ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
Μαθηματική Προτυποποίηση σε Σύγχρονες Τεχνολογίες και την Οικονομία

Μέθοδοι σταθεροποίησης με ανάδραση για την επίλυση προβλημάτων μη γραμμικού προγραμματισμού

ΓΕΩΡΓΙΟΣ Ι. ΑΘΑΝΑΣΙΟΥ

Α.Μ. 09312002

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΙΑΣΩΝ ΚΑΡΑΦΥΛΛΗΣ

ΑΘΗΝΑ, 2016

Μεταπτυχιακή εργασία του **Γεωργίου Αθανασίου**, μεταπτυχιακού φοιτητή του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου στο Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών «*Μαθηματική Προτυποποίηση σε Σύγχρονες Τεχνολογίες και την Οικονομία*».

Κατεύθυνση: Τεχνολογίες Αιχμής.

Ο τίτλος της εργασίας είναι: «*Μέθοδοι σταθεροποίησης με ανάδραση για την επίλυση προβλημάτων μη γραμμικού προγραμματισμού*».

Επιβλέπων της εργασίας είναι ο Επίκουρος Καθηγητής Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.

Ιάσων Καραφύλλης.

Για τη συγγραφή της εργασίας χρησιμοποιήθηκε η γλώσσα LaTeX.

Στον Πατέρα μου

“Doubtless you have often been asked
about the purpose of mathematics
and whether the delicate constructions
which we conceive as entities
are not artificial and generated at whim.
Amongst those who ask this question,
I would single out the practical minded
who only look to us
for the means to make money.
Such people do not deserve a reply.”

Henri Poincare
La Valeur de La Science Chapter V

Ευχαριστίες

Η ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας και του μεταπτυχιακού προγράμματος δεν θα ήταν εφικτή χωρίς την επιστημονική και ηθική υποστήριξη του επιβλέποντα καθηγητή της Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. του Ε.Μ.Π. **Ιάσονα Καραφύλλη**. Η πολύ ενδιαφέρουσα εργασία του αποτέλεσε το έναυσμα για τη συγγραφή της παρούσας εργασίας, ενώ οι εύστοχες παρατηρήσεις του συνέβαλλαν τα μάλα στην βελτίωση της ποιότητας της.
Επίσης, θέλω να ευχαριστήσω τους διδάσκοντες στο Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα. Ιδιαίτερα, θέλω να ευχαριστήσω τον καθηγητή της Σχολής Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών του Ε.Μ.Π. **Γεράσιμο Αθανασούλη** για τις πολύτιμες συμβουλές του.

Γεώργιος Ι. Αθανασίου

Περίληψη

Η παρούσα εργασία ασχολείται με την εφαρμογή της θεωρίας των δυναμικών συστημάτων και της μη γραμμικής θεωρίας ελέγχου στην επίλυση προβλημάτων μη γραμμικού προγραμματισμού. Πιο συγκεκριμένα, η παρούσα εργασία μελετά το άρθρο των Iasson Karafyllis και Miroslav Krstic, με τίτλο «Global Dynamical Solvers for Nonlinear Programming Problems». Οι εν λόγω ερευνητές κατασκεύασαν, με τη χρήση μιας επέκτασης της μεθοδολογίας των συναρτήσεων ελέγχου Lyapunov (η οποία αξιοποιεί επεκτάσεις του θεωρήματος του LaSalle), μια οικογένεια ολικά ορισμένων δυναμικών συστημάτων για την επίλυση προβλημάτων μη γραμμικού προγραμματισμού, έτσι ώστε:

(α) τα σημεία ισορροπίας να είναι τα άγνωστα (και προς εύρεση) κρίσιμα σημεία του προβλήματος.

(β) για κάθε αρχική συνθήκη, η λύση του προβλήματος των αρχικών τιμών να συγκλίνει στο σύνολο των κρίσιμων σημείων.

(γ) κάθε αυστηρά τοπικό ελάχιστο να είναι τοπικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

(δ) το εφικτό σύνολο να είναι ένα θετικά αναλλοίωτο σύνολο.

(ε) το δυναμικό σύστημα να δίνεται σε ρητή μορφή, χωρίς την συμμετοχή των άγνωστων κρίσιμων σημείων του προβλήματος.

(στ) το πρόβλημα να επιλύεται χωρίς να γίνει χρήση κάποιας υπόθεσης σχετικά με την κυρτότητα της αντικειμενικής συνάρτησης.

Η δομή της εργασίας είναι η ακόλουθη: στο Κεφάλαιο 1 γίνεται μια καταγραφή βασικών εννοιών από την θεωρία πινάκων, την θεωρία των δυναμικών συστημάτων και την θεωρία του μη γραμμικού προγραμματισμού. Το Κεφάλαιο 2 αποτυπώνει τα βασικά αποτελέσματα της εργασίας των Karafyllis και Krstic. Στο Κεφάλαιο 3 γίνεται εφαρμογή των αποτελεσμάτων της εν λόγω εργασίας στο ερευνητικό πεδίο της επίλυσης προβλημάτων μη γραμμικού προγραμματισμού, ενώ στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζονται τρία παραδείγματα και μια οικονομική εφαρμογή της προτεινόμενης μεθοδολογίας. Τέλος, στο Κεφάλαιο 5 γίνεται ανακεφαλαίωση των βασικών σημείων της παρούσας εργασίας.

Summary

This thesis examines the application of the theory of dynamical systems and non linear control theory for the solution of nonlinear programming problems. More specifically, this thesis presents the work of Iasson Karafyllis and Miroslav Krstic, which constructed a family of globally defined dynamical systems for solving nonlinear programming problems, based on Lyapunov control functions and according to the extensions of LaSalle's theorem, such that:

(a) the equilibrium points are the unknown (and sought) critical points of the problem,

(b) for every initial condition, the solution of the corresponding initial value problem converges to the set of critical points,

(c) every strict local minimum is locally asymptotically stable,

(d) the feasible set is a positively invariant set,

(e) the dynamical system is given explicitly and does not involve the unknown critical points of the problem,

(f) no convexity assumption is employed.

The structure of the thesis is as follows: Chapter 1 presents basic knowledge concerning matrices, dynamical systems and nonlinear programming. Chapter 2 captures the results of Karafyllis and Krstic for Lyapunov functions (extending LaSalle's theorem) and Chapter 3 presents the application of their results in the field of nonlinear programming. Chapter 4 applies the proposed methodology to some simple examples and to an economic problem. Finally, Chapter 5 summarizes the main points of this thesis.

Στην παρούσα εργασία θα χρησιμοποιηθεί η ακόλουθη σημειογραφία:

- Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοιχτό σύνολο. Ο όρος $C^0(I\ ;\ \Omega)$, παριστά την κλάση των συνεχών συναρτήσεων στο σύνολο I, η οποία παίρνει τιμές στο σύνολο Ω. Ο όρος $C^1(I\ ;\ \Omega)$, όπου $k \geq 1$ είναι ένας ακέραιος αριθμός, παριστά την κλάση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο σύνολο A με συνεχείς παραγώγους μέχρι και την τάξη k, η οποία παίρνει τιμές στο σύνολο Ω. Ο όρος $C^\infty(A;\Omega)$, παριστά την κλάση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο σύνολο A η οποία έχει συνεχείς παραγώγους όλων των τάξεων (λείες συναρτήσεις), η οποία παίρνει τιμές στο σύνολο Ω, ήτοι, $C^\infty(A;\Omega) = \bigcap\limits_{k\geq 1} C^k(A;\Omega)$.

- Για ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$, με τον όρο $|x|$ παρίσταται η συνήθης Ευκλείδεια νόρμα και με x' το ανάστροφο διάνυσμα. Ο πίνακας με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς παρίσταται ως $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, ο ανάστροφος του ως $A' \in \mathbb{R}^{m\times n}$, ενώ ο ταυτοτικός πίνακας παρίσταται ως $I_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Για τον τετραγωνικό πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ο όρος $\det(A)$ παριστά την ορίζουσα αυτού. Ο προσαρτημένος (ή συζυγής) πίνακας $adj(A)$ ενός τετραγωνικού πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι ο ανάστροφος του πίνακα των συμπαραγόντων, δηλαδή είναι ο τετραγωνικός πίνακας ο οποίος ικανοποιεί την ιδιότητα $Aadj(A) = adj(A)A = \det(A)I_n$. Για το διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$, ο όρος $diag(x) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ παριστά τον διαγώνιο πίνακα με τα στοιχεία του διανύσματος $x \in \mathbb{R}^n$ στην διαγώνιο του.

- Για κάθε $x = (x_1, ..., x_n)' \in \mathbb{R}^n$ ορίζονται τα ακόλουθα: $x^+ = (\max(0, x_1), ..., \max(0, x_n))' \in \mathbb{R}^n$ και $x^- = (\min(0, x_1), ..., \min(0, x_n))' \in \mathbb{R}^n$. Η ακόλουθη ιδιότητα ισχύει για κάθε θετικά ορισμένο και διαγώνιο πίνακα $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$: $x'Rx^+ = 0 \Leftrightarrow x^+ = 0$.

- Ορίζουμε $\mathbb{R}^n_+ := (\mathbb{R}_+)^n = \{\,(x_1, ..., x_n)' \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0\,,\ ...,\ x_n \geq 0\,\}$. Έστωσαν $x, y \in \mathbb{R}^n$. Θα αναφέρεται ότι $x \leq y$ αν και μόνο αν $(y - x) \in \mathbb{R}^n_+$.

- Με τον όρο K_∞ παρίσταται η κλάση των συνεχών, αυξουσών, μη φραγμένων συναρτήσεων $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ με $a(0) = 0$.

- Για κάθε βαθμωτή συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, ο όρος $\nabla V(x)$ παριστά το ανάδελτα του V στο $x \in \mathbb{R}^n$, ήτοι $\nabla V(x) = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}(x), ..., \frac{\partial V}{\partial x_n}(x)\right)$.

- Το ακρωνύμιο «s.t.» σημαίνει «subject to».

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Θεωρητικό Υπόβαθρο

Στην παρούσα ενότητα θα παρουσιαστεί το βασικό θεωρητικό υπόβαθρο το οποίο είναι απαραίτητο για την κατανόηση της μεθοδολογίας η οποία αναλύεται στην εργασία [23].

1.1 Χρήσιμα στοιχεία από θεωρία πινάκων

1.1.1 Θετικά Ορισμένοι Πίνακες

Ορισμός 1.1 *(βλ. [28], Κεφ. 13): Έστω $H = [h_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ένας συμμετρικός πίνακας του οποίου τα στοιχεία είναι πραγματικοί αριθμοί. Λέμε ότι ο H είναι θετικά ορισμένος αν η τετραγωνική μορφή που παράγει είναι θετικά ορισμένη, δηλαδή*

$$x'Hx = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_{i,j}x_i x_j > 0\,,\ \forall x = (x_1,\ldots,x_n)' \in \mathbb{R}^n - \{0\}$$

Ένας συμμετρικός πίνακας $H = [h_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι θετικά ορισμένος αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές του είναι θετικές (βλ. [11], σελ. 276). Έπεται ότι η ορίζουσα ενός θετικά ορισμένου πίνακα είναι θετική.

1.1.2 Θετικά Ημι-ορισμένοι Πίνακες

Ορισμός 1.2 *(βλ. [28], Κεφ. 13): Έστω $H = [h_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ένας συμμετρικός πίνακας του οποίου τα στοιχεία είναι πραγματικοί αριθμοί. Λέμε ότι ο H είναι θετικά ημι-ορισμένος* *αν η τετραγωνική μορφή που παράγει είναι θετικά ημι-ορισμένη, δηλαδή*

$$x'Hx = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_{i,j}x_i x_j \geq 0\,,\ \forall x = (x_1, \ldots, x_n)' \in \mathbb{R}^n$$

Ένας συμμετρικός πίνακας $H = [h_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι θετικά ημι-ορισμένος αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές του είναι μη αρνητικές (βλ. [11], [28]). Έπεται ότι η ορίζουσα ενός θετικά ημι-ορισμένου πίνακα είναι μη αρνητική και ότι αν ένας θετικά ημι-ορισμένος πίνακας έχει θετική ορίζουσα τότε είναι θετικά ορισμένος.

1.2 Χρήσιμα στοιχεία από θεωρία δυναμικών συστημάτων

1.2.1 Σημεία ισορροπίας και ευστάθεια

Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ένα τοπικά Lipschitz διανυσματικό πεδίο. Θεωρούμε το δυναμικό σύστημα

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n \tag{1.1}$$

Από τη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων, γνωρίζουμε ότι για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^n$ το πρόβλημα αρχικών τιμών (1.1), $x(0) = x_0$ έχει τοπικά μοναδική λύση, η οποία θα παρίσταται ως $x(t)$. Στη συνέχεια δίνεται ο ορισμός του σημείου ισορροπίας.

Ορισμός 1.3 *(βλ. [25], σελ. 112): Το δυναμικό σύστημα* (1.1) *έχει σημείο ισορροπίας το x^* αν ισχύει $f(x^*) = 0$.*

Ορισμός 1.4 *(βλ. [25], σελ. 112): Το σημείο ισορροπίας x^* είναι:*

- *Ευσταθές αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ τέτοιο ώστε:*
  $\|x(0) - x^*\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x^*\| < \epsilon,\ \forall t \geq 0$
- *Ασταθές, αν δεν είναι ευσταθές*
- *Τοπικά ασυμπτωτικά ευσταθές αν είναι ευσταθές και υπάρχει $\rho > 0$ τέτοιο ώστε:*
  $\|x(0) - x^*\| < \rho \Rightarrow \lim_{t\to\infty}(x(t) - x^*) = 0$

- *Ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές αν είναι ευσταθές και ισχύει ότι:*
  $\lim_{t\to\infty}(x(t) - x^*) = 0 \ \forall x(0) \in \mathbb{R}^n$

1.2.2 ω-οριακά σύνολα

Ορισμός 1.5 *(βλ. [25], σελ. 127): Έστω $x(t)$ μια λύση του συστήματος (1.1), ορισμένη για $t \in [0, +\infty)$. Ένα σημείο p καλείται* ***θετικό οριακό σημείο*** *(positive limit point) της $x(t)$ εάν υπάρχει ακολουθία $\{t_n\}$, με $t_n \to +\infty$ καθώς $n \to +\infty$, έτσι ώστε $x(t_n) \to p$ καθώς $n \to +\infty$. Το σύνολο όλων των θετικών οριακών σημείων της $x(t)$ καλείται* ***θετικό οριακό σύνολο*** *(positive limit set) της $x(t)$ και συμβολίζεται ως $\omega(x(0))$.*

1.2.3 Αναλλοίωτα σύνολα

Ορισμός 1.6 *(βλ. [25], σελ. 127, [33]): Ένα σύνολο $M \subseteq \mathbb{R}^n$ καλείται* ***θετικά αναλλοίωτο σύνολο*** *(positively invariant set) για το δυναμικό σύστημα (1.1) αν $x(0) \in M \Rightarrow x(t) \in M, \ \forall t \geq 0$.*

Λήμμα 1.1 *(βλ. [25], σελ. 127, [33]): Εάν η λύση του συστήματος (1.1), με αρχική συνθήκη $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, είναι φραγμένη τότε το θετικό οριακό σύνολο $\omega(x_0)$ είναι ένα μη κενό, συμπαγές, συνεκτικό και θετικά αναλλοίωτο σύνολο. Επιπλέον, $\lim_{t\to+\infty} d(x(t), \omega(x_0)) = 0$, όπου $d(x(t), \omega(x_0))$ η απόσταση του διανύσματος $x(t) \in \mathbb{R}^n$ από το συμπαγές σύνολο $\omega(x_0)$.*

1.2.4 Θεώρημα Lasalle

Θεώρημα 1.1 *(βλ. [25], σελ. 128): Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ένα συμπαγές σύνολο το οποίο είναι θετικά αναλλοίωτο ως προς το σύστημα (1.1). Έστω $V \to \mathbb{R}$ μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $\dot{V}(x) = \nabla V(x) f(x) \leq 0$ στο Ω. Έστω E το σύνολο όλων των σημείων στο Ω όπου $\dot{V}(x) = 0$. Έστω M το μεγαλύτερο αναλλοίωτο σύνολο στο E. Τότε $\lim_{t\to+\infty} d(x(t), M) = 0$, για κάθε λύση $x(t)$ με $x(0) \in \Omega$, όπου $d(x(t), M)$ η απόσταση του διανύσματος $x(t) \in \mathbb{R}^n$ από το σύνολο M.*

1.3 Χρήσιμα στοιχεία από θεωρία μη γραμμικού προγραμματισμού

1.3.1 Περιγραφή του Προβλήματος

Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα μη γραμμικού προγραμματισμού:

$$\min\{\theta(x)\,:\,x\in S\} \tag{1.2}$$

όπου $x\in\mathbb{R}^n$ και το κλειστό σύνολο $S\subseteq\mathbb{R}^n$ το οποίο ορίζεται ως ακολούθως:

$$S:=\left\{x\in\mathbb{R}^n\,:\,h_1(x)=...=h_m(x)=0\,,\,\max_{j=1,\ldots,k}(g_j(x))\le 0\right\} \tag{1.3}$$

με $m<n$. Επίσης, γίνεται η υπόθεση ότι όλες οι απεικονίσεις $\theta:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $h_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ $(i=1,...,m)$, $g_j:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ $(j=1,...,k)$ είναι δυο φορές συνεχώς παραγωγίσιμες.

Υπόθεση (H1): *Το εφικτό σύνολο $S\subseteq\mathbb{R}^n$ το οποίο ορίζεται από την (1.3) είναι μη κενό και τα σύνολα τιμών (sublevel sets) της $\theta:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ είναι συμπαγή σύνολα, ήτοι για κάθε $x_0\in S$ το σύνολο τιμών (level set) $\{x\in S\,:\,\theta(x)\le\theta(x_0)\}$ είναι συμπαγές.*

*Η υπόθεση (H1) εξασφαλίζει ότι το πρόβλημα μη γραμμικού προγραμματισμού, το οποίο περιγράφεται από τις (1.2) και (1.3), είναι καλώς ορισμένο και επιδέχεται τουλάχιστον μια ολική λύση, $x^*\in S$. Η σφαιρική γειτονιά του σημείου x_0 με ακτίνα $\delta>0$ θα συμβολίζεται ως $N_\delta(x_0)$. Ένα σημείο $x^*\in S$ καλείται **τοπικό ελάχιστο** (ή **τοπική λύση**) του προβλήματος (1.2) εάν υπάρχει αριθμός $\hat{\delta}>0$ τέτοιος ώστε να ισχύει $f(x)\ge f(x^*)$ για όλα τα $x\in S\cap N_{\hat{\delta}}(x^*)$.*

*Εάν η ανωτέρω ανισότητα ισχύει για όλα τα $x\in S$, τότε το x^* καλείται **ολικό ελάχιστο** (ή **ολική λύση**) του προβλήματος (1.2). Το διάνυσμα $\xi\neq 0$ καλείται **διάνυσμα εφικτής κατεύθυνσης** (feasible direction vector) από το x^* εάν υπάρχει $\delta_1>0$ τέτοιο ώστε $(x^*+\theta\xi)\in S\cap N_{\delta_1}(x^*)$ για όλα τα $0\le\theta\le\delta_1/\|\xi\|$. Η σημασία των εν λόγω διανυσμάτων έγκειται στο ότι εάν x^* είναι μια τοπική λύση του προβλήματος (1.2) και ξ είναι διάνυσμα εφικτής κατεύθυνσης τότε θα πρέπει να ισχύει $f(x^*+\theta\xi)\ge f(x^*)$, για επαρκώς μικρά θ.*

Τέλος, ορίζεται το σύνολο:

$$Z^1(x^*)=\{z:\nabla g_i(x^*)z\le 0,\,i\in I(x^*),\,\nabla h_j(x^*)z=0,\,j=1,\ldots,m\}$$

όπου $I(x^*) = \{i \in \{1, \ldots, k\} : g_i(x^*) = 0\}$ *είναι το ενεργό σύνολο (active set) στο σημείο* x^*. *Εάν* ξ *εφικτό διάνυσμα κατεύθυνσης τότε ισχύει ότι* $\xi \in Z^1(x^*)$.

1.3.2 Αναγκαίες συνθήκες 1ης τάξης

Για να μπορέσουμε να δώσουμε το γνωστό θεώρημα Karush–Kuhn–Tucker είναι απαραίτητη η εισαγωγή γεωμετρικών εννοιών. Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ *μη κενό σύνολο και έστω* $x \in A$. *Έστω* $\bar{S}(A, x)$ *η τομή όλων των κλειστών κώνων που περιέχουν το σύνολο* $\{\alpha - x : \alpha \in A\}$. *Τότε ο κλειστός κώνος των εφαπτομένων του συνόλου* A *στο* x, *παρίσταται ως* $S(A, x)$ *και ορίζεται ως* $S(A, x) = \cap_{n=1}^{\infty} \bar{S}(A \cap N_{1/k}(x), x)$, *όπου* $N_{1/k}(x)$ *είναι η σφαιρική γειτονιά του* x *με ακτίνα* $1/k$ *και* k *φυσικός αριθμός (βλ. [4], [8]).*
Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ *μη κενό σύνολο. Ορίζουμε* $A^\diamond$ *το* ***θετικό κανονικό κώνο*** *(positively normal cone) του συνόλου* A *ως το σύνολο όλων των διανυσμάτων* $x \in \mathbb{R}^n$ *για τα οποία ισχύει ότι* $x'y \geq 0$ *για κάθε* $y \in A$. *Τώρα είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε το θεώρημα Karush–Kuhn–Tucker (βλ. [4], [8]).*

Θεώρημα 1.2 *(βλ. [4], σελ. 41): Έστω ότι* x^* *είναι λύση του προβλήματος* (1.2) *και έστω ότι*

$$(Z^1(x^*))^\diamond = (S(A, x^*))^\diamond \tag{1.4}$$

Τότε υπάρχουν διανύσματα $\lambda^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)'$ *και* $\mu^* = (\mu_1^*, \ldots, \mu_k^*)'$ *τέτοια ώστε:*

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{k} \mu_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla h_i(x^*) \tag{1.5}$$

$$\mu_i^* g_i(x^*),\ i = 1, \ldots, k \tag{1.6}$$

$$\mu^* \geq 0 \tag{1.7}$$

Για την επίλυση του προβλήματος τόσο ο Karush και οι Kuhn-Tucker όσο και άλλοι ερευνητές[1] *απαίτησαν την ικανοποίηση ιδιοτήτων που πρέπει να ισχύουν για τους περιορισμούς («constraint-qualification») του προβλήματος* (1.2), *όπως η συνθήκη* (1.4). *Οι Mangasarian και Fromovitz (βλ. [27]) απέδειξαν ότι εάν οι συναρτήσεις* g_i *και* h_j *είναι συνεχώς διαφορίσιμες στο* x^*, *τότε η απαίτηση* (1.4) *ισχύει εάν τα διανύσματα* $\nabla h_j(x^*),\ j = 1, \ldots, m$

[1] βλ. το [4].

είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και υπάρχει διάνυσμα $\xi \in \mathbb{R}^n$ *τέτοιο ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα:*

$$\nabla g_i(x^*)\xi < 0, \ i \in I(x^*)$$

$$\nabla h_i(x^*)\xi = 0, \ j = 1, \ldots, m$$

1.3.3 Αναγκαίες Συνθήκες 2ης τάξης

Έστω $x \in S$ *και* $\hat{Z}^1(x) = \{\xi : \nabla g_i(x)\xi = 0, i \in I(x), \nabla h_j(x)\xi = 0, j = 1, \ldots, m\}$. *Η απαίτηση δεύτερης τάξης για τους περιορισμούς ισχύει στο* $x^* \in S$ *εάν κάθε μη μηδενικό διάνυσμα* $\xi \in \hat{Z}^1(x^*)$ *είναι εφαπτόμενο σε ένα δυο φορές συνεχώς παραγωγίσιμο τόξο το οποίο περιέχεται στο σύνορο του* S*, ήτοι για κάθε* $\xi \in \hat{Z}^1(x^*)$ *υπάρχει* $\epsilon > 0$ *και μια δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση* α *η οποία ορίζεται στο διάστημα* $[0, \epsilon] \subset \mathbb{R}$*, με τιμές στον* $\mathbb{R}^n$*, τέτοια ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα (βλ. [4], σελ. 46):*

- $\alpha(0) = x^*$
- $g_i(\alpha(\theta)) = 0, i \in I(x^*)$
- $h_j(\alpha(\theta)) = 0, j = 1, \ldots, m$ *για* $0 \leq \theta \leq \epsilon$
- $\frac{d\alpha(0)}{d\theta} = \lambda\xi$ *για κάποιο θετικό αριθμό* λ.

Θεώρημα 1.3 *(βλ. [4], σελ. 46): Έστω ότι* x^* *είναι λύση του προβλήματος* (1.2) *και γίνεται η υπόθεση ότι υπάρχουν διανύσματα* $(\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$, $(\mu_1^*, \ldots, \mu_k^*)$, *τα οποία ικανοποιούν τις* (1.5), (1.6) *και* (1.7). *Επιπροσθέτως, γίνεται η υπόθεση ότι η δεύτερης τάξης απαίτηση για τους περιορισμούς ισχύει στο* x^*. *Τότε για διάνυσμα* $\xi \neq 0$ *τέτοιο ώστε* $\xi \in \hat{Z}^1(x^*)$ *θα πρέπει να ισχύει:*

$$\xi' \left[\nabla^2 f(x^*) + \sum_{i=1}^{k} \mu_i^* \nabla^2 g_i(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla^2 h_i(x^*) \right] \xi \geq 0 \tag{1.8}$$

.

Σύμφωνα με τον Avriel (βλ. [4], σελ. 47), εάν τα διανύσματα $\nabla g_i(x)$, $i \in I(x)$ *και* $\nabla h_j(x)$, $j = 1, \ldots, m$, *είναι γραμμικώς ανεξάρτητα τότε και οι δυο τάξεις απαιτήσεων για τους περιορισμούς ισχύουν για* $x \in S$.

1.4 Θεωρία Δυναμικών Επιλυτών σε προβλήματα μη γραμμικού προγραμματισμού

Η θεωρία των δυναμικών συστημάτων έχει χρησιμοποιηθεί στο παρελθόν για την επίλυση προβλημάτων μη γραμμικού προγραμματισμού (εφεξής και «NLP»). Ο αναγνώστης μπορεί να καταφύγει στα [2],[10],[12],[16],[29],[34],[39],[40] για διάφορα αποτελέσματα σχετικά με το θέμα. Μερικές εκ των μεθόδων είναι μέθοδοι εσωτερικού σημείου (ύπο την έννοια ότι έχουν οριστεί μόνο για το εφικτό σύνολο), ενώ άλλες μέθοδοι είναι μέθοδοι εξωτερικού σημείου (υπό την έννοια ότι έχουν οριστεί τουλάχιστον σε μια γειτονιά του εφικτού συνόλου).

Όπως παρατηρείται στις [9],[17],[21], κάθε σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων το οποίο λύνει ένα πρόβλημα μη γραμμικού προγραμματισμού, όταν συνδυάζεται με ένα αριθμητικό σχήμα για την επίλυση συνήθων διαφορικών εξισώσεων (ODEs), παρέχει ένα αριθμητικό σχήμα για την επίλυση του προβλήματος του μη γραμμικού προγραμματισμού. Η θεωρία των δυναμικών συστημάτων έχει χρησιμοποιηθεί για την επίλυση προβλημάτων γραμμικού και μη γραμμικού προγραμματισμού στη βιβλιογραφία των νευρωνικών δικτύων (βλ. για παράδειγμα [36],[37],[38], καθώς και το άρθρο ανασκόπησης [35] και τις εκεί παραπομπές). Ως εκ τούτου, είναι δικαιολογημένη η χρήση του όρου «Δυναμικός NLP Επιλυτής» («Dynamical NLP Solver») για ένα δυναμικό σύστημα για το οποίο μερικές από τις λύσεις συγκλίνουν στις λύσεις ενός προβλήματος NLP.

Σε μια πρόσφατη εργασία (βλ. την [24]) εφαρμόστηκαν μέθοδοι σταθεροποίησης με ανάδραση για την ρητή κατασκευή των Δυναμικών NLP Επιλυτών εσωτερικού σημείου. Ωστόσο, οι εν λόγω επιλυτές έχουν κάποια μειονεκτήματα:

(α) πρέπει να εκκινούν μέσα στο εφικτό σύνολο και

(β) η εφαρμογή του αριθμητικού ολοκληρωτή είναι προβληματική αφού το σύστημα είναι ορισμένο μόνο στο εφικτό σύνολο. Επομένως, η αριθμητική ολοκλήρωση μπορεί να περιλαμβάνει μια προβολή στο εφικτό σύνολο (μια σοβαρή επιπλοκή, βλ. [18],[19]).

Στην [23] οι ερευνητές ενδιαφέρθηκαν για την εφαρμογή μεθόδων σταθεροποίησης με ανάδραση για την κατασκευή Δυναμικών NLP Επιλυτών εξωτερικού σημείου. Πιο *συγκεκριμένα, οι εν λόγω ερευνητές θεώρησαν ένα τυπικό NLP πρόβλημα με επαρκείς ιδιότητες κανονικότητας, έτσι ώστε να ισχύουν οι αναγκαίες συνθήκες NLP των Karush-Kuhn-Tucker (KKT). Επίσης, οι ερευνητές εμπνευσμένοι από τις μεθόδους που χρησιμοποιούνται στο [20], κατασκεύασαν ένα δυναμικό σύστημα με τις ακόλουθες ιδιότητες:*

Ιδιότητα 1: *Το διανυσματικό πεδίο το οποίο εμφανίζεται στην δεξιά πλευρά του δυναμικού συστήματος είναι τοπικά Lipschitz διανυσματικό πεδίο το οποίο είναι ορισμένο ολικά. Αυτή η ιδιότητα απαιτείται για τον χαρακτηρισμό της μοναδικότητας των λύσεων του δυναμικού συστήματος. Επιπλέον, αυτή η ιδιότητα απαιτείται διότι είναι επιθυμητή η δυνατότητα εφαρμογής σχημάτων Runge-Kutta για την προσομοίωση των λύσεων του δυναμικού συστήματος.*

Ιδιότητα 2: *Τα σημεία ισορροπίας του δυναμικού συστήματος είναι ακριβώς τα σημεία για τα οποία ισχύουν οι αναγκαίες συνθήκες των Karush-Kuhn-Tucker.*

Ιδιότητα 3: *Το διανυσματικό πεδίο το οποίο εμφανίζεται στην δεξιά πλευρά του δυναμικού συστήματος πρέπει να είναι ρητά γνωστό. Οι τύποι για το διανυσματικό πεδίο πρέπει να παρέχονται: οι τύποι δεν πρέπει να περιλαμβάνουν την λύση για το NLP πρόβλημα.*

Ιδιότητα 4: *Για κάθε αρχικό σημείο, η λύση του αντίστοιχου προβλήματος αρχικών τιμών συγκλίνει στο σύνολο των σημείων των Karush-Kuhn-Tucker. Επιπλέον, κάθε αυστηρά τοπικά ελάχιστο σημείο, το οποίο είναι ένα απομονωμένο σημείο των Karush-Kuhn-Tucker, είναι τοπικά ασυμπτωτικά ευσταθές.*

Ιδιότητα 5: *Το εφικτό σύνολο είναι ένα θετικώς αναλλοίωτο σύνολο για το δυναμικό σύστημα. Αυτή η ιδιότητα μπορεί να είναι σημαντική για συγκεκριμένες εφαρμογές.*

Ιδιότητα 6: *Όλες οι προηγούμενες ιδιότητες πρέπει να ισχύουν για γενικά NLP προβλήματα, χωρίς καμία υπόθεση περί κυρτότητας.*

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι οι ιδιότητες 1-6 σπάνια ικανοποιούνται από άλλες μεθόδους διαφορικών εξισώσεων για την επίλυση NLP προβλημάτων. Για παράδειγμα, στις [2] και [10] προτείνονται Δυναμικοί NLP Επιλυτές για την επίλυση συγκεκριμένων NLP προβλημάτων. Ωστόσο, στην [10], η λύση του προβλήματος NLP δεν είναι ένα σημείο ισορροπίας για το κατασκευασμένο, χρονικά μεταβαλλόμενο, δυναμικό σύστημα. Στην [2] κατασκευάστηκε ένα αυτόνομο δυναμικό σύστημα για το οποίο η λύση του προβλήματος NLP είναι ένα σημείο ισορροπίας και για το οποίο το τοπικά Lipschitz διανυσματικό *πεδίο (που εμφανίζεται στην δεξιά πλευρά του δυναμικού συστήματος), δεν εξαρτάται από την θέση του αγνώστου σημείου. Ωστόσο, στην διαδικασία εμπλέκεται ο ορισμός του διανυσματικού πεδίου (που εμφανίζεται στην δεξιά πλευρά του δυναμικού συστήματος), ο οποίος απαιτεί τη λύση του NLP προβλήματος, δεδομένου ότι πρόκειται για μια προβολή στο εφικτό σύνολο.*

Ειδικά προβλήματα NLP με επιπλέον υποθέσεις για την κυρτότητα έχουν μελετηθεί στην [36], ενώ υποθέσεις για την κυρτότητα εμφανίζονται, επίσης, σχεδόν σε όλα τα νευρωνικά δίκτυα που προτείνονται για την επίλυση των προβλημάτων μαθηματικού προγραμματισμού (βλ. [37],[38] και τις αναφορές στο άρθρο ανασκόπησης [35]). Από την άλλη πλευρά, οι [34],[39] πρότειναν συστήματα διαφορικών εξισώσεων τα οποία ικανοποιούν τις ιδιότητες 1-6 για συστήματα χωρίς ανισοτικούς περιορισμούς. Τοπικά αποτελέσματα παρέχονται στην [40], ενώ διαφορικές εξισώσεις οι οποίες βασίζονται σε μεθόδους φραγμού εξετάστηκαν στην[12].

Η μέθοδος σταθεροποίησης με ανάδραση η οποία εφαρμόστηκε στην [23] είναι η μεθοδολογία των συναρτήσεων ελέγχου Lyapunov (βλ. [3],[14],[22],[32]). Ωστόσο, οι εν λόγω ερευνητές αντιμετώπισαν το σοβαρό πρόβλημα της οικοδόμησης μιας συνάρτησης ελέγχου Lyapunov, η οποία έπρεπε να συνδυάζει με κατάλληλο τρόπο έναν όρο ποινής (ήτοι μια συνάρτηση που να μηδενίζεται στο εφικτό σύνολο και να είναι θετική εκτός του εφικτού σημείου) και την αντικειμενική συνάρτηση (η οποία είναι φυσική υποψήφια για την συνάρτηση Lyapunov επί του εφικτού συνόλου). Τέτοιος συνδυασμός είναι πολύ δύσκολος και μπορεί να επιτευχθεί υπό πολύ απαιτητικές συνθήκες.

Προκειμένου να ξεπεραστεί το πρόβλημα κατασκευής της συνάρτησης Lyapunov, προτάθηκε η ιδέα της χρησιμοποίησης δύο συναρτήσεων, οι οποίες να ενεργούν όπως οι συναρτήσεις Lyapunov: α) η συνάρτηση ποινής για την περίπτωση που είμαστε μακριά από το εφικτό σύνολο και β) η αντικειμενική συνάρτηση για την περίπτωση που βρισκόμαστε στο εφικτό σύνολο. Επιπλέον, οι συγγραφείς δεν χρησιμοποίησαν την μεθοδολογία της κατασκευής ανάδρασης η οποία βασίζεται στο θεώρημα του Lyapunov. Αντί αυτού, η κατασκευή της ανάδρασης βασίστηκε σε επεκτάσεις του θεωρήματος του LaSalle, οι οποίες έχουν ανεξάρτητο επιστημονικό ενδιαφέρον. Ως εκ τούτου, η συμβολή της [23] στην βιβλιογραφία είναι τριπλή:

1) Παρέχονται επεκτάσεις του θεωρήματος του LaSalle.

2) Παρουσιάζεται η λύση σε ένα ειδικό πρόβλημα σταθεροποίησης με ανάδραση. Η λύση που παρέχεται βασίζεται σε μια επέκταση της μεθοδολογίας των συναρτήσεων ελέγχου Lyapunov, η οποία χρησιμοποιεί τις επεκτάσεις του θεωρήματος του LaSalle.

3) Κατασκευάζονται Δυναμικοί NLP Επιλυτές με τις προαναφερθείσες ιδιότητες 1-6, οι οποίοι βασίζονται στην επίλυση ενός ειδικού προβλήματος σταθεροποίησης με ανάδραση.

Η κατασκευή των Δυναμικών NLP Επιλυτών με τις προαναφερθείσες ιδιότητες 1-6, συμπεριλαμβάνουν την απαίτηση για γραμμική ανεξαρτησία των περιορισμών. Η υπόθεση της [23] για την απαίτηση της γραμμικής ανεξαρτησίας των περιορισμών είναι μια περιοριστική υπόθεση: είναι πιο περιοριστική από την απαίτηση των περιορισμών Mangasarian-Fromovitz (βλ. την [27]), ή την υπόθεση για τον περιορισμό σταθερής τάξης (βλ. την [1] και τις αναφορές που παρατίθενται εκεί), ενώ και οι δυο είναι πιο περιοριστικές από την απαίτηση περιορισμού του Guignard (βλ. το [4]). Ωστόσο, η απαίτηση για την γραμμική ανεξαρτησία των περιορισμών έχει τα πλεονεκτήματα του να είναι εύκολα ελέγξιμη και να είναι αληθής σε πολλές ενδιαφέρουσες περιπτώσεις (η [30] έδειξε ότι αυτή η υπόθεση γενικώς ισχύει) και είναι ένα ζωτικής σημασίας συστατικό για πολλές αριθμητικές μεθόδους (διαδοχικός τετραγωνικός προγραμματισμός - βλ. [13],[31]). Επιπλέον, η συγκεκριμένη απαίτηση επιτρέπει την εξαγωγή εύκολων τύπων για το απαιτούμενο διανυσματικό πεδίο.

Κεφάλαιο 2

Προκαταρκτικά αποτελέσματα

2.1 Επεκτάσεις του θεωρήματος LaSalle

Ενώ το θεώρημα του LaSalle εξετάζει μια συνάρτηση $V \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ *τέτοια ώστε το σύνολο* $\{x \in \mathbb{R}^n : \nabla V(x)f(x) = 0\}$ *να είναι ολικός ελκυστής για το δυναμικό σύστημα* $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, *στην [23] παρουσιάζονται συνθήκες για δυο συναρτήσεις* $V \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$, $\theta \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$, *για τις οποίες το σύνολο* $\{x \in \mathbb{R}^n \nabla\theta(x)f(x) = \nabla V(x)f(x) = 0\}$ *είναι ολικός ελκυστής. Η αποδεικτική διαδικασία ξεκινά με την παρουσίαση των συνθηκών οι οποίες αφορούν την περίπτωση του ασθενούς ελκυστή.*

Θεώρημα 2.1 *(Πρώτη επέκταση του θεωρήματος του LaSalle - η περίπτωση του ασθενούς ελκυστή): Έστω* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *ένα τοπικά Lipschitz διανυσματικό πεδίο και* $V \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$, $\theta \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$, *συναρτήσεις οι οποίες ικανοποιούν:*

$$\nabla V(x)f(x) \leq 0, \ \text{για όλα τα } x \in \mathbb{R}^n \tag{2.1}$$

$$\nabla\theta(x)f(x) \leq 0, \ \text{για όλα τα } x \in \mathbb{R}^n \text{ με } \nabla V(x)f(x) = 0 \tag{2.2}$$

Έστω ότι για κάθε $z \in \mathbb{R}^n$ *και κάθε* $y \in \{\, x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq V(z) \,\}$ *το σύνολο*

$$\{\, x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq V(z)\,, \theta(x) \leq \theta(y) \,\}$$

είναι συμπαγές. Επιπλέον, γίνεται η υπόθεση ότι για κάθε $z \in \mathbb{R}^n$ *υπάρχει*

$y_z \in \{\, x \in \mathbb{R}^n \,:\, V(x) \leq V(z) \,\}$ με $\theta(y_z) \geq \theta(z)$ τέτοιο ώστε:

$$
\begin{aligned}
&\{\, x \in \mathbb{R}^n \,:\, V(x) \leq V(z) \,\} \subseteq \\
&\{\, x \in \mathbb{R}^n \,:\, \theta(x) \leq \theta(y_z) \,\} \bigcup \{\, x \in \mathbb{R}^n \,:\, \nabla\theta(x) f(x) \leq 0 \,\}
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Επίσης, θεωρήθηκε το δυναμικό σύστημα:

$$\dot{x} = f(x)\ ,\ x \in \mathbb{R}^n \tag{2.4}$$

Τότε, για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^n$ η μοναδική λύση $x(t)$ του προβλήματος αρχικών τιμών (2.4) με $x(0) = x_0$ είναι ορισμένη για όλα τα $t \geq 0$ και είναι φραγμένη. Περαιτέρω, το $\omega(x_0)$ είναι μη κενό, συμπαγές, συνεκτικό, αναλλοίωτο σύνολο το οποίο ικανοποιεί τις συνθήκες: $\omega(x_0) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \nabla V(x) f(x) = 0\}$ και $\omega(x_0) \bigcap \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \nabla\theta(x) f(x) = \nabla V(x) f(x) = 0\} \neq \emptyset$.

Απόδειξη: *Καταρχάς ορίζεται το σύνολο*

$$S := \{\, x \in \mathbb{R}^n \,:\, \nabla V(x) f(x) = 0 \,\} \tag{2.5}$$

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}^n$ (αυθαίρετο) και $x(t)$ η μοναδική λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (2.4) με $x(0) = x_0$. Η λύση ορίζεται στο διάστημα $[0, t_{\max})$, όπου $t_{\max} \in (0, +\infty]$ είναι το μέγιστο διάστημα ύπαρξης της λύσης.
Σύμφωνα με την (2.1) έχουμε ότι:

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = \nabla V(x(t)) f(x(t)) \leq 0, \ \text{για όλα τα } t \in [0, t_{\max}) \tag{2.6}$$

και κατά συνέπεια, ισχύει ότι:

$$x(t) \in \{\, y \in \mathbb{R}^n \,:\, V(y) \leq V(x_0) \,\}\ \text{ για όλα τα } t \in [0, t_{\max}). \tag{2.7}$$

Έστω $y_{x_0} \in \mathbb{R}^n$ είναι το διάνυσμα για το οποίο $\theta(y_{x_0}) \geq \theta(x_0)$ και ισχύει ο εγκλεισμός:

$$
\begin{aligned}
&\{\, x \in \mathbb{R}^n \,:\, V(x) \leq V(x_0) \,\} \subseteq \\
&\{\, x \in \mathbb{R}^n \,:\, \theta(x) \leq \theta(y_{x_0}) \,\} \bigcup \{\, x \in \mathbb{R}^n \,:\, \nabla\theta(x) f(x) \leq 0 \,\}
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

Επίσης, ορίζεται η ποσότητα:

$$\theta_{\max} := \max \{\, \theta(x) \,:\, \theta(x) \leq \theta(y_{x_0})\, ,\, V(x) \leq V(x_0) \,\}\,. \tag{2.9}$$

Παρατηρείται ότι ο ορισμός (2.9) είναι έγκυρος διότι το σύνολο:

$$K(x_0) := \{\, x \in \mathbb{R}^n \,:\, \theta(x) \leq \theta(y_{x_0})\,,\, V(x) \leq V(x_0) \,\} \tag{2.10}$$

είναι μη κενό και συμπαγές (το γεγονός ότι $\theta(y_{x_0}) \geq \theta(x_0)$ συνεπάγεται ότι $x_0 \in K(x_0)$). Εν συνεχεία, τίθεται ο ακόλουθος ισχυρισμός.

Ισχυρισμός 2.1 *$\theta(x(t)) \leq \theta_{\max}$, για όλα τα $t \in [0, t_{\max})$.*

Απόδειξη: *Ο ισχυρισμός αποδεικνύεται με εις άτοπο επαγωγή. Πιο συγκεκριμένα, έστω ότι υπάρχει $t \in [0, t_{\max})$ τέτοιο ώστε $\theta(x(t)) > \theta_{\max}$. Επίσης, παρατηρείται ότι εφόσον $x_0 \in K(x_0)$, το σύνολο $\{\, s \in [0,t] \,:\, x(s) \in K(x_0) \,\} \neq \emptyset$ είναι μη κενό. Έστω η ποσότητα $T := \sup\{\, s \in [0,t] \,:\, x(s) \in K(x_0) \,\}$. Εφόσον το σύνολο $K(x_0) \subset \mathbb{R}^n$ είναι κλειστό, έπεται ότι $x(T) \in K(x_0)$. Επιπλέον, οι ορισμοί (2.9), (2.10) υποδηλώνουν ότι $V(x(T)) \leq V(x_0)$, $\theta(x(T)) \leq \theta_{\max}$ και $T < t$. Επίσης, εφόσον $T := \sup\{\, s \in [0,t] \,:\, x(s) \in K(x_0) \,\}$, έπεται ότι $x(s) \notin K(x_0)$ για όλα τα $s \in (T, t]$. Δυνάμει των (2.7) και (2.8), μπορεί να συναχθεί ότι $\frac{d}{ds}\theta(x(s)) = \nabla\theta(x(s)) f(x(s)) \leq 0$, για όλα τα $s \in (T, t]$, το οποίο υποδηλώνει ότι $\theta(x(t)) \leq \theta(x(T))$. Εφόσον $\theta(x(T)) \leq \theta_{\max}$ θα ισχύει $\theta(x(t)) \leq \theta_{\max}$, δηλαδή η αποδεικτική διαδικασία καταλήγει σε αντιφατική πρόταση. Όπερ έδει δείξε.* $\triangleleft$

Έστω $y \in K(x_0)$ τέτοιο ώστε $\theta(y) = \theta_{\max}$. Τότε δυνάμει του ως άνω ισχυρισμού και της (2.7) λαμβάνουμε ότι $x(t) \in \{\, x \in \mathbb{R}^n \,:\, V(x) \leq V(x_0)\,,\, \theta(x) \leq \theta(y) \,\}$ για όλα τα $t \in [0, t_{\max})$. Επειδή το σύνολο $\{\, x \in \mathbb{R}^n \,:\, V(x) \leq V(x_0)\,,\, \theta(x) \leq \theta(y) \,\}$ είναι συμπαγές, ισχύει ότι $t_{\max} = +\infty$ (επειδή εάν $t_{\max} < +\infty$, τότε θα έπρεπε να καταλήξουμε στο αποτέλεσμα $\lim\limits_{t \to t_{\max}^-} (|x(t)|) = +\infty$, δηλαδή σε αντίφαση). Επομένως η $x(t)$ ορίζεται για όλα τα $t \geq 0$ και είναι φραγμένη.

Το θεώρημα του LaSalle (βλ. Θεώρημα 1.1), το Λήμμα 1.1 καθώς και οι (2.1) και (A.1) υποδηλώνουν ότι το $\omega(x_0)$ είναι μη κενό, συμπαγές, συνεκτικό, αναλλοίωτο σύνολο το οποίο ικανοποιεί την σχέση $\omega(x_0) \subseteq S$. Η εφαρμογή του θεωρήματος του LaSalle στο αναλλοίωτο, συμπαγές σύνολο $\omega(x_0) \subseteq S$ και η ανισότητα (2.2) εξασφαλίζουν ότι για κάθε $y \in \omega(x_0)$ το θετικό οριακό σύνολο $\omega(y)$ είναι μη κενό, συμπαγές, συνεκτικό, αναλλοίωτο σύνολο, το οποίο ικανοποιεί την σχέση $\omega(y) \subseteq \{x \in \omega(x_0) \,:\, \nabla\theta(x) f(x) = 0\}$. Αυτή η σχέση συνεπάγεται ότι:

$\omega(y) \subseteq \omega(x_0) \bigcap \{x \in \mathbb{R}^n : \nabla\theta(x)f(x) = \nabla V(x)f(x) = 0\} \neq \emptyset$, *για κάθε* $y \in \omega(x_0)$.
Όπερ έδει δείξε. $\triangleleft$

Σημείωση 2.1 (α) *Χρησιμοποιώντας την ορολογία του [7], εάν το σύνολο* $M = \{x \in \mathbb{R}^n : \nabla\theta(x)f(x) = \nabla V(x)f(x) = 0\}$ *είναι συμπαγές, τότε είναι ένας ασθενής ελκυστής για το δυναμικό σύστημα* (2.4), *με περιοχή ασθενούς έλξης ολόκληρο το χώρο* $\mathbb{R}^n$.
(β) *Εάν το σύνολο* $\{\, x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq V(z) \,\}$ *είναι φραγμένο τότε υπάρχει*

$$y_z \in \{\, x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq V(z) \,\} \text{ με } \theta(y_z) \geq \theta(z)$$

τέτοιο ώστε να ισχύει η (2.3) *(αρκεί να επιλεγεί το* $y_z \in \mathbb{R}^n$ *το οποίο να ικανοποιεί την σχέση* $\theta(y_z) = \max\{\, \theta(x) : x \in \mathbb{R}^n,\ V(x) \leq V(z) \,\}$*). Όμως, ο εγκλεισμός της* (2.3) *μπορεί να ισχύει ακόμη και για τις περιπτώσεις όπου το σύνολο* $\{\, x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq V(z) \,\}$ *δεν είναι φραγμένο.*

Στην συνέχεια παρουσιάζονται οι συνθήκες για τον ολικό ελκυστή.

Θεώρημα 2.2 *(Δεύτερη Επέκταση του θεωρήματος του LaSalle - η περίπτωση του ολικού ελκυστή): Έστω ότι ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος 2.1. Επιπλέον, γίνεται η υπόθεση ότι* $V(x) \geq 0$ *για όλα τα* $x \in \mathbb{R}^n$ *καθώς και ότι ισχύει η ακόλουθη εξίσωση:*

$$S = \{\, x \in \mathbb{R}^n : \nabla V(x)f(x) = 0 \,\} = \{\, x \in \mathbb{R}^n : V(x) = 0 \,\} \tag{2.11}$$

Τέλος, γίνεται η υπόθεση ότι για κάθε συμπαγές σύνολο $K \subseteq \mathbb{R}^n$ *με* $K \bigcap S \neq \emptyset$ *υπάρχει μια συνάρτηση* $g \in K_\infty \bigcap C^1((0, +\infty); \mathbb{R}_+)$ *και μια σταθερά* $\delta > 0$ *με την ακόλουθη ιδιότητα:*

$$\nabla\theta(x)f(x) \leq \frac{dg}{ds}(V(x))\,|\nabla V(x)f(x)| \tag{2.12}$$

για όλα τα $x \in K$ *με* $0 < V(x) \leq \delta$ *και* $|\nabla V(x)f(x)| \leq \delta$.
Τότε, για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *η μοναδική λύση* $x(t)$ *του προβλήματος αρχικών τιμών* (2.4) *με* $x(0) = x_0$, *ορίζεται για όλα τα* $t \geq 0$ *και είναι φραγμένη. Το σύνολο* S, *το οποίο ορίζεται στην* (2.11), *είναι ένα θετικά αναλλοίωτο σύνολο για το δυναμικό σύστημα*

(2.4). *Περαιτέρω, $\omega(x_0)$ είναι ένα μη κενό, συμπαγές, συνεκτικό, αναλλοίωτο σύνολο το οποίο ικανοποιεί τη σχέση $\omega(x_0) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) = \nabla\theta(x)f(x) = 0\}$. Επιπλέον, κάθε σημείο ισορροπίας $x^* \in S$ του δυναμικού συστήματος (2.4), το οποίο ικανοποιεί την ανισότητα $\theta(x^*) < \theta(x)$ για όλα τα $x \in S\backslash\{x^*\}$ με $|x - x^*| < \tilde{\delta}$ και $\left\{ x \in S : \nabla\theta(x)f(x) = 0\,, |x - x^*| < \tilde{\delta} \right\} = \{x^*\}$, για μια κατάλληλη σταθερά $\tilde{\delta} > 0$, είναι ένα τοπικά ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας του εν λόγω συστήματος.*

Απόδειξη: *Η ιδιότητα του θετικού αναλλοίωτου για το σύνολο S είναι άμεση συνέπεια της ανισότητας (2.1) και του ορισμού (2.11). Έστω ότι δίνεται (αυθαίρετα) $x_0 \in \mathbb{R}^n$ και θεωρούμε την μοναδική λύση $x(t)$ του προβλήματος αρχικών τιμών (2.4) με $x(0) = x_0$. Δυνάμει του Θεωρήματος 2.1, το σύνολο $\omega(x_0) \subseteq S$ είναι συμπαγές.*

Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα συμπαγές σύνολο το οποίο περιέχει μια ανοιχτή γειτονιά $N \subseteq \mathbb{R}^n$ του $\omega(x_0)$ (τέτοιο συμπαγές σύνολο $K \subseteq \mathbb{R}^n$ υπάρχει αφού το σύνολο $\omega(x_0) \subseteq S$ είναι συμπαγές). Έστω $g \in K_\infty \bigcap C^1\left((0,+\infty);\mathbb{R}_+\right)$ και $\delta > 0$ τέτοια ώστε:

$$\nabla\theta(x)f(x) \leq \frac{dg}{ds}(V(x))\,|\nabla V(x)f(x)| \tag{2.13}$$

για όλα τα $x \in K$ με $0 < V(x) \leq \delta$ και $|\nabla V(x)f(x)| \leq \delta$.

Αφού $\lim\limits_{t\to+\infty} dist\,(x(t), \omega(x_0)) = 0$ και το σύνολο $\omega(x_0)$ είναι συμπαγές, έπεται από τις (2.1) και (2.11) ότι υπάρχει $T > 0$ τέτοιο ώστε $x(t) \in K$, $\nabla V(x(t))f(x(t)) \geq -\delta$ και $V(x(t)) \leq \delta$ για όλα τα $t \geq T$.
Ορίζεται για όλα τα $x \in K$ η ακόλουθη ποσότητα:

$$\tilde{\theta}(x) := \theta(x) + g(V(x)) \tag{2.14}$$

Η (2.14) σε σύζευξη με τις ανισότητες (2.1) και (2.13) υποδηλώνει ότι:

$$\nabla\tilde{\theta}(x)f(x) \leq 0 \tag{2.15}$$

για όλα τα $x \in K$ με $0 < V(x) \leq \delta$ και $|\nabla V(x)f(x)| \leq \delta$

Από τις (2.2), (2.11), (2.15) (και το γεγονός ότι $S = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) = 0\}$ είναι θετικά αναλλοίωτο για την (2.4) ως άμεση συνέπεια της (2.1)) προκύπτει ότι η απεικόνιση $t \to \tilde{\theta}(x(t))$ είναι μη αύξουσα για $t \geq T$. Το Θεώρημα 2.1 υποδηλώνει ότι η λύση $x(t)$ είναι φραγμένη για όλα τα $t \geq 0$. Επομένως, η απεικόνιση $t \to \tilde{\theta}(x(t))$ είναι φραγμένη από κάτω. Το γεγονός αυτό υποδηλώνει ότι υπάρχει $l \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\lim_{t\to+\infty} \tilde{\theta}\,(x(t)) = l$. Επειδή $g \in K_\infty$ και $\lim_{t\to+\infty} V\,(x(t)) = 0$, έπεται από τον ορισμό (2.14) ότι $\lim_{t\to+\infty} \theta\,(x(t)) = l$. Συνεπώς, πρέπει να ισχύει $\omega(x_0) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \theta(x) = l\}$. Το αναλλοίωτο του συνόλου $\omega(x_0) \subseteq S$ συνεπάγεται ότι $\omega(x_0) \subseteq \{x \in S\,:\,\nabla\theta(x)f(x) = 0\}$.

Έστω ότι $x^* \in S$ είναι ένα σημείο ισορροπίας για το δυναμικό σύστημα (2.4), το οποίο ικανοποιεί την ανισότητα $\theta(x^*) < \theta(x)$ για όλα τα $x \in S\backslash\{\,x^*\}$ με $|x - x^*| < \tilde{\delta}$, $f(x^*) = 0$ και $\left\{\,x \in S\,:\,\nabla\theta(x)f(x) = 0\,,\,|x - x^*| < \tilde{\delta}\,\right\} = \{\,x^*\}$ για μια κατάλληλη σταθερά $\tilde{\delta} > 0$. Έστω ότι το $K \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ένα συμπαγές σύνολο με $\left\{\,x \in \mathbb{R}^n\,:\,|x - x^*| < \tilde{\delta}\,\right\} \subset K$ και έστω ότι η $g \in K_\infty \bigcap C^1\left((0,+\infty);\mathbb{R}_+\right)$ είναι μια συνάρτηση που ικανοποιεί την (2.12) για μια συγκεκριμένη σταθερά $\delta > 0$.
Επίσης, θεωρήθηκε η συνάρτηση:

$$W(x) = \frac{1}{2}\left(\max\left(0, \theta(x) - \theta(x^*)\right)\right)^2 + g(V(x)) \tag{2.16}$$

η οποία ορίζεται στο ανοιχτό σύνολο:

$$\begin{aligned} D := \Big\{\,x \in \mathbb{R}^n\,:\,|x - x^*| < \tilde{\delta}\,,\,V(x) < \delta\,,\,|\nabla V(x)f(x)| < \delta\,,& \\ \theta(x) < \theta(x^*) + 1\,\Big\}& \end{aligned} \tag{2.17}$$

Παρατηρούμε ότι η $W : D \to \mathbb{R}_+$, όπως ορίζεται στην (2.16), είναι συνεχής. Η υπόθεση για το σημείο ισορροπίας $x^* \in S$ σε σύζευξη με την (2.11) υποδηλώνει ότι $W(x^*) = 0$ και $W(x) > 0$ για όλα τα $x \in D\backslash\{\,x^*\}$. Ο ορισμός (2.16) σε σύζευξη με τις ανισότητες (2.1) και (2.12) υποδηλώνει ότι:

$$\nabla W(x)f(x) \leq 0,\ \text{για όλα τα } x \in D\backslash S \tag{2.18}$$

Το θετικό αναλλοίωτο του συνόλου $S = \{\,x \in \mathbb{R}^n\,:\,V(x) = 0\,\}$ και η (2.2) σε σύζευξη με την (2.18) και τον ορισμό (2.16), υποδηλώνουν ότι για κάθε λύση $x(t)$ της (2.4), η οποία ορίζεται σε κάποιο διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}_+$ και ικανοποιεί την $x(t) \in D$ για $t \in I$, η απεικόνιση $I \ni t \to W(x(t))$ είναι μη αύξουσα. Το Θεώρημα 3.3.5 στην σελίδα 36 του [5] αναφέρει ότι το $x^* \in S$ είναι ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας. Η ευστάθεια υποδηλώνει ότι υπάρχει $c > 0$ τέτοιο ώστε η λύση $x(t)$ της (2.4) με αρχική συνθήκη $x(0) = x_0$, $|x_0 - x^*| < c$, ικανοποιεί ότι $x(t) \in D$ για όλα τα $t \geq 0$. Επομένως, έπεται ότι $\omega(x_0) \subseteq \{x \in S\,:\,\nabla\theta(x)f(x) = 0\}\bigcap D$ για όλα τα $x_0 \in \mathbb{R}^n$ με $|x_0 - x^*| < c$. Ο *ορισμός* (2.17) *και το γεγονός ότι* $\left\{ x \in S \,:\, \nabla\theta(x)f(x) = 0\,,\, |x - x^*| < \tilde{\delta} \right\} = \{\,x^*\}$ *υποδηλώνουν ότι* $\omega(x_0) = \{\,x^*\}$ *για όλα τα* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *με* $|x_0 - x^*| < c$. *Κατά συνέπεια, το σημείο* $x^* \in S$ *είναι τοπικά ασυμπτωτικά ευσταθές. Όπερ έδει δείξε.* $\triangleleft$

Το ακόλουθο παράδειγμα παρουσιάζει την χρήση του Θεωρήματος 2.2 στην ανάλυση της ποιοτικής συμπεριφοράς ενός δυναμικού συστήματος.

Παράδειγμα 2.1 *Θεωρούμε το μη γραμμικό σύστημα στο επίπεδο* (2.4) *με*

$$
\begin{aligned}
f(x) = -Q(x)\left(\left(\max\left(0, x_1^2 + x_2^2 - 1\right)\right)^2 + \tfrac{Q(x)}{4}\right)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \\
\Big(4\left(\max\left(0, x_1^2 + x_2^2 - 1\right)\right)^2 (x_1 + x_2 - 1) + \\
(x_1 + x_2)Q(x) - \max\left(0, x_1 + x_2\right)\Big)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

για όλα τα $x \in \mathbb{R}^2$ *όπου*

$$
Q(x) := 4(x_1^2 + x_2^2) - \min\left(0, x_1^2 + x_2^2 - 1\right), \tag{2.20}
$$

Εν συνεχεία, χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 2.2 με

$$
V(x) = \frac{1}{2}\left(\max\left(0, x_1^2 + x_2^2 - 1\right)\right)^2, \theta(x) = x_1 + x_2 \tag{2.21}
$$

Άμεσοι υπολογισμοί αποκαλύπτουν ότι ισχύουν οι ακόλουθες εξισώσεις για όλα τα $x \in \mathbb{R}^2$*:*

$$
\begin{aligned}
\nabla V(x)f(x) = -2\max\left(0, x_1^2 + x_2^2 - 1\right)(x_1^2 + x_2^2)\Big(4\left(\max\left(0, x_1^2 + x_2^2 - 1\right)\right)^2 + \\
\max\left(0, x_1 + x_2\right)\Big)
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla\theta(x)f(x) = -4(x_1 - x_2)^2\left(\max\left(0, x_1^2 + x_2^2 - 1\right)\right)^2 - (x_1 + x_2)\max\left(0, x_1 + x_2\right) \\
-\left((x_1 - x_2)^2 - \tfrac{\min\left(0, x_1^2 + x_2^2 - 1\right)}{2}\right)Q(x) - 4\left(\max\left(0, x_1^2 + x_2^2 - 1\right)\right)^2 (x_1 + x_2)
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

Η εξίσωση (2.22) *φανερώνει ότι ισχύουν τόσο η ανισότητα* (2.1) *όσο και η εξίσωση* (2.11). *Επιπλέον, ο ορισμός* (2.21) *φανερώνει ότι το σύνολο* $\{\,x \in \mathbb{R}^2 \,:\, V(x) \leq V(z)\,\}$ *είναι συμπαγές για κάθε* $z \in \mathbb{R}^2$. *Επομένως, η Σημείωση 2.1 (β) υποδηλώνει ότι για κάθε* $z \in \mathbb{R}^2$ *υπάρχει* $y_z \in \{\,x \in \mathbb{R}^2 \,:\, V(x) \leq V(z)\,\}$ *με* $\theta(y_z) \geq \theta(z)$ *τέτοιο ώστε να ισχύει ο εγκλεισμός της* (2.3). *Επιπλέον, η εξίσωση* (2.23) *και ο ορισμός* (2.21) *φανερώνουν ότι όταν*

$V(x)=0$, *ισχύει:*

$$\nabla\theta(x)f(x) = -\left((x_1-x_2)^2 - \frac{\min\left(0, x_1^2+x_2^2-1\right)}{2}\right)Q(x) - (x_1+x_2)\max\left(0, x_1+x_2\right) \tag{2.24}$$

Η εξίσωση (2.24) *φανερώνει ότι ισχύει η ανισότητα* (2.2).

Τέλος, αποδεικνύεται ότι για κάθε συμπαγές σύνολο $K \subseteq \mathbb{R}^2$ *με* $K \bigcap S \neq \emptyset$ *υπάρχει σταθερά* $\delta > 0$ *και μια συνάρτηση* $g \in K_\infty \bigcap C^1\left((0,+\infty);\mathbb{R}_+\right)$, *έτσι ώστε να ικανοποιείται η* (2.12). *Έστω* $K \subseteq \mathbb{R}^2$ *είναι συμπαγές σύνολο με* $K \bigcap S \neq \emptyset$. *Η εξίσωση* (2.23) *υποδηλώνει ότι:*

$$\nabla\theta(x)f(x) \leq 4M\left(\max\left(0, x_1^2+x_2^2-1\right)\right)^2 \tag{2.25}$$

για όλα τα $x \in K$ *με* $M = \max\{\, x_1+x_2 \,:\, x \in K\,\}$.

Η εξίσωση (2.22) *και ο ορισμός* (2.21) *δείχνουν ότι:*

$$|\nabla V(x)f(x)| \geq 8\left(\max\left(0, x_1^2+x_2^2-1\right)\right)^3 \tag{2.26}$$

για όλα τα $x \in \mathbb{R}^2$ *με* $V(x) > 0$.

Οι ανισότητες (2.25), (2.26) *και ο ορισμός* (2.21) *φανερώνουν ότι ισχύει η ανισότητα* $\nabla\theta(x)f(x) \leq \frac{M}{2\sqrt{2V(x)}}|\nabla V(x)f(x)|$ *για όλα τα* $x \in K$ *με* $V(x) > 0$. *Κατά συνέπεια, η* (2.12) *ισχύει για αυθαίρετη σταθερά* $\delta > 0$ *και* $g(s) := \frac{M}{\sqrt{2}}\sqrt{s}$, *συνάρτηση κλάσεως* $g \in K_\infty \bigcap C^1\left((0,+\infty);\mathbb{R}_+\right)$.

Από τα ανωτέρω μπορεί να συναχθεί ότι ισχύουν όλες οι υποθέσεις του Θεωρήματος 2.2. Ο ορισμός (2.21) *και η εξίσωση* (2.24) *υποδηλώνουν ότι:*

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, V(x) = \nabla\theta(x)f(x) = 0\} = \left\{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)'\right\}$$

Κατά συνέπεια, το εν λόγω θεώρημα υποδηλώνει ότι για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *η μοναδική λύση* $x(t)$ *του προβλήματος αρχικών τιμών* (2.4) *με* $x(0) = x_0$ *ορίζεται για όλα τα* $t \geq 0$ *και ικανοποιεί ότι* $\lim_{t\to+\infty} x(t) = x^* = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)'$ *(ολική έλξη). Τέλος, αφού* $\theta\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) < \theta(x)$ *για όλα τα* $x \in S\backslash\{\, x^*\}$, *το Θεώρημα 2.2 μας επιτρέπει να συνάγουμε ότι το σημείο* $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)'$ *είναι τοπικά ασυμπτωτικά ευσταθές, αποτέλεσμα που αν συνδυαστεί με την ολική έλξη οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το σημείο* $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)'$ *είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.*

Το ληφθέν αποτέλεσμα θα ήταν δύσκολο να εξαχθεί με μια μόνο συνάρτηση τύπου Lyapunov αφού δεν είναι εύκολη η κατασκευή μιας συνάρτησης Lyapunov για το δυναμικό σύστημα (2.4) *με τις* (2.19), (2.20).

2.2 Κατασκευή της ανάδρασης

Σε αυτή την ενότητα εξετάζεται η επίλυση του ακόλουθου προβλήματος κατασκευής της ανάδρασης. Δίνονται δυο συναρτήσεις $V \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}_+)$, $\theta \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ *για τις οποίες ισχύει η ακόλουθη ισότητα:*

$$S = \{\, x \in \mathbb{R}^n \,:\, |\nabla V(x)| = 0 \,\} = \{\, x \in \mathbb{R}^n \,:\, V(x) = 0 \,\} \tag{2.27}$$

Επίσης, δίνεται ένα διανυσματικό πεδίο $F(x)$ *το οποίο ορίζεται σε μια γειτονιά του συνόλου* S, *το οποίο ικανοποιεί τις ανισότητες* $\nabla V(x)F(x) \leq 0$, $\nabla\theta(x)F(x) \leq 0$, *για όλα τα* $x \in \mathbb{R}^n$ *σε μια γειτονιά του* S. *Ο στόχος είναι η ρητή κατασκευή ενός τοπικά Lipschitz νόμου ανάδρασης* $u = f(x)$ *για το σύστημα ελέγχου* $\dot{x} = u \in \mathbb{R}^n$, *έτσι ώστε το σύνολο* $\{x \in S : \nabla\theta(x)F(x) = 0\}$ *να είναι ολικός ελκυστής για το σύστημα κλειστού βρόχου. Το παραπάνω πρόβλημα είναι ένα ειδικό πρόβλημα σταθεροποίησης με ανάδραση και ο αναγνώστης μπορεί να διερωτηθεί γιατί εξετάζεται ένα τέτοιο πρόβλημα. Η επόμενη ενότητα φανερώνει ότι αυτό το ειδικό πρόβλημα σταθεροποίησης είναι ακριβώς το πρόβλημα που πρέπει να επιλυθεί όταν κάποιος ασχολείται με την κατασκευή ενός δυναμικού NLP επιλυτή.*

Το ακόλουθο θεώρημα παρέχει μια λύση στο ανωτέρω πρόβλημα ελέγχου με ανάδραση, ήτοι έναν αναλυτικό τύπο για τον τοπικά Lipschitz νόμο ανάδρασης $u = f(x)$ *ο οποίος βασίζεται στο Θεώρημα 2.2.*

Θεώρημα 2.3 *Έστω ότι δίνονται οι συναρτήσεις* $V \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}_+)$, $\theta \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ *οι οποίες έχουν τοπικά Lipschitz μερικές παραγώγους και υποθέτουμε ότι ισχύει η* (2.27). *Υποθέτουμε ότι για κάθε* $z \in \mathbb{R}^n$ *και για κάθε* $y \in \{\, x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq V(z) \,\}$ *το σύνολο* $\{\, x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq V(z)\,,\ \theta(x) \leq \theta(y) \,\}$ *είναι συμπαγές.*
Έστω $\Omega \in C^0(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}_+)$ *μια τοπικά Lipschitz συνάρτηση με* $x \notin S$, $\Omega(x) = 0$, *για όλα τα* $x \in S$. *Επίσης, υποθέτουμε ότι υπάρχει συνάρτηση* $\gamma \in C^0\left(\tilde{S};(0,+\infty)\right)$, *όπου*

$\tilde{S} = \{\, x \in \mathbb{R}^n \,:\, \Omega(x) < 1 \,\}$ *και ένα τοπικά Lipschitz διανυσματικό πεδίο* $F : \tilde{S} \to \mathbb{R}^n$ *τέτοιο ώστε*

$$\gamma(x)\left|\nabla V(x)\right|^2 \geq V(x) \text{ για όλα τα } x \in \mathbb{R}^n \text{ με } \Omega(x) < 1 \tag{2.28}$$

$$\nabla V(x)F(x) \leq 0, \nabla\theta(x)F(x) \leq 0, \text{ για όλα τα } x \in \mathbb{R}^n \text{ με } \Omega(x) < 1 \tag{2.29}$$

Επιπροσθέτως, υποθέτουμε ότι υπάρχει μια τοπικά Lipschitz συνάρτηση $\psi : \mathbb{R}^n \to (0, +\infty)$ *για την οποία ισχύει η ακόλουθη ιδιότητα:*
(*) Για κάθε $z \in \mathbb{R}^n$ *υπάρχει* $y_z \in \{\, x \in \mathbb{R}^n \,:\, V(x) \leq V(z) \,\}$ *με* $\theta(y_z) \geq \theta(z)$ *τέτοιο ώστε:*

$$\{\, x \in \mathbb{R}^n \,:\, a(x) > 0\,,\, V(x) \leq V(z)\} \subseteq \{\, x \in \mathbb{R}^n \,:\, \theta(x) \leq \theta(y_z)\,\} \tag{2.30}$$

όπου

$$a(x) := -\psi(x)\nabla V(x)\left(\nabla\theta(x)\right)' - \left|\nabla V(x)\right|^2 \left|\nabla\theta(x)\right|^2 + \left|\nabla V(x)\left(\nabla\theta(x)\right)'\right|^2 \tag{2.31}$$

Τέλος, γίνεται η υπόθεση ότι $\beta > 1$ *μια σταθερά και* $\sigma : \mathbb{R}^n \to (0, +\infty)$ *είναι μια τοπικά Lipschitz συνάρτηση με την οποία ορίζεται το ακόλουθο τοπικά Lipschitz διανυσματικό πεδίο:*

$$\begin{gathered} f(x) := \sigma(x)\left(1 - \beta\Omega(x)\right)F(x) - \beta\,\sigma(x)\Omega(x)\psi(x)\left(\nabla V(x)\right)' - \\ \beta\,\sigma(x)\Omega(x)\Big(\left|\nabla V(x)\right|^2 I_n - \left(\nabla V(x)\right)'\nabla V(x)\Big)\left(\nabla\theta(x)\right)' \end{gathered} \tag{2.32}$$

για όλα τα $x \in \mathbb{R}^n$ *με* $\beta\,\Omega(x) < 1$ *και*

$$\begin{gathered} f(x) := -\sigma(x)\psi(x)\left(\nabla V(x)\right)' - \\ \sigma(x)\Big(\left|\nabla V(x)\right|^2 I_n - \left(\nabla V(x)\right)'\nabla V(x)\Big)\left(\nabla\theta(x)\right)' \end{gathered} \tag{2.33}$$

για όλα $x \in \mathbb{R}^n$ *με* $\beta\,\Omega(x) \geq 1$.

Τότε για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *η μοναδική λύση* $x(t)$ *του προβλήματος αρχικών τιμών* (2.4) *με* $x(0) = x_0$ *ορίζεται για όλα τα* $t \geq 0$ *και είναι φραγμένη. Το σύνολο* S*, το οποίο ορίζεται στην* (2.27)*, είναι ένα θετικά αναλλοίωτο σύνολο για το δυναμικό σύστημα* (2.4)*. Περαιτέρω,* $\omega(x_0)$ *είναι ένα μη κενό, συμπαγές, συνεκτικό, αναλλοίωτο σύνολο το οποίο ικανοποιεί τη σχέση* $\omega(x_0) \subseteq \{x \in S \,:\, \nabla\theta(x)F(x) = 0\}$*. Επιπλέον, κάθε σημείο* $x^* \in S$*, το οποίο ικανοποιεί τις σχέσεις* $F(x^*) = 0$, $\theta(x^*) < \theta(x)$ *για όλα τα* $x \in S\backslash\{\,x^*\}$ *με*

$|x-x^*|<\tilde{\delta}$ *και* $\left\{ x \in S \,:\, \nabla\theta(x)F(x)=0\,,\, |x-x^*|<\tilde{\delta} \right\} = \{\, x^*\}$, *για μια κατάλληλη σταθερά* $\tilde{\delta}>0$, *είναι τοπικά ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας για το δυναμικό σύστημα* (2.4).

Απόδειξη: *Αρκεί να αποδειχθεί ότι ισχύουν όλες οι υποθέσεις του Θεωρήματος 2.3 για το διανυσματικό πεδίο* $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *το οποίο ορίζεται από τις* (2.32) *και* (2.33). *Πράγματι, οι ορισμοί* (2.31), (2.32), (2.33) *υποδηλώνουν ότι:*

$$\nabla V(x)f(x) = \sigma(x)\left(1-\beta\Omega(x)\right)\nabla V(x)F(x) - \beta\,\sigma(x)\Omega(x)\psi(x)\left|\nabla V(x)\right|^2 \leq 0, \quad (2.34)$$

για όλα τα $x \in \mathbb{R}^n$ *με* $\beta\,\Omega(x)<1$

$$\nabla V(x)f(x) = -\sigma(x)\psi(x)\left|\nabla V(x)\right|^2 \leq 0, \text{ για όλα τα } x \in \mathbb{R}^n \text{ με } \beta\,\Omega(x) \geq 1 \quad (2.35)$$

$$\nabla\theta(x)f(x) = \sigma(x)\left(1-\beta\Omega(x)\right)\nabla\theta(x)F(x) + \beta\,\sigma(x)\Omega(x)a(x) \quad (2.36)$$

για όλα τα $x \in \mathbb{R}^n$ *με* $\beta\,\Omega(x)<1$

$$\nabla\theta(x)f(x) = \sigma(x)a(x), \text{ για όλα τα } x \in \mathbb{R}^n \text{ με } \beta\,\Omega(x) \geq 1 \quad (2.37)$$

Πιο συγκεκριμένα, η ανισότητα (2.34) *είναι συνέπεια της* (2.29). *Συνεπώς, ισχύει η ανισότητα* (2.1) *και ισχύει ότι* $\nabla V(x)f(x)=0$ *μόνο όταν* $x \in S$. *Το τελευταίο γεγονός και ο ορισμός* (2.32) *(ο οποίος δείχνει ότι* $f(x)=\sigma(x)F(x)$ *όταν* $x \in S$*) σε σύζευξη με την* (2.29), *υποδηλώνει ότι ισχύει η ανισότητα* (2.2). *Από τις* (2.29), (2.36), (2.37) *συνεπάγεται ότι ισχύει η ακόλουθη συνεπαγωγή:*

$$\text{Εάν } a(x) \leq 0 \text{ τότε } \nabla\theta(x)f(x) \leq 0 \quad (2.38)$$

Η ιδιότητα (*) μαζί με την συνεπαγωγή (2.38) *εξασφαλίζουν τον εγκλεισμό* (2.3).
Τελικά, αποδεικνύεται ότι για κάθε συμπαγές σύνολο $K \subseteq \mathbb{R}^n$ *με* $K \bigcap S \neq \emptyset$ *υπάρχουν σταθερές* $M, \delta > 0$ *με την ακόλουθη ιδιότητα:*

$$\nabla\theta(x)f(x) \leq \frac{M}{\sqrt{V(x)}}\left|\nabla V(x)f(x)\right| \quad (2.39)$$

για όλα τα $x \in K$ *με* $0<V(x)\leq\delta$ *και* $|\nabla V(x)f(x)| \leq \delta$. *Με άλλα λόγια, η ανισότητα* (2.12) *ισχύει με* $g(s):=2M\sqrt{s}$ *για* $s \geq 0$. *Για να αποδειχθεί η ισχύς της* (2.39) *πρέπει πρώτα να δειχθεί ο ακόλουθος ισχυρισμός.*

Ισχυρισμός 2.2 *Υπάρχουν συναρτήσεις* $\tilde{\gamma} \in C^0(\mathbb{R}^n;(0,+\infty))$, $p \in K_\infty$ *τέτοιες ώστε*

$$\tilde{\gamma}(x)p(|\nabla V(x)|) \geq \Omega(x) \text{ για όλα τα } x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.40}$$

Απόδειξη: *Ορίζεται η συνάρτηση* $q:\mathbb{R}_+ \to [0,1]$ *μέσω του τύπου:*

$$q(s) := \sup\left\{ \frac{\Omega(x)}{(1+\Omega(x))(1+|x|^2)} : |\nabla V(x)| \leq s \right\}, \text{ για όλα τα } s \geq 0. \tag{2.41}$$

Επειδή η συνάρτηση $\frac{\Omega(x)}{(1+\Omega(x))(1+|x|^2)}$ *είναι μη αρνητική και φραγμένη από το 1, συνεπάγεται ότι η* $q(s)$ *είναι καλώς ορισμένη από την* (2.41) *και ικανοποιεί την* $q(s) \in [0,1]$ *για όλα τα* $s \geq 0$. *Μπορεί να παρατηρηθεί ότι αφού* $\Omega(x) = 0$ *για όλα τα* $x \in S$ *και αφού ισχύει η* (2.27), *ο ορισμός* (2.41) *υποδηλώνει ότι* $q(0) = 0$. *Επιπλέον,* $q:\mathbb{R}_+ \to [0,1]$ *είναι μια μη φθίνουσα συνάρτηση, η οποία ικανοποιεί την ακόλουθη ανισότητα για όλα τα* $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\left(1+|x|^2\right)(1+\Omega(x))\,q(|\nabla V(x)|) \geq \Omega(x), \text{ για όλα τα } x \in \mathbb{R}^n \tag{2.42}$$

Εν συνεχεία, θα πρέπει να δειχθεί ότι $\lim\limits_{s\to 0^+}(q(s)) = q(0) = 0$, *δηλαδή* $\limsup\limits_{s\to 0^+}(q(s)) = 0$. *Έστω ότι* $\limsup\limits_{s\to 0^+}(q(s)) = l > 0$. *Τότε υπάρχει μια ακολουθία* $\{s_i > 0\}_{i=0}^{\infty}$ *με* $s_i \to 0$ *και* $q(s_i) \geq l/2$. *Κατά συνέπεια, ο ορισμός* (2.41) *υποδηλώνει ότι υπάρχει μια ακολουθία* $\{x_i \in \mathbb{R}^n\}_{i=0}^{\infty}$ *με* $|\nabla V(x_i)| \to 0$ *και* $\frac{\Omega(x_i)}{(1+\Omega(x_i))(1+|x_i|^2)} \geq l/4$. *Η ανισότητα* $\frac{\Omega(x_i)}{(1+\Omega(x_i))(1+|x_i|^2)} \geq l/4$ *συνεπάγεται ότι ισχύει η ανισότητα* $4l^{-1} - 1 \geq |x_i|^2$, *γεγονός που καταδεικνύει ότι η ακολουθία* $\{x_i \in \mathbb{R}^n\}_{i=0}^{\infty}$ *είναι φραγμένη. Συνεπώς, υπάρχει μια υπο-ακολουθία η οποία εξακολουθεί να παρίσταται ως* $\{x_i \in \mathbb{R}^n\}_{i=0}^{\infty}$, *η οποία συγκλίνει, δηλαδή υπάρχει* $x^* \in \mathbb{R}^n$ *με* $x_i \to x^*$. *Από την υπόθεση της συνέχειας, ισχύει ότι* $|\nabla V(x^*)| = 0$ *και* $\frac{\Omega(x^*)}{(1+\Omega(x^*))(1+|x^*|^2)} \geq l/4$. *Αφού* $\Omega(x) = 0$ *για όλα τα* $x \in S$ *και επειδή ισχύει η* (2.27) *λαμβάνουμε ότι* $\Omega(x^*) = 0$, *η οποία αν συνδυαστεί με την ανισότητα* $\frac{\Omega(x^*)}{(1+\Omega(x^*))(1+|x^*|^2)} \geq l/4$, *έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση ότι* $\limsup\limits_{s\to 0^+}(q(s)) = l > 0$. *Επομένως,* $\limsup\limits_{s\to 0^+}(q(s)) = 0$. *Το Λήμμα 2.4 στην σελίδα 65 του [22] υποδηλώνει ότι υπάρχει* $p \in K_\infty$ *τέτοιο ώστε* $q(s) \leq p(s)$ *για όλα τα* $s \geq 0$. *Η ανισότητα* (2.40) *είναι άμεση συνέπεια της προηγούμενης ανισότητας και της* (2.42). *Όπερ έδει δείξε.* $\triangleleft$

Σε αυτό το σημείο μπορεί να αποδειχθεί η εγκυρότητα της (2.39). *Πρώτα αποδεικνύεται ότι επιλέγοντας ένα επαρκώς μικρό* $\delta > 0$, *εξασφαλίζεται ότι δεν υπάρχει* $x \in K$ *με* $\beta\,\Omega(x) \geq 1$, $0 < V(x) \leq \delta$ *και* $|\nabla V(x) f(x)| \leq \delta$. *Πράγματι, δυνάμει των* (2.35) *και*

(2.40), *ένα τέτοιο* $x \in K$ *θα έπρεπε να ικανοποιεί τις ανισότητες* $\beta\,\tilde{\gamma}(x)p\left(|\nabla V(x)|\right) \geq 1$ *και* $\sigma(x)\psi(x)\left|\nabla V(x)\right|^2 \leq \delta$, *οι οποίες δίνουν την ανισότητα* $\sigma(x)\psi(x)\left(p^{-1}\left(\frac{1}{\beta\tilde{\gamma}(x)}\right)\right)^2 \leq \delta$.

Αν οριστεί $\delta := \frac{1}{2}\min\left\{\ \sigma(x)\psi(x)\left(p^{-1}\left(\frac{1}{\beta\tilde{\gamma}(x)}\right)\right)^2\ :\ x \in K\ \right\}$ *(καλώς ορισμένο και θετικό αφού* K *είναι συμπαγές και αφου* $\tilde{\gamma}, \psi, \sigma \in C^0\left(\mathbb{R}^n; (0, +\infty)\right)$, $p^{-1} \in K_\infty$*), μπορεί να εξασφαλιστεί ότι δεν ισχύει η ανισότητα* $\sigma(x)\psi(x)\left(p^{-1}\left(\frac{1}{\beta\tilde{\gamma}(x)}\right)\right)^2 \leq \delta$. *Συνεπώς, δεν υπάρχει* $x \in K$ *με* $\beta\,\Omega(x) \geq 1$, $0 < V(x) \leq \delta$ *και* $|\nabla V(x)f(x)| \leq \delta$.

Επομένως, απομένει να δειχθεί ότι για κάθε συμπαγές σύνολο $K \subseteq \mathbb{R}^n$ *με* $K \bigcap S \neq \emptyset$ *υπάρχει σταθερά* $M > 0$ *με την ακόλουθη ιδιότητα:*

$$\nabla\theta(x)f(x) \leq \frac{M}{\sqrt{V(x)}}\left|\nabla V(x)f(x)\right|, \tag{2.43}$$

για όλα τα $x \in K$ *με* $\beta\,\Omega(x) < 1, 0 < V(x) \leq \delta$ *και* $|\nabla V(x)f(x)| \leq \delta$ *όπου*
$\delta := \frac{1}{2}\min\left\{\ \sigma(x)\psi(x)\left(p^{-1}\left(\frac{1}{\beta\tilde{\gamma}(x)}\right)\right)^2\ :\ x \in K\ \right\}$.
Λαμβάνοντας υπόψη τις (2.34) *και* (2.36)*, αρκεί να δειχθεί ότι:*

$$a(x) \leq \frac{M}{\sqrt{V(x)}}\psi(x)\left|\nabla V(x)\right|^2 \tag{2.44}$$

για όλα τα $x \in K$ *με* $\beta\,\Omega(x) < 1, 0 < V(x) \leq \delta$ *και* $|\nabla V(x)f(x)| \leq \delta$.
Λαμβάνοντας υπόψη την (2.28)*, τον ορισμό* (2.31) *και το γεγονός ότι*

$$-\left|\nabla V(x)\right|^2\,\left|\nabla\theta(x)\right|^2 + \left|\nabla V(x)\left(\nabla\theta(x)\right)'\right|^2 \leq 0,$$

καταλήγουμε, βάσει της (2.44)*, ότι αρκεί να δειχθεί ότι:*

$$-\nabla V(x)\left(\nabla\theta(x)\right)' \leq \frac{M}{\sqrt{\gamma(x)}}\left|\nabla V(x)\right| \tag{2.45}$$

για όλα τα $x \in K$ *με* $\beta\,\Omega(x) < 1, 0 < V(x) \leq \delta$ *και* $|\nabla V(x)f(x)| \leq \delta$.

Δυνάμει της ανισότητας των Cauchy-Schwarz, η ανισότητα (2.45) *ισχύει εάν ισχύει η ανισότητα* $|\nabla\theta(x)|\sqrt{\gamma(x)} \leq M$. *Επομένως, αρκεί να επιλεχθεί κατάλληλα η ποσότητα* $M := 1 + \max\left\{\ \sqrt{\gamma(x)}\ |\nabla\theta(x)|\ :\ x \in K\,,\ \beta\,\Omega(x) \leq 1\ \right\}$. *Όπερ έδει δείξε.* $\triangleleft$

Όταν το διανυσματικό πεδίο $F(x)$ *μπορεί να οριστεί στον* $\mathbb{R}^n$ *τότε μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένας απλούστερος τύπος από αυτόν που δίνεται στις* (2.32), (2.33)*, όπως αποτυπώνεται στο ακόλουθο θεώρημα.*[1]

[1] Η απόδειξη του Θεωρήματος 2.4 είναι παρόμοια με αυτή του Θεωρήματος 2.3 και για αυτό παραλείπεται η απόδειξη του.

Θεώρημα 2.4 *Έστω ότι δίνονται οι συναρτήσεις* $V \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}_+)$, $\theta \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ *με τοπικά Lipschitz μερικές παραγώγους και υποθέτουμε ότι ισχύει η* (2.27). *Υποθέτουμε ότι για κάθε* $z \in \mathbb{R}^n$ *και για κάθε* $y \in \{\, x \in \mathbb{R}^n \, : \, V(x) \leq V(z) \,\}$ *το σύνολο* $\{\, x \in \mathbb{R}^n \, : \, V(x) \leq V(z) \, , \, \theta(x) \leq \theta(y) \,\}$ *είναι συμπαγές. Έστω* $\Omega \in C^0\left(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}_+\right)$ *μια τοπικά Lipschitz συνάρτηση με* $\Omega(x) > 0$ *για όλα τα* $x \notin S$, $\Omega(x) = 0$ *για όλα τα* $x \in S$. *Υποθέτουμε ότι υπάρχει συνάρτηση* $\gamma \in C^0\left(\tilde{S};(0,+\infty)\right)$, *όπου* $\tilde{S} = \{\, x \in \mathbb{R}^n \, : \, \Omega(x) < 1 \,\}$, *και ένα τοπικά Lipschitz διανυσματικό πεδίο* $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *τέτοιο ώστε να ισχύει η* (2.28) *και οι*

$$\nabla V(x)F(x) \leq 0, \nabla\theta(x)F(x) \leq 0, \ \text{για όλα τα } x \in \mathbb{R}^n \tag{2.46}$$

Επίσης, υποθέτουμε ότι υπάρχουν τοπικά Lipschitz συναρτήσεις $\psi_i : \mathbb{R}^n \to (0,+\infty)$ $(i = 1,2)$ *για τις οποίες ικανοποιείται η ακόλουθη ιδιότητα:*
(**) Για κάθε $z \in \mathbb{R}^n$ *υπάρχει* $y_z \in \{\, x \in \mathbb{R}^n \, : \, V(x) \leq V(z) \,\}$ *με* $\theta(y_z) \geq \theta(z)$ *τέτοιο ώστε:*

$$\{\, x \in \mathbb{R}^n \, : \, a(x) > 0 \, , \, V(x) \leq V(z)\} \subseteq \{\, x \in \mathbb{R}^n \, : \, \theta(x) \leq \theta(y_z) \,\} \tag{2.47}$$

όπου

$$\begin{aligned} a(x) := \psi_1(x)\nabla\theta(x)F(x) - \psi_2(x)\nabla V(x)\left(\nabla\theta(x)\right)' - \left|\nabla V(x)\right|^2 \left|\nabla\theta(x)\right|^2 \\ + \left|\nabla V(x)\left(\nabla\theta(x)\right)'\right|^2 \end{aligned} \tag{2.48}$$

Τέλος, γίνεται η υπόθεση ότι $\sigma : \mathbb{R}^n \to (0,+\infty)$ *είναι μια τοπικά Lipschitz συνάρτηση και ορίζεται το ακόλουθο τοπικά Lipschitz διανυσματικό πεδίο:*

$$\begin{aligned} f(x) := \sigma(x)\Big(\psi_1(x)F(x) - \psi_2(x)\left(\nabla V(x)\right)' \\ - \Big(\left|\nabla V(x)\right|^2 I_n - \left(\nabla V(x)\right)' \nabla V(x)\Big)\left(\nabla\theta(x)\right)'\Big) \end{aligned} \tag{2.49}$$

για όλα τα $x \in \mathbb{R}^n$

Τότε για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *η μοναδική λύση* $x(t)$ *του προβλήματος αρχικών τιμών* (2.4) *με* $x(0) = x_0$ *ορίζεται για όλα τα* $t \geq 0$ *και είναι φραγμένη. Το σύνολο* S, *όπως ορίζεται στην* (2.27), *είναι ένα θετικά αναλλοίωτο σύνολο για το δυναμικό σύστημα* (2.4). *Περαιτέρω, το* $\omega(x_0)$ *είναι ένα μη κενό, συμπαγές, συνεκτικό, αναλλοίωτο σύνολο το οποίο ικανοποιεί την σχέση* $\omega(x_0) \subseteq \{x \in S \, : \, \nabla\theta(x)F(x) = 0\}$. *Επιπλέον, κάθε σημείο* $x^* \in S$, *το οποίο ικανοποιεί τις* $F(x^*) = 0$, $\theta(x^*) < \theta(x)$ *για όλα τα* $x \in S \backslash \{\, x^* \}$ *με* $|x - x^*| < \tilde{\delta}$ *και*

$\Big\{ x \in S \,:\, \nabla\theta(x)F(x) = 0\,,\, |x - x^*| < \tilde{\delta} \Big\} = \{ x^* \}$, *για μια επαρκή σταθερά* $\tilde{\delta} > 0$, *είναι ένα τοπικά ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας για το δυναμικό σύστημα* (2.4).

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η υπόθεση (**) είναι λιγότερο περιοριστική από την υπόθεση (*) διότι η συνάρτηση $a(x)$ *όπως ορίζεται από την* (2.48) *περιέχει τον μη θετικό όρο* $\nabla\theta(x)F(x)$ *(ο αναγνώστης μπορεί να κάνει την σύγκριση με τον ορισμό* (2.31)*).*

Κεφάλαιο 3

Δυναμικοί επιλυτές σε προβλήματα μη γραμμικού προγραμματισμού

3.1 Κατασκευή των Δυναμικών NLP Επιλυτών

Στην παρούσα ενότητα επιστρέφουμε στην κατασκευή του νόμου ανάδρασης για το σύστημα ελέγχου $\dot{x} = u$ το οποίο επιλύει το πρόβλημα μη γραμμικού προγραμματισμού όπως αυτό περιγράφεται από τις (1.2) και (1.3).

Καταρχάς θα οριστούν τα ακόλουθα διανύσματα και πίνακες (βλ. [23]):

$$h(x) = \begin{bmatrix} h_1(x) \\ \vdots \\ h_m(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m, A(x) = \begin{bmatrix} \nabla h_1(x) \\ \vdots \\ \nabla h_m(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_k(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^k, B(x) = \begin{bmatrix} \nabla g_1(x) \\ \vdots \\ \nabla g_k(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times n} \tag{3.1}$$

για όλα τα $x \in \mathbb{R}^n$.

Επίσης, γίνεται η ακόλουθη υπόθεση για τους περιορισμούς (η οποία είναι γνωστή ως Mangasarian-Fromovitz constraint qualification).

Υπόθεση (H2): *Τα διανύσματα γραμμές $\nabla h_i(x)$ $(i = 1, ..., m)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα για όλα τα $x \in S$. Επιπλέον, για κάθε $x \in S$, αν $\{\, i \in \{1, ..., k\} \,:\, g_i(x) = 0 \,\} \neq \emptyset$*

τότε υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}^n$ *τέτοιο ώστε* $\nabla g_j(x)\xi < 0$ *για όλα τα* $j = 1, ..., k$ *για τα οποία* $g_j(x) = 0$ *(ενεργοί περιορισμοί) και* $\nabla h_i(x)\xi = 0$ *για όλα τα* $i = 1, ..., m$.

Εν συνεχεία, ορίζεται το σύνολο των κρίσιμων σημείων του προβλήματος μη γραμμικού προγραμματισμού σύμφωνα με τους ορισμούς (1.2) *και* (1.3). *Πιο συγκεκριμένα, ορίζεται ως* $\Phi \subseteq S$ *το σύνολο όλων των σημείων* $x \in S$ *για τα οποία υπάρχουν* $\lambda \in \mathbb{R}^m$ *και* $\mu \in \mathbb{R}^k_+$, *τέτοια ώστε να ισχύουν οι ακόλουθες εξισώσεις:*

$$\begin{aligned} &(\nabla\theta(x))' + A'(x)\lambda + B'(x)\mu = 0 \\ &\mu' g(x) = 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Με άλλα λόγια, $\Phi \subseteq S$ *είναι το σύνολο των κρίσιμων σημείων ή των σημείων Karush-Kuhn-Tucker (εφεξής και «KKT») για το πρόβλημα που ορίζουν οι* (1.2) *και* (1.3). *Η απαίτηση για τους περιορισμούς των Mangasarian-Fromovitz εξασφαλίζει ότι κάθε λύση των* (1.2) *και* (1.3) *είναι ένα σημείο KKT. Εν κατακλείδι, το πρόβλημα που εξετάστηκε είναι αυτό της κατασκευής ενός ολικά ορισμένου τοπικά Lipschitz διανυσματικού πεδίου, τέτοιου ώστε οι λύσεις του δυναμικού συστήματος* $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ *να συγκλίνουν στο* Φ *για όλες τις αρχικές συνθήκες. Όμως, η κατασκευή του διανυσματικού πεδίου δεν περιλαμβάνει το σύνολο* $\Phi \subseteq S$ *αυτό καθεαυτό, διότι το εν λόγω σύνολο είναι άγνωστο και προς προσδιορισμό.*

Η κύρια ιδέα που παρουσιάζεται στην [23] είναι η χρησιμοποίηση δυο συναρτήσεων και η εφαρμογή του Θεωρήματος 2.4. Η πρώτη συνάρτηση είναι ένας όρος ποινής, ο οποίος προσδίδει κόστος στην ενδεχόμενη απόκλιση του συστήματος, ήτοι στην ύπαρξη απόστασης από το εφικτό σύνολο. Στην [23] γίνεται χρήση της συνάρτησης ποινής

$$V(x) := \frac{1}{2}|h(x)|^2 + \frac{1}{2}\left|(g(x))^+\right|^2 \tag{3.3}$$

Παρατηρείται ότι η $V \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}_+)$ *είναι μια συνάρτηση με τοπικά Lipschitz μερικές παραγώγους, αφού* $\nabla V(x) = h'(x)A(x) + ((g(x))^+)' B(x)$ *για όλα τα* $x \in \mathbb{R}^n$, *όπου* $A(x), B(x), h(x), g(x)$ *ορίζονται στην* (3.1). *Όμως, όλα όσα ακολουθούν μπορούν να εφαρμοστούν (με τις απαραίτητες τροποποιήσεις) σε συναρτήσεις της μορφής:*

$$V(x) := W(h(x)) + \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{j=1}^{k} c_j \left(\max(0, g_j(x))\right)^{2p_j}$$

όπου $W \in C^2(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}_+)$ *είναι μια θετικά ορισμένη, γνήσια (proper) συνάρτηση,* $c_j > 0$

$(j=1,...,k)$ είναι πραγματικές σταθερές και $p_j \geq 1$ $(j=1,...,k)$ είναι ακέραιοι αριθμοί. Η δεύτερη συνάρτηση είναι η αντικειμενική συνάρτηση $\theta(x)$.

Για να οριστεί μια κατάλληλη ανάδραση $u = f(x)$ η οποία να εξασφαλίζει όλες τις υποθέσεις του Θεωρήματος 2.3, χρειάζονται οι ακόλουθες υποθέσεις:

Υπόθεση (Α1). *Για κάθε $z \in \mathbb{R}^n$ και για κάθε $y \in \{\, x \in \mathbb{R}^n \,:\, V(x) \leq V(z) \,\}$ το σύνολο*

$$\{\, x \in \mathbb{R}^n \,:\, V(x) \leq V(z)\,,\, \theta(x) \leq \theta(y) \,\}$$

είναι συμπαγές. Η Υπόθεση (Α1) είναι πιο απαιτητική από την Υπόθεση (Η1).

Υπόθεση (Α2). *Για όλα τα $x \in S$, τα διανύσματα γραμμή $\nabla h_i(x)$ $(i=1,...,m)$ και $\nabla g_j(x)$, για όλα τα $j=1,...,k$ για τα οποία $g_j(x)=0$ (ενεργοί περιορισμοί), είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.*

Η Υπόθεση (Α2) αποτελεί τη συνθήκη απαίτησης για την γραμμική ανεξαρτησία των περιορισμών («linear independence constraint qualification condition»). Η υπόθεση της απαίτησης για την γραμμική ανεξαρτησία των περιορισμών, είναι μια περιοριστική υπόθεση.[1] *Όμως, η εν λόγω απαίτηση έχει το πλεονέκτημα ότι είναι εύκολα επαληθεύσιμη και ότι είναι αληθής σε πολλές ενδιαφέρουσες περιπτώσεις (η [30] κατέδειξε ότι αυτή η υπόθεση γενικώς ισχύει) και είναι ένα σημαντικό συστατικό σε πολλές αριθμητικές μεθόδους (βλ. για παράδειγμα [13], [31]).*

Υπόθεση (Α3). *Ισχύει η ακόλουθη συμπερασματική πρόταση:*

$$A'(x)h(x) + B'(x)(g(x))^{+} = 0 \Rightarrow h(x) = 0 \;\; \textit{και} \; (g(x))^{+} = 0 \tag{3.4}$$

όπου $A(x), B(x), h(x), g(x)$ έχουν οριστεί στην (3.1).

Η Υπόθεση (Α3) εξασφαλίζει ότι δεν υπάρχουν κρίσιμα σημεία για την συνάρτηση ποινής έξω από το εφικτό σύνολο.

Παρατηρείται ότι το γεγονός ότι ο συμμετρικός πίνακας $(A(x)A'(x))$ είναι θετικά ημιορισμένος υποδηλώνει ότι $\det(A(x)A'(x)) \geq 0$. Συνεπώς, η συνθήκη ότι τα διανύσματα

[1] Είναι πιο περιοριστική από την απαίτηση των Mangasarian-Fromovitz για τους περιορισμούς (Υπόθεση (Η2)) ή την απαίτηση σταθερής τάξης για τους περιορισμούς, οι οποίες είναι όλες πιο περιοριστικές από την απαίτηση του Guignard για τους περιορισμούς.

γραμμή $\nabla h_i(x)$ *(*$i = 1, ..., m$*) είναι γραμμικά ανεξάρτητα (ήτοι* $\det(A(x)A'(x)) \neq 0$*)* *είναι ισοδύναμη με την συνθήκη* $\det(A(x)A'(x)) > 0$.

Εν συνεχεία ορίζεται ο συμμετρικός πίνακας:

$$H(x) = \det(A(x)A'(x))\, I_n - A'(x) adj\,(A(x)A'(x))\, A(x) \tag{3.5}$$

για όλα τα $x \in \mathbb{R}^n$*, όπου ο πίνακας* $A(x)$ *ορίζεται στην* (3.1).

Τα ακόλουθα δεδομένα είναι άμεση συνέπεια του ορισμού (3.5)*:*

Ιδιότητα 1: $H'(x)H(x) = H^2(x) = \det(A(x)A'(x))\, H(x)$, $A(x)H(x) = 0$, $H(x)A'(x) = 0$.

Ιδιότητα 2: $\det(A(x)A'(x))\, \xi' H(x)\xi = |H(x)\xi|^2$*, για όλα τα* $\xi \in \mathbb{R}^n$

Ιδιότητα 3: *Για κάθε* $\xi \in \mathbb{R}^n$ *και* $x \in \mathbb{R}^n$ *με* $\det(A(x)A'(x)) > 0$ *υπάρχει* $\lambda \in \mathbb{R}^m$ *τέτοιο ώστε* $\xi = \frac{1}{\det(A(x)A'(x))} H(x)\xi - A'(x)\lambda$.

Εν συνεχεία ορίζεται ο συμμετρικός πίνακας:

$$Q(x) := \det(A(x)A'(x))\, B(x)H(x)B'(x) - (\det(A(x)A'(x)))^2\, diag\left((g(x))^-\right) \tag{3.6}$$

για όλα τα $x \in \mathbb{R}^n$*, όπου* $B(x), g(x)$ *ορίζονται στην* (3.1) *και* $H(x)$ *ορίζεται στην* (3.5).

Ο πίνακας $Q(x) \in \mathbb{R}^{k\times k}$ *είναι θετικά ημιορισμένος, αφού δυνάμει της Ιδιότητας 2, ισχύει η ακόλουθη ισότητα για όλα τα* $\xi = (\xi_1, ..., \xi_k)' \in \mathbb{R}^k$*:*

$$\xi' Q(x)\xi = |H(x)B'(x)\xi|^2 + (\det(A(x)A'(x)))^2 \sum_{j=1}^{k} |\min(0, g_j(x))|\, \xi_j^2 \tag{3.7}$$

Επομένως:

$$\det(Q(x)) \geq 0, \text{ για όλα τα } x \in \mathbb{R}^n \tag{3.8}$$

Το ακόλουθο λήμμα παρέχει τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες έτσι ώστε ο πίνακας $Q(x) \in \mathbb{R}^{k\times k}$ *να είναι θετικά ορισμένος.*

Λήμμα 3.1 *Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

(α) Τα διανύσματα γραμμή $\nabla h_i(x)$ *(*$i = 1, ..., m$*) και* $\nabla g_j(x)$ *για όλα τα* $j = 1, ..., k$ *για τα οποία* $g_j(x) \geq 0$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

(β) Ο πίνακας $Q(x) \in \mathbb{R}^{k\times k}$ *όπως ορίζεται από την* (3.6) *είναι θετικά ορισμένος.*

(γ) $\det(Q(x)) > 0$

(δ) $\det(Q(x)) \neq 0$

Η Υπόθεση (A2) μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε ένα διανυσματικό πεδίο $F(x)$ *για όλα τα* $x \in \mathbb{R}^n$*, το οποίο ικανοποιεί τις ανισότητες* $\nabla\theta(x)F(x) \leq 0$ *και* $\nabla V(x)F(x) \leq 0$ *για όλα τα* $x \in \mathbb{R}^n$*. Αυτό αποδεικνύεται στο Λήμμα 3.2.*

Απόδειξη: *Η ισοδυναμία των (β), (γ) και (δ) είναι άμεση συνέπεια του γεγονότος ότι ο πίνακας* $Q(x) \in \mathbb{R}^{k\times k}$*, όπως ορίζεται στην* (3.6)*, είναι θετικά ορισμένος (βλέπε* (3.7)*). Στη συνέχεια, αποδεικνύεται η συνεπαγωγή (α)* $\Rightarrow$ *(β) με την μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής. Παρατηρείται ότι η γραμμική ανεξαρτησία των διανυσμάτων γραμμή* $\nabla h_i(x)$ $(i = 1, ..., m)$ *υποδηλώνει ότι* $\det\left(A(x)A'(x)\right) > 0$*. Υποθέτουμε ότι ο πίνακας* $Q(x) \in \mathbb{R}^{k\times k}$ *ο οποίος ορίζεται από την* (3.6) *δεν είναι θετικά ορισμένος. Τότε υπάρχει ένα μη μηδενικό* $\xi = (\xi_1, ..., \xi_k)' \in \mathbb{R}^k$ *με* $\xi' Q(x)\xi = 0$*. Κατά συνέπεια, η ισότητα* (3.7) *φανερώνει ότι θα πρέπει να ισχύει* $H(x)B'(x)\xi = 0$ *και* $\xi_j = 0$ *για όλα τα* $j = 1, ..., k$ *με* $g_j(x) < 0$*. Η Ιδιότητα 3 υποδηλώνει ότι υπάρχει* $\lambda \in \mathbb{R}^m$ *τέτοιο ώστε* $B'(x)\xi = A'(x)\lambda$*. Η προηγούμενη ισότητα υποδηλώνει ότι:*

$$\sum_{j=1}^{k} \xi_j \nabla g_j(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla h_i(x) = 0 \tag{3.9}$$

Αφού $\xi_j = 0$ *για όλα τα* $j = 1, ..., k$ *με* $g_j(x) < 0$ *και αφού* $\xi = (\xi_1, ..., \xi_k)' \in \mathbb{R}^k$ *είναι μη μηδενικό, συνάγεται από την* (3.9) *ότι παραβιάζεται η γραμμική ανεξαρτησία των διανυσμάτων γραμμή* $\nabla h_i(x)$ $(i = 1, ..., m)$ *και* $\nabla g_j(x)$ *για όλα τα* $j = 1, ..., k$ *για τα οποία* $g_j(x) \geq 0$*.*

Τέλος, αποδεικνύεται η συνεπαγωγή (β) $\Rightarrow$ *(α) με την μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής. Παρατηρούμε ότι αφού* $Q(x) = 0$ *όταν* $\det\left(A(x)A'(x)\right) = 0$*, έπεται ότι* $\det\left(A(x)A'(x)\right) > 0$ *ή ισοδύναμα ότι τα διανύσματα γραμμή* $\nabla h_i(x)$ $(i = 1, ..., m)$ *είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Γίνεται η υπόθεση ότι τα διανύσματα γραμμή* $\nabla h_i(x)$ $(i = 1, ..., m)$ *και* $\nabla g_j(x)$ *για όλα τα* $j = 1, ..., k$ *για τα οποία* $g_j(x) \geq 0$*, είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Η γραμμική εξάρτηση των διανυσμάτων γραμμή* $\nabla h_i(x)$ $(i = 1, ..., m)$ *και* $\nabla g_j(x)$ *για όλα τα* $j = 1, ..., k$ *για τα οποία* $g_j(x) \geq 0$ *υποδηλώνει την ύπαρξη των διανυσμάτων* $\xi = (\xi_1, ..., \xi_k)' \in \mathbb{R}^k$*,* $\lambda \in \mathbb{R}^m$*, τα οποία δεν είναι ταυτόχρονα μηδέν, με* $\xi_j = 0$ *για όλα τα* $j = 1, ..., k$ *με* $g_j(x) < 0$*, τέτοια ώστε να ικανοποιείται η* (3.9)*. Η γραμμική ανεξαρτησία των διανυσμάτων γραμμή* $\nabla h_i(x)$ $(i = 1, ..., m)$ *υποδηλώνει ότι το* $\xi = (\xi_1, ..., \xi_k)' \in \mathbb{R}^k$ *δεν είναι* *μηδενικό. Αφού η* (3.9) *μπορεί να γραφεί ως* $B'(x)\xi = A'(x)\lambda$, *έπεται από την Ιδιότητα 1 ότι* $H(x)B'(x)\xi = 0$. *Το γεγονός ότι* $H(x)B'(x)\xi = 0$ *και* $\xi_j = 0$ *για όλα τα* $j = 1, ..., k$ *με* $g_j(x) < 0$, *σε σύζευξη με την* (3.7), *υποδηλώνει ότι* $\xi' Q(x)\xi = 0$, *το οποίο φανερώνει ότι ο πίνακας* $Q(x) \in \mathbb{R}^{k\times k}$, *όπως αυτός ορίζεται από την* (3.6), *δεν είναι θετικά ορισμένος. Όπερ έδει δείξε.* $\triangleleft$

Λήμμα 3.2 *Έστω ότι ισχύει η Υπόθεση (Α2). Έστω ότι ο πίνακας* $R(x) \in \mathbb{R}^{m\times k}$ *ορίζεται ως ακολούθως:*

$$R(x) := H(x)B'(x)adj(Q(x)) \tag{3.10}$$

όπου ο $H(x)$ *ορίζεται στην* (3.5), $Q(x) \in \mathbb{R}^{k\times k}$ *ορίζεται στην* (3.6) *και* $B(x) \in \mathbb{R}^{k\times n}$ *ορίζεται στην* (3.1). *Επίσης, έστω* $F(x) \in \mathbb{R}^n$ *το διάνυσμα που ορίζεται ως ακολούθως:*

$$\begin{aligned}
&F(x) := (\det (A(x)A'(x)))^4\, R(x) diag\left((g(x))^-\right) R'(x) \left(\nabla\theta(x)\right)' \\
&- (\det (A(x)A'(x)))^4\, R(x) \left(R'(x) \left(\nabla\theta(x)\right)'\right)^+ \\
&- \det (A(x)A'(x)) \left(\det(Q(x)) I_n\right. \\
&- \det (A(x)A'(x))\, R(x)B(x))\, H(x) \left(\det(Q(x)) I_n\right. \\
&- \det (A(x)A'(x))\, B'(x)R'(x))\left(\nabla\theta(x)\right)'
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Τότε ισχύουν οι ακόλουθες ανισότητες:

$$\begin{aligned}
&\nabla\theta(x)F(x) = (\det (A(x)A'(x)))^4\, \nabla\theta(x)R(x) diag\left((g(x))^-\right) R'(x) \left(\nabla\theta(x)\right)' \\
&- (\det (A(x)A'(x)))^4 \left|\left(R'(x) \left(\nabla\theta(x)\right)'\right)^+\right|^2 \\
&- \left|H(x) \left(\det(Q(x)) I_n - \det (A(x)A'(x))\, B'(x)R'(x)\right) \left(\nabla\theta(x)\right)'\right|^2 \leq 0
\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
&\left(h'(x)A(x) + \left((g(x))^+\right)' B(x)\right) F(x) = \\
&- (\det (A(x)A'(x)))^3 \det(Q(x)) \left((g(x))^+\right)' \left(R'(x) \left(\nabla\theta(x)\right)'\right)^+ \leq 0
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Επιπλέον, ισχύουν οι ακόλουθες συνεπαγωγές:

$$\left.\begin{array}{c} x \in S \\ \nabla\theta(x)F(x) = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} x \in S \\ F(x) = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x \in \Phi \tag{3.14}$$

όπου $\Phi \subseteq S$ *είναι το σύνολο των σημείων Karush-Kuhn-Tucker (KKT) του προβλήματος που ορίζεται από τις* (1.2) *και* (1.3).

Απόδειξη: *Οι σχέσεις* (3.12), (3.13) *είναι άμεση συνέπεια των ορισμών* (3.6), (3.10), (3.11) *των Ιδιοτήτων 1, 2 και ότι* $((g(x))^{+})^{'} diag\left((g(x))^{-}\right) = 0$ *και* $Q(x)adj(Q(x)) = \det(Q(x))I_k$.

Οι συνεπαγωγές $\left.\begin{array}{c} x \in S \\ \nabla\theta(x)F(x) = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} x \in S \\ F(x) = 0 \end{array}\right\}$ *είναι άμεση απόρροια του ορισμού* (3.11), *της ανισότητας* (3.12) *και του γεγονότος ότι η Υπόθεση (A2) εξασφαλίζει ότι* $\det\left(A(x)A'(x)\right) > 0$ *όταν* $x \in S$.

Στη συνέχεια, αποδεικνύεται η συνεπαγωγή $\left.\begin{array}{c} x \in S \\ F(x) = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x \in \Phi.$

Γίνεται η υπόθεση ότι $x \in S, F(x) = 0$. *Ισχύει ότι* $\nabla\theta(x)F(x) = 0$. *Αφού η Υπόθεση (A2) εξασφαλίζει ότι* $\det\left(A(x)A'(x)\right) > 0$ *όταν* $x \in S$, *λόγω της* (3.12) *ισχύουν τα ακόλουθα:*

$$\begin{aligned} & diag\left((g(x))^{-}\right) R'(x) \left(\nabla\theta(x)\right)^{'} = 0 \\ & \left(R'(x) \left(\nabla\theta(x)\right)^{'}\right)^{+} = 0 \\ & H(x) \left(\det(Q(x))I_n - \det\left(A(x)A'(x)\right) B'(x)R'(x)\right) \left(\nabla\theta(x)\right)^{'} = 0 \end{aligned} \tag{3.15}$$

ή ισοδύναμα, επειδή $x \in S$ *(το οποίο υποδηλώνει ότι* $(g(x))^{-} = g(x)$*):*

Το Λήμμα 3.1 σε σύζευξη με την υπόθεση (2.6) *υποδηλώνει ότι* $\det(Q(x)) > 0$. *Ορίζεται η ποσότητα* $\mu := -\frac{\det(A(x)A'(x))}{\det(Q(x))} R'(x) \left(\nabla\theta(x)\right)^{'}$ *και παρατηρείται ότι λόγω της* (3.15)*:*

$$\mu \geq 0 \text{ } \textit{με } diag\left(g(x)\right)\mu = 0 \tag{3.16}$$

Η (3.16) *υποδηλώνει ότι* $\mu' g(x) = 0$. *Επιπλέον, λόγω της* (3.15)*:*

$$H(x) \left(\left(\nabla\theta(x)\right)^{'} + B'(x)\mu\right) = 0.$$

Συνεπώς, η Ιδιότητα 3 υποδηλώνει ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}^m$ *τέτοιο ώστε* $\left(\nabla\theta(x)\right)^{'} + B'(x)\mu = -A'(x)\lambda$. *Επομένως, ισχύει η* (3.2) *και κατά συνέπεια* $x \in \Phi$.

Τέλος, αποδεικνύεται η συνεπαγωγή $x \in \Phi \Rightarrow F(x) = 0$. *Γίνεται η υπόθεση ότι υπάρχουν* $\lambda \in \mathbb{R}^m$ *και* $\mu \in \mathbb{R}^k_+$ *τέτοια ώστε να ισχύει η* (3.2). *Η Ιδιότητα 1 υποδηλώνει ότι* $H(x) \left(\left(\nabla\theta(x)\right)^{'} + B'(x)\mu\right) = 0$. *Χρησιμοποιώντας την* (3.10) *και το γεγονός ότι οι πίνακες* $Q(x), H(x)$ *είναι συμμετρικοί (επομένως ο* $adj(Q(x))$ *είναι συμμετρικός πίνακας), λαμβάνουμε:*

$$\begin{aligned} R'(x) \left(\nabla\theta(x)\right)^{'} = adj(Q(x))B(x)H(x) \left(\nabla\theta(x)\right)^{'} = \\ -adj(Q(x))B(x)H(x)B'(x)\mu \end{aligned} \tag{3.17}$$

Επίσης, αφού $\mu \geq 0$ *και* $g(x) \leq 0$ *λαμβάνουμε από την* $\mu' g(x) = 0$ *ότι ισχύει η* (3.16). *Συνδυάζοντας τις* (3.16), (3.17) *και χρησιμοποιώντας την* (3.6) *και το γεγονός ότι* $x \in \Phi$ *υποδηλώνει ότι* $x \in S$ *(επομένως το Λήμμα 3.1 σε σύζευξη με την Υπόθεση (A2) υποδηλώνουν ότι* $\det(Q(x)) > 0$ *και* $\det\left(A(x)A'(x)\right) > 0$*) λαμβάνουμε ότι* $\mu := -\frac{\det(A(x)A'(x))}{\det(Q(x))} R'(x) \left(\nabla\theta(x)\right)'$. *Οι* $\mu \geq 0$ *και* $\det(Q(x)) > 0$ *υποδηλώνουν ότι* $R'(x)\left(\nabla\theta(x)\right)' \leq 0$ *ή ότι* $\left(R'(x)\left(\nabla\theta(x)\right)'\right)^+ = 0$. *Επιπροσθέτως, η* (3.16) *σε σύζευξη με το γεγονός ότι* $x \in S$ *(το οποίο υποδηλώνει τη σχέση* $(g(x))^- = g(x)$*) δίνει την* $diag\left((g(x))^-\right) R'(x)\left(\nabla\theta(x)\right)' = 0$.

Τέλος, η εξίσωση:

$$H(x)\left(\left(\nabla\theta(x)\right)' + B'(x)\mu\right) = 0$$

υποδηλώνει ότι $H(x)\left(\det(Q(x))I_n - \det\left(A(x)A'(x)\right)B'(x)R'(x)\right)\left(\nabla\theta(x)\right)' = 0$.

Οι εξισώσεις:

$$\left(R'(x)\left(\nabla\theta(x)\right)'\right)^+ = 0,$$
$$diag\left((g(x))^-\right) R'(x)\left(\nabla\theta(x)\right)' = 0,$$
$$H(x)\left(\det(Q(x))I_n - \det\left(A(x)A'(x)\right)B'(x)R'(x)\right)\left(\nabla\theta(x)\right)' = 0$$

και ο ορισμός (3.11) *οδηγούν στο συμπέρασμα ότι* $F(x) = 0$. *Όπερ έδει δείξε.* $\triangleleft$

Για τους σκοπούς της ανάλυσης, απαιτείται μια τοπικά Lipschitz συνάρτηση $\Omega \in C^0\left(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}_+\right)$ *με* $\Omega(x) > 0$ *για* $x \notin S$, $\Omega(x) = 0$ *για όλα τα* $x \in S$ *και τέτοιο ώστε να ισχύει η ακόλουθη συνεπαγωγή:*

$$\Omega(x) < 1 \Rightarrow \det(Q(x)) > 0 \tag{3.18}$$

όπου $Q(x) \in \mathbb{R}^{k \times k}$ *ορίζεται από την* (3.6). *Μια τέτοια συνάρτηση μπορεί να βρεθεί εύκολα. Για παράδειγμα, η συνάρτηση:*

$$\Omega(x) := \frac{(1 + c_1(x))V(x)}{c_2(x)\det(Q(x)) + V(x)} \tag{3.19}$$

όπου $c_i \in C^0\left(\mathbb{R}^n; (0, +\infty)\right)$ $(i = 1, 2)$ *είναι αυθαίρετη τοπικά Lipschitz συνάρτηση, η οποία ικανοποιεί την* (3.18) *όπως επίσης και τις απαιτήσεις* $\Omega(x) > 0$ *για* $x \notin S$, $\Omega(x) = 0$

για όλα τα $x \in S$. Επιπλέον, δυνάμει της υπόθεσης (A2) και του Λήμματος 3.1, η Ω όπως προσδιορίζεται στην (3.19) *ορίζεται στον $\mathbb{R}^n$ και είναι μια τοπικά Lipschitz συνάρτηση. Σε αυτό το σημείο μπορεί να παρουσιαστεί το αποτέλεσμα για τον δυναμικό NLP επιλυτή, βάσει του Θεωρήματος 2.4.*

Θεώρημα 3.1 *Έστω ότι ισχύουν οι Υποθέσεις (A1), (A2), (A3) για το πρόβλημα NLP όπως ορίζεται από τις* (1.2) *και* (1.3)*, καθώς επίσης και οι ακόλουθες υποθέσεις:*
Υπόθεση (A4). *Υπάρχουν τοπικά Lipschitz συναρτήσεις $\psi_i \in C^0(\mathbb{R}^n;(0,+\infty))$ $(i = 1,2)$ τέτοιες ώστε να ισχύει η ακόλουθη ιδιότητα: για κάθε $z \in \mathbb{R}^n$ υπάρχει*

$$y_z \in \{\, x \in \mathbb{R}^n \,:\, V(x) \le V(z) \,\} \text{ με } \theta(y_z) \ge \theta(z) \text{ τέτοιο ώστε}$$

$$\{\, x \in \mathbb{R}^n \,:\, a(x) > 0\,,\, V(x) \le V(z) \,\} \subseteq \{\, x \in \mathbb{R}^n \,:\, \theta(x) \le \theta(y_z) \,\} \tag{3.20}$$

όπου

$$\begin{aligned} a(x) := \psi_1(x)\nabla\theta(x)F(x) - |\nabla V(x)|^2\,|\nabla\theta(x)|^2 - \psi_2(x)\nabla V(x)\,(\nabla\theta(x))' \\ + \left|\nabla V(x)\,(\nabla\theta(x))'\right|^2 \end{aligned} \tag{3.21}$$

και $V \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}_+)$ είναι η συνάρτηση που ορίζεται στην (3.3)*, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι τοπικά Lipschitz διανυσματικό πεδίο το οποίο ορίζεται από τις* (3.10), (3.11)*. Έστω $\sigma : \mathbb{R}^n \to (0,+\infty)$ είναι μια αυθαίρετη τοπικά Lipschitz συνάρτηση και έστω ότι ορίζεται το τοπικά Lipschitz διανυσματικό πεδίο:*

$$\begin{aligned} f(x) := \sigma(x)\psi_1(x)F(x) - \sigma(x)\Big(\psi_2(x)\,(\nabla V(x))' \\ + \Big(|\nabla V(x)|^2 I_n - (\nabla V(x))'\,\nabla V(x)\Big)\,(\nabla\theta(x))'\Big) \end{aligned} \tag{3.22}$$

για $x \in \mathbb{R}^n$. Έστω $\Phi \subseteq S$ το σύνολο των σημείων KKT για το πρόβλημα που ορίζεται από τις (1.2) *και* (1.3)*. Τότε ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες για το δυναμικό σύστημα* (2.4)*:*

(i) Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^n$ η μοναδική λύση $x(t)$ του προβλήματος αρχικών τιμών (2.4) *με $x(0) = x_0$ ορίζεται για όλα τα $t \ge 0$ και είναι φραγμένη. Επίσης, το $\omega(x_0)$ είναι ένα μη κενό, συμπαγές, συνεκτικό, αναλλοίωτο σύνολο το οποίο ικανοποιεί τη σχέση $\omega(x_0) \subseteq \Phi$.*

(ii) *Κάθε σημείο KKT του προβλήματος μη γραμμικού προγραμματισμού (NLP) το οποίο περιγράφεται από τις* (1.2) *και* (1.3) *είναι ένα σημείο ισορροπίας του δυναμικού συστήματος* (2.4) *και κάθε σημείο ισορροπίας του δυναμικού συστήματος* (2.4) *είναι ένα σημείο KKT του προβλήματος NLP το οποίο περιγράφεται από τις* (1.2) *και* (1.3).

(iii) *Κάθε απομονωμένο σημείο KKT, το οποίο είναι ένα αυστηρά τοπικό ελάχιστο για το πρόβλημα NLP το οποίο περιγράφεται από τις* (1.2) *και* (1.3), *είναι ένα τοπικά ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας για το δυναμικό σύστημα* (2.4).

(iv) *Το εφικτό σύνολο S, το οποίο περιγράφεται στην* (1.3), *είναι ένα θετικά αναλλοίωτο σύνολο για το δυναμικό σύστημα* (2.4).

Απόδειξη: *Χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 2.4 για τη συνάρτηση V η οποία ορίζεται από την* (3.3). *Τα συμπεράσματα του θεωρήματος είναι ευθεία συνέπεια του Θεωρήματος 2.4 και του Λήμματος 3.2. Μπορεί να παρατηρηθεί ότι η Υπόθεση (A3) διασφαλίζει ότι ισχύει η* (2.27). *Στη συνέχεια, αποδεικνύεται ότι υπάρχει $\gamma \in C^0\left(\tilde{S};(0,+\infty)\right)$ τέτοιο ώστε να ισχύει η $\gamma(x)\left|\nabla V(x)\right|^2 \geq V(x)$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}^n$ με $\Omega(x) < 1$, όπου $\tilde{S} = \{\, x \in \mathbb{R}^n \,:\, \Omega(x) < 1 \,\}$ και $\Omega \in C^0\left(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}_+\right)$ είναι μια αυθαίρετη τοπικά Lipschitz συνάρτηση με $\Omega(x) > 0$ για $x \notin S$, $\Omega(x) = 0$ για όλα τα $x \in S$, τα οποία ικανοποιούν την συνεπαγωγή* (3.18) *(για παράδειγμα βλέπε την συνάρτηση που ορίζεται στην* (3.19)*).*
Επειδή οι πίνακες $\left(A(x)A'(x)\right), Q(x)$ είναι θετικά ορισμένοι (βλέπε Λήμμα 3.1 και υπόθεση (2.6)*) και συνεχείς στο σύνολο $\tilde{S} = \{\, x \in \mathbb{R}^n \,:\, \Omega(x) < 1 \,\}$, υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις $K_i : \tilde{S} \to (0,+\infty)$ $(i = 1,2)$ τέτοιες ώστε:*

$$\xi'\left(A(x)A'(x)\right)\xi \geq K_1(x)\left|\xi\right|^2 \tag{3.23}$$

για όλα τα $\xi \in \mathbb{R}^m, x \in \tilde{S}$,

$$\frac{1}{\left(\det\left(A(x)A'(x)\right)\right)^3}\xi' Q(x)\xi \geq K_2(x)\left|\xi\right|^2 \tag{3.24}$$

για όλα τα $\xi \in \mathbb{R}^k, x \in \tilde{S}$. Μπορεί να παρατηρηθεί ότι ο ορισμός (3.3) *υποδηλώνει ότι $\left(\nabla V(x)\right)' = A'(x)h(x) + B'(x)(g(x))^+$, το οποίο αν συνδυαστεί με τον ορισμό* (3.5), *μπορεί να γραφεί στην ακόλουθη μορφή για όλα τα* $x \in \tilde{S}$*:*

$$\begin{aligned}(\nabla V(x))' = A'(x)\left(h(x) + (A(x)A'(x))^{-1} A(x)B'(x)(g(x))^{+}\right) \\ + \tfrac{1}{\det(A(x)A'(x))} H(x)B'(x)(g(x))^{+}\end{aligned} \tag{3.25}$$

Χρησιμοποιώντας την (3.25)*, τις Ιδιότητες 1 και 2, λαμβάνουμε για όλα τα* $x \in \tilde{S}$*:*

$$\begin{aligned}|\nabla V(x)|^2 = \tfrac{1}{(\det(A(x)A'(x)))^2} \left((g(x))^{+}\right)' B(x)H(x)B'(x)(g(x))^{+} + \\ \left(h(x) + (A(x)A'(x))^{-1} A(x)B'(x)(g(x))^{+}\right)' (A(x)A'(x))\,(h(x) + \\ (A(x)A'(x))^{-1} A(x)B'(x)(g(x))^{+}\big)\end{aligned} \tag{3.26}$$

Χρησιμοποιώντας την (3.26) *και το γεγονός ότι* $\left((g(x))^{+}\right)' diag\left((g(x))^{-}\right)(g(x))^{+} = 0$ *σε σύζευξη με τον Ορισμό* (3.6)*, λαμβάνουμε για όλα τα* $x \in \tilde{S}$*:*

$$\begin{aligned}&|\nabla V(x)|^2 = \tfrac{1}{(\det(A(x)A'(x)))^3} \left((g(x))^{+}\right)' Q(x)(g(x))^{+} + \\ &\left(h(x) + (A(x)A'(x))^{-1} A(x)B'(x)(g(x))^{+}\right)' (A(x)A'(x))\,(h(x) + \\ &(A(x)A'(x))^{-1} A(x)B'(x)(g(x))^{+}\big)\end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned}&|\nabla V(x)|^2 = \left((g(x))^{+}\right)' \Big(\tfrac{1}{(\det(A(x)A'(x)))^3} Q(x) + \\ &B(x)A'(x)\,(A(x)A'(x))^{-1} A(x)B'(x)\Big)\,(g(x))^{+} \\ &+ h'(x)\,(A(x)A'(x))\,h(x) + 2h'(x)A(x)B'(x)(g(x))^{+}\end{aligned} \tag{3.27}$$

Χρησιμοποιώντας τις (3.3), (3.23), (3.24), (3.27)*, την ανισότητα* $-z'Gz - y'G^{-1}y \le 2z'y$ *(η οποία ισχύει για κάθε* $y, z \in \mathbb{R}^m$ *και για κάθε θετικά ορισμένο πίνακα* $G \in \mathbb{R}^{m\times m}$*) με* $z = h(x)$, $G = \varepsilon(x)\,(A(x)A'(x))$, $y = A(x)B'(x)(g(x))^{+}$ *όπου* $\varepsilon(x) := \frac{q(x)+1}{K_2(x)+q(x)+1}$ *και* $q : \tilde{S} \to (0, +\infty)$ *είναι μια οποιαδήποτε συνεχής συνάρτηση η οποία ικανοποιεί την* $\left|B(x)A'(x)\,(A(x)A'(x))^{-1} A(x)B'(x)\right| \le q(x)$ *για όλα τα* $x \in \tilde{S}$*, λαμβάνουμε για όλα τα*

$x \in \tilde{S}$:

$$
\begin{aligned}
&|\nabla V(x)|^2 \geq \left((g(x))^+\right)' \Big(\tfrac{1}{(\det(A(x)A'(x)))^3} Q(x) + \\
&(1-\varepsilon^{-1}(x)) B(x)A'(x) \left(A(x)A'(x)\right)^{-1} A(x)B'(x) \Big) (g(x))^+ + \\
&(1-\varepsilon(x)) h'(x) \left(A(x)A'(x)\right) h(x) \\
&\geq \tfrac{1}{(\det(A(x)A'(x)))^3} \left((g(x))^+\right)' Q(x)(g(x))^+ + \tfrac{K_2(x)}{K_2(x)+q(x)+1} h'(x) \left(A(x)A'(x)\right) h(x) \\
&-\tfrac{K_2(x)}{q(x)+1} \left((g(x))^+\right)' B(x)A'(x) \left(A(x)A'(x)\right)^{-1} A(x)B'(x)(g(x))^+ \\
&\geq K_2(x) \left|(g(x))^+\right|^2 + \tfrac{K_2(x)K_1(x)}{K_2(x)+q(x)+1} |h(x)|^2 \\
&-\tfrac{K_2(x)}{q(x)+1} \left|B(x)A'(x) \left(A(x)A'(x)\right)^{-1} A(x)B'(x)\right| \left|(g(x))^+\right|^2 \\
&\geq K_2(x) \left|(g(x))^+\right|^2 + \tfrac{K_2(x)K_1(x)}{K_2(x)+q(x)+1} |h(x)|^2 - \tfrac{K_2(x)}{q(x)+1} q(x) \left|(g(x))^+\right|^2 \\
&= K_2(x) \tfrac{1}{q(x)+1} \left|(g(x))^+\right|^2 + \tfrac{K_2(x)K_1(x)}{K_2(x)+q(x)+1} |h(x)|^2 \\
&\geq \tfrac{K_2(x)\min(1\,,\,K_1(x))}{K_2(x)+q(x)+1} \left(\left|(g(x))^+\right|^2 + |h(x)|^2 \right) = 2\tfrac{K_2(x)\min(1\,,\,K_1(x))}{K_2(x)+q(x)+1} V(x)
\end{aligned}
$$

Η ανωτέρω ανισότητα φανερώνει ότι υπάρχει $\gamma \in C^0\left(\tilde{S};(0,+\infty)\right)$ τέτοιο ώστε να ισχύει η $\gamma(x)\,|\nabla V(x)|^2 \geq V(x)$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}^n$ με $\Omega(x) < 1$ (για παράδειγμα, $\gamma(x) = \frac{K_2(x)+q(x)+1}{2K_2(x)\min(1\,,\,K_1(x))}$).

Όλες οι υπόλοιπες υποθέσεις του Θεωρήματος 3.1 είναι άμεση συνέπεια των υποθέσεων (A1), (A2), (A3), (A4) και του Λήμματος 3.2. Όπερ έδει δείξε. $\lhd$

Για να γίνει αντιληπτό ότι ο προτεινόμενος επιλυτής NLP είναι μια επέκταση των επιλυτών NLP του τύπου «steepest descent» για τα προβλήματα χωρίς περιορισμούς, μπορεί να θεωρηθεί το χωρίς περιορισμούς NLP πρόβλημα (1.2) *με $S := \mathbb{R}^n$. Για να εφαρμοστεί το Θεώρημα 3.3, πραγματοποιούνται τα ακόλουθα βήματα:*

(i) *Μπορούμε να προσθέσουμε τον βαθμωτό ανισοτικό περιορισμό $g(x) \equiv -1$ ($k = 1$).*

(ii) *Μπορούμε να προσθέσουμε μια ακόμη μεταβλητή κατάστασης x_{n+1} και τον βαθμωτό ισοτικό περιορισμό $x_{n+1} = 0$ ($m = 1$).*

Κατά την διαδικασία υπολογισμού του διανυσματικού πεδίου $F(x)$ το οποίο ορίζεται από την (3.11)*, γίνεται φανερό ότι ισχύουν όλες οι υποθέσεις (A1)-(A4) με αυθαίρετες τοπικά Lipschitz συναρτήσεις $\psi_i \in C^0\left(\mathbb{R}^n;(0,+\infty)\right)$ ($i = 1, 2$), υπό την προϋπόθεση ότι ισχύει η ακόλουθη υπόθεση.*

Υπόθεση (A5) *Για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$, το σύνολο $\{\, x \in \mathbb{R}^n \;:\; \theta(x) \leq \theta(y) \,\}$ είναι συμπαγές.*

Επομένως, από τον υπολογισμό του διανυσματικού πεδίου $f(x)$ όπως ορίζεται από την (3.22), είμαστε σε θέση να λάβουμε το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 3.1 *Γίνεται η υπόθεση ότι ισχύει η Υπόθεση (A5) για το πρόβλημα NLP το οποίο ορίζεται από την (1.2) με $S := \mathbb{R}^n$. Έστω $\sigma : \mathbb{R}^n \to (0, +\infty)$ είναι μια αυθαίρετη τοπικά Lipschitz συνάρτηση. Ορίζουμε το τοπικά Lipschitz διανυσματικό πεδίο:*

$$f(x) := -\sigma(x) \left(\nabla\theta(x)\right)' \text{ για } x \in \mathbb{R}^n \tag{3.28}$$

Έστω $\Phi = \{ x \in \mathbb{R}^n : \nabla\theta(x) = 0 \}$ (το σύνολο των κρίσιμων σημείων του προβλήματος που ορίζεται από την (1.2) με $S := \mathbb{R}^n$). Τότε ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες για το δυναμικό σύστημα (2.4):

(i) Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^n$ η μοναδική λύση $x(t)$ του προβλήματος αρχικών τιμών (2.4), με $x(0) = x_0$, ορίζεται για όλα τα $t \geq 0$ και είναι φραγμένη. Επιπλέον, $\omega(x_0)$ είναι ένα μη κενό, συμπαγές, συνεκτικό, αναλλοίωτο σύνολο το οποίο ικανοποιεί την σχέση $\omega(x_0) \subseteq \Phi$.

(ii) Κάθε κρίσιμο σημείο του προβλήματος NLP το οποίο περιγράφεται από την (1.2) με $S := \mathbb{R}^n$ είναι ένα σημείο ισορροπίας για το δυναμικό σύστημα (2.4) και κάθε σημείο ισορροπίας του δυναμικού συστήματος (2.4), είναι ένα κρίσιμο σημείο του προβλήματος NLP το οποίο περιγράφεται στην (1.2) με $S := \mathbb{R}^n$.

(iii) Κάθε απομονωμένο κρίσιμο σημείο, το οποίο είναι αυστηρά τοπικό ελάχιστο του προβλήματος NLP το οποίο περιγράφεται στην (1.2) με $S := \mathbb{R}^n$, είναι ένα τοπικά ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας για το δυναμικό σύστημα (2.4).

Τα συμπεράσματα του Πορίσματος 3.1 είναι σχεδόν τετριμμένα. Η παρουσίαση του εν λόγω πορίσματος δεν γίνεται για την χρησιμότητα του αλλά για έναν άλλο λόγο. Πιο συγκεκριμένα, το Πόρισμα 3.1 αποτυπώνει το γεγονός ότι ο επιλυτής NLP ο οποίος κατασκευάζεται βάσει του Θεωρήματος 3.1 είναι άμεση επέκταση των επιλυτών NLP του τύπου «steepest descent» για προβλήματα χωρίς περιορισμούς.

3.2 Ειδικές Περιπτώσεις

Στην παρούσα ενότητα παρέχονται πιο απλοί τύποι για συγκεκριμένες ειδικές περιπτώσεις[2].

1η Περίπτωση: *Άνευ ισοτικών περιορισμών. Σε αυτή τη περίπτωση:*

$$S := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \ : \ \max_{j=1,\ldots,k} (g_j(x)) \leq 0 \right\}.$$

Για αυτή τη περίπτωση προσθέτουμε μια ακόμη μεταβλητή κατάστασης x_{n+1} και τον ισοτικό περιορισμό $x_{n+1} = 0$. Πραγματοποιώντας όλους τους υπολογισμούς του Θεωρήματος 3.1, είμαστε σε θέση να αποδείξουμε ότι ο δυναμικός NLP επιλυτής είναι αποτελεσματικός κάτω από τις ακόλουθες υποθέσεις:

(A1΄) *Για κάθε $z \in \mathbb{R}^n$ και για κάθε $y \in \{ x \in \mathbb{R}^n : |(g(x))^+| \leq |(g(z))^+| \}$, όπου $g(x)$ ορίζεται από την (3.1), το σύνολο $\{ x \in \mathbb{R}^n : |(g(x))^+| \leq |(g(z))^+| \ , \theta(x) \leq \theta(y) \}$ είναι συμπαγές.*

(A2΄) *Για όλα τα $x \in S$ τα διανύσματα γραμμές $\nabla g_j(x)$ για όλα τα $j = 1, ..., k$ για τα οποία τα $g_j(x) = 0$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.*

(A3΄) *Ισχύει η ακόλουθη συνεπαγωγή: $B'(x)(g(x))^+ = 0 \Rightarrow (g(x))^+ = 0$, όπου $B(x), g(x)$ ορίζονται από την (3.1).*

(A4΄) *Υπάρχουν τοπικά Lipschitz συναρτήσεις $\psi_i \in C^0 (\mathbb{R}^n; (0, +\infty))$ $(i = 1, 2)$ τέτοιες ώστε να ισχύει η ακόλουθη ιδιότητα: για κάθε $z \in \mathbb{R}^n$ υπάρχει*
$y_z \in \{ x \in \mathbb{R}^n : |(g(x))^+| \leq |(g(z))^+| \}$ με $\theta(y_z) \geq \theta(z)$ τέτοιο ώστε:

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n : a(x) > 0 \, , \left|(g(x))^+\right| \leq \left|(g(z))^+\right| \ \right\} \subseteq \{ x \in \mathbb{R}^n : \theta(x) \leq \theta(y_z) \ \}$$

όπου

$$a(x) := \psi_1(x)\nabla\theta(x)F(x) - |B'(x)(g(x))^+|^2 \, |\nabla\theta(x)|^2 + (\nabla\theta(x)B'(x)(g(x))^+)^2 - \psi_2(x)\nabla\theta(x)B'(x)(g(x))^+$$

$$Q(x) := B(x)B'(x) - diag\left((g(x))^-\right), R(x) := B'(x)adj(Q(x)) \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned} F(x) &:= R(x)diag\left((g(x))^-\right) R'(x) \left(\nabla\theta(x)\right)' - R(x) \left(R'(x) \left(\nabla\theta(x)\right)'\right)^+ \\ &- \left(\det(Q(x))I_n - R(x)B(x)\right) \left(\det(Q(x))I_n - B'(x)R'(x)\right) \left(\nabla\theta(x)\right)' \end{aligned} \tag{3.30}$$

[2] Βλ. ενότητα 6 της [23].

Σε αυτή τη περίπτωση, ο προτεινόμενος δυναμικός NLP επιλυτής ορίζεται για κάθε τοπικά Lipschitz συνάρτηση $\sigma : \mathbb{R}^n \to (0, +\infty)$ *από τον τύπο:*

$$
\begin{gathered}
f(x) := \sigma(x)\left(\psi_1(x)F(x) - \psi_2(x)B'(x)(g(x))^+ - \right. \\
\left.\left(|B'(x)(g(x))^+|^2 I_n - B'(x)(g(x))^+\left((g(x))^+\right)' B(x)\right)(\nabla\theta(x))'\right)
\end{gathered}
\tag{3.31}
$$

για $x \in \mathbb{R}^n$ *όπου η* $F(x)$ *ορίζεται από τις* (3.29), (3.30) *και* $B(x), g(x)$ *ορίζονται από την* (3.1). *Παρατηρείται ότι οι υποθέσεις (A1'), (A4') ισχύουν αυτόματα για αυθαίρετες τοπικά Lipschitz συναρτήσεις* $\psi_i \in C^0(\mathbb{R}^n; (0, +\infty))$ $(i = 1, 2)$*, εάν τα σύνολα* $S_c := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,:\, \max\limits_{j=1,\ldots,k} (g_j(x)) \le c \right\}$ *είναι συμπαγή για κάθε* $c \ge 0$.

2η Περίπτωση: *Άνευ ανισοτικών περιορισμών. Σε αυτή τη περίπτωση:*

$$S := \{\, x \in \mathbb{R}^n \,:\, h_1(x) = \ldots = h_m(x) = 0 \,\}.$$

Πιο συγκεκριμένα, προσθέτουμε τον ανισοτικό περιορισμό $g(x) \equiv -1$ *και είμαστε σε θέση να δείξουμε ότι ο δυναμικός Lipschitz επιλυτής είναι αποτελεσματικός κάτω από τις ακόλουθες υποθέσεις:*

(A1΄ ΄) *Για κάθε* $z \in \mathbb{R}^n$ *και για κάθε* $y \in \{\, x \in \mathbb{R}^n \,:\, |h(x)| \le |h(z)| \,\}$, *όπου* $h(x)$ *ορίζεται από την* (3.1),*το σύνολο* $\{\, x \in \mathbb{R}^n \,:\, |h(x)| \le |h(z)| \,,\, \theta(x) \le \theta(y) \,\}$ *είναι συμπαγές.*

(A2΄ ΄) *Για όλα τα* $x \in S$ *τα διανύσματα γραμμές* $\nabla h_i(x)$ $(i = 1, \ldots, m)$ *είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, ήτοι* $\det(A(x)A'(x)) > 0$, *όπου* $A(x)$ *ορίζεται από την* (3.1).

(A3΄ ΄) *Ισχύει η ακόλουθη συνεπαγωγή:* $A'(x)h(x) = 0 \Rightarrow h(x) = 0$.

(A4΄ ΄) *Υπάρχουν τοπικά Lipschitz συναρτήσεις* $\psi_i \in C^0(\mathbb{R}^n; (0, +\infty))$ $(i = 1, 2)$ *τέτοιες ώστε να ισχύει η ακόλουθη ιδιότητα: για κάθε* $z \in \mathbb{R}^n$ *υπάρχει*
$y_z \in \{\, x \in \mathbb{R}^n \,:\, |h(x)| \le |h(z)| \,\}$ *με* $\theta(y_z) \ge \theta(z)$ *τέτοιο ώστε:*

$$\{\, x \in \mathbb{R}^n \,:\, a(x) > 0 \,,\, |h(x)| \le |h(z)| \,\} \subseteq \{\, x \in \mathbb{R}^n \,:\, \theta(x) \le \theta(y_z) \,\}$$

όπου $H(x)$ *ορίζεται από την* (3.5) *και* $h(x), A(x)$ *ορίζονται από την* (3.1) *και*

$$
\begin{gathered}
a(x) := -\psi_1(x)\,|H(x)(\nabla\theta(x))'|^2 - |A'(x)h(x)|^2\,|\nabla\theta(x)|^2 + \\
(\nabla\theta(x)A'(x)h(x))^2 - \psi_2(x)\nabla\theta(x)A'(x)h(x)
\end{gathered}
\tag{3.32}
$$

Ο προτεινόμενος δυναμικός NLP επιλυτής μπορεί να οριστεί για μια αυθαίρετη τοπικά Lipschitz συνάρτηση $\sigma : \mathbb{R}^n \to (0, +\infty)$ *από τον τύπο:*

$$\begin{aligned} f(x) := -\sigma(x) \big(\psi_1(x) \det\left(A(x)A'(x)\right) H(x) + \left|A'(x)h(x)\right|^2 I_n - \\ A'(x)h(x)h'(x)A(x)\big) \left(\nabla\theta(x)\right)' - \sigma(x)\psi_2(x)A'(x)h(x) \end{aligned} \tag{3.33}$$

για τα $x \in \mathbb{R}^n$, *όπου* $H(x)$ *ορίζεται από την* (3.5) *και* $h(x), A(x)$ *ορίζονται από την* (3.1).

Κεφάλαιο 4

Παραδείγματα και οικονομική εφαρμογή

Για να γίνει επίδειξη της ισχύος των εξαχθέντων αποτελεσμάτων, παρατίθενται τρία παραδείγματα (τα οποία παρουσιάζονται στην [23]) και μια εφαρμογή από την οικονομική βιβλιογραφία.

4.1 Παραδείγματα

Παράδειγμα 4.1 *Το πρώτο παράδειγμα ασχολείται με την λύση του προβλήματος:*

$$\begin{gathered}\min_{x_1,x_2,x_3} x_1^2+2x_2^2+x_1x_2-6x_1-2x_2-12x_3\\ s.t.\\ x_1+x_2+x_3-2=0\\ \begin{bmatrix}-x_1+2x_2-3\\ -x_1\\ -x_2\\ -x_3\end{bmatrix}\leq 0\end{gathered}\tag{4.1}$$

Το πρόβλημα μπορεί να μετατραπεί σε ένα πρόβλημα ανισοτικών περιορισμών με την αφαίρεση της μεταβλητής x_3. Προτιμάται η απαλοιφή της μεταβλητής x_3 διότι η δυναμική συμπεριφορά του δυναμικού NLP επιλυτή μπορεί να απεικονιστεί σε ένα διάγραμμα φάσης. Απαλείφοντας την μεταβλητή x_3, λαμβάνουμε το ακόλουθο πρόβλημα μη γραμμικού *προγραμματισμού:*

$$\min_{x_1,x_2} \theta(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1x_2 + 6x_1 + 10x_2$$
$$s.t.$$
$$g(x) = \begin{bmatrix} -x_1 + 2x_2 - 3 \\ -x_1 \\ -x_2 \\ x_1 + x_2 - 2 \end{bmatrix} \leq 0 \tag{4.2}$$

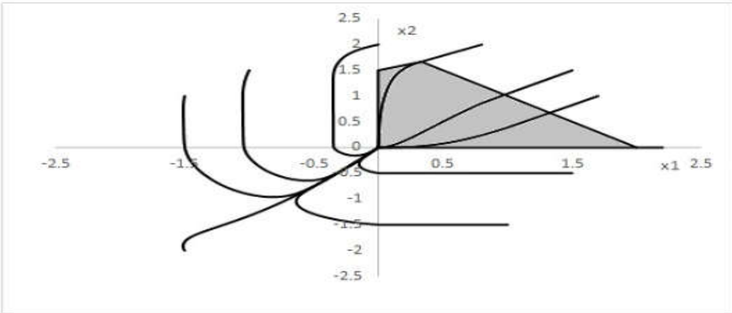
Παρατηρείται ότι οι υποθέσεις (A1′), (A4′) ισχύουν αυτόματα για αυθαίρετες τοπικά Lipschitz συναρτήσεις $\psi_i \in C^0\left(\mathbb{R}^n; (0, +\infty)\right)(i = 1, 2)$ *αφού τα σύνολα*

$$S_c := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \; : \; \max_{j=1,\ldots,4} (g_j(x)) \leq c \right\}$$

είναι συμπαγή για κάθε $c \geq 0$. *Επιπλέον, οι υποθέσεις (A2′) και (A3′) ισχύουν για το εν λόγω πρόβλημα, κάτι που μπορεί να επαληθευτεί με απευθείας υπολογισμούς. Για την κατασκευή του Δυναμικού NLP Επιλυτή χρησιμοποιήθηκαν οι τύποι* (3.29), (3.30), (3.31) *με* $\sigma(x) \equiv 1$, $\psi_i(x) \equiv 1$ *(*$i = 1, 2$*).*

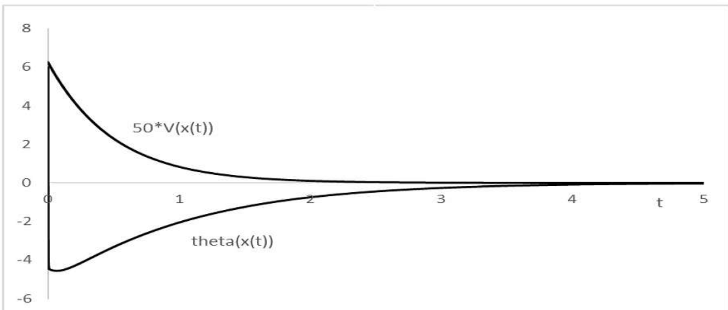
Το διάγραμμα φάσης του δυναμικού NLP επιλυτή αποτυπώνεται στην Εικόνα 4.1 και δείχνει την ολική έλξη στο σημείο $0 \in \mathbb{R}^2$, *η οποία αναμενόταν λόγω του Θεωρήματος 3.1 και του γεγονότος ότι για το πρόβλημα μη γραμμικού προγραμματισμού* (4.2) *ισχύει ότι* $\Phi = \{0 \in \mathbb{R}^2\}$. *Αφού το σημείο* $0 \in \mathbb{R}^2$ *είναι αυστηρά τοπικά ελάχιστο για το πρόβλημα μη γραμμικού προγραμματισμού* (4.1), *μπορεί να συναχθεί ότι το* $0 \in \mathbb{R}^2$ *είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.*

Ο αναγνώστης μπορεί να ασκήσει κριτική στην αποτελεσματικότητα του δυναμικού NLP επιλυτή, αφού το διάγραμμα φάσης της Εικόνας 4.1 δείχνει ότι πολλές τροχιές «στέλνονται» στο τρίτο τεταρτημόριο, ενώ η λύση είναι στο μηδέν. Αυτό συμβαίνει διότι κάποιες από τις τροχιές έλκονται αναπόφευκτα για μια αρχική μεταβατική περίοδο από τον (άνευ περιορισμών) ελαχιστοποιητή της συνάρτησης, $\theta(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1x_2 + 6x_1 + 10x_2$, *ο οποίος βρίσκεται στο σημείο* $(-2, -2)$. *Κατά την σύντομη αυτή μεταβατική περίοδο, επιτυγχάνεται μια ταυτόχρονη μείωση των τιμών της αντικειμενικής συνάρτησης* $\theta(x)$ *και της συνάρτησης ποινής* $V(x)$ *(όπως ορίζεται στην* (3.3) *με* $h(x) \equiv 0$*). Παρά ταύτα, οι τροχιές, μεταγενέστερα, ωθούνται προς τα πίσω προς το εφικτό σύνολο.*



Εικόνα 4.1: Το διάγραμμα φάσης του δυναμικού NLP επιλυτή

Αυτή η κατάσταση αποτυπώνεται στην Εικόνα 4.2, όπου απεικονίζεται η χρονική εξέλιξη των τιμών της αντικειμενικής συνάρτησης $\theta(x)$ *και της συνάρτησης ποινής* $50V(x)$ *(όπου η* $V(x)$ *ορίζεται από την* (3.3) *με* $h(x) \equiv 0$*) για την λύση του δυναμικού NLP επιλυτή* (3.29), (3.30), (3.31), *με* $\sigma(x) \equiv 1$, $\psi_i(x) \equiv 1$ *(*$i = 1, 2$*) και αρχική συνθήκη* $(1.5, -0.5)$. *Η αντικειμενική συνάρτηση παίρνει πολύ γρήγορα αρνητικές τιμές και η λύση μεταγενέστερα ωθείται ομαλά προς το εφικτό σύνολο (γεγονός που οδηγεί σε μια τελική αύξηση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης). Επομένως, δεν υπάρχει «υπερακοντισμός» («overshoot») στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης (ο ελαχιστοποιητής προσεγγίζεται από κάτω).*



Εικόνα 4.2: Η χρονική εξέλιξη των τιμών της αντικειμενικής συνάρτησης $\theta(x)$ και της συνάρτησης ποινής $50V(x)$, για $\sigma(x) \equiv 1$, $\psi_i(x) \equiv 1$ ($i = 1, 2$) και αρχική συνθήκη $(1.5, -0.5)$

Παράδειγμα 4.2 *Θεωρούμε το πρόβλημα μη γραμμικού προγραμματισμού:*

$$\begin{gathered}\min_{x_1,x_2} \theta(x) = x_1^2 + a x_2^2 \\ s.t. \\ h(x) = x_1 - b = 0\end{gathered} \tag{4.3}$$

χωρίς ανισοτικούς περιορισμούς, όπου $a > 0$, $b > 0$ *είναι σταθερές.*

Η υπόθεση (A1΄΄) ισχύει για το υπό εξέταση πρόβλημα, αφού η αντικειμενική συνάρτηση $\theta(x)$ *είναι ακτινικά μη φραγμένη. Οι υποθέσεις (A2΄΄) και (A3΄΄) ισχύουν τετριμμένως (παρατηρείται ότι* $A(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ *) και ότι ισχύει ότι* $\det(A(x)A'(x)) > 0$ *για όλα τα* $x \in \mathbb{R}^2$.

Στη συνέχεια αποδεικνύεται ότι η υπόθεση (A4΄΄) ισχύει με $\psi_1(x) \equiv 1$ *και* $\psi_2 \in C^0(\mathbb{R}^2; (0, +\infty))$ *να είναι οποιαδήποτε θετική τοπικά Lipschitz συνάρτηση μόνο μιας μεταβλητής, της* x_1, *ήτοι* $\psi_2(x) = \psi_2(x_1)$. *Από τις* (3.32) *και* (3.5) *προκύπτει ότι:*

$$H(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, a(x) = -4a^2 x_2^2 \left(1 + (x_1 - b)^2\right) - 2x_1(x_1 - b)\psi_2(x_1) \tag{4.4}$$

Συνεπώς:

$$a(x) > 0 \Leftrightarrow -2a^2 x_2^2 \left(1 + (x_1 - b)^2\right) > x_1(x_1 - b)\psi(x_1) \tag{4.5}$$

Η ανισότητα (4.5) *υποδηλώνει ότι* $x_1(x_1 - b) < 0$, *ή ισοδύναμα* $x_1 \in (0, b)$. *Επιπλέον, η ανισότητα* (4.5) *υποδηλώνει ότι:*

$$\theta(x) = x_1^2 + a x_2^2 < x_1^2 - \frac{x_1(x_1 - b)}{2a\left(1 + (x_1 - b)^2\right)}\psi(x_1) \tag{4.6}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}^2$ *με* $|x_1 - b| \leq |z_1 - b|$ *το οποίο ικανοποιεί την* (4.5) *λαμβάνουμε από την* (4.6)*:*

$$\theta(x) \leq C = \max\left\{ x_1^2 - \frac{x_1(x_1 - b)}{2a\left(1 + (x_1 - b)^2\right)}\psi(x_1) \;:\; 0 \leq x_1 \leq b \right\} \tag{4.7}$$

Έστω $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ *ένα δοσμένο με αυθαίρετο τρόπο διάνυσμα. Η ανισότητα* (4.7) *υποδηλώνει την ύπαρξη ενός διανύσματος* $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ *με* $|y_1 - b| \leq |z_1 - b|$ *και* $\theta(y) \geq \theta(z)$ *για το οποίο ισχύει η ακόλουθη συνεπαγωγή:*

$$\begin{gathered} -2a^2 x_2^2 \left(1 + (x_1 - b)^2\right) > x_1(x_1 - b)\psi(x_1) \quad \text{και} \\ |x_1 - b| \leq |z_1 - b| \;\Rightarrow\; \theta(x) \leq \theta(y) \end{gathered} \tag{4.8}$$

Ένα τέτοιο διάνυσμα $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ *μπορεί πάντοτε να βρεθεί (για παράδειγμα παίρνουμε* $y_1 = b$, $y_2 = \sqrt{\frac{C-b^2}{a}}$ *εάν* $C \geq \theta(z)$*και* $y = z$ *εάν* $C < \theta(z)$*). Επομένως, ισχύει η υπόθεση (A4΄΄). Για αυτό το πρόβλημα, ο δυναμικός NLP επιλυτής* (3.33) *για* $\psi_1(x) \equiv 1$ *και αυθαίρετες τοπικά Lipschitz συναρτήσεις* $\sigma : \mathbb{R}^2 \to (0, +\infty)$, $\psi_2 \in C^0(\mathbb{R}; (0, +\infty))$ *δίνεται από:*

$$f(x) := -\sigma(x) \begin{bmatrix} \psi_2(x_1)(x_1 - b) \\ 2ax_2\left(1 + (x_1 - b)^2\right) \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

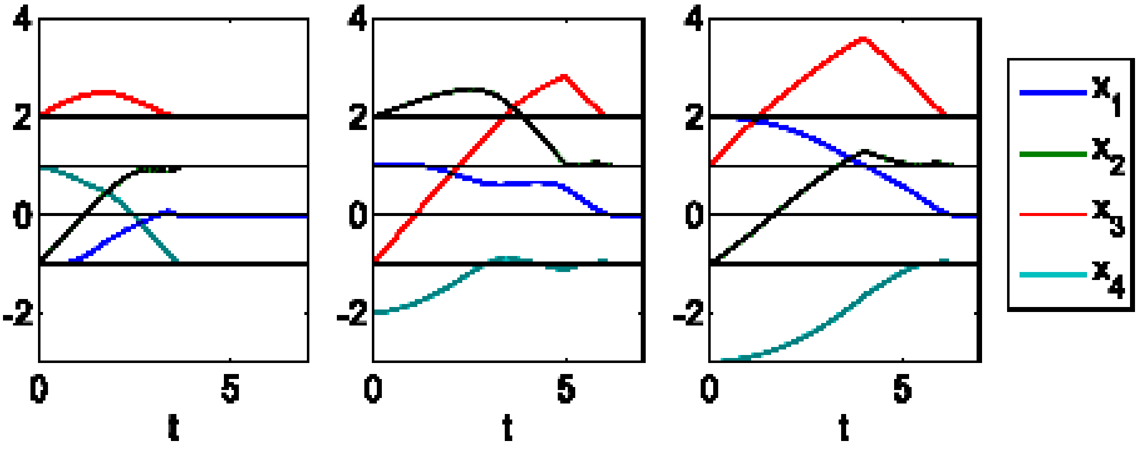
για $x \in \mathbb{R}^2$.

Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση Lyapunov $W(x) = (x_1 - b)^2/2 + x_2^2/2$, *μπορεί να αποδειχθεί ότι το σημείο ισορροπίας* $(b, 0)' \in \mathbb{R}^2$ *του συστήματος* $\dot{x} = f(x)$ *με* $\psi_2(x) \equiv c_2 > 0$, *είναι ολικά εκθετικά ευσταθές (βλ. το [25]). Αυτή είναι πιο δυνατή ιδιότητα από την ολική ασυμπτωτική ευστάθεια, η οποία αναμενόταν λόγω του Θεωρήματος 3.1, του γεγονότος ότι* $(b, 0)' \in \mathbb{R}^2$ *είναι αυστηρά τοπικό ελάχιστο του προβλήματος μη γραμμικού προγραμματισμού* (4.3) *και του γεγονότος ότι για το εν λόγω πρόβλημα έχουμε ότι* $\Phi = \{(b, 0)' \in \mathbb{R}^2\}$.

Παράδειγμα 4.3 *Το τρίτο παράδειγμα είναι το πρόβλημα Rosen − Suzuki:*

$$\begin{gathered} \min_{x_1,x_2,x_3,x_4} \theta(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + x_4^2 - 5x_1 - 5x_2 - 21x_3 + 7x_4 \\ s.t. \\ h(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1 - x_2 - x_4 - 5 = 0 \\ g(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 8 \\ x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_4^2 - x_1 - x_4 - 10 \end{bmatrix} \leq 0 \end{gathered} \tag{4.10}$$

Παρατηρείται ότι η (4.10) *είναι ένα πρόβλημα μη γραμμικού προγραμματισμού με μη γραμμικούς ισοτικούς και ανισοτικούς περιορισμούς. Για αυτό το πρόβλημα έχουμε ότι* $\det(A(x)A'(x)) > 0$ *για όλα τα* $x \in \mathbb{R}^4$. *Παρατηρούμε ότι οι υποθέσεις (A1), (A4) ισχύουν αυτόματα για κάθε τοπικά Lipschitz συναρτήσεις* $\psi_i \in C^0(\mathbb{R}^n; (0, +\infty))$ $(i = 1, 2)$ *αφού τα σύνολα* $S_c := \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \,:\, |h(x)| \leq c \,,\ \max_{j=1,\ldots,4} (g_j(x)) \leq c \right\}$ *είναι συμπαγή για κάθε* $c \geq 0$. *Επιπλέον, οι υποθέσεις (A2) και (A3) ισχύουν για το εν λόγω πρόβλημα, όπως μπορεί*



Εικόνα 4.3: Η λύση του δυναμικού NLP επιλυτή για διάφορα αρχικά σημεία

να επαληθευτεί με απευθείας υπολογισμούς. Για την κατασκευή του δυναμικού NLP επιλυτή, έγινε η υπόθεση ότι $\sigma(x) := \frac{1}{1+\left|\psi_1(x)F(x)-(\nabla V(x))'-\left(|\nabla V(x)|^2 I_n-(\nabla V(x))'\nabla V(x)\right)(\nabla\theta(x))'\right|}$, $\psi_1(x) = \frac{1}{(\det(A(x)A'(x)))^{10}}$, $\psi_2(x) \equiv 1$.

Η λύση που έδωσε το MATLAB[1] *για διάφορα αρχικά σημεία αποτυπώνεται στην Εικόνα 4.3. Σε όλες τις περιπτώσεις παρατηρούμε την σύγκλιση στο σημείο* $x^* = (0,1,2,-1)' \in \mathbb{R}^4$. *Επίσης, παρατηρείται ότι στην Εικόνα 4.3 ένα εκ των αρχικών σημείων είναι το σημείο* $x = (-1,-1,2,1)' \in \mathbb{R}^4$ *, το οποίο είναι ένα ειδικό σημείο όπου οι αλγόριθμοι οι οποίοι προτείνονται στην [24] δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν. Όμως, ακόμη και για αυτό το αρχικό σημείο, η λύση συγκλίνει ταχύτατα στο σημείο* $x^* = (0,1,2,-1)' \in \mathbb{R}^4$.

4.2 Οικονομική εφαρμογή

Στην παρούσα ενότητα θα παρουσιαστεί το οικονομικό πρόβλημα της βέλτιστης επιλογής ποσοτήτων αγαθών από έναν καταναλωτή ο οποίος επιθυμεί να μεγιστοποιήσει την ικανοποίηση που αντλεί από την κατανάλωση τους.

Πιο συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι υπάρχουν 3 αγαθά στην εγχώρια αγορά τα οποία μπορεί να αγοράσει ένας υποθετικός καταναλωτής. Επίσης, ο εν λόγω καταναλωτής έχει

[1]Για την εξαγωγή των λύσεων χρησιμοποιήθηκε η υπορουτίνα ODE23T του MATLAB.

διαθέσιμο εισόδημα για κατανάλωση M_1 *χρηματικές μονάδες και διαθέσιμο χρόνο για αγορές* M_2 *χρονικές μονάδες, με* $M_1, M_2 \in \mathbb{R}_+$. *Υποθέτουμε ότι οι τιμές των αγαθών που πωλούνται στην εγχώρια αγορά παρίστανται με το διάνυσμα* $p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3_+$, *και οι αντίστοιχες πωλούμενες ποσότητες παρίστανται με το διάνυσμα* $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3_+$. *Τέλος, υποθέτουμε ότι υπάρχει μια συνάρτηση, η οποία καλείται «Συνάρτηση Χρησιμότητας», η οποία ταξινομεί την ικανοποίηση που αντλεί ο καταναλωτής από τους διάφορους συνδυασμούς ποσοτήτων των αγαθών και η οποία παρίσταται ως* $U(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}_+$.

Για να προχωρήσουμε με το παράδειγμα μας υποθέτουμε ότι η συνάρτηση χρησιμότητας είναι της μορφής Cobb-Douglas, η οποία για την περίπτωση των τριών αγαθών έχει τη μορφή $U(z_1, z_2, z_3) = z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3}$ *όπου* $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$ $(i = 1, 2, 3)$ *παράμετροι* [2].
Βάσει των ανωτέρω υποθέσεων το πρόβλημα μεγιστοποίησης περιγράφεται ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} &\max_{z_1,z_2,z_3} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3} \\ &\qquad s.t. \\ &b_1 z_1 + b_2 z_2 + b_3 z_3 \leq M_1 \\ &c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3 \leq M_2 \\ &z_1 > 0,\ z_2 > 0,\ z_3 > 0 \end{aligned} \tag{4.11}$$

όπου b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 *θετικές παράμετροι και* $\alpha_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3$.

Για το οικονομικό πρόβλημα που εξετάζεται είναι επιθυμητό οι τιμές των παραμέτρων $\alpha_i,\ i = 1, 2, 3$ *να ανήκουν στο διάστημα* $(0, 1)$ *και να ισχύει ότι* $\sum_{j=1}^{3} \alpha_j = 1$. *Για τη περίπτωση αυτή απαιτείται ο μετασχηματισμός των μεταβλητών* $z = exp(x)$, *οπότε το πρόβλημα γράφεται ως ακολούθως:*

$$\begin{aligned} &\max_{x_1,x_2,x_3} \exp(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) \\ &\qquad s.t. \\ &b_1 \exp(x_1) + b_2 \exp(x_2) + b_3 \exp(x_3) \leq M_1 \\ &c_1 \exp(x_1) + c_2 \exp(x_2) + c_3 \exp(x_3) \leq M_2 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Το ανωτέρω πρόβλημα μπορεί να γραφεί ως πρόβλημα ελαχιστοποίησης ως ακολούθως:

[2]Βλ. [6], σελ. 94.

$$
\begin{aligned}
&\min_{x_1,x_2,x_3} -\exp(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)\\
&\qquad s.t.\\
&b_1\exp(x_1) + b_2\exp(x_2) + b_3\exp(x_3) - M_1 \le 0\\
&c_1\exp(x_1) + c_2\exp(x_2) + c_3\exp(x_3) - M_2 \le 0
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

Για την διευκόλυνση των υπολογισμών μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως αντικειμενική συνάρτηση η παράσταση $-\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 - \alpha_3 x_3$, *αφού οι τιμές των μεταβλητών που ελαχιστοποιούν την εν λόγω συνάρτηση, ελαχιστοποιούν και την εκθετική συνάρτηση.*

$$
\begin{aligned}
&\min_{x_1,x_2,x_3} -\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 - \alpha_3 x_3\\
&\qquad s.t.\\
&b_1\exp(x_1) + b_2\exp(x_2) + b_3\exp(x_3) - M_1 \le 0\\
&c_1\exp(x_1) + c_2\exp(x_2) + c_3\exp(x_3) - M_2 \le 0
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξεως του προβλήματος είναι:

$$
\begin{cases}
-\alpha_1 + \mu_1 b_1\exp(x_1) + \mu_2 c_1\exp(x_1) = 0\\
-\alpha_2 + \mu_1 b_2\exp(x_2) + \mu_2 c_2\exp(x_2) = 0\\
-\alpha_3 + \mu_1 b_3\exp(x_3) + \mu_2 c_3\exp(x_3) = 0\\
\mu_1(b_1\exp(x_1) + b_2\exp(x_2) + b_3\exp(x_3) - M_1) = 0\\
\mu_2(c_1\exp(x_1) + c_2\exp(x_2) + c_3\exp(x_3) - M_2) = 0\\
b_1\exp(x_1) + b_2\exp(x_2) + b_3\exp(x_3) \le M_1\\
c_1\exp(x_1) + c_2\exp(x_2) + c_3\exp(x_3) \le M_2\\
\mu_1 \ge 0 \text{ και } \mu_2 \ge 0
\end{cases}
\tag{4.15}
$$

Από τη μελέτη των ως άνω εξισώσεων είναι προφανές ότι η αναλυτική επίλυση του εν λόγω προβλήματος (για διάφορες τιμές των παραμέτρων) με την μεθοδολογία των Kuhn-Tucker απαιτεί την επίλυση ενός μη γραμμικού συστήματος εξισώσεων, το οποίο απαιτεί τη χρήση αριθμητικών μεθόδων. Για το λόγο αυτό στο υπό εξέταση παράδειγμα θα χρησιμοποιηθεί η μεθοδολογία που παρουσιάζεται στην [23]. Τα πλεονεκτήματα της συγκεκριμένης μεθοδολογίας σε σύγκριση με άλλες μεθοδολογίες έχουν καταγραφεί στα προηγούμενα κεφάλαια.

4.2.1 Αριθμητικό Παράδειγμα

Για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος μεγιστοποίησης της χρησιμότητας, με την εφαρμογή της εξεταζόμενης μεθοδολογίας, θα υποθέσουμε συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές για τις παραμέτρους. Πιο συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι $\alpha_1 = 0.3$, $\alpha_2 = 0.5$, $\alpha_3 = 0.2$, $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_3 = 1$, $M_1 = 5$, $c_1 = 1$, $c_2 = 3$, $c_3 = 1$, $M_2 = 6$. *Για τις τιμές αυτές το σύστημα* (4.14), *για* $x \in \mathbb{R}^3$, *γράφεται ως ακολούθως:*

$$\begin{aligned} &\min_{x_1,x_2,x_3} -0.3x_1 - 0.5x_2 - 0.2x_3 \\ &\qquad s.t. \\ &g_1(x) = \exp(x_1) + 2\exp(x_2) + \exp(x_3) - 5 \leq 0 \\ &g_2(x) = \exp(x_1) + 3\exp(x_2) + \exp(x_3) - 6 \leq 0 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Όσον αφορά τον τρόπο επίλυσης του υπό εξέταση οικονομικού προβλήματος θα εφαρμοστεί η ανάλυση της ενότητας 3.2 της παρούσας εργασίας (1η Περίπτωση), η οποία αντιμετωπίζει την περίπτωση που υπάρχουν μόνο ανισοτικοί περιορισμοί. Για την εφαρμογή της μεθοδολογίας είναι απαραίτητος ο υπολογισμός των ακόλουθων διανυσμάτων και πινάκων:

$$g(x) = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(x_1) + 2\exp(x_2) + \exp(x_3) - 5 \\ \exp(x_1) + 3\exp(x_2) + \exp(x_3) - 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \tag{4.17}$$

$$B(x) = \begin{bmatrix} \nabla g_1(x) \\ \nabla g_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(x_1) & 2\exp(x_2) & \exp(x_3) \\ \exp(x_1) & 3\exp(x_2) & \exp(x_3) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3} \tag{4.18}$$

$$(g(x))^- = \begin{bmatrix} \min(0, g_1(x)) \\ \min(0, g_2(x)) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \tag{4.19}$$

$$diag(g(x))^- = \begin{bmatrix} \min(0, g_1(x)) & 0 \\ 0 & \min(0, g_2(x)) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \tag{4.20}$$

$$(g(x))^+ = \begin{bmatrix} \max(0, g_1(x)) \\ \max(0, g_2(x)) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \tag{4.21}$$

$$U(x) = -0.3x_1 - 0.5x_2 - 0.2x_3 \in \mathbb{R} \tag{4.22}$$

$$\nabla U(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial U}{\partial x_1} \\ \\ \dfrac{\partial U}{\partial x_2} \\ \\ \dfrac{\partial U}{\partial x_3} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -0.3 \\ -0.5 \\ -0.2 \end{bmatrix}' \in \mathbb{R}^3 \tag{4.23}$$

$$Q(x) = B(x)B'(x) - diag((g(x))^-) = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \tag{4.24}$$

όπου:

$Q_{11} = \exp(2x_1) + 4\exp(2x_2) + \exp(2x_3) - \min(0, \exp(x_1) + 2\exp(x_2) + \exp(x_3) - 5)$

$Q_{12} = \exp(2x_1) + 6\exp(2x_2) + \exp(2x_3)$

$Q_{21} = \exp(2x_1) + 6\exp(2x_2) + \exp(2x_3)$

$Q_{22} = \exp(2x_1) + 9\exp(2x_2) + \exp(2x_3) - \min(0, \exp(x_1) + 3\exp(x_2) + \exp(x_3) - 6)$

$$adjQ(x) = \begin{bmatrix} Q_{22} & -Q_{12} \\ -Q_{21} & Q_{11} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \tag{4.25}$$

$$R(x) = B(x)'adj(Q(x)) = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \\ R_{31} & R_{32} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2} \tag{4.26}$$

όπου:

$R_{11} = \exp(x_1)(3\exp(2x_2) - \min(0, \exp(x_1) + 3\exp(x_2) + \exp(x_3) - 6))$

$R_{12} = -\exp(x_1)(2\exp(2x_2) + \min(0, \exp(x_1) + 2\exp(x_2) + \exp(x_3) - 5))$

$R_{21} = -\exp(x_2)(\exp(2x_1) + \exp(2x_3) + 2\min(0, \exp(x_1) + 3\exp(x_2) + \exp(x_3) - 6))$

$R_{22} = \exp(x_2)(\exp(2x_1) + \exp(2x_3) - 3\min(0, \exp(x_1) + 2\exp(x_2) + \exp(x_3) - 5))$

$R_{31} = \exp(x_3)(3\exp(2x_2) - \min(0, \exp(x_1) + 3\exp(x_2) + \exp(x_3) - 6))$

$R_{32} = -\exp(x_3)(2\exp(2x_2) + \min(0, \exp(x_1) + 2\exp(x_2) + \exp(x_3) - 5))$

Βάσει των ανωτέρω διανυσμάτων και πινάκων μπορεί να γίνει η κατασκευή του δυναμικού επιλυτή που αντιστοιχεί στο πρόβλημα του μη γραμμικού προγραμματισμού. Ο *προτεινόμενος δυναμικός NLP επιλυτής προκύπτει για τις σταθερές συναρτήσεις* $\sigma(x) = 1$, $\psi_1(x) = 1$ *και* $\psi_2(x) = 1$ *από τον τύπο:*

$$\begin{gathered} f(x) := (F(x) - B'(x)(g(x))^+ - \\ \left(|B'(x)(g(x))^+|^2 I_n - B'(x)(g(x))^+ \left((g(x))^+\right)' B(x)\right) (\nabla U(x))'\Big) \in \mathbb{R}^3 \end{gathered} \tag{4.27}$$

όπου:

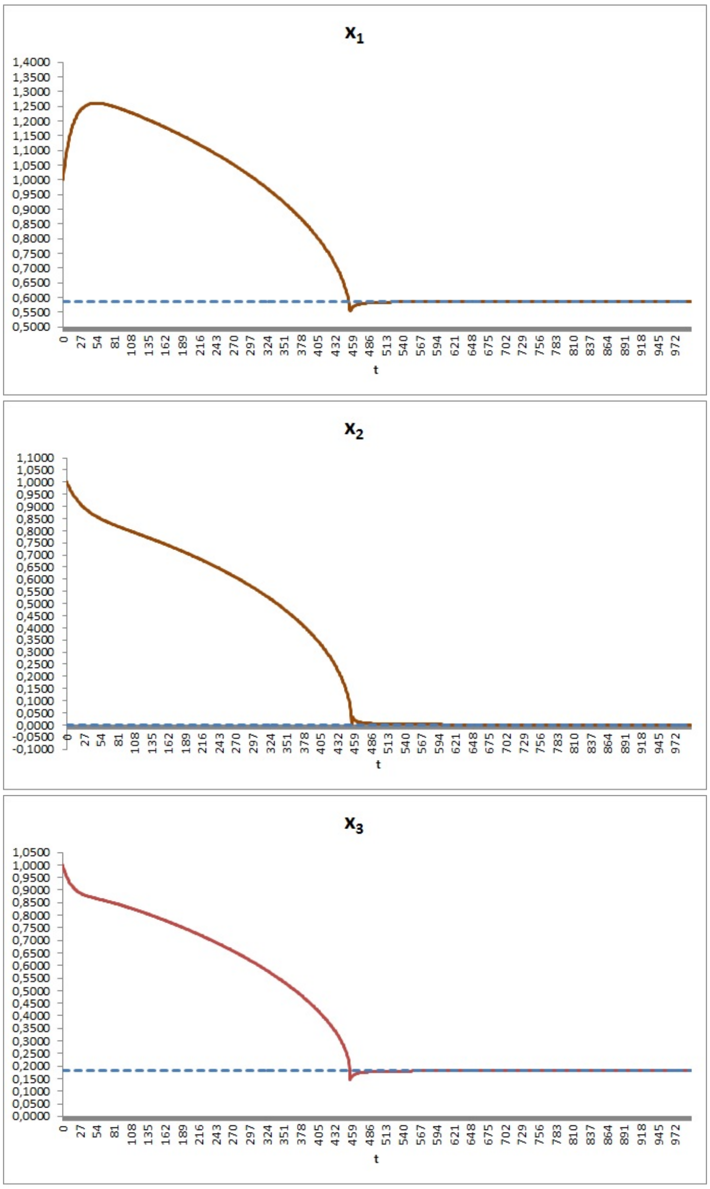
$$\begin{gathered} F(x) := R(x)diag\left((g(x))^-\right) R'(x) \left(\nabla U(x)\right)' - R(x)\left(R'(x)\left(\nabla U(x)\right)'\right)^+ \\ - \left(\det(Q(x))I_n - R(x)B(x)\right)\left(\det(Q(x))I_n - B'(x)R'(x)\right)\left(\nabla U(x)\right)' \in \mathbb{R}^3 \end{gathered} \tag{4.28}$$

Μπορεί να επαληθευτεί ότι ισχύουν οι Υποθέσεις (A1΄), (A2΄), (A3΄), ενώ η (A4΄) ισχύει αν προσθέσουμε τον ανισοτικό περιορισμό $U(x) \leq U(x_0)$. *Όμως, επειδή παρατηρήθηκε ότι δεν παίζει κανένα ρόλο στις προσομοιώσεις, δεν συμπεριλήφθηκε στο πρόβλημα μας και στην ανάλυση του* [3]. *Πιο συγκεκριμένα, για αρχικές συνθήκες* $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$, $x_3(0) = 1$ *η λύση του δυναμικού συστήματος προσεγγίζει ασυμπτωτικά με πολύ αργό ρυθμό τις τιμές* $x_1 = 0.58778$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0.18232$. *Για τις συγκεκριμένες τιμές των μεταβλητών* x_1, x_2 *και* x_3 *και οι δυο ανισοτικοί περιορισμοί είναι ενεργοί, ενώ η άριστη τιμή της* U *είναι* 1.23714 [4]. *Τα γραφήματα της Εικόνας 4.4 απεικονίζουν την εξέλιξη των μεταβλητών* x_1, x_2 *και* x_3 *στην πάροδο του χρόνου. Επίσης, εξετάστηκε η ασυμπτωτική συμπεριφορά του δυναμικού συστήματος για διάφορες τιμές των αρχικών συνθηκών. Σε όλες τις περιπτώσεις, όπως φαίνεται από τα ακόλουθα γραφήματα, οι τιμές των μεταβλητών του δυναμικού συστήματος συγκλίνουν στη λύση του προβλήματος μη γραμμικού προγραμματισμού. Για αρχικές συνθήκες* $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 1$, $x_3(0) = 1$ *τα σχετικά γραφήματα απεικονίζονται στην Εικόνα 4.5, για αρχικές συνθήκες* $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 2$, $x_3(0) = 1$ *στην Εικόνα 4.6, για αρχικές συνθήκες* $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$, $x_3(0) = 2$ *στην Εικόνα 4.7, για αρχικές συνθήκες* $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 1.5$, $x_3(0) = 1.5$ *στην Εικόνα 4.8.*

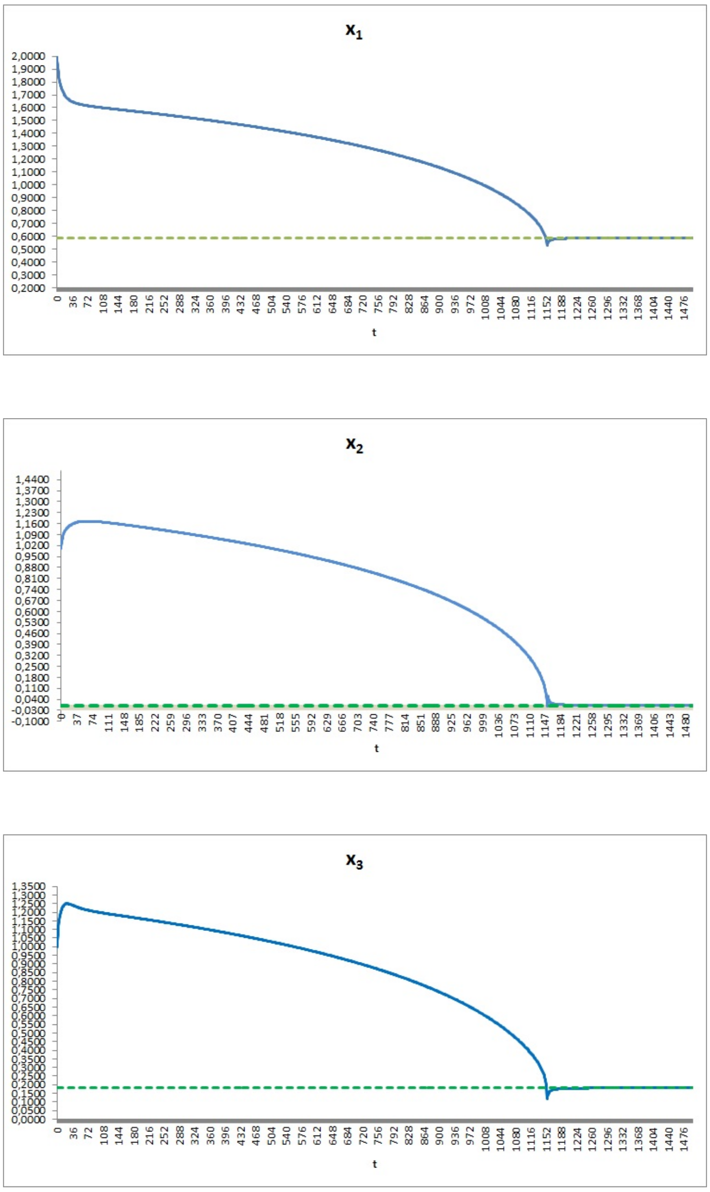
Τέλος, εξετάστηκε η ασυμπτωτική συμπεριφορά του δυναμικού συστήματος για διάφορες τιμές της δεξιάς πλευράς. Πιο συγκεκριμένα, για αρχικές συνθήκες $x_1(0) = 2$,

[3] Η επίλυση του ανωτέρω προβλήματος έγινε με την βοήθεια του λογισμικού «Mathematica». Τα γραφήματα έγιναν με την χρήση του λογισμικού Microsoft Excel.

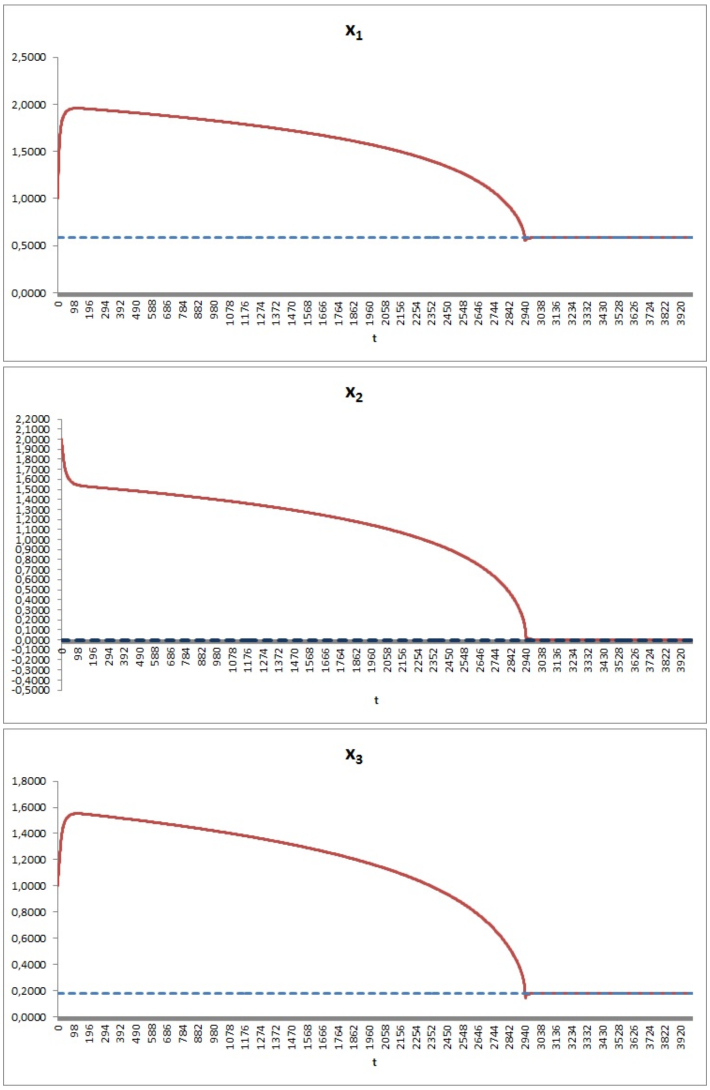
[4] Η αντίστοιχη λύση του προβλήματος που προκύπτει με τη χρήση της συνάρτησης «NMinimize» του λογισμικού «Mathematica» για την εύρεση ολικού ελαχίστου είναι $x_1 = 0.58777$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0.18231$.



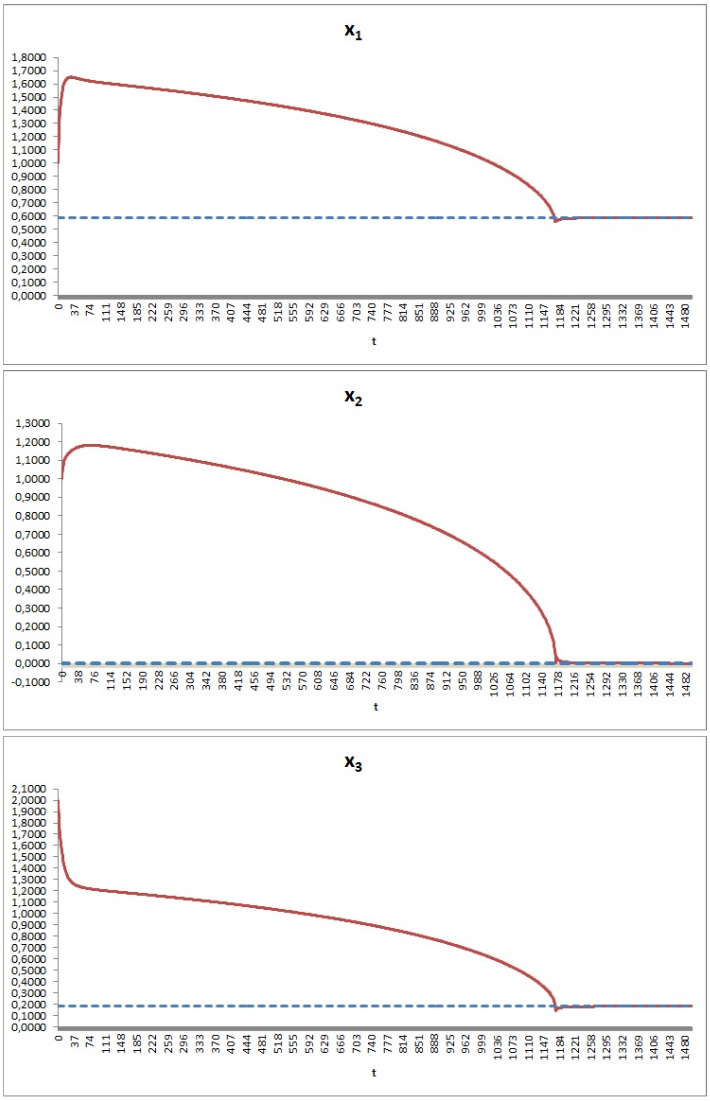
Εικόνα 4.4: $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$, $x_3(0) = 1$



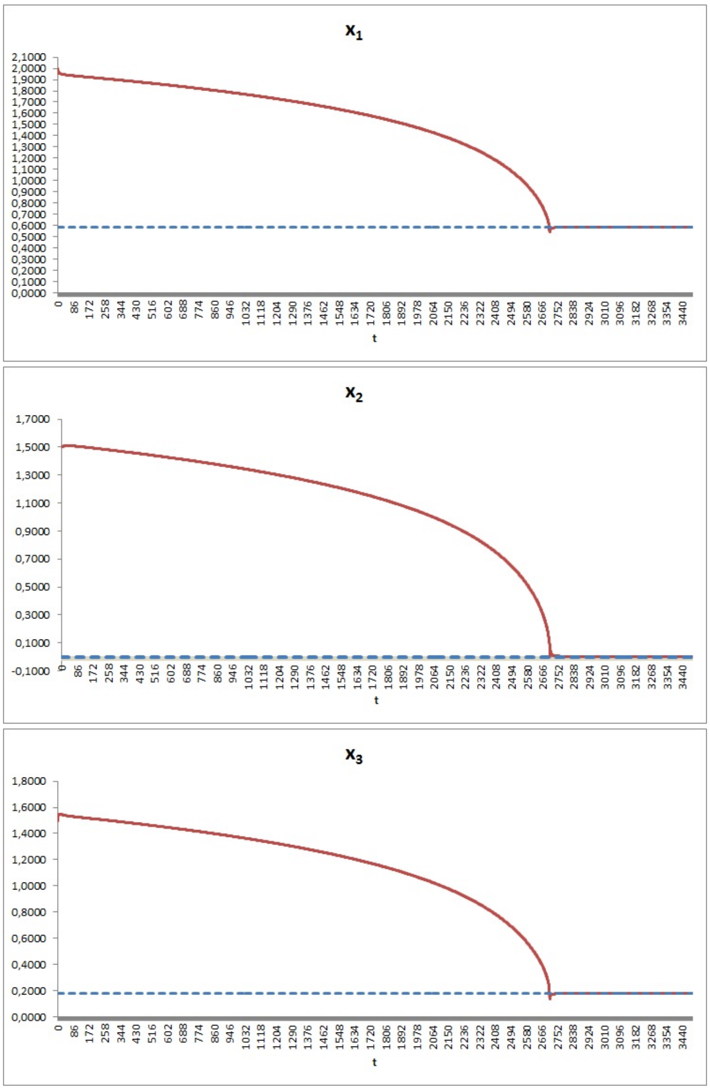
Εικόνα 4.5: $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 1$, $x_3(0) = 1$



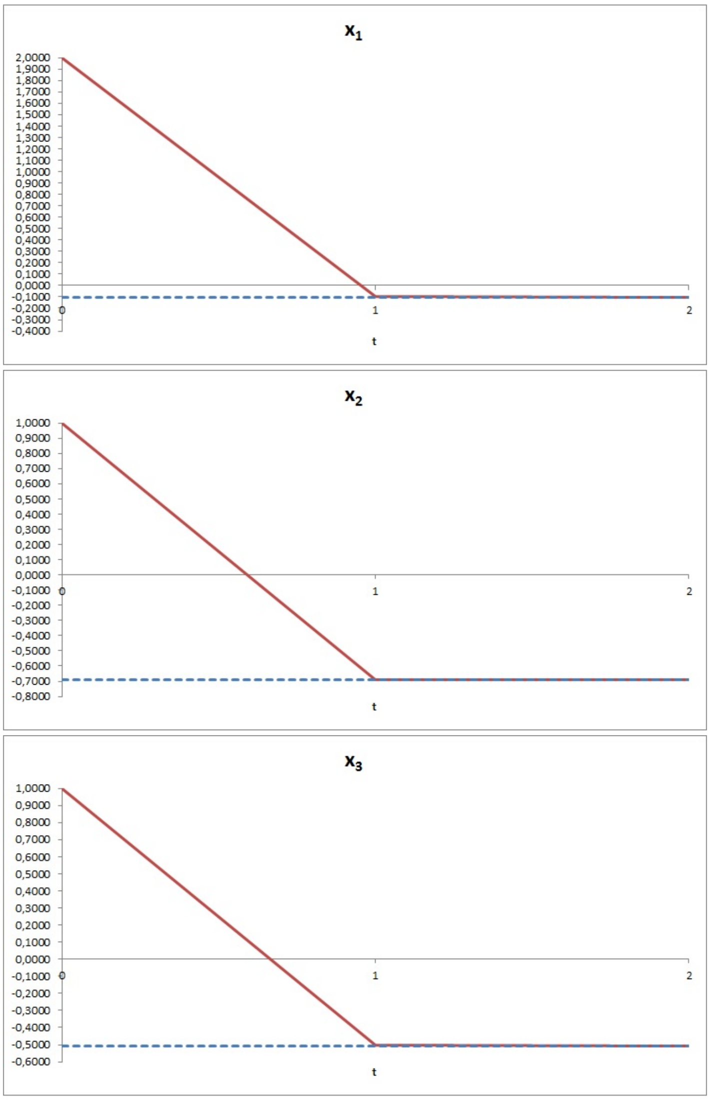
Εικόνα 4.6: $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 2$, $x_3(0) = 1$



Εικόνα 4.7: $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$, $x_3(0) = 2$



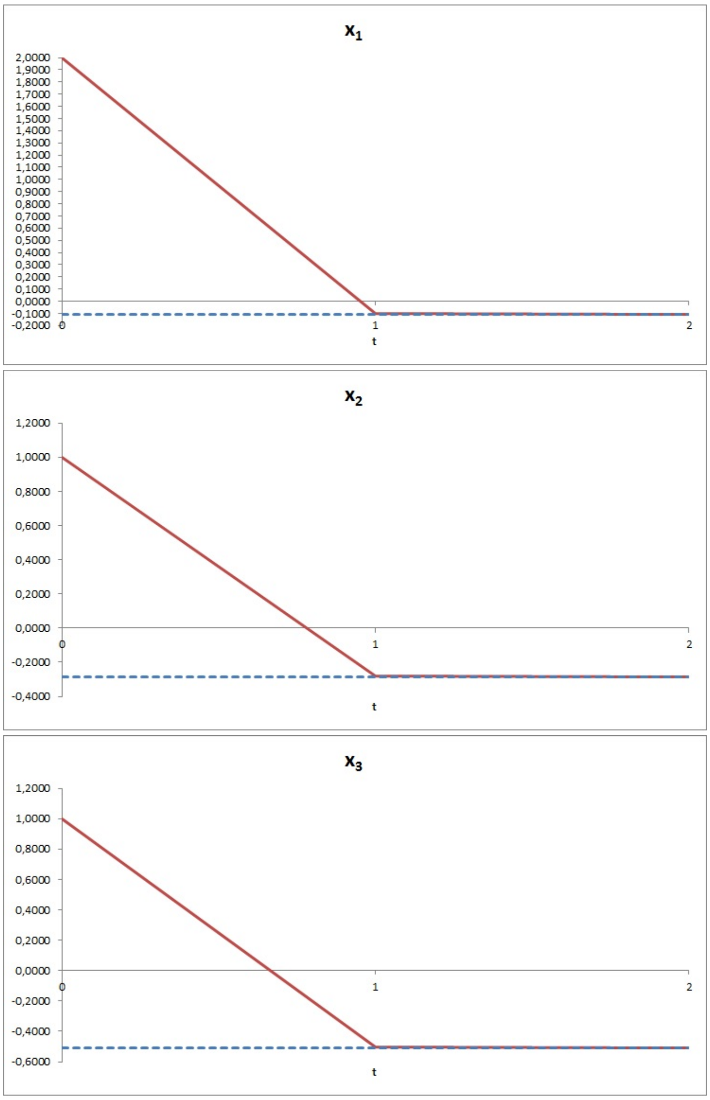
Εικόνα 4.8: $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 1.5$, $x_3(0) = 1.5$



Εικόνα 4.9: $M_1 = 5$, $M_2 = 3$

$x_2(0) = 1$, $x_3(0) = 1$, με $M_2 = 3$ αντί για $M_2 = 6$, η λύση του δυναμικού συστήματος προσεγγίζει μετά από μια χρονική μονάδα στις τιμές $x_1 = -0.105$, $x_2 = -0.693$, $x_3 = -0.511$. Για τις συγκεκριμένες τιμές των μεταβλητών x_1, x_2 και x_3, ο πρώτος ανισοτικός περιορισμός είναι μη ενεργός, ο δεύτερος ανισοτικός περιορισμός καθίσταται ενεργός, ενώ η άριστη τιμή της U είναι 0.618569 [5]. *Τα σχετικά γραφήματα απεικονίζονται στην Εικόνα 4.9. Επίσης, για αρχικές συνθήκες $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 1$, $x_3(0) = 1$,*

[5] Η αντίστοιχη λύση του προβλήματος που προκύπτει με τη χρήση της συνάρτησης «NMinimize» του λογισμικού «Mathematica» για την εύρεση ολικού ελαχίστου είναι $x_1 = -0.10536$, $x_2 = -0.693147$, $x_3 = -0.510825$.



Εικόνα 4.10: $M_1 = 3$, $M_2 = 6$

με $M_1 = 3$ *αντί για* $M_1 = 5$, *η λύση του δυναμικού συστήματος προσεγγίζει μετά από μια χρονική μονάδα στις τιμές* $x_1 = -0.105$, $x_2 = -0.288$, $x_3 = -0.511$. *Για τις συγκεκριμένες τιμές των μεταβλητών* x_1, x_2 *και* x_3, *ο πρώτος ανισοτικός περιορισμός είναι ενεργός, ο δεύτερος ανισοτικός περιορισμός καθίσταται μη ενεργός ενώ η άριστη τιμή της* U *είναι* 0.757589 [6]. *Τα σχετικά γραφήματα απεικονίζονται στην Εικόνα 4.10.*

Εν κατακλείδι, τα ως άνω αποτελέσματα επιβεβαιώνουν την ισχύ της προτεινόμενης με-

[6] Η αντίστοιχη λύση του προβλήματος που προκύπτει με τη χρήση της συνάρτησης «NMinimize» του λογισμικού «Mathematica» για την εύρεση ολικού ελαχίστου είναι $x_1 = -0.10536$, $x_2 = -0.287682$, $x_3 = -0.510825$.

θοδολογίας δυναμικών επιλυτών όσον αφορά την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων μη γραμμικού προγραμματισμού.

Κεφάλαιο 5

Επίλογος

Η παρούσα εργασία ασχολείται με την μεθοδολογία που παρουσιάστηκε στο άρθρο «Global Dynamical Solvers for Nonlinear Programming Problems». Οι συγγραφείς της εν λόγω εργασίας συνδύασαν την θεωρία των δυναμικών συστημάτων και της μη γραμμικής θεωρίας ελέγχου και κατασκεύασαν, με τη χρήση μιας επέκτασης της μεθοδολογίας των συναρτήσεων ελέγχου Lyapunov, μια οικογένεια ολικά ορισμένων δυναμικών συστημάτων για την επίλυση προβλημάτων μη γραμμικού προγραμματισμού. Στην απόδειξη τους οι συγγραφείς παρουσίασαν επεκτάσεις του θεωρήματος του LaSalle, οι οποίες έχουν ανεξάρτητο επιστημονικό ενδιαφέρον. Πιο συγκεκριμένα, η προτεινόμενη μεθοδολογία παρουσιάζει τα κάτωθι επιθυμητά χαρακτηριστικά:

(α) τα σημεία ισορροπίας είναι τα άγνωστα (και προς εύρεση) κρίσιμα σημεία του προβλήματος.

(β) για κάθε αρχική συνθήκη, η λύση του προβλήματος των αρχικών τιμών συγκλίνει στο σύνολο των κρίσιμων σημείων.

(γ) κάθε αυστηρά τοπικό ελάχιστο είναι τοπικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

(δ) το εφικτό σύνολο είναι ένα θετικά αναλλοίωτο σύνολο.

(ε) το δυναμικό σύστημα δίνεται σε ρητή μορφή, χωρίς την συμμετοχή των άγνωστων κρίσιμων σημείων του προβλήματος.

(στ) *το πρόβλημα επιλύεται χωρίς να γίνει χρήση κάποιας υπόθεσης σχετικά με την κυρτότητα της αντικειμενικής συνάρτησης.*

Τα αποτελέσματα της εργασίας μπορούν να εφαρμοστούν, μεταξύ άλλων, στην οικονομική θεωρία όπως καταδεικνύει το παράδειγμα μεγιστοποίησης της χρησιμότητας ενός αντιπροσωπευτικού καταναλωτή το οποίο εξετάστηκε στην παρούσα εργασία. Επίσης, τα αποτελέσματα της εργασίας θα μπορούσαν, σύμφωνα με τους συγγραφείς, να εφαρμοστούν στην ερευνητική κατεύθυνση της μη συνεργατικής θεωρία παιγνίων (non-cooperative game theory) για τον προσδιορισμό των σημείων ισορροπίας κατά Nash.

Βιβλιογραφία

[1] Andreani, R., C. E. Echagüe and M. L. Schuverdt, Constant-Rank Condition and Second Order Constraint Qualification, Journal of Optimization Theory and Applications, 146, 2010, 255–266.

[2] Antipin A. S., Minimization of Convex Functions on Convex Sets by Means of Differential Equations, Differential Equations, 30(A.1), 1994, 1365-1375.

[3] Artstein, Z., Stabilization with Relaxed Controls, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 7, 1983, 1163-1173.

[4] Avriel, M., Nonlinear Programming: Analysis and Methods, Dover Publications, 2003.

[5] Bacciotti, A. and L. Rosier, Liapunov Functions and Stability in Control Theory, Lecture Notes in Control and Information Sciences, 267, Springer-Verlag, London, 2001.

[6] Besanko, D. and R. Braeutigam, Microeconomics, 4th ed., John Wiley & Sons, 2010.

[7] Bhatia, N.P. and G. P. Szego, Dynamical Systems: Stability Theory and Applications, Springer, 1967.

[8] Borwein, J., and Lewis, A., Convex Analysis and Nonlinear Optimization. Theory and Examples, 2nd Ed., Canadian Mathematical Society, Springer, 2006.

[9] *Brown, A. A. and M. C. Bartholomew-Biggs, ODE Versus SQP Methods for Constrained Optimization, Journal of Optimization Theory and Applications, 62*(3.1), *1989, 371-386.*

[10] *Cabot, A., The Steepest Descent Dynamical System with Control. Applications to Constrained Minimization, ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, 10, 2004, 243–258.*

[11] *Curtis, C., Linear Algebra. An Introductory Approach, Springer-Verlag, New York, 1984.*

[12] *Evtushenko, Y. G. and V. G. Zhadan, Barrier-Projective Methods for Nonlinear Programming, Computational Mathematics and Mathematical Physics, 34*(2.1), *1994, 579–590.*

[13] *Fiacco, A. V., G. P. McCormick, Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques, John Wiley, New York, 1968.*

[14] *Freeman, R. A. and P. V. Kokotovic, Robust Nonlinear Control Design-State Space and Lyapunov Techniques, Birkhauser, Boston, 1996.*

[15] *Ghaffari, A., M. Krstic, and D. Nesic, Multivariable Newton-Based Extremum Seeking, Automatica, 48, 1759-1767, 2012.*

[16] *Goh, B.S., Algorithms for Unconstrained Optimization Problems via Control Theory, Journal of Optimization Theory and Applications, 92, 1997, 581-604.*

[17] *Grüne, L. and I. Karafyllis, Lyapunov Function Based Step Size Control for Numerical ODE Solvers with Application to Optimization Algorithms. In: Hüper, K., Trumpf, J. (eds.) Mathematical System Theory, pp. 183–210 (2013) Festschrift in Honor of Uwe Helmke on the Occasion of his 60th Birthday. http://users.cecs.anu.edu.au/∼trumpf/UH60Festschrift.pdf*

[18] *Hairer, E., S. P. Norsett and G. Wanner, Solving Ordinary Differential Equations I Nonstiff Problems, 2nd Ed., Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1993.*

[19] *Hairer, E. and G. Wanner, Solving Ordinary Differential Equations II Stiff and Differential-Algebraic Problems, 2nd Edition, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2002.*

[20] *Helmke, U. and J. B. Moore, Optimization and Dynamical Systems, 2nd Edition, Springer-Verlag, 1996.*

[21] *Karafyllis, I. and L. Grüne, Feedback Stabilization Methods for the Numerical Solution of Systems of Ordinary Differential Equations, Discrete and Continuous Dynamical Systems: Series B, 16*(1.2)*, 2011, 283-317.*

[22] *Karafyllis, I. and Z.-P. Jiang, Stability and Stabilization of Nonlinear Systems, Springer-Verlag London (Series: Communications and Control Engineering), 2011.*

[23] *Karafyllis, I. and Krstic, M., Global Dynamical Solvers for Nonlinear Programming Problems, submitted to SIAM Journal on Control and Optimization (see also arXiv:1512.06955 [math.OC]).*

[24] *Karafyllis, I., Feedback Stabilization Methods for the Solution of Nonlinear Programming Problems, Journal of Optimization Theory and Applications, 161, 2014, 783-806.*

[25] *Khalil, H. K., Nonlinear Systems, 2nd Edition, Prentice-Hall, 1996.*

[26] *Liu, S.-J. and M. Krstic, Stochastic Averaging and Stochastic Extremum Seeking, Springer, 2012.*

[27] *Mangasarian, O. L. and S. Fromovitz, The Fritz John Necessary Optimality Conditions in the Presence of Equality and Inequality Constraints, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 17, 1967, 37-47.*

[28] *Nef, W. Linear Algebra, Dover ed., 1988.*

[29] *Pan, P.Q., New ODE Methods for Equality Constrained Optimization* (1.2)*: Equations, Journal of Computational Mathematics, 10*(1.2)*, 1992, 77–92.*

[30] *Scholtes, S. and M. Stohr, How Stringent is the Linear Independence Assumption for Mathematical Programs with Complementarity Constraints?, Mathematics of Operations Research, 26*(3.2)*, 2001, 851–863.*

[31] *Solodov, M. V., Global Convergence of an SQP Method Without Boundedness Assumptions on any of the Iterative Sequences, Mathematical Programming Series A, 118, 2009, 1–12.*

[32] *Sontag, E.D., A "Universal" Construction of Artstein's Theorem on Nonlinear Stabilization, Systems and Control Letters, 13, 1989, 117-123.*

[33] *Stuart, A.M. and A.R. Humphries, Dynamical Systems and Numerical Analysis, Cambridge University Press, 1998.*

[34] *Tanabe, K., An Algorithm for Constrained Maximization in Nonlinear Programming, Journal of the Operations Research Society of Japan, 17, 1974, 184-201.*

[35] *Wena, U.P., K. M. Lan and H. S. Shih, A Review of Hopfield Neural Networks for Solving Mathematical Programming Problems, European Journal of Operational Research, 198*(3.1)*, 2009, 675–687.*

[36] *Xia, Y. and J. Wang, A Recurrent Neural Network for Nonlinear Convex Optimization Subject to Nonlinear Inequality Constraints, IEEE Transactions on Circuits and Systems, 51*(2.3)*, 2004, 1385-1394.*

[37] *Xia, Y. and J. Wang, A Recurrent Neural Network for Solving Nonlinear Convex Programs Subject to Linear Constraints, IEEE Transactions on Neural Networks, 16*(1.3)*, 2005, 379–386.*

[38] *Xia, Y., G. Feng and J. Wang, A Novel Recurrent Neural Network for Solving Nonlinear Optimization Problems with Inequality Constraints, IEEE Transactions on Neural Networks, 19*(2.4)*, 2008, 1340–1353.*

[39] *Yamashita, H., A Differential Equation Approach to Nonlinear Programming, Mathematical Programming, 18, 1980, 155-168.*

[40] Zhou, L., Y. Wu, L. Zhang and G. Zhang, Convergence Analysis of a Differential Equation Approach for Solving Nonlinear Programming Problems, Applied Mathematics and Computation, 184, 2007, 789-797.