ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
Δ.Π.Μ.Σ. ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ

Τεχνικές Ελέγχου της Διασποράς Διεργασιών Εντός Γραμμής Παραγωγής.

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
της
Αγγελικής Κ. Λάππα
Α.Μ.: 09414020

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:	**Κος Κουκουβίνος Χρήστος** **Καθηγητής Ε.Μ.Π**

ΑΘΗΝΑ, 2016

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF APPLIED MATHEMATICAL AND PHYSICAL SCIENCES
MASTER: “APPLIED MATHEMATICS”

Quality Techniques of Dispersion Processes In Production Line

Master Thesis
by
Angela K. Lappa
I.D.: 09414020

SUPERVISOR PROFESSOR: **Koukouvinos Christos**
Professor NTUA

ATHENS,2016

Περίληψη

Τα διαγράμματα ελέγχου χρησιμοποιούνται ευρέως στην παρακολούθηση της σταθερότητας και της απόδοσης της διεργασίας με σκοπό την ανίχνευση μη φυσιολογικών διακυμάνσεων (θέσεως και κλίμακας) στις παραμέτρους της διεργασίας. Η μεταβλητότητα των παρατηρήσεων της διεργασίας είναι ένα άλλο χαρακτηριστικό κλειδί που επηρεάζει την ποιότητα των προϊόντων.

Ο κύριος στόχος της διπλωματικής μας εργασίας είναι να παρουσιάσουμε τα κυριότερα μονομεταβλητά διαγράμματα ελέγχου που έχουν προταθεί στην πρόσφατη διεθνή βιβλιογραφία, και των ιδιοτήτων τους διεξοδικά και με σαφήνεια προς τους αναγνώστες της. Συγκεκριμένα, θα παρουσιάσουμε διαγράμματα ελέγχου μεταβλητών για την παρακολούθηση της μεταβλητότητας της διεργασίας, τα οποία βασίζονται στις κυριότερες στατιστικές συναρτήσεις διασποράς. Η παρούσα εργασία στοχεύει να βοηθήσει τους αναγνώστες στην επιλογή αποτελεσματικών διαγραμμάτων ελέγχου παρακολούθησης της διασποράς της διεργασίας.

Στην παρούσα εργασία περιλαμβάνονται τα ακόλουθα κεφάλαια: στο Κεφάλαιο 1 παρουσιάζεται ο Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών και το βασικότερο εργαλείο του, δηλαδή τα διαγράμματα ελέγχου και στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζονται συνοπτικά τα διαγράμματα ελέγχου για την παρακολούθηση της θέσης της διεργασίας και στα κεφάλαια 3 έως 6, παρουσιάζουμε τα διαγράμματα ελέγχου για την παρακολούθηση της διασποράς της διεργασίας. Συγκεκριμένα, στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζονται τα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart, στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζονται τα διαγράμματα ελέγχου τύπου CUSUM, στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζονται τα διαγράμματα ελέγχου τύπου EWMA και στο Κεφάλαιο 6 παρουσιάζονται τρία εναλλακτικά διαγράμματα τύπου μνήμης. Στο τελευταίο Κεφάλαιο παρουσιάζονται κάποιες συμπερασματικές παρατηρήσεις μαζί με κάποιες ιδέες για μελλοντική έρευνα.

Λέξεις Κλειδιά: ARL, ARARL, AEQL, Shewhart, CUSUM, EWMA, ΣΕΔ, διασπορά, εύρος, μεταβλητότητα, διάγραμμα ελέγχου,

Abstract

Control charts are widely used to monitor stability and performance of processes with an aim of detecting abnormal variations (location and scale) in process parameters. The process variability of the observations is another quality key feature that influences the quality of the products.

The main objective of this thesis is the presentation of the main univariate control control charts, that have been proposed in the recent literature, and their properties in detail and with clarity to the readers. Specifically, we introduce variable control charts that monitor process variability, based on the main statistical dispersion functions. This paper aims to help readers in choosing effective control charts monitoring the process dispersion.

The present paper includes the following chapters: in Chapter 1 the Statistical Process Control and its most important tool, namely the control charts are presented, in Chapter 2 control charts that monitor the location process are briefly presented, and Chapters 3 to 6 control chart that monitor the dispersion process are presented. In particular, in Chapter 3 Shewhart type control charts are presented, in Chapter 4 CUSUM type control charts are presented, in Chapter 5 EWMA type control charts are presented and in Chapter 6 three alternative memory type control charts are presented. In last chapter we have some concluding remarks along with some ideas for future research.

Key-words : ARL, ARARL, AEQL, Shewhart, CUSUM, EWMA, SPC, dispersion, range, variability, control chart

Ευχαριστίες

Η εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας πραγματοποιήθηκε υπό την επίβλεψη του καθηγητή του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, κ. Χρήστο Κουκουβίνο, τον οποίο θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά για την ανάθεση της συγκεκριμένης εργασίας, δίνοντας μου με αυτό τον τρόπο την δυνατότητα να ασχοληθώ με ένα θέμα το οποίο ανήκει στα ερευνητικά μου ενδιαφέροντα.

Επιπρόσθετα, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά την οικογένειά μου για την υποστήριξη και την ενθάρρυνση που είχα ώστε να ολοκληρώσω την προσπάθειά μου. Χωρίς τη συμβολή των παραπάνω ανθρώπων θα ήταν αδύνατη η δημιουργία και παρουσίαση αυτής της εργασίας.

Λάππα Αγγελική
Αθήνα, 2016

Πίνακας Περιεχομένων

Περίληψη ..... **v**
Abstract ..... **vii**
Ευχαριστίες ..... **ix**
Πίνακας Περιεχομένων ..... **xi**
Κατάλογος Συντομογραφιών ..... **xv**
Λίστα Πινάκων ..... **xvii**
Λίστα Σχημάτων ..... **xxi**
1 Διαγράμματα ελέγχου και Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών **23**
1.1 Εισαγωγή 23
1.1.1 Η ποιότητα και οι διαστάσεις της 23
1.1.2 Συνιστώσες του στατιστικού ελέγχου ποιότητας 24
1.2 Στατιστικός Έλεγχος Διεργασίας 24
1.3 Διαγράμματα Ελέγχου 26
1.3.1 Εισαγωγή 26
1.3.2 Βασικές αρχές των Διαγραμμάτων Ελέγχου 26
1.3.3 Προειδοποιητικά Όρια Ελέγχου 28
1.3.4 Κανόνες ευαισθητοποίησης για τα διαγράμματα ελέγχου 28
1.3.5 Αναγνώριση μοτίβων 29
1.3.6 Μέτρα απόδοσης ενός διαγράμματος ελέγχου 30
1.3.7 Φάσεις I και II 32
1.3.8 Εκτίμηση της Μέση τιμής και της Διασποράς 33
1.3.8.1 Η περίπτωση των Μεμονωμένων Παρατηρήσεων 33
1.3.8.2 Η Περίπτωση των δειγμάτων 33
2 Διαγράμματα ελέγχου για την παρακολούθηση της θέσης της διεργασίας 35
2.1 Εισαγωγή 35
2.2 Διαγράμματα Ελέγχου τύπου Shewhart 35
2.2.1 Διαγράμματα Ελέγχου Μεταβλητών 35
2.2.1.1 X Διάγραμμα ελέγχου 35
2.2.2 Διαγράμματα Ελέγχου για μεμονωμένες παρατηρήσεις 36
2.3 Διαγράμματά ελέγχου τύπου CUSUM 37
2.3.1 Διάγραμμα Tabular CUSUM 37
2.3.2 Τυποποιημένο διάγραμμα CUSUM 38
2.4 Διαγράμματα ελέγχου τύπου EWMA 38
2.4.1 Διάγραμμα Ελέγχου με Κινητούς Μέσους και Εκθετικά Βάρη 39
2.4.2 Διάγραμμα Ελέγχου με Κινητούς Μέσους 39
3 Διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart για την παρακολούθηση της διασποράς της διεργασίας 41
3.1 Εισαγωγή 41
3.2 Στατιστικές συναρτήσεις Διασποράς 41
3.2.1 Δειγματικό εύρος 41
3.2.2 Δειγματική τυπική απόκλιση 42
3.2.3 Δειγματική διακύμανση 42

3.2.4 Ενδοτεταρτημοριακό εύρος ... 42
3.2.5 Εκτιμήτρια του Downton ... 42
3.2.6 Μέση διαφορά του Gini ... 43
3.2.7 Διάμεση Απόλυτη Απόκλιση ... 43
3.2.8 S_n και Q_n εκτιμήτριες ... 43
3.2.9 τ *(tau)* εκτιμήτρια ... 44
3.3 Δομή των Διαγραμμάτων Ελέγχου ... 45
3.3.1 R Διάγραμμα Ελέγχου ... 45
3.3.2 S Διάγραμμα Ελέγχου ... 45
3.3.3 S^2 Διάγραμμα Ελέγχου ... 46
3.3.4 Q Διάγραμμα ελέγχου ... 46
3.3.5 D Διάγραμμα Ελέγχου ... 48
3.3.6 G Διάγραμμα Ελέγχου ... 49
3.3.7 MAD Διάγραμμα Ελέγχου ... 50
3.3.8 S_n και Q_n Διαγράμματα ελέγχου ... 50
3.3.9 τ (*tau*) Διάγραμμα ελέγχου ... 51
3.3.10 Βελτιωμένα R *(IRC)* και S *(ISC)* Διαγράμματα Ελέγχου ... 51
3.3.10.1 Βελτιωμένο R *(IRC)* διάγραμμα ... 52
3.3.10.2 Βελτιωμένο S *(ISC)* διάγραμμα ... 54
3.3.11 Διαγράμματα Ελέγχου για μεμονωμένες παρατηρήσεις ... 55
3.4 Σύγκριση απόδοσης των Διαγραμμάτων Ελέγχου ... 56
3.5 Αριθμητικό παράδειγμα ... 57
4 Διαγράμματα ελέγχου τύπου CUSUM για την παρακολούθηση της διασποράς της διεργασίας ... 59
4.1 Εισαγωγή ... 59
4.1.1 Παραλλαγές της RSS και ιδιότητες ... 60
4.1.1.1 ERSS ... 61
4.1.1.2 DERSS ... 63
4.2 Scale CUSUM Διάγραμμα Ελέγχου ... 63
4.3 CUSUM-$\ln S^2$ Διάγραμμα ελέγχου ... 64
4.4 CP CUSUM Διάγραμμα ελέγχου ... 64
4.5 CUSUM-S^2 διάγραμμα ελέγχου ... 65
4.6 Κλασικό CS-CUSUM R διάγραμμα ελέγχου ... 66
4.7 CS - CUSUM R υπό τις ERSS και DERSS ... 68
4.7.1 CS - CUSUM R ERSS ... 69
4.7.2 CS - CUSUM R DERSS ... 69
4.7.3 Αξιολόγηση απόδοσης του CS-CUSUM R υπό τις ERSS και DERSS 70
4.8 Κλασικό CS-CUSUM S διάγραμμα ελέγχου ... 72
4.9 CS - CUSUM S υπό τις ERSS και DERSS ... 74
4.9.1 CS - CUSUM S ERSS ... 74
4.9.2 CS - CUSUM S DERSS ... 75
4.9.3 Αξιολόγηση απόδοσης του CS-CUSUM S υπό τις ERSS και DERSS 76
4.10 Σύγκριση απόδοσης των Διαγραμμάτων Ελέγχου ... 78
4.11 Πρακτική εφαρμογή ... 83

5 Διαγράμματα ελέγχου τύπου EWMA για την παρακολούθηση της διασποράς της διεργασίας ... 87
5.1 Εισαγωγή ... 87
5.2 MGH – EWMA διάγραμμα ελέγχου ... 88
5.3 CH-EWMA διάγραμμα ελέγχου ... 88
5.4 *S^2-EWMA* διάγραμμα ελέγχου ... 89
5.5 EWMA S διάγραμμα ελέγχου ... 91
5.6 EWMA R διάγραμμα ελέγχου ... 92
5.7 SJ-EWMA διάγραμμα ελέγχου ... 93
5.8 *EWMA- JS^2* διάγραμμα ελέγχου ... 94
5.9 HHW1 και HHW2 - EWMA διαγράμματα ελέγχου ... 96
5.9.1 HHW1-EWMA διάγραμμα ελέγχου ... 96
5.9.2 HHW2-EWMA διάγραμμα ελέγχου ... 97
5.10 Διάγραμμα Ελέγχου με Κινητούς Μέσους ... 97
5.11 Αριθμητικό παράδειγμα ... 101
5.11.1 Παράδειγμα 1 ... 101
5.11.2 Παράδειγμα 2 ... 102
6 Εναλλακτικά Διαγράμματα τύπου μνήμης ... 105
6.1 Εισαγωγή ... 105
6.2 Μικτό EWMA-CUSUM διάγραμμα ελέγχου (CS-EWMA διάγραμμα) ... 105
6.2.1 Δομή CS-EWMA διαγραμμάτων ελέγχου ... 105
6.3 Κυμαινόμενα διαγράμματα ... 109
6.3.1 Floating T - S^2 Διάγραμμα ... 109
6.3.2 Floating $U - S^2$ Διάγραμμα ... 111
6.4 Συγκρίσεις απόδοσης ... 112
6.4.1 Σύγκριση απόδοσης του CS-EWMA ... 112
6.4.2 Σύγκριση απόδοσης των floating διαγραμμάτων ... 115
6.5 Αριθμητικό Παράδειγμα ... 116
7 Σύνοψη ... 119
Παραρτήματα ... 123
I. Σταθερές για την ανάπτυξη διαγραμμάτων ελέγχου τύπου Shewhart ... 123
II. Σταθερές για την κατασκευή των διαγραμμάτων τύπου Shewhart για την παρακολούθηση της διασποράς της διεργασίας ... 124
III. Σταθερές για τα διαγράμματα τύπου μνήμης ... 128
Βιβλιογραφία ... 131

Κατάλογος Συντομογραφιών

α	Πιθανότητα εσφαλμένου συναγερμού	Probability False Alarm
λ	Παράμετρος εξομάλυνσης	Smoothing parameter
$\boldsymbol{\mu}$	Μέση Τιμή	Mean Value
$\boldsymbol{\mu_0}$	Εντός ελέγχου μέση τιμή	In control mean
$\boldsymbol{\mu_1}$	Εκτός ελέγχου μέση τιμή	Out of control mean
$\boldsymbol{\sigma^2}$	Διασπορά	Variance
$\boldsymbol{\sigma_0}$	Εντός ελέγχου τυπική απόκλιση	In control standard deviation
$\boldsymbol{\sigma_1}$	Εκτός ελέγχου τυπική απόκλιση	Out of control standard deviation
ΣΕΔ	Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών	Statistical Process Control
$\boldsymbol{\tau}$	Μέγεθος μετατόπισης (σ_1/σ_0)	Amount of shift (σ_1/σ_0)
$\boldsymbol{\tau}$ *(tau)*	τ εκτιμήτρια	τ *(tau)* estimate
$\boldsymbol{AEQL}$	Μέση τετραγωνική πρόσθετη απώλεια	Average extra quadratic loss
$\boldsymbol{ARARL}$	Μέσος λόγος του ARL	Average ratio of ARL
$\boldsymbol{ARL}$	Μέσο Μήκος Ροής	Average Run Length
$\boldsymbol{ARL_0}$	Εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής	In-control average run length
$\boldsymbol{ARL_1}$	Εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής	Out-of-control average run length
$\boldsymbol{ATS}$	Μέσος χρόνος σήματος	Average time to signal
$\boldsymbol{C^+}$	άνω σωρευτικό άθροισμα	one sided upper cusum
$\boldsymbol{C^-}$	κάτω σωρευτικό άθροισμα	one sided lower cusum
cdf	αθροιστική συνάρτηση κατανομής	cumulative distribution function
$\boldsymbol{CL}$	Κεντρική Γραμμή	Center Line
CS-CUSUM R	Συνδυασμένο *Shewhart–CUSUM R*	Combined *Shewhart- CUSUM R*
CS-CUSUM R ERSS	Συνδυασμένο *Shewhart–CUSUM R* υπό την ERSS	Combined *Shewhart- CUSUM R* on *ERSS*
CS-CUSUM R DERSS	Συνδυασμένο *Shewhart–CUSUM R* υπό την DERSS	Combined *Shewhart-CUSUM R* on *DERSS*
CS-CUSUM S	Συνδυασμένο *Shewhart–CUSUM S*	Combined *Shewhart-CUSUM S*
CS-CUSUM S ERSS	Συνδυασμένο *Shewhart–CUSUM S* υπό την ERSS	Combined *Shewhart-CUSUM S* on *ERSS*
CS-CUSUM S DERSS	Συνδυασμένο *Shewhart–CUSUM S* υπό την DERSS	Combined *Shewhart-CUSUM S* on *DERSS*
CS-EWMA	Συνδυασμένο *EWMA-CUSUM* διάγραμμα	Combimed *EWMA-CUSUM* chart
CUSUM	Σωρευτικό άθροισμα	Cumulative Sum
CUSUM R	*CUSUM* διάγραμμα βασισμένο στο R	*CUSUM* chart based on *R*
CUSUM S	*CUSUM* διάγραμμα βασισμένο στο S	*CUSUM* chart based on *S*
CUSUM-S²	*CUSUM* διάγραμμα βασισμένο στην S^2	*CUSUM* chart based on S^2
$\boldsymbol{D}$	Εκτιμητής του Downton	Downton estimate
DERSS	Διπλή ακραία δειγματοληψία καταταγμένων συνόλων	Double Extreme *RSS*
ERSS	ακραία δειγματοληψία καταταγμένων συνόλων	*Extreme RSS*
EWMA	Διάγραμμα Ελέγχου με Κινητούς Μέσους και Εκθετικά Βάρη	Exponentially Weighted Moving Average Control chart
EWMA-JS²	*EWMA* διάγραμμα βασισμένο στην U	*EWMA Chart based on U*
EWMA R	*EWMA* για την R βασισμένο στην T	*EWMA* for *R* based on *T*
EWMA S	*EWMA* για την S βασισμένο στην T	*EWMA* for *S* based on *T*
EWMS	Εκθετικά σταθμισμένο Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα	exponentially weighted mean square error
EWMV	εκθετικά σταθμισμένη κινητή διασπορά	*exponentially weighted moving variance*

EWRMS	εκθετικά σταθμισμένη μέση τετραγωνική ρίζα	*exponentially weighted root mean square*
floating T-S²	Κυμαινόμενο $T - S^2$ διάγραμμα βασισμένο στην *Τα*	*floating* $T - S^2$ based on *T*
floating U-S²	Κυμαινόμενο *U-S²* διάγραμμα βασισμένο στην *U*	*floating U-S²* based on *U*
$\boldsymbol{G}$	Μέση διαφορά του Gini	Gini's mean difference
$\boldsymbol{H}$	διάστημα απόφασης	decision interval
HHW1 -EWMA	*HHW1-EWMA* διάγραμμα	*HHW1 - EWMA chart*
HHW2- EWMA	*HHW2 -EWMA* διάγραμμα	*HHW2 - EWMA chart*
iid	ανεξάρτητα, ισόνομα και κανονικά ισόνομα κατανεμημένα	independent, identical and normally distributed
$\boldsymbol{IRC}$	Βελτιωμένο R διάγραμμα	Improved R chart
$\boldsymbol{ISC}$	Βελτιωμένο S διάγραμμα	Improved S chart
$\boldsymbol{K}$	τιμή αναφοράς	reference ή allowance value
L	Απόσταση μεταξύ CL και UCL ή LCL	Distance between *CL* and *UCL* or *LCL*
LCL	Κάτω Όριο Ελέγχου	Lower Control Limit
LSL	Κάτω Όριο Προδιαγραφών	Lower Specified Limit
MAD	Διάμεση Απόλυτη Απόκλιση	Median Absolute Difference
MA-D	*MA* διάγραμμα βασισμένο στη Downton εκτιμήτρια	*MA* chart base on Downton estimate
MA-G	MA διάγραμμα βασισμένο στην μέση διαφορά του Gini	*MA* chart based on Gini's mean difference
MDRL	Διάμεσος του μήκους ροής	Median of Run Length
MR	κινούμενο εύρος	moving range
PCI	Δείκτης σύγκρισης απόδοσης	Performance comparison index
pdf	Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας	Probability density function
Q	Ενδοτεταρτημοριακό εύρος	*interquartile range*
Q_n	Q_n *εκτιμήτρια*	Q_n *estimate*
RL	Μήκος ροής	Run Length
RSS	δειγματοληψία καταταγμένων συνόλων	Ranked Set Sampling
S	Δειγματική τυπική απόκλιση	Sample standard deviation
S^2	Δειγματική διακύμανση	Sample variance
S^2*-EWMA*	S^2*-EWMA* για την S^2 βασισμένο στην Τα	S^2*-EWMA for* S^2 *based on T*
SDRL	Τυπική απόκλιση του μήκους ροής	Standard Deviation of Run Length
SJ-EWMA	EWMA διάγραμμα	*EWMA* chart
S_n	S_n *εκτιμήτρια*	S_n estimate
SRS	Απλή Τυχαία Δειγματοληψία	Simple Random Sampling
T	λογαριθμικό μετασχηματισμό τριών παραμέτρων του Johnson	Logarithmic Johnson's type transformation
U	Λογαριθμικός μετασχηματισμός τεσσάρων παραμέτρων S_B του Johnson	Logarithmic four parameters Johnson S_B transformation
UCL	Άνω Όριο Ελέγχου	Upper Control Limit
USL	Άνω Όριο Προδιαγραφών	Upper Specified Limit

Λίστα Πινάκων

Πίνακας 1.1.1 Οι Διαστάσεις της ποιότητας 24
Πίνακας 1.3.1 Κανόνες Ευαισθητοποίησης διαγραμμάτων τύπου *Shewhart*..... 29
Πίνακας 3.3.1 ARL κατανομές για το IRC διάγραμμα, εντός ελέγχου ARL $(\mathrm{ARL0}) = 370$. 53
Πίνακας 3.3.2 ARL κατανομές για το ISC διάγραμμα, εντός ελέγχου ARL $(\mathrm{ARL0}) = 370$. 54
Πίνακας 3.4.1 Όρια ελέγχου βασισμένες στις στατιστικές συναρτήσεις διασποράς.. 56
Πίνακας 3.5.1 Το πάχος της στρώσης του χρώματος σε ψυγεία και οι τιμές των στατιστικών συναρτήσεων 57
Πίνακας 3.5.2 Όρια ελέγχου των Διαγραμμάτων ελέγχου και πλήθος σημείων εκτός των ορίων..... 58
Πίνακας 4.5.1 ARL τιμές για το $CUSUM - S2$ διάγραμμα για $\mathrm{n} = 5$ και $ARL0 = 200$. 66
Πίνακας 4.5.2 ARL τιμές για το $CUSUM - S2$ διάγραμμα με $ARL0 = 370$ 66
Πίνακας 4.6.1 RL ιδιότητες του κλασσικού $CS - CUSUM\ R$ διαγράμματος για $n = 5$ και $ARL0 = 370$ 68
Πίνακας 4.7.1 RL ιδιότητες για το $CS - CUSUM\ R\ ERSS$ όταν $n = 5$ και $ARL0 = 200$ 71
Πίνακας 4.7.2 RL ιδιότητες για το $CS - CUSUM\ R\ DERSS$ όταν $n = 5$ και $ARL0 = 200$ 71
Πίνακας 4.7.3 RL ιδιότητες για το $CS - CUSUM\ R\ ERSS$ όταν $n = 5$ και $ARL0 = 370$. 71
Πίνακας 4.7.4 RL ιδιότητες για το $CS - CUSUM\ R\ DERSS$ όταν $n = 5$ και $ARL0 = 370$ 72
Πίνακας 4.8.1 RL ιδιότητες για το κλασσικό $CS - CUSUM\ S$ $n = 5$ και $ARL0 = 370$... 74
Πίνακας 4.9.1 RL ιδιότητες για το CS-CUSUM S ERSS όταν $n = 5$ και $ARL0 = 200$ 77
Πίνακας 4.9.2 RL ιδιότητες για το CS-CUSUM S DERSS όταν $n = 5$ και $ARL0 = 200$ 77
Πίνακας 4.9.3 RL ιδιότητες για το CS-CUSUM S ERSS όταν $n = 5$ και $ARL0 = 370$ 77
Πίνακας 4.9.4 RL ιδιότητες για το CS-CUSUM S DERSS όταν $n = 5$ και $ARL0 = 370$ 78
Πίνακας 4.10.1 ARL σύγκριση μεταξύ διαγραμμάτων ελέγχου διασποράς για την παρακολούθηση αυξήσεων στο σ όταν $n = 5$ στο $ARL0 = 500$ 80
Πίνακας 4.10.2 ARL σύγκριση μεταξύ διαγραμμάτων ελέγχου διασποράς για την παρακολούθηση μειώσεων στο σ όταν $n = 5$ στο $ARL0 = 500$ 80
Πίνακας 5.4.1 ARL τιμές για το $S2 - EWMA$ διάγραμμα με $n = 5$ και $ARL0 = 200$ ... 90
Πίνακας 5.4.2 ARL τιμές για το $S2\ EWMA$ *διάγραμμα με* $ARL0 = 370$..... 90
Πίνακας 5.5.1 ARL τιμές για το $\mathrm{EWMA}\ S$ *διάγραμμα με* $ARL0 \cong 370$ 92
Πίνακας 5.6.1 ARL τιμές για το $\mathrm{EWMA}\ R$ *διάγραμμα με* $ARL0 \cong 370$ 92
Πίνακας 5.8.1 ARL τιμές για το $EWMA\ JS2$ διαγράμματα με $ARL0 = 370$..... 95
Πίνακας 5.10.1 ARL συγκρίσεις για $n = 5$ 99
Πίνακας 5.10.2 ARL συγκρίσεις για $n = 8$ 99
Πίνακας 5.10.3 ARL συγκρίσεις για $n = 10$ 99
Πίνακας 5.10.4 ARL συγκρίσεις για $n = 5$ 100
Πίνακας 5.10.5 ARL συγκρίσεις για $n = 8$ 100
Πίνακας 5.10.6 ARL συγκρίσεις για $n = 10$ 100

Πίνακας 6.2.1 *ARL* τιμές για το $CS-EWMA$ διάγραμμα με $\lambda q = 0.05$, $n = 5$ και $ARL0 = 200$ 107
Πίνακας 6.2.2 *ARL* τιμές για το $CS-EWMA$ διάγραμμα με $\lambda q = 0.1$, $n = 5$ και $ARL0 = 200$ 107
Πίνακας 6.2.3 *ARL* τιμές για το $CS-EWMA$ διάγραμμα με $\lambda q = 0.2$, $n = 5$ και $ARL0 = 200$ 107
Πίνακας 6.2.4 *ARL* τιμές για το $CS-EWMA$ διάγραμμα με $\lambda q = 0.3$, $n = 5$ και $ARL0 = 200$ 107
Πίνακας 6.2.5 *ARL* τιμές για το $CS-EWMA$ διάγραμμα με $\lambda q = 0.4$, $n = 5$ και $ARL0 = 200$ 108
Πίνακας 6.2.6 *ARL* τιμές για το $CS-EWMA$ διάγραμμα με $\lambda q = 0.5$, $n = 5$ και $ARL0 = 200$ 108
Πίνακας 6.3.1 ARL ($SDRL$) τιμές του floating $\mathrm{T-S2}$ διαγράμματος για $n = 3$ και $ARL0 \cong 370$ 110
Πίνακας 6.3.2 ARL ($SDRL$) τιμές του floating $\mathrm{T-S2}$ διαγράμματος για $n = 5$ και $ARL0 \cong 370$ 110
Πίνακας 6.3.3 ARL ($SDRL$) τιμές του floating $\mathrm{T-S2}$ διαγράμματος για $n = 7$ και $ARL0 \cong 370$ 111
Πίνακας 6.3.4 ARL ($SDRL$) τιμές του floating $\mathrm{T-S2}$ διαγράμματος για $n = 9$ και $ARL0 \cong 370$ 111
Πίνακας 6.3.5 ARL (SDRL) τιμές του floating $\mathrm{U-S2}$ διαγράμματος με $q = 0.3$, $KU' = 6.152$ και $ARL0 \cong 370$ 112
Πίνακας 6.4.1 ARL τιμές για μονόπλευρα διαγράμματα τύπου CUSUM για την ανίχνευση αυξήσεων διασποράς με $n = 5$ και $ARL0 = 200$ 114
Πίνακας 6.4.2 ARL τιμές για μονόπλευρα διαγράμματα τύπου EWMA για την ανίχνευση αυξήσεων διασποράς με $n = 5$ και $ARL0 = 200$ 114
Πίνακας 6.4.3 ARL τιμές για μονόπλευρα CS-EWMA διαγράμματα για την ανίχνευση αυξήσεων διασποράς με $Kq = 1$, $n = 5$ και $ARL0 = 200$ 114
Πίνακας I.1 Σταθερές για την ανάπτυξη διαγραμμάτων ελέγχου Shewhart 123
Πίνακας II.1 Μέσοι και Τυπικά σφάλματα των σταθερών των G, R και S διαγραμμάτων 124
Πίνακας II.2 Μέσοι και τυπικά σφάλματα για το Q διάγραμμα ελέγχου 124
Πίνακας II.3 Οι σταθερές των ορίων ελέγχου για το εύρωστο μονομεταβλητό MAD διάγραμμα ελέγχου 125
Πίνακας II.4 Οι σταθερές των ορίων ελέγχου για τα Sn και Qn και τ Διαγράμματα Ελέγχου 125
Πίνακας II.5 Τιμές των σταθερών $\mathrm{DU*}$, $\mathrm{DL*}$, $\mathrm{D1*}$, $\mathrm{D2*}$, $\mathrm{D3*}$ και $\mathrm{D4*}$ για το IRC διάγραμμα 126
Πίνακας II.6 Τιμές των σταθερών $\mathrm{DU*}$, $\mathrm{DL*}$, $\mathrm{D1*}$, $\mathrm{D2*}$, $\mathrm{D3*}$ και $\mathrm{D4*}$ για το IRC διάγραμμα 126
Πίνακας II.7 Τιμές των σταθερών $\mathrm{BU*}$, $\mathrm{BL*}$, $\mathrm{B3*}$, $\mathrm{B4*}$, $\mathrm{B5*}$ και $\mathrm{B6*}$ για το ISC διάγραμμα 127
Πίνακας II.8 Τιμές των σταθερών $\mathrm{BU*}$, $\mathrm{BL*}$, $\mathrm{B3*}$, $\mathrm{B4*}$, $\mathrm{B5*}$ και $\mathrm{B6*}$ για το ISC διάγραμμα 127
Πίνακας III.1 Σταθερές για το R διάγραμμα ελέγχου κανονικών διατεταγμένων στατιστικών συνάρτήσεων βασει των ERSS και DERSS 128

Πίνακας ΙΙΙ.2 Σταθερές για τοS διάγραμμα ελέγχου κανονικών διατεταγμένων στατιστικών συνάρτήσεων βασει των ERSS και DERSS 128
Πίνακας ΙΙΙ.3 Διάφορες τιμές των $ETj, \sigma(Tj), ATn, BT(n)$ και ,$CT(n)$ για $\mathrm{n} = 3, \ldots, 15$ για τα CUSUM S^2 , S^2 EWMA και Floating T-S^2 διαγράμματα με βάση τον μετασχηματισμό τριών παραμέτρων SB του Johnson 128
Πίνακας ΙΙΙ.4 Διάφορες τιμές των $ETj, \sigma(Tj), ARn, BR(n)$ και ,$CR(n)$ για $\mathrm{n} = 3, \ldots, 15$ για το EWMA R διάγραμμα 128
Πίνακας ΙΙΙ.5 Διάφορες τιμές των $ETj, \sigma(Tj), ASn, BS(n)$ και ,$CS(n)$ για $\mathrm{n} = 3, \ldots, 15$ για το EWMA S διάγραμμα 129
Πίνακας ΙΙΙ.6 Διάφορες τιμές των $EUj, \sigma(Uj), AUn, BUn, CUn$ και DUn για $\mathrm{n} = 3, \ldots, 15$ για τα EWMA-JS^2 και Floating U-S^2 διαγράμματα με βάση τον μετασχηματισμό τεσσάρων παραμέτρων 129

Λίστα Σχημάτων

Σχήμα 1.3.1 Τυπικό διάγραμμα ελέγχου τύπου Shewhart 27
Σχήμα 1.3.2 Προειδοποιητικά όρια ελέγχου και ζώνες A, B και C σε ένα διάγραμμα ελέγχου. 28
Σχήμα 1.3.3 Παραδείγματα διάφορων τύπων αφύσικων μοτίβων και το φυσικό μοτίβο 30
Σχήμα 3.5.1 Διαγράμματα Ελέγχου τύπου Shewhart για την παρακολούθηση της διασποράς..... 58
Σχήμα 4.6.1 ARL καμπύλες του κλασσικού $CS-CUSUM\ R$, έναντι του R και του βασικού $CUSUM\ R$ διαγράμματος 68
Σχήμα 4.8.1 ARL καμπύλες για το κλασσικό $CS-CUSUM\ S$ διάγραμμα έναντι των Shewhart S και $CUSUM\ S$ διαγραμμάτων για την ανίχνευση 1.2σ όταν $n=5$ και $ARL0=370$ 74
Σχήμα 4.10.1 ARL καμπύλες για τον ατελή $CS-CUSUM\ R\ ERSS$ σχεδιασμό έναντι των κλασσικό $CS-CUSUM\ R, CUSUM\ S2$ και $CP\ CUSUM$ διαγραμμάτων για την ανίχνευση 1.2σ όταν $n=5$, $ARL0=200$ 83
Σχήμα 4.10.2 ARL καμπύλες για τον ατελή $CS-CUSUM\ R\ DERSS$ σχεδιασμό έναντι των κλασσικό $CS-CUSUM\ R, CUSUM\ S2$ και $CP\ CUSUM$ διαγραμμάτων για την ανίχνευση 1.2σ όταν $n=5$, $ARL0=200$..... 83
Σχήμα 4.10.3 ARL καμπύλες για τα ατελή $CS-CUSUM\ S\ ERSS$ και $CS-CUSUM\ S\ DERSS$ σχεδιασμό έναντι των κλασσικό $CS-CUSUM\ S, CUSUM\ S2$ και $CP\ CUSUM$ διαγραμμάτων για την ανίχνευση 1.2σ όταν $n=5$, $ARL0=200$ ($Scheme\ I$: $CS\ CUSUM\ S\ ERSS, Scheme\ II$: $CS-CUSUM\ DERSS$)..... 83
Σχήμα 4.10.4 Οι τυπικές αποκλίσεις των τριάντα συνόλων δεδομένων με αναδειγματοληψία που συλλέχθηκαν χρησιμοποιώντας $SRS, ERSS$ (Scheme I) και $DERSS$ (Scheme II)..... 83
Σχήμα 4.11.1 CS-CUSUM R βασισμένο στον κλασσικό σχεδιασμό με $n=5$ 85
Σχήμα 4.11.2 CS-CUSUM R ERSS διάγραμμα με $n=5$..... 85
Σχήμα 4.11.3 CS-CUSUM R DERSS διάγραμμα με $n=5$ 85
Σχήμα 4.11.4 Κλασσικό CS-CUSUM-S διάγραμμα, που σχεδιάστηκε για να ανιχνεύει $\tau_{1.2}$ με μέγεθος υποομάδας $n=5$ και $ARL0=200$ 86
Σχήμα 4.11.5 $CS-CUSUM-S\ ERSS$ διάγραμμα (Scheme I), που σχεδιάστηκε για να ανιχνεύει $\tau_{1.2}$ με μέγεθος υποομάδας $n=5$ και $ARL0=200$ 86
Σχήμα 4.11.6 $CS-CUSUM-S\ \ DERSS$ (Scheme II) διάγραμμα, που σχεδιάστηκε για να ανιχνεύει $\tau_{1.2}$ με μέγεθος υποομάδας $n=5$ και $ARL0=200$ 86
Σχήμα 5.11.1 Δεδομένα του παραδείγματος 1 με αυξανομένη διασπορά (αριστερά) και μειούμενη διασπορά (δεξιά) 102
Σχήμα 5.11.2 $S2EWMA$, $S\ EWMA$ και $R\ EWMA$ $(\lambda=0.1, L=3)$ διαγράμματα ελέγχου 102
Σχήμα 5.11.3 Δεδομένα του παραδείγματος 2 με αυξανομένη διασπορά (αριστερά) και μειούμενη διασπορά (δεξιά) 103
Σχήμα 5.11.4 $JS2EWMA$, $(\lambda=0.2, L=3)$ διάγραμμα ελέγχου..... 103
Σχήμα 6.4.1 *ARL* καμπύλες για τα αμφίπλευρα CS-EWMA, $\mathrm{CUSUM}-S2$ και $\mathrm{EWMA}-S2$ διαγράμματα με $ARL0=200$..... 115
Σχήμα 6.4.2 ARL καμπύλες για τα μονόπλευρα CS-EWMA, CP-CUSUM, CUSUM-S, SJ-CUSUM και HHW2 EWMA διαγράμματα με $ARL0=200$. 115

Σχήμα 6.4.3 ARL καμπύλες των floating $T-S2$, *floating* $U-S2$, $EWMA\,S2$, $EWMA\,JS2$ και $CUSUM-S2$ διαγραμμάτων για μείωση στην διασπορά της διεργασίας 116
Σχήμα 6.4.4 ARL καμπύλες των *floating* $T-S2$, *floating* $U-S2$, $EWMA\,S2$, $EWMA\,JS2$ και $CUSUM-S2$ διαγραμμάτων για αύξηση στην διασπορά της διεργασίας 116
Σχήμα 6.5.1 $CUSUM\,S2$, $S2\,EWMA$, $CS-EWMA$, *floating* $T-S2$ *και floating* $U-S2$ διαγράμματα ελέγχου 117

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Διαγράμματα ελέγχου και Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών

1.1 Εισαγωγή

Καθημερινά ο καταναλωτής επιλέγει να αγοράσει ένα προϊόν (ή μια υπηρεσία) ανάμεσα σε ομοειδή προϊόντα (ή υπηρεσίες) που ικανοποιούν την ίδια ανάγκη. Η επιλογή του προϊόντος καθορίζεται κυρίως από δύο παράγοντες, την ποιότητά του και την τιμή του. Οι παραπάνω παράγοντες οδήγησαν στην αναζήτηση επιχειρησιακών τακτικών για την επίτευξη της βέλτιστης δυνατής ποιότητας των παραγόμενων προϊόντων με το ελάχιστο δυνατό κόστος. Η στρατηγική / φιλοσοφία που επιζητεί τη συνεχή βελτίωση στην ποιότητα εκτέλεσης όλων των διεργασιών, προϊόντων και υπηρεσιών, σε μια επιχείρηση ονομάζεται Διοίκηση Ολικής Ποιότητας (*Total Quality Management*).

Σημαντικό ρόλο κατέχει ο **Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας** (*Statistical Quality Control*) (Montgomery (2013)), ο οποίος αποτελεί την παλαιότερη και γνωστότερη μέθοδο ελέγχου παραγωγικών διεργασιών για τη βελτίωση της ποιότητας των παραγόμενων προϊόντων. Οι κύριοι στόχοι του είναι η έγκαιρη ανακάλυψη μη συμμορφωμένων με τις προδιαγραφές παραγόμενων προϊόντων, η οποία σηματοδοτεί τη λήψη διορθωτικών ενεργειών για την απομάκρυνση των αιτιών που είναι υπεύθυνες για τις αποκλίσεις, συμβάλλοντας έτσι στη διατήρηση της ποιότητας των προϊόντων.

1.1.1 Η ποιότητα και οι διαστάσεις της

Οι διαστάσεις της ποιότητας, βάσει των οποίων ο καταναλωτής αξιολογεί τα προϊόντα, καθορίζουν την τελική ποιότητα ενός προϊόντος και σχετίζονται με την ποιότητα του σχεδιασμού και τη διαδικασία παραγωγής του προϊόντος (Πίνακας 1.1.1).

Έτσι, η ποιότητα είναι η προσαρμογή των χαρακτηριστικών ενός προϊόντος (ή μιας υπηρεσίας) στις απαιτήσεις του καταναλωτή. Να σημειωθεί ότι, η ποιότητα είναι αντιστρόφως ανάλογη της μεταβλητότητας των χαρακτηριστικών της παραγωγικής διαδικασίας που προσδιορίζουν την ποιότητα του προϊόντος (Αντζουλάκος (2009)).

Πίνακας 1.1.1 Οι Διαστάσεις της ποιότητας[1]

Απόδοση	Το προϊόν κάνει την δουλειά για την οποία προορίζεται; Κάνει τη δουλειά καλύτερα από άλλα ομοειδή προϊόντα;
Αξιοπιστία	Το προϊόν χρειάζεται συχνή επισκευή;
Διάρκεια	Η διάρκεια ζωής του προϊόντος είναι μεγάλη;
Επισκευή	Πόσο γρήγορη και οικονομική είναι η επισκευή του προϊόντος στην περίπτωση που εμφανιστεί βλάβη;
Αισθητική	Πόσο ικανοποιητικό είναι από άποψη εμφάνισης (χρώμα, σχήμα, περιτύλιγμα, κτλ.) το προϊόν;
Δυνατότητες	Ποιες είναι οι επιπρόσθετες δυνατότητες του προϊόντος;
Φήμη Επιχείρησης	Ποια είναι η φήμη της εταιρείας, καλή ή κακή;
Συμμόρφωση με τις Προδιαγραφές	Το προϊόν κατασκευάστηκε σύμφωνα με τις προδιαγραφές που έθεσε ο σχεδιαστής του;

1.1.2 Συνιστώσες του στατιστικού ελέγχου ποιότητας

Ο Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας αποτελείται από ένα σύνολο μεθόδων στατιστικής ανάλυσης δεδομένων, το οποίο χωρίζεται σε τρία βασικά υποσύνολα, τα οποία είναι:

- Σχεδιασμός και Ανάλυση Πειραμάτων (*Design of Experiments, DOE*).
- Δειγματοληψία Αποδοχής (*Acceptance Sampling*).
- Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών (ΣΕΔ) (*Statistical Process Control, SPC*) (Montgomery(2013)).

1.2 Στατιστικός Έλεγχος Διεργασίας

Ο **Στατιστικός Έλεγχος Διεργασίας (ΣΕΔ)** είναι μια συλλογή από εργαλεία επίλυσης προβλημάτων χρήσιμα για την επίτευξη της σταθερότητας της διεργασίας και βελτίωσης της ικανότητας (*capability*) μέσω της μείωσης της μεταβλητότητας (Κουκουβίνος (2008)). Ο ΣΕΔ μπορεί να εφαρμοστεί σε κάθε διεργασία. Τα επτά κυριότερα εργαλεία (τα οποία καλούνται "*the magnificent seven*") που χρησιμοποιεί είναι τα ακόλουθα:

- Το Ιστόγραμμα / το Διάγραμμα Μίσχου - Φύλλων (*Histogram / Steam & Leaf Plot*).
- Το Φύλλο Ελέγχου (*Check Sheet*).
- Το Διάγραμμα Pareto (*Pareto Chart*).
- Το Διάγραμμα Αιτίας - Αποτελέσματος (*Cause-and-Effect Diagram*).
- Το Διάγραμμα Συγκέντρωσης Ελαττωμάτων (*Defect Concentration Diagram*).
- Το Διάγραμμα Διασποράς ή Διασκόρπισης (*Scatter Plot*).
- Το Διάγραμμα Ελέγχου (*Control Chart*).

[1] Ατζουλάκος (2008)

Από τα παραπάνω εργαλεία, το διάγραμμα ελέγχου αποτελεί ίσως το βασικότερο εργαλείο στον Στατιστικό Έλεγχο Ποιότητας για την παρακολούθηση μιας παραγωγικής διεργασίας (Montgomery(2013)).

Σε κάθε παραγωγική διεργασία, ανεξάρτητα από το πόσο καλά είναι σχεδιασμένη και το πόσο καλά επιβλέπεται και συντηρείται, θα υπάρχει πάντα μια μορφή φυσικής μεταβλητότητας που θα τη συνοδεύει. Αυτή η φυσική μεταβλητότητα είναι το αθροιστικό αποτέλεσμα πολλών μικρών αιτιών (δεν μπορούν να αποδοθούν σε ελέγξιμους παράγοντες), που καλούνται συνήθεις ή τυχαίες αιτίες μεταβλητότητας (common / *chance causes of variation*). Μια διεργασία, η οποία λειτουργεί μόνο με την παρουσία φυσικής μεταβλητότητας λέγεται **εντός (στατιστικού) ελέγχου διεργασία** (*in (statistical) process control*), ή ότι λειτουργεί σε ευσταθή κατάσταση (*stable state*) (Montgomery (2013)).
Εντούτοις, σε μια διεργασία μπορεί να εμφανίζονται περιστασιακά και άλλες μορφές μεταβλητότητας. Αυτές οφείλονται στη συστηματική αλλαγή του επίπεδου κάποιων παραγόντων που καθορίζουν την ποιότητα του προϊόντος. Η μεταβλητότητα αυτή είναι πολύ μεγαλύτερη (σε μέγεθος) από τη φυσική μεταβλητότητα και η παρουσία της οδηγεί συνήθως σε μη αποδεκτά επίπεδα λειτουργίας της παραγωγικής διεργασίας. Η προαναφερθείσα μεταβλητότητα καλείται ειδική μεταβλητότητα και οι αιτίες που οδηγούν σε αυτή ονομάζονται ειδικές ή προσδιορισμένες αιτίες μεταβλητότητας (special / *assignable causes of variation*). Μια διεργασία η οποία λειτουργεί με την παρουσία ειδικής μεταβλητότητας λέγεται **εκτός (στατιστικού) ελέγχου διεργασία** (*out of (statistical) control process*) ή ότι λειτουργεί σε ασταθή κατάσταση (*unstable state*) (Montgomery (2013)).

Άμεσα συνδεδεμένη έννοια με την παραγωγή ενός προϊόντος είναι τα όρια προδιαγραφών (*specification limits*) του προϊόντος τα οποία καθορίζονται στη φάση σχεδιασμού. Αυτά είναι τα άνω και κάτω όρια προδιαγραφών (*upper & lower specification limits,* USL και LSL) και εντός αυτών των ορίων πρέπει να βρίσκονται οι τιμές του ποιοτικού χαρακτηριστικού (*quality characteristic*) για κάθε παραγόμενο προϊόν προκειμένου να είναι ποιοτικά αποδεκτό. Επίσης, στη φάση σχεδιασμού του προϊόντος ορίζεται μια επιθυμητή τιμή για το ποιοτικό χαρακτηριστικό που ονομάζεται **τιμή στόχος** (*target value*) που είναι συνήθως το μέσο του διαστήματος $[LSL, USL]$. Κάτω από συνθήκες φυσικής μεταβλητότητας η πλειοψηφία των τιμών του ποιοτικού χαρακτηριστικού βρίσκεται εντός των ορίων προδιαγραφών, ενώ υπό συνθήκες ειδικής μεταβλητότητας δεν ισχύει το ίδιο (Κουκουβίνος (2009)).

1.3 Διαγράμματα Ελέγχου

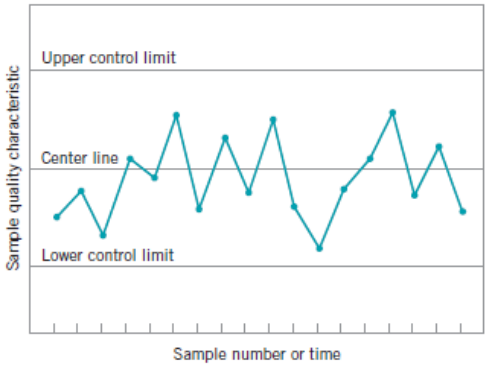
1.3.1 Εισαγωγή

Το **Διάγραμμα Ελέγχου** είναι μια τεχνική του ΣΕΔ που χρησιμοποιείται ευρέως για την ανίχνευση σε πραγματικό χρόνο της εμφάνισης ειδικών αιτιών μεταβλητότητας σε μια διεργασία (*on-line monitoring*) (Αντζουλάκος (2009), Κουκουβίνος (2008)). Προτάθηκε από τον Walter A. Shewhart ενώ εργαζόταν στα *Bell Labs* τη δεκαετία του 1920. Οι μηχανικοί της εταιρείας είχαν στόχο τη βελτίωση της αξιοπιστίας των συστημάτων μετάδοσης της τηλεφωνίας. Ο κύριος στόχος εφαρμογής ενός διαγράμματος ελέγχου είναι η ανίχνευση μη φυσιολογικών διακυμάνσεων στις παραμέτρους (θέσεως και κλίμακας) της διεργασίας. Το διάγραμμα ελέγχου παρουσιάζει μια γραφική παράσταση ενός ποιοτικού χαρακτηριστικού που αντιστοιχεί στη σταθερότητα ή την αστάθεια της διεργασίας σε συνάρτηση με το χρόνο. Τα διαγράμματα ελέγχου είναι δημοφιλή κυρίως διότι είναι μια αποδεδειγμένη τεχνική για την βελτίωση της παραγωγικότητας, είναι αποτελεσματικά στην πρόβλεψη ελαττωμάτων, αποτρέπουν την άσκοπη διαδικασία προσαρμογής και παρέχουν διαγνωστικές πληροφορίες και, πληροφορίες σχετικά με την ικανότητα της διεργασίας (Montgomery (2013)).

1.3.2 Βασικές αρχές των Διαγραμμάτων Ελέγχου

Το διάγραμμα ελέγχου περιέχει μια **κεντρική γραμμή** (*center line, CL*) ή μέσο επίπεδο της διεργασίας που παριστάνει συνήθως τη μέση τιμή (*average value*) του ποιοτικού χαρακτηριστικού που αντιστοιχεί στην εντός ελέγχου κατάσταση. Επίσης διακρίνονται δύο άλλες οριζόντιες γραμμές, τα **άνω** και **κάτω όρια ελέγχου** (*upper & lower control limits, UCL* και *LCL* αντίστοιχα) (Σχήμα 1.3.1).

Τα όρια ελέγχου επιλέγονται έτσι ώστε αν η διαδικασία είναι εντός ελέγχου, τότε σχεδόν όλα τα σημεία του δείγματος να βρίσκονται μεταξύ αυτών των δύο γραμμών. Όσο τα σημεία κατανέμονται εντός των ορίων ελέγχου και η συμπεριφορά τους είναι «τυχαία», η διαδικασία είναι εντός ελέγχου οπότε και δεν απαιτείται καμία διορθωτική ενέργεια. Αν όμως κάποιο σημείο βρεθεί εκτός ορίων ελέγχου τότε η διαδικασία καθίσταται εκτός ελέγχου και παράγεται ένας συναγερμός (*alarm*) και απαιτούνται ενέργειες για να βρεθούν οι ειδικές αιτίες μεταβλητότητας που προκαλούν το πρόβλημα. Συνήθως, τα σημεία του δείγματος συνδέονται με μια τεθλασμένη γραμμή για να απεικονίζεται ευκολότερα η εξέλιξη της ακολουθίας στο χρόνο. Ακόμη και αν όλα τα σημεία βρίσκονται εντός των ορίων ελέγχου αλλά συμπεριφέρονται με ένα συστηματικό ή μη τυχαίο τρόπο τότε και αυτό αποτελεί ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου (Montgomery (2013)).



Σχήμα 1.3.1 Τυπικό διάγραμμα ελέγχου τύπου Shewhart [2].

Ένα γενικό μοντέλο για το διάγραμμα ελέγχου είναι:

$$\begin{aligned} UCL &= \mu_W + L\sigma_W \\ CL &= \mu_W \\ LCL &= \mu_W - L\sigma_W \end{aligned} \tag{1.1}$$

όπου μ_W είναι η μέση τιμή και σ_W η τυπική απόκλιση της στατιστικής συνάρτησης W που απεικονίζεται στο διάγραμμα ελέγχου, η οποία μετρά το ποιοτικό χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει, και L είναι η "απόσταση" των ορίων ελέγχου από την κεντρική γραμμή, εκφρασμένη σε μονάδες τυπικής απόκλισης. Συνήθως $L = 3$ και στην περίπτωση αυτή αναφερόμαστε στα 3σ διαγράμματα ελέγχου (Κουκουβίνος (2008), Montgomery (2013)).

Το μοντέλο ορίων σίγμα (σ) για την κατασκευή ενός διαγράμματος ελέγχου προτάθηκε από τον *Shewhart* (1931) και καλείται **διάγραμμα ελέγχου τύπου *Shewhart*** (*Shewhart type control chart*). Αποτελεί το πιο ευρέως χρησιμοποιούμενο διάγραμμα ελέγχου λόγω της απλότητας στην κατασκευή και στην ερμηνεία του (Montgomery (2013)). Επιπρόσθετα, για την κατασκευή ορίων ελέγχου σε ένα διάγραμμα ελέγχου υπάρχει και το μοντέλο ορίων πιθανότητας (*probability limits model*). Για κανονική, ή προσεγγιστικά κανονική κατανομή της στατιστικής συνάρτησης W η κεντρική γραμμή και τα άνω και κάτω όρια ελέγχου για το μοντέλο ορίων πιθανότητας α της στατιστικής συνάρτησης W είναι:

$$\begin{aligned} UCL &= \mu_W + z_{a/2}\sigma_W = w_{a/2} \\ CL &= \mu_W \\ LCL &= \mu_W - z_{a/2}\sigma_W = w_{1-(a/2)} \end{aligned} \tag{1.2}$$

όπου w_a το άνω a ποσοστιαίο σημείο της W. Για εντός ελέγχου διεργασίες (με κανονική κατανομή για την W) ισχύει ότι η πιθανότητα εσφαλμένου συναγερμού σε κάθε πλευρά των ορίων ελέγχου ισούται με $a/2$ (a είναι η πιθανότητα εσφαλμένου συναγερμού). Για $a/2 = 0.001$ (δηλαδή μοντέλο με όρια πιθανότητας 0.002), ισχύει ότι $z_{a/2} = 3.09024$. Στην περίπτωση που η κατανομή της W δεν είναι κανονική (ή δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος), είναι δυνατόν να

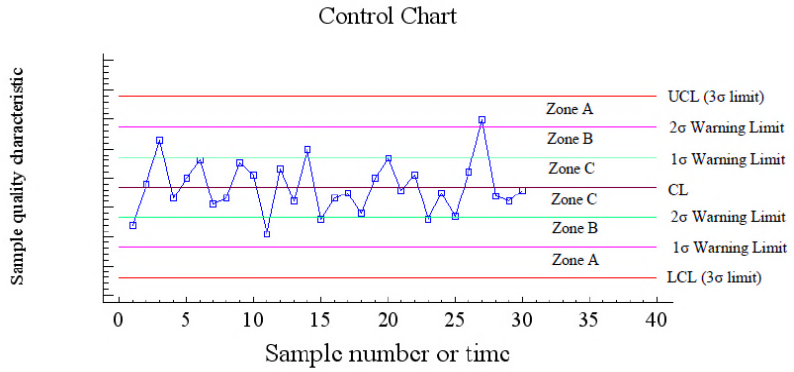
[2] Montgomery (2013)

χρησιμοποιηθούν τα ποσοστιαία σημεία της κατανομής W, αντί των ποσοστιαίων σημείων της τυπικής κανονικής κατανομής (Αντζουλάκος (2009)).

1.3.3 Προειδοποιητικά Όρια Ελέγχου

Τα προειδοποιητικά όρια ελέγχου χρησιμοποιούνται στα διαγράμματα ελέγχου με σκοπό την πιο έγκαιρη ανίχνευση ειδικών αιτιών μεταβλητότητας σε μια διεργασία. Τα **εξωτερικά προειδοποιητικά όρια** (*outer warning limits*) σχεδιάζονται σε απόσταση 2σ από την κεντρική γραμμή του διαγράμματος (Σχήμα 1.3.2). Αν ένα ή περισσότερα σημεία του διαγράμματος βρίσκονται μεταξύ των εξωτερικών προειδοποιητικών ορίων και των ορίων ελέγχου (προς τη μια πλευρά της κεντρικής γραμμής) τότε υπάρχουν ενδείξεις ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου.

Τα **εσωτερικά προειδοποιητικά** όρια (*inner warning limits*) σχεδιάζονται σε απόσταση 1σ από την κεντρική γραμμή του διαγράμματος (Σχήμα 1.3.2). Τα όρια ελέγχου μαζί με τα προειδοποιητικά όρια (εσωτερικά και εξωτερικά) χωρίζουν το διάγραμμα σε τρεις ζώνες. Η χρήση των προειδοποιητικών ορίων αυξάνει και κατ' επέκταση βελτιώνει την ευαισθησία (*sensitivity*) του διαγράμματος ελέγχου, διότι εντοπίζονται γρηγορότερα πιθανές μετατοπίσεις του μέσου επιπέδου της διαδικασίας, αλλά οδηγεί επίσης σε αυξημένο κίνδυνο εσφαλμένων συναγερμών/σημάτων (Montgomery (2013)).



Σχήμα 1.3.2 Προειδοποιητικά όρια ελέγχου και ζώνες A, B και C σε ένα διάγραμμα ελέγχου[3].

1.3.4 Κανόνες ευαισθητοποίησης για τα διαγράμματα ελέγχου

Τα προειδοποιητικά όρια χρησιμοποιούνται συνήθως μαζί με τους **κανόνες ευαισθητοποίησης** (*sensitizing rules*), οι οποίοι περιγράφουν την εμφάνιση ειδικών μοτίβων σε ένα διάγραμμα ελέγχου. Στην περίπτωση που εμφανιστεί το μοτίβο που περιγράφει ο κανόνας τότε η διεργασία θεωρείται εκτός ελέγχου χωρίς την ύπαρξη απαραιτήτως κάποιου σημείου του διαγράμματος εκτός των ορίων ελέγχου. Οι

[3] Ατζουλάκος (2008)

σημαντικότεροι κανόνες που χρησιμοποιούνται για την ευαισθητοποίηση ενός διαγράμματος ελέγχου είναι οι ακόλουθοι (Πίνακας 1.3.1) :

Πίνακας 1.3.1 Κανόνες Ευαισθητοποίησης διαγραμμάτων τύπου *Shewhart*

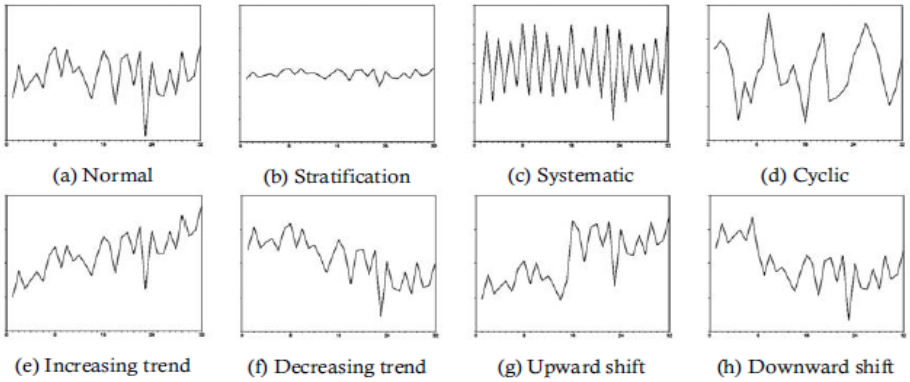
1. Ένα ή περισσότερα σημεία εκτός των ορίων ελέγχου. 2. Δύο από τρία συνεχόμενα σημεία στην Ζώνη *A* (σε μια από τις δύο ζώνες *A*). 3. Τέσσερα από πέντε συνεχόμενα σημεία πέραν της Ζώνης *C* (σε μια από τις δύο περιοχές). 4. Οκτώ συνεχόμενα σημεία στην ίδια μεριά (επάνω ή κάτω) της κεντρικής γραμμής.	*Western Electric Rules*
5. Έξι συνεχόμενα σημεία σε αύξουσα ή φθίνουσα διάταξη. 6. Δεκαπέντε συνεχόμενα σημεία στην ολική Ζώνη *C.* 7. Δεκατέσσερα συνεχόμενα σημεία σε εναλλασσόμενη μορφή “πάνω- κάτω”. 8. Οκτώ συνεχόμενα σημεία εκτός της ολικής Ζώνης *C.* 9. Οποιαδήποτε ασυνήθιστη ή μη τυχαία ακολουθία σημείων. 10. Ένα ή περισσότερα σημεία κοντά στα προειδοποιητικά όρια ή τα όρια ελέγχου.	

1.3.5 Αναγνώριση μοτίβων

Αν τα προκαταρτικά δείγματα συλλέγονται από μια σταθερή διεργασία η σειρά των σημείων στο διάγραμμα ελέγχου θα παρουσιάζει ένα φυσικό (κανονικό (*normal*)) μοτίβο (Σχήμα 1.3.3 a), το οποίο χαρακτηρίζεται από μια διακύμανση των σημείων γύρω από την μέση τιμή έχοντας τα περισσότερα σημεία πλησιέστερα στην κεντρική γραμμή, μερικά σημεία απλωμένα και να προσεγγίζουν τα όρια ελέγχου και κανένα από τα σημεία (ή τουλάχιστον ένα πολύ σπάνιο σημείο) που υπερβαίνουν τα όρια ελέγχου. Από την άλλη πλευρά, εάν τα προκαταρκτικά δείγματα λαμβάνονται από μια ασταθή διεργασία, η σειρά των σημείων του διαγράμματος θα εκθέτουν σχεδόν πάντα ένα αφύσικο μοτίβο. Το *Statistical Quality Control Handbook* της *Western Electric* επισημαίνει διάφορους τύπους αφύσικων μοτίβων που μπορεί να εμφανιστούν σε μια ασταθή διεργασία. Μεταξύ αυτών, υπάρχουν έξι αφύσικα μοτίβα, τα οποία συνήθως παρατηρούνται στα διαγράμματα ελέγχου. Αυτά είναι: (b) τα μοτίβα έλλειψης μεταβλητότητας (*stratification*), (c) τα συστηματικά μοτίβα (*systematic*), (d) τα κυκλικά μοτίβα (*cyclic*), (e) τα μοτίβα αυξανόμενης τάσης (*increasing trend*), (f) τα μοτίβα μειούμενης τάσης (*decreasing trend*), (g) τα μοτίβα ανοδικής μεταβολής (*upward shift*), και (h) τα μοτίβα καθοδικής μεταβολής (*downward shift*) (Σχήμα 1.3.3 a-h).

Στα μοτίβα έλλειψης μεταβλητότητας τα σημεία του διαγράμματος κινούνται με τεχνητό τρόπο γύρω από την κεντρική γραμμή χωρίς να υπάρχει κάποια αξιοσημείωτη μεταβλητότητα. Εάν μια σειρά σημείων στο διάγραμμα ελέγχου δεν παρουσιάζει

οποιοδήποτε κυκλικό μοτίβο, αλλά ακόμα εμφανίζεται να είναι προβλέψιμη σε ένα συστηματικό (περίπου) τρόπο, τότε αυτός ο τύπος μοτίβου καλείται συστηματικό μοτίβο. Ένα κυκλικό μοτίβο αντιπροσωπεύεται από μια ημιτονοειδή μορφή, με τις σύντομες ανοδικές και καθοδικές τάσεις στα δεδομένα που εμφανίζονται επανειλημμένα. Ένα μοτίβο αυξανόμενης τάσης έχει μια σειρά σημείων που δείχνουν μια βαθμιαία ανοδική μεταβολή στο μέσο όρο, ενώ ένα μοτίβο μειούμενης τάσης περιέχει μια σειρά σημείων που αντιπροσωπεύουν μια βαθμιαία καθοδική μεταβολή στο μέσο όρο. Ένα μοτίβο ανοδικής μεταβολής έχει μια σειρά σημείων που παρουσιάζει απότομη αλλαγή από ένα χαμηλότερο επίπεδο σε ένα υψηλότερο επίπεδο μέσα στη σειρά. Ένα μοτίβο καθοδικής μεταβολής αποτελείται από μια σειρά σημείων που έχει μια απότομη αλλαγή από ένα υψηλότερο επίπεδο σε ένα χαμηλότερο επίπεδο μέσα στη σειρά. Άλλα αφύσικα μοτίβα είναι ειδικές ή μικτές μορφές δύο ή περισσότερων αυτών των έξι κύριων τύπων αφύσικων μοτίβων (Gauri and Chakraborty (2008,2009)).



Σχήμα 1.3.3 Παραδείγματα διάφορων τύπων αφύσικων μοτίβων και το φυσικό μοτίβο[4]

1.3.6 Μέτρα απόδοσης ενός διαγράμματος ελέγχου

Η απόδοση του διαγράμματος ελέγχου υπολογίζεται από το **μέσο μήκος ροής** (*average run length*, ARL) του διαγράμματος. Το $\boldsymbol{ARL}$ είναι ο αναμενόμενος αριθμός των σημείων (δειγμάτων) που πρέπει να σχεδιαστούν σε ένα διάγραμμα ελέγχου για να εμφανιστεί ένα σημείο εκτός των ορίων ελέγχου. Αν οι παρατηρήσεις της διεργασίας είναι ασυσχέτιστες, τότε για οποιοδήποτε *Shewhart* διάγραμμα ελέγχου, το ARL ορίζεται ως εξής:

$$ARL = \frac{1}{p} \tag{1.3}$$

όπου p είναι η πιθανότητα ότι ένα σημείο υπερβαίνει τα όρια ελέγχου (Montgomery (2013)). Αξίζει επίσης να αναφερθούν τα ακόλουθα μέτρα απόδοσης:

- $\boldsymbol{ARL_0}$: Εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής (*in-control average run length*):

[4] Gauri SK , Chakraborty S. (2008).

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha} \tag{1.4}$$

όπου α είναι η πιθανότητα να βρεθεί ένα σημείο εκτός των ορίων ελέγχου ενώ η διεργασία βρίσκεται εντός ελέγχου και το χαρακτηριστικό X του προϊόντος ακολουθεί κανονική κατανομή με εντός ελέγχου, μέση τιμή μ και διασπορά σ^2.

- $\boldsymbol{ARL_1}$: Εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής (*out-of-control average run length*)):

$$ARL_1 = \frac{1}{1-\beta} \tag{1.5}$$

αφού η πιθανότητα να βρεθεί σε αυτή την περίπτωση ένα σημείο του διαγράμματος ελέγχου εντός των ορίων ελέγχου είναι ίσο με β, οπότε βρίσκεται εκτός των ορίων ελέγχου με πιθανότητα $1-\beta$.

- $\boldsymbol{ATS}$: Μέσος χρόνος σήματος *(Average time to signal)*:

$$ATS = ARL \cdot h \tag{1.6}$$

όπου h είναι καθορισμένα χρονικά διαστήματα των ωρών.

- $\boldsymbol{SDRL}$: Τυπική απόκλιση του μήκους ροής (*Standard Deviation of Run Length*):

$$SDRL = \sqrt{Var(RL)} \tag{1.7}$$

όπου RL (*Run Length*) το μήκος ροής. Η παραπάνω ποσότητα χρησιμοποιείται συχνά από τους ερευνητές σαν συμπληρωματικός δείκτης αποτελεσματικότητας της διεργασίας. Συνήθως διαγράμματα ελέγχου με μικρή ARL_1 τιμή ή εκτός ελέγχου $SDRL$ τιμή στα περισσότερα σημεία θεωρούνται πιο αποτελεσματικά από άλλα.

- $\boldsymbol{MDRL}$: Η διάμεσος του μήκους ροής (*Median Run Length*) είναι ο διάμεσος αριθμός δειγματικών σημείων που πρέπει να σχεδιαστούν στο διάγραμμα πριν εμφανιστεί ένα εκτός ελέγχου σήμα.

$$MDRL = median(RL) \tag{1.8}$$

- $\boldsymbol{AEQL}$**:** Η μέση τετραγωνική επιπλέον απώλεια (*Average Extra Quadratic Loss*). Αποτελεί ένα συνολικό μέτρο απόδοσης του διαγράμματος ελέγχου πάνω σε όλες τις μετατοπίσεις της τυπικής απόκλισης της διεργασίας. Αυτό επιβάλλεται από το γεγονός ότι κανένα διάγραμμα ελέγχου, όσον αφορά τα ARL_1 και $SDRL$, θα φέρει καλύτερη απόδοση από τα υπόλοιπα για όλες τις τιμές μετατόπισης τ. Η $AEQL$ βασίζεται στην συνάρτηση απώλειας (*loss function*) $L(\tau) = QL(\tau)N(\tau)$, όπου $QL(\tau) = c\mu_0^2\tau^2$ η πρόσθετη τετραγωνική απώλεια (*extra quadratic loss*) και $N(\tau) = pARL(\tau)$ είναι ο μέσος αριθμός των ελαττωματικών προϊόντων. Εδώ, η c είναι μια σταθερά κόστους και η p είναι ο ρυθμός παραγωγής. Έτσι η $AEQL$ ορίζεται ως το σταθμισμένο μέσο ARL (*weighted average* ARL) πάνω σε ένα εύρος μετατοπίσεων $\tau_{min} < \tau < \tau_{max}$ στην τυπική απόκλιση της διεργασίας, και χρησιμοποιώντας τ^2 το βάρος. Οι ποσότητες τ_{min} και τ_{max} είναι τα άνω και κάτω όρια των μετατοπίσεων, αντίστοιχα. Η $AEQL$ μετρά την συνολική αποτελεσματικότητα του διαγράμματος ελέγχου σε ένα εύρος μετατοπίσεων παρά σε ένα συγκεκριμένο εύρος σημείων μετατόπισης. Το μέτρο λαμβάνει υπόψη όλους τους παράγοντες που επηρεάζουν το κόστος της ποιότητας (Wu et al. (2009)) και μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση (Reynolds and Stoumbos (2006))

$$AEQL = \frac{1}{\tau_{max} - \tau_{min}} \int_{\tau_{min}}^{\tau_{max}} L(\tau) d\tau = \frac{cp\mu_0^2}{\tau_{max} - \tau_{min}} \int_{\tau_{min}}^{\tau_{max}} \tau^2 ARL(\tau) d\tau \quad (1.9)$$

Προτείνεται να θέσουμε την ποσότητα $cp\mu_0^2$ στην εξίσωση (1.9) ίση με τη μονάδα, επειδή δεν έχει κάποια σημαντική επίδραση στην σύγκριση απόδοσης (Reynolds and Stoumbos (2006)). Έτσι η $AEQL$ μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση

$$AEQL = \frac{1}{\tau_{max} - \tau_{min}} \int_{\tau_{min}}^{\tau_{max}} \tau^2 ARL(\tau) d\tau \quad (1.10)$$

όπου $ARL(\tau)$ είναι η ARL τιμή ενός συγκεκριμένου διαγράμματος στην μετατόπιση τ. Όσο πιο μικρή είναι η τιμή της $AEQL$ του διαγράμματος ελέγχου, τόσο καλύτερη είναι η συνολική στατιστική απόδοση του διαγράμματος. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι ισχύει η υπόθεση της κανονικότητας με μέση τιμή $\mu_0 = 0$ και τυπική απόκλιση $\sigma = 1$. (Abujiya et al. (2015a)).

- $\boldsymbol{ARARL}$: Ο μέσος λόγος του ARL (*Average ratio of ARL*, $ARARL$) είναι μια εξίσωση ολοκληρώματος που μετρά την συνολική απόδοση ενός διαγράμματος ελέγχου σε ένα ευρύ φάσμα μετατοπίσεων από τ_{min} έως τ_{max} (Wu et al. (2008)). Ορίζεται από τη σχέση

$$ARARL = \frac{1}{\tau_{max} - \tau_{min}} \int_{\tau_{min}}^{\tau_{max}} \frac{ARL(\tau)}{ARL(\tau)_{benchmark}} d\tau \quad (1.11)$$

όπου τ_{max} και τ_{min} είναι οι μέγιστες και οι ελάχιστες μετατοπίσεις στην τυπική απόκλιση της διεργασίας, $ARL(\tau)$ και $ARL(\tau)_{benchmark}$ είναι, αντίστοιχα, οι ARL τιμές ενός συγκεκριμένου διαγράμματος ελέγχου και ενός διαγράμματος σημείου αναφοράς (*benchmark control chart*) στην τ. Το διάγραμμα ελέγχου αναφοράς είναι εκείνο με το μικρότερο εκτός ελέγχου ARL.

- $\boldsymbol{PCI}$: Ο δείκτης σύγκρισης απόδοσης (*Performance Comparison Index*). Ο PCI είναι το ποσοστό της $AEQL$ ενός συγκεκριμένου διαγράμματος ελέγχου και $AEQL$ του διαγράμματος σημείου αναφοράς ($AEQL_{benchmark}$). Η ακόλουθη σχέση ορίζεται από τους Ou et al (2012).

$$PCI = \frac{AEQL}{AEQL_{benchmark}} \quad (1.12)$$

Στατιστικά, ένα διάγραμμα ελέγχου με ελάχιστο $ARARL$ δίνει μικρότερες $AEQL$ και PCI τιμές και είναι ουσιαστικά πιο αποτελεσματικό στην ανίχνευση αλλαγών στην διεργασία.

1.3.7 Φάσεις I και II

Στη Φάση I (*Phase I*), συλλέγεται ένα σύνολο δεδομένων από τη διεργασία που αναλύονται όλα μαζί ταυτοχρόνως, για να καθοριστεί αν η διεργασία ήταν εντός ή εκτός ελέγχου κατά τη χρονική περίοδο συλλογής των δεδομένων. Σε αυτή την φάση τα διαγράμματα ελέγχου βοηθούν τον διαχειριστή της διαδικασίας να «φέρει» τη διεργασία εντός ελέγχου με τη χρήση δοκιμαστικών ορίων ελέγχου (*trial control limits*). Όταν αυτό επιτευχθεί τα διαγράμματα ελέγχου (κεντρική γραμμή και όρια ελέγχου) που

προκύπτουν είναι κατάλληλα για την παρακολούθηση της μελλοντικής συμπεριφοράς της διεργασίας (Φάση ΙΙ). Αυτή η χρήση των διαγραμμάτων ελέγχου αναφέρεται και ως αναδρομική (*retrospective*) φάση (Αντζουλάκος (2009)).

Ο στόχος της Φάσης ΙΙ (ή φάση παρακολούθησης, *Phase II*), είναι η γρήγορη ανίχνευση μετατοπίσεων των παραμέτρων διεργασίας από τις εντός ελέγχου τιμές τους (Woodall (2000)). Ο διαχειριστής έχει στα χέρια του ένα πολύτιμο εργαλείο μέσω του οποίου είναι δυνατόν να παρακολουθεί συνεχώς την παραγωγική διεργασία και να ανιχνεύει έγκαιρα μια πιθανή αλλαγή στο μέσο επίπεδο των χαρακτηριστικών που καθορίζουν την ποιότητα του παραγόμενου προϊόντος. Επίσης ο διαχειριστής αδιαφορεί για τον τρόπο με τον οποίο το μέσο επίπεδο της διεργασίας είχε εκτιμηθεί, ή αν αυτό ήταν εκ των προτέρων γνωστό. Το ARL συμβάλει στην αξιολόγηση της απόδοσης ενός διαγράμματος ελέγχου στη Φάση ΙΙ (Αντζουλάκος (2009)).

1.3.8 Εκτίμηση της Μέση τιμής και της Διασποράς

1.3.8.1 Η περίπτωση των Μεμονωμένων Παρατηρήσεων

Έστω $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ ένα τυχαίο δείγμα n από πληθυσμό με μέση τιμή μ και διακύμανση σ^2. Ένας αμερόληπτος εκτιμητής της μέσης τιμής μ είναι ο δειγματικός μέσος (*sample average*):

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \tag{1.13}$$

Και ένας αμερόληπτος εκτιμητής της διακύμανσης σ^2 είναι η δειγματική διακύμανση

$$\hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \tag{1.14}$$

Έστω ότι το τυχαίο δείγμα $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Ως εκ τούτου, οι αμερόληπτοι εκτιμητές της τυπικής απόκλισης είναι:

$$\hat{\sigma} = \frac{R}{d_2} = \frac{X_{(n)} - X_{(1)}}{d_2} \quad (1.15) \qquad \text{και} \qquad \hat{\sigma} = \frac{S}{c_4} = \frac{\sqrt{S^2}}{c_4} \quad (1.16)$$

όπου $X_{(i)}$ διατεταγμένες παρατηρήσεις (από τη μικρότερη στη μεγαλύτερη), $d_2 = d_2(n)$ και $c_4 = c_4(n)$, είναι σταθερές που εξαρτώνται μόνο από το μέγεθος του δείγματος (Αντζουλάκος (2009)). (Διάφορες τιμές των d_2 και c_4 δίνονται στο Παράρτημα Ι).

1.3.8.2 Η Περίπτωση των δειγμάτων

Υποθέτουμε ότι έχουμε στην διάθεση μας m ανεξάρτητα τυχαία δείγματα μεγέθους n το καθένα, τα $X_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$, $1 \le i \le m$, από ένα πληθυσμό που προέρχεται από την κανονική ατανομή $N(\mu, \sigma^2)$.

- Εκτίμηση του $\boldsymbol{\mu}$:

Έστω $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_m$ οι δειγματικοί μέσοι των m δειγμάτων και θέτουμε

$$\bar{\bar{X}} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\bar{X}_i = \frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}X_{ij} \tag{1.17}$$

Τότε ανεξάρτητα από την κατανομή του πληθυσμού, από το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα ισχύει ότι $E(\bar{\bar{X}}) = \mu$ και $Var(\bar{\bar{X}}) = \sigma^2/nm$. Η ποσότητα $\bar{\bar{X}} \sim N(\mu, \sigma^2/nm)$ και ισχύει ότι $\hat{\mu} = \bar{\bar{X}}$ (Κουκουβίνος(2008)).

- Εκτίμηση του $\boldsymbol{\sigma}$:
  - Μέθοδος R:

Έστω $R_1, R_2, \dots, R_m$ τα εύρη των m δειγμάτων, ήτοι

$$R_i = X_{i(n)} - X_{i(1)} = max\{X_{i1}, \dots, X_{in}\} - min\{X_{i1}, \dots, X_{in}\}, \qquad i = 1, \dots, m \tag{1.18}$$

με $\mu_{R_i} = E(R_i) = \sigma d_2$ και $\sigma_{R_i} = \sqrt{Var(R_i)} = \sigma d_3$, όπου $d_3 = d_3(n)$ είναι μία σταθερά. (Διάφορες τιμές της σταθεράς d_3 δίνονται στο Παράρτημα Ι). Αν θέσουμε $\bar{R} = \frac{1}{m}(R_1 + \cdots + R_m)$ προκύπτει ότι $E(\bar{R}) = \sigma d_2$. Δηλαδή $\hat{\sigma} = \bar{R}/d_2$ (Αντζουλακος (2009)).

  - Μέθοδος S:

Έστω S_i, $1 \le i \le m$ ποσότητες που ορίζονται από τη σχέση

$$S_i = \sqrt{S_i^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(X_{ij} - \bar{X}_i\right)^2}, 1 \le i \le m \tag{1.19}$$

με $\mu_{S_i} = E(S_i) = \sigma c_4$ και $\sigma_{S_i} = \sqrt{Var(S_i)} = \sigma\sqrt{1 - c_4^2}$. Αν θέσουμε $\bar{S} = \frac{1}{m}(S_1 + \cdots + S_m)$ προκύπτει ότι $E(\bar{S}) = \sigma c_4$. Δηλαδή $\hat{\sigma} = \bar{S}/c_4$ (Κουκουβίνος (2008)).

  - Μέθοδος S^2:

Έστω $S_1^2, S_2^2, \dots, S_m^2$ ποσότητες, οι οποίες ορίζονται από τη σχέση

$$S_i^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(X_{ij} - \bar{X}_i\right)^2, 1 \le i \le m \tag{1.20}$$

με $\mu_{S_i^2} = E(S_i^2) = \sigma^2$. Να σημειωθεί ότι, η ποσότητα $\sqrt{\overline{S^2}}$, όπου $\overline{S^2} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} S_i^2$ $\left(\sqrt{\overline{S^2}} \neq \bar{S}\right)$ αν και δεν αποτελεί αμερόληπτο εκτιμητή του σ χρησιμοποιείται αρκετές φορές (διότι έχει μικρή διακύμανση από τον $\bar{S}/c_4$) ως εκτίμηση της ποσότητας σ, ήτοι $\hat{\sigma} = \sqrt{\overline{S^2}}$ (Αντζουλακος(2009)).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Διαγράμματα ελέγχου για την παρακολούθηση της θέσης της διεργασίας

2.1 Εισαγωγή

Τα διαγράμματα ελέγχου χωρίζονται σε τρεις κύριες βασικές κατηγορίες: τα διαγράμματα τύπου *Shewhart*, τα διαγράμματα τύπου $CUSUM$ και τα διαγράμματα τύπου $EWMA$. Τα διαγράμματα τύπου *Shewhart* **καλούνται διαγράμματα ελέγχου χωρίς μνήμη** (*memoryless*), ενώ τα διαγράμματα τύπου $CUSUM$ και τα διαγράμματα τύπου $EWMA$ καλούνται **διαγράμματα ελέγχου τύπου μνήμης** (*memory-type control charts*).

2.2 Διαγράμματα Ελέγχου τύπου Shewhart

Τα διαγράμματα ελέγχου που βασίζονται στην αρχική δομή, που πρότεινε ο Walter A. Shewhart, είναι ευρέως γνωστά ως διαγράμματα ελέγχου τύπου *Shewhart*. Η εισαγωγή των διαγραμμάτων ελέγχου ξεκίνησε μια νέα εποχή βελτίωσης της ποιότητας των προϊόντων από την χρήση απλών στατιστικών μεθόδων. Παρόλο που υπάρχουν διάφορες κατηγορίες διαγραμμάτων ελέγχου, τα διαγράμματα ελέγχου τύπου *Shewhart* είναι τα πιο ευρέως χρησιμοποιούμενα εξαιτίας του συνδυασμού της απλότητας και της αποτελεσματικότητας. Η θέση της διεργασίας παρακολουθείται κυρίως από το $\bar{X}$ διάγραμμα ελέγχου.

2.2.1 Διαγράμματα Ελέγχου Μεταβλητών

Πολλά ποιοτικά χαρακτηριστικά μπορούν να εκφραστούν υπό τους όρους μιας αριθμητικής μέτρησης. Ένα απλό μετρήσιμο ποιοτικό χαρακτηριστικό όπως η διάσταση, το βάρος, ή ο όγκος καλείται **μεταβλητή** (*variable*) (Montgomery (2013)). Τα διαγράμματα ελέγχου μεταβλητών αναπτύχθηκαν το 1930 και χρησιμοποιούνται τόσο στη βιομηχανία όσο και σε πολλές επιστημονικές περιοχές. Ο έλεγχος του δειγματικού μέσου γίνεται συνήθως με τα διαγράμματα ελέγχου για τους μέσους, ήτοι το $\bar{X}$ διάγραμμα (Κουκουβίνος (2008)).

2.2.1.1 $\bar{X}$ Διάγραμμα ελέγχου

Έστω το χαρακτηριστικό $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, με μ και σ γνωστά. Αν $X_i = (X_{i1}, \dots, X_{in})$, $i \geq 1$ είναι ανεξάρτητα τυχαία δείγματα μεγέθους n το καθένα, τότε ο δειγματικός μέσος:

$$\bar{X}_i = \frac{1}{n}(X_{i1} + \cdots + X_{in}) \tag{2.1}$$

ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2/n)$ και είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της μέσης τιμής μ του χαρακτηριστικού X. Ο δειγματικός μέσος $\bar{X}_i$ παίρνει τιμές στο διάστημα $\left[\mu - z_{a/2}\sigma_{\bar{X}_i}, \mu + z_{a/2}\sigma_{\bar{X}_i}\right]$, $\sigma_{\bar{X}_i} = \sigma/\sqrt{n}$ με πιθανότητα $1-\alpha$. Για $\alpha = 0.0027$, δηλαδή $z_{a/2} = 3$, τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή για το δειγματικό μέσο (Φαση ΙΙ) είναι:

$$\begin{aligned} UCL &= \mu + 3\sigma_{\bar{X}_i} \\ CL &= \mu \\ LCL &= \mu - 3\sigma_{\bar{X}_i} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Εντούτοις, οι τιμές των μ και σ είναι άγνωστες, και πρέπει να εκτιμηθούν. Για να επιτευχθεί αυτό, επιλέγονται $m = 20$ έως 25 ανεξάρτητα τυχαία δείγματα μεγέθους n =4 έως 6 το καθένα, υποθέτοντας ότι η επιλογή των δειγμάτων έγινε όταν η διεργασία ήταν εντός ελέγχου (Κουκουβίνος (2008)).

- Λαμβάνοντας υπόψη ότι $\hat{\mu} = \bar{\bar{X}}$ και $\hat{\sigma} = \bar{R}/d_2$, έπεται ότι η κεντρική γραμμή και τα όρια ελέγχου του $\bar{X}$ διαγράμματος ελέγχου (Φάση Ι - **Μέθοδος $\boldsymbol{R}$**) για τη μέση τιμή είναι:

$$\begin{aligned} UCL &= \bar{\bar{X}} + A_2\bar{R} \\ CL &= \bar{\bar{X}} \\ LCL &= \bar{\bar{X}} - A_2\bar{R} \end{aligned} \tag{2.3}$$

  όπου $A_2 = A_2(n) = 3/\left(d_2\sqrt{n}\right)$ σταθερά (Κουκουβίνος (2008)). (Διάφορες τιμές της A_2 δίνονται μαζί με άλλες σταθερές στο Παράρτημα Ι .)

- Επίσης, αν θεωρήσουμε ότι $\hat{\mu} = \bar{\bar{X}}$ και $\hat{\sigma} = \bar{S}/c_4$, η κεντρική γραμμή και τα όρια ελέγχου του $\bar{X}$ διαγράμματος ελέγχου (Φάση Ι **- Μέθοδος $\boldsymbol{S}$**) για τη μέση τιμή είναι:

$$\begin{aligned} UCL &= \bar{\bar{X}} + A_3\bar{S} \\ CL &= \bar{\bar{X}} \\ LCL &= \bar{\bar{X}} - A_3\bar{S} \end{aligned} \tag{2.4}$$

  όπου $A_3 = 3/(c_4\sqrt{n})$ μια σταθερά (Κουκουβίνος (2008)). (Διάφορες τιμές για τη A_3 δίνονται στο Παράρτημα Ι.)

- Αν $\hat{\mu} = \bar{\bar{X}}$ και $\hat{\sigma} = \sqrt{\overline{S^2}}$, έπεται ότι η κεντρική γραμμή και τα όρια ελέγχου του $\bar{X}$ διαγράμματος ελέγχου (Φάση Ι - **Μέθοδος $\boldsymbol{S^2}$**) για τη μέση τιμή είναι τα ακόλουθα:

$$\begin{aligned} UCL &= \bar{\bar{X}} + A\sqrt{\overline{S^2}} \\ CL &= \bar{\bar{X}} \\ LCL &= \bar{\bar{X}} - A\sqrt{\overline{S^2}} \end{aligned} \tag{2.5}$$

  όπου $A = 3/\sqrt{n}$ μια σταθερά.

2.2.2 Διαγράμματα Ελέγχου για μεμονωμένες παρατηρήσεις

Στις περιπτώσεις που το μέγεθος του δείγματος είναι ίσο με 1, χρησιμοποιούνται τα διαγράμματα ελέγχου για μεμονωμένες ή ατομικές παρατηρήσεις *(individual observations)*. Έστω το χαρακτηριστικό $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ με μ και σ γνωστά. Καλείται **$\boldsymbol{X}$ ή $\boldsymbol{I}$ διάγραμμα ελέγχου**. Τα όρια ελέγχου του X διαγράμματος, για $n = 1$ (Φάση ΙΙ) είναι:

$$\begin{aligned} UCL_X &= \bar{X} + 3\sigma \\ CL_X &= \bar{X} \\ LCL_X &= \bar{X} - 3\sigma \end{aligned} \tag{2.6}$$

Αν μ και σ άγνωστα, πρέπει να εκτιμηθούν. Έστω ότι διαθέτουμε m ανεξάρτητες παρατηρήσεις $X_1, \dots, X_m$ από το χαρακτηριστικό X. Τότε $\hat{\mu} = \bar{X} = (\sum_{i=1}^{m} X_i)/m$ και αν $\overline{MR} = (MR_1 + \cdots + MR_{m-1})/(m-1)$, προκύπτει ότι $E(\overline{MR}) = \sigma d_2$ και $\hat{\sigma} = \overline{MR}/d_2$ (Κουκουβίνος (2008)). Τα όρια ελέγχου του X διαγράμματος, για $n = 1$ (Φάση Ι):

$$\begin{aligned} UCL_X &= \bar{X} + 3(\overline{MR}/d_2) \\ CL_X &= \bar{X} \\ LCL_X &= \bar{X} - 3(\overline{MR}/d_2) \end{aligned} \tag{2.7}$$

2.3 Διαγράμματά ελέγχου τύπου CUSUM

Για να αυξήσουμε την ικανότητα των διαγραμμάτων ελέγχου για την ανίχνευση μικρών επίμονων μετατοπίσεων, ο Page (1954) εισήγαγε τα **Αθροιστικά διάγραμμα ελέγχου** (*Cumulative Sum control charts*, $CUSUM$). Τα $CUSUM$ διαγράμματα χρησιμοποιούν πληροφορία των πρόσφατων και των παρελθόντων δειγμάτων. Το γεγονός αυτό καθιστά τα $CUSUM$ διαγράμματα αποτελεσματικά στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων στις παραμέτρους της διεργασίας.

Το χαρακτηριστικό $X \sim N(\mu_0, \sigma^2)$. Επιλέγοντας τυχαία δείγματα $X_i = (X_{i1}, \dots, X_{in}), 1 \le i \le m$, μεγέθους $n \ge 1$ το καθένα, ο δειγματικός μέσος $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_{ij} \sim N(\mu_0, \sigma^2/n)$. Τα $CUSUM$ διαγράμματα είναι αποδοτικά στις περιπτώσεις μεμονωμένων παρατηρήσεων και ενσωματώνουν άμεσα όλες τις πληροφορίες της ακολουθίας των παρατηρήσεων, γιατί παριστάνουν τα σωρευτικά αθροίσματα (*cumulative sum*) C_i των διαφόρων δειγματικών τιμών από την τιμή στόχο μ_0.

2.3.1 Διάγραμμα Tabular CUSUM

Στο ***Tabular CUSUM*** διάγραμμα είναι απαραίτητος ο υπολογισμός δύο σωρευτικών αθροισμάτων για κάθε τιμή ελέγχου. Οι θετικές αποκλίσεις από τον στόχο συναθροίζονται με το άνω σωρευτικό άθροισμα C_i^+ (*one sided upper cusum*), ενώ οι αρνητικές αποκλίσεις από τον στόχο συναθροίζονται με το κάτω σωρευτικό άθροισμα C_i^- (*one sided lower cusum*), σύμφωνα με τις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned} C_i^+ &= max[0, X_i - (\mu_0 + K) + C_{i-1}^+] \\ C_i^- &= max[0, (\mu_0 - K) - X_i + C_{i-1}^-] \end{aligned} \tag{2.8}$$

με $1 \le i \le m$ και αρχικές τιμές $C_0^+ = C_0^- = 0$.

Τα αθροίσματα C_i^+, C_i^- υπολογίζονται από τις διάφορες τιμές των τιμών X_i από την μέση τιμή μ_0, εφόσον αυτές είναι μεγαλύτερες από την τιμή αναφοράς $K \ge 0$ (*reference ή*

allowance value). Κάθε φορά που οι διαφορές γίνονται αρνητικές, το άθροισμα (C_i^+ ή C_i^-) μηδενίζεται για να ξαναρχίσει να αυξάνεται όταν οι διαφορές γίνουν ξανά μεγαλύτερες του μηδενός. Στο $Tabular\ CUSUM$ διάγραμμα τα αθροίσματα C_i^+ και C_i^- σχεδιάζονται ως διαφορετικές στήλες πάνω και κάτω από τη μέση τιμή. Η τιμή αναφοράς K δεν σχεδιάζεται στο $Tabular\ CUSUM$. Το όριο ελέγχου που σχεδιάζεται στο διάγραμμα είναι το διάστημα απόφασης H (*decision interval*). Το ανώτερο H^+ και το κατώτερο H^- σχεδιάζονται με δύο ευθείες γραμμές παράλληλες προς το μέσο μ_0. Η τιμή του διαστήματος απόφασης υποδεικνύει τα ανώτερα επιτρεπτά όρια των αθροισμάτων C_i^+, C_i^- και επιλέγεται να είναι $H = 5\sigma$. Θέτουμε $H = h\sigma$, $K = k\sigma = (\delta/2)\sigma$, $\delta = |\mu_1 - \mu_2|/\sigma$, όπου k είναι το μέγεθος της μετατόπισης που θέλουμε να ανιχνευτεί, μ_0 η τιμή στόχος (μέση τιμή), μ_1 η εκτός ελέγχου τιμή του μέσου (η ανώτατη επιτρεπτή τιμή των δειγμάτων ελέγχου). Η επιλογή της παραμέτρου k εξαρτάται από το μέγεθος της μετατόπισης που θέλουμε να ανιχνευτεί (Montgomery (2013)).

2.3.2 Τυποποιημένο διάγραμμα CUSUM

Σε μερικές περιπτώσεις είναι προτιμότερο να τυποποιείται η μεταβλητή X_i πριν τον υπολογισμό των συσσωρευμένων αθροισμάτων. Ορίζεται η μεταβλητή

$$Y_i = \frac{(X_i - \mu_0)}{\sigma} \sim N(0,1) \tag{2.9}$$

η οποία αποτελεί την τυποποιημένη τιμή της X_i. Τα άνω και κάτω συσσωρευμένα αθροίσματα για το τυποποιημένο διάγραμμα $CUSUM$ *(Standardized CUSUM chart*) μετασχηματίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} C_i^+ &= max[0, Y_i - k + C_{i-1}^+] \\ C_i^- &= max[0, -k - Y_i + C_{i-1}^-] \end{aligned} \tag{2.10}$$

με $1 \leq i \leq m$ και αρχικές τιμές $C_0^+ = C_0^- = 0$.

Τα τυποποιημένα διαγράμματα $CUSUM$ έχουν δύο πλεονεκτήματα:

- Πολλά διαγράμματα $CUSUM$ με τις ίδιες τιμές των h και k.
- Μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον έλεγχο της μεταβλητότητας της διεργασίας.

2.4 Διαγράμματα ελέγχου τύπου EWMA

Το **Διάγραμμα Ελέγχου με Κινητούς Μέσους και Εκθετικά Βάρη** *(Exponentially Weighted Moving Average Control chart, $EWMA$)* αποτελεί μια καλή εναλλακτική των *Shewhart* διαγραμμάτων ελέγχου όταν μας ενδιαφέρει να ανιχνεύσουμε μικρές μετατοπίσεις. Η απόδοση του $EWMA$ διαγράμματος ελέγχου είναι προσεγγιστικά ισοδύναμη με αυτή του $CUSUM$ διαγράμματος ελέγχου, και κατά κάποιο τρόπο είναι ευκολότερα στην κατασκευή και λειτουργία.

2.4.1 Διάγραμμα Ελέγχου με Κινητούς Μέσους και Εκθετικά Βάρη

Το $EWMA$ διάγραμμα ελέγχου παρουσιάστηκε από τον Roberts (1959). Η χρήση του συνίσταται κυρίως στην περίπτωση που θέλουμε να εντοπίσουμε μικρές μεταβολές στο μέσο μιας διεργασίας και χρησιμοποιείται επίσης για μεμονωμένες παρατηρήσεις. Ο εκθετικά σταθμισμένος κινητός μέσος (*exponentially weighted moving average,* $EWMA$) ορίζεται από τη σχέση:

$$z_i = \lambda x_i + (1-\lambda) z_{i-1} \tag{2.11}$$

όπου x_i είναι οι παρατηρήσεις, $\lambda \in (0,1]$ είναι μια σταθερά, η οποία καλείται συντελεστής βαρύτητας (*weighting factor*) και η τιμή εκκίνησης z_0 είναι η μέση τιμή (τιμή στόχος) $z_0 = \mu_0$ (Montgomery(2013)). Η κατασκευή του $EWMA$ διαγράμματος απαιτεί τη μέση τιμή και την τυπική απόκλισης της z_i. Στην περίπτωση που οι παρατηρήσεις x_i είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με διασπορά σ^2 τότε η διασπορά των z_i είναι:

$$\sigma_{z_i}^2 = \sigma^2[\lambda/(2-\lambda)]\left(1-(1-\lambda)^{2i}\right) \tag{2.12}$$

Η κεντρική γραμμή και τα όρια ελέγχου του $EWMA$ διαγράμματος είναι:

$$\begin{aligned} UCL &= \mu_0 + L\sigma\sqrt{[\lambda/(2-\lambda)](1-(1-\lambda)^{2i})} \\ CL &= \mu_0 \\ LCL &= \mu_0 - L\sigma\sqrt{[\lambda/(2-\lambda)](1-(1-\lambda)^{2i})} \end{aligned} \tag{2.13}$$

όπου L το εύρος των ορίων και μ_0 η τιμή στόχος. Παρατηρείται ότι $\left[1-(1-\lambda)^{2i}\right] \xrightarrow{i\uparrow} 1$. Αυτό σημαίνει ότι από ένα σημείο και πέρα, τα όρια ελέγχου εξομαλύνονται και οι προηγούμενες σχέσεις μετατρέπονται ως εξής:

$$\begin{aligned} UCL &= \mu_0 + L\sigma\sqrt{[\lambda/(2-\lambda)]} \\ CL &= \mu_0 \\ LCL &= \mu_0 - L\sigma\sqrt{[\lambda/(2-\lambda)]} \end{aligned} \tag{2.14}$$

Τα άνω και κάτω όρια αποκτούν μια σταθερή τιμή και στο διάγραμμα ελέγχου απεικονίζονται ως δυο ευθείες γραμμές παράλληλες μεταξύ τους. Τα παραπάνω ισχύουν και στην περίπτωση που οι παρατηρήσεις είναι μεμονωμένες. Για την κατασκευή ενός $EWMA$ διαγράμματος απαιτείται ο προσδιορισμός των τιμών των παραμέτρων λ και L. Όσον αφορά την επιλογή του λ συνίσταται χρήση μικρών τιμών για την ανίχνευση μικρών αλλαγών στη διαδικασία, ήτοι $0.05 \leq \lambda \leq 0.25$, ενώ για το L χρησιμοποιείται συνήθως η τιμή $L = 3$.

2.4.2 Διάγραμμα Ελέγχου με Κινητούς Μέσους

Αποτελεί ένα εναλλακτικό διάγραμμα ελέγχου του $EWMA$ διαγράμματος που βασίζεται σε ένα απλό, μη σταθμισμένο κινητό μέσο (*moving average*). Υποθέτουμε ότι έχουν συλλεχθεί $x_1, x_2, \ldots$ μεμονωμένες παρατηρήσεις, Ο κινητός μέσος διαρκείας (*span*) w στο χρόνο i, για $i \geq w$ δίνεται από τη σχέση

$$M_i = \frac{x_i + x_{i-1} + \cdots + x_{i-w+1}}{w} \tag{2.15}$$

Δηλαδή στην χρονική περίοδο i, η παλαιότερη παρατήρηση διαγράφεται και προστίθεται η πιο καινούργια. Η σχέση του μεγέθους της μεταβολής που θέλουμε να ανιχνεύσουμε και του w, είναι αντιστρόφως ανάλογη. Η διασπορά των M_i είναι $Var(M_i) = \sigma^2/w$. Ως εκ τούτου, αν μ_0 η τιμή στόχος, η κεντρική γραμμή και τα όρια ελέγχου είναι:

$$\begin{aligned} UCL &= \mu_0 + 3\sigma/\sqrt{w} \\ CL &= \mu_0 \\ LCL &= \mu_0 - 3\sigma/\sqrt{w} \end{aligned} \tag{2.16}$$

Και για $0 < i < m$ η κεντρική γραμμή και τα όρια ελέγχου είναι:

$$\begin{aligned} UCL &= \mu_0 + 3\sigma/\sqrt{i} \\ CL &= \mu_0 \\ LCL &= \mu_0 - 3\sigma/\sqrt{i} \end{aligned} \tag{2.17}$$

Αν τα M_i υπερβαίνουν τα όρια ελέγχου, τότε η διεργασία θεωρείται εκτός ελέγχου.

Κεφάλαιο 3

Διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart για την παρακολούθηση της διασποράς της διεργασίας

3.1 Εισαγωγή

Στην παρούσα παράγραφο σκοπεύουμε να παρουσιάσουμε τα κυριότερα διαγράμματα τύπου *Shewhart* για την παρακολούθηση της διασποράς της διεργασίας ενός συνεχούς ποιοτικού χαρακτηριστικού X. Αυτά τα διαγράμματα βασίζονται στο δειγματικό εύρος (*sample range*), στη δειγματική τυπική απόκλιση (*sample standard deviation*), στη δειγματική διακύμανση (*sample variance*), στο ενδοτεταρτημοριακό εύρος (*interquartile range*), στην εκτιμήτρια του Downton (*Downton estimator*), στην μέση διαφορά του Gini (*Gini's mean difference*), στη Διάμεση Απόλυτη Απόκλιση (*Median Absolute Difference*), στις S_n και Q_n εκτιμήτριες και στην τ (*tau*) εκτιμήτρια. Οι σταθερές που απαιτούνται για την κατασκευή του εκάστοτε διαγράμματος ελέγχου παρουσιάζονται στα Παραρτήματα I και II.

3.2 Στατιστικές συναρτήσεις Διασποράς

Στην παρούσα ενότητα, παρουσιάζονται οι στατιστικές συναρτήσεις διασποράς που αποτελούν τη βάση για ένα διάγραμμα ελέγχου διασποράς τύπου *Shewhart*. Έστω X είναι το ποιοτικό χαρακτηριστικό και έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ είναι τυχαίο δείγμα μεγέθους n. Επιπλέον, έστω $X_{(i)}$ είναι η $i-$οστή διατεταγμένη παρατήρηση (από τη μικρότερη στην μεγαλύτερη), $\bar{X}$ είναι ο δειγματικός μέσος και $|X|$ η απόλυτη τιμή του X.

3.2.1 Δειγματικό εύρος

Το δειγματικό εύρος (R) είναι η πιο ευρέως χρησιμοποιούμενη στατιστική συνάρτηση διασποράς για τα διαγράμματα ελέγχου και ορίζεται από τη σχέση

$$R_j = X_{(n)} - X_{(1)}, \;\; 1 \le j \le m \tag{3.1}$$

όπου $X_{(n)} = max\{X_j, i = 1, \dots, n\}$, $X_{(1)} = min\{X_j, i = 1, \dots, n\}$, με $\mu_R = E(R) = \sigma d_2$ και $\sigma_R = \sqrt{Var(R)} = \sigma d_3$. Αφού το R εξαρτάται μόνο από τις μικρότερες και τις μεγαλύτερες παρατηρήσεις, είναι μια αποδοτική εκτιμήτρια της διασποράς για μικρά μεγέθη δείγματος αλλά χάνει την αποτελεσματικότητα καθώς το μέγεθος του δείγματος αυξάνει. Ο Montgomery (2013) συνιστά τη χρήση της δειγματικής τυπικής απόκλισης αντί του R για μέτρια έως μεγάλα μεγέθη δείγματος. Επιπρόσθετα, είναι ευαίσθητο στις έκτροπες τιμές και στις αποκλίσεις από την κανονικότητα.

3.2.2 Δειγματική τυπική απόκλιση

Μια άλλη ευρέως χρησιμοποιούμενη στατιστική συνάρτηση διασποράς είναι η δειγματική τυπική απόκλιση (S):

$$S_j = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_j - \bar{X})^2}\,,\ \ 1 \le j \le m \tag{3.2}$$

Για κανονικά κατανεμημένα ποιοτικά χαρακτηριστικά, η S είναι η πιο αποδοτική εκτιμήτρια διασποράς. Ωστόσο μελέτες έχουν δείξει ότι μπορεί να είναι ευαίσθητη στις αποκλίσεις από την κανονικότητα και τις έκτροπες τιμές. Τα διαγράμματα ελέγχου που βασίζονται στις στατιστικές συναρτήσεις R και S (ήτοι το R και το S διάγραμμα, αντίστοιχα) μπορούν να βρεθούν σε αρκετά βιβλία του ΣΕΔ, για παράδειγμα Montgomery (2013).

3.2.3 Δειγματική διακύμανση

Η δειγματική διακύμανση (S^2) δίνεται από την σχέση:

$$S_j^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_{ij} - \bar{X}_j\right)^2, 1 \le j \le m \tag{3.3}$$

με $\mu_{S_j^2} = E\left(S_j^2\right) = \sigma^2$.

3.2.4 Ενδοτεταρτημοριακό εύρος

Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος, που βασίζεται στην εκτίμηση του σ, έστω Q, ορίζεται ως εξής (David (1998)):

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{1.34898} \tag{3.4}$$

όπου Q_3 και Q_1 είναι το τρίτο και το πρώτο τεταρτημόριο αντίστοιχα. Σε ένα σύνολο διατεταγμένων τιμών (σε αύξουσα σειρά), το Q_1 είναι η παρατήρηση στη θέση $(n+1)/4$ και το Q_3 είναι η παρατήρηση στη θέση $3(n+1)/4$, και αν η θέση δεν είναι ακέραιος τότε χρησιμοποιείται μια γραμμική παρεμβολή όπως παρατηρείται στους Kenett and Zacks (1998).

3.2.5 Εκτιμήτρια του Downton

Ο Downton (1966) πρότεινε την ακόλουθη εκτιμήτρια του σ:

$$D = \frac{2\sqrt{\pi}}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left[i - \frac{1}{2}(n+1)\right]X_{(i)} \tag{3.5}$$

Για κανονικά κατανεμημένο ποιοτικό χαρακτηριστικό, η D είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του σ (Bernett et al. (1967)) και η D δεν επηρεάζεται από την μη κανονικότητα (Abbasi and Miller (2011)). Να σημειωθεί ότι η δειγματική κατανομή της D δεν είναι συμμετρική για μικρά έως μέτρια μεγέθη δείγματος. Οι Abu-Shawiesh and Abdullah (2000) πρότειναν ένα S^*

διάγραμμα για την παρακολούθηση της διασποράς της διεργασίας χρησιμοποιώντας την εκτιμήτρια του *Downton* στο στάδιο του υπολογισμού των ορίων ελέγχου ενώ χρησιμοποιείται η δειγματική τυπική απόκλιση S ως στατιστική συνάρτηση. Έδειξαν ότι, υπό την παρουσία έκτροπων τιμών και μη κανονικότητας, το S^* διάγραμμα αποδίδει καλύτερα από το R διάγραμμα και είναι τόσο αποτελεσματικό όσο το S διάγραμμα.

3.2.6 Μέση διαφορά του Gini

Η Μέση διαφορά του Gini (*Gini's mean difference*) ορίζεται ως ένας δείκτης μεταβλητότητας του συνόλου $\{X_1, \dots, X_n\}$ που δίνεται από τη σχέση:

$$G = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \sum_{i=1}^{n} |X_i - X_j| \tag{3.6}$$

3.2.7 Διάμεση Απόλυτη Απόκλιση

Η διάμεση απόλυτη απόκλιση (*Median Abosute Deviation*, MAD) από την δειγματική διάμεσο, προτάθηκε για πρώτη φορά από τον Hambel (1974), και την απέδωσε στον Gauss, ως μια εύρωστη εναλλακτική της δειγματικής τυπικής απόκλισης. Αυτή η εκτιμήτρια είναι μια πολύ απλή και εύκολη να υπολογιστεί. Για περισσότερες εύρωστες και αποτελεσματικές εκτιμήτριες, η MAD χρησιμοποιείται για αρχική εκτιμήτρια για επαναληπτικές διαδικασίες. Η MAD ορίζεται ως εξής:

$$MAD = 1.4826 med\{|X_i - med(X_i)|\} \tag{3.7}$$

Έχει το μέγιστο σημείο κατάρρευσης (*breakdown point*) το οποίο είναι 50%, και ως εκ τούτου είναι μια πολύ εύρωστη εκτιμήτρια της σ, όπου το σημείο κατάρρευσης είναι το ποσοστό των δεδομένων στα οποία δίνονται ασυνήθιστα μεγάλες ή χαμηλές τιμές χωρίς να έχουν σημαντική επίδραση στην εκτιμήτρια. Οι Wu et al. (2002) έδειξαν ότι για νοθευμένα κανονικά δεδομένα η MAD ξεπέρασε κάποιες άλλες εκτιμήτριες. Επίσης η ευαισθησία γενικού σφάλματος (*gross error sensitivity*) είναι 1.167 που είναι η μικρότερη τιμή που μπορεί να ληφθεί με οποιαδήποτε εκτιμήτρια διασποράς στην κανονική κατανομή και η συνάρτηση επιρροής (*influence function)* της MAD είναι φραγμένη. Ωστόσο η εκτιμήτρια MAD έχει δύο βασικά μειονεκτήματα που είχαν επισημανθεί από Rousseeuw και Croux (1993): χαμηλή Gaussian απόδοση (36,74%) και την εξάρτησή της από την συμμετρικότητα της κατανομής. Τα MAD διαγράμματα ελέγχου δεν έχουν λάβει ιδιαίτερη προσοχή στην βιβλιογραφία του ΣΕΔ.

3.2.8 S_n και Q_n εκτιμήτριες

Για να ξεπεραστούν τα μειονεκτήματα της MAD οι Rousseeuw and Croux(1993) εισήγαγαν δύο νέες εκτιμήτριες, εναλλακτικές της MAD, τις S_n και Q_n, οι οποίες αμφότερες έχουν

σημεία κατάρρευσης του 50% (όπως και η MAD), αλλά έχουν υψηλότερες Gaussian αποδόσεις. Η S_n ορίζεται ως εξής:

$$S_n = 1.1926 med_i\{med_j|X_i - X_j|: i \neq j\} \tag{3.8}$$

Η S_n βασίζεται στην χρήση επαναλαμβανόμενων διαμέσων: η εσωτερική διάμεσος (med_j) είναι η $\lfloor(n/2)+1\rfloor^{th}$ διατεταγμένη στατιστική συνάρτηση, ενώ η εξωτερική διάμεσος (med_i) είναι η $\lfloor((n+1)/2)\rfloor^{th}$ διατεταγμένη στατιστική συνάρτηση. Οι Rousseeuw and Croux (1993) τις περιγράφουν ως "υψηλές" και "χαμηλές" διαμέσους. Όμοια η Q_n ορίζεται ως εξής:

$$Q_n = 2.219\{|X_i - X_j|: i < j\}_{(k)} \tag{3.9}$$

όπου $k = \binom{h}{2} \approx \binom{n}{2}/4$. Να σημειωθεί ότι σε αντίθεση με την MAD, οι S_n και Q_n δεν ενσωματώνουν μία εκτίμηση της θέσης. Αμφότερες οι S_n και Q_n έχουν πολύ υψηλότερες Gaussian αποδόσεις από την MAD: 58% για S_n και 82% για την Q_n. Τα διαγράμματα διασποράς με βάση τις S_n ή Q_n δεν έχουν μελετηθεί στην βιβλιογραφία του ΣΕΔ.

Οι Rousseeuw και Croux (1993) συνέστησαν ότι οι MAD, S_n και Q_n εκτιμήτριες είναι ιδιαίτερα χρήσιμες ως εκτιμήτριες του σ για κατανομές με βαριές ουρές (συμμετρικές) ή ασύμμετρες κατανομές. Επίσης έδειξαν ότι για μικρά μεγέθη δείγματος η εκτιμήτρια S_n αποδίδει καλύτερα από την εκτιμήτρια Q_n.

3.2.9 *τ (tau)* εκτιμήτρια

Η τ (*tau*) εκτιμήτρια εισήχθη από τους Yohai and Zamar (1988) και προτάθηκε από τους Maronna and Zamar (2002) ως μία εύρωστη εκτιμήτρια εκκίνησης για την εκτίμηση επαναληπτικού πίνακα διασποράς - συνδιασποράς. Ασυμπτωτικά, η εκτιμήτρια είναι ισοδύναμη με μία M εκτιμήτρια με μία συνάρτηση που δίνεται από ένα σταθμισμένο μέσο δύο y –συναρτήσεων, μια που αντιστοιχεί σε μία πολύ εύρωστη εκτιμήτρια και η άλλη σε μία υψηλά αποτελεσματική εκτιμήτρια (Yohai and Zamar, (1988)). Η εκτιμήτρια υπολογίζεται ως ακολούθως: Ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$W_c(X) = \left(1 - \left(\frac{X}{c}\right)^2\right)^2 I(|X| \leq c) \tag{3.10}$$

και

$$\rho_c(X) = min(X^2, c^2) \tag{3.11}$$

Έστω $X = (X_1, \dots, X_n)$ είναι ένα μονομεταβλητό διάνυσμα και έστω

$$\sigma_0 = MAD(X) \tag{3.12}$$

και

$$w_i = W_{ci} = \left(\frac{X_i - med(X)}{\sigma_0}\right) \tag{3.13}$$

Οι στατιστικές συναρτήσεις θέσης και κλίμακας είναι:

$$\mu(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} \quad (3.14) \quad \text{και} \quad \tau^2(X) = \frac{\sigma_0^2}{n}\sum_{i=1}^{n} \rho_{c2}\left(\frac{X_i - \mu(X)}{\sigma_0}\right) \quad (3.15)$$

Για να συνδυάσουμε την ευρωστία και την αποτελεσματικότητα, λαμβάνονται $c_1 = 4.5$ και $c_2 = 3$ (Maronna and Zamar (2002)). Η τ εκτιμήτρια έχει επίσης ένα μέγιστο σημείο

κατάρρευσης που είναι 50%. Επίσης οι τ εκτιμήτριες είναι ποιοτικά εύρωστες και είναι υψηλά αποδοτικές για κανονικές κατανομές.

3.3 Δομή των Διαγραμμάτων Ελέγχου

3.3.1 R Διάγραμμα Ελέγχου

Το R διάγραμμα ελέγχου για την παρακολούθηση της διασποράς του ποιοτικού χαρακτηριστικού X μπορεί να βασιστεί σε ένα διάγραμμα στο οποίο απεικονίζονται τα εύρη R_i , $1 \leq i \leq m$ των δειγμάτων, ήτοι το R διάγραμμα ελέγχου. Τα όρια ελέγχου του R διαγράμματος (Φάση ΙΙ) είναι:

$$\begin{aligned} UCL &= D_2\sigma \\ CL &= d_2\sigma \\ LCL &= D_1\sigma \end{aligned} \tag{3.16}$$

όπου $D_1 = D_1(n) = d_2 - 3d_3$ και $D_2 = D_2(n) = d_2 - 3d_3$ σταθερές (Montgomery (2013)). (Διάφορες τιμές των D_1, D_2, d_2 και d_3 δίνονται μαζί με άλλες σταθερές στο Παράρτημα Ι). Να σημειωθεί ότι, επειδή $D_1 < 0$ για $n \leq 6$, θέτουμε $D_1 = 0$ και κατ' επέκταση $LCL = 0$.

Στην πράξη, η ποσότητα σ είναι άγνωστη και πρέπει να εκτιμηθεί. Για να επιτευχθεί αυτό, επιλέγονται $m =$ 20 έως 25 ανεξάρτητα τυχαία δείγματα, μεγέθους $n =$4 έως 6 το καθένα, Υποθέτουμε ότι κατά την το χαρακτηριστικό $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Χρησιμοποιώντας την στατιστική συνάρτηση R και $\hat{\sigma} = \bar{R}/d_2$, τα όρια ελέγχου του R διαγράμματος (Φάση Ι) είναι:

$$\begin{aligned} UCL &= D_4\bar{R} \\ CL &= \bar{R} \\ LCL &= D_3\bar{R} \end{aligned} \tag{3.17}$$

όπου $D_3 = D_3(n) = 1 - 3d_3/d_2$ και $D_4 = D_4(n) = 1 + 3d_3/d_2$ σταθερές και $\bar{R} = \sum_{i=1}^{m} R_i/m$. (Διάφορες τιμές των D_3, D_4, d_2 και d_3 δίνονται μαζί με άλλες σταθερές στο Παράρτημα Ι.) Να σημειωθεί ότι, επειδή $D_3 < 0$ για $n \leq 6$, θέτουμε $D_3 = 0$ και έτσι $LCL = 0$.

3.3.2 S Διάγραμμα Ελέγχου

Το διάγραμμα ελέγχου για την παρακολούθηση της διασποράς του χαρακτηριστικού X μπορεί να βασιστεί σε ένα διάγραμμα στο οποίο απεικονίζονται οι τυπικές αποκλίσεις $S_i, 1 \leq i \leq m$ των δειγμάτων, ήτοι το S διάγραμμα ελέγχου. Τα όρια ελέγχου του S διαγράμματος (Φάση ΙΙ) είναι:

$$\begin{aligned} UCL &= B_6\sigma \\ CL &= c_4\sigma \\ LCL &= B_5\sigma \end{aligned} \tag{3.18}$$

όπου $B_5 = c_4 - 3\sqrt{1 - c_4^2}$ και $B_6 = c_4 + 3\sqrt{1 - c_4^2}$ σταθερές . (Διάφορες τιμές των B_5 και B_6 δίνονται στο Παράρτημα Ι.) Να σημειωθεί ότι, επειδή $B_5 < 0$ για $n \leq 5$, θέτουμε $B_5 = 0$ και ως εκ τούτου $LCL = 0$.

Στην πράξη, η σ είναι μια άγνωστη ποσότητα και πρέπει να εκτιμηθεί. Για το λόγο αυτό, επιλέγονται $m = 20$ έως 25 ανεξάρτητα τυχαία δείγματα $X_i = (X_{i1}, \dots, X_{in})$, μεγέθους $n = 4$ έως 6 το καθένα. Υποθέτουμε ότι $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Χρησιμοποιώντας την στατιστική συνάρτηση S_i και $\hat{\sigma} = \bar{S}/c_4$, τα όρια ελέγχου του S διαγράμματος (Φάση Ι) είναι:

$$\begin{aligned} UCL &= B_4\bar{S} \\ CL &= \bar{S} \\ LCL &= B_3\bar{S} \end{aligned} \tag{3.19}$$

όπου $B_3 = 1 - (3/c_4)\sqrt{1 - c_4^2}$, $B_4 = 1 + (3/c_4)\sqrt{1 - c_4^2}$ (με $B_4 = B_6/c_4$ και $B_3 = B_5/c_4$) και $A_3 = 3/(c_4\sqrt{n})$ σταθερές. (Διάφορες τιμές των B_3, B_4, B_5, B_6, A_3 και c_4 δίνονται στο Παράρτημα Ι). Να σημειωθεί ότι, επειδή $B_3 < 0$ για $n \leq 5$, θέτουμε $B_3 = 0$ και έτσι $LCL = 0$.

3.3.3 S^2 Διάγραμμα Ελέγχου

Οι περισσότεροι μηχανικοί της ποιότητας χρησιμοποιούν είτε το R είτε το S διάγραμμα για την παρακολούθηση της μεταβλητότητας της διεργασίας, με προτιμότερο το S από το R για μέτρια έως μεγάλα μεγέθη δειγμάτων. Μερικοί επαγγελματίες της ποιότητας συνιστούν ένα διάγραμμα ελέγχου που βασίζεται στην δειγματική διακύμανση, ήτοι το S^2 διάγραμμα ελέγχου. Τα όρια ελέγχου για το S^2 διάγραμμα ελέγχου (Φάση ΙΙ) με όρια πιθανότητας α είναι:

$$\begin{aligned} UCL &= \frac{\sigma^2}{n-1}\chi^2_{\alpha/2,n-1} \\ CL &= \sigma^2 \\ LCL &= \frac{\sigma^2}{n-1}\chi^2_{1-(\alpha/2),n-1} \end{aligned} \tag{3.20}$$

Πρακτικά, η ποσότητα σ είναι άγνωστη ποσότητα και πρέπει να εκτιμηθεί. Για την επίτευξη του, επιλέγονται $m = 20$ έως 25 ανεξάρτητα τυχαία δείγματα $X_i = (X_{i1}, \dots, X_{in})$, μεγέθους $n = 4$ έως 6 το καθένα, Υποθέτουμε ότι κατά την το χαρακτηριστικό $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Χρησιμοποιώντας την στατιστική συνάρτηση S_i και $\hat{\sigma} = \overline{S^2}$, τα όρια ελέγχου του S^2 διαγράμματος (Φάση Ι) με όρια πιθανότητας α είναι:

$$\begin{aligned} UCL &= \frac{\overline{S^2}}{n-1}\chi^2_{\alpha/2,n-1} \\ CL &= \overline{S^2} \\ LCL &= \frac{\overline{S^2}}{n-1}\chi^2_{1-(\alpha/2),n-1} \end{aligned} \tag{3.21}$$

3.3.4 Q Διάγραμμα ελέγχου

Υποθέτουμε ότι η σχέση των Q και σ ορίζεται από την τυχαία μεταβλητή D που δίνεται από τη σχέση (Riaz (2008)):

$$D = Q/\sigma \tag{3.22}$$

Για την κατασκευή των ορίων ελέγχου του D διαγράμματος, απαιτούνται οι εκτιμήσεις των σ και σ_D. Έχουμε ότι $E(D) = E(Q/\sigma) = E(Q)/\sigma$ και η $E(Q)$ μπορεί να αντικατασταθεί από τον μέσο του δείγματος του Q, ήτοι $\bar{Q}$. Έτσι μια εκτίμηση του σ, είναι

$$\hat{\sigma} = \bar{Q}/E(D) \tag{3.23}$$

Έστω $E(D) = q_1$. Ο συντελεστής q_1 εξαρτάται εξολοκλήρου από το n για την περίπτωση της κανονικής κατανομής (Riaz (2008)). Μια αμερόληπτη εκτιμήτρια του σ ορίζεται από την σχέση

$$\hat{\sigma} = \bar{Q}/q_1 \tag{3.24}$$

Όμοια για μία εκτίμηση του σ_D, λαμβάνουμε:

$$\sigma_D = \sigma_Q/\sigma \tag{3.25}$$

Έστω $\sigma_D = q_2$ (ο συντελεστής q_2 εξαρτάται εξολοκλήρου από το n για την περίπτωση της κανονικής κατανομής (Riaz (2008))) και αντικαθιστώντας $\hat{\sigma}$ για σ, μια εκτίμηση για την σ_{IQR} ορίζεται ως εξής:

$$\hat{\sigma}_Q = q_2\bar{Q}/q_1 \tag{3.26}$$

Η κεντρική γραμμή και τα 3σ όρια ελέγχου για το Q Διάγραμμα ελέγχου είναι:

$$\begin{aligned} UCL &= \bar{Q} + 3\sigma_Q = \bar{Q} + 3q_2\bar{Q}/q_1 \\ CL &= \bar{Q} \\ LCL &= \bar{Q} - 3\sigma_Q = \bar{Q} - 3q_2\bar{Q}/q_1 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Όπου οι q_1 και q_2 παρέχονται στον Riaz (2008) (βλέπε Παράρτημα ΙΙ). Η εγκυρότητα των 3σ ορίων ελέγχου για το Q Διάγραμμα ελέγχου εξαρτάται από το πόσο κοντά στην κανονική προσέγγιση είναι η πραγματική κατανομή της D. Για μικρές τιμές του n, μερικές φορές το LCL έχει σαν αποτέλεσμα μια αρνητική τιμή. Μια αρνητική τιμή για το μέτρο διασποράς δεν έχει καμία ρεαλιστική σημασία. Ως εκ τούτου, σε αυτές τις περιπτώσεις, έχουμε $LCL = 0$.
Η στατιστική συνάρτηση Q σχεδιάζεται έναντι της χρονοσειράς των δειγμάτων. Αν όλα τα Q βρίσκονται εντός των ορίων ελέγχου, υπάρχει μια λογική ένδειξη να συμπεράνουμε ότι δεν υπάρχει μετατόπιση στην διασπορά της διεργασίας και η διεργασία είναι σταθερή στο $\bar{Q}/q_1$. Διαφορετικά, προσδιορισμένες αιτίες προκαλούν μία μετατόπιση στην διασπορά της διεργασίας.

Έχει παρατηρηθεί ότι το Q διάγραμμα ελέγχου είναι ανώτερο του R διαγράμματος και κοντινός ανταγωνιστής του S διαγράμματος υπό την έννοια ότι η διακριτική ικανότητα του Q διαγράμματος είναι υψηλότερη από εκείνη του R διαγράμματος και όχι πολύ λιγότερη από εκείνη του S διαγράμματος για μια δοθείσα μετατόπιση στην διασπορά της διεργασίας για κανονικά κατανεμημένα δεδομένα. Επίσης παρατηρείται ότι η διακριτική ικανότητα του Q διαγράμματος είναι λιγότερο επηρεασμένη από την μεταβολή από την κανονικότητα μεταξύ των Q, R και S διαγραμμάτων. Συγκεκριμένα, για μικρές τιμές του n, που είναι μια πιο πρακτική κατάσταση, η δομή σχεδιασμού του Q διαγράμματος είναι πιο αποτελεσματική από εκείνη των R και S διαγραμμάτων υπό την έννοια της ικανοποιητικής παραγωγής της

διακριτικής ικανότητας για μια δοθείσα μετατόπιση στην διασπορά της διεργασίας και λιγότερο επηρεασμένη από την μη κανονικότητα.

3.3.5 D Διάγραμμα Ελέγχου

Υποθέτουμε ότι η σχέση μεταξύ των D και σ ορίζεται από την τυχαία μεταβλητή Z που δίνεται από τη σχέση $Z = D/\sigma$. Για την κατασκευή των ορίων ελέγχου του D διαγράμματος, απαιτούνται οι εκτιμήσεις των σ και σ_D. Έχουμε ότι $E(Z) = E(D/\sigma) = E(D)/\sigma$ και η $E(D)$ μπορεί να αντικατασταθεί από τον μέσο του δείγματος του D, ήτοι $\overline{D}$.
Έστω $E(Z) = z_2$, καθώς ο D είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του σ και κατ' επέκταση $z_2 = 1$ για κάθε τιμή του n. Επομένως, υπό την υπόθεση της κανονικότητας, ένας αμερόληπτος εκτιμητής του σ βάσει της εκτιμήτριας του Downton δίνεται από τη σχέση $\hat{\sigma} = \overline{D}$.
Όμοια, για την εκτίμηση του σ_D έχουμε $\sigma_Z = \sigma_D/\sigma$. Έστω $\sigma_Z = z_3$ και κατ' επέκταση

$$\sigma_D = z_3\sigma \tag{3.28}$$

Οι Bernett et all (1967) έδειξαν ότι

$$Var(D) = \frac{\sigma^2}{n(n-1)}\{n\left(\frac{1}{3}\pi + 2\sqrt{3} - 4\right) + (6 - 4\sqrt{3} + \frac{1}{3}\pi)\} \tag{3.29}$$

Από τις σχέσεις (3.28) και (3.29) έχουμε:

$$z_3 = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}\sqrt{n\left(\frac{1}{3}\pi + 2\sqrt{3} - 4\right) + (6 - 4\sqrt{3} + \frac{1}{3}\pi)} \tag{3.30}$$

Αντικαθιστώντας μια εκτίμηση του σ, δηλαδη $\hat{\sigma} = \overline{D}$ στην εξίσωση (3.29) έχουμε $\hat{\sigma}_D = z_3\overline{D}$.
Επομένως, η κεντρική γραμμή και τα 3σ όρια ελέγχου είναι:

$$\begin{gathered} UCL = \overline{D} + 3z_3\overline{D} = Z_4\overline{D} \\ CL = \overline{D} \\ LCL = max\{0, \overline{D} - 3z_3\overline{D}\} = Z_3\overline{D} \end{gathered} \tag{3.31}$$

όπου $Z_3 = max\{0,1 - 3z_3\}$ και $Z_4 = 1 + 3z_3$ και z_3 εξαρτώνται από το μέγεθος δείγματος n.
Αφού ορίσουμε τα όρια ελέγχου, σχεδιάζουμε την στατιστική συνάρτηση D έναντι του χρόνου ή του δειγματικού αριθμού. Αν όλα τα D βρίσκονται εντός των ορίων ελέγχου τότε η μεταβλητότητα της διεργασίας είναι εντός ελέγχου, διαφορετικά αν ένα ή περισσότερα D βρίσκονται εκτός των ορίων, τότε η διαδικασία είναι εκτός στατιστικού ελέγχου.

Η Abbasi and Miller (2011) σύγκριναν την απόδοση του D διαγράμματος με τα κλασσικά R και S διαγράμματα χρησιμοποιώντας την πιθανότητα σήματος μετατοπίσεων σαν μέτρο απόδοσης. Έδειξαν ότι για κανονικά κατανεμημένο ποιοτικό χαρακτηριστικό το D διάγραμμα είναι εξίσου αποτελεσματικό με το S υπό όρους ανίχνευσης μετατοπίσεων στην μεταβλητότητα της διεργασίας και έχει καλύτερη ικανότητα ανίχνευσης σε σύγκριση με το R διάγραμμα. Για μη κανονικές διεργασίες, το D διάγραμμα παρουσιάζει υπεροχή σε σύγκριση με τα R και S διαγράμματα. Οι επαγγελματίες ποιότητας μπορούν εύκολα να χρησιμοποιήσουν το D διάγραμμα σαν ανώτερο εναλλακτικό των R και S διαγραμμάτων εξαιτίας της αποτελεσματικής ικανότητας ανίχνευσης.

3.3.6 G Διάγραμμα Ελέγχου

Οι Riaz and Saghirr (2007) προτείναν ένα διάγραμμα ελέγχου μεταβλητότητας, το οποίο καλείται G διάγραμμα και βασίζεται στη στατιστική συνάρτηση

$$K = \frac{\sqrt{\pi}/2}{(n(n-1)/2)} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \sum_{i=1}^{n} |X_i - X_j| \tag{3.32}$$

(η οποία προτάθηκε από τον David (1968) και ισούται με $(\sqrt{\pi}/2)G$) για την παρακολούθηση αλλαγών στην μεταβλητότητα της διεργασίας, ακολουθώντας το έργο των Shewhart (1931), Pearson (1932), Pappanastos and Adams (1996) και Gonzales and Viles (2000,2001).

Υποθέτοντας κανονικότητα του ποιοτικού χαρακτηριστικού X, για το σχεδιασμό του G διαγράμματος απαιτείται η σχέση μεταξύ της τυπικής απόκλισης σ και την δειγματικής στατιστικής συνάρτησης K. Έστω $X_1, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητες, ισόνομες και κανονικά ισόνομα κατανεμημένες (*independent, identical and normally distributed, iid*) και M είναι μια τυχαία μεταβλητή που ορίζει τη σχέση μεταξύ των σ και K που δίνεται από τη σχέση:

$$M = K/\sigma \tag{3.33}$$

Έχουμε

$$E(M) = E(K/\sigma) = E(K)/\sigma \tag{3.34}$$

Αφού K είναι αμερόληπτος εκτιμητής του σ, στην περίπτωση του κανονικά κατανεμημένου ποιοτικού χαρακτηριστικού έτσι $E(M) = 1$ και κατ' επέκταση

$$\sigma = E(K) \tag{3.35}$$

Να σημειωθεί ότι η $E(K)$ μπορεί να αντικατασταθεί από την εκτιμήτρια $\overline{K}$ χρησιμοποιώντας ένα κατάλληλο αριθμό δειγμάτων (Hillier(1969), Yang, and Hiller (1970)). Επομένως μια εκτίμηση του σ είναι

$$\hat{\sigma} = \overline{K} \tag{4.36}$$

Η παραπάνω έκφραση είναι παρόμοια με την $\hat{\sigma} = \bar{R}/d_2$ για το R διάγραμμα υποθέτοντας κανονική κατανομή (Alwan (2000)) και $\hat{\sigma} = \bar{S}/c_4$ για το S διάγραμμα υποθέτοντας κανονική κατανομή (Alwan (2000)). Παρατηρείται ότι δεν απαιτείται κάποιος συντελεστής όπως d_2 και d_3 στα R και S διαγράμματα αντίστοιχα. Έστω η τυπική απόκλιση της M, είναι

$$\sigma_M = b_3 \tag{3.37}$$

Οι Riaz and Saghirr (2007) χρησιμοποιώντας 10000 τυχαία δείγματα που παρήχθησαν από μια κανονική κατανομή, χωρίς βλάβη της γενικότητας, έλαβαν 1000 τιμές της b_3. Βάσει αυτών των αποτελεσμάτων οι μέσες τιμές της b_3 μαζί με τα αντίστοιχα τυπικά σφάλματα παρουσιάζονται στο Παράρτημα ΙΙ. Επιπρόσθετα από την διασπορά της M έχουμε

$$\sigma_M = \sigma_K/\sigma \tag{3.38}$$

Από τις δύο παραπάνω σχέσεις έχουμε

$$\begin{aligned} \sigma_K &= b_3\sigma \\ \hat{\sigma}_K &= b_3\overline{K} \end{aligned} \tag{3.39}$$

Η παραπάνω σχέση είναι παρόμοια με την έκφραση της $\hat{\sigma}_R$ του R διαγράμματος (Alwan (2000)). Η κεντρική γραμμή και τα 3σ όρια ελέγχου του G διαγράμματος είναι

$$\begin{aligned} UCL &= \overline{K} + 3b_3\overline{K} \\ CL &= \overline{K} \\ LCL &= \overline{K} - 3b_3\overline{K} \end{aligned} \tag{3.40}$$

όπου οι τιμές της b_3 εξαρτώνται από το μέγεθος δείγματος n (βλέπε Παραρτημα ΙΙ).

Οι Riaz and Saghirr (2007) σύγκριναν το G διάγραμμα ελέγχου με τα R και S διαγράμματα. Παρατήρησαν ότι το G διάγραμμα είναι ανώτερο διάγραμμα *από το* R διάγραμμα και είναι πολύ καλός ανταγωνιστής του S διαγράμματος υπό την έννοια ότι η διακριτική ισχύς είναι υψηλότερη του R διαγράμματος και είναι περίπου ίδιο με το S διάγραμμα για μια δοθείσα μετατόπιση στην μεταβλητότητα της διεργασίας για κανονικά κατανεμημένα δεδομένα. Επίσης παρατηρείται η διακριτική ισχύς του G διαγράμματος, επηρεάζεται (ανάμεσα στα τρία διαγράμματα υπό σύγκριση) από την απόκλιση από την κανονικότητα.
Ειδικότερα για μικρές τιμές του n, η οποία είναι μια πιο πρακτική περίπτωση, η δομή σχεδιασμού του G διαγράμματος, είναι πιο αποτελεσματική από εκείνες των R και S διαγραμμάτων υπό την έννοια την παραγωγής αποτελεσματικά υψηλότερης συγκριτικής ισχύος για μια δοθείσα μετατόπιση στην μεταβλητότητα της διεργασίας και να επηρεασμό από την μη κανονικότητα. Ένα επιπλέον πλεονέκτημα του G διαγράμματος σε σχέση με τα R και S διαγράμματα είναι ότι δεν απαιτεί κάποια σταθερά όπως οι συντελεστές d_2 και c_4 που χρησιμοποιούνται σε αυτά αντίστοιχα για την λήψη της αμερόληπτης εκτιμήτριας της πραγματικής τυπικής απόκλισης σ της διεργασίας.

3.3.7 *MAD* Διάγραμμα Ελέγχου

Τα όρια ελέγχου για το *Shewhart-* S διάγραμμα ελέγχου βασισμένο στην MAD $\left(\overline{MAD} = \sum_{i=1}^{m} MAD_{(i)}/m\right)$ εκτιμήτρια είναι:

$$\begin{aligned} UCL &= c_4\hat{\sigma} + 3\hat{\sigma}\sqrt{1-c_4^2} = c_4 b_n\overline{MAD} + 3b_n\overline{MAD}\sqrt{1-c_4^2} = B_6 b_n\overline{MAD} = B_6^*\overline{MAD} \\ CL &= c_4\hat{\sigma} = c_4 b_n\overline{MAD} = c_4^*\overline{MAD} \\ LCL &= c_4\hat{\sigma} - 3\hat{\sigma}\sqrt{1-c_4^2} = c_4 b_n\overline{MAD} - 3b_n\overline{MAD}\sqrt{1-c_4^2} = B_5 b_n\overline{MAD} = B_5^*\overline{MAD} \end{aligned} \tag{3.41}$$

Η τιμή της σταθεράς c_4 δίνεται στο Παράρτημα ΙΙ και οι τιμές των σταθερών B_5^*, B_6^* και c_4^* δίνονται από τον Abu-shawiesh (2008) και παρατίθενται στο Παράρτημα ΙΙ. Έδειξαν ότι στην κανονική κατανομή, η MAD έχει εξαιρετική απόδοση με τη δειγματική τυπική απόκλιση. Ωστόσο σε μη κανονική κατανομή, ειδικά για μία κατανομή με βαριές ουρές, και για μέτρια μεγέθη δείγματος η εύρωστη μέθοδος οδηγεί σε καλύτερη απόδοση από ότι η αντίστοιχη κανονική θεωρία.

3.3.8 S_n και Q_n Διαγράμματα ελέγχου

Τα όρια ελέγχου για το *Shewhart-*S διάγραμμα ελέγχου βασισμένο στην εκτιμήτρια S_n $\left(\bar{S}_n = \sum_{i=1}^{m} S_{n(i)}/m\right)$ είναι:

$$
\begin{aligned}
UCL_S &= c_4\hat{\sigma} + 3\hat{\sigma}\sqrt{1-c_4^2} = c_4 d_n \bar{S}_n + 3 d_n \bar{S}_n \sqrt{1-c_4^2} = B_{SU}^* \bar{S}_n \\
CL_S &= c_4\hat{\sigma} = c_4 d_n \bar{S}_n = c_4^S \bar{S}_n \\
LCL_S &= c_4\hat{\sigma} - 3\hat{\sigma}\sqrt{1-c_4^2} = c_4 d_n \bar{S}_n - 3 d_n \bar{S}_n \sqrt{1-c_4^2} = B_{SL}^* \bar{S}_n
\end{aligned}
\tag{3.42}
$$

Τα όρια ελέγχου για το *Shewhart-S* διάγραμμα ελέγχου βασισμένο στην εκτιμήτρια Q_n $\left(\bar{Q}_n = \sum_{i=1}^{m} Q_{n(i)}/m\right)$ είναι:

$$
\begin{aligned}
UCL_Q &= c_4\hat{\sigma} + 3\hat{\sigma}\sqrt{1-c_4^2} = c_4 e_n \bar{Q}_n + 3 e_n \bar{Q}_n \sqrt{1-c_4^2} = B_{QU}^* \bar{Q}_n \\
CL_Q &= c_4\hat{\sigma} = c_4 e_n \bar{Q}_n = c_4^Q \bar{Q}_n \\
LCL_Q &= c_4\hat{\sigma} - 3\hat{\sigma}\sqrt{1-c_4^2} = c_4 e_n \bar{Q}_n - 3 e_n \bar{Q}_n \sqrt{1-c_4^2} = B_{QL}^* \bar{Q}_n
\end{aligned}
\tag{3.43}
$$

Όπου οι τιμές των σταθερών d_n, e_n, c_4^S, c_4^Q, B_{SU}^*, B_{SL}^*, B_{QU}^* και B_{QL}^*δίνονται στο Παράρτημα ΙΙ.

3.3.9 τ (*tau*) Διάγραμμα ελέγχου

Η κεντρική γραμμή και τα όρια ελέγχου του S διαγράμματος βασισμένο στην τ εκτιμήτρια ($\bar{\tau} = \sum_{i=1}^{m} \tau_i/m$) είναι τα ακόλουθα:

$$
\begin{aligned}
UCL_\tau &= c_4\hat{\sigma} + 3\hat{\sigma}\sqrt{1-c_4^2} = c_4 k_n \bar{\tau} + 3 k_n \bar{\tau} \sqrt{1-c_4^2} = B_{\tau U}^* \bar{\tau} \\
CL_\tau &= c_4\hat{\sigma} = c_4 k_n \bar{\tau} = c_4^\tau \bar{\tau} \\
LCL_\tau &= c_4\hat{\sigma} - 3\hat{\sigma}\sqrt{1-c_4^2} = c_4 k_n \bar{\tau} - 3 k_n \bar{\tau} \sqrt{1-c_4^2} = B_{\tau L}^* \bar{\tau}
\end{aligned}
\tag{3.44}
$$

Όπου οι τιμές των σταθερών k_n, c_4^τ, $B_{\tau U}^*$, και $B_{\tau L}^*$ δίνονται στο Παράρτημα ΙΙ.

Ο Celik (2015) έδειξε μέσω προσομοιώσεων ότι τα διαγράμματα ελέγχου που βασίζονται στις S_n, Q_n και τ εκτιμήτριες έχουν προσεγγιστικά ίδια απόδοση με τα διαγράμματα που βασίζονται στις S και MAD εκτιμήτριες στην παρουσία της κανονικότητας και για εναλλακτικά μοντέλα όπως έκτροπα, μολυσμένα και μεικτά μοντέλα εύρωστων μεθόδων έχουν καλύτερη απόδοση από την παραδοσιακά χρησιμοποιούμενη μέθοδο. Για κατανομές με βαριές ουρές όπως η Cauchy, οι εύρωστες μέθοδοι έχουν καλύτερη απόδοση όπως ήταν αναμενόμενο. Επίσης συγκρίνοντας τις εύρωστες μεθόδους, οι S_n και Q_n εκτιμήτριες έχουν καλύτερες ιδιότητες από τις άλλες εύρωστες μεθόδους. Ως εκ τούτου, στην περίπτωση της μη κανονικότητας, συνίσταται η χρήση των MAD, S_n, Q_n και τ διαγραμμάτων ελέγχου ως εναλλακτικά του S διαγράμματος ελέγχου (Celik (2015)).

3.3.10 Βελτιωμένα *R (IRC)* και *S (ISC)* Διαγράμματα Ελέγχου

Τα R και S διαγράμματα χρησιμοποιούνται ευρέως για την παρακολούθηση μετατοπίσεων στην εξάπλωση της διαδικασίας. Ένα γεγονός είναι ότι οι κατανομές του δειγματικού εύρους και της δειγματικής τυπικής απόκλισης είναι εξαιρετικά ασύμμετρες (μακριές ουρές στην δεξιά πλευρά). Επομένως, τα R και S διαγράμματα δεν μπορούν να παρέχουν ένα

$ARL_0 \approx 3\,70$, ούτε να εγγυηθούν ένα σφάλμα τύπου I μεγέθους 0.0027. Ένα άλλο μειονέκτημα αυτών των δύο διαγραμμάτων είναι η αποτυχία τους στην ανίχνευση μίας βελτίωσης στην μεταβλητότητα της διαδικασίας. (βλέπε Castagliola (2001), Chan and Cui (2003), Khoo and Lim (2005), Tadikamalla and Popescu (2007) κλπ.) Για να ξεπεραστούν αυτές οι αδυναμίες, ο Zhang (2014) πρότεινε τα βελτιωμένα R (IRC) και S (ISC) διαγράμματα ελέγχου με ακριβή προσέγγιση των ορίων ελέγχου, χρησιμοποιώντας αθροιστικές συναρτήσεις κατανομής του δειγματικού εύρους και της δειγματικής τυπικής απόκλισης. Για την κατασκευή των προαναφερθέντων διαγραμμάτων ελέγχου ο Zhang (2014) βασίστηκε στο έργο των Khoo and Lim (2005).

3.3.10.1 Βελτιωμένο *R (IRC)* διάγραμμα

Έστω ότι υπάρχει μια σειρά υποσυνόλων. Κάθε ένα από αυτά περιλαμβάνει ένα δείγμα μεγέθους n, έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$. Υποθέτουμε ότι τα $X_1, X_2, \dots, X_n$ είναι *iid* με μέση τιμή μ και διασπορά σ_0^2. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε n *iid* τυπικές κανονικές μεταβλητές $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$. Έστω $U = minZ_i$, $V = maxZ_i$ και $R = V - U$. Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας (Bain and Engelhardt (1992)) δίνεται στην ακόλουθη σχέση.

$$f(U,V) = \begin{cases} n(n-1)\phi(U)\phi(V)\big(\Phi(V) - \Phi(U)\big)^{n-2}, & \text{για } V > U \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \tag{3.45}$$

όπου ϕ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (probability density function, pdf) των Z_i και Φ η αθροιστική συνάρτηση κατανομής (cumulative distribution function, *cdf*) των Z_i. Με μετασχηματισμούς, η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των U και R δίνεται από την ακόλουθη σχέση.

$$g(U,R) = \begin{cases} n(n-1)\phi(U)\phi(U+R)\big(\Phi(U+R) - \Phi(U)\big)^{n-2}, & \text{για } R > 0 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \tag{3.46}$$

Η οριακή (marginal) cdf του R μπορεί να εξαχθεί ως εξής:

$$\begin{aligned} H_R(r) = P(R < r) &= \int_0^r \int_{-\infty}^{\infty} g(U,R)\,dU\,dR \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^r n(n-1)\phi(U)\phi(U+R)\big(\Phi(U+R) - \Phi(U)\big)^{n-2} dR\,dU \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} n\phi(U)\left(\Phi(U+R) - \Phi(U)\right)^{n-1} dU \end{aligned} \tag{3.47}$$

Για ένα μονόπλευρο IRC, το άνω όριο ελέγχου UCL_{RIU} μπορεί να εξαχθεί επιλύοντας την εξίσωση:

$$\int_{-\infty}^{\infty} n\phi(U)\left(\Phi(U+R) - \Phi(U)\right)^{n-1} dU = 1 - \alpha \tag{3.48}$$

για r, έστω D_U^*, όπου α είναι το σφάλμα τύπου I. Το κάτω όριο ελέγχου LCL_{RIL} μπορεί να εξαχθεί επιλύοντας την εξίσωση:

$$\int_{-\infty}^{\infty} n\phi(U)\left(\Phi(U+R) - \Phi(U)\right)^{n-1} dU = \alpha \tag{3.49}$$

για r , έστω D_L^*. Τα άνω και κάτω όρια ελέγχου του IRC διαγράμματος υπολογίζονται ως εξής:

$$UCL_{RIU} = D_U^*\sigma \text{ και } LCL_{RIL} = D_L^*\sigma \tag{3.50}$$

Για ένα αμφίπλευρο IRC, τα άνω και κάτω όρια ελέγχου υπολογίζονται από τις σχέσεις (3.47) και (3.48) αντίστοιχα, αντικαθιστώντας το σφάλμα τύπου I με $\alpha/2$. Τα όρια ελέγχου του IRC διαγράμματος (Φάση II) είναι

$$\begin{aligned} UCL_{RIT} &= D_2^*\sigma \\ LCL_{RIT} &= D_1^*\sigma \end{aligned} \tag{3.51}$$

όπου D_1^* και D_2^* σταθερές. Και τα αναδρομικά άνω και κάτω όρια του IRC διαγράμματος (Φάση I) είναι

$$\begin{aligned} UCL_{RIT} &= D_4^*\sigma \\ LCL_{RIT} &= D_3^*\sigma \end{aligned} \tag{3.52}$$

όπου D_3^* και D_4^* σταθερές (Zhang (2014)). Διάφορες τιμές για τις D_U^*, D_L^*, D_1^*, D_2^*, D_3^* και D_4^* που αντιστοιχούν στα α =0.0027 και 0.005, δίνονται στο Παράρτημα II.

Πίνακας 3.3.1 ARL κατανομές για το IRC διάγραμμα, εντός ελέγχου ARL ($\mathbf{ARL_0}$) = 370.[5]

$\tau = \sigma/\sigma_0$	$n = 5$			$n = 10$			$n = 20$		
	Upper-sided	Lower-Sided	Two-Sided	Upper-sided	Lower-Sided	Two-Sided	Upper-sided	Lower-Sided	Two-Sided
0.10		1.00	1.04		1.00	1.00		1.00	1.00
0.2		1.81	2.66		1.00	1.00		1.00	1.00
0.3		4.94	8.58		1.11	1.23		1.00	1.00
0.4		12.32	23.08		1.89	2.53		1.04	1.08
0.5		27.11	51.96		4.39	6.75		1.45	1.71
0.6		52.47	101.99		11.21	19.12		3.06	4.20
0.7		93.54	181.22		28.91	52.19		8.67	13.60
0.8		156.05	301.02		71.02	134.53		28.72	50.44
0.9		243.19	423.90		166.77	308.45		101.40	188.04
1.0	371.33	377.35	369.41	376.36	372.99	372.70	374.81	367.91	371.74
1.05	198.80		266.38	181.91		258.73	154.79		248.50
1.1	116.48		172.68	92.94		148.12	77.08		127.59
1.15	72.55		110.96	53.59		87.26	40.57		66.21
1.2	47.28		73.80	33.07		52.27	23.69		37.91
1.3	23.94		35.50	15.15		22.35	9.93		14.32
1.4	13.86		19.61	8.33		11.53	5.26		7.11
1.5	9.06		12.23	5.24		6.89	3.28		4.17
1.6	6.40		8.30	3.67		4.63	2.32		2.78
1.8	3.87		4.70	2.24		2.62	1.50		1.68
2.0	2.73		3.17	1.66		1.84	1.21		1.28
3.8	1.34		1.41	1.05		1.07	1.00		1.00

Ο Zhang (2014) παρουσίασε την απόδοση του IRC διαγράμματος με βάση το ARL με παράγοντες: i) $ARL_0 = 370$, ii) μέγεθος δείγματος $n = 5,10 \,\&\, 20$ και iii) τ: $\tau\epsilon\{1.05,1.10,1.15,\dots\}$ (αυξανόμενες μετατοπίσεις) ή $\tau\epsilon\{0.9,0.8,0.7,\dots,0.1\}$ (μειούμενες μετατοπίσεις). Η σ_0 είναι η ονομαστική τυπική απόκλιση (στην περίπτωσή μας $\sigma_0 = 1$) και σ η μετατοπισμένη τυπική απόκλιση της διεργασίας. Το μέγεθος των μετατοπίσεων στην μεταβλητότητα της διεργασίας είναι $\tau = \sigma/\sigma_0$.Όταν $\tau = 1$, η διεργασία είναι εντός ελέγχου. Δίχως βλάβη της γενικότητας, υπέθεσε ότι οι παρατηρήσεις για τις εντός ελέγχου περιπτώσεις ακολουθούν Κανονική Κατανομή.

[5] Zhang(2014)

3.3.10.2 Βελτιωμένο S *(ISC)* διάγραμμα

Θεωρούμε την εκτίμηση του σ βάσει της δειγματικής διασποράς S^2. Έχουμε (Bain and Engelhardt (1992)) ότι $(n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$. Έστω $W \sim \chi^2_{n-1}$. Η S έχει ίδια κατανομή ως $\sigma\sqrt{W}/\sqrt{n-1}$. Η *cdf* της S για τις τυπικές κανονικές μεταβλητές $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ είναι

$$\begin{aligned} H_S(r) = P(S < s) &= P\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n-1}}\sqrt{W} < s\right) \\ &= P(W < (n-1)s^2) = G_{\chi^2_{n-1}}\{(n-1)s^2\} \end{aligned} \tag{3.53}$$

όπου G είναι η *cdf* της χ^2_{n-1}. Για ένα μονόπλευρο ISC, το άνω όριο ελέγχου UCL_{sIU} μπορεί να εξαχθεί επιλύοντας την ακόλουθη εξίσωση:

$$G_{\chi^2_{n-1}}\{(n-1)s^2\} = 1 - \alpha \tag{3.54}$$

για s , έστω B_U^*, όπου α είναι το σφάλμα τύπου I. Το κάτω όριο ελέγχου LCL_{SIL} μπορεί να εξαχθεί επιλύοντας την ακόλουθη εξίσωση:

$$G_{\chi^2_{n-1}}\{(n-1)s^2\} = \alpha \tag{3.55}$$

για s , έστω B_L^*. Τα όρια ελέγχου του ISC διαγράμματος υπολογίζονται ως εξής:

$$UCL_{sIU} = B_U^*\sigma \text{ και } LCL_{sIL} = B_L^*\sigma \tag{3.56}$$

όπου B_U^* και B_L^* σταθερές.

Πίνακας 3.3.2 ARL κατανομές για το ISC διάγραμμα, εντός ελέγχου ARL ($\mathbf{ARL_0}$) = 370.[6]

$\tau = \sigma/\sigma_0$	$n = 5$			$n = 10$			$n = 20$		
	Upper-sided	Lower-Sided	Two-Sided	Upper-sided	Lower-Sided	Two-Sided	Upper-sided	Lower-Sided	Two-Sided
0.10		1.00	1.03		1.00	1.00		1.00	1.00
0.2		1.78	2.62		1.00	1.00		1.00	1.00
0.3		4.90	8.45		1.06	1.14		1.00	1.00
0.4		12.27	22.62		1.70	2.27		1.00	1.01
0.5		29.98	51.79		3.97	6.14		1.19	1.34
0.6		53.00	103.07		10.41	17.71		2.31	3.10
0.7		93.01	185.49		27.52	49.66		6.76	10.58
0.8		155.15	307.97		69.54	129.11		24.24	42.94
0.9		245.21	444.64		166.77	300.21		95.36	174.67
1.0	372.21	366.16	368.18	368.59	370.91	367.78	374.95	372.85	368.36
1.05	184.80		263.01	156.32		225.27	120.59		187.23
1.1	107.08		157.38	75.37		120.29	48.40		78.82
1.15	65.45		99.95	41.86		63.97	23.07		35.54
1.2	42.95		64.13	24.35		36.73	12.57		18.32
1.3	21.22		30.48	10.82		14.99	5.15		6.72
1.4	12.28		16.85	5.96		7.76	2.83		3.43
1.5	8.01		10.49	3.82		4.74	1.92		2.20
1.6	5.73		7.20	2.75		3.26	1.50		1.64
1.8	3.49		4.16	1.80		2.01	1.16		1.20
2.0	2.50		2.87	1.41		1.51	1.05		1.07
3.8	1.29		1.35	1.02		1.03	1.00		1.00

Για ένα αμφίπλευρο ISC, τα άνω και κάτω όρια ελέγχου υπολογίζονται από τις σχέσεις (3.53) και (3.54) αντίστοιχα, αντικαθιστώντας το σφάλμα τύπου I με $\alpha/2$. Τα άνω και κάτω όρια του ISC διαγράμματος (Φάση II) είναι

$$\begin{aligned} UCL_{sIT} &= B_6^*\sigma \\ LCL_{sIT} &= B_5^*\sigma \end{aligned} \tag{3.57}$$

όπου B_5^* και B_6^* σταθερές. Και τα αναδρομικά άνω και κάτω όρια του IRC διαγράμματος (Φάση I) είναι

$$\begin{aligned} UCL_{sIT} &= B_4^*\sigma \\ LCL_{sIT} &= B_3^*\sigma \end{aligned} \tag{3.58}$$

[6] Zhang(2014)

όπου B_3^* και B_4^* σταθερές (Zhang (2014)). Διάφορες τιμές για τις σταθερές B_U^*, B_L^*, B_3^*, B_4^*, B_5^* και B_6^*, που αντιστοιχούν στα σφάλματα τύπου I ίσα με 0.0027 και 0.005, δίνονται στο Παράρτημα II.

Παρόμοια με το IRC διάγραμμα ο Zhang (2014) παρουσίασε την απόδοση του ISC διαγράμματος με βάση το ARL. Οι Πίνακες 4.12.1 και 4.12.2 δίνουν τα ARL των IRC και ISC, αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι $ARL_0 = 370$. Οι τιμές του ARL γίνονται μικρότερες καθώς το μέγεθος της μετατόπισης αυξάνεται ή μειώνεται. Επίσης παρατηρούμε ότι με αυξανόμενο μέγεθος δείγματος, η ευαισθησία του διαγράμματος επίσης αυξάνει. Επίσης το ISC φαίνεται να είναι αποτελεσματικότερο από το IRC, και συνίσταται για χρήση με μεγάλα μεγέθη δείγματος (Zhang (2014)).

3.3.11 Διαγράμματα Ελέγχου για μεμονωμένες παρατηρήσεις

Στις περιπτώσεις που το μέγεθος του δείγματος είναι ίσο με 1, χρησιμοποιούνται τα διαγράμματα ελέγχου για μεμονωμένες ή ατομικές παρατηρήσεις *(individual observations)*. Έστω το χαρακτηριστικό X ακολουθεί κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ με μ και σ γνωστά.

Επειδή δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί το R διάγραμμα ελέγχου για $n = 1$, χρησιμοποιείται το **κινούμενο εύρος** (*moving range, MR*) (Αντζουλάκος (2009)) των μεμονωμένων παρατηρήσεων που ορίζεται από τη σχέση

$$MR_i = |X_i - X_{i-1}| = max\{X_{i-1,}, X_i\} - min\{X_{i-1,}, X_i\}, i \geq 2 \tag{3.59}$$

και ισχύει ότι $\mu_{MR_i} = E(MR_i) = \sigma d_2$ και $\sigma_{MR_i} = \sqrt{V(MR_i)} = \sigma d_3$ όπου οι σταθερές d_2, d_3 υπολογίζονται για $n = 2$. Τα όρια ελέγχου του MR διαγράμματος (Φάση II) είναι:

$$\begin{aligned} UCL_{MR} &= D_2\sigma \\ CL_{MR} &= \sigma \\ LCL_{MR} &= D_1\sigma \end{aligned} \tag{3.60}$$

όπου οι σταθερές d_2, d_3 υπολογίζονται για $n = 2$ (Κουκουβίνος (2008)).

Αν μ και σ άγνωστα, πρέπει να εκτιμηθούν. Έστω ότι διαθέτουμε m ανεξάρτητες παρατηρήσεις $X_1, \dots, X_m$ από το χαρακτηριστικό X Τότε $\hat{\mu} = \bar{X} = (\sum_{i=1}^{m} X_i)/m$ και αν $\overline{MR} = (MR_1 + \cdots + MR_{m-1})/(m-1)$, προκύπτει ότι $E(\overline{MR}) = \sigma d_2$ και $\hat{\sigma} = \overline{MR}/d_2$ (Κουκουβίνος (2008)). Τα όρια ελέγχου του MR διαγράμματος (Φάση I) είναι:

$$\begin{aligned} UCL_{MR} &= D_4\overline{MR} \\ CL_{MR} &= \overline{MR} \\ LCL_{MR} &= D_3\overline{MR} \end{aligned} \tag{3.61}$$

όπου $D_3 = 1 - 3(d_3/d_2)$ και $D_4 = 1 + 3(d_3/d_2)$ υπολογίζονται για $n = 2$ (Κουκουβίνος (2008)). Η αποτελεσματικότερη εκτίμηση της τυπικής απόκλισης σ προκύπτει από την ποσότητα $\bar{S}/c_4$ όπου η σταθερά c_4 υπολογίζεται για $n = m$ και όπου S από την σχέση (3.2) (Κουκουβίνος (2008)).

3.4 Σύγκριση απόδοσης των Διαγραμμάτων Ελέγχου

Στην παρούσα ενότητα, συγκρίνουμε τις αποδόσεις διαφορετικών διαγραμμάτων ελέγχου για διαφορετικές κατανομές. Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης βασίζονται σε 10000 Monte Carlo εκτελέσεις και 100 υποομάδες με μεγέθη δείγματος 10 χρησιμοποιώντας τη γλώσσα προγραμματισμού R. Χρησιμοποιούμε τα ακόλουθα μοντέλα δείγματος: Μοντέλο 1: Κανονική κατανομή με παραμέτρους $\mu = 0$, $\sigma = 1$, Μοντέλο 2: Λογιστική κατανομή με παραμέτρους $\mu = 0$, $k = 1$, Μοντέλο 3: *Student* κατανομή με παράμετρο $k = 5$, Μοντέλο 4: *Gamma* κατανομή με παραμέτρους $\alpha = 2$ και $\beta = 1$ και Μοντέλο 5: Εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = 1$. Έτσι, η απόδοση των διαγραμμάτων ελέγχου αξιολογείται για την κανονική και μη κανονικές κατανομές.

Από τον Πίνακα 3.4.1 παρατηρούμε ότι: i) Το ISC διάγραμμα είναι εντός ελέγχου για όλα τα μοντέλα. Κατ' επέκταση έχει καλύτερη απόδοση από το S διάγραμμα, ii) Τα R και IRC έχουν το μεγαλύτερο διάστημα ορίων ελέγχου για όλα τα μοντέλα που αξιολογούμε, iii) Το διάγραμμα G έχει το μεγαλύτερο πλήθος εκτός ελέγχου σημείων, iv) το MAD διάγραμμα παρουσιάζει την χειρότερη απόδοση, καθώς για όλα τα μοντέλα έχει τα περισσότερα εκτός ελέγχου σημεία σε σχέση με τα υπόλοιπα διαγράμματα και v) τα εξεταζόμενα διαγράμματα ελέγχου είναι αρκετά αποτελεσματικά και για μη κανονικές κατανομές.

Πίνακας 3.4.1 Όρια ελέγχου βασισμένες στις στατιστικές συναρτήσεις διασποράς

	R	S	Q	D	G	MAD	S_n	Q_n	τ	IRC	ISC
Μοντέλο 1											
UCL	5.47	1.669	2.276	0.862	1.723	1.656	1.823	2.558	1.547	5.885	1.687
CL	3.077	0.973	1.172	0.500	1.000	0.965	1.060	1.488	0.900	3.077	0.946
LCL	0.686	0.276	0.068	0.138	0.277	0.274	0.297	0.420	0.252	1.126	0.361
Εκτός Ελέγχου	0	0	1	0	0	3	2	1	0	0	0
Μοντέλο 2											
UCL	10.047	2.993	3.786	1.527	3.053	2.763	3.079	4.399	2.653	10.813	3.081
CL	5.651	1.744	1.950	0.886	1.772	1.610	1.791	2.559	1.543	5.654	1.727
LCL	1.261	0.495	0.113	0.245	0.491	0.457	0.502	0.717	0.432	2.069	0.659
Εκτός Ελέγχου	2	1	1	1	1	4	2	2	1	1	0
Μοντέλο 3											
UCL	7.114	2.094	2.518	1.056	2.112	1.839	2.058	2.970	1.785	7.656	2.060
CL	4.003	1.220	1.267	0.613	1.226	1.072	1.197	1.726	1.039	4.003	1.155
LCL	0.893	0.346	0.075	1.670	0.339	0.304	0.336	0.484	0.291	1.465	0.441
Εκτός Ελέγχου	4	3	2	2	2	4	3	2	2	3	0
Μοντέλο 4											
UCL	7.383	2.298	2.945	1.145	2.290	2.010	2.179	3.03	1.911	7.945	2.437
CL	4.155	1.339	1.547	0.665	1.330	1.172	1.268	1.765	1.112	4.155	1.366
LCL	0.926	0.380	0.090	0.184	0.368	0.332	0.353	0.495	0.312	1.521	0.522
Εκτός Ελέγχου	3	3	2	2	2	5	4	2	2	3	0
Μοντέλο 5											
UCL	5.027	1.585	1.887	0.763	1.526	1.189	1.283	1.791	1.161	5.410	1.674
CL	2.829	0.923	0.972	0.443	0.886	0.693	0.747	1.042	0.675	2.829	0.938
LCL	0.631	0.262	0.056	1.123	0.245	0.197	0.209	0.292	0.189	1.036	0.353
Εκτός Ελέγχου	6	6	4	5	5	8	7	5	5	6	0

3.5 Αριθμητικό παράδειγμα

Η "*Telstar Appliance Company*" χρησιμοποιεί μια διεργασία για το βάψιμο των ψυγείων με μία στρώση σμάλτου. Για τους σκοπούς μιας μελέτης του ΣΕΔ επιλέγεται ένα δείγμα μεγέθους 5 ψυγείων κάθε 1.4 ώρες και καταγράφεται το πάχος (*thickness*) της στρώσης του χρώματος (σε *mm*). Αν το σμάλτο είναι πολύ λεπτό τότε δεν θα παρέχεται αρκετή προστασία. Στην αντίθετη περίπτωση, θα έχουμε σαν αποτέλεσμα ανομοιομορφία στην εμφάνιση του χρώματος και σπατάλη. Στον Πίνακα 3.5.1 παρουσιάζονται οι μετρήσεις από 20 διαδοχικά δείγματα μεγέθους 5 ψυγείων το καθένα και οι τιμές των στατιστικών συναρτήσεων R, S, Q, D, K, MAD, S_n, Q_n και τ.

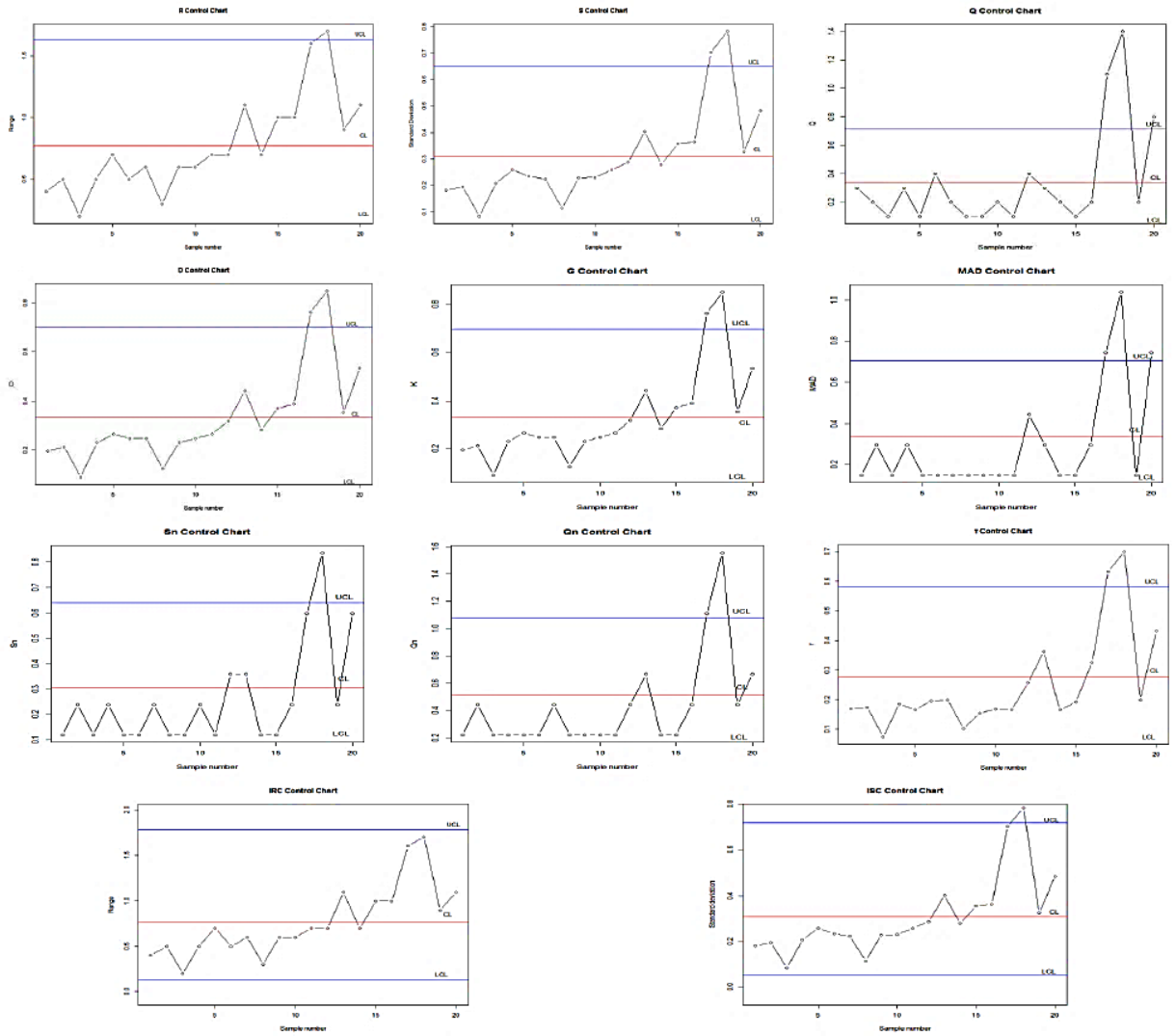
Πίνακας 3.5.1 Το πάχος της στρώσης του χρώματος σε ψυγεία και οι τιμές των στατιστικών συναρτήσεων

Shift No.	Πάχος στρώσης (σε *mm*)					$\bar{X}$	R	S	Q	D	K	MAD	S_n	Q_n	τ
1	2.7	2.3	2.6	2.4	2.7	2.54	0.4	0.1817	0.3	0.195	0.1950	0.1483	0.1193	0.2219	0.1698
2	2.6	2.4	2.6	2.3	2.8	2.54	0.5	0.1949	0.2	0.213	0.2127	0.2965	0.2385	0.4438	0.1746
3	2.3	2.3	2.4	2.5	2.4	2.38	0.2	0.0837	0.1	0.089	0.0886	0.1483	0.1193	0.2219	0.0748
4	2.8	2.3	2.4	2.6	2.7	2.56	0.5	0.2074	0.3	0.230	0.2304	0.2965	0.2385	0.2219	0.1857
5	2.6	2.5	2.6	2.1	2.8	2.52	0.7	0.2588	0.1	0.266	0.2659	0.1483	0.1193	0.2219	0.1663
6	2.2	2.3	2.7	2.2	2.6	2.40	0.5	0.2345	0.4	0.248	0.2481	0.1483	0.1193	0.2219	0.1962
7	2.2	2.6	2.4	2.0	2.3	2.30	0.6	0.2236	0.2	0.248	0.2481	0.1483	0.2385	0.4438	0.2000
8	2.8	2.6	2.6	2.7	2.5	2.64	0.3	0.1140	0.1	0.124	0.1241	0.1483	0.1193	0.2219	0.1026
9	2.4	2.8	2.4	2.2	2.3	2.42	0.6	0.2280	0.1	0.230	0.2304	0.1483	0.1193	0.2219	0.1542
10	2.6	2.3	2.0	2.5	2.4	2.36	0.6	0.2302	0.2	0.248	0.2481	0.1483	0.2385	0.2219	0.1681
11	3.1	3.0	3.5	2.8	3.0	3.08	0.7	0.2588	0.1	0.266	0.2659	0.1483	0.1193	0.2219	0.1663
12	2.4	2.8	2.2	2.9	2.5	2.56	0.7	0.2881	0.4	0.319	0.3190	0.4448	0.3578	0.4438	0.2579
13	2.1	3.2	2.5	2.6	2.8	2.64	1.1	0.4037	0.3	0.443	0.4431	0.2965	0.3578	0.6657	0.3625
14	2.2	2.8	2.1	2.2	2.4	2.34	0.7	0.2793	0.2	0.284	0.2836	0.1483	0.1193	0.2219	0.1663
15	2.4	3.0	2.5	2.5	2.0	2.48	1.0	0.3564	0.1	0.372	0.3722	0.1483	0.1193	0.2219	0.1932
16	3.1	2.6	2.6	2.8	2.1	2.64	1.0	0.3647	0.2	0.390	0.3899	0.2965	0.2385	0.4438	0.3263
17	2.9	2.4	2.9	1.3	1.8	2.26	1.6	0.7021	1.1	0.762	0.7622	0.7413	0.5963	1.096	0.6332
18	1.9	1.6	2.6	3.3	3.3	2.54	1.7	0.7829	1.4	0.851	0.8508	1.0378	0.8348	1.5534	0.7006
19	2.3	2.6	2.7	2.8	3.2	2.72	0.9	0.3171	0.2	0.354	0.3545	0.1483	0.2385	0.4438	0.2001
20	1.8	2.8	2.3	2.0	2.9	2.36	1.1	0.4827	0.8	0.532	0.5319	0.7413	0.5963	0.6657	0.4319
Μέση τιμή						2.51	0.77	0.311	0.34	0.333	0.3332	0.2965	0.2624	0.4327	0.2515

Στον Πίνακα 3.5.2 παρουσιάζονται τα όρια ελέγχου για τα διαγράμματα ελέγχου που βασίζονται στις παραπάνω στατιστικές συναρτήσεις καθώς και το σύνολο των σημείων που βρίσκονται εκτός των εκάστοτε ορίων. Στο Σχήμα 3.5.1 απεικονίζεται η απόδοση των διαγραμμάτων ελέγχου. Παρατηρούμε ότι μόνο το IRC διάγραμμα είναι εντός ελέγχου, ενώ όλα τα υπόλοιπα είναι εκτός ελέγχου. Τα Q και MAD διάγραμμα ελέγχου έχει 3 σημεία εκτός ελέγχου, τα R, S, D, G, Q_n και τ έχουν 2 σημεία εκτός ορίων ελέγχου και τα S_n και ISC διαγράμματα έχουν 1 σημείο εκτός των ορίων ελέγχου.

Πίνακας 3.5.2 Όρια ελέγχου των Διαγραμμάτων ελέγχου και πλήθος σημείων εκτός των ορίων.

Διάγραμμα	R	S	Q	D	G	MAD	S_n	Q_n	τ	IRC	ISC
UCL	1.628	0.647	0.713	0.699	0.698	0.703	0.640	1.082	0.581	1.785	0.719
CL	0.770	0.311	0.340	0.333	0.333	0.336	0.307	0.519	0.279	0.770	0.311
LCL	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.131	0.053
Εκτός ελέγχου	2	2	3	2	2	3	1	2	2	0	1



Σχήμα 3.5.1 Διαγράμματα Ελέγχου τύπου Shewhart για την παρακολούθηση της διασποράς

Κεφάλαιο 4

Διαγράμματα ελέγχου τύπου CUSUM για την παρακολούθηση της διασποράς της διεργασίας

4.1 Εισαγωγή

Τα $CUSUM$ διαγράμματα ελέγχου έχουν λάβει μεγάλη προσοχή στις σύγχρονες βιομηχανίες στην παρακολούθηση ασυνήθιστων μεταβολών στις διεργασίες μεταποίησης και υπηρεσιών. Υπάρχει το $CUSUM$ διάγραμμα ελέγχου θέσης για την παρακολούθηση των αλλαγών στο μέσο της διεργασίας και το $CUSUM$ διάγραμμα ελέγχου κλίμακας ή διασποράς για την παρακολούθηση αλλαγών στην μεταβλητότητα της διεργασίας. Πολλοί συγγραφείς έχουν συνεισφέρει στην θεωρία των $CUSUM$ διαγραμμάτων με έμφαση στα διαγράμματα θέσης (Montgomery (2013)). Μια αύξηση στην διακύμανση της διεργασίας θα μπορούσε να οδηγήσει σε μια αύξηση στον αριθμό των ελαττωματικών προϊόντων, και μια μείωση στην μεταβλητότητα της διεργασίας θα μπορούσε να φέρει τα περισσότερα αντικείμενα πιο κοντά στην τιμή στόχο οδηγώντας σε μια βελτιωμένη ικανότητα διεργασίας (Acosta-Mejia et al (1999)).

Για την παρακολούθηση μικρών αλλαγών σε μια διεργασία, προτάθηκαν τα **διαγράμματα ελέγχου τύπου μνήμης** που ενσωματώνουν όλη την πληροφορία σε ολόκληρή την ακολουθία δειγματικών τιμών. Ένα τέτοιο διάγραμμα είναι το $CUSUM$, το οποίο σχεδιάστηκε για την αποτελεσματική ανίχνευση μικρών έως μέτριων μετατοπίσεων. Για να υπάρχει ισορροπία μεταξύ των δύο σχεδίων οι Lucas (1982), Gibons (1999), Wu et al. (2008) και Abujiya et al. (2013) μελέτησαν συνδυασμένες εφαρμογές των *Shewhart* και $CUSUM$ διαγραμμάτων για την παρακολούθηση μετατοπίσεων στο μέσο της διεργασίας. Ο σχεδιασμός συνδυάζει τα κύρια χαρακτηριστικά των *Shewhart* και $CUSUM$ διαγραμμάτων και μπορεί να ανιχνεύσει αλλαγές στην διεργασία που είναι αρκετά μικρές ή μεγάλες για να ξεφύγουν την ανίχνευση από το *Shewhart* ή το $CUSUM$ διάγραμμα μεμονωμένα, αντίστοιχα.

Το πλήθος των προγενέστερων εργασιών σχετικά με το συνδυασμένο *Shewhart-CUSUM* διάγραμμα αφορούσαν διαγράμματα θέσης για την παρακολούθηση του μέσου της διεργασίας. Ωστόσο, η παρακολούθηση των αλλαγών στην διασπορά της διεργασίας είναι εξίσου σημαντική, καθώς οποιαδήποτε αλλαγή είτε στον μέσο είτε στην διασπορά έχει άμεση συνέπεια στην ποιότητα της διεργασίας. Μεμονωμένα, οι τεχνικές *Shewhart* και *CUSUM* έχουν χρησιμοποιηθεί σαν εργαλεία για την παρακολούθηση της μεταβλητότητας. Ο Page (1963) πρότεινε ένα $CUSUM$ διάγραμμα βασισμένο στο εύρος των υποομάδων για

την παρακολούθηση αυξήσεων στην κανονική διασπορά της διεργασίας. Οι Tuprah and Ncube (1987) αξιολόγησαν την απόδοση του $CUSUM$ διαγράμματος βασισμένο στην τυπική απόκλιση των υποομάδων. Ο Acosta – Mejia (1998) πρότεινε ένα $CUSUM$ διάγραμμα με βάση το εύρος των υποομάδων. Οι Acosta – Mejia et al. (1999) εξέτασαν και συγκρίναν την απόδοση αρκετών Shewhart και $CUSUM$ διαγραμμάτων για την παρακολούθηση της διασποράς της διεργασίας. Οι Chang and Can (1995) πρότειναν Shewhart διαγράμματα βασισμένα στις συνιστώσες της διασποράς για την παρακολούθηση της διασπορά της διεργασίας. Για περισσότερη πληροφορίες σχετικά με τα διαγράμματα διασποράς προτείνονται οι Knoth S. (2006), Riaz et al.(2011), Abbasi et al. (2012b) και Zhang (2013).

Οι περισσότερες από αυτές τις μελέτες, ωστόσο, βασίζονται στην υπόθεση ότι τα δείγματα προέρχονται από μια γραμμή παραγωγής χρησιμοποιώντας την παραδοσιακή τεχνική της Απλής Τυχαίας Δειγματοληψίας (*Simple Random Sampling, SRS*). Για να αυξηθεί η ευαισθησία των διαγραμμάτων θέσης για την αποτελεσματική παρακολούθηση του μέσου διεργασίας, έχουν προταθεί αρκετές καλά δομημένες τεχνικές για συλλογή δεδομένων έχουν προταθεί, όπως η Δειγματοληψία Καταταγμένων Συνόλων (*Ranked Set Sampling,* RSS). Η τεχνική RSS προτάθηκε από τον McIntyre (1952), αλλά οι μαθηματικές του θεωρίες αναπτύχθηκαν από τους Takahasi and Wakimoto (1968). Η RSS βασίζεται στην κρίση της διάταξης και χρησιμοποιεί επιπλέον πληροφορία που περιέχεται σε κάθε συγκεκριμένη μονάδα δειγματοληψίας για να ληφθούν πραγματικά δεδομένα. Με άλλα λόγια, η τεχνική της RSS παρέχει πιο αντιπροσωπευτικά δείγματα σχετικά με τον πληθυσμό στόχο από την παραδοσιακή SRS με το ίδιο μέγεθος υποομάδας. Η εφαρμογή της RSS μεθοδολογίας στα εντός ελέγχου διαγράμματα για την παρακολούθηση αλλαγών στη διασπορά της διεργασίας έχει λάβει μικρή προσοχή. Πρόσφατες έρευνες των Muttlak and Al-Sabah (2004), Abujiya and Muttlak (2004), Al-Sabah (2010), Jafari and Mirkamali (2011), Mehmood et al. (2012,2014), Abujiya et al.(2014a) μαζί με άλλους, έχουν δείξει ότι η χρήση μια καλά δομημένης τεχνικής δειγματοληψίας όπως η RSS στα διαγράμματα ελέγχου είχαν βελτιώσει σημαντικά την απόδοση των διαγραμμάτων πάνω στην τυχαία δειγματοληψία.

4.1.1 Παραλλαγές της RSS και ιδιότητες

Η τεχνική RSS έχει καθιερωθεί ως μια αποτελεσματική μέθοδος συλλογής δεδομένων σε σημαντικές έρευνες στον τομέα της γεωργίας, της οικολογίας, της ιατρικής, και της αξιοπιστίας της μηχανικής. Πρόσφατη συνολική αναθεώρηση σχετικά με τη θεωρία, τις μεθόδους και τις εφαρμογές του RSS μπορεί να βρεθεί στον Wolfe (2012). Η διαδικασία RSS περιγράφεται ως εξής: τυχαία επιλέγουμε n δείγματα μεγέθους n το καθένα από τον αρχικό πληθυσμό. Κατατάσσουμε τις μονάδες εντός κάθε συνόλου με οπτική επιθεώρηση ή κάποια λιγότερο δαπανηρή μέθοδο, σε σχέση με ένα ποιοτικό χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει. Επιλέγουμε την μικρότερη καταταγμένη μονάδα από το πρώτο σύνολο, τη δεύτερη

μικρότερη καταταγμένη μονάδα από το δεύτερο σύνολο, και ούτω καθεξής, έως ότου η μεγαλύτερη καταταγμένη μονάδα επιλέγεται από το τελευταίο σύνολο. Η διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί m φορές για να ληφθεί ένα καταταγμένο σύνολο δειγμάτων μεγέθους nm μονάδων.

Περαιτέρω αύξηση στην απόδοση της RSS μπορεί να επιτευχθεί όταν μια κατάλληλη άνιση κατανομή μονάδων χρησιμοποιείται αντί της ίσης κατανομής. Οι ακραίες παραλλαγές της RSS, ειδικότερα, είναι πιο αποτελεσματικές από την RSS στην εκτίμηση της πληθυσμιακής τυπικής απόκλισης σ αν η υποκείμενη κατανομή είναι κατανομή (Shaibu and Muttlak (2004)). Στην συνέχεια θα παρουσιάσουμε δύο ακραίες παραλλαγές της RSS, την ακραία δειγματοληψία καταταγμένων συνόλων (*Extreme RSS*, $ERSS$) και την Διπλή ακραία δειγματοληψία καταταγμένων συνόλων (*Double Extreme RSS*, $DERSS$) που μελετήθηκε από τους Stokes (1980), Samawi et al. (1996), και Al-Saleh and Al-Ananbeh (2007) και την

4.1.1.1 ERSS

Η $ERSS$ είναι μια παραλλαγή της RSS που δεν απαιτεί την πλήρη κατάταξη των μονάδων, καθώς περιλαμβάνει τη μέτρηση της μικρότερης ή μεγαλύτερης καταταγμένης μονάδας των συνόλων. Το πλεονέκτημα αυτής της τεχνικής επί του βασικής RSS είναι ότι είναι ευκολότερη στη χρήση στο χώρο και έχει τη δυνατότητα της μείωσης των σφαλμάτων που σχετίζονται με την κατάταξη των μονάδων σε μία υποομάδα (Samawi et al. (1996). Η διαδικασία $ERSS$ συνοψίζεται στα ακόλουθα βήματα:

- Επιλέγουμε n τυχαία δείγματα μεγέθους n μονάδων το καθένα από τον αρχικό πληθυσμό.
- Κατατάσσουμε τις μονάδες εντός κάθε συνόλου με οπτική επιθεώρηση ή κάποια λιγότερο δαπανηρή μέθοδο, σε σχέση με μια μεταβλητή ενδιαφέροντος.
- Εάν το μέγεθος της υποομάδας είναι άρτιο, επιλέγουμε τη χαμηλότερη καταταγμένη μονάδα από τα πρώτα $n/2$ δείγματα σε μια υποομάδα και την υψηλότερη καταταγμένη μονάδα από τα δεύτερα $n/2$ δείγματα.

Για περιττά μεγέθη υποομάδων, μετράμε την διάμεση παρατήρηση από ένα δείγμα και επιλέγουμε τη χαμηλότερη κατάταξη από τα πρώτα $(n-1)/2$ δείγματα και την υψηλότερη κατάταξη από τα υπόλοιπα $(n-1)/2$ δείγματα

- Τα βήματα μπορούν να επαναληφθούν m φορές για να ληφθεί ένα δείγμα από nm μονάδες της $ERSS$.

Έστω $X_{(i:e)j}$ για $i = 1, 2, \ldots, n$ και $j = 1, 2, \ldots, m$ συμβολίζει το μικρότερο $i-$οστό ($i = 1, 2, \ldots, k = n/2$) δείγμα και το μεγαλύτερο $i-$οστό ($i = k+1, k+2, \ldots, n$) δείγμα στον $j-$οστό κύκλο εάν το μέγεθος n της υποομάδας είναι άρτιο. Για περιττό μέγεθος n της υποομάδας, χρησιμοποιούμε τον ίδιο συμβολισμό για να υποδηλώσουμε το μικρότερο του $i-$οστού ($i = 1,2, \ldots, l = (n-1)/2$) δείγματος, η διάμεση τιμή του $i-$οστού ($i =$

$n+1/2$) δείγματος, και το μεγαλύτερο από του $i-$οστού ($i = l+1, l+2, \ldots, n$) δείγματος. Για απλότητα, ας υποθέσουμε ότι $X_{(1:e)j}$ και $X_{(n:e)j}$ δηλώνει το μικρότερο και το μεγαλύτερο του $i-$οστού δείγματος της $ERSS$ μεγέθους n στον $j-$οστό κύκλο υπό την τέλεια κατάταξη. Το εύρος που βασίζεται στην $ERSS$ του μεγέθους n της υποομάδας στον $j-$οστό κύκλο ορίζεται από την σχέση

$$R_{erssj} = X_{(n:e)j} - X_{(1:e)j} \tag{4.1}$$

με $\bar{R}_{erss} = (1/m)\sum_{j=1}^{m} R_{erssj}$. Παρόμοια με την κλασσική περίπτωση ορίζουμε την αναμενόμενη τιμή και την τυπική απόκλιση της R_{erss}, ως $E(R_{erss}) = d_2^{erss}\sigma$ και $\sigma(R_{erss}) = d_3^{erss}\sigma$, αντίστοιχα, όπου d_2^{erss} και d_3^{erss} είναι σταθερές που εξαρτώνται από το μέγεθος n της υποομάδας, παρόμοια με τις κλασσικές σταθερές d_2 και d_3. (Διάφορες τιμές των d_2^* και d_3^* για μεγέθη 2 έως 10 της υποομάδας δίνονται στο Παράρτημα III).

Επιπρόσθετα, η αμερόληπτη εκτιμήτρια της πληθυσμιακής τυπικής απόκλισης (βλέπε Sinha and Purkayastha (1996) and Yu et al.(1999)):

$$S_{erssj} = \sqrt{\frac{1}{n-1+\upsilon_n}\sum_{i=1}^{n}\left[X_{(i:e)j} - \bar{X}_{erssj}\right]^2} \tag{4.2}$$

Όπου $\bar{X}_{erssj} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{(i:e)j}$ είναι η εκτιμήτρια του πληθυσμιακού μέσου για τον $j-$οστό κύκλο, $\upsilon_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \upsilon_{(i:e)}^2$ είναι ένας γνωστός όρος σφάλματος που εξαρτάται από το μέγεθος του δείγματος n και $\upsilon_{(i:e)} = (\mu_{(i:e)} - \mu)/\sigma$ (Yu et al (1999)). Η αναμενόμενη τιμή και την τυπική απόκλιση της S_{erss}, ως $E(S_{erss}) = c_4^{erss}\sigma$ και $\sigma(S_{erss}) = c_5^{erss}\sigma$, αντίστοιχα, όπου c_4^{erss} και c_5^{erss} είναι σταθερές που εξαρτώνται από το μέγεθος n της υποομάδας. (Διάφορες τιμές των c_4^{erss} και c_5^{erss} για μεγέθη 2 έως 10 της υποομάδας δίνονται στο Παράρτημα III).

Σε εφαρμογές σε πραγματικές συνθήκες ζωής, η κατάταξη των μονάδων σε μια υποομάδα σε σχέση με το ποιοτικό χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει μπορεί να μην είναι τέλειο, δεδομένου ότι περιλαμβάνει ανθρώπινες κρίσεις και αποφάσεις, αλλά η βοηθητική μεταβλητή του μπορεί να εξυπηρετήσει το σκοπό. Ας υποθέσουμε ότι (X, Y) έχει μία διμεταβλητή κανονική κατανομή έτσι το ποιοτικό χαρακτηριστικό X είναι δύσκολο να καταταχθεί, αλλά η βοηθητική μεταβλητή Y, που συσχετίζεται με το X, θα μπορούσε εύκολα να μετρηθεί. Ας υποθέσουμε ότι η παλινδρόμηση του X επί της Y είναι γραμμική, τότε έχουμε:

$$X = \mu_x + \rho_{xy}(\sigma_x/\sigma_y)(Y - \mu_y) + \varepsilon \tag{4.3}$$

Όπου μ_x, μ_y είναι οι πληθυσμιακοί μέσοι των X και Y, σ_x, σ_y είναι οι πληθυσμιακές τυπικές αποκλίσεις των X και Y και ρ_{xy} είναι η συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών X και Y. Επίσης ε είναι ο όρος σφάλματος ανεξάρτητος της Y, με $E(\varepsilon) = 0$ και $\sigma(\varepsilon) = \sigma_x\sqrt{1-\rho_{xy}^2}$ για $i = 1,2,\ldots,n$ και $j = 1,2,\ldots,m$ είναι η $i-$οστή μικρότερη και μεγαλύτερη τιμή στον $j-$οστό της Y βασισμένη στην άριστη κατάταξη (*perfect ranking*) μεγέθους n της υποομάδας και

$X_{[i:e]j}$ είναι η αντίστοιχη κρίση κατάταξης (*judgment ranking*) του X που σχετίζεται με την $Y_{(i:e)j}$. Τότε η εξίσωση (4.3) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$X_{[i:e]j} = \mu_x + \rho_{xy}(\sigma_x/\sigma_y)[Y_{(i:e)j} - \mu_y] + \varepsilon \tag{4.4}$$

Και η εκτιμήτρια της τυπικής απόκλισης που βασίζεται στην ατελή $ERSS$ μπορεί να ληφθεί αντικαθιστώντας την Εξίσωση (4.5) με την Εξίσωση (4.4). Δηλαδή

$$S_{ierssj} = \sqrt{\frac{1}{n-1+\upsilon_n}\sum_{i=1}^{n}\left[X_{[i:e]j} - \bar{X}_{ierssj}\right]^2} \tag{4.5}$$

4.1.1.2 DERSS

Επίσης υπάρχει η $DERSS$, η οποία είναι η διπλή εφαρμογή $ERSS$ και είναι πιο αποτελεσματική στην εκτίμηση των πληθυσμιακών παραμέτρων (Al-Omari(2010), Samawi(2002)). Η $DERSS$ είναι μια διαδικασία $ERSS$ δύο σταδίων στα οποία έχει επιλεγεί η $ERSS$ στο πρώτο και στο δεύτερο στάδιο (βλέπε Samawi (2002)). Όμοια το εύρος που βασίζεται στην $DERSS$ του μεγέθους n της υποομάδας στον j – οστό κύκλο ορίζεται από την σχέση

$$R_{derssj} = X_{(n:e)j} - X_{(i:e^*)j} \tag{4.6}$$

με $\bar{R}_{derss} = (1/m)\sum_{j=1}^{m} R_{derssj}$ και $X_{(i:e^*)j}$ είναι οι $DERSS$ παρατηρήσεις. Και η αντίστοιχη η αμερόληπτη εκτιμήτρια της πληθυσμιακής τυπικής απόκλισης είναι:

$$S_{derssj} = \sqrt{\frac{1}{n-1+\upsilon_n}\sum_{i=1}^{n}\left[X_{(i:e^*)j} - \bar{X}_{derssj}\right]^2} \tag{4.7}$$

Όπου $X_{(i:e^*)j}$ είναι οι DERSS παρατηρήσεις, $\bar{X}_{derss} = (1/n)\sum_{i=1}^{n} X_{(i:e^*)j}$ και $\upsilon_n = (1/n)\sum_{i=1}^{n}\upsilon_{(i:e^*)}$ είναι ένας γνωστός όρος σφάλματος. Η αναμενόμενη τιμή και την τυπική απόκλιση της S_{derss}, ως $E(S_{derss}) = c_4^{derss}\sigma$ και $\sigma(S_{derss}) = c_5^{derss}\sigma$, αντίστοιχα, όπου c_4^{derss} και c_5^{derss} είναι σταθερές. (Διάφορες τιμές των c_4^{erss} και c_5^{erss} για μεγέθη 2 έως 10 της υποομάδας δίνονται στο Παράρτημα ΙΙΙ).

4.2 Scale CUSUM Διάγραμμα Ελέγχου

Τα **Scale CUSUM** διαγράμματα χρησιμοποιούνται για την παρακολούθηση της μεταβλητότητας που ενέχει μια διαδικασία. Το χαρακτηριστικό $X \sim N(\mu_0, \sigma^2)$. Επιλέγοντας τυχαία δείγματα $X_i = (X_{i1}, \dots, X_{in}), 1 \le i \le m$, μεγέθους $n \ge 1$ το καθένα. Η τυποποιημένη τιμή της X_i είναι $Y_i = (X_i - \mu_0)/\sigma$. Η νέα μεταβλητή v_i (Hawkins (1993)) ορίζεται ως εξής

$$v_i = \frac{\sqrt{|Y_i|} - 0.822}{0.349}, 1 \le i \le m \tag{4.8}$$

Οι ποσότητες v_i είναι ευαίσθητες στις αλλαγές του μέσου και της διασποράς και ακολουθούν την τυποποιημένη κανονική κατανομή $N(0,1)$. Τα δύο μονόπλευρα $Scale\ CUSUM$ είναι τα εξής:

$$\begin{matrix} S_i^+ = \max[0, v_i - k + S_{i-1}^+] \\ S_i^- = \max[0, -k - v_i + S_{i-1}^-] \end{matrix}, 1 \leq i \leq m \tag{4.9}$$

και αρχικές τιμές $S_0^+ = S_0^- = 0$ (Montgomery (2013), Peihua (2014)) .

Αν η τυπική απόκλιση της διεργασίας αυξάνεται, τότε θα αυξάνονται οι τιμές των αθροισμάτων S_i^+ ξεπερνώντας κάποια στιγμή το διάστημα απόφασης H, ενώ αν η τυπική απόκλιση μειώνεται, θα μειώνονται και οι τιμές των S_i^- μέχρι τελικά να ξεπεράσουν την τιμή H. Οι τιμές των παραμέτρων k και h επιλέγονται όπως στα διαγράμματα του μέσου. Αν υπάρχει ένδειξη εκτός ελέγχου στο $Scale\ CUSUM$ διάγραμμα τότε υπάρχει υποψία αλλαγής στη διασπορά της διαδικασίας, ενώ αν υπάρχει ένδειξη εκτός ελέγχου και στα δύο διαγράμματα (διαγράμματα μέσου και μεταβλητότητας) τότε υπάρχει υποψία μετατόπισης στο μέσο (Montgomery (2013)).

4.3 CUSUM-lnS² Διάγραμμα ελέγχου

Οι Chang and Gan (1995) πρότειναν ένα CUSUM στην δειγματική διασπορά για την παρακολούθηση της μεταβλητότητας της διεργασίας, το οποί καλείται $\boldsymbol{CUSUM - lnS^2}$**.** Έστω ότι οι παρατηρήσεις είναι κανονικά κατανεμημένες και οι εντός ελέγχου και εκτός ελέγχου τιμές είναι σ_0^2 και σ_1^2, αντίστοιχα. Έστω S_i^2 είναι η δειγματική διασπορά του $i-$ οστής υποομάδας (Εξίσωση (3.3)). Τα άνω και κάτω $CUSUM$ για μια κανονική διασπορά είναι:

$$\begin{matrix} C_i^+ = \max[0, C_{i-1}^+ + S_i^2 + k] \\ C_i^- = \max[0, C_{i-1}^- + S_i^2 - k] \end{matrix} \tag{4.10}$$

Όπου $k = [2\ln(\sigma_0/\sigma_1)\sigma_0^2\sigma_1^2/(\sigma_0^2 - \sigma_1^2)]$ και $C_0^+ = C_0^- = 0$. Ένα *headstart* ή ένα χαρακτηριστικό γρήγορης απόκρισης μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε αυτό το FIR.

4.4 CP CUSUM Διάγραμμα ελέγχου

Οι Acosta et al (1999) πρότειναν ένα CUSUM διάγραμμα για την παρακολούθηση της διασποράς της διεργασίας, το οποίο καλείται **Normal CP CUSUM** διάγραμμα για τη σ. Το διάγραμμα αυτό κατασκεπάστηκε υπό την υπόθεση των κανονικών και ανεξάρτητων παρατηρήσεων. Έστω σ_0 η εντός ελέγχου τιμή για την τυπική απόκλιση της διεργασίας και έστω $\sigma_\alpha^- \neq \sigma_0$ και $\sigma_\alpha^+ \neq \sigma_0$ είναι οι τυπικές αποκλίσεις που χρειάζεται να ανιχνευθούν. Αν η X_t αντιπροσωπεύει την $t-$ $o\sigma\tau$ή παρατήρηση, τότε το $CP\ CUSUM$ διάγραμμα για την παρακολούθηση αλλαγών στην τυπική απόκλιση της διεργασίας δίνεται από τις σχέσεις:

$$\begin{matrix} SU_t = max[0, Z_t - k^+ + SU_{t-1}] \\ SL_t = max[0, -Z_t - k^- + SU_{t-1}] \end{matrix} \tag{4.11}$$

Όπου

$$Z_t = \left[\frac{X_t - \mu}{\sigma_0}\right]^2 \tag{4.12}$$

Και οι τιμές αναφοράς $k^\pm$ ορίζονται ως εξής:

$$k^{\pm} = \frac{log\tau^{\pm}}{\left(1-(1/\tau^{\pm})\right)} \tag{4.13}$$

με $\tau^{+} = \sigma_{\alpha+}^{2}/\sigma_0$ και $\tau^{-} = \sigma_{\alpha-}^{2}/\sigma_0$ αντιπροσωπεύουν την τυποποιημένη αύξηση και μείωση, αντίστοιχα, στη διασπορά της διεργασίας που επιθυμεί κάποιος να ανιχνεύσει γρήγορα. Το $CP\ CUSUM$ διάγραμμα για τη διασπορά δίνει ένα εκτός ελέγχου σήμα όταν $SU_t > h_u$ ή $SL_t > h_l$.

4.5 CUSUM-S² διάγραμμα ελέγχου

Οι Castagliola et al. (2009) πρότειναν ένα $\mathbf{CUSUM-S^2}$ διάγραμμα για την παρακολούθηση της διασποράς της διεργασίας, που βασίζεται σε ένα λογαριθμικό μετασχηματισμό τριών παραμέτρων (*Johnson's type transformation*) του Johnson που δίνεται από την σχέση:

$$T_j = a_T + b_T \ln(S_j^2 + c_T) \tag{4.14}$$

Όπου S_j^2 είναι η δειγματική διασπορά που για το j −οστό δείγμα που ορίζεται από την Εξίσωση (3.3) $\left(S_j^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_{ij} - \bar{X}_j\right)^2\right)$, όπου X_{ij} είναι η i −οστή παρατήρηση από το j −οστό δείγμα μεγέθους n από μια κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και τυπική απόκλιση σ_0 και $\bar{X}_j$ είναι ο μέσος του j −οστού δείγματος. Οι σταθερές a_T, b_T και c_T ορίζονται ως $b_T = B_T(n)$, $c_T = C_T(n)\sigma_0^2$ και $a_T = A_T(n) - 2B_T(n)ln(\sigma_0)$ όπως στον Castagliola (2005a). Εξήγαγε την κατανομή της T_j και έδειξε ότι αν οι σταθερές a_T, b_T και c_T επιλέγουν συνετά, τότε $T_j \dot{\sim} N(E(T_j), \sigma^2(T_j))$ (βλεπε Castagliola (2005a) (Appendix A)). Διάφορες τιμές των $E(T_j)$, $\sigma(T_j)$, $A_T(n)$, $B_T(n)$ και $C_T(n)$ για $n = 3, \dots, 15$ δίνονται στο Παράρτημα III.

Το $CUSUM - S^2$ διάγραμμα χρησιμοποιεί δύο στατιστικές συναρτήσεις σχεδιασμού, τις C^+ και C^-, που δίνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} C_j^+ &= max\left[0, \left(T_j - E(T_j)\right) - K + C_{j-1}^+\right] \\ C_j^- &= max\left[0, -\left(T_j - E(T_j)\right) - K + C_{j-1}^-\right] \end{aligned} \tag{4.15}$$

Όπου K είναι η τιμή αναφοράς (*reference value*) και η παράμετρος ευαισθησίας (*sensitivity parameter*) του $CUSUM - S^2$ διαγράμματος και $C_0^+ = C_0^- = 0$. Αυτές οι στατιστικές συναρτήσεις σχεδιασμού σχεδιάζονται έναντι ενός ορίου ελέγχου H και λαμβάνεται ένα εκτός ελέγχου σήμα αν οποιαδήποτε από τις δύο στατιστικές συναρτήσεις (δηλαδή C^+ και C^-) βρίσκονται άνω του H.

Οι K και H είναι από κοινού δύο παράμετροι του $CUSUM - S^2$ διαγράμματος και η τυπική μορφή τους είναι:

$$K = k\sigma(T_j) \qquad \text{και} \qquad H = h\sigma(T_j) \tag{4.16}$$

όπου k και h είναι σταθερές που καθορίζουν τις ιδιότητες του διαγράμματος. Οι ARL τιμές για το $CUSUM - S^2$ διάγραμμα για διαφορετικές επιλογές των παραμέτρων του δίνονται στον Πίνακα 4.5.1 με $ARL_0 = 200$ και $n = 5$. Οι ARL τιμές του $CUSUM - S^2$ διαγράμματος με τις βέλτιστες επιλογές των παραμέτρων δίνονται στον Πίνακα 4.5.2.

Πίνακας 4.5.1 ARL τιμές για το $CUSUM - S^2$ διάγραμμα για $\mathbf{n = 5}$ και $ARL_0 = 200$[7]

τ	$K=0.1$ $H=10.53$	$K=0.25$ $H=6.476$	$K=0.5$ $H=3.855$	$K=0.75$ $H=2.62$	$K=1$ $H=1.906$
0.5	9.059	6.516	5.199	5.071	6.121
0.6	11.382	8.452	7.303	8.264	13.223
0.7	15.489	12.169	12.295	18.314	43.032
0.8	24.394	21.619	29.699	60.662	170.474
0.9	54.649	63.997	116.766	226.253	475.443
0.95	114.332	143.17	213.662	294.554	379.161
1	199.846	199.241	199.841	200.769	199.625
1.05	102.864	104.01	104.806	102.974	100.707
1.1	52.641	50.675	53.502	54.227	54.99
1.2	25.057	20.867	20.373	20.777	21.353
1.3	16.451	12.763	11.255	11.092	11.18
1.4	12.434	9.256	7.654	7.2	7.115
1.5	10.068	7.341	5.832	5.26	5.126
2	5.509	3.885	2.873	2.41	2.197
3	3.347	2.379	1.686	1.404	1.3

Πίνακας 4.5.2 ARL τιμές για το $CUSUM - S^2$ διάγραμμα με $ARL_0 = 370$[8]

τ	$n=3$	$n=5$	$n=7$	$n=9$
0.5	10.8	5.6	3.8	2.9
0.6	15.4	8.3	5.7	4.4
0.7	24.1	13.4	9.4	7.3
0.8	44	25.4	18.2	14.3
0.9	108.9	68.4	51.1	41.3
0.95	216.9	154.8	122.9	103.1
1.0	183.3	145.7	117.5	99.5
1.1	98.6	64.6	49.2	40.3
1.2	39.5	24.3	18	14.5
1.3	21.7	13.1	9.6	7.7
1.4	14.1	8.3	6.1	4.9
1.5	10.2	5.9	4.3	3.5
2	3.8	2.3	1.8	1.5

4.6 Κλασικό CS-CUSUM R διάγραμμα ελέγχου

Το *Shewhart* R διάγραμμα ελέγχου παρέχει προστασία έναντι μεγάλων μετατοπίσεων στην μεταβλητότητα της διεργασίας και το $CUSUM$ R επιτρέπει την γρήγορη ανίχνευση μικρών και μέτριων αλλαγών στην τυπική απόκλιση της διεργασίας. Το κλασικό $CS - CUSUM\ R$ (*Combined-Shewhart* $CUSUM\ R$) διάγραμμα είναι ένας πιθανολογικός συνδυασμός των δύο διαγραμμάτων ελέγχου, ήτοι του *Shewhart* R διαγράμματος ελέγχου και του $CUSUM\ R$ διαγράμματος. Ο Lucas (1982) παρατήρησε ότι εφαρμογή αυτής της συνδυασμένης δομής είναι τόσο εύκολη όσο το βασικό $CUSUM$ διάγραμμα.

Για να υπολογίσουμε το κλασικό $CS - CUSUM\ R$ διάγραμμα, έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ *iid* τυχαία δείγματα μεγέθους υποσυνόλου n από ένα κανονικό πληθυσμό με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2. Έστω $X_{(1:n)}$ και $X_{(n:n)}$ είναι η μεγαλύτερη και η μικρότερη παρατήρηση των $X_1, X_2, \dots, X_n$ από μια συνεχή κατανομή. Τότε η pdf των$X_{(1:n)}$ και $X_{(n:n)}$ δίνονται αντίστοιχα, από τις σχέσεις:

$$f_{X_{(1:n)}}(x) = nf(x)[1 - F(x)]^{n-1}$$
$$f_{X_{(n:n)}}(x) = nf(x)[F(x)]^{n-1} \qquad (4.17)$$

όπου $f(x)$ και $F(x)$ είναι η pdf και η cdf των $X_1, X_2, \dots, X_n$, αντίστοιχα. Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των $X_{(1:n)}$ και $X_{(n:n)}$ δίνεται από τη σχέση

[7] Castagliola et al. (2009)
[8] Abbas et al. (2013)

$$f_{X_{(1:n)}X_{(n:n)}}(x_1, x_n) = n(n-1)f(x_1)f(x_n)[F(x_n) - F(x_1)]^{n-2} \quad (4.18)$$

Η στατιστική συνάρτηση εύρους $R_{srsj} = X_{(n:n)j} - X_{(1:n)j}$ και από την (4.18), χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $X_{(1:n)j} + R_{srsj} = X_{(n:n)j}$ λαμβάνουμε (Zhang(2013)) την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των $X_{(1:n)j}$ και R_{srsj} από τη σχέση

$$f_{X_{(1:n)}R_{srsj}}(x_1, r) = n(n-1)f(x_1)f(x_1 + r)[F(x_1 + r) - F(x_1)]^{n-2}, 0 < r < \infty \quad (4.19)$$

Έτσι η οριακή cdf της R_{srs} εξάγεται ως εξής:

$$F_{R_{SRSj}}(r^*) = \mathrm{P}[R_{SRSj} < r^*] = \int_0^{r^*} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_{(1:n)}R_{srsj}}(x_1, r)dx_1 dr = \int_0^{r^*} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_{(1:n)}R_{srsj}}(x_1, r)dx_1 dr \quad (4.20)$$

$$= \int_0^{r^*} \int_{-\infty}^{\infty} n(n-1)f(x_1)f(x_1 + r)[F(x_1 + r) - F(x_1)]^{n-2}dx_1 dr$$

$$= n \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1) \left\{ (n-1) \int_0^{r^*} n(n-1)f(x_1)f(x_1 + r)[F(x_1 + r) - F(x_1)]^{n-2}dr \right\} dx_1$$

$$= n \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1)\,[F(x_1 + r) - F(x_1)]^{n-1}dx_1\,, 0 < r^* < \infty$$

που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του R διαγράμματος (Zhang (2013)). Ο μέσος και η τυπική απόκλιση της R_{SRS} δίνονται από τις σχέσεις $\mu_{R_{SRS}} = E(R_{SRS}) = d_2\sigma$ και $\sigma_{R_{SRS}} = \sigma(R_{SRS}) = d_3\sigma$, όπου d_2 και d_3 σταθερές εξαρτάται από το μέγεθος n της υποομάδας.

Για να παρακολουθήσουμε αμφότερες τις αυξήσεις και τις μειώσεις στην μεταβλητότητα της διεργασίας, θεωρούμε τον υπολογισμό του κλασσικού $CS - CUSUM\ R$ διαγράμματος που χρησιμοποιεί την στατιστική συνάρτηση τυποποιημένου εύρους.

$$W_{SRSj} = \frac{R_{SRSj}}{\sigma_0} \quad (4.21)$$

όπου σ_0 είναι η εντός ελέγχου τυπική απόκλιση. Το $CS - CUSUM\ R$ διάγραμμα δίνει ένα εκτός ελέγχου σήμα όταν οποιαδήποτε από τα άνω και κάτω $CUSUM$ που δίνονται από τους Acosta-Mejia (1998), Acosta-Mejia et al. (1999) και Knoth (2006)

$$\begin{aligned} C^+_{SRSj} &= max[0, C^+_{SRSj-1} + W_{SRSj} - k] \\ C^-_{SRSj} &= max[0, C^-_{SRSj-1} - W_{SRSj} + k] \end{aligned} \quad (4.22)$$

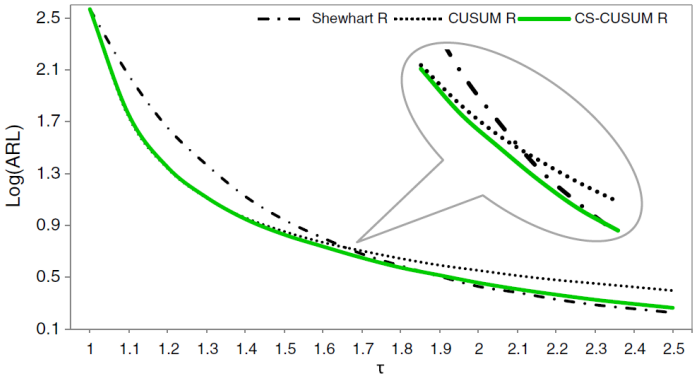
υπερβαίνει την τιμή του διαστήματος απόφασης $h\ (> 0)$. Εδώ $k = d_2(1 + \tau)/2$ είναι η τιμή αναφοράς και $\tau = \sigma_1/\sigma_0$ είναι η ποσότητα των μετατοπίσεων στην τυπική απόκλιση. Η αρχική τιμή του $CUSUM$ διαγράμματος είναι $C^+_{SRS0} = C^-_{SRS0} = 0$. Επίσης ο σχεδιασμός δίνει ένα εκτός ελέγχου σήμα όταν το τυποποιημένο εύρος σχεδιάζεται εκτός του διαστήματος μεταξύ των *Shewhart* ορίων ελέγχου (UCL και LCL). Δηλαδή $W_{SRSj} > UCL$ ή $W_{SRSj} < LCL$. Παρατηρούμε ότι αμφότερα τα $CUSUM$ και *Shewhart* R διαγράμματα είναι ειδικές περιπτώσεις του $CUSUM\ R$ διαγράμματος. Καθώς $h \to \infty$, το $CS - CUSUM\ R$ διάγραμμα συμπίπτει με ένα *Shewhart* R διάγραμμα και καθώς $UCL \to \infty$ ή $LCL \to 0$, το $CS - CUSUM\ R$ διάγραμμα συμπίπτει με ένα $CUSUM\ R$ διάγραμμα. Για την μέτρηση της απόδοσης του $CS - CUSUM\ R$ χρησιμοποιήθηκαν το ARL, το $SDRL$ και το $AEQL$. Ο Πίνακας 4.6.1

παρουσιάζει τα προαναφερθέντα μέτρα απόδοσης για παρακολουθήσεις αυξήσεων και μειώσεων στην τυπική απόκλιση της διεργασίας, όπου $n = 5$ και $ARL_0 = 370$. Επίσης η παράμετρος k καθορίστηκε έτσι ώστε να ανιχνεύει το 20%, 30%, 40% και 50% αυξήσεων και μειώσεων στην τυπική απόκλιση της διεργασίας και $\tau \in \{1.0,1.2,1.3,1.4,1.5, 1.6,1.7,1.8,1.9,2.0\}$.

Πίνακας 4.6.1 RL ιδιότητες του κλασσικού $CS - CUSUM\ R$ διαγράμματος για $n = 5$ και $ARL_0 = 370$[9]

k	h	RL	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0	AEQL
Increase ($UCL = 5.50$)														
2.559	6.394	$ARL_{1.2}$	370.14	57.32	22.04	12.98	9.02	6.81	5.42	4.47	3.76	3.26	2.88	1.640
		$SDRL_{1.2}$	363.72	48.75	15.17	7.96	5.26	3.93	3.19	2.68	2.29	2.04	1.81	
2.675	4.928	ARL1.3	370.22	62.82	22.60	12.44	8.43	6.28	5.00	4.12	3.51	3.07	2.71	1.548
		SDRL1.3	365.38	57.66	17.92	8.61	5.38	3.83	3.00	2.45	2.12	1.86	1.63	
2.791	4.023	$ARL_{1.4}$	370.07	68.78	24.12	12.62	8.24	6.04	4.76	3.93	3.35	2.92	2.60	1.507
		$SDRL_{1.4}$	365.33	65.36	20.35	9.57	5.67	3.93	2.98	2.43	2.04	1.75	1.55	
2.908	3.381	$ARL_{1.5}$	370.07	74.21	25.80	13.11	8.28	5.96	4.65	3.82	3.25	2.85	2.52	1.496
		$SDRL_{1.5}$	366.49	71.94	22.91	10.59	6.11	4.15	3.06	2.42	2.02	1.73	1.51	
			1.0	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.0	
Decrease ($LCL = 0.35$)														
2.093	5.591	$ARL_{0.8}$	370.14	66.24	22.36	12.47	8.54	6.44	5.10	4.02	2.66	1.11	1.00	1.256
		$SDRL_{0.8}$	358.93	53.87	11.71	4.51	2.33	1.47	1.19	1.22	1.25	0.34	0.00	
1.977	4.006	$ARL_{0.7}$	370.10	82.63	24.31	11.73	7.49	5.44	4.24	3.37	2.30	1.11	1.00	1.146
		$SDRL_{0.7}$	365.12	74.92	16.47	5.34	2.45	1.39	0.98	0.94	0.91	0.34	0.00	
1.861	3.023	ARL0.06	370.05	102.38	29.75	12.27	7.11	4.91	3.72	2.93	2.26	1.11	1.00	1.130
		$SDRL_{0.6}$	368.19	97.15	23.75	6.98	2.82	1.44	0.91	0.72	0.86	0.34	0.00	
1.745	2.348	$ARL_{0.5}$	370.33	123.09	38.03	14.10	7.20	4.66	3.41	2.67	1.91	1.10	1.00	1.149
		$SDRL_{0.5}$	370.98	118.72	33.71	9.81	3.45	1.58	0.90	0.69	0.67	0.29	0.00	

Το Σχήμα 4.6.1 παρουσιάζει την καμπύλη του ARL για το R διάγραμμα, το βασικό $CUSUM\ R$ διάγραμμα και το κλασσικό $CS - CUSUM\ R$ διάγραμμα για την ανίχνευση 20% αύξηση στην τυπική απόκλιση της διεργασίας. Παρατηρούμε ότι το $CS - CUSUM\ R$ παρέχει σημαντική βελτίωση στην απόδοση του ARL από το R διάγραμμα για μικρές και μέτριες μετατοπίσεις και από το βασικό $CUSUM\ R$ για μεγάλες μετατοπίσεις (Abujiya et al. (2014)).



Σχήμα 4.6.1 ARL καμπύλες του κλασσικού $CS - CUSUM\ R$, έναντι του R και του βασικού $CUSUM\ R$ διαγράμματος[10]

4.7 CS - CUSUM R υπό τις ERSS και DERSS

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται η δομή σχεδιασμού του $CS - CUSUM\ R$ για την παρακολούθηση της διασποράς της διεργασίας με βάση τις ακραίες παραλλαγές της RSS, $ERSS$ και $DERSS$. Έστω R_{erssj}, και R_{derssj} είναι τα δειγματικά εύρη του $j -$ οστού κύκλου που βασίζεται στις $ERSS$ και $DERSS$ αντίστοιχα.

[99] Abujiya et al. (2014)
[10] Abujiya et al. (2014)

4.7.1 CS - CUSUM R ERSS

Οι δύο μονόπλευρες τυποποιημένες $CUSUM$ στατιστικές συναρτήσεις (Abujiya et al. (2014)) για την ανίχνευση αυξήσεων ή μειώσεων στην μεταβλητότητα της διεργασίας βασισμένες στην $ERSS$ μπορεί να εκφραστεί από τις σχέσεις (Acosta et al (1999), Knoth(2006)):

$$\begin{aligned} C^{+}_{erssj} &= max\left[0, C^{+}_{erssj-1} + \left(R_{erssj}/\sigma_0\right) - k_{erss}\right] \\ C^{-}_{erssj} &= max\left[0, C^{-}_{erssj-1} - \left(R_{erssj}/\sigma_0\right) + k_{erss}\right] \end{aligned} \tag{4.23}$$

όπου $k_{erss} = d_2^{*erss}(1+\tau)/2$ είναι η τιμή αναφοράς, με $d_2^{*erss} = (1/\sigma_0)E(R_{erssj})$ και $\tau = \sigma_1/\sigma_0$ είναι η μετατόπιση στην τυπική απόκλιση της διεργασίας. Η $E(R_{erssj})$ μπορεί να εκτιμηθεί από την $\bar{R}_{erss} = (1/r)R_{erssj}$. Για μηδενικό *headstart*, θέτουμε $C^{+}_{erssj0} = C^{-}_{erssj0} = 0$. Να σημειωθεί ότι το πλεονέκτημα του τυποποιημένου $CUSUM$ είναι ότι καθιστά τις παραμέτρους του διαγράμματος ανεξάρτητες του σ. Το $CS - CUSUM\ R$ που βασίζεται στην $ERSS$, δίνει ένα εκτός ελέγχου σήμα όταν είτε

$$C^{+}_{erssj} \text{ ή } C^{-}_{erssj} > h \qquad \text{ή} \qquad UCL < \left(R_{erssj}/\sigma_0\right) < LCL \tag{4.24}$$

Για την πρώτη χρονική στιγμή με j να συμβολίζει το RL της κατανομής. Αν RL_{SH} και RL_{CU} αντιπροσωπεύουν τις μηδενικές καταστάσεις της $\left(R_{erssj}/\sigma_0\right)$ και $C^{+}_{erssj}/C^{-}_{erssj}$, αντίστοιχα, τότε ορίζουμε το RL του $CS - CUSUM\ R$ διαγράμματος ως εξής

$$RL_{SC} = \min(RL_{SH}, RL_{CU}) \tag{4.25}$$

Όπου $RL_{SH} = \inf\{j: UCL < \left(R_{erssj}/\sigma_0\right) < LCL\}$ και $RL_{CU} = \inf\{j: \left(C^{+}_{erssj} \text{ ή } C^{-}_{erssj}\right) > h\ \}$.

Επιπλέον, $E(RL_{SC}) = ARL_0$ και $\sqrt{E(RL_{SC}^2) - E(RL_{SC})} = SARL_0$, όπου $E(RL_{SC})$ είναι η αναμενόμενη τιμή της RL_{SC} στην μηδενική κατάσταση, δηλαδή, καμία μετατόπιση στην τυπική απόκλιση (Abujiya et al. (2014)).

4.7.2 CS - CUSUM R DERSS

Όμοια οι δύο μονόπλευρες τυποποιημένες $CUSUM$ στατιστικές συναρτήσεις (Abujiya et al. (2014)) για την ανίχνευση αυξήσεων ή μειώσεων στην μεταβλητότητα της διεργασίας βασισμένες στην $DERSS$ μπορεί να εκφραστεί από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} C^{+}_{derssj} &= max\left[0, C^{+}_{derssj-1} + \left(R_{derssj}/\sigma_0\right) - k_{derss}\right] \\ C^{-}_{derssj} &= max\left[0, C^{-}_{derssj-1} - \left(R_{derssj}/\sigma_0\right) + k_{derss}\right] \end{aligned} \tag{4.26}$$

όπου $k_{derss} = d_2^{*derss}(1+\tau)/2$ είναι η τιμή αναφοράς, με $d_2^{*derss} = (1/\sigma_0)E(R_{derssj})$ και $\tau = \sigma_1/\sigma_0$ είναι η μετατόπιση στην τυπική απόκλιση της διεργασίας. Η $E(R_{derssj})$ μπορεί να εκτιμηθεί από την $\bar{R}_{derss} = (1/r)R_{derssj}$. Για μηδενικό *headstart*, θέτουμε $C^{+}_{derssj0} = C^{-}_{derssj0} = 0$. Να σημειωθεί ότι το πλεονέκτημα του τυποποιημένου $CUSUM$ είναι ότι καθιστά τις παραμέτρους του διαγράμματος ανεξάρτητες του σ. Το $CS - CUSUM\ R$ που βασίζεται στην $DERSS$, δίνει ένα εκτός ελέγχου σήμα όταν είτε

$$C^{+}_{derssj} \text{ ή } C^{-}_{derssj} > h \qquad \text{ή} \qquad UCL < \left(R_{derssj}/\sigma_0\right) < LCL \tag{4.27}$$

Παρόμοια με το $CS-CUSUM\ R$ που βασίζεται στην $ERSS$ ορίζεται το RL της κατανομής. Τότε έχουμε:

$$RL_{SC} = \min(RL_{SH}, RL_{CU}) \tag{4.28}$$

Όπου $RL_{SH} = \inf\{j: UCL < \left(R_{derssj}/\sigma_0\right) < LCL\}$ και $RL_{CU} = \inf\{j: \left(C^{+}_{derssj}\ \text{ή}\ C^{-}_{derssj}\right) > h\ \}$.

Επιπλέον, $E(RL_{SC}) = ARL_0$ και $\sqrt{E(RL_{SC}^2) - E(RL_{SC})} = SARL_0$, όπου $E(RL_{SC})$ είναι η αναμενόμενη τιμή της RL_{SC} στην μηδενική κατάσταση, δηλαδή, καμία μετατόπιση στην τυπική απόκλιση.

4.7.3 Αξιολόγηση απόδοσης του CS-CUSUM R υπό τις ERSS και DERSS

Για την αξιολόγηση της απόδοσης του $CS-CUSUM\ R$ χρησιμοποιώντας τις $ERSS$ και $DERSS$, θεωρήθηκε $ARL_0 = 200$ ή 370 με υποομάδες μεγέθους $n = 5$. Επίσης έχει υποτεθεί ότι οι παρατηρήσεις αξολουθούν $N(0,1)$. Η τιμή αναφοράς k τέθηκε έτσι ώστε το διάγραμμα να ανιχνεύει το 20%, 30%, 40% και 50% των αυξήσεων και μειώσεων στην τυπική απόκλιση της διεργασίας. Τα όρια ελέγχου προσαρμόστηκαν έτσι ώστε να λαμβάνεται το επιθυμητό ARL_0 που ελαχιστοποιεί τα ARL_1 και $AEQL$ σε ολόκληρη την κυρίαρχη μετατόπιση της διεργασίας. Οι Πίνακες 4.7.1-4.7.4 παρουσιάζουν την ARL, $SDRL$ και $AEQL$ απόδοση των $CS-CUSUM\ R$ (Abujiya et al. (2014)) χρησιμοποιώντας τις $ERSS$ και $DERSS$ για την ανίχνευση αυξήσεων και μειώσεων στην διασπορά της διεργασίας. Με βάση τους Πίνακες 4.7.1-4.7.4 παρατηρούμε ότι:

i. Όταν οι αλλαγές στην τυπική απόκλιση αυξάνει ($\tau > 1$) ή μειώνει ($\tau < 1$), αμφότερα τα ARL και $SDRL$ μειώνουν ταχέως, με το h να είναι αντιστρόφως ανάλογο του k όταν $\tau > 1$ και απευθείας ανάλογο με το k όταν $\tau < 1$ για δεδομένη τιμή του UCL και του LCL.
ii. Η προσθήκη των *Shewhart* ορίων ελέγχου έχει ουσιαστικά βελτιώσει την ευαισθησία των $CS-CUSUM\ R\ ERSS$ και $CS-CUSUM\ R\ DERSS$ για να ανιχνεύουν ένα μεγάλο εύρος μειώσεων και αυξήσεων στη διασπορά της διεργασίας (Πίνακες 4.7.1-4.7.4).
iii. Οι εκτός ελέγχου ARL και $SDRL$ τιμές υποδεικνύουν ότι οι δύο σχεδιασμοί είναι γενικά πιο αποδοτικοί στην ανίχνευση μειώσεων της μεταβλητότητας από ότι για την παρακολούθηση αυξήσεων στην τυπική απόκλιση εκτός από μια μικρή περιοχή όταν η μετατόπιση είναι μικρότερη του 30%.
iv. Στην παρακολούθηση αυξήσεων και μειώσεων στη τυπική απόκλιση οι ARL και $SDRL$ τιμές υποδεικνύουν ότι τα διαγράμματα ελέγχου είναι ιδιαίτερα αποτελεσματικότερα στην ανίχνευση μικροσκοπικών μετατοπίσεων όταν η τιμή της k είναι μικρή. Οι μέτριες και μεγάλες μετατοπίσεις στην μεταβλητότητα της διεργασίας απαιτούν μεγαλύτερες τιμές της k.
v. Η συνολική απόδοση, όσον αφορά το $AEQL$, υποδεικνύει ουσιαστικά κέρδη στην αποτελεσματικότητα των $CS-CUSUM\ R\ ERSS$ και $CS-CUSUM\ R\ DERSS$, ιδιαίτερα στην ικανότητα ανίχνευσης της 40% αύξησης στην τυπικής απόκλισης για το $CS-CUSUM\ R\ ERSS$ και 30% για το $CS-CUSUM\ R\ DERSS$ (Πίνακες 4.7.1-4.7.4).

vi. Για την παρακολούθηση μειώσεων στην μεταβλητότητα της διεργασίας, ένα σημαντικό κέρδος στην ευαισθησία του $CS - CUSUM\ R\ ERSS$ επιτυγχάνεται όταν ανιχνεύεται 30% μείωση στην τυπική απόκλιση (Πίνακες 4.7.1 και 4.7.2). Το $CS - CUSUM\ R\ DERSS$ επιτυγχάνεται στο 20% (Πίνακες 4.7.3 και 4.7.4)

vii. Το $CS - CUSUM\ R\ DERSS$ φαίνεται να είναι πιο ευαίσθητο στις μετατοπίσεις από τον στόχο από το αντίστοιχο $CS - CUSUM\ R\ ERSS$.

viii. Τα ARL, $SDRL$ και $AEQL$ δείχνουν ότι τα $CS - CUSUM\ R\ ERSS$ και $CS\ CUSUM\ R\ DERSS$ διαγράμματα δεν διατηρούν μόνο τα πλεονεκτήματά του $CUSUM$ στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων, και *Shewhart* για την γρήγορη ανίχνευση μεγάλων μετατοπίσεων αλλά έχουν βελτιώσει αρκετά την αποτελεσματικότητα των διαγραμμάτων στην διαχείριση μέτριων μετατοπίσεων της διεργασίας (Πίνακες 4.7.1-4.7.4).

Πίνακας 4.7.1 RL ιδιότητες για το $CS - CUSUM\ R\ ERSS$ όταν $n = 5$ και $ARL_0 = 200$[11]

k	h	RL	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0	AEQL
Increase ($UCL = 5.60$)														
3.399	4.537	$ARL_{1.2}$	200.00	31.99	12.10	6.99	4.77	3.60	2.84	2.34	2.00	1.76	1.57	0.876
		$SDRL_{1.2}$	196.56	27.32	8.53	4.43	2.97	2.23	1.77	1.45	1.21	1.03	0.87	
3.554	3.350	$ARL_{1.3}$	200.23	35.30	12.44	6.79	4.55	3.39	2.69	2.25	1.93	1.71	1.55	0.850
		$SDRL_{1.3}$	198.40	32.42	9.84	4.75	2.96	2.11	1.64	1.34	1.12	0.95	0.82	
3.708	2.625	$ARL_{1.4}$	200.18	38.55	13.36	6.92	4.48	3.30	2.62	2.18	1.89	1.67	1.52	0.842
		$SDRL_{1.4}$	198.51	36.49	11.42	5.26	3.06	2.13	1.63	1.29	1.08	0.90	0.78	
3.863	2.103	$ARL_{1.5}$	200.07	41.49	14.35	7.24	4.54	3.29	2.60	2.15	1.86	1.66	1.50	0.847
		$SDRL_{1.5}$	199.24	40.04	12.93	5.82	3.33	2.24	1.65	1.28	1.06	0.88	0.75	
			1.0	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.0	
Decrease ($LCL = 1.10$)														
2.781	3.883	$ARL_{0.8}$	200.13	37.60	12.22	6.73	4.50	3.21	2.15	1.28	1.00	1.00	1.00	0.635
		$SDRL_{0.8}$	196.65	30.72	6.50	2.57	1.50	1.19	0.99	0.56	0.07	0.00	0.00	
2.627	2.696	$ARL_{0.7}$	200.10	47.93	13.37	6.32	3.96	2.80	1.98	1.25	1.00	1.00	1.00	0.619
		$SDRL_{0.7}$	198.39	43.87	9.13	2.92	1.43	0.97	0.84	0.48	0.07	0.00	0.00	
2.472	1.968	$ARL_{0.6}$	200.02	59.39	16.56	6.60	3.75	2.53	1.77	1.23	1.00	1.00	1.00	0.628
		$SDRL_{0.6}$	198.28	56.49	13.41	3.80	1.56	0.92	0.66	0.43	0.07	0.00	0.00	
2.318	1.470	$ARL_{0.5}$	200.13	70.18	21.30	7.57	3.77	2.41	1.71	1.23	1.00	1.00	1.00	0.661
		$SDRL_{0.5}$	198.81	67.97	18.94	5.30	1.86	0.91	0.59	0.42	0.06	0.00	0.00	

Πίνακας 4.7.2 RL ιδιότητες για το $CS - CUSUM\ R\ DERSS$ όταν $n = 5$ και $ARL_0 = 200$[12]

k	h	RL	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0	AEQL
Increase ($UCL = 6.10$)														
4.113	3.190	$ARL_{1.2}$	200.20	23.44	8.20	4.69	3.21	2.43	1.96	1.62	1.43	1.29	1.20	0.617
		$SDRL_{1.2}$	201.16	20.13	5.41	2.78	1.78	1.34	1.06	0.84	0.69	0.56	0.46	
4.300	2.300	$ARL_{1.3}$	200.14	27.56	8.78	4.55	3.08	2.30	1.89	1.58	1.40	1.28	1.18	0.609
		$SDRL_{1.3}$	199.65	25.39	6.75	2.95	1.82	1.25	0.99	0.78	0.64	0.53	0.42	
4.487	1.715	$ARL_{1.4}$	200.17	30.97	9.55	4.75	3.06	2.29	1.85	1.56	1.38	1.28	1.19	0.613
		$SDRL_{1.4}$	200.32	29.39	8.05	3.38	1.94	1.29	0.96	0.74	0.61	0.52	0.43	
4.674	1.355	$ARL_{1.5}$	200.35	35.23	10.77	5.11	3.15	2.31	1.84	1.55	1.37	1.25	1.17	0.622
		$SDRL_{1.5}$	200.07	34.22	9.39	4.00	2.18	1.43	1.02	0.76	0.60	0.49	0.41	
			1.0	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.0	
Decrease ($LCL = 1.975$)														
3.365	2.664	$ARL_{0.8}$	200.11	24.60	7.33	3.83	2.39	1.51	1.07	1.00	1.00	1.00	1.00	0.447
		$SDRL_{0.8}$	195.35	20.22	3.88	1.66	1.10	0.73	0.27	0.02	0.00	0.00	0.00	
3.178	1.724	$ARL_{0.7}$	200.26	32.41	7.79	3.54	2.16	1.41	1.06	1.00	1.00	1.00	1.00	0.447
		$SDRL_{0.7}$	197.06	29.78	5.22	1.73	0.95	0.58	0.24	0.03	0.00	0.00	0.00	
2.991	1.153	$ARL_{0.6}$	200.64	40.45	9.33	3.62	2.06	1.39	1.06	1.00	1.00	1.00	1.00	0.460
		$SDRL_{0.6}$	199.04	38.46	7.50	2.11	0.92	0.53	0.24	0.02	0.00	0.00	0.00	
2.804	0.786	$ARL_{0.5}$	200.49	48.27	11.90	4.05	2.06	1.35	1.05	1.00	1.00	1.00	1.00	0.481
		$SDRL_{0.5}$	198.57	47.28	10.57	2.82	1.03	0.53	0.22	0.02	0.00	0.00	0.00	

Πίνακας 4.7.3 RL ιδιότητες για το $CS - CUSUM\ R\ ERSS$ όταν $n = 5$ και $ARL_0 = 370$[13]

k	h	RL	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0	AEQL
Increase ($UCL = 5.90$)														
3.399	5.020	$ARL_{1.2}$	370.12	41.26	14.14	8.08	5.53	4.13	3.28	2.67	2.27	1.96	1.75	1.003
		$SDRL_{1.2}$	364.65	34.62	9.48	4.78	3.15	2.37	1.92	1.59	1.33	1.15	1.00	
3.554	3.709	$ARL_{1.3}$	370.03	47.91	14.84	7.80	5.17	3.83	3.03	2.52	2.15	1.88	1.69	0.963
		$SDRL_{1.3}$	365.94	43.82	11.56	5.19	3.16	2.26	1.74	1.45	1.21	1.04	0.90	
3.708	2.925	$ARL_{1.4}$	370.29	54.54	16.32	8.00	5.08	3.72	2.92	2.42	2.08	1.83	1.65	0.954
		$SDRL_{1.4}$	367.54	51.96	13.94	5.90	3.38	2.29	1.73	1.40	1.16	0.99	0.86	
3.863	2.370	$ARL_{1.5}$	370.20	60.53	18.03	8.44	5.17	3.72	2.87	2.38	2.03	1.80	1.63	0.962
		$SDRL_{1.5}$	367.30	58.77	15.96	6.75	3.71	2.43	1.77	1.40	1.14	0.96	0.82	
			1.0	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.0	
Decrease ($LCL = 0.95$)														
2.781	4.381	$ARL_{0.8}$	370.14	47.58	14.01	7.64	5.18	3.82	2.74	1.64	1.03	1.00	1.00	0.727
		$SDRL_{0.8}$	367.38	38.61	6.98	2.62	1.45	1.11	1.07	0.79	0.18	0.00	0.00	
2.627	3.023	$ARL_{0.7}$	370.15	65.58	15.49	7.07	4.46	3.21	2.42	1.54	1.03	1.00	1.00	0.702
		$SDRL_{0.7}$	366.52	60.55	10.21	3.06	1.43	0.92	0.83	0.68	0.17	0.00	0.00	
2.472	2.218	$ARL_{0.6}$	370.38	88.49	20.00	7.46	4.22	2.89	2.09	1.45	1.03	1.00	1.00	0.719
		$SDRL_{0.6}$	366.36	85.38	16.16	4.09	1.61	0.90	0.69	0.52	0.17	0.00	0.00	
2.318	1.678	$ARL_{0.5}$	370.55	111.35	27.95	8.77	4.26	2.73	1.96	1.44	1.03	1.00	1.00	0.776
		$SDRL_{0.5}$	367.83	108.53	25.12	5.98	1.98	0.95	0.59	0.50	0.17	0.00	0.00	

[11] Abujiya et al. (2014)
[12] Abujiya et al. (2014)
[13] Abujiya et al. (2014)

Πίνακας 4.7.4 RL ιδιότητες για το $CS-CUSUM\ R\ DERSS$ όταν $n=5$ και $ARL_0=370$[14]

k	h	RL	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0	AEQL
Increase (*UCL* = 6.630)														
4.113	3.730	$ARL_{1.2}$	370.21	30.70	9.68	5.37	3.65	2.77	2.18	1.81	1.55	1.38	1.25	0.687
		$SDRL_{1.2}$	371.15	25.95	6.12	2.99	1.96	1.49	1.17	0.97	0.79	0.65	0.53	
4.300	2.698	$ARL_{1.3}$	370.20	38.05	10.37	5.25	3.48	2.57	2.07	1.72	1.51	1.35	1.25	0.674
		$SDRL_{1.3}$	369.46	35.46	7.70	3.33	1.97	1.40	1.09	0.86	0.71	0.59	0.49	
4.487	2.053	$ARL_{1.4}$	370.37	45.30	11.75	5.50	3.46	2.55	2.01	1.70	1.48	1.34	1.23	0.682
		$SDRL_{1.4}$	370.53	43.58	9.77	3.95	2.13	1.43	1.05	0.85	0.68	0.57	0.47	
4.674	1.600	$ARL_{1.5}$	370.18	51.30	13.71	6.01	3.57	2.55	1.99	1.67	1.47	1.33	1.23	0.698
		$SDRL_{1.5}$	370.01	49.75	12.25	4.67	2.39	1.55	1.07	0.84	0.67	0.56	0.47	
			1.0	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.0	
Decrease (*LCL* = 1.875)														
3.365	3.113	$ARL_{0.8}$	370.39	31.93	8.51	4.52	2.80	1.70	1.12	1.00	1.00	1.00	1.00	0.478
		$SDRL_{0.8}$	360.25	25.90	4.20	1.78	1.21	0.84	0.35	0.05	0.00	0.00	0.00	
3.178	2.007	$ARL_{0.7}$	370.11	45.15	9.27	4.10	2.45	1.57	1.11	1.00	1.00	1.00	1.00	0.482
		$SDRL_{0.7}$	363.44	41.48	6.17	1.87	1.03	0.67	0.32	0.05	0.00	0.00	0.00	
2.991	1.370	$ARL_{0.6}$	370.21	61.77	11.54	4.15	2.32	1.52	1.11	1.00	1.00	1.00	1.00	0.504
		$SDRL_{0.6}$	360.95	60.14	9.43	2.35	1.01	0.59	0.31	0.04	0.00	0.00	0.00	
2.804	0.919	$ARL_{0.5}$	370.65	74.74	15.22	4.60	2.31	1.49	1.10	1.00	1.00	1.00	1.00	0.535
		$SDRL_{0.5}$	361.91	72.86	13.76	3.10	1.10	0.57	0.31	0.04	0.00	0.00	0.00	

4.8 Κλασικό CS-CUSUM S διάγραμμα ελέγχου

Το **CS-CUSUM S** διάγραμμα είναι μια μείξη δύο στατιστικών διαδικασιών - του *Shewhart* S διαγράμματος και του $CUSUM\ S$ διαγράμματος ελέγχου (Abujiya et al. (2015a)). Σε αυτό τον συνδυασμένο σχεδιασμό, τα χαρακτηριστικά κλειδιά του *Shewhart* S διαγράμματος προσφέρουν ασφάλεια έναντι μεγάλων μετατοπίσεων στην διασπορά της διεργασίας, και τα χαρακτηριστικά του $CUSUM\ S$ διαγράμματος επιτρέπουν γρήγορη ανίχνευση σε μικρές και μέτριες μετατοπίσεις στην τυπική απόκλιση της διεργασίας. Για να υπολογίσουμε το κλασσικό $CS-CUSUM\ S$ διάγραμμα που βασίζεται στην SRS, έστω $X_{1,j}, X_{2,j}, \dots, X_{n,j}$ n iid τυχαία δείγματα ένα κανονικό πληθυσμό $N(\mu_0, \sigma_0^2)$ όπου μ_0 είναι η ονομαστική μέση τιμή της διεργασίας και σ_0 είναι η ονομαστική τυπική απόκλιση της διεργασάις και $j = 1,2,3,\dots$ είναι ο αριθμός της υποομάδας.

Για να παρακολουθήσουμε αλλαγές στην διασπορά της διεργασίας, υποθέτουμε στην αρχή ότι η διεργασία είναι εντός ελέγχου με μέση τιμή μ_0 και τυπική απόκλιση σ_0 και παραμένει εντός ελέγχου μέχρι να γίνει εκτός ελέγχου με μία μετατόπιση στην τυπική απόκλιση της διεργασίας από σ_0 σε $\sigma_1 = \tau\sigma_0$, όπου $\tau = \sigma_1/\sigma_0$ είναι η ποσότητα μετατοπίσεων στην τυπική απόκλιση της διεργασίας. Έστω S_{srsj} είναι η δειγματική τυπική απόκλιση βασισμένη στα $X_{1,j}, X_{2,j}, \dots, X_{n,j}$ και ορίζεται ως εξής:

$$S_{srsj} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left[X_{i,j} - \bar{X}_{srsj}\right]^2} \tag{4.29}$$

Όπου $\bar{X}_{srsj} = (1/n)\sum_{i=1}^{n} X_{i,j}$ είναι ο δειγματικός μέσος της j-οστής υποομάδας μεγέθους n. Για να κάνουμε το $CS-CUSUM\ S$ ανεξάρτητο σε μία συγκεκριμένη τιμή του σ_0, θεωρούμε τον υπολογισμό που χρησιμοποιεί τις τυποποιημένες μονάδες. Ένα υψηλότερο μονόπλευρο $CS-EWMA\ S$ διάγραμμα δίνει ένα εκτός ελέγχου σήμα όταν είτε

$$\left(S_{srsj}/\sigma_0\right) > UCL \qquad \text{ή} \qquad C_{srsj}^{+} = max\left[0, C_{srsj-1}^{+} + \left(S_{srsj}/\sigma_0\right) - k^{+}\right] > h_u \tag{4.30}$$

[14] Abujiya et al. (2014)

όπου UCL είναι το άνω όριο του *Shewhart* άνω ορίου ελέγχου, h_u είναι το άνω CUSUM διάστημα απόφασης και k^+ είναι η τιμή αναφοράς του άνω $CUSUM$ που ορίζεται από την σχέση $k^+ = c_4(1+\tau)/2$ με $\tau \geq 1$ και c_4 είναι η σταθερά του *Shewhart* S διαγράμματος που εξαρτάται από το μέγεθος του δείγματος n. Η τιμή εκκίνησης της $CUSUM$ στατιστικής συνάρτησης C^+_{srsj} είναι μηδέν, δηλαδή $C^+_{srs0} = 0$.

Όμοια ένα κάτω μονόπλευρο $CS - CUSUM\ S$ διάγραμμα ελέγχου δίνει ένα εκτός ελέγχου σήμα αν είτε

$$\left(S_{srsj}/\sigma_0\right) < LCL \qquad \text{ή} \qquad C^+_{srsj} = max\left[0, C^-_{srsj-1} + \left(S_{srsj}/\sigma_0\right) - k^-\right] > h_l \quad (4.31)$$

Όπου LCL είναι το άνω όριο του *Shewhart* άνω ορίου ελέγχου, h_l είναι το κάτω $CUSUM$ διάστημα απόφασης. Η τιμή αναφοράς του κάτω $CUSUM$ διαγράμματος δίνεται από την σχέση $k^- = c_4(1+\tau)/2$ με $\tau \leq 1$ και c_4 είναι η σταθερά του *Shewhart* S διαγράμματος που εξαρτάται από το μέγεθος του δείγματος n. Η τιμή εκκίνησης της $CUSUM$ στατιστικής συνάρτησης C^-_{srsj} είναι μηδέν, δηλαδή $C^-_{srs0} = 0$. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι όπως και τα άλλα $CS - CUSUM$ διαγράμματα ελέγχου (βλέπε Lucas (1982) και Klein (1996)), τόσο το $CUSUM\ S$ διάγραμμα και *Shewhart* S διάγραμμα είναι ειδικές περιπτώσεις του $CS - CUSUM\ S$ διαγράμματος. Όταν είτε h_u ή h_l προσεγγίζει το άπειρο, το $CS - CUSUM\ S$ διάγραμμα μειώνει σε ένα βασικό $Shewhart\ S$ διάγραμμα, και όταν είτε UCL προσεγγίζει το άπειρο ή LCL προσεγγίζει το μηδέν, το διάγραμμα $CS - CUSUM\ S$ μειώνει σε ένα τυπικό διάγραμμα $CUSUM\ S$.

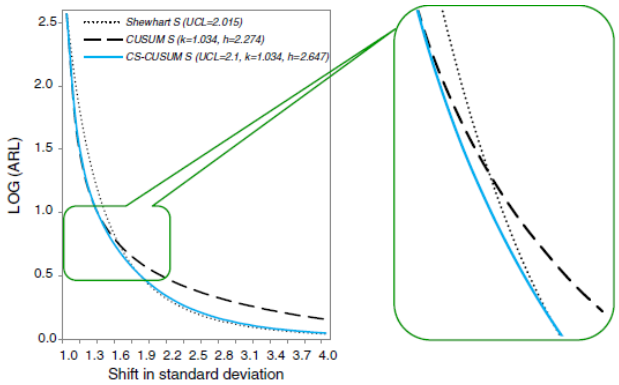
Για την μέτρηση της απόδοσης του $CS - CUSUM\ S$ χρησιμοποιήθηκαν το ARL, το $SDRL$ και το $AEQL$. Ο Πίνακας 4.8.1 παρουσιάζει τα προαναφερθέντα μέτρα απόδοσης για παρακολουθήσεις αυξήσεων και μειώσεων στην τυπική απόκλιση της διεργασίας, όπου $n = 5$ και $ARL_0 = 370$. Η τιμή αναφοράς της $CUSUM\ S$ συνιστώσας λαμβάνεται απευθείας από την σχέση $k^{\pm} = d_2(1+\tau)/2$ Επίσης η παράμετρος $k^{\pm}$ καθορίστηκε έτσι ώστε να ανιχνεύει το 20%, 30%, 40% και 50% αυξήσεων ($\tau > 1$) και μειώσεων ($\tau < 1$) στην τυπική απόκλιση της διεργασίας. Η επιλογή των UCL και LCL, h_u και h_l εξαρτάται από την $k^{\pm}$ και το ARL_0. Μόλις τεθεί η επιθυμητή τιμή του ARL_0 και καθοριστεί η τιμή του k^+, το UCL τίθεται λίγο παραπάνω από το τυπικό *Shewhart* UCL, και η τιμή του h_u προσαρμόζεται μέχρι να ληφθεί το επιθυμητό ARL_0. Όμοια, για μια καθορισμένη τιμή του k^-, το LCL τίθεται κάτω του κανονικού *Shewhart* LCL, και η τιμή του h_u προσαρμόζεται μέχρι να ληφθεί το επιθυμητό ARL_0. Έπειτα για κάθε ARL_0, οι εκτός ελέγχου ARL τιμές για διάφορες τιμές του τα υπολογίζονται και εκτιμάται η $AEQL$.

Το Σχήμα 4.8.1 παρουσιάζει την καμπύλη του ARL για την ανίχνευση 20% αυξήσεων στην τυπική απόκλιση της διεργασίας όταν $ARL_0 = 370$. Συγκεκριμένα, συγκρίνεται το CS-CUSUM-S διάγραμμα με παραμέτρους $UCL = 2.10$, $k = 1.034$, $h_u = 2.647$ με $k = 1.034$, $h_l = 2.274$ του $CUSUM\ S$ και $UCL = 2.015$ *Shewhart* S διαγράμματος. Παρατηρείται ότι το $CS - CUSUM\ S$ διάγραμμα παρέχει σημαντικές βελτιώσεις σε σχέση με το τυπικό *Shewhart* S διάγραμμα και το $CUSUM\ S$ διάγραμμα, ιδιαίτερα στην περιοχή που οδηγεί στο σημείο

τομής των δύο τελευταίων. Έξω από αυτή την περιοχή, ο σχεδιασμός αποδίδει σχεδόν όπως το *Shewhart* S διάγραμμα στην ανίχνευση μεγάλων μετατοπίσεων και σχεδόν όπως $CUSUM\ S$ στην ανίχνευση μικρών και μέτριων μετατοπίσεων της διεργασίας.

Πίνακας 4.8.1 RL ιδιότητες για το κλασσικό $CS - CUSUM\ S$ $n = 5$ και $ARL_0 = 370$

k	h_u	RL	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0	AEQL
Increase	($UCL = 2.100$)													
1.034	2.647	$ARL_{1.2}$	370.10	56.88	21.67	12.47	8.61	6.40	5.05	4.12	3.46	2.98	2.62	1.531
		$SDRL_{1.2}$	362.89	48.19	15.30	7.93	5.32	4.02	3.22	2.70	2.29	1.98	1.75	
1.081	2.012	$ARL_{1.3}$	370.09	62.29	22.01	12.02	8.04	5.98	4.70	3.86	3.27	2.84	2.51	1.460
		$SDRL_{1.3}$	365.41	56.67	17.44	8.43	5.30	3.83	3.00	2.46	2.08	1.82	1.60	
1.128	1.623	$ARL_{1.4}$	370.51	67.83	23.25	12.13	7.88	5.74	4.50	3.71	3.14	2.73	2.42	1.426
		$SDRL_{1.4}$	367.15	64.09	19.93	9.30	5.55	3.86	2.93	2.39	2.00	1.72	1.51	
1.175	1.353	$ARL_{1.5}$	370.16	72.62	24.81	12.54	7.88	5.68	4.41	3.59	3.06	2.65	2.36	1.416
		$SDRL_{1.5}$	367.57	69.98	22.19	10.29	5.91	4.02	2.99	2.38	1.97	1.68	1.46	
k	h_l	RL	1.0	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.0	AEQL
Decrease	($LCL = 0.145$)													
0.846	2.196	$ARL_{0.8}$	370.49	65.37	21.93	12.16	8.31	6.27	4.97	3.89	2.60	1.08	1.00	1.226
		$SDRL_{0.8}$	359.36	53.33	11.53	4.34	2.25	1.44	1.15	1.20	1.24	0.30	0.00	
0.799	1.575	$ARL_{0.7}$	370.63	83.02	23.98	11.47	7.29	5.31	4.14	3.27	2.25	1.08	1.00	1.122
		$SDRL_{0.7}$	364.86	75.35	16.21	5.19	2.36	1.35	0.95	0.93	0.89	0.30	0.00	
0.752	1.190	$ARL_{0.6}$	370.42	103.52	29.50	12.06	6.92	4.80	3.63	2.88	2.22	1.08	1.00	1.112
		$SDRL_{0.6}$	367.35	98.17	23.83	6.88	2.72	1.40	0.88	0.70	0.86	0.29	0.00	
0.705	0.925	$ARL_{0.5}$	370.21	124.22	38.05	13.90	7.10	4.56	3.33	2.62	1.84	1.08	1.00	1.132
		$SDRL_{0.5}$	367.31	120.48	33.83	9.62	3.42	1.54	0.87	0.68	0.62	0.27	0.00	



Σχήμα 4.8.1 ARL καμπύλες για το κλασσικό $CS - CUSUM\ S$ διάγραμμα έναντι των Shewhart S και $CUSUM\ S$ διαγραμμάτων για την ανίχνευση 1.2σ όταν $n = 5$ και $ARL_0 = 370$

4.9 CS - CUSUM S υπό τις ERSS και DERSS

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται η δομή σχεδιασμού του $CS - CUSUM\ S$ για την παρακολούθηση της διασποράς της διεργασίας με βάση τις ακραίες παραλλαγές της RSS, $ERSS$ και $DERSS$.

4.9.1 CS - CUSUM S ERSS

Έστω X_{erssj} και X_{derssj} είναι τα ακραία καταταγμένα σύνολα μεγέθους n της υποομάδας στον $j - o\sigma\tau\acute{o}$ κύκλο που βασίζεται στην $ERSS$ και την $DERSS$ αντίστοιχα. Τότε η εκτίμηση της τυπικής απόκλισης του πληθυσμού (Abujiya et al. (2015a,b)) μπορεί να εκφραστεί από τη σχέση

$$S_{erssj} = \sqrt{\frac{1}{n - 1 + \upsilon_{erss}} \sum_{i=1}^{n} \left[X_{erssj} - \bar{X}_{erssj}\right]^2} \tag{4.32}$$

Όπου $\bar{X}_{erssj} = (1/n)\sum_{i=1}^{n} X_{erssj}$ και υ_{erss} είναι όρος σφάλματος παρόμοιος με την υ_{rss} της ενότητας RSS. Τα τυποποιημένα δύο μονόπλευρα $CUSUM$ της τυπικής απόκλισης S για την παρακολούθηση της μεταβλητότητας της διεργασίας που βασίζεται στην $ERSS$ είναι:

$$\begin{aligned} C_{erssj}^{+} &= max\left[0, C_{erssj-1}^{+} + \left(S_{erssj}/\sigma_0\right) - k_{erss}\right] \\ C_{erssj}^{-} &= max\left[0, C_{erssj-1}^{-} - \left(S_{erssj}/\sigma_0\right) + k_{erss}\right] \end{aligned} \tag{4.33}$$

Όπου $k_{erss} = c_4^{*erss}(1+\tau)/2$, με $c_4^{*erss} = (1/\sigma_0)E(S_{erss})$ και $\tau = \sigma_1/\sigma_0$ είναι η ποσότητα της μετατόπισης στην τυπική απόκλιση της διεργασίας. Για μηδενικό *headstart*, θέτουμε $C_{erssj0}^{+} = C_{erssj0}^{-} = 0$. Τότε το άνω ή το κάτω $CS - CUSUM\ S$ διάγραμμα που βασίζεται στην $ERSS$, δίνει ένα εκτός ελέγχου σήμα όταν είτε

$$C_{erssj}^{+} > h_u \text{ ή } C_{erssj}^{-} > h_l \qquad \text{ή} \qquad UCL < \left(S_{erssj}/\sigma_0\right) < LCL \tag{4.34}$$

Για την πρώτη χρονική στιγμή με j να συμβολίζει το RL της κατανομής. Αν RL_{SH} και RL_{CU} αντιπροσωπεύουν τις μηδενικές καταστάσεις της $\left(S_{erssj}/\sigma_0\right)$ και $C_{erssj}^{+}/C_{erssj}^{-}$, αντίστοιχα, τότε το RL του $CS - CUSUM\ S$ διαγράμματος ως εξής

$$RL_{SC} = min(RL_{SH}, RL_{CU}) \tag{4.35}$$

Όπου $RL_{SH} = inf\{j: UCL < \left(S_{derssj}/\sigma_0\right) < LCL\}$ και $RL_{CU} = inf\{j: \left(C_{erssj}^{+} \text{ ή } C_{erssj}^{-}\right) > h\ \}$. Επιπλέον, $E(RL_{SC}) = ARL_0$ και $\sqrt{E(RL_{SC}^2) - E(RL_{SC})} = SARL_0$, όπου $E(RL_{SC})$ είναι η αναμενόμενη τιμή της RL_{SC} στην μηδενική κατάσταση, δηλαδή, καμία μετατόπιση στην τυπική απόκλιση

4.9.2 CS - CUSUM S DERSS

Η εκτίμηση της τυπικής απόκλισης του πληθυσμού (Abujiya et al. (2015a,b)) που βασίζεται στην $DERSS$ μπορεί να εκφραστεί από τη σχέση

$$S_{derssj} = \sqrt{\frac{1}{n-1+\upsilon_{derss}}\sum_{i=1}^{n}\left[X_{derssj} - \bar{X}_{derssj}\right]^2} \tag{4.36}$$

Όπου $\bar{X}_{derssj} = (1/n)\sum_{i=1}^{n} X_{derssj}$ και υ_{derss} είναι όρος σφάλματος παρόμοιος με την υ_{rss} της ενότητας RSS. Τα τυποποιημένα δύο μονόπλευρα $CUSUM$ της τυπικής απόκλισης S για την παρακολούθηση της μεταβλητότητας της διεργασίας που βασίζεται στην $ERSS$ είναι:

$$\begin{aligned} C_{derssj}^{+} &= max\left[0, C_{derssj-1}^{+} + \left(S_{derssj}/\sigma_0\right) - k_{derss}\right] \\ C_{derssj}^{-} &= max\left[0, C_{derssj-1}^{-} - \left(S_{derssj}/\sigma_0\right) + k_{derss}\right] \end{aligned} \tag{4.37}$$

Όπου $k_{derss} = c_4^{*derss}(1+\tau)/2$, με $c_4^{*derss} = (1/\sigma_0)E(S_{derss})$ και $\tau = \sigma_1/\sigma_0$ είναι η ποσότητα της μετατόπισης στην τυπική απόκλιση της διεργασίας. Για μηδενικό *headstart*, θέτουμε $C_{derssj0}^{+} = C_{derssj0}^{-} = 0$. Τότε το άνω ή το κάτω $CS - CUSUM\ S$ διάγραμμα που βασίζεται στην $DERSS$, δίνει ένα εκτός ελέγχου σήμα όταν είτε

$$C_{derssj}^{+} > h_u \text{ ή } C_{derssj}^{-} > h_l \qquad \text{ή} \qquad UCL < \left(S_{derssj}/\sigma_0\right) < LCL \tag{4.38}$$

Παρόμοια με το CS-CUSUM S που βασίζεται στην $ERSS$ ορίζεται το RL της κατανομής. Δηλαδή έχουμε:

$$RL_{SC} = min(RL_{SH}, RL_{CU}) \quad (4.39)$$

Όπου $RL_{SH} = \inf\{j: UCL < \left(S_{derssj}/\sigma_0\right) < LCL\}$ και $RL_{CU} = \inf\{j: \left(C^{+}_{derssj} \text{ ή } C^{-}_{derssj}\right) > h\ \}$.

Επιπλέον, $E(RL_{SC}) = ARL_0$ και $\sqrt{E(RL^2_{SC}) - E(RL_{SC})} = SARL_0$, όπου $E(RL_{SC})$ είναι η αναμενόμενη τιμή της RL_{SC} στην μηδενική κατάσταση, δηλαδή, καμία μετατόπιση στην τυπική απόκλιση.

4.9.3 Αξιολόγηση απόδοσης του CS-CUSUM S υπό τις ERSS και DERSS

Για την αξιολόγηση της απόδοσης του $CS - CUSUM\ S$ χρησιμοποιώντας τις $ERSS$ και $DERSS$, θεωρήθηκε $ARL_0 = 200$ ή 370 με υποομάδες μεγέθους $n = 5$. Επίσης έχει υποτεθεί ότι οι παρατηρήσεις αξολουθούν $N(0,1)$. Η τιμή αναφοράς k τέθηκε έτσι ώστε το διάγραμμα να ανιχνεύει το 20%, 30%, 40% και 50% των αυξήσεων και μειώσεων στην τυπική απόκλιση της διεργασίας. Τα όρια ελέγχου προσαρμόστηκαν έτσι ώστε να λαμβάνεται το επιθυμητό ARL_0 που ελαχιστοποιεί τα ARL_1 και $AEQL$ σε ολόκληρη την κυρίαρχη μετατόπιση της διεργασίας. Οι Πίνακες 4.9.1-4.9.4 παρουσιάζουν την ARL, $SDRL$ και $AEQL$ απόδοση των $CS - CUSUM\ S$ χρησιμοποιώντας τις $ERSS$ και $DERSS$ για την ανίχνευση αυξήσεων και μειώσεων στην διασπορά της διεργασίας. Με βάση τους Πίνακες 4.9.1-4.9.4 παρατηρούμε ότι:

i. Τα εκτός ελέγχου ARL και $SDRL$ μειώνουν ταχύτατα καθώς η αλλαγή στην τυπική απόκλιση της διεργασίας αυξάνει ($\tau > 1$) ή μειώνει ($\tau < 1$). Η τιμή αναφοράς k είναι αντιστρόφως ανάλογή του h_u και απευθείας ανάλογη του h_l για μια καθορισμένη τιμή των UCL και LCL αντίστοιχα.
ii. Παρόμοια με τους συνδυασμένους Σχεδιασμούς, η προσθήκη του *Shewhart* χαρακτηριστικού έχει σημαντικά βελτιώσει την ευαισθησία των $CS - CUSUM\ S\ ERSS$ και $CS - CUSUM\ S\ DERSS$ στην ανίχνευση ενός εύρους ευρών ανοδικών και καθοδικών μετατοπίσεων στην τυπική απόκλιση της διεργασίας.
iii. Στην παρακολούθηση μειώσεων στην τυπική απόκλιση, η βελτίωση του κέρδους υπό όρους των εκτός ελέγχου ARL και $SDRL$ αποδόσεων είναι υψηλότερη από εκείνες στην ανίχνευση αυξήσεων στην μεταβλητότητα της διεργασίας, ιδιαίτερα όταν η μετατόπιση είναι μεγαλύτερη του 20%. (Πίνακες 4.9.1-4.9.4)
iv. Οι εκτός ελέγχου ARL και $SDRL$ τιμές υποδηλώνουν ότι οι σχεδιασμοί είναι ιδιαίτερα αποτελεσματικότεροι στην παρακολούθηση μικρών αλλαγών στην διεργασία όταν το k είναι μικρό. Μεγαλύτερες τιμές του k υποδεικνύουν αποτελεσματική παρακολούθηση μέτριων και μεγάλων μετατοπίσεων στην μεταβλητότητα της διεργασίας.

   Στην συνολική απόδοση των Σχεδιασμών στην ανίχνευση αυξήσεων στην διασπορά της διεργασίας, το $AEQL$ υποδεικνύει ένα σημαντικό κέρδος στην ευαισθησία του $CS - CUSUM\ S\ ERSS$ ένα στο 40% και του $CS - CUSUM\ S\ DERSS$ στο 30%. Για μειώσεις, ουσιαστικό κέρδος επιτυγχάνεται από τα $CS - CUSUM\ S\ ERSS$ και $CS - CUSUM\ S\ DERSS$ όταν παρακολουθείται το 30% και 20%, αντίστοιχα (Πίνακας 4.9.1-4.9.4).

v. Επιπρόσθετα με την διατήρηση του πλεονεκτήματος του $CUSUM$ στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων και του *Shewhart* για την γρήγορη ανίχνευση πολύ μεγάλων μετατοπίσεων. Το $CS-CUSUM\ S\ ERSS$ φαίνεται να είναι πιο ευαίσθητο στις μετατοπίσεις από την τυπική απόκλιση στόχο από το αντίστοιχο $CS-CUSUM\ DERSS$ (Πίνακες 4.9.1-4.9.4).

Πίνακας 4.9.1 RL ιδιότητες για το CS-CUSUM S ERSS όταν $n = 5$ και $ARL_0 = 200$[15]

k	h_u	RL	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0	AEQL
Increase	($UCL = 1.700$)													
1.066	1.303	$ARL_{1.2}$	200.06	29.51	11.07	6.31	4.33	3.23	2.56	2.12	1.83	1.61	1.46	0.797
		$SDRL_{1.2}$	195.50	25.20	7.82	4.07	2.74	2.04	1.61	1.31	1.09	0.92	0.77	
1.114	0.953	$ARL_{1.3}$	200.19	32.43	11.26	6.09	4.10	3.07	2.44	2.05	1.77	1.58	1.44	0.776
		$SDRL_{1.3}$	197.16	29.79	8.90	4.27	2.68	1.94	1.50	1.22	1.01	0.85	0.73	
1.163	0.733	$ARL_{1.4}$	200.20	35.35	11.90	6.18	4.04	2.98	2.37	1.99	1.73	1.56	1.42	0.769
		$SDRL_{1.4}$	198.31	33.51	10.17	4.67	2.80	1.93	1.47	1.17	0.96	0.81	0.70	
1.211	0.578	$ARL_{1.5}$	200.05	37.67	12.67	6.38	4.06	2.96	2.34	1.97	1.72	1.54	1.42	0.771
		$SDRL_{1.5}$	198.14	36.30	11.33	5.11	2.95	2.00	1.46	1.16	0.95	0.80	0.68	
k	h_l	RL	1.0	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.0	AEQL
Decrease	($LCL = 0.330$)													
0.872	1.113	$ARL_{0.8}$	200.10	35.39	11.48	6.31	4.27	3.12	2.24	1.37	1.01	1.00	1.00	0.628
		$SDRL_{0.8}$	195.13	28.86	6.00	2.31	1.30	1.00	0.90	0.63	0.07	0.00	0.00	
0.824	0.782	$ARL_{0.7}$	200.47	46.10	12.75	5.98	3.78	2.72	1.94	1.29	1.01	1.00	1.00	0.608
		$SDRL_{0.7}$	197.35	42.09	8.67	2.72	1.28	0.85	0.73	0.46	0.07	0.00	0.00	
0.775	0.575	$ARL_{0.6}$	200.35	58.47	16.08	6.30	3.59	2.45	1.79	1.29	1.01	1.00	1.00	0.621
		$SDRL_{0.6}$	197.68	56.03	13.12	3.59	1.44	0.81	0.57	0.46	0.07	0.00	0.00	
0.727	0.430	$ARL_{0.5}$	200.32	68.97	20.81	7.30	3.64	2.36	1.75	1.29	1.01	1.00	1.00	0.657
		$SDRL_{0.5}$	198.36	67.18	18.59	5.04	1.74	0.81	0.52	0.45	0.07	0.00	0.00	

Πίνακας 4.9.2 RL ιδιότητες για το CS-CUSUM S DERSS όταν $n = 5$ και $ARL_0 = 200$[16]

k	h_u	RL	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0	AEQL
Increase	($UCL = 1.525$)													
1.082	0.733	$ARL_{1.2}$	200.42	20.97	7.17	4.03	2.76	2.08	1.68	1.43	1.28	1.18	1.11	0.545
		$SDRL_{1.2}$	198.02	17.98	4.78	2.42	1.60	1.17	0.89	0.70	0.55	0.43	0.35	
1.132	0.508	$ARL_{1.3}$	200.25	24.55	7.48	3.91	2.63	1.99	1.62	1.40	1.26	1.17	1.11	0.539
		$SDRL_{1.3}$	199.40	22.69	5.76	2.57	1.57	1.09	0.82	0.65	0.51	0.41	0.33	
1.181	0.365	$ARL_{1.4}$	200.18	27.58	8.12	4.01	2.60	1.96	1.60	1.39	1.26	1.17	1.11	0.543
		$SDRL_{1.4}$	198.56	26.26	6.83	2.87	1.62	1.10	0.81	0.62	0.50	0.40	0.33	
1.230	0.279	$ARL_{1.5}$	200.12	31.11	9.11	4.27	2.66	1.97	1.59	1.38	1.24	1.16	1.10	0.551
		$SDRL_{1.5}$	199.72	30.27	8.17	3.32	1.79	1.17	0.83	0.64	0.50	0.40	0.32	
k	h_l	RL	1.0	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.0	AEQL
Decrease	($LCL = 0.515$)													
0.886	0.591	$ARL_{0.8}$	200.79	21.95	6.43	3.47	2.24	1.44	1.05	1.00	1.00	1.00	1.00	0.432
		$SDRL_{0.8}$	196.79	17.96	3.28	1.36	0.90	0.59	0.22	0.02	0.00	0.00	0.00	
0.836	0.381	$ARL_{0.7}$	200.13	29.74	6.97	3.21	2.00	1.40	1.05	1.00	1.00	1.00	1.00	0.435
		$SDRL_{0.7}$	198.53	27.55	4.67	1.48	0.75	0.51	0.22	0.01	0.00	0.00	0.00	
0.787	0.259	$ARL_{0.6}$	200.26	38.68	8.75	3.31	1.91	1.34	1.04	1.00	1.00	1.00	1.00	0.449
		$SDRL_{0.6}$	199.66	37.22	7.05	1.84	0.77	0.49	0.19	0.01	0.00	0.00	0.00	
0.738	0.189	$ARL_{0.5}$	200.40	50.28	11.92	3.84	1.92	1.26	1.02	1.00	1.00	1.00	1.00	0.476
		$SDRL_{0.5}$	200.55	49.14	10.75	2.64	0.94	0.46	0.15	0.00	0.00	0.00	0.00	

Πίνακας 4.9.3 RL ιδιότητες για το CS-CUSUM S ERSS όταν $n = 5$ και $ARL_0 = 370$[17]

k	h_u	RL	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0	AEQL
Increase	($UCL = 1.750$)													
1.066	1.580	$ARL_{1.2}$	370.36	40.24	13.54	7.53	5.05	3.70	2.89	2.35	1.98	1.73	1.55	0.899
		$SDRL_{1.2}$	365.74	34.03	9.21	4.68	3.11	2.33	1.85	1.49	1.24	1.02	0.87	
1.114	1.144	$ARL_{1.3}$	370.01	46.11	13.89	7.24	4.74	3.48	2.74	2.26	1.93	1.70	1.53	0.877
		$SDRL_{1.3}$	367.56	42.36	10.82	4.93	3.03	2.18	1.69	1.37	1.14	0.96	0.81	
1.163	0.882	$ARL_{1.4}$	370.20	52.28	15.09	7.36	4.65	3.38	2.64	2.18	1.87	1.66	1.51	0.869
		$SDRL_{1.4}$	368.16	49.63	12.91	5.47	3.18	2.18	1.64	1.31	1.08	0.91	0.78	
1.211	0.706	$ARL_{1.5}$	370.95	57.32	16.64	7.72	4.69	3.34	2.60	2.15	1.85	1.64	1.49	0.877
		$SDRL_{1.5}$	368.05	55.31	14.99	6.23	3.41	2.26	1.65	1.29	1.06	0.88	0.75	
k	h_l	RL	1.0	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.0	AEQL
Decrease	($LCL = 0.295$)													
0.872	1.305	$ARL_{0.8}$	370.15	46.95	13.53	7.33	4.98	3.69	2.68	1.67	1.03	1.00	1.00	0.714
		$SDRL_{0.8}$	365.90	38.20	6.68	2.46	1.34	1.01	0.97	0.80	0.17	0.00	0.00	
0.824	0.910	$ARL_{0.7}$	370.49	66.33	15.20	6.89	4.33	3.14	2.37	1.53	1.03	1.00	1.00	0.694
		$SDRL_{0.7}$	367.61	61.38	9.98	2.93	1.35	0.84	0.78	0.61	0.16	0.00	0.00	
0.775	0.671	$ARL_{0.6}$	370.30	90.89	20.29	7.33	4.09	2.82	2.05	1.47	1.03	1.00	1.00	0.716
		$SDRL_{0.6}$	368.27	87.54	16.52	4.00	1.53	0.85	0.64	0.51	0.16	0.00	0.00	
0.727	0.510	$ARL_{0.5}$	370.13	113.95	28.51	8.77	4.19	2.67	1.94	1.46	1.03	1.00	1.00	0.779
		$SDRL_{0.5}$	368.48	112.03	25.67	6.01	1.91	0.89	0.54	0.50	0.16	0.00	0.00	

[15] Abujiya et al. (2015a)
[16] Abujiya et al. (2015a)
[17] Abujiya et al. (2015a)

Πίνακας 4.9.4 RL ιδιότητες για το CS-CUSUM S DERSS όταν $n = 5$ και $ARL_0 = 370$[18]

k	h_u	RL	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0	AEQL
Increase	($UCL = 1.565$)													
1.082	0.873	$ARL_{1.2}$	370.45	27.71	8.51	4.67	3.14	2.32	1.84	1.54	1.35	1.22	1.14	0.596
		$SDRL_{1.2}$	367.13	23.73	5.49	2.69	1.79	1.32	1.02	0.80	0.63	0.49	0.39	
1.132	0.608	$ARL_{1.3}$	370.89	34.39	9.04	4.52	2.97	2.20	1.76	1.50	1.32	1.21	1.14	0.590
		$SDRL_{1.3}$	368.25	32.33	6.85	2.90	1.75	1.22	0.93	0.73	0.57	0.46	0.37	
1.181	0.449	$ARL_{1.4}$	370.18	40.48	10.16	4.68	2.93	2.16	1.73	1.48	1.32	1.21	1.13	0.597
		$SDRL_{1.4}$	368.78	39.23	8.59	3.37	1.84	1.22	0.91	0.70	0.56	0.45	0.36	
1.230	0.332	$ARL_{1.5}$	370.58	45.24	11.43	4.96	2.99	2.16	1.73	1.47	1.31	1.20	1.13	0.609
		$SDRL_{1.5}$	369.07	44.14	10.19	3.84	2.01	1.27	0.91	0.70	0.55	0.44	0.36	
k	h_l	RL	1.0	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.0	AEQL
Decrease	($LCL = 0.490$)													
0.886	0.689	$ARL_{0.8}$	370.15	27.80	7.45	3.98	2.60	1.65	1.10	1.00	1.00	1.00	1.00	0.460
		$SDRL_{0.8}$	370.11	22.50	3.58	1.43	0.96	0.75	0.30	0.03	0.00	0.00	0.00	
0.836	0.447	$ARL_{0.7}$	370.16	41.46	8.21	3.65	2.25	1.53	1.10	1.00	1.00	1.00	1.00	0.465
		$SDRL_{0.7}$	370.06	38.50	5.39	1.58	0.83	0.56	0.30	0.02	0.00	0.00	0.00	
0.787	0.302	$ARL_{0.6}$	370.28	56.77	10.54	3.74	2.15	1.51	1.09	1.00	1.00	1.00	1.00	0.488
		$SDRL_{0.6}$	369.14	55.13	8.50	2.01	0.80	0.53	0.29	0.02	0.00	0.00	0.00	
0.738	0.222	$ARL_{0.5}$	370.25	79.04	15.67	4.47	2.16	1.40	1.05	1.00	1.00	1.00	1.00	0.533
		$SDRL_{0.5}$	370.52	77.80	14.09	3.05	1.00	0.53	0.22	0.01	0.00	0.00	0.00	

4.10 Σύγκριση απόδοσης των Διαγραμμάτων Ελέγχου

Στην συνέχεια συγκρίνεται η απόδοση των διαγραμμάτων *Shewhart* R, *Shewhart* S, $CUSUM\ R$, $CUSUM\ S$, $CP\ CUSUM$, $CS-CUSUM\ R$, $CS-CUSUM\ S$, $CS-CUSUM\ R\ ERSS$, $CS-CUSUM\ R\ DERSS$, $CS-CUSUM\ S\ ERSS$ και $CS-CUSUM\ S\ DERSS$. Για όλους τους παραπάνω Σχεδιασμούς χρησιμοποιείται $ARL_0 = 500$ και υποτίθεται ότι η υποκείμενη κατανομή είναι κανονική με σταθερό μέσο της διεργασίας. Όλα τα διαγράμματα σχεδιάστηκαν ώστε να μπορούν να ανιχνεύσουν το 20% των αυξήσεων και μειώσεων στην τυπική απόκλιση της διεργασίας. Ως μέτρα απόδοσης χρησιμοποιήθηκαν το ARL, το $AEQL$, το $ARARL$ και το PCI .

i. Σύγκριση με το Shewhart R διάγραμμα

Το *Shewhart* R διάγραμμα με τα τυπικά 3σ όρια είναι πιθανώς το πιο ευρέως χρησιμοποιούμενο διάγραμμα ελέγχου για την παρακολούθηση της διασποράς της διεργασίας. Ο σχεδιασμός είναι αποτελεσματικός στην ανίχνευση μεγάλων μετατοπίσεων, αλλά δεν είναι ευαίσθητός στις μικρές μετατοπίσεις. Η σύγκρισή του με τα $CS-CUSUM\ R\ ERSS$ και $CS-CUSUM\ R\ DERSS$ υποδεικνύει ότι αυτό το διάγραμμα έχει ένα πλεονέκτημα σε σχέση με το κλασσικό $CS-CUSUM\ R$ διάγραμμα στην ανίχνευση αυξήσεων στην τυπική απόκλιση όταν $\tau > 1.9$ (βλέπε Πίνακα 4.10.1) και μειώσεων όταν $\tau > 0.7$ (βλέπε Πίνακα 4.10.2), αλλά έχει μεγαλύτερες εκτός ελέγχου τιμές από τα $CS-CUSUM\ R\ ERSS$ και $CS-CUSUM\ R\ DERSS$. Επιπλέον, η συνολική απόδοση υπό τους όρους των $AEQL$, PCI, και $ARARL$ αποκαλύπτει ότι το *Shewhart* R διάγραμμα είναι σημαντικά λιγότερο αποτελεσματικό από όλα τα $CS-CUSUM\ R\ ERSS$ και $CS-CUSUM\ R\ DERSS$. Στην πραγματικότητα, είναι ο χαμηλότερος σχεδιασμός απόδοσης στην ανίχνευση αμφοτέρων μειώσεων και αυξήσεων στην μεταβλητότητα.

ii. Σύγκριση με το Shewhart S διάγραμμα

Η ανάπτυξη της τεχνολογίας των υπολογιστών έχει καταστήσει το *Shewhart* S διάγραμμα ένα από τα πιο δημοφιλή διαγράμματα μεταξύ των επαγγελματιών της ποιότητας για την

[18] Abujiya et al. (2015a)

παρακολούθηση της διασποράς της διεργασίας. Το διάγραμμα είναι πολύ αποτελεσματικό στην ανίχνευση μεγάλων μετατοπίσεων αλλά δεν είναι καλό με τις μικροσκοπικές μετατοπίσεις. Η σύγκριση του με τα $CUSM\ S^2$, $CS-CUSUM\ R$, $CUSUM\ S$ και $CP\ CUSUM$ υποδεικνύει μια υπεροχή έναντι του κλασσικού $CS-CUSUM\ S$ διαγράμματος σε μια πολύ μικρή περιοχή, ιδιαίτερα, όταν $\tau > 1.9$ (βλέπε Πίνακα 4.10.1) και $\tau > 0.7$(βλέπε Πίνακα 4.10.2). Ωστόσο, τα $CS-CUSUM\ S\ ERSS$ και $CS-CUSUM\ S\ DERSS$ έχουν μικρότερες εκτός ελέγχου ARL τιμές από το *Shewhart* S διάγραμμα. Επιπλέον, η ολική απόδοση υπό τα μέτρα $AEQL$, $ARARL$ και PCI αποκαλύπτουν ότι το *Shewhart* S διάγραμμά είναι ουσιαστικά λιγότερο αποτελεσματικό από τα $CS-CUSUM\ S\ ERSS$ και $CS-CUSUM\ S\ DERSS$.

iii. Σύγκριση με το $CUSUM\ R$ διάγραμμα

Ο Page (1963) εισήγαγε το κλασσικό $CUSUM\ R$ διάγραμμα για την παρακολούθηση αλλαγών στην μεταβλητότητα της διεργασίας. Το διάγραμμα υπερτερεί του παραδοσιακού *Shewhart* R διαγράμματος στην ανίχνευση αυξήσεων και μειώσεων στην τυπική απόκλιση (Page (1963), Acosta-Mejia et al.(1999)) και μπορεί να δώσει τη θέση και το ποσότητα της μετατόπισης από σ_1 στην τιμή στόχο σ_0. Οι ARL αποδόσεις του $CUSUM\ R$ διαγράμματος παρουσιάζονται στη 5η στήλη των Πινάκων 4.10.1 και 4.10.2. Η σύγκριση δείχνει ότι τα $CS-CUSUM\ R\ ERSS$ και $CS-CUSUM\ R\ DERSS$ έχουν μικρότερες ARL τιμές από ότι το $CUSUM\ R$ διάγραμμα, εκτός από το κλασσικό διάγραμμα $CS-CUSUM\ R$ όταν $1 < \tau < 1.4$ (αυξήσεις) και $1 < \tau < 0.7$ (μειώσεις). Ακόμη και έτσι, το κλασικό $CS-CUSUM\ R$ διάγραμμα έχει καλύτερη συνολική απόδοση. Για παράδειγμα, η $AEQL$ δείχνει ότι ο κλασσικός συνδυασμένος σχεδιασμός είναι πιο αποτελεσματικός από το $CUSUM\ R$ διάγραμμα στην ανίχνευση αυξήσεων και μειώσεων στην τυπική απόκλιση κατά 11.7% (βλέπε Πίνακα 4.10.1) και 23,3% (βλέπε Πίνακα 4.10.2), αντίστοιχα.

iv. Σύγκριση με το $CUSUM\ S$ διάγραμμα

Το κλασσικό $CUSUM\ S$ μελετήθηκε από τους Tuprah and Ncube (1987) δεν υπερτερεί μόνο του παραδοσιακού *Shewhart* S διαγράμματος στην ανίχνευση αυξήσεων και μειώσεων στην μεταβλητότητα της διεργασίας αλλά επίσης παρέχει πληροφορία σχετικά με την ποσότητα της μετατόπισης από σ_1 στην τιμή στόχο σ_0 . Οι RL αποδόσεις του $CUSUM\ S$ διαγράμματος παρουσιάζονται στη 6η στήλη των Πινάκων 4.10.1 και 4.10.2, αντίστοιχα. Η σύγκριση δείχνει ότι τα $CS-CUSUM\ S\ ERSS$ και $CS-CUSUM\ S\ DERSS$ έχουν μικρότερες ARL τιμές από ότι το $CUSUM\ S$ διάγραμμα, εκτός από μία μικρή περιοχή $\{\tau \in (1,1.4)\ \text{και}\ \tau \in (0.7,1.0)\}$ για το κλασσικό διάγραμμα $CS-CUSUM\ S$. Σχετικά με την συνολική απόδοση, υπό τους όρους του $AEQL$ και του PCI, το τελευταίο υπερτερεί του πρώτου στην ανίχνευση αυξήσεων και μειώσεων στη διασπορά της διεργασίας κατά 14% και 22% αντίστοιχα. Αμφότερα τα $CS-CUSUM\ S\ ERSS$ και $CS-CUSUM\ S\ DERSS$ κυριαρχούν του *Shewhart* S διαγράμματος (βλέπε Πίνακες 4.10.1 και 4.10.2).

Πίνακας 4.10.1 ARL σύγκριση μεταξύ διαγραμμάτων ελέγχου διασποράς για την παρακολούθηση αυξήσεων στο σ όταν $n = 5$ στο $ARL_0 = 500$

τ		Shewhart R	Shewhart S	CUSUM R	CUSUM S	CUSUM S^2	CP CUSUM	CS-CUSUM R	CS-CUSUM R ERSS	CS-CUSUM R DERSS	CS -CUSUM S	CS-CUSUM S ERSS	CS-CUSUM S DERSS
	UCL	5.232	2.057					5.500	6.000	6.400	2.175	1.785	1.585
	K			2.559	1.034	1.193	1.193	2.559	3.399	4.113	1.034	1.066	1.082
	h			6.363	2.460	5.763	23.99	7.207	5.386	4.003	2.720	1.640	0.935
1.0		499.55	500.14	500.20	500.16	500.29	500.38	500.09	500.15	500.13	500.24	500.09	500.14
1.1		144.39	136.32	61.47	58.95	66.71	51.43	66.71	46.32	34.91	63.17	44.54	30.99
1.2		56.76	51.87	23.54	22.52	24.76	18.44	24.76	15.49	10.41	23.31	14.60	9.12
1.3		27.89	24.84	13.95	13.33	12.52	10.64	14.25	8.70	5.81	13.41	8.03	4.96
1.4		15.92	14.06	9.89	9.47	8.70	7.35	9.80	5.92	3.91	9.17	5.40	3.32
1.5		10.15	8.99	7.67	7.39	6.64	5.62	7.31	4.41	2.91	6.88	3.94	2.46
1.6		7.11	6.34	6.31	6.05	5.32	4.53	5.78	3.47	2.31	5.43	3.05	1.93
1.7		5.32	4.74	5.40	5.16	4.42	3.82	4.70	2.83	1.90	4.43	2.48	1.60
1.8		4.18	3.76	4.71	4.54	3.84	3.27	3.98	2.39	1.63	3.73	2.09	1.38
1.9		3.42	3.13	4.20	4.03	3.38	2.90	3.39	2.06	1.42	3.19	1.81	1.25
2.0		2.90	2.66	3.80	3.66	3.01	2.60	2.99	1.82	1.30	2.80	1.61	1.16
AEQL		2.338	2.105	1.954	1.876	1.642	1.403	1.750	1.066	0.724	1.646	0.953	0.622
PCI		3.227	3.384	2.698	3.016	2.267	1.937	2.416	1.471	1.000	2.646	1.532	1.000
ARARL		3.443	3.611	2.498	2.788	2.146	1.841	2.322	1.445	1.000	2.541	1.518	1.000

Πίνακας 4.10.2 ARL σύγκριση μεταξύ διαγραμμάτων ελέγχου διασποράς για την παρακολούθηση μειώσεων στο σ όταν $n = 5$ στο $ARL_0 = 500$

τ		Shewhart R	Shewhart S	CUSUM R	CUSUM S	CUSUM S^2	CP CUSUM	CS-CUSUM R	CS-CUSUM R ERSS	CS-CUSUM R DERSS	CS -CUSUM S	CS-CUSUM S ERSS	CS-CUSUM S DERSS
	LCL	0.439	0.180					0.325	0.900	1.800	0.135	0.280	0.480
	k			2.093	0.846	0.793	0.793	2.093	2.781	3.365	0.846	0.872	0.886
	h			5.576	2.183	3.569	14.75	6.025	4.704	2.215	2.371	1.402	0.741
1.0		499.66	500.04	500.22	500.51	500.11	500.21	500.25	500.38	500.19	500.64	500.02	500.32
0.1		328.72	331.89	70.04	68.12	67.16	58.82	76.65	54.20	34.11	75.23	53.32	31.53
0.2		208.22	209.57	22.72	22.10	21.54	18.21	24.29	15.07	8.90	23.74	14.54	7.99
0.3		125.86	125.38	12.61	12.24	12.28	10.31	13.44	8.18	4.71	13.11	7.85	4.27
0.4		70.10	70.21	8.66	8.41	8.82	7.40	9.19	5.55	2.98	8.94	5.33	2.77
0.5		35.75	35.24	6.60	6.40	7.12	5.97	6.93	4.12	1.88	6.75	3.98	1.78
0.6		15.84	15.88	5.34	5.18	6.18	5.16	5.50	3.03	1.17	5.36	2.95	1.12
0.7		6.18	6.17	4.50	4.35	5.61	4.90	4.40	1.82	1.00	4.28	1.84	1.00
0.8		2.12	2.08	4.00	3.97	5.01	4.11	2.93	1.05	1.00	2.83	1.05	1.00
0.9		1.02	1.01	3.47	3.11	5.00	4.00	1.17	1.00	1.00	1.14	1.00	1.00
0.0		1.00	1.00	3.00	3.00	5.00	4.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
AEQL		5.451	5.442	1.678	1.617	2.056	1.705	1.361	0.776	0.493	1.326	0.761	0.475
PCI		11.056	11.450	3.403	3.403	4.325	3.588	2.863	1.575	1.000	2.790	1.602	1.000
ARARL		12.614	13.563	3.222	3.246	3.899	3.268	3.021	1.653	1.000	2.946	1.701	1.000

v. Σύγκριση με το $CS - CUSUM\ R$ διάγραμμα

Το κλασσικό $CS - CUSUM\ R$ διάγραμμα παρέχει μια ισορροπία μεταξύ του *Shewhart* R διαγράμματος και του $CUSUM\ R$ διαγράμματος υπό την έννοια ότι καθοδηγεί ενάντια σε όλους τους τύπους μετατοπίσεων σε μια διεργασία. Το $CS - CUSUM\ R$ μπορεί να ανιχνεύσει αλλαγές σε μία διεργασία που είναι αρκετά μικρές για να διαφύγουν την ανίχνευση από το *Shewhart* R διάγραμμα και αρκετά μεγάλες για να διαφύγουν το $CUSUM\ R$ διάγραμμα. Στην βάση των ARL τιμών αυτού του σχεδιασμού στη 9η στήλη των Πινάκων 4.10.1 και 4.10.2, είναι λιγότερο αποδοτικός από τα $CS - CUSUM\ R\ ERSS$ και $CS - CUSUM\ R\ DERSS$ διαγράμματα. Με άλλα λόγια, τα $CS - CUSUM\ R\ ERSS$ και $CS - CUSUM\ R\ DERSS$ διαγράμματα έχουν μικρότερες ARL τιμές από το κλασσικό $CS - CUSUM\ R$ διάγραμμα. Επιπλέον, τα $AEQL$ και PCI αποκαλύπτουν ότι το $CS - CUSUM\ R\ DERSS$ διάγραμμα είναι πιο αποτελεσματικό από το $CS - CUSUM\ R\ \ ERSS$ κατά 47.1% και 57.5% για την ανίχνευση αυξήσεων και μειώσεων στις τυπικές αποκλίσεις, αντίστοιχα. Ενώ από την άλλη πλευρά, το $CS - CUSUM\ R\ ERSS$ διάγραμμα είναι πιο ευαίσθητο από την κλασσική περίπτωση κατά 64.2% και 75.3% για αυξήσεις και μειώσεις, αντίστοιχα.

vi. Σύγκριση με το $CUSUM\ S^2$ διάγραμμα

Οι Chang and Gan (1995) δείχνουν τα $CUSUM$ διαγράμματα που βασίζονται στην S^2 έχει καλύτερη απόδοση από τα $CUSUM$ διαγράμματα που βασίζονται στην $ln(S^2)$. Οι ARL τιμές

των $CUSUM\ S^2$ διαγραμμάτων παρουσιάζεται στην 7η στήλη των Πινάκων 4.10.1 και 4.10.2, αντίστοιχα. Με βάση τη θέση του στους Πίνακες, το CUSUM S^2 διάγραμμα είναι πιο αποτελεσματικό από τα Shewhart R, *Shewhart* $S, CUSUM\ R$, και $CS-CUSUM\ R$ στην ανίχνευση αυξήσεων στη διασπορά της διεργασίας αλλά λιγότερο ευαίσθητό από τα $CUSUM\ R$ και το $CUSUM\ S$ διαγράμματα για την ανίχνευση μειώσεων στην μεταβλητότητα. Δεν υπάρχει σημαντική διαφορά μεταξύ του $CUSUM\ S^2$ και των κλασσικών $CS-CUSUM\ R$ και $CS-CUSUM\ S$ διαγραμμάτων στην παρακολούθηση αυξήσεων στην διασπορά της διεργασίας. Ωστόσο, ότι το τελευταίο είναι ισχυρότερο στην παρακολούθηση αυξήσεων στην μεταβλητότητα της διεργασίας περισσότερο από 55% υπό όρους του $AEQL$. Επίσης από τα αποτελέσματα παρατηρούμε ότι το $CUSUM\ S^2$ έχει μεγαλύτερες ARL τιμές από τα $CS-CUSUM\ R\ ERSS$ και $CS-CUSUM\ R\ DERSS$ διαγράμματα. Το σημείο αυτό υποστηρίζεται από τις $AEQL, PCI$, και $ARARL$ τιμές. Τέλος, τα $CS-CUSUM\ S\ ERSS$ και $CS-CUSUM\ S\ DERSS$ είναι ομοιόμορφα καλύτερα από το $CUSUM\ S^2$ διάγραμμα.

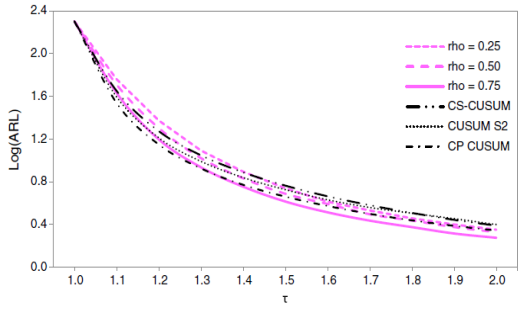
vii. Σύγκριση με το $CP-CUSUM$ διάγραμμα

Το $CP\ CUSUM$ προτάθηκε από τους Acosta-Mejia et al. (1999), σχεδιάστηκε για να παρακολουθεί μετατοπίσεις της διεργασίας από την τυπική απόκλιση στόχο. Το $CP\ CUSUM$ υπερτερεί έναντι αρκετών άλλων ανταγωνιστών που εξετάστηκαν από τους Acosta-Mejia et al. (1999). Η 8η στήλη των Πινάκων 4.10.1 και 4.10.2 παρουσιάζει τα ARL του $CP\ CUSUM$ διαγράμματος. Η σύγκριση δείχνει ότι το $CP\ CUSUM$ διάγραμμα κυριαρχεί των *Shewhart* R, *Shewhart* S, $CUSUM\ R$, $CUSUM\ S$, $CS-CUSUM\ R$, $CS-CUSUM\ S$ και $CUSUM\ S^2$ διαγραμμάτων στην ανίχνευση αυξήσεων στην διασπορά, αλλά υπερτερεί μόνο των *Shewhart* R και $CUSUM\ S^2$ διαγραμμάτων στην ανίχνευση μειώσεων στην μεταβλητότητα. Ωστόσο, τα $CS-CUSUM\ R\ ERSS$ και $CS-CUSUM\ R\ DERSS$ έχουν μικρότερες ARL τιμές από το $CP\ CUSUM$ διάγραμμα. Επίσης το $CP\ CUSUM$ είναι κατώτερο του κλασσικού $CS-CUSUM\ S$ στην ανίχνευση μειώσεων στην μεταβλητότητα κατά 28.6% υπό όρους των $AEQL$. Η συνολική απόδοση υπό τους όρους των μέτρων $AEQL, PCI$ και $ARARL$ αποκαλύπτει ότι τα $CS-CUSUM\ R\ ERSS, CS-CUSUM\ R\ DERSS, CS-CUSUM\ S\ ERSS$ κα $CS-CUSUM\ S\ DERSS$ είναι ουσιαστικά καλύτερα από το $CP\ CUSUM$ διάγραμμα στην ανίχνευση όλων των τύπων των αλλαγών στην τυπική απόκλιση της διεργασίας.

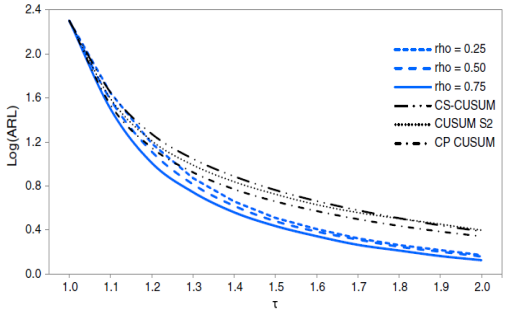
viii. Η περίπτωση της ατελής κατάταξης

Στην ενότητα 4.1.1 αναφέραμε την ατελή κατάταξη ή όταν η κατάταξη των μονάδων διεξάγεται με την βοήθεια μιας βοηθητικής μεταβλητής που έχει ισχυρή συσχέτιση με το ποιοτικό χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει. Το αντικείμενο εδώ είναι να ερευνήσουμε την απόδοση των $CS-CUSUM\ R\ ERSS, CS-CUSUM\ R\ DERSS, CS-CUSUM\ S\ ERSS$ και $CS-CUSUM\ S\ DERSS$ διαγραμμάτων όταν η κατάταξη των μονάδων σε κάθε υποομάδα δεν είναι τέλεια. Για να συνεχίσουμε, η τέλεια κατάταξη των $X_{(i:e)j}$ στην δομή των $CS-CUSUM\ R\ ERSS, CS-CUSUM\ R\ DERSS, CS-CUSUM\ S\ ERSS$ και $CS-CUSUM\ S\ DERSS$

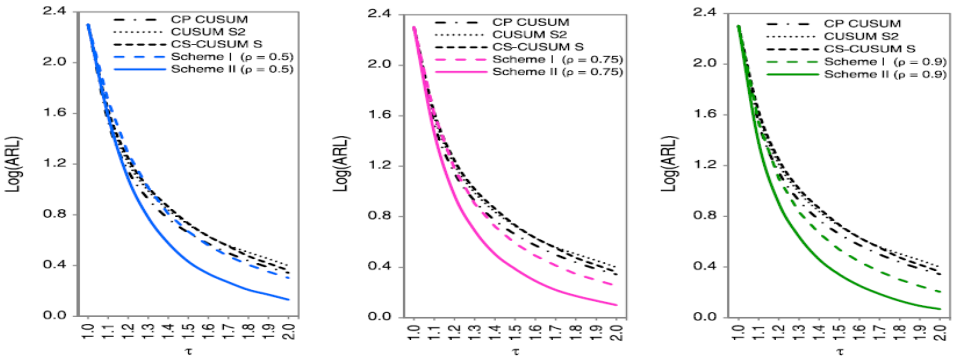
διαγραμμάτων (Εξίσωση (4.1)) αντικαθίστανται με την ατελή κατάταξη των $X_{[i:e]j}$ στην Εξίσωση (4.4). Στατιστικά, η τέλεια κατάταξη και η τυχαία δειγματοληψία είναι ειδικές περιπτώσεις της ατελής διάταξης με συντελεστή συσχέτισης $\rho_{xy} = 1$ και 0, αντίστοιχα. Λαμβάνουμε ARL τιμές των ατελών δειγμάτων βασισμένα στις $ERSS$ και $DERSS$ μέσω Monte Carlo προσομοίωσης. Χρησιμοποιώντας μια υποομάδα δείγματος μεγέθους 5παραγμένη από μια διμεταβλητή τυπική κανονική κατανομή, οι ARL τιμές υπολογίζονται βασισμένες στις $\rho_{xy} = 0.25, 0.5$ και 0.75 για τα $CS - CUSUM\ R\ ERSS$ και $CS - CUSUM\ R\ DERSS$ και $\rho_{xy} = 0.5, 0.75$ και 0.9 για τα $CS - CUSUM\ S\ ERSS$ και $CS - CUSUM\ S\ DERSS$ με $ARL_0 = 200$. Η σύγκριση των $CS - CUSUM\ R\ ERSS$, $CS - CUSUM\ R\ DERSS$, $CS - CUSUM\ S\ ERSS$ και $CS - CUSUM\ S\ DERSS$ διαγραμμάτων με τα κλασσικό $CS - CUSUM\ R$, $CS - CUSUM\ \ S$, $CUSUM\ S^2$ και $CP\ CUSUM$ διαγράμματα παρουσιάζονται στα Σχήματα 4.10.1-4.10.3 με βάση την ικανότητα ανίχνευσης του 20% της αύξησης της τυπικής απόκλισης. Τα Σχήματα 4.10.1 και 4.10.2 ($CS - CUSUM\ R$) δείχνουν ότι ακόμη και στην παρουσία σφαλμάτων κατάταξης, τα $CS - CUSUM\ R\ ERSS$ και $CS - CUSUM\ R\ DERSS$ διαγράμματα είναι αρκετά ικανοποιητικά. Παρόλο που το $CS - CUSUM\ R\ ERSS$ διάγραμμα φαίνεται να struggle όταν $\rho_{xy} < 0.75$, δεν υπάρχει κάποια σημαντική διαφορά μεταξύ του σχεδιασμού ($\rho_{xy} = 0.25$ και 0.50) και $CUSUM\ S^2$ και $CP\ CUSUM$ διαγραμμάτων όταν $\tau > 14$ και ακόμη κυριαρχεί των *Shewhart* R και $CUSUM\ R$ διαγραμμάτων όταν $\rho_{xy} = 0.75$ (βλέπε Σχήμα 4.10.1). Ωστόσο, το $CS - CUSUM\ R\ DERSS$ προφανώς υπερτερεί των τριών διαγραμμάτων που χρησιμοποιούνται σε αυτή την συγκριτική μελέτη ανίχνευσης ανοδικής μετατόπισης στην τυπική απόκλιση (βλέπε Σχήμα 4.10.1) Οι ARL καμπύλες στο Σχήμα 4.10.3 δείχνουν ότι τα $CS - CUSUM\ S\ ERSS$ και $CS - CUSUM\ S\ DERSS$ διαγράμματα είναι καλά ακόμα και υπό την παρουσία σφαλμάτων κατάταξης. Με άλλα λόγια παρόλο που η ατελής κατάταξη είχε κάποια επίδραση στα $CS - CUSUM\ S\ ERSS$ και $CS - CUSUM\ S\ DERSS$ διαγράμματα, δεν επηρεάζει αρνητικά την αποτελεσματικότητα των εκτιμητριών. Στην πραγματικότητα, το $CS - CUSUM\ S\ DERSS$ εμφανώς υπερτερεί των διαγραμμάτων: κλασσικό $CS - CUSUM\ S$, $CUSUM\ S^2, CP\ CUSUM$ και $CS - CUSUM\ S\ ERSS$ σε αυτή την συγκριτική μελέτη της ανοδικής μετατόπισης στην τυπική απόκλιση. Από την άλλη πλευρά, το $CS - CUSUM\ S\ ERSS$ φαίνεται να ζορίζεται όταν $\rho_{xy} \leq 0.50$ με καμία σημαντική διαφορά μεταξύ του $CS\ CUSUM\ S\ ERSS$ και των $CUSUM\ S^2, CP\ CUSUM$ και κλασσικού $CS\ CUSUM$ διαγραμμάτων όταν $\rho_{xy} > 0.50$ (Βλέπε Σχήμα 4.10.3)



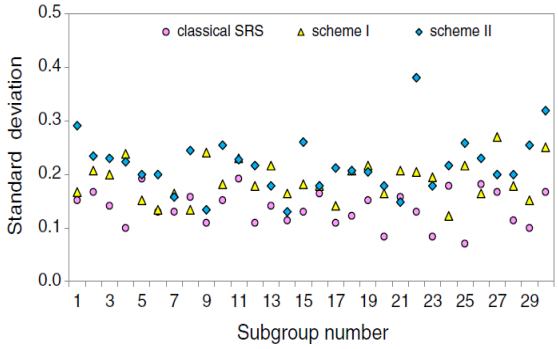
Σχήμα 4.10.1 ARL καμπύλες για τον ατελή $CS-CUSUM\ R\ ERSS$ σχεδιασμό έναντι των κλασσικό $CS-CUSUM\ R, CUSUM\ S^2$ και $CP\ CUSUM$ διαγραμμάτων για την ανίχνευση 1.2σ όταν $n=5$, $ARL_0=200$[19]



Σχήμα 4.10.2 ARL καμπύλες για τον ατελή $CS-CUSUM\ R\ DERSS$ σχεδιασμό έναντι των κλασσικό $CS-CUSUM\ R, CUSUM\ S^2$ και $CP\ CUSUM$ διαγραμμάτων για την ανίχνευση 1.2σ όταν $n=5$, $ARL_0=200$[20]



Σχήμα 4.10.3 ARL καμπύλες για τα ατελή $CS-CUSUM\ S\ ERSS$ και $CS-CUSUM\ S\ DERSS$ σχεδιασμό έναντι των κλασσικό $CS-CUSUM\ S, CUSUM\ S^2$ και $CP\ CUSUM$ διαγραμμάτων για την ανίχνευση 1.2σ όταν $n=5$, $ARL_0=200$ ($Scheme\ I$: $CS\ CUSUM\ S\ ERSS, Scheme\ II$: $CS-CUSUM\ DERSS$)[21]



Σχήμα 4.10.4 Οι τυπικές αποκλίσεις των τριάντα συνόλων δεδομένων με αναδειγματοληψία που συλλέχθηκαν χρησιμοποιώντας $SRS, ERSS$ (Scheme I) και $DERSS$ (Scheme II)[22]

4.11 Πρακτική εφαρμογή

Για να απεικονίσουμε την πρακτική εφαρμογή των $CUSUM\ R$ και $CUSUM\ S$ διαγραμμάτων, χρησιμοποιήθηκε ένα πραγματικό σύνολο δεδομένων που βασίζεται στο πρόβλημα πλήρωσης φιαλών στην γραμμή παραγωγής της *Pepsi Cola*. Το αρχικό σύνολο δεδομένων,

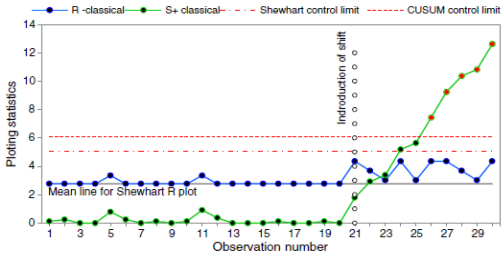
[19] Abujiya et al. (2014)
[20] Abujiya et al. (2014)
[21] Abujiya et al. (2015a)
[22] Abujiya et al. (2014) , Abujiya et al. (2015a)

βασίζεται σε ένα παράδειγμα των Muttlak and Al-Sabah (2003), είναι από μια γραμμή παραγωγής της *Pepsi Cola* εταιρείας παραγωγής, στην Al-Khobar της Σαουδικής Αραβίας, όταν η διεργασία ήταν εντός ελέγχου. Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση της αναδειγματοληψίας των Takahasi and Wakimoto (1968), τυχαία επιλέχθηκαν 30 σημειακά δεδομένα με μέγεθος υποομάδας ίσο με $n = 5$ το καθένα βάσει των σχεδιασμών $ERSS$ (Scheme I), και $DERSS$ (Scheme II). Αυτά τα δείγματα λογικά ικανοποιούν την υπόθεση της κανονικότητας.

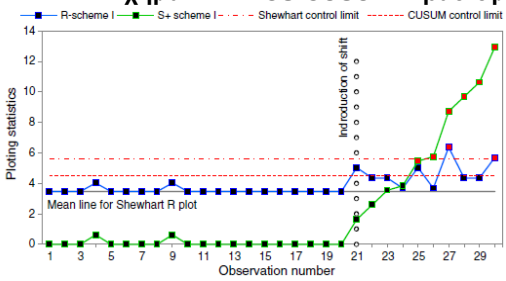
Για να μετρηθούν αποτελεσματικά πως οι προτεινόμενοι $CS - CUSUM\ R$ σχεδιασμοί ανταποκρίνονται στις αλλαγές στην τυπική απόκλιση της διεργασίας, εισήχθησαν μερικές διαταραχές στα δεδομένα, προσθέτοντας 0.25 μονάδες σε κάθε ένα από τα τελευταία δέκα σημειακά δεδομένα. Αυτό σημαίνει ότι η διεργασία δεν είναι πλέον εντός ελέγχου, που μετατοπίζεται μακριά δεξιά από την τυπική απόκλιση στόχο από το 21^{ο} σημειακό δεδομένο. Με άλλα λόγια, έγινε η υπόθεση ότι η διεργασία είναι σταθερή μέχρι την 20^{η} δειγματική τιμή. Ακολουθώντας τους Hawkins και Zamba (2003), εξετάστηκαν οι ανοδικές μετατοπίσεις στην τυπική απόκλιση και υπολογίστηκαν οι στατιστικές συναρτήσεις των $CUSUM\ S$ διαγραμμάτων βασισμένα στα κλασσικά διαγράμματα και στους Σχεδιασμούς I και II. Με τις παραμέτρους σχεδιασμού να ανιχνεύσουν το 20% των αυξήσεων στην τυπική απόκλιση της διεργασίας χρησιμοποιώντας $ARL_0 = 200$, τα $CUSUM\ R$ διαγράμματα ελέγχου μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την παρακολούθηση της διεργασίας πλήρωσης φιαλών (βλέπε Σχήματα 4.11.1-4.11.3). Έτσι, με βάση τα πραγματικά δεδομένα της παρούσας μελέτης παρατηρούνται τα ακόλουθα:

1. Το Σχήμα 4.11.1 απεικονίζει το κλασσικό $CS - CUSUM\ R$ διάγραμμα από το οποίο παρατηρήθηκε ότι το *Shewhart* διάγραμμα δεν έδωσε κανένα σήμα, ακόμα και αν δείχνει μερικά σήματα διακυμάνσεων στην διεργασία. Το $CUSUM$ διάγραμμα, από την άλλη πλευρά, δείχνει μια εκτός ελέγχου τάση δεξιά μετά το 20^{ο} δειγματικό σημείο άλλα μόνο έδωσε ένα σήμα μετά την 25η παρατήρηση. Συνολικά, ο κλασσικός σχεδιασμός δίνει ένα σύνολο πέντε εκτός ελέγχου σημείων στους δειγματικούς αριθμούς 26, 27, 28, 29, και 30.
2. Όπως ήταν αναμενόμενο, το $CS - CUSUM\ R\ ERSS$ διάγραμμα (βλέπε Σχήμα 4.11.2) μπορεί να δώσει σήμα νωρίτερα από την κλασική περίπτωση. Το *Shewhart* δίνει δύο εκτός στόχου σημεία, ενώ το $CUSUM$ δίνει σήμα μετά το 24^{ο} σημείο. Επειδή τα δύο σημεία του *Shewhart* συμπίπτουν με εκείνα του $CUSUM$, βλέπουμε ότι το $CS - CUSUM\ R\ ERSS$ δίνει συνολικά έξι εκτός ελέγχου σημείων στους δειγματικούς αριθμούς 25-30.
3. Το $CS - CUSUM\ R\ DERSS$ διάγραμμα δίνει ένα ακριβές εκτός ελέγχου σήμα στο 21^{ο} δειγματικό σημείο, δείχνοντας για άλλη μια φορά την υπεροχή του έναντι των άλλων σχεδιασμών (βλέπε Σχήμα 4.11.3). Με το *Shewhart* να δίνει το πρώτο σήμα, το $CUSUM$ έδωσε εννέα εκτός ελέγχου σημεία, αρχής γενομένης από το 22^{ο} δείγμα. Συνολικά, ο σχεδιασμός δίνει όλα τα δέκα σήματα από τους δειγματικούς αριθμούς 21-30. Αυτό

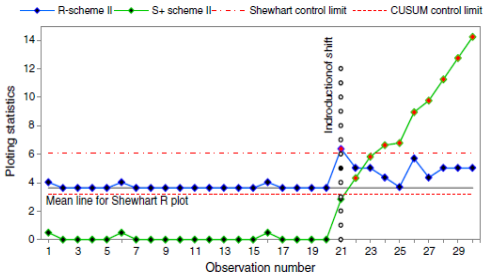
σημαίνει ότι το $CS-CUSUM\ R\ DERSS$ είναι πιο αποτελεσματικό στην ανίχνευση μικροσκοπικών αλλαγών στο $CS-CUSUM\ R$ και στον $CS-CUSUM\ R\ ERSS$.



Σχήμα 4.11.1 CS-CUSUM R βασισμένο στον κλασσικό σχεδιασμό με $n=5$[23]



Σχήμα 4.11.2 CS-CUSUM R ERSS διάγραμμα με $n=5$[24]



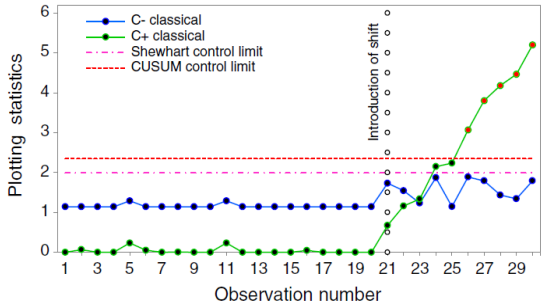
Σχήμα 4.11.3 CS-CUSUM R DERSS διάγραμμα με $n=5$[25]

Για να μετρηθούν αποτελεσματικά πως οι προτεινόμενοι $CS-CUSUM\ S$ σχεδιασμοί ανταποκρίνονται στις αλλαγές στην τυπική απόκλιση της διεργασίας, εισήχθησαν μερικές διαταραχές στα δεδομένα, προσθέτοντας 0.1 μονάδες σε κάθε ένα από τα τελευταία δέκα σημειακά δεδομένα. Αυτό σημαίνει ότι η διεργασία έχει μετατοπιστεί δεξιά από την τυπική απόκλιση στόχο από το 21° σημειακό δεδομένο. Με άλλα λόγια, έγινε η υπόθεση ότι η διεργασία είναι σταθερή μέχρι το 20° σημειακό δεδομένο. Ακολουθώντας τους Hawkins και Zamba (2003), εξετάστηκαν ανοδικές μετατοπίσεις στην τυπική απόκλιση και υπολογίστηκαν οι στατιστικές συναρτήσεις των $CS-CUSUM\ S, SC-CUSUM\ ERSS$ και $CS\ CUSUM\ S\ DERSS$ διαγραμμάτων βασισμένα στα κλασσικά διαγράμματα. Με τις παραμέτρους σχεδιασμού να ανιχνεύσουν το 20% των αυξήσεων στην τυπική απόκλιση της διεργασίας χρησιμοποιώντας $ARL_0=200$, τα $CUSUM\ S$ διαγράμματα ελέγχου μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την παρακολούθηση της διεργασίας πλήρωσης φιαλών (βλέπε Σχήματα 4.11.4-4.11.6). Με βάση τα πραγματικά δεδομένα που χρησιμοποιούνται σε αυτή την περίπτωση μελέτης και τις γραφικές παραστάσεις που απεικονίζονται, παρατηρούνται τα ακόλουθα:

1. Στο κλασσικό $CS-CUSUM\ S$ διάγραμμα (βλέπε Σχήμα 4.11.4), το *Shewhart* S διάγραμμα δεν δίνει ένα εκτός ελέγχου σήμα παρόλο που δείχνει μερικά σημάδια διακυμάνσεων στην διεργασία. Το $CUSUM\ S$ διάγραμμα, ωστόσο, δείχνει μια εκτός

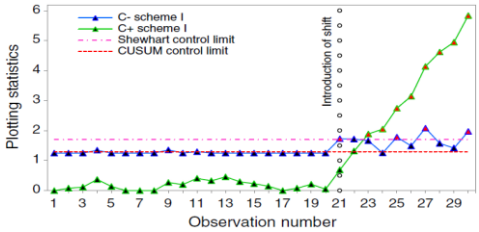
[23] Abujiya et al. (2014)
[24] Abujiya et al. (2014)
[25] Abujiya et al. (2014)

ελέγχου τάση στα δεξιά μετρά το 20ο δειγματικό σημείο, αλλά έδωσε μόνο ένα σήμα μετά την 25η παρατήρηση. Συνολικά, ο κλασσικός σχεδιασμός δίνει πέντε εκτός ελέγχου σημεία στους δειγματικούς αριθμούς 26-30.

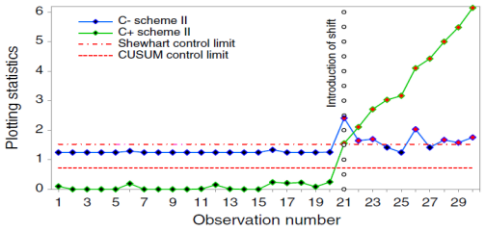


Σχήμα 4.11.4 Κλασσικό CS-CUSUM-S διάγραμμα, που σχεδιάστηκε για να ανιχνεύει $\tau_{1.2}$ με μέγεθος υποομάδας $n = 5$ και $ARL_0 = 200$[26]

2. Το $CS\ CUSUM\ ERSS$ διάγραμμα αποδεικνύει για άλλη μια φορά την υπεροχή του έναντι του κλασσικού $CS - CUSUM\ S$ διαγράμματος, με την έννοια ότι δίνει ένα προγενέστερο Σχήμα (βλέπε Σχήμα 4.11.5). Η *Shewhart* συνιστώσα του σχεδιασμού δίνει σαφώς τέσσερα σημεία εκτός στόχου, ενώ το αντίστοιχο $CUSUM$ δίνει ένα σήμα μετά το 22ο σημείο. Το $CS - CUSUM\ ERSS$ διάγραμμα δίνει τελικά έννοια εκτός ελέγχου σημεία επειδή τρία από τα τέσσερα σημεία του *Shewhart* συμπίπτουν με αυτά του $CUSUM$ διαγράμματος.
3. Το Σχήμα 4.11.6 δείχνει ότι το $CS - CUSUM\ DERSS$ διάγραμμα είναι το καλύτερο αποδοτικά διάγραμμα καθώς δίνει ακριβή σήματα δεξιά μετά το 20ο δειγματικό σημείο. Αμφότερα τα *Shewhart* και $CUSUM$ διαγράμματα δίνουν το πρώτο σήμα στο 21ο δείγμα, με το *Shewhart* να δίνει ένα σύνολο οχτώ σημάτων έναντι των δέκα εκτός ελέγχου σημείων του $CUSUM$. Αυτό σημαίνει ότι ο σχεδιασμός II είναι πιο αποτελεσματικός στην ανίχνευση μικροσκοπικών αλλαγών στην διασπορά της διεργασίας από τον κλασσικό και το $CS - CUSUM\ S\ ERSS$.



Σχήμα 4.11.5 $CS - CUSUM - S\ ERSS$ διάγραμμα (Scheme I), που σχεδιάστηκε για να ανιχνεύει $\tau_{1.2}$ με μέγεθος υποομάδας $n = 5$ και $ARL_0 = 200$[27]



Σχήμα 4.11.6 $CS - CUSUM - S\ DERSS$ (Scheme II) διάγραμμα, που σχεδιάστηκε για να ανιχνεύει $\tau_{1.2}$ με μέγεθος υποομάδας $n = 5$ και $ARL_0 = 200$[28]

[26] Abujiya et al. (2015a)
[27] Abujiya et al. (2015a)
[28] Abujiya et al. (2015a)

Κεφάλαιο 5

Διαγράμματα ελέγχου τύπου EWMA για την παρακολούθηση της διασποράς της διεργασίας

5.1 Εισαγωγή

Κατά την διάρκεια των τελευταίων δεκαετιών, η χρήση των EWMA διαγραμμάτων ως ένα εργαλείο παρακολούθησης της διεργασίας έχει γίνει ιδιαίτερα δημοφιλής στον χώρο του ΣΕΔ. Αν και το $EWMA$ χρησιμοποιείται ευρύτατα για την παρακολούθηση της θέσης της διεργασίας, την τελευταία χρόνια έχει αρχίσει να λαμβάνει ιδιαίτερη προσοχή η χρήση του συγκεκριμένου διαγράμματος για την παρακολούθηση της μεταβλητότητας της διεργασίας (όπως Crowder and Hamilton (1992), Castagliola (2005), Castagliola et al. (2010) κτλ). Στην παρούσα ενότητας παρουσιάζονται τα κυριότερα $EWMA$ διαγράμματα για την παρακολούθηση της μεταβλητότητας της διεργασίας (δηλαδή, τη δειγματική διασπορά, τη δειγματική τυπική απόκλιση, το δειγματικό εύρος κτλ.). Η χρήση των $EWMA$ διαγραμμάτων είναι ιδιαίτερα σημαντική, καθώς είναι ευαίσθητα στην ανίχνευση μικρών και μέτριων μετατοπίσεων στην διασπορά ή την μεταβλητότητα της διεργασίας, που λαμβάνει υπόψη τα ιστορικά δεδομένα της διεργασίας σε κάθε δειγματοληπτική χρονική στιγμή. Τα περισσότερα από τα $EWMA$ διαγράμματα διασποράς που έχουν προταθεί βασίζονται στην υπόθεση ότι η κατανομή του ποιοτικού χαρακτηριστικού είναι Κανονική. Η απόδοση των διαγραμμάτων αξιολογείται και συγκρίνεται χρησιμοποιώντας το ARL.

Έστω $X_{1j}, X_{2j}, \dots, X_{nj}$ είναι ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n στο χρόνο j, από μια κανονικά κατανεμημένη διεργασία με μέση τιμή μ_j και διασπορά σ_j^2, δηλαδή $X_{ij} \sim N(\mu_j, \sigma_j^2)$, για $i = 1, \dots, n$, $j = 1,2, \dots$. Ο στόχος μας είναι να παρακολουθήσουμε τις αλλαγές στην διασπορά της διεργασίας. Αν υποτεθεί ότι η διεργασία παραμένει εντός ελέγχου όταν $j < \tau$ με διασπορά $\sigma_j^2 = \sigma_0^2$, και η διεργασία γίνεται εκτός ελέγχου όταν $j \geq \tau$ με διασπορά $\sigma_j^2 \neq \sigma_0^2$. Έστω $\tau_j = \sigma_j / \sigma_0$, όπου τ_j είναι το μέγεθος της μετατόπισης στην εντός ελέγχου τυπική απόκλιση σ_0. Έστω S_j^2 (Εξίσωση (3.3)) είναι η αμερόληπτη τυπική απόκλιση βασισμένη στο δείγμα $X_{1j}, X_{2j}, \dots, X_{nj}$, με $\bar{X}_j$ να είναι ο μέσος του j –οστού δείγματος. Για συντομία, χωρίς βλάβη της γενικότητας θέτουμε $\mu_j = 0$.

5.2 MGH – EWMA διάγραμμα ελέγχου

Οι MacGregor and Harris (1993) συζήτησαν τη χρήση των $EWMA$ που βασίζονται στην παρακολούθηση της τυπικής απόκλισης της διεργασίας. Έστω $x_i \sim N(\mu, \sigma^2)$. Το Εκθετικά σταθμισμένο Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα (*exponentially weighted mean square error,* $EWMS$) ορίζεται από τη σχέση

$$S_i^2 = \lambda(x_i - \mu)^2 + (1-\lambda)S_{i-1}^2 \tag{5.1}$$

Γνωρίζουμε ότι $E(S_i^2) = \sigma^2$ (για μεγάλα i) και αν οι παρατηρήσεις είναι ανεξάρτητες και κανονικά κατανεμημένες, τότε η S_i^2/σ^2 έχει μία προσεγγιστικά χ^2 κατανομή με $v = (2-\lambda)/\lambda$ βαθμούς ελευθερίας. Ως εκ τούτου, αν η σ_0 αντιπροσωπεύει την εντός ελέγχου τιμή της τυπικής απόκλισης της διεργασίας, θα μπορούσαμε να σχεδιάσουμε τις $\sqrt{S_i^2}$ σε ένα διάγραμμα ελέγχου εκθετικά σταθμισμένης μέσης τετραγωνικής ρίζας (*exponentially weighted root mean square ,EWRMS*) με όρια ελέγχου

$$\begin{aligned} UCL &= \sigma_0\sqrt{\frac{\chi^2_{v,a/2}}{v}} \\ LCL &= \sigma_0\sqrt{\frac{\chi^2_{v,1-(a/2)}}{v}} \end{aligned} \tag{5.2}$$

Οι MacGregor and Harris (1993) επισήμαναν ότι η $EWMS$ στατιστική συνάρτηση μπορεί να είναι ευαίσθητη σε μετατοπίσεις του μέσου και της τυπικής απόκλισης της διεργασίας. Πρότειναν την αντικατάσταση του μ στις σχέσεις (2.14) με μια εκτίμηση $\hat{\mu}_i$ σε κάθε χρονικό σημείο. Μια λογική εκτίμηση είναι η συνήθης $EWMA$ z_i. Εξάγουν όρια ελέγχου για την προκύπτουσα εκθετικά σταθμισμένη κινητή διασπορά (*exponentially weighted moving variance,* $EWMV$*)*

$$S_i^2 = \lambda(x_i - z_i)^2 + (1-\lambda)S_{i-1}^2 \tag{5.3}$$

5.3 CH-EWMA διάγραμμα ελέγχου

Για την παρακολούθηση της διασποράς της διεργασίας Crowder and Hamilton (1992) εφάρμοσαν ένα φυσικό λογαριθμικό (ln) μετασχηματισμό (προτάθηκε από τον Box (1954)) της S_j^2, δηλαδή $ln(S_j^2/\sigma_0^2)$. Έστω $A_j = ln(S_j^2/\sigma_0^2)$, όταν η S_j^2/σ_0^2 είναι μια *gamma* τυχαία μεταβλητή με παράμετρο σχήματος $(n-1)/2$ και παράμετρο κλίμακας $2\tau_j^2/(n-1)$, δηλαδή $S_j^2/\sigma_0^2 \sim \Gamma\left((n-1)/2, \tau_j^2/(n-1)\right)$. Η προκύπτουσα κατανομή της A_j είναι μια *log-gamma* κατανομή, που μπορεί να προσεγγιστεί από μια κανονική κατανομή (βλέπε Lawlesss (2003)) , δηλαδή $A_j \dot{\sim} N(\mu_A, \sigma_A^2)$, όπου

$$\begin{aligned} \mu_A &= ln(\tau_j^2) - \frac{1}{n-1} - \frac{1}{3(n-1)^2} + \frac{2}{15(n-1)^4} \\ \sigma_A^2 &= \frac{2}{n-1} + \frac{2}{(n-1)^2} + \frac{2}{3(n-1)^3} - \frac{16}{15(n-1)^5} \end{aligned} \tag{5.4}$$

Ακολουθώντας αυτό το μετασχηματισμό, οι Crowder and Hamilton (1992) πρότειναν ένα EWMA διάγραμμα για την παρακολούθηση της διασποράς, το οποίο καλείται **CH-EWMA** διάγραμμα. Τα άνω και κάτω όρια ελέγχου είναι:

$$C_{U,j} = max[0, \lambda A_j + (1-\lambda)C_{U,j-1}]$$
$$C_{L,j} = min[0, \lambda A_j + (1-\lambda)C_{L,j-1}] \quad (5.5)$$

με αρχικές τιμές $C_{U,0} = C_{L,0} = 0$, όπου λ, $(0 < \lambda \leq 1)$ είναι η σταθερά εξομάλυνσης. Προκειμένου να ανιχνεύσουμε μια αύξηση στην διασπορά της διεργασίας, το $CH - EWMA$ διάγραμμα παράγει ένα εκτός ελέγχου σήμα αν $C_{U,j} > L_U\sqrt{\lambda(2-\lambda)^{-1}}$. Η τιμή της L_U επιλέγεται έτσι ώστε το ARL_0 του $CH - EWMA$ διαγράμματος να φθάσει σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο. Όμοια, όταν ανιχνεύουμε μια μείωση στην διασπορά της διεργασίας, το $CH - EWMA$ διάγραμμα παράγει ένα εκτός ελέγχου σήμα αν $C_{L,j} < -L_L\sqrt{\lambda(2-\lambda)^{-1}}$. Εδώ, η L_L επιλέγεται έτσι ώστε το ARL_0 του $CH - EWMA$ διαγράμματος να φθάσει σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο. Για περισσότερες πληροφορίες, βλέπε Crowder and Hamilton (1992).

5.4 *S²-EWMA* διάγραμμα ελέγχου

Ο Castagliola (2005a) πρότεινε ένα $\boldsymbol{S^2 - EWMA}$ διάγραμμα ελέγχου για την παρακολούθηση της διασποράς της διεργασίας. Αυτή η δομή βασίζεται σε ένα λογαριθμικό μετασχηματισμό τριών παραμέτρων που δίνεται από την Εξίσωση (4.14) ($T_j = a_T + b_T ln(S_j^2 + c_T)$), όπου S_j^2 είναι η δειγματική διασπορά που για το j –οστό δείγμα που ορίζεται από την Εξίσωση (3.3). Οι σταθερές a_T, b_T και c_T ορίζονται ως $b_T = B_T(n)$, $c_T = C_T(n)\sigma_0^2$ και $a_T = A_T(n) - 2B_T(n)ln(\sigma_0)$ από τον Castagliola (2005a). Εξήγαγε την κατανομή της T_j και έδειξε ότι αν οι σταθερές a_T, b_T και c_T επιλέγουν συνετά, τότε η κατανομή της T_j είναι προσεγγιστικά Κανονική κατανομή με μέση τιμή $E(T_j)$ και διασπορά $\sigma^2(T_j)$, δηλαδή $T_j \dot{\sim} N(E(T_j), \sigma^2(T_j))$ (βλεπε *Appendix A* στον Castagliola (2005a)). Διάφορες τιμές των $E(T_j)$, $\sigma(T_j)$, $A_T(n)$, $B_T(n)$ και $C_T(n)$ για $n = 3, \ldots, 15$ δίνονται στο Παράρτημα III.

Χρησιμοποιώντας την προσεγγιστικά κανονικά κατανεμημένη μεταβλητή T_j από τον Castagliola (2005a), η στατιστική συνάρτηση σχεδιασμού για το $S^2 - EWMA$ διάγραμμα ελέγχου ορίζεται από την σχέση

$$Z_j = \lambda T_j + (1-\lambda)Z_{j-1} \quad (5.6)$$

Όπου λ είναι η παράμετρος εξομάλυνσης που επιλέγεται ως $0 < \lambda \leq 1$ και η αρχική τιμή της Z_j λαμβάνεται ως $Z_0 = A_T(n) + B_T(n)ln(1 + C_T(n))$. Τα όρια ελέγχου για την στατιστική συνάρτηση Z_i είναι:

$$UCL = E(T_j) + L\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}\sigma(T_j)$$
$$CL = E(T_j) \qquad (5.7)$$
$$LCL = E(T_j) - L\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}\sigma(T_j)$$

όπου L είναι ο συντελεστής του ορίου ελέγχου που καθορίζει την απόσταση μεταξύ των LCL και UCL.

Οι ARL τιμές του $S^2 - EWMA$ δίνονται στον ακόλουθο Πίνακα 5.4.1 για διάφορες τιμές του λ, όπου τ αντιπροσωπεύει την ποσότητα μετατόπισης της τυπικής απόκλισης (δηλαδή $\tau = \sigma_1/\sigma_0$ με σ_1 να είναι η μετατοπισμένη τυπική απόκλιση) και το $ARL_0 = 200$, όπως ορίστηκε και προηγουμένως. Οι ARL τιμές του S^2 $EWMA$ για τις βέλτιστες περιπτώσεις των λ και K (των παραμέτρων των διαγραμμάτων) δίνονται στον Πίνακα 5.4.2 με $ARL_0 = 370$:

Πίνακας 5.4.1 ARL τιμές για το $S^2 - EWMA$ διάγραμμα με $n = 5$ και $ARL_0 = 200$[29]

τ	$\lambda=0.05$ $L=2.269$	$\lambda=0.1$ $L=2.452$	$\lambda=0.2$ $L=2.592$	$\lambda=0.3$ $L=2.634$	$\lambda=0.4$ $L=2.643$	$\lambda=0.5$ $L=2.639$
0.5	9.257	6.866	5.616	5.448	5.928	7.606
0.6	11.679	8.931	7.856	8.481	10.735	16.909
0.7	16.101	13.03	13.064	16.699	25.58	48.763
0.8	26.108	23.679	29.961	46.058	80.157	166.467
0.9	63.459	70.501	107.839	169.543	274.071	474.331
0.95	133.554	153.817	204.856	264.011	327.699	392.103
1	199.781	200.702	200.756	200.262	200.59	199.224
1.05	78.77	92.938	98.675	98.004	97.342	96.541
1.1	32.542	41.746	47.688	49.736	50.94	51.373
1.2	11.986	15.382	17.449	18.537	19.274	20.022
1.3	7.064	8.766	9.571	9.909	10.226	10.527
1.4	5.054	6.09	6.419	6.517	6.6	6.753
1.5	3.983	4.722	4.835	4.801	4.787	4.82
2	2.133	2.418	2.343	2.225	2.148	2.098
3	1.338	1.456	1.395	1.336	1.294	1.267

Πίνακας 5.4.2 ARL τιμές για το S^2 $EWMA$ διάγραμμα με $ARL_0 = 370$[30]

τ	$n = 3$	$n = 5$	$n = 7$	$n = 9$
0.5	12.3	6.2	4.2	3.2
0.6	17.7	9.0	6.1	4.7
0.7	28.4	14.6	10.0	7.7
0.8	54.2	28.1	19.5	15.1
0.9	155.2	80.8	56.7	44.5
0.95	323.5	202.1	150.1	120.5
1.05	153.5	121.2	99.3	84.1
1.10	65.1	44.9	35.0	29.1
1.20	21.8	15.3	12.5	10.8
1.30	11.7	8.8	7.4	6.6
1.40	7.9	6.2	5.4	4.8
1.50	5.9	4.8	4.3	3.9
1.60	4.8	4.0	3.6	3.2
1.70	4.1	3.5	3.1	2.9
1.80	3.6	3.1	2.8	2.6
1.90	3.2	2.8	2.5	2.4
2.00	2.9	2.5	2.3	2.2

Αξίζει να σημειωθεί ότι, οι Yin et al. (2015) παρουσίασαν έναν βέλτιστό σχεδιασμό του $S^2 - EWMA$ διαγράμματος βασισμένο στο MRL. Το συγκεκριμένο έργο συμπληρώνει την δουλεία του Castagliola (2005a). Οι συγκρίσεις απόδοσης του $S^2 - EWMA$ διαγράμματος (μέσω της προσέγγισης της Μαρκοβιανης Αλυσίδας) (βλέπε Yin et al. (2015)) με το κλασσικό S διάγραμμα και το DS (Double Sampling) S^2 διάγραμμά (He and Grigorian

[29] Abbas et al (2012b)
[30] Castagliola (2005a)

(2013), Khoo (2004)) έδειξαν ότι $S^2 - EWMA$ υπερτερεί των άλλων δύο διαγραμμάτων στην ανίχνευση αλλαγών στην διασπορά της διεργασίας.

Τα κύρια πλεονεκτήματα του $S^2 - EWMA$ διαγράμματος βασισμένο στον λογαριθμικό μετασχηματισμό τριών παραμέτρων είναι: i) η ευκολία χρήσης του σχεδιασμού για τον υπολογισμό των ορίων ελέγχου και των τριών παραμέτρων του λογαριθμικού μετασχηματισμού, ii) η βελτιωμένη απόδοση υπό την έννοια της κανονικότητας/συμμετρίας των μετασχηματισμένων δειγματικών διασπορών και iii) η δυνατότητα ανίχνευσης αυξήσεων και μειώσεων της ονομαστικής τυπικής απόκλισης σε ένα πιο παρόμοιο τρόπο.

Ο Castagliola (2005) συγκρίνοντας την απόδοση του $S^2 - EWMA$ διαγράμματος με τα R, S $CUSUM$ R και $CH - EWMA$ διαγράμματα εξήγαγε το συμπέρασμα ότι το $S^2 - EWMA$ δίνει καλύτερα αποτελέσματα και ως εκ τούτου είναι πιο αποτελεσματικό.

5.5 EWMA S διάγραμμα ελέγχου

Το **EWMA S** που προτάθηκε από τον Castagliola είναι μια φυσική επέκταση του $S^2 - EWMA$ διαγράμματος ελέγχου (Castagliola (2005a)) (βλέπε Ενότητα 5.4) όπου ένας λογαριθμικός μετασχηματισμός τριών παραμέτρων (a_S, b_S, c_S) εφαρμόζεται στη δειγματική τυπική απόκλιση S_j (Εξίσωση (3.2)), δηλαδή

$$T_j = a_S + b_S \ln(S_j + c_S) \tag{5.8}$$

αντί της δειγματικής διασποράς S_j^2 (Εξίσωση (3.3)) (Pham (2006)). Τα όρια ελέγχου του $EWMA - S$ διαγράμματος δίνονται από τις Εξισώσεις (5.7) αλλά για διαφορετικές τιμές των $E(T_j)$ και $\sigma(T_j)$. Η στατιστική συνάρτηση σχεδιασμού για το $EWMA\ S$ διάγραμμα ελέγχου ορίζεται από την Εξίσωση (5.6) με αρχική τιμή $Z_0 = A_S(n) + B_S(n)\ln(K_S(n,1) + C_S(n))$, όπου $K_S(n,r) = \frac{\Gamma[(n-1+r)/2]}{\Gamma[(n-1)/2]}\left(\frac{2}{n-1}\right)^{r/2}$. Εξήγαγε την κατανομή της T_j και έδειξε ότι αν οι σταθερές a_S, b_S και c_S επιλέγουν συνετά, τότε $T_j \dot{\sim} N(E(T_j), \sigma^2(T_j))$. Οι σταθερές a_R, b_R και c_R ορίζονται ως $b_S = B_S(n)$, $c_S = C_S(n)\sigma_0$ και $a_S = A_S(n) - B_S(n)\ln(\sigma_0)$. Διάφορες τιμές των $E(T_j)$, $\sigma(T_j)$, $A_S(n)$, $B_S(n)$ και $C_S(n)$ του $EWMA\ S$ διαγράμματος για $n = 3, \dots, 15$ δίνονται στο Παράρτημα ΙΙΙ.

Οι ARL τιμές του $EWMA\ S$ για τις βέλτιστες περιπτώσεις των λ και L δίνονται στον Πίνακα 5.5.1 με $ARL_0 \cong 370$. Όπως το $S^2 - EWMA$ διάγραμμα ελέγχου, το $EWMA\ S$ είναι πιο αποτελεσματικό, σύμφωνα με το ARL, από τα S^2 και S διαγράμματα ελέγχου. Τα αποτελέσματα αμφότερων των $S^2 - EWMA$ και $EWMA\ S$ είναι παρόμοια. Η κύρια διαφορά είναι ότι την μειούμενη περίπτωση ($\tau < 1$) τα βέλτιστα ARL του $EWMA\ S$ διαγράμματος είναι μικρότερα από εκείνα του $S^2 - EWMA$ διαγράμματος ελέγχου, ενώ για την αυξανόμενη περίπτωση ($\tau > 1$) έχουμε αντίθετα αποτελέσματα (βλέπε Pham (2006)).

Πίνακας 5.5.1 ARL τιμές για το EWMA S διάγραμμα με $ARL_0 \cong 370$[31]

τ	$n=3$	$n=5$	$n=7$	$n=9$
0.6	14.9	7.9	5.6	4.4
0.7	24.3	13.0	9.1	7.2
0.8	46.2	25.0	17.7	13.9
0.9	132.9	72.2	51.0	40.1
0.95	273.7	183.7	139.2	112.5
1.05	197.7	145.6	115.2	95.8
1.10	94.4	58.8	43.7	35.5
1.20	35.7	22.0	16.7	13.6
1.30	20.4	12.8	9.5	7.7
1.40	14.2	8.6	6.3	5.1
1.50	10.6	6.3	4.6	3.7
1.60	8.1	4.8	3.6	2.9
1.70	6.4	3.9	2.9	2.4
1.80	5.3	3.2	2.4	2.0
1.90	4.5	2.8	2.1	1.7
2.00	3.9	2.4	1.9	1.6

5.6 EWMA R διάγραμμα ελέγχου

Έστω R_j είναι το εύρος των υποομάδων που δίνεται από την Εξίσωση (3.1). Το **EWMA R** που προτάθηκε από τον Castagliola (2005b) είναι μια φυσική επέκταση του $S^2 - EWMA$ διαγράμματος ελέγχου (Castagliola (2005a)) (βλέπε Ενότητα 5.4) όπου ένας λογαριθμικός μετασχηματισμός τριών παραμέτρων (a_R, b_R, c_R)του *Johnson* εφαρμόζεται στο εύρος R_j (Εξίσωση (3.1)), δηλαδή

$$T_j = a_R + b_R \ln(R_j + c_R) \tag{5.9}$$

αντί της δειγματικής διασποράς S_j^2 (Εξίσωση (3.3)). Τα όρια ελέγχου του $EWMA - R$ διαγράμματος δίνονται από τις Εξισώσεις (5.7) αλλά για διαφορετικές τιμές των $E(T_j)$ και $\sigma(T_j)$. Η στατιστική συνάρτηση σχεδιασμού για το $EWMA\ R$ διάγραμμα ελέγχου ορίζεται από την Εξίσωση (5.6) με αρχική τιμή $Z_0 = A_R(n) + B_R(n)\ln(K_R(n) + C_R(n))$, όπου $K_R(n) = 2\int_0^{+\infty} 1 - [\Phi(x)]^n - [1 - \Phi(x)]^n dx.$). Εξήγαγε την κατανομή της T_j και έδειξε ότι αν οι σταθερές a_R, b_R και c_R επιλέγουν συνετά, τότε $T_j \dot{\sim} N(E(T_j), \sigma^2(T_j))$. Οι σταθερές a_R, b_R και c_R ορίζονται ως $b_R = B_R(n)$, $c_R = C_R(n)\sigma_0$ και $a_R = A_R(n) - 2B_R(n)\ln(\sigma_0)$ από τον Castagliola (2005b). Διάφορες τιμές των $E(T_j)$, $\sigma(T_j)$, $A_R(n)$, $B_R(n)$ και $C_R(n)$ του $EWMA\ R$ για $n = 2,3, \dots ,15$ δίνονται στο Παράρτημα III.

Πίνακας 5.6.1 ARL τιμές για το EWMA R διάγραμμα με $ARL_0 \cong 370$[32]

τ	$n=3$	$n=5$	$n=7$	$n=9$
0.6	15.0	8.2	5.9	4.7
0.7	24.5	13.4	9.7	7.8
0.8	46.6	25.9	19.0	15.4
0.9	133.9	75.0	54.9	44.8
0.95	274.9	188.4	147.5	123.4
1.05	198.1	149.3	122.2	105.4
1.10	94.7	60.5	46.5	39.0
1.20	35.8	22.5	17.6	15.0
1.30	20.4	13.3	10.3	8.7
1.40	14.2	9.0	6.9	5.9
1.50	10.7	6.6	5.1	4.3
1.60	8.2	5.1	4.0	3.4
1.70	6.5	4.1	3.3	2.8
1.80	5.4	3.5	2.7	2.3
1.90	4.6	3.0	2.4	2.0
2.00	4.0	2.6	2.1	1.8

[31] Castagliola (2000), Pham (2006)
[32] Castagliola (2005b), Pham (2006)

Οι ARL τιμές του $EWMA\ R$ για τις βέλτιστες περιπτώσεις των λ και L δίνονται στον Πίνακα 5.6.1 με $ARL_0 \cong 370$. Το $EWMA\ R$ είναι πιο αποτελεσματικό, σύμφωνα με το ARL, από το R διάγραμμα ελέγχου, αλλά ελαφρώς λιγότερο αποτελεσματικό από τα $S^2 - EWMA$ και $EWMA\ S$ διαγράμματα ελέγχου.

5.7 SJ-EWMA διάγραμμα ελέγχου

Οι Shu and Jang (2008) πρότειναν ένα άλλο $EWMA$ διάγραμμα ελέγχου για την παρακολούθηση της διασποράς της διεργασίας περικόπτοντας την κατανομή του μετασχηματισμού $ln(S_j^2/\sigma_0^2)$ στον εντός ελέγχου προσεγγιστικό μέσο του, δηλαδή $\mu_{A|\sigma_j=\sigma_0}$, οποτεδήποτε γίνεται μικρότερο από $\mu_{A|\sigma_j=\sigma_0}$. Να σημειωθεί ότι η A_j προσεγγίζεται από μια κανονική τυχαία μεταβλητή με τον προσεγγιστικό μέσο του, $\mu_{A|\sigma_j=\sigma_0}$. Τότε ορίζουμε την τυποποιημένη ποσότητα

$$Z_j = \frac{A_{j-\mu_{A|\sigma_j=\sigma_0}}}{\sigma_A} \tag{5.10}$$

Είναι προφανές, ότι η σ_A είναι μόνο συνάρτηση του n. Έτσι, οι αλλαγές στην σ_j^2 θα επηρεάζουν μόνο τον προσεγγιστικό εντός ελέγχου μέσο της A_j. Έστω $Z_j^+ = max\{0, Z_j\}$ οι Barr and Sherrill (1999) έδειξαν ότι όταν $Z_j \sim N(0,1)$, τότε $E(Z_j^+) = 1/\sqrt{2\pi}$ και $Var(Z_j^+) = \sigma_{Z_j^+}^2 = 1/2 - 1/(2\pi)$.

Χρησιμοποιώντας αυτό το γεγονός, οι Shu and Jang (2008) πρότειναν ένα EWMA διάγραμμα ελέγχου για την παρακολούθηση της μεταβλητότητας της διεργασίας. Το διάγραμμα αυτό καλείται **SJ-EWMA** διάγραμμα ελέγχου**.** Η στατιστική συνάρτηση σχεδιασμού του $SJ - EWMA$ διαγράμματος όταν ανιχνεύουμε μια αύξηση στην διασπορά της διεργασίας, στο χρόνο j, δίνεται από την σχέση

$$D_j^+ = \lambda\left(Z_j^+ - 1/\sqrt{2\pi}\right) + (1-\lambda)D_{j-1}^+ \tag{5.11}$$

με $D_0^+ = 0$ και $0 < \lambda \leq 1$. Αυτό το $EWMA$ διάγραμμα παράγει ένα εκτός ελέγχου σήμα αν $D_j^+ > d_U^+ \sigma_{Z_j^+}\sqrt{\lambda(2-\lambda)^{-1}}$, όπου η d_U^+ επιλέγεται έτσι ώστε το ARL_0 του $SJ - EWMA$ διαγράμματος να φθάνει σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο.

Όμοια για να ανιχνεύσουμε μια μείωση στην διασπορά της διεργασίας, η στατιστική συνάρτηση σχεδιασμού του $SJ - EWMA$ διαγράμματος ορίζεται από την σχέση

$$D_j^- = \lambda\left(Z_j^- + 1/\sqrt{2\pi}\right) + (1-\lambda)D_{j-1}^- \tag{5.12}$$

με $D_0^- = 0$, $0 < \lambda \leq 1$ και $Z_j^- = min\{0, Z_j\}$.

Το $SJ - EWMA$ διάγραμμα παράγει ένα εκτός ελέγχου σήμα μόλις $D_j^- < -d_L^- \sigma_{Z_j^-}\sqrt{\lambda(2-\lambda)^{-1}}$. Η d_L^- επιλέγεται έτσι ώστε να επιτευχθεί το επιθυμητό ARL_0 για

το $SJ - EWMA$ διάγραμμα. Να σημειωθεί ότι εξαιτίας της συμμετρίας της τυπικής κανονικής κατανομής, έχουμε $\sigma_j^+ = \sigma_j^-$. Για περισσότερες πληροφορίες βλέπε Shu and Jang (2008).

5.8 *EWMA- JS²* διάγραμμα ελέγχου

Το *EWMA-JS²* διάγραμμα ελέγχου των Castagliola et al. (2010) αποτελεί του $S^2 - EWMA$ που βασίζεται στον λογαριθμικό μετασχηματισμό τριών παραμέτρων που προτάθηκε από τον Castagliola (2005a) (Ενότητα 5.4). Οι Castagliola et al. (2010) πρότειναν την αντικατάσταση του λογαριθμικού μετασχηματισμού τριών παραμέτρων που χρησιμοποιήθηκε από τον Castagliola (2005a), με τον μετασχηματισμό τεσσάρων παραμέτρων S_B του Johnson (*four parameters Johnson* S_B *transformation*). Ο στόχος αυτού του μετασχηματισμού είναι να μειώσει το ARL_0 . Προκειμένου να παρακολουθήσουν την διασπορά, οι Castagliola et al. (2010), πρότειναν τον ακόλουθο μετασχηματισμό της S_j^2:

$$U_j = a + bln\left(\frac{S_j^2 - c}{c + d - S_j^2}\right) \tag{5.13}$$

όπου $a, b > 0$, c και $d > 0$ είναι τέσσερις σταθερές και τότε, να εφαρμόσουμε την προσέγγιση στην U_j, δηλαδή

$$Z_j = \lambda U_j + (1 - \lambda)Z_{j-1} \tag{5.14}$$

όπου λ παράμετρος εξομάλυνσης $\lambda \in (0,1]$ όπως και στην περίπτωση του $S^2 - EWMA$ του Castagliola (2005a).

Τα όρια ελέγχου αυτού του νέου διαγράμματος, το οποίο καλείται $\boldsymbol{EWMA - JS^2}$ διάγραμμα ελέγχου, είναι παρόμοια με εκείνα του $S^2 - EWMA$ του Castagliola (2005a), με τις τιμές των $E(U_j)$ και $\sigma(U_j)$ να αντικαθιστούν εκείνες των $E(T_j)$ και $\sigma(T_j)$. Τα όρια ελέγχου για την στατιστική συνάρτηση U_j είναι:

$$\begin{aligned} UCL &= E(U_j) + L\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}\sigma(U_j) \\ CL &= E(U_j) \\ LCL &= E(U_j) - L\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}\sigma(U_j) \end{aligned} \tag{5.15}$$

Ο μετασχηματισμός που χρησιμοποιείται στην Εξίσωση (5.13) καλείται **μετασχηματισμός τεσσάρων παραμέτρων $\boldsymbol{S_B}$ του *Johnson*** και σχετίζεται στενά με το γνωστό σύστημα (Johnson, 1949) κατανομών. Η κύρια προσδοκία αυτής της προσέγγισης είναι ότι αν οι παράμετροι a, b, c και d επιλεγούν συνετά τότε αυτός ο μετασχηματισμός μπορεί να προσεγγίσει την κανονικότητα στην U_j καλύτερα από τον λογαριθμικό μετασχηματισμό τριών παραμέτρων που χρησιμοποιήθηκε στον Castagliola (2005a). Οι Castagliola et al. (2010) εξηγούν αναλυτικά στο Appendix 1, τον λόγο που ο μετασχηματισμός τεσσάρων παραμέτρων S_B του *Johnson* είναι καλύτερη επιλογή στην περίπτωση της δειγματικής

διασποράς S_j^2 και δείχνουν επίσης πώς οι σταθερές a, b, c και d πρέπει να υπολογιστούν. Πιο συγκεκριμένα, έδειξαν ότι $a = A$, $b = B$, $c = C\sigma_0^2$, $d = D\sigma_0^2$, οπου A, B, C και D είναι τέσσερις σταθερές που εξαρτώνται μόνο από το μέγεθος του δείγματος n, και δεν εξαρτώνται από την σ_0.

Επειδή $S_j^2 \geq 0$ και $C < 0 \Rightarrow c = C\sigma_0^2 < 0$, πάντα έχουμε $S_j^2 - c > 0$ στην Εξίσωση (5.13). Αλλά για μερικές τιμές της S_j^2, έχουμε $c + d - S_j^2 < 0$. Αν η συνθήκη $c + d - S_j^2 < 0$ ισχύει, τότε είναι αδύνατο να μετασχηματίσουμε την S_j^2 χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό του Johnson S_B. Επίσης υπολόγισαν την πιθανότητα $\Delta = P(S_j^2 > c + d)$ και προφανώς φαίνεται ότι η πιθανότητα είναι αρκετά μικρή και γίνεται μικρότερη καθώς το n αυξάνει. Τότε το γεγονός $S_j^2 > c + d$ απέχει πολύ από το να συμβεί και η περίπτωση $c + d - S_j^2 < 0$ μπορεί να αγνοηθεί. Παρόλα αυτά, αν η συνθήκη $c + d - S_j^2 < 0$ συμβεί στην πράξη, αυτή μπορεί να θεωρηθεί σαν μια εκτός ελέγχου κατάσταση.

Επίσης οι Castagliola et al. (2010) εξήγαγαν την κατανομή της U_j και έδειξαν ότι αν οι σταθερές a, b, c και d επιλέγουν συνετά, τότε η κατανομή της U_j είναι προσεγγιστικά Κανονική κατανομή με μέση τιμή $E(U_j)$ και διασπορά $\sigma^2(U_j)$ δηλαδή $U_j \sim N(E(U_j), \sigma^2(U_j))$ (βλεπε Appendix A, Castagliola et al. (2010)). Διάφορες τιμές των $E(U_j)$, $\sigma(U_j)$, A, B, C και D δίνονται στο Παράρτημα III για $n = 3, \ldots, 15$ (Castagliola et al. (2010)). Οι ARL τιμές του $EWMA\ JS^2$ για τις βέλτιστες περιπτώσεις των λ και K (των παραμέτρων των διαγραμμάτων) δίνονται στον Πίνακα 5.8.1

Πίνακας 5.8.1 ARL τιμές για το $EWMA\ JS^2$ διαγράμματα με $ARL_0 = 370$[33]

τ	$n = 3$	$n = 5$	$n = 7$	$n = 9$
0.5	9.4	5.2	3.7	2.9
0.6	13.6	7.7	5.5	4.3
0.7	21.2	12.4	8.9	7.0
0.8	40.8	23.0	16.8	13.4
0.9	126.5	68.3	48.4	38.1
0.95	274.3	179.9	135.8	109.4
1.05	195.9	148.0	118.1	98.8
1.1	97.0	61.6	46.1	37.5
1.2	38.8	23.5	17.4	14.0
1.3	21.3	13.0	9.6	7.7
1.4	13.8	8.4	6.3	5.1
1.5	9.8	6.0	4.5	3.7
1.6	7.6	4.6	3.5	2.9
1.7	6.1	3.7	2.8	2.3
1.8	5.1	3.1	2.4	2.0
1.9	4.4	2.7	2.1	1.7
2	3.8	2.3	1.8	1.5

Το $EWMA\ JS^2$ διάγραμμα μοιράζεται τα ίδια πλεονεκτήματα με το $S^2 - EWMA$ του Castagliola (2005a), δηλαδή i) η ευκολία χρήσης του σχεδιασμού για τον υπολογισμό των ορίων ελέγχου και των τριών παραμέτρων του λογαριθμικού μετασχηματισμού, ii) η βελτιωμένη απόδοση υπό την έννοια της κανονικότητας/συμμετρίας των μετασχηματισμένων δειγματικών διασπορών και iii) η δυνατότητα ανίχνευσης αυξήσεων και μειώσεων της ονομαστικής τυπικής απόκλισης σε ένα πιο παρόμοιο τρόπο.

[33] Castagliola et al. (2010)

Η στατιστική αποτελεσματικότητα του $EWMA\ JS^2$ συγκρίθηκε με το $S^2 - EWMA$ του Castagliola (2005a), χρησιμοποιώντας το ARL_0. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η απόδοση αυτών των διαγραμμάτων είναι πολύ παρόμοια, χωρίς καμία κυριαρχία του ενός έναντι του άλλου.

- Όταν $\tau < 1$ (μειούμενη περίπτωση), οι εκτός ελέγχου τιμές του ARL για το $EWMA\ JS^2$ διάγραμμα είναι λίγο μικρότερες από τις εκτός ελέγχου τιμές του ARL για το $S^2 - EWMA$ διάγραμμα. Η διαφορά μεταξύ των τιμών αυτών μπορεί να είναι αμελητέα μερικές φορές.
- Όταν $\tau > 1$ (αυξανόμενη περίπτωση), οι εκτός ελέγχου τιμές του ARL για το $EWMA\ JS^2$ διάγραμμα είναι λίγο μεγαλύτερες από τις εκτός ελέγχου τιμές του ARL για το $S^2 - EWMA$ διάγραμμα. Η διαφορά μεταξύ των τιμών αυτών μπορεί να είναι αμελητέα μερικές φορές.

Και τα δύο διαγράμματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν ισοδύναμα με προτίμηση υπέρ του $EWMA\ JS^2$ διαγράμματος όταν προτιμάται η ανίχνευση μειώσεων της μεταβλητότητας.

5.9 HHW1 και HHW2 - EWMA διαγράμματα ελέγχου

5.9.1 HHW1-EWMA διάγραμμα ελέγχου

Πρόσφατα, οι Huwang et al. (2010) πρότειναν μερικά βελτιωμένα $EWMA$ διαγράμματα ελέγχου για την ανίχνευση αυξήσεων και μειώσεων στην διασπορά της διεργασίας. Όπως προαναφέραμε, $S_j^2/\sigma_0^2 \sim \Gamma\big((n-1)/2, \delta_j^2/(n-1)\big)$. Τότε η $EWMA$ στατιστική συνάρτηση βασίζεται στην S_j^2/σ_0^2, στον χρόνο j, δίνεται από την σχέση

$$E_j = \lambda\big(S_j^2/\sigma_0^2\big) + (1-\lambda)E_{j-1} \tag{5.16}$$

με $E_0 = 1$.

Έδειξαν ότι η $E_j^* = E_j - (1-\lambda)^j E_0$ έχει μια προσεγγιστική *Gamma* κατανομή, δηλαδή $E_j^* \dot{\sim} \Gamma(\phi_1, \phi_2)$, όπου $\phi_1 = \frac{(n-1)(2-\lambda)\{1-(1-\lambda)^j\}^2}{2\lambda\{1-(1-\lambda)^{2j}\}}$ και $\phi_2 = \frac{2\lambda\{1-(1-\lambda)^{2j}\}}{(n-1)(2-\lambda)\{1-(1-\lambda)^j\}}$. Όμοια η $ln\big(E_j^*\big)$ είναι μια log-gamma τυχαία μεταβλητή, και μπορεί να προσεγγιστεί από μια τυχαία μεταβλητή, δηλαδή $ln\big(E_j^*\big) \dot{\sim} N(\mu_E^*, \sigma_E^{*2})$, όπου $\mu_E^* = ln(\phi_1, \phi_2) - \frac{1}{2\phi_1} - \frac{1}{12\phi_1^2} + \frac{1}{120\phi_1^4}$ και $\sigma_E^{*2} = \frac{1}{\phi_1} + \frac{1}{2\phi_1^2} + \frac{1}{6\phi_1^3} - \frac{1}{30\phi_1^5}$ Όρισαν την τυποποιημένη στατιστική συνάρτηση $E_j^{**} = \frac{E_j^* - \mu_E^*}{\sigma_E^*} \dot{\sim} N(0,1)$. Το $EWMA$ διάγραμμα που βασίζεται στην E_j^{**} καλείται $\boldsymbol{HHW1 - EWMA}$ διάγραμμα. Τα όρια ελέγχου του $HHW1 - EWMA$ διαγράμματος είναι:

$$\begin{aligned} UCL_j &= g \\ CL_j &= 0 \\ LCL_j &= -g \end{aligned} \tag{5.17}$$

Όπου g είναι το άνω όριο ελέγχου. Εδώ, οι UCL_j, και LCL_j είναι τα άνω και κάτω όρια ελέγχου αντίστοιχα και CL_j η κεντρική γραμμή, στον χρόνο j. Όμοια είναι εύκολο να

εξάγουμε τις μονόπλευρες (άνω ή κάτω) εκδόσεις του $HHW1-EWMA$ διαγράμματος όταν ανιχνεύουμε μια αύξηση ή μία μείωση στην διασπορά της διεργασίας.

5.9.2 HHW2-EWMA διάγραμμα ελέγχου

Οι Huwang et al. (2010) πρότειναν επίσης ένα άλλο $EWMA$ διάγραμμα μετασχηματίζοντας την S_j^2/σ_0^2 σε μια ακριβή κανονική τυχαία μεταβλητή. Είναι εύκολο να δείξουμε ότι $(n-1)\,S_j^2/\sigma_0^2 \sim \chi_{n-1}^2$. Έστω $G_{n-1}(\cdot)$ είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της χ^2 τυχαίας μεταβλητής, δηλαδή $(n-1)\,S_j^2/\sigma_0^2$. Τότε εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό της αθροιστικής συνάρτησης κατανομή στην $(n-1)\,S_j^2/\sigma_0^2$, δηλαδή $\vartheta_j = G_{n-1}((n-1)\,S_j^2/\sigma_0^2)$. Η προκύπτουσα κατανομή της ϑ_j είναι ομοιόμορφη, δηλαδή $\vartheta_j \sim N(0,1)$. Έστω $\zeta_j = \Phi^{-1}(\vartheta_j)$, που είναι τυπική κανονική τυχαία μεταβλητή, δηλαδή $\zeta_j \sim N(0,1)$, όπου $\Phi(\cdot)$ είναι μια αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής κατανομής. Η στατιστική συνάρτηση σχεδιασμού του $EWMA$ διαγράμματος που βασίζεται στην ζ_j ορίζεται ως:

$$H_j = \lambda\zeta_j + (1-\lambda)H_{j-1} \tag{5.18}$$

με $H_0 = 0$.

Εδώ, η H_j είναι μια κανονική τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή μηδέν και διασπορά $\sigma_{H_j}^2$, δηλαδή $H_j \sim N(0, \sigma_{H_j}^2)$, όπου $\sigma_{H_j}^2 = \frac{\lambda\{1-(1-\lambda)^{2j}\}}{(2-\lambda)}$. Ορίζουμε την τυποποιημένη στατιστική συνάρτηση $H_j^* = \frac{H_j}{\sigma_{H_j}}$, δηλαδή $H_j^* \sim N(0,1)$. Το $EWMA$ διάγραμμα που βασίζεται στην H_j^* καλείται $\boldsymbol{HHW2-EWMA}$ διάγραμμα. Τα άνω και κάτω όρια ελέγχου για το $HHW2-EWMA$ διάγραμμα είναι:

$$\begin{aligned} UCL_j &= h \\ LCL_j &= -h \end{aligned} \tag{5.19}$$

Το $HHW2-EWMA$ διάγραμμα δίνει ένα εκτός ελέγχου σήμα όταν είτε $H_j^* > h$ ή $H_j^* < -h$. Για περισσότερα βλέπε Huwang et al. (2010).

5.10 Διάγραμμα Ελέγχου με Κινητούς Μέσους

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζονται δύο διαγράμματα με Κινητούς Μέσους για την ανίχνευση μικρών αλλαγών που παράγονται στην διασπορά της διεργασίας. Οι Ghute and Rajmanya (2014) πρότειναν το διάγραμμα με κινητούς μέσους που βασίζεται στην εκτιμήτρια του *Downton* (Εξίσωση (4.4)) (συμβολίζεται $MA-D$ διάγραμμα) και το διάγραμμα με κινητούς μέσους που βασίζεται στην διαφορά των μέσων του *Gini* (Εξίσωση (4.5)) (συμβολίζεται $MA-G$ διάγραμμα).

Ο κινητός μέσος διαρκείας w στο χρόνο i, για $i \geq w$ που βασίζεται στην στατιστική συνάρτηση T δίνεται από τη σχέση

$$MT_i = \frac{T_i + T_{i-1} + \cdots + T_{i-w+1}}{w}, \text{ για } i \geq w \quad (5.20)$$

Για περιόδους $i < w$, υπολογίζουμε το μέσο της στατιστικής συνάρτησης. Με άλλα λόγια, η μέση τιμή όλων των T παρατηρήσεων έως την περίοδο i ορίζει τον κινητό μέσο. Το $MA - T$ διάγραμμα κατασκευάζεται σχεδιάζοντας τις MT_i στο διάγραμμα έναντι του δειγματικού αριθμού i. Ένα εκτός ελέγχου σήμα παράγεται αν η MT_i είναι μικρότερη από το LCL ή μεγαλύτερη από το UCL.

Η γνώση της στατιστικής κατανομής της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου χρειάζεται για τον υπολογισμό των ορίων ελέγχου του διαγράμματος. Αν η ακριβής κατανομή της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου είναι άγνωστη, τότε τα όρια ελέγχου μπορούν να υπολογιστούν είτε από μια προσεγγιστική κατανομή είτε από μια Monte Carlo προσομοίωση.

Ωστόσο η ακριβής κατανομή της MT_i είναι άγνωστη. Η στατιστική συνάρτηση ελέγχου MT_i, $i = 1,2, \ldots$ είναι μια ακολουθία εξαρτημένων μεταβλητών, μπορεί να μην είναι εύκολο να λάβουμε την ακριβή κατανομή αυτών των στατιστικών συναρτήσεων. Ως εκ τούτου, χρησιμοποιούνται προσομοιώσεις για να λάβουμε όρια ελέγχου και ARL τιμές. Αφού η T είναι ακολουθία θετικών αριθμών, η τιμή των MT_i δεν είναι αρνητική. Ως εκ τούτου, $LCL = 0$ και το UCL λαμβάνεται από προσομοίωση έτσι ώστε το διάγραμμα να έχει την επιθυμητή εντός ελέγχου ARL τιμή. Για τα διαγράμματα ελέγχου με κινητούς μέσους, τα όρια ελέγχου για την περίοδο $i < w$ είναι ευρύτερα εκείνα για $i \geq w$. Ωστόσο, εδώ έχουμε ένα σταθερό UCL αφού το w είναι συνήθως μια μικρή τιμή όπως $2, 3, 4$ ή 5. Τα προτεινόμενα διαγράμματα κατασκευάζονται σχεδιάζοντας τις στατιστικές συναρτήσεις D και G στο διάγραμμα με το προσομοιωμένο UCL.

Ο κινητός μέσος διαρκείας w στο χρόνο i, για $i \geq w$ που βασίζεται στην στατιστική συνάρτηση D δίνεται από τη σχέση

$$MD_i = \frac{D_i + D_{i-1} + \cdots + D_{i-w+1}}{w}, \text{ για } i \geq w \quad (5.21)$$

Το διάγραμμα που βασίζεται στην MD στατιστική συνάρτηση καλείται $\boldsymbol{MA - D}$ διάγραμμα.

Ο κινητός μέσος διαρκείας w στο χρόνο i, για $i \geq w$ που βασίζεται στην στατιστική συνάρτηση G δίνεται από τη σχέση

$$MG_i = \frac{G_i + G_{i-1} + \cdots + G_{i-w+1}}{w}, \text{ για } i \geq w \quad (5.22)$$

Το διάγραμμα που βασίζεται στην MD στατιστική συνάρτηση καλείται $\boldsymbol{MA - G}$ διάγραμμα.

Οι Ghute and Rajmanya (2014) προκειμένου να αξιολογήσουν την απόδοση των $MA - D$ και $MA - G$ διαγραμμάτων χρησιμοποιήσαν το ARL ως μέτρο απόδοσης. Χρησιμοποιήθηκε μελέτη προσομοίωσης βασισμένη σε τρία υποσύνολα μεγέθους $n = 5, 8$ και 10 το καθένα για τον καθορισμό των εντός και εκτός ελέγχου ARL. Υποθέτουμε ότι η εντός ελέγχου διεργασία είναι κανονικά κατανεμημένη με μέση τιμή μ_0 και διασπορά σ_0^2. Η εκτός ελέγχου διεργασία είναι κανονικά κατανεμημένη με ίδιο μέσο και διασπορά σ_1^2. Η ποσότητα

μετατόπισης στη μεταβλητότητα της διεργασίας δίνεται από τη σχέση $\tau = \sigma_1/\sigma_0$. Στην συνέχεια υποθέτουμε ότι $\mu_0 = 0$ και $\sigma_0^2 = 1$.

Χρησιμοποιώντας προσομοίωση, λαμβάνεται τα UCL δύο διάγραμμάτων ελέγχου για $w = 2,3,4$ και 5 για όλα τα μεγέθη υποσυνόλων, n, έτσι ώστε το εντός ελέγχου ARL του διαγράμματος να είναι περίπου 200. Οι τιμές του εκτός ελέγχου ARL των διαγραμμάτων ελέγχου για διάφορες μετατοπίσεις στην τυπική απόκλιση της διεργασίας υπολογίστηκαν χρησιμοποιώντας 10000 προσομοιώσεις (Ghute and Rajmanya (2014)).

Πίνακας 5.10.1 ARL συγκρίσεις για $n = 5$[34]

τ	MA-D διάγραμμα				D διάγραμμα
	$w = 2$ $UCL = 1.723$	$w = 3$ $UCL = 1.573$	$w = 4$ $UCL = 1.484$	$w = 5$ $UCL = 1.425$	$k = 2.068$
1.0	200.12	200.48	201.53	199.05	200
1.1	55.65	48.65	43.32	40.38	66.65
1.2	21.46	18.41	15.78	13.91	29.67
1.3	11.10	9.13	7.74	6.85	15.56
1.4	6.90	5.65	4.83	4.35	9.59
1.5	4.73	3.76	3.36	3.04	6.49
2.0	1.84	1.61	1.49	1.42	2.31
2.5	1.31	1.22	1.18	1.15	1.54
3.0	1.15	1.11	1.08	1.07	1.26

Πίνακας 5.10.2 ARL συγκρίσεις για $n = 8$[35]

τ	MA-D διάγραμμα				D διάγραμμα
	$w = 2$ $UCL = 1.530$	$w = 3$ $UCL = 1.4222$	$w = 4$ $UCL = 1.248$	$w = 5$ $UCL = 1.314$	$k = 1.7763$
1.0	199.12	200.54	198.86	201	200
1.1	41.72	35.52	30.38	27.98	54.0
1.2	14.69	11.53	9.77	8.53	20.62
1.3	6.80	5.35	4.76	4.06	10.40
1.4	4.13	3.35	2.91	2.58	6.05
1.5	2.88	2.36	2.10	1.92	4.13
2.0	1.31	1.20	1.15	1.13	1.55
2.5	1.09	1.05	1.04	1.03	1.17
3.0	1.03	1.02	1.01	1.01	1.07

Πίνακας 5.10.3 ARL συγκρίσεις για $n = 10$[36]

τ	MA-D διάγραμμα				D διάγραμμα
	$w = 2$ $UCL = 1.462$	$w = 3$ $UCL = 1.368$	$w = 4$ $UCL = 1.3128$	$w = 5$ $UCL = 1.2744$	$k = 1.676$
1.0	200.25	200.58	201.28	200.89	200
1.1	35.71	29.39	26.67	23.01	48.33
1.2	11.87	9.21	7.78	6.52	17.45
1.3	5.59	4.24	3.62	3.34	8.27
1.4	3.30	2.68	2.34	2.09	4.86
1.5	2.34	1.93	1.72	1.59	3.28
2.0	1.18	1.11	1.09	1.07	1.34
2.5	1.03	1.02	1.02	1.01	1.09
3.0	1.01	1.01	1.00	1.00	1.02

[34] Ghute and Rajmanya (2014)
[35] Ghute and Rajmanya (2014)
[36] Ghute and Rajmanya (2014)

Οι Πίνακες 5.10.1-5.10.3 περιέχουν τα $MA-D$ και $MA-G$ διαγράμματα μαζί με άλλα διαγράμματα ελέγχου. Κάθε διάγραμμα ελέγχου σχεδιάζεται έτσι ώστε το εντός ελέγχου ARL να είναι προσεγγιστικά 200. Παρατηρούμε ότι για οποιοδήποτε εύρος μετατοπίσεων, το $MA-D$ διάγραμμα παράγει σταθερά μικρότερο εκτός ελέγχου ARL από το διάγραμμα τύπου *Shewhart* D.

Πίνακας 5.10.4 ARL συγκρίσεις για $n=5$[37]

τ	MA-G διάγραμμα				G διάγραμμα
	$w=2$ $UCL=1.990$	$w=3$ $UCL=1.814$	$w=4$ $UCL=1.713$	$w=5$ $UCL=1.6442$	$k=2.3342$
1.0	200.6	199.89	200.78	201.07	200
1.1	54.88	47.81	43.65	39.62	65.94
1.2	21.61	17.73	15.93	13.81	29.02
1.3	11.06	9.03	7.81	7.06	15.63
1.4	6.70	5.52	4.83	4.18	9.67
1.5	4.69	3.87	3.29	2.95	6.52
2.0	1.84	1.58	1.49	1.40	2.33
2.5	1.31	1.22	1.18	1.14	1.53
3.0	1.15	1.11	1.08	1.08	1.26

Πίνακας 5.10.5 ARL συγκρίσεις για $n=8$[38]

τ	MA-G διάγραμμα				G διάγραμμα
	$w=2$ $UCL=1.689$	$w=3$ $UCL=1.6409$	$w=4$ $UCL=1.5677$	$w=5$ $UCL=1.517$	$k=2.005$
1.0	201.86	199.36	200.87	200.29	200
1.1	41.11	34.85	30.60	26.69	53.86
1.2	14.20	11.44	9.81	8.56	20.71
1.3	6.91	5.57	4.67	4.11	10.30
1.4	4.16	3.35	2.85	2.58	6.10
1.5	2.85	2.34	2.11	1.89	1.08
2.0	1.30	1.20	1.16	1.13	1.56
2.5	1.08	1.05	1.04	1.04	1.17
3.0	1.03	1.02	1.01	1.01	1.06

Πίνακας 5.10.6 ARL συγκρίσεις για $n=10$[39]

τ	MA-G διάγραμμα				G διάγραμμα
	$w=2$ $UCL=1.689$	$w=3$ $UCL=1.580$	$w=4$ $UCL=1.515$	$w=5$ $UCL=1.472$	$k=1.8902$
1.0	201.08	201.97	201.28	200.89	200
1.1	36.30	29.26	26.67	23.01	48.34
1.2	11.59	9.04	7.78	6.52	17.25
1.3	5.55	4.39	3.62	3.34	8.41
1.4	3.31	2.68	2.34	2.09	4.88
1.5	2.33	1.94	1.72	1.59	3.27
2.0	1.18	1.11	1.09	1.07	1.35
2.5	1.04	1.02	1.02	1.01	1.08
3.0	1.01	1.01	1.00	1.02	1.02

Οι Πίνακες 5.10.4-5.10.6 απεικονίζουν την ARL σύγκριση του G διαγράμματος, και του $MA-G$ διαγράμματος για διάφορες τιμές μετατοπίσεων τ στην τυπική απόκλιση της διεργασία με μέγεθος δείγματος $n=5,8$ και 10 αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι για

[37] Ghute and Rajmanya (2014)
[38] Ghute and Rajmanya (2014)
[39] Ghute and Rajmanya (2014)

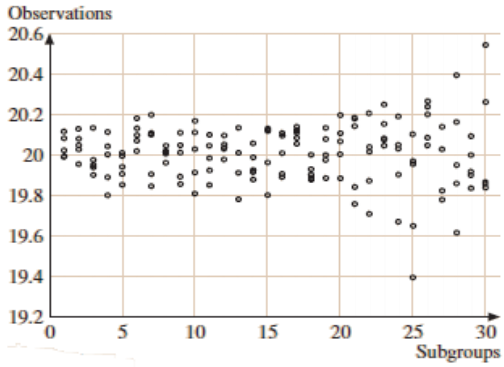
οποιοδήποτε εύρος μετατοπίσεων, το $MA-G$ διάγραμμα παράγει σταθερά μικρότερο εκτός ελέγχου ARL από το διάγραμμα τύπου *Shewhart* G.
Εν τέλει, τα $MA-D$ και $MA-G$ διαγράμματα παράγουν μια σημαντική βελτίωση του ARL σε σύγκριση με τα διαγράμματα τύπου *Shewhart.* Καθώς τα διαγράμματα με κινητούς μέσους έχουν καλύτερη απόδοση από τα παραδοσιακά διαγράμματα, τα $MA-D$ και $MA-G$ διαγράμματα θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν σαν εναλλακτική για την παρακολούθηση των μικρών μετατοπίσεων στην μεταβλητότητα της διεργασίας.

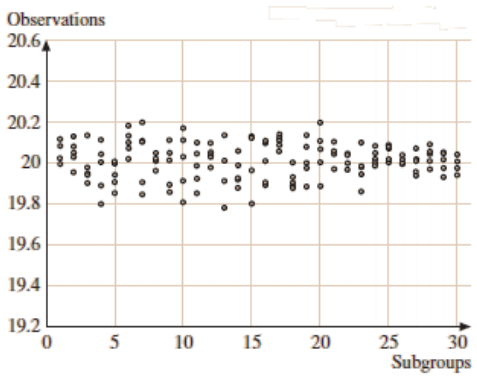
5.11 Αριθμητικό παράδειγμα

Στην παρούσα ενότητα παρέχεται μια εφαρμογή μερικών από προαναφερθέντα $EWMA$ διαγράμματα για να παρατηρήσουμε την συμπεριφορά τους στην περίπτωση μιας αύξησης και μιας μείωσης στην ονομαστική τυπική απόκλιση.

5.11.1 Παράδειγμα 1

Τα πρώτα 100 δεδομένα αποτελούνται από $m=20$ δείγματα μεγέθους $n=5$ τυχαία επιλεγμένα από μια κανονική κατανομή με $\mu_0=20$ και $\sigma_0=0.1$ (που αντιστοιχεί στην εντός ελέγχου διεργασία). Τα υπόλοιπα 50 δεδομένα αποτελούνται από $m=10$ δείγματα μεγέθους $n=5$ τυχαία επιλεγμένα από μια κανονική κατανομή με $\mu_1=20.0$ και $\sigma_1=0.2$ (η ονομαστική τυπική απόκλιση έχει αυξηθεί κατά ένα παράγοντα του 2), και τα τελευταία 50 δεδομένα αποτελούνται από $m=10$ δείγματα μεγέθους $n=5$ τυχαία επιλεγμένα από μια κανονική κατανομή με $\mu_1=20.0$ και $\sigma_1=0.05$,(η ονομαστική τυπική απόκλιση έχει μειωθεί κατά ένα παράγοντα του 2). Το Σχήμα 5.11.1 παρουσιάζονται οι δειγματικές διακυμάνσεις για τις δυο περιπτώσεις (αυξανόμενη και μειούμενη). Στο Σχήμα 5.11.2 παρουσιάζονται το $S^2\,EWMA$ διάγραμμα με $\lambda=0.1$, $L=3$, $\mu_T(n)=0.00748$, $\sigma_T(n)=0.9670$, $A_T(n)=-0.8969$, $B_T(n)=2.3647$, $C_T(n)=0.5979$, $UCL=0.673$ και $LCL=-0.658$, το $S\,EWMA$ με $\lambda=0.1$, $L=3$, $\mu_S(n)=0.00014$, $\sigma_S(n)=0.9981$ $A_S(n)=-0.8941$, $B_S(n)=7.4727$, $C_S(n)=1.5984$, $UCL=0.687$ και $LCL=-0.687$, και το $R\ EWMA$ με $\lambda=0.1$, $L=3$, $\mu_R(n)=0.00019$, $\sigma_R(n)=0.9977$ $A_R(n)=-11.1940$, $B_R(n)=6.5336$, $C_R(n)=3.2866$, $UCL=0.687$ και $LCL=-0.686$.

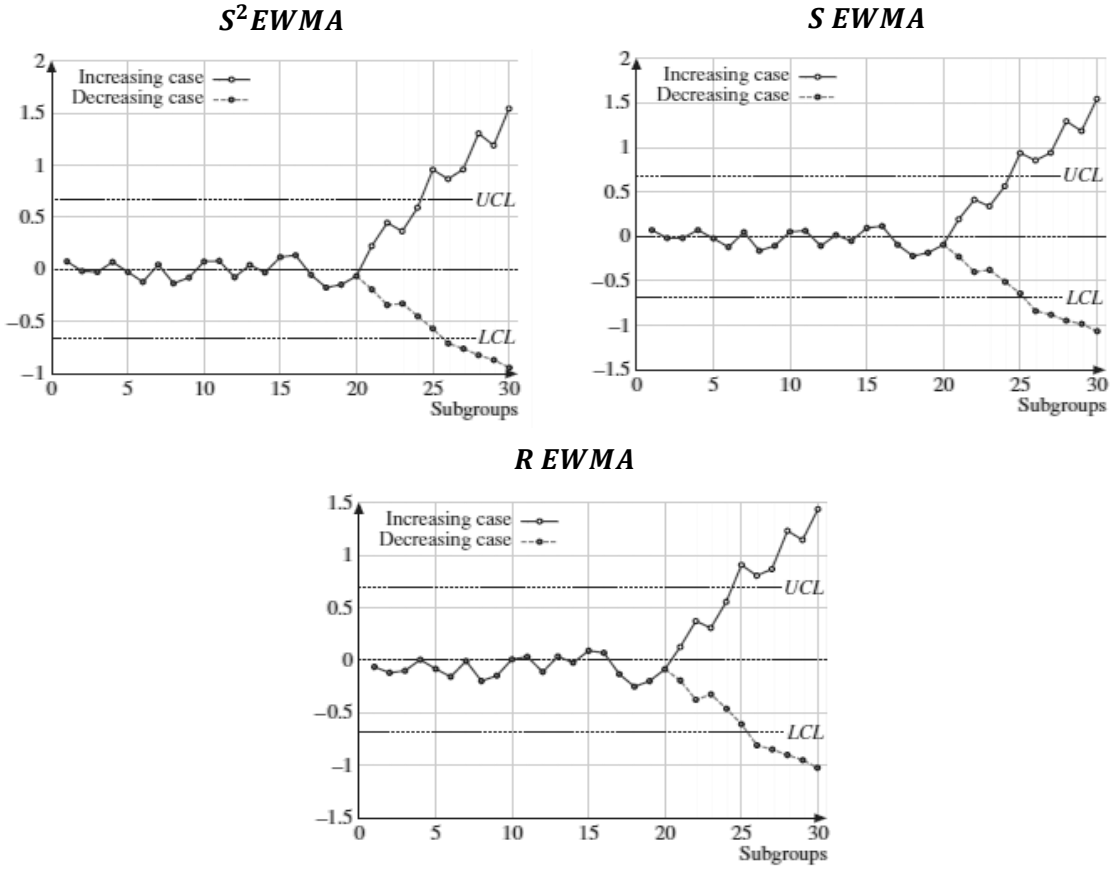




Σχήμα 5.11.1 Δεδομένα του παραδείγματος 1 με αυξανομένη διασπορά (αριστερά) και μειούμενη διασπορά (δεξιά)

Από το Σχήμα 5.11.2 παρατηρούμε ότι

- το $S^2\ EWMA$ ανιχνεύει ένα εκτός ελέγχου σήμα στο 25ο δείγμα στην αυξανόμενη κατάσταση και στο 26ο δείγμα στην μειούμενη κατάσταση, το οποίο υποδεικνύει μια αύξηση/μείωση στην μεταβλητότητα της διεργασίας.
- το $S\ EWMA$ εμφανώς ανιχνεύει ένα εκτός ελέγχου σήμα στο 25ο δείγμα για την αυξανόμενη περίπτωση και στο 26ο δείγμα για την μειούμενη περίπτωση, το οποίο υποδεικνύει μια αύξηση/μείωση στην τυπική απόκλιση. της διεργασίας.
- το $R\ EWMA$ εμφανώς ανιχνεύει ένα εκτός ελέγχου σήμα στο 25ο δείγμα για την αυξανόμενη περίπτωση και στο 26ο δείγμα για την μειούμενη περίπτωση, το οποίο υποδεικνύει μια αύξηση/μείωση στην τυπική απόκλιση της διεργασίας.

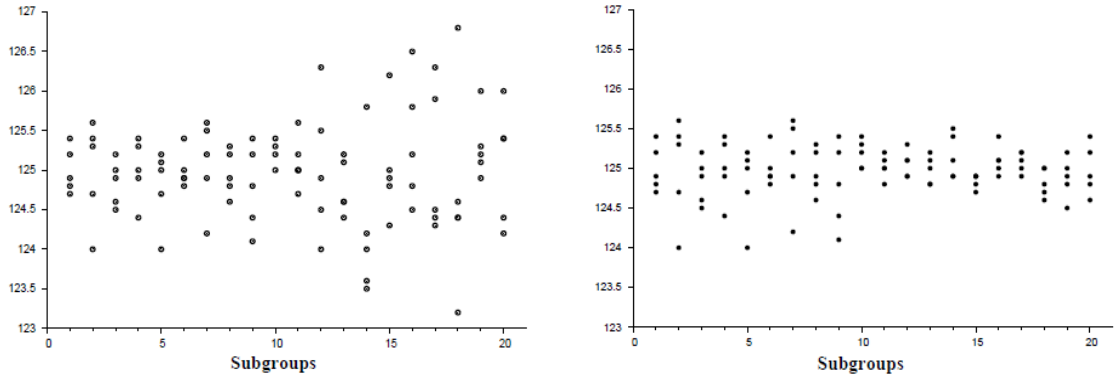


Σχήμα 5.11.2 S^2EWMA, $S\ EWMA$ και $R\ EWMA$ ($\lambda = 0.1, L = 3$) διαγράμματα ελέγχου

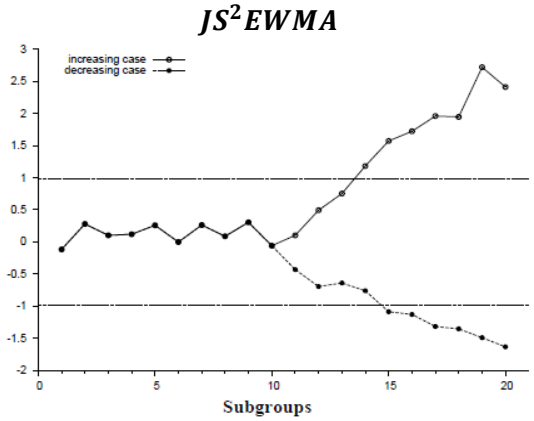
5.11.2 Παράδειγμα 2

Τα πρώτα 50 δεδομένα αποτελούνται από $m = 10$ δείγματα μεγέθους $n = 5$ τυχαία επιλεγμένα από μια κανονική κατανομή με $\mu_0 = 125$ και $\sigma_0 = 0.4$ (που αντιστοιχεί στην εντός ελέγχου διεργασία). Τα υπόλοιπα 50 δεδομένα αποτελούνται από $m = 10$ δείγματα μεγέθους $n = 5$ τυχαία επιλεγμένα από μια κανονική κατανομή με $\mu_1 = 125$ και $\sigma_1 = 0.8$

(η ονομαστική τυπική απόκλιση έχει αυξηθεί κατά ένα παράγοντα του 2), και τα τελευταία 50 δεδομένα αποτελούνται από $m = 10$ δείγματα μεγέθους $n = 5$ τυχαία επιλεγμένα από μια κανονική κατανομή με $\mu_1 = 125.0$ και $\sigma_1 = 0.2$,(η ονομαστική τυπική απόκλιση έχει μειωθεί κατά ένα παράγοντα του 2). Το Σχήμα 5.11.3 παρουσιάζονται οι δειγματικές διακυμάνσεις για τις δυο περιπτώσεις (αυξανόμενη και μειούμενη). Στο Σχήμα 5.11.4 παρουσιάζονται το $JS^2\ EWMA$ διάγραμμα με $\lambda = 0.2$, $L = 3$, $\mu_U(n) = 0.0039$, $\sigma_U(n) = 0.9852$ $A = 3.5402$, $B = 1.5727$, $C = -0.2352$, $D = 10.530$, $UCL = 0.9891$ και $LCL = -0.9813$. Από το Σχήμα 5.11.4 παρατηρούμε ότι το $JS^2\ EWMA$ ανιχνεύει ένα εκτός ελέγχου σήμα στο 14ο δείγμα στην αυξανόμενη κατάσταση και στο 15ο δείγμα στην μειούμενη κατάσταση, το οποίο υποδεικνύει μια αύξηση/μείωση στην μεταβλητότητα της διεργασίας.



Σχήμα 5.11.3 Δεδομένα του παραδείγματος 2 με αυξανομένη διασπορά (αριστερά) και μειούμενη διασπορά (δεξιά)



Σχήμα 5.11.4 JS^2EWMA, ($\lambda = 0.2, L = 3$) διάγραμμα ελέγχου

Κεφάλαιο 6

Εναλλακτικά Διαγράμματα τύπου μνήμης

6.1 Εισαγωγή

Τα διαγράμματα ελέγχου είναι μια εκτεταμένα χρησιμοποιούμενη τεχνική για την ανίχνευση ύπαρξης ειδικών αιτιών μεταβλητότητας. Στα $CUSUM$ και τα $EWMA$ διαγράμματα ελέγχου ως διαγράμματα τύπου μνήμης η προγενέστερη πληροφορία δεν αγνοείται όπως συμβαίνει στα διαγράμματα τύπου δίχως μνήμη. Στην συνέχεια θα παρουσιάσουμε τρία νέα διαγράμματα τύπου μνήμης που μπορούν αν χρησιμοποιηθούν εναλλακτικά για την παρακολούθησης της διασποράς της διεργασίας.

Το πρώτο, το οποίο το εισήγαγαν οι Abbas et al. (2012b) καλείται $CS - EWMA$ (*Combimed* $EWMA$ - $CUSUM$) διάγραμμα ελέγχου καθώς η στατιστική συνάρτησή του βασίζεται στο σωρευτικό άθροισμα των εκθετικά σταθμισμένων κινητών μέσων. Τα δύο επόμενα εισήχθησαν από τους Abbas et al (2013) και καλούνται Κυμαινόμενα (*floating*) διαγράμματα ελέγχου. Το πρώτο, εκ των δύο, καλείται *floating* $T - S^2$ διάγραμμα και βασίζεται στο λογαριθμικό μετασχηματισμό τριών παραμέτρων του *Johnson* (Εξίσωση (4.14)) και το δεύτερο καλείται *floating* $U - S^2$ διάγραμμα και βασίζεται στον λογαριθμικό μετασχηματισμό τεσσάρων παραμέτρων του *Johnson* (Εξίσωση (5.13))

6.2 Μικτό EWMA-CUSUM διάγραμμα ελέγχου (CS-EWMA διάγραμμα)

6.2.1 Δομή CS-EWMA διαγραμμάτων ελέγχου

Όπως προαναφέραμε, ο Castagliola (2005a) πρότεινε ένα $S^2 - EWMA$ διάγραμμα ελέγχου (βλέπε ενότητα 5.4) και οι Castagliola et al. (2009) ένα $CUSUM - S^2$ (βλέπε ενότητα 4.5) για την παρακολούθηση της διεργασίας χρησιμοποιώντας αμφότεροι έναν λογαριθμικό μετασχηματισμό τριών παραμέτρων (Εξίσωση (5.14)) για τη δειγματική διασπορά. Οι Abbas et al. (2012b) πρότειναν το Μικτό $EWMA - CUSUM$ διάγραμμα, δηλαδή το $\boldsymbol{CS - EWMA}$ διάγραμμα, το οποίο βασίζεται στον ίδιο μετασχηματισμό για την παρακολούθηση της διασποράς της διεργασίας αναμειγνύοντας τις επιδράσεις των $EWMA$ και $CUSUM$ διαγραμμάτων. Να σημειωθεί ότι οι Abbas et al. (2012a) πρότειναν ένα Μικτό $CUSUM - EWMA$ για την παρακολούθηση της θέσης της διεργασίας.

Έστω X_{ij} (η $i-$οστή παρατήρηση του $j-$οστού δείγματος μεγέθους n με $i = 1,2,\dots,n$ και $j = 1,2,\dots$) $\sim N(\mu, \sigma_0^2)$ υπό μια εντός ελέγχου κατάσταση. Τότε, οι δύο στατιστικές

συναρτήσεις σχεδιασμού (οι οποίες καλούνται M_j^+ και M_j^-) για το $CS-EWMA$ διάγραμμα (Abbas et al. (2012b)) είναι:

$$\begin{aligned} M_j^+ &= max\left[0, \left(Q_j - E(T_j)\right) - K'_q + M_{j-1}^+\right] \\ M_j^- &= max\left[0, -\left(Q_j - E(T_j)\right) - K'_q + M_{j-1}^+\right] \end{aligned} \tag{6.1}$$

όπου K'_q είναι η τιμή αναφοράς του $CS-EWMA$ διαγράμματος, όπως η K στην Εξίσωση (4.16). Η αρχική τιμή για τις στατιστικές συναρτήσεις σχεδιασμού λαμβάνονται ίσες με μηδέν, δηλαδή $M_0^+ = M_0^- = 0$. Η Q_j είναι η στατιστική συνάρτηση του $EWMA$ που ορίζεται από τη σχέση

$$Q_j = \lambda_q T_j + (1-\lambda_q)Q_{j-1} \tag{6.2}$$

Όπου λ_q είναι μια σταθερά εξομάλυνσης όπως η λ στην Εξίσωση (5.6) και επιλέγεται στο διάστημα $0 < \lambda_q \leq 1$. Η αρχική τιμή για τη στατιστική συνάρτηση Q_j λαμβάνεται από τη σχέση $Q_0 = A_T(n) + B_T(n)\ln(1 + C_T(n))$. Οι στατιστικές συναρτήσεις σχεδιασμού M_j^+ και M_j^- σχεδιάζονται έναντι του H'_q . Ένα εκτός ελέγχου σήμα λαμβάνεται αν οποιαδήποτε από τις δύο στατιστικές συναρτήσεις, που δίνονται στις Εξισώσεις (6.1), σχεδιάζεται πάνω από το H'_q. Αν η M_j^+ σχεδιάζεται πάνω από το H'_q , τότε υποδεικνύεται μια θετική μετατόπιση στην τυπική απόκλιση της διεργασίας, και αν η τιμή της M_j^- γίνει μεγαλύτερη από το H'_q, τότε τότε υποδεικνύεται ότι η τυπική απόκλιση έχει καθοδική μετατόπιση. Οι τυπικοί τύποι των K'_q και H'_q που εξαρτώνται από την διακύμανση της Q_j (ήτοι, $Var(Q_j) = \sigma^2(T_j)\left(\frac{\lambda_q}{2-\lambda_q}\right)$) δίνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} K'_q &= k_q\left(\sigma(T_j)\sqrt{\frac{\lambda_q}{2-\lambda_q}}\right) = K_q\sqrt{\frac{\lambda_q}{2-\lambda_q}} \\ H'_q &= h_q\left(\sigma(T_j)\sqrt{\frac{\lambda_q}{2-\lambda_q}}\right) = H_q\sqrt{\frac{\lambda_q}{2-\lambda_q}} \end{aligned} \tag{6.3}$$

όπου $K_q = k_q\sigma(T_j)$ και $H_q = h_q\sigma(T_j)$. Στην Εξίσωση (6.3), έχει χρησιμοποιηθεί η ασυμπτωτική τυπική απόκλιση της στατιστικής συνάρτησης Q, αλλά ο επαγγελματίας ποιότητας μπορεί να χρησιμοποιήσει την ακριβή τυπική απόκλιση όπως αναφέρθηκε στον Steiner (1999).

Να σημειωθεί ότι, το $CUSUM-S^2$ είναι μια ειδική περίπτωση του $CS-EWMA$ διαγράμματος με $\lambda_q = 1$. Στους Πίνακες 6.2.1 -6.2.6 παρουσιάζεται η ARL απόδοση του $CS-EWMA$ διαγράμματος για $ARL_0 = 200$ και $n = 5$. Επίσης οι τιμές του H_q για μεγέθη δείγματος διάφορα του 5 μπορούν να βρεθούν από την σχέση $H_{q(n\neq5)} = H_{q(n=5)}\left(\frac{\sigma_T(n\neq5)}{\sigma_T(n=5)}\right)$ για $ARL_0 = 200$.

Πίνακας 6.2.1 *ARL* τιμές για το $CS-EWMA$ διάγραμμα με $\lambda_q = 0.05$, $n = 5$ και $ARL_0 = 200$[40]

τ	$K_q=0.1$ $H_q=62.6$	$K_q=0.25$ $H_q=47.06$	$K_q=0.5$ $H_q=29.5$	$K_q=0.75$ $H_q=18.15$	$K_q=1$ $H_q=10.62$
0.5	23.156	20.626	17.482	15.133	13.289
0.6	26.652	23.825	20.32	17.749	15.758
0.7	32.317	28.983	24.993	22.144	19.969
0.8	43.072	38.98	34.238	31.092	28.876
0.9	73.716	68.713	63.844	61.61	61.053
0.95	127.175	123.052	120.583	121.6	123.108
1	199.718	200.262	200.951	200.69	199.752
1.05	94.196	88.525	84.496	82.271	81.696
1.1	52.536	47.005	41.056	37.801	35.939
1.2	31.726	27.331	22.219	18.725	16.32
1.3	24.789	21.241	16.942	13.848	11.534
1.4	21.141	18.078	14.341	11.569	9.429
1.5	18.774	16.091	12.706	10.183	8.233
2	13.481	11.562	9.112	7.224	5.712
3	10.16	8.729	6.877	5.442	4.271

Πίνακας 6.2.2 *ARL* τιμές για το $CS-EWMA$ διάγραμμα με $\lambda_q = 0.1$, $n = 5$ και $ARL_0 = 200$[41]

τ	$K_q=0.1$ $H_q=48.1$	$K_q=0.25$ $H_q=35.5$	$K_q=0.5$ $H_q=22.27$	$K_q=0.75$ $H_q=14.1$	$K_q=1$ $H_q=8.81$
0.5	17.682	15.366	12.769	10.995	9.717
0.6	20.542	17.895	14.96	13.009	11.626
0.7	25.299	22.109	18.707	16.487	15.072
0.8	34.747	30.731	26.633	24.372	23.188
0.9	63.816	58.764	55.477	55.787	57.655
0.95	115.831	113.49	115.278	120.601	126.425
1	199.304	199.885	200.85	199.751	200.113
1.05	102.296	96.919	95.415	95.943	96.935
1.1	55.637	50.376	45.925	44.641	44.409
1.2	30.526	26.334	22.075	19.62	18.345
1.3	22.596	19.244	15.62	13.331	11.874
1.4	18.601	15.786	12.672	10.624	9.178
1.5	16.218	13.729	10.956	9.064	7.73
2	11.075	9.385	7.424	6.039	4.997
3	8.098	6.881	5.438	4.395	3.559

Πίνακας 6.2.3 *ARL* τιμές για το $CS-EWMA$ διάγραμμα με $\lambda_q = 0.2$, $n = 5$ και $ARL_0 = 200$[42]

τ	$K_q=0.1$ $H_q=35.2$	$K_q=0.25$ $H_q=24.96$	$K_q=0.5$ $H_q=15.47$	$K_q=0.75$ $H_q=10.03$	$K_q=1$ $H_q=6.53$
0.5	14.017	11.652	9.421	8.106	7.222
0.6	16.572	13.807	11.243	9.796	8.858
0.7	20.988	17.597	14.579	12.978	12.141
0.8	30.235	25.828	22.383	21.258	21.411
0.9	59.291	54.54	54.423	59.188	65.493
0.95	112.046	111.302	120.099	132.689	145.693
1	200.201	199.572	200.733	200.695	200.392
1.05	104.94	100.801	100.762	103.131	104.378
1.1	56.775	51.104	48.576	48.77	49.734
1.2	29.533	24.981	21.284	19.8	19.186
1.3	20.761	17.182	13.998	12.367	11.485
1.4	16.545	13.588	10.88	9.367	8.401
1.5	14.048	11.505	9.131	7.731	6.791
2	9.041	7.414	5.805	4.797	4.078
3	6.369	5.252	4.117	3.372	2.797

Πίνακας 6.2.4 *ARL* τιμές για το $CS-EWMA$ διάγραμμα με $\lambda_q = 0.3$, $n = 5$ και $ARL_0 = 200$[43]

τ	$K_q=0.1$ $H_q=28.13$	$K_q=0.25$ $H_q=19.37$	$K_q=0.5$ $H_q=11.87$	$K_q=0.75$ $H_q=7.78$	$K_q=1$ $H_q=5.16$
0.5	12.39	9.956	7.911	6.822	6.134
0.6	14.876	11.99	9.621	8.444	7.772
0.7	19.235	15.661	12.875	11.729	11.362
0.8	28.467	23.896	21.086	21.167	22.79
0.9	57.66	53.647	56.972	66.231	78.395
0.95	111.3	112.994	128.065	147.259	164.091
1	200.262	199.154	199.005	200.568	199.814
1.05	105.433	101.759	102.912	105.905	106.502
1.1	56.456	50.968	49.573	51.114	52.289
1.2	28.726	23.988	20.749	19.841	19.724
1.3	19.793	16.096	13.122	11.908	11.206
1.4	15.467	12.395	9.873	8.664	7.917
1.5	12.948	10.325	8.125	6.969	6.265
2	7.991	6.376	4.933	4.108	3.535
3	5.473	4.409	3.412	2.789	2.366

[40] Abbas et al. (2012b)
[41] Abbas et al. (2012b)
[42] Abbas et al. (2012b)
[43] Abbas et al. (2012b)

Πίνακας 6.2.5 *ARL* τιμές για το $CS-EWMA$ διάγραμμα με $\lambda_q = 0.4$, $n = 5$ και $ARL_0 = 200$[44]

τ	$K_q=0.1$ $H_q=23.43$	$K_q=0.25$ $H_q=15.83$	$K_q=0.5$ $H_q=9.62$	$K_q=0.75$ $H_q=6.308$	$K_q=1$ $H_q=4.24$
0.5	11.425	8.956	7.014	6.056	5.526
0.6	13.878	10.937	8.707	7.703	7.26
0.7	18.23	14.579	12.041	11.259	11.47
0.8	27.332	22.911	20.802	22.072	25.63
0.9	56.545	53.599	61.015	76.068	94.607
0.95	110.015	115.617	138.526	161.045	184.439
1	199.007	200.336	200.485	199.411	199.888
1.05	104.542	102.206	105.385	106.762	107.729
1.1	55.908	50.87	50.536	52.258	53.902
1.2	28.069	23.363	20.537	19.92	20.051
1.3	19.113	15.296	12.611	11.57	11.075
1.4	14.786	11.625	9.3	8.193	7.625
1.5	12.235	9.581	7.494	6.484	5.892
2	7.32	5.716	4.373	3.647	3.158
3	4.884	3.852	2.965	2.414	2.134

Πίνακας 6.2.6 *ARL* τιμές για το $CS-EWMA$ διάγραμμα με $\lambda_q = 0.5$, $n = 5$ και $ARL_0 = 200$[45]

τ	$K_q=0.1$ $H_q=20.1$	$K_q=0.25$ $H_q=13.25$	$K_q=0.5$ $H_q=7.99$	$K_q=0.75$ $H_q=5.27$	$K_q=1$ $H_q=3.57$
0.5	10.819	8.244	6.394	5.563	5.16
0.6	13.25	10.215	8.096	7.292	7.082
0.7	17.575	13.835	11.575	11.222	12.113
0.8	26.704	22.207	21.05	23.96	30.154
0.9	56.118	53.989	65.611	86.907	113.788
0.95	111.12	118.942	146.808	177.365	205.588
1	200.775	199.405	199.3062	199.499	200.476
1.05	104.617	102.52	105.77	107.044	106.577
1.1	55.436	50.59	51.073	53.56	54.65
1.2	27.554	22.734	20.376	20.218	20.334
1.3	18.626	14.656	12.186	11.379	11.054
1.4	14.272	11.049	8.842	7.888	7.449
1.5	11.76	9.015	7.041	6.138	5.654
2	6.863	5.226	3.98	3.31	2.91
3	4.487	3.464	2.601	2.22	1.87

Από τους Πίνακες 6.2.1-6.2.6 παρατηρούμε ότι:

1. Για καθορισμένες τιμές των n, K_q και ARL_0, η τιμή του H_q μειώνεται με μία αύξηση στην τιμή του λ_q και αντίστροφα.
2. Για καθορισμένες τιμές των n, λ_q και ARL_0, μεγαλύτερες K_q τιμές δίνουν μικρότερες ARL_1 τιμές για την ανίχνευση μιας θετικής μετατόπισης στην διασπορά της διεργασίας.
3. Για καθορισμένες τιμές των n, λ_q και ARL_0, ανιχνεύονται αποτελεσματικά αρνητικές μετατοπίσεις μικρότερου μεγέθους χρησιμοποιώντας μέτριες K_q τιμές, όπως $0.25 \leq K_q \leq 0.5$, ενώ για μεγαλύτερες μετατοπίσεις στην αρνητική κατεύθυνση, συνιστώνται μεγαλύτερες K_q τιμές.
4. Για καθορισμένες τιμές των n, K_q και ARL_0, συνιστώνται μεγαλύτερες τιμές της λ_q για την ανίχνευση μεγαλύτερων θετικών μετατοπίσεων, ενώ για αρνητικές μετατοπίσεις, παρατηρείται ποικίλη συμπεριφορά.
5. Για καθορισμένες τιμές των n, λ_q και ARL_0, η H_q τιμή μειώνεται με μία αύξηση στην K_q τιμή και αντίστροφα.

[44] Abbas et al. (2012b)
[45] Abbas et al. (2012b)

6.3 Κυμαινόμενα διαγράμματα

6.3.1 Floating T-S^2 Διάγραμμα

Το ***floating*** $\boldsymbol{T-S^2}$ **διάγραμμα** βασίζεται στον λογαριθμικό μετασχηματισμό τριών παραμέτρων που δίνεται στην Εξίσωση (4.14). Η στατιστική συνάρτηση σχεδιασμού δίνεται από την σχέση

$$FT_j = \frac{\sum_{k=1}^{j} T_k}{j} \tag{6.4}$$

Η στατιστική συνάρτηση στην Εξίσωση (6.4) είναι ο αθροιστικός μέσος του λογαριθμικού μετασχηματισμού τριών παραμέτρων που δίνεται στην Εξίσωση (4.14). Σύμφωνα με την θεωρία κατανομής πιθανότητας, έχουμε ότι αν $T_j \dot{\sim} N(E(T_j), \sigma^2(T_j))$ τότε η $FT_j \dot{\sim} N(E(T_j), \sigma^2(T_j)/j)$ (για δεδομένη τιμή j). Ως εκ τούτου, η κεντρική γραμμή και τα άνω και κάτω όρια ελέγχου για το floating $T-S^2$ διάγραμμα είναι

$$\begin{aligned} UCL_j &= E(T_j) + K_T\, \sigma(T_j)/\sqrt{j} \\ CL_j &= E(T_j) \\ LCL_j &= E(T_j) - K_T\, \sigma(T_j)/\sqrt{j} \end{aligned} \tag{6.5}$$

όπου το πλάτος των ορίων ελέγχου καθορίζεται από την K_T. Το ARL_0 μπορεί να ελεγχθεί προσαρμόζοντας την σταθερά K_T, όπως τα ARL για ένα διάγραμμα ελέγχου με πλατύτερα όρια είναι μεγαλύτερα και αντίστροφα. Ένα πρόβλημα που παρατηρείται με την παραπάνω δομή είναι ότι, μόλις η τιμή του j γίνει μεγαλύτερη, είναι αδύνατον για την στατιστική συνάρτηση σχεδιασμού (6.4) να περάσει τα όρια ελέγχου στις σχέσεις (6.5), στην περίπτωση της μετατοπισμένης διασποράς. Αυτό υπονοεί ότι το πλάτος των ορίων ελέγχου στις σχέσεις (6.5) παραμένει πολύ πλατύ για μεγαλύτερες τιμές του j (πλατύ σχετικά με την στατιστική συνάρτηση σχεδιασμού). Να σημειωθεί ότι αν η μετατόπιση της διεργασίας συμβαίνει από το χρόνο μηδέν, τότε χρησιμοποιώντας τον βαθμιαίο μέσο, δηλαδή το $T-S^2$ διάγραμμα από τους (6.4) μέσους όλων των παρατηρούμενων αποτελεσμάτων διεργασίας με ίσο βάρος, και όλα αυτά αντανακλούν την αλλαγή της διεργασίας. Ωστόσο, αν η μετατόπιση διεργασίας συμβεί κάποια άλλη χρονική στιγμή, το διάγραμμα βαθμιαίου μέσου δεν θα είναι καλό (αποδοτικό). Τώρα, δίνει ίσο βάρος σε μερικές παρατηρήσεις πριν την αλλαγή της διεργασίας και έτσι υποτιμά / υπερεκτιμά την τρέχουσα διασπορά της διεργασίας. Αυτό το πρόβλημα επιλύεται αν θέσουμε μια συνάρτηση του j, ήτοι $f(j) = j^q$, στον παρονομαστή του $\sigma(T_j)$ έτσι ώστε τα όρια γίνονται λίγο στενότερα για μεγάλες τιμές του j (Abbas et al. (2012a), όπου ίδιου είδους συνάρτηση ποινής χρησιμοποιείται). Έτσι η κεντρική γραμμή και τα άνω και κάτω όρια ελέγχου για το **floating** $\boldsymbol{T-S^2}$ **διάγραμμα** είναι:

$$\begin{aligned} UCL_{T_j} &= E(T_j) + K'_T\, \sigma(T_j)/j^{q+0.5} \\ CL_{T_j} &= E(T_j) \\ LCL_{T_j} &= E(T_j) - K'_T\, \sigma(T_j)/j^{q+0.5} \end{aligned} \tag{6.6}$$

Όπου K_T' είναι ο προσαρμοσμένος συντελεστής ορίου ελέγχου, και γίνεται μια παράμετρος σχεδιασμού για το προτεινόμενο διάγραμμα μαζί με την q. Να σημειωθεί ότι, τα όρια ελέγχου που δίνονται στις σχέσεις (6.5) είναι ειδική περίπτωση των ορίων στις σχέσεις (6.6) με $q = 0$. Ο Πίνακες 6.3.1 - 6.3.4 περιέχουν τις ARL τιμές για το floating $T - S^2$ διάγραμμα όπου $\tau = \sigma_1/\sigma_0$ είναι η ποσότητα της μετατόπισης στην τυπική απόκλιση της διεργασίας. Η $SDRL$ δίνεται στις παρενθέσεις. Εξαιτίας του αριθμού των δυσκολιών που υπάρχουν κατά την εφαρμογή της διαδικασίας της αλυσίδας *Marcov* για την προσέγγιση των ιδιοτήτων του μήκους ροής, αυτές οι ιδιότητες αξιολογούνται εκτελώντας 10^5 προσομοιώσεις. Ο κύριος λόγος, για τον οποίο οι Abbas et al. (2013) δεν κατάφεραν να γενικεύσουν την διαδικασία του Steiner (1999), είναι ότι η κατανομή της στατιστικής συνάρτησης FT_j συνεχίζει να μεταβάλλεται με j, που διαταράσσει την κατάτμηση των μελών σε κάθε χρονικό σημείο j. Κάνει τους υπολογισμούς των πιθανοτήτων μετάβασης αρκετά πολύπλοκούς για το *floating* διάγραμμα.

Πίνακας 6.3.1 ARL ($SDRL$) τιμές του floating $\mathrm{T} - \mathrm{S}^2$ διαγράμματος για $n = 3$ και $ARL_0 \cong 370$[46]

τ	$q = 0.15$	$q = 0.2$	$q = 0.25$	$q = 0.3$	$q = 0.35$	$q = 0.4$
	$K_T' = 2.724$	$K_T' = 3.568$	$K_T' = 4.68$	$K_T' = 6.152$	$K_T' = 8.1$	$K_T' = 10.67$
0.5	5.61 (1.7)	7.16 (1.79)	8.91 (1.89)	10.84 (1.96)	12.84 (2.03)	15.18 (2.09)
0.6	7.64 (3.05)	9.58 (3.22)	11.77 (3.38)	14.11 (3.49)	16.6 (3.58)	19.23 (3.67)
0.7	11.52 (5.95)	14.17 (6.22)	16.96 (6.42)	19.99 (6.62)	23.13 (6.7)	26.32 (6.81)
0.8	20.4 (13.68)	24.6 (14.16)	28.65 (14.49)	32.94 (14.68)	37.08 (14.72)	41.19 (14.8)
0.9	52.35 (48.55)	61.12 (49.51)	69.13 (49.86)	76.05 (49,72)	82.5 (49.41)	88.32 (48.6)
0.95	115.8 (143.2)	134.7 (143.4)	150.1 (143.6)	161.9 (140.8)	171.5 (137.2)	179.2 (134.9)
1	371.5 (1035.6)	368.9 (736.9)	370.4 (570.9)	371.3 (476.9)	370.7 (411.1)	369.0 (366.1)
1.05	109.2 (147.02)	129.3 (150.5)	145.7 (150.7)	158.5 (148.6)	168.8 (145.1)	177.7 (141.7)
1.1	50.28 (55.64)	60.35 (58.07)	69.57 (59.71)	77.51 (60.14)	84.68 (59.47)	90.91 (59.08)
1.2	20.99 (19.99)	25.75 (21.13)	30.17 (21.82)	34.81 (22.35)	39.2 (22.5)	43.67 (22.6)
1.3	12.3 (10.87)	15.43 (11.8)	18.49 (12.2)	21.77 (14.65)	25.15 (12.99)	28.41 (13.03)
1.4	8.55 (7.26)	10.78 (7.84)	13.14 (8.27)	15.63 (8.54)	18.36 (8.83)	21.15 (9.08)
1.5	6.52 (5.33)	8.21 (5.76)	10.15 (6.15)	12.24 (6.42)	14.51 (6.65)	16.9 (6.86)
2	3 (2.17)	3.8 (2.42)	4.82 (2.63)	5.96 (2.8)	7.27 (2.97)	8.71 (3.1)
3	1.69 (1.01)	2.03 (1.18)	2.56 (1.3)	3.24 (1.37)	4.02 (1.49)	4.91 (1.57)

Πίνακας 6.3.2 ARL ($SDRL$) τιμές του floating $\mathrm{T} - \mathrm{S}^2$ διαγράμματος για $n = 5$ και $ARL_0 \cong 370$[47]

τ	$q = 0.15$	$q = 0.2$	$q = 0.25$	$q = 0.3$	$q = 0.35$	$q = 0.4$
	$K_T' = 2.724$	$K_T' = 3.568$	$K_T' = 4.68$	$K_T' = 6.152$	$K_T' = 8.1$	$K_T' = 10.67$
0.5	3.4 (0.95)	4.43 (1.01)	5.63 (1.07)	7.01 (1.13)	8.55 (1.17)	10.22 (1.22)
0.6	4.58 (1.67)	5.9 (1.78)	7.39 (1.89)	9.09 (1.99)	10.93 (2.04)	12.92 (2.12)
0.7	6.85 (3.21)	8.66 (3.42)	10.68 (3.58)	12.85 (3.72)	15.19 (3.83)	17.69 (3.94)
0.8	12.24 (7.43)	15.03 (7.78)	18.02 (8.1)	21.12 (8.23)	24.34 (8.38)	27.68 (8.49)
0.9	32.09 (26.71)	38.39 (27.69)	44.05 (28.26)	49.23 (28.15)	54.54 (28.13)	59.67 (28.06)
0.95	77.92 (85.43)	91.23 (86.51)	101.7 (85.95)	111.4 (86.1)	119.2 (84.48)	126.7 (83.39)
1	369.1 (1019.9)	368.9 (734.8)	370.9 (570.2)	370.6 (474.6)	370.2 (412.4)	369.5 (366.0)
1.05	74.34 (89.98)	89.12 (91.88)	101.1 (92.03)	111.0 (92.83)	120.3 (92.6)	127.3 (90.36)
1.1	31.95 (31.47)	38.79 (32.97)	45.02 (33.92)	50.88 (34.34)	56.34 (34.45)	61.32 (33.95)
1.2	12.92 (10.85)	16.09 (11.55)	19.26 (12.05)	22.51 (12.34)	25.91 (12.62)	29.38 (12.76)
1.3	7.66 (5.94)	9.64 (6.37)	11.8 (6.71)	14.16 (7.01)	16.68 (7.22)	19.26 (7.35)
1.4	5.35 (3.9)	6.79 (4.21)	8.42 (4.49)	10.25 (4.73)	12.26 (4.92)	14.35 (5.08)
1.5	4.09 (2.84)	5.23 (3.14)	6.56 (3.36)	8.05 (3.53)	9.71 (3.71)	11.51 (3.84)
2	2 (1.17)	2.52 (1.33)	3.21 (1.43)	4.03 (1.54)	4.99 (1.64)	6.07 (1.72)
3	1.25 (0.51)	1.43 (0.64)	1.78 (0.76)	2.3 (0.77)	2.85 (0.84)	3.52 (0.88)

Οι Πίνακες 6.3.1 -6.3.5 υποδεικνύουν ότι μια αύξηση της τιμής της q αυξάνει τις ARL_1 τιμές και μειώνει την $SDRL_0$ τιμή για μια δεδομένη τιμή του n. Γενικά, μια μεγάλη $SDRL_0$ τιμή δεν συνίσταται για ένα διάγραμμα ελέγχου (βλέπε, Ryan (1997) και Govindaraju and Zhang (2006)) και επίσης μικρές τιμές του ARL_1 είναι επιθυμητές έτσι ώστε μια μετατόπιση να ανιχνεύεται όσο το δυνατόν νωρίτερα. Ως εκ τούτου, υπάρχει μια ανταλλαγή μεταξύ των

[46] Abbas et al. (2013)
[47] Abbas et al. (2013)

τιμών των ARL_1 και $SDRL_0$ προσαρμόζοντας την παράμετρο σχεδιασμού q. Επίσης, να σημειωθεί ότι καθώς η q προσεγγίζει το 0, η $SDRL_0$ τιμή τείνει στο άπειρο που καθιστά αδύνατο τον υπολογισμό της τιμής του ARL_0.

Πίνακας 6.3.3 ARL ($SDRL$) τιμές του floating $\mathrm{T}-\mathrm{S}^2$ διαγράμματος για $n=7$ και $ARL_0 \cong 370$[48]

τ	$q=0.15$	$q=0.2$	$q=0.25$	$q=0.3$	$q=0.35$	$q=0.4$
	$K'_T=2.724$	$K'_T=3.568$	$K'_T=4.68$	$K'_T=6.152$	$K'_T=8.1$	$K'_T=10.67$
0.5	2.59 (0.67)	3.39 (0.73)	4.35 (0.79)	5.46 (0.83)	6.73 (0.86)	8.14 (0.9)
0.6	3.44 (1.18)	4.48 (1.27)	5.68 (1.36)	7.05 (1.42)	8.58 (1.49)	10.27 (1.56)
0.7	5.13 (2.27)	6.54 (2.42)	8.15 (2.55)	9.95 (2.67)	11.92 (2.77)	14.03 (2.85)
0.8	9.08 (5.19)	11.31 (5.46)	13.75 (5.69)	16.36 (5.89)	19.11 (6.05)	22.01 (6.14)
0.9	24.19 (18.95)	29.02 (19.67)	33.68 (19.93)	38.15 (20.17)	42.77 (20.28)	47.25 (20.22)
0.95	60.22 (61.4)	71.02 (62.63)	79.77 (63.02)	87.60 (62.78)	95.06 (62.72)	100.9 (61.39)
1	368.9 (1021.6)	368.9 (737.46)	370.5 (571.14)	371.2 (478.75)	371.8 (412.52)	371.7 (366.86)
1.05	58.25 (64.78)	69.91 (67.04)	79.80 (68.2)	88.46 (68.59)	95.70 (67.68)	102.7 (67.29)
1.1	24.28 (22.33)	29.61 (23.48)	34.75 (24.21)	39.4 (24.36)	44.41 (24.87)	48.9 (24.62)
1.2	9.75 (5.75)	12.23 (8.12)	14.77 (8.49)	17.61 (8.86)	20.4 (9.05)	23.4 (9.16)
1.3	5.77 (4.1)	7.38 (4.49)	9.1 (4.73)	11.04 (4.97)	13.14 (5.15)	15.38 (5.28)
1.4	4.08 (2.72)	5.22 (2.96)	6.53 (3.17)	8.04 (3.36)	9.68 (3.5)	11.5 (3.66)
1.5	3.15 (1.98)	4.03 (2.17)	5.11 (2.34)	6.34 (2.51)	7.72 (2.64)	9.24 (2.75)
2	1.6 (0.81)	2 (0.95)	2.56 (1.02)	3.24 (1.11)	4.02 (1.17)	4.93 (1.24)
3	1.1 (0.32)	1.21 (0.44)	1.45 (0.57)	1.89 (0.6)	2.37 (0.58)	2.92 (0.67)

Πίνακας 6.3.4 ARL ($SDRL$) τιμές του floating $\mathrm{T}-\mathrm{S}^2$ διαγράμματος για $n=9$ και $ARL_0 \cong 370$[49]

τ	$q=0.15$	$q=0.2$	$q=0.25$	$q=0.3$	$q=0.35$	$q=0.4$
	$K'_T=2.724$	$K'_T=3.568$	$K'_T=4.68$	$K'_T=6.152$	$K'_T=8.1$	$K'_T=10.67$
0.5	2.18 (0.51)	2.81 (0.63)	3.63 (0.65)	4.6 (0.67)	5.71 (0.71)	6.95 (0.74)
0.6	2.85 (0.91)	3.70 (1.01)	4.72 (1.08)	5.92 (1.14)	7.26 (1.20)	8.74 (1.25)
0.7	4.18 (1.75)	5.38 (1.89)	6.76 (2.00)	8.33 (2.12)	10.05 (2.2)	11.93 (2.28)
0.8	7.38 (4.02)	9.29 (4.29)	11.36 (4.48)	13.63 (4.66)	16.11 (4.79)	18.64 (4.9)
0.9	19.70 (14.78)	23.81 (15.42)	27.83 (15.65)	32.01 (15.93)	36.07 (16.05)	40.23 (16.11)
0.95	49.78 (48.29)	59.26 (49.96)	66.86 (50.77)	73.83 (50.29)	80.36 (49.83)	86.3 (49.4)
1	368.1 (1027.8)	369.9 (37.0)	371.3 (574.9)	371.4 (479.1)	369.3 (409.4)	368.2 (363.9)
1.05	48.61 (51.39)	58.69 (53.49)	67.36 (54.44)	74.35 (54.37)	81.35 (54.35)	87.41 (53.88)
1.1	20.03 (17.46)	14.52 (18.43)	28.77 (18.85)	33.09 (19.34)	37.42 (19.55)	41.65 (19.68)
1.2	7.99 (5.89)	10.03 (6.31)	12.31 (6.69)	14.68 (6.91)	17.25 (7.13)	20.0 (7.34)
1.3	4.76 (3.17)	6.08 (3.47)	7.6 (3.7)	9.29 (3.89)	11.13 (4.06)	13.13 (4.2)
1.4	3.39 (2.10)	4.33 (2.30)	5.5 (2.49)	6.77 (2.64)	8.24 (2.78)	9.84 (2.89)
1.5	2.63 (1.54)	3.38 (1.78)	4.3 (1.84)	5.36 (1.97)	6.58 (2.09)	7.92 (2.18)
2	1.4 (0.63)	1.71 (0.76)	2.19 (0.83)	2.78 (0.87)	3.46 (0.94)	4.27 (0.99)
3	1.04 (0.2)	1.1 (0.31)	1.27 (0.46)	1.64 (0.55)	2.11 (0.45)	2.55 (0.57)

6.3.2 Floating $U-S^2$ Διάγραμμα

Το **floating $U-S^2$ διάγραμμα** βασίζεται στον μετασχηματισμό τεσσάρων παραμέτρων που δίνεται στην εξίσωση (5.13). Η στατιστική συνάρτηση σχεδιασμού ορίζεται ως:

$$FU_j = \frac{\sum_{k=1}^{j} U_k}{j} \tag{6.7}$$

Όπως στην (6.4) για την FT_j, η στατιστική συνάρτηση $FU_j \dot{\sim} N(E(U_j), \sigma^2(U_j)/j)$. Ως εκ τούτου, η κεντρική γραμμή και τα όρια ελέγχου για το floating $U-S^2$ διάγραμμα είναι:

$$\begin{aligned} UCL_{U_j} &= E(U_j) + K'_U \frac{\sigma(U_j)}{j^{q+0.5}} \\ CL_{U_j} &= E(U_j) \\ LCL_{U_j} &= E(U_j) - K'_U \frac{\sigma(U_j)}{j^{q+0.5}} \end{aligned} \tag{6.8}$$

[48] Abbas et al. (2013)
[49] Abbas et al. (2013)

όπου K'_U είναι ο συντελεστής ορίου ελέγχου για αυτό το διάγραμμα. Οι ARL και $SDRL$ τιμές για το floating $U - S^2$ διάγραμμα δίνονται στον Πίνακα 6.3.5 με $q = 0.3$, $K'_U = 6.152$ και $ARL_0 \cong 370$. Παρόμοιες τιμές λαμβάνονται και για άλλες τιμές του q.

Από τους Πίνακες 6.3.1-6.3.5 μπορούμε να συμπεράνουμε ότι:

i. Και τα δύο *floating* διαγράμματα αποδίδουν καλά, για αρνητικές και θετικές μετατοπίσεις της τυπικής απόκλισης της διεργασίας.
ii. Για ένα δεδομένο ARL_0, το *floating* $T - S^2$ διάγραμμα αποδίδει καλύτερα για μικρές μετατοπίσεις, όταν $\delta \in [0.9,1.3]$, ενώ η απόδοση του κυμαινόμενου $U - S^2$ διαγράμματος είναι καλύτερη για μεγάλες μετατοπίσεις, όταν $\delta \leq 0.8$ και $\delta \geq 1.4$.
iii. Για δεδομένες τιμές των q και ARL_0, οι τιμές των συντελεστών των ορίων ελέγχου είναι ίδιες και για τα δύο διαγράμματα.
iv. Για μεγάλες τιμές του n, οι τιμές του ARL και για τα δύο διαγράμματα ελέγχου είναι πιο συμμετρικά όσον αφορά το δ καθώς η κατανομή των στατιστικών συναρτήσεων T_j και U_j γίνεται σχεδόν κανονική καθώς το n αυξάνει.

Πίνακας 6.3.5 ARL (SDRL) τιμές του floating $U - S^2$ διαγράμματος με $q = 0.3$, $K'_U = 6.152$ και $ARL_0 \cong 370$[50]

τ	$n = 3$	$n = 5$	$n = 7$	$n = 9$
0.5	10.34 (2.15)	6.62 (1.22)	5.14 (0.89)	4.33 (0.73)
0.6	13.76 (3.76)	8.77 (2.10)	6.79 (1.51)	5.69 (1.21)
0.7	19.86 (7.02)	12.66 (3.91)	9.77 (2.78)	8.15 (2.18)
0.8	33.18 (15.44)	21.12 (8.53)	16.26 (6.07)	13.53 (4.77)
0.9	77.39 (51.33)	49.66 (28.91)	38.26 (20.55)	32.01 (16.21)
0.95	164.07 (143.25)	112.22 (87.55)	88.15 (63.55)	74.04 (50.63)
1	371.22 (482.6)	370.25 (477.14)	371.26 (479.81)	369.62 (480.89)
1.05	161.35 (150.65)	112.68 (93.37)	89.01 (68.96)	74.84 (54.97)
1.1	78.84 (60.92)	51.46 (34.58)	39.89 (24.61)	33.41 (19.52)
1.2	35.56 (22.69)	22.92 (12.58)	17.64 (8.82)	14.75 (6.97)
1.3	22.32 (12.92)	14.31 (7.03)	11.10 (4.99)	9.29(3.92)
1.4	15.98 (8.73)	10.35 (4.82)	8.05 (3.42)	6.75 (2.68)
1.5	12.41 (6.61)	8.06 (3.62)	6.29 (2.57)	5.28 (2.03)
2	5.74 (2.97)	3.78 (1.67)	3.00 (1.22)	2.55 (0.98)
3	2.76 (1.54)	1.88 (0.89)	1.53 (0.65)	1.34 (0.52)

6.4 Συγκρίσεις απόδοσης

Αυτή η ενότητα περιλαμβάνει τη σύγκριση του $CS - EWMA$ διαγράμματος με τα S^2 $CUSUM$, S^2 $EWMA$ και μερικών άλλων διαγραμμάτων τύπου $CUSUM$ και $EWMA$. Επίσης, συγκρίνεται η απόδοση των *floating* διαγραμμάτων με τα S^2 $CUSUM$, S^2 $EWMA$ και $EWMA$ JS^2 διαγράμματα.

6.4.1 Σύγκριση απόδοσης του CS-EWMA

i. CS-EWMA έναντι $CUSUM - lnS^2$:

Ο Πίνακας 4.4.1 περιλαμβάνει τις ARL τιμές για το $CUSUM - S^2$ (Castagliola et al. (2009)) το οποίο είναι μια ειδική περίπτωση του $CS - EWMA$ διαγράμματος για $\lambda_q = 1$. Η απόδοση

[50] Abbas et al. (2013)

του $CS-EWMA$ διαγράμματος είναι καλύτερη από εκείνη του $CUSUM-S^2$, ειδικά για μικρότερες τιμές της σταθεράς εξομάλυνσης λ_q. Η πρόσθετη παράμετρος (ήτοι, λ_q) στο $CS-EWMA$ βεβαιώνει ότι η απόδοση τους $CS-EWMA$ διαγράμματος δεν υποτιμάται για μεγαλύτερες τιμές του K_q, όπως συμβαίνει με το $CUSUM-S^2$ για μεγαλύτερες τιμές του K (βλέπε Πίνακα 4.5.1 έναντι των Πινάκων 6.2.1-6.2.6).

ii. *CS-EWMA έναντι S^2-EWMA:*

Οι ARL τιμές για το S^2-EWMA διάγραμμα δίνονται στον Πίνακα 5.4.1. Η σύγκριση αποκαλύπτει ότι απόδοση του $CS-EWMA$ με $K_q=1$ είναι σχεδόν η ίδια όπως συγκρίνεται με το S^2-EWMA για θετικές μετατοπίσεις, αλλά για αρνητικές μετατοπίσεις, η απόδοση του $CS-EWMA$ διαγράμματος είναι πολύ ανώτερη από το S^2-EWMA. Επιπλέον, η απόδοση του S^2-EWMA είναι φτωχότερη για μέτριες και μεγαλύτερες τιμές του λ, ακόμη και οι ARL_1 τιμές γίνονται μεγαλύτερες από το προκαθορισμένο ARL_0 για αρνητικές μετατοπίσεις. Αυτό δεν ισχύει για το $CS-EWMA$ διάγραμμα, καθώς για μεγαλύτερες τιμές του λ_q, ο παράγοντας του $CUSUM$ στο $CS-EWMA$ διάγραμμα το καθιστά να παραμένει καλύτερο όσον αφορά τα ARL (βλέπε Πίνακα 5.4.1 έναντι των Πινάκων 6.2.1-6.2.6)

iii. *$CS-EWMA$ έναντι μερικών άλλων $EWMA$ και $CUSUM$ διαγραμμάτων:*

Οι Acosta-Mejia et al. (1999) πρότειναν μερικά διαγράμματα τύπου $CUSUM$ (τα οποία χ $CUSUM$, P_σ $CUSUM$, και $CP\ CUSUM$) για την παρακολούθηση της διασποράς της διεργασίας και σύγκριναν την απόδοση των διαγραμμάτων τους με το $CUSUM\ R$ του Page (1963), το $CUSUM\ S$ των Tuprah and Ncube(1987) και το $CUSUM-lnS^2$ των Chang and Gan (1995). Παρατηρήθηκε ότι το $CP\ CUSUM$ αποδίδει καλύτερα (υπό την έννοια των ARL τιμών) από τα προαναφερθέντα διαγράμματα.

Όμοια οι Huwang et al. (2010) πρότειναν τα $HHW1-EWMA$ και $HHW2-EWMA$ για την παρακολούθηση της τυπικής απόκλισης της διεργασίας και τα σύγκριναν με το διάγραμμα $CH-EWMA$ των Crowder and Hamilton(1992) και το $SJ\ EWMA$ διάγραμμα των Shu and Jiang (2008). Αυτές οι συγκρίσεις έδειξαν ότι τα $HHW1-EWMA$ και $HHW2-EWMA$ διαγράμματα είναι πιο ευαίσθητα (στην ανίχνευση μετατοπίσεων) από τους άλλους ανταγωνιστές. Οι ARL τιμές των διαγραμμάτων που προτείνονται από τους Acosta-Mejia et al. (1999) δίνονται στον Πίνακα 6.2.7 και ο Πίνακας 6.2.8 περιλαμβάνει τις ARL τιμές των διαγραμμάτων που αναφέρονται στους Huwang et al. (2010). Παρατηρείται ότι το $CS-EWMA$ διάγραμμα είναι αποδοτικότερο των προαναφερθέντων $EWMA$ και $CUSUM$ διαγραμμάτων.

Να σημειωθεί ότι, τα διαγράμματα που περιγράφονται στους Πίνακες 6.4.1-6.4.2 είναι μονόπλευρα, δηλαδή έχουν σχεδιαστεί να ανιχνεύουν τις θετικές μετατοπίσεις στη διασπορά της διεργασίας. Για την έγκυρη σύγκριση των διαγραμμάτων, ο Πίνακας 6.4.3 περιλαμβάνει τις ARL τιμές για ένα μονόπλευρο $CS-EWMA$ διάγραμμα, που ανιχνεύει μια θετική μετατόπισης στην τυπική απόκλιση της διεργασίας (για $K_q=1$ και $ARL_0=200$).

Πίνακας 6.4.1 ARL τιμές για μονόπλευρα διαγράμματα τύπου CUSUM για την ανίχνευση αυξήσεων διασποράς με $n = 5$ και $ARL_0 = 200$[51]

τ	CUSUM ln S^2 $K=0.068$ $H=2.66$	CUSUM R $K=2.56$ $H=4.88$	χ CUSUM $K=0.38$ $H=4.28$	P_σ CUSUM $K=0.38$ $H=4.28$	CUSUM-S $K=1.1034$ $H=1.90$	CP CUSUM $K=1.193$ $H=18.45$
1	199.93	201.80	200.70	201.10	200.60	200.76
1.1	42.94	40.40	41.04	41.04	38.80	34.60
1.2	18.07	17.60	17.17	17.15	16.85	14.14
1.3	10.75	10.82	10.23	10.21	10.36	8.42
1.4	7.63	7.81	7.26	7.24	7.50	5.93
1.5	5.98	6.13	5.66	5.65	5.85	4.58
2	3.18	3.13	2.90	2.98	3.01	2.20

Πίνακας 6.4.2 ARL τιμές για μονόπλευρα διαγράμματα τύπου EWMA για την ανίχνευση αυξήσεων διασποράς με $n = 5$ και $ARL_0 = 200$[52]

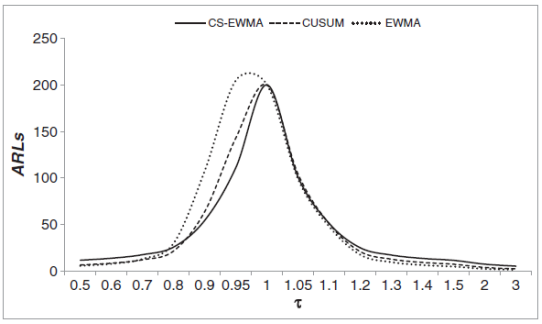
	$\lambda=0.05$				$\lambda=0.1$			
τ	CH-EWMA ($L=1.055$)	SJ-EWMA ($L=1.568$)	HHW1-EWMA ($L=1.828$)	HHW2-EWMA ($L=1.872$)	CH-EWMA ($L=1.303$)	SJ-EWMA ($L=1.943$)	HHW1-EWMA ($L=2.079$)	HHW2-EWMA ($L=2.139$)
1	200.33	200.75	200.92	199.57	200.02	200.36	199.51	200.35
1.1	43.24	32.26	28.89	27.28	44.26	35.15	34.32	32.05
1.2	18.09	14.43	11.69	10.78	18.23	14.96	14.1	12.69
1.3	10.77	9.17	6.85	6.2	10.56	9.09	8.2	7.21
1.4	7.63	6.73	4.75	4.24	7.35	6.53	5.65	4.89
1.5	5.98	5.38	3.62	3.22	5.68	5.13	4.28	3.68
2	3.18	2.93	1.8	1.62	2.95	2.72	2.03	1.76
	$\lambda=0.2$				$\lambda=0.3$			
	CH-EWMA ($L=1.513$)	SJ-EWMA ($L=2.270$)	HHW1-EWMA ($L=2.253$)	HHW2-EWMA ($L=2.355$)	CH-EWMA ($L=1.598$)	SJ-EWMA ($L=2.433$)	HHW1-EWMA ($L=2.302$)	HHW2-EWMA ($L=2.477$)
1	200.64	199.48	199.43	200.65	199.4	199.67	200.22	199.45
1.1	46.63	39.73	41.18	37.87	48.48	43.45	46.14	41.79
1.2	18.79	16.05	16.66	14.7	19.52	17.25	18.65	16.2
1.3	10.54	9.21	9.45	8.16	10.67	9.56	10.35	8.82
1.4	7.16	6.4	6.45	5.49	7.09	6.43	6.9	5.81
1.5	5.41	4.89	4.83	4.07	5.24	4.8	5.11	4.26
2	2.67	2.45	2.24	1.88	2.47	2.3	2.32	1.93

Πίνακας 6.4.3 ARL τιμές για μονόπλευρα CS-EWMA διαγράμματα για την ανίχνευση αυξήσεων διασποράς με $K_q = 1$, $n = 5$ και $ARL_0 = 200$[53]

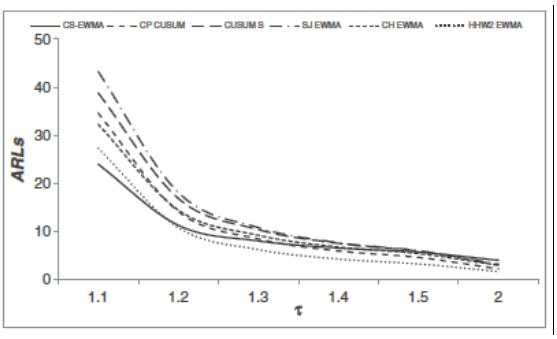
τ	$\lambda_q=0.05$ $H_q=5.39$	$\lambda_q=0.1$ $H_q=5.13$	$\lambda_q=0.2$ $H_q=4.54$	$\lambda_q=0.3$ $H_q=3.928$	$\lambda_q=0.4$ $H_q=3.42$	$\lambda_q=0.5$ $H_q=3.01$
1	200.4035	200.9845	200.7247	200.1826	200.621	199.6103
1.1	23.963	31.478	36.48	39.44	41.226	43.263
1.2	11.261	13.798	15.39	16.031	16.599	17.147
1.3	8.006	9.1	9.485	9.553	9.635	9.684
1.4	6.53	7.041	7.012	6.837	6.721	6.641
1.5	5.685	5.941	5.689	5.432	5.224	5.112
2	3.975	3.834	3.423	3.08	2.858	2.673
3	3.04	2.732	2.347	2.143	1.894	1.674

Το Σχήμα 6.4.1 περιλαμβάνει τις ARL καμπύλες των αμφίπλευρων διαγραμμάτων που περιλαμβάνουν: $CS-EWMA$ με $\lambda_q = 0.2$, $K_q = 0.25$ και $H_q = 24.96$, $CUSUM-S^2$ με $K = 0.25$ και $H = 6.476$ και S^2-EWMA με $\lambda = 0.2$ και $L = 2.592$. Το Σχήμα 6.4.1 δείχνει ότι η απόδοση των τριών διαγραμμάτων είναι σχεδόν η ίδια για θετικές μετατοπίσεις, αλλά για αρνητικές μετατοπίσεις, το $CS-EWM$A διάγραμμα δίνει καλύτερη ARL απόδοση.

[51] Abbas et al. (2012b)
[52] Abbas et al. (2012b)
[53] Abbas et al. (2012b)



Σχήμα 6.4.1 *ARL* καμπύλες για τα αμφίπλευρα CS-EWMA, $\mathbf{CUSUM-S^2}$ και $\mathbf{EWMA-S^2}$ διαγράμματα με $\boldsymbol{ARL_0 = 200}$.[54]



Σχήμα 6.4.2 $\boldsymbol{ARL}$ καμπύλες για τα μονόπλευρα CS-EWMA, CP-CUSUM, CUSUM-S, SJ-CUSUM και HHW2 EWMA διαγράμματα με $\boldsymbol{ARL_0 = 200}$.[55]

Το Σχήμα 6.4.2 παρουσιάζει τις ARL καμπύλες των μονόπλευρων διαγραμμάτων για θετικές μετατοπίσεις που περιλαμβάνει: $CS-EWMA$ με $\lambda_q = 0.05$, $K_q = 1$ και $H_q = 5.39$, $CP\ CUSUM$ διάγραμμα με $K = 1.193$ και $H = 18.45$, $CUSUM\ S$ διάγραμμα με $K = 1.1034$ και $H = 1.90$, $CH-\ EWMA$ διάγραμμα με $\lambda = 0.05$ και $L = 1.055$, $SJ\ EWMA$ διάγραμμα με $\lambda = 0.05$ και $L = 1.568$ και $HHW2-EWMA$ διάγραμμα με $\lambda = 0.05$ και $L = 1.872$. Παρατηρείται ότι η ARL καμπύλη του $CS-EWMA$ διαγράμματος φαίνεται χαμηλότερη από όλες τις άλλες καμπύλες για μικρές τιμές του τ, που φανερώνει μια καλύτερη απόδοση για μικρές θετικές μετατοπίσεις.

6.4.2 Σύγκριση απόδοσης των floating διαγραμμάτων

i. Σύγκριση floating διαγραμμάτων με τα $EWMA\ S^2$ και $EWMA\ JS^2$ διαγράμματα:

Οι ARL τιμές αυτών των των $EWMA\ S^2$ και $EWMA\ JS^2$ για τις βέλτιστες περιπτώσεις των λ και K $ARL_0 = 370$ δίνονται στους Πίνακες 5.4.2 και 5.6.1 αντίστοιχα. Συγκρίνοντας την απόδοση των *floating* διαγραμμάτων (έχοντας $q = 0.3$) με αυτά τα διαγράμματα τύπου EWMA, παρατηρούμε ότι τα *floating* διαγράμματα έχουν μικρότερες ARL_1 τιμές για δεδομένο $ARL_0 = 370$. Επιπλέον, τα *floating* διαγράμματα δείχνουν μεγαλύτερη κυριαρχία για μικρότερες μετατοπίσεις σε σύγκριση με μεγαλύτερες τιμές της τ (Πίνακες 6.3.2 και 6.3.4 έναντι των Πινάκων 5.4.2 και 5.6.1).

Ο Castagliola (2005a) έδειξε ότι το $EWMA\ S^2$ αποδίδει καλύτερα από το *Shewhart* R διάγραμμα για μικρές μετατοπίσεις όπως $\tau \leq 2$. Επίσης έδειξε την κυριαρχία του διαγράμματος του ως προς το $CUSUM$ του Page (1963) και το $CH-EWMA$ των Crowder and Hamilton (1992). Ως εκ τούτου, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η απόδοση των *floating* διαγραμμάτων είναι καλύτερη και από αυτά τα διαγράμματα.

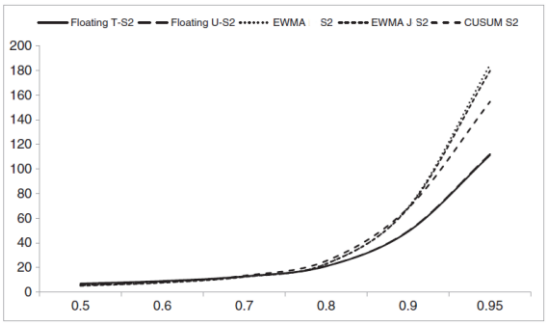
ii. Σύγκριση floating διαγραμμάτων με το $CUSUM-S^2$ διάγραμμα:

Οι ARL τιμές του $CUSUM-S^2$ διαγράμματος με τις βέλτιστες επιλογές των παραμέτρων δίνονται στον Πίνακα 4.5.2. Η απόδοση του $CUSUM-S^2$ διαγράμματος είναι περισσότερο

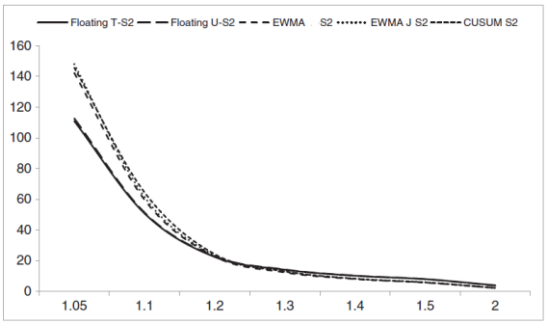
[54] Abbas et al. (2012b)
[55] Abbas et al. (2012b)

ή λιγότερο όμοια με αυτή των $EWMA\ S^2$ και $EWMA\ JS^2$ διαγραμμάτων. Συγκρίνοντας την απόδοση των *floating* διαγραμμάτων (έχοντας $q = 0.3$) με το $CUSUM - S^2$, συμπεραίνουμε ότι τα *floating* διαγράμματα αποδίδουν καλύτερα από το $CUSUM - S^2$ για όλες σχεδόν τιμές της τ (Πίνακες 6.3.2 και 6.3.4 έναντι του Πίνακα 4.5.2).

Εκτός από τους παραπάνω συγκριτικούς πίνακες, τα Σχήματα 6.4.3 και 6.4.4 παρέχουν τις καμπύλες του ARL των διαγραμμάτων για μια μείωση και μια αύξηση, αντίστοιχα, στην διασπορά της διεργασίας.



Σχήμα 6.4.3 ARL καμπύλες των floating $T - S^2$, *floating* $U - S^2$, $EWMA\ S^2$, $EWMA\ JS^2$ και $CUSUM - S^2$ διαγραμμάτων για μείωση στην διασπορά της διεργασίας[56]



Σχήμα 6.4.4 ARL καμπύλες των *floating* $T - S^2$, *floating* $U - S^2$, $EWMA\ S^2$, $EWMA\ JS^2$ και $CUSUM - S^2$ διαγραμμάτων για αύξηση στην διασπορά της διεργασίας[57]

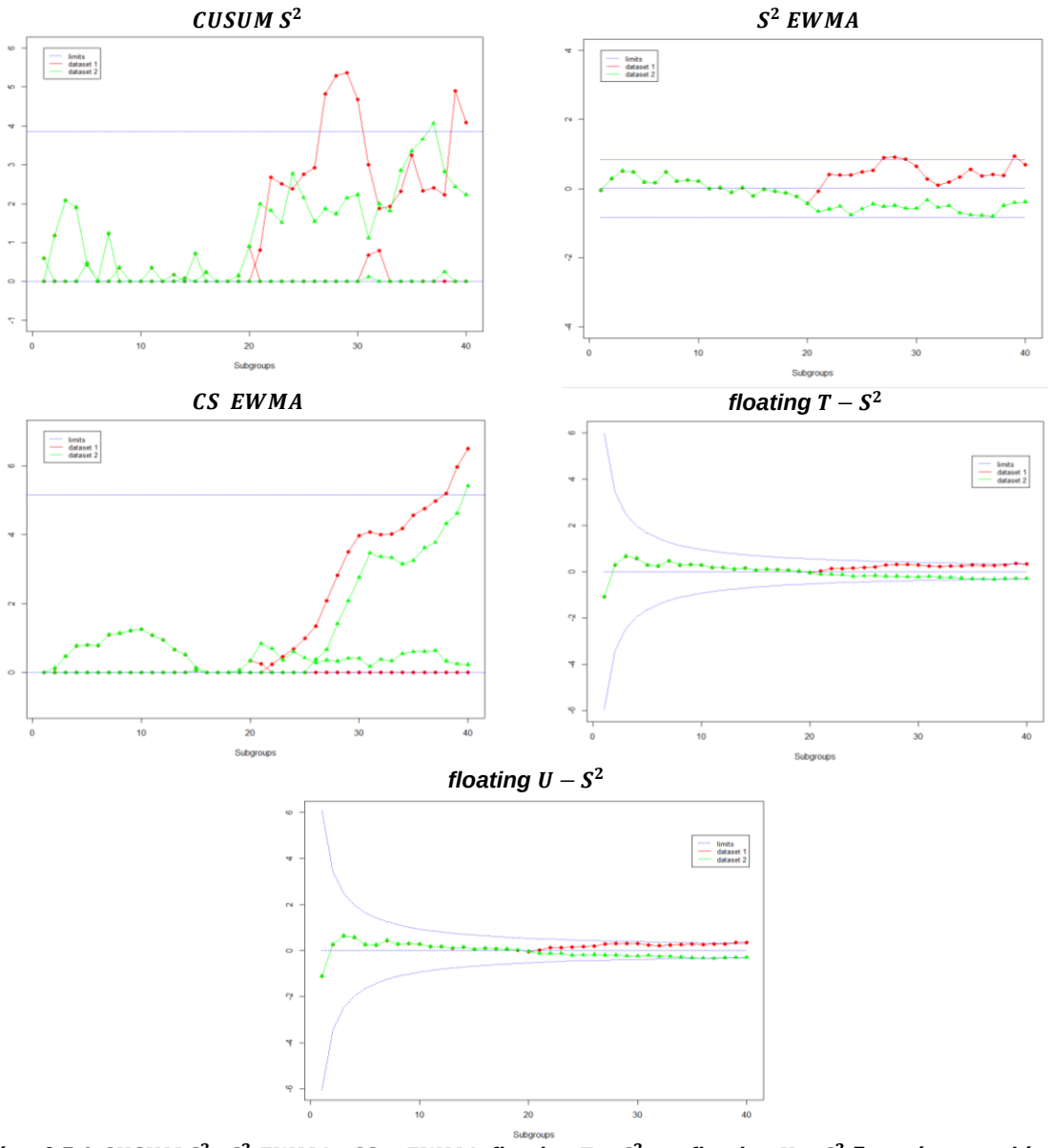
Είναι προφανές, από τα Σχήματα 6.4.3 και 6.4.4, ότι οι καμπύλες του ARL για τα δύο *floating* διαγράμματα είναι στην χαμηλότερη πλευρά των άλλων καμπυλών. Αυτό δείχνει ότι τα *floating* διαγράμματα έχουν μικρότερες ARL_1 τιμές για ένα δεδομένο $ARL_0 = 370$. Επιπλέον και τα δύο *floating* διαγράμματα δείχνουν σχεδόν ίδια απόδοση καθώς οι ARL καμπύλες τους συμπίπτουν και στα δύο Σχήματα.

6.5 Αριθμητικό Παράδειγμα

Στην παρούσα ενότητα παρέχεται μια εφαρμογή των $CS - EWMA$ και *floating* διαγραμμάτων ελέγχου μαζί με τα $CUSUM\ S^2$ και $S^2\ EWMA$ διαγράμματα ελέγχου. Για το σκοπό αυτό, παράγονται δύο σύνολα δεδομένων τα οποία αποτελούνται από 40 δείγματα μεγέθους $n = 5$, το καθένα. Τα πρώτα 20 δείγματα παράγονται από την $N(10,4)$ η οποία αναφέρεται σε μια εντός ελέγχου κατάσταση με $\mu = 10$ και $\sigma_0^2 = 4$. Για το πρώτο σύνολο δεδομένων (*dataset 1*), οι υπόλοιπες 20 παρατηρήσεις παράγονται από την $N(10,5)$, η οποία υποδηλώνει μια θετική μετατόπιση της τυπικής απόκλισης της διεργασίας με $\tau = \sqrt{5}/\sqrt{4} = 1.118$. Παρόμοια για το δεύτερο σύνολο δεδομένων (*dataset 2*), οι υπόλοιπες 20 παρατηρήσεις παράγονται από την $N(10,3)$, η οποία υποδηλώνει μια αρνητική μετατόπιση της τυπικής απόκλισης της διεργασίας με $\tau = \sqrt{3}/\sqrt{4} = 0.866$. Στο Σχήμα 6.5.1

[56] Abbas et al. (2013)
[57] Abbas et al. (2013)

παρουσιάζονται τα CUSUM-S^2 (με $K = 0.5$ και $H = 3.855$) και S^2 $EWMA$ διαγράμματα ελέγχου (με $\lambda = 0.2$ και $L = 2.592$). Στο Σχήμα 6.51 παρουσιάζεται το $CS - EWMA$ (με $\lambda_q = 0.2$, $K_q = 0.5 \Rightarrow K'_q = 0.167$, και $H_q = 15.47 \Rightarrow H'_q = 5.157$), το $T - S^2$ (με $\mu_T(n) = 0.00748$, $\sigma_T(n) = 0.967$, $A_T(n) = -0.8969$, $B_T(n) = 2.3647$, $C_T(n) = 0.5969$, $q = 0.3$ και $K'_T = 6.152$) και το $U - S^2$ (με $\mu_U(n) = 0.0039$, $\sigma_U(n) = 0.9852$, $A_U(n) = 3.5402$, $B_U(n) = 1.5727$, $C_U(n) = -0.2352$, $D_U(n) = 11.312$, $q = 0.3$ και $K'_U = 6.152$).



Σχήμα 6.5.1 ***$CUSUM\ S^2$, $S^2\ EWMA$, $CS - EWMA$, floating $T - S^2$ και floating $U - S^2$*** **διαγράμματα ελέγχου**

Από το Σχήμα 6.5.1 παρατηρούμε ότι

- το $CUSUM\ S^2$ ανιχνεύει ένα εκτός ελέγχου σήμα στο 27ο δείγμα στην αυξανόμενη κατάσταση και στο 37ο δείγμα στην μειούμενη κατάσταση,
- το $S^2\ EWMA$ ανιχνεύει ένα εκτός ελέγχου σήμα στο 27ο δείγμα στην αυξανόμενη κατάσταση ενώ στην μειούμενη περίπτωση δεν δίνει κανένα εκτός ελέγχου σήμα.

- το $CS\,EWMA$ ανιχνεύει ένα εκτός ελέγχου σήμα στο 38ο δείγμα στην αυξανόμενη κατάσταση και στο 40ο δείγμα στην μειούμενη κατάσταση.
- Το *floating* $T - S^2$ ανιχνεύει ένα εκτός ελέγχου σήμα στο 38ο δείγμα στην αυξανόμενη κατάσταση ενώ στην μειούμενη περίπτωση δεν δίνει κανένα εκτός ελέγχου σήμα.
- Το *floating* $U - S^2$ ανιχνεύει ένα εκτός ελέγχου σήμα στο 38ο δείγμα στην αυξανόμενη κατάσταση και στο 37ο δείγμα στην μειούμενη κατάσταση.
- Σε όλα τα παραπάνω διαγράμματα μια αύξηση/μείωση στην μεταβλητότητα της διεργασίας.

Σύνοψη

Στην παρούσα εργασία, αναφέραμε ορισμένες από τις κύριες συνεισφορές και ιδέες και μερικές από τις πιο πρόσφατες εξελίξεις στον τομέα των μονομεταβλητών διαγραμμάτων ελέγχου για την παρακολούθηση της διασποράς της διεργασίας.

Στο Κεφάλαιο 1 περιγράψαμε τα κύρια χαρακτηριστικά του Στατιστικού Ελέγχου Διεργασιών και του κύριου εργαλείου του, δηλαδή το διάγραμμα ελέγχου. Επίσης περιγράψαμε συνοπτικά την εκτίμηση του μέσου και της διασποράς της διεργασίας για την περίπτωση των μεμονωμένων παρατηρήσεων και την περίπτωση των δειγμάτων.

Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάσαμε τα κυριότερα διαγράμματα ελέγχου παρακολούθησης της θέσης της διεργασίας και τα διακρίναμε σε διαγράμματα ελέγχου τύπου *Shewhart*, διαγράμματα ελέγχου τύπου $CUSUM$ και διαγράμματα ελέγχου τύπου $EWMA$. Τα διαγράμματα ελέγχου τύπου *Shewhart* καλούνται επίσης διαγράμματα ελέγχου χωρίς μνήμη ενώ τα διαγράμματα ελέγχου τύπου $CUSUM$ και τύπου $EWMA$ καλούνται διαγράμματα ελέγχου τύπου μνήμης.

Στο Κεφάλαιο 3 περιγράψαμε τα διαγράμματα ελέγχου τύπου *Shewhart* για την παρακολούθηση της μεταβλητότητας της διεργασίας. Κατ' επέκταση, παρουσιάστηκαν τα διαγράμματα ελέγχου που βασίζονται σε στατιστικές συναρτήσεις μεταβλητότητας. Πιο συγκεκριμένα αναφέρθηκαν τα διαγράμματα ελέγχου που βασίζονται στο δειγματικό εύρος, την δειγματική τυπική απόκλιση, την δειγματική διακύμανση, το ενδοτεταρτημοριακό εύρος, την εκτιμήτρια του *Downton*, την μέση διαφορά του Gini, την διάμεση απόλυτη απόκλιση, τις εκτιμήτριες S_n και Q_n και την εκτιμήτρια τ. Παρατηρήθηκε ότι τα διαγράμματα ελέγχου εύρους και τυπικής απόκλισης θα μπορούσαν να αντικατασταθούν από τα υπόλοιπα προαναφερθέντα διαγράμματα ανάλογα την περίπτωση που ερευνάται και να έχουν ικανοποιητική απόδοση.

Στο Κεφάλαιο 4 περιγράψαμε τα κύρια διαγράμματα ελέγχου τύπου $CUSUM$ που βασίζονται κυρίως στο εύρος, την διακύμανση και την τυπική απόκλιση για την παρακολούθηση της μεταβλητότητας της διεργασίας. Ήτοι, αναφερθήκαμε στο $Scale\ CUSUM$, στο $CP\ CUSUM$, στο $CUSUM\ \ lnS^2$, στο $CUSUM\ \ S^2$, στο κλασσικό $CS-CUSUM\ R$ και τα $CS-CUSUM\ R$ που βασίζονται στην ακραία δειγματοληψία καταταγμένων συνόλων (*Extreme RSS*, $ERSS$) (δηλαδή το $CS-CUSUM\ R\ ERSS$) και την Διπλή ακραία δειγματοληψία καταταγμένων συνόλων (*Double Extreme RSS*, $DERSS$) (δηλαδή το $CS-CUSUM\ R\ DERSS$). Παρατηρήθηκε ότι ο συνδυασμός των $CUSUM\ R$ και S διαγραμμάτων με τα *Shewhart* R και S διαγράμματα είναι αποδοτικότερος από τα *Shewhart* R και S στην ανίχνευση μετατοπίσεων. Επιπρόσθετα, η χρήση των $ERSS$ και $DERSS$ καθιστα τα $CS-CUSUM\ R$ και $CS-CUSUM\ S$ διαγράμματα ακόμη πιο αποδοτικά.

Στο Κεφάλαιο 5 περιγράψαμε διαγράμματα ελέγχου τύπου $EWMA$ για την παρακολούθηση της μεταβλητότητας της διεργασίας, που βασίζονται κυρίως στο εύρος, την διακύμανση και την τυπική απόκλιση για την παρακολούθηση της μεταβλητότητας της διεργασίας. Συγκεκριμένα, αναφερθήκαμε στο $EWRMS$, στο $CH - EWMA$, στο $S^2\ EWMA$, στο $EWMA\ R$, στο $EWMA\ S$, στο $SJ\ EWMA$, στο $EWMA\ JS^2$ και στα $HHW1$ και $HHW2\ \ EWMA$ διαγράμματα ελέγχου. Επίσης αναφέραμε και τα MA διαγράμματα ελέγχου που βασίζονται στην εκτιμήτρια του *Downton* και στην μέση διαφορά του *Gini*. Τα διαγράμματα ελέγχου τύπου $EWMA$ είναι αρκετά αποδοτικά στην ανίχνευση των μέτριων και μικρών μετατοπίσεων στην μεταβλητότητα της διεργασίας.

Στο Κεφάλαιο 6 περιγράψαμε τα εναλλακτικά διαγράμματα ελέγχου τύπου μνήμης για την παρακολούθηση της μεταβλητότητας της διεργασίας. Συγκεκριμένα περιγράψαμε το $CS - EWMA$ διάγραμμα, που αποτελεί συνδυασμό των $CUSUM$ και $EWMA$ διαγραμμάτων, και τα *floating* $T - S^2$ και *floating* $U - S^2$ διαγράμματα. Ο συνδυασμός των $CUSUM$ και $EWMA$ διαγραμμάτων σε ένα διάγραμμα για την παρακολούθηση της μεταβλητότητας της διεργασίας έχει σαν αποτέλεσμα την αποτελεσματικότερη ανίχνευση μετατοπίσεων από τα μεμονωμένα $CUSUM$ και $EWMA$ διαγράμματα που αναφέραμε σε προηγούμενα κεφάλαια. Επίσης τα *floating* $T - S^2$ διάγραμμα είναι ικανοποιητικοί ανταγωνιστές των $CUSUM\ S^2$ και $EWMA\ S^2$ διαγραμμάτων για την παρακολούθηση της μεταβλητότητας της διεργασίας.

Αξίζει να σημειωθεί ότι τα διαγράμματα ελέγχου για την παρακολούθηση της θέσης της διεργασίας έχουν μελετηθεί εκτενώς στην σύγχρονη βιβλιογραφία. Στην παρούσα εργασία αναφερθήκαμε κυρίως στα μονομεταβλητά διαγράμματα ελέγχου που έχουν σχεδιαστεί για την παρακολούθηση της μεταβλητότητας της διεργασίας μιας συνεχούς διαδικασίας. Υπάρχουν αρκετές δυνατότητες να γίνουν μελλοντικές έρευνες στην κατασκευή διαγραμμάτων ελέγχου που χρησιμοποιούνται για την παρακολούθηση τόσο της θέσης όσο και της μεταβλητότητας της διεργασίας από κοινού.

Αναφερθήκαμε σε διαγράμματα ελέγχου που προκύπτουν από τον συνδυασμό των *Shewhart* R και S διαγραμμάτων και των $CUSUM$ διαγραμμάτων, που καθίστανται αποδοτικά στην ανίχνευση μικρών και μεγάλων μετατοπίσεων. Θα μπορούσε μελλοντικά να ερευνηθεί η κατασκευή διαγραμμάτων ελέγχου που συνδυάζουν τα $CUSUM$ με άλλα διαγράμματα τύπου *Shewhart*. Επίσης αναφερθήκαμε σε διαγράμματα τύπου $CUSUM$ που χρησιμοποιούν μεθόδους δειγματοληψίας. Ως εκ τούτου, θα μπορούσε να επεκταθεί αυτή η μελέτη και στην χρήση άλλων μεθόδων δειγματοληψίας τόσο στα $CUSUM$ όσο και στα *Shewhart* και $EWMA$ διαγράμματα.

Μελετήσαμε διαγράμματα ελέγχου τύπου μνήμης που βασίζονται σε λογαριθμικούς μετασχηματισμούς τριών και τεσσάρων παραμέτρων. Κατ' επέκταση, πρέπει να γίνει

μελλοντική έρευνα στην χρήση εναλλακτικών μετασχηματισμών για την κατασκευή διαγραμμάτων ελέγχου διασποράς και να συγκριθούν με τα ήδη υπάρχοντα στην δυνατότητα ανίχνευσης μετατοπίσεων της μεταβλητότητας.

Αναφερθήκαμε κυρίως στα παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου για την παρακολούθηση της μεταβλητότητας της διεργασίας δεδομένου ότι πολύ λίγα μη παραμετρικά διαγράμματα (κυρίως διαγράμματα τύπου *Shewhart*) είναι διαθέσιμα για την παρακολούθηση της διασποράς. Ως εκ τούτου, αξίζει να μελετηθεί η δυνατότητα κατασκευής μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου τύπου μνήμης.

Παραρτήματα

Ι. Σταθερές για την ανάπτυξη διαγραμμάτων ελέγχου τύπου Shewhart

Πίνακας Ι.1 Σταθερές για την ανάπτυξη διαγραμμάτων ελέγχου Shewhart

Για $n > 30$

n	A	A_2	A_3	d_2	d_3	c_4	D_1	D_2	D_3	D_4	B_3	B_4	B_5	B_6
2	2.1213	1.88	2.6587	1.1284	0.8525	0.7979	0.	3.6859	0.	3.2665	0.	3.2665	0.	2.6063
3	1.7321	1.0233	1.9544	1.6926	0.8884	0.8862	0.	4.3577	0.	2.5746	0.	2.5682	0.	2.276
4	1.5	0.7286	1.6281	2.0588	0.8798	0.9213	0.	4.6982	0.	2.2821	0.	2.266	0.	2.0877
5	1.3416	0.5768	1.4273	2.3259	0.8641	0.94	0.	4.9182	0.	2.1145	0.	2.089	0.	1.9636
6	1.2247	0.4832	1.2871	2.5344	0.848	0.9515	0.	5.0785	0.	2.0038	0.0304	1.9696	0.0289	1.8742
7	1.1339	0.4193	1.1819	2.7044	0.8332	0.9594	0.2047	5.204	0.0757	1.9243	0.1177	1.8823	0.1129	1.8058
8	1.0607	0.3725	1.0991	2.8472	0.8198	0.965	0.3877	5.3067	0.1362	1.8638	0.1851	1.8149	0.1786	1.7514
9	1.	0.3367	1.0317	2.97	0.8078	0.9693	0.5465	5.3935	0.184	1.816	0.2391	1.7609	0.2318	1.7068
10	0.9487	0.3083	0.9754	3.0775	0.7971	0.9727	0.6864	5.4687	0.223	1.777	0.2837	1.7163	0.2759	1.6694
11	0.9045	0.2851	0.9274	3.1729	0.7873	0.9754	0.8109	5.5348	0.2556	1.7444	0.3213	1.6787	0.3134	1.6373
12	0.866	0.2658	0.8859	3.2585	0.7785	0.9776	0.923	5.5939	0.2833	1.7167	0.3535	1.6465	0.3456	1.6095
13	0.8321	0.2494	0.8495	3.336	0.7704	0.9794	1.0247	5.6472	0.3072	1.6928	0.3816	1.6184	0.3737	1.5851
14	0.8018	0.2354	0.8173	3.4068	0.763	0.981	1.1177	5.6958	0.3281	1.6719	0.4062	1.5938	0.3985	1.5634
15	0.7746	0.2231	0.7885	3.4718	0.7562	0.9823	1.2031	5.7404	0.3465	1.6535	0.4282	1.5718	0.4206	1.544
16	0.75	0.2123	0.7626	3.532	0.7499	0.9835	1.2823	5.7817	0.363	1.637	0.4479	1.5521	0.4405	1.5265
17	0.7276	0.2028	0.7391	3.5879	0.7441	0.9845	1.3557	5.82	0.3779	1.6221	0.4657	1.5343	0.4585	1.5106
18	0.7071	0.1943	0.7176	3.6401	0.7386	0.9854	1.4243	5.8558	0.3913	1.6087	0.4818	1.5182	0.4748	1.496
19	0.6882	0.1866	0.6979	3.689	0.7335	0.9862	1.4885	5.8894	0.4035	1.5965	0.4966	1.5034	0.4898	1.4826
20	0.6708	0.1796	0.6797	3.7349	0.7287	0.9869	1.5489	5.921	0.4147	1.5853	0.5102	1.4898	0.5036	1.4703
21	0.6547	0.1733	0.6629	3.7783	0.7242	0.9876	1.6058	5.9509	0.425	1.575	0.5228	1.4772	0.5163	1.4589
22	0.6396	0.1675	0.6473	3.8194	0.7199	0.9882	1.6596	5.9791	0.4345	1.5655	0.5344	1.4656	0.5281	1.4483
23	0.6255	0.1621	0.6327	3.8583	0.7159	0.9887	1.7107	6.006	0.4434	1.5566	0.5452	1.4548	0.5391	1.4383
24	0.6124	0.1572	0.6191	3.8953	0.7121	0.9892	1.7591	6.0316	0.4516	1.5484	0.5553	1.4447	0.5493	1.4291
25	0.6	0.1526	0.6063	3.9306	0.7084	0.9896	1.8053	6.056	0.4593	1.5407	0.5648	1.4352	0.5589	1.4203
26	0.5883	0.1484	0.5943	3.9643	0.705	0.9901	1.8494	6.0793	0.4665	1.5335	0.5737	1.4263	0.568	1.4121
27	0.5774	0.1445	0.5829	3.9965	0.7017	0.9904	1.8914	6.1016	0.4733	1.5267	0.582	1.418	0.5765	1.4044
28	0.5669	0.1408	0.5722	4.0274	0.6986	0.9908	1.9318	6.1231	0.4797	1.5203	0.5899	1.4101	0.5845	1.3971
29	0.5571	0.1373	0.5621	4.057	0.6955	0.9911	1.9704	6.1437	0.4857	1.5143	0.5974	1.4026	0.592	1.3902
30	0.5477	0.1341	0.5525	4.0855	0.6927	0.9914	2.0075	6.1635	0.4914	1.5086	0.6044	1.3956	0.5992	1.3836

$$A_1 = \frac{3}{\sqrt{n}} \qquad A_3 = \frac{3}{c_4\sqrt{n}} \qquad c_4 \cong \frac{4(n-1)}{4n-3} \qquad B_3 = 1 - \frac{3}{c_4\sqrt{2(n-1)}} \qquad B_4 = 1 + \frac{3}{c_4\sqrt{2(n-1)}} \qquad B_5 = c_4 - \frac{3}{\sqrt{2(n-1)}} \qquad B_6 = c_4 + \frac{3}{\sqrt{2(n-1)}}$$

II. Σταθερές για την κατασκευή των διαγραμμάτων τύπου Shewhart για την παρακολούθηση της διασποράς της διεργασίας

i. Σταθερές για τα G, R και S διαγράμματα ελέγχου

Πίνακας II.1 Μέσοι και Τυπικά σφάλματα των σταθερών των G, R και S διαγραμμάτων[58]

n	Σταθερές για τα μέσα επίπεδα		Σταθερές για το τυπικό σφάλμα		
	d_2	c_4	d_3	$\sqrt{1-c_4^2}$	b_3
2	1.12768 (.00048)	0.79768 (.00041)	0.85424 (.00046)	0.60311 (.00032)	0.72936 (.00012)
3	1.69281 (.00028)	0.88639 (.00034)	0.88910 (.00027)	0.46370 (.00038)	0.52628 (.00035)
4	2.05674 (.00009)	0.92013 (.00010)	0.88002 (.00035)	0.38894 (.00021)	0.42478 (.00019)
5	2.32675 (.00010)	0.94084 (.00014)	0.86276 (.00006)	0.34095 (.00018)	0.36518 (.00021)
6	2.55113 (.00041)	0.95196 (.00021)	0.84624 (.00012)	0.30528 (.00017)	0.32343 (.00022)
7	2.70434 (.00071)	0.95602 (.00011)	0.83328 (.00041)	0.28202 (.00008)	0.29655 (.00028)
8	2.84671 (.00011)	0.95913 (.00025)	0.81930 (.00022)	0.26181 (.00012)	0.27344 (.00042)
9	2.96843 (.00024)	0.96857 (.00032)	0.80966 (.00011)	0.24577 (.00033)	0.25562 (.00027)
10	3.07445 (.00031)	0.97205 (.00007)	0.79621 (.00019)	0.23214 (.00023)	0.24100 (.00018)
11	3.17322 (.00023)	0.97614 (.00040)	0.78777 (.00032)	0.22166 (.00025)	0.22930 (.00039)
12	3.22031 (.00018)	0.97852 (.00061)	0.78012 (.00011)	0.21205 (.00017)	0.22004 (.00007)
13	3.33573 (.00041)	0.97954 (.00034)	0.77250 (.00066)	0.20266 (.000021)	0.20899 (.00015)
14	3.40658 (.00071)	0.98083 (.00053)	0.76239 (.00049)	0.19391 (.00010)	0.19974 (.00034)
15	3.47335 (.00023)	0.98265 (.00011)	0.75611 (.00048)	0.18728 (.00016)	0.19205 (.00037)
16	3.53260 (.00017)	0.98309 (.00082)	0.74696 (.00067)	0.18023 (.00011)	0.18427 (.00051)
17	3.58549 (.00006)	0.98432 (.00036)	0.74161 (.00010)	0.17482 (.00031)	0.17955 (.00011)
18	3.64165 (.00013)	0.98580 (.00010)	0.73702 (.00023)	0.16985 (.00052)	0.17410 (.00020)
19	3.68893 (.00052)	0.98648 (.00061)	0.73417 (.00038)	0.16575 (.00024)	0.16986 (.00011)
20	3.73828 (.00012)	0.98767 (.00009)	0.72898 (.00024)	0.16090 (.00019)	0.16459 (.00035)

ii. Σταθερές για το Q διάγραμμα ελέγχου

Πίνακας II.2 Μέσοι και τυπικά σφάλματα για το Q διάγραμμα ελέγχου[59]

n	Παράγοντες για τα μέσα επίπεδα q_1	Παράγοντες για τα μέσα επίπεδα q_2
2	0.83595 (.00057)	0.63325 (.00023)
3	1.25502 (.00032)	0.63345 (.00040)
4	1.23871 (.00018)	0.51239 (.00033)
5	1.22908 (.00025)	0.44887 (.00048)
6	1.17986 (.00063)	0.41432 (.00012)
7	1.12292 (.00052)	0.39823 (.00058)
8	1.11997 (.00016)	0.38070 (.00034)
9	1.10788 (.00029)	0.35757 (.00021)
10	1.09676 (.00074)	0.34438 (.00060)
11	1.08074 (.00081)	0.33274 (.00032)
12	1.07845 (.00036)	0.31395 (.00010)
13	1.07226 (.00055)	0.29982 (.00035)
14	1.06889 (.00047)	0.28989 (.00057)
15	1.06070 (.00035)	0.27891 (.00027)
16	1.05854 (.00024)	0.26894 (.00018)
17	1.05565 (.00011)	0.25983 (.00043)
18	1.05191 (.00045)	0.25016 (.00061)
19	1.04723 (.00028)	0.24727 (.00022)
20	1.04301 (.00030)	0.24117 (.00073)
21	1.03856 (.00041)	0.23815 (.00030)
22	1.03634 (.00014)	0.23199 (.00019)
23	1.03189 (.00053)	0.22027 (.00036)
24	1.02967 (.00017)	0.21130 (.00042)
25	1.02596 (.00061)	0.20897 (.00024)

[58] Riaz and Saghirr (2007)
[59] Riaz (2008)

iii. Σταθερές για το MAD διάγραμμα ελέγχου

Πίνακας II.3 Οι σταθερές των ορίων ελέγχου για το εύρωστο μονομεταβλητό MAD διάγραμμα ελέγχου[60]

n	b_n	c_4^*	B_5^*	B_6^*
2	1.196	0.954	0.000	3.117
3	1.495	1.325	0.000	3.403
4	1.363	1.256	0.000	2.846
5	1.206	1.134	0.000	2.369
6	1.200	1.142	0.035	2.249
7	1.140	1.094	0.129	2.059
8	1.129	1.089	0.202	1.977
9	1.107	1.073	0.257	1.890
10	1.087	1.057	0.300	1.814
11	1.078	1.051	0.337	1.765
12	1.071	1.047	0.371	1.724
13	1.066	1.044	0.399	1.690
14	1.061	1.041	0.423	1.658
15	1.056	1.037	0.445	1.630
16	1.053	1.036	0.463	1.607
17	1.049	1.033	0.480	1.585
18	1.047	1.032	0.497	1.566
19	1.044	1.030	0.512	1.548
20	1.042	1.028	0.525	1.532
21	1.040	1.027	0.537	1.517
22	1.038	1.026	0.548	1.503
23	1.036	1.024	0.558	1.490
24	1.034	1.023	0.568	1.478
25	1.033	1.022	0.577	1.467

iv. Σταθερές για τα S_n και Q_n και τ διαγράμματα ελέγχου

Πίνακας II.4 Οι σταθερές των ορίων ελέγχου για τα S_n και Q_n και τ Διαγράμματα Ελέγχου[61]

n	d_n	c_4^S	B_{SL}^*	B_{SU}^*	e_n	c_4^Q	B_{QL}^*	B_{QU}^*	k_n	c_4^τ	$B_{\tau L}^*$	$B_{\tau U}^*$
2	1.175	0.937	0.000	3.062	1.192	0.951	0.000	3.108	1.192	0.951	0.000	3.102
3	1.482	1.313	0.000	3.372	1.491	1.322	0.000	3.393	1.373	1.217	0.000	3.125
4	1.349	1.243	0.000	2.815	1.355	1.248	0.000	2.827	1.241	1.144	0.000	2.590
5	1.244	1.169	0.000	2.439	1.275	1.199	0.000	2.501	1.178	1.108	0.000	2.310
6	1.197	1.139	0.036	2.241	1.259	1.198	0.038	2.358	1.143	1.088	0.035	2.141
7	1.156	1.109	0.134	2.084	1.211	1.162	0.141	2.184	1.121	1.076	0.130	2.022
8	1.130	1.090	0.196	1.984	1.173	1.132	0.203	2.061	1.111	1.071	0.192	1.950
9	1.123	1.089	0.260	1.917	1.134	1.099	0.263	1.936	1.103	1.069	0.255	1.883
10	1.097	1.067	0.299	1.834	1.101	1.071	0.300	1.841	1.090	1.060	0.297	1.822
11	1.096	1.068	0.337	1.799	1.099	1.071	0.338	1.804	1.081	1.054	0.333	1.775
12	1.076	1.052	0.372	1.731	1.078	1.054	0.373	1.735	1.074	1.050	0.372	1.728
13	1.075	1.052	0.401	1.702	1.073	1.051	0.400	1.701	1.072	1.050	0.400	1.700
14	1.066	1.046	0.428	1.664	1.065	1.045	0.428	1.663	1.065	1.045	0.428	1.663
15	1.059	1.039	0.441	1.639	1.059	1.040	0.448	1.640	1.064	1.045	0.442	1.647
16	1.056	1.039	0.472	1.606	1.056	1.039	0.472	1.606	1.064	1.045	0.475	1.617
17	1.047	1.031	0.485	1.578	1.047	1.031	0.485	1.578	1.060	1.044	0.490	1.597
18	1.045	1.030	0.501	1.559	1.046	1.031	0.502	1.560	1.057	1.042	0.507	1.577
19	1.040	1.026	0.817	1.535	1.042	1.028	0.518	1.538	1.053	1.048	0.523	1.554
20	1.039	1.025	0.817	1.535	1.039	1.025	0.516	1.534	1.051	1.037	0.523	1.552
21	1.039	1.026	0.535	1.517	1.036	1.023	0.533	1.514	1.048	1.035	0.539	1.530
22	1.038	1.026	0.554	1.497	1.035	1.023	0.552	1.494	1.047	1.035	0.559	1.512
23	1.036	1.024	0.552	1.496	1.034	1.022	0.551	1.493	1.045	1.033	0.557	1.509
24	1.033	1.022	0.571	1.473	1.032	1.021	0.571	1.472	1.044	1.032	0.577	1.489
25	1.033	1.022	0.571	1.473	1.030	1.019	0.569	1.469	1.043	1.032	0.577	1.488

[60] Abu-Shawiesh (2008)
[61] Celik (2015)

v. Σταθερές για τα IRC και ISC διαγράμματα ελέγχου

Πίνακας II.5 Τιμές των σταθερών D_U^*, D_L^*, D_1^*, D_2^*, D_3^* και D_4^* για το IRC διάγραμμα[62]

n	D_1^*	D_2^*	D_L^*	D_U^*	D_3^*	D_4^*
2	0.0024	4.5477	0.0047	4.2502	0.0021	4.0316
3	0.0701	4.9642	0.0990	4.6858	0.0414	2.9322
4	0.2207	5.2132	0.2784	4.9453	0.1072	2.5319
5	0.3967	5.3906	0.4735	5.1298	0.1706	2.3175
6	0.5692	5.5280	0.6576	5.2725	0.2246	2.1815
7	0.7290	5.6398	0.8246	5.3885	0.2696	2.0857
8	0.8746	5.7340	0.9746	5.4861	0.3072	2.0141
9	1.0066	5.8152	1.1094	5.5702	0.3389	1.9580
10	1.1265	5.8863	1.2311	5.6439	0.3660	1.9124
11	1.2359	5.9499	1.3414	5.7095	0.3895	1.8752
12	1.3361	6.0070	1.4422	5.7686	0.4101	1.8438
13	1.4283	6.0589	1.5346	5.8223	0.4281	1.8162
14	1.5135	6.1065	1.6199	5.8714	0.4442	1.7923
15	1.5926	6.1504	1.6988	5.9167	0.4587	1.7714
20	1.9182	6.3293	2.0228	6.1013	0.5136	1.6946
25	2.1645	6.4641	2.2669	6.2401	0.5506	1.6444

Σημείωση: D_L^* είναι η σταθερά του μονόπλευρου LCL και D_U^* είναι η σταθερά του μονόπλευρου UCL. Το σφάλμα τύπου I είναι 0.0027 ($ARL_0 = 370$).

Πίνακας II.6 Τιμές των σταθερών D_U^*, D_L^*, D_1^*, D_2^*, D_3^* και D_4^* για το IRC διάγραμμα[63]

n	D_1^*	D_2^*	D_L^*	D_U^*	D_3^*	D_4^*
2	0.0045	4.2843	0.0088	3.9743	0.0040	3.7981
3	0.0953	4.7177	0.1348	4.4285	0.0563	2.7866
4	0.2713	4.9759	0.3427	4.6982	0.1318	2.4167
5	0.4642	5.1596	0.5549	4.8896	0.1996	2.2182
6	0.6470	5.3017	0.7489	5.0374	0.2553	2.0922
7	0.8133	5.4172	0.9218	5.1575	0.3008	2.0034
8	0.9628	5.5144	1.0752	5.2583	0.3382	1.9369
9	1.0973	5.5981	1.2121	5.3452	0.3695	1.8849
10	1.2188	5.6716	1.3349	5.4213	0.3960	1.8426
11	1.3291	5.7369	1.4459	5.4890	0.4189	1.8080
12	1.4298	5.7958	1.5469	5.5500	0.4389	1.7789
13	1.5222	5.8492	1.6393	5.6053	0.4563	1.7534
14	1.6074	5.8982	1.7244	5.6559	0.4718	1.7312
15	1.6864	5.9433	1.8031	5.7026	0.4857	1.7118
20	2.0107	6.1272	2.1250	5.8926	0.5383	1.6405
25	2.2550	6.2656	2.3667	6.0353	0.5736	1.5939

Σημείωση: D_L^* είναι η σταθερά του μονόπλευρου LCL και D_U^* είναι η σταθερά του μονόπλευρου UCL. Το σφάλμα τύπου I είναι 0.0005 ($ARL_0 = 200$)

[62] Zhang (2014)
[63] Zhang (2014)

Πίνακας II.7 Τιμές των σταθερών B_U^*, B_L^*, B_3^*, B_4^*, B_5^* και B_6^* για το ISC διάγραμμα[64]

n	B_5^*	B_6^*	B_L^*	B_U^*	B_3^*	B_4^*
2	0.0017	3.2049	0.0033	2.9997	0.0021	4.0167
3	0.0368	2.5704	0.0520	2.4318	0.0415	2.9005
4	0.0996	2.2825	0.1256	2.1722	0.1081	2.4775
5	0.1627	2.1094	0.1941	2.0155	0.1731	2.2440
6	0.2183	1.9910	0.2520	1.9081	0.2294	2.0925
7	0.2657	1.9034	0.3003	1.8285	0.2769	1.9839
8	0.3063	1.8353	0.3410	1.7666	0.3174	1.9019
9	0.3412	1.7804	0.3756	1.7166	0.3520	1.8368
10	0.3715	1.7350	0.4054	1.6752	0.3819	1.7837
11	0.3981	1.6966	0.4314	1.6401	0.4081	1.7394
12	0.4216	1.6635	0.4543	1.6100	0.4313	1.7016
13	0.4426	1.6347	0.4746	1.5837	0.4519	1.6691
14	0.4615	1.6094	0.4929	1.5605	0.4704	1.6406
15	0.4786	1.5868	0.5094	1.5398	0.4872	1.6154
20	0.5450	1.5021	0.5730	1.4624	0.5522	1.5220
25	0.5911	1.4457	0.6168	1.4107	0.5973	1.4609

Σημείωση: B_L^* είναι η σταθερά του μονόπλευρου LCL και B_U^* είναι η σταθερά του μονόπλευρου UCL. Το σφάλμα τύπου I είναι 0.0027 ($ARL_0 = 370$)

Πίνακας II.8 Τιμές των σταθερών B_U^*, B_L^*, B_3^*, B_4^*, B_5^* και B_6^* για το ISC διάγραμμα[65]

n	B_5^*	B_6^*	B_L^*	B_U^*	B_3^*	B_4^*
2	0.0032	3.0234	0.0062	2.8071	0.0040	3.7892
3	0.0501	2.4478	0.0707	2.3019	0.0565	2.7621
4	0.1224	2.1849	0.1546	2.0687	0.1329	2.3715
5	0.1904	2.0264	0.2274	1.9275	0.2026	2.1557
6	0.2480	1.9176	0.2869	1.8303	0.2606	2.0153
7	0.2963	1.8371	0.3355	1.7582	0.3088	1.9148
8	0.3369	1.7745	0.3759	1.7021	0.3491	1.8389
9	0.3716	1.7239	0.4099	1.6567	0.3834	1.7785
10	0.4015	1.6821	0.4390	1.6190	0.4128	1.7293
11	0.4275	1.6466	0.4643	1.5871	0.4383	1.6881
12	0.4505	1.6161	0.4864	1.5597	0.4608	1.6531
13	0.4710	1.5896	0.5061	1.5357	0.4809	1.6230
14	0.4893	1.5661	0.5236	1.5146	0.4988	1.5964
15	0.5059	1.5452	0.5394	1.4957	0.5150	1.5730
20	0.5698	1.4670	0.6001	1.4251	0.5774	1.4865
25	0.6139	1.4148	0.6418	1.3778	0.6204	1.4297

Σημείωση B_L^* είναι η σταθερά του μονόπλευρου LCL και B_U^* είναι η σταθερά του μονόπλευρου UCL. Το σφάλμα τύπου I είναι 0.005 ($ARL_0 = 200$)

[64] Zhang(2014)
[65] Zhang (2014)

III. Σταθερές για τα διαγράμματα τύπου μνήμης

Πίνακας III.1 Σταθερές για το R διάγραμμα ελέγχου κανονικών διατεταγμένων στατιστικών συνάρτήσεων βασει των ERSS και DERSS[66]

Τεχνικές Δειγματοληψίας	n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ERSS	d_2	1.327	1.929	2.850	3.090	3.640	3.779	4.139	4.236	4.498
	d_3	0.937	0.907	0.861	0.819	0.754	0.736	0.695	0.684	0.657
DERSS	d_2	1.416	2.023	3.532	3.739	4.558	4.675	5.190	5.271	5.639
	d_3	0.935	0.865	0.768	0.739	0.651	0.639	0.592	0.586	0.556

Πίνακας III.2 Σταθερές για toS διάγραμμα ελέγχου κανονικών διατεταγμένων στατιστικών συνάρτήσεων βασει των ERSS και DERSS[67]

Τεχνικές Δειγματοληψίας	n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ERSS	c_4	0.817	0.906	0.958	0.969	0.982	0.985	0.99	0.991	0.993
	c_5	0.577	0.422	0.288	0.248	0.191	0.174	0.144	0.136	0.117
DERSS	c_4	0.834	0.921	0.979	0.984	0.993	0.994	0.996	0.997	0.998
	c_5	0.551	0.389	0.204	0.180	0.119	0.112	0.085	0.082	0.067

Πίνακας III.3 Διάφορες τιμές των $E(T_j), \sigma(T_j), A_T(n), B_T(n)$ και $C_T(n)$ για $n = 3, \dots, 15$ για τα CUSUM S^2, S^2 EWMA και Floating T-S^2 διαγράμματα με βάση τον μετασχηματισμό τριών παραμέτρων S_B του Johnson[68]

n	$E(T_j)$	$\sigma(T_j)$	$A_T(n)$	$B_T(n)$	$C_T(n)$	Z_0
3	0.02472	0.9165	-0.6627	1.8136	0.6777	0.276
4	0.01266	0.9502	-0.7882	2.1089	0.6261	0.237
5	0.00748	0.9670	-0.8969	2.3647	0.5979	0.211
6	0.00485	0.9765	-0.9940	2.5941	0.5801	0.193
7	0.00335	0.9825	-1.0827	2.8042	0.5678	0.178
8	0.00243	0.9864	-1.1647	2.9992	0.5588	0.167
9	0.00182	0.9892	-1.2413	3.1820	0.5519	0.157
10	0.00141	0.9912	-1.3135	3.3548	0.5465	0.149
11	0.00112	0.9927	-1.3820	3.5189	0.5421	0.142
12	0.00090	0.9938	-1.4473	3.6757	0.5384	0.136
13	0.00074	0.9947	-1.5097	3.8260	0.5354	0.131
14	0.00062	0.9955	-1.5697	3.9705	0.5327	0.126
15	0.00052	0.9960	-1.6275	4.1100	0.5305	0.122

Πίνακας III.4 Διάφορες τιμές των $E(T_j), \sigma(T_j), A_R(n), B_R(n)$ και $C_R(n)$ για $n = 3, \dots, 15$ για το EWMA R διάγραμμα[69]

n	$E(T_j)$	$\sigma(T_j)$	$A_R(n)$	$B_R(n)$	$C_R(n)$	Z_0
3	0.00096	0.9915	-6.7191	4.7655	2.4944	0.105
4	0.00036	0.9961	-9.4200	5.8364	3.0385	0.086
5	0.00019	0.9977	-11.1940	6.5336	3.2866	0.077
6	0.00012	0.9985	-12.3056	6.9804	3.3549	0.072
7	0.00009	0.9989	-12.9778	7.2649	3.3202	0.069
8	0.00007	0.9991	-13.3653	7.4446	3.2286	0.067
9	0.00005	0.9993	-13.5689	7.5559	3.1072	0.066
10	0.00004	0.9994	-13.6531	7.6220	2.9715	0.066
11	0.00004	0.9995	-13.6595	7.6576	2.8304	0.065
12	0.00003	0.9995	-13.6151	7.6726	2.6892	0.065
13	0.00003	0.9996	-13.56378	7.6736	2.5508	0.065
14	0.00003	0.9996	-13.4393	7.6647	2.4167	0.065
15	0.00002	0.9997	-13.3276	7.6492	2.2879	0.065

[66] Abujiya et al. (2014)
[67] Abujiya et al. (2015a)
[68] Castagliola (2005a)
[69] Castagliola (2005b)

Πίνακας III.5 Διάφορες τιμές των $E(T_j), \sigma(T_j)$, $A_S(n), B_S(n)$ και ,$C_S(n)$ για $n = 3, \dots, 15$ για το EWMA S διάγραμμα[70]

n	$E(T_j)$	$\sigma(T_j)$	$A_S(n)$	$B_S(n)$	$C_S(n)$	Z_0
3	0.00092	0.9917	-3.8134	4.8729	1.3474	0.1026
4	0.00030	0.9965	-5.4669	6.2696	1.5009	0.0797
5	0.00014	0.9981	-6.8941	7.4727	1.5984	0.0669
6	0.00007	0.9988	-8.1528	8.5370	1.6650	0.0586
7	0.00004	0.9992	-9.2839	9.4980	1.7131	0.0526
8	0.00003	0.9994	-10.3158	10.3789	1.7493	0.0482
9	0.00002	0.9996	-11.2684	11.1958	1.7776	0.0447
10	0.00001	0.9997	-12.1562	11.9605	1.8002	0.0418
11	0.00001	0.9997	-12.9901	12.6813	1.8186	0.0394
12	0.00001	0.9998	-13.7783	13.3650	1.8384	0.0374
13	0.00001	0.9998	-14.5272	14.0164	1.8469	0.0357
14	0.00001	0.9998	-15.2418	14.6397	1.8581	0.0342
15	0.00000	0.9999	-15.9264	15.2382	1.8677	0.0328

Πίνακας III.6 Διάφορες τιμές των $E(U_j), \sigma(U_j), A_U(n), B_U(n), C_U(n)$ και $D_U(n)$ για $n = 3, \dots, 15$ για τα EWMA-JS^2 και Floating U-S^2 διαγράμματα με βάση τον μετασχηματισμό τεσσάρων παραμέτρων[71]

n	$E(T_j)$	$\sigma(T_j)$	$A_U(n)$	$B_U(n)$	$C_U(n)$	$D_U(n)$
3	0.0184	0.9475	3.1936	1.1952	-0.2588	15.077
4	0.0078	0.9739	3.3657	1.3983	-0.2438	12.591
5	0.0039	0.9852	3.5402	1.5727	-0.2352	11.312
6	0.0022	0.9908	3.7111	1.7281	-0.2295	10.530
7	0.0014	0.9940	3.8768	1.8698	-0.2254	10.000
8	0.0009	0.9958	4.0369	2.0010	-0.2224	9.618
9	0.0006	0.9970	4.1918	2.1238	-0.2200	9.328
10	0.0004	0.9978	4.3417	2.2396	-0.2181	9.100
11	0.0003	0.9983	4.4869	2.3495	-0.2166	8.917
12	0.0002	0.9987	4.6279	2.4544	-0.2152	8.766
13	0.0002	0.9989	4.7648	2.5549	-0.2141	8.640
14	0.0001	0.9991	4.8981	2.6515	-0.2132	8.532
15	0.0001	0.9993	5.0279	2.7446	-0.2123	8.440

[70] Castagliola (2000), Pham (2006)
[71] Castagliola et al. (2010)

Βιβλιογραφία

Ελληνική

[1] Ατζουλάκος, Δ. (2009 - Β' Έκδοση). "Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας". Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς

[2] Κουκουβίνος, Χ. (2008). "Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας". ΕΜΠ

Ξένη

[3] Abbas N., Riaz M. and Does RJMM (2012a). Mixed Exponentially Weighted Moving Average – Cumulative Sum charts for Process Monitoring. *Quality and Reliability Engineering International*. DOI: 10.1002/qre.1385.

[4] Abbas N., Riaz M. and Does RJMM. CS-EWMA Chart for Monitoring Process Dispersion. *Qual. Reliab. Engng. Int. (2012b)* (wileyonlinelibrary.com) DOI: 10.1002/ qre.1414

[5] Abbas N., Riaz M. and Does R. J. M. M.. Memory-Type Control Charts for Monitoring the Process Dispersion. *Qual. Reliab. Engng. Int*. (2013) (wileyonlinelibrary.com) DOI: 10.1002/qre.1514

[6] Abbas N, Zafar RF, Riaz M, Hussain Z. Progressive Mean Control Chart for Monitoring Process Location Parameter. *Quality and Reliability Engineering International* 2012; DOI: 10.1002/qre.1386.

[7] Abbasi S.A. On sensitivity of EWMA control chart for monitoring Process Dispersion Proceedings of the World Congress on Engineering 2010 Vol III, WCE 2010, June 30 - July 2, 2010, London, U.K. ISBN: 978-988-18210-8-9, ISSN: 2078-0958 (Print); ISSN: 2078-0966 (Online)

[8] Abbasi S.A. and Miller A., "D chart: An efficient alternative to monitor process dispersion," Proceedings of the World Congress on Engineering and Computer Science (WCECS 2011); 2, San Francisco, USA, 2011.

[9] Abbasi SA, Miller A, Riaz M. Nonparametric Progressive Mean Control Chart for Monitoring Process Target. *Quality and Reliability Engineering International* 2012a; DOI: 10.1002/qre.1458.

[10] Abbasi SA, Riaz M, Miller A. Enhancing the performance of CUSUM scale chart. *Computers & Industrial Engineering*. 2012b; 63:400–9.

[11] Abu-Shawiesh, M.O.A., (2008). A simple Robust Control Chart Based on MAD, *Journal of Mathematics and Statistics*, 4(2), 102-107.

[12] Abu-Shawiesh, M. O. and M. B. Abdullah (2000). Estimating the process standard deviation based on downton's estimator. *Quality Engineering* 12 (3), 357–363.

[13] Abujiya MR, Muttlak HA. Quality control chart for the mean using double ranked set sampling. *Journal of Applied Statistics*. 2004; 31:1185–201.

[14] MR Abujiya, M Riaz and MH Lee (2015a) A New Combined Shewhart–Cumulative Sum S Chart for Monitoring Process Standard Deviation (wileyonlinelibrary.com) DOI: 10.1002/qre.1822 Copyright © 2015 John Wiley & Sons, *Ltd Qual. Reliab. Eng. Int*. 2015

[15] Abujiya MR, Riaz M, Lee MH (2015b) Enhanced Cumulative Sum Charts for Monitoring Process Dispersion. PLoS ONE 10(4): e0124520. doi: 10.1371/journal.pone.0124520

[16] Abujiya MR, Lee MH, Riaz M. Increasing the sensitivity of cumulative sum charts for location. *Quality and Reliability Engineering International*. 2014a doi: 10.1002/qre.661

[17] Abujiya MR, Lee MH, Riaz M. Combined Application of Shewhart and Cumulative Sum R Chart for Monitoring Process Dispersion. *Quality and Reliability Engineering International.* 2014b: doi: 10.1002/qre.725

[18] Abujiya MR, Riaz M, Lee MH. Improving the performance of combined Shewhart-cumulative sum control charts. *Quality and Reliability Engineering International* 2013; 29(8):1193–1206.

[19] Acosta-Mejia CA, Pignatiello JJ, Rao BV. A comparison of control charting procedures for monitoring process dispersion. *IIE Transactions*. 1999; 31:569–79.

[20] Acosta-Mejia CA. Monitoring reduction in variability with the range. *IIE Transactions* 1998; 30(6):515–523.

[21] S Ahmad, Z Lin, SA Abbasi, M Riaz (2012). On efficient monitoring of process dispersion using interquartile range. *Open Journal of Applied Sciences* 2 (04), 39

[22] Al-Omari AI. Estimation of mean based on modified robust extreme ranked set sampling. *Journal of Statistical Computation and Simulation* 2010; 81(8):1055–1066.

[23] Al-Sabah WS. Cumulative sum statistical control charts using ranked set sampling data. *Pakistan Journal of Statistics*. 2010; 26:365–78.

[24] Alwan, L.C. (2000). Statistical Process Analysis. McGrow-Hill International Edition.

[25] L.J. Bain and M. Engelhardt, *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*, 2nd ed., Duxbury, Pacific Grove, CA, 1992.

[26] Barr DR, Sherrill ET. Mean and Variance of truncated normal distributions. *The American Statistician* 1999; 53:357–361.

[27] F.C. Bernett, K. Mullem, and J.G. Saw, Linear estimates of a population scale parameter, *Biometrica* 54 (1967), pp. 551-554

[28] Box GEP. Some theorems on quadratic forms applied in the study of analysis of variance problems: effect of inequality of variance in one-way classification. *Annals of Mathematical Statistics* 1954; 25:290–302.

[29] P. Castagliola, Control Charts for Data Having a Symmetrical Distribution with a Positive Kurtosis, *Recent Advances in Reliability and Quality Engineering*, World Scientific Publishers, Hackensack, NJ, 2001, pp. 1–16.

[30] Castagliola P. A New S2-EWMA Control Chart for Monitoring Process Variance. *Quality and Reliability Engineering International* 2005a; 21:781–794.

[31] P. Castagliola: A R-EWMA control chart for monitoring the process range, Int. J. *Reliab. Qual. Safety Eng*. 12(1), 31–49 (2005b)

[32] P. Castagliola: A New EWMA Control Chart for Monitoring the Process Standard-Deviation, Proc. 6th ISSAT *International Conference on Reliability and Quality in Design* (ISSAT, New Brunswick 2000) pp. 233–237

[33] Castagliola P, Celano G, Fichera S. A New CUSUM-S2 Control Chart for Monitoring the Process Variance. *Journal of Quality in Maintenance Engineering* 2009; 15(4):344–357.

[34] Castagliola P, Celano G, Fichera S. A Johnson's Type Transformation EWMA-S2 Control Chart. *International Journal of Quality Engineering and Technology* 2010; 1(3):253–275.

[35] Celik N. Control Charts Based on Robust Scale Estimators, American Research Journal of Mathematics (2015), Volume 1,Issue1,ISSN 2378-704X

[36] L.K. Chan and H.J. Cui, Skewness correction x-bar and R-charts for skewed distributions, *Naval Res. Log.* 50 (2003), pp. 555–573.

[37] Chang TC, Gan FF. A cumulative sum control chart for monitoring process variance. *Journal of Quality Technolog*y. 1995; 27:109–19.

[38] Crowder, S. V., and M. Hamilton (1992). "An EWMA for Monitoring a Process Standard Deviation," *Journal of Quality Technology,* Vol. 24(1), pp. 12–21.

[39] David, H. A. (1968). Gini's Mean difference rediscovered. *Biometrika*, 55, 573-575.

[40] David, H. A. Early sample measures of variability*. Statist. Sci*. 13 (1998), no. 4, 368--377. doi:10.1214/ss/1028905831. http://projecteuclid.org/euclid.ss/1028905831.

[41] Downton, F. (1966). Linear estimates with polynomial coefficients. *Biometrika* 53 (1), 129–141.

[42] Gauri SK , Chakraborty S. (2008). "Feature-Based Recognition of Control Chart Patterns: A Generalized Approach". *Quality Technology & Quantitative Management* Vol. 5, No. 3, pp. 203-220

[43] Gauri, SK.(2009). "A test for suitability of the preliminary samples for constructing control limits of chart". *Journal of Statistical Computation and Simulation*. Vol. 00, No. 0, Month 2009, 1–17

[44] Ghute V.B., Rajmanya (2014) Moving Average Control charts for Process Dispersion. International Journal of Sciences, *Engineering and Technology Research* (IJSETR). Volume 3. Issue 7, July 2014

[45] Gibbons RD. Use of combined Shewhart-CUSUM control charts for ground water monitoring applications. *Ground Water* 1999; 37(5):682–691.

[46] Gonzalez, I. M. and Viles, E. (2000). Semi-economic design of X -control charts assuming gamma distribution. *Economic Quality Control*, 15, 109-118.

[47] Gonzalez, I. M. and Viles, E. (2001). Design of R control chart assuming a gamma distribution. *Economic Quality Control*, 16, 2, 199-204.

[48] Govindaraju K, Zhang L. A Note on Run Length Variability Reduction for EWMA Charting. *Economic Quality Control* 2006; 21(2):171–181.

[49] Hampel, F.R., 1974. The Influence curve and its role in Robust estimation. *J. Am. Stat. Assoc*. 69: 383-393. DOI: 10.2307/2285666

[50] Haq A., Brown J., and Moltchanova E. (2014), New Exponentially Weighted Moving Average Control Charts for Monitoring Process Dispersion, *Qual. Reliab. Engng. Int*., 30, 1311–1332, doi:10.1002/qre.1553

[51] Hawkins, D. M. (1993). “Cumulative Sum Control Charting: An Underutilized SPC Tool”. *Quality Engineering*, 5, 463-467

[52] Hawkins DM, Zamba KD. On small shifts in quality control. *Quality Engineering.* 2003; 16:143–9.

[53] He, D. & Grigoryan, A. 2003. An improved double sampling S chart. *International Journal of Production Research* 41(12): 2663-2679

[54] Huwang L, Huang CJ, Wang YHT. 2010. New EWMA Control Charts for Monitoring Process Dispersion. *Computational Statistics and Data Analysis* 54:2328–2342.

[55] Hillier, F.S. (1969). $\bar{X}$ and R-chart control limits based on a small number of subgroups. *Journal of Quality Technology*, 1,17-26

[56] Jafari JM, Mirkamali SJ. Control charts for attributes with maxima nominated samples. *Journal of Statistical Planning and Inference*. 2011; 141:2386–98.

[57] Johnson, N (1949). Systems of frequency curves generated by methods of translation. *Biometrika*, Vol. 36, p.149

[58] Kenett, R.S. and Zacks, S. (1998) Modern Industrial Statistics: Design and Control of Quality and Reliability, *Duxbury Press*: San Francisco.

[59] Khoo, M.B.C. 2004. S^2 control chart based on double sampling. International *Journal of Pure and Applied Mathematics* 13(2): 249-258

[60] M.B.C. Khoo and E.G. Lim, An improved R (range) control chart for monitoring the process variance, *Qual. Reliab. Eng. Int.* 21 (2005), pp. 43–50.

[61] Klein M. Composite Shewhart-EWMA statistical control schemes. IIE *Transactions* 1996; 28(6):475–481.

[62] Knoth S. Computation of the ARL for CUSUM-schemes. *Computational Statistics & Data Analysis*. 2006; 51:499–512.

[63] Lawless JF. Statistical Models and Methods for Lifetime Data (2nd ed.). *John Wiley & Sons*: New York, NY; 2003.

[64] Lucas JM. Combined Shewhart-CUSUM quality control schemes. *Journal of Quality Technology* 1982; 14(2):51–59.

[65] MacGregor, J. F., and T. J. Harris (1993). “The Exponentially Weighted Moving Variance,” *Journal of Quality Technology,* Vol. 25(2), pp. 106–118.

[66] Maronna, R.A. and Zamar, R.H., (2002). Robust estimates of location and dispersion for high-dimensional datasets, *Technometrics*, 44-4, 307-317.

[67] McIntyre GA. A method for unbiased selective sampling, using ranked sets. *Australian Journal of Agricultural Research* 1952; 3(4):385–390.

[68] Mehmood R, Riaz M, Does RJMM. Control charts for location based on different sampling schemes. *Journal of Applied Statistics*. 2012; 40:483–94.

[69] Mehmood R, Riaz M, Does RJMM. Quality Quandaries: On the Application of Different Ranked Set Sampling Schemes. *Quality Engineering*. 2014; 26:370–8.

[70] Montgomery, D. C.(2013). “Introduction to Statistical Quality Control”. 7th Edition *John Wiley and Sons,* New York.

[71] Muttlak HA, Al-Sabah WS. Statistical quality control based on ranked set sampling. *Journal of Applied Statistics*. 2003; 30:1055–78.

[72] Ou Y, Wu Z, Tsung F. A comparison study of effectiveness and robustness of control charts for monitoring process mean. *International Journal of Production Economics* 2012; 135(1):479–490.

[73] Page, E.S.(1954). “Continuous Inspection schemes”. *Biometrics*. Vol. 41(1), pp. 100-115

[74] Page ES. Controlling the Standard Deviation by CUSUM and Warning Lines. *Technometrics* 1963; 5(307–3):15.

[75] Pappanastos, E. A. and Adams, B. M. (1996). Alternative design of Hodges-Lehmann control chart. *Journal of Quality Technology*, 28, 2, 213-223

[76] Pearson, E. S. (1932). The percentage limits for the distribution of range in samples from a normal population. *Biometrika*, 18, 404-417.

[77] Pham H. (2006) Springer Handbook of Engineering Statistics Springer-Verlag UK

[78] Poetrodjojo S, Abdollahian MA, Debnath NC. Optimal Cusum schemes for monitoring variability. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*. 2002; 32:1–15.

[79] Qiu Peihua (2014). Introduction to Statistical Process control. Taylor & Francis Group, LLC, Boca Raton (USA, Florida)

[80] Reynolds MR, Stoumbos ZG. Comparisons of some exponentially weighted moving average control charts for monitoring the process mean and variance. *Technometrics* 2006; 48(4):550–567.)

[81] Riaz, M. (2008). A dispersion control chart, *Communications in Statistics -Simulation and Computation*, 37(6), 1239-1261.

[82] M. Riaz and A. Saghir, “Monitoring process variability using Gini’s mean difference,” Quality Technology and Quantitative Management, vol. 4, pp.439-454, 2007.

[83] Riaz M, Mehmood R, Does RJMM. On the performance of different control charting rules. *Quality and Reliability Engineering International* 2011; 27(8):1059–1067.

[84] Roberts, S.W. (1959). “Control chat Tests Based on Geometric Moving Averages”. *Technometrics.* Vol 42 (1), pp. 97-102.

[85] Rousseeuw, P. J. and C. Croux (1993). Alternatives to the median absolute deviation. *Journal of the American Statistical Association* 88 (424), 1273–1283.

[86] Ryan TP. Efficient Estimation of Control Chart Parameters. Frontiers in Statistical Quality Control. 5, Lenz, Hans-Joachim; Wilrich, Peter-Theodor (Eds.), Springer: Heidelberg, Germany, 1997.

[87] Samawi HM. On double extreme rank set sample with application to regression estimator. *Metron - International Journal of Statistics* 2002; 60(1-2):50–63.

[88] Shaibu AB, Muttlak HA. Estimating the parameters of the normal, exponential and gamma distributions using median and extreme ranked set samples. *STATISTICA* 2004; 64(1):75–98.

[89] Shewhart, W.A. (1931). Economic control of quality of manufactured product, London: Macmillan

[90] Shu LJ, Jiang W. 2008. A New EWMA Chart for Monitoring Process Dispersion. *Journal of Quality Technology* 40:319–331.

[91] Sinha BK, Purkayastha S. On some aspects of ranked set sampling for estimation of normal and exponential parameters. *Statistics and Decisions* 1996; 14(3):223–240.

[92] Steiner SH. EWMA control charts with time varying control limits and fast initial response. *Journal of Quality Technology* 1999; 31(1):75–86.

[93] Stokes SL. Estimation of variance using judgment ordered ranked set samples. *Biometrics*. 1980; .36:35–42.

[94] P. Tadikamalla and D. Popescu, Kurtosis correction method for x-bar and R control charts for long-tailed symmetrical distributions*, Naval Res. Log*. 54 (2007), pp. 371–383.

[95] Takahasi K, Wakimoto K On unbiased estimates of population mean based on sample stratified by means of ordering. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* 1968; 20(1):1–31.

[96] Tuprah K, Ncube M. A Comparison of dispersion quality control charts. *Sequential Analysis*. 1987; 6:155–63.

[97] Wolfe DA. Ranked set sampling: its relevance and impact on statistical inference. *ISRN Probability and Statistics* 2012; 2012:32.

[98] Woodall,W. H. (2000). Controversies and contradictions in statistical process control. *Journal of Quality Technology* 32 (4), 341–350.

[99] Wu, C., Y. Zhao, and Z. Wang (2002). The median absolute deviations and their application to Shewhart X control charts. *Communications in Statistics - Simulation and Computation* 31, 425–442.

[100] Wu Z, Yang M, Jiang W, Khoo MBC. Optimization designs of the combined Shewhart-CUSUM control charts. *Computational Statistics and Data Analysis* 2008; 53(2):496–506.

[101] Wu Z, Jiao J, Yang M, Liu Y, Wang Z. An enhanced adaptive CUSUM control chart. IIE T*ransactions* 2009; 41(7):642–653

[102] Yang, C. H. and Hiller F. S. (1970). Mean and variance control chart limits based on a small number of subgroup. *Journal of Quality Technology*, 2, 9-16.

[103] Teh , Sin Yin and Khoo , Michael Boon Chong and Ong , Ker Hsin and Soh , Keng Lin and Teoh , Wei Lin (2015) A study on the S2-EWMA chart for monitoring the process variance based on the MRL performance*. Sains Malaysiana*, 44 (7). pp. 1067-1075. ISSN 0126-6039

[104] Yohai, V.J. and Zamar, R.H. (1988). High Breakdown Point Estimates Regression by Means of the Minimization of an Efficient Scale, *Journal of the American Stat. Assoc*.,83, 406-413.

[105] Yu PH, Lam K, Sinha B. Estimation of normal variance based on balanced and unbalanced ranked set samples. *Environmental and Ecological Statistics* 1999; 6(1):23–46.

[106] Guoyi Zhang (2014) Improved R and s control charts for monitoring the process variance, *Journal of Applied Statistics*, 41:6, 1260-1273, DOI: 10.1080/ 02664763.2013.864264