



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ  
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

**ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΚΑΝΟΝΙΚΟΠΟΙΗΣΗΣ ΣΤΟ  
ΚΑΘΙΕΡΩΜΕΝΟ ΠΡΟΤΥΠΟ ΚΑΙ ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ ΤΟΥ  
ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ F**

**ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ**

**ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΤΣΑΜΗ**

Διπλωματούχου Φυσικού Ε.Κ.Π.Α.

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ:

Τράκας Νικόλαος

Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Σεπτέμβριος 2016



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ  
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

**ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΚΑΝΟΝΙΚΟΠΟΙΗΣΗΣ ΣΤΟ  
ΚΑΘΙΕΡΩΜΕΝΟ ΠΡΟΤΥΠΟ ΚΑΙ ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ ΤΟΥ  
ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ F**

**ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ  
ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΤΣΑΜΗ**

**Διπλωματούχου Φυσικού Ε.Κ.Π.Α.**

**ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:**

1. Ν. Βλάχος, Αν. Καθ. Α.Π.Θ.
2. Ε. Παπαντωνόπουλος, Καθ. Ε.Μ.Π.
3. Ν. Τράκας, Καθ. Ε.Μ.Π. (Επιβλέπων)

**ΕΠΤΑΜΕΛΗΣ ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:**

1. Ν. Βλάχος, Αν. Καθ. Α.Π.Θ.
2. Γ. Ζουπάνος, Καθ. Ε.Μ.Π.
3. Γ. Κουτσούμπας, Αν. Καθ. Ε.Μ.Π.
4. Ξ. Μαϊντάς, Επ. Καθ. Ε.Κ.Π.Α
5. Ε. Παπαντωνόπουλος, Καθ. Ε.Μ.Π.
6. Ν. Τράκας, Καθ. Ε.Μ.Π. (Επιβλέπων)
7. Κ. Φαράκος, Καθ. Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2016

*Στο θείο Θανάση, την Κλαίρη, τον Πέτρο, το  
Γιώργο, τον παιχταρά.*



# Περίληψη

Στην παρούσα εργασία θα μελετήσουμε τις εξισώσεις επανακανονικοποίησης σε διάφορα μοντέλα. Οι εξισώσεις αυτές περιγράφουν τη συμπεριφορά των σταθερών σύζευξης συναρτήσεως της ενέργειας, αποτελώντας ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο για τη διερεύνηση της Φυσικής σε περιοχές ενεργειών οι οποίες είναι εκτός των λειτουργικών ορίων των σύγχρονων πειραματικών διατάξεων. Μελετώντας τις εξισώσεις αυτές, οι θεωρητικοί φυσικοί κατέληξαν στο εντυπωσιακό συμπέρασμα ότι οι σταθερές σύζευξης βαθμίδας του Ελάχιστου Υπερσυμμετρικού Καθιερωμένου Προτύπου (*Minimal Supersymmetric Standard Model*) ενοποιούνται σε μία πολύ υψηλή ενεργειακή κλίμακα, κάτι το οποίο ενδεχομένως να αποτελεί ένδειξη για την ύπαρξη θεωριών των οποίων η συμμετρία να εμπεριέχει τη συμμετρία του Καθιερωμένου Προτύπου (*Standard Model*).

Το πρώτο μοντέλο το οποίο εξετάζουμε στο πλαίσιο αυτής της διατριβής είναι το Καθιερωμένο Πρότυπο. Μελετούμε τη συμπεριφορά της σταθεράς σύζευξης βαθμίδας της ομάδας  $U(1)$  καθώς και τη σταθερά ιδιοσύζευξης του πεδίου *Higgs*. Συγκεκριμένα εξετάζουμε την περίπτωση όπου η τελευταία μπορεί να γραφεί ως συνάρτηση της πρώτης για ένα μεγάλο ενεργειακό φάσμα, προβλέποντας έτσι τη μάζα του σωματιδίου *Higgs*. Στη συνέχεια επεκτείνουμε τη μελέτη μας στο Ελάχιστο Υπερσυμμετρικό Καθιερωμένο Πρότυπο, προσπαθώντας να συσχετίσουμε τη σταθερά σύζευξης *Yukawa* του κορυφαίου κουάρκ με τη σταθερά σύζευξης *Yukawa* του χαμηλού κουάρκ.

Κατόπιν μελετούμε την εξάρτηση των σταθερών σύζευξης βαθμίδας από την ενέργεια σε μία επέκταση του Ελάχιστου Υπερσυμμετρικού Καθιερωμένου Προτύπου σε επιπλέον διαστάσεις, καθώς και του υπερσυμμετρικού μοντέλου  $SU(3)^3$  σε επιπλέον διαστάσεις. Τέλος, εξετάζουμε τις εξισώσεις επανακανονικοποίησης των σταθερών σύζευξης βαθμίδας καθώς και των σταθερών σύζευξης *Yukawa* του κορυφαίου και χαμηλού κουάρκ στο πλαίσιο της θεωρίας  $F$ , λαμβάνοντας υπόψιν τη συνεισφορά των σωματιδίων *Kaluza-Klein*.



# Abstract

In this thesis we consider renormalization group equations at some models. These equations describe the behaviour of running coupling constants as functions of energy. As a matter of fact they are a very useful tool to probe Physics beyond present accessible energy limits. Studying these equations some decades ago, theoretical physicists managed to unify gauge coupling constants at some high energy scale in the context of the Minimal Supersymmetric Standard Model.

At first we consider the behaviour of the gauge coupling constant of the group  $U(1)$  and the self-interaction coupling of Higgs, in the context of Standard Model. More specifically we investigate if the latter coupling can be written as a function of the former coupling. As a result we predict Higgs mass. Furthermore we extend our analysis in the context of Minimal Supersymmetric Standard Model, trying to relate top quark Yukawa coupling with bottom quark Yukawa coupling. Finally we predict a narrow range of  $\tan\beta$  which is one of the main parameters to calculate light Higgs boson mass.

Furthermore we discuss renormalization group equations of gauge couplings in the context of Minimal Supersymmetric Standard Model incorporated with extra dimensions. Motivated by the previous model we consider also a model with gauge group  $SU(3)^3$  incorporated with extra dimensions. At last we discuss the behaviour of top quark Yukawa coupling and bottom quark Yukawa coupling in the context of F-Theory, taking into account the contribution of Kaluza-Klein modes.





## Ευχαριστίες

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον Καθηγητή κ. Νικόλαο Τράχα ως άνθρωπο που είχα την τύχη να γνωρίσω όλα αυτά τα χρόνια, και ως επιβλέποντα αυτής της διδακτορικής διατριβής. Τον ευχαριστώ για όλα όσα έκανε για μένα αυτή την ιδιαίτερη περίοδο της ζωής μου.

Παράλληλα θα ήθελα να ευχαριστήσω τα δύο μέλη της τριμελούς επιτροπής, τους κ.κ. Καθηγητή Ελευθέριο Παπαντωνόπουλο και Αναπ. Καθηγητή Νικόλαο Βλάχο για το χρόνο που διέθεσαν και την αμέριστη συμπαράσταση τους σε ό,τι χρειάστηκα αυτά τα χρόνια. Επίσης ευχαριστώ ιδιαίτερω τον Καθηγητή κ. Γεώργιο Ζουπάνο για τις πολύτιμες συμβουλές και συνεχείς παροτρύνσεις, καθώς και για την τεράστια συμβολή του στην πραγματοποίηση του ταξιδιού μου στην πόλη του Μεξικό, στο πανεπιστήμιο UNAM. Ευχαριστώ επίσης την Καθηγήτρια κ. *Myriam Mondragon* για την ευκαιρία που μου έδωσε να επισκεφτώ το πανεπιστήμιο UNAM και να δουλέψω υπό την καθοδήγησή της, καθώς και για την πολύ θερμή φιλοξενία που μου προσέφερε.

Θα ήθελα επίσης να εκφράσω τις ειλικρινείς μου ευχαριστίες προς τον Ειδικό Λογαριασμό Κονδυλίων Έρευνας (ΕΛΚΕ) για την υποτροφία που μου παρείχε, η οποία με βοήθησε πάρα πολύ ώστε να ασχοληθώ απερίσπαστος με την ερευνητική μου δραστηριότητα. Ακολούθως ευχαριστώ τον Τομέα Φυσικής της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών για την οικονομική δυνατότητα που μου έδωσε να συμμετέχω σε σχολεία και συνέδρια.

Επίσης θέλω να εκφράσω την απέραντη ευγνωμοσύνη και αγάπη στους γονείς μου Μαρία και Χάρη και στον αδερφό μου Δημήτρη, οι οποίοι βρίσκονται πάντα δίπλα μου. Ευχαριστώ τη θεία μου Σία, τα ξαδέλφια Άλεξ και Δημήτρη και τον πολυαγαπημένο θείο Θανάση που έχασα πρόσφατα. Ευχαριστώ επίσης όλους τους φίλους μου καθώς και όλους τους ανθρώπους που έστω και για λίγο αποτέλεσαν κομμάτι της ζωής μου.



# Πρόλογος

Πολλές προσπάθειες έχουν γίνει τα τελευταία χρόνια από την επιστημονική κοινότητα, με σκοπό μία βαθύτερη κατανόηση της φύσης και των νόμων της. Έτσι έχουμε οδηγηθεί σε πολύ ενδιαφέροντα θεωρητικά μοντέλα όπως οι θεωρίες υπερχορδών οι οποίες φαίνεται ότι μπορούν να ενοποιήσουν τις θεμελιώδεις αλληλεπιδράσεις της φύσης. Ένας από τους βασικότερους στόχους μίας ενοποιημένης περιγραφής των αλληλεπιδράσεων είναι να συσχετισθεί ο μεγάλος αριθμός των ελεύθερων παραμέτρων του Καθιερωμένου Προτύπου με ένα μικρό μόνο αριθμό θεμελιωδών παραμέτρων.

Ρεαλιστικά το ελάχιστο που αναμένουμε να επιτύχουμε είναι μία μερική ελάττωση του αριθμού των σταθερών σύζευξης. Πράγματι οι προβλέψεις του Καθιερωμένου Προτύπου έως τώρα ήταν απολύτως επιτυχείς συγκριτικά με τα πειραματικά αποτελέσματα. Ωστόσο παρά τις επιτυχίες αυτές δεν μπορούμε να αγνοήσουμε το μεγάλο αριθμό των ελεύθερων παραμέτρων, οι οποίες κυρίως συνδέονται με τα *Higgs* και *Yukawa* τμήματα της θεωρίας.

Εν γένει ο αριθμός αυτός μπορεί να μειωθεί, επιβάλλοντας κάποια συμμετρία. Οι Μεγαλοενοποιημένες Θεωρίες (*Grand Unified Theories*) όπως η  $SU(5)$  αποτελούν ένα πολύ καλό παράδειγμα. Μία πιο γενική μέθοδος για να επιτευχθεί η μείωση του αριθμού των σταθερών σύζευξης μίας θεωρίας, είναι η διερεύνηση της ύπαρξης σχέσεων μεταξύ τους οι οποίες να ισχύουν σε κάθε ενεργειακή κλίμακα, δηλαδή να είναι αναλλοίωτες κάτω από την ομάδα επανακανονικοποίησης (*Renormalization Group Invariant relations*) [31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 49]. Το μοντέλο αυτό έχει εφαρμοστεί στις αδιάστατες σταθερές σύζευξης των υπερσυμμετρικών Μεγαλοενοποιημένων Θεωριών, όπως είναι οι σταθερές σύζευξης βαθμίδας και *Yukawa*. Η εφαρμογή του προγράμματος αυτού είχε αξιοσημείωτη επιτυχία προβλέποντας σωστά μεταξύ άλλων, τη μάζα του κορυφαίου κουάρκ στις πεπερασμένες και στις  $N = 1$  υπερσυμμετρικές  $SU(5)$  Μεγαλοενοποιημένες Θεωρίες.

---

Μία εντυπωσιακή πτυχή των σχέσεων αυτών είναι ότι μπορούμε να εγγυηθούμε την εγκυρότητά τους για όλες τις τάξεις στη θεωρία διαταραχών, μελετώντας τη μοναδικότητα των σχέσεων που προκύπτουν στο επίπεδο των διορθώσεων ενός βρόχου, όπως αποδείχτηκε στις πρώιμες ημέρες του προγράμματος της ελάττωσης του αριθμού των σταθερών σύζευξης [39, 40].

Ακόμα πιο αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι είναι πιθανό να βρεθούν αναλλοίωτες σχέσεις κάτω από την ομάδα επανακανονικοποίησης μεταξύ των σταθερών σύζευξης, οι οποίες να εγγυώνται ότι η θεωρία μας είναι πεπερασμένη για όλες τις τάξεις της θεωρίας διαταραχών [45, 46, 47, 48]. Στη δική μας μελέτη εξετάζουμε αν η παραπάνω μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί σε ελάχιστα μοντέλα, όπως το Καθιερωμένο Πρότυπο και το Ελάχιστο Υπερσυμμετρικό Καθιερωμένο Πρότυπο. Μάλιστα για το πρώτο η μέθοδος είχε εφαρμοστεί αρκετά χρόνια νωρίτερα [41, 42, 44, 49], υποθέτοντας μία διαταρακτική επίλυση, καθώς και πιο πρόσφατα [50, 51].

Εκτός από τη μείωση του αριθμού των σταθερών σύζευξης, ένα σημαντικό ζήτημα το οποίο απασχόλησε την κοινότητα των φυσικών στοιχειωδών σωματιδίων μερικές δεκαετίες νωρίτερα, ήταν η ενοποίηση των αλληλεπιδράσεων πιθανά σε κάποια υψηλή ενεργειακή κλίμακα [59, 60, 61, 62]. Το αποτέλεσμα αρκετών προσπαθειών οι οποίες βασίστηκαν στην επίτευξη της ενοποίησης, ήταν η πρόβλεψη κάποιων εκ των πολλών ελεύθερων παραμέτρων του Καθιερωμένου Προτύπου [63, 64]. Το να εξηγηθεί ικανοποιητικά ο λόγος για τον οποίο οι σταθερές σύζευξης βαθμίδας παίρνουν τις τιμές τις οποίες μετρούμε στο πείραμα είναι αρκετά δύσκολο. Το μεγαλύτερο μέρος της μελέτης που έχει γίνει βασίζεται στη διαταρακτική ενοποίηση των αλληλεπιδράσεων βαθμίδας. Το βασικότερο μειονέκτημα στη μέθοδο αυτή είναι ότι μπορούμε μόνο να εξάγουμε σχέσεις μεταξύ των σταθερών σύζευξης και όχι να τις προβλέψουμε άμεσα.

Ένα άλλο ενδιαφέρον μοντέλο ενοποίησης είναι η μη διαταρακτική ενοποίηση η οποία προτάθηκε από τους *Maiani, Parisi* και *Petronzio* [65]. Το μοντέλο αυτό (*MPP*) απαιτεί η θεωρία να μην είναι ασυμπτωτικά ελεύθερη. Οι σταθερές σύζευξης σε τέτοιου είδους θεωρίες σε χαμηλές ενέργειες, δεν εξαρτώνται από τις τιμές τους σε υψηλές ενεργειακές κλίμακες. Συνεπώς η ελκυστικότητα αυτού του μοντέλου έγκειται στο ότι μπορούμε να προβλέψουμε άμεσα τις τιμές των παραμέτρων σε χαμηλές ενέργειες, υποθέτοντας τιμές κοντά στη μη διαταρακτική περιοχή ( $\simeq 1$ ) για τις τρέχουσες σταθερές σύζευξης σε υψηλές ενέργειες.

Η βασική απαίτηση αυτού του σεναρίου είναι και το μεγάλο του πρόβλημα. Στο Ελάχιστο Υπερσυμμετρικό Καθιερωμένο Πρότυπο για τρεις γενιές φερμιονίων και δύο διπλετών *Higgs* δεν μπορούμε να επιτύχουμε ασυμπτωτικά μη

---

ελεύθερες σταθερές σύζευξης βαθμίδας. Έχειδειχτεί ότι τουλάχιστον πέντε γενιές φερμιονίων απαιτούνται [66, 67, 68]. Επιπλέον  $N = 2$  υπερσυμμετρικά μοντέλα με τρεις γενιές έχουν μελετηθεί με αρκετά μεγάλη επιτυχία [69]. Ένα σημαντικό πλεονέκτημα της  $N = 2$  υπερσυμμετρίας είναι ότι δίνει μηδενικές συνεισφορές στις συναρτήσεις βήτα πέρα από την προσέγγιση ενός βρόχου [70].

Ένας εναλλακτικός τρόπος να κάνουμε μία θεωρία να μην είναι ασυμπτωτικά ελεύθερη είναι να υποθέσουμε ότι πέρα από μία ενεργειακή κλίμακα  $M_0$  (κλίμακα συμπαγοποίησης) κάνουν αισθητή την παρουσία τους επιπλέον χωρικές διαστάσεις [71]. Τις τελευταίες δεκαετίες οι επιπλέον διαστάσεις έχουν αποκτήσει νέο ενδιαφέρον, λόγω των θεωριών υπερχορδών καθώς και του γεγονότος ότι το μέγεθός τους ενδεχομένως να μην είναι τόσο μικρό και να μπορεί να ανιχνευθεί στον *LHC* ή σε νέους επιταχυντές. Στο Ελάχιστο Υπερσυμμετρικό Καθιερωμένο Πρότυπο γνωρίζουμε ότι οι σταθερές σύζευξης βαθμίδας παρουσιάζουν λογαριθμική εξάρτηση από την ενέργεια. Η ύπαρξη όμως επιπλέον διαστάσεων μέσω της συνεισφοράς των σωματιδίων *Kaluza-Klein* σε διαγράμματα βρόχων οδηγεί σε πολυωνυμική εξάρτηση των σταθερών σύζευξης από την ενέργεια και οι συναρτήσεις βήτα της θεωρίας γίνονται θετικές εξαιτίας της συνεισφοράς των σωματιδίων αυτών τα οποία έχουν μάζα. Επιπρόσθετα οι θεωρίες με επιπλέον διαστάσεις πολύ φυσικά εισάγουν τη  $N = 2$  υπερσυμμετρία.

Η ύπαρξη επιπλέον διαστάσεων, Μεγαλοενοποιημένων Θεωριών καθώς και της υπερσυμμετρίας εμπεριέχονται σε ένα θεωρητικό πλαίσιο το οποίο επεκτείνεται πέρα από το Καθιερωμένο Πρότυπο και είναι αυτό της θεωρίας χορδών. Στη θεωρία αυτή υπάρχουν δέκα διαστάσεις εκ των οποίων οι έξι είναι συμπαγοποιημένες και πολύ μικρές για να παρατηρηθούν πειραματικά. Αντί για σημειακά σωματίδια η θεωρία αυτή κάνει λόγο για μονοδιάστατες χορδές. Επιπλέον στο πλαίσιο της θεωρίας χορδών μπορεί να διατυπωθεί μία συνεπής θεωρία κβαντικής βαρύτητας οι επιδράσεις της οποίας μπορούν να γίνουν σημαντικές στην ενεργειακή κλίμακα *Planck*. Ένα θεωρητικό μοντέλο το οποίο περιλαμβάνει όλα τα προηγούμενα είναι η θεωρία  $F$  [81].

Η πρόσφατη πρόοδος που έχει συντελεστεί στην κατασκευή κατάλληλων μεθόδων μοντελοποίησης της θεωρίας  $F$  [82, 83, 84, 85, 86, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97] έδειξε ότι οι προγενέστερες επιτυχημένες Μεγαλοενοποιημένες Θεωρίες, οι οποίες περιλαμβάνουν την ελάχιστη θεωρία  $SU(5)$  των *Georgi-Glashow*, το μοντέλο  $SO(10)$  καθώς και άλλα θεωρητικά μοντέλα, μπορούν να πραγματοποιηθούν πάνω στον κοσμικό όγκο 7-βρανών οι οποίες με τη σειρά τους περιτυλίγονται γύρω από κατάλληλες συμπαγείς επιφάνειες. Το πιο ενδιαφέρον χαρακτηριστικό αυτών των μοντέλων της θεωρίας  $F$  είναι ότι μπορούν να οριστούν σε μία συμπαγή ελλειπτικά ινοποιήσιμη μιγαδική πολλαπλότητα

---

*Calabi-Yau* τεσσάρων διαστάσεων, όπου μπορούν να ενσωματωθούν οι ομάδες  $E_6, E_7, E_8$  [82, 83, 84, 90]. Συνοψίζοντας, η δομή της διατριβής έχει ως εξής: στο πρώτο κεφάλαιο κάνουμε μία σύντομη περιγραφή του Καθιερωμένου Προτύπου, των εξισώσεων επανακανονικοποίησης καθώς και των Μεγалоενοποιημένων Θεωριών  $SU(5)$ . Στο δεύτερο κεφάλαιο κάνουμε μία ανασκόπηση της υπερσυμμετρίας, της έννοιας του υπερδυναμικού καθώς και του ήπιου σπασίματός της. Στη συνέχεια περιγράφουμε το σωματιδιακό φάσμα στο Ελάχιστο Υπερσυμμετρικό Καθιερωμένο Πρότυπο. Στο τρίτο κεφάλαιο μελετούμε το λόγο της σταθεράς ιδιοσύζευξης του πεδίου *Higgs* προς τη σταθερά σύζευξης βαθμίδας της ομάδας  $U(1)$ . Συμπεραίνοντας ότι ο λόγος αυτός τείνει σε μία σταθερή τιμή για υψηλές ενέργειες, εξετάζουμε την πιθανή εφαρμογή του προγράμματος ελάττωσης του αριθμού των σταθερών σύζευξης στο πλαίσιο του Καθιερωμένου Προτύπου. Συνεχίζοντας, επεκτείνουμε τη μελέτη μας στο Ελάχιστο Υπερσυμμετρικό Καθιερωμένο Πρότυπο, προσπαθώντας να συσχετίσουμε τις σταθερές σύζευξης *Yukawa* του κορυφαίου και χαμηλού κουάρκ, το οποίο επιτυγχάνεται για μεγάλες τιμές της παραμέτρου  $\tan \beta$ .

Στο τέταρτο κεφάλαιο εξετάζουμε την πιθανή ενοποίηση των σταθερών σύζευξης βαθμίδας για τιμές τους στη μη διαταρακτική περιοχή. Το μοντέλο που μελετούμε είναι το Ελάχιστο Υπερσυμμετρικό Καθιερωμένο Πρότυπο επεκτεινόμενο σε επιπλέον διαστάσεις. Συγκεκριμένα εξετάζουμε τη συνεισφορά των σωματιδίων *Kaluza-Klein* στις εξισώσεις επανακανονικοποίησης. Παράλληλα εξετάζουμε τη συμπεριφορά των σταθερών σύζευξης βαθμίδας του υπερσυμμετρικού μοντέλου  $SU(3)^3$  σε επιπλέον διαστάσεις. Εν συνεχεία, στο πέμπτο κεφάλαιο κάνουμε μία περιγραφή των κύριων χαρακτηριστικών της θεωρίας  $F$  και συγκεκριμένα, μοντέλων  $SU(5)$ . Εξετάζουμε τη συνεισφορά των σωματιδίων *Kaluza-Klein* στις εξισώσεις επανακανονικοποίησης των σταθερών σύζευξης βαθμίδας. Οι συνεισφορές αυτές εκφράζονται μέσω μίας τοπολογικά αναλλοίωτης ποσότητας η οποία υπολογίζεται για μία συγκεκριμένη δέση γραμμής. Το μοντέλο που χρησιμοποιούμε περιέχει το σωματιδιακό φάσμα του Ελάχιστου Υπερσυμμετρικού Καθιερωμένου Προτύπου καθώς και ένα ζευγάρι τριπλέτας, αντιτριπλέτας χρώματος. Εν συνέχεια μελετούμε τη συμπεριφορά των σταθερών σύζευξης *Yukawa* του κορυφαίου και χαμηλού κουάρκ, υπολογίζοντας τις μάζες τους. Εν τέλει, συνοψίζουμε με τα συμπεράσματά μας στον επίλογο.



# Περιεχόμενα

<b>1 Το Καθιερωμένο Πρότυπο</b>	<b>5</b>
1.1 Βασικά στοιχεία του Καθιερωμένου Προτύπου . . . . .	5
1.2 Ομάδα συμμετρίας του Καθιερωμένου Προτύπου . . . . .	6
1.3 Αναλλοιωσιμότητα κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας . . . . .	8
1.3.1 Αναλλοιωσιμότητα κάτω από καθολικούς και τοπικούς μετασχηματισμούς $U(1)$ . . . . .	9
1.4 Αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας - μηχανισμός <i>Higgs</i> . . . . .	11
1.4.1 Δημιουργία μαζών για τα διανυσματικά μποζόνια και τα φερμιόνια στο Καθιερωμένο Πρότυπο . . . . .	12
1.5 Σταθερές σύζευξης εξαρτώμενες από την ενέργεια . . . . .	15
1.6 $SU(5)$ Μεγαλοενοποιημένες Θεωρίες . . . . .	17
1.6.1 Η διάσπαση του πρωτονίου . . . . .	19
1.6.2 Υπολογισμός του $\sin^2\theta_W$ . . . . .	19
1.6.3 Αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας $SU(5)$ . . . . .	20
<b>2 Υπερσυμμετρία</b>	<b>23</b>
2.1 Πέρα από το Καθιερωμένο Πρότυπο . . . . .	23
2.2 Αλληλεπιδράσεις και υπερδυναμικό . . . . .	25
2.3 Αλληλεπιδράσεις που σπάνε ήπια την υπερσυμμετρία . . . . .	26
2.4 Ελάχιστο Υπερσυμμετρικό Καθιερωμένο Πρότυπο . . . . .	27
2.4.1 Ήπιο σπάσιμο της υπερσυμμετρίας . . . . .	28
2.4.2 Σπάσιμο της ηλεκτρασθενούς συμμετρίας . . . . .	29
2.4.3 Τα μποζόνια <i>Higgs</i> . . . . .	31



<b>3</b>	<b>Εξισώσεις επανακανονικοποίησης και ελάττωση του αριθμού των σταθερών σύζευξης</b>	<b>33</b>
3.1	Σχέσεις μεταξύ των σταθερών σύζευξης . . . . .	33
3.2	Γενική μέθοδος ελάττωσης του αριθμού των σταθερών σύζευξης	34
3.2.1	Ένα παιδαγωγικό μοντέλο με δύο σταθερές σύζευξης . .	35
3.3	Μελέτη των σταθερών σύζευξης στο Καθιερωμένο Πρότυπο . .	36
3.4	Οι Εξισώσεις Ελάττωσης . . . . .	41
3.4.1	Εφαρμογή των εξισώσεων ελάττωσης στις σταθερές σύζευξης βαθμίδας του Ελάχιστου Υπερσυμμετρικού Καθιερωμένου Προτύπου . . . . .	46
3.4.2	Εφαρμογή των εξισώσεων ελάττωσης στις σταθερές σύζευξης <i>Yukawa</i> του Ελάχιστου Υπερσυμμετρικού Καθιερωμένου Προτύπου . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Το Ελάχιστο Υπερσυμμετρικό Καθιερωμένο Πρότυπο επεκτεινόμενο σε επιπλέον διαστάσεις</b>	<b>55</b>
4.1	Επιπλέον διαστάσεις . . . . .	55
4.2	Βαθμωτά πεδία σε επιπλέον διαστάσεις . . . . .	56
4.3	Φερμιονικά πεδία σε επιπλέον διαστάσεις . . . . .	58
4.4	Μη διαταρακτική ενοποίηση των σταθερών σύζευξης βαθμίδας και επιπλέον διαστάσεις . . . . .	60
4.4.1	Η θεωρία βαθμίδας $SU(3)_C \times SU(3)_L \times SU(3)_R$ και επιπλέον διαστάσεις . . . . .	63
<b>5</b>	<b>Θεωρία <math>F</math></b>	<b>69</b>
5.1	Εισαγωγή . . . . .	69
5.2	Βασικά στοιχεία της θεωρίας $F$ και ελλειπτική ινοποίηση . . . .	71
5.3	Αλγόριθμος του <i>Tate</i> και ομάδες βαθμίδας . . . . .	73
5.4	Ημιτοπικά μοντέλα και η συμμετρία $E_8$ . . . . .	75
5.5	Προσέγγιση φασματικού καλύμματος . . . . .	77
5.5.1	Προσέγγιση φασματικού καλύμματος για το μοντέλο $SU(5)$ . . . . .	80
5.6	Σωματίδια <i>Kaluza-Klein</i> και η ενεργειακή κλίμακα ενοποίησης των σταθερών σύζευξης βαθμίδας . . . . .	82
5.6.1	Ελάττωση της μεγαλοδιάστατης θεωρίας . . . . .	83
5.6.2	Εξισώσεις επανακανονικοποίησης των σταθερών σύζευξης βαθμίδας . . . . .	85
5.6.3	Η συνεισφορά της χειραλικής ύλης . . . . .	92

5.6.4	Ελαφρείς βαθμοί ελευθερίας . . . . .	95
5.7	Εφαρμογή σε ένα ελάχιστο ρεαλιστικό μοντέλο . . . . .	98
5.8	Η ενεργειακή κλίμακα της Μεγαλοενοποιημένης Θεωρίας και οι ροές κατωφλίου . . . . .	102
5.9	Κυματοσυναρτήσεις αλληλοεπικαλυπτόμενων ολοκληρωμάτων . .	104
5.9.1	Οι μάζες του κορυφαίου και χαμηλού κουάρκ . . . . .	108
<b>Α' Παράρτημα</b>		<b>113</b>
A'.1	Αναλυτική λύση των εξισώσεων επανακανονικοποίησης για τις σταθερές σύζευξης <i>Yukawa</i> . . . . .	113
A'.2	Ενοποίηση των σταθερών σύζευξης βαθμίδας . . . . .	117



# Κεφάλαιο 1

## Το Καθιερωμένο Πρότυπο

### 1.1 Βασικά στοιχεία του Καθιερωμένου Προτύπου

Το Καθιερωμένο Πρότυπο (ΚΠ) της σωματιδιακής φυσικής περιγράφει τον κόσμο των στοιχειωδών σωματιδίων. Είναι μία θεωρία πεδίου βαθμίδας, η οποία αποτελείται από την Ηλεκτρασθενή Θεωρία (ΗΘ) και την Κβαντική Χρωμοδυναμική (ΚΧ). Η ΗΘ η οποία προτάθηκε από τους *Glashow, Salam και Weinberg* [1, 2, 3, 4] περιγράφει τις ασθενείς και ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις των κουάρκ και λεπτονίων, ενώ η ΚΧ περιγράφει τις ισχυρές αλληλεπιδράσεις μεταξύ των κουάρκ.

Εν γένει για να κατασκευάσουμε μία θεωρία πεδίου βαθμίδας όπως είναι το ΚΠ, πρέπει αρχικά να επιλέξουμε την ομάδα συμμετρίας, βασιζόμενοι στη συμμετρία που διέπει τις παρατηρούμενες αλληλεπιδράσεις. Στη συνέχεια απαιτούμε η θεωρία να είναι τοπικά αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας της ομάδας συμμετρίας. Κατόπιν επιλέγουμε κατάλληλα το τμήμα εκείνο της θεωρίας που περιλαμβάνει το πεδίο *Higgs* για να εισάγουμε το αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας, έτσι ώστε να δημιουργηθούν οι μάζες των σωματιδίων χωρίς να σπάσουμε επακριβώς την αναλλοιωσιμότητα κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας.

Προσθέτοντας *ad-hoc* όρους μάζας οι οποίοι σπάνε την αναλλοιωσιμότητα κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας, οδηγούμαστε σε μη επανακανονικοποιήσιμες θεωρίες. Στην περίπτωση αυτή οι απειρισμοί της θεωρίας δεν μπορούν να απορροφηθούν από τις παραμέτρους και τα πεδία της θεωρίας μας. Όπως έχει

δειχτεί από τον *G. 't Hooft* [5, 6, 7], κάνοντας χρήση του μηχανισμού *Higgs*, η θεωρία μας είναι πράγματι επανακανονικοποιήσιμη.

## 1.2 Ομάδα συμμετρίας του Καθιερωμένου Προτύπου

Στη φύση μπορούμε να παρατηρήσουμε σωματίδια τα οποία εμφανίζουν παρόμοιες ιδιότητες, γεγονός το οποίο υποδηλώνει την ύπαρξη συμμετριών. Για παράδειγμα τα κουάρκ εμφανίζονται σε τρία χρώματα (ομαδοποίηση σε τριπλέτες), ενώ οι ασθενείς αλληλεπιδράσεις υποδηλώνουν την ομαδοποίηση των λεπτονίων σε διπλέτες. Έτσι οδηγούμαστε στην επιλογή των ομάδων συμμετρίας  $SU(3)$  και  $SU(2)$  για τις ισχυρές και ασθενείς αλληλεπιδράσεις αντίστοιχα.

Συνεπώς το ΚΠ των ισχυρών και ηλεκτρασθενών αλληλεπιδράσεων διέπεται από τη συμμετρία των ακόλουθων μοναδιακών ομάδων<sup>1</sup>:

$$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y.$$

Η ανάγκη για την εισαγωγή των τριών χρωμάτων των κουάρκ προέκυψε λόγω της απαγορευτικής αρχής του *Pauli* η οποία δεν επιτρέπει την ύπαρξη αδρονίων αποτελούμενα από τρία κουάρκ με ταυτόσημους κβαντικούς αριθμούς. Συνεπώς η έννοια του νέου φορτίου χρώματος έλυσε το πρόβλημα [8]. Αν και ο κβαντικός αριθμός του χρώματος εισήχθη *ad-hoc* για τον παραπάνω λόγο, αργότερα έγινε εμφανές ότι ο ρόλος του ήταν πιο θεμελιώδης. Οι θεμελιώδεις αλληλεπιδράσεις καθώς και τα αντίστοιχα φορτία και τα διανυσματικά μποζόνια φαίνονται στον πίνακα 1.1.

Το χρώμα δρά ως πηγή των πεδίων της ισχυρής αλληλεπίδρασης, όπως το ηλεκτρικό φορτίο δρά ως πηγή του ηλεκτρικού πεδίου. Το φορτίο των ασθενών αλληλεπιδράσεων είναι η τρίτη συνιστώσα του ασθενούς ισοσπίν,  $T_3$ . Οι ασθενείς αλληλεπιδράσεις ενεργούν μόνο σε αριστερόστροφα σωματίδια τα οποία εμφανίζονται ως διπλέτες, ενώ τα δεξιόστροφα σωματίδια εμφανίζονται ως απλές (*singlets*) (βλέπε πίνακα 1.2).

<sup>1</sup>Η δράση των μοναδιακών μετασχηματισμών έγκειται στο να περιστρέφουν τα διανύσματα, αφήνοντας όμως το μήκος τους αναλλοίωτο. Η ορίζουσα των πινάκων της ομάδας συμμετρίας  $SU(N)$  είναι +1.

Αλληλεπιδράσεις			
	ισχυρή	ηλεκτρασθενής	βαρυτική
Θεωρία	KX	HΘ	Κβαντική βαρύτητα (;)
Συμμετρία	SU(3)	SU(2) × U(1)	(;)
Διανυσματικά μποζόνια	$G_\mu^\alpha, \alpha = 1, \dots, 8$ (γκλουόνια)	$B_\mu$ $W_\mu^i, i = 1, 2, 3$	$g$ (βαρυτόνιο)
Φορτίο	χρώμα	ασθενές ισοσπίν ασθενές υπερφορτίο	μάζα

Πίνακας 1.1: Οι θεμελιώδεις αλληλεπιδράσεις με τις αντίστοιχες συμμετρίες, τα διανυσματικά μποζόνια και φορτία (ο πίνακας είναι από την αναφορά [9]).

Το φορτίο της  $U(1)_Y$  είναι το ασθενές υπερφορτίο  $Y_W$ , το οποίο σχετίζεται με το ηλεκτρικό φορτίο μέσω της σχέσης *Gell-Mann-Nishijima*:

$$Q = T_3 + \frac{Y_W}{2}.$$

Οι κβαντικοί αριθμοί των σωματιδίων του ΚΠ συνοψίζονται στον πίνακα 1.2.

Ελικότητα	Οικογένειες			Κβαντικοί αριθμοί		
	1η	2η	3η	$Q$	$T_3$	$Y_W$
$L$	$\nu_e$	$\nu_\mu$	$\nu_\tau$	0	1/2	-1
	$e$	$\mu$	$\tau$	-1	-1/2	-1
	$u$	$c$	$t$	2/3	1/2	1/3
	$d$	$s$	$b$	-1/3	-1/2	1/3
$R$	$e$	$\mu$	$\tau$	-1	0	-2
	$u$	$c$	$t$	2/3	0	4/3
	$d$	$s$	$b$	-1/3	0	-2/3

Πίνακας 1.2: Τα πεδία ύλης και οι κβαντικοί τους αριθμοί στο ΚΠ.

## 1.3 Αναλλοιωσιμότητα κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας

Η Λαγκρανζιανή  $\mathcal{L}$  ενός ελεύθερου (μη αλληλεπιδρώντος) φερμιονικού πεδίου μπορεί να γραφεί ως

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi \quad (1.1)$$

όπου ο πρώτος όρος αναπαριστά τον κινητικό όρο και ο δεύτερος όρος τον όρο μάζας. Οι εξισώσεις *Euler-Lagrange* για αυτή τη Λαγκρανζιανή οδηγούν στην εξίσωση *Dirac* για ένα ελεύθερο φερμιόνιο. Αυθαίρετες στροφές των καταστάσεων μπορούν να αναπαρασταθούν ως

$$U \equiv e^{-iaD} = e^{-i\sum_{k=1}^{N^2-1} a_k D_k} \quad (1.2)$$

όπου  $a_i$  είναι οι παράμετροι της στροφής και  $D_i$  είναι οι πίνακες της στροφής. Στην περίπτωση της ομάδας  $SU(3)$  οι πίνακες  $D_i$  είναι οι οκτώ  $3 \times 3$  πίνακες  $\lambda_i$  *Gell-Mann* και οι τρεις πίνακες *Pauli*  $\tau_i$  για την ομάδα  $SU(2)$ . Η Λαγκρανζιανή παραμένει αναλλοίωτη κάτω από ένα μετασχηματισμό  $SU(N)$  αν ισχύει

$$\mathcal{L}(\Psi') = \mathcal{L}(\Psi)$$

όπου  $\Psi' = U\Psi$ . Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι ο όρος μάζας είναι αναλλοίωτος κάτω από αυτόν το μετασχηματισμό

$$m\bar{\Psi}'\Psi' = m\bar{\Psi}U^\dagger U\Psi = m\bar{\Psi}\Psi$$

επειδή ισχύει  $U^\dagger U = 1$  για μοναδιαίους πίνακες. Κάνοντας πράξεις και για τον κινητικό όρο έχουμε:

$$\bar{\Psi}U^\dagger\gamma^\mu\partial_\mu U\Psi = \bar{\Psi}U^\dagger U\gamma^\mu\partial_\mu\Psi = \bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi.$$

Συμπεραίνουμε ότι και ο κινητικός όρος παραμένει αναλλοίωτος κάτω από το μετασχηματισμό. Ωστόσο θα μπορούσαμε να απαιτήσουμε τοπική αντί για καθολική αναλλοιωσιμότητα κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας, υπονοώντας ότι οι αλληλεπιδράσεις πρέπει να παραμένουν αναλλοίωτες κάτω από στροφές για κάθε σωματίδιο ξεχωριστά. Δηλαδή οι αλληλεπιδράσεις πρέπει να είναι οι ίδιες για σωματίδια τα οποία ανήκουν στην ίδια μαλτιπλέτα της ομάδας συμμετρίας.

Για παράδειγμα, η αλληλεπίδραση μεταξύ ενός πράσινου και ενός μπλε κουάρκ πρέπει να είναι η ίδια με την αλληλεπίδραση μεταξύ ενός πράσινου και ενός κόκκινου κουάρκ. Συνεπώς θα πρέπει να είναι επιτρεπτό να εκτελεστεί ένας τοπικός μετασχηματισμός χρώματος για ένα κουάρκ. Ως αποτέλεσμα αυτής της τοπικής αναλλοιωσιμότητας πρέπει να εισαχθούν ενδιάμεσα διανυσματικά μποζόνια των οποίων οι κβαντικοί αριθμοί χαρακτηρίζουν πλήρως τις πιθανές αλληλεπιδράσεις μεταξύ των πεδίων ύλης.

Όπως διατυπώνεται στην αναφορά [9] διαισθητικά μπορούμε να κατανοήσουμε τα παραπάνω ως εξής: ας σκεφτούμε ένα αδρόνιο το οποίο αποτελείται από μία τριπλέτα χρώματος κουάρκ σε μία κατάσταση δίχως χρώμα. Μία ολική στροφή όλων των πεδίων κουάρκ θα αφήσει αυτή την άχρωμη κατάσταση αναλλοιώτη. Ωστόσο αν ένα κουάρκ περιστραφεί τοπικά, τότε η προαναφερθείσα κατάσταση παύει να είναι άχρωμη πλέον. Στην περίπτωση όμως που κάποιο μήνυμα σταλεί στα άλλα κουάρκ να αλλάξουν και αυτά το χρώμα τους, τότε η βασική κατάσταση θα είναι πάλι άχρωμη. Έτσι θα μπορούσαμε πολύ παραστατικά να πούμε ότι οι αγγελιοφόροι αυτού του μηνύματος είναι τα γκλουόνια στην  $SU(3)$ , τα οποία χαρακτηρίζονται και αυτά από τον κβαντικό αριθμό του χρώματος. Κατά συνέπεια μία τοπική περιστροφή των κουάρκ αντισταθμίζεται από τα γκλουόνια.

### 1.3.1 Αναλλοιωσιμότητα κάτω από καθολικούς και τοπικούς μετασχηματισμούς $U(1)$

Η Λαγκρανζιανή του ελεύθερου ηλεκτρονίου που δίνεται από τη σχέση (1.1) είναι αναλλοιώτη κάτω από το μετασχηματισμό φάσης

$$\Psi(x) \rightarrow e^{ia}\Psi(x)$$

όπου  $a$  είναι μία πραγματική σταθερά. Όντως, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι:

$$\begin{aligned}\partial_\mu \Psi(x) &\rightarrow e^{ia} \partial_\mu \Psi(x) \\ \bar{\Psi}(x) &\rightarrow e^{-ia} \bar{\Psi}(x).\end{aligned}$$

Η οικογένεια των μετασχηματισμών φάσης  $U(a) \equiv e^{ia}$ , όπου η παράμετρος  $a$  μπορεί να πάρει όλες τις τιμές των πραγματικών αριθμών, αποτελεί μία μοναδιακή Αβελιανή ομάδα, γνωστή ως ομάδα  $U(1)$ . Στη συνέχεια εξετάζουμε την περίπτωση όπου ο μετασχηματισμός φάσης γενικεύεται ως

$$\Psi(x) \rightarrow e^{ia(x)}\Psi(x)$$



όπου τώρα το  $a(x)$  εξαρτάται από το χώρο και το χρόνο. Αυτός ο μετασχηματισμός ονομάζεται τοπικός μετασχηματισμός βαθμίδας. Θα δούμε όμως ότι η Λαγκρανζιανή δεν παραμένει αναλλοίωτη κάτω από αυτόν το μετασχηματισμό. Από τα παραπάνω έχουμε

$$\bar{\Psi}(x) \rightarrow e^{-ia(x)}\bar{\Psi}(x)$$

και ξεκάθαρα βλέπουμε ότι ο όρος μάζας της (1.1) παραμένει αναλλοίωτος σε αντίθεση με τον κινητικό. Η παράγωγος ως προς το  $\Psi$  γίνεται

$$\partial_\mu \Psi(x) \rightarrow e^{ia(x)}\partial_\mu \Psi(x) + ie^{ia(x)}\Psi(x)\partial_\mu a \quad (1.3)$$

συνεπώς ο δεύτερος όρος σπάει την αναλλοιωσιμότητα της Λαγκρανζιανής. Άρα πρέπει να ψάξουμε για μία τροποποιημένη παράγωγο  $D_\mu$ , η οποία να μετασχηματίζεται συναλλοίωτα κάτω από μετασχηματισμούς φάσης, δηλαδή ως:

$$D_\mu \Psi(x) \rightarrow e^{ia(x)}D_\mu \Psi(x). \quad (1.4)$$

Για να δημιουργήσουμε αυτή τη συναλλοίωτη παράγωγο  $D_\mu$ , πρέπει να εισάγουμε ένα διανυσματικό πεδίο  $A_\mu$  του οποίου οι ιδιότητες κάτω από τους μετασχηματισμούς να είναι τέτοιες ώστε να απαλοίφει το δεύτερο όρο στη σχέση (1.3). Αυτό μπορεί να επιτευχθεί ορίζοντας τη συναλλοίωτη παράγωγο ως εξής

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - ieA_\mu \quad (1.5)$$

όπου το  $A_\mu$  μετασχηματίζεται ως:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu a.$$

Συνεχίζοντας, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι η συναλλοίωτη παράγωγος ικανοποιεί τη σχέση (1.4):

$$\begin{aligned} D_\mu \Psi(x) &= (\partial_\mu - ieA_\mu)\Psi(x) = e^{ia(x)}\partial_\mu \Psi(x) + ie^{ia(x)}\Psi(x)\partial_\mu a \\ &\quad - (ie)e^{ia(x)}A_\mu \Psi(x) - \frac{1}{e} e^{ia(x)}\Psi(x)\partial_\mu a(x) = \\ &= e^{ia(x)}(\partial_\mu - ieA_\mu)\Psi(x) = e^{ia(x)}D_\mu \Psi(x). \end{aligned}$$

## 1.4 Αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας - μηχανισμός *Higgs*

Το πρόβλημα της μάζας για τα φερμιόνια και τα μποζόνια της ασθενούς αλληλεπίδρασης μπορεί να επιλυθεί, αν υποθέσουμε ότι οι μάζες προκύπτουν δυναμικά μέσω της αλληλεπίδρασης με ένα βαθμωτό πεδίο. Το πεδίο αυτό υποθέτουμε ότι βρίσκεται παντού στο κενό, στο χώρο δηλαδή όπου οι αλληλεπιδράσεις λαμβάνουν χώρα. Το κενό ή ισοδύναμα η κατάσταση με τη χαμηλότερη ενέργεια (*ground state*) μπορεί να περιγραφεί από ένα μη μηδενικό (βαθμωτό) πεδίο το οποίο αναπαρίσταται ως  $\Phi = v e^{i\phi}$ , όπου  $v$  είναι η αναμενόμενη τιμή του κενού ( $\langle \nu \nu \rangle$ ). Η βασική ιδέα είναι ότι το πεδίο αυτό παραβιάζει τη συμμετρία της Λαγκρανζιανής. Το ίδιο ελάχιστο μπορεί να επιτευχθεί για μία οποιαδήποτε τιμή της φάσης  $\phi$ , συνεπώς υπάρχουν άπειρες αλλά ισοδύναμες καταστάσεις ελάχιστης ενέργειας. Υπάρχουν πολλά φυσικά συστήματα στα οποία η θεμελιώδης κατάσταση έχει μικρότερη συμμετρία από τη συμμετρία που παρουσιάζει το σύστημα. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας (*spontaneous symmetry breaking*).

Ο εκφυλισμός αυτός της κατάστασης χαμηλότερης ενέργειας, είναι ιδιαίτερα σημαντικός στην κβαντική θεωρία πεδίου, διότι το κενό πρέπει να είναι μοναδικό, επομένως η φάση δεν μπορεί να ορίζεται αυθαίρετα σε κάθε σημείο του χώρου. Εφόσον επιλέξουμε μία συγκεκριμένη τιμή για τη φάση, θα πρέπει να παραμείνει η ίδια παντού, δεν μπορεί να αλλάξει τοπικά. Συνεπώς ένα βαθμωτό πεδίο με μη μηδενική αναμενόμενη τιμή του κενού σπάει την αναλλοιωτότητα κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας. Στη φύση υπάρχουν πολλά παραδείγματα σπασμένων συμμετριών. Ένα πολύ χαρακτηριστικό είναι αυτό της υπεραγωγιμότητας, το οποίο βρήκε εφαρμογή στη φυσική στοιχειωδών σωματιδίων από τον *Peter Higgs* και άλλους [10, 11, 12, 13].

Στη συνέχεια θεωρούμε ένα απλό μοντέλο με ένα βαθμωτό πεδίο [14] το οποίο περιγράφεται από τη Λαγκρανζιανή

$$\mathcal{L} \equiv T - V = \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi)^2 - \left( \frac{1}{2} \mu^2 \Phi^2 + \frac{1}{4} \lambda \Phi^4 \right)$$

όπου  $\mu$  είναι η μάζα του πεδίου και  $\lambda > 0$  είναι η σταθερά ιδιοσύζευξης του. Το δυναμικό έχει παραβολικό σχήμα αν  $\mu^2 > 0$  και η κατάσταση ελάχιστης ενέργειας αντιστοιχεί στο ολικό ελάχιστο:

$$\Phi = 0.$$

Στην περίπτωση που  $\mu^2 < 0$  το δυναμικό έχει δύο ελάχιστα, τα οποία ικανοποιούν την παρακάτω σχέση:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \Phi} &= \Phi (\mu^2 + \lambda \Phi^2) = 0 \Rightarrow \\ \Phi &= \pm v, \quad v = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Το ακρότατο  $\Phi = 0$  δεν αντιστοιχεί πλέον στο ελάχιστο του δυναμικού και επιλέγοντας μία από τις δύο τιμές  $\Phi = \pm v$ , προκύπτει ένα μοναδικό σημείο στο ελάχιστο του δυναμικού (*Mexican hat*) το οποίο αναπαριστά ένα κενό με μη μηδενική αναμενόμενη τιμή και με μία καλά καθορισμένη φάση, σπάζοντας έτσι την αρχική συμμετρία.

### 1.4.1 Δημιουργία μαζών για τα διανυσματικά μποζόνια και τα φερμιόνια στο Καθιερωμένο Πρότυπο

Μετά από την προηγούμενη γενική και σύντομη περιγραφή για το αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας και το μηχανισμό *Higgs*, θα μελετήσουμε τη διαδικασία που απαιτείται για να σπάσουμε τη συμμετρία  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  στη συμμετρία του ηλεκτρομαγνητισμού  $U(1)_{em}$ .

Η τελευταία πρέπει να έχει μόνο ένα άμαζο διανυσματικό μποζόνιο, το οποίο είναι το φωτόνιο, ενώ τα μποζόνια  $W^\pm$  και  $Z^0$  πρέπει να αποκτήσουν μάζα. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί επιλέγοντας το  $\Phi$  να είναι μία μιγαδική  $SU(2)$  διπλέτα με υπερφορτίο  $Y_W = 1$  [9, 14]

$$\Phi(x) \equiv \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$$

όπου:

$$\phi^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i\phi_2), \quad \phi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_3 + i\phi_4). \quad (1.7)$$

Συνεχίζοντας, γράφουμε την ακόλουθη Λαγκρανζιανή για το βαθμωτό πεδίο *Higgs*

$$\mathcal{L}_{\text{βαθμωτό}} = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - V(\Phi^\dagger \Phi) \quad (1.8)$$

όπου:

$$V(\Phi^\dagger \Phi) = \mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2.$$

Ο πρώτος όρος είναι ο συνήθης κινητικός όρος. Αντί για τη συνήθη παράγωγο έχουμε χρησιμοποιήσει τη συναλλοίωτη παράγωγο, έτσι ώστε να έχουμε αναλλοιωσιμότητα κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας  $SU(2) \times U(1)$ . Η συναλλοίωτη παράγωγος μπορεί να γραφεί ως

$$D_\mu = \partial_\mu - i\frac{g'}{2}B_\mu Y_W - i\frac{g}{2}W_\mu \cdot \tau \quad (1.9)$$

όπου  $B_\mu$ ,  $W_\mu$  είναι τα μποζόνια για τις ομάδες  $U(1)$ ,  $SU(2)$  αντίστοιχα και  $g'$ ,  $g$ , είναι οι αντίστοιχες σταθερές σύζευξης. Η κατάσταση ελάχιστης ενέργειας του  $\Phi$  πρέπει να είναι της μορφής  $(0, v)$  έτσι ώστε να μη σπάει η συμμετρία του ηλεκτρομαγνητισμού.

Οι κβαντικές διακυμάνσεις του πεδίου γύρω από την κατάσταση ελάχιστης ενέργειας μπορούν να παραμετροποιηθούν ως ακολούθως, συμπεριλαμβάνοντας έναν αυθαίρετο  $SU(2)$  παράγοντα φάσης:

$$\Phi = e^{i\theta(x)\cdot\tau} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix}.$$

Τα πραγματικά πεδία  $\theta(x)$  αποτελούν διεγέρσεις του πεδίου κατά μήκος της διεύθυνσης του ελάχιστου του δυναμικού. Αντιστοιχούν στα άμαζα μποζόνια *Goldstone* μίας καθολικής συμμετρίας. Ωστόσο σε μία τοπική θεωρία βαθμίδας αυτά τα άμαζα μποζόνια μπορούν να απαλοιφθούν κάνοντας μία κατάλληλη στροφή:

$$\Phi' = e^{-i\theta(x)\cdot\tau} \Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς το πεδίο  $\theta$  δεν έχει καμία φυσική σημασία. Μόνο το πραγματικό πεδίο  $h(x)$  μπορεί να ερμηνευτεί ως ένα πραγματικό (*Higgs*) σωματίδιο. Το αρχικό πεδίο  $\Phi$  με τέσσερις βαθμούς ελευθερίας έχει χάσει τους τρεις, οι οποίοι θα δώσουν τα τρία βαρέα διανυσματικά μποζόνια. Το κινητικό μέρος της σχέσης (1.8) θα παράξει τους όρους μάζας για τα διανυσματικά μποζόνια, δίνοντας:

$$\begin{aligned} |(-i\frac{g'}{2}B_\mu - i\frac{g}{2}W_\mu \cdot \tau)\Phi|^2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{gv}{2}\right)^2 [(W_\mu^1)^2 + (W_\mu^2)^2] + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{v}{2}\right)^2 (-gW_\mu^3 + g'B_\mu)(-gW_\mu^3 + g'B_\mu). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Στη συνέχεια ορίζουμε τα νέα πεδία  $W_\mu^\pm$ ,  $Z_\mu$  και  $A_\mu$  ως

$$W_\mu^\pm = \frac{W_\mu^1 \mp iW_\mu^2}{\sqrt{2}}, \quad Z_\mu = \frac{gW_\mu^3 - g'B_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad A_\mu = \frac{g'W_\mu^3 + gB_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad (1.11)$$

καταλήγοντας σε όρους μάζας

$$M_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{1}{2} (A_\mu \quad Z_\mu) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_Z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^\mu \\ Z^\mu \end{pmatrix}$$

όπου:

$$M_W = \frac{1}{2} g v, \quad M_Z = \frac{\sqrt{g'^2 + g^2}}{2} v. \quad (1.12)$$

Το μη φορτισμένο τμήμα της Λαγκρανζιανής εκπεφρασμένο σε όρους των φυσικών πεδίων μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{αλληλεπίδρασης}} = & -A_\mu [g' \cos \theta_W (\bar{e}_R \gamma^\mu e_R + \frac{1}{2} \bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L + \frac{1}{2} \bar{e}_L \gamma^\mu e_L) - \\ & \frac{1}{2} g \sin \theta_W (\bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L - \bar{e}_L \gamma^\mu e_L)] + Z_\mu [g' \sin \theta_W (\bar{e}_R \gamma^\mu e_R + \frac{1}{2} \bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L + \\ & \frac{1}{2} \bar{e}_L \gamma^\mu e_L) + \frac{1}{2} g \cos \theta_W (\bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L - \bar{e}_L \gamma^\mu e_L)]. \end{aligned}$$

Το φωτόνιο πρέπει να συζεύγνυται μόνο με τα ηλεκτρόνια και όχι με τα νετρίνα, οπότε οι όροι οι οποίοι είναι ανάλογοι των  $g' \cos \theta_W$  και  $g \sin \theta_W$  εξαλείφονται και η σύζευξη με τα ηλεκτρόνια είναι το ηλεκτρικό φορτίο  $e$ . Αυτό επιτυγχάνεται απαιτώντας

$$g' \cos \theta_W = g \sin \theta_W = e \quad (1.13)$$

οπότε προκύπτουν:

$$\tan \theta_W = \frac{g'}{g}, \quad \sin^2 \theta_W = \frac{g'^2}{g^2 + g'^2}, \quad e = \frac{g g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}. \quad (1.14)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1.12)-(1.14) έχουμε:

$$M_W = \cos \theta_W M_Z, \quad \sin^2 \theta_W = 1 - \frac{M_W^2}{M_Z^2}. \quad (1.15)$$

Επιπλέον τα φερμιόνια αλληλεπιδρούν με το βαθμωτό πεδίο *Higgs* με μία σταθερά σύζευξης *Yukawa*. Η Λαγκρανζιανή για τις αλληλεπιδράσεις των λεπτονίων με το πεδίο *Higgs* μπορεί να γραφεί ως:

$$\mathcal{L}_{\text{ηλεκτρονίου}} = -h_e (\bar{L} \Phi e_R + \bar{e}_R \Phi^\dagger L). \quad (1.16)$$

Αντικαθιστώντας την αναμενόμενη τιμή του βαθμωτού πεδίου καταλήγουμε:

$$\frac{-h_e}{\sqrt{2}} \left[ (\bar{\nu}_L \ \bar{e}_L) \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} e_R + \bar{e}_R (0 \ v) \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} \right] = \frac{-h_e v}{\sqrt{2}} (\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L) = \frac{-h_e v}{\sqrt{2}} \bar{e} e.$$

Η σταθερά σύζευξης *Yukawa*  $h_e$  είναι μία ελεύθερη παράμετρος για την οποία πρέπει να ισχύει η σχέση  $m_e = h_e v \sqrt{2}$ . Συνεπώς η σύζευξη του πεδίου *Higgs* με τα φερμιόνια είναι ανάλογη των μαζών των φερμιονίων.

## 1.5 Σταθερές σύζευξης εξαρτώμενες από την ενέργεια

Στην Κβαντική Θεωρία Πεδίου (ΚΘΠ) οι σταθερές σύζευξης εξαρτώνται από την ενέργεια (ή ισοδύναμα την απόσταση) μέσω διορθώσεων που εισάγονται από αλληλεπιδράσεις ανώτερης τάξης (*loop corrections*). Στην Κβαντική Ηλεκτροδυναμική (ΚΗ) για παράδειγμα η σταθερά σύζευξης αυξάνεται με την αύξηση της ενέργειας, σε αντίθεση με την ΚΧ που μειώνεται. Ένα απλό παράδειγμα το οποίο αναπαριστά με γλαφυρό τρόπο την εξάρτηση αυτή, αποτελεί το ηλεκτρικό πεδίο το οποίο δημιουργείται από ένα σημειακό ηλεκτρικό φορτίο. Γνωρίζουμε ότι το πεδίο αυτό αποκλίνει ως  $1/r$ . Σε ένα τόσο ισχυρό πεδίο ο ζεύγη ηλεκτρονίων-ποζιτρονίων δημιουργούνται σε ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα, το οποίο καθορίζεται από την αρχή της αβεβαιότητας του *Heisenberg*. Αυτά τα δυνητικά ζεύγη προσανατολίζουν τον εαυτό τους στο ηλεκτρικό πεδίο, δημιουργώντας έτσι τη λεγόμενη πόλωση του κενού. Η πόλωση αυτή θωρακίζει το φορτίο. Εάν κάποιος παρατηρητής βρεθεί σε μικρότερη απόσταση (υψηλότερη ενέργεια) θα διεισδύσει περισσότερο μέσα σε αυτό το πολωμένο κενό και θα παρατηρήσει περισσότερο φορτίο από το γυμνό φορτίο ή διαφορετικά η σταθερά σύζευξης της αλληλεπίδρασης θα αυξηθεί.

Η εξάρτηση των σταθερών σύζευξης από την ενέργεια περιγράφεται από τις εξισώσεις επανακανονικοποίησης. Στην ΚΘΠ οι συναρτήσεις *Green* είναι ποσότητες που αποκλίνουν. Ο συστηματικός τρόπος για να απαλειφθούν αυτοί οι απειρισμοί, ονομάζεται επανακανονικοποίηση. Η επανακανονικοποίηση μίας θεωρίας βασίζεται στην επιλογή μίας αυθαίρετης ενεργειακής κλίμακας επανακανονικοποίησης. Η Φυσική όμως δε θα πρέπει να εξαρτάται από αυτή την αυθαίρετη επιλογή, συνεπώς πρέπει να παραμένει αναλλοίωτη. Η αναλλοιωσιμότητα αυτή οδηγεί στην ομάδα επανακανονικοποίησης (*Renormalization Group*). Αποτελεί μία πολύ χρήσιμη μέθοδο για να εξετάσουμε τη Φυσική σε υψηλές ενεργειακές κλίμακες, οι οποίες βρίσκονται εκτός της ενεργειακής περιοχής που

είναι προσβάσιμη από τα ήδη τρέχοντα πειράματα. Συνεπώς συγκρίνοντας κανείς τις πειραματικά μετρούμενες ποσότητες με αυτές που προβλέπονται από κάποια πιθανή θεωρία σε υψηλότερες ενέργειες, μπορεί να εξάγει συμπεράσματα για την εγκυρότητα αυτής της θεωρίας. Στο ΚΠ αρχικά και στο Ελάχιστο Υπερσυμμετρικό Καθιερωμένο Πρότυπο (ΕΥΚΠ) αργότερα, η ενοποίηση των σταθερών σύζευξης βαθμίδας σε μία πολύ υψηλή ενεργειακή κλίμακα, ίσως αποτελεί ένδειξη για την ύπαρξη Μεγαλοενοποιημένων θεωριών (ΜΕΘ) καθώς και της υπερσυμμετρίας.

Στο ΚΠ η εξάρτηση των σταθερών σύζευξης βαθμίδας  $g_i$  από την ενέργεια  $E$  δίνεται από τις εξισώσεις επανακανονικοποίησης (συναρτήσεις βήτα)

$$16\pi^2 \frac{dg_i}{dt} = b_i g_i^3 \equiv \beta(g_i) \quad (1.17)$$

όπου  $t = \ln E$  και ο δείκτης  $i = 1, 2, 3$  σχετίζεται με τις τρεις ομάδες συμμετρίας του ΚΠ  $U(1)_Y, SU(2)_L, SU(3)_C$ . Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφεί ως

$$\frac{d}{dt} \alpha_i^{-1}(t) = -\frac{b_i}{2\pi} \quad (1.18)$$

όπου  $\alpha_i = \frac{g_i^2}{4\pi}$ . Χρησιμοποιώντας τις πειραματικά μετρούμενες τιμές των σταθερών σύζευξης στην ενεργειακή κλίμακα  $M_Z$  ως συνοριακές συνθήκες, λύνουμε την παραπάνω διαφορική εξίσωση και βρίσκουμε:

$$\alpha_i^{-1}(t) = \alpha_i^{-1}(t_{M_Z}) - \frac{b_i}{2\pi}(t - t_{M_Z}). \quad (1.19)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις οι συντελεστές των συναρτήσεων βήτα  $b_i$  (ενός βρόχου) υπολογίζονται [15, 16, 17] από τη σχέση

$$b_i = -\frac{11}{3} C_2(G) + \frac{2}{3} n_f C_2(r) + \frac{1}{3} n_s C_2(r) \quad (1.20)$$

όπου  $C_2(r)$  είναι ο τετραγωνικός τελεστής *Casimir* για την αναπαράσταση  $r$  και ο  $C_2(G)$  για την *adjoint* αναπαράσταση αντίστοιχα. Επίσης  $n_f$  είναι ο αριθμός των χειραλικών φερμιονίων και  $n_s$  είναι ο αριθμός των βαθμωτών πεδίων που συνεισφέρουν στη συνάρτηση βήτα.

Οι γεννήτορες μίας ομάδας βαθμίδας ικανοποιούν τις επόμενες σχέσεις:

$$Tr[t_r^a t_r^b] = C(r) \delta^{ab}, \quad \sum_a t_r^a t_r^a = C_2(r) I. \quad (1.21)$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις καταλήγουμε

$$C_2(r)d(r) = C(r)d(G) \quad (1.22)$$

όπου  $d(G)$  είναι ο αριθμός των γεννητόρων ( $N^2 - 1$  το πλήθος) της  $SU(N)$ , ισοδύναμος με τη διάσταση της *adjoint* αναπαράστασης και  $d(r)$  είναι η διάσταση της αναπαράστασης,  $r \equiv N$ . Οι γεννήτορες της  $SU(2)$  υπακούουν τη σχέση:

$$\text{Tr}\left[\frac{\tau^a}{2}\frac{\tau^b}{2}\right] = \frac{1}{2}\delta^{ab}. \quad (1.23)$$

Οι γεννήτορες της  $SU(N)$  οι οποίοι θα περιέχουν τους γεννήτορες της  $SU(2)$ , θα υπακούουν και αυτοί τη σχέση (1.23), οπότε για τη θεμελιώδη αναπαράσταση βρίσκουμε:

$$C(r) = \frac{1}{2}, \quad C_2(N) = \frac{N^2 - 1}{2N}. \quad (1.24)$$

Αντίστοιχα για την *adjoint* αναπαράσταση ισχύει  $C_2(G) = N$ . Τελικά για το ΚΠ οι συντελεστές της συνάρτησης βήτα δίνονται ως:

$$\begin{pmatrix} b_Y \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41/10 \\ -19/6 \\ -7 \end{pmatrix}. \quad (1.25)$$

## 1.6 $SU(5)$ Μεγαλοενοποιημένες Θεωρίες

Παρόλη την πολύ μεγάλη επιτυχία που είχαν οι προβλέψεις του ΚΠ συγκρινόμενες με τις πειραματικές μετρήσεις, υπάρχουν κάποιες αδυναμίες του μοντέλου οι οποίες δεν μπορούν να εξηγηθούν στο πλαίσιο αυτής της θεωρίας. Μία από τις βασικότερες είναι η ύπαρξη τριών ανεξάρτητων ομάδων συμμετρίας, καθώς και η εμφανής σύγκλιση των σταθερών σύζευξης βαθμίδας σε μία υψηλή ενεργειακή κλίμακα. Μία επίσης σημαντική αδυναμία είναι η ύπαρξη μεγάλου αριθμού ελεύθερων παραμέτρων. Αυτές καθώς και άλλες ατέλειες του ΚΠ η επιστημονική κοινότητα προσπάθησε να εξηγήσει επεκτείνοντας την υπάρχουσα θεωρία. Η βασική ιδέα ήταν να εμβαπτιστούν οι τρεις ομάδες συμμετρίας σε μία μεγαλύτερη ομάδα με μία μοναδική σταθερά σύζευξης βαθμίδας. Έτσι οδηγηθήκαμε στις ΜΕΘ, εκ των οποίων η πρώτη η οποία προτάθηκε ήταν το μοντέλο  $SU(5)$  των *Georgi-Glashow* [18] η οποία περιέχει την ομάδα συμμετρίας του ΚΠ:

$$SU(5) \supset SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y.$$



Στην ομάδα αυτή τα 15 σωματίδια και αντισωματίδια της πρώτης γενιάς μπορούν να τοποθετηθούν σε μία πενταπλέτα και μία δεκαπλέτα αντίστοιχα:

$$\bar{5} = \begin{pmatrix} d_g^c \\ d_r^c \\ d_b^c \\ e^- \\ -\nu_e \end{pmatrix}, \quad 10 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & u_b^c & -u_r^c & -u_g & -d_g \\ -u_b^c & 0 & u_g^c & -u_r & -d_r \\ u_r^c & -u_g^c & 0 & -u_b & -d_b \\ u_g & u_r & u_b & 0 & -e^+ \\ d_g & d_r & d_b & e^+ & 0 \end{pmatrix}.$$

Ο εκθέτης  $c$  χαρακτηρίζει το συζυγές φορτισμένο σωματίδιο και όλα τα σωματίδια έχουμε επιλέξει να είναι αριστερόστροφα. Η αποσύνθεση αυτών των μαλτιπλετών κάτω από την ομάδα συμμετρίας του ΚΠ δίνεται ως:

$$\bar{5} \equiv (\bar{3}, 1, \frac{1}{3}) \oplus (1, 2, -\frac{1}{2}), \quad 10 \equiv (1, 1, 1) \oplus (\bar{3}, 1, -\frac{2}{3}) \oplus (3, 2, \frac{1}{6}).$$

Οι στροφές  $SU(5)$  αναπαρίστανται από  $5 \times 5$  πίνακες με μηδενικό ίχνος. Τοπική αναλλοιωσιμότητα κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας απαιτεί την εισαγωγή εικοσιτεσσάρων πεδίων βαθμίδας τα οποία διαδίδουν την αλληλεπίδραση μεταξύ των πεδίων ύλης. Τα πεδία αυτά μετασχηματίζονται κάτω από την *adjoint* αναπαράσταση [19] η οποία μπορεί να γραφεί με τη μορφή πίνακα ως:

$$24 = \begin{pmatrix} G_{11} - \frac{2B}{\sqrt{30}} & G_{12} & G_{13} & X_1^C & Y_1^C \\ G_{21} & G_{22} - \frac{2B}{\sqrt{30}} & G_{23} & X_2^C & Y_2^C \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} - \frac{2B}{\sqrt{30}} & X_3^C & Y_3^C \\ X_1 & X_2 & X_3 & \frac{W^3}{\sqrt{2}} + \frac{3B}{\sqrt{30}} & W^+ \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & W^- & -\frac{W^3}{\sqrt{2}} + \frac{3B}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}.$$

Αντίστοιχα η αποσύνθεση της *adjoint* αναπαράστασης κάτω από την ομάδα συμμετρίας του ΚΠ γράφεται ως:

$$24 \rightarrow (8, 1)_0 + (1, 3)_0 + (1, 1)_0 + (3, 2)_{-5/6} + (\bar{3}, 2)_{5/6}. \quad (1.26)$$

Τα πεδία  $G$  αναπαριστούν τα γκλουόνια ενώ τα  $W, B$  τα πεδία βαθμίδας της ομάδας συμμετρίας  $SU(2)$  και  $U(1)$  αντίστοιχα. Τα  $X, Y$  είναι νέα διανυσματικά μποζόνια τα οποία εισάγουν αλληλεπιδράσεις στις οποίες τα λεπτόνια μετασχηματίζονται σε κουάρκ.

### 1.6.1 Η διάσπαση του πρωτονίου

Τα νέα διανυσματικά μποζόνια μπορούν να λάβουν μέρος σε αλληλεπιδράσεις στις οποίες παραβιάζεται ο λεπτονικός και βαρυονικός αριθμός. Έτσι οδηγούμαστε σε διασπάσεις του πρωτονίου:

$$\begin{aligned} p &\rightarrow e^+\pi^0 \\ p &\rightarrow \bar{\nu}\pi^+ \end{aligned}$$

Για παράδειγμα για την πρώτη διάσπαση ο χρόνος ζωής του πρωτονίου δίνεται ως

$$\tau_p \sim \frac{M_X^4}{g^4 m_p^5}$$

όπου  $g$  είναι η τιμή της σταθεράς σύζευξης της ΜΕΘ. Το χαμηλότερο όριο του χρόνου ζωής του πρωτονίου είναι:  $\tau_p > 10^{33}$  χρόνια. Η μη παρατήρηση της διάσπασης του πρωτονίου θέτει ένα κατώτατο όριο στις μάζες αυτών των νέων μποζονίων:

$$M_X \geq 10^{15} \text{ GeV.}$$

### 1.6.2 Υπολογισμός του $\sin^2\theta_W$

Οι σταθερές σύζευξης βαθμίδας  $g$  και  $g'$  εμφανίζονται στη συναλλοίωτη παράγωγο (βλέπε σχέση 1.9). Το πρόβλημα έγκειται στο γεγονός ότι στο πλαίσιο του ΚΠ, το μέγεθος της σταθεράς σύζευξης  $g'$  είναι αυθαίρετο. Δηλαδή θα μπορούσαμε να πολλαπλασιάσουμε το υπερφορτίο με μία σταθερά  $c$  και να διαιρέσουμε τη  $g'$  με την ίδια σταθερά, οπότε το αποτέλεσμα θα παρέμενε το ίδιο. Αντίθετα η συνθήκη νορμαλισμού των γεννητόρων της ομάδας  $SU(2)$

$$Tr\left[\frac{\tau^a}{2}\frac{\tau^b}{2}\right] = \frac{1}{2}\delta^{ab}$$

φιξάρει τις σταθερές σύζευξης που πολλαπλασιάζονται με τους γεννήτορες της  $SU(2)$ . Υποθέτουμε ότι ο  $Y = c\left(\frac{Y_W}{2}\right)$  είναι γεννήτορας της ομάδας της ΜΕΘ. Ο νορμαλισμός των γεννητόρων της ΜΕΘ είναι κοινός για όλους οπότε έχουμε

$$Tr(c^2(Y_W/2)^2) = Tr(\tau^3)^2$$

όπου  $\tau^3$  είναι ο τρίτος γεννήτορας, της  $SU(2)_L$ . Το ίχνος αναφέρεται σε όλα τα σωματίδια της αναπαράστασης, δηλαδή  $u$ ,  $d$ ,  $\nu_e$ ,  $e^-$ . Οπότε έχουμε [15]:

$$c^2 \left( \frac{6}{36} + \frac{15}{9} + \frac{6}{4} \right) = 3 \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \Rightarrow c = \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Ο νορμαλισμένος γεννήτορας γράφεται ως:

$$Y = \sqrt{\frac{3}{5}} \frac{Y_W}{2}. \quad (1.27)$$

Συνεπώς για την περίπτωση του ΚΠ έχουμε

$$g_{SU(5)} = g' \sqrt{\frac{5}{3}} = g_3 = g \quad (1.28)$$

το οποίο συνεπάγεται από τη σχέση (1.14) ότι  $\sin^2\theta_W = \frac{3}{8}$ .

### 1.6.3 Αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας $SU(5)$

Η  $SU(5)$  συμμετρία σε ένα ρεαλιστικό μοντέλο πρέπει να είναι σίγουρα σπασμένη, διότι τα νέα μποζόνια οδηγούν σε διάσπαση του πρωτονίου. Συνεπώς αναμένεται να τους δώσουμε μάζα μέσω του μηχανισμού *Higgs*. Το αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας πραγματοποιείται σε δύο στάδια. Στο πρώτο σε μία υψηλή ενεργειακή κλίμακα η  $SU(5)$  σπάει στη συμμετρία του ΚΠ δίνοντας μάζα στα  $X, Y$  μποζόνια. Στο δεύτερο στάδιο λαμβάνει χώρα το σπάσιμο της ηλεκτρασθενούς συμμετρίας, δίνοντας μάζα στα μποζόνια  $W^\pm, Z$ .

Κατά τη διαδικασία του αρχικού σπασίματος της συμμετρίας το πεδίο *Higgs* επιλέγεται έτσι ώστε να βρίσκεται στην 24 *adjoint* αναπαράσταση, όπου η τιμή που αντιστοιχεί στο ελάχιστο του δυναμικού μπορεί να επιλεγεί ως:

$$\langle \Phi_{24} \rangle = \frac{v}{2} \begin{pmatrix} 2 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & -3 & \\ & & & & -3 \end{pmatrix}. \quad (1.29)$$

Τα νέα  $X, Y$  διανυσματικά μποζόνια της  $SU(5)$  αποκτούν μάζα

$$M_X^2 = M_Y^2 = \frac{25}{8} g_{SU(5)}^2 v^2 \quad (1.30)$$

έχοντας απορροφήσει δώδεκα από τα εικοσιτέσσερα βαθμωτά πεδία της *adjoint* αναπαράστασης. Στη συνέχεια για να σπάσουμε τη συμμετρία του ΚΠ στην

$SU(3)_C \times U(1)_{em}$  χρησιμοποιούμε μία πενταπλέτα  $H$  για το πεδίο *Higgs*, το οποίο επιλέγουμε ως:

$$H = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ \Phi^+ \\ \Phi^0 \end{pmatrix}, \quad \langle H \rangle = v_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.31)$$

Η τέταρτη και πέμπτη συνιστώσα αντιστοιχούν στην  $SU(2)$  διπλέτα  $(\Phi^+, \Phi^0)$  του ΚΠ. Οι τρεις πρώτες συνιστώσες αντιστοιχούν στην τριπλέτα χρώματος  $D$  η οποία μπορεί να οδηγήσει σε διάσπαση του πρωτονίου. Τέτοιου είδους αλληλεπιδράσεις μπορούν να εξαλειφθούν εάν οι τριπλέτες των πεδίων *Higgs* αποκτήσουν μεγάλες μάζες. Έτσι όμως οδηγούμαστε σε ένα βασικό πρόβλημα διότι η διπλέτα πρέπει να έχει πολύ μικρότερη μάζα από την τριπλέτα (*doublet-triplet splitting problem*).



# Κεφάλαιο 2

## Υπερσυμμετρία

### 2.1 Πέρα από το Καθιερωμένο Πρότυπο

Ένα από τα μεγαλύτερα μειονεκτήματα του ΚΠ είναι το λεγόμενο πρόβλημα της ιεραρχίας [20, 21, 22, 23, 24]. Μέσα στο πλαίσιο αυτής της θεωρίας δεν μπορεί να εξηγηθεί ο λόγος για τον οποίο η ενέργεια *Planck* είναι αρκετές τάξεις μεγέθους μεγαλύτερη από την ενέργεια στην οποία σπάει η ηλεκτρασθενής συμμετρία, συνεπώς η εξήγηση πρέπει να αναζητηθεί εκτός ΚΠ. Το πρόβλημα αυτό διαφορετικά διατυπωμένο περιγράφει τις τεράστιες χβαντικές διορθώσεις που λαμβάνει η μάζα του *Higgs* ( $m_H^2$ ) από αλληλεπιδράσεις ανώτερης τάξης. Η διόρθωση από ένα βρόχο ο οποίος περιλαμβάνει ένα φερμιόνιο ( $f$ ) και ένα αντιφερμιόνιο ( $\bar{f}$ ) γράφεται ως [25]:

$$\delta m_H^2 = -\frac{\lambda_f^2}{8\pi^2} \Lambda^2 + \dots \quad (2.1)$$

Παρατηρούμε ότι εάν η ενέργεια αποκοπής  $\Lambda$  γίνει πολύ μεγάλη τότε και η διόρθωση θα είναι πολύ μεγάλη. Αντίστοιχα η διόρθωση στο  $m_H^2$  από ένα βρόχο ο οποίος περιέχει ένα βαρύ βαθμωτό πεδίο  $S$ , γράφεται ως:

$$\delta m_H^2 = \frac{\lambda_s}{16\pi^2} \left[ \Lambda^2 - 2m_s^2 \ln\left(\frac{\Lambda}{m_s}\right) + \dots \right]. \quad (2.2)$$

Ένας τρόπος για να αποφύγουμε αυτές τις επικίνδυνες συνεισφορές από τα διαγράμματα βρόχων είναι να επιβάλλουμε κάποιο είδος συμμετρίας. Συγκρίνοντας τις σχέσεις (2.1) και (2.2) η νέα συμμετρία πρέπει να συσχετίζει τα φερμιόνια με τα μποζόνια εξαιτίας του προσήμου (-) που υπάρχει μεταξύ του φερμιονικού

και μποζονικού βρόχου. Αν σε κάθε φερμιονικό πεδίο του ΚΠ αντιστοιχεί ένα μιγαδικό βαθμωτό πεδίο με  $\lambda_s = |\lambda_f|^2$  τότε οι συνεισφορές που περιέχουν τον όρο  $\Lambda^2$  αλληλοαναιρούνται. Η νέα αυτή συμμετρία ονομάζεται υπερσυμμετρία<sup>1</sup>.

Ένας υπερσυμμετρικός μετασχηματισμός μετατρέπει μία μποζονική κατάσταση σε μία φερμιονική και αντίστροφα. Ο τελεστής  $Q$  ο οποίος γεννά αυτούς τους μετασχηματισμούς είναι ένας αντιτιθέμενος σπίνορας η δράση του οποίου φαίνεται παρακάτω:

$$Q|\mu\text{ποζόνιο}\rangle = \text{φερμιόνιο}, \quad Q|\text{φερμιόνιο}\rangle = \mu\text{ποζόνιο}.$$

Οι σπίνορες είναι μιγαδικές οντότητες, οπότε και ο  $Q^\dagger$  είναι ένας γεννήτορας της υπερσυμμετρίας. Οι γεννήτορες  $Q$  και  $Q^\dagger$  ικανοποιούν μία άλγεβρα η οποία περιλαμβάνει και μεταθετικές και αντιμεταθετικές σχέσεις της μορφής [27, 28]

$$\begin{aligned} \{Q, Q^\dagger\} &= P^\mu \\ \{Q, Q\} &= \{Q^\dagger, Q^\dagger\} = 0 \\ [P^\mu, Q] &= [P^\mu, Q^\dagger] = 0 \end{aligned}$$

όπου με  $P^\mu$  συμβολίζουμε την τετραορμή που είναι ο γεννήτορας των μετατοπίσεων του χωροχρόνου.

Οι μονοσωματιδιακές καταστάσεις μίας υπερσυμμετρικής θεωρίας ανήκουν σε μη αναγώγιμες αναπαραστάσεις της υπερσυμμετρικής άλγεβρας, οι οποίες ονομάζονται υπερμαλτιπλέτες. Κάθε υπερμαλτιπλέτα περιέχει και φερμιονικά και μποζονικά πεδία, τα οποία ονομάζονται υπερεταίροι. Ο τελεστής  $P^2$  μετατίθεται με τους γεννήτορες  $Q, Q^\dagger$  και με όλους τους τελεστές στροφών και μετατοπίσεων. Συνεπώς τα σωματίδια τα οποία ανήκουν στην ίδια υπερμαλτιπλέτα πρέπει να έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές του τελεστή  $P^2$ , άρα και την ίδια μάζα. Επιπλέον οι γεννήτορες της υπερσυμμετρίας μετατίθενται με τους γεννήτορες των μετασχηματισμών βαθμίδας. Επομένως τα σωματίδια της ίδιας υπερμαλτιπλέτας πρέπει να βρίσκονται στην ίδια αναπαράσταση της ομάδας βαθμίδας. Αυτό συνεπάγεται ότι θα έχουν το ίδιο ηλεκτρικό φορτίο, ίδιο ασθενές ισοσπίν και ίδιους χρωματικούς βαθμούς ελευθερίας.

Κάθε υπερμαλτιπλέτα περιέχει τον ίδιο αριθμό φερμιονικών και μποζονικών βαθμών ελευθερίας. Η απλούστερη επιλογή του περιεχομένου μίας υπερμαλτιπλέτας είναι ένα *Weyl* φερμιόνιο και δύο πραγματικά βαθμωτά τα οποία μπορούν

<sup>1</sup>Για να μελετήσει κάποιος βασικά στοιχεία υπερσυμμετρικών θεωριών καθώς και τη φαινομενολογία του ΚΠ μπορεί να ανατρέξει στην αναφορά [26].

να συνδυαστούν ως ένα συζυγές βαθμωτό. Ο συνδυασμός των παραπάνω πεδίων αποτελεί μία χειραλική υπερμαλτιπλέτα.

Μία δεύτερη επιλογή που μπορεί να γίνει, είναι η υπερμαλτιπλέτα να περιέχει ένα διανυσματικό μποζόνιο με σπιν ένα. Ο υπερεταίρος του θα είναι ένα φερμιόνιο με σπιν 1/2 το οποίο ονομάζεται *gaugino* και μετασχηματίζεται ως προς την *adjoint* αναπαράσταση. Μία τέτοια υπερμαλτιπλέτα ονομάζεται υπερμαλτιπλέτα βαθμίδας ή διανυσματική υπερμαλτιπλέτα.

## 2.2 Αλληλεπιδράσεις και υπερδυναμικό

Όπως αναφέρθηκε στα προηγούμενα μία χειραλική υπερμαλτιπλέτα αποτελείται από ένα *Weyl* φερμιόνιο  $\psi$  και τον υπερεταίρο του, ένα μιγαδικό βαθμωτό πεδίο  $\phi$ . Η πιο απλή δράση που μπορούμε να γράψουμε για αυτά τα πεδία αποτελείται μόνο από τους κινητικούς όρους αυτών:

$$S = \int d^4x (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2)$$

$$\mathcal{L}_1 = -\partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi, \quad \mathcal{L}_2 = i\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi.$$

Η θεωρία αυτή η οποία περιέχει άμαζα πεδία χωρίς αλληλεπιδράσεις, ονομάζεται μοντέλο *Wess-Zumino* [29]. Γενικεύοντας, για  $i$  τον αριθμό ελεύθερων χειραλικών υπερμαλτιπλετών και εισάγοντας ένα βαθμωτό πεδίο  $F$  το οποίο δεν έχει κινητικό όρο, η Λαγκρανζιανή της θεωρίας μας μπορεί να γραφεί ως:

$$\mathcal{L}_{\text{ελεύθερη}} = -\partial^\mu \phi^{*i} \partial_\mu \phi_i + i\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_i + F^{*i} F_i.$$

Στη συνέχεια γράφουμε τη Λαγκρανζιανή η οποία περιέχει επανακανονικοποιησιμες αλληλεπιδράσεις που σέβονται την υπερσυμμετρία. Συνεπώς ο κάθε όρος πρέπει να έχει συνολική διάσταση μάζας  $\leq 4$ . Οι πιθανοί όροι είναι της μορφής

$$\mathcal{L}_{\text{αλληλεπίδρασης}} = \left( -\frac{1}{2} W^{ij} \psi_i \psi_j + W^i F_i \right) + c.c. \quad (2.3)$$

όπου  $W^{ij}$  είναι ένα πολυώνυμο πρώτου βαθμού των βαθμωτών πεδίων  $\phi_i$  και μπορεί να γραφεί ως:

$$W^{ij} = \frac{\delta^2}{\delta \phi_i \delta \phi_j} W. \quad (2.4)$$



Ακολουθώντας εισάγουμε μία πολύ χρήσιμη ποσότητα την οποία ονομάζουμε υπερδυναμικό και είναι αυτή η οποία καθορίζει τη μορφή των αλληλεπιδράσεων μεταξύ των χειραλικών υπερμαλτιπλετών:

$$W = \frac{1}{2}M^{ij}\phi_i\phi_j + \frac{1}{6}y^{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k \quad (2.5)$$

όπου με  $M^{ij}$  συμβολίζουμε το συμμετρικό πίνακα μάζας για τα φερμιονικά πεδία και  $y^{ijk}$  είναι η σταθερά σύζευξης *Yukawa* μεταξύ ενός βαθμωτού  $\phi_k$  και δύο φερμιονίων. Αντίστοιχα για το πολυώνυμο  $W^i$  ισχύουν:

$$W^i = \frac{\delta W}{\delta \phi_i}. \quad (2.6)$$

## 2.3 Αλληλεπιδράσεις που σπάνε ήπια την υπερσυμμετρία

Κάθε μοντέλο το οποίο παράγει ρεαλιστικά φαινομενολογικά αποτελέσματα πρέπει να περιέχει την υπερσυμμετρία ως μία σπασμένη συμμετρία. Αν τελικά η συμμετρία αυτή υπάρχει δε θα είναι ακριβής συμμετρία (τότε θα είχαμε ανακαλύψει και του υπερεταίρους των σωματιδίων), αλλά πιθανόν να σπάει αυθόρμητα. Με πιο αυστηρή ορολογία η Λαγκρανζιανή πρέπει να παραμένει αναλλοίωτη κάτω από υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς ενώ η κατάσταση ελάχιστης ενέργειας όχι.

Πολλά μοντέλα τα οποία περιγράφουν το αυθόρμητο σπάσιμο τη υπερσυμμετρίας έχουν προταθεί. Το βασικό χαρακτηριστικό των θεωριών αυτών είναι ότι εισάγουν νέα σωματίδια και νέες αλληλεπιδράσεις σε πολύ υψηλές ενέργειες προσπαθώντας να εξάγουν συμπεράσματα στις χαμηλές ενέργειες. Μπορούμε ωστόσο να εισάγουμε επιπλέον όρους στη Λαγκρανζιανή (σε χαμηλές ενέργειες) οι οποίοι να σπάνε την υπερσυμμετρία επακριβώς.

Οι σταθερές σύζευξης που σπάνε την υπερσυμμετρία πρέπει να είναι ήπιες (με θετική διάσταση μάζας) έτσι ώστε να μη δημιουργούνται νέοι απειρισμοί. Μία πιθανή μορφή Λαγκρανζιανής που περιέχει τέτοιους όρους είναι η εξής

$$\mathcal{L}_{\text{ήπια}} = - \left( \frac{1}{2}M_a \lambda^a \lambda^a + \frac{1}{6} a^{ijk} \phi_i \phi_j \phi_k + \frac{1}{2} b^{ij} \phi_i \phi_j \right) - (m^2)_j^i \phi^{j*} \phi_i$$

η οποία αποτελείται από μάζες των *gaugino*  $M_a$  για κάθε ομάδα βαθμίδας, βαθμωτούς όρους τετραγωνικής μάζας  $(m^2)_j^i$  και βαθμωτές σταθερές σύζευξης  $a^{ijk}$ .

## 2.4 Ελάχιστο Υπερσυμμετρικό Καθιερωμένο Πρότυπο

Η βασικότερη υπερσυμμετρική επέκταση του ΚΠ είναι το ΕΥΚΠ. Κάθε γνωστό σωματίδιο ανήκει σε μία χειραλική ή διανυσματική μαλτιπλέτα και πρέπει να συνοδεύεται από τον υπεραϊτέρο του με το σπιν του να διαφέρει κατά 1/2. Οι υπεραϊτέροι των κουάρκ και λεπτονίων είναι σωματίδια με σπιν μηδέν και ονομάζονται σκουάρκ και σλεπτόνια. Αντίστοιχα τα υπερσυμμετρικά σωματίδια τα οποία συνοδεύουν τα διανυσματικά μποζόνια του ΚΠ είναι φερμιονικά σωματίδια με σπιν 1/2 και ονομάζονται *gauginos* όπως έχει ήδη αναφερθεί. Τέλος σε αντίθεση με το ΚΠ έχουμε δύο διπλέτες *Higgs* οι οποίες ανήκουν σε χειραλικές μαλτιπλέτες μαζί με τους φερμιονικούς υπεραϊτέρους τους, οι οποίοι ονομάζονται *Higgsinos*. Στους πίνακες 2.1 και 2.2 βλέπουμε τα σωματίδια και τους υπερεταϊρούς τους στο ΕΥΚΠ.

Το υπερδυναμικό για το ΕΥΚΠ δίνεται ως:

$$W_{\text{ΕΥΚΠ}} = \bar{u}y_u Q H_u - \bar{d}y_d Q H_d - \bar{e}y_e L H_d + \mu H_u H_d. \quad (2.7)$$

Ο όρος  $\mu$  είναι ο αντίστοιχος όρος της μάζας του μποζονίου *Higgs* στο ΚΠ και  $y_u, y_d, y_e$  είναι οι σταθερές σύζευξης *Yukawa* οι οποίες αναπαρίστανται από  $3 \times 3$  πίνακες. Το κορυφαίο και το χαμηλό κουάρκ μαζί με το λεπτόνιο  $\tau$  είναι τα φερμιόνια του ΚΠ που έχουν τη μεγαλύτερη μάζα συγκριτικά με όλα τα υπόλοιπα φερμιόνια. Συνεπώς μπορούμε να γράψουμε τις σταθερές σύζευξης

Ονόματα		σπιν 0	σπιν 1/2	$SU(3), SU(2), U(1)$
σκουάρκ, κουάρκ	$Q$	$\tilde{u}_L \quad \tilde{d}_L$	$u_L \quad d_L$	$3, 2, 1/6$
	$\bar{u}$	$\tilde{u}_R^*$	$u_R^\dagger$	$\bar{3}, 1, -2/3$
	$\bar{d}$	$\tilde{d}_R^*$	$d_R^\dagger$	$\bar{3}, 1, 1/3$
σλεπτόνια, λεπτόνια	$L$	$\tilde{\nu} \quad \tilde{e}_L$	$\nu_L \quad e_L$	$1, 2, -1/2$
	$\bar{e}$	$\tilde{e}_R^*$	$e_R^\dagger$	$\bar{1}, 1, 1$
Higgs, Higgsinos	$H_u$	$H_u^+ \quad H_u^0$	$\tilde{H}_u^+ \quad \tilde{H}_u^0$	$1, 2, 1/2$
	$H_d$	$H_d^0 \quad H_d^-$	$\tilde{H}_d^0 \quad \tilde{H}_d^-$	$1, 2, -1/2$

Πίνακας 2.1: Χειραλικές υπερμαλτιπλέτες στο ΕΥΚΠ. Τα πεδία με σπιν 0 είναι μιγαδικά βαθμωτά και τα πεδία με σπιν 1/2 είναι αριστερόστροφα *Weyl* φερμιόνια με δύο συνιστώσες.

Ονόματα	σπιν 1/2	σπιν 1	$SU(3), SU(2), U(1)$
gluino, gluon	$\tilde{G}$	$G$	8, 1, 0
winos, W μποζόνια	$\tilde{W}^\pm \quad \tilde{W}^0$	$W^\pm \quad W^0$	1, 3, 0
bino, B μποζόνιο	$\tilde{B}^0$	$B^0$	1, 1, 0

Πίνακας 2.2: Υπερμαльтиπλέτες βαθμίδας στο ΕΥΚΠ.

*Yukawa* ως:

$$y_u \simeq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_t \end{pmatrix}, \quad y_d \simeq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_b \end{pmatrix}, \quad y_e \simeq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_\tau \end{pmatrix}.$$

Το υπερδυναμικό της σχέσης (2.7) δύναται να παράξει φαινομενολογικά αποτελέσματα τα οποία μπορούν να συγκριθούν με τις πειραματικές μετρούμενες τιμές. Ωστόσο μπορούμε να εισάγουμε και κάποιους άλλους όρους οι οποίοι είναι αναλλοίωτοι κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας και είναι ολόμορφες συναρτήσεις των βαθμωτών πεδίων, όμως παραβιάζουν το βαρυονικό ( $B$ ) και λεπτονικό αριθμό ( $L$ ). Τέτοιες αλληλεπιδράσεις όπως είναι η διάσπαση του πρωτονίου δεν έχουν έως τώρα παρατηρηθεί. Συνεπώς μπορούμε να εισάγουμε μία νέα συμμετρία η οποία αναιρεί αυτούς τους επικίνδυνους όρους ενώ επιτρέπει όλους τους υπόλοιπους. Αυτή η νέα διακριτή συμμετρία ονομάζεται ομοτιμία  $R$  [30].

Η ομοτιμία  $R$  είναι ένας πολλαπλασιαστικός διατηρούμενος χβαντικός αριθμός που ορίζεται ως:

$$P_R = (-1)^{3(B-L)+2S}$$

για κάθε σωματίδιο της θεωρίας μας, όπου  $S$  είναι το σπιν του σωματιδίου. Η συμμετρία αυτή βασίζεται στο γεγονός ότι κάθε όρος στη Λαγκρανζιανή είναι επιτρεπτός αν το γινόμενο των  $P_R$  για όλα τα πεδία είναι +1.

### 2.4.1 Ήπιο σπάσιμο της υπερσυμμετρίας

Όπως αναφέρθηκε στην παράγραφο 2.4 η υπερσυμμετρία μπορεί να σπάσει επακριβώς εισάγοντας όρους στη Λαγκρανζιανή οι οποίοι πρέπει να ικανοποιούν κάποιες προϋποθέσεις. Η βασικότερη είναι να μην εισάγονται καινούριες αποκλίσεις και να διατηρείται η αναλλοιωσιμότητα κάτω από μετασχηματισμούς

βαθμίδας. Επίσης η θεωρία μας πρέπει να παραμένει επανακανονικοποιήσιμη καθώς και ο βαρυονικός και λεπτονικός αριθμός να διατηρούνται. Ικανοποιώντας τις παραπάνω απαιτήσεις η Λαγκρανζιανή που περιέχει τέτοιους όρους γράφεται ως

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{σπασίματος}}^{\text{ήπιου}} = & -\frac{1}{2} \left( \sum_{a=1}^8 M_3 \tilde{G}^a \tilde{G}_a + \sum_{a=1}^3 M_2 \tilde{W}^i \tilde{W}_i + M_1 \tilde{B} \tilde{B} \right) \\ & - \left( \tilde{u} a_u \tilde{Q} H_u - \tilde{d} a_d \tilde{Q} H_d - \tilde{e} a_e \tilde{L} H_d \right) \\ & - \tilde{Q}^\dagger m_{\tilde{Q}}^2 \tilde{Q} - \tilde{L}^\dagger m_{\tilde{L}}^2 \tilde{L} - \tilde{u} m_{\tilde{u}}^2 \tilde{u}^\dagger - \tilde{d} m_{\tilde{d}}^2 \tilde{d}^\dagger - \tilde{e} m_{\tilde{e}}^2 \tilde{e}^\dagger \\ & - m_{H_u}^2 H_u^\dagger H_u - m_{H_d}^2 H_d^\dagger H_d - b H_u H_d \end{aligned}$$

όπου  $M_1, M_2, M_3$  είναι οι μάζες των *binos*, *winos*, *gluinos* αντίστοιχα. Οι όροι της δεύτερης γραμμής περιλαμβάνουν τις τριγραμμικές σταθερές σύζευξης  $a_u, a_d, a_e$  οι οποίες αναπαρίστανται ως  $3 \times 3$  πίνακες με διαστάσεις μάζας. Η τρίτη σειρά αποτελείται από όρους μάζας των σκουάρκ και των σλεπτονίων και η τελευταία από όρους μαζών *Higgs*. Για να σπάει η υπερσυμμετρία ήπια αναμένουμε να ισχύουν:

$$\begin{aligned} M_1, M_2, M_3, a_u, a_d, a_e & \sim 1000 \text{ GeV} \\ m_{\tilde{Q}}^2, m_{\tilde{L}}^2, m_{\tilde{u}}^2, m_{\tilde{d}}^2, m_{\tilde{e}}^2, m_{H_u}^2, m_{H_d}^2, b & \sim (1000 \text{ GeV})^2 \end{aligned}$$

Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι η Λαγκρανζιανή  $\mathcal{L}_{\text{σπασίματος}}^{\text{ήπιου}}$  εισάγει πολλές νέες παραμέτρους οι οποίες μεγαλώνουν την ήδη υπάρχουσα αυθαιρεσία της θεωρίας μας.

### 2.4.2 Σπάσιμο της ηλεκτρασθενούς συμμετρίας

Στο ΕΥΚΠ όπως ήδη αναφέρθηκε, υπάρχουν δύο  $SU(2)_L$  διπλέτες *Higgs* εν αντιθέσει με τη μία του ΚΠ. Το κλασσικό δυναμικό για τα βαθμωτά πεδία *Higgs* γράφεται ως:

$$\begin{aligned} V = & (|\mu|^2 + m_{H_u}^2) |H_u^0|^2 + (|\mu|^2 + m_{H_d}^2) |H_d^0|^2 - (b H_u^0 H_d^0 + h.c.) \\ & + \frac{1}{8} (g^2 + g'^2) (|H_u^0|^2 - |H_d^0|^2)^2. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Στο σημείο αυτό αξίζει να παρατηρήσουμε ότι ο συντελεστής του τελευταίου όρου δεν είναι μία ελεύθερη παράμετρος όπως στο ΚΠ, αλλά έχει καθορισμένη τιμή η οποία εξαρτάται από τις σταθερές σύζευξης βαθμίδας  $g, g'$ .

Το βαθμωτό δυναμικό του ΕΥΚΠ για να έχει φυσική σημασία πρέπει να παρουσιάζει ευστάθεια. Οι βαθμωτές αλληλεπιδράσεις τετάρτου βαθμού σταθεροποιούν το δυναμικό για σχεδόν όλες τις αυθαίρετα μεγάλες τιμές των  $H_u^0$  και  $H_d^0$ . Ωστόσο για συγκεκριμένες διευθύνσεις στο χώρο των πεδίων  $|H_u^0| = |H_d^0|$  οι αλληλεπιδράσεις τετάρτου βαθμού δίνουν μηδενική συνεισφορά. Οι διευθύνσεις αυτές ονομάζονται επίπεδες  $D$  διευθύνσεις. Για να είναι συνεπώς το δυναμικό ευσταθές στην περίπτωση των επίπεδων  $D$  διευθύνσεων πρέπει να ισχύει η επόμενη σχέση:

$$0 < 2b < 2|\mu|^2 + m_{H_u}^2 + m_{H_d}^2. \quad (2.9)$$

Από την παραπάνω σχέση συμπεραίνουμε ότι οι ποσότητες  $|\mu|^2 + m_{H_u}^2$  και  $|\mu|^2 + m_{H_d}^2$  δεν μπορούν ταυτόχρονα να είναι και οι δύο αρνητικές. Επιπλέον η συνθήκη για το σπάσιμο της ηλεκτρασθενούς συμμετρίας απαιτεί το σημείο  $H_u^0 = H_d^0 = 0$  να μην αντιστοιχεί σε ελάχιστο, δηλαδή η δεύτερη παράγωγος του δυναμικού να είναι αρνητική. Η απαίτηση αυτή οδηγεί στην παρακάτω ανισότητα

$$b^2 > (|\mu|^2 + m_{H_u}^2)(|\mu|^2 + m_{H_d}^2) \quad (2.10)$$

η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη (2.9). Σε διάφορα μοντέλα όπως το  $mSUGRA$  οι συνοριακές συνθήκες των εξισώσεων επανακανονικοποίησης τις οποίες επιβάλλουμε είναι  $m_{H_u}^2 = m_{H_d}^2$  σε κάποια υψηλή ενεργειακή κλίμακα. Η περίπτωση αυτή όμως δεν ικανοποιεί ταυτόχρονα τις σχέσεις (2.9) και (2.10). Ωστόσο η παράμετρος  $m_{H_u}^2$  μέσω της αντίστοιχης εξίσωσης επανακανονικοποίησης οδεύει σε αρνητικές τιμές (εξαιτίας της συνεισφοράς του κορυφαίου κουάρκ) σε χαμηλές ενέργειες. Συνεπώς στο μοντέλο αυτό το σπάσιμο της ηλεκτρασθενούς συμμετρίας μπορεί να γίνει λόγω της συνεισφοράς των διαγραμμμάτων βρόχων (*radiative electroweak symmetry breaking*).

Έχοντας εξάγει τις απαραίτητες συνθήκες για τα  $H_u^0$  και  $H_d^0$  έτσι ώστε να λάβουν μη μηδενικές αναμενόμενες τιμές του κενού, μπορούμε να γράψουμε:

$$v_u = \langle H_u^0 \rangle = v \sin \beta, \quad v_d = \langle H_d^0 \rangle = v \cos \beta.$$

Αυτές οι τιμές σχετίζονται με τη μάζα του μποζονίου  $Z^0$  και τις σταθερές σύζευξης της ηλεκτρασθενούς αλληλεπίδρασης ως:

$$v_u^2 + v_d^2 = v^2 = \frac{2m_Z^2}{g^2 + g'^2} \approx (174 \text{ GeV})^2. \quad (2.11)$$

Επίσης ο λόγος των αναμενόμενων τιμών δίνεται από τη σχέση

$$\tan \beta \equiv \frac{v_u}{v_d} \quad (2.12)$$

όπου η τιμή της  $\tan \beta$  δεν είναι καθορισμένη από τα τρέχοντα πειράματα (αποτελεί μία ελεύθερη παράμετρο). Στη συνέχεια απαιτώντας το δυναμικό να είναι ελάχιστο

$$\frac{\partial V}{\partial H_u^0} = \frac{\partial V}{\partial H_d^0} = 0$$

καταλήγουμε σε δύο σχέσεις από τις οποίες μπορούμε να γράψουμε τα  $b$  και  $|\mu|$  ως συνάρτηση της  $\tan \beta$ :

$$\begin{aligned} m_{H_u}^2 + |\mu|^2 - b \cot \beta - (m_Z^2/2) \cos(2\beta) &= 0 \\ m_{H_d}^2 + |\mu|^2 - b \tan \beta + (m_Z^2/2) \cos(2\beta) &= 0. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας γνωστές τιμές για τα μεγέθη  $|\mu|^2$ ,  $b$ ,  $m_{H_u}^2$  και  $m_{H_d}^2$  μπορούμε να υπολογίσουμε τα  $m_Z^2$  και  $\tan \beta$  ως:

$$\sin(2\beta) = \frac{2b}{m_{H_u}^2 + m_{H_d}^2 + 2|\mu|^2} \quad (2.13)$$

$$m_Z^2 = \frac{|m_{H_d}^2 - m_{H_u}^2|}{\sqrt{1 - \sin^2(2\beta)}} - m_{H_u}^2 - m_{H_d}^2 - 2|\mu|^2. \quad (2.14)$$

### 2.4.3 Τα μποζόνια *Higgs*

Τα βαθμωτά πεδία *Higgs* στο ΕΥΚΠ αποτελούνται από δύο  $SU(2)_L$  διπλέτες ή διαφορετικά οκτώ πραγματικούς βαθμούς ελευθερίας. Όταν η ηλεκτρασθενής συμμετρία σπάσει οι τρεις από αυτούς τους βαθμούς ελευθερίας μετατρέπονται στους διαμήχεις τρόπους ταλάντωσης των διανυσματικών μποζονίων  $Z^0$  και  $W^\pm$ . Τα εναπομείναντα πέντε πεδία αποτελούνται από δύο μη φορτισμένα βαθμωτά πεδία  $h^0$  (ελαφρύτερο υπερσυμμετρικό πεδίο *Higgs*) και  $H^0$  τα οποία παραμένουν αναλλοίωτα κάτω από μετασχηματισμούς  $CP$ , ένα μη φορτισμένο βαθμωτό πεδίο  $A^0$  το οποίο μετασχηματίζεται ως περιττό κάτω από τους ίδιους μετασχηματισμούς και ένα βαθμωτό  $H^+$  με φορτίο  $+1$ , μαζί με το αντίστοιχο συζυγές του  $H^-$  με φορτίο  $-1$ . Οι μάζες των σωματιδίων αυτών (χωρίς

συνεισφορά βρόχων) δίνονται ως:

$$\begin{aligned}
 m_{A^0}^2 &= \frac{2b}{\sin(2\beta)} = 2|\mu|^2 + m_{H_u}^2 + m_{H_d}^2 \\
 m_{h^0, H^0}^2 &= \frac{1}{2}(m_{A^0}^2 + m_Z^2 \mp \sqrt{(m_{A^0}^2 - m_Z^2)^2 + 4m_Z^2 m_{A^0}^2 \sin^2(2\beta)}) \\
 m_{H^\pm}^2 &= m_{A^0}^2 + m_W^2.
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Από τη σχέση (2.15) συνεπάγεται ότι η μάζα του  $h^0$  έχει ένα πάνω όριο το οποίο είναι:

$$m_{h^0} < m_Z |\cos(2\beta)| \tag{2.16}$$

Παρατηρούμε ότι η μέγιστη τιμή της μάζας του *Higgs* είναι πολύ μικρή, κάτι το οποίο σημαίνει πως θα είχε ήδη ανιχνευθεί. Ωστόσο η τιμή αυτή υπόκειται σε κβαντικές διορθώσεις οι οποίες είναι πολύ μεγάλες. Οι μεγαλύτερες συνεισφορές προέρχονται από τους βρόχους του κορυφαίου κουάρκ και των αντίστοιχων υπερεταίρων:

$$\Delta(m_{h^0}^2) = \frac{3}{4\pi^2} \cos^2 \alpha y_t^2 m_t^2 \ln (m_{\tilde{t}_1} m_{\tilde{t}_2} / m_t^2). \tag{2.17}$$

# Κεφάλαιο 3

## Εξισώσεις

## επανακανονικοποίησης και ελάττωση του αριθμού των σταθερών σύζευξης

### 3.1 Σχέσεις μεταξύ των σταθερών σύζευξης

Θεωρούμε μία σχέση μεταξύ των σταθερών σύζευξης της θεωρίας μας

$$\Phi(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = \text{σταθερά} \quad (3.1)$$

η οποία θέλουμε να ισχύει σε κάθε ενεργειακή κλίμακα. Τότε πρέπει να ικανοποιεί τη μερική διαφορική εξίσωση

$$\frac{d\Phi}{dt} = \sum_{i=0}^n \frac{\partial\Phi}{\partial\lambda_i} \frac{d\lambda_i}{dt} = \sum_{i=0}^n \frac{\partial\Phi}{\partial\lambda_i} \beta_i = \vec{\nabla}\Phi \cdot \vec{\beta} = 0 \quad (3.2)$$

όπου  $t = \ln(E)$  ( $E$  είναι η κλίμακα επανακανονικοποίησης) και  $\beta_i$  η συνάρτηση βήτα της σταθεράς σύζευξης  $\lambda_i$ . Η μερική διαφορική εξίσωση είναι ισοδύναμη με ένα σύνολο συνήθων διαφορικών εξισώσεων, τις εξισώσεις ελάττωσης

$$\beta_0 \frac{d\lambda_i}{d\lambda_0} = \beta_i, \quad i = 1, \dots, n$$



όπου  $\lambda_0$  και  $\beta_0$  είναι η πρωταρχική σταθερά σύζευξης (ως συνάρτηση της οποίας εκφράζονται όλες οι υπόλοιπες) και η συνάρτηση βήτα αυτής αντίστοιχα. Η πλήρης ελάττωση μπορεί να επιτευχθεί απαιτώντας η λύση της διαφορικής να δίνεται ως δυναμοσειρά, όπου η μοναδικότητά της μπορεί να διερευνηθεί σε επίπεδο διορθώσεων ενός βρόχου. Η πλήρως ελαττωμένη θεωρία περιέχει μόνο μια ανεξάρτητη σταθερά σύζευξης με την αντίστοιχη συνάρτηση βήτα.

### 3.2 Γενική μέθοδος ελάττωσης του αριθμού των σταθερών σύζευξης

Η μέθοδος αυτή αναπτύχθηκε με σκοπό να μπορέσουμε να εκφράσουμε τις  $n + 1$  σταθερές σύζευξης  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$  ως συναρτήσεις μόνο μίας σταθεράς  $\lambda_0$  [39, 40]. Έτσι το μοντέλο στο οποίο καταλήγουμε, περιέχει μόνο μία σταθερά σύζευξης  $\lambda_0$ , και είναι αναλλοίωτο κάτω από την ομάδα επανακανονικοποίησης. Οι σταθερές σύζευξης μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$\lambda_j = \lambda_j(\lambda_0) \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.3)$$

Αναλλοιωσιμότητα των συναρτήσεων *Green* του αρχικού συστήματος κάτω από την ομάδα επανακανονικοποίησης συνεπάγεται

$$\left( M \frac{\partial}{\partial M} + \sum_{j=0} \beta_j \frac{\partial}{\partial \lambda_j} + \gamma \right) G(p_i, M, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0 \quad (3.4)$$

όπου  $M, \beta_j, \gamma$  είναι η επανακανονικοποιημένη μάζα, οι συναρτήσεις βήτα και η ανώμαλη διάσταση αντίστοιχα. Για το ελαττωμένο σύστημα ισχύει:

$$\left( M \frac{\partial}{\partial M} + \beta' \frac{\partial}{\partial \lambda_0} + \gamma' \right) G'(p_i, M, \lambda_0, \lambda_1(\lambda_0), \dots, \lambda_n(\lambda_0)) = 0. \quad (3.5)$$

Η συνάρτηση *Green* του ελαττωμένου συστήματος μπορεί να γραφεί ως:

$$G' = G(p_i, M, \lambda_0, \lambda_1(\lambda_0), \dots, \lambda_n(\lambda_0)) \Rightarrow$$

$$\frac{dG'}{d\lambda_0} = \frac{\partial G}{\partial \lambda_0} + \sum_{j=1} \frac{\partial G}{\partial \lambda_j} \frac{d\lambda_j}{d\lambda_0}.$$

Η γραμμική ανεξαρτησία των συναρτήσεων Green και των παραγώγων τους τελικά καταλήγουν στις σχέσεις:

$$\beta' = \beta_0, \quad \gamma' = \gamma, \quad \beta' \frac{d\lambda_j}{d\lambda_0} = \beta_j.$$

Συνεπώς οι σταθερές σύζευξης της σχέσης (3.3) πρέπει να ικανοποιούν τις ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις, τις εξισώσεις ελάττωσης:

$$\beta_j = \beta_0 \frac{d\lambda_j}{d\lambda_0}. \quad (3.6)$$

### 3.2.1 Ένα παιδαγωγικό μοντέλο με δύο σταθερές σύζευξης

Στη συνέχεια μελετούμε μία απλή περίπτωση όπου υποθέτουμε ότι το αρχικό σύστημα έχει δύο σταθερές σύζευξης,  $\lambda_0$  και  $\lambda_1$ . Η βασική υπόθεση είναι ότι η  $\lambda_1$  μπορεί να εκφραστεί ως συνάρτηση της  $\lambda_0$ :

$$\lambda_1 = \lambda_1(\lambda_0). \quad (3.7)$$

Οι συναρτήσεις βήτα μπορούν να γραφούν ως:

$$\begin{aligned} \beta_0 &= b_0 \lambda_0^2 + \dots \\ \beta_1 &= c_1 \lambda_1^2 + c_2 \lambda_0 \lambda_1 + c_3 \lambda_0^2 + \dots \end{aligned} \quad (3.8)$$

Η εξίσωση ελάττωσης που προκύπτει έχει τη μορφή:

$$\beta_0 \frac{d\lambda_1}{d\lambda_0} = \beta_1. \quad (3.9)$$

Υποθέτουμε ότι η λύση της διαφορικής εξίσωσης μπορεί να γραφεί ως δυναμοσειρά:

$$\lambda_1 = p_0 \lambda_0 + \sum_{n=1} p_n \lambda_0^{(n+1)}. \quad (3.10)$$

Χρησιμοποιώντας μόνο τον πρώτο όρο της δυναμοσειράς και αντικαθιστώντας στη σχέση (3.9), καταλήγουμε σε μία εξίσωση δευτέρου βαθμού που πολύ εύκολα μπορεί να επιλυθεί:

$$c_1 p_0^2 + (c_2 - b_0) p_0 + c_3 = 0. \quad (3.11)$$

Η εξίσωση αυτή έχει πραγματικές λύσεις όταν η ορίζουσα:

$$\Delta = (c_2 - b_0)^2 - 4c_1c_3 \geq 0. \quad (3.12)$$

Ο συντελεστής  $p_1$  του δεύτερου όρου της δυναμοσειράς υπολογίζεται με αντίστοιχο τρόπο. Οι συναρτήσεις βήτα τώρα θα γραφούν ως:

$$\beta_0 = b_0\lambda_0^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-1} b_{n-m,m}\lambda_0^{n-m}\lambda_1^m$$

$$\beta_1 = c_1\lambda_1^2 + c_2\lambda_0\lambda_1 + c_3\lambda_0^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{m=0}^n c_{n-m,m}\lambda_0^{n-m}\lambda_1^m.$$

Έχοντας υπολογίσει το συντελεστή  $p_0$  και ακολουθώντας την ίδια διαδικασία κρατώντας όρους τάξης  $\lambda_0^3$ , υπολογίζεται ο συντελεστής  $p_1$ :

$$p_1 = \frac{1}{2c_1p_0 - 2b_0 + c_2} (c_{03}p_0^3 + c_{32}p_0^2 + c_{21}p_0 + c_{30} - b_{30}p_0 - b_{21}p_0^2 - b_{12}p_0^3).$$

Αντίστοιχα κρατώντας όρους τάξης  $\lambda_0^4$ , υπολογίζεται ο συντελεστής  $p_2$ :

$$p_2 = \frac{1}{2c_1p_0 - 3b_0 + c_2} (2b_{30}p_1 + 2b_{21}p_0p_1 + b_{21}p_0p_1 + 2b_{12}p_0^2p_1 + 4b_{12}p_0^2p_1 + b_{40}p_0 + b_{31}p_0^2 + b_{22}p_0^3 + b_{13}p_0^4 - c_1p_1^2 - c_{21}p_1 - 2c_{32}p_0p_1 - 3c_{03}p_0^2p_1 - c_{40} - c_{31}p_0 - c_{22}p_0^2).$$

Συνεπώς βρίσκοντας το συντελεστή  $p_0$ , μπορούμε να εγγυηθούμε ότι το πρόγραμμα ελάττωσης των σταθερών σύζευξης μπορεί να εφαρμοστεί για όλες τις τάξεις της θεωρίας διαταραχών, εφόσον οι παρονομαστές των αντίστοιχων κλασμάτων δε μηδενίζονται.

### 3.3 Μελέτη των σταθερών σύζευξης στο Καθιερωμένο Πρότυπο

Σκοπός μας είναι να μελετήσουμε τη συμπεριφορά των σταθερών σύζευξης στο ΚΠ κάτω από τις εξισώσεις επανακανονικοποίησης, έτσι ώστε να παράξουμε ένα πιθανό σενάριο της μεθόδου της ελάττωσης των σταθερών σύζευξης. Η

πιο υποσχόμενη περίπτωση φαίνεται να είναι αυτή η οποία συσχετίζει τη σταθερά σύζευξης  $\lambda$  (σταθερά ιδιοσύζευξης του μποζονίου *Higgs*) με τη σταθερά σύζευξης βαθμίδας  $\alpha_1$  της ομάδας  $U(1)$ . Αναμένουμε ότι μία τέτοια σχέση θα οδηγήσει σε πρόβλεψη της μάζας του μποζονίου *Higgs*. Στο επίπεδο των διορθώσεων ενός βρόχου οι εξισώσεις επανακανονικοποίησης για τις σταθερές σύζευξης βαθμίδας και για τη σταθερά σύζευξης *Yukawa* του κορυφαίου κουάρκ<sup>1</sup> μπορούν να λυθούν αναλυτικά. Η εξάρτηση της σταθεράς σύζευξης  $\lambda$  από την ενέργεια δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$\frac{d\tilde{\lambda}}{dt} \equiv \beta_\lambda = \frac{1}{2\pi} \left[ L_2 \tilde{\lambda}^2 + (A_{1L} \alpha_1 + A_{2L} \alpha_2) \tilde{\lambda} + A_{11} \alpha_1^2 + A_{12} \alpha_1 \alpha_2 + A_{22} \alpha_2^2 + H_L \alpha_t \tilde{\lambda} + H_2 \alpha_t^2 \right] \quad (3.13)$$

όπου

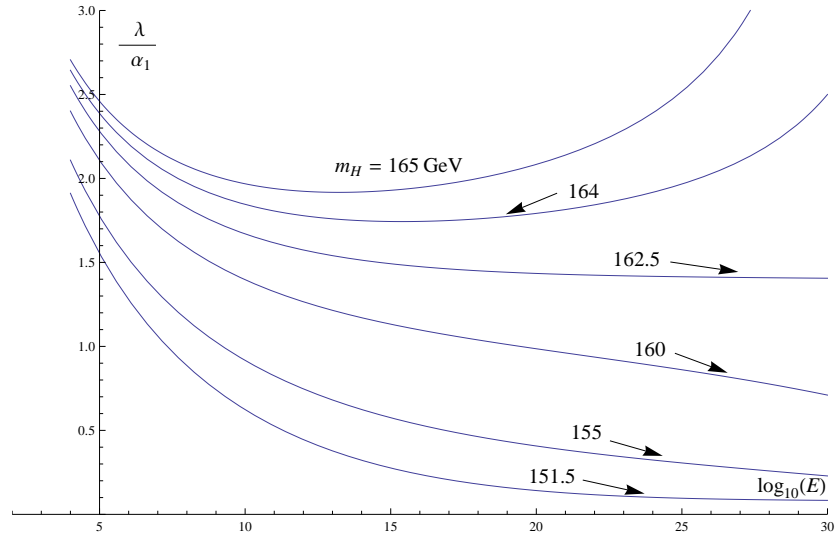
$$\begin{aligned} \tilde{\lambda} &= \frac{\lambda}{4\pi}, & \alpha_t &= \frac{h_t^2}{4\pi}, & t &= \ln(E), \\ L_2 &= 6, & A_{1L} &= -\frac{3}{2}, & A_{2L} &= -\frac{9}{2}, \\ A_{11} &= \frac{3}{8}, & A_{12} &= \frac{3}{4}, & A_{22} &= \frac{9}{8}, & H_L &= 6, & H_2 &= -6 \end{aligned}$$

και  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  οι σταθερές σύζευξης βαθμίδας για τις τρεις ομάδες συμμετρίας του ΚΠ.

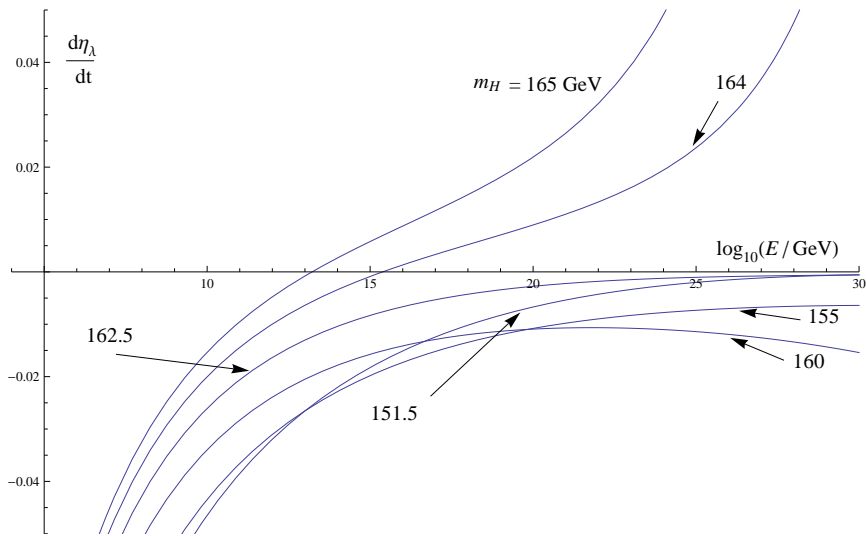
Μελετώντας αριθμητικά το λόγο  $\eta_\lambda \equiv \tilde{\lambda}/\alpha_1$  και παρατηρώντας το σχήμα 3.1, βλέπουμε ότι τείνει σε μία σταθερή τιμή σε υψηλές ενεργειακές κλίμακες. Επιπλέον σχεδιάζουμε την παράγωγο του παραπάνω λόγου ως συνάρτηση του  $t$  για αρκετές αρχικές τιμές για τη σταθερά σύζευξης του *Higgs*, οι οποίες κατά συνέπεια μας δίνουν τιμές για τη μάζα του.

Στο σχήμα 3.2 παρατηρούμε ότι αρχίζοντας από την τιμή  $m_H = 165$  GeV η παράγωγος είναι θετική για υψηλές ενέργειες. Για χαμηλότερες τιμές της μάζας του *Higgs* η παράγωγος μειώνεται και για  $m_H \sim 162$  GeV τείνει ασυμπτωτικά προς το μηδέν. Μειώνοντας ακόμη τη μάζα η παράγωγος γίνεται αρνητική αλλά ξανά για  $m_H = 151.5$  GeV τείνει πάλι ασυμπτωτικά προς το μηδέν. Για ακόμη χαμηλότερες τιμές της μάζας η παράγωγος γίνεται θετική αλλά τώρα το  $\lambda$  περνάει από αρνητικές τιμές. Επίσης παρατηρούμε ότι ο λόγος  $\eta_\lambda$  λαμβάνει σταθερή τιμή για ενέργειες μεγαλύτερες της ενεργειακής κλίμακας *Planck*.

<sup>1</sup>Μόνο η συνεισφορά του κορυφαίου κουάρκ λαμβάνεται υπόψιν στην εξίσωση επανακανονικοποίησης.



Σχήμα 3.1: Ο λόγος  $\eta_\lambda$  ως συνάρτηση του λογάριθμου της ενέργειας  $t$ .



Σχήμα 3.2: Η παράγωγος του λόγου  $d\eta_\lambda/dt$  ως συνάρτηση του λογάριθμου της ενέργειας.

Κατόπιν θα μελετήσουμε την παραπάνω κατάσταση από μία ημιανλυτική σκοπιά. Μπορούμε να εκφράσουμε την εξάρτηση του λόγου  $\eta_\lambda$  από την ενέργεια

στη μορφή

$$\frac{d\eta_\lambda}{dt} = \frac{1}{\alpha_1} \frac{d\tilde{\lambda}}{dt} - \frac{\tilde{\lambda}}{\alpha_1^2} \frac{d\alpha_1}{dt} = \frac{1}{\alpha_1} \beta_\lambda(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_t, \tilde{\lambda}) - \frac{\tilde{\lambda}}{\alpha_1^2} \beta_1(\alpha_1) \quad (3.14)$$

όπου  $\beta_1$  είναι η ενός βρόχου συνάρτηση βήτα για τη σταθερά σύζευξης βαθμίδας  $\alpha_1$ . Η έκφραση αυτή μπορεί να γραφεί εναλλακτικά ως εξής

$$\frac{d\eta_\lambda}{dt} = \alpha_1 \beta_\lambda(1, \alpha_2/\alpha_1, \alpha_t/\alpha_1, \eta_\lambda) - \alpha_1 \eta_\lambda b_1 \quad (3.15)$$

όπου  $\beta_1 = b_1 \alpha_1^2$ . Εφόσον στο επίπεδο του ενός βρόχου οι διαφορικές εξισώσεις για τις σταθερές σύζευξης βαθμίδας και *Yukawa* μπορούν να λυθούν ανεξάρτητα από τη σταθερά σύζευξης  $\tilde{\lambda}$ , μπορούμε να εκφράσουμε τις  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  και  $\alpha_t$  ως συνάρτηση του  $t$ , οπότε η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\frac{d\eta_\lambda}{dt} = \alpha_1(t) \beta_\lambda(t, \eta_\lambda) - \alpha_1(t) \eta_\lambda b_1 \equiv \alpha_1(t) F_{\eta_\lambda}(t, \eta_\lambda) \quad (3.16)$$

χρησιμοποιώντας τον ίδιο συμβολισμό  $\beta_\lambda$  για τη νέα συνάρτηση του  $t$  και του  $\eta_\lambda$ . Στο σχήμα 3.3 σχεδιάζουμε καμπύλες σταθερής τιμής (-0.01, 0, 0.01) για τη συνάρτηση  $\alpha_1(t) F_{\eta_\lambda}(t, \eta_\lambda)$  στο επίπεδο των  $(t, \eta_\lambda)$ . Μπορούμε να δούμε ξεκάθαρα ότι η μηδενική τιμή της συνάρτησης τείνει για πολύ υψηλές ενέργειες σε μία σταθερή τιμή για το λόγο  $\eta_\lambda$  ( $\sim 1.4$  και  $\sim 0.05$ ).

Στη συνέχεια υιοθετούμε μία ακόμη εναλλακτική προσέγγιση στη μελέτη της συμπεριφοράς του λόγου  $\eta_\lambda$  σε υψηλές ενέργειες. Θεωρούμε τις ποσότητες  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2/\alpha_1 \equiv \eta_2$ ,  $\alpha_t/\alpha_1 \equiv \eta_t$  και  $\eta_\lambda$  ως ανεξάρτητες μεταβλητές. Οπότε η εξίσωση (3.16) μπορεί να γραφεί ως

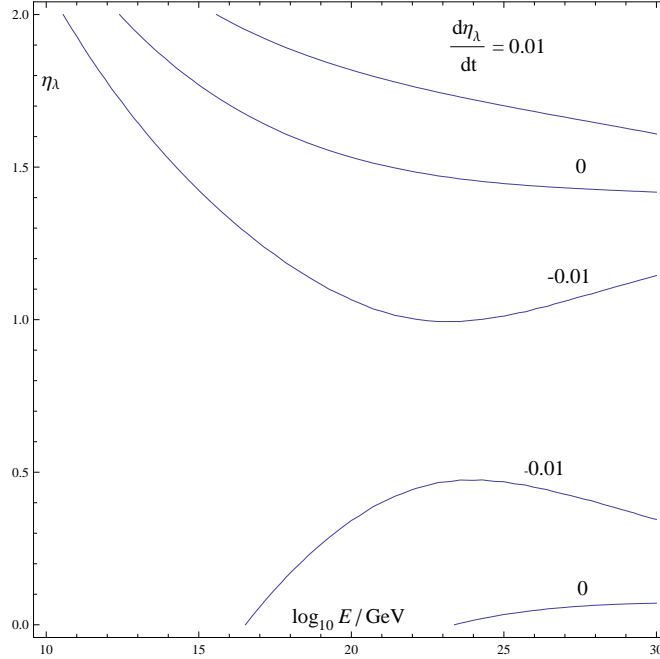
$$\frac{d\eta_\lambda}{dt} = \alpha_1 F_{\eta_\lambda}(\eta_2, \eta_t, \eta_\lambda) \quad (3.17)$$

όπου χρησιμοποιούμε ξανά τον ίδιο συμβολισμό  $F_{\eta_\lambda}$ . Η παράγωγος του  $\eta_\lambda$  ως προς  $\alpha_1$  δίνεται ως

$$\frac{d\eta_\lambda}{d\alpha_1} = \frac{\frac{d\eta_\lambda}{dt}}{\frac{d\alpha_1}{dt}} = \frac{\alpha_1 F_{\eta_\lambda}(\eta_2, \eta_t, \eta_\lambda)}{b_1 \alpha_1^2} = \frac{F_{\eta_\lambda}(\eta_2, \eta_t, \eta_\lambda)}{b_1 \alpha_1} \quad (3.18)$$

ή λεπτομερέστερα:

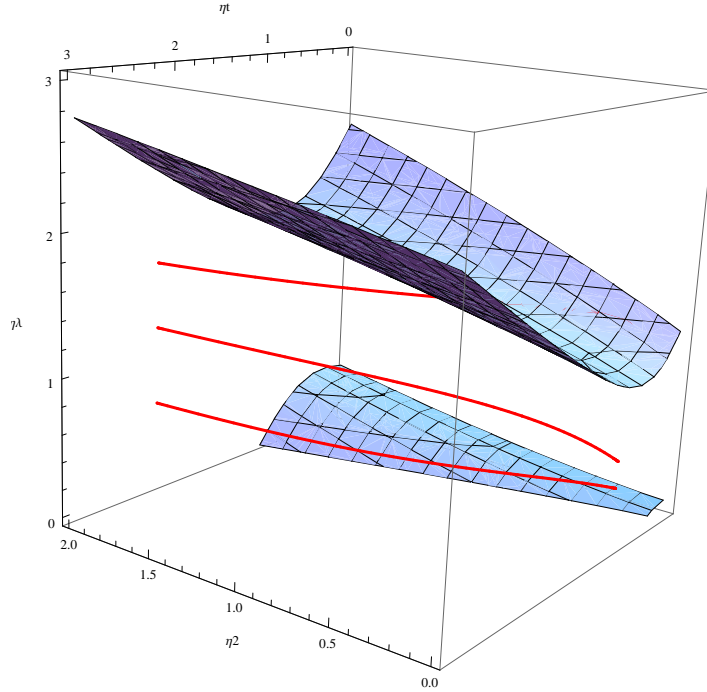
$$\frac{d\eta_\lambda}{d\alpha_1} = \frac{L_2 \eta_\lambda^2 + A_{1L} \eta_\lambda + A_{2L} \eta_2 \eta_\lambda + A_{11} + A_{12} \eta_2 + A_{22} \eta_2^2 + H_L \eta_t \eta_\lambda + H_2 \eta_t^2 - \eta_\lambda b_1}{b_1 \alpha_1}.$$



Σχήμα 3.3: Καμπύλες σταθερής τιμής της παραγώγου  $d\eta_\lambda/dt$  στο επίπεδο των  $(t, \eta_\lambda)$  για τρεις τιμές:  $-0.01$ ,  $0$  και  $0.01$ .

Αν το  $\eta_\lambda$  τείνει σε μία σταθερή τιμή, τότε η παραπάνω παράγωγος θα πρέπει να τείνει στο μηδέν. Αυτό ισχύει όταν το  $\alpha_1$  γίνει πολύ μεγάλο αλλά και όταν ο αριθμητής  $F_{\eta_\lambda}(\eta_2, \eta_t, \eta_\lambda)$  είναι ίσος με το μηδέν. Για να δούμε σε πρώτη προσέγγιση τη συμπεριφορά του λόγου μπορούμε να θέσουμε  $\eta_2 = \eta_t = 0$  (και οι δύο λόγοι τείνουν στο 0 σε πολύ υψηλές ενέργειες). Οπότε η συνάρτηση  $F_{\eta_\lambda}(0, 0, \eta_\lambda)$  είναι απλώς ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού στο  $\eta_\lambda$  του οποίου οι ρίζες είναι οι τιμές  $\sim 1.34$  και  $\sim 0.047$  οι οποίες είναι οι δύο καθορισμένες τιμές που είχαν παρατηρηθεί πριν αρκετά χρόνια [41, 42]. Στο σχήμα 3.4 έχουμε σχεδιάσει στο χώρο των  $(\eta_2, \eta_t, \eta_\lambda)$  την επιφάνεια όπου  $F_{\eta_\lambda}(\eta_2, \eta_t, \eta_\lambda) = 0$ .

Στη συνέχεια λύνουμε αριθμητικά τη διαφορική εξίσωση εκφράζοντας το λόγο  $\eta_\lambda$  ως συνάρτηση του  $t$  και σχεδιάζουμε την παραμετρική καμπύλη  $(\eta_2(t), \eta_t(t), \eta_\lambda(t))$ . Αναμένουμε ότι για υψηλές ενέργειες (μικρές τιμές των  $\eta_2$  και  $\eta_t$ ), η καμπύλη θα βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια  $F_{\eta_\lambda} = 0$ . Αυτό φαίνεται στο σχήμα 3.4. Υπάρχουν δύο επιφάνειες που αντιστοιχούν σε  $F_{\eta_\lambda} = 0$  και έχουμε σχεδιάσει τις παραμετρικές καμπύλες για τρεις μάζες του Higgs. Ξεκινώντας



Σχήμα 3.4: Επιφάνειες σταθερού λόγου  $\eta_\lambda$  και παραμετρικές καμπύλες των  $\eta_2(t)$ ,  $\eta_t(t)$  και  $\eta_\lambda(t)$  (ενός βρόχου).

βλέπουμε ότι για τιμές  $m_H \sim 162.5, 151.6$  GeV οι παραμετρικές καμπύλες βρίσκονται πάνω στις επιφάνειες (εφάπτονται) για μικρές τιμές των  $\eta_2$  και  $\eta_t$ .

### 3.4 Οι Εξισώσεις Ελάττωσης

Από την προηγούμενη ανάλυση οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι οι σταθερές σύζευξης  $\lambda$  και  $\alpha_1$  μοιάζουν να μην είναι ανεξάρτητες στο ΚΠ αλλά μπορεί να υπάρχει μία συναρτησιακή σχέση μεταξύ τους σε πολύ υψηλές ενεργειακές κλίμακες. Επομένως μπορούμε να αναζητήσουμε λύσεις της εξίσωσης ελάττωσης

$$\frac{d\tilde{\lambda}}{d\alpha_1} = \frac{\beta_\lambda}{\beta_1} \quad (3.19)$$

σε επίπεδο ενός βρόχου χρησιμοποιώντας την υπόθεση

$$\tilde{\lambda}(t) = c_1 \alpha_1(t) \quad (3.20)$$



όπου  $c_1$  είναι μία σταθερά στην περιοχή των υψηλών ενεργειών. Είναι σαφές ότι σε όλο το ενεργειακό διάστημα δεν έχει σταθερή τιμή. Χρησιμοποιώντας την έκφραση ενός βρόχου για το  $\alpha_1(t)$  μπορούμε να λύσουμε ως προς  $t$

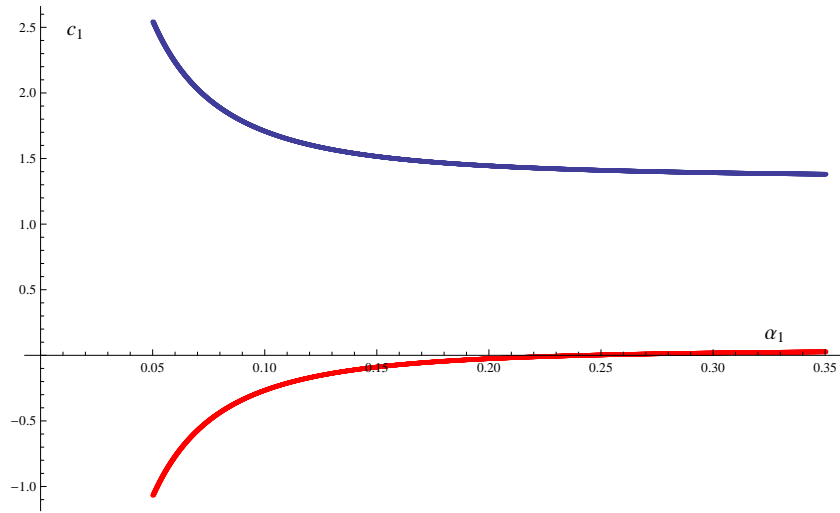
$$t = \frac{2\pi}{b_1 a_{1_0}} - \frac{2\pi}{b_1 a_1} + t_0 \quad (3.21)$$

όπου  $a_{1_0}$  και  $t_0$  είναι οι αρχικές συνθήκες για τη σταθερά σύζευξης και την ενεργειακή κλίμακα αντίστοιχα. Στη συνέχεια εκφράζουμε τις  $\alpha_2(t)$  και  $\alpha_t(t)$  (οι οποίες είναι παρούσες στην  $\beta_\lambda$ ) ως συναρτήσεις του  $\alpha_1$ . Χρησιμοποιώντας την υπόθεση (3.20), η σχέση (3.19) μετατρέπεται σε ένα δευτέρου βαθμού πολυώνυμο ως προς  $c_1$  όπου οι συντελεστές εξαρτώνται από το  $\alpha_1$ . Στο διάγραμμα 3.5 σχεδιάζουμε τις δύο ρίζες του πολυωνύμου ως συναρτήσεις του  $\alpha_1$ .

Εξάκθαρα βλέπουμε ότι για πολύ μεγάλες τιμές του  $\alpha_1$ , δηλαδή για πολύ μεγάλες τιμές της ενέργειας, οι ρίζες του πολυωνύμου τείνουν σε σταθερές τιμές. Αυτό μπορεί να γίνει εύκολα κατανοητό, διότι για υψηλές ενέργειες μπορούμε να παραλείψουμε όλες τις σταθερές σύζευξης εκτός από το  $\alpha_1$ , οπότε η εξίσωση (3.19) γίνεται

$$c_1 = \frac{L_2 \alpha_1^2 c_1^2 + c_1 A_{1L} \alpha_1^2 + A_{11} \alpha_1^2}{b_1 \alpha_1^2} = \frac{L_2 c_1^2 + c_1 A_{1L} + A_{11}}{b_1} \quad (3.22)$$

και οι δύο ρίζες γίνονται ανεξάρτητες από το  $\alpha_1$  (1.34233 και 0.0465609 αντίστοιχα). Έχουμε ήδη συναντήσει αυτή τη συμπεριφορά όταν εξετάσαμε τη



Σχήμα 3.5: Η σταθερά  $c_1$  ως συνάρτηση του  $\alpha_1$ .

σχέση (3.18). Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσουμε ότι οι τιμές του  $\alpha_1$  όταν η σταθερά  $c_1$  προσεγγίζει ένα από τα καθορισμένα σημεία, αντιστοιχούν σε ενέργειες οι οποίες είναι μεγαλύτερες από την ενεργειακή κλίμακα *Planck* (στην ενέργεια αυτή ισχύει  $\alpha_1 \sim 0.017$ ).

Στη συνέχεια αναζητούμε γενικότερες λύσεις και υποθέτουμε ότι ισχύει η σχέση:

$$\eta_\lambda = \frac{\tilde{\lambda}}{\alpha_1} = c_1 + c_2(\eta_2). \quad (3.23)$$

Για υψηλές ενέργειες ο λόγος  $\eta_2$  τείνει στο μηδέν και για να προκύψει η αρχική μας υπόθεση πρέπει να απαιτήσουμε ότι  $c_2(\eta_2 \rightarrow 0) = 0$ . Από τις εξισώσεις (3.16) και (3.23) καταλήγουμε στην επόμενη σχέση:

$$\frac{dc_2}{dt} = \frac{d\eta_\lambda}{dt} = \alpha_1 \beta_\lambda(1, \eta_2, \eta_t, \eta_\lambda) - \alpha_1 \eta_\lambda b_1. \quad (3.24)$$

Επίσης μπορούμε να γράψουμε

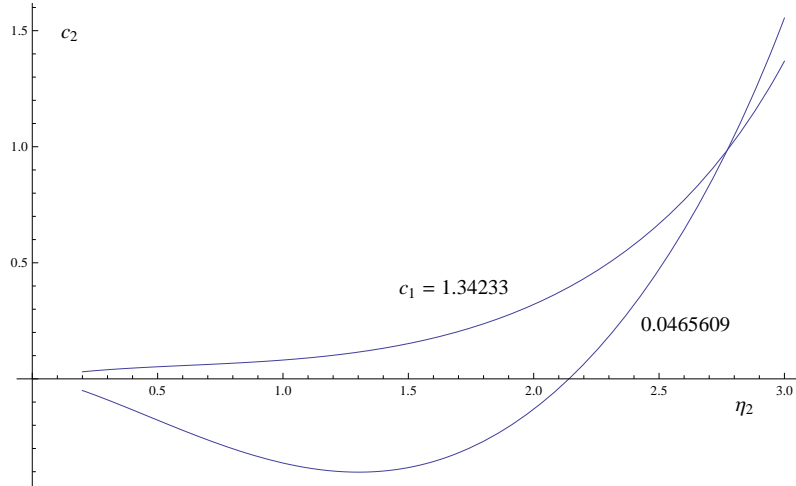
$$\frac{d\eta_2}{dt} = \frac{1}{\alpha_1} \frac{d\alpha_2}{dt} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2} \frac{d\alpha_1}{dt} = \alpha_1 (b_2 \eta_2^2 - \eta_2 b_1) \quad (3.25)$$

όπου  $b_2$  είναι ο συντελεστής της συνάρτησης βήτα ενός βρόχου για τη σταθερά σύζευξης βαθμίδας  $\alpha_2$ . Διαιρώντας τις δύο προηγούμενες εξισώσεις παίρνουμε την παράγωγο του  $c_2$  ως προς το  $\eta_2$ . Στη συνέχεια εκφράζουμε το λόγο  $\eta_t$  ως συνάρτηση του  $\eta_2$ . Έχοντας την αναλυτική έκφραση ενός βρόχου για τα  $\alpha_t$  και  $\alpha_1$  ως συναρτήσεις του  $t$  μπορούμε να αντικαταστήσουμε το  $t$  από τη σχέση

$$\begin{aligned} \eta_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} &= \frac{\frac{\alpha_{20}}{1 - \frac{b_2}{2\pi} \alpha_{20}(t - t_0)}}{\frac{\alpha_{10}}{1 - \frac{b_1}{2\pi} \alpha_{10}(t - t_0)}} \Rightarrow \\ t &= t_0 + \frac{\eta_{20} - \eta_2}{\frac{1}{2\pi} [\eta_0 b_1 \alpha_{10} - \eta_2 b_2 \alpha_{20}]} \end{aligned} \quad (3.26)$$

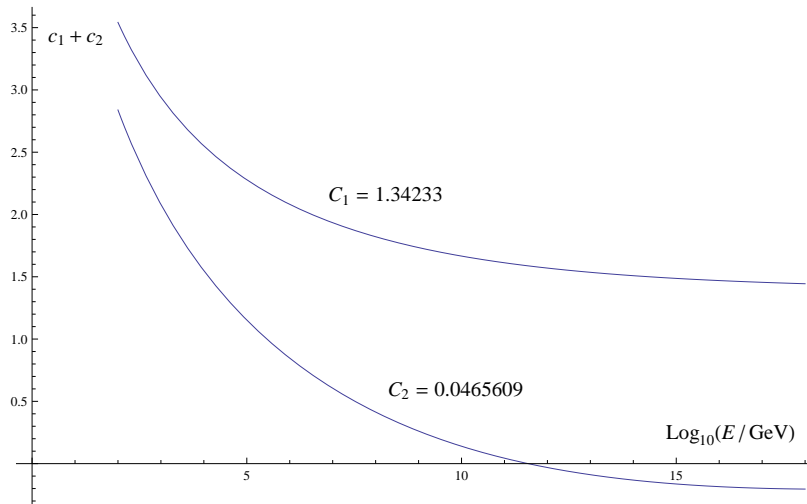
όπου  $\eta_{20} = \alpha_{20}/\alpha_{10}$  και  $\alpha_{10}$  και  $\alpha_{20}$  είναι οι αντίστοιχες τιμές στην ενεργειακή κλίμακα  $t_0$ . Αντικαθιστώντας  $\eta_\lambda = c_1 + c_2(\eta_2)$  και λύνοντας τη διαφορική εξίσωση ως προς το  $c_2(\eta_2)$

$$\frac{dc_2}{d\eta_2} = \frac{L_2 \eta_\lambda^2 + A_{1L} \eta_\lambda + A_{2L} \eta_2 \eta_\lambda + A_{11} + A_{12} \eta_2 + A_{22} \eta_2^2 + H_L \eta_t \eta_\lambda + H_2 \eta_t^2 - \eta_\lambda b_1}{b_2 \eta_2^2 - \eta_2 b_1}$$



Σχήμα 3.6: Σχεδίαση του  $c_2$  ως συνάρτηση του  $\eta_2$  για δύο τιμές του  $c_1$  (ενός βρόχου).

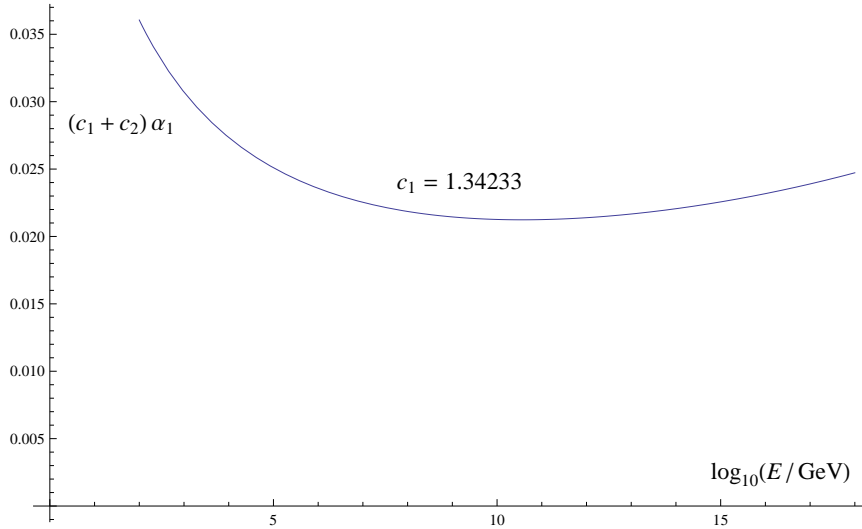
υπολογίζουμε το  $c_2(\eta_2)$ . Στο διάγραμμα 3.6 βλέπουμε τις λύσεις για δύο επιλογές της σταθεράς  $c_1$  χρησιμοποιώντας ως αρχική συνθήκη  $c_2(\eta_2 = 0.02) = 0$ . Στο σχήμα 3.7 παρατηρούμε την ποσότητα  $c_1 + c_2$  ως συνάρτηση της ενεργ-



Σχήμα 3.7: Σχεδίαση του  $c_1 + c_2$  ως συνάρτηση του  $\log_{10}(E)$  για δύο τιμές του  $c_1$ .

γειακής κλίμακας. Η καμπύλη που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη τιμή  $c_1$  έχει ήδη φτάσει την τιμή της κοντά στην ενεργειακή κλίμακα Planck, ενώ αυτή που αντιστοιχεί στη χαμηλότερη τιμή της  $c_1$  περνάει από αρνητικές (μη αποδεκτές) τιμές.

Στη συνέχεια στο σχήμα 3.8 έχουμε σχεδιάσει τη συνάρτηση  $(c_1 + c_2(t)) a_1(t)$ . Η αντίστοιχη μάζα (*running mass*) για το *Higgs* είναι  $\sim 162$  GeV, ενώ η φυσική μάζα (*pole mass*) είναι  $\sim 154$  GeV. Οι διορθώσεις που απαιτούνται για να υπολογίσουμε τη φυσική μάζα του *Higgs* δίνονται στις αναφορές [52, 53, 54]. Συνεχίζοντας ακολουθούμε τη ίδια διαδικασία με προηγούμενα, όμως αυτή τη



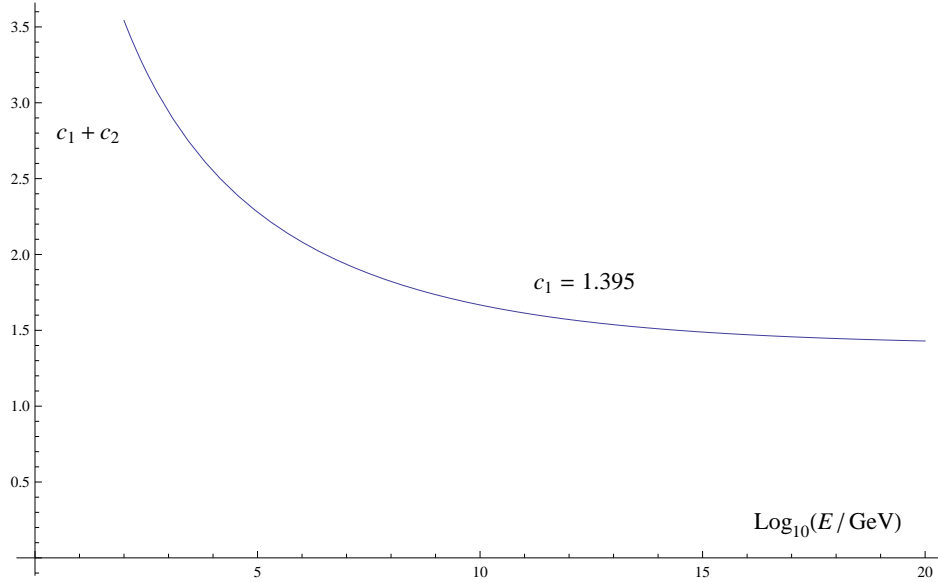
Σχήμα 3.8: Σχεδίαση του  $(c_1 + c_2) a_1$  ως συνάρτηση του  $\log_{10}(E)$  για τη μεγαλύτερη τιμή του  $c_1$ .

φορά λαμβάνουμε υπόψιν τις διορθώσεις που προκύπτουν από διαγράμματα δύο βρόχων. Υπολογίζουμε ξανά τη σταθερά  $c_1$  και η ανάλογη σχέση με τη σχέση (3.22) γράφεται ως:

$$c_1 = \frac{L_2 c_1^2 + A_{1L} c_1 + A_{12} + \frac{a_1}{4\pi} (L_3 c_1^3 + L_{A1} c_1^2 + L_{A12} c_1 + A_{13})}{b_1}. \quad (3.27)$$

Για την εξαγωγή της παραπάνω σχέσης έχουμε παραλείψει όλους εκείνους τους όρους οι οποίοι είναι πολύ μικροί στις υψηλές ενεργειακές κλίμακες. Παρατηρούμε ότι η σταθερά πλέον δεν είναι ανεξάρτητη από τη σταθερά σύζευξης  $a_1$ . Παρόλα αυτά για ένα ευρύ φάσμα τιμών του  $a_1$  η  $c_1$  μεταβάλλεται λιγότερο από

5% από τις τιμές της ενός βρόχου προσέγγισης. Δηλαδή η τιμή της κυμαίνεται μεταξύ 0.0448 - 0.0465 για τη χαμηλότερη τιμή της και 1.342 - 1.395 για την υψηλότερη τιμή της. Στη συνέχεια λύνουμε τη διαφορική εξίσωση δύο βρόχων για το  $c_2$  θεωρώντας ότι  $c_1 = 1.395$  και στο σχήμα 3.9 σχεδιάζουμε τη συνάρτηση  $c_1 + c_2(t)$ . Οι αντίστοιχες *running* και *pole* μάζες του σωματιδίου *Higgs* είναι  $\sim 163(155)$  GeV.



Σχήμα 3.9: Σχεδίαση του  $(c_1 + c_2)$  ως συνάρτηση του  $\log_{10}(E)$  για  $c_1 = 1.395$ .

### 3.4.1 Εφαρμογή των εξισώσεων ελάττωσης στις σταθερές σύζευξης βαθμίδας του Ελάχιστου Υπερσυμμετρικού Καθιερωμένου Προτύπου

Υποθέτοντας ότι η σταθερά σύζευξης βαθμίδας  $a_2$  της ομάδας συμμετρίας  $SU(2)$  μπορεί να συσχετιστεί με τη σταθερά σύζευξης βαθμίδας  $a_1$  ( $a_i = \frac{g_i^2}{4\pi}$ ) της ομάδας συμμετρίας  $U(1)$  έχουμε την ακόλουθη εξίσωση ελάττωσης

$$\beta_2 = \beta_1 \frac{da_2}{da_1} \quad (3.28)$$

όπου

$$\beta_2 \equiv \frac{d\alpha_2}{dt} = \frac{b_2}{2\pi} \alpha_2^2, \quad \beta_1 \equiv \frac{d\alpha_1}{dt} = \frac{b_1}{2\pi} \alpha_1^2$$

με  $\beta_2, \beta_1$  τις συναρτήσεις βήτα για τις σταθερές σύζευξης  $\alpha_2, \alpha_1$  αντίστοιχα. Οι συντελεστές  $b_2 = 1, b_1 = 11$  είναι οι συντελεστές των συναρτήσεων βήτα. Μπορούμε να γράψουμε την  $\alpha_2$  στη μικρότερη τάξη στη θεωρία διαταραχών [55] ως:

$$\alpha_2 = c_0 \alpha_1. \quad (3.29)$$

Αντικαθιστώντας αυτή τη σχέση στην εξίσωση ελάττωσης (3.28) έχουμε

$$c_0 = \frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{b_2 \alpha_2^2}{b_1 \alpha_1^2} = \frac{b_2 c_0^2 \alpha_1^2}{b_1 \alpha_1^2} = 11 \quad (3.30)$$

οπότε η  $\alpha_2$  μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\alpha_2 = 11\alpha_1. \quad (3.31)$$

Στη συνέχεια μπορούμε να ελέγξουμε αν αυτό το αποτέλεσμα είναι συμβατό με τις πειραματικές τιμές. Γνωρίζουμε ότι ισχύει η σχέση

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_{em}} &= \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} \Rightarrow \\ \alpha_{em} &= \frac{11}{12} \alpha_1 \end{aligned}$$

καθώς και η σχέση

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta_w &= \frac{\alpha_{em}}{\alpha_2} \Rightarrow \\ \sin^2 \theta_w &= \frac{11}{12} \frac{\alpha_1}{11\alpha_1} = \frac{1}{12} = 0.08333 \end{aligned}$$

κάτι το οποίο είναι μη αποδεκτό διότι:

$$\sin^2 \theta_w^{\text{πειρ.}} = 0.23146 \pm 0.00017.$$

### 3.4.2 Εφαρμογή των εξισώσεων ελάττωσης στις σταθερές σύζευξης *Yukawa* του Ελάχιστου Υπερσυμμετρικού Καθιερωμένου Προτύπου

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία υποθέτουμε ότι η σταθερά σύζευξης *Yukawa* για το κορυφαίο (*top*) κουάρκ μπορεί να συσχετιστεί με τη σταθερά σύζευξης *Yukawa* για το χαμηλό (*bottom*) κουάρκ, συνεπώς πρέπει να ικανοποιούν την εξίσωση ελάττωσης:

$$\beta_t = \beta_b \frac{d\alpha_t}{d\alpha_b} \Rightarrow \frac{d\alpha_t}{d\alpha_b} = \frac{\beta_t}{\beta_b} = \frac{\alpha_t(6\alpha_t + \alpha_b - \frac{13}{15}\alpha_1 - 3\alpha_2 + \frac{16}{3}\alpha_3)}{\alpha_b(6\alpha_b + \alpha_t + \alpha_\tau - \frac{7}{15}\alpha_1 - 3\alpha_2 + \frac{16}{3}\alpha_3)}. \quad (3.32)$$

Μπορούμε για λόγους απλότητας να μη λάβουμε υπόψιν τη συνεισφορά από το λεπτόνιο  $\tau$  και τη μικρή διαφορά μεταξύ των τιμών  $\frac{13}{15}$  και  $\frac{7}{15}$ , επομένως:

$$\frac{\beta_t}{\beta_b} = \frac{\alpha_t(6\alpha_t + \alpha_b - \frac{13}{15}\alpha_1 - 3\alpha_2 + \frac{16}{3}\alpha_3)}{\alpha_b(6\alpha_b + \alpha_t - \frac{13}{15}\alpha_1 - 3\alpha_2 + \frac{16}{3}\alpha_3)}. \quad (3.33)$$

Υποθέτοντας ξανά ότι η λύση της διαφορικής εξίσωσης μπορεί να γραφεί ως δυναμοσειρά, μπορούμε να γράψουμε:

$$\alpha_t = d_0\alpha_b \quad (3.34)$$

Η παράγωγος του λόγου των δύο σταθερών σύζευξης *Yukawa* πρέπει να είναι μηδέν:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\alpha_t}{\alpha_b} \right) &= 0 \Rightarrow \\ \frac{1}{\alpha_t^2} (\alpha_b\beta_t - \alpha_t\beta_b) &= 0 \Rightarrow \\ \frac{\alpha_t}{\alpha_b} &= \frac{\beta_t}{\beta_b}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Η εξίσωση (3.33) γίνεται:

$$\frac{\alpha_t}{\alpha_b} = \frac{\alpha_t(6\alpha_t + \alpha_b - \frac{13}{15}\alpha_1 - 3\alpha_2 + \frac{16}{3}\alpha_3)}{\alpha_b(6\alpha_b + \alpha_t - \frac{13}{15}\alpha_1 - 3\alpha_2 + \frac{16}{3}\alpha_3)} \Rightarrow$$

$$6\alpha_t + \alpha_b - \frac{13}{15}\alpha_1 - 3\alpha_2 + \frac{16}{3}\alpha_3 = 6\alpha_b + \alpha_t - \frac{13}{15}\alpha_1 - 3\alpha_2 + \frac{16}{3}\alpha_3 \Rightarrow$$

$$\alpha_t = \alpha_b. \quad (3.36)$$

Συνεπώς μπορούμε να συμπεράνουμε ότι αν οι τιμές των σταθερών σύζευξης *Yukawa* είναι ίσες σε κάποια ενεργειακή κλίμακα, θα συνεχίσουν να είναι σε όλες τις ενέργειες. Στη συνέχεια λύνουμε αριθμητικά τις συζευγμένες διαφορικές εξισώσεις ενός βρόχου για τις σταθερές σύζευξης του κορυφαίου και χαμηλού κουάρκ λαμβάνοντας υπόψιν τη συνεισφορά από το  $\tau$  και τη διαφορά μεταξύ των αριθμητικών παραγόντων για να δούμε αν μια σχέση όπως η προηγούμενη πράγματι ισχύει. Αρχικά λύνουμε τις διαφορικές εξισώσεις για τις σταθερές σύζευξης βαθμίδας και *Yukawa* στο ΚΠ. Στη συνέχεια σε μία ενεργειακή κλίμακα  $M_{SUSY}$  επιβάλλουμε τις ακόλουθες συνοριακές συνθήκες για κάποιες τιμές της  $\tan \beta$  για τις οποίες ο λόγος των δύο σταθερών σύζευξης είναι σταθερός:

$$\alpha_t(SM) = \alpha_t(MSSM) \sin^2 \beta$$

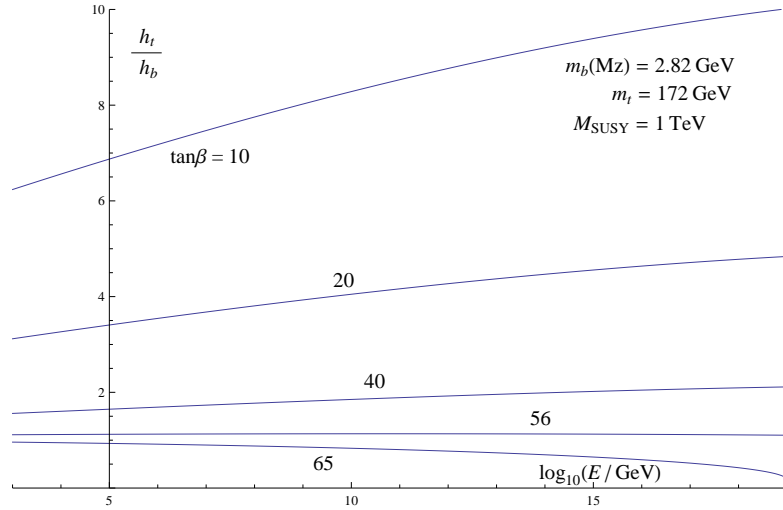
$$\alpha_b(SM) = \alpha_b(MSSM) \cos^2 \beta$$

$$\alpha_\tau(SM) = \alpha_\tau(MSSM) \cos^2 \beta$$

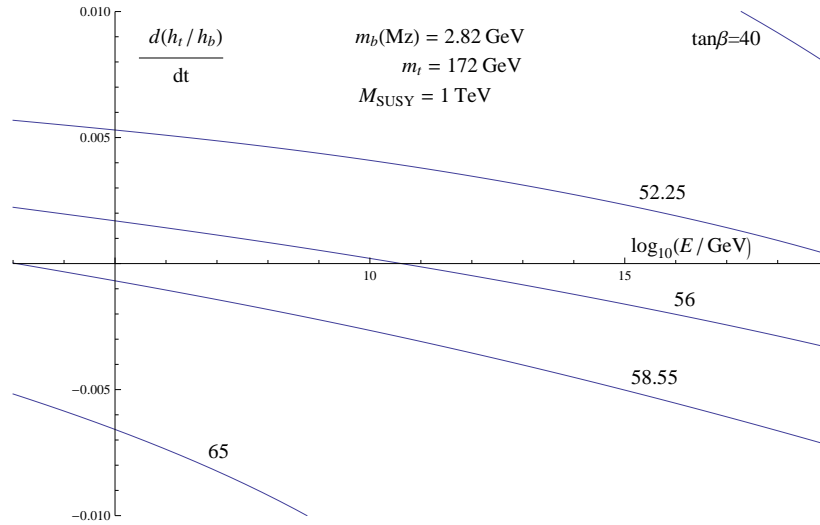
Πάνω από τη ενεργειακή κλίμακα  $M_{SUSY}$  οι σταθερές σύζευξης υπακούουν τις εξισώσεις επανακανονικοποίησης του ΕΥΚΠ.

Στο σχήμα 3.10 έχουμε σχεδιάσει το λόγο  $h_t/h_b$  ως συνάρτηση της ενέργειας για ορισμένες τιμές της  $\tan \beta$  καθώς και για  $M_{SUSY} = 1 \text{ TeV}$ ,  $m_t = 172 \text{ GeV}$  και  $m_b(M_Z) = 2.82 \text{ GeV}$ . Αντίστοιχα στο σχήμα 3.11 έχουμε σχεδιάσει την παράγωγο του λόγου  $h_t/h_b$  και παρατηρούμε ότι για τιμές της  $\tan \beta \sim 56$  ο λόγος είναι σταθερός και η αντίστοιχη παράγωγος σχεδόν μηδενίζεται. Οι δύο τιμές της  $\tan \beta$ : 52.25 και 58.55 είναι οι οριακές περιπτώσεις. Στα διαγράμματα 3.12 και 3.13 έχουμε σχεδιάσει το λόγο και την παράγωγο του λόγου των σταθερών σύζευξης για διάφορες τιμές της ενεργειακής κλίμακας  $M_{SUSY}$  κρατώντας τις τιμές των κουάρκ στις κεντρικές τους τιμές. Στα σχήματα 3.14 και 3.15 έχουμε σχεδιάσει ξανά το λόγο και την παράγωγο του λόγου μεταβάλλοντας τη μάζα του χαμηλού κουάρκ.

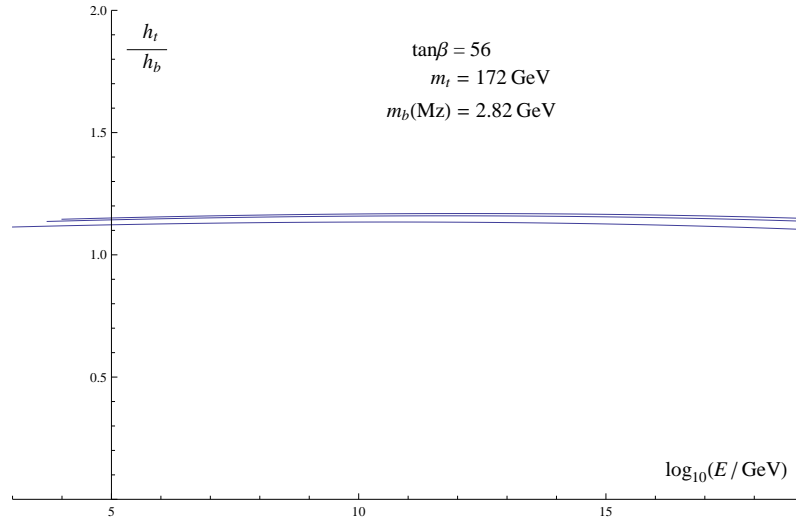




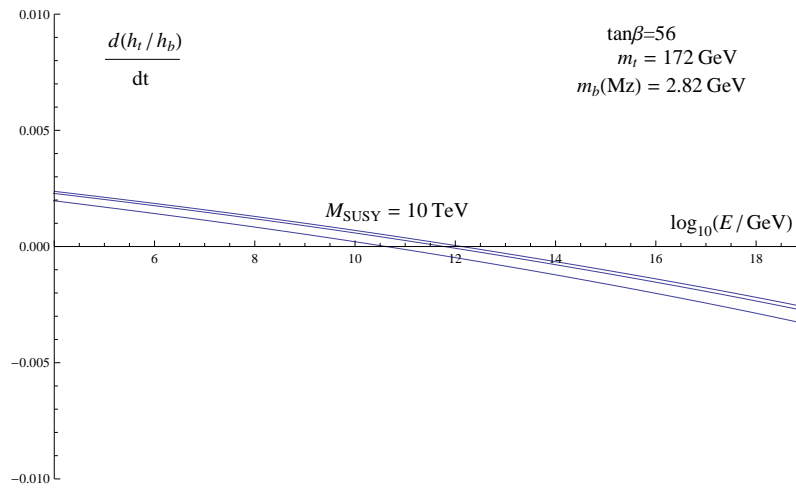
Σχήμα 3.10: Σχεδίαση του λόγου  $h_t/h_b$  ως συνάρτηση του λογάριθμου της ενέργειας για διάφορες τιμές της  $\tan\beta$  και για  $M_{SUSY} = 1$  TeV,  $m_t = 172$  GeV και  $m_b(M_Z) = 2.82$  GeV.



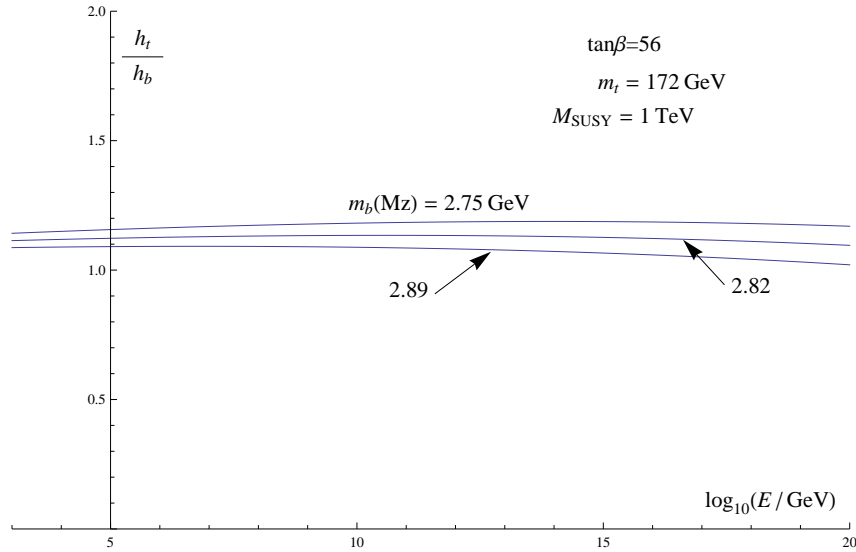
Σχήμα 3.11: Σχεδίαση της παραγώγου του λόγου  $h_t/h_b$  ως συνάρτηση του λογάριθμου της ενέργειας για διάφορες τιμές της  $\tan\beta$  και για  $M_{SUSY} = 1$  TeV,  $m_t = 172$  GeV και  $m_b(M_Z) = 2.82$  GeV.



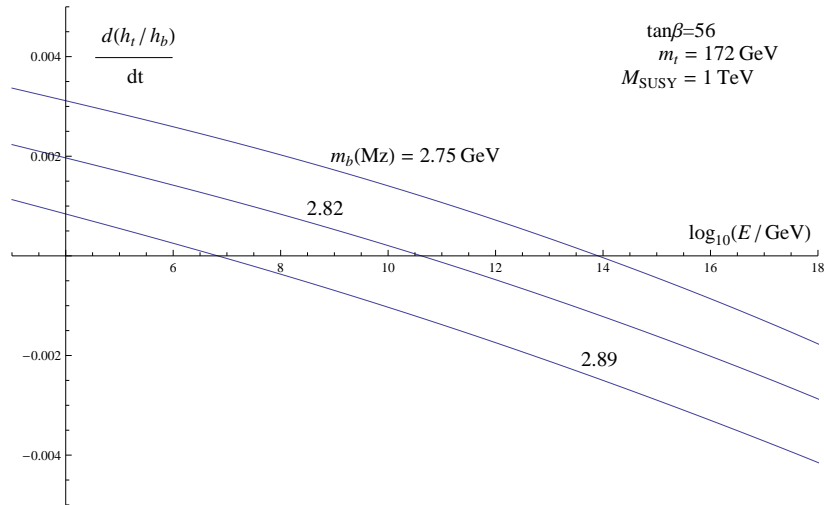
Σχήμα 3.12: Σχεδίαση του λόγου  $h_t/h_b$  ως συνάρτηση του λογάριθμου της ενέργειας για διάφορες τιμές της  $M_{SUSY} = 1, 5, 10 \text{ TeV}$ .



Σχήμα 3.13: Σχεδίαση της παραγώγου του λόγου  $h_t/h_b$  ως συνάρτηση του λογάριθμου της ενέργειας για διάφορες τιμές της  $M_{SUSY} = 1, 5, 10 \text{ TeV}$ .

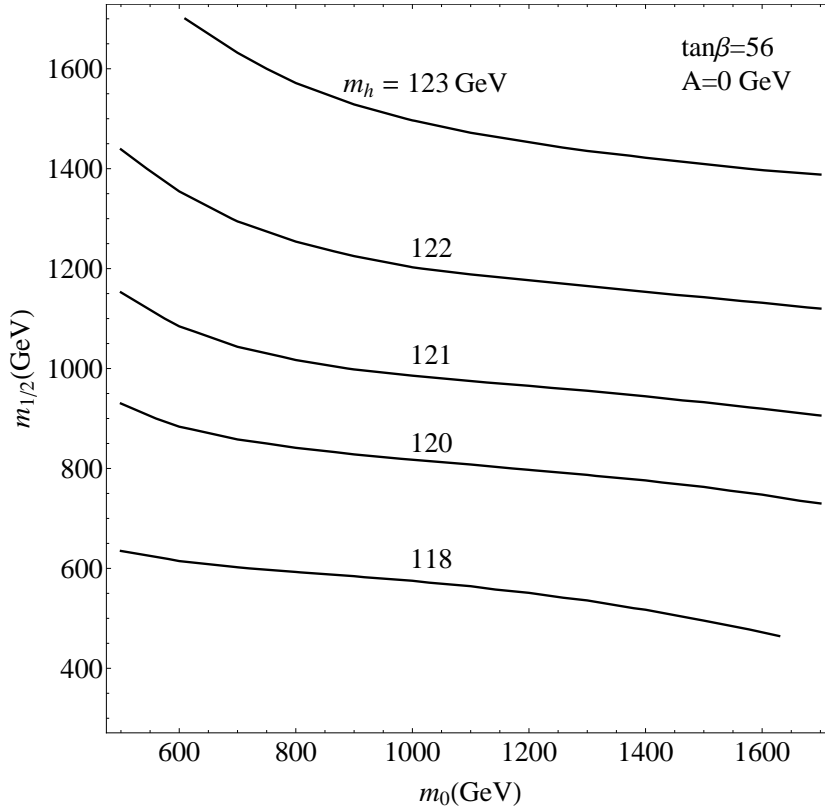


Σχήμα 3.14: Σχεδίαση του λόγου  $h_t/h_b$  ως συνάρτηση του λογάριθμου της ενέργειας για διάφορες τιμές της μάζας του χαμηλού κουάρκ οι οποίες βρίσκονται στην επιτρεπόμενη περιοχή σφάλματος.



Σχήμα 3.15: Σχεδίαση της παραγώγου του λόγου  $h_t/h_b$  ως συνάρτηση του λογάριθμου της ενέργειας για διάφορες τιμές της μάζας του χαμηλού κουάρκ οι οποίες βρίσκονται στην επιτρεπόμενη περιοχή σφάλματος.

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα *SUSPECT* [56], σχεδιάζουμε στο επίπεδο  $(m_0, m_{1/2})$  καμπύλες σταθερής τιμής για τη μάζα του ελαφρύτερου υπερσυμμετρικού σωματιδίου *Higgs*  $m_h$  [57]. Τα  $(m_0, m_{1/2})$  είναι οι βαθμωτοί υπερεταίροι και οι φερμιονικοί αντίστοιχα. Το μοντέλο που χρησιμοποιήσαμε στο *SUSPECT* είναι το *mSUGRA*, όπου έχουμε χρησιμοποιήσει εξισώσεις επανακανονικοποίησης δύο βρόχων και σε όλες τις περιπτώσεις  $sign(\mu) = +1$ . Στο σχήμα 3.16 παρατηρούμε τις καμπύλες σταθερής τιμής για τη μάζα του *Higgs*  $m_h = 118, 120, 121, 122, 123$  GeV για  $A = 0$  GeV και  $\tan\beta = 56$ .



Σχήμα 3.16: Καμπύλες σταθερής μάζας του *Higgs* σχεδιασμένες στο επίπεδο των  $(m_0, m_{1/2})$  για αρχική τιμή  $A = 0$  GeV και για  $\tan\beta = 56$ .



## Κεφάλαιο 4

# Το Ελάχιστο Υπερσυμμετρικό Καθιερωμένο Πρότυπο επεκτεινόμενο σε επιπλέον διαστάσεις

### 4.1 Επιπλέον διαστάσεις

Ο κόσμος στον οποίο ζούμε έχει τρεις χωρικές διαστάσεις και μία χρονική. Είναι κατανοητό όμως ότι μπορεί να υπάρχουν και άλλες διαστάσεις, των οποίων το μέγεθος είναι πάρα πολύ μικρό. Οι επιπλέον διαστάσεις υπήρχαν στη σκέψη των φυσικών για αρκετές δεκαετίες. Η απαρχή αυτής της ιδέας εκτιμάται γύρω στο 1912, οπότε και ο Φινλανδός φυσικός *Gunnar Nordström* πρότεινε μία σχετικιστική θεωρία με μία επιπλέον διάσταση η οποία περιέγραφε ταυτόχρονα τη βαρύτητα και τον ηλεκτρομαγνητισμό. Οι ιδέες του *Nordström* ήταν φανερά επηρεασμένες από τη θεωρία του ηλεκτρομαγνητισμού του *Maxwell*, ο οποίος ενοποίησε τα ηλεκτρικά και μαγνητικά φαινόμενα περιγράφοντας τα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία ως συνιστώσες ενός αντισυμμετρικού τανυστή. Η ιδέα μίας πέμπτης διάστασης προτάθηκε και από τον *T. Kaluza* το 1921 και στη συνέχεια το 1926 από τον *O. Klein*, σε μία προσπάθεια να ενοποιηθούν οι βαρυτικές και ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις.

## 4.2 Βαθμωτά πεδία σε επιπλέον διαστάσεις

Ορίζουμε ένα μιγαδικό βαθμωτό πεδίο  $\Phi(x^\mu, y^a)$  όπου  $\mu = 0, \dots, 3$  και  $a = 1, \dots, d$  με  $d$  τις επιπλέον διαστάσεις. Για λόγους απλότητας θεωρούμε ότι έχουμε μόνο μία επιπλέον διάσταση, δηλαδή  $a = d = 1$ . Η δράση ορίζεται ως:

$$S = \int d^4x dy \mathcal{L}^5(x^\mu, y). \quad (4.1)$$

Για ένα μιγαδικό βαθμωτό πεδίο η Λαγκρανζιανή γράφεται ως

$$\mathcal{L}^5 = \frac{1}{2} (\partial_\beta \Phi)^\dagger (\partial^\beta \Phi) - m^2 \Phi^\dagger \Phi \quad (4.2)$$

με  $\beta = 0, \dots, 4$ . Στη συνέχεια ορίζουμε την τοπολογία των επιπλέον διαστάσεων οι οποίες (σε ένα απλό παράδειγμα) θεωρούμε ότι είναι κύκλοι με την ίδια ακτίνα  $R$ . Αυτό συνεπάγεται ότι η επιπλέον συντεταγμένη είναι περιοδική με περιοδικότητα  $2\pi R$ . Κάνοντας ανάπτυξη *Fourier* για τα πεδία έχουμε:

$$\Phi(x^\mu, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n(x^\mu) e^{iny/R}. \quad (4.3)$$

Η σχέση (4.1) μπορεί να γραφεί σε μία εναλλακτική μορφή ως

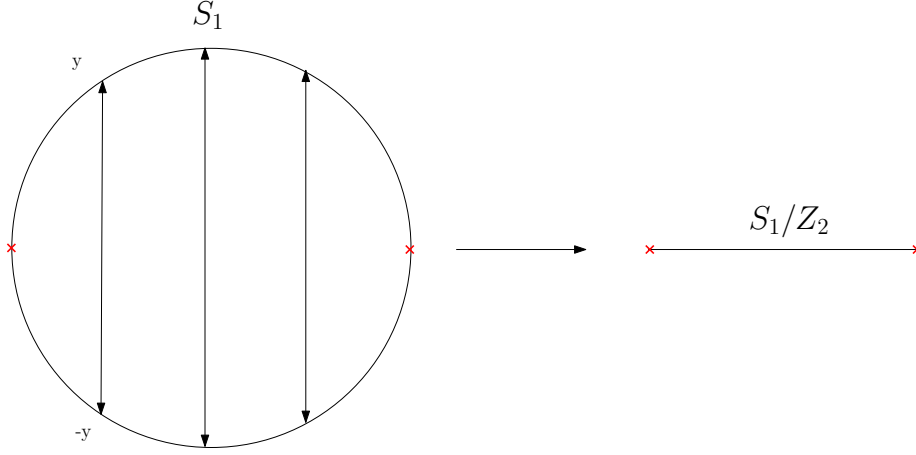
$$S = \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \int dy \mathcal{L}^5 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \mathcal{L} \quad (4.4)$$

όπου  $\mathcal{L} = \int_{-\infty}^{\infty} dy \mathcal{L}^5$ . Στη δική μας περίπτωση καταλήγουμε σε

$$\mathcal{L} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_n)^\dagger (\partial^\mu \phi_n) - (m^2 + m_n^2) \phi_n^\dagger \phi_n \quad (4.5)$$

όπου  $m_n^2 = n^2/R^2$ . Η σημαντικότερη παρατήρηση που μπορούμε να κάνουμε είναι ότι οι επιπλέον διαστάσεις ανταλλάχτησαν με έναν άπειρο πύργο από πεδία, τα σωματίδια *Kaluza-Klein* (*KK*) με αυξανόμενες μάζες.

Μία άλλη τοπολογία των επιπλέον διαστάσεων είναι το επονομαζόμενο *orbifold*. Στη δική μας περίπτωση ο χώρος συμπαγοποίησης είναι ο  $S^1/Z_2$ , το οποίο σημαίνει ότι οι επιπλέον διαστάσεις θα είναι πάλι περιοδικές και η συμμετρία  $Z_2$  αντανακλά το γεγονός ότι τα σημεία  $y$  και  $-y$  ταυτοποιούνται. Πιο απλά ο κύκλος μετατράπηκε σε ένα ευθύγραμμο τμήμα του οποίου τα δύο ακραία



Σχήμα 4.1: Ο χώρος  $S^1/Z_2$  απεικονίζεται ως ένα ευθύγραμμο τμήμα.

σημεία παραμένουν αναλλοίωτα κάτω από τη δράση της συμμετρίας  $Z_2$ . Τα πεδία μετασχηματίζονται ως  $\Phi(-y) = \pm\Phi(y)$ . Αναπτύσσοντας τα πεδία κατά *Fourier* έχουμε:

$$\Phi(x^\mu, y) = \phi_0(x^\mu) + \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n^+(x^\mu) \cos\left(\frac{ny}{R}\right) + \phi_n^-(x^\mu) \sin\left(\frac{ny}{R}\right). \quad (4.6)$$

Τα πεδία πρέπει να είναι άρτια η περιττά κάτω από τη  $Z_2$  συμμετρία δηλαδή

$$\begin{aligned} \Phi^+(-y) &= +\Phi^+(y) \\ \Phi^-(-y) &= -\Phi^-(y) \end{aligned} \quad (4.7)$$

οπότε έχουμε:

$$\Phi^+(x^\mu, y) = \phi_0(x^\mu) + \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n^+(x^\mu) \cos\left(\frac{ny}{R}\right) \quad (4.8)$$

$$\Phi^-(x^\mu, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n^-(x^\mu) \sin\left(\frac{ny}{R}\right). \quad (4.9)$$

Παρατηρούμε ότι μόνο τα  $\Phi^+$  πεδία δίνουν συνεισφορές άμαζων πεδίων.



### 4.3 Φερμιονικά πεδία σε επιπλέον διαστάσεις

Η εξίσωση *Dirac* στις πέντε διαστάσεις για ένα άμαζο φερμιόνιο έχει τη μορφή:

$$i\gamma^\beta \partial_\beta \Psi = 0. \quad (4.10)$$

Οι γάμμα πίνακες  $\gamma^\beta$  πρέπει να ικανοποιούν την άλγεβρα *Clifford*

$$\{\gamma^\beta, \gamma^\delta\} = 2g^{\beta\delta} I \quad (4.11)$$

όπου  $g^{\beta\delta} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1, -1)$ . Συνεπώς πρέπει να βρει κανείς τους πέντε κατάλληλους γάμμα πίνακες  $\Gamma_\beta$  που ικανοποιούν την παραπάνω σχέση. Οι πίνακες αυτοί μπορούν να εκφραστούν ως συνάρτηση των  $\gamma^\mu$  πινάκων. Οπότε έχουμε  $\Gamma^\mu = \gamma^\mu$  και  $\Gamma^4 = i\gamma_5$ . Στην περίπτωση αυτή δεν μπορεί να οριστεί τελεστής ελικότητας όπως στις τέσσερις διαστάσεις, έτσι η πενταδιάστατη θεωρία είναι μη χειραλική. Η εξίσωση *Dirac* προέρχεται από τη Λαγκρανζιανή:

$$\mathcal{L}_{\text{φερμ.}} = \bar{\Psi} i\Gamma^\beta \partial_\beta \Psi. \quad (4.12)$$

Αναπτύσσοντας τα φερμιονικά πεδία κατά *Fourier* στην επιπλέον διάσταση η οποία είναι συμπαγοποιημένη σε έναν κύκλο έχουμε:

$$\Psi(x^\mu, y) = \psi_0(x^\mu) + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n^+(x^\mu) \cos\left(\frac{ny}{R}\right) + \psi_n^-(x^\mu) \sin\left(\frac{ny}{R}\right). \quad (4.13)$$

Αντικαθιστώντας όπως και προηγούμενα στη Λαγκρανζιανή καταλήγουμε:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_0 i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\psi}_n (i\gamma^\mu \partial_\mu - m'_n) \psi_n + \bar{\tilde{\psi}}_n (i\gamma^\mu \partial_\mu - m'_n) \tilde{\psi}_n. \quad (4.14)$$

Από την παραπάνω σχέση συμπεραίνουμε ότι παρήχθησαν δύο άπειροι πύργοι *KK* φερμιονίων διανυσματικής φύσεως. Όμως ο πρώτος όρος που αντιστοιχεί στα άμαζα φερμιόνια είναι και αυτός διανυσματικής φύσεως, κάτι το οποίο δεν είναι αποδεκτό από τη φαινομενολογία. Γνωρίζουμε ότι τα φερμιονικά πεδία στις χαμηλές ενέργειες είναι χειραλικής φύσεως.

Στις τέσσερις διαστάσεις ένα χειραλικό πεδίο μπορεί να οριστεί ως το πεδίο το οποίο ταυτόχρονα ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\gamma^5 \Psi = \pm \Psi, \quad i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi = 0. \quad (4.15)$$

Στις πέντε διαστάσεις ο  $\gamma^5$  είναι ένας από τους γάμμα πίνακες και δεν αντιμετατίθεται πλέον με τους υπόλοιπους γάμμα πίνακες της άλγεβρας, συνεπώς οι δύο προηγούμενες εξισώσεις δεν μπορούν ταυτόχρονα να ικανοποιηθούν. Θεωρούμε ότι το  $\Psi$  είναι ένα φερμιονικό πεδίο το οποίο ικανοποιεί την πενταδιάστατη εξίσωση *Dirac*. Το πεδίο  $\gamma^5\Psi$  όμως δεν την ικανοποιεί [58]:

$$\begin{aligned} i\Gamma^\beta\partial_\beta(\gamma^5\Psi) &= 0 \implies \\ \gamma^5(-i\gamma^\mu\partial_\mu + i\Gamma^4\partial_y)\Psi &= 0 \implies \\ (i\gamma^\mu\partial_\mu - i\Gamma^4\partial_y)\Psi &= 0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Παρατηρούμε ότι υπάρχει διαφορά στο πρόσημο μεταξύ του  $\Gamma^4$  και των υπόλοιπων πινάκων (θα αναμέναμε να υπάρχει πρόσημο +). Όμως το πρόσημο αυτό θα μπορούσε να απορροφηθεί αν το πεδίο μετασχηματιζόταν ως:

$$\Psi(y) = \pm\gamma^5\Psi(-y). \quad (4.17)$$

Συμπεραίνουμε ότι αυτό μπορεί να συμβεί όταν ο χώρος συμπαγοποίησης δεν είναι πια ο κύκλος  $S^1$  αλλά το ευθύγραμμο τμήμα  $S^1/Z_2$ . Επιλέγοντας το μετασχηματισμό

$$\Psi(y) = -\gamma^5\Psi(-y) \quad (4.18)$$

η σχέση (4.13) μετατρέπεται σε

$$\Psi(x^\mu, y) = \psi_{0(L)}(x^\mu) + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{n(L)}^+(x^\mu) \cos\left(\frac{ny}{R}\right) + \psi_{n(R)}^-(x^\mu) \sin\left(\frac{ny}{R}\right) \quad (4.19)$$

όπου οι δείκτες  $L, R$  συμβολίζουν τα αριστερόστροφα και δεξιόστροφα πεδία αντίστοιχα. Εν τέλει το τμήμα της Λαγκρανζιανής που περιέχει τους μηδενικούς *modes* μπορεί να γραφεί ως:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_{0(L)} i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_{0(L)}. \quad (4.20)$$

Έτσι συμπεραίνουμε ότι οι μηδενικοί *modes* είναι αριστερόστροφα πεδία, κάτι το οποίο έρχεται σε συμφωνία με το ΚΠ. Δηλαδή επιλέγοντας ως χώρο συμπαγοποίησης το χώρο  $S^1/Z_2$  καταλήξαμε σε μία χειραλική θεωρία.

## 4.4 Μη διαταρακτική ενοποίηση των σταθερών σύζευξης βαθμίδας και επιπλέον διαστάσεις

Ακολούθως θα μελετήσουμε το ΕΥΚΠ σε επιπλέον διαστάσεις οι οποίες είναι συμπαγοποιημένες στο χώρο  $S^1/Z_2$ . Στην περίπτωση αυτή οι επιπλέον διαστάσεις αρχίζουν να γίνονται αισθητές πάνω από την ενεργειακή κλίμακα  $M_0$  και έχουν ως αποτέλεσμα την εμφάνιση ενός πύργου άπειρων σωματιδίων  $KK$  τα οποία έχουν μάζα  $m_n$ .

Τα σωματίδια  $KK$  υπακούουν σε  $N = 2$  υπερσυμμετρία όπου μπορούμε να έχουμε χειραλικές και αντιχειραλικές υπερμαλτιπλέτες. Η  $N = 2$  υπερσυμμετρία δικαιολογείται, διότι ο αριθμός των φερμιονικών βαθμών ελευθερίας αυξάνεται λόγω των επιπλέον διαστάσεων. Τα διανυσματικά μποζόνια αναπαρίστανται από μία  $N = 2$  διανυσματική μαλτιπλέτα, η οποία αποτελείται από μία  $N = 1$  διανυσματική μαλτιπλέτα και μία  $N = 1$  χειραλική μαλτιπλέτα. Τα φερμιόνια αναπαρίστανται από μία  $N = 2$  υπερμαλτιπλέτα (υποθέτοντας ότι και οι τρεις γενιές έχουν  $KK$  σωματίδια), η οποία αποτελείται από μία  $N = 1$  χειραλική μαλτιπλέτα και μία  $N = 1$  αντιχειραλική μαλτιπλέτα. Τα δύο πεδία *Higgs* του ΕΥΚΠ συνδυάζονται και αυτά σε μία  $N = 2$  υπερμαλτιπλέτα.

Για ενέργειες μικρότερες από την ενεργειακή κλίμακα συμπαγοποίησης τρέχουμε τις ενός βρόχου εξισώσεις επανακανονικοποίησης του ΕΥΚΠ όπου η θεωρία μας είναι  $N = 1$  υπερσυμμετρική και κάτω από την κλίμακα  $M_S$  (η ενεργειακή κλίμακα όπου σπάει η υπερσυμμετρία), τρέχουμε τις ενός βρόχου εξισώσεις επανακανονικοποίησης του ΚΠ. Οι ενός βρόχου εξισώσεις για την ενεργειακή περιοχή  $E > M_0$  δίνονται από την επόμενη σχέση [71]

$$\tilde{a}_i^{-1}(t) = \tilde{a}_i^{-1}(t_{M_0}) - \frac{b_i - \tilde{b}_i}{2\pi}(t - t_{M_0}) - \frac{\tilde{b}_i X_\delta}{2\pi\delta} \left[ \left( \frac{e^t}{e^{t_{M_0}}} \right)^\delta - 1 \right] \quad (4.21)$$

όπου  $t = \ln E$ ,  $t_{M_0} = \ln M_0$ ,  $\delta$  είναι ο αριθμός των επιπλέον διαστάσεων οι οποίες στην περίπτωση μας είναι  $\delta = 6$ ,  $X_\delta$  είναι ο όγκος μίας  $\delta$ -διάστατης σφαίρας,  $b_i$  είναι οι συντελεστές των συναρτήσεων βήτα για το ΕΥΚΠ και  $\tilde{b}_i$  οι αντίστοιχοι για τα σωματίδια  $KK$  όπου  $i = 1, 2, 3$ . Σε μια πιο συμπαγή μορφή μπορούμε να γράψουμε αυτούς τους συντελεστές ως

$$\begin{cases} (b_1, b_2, b_3) = (0, -6, -9) + (2, 2, 2)n_g + (\frac{3}{10}, \frac{1}{2}, 0)n_H \\ (\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3) = (0, -4, -6) + (4, 4, 4)n_g + (\frac{3}{5}, 1, 0)n_H \end{cases} \quad (4.22)$$

όπου  $n_g$  είναι ο αριθμός των γενιών και  $n_H$  είναι ο αριθμός των διπλετών *Higgs*. Εδώ πρέπει να τονίσουμε ότι οι συντελεστές  $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2$  γίνονται πιο θετικοί σε σχέση με τους συντελεστές  $(b_1, b_2)$  και ο  $\tilde{b}_3$  από αρνητικός γίνεται θετικός σε σχέση με το  $b_3$ .

Για την ενεργειακή περιοχή  $M_S < E < M_0$  έχουμε να λύσουμε τις ενός βρόχου εξισώσεις του ΕΥΚΠ

$$\frac{da_i}{dt} = \frac{b_i}{2\pi} a_i^2 \quad (4.23)$$

επιβάλλοντας τη συνοριακή συνθήκη  $\tilde{a}_i(t_{M_0}) = \alpha_i(t_{M_0})$ . Για την ενεργειακή περιοχή  $M_z < E < M_S$  λύνουμε τις ενός βρόχου διαφορικές εξισώσεις του ΚΠ

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{\tilde{b}_i}{2\pi} \alpha_i^2 \quad (4.24)$$

επιβάλλοντας τη συνοριακή συνθήκη  $a_i(t_{M_S}) = \alpha_i(t_{M_S})$ , όπου

$$(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3) = \left( \frac{41}{10}, \frac{-19}{6}, -7 \right) \quad (4.25)$$

είναι οι συντελεστές των συναρτήσεων βήτα.

Συνεπώς η διαδικασία που ακολουθούμε για να ελέγξουμε το σενάριο *MPP* είναι η εξής: αρχίζουμε από τιμές των σταθερών σύζευξης βαθμίδας κοντά στη μη διαταρακτική περιοχή σε κάποια υψηλή ενεργειακή κλίμακα  $M_{MPP}$  και επιλέγοντας την κατάλληλη  $M_0$  μπορούμε εύκολα να εξάγουμε τη συνοριακή συνθήκη  $\tilde{a}_i(t_{M_0})$ . Ακολούθως χρησιμοποιώντας αυτή τη συνοριακή συνθήκη μπορούμε να λύσουμε τις εξισώσεις για το ΕΥΚΠ και ΚΠ για τα αντίστοιχα ενεργειακά διαστήματα, προβλέποντας τις τιμές των σταθερών σύζευξης σε χαμηλές ενέργειες. Ελέγχοντας όλο τον παραμετρικό χώρο βρήκαμε πολύ ενδιαφέροντα αποτελέσματα [72] τα οποία φαίνονται στον πίνακα 4.1 ξεκινώντας από τις τιμές:

$$\tilde{a}_i(t_{MPP}) \simeq 1, \quad M_{MPP} \simeq 1,5 \cdot 10^{10}, \quad M_0 \simeq 9 \cdot 10^9, \quad M_S \simeq 5,5 \cdot 10^3$$

Στο σημείο αυτό πρέπει να τονίσουμε την πολύ μικρή διαφορά μεταξύ των δύο ενεργειακών κλιμάκων  $M_{MPP}$ ,  $M_0$  η οποία μας δείχνει την επίδραση των επιπλέον διαστάσεων στη συμπεριφορά των σταθερών σύζευξης βαθμίδας. Επίσης παρατηρούμε ότι αν αρχίσουμε με τιμές αρκετά μικρότερες ή μεγαλύτερες από τη μονάδα οι προβλέψεις μας για τις παραμέτρους σε χαμηλές ενέργειες, βρίσκονται

εκτός της επιτρεπόμενης περιοχής. Δηλαδή οι σταθερές σύζευξης σε χαμηλές ενέργειες είναι ευαίσθητες σε αλλαγές των μεγάλων τιμών των σταθερών σε υψηλές ενέργειες. Μία πιθανή εξήγηση θα μπορούσε να είναι το γεγονός ότι αρχίζοντας από μη διαταρακτικές τιμές παίρνουμε πολύ μικρές τιμές για τις σταθερές σύζευξης στην ενεργειακή κλίμακα  $M_0$ , εξαιτίας της επίδρασης των επιπλέον διαστάσεων, οι οποίες φαίνονται να εμφανίζονται για πολύ μικρό ενεργειακό διάστημα. Είναι σαν το σύστημά μας να μη νιώθει την αρχική μεγάλη τιμή της σταθεράς σύζευξης, αλλά να λαμβάνει περισσότερο υπόψιν τη μικρή της τιμή στην κλίμακα συμπαγοποίησης.

Δηλαδή αν ήταν δυνατό να αρχίσουμε με πολύ μεγάλες τιμές έτσι ώστε οι τιμές στην ενέργεια συμπαγοποίησης να ήταν ακόμη μεγάλες, τότε ίσως το σύστημά μας να σεβόταν το σενάριο  $MPP$ . Όμως αυτό δεν μπορεί να συμβεί, διότι ακολουθώντας την αντίστροφη διαδικασία δεν μπορούμε να φτάσουμε σε τόσο μεγάλες τιμές στο πλαίσιο του ΕΥΚΠ.

Η βασική μας σχέση έχει παραχθεί ως μία προσέγγιση ενός γενικότερου τύπου [71] ο οποίος δίνεται ως

$$\tilde{a}_i^{-1}(t) = \tilde{a}_i^{-1}(t_{M_0}) - \frac{b_i - \tilde{b}_i}{2\pi}(t - t_{M_0}) - \frac{\tilde{b}_i}{4\pi} \int_{re^{-2t}}^{re^{-2t_{M_0}}} \frac{dx}{x} \left[ \vartheta_3 \left( \frac{it}{\pi R^2} \right) \right]^\delta \quad (4.26)$$

όπου  $r = \pi(X_\delta)^{-\frac{2}{3}}$  είναι ένας αριθμητικός παράγοντας και  $\vartheta_3$  είναι η συνάρτηση Jacobi. Υποθέτοντας ότι  $E \gg M_0$  εξάγουμε τη σχέση (4.21). Πριν αρκετό καιρό είχε τονιστεί [73] ότι στο πλαίσιο του ΕΥΚΠ ο λόγος της ενεργειακής κλίμακας αποκοπής προς την ενεργειακή κλίμακα συμπαγοποίησης είναι πολύ μικρός. Πράγματι αυτό ακριβώς ισχύει και στην περίπτωση μας. Χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.26) και ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με τα προηγούμενα

$\tilde{a}_1(t_{MPP})$	$\tilde{a}_2(t_{MPP})$	$\tilde{a}_3(t_{MPP})$	$\acute{\alpha}_3(t_{Mz})$	$\acute{\alpha}_{em}(t_{Mz})$	$\sin^2 \theta_w(t_{Mz})$
0.95961	0.987454	0.79865	0.1184	0.00781861	0.23151
0.95961	0.987454	0.92568	0.120858	0.00781861	0.23151
1	1	1	0.121623	0.00782007	0.231684
1.1356	1.0256	1.1458	0.123439	0.00782681	0.231864
0.83562	0.82541	0.81236	0.118212	0.00778032	0.232327

Πίνακας 4.1: Λαμβάνοντας υπόψιν τις πειραματικά μετρούμενες τιμές  $a_{em} = 0.00781861$ ,  $a_3 = 0.1184 \pm 0.0017$ ,  $\sin^2 \theta_w = 0.23151 \pm 0.00017$  μπορούμε να δούμε ότι τα αποτελέσματα των τριών πρώτων γραμμών είναι σε πολύ καλή συμφωνία με τις πειραματικές τιμές.

$\tilde{a}_1(t_{MPP})$	$\tilde{a}_2(t_{MPP})$	$\tilde{a}_3(t_{MPP})$	$\acute{\alpha}_3(t_{Mz})$	$\acute{\alpha}_{em}(t_{Mz})$	$\sin^2 \theta_w(t_{Mz})$
0.95961	0.987454	0.79865	0.117917	0.00780806	0.231602
0.95961	0.987454	0.92568	0.120356	0.00780806	0.231602
1	1	1	0.121114	0.00780952	0.231777
1.1356	1.0256	1.1458	0.123968	0.00783741	0.231772
0.83562	0.82541	0.81236	0.118697	0.0077908	0.232236

Πίνακας 4.2: Μπορούμε να δούμε ότι υπάρχει μία αγνοήσιμη διαφορά μεταξύ αυτών των αποτελεσμάτων και του πίνακα 4.1.

παίρνουμε τα αποτελέσματα του πίνακα 4.2 τα οποία δικαιολογούν τη χρήση της (4.21) για τους υπολογισμούς μας.

Τελικά βρήκαμε ότι για τιμές των σταθερών σύζευξης βαθμίδας περίπου ίσες με τη μονάδα για μία ενεργειακή κλίμακα αρκετά χαμηλότερη από την ενεργειακή κλίμακα στην οποία ενοποιούνται οι σταθερές σύζευξης στο ΕΥΚΠ, καταλήγουμε σε τιμές των παραμέτρων σε χαμηλές ενέργειες σε πολύ καλή συμφωνία με τις πειραματικές. Το βασικότερο όμως πρόβλημα αυτής της προσέγγισης είναι ότι όταν επιλέγουμε συνοριακές συνθήκες πολύ μικρότερες ή μεγαλύτερες από τη μονάδα η πρόβλεψη αποτυγχάνει.

Αυτό που καταφέραμε τελικά είναι να δείξουμε ότι επιτυγχάνεται μη διαταρακτική ενοποίηση των σταθερών σύζευξης βαθμίδας σε αρκετά χαμηλότερη ενέργεια από αυτή του ΕΥΚΠ. Οι αναλυτικοί υπολογισμοί που επιβεβαιώνουν αυτό το συμπέρασμα παρατίθενται λεπτομερώς στο παράρτημα Α'.2.

#### 4.4.1 Η θεωρία βαθμίδας $SU(3)_C \times SU(3)_L \times SU(3)_R$ και επιπλέον διαστάσεις

Τις τελευταίες δύο δεκαετίες μεγάλη πρόοδος έχει συντελεστεί στη μελέτη μίας υπερσυμμετρικής ΜΕΘ που βασίζεται στην ομάδα  $SU(3)_C \times SU(3)_L \times SU(3)_R$  [74]. Ένα σημαντικό κίνητρο μελέτης αυτής της θεωρίας είναι ότι σπάζοντας αυτή τη συμμετρία μπορούμε να πάρουμε το ΚΠ. Επιπλέον το μοντέλο αυτό μπορεί να παραχθεί από την ετεροτική θεωρία χορδών  $E_8 \times E_8$ . Πρόσφατα [75] μία επέκταση του ΚΠ η οποία βασίζεται στη θεωρία  $E_8 \times E_8$  έχει μελετηθεί, η οποία με διαστατική ανάλυση και χρησιμοποιώντας το μηχανισμό ροών *Wilson* οδήγησε στην τετραδιάσταση υπερσυμμετρική  $SU(3)^3$  θεωρία βαθμίδας. Πρόοδος επίσης έχει συντελεστεί και στις πεπερασμένες ενοποιημένες θεωρίες (ΠΕΘ) [76].

Έχοντας ως κίνητρο την προηγούμενη ανάλυση της μη διαταρακτικής ενοποίησης θα μελετήσουμε την επίδραση των  $KK$  σωματιδίων στο μοντέλο αυτό. Το σωματιδιακό περιεχόμενο της θεωρίας  $SU(3)_C \times SU(3)_L \times SU(3)_R$  συναντάται στην εικοσιεπταδιάστατη αναπαράσταση της ομάδας  $E_6$

$$27 \rightarrow (3, 3^*, 1) + (3^*, 1, 3) + (1, 3, 3^*)$$

όπου

$$Q \equiv (3, 3^*, 1) = \begin{pmatrix} u \\ d \\ D \end{pmatrix}$$

$$Q^c \equiv (3^*, 1, 3) = \begin{pmatrix} u^c \\ d^c \\ D^c \end{pmatrix}$$

$$L \equiv (1, 3, 3^*) = \begin{pmatrix} h^0 & h^+ & e^c \\ h^- & \bar{h}^0 & \nu^c \\ e & \nu & N \end{pmatrix}.$$

Εισάγουμε τις σταθερές σύζευξης  $a_{3C}$ ,  $a_{3L}$  και  $a_{3R}$  και τους αντίστοιχους συντελεστές των συναρτήσεων βήτα (για τρεις γενιές παρατηρούμε ότι μηδενίζονται):

$$\begin{aligned} b_{3C} &= -9 + \frac{1}{2}(3n_Q + 3n_{Q^c}) \\ b_{3L} &= -9 + \frac{1}{2}(3n_Q + 3n_L) \\ b_{3R} &= -9 + \frac{1}{2}(3n_{Q^c} + 3n_L). \end{aligned}$$

Υποθέτοντας το ίδιο σωματιδιακό περιεχόμενο οι σταθερές σύζευξης θα τρέχουν ομοιόμορφα εξαιτίας της ίδιας συνεισφοράς στις συναρτήσεις βήτα. Συνεπώς αν αρχίσουμε με την ίδια τιμή για τις τρεις σταθερές σύζευξης σε κάποια ενεργειακή κλίμακα στην ουσία θα έχουμε το τρέξιμο μόνο της μίας. Αντίστοιχα οι συντελεστές των συναρτήσεων βήτα των  $KK$  σωματιδίων δίνονται ως:

$$\begin{aligned} \tilde{b}_{3C} &= -6 + 3n_Q + 3n_{Q^c} \\ \tilde{b}_{3L} &= -6 + 3n_{Q^c} + 3n_L \\ \tilde{b}_{3R} &= -6 + 3n_{Q^c} + 3n_Q. \end{aligned}$$

Η ομάδα  $SU(3)_L$  σπάει σε  $SU(2)_L \times U(1)_L$  και η  $SU(3)_R$  σε  $U(1)_R$  [77, 78, 79]. Υποθέτουμε για λόγους απλότητας ότι το σπάσιμο αυτό συμβαίνει σε μία ενεργειακή κλίμακα  $M_0$ . Το υπερφορτίο γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των δύο φορτίων των δυο  $U(1)$ :

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{\sqrt{5}} X_L + \frac{2}{\sqrt{5}} Z_R \Rightarrow \\ Y_{SM} &\equiv \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} Y = \frac{1}{\sqrt{3}} X_L + \frac{2}{\sqrt{3}} Z_R. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Η σχέση αυτή μετατρέπεται σε σχέση μεταξύ των σταθερών σύζευξης:

$$\begin{aligned} a_Y^{-1} &= \frac{1}{3} a_{3L}^{-1} + \frac{4}{3} a_{3R}^{-1} \Rightarrow \\ \frac{5}{3} a_1^{-1} &= \frac{1}{3} a_{3L}^{-1} + \frac{4}{3} a_{3R}^{-1} \Rightarrow \\ a_{3R}^{-1} &= \frac{5}{4} a_1^{-1} - \frac{1}{4} a_{3L}^{-1}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Τελικά στην ενεργειακή κλίμακα  $M_0$  που σπάει η θεωρία  $SU(3)^3$  έχουμε τις παρακάτω σχέσεις για τις σταθερές σύζευξης:

$$a_3(M_0) = a_{3C}(M_0)$$

$$a_2(M_0) = a_{3L}(M_0)$$

$$a_{3R}^{-1}(M_0) = \frac{5}{4} a_1^{-1}(M_0) - \frac{1}{4} a_{3L}^{-1}(M_0).$$

Αν θεωρήσουμε ότι η  $M_0$  είναι ίδια με την ενέργεια ενοποίησης των σταθερών σύζευξης βαθμίδας στο ΕΥΚΠ τότε:

$$a_3(M_0) = a_2(M_0) = a_1(M_0) = \frac{5}{3} a_Y(M_0). \quad (4.29)$$

Απο τις δύο παραπάνω σχέσεις καταλήγουμε σε:

$$a_{3C}(M_0) = a_{3L}(M_0) = a_{3R}(M_0). \quad (4.30)$$

Όπως ήδη τονίστηκε πέρα απο την ενεργειακή κλίμακα  $M_0$  οι τρεις σταθερές σύζευξης συμπεριφέρονται ως μία.



Αρχίζοντας από τις πειραματικά μετρούμενες τιμές οι ενός βρόχου σταθερές σύζευξης βαθμίδας στην ενεργειακή περιοχή  $M_z < E < M_S$  δίνονται ως

$$\acute{\alpha}_i^{-1}(t) = \acute{\alpha}_i(t_{M_z})^{-1} - \frac{\acute{b}_i}{2\pi}(t - t_{M_z}) \quad (4.31)$$

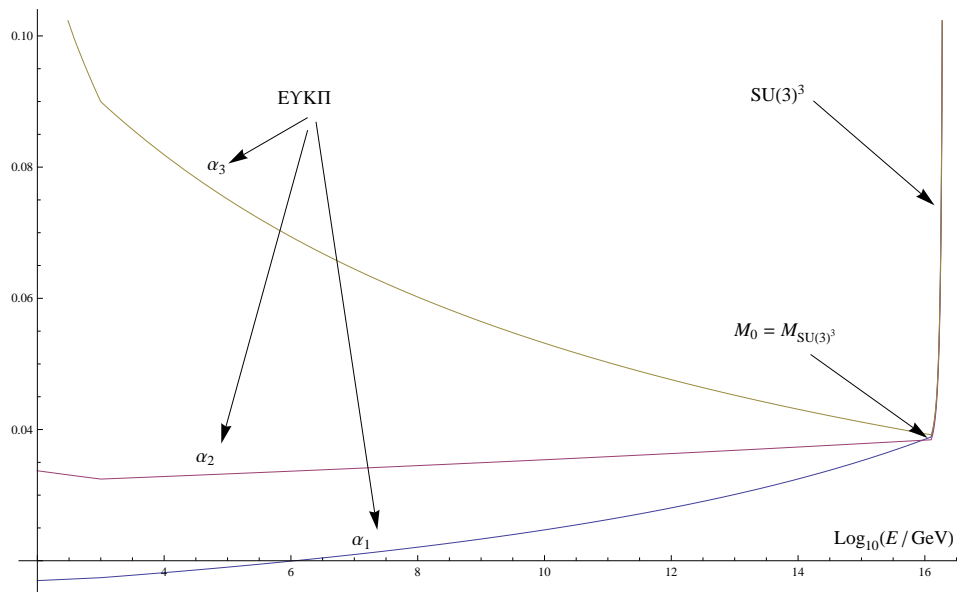
καθώς και για την ενεργειακή περιοχή  $M_S < E < M_0$  έχουμε

$$\alpha_i^{-1}(t) = \alpha_i(t_{M_S})^{-1} - \frac{b_i}{2\pi}(t - t_{M_S}) \quad (4.32)$$

όπου  $\alpha_i(t_{M_S}) = \acute{\alpha}_i(t_{M_S})$ . Για την ενεργειακή περιοχή πάνω από τη  $M_0$  οι σταθερές σύζευξης της μεγαλύτερης ομάδας βαθμίδας δίνονται ως

$$\tilde{\alpha}_{3j}^{-1}(t) = \tilde{\alpha}_{3j}^{-1}(t_{M_0}) - \frac{b_i - \tilde{b}_{3j}}{2\pi}(t - t_{M_0}) - \frac{\tilde{b}_{3j} X_\delta}{2\pi\delta} \left[ \left( \frac{e^t}{e^{t_{M_0}}} \right)^\delta - 1 \right] \quad (4.33)$$

όπου  $j = C, L, R$ . Στο σχήμα 4.2 βλέπουμε τη συμπεριφορά των σταθερών σύζευξης ως συναρτήσεις της ενέργειας. Παρατηρούμε ότι στην ενεργειακή κλίμακα  $M_0$  οι σταθερές σύζευξης βαθμίδας του ΕΥΚΠ ενοποιούνται και πάνω από την κλίμακα αυτή βλέπουμε τη συμπεριφορά των τριών σταθερών σύζευξης της θεωρίας  $SU(3)_C \times SU(3)_L \times SU(3)_R$  οι οποίες αποκτούν πολύ μεγάλες τιμές εξαιτίας των σωματιδίων  $KK$ .



Σχήμα 4.2: Οι σταθερές σύζευξης βαθμίδας του ΕΥΚΠ και της  $SU(3)^3$  ως συνάρτηση του λογάριθμου της ενέργειας.



# Κεφάλαιο 5

## Θεωρία $F$

### 5.1 Εισαγωγή

Το μοναδικό κομμάτι του ΚΠ το οποίο έλειπε, το μποζόνιο *Higgs*, όπως όλα δείχνουν ανακαλύφθηκε στο *CERN* τον Ιούλιο του 2012. Παρόλα αυτά όμως υπάρχουν αρκετοί λόγοι για τους οποίους η επιστημονική κοινότητα είχε από νωρίς αντιληφθεί ότι το ΚΠ δεν αποτελεί μία ολοκληρωμένη θεωρία η οποία θα μπορούσε να εξηγήσει όλους τους φυσικούς νόμους. Συνεπώς οι θεωρίες μας πρέπει να επεκταθούν πέρα από το ΚΠ.

Μία βασική αδυναμία του ΚΠ είναι ότι δεν περιλαμβάνει τη βαρυτική αλληλεπίδραση, οπότε ρεαλιστικά δεν μπορούμε να κάνουμε λόγο για μία τελική θεωρία. Επιπλέον το ΚΠ όπως έχει ήδη αναφερθεί, περιέχει ένα μεγάλο αριθμό αυθαίρετων παραμέτρων οι οποίες δεν μπορούν να εξηγηθούν από το υπάρχον μοντέλο. Ένας άλλος λόγος που μας οδηγεί σε θεωρίες πέρα από το ΚΠ, είναι ότι η ενοποίηση των σταθερών σύζευξης των τριών αλληλεπιδράσεων σε κάποια μεγάλη ενεργειακή κλίμακα, ενδεχομένως να υποδεικνύει την ύπαρξη μίας ΜΕΘ [80] η οποία να περιέχει μία ομάδα βαθμίδας στην οποία συμπεριλαμβάνεται η ομάδα βαθμίδας του ΚΠ. Επίσης ένα ακόμη ζήτημα το οποίο δεν μπορεί να επιλυθεί στο πλαίσιο του ΚΠ, είναι το γνωστό πρόβλημα της ιεραρχίας (βλέπε Κεφάλαιο 2). Το πρόβλημα αυτό θα μπορούσε να υπερκεραστεί αν εισαγάγαμε μία καινούρια συμμετρία, την υπερσυμμετρία για την οποία ήδη έχουν γίνει οι σχετικές αναφορές.

Ένα θεωρητικό πλαίσιο το οποίο επεκτείνεται πέρα από το ΚΠ και φαίνεται ικανό να δώσει λύση σε διάφορα προβλήματα είναι η θεωρία  $F$ . Νεότερες μελέτες της θεωρίας  $F$  έχουν επικεντρωθεί σε μοντέλα ΜΕΘ τριών γενιών,

κυρίως  $SU(5)$ , τα οποία διακρίνονται σε δύο κατηγορίες. Η πρώτη περιλαμβάνει μοντέλα στα οποία και οι τρεις γενιές οι οποίες μετασχηματίζονται με τον ίδιο τρόπο κάτω από την ομάδα του ΚΠ, προκύπτουν από μόνο μία καμπύλη ύλης [98, 99, 100, 101]. Στη δεύτερη κατηγορία όλες ή κάποιες από τις τρεις γενιές των λεπτονίων και των κουάρκ προκύπτουν από διαφορετικές καμπύλες [102, 103, 107, 108, 109, 110, 111]. Αρκετά από αυτά τα μοντέλα που έχουν προταθεί έως σήμερα έχουν προσπαθήσει να προτείνουν λύσεις σε κάποια θεμελιώδη προβλήματα των ΜΕΘ, όπως ο διαχωρισμός των διπλετών-τριπλετών, η ταχεία διάσπαση του πρωτονίου [84, 90, 97, 103, 111, 112, 113]. Για να αναλύσουμε τις φαινομενολογικές ιδιότητες πρέπει να εξάγουμε την κατάλληλη πληροφορία από το υπερδυναμικό, το οποίο μπορεί να παραχθεί εφόσον γνωρίζουμε τις καμπύλες ύλης στις οποίες επικάθονται οι οικογένειες των φερμιονίων και τα πεδία *Higgs*. Κυρίαρχο ρόλο στον υπολογισμό τέτοιων επιδράσεων παίζουν οι σταθερές σύζευξης *Yukawa*, ο υπολογισμός των οποίων καθορίζει την προβλεπτική ικανότητα της θεωρίας.

Στις ΜΕΘ της θεωρίας  $F$  οι τριγραμμικές σταθερές σύζευξης *Yukawa* θεωρούμε ότι εντοπίζονται στο σημείο τομής τριών καμπυλών ύλης τις οποίες συμβολίζουμε με  $\Sigma_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  όπου επικάθονται δύο φερμιονικά πεδία και ένα πεδίο *Higgs*. Κατά μήκος αυτών των καμπυλών η συμμετρία  $G_S$  της πολλαπλότητας αυξάνεται σε  $G_{\Sigma_i} \supset G_S \times U(1)_i$  ενώ τα άμαζα σωματίδια φορτίζονται κάτω από τις συμμετρίες  $U(1)_i$ . Για να καθορίσει κανείς την πιο γενική δομή των κυματοσυναρτήσεων των πεδίων πρέπει να λύσει τις αντίστοιχες εξισώσεις κίνησης που προκύπτουν από την οκταδιάστατη δράση *Yang-Mills* [83, 101, 114, 116, 117]. Εν γένει οι λύσεις των εξισώσεων κίνησης παρουσιάζουν την αναμενόμενη γκαουσσιανή συμπεριφορά [114, 116] η οποία εξασθενεί εκθετικά μακριά από την καμπύλη. Οι σταθερές σύζευξης *Yukawa* των στοιχείων  $\{33\}$  των πινάκων των χαμηλών και υψηλών κουάρκ καθώς και των φορτισμένων λεπτονίων, υπολογίζονται ως ολοκληρώματα αλληλοεπικαλυπτόμενων κυματοσυναρτήσεων των πεδίων στο σημείο τριπλής τομής των καμπυλών ύλης:

$$\lambda_{ij} \propto M_*^4 \int_S \psi_i \psi_j \phi dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge dz_2 \wedge d\bar{z}_2. \quad (5.1)$$

Η ολοκλήρωση γίνεται πάνω στην εσωτερική τετραδιάστατη πολλαπλότητα  $S$  η οποία υποστηρίζει την ομάδα βαθμίδας της θεωρίας μας,  $\psi$  και  $\phi$  είναι οι κυματοσυναρτήσεις των φερμιονικών και των πεδίων *Higgs* αντίστοιχα, καθώς και η μάζα  $M_*$  η οποία σχετίζεται με την κλίμακα συμπαγοποίησης της θεωρίας  $F$ . Για να μπορέσουμε να εξάγουμε φαινομενολογικά αποτελέσματα, πρέπει να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της σχέσης (5.1). Ο υπολογισμός αυτός δεν

είναι καθόλου τετριμμένος, διότι παρόλο που η τοπική συμπεριφορά της κυματοσυνάρτησης είναι πλήρως γνωστή, το τελικό αποτέλεσμα εκφράζεται συναρτήσει αρκετών παραμέτρων οι οποίες εμφανίζονται στην κανονικοποίηση της κυματοσυνάρτησης. Συγκεκριμένα οι παράμετροι όπως η αναμενόμενη τιμή του κενού του βαθμωτού πεδίου, η ενεργειακή κλίμακα ενοποίησης  $M_{GUT}$ , η ενεργειακή κλίμακα  $M_*$  καθώς και η γεωμετρία της επιφάνειας  $S$  δεν είναι πλήρως γνωστές. Υπολογισμοί τέτοιων καθολικών ποσοτήτων έχουν εξαχθεί με μάλλον αρκετά λογικά αποτελέσματα [99, 102, 108]. Ωστόσο δεν επετεύχθη να προβλεφθεί μάζα για το κορυφαίο κουάρκ που να είναι συμβατή με τα πειραματικά αποτελέσματα.

## 5.2 Βασικά στοιχεία της θεωρίας F και ελλειπτική ινοποίηση

Η θεωρία F μπορεί να θεωρηθεί ως μία δωδεκαδιάστατη θεωρία, η οποία προκύπτει από τη γεωμετρικοποίηση της IIB δεκαδιάστατης θεωρίας χορδών. Η ενεργή (*effective*) θεωρία περιγράφεται από την τύπου IIB υπερβαρύτητα η οποία περιέχει διάφορα μποζονικά πεδία όπως το πεδίο *dilaton*  $\phi$  και τα δυναμικά  $p$ -μορφές  $C_p$  από τα οποία προέρχονται οι αντίστοιχες δυνάμεις πεδίου  $F_{p+1} = dC_p$ . Τα βαθμωτά πεδία τα οποία περιέχονται στο μποζονικό φάσμα,  $C_0$  (αξιόνιο) και  $\phi$ , μπορούν να συνδυαστούν και να ορίσουν μια νέα ποσότητα, το *axio-dilaton* πεδίο

$$\tau = C_0 + i e^{-\phi} \equiv C_0 + \frac{i}{g_s} \quad (5.2)$$

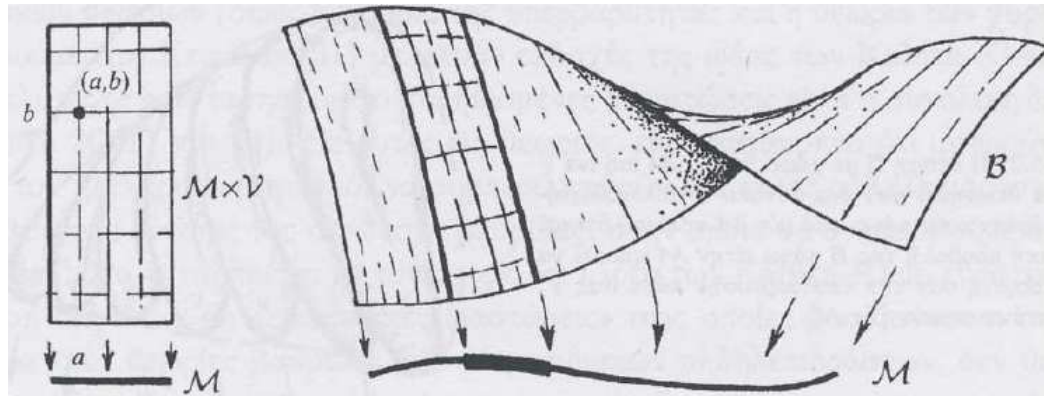
όπου  $g_s$  είναι η σταθερά σύζευξης χορδών. Στη θεωρία F η ποσότητα  $\tau$  υπόκειται σε ένα μετασχηματισμό συμμετρίας  $SL(2, Z)$

$$\tau \rightarrow \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \quad (5.3)$$

συνεπώς μπορεί να ταυτιστεί με το σχήμα και το μέγεθος (*complex structure*) που χαρακτηρίζει έναν τόρο.

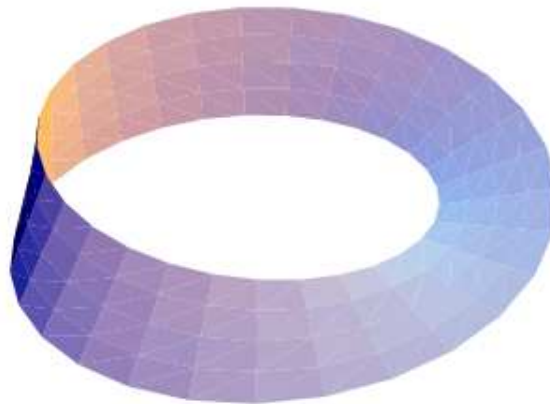
Η θεωρία αυτή ορίζεται σε ένα χώρο της μορφής  $R^{3,1} \times X$  όπου  $R^{3,1}$  είναι ο συνήθης τετραδιάστατος χωρόχρονος και ο  $X$  είναι μία ελλειπτικά ινοποιήσιμη τετραδιάστατη μιγαδική πολλαπλότητα *Calabi-Yau* πάνω σε μία τρισδιάστατη μιγαδική πολλαπλότητα  $B_3$ , η οποία ονομάζεται βάση. Όλα τα προηγούμενα συνοψίζονται στην έννοια της δέσμης ινών η οποία τοπικά μπορεί να εκφραστεί ως ένα καρτεσιανό γινόμενο χώρων. Αν αυτό συμβαίνει και καθολικά τότε η

δέσμη ινών ονομάζεται τετριμμένη ειδώλως μη τετριμμένη. Δύο τέτοιες δέσμες ινών φαίνονται στο σχήμα 5.1. Το πιο απλό και χαρακτηριστικό παράδειγμα μη τετριμμένης δέσμης αποτελεί η λωρίδα *Mobius* (σχήμα 5.2).



Σχήμα 5.1: Τετριμμένη και μη τετριμμένη (συστραμμένη) δέσμη ινών (το σχήμα είναι από την αναφορά [104]).

Στην περίπτωση μας οι δέσμες ινών δεν είναι ευθύγραμμα τμήματα αλλά διδιάστατοι τόροι. Αυτό σημαίνει ότι κάθε σημείο της βάσης  $B_3$  αναπαρίσταται από έναν τόρο. Οι διαστάσεις τις οποίες καταλαμβάνει η βάση είναι οι έξι συμπαγοποιημένες διαστάσεις της θεωρίας χορδών *IIB* και το σχήμα του τόρου όπως αναφέρθηκε, περιγράφεται από τα δύο βαθμωτά πεδία. Η μορφή αυτή της ελλει-



Σχήμα 5.2: Λωρίδα *Mobius*.

πτικής ινοποίησης περιγράφεται από την εξίσωση *Weierstrass* η οποία δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$y^2 = x^3 + f(z)x + g(z) \quad (5.4)$$

όπου  $x, y$  είναι οι μιγαδικές συντεταγμένες μίας διδιάστατης επιφάνειας  $S$  η οποία βρίσκεται μέσα στη βάση  $B_3$ ,  $z$  είναι η μιγαδική συντεταγμένη η οποία είναι κάθετη στην επιφάνεια  $S$  και  $f, g$  είναι πολυωνυμικές συναρτήσεις ως προς  $z$ . Εδώ πρέπει να επισημάνουμε ότι η θεωρία  $F$  ορίζεται ως μία δωδεκαδιάστατη θεωρία διότι οι δύο επιπλέον διαστάσεις είναι γεωμετρικές διαστάσεις οι οποίες μας επιτρέπουν να μεταβάλλουμε την τιμή του  $\tau$  πάνω στις δέκα διαστάσεις. Η παράμετρος του τόρου σχετίζεται με τις συναρτήσεις  $f, g$  μέσω της αναλλοίωτης συνάρτησης  $j(\tau)$  κάτω από μετασχηματισμούς  $SL(2, Z)$

$$j(\tau) = \frac{4(24f)^3}{4f^3 + 27g^2} \quad (5.5)$$

όπου:

$$j(\tau) = e^{-2\pi i\tau} + 744 + \mathcal{O}(e^{2\pi i\tau}). \quad (5.6)$$

Η καμπύλη της εξίσωσης (5.4) δεν παρουσιάζει κάποιο σημείο ιδιομορφίας δεδομένου ότι η παρακάτω ορίζουσα είναι μη μηδενική:

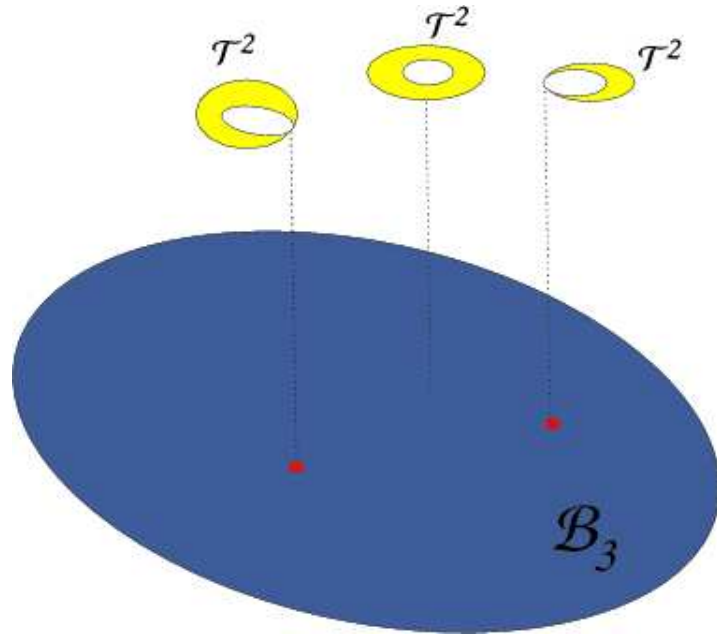
$$\Delta = 4f^3 + 27g^2. \quad (5.7)$$

Όταν όμως η ορίζουσα μηδενίζεται τότε η ελλειπτική καμπύλη παρουσιάζει κάποια ιδιομορφία κατά μήκος της επιφάνειας  $S$ , με την ακτίνα του ενός κύκλου του τόρου να τείνει στο 0 και έτσι η δέσμη ίνας εκφυλίζεται (σχήμα 5.3). Λόγω του βαθμού των πολυωνύμων υπάρχουν είκοσιτέσσερις τιμές του  $z$  στις οποίες η ορίζουσα μηδενίζεται που εν γένει είναι διαφορετικές από τις τιμές μηδενισμού των  $f, g$ . Οι τιμές των  $z$  μας δείχνουν τα σημεία στα οποία βρίσκονται είκοσιτέσσερις 7-βράνες.

### 5.3 Αλγόριθμος του *Tate* και ομάδες βαθμίδας

Ένα βασικό χαρακτηριστικό των όσων αναφέρθηκαν είναι ότι ο μηδενισμός της ορίζουσας δε μας δίνει μόνο τα σημεία στα οποία βρίσκονται οι βράνες,





Σχήμα 5.3: Κάθε σημείο της βάσης  $B_3$  αναπαριστάται από έναν τόρο. Τα κόκκινα σημεία αντιστοιχούν σε 7-βράνες, ορθογώνιες στη βάση. Βλέπουμε ότι ο τόρος εκφυλίζεται σε αυτά τα σημεία (το σχήμα είναι από την αναφορά [105]).

αλλά και πληροφορίες σχετικά με την ομάδα βαθμίδας την οποία υποστηρίζει η βράνη. Δηλαδή η ομάδα βαθμίδας εξαρτάται από το βαθμό μηδενισμού της ορίζουσας. Μία τέτοια συστηματική ανάλυση των ιδιομορφιών που σε κάθε περίπτωση οδηγούν και σε διαφορετικές ομάδες βαθμίδας έχει γίνει από τον *Kodaira* [118]. Παίρνοντας την εξίσωση *Weierstrass*

$$y^2 = x^3 + f(z)x + g(z)$$

η κατηγοριοποίηση του *Kodaira* βασίζεται στην τάξη μηδενισμού των  $f$ ,  $g$  και της ορίζουσας, κάτι το οποίο σκιαγραφείται στον πίνακα 5.1.

Για να περιγράψουμε αυτές τις ιδιομορφίες ακολουθούμε μία διαδικασία η οποία είναι γνωστή ως αλγόριθμος του *Tate* [119]. Υποθέτουμε ένα μικρό σύνολο  $U$  της βάσης έτσι ώστε ο περιορισμός  $S|_U$  να εκφράζεται από την εξίσωση  $z = 0$ . Στη συνέχεια μπορούμε να αναπτύξουμε τους συντελεστές  $f, g$

τάξη ( $f$ )	τάξη ( $g$ )	τάξη ( $\Delta$ )	Ιδιομορφία
0	0	$n$	$SU(n)$
$\geq 1$	1	2	καμία
1	$\geq 2$	3	$SU(2)$
$\geq 2$	2	4	$SU(3)$
2	$\geq 3$	$n + 6$	$SO(2n + 8)$
$\geq 2$	3	$n + 6$	$SO(2n + 8)$
$\geq 3$	4	8	$E_6$
3	$\geq 5$	9	$E_7$
$\geq 4$	5	10	$E_8$

Πίνακας 5.1: Κατηγοριοποίηση *Kodaira* των ελλειπτικών ιδιομορφιών.

της εξίσωσης Weierstrass ως δυνάμεις του  $z$ :

$$f(z) = \sum_n f_n z^n, \quad g(z) = \sum_m g_m z^m. \quad (5.8)$$

Αντικαθιστούμε τις σχέσεις αυτές στην εξίσωση (5.4) και παράγουμε τις ομάδες βαθμίδας που προκύπτουν ανάλογα με το βαθμό μηδενισμού της ορίζουσας. Η γενική μορφή *Tate* της εξίσωσης *Weierstrass* μπορεί να γραφεί ως

$$y^2 + a_1 x y + a_3 y = x^3 + a_2 x^2 + a_4 x + a_6 \quad (5.9)$$

όπου  $a_n$  είναι πολυωνυμικές συναρτήσεις του  $z$ . Στη συνέχεια όπως φαίνεται και στον πίνακα της επόμενης σελίδας βρίσκουμε την ομάδα βαθμίδας ανάλογα με το βαθμό μηδενισμού ως προς  $z$  των συντελεστών  $a_i$ . Για παράδειγμα αν επιλέξουμε

$$a_1 = -b_5, \quad a_2 = b_4 z, \quad a_3 = -b_3 z^2, \quad a_4 = b_2 z^3, \quad a_6 = z^5 b_0 \quad (5.10)$$

όπου τα  $b_i$  είναι ανεξάρτητα από το  $z$ , οδηγούμαστε στην παρακάτω εξίσωση η οποία συμφωμά με τον πίνακα 5.2 οδηγεί σε ομάδα βαθμίδας  $SU(5)$ :

$$y^2 = x^3 + b_0 z^5 + b_2 x z^3 + b_3 y z^2 + b_4 x^2 z + b_5 x y. \quad (5.11)$$

## 5.4 Ημιτοπικά μοντέλα και η συμμετρία $E_8$

Η κύρια ιδέα των τοπικών μοντέλων της θεωρίας  $F$  είναι να επικεντρωθούμε στην υποπολλαπλότητα  $S$ , όπου η συμμετρία της ΜΕΘ  $G_S$  εντοπίζεται. Όπως

Ομάδα	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_6$	$\Delta$
0	0	0	0	0	0	0
–	0	0	1	1	1	1
–	0	0	1	1	2	2
$SU(2n)$	0	1	$n$	$n$	$2n$	$2n$
$SU(2n+1)$	0	1	$n$	$n+1$	$2n+1$	$2n+1$
$SO(10)$	1	1	2	3	5	7
$\mathcal{E}_6$	1	2	3	3	5	8
$\mathcal{E}_7$	1	2	3	3	5	9
$\mathcal{E}_8$	1	2	3	4	5	10

Πίνακας 5.2: Περιπτώσεις του αλγόριθμου *Tate*. Η τάξη μηδενισμού των συντελεστών  $a_i \sim z^{n_i}$ , η ορίζουσα  $\Delta$  και η αντίστοιχη ομάδα βαθμίδας.

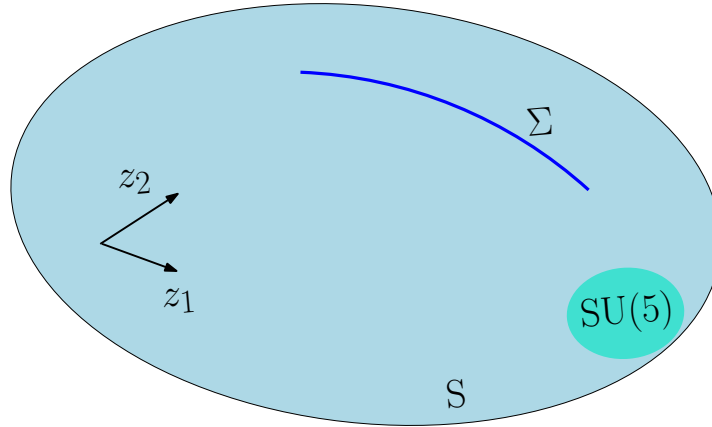
αναφέρθηκε, τα θεμελιώδη αντικείμενα αυτής της θεωρίας είναι 7-βράνες οι οποίες περιτυλίγονται γύρω από την υποπολλαπλότητα  $S$  και βρίσκονται στα σημεία μηδενισμού της ορίζουσας. Οι τομές μεταξύ της βράνης στην οποία εντοπίζεται η συμμετρία της  $ME\Theta$  και άλλων βρανών οι οποίες περιτυλίγονται γύρω από αντίστοιχες επιφάνειες  $S_i$  με συμμετρίες  $G_i$ , οδηγούν σε καμπύλες ύλης  $\Sigma_i = S \cap S_i$  (σχήμα 5.4). Κατά μήκος των καμπυλών ύλης η τοπική ομάδα συμμετρίας αυξάνεται σε  $G_{\Sigma_i} \supset G_S \times G_i$ . Για παράδειγμα η αναπαράσταση  $\bar{5}$  της  $SU(5)$  θα προκύψει από αύξηση της συμμετρίας σε  $SU(6)$ :

$$\begin{aligned} SU(6) &\rightarrow SU(5) \times U(1) \\ 35 &\rightarrow (24, 0) + (1, 0) + (\bar{5}, 6) + (5, -6). \end{aligned}$$

Αντίστοιχα για τη 10 αναπαράσταση της  $SU(5)$  έχουμε:

$$\begin{aligned} SO(10) &\rightarrow SU(5) \times U(1) \\ 45 &\rightarrow (24, 0) + (1, 0) + (\bar{10}, -4) + (10, 4). \end{aligned}$$

Όταν οι καμπύλες ύλης τέμνονται σε ένα σημείο, τότε επάγεται μία σταθερά σύζευξης *Yukawa* και η συμμετρία αυξάνεται ακόμη περισσότερο σε  $G \supset G_{\Sigma_i} \times G_{\Sigma_j} \times G_{\Sigma_k}$  (σχήμα 5.5). Ο όρος αλληλεπίδρασης για το χαμηλό κουάρκ  $\bar{5} \times \bar{5} \times 10$



Σχήμα 5.4: Καμπύλη ύλης  $\Sigma$  όπου χειραλικά πεδία επικαθονται.

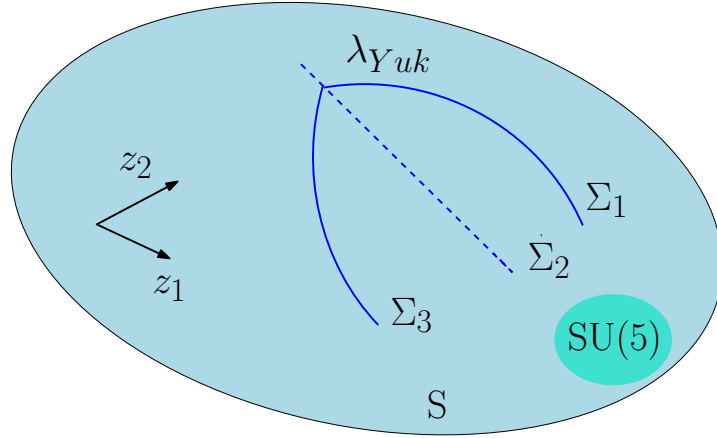
μπορεί να εξαχθεί αν η συμμετρία αυξηθεί σε  $SO(12)$ :

$$\begin{aligned} SO(12) &\rightarrow SU(5) \times U(1)_1 \times U(1)_2 \\ 66 &\rightarrow (24, 0, 0) + (1, 0, 0) + (\overline{10}, -4, 0) + (10, 4, 0) \\ &\quad + (5, 2, 2) + (5, 2, -2) + (\bar{5}, -2, 2) + (\bar{5}, -2, -2). \end{aligned}$$

Τα ημιτοπικά μοντέλα παρέχουν μία διαφορετική εικόνα: θεωρούμε ότι η αρχική μας θεωρία έχει μία συμμετρία  $E_8$  η οποία σπάει από τη *vev* ενός *adjoint* πεδίου *Higgs*. Όλες οι αλληλεπιδράσεις της θεωρίας μας θεωρούμε ότι προέρχονται από ένα μοναδικό σημείο στο οποίο η συμμετρία έχει αυξηθεί σε  $E_8$ .

## 5.5 Προσέγγιση φασματικού καλύμματος

Στην προσέγγιση φασματικού καλύμματος (*Spectral Cover Approach*) μελετούμε το σύστημά μας κοντά στη γειτονιά της επιλεγόμενης επιφάνειας η οποία σχετίζεται με την ομάδα συμμετρίας της ΜΕΘ. Η περιγραφή σε εκείνη την περιοχή γίνεται από μία επιφάνεια που υποστηρίζει μία ομάδα συμμετρίας  $G_\perp$ . Οι τομές μεταξύ αυτής της επιφάνειας και της επιφάνειας της ΜΕΘ περιέχουν την πληροφορία για το φάσμα και τις ιδιότητές του. Σε ημιτοπικά μοντέλα της θεωρίας  $F$  θεωρούμε τη μέγιστη δυνατή ιδιομορφία της ελλειπτικής ινοποίησης η οποία είναι η  $E_8$ . Συνεπώς αν υποθέσουμε ότι η τετραδιάστατη θεωρία μας έχει



Σχήμα 5.5: Οι σταθερές σύζευξης *Yukawa* επάγονται όταν τρεις καμπύλες ύλης τμηθούν σε ένα σημείο.

μία ομάδα συμμετρίας  $G_S$  τότε η ομάδα συμμετρίας της φασματικής επιφάνειας θα είναι ο μεταθέτης αυτής ως προς την  $E_8$ , δηλαδή:

$$E_8 \rightarrow G_S \times G_{\perp}. \quad (5.12)$$

Στην περίπτωση που η ομάδα συμμετρίας της ΜΕΘ είναι  $G_S = SU(5)$ , τότε η φασματική επιφάνεια θα έχει συμμετρία  $SU(5)_{\perp}$ . Η συμμετρία  $E_8$  σπάει σε:

$$E_8 \supset SU(5) \times SU(5)_{\perp} \rightarrow SU(5) \times U(1)^4. \quad (5.13)$$

Το πεδίο *Higgs* που χρησιμοποιούμε για το σπάσιμο της συμμετρίας βρίσκεται στην *adjoint* αναπαράσταση της  $SU(5)_{\perp}$  και οι ιδιοτιμές του μπορούν να διαγωνοποιηθούν ως

$$\phi \sim \text{διαγ}(t_1, \dots, t_5), \quad \sum_i t_i = 0 \quad (5.14)$$

όπου  $t_i$  είναι τα βάρη της θεμελιώδους αναπαράστασης της  $SU(5)_{\perp}$ . Για να βρούμε τις αναπαραστάσεις των πεδίων ύλης αναλύουμε την *adjoint* αναπαράσταση της  $E_8$  κάτω από  $SU(5) \times SU(5)_{\perp}$ :

$$248 = (24, 1) + (1, 24) + (5, 10) + (\bar{5}, \bar{10}) + (10, \bar{5}) + (\bar{10}, 5). \quad (5.15)$$

Παρατηρούμε ότι οι 10 αναπαραστάσεις της  $SU(5)$  προέρχονται από τη συνιστώσα  $(10, \bar{5})$  και επικαθονται σε καμπύλες ύλης  $\Sigma_{10}$  που χαρακτηρίζονται από τα βάρη  $t_i$ . Αντίστοιχα οι  $\bar{5}$  αναπαραστάσεις επικαθονται σε καμπύλες ύλης  $\Sigma_{\bar{5}}$ . Οι εξισώσεις των καμπυλών ύλης μπορούν να γραφούν συναρτήσει των βαρών ως:

$$\Sigma_{10} : t_i = 0, \quad \Sigma_{\bar{5}} : t_i + t_j = 0, \quad i \neq j \quad (5.16)$$

Η εξίσωση της φασματικής επιφάνειας με ομάδα συμμετρίας  $SU(N)_\perp$  (στη γενική περίπτωση) είναι ένα πολυώνυμο  $N$  βαθμού του οποίου οι συντελεστές είναι τα  $b_i$  και οι ρίζες του αντιστοιχούν στα βάρη  $t_i$ :

$$C_{(N)} = b_0 s^N + \dots + b_K s^{N-K} + \dots + b_N = 0. \quad (5.17)$$

Στη συνέχεια εξετάζουμε κάποια χαρακτηριστικά των μοντέλων αυτών, εξετάζοντας το πιο απλό όπου η ομάδα συμμετρίας είναι η  $SU(3)_\perp$  [106]. Στην περίπτωση αυτή έχουμε:

$$C_{(3)} = b_0 s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3 = 0. \quad (5.18)$$

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί εναλλακτικά να γραφεί ως:

$$C_{(3)} = b_0 (s + t_1)(s + t_2)(s + t_3) = 0. \quad (5.19)$$

Συγκρίνοντας τις δύο προηγούμενες σχέσεις καταλήγουμε:

$$\begin{aligned} b_1 &= b_0(t_1 + t_2 + t_3) \\ b_2 &= b_0(t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1) \\ b_3 &= b_0 t_1 t_2 t_3. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι εξαιτίας της σχέσης (5.14) στα μοντέλα αυτά ο συντελεστής  $b_1$  θα είναι πάντα μηδέν. Η χρησιμότητα της προσέγγισης φασματικού καλύμματος έγκειται στο γεγονός ότι οι εξισώσεις των καμπυλών ύλης μιας ΜΕΘ μπορούν να υπολογιστούν συναρτήσει των  $b_i$ . Έτσι γνωρίζοντας τις κλάσεις ομολογίας των συντελεστών αυτών (οι συντελεστές αυτοί γεωμετρικά απεικονίζονται ως τομές γραμμών δεσμών), μπορούμε να υπολογίσουμε τις κλάσεις ομολογίας των καμπυλών ύλης και κατά συνέπεια το χειραλικό σωματιδιακό φάσμα της θεωρίας. Ωστόσο θέλουμε να γνωρίζουμε τις εξισώσεις και τις κλάσεις ομολογίας των καμπυλών ύλης αφού έχουμε επιβάλλει μία  $Z_2$  συμμετρία. Στο μοντέλο μας η συμμετρία σπάει περαιτέρω σε:

$$SU(5) \times U(1)^4.$$

Ένας όρος της μορφής *Yukawa* πρέπει να παραμένει αναλλοίωτος κάτω από τις  $U(1)$  συμμετρίες. Επομένως γράφοντας για παράδειγμα τον όρο αλληλεπίδρασης του κορυφαίου κουάρκ

$$W \supset 10_{t_i} 10_{t_j} 5_{-t_i-t_j}$$

παρατηρούμε ότι υπάρχουν δύο διαφορετικές καμπύλες ύλης (το κορυφαίο κουάρκ και το αντισωματίδιό του προέρχονται από μία καμπύλη ύλης). Χρησιμοποιώντας όμως τη συμμετρία  $Z_2$  μπορούμε να ταυτοποιήσουμε τις δύο γενιές ( $t_1 \leftrightarrow t_2$ ) λύνοντας έτσι το πρόβλημα. Η ταυτοποίηση αυτή συνεπάγεται ότι το πολυώνυμο της φασματικής επιφάνειας μπορεί να διαχωριστεί ως ένας τετραγωνικός όρος και  $N - 2$  γραμμικοί όροι. Στην περίπτωση της  $SU(3)_\perp$  η εξίσωση της φασματικής επιφάνειας κάτω από τη συμμετρία  $Z_2$  γράφεται ως:

$$C_{(3)} = (a_1 + a_2s + a_3s^2)(a_4 + a_5s). \quad (5.21)$$

Οι συντελεστές  $b_i$  σχετίζονται με τους συντελεστές  $a_i$  συγκρίνοντας τις δυνάμεις του  $s$  και μπορούμε πάλι να υπολογίσουμε τις κλάσεις ομολογίας των  $a_i$  και ακολούθως τις αντίστοιχες των καμπυλών ύλης.

### 5.5.1 Προσέγγιση φασματικού καλύμματος για το μοντέλο $SU(5)$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (5.11) και ορίζοντας ομογενείς συντεταγμένες

$$z \rightarrow U, \quad x \rightarrow V^2, \quad y \rightarrow V^3$$

η εξίσωση *Weierstrass* μετατρέπεται σε:

$$0 = b_0U^5 + b_2V^2U^3 + b_3V^3U^2 + b_4V^4U + b_5V^5.$$

Στη συνέχεια ορίζοντας μία παράμετρο  $s = U/V$  καταλήγουμε σε ένα πολυώνυμο πέμπτου βαθμού:

$$P_5 = \sum_{k=0}^5 b_k s^{5-k} = b_5 + b_4s + b_3s^2 + b_2s^3 + b_1s^4 + b_0s^5.$$

Οι ρίζες της εξίσωσης της φασματικής επιφάνειας όπως προείπαμε είναι τα βάρη της  $SU(5)$ :

$$0 = b_5 + b_4s + b_3s^2 + b_2s^3 + b_0s^5 \propto \prod_{i=1}^5 (s + t_i). \quad (5.22)$$

Ο συντελεστής  $b_1$  είναι ίσος με το μηδέν διότι το άθροισμα των βαρών για συμμετρίες  $SU(N)$  είναι πάντα μηδέν  $\sum_i t_i = 0$ . Επίσης ο συντελεστής  $b_5$  είναι ίσος με το γινόμενο των βαρών  $b_5 = t_1 t_2 t_3 t_4 t_5$  και οι καμπύλες  $\Sigma_{10}$  καθορίζονται από:

$$\Sigma_{10}, \quad b_5 = \prod_{i=1}^5 t_i = 0 \rightarrow t_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5. \quad (5.23)$$

Ακολουθώντας την προσέγγιση των *Dudas-Palti* [107] επιβάλλοντας τη συμμετρία  $Z_2$  η φασματική εξίσωση διαχωρίζεται ως:

$$(a_1 + a_2 s + a_3 s^2)(a_4 + a_7 s)(a_5 + a_8 s)(a_6 + a_9 s) = 0. \quad (5.24)$$

Η πρώτη παρένθεση περιέχει τον παράγοντα εκείνο ο οποίος αντιστοιχεί στην επιβαλλόμενη συμμετρία και οι υπόλοιποι τρεις παράγοντες αφήνουν τις τρεις  $U(1)$  συμμετρίες ως έχουν. Σχετίζοντας τους συντελεστές  $a_i$  με τους συντελεστές  $b_i$  μπορούμε να υπολογίσουμε τις κλάσεις ομολογίας τους. Συνεπώς έχουμε:

$$b_0 = a_3 a_7 a_8 a_9$$

$$b_1 = a_2 a_7 a_8 a_9 + a_3 a_6 a_7 a_8 + a_3 a_5 a_7 a_9 + a_3 a_4 a_8 a_9$$

$$b_2 = a_1 a_7 a_8 a_9 + a_2 a_6 a_7 a_8 + a_2 a_5 a_7 a_9 + a_2 a_4 a_8 a_9 + a_3 a_5 a_6 a_7 + a_3 a_4 a_6 a_8 + a_3 a_4 a_5 a_9$$

$$b_3 = a_3 a_4 a_5 a_6 + a_1 a_6 a_7 a_8 + a_1 a_5 a_7 a_9 + a_1 a_4 a_8 a_9 + a_2 a_5 a_6 a_7 + a_2 a_4 a_6 a_8 + a_2 a_4 a_5 a_9$$

$$b_4 = a_2 a_4 a_5 a_6 + a_1 a_5 a_6 a_7 + a_1 a_4 a_6 a_8 + a_1 a_4 a_5 a_9$$

$$b_5 = a_1 a_4 a_5 a_6.$$

Αρχικά λύνουμε τον περιορισμό  $b_1 = 0$ . Κάνουμε την υπόθεση

$$a_2 = -c(a_6 a_7 a_8 + a_5 a_7 a_9 + a_4 a_8 a_9), \quad a_3 = c a_7 a_8 a_9$$

και αντικαθιστώντας στα  $b_n$  έχουμε:

$$b_0 = c a_7^2 a_8^2 a_9^2$$

$$b_2 = a_1 a_7 a_8 a_9 - [a_6^2 a_7^2 a_8^2 + a_6 a_7 a_8 a_9 (a_5 a_7 + a_4 a_8) + a_9^2 (a_5^2 a_7^2 + a_4 a_5 a_7 a_8 + a_4^2 a_8^2)] c$$

$$b_3 = a_1 (a_6 a_7 a_8 + a_5 a_7 a_9 + a_4 a_8 a_9) - (a_5 a_7 + a_4 a_8) (a_6 a_7 + a_4 a_9) (a_6 a_8 + a_5 a_9) c$$

$$b_4 = a_1 (a_5 a_6 a_7 + a_4 a_6 a_8 + a_4 a_5 a_9) - a_4 a_5 a_6 (a_6 a_7 a_8 + a_5 a_7 a_9 + a_4 a_8 a_9) c$$

$$b_5 = a_1 a_4 a_5 a_6.$$



Παρατηρούμε ότι έχουμε να υπολογίσουμε τις κλάσεις ομολογίας εννέα αγνώστων ποσοτήτων  $[a_i]$  ως συνάρτηση των κλάσεων  $[b_k]$  οι οποίες είναι της μορφής  $\eta - kc_1$ , όπου  $\eta = 6c_1 - t$  με  $c_1$  την πρώτη κλάση Chern της εφαπτομενικής δέσμης στην  $S_{GUT}$  και  $-t$  την πρώτη κλάση Chern της κάθετης δέσμης στην  $S_{GUT}$ . Τρεις κλάσεις παραμένουν απροσδιόριστες τις οποίες επιλέγουμε  $[a_l] = \chi_l$ ,  $l = 7, 8, 9$  και  $[c] = \eta - 2\chi \equiv \eta - 2(\chi_7 + \chi_8 + \chi_9)$ . Τελικά έχουμε:

$$\begin{aligned} [a_1] &= \eta - 2c_1 - \chi, & [a_2] &= \eta - c_1 - \chi \\ [a_3] &= \eta - \chi, & [a_4] &= -c_1 + \chi_7 \\ [a_5] &= -c_1 + \chi_8, & [a_6] &= -c_1 + \chi_9 \\ [a_7] &= \chi_7, & [a_8] &= \chi_8 \\ [a_9] &= \chi_9. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Οι καμπύλες ύλης  $\Sigma_{10}$  βρίσκονται θέτοντας  $s = 0$  στο πολυώνυμο:

$$b_5 \equiv \Pi_5(0) = a_1 a_4 a_5 a_6 = 0 \rightarrow a_1 = 0, a_4 = 0, a_5 = 0, a_6 = 0.$$

Παρατηρούμε ότι μετά την επιβολή της συμμετρίας παρέμειναν τέσσερις καμπύλες  $\Sigma_{10}$ . Παρόμοια διαδικασία ακολουθείται για τις  $\Sigma_5$  καμπύλες [107] με αποτέλεσμα να παραμείνουν επτά καμπύλες αντί για δέκα.

## 5.6 Σωματίδια *Kaluza-Klein* και η ενεργειακή κλίμακα ενοποίησης των σταθερών σύζευξης βαθμίδας

Το συγκεκριμένο μοντέλο της θεωρίας  $F$  που θα χρησιμοποιήσουμε, είναι ο κοσμικός όγκος ενός σωρού  $D7$ -βρανών στον οποίο είναι δυνατό να υπάρχουν ιδιομορφίες του τύπου  $ADE$ , από τις οποίες θα προκύψουν οι αντίστοιχες ομάδες συμμετρίας  $SU(n+1)$ ,  $SO(2n)$ ,  $E_6$ ,  $E_7$ ,  $E_8$ . Ο σωρός αυτός των βρανών περιτυλίγεται γύρω από το χώρο  $R^{3,1} \times S$ , όπου  $S$  είναι μία πολλαπλότητα *Kähler* δύο μιγαδικών διαστάσεων. Για να μπορούμε να δουλέψουμε στο όριο όπου η βαρύτητα θεωρείται αμελητέα, η πολλαπλότητα αυτή θεωρούμε ότι μπορεί να σμιχρυνθεί σε μηδενικό μέγεθος μέσα σε ένα χώρο βάση τριών μιγαδικών διαστάσεων. Τη συνθήκη αυτή την ικανοποιεί μία επιφάνεια *Del Pezzo*.

Σε χαμηλές ενέργειες η θεωρία  $F$  μπορεί να περιγραφεί από μία οκταδιάστατη θεωρία *Yang-Mills* πάνω στον  $R^{3,1} \times S$  η οποία έχει συστραφεί τοπολογικά

για να μπορεί να διατηρηθεί η  $N = 1$  υπερσυμμετρία [83, 84]. Η ομάδα βαθμίδας  $G_S$  που θα προκύψει από την αναφερόμενη ιδιομορφία όπως έχει ήδη αναφερθεί είναι η  $SU(5)$ . Ενεργοποιώντας μία ροή  $U(1)_Y$  πάνω στη βράνη σπάμε τη συμμετρία  $SU(5)$  στη συμμετρία του ΚΠ.

### 5.6.1 Ελάττωση της μεγαλοδιάστατης θεωρίας

Θεωρούμε ότι η αρχική μας θεωρία είναι μία υπερσυμμετρική *Yang-Mills* θεωρία στις δέκα διαστάσεις με το μέγιστο αριθμό υπερφορτίων, η οποία ορίζεται στο χώρο  $R^{9,1}$ . Στις διαστάσεις αυτές η υπερμαλτιπλέτα βαθμίδας αποτελείται από ένα δεκαδιάστατο διανυσματικό πεδίο  $\mathcal{A}_I (I = 0, 1, \dots, 9)$  και ένα φερμιονικό πεδίο στην *adjoint* αναπαράσταση το οποίο μετασχηματίζεται κάτω από τη συμμετρία  $SO(9, 1)$  στη σπινωριακή αναπαράσταση θετικής χειραλικότητας  $16_+$ . Η θεωρία αυτή διατηρεί 16 υπερφορτία τα οποία μετασχηματίζονται στην  $16_+$ . Ελαττώνοντας την αρχική θεωρία από το χώρο  $R^{9,1}$  στον  $R^{7,1}$  η συμμετρία της ελαττωμένης θεωρίας είναι:

$$SO(9, 1) \rightarrow SO(7, 1) \times U(1)_R.$$

Το δεκαδιάστατο πεδίο βαθμίδας αποτελείται πλέον στις οκτώ διαστάσεις από ένα οκταδιάστατο πεδίο βαθμίδας  $A$  και δύο βαθμωτά πεδία  $A_{8,9}$  στην *adjoint* αναπαράσταση, τα οποία μπορούν να γραφούν ως:

$$\varphi = A_8 + iA_9 \in (1, +1), \quad \bar{\varphi} = A_8 - iA_9 \in (1, -1).$$

Στις παραπάνω παρενθέσεις φαίνεται πώς μετασχηματίζονται τα βαθμωτά πεδία κάτω από τη συμμετρία  $SO(7, 1) \times U(1)_R$ . Μετασχηματίζονται ως απλές κάτω από τη *Lorentz* συμμετρία και έχουν φορτία  $\pm 1$  κάτω από τη  $U(1)_R$ . Αντίστοιχα για το φερμιονικό τμήμα του φάσματος τα χειραλικά φερμιόνια  $\Psi_{\pm}$  μετασχηματίζονται ως

$$16_+ \rightarrow \left( S_+, \frac{1}{2} \right) + \left( S_-, -\frac{1}{2} \right)$$

όπου με  $S_{\pm}$  συμβολίζουμε τις σπινωριακές αναπαραστάσεις θετικής και αρνητικής χειραλικότητας της *Lorentz* συμμετρίας και με  $\pm \frac{1}{2}$  τα αντίστοιχα  $U(1)_R$  φορτία. Στη συνέχεια η οκταδιάστατη πλέον θεωρία μας συμπαγοποιείται σε μία επιφάνεια δύο μιγαδικών διαστάσεων  $S$  και καταλήγουμε σε μία τετραδιάστατη

θεωρία στο συνήθη χωροχρόνο  $R^{7,1} \rightarrow R^{3,1} \times S$  της οποίας η συμμετρία είναι ακόμη μικρότερη από την αρχική και προκύπτει ως:

$$SO(7, 1) \times U(1)_R \rightarrow SO(3, 1) \times SO(4) \times U(1)_R.$$

Γνωρίζουμε ότι η συμμετρία των στροφών  $SO(4)$  είναι τοπικά ισομορφική με  $SO(4) \sim SU(2) \times SU(2)$ . Για τη Lorentz συμμετρία ο ισομορφισμός είναι  $SO(3, 1) \sim SL(2, R) \times SL(2, R)$ . Συνεπώς καταλήγουμε σε:

$$SO(7, 1) \times U(1)_R \rightarrow SL(2, R) \times SL(2, R) \times SU(2) \times SU(2) \times U(1)_R.$$

Οι σπίνορες της οκταδιάστατης θεωρίας καθώς και οι γεννήτορες της υπερσυμμετρίας  $\epsilon_{\pm}$ , μπορούν να αναλυθούν κάτω από την προηγούμενη συμμετρία ως

$$\begin{aligned} \left( S_+, \frac{1}{2} \right) &\rightarrow \left( (2, 1), (2, 1), \frac{1}{2} \right) + \left( (1, 2), (1, 2), \frac{1}{2} \right) \\ \left( S_-, -\frac{1}{2} \right) &\rightarrow \left( (2, 1), (1, 2), -\frac{1}{2} \right) + \left( (1, 2), (2, 1), -\frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

όπου η  $(2, 1)$  αναπαράσταση περιγράφει τον αριστερόστροφο χειραλικό σπίνορα και η  $(1, 2)$  το δεξιόστροφο αντιχειραλικό σπίνορα. Αν η επιφάνεια  $S$  ήταν μία αυθαίρετη τετραδιάστατη πολλαπλότητα *Riemann*, η συστροφή<sup>1</sup> πάνω σε αυτήν την επιφάνεια θα γινόταν από την εμβάπτιση της συμμετρίας  $U(1)_R$  μέσα στην  $SO(4)$ , η οποία είναι η ομάδα ολονομίας. Όμως στην περίπτωση μας η πολλαπλότητα είναι *Kähler* οπότε η  $SO(4)$  μειώνεται σε  $U(2)$ . Άρα η συστροφή θα γίνει εμβαπτίζοντας τη συμμετρία  $U(1)_R$  μέσα σε μία μικρότερη ομάδα  $U(2)$ . Συμβολίζουμε ως  $R$  το γεννήτορα της  $U(1)_R$  και ως  $J$  το γεννήτορα της  $U(1)$  που βρίσκεται στη  $U(2)$ . Συμπεραίνουμε ότι οι γραμμικοί συνδυασμοί  $J_{\pm} = J \pm 2R$  των γεννητόρων των  $U(1)$  συμμετριών διατηρούν τη  $N = 1$  υπερσυμμετρία. Στη συστραμμένη θεωρία τα φερμιόνια  $\Psi_{\pm}$  και οι γεννήτορες της υπερσυμμετρίας μετασχηματίζονται κάτω από την ομάδα  $SO(3, 1) \times U(2) \times U(1)_{J_+}$  ως εξής:

$$\begin{aligned} \left( S_+, \frac{1}{2} \right) &\rightarrow \{(2, 1), 2_1\} + \{(1, 2), 1_2\} + \{(1, 2), 1_0\} \\ \left( S_-, -\frac{1}{2} \right) &\rightarrow \{(1, 2), 2_{-1}\} + \{(2, 1), 1_0\} + \{(2, 1), 1_{-2}\}. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Η ιδέα της τοπολογικής συστροφής βασίζεται στην αντικατάσταση της ομάδας συμμετρίας του χωροχρόνου από μία νέα στην οποία έχει εμβαπτιστεί η συμμετρία  $R$ .

Από τις αναπαράστασεις  $\{(1, 2), 1_0\}$  και  $\{(2, 1), 1_0\}$ , βλέπουμε ότι η συστραμμένη θεωρία στην πολλαπλότητα  $S$  έχει τέσσερα βαθμωτά υπερφορτία τα οποία σχετίζονται με τη  $N = 1$  υπερσυμμετρία στις τέσσερις διαστάσεις η οποία διατηρείται. Τα πεδία τα οποία προκύπτουν από την ανάλυση του  $\Psi_+$  συμβολίζονται ως

$$\{(1, 2), 1_0\} \rightarrow \bar{\eta}^{\dot{\alpha}}, \quad \{(2, 1), 2_1\} \rightarrow \psi_{\bar{m}}^{\alpha}, \quad \{(1, 2), 1_2\} \rightarrow \bar{\chi}_{\bar{m}\bar{n}}^{\dot{\alpha}}$$

και συνιστούν μία μηδενική-μορφή, ένα-μορφή και δύο-μορφή αντίστοιχα:

$$\bar{\eta}^{\dot{\alpha}}, \quad \psi^{\alpha} = \psi_{\bar{m}}^{\alpha} d\bar{z}^{\bar{m}}, \quad \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = \bar{\chi}_{\bar{m}\bar{n}}^{\dot{\alpha}} d\bar{z}^{\bar{m}} \wedge d\bar{z}^{\bar{n}}.$$

Ανάλογα ισχύουν για το συζυγές  $\Psi_-$ . Τα βαθμωτά πεδία  $\varphi, \bar{\varphi}$  κάτω από τη συμμετρία  $SO(3, 1) \times U(2) \times U(1)_{J_+}$  μετασχηματίζονται ως:

$$\varphi = \{(1, 1), 1_{-2}\}, \quad \bar{\varphi} = \{(1, 1), 1_{+2}\}.$$

Το οκταδιάστατο διανυσματικό πεδίο  $A$  υπό τη διαστατική ελάττωση αναλύεται σε ένα τετραδιάστατο διάνυσμα  $A_{\mu}$  και τα βαθμωτά πεδία  $A_m$  ( $A_{\bar{m}}$ ) τα οποία μετασχηματίζονται ως:

$$A_{\bar{m}} = \{(1, 1), 2_{+1}\}.$$

Τα παραπάνω πεδία στις τέσσερις διαστάσεις σχηματίζουν μία  $N = 1$  μαλτιπλέτα βαθμίδας και δύο χειραλικές μαλτιπλέτες:

$$(A_{\mu}, \eta^{\alpha}), \quad (A_{\bar{m}}, \psi_{\bar{m}}^{\alpha}), \quad (\varphi_{mn}, \chi_{mn}^{\alpha}). \quad (5.26)$$

### 5.6.2 Εξισώσεις επανακανονικοποίησης των σταθερών σύζευξης βαθμίδας

Έχοντας καθορίσει το φάσμα και τις ιδιότητες των σωματιδίων της θεωρίας μας, στη συνέχεια μελετούμε την επίδραση γεγονότων κατωφλίου. Υποθέτουμε ότι η ομάδα συμμετρίας  $G_S = SU(5)$  περιγράφει τη βαθμίδα συμμετρίας της MEΘ σε μία ενεργειακή κλίμακα  $M_{GUT} \ll M_{Planck}$ . Οι διορθώσεις από τα γεγονότα κατωφλίου εκφράζονται ως συνάρτηση των μαζών των σωματιδίων  $KK$ , οι οποίες προκύπτουν ως οι μη μηδενικές ιδιοτιμές του τελεστή της Λαπλασιανής της οκταδιάστατης θεωρίας. Πριν από μερικά χρόνια [120] εδείχθει ότι στο πλαίσιο της θεωρίας  $M$  οι διορθώσεις κατωφλίου μπορούν να εκφραστούν ως συνάρτηση μίας τοπολογικά αναλλοίωτης ποσότητας<sup>2</sup>, η οποία ονομάζεται στρέψη *Ray-Singer* [121]. Ανάλογη μελέτη έχει γίνει και για τη θεωρία  $F$  [86].

<sup>2</sup>Τοπολογικά αναλλοίωτες ποσότητες είναι οι ποσότητες οι οποίες διατηρούνται κάτω από ομοιομορφισμούς. Θεωρούμε ότι  $X_1$  και  $X_2$  είναι δύο τοπολογικοί χώροι. Μία απεικόνιση

Η υποομάδα της ομάδας  $SU(5)$  της οποίας οι γεννήτορες μετατίθενται με τους γεννήτορες της ομάδας που περιγράφει το ΚΠ,  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ , είναι η  $U(1)_Y$ . Συμβολίζουμε με  $q_i$  το φορτίο της  $U(1)_Y$  των αναπαράστασεων  $R_i$  του ΚΠ, οι οποίες προκύπτουν από την ανάλυση της *adjoint* αναπαράστασης της  $SU(5)$  κάτω από τη  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ :

$$24 \rightarrow (8, 1)_0 + (1, 3)_0 + (1, 1)_0 + (3, 2)_{-5/6} + (\bar{3}, 2)_{5/6}. \quad (5.27)$$

Για να σπάσουμε τη συμμετρία της ΜΕΘ σε μοντέλα τα οποία προέρχονται από χορδές, υπάρχουν εν γένει τρεις βασικές ιδέες. Η πρώτη είναι να χρησιμοποιήσουμε ένα πεδίο *Higgs* στην *adjoint* αναπαράσταση ή σε κάποια μεγαλύτερη. Η προσέγγιση αυτή είναι δυνατή στη θεωρία  $F$  αλλά οδηγεί στα συνήθη προβλήματα των τετραδιάστατων μεγαλοενοποιημένων μοντέλων. Η δεύτερη ιδέα είναι να χρησιμοποιήσει κανείς διακριτές γραμμές *Wilson*, μία μέθοδος η οποία χρησιμοποιείται σε μοντέλα που προκύπτουν από την ετεροτική χορδή. Τέλος η τρίτη επιλογή την οποία θα υιοθετήσουμε στη δική μας προσέγγιση, είναι αυτή των ρών ( $p$ -μορφές πεδία).

Υποθέτουμε ότι η ομάδα συμμετρίας της ΜΕΘ σπάει στη  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  ενεργοποιώντας μία ροή κατά μήκος της  $U(1)_Y$ , οπότε κάθε  $q_i$  καθορίζει μία δέσμη γραμμή (*line bundle*) η οποία συμβολίζεται με  $\mathcal{L}^{q_i}$ . Από τη σχέση (5.27) παρατηρούμε ότι εκτός από τις καθιερωμένες  $SU(3)$ ,  $SU(2)$  αναπαράστασεις υπάρχουν και κάποιες αναπαράστασεις εξωτικών σωματιδίων όπως οι  $(3, 2)$  και  $(\bar{3}, 2)$  κατά μήκος των δεσμών γραμμών  $\mathcal{L}^{\pm 5/6}$  των οποίων οι αριθμοί δίνονται από μία τοπολογικά αναλλοίωτη ποσότητα, το χαρακτήρα *Euler*  $-\chi(S, \mathcal{L}^{\pm 5/6})$ . Γενικά ο αριθμός των άμαζων σωματιδίων τα οποία μετασχηματίζονται κάτω από μία  $\mathcal{T}_i$  αναπαράσταση δίνεται ως

$$n_i = -\chi(S, \mathcal{L}_i) = 1 + \frac{1}{2} c_1(\mathcal{L}_i) \cdot (c_1(\mathcal{L}_i) + c_1(S)) \quad (5.28)$$

όπου  $\mathcal{L}_i$  είναι μία δέσμη γραμμή η οποία μετασχηματίζεται κάτω από την αναπαράσταση  $\mathcal{T}_i$  και οι τοπολογικές ποσότητες  $c_1(\mathcal{L}_i)$ ,  $c_1(S)$  είναι οι πρώτες *Chern* κλάσεις των  $\mathcal{L}_i$  και  $S$ . Ο αντίστοιχος αριθμός για τη συζυγή αναπαράσταση χρησιμοποιώντας τη σχέση  $c_1(\mathcal{L}_i^{-1}) = -c_1(\mathcal{L}_i)$  είναι:

$$n_i^* = -\chi(S, \mathcal{L}_i^{-1}) = 1 + \frac{1}{2} c_1(\mathcal{L}_i) \cdot (c_1(\mathcal{L}_i) - c_1(S)). \quad (5.29)$$

---

$f : X_1 \rightarrow X_2$  είναι ένας ομοιομορφισμός αν είναι συνεχής και έχει αντίστροφη απεικόνιση  $f^{-1} : X_2 \rightarrow X_1$  η οποία είναι και αυτή συνεχής. Πιο απλά, στην τοπολογία γενικότερα θεωρούμε ότι δύο σχήματα είναι ισοδύναμα όταν μπορεί να προκύψει το ένα από το άλλο με μία συνεχή παραμόρφωση. Η παραμόρφωση αυτή εκφράζεται από την έννοια του ομοιομορφισμού.

Από τις δύο προηγούμενες σχέσεις έχουμε:

$$n_i - n_i^* = -c_1(\mathcal{L}^{\frac{5}{6}}) \cdot c_1(S)$$

$$n_i + n_i^* = -(2 + c_1(\mathcal{L}^{\frac{5}{6}}) \cdot c_1(\mathcal{L}^{\frac{5}{6}})).$$

Απαλοίφουμε τα εξωτικά αυτά σωματίδια θέτοντας  $\chi(S, \mathcal{L}^{\pm 5/6}) = 0$  και έχουμε:

$$c_1(\mathcal{L}^{\frac{5}{6}}) \cdot c_1(S) = 0,$$

$$c_1(\mathcal{L}^{\frac{5}{6}}) \cdot c_1(\mathcal{L}^{\frac{5}{6}}) = -2.$$

Μετά τη συμπαγοποίηση [82], ο τελεστής *Dirac* αναλύεται σε τελεστές *Dolbault* οι οποίοι συζεύγγονται με ομομορφικές δέσμες. Θεωρούμε τον τελεστή *Dolbault* της αντίστοιχης δέσμης  $V$  που μετασχηματίζεται κάτω από την αναπαράσταση  $R(V)$ , ο οποίος δρα πάνω σε  $k$ -μορφές ως εξής:

$$\bar{\partial} : \Omega_S^{0,k} \rightarrow \Omega_S^{0,k+1}, \text{ για } k = 0, 1. \quad (5.30)$$

Θεωρούμε τον τελεστή της Λαπλασιανής

$$\Delta_{k,R(V)} = (\bar{\partial} + \bar{\partial}^\dagger)^2 = \bar{\partial}\bar{\partial}^\dagger + \bar{\partial}^\dagger\bar{\partial} \quad (5.31)$$

το φάσμα του οποίου μας δίνει τα τετράγωνα των ιδιοτιμών. Συμβολίζουμε με  $\psi_k^n$  την  $k$ -μορφή ιδιοσυνάρτηση του, οπότε:

$$\Delta_{k,R(V)}\psi_k^n = \lambda_n^k \psi_k^n \quad (5.32)$$

όπου το  $\lambda_n^k$  αναπαριστά την αντίστοιχη ιδιοτιμή και στις τέσσερις διαστάσεις αντιστοιχεί στο τετράγωνο της μάζας. Η εξίσωση επανακανονικοποίησης ενός βρόχου για τις σταθερές σύζευξης βαθμίδας στις τέσσερις διαστάσεις λαμβάνοντας υπόψιν τις διορθώσεις κατωφλίου που προέρχονται από τις μάζες των  $KK$  σωματιδίων της μαλτιπλέτας βαθμίδας, δίνεται από τη σχέση

$$\frac{16\pi^2}{g_a^2(\mu)} = \frac{16\pi^2 k_a}{g_s^2} + b_a \log \frac{\Lambda^2}{\mu^2} + \mathcal{S}_a^{(g)}, \quad a = 3, 2, Y \quad (5.33)$$

όπου  $\Lambda$  είναι η ενεργειακή κλίμακα αποκοπής της θεωρίας μας,  $k_a = (1, 1, 5/3)$  είναι οι συντελεστές νορμαλισμού για τη συνήθη εμβάπτιση του ΚΠ στην

$SU(5)$ ,  $g_s$  είναι η σταθερά σύζευξης βαθμίδας η οποία εξάγεται από τη θεωρία στις υψηλότερες ενέργειες και  $b_a$  είναι οι ενός βρόχου συντελεστές της συνάρτησης βήτα οι οποίοι δίνονται από τη σχέση

$$b_a = 2 \text{Str}_{M=0} Q_a^2 \left( \frac{1}{12} - \chi^2 \right) \quad (5.34)$$

όπου  $\chi$  είναι ο τελεστής ελικότητας,  $\text{Str}$  είναι το υπερίχνος όπου τα μποζόνια συνεισφέρουν με βάρος  $+1$  και τα φερμιόνια με βάρος  $-1$  και  $Q_a$  είναι οι γεννήτορες της ομάδας βαθμίδας του ΚΠ. Για το υπερίχνος έχουμε:

$$\text{Str} \left( \frac{1}{12} - \chi^2 \right) = \begin{cases} -\frac{3}{2} & \text{για τη μαλτιπλέτα βαθμίδας} \\ +\frac{1}{2} & \text{για τη χειραλική μαλτιπλέτα} \end{cases} \quad (5.35)$$

Στη συνέχεια παραθέτουμε λεπτομερώς το αποτέλεσμα για τη μαλτιπλέτα βαθμίδας. Η μαλτιπλέτα βαθμίδας αποτελείται από μποζόνια βαθμίδας και από τους υπερεταίρους τους. Άρα προκύπτει:

$$\begin{aligned} \text{Str} \left( \frac{1}{12} - \chi^2 \right) &= (-1) \left[ \frac{1}{12} - \left( \frac{1}{2} \right)^2 \right] + (-1) \left[ \frac{1}{12} - \left( -\frac{1}{2} \right)^2 \right] + (+1) \left[ \frac{1}{12} - 1^2 \right] \\ &+ (+1) \left[ \frac{1}{12} - (-1)^2 \right] = -\frac{18}{12} = -\frac{3}{2}. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Οι διορθώσεις κατωφλίου συμβολίζονται ως  $\mathcal{S}_a^{(g)}$  και δίνονται από έναν παρόμοιο όρο με την παραπάνω σχέση για καταστάσεις μάζας:

$$\mathcal{S}_a^{(g)} = 2 \sum_{R_i} \text{Str}_{M \neq 0} Q_a^2 \left( \frac{1}{12} - \chi^2 \right) \log(\Lambda^2/M^2) \quad (5.37)$$

$$= 2 \sum_i \text{tr}_{R_i} Q_a^2 \text{Str}_{M \neq 0} \left( \frac{1}{12} - \chi^2 \right) \log(\Lambda^2/M^2). \quad (5.38)$$

Στη δεύτερη γραμμή μπορούμε να δούμε ότι ο όρος  $\text{Str}_{M \neq 0} Q_a^2$  έχει βγεί έξω από τη μαλτιπλέτα διότι εξαρτάται μόνο από την αναπαράσταση  $R_i$ . Για ορισμένη κατάσταση ελικότητας υπάρχει μία λογαριθμική εξάρτηση από το τετράγωνο της μάζας  $M^2$  που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή της Λαπλασιανής  $\Delta_{k,R_i}$ . Θεωρώντας ότι η Λαπλασιανή είναι ένας διαγώνιος τελεστής τότε για τις ιδιοτιμές θα ισχύει:

$$\det \Delta = \prod_n \lambda_n \Rightarrow$$

$$\log \det \Delta = \log \prod_n \lambda_n = \sum_n \log \lambda_n = \text{Tr} \log \Delta. \quad (5.39)$$

Άρα στη σχέση (5.38) μπορούμε να αντικαταστήσουμε το ίχνος του  $\log \Lambda^2/M^2$  με

$$-\log \det'(\Delta_{k,R_i}/\Lambda^2). \quad (5.40)$$

όπου ο τόνος στην ορίζουσα σημαίνει ότι δε λαμβάνουμε υπόψιν τα άμαζα σωματίδια. Αυτό που θέλουμε να κάνουμε είναι να αθροίσουμε τις συνεισφορές από την επίδραση του τελεστή της Λαπλασιανής στα πεδία που είναι πλέον μορφές. Κάθε ιδιοδιάγραμμα της μηδενικής μορφής Λαπλασιανής  $\Delta_{0,R_i}$  αντιστοιχεί σε μία διανυσματική μαλτιπλέτα με ελικότητες  $1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$  ενώ η ένα-μορφή Λαπλασιανή  $\Delta_{1,R_i}$  δρα σε μία χειραλική μαλτιπλέτα (ιδιοδιάγραμμα ένα-μορφή) με ελικότητες  $0, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ . Επίσης η δύο-μορφή Λαπλασιανή δίνει αντιχειραλικές μαλτιπλέτες. Επομένως το άθροισμα των συνεισφορών των σωματιδίων  $KK$  από τα διανυσματικά πεδία μπορεί να γραφεί ως

$$\mathcal{S}_a^{(g)} = 2 \sum_i \text{Tr}_{R_i}(Q_a^2) \mathcal{K}_i \quad (5.41)$$

όπου

$$\mathcal{K}_i = \frac{3}{2} \log \det' \frac{\Delta_{0,R_i}}{\Lambda^2} - \frac{1}{2} \log \det' \frac{\Delta_{1,R_i}}{\Lambda^2} - \frac{1}{2} \log \det' \frac{\Delta_{2,R_i}}{\Lambda^2} \quad (5.42)$$

και

$$\text{Tr}_{R_i}(Q_{\{3,2,Y\}}^2) = \begin{cases} \{3, 2, 0\}, & \text{για } (8, 1)_0 + (1, 3)_0 + (1, 1)_0 \\ \{1, \frac{3}{2}, \frac{25}{6}\}, & \text{για } (3, 2)_{-5/6}, (\bar{3}, 2)_{5/6} \end{cases} \quad (5.43)$$

χρησιμοποιώντας τη σχέση κανονικοποίησης  $\text{Tr}(Q_a^2) = \frac{k_a}{2}$ . Άρα οι διορθώσεις που προέρχονται από τα διανυσματικά πεδία  $KK$  μπορούν να γραφούν ως

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_Y^{(g)} &= 2 \frac{25}{6} \mathcal{K}_{5/6} + 2 \frac{25}{6} \mathcal{K}_{-5/6} = \frac{25}{3} (\mathcal{K}_{5/6} + \mathcal{K}_{-5/6}) \\ \mathcal{S}_2^{(g)} &= 4\mathcal{K}_0 + 2 \frac{3}{2} \mathcal{K}_{5/6} + 2 \frac{3}{2} \mathcal{K}_{-5/6} = 4\mathcal{K}_0 + 3 (\mathcal{K}_{5/6} + \mathcal{K}_{-5/6}) \\ \mathcal{S}_3^{(g)} &= 6\mathcal{K}_0 + 2 (\mathcal{K}_{5/6} + \mathcal{K}_{-5/6}) \end{aligned} \quad (5.44)$$

όπου ο δείκτης στην ποσότητα  $\mathcal{K}$  δείχνει την τιμή του υπερφορτίου. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι το φάσμα του τελεστή της Λαπλασιανής  $\Delta_1$  είναι



ισοδύναμο με το άθροισμα των φασμάτων των τελεστών  $\Delta_0$  και  $\Delta_2$ . Θεωρούμε τον τελεστή της Λαπλασιανής που δρα σε μηδένικές μορφές:

$$\Delta\Omega_S^{0,0} = (\bar{\partial}\bar{\partial}^\dagger + \bar{\partial}^\dagger\bar{\partial}) \Omega_S^{0,0} = \bar{\partial}^\dagger\bar{\partial} \Omega_S^{0,0} = C_1\Omega_S^{0,0}. \quad (5.45)$$

Ομοίως υπολογίζουμε τη δράση της Λαπλασιανής σε ένα-μορφές:

$$\begin{aligned} \Delta\Omega_S^{0,1} &= (\bar{\partial}\bar{\partial}^\dagger + \bar{\partial}^\dagger\bar{\partial}) \Omega_S^{0,1} = \bar{\partial}\bar{\partial}^\dagger\Omega_S^{0,1} + \bar{\partial}^\dagger\bar{\partial} \Omega_S^{0,1} \\ &= \bar{\partial}\bar{\partial}^\dagger\bar{\partial} \Omega_S^{0,0} + \bar{\partial}^\dagger\bar{\partial} \Omega_S^{0,1} = \bar{\partial}C_1\Omega_S^{0,0} + \bar{\partial}^\dagger\bar{\partial} \Omega_S^{0,1} = (C_1 + C_2) \Omega_S^{0,1}. \end{aligned}$$

Ομοίως για τη δράση της Λαπλασιανής σε δύο-μορφές έχουμε:

$$\Delta\Omega_S^{0,2} = (\bar{\partial}\bar{\partial}^\dagger + \bar{\partial}^\dagger\bar{\partial}) \Omega_S^{0,2} = C_2 \Omega_S^{0,2}. \quad (5.46)$$

Από τις τρεις προηγούμενες σχέσεις συμπεραίνουμε ότι οι ιδιοτιμές του  $\Delta_1$  είναι ίσες με το άθροισμα των  $\Delta_0$  και  $\Delta_2$ . Χρησιμοποιώντας αυτό το συμπέρασμα η σχέση (5.42) μπορεί να γραφεί ως:

$$\mathcal{K}_i = 2 \log \det' \frac{\Delta_{0,R_i}}{\Lambda^2} - \log \det' \frac{\Delta_{1,R_i}}{\Lambda^2}. \quad (5.47)$$

Η παραπάνω σχέση παρατηρούμε ότι είναι παρόμοια με μία τοπολογικά αναλλοίωτη ποσότητα, τη στρέψη *Ray-Singer*<sup>3</sup>:

$$\mathcal{T}_R = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^2 (-1)^{k+1} \log \det' \frac{\Delta_{k,R_i}}{\Lambda^2}. \quad (5.48)$$

Ο τελεστής Hodge  $\star$  είναι ένας τελεστής ο οποίος δρα πάνω σε  $k$ -μορφές και τις μετατρέπει σε  $(2-k)$  μορφές (στην περίπτωση μας), έτσι ώστε οι τελεστές  $\Delta_{k,R}$  και  $\Delta_{2-k,R^*}$  να έχουν το ίδιο φάσμα. Χρησιμοποιώντας την αντιμεταθετικότητα του με τη Λαπλασιανή έχουμε για παράδειγμα για μία μηδενική-μορφή:

$$\begin{aligned} [\Delta, \star]\Omega_S^{0,0} = 0 &\Rightarrow \Delta \star \Omega_S^{0,0} = \star\Delta\Omega_S^{0,0} \Rightarrow \\ \Delta\Omega_S^{0,2} = \star\lambda^0\Omega_S^{0,0} &\Rightarrow \Delta\Omega_S^{0,2} = \lambda^0 \star \Omega_S^{0,0} \Rightarrow \Delta\Omega_S^{0,2} = \lambda^0\Omega_S^{0,2}. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Από την παραπάνω σχέση μπορούμε να δούμε ότι οι τελεστές  $\Delta_0$  και  $\Delta_2$  έχουν την ίδια ιδιοτιμή. Από τις σχέσεις (5.48) και (5.49) καταλήγουμε σε:

$$\mathcal{T}_R = -\mathcal{T}_{R^*} = \frac{1}{2} \left( 2 \log \det' \frac{\Delta_{0,R_i}}{\Lambda^2} - \log \det' \frac{\Delta_{1,R_i}}{\Lambda^2} \right). \quad (5.50)$$

<sup>3</sup>Η στρέψη *Ray-Singer* ορίζεται σε μία μιγαδική πολλαπλότητα  $M$  πάνω από την οποία υπάρχει μία επίπεδη δέσμη ιών  $E$ . Ο τελεστής της Λαπλασιανής δρα σε  $p$ -μορφές με τιμές στη δέσμη ιών  $E$ .

Από τις σχέσεις (5.47) και (5.50) έχουμε:

$$\mathcal{K}_i = 2\mathcal{T}_R. \quad (5.51)$$

Στην παραπάνω έκφραση για τη στρέψη έχουμε υποθέσει ότι δεν υπάρχουν άμαζα σωματίδια όπως στην περίπτωση για τις μη τετριμμένες αναπαράστασεις  $R_i$ . Ωστόσο στην περίπτωση της τετριμμένης δέσμης υπάρχουν άμαζα σωματίδια και η στρέψη δεν είναι ίση με  $\mathcal{K}_{R_0}$ . Δίνεται ως

$$2\mathcal{T}_O = \mathcal{K}_O - \log(V \Lambda^2) \quad (5.52)$$

όπου ο δείκτης που χρησιμοποιούμε είναι ο καθιερωμένος συμβολισμός  $\mathcal{O}$  για την τετριμμένη αναπαράσταση. Οι εκφράσεις στη σχέση (5.44) μπορούν να γραφούν σε πιο συμπαγή μορφή ως:

$$\left( \mathcal{S}_Y^{(g)}, \mathcal{S}_2^{(g)}, \mathcal{S}_3^{(g)} \right) = \left( \frac{50}{3} \mathcal{K}_{5/6}, 6\mathcal{K}_{5/6} + 4\mathcal{K}_0, 4\mathcal{K}_{5/6} + 6\mathcal{K}_0 \right). \quad (5.53)$$

Η συνεισφορά μόνο των σωματιδίων της μαλτιπλέτας βαθμίδας στο συντελεστή της συνάρτησης βήτα είναι  $b_a^{(g)} = (0, -6, -9)$ . Χρησιμοποιούμε μόνο τον παράγοντα  $-3C(G)$  για τον υπολογισμό αυτών των συνεισφορών. Η σχέση (5.53) γράφεται ως:

$$\mathcal{S}_a^{(g)} = \frac{2}{3} b_a^{(g)} (\mathcal{K}_{5/6} - \mathcal{K}_0) + 10k_a \mathcal{K}_{5/6} = \frac{4}{3} b_a^{(g)} (\mathcal{T}_{5/6} - \mathcal{T}_0) + 20k_a \mathcal{T}_{5/6}. \quad (5.54)$$

Βλέπουμε ότι ο δεύτερος όρος είναι ανάλογος του  $k_a$ , άρα μπορεί να απορροφηθεί στον όρο  $16\pi^2 k_a / g_s^2$  επαναορίζοντας τη σταθερά σύζευξης. Η αρχική εξίσωση (5.33) όπου μόνο η συνεισφορά της μαλτιπλέτας βαθμίδας έχει ληφθεί υπόψιν δίνει

$$\begin{aligned} \frac{16\pi^2}{g_a^2(\mu)} &= \frac{16\pi^2 k_a}{g_s^2} + b_a^{(g)} \log \frac{\Lambda^2}{\mu^2} + \mathcal{S}_a^{(g)} \\ &= \frac{16\pi^2 k_a}{g_s^2} + b_a^{(g)} \log \frac{\exp [4/3 (\mathcal{T}_{5/6} - \mathcal{T}_0)]}{\mu^2 V^{1/2}} \end{aligned} \quad (5.55)$$

όπου η εξάρτηση από το  $\Lambda$ , μετά την κατάλληλη απαλοιφή μεταξύ των άμαζων και  $KK$  σωματιδίων έχει απορροφηθεί στον επαναορισμό της σταθεράς σύζευξης. Μπορούμε να ορίσουμε την ενεργειακή κλίμακα  $M_{GUT}$  της ΜΕΘ ως:

$$M_{GUT}^2 = \frac{\exp [4/3 (\mathcal{T}_{5/6} - \mathcal{T}_0)]}{V^{1/2}}. \quad (5.56)$$

Αν συσχετίσουμε τον παράγοντα του όγκου  $V^{-1/4}$  με τη χαρακτηριστική κλίμακα συμπαγοποίησης  $M_C$ , μπορούμε να γράψουμε:

$$M_{GUT} = e^{2/3(\mathcal{T}_{5/6} - \mathcal{T}_0)} M_C. \quad (5.57)$$

Συνεπώς συμπεραίνουμε ότι ο λόγος  $M_{GUT}/M_C$  των δύο χαρακτηριστικών ενεργειακών κλιμάκων της θεωρίας μας μπορεί να γραφεί ως συνάρτηση μίας τοπολογικά αναλλοίωτης ποσότητας.

### 5.6.3 Η συνεισφορά της χειραλικής ύλης

Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι η συνεισφορά των διορθώσεων κατωφλίου από τα σωματίδια  $KK$  της διανυσματικής μαλτιπλέτας οδηγεί σε μία εξίσωση επανακανονικοποίησης για τις σταθερές σύζευξης, η οποία είναι ανεξάρτητη από την ενέργεια αποκοπής. Στη συνέχεια θα δούμε τί συμβαίνει με τις αντίστοιχες συνεισφορές από το χειραλικό και το *Higgs* τμήμα της θεωρίας. Αρχικά θα μελετήσουμε τη συνεισφορά των άμαζων σωματιδίων.

Τα πεδία ύλης γενικά θα συνεισφέρουν στην εξίσωση (5.55) με έναν όρο της μορφής  $b_a^x \log \frac{\Lambda'^2}{\mu^2}$ , όπου  $b_a^x$  είναι οι συντελεστές των συναρτήσεων βήτα για τις αντίστοιχες τρεις ομάδες συμμετρίας του ΚΠ και  $\Lambda'$  είναι μία ενεργειακή κλίμακα αποκοπής η οποία δεν είναι αναγκαστικά ίδια με την ενεργειακή κλίμακα αποκοπής για τα διανυσματικά πεδία. Αν τα πεδία ύλης της θεωρίας μας απαντώνται σε ολοκληρωμένες  $SU(5)$  μαλτιπλέτες, τότε οι συντελεστές των συναρτήσεων βήτα συνεισφέρουν σε αναλογία με τους συντελεστές  $k_a$ ,  $b_a^x \propto k_a$ . Επομένως αν γράψουμε

$$\log \frac{\Lambda'^2}{\mu^2} = \log \frac{\Lambda'^2}{M_{GUT}^2} \frac{M_{GUT}^2}{\mu^2} = \log \frac{\Lambda'^2}{M_{GUT}^2} + \log \frac{M_{GUT}^2}{\mu^2} \quad (5.58)$$

ο πρώτος όρος μπορεί να απορροφηθεί σε έναν επαναορισμό της σταθεράς σύζευξης:

$$\frac{16\pi^2}{g_{GUT}^2} k_a \equiv \frac{4\pi}{a_{GUT}} k_a = \frac{4\pi}{a_S} k_a + b_a^x \log \frac{\Lambda'^2}{M_{GUT}^2}. \quad (5.59)$$

Όμως τα πεδία *Higgs* δε σχηματίζουν ολοκληρωμένες μαλτιπλέτες. Γνωρίζουμε ότι οι διπλέτες *Higgs* βρίσκονται στις  $5 + \bar{5}$  αναπαραστάσεις της  $SU(5)$  μαζί με τις τριπλέτες χρώματος οι οποίες είναι υπεύθυνες για τη διάσπαση του πρωτονίου. Επομένως για να μην υπάρξει ο κίνδυνος της διάσπασης, πρέπει οι τριπλέτες αυτές να λάβουν μάζα σε μία σχετικά υψηλή ενεργειακή κλίμακα

$M_X \leq M_{GUT}$ . Λαμβάνοντας υπόψιν αυτή τη διαπίστωση μπορούμε να γράψουμε για τους συντελεστές των συναρτήσεων βήτα,  $b_a^x = b_a + b_a^T$ , όπου με  $b_a$  ορίζουμε τις συναρτήσεις βήτα του ΕΥΚΠ και με  $b_a^T$  τις αντίστοιχες για τις τριπλές χρώματος. Μετά την προσθήκη και των πεδίων ύλης η εξίσωση (5.55) γίνεται:

$$\frac{16\pi^2}{g_a^2(\mu)} = k_a \frac{16\pi^2}{g_s^2} + (b_a^{(g)} + b_a) \log \frac{M_{GUT}^2}{\mu^2} + b_a^T \log \frac{M_{GUT}^2}{M_X^2}. \quad (5.60)$$

Στη συνέχεια λαμβάνουμε υπόψιν τις διορθώσεις που προέρχονται από τις καμπύλες ύλης  $\Sigma_{\bar{5}}$  και  $\Sigma_{10}$ . Οι μαλτιπλέτες της  $SU(5)$  αναλύονται ως εξής

$$10 \rightarrow (3, 2)_{\frac{1}{6}} + (\bar{3}, 1)_{-\frac{2}{3}} + (1, 1)_1, \quad \bar{5} \rightarrow (\bar{3}, 1)_{\frac{1}{3}} + (1, 2)_{-\frac{1}{2}}$$

και η αντίστοιχη σχέση της (5.47) γράφεται ως

$$\mathcal{K}_i = -\frac{1}{2} \log \det' \frac{\Delta_{0,R_i}}{\Lambda^2} - \frac{1}{2} \log \det' \frac{\Delta_{1,R_i}}{\Lambda^2} \quad (5.61)$$

όπου τώρα έχουμε μόνο χειραλικά και αντιχειραλικά πεδία. Οι όροι που δίνουν τις διορθώσεις των  $KK$  σωματιδίων γράφονται ως εξής:

$$\mathcal{S}_a^{10} = 2 \sum_i \text{Tr}_{R_i}(Q_a^2) \mathcal{K}_i, \quad i = 1/6, -2/3, 1 \quad (5.62)$$

και

$$\mathcal{S}_a^{\bar{5}} = 2 \sum_j \text{Tr}_{R_j}(Q_a^2) \mathcal{K}_j \quad j = 1/3, -1/3. \quad (5.63)$$

Αναλυτικότερα έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1^{10} &= 2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot 2 \cdot 3\mathcal{K}_{1/6} + 2 \cdot 1^2 \mathcal{K}_1 + 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 3\mathcal{K}_{-2/3} \\ &= \frac{1}{3}\mathcal{K}_{1/6} + 2\mathcal{K}_1 + \frac{8}{3}\mathcal{K}_{-2/3} \\ \mathcal{S}_2^{10} &= 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 3\mathcal{K}_{1/6} = 3\mathcal{K}_{1/6} \\ \mathcal{S}_3^{10} &= 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 2\mathcal{K}_{1/6} + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \mathcal{K}_{-2/3} = 2\mathcal{K}_{1/6} + \mathcal{K}_{-2/3} \\ \mathcal{S}_1^{\bar{5}} &= 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2\mathcal{K}_{-1/2} + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 3\mathcal{K}_{1/3} \\ &= \mathcal{K}_{-1/2} + \frac{2}{3}\mathcal{K}_{1/3} \\ \mathcal{S}_2^{\bar{5}} &= 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \mathcal{K}_{-1/2} = \mathcal{K}_{-1/2} \\ \mathcal{S}_3^{\bar{5}} &= 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \mathcal{K}_{1/3} = \mathcal{K}_{1/3}. \end{aligned} \quad (5.64)$$

Σε πιο συμπαγή μορφή οι παραπάνω σχέσεις γράφονται ως:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_a^5 &= (\mathcal{K}_{1/3}, \mathcal{K}_{-1/2}, \mathcal{K}_{-1/2} + 2/3 \mathcal{K}_{1/3}) \\ \mathcal{S}_a^{10} &= (2\mathcal{K}_{1/6} + \mathcal{K}_{-2/3}, 3\mathcal{K}_{1/6}, 1/3 \mathcal{K}_{1/6} + 2\mathcal{K}_1 + 8/3 \mathcal{K}_{-2/3}).\end{aligned}\quad (5.65)$$

Όπως και στην περίπτωση των διανυσματικών πεδίων μπορούμε να απορροφήσουμε τους όρους που είναι ανάλογοι του  $k_a$ , επαναορίζοντας την αρχική σταθερά σύζευξης. Θεωρώντας κατάλληλες δέσμες ινών τέτοιες διορθώσεις μπορούν να απαλειφθούν. Εισάγοντας κατάλληλους αριθμούς  $p_{a=3,2,Y} = \{\frac{3}{2}, 0, 1\}$  οι διορθώσεις κατωφλίου κατά μήκος των  $\Sigma_5$  μπορούν να γραφούν ως:

$$\mathcal{S}_a^5 = -\frac{2}{3} p_a (\mathcal{K}_{-1/2} - \mathcal{K}_{1/3}) + k_a (\mathcal{K}_{-1/2}). \quad (5.66)$$

Οι συνεισφορές από τις καμπύλες ύλης  $\Sigma_{10}$  για το υπερφορτίο  $U(1)_Y$  γράφονται ως:

$$\mathcal{S}_Y^{10} = \frac{8}{3} (\mathcal{K}_{-2/3} - \mathcal{K}_{1/6}) - 2 (\mathcal{K}_{1/6} - \mathcal{K}_1) + \frac{15}{3} \mathcal{K}_{1/6}.$$

Παρατηρούμε ότι στις δύο παρενθέσεις η διαφορά των υπερφορτίων ικανοποιεί τη σχέση  $q_i - q_j = -\frac{5}{6}$ . Άρα θα μπορούσαμε να αναζητήσουμε μη τετριμμένες δέσμες οι οποίες να παρουσιάζουν περιοδικές ιδιότητες έτσι ώστε:

$$\mathcal{K}_{1/6} - \mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_{-2/3} - \mathcal{K}_{1/6}.$$

Παραδείγματα τέτοιων μη τετριμμένων δεσμών υπάρχουν στη βιβλιογραφία [122]. Συνεχίζοντας γράφουμε για τις διορθώσεις των καμπυλών ύλης  $\Sigma_{10}$

$$\mathcal{S}_a^{10} = \frac{2}{3} p_a (\mathcal{K}_{-2/3} - \mathcal{K}_{1/6}) + k_a (3 \mathcal{K}_{1/6})$$

και απαιτούμε αξιωματικά ότι οι  $\Sigma_{10}$  και  $\Sigma_5$  καμπύλες ύλης χαρακτηρίζονται από την ίδια δομή δεσμών ινών, οπότε οι διορθώσεις των καμπυλών αυτών δίνονται ως:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_a^5 &= -\frac{4}{3} p_a (\mathcal{T}_{-1/2} - \mathcal{T}_{1/3}) + k_a (2\mathcal{T}_{-1/2}) \\ \mathcal{S}_a^{10} &= +\frac{4}{3} p_a (\mathcal{T}_{-2/3} - \mathcal{T}_{1/6}) + k_a (6\mathcal{T}_{1/6}).\end{aligned}\quad (5.67)$$

Παρατηρούμε πάλι ότι η διαφορά των υπερφορτίων ικανοποιεί τη σχέση  $q_i - q_j = -\frac{5}{6}$ , οπότε χρησιμοποιώντας την αξιωματική μας απαίτηση έχουμε  $\mathcal{T}_{-1/2} - \mathcal{T}_{1/3} =$

$\mathcal{T}_{-2/3} - \mathcal{T}_{1/6}$ . Αυτό που επιτύχαμε είναι να αλληλοαναιρέσουμε τους όρους που δεν είναι ανάλογοι του  $k_a$ , ενώ αυτοί που είναι απλώς επαναορίζουν τη σταθερά σύζευξης στην ενεργειακή κλίμακα  $M_{GUT}$ . Τελικά η εξίσωση επανακανονικοποίησης των σταθερών σύζευξης βαθμίδας περιγράφεται από τη σχέση:

$$\frac{16\pi^2}{g_a^2(\mu)} = \left( \frac{16\pi^2}{g_s^2} + 20\mathcal{T}_{5/6} + 6\mathcal{T}_{1/6} + 2\mathcal{T}_{-1/2} \right) k_a + (b_a^{(g)} + b_a) \log \frac{M_{GUT}^2}{\mu^2} + b_a^T \log \frac{M_{GUT}^2}{M_X^2}. \quad (5.68)$$

Συμπεραίνουμε ότι τελικά οι συνεισφορές των  $KK$  σωματιδίων δεν επηρεάζουν την ενεργειακή κλίμακα  $M_{GUT}$ , παρά μόνο την τιμή της σταθεράς σύζευξης στην ενέργεια αυτή, η οποία γράφεται ως:

$$\frac{16\pi^2}{g_{GUT}^2} = \frac{16\pi^2}{g_s^2} + 20\mathcal{T}_{5/6} + 6\mathcal{T}_{1/6} + 2\mathcal{T}_{-1/2}. \quad (5.69)$$

#### 5.6.4 Ελαφρείς βαθμοί ελευθερίας

Στη θεωρία  $F$  όπως προαναφέρθηκε, ένας από τους δυνατούς τρόπους να σπάσουμε τη συμμετρία της  $ME\Theta$  είναι μέσω των ροών. Υπάρχουν δύο είδη ροών οι οποίες συνεισφέρουν στο σωματιδιακό φάσμα:

α) Ροές  $M_{10}, M_5$  οι οποίες σχετίζονται με τις συμμετρίες  $U(1)$  και οι οποίες επηρεάζουν τη χειραλικότητα των πλήρων  $SU(5)$  μαλτιπλετών.

β) Ροές  $N_Y$  οι οποίες σχετίζονται με το υπερφορτίο και είναι αυτές οι οποίες διαχωρίζουν τις  $SU(5)$  μαλτιπλέτες.

Συγκεκριμένα στη μελέτη μας η  $SU(5)$  συμμετρία βαθμίδας σπάει χρησιμοποιώντας μία μη τετριμμένη ροή κατά μήκος του υπερφορτίου με  $Q_Y = \text{diag}\{-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ . Κατά συνέπεια οι  $SU(5)$  μαλτιπλέτες οι οποίες επικάθονται σε συγκεκριμένες καμπύλες όπου η ροή περιορίζεται μη τετριμμένα (δηλαδή η κλάση ομολογίας των καμπυλών ύλης δεν είναι μηδέν), μπορούν να διαχωριστούν. Ειδικότερα στην περίπτωση των πενταπλετών των πεδίων  $Higgs$  αυτός ο μηχανισμός μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εξαλείψουμε τις επικίνδυνες τριπλέτες. Ωστόσο με αυτόν τον τρόπο η θεωρία μας πλέον μπορεί να μην περιέχει ολοκληρωμένες  $SU(5)$  αναπαραστάσεις και οι συνθήκες αναλογίας  $b_a^x \propto k_a$  να μην ισχύουν.

Συμβολίζουμε με  $M_{10}, M_5$  δύο ακέραιους αριθμούς οι οποίοι αναπαριστούν τους αριθμούς των ολοκληρωμένων  $SU(5)$  αναπαραστάσεων 10 και  $\bar{5}$  σε ένα συγκεκριμένο μοντέλο. Το μοντέλο μας βασίζεται στο πλαίσιο της προσέγγισης

του φασματικού καλύμματος όπως αναφέρεται στην παράγραφο 5.6. Όλες οι αλληλεπιδράσεις και οι καμπύλες ύλης προέρχονται από μία ιδιομορφία  $E_8$ . Τα  $SU(5)$  χειραλικά και *Higgs* πεδία προέρχονται από την *adjoint* αναπαράσταση της  $E_8$  συμμετρίας (βλέπε σχέσεις 5.13, 5.15) και επικάθονται σε καμπύλες τις οποίες συμβολίζουμε με  $\Sigma_{10_j}, \Sigma_{\bar{5}_i}$ . Οι ροές  $U(1)$  οι οποίες αναφέρονται στις τέσσερις  $U(1)$  συμμετρίες και τις συμβολίζουμε ως  $F_{U(1)_i}$  ικανοποιούν τη συνθήκη μηδενικού ίχνους  $\sum_i F_{U(1)_i} = 0$ , η οποία συνεπάγεται την επόμενη συνθήκη για τον αριθμό των μαλτιπλετών [107]

$$\sum_i M_5^i + \sum_j M_{10}^j = 0 \quad (5.70)$$

η οποία στην ουσία είναι η σχέση της απάλωσης των ανωμαλιών που δημιουργούν τα φερμιονικά πεδία. Αρχικά θεωρούμε ότι όλα τα χειραλικά πεδία ύλης της 10 αναπαράστασης επικάθονται μόνο σε μία καμπύλη ύλης  $\Sigma_{10}$  και όλα τα χειραλικά πεδία της  $\bar{5}$  αναπαράστασης αντίστοιχα, σε μία μόνο  $\Sigma_{\bar{5}}$  καμπύλη. Τότε από την παραπάνω σχέση έχουμε  $M_{10} = -M_5 = M$ . Στη συνέχεια συμβολίζουμε με  $N_{Y_{\bar{5}}}, N_{Y_{10}}$  τις αντίστοιχες μονάδες  $Y$  ροής οι οποίες διαχωρίζουν τις μαλτιπλέτες  $SU(5)$  ως:

$$\begin{aligned} \Sigma_{\bar{5}} : \begin{cases} n_{(3,1)_{-1/3}} - n_{(\bar{3},1)_{1/3}} = M_5 \\ n_{(1,2)_{1/2}} - n_{(1,2)_{-1/2}} = M_5 + N_{Y_{\bar{5}}} \end{cases} \\ \Sigma_{10} : \begin{cases} n_{(3,2)_{1/6}} - n_{(\bar{3},2)_{-1/6}} = M_{10} \\ n_{(\bar{3},1)_{-2/3}} - n_{(3,1)_{2/3}} = M_{10} - N_{Y_{10}} \\ n_{(1,1)_1} - n_{(1,1)_{-1}} = M_{10} + N_{Y_{10}} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.71)$$

Εδώ πρέπει να παρατηρήσουμε ότι οι σχέσεις αυτές μετρούν τον αριθμό των 5-συνιστωσών μείον αυτών των  $\bar{5}$  και των 10-συνιστωσών μείον των  $\bar{10}$  αντίστοιχα. Γνωρίζουμε ότι οι οικογένειες των σωματιδίων βρίσκονται στην  $\bar{5}$  αναπαράσταση συνεπώς απαιτούμε να ισχύει  $n_{(\bar{3},1)_{1/3}} > n_{(3,1)_{-1/3}}$ , το οποίο συνεπάγεται  $M_5 < 0$ . Παρόμοια επειδή τα εναπομείναντα φερμιονικά πεδία βρίσκονται στη 10 αναπαράσταση πρέπει  $M_{10} > 0$ . Για παράδειγμα αν θεωρήσουμε ακριβώς τρεις οικογένειες φερμιονικών πεδίων πρέπει να απαιτήσουμε:  $M_{10} = -M_5 = 3$  και  $N_{Y_j} = 0$ .

Στην παραπάνω περιγραφή έχουμε να κάνουμε με αρνητικούς αριθμούς οι οποίοι διαχωρίζουν όπως είδαμε τις  $\bar{5}$ ,  $\bar{10}$  συζυγείς αναπαραστάσεις από τις 5 και 10 αναπαραστάσεις. Όμως η συνεισφορά των αναπαραστάσεων αυτών στις

συναρτήσεις βήτα, πρέπει να γραφεί ως θετικός αριθμός. Επομένως για τον αριθμό των τριπλετών θα έχουμε  $|M_5| = M$  καθώς και για τις διπλές των λεπτονίων έχουμε  $|M_5 + N_{Y_5}| = M - N_{Y_5} > 0$ . Για αυτό το απλό παράδειγμα οι συνεισφορές στους συντελεστές των συναρτήσεων βήτα αν υποθέσουμε τη μη ρεαλιστική περίπτωση όπου  $N_{Y_5} = N_{Y_{10}} = N$ , γράφονται ως:

$$b_3 = \frac{M + 2M + M - N}{2} = 2M - \frac{N}{2} \quad (5.72)$$

$$b_2 = \frac{M - N + 3M}{2} = 2M - \frac{N}{2} \quad (5.73)$$

$$b_Y = \frac{5}{3} \left( 2M - \frac{N}{2} \right) \quad (5.74)$$

Βλέπουμε ότι οι συνεισφορές αυτές είναι στην ίδια αναλογία με τους συντελεστές αναλογίας  $1 : 1 : \frac{5}{3} = k_3 : k_2 : k_Y$ . Άρα η αυθαίρετη ενεργειακή κλίμακα αποκοπής  $\Lambda'$  των χειραλικών πεδίων μπορεί να απορροφηθεί ως επαναορισμός της σταθεράς σύζευξης. Στη γενικότερη περίπτωση όμως η κατάσταση είναι πιο σύνθετη. Στην περίπτωση που μελετάμε όπου η  $SU(5)$  συμμετρία προκύπτει από μία  $E_8$  συμμετρία, αρχικά υπάρχουν δέκα  $\Sigma_5$  και πέντε  $\Sigma_{10}$  καμπύλες όπως φαίνεται από την ανάλυση της 248 *adjoint* αναπαράστασης. Η συνεισφορά στις συναρτήσεις βήτα στη γενικότερη περίπτωση δίνεται ως:

$$\begin{aligned} b_3 &= \frac{1}{2} \sum_i |M_5^i| + \sum_j |M_{10}^j| + \frac{1}{2} \sum_j |M_{10}^j - N_{10Y}^j| \\ b_2 &= \frac{1}{2} \sum_i |M_5^i + N_{5Y}^i| + \frac{3}{2} \sum_j |M_{10}^j| \\ b_Y &= \frac{1}{2} \sum_i |M_5^i + N_{5Y}^i| + \frac{1}{3} \sum_i |M_5^i| \\ &\quad + \frac{1}{6} \sum_j |M_{10}^j| + \frac{4}{3} \sum_j |M_{10}^j - N_{10Y}^j| + \sum_j |M_{10}^j + N_{10Y}^j| \end{aligned} \quad (5.75)$$

όπου  $i, j$  είναι δείκτες που δείχνουν τον αριθμό των καμπυλών  $\Sigma_5$  και  $\Sigma_{10}$ . Ο στόχος μας είναι οι συνεισφορές αυτές να υπακούουν τη σχέση  $(1, 1, 5/3)$ . Οπότε αρχικά επιβάλλουμε την ισότητα μεταξύ των συνεισφορών της  $SU(3)$  και



$SU(2)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_i |M_5^i| + \sum_j |M_{10}^j| + \frac{1}{2} \sum_j |M_{10}^j - N_{10Y}^j| &= \frac{1}{2} \sum_i |M_5^i + N_{5Y}^i| \\ &+ \frac{3}{2} \sum_j |M_{10}^j| \equiv \mathcal{B} \end{aligned} \quad (5.76)$$

όπου η παράμετρος  $\mathcal{B}$  εισάγεται για λόγους ευκολίας. Ο παραπάνω ισχυρισμός μπορεί να γραφεί πιο απλά ως εξής:

$$\sum_i |M_5^i| - \sum_i |M_5^i + N_{5Y}^i| = \sum_j |M_{10}^j| - \sum_j |M_{10}^j - N_{10Y}^j|. \quad (5.77)$$

Ξαναγράφουμε τη συνεισφορά από τη  $U(1)_Y$  ως άθροισμα της ποσότητας  $\mathcal{B}$  και τριών άλλων παραγόντων:

$$b_Y = \frac{5}{3} \mathcal{B} - 2 \sum_j |M_{10}^j| + \sum_j |M_{10}^j + N_{10Y}^j| + \sum_j |M_{10}^j - N_{10Y}^j| \quad (5.78)$$

Παρατηρούμε ότι για να ισχύει η απαιτούμενη σχέση αναλογίας πρέπει το άθροισμα των τριών τελευταίων παραγόντων να είναι μηδέν. Τελικά προέκυψαν δύο περιορισμοί που πρέπει να ικανοποιούνται:

$$\begin{aligned} \sum_j |M_{10}^j| - \sum_i |M_5^i| &= \sum_j |M_{10}^j - N_{10Y}^j| - \sum_i |M_5^i + N_{5Y}^i| \\ 2 \sum_j |M_{10}^j| &= \sum_j |M_{10}^j + N_{10Y}^j| + \sum_j |M_{10}^j - N_{10Y}^j| \end{aligned} \quad (5.79)$$

Σε όλες τις προηγούμενες σχέσεις έχουμε υποθέσει ότι υπάρχουν οι τρεις γενιές που απαιτούνται από το ΕΥΚΠ. Στην περίπτωση που θέλουμε να λάβουμε υπόψιν μόνο τη συνεισφορά από το επιπλέον εξωτικό φάσμα πρέπει να αφαιρέσουμε έναν παράγοντα τρία από τις απόλυτες τιμές:  $|M_5^i| \rightarrow |M_5^i| - 3$ ,  $|M_5^i + N_{5Y}^i| \rightarrow |M_5^i + N_{5Y}^i| - 3$ , κ.τ.λ..

## 5.7 Εφαρμογή σε ένα ελάχιστο ρεαλιστικό μοντέλο

Από την ανάλυση που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη παράγραφο για τη συνεισφορά των χειραλικών πεδίων ύλης στις συναρτήσεις βήτα, είναι ξεκάθαρο

Πεδίο	$U(1)_i$	κλάση ομολογίας	$U(1)_Y$ -ροή	$U(1)$ -ροή
$10^{(1)} = 10_3$	$t_{1,2}$	$\eta - 2c_1 - \chi$	$-N$	$M_{10_1}$
$10^{(2)} = 10_1$	$t_3$	$-c_1 + \chi_7$	$N_7$	$M_{10_2}$
$10^{(3)} = 10_2$	$t_4$	$-c_1 + \chi_8$	$N_8$	$M_{10_3}$
$10^{(4)} = 10'_2$	$t_5$	$-c_1 + \chi_9$	$N_9$	$M_{10_4}$
$5^{(0)} = 5_{h_u}$	$-t_1 - t_2$	$-c_1 + \chi$	$N$	$M_{5_{h_u}}$
$5^{(1)} = 5_2$	$-t_{1,2} - t_3$	$\eta - 2c_1 - \chi$	$-N$	$M_{5_1}$
$5^{(2)} = 5_3$	$-t_{1,2} - t_4$	$\eta - 2c_1 - \chi$	$-N$	$M_{5_2}$
$5^{(3)} = 5_x$	$-t_{1,2} - t_5$	$\eta - 2c_1 - \chi$	$-N$	$M_{5_3}$
$5^{(4)} = 5_1$	$-t_3 - t_4$	$-c_1 + \chi - \chi_9$	$N - N_9$	$M_{5_4}$
$5^{(5)} = 5_{h_d}$	$-t_3 - t_5$	$-c_1 + \chi - \chi_8$	$N - N_8$	$M_{5_{h_d}}$
$5^{(6)} = 5_y$	$-t_4 - t_5$	$-c_1 + \chi - \chi_7$	$N - N_7$	$M_{5_6}$

Πίνακας 5.3: Αναπαράσταση των πεδίων κάτω από την ομάδα συμμετρίας  $SU(5) \times U(1)_{t_i}$ , η κλάση ομολογίας τους και περιορισμοί ροής [107] για το μοντέλο [108]. Οι εκθέτες στην πρώτη στήλη αριθμούν τις καμπύλες, ενώ οι δείκτες προσδιορίζουν την οικογένεια και το πεδίο *Higgs*. Οι ροές ικανοποιούν τις σχέσεις  $N = N_7 + N_8 + N_9$  και  $\sum_i M_{10_i} + \sum_j M_{5_j} = 0$  καθώς και  $\chi = \chi_7 + \chi_8 + \chi_9$ .

ότι οι περιορισμοί που εξήχθησαν δεν μπορούν να ικανοποιηθούν για οποιοδήποτε φάσμα σωματιδίων. Ο σκοπός της μελέτης μας είναι να δείξουμε τί συμβαίνει με την ενοποίηση των σταθερών σύζευξης βαθμίδας σε ένα μοντέλο που ικανοποιεί τους παραπάνω περιορισμούς. Το μοντέλο που θα χρησιμοποιήσουμε είναι αυτό των *Leontaris-Ross* [108] το οποίο βασίζεται σε μία γενική κλάση μοντέλων [107] που φαίνεται στον πίνακα 5.3. Στις δύο πρώτες στήλες δίνεται η αναπαράσταση των πεδίων κάτω από τη συμμετρία  $SU(5) \times U(1)_{t_i}$  στην περίπτωση της  $Z_2$  συμμετρίας, η οποία μετατρέπει την καμπύλη  $t_1$  στην καμπύλη  $t_2$ . Στην τρίτη στήλη βλέπουμε τις κλάσεις ομολογίας των καμπυλών. Οι συντελεστές  $\chi_i$  είναι απροσδιόριστοι, ικανοποιούν όμως τη συνθήκη  $\chi = \chi_7 + \chi_8 + \chi_9$ . Συμβολίζουμε με  $\mathcal{F}_Y$  τη  $U(1)_Y$  ροή. Για να αποφύγουμε να δημιουργηθεί μία μάζα *Green-Schwarz* για το αντίστοιχο διανυσματικό μποζόνιο απαιτούμε [100]  $\mathcal{F}_Y \cdot \eta = \mathcal{F}_Y \cdot c_1 = 0$ . Έτσι προκύπτει  $N_i = \mathcal{F}_Y \cdot \chi_i$  και συνεπώς  $N = \mathcal{F}_Y \cdot \chi = N_7 + N_8 + N_9$ , οπότε εύκολα μπορούμε να συμπληρώσουμε την τέταρτη στήλη του πίνακα.

Στη συνέχεια επιλέγουμε τις παραμέτρους ροής να είναι  $M_{10_{1,2,3}} = 1$ ,  $M_{5_{1,2,4}} = -1$  και  $N = 0$  καθώς έχουμε την ελευθερία να διαλέξουμε τους συντελεστές

$N_{7,8,9}$  έτσι ώστε να υπόκεινται μόνο στον περιορισμό  $N = N_7 + N_8 + N_9$ . Η επιλογή αυτή των παραμέτρων έγινε έτσι ώστε να διασφαλίζεται η ύπαρξη τριών 10 και  $\bar{5}$  αναπαραστάσεων οι οποίες είναι απαραίτητες για να προκύψουν οι τρεις γενιές των χειραλικών πεδίων. Έπειτα χρησιμοποιούμε το μηχανισμό της  $U(1)_Y$  ροής για να μπορέσουμε να διαχωρίσουμε τις ολοκληρωμένες μαλτιπλέτες, έτσι ώστε να μπορέσουμε να αποφύγουμε τις επικίνδυνες τριπλέτες χρώματος σε ενεργειακές κλίμακες μικρότερες από τη  $M_{GUT}$ . Επιλέγουμε  $M_{5_{h_u}} = 1$  έτσι ώστε να προκύψει η διπλέτα *Higgs*:

$$\Sigma_{5_{h_u}} : \begin{cases} n_{(3,1)_{-1/3}} - n_{(\bar{3},1)_{1/3}} & = M_{5_{h_u}} = 1 \\ n_{(1,2)_{1/2}} - n_{(1,2)_{-1/2}} & = M_{5_{h_u}} + N = 1. \end{cases} \quad (5.80)$$

Επίσης επιλέγουμε  $M_{5_{h_d}} = 0$  με  $N_8 = 1$  έτσι ώστε να επιτύχουμε το διαχωρισμό της πενταπλέτας του τύπου-κάτω *Higgs*:

$$\Sigma_{5_{h_d}} : \begin{cases} n_{(3,1)_{-1/3}} - n_{(\bar{3},1)_{1/3}} & = M_{5_{h_d}} = 0 \\ n_{(1,2)_{1/2}} - n_{(1,2)_{-1/2}} & = M_{5_{h_d}} + N - N_8 = -1. \end{cases} \quad (5.81)$$

Υποθέτοντας ότι  $M_{10_4} = 0$  και  $M_{5_3} = 0$  από τη συνθήκη μηδενικού ίχνους προκύπτει:

$$\begin{aligned} 1 + 1 + 1 + M_{10_4} + 1 - 3 + 0 + M_{5_3} + M_{5_6} &= 0 \Rightarrow \\ M_{5_6} &= -1. \end{aligned} \quad (5.82)$$

Επιλέγοντας  $N_7 = -1$  τότε η  $\bar{5}^{(6)}$  αποκτά μόνο μία τριπλέτα χρώματος:

$$\Sigma_{\bar{5}^{(6)}} : \begin{cases} n_{(3,1)_{-1/3}} - n_{(\bar{3},1)_{1/3}} & = M_{5_6} = -1 \\ n_{(1,2)_{1/2}} - n_{(1,2)_{-1/2}} & = M_{5_6} + N - N_7 = 0. \end{cases} \quad (5.83)$$

Με αυτό το απλό παράδειγμα καταφέραμε να διαχωρίσουμε την τριπλέτα του τύπου-κάτω *Higgs* από τη διπλέτα, με το κόστος όμως της δημιουργίας μίας νέας αντιτριπλέτας χρώματος σε μία διαφορετική καμπύλη. Τελικά μπορούμε να δώσουμε μάζα  $M_T$  στην τριπλέτα  $h_u$  και στην αντιτριπλέτα  $h_d$  μέσω ενός κατάλληλου όρου στο υπερδυναμικό. Με αυτόν τον τρόπο καταφέρνουμε να διατηρήσουμε τις διπλέτες σε χαμηλή μάζα. Μπορούμε να παρατηρήσουμε από τον πίνακα 5.3 ότι η ύλη στις καμπύλες  $\Sigma_{10(2,3)}$  θα επηρεαστεί από τη ροή  $N_{7,8}$ . Συγκεκριμένα έχουμε:

$$\Sigma_{10(2)} : \begin{cases} n_{(3,2)_{1/6}} - n_{(\bar{3},2)_{-1/6}} & = M_{10_2} = 1 \\ n_{(\bar{3},1)_{-2/3}} - n_{(3,1)_{2/3}} & = M_{10_2} - N_7 = 2 \\ n_{(1,1)_1} - n_{(1,1)_{-1}} & = M_{10_2} + N_7 = 0 \end{cases} \quad (5.84)$$

Χειραλική ύλη										
	$M$	$\mathcal{N}$	$Q$	$u^c$	$e^c$		$M$	$\mathcal{N}$	$d^c$	$L$
$10^{(1)} (F_3)$	1	0	1	1	1	$5^{(4)} (f_1)$	-1	0	-1	-1
$10^{(2)} (F_{2,1})$	1	-1	1	2	0	$5^{(1)} (\bar{f}_2)$	-1	0	-1	-1
$10^{(3)} (F_{1,2})$	1	1	1	0	2	$5^{(2)} (\bar{f}_3)$	-1	0	-1	-1
$10^{(4)} (-)$	0	0	0	0	0	$5^{(3)} (-)$	0	0	0	0

Higgs και Τριπλέτες χρώματος				
	$M$	$\mathcal{N}$	$T$	$h_{u,d}$
$5^{(0)} (h_u, T)$	1	0	1	1
$5^{(5)} (h_d)$	0	-1	0	-1
$5^{(6)} (T)$	-1	1	-1	0

Πίνακας 5.4: Η κατανομή των χειραλικών πεδίων και πεδίων *Higgs* του ελάχιστου μοντέλου κατά μήκος των διαθέσιμων καμπυλών. Οι τρεις οικογένειες  $F_i = 10_i$ ,  $\bar{f}_j = \bar{5}_j$  επικάθονται στις αντίστοιχες καμπύλες. Οι διπλέτες *Higgs*  $h_{u,d}$  και οι τριπλέτες χρώματος  $T, \bar{T}$  προκύπτουν από τρεις διαφορετικές καμπύλες.

$$\Sigma_{10^{(3)}} : \begin{cases} n_{(3,2)_{1/6}} - n_{(\bar{3},2)_{-1/6}} & = M_{10_3} = 1 \\ n_{(\bar{3},1)_{-2/3}} - n_{(3,1)_{2/3}} & = M_{10_3} - N_8 = 0 \\ n_{(1,1)_1} - n_{(1,1)_{-1}} & = M_{10_3} + N_8 = 2. \end{cases} \quad (5.85)$$

Παρατηρούμε ότι μία κατάσταση  $e^c = (1, 1)_1$  έχει μετατοπιστεί από την καμπύλη  $\Sigma_{10^{(2)}}$  στην καμπύλη  $\Sigma_{10^{(3)}}$ . Παρόμοια μετατόπιση έχει γίνει και για την κατάσταση  $u^c = (\bar{3}, 1)_{-2/3}$  της καμπύλης  $\Sigma_{10^{(3)}}$  η οποία εμφανίζεται στην καμπύλη  $\Sigma_{10^{(2)}}$ . Η τελική κατανομή των πεδίων του ΕΥΚΠ κατά μήκος των καμπυλών φαίνεται στον πίνακα 5.4. Για το συγκεκριμένο μοντέλο ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις

$$\begin{aligned} \sum_i |M_5^i| &= 5, & \sum_i |M_5^i + N_{5Y}^i| &= 5 \\ \sum_j |M_{10}^j| &= 3, & \sum_j |M_{10}^j + N_{10Y}^j| &= 3, & \sum_j |M_{10}^j - N_{10Y}^j| &= 3 \end{aligned} \quad (5.86)$$

οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση (5.79) και τη συνθήκη μηδενικού ίχνους.

## 5.8 Η ενεργειακή κλίμακα της Μεγαλοενοποιημένης Θεωρίας και οι ροές κατωφλίου

Είδαμε ότι η συνεισφορά των χειραλικών πεδίων ύλης του συγκεκριμένου μοντέλου  $SU(5)$  που θεωρήσαμε, είναι ακριβώς ανάλογη με τους συντελεστές  $k_a$ . Επίσης υποθέσαμε ότι το σπάσιμο της συμμετρίας γίνεται με τη χρήση ροών κατά μήκος της  $U(1)_Y$  συμμετρίας. Το ενδιαφέρον χαρακτηριστικό της συγκεκριμένης επιλογής των ροών οδηγεί σε ένα ελάχιστο φάσμα το οποίο αποτελείται από το φάσμα του ΕΥΚΠ και ενός επιπλέον ζευγαριού τριπλέτας, αντιτριπλέτας χρώματος κάτω από την ενεργειακή κλίμακα  $M_{GUT}$ . Επιπλέον και αυτό είναι κάτι το πολύ ενδιαφέρον, είναι ότι η παρουσία μόνο αυτών των επιπλέον τριπλετών δε διαταράσσει την ενεργειακή κλίμακα που επιτυγχάνεται η ενοποίηση των σταθερών σύζευξης.

Το συμπέρασμα αυτό είναι ανεξάρτητο από την ενεργειακή κλίμακα στην οποία οι τριπλέτες αυτές αποκτούν μάζα. Από την άλλη πλευρά όμως η τιμή της σταθεράς σύζευξης  $g_{GUT}$  εξαρτάται από τον αριθμό των τριπλετών και την ενεργειακή κλίμακα στην οποία αυτές αποκτούν μάζα. Στη θεωρία  $F$  εξαιτίας του σπασίματος τη συμμετρίας με κατάλληλες ροές, έχουμε μία απόκλιση των τιμών των τριών σταθερών σύζευξης από την κοινή που βρίσκουμε στο ΕΥΚΠ [86, 87]. Η σχέση που πλέον ισχύει για τις τρεις σταθερές σύζευξης στην ενεργειακή κλίμακα  $M_{GUT}$  δίνεται ως εξής:

$$\frac{1}{a_Y(M_{GUT})} = \frac{5}{3} \frac{1}{a_1(M_{GUT})} = \frac{1}{a_2(M_{GUT})} + \frac{2}{3} \frac{1}{a_3(M_{GUT})}. \quad (5.87)$$

Υποθέτουμε ότι σε μία ενεργειακή κλίμακα  $M_X < M_{GUT}$  οι επιπλέον τριπλέτες  $T, \bar{T}$  αποδεσμεύονται και μόνο το φάσμα των πεδίων του ΕΥΚΠ παραμένει για ενεργειακές κλίμακες  $\mu < M_X$ . Οι τιμές των σταθερών σύζευξης σε χαμηλές ενέργειες δίνονται από τη σχέση

$$\frac{1}{a_a(M_Z)} = \frac{1}{a_a(M_{GUT})} + \frac{b_a^x}{2\pi} \ln \frac{M_{GUT}}{M_X} + \frac{b_a}{2\pi} \ln \frac{M_X}{M_Z} \quad (5.88)$$

όπου  $b_a^x, b_a$  είναι οι συντελεστές των συναρτήσεων βήτα για ενέργειες μεγαλύτερες και μικρότερες αντίστοιχα από την ενέργεια  $M_X$ . Συνδυάζοντας τις

σχέσεις (5.87) και (5.88) καταλήγουμε σε:

$$\frac{1}{a_Y(M_Z)} - \frac{1}{a_2(M_Z)} - \frac{2}{3} \frac{1}{a_3(M_Z)} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{M_{GUT}}{M_X} (b_Y^x - b_2^x - \frac{2}{3} b_3^x) + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{M_X}{M_Z} (b_Y - b_2 - \frac{2}{3} b_3). \quad (5.89)$$

Ορίζουμε την ποσότητα

$$\frac{1}{\mathcal{A}} = \frac{1}{a_Y(M_Z)} - \frac{1}{a_2(M_Z)} - \frac{2}{3} \frac{1}{a_3(M_Z)} \quad (5.90)$$

και  $\rho$  το λόγο

$$\rho = \frac{\beta}{\beta_x} \quad (5.91)$$

όπου  $\beta$ ,  $\beta_x$  είναι οι συνδυασμοί των συντελεστών των συναρτήσεων βήτα για ενέργειες μικρότερες και μεγαλύτερες αντίστοιχα από την ενεργειακή κλίμακα  $M_X$

$$\beta_x = b_Y^x - b_2^x - \frac{2}{3} b_3^x \quad (5.92)$$

$$\beta = b_Y - b_2 - \frac{2}{3} b_3 \quad (5.93)$$

οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} \ln \frac{M_{GUT}}{M_X} &= \frac{2\pi}{\beta \mathcal{A}} \rho - \ln \frac{M_X}{M_Z} \rho \Rightarrow \\ M_{GUT} &= e^{\frac{2\pi}{\beta \mathcal{A}} \rho} \left( \frac{M_X}{M_Z} \right)^{-\rho} M_X \Rightarrow \\ M_{GUT} &= e^{\frac{2\pi}{\beta \mathcal{A}} \rho} \left( \frac{M_X}{M_Z} \right)^{1-\rho} M_Z. \end{aligned} \quad (5.94)$$

Οι επιπλέον καταστάσεις πάνω από την ενεργειακή κλίμακα  $M_X$  είναι οι τριπλές χρώματος  $T = (3, 1)_{1/3}$ ,  $\bar{T} = (\bar{3}, 1)_{-1/3}$  και η συνολική τους συνεισφορά στη  $\beta_x$  είναι 0. Άρα  $\beta_x = \beta$  και  $\rho = 1$ , οπότε η  $M_{GUT}$  γίνεται ανεξάρτητη της  $M_X$  και τελικά:

$$M_U = M_{GUT} \equiv e^{\frac{2\pi}{\beta \mathcal{A}}} M_Z \approx 2.15 \times 10^{16} \text{ GeV}.$$

Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι το αποτέλεσμα αυτό μεταβάλλεται ελαφρώς όταν διορθώσεις σε επίπεδο δύο βρόχων ληφθούν υπόψιν [88].

## 5.9 Κυματοσυναρτήσεις αλληλοεπικαλυπτόμενων ολοκληρωμάτων

Στη θεωρία  $F$  οι σταθερές σύζευξης  $Yukawa$  υπολογίζονται από τα ολοκληρώματα τριών αλληλοεπικαλυπτόμενων κυματοσυναρτήσεων των πεδίων τα οποία συμμετέχουν στο τριπλό σημείο τομής. Λόγω του γεγονότος ότι οι κυματοσυναρτήσεις παρουσιάζουν μία γκαουσιανή συμπεριφορά (μειώνονται εκθετικά εκτός των καμπυλών ύλης στις οποίες βρίσκονται τα πεδία), αναμένεται οι σταθερές σύζευξης  $Yukawa$  να εξαρτώνται κυρίως από τις τοπικές λεπτομέρειες του τριπλού σημείου τομής.

Στην κλάση των μοντέλων την οποία μελετούμε οι συμμετρίες  $U(1)$  δρουν ως συμμετρίες οικογένειας. Οι τρίτης γενιάς σταθερές σύζευξης  $Yukawa$  υπολογίζονται ως εξής

$$\lambda_{ij} = M_*^4 \int_S \psi_i \psi_j \phi dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge dz_2 \wedge d\bar{z}_2 \quad (5.95)$$

όπου  $z_1, z_2$  είναι μιγαδικές συντεταγμένες οι οποίες παραμετροποιούν την επιφάνεια  $S$  και  $M_*$  είναι η κλίμακα μάζας που σχετίζεται με την ενεργειακή κλίμακα συμπαγοποίησης  $M_C$ . Όπως έχει αναφερθεί η χειραλική ύλη βρίσκεται εντοπισμένη κατά μήκος των καμπυλών ύλης και συνεπώς η τιμή του ολοκληρώματος εξαρτάται από τις τοπικές λεπτομέρειες της συμπεριφοράς των αλληλοεπικαλυπτόμενων κυματοσυναρτήσεων. Επιπρόσθετα ένας σημαντικός παράγοντας για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων είναι η μη τοπική (καθολική) κανονικοποίηση των κυματοσυναρτήσεων η οποία γενικά εξαρτάται από τη γεωμετρία της συμπαγούς πολλαπλότητας.

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα χρησιμοποιούμε τη γνώση που έχουμε για τις κυματοσυναρτήσεις κοντά στο σημείο τομής. Η λύση των εξισώσεων κίνησης για τα άμαζα σωματίδια μας δίνει κυματοσυναρτήσεις  $\psi$  οι οποίες παρουσιάζουν γκαουσιανή συμπεριφορά και μπορούν να πάρουν τη γενική μορφή [108]

$$\psi \propto e^{-m^2 \frac{|q_1 z_1 + q_2 z_2|^2}{q}} \quad (5.96)$$

όπου  $q = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}$  με  $q_1, q_2$  τα φορτία κάτω από τις  $U(1)_1, U(1)_2$  συμμετρίες (οι γεννήτορες των οποίων βρίσκονται στην *Cartan* υποάλγεβρα της ομάδας συμμετρίας πάνω στην καμπύλη ύλης) και  $m$  είναι μία παράμετρος μάζας η οποία σχετίζεται με την αναμενόμενη τιμή του κενού ενός πεδίου *Higgs*. Μία

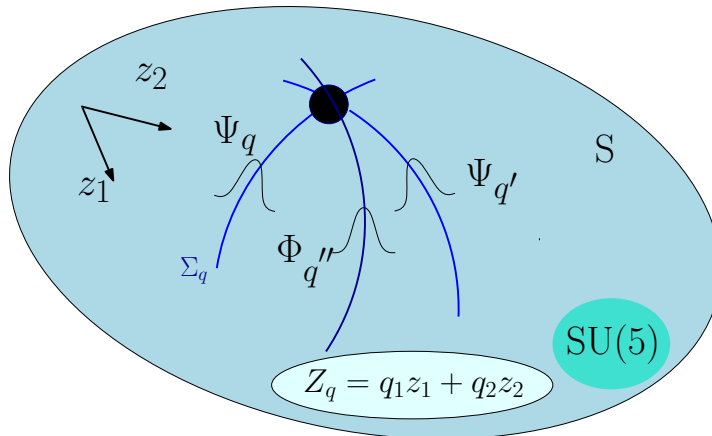
σημαντική ποσότητα η οποία πρέπει να υπολογιστεί είναι η κανονικοποίηση των κυματοσυναρτήσεων μέσω του ολοκληρώματος:

$$\mathcal{C} = M_*^4 \int_S |\psi|^2 dz \wedge d\bar{z} = \pi \frac{M_*^4}{m^2 q} \mathcal{R}^2. \quad (5.97)$$

Ο παράγοντας  $\pi \frac{M_*^4}{m^2 q}$  είναι αποτέλεσμα [108, 116] της γκαουσιανής ολοκλήρωσης κατά μήκος της κάθετης διεύθυνσης στην καμπύλη. Ο παράγοντας  $\mathcal{R}^2$  σχετίζεται με την ολοκλήρωση κατά μήκος της καμπύλης.

Παρατηρούμε ότι τρεις διαφορετικές ενεργειακές κλίμακες ανακύπτουν στη σχέση κανονικοποίησης. Αυτές είναι η κλίμακα συμπαγοποίησης  $M_C \simeq M_*$ , η αναμενόμενη τιμή του κενού  $m$  και η  $\mathcal{R}^{-1}$ . Συνεπώς παρόλο που η λύση των εξισώσεων κίνησης οδηγεί σε μία γκαουσιανή συμπεριφορά όπου η κυματοσυνάρτηση μηδενίζεται εκτός των καμπυλών ύλης, υπάρχει και μη τοπική πληροφορία η οποία περιλαμβάνεται στις προηγούμενες ενεργειακές κλίμακες. Στο μοντέλο μας προσπαθήσαμε να συσχετίσουμε τις τρεις αυτές φαινομενικά μη σχετιζόμενες παραμέτρους, οπότε ο τελικός τύπος της κυματοσυνάρτησης εξαρτάται μόνο από μία αναλλοίωτη ποσότητα η οποία σχετίζεται με τη στρέψη.

Πρέπει να τονίσουμε ότι η ενεργειακή κλίμακα  $m$  σχετίζεται με την αναμενόμενη τιμή του κενού για ένα μιγαδικό βαθμωτό πεδίο  $\phi$  στην *adjoint* αναπαράσταση. Για να γίνει κατανοητός ο ρόλος του στη θεωρία, υποθέτουμε ότι ξεκινάμε από μία οκταδιάστατη θεωρία με μία μεγαλύτερη συμμετρία



Σχήμα 5.6: Γκαουσιανή συμπεριφορά των κυματοσυναρτήσεων των πεδίων στο τριπλό σημείο τομής.



$G_{\Sigma_i} \supset SU(5)$ . Η αύξηση αυτή της συμμετρίας καθορίζει καμπύλες ύλης κατά μήκος των οποίων  $SU(5)$  ύλη εντοπίζεται. Η κλίμακα  $m$  εμφανίζεται όταν εισάγουμε μία αναμενόμενη τιμή του κενού για το βαθμωτό πεδίο κατά μήκος μίας συγκεκριμένης καμπύλης [116]  $z_i = 0$

$$\langle \phi \rangle = m^2 Q_i z_i \quad (5.98)$$

όπου  $Q_i$  είναι ο  $U(1)$  γεννήτορας της υποάλγεβρας *Cartan* της  $G_{\Sigma_i}$ . Επειδή το σπάσιμο της συμμετρίας σχετίζεται με την ελάττωση της οκταδιάστατης θεωρίας δεν προκύπτει κάποια νέα ενεργειακή κλίμακα και η  $m$  μπορεί να σχετιστεί με την κλίμακα συμπαγοποίησης της θεωρίας  $F$ :

$$m \approx M_* \approx M_C. \quad (5.99)$$

Συνοψίζοντας, το μοντέλο μας περιέχει δύο διαφορετικές ενεργειακές κλίμακες τις  $M_C$ ,  $M_{GUT}$ . Ο λόγος των δύο αυτών ενεργειών έχει καθοριστεί από τη σχέση (5.57), συνεπώς μπορούμε να εξάγουμε έναν ανεξάρτητο από την ενέργεια νορμαλισμό για την κυματοσυναρτηση. Άρα η σχέση (5.97) μπορεί να γραφεί ως:

$$C = \frac{\pi}{q} \frac{M_C^2}{M_{GUT}^2}. \quad (5.100)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (5.57) στη σχέση (5.100) βλέπουμε ότι ο παράγοντας κανονικοποίησης γράφεται ως:

$$\frac{1}{\sqrt{C}} = \sqrt{\frac{q}{\pi}} e^{2/3(\mathcal{T}_{5/6} - \mathcal{T}_0)}.$$

Παρατηρούμε ότι η σταθερά κανονικοποίησης είναι ανεξάρτητη από τις δύο ενεργειακές κλίμακες  $M_{GUT}$ ,  $M_C$  της θεωρίας και εξαρτάται μόνο από τη στρέψη.

Στη συνέχεια υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα της μορφής (5.95) για τρεις κυματοσυναρτήσεις με τυχαία φορτία  $q_i, q'_i, q''_i$ ,  $i = 1, 2$  βρίσκοντας για τη σταθερά σύζευξης *Yukawa*

$$\lambda = e^{2(\mathcal{T}_{5/6} - \mathcal{T}_0)} \frac{4\sqrt{\pi}}{q + q' + q''} \frac{(qq'q'')^{3/2}}{(q_1q'_2 - q'_1q_2)^2} \quad (5.101)$$

όπου  $q''_i = -q_i - q'_i$ , που προκύπτει από τη διατήρηση του φορτίου στο τριπλό σημείο καθώς και  $q = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}$  και παρόμοια για  $q', q''$ . Επισημαίνουμε ότι η τιμή της σταθεράς σύζευξης στην ενεργειακή κλίμακα της ενοποίησης στο

νορμαλισμό της κυματοσυνάρτησης προηγούμενων αναλύσεων που έχουν γίνει, έχει πλέον αντικατασταθεί από τον παράγοντα της συστροφής. Οι αναλύσεις προηγούμενων ετών δεν έδιναν τιμές σε συμφωνία με τις πειραματικές για τη μάζα του κορυφαίου κουάρκ, εξαιτίας της μικρής τιμής  $a_{GUT} \sim \frac{1}{25}$ .

Κατόπιν υπολογίζουμε την τιμή της στρέψης σε μία απλή περίπτωση. Όπως στην περίπτωση [82] θεωρούμε μία δέσμη γραμμή  $\mathcal{O}(n, -n)$  σε μία επιφάνεια Hirzebruch  $F_0 = P^1 \times P^1$ , όπου  $n$  είναι ο βαθμός της δέσμης γραμμής. Ο χαρακτήρας Euler πάνω στην  $P^1$  δίνεται ως  $\chi(P^1, \mathcal{O}(n)) = n + 1$ , οπότε ο τύπος του γινομένου για τη στρέψη Ray-Singer γράφεται ως:

$$\mathcal{T}_{\mathcal{O}(n,m)} = (n+1)\mathcal{T}_{\mathcal{O}(m)} + (m+1)\mathcal{T}_{\mathcal{O}(n)}.$$

Επειδή θέλουμε να απαλοίσουμε τις τριπλέτες χρώματος  $(3, 2)_{-5/6} + (\bar{3}, 2)_{5/6}$  πρέπει να υποθέσουμε ότι  $\chi(P^1, \mathcal{O}(n)) = n + 1 = 0$ , συνεπώς για τη δέσμη γραμμή  $\mathcal{L}^{5/6}$  έχουμε  $n = -1$ :

$$\mathcal{T}_{5/6} = \mathcal{T}_{\mathcal{O}(1,-1)} = 2\mathcal{T}_{\mathcal{O}(-1)} + (-1+1)\mathcal{T}_{\mathcal{O}(1)} = 2\mathcal{T}_{\mathcal{O}(-1)}.$$

Για την τετριμμένη δέσμη γραμμή έχουμε  $n = 0$ , οπότε:

$$\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}_{\mathcal{O}(0,0)} = 2\mathcal{T}_{\mathcal{O}(0)}.$$

Γνωρίζουμε ότι ο τελεστής της Λαπλασιανής  $\Delta_{k,R}$  με ιδιοτιμές  $\lambda_n$ , σχετίζεται με τις συναρτήσεις ζήτα [123, 124]

$$\zeta_k(s) = \sum_{\lambda_n} \frac{\gamma_n}{\lambda_n^s}$$

όπου  $\gamma_n$  είναι ο βαθμός εκφυλισμού των ιδιοτιμών  $\lambda_n$ . Η ορίζουσα του τελεστή γράφεται ως:

$$\log(\text{Det}\Delta) = - \left. \frac{d\zeta_k(s)}{ds} \right|_{s=0}.$$

Συνεπώς η συστροφή δίνεται ως  $\mathcal{T}_{\mathcal{O}(k)} = -\frac{1}{2}\zeta'_k(0)$  με

$$\zeta'_k(0) = 4\zeta'_R(-1) - \frac{1}{2}(k+1) + \sum_{l=1}^{k+1} (2l - |k+1|) \log l$$

όπου  $\zeta'_R(-1) \approx -0.165421$ . Τελικά έχουμε:

$$\mathcal{T}_{5/6} - \mathcal{T}_0 = 2(\mathcal{T}_{\mathcal{O}(-1)} - \mathcal{T}_{\mathcal{O}(0)}) = \zeta'_0(0) - \zeta'_{-1}(0) = -\frac{1}{2}.$$

Οπότε για αυτή τη συγκεκριμένη επιλογή της δέσμης ινών, η σταθερά σύζευξης *Yukawa* δίνεται ως:

$$\lambda = \frac{4\sqrt{\pi}/e}{q + q' + q''} \frac{(qq'q'')^{3/2}}{(q_1q_2' - q_1'q_2)^2}. \quad (5.102)$$

### 5.9.1 Οι μάζες του κορυφαίου και χαμηλού κουάρκ

Από τον πίνακα 5.3 συμπεραίνουμε ότι η μάζα για το κορυφαίο κουάρκ μπορεί να προκύψει από τη σταθερά σύζευξης *Yukawa*

$$W_{tree} = \lambda_t 10_3 \cdot 10_3 \cdot 5_{h_u} \quad (5.103)$$

$t_1 \quad t_2 \quad -t_1 - t_2$

όπου η αναλλοιώτητα κάτω από τις  $U(1)$  συμμετρίες  $\sum_i t_i = 0$  ικανοποιείται. Τα φορτία της σχέσης (5.102) για τον κόμβο του κορυφαίου κουάρκ έχουν υπολογιστεί ως [108]:

$$\{q_1, q_2\} = \left\{ \sqrt{\frac{3}{10}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}, \{q_1', q_2'\} = \left\{ \sqrt{\frac{3}{10}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\}. \quad (5.104)$$

Από τη σχέση (5.102) υπολογίζουμε την σταθερά σύζευξης *Yukawa* και βρίσκουμε ότι είναι  $\lambda_t \approx 1.23$ . Αντίστοιχες σχέσεις ισχύουν και για το χαμηλό κουάρκ

$$W_{tree} = \lambda_b 10_3 \cdot 5_3 \cdot 5_{h_d} \quad (5.105)$$

$t_2 \quad t_3 + t_5 \quad t_1 + t_4$

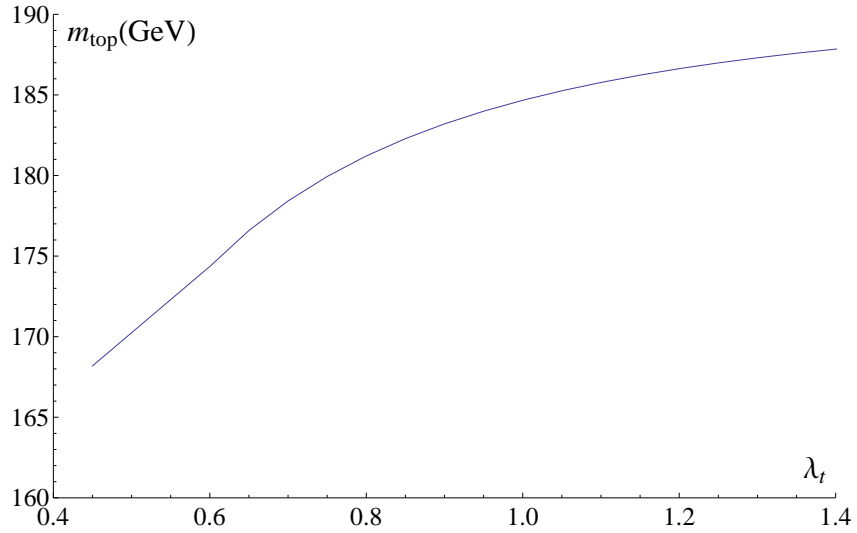
όπου η αντίστοιχη σταθερά σύζευξης *Yukawa* βρίσκουμε ότι είναι  $\lambda_b \approx 1.17$ . Συνεπώς παρατηρούμε ότι βρίσκόμαστε στην περιοχή όπου η  $\tan \beta$  είναι μεγάλη με μία σταθερά σύζευξης *Yukawa*  $\lambda_t \geq 1$ , από την οποία προκύπτει ότι η μάζα του κορυφαίου κουάρκ είναι  $\approx 186$  GeV.

Για να εξάγουμε τις προηγούμενες αριθμητικές τιμές έχουμε κάνει μία απλή επιλογή για μία επίπεδη δέσμη γραμμή, έτσι ώστε να υπολογίσουμε τη στρέψη η οποία εμφανίζεται στους τύπους για τις μάζες του χαμηλού και κορυφαίου κουάρκ μέσω του εκθετικού παράγοντα της σχέσης (5.101). Φυσικά μπορούμε να μελετήσουμε πιο περίπλοκες δέσμες ινών οι οποίες ενδεχομένως

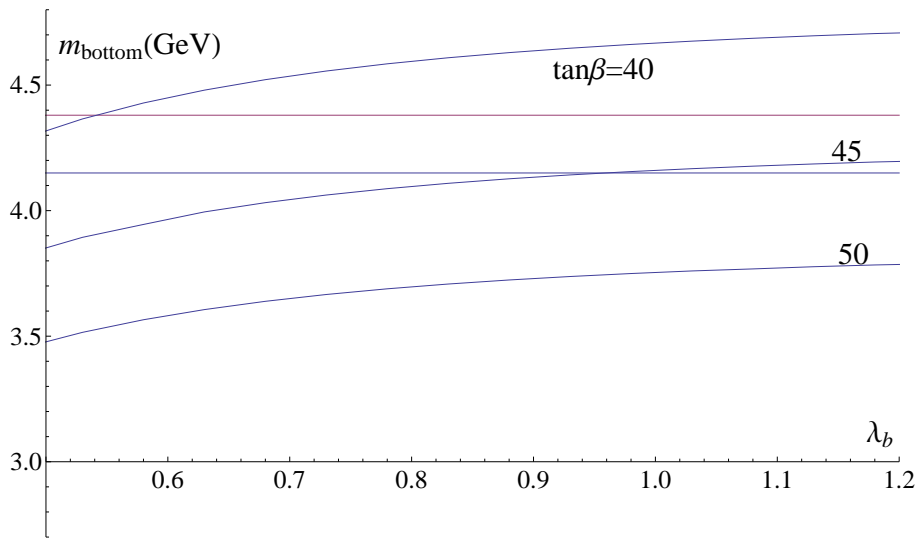
να προβλέψουν τη μάζα του κορυφαίου κουάρκ ακριβέστερα. Επιπλέον σε ένα πλήρως ρεαλιστικό μοντέλο μπορεί να υπεισέρχονται και άλλες παράμετροι που προκύπτουν από διάφορες διορθώσεις και οι οποίες θα μεταβάλλουν τον υπολογισμό των μαζών στις χαμηλές ενέργειες. Το τελικό επίσης αποτέλεσμα θα εξαρτάται και από τη συγκεκριμένη επιλογή που θα κάνουμε για την  $\tan \beta$  η τιμή της οποίας προσδιορίζεται μόνο από τη φαινομενολογία και όχι από κάποια θεωρητική αρχή. Συνεπώς στους υπολογισμούς μας έχουμε την ελευθερία να προσαρμόζουμε την τιμή της έτσι ώστε τα αποτελέσματά μας να είναι συμβατά με τα πειραματικά.

Επιπλέον η αξιοπιστία των αποτελεσμάτων μας ενισχύεται από την πολύ ενδιαφέρουσα ιδιότητα της σταθεράς σύζευξης του κορυφαίου κουάρκ, την επονομαζόμενη συμπεριφορά του καθορισμένου σημείου (*fixed point behaviour*). Αυτό σημαίνει ότι για αρκετά μεγάλες τιμές της σταθεράς σύζευξης  $Yukawa$  στην ενεργειακή κλίμακα  $M_{GUT}$ , η τιμή που βρίσκουμε μέσω των εξισώσεων επανακανονικοποίησης στις χαμηλές ενέργειες είναι σχεδόν σταθερή. Έτσι μελετούμε τη συμπεριφορά του καθορισμένου σημείου χρησιμοποιώντας τον αναλυτικό τύπο του παραρτήματος (Α'.11) που προέκυψε από την επίλυση των συζευγμένων διαφορικών εξισώσεων για το κορυφαίο και χαμηλό κουάρκ.

Στα σχήματα 5.7 και 5.8 έχουμε σχεδιάσει τις μάζες του κορυφαίου και χαμηλού κουάρκ [115] στις χαμηλές ενέργειες ως συνάρτηση των τιμών των αντίστοιχων σταθερών σύζευξης στην ενεργειακή κλίμακα  $M_{GUT}$ . Η ανάλυση αυτή έχει γίνει για μεγάλες τιμές  $\tan \beta = (40 - 55)$ . Στο διάγραμμα για το χαμηλό κουάρκ βλέπουμε ξεκάθαρα τις τιμές  $\tan \beta = (40, 45, 50)$ . Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι στο διάγραμμα για τη μάζα του κορυφαίου κουάρκ όλες οι καμπύλες που αντιστοιχούν σε διάφορες τιμές της  $\tan \beta$  έχουν συμπτυχθεί σε μία, διότι η μάζα του κορυφαίου κουάρκ εξαρτάται από το  $\sin(\beta) \lesssim \mathcal{O}(1)$ .



Σχήμα 5.7: Σχεδίαση της μάζας του κορυφαίου κουάρκ ως συνάρτηση της τιμής της σταθεράς σύζευξης Yukawa  $\lambda_t(M_{GUT})$  στην ενεργειακή κλίμακα  $M_{GUT}$ .



Σχήμα 5.8: Σχεδίαση της μάζας του χαμηλού κουάρκ ως συνάρτηση της τιμής της σταθεράς σύζευξης Yukawa  $\lambda_b(M_{GUT})$  στην ενεργειακή κλίμακα  $M_{GUT}$ , για τρεις τιμές της  $\tan \beta = (40, 45, 50)$ . Οι οριζόντιες γραμμές προσδιορίζουν τις πειραματικές αβεβαιότητες της μάζας του χαμηλού κουάρκ.

# Επίλογος

Οι εξισώσεις επανακανονικοποίησης αποτελούν ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο με το οποίο μπορούμε να διερευνήσουμε την περιοχή ενεργειών η οποία δεν είναι προσβάσιμη από τα σημερινά πειράματα. Μπορούμε να εξάγουμε συμπεράσματα για την ύπαρξη νέων θεωριών από τις οποίες να προκύπτει το ΚΠ, καθώς και να ελέγξουμε την εγκυρότητά τους συγκρίνοντας τις τιμές των παραμέτρων που υπολογίζονται σε χαμηλές ενέργειες, με τις πειραματικά μετρούμενες τιμές. Μία εξίσου σπουδαία εφαρμογή των εξισώσεων επανακανονικοποίησης αποτελεί η μείωση των αρκετών ελεύθερων παραμέτρων του ΚΠ, μέσω του προγράμματος ελάττωσης του αριθμού των σταθερών σύζευξης.

Η μέθοδος της ελάττωσης του αριθμού των σταθερών σύζευξης έχει ήδη εφαρμοστεί στο ΚΠ. Οι προβλέψεις όμως για τη μάζα του σωματιδίου *Higgs* (49 και 61 GeV) καθώς και του κορυφαίου κουάρκ (81 GeV) δεν ήταν επιτυχείς. Στην παρούσα διατριβή έχοντας ως κίνητρο την αριθμητική και ημιαναλυτική μελέτη του λόγου της σταθεράς ιδιοσύζευξης του *Higgs* προς τη σταθερά σύζευξης βαθμίδας της ομάδας  $U(1)$ , εφαρμόσαμε την προαναφερθείσα μέθοδο και συμπεράναμε ότι μπορούμε να εκφράσουμε τη σταθερά σύζευξης  $\lambda$  ως συνάρτηση της σταθεράς σύζευξης  $\alpha_1$  για μία περιοχή υψηλών ενεργειών. Η μάζα όμως του *Higgs* που εξήχθησε μέσω αυτής της διαδικασίας απορρίφθηκε τελικά από το πείραμα. Στη συνέχεια εφαρμόσαμε την ίδια μέθοδο στο ΕΥΚΠ, εκφράζοντας τη σταθερά σύζευξης *Yukawa* του κορυφαίου κουάρκ ως συνάρτηση της σταθεράς σύζευξης *Yukawa* του χαμηλού κουάρκ. Με τον τρόπο αυτό προβλέψαμε ένα μικρό φάσμα τιμών για την παράμετρο  $\tan \beta$  και κατά συνέπεια τη μάζα του ελαφριού υπερσυμμετρικού *Higgs* ( $\simeq 123$  GeV) η οποία βρίσκεται πολύ κοντά στην πειραματική. Ακολούθως εξετάσαμε το σενάριο των *MPP* σε μία επέκταση του ΕΥΚΠ σε επιπλέον διαστάσεις. Θεωρήσαμε ότι όλα τα πεδία του ΕΥΚΠ διαδίδονται στις επιπλέον διαστάσεις.

Παρατηρήσαμε ότι για συνοριακές τιμές των σταθερών σύζευξης κοντά στη μη διαταρακτική περιοχή ( $\simeq 1$ ), οι τιμές τους σε χαμηλές ενέργειες συμφωνούν με τις πειραματικές με πολύ μεγάλη ακρίβεια. Όμως όταν οι τιμές των σταθερών σύζευξης είναι μικρότερες ή μεγαλύτερες από τη μονάδα, το σενάριο μοιάζει να αποτυγχάνει. Κατά συνέπεια η νέα διαπίστωση που προέκυψε από τη μελέτη του σεναρίου των  $MPP$  είναι ότι επιτύχαμε μη διαταρακτική ενοποίηση των σταθερών σύζευξης βαθμίδας σε μία ενεργειακή κλίμακα ( $\simeq 1,5 \cdot 10^{10}$  GeV) αρκετά μικρότερη από την ενεργειακή κλίμακα ενοποίησης του ΕΥΚΠ. Παράλληλα εξετάσαμε τις σταθερές σύζευξης βαθμίδας του υπερσυμμετρικού μοντέλου  $SU(3)^3$  σε επιπλέον διαστάσεις, το οποίο σπάει στο ΕΥΚΠ. Οι σταθερές σύζευξης πάνω από μία υψηλή ενεργειακή κλίμακα, λαμβάνοντας υπόψη τη συνεισφορά των  $KK$  σωματιδίων, συμπεριφέρονται ως μία, λαμβάνοντας πολύ μεγάλες τιμές. Η διαπίστωση αυτή ενδεχομένως να αποτελεί ένδειξη για την ύπαρξη κάποιας ισχυρά συζευγμένης θεωρίας της οποίας η συμμετρία σπάει στη συμμετρία  $SU(3)^3$ .

Επιπρόσθετα μελετήσαμε μία ΜΕΘ με συμμετρία βαθμίδας  $SU(5)$  στο πλαίσιο της θεωρίας  $F$ . Τα μοντέλα αυτά εν γένει θεμελιώνονται πάνω σε μία 7-βράνη η οποία περιτυλίγεται γύρω από μία μία μιγαδική επιφάνεια  $S$ . Τα πεδία ύλης επικάθονται στις επονομαζόμενες καμπύλες ύλης, οι οποίες δημιουργούνται από την τομή της βράνης που υποστηρίζει τη συμμετρία  $SU(5)$ , με άλλες βράνες. Στις καμπύλες αυτές η συμμετρία  $SU(5)$  αυξάνεται και τα πεδία φορτίζονται κάτω από  $U(1)$  συμμετρίες. Στο τριπλό σημείο τομής τέτοιων καμπυλών ύλης παράγονται οι σταθερές σύζευξης  $Yukawa$ , οι οποίες υπολογίζονται ως ένα ολοκλήρωμα τριών αλληλοεπικαλυπτόμενων κυματοσυναρτήσεων των πεδίων που συμμετέχουν στο τριπλό σημείο τομής. Συγκεκριμένα εξετάσαμε τη συμπεριφορά των σταθερών σύζευξης βαθμίδας, λαμβάνοντας υπόψη τη συνεισφορά των σωματιδίων  $KK$  στις εξισώσεις επανακανονικοποίησης.

Οι συνεισφορές των σωματιδίων αυτών εκφράστηκαν μέσω μίας τοπολογικά αναλλοίωτης ποσότητας, της στρέψης  $Ray-Singer$ . Ακολούθως συσχετίσαμε την ενεργειακή κλίμακα ενοποίησης και την ενεργειακή κλίμακα συμπαγοποίησης με την προαναφερθείσα τοπολογικά αναλλοίωτη ποσότητα. Εν συνεχεία υπολογίσαμε τις σταθερές σύζευξης  $Yukawa$  για το κορυφαίο και χαμηλό κουάρκ, οι οποίες εξαρτώνται από τη στρέψη  $Ray-Singer$  καθώς και από φορτία κάτω από  $U(1)$  συμμετρίες. Υπολογίσαμε τη στρέψη σε μία απλή περίπτωση επίπεδης δέσμης γραμμής και μέσω των εξισώσεων επανακανονικοποίησης υπολογίσαμε τη μάζα του κορυφαίου κουάρκ η οποία βρίσκεται εκτός των πειραματικών ορίων ( $\simeq 186$  GeV). Η μάζα του χαμηλού κουάρκ αντίστοιχα βρέθηκε για την τιμή  $\tan \beta = 45$ , εντός των πειραματικών ορίων.

# Παράρτημα Α΄

## Παράρτημα

### Α΄.1 Αναλυτική λύση των εξισώσεων επανακανονικοποίησης για τις σταθερές σύζευξης *Yukawa*

Στο παράρτημα αυτό επεκτείνουμε την αναλυτική λύση [125] του συστήματος των εξισώσεων επανακανονικοποίησης ενός βρόχου για τις σταθερές σύζευξης *Yukawa* των κορυφαίου και χαμηλού κουάρκ  $\lambda_t$  και  $\lambda_b$ , αντίστοιχα. Ορίζοντας τις ποσότητες  $\alpha_t = \lambda_t^2/(4\pi)$  και  $\alpha_b = \lambda_b^2/(4\pi)$  οι εξισώσεις επανακανονικοποίησης γράφονται ως

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha_t}{dt} &= \frac{1}{2\pi} (6\alpha_t + \alpha_b - G_Q) \alpha_t \\ \frac{d\alpha_b}{dt} &= \frac{1}{2\pi} (\alpha_t + 6\alpha_b - G_D) \alpha_b\end{aligned}\tag{A.1}$$

με  $G_I = c_1^I \alpha_1 + c_2^I \alpha_2 + c_3^I \alpha_3$ , όπου  $I = Q, D$  και οι σταθερές  $c$  λαμβάνοντας υπόψιν την  $SU(5)$  κανονικοποίηση, δίνονται ως:

$$\{c_3^Q, c_2^Q, c_1^Q\} = \left\{ \frac{16}{3}, 3, \frac{13}{15} \right\}, \quad \{c_3^D, c_2^D, c_1^D\} = \left\{ \frac{16}{3}, 3, \frac{7}{15} \right\}.$$

Αγνοώντας τη μικρή διαφορά στον παράγοντα  $U(1)$  των σταθερών  $c$  κάνουμε τους μετασχηματισμούς

$$\alpha_t = \gamma_Q^2 x, \quad \alpha_b = \gamma_D^2 y \sim \gamma_Q^2 y\tag{A.2}$$



όπου:

$$\gamma_Q^2 = \exp \left[ -\frac{1}{2\pi} \int_{t_0}^t G_Q(t') dt' \right].$$

Το σύστημα των εξισώσεων γράφεται ως:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\pi} (6x + y) \gamma_Q^2 x \quad (\text{A'.3})$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2\pi} (x + 6y) \gamma_Q^2 y. \quad (\text{A'.4})$$

Στη συνέχεια κάνοντας απλούς υπολογισμούς έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{d \ln(x-y)}{dt} &= \frac{\gamma_Q^2}{2\pi} 6(x+y) \\ \frac{d \ln(xy)}{dt} &= \frac{\gamma_Q^2}{2\pi} 7(x+y). \end{aligned} \quad (\text{A'.5})$$

Συνεπώς

$$7 \frac{d \ln(x-y)}{dt} = 6 \frac{d \ln(xy)}{dt}, \quad \left( \frac{xy}{x_0 y_0} \right)^6 = \left( \frac{x-y}{x_0 - y_0} \right)^7 \quad (\text{A'.6})$$

όπου  $x_0$  και  $y_0$  είναι οι συνοριακές συνθήκες στην ενεργειακή κλίμακα  $t_0$ . Παρατηρούμε ότι επειδή  $\gamma_Q^2(t_0) = 1 \Rightarrow x_0 = \alpha_t(t_0)$  και  $y_0 = \alpha_b(t_0)$ . Χρησιμοποιώντας τη σχέση (A'.6) γράφουμε:

$$(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy = (x-y)^2 + 4 \frac{x_0 y_0}{(x_0 - y_0)^{7/6}} (x-y)^{7/6}.$$

Η πρώτη από τις εξισώσεις (A'.5) γράφεται ως:

$$\frac{d(x-y)}{dt} = \frac{\gamma_Q^2}{2\pi} 6(x-y) \sqrt{(x-y)^2 + 4 \frac{x_0 y_0}{(x_0 - y_0)^{7/6}} (x-y)^{7/6}}.$$

Ορίζοντας επιπλέον ένα νέο μετασχηματισμό

$$u = k_0 / \omega^{5/6} = k_0 / (x-y)^{5/6}, \quad k_0 = 4 \frac{x_0 y_0}{(x_0 - y_0)^{7/6}} \quad (\text{A'.7})$$

έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \left(-\frac{5}{6}\right) \frac{k_0}{\omega^{11/6}} \frac{d\omega}{dt} = -\frac{5}{2\pi} \frac{k_0}{\omega^{11/6}} \gamma_Q^2 \omega \sqrt{\omega^2 + k_0 \omega^{7/6}} \\ &= -\frac{5}{2\pi} \gamma_Q^2 k_0 \frac{u}{k_0} \sqrt{\left(\frac{k_0}{u}\right)^{12/5} + k_0 \left(\frac{k_0}{u}\right)^{7/5}} \\ &= -\frac{5}{2\pi} \gamma_Q^2 k_0^{6/5} u \frac{\sqrt{1+u}}{u^{6/5}} \\ &= -\frac{5}{2\pi} \gamma_Q^2 k_0^{6/5} \frac{\sqrt{1+u}}{u^{1/5}}. \end{aligned}$$

Οπότε καταλήγουμε σε:

$$\frac{u^{1/5}}{\sqrt{1+u}} du = -\frac{5}{2\pi} k_0^{6/5} \gamma_Q^2 dt. \quad (A'.8)$$

Ολοκληρώνοντας το αριστερό μέλος παίρνουμε

$$\int \frac{u^{1/5}}{\sqrt{1+u}} du = \frac{10}{7} u^{1/5} \left[ \sqrt{1+u} - {}_2\mathcal{F}_1 \left( \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \frac{6}{5}, -u \right) \right]$$

όπου  ${}_2\mathcal{F}_1$  είναι η υπεργεωμετρική συνάρτηση. Στη συνέχεια θα εργαστούμε στο δεξί μέλος της σχέσης (A'.8):

$$\gamma_Q^2 = \exp \left[ -\frac{1}{2\pi} \int_{t_0}^t G_Q(t') dt' \right] = \exp \left[ -\frac{1}{2\pi} \int_{t_0}^t \left( c_1^Q \alpha_1(t') + c_2^Q \alpha_2(t') + c_3^Q \alpha_3(t') \right) dt' \right].$$

Επειδή ισχύει ότι

$$\int_{t_0}^t \alpha_i(t') dt' = \int_{t_0}^t \frac{\alpha_{i0} dt'}{1 - \frac{b_i \alpha_{i0}}{2\pi} (t' - t_0)} = -\frac{2\pi}{b_i} \ln \left[ 1 - \frac{b_i \alpha_{i0}}{2\pi} (t - t_0) \right]$$

έχουμε:

$$\gamma_Q^2 = \prod_{i=1}^3 \left[ 1 - \frac{b_i \alpha_{i0}}{2\pi} (t - t_0) \right]^{c_i^Q / b_i}.$$

Ορίζουμε για ευκολία τις νέες σταθερές (αγνοούμε από εδώ και έπειτα τον εκθέτη  $Q$ ):

$$b_i \alpha_{i0} / (2\pi) = B_i, \quad c_i / b_i = e_i.$$

Ολοκληρώνοντας τη συνάρτηση  $\gamma_Q^2$  παίρνουμε

$$\int \gamma_Q^2 dt = \frac{1}{B_1(1+e_1)} [-1 + B_1(t-t_0)] [1 - B_1(t-t_0)]^{e_1} [1 - B_2(t-t_0)]^{e_2} \times \\ \left[ \frac{B_1}{B_1 - B_2} (1 - B_2(t-t_0)) \right]^{-e_2} [1 - B_3(t-t_0)]^{e_3} \left[ \frac{B_1}{B_1 - B_3} (1 - B_3(t-t_0)) \right]^{-e_3} \times \\ {}_A\mathcal{F} \left( 1 + e_1, -e_2, -e_3, 2 + e_1, \frac{B_2(-1 + B_1(t-t_0))}{B_1 - B_2}, \frac{B_3(-1 + B_1(t-t_0))}{B_1 - B_3} \right)$$

όπου  ${}_A\mathcal{F}$  είναι η υπεργεωμετρική συνάρτηση *Appell* δύο μεταβλητών [126]. Απλοποιώντας την παραπάνω σχέση και χρησιμοποιώντας  $1 - B_1(t-t_0) = \alpha_{10}/\alpha_1(t)$  καταλήγουμε σε:

$$\int \gamma_Q^2 dt = \frac{1}{B_1(1+e_1)} \left[ - \left( \frac{\alpha_{10}}{\alpha_1(t)} \right)^{e_1+1} \right] \left[ \frac{B_1 - B_2}{B_1} \right]^{e_2} \left[ \frac{B_1 - B_3}{B_1} \right]^{e_3} \times \\ {}_A\mathcal{F} \left( 1 + e_1, -e_2, -e_3, 2 + e_1, \frac{B_2}{B_2 - B_1} \left( \frac{\alpha_{10}}{\alpha_1(t)} \right), \frac{B_3}{B_3 - B_1} \left( \frac{\alpha_{10}}{\alpha_1(t)} \right) \right).$$

Συνεπώς η διαφορική εξίσωση (Α'.8) δίνει

$$\frac{10}{7} u^{1/5} \left[ \sqrt{1+u} - {}_2\mathcal{F}_1 \left( \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \frac{6}{5}, -u \right) \right] = \\ - \frac{5}{2\pi} k_0^{6/5} \frac{1}{B_1(1+e_1)} \left[ - \left( \frac{\alpha_{10}}{\alpha_1(t)} \right)^{e_1+1} \right] \left[ \frac{B_1 - B_2}{B_1} \right]^{e_2} \left[ \frac{B_1 - B_3}{B_1} \right]^{e_3} \times \\ {}_A\mathcal{F} \left( 1 + e_1, -e_2, -e_3, 2 + e_1, \frac{B_2}{B_2 - B_1} \left( \frac{\alpha_{10}}{\alpha_1(t)} \right), \frac{B_3}{B_3 - B_1} \left( \frac{\alpha_{10}}{\alpha_1(t)} \right) \right) + \text{σταθερά}$$

και απλοποιώντας οδηγούμαστε σε:

$$u^{1/5} \left[ \sqrt{1+u} - {}_2\mathcal{F}_1 \left( \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \frac{6}{5}, -u \right) \right] = \\ \frac{7}{4\pi} k_0^{6/5} \frac{1}{B_1(1+e_1)} \left[ \left( \frac{\alpha_{10}}{\alpha_1(t)} \right)^{e_1+1} \right] \left[ \frac{B_1 - B_2}{B_1} \right]^{e_2} \left[ \frac{B_1 - B_3}{B_1} \right]^{e_3} \times \\ {}_A\mathcal{F} \left( 1 + e_1, -e_2, -e_3, 2 + e_1, \frac{B_2}{B_2 - B_1} \left( \frac{\alpha_{10}}{\alpha_1(t)} \right), \frac{B_3}{B_3 - B_1} \left( \frac{\alpha_{10}}{\alpha_1(t)} \right) \right) + \text{σταθερά.} \\ \text{(Α'.9)}$$

Συνεχίζοντας, μελετούμε τον τρόπο που τα  $x$  και  $y$  σχετίζονται με το  $\omega$ , το οποίο από τη σχέση (Α'.7) δίνεται ως συνάρτηση του  $u$ . Συνεπώς

$$x - y = x + (-y) = \omega, \quad x(-y) = -x_0 y_0 \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^{7/6}$$

Καταλήγουμε (χρησιμοποιώντας τη σχέση (Α'.7) για τη δεύτερη ισότητα):

$$\begin{aligned} x &= \frac{\omega}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + k_0 \omega^{-5/6}} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{k_0}{u} \right)^{6/5} \left( 1 + \sqrt{1 + u} \right) \\ y &= \frac{\omega}{2} \left( -1 + \sqrt{1 + k_0 \omega^{-5/6}} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{k_0}{u} \right)^{6/5} \left( -1 + \sqrt{1 + u} \right). \end{aligned} \quad (\text{Α'.10})$$

Τελικά από τη σχέση (Α'.2) καταλήγουμε στις εκφράσεις:

$$\begin{aligned} \alpha_t &= \gamma_Q^2 x = \prod_{i=1}^3 \left[ 1 - \frac{b_i \alpha_{i0}}{2\pi} (t - t_0) \right]^{c_i/b_i} \frac{1}{2} \left( \frac{k_0}{u} \right)^{6/5} \left( 1 + \sqrt{1 + u} \right) \\ \alpha_b &= \gamma_D^2 y = \prod_{i=1}^3 \left[ 1 - \frac{b_i \alpha_{i0}}{2\pi} (t - t_0) \right]^{c_i/b_i} \frac{1}{2} \left( \frac{k_0}{u} \right)^{6/5} \left( -1 + \sqrt{1 + u} \right). \end{aligned} \quad (\text{Α'.11})$$

## Α'.2 Ενοποίηση των σταθερών σύζευξης βαθμίδας

Οι σταθερές σύζευξης βαθμίδας του ΕΥΚΠ αγνοώντας κάθε είδους διόρθωση, μπορούν να γραφούν ως:

$$a_i^{-1}(\Lambda) = a_i^{-1}(Mz) - \frac{b_i^{\text{ΕΥΚΠ}}}{2\pi} \ln \frac{\Lambda}{Mz}. \quad (\text{Α'.12})$$

Υποθέτοντας ενοποίηση των σταθερών σύζευξης παίρνουμε την παρακάτω σχέση:

$$\begin{aligned} a_i^{-1}(Mz) - \frac{b_i^{\text{ΕΥΚΠ}}}{2\pi} \ln \frac{M_{GUT}}{Mz} &= a_j^{-1}(Mz) - \frac{b_j^{\text{ΕΥΚΠ}}}{2\pi} \ln \frac{M_{GUT}}{Mz} \implies \\ \ln \frac{M_{GUT}}{Mz} &= 2\pi \frac{a_i^{-1}(Mz) - a_j^{-1}(Mz)}{b_i^{\text{ΕΥΚΠ}} - b_j^{\text{ΕΥΚΠ}}}. \end{aligned} \quad (\text{Α'.13})$$

Για να ισχύει η ενοποίηση πρέπει το δεξιό μέλος της παραπάνω εξίσωσης να είναι ανεξάρτητο από τους δείκτες  $i, j$ . Για  $i, j = 1, 2, 3$  έχουμε τις επόμενες σχέσεις:

$$\frac{a_1^{-1}(Mz) - a_2^{-1}(Mz)}{b_1^{\text{EYKΠ}} - b_2^{\text{EYKΠ}}} = 5.24353$$

$$\frac{a_1^{-1}(Mz) - a_3^{-1}(Mz)}{b_1^{\text{EYKΠ}} - b_3^{\text{EYKΠ}}} = 5.26333$$

$$\frac{a_2^{-1}(Mz) - a_3^{-1}(Mz)}{b_2^{\text{EYKΠ}} - b_3^{\text{EYKΠ}}} = 5.29105.$$

Πράγματι μπορούμε να δούμε ότι σε πολύ καλή προσέγγιση επιτυγχάνεται ενοποίηση των σταθερών σύζευξης. Συνεχίζοντας θεωρούμε την ίδια σχέση λαμβάνοντας υπόψιν τη διόρθωση από την ενεργειακή κλίμακα της υπερσυμμετρίας. Ακολουθώντας τα ίδια βήματα έχουμε:

$$\ln \frac{M'_{GUT}}{M_{SUSY}} = 2\pi \frac{a_i^{-1}(Mz) - a_j^{-1}(Mz)}{b_i^{\text{EYKΠ}} - b_j^{\text{EYKΠ}}} - \ln \frac{M_{SUSY}}{Mz} \frac{b_i^{\text{KΠ}} - b_j^{\text{KΠ}}}{b_i^{\text{EYKΠ}} - b_j^{\text{EYKΠ}}}. \quad (\text{A'.14})$$

Κατά συνέπεια η ενοποίηση θα συνεχίζει να ισχύει εάν το δεξιό μέλος της παραπάνω εξίσωσης παραμένει ανεξάρτητο από τα  $i, j$ :

$$\frac{b_1^{\text{KΠ}} - b_2^{\text{KΠ}}}{b_1^{\text{EYKΠ}} - b_2^{\text{EYKΠ}}} = 1.29762$$

$$\frac{b_1^{\text{KΠ}} - b_3^{\text{KΠ}}}{b_1^{\text{EYKΠ}} - b_3^{\text{EYKΠ}}} = 1.15625$$

$$\frac{b_2^{\text{KΠ}} - b_3^{\text{KΠ}}}{b_2^{\text{EYKΠ}} - b_3^{\text{EYKΠ}}} = 0.95833.$$

Παρατηρούμε ότι πάλι επιτυγχάνεται ενοποίηση των σταθερών σύζευξης αλλά είναι ασθενέστερη σε σχέση με την πρώτη περίπτωση στην οποία δεν έχουμε λάβει υπόψιν τις διορθώσεις από την ενεργειακή κλίμακα της υπερσυμμετρίας.

Ακολουθώς μελετούμε την επίτευξη ή μη της ενοποίησης στην περίπτωση του μοντέλου με τις επιπλέον διαστάσεις. Αρχίζοντας με τις πειραματικές τιμές έχουμε

$$a_i^{-1}(\Lambda) = G_i - \frac{b_i^{\text{EYKΠ}}}{2\pi} \ln \frac{\Lambda}{M_{SUSY}} + \frac{\tilde{b}_i}{2\pi} \ln \frac{\Lambda}{M_0} - \frac{\tilde{b}_i X_\delta}{2\pi\delta} \left[ \left( \frac{\Lambda}{M_0} \right)^\delta - 1 \right]$$

όπου ορίζουμε την ποσότητα:  $G_i \equiv a_i^{-1}(Mz) - \frac{b_i^{\text{ΚΠ}}}{2\pi} \ln \frac{M_{SUSY}}{Mz}$ . Υποθέτοντας πάλι ότι έχουμε ενοποίηση παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
 G_i - \frac{b_i^{\text{ΕΥΚΠ}}}{2\pi} \ln \frac{M''_{GUT}}{M_{SUSY}} + \frac{\tilde{b}_i}{2\pi} \ln \frac{M''_{GUT}}{M_0} - \frac{\tilde{b}_i X_\delta}{2\pi\delta} \left[ \left( \frac{M''_{GUT}}{M_0} \right)^\delta - 1 \right] = \\
 G_j - \frac{b_j^{\text{ΕΥΚΠ}}}{2\pi} \ln \frac{M''_{GUT}}{M_{SUSY}} + \frac{\tilde{b}_j}{2\pi} \ln \frac{M''_{GUT}}{M_0} - \frac{\tilde{b}_j X_\delta}{2\pi\delta} \left[ \left( \frac{M''_{GUT}}{M_0} \right)^\delta - 1 \right] \implies \\
 2\pi \frac{a_i^{-1}(Mz) - a_j^{-1}(Mz)}{b_i^{\text{ΕΥΚΠ}} - b_j^{\text{ΕΥΚΠ}}} = \ln \frac{M_{SUSY}}{Mz} \frac{b_i^{\text{ΚΠ}} - b_j^{\text{ΚΠ}}}{b_i^{\text{ΕΥΚΠ}} - b_j^{\text{ΕΥΚΠ}}} + \ln \frac{M''_{GUT}}{M_{SUSY}} - \\
 \ln \frac{M''_{GUT}}{M_0} \frac{\tilde{b}_i - \tilde{b}_j}{b_i^{\text{ΕΥΚΠ}} - b_j^{\text{ΕΥΚΠ}}} \\
 + \frac{X_\delta}{2\pi} \left[ \left( \frac{M''_{GUT}}{M_0} \right)^\delta - 1 \right] \frac{\tilde{b}_i - \tilde{b}_j}{b_i^{\text{ΕΥΚΠ}} - b_j^{\text{ΕΥΚΠ}}.
 \end{aligned}$$

Επομένως για να επιτευχθεί πάλι η ενοποίηση θα πρέπει ο τρίτος και τέταρτος όρος του δεξιού μέλους της παραπάνω εξίσωσης να είναι ανεξάρτητοι από τα  $i, j$ :

$$\frac{\tilde{b}_1 - \tilde{b}_2}{b_1^{\text{ΕΥΚΠ}} - b_2^{\text{ΕΥΚΠ}}} = 0.642857$$

$$\frac{\tilde{b}_1 - \tilde{b}_3}{b_1^{\text{ΕΥΚΠ}} - b_3^{\text{ΕΥΚΠ}}} = 0.6875$$

$$\frac{\tilde{b}_2 - \tilde{b}_3}{b_2^{\text{ΕΥΚΠ}} - b_3^{\text{ΕΥΚΠ}}} = 0.75.$$

Διαπιστώνουμε ξανά ότι οι σταθερές σύζευξης βαθμίδας ενοποιούνται με πολύ καλή πρόσεγγιση.



# Βιβλιογραφία

- [1] S. L. Glashow, “Partial Symmetries of Weak Interactions,” Nucl. Phys. 22 (1961) 579.
- [2] A. Salam and J. C. Ward, “Electromagnetic and weak interactions,” Phys. Lett. 13 (1964) 168.
- [3] A. Salam, “Elementary Particle Theory,” Proceedings of The Nobel Symposium Held 1968 At Lerun, Sweden, ed. N. Svartholm (Almqvist and Wiksell, Stockholm, 1968) 367.
- [4] S. Weinberg, “A Model of Leptons,” Phys. Rev. Lett. 19 (1967) 1264.
- [5] G.’t Hooft, “Renormalization of Massless Yang-Mills Fields,” Nucl. Phys. B 33 (1971) 173.
- [6] G.’t Hooft, “Renormalizable Lagrangians for massive Yang-Mills fields,” Nucl. Phys. B35 (1971) 167, “Dimensional regularization and the renormalization group,” Nucl. Phys. B61 (1973) 455, “Magnetic monopoles in unified gauge theories,” Nucl. Phys. B79 (1974) 276.
- [7] G.’t Hooft, M. Veltman, “Regularization and renormalization of gauge fields,” Nucl. Phys. B 44 (1972) 189.
- [8] Βιβλία θεωριών πεδίου βαθμίδας:  
C. Quigg, “Gauge Theories of the strong, weak and electromagnetic Forces,” Benjamin-Cummings Publ. Comp. Inc., 1983.  
K. Moriyasu, “An elementary Primer for Gauge Field Theory,” World Scientific (1983).
- [9] W. de Boer, “Grand Unified theories and supersymmetry in particle physics and cosmology,” Prog. Part. Nucl. Phys. 33 (1994) 201-302, arXiv: 9402266 [hep-ph].



- [10] P. W. B. Higgs, “Broken symmetries, massless particles and gauge fields,” *Phys. Lett.* 12 (1964) 132.
- [11] G. S. Guralnik, C. R. Hagen and T. W. B. Kibble, “Global Conservation Laws and Massless Particles,” *Phys. Rev.* 13 (1964) 585.
- [12] P. W. Anderson, “Plasmons, Gauge Invariance and Mass,” *Phys. Rev.* 130 (1963) 439.
- [13] F. Englert and R. Brout, “Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons,” *Phys. Rev.* 13 (1964) 321.
- [14] F. Halzen, A. D. Martin, “Quarks and Leptons: An introductory Course in Modern Particle Physics,” John Wiley and Sons, 1984.
- [15] Ian J. R. Aitchison, “Supersymmetry in Particle Physics: An Elementary Introduction,” Cambridge University Press, 2007.
- [16] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, “An Introduction to Quantum Field Theory,” Addison-Wesley, 1995.
- [17] D. R. T. Jones, “The Two Loop beta function for a  $G(1) \times G(2)$  Gauge Theory,” *Phys. Rev. D* 25 (1982) 581.
- [18] Howard Georgi and S. L. Glashow, “Unity of All Elementary-Particle Forces,” *Phys. Rev. Lett.* 32 (1974) 438.
- [19] G. G. Ross, “Grand Unified Theories,” (The Benjamin/Cummings Publishing Company Inc., California, USA, 1985).
- [20] S. Weinberg, “Implications Of Dynamical Symmetry Breaking,” *Phys. Rev. D* 13, 974 (1976).
- [21] S. Weinberg, “Implications Of Dynamical Symmetry Breaking: An Addendum,” *Phys. Rev. D* 19, 1277 (1979).
- [22] E. Gildener, “Gauge Symmetry Hierarchies,” *Phys. Rev. D* 14, 1667 (1976).
- [23] L. Susskind, “Dynamics Of Spontaneous Symmetry Breaking In The Weinberg-Salam Theory,” *Phys. Rev. D* 20, 2619 (1979).

- [24] G. 't Hooft, in Recent developments in gauge theories, Proceedings of the NATO Advanced Summer Institute, Cargese 1979, (Plenum, 1980).
- [25] Stephen P. Martin, “A Supersymmetry Primer,” arxiv: 9709356 [hep-ph].
- [26] H. P. Nilles, “Supersymmetry, Supergravity and Particle Physics,” Phys. Rept. 110, (1984) 1.
- [27] R. Haag, J. Lopuszanski, and M. Sohnius, “All Possible Generators Of Supersymmetries Of The S Matrix,” Nucl. Phys. B 88, 257 (1975).
- [28] S. Coleman and J. Mandula, “All Possible Symmetries Of The S Matrix,” Phys. Rev. 159 (1967) 1251.
- [29] J. Wess and B. Zumino, “Supergauge Transformations In Four-Dimensions,” Nucl. Phys. B 70 (1974) 39.
- [30] G. R. Farrar and P. Fayet, “Phenomenology of the Production, Decay, and Detection of New Hadronic States associated with Supersymmetry,” Phys. Lett. B 76, 575 (1978).
- [31] D. Kapetanakis, M. Mondragon and G. Zoupanos, “Finite Unified Models,” Z. Phys. C 60, 181 (1993), arXiv: 9210218 [hep-ph].
- [32] M. Mondragon and G. Zoupanos, “Finite unified theories and the top quark mass,” Nucl. Phys. Proc. Suppl. 37 C, 98 (1995).
- [33] S. Heinemeyer, M. Mondragon and G. Zoupanos, “Finite Unification: Theory and Predictions,” SIGMA 6 (2010) 049, arXiv: 1001.0428 [hep-ph].
- [34] J. Kubo, M. Mondragon and G. Zoupanos, “Reduction of couplings and heavy top quark in the minimal SUSY GUT,” Nucl. Phys. B 424, 291 (1994).
- [35] J. Kubo, M. Mondragon, N. D. Tracas and G. Zoupanos, “Gauge-Yukawa Unification in Asymptotically Non-free Theories,” Phys. Lett. B 342, 155 (1995), arxiv: 9409003 [hep-th].

- [36] J. Kubo, M. Mondragon, S. Shoda and G. Zoupanos, “Gauge-Yukawa Unification in  $SO(10)$  SUSY GUTs,” Nucl. Phys. B 469 3 (1996), arxiv: 9512258 [hep-ph].
- [37] J. Kubo, M. Mondragon, M. Olechowski and G. Zoupanos, “Testing Gauge-Yukawa-Unified Models By  $M_t$ ,” Nucl. Phys. B 479, 25 (1996), arxiv: 9512435 [hep-ph].
- [38] J. Kubo, M. Mondragon and G. Zoupanos, “Perturbative Unification of Soft Supersymmetry-Breaking Terms,” Phys. Lett. B 389, 523 (1996), arxiv: 9609218 [hep-ph].
- [39] W. Zimmermann, “Reduction in the Number of Coupling Parameters,” Commun. Math. Phys. 97, 211 (1985).
- [40] R. Oehme and W. Zimmermann, “Relation between effective couplings for asymptotically free theories,” Commun. Math. Phys. 97, 569 (1985).
- [41] E. Ma, “Modified quantum chromodynamics: Exact global color symmetry and asymptotic freedom,” Phys. Rev. D17, 623 (1978).
- [42] E. Ma, “Fixing the Higgs-boson mass,” Phys. Rev. D 31, 1143 (1985).
- [43] N. P. Chang, “Eigenvalue conditions and asymptotic freedom for Higgs scalar gauge theories,” Phys Rev D 10, (1974) 2706.
- [44] S. Nandi and W.-C. Ng, “Can coupling constants be related?,” Phys.Rev. D 20, (1979) 972.
- [45] C. Lucchesi, O. Piguet and K. Sibold, “Vanishing beta-functions in  $N = 1$  supersymmetric gauge theories,” Helv. Phys. Acta 61, 321 (1988).
- [46] C. Lucchesi and G. Zoupanos, “All-order Finiteness in  $N=1$  SYM Theories: Criteria and Applications,” Fortschr. Phys. 45, 129 (1997), arxiv: 9604216 [hep-ph].
- [47] A. V. Ermushev, D. I. Kazakov and O. V. Tarasov, “Finite  $N=1$  supersymmetric grand unified theories,” Nucl. Phys. B 281, 72 (1987).
- [48] D. I. Kazakov, “Finite  $N = 1$  SUSY Gauge field theories,” Mod. Phys. Lett. A 2, 663 (1987).

- [49] J. Kubo, K. Sibold and W. Zimmermann, “Higgs and top mass from reduction of couplings,” Nucl. Phys. B 259, 331 (1985).
- [50] J. Iliopoulos, “Can we predict the value of the Higgs mass?,” arXiv: 0603146 [hep-ph].
- [51] B. Ananthanarayan, J. Pasupathy, “Higgs Mass in the Standard Model from Coupling Constant Reduction,” Int. J. Mod. Phys. A 17, 335 (2002), arXiv: 0104286 [hep-ph].
- [52] B. Schrempp, M. Wimmer, “Top Quark and Higgs Boson Masses: Interplay between Infrared and Ultraviolet Physics,” Prog. Part. Nucl. Phys. 37 1 (1996), arXiv: 9606386 [hep-ph].
- [53] A. Sirlin, R. Zucchini, “Dependence of the Higgs coupling on  $m_H$  and the possible onset of new Physics,” Nucl. Phys. B 266 389 (1986).
- [54] J. A. Casas, J. R. Espinosa, M. Quiros and A. Riotto, Nucl. Phys. B 436 209 (1994); Erratum ibid. B 439 466 (1995).
- [55] G. Tsamis, “Reduction of couplings in the MSSM,” PoS CORFU 064 (2014), arXiv: 1507.04496 [hep-ph].
- [56] SuSpect: a program for the calculation of the SUPersymmetric particle SPECTrum, A. Djouadi, J. L. Kneur and G. Moultaka, arxiv: 0211331 [hep-ph].
- [57] N. D. Tracas, G. Tsamis, N. D. Vlachos, G. Zoupanos, “Coupling Reduction and the Higgs mass,” Phys. Lett. B 710, 623 (2012), arXiv: 1111.6199 [hep-ph].
- [58] Josep F. Oliver, “Aspects of universal extra dimensional models and their latticized versions,” PhD Thesis, arxiv: 0403095 [hep-ph].
- [59] J. C. Pati, A. Salam, “Unified Lepton-Hadron Symmetry and a Gauge Theory of the Basic Interactions,” Phys. Rev. D 8 (1973) 1240.
- [60] H. Georgi, S. L. Glashow, “Unity of All Elementary-Particle Forces,” Phys. Rev. Lett 32, (1974) 438.
- [61] H. Fritzsch, P. Minkowski, “Unified interactions of leptons and hadrons,” Ann. Phys. 93 (1975) 193.

- [62] F. Gursev, P. Ramond, P. Sikivie, “A universal gauge theory model based on E6,” *Phys. Lett. B* 60, (1975) 177.
- [63] H. Georgi, H. Quinn, S. Weinberg, “Hierarchy of Interactions in Unified Gauge Theories,” *Phys. Rev. Lett* 33, (1974) 451.
- [64] A. Buras et al, “Aspects of the grand unification of strong, weak and electromagnetic interactions,” *Nucl. Phys. B* 135, (1978) 66.
- [65] L. Maiani, G. Parisi, R. Petronzio, “Bounds on the number and masses of quarks and leptons,” *Nucl. Phys. B* 136, (1978) 115.
- [66] N. Cabibbo, G. R. Farrar, “An alternative to perturbative grand unification: How asymptotically non-free theories can successfully predict low-energy gauge couplings,” *Phys. Lett. B* 110, (1982) 353.
- [67] L. Maiani, R. Petronzio, “Low energy gauge couplings and the mass gap of N=1 supersymmetry,” *Phys. Lett. B* 176, (1986) 120.
- [68] S. Theisen, D. Tracas, G. Zoupanos, “Unification of coupling constants without a covering GUT,” *Z. Phys. C.* 37, (1988) 597.
- [69] J. P. Derendinger, R. Kaiser and M. Roncadelli, “Nonperturbative unification and extended supersymmetry,” *Phys. Lett. B* 220, (1989) 164.
- [70] P. Howe, K. Stelle and P. West, “A class of finite four-dimensional supersymmetric field theories,” *Phys. Lett. B* 124, (1983) 55.
- [71] K. R. Dienes, E. Dudas and T. Gherghetta, “Extra spacetime dimensions and unification,” *Phys. Lett. B* 436, (1998) 55, arxiv: 9803466 [hep-ph].  
“Grand unification at intermediate mass scales through extra dimensions,” *Nucl. Phys. B* 537, (1999) 47, arxiv: 9806292 [hep-ph].
- [72] N. D. Tracas, G. Tsamis, G. Zoupanos, “Kaluza-Klein modes and non-perturbative unification,” in preparation.
- [73] D. Ghilencea, G. G. Ross, “Unification and extra space-time dimensions,” *Phys. Lett. B* 442, (1998) 165, arxiv: 9809217 [hep-ph].

- [74] G. Lazarides, C. Panagiotakopoulos and Q. Shafi, “Supersymmetric unification without proton decay,” Phys. Lett. B 315, (1993) 325, arxiv: 9306332 [hep-ph].
- [75] N. Irges, G. Orfanidis and G. Zoupanos, “Dimensional Reduction of  $N = 1$ ,  $E_8$  SYM over  $SU(3)/U(1) \times U(1) \times Z_3$  and its four-dimensional effective action,” PoS CORFU 2011 105, (2011), arXiv: 1205.0753 [hep-ph].
- [76] E. Ma, M. Mondragon and G. Zoupanos, “Finite  $SU(N)^k$  Unification,” JHEP 12, (2004) 026, arXiv: 1040.7236 [hep-ph].
- [77] N. D. Tracas, “GUT Precursors in  $SU(3)^3$ -type Model and  $N_{colour} > 3$ ,” Mod. Phys. Lett. A 19, (2004) 1615, arXiv: 0311183 [hep-ph].
- [78] N. D. Tracas, G. K. Leontaris, ”Unified models at intermediate energy scales and Kaluza Klein excitations,” Phys. Lett. B 470, (1999) 84, arXiv: 9908462 [hep-ph].
- [79] I. Antoniadis, G. K. Leontaris and N. D. Tracas, ”Grand unified string models and low energy couplings,” Phys. Lett. B 279, (1992) 58.
- [80] P. Langacker, “Grand Unified Theories and Proton Decay,” Phys. Rept. 72, 185 (1981).
- [81] C. Vafa, “Evidence for F theory,” Nucl. Phys. B 469, (1996) 403, arXiv: 9602022 [hep-th].
- [82] R. Donagi and M. Wijnholt, “Model Building with F-Theory,” arXiv: 0802.2969 [hep-th].
- [83] C. Beasley, J. J. Heckman and C. Vafa, “GUTs and Exceptional Branes in F-theory - I,” JHEP 0901, (2009) 058, arXiv: 0802.3391 [hep-th].
- [84] C. Beasley, J. J. Heckman and C. Vafa, “GUTs and Exceptional Branes in F-theory - II: Experimental Predictions,” JHEP 0901, (2009) 059, arXiv: 0806.0102 [hep-th].
- [85] H. Hayashi, R. Tatar, Y. Toda, T. Watari and M. Yamazaki, “New Aspects of Heterotic–F Theory Duality,” Nucl. Phys. B 806, (2009) 224, arXiv: 0805.1057 [hep-th].

- [86] R. Donagi and M. Wijnholt, “Breaking GUT Groups in F-Theory,” arXiv: 0808.2223 [hep-th].
- [87] R. Blumenhagen, “Gauge coupling unification in F-theory grand unified theories,” Phys. Rev. Lett. 102, 071601(2009), arXiv: 0812.0248 [hep-th].
- [88] G. K. Leontaris, N. D. Tracas, “Gauge coupling flux thresholds, exotic matter and the unification scale in F-SU(5) GUT,” Eur. Phys. J. C 67, 489 (2010), arxiv: 0912.1557 [hep-ph].
- [89] A. P. Braun, “F-Theory and the Landscape of Intersecting D7-Branes,” arXiv: 1003.4867 [PhD thesis].
- [90] J. J. Heckman, A. Tavanfar, C. Vafa, “The Point of E(8) in F-theory GUTs,” JHEP 1008, 040 (2010), arXiv: 0906.0581 [hep-th].
- [91] J. Marsano, N. Saulina and S. Schafer-Nameki, “Compact F-theory GUTs with  $U(1)_{PQ}$ ,” JHEP 1004 (2010) 095, arXiv: 0912.0272 [hep-th].
- [92] R. Blumenhagen, T. W. Grimm, B. Jurke and T. Weigand, “Global F-theory GUTs,” Nucl. Phys. B 829, (2010) 325, arXiv: 0908.1784 [hep-th].
- [93] R. Donagi and M. Wijnholt, “Higgs Bundles and UV Completion in F-Theory,” arXiv: 0904.1218 [hep-th].
- [94] R. Blumenhagen, T. W. Grimm, B. Jurke and T. Weigand, “F-theory uplifts and GUTs,” JHEP 0909, (2009) 053, arXiv: 0906.0013 [hep-th].
- [95] T. W. Grimm, “The N=1 effective action of F-theory compactifications,” Nucl. Phys. B 845, (2011) 48, arXiv: 1008.4133 [hep-th].
- [96] M. Bershadsky, K. A. Intriligator, S. Kachru, D. R. Morrison, V. Sadov and C. Vafa, “Geometric singularities and enhanced gauge symmetries,” Nucl. Phys. B 481, (1996) 215, arXiv: 9605200 [hep-th].
- [97] T. Weigand, “Lectures on F-theory compactifications and model building,” Class. Quant. Grav. 27, (2010) 214004, arXiv: 1009.3497 [hep-th].

- [98] J. J. Heckman and C. Vafa, “Flavor Hierarchy From F-theory,” Nucl. Phys. B 837, (2010) 137, arXiv: 0811.2417 [hep-th].
- [99] S. Cecotti, M. C. N. Cheng, J. J. Heckman and C. Vafa, “Yukawa Couplings in F-theory and Non-Commutative Geometry,” arXiv: 0910.0477 [hep-th].
- [100] J. Marsano, N. Saulina and S. Schafer-Nameki, “Monodromies, Fluxes, and Compact Three-Generation F-theory GUTs,” JHEP 0908, (2009) 046, arXiv: 0906.4672 [hep-th].
- [101] J. P. Conlon and E. Palti, “Aspects of Flavour and Supersymmetry in F-theory GUTs,” JHEP 1001, (2010) 029, arXiv: 0910.2413 [hep-th].
- [102] E. Dudas and E. Palti, “Froggatt-Nielsen models from E8 in F-theory GUTs,” JHEP 1001, (2010) 127, arXiv: 0912.0853 [hep-th].
- [103] S. F. King, G. K. Leontaris and G. G. Ross, “Family symmetries in F-theory GUTs,” Nucl. Phys. B 838, (2010) 119, arXiv: 1005.1025 [hep-ph].
- [104] R. Penrose, “The Road to Reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe,” 2004.
- [105] G. K. Leontaris, “Aspects of F-theory GUTs,” arXiv:1203.6277 [hep-th].
- [106] J. C. Callaghan, S. F. King, G. K. Leontaris, G. Ross, “Towards a Realistic F-theory GUT,” JHEP 04, (2012), 094, arXiv: 1109.1399 [hep-ph].
- [107] E. Dudas and E. Palti, “On hypercharge flux and exotics in F-theory GUTs,” JHEP 1009, 013, (2010), arXiv: 1007.1297 [hep-ph].
- [108] G. K. Leontaris, G. G. Ross, “Yukawa couplings and fermion mass structure in F-theory GUTs,” JHEP 1102, 108, (2011), arXiv: 1009.6000 [hep-th].
- [109] H. Hayashi, T. Kawano, Y. Tsuchiya and T. Watari, “Flavor Structure in F-theory Compactifications,” JHEP 1008, (2010) 036, arXiv: 0910.2762 [hep-th].



- [110] T. W. Grimm and T. Weigand, “On Abelian Gauge Symmetries and Proton Decay in Global F-theory GUTs,” *Phys. Rev. D* 82, (2010) 086009, arXiv: 1006.0226 [hep-th].
- [111] C. Ludeling, H. P. Nilles, C. C. Stephan, “The Potential Fate of Local Model Building,” *Phys. Rev. D* 83, 086008, 2011, arXiv: 1101.3346 [hep-th].
- [112] T. Li, D. V. Nanopoulos and J. W. Walker, “Fast proton decay,” *Phys. Lett. B* 693, (2010) 580.
- [113] E. Kuflik and J. Marsano, “Comments on Flipped SU(5) (and F-theory),” *JHEP* 1103, 020, 2011, arXiv: 1009.2510 [hep-ph].
- [114] H. Hayashi, T. Kawano, R. Tatar and T. Watari, “Codimension-3 Singularities and Yukawa Couplings in F-theory,” *Nucl. Phys. B* 823, (2009) 47, arXiv: 0901.4941 [hep-th].
- [115] G. K. Leontaris, N. D. Tracas, G. Tsamis, “Unification, KK-thresholds and the top Yukawa coupling in F-theory GUTs,” *Eur. Phys. J. C* 71, (2011) 1768, arXiv: 1102.5244 [hep-Ph].
- [116] A. Font and L. E. Ibanez, “Matter wave functions and Yukawa couplings in F-theory Grand Unification,” *JHEP* 0909, (2009) 036, arXiv: 0907.4895 [hep-th].
- [117] F. Marchesano, P. McGuirk and G. Shiu, “Chiral matter wavefunctions in warped compactifications,” *JHEP* 1105, 090 (2011), arXiv: 1012.2759 [hep-th].
- [118] K. Kodaira, “On compact Analytic surfaces”, *Annals of Math.* 77 (1963) 563.
- [119] J. Tate, “Algorithm for Determining the Type of a Singular Fiber in an Elliptic Pencil,” in *Modular Functions of One Variable IV*, Lecture Notes in Math. vol. 476, Springer-Verlag, Berlin (1975).
- [120] T. Friedmann and E. Witten, “Unification scale, proton decay, and manifolds of G(2) holonomy,” *Adv. Theor. Math. Phys.* 7, (2003) 577, arXiv: 0211269 [hep-th].

- [121] D. B. Ray and I. M. Singer, “Analytic Torsion For Complex Manifolds,” *Annals Math.* 98, (1973) 154.
- [122] G. K. Leontaris, N. D. Vlachos, “On the GUT scale of F-theory SU(5),” *Phys. Lett. B* 704 (2011), 620, arxiv: 1105.1858 [hep-th].
- [123] D. B. Ray, I. M. Singer, “R-torsion and the Laplacian in Riemannian Manifolds,” *Adv. Math.* 7, 145-210 (1971).
- [124] C. Nash, D. J. O’Conor, “Determinants of Laplacians, the Ray-Singer torsion on lens spaces and the Riemann zeta function,” *J. Math. Phys.* 36, 1462 (1995). [Erratum-ibid. 36, (1995) 4549], arxiv: 9212022 [hep-th].
- [125] E. G. Floratos, G. K. Leontaris, “Large top and bottom Yukawa couplings in minimal supersymmetry,” *Phys. Lett. B* 336, 194 (1994), arxiv: 9407229 [hep-ph].
- [126] P. Appell, “Sur les fonctions hypergeometriques de plusieurs variables,” In *Memoir Sci. Math* (Gauthier-Villars, Paris, 1925). <http://mathworld.wolfram.com/AppellHypergeometricFunction.html>.