ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ

Διαχείριση Επενδυτικού Κινδύνου: Μέτρα Κινδύνου και Εφαρμογές

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

της

Σοφίας Γιάλπα

Τριμελής Επιτροπή:

Βασίλης Παπανικολάου, Καθηγητής, ΣΕΜΦΕ (επιβλέπων)

Βασιλική Δεληθέου, Επίκουρη Καθηγήτρια, Πάντειο Πανεπιστήμιο (συνεπιβλέπουσα)

Ίλια Βόντα, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια, ΣΕΜΦΕ (μέλος)

Αθήνα, Ιούλιος 2016

NATURAL TECHNICAL YNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF APPLIED MATHEMATICAL
AND PHYSICAL SCIENCES
MASTER: APPLIED MATHEMATICAL SCIENCES

INVESTMENT RISK MANAGEMENT
RISK MEASURES AND APPLICATIONS

MASTER THESIS

BY

SOFIA GIALPA

Supervisor: **Vasilis Papanikolaou, Professor NTUA**

Co-Supervisor: **Vasiliki Delitheou, Assistant Professor, Panteio University**

Athens, 2016

Περίληψη

Η διαχείριση του κινδύνου είναι απαραίτητη σε όλες τις εκφάνσεις της ανθρώπινης δραστηριότητας, αφού επηρεάζει σε μεγάλο βαθμό τις αποφάσεις μας. Πιο συγκεκριμένα, η διαχείριση του επενδυτικού κινδύνου είναι πολύ σημαντικό βήμα, ώστε ο επενδυτής να λάβει, κατά την γνώμη του, σωστές αποφάσεις για τις μελλοντικές του κινήσεις με κύριο στόχο υψηλά μελλοντικά κέρδη. Για να είναι αποτελεσματική η διαχείριση κινδύνου, προηγείται πρώτα η μέτρηση του κινδύνου.

Κύριος στόχος της διπλωματικής εργασίας αυτής είναι να παρουσιάσουμε τα σύγχρονα μέτρα κινδύνου, τα οποία αν και έχουν ατέλειες, ωστόσο έχουν περισσότερες επιθυμητές ιδιότητες. Ένα σημαντικό πλεονέκτημα των μέτρων αυτών είναι ότι μπορούν να εφαρμοστούν σε πολλούς τύπους κινδύνων.

Στην εργασία αυτή περιλαμβάνονται τα επόμενα κεφάλαια. Το Κεφάλαιο 1 αναφέρεται στις επενδύσεις, στα είδη των επενδύσεων καθώς και στις χρηματοπιστωτικές αγορές όπου αυτές πραγματοποιούνται. Στο Κεφάλαιο 2 εξετάζονται οι θεωρίες διαχείρισης των επενδυτικών χαρτοφυλακίων και στο Κεφάλαιο 3 περιγράφουμε την έννοια του κινδύνου, τα είδη των κινδύνων καθώς και τα βήματα που ακολουθούμε για τη διαχείρισή του. Το Κεφάλαιο 4 περιγράφει με αυστηρά μαθηματικές έννοιες τα σύγχρονα μέτρα κινδύνου καθώς και τις ιδιότητες που αυτά ικανοποιούν. Τέλος, στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζονται κάποια μοντέλα κινδύνου όπως η Value-At-Risk, καθώς και κάποια μοντέλα μέτρησης πιστωτικού κινδύνου.

Λέξεις Κλειδιά: επένδυση, επενδυτικός κίνδυνος, μέτρα κινδύνου, Αξία σε κίνδυνο, συνεκτικά μέτρα, κυρτά μέτρα.

Abstract

Risk management is very important in every aspect of human activity since it affects greatly our decisions. Specifically, investment risk management is a very crucial step for the investor to take, in their view, some right decisions in order to gain high profits. For this to be affective, risk measurement comes first.

The main purpose of this thesis is to describe the modern risk measures, which although have flaws, they have more desirable properties than the usual ones. A great advantage of these measures is that they are applied in many types of risk.

The present thesis concludes the next chapters. Chapter 1 is about investments, types of investments and about the financial markets, where investments are made. In Chapter 2 the theories of portfolio management are examined and Chapter 3 concludes the notion of risk, the types of risk and the steps for risk management. Chapter 4 describes, in strictly mathematics , modern risk measures. In last Chapter we present some models of risk measurement, such as Value-At-Risk and some credit risk measurement models.

Keywords: investment, investment risk, risk measures, Value-At-Risk, coherent measures, convex measures.

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια του διατμηματικού μεταπτυχιακού προγράμματος «Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες».

Πριν την παρουσίαση της εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τους επιβλέποντες καθηγητές μου κ. Παπανικολάου Βασίλη και την κ. Δεληθέου Βασιλική για τη καθοδήγηση τους, τη πολύτιμη βοήθεια τους και την εμπιστοσύνη που μου έδειξαν. Θα ήθελα επίσης να τους ευχαριστήσω για την ανάθεση ενός τόσο ενδιαφέροντος θέματος.

Τις ευχαριστίες μου εκφράζω και στη καθηγήτρια κ. Ίλια Βόντα, που δέχθηκε να είναι μέλος της τριμελούς επιτροπής.

Τέλος, θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τους γονείς μου, Σταύρο και Αγγελική, για την στήριξή τους σε κάθε βήμα μου όλα αυτά τα χρόνια.

Γιάλπα Σοφία

Πίνακας περιεχομένων

1

Επενδύσεις

1.1 Έννοια Επένδυσης

Επένδυση είναι η δέσμευση περιουσιακών στοιχείων (ή χρημάτων) ή άλλων παραγωγικών πόρων σήμερα (ή σε κάποια συγκεκριμένη χρονική περίοδο) σε αναμονή κάποιου κέρδους ή οφέλους σε κάποια χρονική στιγμή στο μέλλον[1].

Επενδύουμε γιατί αναμένουμε υψηλότερες απολαβές ως αποζημίωση για:

- Το χρονικό διάστημα δέσμευσης του κεφαλαίου,
- Την αναμενόμενη πληθωριστική εξέλιξη και
- Την αβεβαιότητα της επίτευξης των μελλοντικών χρηματικών ροών.

Κάθε επένδυση απαιτεί από τον επενδυτή να αποφύγει να καταναλώσει κεφάλαια στο παρόν, προκειμένου να επιδιώξει μια μελλοντική αβέβαιη ωφέλεια. Αυτό σημαίνει ότι κάθε επένδυση ενέχει ρίσκο (κίνδυνο).

Για παράδειγμα, επένδυση αποτελεί η αγορά μετοχών μιας εταιρείας σε αναμονή κάποιας απόδοσης στο μέλλον που θα δικαιολογεί τόσο το χρόνο που δεσμεύονται τα χρήματα του επενδυτή, όσο και τον κίνδυνο που αυτός αναλαμβάνει και προέρχεται από μια μείωση της τιμής της μετοχής.

Ο χρόνος και ο κίνδυνος αποτελούν δύο βασικά χαρακτηριστικά που προσδιορίζουν την αξία μιας επένδυσης. Αυτά συνδέονται άμεσα με την έννοια του κόστους ευκαιρίας των κεφαλαίων του επενδυτή που αποτελεί την απόδοση που μπορεί να λάβει αυτός από την επένδυση των κεφαλαίων του σε μια άλλη

[1] Σεμινάρια ΕΤΕ, Ηλεκτρονικές Σημειώσεις 2012.

επενδυτική δραστηριότητα για το ίδιο χρονικό διάστημα με ανάλογα χαρακτηριστικά κινδύνου[2].

1.2 Είδη Επενδύσεων

Η κύρια διάκριση των επενδύσεων είναι οι ***άμεσες*** και οι ***έμμεσες*** επενδύσεις.

Οι άμεσες ή παραγωγικές επενδύσεις αφορούν τη χρησιμοποίηση του κεφαλαίου στην αγορά των πραγματικών περιουσιακών στοιχείων (των μέσων δηλαδή που χρησιμοποιούνται για να παραχθούν αγαθά και υπηρεσίες). Για παράδειγμα, η αγορά ενός κτιρίου μιας εταιρείας, η κατασκευή ενός εργοστασίου, η απόκτηση γης κ.λπ. Το είδος αυτό των επενδύσεων ενδιαφέρει κυρίως τις επιχειρήσεις ή το κράτος.

Οι έμμεσες ή χρηματοοικονομικές επενδύσεις αφορούν τη χρησιμοποίηση του κεφαλαίου στην αγορά των χρηματοπιστωτικών μέσων (απαιτήσεις και δικαιώματα επί των πραγματικών περιουσιακών στοιχείων). Τα χρηματοπιστωτικά αυτά μέσα καλούνται χρεόγραφα (τίτλοι). Βασικό παράδειγμα της κατηγορίας αυτής αποτελούν οι μετοχές μιας εταιρείας[3].

Στην εργασία αυτή θα ασχοληθούμε κυρίως με την δεύτερη κατηγορία επενδύσεων, δηλαδή τις χρηματοοικονομικές επενδύσεις.

1.3 Χρηματοπιστωτικό σύστημα

Με τον όρο ***χρηματοπιστωτικό σύστημα*** εννοούμε το σύνολο των επιχειρήσεων, θεσμών και μηχανισμών μέσω των οποίων διοχετεύονται κεφάλαια από τις πλεονασματικές στις ελλειμματικές οικονομικές μονάδες. Αποτελείται από τις χρηματοπιστωτικές αγορές, τα χρηματοπιστωτικά προϊόντα και τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα[4].

Η ανάπτυξη μιας οικονομίας προϋποθέτει ένα καλό και αποτελεσματικό χρηματοπιστωτικό σύστημα. Εάν σε μία οικονομία το σύστημα αυτό υστερεί ή δεν υπάρχει τότε είναι δύσκολο να αναληφθούν επενδυτικά έργα, αφού η άντληση κεφαλαίων είναι δύσκολη, αν όχι αδύνατη. Το επίπεδο των επενδύσεων, σε ένα σύστημα στο οποίο ο χρηματοπιστωτικός τομέας δεν υπάρχει ή δεν λειτουργεί καλά, θα είναι χαμηλό με συνέπεια η οικονομία να αναπτύσσεται με πολύ χαμηλούς ρυθμούς και μαζί της θα υστερεί η οικονομική ευημερία[5].

---

[2] «Επενδύσεις», Τζαβαλής Η., Πετράκης Α., Εκδόσεις ΟΠΑ, Αθήνα 2009, σελ. 5.

[3] Σεμινάρια ΕΤΕ, Ηλεκτρονικές Σημειώσεις 2012.

[4] «Χρήμα και τράπεζες», Α. Νούλας, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Πανεπιστημίου Μακεδονίας, Θεσσαλονίκη 2005, σελ. 47.

[5] «Αγορές Χρήματος και κεφαλαίου», Α. Νούλας, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Μακεδονίας, Θεσσαλονίκη 2006, σελ. 20-21.

Το χρηματοπιστωτικό σύστημα μιας χώρας είναι σημαντικό γιατί επιτελεί έναν αριθμό λειτουργιών οι οποίες επιτρέπουν την ανάπτυξη της οικονομίας με ορθολογικό τρόπο.

Οι σημαντικότερες λειτουργίες ενός χρηματοπιστωτικού συστήματος είναι οι εξής[6]:

- ***Επιτυγχάνει ορθολογικότερη κατανομή των διαθέσιμων κεφαλαίων.***
  Το χρηματοπιστωτικό σύστημα διαθέτει τους κατάλληλους μηχανισμούς που του επιτρέπουν να αξιολογεί τους υποψήφιους δανειολήπτες και να διαθέτει τα κεφάλαια που του εμπιστεύονται οι πλεονασματικές οικονομικές μονάδες προς τις διάφορες παραγωγικές μονάδες βοηθώντας έτσι στην ανάπτυξη της οικονομίας. Όσο ορθολογικότερη είναι η διάθεση κεφαλαίων, τόσο καλύτερα αναπτύσσεται μια οικονομία.
- ***Προάγει νέα χρηματοπιστωτικά προϊόντα***.
  Σε ένα καλά οργανωμένο και αποτελεσματικό χρηματοπιστωτικό σύστημα δημιουργούνται συνεχώς νέα χρηματοοικονομικά προϊόντα τα οποία ικανοποιούν καταναλωτικές και επενδυτικές ανάγκες. Η ικανοποίηση αυτών των αναγκών σημαίνει ότι περισσότερα κεφάλαια προσφέρονται στην αγορά και περισσότερες επενδύσεις πραγματοποιούνται συμβάλλοντας έτσι στην ανάπτυξη της οικονομίας.
- ***Συμβάλλει στη μείωση του κινδύνου.***
  Η μείωση του κινδύνου επιτυγχάνεται με πολλούς τρόπους. Πρώτον, στη περίπτωση των τραπεζικών καταθέσεων οι καταθέτες δεν έχουν τον κίνδυνο της απώλειας των χρημάτων τους. Δεύτερον, το χρηματοπιστωτικό σύστημα παρέχει πληροφορίες αλλά και μια γκάμα προιόντων που επιτρέπει στους επενδυτές να δημιουργήσουν αποτελεσματικά χαρτοφυλάκια μέσω των οποίων επιτυγχάνουν την ελαχιστοποίηση του κινδύνου. Γενικά, η μείωση του κινδύνου απώλειας των κεφαλαίων συμβάλλει στη περαιτέρω ενίσχυση της αποταμίευσης και στη μείωση των επιτοκίων, γεγονότα που έχουν θετική επίδραση στην οικονομική πρόοδο.
- ***Μειώνει το κόστος των συναλλαγών και το κόστος πληροφόρησης.***
  Η πραγματοποίηση μιας συναλλαγής απαιτεί κάποιο κόστος και απαιτεί καλή πληροφόρηση. Η ύπαρξη ενός καλά οργανωμένου και αποτελεσματικού χρηματοοικονομικού συστήματος μειώνει το κόστος των συναλλαγών όπως και το κόστος της πληροφόρησης. Ο χρόνος, για παράδειγμα, της κατάθεσης σε μια τράπεζα είναι πολύ μικρότερος αυτού που απαιτείται για την εύρεση ενός αξιόπιστου προσώπου προς δανεισμό των χρημάτων. Η μείωση του κόστους των συναλλαγών και του κόστους της πληροφόρησης συμβάλει στη περαιτέρω ανάπτυξη μιας οικονομίας.

1.3.1 Χρηματοπιστωτικές Αγορές

Χρηματοπιστωτική αγορά (financial market) είναι το σύνολο των αγορών όπου οι οικονομικές μονάδες (νοικοκυριά, επιχειρήσεις και δημόσιο) αγοράζουν και

[6] «Αγορές Χρήματος και κεφαλαίου», Α. Νούλας, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Μακεδονίας, Θεσσαλονίκη 2006, σελ. 21.

πουλάνε φυσικά και χρηματιστικά περιουσιακά στοιχεία ή χρηματοπιστωτικές απαιτήσεις. Αυτές οι οικονομικές μονάδες είναι είτε πλεονασματικές (ξοδεύουν λιγότερα απ΄ όσα εισπράττουν) είτε ελλειμματικές (εισπράττουν λιγότερα απ΄ όσα δαπανούν). Η πιο σημαντική λειτουργία των χρηματοπιστωτικών αγορών είναι η ικανότητα τους να φέρουν σε επαφή τις πλεονασματικές με τις ελλειμματικές μονάδες με αποτελεσματικό τρόπο. Η χρηματοδότηση των ελλειμματικών μονάδων από τις πλεονασματικές μονάδες είναι είτε έμμεση είτε άμεση[7].

Άμεση μορφή χρηματοδότησης σημαίνει ότι οι ελλειμματικές μονάδες αντλούν τα κεφάλαια απευθείας από τις πλεονασματικές μονάδες. Το χαρακτηριστικό αυτής της μορφής είναι ότι οι πλεονασματικές μονάδες αγοράζουν χρηματοπιστωτικά προϊόντα (πχ. ομόλογα ή μετοχές) τα οποία εκδίδονται κατευθείαν από τις ελλειμματικές μονάδες, οι οποίες εισπράττουν τα κεφάλαια. Η διάθεση των χρηματοδοτικών προιόντων στην αγορά μπορεί να γίνει είτε κατευθείαν από τις ελλειμματικές οικονομικές μονάδες, είτε με τη βοήθεια μεσαζόντων όπως είναι τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα.

Έμμεση μορφή χρηματοδότησης σημαίνει ότι τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα εκδίδουν τα δικά τους χρηματοπιστωτικά προϊόντα τα οποία αγοράζουν άλλες οικονομικές μονάδες. Ένα παράδειγμα έμμεσης χρηματοδότησης είναι όταν ένα άτομο καταθέτει τα χρήματά του στην τράπεζα, τα οποία στη συνέχεια μετατρέπονται σε δάνειο για μια επιχείρηση.

Οι χρηματοπιστωτικές αγορές, ανάλογα με τη διάρκεια των χρηματοοικονομικών προιόντων που διαπραγματεύονται σε αυτές διακρίνονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες: την ***χρηματαγορά*** και τη ***κεφαλαιαγορά***[8].

Η ***χρηματαγορά*** είναι η αγορά που διαπραγματεύονται χρηματοπιστωτικά προϊόντα, η διάρκεια των οποίων δεν ξεπερνά το ένα έτος. Τα προϊόντα της χρηματαγοράς διακρίνονται για τα μεγάλα τους ποσά, το μικρό κίνδυνο αθέτησης, και την υψηλή ρευστότητα.

Τα προϊόντα της χρηματαγοράς που διαπραγματεύονται στην Ελληνική αγορά είναι τα εξής[9]:

<u>Έντοκα Γραμμάτια Δημοσίου (ΕΓΔ)</u>

Τα κυριότερα χαρακτηριστικά των ΕΓΔ είναι τα εξής:

- Εκδίδονται με χρονική διάρκεια των τριών, έξι και δώδεκα μηνών.
- Πωλούνται πάντοτε σε τιμή που είναι μικρότερη της ονομαστικής αξίας. Στη λήξη τους ο κάτοχος λαμβάνει την ονομαστική αξία.
- Τα ΕΓΔ εξοφλούνται την ημέρα λήξης τους.
- Τα ΕΓΔ σε φυσική μορφή που έληξαν και προσκομίζονται για ανανέωση αντικαθίστανται με νέα ίσης χρονικής διάρκειας και αποφέρουν τόκο για όλο το χρόνο ανανέωσής τους.
- Φορολογούνται με συντελεστή 10% και ο φόρος προεισπράττεται. Αυτό σημαίνει ότι η τιμή που πληρώνει ο επενδυτής περιλαμβάνει και το φόρο που αντιστοιχεί στον τόκο.

---

[7] «Χρήμα και τράπεζες», Α. Νούλας, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Πανεπιστημίου Μακεδονίας, Θεσσαλονίκη 2005, σελ. 49.

[8] «Χρήμα και τράπεζες»,..., ό.π., σελ. 51-52.

[9] «Χρήμα και τράπεζες»,..., ό.π., σελ. 52-55.

Πιστοποιητικά καταθέσεων

Τα πιστοποιητικά καταθέσεων αποτελούν καταθέσεις έναντι των οποίων οι τράπεζες εκδίδουν πιστοποιητικά, τα οποία είναι διαπραγματεύσιμα στη δευτερογενή αγορά. Εχουν ένα συγκεκριμένο επιτόκιο και πωλούνται στην ονομαστική τους αξία. Αποτελούν ένα χρηματοοικονομικό προϊόν μέσω του οποίου οι τράπεζες αντλούν κεφάλαια για να λύσουν κυρίως προβλήματα ρευστότητας.

Συμφωνίες Επαναγοράς (repos)

Η συμφωνία επαναγοράς είναι μια συμφωνία πώλησης και επαναγοράς χρεογράφων. Συγκεκριμένα, ο πωλητής χρεογράφων συμφωνεί να επαναγοράσει τα χρεόγραφα σε μία καθορισμένη τιμή που είναι ανώτερη της τιμής πωλήσεως μετά από ένα ορισμένο χρονικό διάστημα. Κατά συνέπεια η απόδοσή τους είναι δεδομένη. Τα χρεόγραφα που χρησιμοποιούνται στην Ελλάδα ως repos είναι τα Έντοκα Γραμμάτια Δημοσίου (ΕΓΔ), ενώ σε άλλες χώρες μπορεί να είναι οποιοδήποτε χρεόγραφο.

Εμπορικά Γραμμάτια

Τα εμπορικά γραμμάτια είναι βραχυπρόθεσμα, χωρίς καμία εγγύηση ή ασφάλεια χρεόγραφα που εκδίδονται από μεγάλες και οικονομικά ισχυρές επιχειρήσεις και τράπεζες. Η διάρκεια των εμπορικών γραμματίων κυμαίνεται μεταξύ μιας εβδομάδας και τριών μηνών. Πωλούνται σε προεξοφλητική βάση είτε κατευθείαν στους επενδυτές ή με τη βοήθεια μεσαζόντων. Επιτρέπουν στις επιχειρήσεις να αντλήσουν κεφάλαια με κόστος μικρότερο από αυτού των τραπεζικών δανείων.

Επιταγές Αποδοχής τράπεζας

Αποτελούν χρεόγραφα που χρησιμοποιούνται στις διεθνείς συναλλαγές. Επειδή οι εξαγωγείς και οι εισαγωγείς δεν γνωρίζονται μεταξύ τους, οι συναλλαγές επί πιστώσει πρέπει να κανονιστούν πολύ προσεκτικά. Γι’ αυτό υπάρχει η παρεμβολή των τραπεζών. Η εγγυητική επιστολή μέσω τράπεζας των συναλλασσόμενων αποτελεί ένα χρεόγραφο το οποίο μπορεί να μεταπωληθεί στη δευτερογενή αγορά.

Η ***κεφαλαιαγορά*** είναι η αγορά που διαπραγματεύεται χρηματοδοτικά προϊόντα, η χρονική διάρκεια των οποίων είναι μεγαλύτερη του ενός έτους. Ο κίνδυνος των προιόντων της κεφαλαιαγοράς είναι μεγαλύτερος και η ρευστότητά τους είναι μικρότερη από αυτή των προιόντων της χρηματαγοράς. Οι αγορές κεφαλαίου συνήθως διακρίνονται στις αγορές μετοχικών τίτλων (equity market), στις αγορές δανειακών κεφαλαίων (bond market) και στις αγορές κτηματικών δανείων (mortgage market) [10].

Εμείς, θα ασχοληθούμε κυρίως με τη δεύτερη κατηγορία δηλαδή τις αγορές κεφαλαίου. Οι αγορές που θα δούμε σε επόμενες ενότητες είναι η αγορά ομολόγων, η αγορά μετοχών και η αγορά παραγώγων.

[10] «Αγορές Χρήματος και κεφαλαίου», Α. Νούλας, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Μακεδονίας, Θεσσαλονίκη 2006, σελ. 23-24.

1.3.2 Δομή και οργάνωση αγορών κεφαλαίου

Τις αγορές κεφαλαίου μπορούμε να τις ταξινομήσουμε σε δύο ευρύτερες κατηγορίες: τις *πρωτογενείς (primary)* και τις *δευτερογενείς (secondary)* [11].

Η πρωτογενής αγορά κεφαλαίου αναφέρεται στην έκδοση νέων μετοχών και ομολογιών ή νέων κρατικών ομολόγων. Τα έσοδα των νέων αυτών εκδόσεων πηγαίνουν στις εταιρείες ή στο δημόσιο που εκδίδουν τα χρηματοδοτικά προϊόντα. Τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα παίζουν σημαντικό ρόλο στη πρωτογενή αγορά. Βρίσκονται μεταξύ των επιχειρήσεων που εκδίδουν τα χρεόγραφα και των υποψηφίων επενδυτών παρέχοντας στις επιχειρήσεις ένα σημαντικό αριθμό υπηρεσιών. Τα ιδρύματα αυτά γνωρίζουν τη κατάσταση που επικρατεί στην αγορά και πληροφορούν τις επιχειρήσεις, μεταξύ των άλλων, τι ποσά μπορούν να αντλήσουν και τι είδους χρεόγραφα πρέπει να εκδοθούν έτσι ώστε η άντληση κεφαλαίων να γίνει με τον αποτελεσματικότερο τρόπο. Οι πρωτογενείς αγορές μπορεί να είναι δημόσιες ή ιδιωτικές.

- *Δημόσιες Αγορές*: Αγορές στις οποίες τα χρηματοπιστωτικά μέσα που εισάγονται απευθύνονται γενικά στο επενδυτικό κοινό (φυσικά πρόσωπα έως και μεγάλοι θεσμικοί επενδυτές). Στις αγορές αυτές εισάγονται είτε χρεωστικοί τίτλοι οποιουδήποτε εκδότη είτε μετοχές οποιασδήποτε εταιρείας.
- *Ιδιωτικές Αγορές*: Αγορές στις οποίες τα υπό έκδοση χρηματοπιστωτικά μέσα απευθύνονται σε επενδυτές με πολύ μεγάλα κεφάλαια.

Η δευτερογενής αγορά κεφαλαίου είναι η αγορά που γίνεται η αγοραπωλησία των υπαρχόντων χρεογράφων. Η σπουδαιότητα της δευτερογενούς αγοράς έγκειται στο ότι προσφέρει ρευστότητα, η οποία με τη σειρά της κάνει τη πρωτογενή αγορά λιγότερο ελκυστική αφού οι επενδυτές ανά πάσα στιγμή μπορούν να πουλήσουν τα χρεόγραφα στη δευτερογενή αγορά.

Οι δευτερογενείς αγορές μπορεί να είναι είτε οργανωμένες είτε μη οργανωμένες.

Οργανωμένη αγορά (organized exchange) είναι η αγορά χρηματοοικονομικών μέσων η οποία λειτουργεί κανονικά και διέπεται από κανόνες:

- Ως προς τη διαφάνεια των συναλλαγών που λαμβάνουν χώρα σε αυτή,
- Ως προς τις προϋποθέσεις λειτουργίας και συμμετοχής σε αυτήν, και
- Ως προς τις προϋποθέσεις εισαγωγής και διαπραγμάτευσης χρηματοοικονομικών μέσων σε αυτή.

Για παράδειγμα, το Χρηματιστήριο Αθηνών (Χ.Α.) και το Χρηματιστήριο της Νέας Υόρκης (NYSE) αποτελούν οργανωμένες αγορές.

Η μη οργανωμένη αγορά ή εξωχρηματιστιριακή αγορά (over the counter market (OTC)) δεν απαιτεί συγκεκριμένη τοποθεσία, αλλά μπορεί να πάρει μέρος οπουδήποτε δεδομένου ότι υπάρχουν ηλεκτρονικοί υπολογιστές και ένα δίκτυο χρηματιστών, οι οποίοι παίρνουν θέση σε διάφορες μετοχές και στη συνέχεια αγοράζουν και πωλούν από το συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο των μετοχών.

[11] «Αγορές Χρήματος και κεφαλαίου», Α. Νούλας, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Μακεδονίας, Θεσσαλονίκη 2006, σελ. 24-25.

Εκτός από τη κύρια διάκριση σε πρωτογενείς και δευτερογενείς αγορές, υπάρχουν και άλλα είδη αγορών οι οποίες είναι:

- *Τρίτες αγορές:* Είναι εξωχρηματιστηριακές αγορές στις οποίες διαπραγματεύονται μετοχές που είναι εισηγμένες σε Χρηματιστήριο.
- *Τέταρτες αγορές:* Είναι εξωχρηματιστηριακές αγορές στις οποίες διαπραγματεύονται απευθείας χωρίς τη μεσολάβηση ενδιάμεσου οι αντισυμβαλλόμενοι (συνήθως χρηματοπιστωτικές επιχειρήσεις).
- *Νέες μορφές αγορών:* Πολυμερής Μηχανισμός Διαπραγμάτευσης, Συστηματικοί Εσωτερικοποιητές.

1.3.3 Χαρακτηριστικά αγορών κεφαλαίου

Στην ενότητα αυτή θα δούμε τα βασικά χαρακτηριστικά των αγορών κεφαλαίου[12].

Απόδοση Αγοράς

Η απόδοση μιας αγοράς εξαρτάται από την απόδοση των επενδυτικών προϊόντων που γίνονται αντικείμενο διαπραγμάτευσης σε αυτήν και μετράται με τη χρήση εξειδικευμένων εργαλείων, των χρηματιστηριακών δεικτών.

Η απόδοση των μεμονωμένων επενδυτικών προϊόντων εξαρτάται από διάφορους παράγοντες, οι οποίοι επηρεάζουν και το σύνολο της αγοράς όπως:

- η ποιότητα των επενδυτικών προϊόντων,
- η φάση του οικονομικού κύκλου και η διεθνής συγκυρία,
- υποκειμενικοί παράγοντες, όπως η ψυχολογία και το κλίμα της αγοράς.

Βάθος αγοράς

Το βάθος μιας αγοράς συνίσταται στην ύπαρξη συνέχειας τιμών_στην αγορά δηλαδή στην ύπαρξη αρκετών αγοραστών – πωλητών πρόθυμων και ικανών να συνάψουν συναλλαγές στα επίπεδα τιμών που επικρατούν κατά τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή καθώς και σε κατώτερες και ανώτερες τιμές από αυτήν.

Ρευστότητα Αγοράς

Η ρευστότητα της αγοράς αποτελεί μια έννοια η οποία συντίθεται από δύο στοιχεία:

- Από την εμπορευσιμότητα των προϊόντων που γίνονται αντικείμενο διαπραγμάτευσης στην αγορά, την ταχύτητα δηλαδή με την οποία μπορεί να πουληθεί ένα προϊόν το οποίο προσφέρεται στην αγορά.
- Από το μέγεθος μεταβολής (συνέχεια ή ασυνέχεια) των τιμών σε διαδοχικές συναλλαγές. Με τον όρο συνέχεια των τιμών εννοείται η μικρή διαφοροποίηση μεταξύ των συναλλαγών που έχουν μεταξύ τους μικρή χρονική απόσταση στην περίπτωση που δεν υπάρχει σπουδαία νέα πληροφόρηση η οποία μπορεί να έχει σημαντική επίδραση στις τιμές.

[12] Σεμινάρια ΕΤΕ, Ηλεκτρονικές Σημειώσεις 2012.

Μέτρα Συναλλακτικής Δραστηριότητας Αγοράς

- Ο όγκος συναλλαγών είναι το σύνολο των τεμαχίων ενός χρηματοπιστωτικού μέσου που έγιναν αντικείμενο αγοραπωλησίας σε μία συγκεκριμένη συνεδρίαση.
- Το εύρος μιας αγοράς μετρά την ευρωστία της αγοράς δηλαδή των όγκο συναλλαγών που υπάρχει σε κάθε συνεδρίαση.
- Η αξία των συναλλαγών (σε μία συνεδρίαση) αποτελεί το γινόμενο των διακινηθέντων τεμαχίων επί τις αντίστοιχες τιμές στις οποίες πραγματοποιήθηκαν οι πράξεις και υπολογίζεται και ως το άθροισμα των επιμέρους αξιών συναλλαγής των χρηματοπιστωτικών μέσων που γίνονται αντικείμενο διαπραγμάτευσης σε μία αγορά.

Κεφαλαιοποίηση

Με τον όρο κεφαλαιοποίηση αγοράς εννοούμε τη συνολική αξία των επενδυτικών προϊόντων που γίνονται αντικείμενο διαπραγμάτευσης σε αυτήν και υπολογίζεται ως το γινόμενο του αριθμού των διαφόρων κατηγοριών τίτλων-επενδυτικών προϊόντων επί τις αντίστοιχες τιμές τους. Όσο μεγαλύτερη κεφαλαιοποίηση έχει μία αγορά τόσο πιο ώριμη θεωρείται ότι είναι.

Πληροφόρηση αγοράς

Η πληροφόρηση που παρέχει η αγορά σε σχέση με τα επενδυτικά προϊόντα που αποτελούν αντικείμενο διαπραγμάτευσης σε αυτήν αφορά τόσο τις τιμές των προϊόντων, όσο και τον τρόπο διαμόρφωσης των τιμών αυτών δηλαδή τους παράγοντες που διαμορφώνουν την προσφορά και τη ζήτηση και αποτελεί ένα πολύ σημαντικό χαρακτηριστικό μιας αγοράς κεφαλαίου.

Σήμερα, η πληροφόρηση αυτή παρέχεται πολύ γρήγορα μέσω του διαδικτύου και αποτελεί στην πραγματικότητα ένα οικονομικό αγαθό. Όταν η νέα πληροφόρηση η οποία φθάνει στην αγορά ενσωματώνεται πλήρως στις τιμές λέμε ότι η αγορά διαθέτει *εξωτερική αποτελεσματικότητα*.

Κόστος Συναλλαγών Αγοράς

Το κόστος συναλλαγών είναι μία πολύ σημαντική παράμετρος στις αγορές κεφαλαίου και γι' αυτό τα τελευταία χρόνια έγιναν πολύ μεγάλες προσπάθειες για την ελαχιστοποίηση του (μέθοδοι διαπραγμάτευσης, τεχνολογία, ελεύθερη διαμόρφωση προμηθειών, ανάπτυξη εναλλακτικών αγορών). Όταν επιτυγχάνεται η ελαχιστοποίηση του κόστους σε μία αγορά η αγορά αυτή γίνεται πιο ελκυστική, θεωρείται καλύτερη και λέμε ότι διαθέτει *εσωτερική αποτελεσματικότητα.*

1.4 Είδη χρηματοπιστωτικών μέσων ή χρεογράφων

Τα χρεόγραφα (τίτλοι ή securities) είναι επενδυτικά διαπραγματεύσιμα προϊόντα που εκδίδονται από μια κυβέρνηση, μια εταιρεία ή κάποιον άλλον οργανισμό, τα οποία αντιπροσωπεύουν οικονομική αξία και αποτελούν αποδεικτικό χρέους ή δικαίωμα σε διανεμόμενα κέρδη[13].

Οι επενδύσεις στα χρεόγραφα αποτελούν απαιτήσεις στα κέρδη ή τα εισοδήματα των εταιρειών ή του κράτους που τα εκδίδει. Ο κύριος σκοπός που εκδίδονται τα χρεόγραφα από τις εταιρείες ή το κράτος είναι για να χρηματοδοτήσουν επενδυτικές τους δραστηριότητες σε κεφαλαιουχικά αγαθά. Οι κάτοχοι χρεογράφων έχουν συμμετοχή στα κέρδη μιας εταιρείας χωρίς να είναι απαραίτητα οι άμεσοι ιδιοκτήτες της. Αγοράζοντας χρεόγραφα οι επενδυτές μπορούν να μεταφέρουν εισόδημα από το παρόν σε κάποια μελλοντική περίοδο. Με τον τρόπο αυτό, μπορούν να διαχειρίζονται τα επίπεδα της σημερινής και μελλοντικής τους κατανάλωσης[14].

Τα χρηματοπιστωτικά μέσα μπορούν να διαχωριστούν σε δύο βασικές κατηγορίες. Τα πρωτογενή μέσα και τα παράγωγα. Θα δούμε αναλυτικά τις δύο αυτές διακρίσεις.

1.4.1 Πρωτογενή χρηματοπιστωτικά μέσα

Τα πρωτογενή χρηματοπιστωτικά μέσα περιλαμβάνουν τα ομόλογα και τις μετοχές. Γενικότερα, τα πρωτογενή μέσα μπορούν να καταταχθούν στις εξής κατηγορίες[15]:

- ***Μέσα της Κεφαλαιαγοράς (Κινητές Αξίες):***
  χρηματοπιστωτικά μέσα με διάρκεια μεγαλύτερη του έτους.
  (π.χ. ομόλογα, μετοχές, δικαιώματα επί μετοχών και χρεωστικών τίτλων).
- ***Μέσα της χρηματαγοράς:***
  χρηματοπιστωτικά μέσα με διάρκεια μέχρι ένα έτος.
  (π.χ. Ε.Γ.Ε.Δ., πιστοποιητικά κατάθεσης (CD's), εμπορικά ομόλογα (CP's)).

Θα μελετήσουμε συγκεκριμένα, τα ομόλογα (bonds) και τις μετοχές (stocks).

*1.4.1.1 Ομόλογα (**bonds**)*

Τα ***ομόλογα (bonds)*** είναι περιουσιακά στοιχεία που υπόσχονται στο κάτοχό τους ένα συγκεκριμένο, σίγουρο εισόδημα, κατά τη διάρκεια της ζωής τους, που είναι γνωστό ως κουπόνι, ενώ στη λήξη τους προσφέρουν ένα ονομαστικό χρηματικό ποσό, που αναφέρεται ως ονομαστική αξία[16].

Θα δούμε αναλυτικά τα χαρακτηριστικά στοιχεία των ομολόγων[17]:

[13] «Επενδύσεις», Τζαβαλής Η., Πετράκης Α. ,Εκδόσεις ΟΠΑ, Αθήνα 2009, σελ. 5.
[14] «Επενδύσεις», Τζαβαλής Η., Πετράκης Α. ,Εκδόσεις ΟΠΑ, Αθήνα 2009, σελ. 6.
[15] Σεμινάρια ΕΤΕ, Ηλεκτρονικές Σημειώσεις 2012.
[16] «Επενδύσεις», Τζαβαλής Η., Πετράκης Α. ,Εκδόσεις ΟΠΑ, Αθήνα 2009, σελ. 7.
[17] «Αγορές Χρήματος και κεφαλαίου», Α. Νούλας, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Μακεδονίας, Θεσσαλονίκη 2006, σελ. 66-68.

Ονομαστική Αξία:
Ένα ομόλογο αντιπροσωπεύει ένα συγκεκριμένο ποσό χρημάτων το οποίο χορηγήθηκε ως δάνειο από το κάτοχό του προς την εταιρεία που εξέδωσε αυτό τον τίτλο. Το ποσό αυτό είναι γραμμένο στο ομόλογο και καλείται ονομαστική αξία. Με τη λήξη του ομολόγου, ο επενδυτής εισπράττει το ποσό της ονομαστικής αξίας.

Επιτόκιο:
Τα περισσότερα ομόλογα εκδίδονται με ένα σταθερό επιτόκιο και καταβάλλουν σε τακτά χρονικά διαστήματα ένα συγκεκριμένο ποσό τόκου που αποκαλείται τοκομερίδιο. Το επιτόκιο ονομάζεται ονομαστικό επιτόκιο ή επιτόκιο τοκομεριδίου. Ο τόκος υπολογίζεται βάσει της ονομαστικής αξίας και του επιτοκίου. Η καταβολή των τόκων γίνεται κάθε εξάμηνο ή κάθε χρόνο.

Διάρκεια Ζωής:
Όλα τα ομόλογα έχουν μια συγκεκριμένη διάρκεια ζωής που δείχνει πότε ο επενδυτής θα εισπράξει την ονομαστική αξία και για πόσο χρονικό διάστημα θα εισπράττει τους τόκους.

Απόδοση:
Η συνολική απόδοση που έχει ο επενδυτής από ένα ομόλογο δεν είναι σταθερή όπως το ονομαστικό επιτόκιο. Η απόδοση εξαρτάται από τις μεταβολές της τιμής του ομολόγου που προκαλούνται από τις μεταβολές των επιτοκίων. Στα ομόλογα υπάρχει η διάκριση μεταξύ της τρέχουσας απόδοσης και της απόδοσης στη λήξη του ομολόγου.

Η τρέχουσα απόδοση είναι η ετήσια απόδοση επί του ονομαστικού ποσού αγοράς του ομολόγου ανεξάρτητα από τη διάρκεια ζωής του. Η τρέχουσα απόδοση είναι ίση με το ονομαστικό επιτόκιο όταν ο επενδυτής αγοράζει το ομόλογο στην ονομαστική του τιμή. Εάν όμως η τιμή αγοράς του ομολόγου είναι διαφορετική από την ονομαστική αξία, τότε και η τρέχουσα απόδοση θα είναι διαφορετική από το ονομαστικό επιτόκιο.

Η απόδοση στη λήξη είναι η απόδοση που πρέπει να συγκρίνουν οι επενδυτές όταν εξετάζουν ομόλογα με διαφορετικές λήξεις και διαφορετικά ονομαστικά επιτόκια.

Τιμή:
Η τιμή στην οποία αγοράζονται τα ομόλογα μπορεί να είναι ίση, μεγαλύτερη ή και μικρότερη της ονομαστικής αξίας. Εάν η τιμή της αγοράς είναι ίση με την ονομαστική αξία, τότε λέμε ότι το ομόλογο πωλείται στο άρτιο (face value, or par value). Εάν η τιμή αγοράς είναι μικρότερη της ονομαστικής, το ομόλογο πωλείται κάτω από το άρτιο (at a discount). Εάν η τιμή αγοράς είναι μεγαλύτερη της ονομαστικής αξίας το ομόλογο πωλείται πάνω από το άρτιο (at a premium). Η τιμή στην οποία αγοράζει κανείς ένα ομόλογο εξαρτάται από αρκετούς παράγοντες όπως τα επιτόκια που ισχύουν στην αγορά, την προσφορά και ζήτηση, την πιστοληπτική διαβάθμιση της εταιρείας που εκδίδει το ομόλογο και τη φορολογία που ισχύει επί των ομολόγων.

Τα ομόλογα εκδίδονται είτε από το κράτος (government bonds), είτε από τις επιχειρήσεις (corporate bonds) [18].

Α. Τα ομόλογα που εκδίδονται από τη κυβέρνηση μπορούν να κατηγοριοποιηθούν με βάση το χρονικό περιθώριο λήξης ως εξής:

- *Έντοκα γραμμάτια δημοσίου (treasury bills):* είναι ομόλογα με βραχυχρόνια περίοδο λήξης, συνήθως μέχρι ένα έτος. Για τη κατηγορία αυτή των χρεογράφων συνήθως υπάρχουν οργανωμένες αγορές με μεγάλη ρευστότητα, καθώς οι κυβερνήσεις ανά τακτά διαστήματα κατά τη διάρκεια του έτους εκδίδουν έντοκα γραμμάτια για να καλύψουν τις ταμειακές τους ανάγκες.
- *Κρατικά ομόλογα (treasury bonds):* είναι ομόλογα με ημερομηνία λήξης μεγαλύτερης του ενός έτους. Μπορούν να εκδοθούν για περιόδους πέντε, δέκα ετών ή ακόμα και για μεγαλύτερο επενδυτικό ορίζοντα. Κατά τη διάρκεια της ζωής τους, αυτά καταβάλλουν κουπόνια σε ετήσια ή εξαμηνιαία βάση. Αν δεν καταβάλλουν κουπόνια, όπως τα έντοκα γραμμάτια, τότε αυτά ονομάζονται κρατικά ομόλογα με μηδενικό κουπόνι (zero coupon bonds).

  Ένα άλλο χαρακτηριστικό των κρατικών ομολόγων είναι ότι, για κάποια κατηγορία τους, η κυβέρνηση μπορεί να έχει το δικαίωμα της εξαγοράς τους πριν την ημερομηνία λήξης τους. Αυτά ονομάζονται εξαγοράσιμα ομόλογα (callable bonds). Για να έχει το δικαίωμα αυτό η κυβέρνηση, θα πρέπει να πωλήσει τα ομόλογα αυτά στην αγορά σε χαμηλότερες τιμές σε σχέση με τα μη εξαγοράσιμα ομόλογα (noncallable bonds) που έχουν την ίδια ημερομηνία λήξης.

Β. Τα ομόλογα που εκδίδονται από τις εταιρείες είναι ανάλογα με αυτά που εκδίδονται από το κράτος και ονομάζονται *εταιρικά ομόλογα.* Δύο γνωστά είδη των εταιρικών ομολόγων είναι τα στεγαστικά και τα μετατρέψιμα[19].

Τα στεγαστικά ομόλογα (mortgage bonds) καλύπτουν τους κατόχους τους με το δικαίωμα της κατοχής ή πώλησης περιουσιακών στοιχείων της εταιρείας που τα εκδίδει, αν δεν καταβληθούν τα κουπόνια τους ή η ονομαστική τους αξία.

Τα μετατρέψιμα ομόλογα (convertible bonds) δίνουν στους κατόχους τους το δικαίωμα ανταλλαγής ομολόγων με μετοχές της εταιρείας όταν λήξουν.

Τα ομόλογα, ως προς την αξιοπιστία τους, ταξινομούνται σε διάφορες κατηγορίες από δύο διεθνείς επενδυτικούς οίκους: τον Standard & Poor’s (S&P) και τον Moody’s. Αυτό γίνεται με κριτήριο τη πιστοληπτική ικανότητα της εταιρείας που τα εκδίδει, τη θέση της στο κλάδο που ανήκει και την χρηματοοικονομική της κατάσταση[20].

Τιμολόγηση Ομολόγων

Το πρώτο βήμα για τον υπολογισμό της τιμής ενός ομολόγου είναι να προσδιορίσουμε τις χρηματοροές του. Οι χρηματοροές ενός ομολόγου όπου ο

[18] «Επενδύσεις», Τζαβαλής Η., Πετράκης Α. ,Εκδόσεις ΟΠΑ, Αθήνα 2009, σελ. 7.
[19] «Επενδύσεις», Τζαβαλής Η., Πετράκης Α. ,Εκδόσεις ΟΠΑ, Αθήνα 2009, σελ. 7.
[20] «Επενδύσεις», Τζαβαλής Η., Πετράκης Α. ,Εκδόσεις ΟΠΑ, Αθήνα 2009, σελ. 8.

εκδότης δεν μπορεί να το ανακαλέσει (non-callable) πριν από την λήξη του (maturity of the bond) αποτελούνται από[21]:

1. Την ονομαστική αξία (Nominal Value). Είναι συνήθως 100€ ή 1000€, ενώ πολλές φορές η ονομαστική αξία εκφράζεται ως ποσοστό.
2. Περιοδικά κουπόνια μέχρι την λήξη του ομολόγου (coupons) τα οποία υπολογίζονται με ένα επιτόκιο κουπονιού (coupon rate) επί της ονομαστικής αξίας
3. Την περιοδικότητα των κουπονιών.
4. Την τιμή αποπληρωμής του ομολόγου (redemption value) η οποία εκφράζεται σαν ποσοστό της ονομαστικής αξίας.

Η βασική εξίσωση η οποία μας επιτρέπει να βρούμε την αξία P ενός ομολόγου δίνεται από το τύπο[22]:

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{T}{(1+y)^i} + \frac{F}{(1+y)^n}$$

όπου n είναι ο αριθμός των περιόδων, T είναι το κουπόνι ή το τοκομερίδιο που λαμβάνει ο επενδυτής στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου, F είναι η ονομαστική αξία, i είναι το ονομαστικό επιτόκιο και y είναι η απόδοση στη λήξη.

Όπως είναι προφανές η τιμή του ομολόγου είναι μια συνάρτηση της απόδοσης y μια και τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά του ομολόγου είναι σταθερά.

1.4.1.2 Μετοχές (stocks)

Οι *μετοχές (stocks)* προσδιορίζονται από τα μερίσματα, που αποτελούν εισόδημα που πιθανά να καταβάλλει η εταιρεία στους μετόχους της, σε κάποια μελλοντική χρονική περίοδο και τις μεταβολές της τιμής της μετοχής στην αγορά. Οι μεταβολές της τιμής επηρεάζονται από τα κέρδη και τις προοπτικές της εταιρείας στον κλάδο που ανήκει ή την οικονομία[23].

Αν η εταιρεία παρουσιάζει πολύ καλές προοπτικές και έχει δυναμικό προφίλ, τότε οι κάτοχοι των μέτοχών της μπορεί να πραγματοποιήσουν πολύ υψηλές αποδόσεις σε σχέση με τα ομόλογα ή οποιαδήποτε άλλα περιουσιακά στοιχεία. Αντίθετα, αν η εταιρεία δεν έχει πολύ καλές προοπτικές, τότε είναι πιθανό οι κάτοχοι των μετοχών της να χάσουν μέρος της αξίας των επενδυμένων κεφαλαίων τους σε αυτές, λόγω μη καταβολής μερισμάτων ή σημαντικής υποχώρησης της αγοραίας τους τιμής στο μέλλον. Σε αντίθεση με τα ομόλογα, οι αποδόσεις μιας μετοχής είναι αβέβαιες.

[21] Σεμινάρια ΕΤΕ, Ηλεκτρονικές Σημειώσεις 2012.
[22] «Αγορές Χρήματος και κεφαλαίου», Α. Νούλας, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Μακεδονίας, Θεσσαλονίκη 2006, σελ. 68.
[23] «Επενδύσεις», Τζαβαλής Η., Πετράκης Α. ,Εκδόσεις ΟΠΑ, Αθήνα 2009, σελ. 9.

Τα χαρακτηριστικά στοιχεία των μετοχών είναι τα έξης:

Ονομαστική Τιμή
Ονομαστική τιμή είναι η τιμή που προκύπτει κατά τη πρώτη έκδοση των μετοχών. Συγκεκριμένα, διαιρώντας την αξία του μετοχικού κεφαλαίου της εταιρείας με τον αριθμό των μετοχών που εκδόθηκαν αρχικά προκύπτει η ονομαστική τιμή. Η ονομαστική τιμή μπορεί αργότερα να μεταβληθεί με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης της εταιρείας.

Λογιστική Τιμή
Η λογιστική αξία μιας μετοχής είναι το πηλίκο της διαίρεσης του συνόλου των ιδίων κεφαλαίων (καταβεβλημένο μετοχικό κεφάλαιο, διαφορές από εκδόσεις υπέρ το άρτιο, αποθεματικά κεφάλαια, αποτελέσματα σε νέο) και των προβλέψεων με τον αριθμό των μετοχών που βρίσκονται σε κυκλοφορία.

Πραγματική (Εσωτερική Τιμή)
Η λογιστική αποτίμηση δεν είναι υποχρεωτικά η πραγματική εικόνα των στοιχείων του Ενεργητικού. Για παράδειγμα, μερικά στοιχεία του ενεργητικού μπορεί να εκφράζονται σε ιστορικές τιμές, ενώ άλλα στοιχεία είναι άυλα, όπως φήμη και πελατεία. Έτσι, στη λογιστική τιμή πρέπει να προστεθούν τέτοια στοιχεία για να βρεθεί η πραγματική τιμή.

Χρηματιστηριακή Τιμή
Χρηματιστηριακή τιμή είναι η τιμή που διαμορφώνεται στο χρηματιστήριο. Η τιμή αυτή επηρεάζεται από πολλούς παράγοντες όπως τη μερισματική πολιτική, τις προοπτικές της εταιρείας να πραγματοποιήσει κέρδη βραχυπρόθεσμα και μέσομακροπρόθεσμα καθώς επίσης και από τη γενική εικόνα που επικρατεί και αναμένεται να επικρατήσει στη χρηματιστηριακή αγορά.

Χρηματιστηριακή Κεφαλαιοποίηση (market capitalization)
Η χρηματιστηριακή κεφαλαιοποίηση μιας εταιρείας είναι το γινόμενο του αριθμού των μετοχών επί τη χρηματιστηριακή τιμή.

Οι μετοχές διακρίνονται σε δύο βασικές κατηγορίες: τις κοινές μετοχές και τις προνομιούχες[24].

- Οι *κοινές μετοχές* είναι αυτές που ο κάτοχος τους έχει μερίδιο στην εταιρεία που τις εκδίδει. Οι κάτοχοι των κοινών μετοχών έχουν δικαίωμα ψήφου στα διοικητικά συμβούλια των εταιριών και μπορούν να συμμετέχουν στην εκλογή του διευθυντή τους.

  Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό της κοινής μετοχής είναι ότι οι κάτοχοι της είναι οι τελευταίοι που έχουν απαιτήσεις στα περιουσιακά στοιχεία της εταιρείας της, δηλαδή μετά την ικανοποίηση των απαιτήσεων των δανειστών της ή των κατόχων άλλων χρεογράφων που έχει εκδώσει η εταιρεία, όπως είναι τα ομόλογα.

[24] «Επενδύσεις», Τζαβαλής Η., Πετράκης Α. ,Εκδόσεις ΟΠΑ, Αθήνα 2009, σελ. 9.

- Οι *προνομιούχες μετοχές* υπόσχονται να παρέχουν στους κατόχους τους μια σταθερή ροή εισοδήματος ως μερίσματα κάθε χρόνο. Επίσης, οι κάτοχοι τους δεν έχουν δικαίωμα συμμετοχής στα διοικητικά συμβούλια των εταιριών που εκδίδονται.

  Οι εταιρείες των προνομιούχων μετοχών δεν είναι υποχρεωμένες μέσω συμβολαίων να πληρώνουν μερίσματα στους κατόχους τους κάθε χρόνο. Συνήθως, οι πληρωμές μερισμάτων τους γίνονται συσσωρευτικά. Δηλαδή, μη πληρωμένα μερίσματα αθροίζονται και πληρώνονται στους κατόχους των προνομιούχων μετοχών πριν καταβληθούν μερίσματα στους κατόχους των κοινών.

Αποτίμηση των μετοχών[25]

Η αξία μιας μετοχής σε μια συγκεκριμένη στιγμή είναι ίση με τη παρούσα αξία όλων των μελλοντικών πληρωμών (μερισμάτων) που αναμένονται να διανεμηθούν στους μετόχους κάθε έτος και στο διηνεκές. Ο τύπος που χρησιμοποιείται είναι:

$$P_0 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{D_i}{(1+r)^i} \right) + \frac{P_n}{(1+r)^n}$$

Αν υποθέσουμε ότι η διάρκεια των μετοχών εκτείνεται στο άπειρο τότε η εξίσωση αποτίμησης γίνεται:

$$P_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{D_i}{(1+r)^i} \right)$$

όπου D_i είναι το ετήσιο αναμενόμενο μέρισμα ανά μετοχή στο τέλος του χρόνου για $i = 1,2,...$, P_0 είναι η σημερινή αξία της μετοχής, και r είναι η απαιτούμενη απόδοση η οποία λαμβάνει υπόψην τον βαθμό κινδύνου της μετοχής.

1.4.2 Παράγωγα προϊόντα

Ένα ***παράγωγο προϊόν (derivative product ή derivative security)*** είναι ένα προϊόν του οποίου η αξία (απόδοση) εξαρτάται από την αξία κάποιων από τους βασικούς τίτλους της αγοράς. Οι βασικοί αυτοί τίτλοι ονομάζονται υποκείμενοι ή πρωταρχικοί τίτλοι (primary securities). [26]

Τα τελευταία χρόνια, τα παράγωγα προϊόντα είναι πολύ σημαντικά για τις σύγχρονες κεφαλαιαγορές και χρηματαγορές, είτε ως μέσο μεταφοράς ρίσκου (risk transfer mechanism) μέσω αντιστάθμισης (hedging), είτε ως μέσο ενίσχυσης της ρευστότητας μέσω της κερδοσκοπίας (speculation). Για παράδειγμα, ένα δικαίωμα προαίρεσης πώλησης μιας μετοχής επιτρέπει στους επενδυτές να πουλήσουν μια μετοχή που κατέχουν σε μια προκαθορισμένη τιμή στο μέλλον και έτσι ώστε να

[25] «Αγορές Χρήματος και κεφαλαίου», Α. Νούλας, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Μακεδονίας, Θεσσαλονίκη 2006, σελ. 296.

[26] «Εισαγωγή στη μαθηματική χρηματοοικονομία», Πολυράκης Ι. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις, Αθήνα 2010, σελ. 71.

αποφύγουν ζημιές κεφαλαίου λόγω πτώσης της τιμής της μετοχής κάτω της τιμής αγοράς της[27].

Ο τόπος διαπραγμάτευσής τους γίνεται είτε σε οργανωμένες αγορές στα διάφορα χρηματιστήρια παραγώγων (Derivative Exchanges), είτε με διμερή τρόπο εκτός χρηματιστηρίων (Over the counter).

Τα προθεσμιακά συμβόλαια (future contracts και forward contracts), τα δικαιώματα προαίρεσης (options), οι συμφωνίες ανταλλαγής επιτοκίων (swaps) είναι μερικά παραδείγματα παραγώγων προϊόντων, που θα δούμε αναλυτικά στη συνέχεια.

Γενικά, τα παράγωγα προϊόντα μπορεί να έχουν υποκείμενη αξία οποιαδήποτε διαπραγματεύσιμο ή μη προϊόν όπως χρηματιστηριακούς δείκτες, δείκτες μετοχών (index derivatives), ομόλογα (bond derivatives), επιτόκια (interest rate derivatives), μετοχές (stock derivatives), τη ποσότητα του χιονιού που θα πέσει ή της θερμοκρασίας (weather derivatives), την τιμή του πετρελαίου, χρυσού, πλατίνας ξύλου κ.λπ. (commodity derivatives), την τιμή του ηλεκτρικού ρεύματος (energy derivatives), κ.λπ. Επίσης μπορεί η υποκείμενη αξία να είναι παράγωγο προϊόν όπως δικαιώματα προαίρεσης επί προθεσμιακών συμβολαίων επί δεικτών (option on index futures), τιτλοποιημένα ομόλογα στεγαστικών δανείων, που στην ουσία είναι παράγωγα των στεγαστικών δανείων (mortgage bonds) κ.λπ., προϊόντα πιστωτικού κινδύνου με εκδότη κράτη ή εταιρείες (credit default swaps), καλάθια επί αυτών (basket of credit default swaps), κ.λπ. [28]

Εκτός από χρεόγραφα, οι υποκείμενες αξίες των παραγώγων μπορούν να αποτελούν αγαθά ή εμπορεύματα κάθε είδους. Για παράδειγμα, ενεργειακά προϊόντα όπως αργό πετρέλαιο, βενζίνη κλπ, πολύτιμα και βιομηχανικά μέταλλα, γεωργικά, κτηνοτροφικά και βιομηχανικά προϊόντα, ακίνητα κλπ. Επίσης, μπορούν να αποτελούν πάγια περιουσιακά στοιχεία μις επιχείρησης. Σε μια τέτοια περίπτωση, αυτά αναφέρονται ως πραγματικά δικαιώματα προαίρεσης (real options) [29].

1.4.2.1 Δικαιώματα προαίρεσης (options)

Τα ***δικαιώματα προαίρεσης*** είναι η απλούστερη και πλέον συνηθισμένη κατηγορία παράγωγων τίτλων. Τα δικαιώματα (options) πάνω σε μετοχές διαπραγματεύονται σε οργανωμένο χρηματιστήριο από το 1973. Από τότε υπάρχει δραματική αύξηση του όγκου συναλλαγών επί των δικαιωμάτων προαίρεσης και διαπραγματεύονται σε πολλά χρηματιστήρια σε όλο τον κόσμο. Τεράστιοι όγκοι διαπραγματεύονται, επίσης, και εκτός χρηματιστηρίων (over the counter). Οι υποκείμενες αξίες μπορεί να είναι μετοχές δείκτες επί μετοχών, νομίσματα, ομόλογα, εμπορεύματα, προθεσμιακά συμβόλαια, κ.λπ.[30]

[27] Σεμινάρια ΕΤΕ, Ηλεκτρονικές Σημειώσεις 2012.

[28] «Ανάλυση Κεφαλαιαγορών. Παράγωγα. Φυλλάδιο 6», Σεμινάρια ΕΤΕ, Ηλεκτρονικές Σημειώσεις, Γκατζιώνης Γ., 2012., σελ. 1.

[29] «Ανάλυση Κεφαλαιαγορών. Παράγωγα. Φυλλάδιο 6»,…, ό.π. σελ. 1.

[30] «Εισαγωγή στη μαθηματική χρηματοοικονομία», Πολυράκης Ι. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις, Αθήνα 2010, σελ. 71.

Υπάρχουν δύο βασικοί τύποι συμβολαίων δικαιωμάτων προαίρεσης[31]:

- Το ***δικαίωμα προαίρεσης αγοράς*** *(call* option) είναι ένα παράγωγο προϊόν που δίνει το δικαίωμα αλλά όχι την υποχρέωση στον επενδυτή να αγοράσει την υποκείμενη αξία σε μία καθορισμένη ημερομηνία με μία καθορισμένη τιμή.
- Το **δικαίωμα προαίρεσης πώλησης** (put option) είναι ένα παράγωγο προϊόν που δίνει το δικαίωμα αλλά όχι την υποχρέωση στον επενδυτή να πουλήσει την υποκείμενη αξία σε μία καθορισμένη ημερομηνία με μία καθορισμένη τιμή.

Η καθορισμένη τιμή είναι γνωστή ως *τιμή εξάσκησης (exercise price),* η καθορισμένη ημερομηνία καλείται *ημερομηνία εξάσκησης (exercise date) ή λήξη* των συμβολαίων.

Ανάλογα με την ημερομηνία εξάσκησης τα δικαιώματα προαίρεσης διακρίνονται σε Ευρωπαϊκού και Αμερικανικού τύπου. Ένα δικαίωμα προαίρεσης είναι *ευρωπαϊκού τύπου (European option)* αν ο κάτοχός του μπορεί να το εξασκήσει μόνο κατά την ημερομηνία λήξης του, ενώ αν μπορεί να το εξασκήσει σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή μέχρι τη συμφωνημένη ημερομηνία λήξης του, το δικαίωμα (εξάσκησης) αγοράς ή πώλησης θα είναι *αμερικανικού τύπου (American option).* Τα περισσότερα δικαιώματα που διαπραγματεύονται είναι αμερικανικού τύπου, ενώ τα δικαιώματα ευρωπαϊκού τύπου είναι πιο εύκολα στη ανάλυσή τους[32].

Εδώ, πρέπει να τονιστεί ότι ένα δικαίωμα προαίρεσης δίνει το δικαίωμα αλλά όχι την υποχρέωση στον κάτοχό του να εξασκήσει το δικαίωμα αγοράς ή πώλησης. Αν δεν εξασκήσει το δικαίωμα, λέμε ότι το δικαίωμα έχει εγκαταλειφτεί[33]. Αυτό το γεγονός διαχωρίζει τα προθεσμιακά συμβόλαια από τα options. Στα προθεσμιακά συμβόλαια δεν κοστίζει τίποτα η αγορά ή πώλησή τους, ενώ στα δικαιώματα προαίρεσης ο επενδυτής πρέπει να πληρώσει για να τα αγοράσει. Η τιμή αυτή καλείται *option price (ή και option premium).*

Ο αγοραστής των δικαιωμάτων προαίρεσης πληρώνει το option premium για το δικαίωμα που αποκτά (αγοράς ή πώλησης), ενώ ο πωλητής των δικαιωμάτων εισπράττει το τίμημα, δημιουργώντας μελλοντική υποχρέωση της δυνητικής πώλησης σε καθορισμένη τιμή της υποκείμενης αξίας (για δικαιώματα αγοράς-seller of a call option) ή της δυνητικής αγοράς σε καθορισμένη τιμή της υποκείμενης αξίας (για δικαιώματα πώλησης-seller of a put option).

Σε κάθε δικαίωμα προαίρεσης υπάρχουν δύο πλευρές. Η μία πλευρά είναι ο επενδυτής που έχει αγοράσει το συμβόλαιο (*long position*) αγοράς ή πώλησης (call ή put) και η άλλη ο επενδυτής που έχει πουλήσει το συμβόλαιο (*short position*) αγοράς ή πώλησης. Ο πωλητής των συμβολαίων λαμβάνει ένα τίμημα (την τιμή του συμβολαίου-option premium ή option price) και έχει μία δυνητική μελλοντική υποχρέωση. Το όφελος/ζημία του είναι αντίθετη από αυτή του αγοραστή του συμβολαίου[34].

[31] «Εισαγωγή στη μαθηματική χρηματοοικονομία»,…, ό.π. σελ. 71-72.

[32] «Εισαγωγή στη μαθηματική χρηματοοικονομία», Πολυράκης Ι. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις, Αθήνα 2010, σελ. 72.

[33] «Εισαγωγή στη μαθηματική χρηματοοικονομία»,…, ό.π., σελ. 72.

[34] «Ανάλυση Κεφαλαιαγορών. Παράγωγα. Φυλλάδιο 6».Σεμινάρια ΕΤΕ, Ηλεκτρονικές Σημειώσεις, Γκατζιώνης Γ., 2012.

Τιμολόγηση Δικαιωμάτων Προαίρεσης

Έστω ότι η τιμή εξάσκησης ενός option είναι Κ και ότι η τιμή της υποκείμενη αξίας την στιγμή Τ της λήξης του συμβολαίου είναι S_T (εάν πρόκειται για αμερικανικού τύπου option τότε για να έχει φτάσει το συμβόλαιο στη λήξη σημαίνει ότι μέχρι τότε δεν έχει εξασκηθεί από τον αγοραστεί του). Συμβολίζουμε το κέρδος/ ζημία του επενδυτή την χρονική στιγμή Τ με $f(S_T)$ και με c την αξία του δικαιώματος αγοράς (call price) την στιγμή αγοράς/πώλησή του και p την αξία του δικαιώματος πώλησης (put price) την στιγμή αγοράς/πώλησή του[35].

Οπότε διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις[36]:

- Αγορά δικαιώματος αγοράς (long position-call option):
$$f(S_T) = \max(S_T - K, 0) - c$$
- Πώληση δικαιώματος αγοράς (short position-call option):
$$f(S_T) = c - \max(S_T - K, 0)$$
- Αγορά δικαιώματος πώλησης (long position-put option):
$$f(S_T) = \max(K - S_T, 0) - p$$
- Πώληση δικαιώματος πώλησης (short position-put option):
$$f(S_T) = p - \max(K - S_T, 0)$$

Αποτίμηση Options

Με μια σύντομη αναφορά στη φόρμουλα Black-Scholes, η τιμή του δικαιώματος αγοράς προσδιορίζεται από τον ακόλουθο τύπο:
$$V_c = x\Phi(d_1) - Ke^{-rt}\Phi(d_2)$$

όπου V_c είναι η τιμή του δικαιώματος αγοράς, x είναι η τρέχουσα τιμή, K είναι η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος, t είναι η χρονική διάρκεια πριν τη λήξη (εκφραζόμενο σαν κλάσμα του έτους), r είναι το ακίνδυνο επιτόκιο ενός χρόνου και $\Phi(d_1), \Phi(d_2)$ είναι οι πιθανότητες από μια κανονική κατανομή[37].

---

[35] «Εισαγωγή στη μαθηματική χρηματοοικονομία», Πολυράκης Ι. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις, Αθήνα 2010, σελ. 77.

[36] «Εισαγωγή στη μαθηματική χρηματοοικονομία»,..., ό.π. σελ. 77.

[37] «Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις με εφαρμογές στα χρηματοοικονομικά», Σπηλιώτης Ι. Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα 2004., σελ. 247.

1.4.2.2 Εξωτικά Δικαιώματα

Τα **εξωτικά δικαιώματα** είναι μια κατηγορία παραγώγων με πλέον σύνθετες αποδόσεις συγκριτικά με τα παράγωγα προαίρεσης. Αυτός ο τύπος δικαιωμάτων δεν διαπραγματεύεται σε χρηματιστήρια αλλά σε επίσημες εξωχρηματιστιριακές αγορές[38].

Τα δικαιώματα αυτά διακρίνονται για δύο σημαντικές καινοτομίες συγκριτικά με τα συνήθη δικαιώματα. Πρώτον, στα εξωτικά δικαιώματα το διάνυσμα εξάσκησης δεν είναι το σταθερό, χωρίς κίνδυνο διάνυσμα ***1*** *(riskless vector)* των δικαιωμάτων προαίρεσης, αλλά κάποιο διάνυσμα το οποίο δεν είναι απαραίτητα σταθερό σε όλες τις δυνατές καταστάσεις της οικονομίας. Το διάνυσμα αυτό είναι ένα διάνυσμα του οποίου είναι δυνατό να διαφοροποιούνται οι αποδόσεις στις διάφορες καταστάσεις και έτσι σε αντίθεση με το σταθερό διάνυσμα ***1,*** είναι ένα διάνυσμα το οποίο εμπεριέχει κίνδυνο ανάλογα με τις καταστάσεις που εμφανίζονται. Επίσης, ένα άλλο χαρακτηριστικό των εξωτικών δικαιωμάτων είναι ότι το διάνυσμα εξάσκησης εξαρτάται από τις αποδόσεις του χρηματοοικονομικού συμβολαίου σε κάποια ή κάποιες από τις ενδιάμεσες χρονικές περιόδους μεταξύ της ημερομηνίας εγγραφής και της ημερομηνίας εξάσκησης.

Όπως και στα δικαιώματα προαίρεσης, τα εξωτικά δικαιώματα εγγράφονται σε χρηματοοικονομικά συμβόλαια και ανάλογα έχουμε την ημερομηνία εγγραφής, την ημερομηνία εξάσκησης και το διάνυσμα εξάσκησης. Επίσης, μπορούμε να θεωρήσουμε ταν εξωτικά δικαιώματα αμερικανικού ή ευρωπαϊκού τύπου. Υπάρχουν πολλές κατηγορίες εξωτικών δικαιωμάτων, όπως τα δικαιώματα forward-start, lookback, basket, Asian κ.λπ. [39]

1.4.2.3 Προθεσμιακά συμβόλαια

Τα προθεσμιακά συμβόλαια είναι ένα άλλο είδος παράγωγων προϊόντων. Ο κάτοχος τέτοιων συμβολαίων υποχρεούται να αγοράσει ή να πουλήσει ένα τίτλο (μετοχή, νόμισμα, αγαθό) σε μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή στο μέλλον και σε προκαθορισμένη τιμή. Οι δύο βασικές κατηγορίες προθεσμιακών συμβολαίων που θα δούμε αναλυτικά είναι οι ***προθεσμιακές πράξεις (forward contracts)*** και τα ***συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (futures)*** **.**[40]

1.4.2.3.1 Προθεσμιακές Πράξεις (Forwards)

Οι ***προθεσμιακές πράξεις (forwards)*** είναι μια συμφωνία αλλά και υποχρέωση για αγοραπωλησία καθορισμένης ποσότητας του υποκείμενου τίτλου σε προκαθορισμένη μελλοντική στιγμή (ημερομηνία παράδοσης-delivery date) και σε προκαθορισμένη τιμή (τιμή παράδοσης-delivery price). Είναι ουσιαστικά δικαιώματα προαίρεσης που συνάπτονται μεταξύ δύο μερών. Η συμφωνία είναι

[38] «Εισαγωγή στη μαθηματική χρηματοοικονομία», Πολυράκης Ι. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις, Αθήνα 2010, σελ. 247-248.
[39] «Εισαγωγή στη μαθηματική χρηματοοικονομία»,…, ό.π. σελ. 103-104.
[40] «Εισαγωγή στη μαθηματική χρηματοοικονομία»,…, ό.π. σελ. 111.

συνήθως μεταξύ δύο τραπεζών ή μεταξύ μίας τράπεζας και ενός επενδυτή ή και μεταξύ επενδυτών. Συνήθως, δεν είναι τυποποιημένες και δεν διαπραγματεύονται σε χρηματιστήριο.[41]

Το ένα μέρος πού συμφωνεί να αγοράσει την υποκείμενη αξία σε συγκεκριμένη τιμή την συγκεκριμένη μελλοντική στιγμή λέμε ότι έχει θέση στην αγορά *long.* Το άλλο μέρος πού συμφωνεί να πουλήσει την υποκείμενη αξία σε συγκεκριμένη τιμή την συγκεκριμένη μελλοντική στιγμή λέμε ότι έχει θέση στην αγορά *short.*[42]

Ένα τέτοιο συμβόλαιο διατίθεται μόνο μία φορά, κατά την ημερομηνία παράδοσης και δεν υπάρχει ροή μετρητών κατά την έναρξή του. Όμως, ένα αρχικό ποσό, συνήθως της τάξεως του 15%-25% της συμφωνηθείσας συνολικής τιμής του προϊόντος κατατίθεται ως προκαταβολή (εγγύηση) από τον αγοραστή του συμβολαίου το οποίο αφαιρείται από την τελική τιμή του προϊόντος κατά την ημερομηνία παράδοσης. Κατά τη πάροδο του χρόνου, ένα τέτοιο συμβόλαιο ενδέχεται να γίνει αντικείμενο διαπραγμάτευσης προς αγοραπωλησία αν σε κάποιο ενδιαφερόμενο διαφαίνεται ότι η κατοχή του συμβολαίου θα είναι προσοδοφόρα.[43]

Ο αγοραστής της προθεσμιακής πράξης υποχρεούται να δεχθεί παραλαβή του υποκείμενου προϊόντος στη λήξη του συμβολαίου. Η διάρκεια συμβολαίων είναι συνήθως τρίμηνη, εξάμηνη ή εννιάμηνη. Επίσης, ο αγοραστής του forward υποχρεούται να δεχθεί την παραλαβή της ποσότητας του προϊόντος στη συγκεκριμένη τιμή και συχνά στη συγκεκριμένη τοποθεσία που προβλέπεται από το συμβόλαιο.

Γενικά, ο αγοραστής ενός forward (long forward) κερδίζει από την άνοδο της τιμής του υποκείμενου μέσου. Επίσης, κερδίζει όταν η τιμή του υποκείμενου τίτλου κατά την ημερομηνία παράδοσης είναι μεγαλύτερη από την τιμή παράδοσης. Έχει απεριόριστο δυνητικό κέρδος και ενδεχομένως αρκετά μεγάλη δυνητική ζημία και παίρνει θετική θέση γιατί ξέρει ότι θα αγοράσει στο μέλλον ένα προϊόν και θέλει να κλειδώσει την τιμή δηλαδή να προστατευτεί από την άνοδο (αντισταθμίζει ουσιαστικά τον κίνδυνο που αντιμετωπίζει να αγοράσει ακριβά στο μέλλον).

Αντίθετα, ο πωλητής ενός forward (short forward) κερδίζει από την πτώση της τιμής του υποκείμενου μέσου. Επίσης, κερδίζει όταν η τιμή του υποκείμενου τίτλου κατά την ημερομηνία παράδοσης είναι μικρότερη από την τιμή παράδοσης. Έχει περιορισμένο αλλά ενδεχομένως αρκετά μεγάλο δυνητικό κέρδος και απεριόριστη δυνητική ζημία και τέλος, παίρνει αρνητική θέση γιατί ξέρει ότι θα πουλήσει στο μέλλον ένα προϊόν και θέλει να κλειδώσει την τιμή δηλαδή να προστατευτεί από την πτώση (αντισταθμίζει ουσιαστικά τον κίνδυνο που αντιμετωπίζει να πουλήσει φθηνά στο μέλλον).[44]

Την στιγμή λήξης του συμβολαίου, ο έχων long θέση παραλαμβάνει την υποκείμενη αξία στην forward τιμή και ο έχων short θέση παραδίδει την υποκείμενη αξία στην forward τιμή. Η μέθοδος αυτή καλείται φυσική παράδοση (physical delivery), αφού η υποκείμενη αξία παραλαμβάνεται από τον αγοραστή (ή

[41] «Εισαγωγή στη μαθηματική χρηματοοικονομία»,…, ό.π. σελ. 111-112.
[42] «Ανάλυση Κεφαλαιαγορών. Παράγωγα. Φυλλάδιο 6», Σεμινάρια ΕΤΕ, Ηλεκτρονικές Σημειώσεις, Γκατζιώνης Γ., 2012., σελ. 2.
[43] «Ανάλυση Κεφαλαιαγορών. Παράγωγα. Φυλλάδιο 6»,…, ό.π. σελ. 2.
[44] «Ανάλυση Κεφαλαιαγορών. Παράγωγα. Φυλλάδιο 6»,…, ό.π. σελ. 2.

παραδίδεται από τον πωλητή) του προθεσμιακού συμβολαίου. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται κυρίως για προθεσμιακά συμβόλαια επί εμπορευμάτων, νομισμάτων και ομολόγων.

Αντί της παραλαβής/παράδοσης μπορεί να γίνει και χρηματικός διακανονισμός (cash settlement). Η μέθοδος αυτή είναι πιο διαδεδομένη σε παράγωγα επί δεικτών ή και σε προθεσμιακά συμβόλαια καιρού (μια και σε αυτά η φυσική παράδοση είναι αδύνατη).

Τιμολόγηση Forwards

Έστω ότι η διάρκεια ενός προθεσμιακού συμβολαίου είναι T, η τιμή παράδοσης K και η υποκείμενη αξία έχει τιμή S_T την χρονική στιγμή T[45].

$\rightarrow$ Το κέρδος/ζημία του μέρους που είναι long στην λήξη του συμβολαίου, την χρονική στιγμή T, θα είναι $S_T - K$ (payoff at maturity).

$\rightarrow$ Το κέρδος/ζημία του μέρους που είναι short στην λήξη του συμβολαίου, την χρονική στιγμή T, θα είναι $K - S_T$ (payoff at maturity).

Είναι προφανές ότι όσο μεγαλύτερη είναι αξία της υποκείμενης αξίας στην λήξη τόσο μεγαλύτερο το κέρδος της long θέσης και τόσο μεγαλύτερη η ζημία της short θέσης και αντίθετα. Το άθροισμα μίας long και μίας short θέσης είναι προφανώς 0. Άρα τα προθεσμιακά συμβόλαια (όπως εν γένει και όλα τα παράγωγα προϊόντα) είναι παίγνια μηδενικού αθροίσματος (zero sum game).

Ένα προθεσμιακό συμβόλαιο εκκαθαρίζεται στην λήξη του (at maturity). Ο κάτοχος της short θέσης παραδίδει την υποκείμενη αξία στον κάτοχο της long θέσης και πληρώνεται την τιμή παράδοσης.

Τα forwards, όπως και κάθε παράγωγο προϊόν απαιτεί στην λήξη μια εκτέλεση κάποιας υποχρέωσης. Για να διασφαλιστεί ότι οι υποχρεώσεις μπορούν να εκπληρωθούν, συνήθως απαιτείται η καταβολή κάποιων ενεχύρων (τίτλων ή και μετρητών) που καλείται περιθώριο ασφάλισης (margin). Στα forwards, που είναι διμερείς συμφωνίες το ποιος θα καταβάλει το περιθώριο ασφάλισης εξαρτάται από την σχετική πιστοληπτική ικανότητά, μεταξύ των δύο μερών. Συνήθως μεταξύ τράπεζας και επενδυτή το περιθώριο ασφάλισης καταβάλλεται από τον επενδυτή.

Το περιθώριο ασφάλισης είναι κάποιο ποσοστό της αξία του υπό παράδοση τίτλου. Στα forwards, συνήθως, το περιθώριο ασφάλισης καθορίζεται στην αρχή της συναλλαγής και μόνο εάν οι συνθήκες αγοράς αποβούν αρκετά κατά του επενδυτή αναπροσαρμόζεται[46].

Αφού ο επενδυτής καταβάλλει μόνο μέρος της αξίας των πιθανών μελλοντικών υποχρεώσεων του ως margin, είναι φανερό ότι κάνει μια μόχλευση (leverage) στα χρήματά του. Αυτό είναι ένα γενικό φαινόμενο στα παράγωγα προϊόντα. Λόγω αυτού, τα παράγωγα προϊόντα βρίσκονται σε προτίμηση από τους επενδυτές και αποτελούν «οδηγό» για την μελλοντική κατεύθυνση των υποκειμένων αγορών.

[45] «Ανάλυση Κεφαλαιαγορών. Παράγωγα. Φυλλάδιο 6»,..., ό.π. σελ. 2.
[46] «Ανάλυση Κεφαλαιαγορών. Παράγωγα. Φυλλάδιο 6»,..., ό.π. σελ. 3.

Τα forwards ανάλογα με τον υποκείμενο τίτλο τους διακρίνονται σε [47]:

- → Προθεσμιακά συμβόλαια με υποκείμενο μέσο έναν χρηματιστηριακό ή χρηματοοικονομικό δείκτη (*index forwards*)
- → Προθεσμιακά συμβόλαια με υποκείμενο μέσο μία μετοχή του Χρηματιστηρίου *(stock forwards).*
- → Προθεσμιακά συμβόλαια με υποκείμενο μέσο μία ισοτιμία νομισμάτων *(currency forwards).*
- → Προθεσμιακά συμβόλαια με υποκείμενο μέσο ένα ομόλογο *(bond forwards).*
- → Προθεσμιακές συμβάσεις με υποκείμενο μέσο ένα επιτόκιο αναφοράς (*forward rate agreements (FRAs)).*

1.4.2.3.2 Συμβόλαια μελλοντικής Εκπλήρωσης (Futures)

Τα τυποποιημένα συμβόλαια που εγγράφονται κυρίως σε μετοχές, χρηματιστηριακούς δείκτες, ξένο συνάλλαγμα, επιτόκια αλλα και σε κάθε άλλο υποκείμενο μέσο που εγγράφονται τα forwards, καλούνται *future contracts*.

Αποτελούν και αυτά μια συμφωνία μεταξύ δύο μερών να αγοράσουν ή να πουλήσουν μία υποκείμενη αξία σε προκαθορισμένη τιμή σε μια καθορισμένη χρονική στιγμή στο μέλλον[48]. Για να γίνει η διαπραγμάτευση πιο εύκολα, το χρηματιστήριο παραγώγων καθορίζει τα συμβόλαια που διαπραγματεύονται των οποίων τους όρους συστηματοποιεί (product standardization). Οι επενδυτές δεν γνωρίζονται μεταξύ τους και αγοράζουν ή πωλούν καθημερινά τα συμβόλαια (long/short positions) στο χρηματιστήριο, ανάλογα εάν θέλουν να τους παραδοθούν ή να παραδώσουν τις υποκείμενες αξίες. Το χρηματιστήριο εγγυάται την εκκαθάριση των συμβολαίων (settlement). Επειδή τα futures (όπως και τα forwards) αποτελούν μελλοντικές υποχρεώσεις των επενδυτών, οι επενδυτές είναι υποχρεωμένοι, για να επενδύσουν σε αυτά τα προϊόντα, να καταβάλλουν το λεγόμενο περιθώριο ασφάλισης (margin) το οποίο είναι μέρος της ονομαστικής αξίας του συμβολαίου που επενδύουν. Το ακριβές ποσό, και ο χρόνος κατάθεσής του καθορίζεται από το χρηματιστήριο και είναι συνάρτηση του μεγέθους του συμβολαίου, της μεταβλητότητας του υποκείμενου τίτλου, της διάρκειας του συμβολαίου, κλπ. Αφού καταβάλλουν μέρος της αξίας των συμβολαίων επιτυγχάνουν με αυτόν τον τρόπο την λεγόμενη μόχλευση (leverage). Με άλλα λόγια έχουν εκτεθεί σε κίνδυνο (άρα και σε πιθανό κέρδος) πολλαπλάσιο της αξίας του καταβαλλόμενου margin.

Η τελική εκκαθάριση των συμβολαίων γίνεται όπως και στα forwards, την τελευταία μέρα διαπραγμάτευσης με δύο τρόπους ανάλογα με την φύση του προϊόντος και τον τρόπο που επιλέγει το χρηματιστήριο να τα εκκαθαρίσει.

Ο πρώτος τρόπος καλείται φυσική παράδοση (physical delivery) και είναι συνηθισμένος κυρίως σε παράγωγα επί εμπορευμάτων (commodities) και ομολόγων. Ο δεύτερος τρόπος καλείται χρηματικός διακανονισμός (cash settlement) και χρησιμοποιείται μεταξύ άλλων σε index futures.

[47] «Ανάλυση Κεφαλαιαγορών. Παράγωγα. Φυλλάδιο 6»,…, ό.π. σελ. 3.

[48] «Εισαγωγή στη μαθηματική χρηματοοικονομία», Πολυράκης Ι. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις, Αθήνα 2010, σελ. 113.

Στα futures που διαπραγματεύονται σε χρηματιστήρια, για να μειωθεί ο κίνδυνος αθέτησης από μέρος του επενδυτή των υποχρεώσεών του, χρησιμοποιείται καθημερινός διακανονισμός με την μέθοδο mark-to market.

Δηλαδή, ενώ στα forwards πρακτικά η εκκαθάριση και οι τυχόν χρεοπιστώσεις γίνονται στην λήξη του συμβολαίου, στα futures γίνονται καθημερινά. Το συμβόλαιο βάσει της τιμής διαπραγμάτευσής του εκκαθαρίζεται, και εάν το ποσό που προκύπτει από την τιμή κλεισίματος του συμβολαίου, σε σχέση με την τιμή κλεισίματος της προηγούμενης μέρας, είναι κάτω από το ελάχιστο περιθώριο ασφάλισης, τότε πρέπει να καταβάλει την διαφορά.[49].

Με άλλα λόγια με την τιμή κλεισίματος του παράγωγου εκκαθαρίζονται τα συμβόλαια (daily settlement) και υπολογίζεται το αναγκαίο περιθώριο ασφάλισης που πρέπει να κατατίθεται από αγοραστές και πωλητές στο χρηματιστήριο ως εγγύηση ότι θα εκπληρώσουν τις μελλοντικές υποχρεώσεις τους. Έτσι ο επενδυτής πέρα από το ελάχιστο περιθώριο ασφάλισης που θα πρέπει να έχει κατατεθειμένο θα πρέπει να έχει και κάποια χρήματα για τις ημερήσιες χρεοπιστώσεις λόγω του mark-to-market.

Το περιθώριο ασφάλισης (και οι χρηματικές χρεοπιστώσεις) γίνονται σε ένα λογαριασμό του επενδυτή, που καλείται λογαριασμός περιθωρίου ασφάλισης (margin account), και είναι έντοκος. Αν ο πελάτης δεν καταβάλει τα αναγκαίο χρηματικό ποσό και το ύψος του λογαριασμού είναι κάτω από το ελάχιστο περιθώριο ασφάλισης τότε ο πελάτης λαμβάνει από το χρηματιστήριο το λεγόμενο margin call. Ο επενδυτής καλείται να συμπληρώσει το απαιτούμενο περιθώριο ασφάλισης αλλιώς η θέση του κλείνει στην αγορά.

Οι διαφορές μεταξύ του αγοραστή ενός future (long future) και ενός πωλητή (short future) είναι οι εξής[50]:

1. Ο αγοραστής κερδίζει όταν η τιμή του υποκείμενου τίτλου (spot price S) κατά την ημερομηνία παράδοσης είναι μεγαλύτερη από την προθεσμιακή τιμή (forward price F), ενώ ο πωλητής κερδίζει όταν η τιμή του υποκείμενου τίτλου (spot price S) κατά την ημερομηνία παράδοσης είναι μικρότερη από την προθεσμιακή τιμή (forward price F).
2. Ο αγοραστής έχει απεριόριστο δυνητικό κέρδος ενώ αντίθετα ο πωλητής έχει απεριόριστη δυνητική ζημία.
3. Ο πωλητής παίρνει θετική θέση γιατί ξέρει ότι θα αγοράσει στο μέλλον ένα προϊόν και θέλει να κλειδώσει την τιμή, δηλαδή να προστατευτεί από την άνοδο (αντισταθμίζει ουσιαστικά τον κίνδυνο που αντιμετωπίζει να αγοράσει ακριβά στο μέλλον), ενώ αντίθετα ο πωλητής παίρνει αρνητική θέση γιατί ξέρει ότι θα πουλήσει στο μέλλον ένα προϊόν και θέλει να κλειδώσει την τιμή, δηλαδή να προστατευτεί από την πτώση (αντισταθμίζει ουσιαστικά τον κίνδυνο που αντιμετωπίζει να πουλήσει φθηνά στο μέλλον).
4. Ο αγοραστής ενός future έχει περιορισμένη αλλά ενδεχομένως αρκετά μεγάλη δυνητική ζημία, ενώ ο πωλητής έχει περιορισμένο αλλά ενδεχομένως αρκετά μεγάλο δυνητικό κέρδος.

[49] «Ανάλυση Κεφαλαιαγορών. Παράγωγα. Φυλλάδιο 6»,..., ό.π. σελ. 5.
[50] «Ανάλυση Κεφαλαιαγορών. Παράγωγα. Φυλλάδιο 6»,..., ό.π. σελ. 5.

Τα χαρακτηριστικά στοιχεία των futures είναι[51]:

- Το υποκείμενο μέσο, δηλαδή το αγαθό το οποίο συμφωνείται να παραδοθεί από τον πωλητή και να πληρωθεί από τον αγοραστή.
- Το μέγεθος συμβολαίου ή πολλαπλασιαστής (για δείκτες), το οποίο καθορίζει την ποσότητα του αγαθού που πρέπει να παραδοθεί από τον πωλητή και να πληρωθεί από τον αγοραστή, και
- Η ληκτότητα, δηλαδή η ημερομηνία παράδοσης του αγαθού και λήξης του συμβολαίου.
- Σειρά των futures: Η σειρά των futures περιλαμβάνει όλα τα futures με πανομοιότυπα τυποποιημένα χαρακτηριστικά. Οι διάφορες σειρές των futures στο ίδιο υποκείμενο προσδιορίζονται με βάση την ημέρα λήξης της σειράς κατά την οποία προσδιορίζεται η τιμή στην οποία θα γίνει ο τελικός διακανονισμός των futures.

Τα παραπάνω στοιχεία που περιγράφηκαν είναι τυποποιημένα. Το μόνο χαρακτηριστικό του ΣΜΕ το οποίο δεν είναι τυποποιημένο είναι η τιμή του. Στο Χρηματιστήριο προσφέρονται ΣΜΕ συγκεκριμένης ποσότητας της υποκείμενης αξίας και συγκεκριμένης ημερομηνίας, χωρίς όμως να καθορίζεται η τιμή στην οποία θα γίνει η εκπλήρωση της συμφωνίας.

Η τιμή του ΣΜΕ προσδιορίζεται από την προσφορά και τη ζήτηση, όπως και στις μετοχές. Όλοι οι ενδιαφερόμενοι (αγοραστές - πωλητές) εισάγουν εντολές σε ένα σύστημα διαπραγμάτευσης στο επίπεδο που επιθυμούν να αγοράσουν ή να πουλήσουν. Όταν δύο αντίθετες τιμές ταυτιστούν τότε πραγματοποιείται συναλλαγή και διαμορφώνεται η τιμή του ΣΜΕ η οποία αντιστοιχεί στην προθεσμιακή τιμή της υποκείμενης αξίας.

Η τιμή του ΣΜΕ που προκύπτει καθημερινά ονομάζεται και τιμή εκκαθάρισης ή διακανονισμού του ΣΜΕ. Την ημερομηνία λήξης του ΣΜΕ η τιμή εκκαθάρισης ή διακανονισμού (καθημερινή αποτίμηση) συμπίπτει με την τιμή παράδοσης του υποκείμενου τίτλου.

Ένα ακόμα χαρακτηριστικό των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης είναι η Εκπλήρωση ή ρευστοποίηση των futures.

Για τον κάτοχο ενός ΣΜΕ υπάρχουν οι εξής επιλογές:

- Η ρευστοποίηση, δηλαδή το κλείσιμο της ανοιχτής θέσης με αντίθετη συναλλαγή.
- Η εκπλήρωση ενός ΣΜΕ γίνεται με δύο τρόπους:
    1) Φυσική παράδοση: Την προκαθορισμένη ημερομηνία γίνεται παράδοση του υποκείμενου μέσου από τον πωλητή στον αγοραστή.
    2) Χρηματικός ή ταμειακός διακανονισμός: Την προκαθορισμένη ημερομηνία υπολογίζεται το κέρδος ή η ζημία των αντισυμβαλλομένων (με βάση την τρέχουσα τιμή του αγαθού) και ο ζημιωμένος πληρώνει τη ζημιά στον κερδισμένο.

[51] Σεμινάρια ΕΤΕ, Ηλεκτρονικές Σημειώσεις 2012.

Αποτίμηση Futures

Η επιθυμία κάποιου για αγορά ενός περιουσιακού στοιχείου στο μέλλον μπορεί να πραγματοποιηθεί με δύο τρόπους: Με την αγορά του περιουσιακού στοιχείου σήμερα και την αποθήκευσή του μέχρι την προκαθορισμένη ημερομηνία, είτε με την αγορά ενός future πάνω στο συγκεκριμένο περιουσιακό στοιχείο. Αν υποθέσουμε ότι οι αγορές στις οποίες διαπραγματεύονται τα παραπάνω είναι αποτελεσματικές τότε θα πρέπει και οι δύο εναλλακτικές λύσεις αγοράς του περιουσιακού στοιχείου να είναι ισοδύναμες[52].

Βάση (basis):
Βάση ενός ΣΜΕ με ημέρα λήξης T ορίζεται η διαφορά της τιμής ΣΜΕ από την τιμή μετρητοίς σε κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t, δηλαδή:

$$\text{basis}_{t,T} = F_{t,T} - S_t$$

όπου $F_{t,T}$ είναι η τιμή του ΣΜΕ και S_t είναι η τιμή μετρητοίς.

- ✓ Στα ΣΜΕ επί χρηματοπιστωτικών τίτλων όσο μεγαλύτερη είναι η διάρκεια του συμβολαίου τόσο μεγαλύτερη είναι η βάση δηλαδή η διαφορά της τιμής του συμβολαίου ΣΜΕ από την τιμή τοις μετρητοίς.
- ✓ Αντίθετα όσο το συμβόλαιο πλησιάζει στη λήξη του τόσο η τιμή του θα συγκλίνει προς την τιμή μετρητοίς και τόσο μικρότερη θα γίνεται η βάση.

Λόγοι ύπαρξης της βάσης:

- Συνθήκες προσφοράς και ζήτησης στην αγορά μετρητοίς όταν παραδίδεται το συμβόλαιο.
- Διαφορετικές προσδοκίες τιμών στις προθεσμιακές αγορές και στις αγορές μετρητοίς.
- Διαφορά στην ποιότητα αγαθού ή τίτλου μετρητοίς και του παραδοτέου αγαθού η τίτλου.
- Ύπαρξη στενών υποκατάστατων αγαθών ή τίτλων.
- Κόστος μεταφοράς και απόδοση ευκολίας, στη περίπτωση που έχουμε εμπορεύματα.

→ <u>Αποτίμηση στη λήξη του future</u>

Σύμφωνα με τα παραπάνω οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι την ημέρα λήξης του συμβολαίου, που πλέον δε μεσολαβεί άλλο χρονικό διάστημα μέχρι ο προθεσμιακός τίτλος να καταλήξει σε στοιχειώδη τίτλο, η τιμή του στοιχειώδους τίτλου θα πρέπει να είναι ίση με την τιμή του future. Αυτό συμβαίνει γιατί η κατοχή ενός συμβολαίου έχει ακριβώς την ίδια ωφέλεια που απορρέει από το στοιχειώδη τίτλο ή αγαθό.

Έτσι την ημέρα λήξης T του συμβολαίου η τιμή του ΣΜΕ θα ισούται με την τιμή του τίτλου ή αγαθού στην αγορά μετρητοίς και η βάση θα ισούται με μηδέν, δηλαδή,

[52] Σεμινάρια ΕΤΕ, Ηλεκτρονικές Σημειώσεις, 2012.

$$F_{T,T} = S_T$$

όπου $F_{T,T}$ είναι η τιμή του ΣΜΕ την ημέρα T (ημέρα λήξης) και S_T είναι η τιμή του υποκείμενου τίτλου ή αγαθού την ημέρα T (ημέρα λήξης).

→ Αποτίμηση πριν τη λήξη του future

Τις υπόλοιπες ημέρες της διάρκειας ζωής του future, πριν τη λήξη, οι τιμές του ΣΜΕ και του υποκείμενου τίτλου διαφέρουν (δηλαδή η βάση θα είναι διαφορετική του μηδενός).

Αν λοιπόν θέλουμε να υπολογίσουμε τη θεωρητική ή δίκαιη τιμή ενός ΣΜΕ δηλαδή την τιμή που θα έπρεπε να έχει σήμερα ώστε να είναι ισοδύναμη η αγορά του με την αγορά και αποθήκευση του ίδιου του περιουσιακού στοιχείου στην αγορά μετρητοίς θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας το κόστος διαχρονικής διατήρησης (cost of carry) δηλαδή τη δαπάνη που προκαλείται από την ανάληψη μιας θέσης της μετρητοίς και τη διατήρησή της μέχρι τη λήξη του συμβολαίου:

$$F_{t,T} = S_t + S_t R_{t,T}$$

Όπου $F_{t,T}$ είναι η θεωρητική τιμή ΣΜΕ (λήξης T) τη χρονική στιγμή t, S_t είναι η τιμή του υποκειμένου τη χρονική στιγμή t και $R_{t,T}$ είναι το κόστος διαχρονικής διατήρησης από το χρόνο t στο χρόνο T. Το κόστος διαχρονικής διατήρησης (cost of carry) μπορεί είναι ένα από τα παρακάτω κόστη: κόστος χρηματοδότησης, κόστος αποθήκευσης, κόστος ασφάλισης, κόστος μεταφοράς.

Η Θεωρητική ή δίκαιη τιμή των ΣΜΕ (F):
Συνδυάζοντας τους παραπάνω τύπους η θεωρητική τιμή ΣΜΕ θα δίνεται από τον τύπο:

$$F_{t,T} = S_{t,T}\left(1 + r\frac{(T-t)}{360}\right)$$

→ Διαπραγμάτευση future premium ή discount

Η παραπάνω εξίσωση, που υπολογίζει τη θεωρητική τιμή των futures, εκφράζει μία βασική σχέση που πρέπει να υπάρχει μεταξύ των τιμών μετρητοίς και των αντίστοιχων τιμών futures ώστε να μην ευνοείται η ανάληψη εξισορροπητικής κερδοσκοπίας.

Στην πραγματικότητα όμως. υπάρχουν πολλοί λόγοι οι οποίοι δεν επιτρέπουν την ταύτιση της τιμής στην οποία διαπραγματεύεται το future και της θεωρητικής τιμής του γεγονός που αφήνει ανοιχτά τα περιθώρια για εξισορροπητική κερδοσκοπία. Δηλαδή,

θεωρητική τιμή future ≠ πραγματική τιμή future

Οπότε υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις[53]:

- Διαπραγμάτευση future at premium αν:
  πραγματική τιμή future > θεωρητική τιμή future.
- Διαπραγμάτευση future at discount αν:
  πραγματική τιμή future < θεωρητική τιμή future.

1.4.2.4 Συμφωνίες ανταλλαγής (swaps)

Οι συμφωνίες συναλλαγής (swaps) είναι συγκεκριμένοι τύποι εξωχρηματιστηριακών προθεσμιακών συμβολαίων μεταξύ δύο μερών, κατά τη διάρκεια των οποίων ανταλλάσσονται σε συγκεκριμένα χρονικά διαστήματα, χρηματοροές που αντιστοιχούν σε διαφορετικά είδη επιτοκίων ή υποχρεώσεων ή ακόμα διαφορετικά προϊόντα[54].

Η αγορά των swaps είναι από αυτές που εξελίχθηκαν ραγδαία ιδιαίτερα τα τελευταία χρόνια και χρησιμοποιούνται από εταιρείες, τράπεζες, οργανισμούς, ακόμα και κρατικούς φορείς για τη μείωση του χρηματιστηριακού κόστους μεταξύ των συμβαλλόμενων μερών. Οι πράξεις αυτές ανταλλαγής εκμεταλλεύονται τα διάφορα συγκριτικά πλεονεκτήματα που μπορεί να έχουν τα εμπλεκόμενα μέρη με αποτέλεσμα να ωφελούνται όλοι οι συμμετέχοντες[55].

Οι συμφωνίες ανταλλαγής πραγματοποιούνται με τη διαμεσολάβηση τραπεζών ή άλλων έγκυρων χρηματοπιστωτικών οργανισμών. Ο ρόλος του διαμεσολαβητή είναι να διευκολύνει τη συνολική διαδικασία βρίσκοντας και φέρνοντας σε επαφή δύο ή περισσότερα μέρη, προσαρμόζοντας το προϊόν έτσι ώστε να ικανοποιήσει καλύτερα συγκεκριμένες ανάγκες των συμβαλλόμενων μερών. Συχνά ο διαπραγματευτής απλοποιεί τη διαδικασία ενεργώντας ως συμβαλλόμενο μέρος για το καθένα από τους τελικούς χρήστες, συνάπτοντας ξεχωριστές συμφωνίες με το καθένα από αυτούς ανεξάρτητα και ίσως και σε διαφορετικές χρονικές περιόδους. Για τις υπηρεσίες που παρέχει ο διαμεσολαβητής εισπράττει επίσημα μια προμήθεια η οποία λαμβάνεται συνήθως με παρακράτηση ενός ποσοστού επί των ανταλλασσόμενων μέσων. Στη πράξη, ο διαπραγματευτής δεν συνάπτει συμφωνίες ταυτόχρονα με όλους τους αντισυμβαλλόμενους. Αφού βρει και συμφωνήσει με το ένα μέρος ίσως χρειαστεί να περιμένει κάποιο χρονικό διάστημα έχει να βρει και να συμφωνήσει με ένα ή ακόμα περισσότερα μέρη σε μια συμψηφιστική συναλλαγή. Μέχρι τότε ίσως χρειαστεί να αποθηκεύσει κάποιο προϊόν και ταυτόχρονα να αντισταθμίσει τον κίνδυνο από τη συμφωνία που έχει συνάψει με το πρώτο μέλος έως ότου βρει και συμφωνήσει με τους άλλους αντισυμβαλλόμενους.

53 Σεμινάρια ΕΤΕ, Ηλεκτρονικές Σημειώσεις 2012.

54 «Εισαγωγή στη μαθηματική χρηματοοικονομία», Πολυράκης Ι. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις, Αθήνα 2010, σελ. 117.

55 «Εισαγωγή στη μαθηματική χρηματοοικονομία»,…, ό.π. σελ. 117.

Συμφωνίες ανταλλαγής επιτοκίων (interest rate swaps)

Οι συμφωνίες ανταλλαγής επιτοκίων (interest rate swaps) [56] εκμεταλλεύονται το κανόνα του συγκριτικού πλεονεκτήματος στο δανεισμό. Εκτός από το χρονικό παράγοντα όπου η περίοδος δανεισμού μπορεί να παίξει ρόλο στη διαμόρφωση των επιτοκίων, τα συμβαλλόμενα μέρη πληρώνουν διαφορετικά επιτόκια σύμφωνα με τη πιστοληπτική τους ικανότητα. Οι συμφωνίες ανταλλαγής επιτοκίων τους δίνουν τη δυνατότητα να έχουν πρόσβαση σε πηγές χρηματοδότησης με ευνοϊκότερα επιτόκια από αυτά που θα επιτύγχαναν σε άμεση ζήτηση. Τα μέρη μπορούν να είναι μια τράπεζα και ένας πελάτης ή δύο τράπεζες ή χρηματοπιστωτικοί οργανισμοί αλλά ακόμη και δύο κράτη.

Ο πιο συνηθισμένος τύπος swap είναι το λεγόμενο απλό (plain vanilla) swap επιτοκίων. Περιλαμβάνει δύο αντισυμβαλλόμενα μέρη Α και Β. Κάτω από αυτή τη συμφωνία, το Α μέρος συμφωνεί για παράδειγμα να πληρώνει στο Β περιοδικές χρηματοροές ίσες με τον τόκο που υπολογίζεται με ένα προσυμφωνημένο επιτόκιο, σε ένα ιδεατό – ενδεικτικό κεφάλαιο σε όλη τη διάρκεια του swap. Σε αντάλλαγμα το μέρος Β συμφωνεί να πληρώνει τόκο στο μέρος Α, υπολογισμένο με κυμαινόμενο επιτόκιο, επάνω στο ίδιο κεφάλαιο. Οι απλές συμφωνίες ανταλλαγής επιτοκίων, περιλαμβάνουν συνήθως δύο συνδυασμούς υποχρεώσεων πληρωμής τόκων.

- Ανταλλαγή σταθερού επιτοκίου με κυμαινόμενο και
- Ανταλλαγή κυμαινόμενου με κυμαινόμενο επιτόκιο.

Κατά την υπογραφή της συμφωνίας το αρχικό κεφάλαιο (κεφάλαιο αναφοράς) δεν ανταλλάσσεται. Ανταλλάσσονται οι τόκοι που υπολογίζονται πάνω σε αυτό το ποσό[57].

Συμφωνίες ανταλλαγής συναλλάγματος (currency swaps)

Οι συμφωνίες ανταλλαγής συναλλάγματος είναι επίσης μία πολύ συνηθισμένη και δημοφιλής κατηγορία ανταλλαγών[58].

Στην απλούστερη μορφή τους, είναι συμφωνίες μεταξύ δύο συμβαλλόμενων (εταιριών, οργανισμών κ.α.), όπου ο πρώτος συμβαλλόμενος συμφωνεί να ανταλλάξει κεφάλαιο και πληρωμές τόκων σε τακτά χρονικά διαστήματα κατά τη διάρκεια της συμφωνίας, που αντιστοιχούν για παράδειγμα σε δάνειο ενός συγκεκριμένου νομίσματος, με αντίστοιχο κεφάλαιο και πληρωμές τόκων του δεύτερου συμβαλλόμενου σε άλλο νόμισμα. Τα ποσά στα διαφορετικά νομίσματα ανταλλάσσονται στην αρχή της συμφωνίας και επιστρέφονται με τη λήξη της. Τα ποσά που ανταλλάσσονται κατά την υπογραφή της συμφωνίας είναι ίσα σύμφωνα με τις συναλλαγματικές ισοτιμίες των νομισμάτων.

Οι συμφωνίες ανταλλαγής συναλλάγματος οφείλονται στο διαφορετικό συγκριτικό πλεονέκτημα πιστοληπτικής ικανότητας που έχουν τα συμβαλλόμενα μέρη σε διαφορετικά νομίσματα και επίσης στη προτίμηση των συμβαλλόμενων μερών σε νομίσματα που δεν έχουν το συγκριτικό πλεονέκτημα.

[56] «Εισαγωγή στη μαθηματική χρηματοοικονομία», Πολυράκης Ι. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις, Αθήνα 2010, σελ. 118-119.

[57] «Εισαγωγή στη μαθηματική χρηματοοικονομία»,…, ό.π. σελ. 117.

[58] «Εισαγωγή στη μαθηματική χρηματοοικονομία,…, ό.π. σελ. 121-122.

Με τις συμφωνίες ανταλλαγής συναλλάγματος, εταιρείες, χρηματοπιστωτικά ιδρύματα, ακόμη και κυβερνήσεις κρατών έχουν καταφέρει να μειώσουν το χρηματοδοτικό κόστος τους.

1.4.2.5 Πιστωτικά Παράγωγα (Credit Derivatives)

Τα ***Πιστωτικά Παράγωγα*** είναι παράγωγα προϊόντα τα οποία χρησιμοποιούνται για τη μεταφορά του πιστωτικού κινδύνου δηλαδή του κινδύνου του εκδότη ενός χρηματοπιστωτικού μέσου και λειτουργούν ως εξής[59]:

Ο αγοραστής (buyer) ενός πιστωτικού παραγώγου θέλει να μεταφέρει τον κίνδυνο του εκδότη του χρηματοπιστωτικού μέσου που έχει στην κατοχή του και πληρώνει ένα premium στον πωλητή (seller) του πιστωτικού παραγώγου ο οποίος σε αντάλλαγμα αναλαμβάνει τον κίνδυνο αυτό. Το χρηματοπιστωτικό μέσο ονομάζεται στοιχείο αναφοράς (reference credit) και είναι συνήθως ένα ομόλογο ή ένα δάνειο.

Τα προϊόντα αυτά ανάλογα με τον τρόπο μεταφοράς του πιστωτικού κινδύνου είναι τα Credit Default Swaps, Total Return Swaps και Credit Linked Notes αν έχουμε μεμονωμένο πιστούχο ενώ αν έχουμε ομάδα πιστούχων τα προϊόντα είναι: Collateralised Mortage Obligations, Collateralised Debt Obligations, Collateralised Bond Obligations.

Τα πιστωτικά παράγωγα έχουν πολλές χρήσεις. Συγκεκριμένα, ο αγοραστής προστασίας ωφελείται από τη χρήση τους διότι αντισταθμίζουν τον πιστωτικό κίνδυνο, διευκολύνεται η διαχείριση των πιστωτικών γραμμών, μειώνονται τα κεφάλαια που υποχρεώνονται να κατακρατούν οι τράπεζες και τέλος μειώνεται ο κίνδυνος συγκέντρωσης. Τα πιστωτικά παράγωγα ωφελούν και τους πωλητές διότι συμβάλλουν στη μείωση του κόστους χρηματοδότησης και επίσης συμβάλλουν στη διαφοροποίηση του χαρτοφυλακίου.

Ένα βασικό είδος πιστωτικών παραγώγων είναι τα *Credit Default Swaps (CDS)*. Ένα Credit Default Swap είναι ένα πιστωτικό παράγωγο στο οποίο ο αγοραστής του ή αλλιώς αγοραστής προστασίας πληρώνει ένα premium στον πωλητή ή αλλιώς πωλητή προστασίας σε αντάλλαγμα την πληρωμή που θα λάβει από αυτόν σε περίπτωση που συμβεί το πιστωτικό γεγονός. Πιστωτικό γεγονός (credit event) αποτελούν: η αθέτηση υποχρέωσης, η αναδιάρθρωση του χρέους και η πτώχευση.

Στην πραγματικότητα ο αγοραστής προστασίας με την αγορά του CDS δεν εξουδετερώνει τελείως τον πιστωτικό κίνδυνο απλά μειώνει την έκθεσή του στον κίνδυνο του συγκεκριμένου εκδότη αναλαμβάνοντας νέο κίνδυνο αντισυμβαλλομένου του πωλητή προστασίας. Για το λόγο αυτό θα πρέπει ο βαθμός συσχέτισης μεταξύ του πιστωτικού κινδύνου του εκδότη και του πιστωτικού κινδύνου του πωλητή προστασίας να είναι μικρός.

[59] Σεμινάρια ΕΤΕ, Ηλεκτρονικές Σημειώσεις, 2012.

1.4.2.6 *Παράγωγα προϊόντα Χρηματιστηρίου Αθηνών*

Οι *ανοιχτές πωλήσεις (short selling)* είναι πράξεις πώλησης που εκτελούνται στην αγορά μετοχών από επενδυτές που δεν έχουν προηγούμενα αγοράσει τις μετοχές αυτές. Ο πωλητής στην περίπτωση αυτή οφείλει να παραδώσει τις μετοχές που πούλησε στον αγοραστή συνεπώς τις δανείζεται ώστε να εκπληρώσει την υποχρέωσή του αυτή ενώ αναλαμβάνει και τη μελλοντική υποχρέωση να τις αγοράσει ώστε να τις επιστρέψει στο δανειστή του[60].

Προϋπόθεση για τις πράξεις ανοιχτής πώλησης αποτελεί η ύπαρξη μηχανισμού δανεισμού μετοχών. Για το σκοπό αυτό στο Χρηματιστήριο Αθηνών δημιουργήθηκαν δύο προϊόντα τα οποία θα αναλύσουμε παρακάτω.

Η δυνατότητα διενέργειας ανοιχτών πωλήσεων σε μία αγορά συντελεί στην αποτελεσματική σύνδεση της αγοράς παραγώγων με την υποκείμενη αγορά και είναι αναγκαία και απαραίτητη σε κάθε σύγχρονη χρηματιστηριακή αγορά.

Πολλές φορές όμως θεωρείται ότι οι ανοιχτές πωλήσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως εργαλείο χειραγώγησης της αγοράς με την έννοια ότι μπορούν να πιέσουν τις τιμές προς τα κάτω. Για την αποφυγή τέτοιων λανθασμένων πρακτικών στα περισσότερα σύγχρονα χρηματιστήρια χρησιμοποιούνται και διάφοροι περιοριστικοί κανόνες στη χρήση των ανοιχτών πωλήσεων δύο από τους οποίους είναι οι *κανόνες up-tick και flat-tick.*

→ *Κανόνας up-tick:* σύμφωνα με τον κανόνα αυτό το όριο τιμής (limit) κάθε εντολής ανοιχτής πώλησης είναι πάντοτε μεγαλύτερο από την τιμή της τελευταίας εκτελεσμένης πράξης.

→ *Κανόνας flat-tick*: σύμφωνα με τον κανόνα αυτό το όριο τιμής (limit) κάθε εντολής ανοιχτής πώλησης θα είναι πάντοτε μεγαλύτερο ή ίσο από την τιμή της τελευταίας εκτελεσμένης πράξης.

Γενικά σε κάθε περίπτωση εισαγωγής εντολής ανοιχτής πώλησης (short selling) αυτό θα πρέπει να επισημαίνεται στο σύστημα διαπραγμάτευσης μέσω ενός ειδικού πεδίου το οποίο έχει διαμορφωθεί για το σκοπό αυτό, έτσι ώστε να υπακούει αυτή υποχρεωτικά και αυτόματα στον κανόνα up ή flat-tick.

1.4.3 *Χρηματιστηριακοί Δείκτες*

Οι ***Χρηματιστηριακοί Δείκτες*** είναι τα εργαλεία εκείνα τα οποία χρησιμοποιούνται για να εκφράσουμε σε έναν αριθμό το σύνολο των τιμών ενός μέρους ή όλων των μετοχών που γίνονται αντικείμενο διαπραγμάτευσης σε μία αγορά[61]:.

Οι Χρηματιστηριακοί Δείκτες ανάλογα με *τον <u>τρόπο κατασκευής</u>* τους διακρίνονται σε:

- Χρηματιστηριακούς δείκτες οι οποίοι είναι απλοί αριθμητικοί μέσοι όροι των τιμών των μετοχών που συμμετέχουν στη σύνθεσή τους (π.χ. δείκτης DOW JONES)

[60] Σεμινάρια ΕΤΕ, Ηλεκτρονικές Σημειώσεις, 2012.
[61] Σεμινάρια ΕΤΕ, Ηλεκτρονικές Σημειώσεις 2012.

- Χρηματιστηριακούς δείκτες οι οποίοι είναι σταθμικοί μέσοι όροι των τιμών των μετοχών που συμμετέχουν στη σύνθεσή τους. Πιθανοί συντελεστές στάθμισης:
    1. συνολική κεφαλαιοποίηση εταιρείας,
    2. κεφαλαιοποίηση της εταιρείας που βρίσκεται σε ελεύθερη διασπορά,
    3. ΑΕΠ της χώρας σε περίπτωση Υπερεθνικών Οργανισμών κ.ά.

Οι Χρηματιστηριακοί Δείκτες ανάλογα με *το είδος των μετοχών* που συμμετέχουν στη σύνθεσή τους διακρίνονται σε:

- Κλαδικοί δείκτες: Δείκτες οι οποίοι περιλαμβάνουν μετοχές που ανήκουν στον ίδιο κλάδο.
- Δείκτες που αντιπροσωπεύουν το σύνολο μιας χρηματιστηριακής αγοράς: Δείκτες οι οποίοι περιλαμβάνουν όλες τις μετοχές που γίνονται αντικείμενο διαπραγμάτευσης σε μια συγκεκριμένη αγορά ή τουλάχιστον ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα τους.
- Δείκτες συγκεκριμένου εύρους κεφαλαιοποίησης: Δείκτες που περιλαμβάνουν μετοχές με παρόμοια κεφαλαιοποίηση.
- Δείκτες που περιλαμβάνουν μετοχές ειδικών χαρακτηριστικών: Σε αυτήν την κατηγορία ανήκουν δείκτες που περιλαμβάνουν μετοχές με ιδιαίτερα χαρακτηριστικά.

Οι κατηγορίες δεικτών με βάση *τον τρόπο υπολογισμού* της απόδοσής τους είναι:

- Δείκτες απόδοσης ως προς την τιμή: Σε αυτήν την κατηγορία ανήκουν οι δείκτες που ως μοναδική παράμετρο για τον υπολογισμό της απόδοσης χρησιμοποιούν τη διαφοροποίηση της τιμής των μετοχών.
- Δείκτες συνολικής απόδοσης: Σε αυτήν την κατηγορία ανήκουν δείκτες που λαμβάνουν υπόψη εκτός από τη διαφοροποίηση των τιμών των μετοχών, τα μερίσματα και την επανεπένδυση τους.

Κατηγοριοποίηση δεικτών με βάση την *εθνικότητα ή τη γεωγραφική κάλυψη* των αγορών που υπολογίζονται οι δείκτες:

- Εθνικοί δείκτες: Οι δείκτες οι οποίοι αφορούν την εγχώρια αγορά.
- Διεθνείς: Οι δείκτες που αφορούν κάποια ξένη αγορά.
- Υπερεθνικοί: Οι δείκτες οι οποίοι καλύπτουν αγορές περισσοτέρων από μία χώρα.

Οι δείκτες χρησιμοποιούνται[62]:

- ως μέσο υπολογισμού της απόδοσης και του κινδύνου μιας αγοράς στο σύνολό της ή ενός τμήματός της.
- ως σημείο αναφοράς για τον υπολογισμό της απόδοσης χαρτοφυλακίου.
- ως μέτρο σύγκρισης της απόδοσης μιας μετοχής ή ενός χαρτοφυλακίου σε σχέση με την απόδοση της αγοράς.
- ως βάση για το σχηματισμό Αμοιβαίων Κεφαλαίων ή χαρτοφυλακίων που αναπαράγουν συγκεκριμένους δείκτες.
- ως βάση παροχής πληροφοριών για την τεχνική ανάλυση μετοχών (πρόβλεψη τιμών βασισμένη στους σχηματισμούς διαμόρφωσής τους στο παρελθόν).

[62] Σεμινάρια ΕΤΕ, Ηλεκτρονικές Σημειώσεις 2012.

- για την εξαγωγή συμπερασμάτων σχετικά με την κίνηση των χρηματιστηρίων και της συσχέτισής της με άλλα οικονομικά φαινόμενα και εξελίξεις.
- ως μέθοδος υπολογισμού του συστημικού κινδύνου.

Μερικά παραδείγματα χρηματιστηριακών δεικτών είναι:

Εθνικοί Δείκτες: Γενικός Δείκτης, Δείκτης Συνολικής Απόδοσης Γενικού Δείκτη, Δείκτης όλων των μετοχών, Δείκτης Υψηλής Κυκλοφοριακής Ταχύτητας, Δείκτες FTSE/XA, FTSE/XA 20, FTSE/XA Mid 40, FTSE/XA Ασφαλειών, Ακίνητης Περιουσίας, Βιομηχανικών Προϊόντων, Εμπορίου, Κατασκευών, Μέσων Ενημέρωσης, Τεχνολογίας, Τηλεπικοινωνιών, Τραπεζών, Υγείας κ.ά.

Διεθνείς δείκτες: Dow Jones Industrial Average (1896), Nikkei 225 (1949), DAX 30 (1988), CAC 40 (1987), FTSE 100 (1983).

Υπερεθνικοί Δείκτες: MSCI World, All Country MSCI, EURO STOXX 50, STOXX 50.

1.5 Χρηματοπιστωτικά Ιδρύματα

Τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα διακρίνονται σε δύο κατηγορίες: στα πιστωτικά ιδρύματα και τα μη πιστωτικά ιδρύματα.

Τα ***πιστωτικά ιδρύματα*** δίνουν έμφαση στην αποδοχή καταθέσεων και στη παροχή πιστώσεων (δανείων). Είναι σημαντικά για την ανάπτυξη μιας οικονομίας καθώς παρέχουν μια σειρά υπηρεσιών όπως[63]:

→ Χρηματοδοτική Διαμεσολάβηση
Οι τράπεζες συγκεντρώνουν τα χρήματα των αποταμιευτών και παρέχουν σε αυτούς μια σειρά χρηματοδοτικών προιόντων όπως καταθέσεις όψεως, ανοικτούς λογαριασμούς και προθεσμίας και τις διοχετεύουν στις ελλειμματικές οικονομικές μονάδες. Η λειτουργία αυτή υπάρχει γιατί οι τράπεζες μπορούν να παρέχουν με λιγότερο κόστος απ' ότι τα άτομα μόνα τους. Μέσω της λειτουργίας αυτής οι τράπεζες παρέχουν μια σειρά από άλλες υπηρεσίες όπως: ρευστότητα, ευελιξία ληκτότητας, ευελιξία ποσού.

→ Επηρεάζουν την νομισματική πολιτική
Οι τράπεζες με τη συμπεριφορά τους μπορούν να συμβάλλουν στην αύξηση ή μείωση της ποσότητας χρήματος στην οικονομία, η οποία επηρεάζει άλλες οικονομικές μεταβλητές.

[63] «Χρήμα και τράπεζες», Α. Νούλας, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Πανεπιστημίου Μακεδονίας, Θεσσαλονίκη 2005, σελ. 61-62.

→ Παίζουν σημαντικό ρόλο στα συστήματα πληρωμών

Οι τράπεζες είναι σημαντικές για το σύστημα πληρωμών. Στις χώρες ειδικά που οι περισσότερες συναλλαγές πραγματοποιούνται δια μέσου των επιταγών, ο ρόλος των τραπεζών είναι ακόμα σημαντικότερος. Η εκκαθάριση όλων των επιταγών πραγματοποιείται από τις τράπεζες.

Στα πιστωτικά ιδρύματα περιλαμβάνονται η Τράπεζα της Ελλάδας, οι Εμπορικές Τράπεζες, οι Τράπεζες Επενδύσεων, οι Κτηματικές Τράπεζες, οι Συνεταιριστικές Τράπεζες και οι Ειδικοί Πιστωτικοί Οργανισμοί.

Η κατηγορία των ***μη πιστωτικών ιδρυμάτων*** περιλαμβάνει όλα τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα εκτός αυτά των τραπεζών.

Τα μη πιστωτικά ιδρύματα είναι τα Αμοιβαία Κεφάλαια (Α.Κ.), οι Εταιρείες Παροχής Πιστώσεων (Ε.Π.Π.), οι Ανώνυμες Χρηματιστηριακές Εταιρείες (Α.Χ.Ε.) οι Ανώνυμες Εταιρείες Επενδυτικής Διαμεσολάβησης (Α.Ε.Ε.Δ.) και οι Ανώνυμες Εταιρείες Επενδύσεων Χαρτοφυλακίου (Α.Ε.Ε.Χ.).

1.6 Επενδυτές στην αγορά

Στη σύγχρονη θεωρία της χρηματοοικονομικής οι επενδυτές και οι καταναλωτές θεωρούνται ως τα ίδια πρόσωπα. Με τις επενδύσεις, αυτοί μεταφέρουν εισόδημα από τη τρέχουσα περίοδο σε μελλοντικές περιόδους με σκοπό να καλύψουν τις διαχρονικές καταναλωτικές τους ανάγκες. Ακόμα και αν στη πράξη φαίνεται ότι δεν είναι ακριβής αυτή η υπόθεση, καθώς οι επενδύσεις πραγματοποιούνται σε μεγάλο βαθμό συνήθως από εταιρείες ή επαγγελματίες επενδυτές, θα πρέπει να ληφθεί υπόψην ότι αυτές γίνονται με γνώμονα τις προτιμήσεις και το συμφέρον των καταναλωτών. Οι διαχειριστές εταιρειών επενδύσεων χαρτοφυλακίων ή αμοιβαίων κεφαλαίων, οι διοικητές επιχειρήσεων ή οι επαγγελματίες επενδυτές συνήθως λειτουργούν με βάση τις προτιμήσεις των κατόχων των περιουσιακών στοιχείων που διαχειρίζονται, που αποτελούν κοινούς επενδυτές ή καταναλωτές σε μία οικονομία[64].

Ανεξάρτητα ποιο είναι το κίνητρο εταιρειών επενδύσεων ή κοινών επενδυτών στην αγορά, υπάρχει συμφωνία ότι το ενδιαφέρον τους εστιάζεται στη μεγιστοποίηση των αποδόσεων των επενδύσεων που πραγματοποιούν με το μικρότερο δυνατό επενδυτικό κίνδυνο. Η άριστη σχέση ανταλλαγής μεταξύ των αποδόσεων και βαθμού κινδύνου μιας επένδυσης καθορίζεται από τις προτιμήσεις των επενδυτών για τις δύο αυτές μεταβλητές. Η σχέση αυτή μπορεί να αλλάζει μεταξύ των διαφόρων κατηγοριών επενδυτών ή εταιρειών επενδύσεων. Κάποιοι επενδυτές μπορεί να αποστρέφονται περισσότερο τον κίνδυνο σε σχέση με κάποιους άλλους και έτσι, να προτιμούν επενδύσεις με μικρότερες αποδόσεις. Από την άλλη μεριά, κάποιοι άλλοι μπορεί να είναι επιρρεπείς στο κίνδυνο με συνέπεια να ενδιαφέρονται κυρίως για τη μεγιστοποίηση των αποδόσεων των επενδύσεών τους. Εκτός από τις προτιμήσεις τους για τον επενδυτικό κίνδυνο και τις αποδόσεις,

[64] «Επενδύσεις», Τζαβαλής Η., Πετράκης Α., Εκδόσεις ΟΠΑ, Αθήνα 2009, σελ. 16.

η συμπεριφορά των επενδυτών εξαρτάται και από διάφορους άλλους αντικειμενικούς περιορισμούς που καθορίζονται από τις εποπτικές αρχές ή άλλους φορείς. Οι περιορισμοί αυτοί μπορεί να αφορούν τη ρευστότητα, το χρονικό ορίζοντα ή το θεσμικό ρόλο των επενδύσεων στην οικονομία.

Οι κατηγορίες των επενδυτών στην αγορά είναι[65]:

Κοινοί Επενδυτές

Οι κοινοί επενδυτές αποτελούν τα ίδια πρόσωπα με τους καταναλωτές και λαμβάνουν επενδυτικές αποφάσεις με βάση το σημείο του οικονομικού κύκλου ζωής που βρίσκονται. Σε νεαρή ηλικία, συνήθως αποστρέφονται λιγότερο τον κίνδυνο και έτσι, επενδύουν σε πιο ριψοκίνδυνα περιουσιακά στοιχεία με στόχο τη βελτιστοποίηση του επιπέδου της μελλοντικής τους κατανάλωσης. Στην ηλικία αυτή, οι επενδύσεις αφορούν κυρίως στην εκπαίδευση και στην αγορά εργασίας. Καθώς μεγαλώνουν ηλικιακά, οι κοινοί επενδυτές ενδιαφέρονται για επενδύσεις χρεογράφων ή χαρτοφυλακίων με ικανοποιητικές αποδόσεις και γι' αυτό είναι διατεθειμένοι να αναλάβουν κάποιο κίνδυνο. Τέλος, καθώς πλησιάζουν στην ηλικία συνταξιοδότησής τους, αυτοί τείνουν να αποστρέφονται περισσότερο τον επενδυτικό κίνδυνο. Αυτό συμβαίνει επειδή κάθε πιθανή απώλεια εισοδήματος ή κεφαλαίου τους από επενδυτική διαδικασία στην ηλικία αυτή θα είναι πολύ δύσκολο να αναπληρωθεί.

Επαγγελματίες Επενδυτές

Αυτοί παρέχουν υπηρεσίες επενδύσεων έναντι κάποιου τιμήματος και μπορεί να αποτελούν μεμονωμένα άτομα που προσλαμβάνονται από εύπορα άτομα ή νοικοκυριά για τη διαχείριση του χαρτοφυλακίου τους. Επίσης, μπορεί να αποτελούν προσωπικές εταιρείες επενδύσεων που διαχειρίζονται τη περιουσία κάποιων προσώπων ή τέλος, να αποτελούν αμοιβαία κεφάλαια που επενδύουν σύμφωνα με τις προτιμήσεις των πελατών τους.

Ασφαλιστικά ταμεία (pension funds)

Τα ασφαλιστικά ταμεία διαχειρίζονται τις εισφορές εργοδοτών και απασχολούμενων τοποθετώντας τα κεφάλαια τους σε ομόλογα ή μετοχές. Συνήθως, τα ταμεία αυτά θέτουν ως στόχο μια απόδοση που απαιτείται για να καλυφθούν οι μελλοντικές ταμειακές ανάγκες (ή υποχρεώσεις έναντι των ασφαλισμένων) τους με το μικρότερο δυνατό κίνδυνο. Για το σκοπό αυτό, επιλέγουν να επενδύουν μεγαλύτερο μερίδιο των κεφαλαίων τους σε ομόλογα, που έχουν προκαθορισμένες και εγγυημένες αποδόσεις, και μικρότερο σε μετοχές.

Ασφαλιστικές εταιρείες (insurance companies)

Οι εταιρείες αυτές ασχολούνται με τις ασφάλειες ζωής, πυρκαγιάς, τροχαίων ατυχημάτων κ.ο.κ. Σκοπός των επενδύσεών τους είναι να αντισταθμίσουν μελλοντικές ταμειακές υποχρεώσεις τους διαθέτοντας ρευστά διαθέσιμα. Γι' αυτό συνήθως αποφεύγουν να επενδύουν τα κεφάλαιά τους σε χρεόγραφα με αβέβαιες αποδόσεις και υψηλό κίνδυνο. Οι εταιρείες αυτές επενδύουν κυρίως σε ομόλογα

[65] «Επενδύσεις», Τζαβαλής Η., Πετράκης Α. ,Εκδόσεις ΟΠΑ, Αθήνα 2009, 16-18.

των οποίων η λήξη τους, οι χρονικές περίοδοι που καταβάλλονται τα κουπόνια τους ή η ονομαστική τους αξία αντιστοιχούν με αυτές των υποχρεώσεών τους.

Τράπεζες:

Οι περισσότερες επενδύσεις των τραπεζών αφορούν δάνεια σε επιχειρηματίες και καταναλωτές. Για να τις χρηματοδοτήσουν στηρίζονται σε καταθέσεις αποταμιευτών ή λαμβάνουν δάνεια από τη κεντρική τους τράπεζα ή τη διατραπεζική αγορά. Ως επενδυτές (δανειστές) και παράλληλα δανειολήπτες, οι τράπεζες προσπαθούν να αντιστοιχίσουν τον κίνδυνο απώλειας των κεφαλαίων των δανείων τους με αυτόν της μη εκπλήρωσης των υποχρεώσεών τους προς τους καταθέτες ή τους δανειστές τους. Για το σκοπό αυτό, αυτές θέτουν τα επιτόκια των δανείων τους σε υψηλότερα ποσοστά σε σχέση με εκείνα των καταθέσεων που προσφέρουν[66].

[66] «Επενδύσεις», Τζαβαλής Η., Πετράκης Α. ,Εκδόσεις ΟΠΑ, Αθήνα 2009, σελ. 18.

2

Θεωρία Χαρτοφυλακίου

Η Θεωρία Χαρτοφυλακίου εξετάζει τις ιδιότητες των διαφόρων περιουσιακών στοιχείων ή επενδυτικών επιλογών, που μπορεί να έχει στη διάθεσή του ένας επενδυτής και επιδιώκει την σύνθεση άριστων χαρτοφυλακίων, που να μεγιστοποιεί τον κίνδυνό τους ικανοποιώντας το σκοπό κάθε ορθολογικού επενδυτή.

Για το λόγο ότι η αγορά δεν είναι τέλεια (perfect market), αφού δεν υπάρχει πλήρης βεβαιότητα, οπότε το επιτόκιο χορηγήσεων και καταθέσεων δεν είναι το ίδιο, το κόστος πληροφόρησης δεν είναι μηδενικό και οι πληροφορίες δεν είναι διαθέσιμες σε όλους, είναι απαραίτητη η μελέτη της Θεωρίας Χαρτοφυλακίου.

2.1 Βασικές έννοιες

<u>Χαρτοφυλάκιο (Portfolio)</u>

Χαρτοφυλάκιο ονομάζουμε ένα συνδυασμό διαφόρων περιουσιακών στοιχείων (μετοχές, ομόλογα, δείκτες, παράγωγα προϊόντα, αμοιβαία κεφάλαια κ.α.) τα οποία κατέχει ταυτόχρονα ένας επενδυτής[67].

Η σύσταση του χαρτοφυλακίου χρεογράφων έχει ως σκοπό τη μείωση του κινδύνου της επένδυσης. Οι επενδυτές δεν κρατούν μεμονωμένα χρεόγραφα παραδείγματος χάρη μετοχές μιας εταιρείας ή δεκαετή ομόλογα του Ελληνικού

[67] «Θεωρία Χαρτοφυλακίου και Εφαρμογές», Ραδάμανθυς Τσότσος, Σημειώσεις, 2013, σελ. 4.

δημοσίου αλλά χαρτοφυλάκια αυτών. Αυτά περιλαμβάνουν μεγάλο αριθμό χρεογράφων που διαφοροποιούνται ως προς τις εταιρείες έκδοσης τους (πχ μετοχές εταιρείας Χ,Υ…) ή τα είδη τους (μετοχές ή ομόλογα). Κρατώντας χαρτοφυλάκια αντί μεμονωμένων χρεογράφων, ο επενδυτής έχει τη δυνατότητα άμβλυνσης των επιπτώσεων μιας αρνητικής μεταβολής της τιμής ενός χρεογράφου στην αξία του χαρτοφυλακίου, συνολικά. Αυτό συμβαίνει επειδή οι αρνητικές μεταβολές στις τιμές κάποιων από τα χρεόγραφα ενός χαρτοφυλακίου μπορεί να εξουδετερωθούν από τις θετικές κάποιων άλλων, λόγω διαφοροποίησης των χρεογράφων του χαρτοφυλακίου. Έτσι, η αξία ενός χαρτοφυλακίου με μεγάλο αριθμό και διαφοροποίηση χρεογράφων μπορεί να μην επηρεάζεται σημαντικά από ακραίες μεταβολές στις αγορές χρεογράφων. Προφανώς, η επένδυση σε ένα τέτοιο χαρτοφυλάκιο θα ενέχει μικρότερο κίνδυνο σε σχέση με αυτή σε μεμονωμένα χρεόγραφα[68].

Τα χαρτοφυλάκια ανάλογα με το σκοπό τους διακρίνονται στις εξής κατηγορίες[69]:

Αμυντικό χαρτοφυλάκιο:
Χαρτοφυλάκιο με χαμηλό ρίσκο που περιλαμβάνει τοποθέτηση στην αγορά χρήματος ομολόγων και τίτλων σταθερής απόδοσης ο κύριος στόχος εδώ είναι η διατήρηση κεφαλαίων.

Συντηρητικό χαρτοφυλάκιο:
Περιλαμβάνει επενδύσεις σε μετοχές και ομόλογα υψηλής αξιολόγησης μεγάλων επιχειρήσεων με στόχο τη σχετική σταθερότητα.

Δυναμικό χαρτοφυλάκιο:
Επενδύει σε μετοχές, προθεσμιακές αγορές και διεθνείς αγορές. Στόχος του είναι η υψηλή απόδοση και δυναμική ανάπτυξη.

Κερδοσκοπικό χαρτοφυλάκιο:
Έχει υψηλό κίνδυνο και επενδύει κυρίως σε χρηματοοικονομικά παράγωγα.

Απόδοση (Return)

Οι αποδόσεις μιας επένδυσης μετρούν τα χρηματοοικονομικά αποτελέσματα της επένδυσης. Μπορεί να είναι πραγματικές αποδόσεις (σε νομισματικές μονάδες ή ποσοστά) ή αναμενόμενες (ιστορικές ή μελλοντικές) [70].

Ένα χαρτοφυλάκιο από χρεόγραφα αποτελείται από επενδύσεις σε ποσά m_k που επενδύονται σε κάθε χρεόγραφο k, $k = 1,2,...,n$, όπου n είναι ο συνολικός αριθμός διαφορετικών χρεογράφων στο χαρτοφυλάκιο.
Σε ένα υπόδειγμα μιας περιόδου έχουμε το συνολικό εισόδημα Y, που παράγεται από το χαρτοφυλάκιο και δίνεται από τη σχέση:

[68] «Επενδύσεις», Τζαβαλής Η., Πετράκης Α. ,Εκδόσεις ΟΠΑ, Αθήνα 2009, σελ. 13.
[69] «Αγορές Χρήματος και κεφαλαίου», Α. Νούλας, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Μακεδονίας, Θεσσαλονίκη 2006, σελ. 270-271.
[70] «Θεωρία Χαρτοφυλακίου και Εφαρμογές», Ραδάμανθυς Τσότσος, Σημειώσεις, 2013, σελ. 17.

$$Y = \sum_{k=1}^{n} m_k r_k$$

Όπου r_k είναι η απόδοση που παράγεται από το χρεόγραφο k.

Παρ’ όλα αυτά, όταν παίρνουμε την απόφαση πόσο m_k να επενδύσουμε σε κάθε χρεόγραφο k, η απόδοση r_k που θα προκύψει από κάθε χρεόγραφο είναι αβέβαιη.

Πραγματοποιηθείσα απόδοση

Πραγματοποιηθείσα ή ιστορική απόδοση είναι η πραγματική απόδοση μιας επένδυσης σε μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο.

Γενικά, η απόδοση δίνεται από τον τύπο:

$$R_t = \frac{P_1 - P_0}{P_0} + \frac{D_1}{P_0}$$

Όπου P_0 είναι η τιμή κτίσης του χρεογράφου, P_1 είναι η τιμή του χρεογράφου στο τέλος μιας προκαθορισμένης περιόδου και D_1 είναι το μέρισμα που πληρώνεται στο τέλος της περιόδου αναφοράς.

Η απόδοση του χαρτοφυλακίου δίνεται από τον τύπο:

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} w_i \mathrm{E}[r_i], \quad \sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

Όπου $\mathrm{E}[r_i]$ είναι η αναμενόμενη απόδοση του χρεογράφου i και w_i είναι κάποιο βάρος.

Προσδοκώμενη απόδοση:

Η απόδοση από την οποία προβλέπουν οι επενδυτές να αποκομίσουν στο μέλλον. Επειδή όμως το μέλλον είναι αβέβαιο, η αναμενόμενη απόδοση μπορεί να πραγματοποιηθεί, μπορεί και όχι.

Η προσδοκώμενη απόδοση υπολογίζεται ως εξής[71]:

* Αν θεωρήσουμε ότι όλο το χαρτοφυλάκιο αποτελείται από ένα μόνο χρεόγραφο, με απόδοση r_i τότε η προσδοκώμενη απόδοση θα είναι:

$$\mathrm{E}[r_p] = \mathrm{E}[r_1]$$

* Αν θεωρήσουμε ότι το χαρτοφυλάκιο αποτελείται από δύο χρεόγραφα με βάρη w_1, w_2 και αποδόσεις r_1, r_2 αντίστοιχα, τότε η προσδοκώμενη απόδοση θα είναι:

$$\mathrm{E}[r_p] = \mathrm{E}[w_1 r_1 + w_2 r_2] = w_1 \mathrm{E}[r_1] + w_2 \mathrm{E}[r_2], \quad w_1 + w_2 = 1$$

* Γενικά, αν θεωρήσουμε ότι το χαρτοφυλάκιο αποτελείται από n χρεόγραφα με βάρη $w_1, w_2, \ldots, w_n$ και αποδόσεις $r_1, r_2, \ldots, r_n$, τότε η προσδοκώμενη απόδοση θα είναι:

[71] «Θεωρία Χαρτοφυλακίου και Εφαρμογές», Ραδάμανθυς Τσότσος, Σημειώσεις, 2013, σελ. 33-34.

$$E\left[r_p\right] = \sum_{i=1}^{n} w_i E\left[r_i\right], \quad \sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

Απαιτούμενη απόδοση:

Είναι η ελάχιστη απόδοση της οποίας οι επενδυτές απαιτούν να έχει μια επένδυση για να την αναλάβουν και αποτελείται από τρία μέρη:

- Την πραγματική απόδοση χωρίς κίνδυνο,
- Το αναμενόμενο ποσοστό πληθωρισμού,
- Μια ανταμοιβή για το κίνδυνο που αναλαμβάνει ο επενδυτής (risk premium), η οποία εξαρτάται από διάφορους παράγοντες αβεβαιότητας, όπως είναι ο επιχειρηματικός κίνδυνος, ο κίνδυνος αγοράς, ο κίνδυνος ρευστότητας, ο πολιτικός κίνδυνος, ο συναλλαγματικός κίνδυνος κ.α.

2.2 Διαχείριση Χαρτοφυλακίου (Portfolio Management)

Με τον όρο διαχείριση χαρτοφυλακίου (portfolio management) εννοούμε τη προσπάθεια μεγιστοποίησης της απόδοσης του χαρτοφυλακίου με παράλληλο -όσο το δυνατόν- περιορισμό του επενδυτικού κινδύνου[72].

Είναι κατανοητό ότι η διαχείριση χαρτοφυλακίου αποτελεί μια δυναμική διαδικασία αγορών και ρευστοποιήσεων μέσα στο χρόνο. Ο διαχειριστής αγοράζει υποτιμημένους, κατά τη γνώμη του, τίτλους με τη προσδοκία ότι η αξία αυτών υα αυξηθεί στο μέλλον, ενώ ρευστοποιεί τίτλους όταν πιστεύει ότι τα περιθώρια αύξησης της αξίας τους δεν είναι αξιόλογα. Επιπλέον, επειδή δρα σε ένα περιβάλλον συνεχών αλλαγών, πρέπει να δομήσει ένα αρκετά ευέλικτο χαρτοφυλάκιο, ώστε να μπορεί να προσαρμόζεται στις εκάστοτε αλλαγές. Τέλος, το χαρτοφυλάκιο θα πρέπει να είναι κατά τέτοιο τρόπο δομημένο, έτσι ώστε να ανταποκρίνεται στις τρέχουσες υποχρεώσεις των ιδιοκτητών του[73].

Ανάλογα με το χρονικό ορίζοντα στον οποίο κάθε διαχειριστής επιδιώκει τη μεγιστοποίηση της απόδοσης και την ελαχιστοποίηση του κινδύνου του χαρτοφυλακίου που διαχειρίζεται, μπορεί να χαρακτηρισθεί ως βραχυπρόθεσμος, μεσοπρόθεσμος ή μακροπρόθεσμος. Επίσης, ανάλογα με τον κίνδυνο που είναι διατεθειμένος να αναλάβει (συνήθως όσο υψηλότερη είναι η προσδοκώμενη απόδοση ενός χαρτοφυλακίου, τόσο υψηλότερος είναι και ο κίνδυνος του χαρτοφυλακίου αυτού), μπορεί να χαρακτηρισθεί ως συντηρητικός ή επιθετικός.

Άρα, οι παράγοντες που επηρεάζουν σε μεγάλο βαθμό τον τρόπο διαχείρισης ενός χαρτοφυλακίου είναι οι επόμενοι[74]:

- Το ύψος του κινδύνου που ο επενδυτής είναι διατεθειμένος να αναλάβει. Έτσι, για τον επενδυτή που επιθυμεί πολύ χαμηλό ύψος κινδύνου, ο διαχειριστής θα περιορίσει σε μεγάλο βαθμό τις δυνατές κατηγορίες τοποθετήσεών του.

[72] «Διαχείριση Χαρτοφυλακίου: στη θεωρία και στη πράξη». Κοτζαμάνης Ν. Σ., Εθνική Τράπεζα Ελλάδος, 1999, σελ. 9.

[73] «Διαχείριση Χαρτοφυλακίου: στη θεωρία και στη πράξη»,..., ό.π., σελ. 10-11.

[74] «Διαχείριση Χαρτοφυλακίου: στη θεωρία και στη πράξη»,..., ό.π., σελ. 10-11.

- Ο χρονικός επενδυτικός ορίζοντας του επενδυτή, με αποτέλεσμα σε ένα επενδυτή με βραχυπρόθεσμο ορίζοντα, οι δυνατές επενδυτικές επιλογές να περιορίζονται σημαντικά.
- Οι ανάγκες κάθε επενδυτή. Για παράδειγμα, τα ασφαλιστικά ταμεία επιθυμούν να λαμβάνουν ένα ελάχιστο εισόδημα, έτσι ώστε να μπορούν να ανταποκρίνονται στις υποχρεώσεις τους (συντάξεις, λειτουργικά έσοδα κ.α.), ή επίσης ορισμένοι ατομικοί επενδυτές επιθυμούν να έχουν ένα ελάχιστο ετήσιο εισόδημα από το χαρτοφυλάκιό τους με στόχο να εκπληρώσουν κάποιες τρέχουσες υποχρεώσεις τους.
- Οι εναλλακτικές επενδυτικές δραστηριότητες που έχει κάθε διαχειριστής. Για παράδειγμα, σε ορισμένα κράτη δεν επιτρέπονται όλες οι κατηγορίες επενδύσεων, ή επίσης ορισμένες κατηγορίες επενδύσεων προϋποθέτουν ένα ελάχιστο ύψος κεφαλαίου που πιθανόν ο επενδυτής να μην διαθέτει.
- Οι πεποιθήσεις και οι γνώσεις κάθε διαχειριστή γύρω από τις διάφορες στρατηγικές διαχείρισης χαρτοφυλακίου και γύρω από τις γνώσεις των διάφορων μορφών επενδύσεων. Έτσι, ένας διαχειριστής που έχει εξειδικευτεί στην εφαρμογή περιορισμένων στρατηγικών χαρτοφυλακίου και που γνωρίζει για παράδειγμα μόνο την ελληνική αγορά, περιορίζει το επενδυτικό φάσμα του επενδυτή.

Η διαχείριση Χαρτοφυλακίου περιλαμβάνει τα παρακάτω τρία στάδια δραστηριοτήτων[75]:

1. ***Ανάλυση Χρεογράφων***
   Στο στάδιο αυτό εξετάζονται από τα διαθέσιμα χρεόγραφα, εκείνα τα οποία προβλέπεται να έχουν τη μεγαλύτερη απόδοση.
2. ***Ανάλυση Χαρτοφυλακίου***
   Στο στάδιο αυτό προβλέπεται η απόδοση ενός χαρτοφυλακίου και οι πιθανότητες κινδύνου του.
3. ***Επιλογή Χαρτοφυλακίου***
   Στο στάδιο αυτό, από τα χαρτοφυλάκια τα οποία ελαχιστοποιούν τον κίνδυνο σε σχέση με τη απόδοσή τους, επιλέγεται ένα που θα ταιριάζει στα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του επενδυτή. Τα χαρακτηριστικά ενός επενδυτή εξαρτώνται από το πόσα χρήματα θέλει να επενδύσει και από το χρονικό διάστημα που θέλει να επενδύσει.

[75] http://www.de.teipat.gr/documents/xeimerino%2020102011/%CE%98%CE%B5%CF%89%CF%81%CE%AF%CE%B1%20%CE%94%CE%B9%CE%B1%CF%87%CE%B5%CE%AF%CF%81%CE%B9%CF%83%CE%B7%CF%82%20%CE%A7%CE%B1%CF%81%CF%84%CE%BF%CF%86%CF%85%CE%BB%CE%B1%CE%BA%CE%AF%CE%BF%CF%85.pdf

2.3 Θεωρίες Διαχείρισης Χαρτοφυλακίου

Η παραδοσιακή διαχείριση χαρτοφυλακίου έχει να κάνει κυρίως με τη δημιουργία ενός αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου το οποίο θα απαρτίζεται από μια ευρεία ποικιλία χρεογράφων[76].

Οι διαχειριστές παραδοσιακών χαρτοφυλακίων αποστρέφονται τον κίνδυνο γι' αυτό και επιθυμούν να επενδύουν σε γνωστές εταιρείες για τρεις λόγους. Πρώτον, επειδή αυτές οι εταιρείες είναι γνωστές στην αγορά ως πετυχημένες, μια επένδυση σε αυτές θεωρείται λιγότερο επικίνδυνη από την επένδυση σε λιγότερο γνωστές επιχειρήσεις. Δεύτερον, οι έμπειροι διαχειριστές επιδιώκουν να επενδύουν σε μεγάλες εταιρείες επειδή τα χρεόγραφα αυτών των επιχειρήσεων είναι περισσότερο ρευστά και διατίθενται σε μεγάλες ποσότητες. Τρίτον, οι διαχειριστές των παραδοσιακών χαρτοφυλακίων προτιμούν τις γνωστές εταιρείες επειδή λόγω της φήμης τους είναι ευκολότερο να πείσουν τους πελάτες να επενδύσουν σε αυτές[77].

Αν και μέχρι σήμερα έχουν αναπτυχθεί διάφορες σύγχρονες θεωρίες, τις οποίες θα δούμε σε επόμενη ενότητα, μέσω των οποίων μπορεί κάποιος να διαχειρισθεί επιτυχώς ένα χαρτοφυλάκιο, οι τρεις κύριες παραδοσιακές είναι[78]:

Η ***θεωρία της τυχαίας επέλευσης των χρηματιστηριακών τιμών (random walk theory)***, σύμφωνα με την οποία οι μέχρι σήμερα υπάρχουσες πληροφορίες έχουν αποτυπωθεί πλήρως στις τρέχουσες τιμές των μετοχών και έτσι η μετέπειτα πορεία των τιμών των μετοχών είναι αποτέλεσμα μελλοντικών εξελίξεων που κανένας δεν μπορεί να προβλέψει, άρα είναι αποτέλεσμα της τύχης. Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή, καθήκοντα του διαχειριστή χαρτοφυλακίου είναι να διατηρεί ένα μετοχικό χαρτοφυλάκιο που να αντιπροσωπεύει κάθε φορά την αγορά, καθώς και να δημιουργεί το συνολικό χαρτοφυλάκιο με βάση την επενδυτική φιλοσοφία του πελάτη-επενδυτή.

Η ***θεμελιώδης ανάλυση*** προσπαθεί να βρει την «πραγματική» τιμή μιας μετοχής με βάση το παρόν και το προβλεπόμενο μέλλον των στοιχείων της εταιρείας, του κλάδου και της οικονομίας γενικότερα. Το επόμενο βήμα είναι η επιλογή εκείνων των μετοχών που η τρέχουσα τιμή τους είναι τουλάχιστον χαμηλότερη της «πραγματικής». Η θεμελιώδης ανάλυση –από τη φύση της- αναζητά αποδόσεις ανώτερες του Γενικού Δείκτη στο μεσομακροπρόθεσμο διάστημα.

[76] http://www.de.teipat.gr/documents/xeimerino%2020102011/%CE%98%CE%B5%CF%89%CF%81%CE%AF%CE%B1%20%CE%94%CE%B9%CE%B1%CF%87%CE%B5%CE%AF%CF%81%CE%B9%CF%83%CE%B7%CF%82%20%CE%A7%CE%B1%CF%81%CF%84%CE%BF%CF%86%CF%85%CE%BB%CE%B1%CE%BA%CE%AF%CE%BF%CF%85.pdf

[77] http://www.de.teipat.gr/documents/xeimerino%2020102011/%CE%98%CE%B5%CF%89%CF%81%CE%AF%CE%B1%20%CE%94%CE%B9%CE%B1%CF%87%CE%B5%CE%AF%CF%81%CE%B9%CF%83%CE%B7%CF%82%20%CE%A7%CE%B1%CF%81%CF%84%CE%BF%CF%86%CF%85%CE%BB%CE%B1%CE%BA%CE%AF%CE%BF%CF%85.pdf

[78] «Διαχείριση Χαρτοφυλακίου: στη θεωρία και στη πράξη». Κοτζαμάνης Ν. Σ., Εθνική Τράπεζα Ελλάδος, 1999, σελ. 17.

Η ***τεχνική ανάλυση*** πιστεύει ότι μόνο με βάση την ιστορική πορεία των τιμών μιας μετοχής (και τη βοήθεια στατιστικών εργαλείων της τεχνικής ανάλυσης) ή οποιασδήποτε άλλης χρηματοοικονομικής επένδυσης, οι επενδυτές είναι σε θέση να έχουν μια ικανοποιητική εκτίμηση της μελλοντικής πορείας της τιμής των χρεογράφων, και έτσι –επιλέγοντας μέσω της τεχνικής ανάλυσης- να πετύχουν υψηλές αποδόσεις.

Υπάρχει επίσης μια άλλη σειρά στρατηγικών διαχείρισης μετοχικών χαρτοφυλακίων, μέσω των οποίων οι οπαδοί τους πιστεύουν ότι μπορούν να επιτύχουν καλύτερες σχέσεις κινδύνου-απόδοσης. Μερικές από τις στρατηγικές αυτές είναι η ανάλυση γεγονότος (event analysis), η ανάλυση μετοχικών στυλ (style analysis), τα μοντέλα εκπλήξεων των κερδών (earnings surprise models), η εκμετάλλευση των δυνατοτήτων arbitrage (κερδοσκοπίας), ο συνδυασμός χρηματοοικονομικής μόχλευσης με παράγωγα προϊόντα κ.λπ[79].

Η μοντέρνα θεωρία χαρτοφυλακίου, που θα δούμε παρακάτω, χρησιμοποιεί αρκετά βασικά στατιστικά μέτρα για την ανάπτυξη ενός σχεδίου για το χαρτοφυλάκιο.

2.4 Σύγχρονες Θεωρίες Διαχείρισης Χαρτοφυλακίου

2.4.1 Το μοντέλο του Markowitz

Ο Harry Markowitz, το 1952, δημοσίευσε στην εφημερίδα "Journal of Finance" ένα άρθρο με τίτλο "Portfolio Selection". Η πρωτοποριακή του αυτή εργασία έθεσε τα θεμέλια για τη «Σύγχρονη Θεωρία Χαρτοφυλακίου». Το 1959 εξέδωσε το βιβλίο του με τίτλο "Portfolio Selection", ενώ το 1990 τιμήθηκε με το βραβείο Nobel στα οικονομικά[80].

Βασική ιδέα του μοντέλου του είναι η επιλογή ενός «άριστου» χαρτοφυλακίου που αποτελείται από χρεόγραφα που περιέχουν κίνδυνο (risky portfolio), το οποίο να προσφέρει στον επενδυτή την καλύτερη δυνατή σχέση κινδύνου-αποδοσης (μια δεδομένη απόδοση να επιτυγχάνεται με το χαμηλότερο δυνατό κίνδυνο ή για δεδομένο επίπεδο κινδύνου να επιτυγχάνεται η υψηλότερη δυνατή απόδοση) [81].

Στη συνέχεια, σκοπός του μοντέλου είναι ο συνδυασμός του χαρτοφυλακίου που εμπεριέχει κίνδυνο με ένα χαρτοφυλάκιο μηδενικού κινδύνου, έτσι ώστε να βελτιωθεί περεταίρω η σχέση κινδύνου-απόδοσης του χαρτοφυλακίου που θα προκύψει από τη συνένωση των δύο παραπάνω χαρτοφυλακίων. Και μάλιστα, αυτή τη φορά τα προτεινόμενα από το μοντέλο χαρτοφυλάκια (που προκύπτουν από τη μεταβολή του ποσοστού συμμετοχής του χαρτοφυλακίου χωρίς κίνδυνο και του

[79] «Διαχείριση Χαρτοφυλακίου: στη θεωρία και στη πράξη». Κοτζαμάνης Ν. Σ., Εθνική Τράπεζα Ελλάδος, 1999, σελ. 17.

[80] http://www.de.teipat.gr/documents/xeimerino%2020102011/%CE%98%CE%B5%CF%89%CF%81%CE%AF%CE%B1%20%CE%94%CE%B9%CE%B1%CF%87%CE%B5%CE%AF%CF%81%CE%B9%CF%83%CE%B7%CF%82%20%CE%A7%CE%B1%CF%81%CF%84%CE%BF%CF%86%CF%85%CE%BB%CE%B1%CE%BA%CE%AF%CE%BF%CF%85.pdf

[81] «Διαχείριση Χαρτοφυλακίου: στη θεωρία και στη πράξη»,..., ό.π. σελ. 51.

«άριστου» προτεινόμενου χαρτοφυλακίου με κίνδυνο, στο συνολικό χαρτοφυλάκιο) είναι πολλά περισσότερα του ενός, καθώς κάθε ένα από αυτά παρουσιάζει μια διαφορετική σχέση κινδύνου-απόδοσης[82].

Τέλος, σκοπός του μοντέλου είναι από τα παραπάνω προτεινόμενα χαρτοφυλάκια, η επιλογή εκείνου που ανταποκρίνεται στη συμπεριφορά του επενδυτή απέναντι στον κίνδυνο[83].

Οι βασικές παραδοχές του μοντέλου του Markowitz είναι οι επόμενες[84]:

- Όλοι οι επενδυτές βασίζουν τις αποφάσεις τους σύμφωνα με την αναμενόμενη απόδοση και το ρίσκο που έχουν τα διάφορα περιουσιακά στοιχεία όπως αυτά μετρώνται από το μέσο όρο και τη διακύμανση των αποδόσεων τους.
- Όλοι οι επενδυτές έχουν τον ίδιο χρονικό ορίζοντα. Δηλαδή, αποστρέφονται το κίνδυνο και θέλουν να μεγιστοποιήσουν την αναμενόμενη χρησιμότητά τους με βάση το κέρδος τους στο τέλος της κοινής για όλους χρονικής περιόδου.
- Όλοι οι συμμετέχοντες στην αγορά έχουν ταυτόχρονη και ελεύθερη πρόσβαση στις πληροφορίες που σχετίζονται με την αγορά κατά τη λήψη των αποφάσεων τους.
- Τα περιουσιακά στοιχεία είναι άπειρα διαιρετά και εύκολα ρευστοποιήσιμα χωρίς κόστος συναλλαγών.

<u>Επιλογή χαρτοφυλακίου με κίνδυνο</u>

Στο χαρτοφυλάκιο αυτό περιλαμβάνονται επενδύσεις που εμπεριέχουν κίνδυνο μεταξύ των οποίων μετοχές, μακροπρόθεσμα ομόλογα, μετοχικά ή μεικτά Αμοιβαία Κεφάλαια, ακίνητα, εμπορεύματα κ.λπ. της συνδιακύμανσης που παρουσιάζει η προσδοκώμενη απόδοση με όλες τις υπόλοιπες μετοχές του Χρηματιστηρίου Αθηνών[85].

Στην παρουσίαση του μοντέλου, θα θεωρήσουμε ότι το χαρτοφυλάκιο αποτελείται από μετοχές.

Στο σημείο αυτό, θα πρέπει να τονίσουμε το ρόλο του μεγέθους της τυπικής απόκλισης που αντικατοπτρίζει –σύμφωνα με το μοντέλο- τον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου. Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή της τυπικής απόκλισης, τόσο μεγαλύτερες αποκλίσεις (θετικές ή αρνητικές) ενδέχεται να έχει η απόδοση του χαρτοφυλακίου σε σχέση με την προσδοκώμενη απόδοση, άρα τόσο υψηλότερος είναι και ο κίνδυνος του χαρτοφυλακίου[86].

[82] «Διαχείριση Χαρτοφυλακίου: στη θεωρία και στη πράξη»,…, ό.π. σελ. 51.

[83] «Διαχείριση Χαρτοφυλακίου: στη θεωρία και στη πράξη». Κοτζαμάνης Ν. Σ., Εθνική Τράπεζα Ελλάδος, 1999, σελ. 52.

[84] «Σύγχρονη Θεωρία Χαρτοφυλακίου και αποτίμηση περιουσιακών στοιχείων», Μακρής Σ. Διπλωματική Εργασία ΕΜΠ, Αθήνα 2014, σελ. 29.

[85] «Διαχείριση Χαρτοφυλακίου: στη θεωρία και στη πράξη»,…, ό.π., σελ. 52.

[86] «Διαχείριση Χαρτοφυλακίου: στη θεωρία και στη πράξη»,…, ό.π., σελ. 52.

Ο Markowitz ξεκίνησε από το τύπο[87]:

$$r_p = \frac{W_1 - W_0}{W_0}$$

ο οποίος μας δίνει την αναμενόμενη απόδοση όπου W_0 είναι το κεφάλαιο που επενδύθηκε στην αρχή της περιόδου και W_1 είναι το κεφάλαιο που θα αποδοθεί στο τέλος της περιόδου, κατέληξε ότι το τελικό κεφάλαιο εξαρτάται από την άγνωστη απόδοση μιας μετοχής, r_p, άρα οι τιμές των μετοχών είναι τυχαίες μεταβλητές και σαν τέτοιες μπορούν να περιγραφούν από την αναμενόμενη τιμή τους (μέση απόδοση) και τη τυπική τους απόκλιση (κίνδυνος).

Συμφώνα με τον Markowitz, αφού δύο μετοχές μπορούν να συγκριθούν εξετάζοντας την αναμενόμενη απόδοση και τη τυπική απόκλιση της κάθε μίας, το ίδιο μπορεί να γίνει και για δύο χαρτοφυλάκια[88].

Ο κίνδυνος ενός χαρτοφυλακίου περιλαμβάνει το κίνδυνο του κάθε μεμονωμένου χρεογράφου που περιέχει, καθώς επίσης και τις σταθμικές διακυμάνσεις των αποδόσεων όλων των ζευγών χρεογράφων που περιέχει. Όσο μεγαλύτερο είναι ο αριθμός των χρεογράφων που περιλαμβάνει το χαρτοφυλάκιο, τόσο μεγαλύτερη είναι η σχετική βαρύτητα της μέσης διακύμανσης των αποδόσεων των χρεογράφων.

Οι παράγοντες που καθορίζουν τον κίνδυνο ενός χαρτοφυλακίου είναι[89]:

1. Οι διακυμάνσεις των αποδόσεων κάθε χρεογράφου,
2. Οι συνδιακυμάνσεις των αποδόσεων μεταξύ χρεογράφων που περιέχονται στο χαρτοφυλάκιο, και
3. Οι σταθμίσεις που έχει το κάθε χρεόγραφο (δηλαδή, το ποσοστό της αξίας του χαρτοφυλακίου που έχει επενδυθεί στο χρεόγραφο αυτό).

Γενικά, ο κίνδυνος του χαρτοφυλακίου μειώνεται όσο αυξάνονται τα χρεόγραφα σε ένα χαρτοφυλάκιο. Εάν υπάρχουν n χρεόγραφα, μπορούν να γίνουν άπειροι συνδυασμοί μεταξύ τους και να σχηματιστούν άπειρα χαρτοφυλάκια[90].

Ο επενδυτής για να καταλήξει στο ιδανικό για εκείνον χαρτοφυλάκιο δεν είναι απαραίτητο να εκτιμήσει όλα τα χαρτοφυλάκια χάρη στο Θεώρημα των

[87] http://www.de.teipat.gr/documents/xeimerino%2020102011/%CE%98%CE%B5%CF%89%CF%81%CE%AF%CE%B1%20%CE%94%CE%B9%CE%B1%CF%87%CE%B5%CE%AF%CF%81%CE%B9%CF%83%CE%B7%CF%82%20%CE%A7%CE%B1%CF%81%CF%84%CE%BF%CF%86%CF%85%CE%BB%CE%B1%CE%BA%CE%AF%CE%BF%CF%85.pdf

[88] http://www.de.teipat.gr/documents/xeimerino%2020102011/%CE%98%CE%B5%CF%89%CF%81%CE%AF%CE%B1%20%CE%94%CE%B9%CE%B1%CF%87%CE%B5%CE%AF%CF%81%CE%B9%CF%83%CE%B7%CF%82%20%CE%A7%CE%B1%CF%81%CF%84%CE%BF%CF%86%CF%85%CE%BB%CE%B1%CE%BA%CE%AF%CE%BF%CF%85.pdf

[89] http://www.de.teipat.gr/documents/xeimerino%2020102011/%CE%98%CE%B5%CF%89%CF%81%CE%AF%CE%B1%20%CE%94%CE%B9%CE%B1%CF%87%CE%B5%CE%AF%CF%81%CE%B9%CF%83%CE%B7%CF%82%20%CE%A7%CE%B1%CF%81%CF%84%CE%BF%CF%86%CF%85%CE%BB%CE%B1%CE%BA%CE%AF%CE%BF%CF%85.pdf

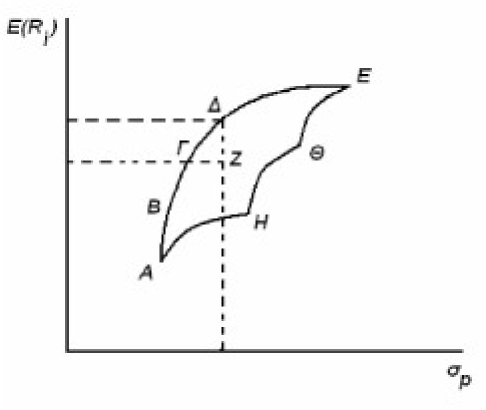
[90] http://www.de.teipat.gr/documents/xeimerino%2020102011/%CE%98%CE%B5%CF%89%CF%81%CE%AF%CE%B1%20%CE%94%CE%B9%CE%B1%CF%87%CE%B5%CE%AF%CF%81%CE%B9%CF%83%CE%B7%CF%82%20%CE%A7%CE%B1%CF%81%CF%84%CE%BF%CF%86%CF%85%CE%BB%CE%B1%CE%BA%CE%AF%CE%BF%CF%85.pdf

Αποτελεσματικών Συνδυασμών. Τα χαρτοφυλάκια αυτά λέγονται αποτελεσματικά, δηλαδή είναι αυτά τα οποία σε δεδομένο επίπεδο κινδύνου παρέχει τη μεγαλύτερη απόδοση και σε δεδομένη απόδοση έχει το μικρότερο κίνδυνο.

Σύμφωνα με αυτό το θεώρημα, ένας επενδυτής θα επιλέξει από το σύνολο των δυνατών χαρτοφυλακίων, το χαρτοφυλάκιο εκείνο το οποίο:

1. Προσφέρει τη μέγιστη προσδοκώμενη απόδοση για διάφορα επίπεδα κινδύνου και
2. Προσφέρει το μικρότερο κίνδυνο για διάφορα επίπεδα προσδοκώμενης απόδοσης.

Το σύνολο όλων των δυνατών χαρτοφυλακίων που πληρούν τις παραπάνω προϋποθέσεις ονομάζεται Σύνολο Αποτελεσματικών Συνδυασμών (efficient set).



Διάγραμμα: *Σύνολο Αποτελεσματικών Συνδυασμών*

Στο παραπάνω διάγραμμα σχηματίζονται όλα τα δυνατά χαρτοφυλάκια όπως αυτά διαγράφονται βάση των σχέσεων αναμενόμενης απόδοσης και κινδύνου. Ο οριζόντιος άξονας είναι ο κίνδυνος και ο κάθετος άξονας δείχνει την αναμενόμενη απόδοση. Τα σημεία Α,Β,Γ,Δ,Ε,Ζ,Η,Θ δείχνουν μερικά από τα χαρτοφυλάκια. Από όλα αυτά τα χαρτοφυλάκια, πιο αποδοτικά είναι εκείνα που βρίσκονται στο «βορειοδυτικότερο» μέρος της καμπύλης των αποτελεσματικών χαρτοφυλακίων μεταξύ Α και Ε. Όλα τα άλλα χαρτοφυλάκια είναι μη αποτελεσματικά. Για παράδειγμα, το χαρτοφυλάκιο Γ υπερέχει του Θ γιατί προσφέρει την ίδια απόδοση με μικρότερο κίνδυνο. Αντίστοιχα το Δ χαρτοφυλάκιο υπερέχει του Η γιατί προσφέρει μεγαλύτερη απόδοση στο ίδιο επίπεδο κινδύνου[91].

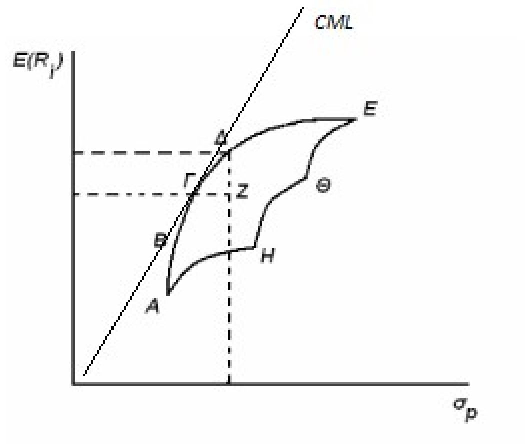
Συνδυασμός με επένδυση μηδενικού κόστους

Σε αυτή τη περίπτωση, προσπαθούμε να συνδυάσουμε ένα από τα αποτελεσματικά χαρτοφυλάκια με μια επένδυση μηδενικού κόστους (πχ. σε βραχυπρόθεσμα Έντοκα Γραμμάτια Δημοσίου). Επιλέγουμε το άριστο

[91] http://www.de.teipat.gr/documents/xeimerino%2020102011/%CE%98%CE%B5%CF%89%CF%81%CE%AF%CE%B1%20%CE%94%CE%B9%CE%B1%CF%87%CE%B5%CE%AF%CF%81%CE%B9%CF%83%CE%B7%CF%82%20%CE%A7%CE%B1%CF%81%CF%84%CE%BF%CF%86%CF%85%CE%BB%CE%B1%CE%BA%CE%AF%CE%BF%CF%85.pdf

χαρτοφυλάκιο σε συνδυασμό με την επένδυση χωρίς κόστος, εκείνο που έχει τη μεγαλύτερη προσδοκώμενη απόδοση για τον ίδιο βαθμό κινδύνου. Για παράδειγμα, στο προηγούμενο διάγραμμα, το βέλτιστο άριστο χαρτοφυλάκιο είναι το Δ[92].

Η Γραμμή Αποτελεσματικών Χαρτοφυλακίων (Capital Market Line (CML)) είναι ο γεωμετρικός τόπος των γραμμικών συνδυασμών μεταξύ της επένδυσης χωρίς κίνδυνο και του άριστου χαρτοφυλακίου. Τα χαρτοφυλάκια που βρίσκονται κάτω από τη γραμμή αυτή είναι υποδεέστερης σημασίας. Η CML προσδιορίζει νέους αποδοτικούς συνδυασμούς[93].



Διάγραμμα: *Γραμμή Αποτελεσματικών χαρτοφυλακίων*

<u>Επιλογή Άριστου Χαρτοφυλακίου</u>

Το υπόδειγμα του Markowitz καθορίζει το αποτελεσματικό σύνολο. Το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο (optimal portfolio) απ’ όλα τα αποτελεσματικά, το οποίο θα πρέπει να διατηρεί ένας επενδυτής, εξαρτάται από τις προτιμήσεις του συγκεκριμένου επενδυτή ως προς την ανταλλαγή μεταξύ απόδοσης και κινδύνου. Οι προτιμήσεις αυτές περιλαμβάνονται στη συνάρτηση χρησιμότητας του κάθε επενδυτή[94].

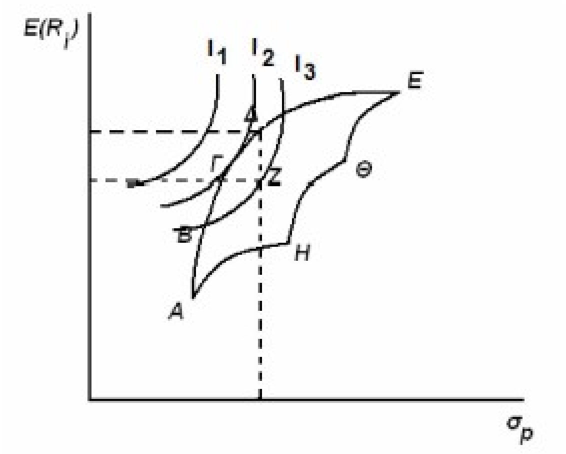
Η καμπύλη αδιαφορίας παριστάνει τους όρους ανταλλαγής μεταξύ απόδοσης και κινδύνου που απαιτεί ο κάθε επενδυτής. Άρα, το άριστο χαρτοφυλάκιο για ένα επενδυτή είναι το αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο που έχει τη μεγαλύτερη χρησιμότητα για τον επενδυτή και καθορίζεται από το σημείο στο οποίο εφάπτεται η υψηλότερη καμπύλη αδιαφορίας του με το αποτελεσματικό σύνορο.

[92]«Διαχείριση Χαρτοφυλακίου: στη θεωρία και στη πράξη». Κοτζαμάνης Ν. Σ., Εθνική Τράπεζα Ελλάδος, 1999., σελ. 55-56.

[93]http://www.de.teipat.gr/documents/xeimerino%2020102011/%CE%98%CE%B5%CF%89%CF%81%CE%AF%CE%B1%20%CE%94%CE%B9%CE%B1%CF%87%CE%B5%CE%AF%CF%81%CE%B9%CF%83%CE%B7%CF%82%20%CE%A7%CE%B1%CF%81%CF%84%CE%BF%CF%86%CF%85%CE%BB%CE%B1%CE%BA%CE%AF%CE%BF%CF%85.pdf

[94]http://www.de.teipat.gr/documents/xeimerino%2020102011/%CE%98%CE%B5%CF%89%CF%81%CE%AF%CE%B1%20%CE%94%CE%B9%CE%B1%CF%87%CE%B5%CE%AF%CF%81%CE%B9%CF%83%CE%B7%CF%82%20%CE%A7%CE%B1%CF%81%CF%84%CE%BF%CF%86%CF%85%CE%BB%CE%B1%CE%BA%CE%AF%CE%BF%CF%85.pdf

Για τη επιλογή του άριστου χαρτοφυλακίου, ο επενδυτής πρέπει να χαράξει τις δικές του καμπύλες αδιαφορίας, ανάλογα με το μέγεθος του κινδύνου που είναι διατεθειμένος να αναλάβει. Οι καμπύλες αδιαφορίας χαράσσονται στο ίδιο διάγραμμα που έχουν χαρακτεί όλα τα δυνατά χαρτοφυλάκια[95].



Διάγραμμα: *Σύνολο δυνατών και αποτελεσματικών χαρτοφυλακίων*

Στο παραπάνω διάγραμμα, το άριστο χαρτοφυλάκιο είναι εκείνο το οποίο βρίσκεται στο «βορειοδυτικό» μέρος και τέμνει την καμπύλη αδιαφορίας, που αυτό είναι το χαρτοφυλάκιο Γ και η καμπύλη αδιαφορίας I_2[96].

Μειονεκτήματα του μοντέλου του Markowitz

Το μοντέλο του Markowitz, ωστόσο έχει αρκετά μειονεκτήματα. Πρώτο και αρκετά σημαντικό μειονέκτημα είναι η τεράστια δυσκολία (στην ουσία αδυναμία) στην πρόβλεψη των ενδεχόμενων αποδόσεων κάθε χρεογράφου και επιπλέον στη πρόβλεψη και της πιθανότητας επέλευσης κάθε ενδεχόμενης απόδοσης. Για την αντιμετώπιση αυτού του τόσο σημαντικού μειονεκτήματος, πολλοί αναλυτές χρησιμοποιούν ως προσδοκώμενη απόδοση και ως τυπική απόκλιση τη μέση ετήσια απόδοση μιας παρελθούσας περιόδου[97].

Τα μειονεκτήματα αυτής της διορθωτικής παρέμβασης είναι πάρα πολλά και οφείλονται στην έλλειψη ουσιαστικής αιτιολόγησης γιατί η μέση προσδοκώμενη απόδοση του παρελθόντος θα πρέπει να αποτελεί και την προσδοκώμενη απόδοση της τρέχουσας χρήσης, στο γιατί η μέση τυπική απόκλιση του παρελθόντος θα

[95] http://www.de.teipat.gr/documents/xeimerino%2020102011/%CE%98%CE%B5%CF%89%CF%81%CE%AF%CE%B1%20%CE%94%CE%B9%CE%B1%CF%87%CE%B5%CE%AF%CF%81%CE%B9%CF%83%CE%B7%CF%82%20%CE%A7%CE%B1%CF%81%CF%84%CE%BF%CF%86%CF%85%CE%BB%CE%B1%CE%BA%CE%AF%CE%BF%CF%85.pdf

[96] http://www.de.teipat.gr/documents/xeimerino%2020102011/%CE%98%CE%B5%CF%89%CF%81%CE%AF%CE%B1%20%CE%94%CE%B9%CE%B1%CF%87%CE%B5%CE%AF%CF%81%CE%B9%CF%83%CE%B7%CF%82%20%CE%A7%CE%B1%CF%81%CF%84%CE%BF%CF%86%CF%85%CE%BB%CE%B1%CE%BA%CE%AF%CE%BF%CF%85.pdf

[97] «Διαχείριση Χαρτοφυλακίου: στη θεωρία και στη πράξη». Κοτζαμάνης Ν. Σ., Εθνική Τράπεζα Ελλάδος, 1999, σελ. 57-58.

πρέπει να αποτελεί τη τυπική απόκλιση της τρέχουσας χρήσης, καθώς και σε άλλα θέματα στατιστικής.

Άλλα μειονεκτήματα του μοντέλου προέρχονται από τις παραδοχές του ίδιου του μοντέλου μεταξύ των οποίων περιλαμβάνονται και η υπόθεση ύπαρξης αποτελεσματικής αγοράς.

Παρά, τα παραπάνω μειονεκτήματα το μοντέλο του Markowitz αποτελεί τη θέση της σύγχρονης χρηματιστηριακής θεωρίας, καθώς για πρώτη φορά έγινε δυνατόν να μετρηθεί ο επενδυτικός κίνδυνος και μάλιστα να αποτελέσει εργαλείο για τη διαχείριση χαρτοφυλακίου[98].

2.4.2 Συντελεστής Beta

Από την Γραμμή Αποτελεσματικών Χαρτοφυλακίων (CML) μπορεί να υπολογιστεί η σχέση κινδύνου-απόδοσης των αποτελεσματικών μόνο χαρτοφυλακίων, χωρίς να μπορεί να υπολογιστεί η σχέση κινδύνου-απόδοσης ενός συγκεκριμένου χρεογράφου. Την αδυναμία αυτή έλυσε ο Sharpe που επινόησε την μέθοδο του **συντελεστή beta**[99].

Beta μετοχής:
Ο συντελεστής beta μιας μετοχής εκφράζει την ευαισθησία της μετοχής σε κάθε μεταβολή του Γενικού Δείκτη Τιμών[100].

Ο πιο απλός τρόπος εκτίμησης του συντελεστή beta μιας μετοχής είναι η εύρεση της ιστορικής τιμής, η οποία προκύπτει από την απλή παλινδρόμηση των παρελθουσών αποδόσεων r_i της I μετοχής στις παρελθούσες αποδόσεις της αγοράς r_m (για την Ελλάδα είναι ο γενικός Δείκτης του Χρηματιστηρίου Αθηνών) [101].

Beta χαρτοφυλακίου:
Εκτός από το συντελεστή beta για μια συγκεκριμένη μετοχή, μπορούμε να υπολογίσουμε και το beta ενός χαρτοφυλακίου, ο οποίος ορίζεται ως ο σταθμικός μέσος των συντελεστών beta των επί μέρους μετοχών[102].

Η ερμηνεία του συντελεστή Beta είναι η εξής[103]:

- Αν β=1 , τότε η μετοχή έχει κίνδυνο μεσαίου μεγέθους,
- Αν β>1, η μετοχή έχει κίνδυνο μεγαλύτερο του μέσου και χαρακτηρίζεται ως επιθετική στρατηγική και
- Αν β<1, η μετοχή είναι λιγότερο επικίνδυνη από το μέσο και η στρατηγική χαρακτηρίζεται ως αμυντική.

[98] «Διαχείριση Χαρτοφυλακίου: στη θεωρία και στη πράξη»,..., ό.π. σελ 57-58.
[99] «Διαχείριση Χαρτοφυλακίου: στη θεωρία και στη πράξη»,..., ό.π. σελ. 58.
[100] «Διαχείριση Χαρτοφυλακίου: στη θεωρία και στη πράξη»,..., ό.π. σελ. 58.
[101] «Θεωρία Χαρτοφυλακίου και Εφαρμογές», Ραδάμανθυς Τσότσος, Σημειώσεις, 2013, σελ. 126.
[102] «Διαχείριση Χαρτοφυλακίου: στη θεωρία και στη πράξη»,..., ό.π. σελ. 58.
[103] «Θεωρία Χαρτοφυλακίου και Εφαρμογές»,..., ό.π. σελ. 126.

Οι περισσότερες μετοχές έχουν συντελεστή beta που κυμαίνεται στις 0.5-1.5. Θεωρητικά ο συντελεστής beta μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές, όμως πρακτικά είναι αδύνατον γιατί δεν υπάρχουν τέτοιες μετοχές στην αγορά[104].

Στην πράξη έχουν εμφανιστεί αρκετά προβλήματα που σχετίζονται τόσο με τον τρόπο εύρεσης του συντελεστή, όσο και με την αξιοπιστία του.

Σε ότι αφορά τον τρόπο εύρεσης του beta, τα κυριότερα προβλήματα που έχουν ανακύψει είναι[105]:

1. Ο χρονικός ορίζοντας στον οποίο θα υπολογίζεται ο συντελεστής. Πολύ συχνά παρατηρείται το φαινόμενο ο beta μιας μετοχής να καταβάλλεται ριζικά όταν μεταβάλλεται η χρονική περίοδος υπολογισμού του.
2. Αν η παλινδρόμηση θα γίνεται με ημερήσιες, ή εβδομαδιαίες ή μηνιαίες κλπ τιμές.
3. Αν θα πρέπει να χρησιμοποιείται ο Γενικός Δείκτης του Χρηματιστηρίου Αθηνών, ή κάποιος άλλος χρηματιστηριακός δείκτης.

Σε ότι αφορά την αξιοπιστία του συντελεστή, τα κυριότερα προβλήματα που έχουν προκύψει είναι[106]:

1. Οι μεγάλες τυπικές αποκλίσεις που πολύ συχνά εμφανίζονται σε περιφερειακά χρηματιστήρια όπως το ελληνικό.
2. Η πολύ χαμηλή εμπορευσιμότητα πολλών μετοχών.
3. Το γεγονός ότι ο επενδυτής θα έπρεπε να υπολογίζει το μελλοντικό beta, στην πράξη στηρίζει τις επενδυτικές του επιλογές στο παρελθόν beta, ελπίζοντας ότι αυτό θα διατηρηθεί σταθερό στο μέλλον.
4. Κάθε φορά που μεταβάλλεται το αντικείμενο δραστηριότητας ή ο τρόπος λειτουργίας της εταιρείας κ.λπ. ή το γενικότερο οικονομικό περιβάλλον, αλλάζει αυτόματα και το beta της μετοχής.

Στην προσπάθεια άμβλυνσης των παρακάτω αδυναμιών προσέγγισης του «πραγματικού» beta, αρκετοί ήταν εκείνοι που προσπάθησαν να παρέμβουν στον υπολογισμό του δείκτη, θέτοντας και άλλες παραμέτρους στον υπολογισμό. Αξιοσημείωτη προσπάθεια έκανε ο Barr Rosemberg[107].

Η λογική της παραπάνω παρέμβασης έγκειται στο ότι:

1. Ο δείκτης beta που προέρχεται από τη παλινδρόμηση απέχει σημαντικά από το να απεικονίσει το συνολικό κίνδυνο της μετοχής.
2. Για την εύρεση του πραγματικού κινδύνου πρέπει να συνεκτιμηθούν στοιχεία της θεμελιώδους ανάλυσης, μεταξύ των οποίων της μερισματικής απόδοσης (όσο υψηλότερη είναι, τόσο χαμηλότερος είναι ο κίνδυνος της μετοχής), της ρευστότητας (όσο καλύτερη είναι, τόσο μειώνεται ο κίνδυνος), της σταθερότητας των κερδών (όσο σταθερότερα, τόσο μικρότερος είναι ο

[104] «Θεωρία Χαρτοφυλακίου και Εφαρμογές»,..., ό.π. σελ. 126.
[105] «Διαχείριση Χαρτοφυλακίου: στη θεωρία και στη πράξη»,…, ό.π. σελ. 59-60.
[106] «Διαχείριση Χαρτοφυλακίου: στη θεωρία και στη πράξη». Κοτζαμάνης Ν. Σ., Εθνική Τράπεζα Ελλάδος, 1999, σελ. 59-60.
[107] «Διαχείριση Χαρτοφυλακίου: στη θεωρία και στη πράξη». Κοτζαμάνης Ν. Σ., Εθνική Τράπεζα Ελλάδος, 1999, σελ. 59-60.

κίνδυνος της μετοχής), του κλάδου (για παράδειγμα οι κυκλικοί κλάδοι διαπραγματεύονται συνήθως με υψηλότερο του μέσου όρου beta και οι σταθεροί κλάδοι με χαμηλότερο του μέσου όρου beta), κ.λπ.

2.4.3 Capital Asset Pricing Model (CAPM)

Το ***Capital Asset Pricing Model (Μοντέλο Αποτίμησης Περιουσιακών Στοιχείων) ή CAPM*** αποτελεί ένα σύνολο προβλέψεων σε ότι αφορά τις ισορροπίες μεταξύ προσδοκώμενων αποδόσεων και κινδύνου. Πρόκειται για μια απλοποιημένη εξέλιξη της θεωρίας του Markowitz, πάνω στην οποία δούλεψαν οι Sharpe, Linter, Mossin, Famma [108].

Το μοντέλο CAPM:

1. Διαχώρισε το κίνδυνο σε *συστηματικό* και μη *συστηματικό*.
2. Προχώρησε στη μέτρηση του συστηματικού κινδύνου μιας μετοχής ή ενός χαρτοφυλακίου, με μονάδα μέτρησης τον συντελεστή beta.
3. Είναι δεκτό ότι μέσω της επιλογής ενός χαρτοφυλακίου 20 μετοχών περίπου, ο μη συστηματικός κίνδυνος του χαρτοφυλακίου είτε μηδενίζεται είτε καθίσταται οριακός. Αυτό έδωσε την ευκαιρία τους διαχειριστές χαρτοφυλακίων να περιορίσουν τον κίνδυνο του διαφοροποιημένου χαρτοφυλακίου τους στον συστηματικό – και μόνο- κίνδυνο.
4. Έδωσε την ευχέρεια στους επενδυτές να επενδύουν σύμφωνα με τη σχέση κινδύνου-απόδοσης που επιθυμούν (αυξημένες προσδοκώμενες αποδόσεις συνεπάγονται και υψηλότερο κίνδυνο).

Το CAPM προϋποθέτει μια ευρεία σειρά περιορισμών που σε πολλές περιπτώσεις δεν ανταποκρίνονται στη πραγματικότητα, οι οποίοι είναι οι ακόλουθοι[109]:

1. Στην αγορά υπάρχουν πολλοί μικροί επενδυτές, με κανέναν από αυτούς να μην έχει τη δύναμη να επηρεάζει τις τιμές με δικές του κινήσεις.
2. Όλοι οι επενδύτες έχουν τον ίδιο επενδυτικό ορίζοντα.
3. Οι δυνατές επενδύσεις είναι σε μετοχές και ομολογίες (επενδύσεις μηδενικού κινδύνου). Ο δανεισμός για επένδυση επιτρέπεται με επιτόκιο αυτό της επένδυσης με μηδενικό κίνδυνο.
4. Δεν υπάρχουν φόροι και κόστος συναλλαγών.
5. Όλοι οι επενδυτές στοχεύουν να μεγιστοποιήσουν τη σχέση προσδοκώμενης απόδοσης και κινδύνου, όπως και στη θεωρία του Markowitz.
6. Όλοι οι επενδυτές αναλύουν τις μετοχές με τον ίδιο τρόπο και έχουν τις ίδιες εκτιμήσεις για το μέλλον των εταιρειών. Η πληροφόρηση των επενδυτών θα πρέπει να θεωρηθεί πλήρης.

---

[108] «Διαχείριση Χαρτοφυλακίου: στη θεωρία και στη πράξη». Κοτζαμάνης Ν. Σ., Εθνική Τράπεζα Ελλάδος, 1999, σελ. 59-60.

[109] «Διαχείριση Χαρτοφυλακίου: στη θεωρία και στη πράξη». Κοτζαμάνης Ν. Σ., Εθνική Τράπεζα Ελλάδος, 1999, σελ. 59-60.

7. Οι επενδυτές αξιολογούν τα χαρτοφυλάκια τους με βάση το κριτήριο του μέσου και της διακύμανσης, για μια χρονική περίοδο.
8. Οι επενδυτές προτιμούν εκείνο το χαρτοφυλάκιο που έχει τη μεγαλύτερη προσδοκώμενη απόδοση.

Όλοι οι επενδυτές θα επιλέξουν το χαρτοφυλάκιο της αγοράς Μ. Καλούμε χαρτοφυλάκιο της αγοράς αυτό που αποτελείται από όλες τις μετοχές με ποσοστό ανάλογο της συμμετοχής τους στο συνολικό χαρτοφυλάκιο. Τα χαρτοφυλάκια των επενδυτών θα διαφέρουν μόνο ως προς το ποσοστό του χαρτοφυλακίου που εμπεριέχει κίνδυνο (risky asset) επί του συνολικού χαρτοφυλακίου. Ο λόγος που όλοι οι επενδυτές θα καταλήξουν στο ίδιο χαρτοφυλάκιο είναι η ευκαμψία των τιμών σε μια αποτελεσματική αγορά (efficient market) [110].

Επιπλέον, το risk premium, δηλαδή πόσο αυξάνεται ο κίνδυνος για επιπλέον προσδοκώμενη απόδοση, επηρεάζεται από τον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου της αγοράς και από το συντελεστή beta της μετοχής ως προς το χαρτοφυλάκιο της αγοράς.

Γενικά, η προσδοκώμενη απόδοση μιας μετοχής ή μετοχικού χαρτοφυλακίου, επηρεάζεται από το συντελεστή beta της συγκεκριμένης μετοχής ή αντίστοιχα του μετοχικού χαρτοφυλακίου. Η προσδοκώμενη απόδοση μπορεί να απεικονιστεί σε ένα διάγραμμα από την Μετοχική Ευθεία Αγοράς (Capital Market Line (CML)) [111].

Ενώ η CML, που είδαμε στο μοντέλο του Markowitz, δείχνει τα risk premium των αποτελεσματικών χαρτοφυλακίων σε σχέση με τη τυπική απόκλισή τους, η SML, δείχνει το risk premium κάθε μετοχής (ή χαρτοφυλακίου) ως συνάρτηση του κινδύνου της μετοχής αυτής (ή του χαρτοφυλακίου) [112].

Αυτό που προκύπτει από την SML είναι ότι για να επιτευχθεί προσδοκώμενη απόδοση μεγαλύτερη της προσδοκώμενης απόδοσης του Γενικού Χρηματιστηριακού Δείκτη, αυτό μπορεί να επιτευχθεί μόνο με παράλληλη αύξηση του κινδύνου. Επίσης, μέσω της SML θα μπορούσαμε να έχουμε ένα μέτρο υποτιμημένων ή υπερτιμημένων μετοχών. Συγκεκριμένα, όσες μετοχές βρίσκονται πάνω από την SML θεωρούνται υπερτιμημένες καθώς συνεπάγονται καλύτερη σχέση κινδύνου-απόδοσης σε σχέση με το Γενικό Δείκτη, ενώ αντίθετα υποτιμημένες θεωρούνται οι μετοχές που βρίσκονται κάτω από την SML[113].

2.4.4 Arbitrage Pricing Theory (APT)

Έχοντας ως στόχο τη μείωση του ποσοστού της διακύμανσης που δεν ερμηνεύεται από το συντελεστή beta, δημιουργήθηκε η ***θεωρία APT***, από τον Stephen Ross[114]. Η θεωρία αυτή βασίζεται κατά βάση στην εξισορροπητική κερδοσκοπία (arbitrage).

[110] «Διαχείριση Χαρτοφυλακίου: στη θεωρία και στη πράξη». Κοτζαμάνης Ν. Σ., Εθνική Τράπεζα Ελλάδος, 1999, σελ. 61.
[111] «Διαχείριση Χαρτοφυλακίου: στη θεωρία και στη πράξη»,..., ό.π. σελ.62.
[112] «Διαχείριση Χαρτοφυλακίου: στη θεωρία και στη πράξη»,..., ό.π. σελ.62.
[113] «Διαχείριση Χαρτοφυλακίου: στη θεωρία και στη πράξη»,..., ό.π. σελ.62.
[114] «Διαχείριση Χαρτοφυλακίου: στη θεωρία και στη πράξη»,..., ό.π. σελ.63.

Με τον όρο ***εξισορροπητική κερδοσκοπία ή arbitrage*** εννοούμε τη ταυτόχρονη αγορά και πώληση της ίδιας (ή παρόμοιας) επένδυσης σε δύο διαφορετικές αγορές με δύο διαφορετικές τιμές. Αυτή η στρατηγική μπορεί να οδηγήσει σε κέρδη χωρίς την ανάληψη κινδύνου[115].

Το υπόδειγμα του APT αντικαθιστά τη μεταβλητή του Γενικού Δείκτη και το συντελεστή beta με μια σειρά μακροοικονομικών μεταβλητών και των αντίστοιχων συντελεστών ευαισθησίας τους. Δηλαδή, προσπαθεί σε ένα επαρκώς διαφοροποιημένο χαρτοφυλάκιο όπου ο μη συστηματικός κίνδυνος είναι αμελητέος, να ερμηνεύσει με καλύτερο τρόπο το συστηματικό κίνδυνο[116].

Βασική σύλληψη αυτής της θεωρίας είναι ότι η απόδοση ενός καλά διαφοροποιημένου χαρτοφυλακίου δεν επηρεάζεται μόνο από την πορεία του Γενικού Δείκτη, αλλά και από τη πορεία άλλων μακροοικονομικών κυρίως μεγεθών, όπως ενδεχομένως του ΑΕΠ, των πρώτων υλών, κ.λπ. Σύμφωνα με το μοντέλο η παραπάνω σχέσεις έχουν γραμμικό χαρακτήρα. Επίσης, οι ενδεχόμενες αποδόσεις μπορεί να προκύψουν όχι μόνο από την ύπαρξη ενός υψηλού συντελεστή beta, αλλά και από την επιλογή ενός χαρτοφυλακίου με υψηλή ευαισθησία στις μεταβολές των μακροοικονομικών μεγεθών[117].

Σύμφωνα με το APT, η προσδοκώμενη απόδοση ενός χαρτοφυλακίου είναι συνάρτηση[118]:

1. Του ύψους απόδοσης του χαρτοφυλακίου μηδενικού κινδύνου, όπως και στο CAPM.
2. Των προβλεπόμενων τιμών των μακροοικονομικών μεγεθών του μοντέλου, δηλαδή, των προβλεπόμενων από τη αγορά τιμών.
3. Κάποιων συντελεστών ευαισθησίας που συνδέουν την προσδοκώμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου με τις προβλέψεις της αγοράς για τα παραπάνω μακροοικονομικά μεγέθη.

Μια πολύ σημαντική χρήση του APT είναι η συμβολή στη δημιουργία μοντέλων για τη πρόβλεψη της απόδοσης μιας συγκεκριμένης μετοχής ή ενός χαρτοφυλακίου. Αυτό μπορεί να γίνει ως εξής[119]:

Αφού γνωρίζουμε τους συντελεστές του APT δεν έχουμε παρά να προβλέψουμε την πορεία των μακροοικονομικών εκείνων μεγεθών που περιλαμβάνει το μοντέλο, έτσι ώστε να προβλέψουμε και τη προσδοκώμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου. Η επίσης, μπορούμε να έχουμε μια ανάλυση ευαισθησίας της απόδοσης του χαρτοφυλακίου μας για διάφορα επίπεδα εξέλιξης των μακροοικονομικών μεγεθών του μοντέλου.

Στα πλεονεκτήματα του APT εντάσσουμε το ότι μπορεί συχνά να ερμηνεύσει καλύτερα τις μεταβολές των τιμών σε σχέση με το CAPM, καθώς και ότι ως μοντέλο υπόκειται σε λιγότερους περιορισμούς σε σχέση με το CAPM.

[115] https://www.euretirio.com/arbitrage/
[116] «Διαχείριση Χαρτοφυλακίου: στη θεωρία και στη πράξη»,..., ό.π. σελ. 64.
[117] «Διαχείριση Χαρτοφυλακίου: στη θεωρία και στη πράξη»,..., ό.π. σελ. 64.
[118] «Διαχείριση Χαρτοφυλακίου: στη θεωρία και στη πράξη»,..., ό.π. σελ. 65.
[119] «Διαχείριση Χαρτοφυλακίου: στη θεωρία και στη πράξη»,..., ό.π. σελ. 65.

Έτσι, οι παραδοχές στις οποίες δεν προβαίνει το APT αλλά προβαίνει το CAPM είναι:

- το APT δεν προϋποθέτει όλοι οι επενδυτές να έχουν τον ίδιο χρονικό ορίζοντα.
- το APT δεν προϋποθέτει την ανυπαρξία φόρων και
- το APT δεν προϋποθέτει ότι οι επενδυτές επιλέγουν χαρτοφυλάκιο με γνώμονα τη μέση προσδοκώμενη απόδοση και τη διακύμανση.

Στα μειονεκτήματα του APT μπορούμε να εντάξουμε το ότι το μοντέλο δεν προσδιορίζει την οικονομική σημασία των μεταβλητών, ούτε επίσης το πριμ του κινδύνου που αντιστοιχεί σε κάθε έναν από τους παράγοντες αυτούς.

Όπως στη περίπτωση του CAPM, έτσι και στο μοντέλο APT μπορούμε να έχουμε ένα μέτρο για το αν μια μετοχή είναι υπερτιμημένη ή υποτιμημένη[120].

2.5 Αποτελεσματικές Αγορές (Efficient Markets)

Τα μοντέλα CAPM και APT είναι θεωρίες που περιγράφουν τη δομή των τιμών των μετοχών, εξηγούν δηλαδή, πως μπορούμε να αναμένουμε να διαφέρουν οι τιμές και οι αναμενόμενοι δείκτες απόδοσης των μετοχών σε σχέση με τα δικά τους χαρακτηριστικά ρίσκου[121].

Αντίθετα, όταν μιλάμε για αποτελεσματικότητα της αγοράς μας ενδιαφέρει η ακρίβεια με την οποία η αγορά αξιολογεί τις μετοχές σε σχέση με τη δομή της. Με απλά λόγια, στο πόσο δίκαια αποτιμά η αγορά τις τιμές των μετοχών, ή αλλιώς εάν και κατά πόσο οι δυνάμεις της αγοράς αφήνουν περιθώρια για την ύπαρξη υποτιμημένων μετοχών, έστω και βραχυπρόθεσμα[122].

Μια αγορά καλείται ***αποτελεσματική*** αν οι τιμές των χρεογράφων (στη περίπτωσή μας μετοχών) προσαρμόζονται ταχύτατα σε κάθε νέα πληροφορία που αναδύεται στο επενδυτικό περιβάλλον και συνεπώς, ανά πάσα χρονική στιγμή, οι τιμές των μετοχών αντανακλούν όλες τις διαθέσιμες πληροφορίες που υπάρχουν ή θα δημοσιοποιηθούν στην αγορά[123].

Γενικά, κάποια χαρακτηριστικά των αποτελεσματικών αγορών είναι τα εξής[124]:

1. Η μεταβολή της τιμής των μετοχών, από τη μία περίοδο στην άλλη μπορεί θα πρέπει να παραμένει τυχαία, με την έννοια ότι η αλλαγή της τιμής σήμερα δεν σχετίζεται με την αλλαγή που συνέβη χθες ή οποιαδήποτε άλλη προηγούμενη μέρα.
2. Είναι αδύνατο να βρεθεί μετοχή που να παρουσιάζει καλύτερη σχέση κινδύνου-προσδοκώμενης απόδοσης από τις υπόλοιπες.
3. Δεν μπορούμε να βρούμε σημαντικές διαφορές ανάμεσα στις επενδυτικές επιδόσεις των διαφόρων επενδυτών. Με άλλα λόγια, οι διαφορές μεταξύ

[120] «Διαχείριση Χαρτοφυλακίου: στη θεωρία και στη πράξη». Κοτζαμάνης Ν. Σ., Εθνική Τράπεζα Ελλάδος, 1999, σελ. 65.
[121] «Διαχείριση Χαρτοφυλακίου: στη θεωρία και στη πράξη»,..., ό.π. σελ. 66.
[122] «Διαχείριση Χαρτοφυλακίου: στη θεωρία και στη πράξη»,..., ό.π. σελ. 66.
[123] «Θεωρία Χαρτοφυλακίου και Εφαρμογές», Ραδάμανθυς Τσότσος, Σημειώσεις, 2013., σελ. 177.
[124] «Διαχείριση Χαρτοφυλακίου: στη θεωρία και στη πράξη. Κοτζαμάνης Ν. Σ., Εθνική Τράπεζα Ελλάδος, 1999, σελ. 66.

ομάδων, θα πρέπει να είναι τυχαίες και όχι να αποτελούν συστηματικό και μόνιμο φαινόμενο.

Αφού είναι γνωστό ότι ο μέσος επενδυτής δεν έχει πλήρη πληροφόρηση για όλες τις μετοχές αναρωτιόμαστε πως η αγορά μπορεί να βρεθεί σε επίπεδο που οι τιμές των μετοχών αντικατοπτρίζουν πλήρως όλες τις πληροφορίες; Αυτό γίνεται επειδή οι τιμές στη πράξη δεν ρυθμίζονται από τη «συναίνεση» όλων των επενδυτών, αλλά από τους σχετικά λίγους επενδυτές που δραστηριοποιούνται ενεργά στις αγοραπωλησίες μετοχών[125].

Σχετικά με το δεύτερο κριτήριο για την ύπαρξη αποτελεσματικής αγοράς, που προϋποθέτει ότι η τιμή της μετοχής από τη μία περίοδο στην επόμενη θα πρέπει να παραμένει τυχαία, υπάρχουν πολλά στοιχεία που συνηγορούν για το αντίθετο. Η τάση (momentum) για παράδειγμα, είναι ένα χαρακτηριστικό που δεν συμβαδίζει με την αποτελεσματική αγορά. Όταν αρχίσει η πτώση στις τιμές των μετοχών, υπάρχει τάση να συνεχιστεί η πτώση και έτσι η αναμενόμενη αλλαγή των τιμών σήμερα θα μπορούσε πράγματι να συσχετισθεί με τις μεταβολές που έγιναν κατά τις προηγούμενες ημέρες[126].

Σε μία αποτελεσματική αγορά, οι τιμές των μετοχών σήμερα θα πρέπει να αντικατοπτρίζουν τις διαθέσιμες πληροφορίες που σχετίζονται με την αξιολόγηση των μετοχών. Ως διαθέσιμες νοούνται οι πληροφορίες αυτές που έχουν ανακοινωθεί και που μπορούμε να προβλέψουμε με βάση προηγούμενες ανακοινώσεις. Οι μόνες πληροφορίες που δεν αντικατοπτρίζονται στη τιμή της μετοχής είναι αυτές που δεν έχουμε λάβει ή που δεν μπορούμε να προβλέψουμε. Αυτό το είδος των πληροφοριών έρχεται στην αγορά τυχαία, καθώς δε η αγορά ανταποκρίνεται άμεσα και σωστά με τη λήψη τους, η τιμή μεταβάλλεται απρόσμενα και με τυχαίο τρόπο[127].

2.5.1 Αποτελεσματικές Αγορές και Διαχείριση Χαρτοφυλακίου

Όταν λέμε ότι μια αγορά χρηματιστηριακή είναι αποτελεσματική, εννοούμε ότι η μελλοντική εξέλιξη της πορείας των μετοχών είναι τυχαία (random walk hypothesis) , καθώς όλες οι υπάρχουσες πληροφορίες που επηρεάζουν τις τιμές των μετοχών έχουν συνεκτιμηθεί από τους επενδυτές και οι αντιδράσεις των επενδυτών έχουν επηρεάσει και ισορροπήσει στα τρέχοντα επίπεδα των τιμών των μετοχών. Κάτω από αυτή τη προϋπόθεση, μοναδικός τρόπος επίδειξης αποδόσεων ανώτερων του Γενικού Δείκτη είναι η ανάληψη επιπλέον κινδύνου, δηλαδή η επένδυση σε μετοχές με υψηλότερο συντελεστή beta[128].

Η ***Θεωρία της Αποτελεσματικής Αγοράς***, που θα δούμε παρακάτω εκφράστηκε αρχικά από το Γάλλο Μαθηματικό Louis Bachelier το 1900. Η εργασία του

[125] «Διαχείριση Χαρτοφυλακίου: στη θεωρία και στη πράξη». Κοτζαμάνης Ν. Σ., Εθνική Τράπεζα Ελλάδος, 1999, σελ. 66.
[126] «Διαχείριση Χαρτοφυλακίου: στη θεωρία και στη πράξη»,..., ό.π. σελ. 67-68.
[127] «Διαχείριση Χαρτοφυλακίου: στη θεωρία και στη πράξη»,..., ό.π. σελ. 67-68.
[128] «Διαχείριση Χαρτοφυλακίου: στη θεωρία και στη πράξη». Κοτζαμάνης Ν. Σ., Εθνική Τράπεζα Ελλάδος, 1999, σελ. 68.

αγνοήθηκε μέχρι τη δεκαετία του 1950, όταν ο Paul Samuelson άρχισε να κυκλοφορεί την εργασία του Bachelier ανάμεσα στους οικονομολόγους[129].

Το 1965. ο Eugene Fama δημοσίευσε την ακαδημαϊκή του μελέτη υποστηρίζοντας το υπόδειγμα του τυχαίου περιπάτου (random walk model). Το 1970 δημοσίευσε μια αναθεώρηση της θεωρίας και των στοιχείων για την υπόθεση. Η μελέτη επέκτεινε και καθόρισε τη θεωρία, περιλαμβάνοντας τους ορισμούς των τριών μορφών της Αποτελεσματικής Αγοράς. Έτσι, στις αρχές της δεκαετίας του 1990 γίνεται ευρέως αποδεκτή η Θεωρία της Αποτελεσματικής Αγοράς[130].

Οι εκδοχές της Θεωρίας της αποτελεσματικής αγοράς είναι τρεις και είναι *η ήπια μορφή (weak form), η αρκετά ισχυρή μορφή (semi-strong form) και η ισχυρή μορφή (strong form)*, τις οποίες θα δούμε αναλυτικά[131].

Η ***ήπια μορφή (weak form)*** υποστηρίζει ότι στη τιμή της μετοχής έχουν ενσωματωθεί οι παρελθούσες τιμές, ο όγκος των συναλλαγών, οι ανοικτές συναλλαγές (open interest), δηλαδή τα στοιχεία συναλλαγής της μετοχής. Αν ισχύει η ήπια μορφή, η τεχνική ανάλυση γίνεται αποτελεσματική. Ο τεχνικός ο αναλυτής, χρησιμοποιώντας διάφορες μεθόδους, αναλύει μια σειρά μεταβολών που συνέβησαν στο παρελθόν για να μπορέσει να προβλέψει τις μελλοντικές κινήσεις. Όταν ισχύει η αδύνατη μορφή, τότε δεν υπάρχει επενδυτής που να μπορεί να προβλέψει τις μεταβολές των τιμών των μετοχών, βασιζόμενος σε πληροφόρηση που υπάρχει στα στοιχεία της αγοράς. Η ασθενής μορφή αποτελεσματικότητας δεν υποθέτει ότι οι αποδόσεις των επενδύσεων είναι ανεξάρτητες, αλλά ούτε έχουν τις ίδιες κατανομές πιθανοτήτων διαχρονικά. Άρα, μια συσχέτιση των αποδόσεων είναι πιθανή και επομένως παρελθοντικές αποδόσεις μιας επένδυσης μπορούν να χρησιμοποιηθούν στη πρόβλεψη των μελλοντικών αποδόσεων[132].

Η ***αρκετά ισχυρή μορφή (semi-strong form)*** υποστηρίζει ότι στη τιμή της μετοχής έχουν ενσωματωθεί οι πληροφορίες που αφορούν στη συγκεκριμένη εταιρεία και έχουν δημοσιευτεί, όπως τα στοιχεία της ήπιας μορφής, τα στοιχεία και η αξιοπιστία των λογιστικών καταστάσεων, οι δημοσιευμένες προβλέψεις κερδών, η αξιολόγηση των στόχων και των προοπτικών της εταιρείας, η ποιότητα του management της εταιρείας κ.λπ. Αν ισχύει η αρκετά ισχυρή μορφή της Θεωρίας της Αποτελεσματικής αγοράς, κανένα είδος ανάλυσης δεν μπορεί να βοηθήσει για να επιτευχθούν ιδανικά αποτελέσματα, εφόσον βέβαια η ανάλυση βασίζεται σε δημοσιοποιημένες πληροφορίες. Το ίδιο ισχύει και για όλες τις πηγές δημοσιευμένων πληροφοριών. Στη περίπτωση αυτή κανένας επενδυτής δεν μπορεί να αποκομίσει αποδόσεις μεγαλύτερες από τις κανονικές (που αντιστοιχούν δηλαδή στον κίνδυνο που έχει αναλάβει), χρησιμοποιώντας πληροφορίες μετά της

[129] http://www.de.teipat.gr/documents/xeimerino%2020102011/%CE%98%CE%B5%CF%89%CF%81%CE%AF%CE%B1%20%CE%94%CE%B9%CE%B1%CF%87%CE%B5%CE%AF%CF%81%CE%B9%CF%83%CE%B7%CF%82%20%CE%A7%CE%B1%CF%81%CF%84%CE%BF%CF%86%CF%85%CE%BB%CE%B1%CE%BA%CE%AF%CE%BF%CF%85.pdf

[130] http://www.de.teipat.gr/documents/xeimerino%2020102011/%CE%98%CE%B5%CF%89%CF%81%CE%AF%CE%B1%20%CE%94%CE%B9%CE%B1%CF%87%CE%B5%CE%AF%CF%81%CE%B9%CF%83%CE%B7%CF%82%20%CE%A7%CE%B1%CF%81%CF%84%CE%BF%CF%86%CF%85%CE%BB%CE%B1%CE%BA%CE%AF%CE%BF%CF%85.pdf

[131] «Διαχείριση Χαρτοφυλακίου: στη θεωρία και στη πράξη»,..., ό.π. σελ. 68.

[132] «Διαχείριση Χαρτοφυλακίου: στη θεωρία και στη πράξη»,..., ό.π. σελ. 69.

ανακοίνωσή τους. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι τιμές των χρεογράφων έχουν ήδη ενσωματώσει τις νέες αυτές πληροφορίες[133].

Η ***ισχυρή μορφή (strong form)*** ισχυρίζεται ότι στη τιμή μιας μετοχής έχουν ενσωματωθεί όχι μόνο το σύνολο των πληροφοριών των δύο παραπάνω εκδοχών αλλά και οι πληροφορίες εκείνες που είναι γνωστές μόνο από τους έχοντες ιδιωτική πληροφόρηση. Προφανώς, η ισχυρή μορφή περικλείει τις άλλες δύο μορφές. Αν ισχύει η ισχυρή μορφή τότε τα πάντα «χάνονται». Αυτό σημαίνει ότι, όσοι έχουν ιδιωτική πληροφόρηση δρουν γρήγορα και η τιμή της μετοχής αντικατοπτρίζει τις πληροφορίες αυτές. Υποτίθεται ότι η αρχική πρόσβαση σε τέτοιου είδους πληροφορίες είναι κατά κύριο λόγο τυχαία και εφόσον οι τιμές των μετοχών ήδη αντικατοπτρίζουν τις ιδιωτικές πληροφορίες, οι προσπάθειες εύρεσής τους είναι μάταιες. Κάτω από αυτή την υπόθεση, ο επαγγελματίας επενδυτής έχει μηδενική αξία στην αγορά, αφού οποιαδήποτε μορφή έρευνας ή επεξεργασίας –σε σταθερή βάση- δεν πρόκειται να τον οδηγήσει σε καλύτερη σχέση κινδύνου-προσδωκόμενης απόδοσης.

Η Θεωρία της Αποτελεσματικής Αγοράς έχει αποτελείται από άκρως λογικούς ισχυρισμούς, όμως η καθημερινή πραγματικότητα δείχνει ότι[134]:

- Καμία αγορά δεν είναι πλήρως αποτελεσματική και ιδιαίτερα οι περιφερειακές.
- Ακόμα και όταν μεγάλα τμήματα της αγοράς ανταποκρίνονται αρκετά ικανοποιητικά στις απαιτήσεις της Θεωρίας των Αποτελεσματικών Αγορών, στις ίδιες αγορές υπάρχουν τμήματα (πχ μετοχές μικρής κεφαλαιοποίησης και εμπορευσιμότητας) όπου κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει.
- Ακόμα και αν το σύνολο των τμημάτων της αγοράς ανταποκρίνεται αρκετά ικανοποιητικά στις απαιτήσεις της Θεωρίας Αποτελεσματικών Αγορών, υπάρχουν κάποια μικρά (ή και μεγάλα) χρονικά διαστήματα στα οποία η αγορά δεν είναι αποτελεσματική.

Μερικές από τις αντιρρήσεις που διατυπώνονται εναντίον της Θεωρίας Αποτελεσματικών Αγορών, είναι ότι οι περισσότεροι από τους περιορισμούς που θέτει η θεωρία αυτή απέχουν πολύ από τη πραγματικότητα. Μερικοί από αυτούς είναι η ανυπαρξία φόρων και κόστους συναλλαγών, η ανυπαρξία μεγάλων επενδυτών που έχουν τη δυνατότητα να επηρεάζουν την αγορά με τις κινήσεις τους, η ύπαρξη πλήρους ενημέρωσης για το σύνολο του επενδυτικού κοινού, ο κοινός τρόπος αντίληψης και εκτίμησης της αγοράς από το σύνολο του επενδυτικού κοινού, η ανυπαρξία εσωτερικής πληροφόρησης κ.λπ. [135]

Ενδεικτικό είναι το παράδειγμα όπου μετά από την επέλευση ενός συγκυριακού γεγονότος ή μετά από μία αξιοσημείωτη ανακοίνωση η αγορά δείχνει αναποφάσιστη για διάστημα αρκετών ωρών ή και αρκετών ημερών μέχρι να αξιοποιήσει και να προσαρμοστεί στις νέες συνθήκες και έτσι να υπάρξει και πάλι ισορροπία. Σε όλο αυτό το διάστημα, μπορούν να υπάρχουν κάλλιστα πολλές επενδυτικές ευκαιρίες που συνεπάγονται καλύτερη σχέση μεταξύ κινδύνου και απόδοσης.

[133] «Διαχείριση Χαρτοφυλακίου: στη θεωρία και στη πράξη»,..., ό.π. σελ. 69.
[134] «Διαχείριση Χαρτοφυλακίου: στη θεωρία και στη πράξη»,..., ό.π. σελ. 69.
[135] «Διαχείριση Χαρτοφυλακίου: στη θεωρία και στη πράξη»,..., ό.π. σελ. 70.

Άλλος παράγοντας που επιτρέπει σε μία χώρα να μην είναι αποτελεσματική είναι ο τρόπος μετάδοσης των πληροφοριών στην αγορά που μπορεί να παρουσιάζει πολλές παγίδες, όπως ασάφεια ή παραπλάνηση όταν προέρχονται από την ίδια την εταιρεία, υπερβολή και διαστρέβλωση όταν προέρχονται από τον τύπο και από τον πολιτικό κόσμο, έλλειψη υπόστασης εάν προέρχονται από «κύκλους της αγοράς» ή από άλλες ανώνυμες πηγές ένα άλλο σημαντικό θέμα το οποίο θα πρέπει να δεχθεί σε σχέση με την πληροφόρηση των επενδυτών, είναι το εάν μία πληροφορία αποτελεί πράγματι καινούργια πληροφορία, ή μήπως αποτελεί σε μεγάλο βαθμό αναμάσημα παλαιότερων πληροφοριών. Και είναι αποδεδειγμένο ότι αν μία πληροφορία μετάδοση έντεχνα και πολλές φορές, τότε επιδρά στην αντίληψη του ευρέος επενδυτικού κινδύνου κοινού περισσότερο[136].

Πώς μπορεί να υπάρχει αποτελεσματική αγορά με δεδομένη τη χρονική υστέρηση με την οποία διοχετεύονται οι πληροφορίες στην αγορά; Σε γενικές γραμμές, ο χρηματιστηριακός επενδυτής έχει τη δυνατότητα να επιτύχει καλύτερη σχέση κίνδυνο απόδοσης, αρκεί να προβλέψει καλύτερα από την αγορά τη μελλοντική πορεία μιας εταιρείας. Στο ερώτημα αν είναι δυνατόν κάποιος ή κάποιοι να έχουν καλύτερες εκτιμήσεις από αυτές της αγοράς στην οποία συμμετέχει πλήθος αναλυτών, μεγάλος αριθμός θεσμικών επενδυτών, λοιποί επαγγελματίες κ.λπ., η απάντηση είναι ότι ενδέχεται ναι (μάλιστα η πιθανότητα είναι αυξημένη σε ορισμένες κατηγορίες μετοχών, όπως οι περιφερειακές που δεν προσελκύουν συνήθως ενδιαφέρον των θεσμικών επενδυτών και πολλών ιδιωτών επενδυτών).

Βασιζόμενοι στην εκτίμησή τους ότι η χρηματιστηριακή αγορά δεν είναι αποτελεσματική, πολλοί είναι εκείνοι που έχουν εκπονήσει άλλες στρατηγικές διαχείρισης χαρτοφυλακίου, όπως το styles analysis, η διαχείριση των hedge funds, οι δημόσιες εγγραφές νεοεισηγημένων μετοχών, τα earnings surprise models (μοντέλα εκπλήξεων των κερδών), τα event analysis models (μοντέλα ανάλυσης ειδικών μακροοικονομικών εξελίξεων), η παρουσίαση φαινομένων εποχικότητας κ.λπ. [137]

2.5.2 Η Αποτελεσματικότητα των αγορών και ο επενδυτικός κίνδυνος

Ο κίνδυνος της επένδυσης σε μία μετοχή παίζει αναμφίβολα πολύ σημαντικό ρόλο:

α. στο εάν τελικά αυτή η επένδυση θα επιλεγεί,

β. στην τιμή την οποία αυτή η επένδυση θα επιλεγεί.

Και αυτό γιατί, συνήθως, για την ανάληψη αυξημένου κινδύνου οι επενδυτές επιδιώκουν αυξημένες προσδοκώμενες αποδόσεις[138].

Η Θεωρία των Αποτελεσματικών Αγορών χρεογράφων θέτει ένα σημαντικό ερώτημα που καλείται να απαντήσει η χρηματοοικονομική θεωρία. Πώς προσδιορίζεται η δίκαιη (εύλογη) τιμή ή το ποσοστό του επενδυτικού κινδύνου

136 «Διαχείριση Χαρτοφυλακίου: στη θεωρία και στη πράξη»,..., ό.π., σελ. 71.

137 «Διαχείριση Χαρτοφυλακίου: στη θεωρία και στη πράξη»,..., ό.π., σελ. 72.

138 «Διαχείριση Χαρτοφυλακίου: στη θεωρία και στη πράξη». Κοτζαμάνης Ν. Σ., Εθνική Τράπεζα Ελλάδος, 1999, σελ. 73.

ενός χρεογράφου; Είναι προφανές ότι αν ο κίνδυνος αυτός δεν προσδιοριστεί ποσοτικά, τότε οι προβλέψεις της υπόθεσης αποτελεσματικότητας των αγορών δεν θα έχει κανένα οικονομικό περιεχόμενο. Κάθε πρόβλεψη της αγοράς για αύξηση των τιμών των χρεογράφων θα αποτελεί και ευκαιρία πραγματοποίησης υπερβολικών κερδών. Ο επενδυτικός κίνδυνος ενός χρεογράφου προέρχεται από μία δυσμενή μεταβολή της τιμής τους στην αγορά (δηλαδή μία πτώση της) η οποία θα έχει ως αποτέλεσμα ο κάτοχος του χρεογράφου να απολέσει μέρος του επενδυμένου κεφαλαίου (ή εισοδήματος) τους σε αυτό. Προφανώς, ο κίνδυνος αυτός οφείλεται στο γεγονός ότι οι μελλοντικές τιμές των χρεογράφων είναι αβέβαιες. Αυτές μπορούν να μεταβληθούν προς τα πάνω ή κάτω, καθώς εξαρτώνται από τις μελλοντικές συνθήκες που θα επικρατούν στην αγορά και την οικονομία σε μία μελλοντική στιγμή. Αυτό ισχύει όχι μόνο για τις μελλοντικές τιμές χρεογράφων, αλλά αφορά και επενδύσεις σε κεφαλαιουχικά αγαθά ή άλλα περιουσιακά στοιχεία των οποίων μελλοντικές ροές είναι επίσης αβέβαιες[139].

Η ύπαρξη κινδύνου απώλειας του κεφαλαίου μιας επένδυσης σε κάποιο χρεόγραφο ή κάποιο άλλο περιουσιακό στοιχείο θα έχει ως συνέπεια η τρέχουσα τιμή τους στην αγορά να είναι μικρότερη εκείνης όταν ο κίνδυνος αυτός εκλείπει. Η μικρότερη αυτή η τιμή της αγοράς του χρεογράφου επιτρέπει να ενσωματωθεί σε αυτή το ποσοστό κίνδυνος κάποιου είδους ασφάλιστρου για τον επενδυτή. Αυτό αποτελεί την ανταμοιβή για τον κίνδυνο που αυτός αναλαμβάνει να λαμβάνει όταν αγοράζει ένα χρεόγραφο που έχει αβέβαιες αποδόσεις. Συνήθως στη θεωρία αλλά και στην πράξη, το ποσοστό κινδύνου των χρεογράφων θεωρείται ότι συνδέεται θετικά με τη διακύμανση των αποδόσεών τους. Αυτό σημαίνει ότι, όσο μεγαλύτερη είναι η διακύμανση των μελλοντικών τιμών ή αποδόσεων τους, τόσο μεγαλύτερο θα είναι και το ποσοστό κινδύνου αυτών. Ένας άλλος παράγοντας που επηρεάζει το ποσοστό κινδύνου ενός χρεογράφου είναι οι προτιμήσεις των επενδυτών ως προς τον επενδυτικό κίνδυνο[140].

2.6 Μορφές Διαχείρισης Χαρτοφυλακίου

Η διαχείριση χαρτοφυλακίου χαρακτηρίζεται κυρίως από το στυλ του διαχειριστή του και από το βαθμό κυρτότητας του ορίζοντα του χαρτοφυλακίου σε σχέση με το συνολικό κίνδυνο που αναλαμβάνει διαχειριστής.

Οι δύο κύριες κατηγορίες επενδυτικών στυλ και φιλοσοφιών είναι:

1. Ενεργητική διαχείριση (active management)
2. Παθητική διαχείριση (passive management) [141]

[139] «Επενδύσεις», Τζαβαλής Η., Πετράκης Α. ,Εκδόσεις ΟΠΑ, Αθήνα 2009, σελ. 12-13.
[140] «Επενδύσεις», Τζαβαλής Η., Πετράκης Α. ,Εκδόσεις ΟΠΑ, Αθήνα 2009, σελ. 12-13.
[141] http://www.de.teipat.gr/documents/xeimerino%2020102011/%CE%98%CE%B5%CF%89%CF%81%CE%AF%CE%B1%20%CE%94%CE%B9%CE%B1%CF%87%CE%B5%CE%AF%CF%81%CE%B9%CF%83%CE%B7%CF%82%20%CE%A7%CE%B1%CF%81%CF%84%CE%BF%CF%86%CF%85%CE%BB%CE%B1%CE%BA%CE%AF%CE%BF%CF%85.pdf

Ενεργητική διαχείριση

Αναφέρεται σε μία στρατηγική διαχείρισης χαρτοφυλακίου όταν ο διαχειριστής κάνει ειδικές επενδύσεις, με στόχο την καλύτερη απόδοση από ένα δείκτη αναφοράς (benchmark index) των επενδυτών[142].

Ανάλογα με τους στόχους του χαρτοφυλακίου επενδύσεων που θα δημιουργηθεί, η ενεργητική διαχείριση χρησιμεύει για τη δημιουργία μικρότερου κίνδυνου από το δείκτη αναφοράς. Επιδιώκει να εκμεταλλευτεί τυχόν λανθασμένη, άστοχη τιμολόγηση των χρεογράφων και ταυτόχρονα να γίνει η πώληση χρεογράφων τα οποία διαχειριστής θεωρεί υπερτιμημένα.

Η πλειοψηφία των διαχειριστών δεν έχουν την ικανότητα να πετύχουν θετικό επενδυτικό αποτέλεσμα. Πετυχαίνουν όμως αποδόσεις θετικές που λόγω όμως των πολλών εξόδων διαχείρισης και πληροφορίες δεν δικαιολογείται η εργασία τους[143].

Τα κυριότερα βήματα της ενεργούς διαχείρισης χαρτοφυλακίου είναι[144]:

1) Με βάση τις προσδοκώμενες αποδόσεις και τον κίνδυνο κάθε δυνατής επένδυσης (μετοχές, ομολογίες κ.λπ.) και με βάση την επενδυτική φιλοσοφία και τις ανάγκες κάθε επενδυτή, δημιουργείται το «άριστο χαρτοφυλάκιο» του επενδυτή.
2) Η επιδόσεις αυτού του χαρτοφυλακίου (προσδοκώμενη απόδοση, κίνδυνος, ευελιξία κ.λπ.) που συγκρίνονται είτε με το «αντιπροσωπευτικό χαρτοφυλάκιο» της αγοράς (πχ με τον γενικό δείκτη του χρηματιστηρίου αν πρόκειται για ένα μετοχικό χαρτοφυλάκιο), ή ενδεχομένως με ένα άλλο χαρτοφυλάκιο που έχουμε ορίσει ως μέτρο σύγκρισης.
3) Οι επιδόσεις του «άριστου χαρτοφυλακίου» συγκρίνονται επίσης με τις αποδόσεις μιας σειράς άλλων χαρτοφυλακίων που προκύπτουν από τμηματοποίηση της αγοράς (market segmentation), για παράδειγμα, σε μετοχές διαφόρων κλάδων, σε μετοχές growth, και value (ανάπτυξης και εισοδήματος) σε μετοχές υψηλής, μέσης και χαμηλής κεφαλαιοποίησης κ.λπ.
4) Η σύγκριση του «άριστου χαρτοφυλακίου» με μία σειρά των αντιπροσωπευτικών χαρτοφυλακίων των δύο παραπάνω παραγράφων, αποτελεί ένα καλό μέτρο σύγκρισης για το «άριστο χαρτοφυλάκιο». Μετά τις συγκρούσεις αυτές, είτε επιλέγεται το συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο, είτε επιλέγεται με κάποιες τροποποιήσεις, και τελικά απορρίπτεται.
5) Η παραπάνω διαδικασία είναι δυναμική και όχι στατική, έτσι ώστε οι συχνές μεταβολές στις τιμές των επενδυτικών προϊόντων και στις προσδοκώμενες

[142] http://www.de.teipat.gr/documents/xeimerino%2020102011/%CE%98%CE%B5%CF%89%CF%81%CE%AF%CE%B1%20%CE%94%CE%B9%CE%B1%CF%87%CE%B5%CE%AF%CF%81%CE%B9%CF%83%CE%B7%CF%82%20%CE%A7%CE%B1%CF%81%CF%84%CE%BF%CF%86%CF%85%CE%BB%CE%B1%CE%BA%CE%AF%CE%BF%CF%85.pdf

[143] http://www.de.teipat.gr/documents/xeimerino%2020102011/%CE%98%CE%B5%CF%89%CF%81%CE%AF%CE%B1%20%CE%94%CE%B9%CE%B1%CF%87%CE%B5%CE%AF%CF%81%CE%B9%CF%83%CE%B7%CF%82%20%CE%A7%CE%B1%CF%81%CF%84%CE%BF%CF%86%CF%85%CE%BB%CE%B1%CE%BA%CE%AF%CE%BF%CF%85.pdf

[144] «Διαχείριση Χαρτοφυλακίου: στη θεωρία και στη πράξη». Κοτζαμάνης Ν. Σ., Εθνική Τράπεζα Ελλάδος, 1999, σελ. 77-78.

αποδόσεις να επηρεάζουν άμεσα τόσο τη διάρθρωση του «άριστου χαρτοφυλακίου σας και τις επιδόσεις των συγκεκριμένων χαρτοφυλακίων.

Παθητική διαχείριση

Η παθητική διαχείριση είναι μία στρατηγική στην οποία διαχειριστής δημιουργεί ένα χαρτοφυλάκιο προκειμένου να ελαχιστοποιηθεί το κόστος συναλλαγών πληροφόρησης και απασχόλησης. Μία δημοφιλής μέθοδος που χρησιμοποιείται είναι η μίμηση της εκτέλεσης ενός δείκτη ο οποίος λέγεται δείκτης ταμείου (index fund) [145].

Η παθητική διαχείριση είναι η πιο διαδεδομένη στην αγορά μετοχών, αλλά είναι πιο συχνά χρησιμοποιημένη σε άλλες μορφές επενδύσεων όπως ομόλογα (bonds) και κεφάλαια κινδύνου (hedge funds).

Μία τέτοια στρατηγική φαίνεται καταρχήν ιδιαίτερα ελλιπής, καθώς το χαρτοφυλάκιο αφενός δεν μπορεί να εκμεταλλευτεί τις νέες επενδυτικές ευκαιρίες που ανακύπτουν κατά διαστήματα και αφετέρου κινδυνεύει να υποστεί ζημιές λόγω έλλειψης αντίδρασης απέναντι σε ένα ενδεχόμενο αρνητικό γεγονός που ενδέχεται να πλήξει την πορεία μιας μετοχής του χαρτοφυλακίου. Άλλωστε, η συμβολή των διαχειριστών χαρτοφυλακίου δεν σταματά μόνος του συστήματος τόσο στο στήσιμο του «κατάλληλου» χαρτοφυλακίου, αλλά και τις παρεμβάσεις τους με στόχο πάντα τη βελτίωση της απόδοσης του χαρτοφυλακίου[146].

Συγκεκριμένα, η «προστιθέμενη αξία» ενός καλού διαχειριστής χαρτοφυλακίου έγκειται[147]:

- Στην πρόγνωση του χρονικού διαστήματος το οποίο χρηματιστηριακή αγορά αναμένεται να ανακάμψει (ενδείκνυται αύξηση της συμμετοχής των μετόχων στο συνολικό χαρτοφυλάκιο)
- Στην επιλογή (την κατάλληλη χρονική στιγμή) του (ή των) κατάλληλων κλάδων που αναμένεται να έχουν ανοδική πορεία τιμών (ενδείκνυται η μεγαλύτερη συμμετοχή του κλάδου ή των κλάδων στο μετοχικό χαρτοφυλάκιο) και
- Στην επιλογή (την κατάλληλη χρονική στιγμή) επιλεγμένων μετοχών που οι τιμές τους αναμένεται να έχουν ανοδική πορεία (ενδείκνυται η αυξημένη συμμετοχή των μετοχών αυτών των κλαδικών χαρτοφυλάκιο).

Παρόλα αυτά, υπάρχουν αρκετοί που υποστηρίζουν την παθητική στρατηγική αυτή και μάλιστα σε μερικό βαθμό την εφαρμόζουν[148].

Οι λόγοι για τους οποίους υποστηρίζεται αυτή η στρατηγική είναι ότι[149]:

- απαιτεί χαμηλότερο κόστος επενδυτικών συναλλαγών, καθώς οι συναλλαγές που γίνονται είναι πολύ περιορισμένες.

[145] http://www.de.teipat.gr/documents/xeimerino%2020102011/%CE%98%CE%B5%CF%89%CF%81%CE%AF%CE%B1%20%CE%94%CE%B9%CE%B1%CF%87%CE%B5%CE%AF%CF%81%CE%B9%CF%83%CE%B7%CF%82%20%CE%A7%CE%B1%CF%81%CF%84%CE%BF%CF%86%CF%85%CE%BB%CE%B1%CE%BA%CE%AF%CE%BF%CF%85.pdf

[146] «Διαχείριση Χαρτοφυλακίου: στη θεωρία και στη πράξη»,..., ό.π., σελ. 75-76.

[147] «Διαχείριση Χαρτοφυλακίου: στη θεωρία και στη πράξη»,..., ό.π., σελ. 75-76.

[148] «Διαχείριση Χαρτοφυλακίου: στη θεωρία και στη πράξη»,..., ό.π., σελ. 76.

[149] «Διαχείριση Χαρτοφυλακίου: στη θεωρία και στη πράξη»,..., ό.π., σελ. 76.

- απαιτεί χαμηλότερο κόστος διαχείρισης καθώς το κόστος πληροφόρησης και παρακολούθησης είναι πολύ περιορισμένο. Η συνεχής ανάλυση των εξελίξεων που λαμβάνουν χώρα στις εταιρείες, στους κλάδους της οικονομίας, αλλά και την ίδια την οικονομία, απαιτεί καλό βαθμό εξειδικευμένου προσωπικού, βάσεις δεδομένων, χρόνο και φυσικά κόστος.
- Σε περίπτωση που η κατασκευή του χαρτοφυλακίου είναι «έξυπνη», η υστέρηση της απόδοσης του απέναντι σε ένα δυναμικά διαχειριζόμενο χαρτοφυλάκιο αρκετές φορές δεν απέχει αξιοσημείωτα (είτε θετικά ή αρνητικά). Και όσο πιο αποτελεσματική είναι μία αγορά, τόσο ισχυρότερη καθίσταται η παραπάνω παρατήρηση.

Η παθητική διαχείριση μπορεί να λάβει δύο μορφές[150]:

1) Να είναι συνολικά παθητική (totally passive), μη μεταβάλλοντας το χαρτοφυλάκιο ανάλογα με τις προσδοκίες της αγοράς, ούτε ανάλογα με τις προσδοκίες των κλάδων, ούτε αφενός ανάλογα με τις προσδοκίες των επιμέρους μετοχών κάθε κλάδου. Έτσι, τα ποσοστά των μετοχών και των τίτλων σταθερού εισοδήματος στο συνολικό χαρτοφυλάκιο διατηρείται σταθερά το ποσοστό συμμετοχής των μετόχων κάθε κλάδο έτσι το ποσοστό των μετοχών και των τίτλων σταθερού εισοδήματος στο συνολικό χαρτοφυλάκιο διατηρούνται σταθερά και τέλος ποσοστά κάθε επιμέρους μετοχής το κλαδικό χαρτοφυλάκιο διατηρούνται επίσης σταθερά.
2) Να είναι μερικώς παθητική (disciplined stock selection), όπου τα ποσοστά των μετοχών και των τίτλων σταθερού εισοδήματος στο συνολικό χαρτοφυλάκιο διατηρούνται σταθερά, τα ποσοστά συμμετοχής των μετόχων κάθε κλάδου στο συνολικό μετοχικό χαρτοφυλάκιο διατηρούνται σταθερά, πλην όμως μπορεί να διαφοροποιείται (ανάλογα με τις προοπτικές κάθε εταιρείας) το ποσοστό συμμετοχής των μετόχων κάθε κλάδος το συνολικό κλαδικό χαρτοφυλάκιο.

Σε θεωρητικό επίπεδο, η παθητική διαχείριση χαρτοφυλακίου αναδύεται από τις «σύγχρονες μεθόδους διαχείρισης χαρτοφυλακίου» που όμως προϋποθέτουν αποτελεσματική χρηματιστηριακή αγορά. Για παράδειγμα, στο μοντέλο Markowitz αναφέρεται ότι υπάρχει μόνο ένα άριστο χαρτοφυλάκιο επενδύσεων που εμπεριέχουν κίνδυνο και ότι οι λογικοί επενδυτές δεν έχουν παρά να δημιουργήσουν το χαρτοφυλάκιό τους ως μία μείξη του «άριστου» αυτού χαρτοφυλακίου με κίνδυνο με επενδύσεις μηδενικού κινδύνου. Το ποσοστό των δύο αυτών επενδυτικών μορφών στο χαρτοφυλάκιό του επενδυτή εξαρτάται από την επενδυτική φιλοσοφία κάθε επενδυτή και τον βαθμό της τροφής του ως προς τον επενδυτικό κίνδυνο[151].

[150] «Διαχείριση Χαρτοφυλακίου: στη θεωρία και στη πράξη»,..., ό.π., σελ. 76-77.
[151] «Διαχείριση Χαρτοφυλακίου: στη θεωρία και στη πράξη»,..., ό.π., σελ. 77.

3

Επενδυτικός Κίνδυνος

3.1 Η έννοια του κινδύνου

Η έννοια του κινδύνου υπάρχει σε όλες τις ανθρώπινες δραστηριότητες. Γενικά ως κίνδυνο ορίζουμε την κατάσταση η οποία θέτει ένα ποσοστό απειλής για τη ζωή, την υγεία, την ιδιοκτησία ή το περιβάλλον.

Στις οικονομικές θεωρίες, όταν αναφερόμαστε στο κίνδυνο εννοούμε την πιθανοθεωρητική αβεβαιότητα, χωρίς καμία πιθανότητα ελέγχου του αποτελέσματος.

Ο κίνδυνος περιλαμβάνει την πιθανότητα κάποιου είδους απώλειας. Για τις επιχειρήσεις ως απώλεια μπορεί να θεωρηθεί η μείωση των εσόδων, η σμίκρυνση του μεριδίου αγοράς, η μείωση της παραγωγής, η καταβολή υψηλότερων εγγυήσεων κόστη επισκευών καθώς και μη χρηματικές απώλειες όπως η διαρροή σημαντικών στελεχών.

Ο κίνδυνος μιας επένδυσης αναφέρεται στην πιθανότητα είσπραξης μιας απόδοσης διαφορετική από την αναμενόμενη. Η τελική απόδοση μπορεί να είναι μικρότερη ή μεγαλύτερη από την αναμενόμενη. Το ρίσκο υπολογίζει τις πιθανότητες, πόσο μεγαλύτερη ή μικρότερη μπορεί να είναι η πραγματική απόδοση σε σχέση με την αναμενόμενη. Όσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα είσπραξης μιας απόδοσης πολύ μικρότερης ή πολύ μεγαλύτερης από την αναμενόμενη, τόσο μεγαλύτερος είναι ο κίνδυνος[152].

[152] «Θεωρία Χαρτοφυλακίου και Εφαρμογές», Ραδάμανθυς Τσότσος, Σημειώσεις, 2013, σελ. 51.

3.2 Αβεβαιότητα και κίνδυνος

Κίνδυνος σημαίνει αβεβαιότητα[153]. Όπου υπάρχει ρίσκο υπάρχει και αβεβαιότητα για τα μελλοντικά γεγονότα. Παρ' όλα αυτά, οι έννοιες κίνδυνος και αβεβαιότητα έχουν σημαντικές διαφορές, σύμφωνα με τον Knight (1921) [154].

«Ο κίνδυνος μπορεί να υπαχθεί σε ποσοτική μέτρηση», εφόσον μπορεί να υπάρχει ή να υπολογιστεί η κατανομή πιθανοτήτων που έχει εφαρμογή. Αντίθετα, η αβεβαιότητα, κατά τον Knight, δεν μπορεί να μετρηθεί. Δεν είναι γνωστή η κατανομή πιθανοτήτων, ούτε μπορούν να περιγραφούν τα πιθανά ενδεχόμενα, ενώ οι πιθανότητες των ενδεχόμενων είναι δυνατόν να μην αθροίζουν στο 1. Η συμπεριφορά των ατόμων διαφέρει ανάλογα με το αν αντιμετωπίζουν κίνδυνο ή αβεβαιότητα.

Ο κίνδυνος είναι ένα αντικειμενικό φαινόμενο που περιλαμβάνει έκθεση και αβεβαιότητα, άρα μπορούμε να πούμε ότι κίνδυνος σημαίνει αβεβαιότητα. Η αντικειμενικότητα του όρου προκύπτει από το γεγονός ότι για παράδειγμα δύο επενδυτές ορίζουν την ίδια επένδυση με διαφορετικό ρίσκο[155].

Όπως θα δούμε και στις επόμενες ενότητες, η διαχείριση του κινδύνου απαιτεί τη ποσοτικοποίηση του. Άρα, η αβεβαιότητα και η απώλεια κεφαλαίου είναι σημαντικά χαρακτηριστικά. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι ο κίνδυνος είναι ένα ασύμμετρο φαινόμενο με την έννοια ότι σχετίζεται μόνο με τις απώλειες.

Όμως, η αβεβαιότητα δεν συνεπάγεται απαραίτητα τον κίνδυνο. Η αβεβαιότητα σχετίζει τις πιθανές αποκλίσεις από τις αναμενόμενες τιμές ή αποδόσεις. Ένα μέτρο αβεβαιότητας μετρά τις πιθανές θετικές αλλά και αρνητικές αποκλίσεις. Με αυτή την έννοια η αβεβαιότητα θεωρείται συμμετρικό φαινόμενο.

3.3 Συμπεριφορά επενδυτών έναντι στον κίνδυνο

Οι επενδυτές ως προς τον τρόπο που συμπεριφέρονται έναντι του κινδύνου μπορούν να διαχωριστούν σε τρεις βασικές κατηγορίες.

Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν οι επενδυτές που θεωρούν ότι δεν μπορούν να αλλάξουν τον τρόπο διαμόρφωσης των μελλοντικών συνθηκών ή δεν επηρεάζονται από την αβεβαιότητα που επικρατεί στο περιβάλλον τους, με αποτέλεσμα να μην λαμβάνουν κανένα μέτρο για την αντιμετώπισή της. Τότε λέμε ότι οι επενδυτές αυτοί αποστρέφονται τον κίνδυνο (risk averse).

Στη δεύτερη κατηγορία βρίσκονται οι επενδυτές που θεωρούν αδύνατη τη τροποποίηση των μελλοντικών συνθηκών, αλλά υποστηρίζουν τη συνεχή προσαρμογή τους στις μεταβαλλόμενες συνθήκες. Λέμε ότι οι επενδυτές αυτοί καλούνται συντηρητικοί (risk neutral).

[153] "Advanced Stochastic Models, Risk Assessment, and Portfolio Optimization", The Frank Fabozzi Series, Rachev S., Stoyanov S., Fabozzi F., Εκδόσεις John Wiley & Sons, 2008, σελ. 171.

[154] "Risk, uncertainty and profit", Knight F. 1921

[155] "Advanced Stochastic Models, Risk Assessment, and Portfolio Optimization", The Frank Fabozzi Series, Rachev S., Stoyanov S., Fabozzi F., Εκδόσεις John Wiley & Sons, 2008, σελ. 171.

Η τρίτη κατηγορία περιλαμβάνει τους επενδυτές που ελπίζουν να μεγιστοποιήσουν την αξία των επενδύσεων τους βάση της ενεργής διαμόρφωσης του περιβάλλοντος και καλούνται ριψοκίνδυνοι (risk seeker).

3.4 Είδη κινδύνων

Θα παρουσιάσουμε τους κινδύνους που αναφέρονται στα επενδυτικά προϊόντα και θα αναλύσουμε τις διάφορες υποπεριπτώσεις. Οι ονομασίες των διαφόρων ειδών κινδύνων επενδυτικών προϊόντων που θα ακολουθήσουν προέρχονται από τις αιτίες που προκαλούν τους κινδύνους αυτούς και όχι από τις συνέπειές τους.

Οι κίνδυνοι στις αγορές χρηματοπιστωτικών μέσων διαχωρίζονται σε κινδύνους μεμονωμένων προιόντων ή αγορών (μη συστηματικοί) και στον κίνδυνο του συνολικού χρηματοπιστωτικού τομέα (συστημικό) [156].

Ο **συστηματικός κίνδυνος** αντιπροσωπεύει το αποτέλεσμα που επιφέρουν στη συμπεριφορά των αντισυμβαλλόμενων μη αναμενόμενες αλλαγές στις μακροοικονομικές συνθήκες και τις συνθήκες που επικρατούν στις αγορές. Οι αντισυμβαλλόμενοι μπορεί να διαφέρουν ως προς ως προς το βαθμό ευαισθησίας που επιδεικνύουν στον συστηματικό κίνδυνο ή να είναι αδιάφοροι προς αυτόν. Επομένως, το συστηματικό τμήμα του κινδύνου δεν μπορεί να αποφευχθεί πλήρως και είναι μερικά διαφοροποιήσιμο.

Ο **μη συστηματικός κίνδυνος** αντιπροσωπεύει κινδύνους που πηγάζουν από τη συμπεριφορά μεμονωμένων αντισυμβαλλόμενων. Καθώς ένα χαρτοφυλάκιο διαφοροποιείται, με την έννοια ότι μεγάλα ανοίγματα προς συγκεκριμένους αντισυμβαλλόμενους αντιπροσωπεύουν μικρότερο τμήμα της συνολικής έκθεσης του χαρτοφυλακίου, ο κίνδυνος μειώνεται. Το μη συστηματικό στοιχείο εξαλείφεται θεωρητικά εντελώς σε ένα χαρτοφυλάκιο με άπειρο αριθμό εκθέσεων.

Η πρώτη κατηγορία αποτελείται από τους χρηματοοικονομικούς κινδύνους και τους μη χρηματοοικονομικούς κινδύνους.

3.4.1 Χρηματοοικονομικοί Κίνδυνοι

Πιστωτικός κίνδυνος (credit risk):

Πιστωτικός κίνδυνος είναι ο κίνδυνος απώλειας μιας χρηματικής αμοιβής ενός επενδυτή, που οφείλεται στην αδυναμία ενός δανειστή να αποπληρώσει ένα δάνειο ή να εκπληρώσει μια συμβατική υποχρέωσή του[157]. Μια μορφή του πιστωτικού κινδύνου είναι ο Κυρίαρχος Κίνδυνος (Sovereign Risk) που σχετίζεται με το δανεισμό στο κράτος ή σε κάποιον συμβαλλόμενο για τον οποίο εγγυάται η κυβέρνηση ενώ η πιο ακραία μορφή του πιστωτικού κινδύνου είναι ο *κίνδυνος*

[156] Risk and Diversification: Different Types of Risk | Investopedia http://www.investopedia.com/university/risk/risk2.asp#ixzz4Dl86kGxv

[157] https://www.euretirio.com/pistotikos-kindynos/

πτώχευσης. [158] Ο πιστωτικός κίνδυνος αποτελεί έναν από τους σημαντικότερους κινδύνους, λόγω ίσως του μεγέθους των απωλειών που μπορεί να προκαλέσει.

Κίνδυνος αγοράς (market risk):

Ο κίνδυνος αγοράς (αναφέρεται και ως μεταβλητότητα) συνίσταται στο κίνδυνο ζημίας λόγω μεταβολής των επιτοκίων (κίνδυνος επιτοκίων) και της μεταβολής των συναλλαγματικών ισοτιμιών (συναλλαγματικός κίνδυνος). Ο κίνδυνος αγοράς υπάρχει όταν ένα πιστωτικό ίδρυμα συμμετέχει ενεργά στην αγοραπωλησία διαφόρων χρηματοοικονομικών προιόντων, όπως μετοχές, ομόλογα και παράγωγα[159].

Υπάρχουν τέσσερις βασικοί τύποι κινδύνου αγοράς: ο κίνδυνος επιτοκίων, ο κίνδυνος τιμής μετοχών (equity price risk), ο συναλλαγματικός κίνδυνος (foreign exchange risk) και ο κίνδυνος τιμής εμπορευμάτων (commodity price risk):

→ *Κίνδυνος επιτοκίων (Interest rate risk):*

Ο κίνδυνος επιτοκίων προέρχεται ουσιαστικά από τη διαφορά ληκτότητας που υπάρχει μεταξύ των στοιχείων του ενεργητικού και του παθητικού. Αυξομειώσεις των επιτοκίων μπορούν να έχουν σοβαρές συνέπειες επί της κερδοφορίας και της καθαρής θέσης των τραπεζών, όταν η ληκτότητα των στοιχείων του ενεργητικού δεν συμφωνεί με αυτή των στοιχείων του παθητικού.

→ *Κίνδυνος τιμής μετοχών (equity price risk):*

Είναι ο κίνδυνος που συνδέεται με την αστάθεια των τιμών των μετοχών. Ο γενικός κίνδυνος της αγοράς μετοχών είναι ο κίνδυνος που προκύπτει από τις κινήσεις του γενικού επιπέδου των δεικτών της αγοράς και των τιμών, ενώ ο ειδικός κίνδυνος των μετοχών αναφέρεται σε εκείνο το τμήμα της αστάθειας των τιμών των μετοχών που καθορίζεται από τα ειδικά χαρακτηριστικά της επιχείρησης, όπως είναι η ποιότητα της διαχείρισης ή η διακοπή της παραγωγικής διαδικασίας.

→ *Κίνδυνος τιμής εμπορευμάτων (commodity price risk)*

Ο κίνδυνος της τιμής των αγαθών διαφέρει σημαντικά από το κίνδυνο επιτοκίου και τον συναλλαγματικό κίνδυνο, δεδομένου ότι τα περισσότερα προϊόντα διαπραγματεύονται σε αγορές στις οποίες η συγκέντρωση της προσφοράς, στα χέρια λίγων προμηθευτών μπορεί να μεγεθύνει την αστάθεια των τιμών. Ως αποτέλεσμα, οι τιμές των αγαθών έχουν γενικά υψηλότερη μεταβλητότητα και μεγαλύτερες ασυνέχειες της τιμής σε σχέση με τα περισσότερα διαπραγματεύσιμα χρεόγραφα.

→ *Συναλλαγματικός κίνδυνος (foreign exchange risk):*

Η συμμετοχή των πιστωτικών ιδρυμάτων στη διεθνή χρηματαγορά και κεφαλαιαγορά ως επίσης και η ύπαρξη στοιχείων του ενεργητικού και του

[158] «Διαχείριση Κινδύνου με την Value-At-Risk (VaR) υποδειγμάτων», Μπισμπίκης Χ., Μεταπτυχιακή Εργασία, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, 2012, σελ. 12.

[159] Risk and Diversification: Different Types of Risk
Investopedia http://www.investopedia.com/university/risk/risk2.asp#ixzz4Dl86kGxv

παθητικού που είναι εκφρασμένα σε ξένα νομίσματα, καθιστά τα ιδρύματα αυτά ευάλωτα στις συναλλαγματικές διακυμάνσεις.

Κίνδυνος ρευστότητας (liquidity risk):

Ο κίνδυνος ρευστότητας συνίσταται στην αδυναμία ενός πιστωτικού ιδρύματος να ανταποκριθεί σε μια συγκεκριμένη θέση λόγω έλλειψης ρευστότητας. Ο κίνδυνος αυτός, προέρχεται από τους καταθέτες, τους δανειολήπτες και από μία συγκεκριμένη θέση που μπορεί να πάρει η τράπεζα σε κάποια περιουσιακά στοιχεία[160].

Η μορφή αυτή κινδύνου διακρίνεται σε Κίνδυνο ρευστότητας επένδυσης (market liquidity risk) και τον κίνδυνο ρευστότητας Κεφαλαίου (funding liquidity risk). Ο κίνδυνος ρευστότητας επένδυσης αναφέρεται στον κίνδυνο που απορρέει από της έλλειψη εμπορευσιμότητας της επένδυσης που δεν μπορεί να αγοραστεί ή να πωληθεί γρήγορα για τη πρόληψη ή την ελαχιστοποίηση μιας απώλειας. Ο κίνδυνος ρευστότητας κεφαλαίου σχετίζεται με την αδυναμία εκπλήρωσης των οικονομικών υποχρεώσεων, γεγονός που μπορεί να οδηγήσει σε πρόωρη ρευστοποίηση περιουσιακών στοιχείων, μετατρέποντας ζημίες που έχουν καταγραφεί στην αγοραία αξία σε πραγματικές ζημίες. Οι δύο αυτοί κίνδυνοι αλληλεπιδρούν στις περιπτώσεις που το χαρτοφυλάκιο αποτελείται από επενδύσεις οι οποίες δεν ρευστοποιούνται εύκολα και πρέπει να πωληθούν με μικρότερη αξία.

3.4.2 Μη χρηματοοικονομικοί κίνδυνοι

Λειτουργικός κίνδυνος (Operational risk)[161]:

Είναι ο κίνδυνος που εμφανίζεται κατά την εκτέλεση των λειτουργιών μιας επιχείρησης και μπορεί να επιφέρει απώλειες λόγω της αδυναμίας συντονισμού των συστημάτων, των ανθρώπων και των διαδικασιών. Συγκεκριμένα προέρχεται από ανεπαρκή συστήματα, διοικητική αποτυχία, ελαττωματικούς ελέγχους, ανθρώπινα λάθη και παράνομες ενέργειες. Ένα μέρος του λειτουργικού κινδύνου είναι εκτελεστικός κίνδυνος (executional risk) που αφορά την αδυναμία εκτέλεσης των συναλλαγών. Ένα άλλο τμήμα του λειτουργικού κινδύνου είναι ο τεχνολογικός κίνδυνος (Technology Risk), ο οποίος αφορά τις βλάβες τεχνολογικών συστημάτων. Επιπλέον, ο κίνδυνος του ανθρώπινου παράγοντα (human factor risk) αποτελεί ειδική περίπτωση του λειτουργικού κινδύνου και αναφέρεται στις απολύσεις και μπορεί να μπω μπορεί να επέλθουν από ανθρώπινα λάθη κατά τη διάρκεια της εργασίας.

Πολιτικός Κίνδυνος (political risk):

Είναι η μορφή του κινδύνου που αντιμετωπίζουν οι επενδυτές, οι εταιρείες και οι κυβερνήσεις, ως αποτέλεσμα των όσων αναφέρονται σε πολιτικές αποφάσεις ή οποιαδήποτε πολιτική αλλαγή που αλλοιώνει τα αναμενόμενα αποτελέσματα ή την αξία μιας οικονομικής δράσης και αλλάζει την πιθανότητα επίτευξης

[160] «Διαχείριση Κινδύνου με την Value-At-Risk (VaR) υποδειγμάτων», Μπισμπίκης Χ., Μεταπτυχιακή Εργασία, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, 2012, σελ. 12-13.

[161] «Διαχείριση Κινδύνου με την Value-At-Risk (VaR) υποδειγμάτων»,…, ό.π. σελ. 13.

συγκεκριμένων επιχειρησιακών σκοπών. Αποκτά σημασία ως παράγοντας εστίασης, όταν μεγαλώνει ο χρονικός ορίζοντας μιας επένδυσης[162].

Περιβαλλοντικός Κίνδυνος (environmental risk):

Είναι η μορφή του κινδύνου που αναφέρεται στις συνέπειες από τις δυσμενείς επιδράσεις στους ζώντες οργανισμούς και στο περιβάλλον από τα λύματα, τις εκπομπές, τα απόβλητα, την εξάντληση των φυσικών πόρων κ.λπ., που προκύπτουν από τις δραστηριότητες ενός οργανισμού ή από άλλους, γεγονός που επηρεάζει την επιχείρηση. [163]

Κίνδυνος φήμης (reputational risk):

Είναι η μορφή του κινδύνου που σχετίζονται με την αξιοπιστία μιας επιχείρησης. Μία ενδεχόμενη αλλοίωση στη φήμη μιας εταιρείας μπορεί να οδηγήσει σε απώλεια εσόδων ή σε μείωση της αξίας της εταιρικής συμμετοχής.

Νομικός κίνδυνος (Law risk):

Είναι η μορφή του κινδύνου που αναφέρεται στη συμμόρφωση της επιχείρησης με τους νόμους, προς αποφυγή δικαστικών διαμαχών και των αρνητικών επιπτώσεων που θα είχε για τον οργανισμό.

Λογιστικός κίνδυνος (accounting risk):

Είναι η μορφή του κινδύνου όπου οι οικονομικές καταστάσεις ενός οργανισμού δεν αντανακλούν την εύλογη οικονομική κατάσταση ενός οργανισμού.

Κίνδυνος Διακανονισμού:

Αναφέρεται στην περίπτωση κατά την οποία δεν έχει πραγματοποιηθεί ο διακανονισμός μιας συναλλαγής μετά την προβλεπόμενη προθεσμία.

Κίνδυνος συστημάτων πληρωμών:

Αναφέρεται επίσης στην κακή λειτουργία της αγοράς κυρίως όμως ενός άλλου τμήματός της, του τραπεζικού και όχι του χρηματιστηριακού.

3.5 Διαχείριση κινδύνου (Risk Management)

Η αύξηση της εμπορικής δραστηριότητας και των περιπτώσεων των ασταθών χρηματοπιστωτικών αγορών έχουν ωθήσει νέες μελέτες που υπογραμμίζουν την ανάγκη να αναπτυχθούν αξιόπιστες τεχνικές μέτρησης κινδύνου. Τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα επενδύουν στην ανάπτυξη τέτοιων αξιόπιστων

[162] «Διαχείριση Κινδύνου με την Value-At-Risk (VaR) υποδειγμάτων»,…, ό.π, σελ. 13.
[163] «Διαχείριση Κινδύνου με την Value-At-Risk (VaR) υποδειγμάτων», Μπισμπίκης Χ., Μεταπτυχιακή Εργασία, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, 2012, σελ. 13.

τεχνικών μέτρησης και διαχείρισης κινδύνων προκειμένου να μετρήσουν και να ελέγξουν τους κινδύνους[164].

Η «διαχείριση κινδύνων» μπορεί να ορισθεί ως η διαδικασία με την οποία οι επενδυτές προσεγγίζουν μεθοδικά τους κινδύνους που σχετίζονται με τις δραστηριότητες τους, με σκοπό να εξασφαλίσουν τη μελλοντική και υψηλή απόδοση των επενδύσεών τους.

Η διαχείριση κινδύνου εστιάζει στην αναγνώριση και το χειρισμό των κινδύνων που περιβάλλουν τις παλαιότερες, τρέχουσες και μελλοντικές δραστηριότητες ενός ιδρύματος. Είναι μια συνεχής και αναπτυσσόμενη διεργασία, η οποία διατρέχει τη στρατηγική του ιδρύματος. Οι επενδυτές μέσω της διαχείρισης κινδύνου, αναγνωρίζουν τους κύριους κινδύνους, παρέχοντας συνεπείς και κατανοητές μετρήσεις των κινδύνων.

Η διαχείριση κινδύνων είναι μια σημαντική διαδικασία για κάθε επιχείρηση αφού (α) βοηθά στην αποφυγή προβλέψιμων κινδύνων, (β) προστατεύει από τις λάθος επενδυτικές αποφάσεις, και (γ) μειώνει τις απώλειες και τις ζημιές από απρόβλεπτα γεγονότα.

Η διαδικασία της διαχείρισης κινδύνου περιλαμβάνει τα ακόλουθα τρία στάδια[165]:

1. Ταυτοποίηση του κινδύνου (risk identification):

Το στάδιο της ταυτοποίησης αποτελεί το αρχικό και σημαντικότερο στάδιο της διαδικασίας και αφορά την αναγνώριση και ταυτοποίηση των κινδύνων, που διατρέχει ή μπορεί να διατρέξει ένας οργανισμός. Αφού γίνει η αναγνώριση των ειδών του κινδύνου που διατρέχει μια επιχείρηση, γίνεται η κατηγοριοποίηση σε ουσιαστικούς και μη ουσιαστικούς. Ουσιαστικοί κίνδυνοι είναι αυτοί που η εταιρεία πρέπει να αποδεχτεί για να καθοδηγήσει τις επιδόσεις και τη μακροπρόθεσμη ανάπτυξη της. Αντίθετα, μη ουσιαστικοί κίνδυνοι είναι αυτοί που δεν είναι σημαντικοί και μπορούν να ελαχιστοποιηθούν ή να εξαλειφθούν πλήρως.

2. Μέτρηση του κινδύνου (risk measurement)

Το στάδιο αυτό παρέχει τη πληροφορία της ποσότητας είτε ενός συγκεκριμένου είδους κινδύνου, είτε του συνολικού κινδύνου έκθεσης και των πιθανοτήτων απώλειας που ίσως συμβούν λόγω των εκθέσεων αυτών.

Η μέτρηση της έκθεσης ενός συγκεκριμένου κινδύνου είναι πολύ σημαντική για να δούμε σε ποιο βαθμό ο κίνδυνος αυτός επηρεάζει το συνολικό κίνδυνο της επένδυσης. Κάποια είδη κινδύνου ίσως παρέχουν οφέλη μέσω της διαφοροποίησης, ενώ κάποια άλλα όχι. Επίσης, κάποια είδη είναι πιο εύκολο να μετρηθούν ενώ κάποια άλλα όχι τόσο. Για παράδειγμα, ο κίνδυνος αγοράς μπορεί να μετρηθεί χρησιμοποιώντας ιστορικές τιμές, μέσω του μέτρου Αξία σε κίνδυνο

[164] "The mathematics of financial modeling & investment management", Focardi S., Fabozzi F, The Wiley Finance, 2004., σελ. 744.

[165] Risk Management Framework (RMF): An Overview | Investopedia http://www.investopedia.com/articles/professionals/021915/risk-management-framework-rmf-overview.asp#ixzz4DpnLTfwF

(Value-At-Risk), που θα δούμε στη πορεία. Όμως, για παράδειγμα, η μέτρηση του λειτουργικού κινδύνου θεωρείται δύσκολη διαδικασία.

Η μέτρηση κινδύνου αποτελεί και το κύριο μέρος της εργασίας, που θα αναλύσουμε παρακάτω. Θα μελετήσουμε τα μέτρα κινδύνου ως κεφαλαιακή απαίτηση, δηλαδή το ποσό που πρέπει να προστεθεί σε μία κατάσταση με κίνδυνο, έτσι ώστε γίνει αποδεκτή.

3. Μέτρα αντιμετώπισης και διαχείρισης (risk management):

Το τελικό στάδιο όπου παίρνονται οι αποφάσεις σχετικά με την αντιστάθμιση ή όχι του κινδύνου. Οι αποφάσεις λαμβάνονται στα πλαίσια του συνολικού χαρτοφυλακίου με γνώμονα την βελτιστοποίηση της σχέσης απόδοσης και κινδύνου.

Οι επιλογές του επενδυτή είναι:

1. Ανάληψη του κινδύνου, χωρίς να γίνει κάποια ενέργεια αντιμετώπισής του,
2. Λήψη μέτρων για την ελαχιστοποίησης της πιθανότητας πραγματοποίησης ή το μετριασμό της ζημίας, και
3. Πλήρης αποφυγή και απόρριψη του κινδύνου.

Από τους ανωτέρω ορισμούς διαφαίνεται ότι η διαχείριση κινδύνων είναι μια διαδικασία απαραίτητη για την βιωσιμότητα ενός οργανισμού, αλλά και την στρατηγική του ανάπτυξη, αφού μεριμνεί για την σωστή διαχείριση των πηγών του οργανισμού βελτιστοποιώντας την σχέση απόδοσης και κινδύνου.

Τα σημαντικότερα είδη κινδύνου που καλείται να αντιμετωπίσει η διαχείριση κινδύνων είναι ο κίνδυνος αγοράς, ο πιστωτικός κίνδυνος, και ο λειτουργικός κίνδυνος.

3.6 Διαφοροποίηση Χαρτοφυλακίου

Με τον όρο διαφοροποίηση χαρτοφυλακίου εννοούμε την επενδυτική στρατηγική κατά την οποία συγκεντρώνουμε μια ποικιλία χρεογράφων με διαφορετικές αποδόσεις, διαφορετικές συσχετίσεις μεταξύ των αποδόσεων τους και διαφορετικά επίπεδα του κινδύνου, με αντικείμενο στόχο να μειώσουμε το συνολικό κίνδυνο του χαρτοφυλακίου, χωρίς να μειώσουμε την απόδοση του[166].

Η διαφοροποίηση του χαρτοφυλακίου είναι ένα από τα πιο σημαντικά εργαλεία στη διαχείριση του επενδυτικού κινδύνου. Πολλοί επαγγελματίες επενδυτές συμφωνούν ότι η διαφοροποίηση δεν εγγυάται ότι δεν θα υπάρχουν απώλειες, αλλά είναι το σημαντικότερο εργαλείο για να φτάσουν τους στόχους τους, μειώνοντας παράλληλα τον κίνδυνο. Ωστόσο, να σημειώσουμε ότι όση διαφοροποίηση και να γίνει στο χαρτοφυλάκιο, ο κίνδυνος ποτέ δεν θα μηδενιστεί.

Για τη βέλτιστη διαφοροποίηση χαρτοφυλακίου θα πρέπει αρχικά, το χαρτοφυλάκιο πρέπει να αποτελείται από διαφορετικά είδη χρηματοπιστωτικών

[166] «Θεωρία Χαρτοφυλακίου και Εφαρμογές», Ραδάμανθυς Τσότσος, Σημειώσεις, 2013, σελ. 69.

μέσων όπως κεφάλαιο, μετοχές, ομόλογα, αμοιβαία κεφάλαια και ίσως κάποια ακίνητα. Ένας συνδυασμός διαφορετικών ειδών θα μειώσει την ευαισθησία του χαρτοφυλακίου στις αλλαγές της αγοράς.

Επιπλέον, τα χρεόγραφα του χαρτοφυλακίου πρέπει να διαφέρουν στη ποσότητα του κινδύνου. Η επιλογή διαφορετικών επενδυτικών προιόντων με διαφορετικές τιμές αποδόσεων εξασφαλίζουν ότι τα υψηλά κέρδη θα ξεπερνούν τις απώλειες[167].

Τέλος, είναι πολύ σημαντικό τα χρεόγραφα να είναι μη συσχετισμένα μεταξύ τους, δηλαδή να προέρχονται από διαφορετικές εταιρίες ακόμα και από διαφορετικές βιομηχανικές μονάδες. Ωστόσο, υπάρχουν περιπτώσεις όπου τα μη συσχετισμένα προϊόντα δεν βοηθούν στη διαφοροποίηση. Το βασικό στατιστικό εργαλείο για την διάκριση των συσχετισμένων χρεογράφων είναι ο συντελεστής συσχέτισης.

Ο συντελεστής συσχέτισης για ένα διαφοροποιημένο χαρτοφυλάκιο αναπαριστά τον βαθμό μεταξύ των σχέσεων των τιμών μεταξύ διαφόρων χρεογράφων που αυτό αποτελείται[168]. Ο συντελεστής συσχέτισης κυμαίνεται από το -1 έως το +1. Αν η τιμή του συντελεστή είναι +1, τότε οι τιμές των χρεογράφων συμπίπτουν ενώ αν είναι -1, οι τιμές τους κινούνται σε διαφορετικές κατευθύνσεις. Αν ο συντελεστής είναι 0 τότε η τιμή του ενός, δεν επηρεάζει τη τιμή του άλλου, δηλαδή είναι ασυσχέτιστες.

Πρακτικά, είναι δύσκολο να βρούμε ένα ζεύγος χρεογράφων που έχουν τέλεια θετική συσχέτιση της τάξης του 1 ή μια τέλεια αρνητική συσχέτιση της τάξης του -1, ακόμα και να έχουν συντελεστή 0. Είναι φυσικό, να βρίσκουμε ζεύγη χρεογράφων που η συσχέτιση μεταξύ των τιμών τους έχει τιμές μεταξύ των -1,+1. Στη περίπτωση, όμως, που έχουμε πολλά ζεύγη χρεογράφων κατασκευάζουμε τον πίνακα συσχέτισης και τον χρησιμοποιούμε για την επιλογή μεταξύ μιας μεγάλης ποικιλίας χρεογράφων[169].

Όπως αναφέραμε, η επιλογή ασυσχέτιστων προιόντων εξυπηρετεί στη διαφοροποίηση του χαρτοφυλακίου το οποίο μας εξασφαλίζει ότι η συνολική επένδυση δεν θα αποτύχει από ένα μεμονωμένο γεγονός. Όταν όμως η συνολική χρηματαγορά αντιμετωπίζει πολλά τέτοια γεγονότα, ίσως η επιλογή ασυσχέτιστων προϊόντων θα επιφέρει τα αντίθετα αποτελέσματα.

Οι διάφοροι τύποι κινδύνων που είδαμε παραπάνω διαχωρίζονται σε διαφοροποιήσιμους και μη διαφοροποιήσιμους[170]:

Ο μη διαφοροποιήσιμος κίνδυνος ή συστηματικός κίνδυνος, όπως είναι ο κίνδυνος αγοράς σχετίζεται με κάθε εταιρεία. Μερικές από τις αιτίες που τον προκαλούν είναι τα ποσοστά του πληθωρισμού, τα ποσοστά των συναλλαγών, η πολιτική αστάθεια, ο πόλεμος και τα επιτόκια. Αυτό το είδος κινδύνου δεν είναι

167 The Importance Of Diversification | Investopedia http://www.investopedia.com/articles/02/111502.asp#ixzz4Dl92gFYK

168 The Importance Of Diversification | Investopedia http://www.investopedia.com/articles/02/111502.asp#ixzz4Dl92gFYK

169 The Importance Of Diversification | Investopedia http://www.investopedia.com/articles/02/111502.asp#ixzz4Dl92gFYK

170 The Importance Of Diversification | Investopedia http://www.investopedia.com/articles/02/111502.asp#ixzz4Dl92gFYK

συγκεκριμένος για κάθε εταιρεία και δεν μπορεί να μειωθεί ή να εξαλειφθεί μέσω της διαφοροποίησης. Αντίθετα, είναι ο κίνδυνος που οι επενδυτές θα πρέπει να αποδεχτούν.

Ο διαφοροποιήσιμος κίνδυνος ή μη συστηματικός κίνδυνος είναι συγκεκριμένος για κάθε εταιρεία, αγορά, οικονομία ή χώρα και μπορεί να μειωθεί μέσω της διαφοροποίησης. Ο επιχειρηματικός κίνδυνος και ο χρηματοοικονομικός κίνδυνος είναι μερικά είδη που μπορούν να διαφοροποιηθούν. Άρα, ο σκοπός είναι η επένδυση σε διαφορετικά είδη χρεογράφων έτσι ώστε να μην επηρεαστούν με τον ίδιο τρόπο από τα γεγονότα της αγοράς.

Υπάρχουν επιπλέον τύποι διαφοροποίησης και έχουν δημιουργηθεί πολλά συνθετικά επενδυτικά προϊόντα για να ικανοποιήσουν τα επίπεδα ανεκτικότητας κινδύνου των επενδυτών. Ωστόσο, αυτά τα προϊόντα μπορεί να είναι αρκετά περίπλοκα και οι αρχάριοι επενδυτές ίσως να μην γνωρίζουν πώς να τα διαχειριστούν. Τα ομόλογα αποτελούν τα πιο δημοφιλή και απλά προϊόντα για τη διαφοροποίηση, σε αντίθεση με την αγορά μετοχών.

Στη περίπτωση που το χαρτοφυλάκιο αποτελείται από μετοχές, είναι λογικό ότι αν περιέχει πέντε μετοχές, για παράδειγμα, είναι καλύτερο από το να περιέχει μία. Ωστόσο, κάποιες φορές ο μεγάλος αριθμός μετοχών αποτελεί πρόβλημα για να πετύχουμε υψηλότερες αποδόσεις. Οι ερευνητές υποστηρίζουν ότι για να πετύχουμε τη βέλτιστη διαφοροποίηση θα πρέπει να χαρτοφυλάκιο να αποτελείται από 15-20 μετοχές διαφορετικών ειδών[171].

[171] The Importance Of Diversification | Investopedia http://www.investopedia.com/articles/02/111502.asp#ixzz4Dl92gFYK

4

Μέτρηση Επενδυτικού Κινδύνου - Θεωρητική προσέγγιση των σύγχρονων μέτρων κινδύνου

Είδαμε ότι ο κίνδυνος παίζει σημαντικό ρόλο και επηρεάζει σημαντικά τις αποφάσεις των επενδυτών. Οπότε είναι λογικό η μέτρηση του να αποτελεί ένα βασικό στοιχείο για τη διαχείρισή του.

Ο κίνδυνος και η αβεβαιότητα είναι μέρος της ανθρώπινης δραστηριότητας από τις απαρχές της. Στα αρχαία χρόνια, αντιμετώπιζαν τον κίνδυνο σαν πεπρωμένο και σαν Θεία Πρόνοια. Στα μεσαιωνικά χρόνια, το 1494, ένας Ιταλός μοναχός άρχισε να συζητά για μέτρα κινδύνου, θέτοντας ένα γρίφο που μπέρδεψε τους ανθρώπους για περίπου δύο αιώνες. Η λύση του γρίφου του και οι επακόλουθες εξελίξεις, έθεσαν τα θεμέλια για τα σύγχρονα μέτρα κινδύνου.

Η μοντελοποίηση του κινδύνου, γενικά, είναι κάτι αόριστο. Παρ' όλα αυτά έχουν γίνει αξιόλογες προσπάθειες μοντελοποίησης του. Ένα μοντέλο κινδύνου αποτελείται από δύο μέρη. Πρώτον, κατασκευάζονται μέτρα πιθανότητας για τις υποβόσκουσες πηγές κινδύνου, όπως είναι ο κίνδυνος αγοράς ή πιστωτικοί παράγοντες κινδύνου, οπότε η κατανομή απώλειας του χαρτοφυλακίου περιγράφεται από μοντέλα πιθανότητας. Δεύτερον, ο κίνδυνος ποσοτικοποιείται με την έννοια του μέτρων κινδύνου που συνδέει έναν πραγματικό αριθμό με την κατανομή απώλειας του χαρτοφυλακίου[172].

Εξαιτίας της έλλειψης του ορισμού του κινδύνου ως συνάρτηση, δεν υπάρχει τέλειο μέτρο κινδύνου. Ένα μέτρο κινδύνου, καλύπτει μόνο ορισμένα χαρακτηριστικά του και με αυτή την έννοια, το μέτρο δεν είναι πλήρες.

Από ιστορικής άποψης, ο Markowitz ήταν ο πρώτος που αναγνώρισε την σχέση μεταξύ κινδύνου και απόδοσης και εισήγαγε την κανονική απόκλιση σαν «μέτρο» κινδύνου. Όμως, η κανονική απόκλιση δεν μπορεί ουσιαστικά να μετρήσει τον κίνδυνο αφού είναι μέτρο αβεβαιότητας. Η κανονική απόκλιση, όπως θα δούμε, είναι ένα μέτρο που υπολογίζει συμμετρικά τον κίνδυνο, όμως τα μέτρα αβεβαιότητας δεν μπορούν να αντιμετωπίσουν την ασύμμετρη φύση του κινδύνου. Αυτό ώθησε τους ερευνητές να ορίσουν κάποιες άλλες κλάσεις μέτρων με πιο επιθυμητές ιδιότητες.

Στις επόμενες ενότητες θα δούμε αναλυτικά τα κλασικά μέτρα κινδύνου καθώς και τα σύγχρονα μέτρα κινδύνου.

4.1. Μέτρα Αβεβαιότητας

Τα μέτρα αβεβαιότητας μπορούν να κατασκευαστούν μέσω της περιγραφικής στατιστικής. Υπολογίζουν ότι οι παρατηρήσεις σε ένα δείγμα κατανέμονται όταν υπάρχει υψηλή ή χαμηλή μεταβλητότητα στην μέση τιμή της κατανομής.

Ένα μέτρο αβεβαιότητας θα πρέπει να υπολογίζει και τις θετικές και τις αρνητικές αποκλίσεις. Τα μέτρα αυτά, όπως θα δούμε, διακρίνονται σε Μέτρα Διασποράς (Dispersion Measures) καθώς και στα Μέτρα Απόκλισης (Deviation Measures)[173].

Ο Rachev, το 2007, όρισε τα dispersion measures (μέτρα διασποράς), αξιωματικά ως εξής:

Θεωρούμε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \Im, P)$, όπου τα στοιχεία του Ω αναπαριστούν μελλοντικές καταστάσεις ή σενάρια. Το μέτρο πιθανότητας P είναι η «πραγματική» κατανομή των μελλοντικών καταστάσεων και θα μπορούσε επίσης να είναι ένα μέτρο τιμολόγησης που προέρχεται από τις υποθέσεις της αγοράς. Θεωρούμε επίσης τις τυχαίες μεταβλητές $X:\Omega \to \mathbb{R}$ που βρίσκονται στον γραμμικό χώρο $L^2(\Omega, \Im, P)$.

[172] "Advanced Stochastic Models, Risk Assessment, and Portfolio Optimization", The Frank Fabozzi Series, Rachev S., Stoyanov S., Fabozzi F., Εκδόσεις John Wiley & Sons, 2008, σελ. 171.

[173] "Advanced Stochastic Models, Risk Assessment, and Portfolio Optimization", The Frank Fabozzi Series, Rachev S., Stoyanov S., Fabozzi F., Εκδόσεις John Wiley & Sons, 2008, σελ. 174.

Ορισμός

Ένα μέτρο διασποράς είναι ένα συναρτησιακό $D: L^2 \to \mathbb{R}$, όπου που ικανοποιεί τα παρακάτω αξιώματα:

(1) $D(X+c) \leq D(X), \ \forall X \in L^2, \ c \geq 0, \ c \in \mathbb{R}$

(2) $D(0)=0$ και $D(\lambda X)=\lambda D(X), \ \forall X \in L^2, \lambda > 0$

(3) $D(X) \geq 0, \ \forall X \in L^2$ με $D(X) > 0, \ \forall X \neq c, \ c \in \mathbb{R}$

Τα deviation measures (μέτρα απόκλισης). αξιωματικά[174], με τις ίδιες υποθέσεις ορίζονται ως εξής:

Ορισμός

Ένα συναρτησιακό $D: L^2 \to [0, +\infty]$ καλείται μέτρο απόκλισης αν ικανοποιεί τα παρακάτω αξιώματα:

(1) $D(X+c)=D(X), \ \forall X \in L^2, c \in \mathbb{R}$

(2) $D(0)=0$ και $D(\lambda X)=\lambda D(X), \ \forall X \in L^2, \lambda > 0$

(3) $D(X+X') \leq D(X)+D(X'), \ \forall X, X' \in L^2$

(4) $D(X) > 0, \ \forall X \neq c, X \in L^2$ και $D(X)=0, \ \forall X=c, X \in L^2$

Παραδείγματα[175]

1. Κανονική Απόκλιση (standard deviation)

Η κανονική απόκλιση είναι το πιο σύνηθες μέτρο αβεβαιότητας.

- Αν η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X είναι συνεχής, η κανονική απόκλιση ορίζεται ως:

$$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{E}\left[X - \mathrm{E}[X]\right]^2}$$

- Αν η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής είναι διακριτή:

$$\sigma_X = \left(\sum_{k=1}^{n} \left(x_k - \mathrm{E}[X]\right)^2 p_k \right)^{1/2}$$

Όπου x_k, k=1,...,n είναι τα αποτελέσματα, p_k, k=1,...,n είναι οι πιθανότητες των αποτελεσμάτων και $\mathrm{E}[X] = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k$ η μέση τιμή της κατανομής.

Ισχύει ότι $\sigma_X > 0$ ενώ αν $\sigma_X = 0$ αυτό σημαίνει ότι $X = \mathrm{E}[X]$, άρα η κατανομή είναι μη τυχαία.

Οι πιθανές τιμές της τυχαίας μεταβλητής βρίσκονται μέσα στο διάστημα:

[174] "Deviation Measures in Risk Analysis and optimization", Research paper, Rockafellar R., Uryasev S. University of Florida, 2002

$$\left(E[X]-\sigma_X, E[X]+\sigma_X\right)$$

Άρα, βλέπουμε ότι το μέτρο αυτό λαμβάνει υπόψην και τις θετικές και τις αρνητικές αποκλίσεις.

2. Μέση Απόλυτη Απόκλιση (Mean Absolute Deviation)

Αν και η κανονική απόκλιση που είδαμε είναι το πιο διαδεδομένο μέτρο αβεβαιότητας, ωστόσο δεν είναι το μοναδικό. Στη πραγματικότητα, υπάρχουν πολλές περιπτώσεις στις οποίες είναι αδύνατο να εφαρμοστεί. Για παράδειγμα, υπάρχουν κατανομές για τις οποίες η κανονική απόκλιση είναι άπειρη.

Σε αυτή τη περίπτωση, ορίζουμε τη Μέση Απόλυτη Απόκλιση (MAD) ως εξής:

- Αν η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X, η οποία έχει πεπερασμένη μέση τιμή είναι συνεχής:

$$\text{MAD} = E\left[\left|X - E[X]\right|\right]$$

- Αν η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X είναι διακριτή, με πεπερασμένη μέση τιμή:

$$\text{MAD} = \sum_{k=1}^{n} \left|x_k - E[X]\right| p_k$$

όπου x_k, k=1,...,n είναι τα αποτελέσματα, p_k , k=1,...,n είναι οι πιθανότητες των αποτελεσμάτων και $E[X] = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k$ η μέση τιμή της κατανομής.

Είναι προφανές εξ' ορισμού της MAD ότι λαμβάνει υπόψην θετικές και αρνητικές αποκλίσεις.

Επίσης, ισχύει ότι $\text{MAD} > 0$ και $\text{MAD} = 0$ τότε $X = E[X]$, άρα η κατανομή θα είναι μη τυχαία.

3. Ημι-κανονική απόκλιση (Semistandard deviation)

Η ημι-κανονική απόκλιση είναι μέτρο αβεβαιότητας που διαφέρει και από τη κανονική αλλά και την MAD, αφού υπολογίζει μόνο τις θετικές ή μόνο τις αρνητικές αποκλίσεις από τη μέση τιμή της κατανομής. Αρά, με αυτή την έννοια δεν είναι συμμετρικό μέτρο.

Η ημι-κανονική απόκλιση ορίζεται ως εξής:

$$\sigma_X^+ = \left(E\left[X - E[X]\right]_+^2\right)^{1/2}$$

$$\sigma_X^- = \left(E\left[X - E[X]\right]_-^2\right)^{1/2}$$

Όπου, $E\left[X - E[X]\right]_+^2 = \max\left(X - E[X], 0\right)^2$ και $E\left[X - E[X]\right]_-^2 = \min\left(X - E[X], 0\right)^2$.

[175] "Advanced Stochastic Models, Risk Assessment, and Portfolio Optimization", The Frank Fabozzi

Η σ_X^+ λαμβάνει υπόψη τις θετικές αποκλίσεις της μέσης τιμής και καλείται upside dispersion measure, ενώ η σ_X^- λαμβάνει υπόψην τις αρνητικές αποκλίσεις της μέσης τιμής και καλείται downside dispersion measure.
Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις οι σ_X^+, σ_X^- είναι θετικοί αριθμοί.

4.2. Μέτρα Κινδύνου

Η μέτρηση του επενδυτικού κινδύνου έχει πολλές μορφές, ανάλογα με το περιεχόμενο και το σκοπό. Είναι ένα κρίσιμο βήμα της διαχείρισης του κινδύνου που επηρεάζει αρκετά θέματα όπως είναι η τιμολόγηση, η αντιστάθμιση, η βελτιστοποίηση του χαρτοφυλακίου κ.λπ. Ωστόσο, δεν υπάρχει γενική μέθοδος να μετρήσουμε το επίπεδο του κινδύνου σε κάθε οικονομική στρατηγική. Αντίθετα, υπάρχουν εναλλακτικές προσεγγίσεις και η χρήση ενός συγκεκριμένου μέτρου βασίζεται καθαρά στο συγκεκριμένο πρόβλημα που έχουμε να αντιμετωπίσουμε.

Σκοπός της ενότητας αυτής είναι να δούμε αναλυτικά τα σύγχρονα μέτρα κινδύνου, τα οποία είναι πολύ σημαντικά για αρκετούς λόγους. Πρώτον, τα μέτρα αυτά σχετίζονται στην πρόσφατο νομικό πλαίσιο, στο οποίο υπακούν τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα. Δεύτερον, είναι λιγότερο γνωστά από τα κλασσικά μέτρα κινδύνου, δηλαδή τα μέτρα αβεβαιότητας που είδαμε. Τρίτον, παρ' όλο που η μελέτη τους είναι ακόμα σε εξέλιξη έχουν αρκετό ενδιαφέρον για τους επενδυτές. Τέταρτον, μπορούν να εφαρμοστούν σε κάθε τύπο κινδύνου, για παράδειγμα για τον κίνδυνο αγοράς, για τον πιστωτικό κίνδυνο ή και για τον λειτουργικό κίνδυνο[176].

Κύριο σκοπός της εργασίας είναι να μελετήσουμε την μέτρηση του επενδυτικού κινδύνου μέσω των νομισματικών μέτρων κινδύνου (monetary risk measures). Τα μέτρα αυτά εκφράζονται ως ***κεφαλαιακή απαίτηση***, δηλαδή, το ρίσκο μιας οικονομικής κατάστασης αντιμετωπίζεται σαν το ελάχιστο ποσό που πρέπει να προστεθεί στη κατάσταση ώστε να γίνει αποδεκτή. Μια οικονομική κατάσταση περιγράφεται από τα νομισματικά της αποτελέσματα και είναι τυπικά αβέβαιη.

Έστω $(\Omega, \Im)$ ένας μετρήσιμος χώρος πιθανών γεγονότων και έστω X μια κλάση οικονομικών καταστάσεων. Ορίζουμε μια οικονομική κατάσταση να είναι μια μετρήσιμη συνάρτηση $X : \Omega \to \mathbb{R}$, όπου $X(\omega)$ είναι η προεξοφλημένη αξία της κατάστασης στο τέλος της περιόδου αν το γεγονός $\omega \in \Omega$ πραγματοποιείται.

Θα ορίσουμε τα νομισματικά μέτρα κινδύνου, αξιωματικά, σαν συναρτησιακά που ικανοποιούν κάποιες συγκεκριμένες ιδιότητες[177].

Series, Rachev S., Stoyanov S., Fabozzi F., Εκδόσεις John Wiley & Sons, 2008, σελ. 179.
[176] "Measures of risk", Szego G. Journal of Banking and Finance 26, 2002.
[177] "Convex Risk Measures: Basic Facts, Law-invariance and beyond, Asymptotics for Large Portfolios", Follmer H., Knispel T., 2010.

Ορισμός 3
Ένα νομισματικό μέτρο κινδύνου είναι μια συνάρτηση $\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ αν ικανοποιεί τα παρακάτω αξιώματα:

(1) αν $X \geq Y$ τότε $\rho(X) \leq \rho(Y)$, $\forall X, Y \in \mathcal{X}$ (μονοτονία)

(2) $\rho(X+m) = \rho(X) - m$, $\forall X \in \mathcal{X}, m \in \mathbb{R}$ (translation invariance)

Παρατήρηση:

1. Η ιδιότητα της μονοτονίας είναι φυσικό επακόλουθο της ερμηνείας των μέτρων κινδύνου, ενώ η ιδιότητα translation invariance (μεταφραστικά αναλλοίωτη) είναι αυτή που μας εξασφαλίζει ότι το $\rho(X)$ είναι πράγματι το ελάχιστο ποσό που αν προστεθεί στη κατάσταση θα την κάνει αποδεκτή. Αντίστοιχα, η ποσότητα -$\rho(X)$ είναι το μεγαλύτερο ποσό που μπορούμε να πάρουμε από τη κατάσταση X.
2. Γενικά, σε όλες τις περιγραφές των μέτρων που θα δούμε στη συνέχεια, κάνουμε τη παραδοχή ότι το επιτόκιο είναι 1, διαφορετικά τα μέτρα αυτά δεν θα είναι νομισματικά.

Σε κάθε νομισματικό μέτρο κινδύνου αντιστοιχεί σε ένα σύνολο αποδεκτών καταστάσεων, το οποίο ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 4
Αν ρ είναι ένα νομισματικό μέτρο κινδύνου, τότε το σύνολο:

$$\mathcal{A}_\rho = \{X \in \mathcal{X} : \rho(X) \leq 0\}$$

είναι το σύνολο αποδεκτών καταστάσεων του ρ και το μέτρο μπορεί να προκύψει από το σύνολο αποδεκτών καταστάσεων ως εξής:

$$\rho(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} : X + m \in \mathcal{A}_\rho\} \text{ (1).}$$

Παρατήρηση:
Για το σύνολο αποδεκτών καταστάσεων ισχύουν τα επόμενα:

(1) Το σύνολο $\mathcal{A}_\rho$ είναι μη κενό.

(2) $\inf\{m \in \mathbb{R} : m \in \mathcal{A}_\rho\} > -\infty$

(3) Αν $X \in \mathcal{A}_\rho$, $Y \in \mathcal{X}$ με $Y \geq X$ τότε $Y \in \mathcal{A}_\rho$

Αντίστροφα, ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathcal{X}$, $\mathcal{A}$ που ικανοποιεί τις ιδιότητες (1) και (2) ορίζει μέσω της σχέσης (1) ένα νομισματικό μέτρο κινδύνου με σύνολο αποδεκτών καταστάσεων $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\rho$.

Δηλώνουμε με L^+ τα μη αρνητικά στοιχεία του συνόλου $\mathcal{X}$, ενώ με L^- τα αρνητικά στοιχεία του $\mathcal{X}$. Ένα σύνολο αποδεκτών καταστάσεων $\mathcal{A}$ (acceptance set) ικανοποιεί τα παρακάτω αξιώματα:

Αξίωμα 1. Το σύνολο αποδεκτών καταστάσεων $\mathcal{A}$ περιέχει το L^+.

Αξίωμα 2. Το σύνολο αποδεκτών καταστάσεων A δεν έχει σημεία τομής με το σύνολο $L^{--} = \{X: \ \forall\omega \in \Omega, \ X(\omega) < 0\}$

Ή διαφορετικά: $A \cap L^{-} = \{0\}$

Αξίωμα 3. Το σύνολο αποδεκτών καταστάσεων A είναι κυρτό.

Αξίωμα 4. Το σύνολο αποδεκτών καταστάσεων A είναι ένας θετικά ομοιογενής κώνος.

Τα βασικά είδη μέτρων κινδύνου που θα αναλύσουμε παρακάτω είναι τα συνεκτικά ή συνεπή (coherent) και τα κυρτά (convex) μέτρα. Άλλες κλάσεις μέτρων που θα δούμε είναι τα law-invariant μέτρα, τα μέτρα που ορίζονται σε χώρους Orlicz Hearts, τα εντροπικά, τα δυναμικά και τέλος τα υπό συνθήκη μέτρα κινδύνου.

Σε αυτό το σημείο, είναι σκόπιμο να δούμε μια ιστορική αναδρομή των παραπάνω μέτρων.

Το 1997, οι Artzner, Delbaen, Eber και Heath έκαναν την αρχή, δημοσιεύοντας μια εργασία στην οποία όρισαν τα συνεκτικά μέτρα κινδύνου σε πεπερασμένους χώρους πιθανότητας[178]. O Delbaen το 2000 επέκτεινε τα αποτελέσματα του Artzner σε γενικούς χώρους πιθανότητας[179]. Αργότερα, ο Jouini (2002)[180] όρισε τα διανυσματικά συνεκτικά μέτρα.

Το 2000, ο Heath [181] πρότεινε τα κυρτά μέτρα κινδύνου αποδυναμώνοντας τα αξιώματα της συνεκτικότητας με αυτά της κυρτότητας. Αργότερα, οι Follmer και Schied[182] επέκτειναν τα κυρτά μέτρα σε γενικούς χώρους πιθανότητας. Τέλος, οι Burgert, Ruchendorf[183] όρισαν τα διανυσματικά μέτρα για χαρτοφυλάκια με περισσότερα από ένα χρεόγραφα.

Παράλληλα, δημιουργήθηκαν και άλλες κλάσεις συνεκτικών και κυρτών μέτρων που εξυπηρετούν διάφορες ιδιότητες της αγοράς. Το 2001 ο Kusuoko[184] ήταν αυτός που όρισε τα law-invariant συνεκτικά μέτρα ενώ το 2005 οι Frittelli και Gianin[185] όρισαν τα law-invariant κυρτά μέτρα κινδύνου. Ο Cheridito (2007) [186] πρότεινε τα μέτρα κινδύνου που είναι ορισμένα σε χώρους Orlicz Heart, τα οποία βοήθησαν στον ορισμό του μέτρου Haezendonck. Οι Cvitanic και Karatzas[187] το 1998 εισήγαγαν τα δυναμικά μέτρα, σε πλήρεις αγορές. Το 2004, ο Riedel[188] όρισε τα δυναμικά συνεκτικά μέτρα (dynamic coherent measures) σε μη πλήρεις αγορές

[178] “Coherent Measures of risk”, Artzner P., Delbaen F. Eber J., Heath D., Math. Finance 1999

[179] “Coherent risk measures on general probability spaces”, Delbaen F. In Advances in Finance and Stochastics, Springer, Berlin, 2002

[180] “Vector-valued coherent risk measures”, Jouini E., Metteb M., Touzi N., 2002

[181] Back to the Future. Plenary Lecture at the first World Congress of the Bachelier Society, Heath D., Paris, 2000

[182] “Convex measures of risk and trading constrains”. Follmer H., Schied A., Finance Stoch, 2002

[183] “Consistent risk measures for portfolio vectors”. Burgert C., Ruchendorf L.,

[184] “On Law invariant coherent risk measures”, Kusuoko S., 2001

[185] “Law invariant convex risk measures”, Frittelli M., Gianin E., Advances in mathematical Economics, 2005.

[186] “Risk Measures on Orlicz hearts”, Cheridito P., Li T., Math. Finance, 2009

[187] “On dynamic measures of risk”, Cvitanic J., Karatzas I., 1998

[188] “Dynamic coherent risk measures”, Riedel F., Stochastic Processes and their applications.p.185-200 2004

και παράλληλα οι Frittelli και Gianin[189], πρότειναν τα δυναμικά κυρτά μέτρα (dynamic convex risk measures).

Τέλος, οι Detlefsen και Scandolo[190] όρισαν τα υπό συνθήκη μέτρα κινδύνου (conditional risk measures), τα οποία εφαρμόζονται σε περιπτώσεις όπου είναι διαθέσιμες επιπλέον πληροφορίες στην αγορά.

4.3. *Συνεκτικά και κυρτά μέτρα κινδύνου*

4.3.1. Συνεκτικά Μέτρα Κινδύνου (Coherent Risk Measures)

4.3.1.1. Συνεκτικά μέτρα κινδύνου σε πεπερασμένους χώρους πιθανότητας[191]

Έστω $(\Omega, \Im, \mathrm{P})$ ένας χώρος πιθανότητας όπου το Ω, το σύνολο των γεγονότων είναι πεπερασμένο και G είναι ένας χώρος τυχαίων μεταβλητών. Ουσιαστικά, για κάθε στοιχείο του Ω υπολογίζουμε την τελική καθαρή αξία μιας οικονομικής κατάστασης X, όπου X είναι μια τυχαία μεταβλητή.

Ορισμός 1.1

Μια απεικόνιση $\rho : \mathrm{G} \to \mathbb{R}$ καλείται συνεκτικό μέτρο κινδύνου (coherent risk measure) αν ικανοποιεί τα παρακάτω αξιώματα:

1. Αν $\mathrm{X} \geq 0$ τότε $\rho(\mathrm{X}) \leq 0, \ \forall \mathrm{X} \in \mathrm{G}$. (Μονοτονία)
2. $\rho(\mathrm{X}+\mathrm{Y}) \leq \rho(\mathrm{X}) + \rho(\mathrm{Y}), \ \forall \mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathrm{G}$ (subadditivity)
3. $\rho(\lambda \mathrm{X}) = \lambda \rho(\mathrm{X}), \ \forall \mathrm{X} \in \mathrm{G}, \ \lambda > 0$, (θετική ομοιογένεια)
4. $\rho(\mathrm{X}+\mathrm{m}) = \rho(\mathrm{X}) - \mathrm{m}, \ \forall \mathrm{X} \in \mathrm{G}, \ \mathrm{m} \in \mathbb{R}$ (translation invariance)

<u>*Οικονομική Ερμηνεία του συνεκτικού μέτρου:*</u>

Ουσιαστικά, ένα μέτρο κινδύνου καλείται συνεκτικό αν ικανοποιεί τα αξιώματα ενός μέτρου κινδύνου (ορισμός 3) και επιπλέον ικανοποιεί τα αξιώματα (2),(3) του ορισμού 5.

- Η ιδιότητα της μονοτονίας μας λέει ότι αν η απόδοση μιας κατάστασης Y είναι μεγαλύτερη μιας άλλης κατάστασης της κατάστασης X, τότε ο κίνδυνος που ενέχει η Y θα πρέπει να είναι μικρότερος του κινδύνου της κατάστασης X.

[189] "Dynamic convex risk measures", Fritelli M., Gianin E.., New risk measures for the 21th century, 2004, G Szego ed. John Wiley & Sons p. 227-248.

[190] "Conditional and dynamic convex risk measures", Detlefsen K., Scandolo G.

[191] "Coherent Measures of risk", Artzner P., Delbaen F. Eber J., Heath D., Math. Finance 1999

- Η ιδιότητα της translation invariance είναι αυτή που μας εξασφαλίζει ότι πράγματι, θα είναι η μικρότερη ποσότητα που αν προστεθεί στη κατάσταση Χ, αυτή θα ανήκει στο σύνολο αποδεκτών καταστάσεων.

- Το αξίωμα της subaddivity είναι φυσική απαίτηση γιατί για παράδειγμα:
  * Αν ένα μέτρο κινδύνου συναλλάγματος δεν ικανοποιεί αυτήν την ιδιότητα, τότε για παράδειγμα αν κάποιος επιθυμεί να πάρει το ρίσκο $X+Y$ ίσως ανοίξει δύο λογαριασμούς, ένα για τον κίνδυνο Χ και έναν για το Υ, οπότε η απαίτηση του μικρότερου ποσού $\rho(X)+\rho(Y)$ είναι πολύ σημαντική στην συναλλαγή.
  * Αν μια εταιρεία αναγκάζεται να απαιτήσει επιπλέον κεφάλαιο που δεν ικανοποιεί αυτή την ιδιότητα, τότε υπάρχει πιθανότητα η εταιρεία να χωριστεί σε δύο ξεχωριστές θυγατρικές εταιρείες.
  * Ο κίνδυνος χρεωκοπίας οδηγεί την κοινωνία να απαιτεί λιγότερο κεφάλαιο από ένα σύνολο χωρίς «τείχος προστασίας» μεταξύ διάφορων επιχειρησιακών μονάδων από το να απαιτήσει από μία αξιόπιστη επιχείρηση, η οποία σχετίζεται με την αποτυχία μιας άλλης επιχείρησης.
  * Υποθέτουμε ότι δύο υπάλληλοι σε μία εταιρεία υπολογίζουν με αποκεντρωτικό τρόπο, τα μέτρα $\rho(X),\rho(Y)$ των κινδύνων που έχουν λάβει. Αν η συνάρτηση ρ έχει αυτή την ιδιότητα, ο υπεύθυνος των δύο υπαλλήλων μπορεί να βασιστεί στο ότι η ποσότητα $\rho(X)+\rho(Y)$ είναι μια εφικτή εγγύηση που σχετίζεται στο παγκόσμιο κίνδυνο $X+Y$.

- Το αξίωμα την θετικής ομοιογένειας μας διασφαλίζει ότι ο κίνδυνος του χαρτοφυλακίου θα είναι ανάλογος με το μέγεθός του και σχετίζεται με τον κίνδυνο ρευστότητας ως εξής:
  * Αν το μέγεθος μιας κατάστασης επηρεάζει άμεσα τον κίνδυνο, για παράδειγμα, αν οι καταστάσεις είναι αρκετά μεγάλες έτσι ώστε ο χρόνος πρέπει να τις ρευστοποιήσει βασιζόμενος στα μεγέθη τους, τότε θα πρέπει να αναλογιστούμε τις συνέπειες της έλλειψης της ρευστότητας όταν υπολογίζουμε τη καθαρή μελλοντική αξίας μιας κατάστασης.
  * Η ισότητα σε αυτή την ιδιότητα χρειάζεται για να μοντελοποιήσουμε τι χρειάζεται για μια κυβέρνηση ή μια συναλλαγή να επιβάλλει σε μία κατάσταση που δεν μπορεί να διαφοροποιηθεί. Αυτό συμβαίνει γιατί η κυβέρνηση δεν αποτρέπει πολλές εταιρείες να πάρουν την ίδια κατάσταση.

Ορισμός 1.2

Έστω $\rho: G \to \mathbb{R}$ ένα συνεκτικό μέτρο κινδύνου. Ορίζουμε με A το σύνολο αποδεκτών καταστάσεων ως εξής:

$$A_\rho = \{X \in G : \rho(X) \le 0\}.$$

Οι επόμενες προτάσεις μας δείχνουν τη σχέση μεταξύ των coherent μέτρων κινδύνου και των συνόλων αποδεκτών καταστάσεων που τους αντιστοιχούν.

Πρόταση 1.1
Αν ένα σύνολο B ικανοποιεί τα αξιώματα ενός συνόλου αποδεκτών καταστάσεων, τότε το μέτρο κινδύνου ρ_{B} είναι συνεκτικό.
Επιπλέον, $\mathrm{A}_{\rho_{\mathrm{B}}} = \overline{\mathrm{B}}$ όπου $\overline{\mathrm{B}}$ είναι η κλειστότητα του συνόλου B.

Η επόμενη πρόταση θα μας εξασφαλίσει ότι το σύνολο $\mathrm{A}_{\rho_{\mathrm{B}}}$ είναι κλειστό και θα ισχύει ότι $\mathrm{A}_{\rho_{\mathrm{B}}} = \overline{\mathrm{B}}$.

Πρόταση 1.2
Αν ένα μέτρο κινδύνου ρ είναι συνεκτικό, τότε το σύνολο αποδεκτών καταστάσεων A_{ρ} είναι κλειστό και ικανοποιεί τα αξιώματα των συνόλων αποδεκτών καταστάσεων.
Επιπλέον, ισχύει ότι: $\rho = \rho_{\mathrm{A}_{\rho}}$.

Η αναπαράσταση των συνεκτικών μέτρων σε πεπερασμένους χώρους δίνεται στο παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 1.1
Ένα μέτρο $\rho : \mathrm{G} \to \mathbb{R}$ είναι συνεκτικό αν και μόνον αν υπάρχει μια οικογένεια P μέτρων πιθανότητας τέτοια ώστε:

$$\rho(\mathrm{X}) = \sup\left\{\mathrm{E}_{\mathrm{P}}\left[-\mathrm{X}\right] : \mathrm{P} \in P\right\}$$

4.3.1.2. Συνεκτικά μέτρα κινδύνου σε γενικούς χώρους πιθανότητας[192]

Έστω ένας χώρος πιθανότητας $(\Omega, \Im, \mathrm{P})$, όπου το Ω δεν είναι απαραίτητα πεπερασμένο. Θεωρούμε τον χώρο $\mathrm{L}^{\infty}(\Omega, \Im, \mathrm{P}) = \mathrm{L}^{\infty}(\mathrm{P}) = \mathrm{L}^{\infty}$, δηλαδή τον χώρο όλων των κλάσεων ισοδυναμίας των φραγμένων τυχαίων μεταβλητών και τον χώρο $\mathrm{L}^{0}(\Omega, \Im, \mathrm{P}) = \mathrm{L}^{0}(\mathrm{P}) = \mathrm{L}^{0}$ να είναι ο χώρος όλων των κλάσεων ισοδυναμίας των τυχαίων μεταβλητών.

Σε αυτό το σημείο, είναι σκόπιμο να αναφέρουμε την οικονομική ερμηνεία του γενικού χώρου πιθανότητας και γιατί είναι σημαντικό να ορίσουμε τα μέτρα κινδύνου στους χώρους $\mathrm{L}^{\infty}, \mathrm{L}^{0}$.

Όπως ήδη γνωρίζουμε, η σ-άλγεβρα $\Im$ περιγράφει όλα τα ενδεχόμενα που είναι γνωστά μέχρι το τέλος της χρονικής περιόδου. Το μέτρο P μας λέει με ποια πιθανότητα τα ενδεχόμενα αυτά θα πραγματοποιηθούν. Όμως στα χρηματοοικονομικά, οι πιθανότητες αυτές είναι υποκειμενικές. Οι διαχειριστές των επενδύσεων ίσως έχουν διαφορετική άποψη για τις πιθανότητες αυτές, σε σχέση με τους οικονομικούς οργανισμούς που ελέγχουν. Μας ενδιαφέρει να μάθουμε

[192] "Coherent risk measures on general probability spaces", Delbaen F. In Advances in Finance and Stochastics, Springer, Berlin, 2002

μόνο αν υπάρχει πιθανότητα να συμβεί κάτι, και όχι η τιμή της. Ο λόγος που εξετάζουμε τους χώρους L^{∞}, L^{0} είναι ότι σε αυτούς τους χώρους, ο χώρος πιθανότητας παραμένει αναλλοίωτος αν αλλάξουμε τα μέτρα πιθανότητας σε κάποια ισοδύναμα.

Ορισμός 2.1

Μια απεικόνιση $\rho : L^{\infty}(\Omega, F, p) \to \mathbb{R}$ ονομάζεται συνεκτικό μέτρο κινδύνου στον χώρο $L^{\infty}(\Omega, \Im, P) = L^{\infty}(P) = L^{\infty}$ αν ισχύουν τα εξής:

1. Αν $X \geq 0$ τότε $\rho(X) \leq 0,\ \forall X \in L^{\infty}$. (Μονοτονία)
2. $\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y),\ \forall X, Y \in L^{\infty}$ (subaddivity)
3. $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X),\ \forall X \in L^{\infty},\ \lambda > 0$, (θετική ομοιογένεια)
4. $\rho(X+m) = \rho(X) - m,\ \forall X \in L^{\infty},\ m \in \mathbb{R}$ (translation invariance)

Για τα περεταίρω αποτελέσματα αυτής της κλάσης μέτρων είναι απαραίτητο να εισάγουμε τις επόμενες έννοιες.

Ορισμός 2.2

1. Μία απεικόνιση $\psi : L^{\infty} \to \mathbb{R}$ καλείται submodular[193] αν:
   1. Αν $X \leq 0$ τότε $\psi(X) \leq 0,\ \forall X \in L^{\infty}$.
   2. $\psi(X+Y) \leq \psi(X) + \psi(Y),\ \forall X, Y \in L^{\infty}$.
   3. $\psi(\lambda X) = \psi \rho(X),\ \forall X \in L^{\infty},\ \lambda > 0$
   4. $\psi(X+m) = \psi(X) + m,\ \forall X \in L^{\infty}$ και $m \in \mathbb{R}$.

2. Μία απεικόνιση $\varphi : L^{\infty} \to \mathbb{R}$ καλείται supermodular αν:
   1. Αν $X \leq 0$ τότε $\varphi(X) \geq 0,\ \forall X \in L^{\infty}$.
   2. $\varphi(X+Y) \leq \varphi(X) + \varphi(Y),\ \forall X, Y \in L^{\infty}$.
   3. $\varphi(\lambda X) = \varphi(X),\ \forall X \in L^{\infty},\ \lambda > 0$.
   4. $\varphi(X+m) = \varphi(X) + m,\ \forall X \in L^{\infty}$ και $m \in \mathbb{R}$.

Παρατήρηση:

Αν ρ είναι ένα συνεκτικό μέτρο κινδύνου και θέσουμε $\psi(X) = \rho(-X)$ παίρνουμε ένα submodular συναρτησιακό το οποίο είναι translation invariant, ενώ αν θέσουμε $\varphi(X) = -\rho(X)$, παίρνουμε ένα supermodular συναρτησιακό.

Ιδιότητες των translation invariant supermodular απεικονίσεων φ:

1. $\varphi(0) = 0$

Αφού $\varphi(0) = \varphi(2 \cdot 0) = 2\varphi(0)$ (από την θετική ομοιογένεια)

[193] Ο Choquet το 1953 ασχολήθηκε με τις submodular απεικονίσεις:
“Theory of capacities”, Ann. Lust, Fourier 5, 131-295

2. Αν $X \leq 0$ τότε $\varphi(X) \leq 0, \quad \forall X \in L^{\infty}$.

Πράγματι: $\varphi(X+(-X)) \geq \varphi(X)+\varphi(-X)$ και αν $X \leq 0$ τότε $\varphi(X) \leq -\varphi(-X) \leq 0$

3. Αν $X \leq Y$ τότε $\varphi(X) \leq \varphi(Y), \quad \forall X, Y \in L^{\infty}$

Πράγματι: $\varphi(Y) \geq \varphi X + \varphi(Y-X) \geq \varphi(X)$

4. $\varphi(\alpha)=\alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

5. Αν $\alpha \leq X \leq \beta$ τότε $\alpha \leq \varphi(X) \leq \beta, \quad \forall X \in L^{\infty}$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

6. Η φ είναι κυρτή, συνεχής ως προς τη νόρμα, Lipschitz συνεχής συνάρτηση στον L^{∞}, δηλαδή $|\varphi(X-Y)| \leq \|X-Y\|_{\infty}, \quad \forall X, Y \in L^{\infty}$.

7. $\varphi(X-\varphi(X))=0, \quad \forall X \in L^{\infty}$

Θεώρημα 2.1

Έστω ότι $\rho: L^{\infty}(\Omega, \mathfrak{I}, P) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ένα συνεκτικό μέτρο κινδύνου με μία σχετική sub(super)modular συνάρτηση ψ (φ). Τότε υπάρχει ένα κυρτό $\sigma(ba(P), L^{\infty}(P))$-κλειστό σύνολο P_{ba} από πεπερασμένες αθροίσιμες πιθανότητες, τέτοιες ώστε:

$$\psi(X)=\sup_{\mu \in P_{ba}} E_{\mu}[X]$$

$$\varphi(X)=\inf_{\mu \in P_{ba}} E_{\mu}[X]$$

Παραπάνω είδαμε ένα χαρακτηρισμό των translation invariant submodular συναρτησιακών (ή ισοδύναμα των συνεκτικών μέτρων κινδύνου) με τους όρους των πεπερασμένων αθροίσιμων πιθανοτήτων.

Θα χαρακτηρίσουμε τα συναρτησιακά αυτά στη περίπτωση που είναι σ-αθροίσιμα. Γι' αυτό απαιτούνται επιπλέον υποθέσεις.

Ορισμός 2.3

Η translation invariant supermodular απεικόνιση $\varphi: L^{\infty} \rightarrow \mathbb{R}$ λέμε ότι ικανοποιεί την ιδιότητα Fatou αν:

$$\varphi(X) \geq \limsup \varphi(X_n)$$

για κάθε ακολουθία $(X_n)_{n \geq 1}$ συναρτήσεων, ομοιόμορφα φραγμένων από το 1 και $X_n \xrightarrow[P]{} X, \ X \in L^{\infty}$.

<u>Παρατήρηση</u>

Ισοδύναμα, θα μπορούσαμε να πούμε ότι το συνεκτικό μέτρο κινδύνου ρ με τη σχετική supermodular συνάρτηση φ ικανοποιεί την ιδιότητα Fatou αν:

$$\rho(X) \leq \liminf \rho(X_n)$$

Θεώρημα 2.2

Για μία translation invariant supermodular απεικόνιση $\varphi : L^{\infty} \to \mathbb{R}$ οι επόμενες ιδιότητες είναι ισοδύναμες:

(1) Υπάρχει ένα $L^1(P)$-κλειστό, κυρτό σύνολο μέτρων πιθανότητας P_{σ}, όπου όλα είναι απολύτως συνεχή σύμφωνα με το μέτρο P και για $X \in L^{\infty}$ έχουμε:
$$\varphi(X) = \inf_{Q \in P_{\sigma}} E_Q[X].$$

(2) Ο κυρτός κώνος $C = \{X : \varphi(X) \geq 0\}$ είναι ασθενώς*, δηλαδή $\sigma(L^{\infty}(P), L^1(P))$-κλειστό.

(3) Η φ ικανοποιεί την ιδιότητα Fatou.

(4) Αν $(X_n)_n$ είναι μια ομοιόμορφα φραγμένη ακολουθία που αν $X_n \to X \;\Rightarrow\; \varphi(X_n) \to \varphi(X)$.

Συνέπεια:

Από παραπάνω έχουμε ότι το σύνολο P_{σ} είναι $\sigma(L^{\infty}(P), L^{\infty}(P))$ - πυκνό στο P_{ba}.

Τα επόμενα αποτελέσματα μας δείχνουν γιατί ένα συνεκτικό μέτρο αναπαρίσταται ως το supremum των αναμενόμενων τιμών, σύμφωνα με τα ισοδύναμα μέτρα πιθανότητας.

Ορισμός 2.4

Το συνεκτικό μέτρο κινδύνου ρ καλείται σχετικό αν για κάθε σύνολο $A \in \mathfrak{I}$ με $P(A) > 0$ έχουμε ότι:
$$\rho(-1_A) > 0.$$

Χρησιμοποιώντας τις σχετικές submodular συναρτήσεις έχουμε ότι $\psi(1_A) > 0$ και για τις supermodular $\varphi(-1_A) < 0$.

Θεώρημα 2.3

Για ένα συνεκτικό μέτρο κινδύνου ρ, που ικανοποιεί το λήμμα Fatou τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(1) Το μέτρο ρ είναι σχετικό.

(2) το σύνολο $P_{\sigma}^{e} = \{Q \in P_{\sigma} \setminus Q \sim P\}$ είναι μη κενό.

(3) Το σύνολο $P_{\sigma}^{e} = \{Q \in P_{\sigma} \setminus Q \sim P\}$ είναι $L^1 -$norm πυκνό στο P_{σ}.

(4) Υπάρχει ένα σύνολο $P' \subset P_{\sigma}$ από ισοδύναμα μέτρα πιθανότητας τέτοιο ώστε:
$$\psi(X) = \sup_{Q \in P'} E_Q[X] \text{ και } \varphi(X) = \inf_{Q \in P'} E_Q[X].$$

Το επόμενο θεώρημα χαρακτηρίζει ένα συνεκτικό μέτρο που ικανοποιεί μια ιδιότητα συνέχειας που είναι ισχυρότερη από την ιδιότητα Fatou.

Θεώρημα 2.4

Για μία translation invariant supermodular απεικόνιση $\varphi: L^\infty \to \mathbb{R}$ τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(1) Το σύνολο P_σ είναι ασθενώς συμπαγές στον L^1.

(2) Τα σύνολα P_{ba} και P_σ συμπίπτουν.

(3) Αν $(X_n)_{n\geq 1}$ είναι μια ακολουθία στον L^∞ ομοιόμορφα φραγμένη από το 1 και $X_n \xrightarrow[P]{} X$, τότε $\varphi(X_n) \to \varphi(X)$, $X \in L^\infty$.

(4) Αν $(A_n)_n$ είναι μια αύξουσα ακολουθία τέτοια ώστε $\bigcup_n A_n = \Omega$, τότε

$$\varphi(1_{A_n}) \to 1.$$

Το επόμενο θεώρημα χαρακτηρίζει αυτά τα συνεκτικά μέτρα που τείνουν στο 0 σαν φθίνουσες ακολουθίες συνόλων.

Θεώρημα 2.5

Για ένα συνεκτικό μέτρο κινδύνου ρ τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

1. Για κάθε φθίνουσα ακολουθία συνόλων $(A_n)_{n\geq 1}$ με κενό εσωτερικό, έχουμε ότι $\varphi(1_{A_n}) = -\rho(1_{A_n}) \to 0$
2. $\sup\{\|\mu_\alpha\| : \mu \in P_{ba}\} = 1$ (όπου $\mu = \mu_\alpha + \mu_\rho$ είναι η Yosida-Hewitt αποσύνθεση)
3. $d(P_{ba}, L^1) = \inf\{\|\mu - f\| : \mu \in P_{ba}, f \in L^1(P)\} = 0$

Θα μελετήσουμε το πρόβλημα της επέκτασης του πεδίου ορισμού των συνεκτικών μέτρων κινδύνου στο χώρο L^0, που είναι ο χώρος όλων των ισοδύναμων κλάσεων των μετρήσιμων συναρτήσεων. Θα επικεντρωθούμε σε αυτά τα μέτρα κινδύνου που δίνονται από ένα κυρτό σύνολο μέτρων πιθανότητας, απολύτως συνεχή σύμφωνα με το P.

Θεώρημα 2.6

Αν ο χώρος (Ω, F, P) είναι atomless[194], τότε δεν υπάρχει πραγματικό συνεκτικό μέτρο ρ στον L^0.

Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει απεικόνιση $\psi: L^0 \to \mathbb{R}$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Αν $X \geq 0$ τότε $\psi(X) \geq 0$, $\forall X \in L^0$.
2. $\psi(X+Y) \leq \psi(X) + \psi(Y)$, $\forall X, Y \in L^0$
3. Αν $\lambda \geq 0$ έχουμε $\psi(\lambda X) = \lambda \psi(X)$, $\forall X \in L^0$
4. Για κάθε σταθερή συνάρτηση α έχουμε ότι $\psi(\alpha + X) = \psi(X) + \alpha$, $\forall X \in L^0$

[194] Ένας χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathfrak{I}, P)$ καλείται atomless αν:

$$\forall A \in \mathfrak{I} \text{ με } P(A) > 0, \ \exists B \subset A \text{ τέτοιο ώστε } 0 < P(B) < P(A).$$

Ορισμός 2.5

Μια απεικόνιση $\rho : L^0 \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ καλείται συνεκτικό μέτρο κινδύνου στον χώρο L^0 αν:

1. Αν $X \geq 0$ τότε $\rho(X) \leq 0, \ \forall X \in L^0$.
2. $\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y), \ \forall X, Y \in L^0$.
3. Αν $\lambda > 0$ έχουμε $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X), \ \forall X \in L^0$.
4. Για κάθε σταθερή συνάρτηση α έχουμε ότι $\rho(\alpha + X) = \rho(X) - \alpha, \ \forall X \in L^0$.

<u>Παρατήρηση:</u>

Από τον ορισμό προκύπτει ότι τι μέτρο ρ δεν μπορεί να είναι ταυτοτικά $+\infty$.

Ορισμός 2.6

Για ένα δεδομένο κλειστό κυρτό σύνολο P_σ, μέτρων πιθανότητας, απολύτως συνεχή σύμφωνα με P,
ορίζουμε το σχετικό συναρτησιακό ρ ως εξής:

$$\rho(X) = \lim_{n \to +\infty} \left[\sup_{Q \in P_\sigma} E_Q \left[-(X \wedge n) \right] \right]$$

Χρειαζόμαστε, όμως, μια συνθήκη που μας εξασφαλίζει ότι $\rho(X) > -\infty$, την οποία μας τη δίνει το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 2.7

Οι ακόλουθες ιδιότητες είναι ισοδύναμες:

1. Για κάθε $X \in L^0$ έχουμε ότι:
$$\rho(X) > -\infty .$$
2. Για κάθε $f \in L^0_+$ έχουμε ότι:
$$\rho(f) = \lim_n \left[\sup_{Q \in P_\sigma} E_Q [f \wedge n] \right] < +\infty .$$
3. Υπάρχει $\gamma > 0$ τέτοιο ώστε κάθε A με $P[A] \leq \gamma$ έχουμε:
$$\inf_{Q \in P_\sigma} Q[A] = 0$$

Εφόσον ισχύουν οι παραπάνω ιδιότητες, ορίζεται ένα συνεκτικό μέτρο κινδύνου ρ στον L^0.

Πρόταση 2.1

Οι υποθέσεις του παραπάνω θεωρήματος ικανοποιούνται αν για κάθε μη αρνητική συνάρτηση $f \in L^0$, υπάρχει $Q \in P_\sigma$ τέτοια ώστε $E_Q[f] < \infty$.

Θεώρημα 2.8

Αν το P_σ είναι κλειστό ως προς τη νόρμα, κυρτό σύνολο μέτρων πιθανότητας, όπου όλα τα στοιχεία του είναι απολύτως συνεχή σύμφωνα με P, τότε οι ισοδύναμες ιδιότητες του παραπάνω θεωρήματος είναι επίσης ισοδύναμες με τις:

1. Για κάθε $f \in L^0_+$ υπάρχει $Q \in P_\sigma$ τέτοιο ώστε:
$$E_Q[f] < \infty .$$
2. Υπάρχει $\delta > 0$ τω για κάθε σύνολο A με $P[A] < \delta$ μπορούμε να βρούμε ένα στοιχείο $Q \in P_\sigma$ τέτοιο ώστε:
$$Q[A] = 0 .$$
3. Αν υπάρχει $\delta > 0$ και ένας αριθμός K τέτοιο ώστε για κάθε σύνολο A με $P[A] < \delta$, μπορούμε να βρούμε ένα στοιχείο $Q \in P_\sigma$ τέτοιο ώστε:
$$Q[A] = 0 \text{ και } \left\| \frac{dQ}{dP} \right\|_\infty \le K .$$

4.3.1.3. *Διανυσματικά Συνεκτικά Μέτρα Κινδύνου*[195]

Τα συνεκτικά μέτρα κινδύνου που περιγράψαμε μέχρι τώρα αφορούσαν μία κατάσταση σε κίνδυνο, δηλαδή το χαρτοφυλάκιο αποτελούνταν από ένα μόνο χρεόγραφο. Θεωρούμε τώρα ότι χαρτοφυλάκιο με κίνδυνο είναι μια τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{R}^d$. Υποθέτουμε ότι η μερική διάταξη στον $\mathbb{R}^d$ δίνεται. Η μερική διάταξη $\geq$ μετρά για κάποιες τριβές της αγοράς όπως είναι τα κόστη συναλλαγής, τα προβλήματα ρευστότητας, μη αναστρέψιμες μεταφορές κλπ.

Ο ορισμός των διανυσματικών συνεκτικών μέτρων επιτρέπεται για $n < d$. Δηλαδή, ο κίνδυνος της τυχαίας μεταβλητής με τιμές στο $\mathbb{R}^d$ απαιτείται να ακυρωθεί από ντετερμινιστικά χαρτοφυλάκια στον $\mathbb{R}^n$. Αυτό σχετίζεται με το πρόβλημα της συνάθροισης (aggregation). Υπάρχουν δύο εναλλακτικές μέθοδοι aggregation:

- ***Portfolio aggregation:***
  Έστω ένα (n,n)-συνεκτικό μέτρο κινδύνου και μια ντετερμινιστική συνάρτηση $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$, τότε υπάρχουν απαραίτητες και επαρκείς συνθήκες για τη συνολοσυνάρτηση $r \circ f$ να είναι ένα (d,n)-συνεκτικό μέτρο κινδύνου.

- ***Risk aggregation:***
  Έστω ένα (d,d)-συνεκτικό μέτρο κινδύνου και μια ντετερμινιστική συνάρτηση $g: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$, τότε υπάρχουν απαραίτητες και επαρκείς συνθήκες για τη συνολοσυνάρτηση $cl[g \circ f]$ να είναι ένα (d,n)-συνεκτικό μέτρο κινδύνου.

[195] "Vector-valued coherent risk measures", Jouini E., Metteb M., Touzi N., 2002

Διανυσματικά συνεκτικά μέτρα στον L_d^∞

Έστω $(\Omega,\Im,P)$ ένας χώρος πιθανότητας. Ένα χαρτοφυλάκιο θα είναι μια διανυσματική τυχαία μεταβλητή X ορισμένη στο χώρο πιθανότητας. Θα εξετάσουμε τα χαρτοφυλάκια στο χώρο L_d^∞, που είναι ο χώρος όλων των ισοδύναμων φραγμένων τυχαίων μεταβλητών στον $\mathbb{R}^d$.

Τα χαρτοφυλάκια στον L_d^∞ είναι μερικώς διατεταγμένα συμφώνα με την ιδιότητα:

Αν K είναι ο κλειστός κυρτός κώνος του $\mathbb{R}^d$ τέτοιος ώστε:

$$\mathbb{R}_+^d \subset K \text{ και } K \neq \mathbb{R}^d \quad (1)$$

Το K επάγει την μερική διάταξη $\geq$ στον $\mathbb{R}^d$ με: $x \geq 0$ αν και μόνον αν $x \in K$.

Επεκτείνουμε φυσικά την μερική διάταξη $\geq$ στον L_d^∞ ως:

$$X \geq 0 \text{ αν και μόνον αν } X \in K \text{ P-σ.β.}$$

Με τον ορισμό αυτό η συνθήκη $\mathbb{R}_+^d \subset K$ σημαίνει ότι κάθε χαρτοφυλάκιο X με μη αρνητικά στοιχεία είναι μη αρνητικό με την έννοια της μερικής διάταξης.

Υποθέτουμε ακόμα ότι το K ικανοποιεί την συνθήκη substitutability:

$$\forall i = n+1,\ldots,d: -e_i + \alpha e_1 \text{ και } -e_i + \beta e_1 \in K \text{ για κάποια } \alpha,\beta > 0 \quad (2)$$

Η συνθήκη (2) σημαίνει ότι κάθε κατάσταση σε κάθε εισαγωγή $i > n$ μπορεί να εξισορροπηθεί από κάποια κατάσταση στην πρώτη εισαγωγή.

Πιο συγκεκριμένα, δηλώνει ότι οι μοναδιαίες τιμές των χρεογράφων $i > n$ σύμφωνα με τα χρεόγραφα $j \leq n$ πρέπει να φραχτούν.
Στην περίπτωση που n=d, η συνθήκη (2) δεν ισχύει.

Τελικά ορίζουμε την συνάρτηση ρευστότητας (liquidation function):

$$l(x) = \sup\{w \in \mathbb{R} : x \geq we_1\}$$

που έχει τιμές στο $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Από την (2) και λόγω της κλειστότητας του K έχουμε:

$$l(x) = \max\{w \in \mathbb{R} : x \geq we_1\} < \infty, \forall x \in \mathbb{R} \times \{0\}^{n-1} \times \mathbb{R}^{d-n}.$$

Ορίζουμε επίσης την έννοια: $\overline{\pi}(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i + l\left(\sum_{i=n+1}^{d} x_{ie_i}\right) e_1, \forall x \in \mathbb{R}^d$ (2.4)

Παρατηρούμε ότι οι τελευταίες d-n συνιστώσες του $\mathbb{R}^d$-διανύσματος $\overline{\pi}(x)$ είναι 0, εκ κατασκευής.
Τότε δηλώνουμε με $\pi(x)$ το διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $(\pi(x),0) = \overline{\pi}(x)$

Παρατήρηση:
Μια συνέπεια της 2.2 είναι ότι η l είναι Lipschitz στο πεδίο ορισμού της.
Επομένως, η π είναι Lipschitz συνεχή και $\pi\left(L_d^\infty\right)\subset L_n^\infty$.

(d,n)-συνεκτικά μέτρα κινδύνου

Επεκτείνουμε την έννοια των συνεκτικών μέτρων κινδύνου για τυχαία χαρτοφυλάκια με τιμές στον $\mathbb{R}^d$. Κάθε συνιστώσα τέτοιου χαρτοφυλακίου αντιστοιχεί σε μια συγκεκριμένη αγορά προϊόντων. Το κίνητρο είναι ότι οι επενδυτές δεν μπορούν γενικά να συγκεντρώσουν το χαρτοφυλάκιο τους εξαιτίας των προβλημάτων ρευστότητας και/ή του κόστους μεταφοράς ανάμεσα στις διάφορες αγορές.

- Για να είναι ένα τυχαίο χαρτοφυλάκιο αποδεκτό με την έννοια του κινδύνου, ο διαχειριστής προτείνει ότι πρέπει να προστεθεί στο χαρτοφυλάκιο X κάποιο ντετερμινιστικό χαρτοφυλάκιο $\overline{x}$. Λέμε ότι το $\overline{x}$ ακυρώνει το ρίσκο που επάγεται από το X αν το χαρτοφυλάκιο συνάθροισης $X+\overline{x}$ είναι αποδεκτό από τον διαχειριστή με την έννοια των μέτρων κινδύνου. Το μέτρο κινδύνου του χαρτοφυλακίου X θα αποτελείται από τη συλλογή τέτοιων ντετερμινιστικών χαρτοφυλακίων $\overline{x}$.
- Ο ακέραιος αριθμός d, που αναπαριστά τη διάσταση του χαρτοφυλακίου $X(\omega)$ είναι στην ουσία μεγάλο αφού η εταιρεία έχει καταστάσεις από διάφορες αγορές. Αν και ο διαχειριστής μπορεί πιθανόν να προτείνει οποιοδήποτε ντετερμινιστικό χαρτοφυλάκιο $\overline{x}\in\mathbb{R}^d$ το οποίο ακυρώνει το ρίσκο του X, είναι φυσικό να περιορίσουμε το $\overline{x}$ να έχει ένα μικρότερο αριθμό $n\leq d$ από μη μηδενικές εισαγωγές. Αυτή η μείωση μπορεί να αποκτηθεί με την έννοια κάποιας διαδικασίας συγκέντρωσης είτε στο αρχικό χαρτοφυλάκιο X είτε στο ντετερμινιστικό χαρτοφυλάκιο $\overline{x}$.

  Για παράδειγμα, αν το ποσό το χρημάτων που προτείνεται να προστεθεί είναι σε δολάρια έχουμε n=1, ενώ αν το ποσό είναι σε δύο διαφορετικές μονάδες, δολάρια και ευρώ, τότε είμαστε στη κατάσταση n=2.
- Με μια πιθανή ανακατανομή των συνιστωσών του $\overline{x}$ πρέπει να σκεφτούμε ότι οι τελευταίες d-n συνιστώσες είναι μηδέν για κάποιον ακέραιο $n\leq d$. Οπότε ορίζουμε την επόμενη έννοια: $\forall x\in\mathbb{R}^n, \overline{x}=(x,0)\in\mathbb{R}^d$

Ορισμός 3.1
Ένα (d,n)-συνεκτικό μέτρο κινδύνου είναι μια συνολοσυνάρτηση $r:L_d^\infty\to\mathbb{R}^n$ που ικανοποιεί τα παρακάτω:

1. $\forall X\in L_d^\infty$, το $r(X)$ είναι κλειστό και $0\in r(0)\neq\mathbb{R}^n$.
2. $\forall X\in L_d^\infty$: αν $X\geq 0$ P-σ.β. $\Rightarrow r(0)\subset r(X)$.
3. $\forall X,Y\in L_d^\infty$, $r(X)+r(Y)\subset r(X+Y)$.
4. $\forall t>0, \forall X\in L_d^\infty$, $r(tX)=tr(X)$.
5. $\forall x\in\mathbb{R}^n, \forall X\in L_d^\infty$, $r(X+\overline{x})=\{-\overline{x}\}+r(X)$.

Παράδειγμα:
Για d=n=1 έχουμε: $r: L_1^{\infty} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί το 1ο αξίωμα του ορισμού, ορίζουμε

$$\rho(x) = \min r(x) > -\infty .$$

Αν υποθέσουμε ότι το $r(X)$ συμπίπτει με το $[\rho(x), +\infty)$. Τότε εύκολα βλέπουμε ότι ικανοποίει τα αξιώματα του ορισμού αν και μόνον αν το ρ είναι συνεκτικό μέτρο κινδύνου.

Παρατήρηση:
1) Η πρώτη απαίτηση στο αξίωμα 1 είναι φυσική και χρειάζεται για τεχνικούς λόγους. Ακόμα μας λέει ότι είναι ένα ντετερμινιστικό χαρτοφυλάκιο που επιτρέπει να ακυρώσουμε τον κίνδυνο του συνολικού χαρτοφυλακίου. Η συνθήκη $r(0) \neq \mathbb{R}^n$ χρειάζεται για να αποφύγουμε τη τετριμμένη περίπτωση ότι $r(X) = \mathbb{R}^n$, $\forall X \in L_d^{\infty}$.
2) Το 2ο αξίωμα λέει ότι κάθε ντετερμινιστικό χαρτοφυλάκιο στο $r(0)$ μας επιτρέπει να ακυρώσουμε τον κίνδυνο ενός χαρτοφυλακίου X, όταν $X \geq 0$.
3) Το 3ο αξίωμα είναι η συνήθης μειωτική ιδιότητα από τη συγκέντρωση του κινδύνου: έστω x (αντίστοιχα y) ένα ντετερμινιστικό χαρτοφυλάκιο στον $\mathbb{R}^n$ που ακυρώνει τον κίνδυνο του X (αντίστοιχα του Y). Τότε το x+y ακυρώνει το ρίσκο της συγκέντρωσης κινδύνου X+Y.
4) Το 4ο αξίωμα είναι η συνήθης θετική ομοιογένεια των μέτρων κινδύνου.
5) Το 5ο αξίωμα είναι το ανάλογο της translation invariance των συνεκτικών μέτρων κινδύνου.

Όπως και τα coherent μέτρα μιας διάστασης έχουν σύνολα αποδεκτών καταστάσεων, έτσι έχουμε και για τα διανυσματικά τα εξής:

Ορισμός 3.2
Ένα (d,n)-σύνολο αποδεκτών καταστάσεων είναι ένα κυρτός κλειστός κώνος A του L_d^{∞} που περιέχει το $L_d^{\infty}(K)$ και είναι τέτοιο ώστε: $\mathbb{R}^n \times \{0\}^{d-n} \not\subset A$.

Παρατήρηση:
Αν r είναι ένα (d,n)-συνεκτικό μέτρο κινδύνου, τότε το $A = \{X \in L_d^{\infty} : r(0) \subset r(X)\}$ είναι ένα (d,n)-σύνολο αποδεκτών καταστάσεων.

Θεώρημα 3.1
Αν $A \subset L_d^{\infty}$ ορίζουμε την συνολοσυνάρτηση $r_A : L_d^{\infty} \to \mathbb{R}^n$ με:

$$r_A(X) = \{x \in \mathbb{R}^n : X + \overline{x} \in A\}$$

Τότε το A είναι ένα (d,n)-σύνολο αποδεκτών καταστάσεων αν και μόνον αν το r_A είναι συνεκτικό μέτρο κινδύνου.

Οι ιδιότητες που ακολουθούν είναι κάποιες βασικές ιδιότητες που ικανοποιούν τα (d,n)- συνεκτικά μέτρα κινδύνου.

Ιδιότητα 1:
Αν το $r(X)$ είναι κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ τότε το $r(0)$ είναι ένας κλειστός κυρτός κώνος του $\mathbb{R}^n$ και

$$r(X)=r(X)+r(0),\forall X\in L_d^\infty.$$

<u>Παρατήρηση:</u>
Από την ιδιότητα 1, το αξίωμα (2) του ορισμού μπορεί να γραφτεί ως:

$$0\in r(X),\forall X\in L_d^\infty(K)$$

και αντίστοιχα το σύνολο αποδεκτών καταστάσεων μπορεί να γραφτεί ως:

$$A=\left\{X\in L_d^\infty : 0\in r_A(X)\right\}.$$

Για την επόμενη ιδιότητα χρειαζόμαστε τις εξής έννοιες:

$$K_n=\left\{x\in\mathbb{R}^n : \overline{x}\in K\right\} \text{ και: } \quad \overline{r_0}=r(0)\cap -r(0),$$

όπου το $\overline{r_0}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος.

Ιδιότητα 2:
Συνέπεια με τη διάταξη $\geq$: $K_n\subset r(0)$ και $\operatorname{int}(-K_n)\cap r(0)=(-K_n\setminus\overline{r_0})\cap r(0)=\varnothing$

<u>Παρατήρηση:</u>
1) Υποθέτουμε ότι $\overline{r_0}=\{0\}$. Τότε η ιδιότητα γίνεται $-K_n\cap r(0)=\varnothing$. Αυτό σημαίνει ότι τα μη θετικά ντετερμινιστικά χαρτοφυλάκια δεν μπορούν να ακυρώσουν το ρίσκο του μηδενικού χαρτοφυλακίου.
2) Αφού $K_n\subset r(0)$ έχουμε ότι: $K_n\cap(-K_n)\subset\overline{r_0}$. Επομένως η περίπτωση $\overline{r_0}=\{0\}$ δηλώνει ότι υπάρχουν αποτελεσματικές «τριβές» ανάμεσα στα πρώτα n χρεόγραφα.

Ιδιότητα 3: (Μονοτονία)
(i) Έστω $X,Y\in L_d^\infty$ τέτοιο ώστε $X\geq Y$. Τότε $r(Y)\subset r(X)$.
(ii) Έστω $X\in L_d^\infty$ είναι τέτοιο ώστε $\overline{a}\geq X\geq\overline{b}$ για κάποια $a,b\in\mathbb{R}^n$ τότε:

$$\{-b\}+r(0)\subset r(X)\subset\{-a\}+r(0).$$

(iii) Για κάθε $X\in L_d^\infty$ έχουμε ότι:

$$\left\{\|\pi(X)\|_\infty e\right\}+r(0)\subset r(X).$$

<u>Παρατήρηση:</u>
1) Μια άμεση συνέπεια της ιδιότητας 3 είναι ότι η συνθήκη $r(0)\neq\mathbb{R}^n$ δηλώνει ότι: $r(X)\neq\mathbb{R}^n,\forall X\in L_d^\infty$.
2) Αν $X,Y\in L_d^\infty$ με $Y\in\vec{K}=K\cap(-K)$ σ.π. Τότε $X+Y\geq X$ και $X\geq X+Y$ σ.π. Από την ιδιότητα 3(i) προκύπτει ότι $r(X+Y)=r(X)$.
3) Έστω ότι $pr_{\vec{K}}$ είναι η ορθογώνια προβολή του διανυσματικού χώρου $\vec{K}$ και θέτουμε: $\tilde{X}=X-pr_{\vec{K}}(X)$. Από την παρατήρηση, η (ii) παρέχει μια προφανής

επέκταση του διανυσματικού μέτρου κινδύνου r στο χώρο $L_d^\infty + L_d^0(\vec{K})$ θέτοντας: $r(X) = r(\tilde{X}), \forall X \in L_d^\infty + L_d^0(\vec{K})$.

4) Μπορεί εύκολα να διαπιστωθεί ότι η διάταξη που ορίστηκε στα χαρτοφυλάκια είναι πλήρης αν και μόνον αν $K = \{x \in \mathbb{R}^d \mid ax \geq 0\}$ για κάποιο διάνυσμα $a \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{0\}$. Με πιθανό πολλαπλασιασμό του α με μια σταθερά μπορούμε να βρούμε έναν ακέραιο $i \in \{1,....,d\}$ που ικανοποιούν την $a_i = 1$. Τότε για κάθε χαρτοφυλάκιο $X \in L_d^\infty$ έχουμε ότι: $X \geq (aX)e_i \geq X$. Από την ιδιότητα 3 προκύπτει ότι: $r(X) = r(aXe_i)$ η οποία είναι η μονοδιάστατη περίπτωση συνεκτικών μέτρων.
5) Με τον ίδιο συλλογισμό όπως στην ιδιότητα 3(iii), έχουμε ότι:
$$\left\{\|\pi(X)\|_\infty \mathit{1}\right\} + r(0) \subset r(X) \subset \left\{-\|\pi(X)\|_\infty \mathit{1}\right\} + r(0), \forall X \in L_d^\infty.$$

Ιδιότητα 4: (Self-consistency)
Για κάθε $X \in L_d^\infty$:
$$r(X) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : 0 \subset r(X + \overline{x})\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : r(0) \subset r(X + \overline{x})\right\}.$$

Η τελευταία ιδιότητα είναι χρήσιμη για να περιγράψουμε την συνέχεια της απεικόνισης r.

Ιδιότητα 5. (Συνέχεια)

(i) $X, Y \in L_d^\infty$, $r(Y) + \left\{\|\pi(X-Y)\|_\infty \mathit{1}\right\} \subset r(X) \subset r(Y) - \left\{\|\pi(X-Y)\|_\infty \mathit{1}\right\}$.

(ii) Η συνολοσυνάρτηση r είναι συνεχής στο L_d^∞[196].

Για να δούμε την αναπαράσταση αυτών των κλάσεων συνεκτικών μέτρων θα χρειαστούμε κάποιες επιπλέον έννοιες:
Συμβολίζουμε με ba_d τον δυικό του L_d^∞ και είναι το σύνολο των φραγμένων αθροιστικών συνολοσυναρτήσεων μ του $(\Omega, \Im)$ με την ιδιότητα ότι αν $P(A) = 0$ τότε $\mu(A) = 0$. Εφοδιάζουμε το χώρο με τη νόρμα: $\|\mu\| = \sup\left\{\sum_{i=1}^k \mu(A_i)\right\}$ όπου

[196] Μια συνολοσυνάρτηση $F: U \to V$ όπου U,V είναι μετρικοί χώροι είναι συνεχής αν είναι και lower-ημισυνεχής και upper-ημισυνεχής.

- Η F θα λέγεται lower-ημισυνεχής σε κάποιο $u \in U$ αν για κάθε $v \in F(u)$ και κάθε ακολουθία $(u^n)_n \subset \mathrm{dom}(F)$ που συγκλίνει στο u, υπάρχει μια ακολουθία $v^n \in F(u^n)$ τέτοια ώστε $v^n \to v$.
- Η θα F λέγεται upper-ημισυνεχής σε κάποιο $u \in U$, αν για κάθε ε>0 υπάρχει μια σταθερά η>0 τέτοια ώστε $F(u + \eta B_U) \subset F(u) + \varepsilon B_v$, όπου B_U και B_v είναι οι μοναδιαίες μπάλες των U,V.

$A_1,\ldots,A_k$ είναι disjoint υποσύνολα του F για κάθε $\mu \in ba_d$. Τέλος, δηλώνουμε με $\mathrm{E}_\mu[X]$ τη δυική απεικόνιση μεταξύ μιας τμ $X \in L_d^\infty$ και ενός μέτρου $\mu \in ba_d$.

Τα αριθμήσιμα αθροίσιμα στοιχεία του ba_d μπορούν να αναγνωριστούν ως L_d^1 τυχαίες μεταβλητές και είναι πιο ενδιαφέροντα από οικονομικής άποψης αφού μπορούν να συμπεριφερθούν σαν «πυρήνες» τιμολόγησης. Τα αυστηρά θετικά στοιχεία του L_d^1 χρίζουν συγκεκριμένου ενδιαφέροντος στην χρηματοοικονομία αφού μπορούν να αντιμετωπιστούν σαν πυρήνες τιμολόγησης σύμφωνες με την έννοια του no-arbitrage.

Θέτουμε με $L_d^\infty(K)$ το υποσύνολο του L_d^∞ που περιέχει όλα τις τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο K, δηλαδή τις μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές με την έννοια της μερικής διάταξης.
Η θετική orthant του ba_d ορίζεται σύμφωνα με:

$$ba_d(K) = \left\{\mu \in ba_d : \mathrm{E}_\mu[X] \geq 0, \forall X \in L_d^\infty\right\}$$

Θεώρημα 3.2
Έστω μια συνολοσυνάρτηση $r : L_d^\infty \to \mathbb{R}^n$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(1) Η r είναι ένα (d,n)-συνεκτικό μέτρο κινδύνου.
(2) Υπάρχει ένας μη μηδενικός κυρτός και $\sigma\left(ba_d, L_d^\infty\right)$-κλειστός κώνος, $P_{ba} \subset ba_d(K)$ τέτοιος ώστε για κάθε $X \in L_d^\infty$ έχουμε:

$$r(X) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \inf_{\mu \in P_{ba}} \mathrm{E}_\mu\left[X + \overline{x}\right] \geq 0\right\}.$$

Ορισμός 3.3
Ένα (d,n)-συνεκτικό μέτρο κινδύνου $r : L_d^\infty \to \mathbb{R}^n$ λέμε ότι ικανοποιεί την ιδιότητα Fatou αν για κάθε $X \in L_d^\infty$:

$$\lim_{k \to \infty}\left[\inf r\left(X^k\right)\right] \subset r(X)$$

για κάθε φραγμένη ακολουθία $\left(X^k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ του L_d^∞ τέτοια ώστε $\left(X^k\right)_{k \in \mathbb{N}} \xrightarrow[P]{} X$.

Θεώρημα 3.3
Έστω $r : L_d^\infty \to \mathbb{R}^n$ ένα (d,n)-συνεκτικό μέτρο κινδύνου. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

1. Υπάρχει ένα κλειστό υποσύνολο P_σ του $L_d^1\left(K^\circ\right)$ τέτοιο ώστε για κάθε $X \in L_d^\infty$,
$$r(X) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \inf_{\mu \in P_\sigma} \mathrm{E}_\mu\left[X + \overline{x}\right] \geq 0\right\}.$$
2. Ο κυρτός κώνος $C = \left\{X \in L_d^\infty : r(0) \subset r(X)\right\}$ είναι $\sigma\left(L_d^\infty, L_d^1\right)$-κλειστό σύνολο.
3. Το (d,n)-συνεκτικό μέτρο κινδύνου r ικανοποιεί την ιδιότητα Fatou.

Ορισμός 3.4
Ένα (d,n)-συνεκτικό μέτρο κινδύνου r λέμε ότι είναι:

1. weakly relevant αν για κάθε $X \in L_d^{\infty}(K)$:

$$0 \in r(-X) \Rightarrow P\left[X \in K^{\circ}\right] = 0$$

2. strongly relevant αν για κάθε $X \in L_d^{\infty}(K)$:

$$0 \in r(-X) \Rightarrow P\left[X \in \left(K \setminus \vec{K}\right)\right] = 0$$

όπου $\vec{K} = K \cap (-K)$.

<u>Παρατήρηση</u>
Κάθε δυνατά σχετικό (d,n)-συνεκτικό μέτρο κινδύνου είναι ασθενές.

Πρόταση 3.1
Έστω ένα (d,n)-συνεκτικό μέτρο κινδύνου r.

1. Το r είναι weakly relevant αν:
$$\forall A \in F, z \in K^{\circ} : 0 \in r(-z I_A) \Rightarrow P[A] = 0 .$$
2. Το ρ είναι strongly relevant αν:
$$\forall A \in F, z \in \left(K \setminus \vec{K}\right) : 0 \in r(-z I_A) \Rightarrow P[A] = 0 .$$

Θεώρημα 3.4
Έστω ένα (d,n)-συνεκτικό μέτρο κινδύνου r, που ικανοποιεί την ιδιότητα Fatou και το P_σ είναι το σχετικό δυικό σύνολο και θέτουμε:

$$P_\sigma^{w} = \left\{\mu \in P_\sigma : \mu \in K^{\circ} \setminus \{0\}, P-\sigma.\beta.\right\} .$$

Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

1. Το ρ είναι weakly relevant.
2. Το σύνολο P_σ^{w} είναι μη κενό.
3. Το P_σ^{w} είναι πυκνό στο P_σ με την L_d^1-νόρμα.
4. Υπάρχει $\mathrm{P} \subset P_\sigma^{w}$ τέτοιο ώστε:
$$r(X) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \inf_{\mu \in \mathrm{P}} \mathrm{E}_\mu\left[X + \overline{x}\right] \geq 0\right\} .$$

Το επόμενο θεώρημα είναι παρόμοιο με το θεώρημα 3.4 και αφορά τα strongly relevant συνεκτικά μέτρα.

Θεώρημα 3.5
Έστω ένα (d,n)-συνεκτικό μέτρο κινδύνου r, που ικανοποιεί την ιδιότητα Fatou και το P_σ είναι το σχετικό δυικό σύνολο και θέτουμε:

$$P_\sigma^{s} = \left\{\mu \in P_\sigma : \mu \in ri\left(K^{\circ}\right), P-\sigma.\beta.\right\} .$$

Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

1. Το r είναι strongly relevant.

2. Το P_σ^s είναι μη κενό.
3. Το P_σ^s είναι πυκνό στο P_σ με την L_d^1-νόρμα.
4. Υπάρχει $\mathrm{P} \subset P_\sigma^s$ τέτοιο ώστε:

$$r(X) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \inf_{\mu \in P} E_\mu \left[X + \bar{x} \right] \geq 0 \right\}$$

Τα επόμενα αποτελέσματα αφορούν την συνεκτική συνάθροιση (aggregation) τυχαίων χαρτοφυλακίων και του κινδύνου των τυχαίων χαρτοφυλακίων.

Ορισμός 3.5

Έστω r είναι ένα (n,n)-συνεκτικό μέτρο κινδύνου. Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ είναι ένα r-συνεκτικός aggregator αν:

1. $f(K) \subset r(0)$

2. $\forall x, y \in \mathbb{R}^d : f(x+y) - f(x) - (y) \in r(0)$

3. $\forall x \in \mathbb{R}^d, t > 0 : f(tx) - tf(x) \in \vec{r}_0$

4. $\forall x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^d : f(\bar{x} + y) - f(y) - x \in \vec{r}_0$

<u>Παρατήρηση:</u>

1) Μια πιο ισχυρή συνθήκη για το (i) είναι: $\forall X \in L_d^\infty$ έχουμε: $X \in r(0)$ P-σ.β. $\Rightarrow 0 \in r(X)$ (*). Η ιδιότητα αυτή ικανοποιείται από ντετερμινιστικά χαρτοφυλάκια $x \in \mathbb{R}^d$.
2) Αν n=d=1 οι δυο συνθήκες είναι ταυτόσημες. Αφού $r(0) = K = \mathbb{R}_+$.

Λήμμα 3.1

Αν r είναι ένα (n,n)-συνεκτικό μέτρο κινδύνου και $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ είναι ένα r-συνεκτικός aggregator τότε:

(i) $f(L_d^\infty) \subset L_d^\infty + L_d^0(\vec{r}_0)$

(ii) Αν το r ικανοποιεί επιπλέον την ιδιότητα (*) τότε η $\tilde{r} = r \circ f$ είναι καλά ορισμένο στον L_d^∞.

Θεώρημα 3.6

Αν r είναι ένα (n,n)-συνεκτικό μέτρο κινδύνου και $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ μια απεικόνιση.

(i) Έστω ότι η συνολοσυνάρτηση: $\tilde{r} = r \circ f : L_d^\infty \to \mathbb{R}^n$ είναι ένα (d,n)-συνεκτικό μέτρο κινδύνου. Τότε η f είναι r-συνεκτικός aggregator.

(ii) Αντίστροφα, αν υποθέσουμε ότι ισχύει ότι: $\forall X \in L_d^\infty$, έχουμε:

$$X \in r(0) \text{ P-σ.β.} \Rightarrow 0 \in r(X).$$

Ορισμός 3.6

Έστω (n,n)-συνεκτικό μέτρο κινδύνου και $g:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ είναι ένα r-συνεκτικός aggregator κινδύνου ρίσκου αν:

1. $g(r(0)) \neq \mathbb{R}^n$ και $0 \in g(r(0))$
2. $\forall x,y \in \mathbb{R}^d : g(x)+g(y) \in cl(g(r(-x-y)))$
3. $\forall x \in \mathbb{R}^d, t>0 : g(tx) \in cl(tg(r(-x)))$ και $tg(x) \in cl(g(tr(-x)))$
4. $\forall x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^d : g(\overline{x}+y) \in x + cl(g(r(-y)))$ και $x+g(y) \in cl(g(r(-\overline{x}-y)))$

Θεώρημα 3.7

Αν r είναι ένα (d,d)-συνεκτικό μέτρο κινδύνου και $g:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$. Ορίζουμε μια συνολοσυνάρτηση:

$$cl[g \circ r] : L_d^{\infty} \to \mathbb{R}^n$$

$$X \mapsto cl[g(r(X))]$$

Τότε η $cl[g \circ r]$ είναι ένα (d,n)-συνεκτικό μέτρο κινδύνου αν και μόνον αν g είναι r-συνεκτικός aggregator κινδύνου.

4.3.2. Κυρτά μέτρα κινδύνου (Convex Risk Measures)

Σε κάποιες περιπτώσεις, ο κίνδυνος μιας κατάστασης ίσως αυξηθεί με μη γραμμικό τρόπο σε σχέση με το μέγεθος της κατάστασης. Για παράδειγμα, ένας επιπρόσθετος κίνδυνος ρευστότητας ίσως αυξηθεί αν η κατάσταση πολλαπλασιαστεί με έναν μεγάλο παράγοντα.

Γι' αυτό είναι απαραίτητο να εισάγουμε τα κυρτά μέτρα κινδύνου. Δηλαδή, πρέπει να χαλαρώσουμε τις ιδιότητες της θετικής ομοιογένειας και της subadditivity και να απαιτήσουμε μια ασθενέστερη ιδιότητα, αυτήν της κυρτότητας.

$$\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y), \quad \forall \lambda \in [0,1]$$

Η ιδιότητα της κυρτότητας μας εξασφαλίζει ότι η διαφοροποίηση του χαρτοφυλακίου δεν θα αυξήσει τον κίνδυνο, δηλαδή ο κίνδυνος μιας διαφοροποιημένης κατάστασης $\lambda X + (1-\lambda)Y$ είναι μικρότερος ή ίσος από την επιβαρυμένο άθροισμα των ξεχωριστών κινδύνων.

4.3.2.1. Κυρτά μέτρα κινδύνου σε πεπερασμένους χώρους πιθανότητας[197]:

Έστω $(\Omega,\Im,\mathrm{P})$ ένας χώρος πιθανότητας όπου το Ω, το σύνολο των γεγονότων είναι πεπερασμένο. Έστω $\mathcal{X}$ ένα κυρτό και γραμμικό σύνολο από πραγματικές συναρτήσεις στο Ω.

Ορισμός 4.1

Μία απεικόνιση $\rho:\mathcal{X}\to\mathbb{R}$ θα ονομάζεται κυρτό μέτρο κινδύνου αν ισχύουν τα εξής:

5. Αν $X\geq 0$ τότε $\rho(X)\leq 0,\ \forall X\in\mathcal{X}$. (Μονοτονία)
6. $\rho(X+m)=\rho(X)-m,\ \forall X\in\mathcal{X},\ m\in\mathbb{R}$ (translation invariance)
7. $\rho(\lambda X+(1-\lambda)Y)\leq\lambda\rho(X)+(1-\lambda)\rho(Y),\ \forall X,Y\in\mathcal{X},\ \forall\lambda\in[0,1]$ (κυρτότητα)

Ορισμός 4.2

Κάθε κυρτό μέτρο κινδύνου $\rho:\mathcal{X}\to\mathbb{R}$ ορίζει ένα σύνολο αποδεκτών καταστάσεων:

$$\mathcal{A}_\rho=\{X\in\mathcal{X}\setminus\rho(X)\leq 0\}.$$

Αντίστροφα, ένα δεδομένο σύνολο $\mathcal{A}$ από «αποδεκτές καταστάσεις» ορίζει ένα κυρτό μέτρο κινδύνου μέσω της:

$$\rho_{\mathcal{A}}(X)=\inf\{m\in\mathbb{R}\setminus m+X\in\mathcal{A}\}.$$

Οι επόμενες δύο προτάσεις μας δείχνουν τη σχέση μεταξύ των κυρτών μέτρων κινδύνου και τα σύνολα αποδεκτών καταστάσεων τους.

Πρόταση 4.1

Έστω $\rho:X\to\mathbb{R}$ είναι ένα κυρτό μέτρο κινδύνου και το αντίστοιχο σύνολο αποδεκτών καταστάσεων:

$$\mathcal{A}_\rho=\{X\in\mathcal{X}\setminus\rho(X)\leq 0\}.$$

Τότε:

$$\rho_{\mathcal{A}}=\rho$$

Επιπλέον: $\mathcal{A}=\mathcal{A}_\rho$ και ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

1. Το $\mathcal{A}$ είναι κυρτό και μη κενό.
2. Αν $X\in\mathcal{A}$ και $Y\in X$ με $Y\geq X$, τότε $Y\in\mathcal{A}$.
3. Αν $X\in\mathcal{A}$ και $Y\in X$, τότε το
$$\{\lambda\in[0,1]\setminus\lambda X+(1-\lambda)Y\in\mathcal{A}\}$$
είναι κλειστό στο $[0,1]$.

[197] Back to the Future. Plenary Lecture at the first World Congress of the Bachelier Society, Heath D., Paris, 2000.

Πρόταση 4.2
Αν $A \neq \emptyset$ είναι ένα κυρτό υποσύνολο του X που ικανοποιεί την ιδιότητα (2) της παραπάνω πρότασης, και ρ_A είναι το συναρτησιακό που αντιστοιχεί στο A μέσω της:

$$\rho_A = \inf\{m \in \mathbb{R} \setminus m + X \in A\}.$$

Αν $\rho_A(0) > -\infty$, τότε:

1. Το ρ_A είναι ένα κυρτό μέτρο κινδύνου.
2. Ισχύει ότι $A \subset A_{\rho_A}$.
   Επιπλέον, αν το A ικανοποιεί την ιδιότητα 3 παραπάνω πρότασης, τότε $A = A_{\rho_A}$.

Το επόμενο θεώρημα μας δίνει την αναπαράσταση των κυρτών μέτρων κινδύνου σε χώρους πεπερασμένης διάστασης.

Θεώρημα 4.1
Η απεικόνιση $\rho : X \to \mathbb{R}$ είναι ένα κυρτό μέτρο κινδύνου αν και μόνον αν υπάρχει μια «συνάρτηση penalty» $\alpha : P \to (-\infty, +\infty]$ τέτοια ώστε:

$$\rho(Z) = \sup_{Q \in P}\left(E_Q[-Z] - \alpha(Q)\right).$$

Η συνάρτηση α ικανοποιεί την ανισότητα $\alpha(Q) \geq -\rho(0)$ για οποιοδήποτε $Q \in P$, και μπορεί να είναι τέτοια ώστε να είναι κυρτή και lower ημισυνεχής στο P.

4.3.2.2. Κυρτά μέτρα κινδύνου σε γενικούς χώρους πιθανότητας[198]***:***

Θεωρούμε $X = L^{\infty}(\Omega, \Im, P)$ τον χώρο των φραγμένων συναρτήσεων σε ένα γενικό χώρο πιθανότητας $(\Omega, \Im, P)$.

Ορισμός 5.1
Μία απεικόνιση $\rho : L^{\infty} \to \mathbb{R}$ θα ονομάζεται κυρτό μέτρο κινδύνου αν ισχύουν τα εξής:

1. Αν $X \geq 0$ τότε $\rho(X) \leq 0,\ \forall X \in L^{\infty}$. (Μονοτονία)
2. $\rho(X + m) = \rho(X) - m,\ \forall X \in L^{\infty}, m \in \mathbb{R}$ (translation invariance)
3. $\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y),\ \forall X, Y \in L^{\infty},\ \forall \lambda \in [0,1]$ (κυρτότητα)

Θεώρημα 5.1
Έστω $X = L^{\infty}(\Omega, \Im, P)$ τον χώρο των φραγμένων συναρτήσεων σε ένα γενικό χώρο πιθανότητας $(\Omega, \Im, P)$, P είναι ένα σύνολο μέτρων πιθανότητας με $Q << P$ και $\rho : L^{\infty}(\Omega, \Im, P) \to \mathbb{R}$ είναι ένα κυρτό μέτρο κινδύνου.

[198] "Convex measures of risk and trading constrains". Follmer H., Schied A., Finance Stoch, 2002

Τότε οι επόμενες ιδιότητες είναι ισοδύναμες.

1. Υπάρχει μια συνάρτηση penalty[199] $\alpha : \mathrm{P} \to (-\infty, +\infty]$ τέτοια ώστε:
$$\rho(X) = \sup_{Q<<P}\left(\mathrm{E}_Q[-Z] - \alpha(Q)\right), \ \ \forall X \in L^\infty(\Omega, \Im, P).$$
2. Το σύνολο αποδεκτών καταστάσεων που αντιστοιχεί στο ρ είναι $\sigma\left(L^\infty(P), L^1(P)\right) -$ κλειστό.

<u>Παρατήρηση:</u>

1. Το ρ ικανοποιεί την ιδιότητα του Fatou:

   Αν η ακολουθία $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του X είναι ομοιόμορφα φραγμένη,

   και $X_n \xrightarrow[P]{} X$, $X \in \mathrm{X}$, τότε $\rho(X) \le \liminf_n \rho(X_n)$.
2. Αν για την ακολουθία $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του X, $X_n \xrightarrow[P]{} X$, $X \in \mathrm{X}$, τότε $\rho(X_n) \to \rho(X)$.

Πρόταση 5.1

Έστω $\rho : L^\infty(\Omega, \Im, P) \to \mathbb{R}$ είναι ένα κυρτό μέτρο κινδύνου με την αναπαράσταση
$$\rho(X) = \sup_{Q<<P}\left(\mathrm{E}_Q[-X] - \alpha(Q)\right), \ \ \forall X \in L^\infty$$
και το P είναι ένα σύνολο μέτρων πιθανότητας με $Q << P$.

Τότε η παραπάνω αναπαράσταση ισχύει για την penalty συνάρτηση:
$$\alpha_0(Q) = \sup_{X\in L^\infty}\left(\mathrm{E}_Q[-X] - \rho(X)\right) = \sup_{X\in \mathrm{A}_\rho} \mathrm{E}_Q[-X].$$
Επιπλέον, η α_0 είναι η ελάχιστη με την έννοια ότι $\alpha_0(Q) \le \alpha(Q)$ για όλα τα $Q \in \mathrm{P}$ αν η αναπαράσταση $\rho(X) = \sup_{Q<<P}\left(\mathrm{E}_Q[-Z] - \alpha(Q)\right)$ ισχύει για $\alpha(\cdot)$.

Επιπλέον,
$$\alpha_0(Q) = \sup_{X\in \mathrm{A}_\rho} \mathrm{E}_Q[-X] = \sup_{X\in \mathrm{A}} \mathrm{E}_Q[-X]$$
αν η ρ ορίζεται σαν την $\rho_{\mathrm{A}}(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} \setminus m + X \in \mathrm{A}\}$ μέσω του δεδομένου συνόλου αποδεκτών καταστάσεων A.

<u>Σημείωση:</u>

Η ισότητα:
$$\alpha_0(Q) = \sup_{X\in \mathrm{A}_\rho} \mathrm{E}_Q[-X] = \sup_{X\in \mathrm{A}} \mathrm{E}_Q[-X],$$
δείχνει ότι η ελάχιστη α_0 είναι lower semicontinuous για την ασθενώς* τοπολογία στο P σαν υποσύνολο του $L^1(P)$. Συγκεκριμένα, είναι lower ημισυνεχής για τη συνολική απόκλιση.

[199] Μια συνάρτηση $\alpha : \mathrm{P} \to (-\infty, +\infty]$ καλείται συνάρτηση penalty αν $-\infty < \sup_{Q\in P} \alpha(Q) < \infty$.

Πρόταση 5.2
Έστω ότι για κάθε i ενός συνόλου δεικτών I μας δίνεται ένα κυρτό μέτρο κινδύνου ρ_i στον $L^\infty(\Omega,\Im,P)$ με την αντίστοιχη penalty συνάρτηση $\alpha_i(\cdot)$. Υποθέτουμε ότι:

$$\inf_{Q\in P}\left(\inf_{i\in I} \alpha_i(Q)\right) > -\infty .$$

Τότε το:

$$\rho(X) = \sup_{i\in I} \rho_i(X),\ \forall X \in X$$

είναι ένα κυρτό μέτρο κινδύνου που μπορεί να αναπαρασταθεί ως:

$$\rho(X) = \sup_{Q<<P}\left(E_Q[-Z] - \alpha(Q)\right),\ \forall X \in L^\infty(\Omega,\Im,P)$$

με μια penalty συνάρτηση $\alpha(Q) = \inf_{i\in I} \alpha_i(Q),\ Q<<P$.

Επεκτείνουμε τα παραπάνω αποτελέσματα στον χώρο $L^p = L^p(\Omega,\Im,P)$, δηλαδή στον χώρου των μη φραγμένων τυχαίων μεταβλητών.

Ορισμός 5.2
Μια απεικόνιση $\rho: L^p \to \mathbb{R},\ 1 \le p \le \infty$ καλείται κυρτό μέτρο κινδύνου αν:

1. Αν $X \le Y$ τότε $\rho(X) \le \rho(Y),\ \forall X,Y \in L^p$ (Μονοτονία)
2. $\rho(X+m) = \rho(X) - m,\ \forall m \in \mathbb{R}$ (translation invariance)
3. $\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \le \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y),\ \forall X,Y \in L^p$ (κυρτότητα)

<u>Παρατήρηση:</u>
- Για $0 \le p < 1$ δεν υπάρχει μη σταθερό, πεπερασμένο κυρτό μέτρο κινδύνου.
- Η translation invariance λέει ότι:

$$\rho(X + \rho(X)) = 0,\ \forall X \in L^p \text{ και } \rho(m) = \rho(0) - m \quad \forall m \in \mathbb{R}$$

Πρόταση 5.3
Έστω $A_\rho = \{X \in L^p : \rho(X) \le 0\}$ είναι το σύνολο αποδεκτών καταστάσεων του ρ.
Τότε για ένα μέτρο $\rho \ne \infty$ και με $A = A_\rho$ ισχύουν τα εξής:

1. Το σύνολο A είναι μονότονο και κυρτό.
2. Το ρ είναι κυρτό αν και μόνον αν το A είναι κυρτό.
3. $\rho(X) = \begin{cases} \infty & \text{αν } m+X \notin A, \forall m \in \mathbb{R} \\ \inf\{m \in \mathbb{R} : m+Y \in A\} & \text{αλλού} \end{cases}$
4. Το ρ είναι συνεκτικό αν και μόνον αν το A είναι κυρτός κώνος.

Αντίστροφα:
Κάθε $A \subset L^p, A \ne \varnothing$ κυρτό και μονότονο τέτοιο ώστε:

$$\inf\{m \in \mathbb{R} : m+Y \in A\} > -\infty,\ \forall Y \in L^p$$

ορίζει ένα κυρτό μέτρο κινδύνου ρ_A με:

$$\rho_A(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} : m+X \in A\},\ \forall X \in L^p,\ A \subset A_{\rho_A}.$$

Θεώρημα 5.2

Έστω $\rho : L^p \to \mathbb{R}$, $1 \le p \le \infty$ να είναι ένα κανονικό, κυρτό, lower ημισυνεχής (με τη $\|\cdot\|_p$ νόρμα) μέτρο κινδύνου, τότε:

1. $\rho(X) = \sup_{Q \in Q_p} \left(E_Q[-X] - \rho^*(Q) \right)$, $\forall X \in L^p$, $1 \le p \le \infty$
2. $\rho^*(Q) = \sup_{X \in A_\rho} E_Q[-X]$
3. Ένα νομισματικό μέτρο κινδύνου ρ στον $L^p, 1 \le p \le \infty$ λέμε ότι έχει αναπαράσταση αν και μόνον αν το ρ είναι κυρτό και lower ημισυνεχής με τη $\|\cdot\|_p$ νόρμα.

<u>Παρατήρηση:</u>

1. Σε αντίθεση με τη περίπτωση $p = \infty$, που η αναπαράσταση βασίζεται σε πεπερασμένα αθροίσιμα μέτρα, η αναπαράσταση στη περίπτωση $p < \infty$ είναι περιορισμένη στα μέτρα πιθανότητας. Όλα τα πεπερασμένα κυρτά μέτρα στον L^p, $p < \infty$ είναι συνεχή ως προς τη νόρμα και έχουν μια αναπαράσταση της μορφής 1 του θεωρήματος:
2. Στη περίπτωση $p = \infty$, $Q_\infty = M_{1,f}$ είναι ασθενώς*-συμπεγές και κάθε κυρτό μέτρο είναι upper semi-continuous σύμφωνα με την ασθενή*-τοπολογία και έχουμε:
$$\rho(X) = \max_{Q \in Q_\infty} \left(E_Q[-X] - \rho^*(Q) \right), \ \forall X \in L^\infty .$$

Συνέπεια:

Κάθε πεπερασμένο κυρτό μέτρο κινδύνου $\rho : L^p \to \mathbb{R}$ είναι Lipschitz συνεχές, δηλαδή:
$$|\rho(X) - \rho(Y)| \le C \|X - Y\|_p$$
για κάποιο $C < \infty, C \in \mathbb{R}$.

Τα παρακάτω αποτελέσματα αφορούν τα πεπερασμένα κυρτά μέτρα κινδύνου.

Πρόταση 5.4

Έστω $\rho : L^p \to \mathbb{R}$ είναι ένα κανονικό, κυρτό, lower ημισυνεχές μέτρο κινδύνου στον L^p με αναπαράσταση:
$$\rho(X) = \max_{Q \in \mathcal{Q}} \left(E_Q[-X] - \rho^*(Q) \right) \ (1)$$
Το οποίο ικανοποιεί την ανίσωση:
$$\rho(0) = -\inf_{Q \in \mathcal{Q}} \rho^*(Q) < \infty . \ (2)$$
Τότε ισχύει ότι:

ρ είναι πεπερασμένο αν και μόνον αν $D \subset L^q$ είναι φραγμένο ως προς την νόρμα.

Όπου $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ και $D = \left\{ \frac{dQ}{dP} : Q \in \mathcal{Q} \right\} \subset L^p$.

Θεώρημα 5.3

Έστω $\rho: L^p \to \mathbb{R}$ ένα μέτρο κινδύνου με $\rho(0) < \infty$. Τότε το ρ είναι ένα πεπερασμένο κυρτό μέτρο κινδύνου αν και μόνον αν έχει αναπαράσταση της μορφής:

$$\rho(X) = \max_{Q \in \mathcal{Q}} \left(E_Q[-X] - \rho^*(Q) \right) \quad (3)$$

Για κάποιο σύνολο αναπαράστασης $\mathcal{Q}$ τέτοιο ώστε το $D = \left\{ \frac{dQ}{dP} : Q \in \mathcal{Q} \right\} \subset L^p$ να είναι ασθενώς συμπαγές.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχουν τα κυρτά μέτρα τα οποία είναι πεπερασμένα σε κάποια translation invariant υποσύνολα $M \subset L^p$ όπου

αν $X \in M$ και $m \in \mathbb{R}$ τότε $X+m \in M$.

Το σύνολο M περιγράφει κάποιους περιορισμούς στο σύνολο των κινδύνων, για παράδειγμα περιορισμοί στις αγορές ή σε διάφορες νομοθεσίες. Σε αυτή τη περίπτωση οι συναλλαγές και οι ανταλλαγές επιτρέπονται μόνο μέσα στο σύνολο M.

Θεώρημα 5.4

Έστω $\rho: L^p \to \mathbb{R}$ $1 \le p \le \infty$ ένα κανονικό, κυρτό και lower ημισυνεχές μέτρο κινδύνου. Έστω επίσης $M \subset L^p$ μη κενό, να είναι ένα κυρτό, κλειστό και translation invariant. Τότε το περιορισμένο μέτρο κινδύνου ρ^M είναι κανονικό, κυρτό και translation invariant, $\sigma(L^p, L^q)-$συνεχές με αναπαράσταση:

$$\rho^M(X) = \sup_{Q \in Q_p} \left(E_Q[-X] - \left(\rho^M\right)^*(Q) \right), \quad \forall X \in M \ (*)$$

Η κατά σημείο συνέχεια των κυρτών μέτρων κινδύνου είναι πολύ σημαντικό εργαλείο για τη προσέγγιση συμφωνιών και συγκεκριμένα δηλώνουν ποσοτικές ιδιότητες στα μέτρα που είναι σημαντικές στις εφαρμογές τους.

<u>Ορισμός 5.3</u>

Έστω $\rho: L^p \to \mathbb{R}$ $1 \le p \le \infty$ είναι ένα συναρτησιακό κινδύνου. Τότε:

1. Το ρ καλείται συνεχές από πάνω:

αν $(X_n) \subset L^p$, $X_n \downarrow X$ P-σ.β. για κάποιο $X \in L^p$ τότε $\lim \rho(X_n) = \rho(X)$

2. Το ρ καλείται συνεχές από κάτω:

αν $(X_n) \subset L^p$, $X_n \uparrow X$ P-σ.β. για κάποιο $X \in L^p$ τότε $\lim \rho(X_n) = \rho(X)$

3. Το ρ έχει την ιδιότητα Fatou:

αν $(X_n) \subset L^p$ με $|X_n| \le Y$ P-σ.β. για κάποιο $Y \in L^p$ και $X_n \to X$ P-σ.β.για κάποιο $X \in L^p$ τότε $\rho(X) \le \liminf \rho(X_n)$

4. Το ρ καλείται Lebesque-συνεχές:

αν $(X_n)\subset L^p$, $X_n \to X$ P-σ.β.για κάποιο $X\in L^p$ με $|X_n|\leq Y$ P-σ.β.

για κάποιο $Y\in L^p$ και $X_n \to X$ P-σ.β.για κάποιο $X\in L^p$ τότε $\lim\rho(X_n)=\rho(X)$

Θεώρημα 5.5

Έστω $\rho:L^p\to\mathbb{R}$ $1\leq p\leq\infty$ ένα πεπερασμένο κυρτό μέτρο κινδύνου.

Τότε το ρ είναι $\sigma(L^p,L^q)$-lower-semicontinuous, είναι συνεχές από πάνω και από κάτω, είναι Lebesque συνεχές , και έχει την ιδιότητα Fatou.

Λήμμα 5.1

Αν $\rho:L^p\to\mathbb{R}$ με $1\leq p\leq\infty$ είναι ένα κανονικό, κυρτό μέτρο κινδύνου τότε ισχύει:

Το ρ είναι συνεχές από πάνω $\Leftrightarrow$ Το ρ έχει την ιδιότητα Fatou .

Θεώρημα 5.6

Έστω $\rho:L^p\to\mathbb{R}$ με $1\leq p\leq\infty$ ένα κανονικό, κυρτό μέτρο κινδύνου. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

1. Το ρ είναι $\sigma(L^p,L^q)-$Lipschitz συνεχές
2. Το ρ είναι $\|\cdot\|_p-$Lipschitz συνεχές
3. $\rho(X)=\sup\limits_{Q\in M_1^q}\left(E_Q[-X]-\rho^*(Q)\right),\ \forall X\in L^p$
4. Το ρ είναι συνεχές από πάνω
5. Το ρ έχει την ιδιότητα Fatou.

4.3.2.3. Διανυσματικά Κυρτά Μέτρα Κινδύνου[200]

Σε αυτήν την ενότητα θα μελετήσουμε τα κυρτά μέτρα κινδύνου που ορίζονται για διανύσματα χαρτοφυλακίου $X=(X_1,\ldots,X_d)$σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega,\Im,P)$. Δηλαδή, υποθέτουμε ότι το χαρτοφυλάκιο αποτελείται από περισσότερα από ένα χρεόγραφα.

Ο σκοπός μας είναι να έχουμε ένα μέτρο κινδύνου όχι μόνο για τα X_i ξεχωριστά, αλλα να μετρήσουμε το από κοινού κίνδυνό όλων των συνιστωσών που προκαλείται από την διακύμανση και τη πιθανή εξάρτηση των X_i .

[200] “Consistent risk measures for portfolio vectors”. Burgert C., Ruchendorf L.

Ορισμός 6.1

Ένα μέτρο κινδύνου $\rho : L_d^\infty(P) \to \mathbb{R}$ είναι κυρτό διανυσματικό μέτρο αν για κάθε $X, Y \in L_d^\infty(P)$ ισχύουν τα επόμενα:

1. Αν $X \geq Y \;\Rightarrow\; \rho(X) \leq \rho(Y)$
2. $\rho(X + me_i) = \rho(X) - m, \;\; \forall m \in \mathbb{R}$ και $1 \leq i \leq d$
3. $\rho(\alpha X + (1-\alpha)Y) \leq \alpha\rho(X) + (1-\alpha)\rho(Y), \;\; \forall \alpha \in (0,1)$

Όπως σε κάθε νομισματικό μέτρο κινδύνου αντιστοιχεί ένα σύνολο αποδεκτών καταστάσεων, έτσι και για τα διανυσματικά κυρτά μέτρα έχουμε:

Ορισμός 6.2

Ένα υποσύνολο $A \subset L_d^\infty(P)$ καλείται κυρτό σύνολο αποδεκτών καταστάσεων αν:

1. Το A είναι κλειστό και κυρτό
2. $\forall X, Y \in L_d^\infty(P)$ με $X \geq Y$ και $Y \in A$ τότε $X \in A$
3. $X + me_i \in A \;\Leftrightarrow\; X + me_j \in A, \;\; \forall i, j$
4. $\mathbb{R}^d \neq A$

Πρόταση 6.1

1. Αν $A \subset L_d^\infty(P)$ καλείται κυρτό σύνολο αποδεκτών καταστάσεων, τότε το ρ_A είναι ένα κυρτό μέτρο κινδύνου.
2. Αν ρ είναι ένα κυρτό μέτρο κινδύνου, τότε το:
$$A_\rho = \left\{X \in L_d^\infty(P) : \rho(X) \leq 0\right\}$$
είναι ένα κυρτό σύνολο αποδεκτών καταστάσεων.

Έστω ένα σύνολο K και $L_d^\infty(K) = L_d^\infty(K, P) = \left\{X \in L_d^\infty(P) : X \in K\right\}$. Έστω επίσης το $ba_d(P)$ που είναι το σύνολο των πεπερασμένα αθροίσιμων μέτρων στον $L_d^\infty(P)$ απολύτων συνεχών, που είναι το θετικό μέρος του δυικού χώρου του $L_d^\infty(P)$.

Έστω:
$$Q(X) = E_Q(X) = \sum_{i=1}^{d} E_{Q_i} X_i$$
για $Q \in ba_d(P)$ και ορίζουμε τα στοιχεία του $ba_d(P)$ που είναι θετικά στο K ως εξής:
$$Q \in ba_d(K) = ba_d(K, P) = \left\{Q \in ba_d(P) : E_Q[X] \geq 0, \;\; \forall X \in L_d^\infty(K)\right\}.$$

Θεώρημα 6.1

Ένα συναρτησιακό $\rho : L_d^\infty(P) \to \mathbb{R}$ είναι ένα κυρτό μέτρο κινδύνου αν και μόνον υπάρχει μία συνάρτηση $\alpha : ba_d(K) \to (-\infty, +\infty]$ τέτοια ώστε:
$$\rho(X) = \sup_{Q \in ba_d(K)} \left(E_Q[-X] - \alpha(Q)\right).$$
Η α μπορεί να επιλεχθεί να είναι η:

$$\alpha(Q) = \sup_{X \in L_d^\infty(K)} \left(E_Q[-X] - \rho(X) \right) = \sup_{X \in A_\rho} E_Q[-X].$$

Ορισμός 6.3

Ένα συναρτησιακό $\rho : L_d^\infty(P) \to \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα Fatou αν για κάθε ομοιόμορφα φραγμένη ακολουθία $(X_n) \subset L_d^\infty(P)$ με $X_n \xrightarrow{P} X$ για κάποιο $X \in L_d^\infty(P)$ ισχύει ότι:

$$\rho(X) \leq \varliminf_{n \to \infty} \rho(X_n)$$

Η κλάση των σ-αθροιστικών P-συνεχών μέτρων, θετικών στο K, μπορεί να αναπαραστεί σαν την αντίστοιχη κλάση $L_d^1(K)$ των πυκνοτήτων $f = (f_1, ..., f_d)$.

Θεώρημα 6.2

Έστω $\rho : L_d^\infty(P) \to \mathbb{R}$ ένα κυρτό μέτρο κινδύνου. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

1. Η κλάση $ba_d(K)$ μπορεί να αντικατασταθεί από τη κλάση $L_d^1(K)$ των σ-αθροιστικών μέτρων.
2. Το σύνολο αποδεκτών καταστάσεων:
$$A_\rho = \{ X \in L_d^\infty(P) : \rho(X) \leq 0 \}$$
είναι w*-κλειστό στο $L_d^\infty(P)$.
3. Το ρ έχει την ιδιότητα Fatou.

4.4. Άλλες κλάσεις μέτρων κινδύνου

4.4.1. Law invariant μέτρα κινδύνου

Με τον όρο law invariant μέτρα γενικά θεωρούμε τα μέτρα εκείνα που για δύο καταστάσεις με την ίδια κατανομή, η ποσότητα που θα πρέπει να προστεθεί σε αυτές ώστε να τις κάνει αποδεκτές θα είναι η ίδια. Με λίγα λόγια οι δύο αυτές καταστάσεις θα μοιράζονται τον ίδιο κίνδυνο.

Το οικονομικό κίνητρο αυτής της κλάσης μέτρων είναι καθαρά διαισθητικό. Πράγματι, σε μία αγορά είναι επιθυμητό να έχουμε μέτρο κινδύνου που κατανέμει την ίδια ποσότητα κινδύνου σε ισόνομες καταστάσεις.

Ορισμός 7.1

Ένα νομισματικό μέτρο κινδύνου $\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ καλείται law invariant αν για κάθε $X, Y \in \mathcal{X}$ με να έχουν την ίδια κατανομή, τότε $\rho(X) = \rho(Y)$.

→ **Law-Invariant συνεκτικά μέτρα κινδύνου**[201]

Έστω $(\Omega, \Im, P)$ ένας χώρος πιθανότητας ο οποίος είναι atomless και έστω D είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων κατανομής των φραγμένων τυχαίων μεταβλητών, δηλαδή το D είναι το σύνολο των μη φθινουσών, δεξιά συνεχών συναρτήσεων F στο $\mathbb{R}$ για τα οποία υπάρχουν $z_0, z_1 \in \mathbb{R}$ για τα οποία:

$$F(z) = \begin{cases} 0, & z<z_0 \\ 1, & z \geq z_1 \end{cases}$$

Ορίζουμε $Z:[0,1)\times D \to \mathbb{R}$ με $Z(x,F) = \inf\{z \in \mathbb{R}:\ F_X(z) > x\},\ \forall x \in [0,1),\ F \in D$.

Τότε η $Z(\cdot,F):[0,1) \to \mathbb{R}$ είναι μη-φθίνουσα και δεξιά συνεχής.

Συμβολίζουμε με F_X τη συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X.

Ορίζουμε για κάθε $\alpha \in [0,1)$, $\rho_\alpha : L^\infty \to \mathbb{R}$ με $\rho_\alpha(X) = \dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_{1-\alpha}^{1} Z(z, F_{-x})dx,\ \forall X \in L^\infty$

Επίσης, ορίζουμε: $\rho_0 : L^\infty \to \mathbb{R}$ με $\rho_0(X) = \text{ess.sup}(-X),\ \forall X \in L^\infty$.

Είναι εύκολο να δούμε ότι οι απεικονίσεις αυτές είναι μη φθίνουσες και συνεχείς. Τέλος, G είναι το σύνολο των μη φθίνουσων δεξιά συνεχών συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας στο $[0,1)$.

Θεώρημα 7.1

Έστω $\rho: L^\infty \to \mathbb{R}$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

1. Υπάρχει ένα συμπαγές και κυρτό σύνολο M_0 μέτρων πιθανότητας στο $[0,1]$ τέτοιο ώστε:
$$\rho(X) = \sup\left\{\int_0^1 \rho_\alpha(X)\mu(da):\ \mu \in M_0\right\},\ \forall X \in L^\infty$$
2. Το ρ είναι ένα law-invariant συνεκτικό μέτρο κινδύνου που ικανοποιεί την ιδιότητα Fatou.

Λήμμα 7.1

Έστω $\rho: L^\infty \to \mathbb{R}$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(1) Υπάρχει ένα υποσύνολο G_0 του G τέτοιο ώστε:
$$\rho(X) = \sup\left\{\int_0^1 Z(x, F_{-x})g(x)dx : g \in G_0\right\}$$

(2) Το ρ είναι ένα law-invariant συνεκτικό μέτρο κινδύνου και έχει την ιδιότητα Fatou.

[201] On Law invariant coherent risk measures", Kusuoko S., 2001.

Ορισμός 7.2

1. Ένα ζεύγος τυχαίων μεταβλητών X,Y καλείται comonotone αν
$$\left(X(\omega)-X(\omega')\right)\left(Y(\omega)-Y(\omega')\right)\geq 0 \ \ P(d\omega)\otimes P(d\omega')-\sigma.\beta.$$
2. Λέμε ότι η απεικόνιση $\rho{:}L^{\infty}\to\mathbb{R}$ είναι comonotone αν
$$\rho(X+Y)=\rho(X)+\rho(Y),\ \ \forall X,Y\in L^{\infty}\text{ comonotone.}$$

Θεώρημα 7.2

Έστω $\rho{:}L^{\infty}\to\mathbb{R}$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

1. Υπάρχει μέτρο πιθανότητας μ στο $[0,1]$ τέτοιο ώστε για κάθε $X\in L^{\infty}$:
$$\rho(X)=\int_0^1\rho_{\alpha}(X)\mu(da).$$
2. Το ρ είναι law-invariant και comonotone συνεκτικό μέτρο κινδύνου με την ιδιότητα Fatou.

$\rightarrow$ **Law-invariant κυρτά μέτρα κινδύνου[202]**

Θεωρούμε T μια μελλοντική χρονική στιγμή και θα μελετήσουμε αυτή τη κλάση των μέτρων στο χώρο $L^{\infty}=L^{\infty}(\Omega,\Im,P)$, δηλαδή στον χώρο των φραγμένων τυχαίων μεταβλητών ενός γενικού χώρου πιθανότητας $(\Omega,\Im,P)$. Εφοδιάζουμε το χώρο με την ασθενή τοπολογία $\sigma\left(L^{\infty},L^{1}\right)$ έτσι ώστε ο τοπολογικός δυικός του χώρος να είναι ο $L^{1}=L^{1}(\Omega,\Im,P)$.

Συμβολίζουμε με $\mathcal{Z}$ το σύνολο όλων των συναρτήσεων πυκνότητας, δηλαδή: $\mathcal{Z}=\left\{x'\in L^{1}_{+}:x'(1)=1\right\}$, και κάθε στοιχείο $x'\in\mathcal{Z}$ θα ταυτίζεται με ένα μέτρο πιθανότητας Q<<P μέσω της Radon-Nikodym παραγώγου $\frac{dQ}{dP}=x'$, το οποίο κάποιες φορές θα συμβολίζεται με $\varphi_Q=\frac{dQ}{dP}$.

Ακόμα, συμβολίζουμε με F_X την συνάρτηση κατανομής του X σύμφωνα με το μέτρο πιθανότητας P.

Θέτουμε επίσης τις εξής έννοιες:

$$Z_X(x)=\inf\left\{z\in\mathbb{R}:F_X(z)>x\right\},\ \ \forall x\in[0,1),\ \ \forall X\in L^{\infty}$$

$$\hat{Z}_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ Z_X(x), & 0\leq x<1\\ \lim\limits_{x\to 1^-}Z_X(x), & x\geq 1\end{cases}$$

$$\rho_0(X)=\text{ess.sup}(-X),\ \ \forall X\in L^{\infty}$$ [203]

202 "Law invnariant convex risk measures", Frittelli M. και Gianin E., Advances in mathematical Economics, 2005.

$$\rho_\alpha(X)=\frac{1}{\alpha}\int_{1-\alpha}^{1} Z_{-X}(x)dx,\ \ \forall X\in L^\infty,\ \ \forall\alpha\in(0,1]$$

Θεώρημα 7.3

Έστω $\rho: L^\infty \to \mathbb{R}$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

1. Το ρ είναι ένα law-invariant κυρτό μέτρο κινδύνου
2. Υπάρχει ένα μη κενό κυρτό σύνολο M μέτρων πιθανότητας και ένα κυρτό συναρτησιακό $G: L^1 \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ με $\inf_{Q\in \mathrm{M}} G(\varphi_Q)=0$ τέτοιο ώστε:

$$\rho(X)=\sup_{Q\in\mathrm{M}}\left(\int_{(0,1]}\rho_\alpha(X)\mu_Q d\alpha - G(\varphi_Q)\right),\ \ \forall X\in L^\infty$$

για κάθε $Q\in\mathrm{M}$, το μ_Q είναι ένα μέτρο πιθανότητας στο $(0,1]$ που ορίζεται ως εξής:

$$\mu_Q d\alpha = \alpha d\hat{Z}_{\varphi_Q}(1-\alpha).$$

Πρόταση 7.1

Έστω ότι $\rho: L^\infty \to \mathbb{R}$ είναι ένα law-invariant συνεκτικό μέτρο κινδύνου το οποίο είναι lower semi-continuous, δηλαδή $\forall c\in\mathbb{R}$, το σύνολο $\{X\in L^\infty : \rho(X)\le c\}$ είναι $\sigma(L^\infty, L^1)-$κλειστό.

Αν υπάρχει μια τυχαία μεταβλητή $Y\in L^\infty$ που δεν είναι σταθερή P-σ.β. και είναι τέτοια ώστε: $\rho(X)=-\rho(-Y)$, τότε:

$$\rho(X)=\mathrm{E}_P[-X],\ \ \forall X\in L^\infty.$$

<u>Παρατήρηση:</u>

Η ιδιότητα $\rho(X)=-\rho(-Y)$ είναι ισοδύναμη με την $\rho(\lambda Y)=\lambda\rho(Y),\ \forall|\lambda|\le 1$. Στη περίπτωση που έχουμε κυρτό μέτρο δεν ισχύει αυτή η ισοδυναμία οπότε έχουμε την επόμενη πρόταση:

Πρόταση 7.2

Έστω ότι $\rho: L^\infty \to \mathbb{R}$ είναι ένα law-invariant κυρτό μέτρο κινδύνου το οποίο είναι lower semi-continuous, δηλαδή $\forall c\in\mathbb{R}$, το σύνολο $\{X\in L^\infty : \rho(X)\le c\}$ είναι $\sigma(L^\infty, L^1)-$κλειστό.

Αν υπάρχει μια τυχαία μεταβλητή $Y\in L^\infty$ που δεν είναι σταθερή P-σ.β. και είναι τέτοια ώστε: $\rho(\lambda Y)=\lambda\rho(Y),\ \forall|\lambda|\le 1$, τότε:

$$\rho(X)=\mathrm{E}_P[-X],\ \ \forall X\in L^\infty.$$

[203] Με τον όρο ess.sup και ess.inf εννοούμε τα infimum και supremum, ορισμένα σε χώρους μέτρου. Η μόνη διαφορά είναι ότι ισχύουν σχεδόν παντού, δηλαδή παντού εκτός από ένα σύνολο του οποίου το μέτρο είναι μηδέν.

Συνέπεια:

Αν $\rho: L^{\infty} \to \mathbb{R}$ είναι ένα κυρτό μέτρο κινδύνου και υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα μέτρο πιθανότητας Q, τέτοιο ώστε: $Q \sim P$ και το ρ είναι law-invariant στο Q. Τότε: Το ρ δεν είναι γραμμικό στον L^{∞} αν και μόνον αν δεν είναι γραμμικό σε κάθε υποσύνολο που παράγεται από κάθε τυχαία μεταβλητή $Y \in L^{\infty}$, η οποία δεν είναι σταθερή P-σ.β.

4.4.2. Μέτρα κινδύνου σε χώρους Orlicz Heart[204]

Χώροι Orlicz και Orlicz Spaces

Θεωρούμε έναν διανυσματικό (ή γραμμικό) χώρο $\mathcal{E}$ εφοδιασμένο με μία μερική διάταξη $\leq$. Τότε ο χώρος $(\mathcal{E}, \leq)$ καλείται μερικά διατεταγμένος.

Ο χώρος $\mathcal{E}$ καλείται διανυσματικός σύνδεσμος (lattice) αν για κάθε δύο στοιχεία $x, y \in \mathcal{E}$, υπάρχουν τα supremum και infimum,δηλαδή υπάρχουν τα:

$$x \vee y = \sup\{x, y\}$$
$$x \wedge y = \inf\{x, y\}$$

Και έχουν τις εξής ιδιότητες:

1. αν $x \leq y$ τότε $x+z \leq y+z, \ \forall x, y, z \in \mathcal{E}$
2. αν $0 \leq x$ τότε $0 \leq tx, \ \forall x \in \mathcal{E}, \ \forall t \in \mathbb{R}^{+}$

Δηλώνουμε με: $\mathcal{E}_{+} = \{x \in \mathcal{E} : 0 \leq x\}$ τον θετικό κώνο του $\mathcal{E}$ και για $x \in \mathcal{E}$ θέτουμε:

$$x^{+} = x \vee 0$$
$$x^{-} = (-x) \vee 0$$
$$|x| = x \vee (-x)$$

είναι αντίστοιχα το θετικό μέρος του στοιχείου x, το αρνητικό μέρος και η απόλυτη τιμή.

Μια νόρμα $\|\cdot\|$ σε ένα γραμμικό σύνδεσμο $\mathcal{E}$ καλείται lattice νόρμα αν:

$$|x| \leq |y| \Rightarrow \|x\| \leq \|y\|, \ \forall x, y \in \mathcal{E}$$

Συγκεκριμένα, ένας Banach γραμμικός σύνδεσμος είναι ένας πραγματικός Banach χώρος $\mathcal{E}$ εφοδιασμένος με μία μερική διάταξη $\leq$ τέτοιος ώστε ο $(\mathcal{E}, \leq)$ να είναι ένας γραμμικός σύνδεσμος και η νόρμα στον $\mathcal{E}$ να είναι lattice νόρμα.

[204] “Risk Measures on Orlicz hearts”, Cheridito P., Li T., Math. Finance, 2009.

Έστω λοιπόν ότι ο $\mathcal{E}$ είναι Banach γραμμικός σύνδεσμος και ο $\mathcal{E}_+$ είναι ο θετικός του κώνος. Συμβολίζουμε με $\mathcal{E}^*, \mathcal{E}_+^*$ τον δυικό χώρο του $\mathcal{E}$ και τον δυικό του θετικό κώνο αντίστοιχα. Επίσης θέτουμε $\langle x, x^* \rangle$ το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο.

Ορισμός 8.1

Μια απεικόνιση $h:[0,\infty]\to[0,\infty]$ καλείται συνάρτηση Young αν η h είναι αριστερά συνεχής, αύξουσα, κυρτή με $h(0)=0$ και $\lim\limits_{r\to+\infty}\dfrac{h(r)}{r}=\infty$.

<u>Παρατήρηση:</u>

Η h είναι γενικά συνεχής εκτός από πιθανώς ένα σημείο που πηδάει στο ∞.
Η υπόθεση της συνέχειας από αριστερά χρειάζεται μόνο για αυτό το σημείο.

<u>Παράδειγμα:</u>

Η συνάρτηση conjugate: $h^*(y)=\sup\limits_{x\geq 0}\{xy-\varphi(x)\}$, $\forall y\in[0,\infty]$ είναι συνάρτηση Young.

Ορισμός 8.2

Μια απεικόνιση $\alpha:\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}}$ καλείται συνάρτηση χρησιμότητας αν η α είναι αύξουσα, κοίλη και συνεχής στο $\mathbb{R}$.

<u>Παρατήρηση:</u>

Χρειαζόμαστε το ότι η συνάρτηση είναι κοίλη για να ελαχιστοποιήσουμε τον κίνδυνο και το ότι είναι αύξουσα για να μεγιστοποιήσουμε το κέρδος.

Έστω $(\Omega,\mathfrak{I},P)$ ένας χώρος πιθανότητας, $\mathcal{E}$ είναι Banach γραμμικός σύνδεσμος και θεωρούμε τους χώρους $L^p(\Omega,\mathfrak{I},P)$ για $p\geq 1$ και τον δυικό του $L^q(\Omega,\mathfrak{I},P)$ όπου $p^{-1}+q^{-1}=1$.
Επίσης, θεωρούμε τον χώρο $L^\infty(\Omega,\mathfrak{I},P)$ εφοδιασμένο με τη νόρμα:

$$\|y\|_\infty=\text{ess.sup}\{\|y(\omega)\|:\omega\in\Omega\}.$$

Ορισμός 8.3

Έστω h μια συνάρτηση Young και $c>0$. Θεωρούμε το χώρο:

$$L_c^h(\Omega,\mathfrak{I},P)=\left\{X:\Omega\to\mathcal{E}: X \text{ συνεχής και } \int_\Omega h\left(c\|X(\omega)\|\right)dP(\omega)<\infty\right\}$$

1) Ο χώρος Orlicz ορίζεται ως:

$$L^h=L^h(\Omega,\mathfrak{I},P)=\bigcup_{c>0}L_c^h(\Omega,\mathfrak{I},P)$$

με νόρμα:

$$\|X\|_h = \inf\left\{\lambda > 0 : E_P\left[h\left(\frac{|X|}{\lambda}\right)\right] \leq 1\right\}$$

2) Ο χώρος Orlicz Heart ορίζεται ως εξής:

$$\mathcal{O}^h = \left\{X \in L^h : E_P\left[h\left(c|X|\right)\right] < \infty \;\; \forall c > 0\right\}$$

και η νόρμα για ενός στοιχείου $Z \in L^{h^*}(\Omega, \Im, P)$ που σχετίζεται με το $\mathcal{O}^h(\Omega, \Im, P)$ είναι:

$$\|Z\|_{h^*}^* = \sup\left\{E\left[\langle Z, X\rangle\right] : \|X\|_{h^*} \leq 1\right\}, \;\; \forall X \in L^{h^*}(\Omega, \Im, P).$$

<u>Παρατήρηση:</u>

Ισχύει ότι: $\left(\mathcal{O}^h(\Omega, \Im, P)\right)^* = L^{h^*}(\Omega, \Im, P)$.

Μέτρα Κινδύνου με τιμές σε χώρους Banach lattices

Ορισμός 8.4

Μια απεικόνιση $\rho : \mathcal{O}^h(\Omega, \Im, P) \to \mathcal{E}$ είναι μέτρο κινδύνου αν ικανοποιεί τα παρακάτω αξιώματα:

1. Μονοτονία:

$$\forall X, Y \in \mathcal{O}^h \text{ με } X \leq Y \text{ τότε } \rho(X) \leq \rho(Y)$$

2. Translation Invariance:

$$\forall x_0 \in \mathcal{E}, \;\; \forall X \in \mathcal{O}^h : \;\; \rho\left(X + \mathit{1}_{\Omega x_0}\right) = \rho(X) - x_0$$

3. Θετική Ομοιογένεια:

$$\forall \beta \geq 0, \;\; \forall X \in \mathcal{O}^h : \;\; \rho(\beta X) = \beta \rho(X)$$

4. Subadditivity:

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y), \;\; \forall X, Y \in \mathcal{O}^h$$

5. Κυρτότητα:

$$\rho\left(\lambda X + (1-\lambda)Y\right) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y), \;\; \forall X, Y \in \mathcal{O}^h, \;\; \forall \lambda \in [0,1]$$

Ορισμός 8.5

Ορίζουμε το σύνολο αποδεκτών καταστάσεων του μέτρου ρ ως εξής:

$$A = \left\{X \in \mathcal{O}^h : \rho(X) \leq 0\right\}.$$

Πρόταση 8.1

Έστω $\mathcal{O}^h$ είναι ένας χώρος Orlicz Heart και $\rho : \mathcal{O}^h \to \mathcal{E}$ ένα μέτρο κινδύνου με αντίστοιχο σύνολο αποδεκτών καταστάσεων A. Τότε:

1) Έστω $X \in A$, $Y \in \mathcal{O}^h$. Αν $X \leq Y$ τότε $Y \in A$.

2) $\rho(X) = \inf\left\{x_0 \in \mathcal{E} : X + \mathit{1}_{\Omega x_0} \in A\right\}, \;\; \forall X \in \mathcal{O}^h$

3) $\inf\left\{x_0 \in \mathcal{E} : \mathit{1}_{\Omega x_0} \geq Z, \text{ για κάποιο } Z \in A\right\} \in \mathcal{E}$

Συνέπεια:

Αν $\rho : \mathcal{O}^h \to \mathcal{E}$ είναι ένα μέτρο κινδύνου με τιμές σε ένα Banach lattice χώρο, τότε:

1) Αν το μέτρο ρ είναι κυρτό, τότε και το A είναι κυρτό.
2) Αν το μέτρο ρ είναι συνεκτικό, τότε το A είναι κυρτός κώνος.
3) $\inf\left\{x_0 \in \mathcal{E} : X + \mathcal{I}_{\Omega x_0} \geq Z, \text{ για κάποιο } Z \in \mathrm{A}\right\} \in \mathcal{E}, \ \ \forall X \in \mathcal{O}^h$.

Πρόταση 8.2

Έστω $\mathcal{O}^h$ είναι ένας χώρος Orlicz Heart και $\mathcal{B}$ είναι ένα υποσύνολο του $\mathcal{O}^h$ με την ιδιότητα (3) της πρότασης 8.1 Τότε η:

$$\rho(X) = \inf\left\{x_0 \in \mathcal{E} : X + \mathcal{I}_{\Omega x_0} \geq Z, \text{ για κάποιο } Z \in \mathcal{B}\right\}, \ \ \forall X \in \mathcal{O}^h$$

Ορίζει ένα μέτρο κινδύνου στον χώρο $\mathcal{O}^h$ με αντίστοιχο σύνολο αποδεκτών καταστάσεων A, το οποίο είναι το μικρότερο υποσύνολο του $\mathcal{O}^h$ που περιέχει το $\mathcal{B}$ και ικανοποιεί την ιδιότητα (1) της πρότασης 8.1.

Αν το $\mathcal{B}$ είναι κυρτό, τότε και το ρ θα είναι κυρτό. Αν το $\mathcal{B}$ είναι κυρτός κώνος, τότε το ρ θα είναι συνεκτικό. Αν το $\mathcal{B}$ ικανοποιεί την ιδιότητα (3) της συνέπειας, τότε το ρ περιέχεται στο $\mathcal{E}$.

Ορισμός 8.6

Ένα μέτρο κινδύνου $\rho : \mathcal{O}^h \to \mathcal{E}$ έχει την εξής αναπαράσταση:

$$\rho(X) = \max_{Q \in M^{h^*}}\left\{\mathrm{E}_P[-X] - \alpha^{\min}(Q)\right\}, \ \ \forall X \in \mathcal{O}^h$$

Όπου $\mathrm{M}^{h^*} = \left\{Q \in \mathrm{M}_1 : \dfrac{dQ}{dP} \in L^{h^*}\right\}$ και $\alpha^{\min}$ είναι η ελάχιστη συνάρτηση penalty.

Παραδείγματα

(1) Για $h(x) = x^p, \ \forall p \in [1, \infty)$ το σύνολο $\mathcal{O}^h$ συμπίπτει με το $L^p(\Omega, \Im, P)$. Οπότε θα έχουμε και $L^{h^*} = L^q$. Άρα η αναπαράσταση πεπερασμένων κυρτών μέτρων στον $L^p(\Omega, \Im, P)$ είναι μια ειδική περίπτωση της αναπαράστασης των μέτρων σε χώρους Orlicz Heart.

(2) Για $h(x) = e^x - 1$ η συνάρτηση conjugate θα είναι $h^*(x) = (y \log y - y + 1)\mathcal{I}_{[1,\infty)}(y)$ και ο χώρος Orlicz Heart θα είναι:

$$\mathcal{O}^h = \left\{X : \mathrm{E}_P\left[e^{c|X|}\right] < \infty, \ \forall c > 0\right\}, \ \ \mathcal{O}^{h^*} = \left\{X : \mathrm{E}_P\left[X|\log|X|\right] < \infty\right\}.$$

Haezendonck μέτρα κινδύνου[205]

Ένα μέτρο κινδύνου $\rho : \mathcal{O}^h \to \mathcal{E}$ με αναπαράσταση:

$$\rho(X) = \inf_{z \in \mathbb{R}} \left\{ \left\| (z - X)^+ \right\|_h - z \right\}$$

ονομάζεται μέτρο κινδύνου Haezendonck.

- Αν το μέτρο ρ είναι συνεκτικό τότε έχει αναπαράσταση:

  $$\rho(X) = \max_{Q \in M^h} E_Q[-X]$$

  Όπου $M^h = \{ Q << P : E_Q[Y] \le \|Y\|_h, \ \forall Y \in L_+^\infty \}$

- Στην ειδική περίπτωση που $h(x) = \frac{1}{\lambda} x, \ \forall \lambda \in (0,1]$ το σύνολο M^h συμπίπτει με το $\mathcal{Q}_\lambda$ όποτε παίρνουμε την Conditional Value-At-Risk, με ένα επίπεδο λ.

4.4.3. Εντροπικά Μέτρα Κινδύνου (Entropic Risk Measures)

Σε αυτή την ενότητα επικεντρωνόμαστε σε μία κατηγορία των μέτρων κινδύνου που ορίζονται με τους όρους της *σχετικής εντροπίας* και καλούνται εντροπικά μέτρα κινδύνου.[206]

Η εντροπία στην χρηματοοικονομική ανάλυση είναι πολύ σημαντική καθώς ερμηνεύεται σαν τον μέσο όρο της πληροφορίας που είναι διαθέσιμη σε κάθε γεγονός που έχει πραγματοποιηθεί.

$$H(Q|P) = \begin{cases} E_Q\left[\log \frac{dQ}{dP}\right], & \text{αν } Q<<P \\ +\infty, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Σημειώνουμε ότι οι επόμενες έννοιες που θα ορίσουμε ισχύουν και στη περίπτωση που αντικαθιστούμε την σχετική εντροπία με μια γενική συνάρτηση penalty.

Θεωρούμε αρχικά τη περίπτωση που η συνάρτηση penalty είναι της μορφής:

$$\alpha(Q) = \frac{1}{\gamma} H(Q|P)$$

Για κάποια σταθερά $\gamma > 0$.

Ορισμός 9.1

Το κυρτό μέτρο κινδύνου e_γ που ορίζεται ως:

$$e_\gamma(X) = \sup_{Q \in M_1} \left\{ E_Q[-X] - \frac{1}{\gamma} H(Q|P) \right\}$$

καλείται κυρτό εντροπικό μέτρο με παράμετρο γ.

205 "Convex Risk Measures: Basic Facts, Law-invariance and beyond, Asymptotics for Large Portfolios", Follmer H., Knispel T., 2010.

206 "Conditional and dynamic convex risk measures", Detlefsen K., Scandolo G.

Όπου, M_1 είναι το σύνολο όλων των μέτρων πιθανότητας στον $(\Omega,\Im)$.

Χρησιμοποιώντας την εξής ιδιότητα για τη σχετική εντροπία:

$$H(Q\,|\,P)=\sup_{X\in L^{\infty}}\left\{E_Q[-X]-\log E_P\left[e^{-X}\right]\right\}$$

Το μέτρο e_γ παίρνει τη μορφή:

$$e_\gamma(X)=\frac{1}{\gamma}\log E_P\left[e^{-\gamma X}\right]$$

Προφανώς, είναι καλά ορισμένο σαν πεπερασμένο κυρτό μέτρο στο Orlicz Heart:

$$\mathcal{O}^h=\left\{X:\ E_P\left[e^{c|X|}\right]<\infty,\ \forall c>0\right\},\ \ \mathcal{O}^{h^*}=\left\{X:\ E_P\left[X\,|\log|X|\right]<\infty\right\}$$

Σύμφωνα με τη συνάρτηση: $h(x)=e^x-1$.

Το σύνολο των αποδεκτών καταστάσεων του μέτρου e_γ παίρνει τη μορφή:

$$A=\left\{X:\ e_\gamma(X)\le 0\right\}=\left\{X:\ E_P\left[l_\gamma(-X)\right]\le 1\right\}=\left\{X:\ E_P\left[u_\gamma(-X)\right]\ge 0\right\}$$

Όπου $l_\gamma(x)=e^{\gamma x}$ είναι η κυρτή συνάρτηση απώλειας και $u_\gamma(x)=1-e^{-\gamma x}$ είναι η εκθετική συνάρτηση χρησιμότητας.

Επιπλέον, το κυρτό εντροπικό μέτρο κινδύνου είναι μια ειδική περίπτωση του shortfall risk, που θα δούμε στις εφαρμογές.

<u>Παρατήρηση:</u>

- Η απεικόνιση e_γ είναι αύξουσα ως προς το γ και αυστηρώς αύξουσα όταν η X δεν είναι μια σταθερά P-σ.β.
- Επιπλέον έχουμε ότι:

$$e_0(X)=\lim_{\gamma\downarrow 0}e_\gamma(X)=E_P[-X]$$

  και

$$e_\infty(X)=\lim_{\gamma\uparrow\infty}e_\gamma(X)=\text{ess.sup}(-X)$$

- Τα κυρτά εντροπικά μέτρα κινδύνου μπορούν επίσης να χαρακτηριστούν από την εξής ιδιότητα:
  Αν το ρ είναι ένα μέτρο κινδύνου και το $-\rho$ είναι ισοδύναμο σύμφωνα με κάποια αυστηρώς αύξουσα και συνεχή συνάρτηση u, τότε το ρ πρέπει να είναι ένα κυρτό εντροπικό ρίσκο e_γ με κάποια παράμετρο $\gamma\ge 0$.

Ορισμός 9.2

Για κάθε $c>0$ το μέτρο κινδύνου ρ_c που ορίζεται ως εξής:

$$\rho_c(X)=\sup_{\substack{Q\in M_1\\ H(Q|P)\le c}}E_Q[-X],\ \ \forall X\in L^{\infty}$$

Καλείται συνεκτικό εντροπικό μέτρο κινδύνου για κάποιο επίπεδο c.

Το supremum υπάρχει, (προκύπτει από τη κλασική περίπτωση των συνεκτικών μέτρων).
Πράγματι, έστω η εκθετική οικογένεια:

$$\mathcal{Q}_{X,P} = \{ Q_{X,\gamma} \mid \gamma \in \mathbb{R} \}$$

Που παράγεται από το P και το –X, όπου:

$$\frac{dQ_{X,\gamma}}{dP} = \frac{e^{-\gamma X}}{E_P\left[e^{-\gamma X}\right]}$$

Αν

$$p(X) = P[X = \text{ess.inf} X] > 0$$

τότε συμπεριλαμβάνουμε και το μέτρο:

$$Q_{X,\infty} = \lim_{\gamma \uparrow \infty} Q_{X,\gamma} = P[\cdot \mid X = \text{ess.inf} X]$$

Πρόταση 9.1

Για κάθε $c \in (0, -\log p(X))$ έχουμε ότι:

$$\rho_c(X) = \max_{\substack{Q \in M_1 \\ H(Q|P) \le c}} E_Q[-X] = E_{Q_{X,\gamma_c}}[-X]$$

Όπου, $Q_{X,\gamma_c} \in \mathcal{Q}_{X,P}$ και $\gamma_c > 0$ είναι τέτοιο ώστε: $H(Q_{X,\gamma_c} \mid P) = c$

Και επιπλέον ισχύει ότι:

$$\rho_c(X) = \min_{\gamma > 0} \left(\frac{c}{\gamma} + e_\gamma(X) \right) = \frac{c}{\gamma_c} + e_{\gamma_c}(X)$$

Αν $p(X) > 0$ και $c \ge -\log p(X)$ τότε:

$$\rho_c(X) = E_{Q_{X,\infty}}[-X] = \text{ess.sup}(-X).$$

Η παραπάνω πρόταση λέει ότι το συνεκτικό μέτρο κινδύνου ρ_c είναι συνεχές και από πάνω και από κάτω.
Μας δείχνει επίσης ότι είναι καλά ορισμένο σαν πεπερασμένο συνεκτικό μέτρο στο Orlicz Heart:

$$\mathcal{O}^h = \left\{ X : E_P\left[e^{c|X|}\right] < \infty, \ \forall c > 0 \right\}, \ \mathcal{O}^{h^*} = \left\{ X : E_P\left[X \mid \log|X|\right] < \infty \right\}$$

Τέλος, η απεικόνιση ρ_c είναι αύξουσα στο c με:

$$\lim_{c \downarrow 0} \rho_c(X) = E_P[-X]$$

και

$$\lim_{c \uparrow \infty} \rho_c(X) = \text{ess.sup}(-X).$$

4.4.4. Δυναμικά μέτρα κινδύνου (Dynamic Risk Measures)

Τα μέτρα κινδύνου που έχουμε μελετήσει μέχρι τώρα αντιμετωπίζουν το πρόβλημα της ποσοτικοποίησης του κινδύνου οικονομικών καταστάσεων σήμερα με ημερομηνία λήξης μια μελλοντική χρονική στιγμή Τ. Με αυτή την έννοια τα μέτρα κινδύνου θεωρούνται *«στατικά»*.

Τα μοντέλα που αφορούν σε μία περίοδο της μέτρησης κινδύνου δεν λαμβάνουν υπόψην ούτε τη πηγή του επιπλέον απαιτούμενου κεφαλαίου στην αρχή της περιόδου, ούτε τις πραγματικές συνέπειες ενός μη επιθυμητού γεγονότος στο τέλος της ίδιας περιόδου.

Επίσης, οι αγορές κεφαλαίου στις οποίες απαιτείται διαχείριση του κινδύνου είναι δυναμικές εξ΄ ορισμού τους, επομένως το μέτρο του κινδύνου απαιτείται να είναι δυναμικό.

Ακόμα, τα μέτρα κινδύνου σε ένα δυναμικό πλαίσιο μπορεί να μας δώσει επιπλέον πληροφορίες για να πάρουμε επενδυτικές αποφάσεις. Αν ένα δυναμικό μέτρο κίνδυνου υπολογίζει το ρίσκο στην αρχή της επένδυσης τότε μια μελλοντική τιμή του κινδύνου θα λαμβάνει υπόψην και τη σημερινή, κάτι που δεν είναι εφικτό από τα στατικά μέτρα κινδύνου.[207]

Τα δυναμικά μέτρα κινδύνου, έχουν περισσότερες επιθυμητές ιδιότητες από τα στατικά μέτρα κινδύνου, καθώς καλύπτουν αρκετές ατέλειες.

Οι Cvitanic & Karatzas[208] όρισαν τα δυναμικά μέτρα σε πλήρεις αγορές ως εξής:

$$\rho^{X_0}(X) = \sup_{\gamma\in\Gamma} \inf_{\pi\in A(X_0)} \mathrm{E}_{Q_\gamma}\left[\left(X - \pi_T^{X_0}\right)^+\right]$$

Όπου $\left(Q_\gamma\right)_{\gamma\in\Gamma}$ είναι μια ακολουθία μέτρων πιθανότητας και το $A(X_0)$ είναι η κλάση όλων των επιθυμητών χαρτοφυλακίων με αρχική τιμή X_0 και το $\pi_T^{X_0}$ είναι η τιμή του χαρτοφυλακίου την τελική χρονική στιγμή Τ. Όρισαν, δηλαδή, το ρίσκο μιας κατάστασης σαν το υψηλότερο αναμενόμενο όριο σύμφωνα με ένα σύνολο μέτρων πιθανότητας, όταν η κατάσταση είναι αντισταθμισμένη δεδομένου ενός αρχικού κεφαλαίου. Ασχολήθηκαν με το να μετρήσουν τον κίνδυνο που προέρχεται από την αδυναμία του επενδυτή να αντισταθμίσει τη κατάσταση Χ με την αρχική τιμή X_0. Όμως, η δυναμικότητα του παραπάνω μέτρου αφορά στην αναπροσαρμογή του χαρτοφυλακίου μέσα στο χρονικό διάστημα και όχι στην μέτρηση του ρίσκου σε όλο το χρονικό διάστημα.

Τα νομισματικά μέτρα κινδύνου που μελετάμε δεν υποθέτουν την πληρότητα των αγορών, όποτε θα αναλύσουμε ορίσουμε τα δυναμικά μέτρα αξιωματικά.

Έστω $(\rho_t)_{t\in[0,T]}$,όπου για κάθε t η ρ_t είναι μια τυχαία μεταβλητή που αναπαριστά τον κίνδυνο των οικονομικών καταστάσεων τη χρονική στιγμή t, δηλαδή εξαρτάται από τη πληροφορία που είναι διαθέσιμη την χρονική στιγμή t. Επιπλέον, τα δυναμικά μέτρα κινδύνου θα έπρεπε να ικανοποιούν κάποιες «οριακές συνθήκες» στην χρονική περίοδο.

207 "Dynamic convex risk measures", Fritelli M., Gianin E.., New risk measures for the 21th century, 2004, G Szego ed. John Wiley & Sons p. 227-248.

208 "On dynamic measures of risk", Cvitanic J., Karatzas I., 1998.

Ορίζουμε με ρ_0 να είναι ένα στατικό μέτρο κινδύνου και το ρ_T δεν είναι άλλο παρά το αντίθετο του κέρδους της οικονομικής κατάστασης.

Έστω $(\Omega,\mathfrak{I},P)$ ένας χώρος πιθανότητας με φιλτράρισμα $(\mathfrak{I}_t)_{0\le t\le T}$ και έστω $L^p(\mathfrak{I}_T)=L^p(\Omega,\mathfrak{I}_T,P)$, $p\ge 1$ να είναι ο χώρος όλων των πραγματικών $\mathfrak{I}_T$-μετρήσιμων και p-ολοκληρώσιμων τυχαίων μεταβλητών. Έστω $L^0(\Omega,\mathfrak{I}_t,P)$ είναι ο χώρος όλων των τυχαίων μεταβλητών ορισμένων στο χώρο $(\Omega,\mathfrak{I}_t,P)$.

Ο γενικός ορισμός ενός δυναμικού νομισματικού μέτρου κινδύνου είναι ο εξής:

Ορισμός 10.1

Μια απεικόνιση $\rho=(\rho_t)_{t\in[0,T]}$ καλείται δυναμικό μέτρο κινδύνου αν:

1. $\rho_t : L^p(\mathfrak{I}_T)\to L^0(\Omega,\mathfrak{I}_t,P),\ \forall t\in[0,T]$.
2. Το ρ_0 είναι στατικό μέτρο κινδύνου.
3. $\rho_T(X)=-X$ P-σ.β., $\forall X\in L^p(\mathfrak{I}_T)$.

Τα δυναμικά μέτρα κινδύνου ικανοποιούν τα εξής αξιώματα:

1. Κυρτότητα:

$$\forall t\in[0,T],\ \text{το } \rho_t \text{ είναι κυρτή P-σ.β}$$

2. Θετικότητα (positivity):

$$\text{αν } X\ge 0 \ \Rightarrow\ \forall t\in[0,T],\ \rho_t(X)\le\rho_t(0) \ \text{P-σ.β.}$$

3. Μονοτονία:

$$\text{αν } X\ge Y \ \Rightarrow\ \forall t\in[0,T],\ \rho_t(X)\le\rho_t(Y) \ \text{P-σ.β.}$$

4. subadditivity:

$$\forall X,Y\in L^p(\mathfrak{I}_T),\ \forall t\in[0,T],\ \rho_t(X+Y)\le\rho_t(X)+\rho_t(Y) \ \text{P-σ.β.}$$

Θετική Ομοιογένεια

$$\forall\alpha\ge 0,\forall X\in L^p(\mathfrak{I}_T),\forall t\in[0,T],\ \rho_t(\alpha X)=\alpha\rho_t(X) \ \text{P-σ.β.}$$

5. Translation invariance:

$\forall t\in[0,T]$, $\forall C$ $\mathfrak{I}_T$ −μετρήσιμη στον $L^p(\mathfrak{I}_T)$ και $\forall X\in L^p(\mathfrak{I}_T)$,

$$\rho_t(X+C)=\rho_t(X)-C \ \text{P-σ.β.}$$

Σταθερότητα (stability):

$$\forall c\in\mathbb{R},\ \forall t\in[0,T],\ \rho_t(c)=-c \ \text{P-σ.β.}$$

<u>Σημείωση:</u>

Το αξίωμα 5 δεν ισχύει μόνο για stable τυχαίες μεταβλητές, αλλα για οποιαδήποτε $\mathfrak{I}_T$-μετρήσιμη. Το κίνητρο για αυτό το πιο δυνατό αξίωμα είναι ότι οποιαδήποτε $\mathfrak{I}_T$-μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή είναι «γνωστή τη χρονική στιγμή t», οπότε συμπεριφέρεται σαν σταθερή.

Ορισμός 10.2

1) Ένα δυναμικό μέτρο κινδύνου $\rho = (\rho_t)_{t\in[0,T]}$ καλείται κυρτό αν:

1. $\forall t \in [0,T]$, το ρ_t είναι κυρτή P-σ.β
2. $\rho_t(0) = 0$.

2) Ένα δυναμικό μέτρο κινδύνου $\rho = (\rho_t)_{t\in[0,T]}$ καλείται συνεκτικό αν:

1. αν $X \geq 0 \ \Rightarrow \ \forall t \in [0,T],\ \rho_t(X) \leq \rho_t(0)$ P-σ.β.,
2. $\forall \alpha \geq 0, \forall X \in L^p(\Im_T), \forall t \in [0,T],\ \rho_t(\alpha X) = \alpha \rho_t(X)$ P-σ.β.
3. $\forall t \in [0,T]$, $\forall C$ $\Im_T$ −μετρήσιμη στον $L^p(\Im_T)$ και $\forall X \in L^p(\Im_T)$

$$\rho_t(X + C) = \rho_t(X) - C \ \text{P-σ.β.}$$

3) Ένα δυναμικό μέτρο κινδύνου $\rho = (\rho_t)_{t\in[0,T]}$ καλείται συνεπές με το χρόνο αν:

$$\rho_0(X I_A) = \rho_0[-\rho_t(X) I_A],\ \forall t \in [0,T],\ \forall X \in L^p,\ \forall A \in \Im_t$$

<u>Παρατήρηση:</u>

Ο λόγος που παίρνουμε τη ποσότητα $-\rho_t(X)$ αντί για $\rho_t(X)$ στον ορισμό του συνεπή μέτρου είναι εξαιτίας της οικονομικής ερμηνείας της ρ_t.

Θα παρουσιάσουμε δύο κατηγορίες δυναμικών μέτρων κινδύνου:

Α. Η πρώτη κατηγορία προκύπτει από την επέκταση των αναπαραστάσεων των ήδη γνωστών συνεκτικών και κυρτών μέτρων κινδύνου.

Β. Η δεύτερη προκύπτει από τις backward στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις και καλείται «Υπό συνθήκη g-expectation».

Α. <u>Αναπαράσταση των συνεκτικών και κυρτών δυναμικών μέτρων κινδύνου.</u>

Έστω P είναι ένα κυρτό σύνολο απολύτως συνεχών μέτρων πιθανότητας ορισμένα στο χώρο $(\Omega, \Im_T)$ και $\rho = (\rho_t)_{0\leq t\leq T}$ είναι ένα δυναμικό μέτρο κινδύνου.

Για κάθε $t \in [0,T]$, έστω $F_t : P \to \mathbb{R}$ ένα κυρτό συναρτησιακό τέτοιο ώστε:

$$\inf_{Q\in P} F_t(Q) = 0$$

1) Θέτουμε:

$$\rho_t(X) = \operatorname{ess.sup}_{Q\in P}\left(E_Q[-X \mid \Im_T] - F_t(Q)\right),\ \forall X \in L^p,\ \forall t \in [0,T]$$

Τότε το $\rho = (\rho_t)_{0\leq t\leq T}$ είναι ένα δυναμικό κυρτό μέτρο κινδύνου.

2) Θέτουμε:

$$\rho_t(X) = \operatorname{ess.sup}_{Q\in P}\left(E_Q[-X \mid \Im_T]\right),\ \forall X \in L^p,\ \forall t \in [0,T]$$

Τότε το $\rho = (\rho_t)_{0\leq t\leq T}$ είναι ένα δυναμικό συνεκτικό μέτρο κινδύνου.

B. Υπό συνθήκη g-expectation

Έστω $(\Omega,\Im,P)$ ένας χώρος πιθανότητας, $(B_t)_{t\geq 0}$ μια κανονική d-διάστατη κίνηση Brown και $(\Im_t)_{\tau\geq 0}$ το φιλτράρισμα, που είναι αυτό που παράγει η κίνηση Brown. Έστω T>0 ο χρονικός ορίζοντας και $L^2_{\Im}(T,\mathbb{R}^n)$ ο χώρος όλων των προσαρμοσμένων ανελίξεων $(V_t)_{t\geq 0}$ με τιμές στον $\mathbb{R}^n$ τέτοιες ώστε:

$$\mathrm{E}\left[\int_0^T \|V_t\|_n^2 dt\right] < +\infty$$

όπου $\|\cdot\|_n$ είναι η ευκλείδεια νόρμα στον $\mathbb{R}^n$.

Έστω $g:\Omega\times[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ η οποία μας εξασφαλίζει την ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης της backward στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης:

$$\begin{cases} -dY_t = g(t,Y_t,Z_t)dt - Z_t dB_t,\ \forall t\in[0,T] \\ Y_T = X \end{cases}$$

Η εξίσωση αυτή για κάθε συνθήκη $X\in L^2(\Im_T)$ έχει μοναδική λύση,
δηλαδή υπάρχει ένα ζεύγος $(Y_t,Z_t)_{t\in[0,T]}\in L^2_{\Im}(T,\mathbb{R})\times L^2_{\Im}(T,\mathbb{R}^d)$ επαληθεύει την εξίσωση.

Ορισμός 10.3

Για κάθε $X\in L^2(\Im_T)$ και κάθε $t\in[0,T]$, η υπό συνθήκη g-expectation του X κάτω από την $\Im_t$ ορίζεται ως:

$$\mathcal{E}_g[X\,|\,\Im_t] = Y_t$$

Συγκεκριμένα, για t=0: $\mathcal{E}_g[x]=y_0$ καλείται g-expectation.

Ορισμός 10.4

Έστω $g:\Omega\times[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ και έστω $\rho: L^2(\Im_T)\to L^2_{\Im}(T,\mathbb{R})$ που ορίζεται ως:

$$\rho=(\rho_t)_{t\in[0,T]},\ \rho_t(X)=\mathcal{E}_g[-x\,|\,\Im_t],\ \ \forall X\in L^2(\Im_T).$$

Πρόταση 10.1

1. Αν το συναρτησιακό g είναι κυρτό στο $(y,z)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$, τότε η $\rho=(\rho_t)_{t\in[0,T]}$ που ορίζεται παραπάνω είναι ένα δυναμικό κυρτό μέτρο κινδύνου.
   Επιπλέον, το $\rho=(\rho_t)_{t\in[0,T]}$ είναι συνεπές ως προς το χρόνο (time-consistent).
2. Αν το συναρτησιακό g είναι υπογραμμικό στο $(y,z)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$ τότε το $\rho=(\rho_t)_{t\in[0,T]}$ ορίζεται σαν την τον ορισμό είναι ένα δυναμικό συνεκτικό μέτρο κινδύνου και είναι συνεπές ως προς το χρόνο.

Πρόταση 10.2

1. Έστω d=1 και $\rho=(\rho_t)_{t\in[0,T]}$ είναι ένα δυναμικό κυρτό μέτρο κινδύνου στον $L^2(\mathfrak{I}_T)$

Αν :

i. Το $\rho=(\rho_t)_{t\in[0,T]}$ είναι συνεπές ως προς το χρόνο

ii. Το ρ_0 είναι αυστηρά μονότονο, δηλαδή

$$\text{αν } X\geq Y \text{ και } \rho_0(X)=\rho_0(Y) \iff X=Y$$

iii. Το ρ_0 είναι $\mathcal{E}_\mu$ −dominated

Τότε υπάρχει μια μοναδική $g:\Omega\times[0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (η g δεν εξαρτάται από το Y) τέτοια ώστε:

$$|g(t,z)|\leq\mu|z|,\ \rho_0(X)=\mathcal{E}_g[-X] \text{ και}$$

$$\rho_t(X)=\mathcal{E}_g[-X\,|\,\mathfrak{I}_t],\ \ \forall X\in L^2(\mathfrak{I}_T)$$

Επιπλέον, αν μια τέτοια g είναι συνεχής ως προς το χρόνο για κάθε $z\in\mathbb{R}$ P-σ.β., τότε θα είναι κυρτή στο z.

2. Έστω d=1 και $\rho=(\rho_t)_{t\in[0,T]}$ είναι ένα δυναμικό συνεκτικό μέτρο κινδύνου στον $L^2(\mathfrak{I}_T)$. Αν :

i. Το $\rho=(\rho_t)_{t\in[0,T]}$ είναι συνεπές ως προς το χρόνο

ii. Το ρ_0 είναι αυστηρά μονότονο, δηλαδή

$$\text{αν } X\geq Y \text{ και } \rho_0(X)=\rho_0(Y) \iff X=Y$$

iii. Το ρ_0 είναι $\mathcal{E}_\mu$ −dominated

Τότε υπάρχει μια μοναδική $g:\Omega\times[0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (η g δεν εξαρτάται από το Y) τέτοια ώστε:

$$|g(t,z)|\leq\mu|z|,\ \rho_0(X)=\mathcal{E}_g[-X] \text{ και}$$

$$\rho_t(X)=\mathcal{E}_g[-X\,|\,\mathfrak{I}_t],\ \ \forall X\in L^2(\mathfrak{I}_T)$$

Επιπλέον, αν μια τέτοια g είναι συνεχής ως προς το χρόνο για κάθε $z\in\mathbb{R}$ P-σ.β., τότε θα είναι υπογραμμική στο z.

4.4.5. Υπό συνθήκη Μέτρα Κινδύνου (Conditional Risk Measures)

Επεκτείνουμε τα ήδη γνωστά μέτρα σε μια κλάση μέτρων κινδύνου όπου είναι διαθέσιμές περισσότερες πληροφορίες. Για παράδειγμα, όταν το ρίσκο μιας κατάστασης η οποία συμβαίνει στη τελική χρονική στιγμή του ορίζοντα.[209]

Έστω ένας χώρος πιθανότητας $(\Omega,\mathfrak{I},P)$. Θεωρούμε τους χώρους $L^0=L^0(\Omega,\mathfrak{I},P)$ που είναι το σύνολο των τυχαίων μεταβλητών και τον χώρο

[209] "Conditional and dynamic convex risk measures", Detlefsen K., Scandolo G.

$L^{\infty} = L^{\infty}(\Omega, \mathfrak{I}, P)$ που είναι ο χώρος των φραγμένων τυχαίων μεταβλητών. Έστω $G \subset \mathfrak{I}$ είναι μια υποάλγεβρα και ορίζουμε τα εξής υποσύνολα:

$$L_G^0 = \{X \in L^0 \setminus X \text{ είναι } G - \mu\varepsilon\tau\rho\acute{\eta}\sigma\iota\mu\eta\}$$

$$L_G^{\infty} = L^{\infty} \cap L_G^0$$

Τέλος, ορίζουμε τα δύο σύνολα μέτρων πιθανότητας:

$$\mathcal{P} = \{Q \text{ είναι μέτρο πιθανότητας στον } (\Omega, \mathfrak{I}) \setminus Q << P \text{ στην } \mathfrak{I}\}$$

$$\mathcal{P}_G = \{Q \in \mathcal{P} \setminus Q \equiv P \text{ στη } G\}$$

Τα μέτρα πιθανότητας του συνόλου $\mathcal{P}$ μπορούν να ερμηνευθούν σαν μοντέλα πιθανότητας. Ένα στοιχείο $X \in L^{\infty}$ περιγράφει ένα τυχαίο καθαρό κέρδος που δίνεται στον πράκτορα σε μια συγκεκριμένη μελλοντική χρονική στιγμή. Η σ-άλγεβρα G συλλέγει τις πληροφορίες που είναι διαθέσιμες στο πράκτορα, ο οποίος εκτιμά το κίνδυνο της κατάστασης X. Άρα, η μέτρηση κινδύνου του X μας οδηγεί στη τυχαία μεταβλητή $\rho(X)$ που είναι G-μετρήσιμη, δηλαδή είναι ένα στοιχείο του χώρου L_G^0.

<u>Σημείωση:</u>
Η σ-άλγεβρα G μπορεί να ερμηνευθεί με πολλούς τρόπους.

- Μπορεί να μοντελοποιήσει επιπρόσθετες πληροφορίες που είναι διαθέσιμες τη χρονική στιγμή $t = 0$.
- Μπορεί να ερμηνευθεί σαν τις πληροφορίες που είναι διαθέσιμες σε μια μελλοντική χρονική στιγμή, από τις παρατηρήσεις κάποιων μεταβλητών που σχετίζονται με τη κατάσταση X στο χρονικό διάστημα $[0, t]$.

Και στις δύο περιπτώσεις, οι πηγές των πληροφοριών μπορεί να είναι δημόσιες, για παράδειγμα δημοσιευμένες απ΄ όλους τους πράκτορες ή ιδιωτικές.

Τα υπό συνθήκη μέτρα κινδύνου μας δίνουν την ευκαιρία να μελετήσουμε τις συνέπειες των ασύμμετρων πληροφοριών για τη μέτρηση κινδύνου.

Ορισμός 11.1
Μια απεικόνιση $\rho : L^{\infty} \to L_G^{\infty}$ καλείται υπό συνθήκη μέτρο κινδύνου αν ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

1. $\rho(X + Z) = \rho(X) - Z, \ \forall X \in L^{\infty}, Z \in L_G^{\infty}$ (conditional translation invariance)
2. $\rho(X) \geq \rho(Y), \ \forall X, Y \in L^{\infty}$ τέτοια ώστε $X \leq Y$ (μονοτονία)
3. $\rho(\Lambda X + (1-\Lambda)Y) \leq \Lambda\rho(X) + (1-\Lambda)\rho(Y), \ \forall X, Y \in L^{\infty}$ και $\Lambda \in L_G^{\infty}$ με $0 \leq \Lambda \leq 1$ (υπό συνθήκη κυρτότητα).
4. $\rho(0) = 0$

<u>Σημείωση:</u>

- Αν G είναι η τετριμμένη σ-άλγεβρα τότε παίρνουμε τα γνωστά αποτελέσματα για τα μέτρα.

- Η $\rho(0)$ θεωρείται τυχαία μεταβλητή, δηλαδή
$$\rho(0) \in L_G^\infty$$
και η ιδιότητα (4) του ορισμού μας επιτρέπει να ικανοποιείται η
$$\rho(m) = -m, \quad \forall m \in \mathbb{R}.$$
- Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι οι τιμές ενός υπό συνθήκη κυρτού μέτρου κινδύνου είναι φραγμένες.
Πράγματι,
$$\text{αν } X \in L^\infty \text{ τότε: } -\|X\|_\infty \le X \le \|X\|_\infty \text{, τότε}$$
$$-\infty < -\|X\|_\infty = \rho(\|X\|_\infty) \le \rho(X) \le \rho(-\|X\|_\infty) = \|X\|_\infty < +\infty$$
Οπότε, $\rho(X) \in L_G^\infty$.

Όπως και στα γνωστά κυρτά μέτρα, οι οικονομικές ερμηνείες των ιδιοτήτων παραμένουν οι ίδιες. Η translation invariance παρέχει την ερμηνεία ενός κυρτού μέτρου σαν υπό συνθήκη απαίτηση κεφαλαίου.

Ορισμός 11.2
Ένα υπό συνθήκη κυρτό μέτρο κινδύνου είναι translation invariant αν και μόνον αν:
$$\rho(X) = \text{ess.inf}\left(Y \in L_G^\infty \setminus X + Y \in A_\rho\right)$$
όπου,
$$A_\rho = \left\{Y \in L_G^\infty \setminus \rho(X) \le 0\right\}$$
είναι το σύνολο αποδεκτών καταστάσεων του μέτρου ρ .

Πρόταση 11.1
Αν ρ είναι ένα υπό συνθήκη κυρτό μέτρο κινδύνου, τότε το σύνολο αποδεκτών καταστάσεων A_ρ είναι:

1. $\Lambda A_\rho + (1-\Lambda)A_\rho \subseteq A_\rho, \ \forall \Lambda \in L_G^\infty$ με $0 \le \Lambda \le 1$ (υπό συνθήκη κυρτό)
2. $\alpha\nu\ X \ge Y \in A_\rho \ \Rightarrow\ X \in A_\rho$ (συμπαγές)
3. Είναι τέτοιο ώστε $\text{ess.inf}\, A_\rho = 0$ και $0 \in A_\rho$

Αντιστρόφως,
αν ένα σύνολο $A \in L^\infty$ ικανοποιεί τις παραπάνω 3 ιδιότητες, τότε η απεικόνιση:
$$\rho_A(X) = \text{ess.inf}\left(Y \in L_G^\infty :\ X + Y \in A\right), \quad \forall X \in L^\infty$$
είναι ένα υπό συνθήκη κυρτό μέτρο κινδύνου.

Στη περίπτωση μας, οι επιπλέον πληροφορίες μας επιτρέπουν να αποκλείουμε a-priori κάποια μοντέλα πιθανότητας. Μας ενδιαφέρουν μόνο αυτά τα οποία είναι $P_G \subset P$.

Αυτό μπορεί να ερμηνευθεί οικονομικά ως εξής: όσο λιγότερες είναι οι πληροφορίες του G, τόσο μεγαλύτερο είναι το υποσύνολο P_G των μοντέλων πιθανότητας τα οποία μπορούν να θεωρηθούν σαν αναπαραστάσεις της χειρότερης περίπτωσης.

Ορίζουμε το σύνολο:

$$L_G^0\left(\overline{\mathbb{R}}_+\right)=\left\{X\in L^0\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\setminus X \text{ είναι G-μετρήσιμη, } X\geq 0\right\}$$

Ορισμός 11.3

Μια απεικόνιση $\rho: L^\infty \to L_G^\infty$ λέμε ότι μπορεί να έχει αναπαράσταση αν:

$$\rho(X)=\underset{Q\in\mathcal{P}_G}{\text{ess.sup}}\left(-E_Q\left[X\mid G\right]-\alpha(Q)\right),\quad \forall X\in L^\infty .$$

Όπου, $\alpha:\mathcal{P}_G\to L_G^0\left(\overline{\mathbb{R}}_+\right)$ είναι μια τυχαία penalty συνάρτηση για το ρ.

<u>Παρατήρηση:</u>

Κάθε απεικόνιση που έχει αναπαράσταση με μια penalty συνάρτηση α που ικανοποιεί την εξής ιδιότητα:

$$\underset{Q\in\mathcal{P}_G}{\text{ess.inf}}\left(\alpha(Q)\right)=0$$

είναι ένα υπό συνθήκη κυρτό μέτρο κινδύνου.

Θεώρημα 11.1

Έστω ρ είναι ένα υπό συνθήκη κυρτό μέτρο κινδύνου. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

1) Το ρ είναι συνεχές από πάνω, δηλαδή:

$$\text{Αν } X_n \searrow X \text{ P-σ.β. τότε } \rho(X_n)\nearrow\rho(X) \text{ P-σ.β.}$$

2) Το ρ έχει αναπαράσταση,
3) Το ρ έχει αναπαράσταση με:

$$\alpha^*(Q)=\underset{X\in L^\infty}{\text{ess.sup}}\left(-E_Q\left[X\mid G\right]-\rho(X)\right),\quad \forall Q\in\mathcal{P}_G$$

<u>Παρατήρηση:</u>

Όπως και στα γνωστά ήδη μέτρα η penalty συνάρτηση α* είναι η ελάχιστη που μπορεί να έχει αναπαράσταση:

Οπότε έχουμε ότι:

$$\alpha^*(Q)=\underset{X\in A_\rho}{\text{ess.sup}}\left(-E_Q\left[X\mid G\right]\right),\quad \forall Q\in\mathcal{P}_G .$$

Λήμμα 11.1

Αν α* είναι η ελάχιστη penalty συνάρτηση ενός υπό συνθήκη κυρτού μέτρου κινδύνου ρ και $H\subset G$ είναι μια υποάλγεβρα, τότε:

$$E_P\left[\rho(X)\mid H\right]=\underset{Q\in\mathcal{P}_G}{\text{ess.sup}}\left(-E_Q\left[X\mid H\right]-E_P\left[\alpha^*(Q)\mid H\right]\right),\quad \forall X\in L^\infty$$

Κατά μία έννοια, οι επιπλέον πληροφορίες που διατίθενται στον επενδυτή πρέπει να είναι πλήρως χρήσιμες όταν προσεγγίζουμε τον κίνδυνο της X. Αυτό σημαίνει ότι, αν γνωρίζουμε ότι ένα γεγονός $D\subset G$ πραγματοποιείται, τότε ο κίνδυνος της κατάστασης X θα έπρεπε να εξαρτάται μόνο από ότι είναι πραγματικά πιθανό να συμβεί, δηλαδή στον περιορισμό του X στο D. Αυτή την απαίτηση μας δίνει η ιδιότητα regularity.

Ορισμός 11.4

Ένα υπό συνθήκη κυρτού μέτρου κινδύνου $\rho : L^{\infty} \to L^{\infty}_{G}$ λέμε ότι είναι κανονικό (regular) αν για κάθε $D \subset G$ και $X, Y \in L^{\infty}$ ισχύει ότι:

$$X\mathcal{I}_D = Y\mathcal{I}_D \ \Rightarrow \ \rho(X)\mathcal{I}_D = \rho(Y)\mathcal{I}_D$$

Πρόταση 11.2

Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

1. Το ρ είναι κανονικό
2. $\rho(X\mathcal{I}_D) = \rho(X)\mathcal{I}_D$, $\forall D \in G, X \in L^{\infty}$
3. $\rho\left(X\mathcal{I}_D + Y\mathcal{I}_{D^c}\right) = \rho(X)\mathcal{I}_D + \rho(Y)\mathcal{I}_{D^c}$, $\forall D \in G$ και $X, Y \in L^{\infty}$
4. $\rho\left(\sum_{n=1}^{N} X_n \mathcal{I}_{D_n}\right) = \sum_{n=1}^{N} \rho(X_n)\mathcal{I}_{D_n}$, για $D_n \in G$, $X_n \in L^{\infty}$ και $N \geq 1$.

<u>Παρατήρηση:</u>

1. Στην γνωστή περίπτωση, η κανονικότητα ισχύει τετριμμένα για κάθε κυρτό μέτρο κινδύνου.
   Αν το G δεν είναι τετριμμένο, τότε δεν ισχύει γενικά.
   Για παράδειγμα, η απεικόνιση $\rho(X) = E_P[X]$, $\forall X \in L^{\infty}$ δεν είναι κανονική αν δεν ισχύει ότι $L^{\infty}_{G} = \mathbb{R}$.

2. Κάθε υπό συνθήκη μέτρο κινδύνου είναι κανονικό.

Οικονομική Ερμηνεία της κανονικότητας:

Αν το τελικό κέρδος X είναι μια σταθερά για ένα γεγονός $D \in G$ που είναι

$$X\mathcal{I}_D = \gamma\mathcal{I}_D, \ \gamma \in \mathbb{R} \ \text{P-σ.β.}$$

τότε και το $\rho(X)$ θα έπρεπε να είναι μια σταθερά στο ίδιο γεγονός.

Πράγματι:

$$\rho(X)\mathcal{I}_D = \rho(X\mathcal{I}_D) = \rho(\gamma\mathcal{I}_D) = \rho(\gamma)\mathcal{I}_D = -\gamma\mathcal{I}_D$$

$\rightarrow$ Υπό συνθήκη εντροπικά κυρτά μέτρα κινδύνου

Έστω ότι ο διαχειριστής έχει μια εκθετική χρησιμότητα $u_{\gamma}(x) = 1 - e^{-\gamma x}$, γ>0 σαν συντελεστή αποστροφής κινδύνου. Το σύνολο αποδεκτών καταστάσεων ορίζεται ως:

$$A_{\gamma} = \left\{X \in L^{\infty} : E_P\left[u_{\gamma}(X)\right] \geq E_P\left[u_{\gamma}(0)\right] = 0\right\}$$

το οποίο είναι κυρτό.

Το κυρτό μέτρο που παράγεται είναι:

$$\rho_\gamma(X)=\inf\{m\in\mathbb{R}:X+m\in A_\gamma\}$$

Και ονομάζεται μέτρο κινδύνου που σχετίζεται με το συντελεστή αποστροφής κινδύνου γ.

Χρησιμοποιείται η ελάχιστη penalty συνάρτηση $\alpha^*_{min}(Q)=\frac{1}{\gamma}H(Q|P)$, όπου $H(Q|P)=E_P\left(\frac{dQ}{dP}\log\left(\frac{dQ}{dP}\right)\right)$ και είναι η σχετική εντροπία του Q σύμφωνα με το P.

Ορισμός 11.5

Έστω μια υποάλγεβρα $G\subset\Im$. Υποθέτουμε ότι ο πράκτορας έχει μια εκθετική χρησιμότητα**:**

$$u_\gamma(x)=1-e^{-\gamma x},\ \gamma>0$$

Όπου το γ συμπεριφέρεται σαν συντελεστής αποστροφής κινδύνου. Η τυχαία αναμενόμενη χρησιμότητα του πράκτορα υπό συνθήκη στη πληροφορία που παρέχει το G είναι:

$$u_\gamma(X)=E_P\left(1-e^{-\gamma X}|G\right)=1-E_P\left(e^{-\gamma X}|G\right)\in L^0_G$$

Το σύνολο αποδεκτών καταστάσεων θα είναι:

$$A_\gamma=\left\{X\in L^\infty:u_\gamma(X)\geq u_\gamma(0)=0\right\}=\left\{X\in L^\infty:E_P\left(e^{-\gamma X}|G\right)\leq 1\right\}$$

Το σύνολο A_γ ικανοποιεί τις ιδιότητες της πρότασης 2.5, οπότε παράγει το μέτρο ρ_γ που έχει την εξής αναπαράσταση:

$$\rho_\gamma(X)=\text{ess.inf}\left\{Y\in L^\infty_G:X+Y\in A_\gamma\right\}=\text{ess.inf}\left\{Y\in L^\infty_G:E_P\left(e^{-\gamma X}|G\right)\leq e^{\gamma Y}\right\}=\frac{1}{\gamma}\log\left(E_P\left(e^{-\gamma X}|G\right)\right)$$

Το μέτρο αυτό καλείται υπό συνθήκη εντροπικό μέτρο κινδύνου που σχετίζεται με την αποστροφή του κινδύνου γ.

Ορισμός 11.6

Για κάθε $Q\in\mathcal{P}_G$ η υπό συνθήκη σχετική εντροπία του Q σύμφωνα με το P είναι:

$$H_G(Q|P)=E_P\left(\frac{dQ}{dP}\log\left(\frac{dQ}{dP}\right)|G\right)$$

Και έχει την αναπαράσταση:

$$H_G(Q|P)=\frac{E_P\left(\frac{dQ}{dP}\log\left(\frac{dQ}{dP}\right)|G\right)}{E_P\left(\frac{dQ}{dP}|G\right)}=E_Q\left[\log\left(\frac{dQ}{dP}\right)|G\right]$$

Επειδή $E_P\left(\frac{dQ}{dP}|G\right)=1$ είναι η πυκνότητα του Q σύμφωνα με το P στο G.

Χρειαζόμαστε τον παραπάνω ορισμό για να ορίσουμε την ελάχιστη penalty:

Πρόταση 11.3
Για κάθε $\gamma > 0$, το ρ_γ έχει αναπαράσταση και η ελάχιστη penalty συνάρτηση είναι:

$$\alpha^*(Q) = \frac{1}{\gamma} H_G(Q|P), \ \ \forall Q \in P_G$$

Λήμμα 11.2
Για κάθε $Q \in P_G$ ισχύει ότι:

$$\underset{Z \in L^\infty}{\text{ess.sup}}\left(E_Q[Z|G] - \log\left(E_P\left[e^Z|G\right]\right)\right) = H_G(Q|P)$$

$\rightarrow$ **Υπό συνθήκη δυναμικά κυρτά μέτρα:**

Έστω μια χρονική περίοδο $[0,T]$ όπου ο κίνδυνος της τελικού κατάστασης εκτιμάται τη χρονική στιγμή T. Έστω ένα φιλτράρισμα $(\Im_n)_{n=0}^N$, όπου το κάθε $\Im_n$ περιέχει τη πληροφορία που είναι διαθέσιμη τη χρονική στιγμή t_n.
Η $\Im_0$ είναι η τετριμμένη και $\Im_T = \Im$.

Ορισμός 11.7
Ένα δυναμικό κυρτό μέτρο κινδύνου είναι μια οικογένεια $(\rho_n)_{n=0}^N$ όπου κάθε

$$\rho_n : L^\infty \to L_n^\infty = L^\infty(\Im_n)$$

είναι ένα υπό συνθήκη κυρτό μέτρο κινδύνου.

<u>Σημείωση:</u>
Η μέτρηση του κινδύνου τη χρονική στιγμή t=T είναι $\rho_N(X) = -X, \ \forall X \in L^\infty$.

Ένα υπό συνθήκη δυναμικό κυρτό μέτρο κινδύνου ικανοποιεί τα παρακάτω αξιώματα:

Αξιώματα:

1. $\forall X, Y \in L^\infty$ και $0 \le n \le N-1$ ισχύει ότι $\rho_{n+1}(X) = \rho_{n+1}(Y) \Rightarrow \rho_n(X) = \rho_n(Y)$ (συνέπεια με το χρόνο).
2. $\forall X \in L^\infty$ και $0 \le n \le N-1$ ισχύει ότι $\rho_n(X) = \rho_n(-\rho_{n+1}(X))$ (recursiveness)
3. $\forall X \in L^\infty$ και $0 \le n \le N-1$ ισχύει ότι $\rho_n(X) \ge E_P(\rho_{n+1}(X)|\Im_n)$. (supermartingale)

<u>*Οικονομική Ερμηνεία των αξιωμάτων:*</u>

1. Η ιδιότητα της συνέπειας ως προς το χρόνο βασίζεται στο εξής:
Αν δύο καταστάσεις θα έχουν αύριο τον ίδιο κίνδυνο για κάθε γεγονός, τότε το ίδιο συμπέρασμα θα πρέπει να προκύψει.
2. Αντίθετα, η ιδιότητα αυτή, βασίζεται αυστηρά στην ερμηνεία του υπό συνθήκη κυρτού μέτρου σαν κεφαλαιακή απαίτηση (capital requirement). Στη

πραγματικότητα, απαιτεί ότι το ρίσκο $\rho_n(X)$ της κατάστασης X σήμερα ισοδυναμεί με τον κίνδυνο της απαίτησης κεφαλαίου $\rho_{n+1}(X)$ που θα έχει αύριο.

3. Η supermartingale ιδιότητα ερμηνεύεται ως εξής:
   Όπως ο χρόνος εξελίσσεται, η πληροφορία για το X αυξάνεται. Αυτό θα μείωνε τον κίνδυνο, όχι σίγουρα, αλλα με την «υπό συνθήκη» έννοια.

<u>Παράδειγμα:</u>
Ένα παράδειγμα κυρτού δυναμικού μέτρου που ικανοποιεί τα αξιώματα είναι το δυναμικό εντροπικό μέτρο κινδύνου όπου:

$$\rho_n(X)=\frac{1}{\gamma}\log\left(E_P\left[e^{-\gamma X} \mid \Im_n\right]\right),\ \ \forall X\in L^{\infty} \text{ με αποστροφή κινδύνου } \gamma>0$$

Κάθε δυναμικό εντροπικό μέτρο κινδύνου είναι time consistent και ικανοποιεί την ιδιότητα supermartingale.

5

Μοντέλα μέτρησης κινδύνου

5.1. Μοντέλα Κινδύνου Αγοράς

5.1.1. Αξία σε κίνδυνο (Value-At-Risk)

Ένα από τα πιο διαδεδομένα μοντέλα κινδύνου είναι η Αξία σε κίνδυνο (Value-at-risk) ή απλώς VaR. Αποτελεί το πιο σημαντικό εργαλείο προκειμένου να λυθεί και να προσδιοριστεί ο συνολικός κίνδυνος μιας επένδυσης. Ουσιαστικά με τη Value-At-Risk υπολογίζεται η πιθανότητα εμφάνισης ή μη των απωλειών χαρτοφυλακίου για το οποίο πρόκειται να γίνει η επένδυση.

Η μέθοδος Value-At-Risk χαρακτηρίζεται κυρίως από συγκεκριμένα μεγέθη, το χρονικό ορίζοντα και το επίπεδο εμπιστοσύνης. Υπό αυτή την έννοια, αποτελεί το μέτρο για τη μέγιστη πιθανή ζημιά που μπορεί να προκύψει σε καθορισμένο χρονικό ορίζοντα και για δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης. [210]

Ο προσδιορισμός του κινδύνου για μία επένδυση, όπως είπαμε αποτελεί ένα πολύ σημαντικό στοιχείο και βασική παράμετρο για οποιοδήποτε επενδυτικό ίδρυμα. Εξελικτικά, τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα, επινοούσαν και χρησιμοποιούσαν διάφορα μοντέλα προκειμένου να μετρήσουν όσο το δυνατόν ορθότερα την πιθανότητα εμφάνισης απωλειών για τις επενδύσεις τους, προκειμένου να λάβουν την ορθότερη απόφαση για τις κινήσεις της οποίες πρόκειται να προβούν. Σταδιακά, αυξανόταν η ανάγκη για την πλήρη συγκέντρωση

[210] "Advanced Stochastic Models, Risk Assessment, and Portfolio Optimization", The Frank Fabozzi Series, Rachev S., Stoyanov S., Fabozzi F., Εκδόσεις John Wiley & Sons, 2008, σελ. 182.

των εκάστοτε πηγών κινδύνου, οπότε ήταν απαραίτητη η δημιουργία ενός συγκεκριμένο εργαλείου με το οποίο θα γίνεται η μέτρηση του ρίσκου κατά απόλυτο τιμή, λαμβάνοντας δεδομένα από διαφορετικές πηγές. Ουσιαστικά, με τη μέθοδο Value-At-Risk μετράμε τον κίνδυνο που δημιουργείται στην αγορά, σε απόλυτους νομισματικούς όρους και αποτελεί ένα πολύ χρήσιμο τρόπο για σύγκριση σεναρίων ώστε να ληφθεί η τελική απόφαση με βάση τις διάφορες παραμέτρους.

5.1.1.1. Ιστορική Αναδρομή

Δύο ήταν τα βασικά γεγονότα που επέδρασαν καταλυτικά στη διάδοση και εφαρμογή της μεθόδου όσον αφορά τον προσδιορισμό του κινδύνου στις επενδύσεις, με αποτέλεσμα να χρησιμοποιείται πλέον ως το βασικό εργαλείο για τον προσδιορισμό του.

Το πρώτο συνέβη στα μέσα της δεκαετίας του ‘90 στο Basle της Ελβετίας. Συγκεκριμένα, συστάθηκε μία επιτροπή αποτελούμενη από τις κεντρικές τράπεζες των δυτικών οικονομιών και πρότεινε νέους κανόνες, με βάση τους οποίους οι χρηματοοικονομικοί επενδυτές, τηρώντας συγκεκριμένη μεθοδολογία, οφείλουν να διατηρούν μέρος από το κεφάλαιό τους, προκειμένου να είναι προστατευμένοι από τον κίνδυνο της αγοράς και προφανώς το χρηματοπιστωτικό σύστημα να μην κινδυνεύει από κατάρρευση. Η πρόταση αυτή, ώθησε τις τράπεζες να αναπτύξουν μεθόδους και εργαλεία με τα οποία θα υπολόγισαν τον κίνδυνο και συγκεκριμένα αναπτύχθηκαν μεθοδολογίες για τον προσδιορισμό της αξίας του. Με αυτό τον τρόπο διασφάλιζαν ότι θα οδηγούνται στις κατάλληλες αποφάσεις σχετικά με τις επενδύσεις τους και έτσι θα μπορούσαν ακόμη και να προβούν σε μείωση του απαιτούμενου κεφαλαίου ανάλογα με τον κίνδυνο της αγοράς. [211]

Συγχρόνως, η τράπεζα των Ηνωμένων Πολιτειών JP Morgan έφτιαξε το δικό της σύστημα που ονομάζεται RiskMetrics, εργαλείο πολύ σημαντικό που προσφέρει χρηματοοικονομικές πληροφορίες και συγκεκριμένη μεθοδολογία για να υπολογιστεί η τιμή του ενός χαρτοφυλακίου. Το σύστημα αυτό διαδόθηκε και έγινε διαθέσιμο σε οργανισμούς που έπρεπε να υπολογίσουν τον κίνδυνο ενός επενδυτικού χαρτοφυλακίου. Αρκετές φορές χρησιμοποιήθηκε από τους επενδυτές προκειμένου να αντλήσουν απλώς πληροφορίες που θα έχει το δικό τους σύστημα υπολογισμού του κινδύνου. Χαρακτηριστικό του συστήματος αυτού αποτελεί το γεγονός ότι υπάρχει συγκεκριμένη παραδοχή σχετικά με τον καθορισμό της πορείας των τιμών της αγοράς. Έτσι, για τον υπολογισμό του κινδύνου, η Value-At Risk αποτελούσε τη βασική μέθοδο και το σύστημα RiskMetrics το εργαλείο εκείνο που χρησιμοποιούσαν αρκετά εκπαιδευτικά ιδρύματα για τον υπολογισμό της.

Τέλος, ένας σημαντικός παράγοντας που έπαιξε καθοριστικό ρόλο για την αξιολόγηση των επενδύσεων είναι ότι υπήρξαν διευρυμένοι και αρκετά λεπτομερειακοί κανόνες όσον αφορά κινδύνους που προέρχονταν στους ισολογισμούς από ιδιαίτερα επενδυτικά κεφάλαια και ειδικά από τα παράγωγα. Έτσι λοιπόν, θεσπίστηκαν ιδιαίτεροι κανόνες για τη χρήση των παραγωγών από διάφορους οργανισμούς, οι οποίοι και σε αυτή την περίπτωση ήταν απαραίτητος ο

[211] “Advanced Stochastic Models, Risk Assessment, and Portfolio Optimization”, The Frank Fabozzi Series, Rachev S., Stoyanov S., Fabozzi F., Εκδόσεις John Wiley & Sons, 2008, σελ. 182.

υπολογισμός του Value-At-Risk προκειμένου να μετρηθεί ο κίνδυνος που απορρέει από αυτά. Και σε αυτή την περίπτωση λοιπόν, η Value-At-Risk αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο προκειμένου να εκτιμηθεί ορθά ο κίνδυνος που αναπτύσσεται στην ώστε να μπορούν οι αναλυτές με ευκολία να αποφασίσουν τα προς επένδυση κεφάλαια, καθώς και το μέγεθος της απόδοσης ή της απόλυσης που μπορεί να επιτευχθεί.

Η VaR ανεπτύχθη αρχικά ως μια «πρώτης προσέγγισης» μέθοδος μέτρησης του κινδύνου αγοράς (market risk) με σκοπό την ποσοτική περιγραφή του. Εξελίχθηκε σε μέθοδο διαχείρισης κινδύνων και, πρόσφατα, σε μέθοδο προσδιορισμού της κεφαλαιακής επάρκειας.

5.1.1.2. Βασικοί Παράμετροι της Value-At-Risk

Οι χαρακτηριστικές παράμετροι πάνω στο οποίο στηρίζεται η μέθοδος VaR είναι το *επίπεδο εμπιστοσύνης* και ο *χρονικός ορίζοντας* που θα αναλύσουμε στις επόμενες παραγράφους.[212]

Ο ορίζοντας πρόβλεψης εξαρτάται κυρίως από τη ρευστότητα της αγοράς αλλά και από νομικούς περιορισμούς που διαμορφώνουν το οικονομικό περιβάλλον μέσα στο οποίο πρόκειται να γίνει η επένδυση. Ο ορίζοντας πρόβλεψης εμφανίζει αξιοσημείωτες διαφορές μεταξύ διαφορετικών αγορών, με αποτέλεσμα κάθε επενδυτικός φορέας να πρέπει να επιλέξει τον κατάλληλο ορίζοντα πρόβλεψης, που ταιριάζει με την αγορά που αυτός πρόκειται να δραστηριοποιηθεί. Χαρακτηριστική πολιτική διαχείρισης του κινδύνου για αγορές που παρουσιάζουν χαμηλά επίπεδα ρευστότητας, είναι συνήθως η διακράτηση ενός επενδυτικού στοιχείου ακόμα και να εμφανίζει ζημίες για μεγαλύτερο χρονικό διάστημα, καθώς η έκθεσή του σε μία επισφαλή αγορά, είναι πιθανό να προκαλέσει μεγαλύτερες απώλειες στο επενδυτικό οργανισμό. Τα μέτρα του VaR υπολογίζονται συνήθως για επίπεδα εμπιστοσύνης από 95 έως 99%, ενώ διαφοροποιώντας το επίπεδο εμπιστοσύνης, δίνεται η δυνατότητα αναλυτικής διεύρυνσης του προφίλ κινδύνου του χαρτοφυλακίου.

Όσον αφορά το επίπεδο εμπιστοσύνης και τον τρόπο που πρέπει να επιλεγεί για τη βέλτιστη εφαρμογή της διαχείρισης κινδύνου, συνηθέστερα οι επενδυτές ανάλογα με το πλήθος των στοιχείων που διαθέτουν προς επένδυση, είναι προτιμότερο η VaR να υπολογίζεται για διαφορετικό επίπεδο εμπιστοσύνης. Εάν, ωστόσο, διαθέτουμε την εκτίμηση για την κατανομή των απωλειών, είναι εύκολο να υπολογίσουμε τα απαιτούμενα ποσοστά και άρα τη VaR για διαφορετικά επίπεδα εμπιστοσύνης.

Ασφαλώς, προκειμένου να είμαστε κεφαλαιακά καλυμμένοι, είναι προτιμότερο να υπάρχει ένα υψηλό επίπεδο εμπιστοσύνης, καθώς αυτή την περίπτωση τα περιθώρια ασφαλείας υπάρχουν για την επένδυσή μας εμπεριέχουν λιγότερο κίνδυνο.

Τέλος, είναι βασικό να υπάρχει ένας μεγάλος αριθμός παρατηρήσεων προκειμένου οι κατανομές που προκύπτουν έχουν μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια για

[212] «Αξία σε κίνδυνο (Value-At-Risk) Θεωρητική προσέγγιση και μελέτη περίπτωσης», Σαίνης Θ., Μεταπτυχιακή Εργασία, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, 2011, σελ. 43.

οποιοδήποτε ζεύγος τιμών εμπιστοσύνης και το χρονικό ορίζοντα να είναι δυνατή η τιμή του VaR, βάσει της οποίας θα μπορέσει αναλυτής να διαχειριστεί τον κίνδυνο.

5.1.1.3. Ορισμός της Value-At-Risk ως μέτρο κινδύνου

Η Αξία σε Κίνδυνο (Value at Risk) ή σε συντομογραφία, VaR ορίζεται ως η χειρότερη αναμενόμενη απώλεια -σε κανονικές συνθήκες αγοράς και για ένα καθορισμένο επίπεδο εμπιστοσύνης- στην τιμή (market value) ενός χρεογράφου ή ενός χαρτοφυλακίου χρεογράφων που μπορεί να συμβεί κατά τη διάρκεια ενός συγκεκριμένου χρονικού διαστήματος (χρονικός ορίζοντας).[213]

Έστω $(\Omega,\Im,P)$ ένας χώρος πιθανότητας και συμβολίζουμε με X ένα γραμμικό χώρο τυχαίων μεταβλητών. Για ένα δεδομένο επίπεδο $\lambda\in(0,1)$ ορίζουμε με VaR_λ το νομισματικό μέτρο κινδύνου που ορίζεται από το σύνολο αποδεκτών καταστάσεων:

$$A=\{X\in \mathrm{X}:\ P[X<0]\le\lambda\}$$

Για μία οικονομική κατάσταση X, η ποσότητα $VaR_\lambda(X)$ ορίζει τη μικρότερη ποσότητα που χρειάζεται να προστεθεί στη κατάσταση X έτσι ώστε η πιθανότητα της απώλειας να γίνει μικρότερη του αριθμού λ.

Η απεικόνιση του μέτρου είναι:

$$VaR_\lambda(X)=\inf\{m\in\mathbb{R}:\ P[X+m<0]\le\lambda\}=-\sup\{c\in\mathbb{R}:\ P[X<c]\le\lambda\}$$

Προφανώς, η VaR είναι καλά ορισμένη σαν ένα θετικά ομοιογενές νομισματικό μέτρο κινδύνου στον χώρο $L^0(\Omega,\Im,P)$, δηλαδή στον χώρο των πεπερασμένων τυχαίων μεταβλητών. Επομένως, η VaR ικανοποιεί τα αξιώματα του ορισμού των μέτρων κινδύνου, που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Δηλαδή,

1. $VaR_\lambda(X+c)=VaR_\lambda(X)-c,\ \ \forall c\in\mathbb{R}$
2. Αν $X\ge Y$ τότε $VaR_\lambda(X)\le VaR_\lambda(Y)$
3. $VaR_\lambda(\lambda X)=\lambda VaR_\lambda(X),\ \ \forall\lambda>0$

Δηλώνουμε με $(1-\lambda)100\%$ το επίπεδο εμπιστοσύνης της VaR. Η πιθανότητα λ καλείται πιθανότητα ουράς.

Ανάλογα με την ερμηνεία της τυχαίας μεταβλητής X, η VaR ορίζεται με πολλούς τρόπους.[214]

213 "Advanced Stochastic Models, Risk Assessment, and Portfolio Optimization", The Frank Fabozzi Series, Rachev S., Stoyanov S., Fabozzi F., Εκδόσεις John Wiley & Sons, 2008., σελ. 182.

214 "Advanced Stochastic Models, Risk Assessment, and Portfolio Optimization", The Frank Fabozzi Series, Rachev S., Stoyanov S., Fabozzi F., Εκδόσεις John Wiley & Sons, 2008., σελ. 182.

→ Ο πιο συνηθισμένος ορισμός της VaR που χρησιμοποιείται είναι:
Η VaR ορίζεται σαν το αρνητικό του κατώτερου λ-εκατοστιαίου[215] σημείο της κατανομής απόδοσης, δηλαδή:

$$\mathrm{VaR}_{\lambda}(X) = -F_X^{-1}(\lambda)$$

Όπου $F_X^{-1}(\lambda)$ είναι η αντίστροφη της συνάρτησης κατανομής.

→ Αν η τυχαία μεταβλητή X περιγράφει τυχαία κέρδη, τότε η VaR εκφράζει ένα όριο σε νομισματικές μονάδες κάτω από το οποίο πέφτει η τιμή του χαρτοφυλακίου με πιθανότητα λ και ορίζεται:

$$\mathrm{VaR}_{\lambda}(X) = F_X^{-1}(\lambda)$$

→ Η VaR εκφράζεται επίσης και σαν την απόσταση από τη παρούσα αξία, λαμβάνοντας υπόψην τη κατανομή κέρδους. Το τυχαίο κέρδος συμβολίζεται με $X - P_0$, όπου X είναι η τυχαία πληρωμή και P_0 είναι η παρούσα αξία.
Τότε, η VaR θα είναι:

$$\mathrm{VaR}_{\lambda}(X - P_0) = \inf\{m \in \mathbb{R} : P[X - P_0 + m < 0] \le \lambda\} = P_0 - \mathrm{VaR}_{\lambda}(X)$$

όπου $\mathrm{VaR}_{\lambda}(X) = F_X^{-1}(\lambda)$, γιατί η X εκφράζει τυχαία κέρδη.

<u>Παρατήρηση:</u>

1. Σύμφωνα με τον ορισμό της Value-At-Risk, μπορεί το μέτρο να πάρει και αρνητικές τιμές.
2. Αν η $\mathrm{VaR}_{\lambda}(X)$ είναι αρνητικός αριθμός αυτό σημαίνει ότι με πιθανότητα λ δεν λαμβάνουμε απώλειες, αλλά κέρδη. Οι απώλειες συμβαίνουν με ακόμα μικρότερη πιθανότητα από λ.
3. Αν για κάθε πιθανότητα ουράς λ η $\mathrm{VaR}_{\lambda}(X)$ είναι αρνητικός αριθμός, τότε δεν θα έχουμε καθόλου απώλειες, επομένως η τυχαία μεταβλητή X δεν ενέχει κανένα κίνδυνο και συνεπώς καμία έκθεση που να σχετίζεται με αυτόν.

5.1.1.4. Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα

Είναι γνωστό ότι, η Value-At-Risk είναι ευρέως αποδεκτή από τους οικονομικούς οργανισμούς και τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα. Αποτελεί πλέον το πιο διαδεδομένο μέτρο ποσοτικοποίησης, πρόβλεψης και διαχείρισης των χρηματοοικονομικών κινδύνων. Η υιοθέτηση της οδήγησε στην ανάπτυξη νέων υπολογιστικών τεχνικών για τη διαχείριση κινδύνων και συλλογικές διαδικασίες και

[215] Έστω X μια τυχαία μεταβλητή και P ένα μέτρο πιθανότητας και $\lambda \in (0,1)$. Ο αριθμός q θα λέγεται λ-ποσοστιαίο αν ισχύει ότι: $P(X \le q) \le \lambda \le P(X > q)$.

πρακτικές για την ανάλυση κάθε τύπου χαρτοφυλακίου σε σχέση με τις μεταβολές εξωτερικού περιβάλλοντος.[216]

Το ελκυστικό χαρακτηριστικό της VaR είναι πως υπολογίζοντας το δυνητικό μέγεθος της απώλειας που μπορεί να συμβεί σε μια χρονική περίοδο, δίνει άμεσα μια ποσοτική εικόνα της έκθεσης στους κινδύνους αγοράς.

Ένα μεγάλο πλεονέκτημα του μέτρου της αξία σε κίνδυνο (VaR) συνίσταται στο ότι συνοψίζει σε ένα και μόνο αριθμό τη συνολική έκθεση ενός οργανισμού στον κίνδυνο αγοράς. Οι πληροφορίες που παρέχει η συγκεκριμένη προσέγγιση χαρακτηρίζονται από απλότητα και σαφήνεια και μπορούν να χρησιμοποιηθούν από τους διαχειριστές και τους επενδυτές.

Επιπλέον, με τη χρήση του μέτρου VaR είναι δυνατή η σύγκριση θέσεων σε διαφορετικές αγορές και διαφορετικά προϊόντα σε καθημερινή μηνιαία και ετήσια βάση. Συνεπώς με βάση την πληροφόρηση που παρέχει η συγκεκριμένη προσέγγιση δίνεται η δυνατότητα στους και οι διαχειριστές να λάβουν καλύτερες αποφάσεις σχετικά με τη στρατηγική επένδυση στην επιχείρηση που ακολουθούν επιτυγχάνοντας τη βέλτιστη απόδοση για τα χαρτοφυλάκια τους.

Ένα ακόμα πλεονέκτημα είναι ότι η Αξία σε Κίνδυνο μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μέτρο σύγκρισης μεταξύ διαφορετικών τύπων κινδύνου. Αυτή η δυνατότητα επιτρέπει σε ένα χρηματοπιστωτικό ίδρυμα να καθορίσει ποιοι παράγοντες κινδύνου είναι πιο πιθανοί να οδηγήσουν σε μεγάλες ζημίες.

Ωστόσο, όπως αναφέρθηκε, δεν υπάρχει ιδανικό μέτρο κινδύνου. Η VaR, όπως είναι αναμενόμενο έχει και αρκετά μειονεκτήματα.

Υπάρχουν περιπτώσεις όπου η Αξία σε κίνδυνο είτε έχει υπολογιστεί κατά τρόπο λανθασμένο είτε γιατί ενώ έχει υπολογιστεί σωστά δεν σχετίζεται με τους πραγματικούς στόχους του χρηματοπιστωτικού ιδρύματος.

Το κυριότερο μειονέκτημα της Value-At-Risk είναι ότι δεν είναι συνεκτικό (coherent) μέτρο κινδύνου. Αυτό σημαίνει ότι αν και ικανοποιεί τα αξιώματα των νομισματικών μέτρων κινδύνου, ωστόσο δεν ικανοποιεί την ιδιότητα της υποπροσθετικότητας (subaddivity). Να σημειώσουμε, όμως, ότι ανήκει στην κλάση των law invariant μέτρων κινδύνου.

Αντίθετα, ισχύει ότι:

$$\mathrm{VaR}_\lambda(X+Y) > \mathrm{VaR}_\lambda(X) + \mathrm{VaR}_\lambda(Y)$$

Η ιδιότητα της subaddivity, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, είναι πολύ σημαντική, καθώς επιτρέπει ένα χαρτοφυλάκιο να έχει κίνδυνο που είναι το πολύ μικρότερος ή ίσος με το άθροισμα των κινδύνων του κάθε επιμέρους στοιχείου του. Επίσης, μπορεί να παραπλανήσει τους διαχειριστές ότι δεν υπάρχει αποτέλεσμα διαφοροποίησης στο χαρτοφυλάκιο, όποτε να λάβουν λάθος αποφάσεις. Οπότε, αυτό θα έχει σαν συνέπεια ο κίνδυνος στη πραγματικότητα να αυξάνεται.

Ένα ακόμα μειονέκτημα της VaR είναι ότι παρότι παρέχει έγκυρες εκτιμήσεις για το δοθέν επίπεδο εμπιστοσύνης, πέρα από αυτό δεν προσφέρει καμία πληροφορία.

Επίσης, οι ζημίες υπολογίζονται υποθέτοντας ότι τα περιουσιακά στοιχεία μπορούν να πωληθούν στις τρέχουσες αγοραίες τιμές. Ωστόσο, αν η επιχείρηση

[216] "Advanced Stochastic Models, Risk Assessment, and Portfolio Optimization", The Frank Fabozzi Series, Rachev S., Stoyanov S., Fabozzi F., Εκδόσεις John Wiley & Sons, 2008., σελ. 184-186.

έχει στην κατοχή της σε μεγάλο βαθμό μη ρευστοποιήσιμα στοιχεία, η VaR μπορεί να υποεκτιμά τις πραγματικές ζημιές, αφού τα στοιχεία ίσως χρειαστεί να πωληθούν με έκπτωση.

5.1.1.5. Μέθοδοι Υπολογισμού

5.1.1.5.1. Μη παραμετρικές προσεγγίσεις

5.1.1.5.1.1. Μέθοδος Ιστορικής Προσομοίωσης

Η μέθοδος ιστορικής προσομοίωσης αναφέρεται στην πρόβλεψη της Αξίας σε Κίνδυνο, κατασκευάζοντας την αθροιστική συνάρτηση κατανομής των αποδόσεων και προσομοιώνοντας το τρέχον χαρτοφυλάκιο κατά μήκος παλιότερων μεταβολών των τιμών των τίτλων εντός μιας χρονικής περιόδου.[217]

Η μέθοδος χρησιμοποιεί την πραγματική κατανομή των αποδόσεων, δηλαδή δεν προϋποθέτει ότι οι αποδόσεις είναι κανονικά κατανεμημένες. Η μόνη υπόθεση που γίνεται είναι η κατανομή των αποδόσεων για μια χρονική περίοδο θα είναι ταυτόσημη με την κατανομή του παρελθόντος, δηλαδή κατασκευάζεται από ιστορικά δεδομένα. Για παράδειγμα, η 99% καθημερινή VaR της απόδοσης ενός χαρτοφυλακίου υπολογίζεται σαν το αρνητικό του εμπειρικού 1% ποσοστιαίου των παρατηρούμενων καθημερινών αποδόσεων του χαρτοφυλακίου. Οι παρατηρήσεις συλλέγονται από ένα προκαθορισμένο χρονικό παράθυρο όπως είναι το πιο πρόσφατο επιχειρησιακό έτος.

Ο αριθμός των παρατηρήσεων που συμπεριλαμβάνονται στο μέγεθος του παραθύρου καθώς και το μήκος του είναι καθοριστικής σημασίας αφού επιδρά στον υπολογισμό της VaR. Εάν το μέγεθος παραθύρου είναι μικρό, τότε το VaR είναι ευαίσθητο σε τυχαία γεγονότα του πρόσφατου παρελθόντος και επομένως το VaR είναι ασταθές. Αντιθέτως, ένα μεγάλο μέγεθος παραθύρου σίγουρα θα περιλαμβάνει και παρατηρήσεις από το μακρινό παρελθόν, οι οποίες δεν έχουν και μεγάλη συνάφεια με την παρούσα κατάσταση και είναι πιθανόν λοιπόν να οδηγήσει σε μεγάλες περιόδους σταθερού VaR.

Ένα από τα βασικότερα πλεονεκτήματα της μεθόδου ιστορικής προσομοίωσης είναι ότι εμφανίζεται ως αρκετά απλή και εύκολη στην εφαρμογή της. Επίσης, η μέθοδος δεν εμφανίζει αυξημένο κίνδυνο μοντέλου και είναι κατάλληλη για τις κατανομές που εμφανίζουν μεγάλη συγκέντρωση δεδομένων. Τέλος, στη μέθοδο αυτή δεν υπάρχει καμία ανάγκη εκτίμησης των παραμέτρων της διακύμανσης και της συσχέτισης.

Ενώ η ιστορική μέθοδος φαίνεται να είναι πιο γενική και απλοϊκή, έχει στην ουσία έναν αριθμό σημαντικών μειονεκτημάτων.

Πρώτον, υποθέτει ότι οι παρελθοντικές τάσεις θα συνεχιστούν και στο μέλλον. Αυτό δεν είναι μία ρεαλιστική υπόθεση, γιατί ίσως συναντήσουμε ακραία γεγονότα στο μέλλον τα οποία δεν είχαν συμβεί στο παρελθόν. Δεύτερον, η ιστορική μέθοδος αντιμετωπίζει τις παρατηρήσεις ως ανεξάρτητες και ισόνομες (i.i.d), το οποίο δεν

[217] Ad Advanced Stochastic Models, Risk Assessment, and Portfolio Optimization", The Frank Fabozzi Series, Rachev S., Stoyanov S., Fabozzi F., Εκδόσεις John Wiley & Sons, 2008., σελ. 188.

είναι ρεαλιστικό. Τρίτον, δεν είναι μια αξιόπιστη μέθοδος για την εκτίμηση της VaR σε πολύ υψηλά επίπεδα εμπιστοσύνης. Τέταρτον, δεν υπάρχει δυνατότητα πρόβλεψης απωλειών που εμφανίζονται λιγότερο συχνά από την περίοδο του δείγματος

5.1.1.5.1.2. Υβριδική Μέθοδος

Η υβριδική μέθοδος είναι μια τροποποίηση της ιστορικής μεθόδου, η οποία, όμως, θεωρεί ότι οι παρατηρήσεις δεν είναι ανεξάρτητες και ισόνομες (i.i.d.). Όμως, τοποθετούνται στις παρατηρήσεις συγκεκριμένα βάρη, τα οποία βασίζονται στο πόσο κοντά αυτές είναι στο παρόν. [218]

Τα βάρη καθορίζονται χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο exponential smoothing. Ο αλγόριθμος αυτός δίνει έμφαση στις πιο πρόσφατες παρατηρήσεις και έχει σκοπό να λάβει υπόψη τα εξαρτώμενα από το χρόνο φαινόμενα μεταβλητότητας.

Ο αλγόριθμος exponential smoothing της υβριδικής μεθόδου περιλαμβάνει τα επόμενα βήματα:

1. Τα εκθετικά μειωτικά βάρη επισυνάπτονται σε ιστορικές αποδόσεις. Αρχίζοντας από τη τωρινή περίοδο και πηγαίνοντας πίσω στο χρόνο.
   Έστω, $r_{t-k+1},\dots,r_{t-1},r_t$ μια ακολουθία k παρατηρούμενων αποδόσεων σε ένα χρεόγραφο, όπου t είναι η παροντική χρονική στιγμή. Η i παρατήρηση εφοδιάζεται με ένα βάρος
   $$\theta_i = c\lambda^{t-i}$$
   όπου, $0<\lambda<1$ και $c=\dfrac{1-\lambda}{1-\lambda^k}$ είναι μια σταθερά τέτοια ώστε $\sum\theta_i = 1$.
2. Ομοίως, με την ιστορική μέθοδο, οι υποθετικές μελλοντικές αποδόσεις αποκτούνται από τις παρελθοντικές αποδόσεις και ταξινομούνται κατά αύξουσα σειρά.
3. Το μέτρο VaR υπολογίζεται από την εμπειρική συνάρτηση κατανομής, στο οποίο κάθε παρατήρηση έχει πιθανότητα ίση με το βάρος θ_i.

Γενικά, η υβριδική μέθοδος είναι κατάλληλη για την εκτίμηση της VaR χρονικών σειρών με παχιές ουρές (tails). Κατά μία έννοια, η υβριδική μέθοδος ξεπερνά κάποια μειονεκτήματα της ιστορικής μεθόδου, όμως δεν θεωρείται αξιόπιστη μέθοδος για την εκτίμηση της VaR σε πολύ υψηλά επίπεδα εμπιστοσύνης.

5.1.1.5.1.3. Προσομοίωση Monte Carlo

Η Monte Carlo μεθοδολογία συνήθως χρησιμοποιείται σε σύνθετα χαρτοφυλάκια, με έντονη μη γραμμικότητα στοιχείων, όπου μια αναλυτική λύση για τον υπολογισμό της VaR θα οδηγούσε σε λανθασμένα αποτελέσματα. Αντίθετα με τη ιστορική μέθοδο, η Προσομοίωση Monte Carlo απαιτεί τις προδιαγραφές ενός στατιστικού μοντέλου για τις αποδόσεις των χρεογράφων. Για να περιγράψουμε τη μέθοδο, θα θεωρήσουμε ότι το χαρτοφυλάκιο μας αποτελείται

[218] Ad Advanced Stochastic Models, Risk Assessment, and Portfolio Optimization", The Frank Fabozzi Series, Rachev S., Stoyanov S., Fabozzi F., Εκδόσεις John Wiley & Sons, 2008., σελ. 188-189.

από μετοχές. Το στατιστικό μοντέλο είναι πολυμετάβλητο, υποθέτοντας ότι η συμπεριφορά των αποδόσεων των μετοχών είναι σε μια αυτόνομη βάση. Για παράδειγμα, οι πολυμετάβλητες κανονικές κατανομές υποθέτουν κανονικές κατανομές των αποδόσεων των μετοχών σε μία αυτόνομη βάση και περιγράφει τις εξαρτήσεις με τον πίνακα συσχέτισης. Το πολυμεταβλητό μοντέλο μπορεί, επίσης, να κατασκευαστεί καθορίζοντας ρητά της τις μονοδιάστατες κατανομές των αποδόσεων των μετοχών, και της εξάρτησής τους μέσω μιας συνάρτησης copula.

Η μέθοδος Monte Carlo περιλαμβάνει τα επόμενα βασικά βήματα[219]:

1. *Επιλογή του στατιστικού μοντέλου.*
   Το στατιστικό μοντέλο θα πρέπει να είναι σε θέση να εξηγήσει έναν αριθμό παρατηρούμενων φαινομένων στα δεδομένα, όπως είναι οι παχιές ουρές, η μεταβλητότητα κ.λπ. που θεωρούμε ότι επηρεάζουν τον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου.
2. *Εκτίμηση των παραμέτρων του στατιστικού μοντέλου.*
   Ένα δείγμα παρατηρούμενων αποδόσεων μετοχών χρησιμοποιείται από ένα προκαθορισμένο χρονικό παράθυρο, για παράδειγμα οι πιο πρόσφατες 250 καθημερινές αποδόσεις.
3. *Γενίκευση των σεναρίων από το προσαρμοσμένο μοντέλο*.
   Τα ανεξάρτητα σενάρια προκύπτουν από το προσαρμοσμένο μοντέλο. Κάθε σενάριο είναι ένα διάνυσμα αποδόσεων των μετοχών που είναι αλληλοεξαρτώμενα σύμφωνα με τη δομή της εξάρτησης του στατιστικού μοντέλου που έχουμε υποθέσει.
4. *Υπολογισμός του κινδύνου του χαρτοφυλακίου.*
   Υπολογίζουμε τον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου στη βάση των σεναρίων των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου που αποκτούνται από το προηγούμενο βήμα.

Η μέθοδος Monte Carlo είναι μια πολύ γενική και ποσοτική προσέγγιση στην εκτίμηση του κινδύνου. Δεν απαιτεί καμία κλειστής μορφής έκφραση και επιλέγοντας ένα ευέλικτο στατιστικό μοντέλο μπορούμε να πάρουμε ακριβή υπολογισμό του κινδύνου.

Ένα βασικό μειονέκτημα είναι ότι η υπολογισμένη VaR του χαρτοφυλακίου βασίζεται στο γενικευμένο δείγμα των σεναρίων και παρουσιάζει διακυμάνσεις εάν αναπαράγουμε το δείγμα. Αυτή η παράπλευρη απώλεια μπορεί να εξαλειφθεί παίρνοντας ένα μεγαλύτερο δείγμα.

Τα κυριότερα πλεονεκτήματα της μεθόδου Monte Carlo είναι αντιληπτά όταν το χαρτοφυλάκιο περιλαμβάνει πιο πολύπλοκα χρεόγραφα, όπως είναι τα παράγωγα. Σε αυτή την περίπτωση, δεν είναι πλέον εφικτό να χρησιμοποιήσουμε μιας κλειστής μορφής έκφραση της VaR του χαρτοφυλακίου (και κανενός μέτρο κινδύνου γενικά) αφού, η κατανομή του χαρτοφυλακίου των αποδόσεων των πληρωμών είναι τυχαία. Η μέθοδος Monte Carlo παρέχει το γενικό πλαίσιο για την παραγωγή σεναρίων για τους παράγοντες που μας οδηγούν στον κίνδυνο, και μετά επαναξιολογεί τα χρηματοοικονομικά προϊόντα στο χαρτοφυλάκιο κάτω από κάθε

[219] Ad Advanced Stochastic Models, Risk Assessment, and Portfolio Optimization", The Frank Fabozzi Series, Rachev S., Stoyanov S., Fabozzi F., Εκδόσεις John Wiley & Sons, 2008., σελ. 189-190.

σενάριο, και τελικά εκτιμά τον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου με βάση τις υπολογισμένες αποδόσεις του χαρτοφυλακίου.

Ενώ φαίνεται να είναι μία άμεση προσέγγιση, ωστόσο η εφαρμογή είναι απαιτητική και με την έννοια της ανάπτυξης λογισμικού αλλα και από χρηματοοικονομικής άποψης. Τα χαρτοφυλάκια μεγάλων οικονομικών οργανισμών συχνά περιλαμβάνουν προϊόντα που απαιτούν καμπύλες επιτοκίων, ανάπτυξη θεμελιωδών και στατιστικών μοντέλων και κυρίως ένα μοντέλο πιθανότητας ικανό να περιγράψει τις παχιές ουρές των παραγόντων που οδηγούν στον κίνδυνο, την αυτοσυσχέτιση, τη μεταβλητότητα και την σχέση μεταξύ αυτών των παραγόντων. Η επεξεργασία μεγάλων χαρτοφυλακίων σχετίζεται στην χειραγώγηση των μεγάλων δομών δεδομένων που απαιτούν άριστες ικανότητες ανάπτυξης εφαρμογών ώστε να παρουσιαστούν αποτελεσματικά.

5.1.1.5.2. Παραμετρικές Προσεγγίσεις

5.1.1.5.2.1. Μέθοδος RiskMetrics

Για την απλούστερη περιγραφή της μεθόδου αυτής υποθέτουμε ότι το χαρτοφυλάκιο αποτελείται από κοινές μετοχές. Έστω, λοιπόν, ότι περιέχει n κοινές μετοχές και μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε τη καθημερινή VaR σε επίπεδο εμπιστοσύνης 99%. Όπως ήδη γνωρίζουμε η απόδοση του χαρτοφυλακίου θα είναι:

$$r_p = \sum_{i=1}^{n} w_i X_i$$

όπου X_i είναι οι καθημερινές αποδόσεις της i μετοχής και w_i το βάρος της μετοχής για κάθε i=1,...,n .[220]

Η προσέγγιση της RiskMetrics βασίζεται στην υπόθεση ότι οι αποδόσεις των μετοχών ακολουθούν πολυμετάβλητη κανονική κατανομή, οπότε και η κατανομή του χαρτοφυλακίου θα είναι επίσης κανονική. Επομένως, για να υπολογίσουμε την VaR του χαρτοφυλακίου, αρκεί μόνο να υπολογίσουμε την αναμενόμενη απόδοση και την κανονική απόκλιση του χαρτοφυλακίου.
Η 99% VaR θα είναι το αρνητικό του 1% ποσοστιαίου σημείου της $N\left(E_{r_p}, \sigma^2_{r_p}\right)$ κατανομή.
Η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου θα δίνεται από το τύπο:

$$E_{r_p} = \sum_{k=1}^{n} w_k E\left[X_k\right]$$

Και η διασπορά της απόδοσης του χαρτοφυλακίου θα είναι:

$$\sigma^2_{r_p} = w_1^2 \sigma^2_{r_{X_1}} + w_2^2 \sigma^2_{r_{X_2}} + \ldots + w_n^2 \sigma^2_{r_{X_n}} + \sum_{i \neq j} w_i w_j \operatorname{cov}\left(X_i, X_j\right)$$

Ο τελευταίος όρος υπάρχει γιατί πρέπει να αθροίσουμε όλες τις συνδιασπορές μεταξύ όλων των ζευγών των αποδόσεων.
Διαφορετικά, $\sigma^2_{r_p} = w' \Sigma w$

[220] Ad Advanced Stochastic Models, Risk Assessment, and Portfolio Optimization", The Frank Fabozzi Series, Rachev S., Stoyanov S., Fabozzi F., Εκδόσεις John Wiley & Sons, 2008., σελ. 186-188.

όπου $w=(w_1,...,w_n)$ είναι το διάνυσμα των βαρών του χαρτοφυλακίου και Σ είναι ο πίνακας συνδιασποράς των αποδόσεων:

$$\Sigma=\begin{pmatrix}\sigma_{X_1}^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n}\\ \sigma_{21} & \sigma_{X_2}^2 & \cdots & \sigma_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{X_n}^2\end{pmatrix}$$

όπου $\sigma_{ij}=\operatorname{cov}(X_i,X_j),\ \forall i\neq j$.

Από τις ιδιότητες της κανονικής κατανομής έχουμε ότι:

$$\frac{r_p-E_{r_p}}{\sigma_{r_p}}\sim N(0,1)$$

Επιπλέον, λόγω των αξιωμάτων που ικανοποιεί η VaR ως μέτρο κινδύνου, η 99% VaR του χαρτοφυλακίου αναπαρίσταται ως εξής:

$$VaR_{0.01}(r_p)=q_{0.99}\sigma_{r_p}-E_{r_p}$$

Όπου το $q_{0.99}$ είναι το 99% ποσοστιαίο σημείο της κανονικής κατανομής.
Η ποσότητα $q_{0.99}$ είναι ανεξάρτητη της σύνθεσης του χαρτοφυλακίου και είναι σχεδόν μια σταθερά που μπορεί να υπολογιστεί εκ των προτέρων.

Οι παράμετροι που εξαρτώνται από τα βάρη του χαρτοφυλακίου είναι η κανονική απόκλιση και η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου. Συνεπώς η VaR κάτω από την υπόθεση της κανονικότητας είναι συμμετρική, ενώ εξ' ορισμού η VaR είναι ένα ασύμμετρο μέτρο, αφού βασίζεται στην αριστερή ουρά της κατανομής.

Η προσέγγιση της RiskMetrics μπορεί να επεκταθεί και σε άλλες κατανομές. Ο Lamantia (2006) πρότεινε επεκτάσεις της μεθόδου αυτής για κατανομές t-student και σταθερές κατανομές.

5.1.1.5.2.2. Μέθοδος Διακύμανσης-Συνδιακύμανσης

Η μέθοδος διακύμανσης-συνδιακύμανσης χρησιμοποιείται για χαρτοφυλάκια των οποίων οι αποδόσεις είναι γραμμικές συναρτήσεις των τιμών των χρεογράφων που αυτό αποτελείται[221]. Επιπλέον, η μέθοδος αυτή υποθέτει ότι οι παράγοντες της αγοράς ακολουθούν κανονική κατανομή, άρα και η κατανομή του χαρτοφυλακίου θα είναι κανονική. Η διακύμανση, όπως γνωρίζουμε, μετρά τη διασπορά ενός συνόλου στοιχείων γύρω από το μέσο όρο. Όσο πιο ασταθής είναι η αξία του παρατηρούμενου χαρτοφυλακίου, τόσο μεγαλύτερη θα είναι η κανονική απόκλισης, άρα τόσο μεγαλύτερη θα είναι η αναμενόμενη τιμή της VaR.

Για ένα χαρτοφυλάκιο που περιέχει περισσότερα από ένα περιουσιακά στοιχεία, η συσχέτιση μεταξύ τους παίζει σημαντικό ρόλο για την εκτίμηση της VaR. Αυτό συμβαίνει γιατί η αστάθεια των στοιχείων ενός χαρτοφυλακίου, ίσως επηρεάζει και άλλα στοιχεία και να αντιδρούν μεταξύ τους σε περιπτώσεις ακραίων

[221] «Διαχείριση Κινδύνου με την Value-At-Risk (VaR) υποδειγμάτων», Μπισμπίκης Χ., Μεταπτυχιακή Εργασία, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, 2012., σελ. 32-34.

γεγονότων. Η απόδοση του χαρτοφυλακίου εξαρτάται γραμμικά από όλες τις αποδόσεις των χρεογράφων.

Ο τύπος για τον υπολογισμό της VaR είναι ο εξής:

$$\mathrm{VaR}(X) = F_{1-\alpha}^{-1}(X) P \sigma_p$$

όπου $F_{1-\alpha}^{-1}(X)$ είναι η αντίστροφη της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής, P είναι η αξία του χρεογράφου και σ_p είναι η μεταβλητότητα του χαρτοφυλακίου που υπολογίζεται από το τύπο:

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} r_{ij} \sigma_i \sigma_j w_i w_j}$$

όπου σ_i είναι η τυπική απόκλιση των αποδόσεων του στοιχείου i, w_i το βάρος και r_{ij} ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ των αποδόσεων των στοιχείων i,j.

Η υπόθεση ότι οι αποδόσεις ενός χαρτοφυλακίου είναι i.i.d. και ακολουθούν κανονική κατανομή δεν συναντάται σε πραγματικές αγορές. Αυτό σημαίνει ότι η μέθοδος αυτή δεν είναι και τόσο αξιόπιστη, καθώς δίνει μια προσεγγιστική εκτίμηση της VaR.

5.1.2. Υπό συνθήκη Αξία σε Κίνδυνο (Conditional Value-At-Risk)

Η Αξία σε κίνδυνο (Value-At-Risk), όπως αναφέρθηκε είναι ευρέως γνωστή σε κάθε χρηματοπιστωτικό σύστημα. Ωστόσο, όπως είδαμε έχει ένα σημαντικό αριθμό μειονεκτημάτων στη χρήση του. Επομένως, δεν είναι ένα και τόσο αξιόπιστο μέτρο κινδύνου.

Η υπό συνθήκη Value-At-Risk (Conditional Value-At-Risk (CVaR)) ή Average Value-At-Risk (AVaR) είναι ένα μέτρο κινδύνου το οποίο αποτελεί μια καλύτερη εκδοχή της Value-At-Risk. Η CVaR καλύπτει τα μειονεκτήματα της VaR, ενώ παράλληλα έχει διαισθητική ερμηνεία. Οι τρόποι υπολογισμού της είναι πιο βολικοί και έχει εφαρμογή σε προβλήματα βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου.

Το σημαντικότερο πλεονέκτημα της CVaR είναι ότι είναι συνεκτικό μέτρο κινδύνου (coherent risk measure), αφού ικανοποιεί όλα τα αξιώματα του ορισμού και είναι ένα μέτρο που συμφωνεί με τις προτιμήσεις των επενδυτών που αποστρέφονται τον κίνδυνο. Οι Rockafellar και Urayasev το 2000 εισήγαγαν για πρώτη φορά τον όρο Conditional Value-At-Risk.[222]

222 "Optimization of Conditional Value-At-Risk", Rockafellar, Uryasev S.

5.1.2.1. Ορισμός της Conditional Value-At-Risk

Ορισμός:
Έστω $X:\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής τυχαία μεταβλητή που αναπαριστά απώλειες και $F_X(z)=P(X \le z)$ είναι η συνάρτηση κατανομής της X. Έστω επίσης μια παράμετρος $0<\lambda<1$. Τότε:

$$F_X^{\lambda}(z)=\begin{cases} 0, & z<VaR_{\lambda}(X) \\ \dfrac{F_X(z)-\lambda}{1-\lambda}, & z \ge VaR_{\lambda}(X) \end{cases}$$

Επομένως, ορίζουμε τη CVaR ως εξής[223]:

$$CVaR_{\lambda}(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} z d\left(F_X^{\lambda}(z)\right)$$

- Αν τυχαία μεταβλητή είναι συνεχής τότε η Conditional Value-At-Risk ορίζεται ως εξής:
$$CVaR_{\lambda}(X)=\mathrm{E}\left[X:\ X \ge VaR_{\lambda}(X)\right]$$
- Στη περίπτωση που η τυχαία μεταβλητή είναι διακριτή οι Rockafellar και Urayasev πρότειναν να υπολογιστεί η CVaR σαν ένα σταθμικό όρο που καλείται Convex Combination Formula. Επομένως,
$$CVaR_{\lambda}(X)=\alpha VaR_{\lambda}(X)+(1-\alpha)CVaR_{\lambda}^{+}(X)$$
Αξίζει να σημειωθεί ότι η μέθοδος αυτή ισχύει γενικά για κάθε τυχαία μεταβλητή.

→ Η $CVaR^{+}$ (Upper CVaR) είναι η αναμενόμενη τιμή της τυχαίας μεταβλητής X που βρίσκεται πάνω από την τιμή της $VaR_{\lambda}(X)$ και καλείται Mean Excess Loss.
$$CVaR_{\lambda}^{+}(X)=\mathrm{E}\left[X:\ X>VaR_{\lambda}(X)\right]$$
→ Η $CVaR^{-}$ (Lower CVaR) είναι η αναμενόμενη τιμή του X που ασθενώς ξεπερνά την $VaR_{\lambda}(X)$.
$$CVaR_{\lambda}^{-}(X)=\mathrm{E}\left[X:\ X \ge VaR_{\lambda}(X)\right]$$

Παρατηρήσεις:
1) Η CVaR, σε αντίθεση με την VaR είναι ένα συνεκτικό μέτρο κινδύνου, όπως είπαμε, όποτε θα είναι και κυρτό μέτρο κινδύνου.
Ωστόσο, οι $CVaR_{\lambda}^{-}(X)$, $CVaR_{\lambda}^{+}(X)$ ίσως να μην είναι κυρτά μέτρα.

2) Η CVaR είναι συνεχές μέτρο κινδύνου σύμφωνα με τη παράμετρο λ.

[223] "VaR vs CVaR in Risk Management and Optimization", Uryasev S., Risk Management and Financial Engineering Lab, University of Florida.

3) Ισχύει ότι: $\text{VaR}_\lambda(X) \le \text{CVaR}_\lambda^-(X) \le \text{CVaR}_\lambda(X) \le \text{CVaR}_\lambda^+(X)$.

Παραδείγματα:

1. Υποθέτουμε ότι η τυχαία μεταβλητή ακολουθεί κανονική κατανομή με κανονική απόκλιση σ_X και μέση τιμή E[X]. Τότε η CVaR με παράμετρο λ θα είναι ίση με:

$$\text{CVaR}_\lambda(X) = \frac{\sigma_X}{\lambda\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(\text{VaR}_\lambda(Y))^2}{2}} - \mathrm{E}[X]$$

   Όπου $Y \sim N(0,1)$.

   Διαφορετικά, $\text{CVaR}_\lambda(X) = \sigma_X C_\lambda - \mathrm{E}[X]$

   Όπου C_λ είναι μια σταθερά που εξαρτάται μόνο από τη παράμετρο λ.

2. Υποθέτουμε ότι η τυχαία μεταβλητή ακολουθεί κατανομή t-student με ν βαθμούς ελευθερίας. Τότε η CVaR με παράμετρο λ θα είναι ίση με:

$$\text{CVaR}_\lambda(X) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \dfrac{\sqrt{\nu}}{(\nu-1)\lambda\sqrt{\pi}} \left(1 + \dfrac{(\text{VaR}_\lambda(X))^2}{\nu}\right)^{\frac{1-\nu}{2}} & , \nu>1 \\ \infty & , \nu=1 \end{cases}$$

   Όπου $\Gamma(x)$ είναι η συνάρτηση Γάμμα.

   Είναι φυσικό για ν=1 η CVaR να παρουσιάζει έκρηξη αφού η t-student κατανομή με 1 βαθμό ελευθερίας, γνωστή ως κατανομή Cauchy έχει άπειρη μέση τιμή.

5.1.2.2. Μέθοδοι Υπολογισμού

Οι βασικές μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της VaR ενός χαρτοφυλακίου, μπορούν να εφαρμοστούν και για την CVaR.

Υποθέτουμε ότι το χαρτοφυλάκιο αποτελείται από n κοινές μετοχές με αποδόσεις που δίνονται από τις τυχαίες μεταβλητές $X_1,\ldots,X_n$ και η απόδοση του χαρτοφυλακίου θα είναι:

$$r_P = \sum_{i=1}^{n} w_i X_i$$

όπου $w_1,\ldots,w_n$ είναι τα βάρη.

5.1.2.2.1. Η υπόθεση της πολυμεταβλητής Κανονικής Κατανομής

Όπως είδαμε στη προηγούμενη ενότητα για την Αξία σε Κίνδυνο, αν οι αποδόσεις των μετοχών ακολουθούν πολυμετάβλητες κανονικές κατανομές, τότε και η απόδοση του χαρτοφυλακίου θα ακολουθεί κανονική κατανομή με διασπορά

$w'\Sigma w$, όπου w είναι το διάνυσμα των βαρών και Σ είναι ο πίνακας συσχέτισης μεταξύ των αποδόσεων των μετοχών.

Η μέση τιμή της κανονικής κατανομής του χαρτοφυλακίου θα είναι:

$$E[r_P] = \sum_{i=1}^{n} w_i E[X_i]$$

Επομένως, υποθέτοντας τα παραπάνω, η CVaR της απόδοσης του χαρτοφυλακίου με μια παράμετρο λ εκφράζεται σε κλειστή μορφή μέσω της εξίσωσης:[224]

$$CVaR_\lambda(r_P) = \frac{\sqrt{w'\Sigma w}}{\lambda\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(VaR_\lambda(Y))^2}{2}} - E[r_P] = C_\lambda \sqrt{w'\Sigma w} - E[r_P].$$

Επιπλέον, λόγω των περιορισμών της πολυμεταβλητής κανονικής κατανομής, η CVaR του χαρτοφυλακίου είναι συμμετρική και αναπαρίσταται σαν τη διαφορά μεταξύ της ιδιότητας της σταθμισμένης κανονικής απόκλισης της τυχαίας απόδοσης του χαρτοφυλακίου και της αναμενόμενης απόδοσης του χαρτοφυλακίου.

5.1.2.2.2. Μέθοδος Ιστορικής Προσομοίωσης

Όπως και στη περίπτωση της VaR, η μέθοδος ιστορικής Προσομοίωσης δεν σχετίζεται με καμία υπόθεση για τη κατανομή. Χρησιμοποιούμε τις ιστορικά παρατηρούμενες αποδόσεις του χαρτοφυλακίου και εφαρμόζουμε την φόρμουλα:

$$C\hat{Va}R_\lambda(r_P) = -\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{[n\lambda]-1} r_{(i)} + \left(\lambda - \frac{[n\lambda]-1}{n}\right) r_{([n\lambda])}\right)$$

Όπου η έννοια $[x]$ μας δίνει τον μικρότερο ακέραιο αριθμό που είναι μεγαλύτερος από το x. Η φόρμουλα αυτή μπορεί να εφαρμοστεί όχι μόνο για ένα δείγμα εμπειρικών παρατηρήσεων αλλα και για στατιστικά μοντέλα, των οποίων οι κλειστές μορφές για την CVaR είναι άγνωστες.

Μπορούμε επίσης να εφαρμόσουμε και τη φόρμουλα:

$$C\hat{Va}R_\lambda(r_P) = \min_{\theta\in\mathbb{R}}\left(\theta + \frac{1}{n\lambda}\sum_{i=1}^{n}\max(-r_i - \theta, 0)\right)$$

Η φόρμουλα αυτή μπορεί να υπολογιστεί εύκολα με γραμμικό προγραμματισμό.

Η μέθοδος Ιστορικής Προσομοίωσης, όπως ήδη έχουμε αναφέρει, έχει κάποια πολύ σημαντικά μειονεκτήματα. Τονίζουμε το ότι είναι πολύ ανακριβές για πιθανότητες με μικρές ουρές τέτοιες όπως 1% ή 5%. Ακόμα και με καθημερινές απόδοσης μιας χρονιάς που σε 250 παρατηρήσεις, για να εκτιμήσουμε την CVaR σε 1% πιθανότητα, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τις τρεις μικρότερες παρατηρήσεις που είναι αρκετά ανεπαρκείς. Αυτό που χειροτερεύει το πρόβλημα εκτίμησης είναι

224 "Advanced Stochastic Models, Risk Assessment, and Portfolio Optimization", The Frank Fabozzi Series, Rachev S., Stoyanov S., Fabozzi F., Εκδόσεις John Wiley & Sons, 2008, σελ. 216, 217.

ότι αυτές οι παρατηρήσεις βρίσκονται στην ουρά της κατανομής δηλαδή είναι οι μικρότερες στο δείγμα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, όταν το δείγμα αλλάζει, η εκτιμώμενης CVaR ίσως αλλάζει πολύ αφού οι μικρότερες παρατηρήσεις τείνουν να παρουσιάζουν πολλές διακυμάνσεις.

5.1.2.2.3. Υβριδική Μέθοδος

Σύμφωνα με την υβριδική μέθοδο που παρουσιάστηκε σε προηγούμενη ενότητα για τη CVaR, διαφορετικά βάρη ανατίθενται στις παρατηρήσεις από τις οποίες οι πιο πρόσφατες έχουν υψηλότερο βάρος. Η ιδέα είναι ότι οι παρατηρήσεις του παρελθόντος έχουν μικρότερη επιρροή στον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου στη παρούσα χρονική στιγμή.[225]

Η Υβριδική Μέθοδος μπορεί να αποκτηθεί για την εκτίμηση της CVaR. Τα βάρη που ανατίθενται στις παρατηρήσεις ερμηνεύονται σαν πιθανότητες, και επιπλέον, η CVaR του χαρτοφυλακίου μπορεί να εκτιμηθεί από τη διακριτή κατανομή σύμφωνα με τη φόρμουλα:

$$\hat{CVaR}_{\lambda}(r_P) = -\frac{1}{\lambda}\left(\sum_{i=1}^{k_\lambda} p_i r_{(i)} + \left(\lambda - \sum_{i=1}^{k_\lambda} p_i\right) r_{k_\lambda + 1}\right)$$

όπου $r_{(1)} \le r_{(2)} \le \ldots \le r_{(k_m)}$ είναι οι ταξινομημένες αποδόσεις και $p_1, \ldots, p_{k_m}$ είναι οι πιθανότητες των αποδόσεων. Ο αριθμός k_m είναι ένας ακέραιος που ικανοποιεί τις ανισότητες: $\sum_{i=1}^{k_\lambda} p_i \le \lambda < \sum_{i=1}^{k_\lambda + 1} p_i$.

5.1.2.2.4. *Προσομοίωση Monte Carlo*

Τα βασικά βήματα της Προσομοίωσης Monte Carlo για την CVaR είναι αυτά που περιγράψαμε για την VaR. Ουσιαστικά, υποθέτουμε και εκτιμούμε ένα πολυμεταβλητό στατιστικό μοντέλο για τη κατανομή των αποδόσεων των μετοχών, Μετά, παίρνουμε ένα δείγμα από αυτό, και υπολογίζουμε τα διάφορα σενάρια για την απόδοση του χαρτοφυλακίου. Σύμφωνα με αυτά τα σενάρια εκτιμούμε τη CVaR του χαρτοφυλακίου χρησιμοποιώντας τη φόρμουλα:

$$\hat{CVaR}_{\lambda}(r_P) = -\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{[n\lambda]-1} r_{(i)} + \left(\lambda - \frac{[n\lambda]-1}{n}\right) r_{([n\lambda])}\right).$$

[225] Advanced Stochastic Models, Risk Assessment, and Portfolio Optimization", The Frank Fabozzi Series, Rachev S., Stoyanov S., Fabozzi F., Εκδόσεις John Wiley & Sons, 2008, σελ. 216, 217.

5.1.2.3. Εναλλακτικές Μορφές της Conditional Value At Risk

$\rightarrow$ ***Shortfall risk και Expected Shortfall Risk***

Shortfall risk (Κίνδυνος Κατωφλιού)[226]

Με τον όρο shortfall risk εννοούμε τον κίνδυνο που ενέχει μια επένδυση όταν η πραγματική απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι μικρότερη από την αναμενόμενη απόδοση. Πιο συγκεκριμένα, αυτό σημαίνει ότι ο επενδυτής/διαχειριστής αποτυγχάνει να πετύχει τους στόχους του γιατί η απόδοση είναι πολύ μικρή.

Έστω $(\Omega, \Im, P)$ ένας χώρος πιθανότητας και μια οικονομική κατάσταση $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.
Ορίζουμε το shortfall risk ως:

$$E_P\left[\ell(-X)\right]$$

όπου $\ell : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία γνωστή κυρτή και αύξουσα συνάρτηση απώλειας.
Για ένα όριο $r_0 > \inf \ell$ ορίζουμε το σύνολο αποδεκτών καταστάσεων του shortfall risk ως εξής:

$$A = \left\{X \in \mathrm{X} :\ E_P\left[\ell(-X)\right] \leq r_0\right\}$$

Το σύνολο A είναι προφανώς κυρτό, και το κυρτό μέτρο κινδύνου, ρ^{SR}, που αντιστοιχεί στο A μέσω της $\rho^{SR}(X) = \inf\left\{m \in \mathbb{R} :\ X + m \in A\right\}$ καλείται μέτρο του shortfall risk.

Στη περίπτωση που έχουμε συνάρτηση χρησιμότητας $u(X) = -\ell(-X)$, το μέτρο θα καλείται utility-based shortfall risk measure.

<u>Παρατήρηση:</u>
Το μέτρο κινδύνου ρ^{SR} είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης:

$$E_P\left[\ell(-X-m)\right] = r_0$$

Επομένως, με τη στοχαστική λύση βρίσκουμε τεχνικές που χρησιμοποιούνται για ποσοτικές μετρήσεις.

Ένα μέτρο του shortfall risk έχει αναπαράσταση της μορφής:

$$\rho^{SR}(X) = \sup\left\{E_Q[-X] - \alpha_{min}(Q)\right\}$$

Με την ελάχιστη συνάρτηση penalty:

$$\alpha_{min}(Q) = \inf_{\lambda>0}\left(\frac{1}{\lambda}\left(r_0 + E_P\left[\ell^*\left(\lambda\frac{dQ}{dP}\right)\right]\right)\right)$$

Όπου η ℓ^* είναι ο μετασχηματισμός Fenchel-Legendre της ℓ.

226 "Convex Risk Measures: Basic Facts, Law-invariance and beyond, Asymptotics for Large Portfolios", Follmer H., Knispel T., 2010.

Expected Shortfall (Αναμενόμενο Κατώφλι)

Το αναμενόμενο κατώφλι ή expected shortfall είναι μια εναλλακτική περίπτωση της CVaR, η οποίο ξεπερνά κάποια μειονεκτήματα της Value-At-Risk, όπως τα αξιώματα της συνεκτικότητας.

Το μέτρο expected shortfall συμπίπτει με τη τιμή της Conditional Value-At-Risk στη περίπτωση που έχουμε συνεχείς κατανομές απώλειας.

Το μέτρο expected shortfall μετρά την αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου δεδομένου ενός κατωφλιού (threshold) –που συνήθως είναι η τιμή της VaR- , το οποίο έχει ξεπεράσει.

Έστω μια τυχαία μεταβλητή απώλειας L, με συνάρτηση κατανομής F_L , για την οποία $\mathrm{E}\left[|L|\right] < \infty$.

Ορίζουμε το μέτρο expected shortfall σε ένα επίπεδο εμπιστοσύνης $\lambda \in (0,1)$ ως εξής:

$$ES_\lambda = \mathrm{E}\left[L \mid L \geq VaR_\lambda\right] = \frac{\mathrm{E}\left[L : L \geq VaR_\lambda(L)\right]}{P\left[L \geq VaR_\lambda(L)\right]}$$

Ορίζουμε επίσης το γενικευμένο expected shortfall ως:

$$GES_\lambda = \frac{1}{1-\lambda}\Big(\mathrm{E}\left[L : L \geq VaR_\lambda(L)\right] + q_\lambda\left(1-\lambda - P\left[L \geq VaR_\lambda(L)\right]\right)\Big).$$

Η αναπαράσταση του ES είναι:

$$ES_\lambda(X) = \max_{Q \in Z_\lambda} \mathrm{E}_Q\left[-X\right]$$

όπου:

$$Z_\lambda = \left\{Q \in M : \ \frac{dQ}{dP} \leq \frac{1}{\lambda} \ \text{ P-σ.β.}\right\}.$$

<u>Παρατήρηση:</u>

Το ES είναι ένα συνεκτικό μέτρο κινδύνου και ανήκει στη κλάση των law invanriant μέτρων.

Μια ισοδύναμη μορφή του ES που μας δίνει ένα πιο άμεσο τρόπο προσέγγισης της, είναι μέσω της συνάρτησης κατανομής F_X. Συμβολίζουμε με $F_X^{\leftarrow}(p)$ την γενικευμένη αντίστροφη συνάρτηση κατανομής για την οποία:

$$F_X^{\leftarrow}(p) = \inf\left\{x : \ F_X(x) \geq p\right\}.$$

Επομένως, το ES σε ένα διάστημα εμπιστοσύνης $\lambda \in (0,1)$ ορίζεται ως:

$$ES^\lambda(X) = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda F_X^{\leftarrow}(p)\,dp.$$

$\rightarrow$ ***Tail Conditional Expectation***[227]

Ένα άλλο εναλλακτικό μέτρο της Conditional Value-at-Risk, που επίσης ξεπερνά κάποια από τα μειονεκτήματα της, είναι το Tail Value-At-risk (TVaR) ή διαφορετικά tail conditional expectation (TCE). Συγκεκριμένα, έχει αποδεικτεί ότι το μέτρο TCE είναι συνεκτικό. Το μέτρο αυτό εκτιμά της αναμενόμενη τιμή της απώλειας δεδομένου ότι ένα γεγονός έχει συμβεί, εκτός της πιθανότητας που έχει προβλεφθεί.

Έστω ένας χώρος πιθανότητας $(\Omega, \Im, P)$, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μια τυχαία μεταβλητή και $\lambda \in (0,1)$ ένα επίπεδο εμπιστοσύνης.
Ορίζουμε το μέτρο tail conditional expectation ή TailVaR ως εξής:

$$\mathrm{TCE}_{\lambda}(X) = -E_{P}\left[X : X \leq -\mathrm{VaR}_{\lambda}(X)\right]$$

Ορίζουμε επίσης το μέτρο worst conditional expectation (WCE) ορίζεται ως:

$$\mathrm{WCE}_{\lambda}(X) = -\inf\left\{E_{P}[X \mid A] : P(A) > \lambda\right\}.$$

$\rightarrow$ ***Median Tail Loss***

Υπάρχουν περιπτώσεις που αν και η CVaR είναι πεπερασμένη, μπορεί να είναι δύσκολο να την υπολογίσουμε γιατί παρουσιάζει μεγάλη μεταβλητότα. Το μέτρο που λύνει αυτό το πρόβλημα καλείται median tail loss ή διαφορετικά MTL και ορίζεται ως το μέσο της υπό συνθήκη κατανομής απώλειας. Έχει το πλεονέκτημα ότι πάντα είναι πεπερασμένο, όποια και να είναι η συμπεριφορά της τυχαίας μεταβλητής. [228]

Ορίζεται ως:

$$\mathrm{MTL}_{\lambda}(X) = -F_X^{-1}\left(\frac{1}{2} \mid X < -\mathrm{VaR}_{\lambda}(X)\right)$$

Όπου F_X^{-1} είναι η αντίστροφη της συνάρτησης κατανομής.

<u>Παρατήρηση:</u>
Γενικά, το MTL μπορεί να υπολογιστεί άμεσα σαν ένα ποσοστιαίο σημείο της κατανομής του X, δηλαδή,

$$\mathrm{MTL}_{\lambda}(X) = -F_X^{-1}\left(\frac{\lambda}{2}\right) = \mathrm{VaR}_{\frac{\lambda}{2}}(X)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι, παρόλο που το μέτρο αυτό αποτελεί μια εναλλακτική μορφή της CVaR, ωστόσο, δεν είναι συνεκτικό μέτρο κινδύνου.

227 "Law invanriant convex risk measures", Frittelli M. και Gianin E., Advances in mathematical Economics, 2005.
228 Advanced Stochastic Models, Risk Assessment, and Portfolio Optimization", The Frank Fabozzi Series, Rachev S., Stoyanov S., Fabozzi F., Εκδόσεις John Wiley & Sons, 2008.

5.2. Μοντέλα Πιστωτικού Κινδύνου

Τα μοντέλα που μετράνε το πιστωτικό κίνδυνο είναι γενικά πιο πολύπλοκα από αυτά του κινδύνου αγοράς. Τα μοντέλα πιστωτικού κινδύνου διακρίνονται στα κατασκευαστικά μοντέλα και τα μοντέλα μειωτικού τύπου.

Η αθέτηση σε ένα κατασκευαστικό μοντέλο συμβαίνει όταν η στοχαστική μεταβλητή που εκφράζει την αξία των περιουσιακών στοιχείων «πέφτει» κάτω από το κατώφλι αξιοπιστίας. Γι’ αυτό το λόγο τα κατασκευαστικά μοντέλα λέγονται και μοντέλα κατωφλίου.

Στα μοντέλα μειωτικού τύπου, ο μηχανισμός που προκαλεί την απαίτηση είναι απροσδιόριστος.

5.2.1. Κατασκευαστικά Μοντέλα Αθέτησης Συμφωνίας

5.2.1.1. Μοντέλο Black-Sholes Merton (BSM)

Το σημαντικότερο κατασκευαστικό μοντέλο είναι το μοντέλο Merton (1974), το οποίο παρουσιάζει ένα μηχανισμό αθέτησης συμφωνίας μιας εταιρείας, εξαιτίας της σχέσης των περιουσιακών στοιχείων και της αξιοπιστίας που αντιμετωπίζεται στο τέλος του προκαθορισμένου χρονικού διαστήματος[229].

Με το μοντέλο BSM μπορούμε να εξασφαλίσουμε την ασφάλεια των επενδύσεων σε σχέση με την αξία των περιουσιακών στοιχείων μιας εταιρίας τη χρονική στιγμή λήξης του χρέους.

Θεωρούμε ένα επενδυτικό χαρτοφυλάκιο με μετοχικό κεφάλαιο το οποίο συμβολίζουμε με τη στοχαστική ανέλιξη σε συνεχή χρόνο E_t. Η επένδυση αυτή αξιολογείται από τη μετοχικότητα και το χρέος της. Το χρέος της επένδυσης αποτελείται από απλή υποχρέωση χρέους ή από ομόλογο μηδενικού τοκομεριδίου με ονομαστική αξία K και λήκτικότητα T. Η τιμή της αγοράς αυτού του χρέους τη χρονική στιγμή t συμβολίζεται με $D_{t,T}$. Η αξία των περιουσιακών στοιχείων του χαρτοφυλακίου τη χρονική στιγμή t συμβολίζεται με A_t.

Τη χρονική στιγμή T (στη λήξη του χρέους), η τιμή του μετοχικού κεφαλαίου του χαρτοφυλακίου θα είναι:

$$E_t = \left(A_t - K\right)^+ = \max\left(A_t - K, 0\right)$$

Η τιμή αυτή είναι ίδια με αυτή ενός δικαιώματος προαίρεσης επί της αξίας των περιουσιακών στοιχείων μιας επιχείρησης που συναντά την ονομαστική αξία του χρέους. Οι ιδιοκτήτες της εταιρείας πληρώνονται είτε στην ονομαστική αξία K, είτε αναλαμβάνουν την εταιρεία με τη τιμή A.

Τότε η τιμή του χρέους στη τελική χρονική στιγμή T θα είναι:

$$D_{T,T} = \min\left(A_T, K\right) = A_T - \max\left(A_T - K, 0\right) = K - \max\left(K - A_T, 0\right)$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι η αξία του μετοχικού κεφαλαίου μαζί με την αξία του χρέους μας δίνει τη τιμή όλων των περιουσιακών στοιχείων του χαρτοφυλακίου.

229 “The mathematics of financial modeling & investment management”, Focardi S., Fabozzi F, The Wiley Finance, 2004., σελ. 685-687.

Δηλαδή, $A_t = E_t + D_{t,T}$.

Προφανώς, αυτό ισχύει και για την ληκτικότητα Τ, αφού:

$$E_T + D_{T,T} = \max\left(A_T - K, 0\right) + \min\left(A_T, K\right) = A_T$$

Αθέτηση έχουμε μόνο όταν ο επενδυτής αδυνατεί να πληρώσει τους οφειλέτες του, το οποίο μπορεί να συμβεί, σύμφωνα με το μοντέλο μόνο στη ληκτικότητα Τ του χρέους.

Μετά τη λήξη διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. $A_t > K$

Δηλαδή η συνολική αξία των περιουσιακών στοιχείων του χαρτοφυλακίου να είναι μεγαλύτερη από την ονομαστική αξία του χρέους. Τότε οι δανειστές εισπράττουν την ονομαστική αξία Κ και οι μέτοχοι το υπόλοιπο της συνολικής αξίας των χρεογράφων, δηλαδή, $S_t = A_t - K$. Στη περίπτωση αυτή δεν παρουσιάζεται αθέτηση συμφωνίας.

2. $A_t \le K$

Δηλαδή, η αξία των περιουσιακών στοιχείων του χαρτοφυλακίου να είναι μικρότερη από την ονομαστική αξία και ως αποτέλεσμα ο επενδυτής δεν θα μπορεί να ανταποκριθεί στις υποχρεώσεις του. Στη περίπτωση αυτή, δεν επενδύονται νέα κεφάλαια, οπότε ρευστοποιούνται τα περιουσιακά στοιχεία. Ο επενδυτής δεν κερδίζει, ούτε χάνει οπότε ισχύει ότι: $B_T = A_T, S_T = 0$.

Επομένως προκύπτουν οι σχέσεις:

$$S_T = \max\left(A_T - K, 0\right)$$

$$B_T = \min\left(A_T, K\right) = K - \max\left(K - A_T\right)$$

Στο μοντέλο Merton, η διαδικασία A_t ακολουθεί το μοντέλο της κίνησης Brown της μορφής:

$$dA_t = \mu A_t dt + \sigma A_t dW_t$$

όπου $W_t, t \ge 0$ είναι μια κίνηση Brown και $\mu, \sigma \in \mathbb{R}, \sigma > 0$

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης αυτής θα είναι:

$$A_T = A_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T} + \sigma W_T$$

Επίσης, θα έχουμε:

$$\ln A_T \sim N\left(\ln A_0 + \left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T\right), \sigma^2 T\right)$$

Τελικά, η πιθανότητα αθέτησης της συμφωνίας θα υπολογίζεται από τον τύπο:

$$P\left(A_T \le K\right) = P\left(\ln A_T \le \ln K\right) = \varphi\left(\frac{\ln\left(\frac{K}{A_0}\right) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right).$$

5.2.1.2. Μοντέλο KMV

Ένα εναλλακτικό μέτρο που προκύπτει από το μοντέλο Merton, για τη μέτρηση του πιστωτικού κινδύνου είναι το μοντέλο KMV, που δημιουργήθηκε το 1990. Το μοντέλο αυτό είναι αρκετά χρήσιμο γιατί χρησιμοποιεί μια μεγάλη βάση δεδομένων. Για να περιγράψουμε το μοντέλο, πρέπει να ορίσουμε την αναμενόμενη ευχέρεια αθέτησης EDF. Η ποσότητα EDF είναι η πιθανότητα αθέτησης συμφωνίας μέσα σε ένα χρόνο όπως εκτιμάται από τη μέθοδο KMV.[230]

Από τη σχέση που μας δίνει τη πιθανότητα αθέτησης του μοντέλου BSM για T=1 και $\varphi(d) = 1 - \varphi(-d)$ έχουμε:

$$EDF = 1 - \varphi\left(\frac{\ln A_0 - \ln K + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma}\right)$$

Στο μοντέλο KMV, η ποσότητα EDF έχει τον ίδιο τρόπο κατασκευής με το BSM.

Αν η αξία των περιουσιακών στοιχείων είναι λογαριθμική συνάρτηση κανονικής κατανομής, η πιθανότητα αθέτησης θα δίνεται από τον παραπάνω τύπο.

Αν όμως η αξία των περιουσιακών στοιχείων δεν είναι λογαριθμική συνάρτηση κανονικής κατανομής ή ακολουθεί κατανομή με μεγάλες ουρές, τότε χρησιμοποιούμε την απόσταση αθέτησης DD.

$$DD = \frac{A_0 - \tilde{K}}{\sigma A_0}$$

Όπου $\tilde{K}$ το κατώφλι αθέτησης συμφωνίας και A_0 η περιουσιακή αξία των στοιχείων.

5.2.1.3. Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα των κατασκευαστικών μοντέλων

Τα κατασκευαστικά μοντέλα έχουν πολλά πλεονεκτήματα. Πρώτον, μοντελοποιούν την πολύ απλή λογική υπόθεση ότι είναι ένα αποτέλεσμα της τιμής των περιουσιακών στοιχείων ενός χαρτοφυλακίου να πέφτουν κάτω από την αξία των χρεών του επενδυτή. Στην περίπτωση του BMS μοντέλου, τα αποτελέσματα του μοντέλου δείχνουν πως ο πιστωτικός κίνδυνος ενός εταιρικού χρέους είναι μία συνάρτηση της μόχλευσης και της μεταβλητότητας των περιουσιακών στοιχείων

[230] «Μαθηματική Διαχείριση Κινδύνου», Ξεπαπαδάκη Π., Διπλωματική εργασία, Πανεπιστήμιο Πατρών, 2009., σελ. 32.

του εκδότη. Όμως, κάποια πιο σύγχρονα κατασκευαστικά μοντέλα έχουν αντιμετωπίσει κάποιους περιορισμούς και υποθέσεις του αρχικού BSM μοντέλο.

Ωστόσο, τα κατασκευαστικά μοντέλα δεν είναι κατάλληλα για τη συχνή σήμανση στην αγορά των πιστωτικών ενδεχόμενων παραγώγων. Τα κατασκευαστικά μοντέλα είναι δύσχρηστα στον υπολογισμό τους. Για παράδειγμα, όπως έχουμε ήδη δει, η τιμή ενός ομολόγου με μηδενικό τοκομερίδιο είναι τόσο δύσκολη όσο η τιμολόγηση ενός δικαιώματος προαίρεσης. Με το να προσθέτουμε κουπόνια, μεταφέρουμε το πρόβλημα σε ένα ισοδύναμο τιμολόγησης των σύνθετων options. Η τιμολόγηση κάθε μικρότερου χρέους, απαιτεί την ταυτόχρονη αξιολόγηση όλων των μεγαλύτερων χρεών. Συνεπώς, τα κατασκευαστικά μοντέλα δεν χρησιμοποιούνται όταν υπάρχει ανάγκη για γρήγορη και ακριβή τιμολόγηση πολλών σχετικών πιστωτικών παραγώγων.

Αντίθετα, η κύρια εφαρμογή των κατασκευαστικών μοντέλων είναι στην περιοχή της ανάλυσης του πιστωτικού κινδύνου. Ένα κατασκευαστικό μοντέλο είναι πιο πιθανό να μπορεί να προβλέψει την ποιότητα του πιστωτικού κινδύνου ενός εταιρικού παραγώγου παρά ένα μειωτικού τύπου μοντέλο.[231]

5.2.2. *Μοντέλα Μειωτικού τύπου*

Ο όρος «μειωτικού τύπου» δόθηκε για πρώτη φορά από τον Darell Duffie[232] για να διαφοροποιήσει τα κατασκευαστικά μοντέλα τύπου BSM. Τα κυριότερα μειωτικού τύπου μοντέλα είναι τα Jarrow-Turnbull και Duffie-Singleton. Και για τους δύο τύπους μοντέλων δεν υπάρχει κίνδυνος κερδοσκοπίας.

Η βασική διαφορά είναι ότι η αθέτηση πληρωμής είναι ενδογενής στο BSM μοντέλο, ενώ στα μοντέλα μειωτικού τύπου είναι εξωγενής. Η περίπτωση που δεν γνωρίζουμε από ποιους παράγοντες εξαρτάται η αθέτηση πληρωμής, απλοποιεί το πρόβλημα γιατί αγνοεί τον περιορισμό του να ορίσει τις αιτίες.

Επίσης, οι υπολογισμοί των τιμών των χρεών διαφορετικών χρονικών στιγμών λήξης είναι ανεξάρτητες, κάτι που δεν γίνεται στο μοντέλο BSM.

5.2.2.1. *Ανέλιξη Poisson*

Το θεωρητικό πλαίσιο για τα μειωτικού τύπου μοντέλα αποτελεί η ανέλιξη Poisson. Ορίζουμε μια ανέλιξη Poisson N_t. Οι τιμές της ανέλιξης είναι ένα σύνολο ακέραιων ,1,2,…, του οποίου τα στοιχεία αυξάνονται και οι πιθανότητα να πάμε από τον ένα ακέραιο στον άλλον είναι, σε ένα μικρό διάστημα dt είναι:

$$P\left(N_{t+dt} - N_t = 1\right) = \lambda dt$$

Όπου το λ είναι η παράμετρος της ανέλιξης Poisson και υποθέτουμε ότι είναι μια σταθερά.

Ισοδύναμα, η πιθανότητα να μην συμβεί αυτό στο ίδιο χρονικό διάστημα είναι:

$$P\left(N_{t+dt} - N_t = 0\right) = 1 - \lambda dt$$

231 "The mathematics of financial modeling & investment management", Focardi S., Fabozzi F, The Wiley Finance, 2004., σελ. 696.

232 "The mathematics of financial modeling & investment management", Focardi S., Fabozzi F, The Wiley Finance, 2004., σελ. 696.

Η ανέλιξη Poisson μπορεί να αντιμετωπιστεί σαν μια ανέλιξη καταμέτρησης για κάποια αόριστη ακολουθία γεγονότων.

Στη περίπτωση μας η σχέση μεταξύ των ανελίξεων Poisson και των μειωτικού τύπου μοντέλων είναι ότι ένα γεγονός που αναγκάζει την ανέλιξη Poisson να πάει από το 0 στο 1 μπορεί να αντιμετωπιστεί σαν αθέτηση πληρωμής.

Ένας άλλος τρόπος να δούμε τις ανελίξεις Poisson είναι να δούμε πόσο χρόνο χρειάζεται μέχρι να συμβεί η πρώτη αθέτηση πληρωμής. Αυτή καλείται κατανομή χρόνου αθέτησης (default time). Αποδεικνύεται ότι η κατανομή αυτή υπακούει σε μία εκθετική κατανομή όπως:

$$P(T>t)=e^{-\lambda(T-t)}$$

Αυτή η συνάρτηση κατανομής χαρακτηρίζει επίσης τη πιθανότητα επιβίωσης πριν τη χρονική στιγμή t:

$$Q(t,T)=P(T>t)=e^{-\lambda(T-t)}$$

5.2.2.2. *Μοντέλο Jarrow-Turnbull*

Το μοντέλο Jarrow-Turnbull[233] είναι ένα απλό μοντέλο αθέτησης πληρωμής, το οποίο βασίζεται στην ανέλιξη αθέτησης Poisson που είδαμε παραπάνω. Στο μοντέλο τους, οι Jarrow και Turnbull υπέθεσαν ότι οποιαδήποτε στιγμή και αν συμβεί η αθέτηση, η είσπραξη πληρωμής θα γίνει τη χρονική στιγμή λήξης T. Τότε η τιμή του κουπονιού του ομολόγου θα είναι:

$$B_t=P_{t,T}R_T\int_t^T -dQ(t,u)du+\sum_{i=1}^{n}P_{t,T_i}c_ie^{-\lambda(T_i-t)}=P_{t,T}R_T\left(1-e^{-\lambda(T-t)}\right)+\sum_{i=1}^{n}P_{t,T_i}c_ie^{-\lambda(T_i-t)}$$

Όπου $P_{t,T}$ είναι ο παράγοντας προεξόφλησης χωρίς κίνδυνο, c_i είναι το i κουπόνι, $Q(t,u)$ είναι η πιθανότητα επιβίωσης μέχρι τη χρονική στιγμή t, και R είναι το recovery ratio.

Όπως βλέπουμε από τη παραπάνω σχέση η υπό συνθήκη πιθανότητα αθέτησης βγαίνει έξω από το ολοκλήρωμα και εξαφανίζεται από το τελικό αποτέλεσμα. Αυτό έχει ως συνέπια, υποθέτοντας ότι η είσπραξη της πληρωμής θα γίνει τη χρονική στιγμή λήξης της, οι Jarrow και Turnbull υπέθεσαν ότι δεν υπάρχει καμία εξάρτηση μεταξύ της τιμής του ομολόγου και της πιθανότητας αθέτησης συμφωνίας.

Το μοντέλο Jarrow-Turnbull, όταν χρησιμοποιείται στη πράξη, διαφοροποιείται. Μια διαφοροποίησης είναι να επιτρέψουμε στη παράμετρο λ να είναι μια συνάρτηση του χρόνου και η άλλη είναι να επιτρέψουμε στην είσπραξη να γίνει κατά την αθέτηση. Αυτό θα έχει ως αποτέλεσμα η τιμή του ομολόγου να παίρνει τη μορφή:

[233] "The mathematics of financial modeling & investment management", Focardi S., Fabozzi F, The Wiley Finance, 2004., σελ. 698.

$$B_t = \int_t^T P(t,u)R(u)\left(-dQ(u)\right) + \sum_{i=1}^{n} P_{t,T_i} c_i Q(t,T_i) =$$
$$= \int_t^T P(t,u)R(u)\lambda(u)e^{-\int_t^u \lambda(w)dw} + \sum_{i=1}^{n} P_{t,T_i} c_i e^{-\int_t^{T_i} \lambda(w)dw}$$

5.2.2.3. Μοντέλο Duffie-Singleton

Προφανώς, η υπόθεση των Jarrow-Turnbull ότι η είσπραξη της πληρωμής θα συμβεί μόνο στη χρονική στιγμή λήξης είναι πολύ μακριά από τη πραγματικότητα. Παρόλο που παράγει μια κλειστής μορφής λύση για τη τιμή του ομολόγου, ωστόσο στη πραγματικότητα έχει δύο πολύ σημαντικά μειονεκτήματα: η είσπραξη μπορεί να πραγματοποιηθεί μετά την αθέτηση και ότι το ποσό της είσπραξης μπορεί να διακυμαίνεται στο χρόνο. Αυτό εξαρτάται από τη τιμή της ρευστότητας της εταιρείας τη χρονική στιγμή της αθέτησης.

Οι Duffie και Singleton πρότειναν μια διαφορετική προσέγγιση. Επιτρέπουν στην πληρωμή να συμβεί οποιαδήποτε χρονική στιγμή αλλα το ποσό είναι περιορισμένο να είναι η αναλογία της τιμής του ομολόγου τη στιγμή της αθέτησης σαν να μην ήταν η αθέτηση.[234]

Αυτό είναι:

$$R(t) = \delta D(t,T)$$

Όπου P είναι το recovery ratio, το δ είναι fixed ratio και η $D(t,T)$ αναπαριστά τη τιμή του χρέους αν η αθέτηση δεν πραγματοποιηθεί.

Γι΄ αυτό το λόγο το μοντέλο αυτό είναι γνωστό σαν fractional recovery model. Η λογική σε αυτή τη προσέγγιση είναι ότι η ποιότητα της πίστωσης θα είναι κάποιο μέρος της τελικής τιμής αμέσως πριν την αθέτηση. Με αυτ0 τον τρόπο αποφεύγουμε τα αντιφατικά σενάρια που δημιουργούνται στο μοντέλο Jarrow-Turnbull στο οποίο ο βαθμός είσπραξης, με το να είναι εξωγενείς ποσοστό της default-free πληρωμής, ίσως ξεπεράσει τη τιμή του ομολόγου τη στιγμή της αθέτησης.
Η τιμή του χρέους τη στιγμή t είναι:

$$D(t,T) = \frac{1}{1+r\Delta_t}\left(p\delta \mathrm{E}\left[D(t+\Delta_t,T)\right] + (1-p)\mathrm{E}\left[D(t+\Delta_t,T)\right]\right)$$

Οπότε, η παρούσα αξία του ομολόγου αν δεν συμβεί η αθέτηση θα είναι:

$$D(t,T) = \left[\frac{1-p\Delta_t(1-\delta)}{1+r\Delta_t}\right]^n X(T)$$

[234] "The mathematics of financial modeling & investment management", Focardi S., Fabozzi F, The Wiley Finance, 2004., σελ. 706.

Παρατηρούμε ότι η στιγμιαία πιθανότητα αθέτησης να είναι $p\Delta_t$, είναι συνεπές με τη κατανομή Poisson:

$$-\frac{dQ}{Q} = p\Delta_t$$

Επομένως, αν $\Delta_t = \frac{T}{n}$ έχουμε:

$$D(t,T) = \frac{e^{-p(1-\delta)T}}{e^{rT}} X(T) = e^{-(r+s)T} X(T)$$

Αν τα r,s δεν είναι σταθερές το μοντέλο Duffie-Singleton Γράφεται ως:

$$D(t,T) = E_t\left[e^{-\int_t^T [r(u)+s(u)]du} \right] X(T)$$

Όπου $s(u) = p_u(1-\delta)$.

Το μοντέλο Duffie-Singleton έχει κλειστής μορφής λύση και είναι πιθανό να έχει απλή διαισθητική ερμηνεία του αποτελέσματος. Όταν η πιθανότητα αθέτησης είναι μικρή, το προϊόν είναι μικρό και η εξάπλωση της πίστωσης είναι μικρή.

5.2.2.4. Παρατηρήσεις στα μοντέλα

Ενώ τα μειωτικού τύπου μοντέλα θέτουν μια στέρεα θεωρητική θεμελίωση, στη προσπάθεια τους να μοντελοποιήσουν τη πιθανότητα αθέτησης της συμφωνίας, δεν είναι και τόσο διαισθητικά όσο κάποια άλλα. Επίσης, τα μειωτικού τύπου μοντέλα πάσχουν από τον περιορισμό ότι η αθέτηση θα είναι πάντα μια «έκπληξη».

Ωστόσο, τα μοντέλα Jarrow-Turnbull και Duffie-Singleton είναι όλο και πιο διαδεδομένα από τους οικονομικούς οργανισμούς. Τα μοντέλα αυτά, υποθέτουν ότι η αθέτηση συμβαίνει απροσδόκητα και ακολουθεί ανέλιξη Poisson. Η υπόθεση αυτή μειώνει σε μεγάλο βαθμό της πολυπλοκότητα αφού η ανέλιξη Poisson είναι μια καλή προσέγγιση, λόγω των μαθηματικών ιδιοτήτων της. Για να απλοποιήσουν το μοντέλο, οι Jarrow-Turnbull και Duffie-Singleton υποθέτουν παραπάνω περιορισμούς ώστε να υπάρχουν κλειστής μορφής λύσεις στα βασικά περιουσιακά στοιχεία.[235]

[235] "The mathematics of financial modeling & investment management", Focardi S., Fabozzi F, The Wiley Finance, 2004., σελ. 710.

Παράρτημα

Αποδείξεις θεωρημάτων και προτάσεων του 4^{ου} κεφαλαίου

Στο παράρτημα της εργασίας θα αποδείξουμε κάποια θεωρήματα και προτάσεις που αναφέρονται στα νομισματικά μέτρα κινδύνου που ορίσαμε στο 4^{ο} κεφάλαιο. Οι αποδείξεις βασίζονται κυρίως σε θεωρήματα και εργαλεία της συναρτησιακής ανάλυσης, της κυρτής ανάλυσης καθώς και της μετροθεωρητικής θεωρίας πιθανοτήτων.

<u>Απόδειξη πρότασης 1.1:</u>

Αρχικά, τα αξιώματα (2),(3) των συνόλων των αποδεκτών καταστάσεων μας εξασφαλίζουν ότι:

$$\forall X \in \mathrm{B}, \text{ το } \rho_{\mathrm{B}}(X) \text{ είναι ένας πεπερασμένος αριθμός.}$$

Θα πρέπει να δείξουμε ότι ισχύουν οι ιδιότητες του ορισμού ενός συνεκτικού μέτρου κινδύνου. Οπότε έχουμε:

(1) Η ισότητα: $\inf\{p : X + (a+p) \in \mathrm{B}\} = \inf\{q : X + q \in \mathrm{B}\} - a, \ \forall X \in \mathrm{B} \ \forall m \in \mathbb{R}$

μας δίνει ότι: $\rho_{\mathrm{B}}(X+a) = \rho_{\mathrm{B}}(X) - a, \ \forall X \in \mathrm{B}, \ \forall a \in \mathbb{R}$

Οπότε ισχύει η ιδιότητα της translation invariance.

(2) Έστω ότι για $X, Y \in \mathrm{B}$ και $m, n \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $X + m \in \mathrm{B}$, $Y + n \in \mathrm{B}$. Τότε θα ισχύει ότι $X + Y + (m+n) \in \mathrm{B}$, οπότε από τα αξιώματα (3),(4) έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}\rho_{\mathrm{B}}(X + Y + (m+n)) &= \rho_{\mathrm{B}}(X+Y) - (m+n) \\ &\leq \rho_{\mathrm{B}}(X+Y) \leq \rho_{\mathrm{B}}(X) + \rho_{\mathrm{B}}(Y), \ \forall X, Y \in \mathrm{B}, \ \forall m, n \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Επομένως, ισχύει η ιδιότητα της subadditivity.

(3) Έστω $m > \rho_{\mathrm{B}}(X), \ \forall X \in \mathrm{B}, \ \forall m \in \mathbb{R}$ τότε για κάθε $\lambda > 0$ ισχύει ότι:

$$\lambda(X + m) = \lambda X + \lambda m \in \mathrm{B}$$

Οπότε από τον παραπάνω ορισμό και το αξίωμα 4 έχουμε ότι:

$$\rho_{\mathrm{B}}(\lambda X) \leq \lambda m, \ \forall X \in G, \ \forall m \in \mathbb{R} \ (1)$$

Ομοίως, αν υποθέσουμε ότι $m < \rho_{\mathrm{B}}(X), \ \forall X \in \mathrm{B}, \ \forall m \in \mathbb{R}$ τότε για κάθε $\lambda > 0$ ισχύει ότι:

$$\lambda(X + m) = \lambda X + \lambda m \in \mathrm{B}.$$

Οπότε έχουμε ότι:

$$\rho_{\mathrm{B}}(\lambda X) \geq \lambda m, \ \forall X \in \mathrm{B}, \ \forall m \in \mathbb{R} \ (2)$$

Άρα, από τις σχέσεις (1),(2) έχουμε ότι:

$$\rho_{\mathrm{B}}(\lambda X) = \lambda \rho_{\mathrm{B}}(X), \ \forall \lambda > 0, \ \forall X \in \mathrm{B}.$$

Οπότε ισχύει και η ιδιότητα της θετικής ομοιογένειας.

(4) Αν $X,Y \in B$ με $X \leq Y$ και $X+m \in B$, $\forall m \in \mathbb{R}$ τότε $Y+m \in B$, οπότε από τα αξιώματα (1),(3) και τον ορισμό 6 ισχύει η ιδιότητα της μονοτονίας.

Τέλος, $\forall X \in B$, $\rho_B(X) \leq 0$ τότε $X \in A_{\rho_B}$.

Οπότε, η επόμενη πρόταση θα μας εξασφαλίσει ότι το σύνολο A_{ρ_B} είναι κλειστό και θα ισχύει ότι $A_{\rho_B} = \overline{B}$.

<u>Απόδειξη πρότασης 1.2:</u>

Θα δείξουμε τώρα ότι ισχύουν τα αξιώματα (1)-(4) των συνόλων αποδεκτών καταστάσεων.

- Για το Αξίωμα 1:
  Από την ιδιότητα της θετικής ομοιογένειας έχουμε ότι $\rho(0)=0$ οπότε από την ιδιότητα της μονοτονίας έχουμε ότι: $L^{+} \subset A_{\rho}$.
- Για το Αξίωμα 2:
  Θα δείξουμε ότι τα σύνολα L^{--}, A_{ρ} δεν έχουν κοινά σημεία. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει κάποιο $X \in L^{--}$ τέτοιο ώστε $X \notin A_{\rho}$.

  Υποθέτουμε τώρα ότι : $X \in L^{--}$ με $\rho(X) < 0$, τότε λόγω της μονοτονίας θα ισχύει ότι $\rho(0) < 0$, το οποίο είναι άτοπο.

  Επίσης, αν $\rho(X) = 0$ τότε $\exists \alpha > 0$ τέτοιο ώστε $X + \alpha \in L^{--}$ και λόγω της translation invariance $-\alpha \geq 0$ που επίσης είναι άτοπο.

  Άρα, τελικά ισχύει ότι $\rho(X) > 0$, που σημαίνει ότι $X \notin A_{\rho}$.
- Από τις ιδιότητες της subadditivity και της θετικής ομοιογένειας προκύπτει ότι η απεικόνιση ρ είναι κυρτή και συνεχής στο σύνολο G άρα το σύνολο A_{ρ} είναι κλειστό, κυρτό και ομοιογενής κώνος. (Οπότε ικανοποιούνται τα αξιώματα 3 και 4).

Μένει μόνο να δείξουμε ότι: $\rho = \rho_{A_{\rho}}$

$\forall X \in G$, $\exists \delta \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\rho_{A_{\rho}}(X) < \delta$, τότε:

$X + \delta \in A_{\rho} \Rightarrow \rho(X+\delta) \leq 0$, δηλαδή $\rho(X) \leq \delta$ οπότε $\rho(X) \leq \rho_{A_{\rho}}(X)$, $\forall X \in G$

Άρα, $\rho \leq \rho_{A_{\rho}}$ (1)

Ομοίως, $\forall X \in G$, $\exists \delta \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\rho(X) < \delta$, τότε:

$X + \delta \in A_{\rho} \Rightarrow \rho_{A_{\rho}}(X+\delta) \leq 0$, δηλαδή $\rho_{A_{\rho}}(X) \leq \delta$ οπότε $\rho(X) \geq \rho_{A_{\rho}}(X)$, $\forall X \in G$

Άρα, $\rho \geq \rho_{A_{\rho}}$ (2)

Οπότε, από τις σχέσεις (1),(2) ισχύει το ζητούμενο.

Απόδειξη θεωρήματος 2.1:

Επειδή ισχύει ότι: $-\rho(X)=\varphi(X)=-\psi(-X),\ \forall X\in L^{\infty}$ αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει μια από τις δύο ισότητες.
Το σύνολο $C=\{X:\varphi(X)\geq 0\}$ είναι προφανώς κυρτός και κλειστός ως προς τη νόρμα του L^{∞} κώνος.
Το πολικό σύνολο $C^0=\{\mu:\forall X\in C: E_{\mu}[X]\geq 0\}$ είναι επίσης ένας κυρτός κώνος, κλειστός ως προς την ασθενή* τοπολογία στο $ba(P)$. Όλα τα στοιχεία του C^0 είναι θετικά αφού $L_{+}^{\infty}\subset C$.
Οπότε για το σύνολο: $P_{ba}=\{\mu:\mu\in C^0,\mu(1)=1\}$ έχουμε ότι: $C^0=\bigcup_{\lambda\geq 0}\lambda P_{ba}$.
Από το διπολικό θεώρημα[236] έχουμε: $C=\{X\mid\forall\mu\in P_{ba}: E_{\mu}[X]\geq 0\}$.
Αυτό σημαίνει ότι $\varphi(X)\geq 0$ αν και μόνον αν $E_{\mu}[X]\geq 0,\ \forall\mu\in P_{ba}$.
Αφού, $\varphi(X-\varphi(X))=0 \Rightarrow X-\varphi(X)\in C$ άρα $\forall\mu\in P_{ba}$ έχουμε ότι:

$$E_{\mu}\left[X-\varphi(X)\right]\geq 0.$$

Δηλαδή, $\inf\limits_{\mu\in P_{ba}} E_{\mu}[X]\geq\varphi(X)$ (1)
Για ένα τυχαίο ε>0 έχουμε ότι $\varphi(X-\varphi(X)-\varepsilon)<0 \Rightarrow X-\varphi(X)-\varepsilon\notin C$.
Οπότε $\exists\mu\in P_{ba}$ τέτοιο ώστε $E_{\mu}\left[X-\varphi(X)-\varepsilon\right]<0$

Άρα, $\inf\limits_{\mu\in P_{ba}} E_{\mu}[X]\leq\varphi(X)$ (2)
Οπότε από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε το ζητούμενο.

Απόδειξη θεωρήματος 2.2

(2) $\Rightarrow$(3)
Αν το σύνολο C είναι ασθενώς*- κλειστό, τότε η φ ικανοποιεί την ιδιότητα Fatou.
Πράγματι, έστω $X_n \xrightarrow[P]{} X,\ X\in L^{\infty}$, $\|X_n\|_{\infty}\leq 1$ και $\varphi(X_n)\to\alpha$. Τότε: $X_n-\varphi(X_n)\in C$.
Αφού το σύνολο C είναι ασθενώς*- κλειστό, το όριο $X-\alpha\in C$. Αυτό σημαίνει ότι $\varphi(X-\alpha)\geq 0$, δηλαδή, $\varphi(X)\geq\alpha,\ \forall X\in L^{\infty}$.
Επομένως, ικανοποιείται η ιδιότητα Fatou.
(3) $\Rightarrow$(2)
Θα δείξουμε ότι αν η φ ικανοποιεί την ιδιότητα Fatou, τότε σύνολο C είναι ασθενώς*- κλειστό. Συμβολίζουμε με B_1 τη κλειστή μοναδιαία μπάλα του L^{∞}.

[236] Το διπολικό θεώρημα (bipolar theorem) της κυρτής ανάλυσης, λέει το εξής:
Για ένα μη κενό σύνολο $C\subset X$, όπου X είναι ένας γραμμικός χώρος, τότε ο διπολικός κώνος $C^{00}=\left(C^0\right)^0$ δίνεται από την: $C^{00}=cl\left(co\{\lambda c:\lambda\geq 0,\ c\in C\}\right)$, όπου το co συμβολίζει το μικρότερο κυρτό σύνολο που περιέχει τον χώρο X.

Αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο $C \cap B_1$ είναι κλειστό με πιθανότητα P.
Έστω, λοιπόν, μια ακολουθία $(X_n)_n \subset C$, ομοιόμορφα φραγμένη από το 1 τέτοια ώστε $X_n \xrightarrow[P]{} X,\ X \in L^\infty$. Από την ιδιότητα Fatou έχουμε ότι: $\varphi(X) \geq 0$. Δηλαδή, $X \in C$. Άρα το σύνολο C είναι ασθενώς*- κλειστό.
(2) $\Rightarrow$(1)
Έστω ότι το σύνολο C είναι ασθενώς*- κλειστό. Ορίζουμε το πολικό σύνολο C^0 του C στο χώρο L^1 και εφαρμόζουμε το διπολικό θεώρημα στο ζεύγος (L^1, L^∞):

$$C^0 = \left\{ f : f \in L^1 \text{ και } E_P[fX] \geq 0,\ \ \forall X \in C \right\}$$

$$\mathcal{P}_\sigma \left\{ f \,|\, dQ = fdP \text{ ορίζει πιθανότητα και } f \in C^0 \right\}$$

Προφανώς έχουμε: $C^0 = \bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda \mathcal{P}_\sigma$.
Οπότε βρίσκουμε ένα κλειστό και κυρτό σύνολο μέτρων πιθανότητας $\mathcal{P}_\sigma$ τέτοιο ώστε:

$$\varphi(X) = \inf \left\{ E_Q[X] \,|\, Q \in \mathcal{P}_\sigma \right\}.$$

(1) $\Rightarrow$(2)
Το λήμμα του Fatou λέει ότι κάθε translation invariant submodular απεικόνιση που δίνεται από το infimum σε ένα σύνολο μέτρων πιθανότητας, ικανοποιεί την ιδιότητα Fatou.
Πράγματι, για κάθε $Q \in \mathcal{P}_\sigma$ έχουμε:

$$E_Q[X] \geq \limsup E_Q[X_n] \geq \limsup \varphi(X_n)$$

Όπου $(X_n)_n \subset C$ είναι μια ακολουθία, ομοιόμορφα φραγμένη από το 1 τέτοια ώστε $X_n \xrightarrow[P]{} X,\ X \in L^\infty$.

<u>Απόδειξη θεωρήματος 2.3:</u>

Θα δείξουμε μόνο ότι (1) $\Rightarrow$(2) γιατί οι άλλες επαγωγές είναι εφαρμογές του παραπάνω θεωρήματος.
Έστω, λοιπόν, ότι το μέτρο ρ είναι σχετικό. Θα δείξουμε ότι το σύνολο $\mathcal{P}_\sigma^e$ περιέχει τουλάχιστον ένα στοιχείο.
Αφού το σύνολο $\mathcal{P}_\sigma$ είναι κλειστό ως προς τη νόρμα και κυρτό, τότε η κλάση συνόλων:

$$\left\{ \left\{ \frac{dQ}{dP} > 0 \right\} \,|\, Q \in \mathcal{P}_\sigma \right\}$$

είναι σταθερή σε αριθμήσιμες ενώσεις.
Οπότε για τα P-μηδενικά σύνολα, υπάρχει ένα maximal στοιχείο. Αφού το ρ είναι σχετικό, το στοιχείο αυτό θα βρίσκεται στο Ω. Οπότε υπάρχει $Q \in \mathcal{P}_\sigma$ τέτοιο ώστε $Q \sim P$.

Απόδειξη θεωρήματος 2.4:

(1) $\Leftrightarrow$ (2) Προφανώς η συνεπαγωγή ισχύει.
(1) $\Rightarrow$ (3)
Αν το σύνολο P_σ είναι ασθενώς συμπαγές στον L^1, τότε το σύνολο P_σ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο (από το θεώρημα Dunford-Pettis[237]) οπότε $E_Q[X_n] \to E_Q[X]$ ομοιόμορφα. Αυτό σημαίνει ότι: $\varphi(X_n) \to \varphi(X)$.
(3) $\Rightarrow$ (4) Είναι προφανές.
(4) $\Rightarrow$ (1)
Αν ισχύει η (4), δηλαδή, αν $(A_n)_n$ είναι μια αύξουσα ακολουθία τέτοια ώστε $\bigcup_n A_n = \Omega$, τότε: $\varphi(1_{A_n}) \to 1$., αυτό σημαίνει ότι το σύνολο P_σ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο.
Πράγματι, αν B_n είναι μια ακολουθία φθινουσών συνόλων τέτοια ώστε $\bigcap_n B_n = \varnothing$, τότε:
$\sup_{Q \in P_\sigma} Q[B_n] \le 1 - \inf_{Q \in P_\sigma} Q[B_c^c]$ και η οποία τείνει στο 0. Οπότε από το θεώρημα Dunford-Pettis και επειδή το P_σ είναι κυρτό και κλειστό ως προς τη νόρμα, το P_σ θα είναι ασθενώς συμπαγές.

Απόδειξη θεωρήματος 2.6:

Αντίθετα, υποθέτουμε ότι μια τέτοια απεικόνιση υπάρχει, δηλαδή υπάρχει $\psi : L^0 \to \mathbb{R}$ με τις παραπάνω ιδιότητες, τότε θα ισχύει ότι $\psi(1) = 1$.
Επίσης, για $X \le 0,\ \forall X \in L^0$ θα έχουμε ότι $\psi(X) \le 0,\ \forall X \in L^0$ οπότε από το θεώρημα Hahn-Banach υπάρχει ένα γραμμικό συναρτησιακό $f : L^0 \to \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(1) = 1$ και $f(X) \le \psi(X),\ \forall X \in L^0$.
Αν $X \ge 0$ τότε επίσης $-f(X) = f(-X) \le \psi(-X) \le 0,\ \forall X \in L^0$.
Άρα έχουμε ότι $f(X) \ge 0$ για $X \ge 0$.
Επομένως η f είναι μια γραμμική απεικόνιση στο L^0 που απεικονίζει τις θετικές συναρτήσεις σε θετικές πραγματικές. Οπότε η συνάρτηση f θα είναι συνεχής.
Όμως, επειδή ο χώρος πιθανότητας είναι atomless, δεν υπάρχουν μη τετριμμένες γραμμικές απεικονίσεις που ορίζονται στον L^0, το οποίο είναι άτοπο γιατί υποθέσαμε στην αρχή ότι υπάρχει μια τέτοια απεικόνιση.

[237] Θεώρημα Dunford-Pettis:
Αν $(\Omega, \Im, P)$ είναι ένας χώρος πιθανότητας και S είναι ένα φραγμένο υποσύνολο του L^1, τότε το S είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο αν και μόνον αν το S είναι ασθενώς*-συμπαγές.

Απόδειξη θεωρήματος 2.7:

(1) $\Rightarrow$(2)

Έστω ότι για κάθε $X \in L^0$ έχουμε ότι: $\rho(X) > -\infty$ και έστω $f \in L^0_+$. Προφανώς ισχύει ότι:

$$-\rho(f) = -\lim_n \sup_{Q \in \mathcal{P}_\sigma} E_Q\left[-(f \wedge n)\right] = \lim_n \inf_{Q \in \mathcal{P}_\sigma} E_Q\left[f \wedge n\right]$$

Και επίσης, $\rho(f) < +\infty$.

(2) $\Rightarrow$(3)

Έστω ότι για κάθε $f \in L^0_+$ ισχύει ότι $\rho(f) = \lim_n \left[\sup_{Q \in \mathcal{P}_\sigma} E_Q\left[f \wedge n\right]\right] < +\infty$.

Αν η (3) δεν ισχύει σημαίνει ότι θα μπορούσαμε να βρούμε μια ακολουθία A_n τέτοια ώστε $P(A_n) \le 2^{-n}$ και τέτοια ώστε: $\varepsilon_n = \inf_{Q \in \mathcal{P}_\sigma} Q(A_n) > 0$.

Ορίζουμε $f = \sum_n \frac{n \mathbf{1}_{A_n}}{\varepsilon_n}$.

Από το λήμμα των Borel-Cantelli η f είναι καλά ορισμένη.

Οπότε για κάθε n και για $m = \frac{n}{\varepsilon_n}$ έχουμε:

$$\lim_{k \to \infty} \inf_{Q \in \mathcal{P}_\sigma} E_Q\left[f \wedge k\right] \ge \inf_{Q \in \mathcal{P}_\sigma} E_Q\left[f \wedge m\right] \ge \frac{n}{\varepsilon_n} \inf_{Q \in \mathcal{P}_\sigma} Q(A_n) = \frac{n}{\varepsilon_n} \varepsilon_n = n$$

Αυτό σημαίνει ότι η (2) δεν ισχύει.

(3) $\Rightarrow$(1)

Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\gamma > 0$ τέτοιο ώστε κάθε A με $P[A] \le \gamma$ έχουμε: $\inf_{Q \in \mathcal{P}_\sigma} Q(A) = 0$. Θα δείξουμε ότι $\rho(X) \ge -\infty$, $\forall X \in L^0$.

Για ένα δεδομένο $X \in L^0$ επιλέγουμε N τέτοιο ώστε: $P(X \ge N) \le \gamma$.

Αφού για κάθε $n \ge N$ έχουμε ότι:

$$\sup_{Q \in \mathcal{P}_\sigma} E_Q\left[-(X \wedge n)\right] = \sup_{Q \in \mathcal{P}_\sigma} E_Q\left[-(X \wedge N)\right] \ge -N$$

Αυτό σημαίνει ότι ισχύει η (1).

Απόδειξη θεωρήματος 3.1:

Έστω ότι το A είναι ένα (d,n)-σύνολο αποδεκτών καταστάσεων. Για να δείξουμε ότι το r_A είναι συνεκτικό μέτρο κινδύνου θα πρέπει να δείξουμε ότι ικανοποιεί τα αξιώματα του ορισμού:

Προφανώς, η r_A έχει κλειστές τιμές αφού το A είναι κλειστό. Επίσης, επειδή $0 \in A$ και $\mathbb{R}^n \times \{0\}^{d-n} \not\subset A$ έχουμε ότι $0 \in r_A(0) \ne \mathbb{R}^n$.

Άρα ικανοποιείται το αξίωμα (1).

Έστω $x \in r_{\mathrm{A}}$ και $X \in L^{\infty}(\mathrm{K})$. Τότε από τον ορισμό των συνόλων αποδεκτών καταστάσεων, και το X και το $\overline{x}$ περιέχονται στο A, οπότε $X+\overline{x} \in \mathrm{A}$, δηλαδή, $x \in r(X)$.
Επομένως, έχουμε το αξίωμα (2) του ορισμού.
Τα αξιώματα (3), (4) ικανοποιούνται από το γεγονός ότι το σύνολο A είναι κυρτός κώνος, ενώ το αξίωμα (5) προκύπτει από τον ορισμό της r_{A}.

<u>Αποδείξεις ιδιοτήτων των (d,n) συνεκτικών μέτρων κινδύνου:</u>

<u>Απόδειξη ιδιότητας 1:</u>

Από το αξίωμα (1) του ορισμού το $r(X)$ είναι κλειστό για κάθε $X \in L_d^{\infty}$.
Από τα αξιώματα (1),(2) έχουμε:

$$tr(X)+(1-t)r(X) \subset r(tX+(1-t)X)=r(X), \quad \forall t \in [0,1]$$

Άρα, αυτό σημαίνει ότι το $r(X)$ είναι κυρτό.
Αφού $0 \in r(0)$ και $tr(0)=r(0)$ συμπεραίνουμε ότι το $r(0)$ είναι κλειστός και κυρτός κώνος του $\mathbb{R}^n$.
Ακόμα, από το αξίωμα (2) βλέπουμε ότι: $r(X)+r(0) \subset r(X)$
Και λόγω του ότι $0 \in r(0)$ τελικά έχουμε ισότητα.

<u>Απόδειξη ιδιότητας 2:</u>

Για να δείξουμε ότι $K_n \subset r(0)$, υποθέτουμε κάποιο $x \in \mathrm{K}_n$.
Από τον ορισμό της μερικής διάταξης έχουμε ότι: $\overline{x} \geq 0$ οπότε $r(0) \subset r(\overline{x}) = \{-x\} + r(0)$ από τα αξιώματα (2) και (5).
Άρα, θα έχουμε $x \in r(0)$ και συνεπώς έχουμε ότι $K_n \subset r(0)$.
Για $y \in \mathbb{R}^n$ θέτουμε $D_y = \{y\}^{\circ} = \{x \in \mathbb{R}^n : xy \geq 0\}$.
Προφανώς, $(r(0))^{\circ} = \{y \in \mathbb{R}^n : xy \geq 0, \ \forall x \in r(0)\} = \{y \in \mathbb{R}^d : r(0) \subset D_y\}$.
Αφού από την ιδιότητα 1 το $r(0)$ είναι κυρτός κώνος από το αξίωμα 1 του ορισμού παρατηρούμε ότι $\{0\} \neq r(0) \neq \mathbb{R}^n$.
Από το διπολικό θεώρημα προκύπτει ότι: $r(0) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : x \in D_y, \ \forall y \in (r(0))^{\circ}\right\}$.
Αυτό αποδεικνύει συγκεκριμένα ότι:

$$x \notin \vec{r}_0 \text{ αν και μόνον αν } x \notin \partial D_y = D_y \cap (-D_y) \text{ για κάποιο } y \in (r(0))^{\circ} \quad (*)$$

Έστω τώρα κάποιο τυχαίο $x \in \mathrm{int}(-\mathrm{K}_n)$, τότε $x \in \mathrm{int}(-D_y), \ \forall y \in (r(0))^{\circ}$
Το οποίο αποδεικνύει ότι $x \notin \vec{r}_0$ άρα, $\mathrm{int}(-\mathrm{K}_n) \subset (-\mathrm{K}_n \setminus \vec{r}_0)$.
Χρησιμοποιώντας πάλι τη σχέση (*) βλέπουμε ότι για κάθε $x \in -\mathrm{K}_n$ με $x \notin \vec{r}_0$ έχουμε ότι:

$$x \in -K_n \cap \operatorname{int}(-D_y) \subset -D_y \cap \operatorname{int}(-D_y) = \operatorname{int}(-D_y) \text{ για κάποιο } y \in (r(0))^{\circ}.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $x \notin r(0)$ αφού $r(0) \subset D_y$ και συνεπώς $(-K_n \setminus \vec{r}_0) \cap r(0) = \varnothing$.

Απόδειξη ιδιότητας 3:

(i) Από το αξίωμα (2) και την ιδιότητα 1 έχουμε ότι $r(0) \subset r(X-Y)$ όταν $X \geq Y$, και επίσης $r(Y) = r(Y) + r(0) \subset r(Y) + r(X-Y) \subset r(X)$.

(ii) Από το (i) και με το αξίωμα (5) βλέπουμε ότι η ιδιότητα είναι προφανής.

(iii) Από τον ορισμό της π παρατηρούμε ότι $X \geq \overline{\pi}(X) \geq -\|\pi(X)\|_{\infty} \mathit{1}$ και εφαρμόζοντας την (i) προκύπτει το ζητούμενο.

Απόδειξη ιδιότητας 4:

Η δεύτερη ισότητα είναι άμεση συνέπεια της ιδιότητας 1.
Για τη πρώτη ισότητα παρατηρούμε ότι $x \in r(X)$ αν και μόνον αν:

$$0 \in \{-x\} + r(X) = r(X + \overline{x}).$$

Απόδειξη ιδιότητας 5:

(i) Από το αξίωμα (2) μαζί με τις ιδιότητες 3(iii) και 1 βλέπουμε ότι:

$$\begin{aligned} r(X) \subset r(X-Y) + r(Y) &\subset \left\{\|\pi(X-Y)\|_{\infty} \mathit{1}\right\} + r(0) + r(Y) \\ &= -\left\{\|\pi(X-Y)\|_{\infty} \mathit{1}\right\} + r(Y) \end{aligned}$$

Λόγω συμμετρίας έχουμε επίσης $r(Y) \subset -\left\{\|\pi(X-Y)\|_{\infty} \mathit{1}\right\} + r(X)$.

Οπότε τελικά, έχουμε το ζητούμενο.

(ii) Για να είναι η συνολοσυνάρτηση r είναι συνεχής στο L_d^{∞} αρκεί να δείξουμε ότι είναι: lower-semicontinuous και upper-semicontinuous.
Οπότε έχουμε:
Έστω $y \in r(X)$ και $(X_k)_k \subset L_d^{\infty}$ τέτοια ώστε: $X_k \xrightarrow[\|\cdot\|_{L_d^{\infty}}]{} X$ για κάποιο $X \in L_d^{\infty}$

Από την (i) βλέπουμε ότι υπάρχει μια ακολουθία $y_k \in r(X_k)$ τέτοια ώστε:

$$y = y_k - \|\pi(X - X_k)\|_{\infty} \mathit{1}$$

και αφού η π είναι Lipschitz συνεχής έχουμε ότι:

$$\pi(X - X_k) \xrightarrow[\|\cdot\|_{L_d^{\infty}}]{} 0, \text{ άρα } y_k \to y.$$

Έστω B είναι η μοναδιαία μπάλα στον L_d^{∞} και έστω ένα τυχαίο ε>0.

Από τη Lipschitz συνέχεια της π υπάρχει κάποιο η>0 τέτοιο ώστε:

$\pi(X-Y) \in \varepsilon B, \quad \forall Y \in X + \eta B$

Από την (i) έχουμε ότι:

$r(Y) \subset r(X) - \{\pi(X-Y)\mathit{1}\} \subset r(X) + \varepsilon B, \quad \forall Y \in X + \eta B$

Άρα έχουμε το ζητούμενο.

Απόδειξη θεωρήματος 3.2:

(2) $\Rightarrow$ (1) Άμεση συνέπεια του ορισμού, ικανοποιούνται δηλαδή τα αξιώματα.
(1) $\Rightarrow$ (2)
Θεωρούμε ένα υποσύνολο του L_d^∞ : $C=\left\{X\in L_d^\infty : 0\in r\left(X\right)\right\}$ και επίσης θεωρούμε το θετικό πολικό του κώνο: $C^0=\left\{\mu\in \mathcal{P}_{ba} : E_\mu\left[X\geq 0,\ \ \forall X\in C\right]\right\}$.
Παρατηρούμε ότι το σύνολο C περιέχει το θετικό orthant $L_d^\infty\left(K\right)$ και $C\neq\mathbb{R}^n$.
Επομένως, $\left\{0\right\}\neq C^0\subset ba_d\left(K\right)$ και από τον ορισμό προκύπτει ότι η C^0 είναι $\sigma\left(ba_d, L_d^\infty\right)-$κλειστή.
Ακόμα, το C είναι κλειστός κώνος του L_d^∞ και είναι κλειστή με την L_d^∞-νόρμα αφού:
Έστω $\left(X_k\right)_k$ είναι μια ακολουθία στο C που συγκλίνει σε κάποιο $X\in L_d^\infty$, τότε $r\left(0\right)\subset r\left(X_k\right),\ \ \forall k\in\mathbb{N}$ οπότε έχουμε ότι $r\left(0\right)\subset \limsup_{k\in\mathbb{N}} r\left(X_k\right)=r\left(X\right)$ από την ιδιότητα της συνέχειας (ιδιότητα 5).
Από το διπολικό θεώρημα συμπεραίνουμε ότι:

$$C=\left\{X\in L_d^\infty :\ \inf_{\mu\in C^0} E_\mu\left[X\right]\geq 0\right\}$$

Άρα, από την ιδιότητα 4 έχουμε ότι:

$$r\left(X\right)=\left\{x\in\mathbb{R}^n :\ 0\in r\left(X+\overline{x}\right)\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}^n :\ X+\overline{x}\in C\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}^n :\ \inf_{\mu\in C^0} E_\mu\left[X+\overline{x}\right]\geq 0\right\}.$$

Οπότε τελικά, το θεώρημα ισχύει για $\mathcal{P}_{ba}=C^0$.

Απόδειξη θεωρήματος 3.3:

(1) $\Rightarrow$ (3)
Έστω ότι $\left(X^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι μια φραγμένη ακολουθία του L_d^∞ τέτοια ώστε $\left(X^k\right)_{k\in\mathbb{N}}\xrightarrow[P]{}X$.
Έστω επίσης ένα τυχαίο $x\in\liminf_{k\in\mathbb{N}}\left(r\left(X^k\right)\right)$. Τότε υπάρχει μια ακολουθία $\left(x^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ στον $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε $x^k\in r\left(X^k\right),\ \ \forall k\in\mathbb{N}$ και $x^k\to x$.
Οπότε, για κάθε $\mu\in\mathcal{P}_\sigma$:

$$E_\mu\left[X_k+\overline{x}^k\right]\geq 0,\ \ \forall\mu\in\mathcal{P}_\sigma,\ \ \forall k\in\mathbb{N}$$

και

$$E_\mu\left[X_k+\overline{x}^k\right]\geq\limsup_{k\to\infty} E_\mu\left[X_k+\overline{x}^k\right]\geq 0$$

Από τα οποία έχουμε ότι $x\in r\left(X\right)$.
Άρα το μέτρο r ικανοποιεί την ιδιότητα Fatou.
(3) $\Rightarrow$ (2)
Για να δείξουμε τη κλειστότητα του συνόλου C αρκεί να δείξουμε ότι το $C\cap B$, όπου B είναι η κλειστή μοναδιαία μπάλα του L_d^∞, είναι κλειστό με τη πιθανότητα P.

Έστω ότι $\left(X^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι μια φραγμένη ακολουθία του C τέτοια ώστε $\left(X^k\right)_{k\in\mathbb{N}} \xrightarrow[P]{} X$ και επίσης $\|X_k\|_\infty \le 1,\ \forall k\in\mathbb{N}$.
Από την ιδιότητα Fatou έχουμε ότι:
$\liminf_{k\in\mathbb{N}} r\left(X^k\right) \subset r(X)$ και αφού $r(0)\subset r\left(X^k\right),\ \forall k\in\mathbb{N}$ έχουμε τελικά ότι:

$$r(0)\subset \liminf_{k\in\mathbb{N}} r\left(X^k\right) \subset r\left(X^k\right)$$

Και συνεπώς $X\in C$, το σύνολο C είναι $\sigma\left(L_d^\infty, L_d^1\right)$-κλειστό.
(2) $\Rightarrow$ (3)
Έστω ότι το σύνολο C είναι $\sigma\left(L_d^\infty, L_d^1\right)$-κλειστό και $\left(X^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι μια φραγμένη ακολουθία του C τέτοια ώστε $\left(X^k\right)_{k\in\mathbb{N}} \xrightarrow[P]{} X$ με $X\in L_d^\infty$.
Παρατηρούμε ότι η $\left(X^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ασθενώς στο $\sigma\left(L_d^\infty, L_d^1\right)$ αφού η ακολουθία $\left(X_k Y\right)_k$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη για κάθε $Y\in L_d^1$.
Έστω $x\in \liminf_{k\in\mathbb{N}}\left(r\left(X^k\right)\right)$ τότε υπάρχει μια ακολουθία $\left(X^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ στον $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε για κάθε $k\in\mathbb{N}$ $x^k\in r\left(X^k\right)$ και $x^k\to x$.
Από την ιδιότητα 4 έχουμε ότι:
$r(0)\subset r\left(X^k+\overline{x}^k\right),\ \forall k\in\mathbb{N}$ που σημαίνει ότι $X^k+\overline{x}^k\in C$ και αφού το C είναι $\sigma\left(L_d^\infty, L_d^1\right)$-κλειστό τότε θα έχουμε ότι $X+\overline{x}\in C$.
Τελικά έχουμε ότι: $r(0)\subset r\left(X+\overline{x}\right)=\{-x\}+r(X)$.
(2) $\Rightarrow$ (1)
Θεωρούμε ένα υποσύνολο του L_d^1 : $C=\left\{X\in L_d^1 : 0\in r(X)\right\}$ και επίσης θεωρούμε το θετικό πολικό του κώνο: $C^0=\left\{\mu\in \mathcal{P}_{ba} : \mathrm{E}_\mu\left[X\ge 0,\ \ \forall X\in C\right]\right\}$.
Παρατηρούμε ότι το σύνολο C περιέχει το θετικό orthant $L_d^1(\mathrm{K})$ και $C\ne\mathbb{R}^n$.
Επομένως, $\{0\}\ne C^0\subset ba_d(\mathrm{K})$ και από τον ορισμό προκύπτει ότι η C^0 είναι $\sigma\left(ba_d, L_d^1\right)-$κλειστή.
Ακόμα, το C είναι κλειστός κώνος του L_d^1 και είναι κλειστή με την L_d^1-νόρμα αφού:
Έστω $\left(X_k\right)_k$ είναι μια ακολουθία στο C που συγκλίνει σε κάποιο $X\in L_d^1$, τότε $r(0)\subset r\left(X_k\right),\ \forall k\in\mathbb{N}$ οπότε έχουμε ότι $r(0)\subset \limsup_{k\in\mathbb{N}} r\left(X_k\right)=r(X)$ από την ιδιότητα της συνέχειας (ιδιότητα 5).
Από το διπολικό θεώρημα συμπεραίνουμε ότι:

$$C=\left\{X\in L_d^1 :\ \inf_{\mu\in C^0}\mathrm{E}_\mu\left[X\right]\ge 0\right\}$$

Άρα, από την ιδιότητα 4 έχουμε ότι:

$$r(X)=\left\{x\in\mathbb{R}^n :\ 0\in r\left(X+\overline{x}\right)\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}^n :\ X+\overline{x}\in C\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}^n :\ \inf_{\mu\in C^0}\mathrm{E}_\mu\left[X+\overline{x}\right]\ge 0\right\}$$

Οπότε τελικά, το θεώρημα ισχύει για $\mathcal{P}_{ba}=C^0$.

Απόδειξη πρότασης 4.1:

Από την ιδιότητα translation invariance έχουμε ότι:

$$\rho_{\mathcal{A}_\rho}(X) = \inf\{m : m + X \in \mathcal{A}_\rho\} = \inf\{m : \rho(m + X) \le 0\} =$$

$$= \inf\{m : \rho(X) - m \le 0\} = \inf\{m : \rho(X) \le m\} = \rho(X)$$

Άρα, ότι $\rho_{\mathcal{A}_\rho}(X) = \rho(X), \ \forall X \in \mathcal{A}$.

Οι ιδιότητες (1) και (2) της πρότασης είναι άμεσες.

Για την ιδιότητα (3):

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $\lambda \mapsto \rho(\lambda X + (1-\lambda)Y)$ είναι συνεχής, αφού είναι κυρτή και παίρνει μόνο πεπερασμένες τιμές. Οπότε το σύνολο των $\lambda \in [0,1]$ για τα οποία $\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \le 0$ είναι κλειστό.

Απόδειξη πρότασης 4.2:

1. Για να δείξουμε ότι το $\rho_{\mathcal{A}}$ είναι ένα κυρτό μέτρο κινδύνου αρκεί να δείξουμε ότι ισχύουν τα αξιώματα του ορισμού.
   - Η ιδιότητα της translation invariance και της μονοτονίας είναι άμεσες.
   - Θα δείξουμε ότι το $\rho_{\mathcal{A}}$ παίρνει μόνο πεπερασμένες τιμές.

     Έστω $Y \in \mathcal{A}$ τότε για ένα δεδομένο $X \in \mathcal{X}$ υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός m τέτοιος ώστε $m + X > Y$ αφού τα X,Y είναι φραγμένα.

     Από την ιδιότητα της μονοτονίας και της translation invariance και επειδή $\rho_{\mathcal{A}}(Y) \le 0$ έχουμε ότι $\rho_{\mathcal{A}}(X) \le m$.

     Έστω τώρα m' τέτοιο ώστε $m' + X \le 0$ άρα $\rho_{\mathcal{A}}(X) \ge \rho_{\mathcal{A}}(0) + m' > -\infty$ οπότε τελικά

     $$\rho_{\mathcal{A}}(X) > -\infty.$$
   - Για την κυρτότητα έστω :

     $X_1, X_2 \in \mathcal{X}$ και $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $m_1 + X_1, m_2 + X_2 \in \mathcal{A}$

     Αν $\lambda \in [0,1]$, τότε από τη κυρτότητα του συνόλου $\mathcal{A}$ έχουμε ότι:

     $$\lambda(m_1 + X_1) + (1-\lambda)(m_2 + X_2) \in \mathcal{A}$$

     Και επιπλέον από την translation invariance του $\rho_{\mathcal{A}}$ έχουμε:

     $$0 \ge \rho_{\mathcal{A}}\left(\lambda(m_1 + X_1) + (1-\lambda)(m_2 + X_2)\right) = \rho_{\mathcal{A}}\left(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2\right) - \left(\lambda m_1 + (1-\lambda)m_2\right)$$

     Άρα, η $\rho_{\mathcal{A}}$ είναι κυρτή απεικόνιση.
2. Θέλουμε να δείξουμε ότι $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\rho_{\mathcal{A}}}$.

   Η επαγωγή $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_{\rho_{\mathcal{A}}}$ είναι προφανής. Μένει να δείξουμε ότι $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{A}_{\rho_{\mathcal{A}}}$.

   Αρκεί να δείξουμε ότι αν $X \notin \mathcal{A}$ τότε $\rho_{\mathcal{A}}(X) > 0$.

   Έστω $m > \rho_{\mathcal{A}}(0)$. Από την ιδιότητα 3 της παραπάνω πρότασης υπάρχει $\varepsilon \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $\varepsilon m + (1-\varepsilon)X \notin \mathcal{A}$.

   Επιπλέον,

$$\varepsilon m \le \rho_A\left((1-\varepsilon)X\right) = \rho_A\left(\varepsilon \cdot 0 + (1-\varepsilon)X\right) \le \varepsilon\rho_A(0) + (1-\varepsilon)\rho_A(X)$$

Τότε:

$$\rho_A(X) \ge \frac{\varepsilon\left(m - \rho_A(0)\right)}{1-\varepsilon} > 0,$$

το οποίο είναι το ζητούμενο.

<u>Απόδειξη θεωρήματος 4.1:</u>

Για κάθε $Q \in P$ η συνάρτηση:

$$X \mapsto E_Q[-X] - \alpha(Q)$$

Είναι κυρτή, μονότονη και translation invariant και οι ιδιότητες αυτές ισχύουν αν πάρουμε το supremum.

Αντίστροφα, για $Q \in P$ ορίζουμε την $\alpha(Q)$ ως εξής:

$$\alpha(Q) = \sup_{X \in \mathcal{X}}\left(E_Q[-X] - \rho(X)\right) (1)$$

Και έχουμε ότι: $$\alpha(Q) = \sup_{X \in A_\rho}\left(E_Q[-X]\right) (2)$$

Έστω $Y \in \mathcal{X}$ και παίρνουμε την μορφή (1) της $\alpha(Q)$. Οπότε έχουμε:

$$\rho(Y) \ge \sup_{Q \in P}\left\{E_Q[-Y] - \alpha(Q)\right\}.$$

Για την αντίστροφη ανισότητα θέτουμε $m \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε:

$$m > \sup_{Q \in P}\left\{E_Q[-Y] - \alpha(Q)\right\}$$

Θα πρέπει να δείξουμε ότι $m > \rho(Y)$. Αρκεί να δείξουμε ότι $m + Y \in A_\rho$

Αντίθετα, υποθέτουμε ότι $m + Y \notin A_\rho$.

Αφού το ρ, εξ υποθέσεως είναι κυρτό μέτρο κινδύνου στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^\Omega$ που παίρνει μόνο πεπερασμένες τιμές, τότε η ρ είναι συνεχής. Επομένως, το σύνολο A_ρ είναι κλειστό και κυρτό.

Άρα μπορούμε να βρούμε ένα γραμμικό συναρτησιακό ℓ στον $\mathbb{R}^\Omega$ τέτοιο ώστε:

$$\beta = \sup_{X \in A_\rho} \ell(X) < \ell(m+Y) = \gamma < \infty \quad (3)$$

Το συναρτησιακό ℓ είναι ένα αρνητικό γραμμικό συναρτησιακό.

Πράγματι, παρατηρούμε πρώτα, από τα αξιώματα της κανονικοποίησης και της μονοτονίας ότι: $\rho(X) \le \rho(0)$ για $X \ge 0$

Οπότε αν $X \in \mathcal{X}$ τέτοιο ώστε $X \ge 0$, έχουμε ότι $\lambda X + \rho(0) \in A_\rho$, $\forall \lambda \ge 1$ και τότε

$$\gamma > \ell\left(\lambda X + \rho(0)\right) = \lambda\rho(X) + \rho(0)$$

Για $\lambda \uparrow \infty$, $\ell(X) \le 0$.

Αν υποθέσουμε ότι η ℓ εφαρμόζεται στη σταθερή συνάρτηση 1, δίνει τιμή -1 και χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να ορίσουμε:

$$Q[A] = \ell(-\mathit{1}_A)$$

Το οποίο είναι ένα μέτρο πιθανότητας στο σύνολο P.

Από τις σχέσεις (2), (3) βρίσκουμε ότι:

$$\alpha(Q) = \sup_{X \in A_\rho} \left(E_Q[-X] \right) = \beta .$$

Όμως, $E_Q[-Y] - m = \ell(m+Y) = \gamma > \beta = \alpha(Q)$ το οποίο είναι άτοπο από την επιλογή του m.

Επομένως, $m + Y \in A_\rho$ και συνεπώς $m > \rho(Y)$.

Οπότε, έχουμε τελικά ότι $m = \rho(Y), \ \forall Y \in X$.

<u>Απόδειξη πρότασης 5.4:</u>

Αν το σύνολο D είναι φραγμένο ως προς τη νόρμα, τότε από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι:

$$E_Q[-X] - \rho^*(Q) \le \|X\|_p \left\| \frac{dQ}{dP} \right\|_q - \rho^*(Q) \le \|X\|_p \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \left\| \frac{dQ}{dP} \right\|_q - \alpha$$

Και επιπλέον $\rho(X) < \infty$.

Αντίστροφα, αν το D δεν είναι φραγμένο ως προς τη νόρμα στον L^q, τότε υπάρχουν $(X_n)_n \subset L^p$ και $Q_n \in \mathcal{Q}, \ \forall n$ τέτοια ώστε $X_n \le 0, \ \|X_n\|_p = 1$ και $E_{Q_n}[-X_n] \ge n^3$.

Ορίζουμε $X = \sum \frac{1}{n^2} X_n \in L^p$, τότε $X < \frac{1}{n^2} X_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$ και επιπλέον:

$$\rho(X) \ge \rho\left(\frac{1}{n^2} X_n\right) \ge E_{Q_n}\left[\frac{1}{n^2} X_n\right] - \alpha \ge n - \alpha, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Το οποίο σημαίνει ότι $\rho(X) = \infty$.

<u>Απόδειξη θεωρήματος 5.3:</u>

Αν το ρ είναι πεπερασμένο τότε από το θεώρημα 25 και τη πρόταση 18 το σύνολο $D = \left\{ \frac{dQ}{dP} : Q \in \mathcal{Q} \right\} \subset L^p$ είναι φραγμένο ως προς τη νόρμα.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι είναι ασθενώς κλειστό, οπότε από το θεώρημα Alaoglu-Banach θα είναι και ασθενώς συμπαγές.

Αντίστροφα,, αν ισχύει η αναπαράσταση (3) τότε το D μπορεί να επιλεχθεί ώστε να είναι κυρτό και φραγμένο ως προς τη νόρμα οπότε από τη πρόταση 18 το ρ είναι πεπερασμένο.

<u>Απόδειξη θεωρήματος 6.1:</u>

Το μέτρο ρ όπως είναι ορισμένο ικανοποιεί τα αξιώματα του ορισμού.

Αντίστροφα, αν ρ είναι ένα κυρτό μέτρο κινδύνου ορίζουμε:

$$S(X) = \left\{ m \in \mathbb{R} : \sup_{Q \in ba_d(K)} E_Q\left(-(X + me_1)\right) - \alpha(Q) \le 0 \right\}.$$

Τότε εξ ορισμού του α ισχύει ότι:

$$R(X)=\{m\in\mathbb{R}:\ \rho(X+me_1)\le 0\}$$

Θα πρέπει να δείξουμε ότι $S(X)=R(X)$.

Έστω $m\in R(X)$ τότε $X+me_1\in A_\rho$.

Οπότε για κάθε $Q\in ba_d(K)$ ισχύει ότι $E_Q(-(X+me_1))\le\alpha(Q)$.

Και ακόμα ισχύει ότι:

$$\sup_{Q\in ba_d(K)}\left(E_Q(-(X+me_1))-\alpha(Q)\right)\le 0$$

Άρα $m\in S(X)$. Δηλαδή, $R(X)\subset S(X)$.

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό $S(X)\subset R(X)$ έχουμε:

Έστω αντίθετα, ότι υπάρχει κάποιο $m'\in S(X)$ τέτοιο ώστε $m'\notin R(X)$.

Τότε $\sup\limits_{Q\in ba_d(K)}\left(E_Q(-(X+m'e_1))-\alpha(Q)\right)\le 0$ και αφού $m\notin R(X)$ τότε $X+me_1\notin A_\rho$.

Οπότε από το διαχωριστικό θεώρημα για τα κυρτά σύνολα, υπάρχει ένα γραμμικό συναρτησιακό $\ell\in\left(L_d^\infty(P)\right)^*$ με $\inf\limits_{Y\in A_\rho}\ell(Y)>\ell(X+m'e_1)$.

Ισχυριζόμαστε ότι το συναρτησιακό ℓ είναι θετικό, δηλαδή, $\ell(Y)\ge 0,\ \forall Y\in L_d^\infty(K)$.

Πράγματι, αφού το K είναι κυρτός κώνος τότε $\lambda Y\in K,\ \forall\lambda>0$.

Από το αξίωμα της translation invariance έχουμε ότι:

$$\rho(m'e_1)\le\rho(\lambda Y+m'e_1)\text{ και } R(0)\subset R(\lambda Y)$$

Αυτό σημαίνει ότι $\lambda Y+me_1\in A_\rho$ για κάθε $m\in R(0)$.

Συνεπώς, έχουμε ότι:

$$-\infty<\ell(X+m'e_1)<\ell(X+me_1)=\lambda\ell(Y)+\ell(me_1),\ \ \forall\lambda>0.$$

Επομένως, $\ell(Y)\ge 0,\ \ \forall Y\in L_d^\infty(K)$.

το συναρτησιακό ℓ παράγει ένα πεπερασμένα αθροίσιμο μέτρο $Q\in ba_d(K)$ με:

$$\inf_{Y\in A_\rho}E_Q[Y]>E_Q[X+m'e_1]$$

Όμως, έχουμε ότι:

$$E_Q[X+m'e_1]\ge\alpha(Q)=\inf_{Y\in A_\rho}E_Q[Y]$$

το οποίο είναι άτοπο.

Άρα $S(X)\subset R(X)$ και τελικά έχουμε ισότητα.

Σύνοψη

Η εργασία αυτή είχε ως στόχο να περιγράψουμε τη σπουδαιότητα της μέτρησης του επενδυτικού κινδύνου, έτσι ώστε να γίνει η αποτελεσματική διαχείριση του, προκειμένου να ληφθούν σωστές επενδυτικές αποφάσεις, οι οποίες θα επιφέρουν τα επιθυμητά κέρδη στους επενδυτές.

Στο Κεφάλαιο 1 περιγράψαμε την έννοια της επένδυσης και τα είδη των επενδύσεων. Περιγράψαμε επίσης τα είδη των επενδυτικών προιόντων, καθώς και κάποια χαρακτηριστικά τους στοιχεία. Συγκεκριμένα, αναλύσαμε τα ομόλογα, τις μετοχές και τα παράγωγα προϊόντα. Τέλος, μιλήσαμε για τις αγορές χρηματοπιστωτικών προιόντων καθώς τα είδη των επενδυτών που δραστηριοποιούνται σε αυτές.

Το κεφάλαιο 2 είδαμε τις βασικές έννοιες στη Θεωρία Χαρτοφυλακίου και περιγράψαμε τις σύγχρονες θεωρίες, οι οποίες είναι: το μοντέλο του Markowitz, ο συντελεστής beta, το μοντέλο CAPM και τέλος το μοντέλο APT. Αναφερθήκαμε, επίσης, στη Θεωρία των αποτελεσματικών αγορών καθώς και τη σχέση της με τον επενδυτικό κίνδυνο και τη διαχείριση του χαρτοφυλακίου.

Στο Κεφάλαιο 3 αναφερθήκαμε στην έννοια του κινδύνου και στα είδη των κινδύνων που επηρεάζουν μια επένδυση ή γενικότερα μια αγορά. Είδαμε επίσης ότι παρόλο που οι έννοιες αβεβαιότητα και κίνδυνος μοιάζουν, στην ουσία διαφέρουν κατά πολύ. Περιγράψαμε, επίσης, την σπουδαιότητα της διαχείρισης κινδύνων και τα βήματα για τη πραγματοποίηση της. Τέλος, αναφερθήκαμε στη διαφοροποίηση του χαρτοφυλακίου και πόσο σημαντική είναι στη μείωση του επενδυτικού κινδύνου.

Στο κεφάλαιο 4 είδαμε αρχικά τα μέτρα αβεβαιότητας, τα οποία δεν είναι αξιόπιστα για τη μέτρηση του κινδύνου γιατί δεν λαμβάνουν υπόψην την ασύμμετρη φύση του κινδύνου. Περιγράψαμε τα coherent μέτρα κινδύνου και τα convex μέτρα κινδύνου αρχικά σε πεπερασμένους χώρους πιθανότητας και ύστερα σε γενικούς χώρους και είδαμε τα μέτρα αυτά για διανύσματα χαρτοφυλακίου. Επίσης, περιγράψαμε και κάποιες άλλες κλάσεις των μέτρων αυτών, όπως είναι τα law invariant μέτρα κινδύνου, τα εντροπικά μέτρα κινδύνου και τα μέτρα που είναι ορισμένα σε χώρους Orlicz Heart. Τέλος, είδαμε τα δυναμικά μέτρα κινδύνου τα οποία έχουν περισσότερες επιθυμητές ιδιότητες και η μελέτη τους βρίσκεται ακόμα σε εξέλιξη.

Στο $5^{ο}$ και τελευταίο κεφάλαιο ορίσαμε το μέτρο κινδύνου Value-At-Risk, με την έννοια των μέτρων που αναλύσαμε στο $4^{ο}$ κεφάλαιο, περιγράψαμε τις μεθόδους υπολογισμού του και είδαμε τα μειονεκτήματά του, τα οποία που οδήγησαν στην δημιουργία των μέτρων του προηγούμενου κεφαλαίου. Περιγράψαμε, επίσης, μια εναλλακτική μέθοδο της Αξίας σε κίνδυνο, την Conditional Value-At-Risk, τους τρόπους υπολογισμού της, καθώς και κάποιες εναλλακτικές μορφές της. Τέλος, είδαμε κάποια μοντέλα μέτρησης του πιστωτικού κινδύνου, τα οποία διακρίνονται σε κατασκευαστικά και μοντέλα μειωτικού τύπου.

Τέλος, στο παράρτημα της εργασίας αποδείξαμε μερικά από τα θεωρήματα, τις προτάσεις και τις ιδιότητες, που αναφέραμε στο 4^{o} κεφάλαιο και αφορούν τα συνεκτικά και κυρτά μέτρα κινδύνου.

Όπως είδαμε, η διαχείριση του κινδύνου είναι πολύ σημαντική και για να είναι αποτελεσματική, θα πρέπει να προηγηθεί η ποσοτικοποίηση του. Αναφέραμε ότι, δεν υπάρχει τέλειο μέτρο κινδύνου, αφού η έννοια του κινδύνου είναι αόριστη και δεν μπορεί να προσδιοριστεί επακριβώς.

Επομένως, η αναζήτηση των μεθόδων που για τη μέτρηση του κινδύνου θα βρίσκεται πάντα σε εξέλιξη, ώστε κάθε φορά να βρίσκουμε ένα μέτρο που θα έχει περισσότερες επιθυμητές ιδιότητες από τα προηγούμενα.

Βιβλιογραφία

Ελληνική βιβλιογραφία

[1] «Αγορές Χρήματος και κεφαλαίου», Α. Νούλας, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Μακεδονίας, Θεσσαλονίκη 2006.

[2] «Ανάλυση Κεφαλαιαγορών. Παράγωγα. Φυλλάδιο 6», Σεμινάρια ΕΤΕ, Ηλεκτρονικές Σημειώσεις, Γκατζιώνης Γ., 2012.

[3] «Διαχείριση Κινδύνου με την Value-At-Risk (VaR) υποδειγμάτων», Μπισμπίκης Χ., Μεταπτυχιακή Εργασία, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, 2012.

[4] «Διαχείριση Χαρτοφυλακίου: στη θεωρία και στη πράξη. Κοτζαμάνης Ν. Σ., Εθνική Τράπεζα Ελλάδος, 1999.

[5] «Εισαγωγή στη μαθηματική χρηματοοικονομία», Πολυράκης Ι. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις, Αθήνα 2010.

[6] «Επενδύσεις», Τζαβαλής Η., Πετράκης Α. ,Εκδόσεις ΟΠΑ, Αθήνα 2009.

[7] «Θεωρία Χαρτοφυλακίου και Εφαρμογές», Ραδάμανθυς Τσότσος, Σημειώσεις, 2013.

[8] «Μαθηματική Διαχείριση Κινδύνου», Ξεπαπαδάκη Π., Διπλωματική εργασία, Πανεπιστήμιο Πατρών, 2009

[9] Σεμινάρια ΕΤΕ, Ηλεκτρονικές Σημειώσεις 2012.

[10] «Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις με εφαρμογές στα χρηματοοικονομικά», Σπηλιώτης Ι. Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα 2004.

[11] «Σύγχρονη Θεωρία Χαρτοφυλακίου και αποτίμηση περιουσιακών στοιχείων», Μακρής Σ., Διπλωματική Εργασία ΕΜΠ, Αθήνα 2014.

[12] «Χρήμα και τράπεζες», Α. Νούλας, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Πανεπιστημίου Μακεδονίας, Θεσσαλονίκη 2005.

Ξένη βιβλιογραφία

[13] "Advanced Stochastic Models, Risk Assessment, and Portfolio Optimization", The Frank Fabozzi Series, Rachev S., Stoyanov S., Fabozzi F., Εκδόσεις John Wiley & Sons, 2008.

[14] "An introduction to market risk measurement", Dowd K. The Wiley Finance, Εκδόσεις John Wiley & Sons, 2002.

[15] "Risk, uncertainty and profit", Knight F., Boston, MA: Hart, Schaffner & Marx; Houghton Mifflin Co.1921.

[16] "The mathematics of financial modeling & investment management", Focardi S., Fabozzi F, The Wiley Finance, 2004.

Ερευνητικές Εργασίες

[1] "An analysis of VaR-based capital requirements", Cuoco D. Liu H. Journal of Financial Intermediation, 2005.

[2] "Back to the Future. Plenary Lecture at the first World Congress of the Bachelier Society", Heath D., Paris, 2000.

[3] "Coherent Measures of risk", Artzner P., Delbaen F. Eber J., Heath D., Math. Finance 1999.

[4] "Coherent Risk measures in a dynamic framework", Balbas A. Garrido J. Mayoral S., June 2002.

[5] "Coherent Multiperiod Risk Adjusted Values and Bellman' s Principle", Artzner P, Delbaen F., Eber J., Heath D., Ku H., 2004.

[6] "Coherent risk measures on general probability spaces", Delbaen F. In Advances in Finance and Stochastics, Springer, Berlin, 2002.

[7] "Conditional and dynamic convex risk measures", Detlefsen K., Scandolo G.

[8] "Consistent risk measures for portfolio vectors". Burgert C., Ruchendorf L.,

[9] "Convex measures of risk and trading constrains". Follmer H., Schied A., Finance Stoch, 2002.

[10] "Convex risk measures and the dynamics of their penalty functions", Follmer H., Penner I, 2006.

[11] "Convex Risk Measures: Basic Facts, Law-invariance and beyond, Asymptotics for Large Portfolios", Follmer H., Knispel T., 2010.

[12] "Deviation Measures in Risk Analysis and optimization", Research paper, Rockafellar R., Uryasev S. University of Florida, 2002.

[13] "Dynamic coherent risk measures", Riedel F., Stochastic Processes and their applications.p.185-200 2004

[14] "Dynamic convex risk measures", Fritelli M., Gianin E.., New risk measures for the 21th century, 2004, G Szego ed. John Wiley & Sons p. 227-248.

[15] "Dynamic Monetary Risk Measures for Bounded Discrete-Time Processes", Cheridito P., Delbeaen F., Kupper M., 2004.

[16] "Dynamic Risk Measures", Riedel F., Lecture Notes of a Mini-Course at Paris IX, Duphine, Institute of Mathematical Economics, Bielefeld University, 2007.

[17] "Mathematical Methods in modern risk measurement: A survey", Balbas A. 2007, pp. 205-219.

[18] “Law invnariant convex risk measures”, Frittelli M. και Gianin E., Advances in mathematical Economics, 2005.

[19] “Measures of risk”, Szego G. Journal of Banking and Finance 26, 2002.

[20] “On convex risk measures on L^p spaces”, Kaina M. Ruchendorf L. University of Freiburg, Department of Mathematical Stochastics.

[21] “On dynamic measures of risk”, Cvitanic J., Karatzas I., 1998.

[22] “On Law invariant coherent risk measures”, Kusuoko S., 2001.

[23] “Risk Measures on Orlicz hearts”, Cheridito P., Li T., Math. Finance, 2009.

[24] “Robust preferences and convex measures of risk”, Follmer H., Schied A., 2002.

[25] “Some remarks on the Value-At-Risk and the conditional Value-At-Risk., Pflug G., Department of Statistics and Decision Support Systems, University of Vienna.

[26] “Stochastic Finance: An Introduction to Discrete Time”, Follmer H., Schied A., 2004.

[27] “VaR vs CVaR in Risk Management and Optimization”, Uryasev S., Risk Management and Financial Engineering Lab, University of Florida.

[28] “Vector-valued coherent risk measures”, Jouini E., Metteb M., Touzi N., 2002

Ηλεκτρονικές Πηγές

[29] http://www.de.teipat.gr/documents/xeimerino%2020102011/%CE%98%CE%B5%CF%89%CF%81%CE%AF%CE%B1%20%CE%94%CE%B9%CE%B1%CF%87%CE%B5%CE%AF%CF%81%CE%B9%CF%83%CE%B7%CF%82%20%CE%A7%CE%B1%CF%81%CF%84%CE%BF%CF%86%CF%85%CE%BB%CE%B1%CE%BA%CE%AF%CE%BF%CF%85.pdf

[30] https://www.euretirio.com/arbitrage/

[31] https://www.euretirio.com/pistotikos-kindynos/

[32] “How do we measure risk”:

http://people.stern.nyu.edu/adamodar/pdfiles/valrisk/ch4.pdf

[33] Risk and Diversification: Different Types of Risk | Investopedia http://www.investopedia.com/university/risk/risk2.asp#ixzz4Dl86kGxv

[34] The Importance Of Diversification | Investopedia http://www.investopedia.com/articles/02/111502.asp#ixzz4Dl92gFYK

[35] Risk Management Framework (RMF): An Overview | Investopedia http://www.investopedia.com/articles/professionals/021915/risk-management-framework-rmf-overview.asp#ixzz4DpnLTfwF