεί το σχήμα της εικόνας Σχήμα 8.



Σχήμα 8: Ένα σχήμα το οποίο δεν παρουσιάζει την ιδιότητα της αυτό-ομοιότητας, ούτε μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος της διαίρεσης (compass).

Εδώ δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε καμία από τις μεθόδους που σχολιάσαμε προηγουμένως, καθώς δεν έχουμε ούτε την δυνατότητα της διαίρεσης. Αλλά παρόλα αυτά, ίσως είναι εφικτό να βρούμε κάποια ομοιότητα στο αχανές σχήμα μας, παρατηρώντας προσεκτικά. Το θέμα είναι πως θα καταφέρουμε να μαθηματικοποιήσουμε και να εξετάσουμε την ύπαρξης μίας τέτοιας ομοιότητας. Αυτό που κάνουμε είναι να εφαρμόσουμε ένα πλέγμα από τετράγωνα που καλύπτουν όλο μας το σχήμα, διάστασης s. Στην συνέχεια αριθμούμε το πλήθος των τετραγώνων που περιέχουν μέσα τους τμήμα του γραφήματος, έστω το πλήθος να είναι N, και επειδή εξαρτάται από το μέγεθος διάστασης των τετραγώνων, N(s). Στην συνέχεια, μικραίνουμε το μέγεθος του s και υπολογίζουμε το μέγεθος του N(s). Τώρα κατασκευάζουμε την γραφική παράσταση (των λογαρίθμων), log(N(s)) με log(1/s). Στην συνέχεια, προσπαθούμε να κάνουμε γραμμική προσαρμογή των σημείων της

γραφικής μας παράστασης και να υπολογίσουμε την κλίση της, D_b. Αυτή είναι και η διάσταση box-counting, άλλη μία ιδιαίτερη μορφή της fractal διάστασης του Mandelbrot. Ενδεικτικά, μπορούμε να δούμε ένα παράδειγμα, από το παρακάτω σχήμα 9.



Σχήμα 9: Για πλέγμα με μέγεθος s=1/6, παίρνουμε N(s)=19 και για s=1/12, αντίστοιχα N(s)=52. Επομένως, κάνοντας γραμμική προσαρμογή των δύο σημείων μας, έχουμε το διάγραμμα log(N(s)) vs log(1/s).

Στο παράδειγμα αυτό χρησιμοποιήσαμε δύο μόνο μεγέθη πλέγματος, για το s, δηλαδή 1/6 και 1/12. Υπολογίζοντας τώρα την κλίση της ευθείας, βρίσκουμε : log(52/19)/log(2)≅1.45.

Για περισσότερη ευκολία, (κάτι που εφαρμόσαμε και εμείς στην μέθοδό μας), είναι καλύτερη η χρήση πλεγμάτων με s , δυνάμεις του 2. Έτσι, αν πάρουμε για παράδειγμα ½, μετά είναι προτιμότερο το 1/4 , 1/16 , κτλ…

Τώρα, θα δώσουμε μερικούς λόγους που επιλέξαμε να ασχοληθούμε ιδιαιτέρως με την διάσταση box-count και με τον κώδικα που γράψαμε που την εφαρμόζει. Κατ' αρχάς, η διάσταση box-count είναι η πιο ευρέως χρησιμοποιούμενη σε μετρήσεις σε

όλες τις επιστήμες, και αυτό επειδή είναι εύκολη η χρήση της, και μπορεί να υλοποιηθεί εύκολα από τον υπολογιστή. Είναι ‘’ευθεία’’ μέθοδος, η οποία υπολογίζει τα τετράγωνα και την διάσταση. Το πρόγραμμα μπορεί να υλοποιηθεί είτε για σχήματα με ή χωρίς αυτό-ομοιότητα, πολύ σημαντικό πλεονέκτημα, στο οποίο υστερούν άλλες μέθοδοι. Επιπλέον, μπορούμε την μέθοδό μας να την αναγάγουμε και σε περισσότερες διαστάσεις, όπως για παράδειγμα για ένα τρισ-διάστατο σχήμα, όπου τα τετράγωνα δεν θα είναι τετραγωνικά δηλαδή με μήκος και πλάτος μόνο, αλλά κυβικά με μήκος, πλάτος και ύψος. Ακόμα και στην περίπτωση του συνόλου Cantor. Επομένως είναι εμφανή τα πλεονεκτήματα της μεθόδου με χρήση της διάστασης box-count.

2.2 Πολύ-μορφοκλασματική ανάλυση:

Μιλήσαμε για τις μορφοκλασματικές δομές και για την ανάλυσή τους, για να περάσουμε τώρα σε μια επέκτασή τους, τις πολύ-μορφοκλασματικές δομές (multi-fractals) και αντίστοιχα στην ανάλυσή τους , η οποία είναι και πιο σύνθετη. Οι πολύ-μορφοκλασματικές δομές χρησιμοποιήθηκαν για πρώτη φορά από τον Mandelbrot το 1980 , για την μελέτη της διάχυσης της ενέργειας για την μέτρηση της τυρβώδους ταχύτητας ροής. Επομένως, η ταχύτητα έχει πιο σύνθετη δομή και συγκεκριμένα, ακανόνιστη συμπεριφορά και μάλιστα διαδραματίζεται σε μη συχνά τμήματα, χρησιμοποιώντας το μέτρο Lebesgue, σε μέτρα του R^3 . Ο στόχος στην μελέτη αυτή ήταν να βρει σε κάθε σημείο x_0 τον νόμο απόκλισης ταχύτητας για να μειώσει τον τυπικό εκθέτη Hölder $h(x_0)$. Στην συνέχεια, σημεία με ίδιο εκθέτη H ομαδοποιούνται σε σύνολα S_h. Αυτά τα σύνολα μπορεί να έχουν και μηδενικό μέτρο Lebesgue. Παρόλα αυτά, ακόμα και αν δεν είναι σημαντικά από άποψη μέτρου, η τοπολογική τους διάσταση μπορεί να είναι. Οι φυσικοί προσπάθησαν να υπολογίσουν την Hausdorff διάσταση D_h των συνόλων S_h και η συνάρτηση $h \rightarrow D_h$ ονομάστηκε φάσμα μοναδικότητας. Έγινε προσπάθεια να φτιαχτεί ένας πολύ-μορφοκλασματικός φορμαλισμός από τους Parisi&Frich για να υπολογίσουμε το φάσμα μοναδικότητας με τον εξής μαθηματικό τύπο:

$$D(h)=\inf_q(q * h - \tau(q) + c) \quad (7)$$

όπου q πραγματικός αριθμός, c σταθερά και $\tau(q)$ καλείται η συνάρτηση διαμέρισης. Παρόλα αυτά, η φόρμουλα είναι πολύ δύσκολο να εφαρμοστεί σε πραγματικά σήματα, και για αυτό έχουν καταβληθεί πολλές προσπάθειες να υπολογιστούν οι γενικευμένες πολύ-μορφοκλασματικές διαστάσεις του φάσματος D_q . Η παράμετρος q χρησιμεύει σαν ‘’μικροσκόπιο’’ για να βρούμε διάφορες περιοχές του φάσματος μοναδικότητας. Για q>1 , το D_q αναπαριστά τις πιο μοναδικές (λιγότερο συχνές) περιοχές ενώ για q<1 , τονίζει τις πιο συχνές περιοχές και τέλος, για q=1, έχουμε την αναπαράσταση της πληροφορίας διάστασης (information dimension). Εκτός αυτών όμως, μπορούμε να βρούμε έναν εναλλακτικό τρόπο φορμαλισμού. Μπορούμε να φανταστούμε ότι μια πολύ-μορφοκλασματική δομή αποτελείται από προσθήκη πολλών ομογενών μονο-μορφοκλασματικών (mono-fractal) δομών. Ας υποθέσουμε το σύνολο E(h) των Hölder εκθετών h των στοιχείων με τιμές στο διάστημα [h, h+Δh]. F(h) ορίζεται σαν η μορφοκλασματική διάσταση , FD (fractal dimension) του συνόλου E(h) το οποίο έχει μονο-μορφοκλασματική δομή. Τα ζεύγη (q,τ(q)) και (h,F(h)) συνδέονται με τον μετασχηματισμό Legendre ως εξής:

$$\tau(q)=q*h(q)- F(h) \quad (8)$$

και

$h(q) \cong \alpha(q) = d\tau(q)/dq$ (9)

όπου α είναι η προσέγγιση του συντελεστή Hölder h. Για μια πολύ-μορφοκλασματική δομή, οι διαστάσεις D_q είναι συναρτήσεις μείωσης του q, και $h \rightarrow F(h)$ είναι κυρτή συνάρτηση της οποίας το μέγιστο ταυτίζεται με την διάσταση Hausdorff D_h . [32]

Επομένως, (όπως προαναφέρθηκε), σε περιπτώσεις που η Ευκλείδεια γεωμετρία δεν μπορεί να περιγράψει την τοπολογική διάσταση, πρέπει να προσεγγίσουμε με την μέθοδο των μορφοκλασματικών δομών. Στην εργασία μας, όπως οι Stanislav Jurecka, Heike Angermann, Hikaru Kobayashi, Masao Takahashi,Emil Pincík[33], και αντίστοιχα, οι Xia Sun, Zhuxi Fub, ZiqinWu[34] σε σχετικές εργασίες τους, υπολογίσαμε την διάσταση D (Haussdorf-Besicovitch) με τον ίδιο τρόπο, μέσω της πολύ-μορφοκλασματική ανάλυσης (box counting method). Η μέθοδος πολύ-μορφοκλασματικής ανάλυσης που χρησιμοποιήσαμε εμείς, υπολογίζει κατ' αρχάς την κατανομή των υψών h_{ij} μέσα σε ένα κουτί (i,j), από τον τύπο

$P_{ij} = \frac{hij}{\sum hij}$ (10)

όπου P_{ij} η μέση τιμή της συνάρτησης υψών (heigh function) στο κουτί (i,j) μεγέθους ε. Ισχύει ότι $P_{ij}(\varepsilon) \sim \varepsilon^{\alpha}$.

Στην συνέχεια, υπολογίζουμε το:

$X(\varepsilon) = \sum pij(\varepsilon)^q = \varepsilon^{\tau(q)}$ (11)

όπου q είναι μία τιμή (τα q τα επιλέγουμε εμείς ακέραια, στην συγκεκριμένη εργασία πήραμε όλους τους ακεραίους από -10 έως 10). Επίσης, όπως υποδεικνύουν και οι Guodong Liu, LingyuanWu, Fuping Zhang[35] χρησιμοποιήσαμε τις λογαριθμικές τιμές τους, δηλαδή το log(X(ε)) προς το log(ε). Στην συνέχεια, υπολογίσαμε :

$D_q = \frac{\tau(q)}{q-1}$ (12)

και επομένως βρίσκουμε με αυτό τον τρόπο την μορφοκλασματική διάσταση D_q. Όπως τονίζουν και οι Stanislav Jurecka, Heike Angermann, Hikaru Kobayashi, Masao Takahashi,Emil Pincík[33], για επιφάνειες με μικρή τραχύτητα, το D_q έχει μεγάλες τιμές, ενώ αντίστοιχα για επιφάνειες με μεγάλη τραχύτητα, έχει μικρές σχετικά τιμές. Κάτι ανάλογο συμβαίνει και με τις χρονοσειρές, εννοώντας ότι για χρονοσειρές με έντονες αυξομειώσεις, έχουμε μικρές τιμές D_q και αντίστοιχα, αν δεν έχουμε έντονες αυξομειώσεις, η τιμές του D_q είναι μεγάλες. Το πολύ-μορφοκλασματικό φάσμα μοναδικότητας f(a), υπολογίζεται από τον τύπο :

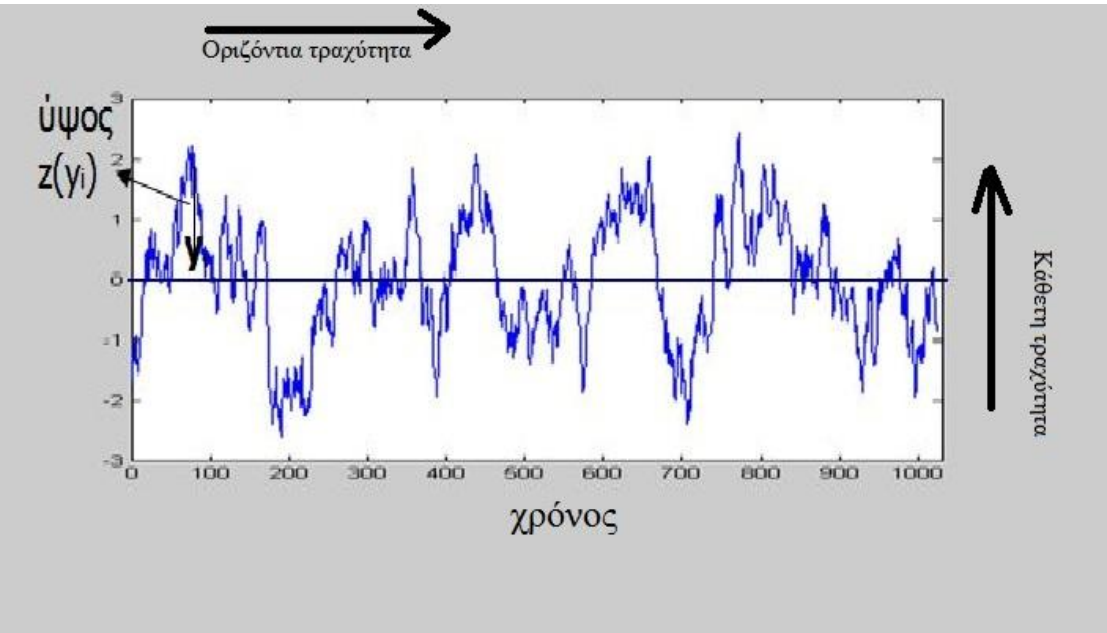
$f(\alpha) = a * q - \tau(q)$ (13)

όπου $a = \frac{d\tau(q)}{dq}$.

2.3 Συνάρτηση συσχέτισης ύψους-ύψους:

Τραχύτητα ορίζουμε την απόκλιση των τιμών (των υψών), από το επίπεδο αναφοράς. Όταν θέλουμε να συγκρίνουμε την ‘’τραχύτητα’’ μίας επιφάνειας, ή αντίστοιχα, τον βαθμό αυξομείωσης μιας χρονοσειράς, πρέπει να κάνουμε κάποια ανάλυση. Η τραχύτητα σε μια επιφάνεια, είναι όρος που είναι αντιληπτός, σαν ο βαθμός μη-ομαλότητας της επιφάνειας. Στις χρονοσειρές όμως είναι λίγο πιο πολύπλοκη η ιδιότητα της ‘’τραχύτητας’’. Πως μπορούμε να εξετάσουμε την τραχύτητα μιας χρονοσειράς (και για την ακρίβεια μέσα από την γραφική της παράσταση). Ο ορισμός παραμένει ο ίδιος και θεωρούμε τραχύτητα χρονοσειρών την μη-ομαλότητα της χρονοσειράς, δηλαδή την έντονη αυξομείωση των τιμών της χρονοσειράς.

Σε μία χρονοσειρά, έχουμε την κάθετη και την οριζόντια τραχύτητα, όπως αυτές φαίνονται και από το σχήμα 10.



Σχήμα 10: Οριζόντια και κάθετη τραχύτητα μιας χρονοσειράς.

Η κάθετη τραχύτητα συνήθως υπολογίζεται εύκολα από την κανονική κατανομή, δηλαδή χρησιμοποιώντας την συνάρτηση κατανομής Gauss:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi w}} \exp\{-\frac{z^2}{2w^2}\} \text{ , με w = rms} \qquad (14)$$

Παρόλα αυτά, συχνά υπάρχουν αποκλίσεις ειδικά όταν έχουμε περιοδικότητα.

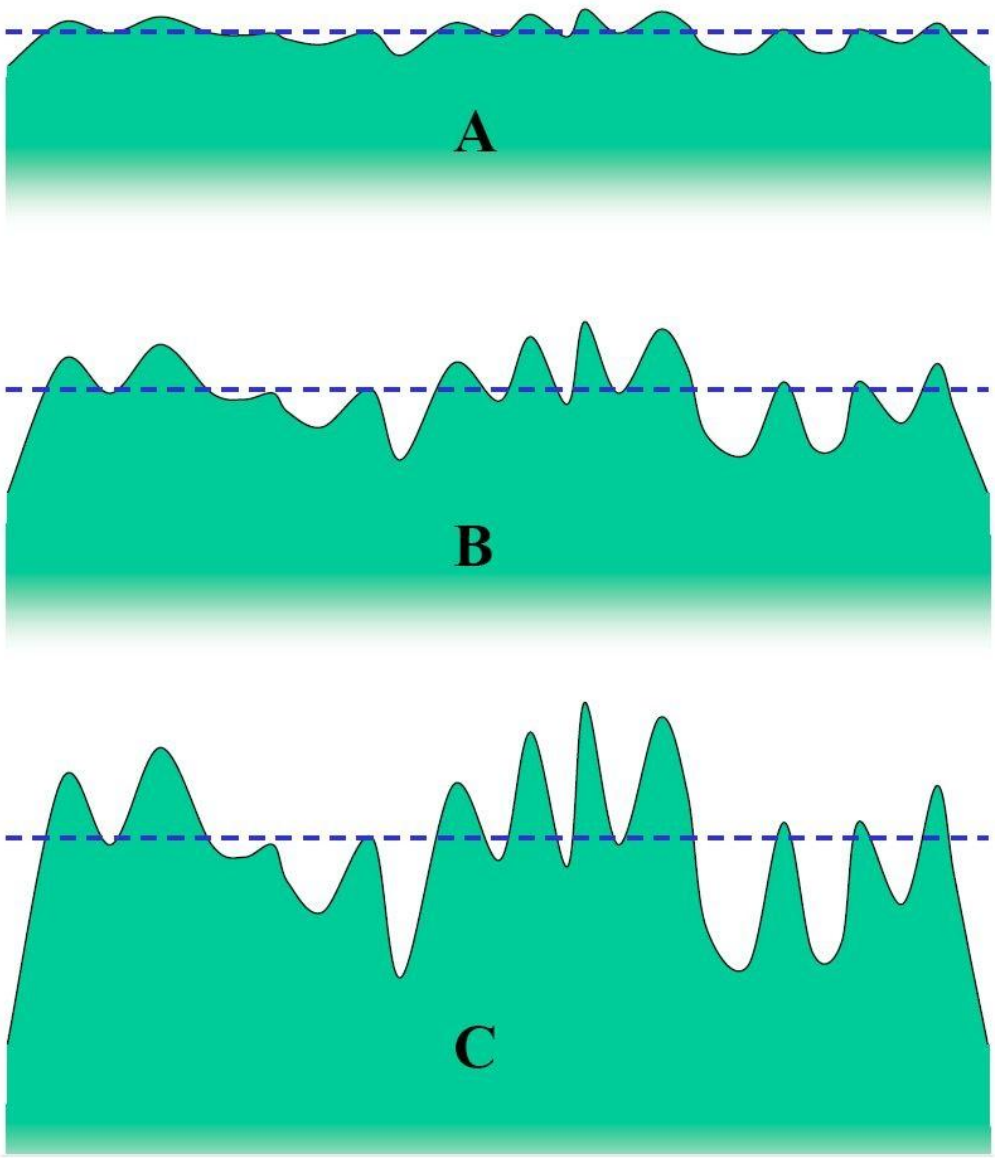
Τώρα όμως πάμε να υπολογίσουμε την οριζόντια τραχύτητα.

Μία απλοϊκή μέθοδος θα μπορούσε να είναι απλώς να συγκρίνουμε το RMS (τυπική απόκλιση της σειράς από τη μέση τιμή της), ορίζοντας ένα επίπεδο από το οποίο θα

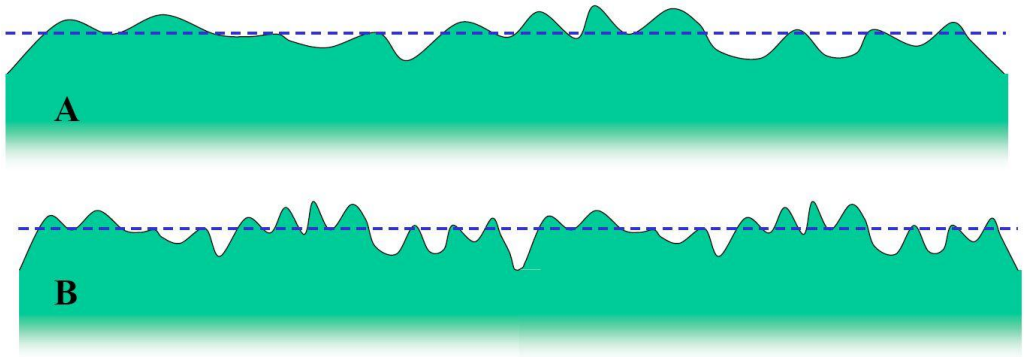
υπολογίσουμε την απόσταση των δεδομένων μας. Έτσι, ειδικότερα, το RMS δίνεται από τον τύπο :

$$\mathrm{RMS} = \sqrt{\frac{(Z1^2+Z2^2+\cdots+Zn^2)}{n}} \quad (15)$$

και υπολογίζει την μέση τραχύτητα μιας επιφάνειας (ή αντίστοιχα την μέση αυξομείωση μιας χρονοσειράς). Το σ (ή αλλιώς rms), ονομάζεται μέση τετραγωνική ρίζα της τραχύτητας ή αλλιώς κάθετη τραχύτητα. Μας δίνει το πλάτος μιας χρονοσειράς. Το πρόβλημα με το RMS είναι ότι είναι εφαρμόσιμη μόνο σε περιπτώσεις που οι επιφάνειές μας έχουν παρόμοια δομή. Έτσι, για παράδειγμα, παρατηρώντας το Σχήμα 6, βλέπουμε ότι η χρονοσειρά Β έχει 3 φορές μεγαλύτερη τραχύτητα από την Α και η C 6 φορές μεγαλύτερη από την Α. Στην προκειμένη περίπτωση είναι εμφανές. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις όπως αυτή στο σχήμα 2, όπου δύο χρονοσειρές έχουν ίδιο RMS αλλά συμπεριφέρονται χρονικά, διαφορετικά.



Σχήμα 11: Τρεις γραφικές παραστάσεις χρονοσειρών (A,B,C). Η διακεκομμένη γραμμή υποδηλώνει το επίπεδο της μέσης τιμής από το οποίο παίρνουμε τις αποστάσεις για να υπολογίσουμε το rms.



Σχήμα 12: Δύο γραφικές παραστάσεις χρονοσειρών (A και B) με ίδιο rms αλλά εμφανής διαφορετική συμπεριφορά ως προς το χρόνο.

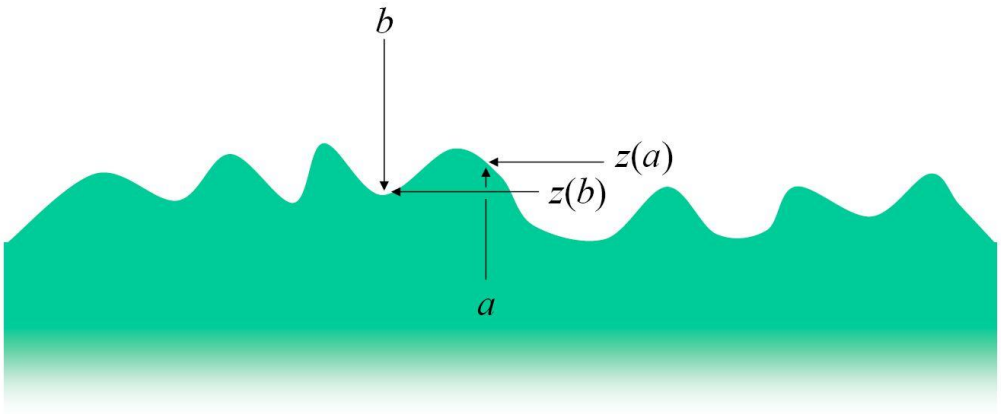
Έστω ‘’α’’ ένα σημείο στην επιφάνεια Z(χ). Και έστω το ύψος Z(α) σε αυτό το σημείο. Έστω τώρα ένα άλλο σημείο στην επιφάνεια, το ‘’β’’. Βρίσκουμε αντίστοιχα το ύψος του Z(β), όπως φαίνεται στο σχήμα 8. Ονομάζουμε με r (r=|α-β|),την οριζόντια απόστασή τους (των α και β).

Επομένως τώρα, αν πάρουμε πολλά διαφορετικά σημεία όμοια με το ‘’α’’ και υπολογίσουμε τον μέσο όρο των γινομένων των υψών (Z(α)*Z(β)) , διαιρώντας και με το τετράγωνο του rms, έτσι ώστε η επιλογή του ‘’β’’ πάλι να έχει γίνει με όμοιο τρόπο με πριν , αλλά με την προϋπόθεση ότι η απόσταση κάθε ‘’α’’ από ‘’β’’ να είναι σταθερή και ίση με ‘’r’’,αυτή είναι και η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης, η οποία μας υπολογίζει την οριζόντια τραχύτητα . Με λίγα λόγια, έχουμε την συνάρτηση αυτοσυσχέτισης :

$$R(r) = \frac{1}{rms^2} * \frac{1}{N-r} * \sum_{n=1}^{N-r} z(n+r) * z(n) \quad (16)$$

Με R(r=0)=1, R(r→oo)=0.

Η ανάγκη για μία αναλυτικότερη μέθοδο, λαμβάνοντας υπόψη τη χρονική διάταξη των υψών των χρονοσειρών, βοήθησε στην εισήγηση της μεθόδου ‘’συνάρτηση συσχέτισης ύψους-ύψους’’.



Σχήμα 13: Επιλογή ενός τυχαίου σημείου ‘’α’’ στην επιφάνειά μου, και εύρεση του ύψους του Z(α) και στην συνέχεια, με όμοια τυχαία διαδικασία επιλογή άλλου τυχαίου σημείου ‘’β’’ και υπολογισμός του ύψους του Z(β).

Αν τώρα πάρουμε πολλά διαφορετικά σημεία όμοια με το ‘’α’’ και υπολογίσουμε τον τετραγωνικό μέσο όρο των διαφορών των υψών (Z(α)-Z(β)) , έτσι ώστε η επιλογή του ‘’β’’ πάλι να έχει γίνει με όμοιο τρόπο με πριν , αλλά με την προϋπόθεση ότι η απόσταση κάθε ‘’α’’ από ‘’β’’ να είναι σταθερή και ίση με ‘’r’’, λαμβάνουμε την συνάρτηση συχέτισης ύψους-ύψους:

$$G(r) = \sqrt{(\frac{1}{N-r} * \sum_{n=1}^{N-r}\big(Z(n+r) - Z(n)\big)^2} \quad (17)$$

Με την βοήθεια αυτού του τύπου, παρατηρούμε ότι για κάθε r, υπολογίζουμε τον τετραγωνικό μέσο όρο των αποστάσεων των υψών όπως περιγράψαμε προηγουμένως. Έτσι, αφού επαναλάβω αυτή την διαδικασία για διάφορες τιμές του r, στο τέλος θα έχω ένα σύνολο αποτελεσμάτων G(r).

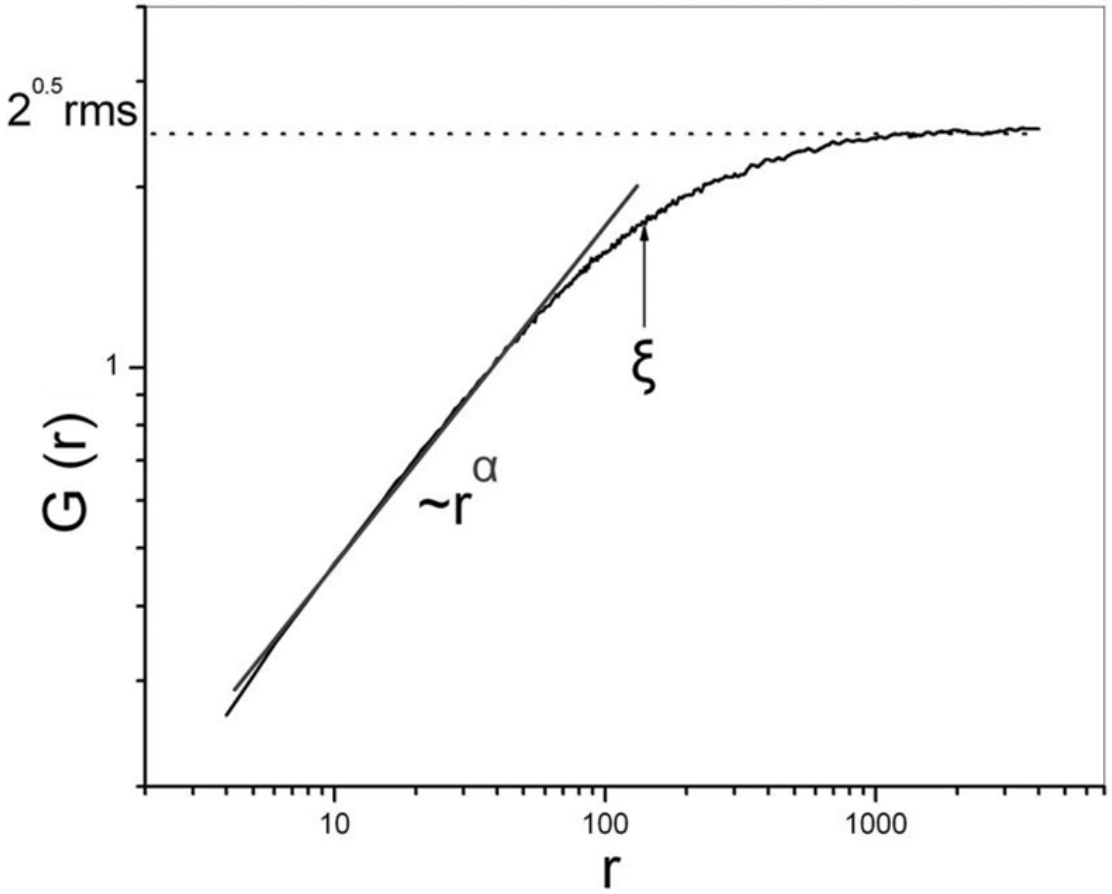
Παρατηρούμε όμως ότι :

$$G(r) = \sqrt{(\frac{1}{N-r} * \sum_{n=1}^{N-r}\big(Z(n+r) - Z(n)\big)^2} = \sqrt{2}rms(1 - R(r)) \qquad (17.1)$$

Τότε, G(r=0)=0, και G(r→oo)=√2 rms .

Επομένως, είναι εμφανής η σχέση που συνδέει την συνάρτηση συσχέτισης ύψους-ύψους $G(r)$ με την συνάρτηση αυτό-συσχέτισης $R(r)$, καθώς και με το rms .

Αν τώρα σχηματίσω την γραφική παράσταση του G(r) ως προς το r, θα έχω την δομή του σχήματος Σχήμα 14.



Σχήμα 14: Γραφική παράσταση της λογαριθμοποιημένης συνάρτηση συχέτισης ύψους-ύψους.

Το σημείο ‘’ξ’’ στο σχήμα 14 ονομάζεται μήκος συσχέτισης (correlation length) και μερικές φορές δεν είναι εύκολο να βρεθεί. Χαρακτηρίζει κατά κύριο λόγο το εύρος των διακυμάνσεων μιας χρονοσειράς. Είναι το άνω όριο της μορφοκλασματικότητας (fractality). Επομένως για r>ξ δεν έχουμε συσχέτιση μεταξύ των ακραίων σημείων. Η ύπαρξη εκθετικής εξάρτησης (power law), για r<ξ, μας υποδηλώνει ότι τα δεδομένα μας, έχουν την στατιστική ιδιότητα της αυτό-ομοιότητας, δηλαδή της ιδιότητας των μορφοκλασματικών δομών.

Η σχέση όμως της συνάρτηση συχέτισης ύψους-ύψους με τα fractals πρέπει να γίνει καλύτερα αντιληπτή. Στο Σχήμα 14 φέραμε την ευθεία (μαύρη), της οποία η κλίση ‘’α’’, μας δίνει τον εκθέτη τραχύτητας. Δηλαδή μας δίνει την σχετική συνεισφορά των διακυμάνσεων υψηλών συχνοτήτων. Για την ακρίβεια, το ‘’α’’ και ο βαθμός συνεισφοράς είναι αντιστρόφως ανάλογα (με χαμηλό ‘’α’’ να σημαίνει υψηλή συσχέτιση και αντίστροφα). Επομένως, μεγάλες τιμές του ‘’α’’, υποδηλώνουν χαμηλή συνεισφορά των υψηλών συχνοτήτων. Άρα, το α μας δείχνει τις υψίσυχνες διαμορφώσεις των προεξοχών που παρουσιάζει η χρονοσειρά μας. Τέλος, η σχέση που διέπει το ‘’α’’ με την μορφοκλασματική διάσταση (d), είναι :

$$d=2-\alpha \qquad (18)$$

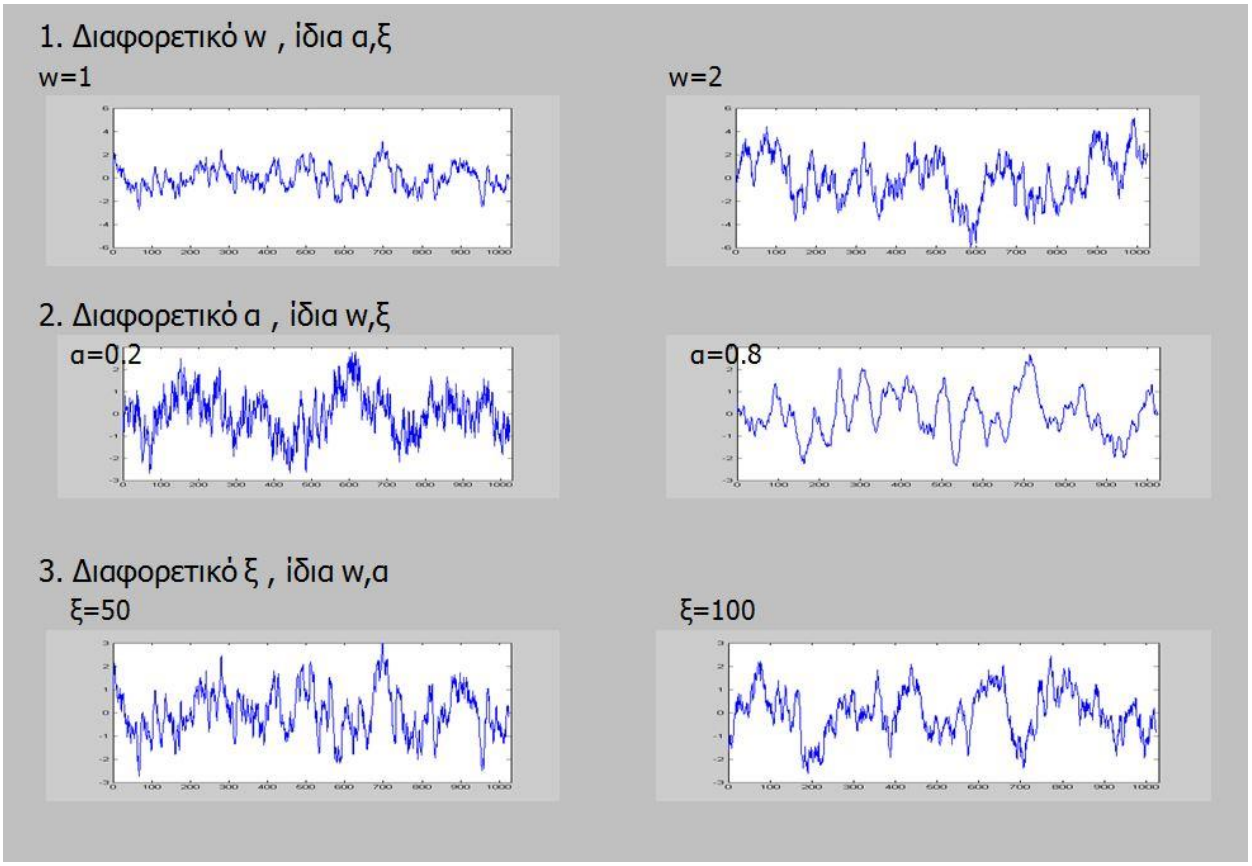
Ορισμένα πράγματα που πρέπει να προσέξουμε στην ανάλυσή μας με την συνάρτηση συχέτισης ύψους-ύψους είναι :

- Το μήκος συσχέτισης (ξ), ορισμένες φορές είναι αρκετά δύσκολο να βρεθεί και σε κάποιες περιπτώσεις μάλιστα, ίσως δεν έχει και νόημα η προσπάθεια για εύρεσή του.
- Τρέχοντας την μέθοδο σε διαφορετική κλίμακα, μπορεί να μας δώσει διαφορετικά αποτελέσματα. Επομένως, μεγάλα (σε κλίμακα) σαρώματα, μπορεί να χάσουν πληροφορία υψηλότερων συχνοτήτων.

Εκτός από αυτή την γραφική παράσταση (συνάρτηση συχέτισης ύψους-ύψους), στην ανάλυσή μας χρησιμοποιήσαμε και την λογαριθμοποιημένη αντίστοιχα συνάρτηση συχέτισης ύψους-ύψους αναμένοντας να δούμε μία γραμμική σχέση.

Η μέθοδος αυτή έχει μεγαλύτερη εφαρμογή όταν εξετάζουμε επιφάνειες [36], και αυτό αποτελεί και πρωτοτυπία μας, το γεγονός ότι την χρησιμοποιήσαμε σαν εργαλείο ανάλυσης χρονοσειρών. Επομένως, σε μια χρονοσειρά, ακριβώς με όμοιο τρόπο (όπως περιγράψαμε την μέθοδο πιο πάνω), η συνάρτηση συσχέτισης ύψους-ύψους, υπολογίζει το μέσο μήκος των τετραγωνικών διαφορών των τιμών ισαπέχοντων σημείων κατ' απόσταση r.

Τέλος, συνοψίζοντας, στο σχήμα 15 παρατηρούμε την φυσική ιδιότητα των w ή αλλιώς rms (τυπική απόκλιση), ξ (μήκος συσχέτισης) και α (εκθέτης τραχύτητας). Παρατηρούμε ότι όταν διατηρούμε σταθερές τις δύο από τις τρεις ποσότητες και μεταβάλλουμε την τρίτη, είναι εμφανής η επιρροή στην δομή της χρονοσειράς μας. Έτσι, διατηρώντας σταθερά τα α,ξ και μεταβάλλοντας το rms, παρατηρούμε ότι το πλάτος της χρονοσειράς μας μεταβάλλεται, επομένως, οι τιμές των μέγιστων και ελάχιστων αλλάζουν. Αν από την άλλη διατηρήσουμε σταθερά τα rms, ξ ,μεταβάλλοντας το α, η τραχύτητα της χρονοσειράς αλλάζει, και όσο πιο μικρό είναι το α, τόσο πιο τραχεία είναι η χρονοσειρά . Τέλος, αν διατηρήσω σταθερά τα rms, α και μεταβάλλω το ξ, παρατηρώ ότι το εύρος των διακυμάνσεων της χρονοσειράς μεταβάλλεται.



Σχήμα 15: Ίδια γραφική παράσταση διατηρώντας κάθε φορά σταθερές τις δύο από τις τρεις παραμέτρους και μεταβάλλοντας την τρίτη. Στο πρώτο ζέυγος (πάνω-πάνω), έχουμε διατηρήσει σταθερά τα α,ξ και μεταβάλλαμε το w. Στο μεσαίο ζευγάρι, διατηρήσαμε σταθερά τα w, ξ και μεταβάλλαμε το α. Και τέλος, στο τελευταίο ζευγάρι, διατηρήσαμε σταθερά τα w και α και μεταβάλλαμε το ξ. (Όπου w = rms).

2.4 Φάσμα ισχύος (Μετασχηματισμός Fourier):

Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιεί την ανάλυση Fourier και για την ακρίβεια, την μέθοδο fft (fast fourier transform). Η μέθοδος fourier έχει πολύ μεγάλη χρήση σε πολλούς κλάδους των μαθηματικών και των επιστημών, με τον πρωτοπόρο Carl Friedrich Gauss να την έχει χρησιμοποιήσει πρώτος, πριν τις δημοσιεύσεις του ίδιου του Fourier (από τον οποίο φέρει και το όνομά του αυτός ο κλάδος των μαθηματικών). Το κύριο χαρακτηριστικό της ανάλυσης fourier είναι η τριγωνομετρική παρεμβολή. Θα αναφέρουμε το βασικό σκεπτικό ξεχωριστά για την συνεχή και για την διακριτή περίπτωση.

Για την συνεχή περίπτωση, έστω συνάρτηση f:[0,1]→ C, Riemann ολοκληρώσιμη με f(0)=f(M). Ο κ-οστός μιγαδικός συντελεστής fourier δίνεται από τον τύπο:

$$fk = \frac{1}{M} * \int_0^M f(x) * \exp\{-2\pi i * \frac{k}{M} x\}\, dx \text{ με } \kappa \in Z \quad (19)$$

Επομένως, η μιγαδική σειρά fourier δίνεται από τον τύπο:

f(x)=$\sum_{k=-oo}^{+oo} fk * \exp\{2\pi i * \frac{k}{M} x\}$ (20)

Τώρα, στην περίπτωση που έχω διακριτές και όχι συνεχείς τιμές, έστω $\chi=(\chi_0,\chi_1,\ldots,\chi_{M-1}) \in C^M$. Τότε, έχουμε την διακριτή μετατροπή fourier :

$X_\kappa=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{M-1} Xk * \exp\{-2\pi i * \frac{jk}{M}\}$,k=0,…,M-1 (21)

Καθώς έχουμε τον ορισμό του μετασχηματισμού fourier και για τις δύο περιπτώσεις (συνεχή και διακριτή), είμαστε έτοιμοι να εξετάσουμε την fft (fast fourier transform) περίπτωση ανάλυσης fourier. Έστω $M=M_1*M_2$,M1,M2 ∈ N(σύνολο των φυσικών αριθμών) και $(\chi_0,\chi_1,\ldots,\chi_{M-1}) \in C^M$. Τότε, θα έχω :

Χκ=$\sum_{j=0}^{M-1} xj * \exp\left\{-2\pi i * \frac{jk}{M}\right)\}$ (22)

Παραλείψαμε τον παράγοντα $\frac{1}{M}$ καθώς συνηθίζεται σε τέτοιου είδους αναλύσεις.

Επομένως, αν έχω τα σημεία, Z_m, m=1…,M, θα έχω από την ανάλυση fourier (fft):

$F(Kj) = \sum_{m=1}^{M} Zm * \exp\{2\pi ij * \frac{m}{M}\}$ (23)

Στην συνέχεια, μέσω της φασματικής πυκνότητας ισχύος μπορούμε να πάρουμε την κατανομή των στοιχείων συχνότητας που συνθέτουν την χρονοσειρά μας.

Έτσι, έχουμε:

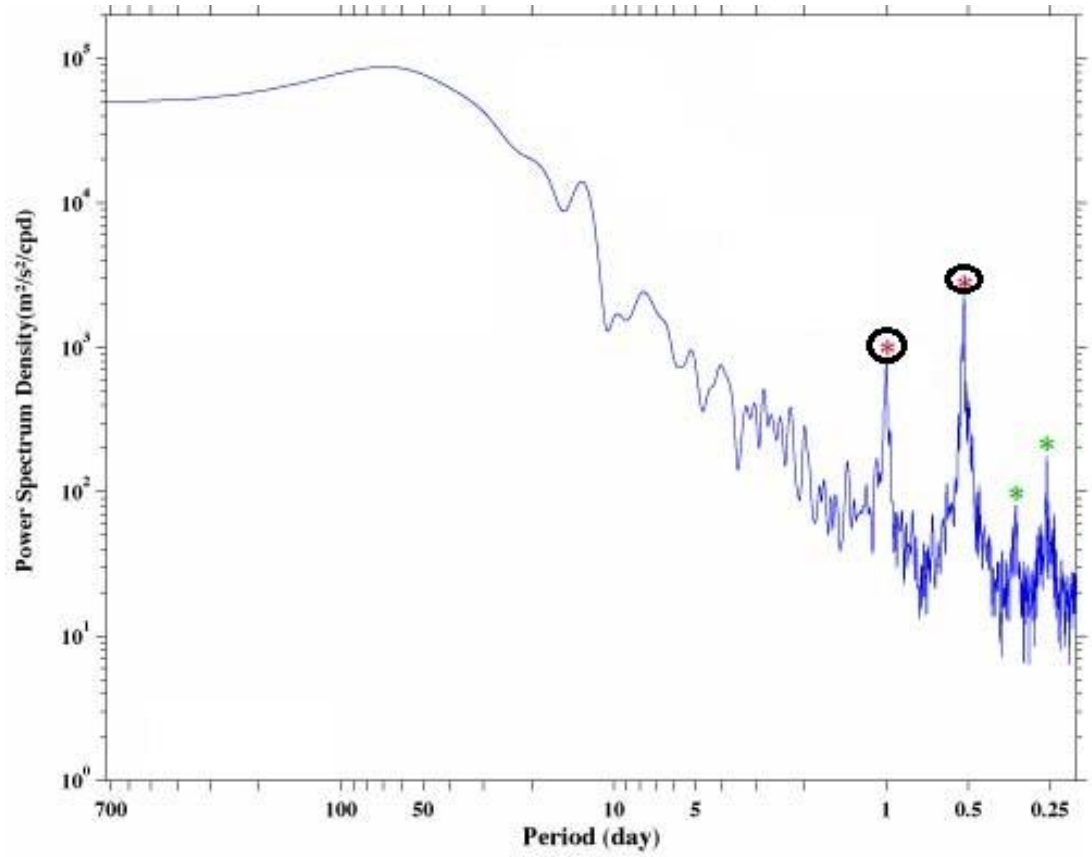
$P(Kj) = \frac{1}{M^2} * |F(Kj)|^2$ (24)

Έχουμε:

- Ο νόμος δύναμης φθίνει σε υψηλές συχνότητες και επομένως η fractal δομή (ιδιότητα αυτό-ομοιότητας) περιορίζεται σε υψηλά K.
- Ο εκθετικός νόμος δύναμης σχετίζεται με τον συντελεστή τραχύτητας και την fractal διάσταση (= -2α+1).
- Το μήκος συσχέτισης μπορούμε να πούμε πως είναι κάπως αναλόγως αντίστροφο της συχνότητας (άρα και στην μέθοδο PSD που χρησιμοποιούμε).
- Το RMS (που σχολιάσαμε νωρίτερα), σχετίζεται άμεσα με την φασματική ανάλυση ισχύος μέσω του θεωρήματος Parseval :
  $\sigma^2 = \sum_{j=1}^{M} P(Kj)$ (25)

Επομένως, παίρνουμε την γραφική παράσταση των αποτελεσμάτων που μας δίνει η φασματική ανάλυση ισχύος και στην συνέχεια, παίρνουμε και την λογαριθμοποιημένη της μορφή. Στην γραφική παράσταση της απλής φασματικής ανάλυσης ισχύος, αναμένουμε να δούμε κάποιες κορυφές που να πιστοποιούν επαναληπτικότητα των δεδομένων, όπως

φαίνεται και από το Σχήμα 10 και όμοια ψάχνουμε να βρούμε (για τον ίδιο λόγο) κορυφές και στην γραφική παράσταση της λογαριθμοποιημένης φασματικής ανάλυσης ισχύος .

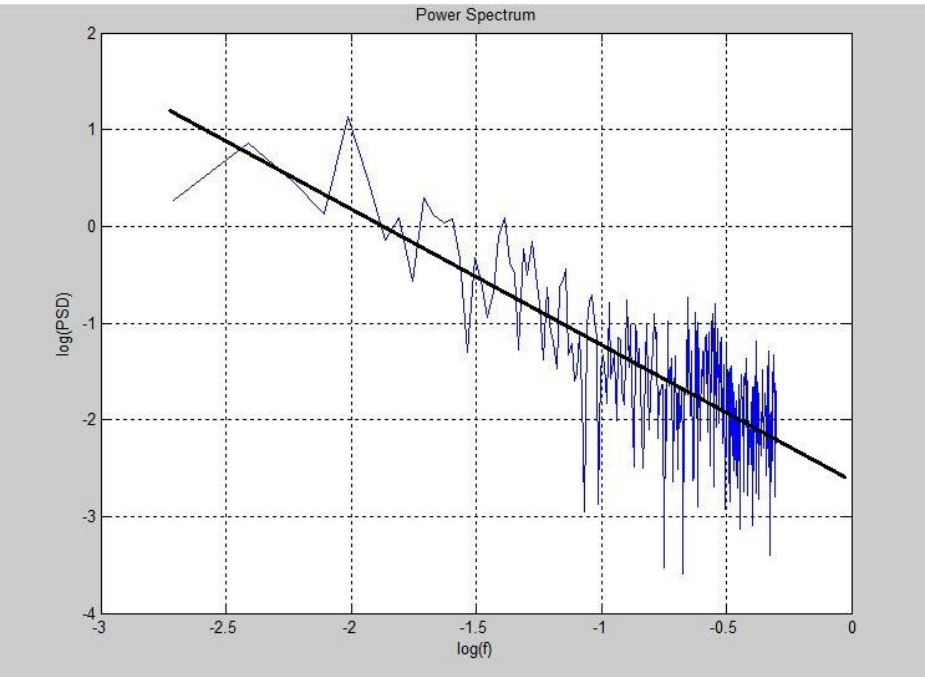


Σχήμα 16: Γραφική παράσταση πυκνότητας φάσματος ισχύος. Παρατηρούμε 4 κορυφές (2 έντονες που τις έχουμε κυκλώσει κιόλας, και 2 ασθενέστερες). Αυτές οι κορυφές (οι δύο κυκλωμένες περισσότερο), μας δείχνουν την πιθανή ύπαρξη μιας επαναληπτικότητας στα δεδομένα μας.

Επίσης, η επεξεργασία οικονομικών δεδομένων με φασματικές μεθόδους έχει διαδραματιστεί αρκετές φορές στο παρελθόν. Έτσι, για παράδειγμα, οι Oppenheim, A. V., Willsky, A. S., & Young, I. T. (1983) [37] αναφέρουν, εκτός από αναλύσεις σήματος, και ανάλυση του δείκτη Dow Jones, ο οποίος αποτελεί τον πιο ευρέως χρησιμοποιημένο δείκτη χρηματιστηρίου, για την ανάλυση της αγοράς.

Αν τώρα, πάρουμε την γραμμική προσαρμογή (linear fit) στην γραφική παράσταση (σχήμα 17) της φασματικής πυκνότητας ισχύος, τότε η κλίση της γραμμικής προσαρμογής επηρεάζεται πιο πολύ από την μετατόπιση των σημείων του ενός τέλους, των δεδομένων. Επομένως, υψηλής συχνότητας θόρυβος μπορεί να προκαλέσει μία αύξηση των τιμών στο δεξί μέλος της γραφικής παράστασης (Σχήμα 17), λογαριθμοποιημένο φάσμα ισχύος, ως προς τη λογαριθμοποιημένη συχνότητα, όπου τα στοιχεία θα αποκτούσαν ανοδική τάση και η κλίση της γραφικής θα μειωνόταν. Αντίστροφα, έλλειψη (υψηλής) ανάλυσης θα μπορούσε να περιορίσει το μέγεθος της πληροφορίας σε υψηλές συχνότητες , μειώνοντας το μέγιστο πλάτος του φάσματος ισχύος σε υψηλές συχνότητες (προς το τέλος) , και επομένως, θα μπορούσε να προκαλέσει μία αύξηση της κλίσης της γραμμικής προσαρμογής. (Ας έχουμε υπόψη μας, ότι γραμμική προσαρμογή με κλίση 0, ανταποκρίνεται σε λευκό θόρυβο, ενώ με

κλίση -2 σε μια ντετερμινιστικό Ευκλείδειο σχήμα. Εκτός από το δεξί τμήμα της γραφικής μας παράστασης, ενδιαφέρον έχει και το αριστερό. Οι χαμηλής συχνότητας όροι είναι μικρότεροι σε πλήθος και πιο αραιά ευρισκόμενοι στους λογαριθμικούς άξονες, επομένως επηρεάζουν την κλίση της γραμμής ακόμα περισσότερο. Γενικότερα, χρήζει προσοχής προκειμένου να μην επηρεαστεί η κλίση της γραμμικής προσαρμογής από τέτοια σημεία, και μάλιστα, ίσως μερικές φορές να είναι προτιμότερο να τα προσπεράσουμε πριν προβούμε στην ανάλυσή μας και να πρέπει να επιλέξουμε να κάνουμε την ανάλυσή μας από ένα σημείο και μετά, επιλέγοντας αυτό το σημείο κάπως αυθαίρετα π.χ. ο δέκατος όρος στην σειρά fourier. [38] Επομένως, σε κάθε περίπτωση, η ανάλυση θέλει προσοχή και λεπτομερή συνεχή έλεγχο.



Σχήμα 17: Γραφική παράσταση λογαριθμοποιημένου φάσματος ισχύος ως προς την λογαριθμοποιημένη συχνότητα. Η μαύρη γραμμή συμβολίζει την γραμμική προσαρμογή (linear fit).

Εκτός από την εύρεση περιοδικοτήτων , που όπως προαναφέραμε, είναι κλασική μέθοδος η power spectral density [39] , η ίδια μέθοδος, σχετίζεται και με την μορφοκλασματική ανάλυση. Ο στόχος της μορφοκλασματικής ανάλυσης σε χρονοσειρές, είναι κατά κύριο λόγο η ανίχνευση της ύπαρξης ενός (ή και όλα αν υπάρχουν), από τα : αυτό-ομοιότητα, νόμος ισχύς και σχέση κλίμακας, σταθερότητα κλίμακας. Μπορεί οι μέθοδοι μορφοκλασματικής ανάλυσης να είναι πολλές, όλες όμως χρησιμοποιούν την ίδια αρχή, χρησιμοποιώντας το λογαριθμικό χαρακτηριστικό της (η κάθε μία) σε σχέση με την λογαριθμική κλίμακα προς εύρεση του εκθέτη κλίμακας ε, (του τύπου $q = p * s^{\varepsilon}$, με s να είναι η κλίμακα ή η ακρίβεια, ενώ το q είναι η ποσότητα που εξαρτάται (είναι συνάρτηση του s), δηλαδή $q = f(s)$) ,για να βρούμε την κλίση της ευθείας. Επομένως, η ανάλυσή μας βασίζεται στο γεγονός ότι

πίσω από όλη την πληροφορία μας, ίσως μπορούμε να βρούμε έναν χρονικά αναλλοίωτο μηχανισμό τον οποίο θα θέλαμε να περιγράψουμε με όσο γίνεται λιγότερους παραμέτρους. Όσο για τον όρο μορφοκλασματικές χρονοσειρές (fractal time seires), υπονοούμε την παραπομπή σε απλή μορφοκλασματική δομή ή αλλιώς mono - fractal. Ενώ, από την άλλη, πολύ-μορφοκλασματική δομή (multi – fractal), εννοούμε την σειρά που παρουσιάζει αυτό-ομοιότητα μόνο σε τοπικά εύρη της δομής, των οποίων το μορφοκλασματικό μέγεθος δεν αλλάζει στο χρόνο, παρόλα αυτά, μπορούν να χαρακτηριστούν από ένα σύνολο τοπικών μορφοκλασματικών μέτρων.[38] Χρησιμοποιώντας την μέθοδο αυτή, μερικές φορές ίσως πρέπει να αφαιρεθεί ο μέσος όρος από την χρονοσειρά μας. Η φασματική πυκνότητα ισχύος, μετασχηματίζει τα δεδομένα των χρονοσειρών (t_i), μέσω του τύπου:

$$Xi = \sum_{n=0}^{N/2} An \cos[\omega_n * t_i + \varphi_i] = \sum_{n=0}^{N/2} An \cos\left[\frac{2\pi n}{N} i + \varphi_n\right] \quad (26)$$

και επομένως ξαναγυρνάμε στην εξίσωση που περιγράψαμε στην ανάλυση fourier. Όπου A_n είναι το μέγιστο πλάτος κύματος , φ_n η φάση του συνημίτονου και το ω_n η γωνία. Έτσι, έχουμε τρία μεγέθη, τα $A_n(f_n)$ μέγιστο πλάτος , $\varphi_n(f_n)$ φάση, και τέλος, $A^2n(f_n)$ το φάσμα ισχύος (power spectrum). Επομένως, χρησιμοποιώντας την μέθοδο fft (fast fourier transform), παίρνουμε την σχέση ισχύος

$$A^2n = d\ p\ (\omega_n)\hat{}\ (-\beta) \quad (27)$$

Και χρησιμοποιώντας λογαρίθμους, καταλήγουμε στο :

$$\log A^2n = d \log p - \beta \log f_n \quad (28)$$

όπου β ο δείκτης φάσματος. Ο νόμος ισχύος, με λίγα λόγια, εκφράζει το γεγονός ότι όσο κάποιος διπλασιάζει την συχνότητα, η δύναμη αλλάζει με το ίδιο κλάσμα $2^{-\beta}$ ανεξάρτητα από την επιλεχθείσα συχνότητα. Παρότι η μεθοδολογία αλλά και το σκεπτικό είναι τελείως διαφορετικό για τις μεθόδους φάσματος (όπως η psd), και των μεθόδων fractal, μπορούμε να βρούμε μία σχέση μεταξύ τους. Ο συντελεστής Hurst (εκθέτης Η) χαρακτηρίζει τον νόμο δύναμης κλίμακας όπως ακριβώς και στην φασματική ανάλυση psd, ο φασματικός δείκτης β. Ακόμα και η διάσταση box counting η οποία γενικά υπολογίζει την μορφοκλασματική διάσταση τμηματικών αντικειμένων, μπορεί να εφαρμοστεί σε ένα αυτό-όμοιο τοπικό σήμα, όπως ακριβώς θα έκανε για μια εικόνα, δηλαδή ένα δισδιάστατο αντικείμενο. Εν κατακλείδι, ο συντελεστής β (της φασματικής ανάλυσης), μας δίνει όλο το εύρος, από τις πιο έντονες τιμές θορύβου, ως το πιο ομαλό σήμα. Επομένως, αυτό μας βοηθά στο να κάνουμε μία σύγκριση με τις μορφοκλασματικές μεθόδους που υπολογίζουν αντίστοιχα το Η.

3. Δεδομένα

Είναι ευρέως γνωστό ότι σήμερα, η πληθώρα των δεδομένων που είναι διαθέσιμα προς ανάλυση είναι τεράστια. Επομένως, για κάποιον που θέλει να κάνει μια τεχνική ανάλυση, και να διεξάγει κάποια συμπεράσματα αλλά και να κάνει κάποια μελλοντική πρόβλεψη μέσα από την ανάλυσή του, τόσο το πλήθος, όσο και το είδος των δεδομένων, αλλά και διάφορα χαρακτηριστικά τους (όπως για παράδειγμα τι εκφράζουν αυτά τα δεδομένα, αν είναι πλήρη ή έχουν κενά, αν έχουν υποστεί κάποια επεξεργασία - συνήθως στατιστικής σημασίας), παίζουν πολύ μεγάλο ρόλο. Έτσι, άλλη μέθοδο θα χρησιμοποιήσει κάποιος για δεδομένα που δεν έχουν υποστεί επεξεργασία ούτε έχει εφαρμοστεί πάνω τους κάποιο ‘’φίλτρο’’, και άλλη αν τα δεδομένα είναι καθαρά ‘’raw’’(όπως ονομάζονται στα αγγλικά). Έτσι, πρώτος σημαντικός παράγοντας είναι η εύρεση και η επιλογή των δεδομένων. Επίσης, υπάρχουν μέθοδοι οι οποίες λειτουργούν καλά για μικρό πλήθος στοιχείων (όπως για παράδειγμα κάποιες στατιστικές μέθοδοι), ενώ από την άλλη οι περισσότερες μέθοδοι δίνουν πιο αξιόπιστα αποτελέσματα για μεγάλο πλήθος στοιχείων. Μετά την επιλογή των δεδομένων, επόμενο σημαντικό στοιχείο που πρέπει να προσέξουμε είναι η μορφή που έχουν τα δεδομένα μας. Εάν (για παράδειγμα) εμφανίζουν μία στατική δομή (stationarity) ή μία αυξομειωτική τάση· κάθε μία από τις δύο περιπτώσεις έχει διαφορετική προσέγγιση και οι μέθοδοι που χρησιμοποιούμε είναι διαφορετικές για την κάθε περίπτωση. Επίσης, ανάλογα με την κάθε περίπτωση, μπορούμε να κάνουμε και ανάλογη επεξεργασία των δεδομένων μας πριν κάνουμε την ανάλυσή μας.

Τα δεδομένα που χρησιμοποιήσαμε εμείς, αρχικά, ήταν οικονομικά δεδομένα από Βρετανικά στοιχεία που είχαν καταγραφεί τους τελευταίους 3 αιώνες . Για την ακρίβεια, ο τίτλος τους ήταν : << "The UK recession in context — what do three centuries of data tell us?" - Data Annex - Version 2.1 provisional update to 2013/14 >> . Χρησιμοποιήσαμε κατ’ αρχάς από μία πληθώρα στοιχείων τα εξής :

- Μηνιαίες διμερείς νομισματικές ισοτιμίες (exchange rates & sterling) , για τις χώρες Καναδάς, Ιαπωνία, Σουηδία και Ελβετία, ως προς την νομισματική ισχύς τους με το Βρετανικό νόμισμα (δηλαδή την Βρετανική λίρα). Η επιλογή αυτών των δεδομένων έγινε καθώς το πλήθος τους είναι αρκετά καλό και ενδεικνυόταν για την ανάλυσή τους, η χρήση της συνάρτησης συσχέτισης ύψους-ύψους, του μετασχηματισμού fourier και της πολύ-μορφοκλασματικής μεθόδου. Τα δεδομένα άρχονται τον Ιανουάριο 1970 και λήγουν τον Δεκέμβριο του 2014 , δηλαδή περιλαμβάνονται συνολικά 528 στοιχεία μηνιαία. Προφανώς, για την εφαρμογή της ανάλυσης Fourier επιλέξαμε 512 στοιχεία ώστε να έχουμε δύναμη του 2 και να διευκολύνεται η ανάλυση.
- Μηνιαία δεδομένα νομισματικών μεγεθών, από τα οποία είχαμε στοιχεία για τον αριθμό (σε οικονομικές-μαθηματικές τιμές), των χαρτονομισμάτων και

των νομισμάτων που ήταν σε κυκλοφορία (δηλαδή σε χρήση) , (notes & coin in circulation). Τα δεδομένα άρχονται τον Ιανουάριο του 1870 και λήγουν τον Δεκέμβριο του 1969. Είναι σε μορφή εκατομμυρίων pounds, (mn £). Εδώ, το πλήθος των δεδομένων ήταν μεγαλύτερο (1188), αλλά πάλι για τους ίδιους λόγους, αξιοποιήσαμε στην ανάλυσή μας τα 1024 (2^{10}) .

- Μηνιαία δεδομένα για το ακαθάριστο εγχώριο προϊόν και για τον δείκτη βιομηχανικής παραγωγής. Το ακαθάριστο εγχώριο προϊόν (GDP) ήταν χωρισμένο στις δύο υποομάδες : α) ακαθάριστο εγχώριο προϊόν σε συντελεστές τιμών κόστους και β) ακαθάριστο εγχώριο προϊόν σε τιμές αγοράς. Και τα δύο GDP δίνονταν σε τιμές ανά εκατομμύρια pounds (mn £) . Τα δεδομένα άρχονται του Ιανουαρίου 1920 και λήγουν τον Δεκέμβριο του 1938, δηλαδή συνολικά (στο πλήθος για το καθένα), 216 στοιχεία, και όμοια με πριν, στην ανάλυσή συμπεριλάβαμε μόνο τα 128 (2^7).

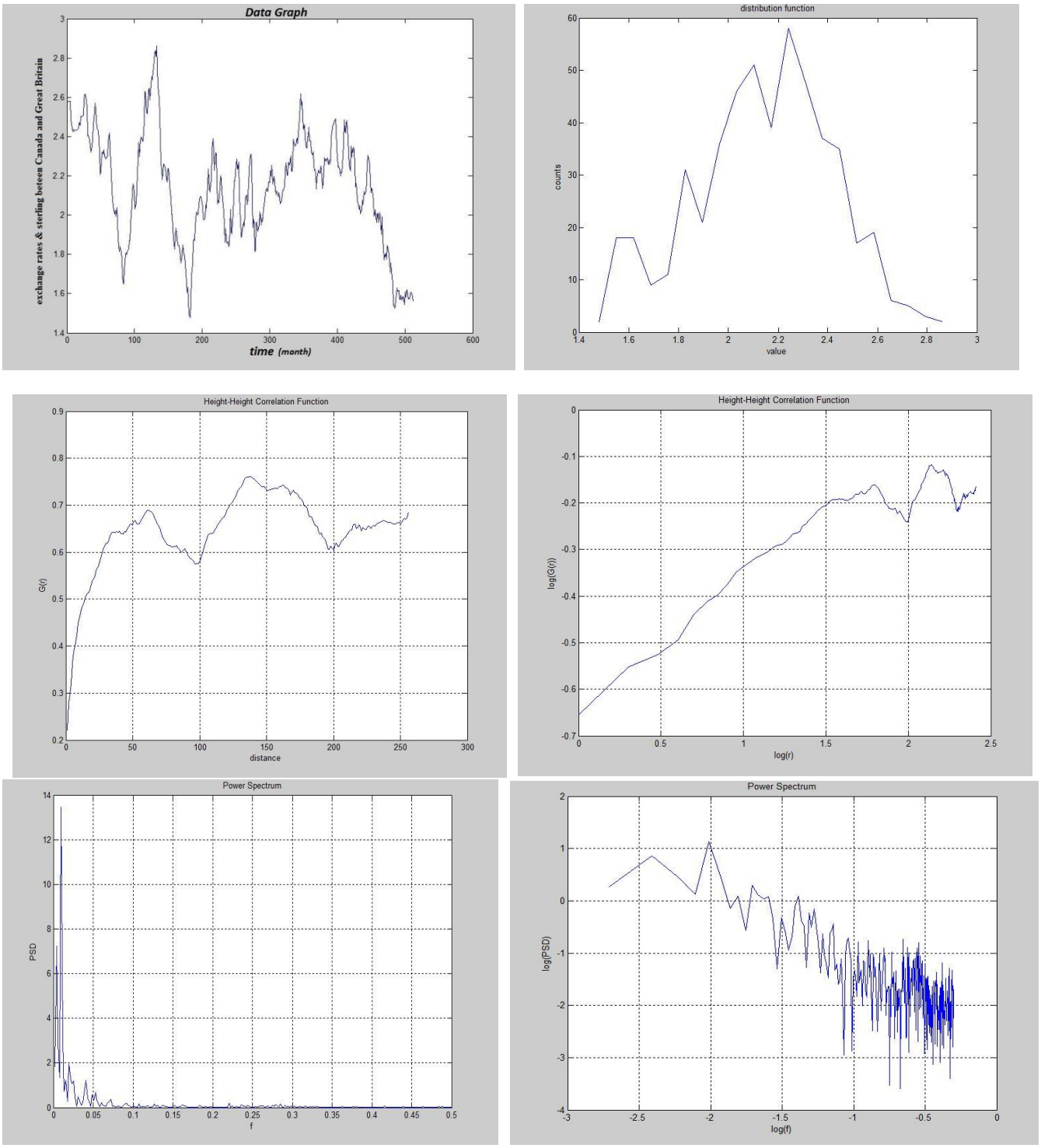
Πέρα από την λίστα με τα Βρετανικά δεδομένα, αναλύσαμε και οικονομικά δεδομένα που είχαμε στην διάθεσή μας, για τις καταθέσεις των ελληνικών τραπεζών για την περίοδο 12 Φεβρουαρίου 2010 έως 19 Μαΐου 2015. Ήταν και συνεχίζει να είναι, μία σημαντική περίοδος, με κοινωνικό και κυρίως οικονομικό ενδιαφέρον, καθώς η Ελλάδα όλο αυτό το διάστημα βρίσκεται σε κατάσταση οικονομικής ύφεσης, και επομένως μία τέτοια ανάλυση είναι σημαντική. Τα δεδομένα που είχαμε στην διάθεσή μας, ήταν ημερήσια , εργατικών ημερών χωρίς τα Σαββατοκύριακα. Οι τιμές δίνονται ανά δισεκατομμύρια ευρώ και το πλήθος τους ήταν 1024 (2^{10}).

Σε όλες τις περιπτώσεις τα αποτελέσματα της ανάλυσής μας παρουσιάζονται σε δύο σχήματα με 6 και 4 διαγράμματα αντίστοιχα. Στο πρώτο σχήμα τα διαγράμματα δείχνουν: α) τη χρονοσειρά με τα δεδομένα, β) τη συνάρτηση κατανομής των τιμών τους, γ) τη συνάρτηση συσχέτισης ύψους-ύψους σε γραμμική κλίμακα, δ) τη συνάρτηση συσχέτισης ύψους-ύψους σε διπλή λογαριθμική κλίμακα για την ανίχνευση πιθανών νόμων δύναμης και μορφοκλασματικής συμμετρίας, ε) τη συνάρτηση φάσματος ισχύος από τον μετασχηματισμό Fourier σε γραμμική κλίμακα και στ) τη συνάρτηση φάσματος ισχύος σε διπλή λογαριθμική κλίμακα για την ανίχνευση πιθανών νόμων δύναμης και μορφοκλασματικής συμμετρίας. Στο δεύτερο σχήμα απεικονίζονται τα διαγράμματα που έχουν προέλθει από τη μορφοκλασματική ανάλυση και περιλαμβάνουν: α) τη συνάρτηση επιμερισμού χ(s) συναρτήσει της κλίμακας s σε διπλή λογαριθμική κλίμακα για αρνητικό και β) για θετικό q γ) το φάσμα των γενικευμένων εκθετών D(q) και δ) το φάσμα των πολυμορφοκλασματικών διαστάσεων f(α).

4. Αποτελέσματα:

4.1 Μηνιαίες νομισματικές ισοτιμίες και ασήμι:

Καναδικά δεδομένα (Canadian):



Σχήμα 18: α) Γραφική παράσταση καναδικών δεδομένων (νομισματικών ισοτιμιών & ασήμι). β), γραφική παράσταση της κατανομής πιθανότητας (probability distribution) των τιμών της χρονοσειράς του α). γ),δ) Συνάρτηση συσχέτισης ύψους-ύψους G(r) σε γραμμική και διπλά λογαριθμική κλίμακα αντίστοιχα και ε),στ) του φάσματος ισχύος (power spectral density) της χρονοσειράς σε γραμμική και διπλά λογαριθμική κλίμακα αντίστοιχα.

Από την γραφική παράσταση των δεδομένων μου (Σχήμα 18-α), μπορώ να διακρίνω δύο μεγάλες πτώσεις (τοπικά ελάχιστα) στην αρχή της γραφικής παράστασης, για να περάσουμε σε μία περίοδο έντονης αυξομείωσης, η οποία στο τέλος φθίνει απότομα.

Παρατηρούμε από το Σχήμα 18-β ότι η κατανομή πιθανότητας μοιάζει (σαν δομή) με την κανονική κατανομή (Gauss distribution).

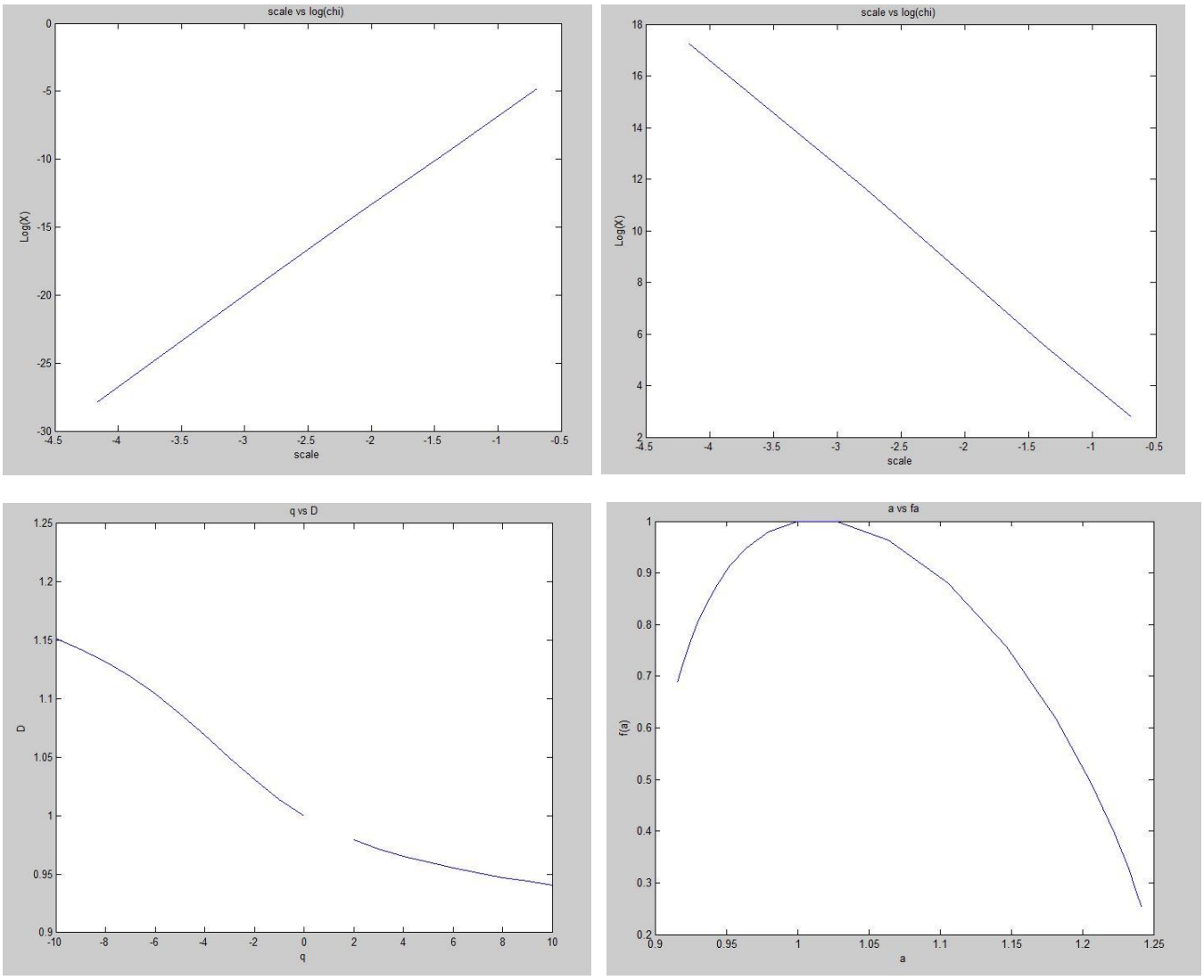
Στην επόμενη γραφική παράσταση (Σχήμα 18-γ) παρατηρούμε ότι η G(r) εμφανίζει ελάχιστο σημείο (τοπικά) στο σημεία 100 και 200, και αυτό αποτελεί ένδειξη ότι υπάρχει μια 100-μηνη περιοδικότητα στα δεδομένα μου.

Η ίδια συνάρτηση σε λογαριθμική κλίμακα (Σχήμα 18-δ) δείχνει σε μικρές τιμές του r (<30) γραμμική σχέση, η οποία πιστοποιεί τη μορφοκλασματική ιδιότητα των δεδομένων μου. Από την κλίση της γραμμικής προσαρμογής της logG(r) vs log(r) και μέσω της σχέσης (14) βρίσκουμε την μορφοκλασματική διάσταση d=1.7.

Στην γραφική παράσταση Σχήμα 18-ε παρατηρώ μία μεγάλη κορυφή και στην συνέχεια δύο μικρότερες. Αυτό μας ενισχύει ακόμα περισσότερο την πεποίθηση ύπαρξης περιοδικότητας στα δεδομένα μας. Ειδικά η πρώτη (και μεγαλύτερη αισθητά) κορυφή, μας δίνει ξεκάθαρα αυτή την πληροφορία και αντιστοιχεί σε περιοδικότητα με περίοδο 100 μήνες σε συμφωνία με το εύρημα από την G(r). Επίσης, παρατηρώντας και την γραφική παράσταση του λογαριθμικού φάσματος ισχύος (Σχήμα 18-στ), παρατηρούμε, ότι σε μεγάλες συχνότητες πέφτει γραμμικά δηλώνοντας την παρουσία μορφοκλασματικής συμμετρίας σε συμφωνία πάλι με τη συμπεριφορά της G(r) σε μικρά r.

Συνεπώς, συνδυάζοντας τα δεδομένα από την ανάλυση στο χώρο των συσχετίσεων και των συχνοτήτων συμπεραίνουμε ότι η χρονοσειρά με την ισοτιμία του Καναδικού νομίσματος με την λίρα εμφανίζει μορφοκλασματικότητα σε μικρούς χρόνους (<30 μήνες) με διάσταση d≈1.7 και προσεγγιστική περιοδικότητα με περίοδο 100 μήνες σε μεγαλύτερη χρονική κλίμακα. Η τιμή 1.7 υποδηλώνει την παρουσία υφιστάμενης μορφοκλσματικής συμπεριφοράς σε μικρή κλίμακα, η οποία σε μεγαλύτερη κλίμακα διαμορφώνεται από την επίδραση περιοδικής τάσης με επαναληψιμότητα περίπου 8 χρόνων. Φυσικά τα αποτελέμσατα αυτά ισχύουν για τη χρονική περίοδο που αναλύσαμε και θα σχολιάσουμε παρακάτω τα γενικά συμπεράσματα που μπορούμε να εξάγουμε.

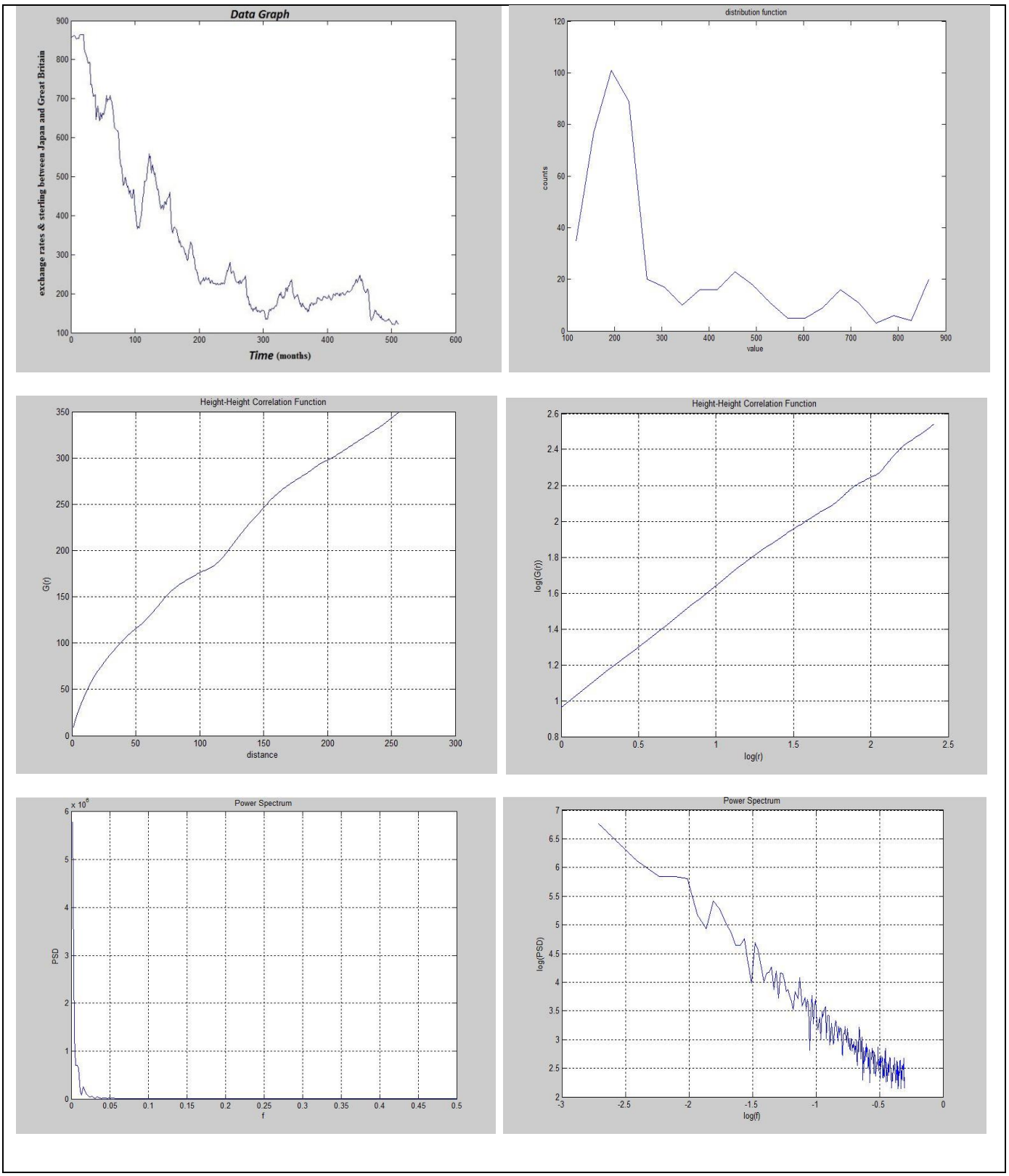
Στην συνέχεια, περνάμε στην πολυμορφοκλασματική ανάλυση των καναδικών δεδομένων.



Σχήμα 19: Πάνω αριστερά (19-α), γραφική παράσταση του logX vs scale για αρνητικά q. Πάνω δεξιά (19-β), γραφική παράσταση του logX vs scale για θετικά q. Κάτω αριστερά (19-γ), γραφική παράσταση του q vs D. Κάτω δεξιά (19-δ), γραφική παράσταση του a vs f(a) των δεδομένων μου.

Από τα γραφήματα Σχήμα 19-α και Σχήμα 19-β παρατηρώ ότι έχουμε μία γραμμική σχέση, κάτι που πιστοποιεί την ύπαρξη fractality στα δεδομένα μου. Ο εκθέτης ωστόσο , αυτών των νόμων δύναμης αλλάζει με το q, γεγονός που αναδεικνύει τη μορφοκλασματική δομή των δεδομένων μου. Αυτό φαίνεται από το εύρος των τιμών του χ στο 19-δ και της f(α) στο 19-ε.

<u>Ιαπωνικά δεδομένα (Japanese)</u>



Σχήμα 20: α) Γραφική παράσταση καναδικών δεδομένων (νομισματικών ισοτιμιών & ασήμι). β), γραφική παράσταση της κατανομής πιθανότητας (probability distribution) των τιμών της χρονοσειράς του α). γ),δ) Συνάρτηση συσχέτισης ύψους-ύψους G(r) σε γραμμική και διπλά λογαριθμική κλίμακα αντίστοιχα και ε),στ) του φάσματος ισχύος (power spectral density) της χρονοσειράς σε γραμμική και διπλά λογαριθμική κλίμακα αντίστοιχα.

Παρατηρούμε από την γραφική παράσταση (Σχήμα 20-α), ότι η χρονοσειρά παρουσιάζει μία συνεχή πτωτική τάση (με μικρές αυξομειώσεις), δηλαδή μη στασιμότητα τουλάχιστον για το αρχικό μισό χρονικό διάστημα των δεδομένων.

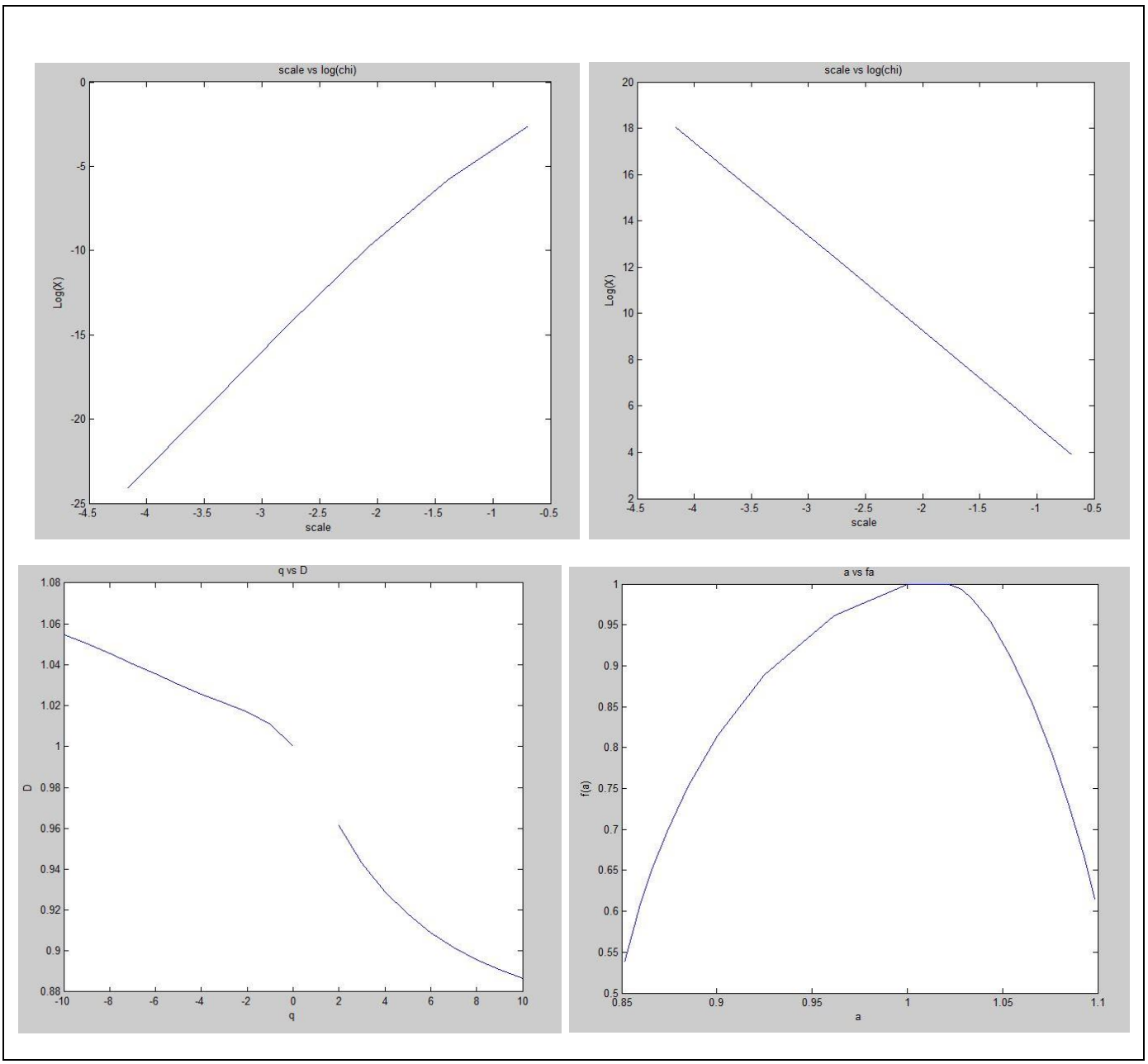
Στο Σχήμα 20-β όλη σχεδόν η κατανομή είναι συσσωρευμένη στην αρχή του γραφήματος και στην συνέχεια, μπορούμε να παρατηρήσουμε μικρές αυξομειώσεις.

Η γραφική παράσταση της G(r) εμφανίζει μία συνεχή αυξητική τάση λόγω του μη στάσιμου χαρακτήρα της σειράς, αλλά και δύο τοπικές μειώσεις αυτής της αύξησης στους 60 και 120 μήνες αντίστοιχα. Αυτά τα ελάχιστα στην κλίση της G(r) καμπύλης υποδηλώνουν την παρουσία ίχνους περιοδικής συμπεριφοράς με περίοδο περίπου 5 χρόνια (60 μήνες).

Από την άλλη πλευρά, η γραφική παράσταση της λογαριθμοποιημένης συνάρτηση συχέτισης ύψους-ύψους (Σχήμα 20-δ), μας δείχνει την γραμμική σχέση που υπάρχει, μεταξύ του log G(r) και της τιμής log(r) . Επομένως, μπορούμε να εξάγουμε το συμπέρασμα ότι η χρονοσειρά μας εμφανίζει μορφοκλασματική ιδιότητα για r<30 μήνες. από την κλίση του λογαριθμικού διαγράμματος παίρνουμε ότι η μορφοκλασματική διάσταση των ιαπωνικών δεδομένων είναι d=1.35.

Στην γραφική παράσταση (Σχήμα 20-ε), παρατηρούμε ότι υπάρχουν δύο ασθενείς κορυφές που αντιστοιχούν στους 60 και 120 μήνες σε συμφωνία με την περιοδικότητα που εντοπίστηκε στην συνάρτηση συσχετίσεων παραπάνω. Η γραμμική μείωση στις μεγάλες συχνότητες υποδηλώνει και αυτή τη μορφοκλασματική συμπεριφορά στις μεγάλες συχνότητες και μικρές κλίμακες.

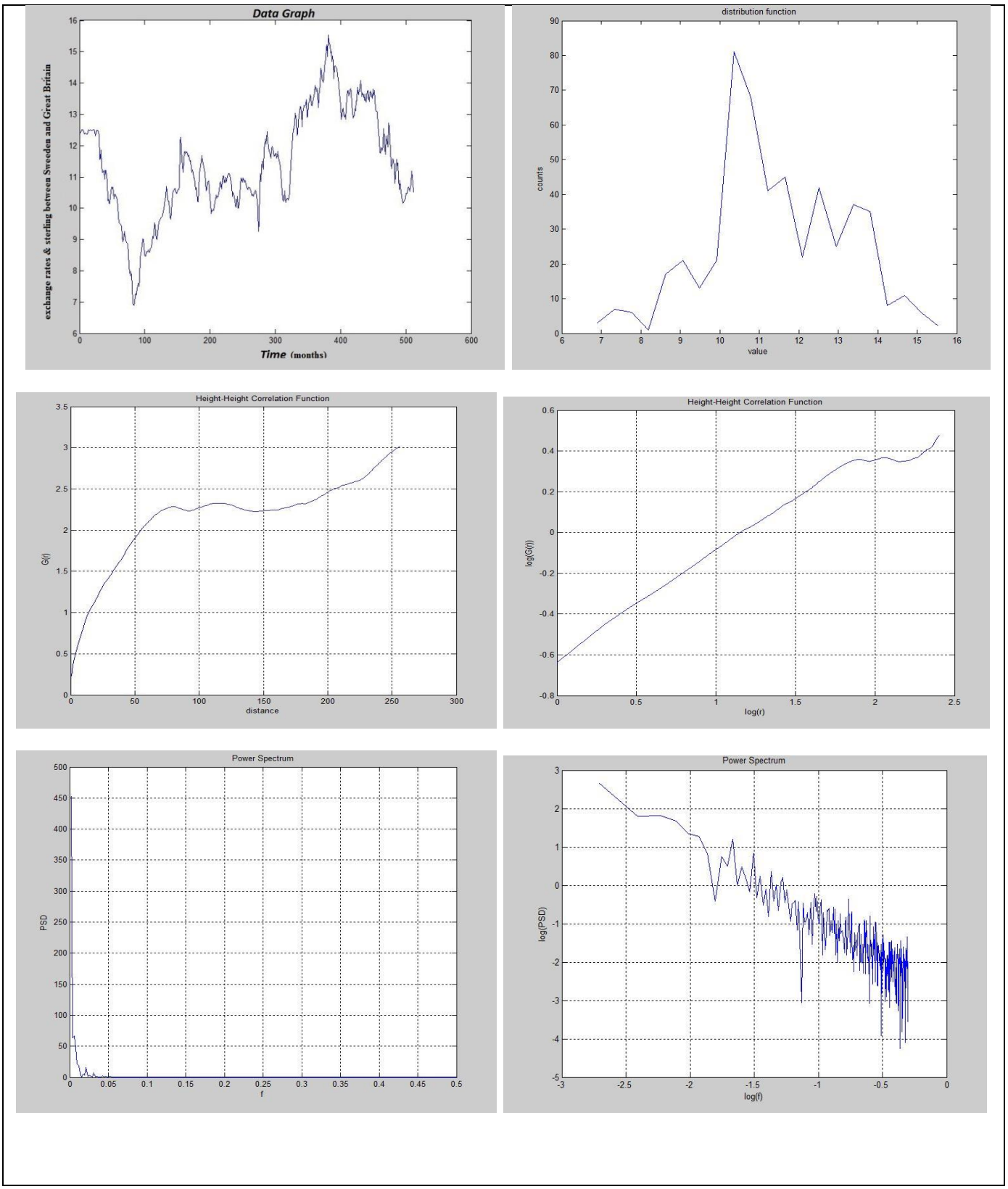
Τώρα περνάμε στο επόμενο στάδιο της ανάλυσής μας, στην πολυ-μορφοκλασματική ανάλυση.



Σχήμα 21: Πάνω αριστερά (21-α), γραφική παράσταση του logX vs scale για αρνητικά q. Πάνω δεξιά (21-β), γραφική παράσταση του logX vs scale για θετικά q. Κάτω αριστερά (21-γ), γραφική παράσταση του q vs D. Κάτω δεξιά (21-δ), γραφική παράσταση του a vs f(a) των δεδομένων μου.

Από τα γραφήματα Σχήμα 21-α και Σχήμα 21-β παρατηρώ ότι έχουμε μία γραμμική σχέση, κάτι που πιστοποιεί την ύπαρξη fractality στα δεδομένα μου. Ο εκθέτης ωστόσο , αυτών των νόμων δύναμης αλλάζει με το q, γεγονός που αναδεικνύει τη μορφοκλασματική δομή των δεδομένων μου.

<u>Σουηδικά δεδομένα (Swedish):</u>



Σχήμα 22: α) Γραφική παράσταση καναδικών δεδομένων (νομισματικών ισοτιμιών & ασήμι). β), γραφική παράσταση της κατανομής πιθανότητας (probability distribution) των τιμών της χρονοσειράς του α). γ),δ) Συνάρτηση συσχέτισης ύψους-ύψους G(r) σε γραμμική και διπλά λογαριθμική κλίμακα αντίστοιχα και ε),στ) του φάσματος ισχύος (power spectral density) της χρονοσειράς σε γραμμική και διπλά λογαριθμική κλίμακα αντίστοιχα.

Στην γραφική παράσταση της χρονοσειράς μου (Σχήμα 22-α), παρατηρώ στην αρχή μία απότομη πτώση, για να φτάσω σε ένα στάδιο με αυξομειώσεις και στο τέλος μία αύξηση, όπου οι τιμές πλέον αυξομειώνονται (διατηρημένες πάντα σε μεγάλο ύψος). Στο τέλος υπάρχει η υποψία πάλι πτώσεως, αλλά εκεί λήγουν τα δεδομένα μας.

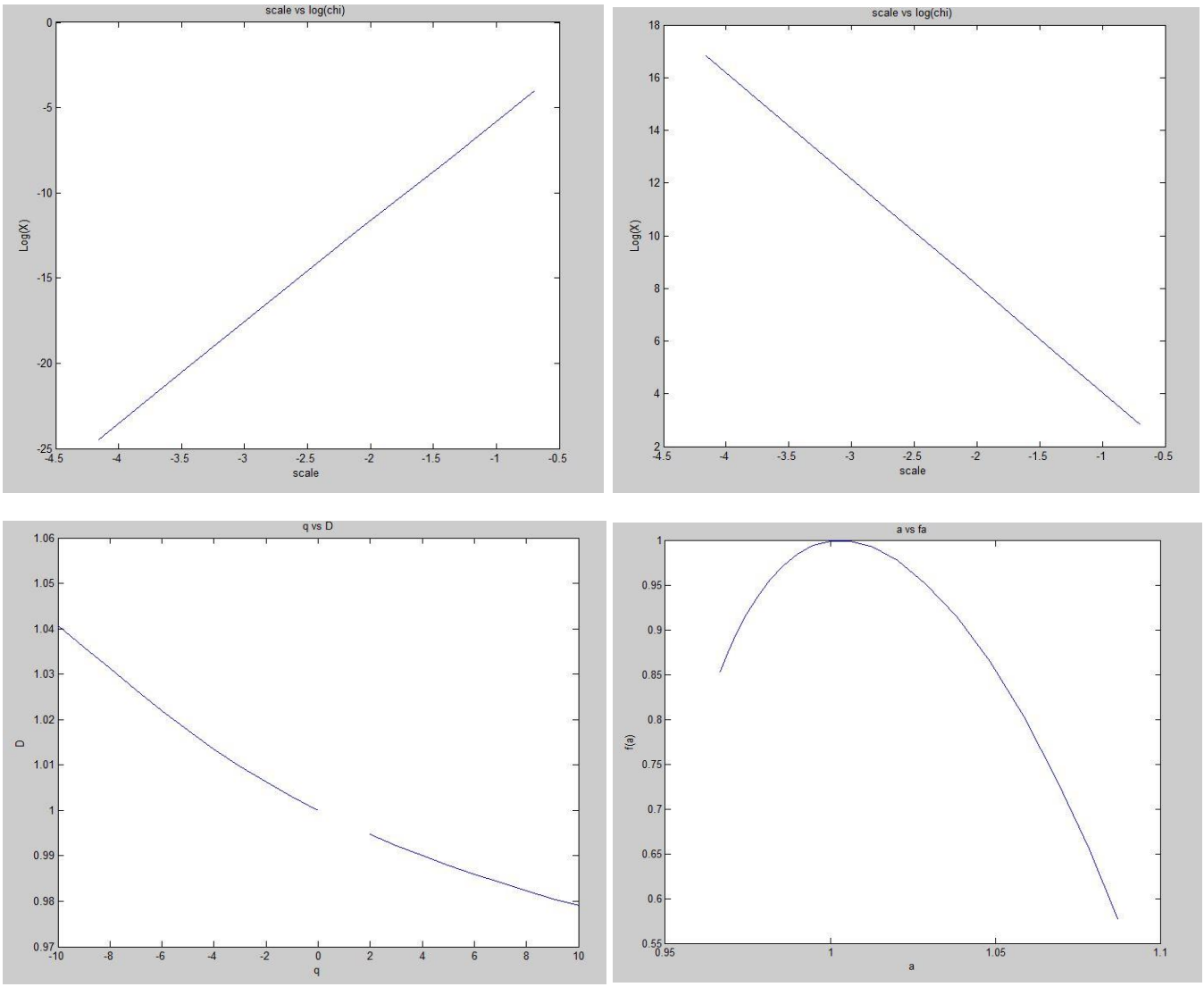
Στην γραφική παράσταση (Σχήμα 22-γ) παρατηρώ ότι έχω ένα σημείο που ίσως πιστοποιεί ύπαρξη περιοδικότητας στα δεδομένα μου (αυτό είναι λίγο πριν το 100, περίπου στους 90 μήνες). Επίσης, μία αμυδρή μείωση της κλίσης παρατηρείται στους 45 μήνες και επαναλαμβάνεται στους 135 και 180 μήνες περίπου. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μία αμυδρή περιοδικότητα με περίοδο επανάληψης της συμπεριφοράς τους 45 μήνες.

Η γραφική παράσταση της λογαριθμοποιημένης συνάρτηση συχέτισης ύψους-ύψους (Σχήμα 22-δ) δείχνει ξεκάθαρα μία γραμμική σχέση . Επομένως, μπορούμε να εξάγουμε το συμπέρασμα ότι η χρονοσειρά μας έχει την μορφοκλασματική ιδιότητα. Η μορφοκλασματική διάσταση στην περίπτωση των σουηδικών δεδομένων, είναι d= 1.48.

Στην γραφική παράσταση (Σχήμα 22-ε) παρατηρώ δύο μικρές κορυφές (η πρώτη λίγο πιο εμφανής), κάτι που ίσως πιστοποιεί την ύπαρξης μιας περιοδικότητας στα δεδομένα μου (όπως είδα πιο πάνω και από το Σχήμα 22-γ), στην γραφική παράσταση της height-height correlation.

Στην γραφική παράσταση (Σχήμα 22-στ), παρατηρώ ότι έχω μία μικρή κορυφή, προς την αρχή της γραφικής μου παράστασης, κάτι που πιστοποιεί την ύπαρξη περιοδικότητας στα δεδομένα μου.

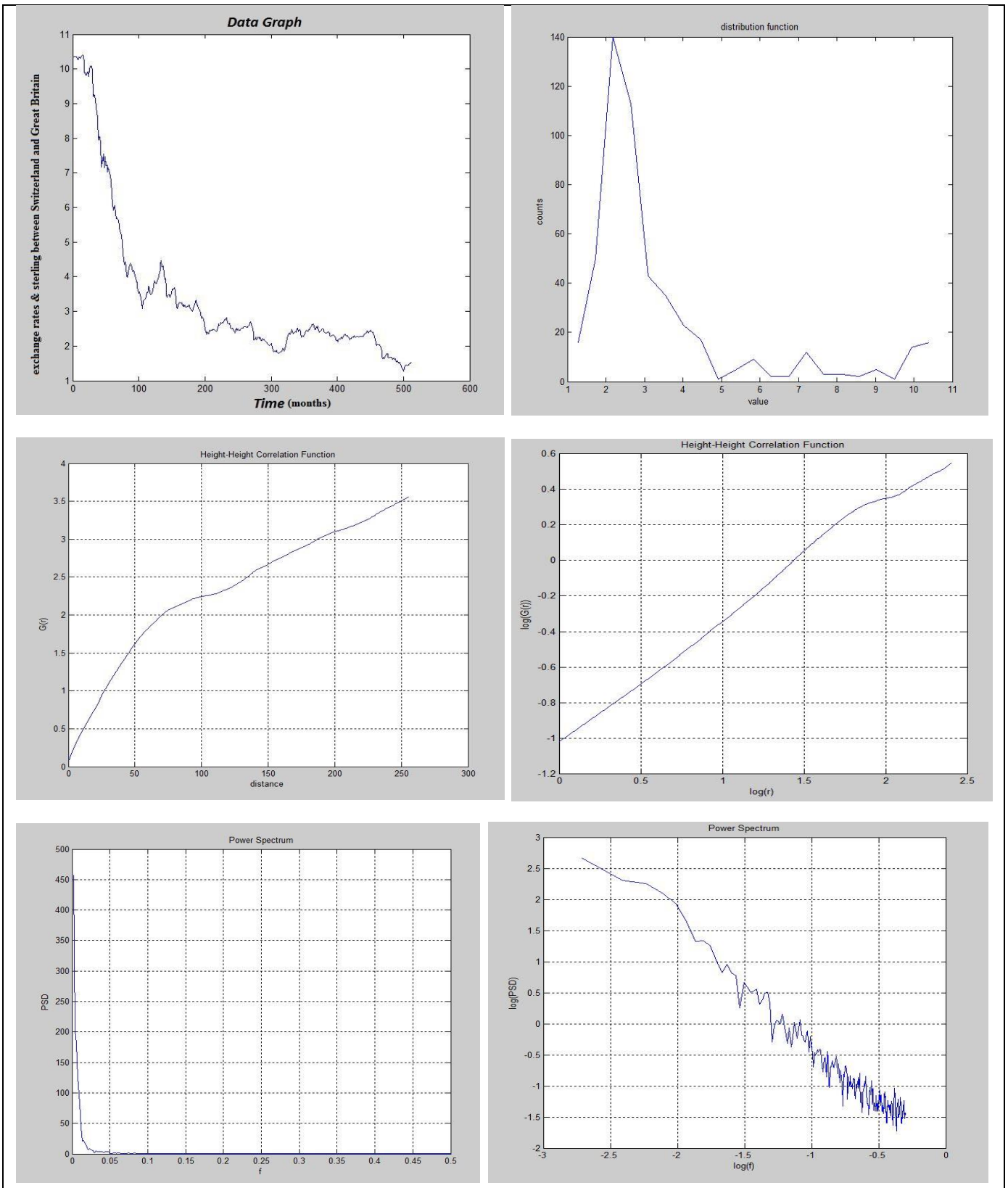
Περνάμε στην συνέχεια, σε πολύ-μορφοκλασματική ανάλυση.



Σχήμα 23: Πάνω αριστερά (23-α), γραφική παράσταση του logX vs scale για αρνητικά q. Πάνω δεξιά (23-β), γραφική παράσταση του logX vs scale για θετικά q. Κάτω αριστερά (23-γ), γραφική παράσταση του q vs D. Κάτω δεξιά (23-δ), γραφική παράσταση του a vs f(a) των δεδομένων μου.

Από τα γραφήματα Σχήμα 23-α και Σχήμα 23-β παρατηρώ ότι έχουμε μία γραμμική σχέση, κάτι που πιστοποιεί την ύπαρξη fractality στα δεδομένα μου. Ο εκθέτης ωστόσο , αυτών των νόμων δύναμης αλλάζει με το q, γεγονός που αναδεικνύει τη μορφοκλασματική δομή των δεδομένων μου.

<u>Ελβετικά δεδομένα (Swiss):</u>



Σχήμα 24: α) Γραφική παράσταση καναδικών δεδομένων (νομισματικών ισοτιμιών & ασήμι). β), γραφική παράσταση της κατανομής πιθανότητας (probability distribution) των τιμών της χρονοσειράς του α). γ),δ) Συνάρτηση συσχέτισης ύψους-ύψους G(r) σε γραμμική και διπλά λογαριθμική κλίμακα αντίστοιχα και ε),στ) του φάσματος ισχύος (power spectral density) της χρονοσειράς σε γραμμική και διπλά λογαριθμική κλίμακα αντίστοιχα.

Από την γραφική μου παράσταση (Σχήμα 24-α) μπορώ να παρατηρήσω ότι τα δεδομένα μου παρουσιάζουν (στην αρχή), μία μεγάλη πτώση, και στην συνέχεια συνεχίζουν να έχουν μια πτωτική τάση αλλά σε πιο μικρό βαθμό.

Στο γράφημα (Σχήμα 24-β) παρατηρούμε μία έντονη κορυφή στην αρχή και στην συνέχεια μία αυξομείωση.

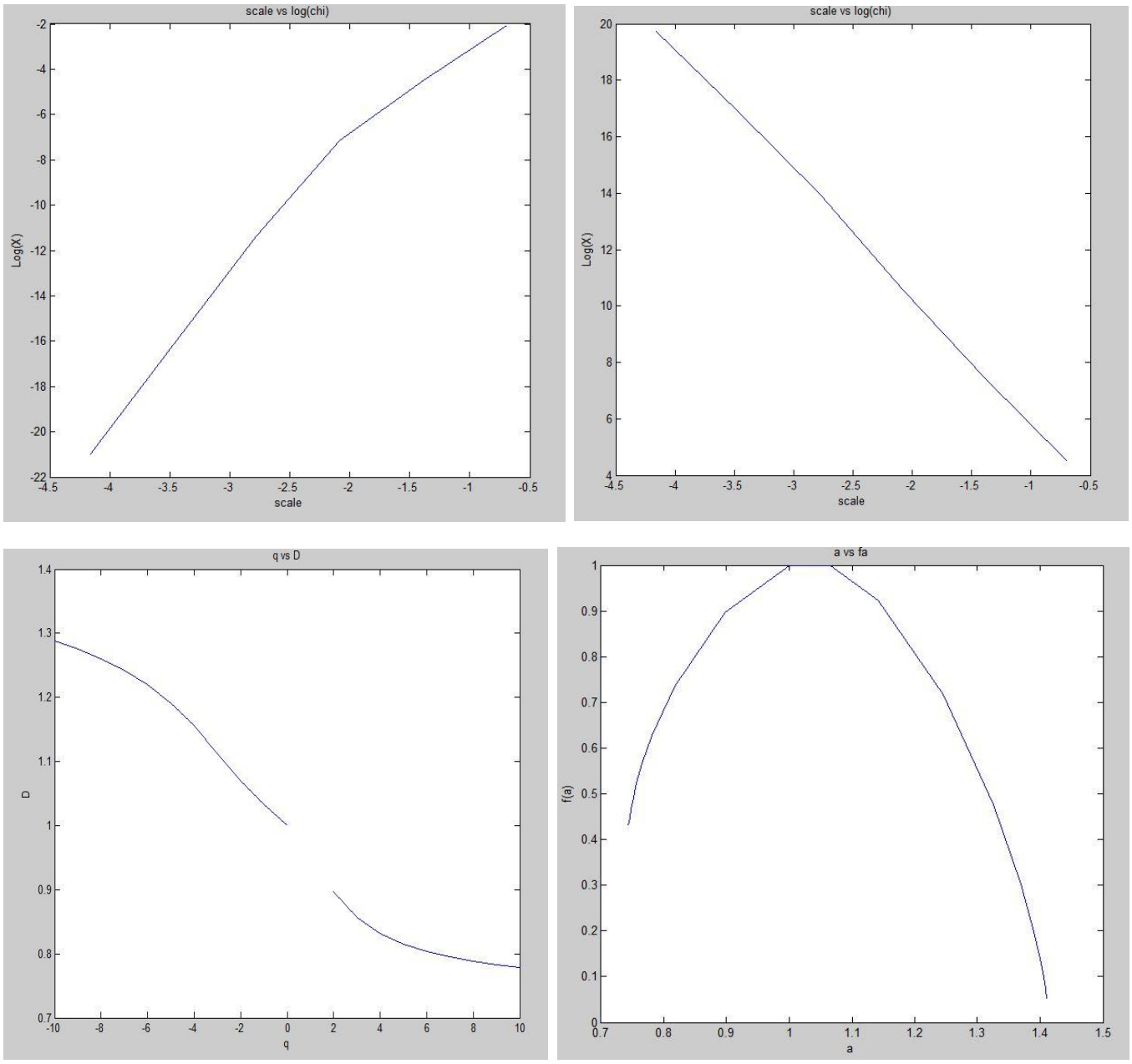
Παρατηρώ ότι η γραφική μου παράσταση (Σχήμα 24-δ) παρουσιάζει μια γραμμική σχέση. Επομένως, πάλι, μπορούμε να εξάγουμε το συμπέρασμα ότι η χρονοσειρά μας έχει την μορφοκλασματική ιδιότητα. Η μορφοκλασματική διάσταση στην περίπτωση των Ελβετικών δεδομένων είναι d= 1.12.

Παρατηρούμε από την γραφική παράσταση (Σχήμα 24-α), ότι η χρονοσειρά παρουσιάζει μία συνεχή πτωτική τάση (με μικρές αυξομειώσεις), δηλαδή μη στασιμότητα τουλάχιστον για το αρχικό μισό χρονικό διάστημα των δεδομένων.

Στο Σχήμα 24-β όλη σχεδόν η κατανομή είναι συσσωρευμένη στην αρχή του γραφήματος και στην συνέχεια, μπορούμε να παρατηρήσουμε μικρές αυξομειώσεις.

Η γραφική παράσταση της G(r) εμφανίζει μία συνεχή αυξητική τάση λόγω του μη στάσιμου χαρακτήρα της σειράς, αλλά και δύο τοπικές μειώσεις αυτής της αύξησης στους 60 και 120 μήνες αντίστοιχα. Αυτά τα ελάχιστα στην κλίση της G(r) καμπύλης υποδηλώνουν την παρουσία ίχνους περιοδικής συμπεριφοράς με περίοδο περίπου 5 χρόνια (60 μήνες).

Τώρα περνάμε στο επόμενο στάδιο της ανάλυσής μας, στην πολυ-μορφοκλασματική ανάλυση.

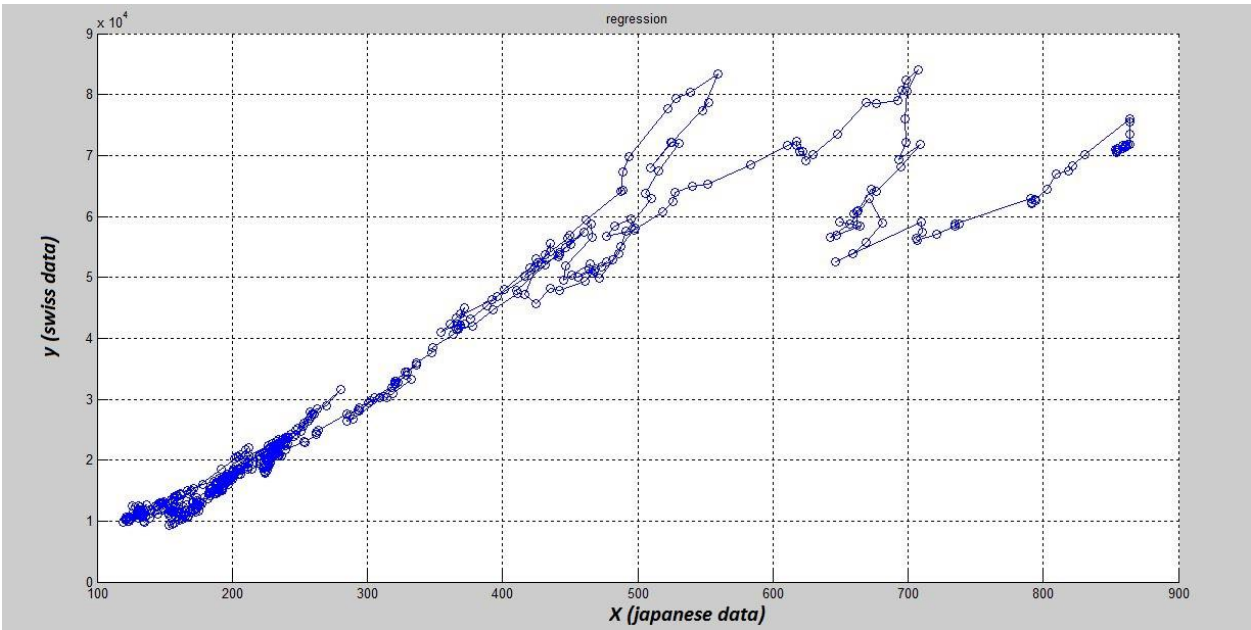


Σχήμα 25: Πάνω αριστερά (25-α), γραφική παράσταση του logX vs scale για αρνητικά q. Πάνω δεξιά (25-β), γραφική παράσταση του logX vs scale για θετικά q. Κάτω αριστερά (25-γ), γραφική παράσταση του q vs D. Κάτω δεξιά (25-δ), γραφική παράσταση του a vs f(a) των δεδομένων μου.

Από τα γραφήματα Σχήμα 25-α και Σχήμα 25-β παρατηρώ ότι έχουμε μία γραμμική σχέση, κάτι που πιστοποιεί την ύπαρξη fractality στα δεδομένα μου. Ο εκθέτης ωστόσο , αυτών των νόμων δύναμης αλλάζει με το q, γεγονός που αναδεικνύει τη μορφοκλασματική δομή των δεδομένων μου. Αυτό φαίνεται από το εύρος των τιμών του χ στο 25-δ και της f(α) στο 25-ε.

Παρατηρώντας κοινά στοιχεία στην δομή των χρονοσειρών (για παράδειγμα, τα καναδικά με τα σουηδικά παρουσιάζουν τις ίδιες χρονικές στιγμές τοπικά ελάχιστα και μέγιστα, και τα ιαπωνικά με τα σουηδικά δεδομένα έχουν όμοια πτωτική τάση), έκανα έναν έλεγχο για να διαπιστώσω αν υπάρχει συσχέτιση στα δεδομένα μου. Επομένως, χρησιμοποιήσαμε τις μεθόδους cross-correlation και την regression (παλινδρόμηση) για να εξετάσω αν υπάρχει συσχέτιση.

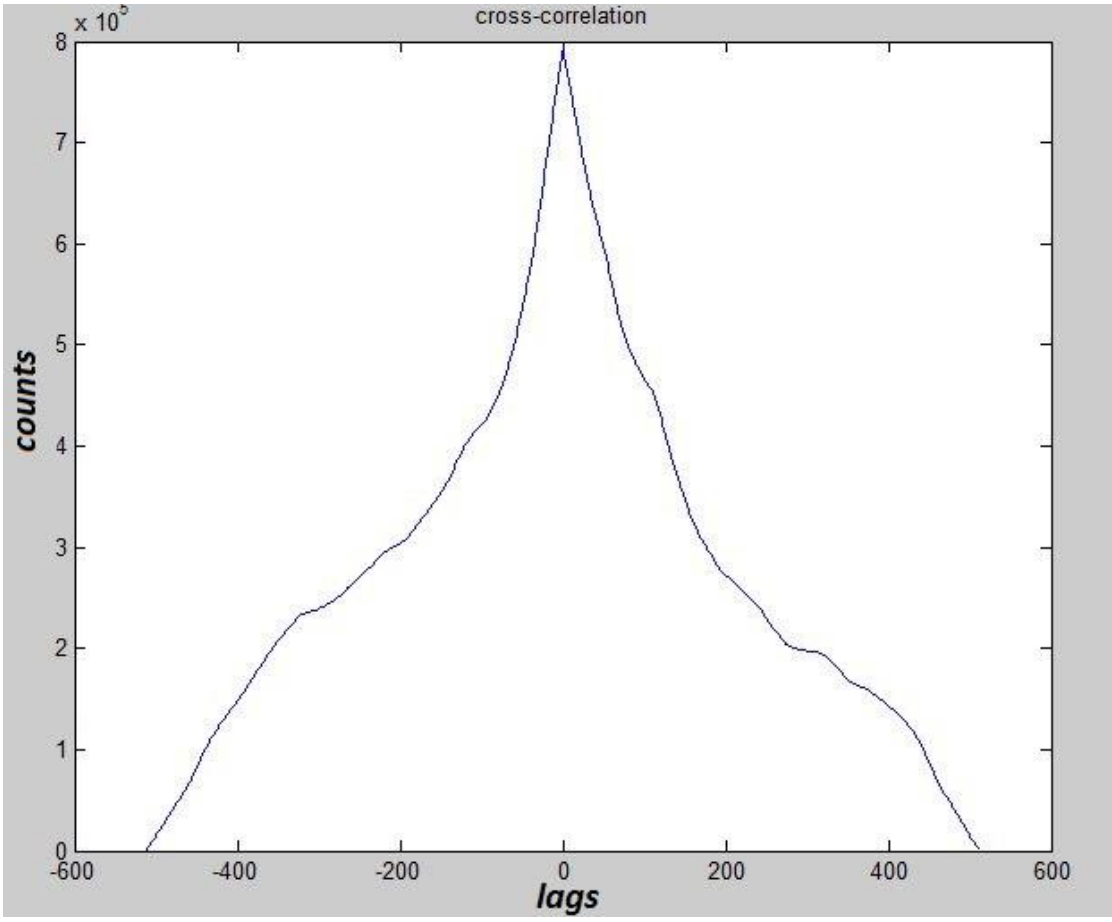
Έτσι, για τα ιαπωνικά και τα ελβετικά δεδομένα, πήρα τα εξής αποτελέσματα.



Σχήμα 26: Γραφική παράσταση της γραμμικής παλινδρόμηση (regression) των ιαπωνικών με τα ελβετικά δεδομένα.

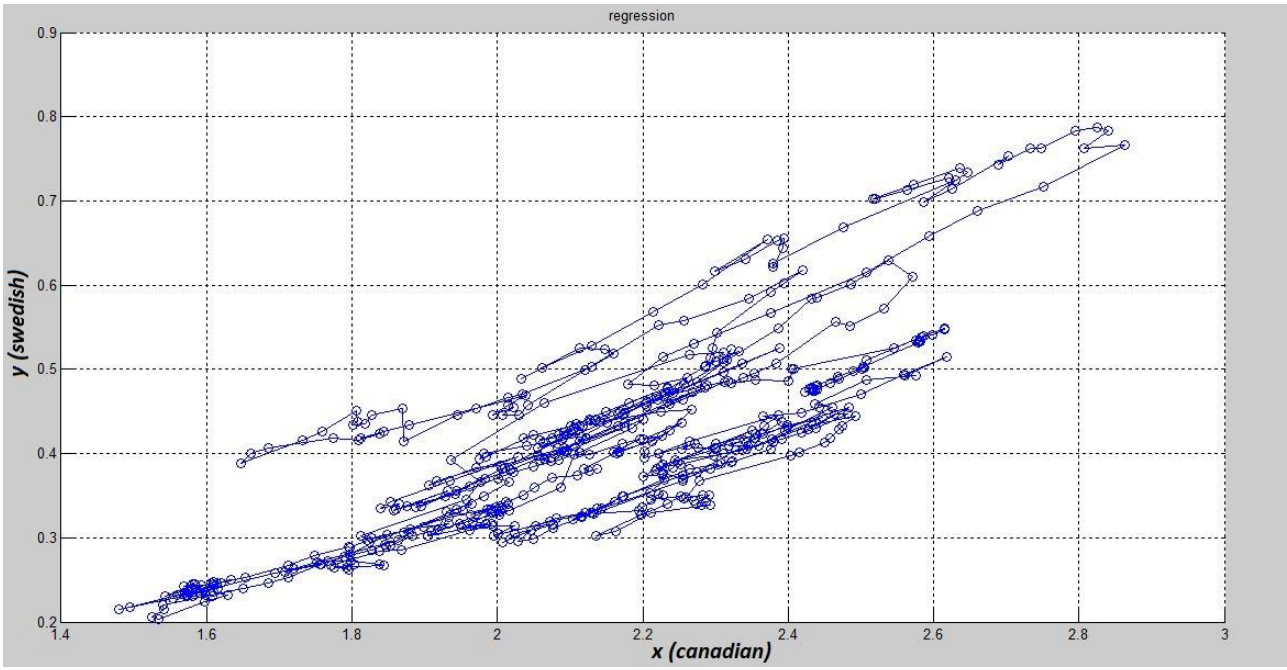
Παρατηρούμε από το Σχήμα 26, ότι υπάρχει μία γραμμική σχέση στην αρχή του γραφήματος, κάτι που πιστοποιεί συσχέτιση, αλλά στο τέλος χαλάει αυτή η γραμμική σχέση και δείχνει πιο πολύ μια χαώδης δομή, χωρίς συνοχή (από το σημείο 500 και ύστερα).

Επίσης, παρατηρώντας το γράφημα Σχήμα 27, παρατηρούμε ότι η βέλτιστη χρονική-υστέρηση (time-lag) είναι η μηδενική, δηλαδή, τα δεδομένα μου έχουν καλύτερη συσχέτιση μεταξύ τους, χωρίς κάποιο βήμα.



Σχήμα 27: Γραφική παράσταση της cross correlation των ιαπωνικών με τα ελβετικά δεδομένα.

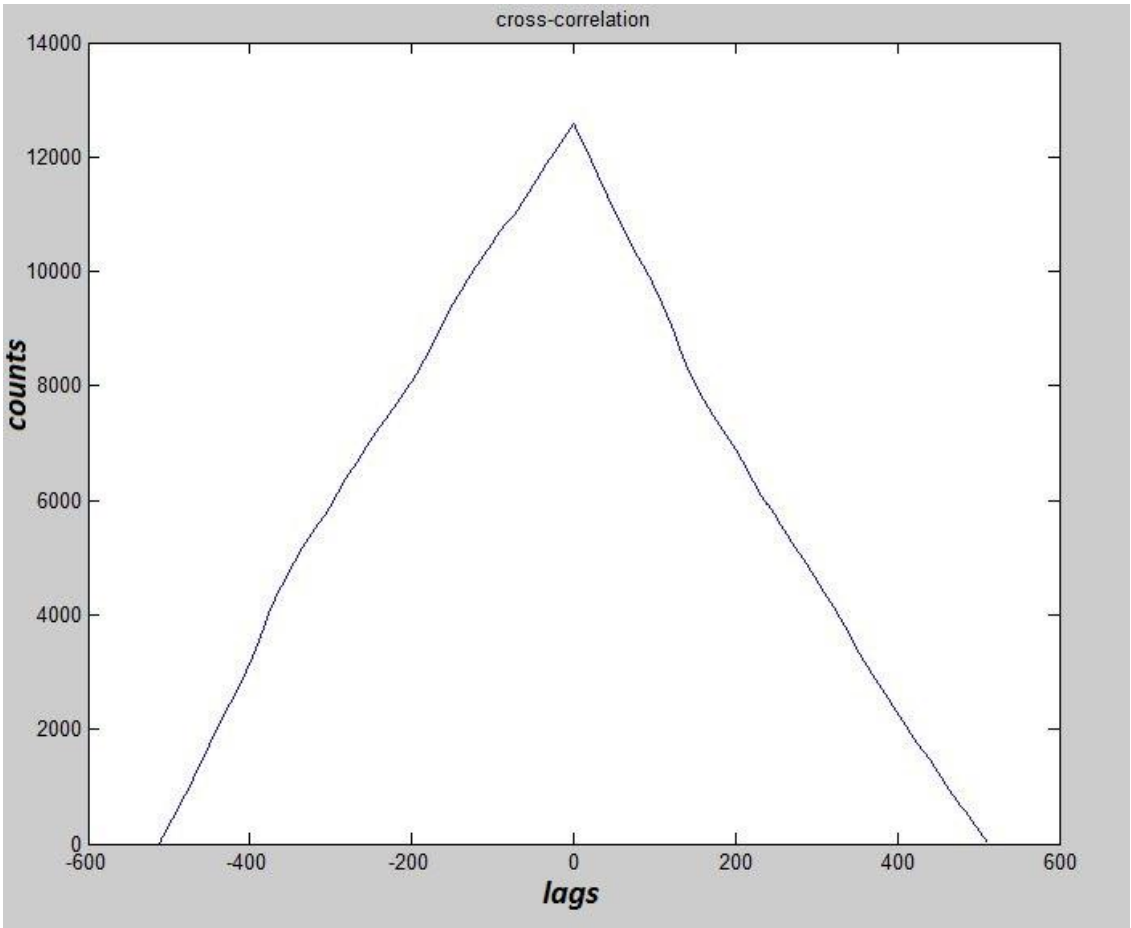
Τώρα, κάνουμε ακριβώς την ίδια διαδικασία για τα καναδικά και τα σουηδικά δεδομένα. Πήραμε τα εξής αποτελέσματα.



Σχήμα 28: Γραφική παράσταση της γραμμικής παλινδρόμηση (regression) των καναδικών με τα σουηδικά δεδομένα.

Από το γράφημα Σχήμα 28 παρατηρούμε ότι η γραμμική παλινδρόμηση μου έβγαλε αντί για μια γραμμική σχέση, ένα αχανές σύνολο σημείων δίχως κάποια δομή. Επομένως είναι εμφανές ότι δεν έχουμε συσχέτιση των δεδομένων μου, τουλάχιστον στο σύνολό τους, παρότι παρατηρήσαμε από τις γραφικές τους παραστάσεις (Σχήμα 20-a, Σχήμα 24-a), ότι έχουν σε ίδιες χρονικές στιγμές, κάποια έντονα αισθητά τοπικά μέγιστα και τοπικά ελάχιστα.

Τέλος, παρατηρούμε και από το σχήμα 29 ότι το βήμα για την βέλτιστη συσχέτιση των καναδικών με τα σουηδικά δεδομένα είναι το μηδενικό, επομένως , με βάση και τα αποτελέσματα της παλινδρόμησης (σχήμα 28) αλλά και της cross correlation Σχήμα 29, βγάζουμε το συμπέρασμα ότι δεν έχουν συσχέτιση τα καναδικά με τα σουηδικά δεδομένα μου.



Σχήμα 29: Γραφική παράσταση της cross correlation των καναδικών με τα σουηδικά δεδομένα.

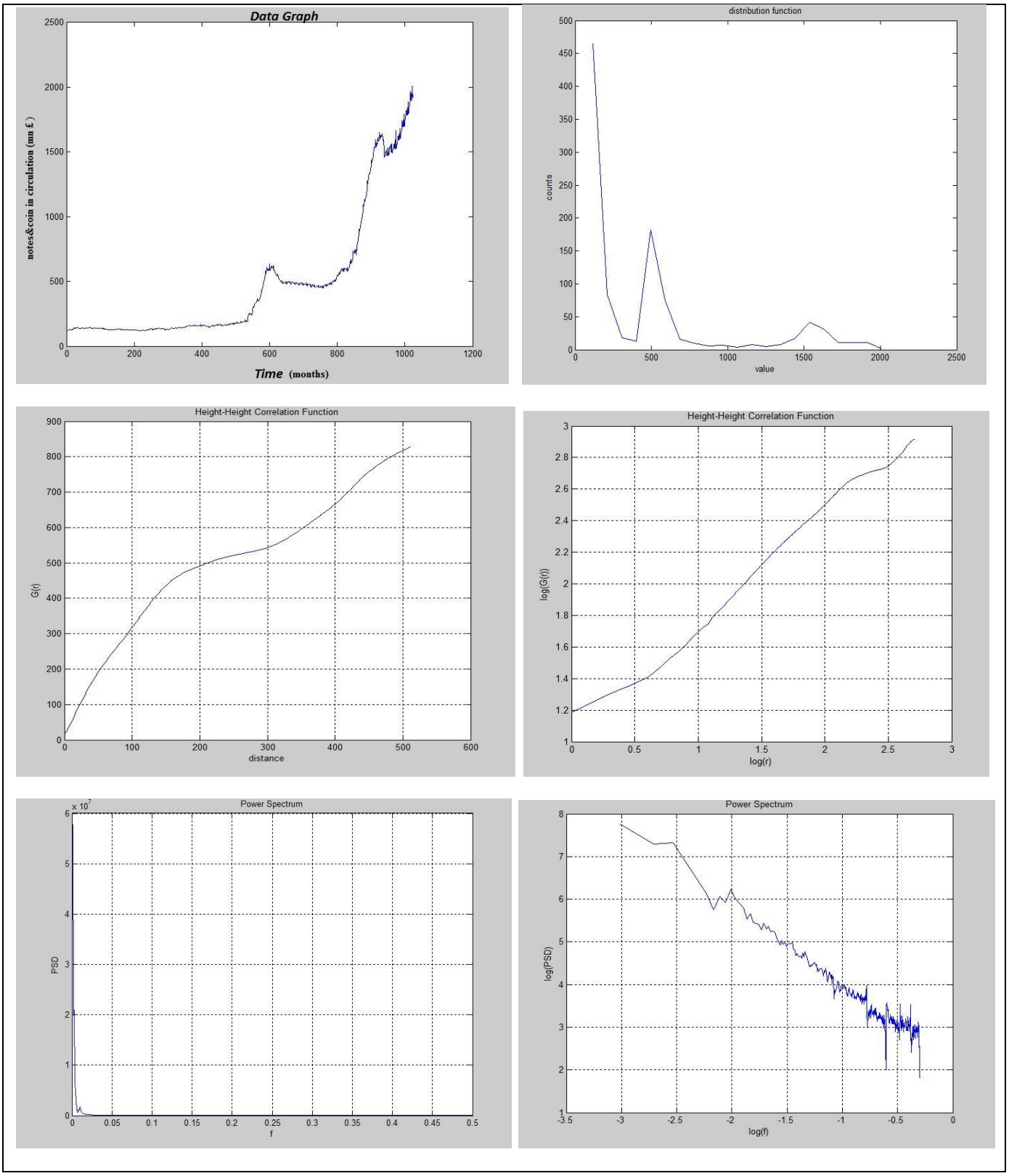
Τέλος, συνοψίζουμε τα αποτελέσματά μας για τις ισοτιμίες με την Μεγάλη Βρετανία, στον πίνακα 1.

Δεδομένα (Ισοτιμία με Μεγάλη Βρετανία))	Περίοδος (ανά μήνες)	d (διάσταση)	μορφοκλασματικότητα	Πολύ-μορφοκλασματικότητα
Καναδάς	100	1.7	Ισχυρή ύπαρξη	Ισχυρή ύπαρξη
Ιαπωνία	17	1.35	Ισχυρή ύπαρξη	Περιορισμένη ύπαρξη
Σουηδία	90	1.48	Ισχυρή ύπαρξη	Περιορισμένη ύπαρξη
Ελβετία	-	1.12	Ισχυρή ύπαρξη	Περιορισμένη ύπαρξη

Πίνακας 1: Δίνεται για κάθε χρονοσειρά, η περιοδικότητα που βρήκαμε, η μορφοκλασματική διάσταση, η ύπαρξη της μορφοκλασματικότητας και πολύ-μορφοκλασματικότητας καθώς και σχολιασμός της ισχύς τους.

4.2 Μηνιαία δεδομένα νομισματικών μεγεθών:

Τιμές νομισμάτων και χαρτονομισμάτων (εν κυκλοφορία):



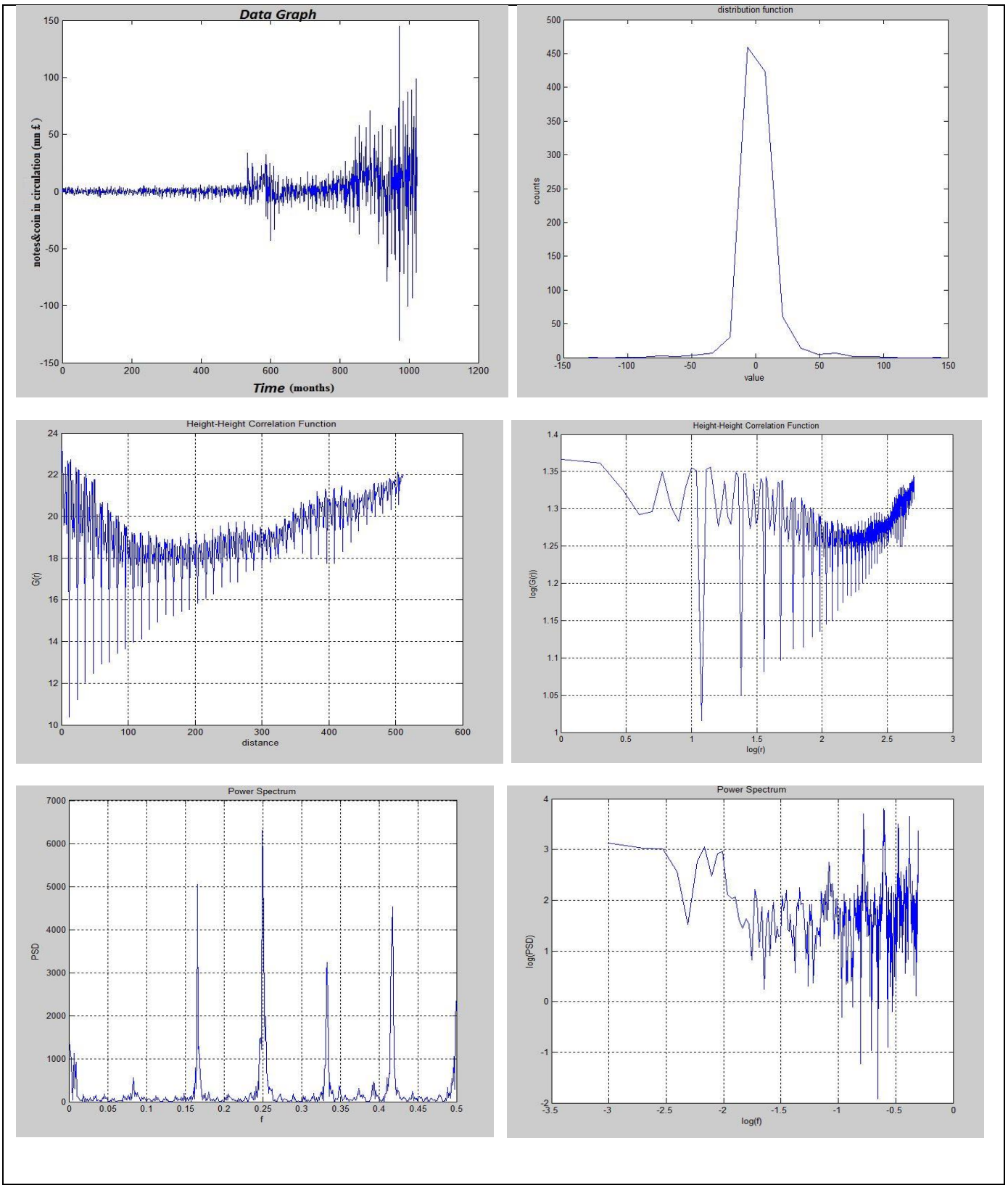
Σχήμα 30: Πάνω αριστερά (30-α), γραφική παράσταση των δεδομένων μου (τιμές νομισμάτων και χαρτονομισμάτων (εν κυκλοφορία). Πάνω δεξιά (30-β), γραφική παράσταση της κατανομής πιθανότητας (probability distribution). Στο κέντρο και αριστερά (30-γ), γραφική παράσταση της Συνάρτηση συχέτισης ύψους-ύψους. Στο κέντρο και δεξιά (30-δ), γραφική παράσταση της λογαριθμοποιημένης Συνάρτηση συχέτισης ύψους-ύψους. Κάτω αριστερά (30-ε), γραφική παράσταση του φάσματος ισχύος (power spectral density). Κάτω δεξιά (30-στ), Γραφική παράσταση του λογαριθμικού φάσματος ισχύος (power spectral density).

Από την γραφική παράσταση (Σχήμα 30-α), παρατηρούμε ότι έχουμε μία περίοδο έντονης στασιμότητας με ένα ανέβασμα τιμών για να επέλθει άλλη μία περίοδος στασιμότητας και να καταλήξει σε μία πολύ μεγάλη άνοδο.

Στην γραφική παράσταση (Σχήμα 30-δ), παρατηρούμε ότι υπάρχει μια γραμμική σχέση για την λογαριθμοποιημένης συνάρτηση συχέτισης ύψους-ύψους η οποία όμως διαρκεί περιορισμένο χρονικό διάστημα. Επομένως, έχω μία μορφοκλασματική ιδιότητα, αλλά όχι τόσο ισχυρή. Η μορφοκλασματική διάσταση είναι d=1.1304.

Τόσο στην γραφική παράσταση του φάσματος ισχύος (Σχήμα 30-ε), όσο και από το γράφημα του λογαριθμικού φάσματος ισχύος (Σχήμα 30-στ), παρατηρούμε ότι έχουμε μία μικρή κορυφή, στην αρχή των γραφημάτων, κάτι που υποδεικνύει πιθανή ύπαρξη περιοδικότητας στα δεδομένα μας 100 μηνών.

Λόγω της στατικότητας (stationarity) που εμφανίζει η χρονοσειρά μας σε μεγάλες περιόδους, εφαρμόζουμε την μέθοδο των πρώτων διαφορών (differences) και επαναλάβαμε ακριβώς την ίδια ανάλυση. Έτσι έχουμε τα εξής αποτελέσματα.



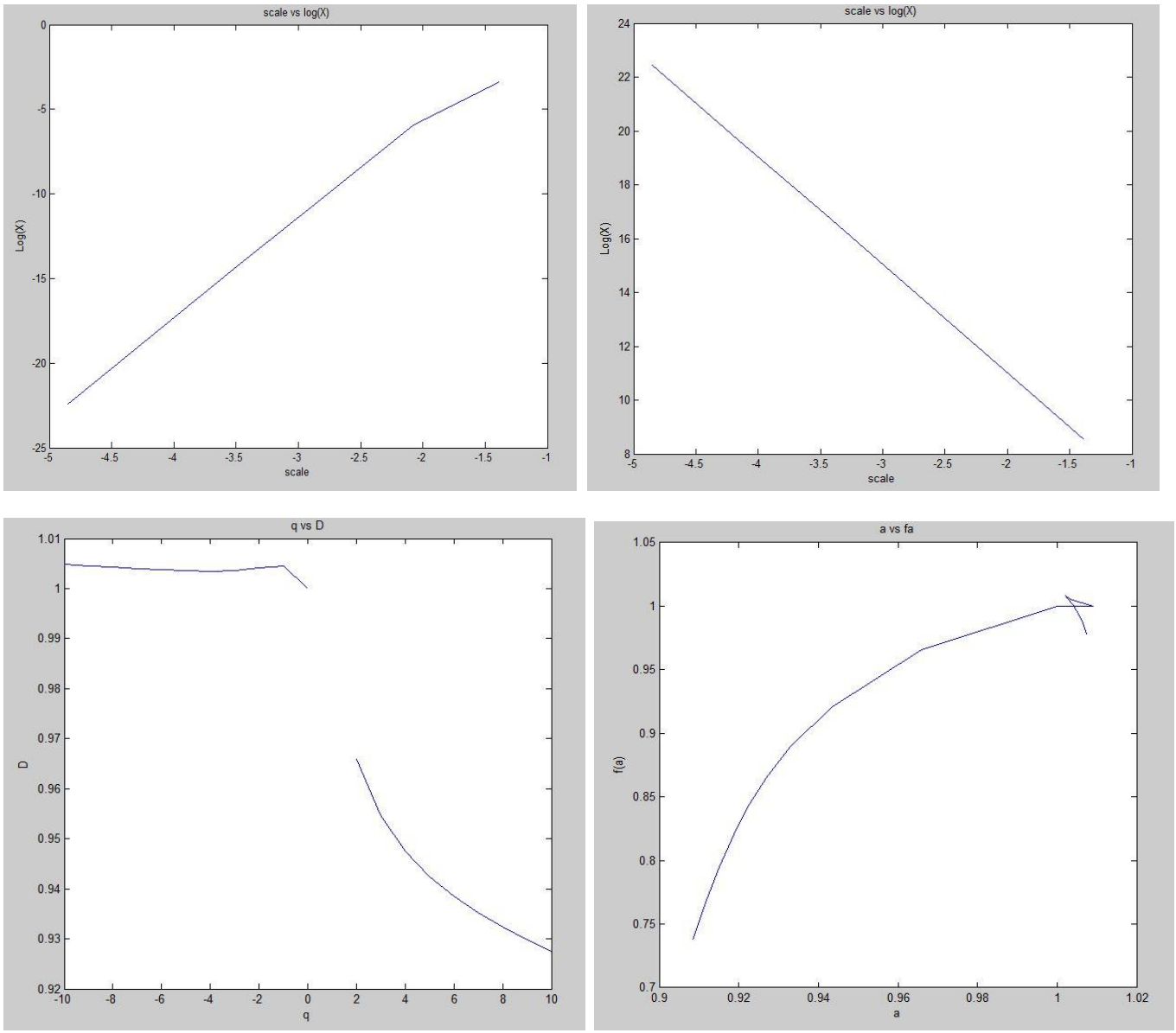
Σχήμα 31: Πάνω αριστερά (31-α), γραφική παράσταση των διαφορών των δεδομένων μου (τιμές νομισμάτων και χαρτονομισμάτων (εν κυκλοφορία). Πάνω δεξιά (31-β), γραφική παράσταση της κατανομής πιθανότητας (probability distribution). Στο κέντρο και αριστερά (31-γ), γραφική παράσταση της Συνάρτηση συχέτισης ύψους-ύψους. Στο κέντρο και δεξιά (31-δ), γραφική παράσταση της λογαριθμοποιημένης Συνάρτηση συχέτισης ύψους-ύψους. Κάτω αριστερά (31-ε), γραφική παράσταση του φάσματος ισχύος (power spectral density). Κάτω δεξιά (31-στ), Γραφική παράσταση του λογαριθμικού φάσματος ισχύος (power spectral density).

Στο γράφημα (Σχήμα 31-α) είναι ακόμα πιο έντονη η stationarity (στασιμότητα) των δεδομένων μου. Παρατηρώ ότι στο τέλος είναι έντονη η αυξομείωση των δεδομένων μου, και ελάχιστα σε ένα σημείο κάπου στην μέση. Αυτό ήταν εμφανές και από το Σχήμα 31-α μόνο που τώρα είναι ακόμα πιο εμφανές.

Από το Σχήμα 31-γ παρατηρούμε ότι όσο μεγαλώνει η απόσταση (r), το εύρος της αυξομείωσης των δεδομένων μικραίνει, αλλά οι τιμές του εύρους μεγαλώνουν.

Στο Σχήμα 31-ε, όπως και στο Σχήμα 31-στ παρατηρώ ότι έχουμε 4-5 μεγάλες κορυφές. Είναι εμφανές η ισχύς της περιοδικότητας καθώς οι κορυφές είναι αρκετά μεγάλες.

Στην συνέχεια, περνάμε στην πολύ-μορφοκλασματική ανάλυση.



Σχήμα 32: Πάνω αριστερά (32-α), γραφική παράσταση του logX vs scale για αρνητικά q. Πάνω δεξιά (32-β), γραφική παράσταση του logX vs scale για θετικά q. Κάτω αριστερά (32-γ), γραφική παράσταση του q vs D. Κάτω δεξιά (32-δ), γραφική παράσταση του a vs f(a) των δεδομένων μου.

Από τα γραφήματα Σχήμα 32-α και Σχήμα 32-β παρατηρώ ότι έχουμε μία γραμμική σχέση, κάτι που πιστοποιεί την ύπαρξη fractality στα δεδομένα μου. Ο εκθέτης ωστόσο , αυτών των νόμων δύναμης αλλάζει με το q, γεγονός που αναδεικνύει τη μορφοκλασματική δομή των δεδομένων μου.

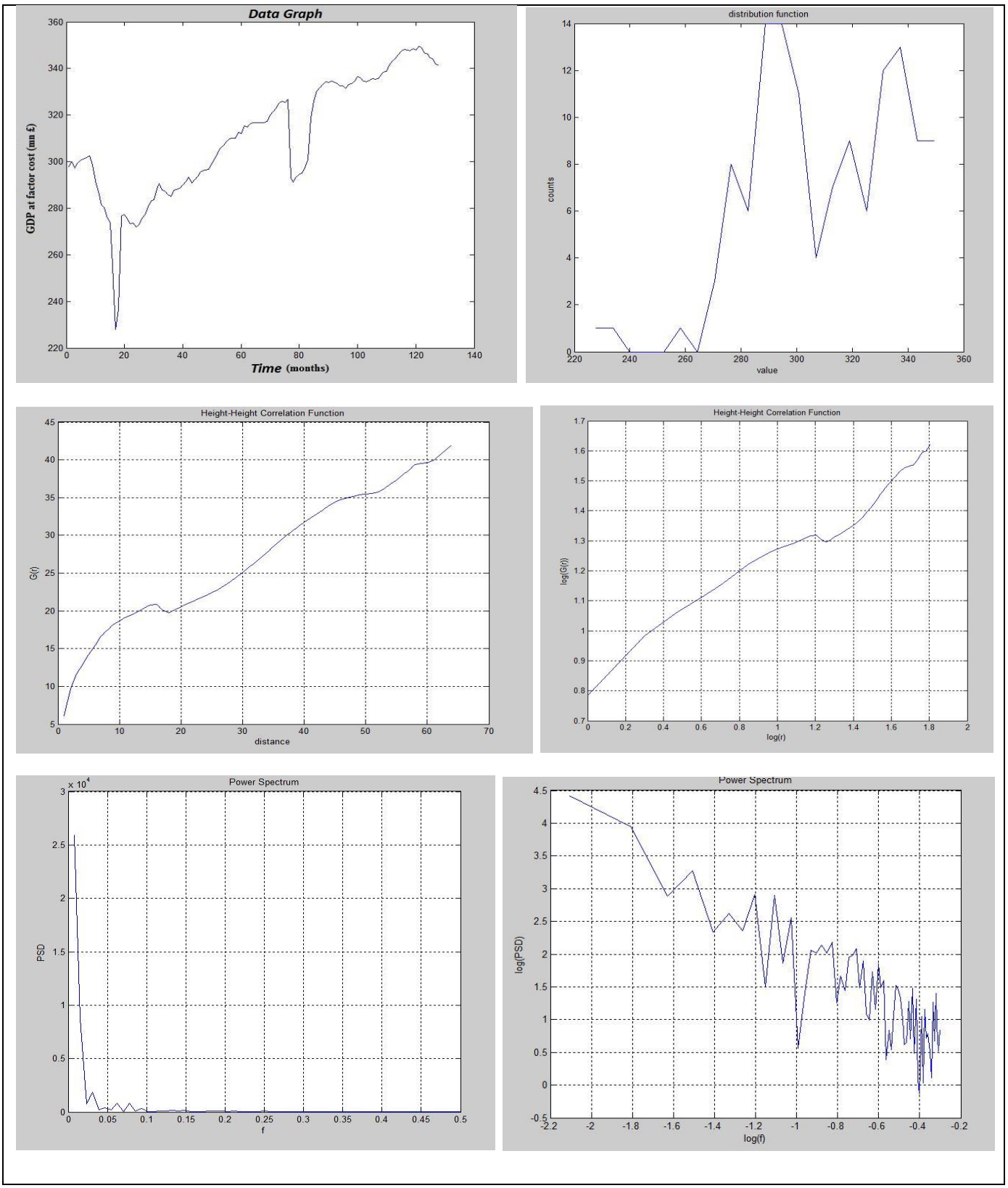
Δίνεται ο πίνακας όπου συνοψίζουμε τα αποτελέσματά μας.

Δεδομένα (τιμές νομισμάτων και χαρτονομισμάτων)	Περίοδος (ανά μήνες)	d (διάσταση)	μορφοκλασματικότητα	Πολύ-μορφοκλασματικότητα
	100	1.1244	ύπαρξη	Μη- ύπαρξη

Πίνακας 2: Δίνεται για την χρονοσειρά μας , η περιοδικότητα που βρήκαμε, η μορφοκλασματική διάσταση, η ύπαρξη της μορφοκλασματικότητας και πολύ-μορφοκλασματικότητας καθώς και σχολιασμός της ισχύς τους.

4.3 Μηνιαία δεδομένα για το ακαθάριστο εγχώριο προϊόν και για τον δείκτη βιομηχανικής παραγωγής:

GDP at factor cost:



Σχήμα 33: Πάνω αριστερά (33-α), γραφική παράσταση των δεδομένων μου (τιμές νομισμάτων και χαρτονομισμάτων (εν κυκλοφορία). Πάνω δεξιά (33-β), γραφική παράσταση της κατανομής πιθανότητας (probability distribution). Στο κέντρο και αριστερά (33-γ), γραφική παράσταση της Συνάρτηση συχέτισης ύψους-ύψους. Στο κέντρο και δεξιά (33-δ), γραφική παράσταση της λογαριθμοποιημένης Συνάρτηση συχέτισης ύψους-ύψους. Κάτω αριστερά (33-ε), γραφική παράσταση του φάσματος

ισχύος (power spectral density). Κάτω δεξιά (33-στ), Γραφική παράσταση του λογαριθμικού φάσματος ισχύος (power spectral density).

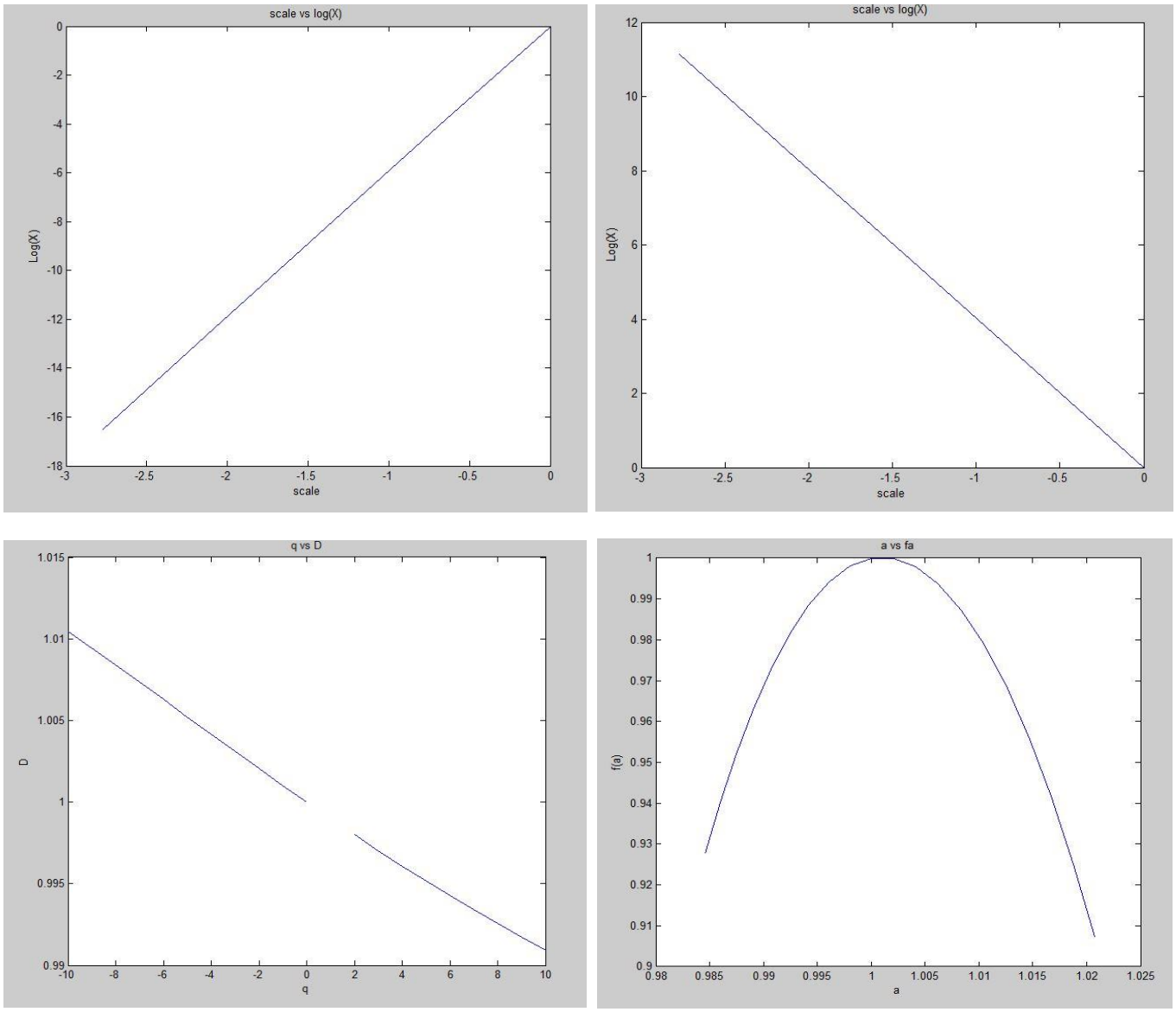
Παρατηρούμε στην χρονοσειρά μας (Σχήμα 33-α) μία συνεχόμενη αυξητική τάση, με δύο μεγάλες απότομες μειώσεις των τιμών των δεδομένων μου .

Στην γραφική παράσταση (Σχήμα 33-γ) παρατηρώ ένα τοπικό ελάχιστο γύρω στο σημείο 18. Άρα έχω μια περιοδικότητα στα δεδομένα μου 18-μηνη.

Πάλι, και στην γραφική παράσταση (Σχήμα 33-δ), όπως και στην προηγούμενη (Σχήμα 33-γ) φαίνεται ένα τοπικό ελάχιστο. Υπάρχει μια γραμμική σχέση, για αρκετό διάστημα, επομένως μπορούμε να εξάγουμε το συμπέρασμα ότι η χρονοσειρά μας έχει την μορφοκλασματική ιδιότητα. Η μορφοκλασματική διάσταση των δεδομένων μου είναι d= 1.5658. Παρατηρούμε ότι η μορφοκλασματική διάσταση είναι περίπου ίση με 1.5, επομένως μπορούμε να πούμε ότι η χρονοσειρά μας ακολουθεί την μορφοκλασματική κίνηση Brown σε μικρές κλίμακες.

Στην γραφική παράσταση (Σχήμα 33-ε) παρατηρούμε ότι έχουμε τρεις μικρές κορυφές, που ίσως δείχνουν κάποια περιοδικότητα. Επίσης, παρατηρούμε ότι και στο παρακάτω γράφημα (Σχήμα 33-στ) είναι εμφανείς αυτές οι κορυφές.

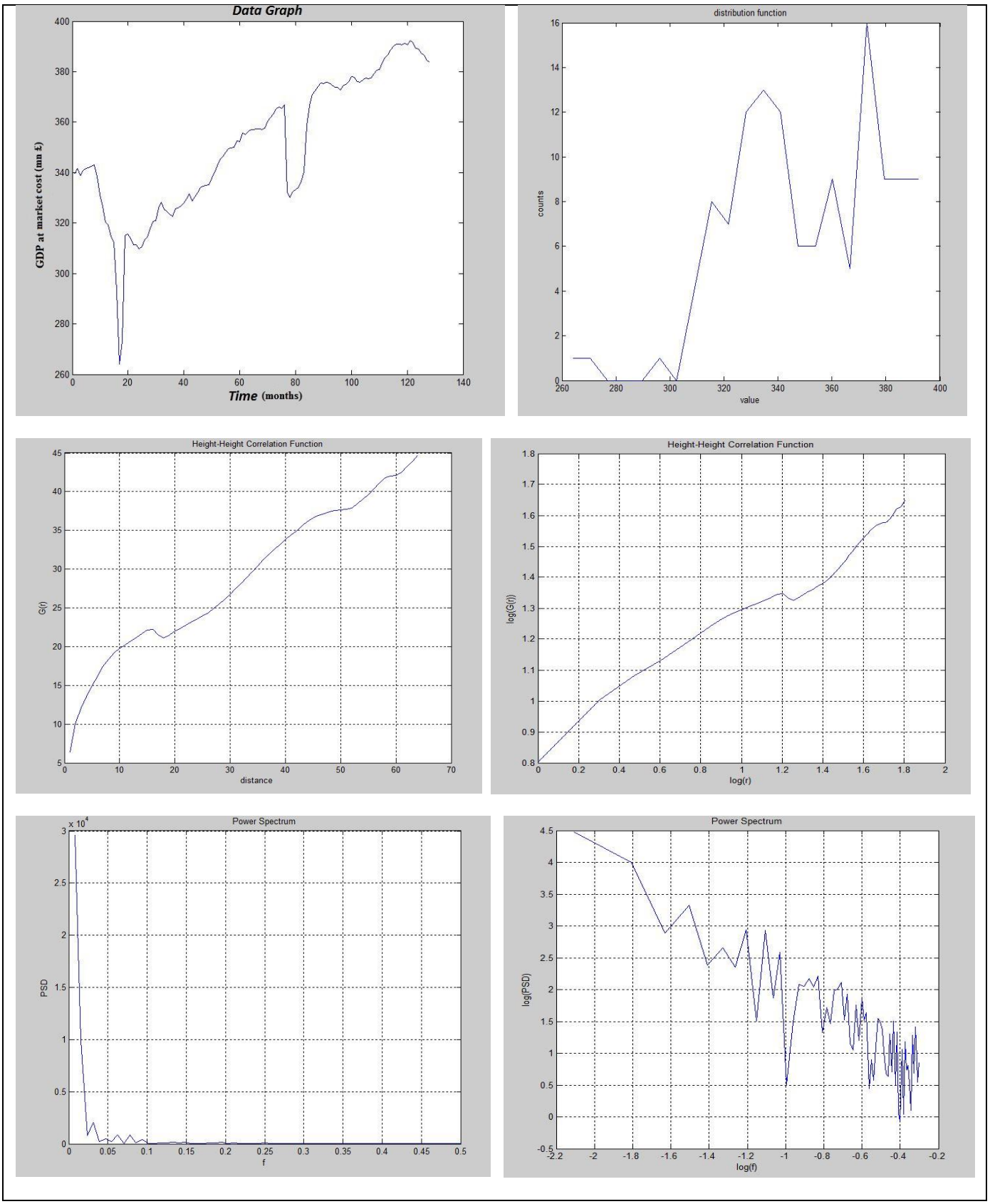
Στην συνέχεια περνάμε σε μια multi-fractal ανάλυση των δεδομένων μας.



Σχήμα 34: Πάνω αριστερά (34-α), γραφική παράσταση του logX vs scale για αρνητικά q. Πάνω δεξιά (34-β), γραφική παράσταση του logX vs scale για θετικά q. Κάτω αριστερά (34-γ), γραφική παράσταση του q vs D. Κάτω δεξιά (34-δ), γραφική παράσταση του a vs f(a) των δεδομένων μου.

Από τα γραφήματα Σχήμα 34-α και Σχήμα 34-β παρατηρώ ότι έχουμε μία γραμμική σχέση, κάτι που πιστοποιεί την ύπαρξη fractality στα δεδομένα μου. Ο εκθέτης ωστόσο , αυτών των νόμων δύναμης αλλάζει με το q, γεγονός που αναδεικνύει τη μορφοκλασματική δομή των δεδομένων μου.

<u>GDP at market prices:</u>



Σχήμα 35: Πάνω αριστερά (35-α), γραφική παράσταση των δεδομένων μου (τιμές νομισμάτων και χαρτονομισμάτων (εν κυκλοφορία). Πάνω δεξιά (35-β), γραφική παράσταση της κατανομής πιθανότητας (probability distribution). Στο κέντρο και αριστερά (35-γ), γραφική παράσταση της Συνάρτηση συχέτισης ύψους-ύψους. Στο κέντρο και δεξιά (35-δ), γραφική παράσταση της λογαριθμοποιημένης Συνάρτηση συχέτισης ύψους-ύψους. Κάτω αριστερά (35-ε), γραφική παράσταση του φάσματος ισχύος (power spectral density). Κάτω δεξιά (35-στ), Γραφική παράσταση του λογαριθμικού φάσματος ισχύος (power spectral density).

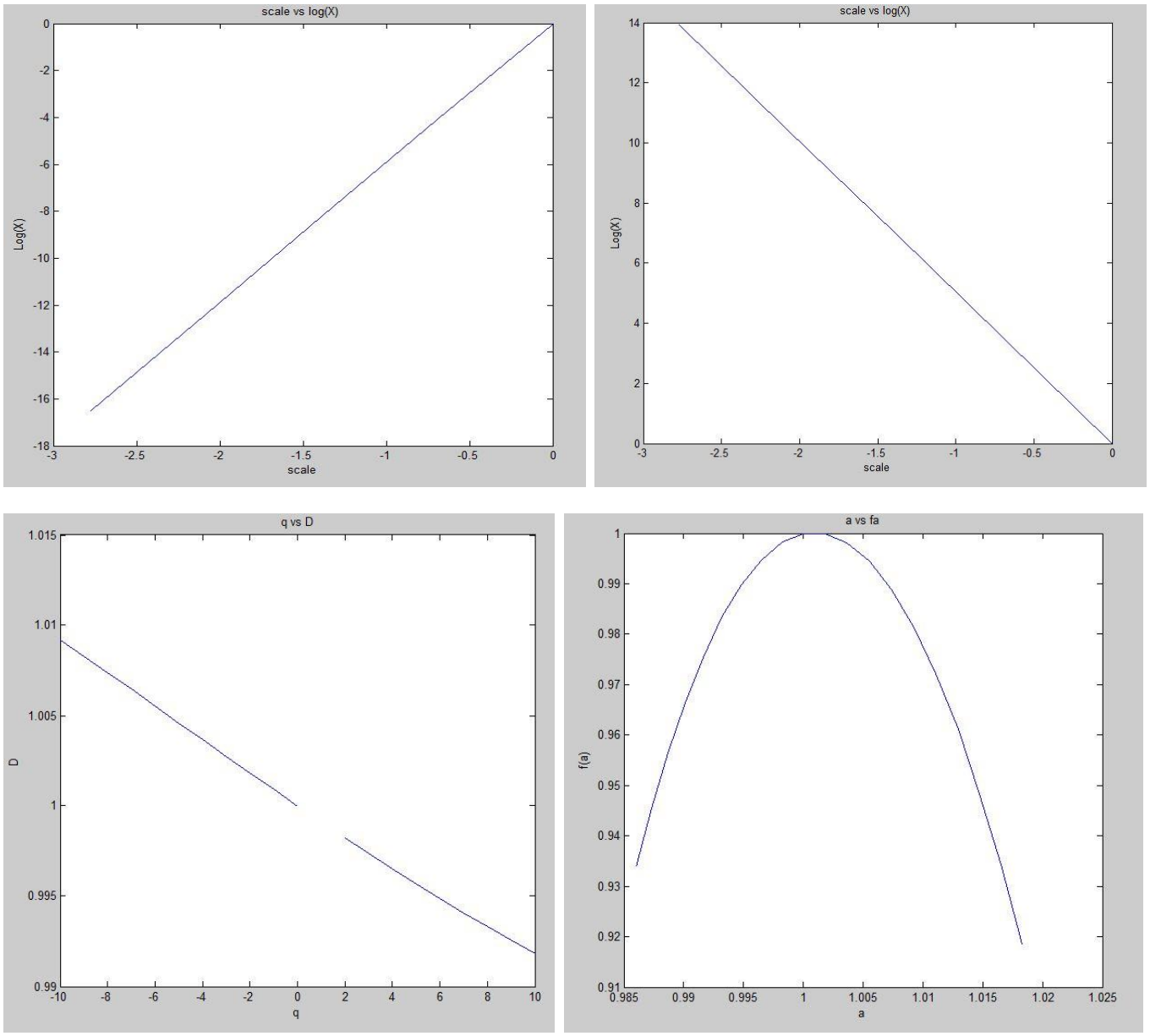
Όπως και πριν, σχηματίζουμε την γραφική παράσταση των δεδομένων μας Σχήμα 35-α, για να έχουμε μια οπτική επαφή με την χρονοσειρά μας. Παρατηρούμε ότι είναι ολόιδια με την χρονοσειρά του GDP at factor cost όπως αυτή φαίνεται στο Σχήμα 27-α.

Στην γραφική παράσταση (Σχήμα 35-γ) παρατηρώ ένα τοπικό ελάχιστο γύρω στο σημείο 18. Άρα έχω μια περιοδικότητα στα δεδομένα μου 18-μηνη.

Πάλι, και στην γραφική παράσταση (Σχήμα 35-δ), φαίνεται ένα τοπικό ελάχιστο. Όμοια με πριν, έχουμε μία γραμμική σχέση, άρα, μπορούμε να εξάγουμε το συμπέρασμα ότι η χρονοσειρά μας έχει την μορφοκλασματική ιδιότητα. Η μορφοκλασματική διάσταση των δεδομένων μου είναι d= 1.5569. Παρατηρούμε ότι η μορφοκλασματική διάσταση είναι περίπου ίση με 1.5, επομένως μπορούμε να πούμε ότι η χρονοσειρά μας ακολουθεί την μορφοκλασματική κίνηση Brown.

Στην γραφική παράσταση (Σχήμα 35-ε) παρατηρούμε ότι έχουμε τρεις μικρές κορυφές, που ίσως δείχνουν κάποια περιοδικότητα. Επίσης, παρατηρούμε ότι και στο παρακάτω γράφημα (Σχήμα 35-στ) είναι εμφανείς αυτές οι κορυφές.

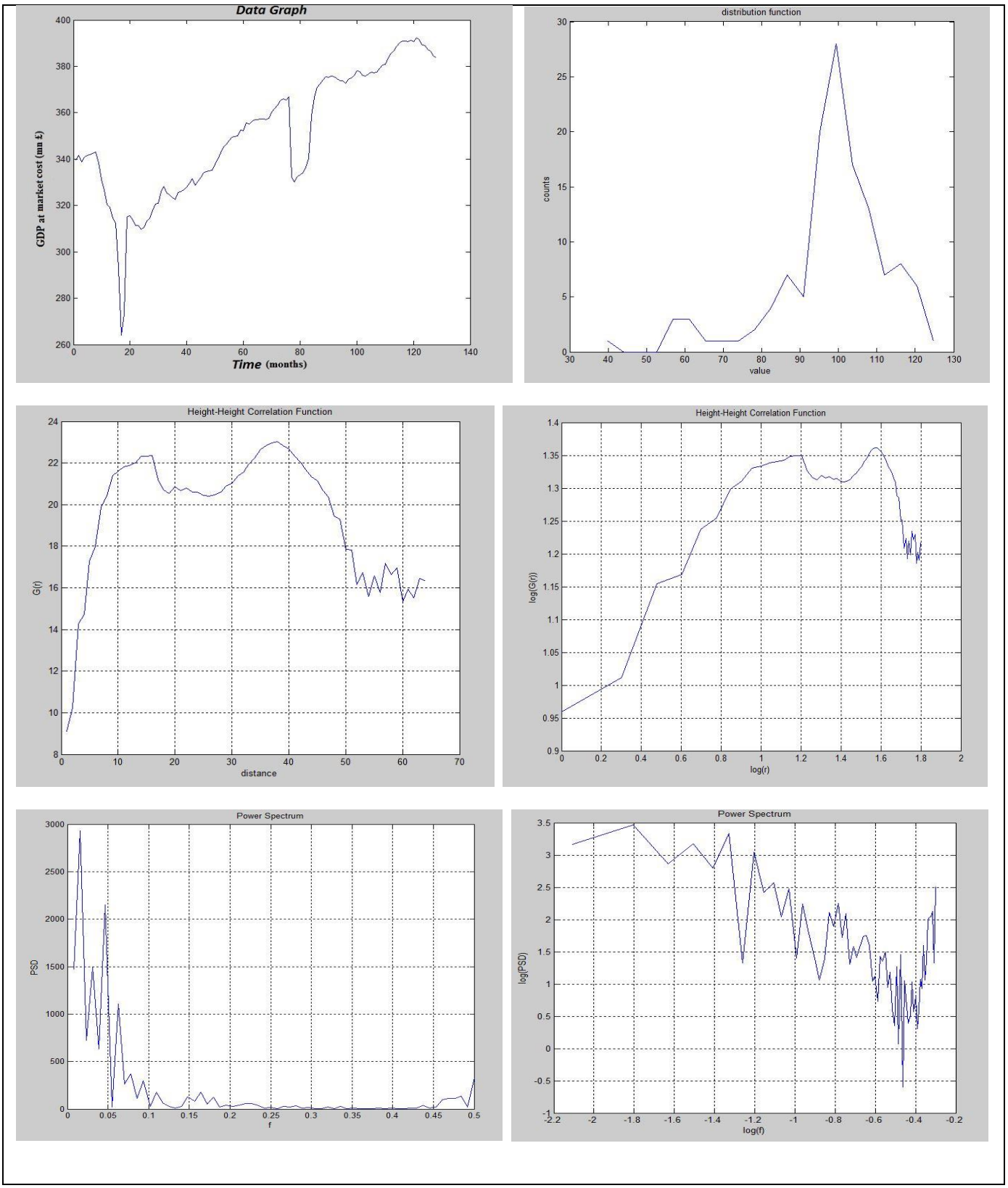
Στην συνέχεια περνάμε σε μια multi-fractal ανάλυση των δεδομένων μας.



Σχήμα 36: Πάνω αριστερά (36-α), γραφική παράσταση του logX vs scale για αρνητικά q. Πάνω δεξιά (36-β), γραφική παράσταση του logX vs scale για θετικά q. Κάτω αριστερά (36-γ), γραφική παράσταση του q vs D. Κάτω δεξιά (36-δ), γραφική παράσταση του a vs f(a) των δεδομένων μου.

Από τα γραφήματα Σχήμα 36-α και Σχήμα 36-β παρατηρώ ότι έχουμε μία γραμμική σχέση, κάτι που πιστοποιεί την ύπαρξη fractality στα δεδομένα μου. Ο εκθέτης ωστόσο , αυτών των νόμων δύναμης αλλάζει με το q, γεγονός που αναδεικνύει τη μορφοκλασματική δομή των δεδομένων μου.

Index of industrial production:



Σχήμα 37: Πάνω αριστερά (37-α), γραφική παράσταση των δεδομένων μου (τιμές νομισμάτων και χαρτονομισμάτων (εν κυκλοφορία). Πάνω δεξιά (37-β), γραφική παράσταση της κατανομής πιθανότητας (probability distribution). Στο κέντρο και αριστερά (37-γ), γραφική παράσταση της Συνάρτηση συχέτισης ύψους-ύψους. Στο κέντρο και δεξιά (37-δ), γραφική παράσταση της λογαριθμοποιημένης Συνάρτηση συχέτισης ύψους-ύψους. Κάτω αριστερά (37-ε), γραφική παράσταση του φάσματος

ισχύος (power spectral density). Κάτω δεξιά (37-στ), Γραφική παράσταση του λογαριθμικού φάσματος ισχύος (power spectral density).

Από την γραφική παράσταση των δεδομένων μου (Σχήμα 37-α), παρατηρούμε ότι έχουμε μια σχετική ανοδική τάση (όπως και πριν), αλλά με μεγάλες αυξομειώσεις. Αυτό που κάνει ιδιαίτερη εντύπωση είναι ότι τις στιγμές που είχα ελάχιστο (οι δύο μεγάλες πτώσεις των τιμών και για τα δύο GDP (GDP at factor cost και GDP at market cost), είναι εμφανείς και σε αυτό το γράφημα (Σχήμα 37), για τον δείκτη βιομηχανικής παραγωγής. Είναι εμφανής μία συσχέτιση αυτών των τριών στοιχείων.

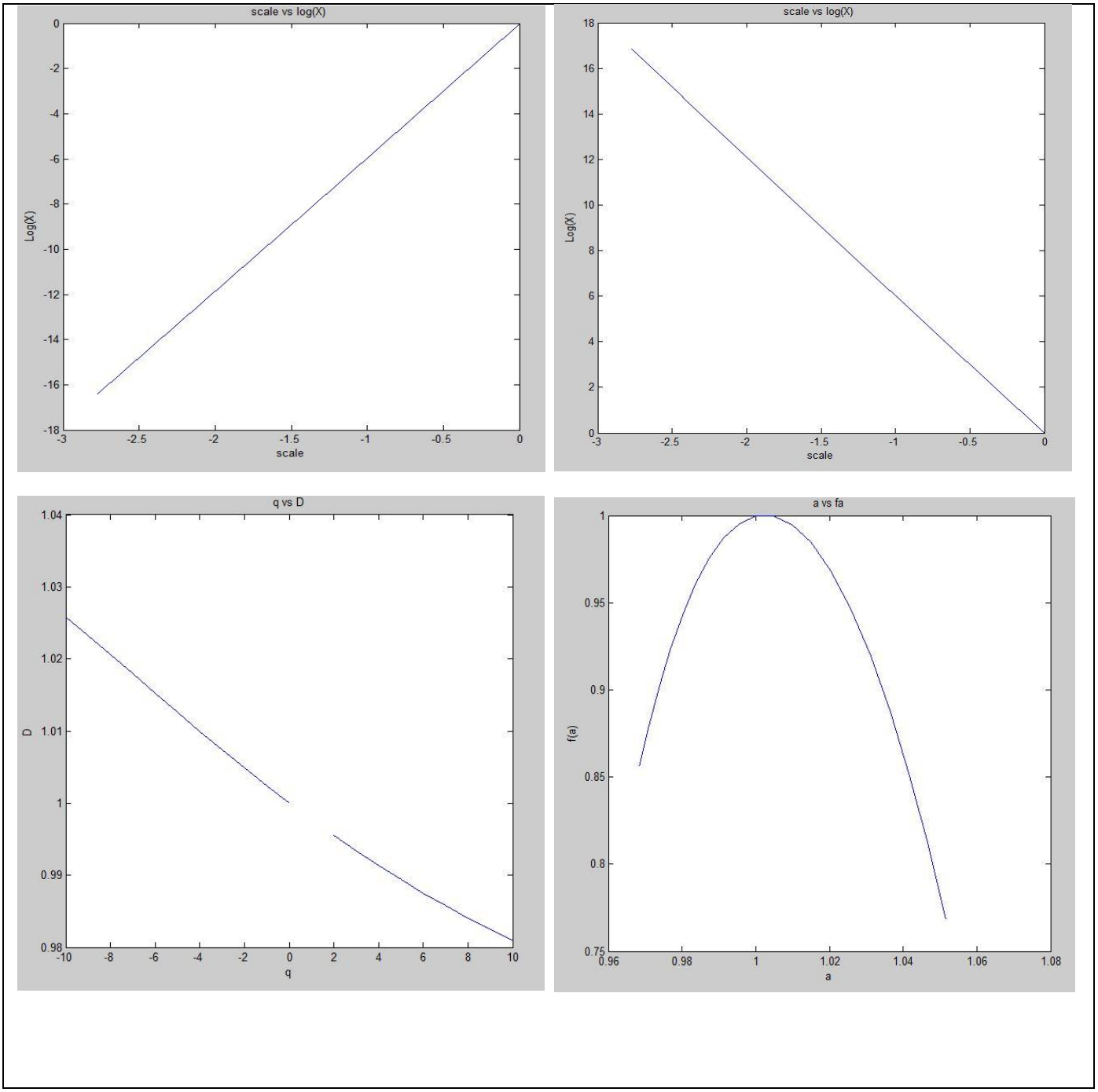
Το γράφημα (Σχήμα 37-γ) μας δείχνει ότι έχουμε αρκετά τοπικά ελάχιστα ειδικά προς το τέλος. Αυτό πιστοποιεί πιθανές περιοδικότητες, και για την ακρίβεια, θα εξετάσουμε ιδιαίτερα το ελάχιστο αυτών στην τιμή 18, άρα αυτή είναι και η πιο ισχυρή περιοδικότητα στα δεδομένα μου.

Όμοια στοιχεία παρατηρώ και πιο κάτω στο γράφημα Σχήμα 37-δ. Πάλι έχουμε γραμμική σχέση, άρα εξάγουμε το συμπέρασμα ότι η χρονοσειρά μας έχει την μορφοκλασματική ιδιότητα. Επίσης, η μορφοκλασματική διάσταση είναι d=1.7887.

Από το γράφημα (Σχήμα 37-ε) είναι εμφανείς μερικές μεγάλες κορυφές, οι οποίες πιστοποιούν την ύπαρξη περιοδικοτήτων στα δεδομένα μου.

Και στο γράφημα Σχήμα 37-στ, παρατηρώ κορυφές, αλλά λιγότερο έντονες από ότι πριν (στο Σχήμα 37-ε).

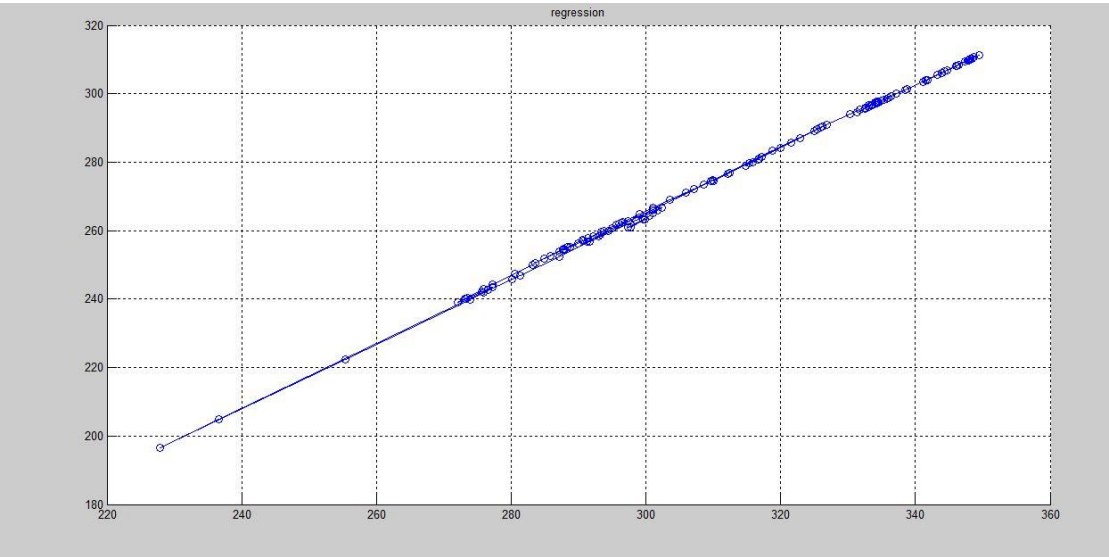
Στην συνέχεια περνάμε σε μια multi-fractal ανάλυση των δεδομένων μας.



Σχήμα 38: Πάνω αριστερά (38-α), γραφική παράσταση του logX vs scale για αρνητικά q. Πάνω δεξιά (38-β), γραφική παράσταση του logX vs scale για θετικά q. Κάτω αριστερά (38-γ), γραφική παράσταση του q vs D. Κάτω δεξιά (38-δ), γραφική παράσταση του a vs f(a) των δεδομένων μου.

Η γραφική παράσταση (Σχήμα 38-α) μας δείχνει μία πολύ καλή γραμμική σχέση για αρνητικά και θετικά q (κάτι που πιστοποιεί την πολυμορφοκλασματική ιδιότητα στα δεδομένα μας), τουλάχιστον για μικρές και μεσαίες κλίμακες.

Δεδομένου ότι παρατηρήσαμε πολλές ομοιότητες στα δεδομένα μας (ειδικά των δύο GDP), θα κάνουμε μία στατιστική μη-παραμετρική ανάλυση.



Σχήμα 39: Γραφική παράσταση regression του GDP at factor cost με το GDP at market prices.

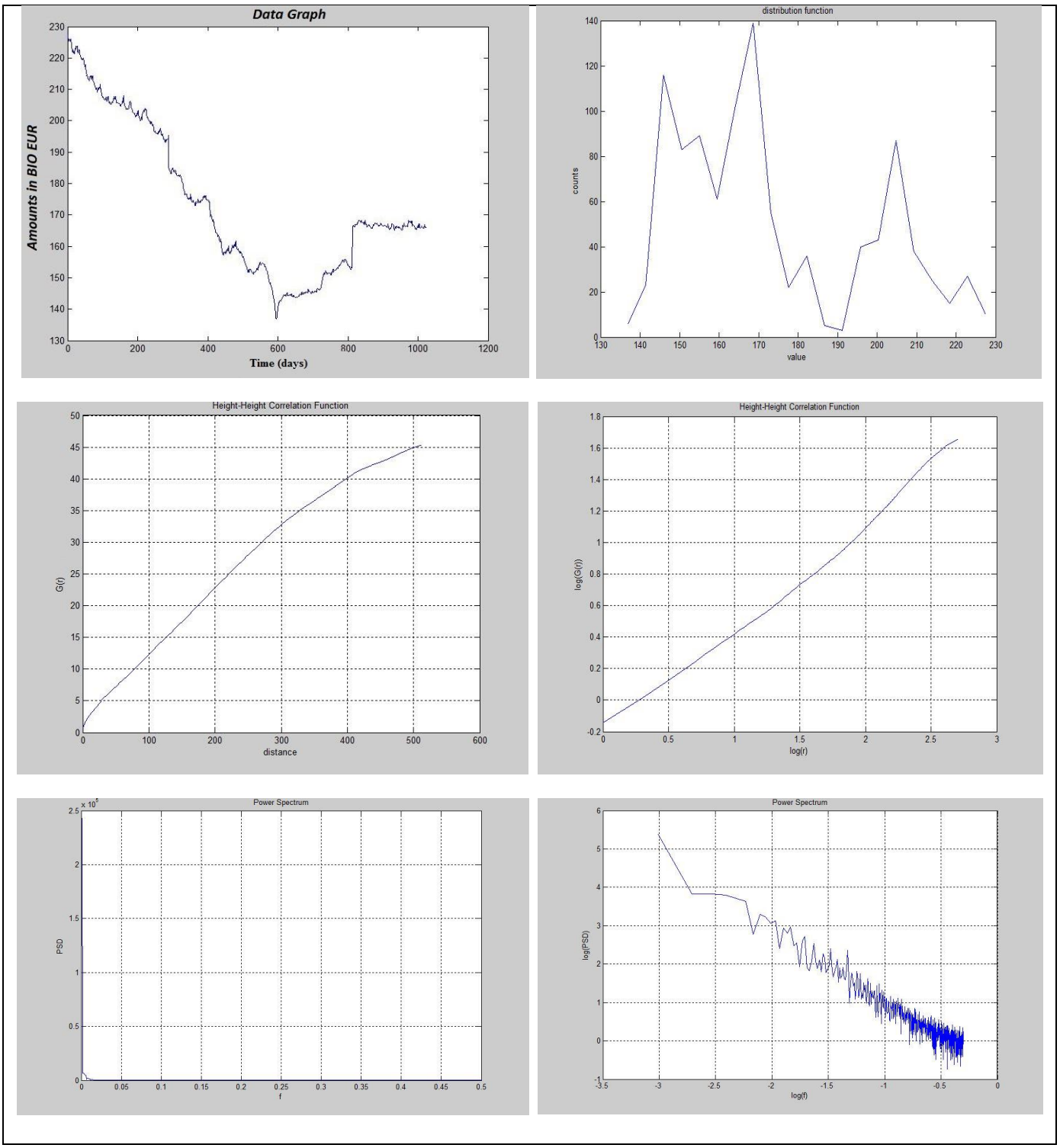
Είναι εμφανής η γραμμική σχέση που ικανοποιείται μεταξύ των δεδομένων μου GDP at factor cost με το GDP at market prices, όπως φαίνεται από το Σχήμα 39.

Δίνεται ο πίνακας όπου συνοψίζουμε τα αποτελέσματά μας, για τις τρεις χρονοσειρές που εξετάσαμε (GDP τιμές κόστους, GDP τιμές αγοράς, Δείκτης βιομηχανικής παραγωγής).

Δεδομένα	Περίοδος (ανά μήνες)	d (διάσταση)	μορφοκλασματικότητα	Πολύ-μορφοκλασματικότητα
GDP (τιμές κόστους)	18	1.5658	Ισχυρή ύπαρξη	Περιορισμένη ύπαρξη
GDP (τιμές αγοράς)	18	1.5569	Ισχυρή ύπαρξη	Περιορισμένη ύπαρξη
Δείκτης βιομηχανικής παραγωγής	18	1.7887	Ισχυρή ύπαρξη	Περιορισμένη ύπαρξη

Πίνακας 3: Δίνεται για τις χρονοσειρές μας , η περιοδικότητα που βρήκαμε, η μορφοκλασματική διάσταση, η ύπαρξη της μορφοκλασματικότητας και πολύ-μορφοκλασματικότητας καθώς και σχολιασμός της ισχύς τους.

4.4 Καταθέσεις ελληνικών τραπεζών:



Σχήμα 40: Πάνω αριστερά (40-α), γραφική παράσταση των δεδομένων μου (σύνολο καταθέσεων ελληνικών τραπεζών). Πάνω δεξιά (40-β), γραφική παράσταση της κατανομής πιθανότητας (probability distribution). Στο κέντρο και αριστερά (40-γ), γραφική παράσταση της Συνάρτηση συχέτισης ύψους-ύψους. Στο κέντρο και δεξιά (40-δ), γραφική παράσταση της λογαριθμοποιημένης Συνάρτηση συχέτισης ύψους-ύψους. Κάτω αριστερά (40-ε), γραφική παράσταση του φάσματος ισχύος (power spectral density). Κάτω δεξιά (40-στ), Γραφική παράσταση του λογαριθμικού φάσματος ισχύος (power spectral density).

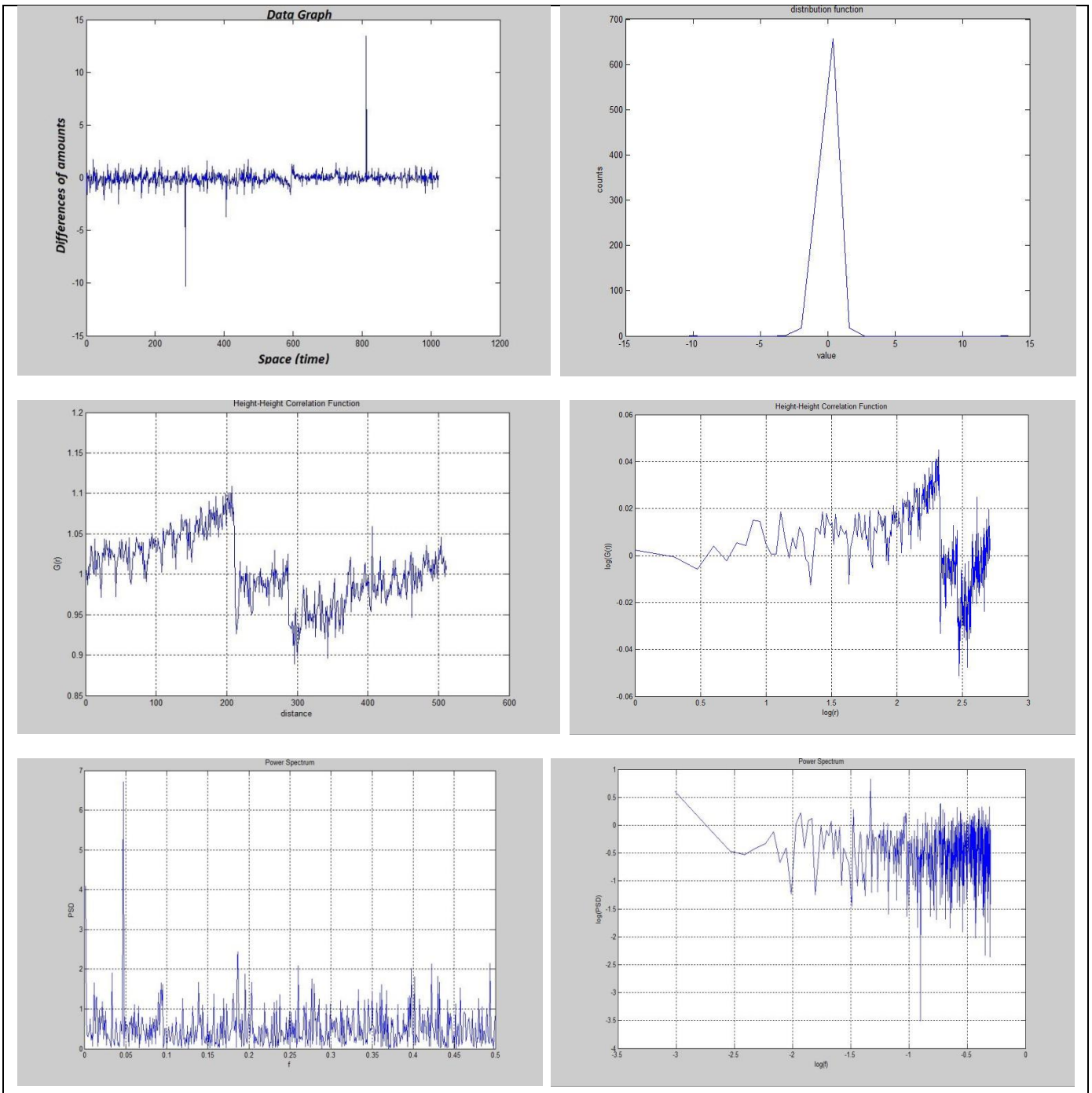
Από το σχήμα 40-α, παρατηρούμε ότι τα δεδομένα μας παρουσιάζουν μία πτωτική συμπεριφορά, από την αρχή (12 Φεβρουαρίου 2010), έως περίπου λίγο πριν το σημείο 600.

Ύστερα, παρατηρούμε μία αυξητική τάση, και στην συνέχεια, μετά το 800, παρατηρούμε μία στασιμότητα. Επομένως, θα μπορούσαμε να χωρίσουμε την ανάλυσή μας σε δύο περιόδους. Η πρώτη είναι από το σημείο 1-512 (πτωτική περίοδος), και η δεύτερη από το σημείο 601 ως το 1112 (τέλος των δεδομένων μου) όπου έχουμε την στασιμότητα.

Επίσης, από το σχήμα 40-δ παρατηρούμε ότι υπάρχει μια γραμμική σχέση η οποία χαρακτηρίζει την λογαριθμοποιημένη μας συνάρτηση συσχέτισης ύψους-ύψους. Η γραμμική σχέση πάλι μας πιστοποιεί την ύπαρξη μορφοκλασματικής ιδιότητας στα δεδομένα μου. Υπολογίζοντας την μορφοκλασματική διάσταση, παρατηρούμε ότι d=1.5082, επομένως και τα δεδομένα μου από τις ελληνικές καταθέσεις τραπεζών δείχνουν να ακολουθούν την μορφοκλασματική κίνηση Brown.

Τέλος, στο σχήμα 40-στ, παρατηρώ μία μικρή κορυφή η οποία ξεχωρίζει αχνά από τις υπόλοιπες, στοιχείο που ίσως πιστοποιεί κάποια περιοδικότητα στα δεδομένα μου.

Στην συνέχεια, περνάμε σε ίδια ανάλυση χρησιμοποιώντας την μέθοδο πρώτων διαφορών.

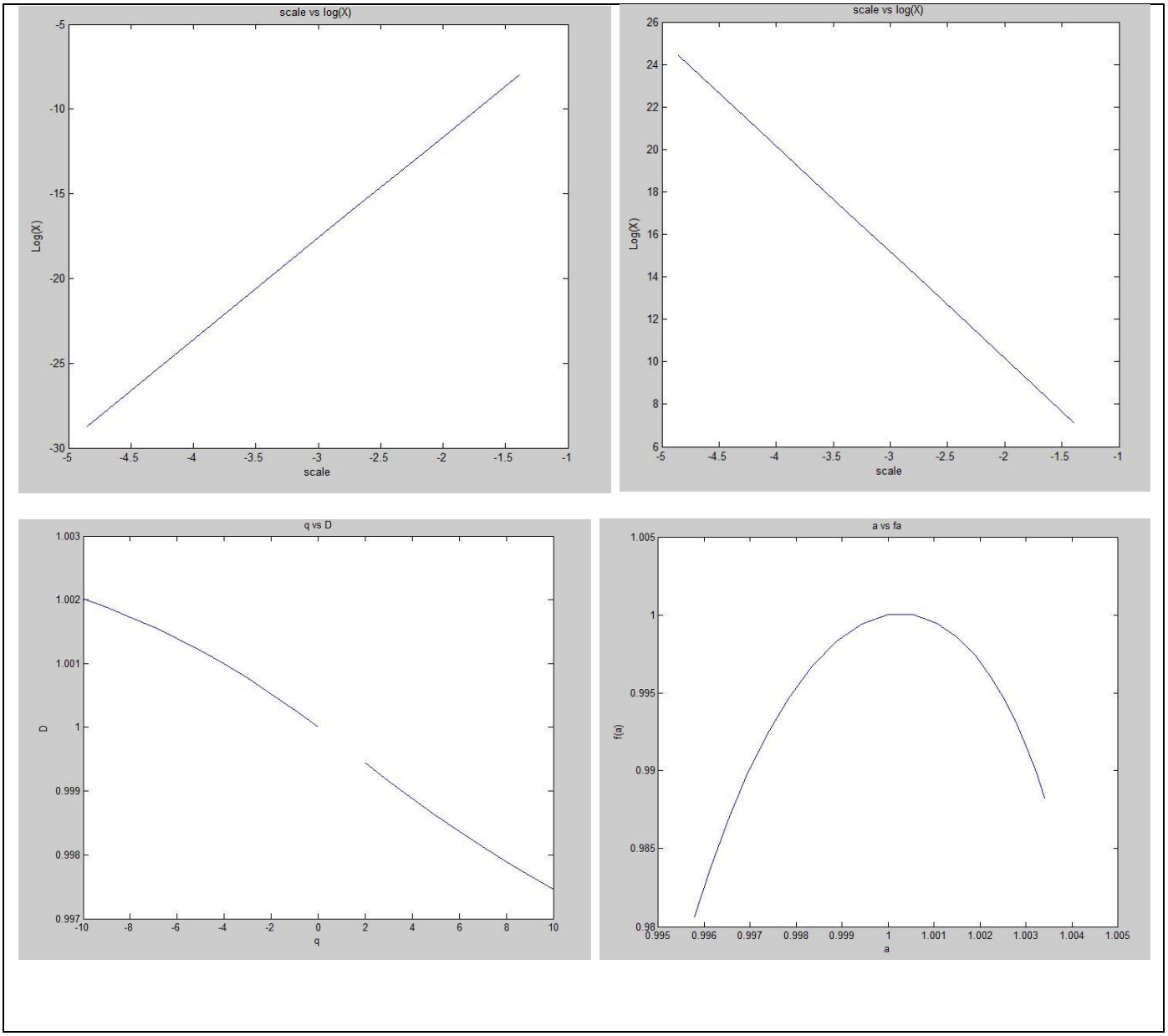


Σχήμα 41: Πάνω αριστερά (41-α), γραφική παράσταση των διαφορών των δεδομένων μου (σύνολο καταθέσεων ελληνικών τραπεζών). Πάνω δεξιά (41-β), γραφική παράσταση της κατανομής πιθανότητας (probability distribution). Στο κέντρο και αριστερά (41-γ), γραφική παράσταση της Συνάρτηση συχέτισης ύψους-ύψους. Στο κέντρο και δεξιά (41-δ), γραφική παράσταση της λογαριθμοποιημένης Συνάρτηση συχέτισης ύψους-ύψους. Κάτω αριστερά (41-ε), γραφική παράσταση του φάσματος ισχύος (power spectral density). Κάτω δεξιά (41-στ), Γραφική παράσταση του λογαριθμικού φάσματος ισχύος (power spectral density).

Από το σχήμα 41-α, παρατηρώ ότι έχω δύο πολύ έντονες ακμές και άλλη μία μικρότερη, οι οποίες αντιπροσωπεύουν τις μεγάλες μεταβάσεις (μεγάλη αύξηση ή μεγάλη πτώση αντίστοιχα), στο σχήμα 34-α.

Επίσης, στο σχήμα 41-ε και 41-στ παρατηρώ μία μεγάλη κορυφή, η οποία πιστοποιεί την ύπαρξη κάποιας περιοδικότητας στα δεδομένα μου.

Επομένως, για να κάνω καλύτερη ανάλυση, θα κάνω μία μορφοκλασματική ανάλυση των δεδομένων μου.

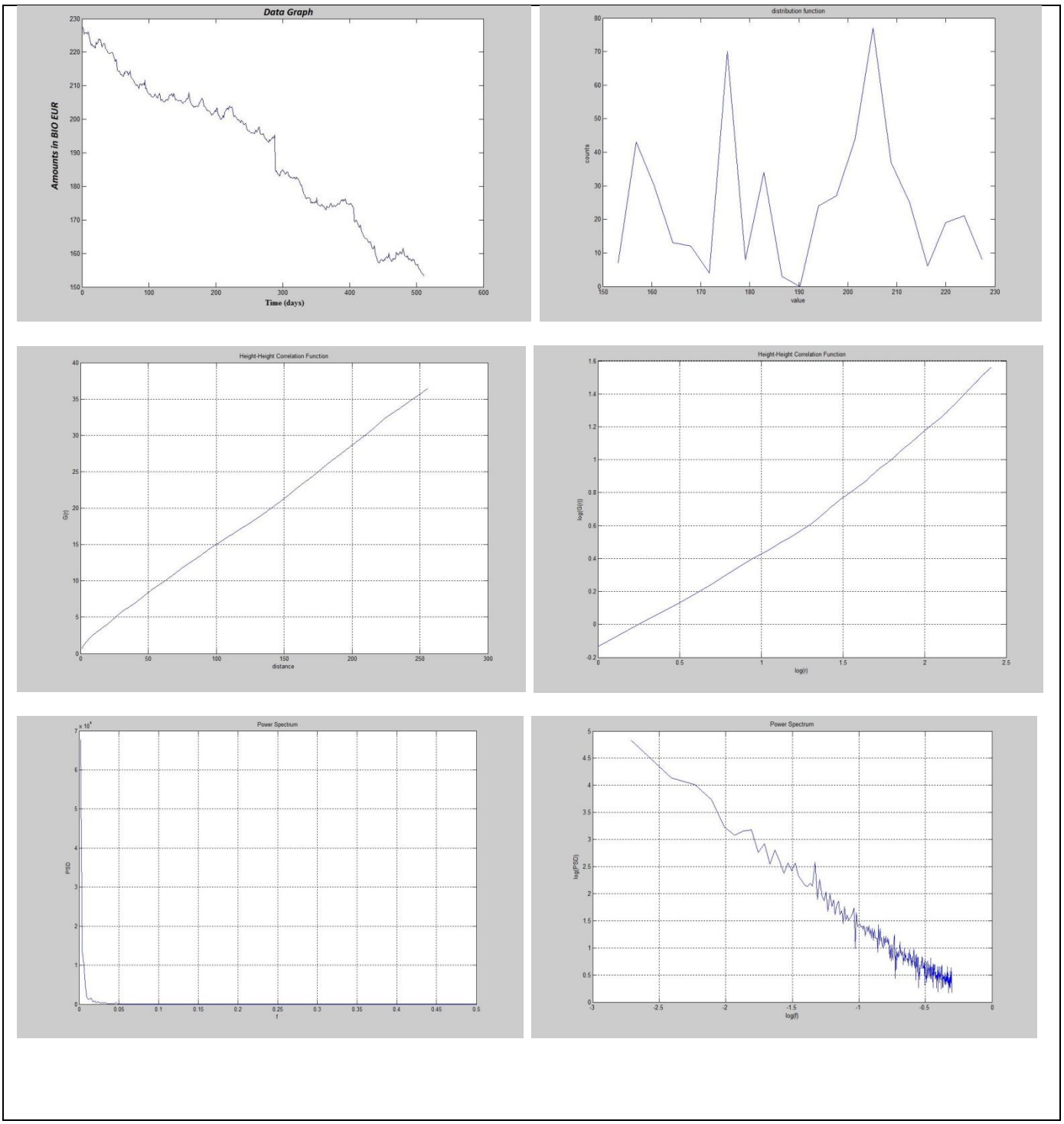


Σχήμα 42: Πάνω αριστερά (42-α), γραφική παράσταση του logX vs scale για αρνητικά q. Πάνω δεξιά (42-β), γραφική παράσταση του logX vs scale για θετικά q. Κάτω αριστερά (42-γ), γραφική παράσταση του q vs D. Κάτω δεξιά (42-δ), γραφική παράσταση του a vs f(a) των δεδομένων μου.

Από τα γραφήματα Σχήμα 42-α και Σχήμα 42-β παρατηρώ ότι έχουμε μία γραμμική σχέση, κάτι που πιστοποιεί την ύπαρξη fractality στα δεδομένα μου. Ο εκθέτης ωστόσο , αυτών των νόμων δύναμης αλλάζει με το q, γεγονός που αναδεικνύει τη μορφοκλασματική δομή των δεδομένων μου.

Τώρα, για καλύτερη ανάλυση, χωρίσαμε την χρονοσειρά μας σε δύο τμήματα, η πρώτη περίοδος από 1-512, και η δεύτερη από 601-1112. Στην συνέχεια, για κάθε μία από αυτές χωριστά, κάναμε ίδια ανάλυση.

Για την πρώτη περίοδο:



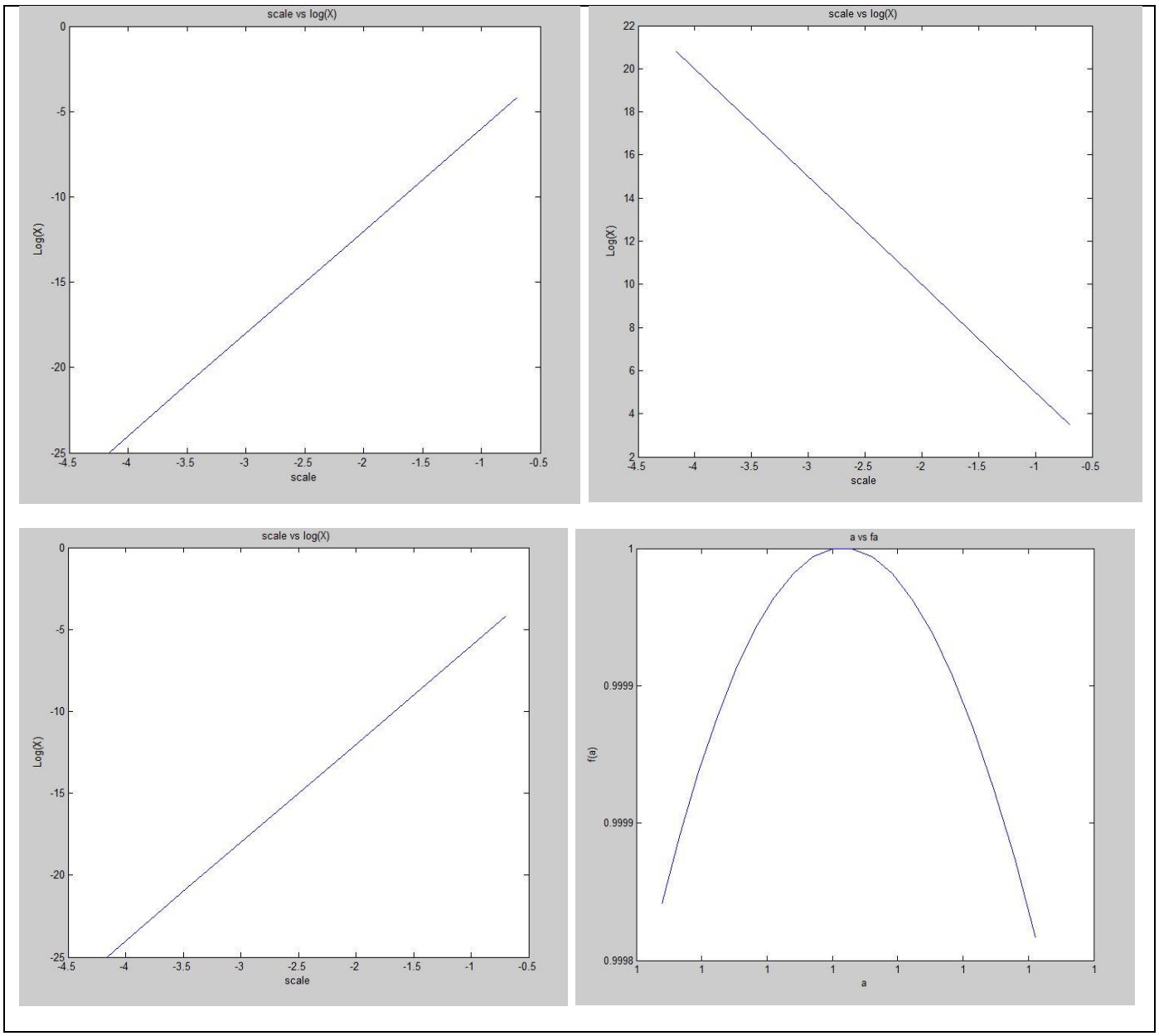
Σχήμα 43: Πάνω αριστερά (43-α), γραφική παράσταση των των δεδομένων μου (σύνολο καταθέσεων ελληνικών τραπεζών). Πάνω δεξιά (43-β), γραφική παράσταση της κατανομής πιθανότητας (probability distribution). Στο κέντρο και αριστερά (43-γ), γραφική παράσταση της Συνάρτηση συχέτισης ύψους-ύψους. Στο κέντρο και δεξιά (43-δ), γραφική παράσταση της λογαριθμοποιημένης Συνάρτηση συχέτισης ύψους-ύψους. Κάτω αριστερά (43-ε), γραφική παράσταση του φάσματος ισχύος (power spectral density). Κάτω δεξιά (43-στ), Γραφική παράσταση του λογαριθμικού φάσματος ισχύος (power spectral density).

Στο σχήμα 43-α παρατηρούμε ότι είναι πολύ εμφανής η πτωτική τάση που είδαμε και στο αρχικό μας γράφημα (σχήμα 43-α).

Το σχήμα 43-γ και 43-δ παρατηρούμε ότι έχουμε μία γραμμική σχέση. Πιστοποιείται επομένως η ύπαρξη fractality στα δεδομένα μας.

Τέλος, στο 43-στ βλέπουμε ότι υπάρχει μία μικρή κορυφή που φαίνεται αχνά πιο ψηλή από τις άλλες. Επομένως, ίσως αποτελεί πιθανή ένδειξη περιοδικότητας.

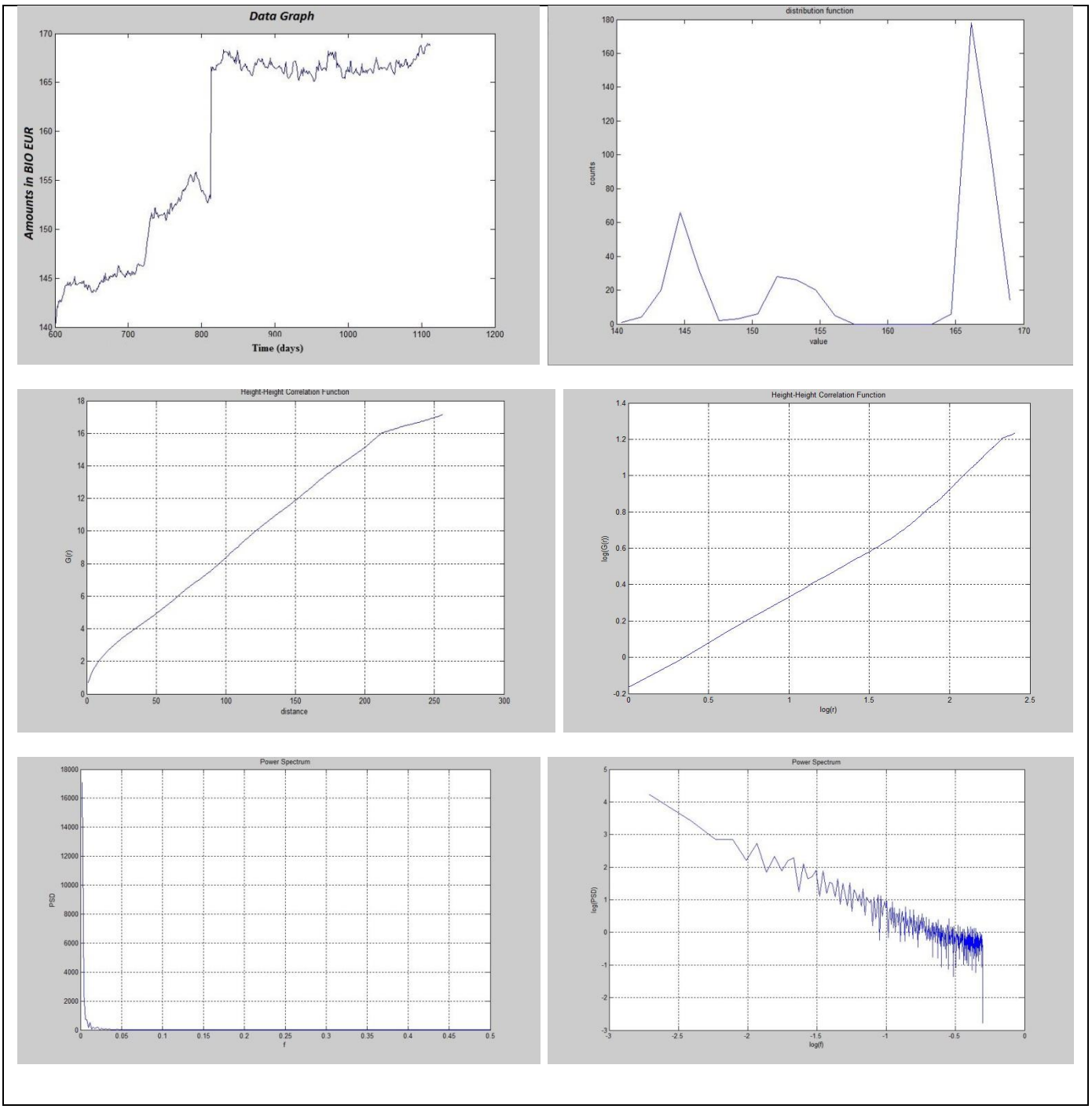
Στην συνέχεια, η μορφοκλασματική ανάλυση μας έδωσε τα εξής αποτελέσματα.



Σχήμα 44: Πάνω αριστερά (44-α), γραφική παράσταση του logX vs scale για αρνητικά q. Πάνω δεξιά (44-β), γραφική παράσταση του logX vs scale για θετικά q. Κάτω αριστερά (44-γ), γραφική παράσταση του q vs D. Κάτω δεξιά (44-δ), γραφική παράσταση του a vs f(a) των δεδομένων μου.

Από τα γραφήματα Σχήμα 44-α και Σχήμα 44-β παρατηρώ ότι έχουμε μία γραμμική σχέση, κάτι που πιστοποιεί την ύπαρξη fractality στα δεδομένα μου. Ο εκθέτης ωστόσο , αυτών των νόμων δύναμης αλλάζει με το q, γεγονός που αναδεικνύει τη μορφοκλασματική δομή των δεδομένων μου.

<u>Τώρα εξετάζουμε την δεύτερη περίοδο:</u>

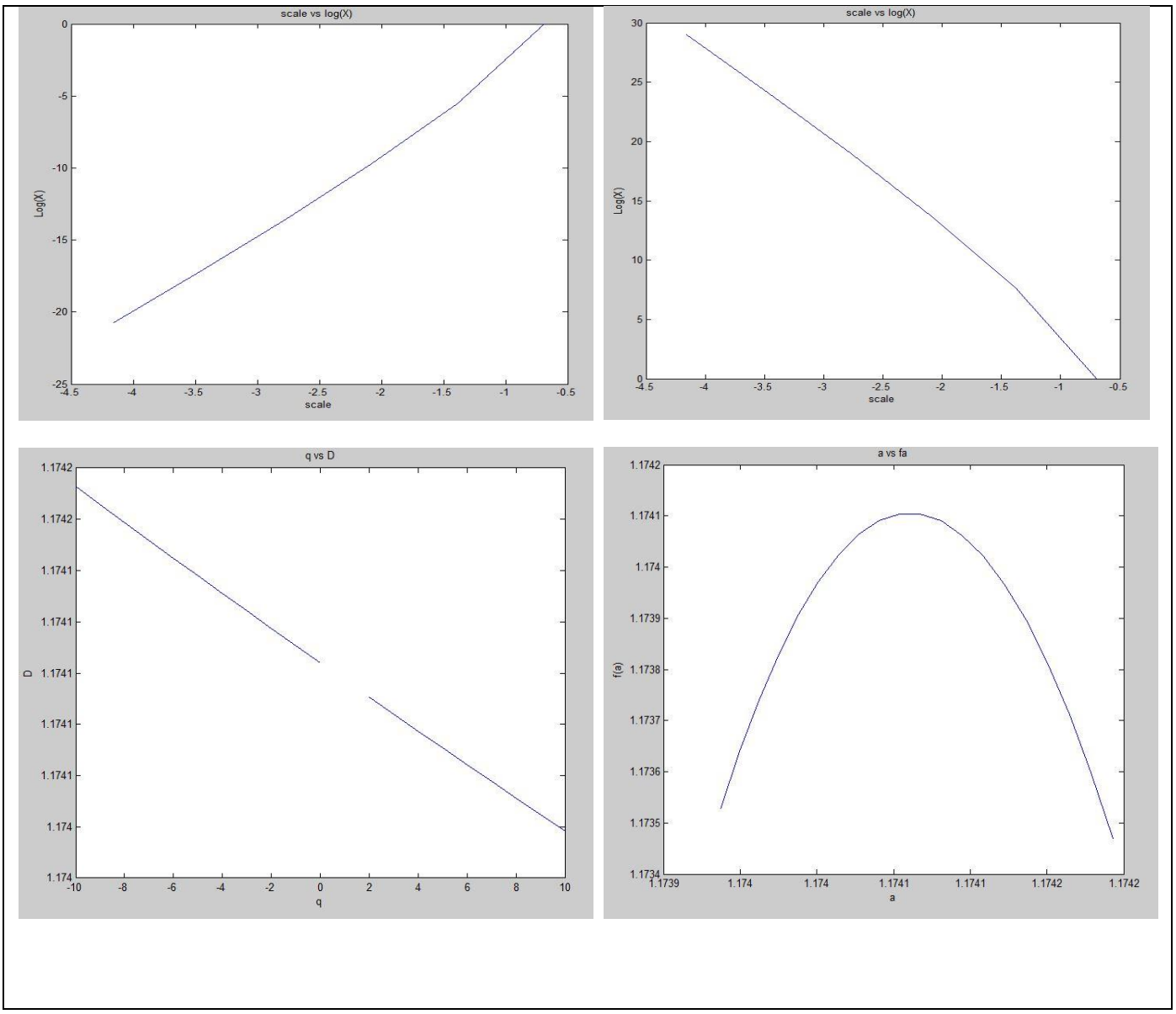


Σχήμα 45: Πάνω αριστερά (45-α), γραφική παράσταση των των δεδομένων μου (σύνολο καταθέσεων ελληνικών τραπεζών). Πάνω δεξιά (45-β), γραφική παράσταση της κατανομής πιθανότητας (probability distribution). Στο κέντρο και αριστερά (45-γ), γραφική παράσταση της Συνάρτηση συχέτισης ύψους-ύψους. Στο κέντρο και δεξιά (45-δ), γραφική παράσταση της λογαριθμοποιημένης Συνάρτηση συχέτισης ύψους-ύψους. Κάτω αριστερά (45-ε), γραφική παράσταση του φάσματος ισχύος (power spectral density). Κάτω δεξιά (45-στ), Γραφική παράσταση του λογαριθμικού φάσματος ισχύος (power spectral density).

Στο σχήμα 45-α είναι εμφανής μια αυξητική τάση στην αρχή, με μία απότομη άνοδο, και στην συνέχεια καταλήγουμε σε μια στάσιμη περίοδο, όπου υπάρχει μια στάσιμη κατάσταση ως και το τέλος της χρονοσειράς.

Στα σχήματα 45-γ και 45-δ παρατηρώ μια γραμμική σχέση (τόσο στη λογαριθμοποιημένη όσο και στην απλή περίπτωση της συνάρτησης συσχέτισης ύψους-ύψους).

Τέλος, κάνουμε μια μορφοκλασματική ανάλυση στα δεδομένα μας (της δεύτερης περιόδου).



Σχήμα 46: Πάνω αριστερά (46-α), γραφική παράσταση του logX vs scale για αρνητικά q. Πάνω δεξιά (46-β), γραφική παράσταση του logX vs scale για θετικά q. Κάτω αριστερά (46-γ), γραφική παράσταση του q vs D. Κάτω δεξιά (46-δ), γραφική παράσταση του a vs f(a) των δεδομένων μου.

Από το σχήμα 46-α και 46-β παρατηρούμε ότι η γραμμική σχέση χαλάει, επομένως, δεν φαίνεται να έχουνε την μορφοκλασματική ιδιότητα τα δεδομένα μου, σε όλο το εύρος τους.

Επίσης, αν παρατηρήσουμε το γεγονός ότι στο σχήμα 46-δ το εύρος τιμών είναι πολύ μικρό, συνειδητοποιούμε ότι τα δεδομένα μας δεν έχουν την πολύ-μορφοκλασματική ιδιότητα.

Τέλος, συνοψίζοντας, δίνουμε τον πίνακα με τα αποτελέσματά μας.

Δεδομένα	Περίοδος (ανά μέρες)	d (διάσταση)	μορφοκλασματικότητα	Πολύ-μορφοκλασματικότητα
	22	1.5082	Ισχυρή ύπαρξη	Περιορισμένη ύπαρξη

Πίνακας 4: Δίνεται για την χρονοσειρά μας , η περιοδικότητα που βρήκαμε, η μορφοκλασματική διάσταση, η ύπαρξη της μορφοκλασματικότητας και πολύ-μορφοκλασματικότητας καθώς και σχολιασμός της ισχύς τους.

5. Συμπεράσματα:

Η ανάλυση που κάναμε ,όπως προαναφέραμε, είχε σαν κύριο στόχο την ανίχνευση και ανάλυση των περιοδικοτήτων που εμφανίζονται σε χρηματοοικονομικές χρονοσειρές. Κύριος στόχος μας είναι να κατανοήσουμε εκτός από τον τρόπο που εμφανίζεται μία περιοδικότητα, αλλά και πιθανόν μελλοντικές προβλέψεις, καθώς και καλύτερη κατανόηση του μηχανισμού που κρύβεται πίσω από τις περιοδικότητες. Η height - height correlation μας βοηθά σε πολύ μεγάλο βαθμό, καθώς και η ανάλυση μετασχηματισμού fourier, από την οποία μεταβαίνουμε στην fractal και στην πολύ-μορφοκλασματική ανάλυση, ένα πολύ σημαντικό, ισχυρό και άξιο προσοχής εργαλείο. Έτσι μεταβαίνουμε και στην ανάλυση της κλίμακας (scaling) . Τα εργαλεία που χρησιμοποιήσαμε όμως απαιτούν προσεκτική μελέτη, έρευνα και ανάλυση, καθώς πολύ εύκολα μπορεί να προβεί κάποιος σε λάθη.

Μερικά από τα γενικότερα συμπεράσματα στα οποία καταλήξαμε ύστερα από την ανάλυσή μας, είναι τα εξής. Κατ' αρχάς, στην ανάλυση της νομισματικής ισοτιμίας των χωρών Καναδάς, Ιαπωνία, Σουηδία και Ελβετία με την Μεγάλη Βρετανία (πόλος σύγκρισης αποτέλεσε η Μεγάλη Βρετανία), παρατηρήσαμε ότι όλες οι τεχνικές μέθοδοι που χρησιμοποιήσαμε (συνάρτηση συσχέτισης ύψους-ύψους, ανάλυση μετασχηματισμού fourier), μας δείχνουν ότι παρουσιάζεται μια (περίπου) 100ήμερη επαναληπτικότητα ως προς το πότε πιάνει τοπικό ελάχιστο η ισοτιμία. Στην συνέχεια, η πολυ-μορφοκλασματική ανάλυση μας έδειξε ότι πρέπει να υπάρχει κάποια πολυ-μορφοκλασματική ιδιότητα στα καναδικά δεδομένα μου. Στην συνέχεια, ως προς τα ιαπωνικά δεδομένα παρατηρείται μία συνεχής πτώση της ισοτιμίας και επίσης, παρουσία ίχνους περιοδικής συμπεριφοράς με περίοδο περίπου 5 χρόνια (60 μήνες). Επίσης, τα δεδομένα μας παρουσιάζουν fractal ιδιότητα, αλλά το φάσμα της πολυ-μορφοκλασματικότητας δεν είναι αρκετά μεγάλο. Στην περίπτωση των σουηδικών δεδομένων υπάρχει μία πιθανή περιοδικότητα (όπως παρατηρείται από την ανάλυση μετασχηματισμού fourier και λιγότερο από την height- height correlation function). Υπάρχει μία αμυδρή περιοδικότητα με περίοδο επανάληψης 45 μήνες. Η πολύ-μορφοκλασματική ανάλυση μας δείχνει πως τα δεδομένα μας έχουν την fractal ιδιότητα . Τέλος, η ανάλυση των ελβετικών δεδομένων τόσο με τις μεθόδους ανάλυση μετασχηματισμού fourier και height- height correlation function, όσο και η πολύ-μορφοκλασματική ανάλυση μας πιστοποιούν μια fractal συμπεριφορά στα δεδομένα μας. Επίσης, παρατηρήσαμε ότι τα ιαπωνικά με τα ελβετικά δεδομένα παρουσίαζαν μία όμοια πτωτική τάση και χρησιμοποιώντας την παλινδρόμηση και την cross-correlation καταλήξαμε

στο συμπέρασμα ότι μέχρι την χρονική στιγμή 500 έχουν εξάρτηση τα δεδομένα. Αντίθετα, τα καναδικά με τα σουηδικά δεν παρουσίασαν συσχέτιση, παρόλο το γεγονός ότι από τις γραφικές παραστάσεις Σχήμα 13-a και Σχήμα 17-a , φαίνεται ότι τα δεδομένα μου παρουσιάζουν ίδιες χρονικές στιγμές τα έντονα (μεγάλα) τους τοπικά μέγιστα και ελάχιστα.

Για τα μηνιαία δεδομένα νομισματικών μεγεθών (χαρτονομίσματα και νομίσματα εν κυκλοφορία), βγάλαμε το συμπέρασμα ότι διαδραματίζεται μία συνεχής άνοδος των τιμών τους. Από την ανάλυση μετασχηματισμού fourier βγάλαμε το συμπέρασμα ότι ίσως έχω μία μικρή περιοδικότητα, 100 μηνών η οποία όμως απαιτεί περαιτέρω έρευνα . Χρησιμοποιώντας την μέθοδο των πρώτων διαφορών στα δεδομένα μου, παρατηρώ ότι η ανάλυση μετασχηματισμού fourier μου δείχνει ξεκάθαρα την ύπαρξη περιοδικοτήτων στα δεδομένα μου. Επομένως, ήταν εμφανής η σημασία της χρήσης της μεθόδου των πρώτων διαφορών δεδομένου ότι προκαλώ μία stationarity στα δεδομένα μου με αυτό τον τρόπο και επομένως, μπορώ να έχω μια διαφορετική προσέγγιση. Η πολύ-μορφοκλασματική ανάλυση δεν μου έδωσε κάποια σημαντική πληροφορία για την ύπαρξη multi-fractality.

Τέλος, στην ανάλυσή μας για τα μηνιαία δεδομένα για το ακαθάριστο εγχώριο προϊόν και για τον δείκτη βιομηχανικής παραγωγής, μπορούμε να πούμε ότι για τις τιμές του ακαθάριστου εγχώριου προϊόντος σε συντελεστές τιμών κόστους είναι εμφανής από την ανάλυση μετασχηματισμού fourier αλλά ακόμα περισσότερο από την height-height correlation, ότι υπάρχει περιοδικότητα στα δεδομένα μου, και μάλιστα εμφανίζεται περίπου ανά 18 μέρες. Επίσης, η πολύ-μορφοκλασματική ανάλυση μας δείχνει ότι τα δεδομένα μας έχουν μια καλή fractal συμπεριφορά η οποία όμως δεν έχει ευρύ, μεγάλο φάσμα και σε πολυ-μορφοκλασματική διάσταση . Ακριβώς τα ίδια αποτελέσματα μας έδωσαν οι αναλύσεις μας για το ακαθάριστο εγχώριο προϊόν σε τιμές αγοράς. Επομένως, βλέποντας και από τα γραφήματα των δεδομένων μου (Σχήμα 24, Σχήμα 26) ότι έχουν όμοια δομή οι χρονοσειρές αυτές, έκανα έναν έλεγχο για γραμμική παλινδρόμηση και τα αποτελέσματα που πήρα ήταν ότι υπάρχει μια πολύ μεγάλη συσχέτισή τους. Τώρα, για τον δείκτη βιομηχανικής παραγωγής εξαγάγαμε μέσα από την ανάλυση μετασχηματισμού fourier και περισσότερο από την height-height correlation, ότι τα δεδομένα μου έχουν περιοδικότητα, η οποία χρήζει περαιτέρω ανάλυσης. Επίσης, από την πολύ-μορφοκλασματική ανάλυση, εξαγάγαμε το συμπέρασμα ότι τα δεδομένα μας έχουν μια fractal δομή, η οποία όμως δεν έχει την ιδιότητα multi-fractal.

Από όλη την ανάλυσή μας, παρατηρήσαμε στους δείκτες GDP (ακαθάριστο εγχώριο προϊόν), τόσο σε συντελεστές τιμών κόστους όσο και σε τιμές αγοράς, αλλά και στην περίπτωση των ελληνικών καταθέσεων τραπεζών, ότι τα δεδομένα μας, έχουν μορφοκλασματική διάσταση περίπου $d \cong 1.5$. Επομένως, μπορούμε να πούμε ότι τα δεδομένα μας ακολουθούν την μορφοκλασματική κίνηση Brown και αυτό μας δίνει το έναυσμα, σε μελλοντική εργασία, να κάνουμε μια προσπάθεια ανάλυσης και πιθανόν πρόβλεψης της συμπεριφοράς των δεδομένων με βάση το στοχαστικό μοντέλο μορφοκλασματικής κίνησης Brown.

Εν κατακλείδι, από όλη την ανάλυσή μας, δημιουργείται η ανάγκη για περαιτέρω προσπάθεια, όχι μόνο στα πλαίσια ανάλυσης και βαθύτερης κατανόησης των

μηχανισμών που προκαλούν τις περιοδικότητες και της scaling συμπεριφοράς, αλλά και προφανώς, μιας μελλοντικής πρόβλεψης. Για την ακρίβεια, εκτός από τα εργαλεία που χρησιμοποιήσαμε, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε το στοχαστικό μοντέλο μορφοκλασματικής κίνησης Brown, αλλά και γραμμικές μεθόδους όπως τις μεθόδους ARCH, ARIMA[40],που χρησιμοποιούνται ευρέως στην οικονομική ανάλυση, και να κάνουμε μία σύγκριση. Αυτά όμως στα πλαίσια πιο πολύ πρόβλεψης, σε πιθανή μελλοντική εργασία.

6. Βιβλιογραφία-Αναφορές:

[1]**Scott M. Smith, Gerald S. Albaum** .An Introduction to Marketing Research

[2] **Li-Jen Ko., Edward J. Blocher., P. Paul Lin.** Prediction of Corporate Financial Distress: An Application of the Composite Rule Induction System . The International Journal of Digital Accounting Research Vol. 1, No. 1, pp. 69-85.

[3] **E.L. Altman, G. Marco, F. Varetto**. Corporate distress diagnosis: comparisons using linear discriminant analysis and neural networks (the Italian experience), J. Bank. Finance 28 (1994) 505–529.

[4] **A.I. Dimitras, R. Slowinski, R. Susmaga.** Business failure prediction using rough sets, Euro. J. Oper. Res. 114 (1999) 263–280.

[5] **H. Li, J. Sun**. Ranking order case-based reasoning for financial distress prediction, Knowel.-Based Syst. 21 (2008) 868–878.

[6] **J.H. Min, Y.C. Lee.** Bankruptcy prediction using support vector machine with optimal choice of kernel function parameters, Expert Syst. Appl. 28 (2005) 603–614.

[7] **M.Y. Chen, A hybrid ANFIS**. model for business failure prediction utilizing particle swarm optimization and subtractive clustering, Inform. Sci. 220 (2013) 180–195.

[8] **H. Li, J. Sun**. Predicting business failure using an RSF-based case-based reasoning ensemble forecasting method, J. Forecast. 32 (2013) 180–192.

[9] **N. Senan, R. Ibrahim, N.W. Nawi, I.T.R. Yanto, T. Herawan.** Soft set theory for feature selection of traditional Malay musical instrument sounds, in: Zhu et al. (Eds.), Information Computing and Applications, Publishing, Berlin, 2010, pp. 253–260.

[10] **Juliana Yim and Heather Mitchell** . A Comparison of Corporate Failure Models in Australia: Hybrid Neural Networks, Logit Models and Discriminant Analysis. P.W.H. Chung, C.J. Hinde, M. Ali (Eds.): IEA/AIE 2003, LNAI 2718, pp. 348–358, 2003. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2003.

[11] **Sangjae Lee,Wu Sung Choi** . A multi-industry bankruptcy prediction model using back propagation neural network and multivariate discriminant analysis. Expert Systems with Applications 40 (2013) 2941–2946.

[12] **Sofie Balcaen, Hubert Ooghe** .35 years of studies on business failure: an overview of the classic statistical methodologies and their related problems. The British Accounting Review 38 (2006) 63–93.

[13] **David Besanko, Ronald R. Braeutigam** .Microeconomics (4th edition).

[14] **Z. Chalabi, S. Hajat, P. Wilkinson, B. Erens, L. Jones, N. Mays** .Evaluation of the cold weather plan for England: modelling of cost-effectiveness. Public Health. 2015 Dec 21. 1 - 7 .

[15] **Steven Z. Kassakian, Thomas R. Yackel, Thomas Deloughery, David A. Dorr** . Clinical Decision Support Reduces Overuse of Red Blood Cell Transfusions: Interrupted Time Series Analysis

[16] **Stephen J. Taylor .** Forecasting Market prices

[17] **Jan G. De Gooijer , Rob J. Hyndman** . 25 years of time series forecasting. International Journal of Forecasting 22 (2006) 443 – 473.

[18] **Fama, E.F.**, 1965. The behaviour of stock market prices. Journal of Business 38, 34-105.

[19] **Fama. E.F. and M.E. Blume.** 1966, Filter tests and stock market trading, Journal of Business 39. 226-241.

[20] **Labys, W.C. and C.W.J. Granger,** 1970. Speculation, hedging and commodity price forecasts (Heath, Lexington, MA).

[21] **Cargill. T.F. and G.C. Rausser,** 1975. Temporal behaviour in commodity futures markets, Journal of Finance 30. 1043-1053.

[22] **Jennergren.** L.P., 1975, Filter tests of Swedish share prices. in: E.J. Elton and M.J. Gruber, eds. International capital markets (North-Holland. Amsterdam) 55-67.

[23] **Taylor. S.J.,** 1980, Conjectured models for trends in financial prices, tests and forecasts, Journal of the Royal Statistical Society, Series A, 143. 338-362

[24] **Cooper, J.C.B..** 1982, World stock markets: Some random walk tcjts, Applied Economics 14, 515-531.

[25] **Edgar E. Peters .** Fractal market analysis (applying chaos theory to investment and economics).

[26] **Shuwen Lou, Cheng Ouyang** - Fractal dimensions of rough differential equations driven by fractional Brownian motions. Stochastic Processes and their Applications.

[27] **Xiangyi Meng, Jian-Wei Zhang, Hong Guo** - Quantum Brownian motion model for the stock market . Physica A 452 (2016) 281–288.

[28] **Francis Decroos, Kris Dierckens, Vincent Pollet, Ronald Rousseau, Hugo Tassington and Koen Verweyen.** Spectral methods for detecting periodicity library circulation data: a case study . Information Processing & Management. Vol. 33, No. 3, PP. 393403, 1997. Pergamon.

[29] **Amitabha Ghosh .** Scaling laws (Springer) . S. Chakraborty (ed.), Mechanics Over Micro and Nano Scales, 61 DOI 10.1007/978-1-4419-9601-5_2 . Springer - Science & Business Media, LLC 2011.

[30] **Sai Liang, Zhengling Qi, Shen Qu, Ji Zhu, Anthony S.F. Chiu, Xiaoping Jia, Ming Xu .** Scaling of global input – output network. Physica A Volume 452, 15 June 2016, Pages 311–319.

[31] **Μάνος Δανέζης, Στράτος Θεοδοσίου.** Το σύμπαν που αγάπησα.

[32] **R. Lopes, N. Betrouni .** Fractal and multifractal analysis: A review . Medical image analysis, 2009. Elsevier.

[33] **Stanislav Jurecka, Heike Angermann, Hikaru Kobayashi, Masao Takahashi,Emil Pincík .** Multifractal analysis of textured silicon surfaces. Applied Surface Science 301 (2014) 46–50 .

[34] **Xia Sun, Zhuxi Fub, ZiqinWu .** Multifractal analysis and scaling range of ZnO AFM images. Physica A 311 (2002) 327 – 338 .

[35] **Guodong Liu, LingyuanWu, FupingZhang .** Multifractal spectra of atomic force microscope images of lanthanumoxide thin films deposited by electron beam evaporation. Physica A 311 (2002) 327 – 338.

[36] **D.H.A. Blank , M.E. Bijlsma , R. Moerman, H. Rogalla, F.J.B. Stork, A. Roshko** . Surface roughness and height-height correlations dependence on thickness of YBaCuO thin films . Journal of Alloys and Compounds 251 (1997) 31-33.

[37] **Oppenheim, A. V., Willsky, A. S., & Young, I. T. (1983).** *Signals and systems.* London: Prentice-Hall Int.

[38] **John C. Russ .** Fractal surfaces. Plenum press – New York&London.

[39] **A Eke, P Herman, L Kocsis and L R Kozak .** Fractal characterization of complexity in temporal physiological signals. Physiol Meas. 2002 Feb;23(1):R1-38.

[40] **Edwad J. Lusk .** Isolating Periodicities to refine the organization's control system : an analysis of four methods. North-Holland Publishing Company (1980) 51-61.