

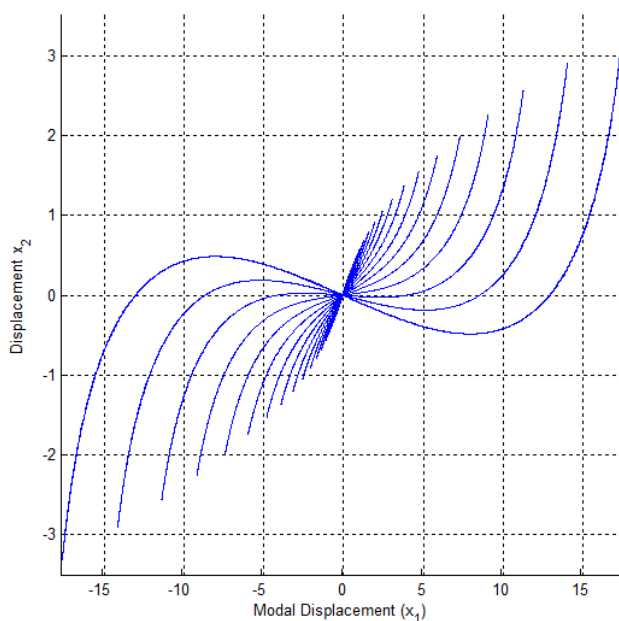


ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ

ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΙΔΙΟΜΟΡΦΕΣ

Θεωρία και Εφαρμογές
σε πολυβάθμια συστήματα



ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΣΒΩΛΟΣ ΛΑΜΠΡΟΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ:
ΚΟΥΜΟΥΣΗΣ ΒΛΑΣΗΣ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ
ΙΟΥΛΙΟΣ 2016

Στον πατέρα μου

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της μεταπτυχιακής εργασίας στη σχολή των πολιτικών μηχανικών του Ε.Μ.Π. κλείνω έναν κύκλο με τις σπουδές μου στην Ελλάδα και νιώθω την ανάγκη να εκφράσω τις εγκάρδιες ευχαριστίες μου στους ανθρώπους που συνέβαλαν με την προσφορά τους στο να βρίσκομαι σε αυτό το σημείο.

Καταρχάς, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Βλάση Κουμούση, για το ενδιαφέρον που έδειξε όλα αυτά τα χρόνια σε κάθε βήμα που έκανα, ως προπτυχιακός και μεταπτυχιακός φοιτητής. Μέσα από τις πολυάριθμες συναντήσεις μας, μου έδωσε πολύτιμες γνώσεις και συμβουλές που θεωρώ ότι θα είναι χρήσιμες για τη μελλοντική μου πορεία, τόσο σε επιστημονικό, όσο και σε προσωπικό επίπεδο. Ακόμα, θα ήθελα να τον ευχαριστήσω που με ενθάρρυνε έμπρακτα στο να διευρύνω τις γνώσεις μου σε επιστημονικούς χώρους μακριά από το «λιμάνι» των πολιτικών μηχανικών, ενώ παράλληλα λειτουργούσε σαν «φάρος» για να μην απομακρυνθώ από αυτό. Ήταν πολύ περισσότερο από επιβλέπων καθηγητής της μεταπτυχιακής μου εργασίας, ήταν Δάσκαλος.

Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω την κ. Μαρία Νεραντζάκη για τη βοήθεια της στους διάφορους προβληματισμούς που είχα κατά τη διάρκεια των σπουδών μου στη σχολή των πολιτικών μηχανικών.

Επίσης, ένα μεγάλο ευχαριστώ οφείλω στη μητέρα μου και στον πατέρα μου τόσο για την ηθική υποστήριξη όσο και για τις συνθήκες που διαμόρφωσαν καθ' όλη τη διάρκεια των μεταπτυχιακών σπουδών μου στην Ελλάδα. Με τη συμπαράστασή τους, κατάφερα να πετύχω τους στόχους μου.

Περίληψη

Οι προσομοιώσεις των κατασκευών απαιτούν τη χρήση πολύπλοκων μοντέλων έτσι ώστε να είναι ακριβείς σύμφωνα με τα πειραματικά δεδομένα. Αφού εφαρμόσουμε μια τεχνική πεπερασμένων στοιχείων, καταλήγουμε σε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων με τις οποίες ο μηχανικός μπορεί να εκτιμήσει ποσοτικά και ποιοτικά την κρίσιμη συμπεριφορά της κατασκευής που εξετάζει.

Στην περίπτωση της γραμμικής συμπεριφοράς του συστήματος, η οποία είναι μια εξιδανίκευση στις εφαρμογές μηχανικού, υπάρχει μια καθιερωμένη θεωρία. Η έννοια της ιδιομορφής σε αυτή τη θεωρία ταλαντώσεων είναι θεμελιώδης. Μια πληθώρα από τεχνικές, βασισμένη στις γραμμικές ιδιομορφές (ΓΙ), έχει εφαρμοσθεί σε επιστημονικά πεδία όπως της αντισεισμικής τεχνολογίας. Οι μαθηματικές ιδιότητες των γραμμικών ιδιομορφών βοηθούν στην κατανόηση του τρόπου με τον οποίο ένα γραμμικό σύστημα ταλαντώνεται. Ειδικότερα, η παρατήρηση ότι οι εξισώσεις κίνησης μπορούν να αποσυζευχθούν, απλοποιεί τον τρόπο με τον οποίο το σύστημα αποκρίνεται, διότι μπορούμε να εκμεταλλευτούμε τις δύο χρήσιμες ιδιότητες των γραμμικών ιδιομορφών. Πρώτον, η ιδιότητα της αναλλοίωτης ως προς την κίνηση εκφράζεται από το γεγονός ότι εάν η κίνηση ξεκινήσει από μια συγκεκριμένη ιδιομορφή παραμένει σε αυτό τον τρόπο ταλάντωσης για κάθε χρόνο. Δεύτερον, υπάρχει η ιδιότητα της ιδιομορφικής υπέρθεσης με την οποία οι ταλαντώσεις μπορούν να εκφραστούν ως γραμμικοί συνδυασμοί ξεχωριστών γραμμικών ιδιομορφικών κινήσεων.

Παρόλο που η προαναφερθείσα θεωρία είναι οικεία στους μηχανικούς, οι σύγχρονες απαιτήσεις σχεδιασμού και η πολυπλοκότητα των προβλημάτων καθιστούν αναγκαία την εξέταση των μη γραμμικών χαρακτηριστικών. Επομένως, υπάρχει η ανάγκη για αποτελεσματικές και ευρέως εφαρμόσιμες μεθόδους ανάλυσης για τη μη γραμμική δυναμική απόκριση συστημάτων. Σε αυτή τη μεταπτυχιακή εργασία γίνεται η προσπάθεια να παρουσιαστεί η έννοια της μη γραμμικής ιδιομορφής (ΜΓΙ) που είναι μια επέκταση της γνωστής έννοιας των γραμμικών ιδιομορφών σε μη γραμμικά συστήματα. Οι ΜΓΙ θέτουν τα θεμέλια για την ερμηνεία της συμπεριφοράς των μη γραμμικών συστημάτων, διότι μπορούν να αναδείξουν μη γραμμικά φαινόμενα που δεν υπάρχουν στη γραμμική θεωρία.

Στο κεφάλαιο 1 υπάρχει μια σύντομη εισαγωγή στην κλασσική θεωρία ταλαντώσεων. Περιγράφεται η περίπτωση συντηρητικών συστημάτων και ο τρόπος με τον οποίο υπολογίζονται τα ιδιοδιανύσματα και οι ιδιομορφές μέσω της επίλυσης της χαρακτηριστικής εξίσωσης. Επιπλέον, η περίπτωση μη συντηρητικών συστημάτων παρουσιάζεται, επειδή η έννοια των ιδιολύσεων μπορεί να ορισθεί και σε αυτά τα συστήματα. Σε αυτό το κεφάλαιο, όλες οι λεπτομέρειες που παρουσιάζονται είναι για εισαγωγικό σκοπό του υπόλοιπου τμήματος της εργασίας.

Στο κεφάλαιο 2 υπάρχει ο πιο άμεσος ορισμός της ΜΓΙ. Το 1960, ο R. M. Rosenberg θεώρησε ότι ένα συντηρητικό μη γραμμικό σύστημα ταλαντώνεται σε μια ιδιομορφή, όταν όλες οι μάζες εκτελούν περιοδικές κινήσεις της ίδιας περιόδου και οι οποίες διέρχονται ταυτόχρονα από το σημείο ισορροπίας, ενώ παράλληλα, σε κάθε χρονική στιγμή η θέση της κάθε μάζας προσδιορίζεται μονοσήμαντα από τη θέση μιας οποιασδήποτε από αυτές. Με άλλα λόγια, μια ΜΓΙ είναι μια συγχρονισμένη ταλάντωση του συστήματος. Αυτός ο ορισμός είναι συνεπής ως προς τις ΓΙ που εμφανίζονται σε ένα γραμμικό σύστημα.

Υπάρχουν διαφορετικές μέθοδοι για τον υπολογισμό των ΜΓΙ ενός διακριτού συστήματος. Παρόλο που οι πρώτες τεχνικές ήταν αναλυτικές, η μεταπτυχιακή εργασία εστιάζει σε δύο υπολογιστικές μεθόδους. Η μια μέθοδος περιγράφηκε από τους M. Peeters, R. Vinguie, G. Sérandour, G. Kerschen and J-C. Golinval το 2009. Αυτή η μέθοδος στηρίζεται σε δύο βασικά βήματα, που καλούνται διαδικασία σκόπευσης και pseudo-arclength τεχνική συνέχειας των ΜΓΙ. Αυτά τα δύο βήματα πραγματοποιούνται διαδοχικά και επαναλαμβάνονται ξεκινώντας από μια γνωστή γραμμική ιδιομορφή (για χαμηλές ενέργειες) με σκοπό να σχεδιαστεί το διάγραμμα συχνότητας-ενέργειας (FEP). Σε κάθε ενεργειακό επίπεδο υπάρχουν διαφορετικές ιδιομορφές και κατ' επέκταση υπάρχει η ανάγκη σχεδίασης αυτού του διαγράμματος. Η άλλη αριθμητική μέθοδος προσδιορισμού ΜΓΙ περιγράφηκε από τον J. Slater το 1996. Η προαναφερθείσα μέθοδος χρησιμοποιεί αλγόριθμο βελτιστοποίησης με στόχο να ελαχιστοποιήσει τη συνάρτηση κόστους που σχετίζεται με την περιοδική συνθήκη. Εάν μπορούμε να βρούμε τις αρχικές συνθήκες και τον χρόνο με τους οποίους η αντικειμενική συνάρτηση λαμβάνει ελάχιστο, τότε αυτές οι συνθήκες και η περίοδος του χρόνου δημιουργούν μια περιοδική λύση (ΜΓΙ κατά Rosenberg)

Στο κεφάλαιο 3 παρουσιάζεται μια μεθοδολογία που επεκτείνει στα μη συντηρητικά συστήματα την έννοια της ΜΓΙ. Ο Shaw και ο Pierre όρισαν μια γραμμική ιδιομορφή ως την κίνηση που λαμβάνει χώρα σε μια δισδιάστατη αναλλοίωτη πολλαπλότητα στο χώρο φάσης του συστήματος. Βασισμένοι σε αυτόν τον ορισμό και απαλείφοντας τον χρόνο από το πρόβλημα, καταλήγουμε σε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων που περιγράφει τη γεωμετρία της πολλαπλότητας. Επειδή, οι αναλυτικές προσεγγίσεις ισχύουν για ασθενώς μη γραμμικά συστήματα σε τοπικό επίπεδο αναπτύχθηκε με τη συνεισφορά και του E. Pesheck μια τύπου Galerkin προσέγγιση για τις ΜΓΙ. Στη μεταπτυχιακή εργασία απεικονίζεται η γεωμετρία των πολλαπλοτήτων που παράγονται σύμφωνα με την τελευταία μέθοδο.

Στο κεφάλαιο 4 εξετάζεται μια διβάθμια διατμητική κατασκευή. Αυτή η εφαρμογή επιλέχθηκε με σκοπό να αναδειχθούν μη γραμμικά φαινόμενα που συμβαίνουν σε μια κατασκευή πολιτικού μηχανικού. Υπολογίζουμε τις ΜΓΙ για τη συγκεκριμένη κατασκευή και τις συγκρίνουμε με τις γραμμικές ιδιομορφές. Είναι προφανές ότι χρησιμοποιώντας τις γραμμικές ιδιομορφές σε αναλύσεις θα προκύψουν αποκλίσεις από την πραγματική συμπεριφορά της κατασκευής.

Μια λύση αυτού του προβλήματος είναι η ανάπτυξη δυναμικών μοντέλων με λιγότερους βαθμούς ελευθερίας. Η έλλειψη της αρχής της υπέρθεσης θα δημιουργήσει δυσκολίες σε αυτήν την προσπάθεια. Αυτό το πεδίο είναι ανοιχτό για μελλοντική έρευνα με σκοπό τη δημιουργία μη γραμμικής ιδιομορφικής ανάλυσης με χρήση των ΜΓΙ.

Abstract

The simulations of structures require the usage of sophisticated models in order to be accurate with respect to experiments. After implementing a finite element technique, it is produced a system of differential equations with which the engineer can estimate quantitatively and qualitatively the critical behavior of a structure.

In case of the linear behavior which is an idealization in engineering applications there is a well-established theory. The concept of normal mode is fundamental in this theory of linear vibrations. A plethora of techniques based on the linear normal modes (LNMs) has been applied to scientific fields such as earthquake engineering. The mathematical properties of LNMs pave the way for understanding how a linear system vibrates. Specifically, the observation that the governing equations of motion can be decoupled simplifies the problem of how the system responds because one can take advantage of the two useful properties of LNMs. Firstly, the property of motion invariance is expressed by the fact that if the motion is initiated on one specific LNM then it remains in this vibration way for all time. Secondly, there is the property of modal superposition with which oscillations can be expressed as linear combinations of individual LNM motions.

Despite the fact that the aforementioned theory is familiar to engineers, the modern design requirements and the complexity of engineering problems necessitate the consideration of nonlinearities. Thus, there is a need for efficient and broadly applicable analysis methods for nonlinear structural dynamics. In this master thesis, there is an attempt to present the concept of nonlinear normal modes (NNMs) which is an extension of the known notion of LNMs in the nonlinear systems. The NNMs laid the foundations for interpreting the behavior of nonlinear systems because they can highlight nonlinear phenomena which do not exist in the linear theory.

In chapter 1, there is a short introduction to classical linear theory of vibrations. It is described the case of conservative system and how eigenvectors and eigenvalues are computed by solving the characteristic equation. Moreover, the case of non-conservative system is presented because a concept of eigensolutions can be defined in these systems. In this chapter, all details are presented for introductory purpose to the rest thesis.

In chapter 2, there is the most straightforward definition of a NNM. In the 1960s, R. M. Rosenberg considered that a conservative nonlinear system vibrates in normal

modes when all masses execute periodic motions of the same period, when all of them pass through the equilibrium point at the same instant and when, at any time t , the position of all the masses is uniquely defined by the position of any one of them. In other words, a NNM is a vibration in unison of the system (i.e. synchronous oscillation). This definition is consistent with the LNM if we study a linear system. There are different methods for computing NNMs of discrete systems. In spite of the fact that the first techniques were analytical, the master thesis focus on two computational methods. One computational method was described by M. Peeters, R. Vingué, G. Sérandour, G. Kerschen and J-C. Golinval in 2009. This method relies on two main steps, namely a shooting procedure and a pseudo-arclength technique for the continuation of NNMs. These two steps are realized consecutively and repeatedly beginning from the known LNM (for low energies) in order to draw the Frequency-Energy Plot (FEP). In each energy level there are different NNMs so the FEP is a necessary figure if we want to predict the behavior of nonlinear system. The other numerical method for determining NNMs was introduced by J. Slater in 1996. The aforementioned method uses an optimization algorithm in order to minimize a cost function which is related to the periodicity condition. If we find the initial conditions and the period with which objective function reaches the minimum value (equals approximately zero) then these conditions and period create a periodic solution with the specific period (NNM by Rosenberg).

In chapter 3, a methodology is presented which extends to non-conservative systems and introduces a different perspective the concept of NNMs. S.W. Shaw & C. Pierre defined a normal mode of motion for the nonlinear, autonomous system as a motion which takes place on a two-dimensional invariant manifold in the system's phase space. Based on this specific definition we can eliminate the time dependence in the problem. This procedure yields a set of equations for the geometry of manifold. Shaw & Pierre followed analytical techniques in order to construct the manifolds locally for weakly nonlinear systems. Because of limited applicability, E. Pesheck, C. Pierre and S. Shaw developed a galerkin-based approach for accurate NNMs. In this master thesis, some results are presented about this technique.

In chapter 4, a shear building is examined as a two-degree-of-freedom system. This engineering application was chosen in order to highlight the nonlinear phenomena which take place in a civil engineering structure. Computing the NNMs for the specific structure we can compare the results with the LNM. It is obvious that using LNM as base for an analysis the results of this analysis will deviate from the reality.

A solution for this problem is the development of reduced-order models of nonlinear dynamical systems. The lack of a superposition principle will create problems in this endeavor. This field is open for future research in order to create a nonlinear modal analysis technique using NNMs.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

1	Εισαγωγή	1
---	----------------	---

Κεφάλαιο 2

2	Μη γραμμικά συντηρητικά πολυβάθμια συστήματα	5
2.1	Ιδιομορφή κατά Rosenberg.....	6
2.2	Ιδιότητες των μη γραμμικών ιδιομορφών (συστημάτων)	14
2.3	Αριθμητικός υπολογισμός των ιδιομορφών.....	17
2.3.1	Τεχνική αριθμητικής συνέχειας (numerical continuation)	17
2.3.2	Αλγόριθμος μη γραμμικών ιδιομορφών με βελτιστοποίηση	44

Κεφάλαιο 3

3	Ιδιομορφές σε μη συντηρητικά συστήματα	61
3.1	Ιδιομορφή κατά Shaw & Pierre	61
3.2	Ιδιότητες των ιδιομορφών	69
3.3	Αριθμητικός υπολογισμός των ιδιομορφών.....	70

Κεφάλαιο 4

4	Εφαρμογή μηχανικού.....	79
---	-------------------------	----

Κεφάλαιο 5

5	Βιβλιογραφία.....	93
---	-------------------	----

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Η προσομοίωση των κατασκευών του πολιτικού μηχανικού, μπορεί απλοποιητικά να πραγματοποιηθεί με μονοβάθμια συστήματα όπως συμβαίνει, επι παραδείγματι, με έναν υδατόπυργο, αλλά στα πλαίσια οριστικής μελέτης ο μηχανικός οφείλει να μελετήσει τη δυναμική συμπεριφορά της εκάστοτε κατασκευής ως πολυβάθμιο σύστημα. Η προσέγγιση, με αυτόν τον τρόπο, αποκτά αξιοπιστία και τα αποτελέσματα των εντατικών μεγεθών μπορούν να χρησιμοποιηθούν για οικονομική διαστασιολόγηση.

Ο μετασχηματισμός του απειροβάθμιου πραγματικού προβλήματος, που αποτελεί ένα συνεχές σύστημα και ικανοποιεί ένα σύνολο μερικών διαφορικών εξισώσεων (ΜΔΕ), πραγματοποιείται με τη βοήθεια της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων. Ύστερα από την ημιδιακριτοποίηση (διακριτοποίηση μόνο ως προς τις χωρικές συντεταγμένες), καταλήγουμε σε ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων (ΣΔΕ), που τις ονομάζουμε εξισώσεις κίνησης.

Οι εξισώσεις κίνησης ενός πολυβάθμιου (n – βάθμιο) συστήματος, στην ειδική περίπτωση που το σύστημα συμπεριφέρεται γραμμικά έχουν τη μορφή:

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = p(t) \quad (1.1)$$

όπου M το μητρώο μάζας, C το μητρώο απόσβεσης και K το μητρώο δυσκαμψίας. Όλα τα τελευταία μητρώα έχουν διαστάσεις $n \times n$ ενώ $u = u(t)$ και $p(t)$ τα διανύσματα μετατοπίσεων και εξωτερικής φόρτισης αντίστοιχα.

Η επίλυση της (1.1) μαζί με τις κατάλληλες αρχικές συνθήκες $u(0), \dot{u}(0)$ και κατ' επέκταση, τα ποσοτικά και ποιοτικά χαρακτηριστικά ενός γραμμικού συστήματος ανάγονται σε ένα γραμμικό πρόβλημα ιδιοτιμών. Με τον προσδιορισμό των ιδιομορφών και ιδιοσυχνοτήτων μπορούμε να εξάγουμε συμπεράσματα σχετικά με τη δυναμική απόκριση του συστήματος μας.

Στην παρούσα εργασία, κατ' αναλογίαν, επιδιώκουμε ύστερα από τον ορισμό της έννοιας της ιδιομορφής και για μη γραμμικά συστήματα την ποσοτική και ποιοτική μελέτη των τελευταίων.

Αρχικά, διατυπώνεται μια εισαγωγική περιγραφή της θεωρίας των γραμμικών συστημάτων προκειμένου να ακολουθήσει η προαναφερθείσα γενίκευση για μη γραμμικά συστήματα.

Ιδιομορφές συστήματος χωρίς απόσβεση

Για τις ελεύθερες ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση, δηλαδή $p(t) = 0$ και $C = 0$, η σχέση (1.1) παίρνει τη μορφή:

$$M\ddot{u} + Ku = 0 \quad (1.2)$$

Αναζητώντας λύση της τελευταίας εξίσωσης υπό τη μορφή $u = \beta \cdot T(t)$ με $\beta, u \in \mathbb{R}$ και $T(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ καταλήγουμε ότι η συνάρτηση $T(t)$ πρέπει να ικανοποιεί μια εξίσωση της μορφής $\ddot{T}(t) + \lambda T(t) = 0$. Η περίπτωση $\lambda = \omega^2 > 0$ έχει ενδιαφέρον για το μηχανικό, διότι αφενός αυτή παράγει ταλαντώσεις της μορφής $T(t) = a \cos(\omega t - \theta)$ και αφετέρου αυτή εμφανίζεται κυρίως λόγω της φύσης των μητρώων K, M (συμμετρικά και θετικά ορισμένα).

Υπο αυτήν την θεώρηση καταλήγουμε στο γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών:

$$(K - \omega^2 M) \cdot \beta = 0 \quad (1.3)$$

Ο προσδιορισμός των συχνοτήτων ω πραγματοποιείται επιλύοντας τη χαρακτηριστική εξίσωση $\det(K - \omega^2 M) = 0$ αφού με αυτόν τον τρόπο θα έχουμε μη τετριμμένες λύσεις ($\beta \neq 0$) λύσεις του (1.3) και αντίστοιχα της εξίσωσης (1.2).

Αφού βρούμε τις N ιδιοσυχνότητες $\omega_i > 0$, $i = 1, \dots, N$ με $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_N$, για κάθε μια ιδιοσυχνότητα ω_i προσδιορίζουμε μια βάση του υπόχωρου των διανυσμάτων β που ικανοποιούν την (1.3). Στην περίπτωση που οι συχνότητες του συστήματος είναι διακεκριμένες, σε κάθε ιδιοσυχνότητα αντιστοιχεί ένα διάνυσμα. Συνεπώς, το πλήθος των διανυσμάτων είναι N . Αυτά τα διανύσματα κανονικοποιούνται, είτε σύμφωνα με τη μέγιστη συντεταγμένη τους, είτε σύμφωνα με το μητρώο μάζας και συνθέτουν τις ιδιομορφές ταλάντωσης $\phi_i, i = 1, \dots, N$.

Αξίζει να σημειωθεί ότι υπάρχει ένας «συγχρονισμός» όλων των συντεταγμένων λόγω της βαθμωτής εξάρτησης από το $T(t)$.

Ιδιομορφές συστήματος με απόσβεση

Στην περίπτωση των ελεύθερων ταλαντώσεων με απόσβεση το μητρώο C είναι διάφορο του μηδενός και η εξίσωση κίνησης έχει τη μορφή:

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = 0 \quad (1.4)$$

Υπάρχουν δύο διαφορετικοί τρόποι προσδιορισμού ιδιομορφών-ιδιοδιανυσμάτων. Με τον τρόπο που αναπτύξαμε στα συντηρητικά συστήματα, καταλήγουμε σε ένα τετραγωνικό ιδιοπρόβλημα. Πιο συγκεκριμένα, παράγεται η χαρακτηριστική εξίσωση:

$$\det(\lambda^2 M + \lambda C + K) = 0 \quad (1.5)$$

Το ανάπτυγμα της ορίζουσας είναι πολυώνυμο $2n$ βαθμού ως προς λ για το σύστημα (n -βάθμιο) που εξετάζουμε. Αν υποθέσουμε ότι το πλήθος των διακεκριμένων ιδιοτιμών είναι $2N$ τότε η γενική λύση της (1.4) γράφεται:

$$u = \sum_{n=1}^{2N} c_n \beta_n e^{\lambda_n t} \quad (1.6)$$

όπου c_n έχουμε αυθαίρετες σταθερές και β_n συμβολίζουμε τα ιδιοδιανύσματα του τετραγωνικού ιδιοπροβλήματος.

Μπορεί η επαλληλία στο γραμμικό σύστημα να ισχύει, αλλά καθώς διακρίνουμε περιπτώσεις για το είδος των ριζών λ_n δεν παρουσιάζονται οι ιδιότητες ορθογωνικότητας των ιδιομορφών ως προς τα μητρώα μάζας και δυσκαμψίας όπως στα συντηρητικά συστήματα.

Για να εκμετάλλευτούμε τις προαναφερθείσες ιδιότητες και τελικώς να επιτύχουμε αποσύζευξη των ταλαντώσεων με τον μετασχηματισμό των εξισώσεων κίνησης στο ιδιομορφικό σύστημα συντεταγμένων, εκτελούμε γραμμικοποίηση του τετραγωνικού ιδιοπροβλήματος. Πιο συγκεκριμένα, μετασχηματίζουμε τις εξισώσεις κίνησης σε εξισώσεις πρώτης τάξης με την εισαγωγή θεωρητικά ανεξάρτητων συντεταγμένων που περιγράφουν τις ταχύτητες των μαζών. Με αυτόν τον τρόπο καταλήγουμε σε ένα σύστημα της μορφής με $2n$ εξισώσεις:

$$\hat{M}\dot{x} + \hat{K}x = 0 \quad (1.7)$$

Αναζητώντας λύσεις της μορφής $x = [u \ \dot{u}]^T = \beta \cdot T(t)$ καταλήγουμε σε ένα ιδιοπρόβλημα(πρώτης τάξης) της μορφής (1.3). Με αυτόν τον τρόπο, τα ιδιοδιανύσματα β_n ικανοποιούν τη συνθήκη ορθογωνικότητας ως προς \hat{M} και \hat{K} .

Σε αυτό το σημείο αξίζει να αναφερθεί μια βασική παρατήρηση για τη συμπεριφορά της ταλάντωσης των μη συντηρητικών συστημάτων τύπου (1.4) που θα είναι χρήσιμη για τον ορισμό των μη γραμμικών ιδιομορφών. Παρατηρούμε ότι, οι μετατοπίσεις μέσα σε μια ιδιομορφή ταλάντωσης έχουν διαφορετική φάση, σε αντίθεση με τις ταλαντώσεις στα συντηρητικά συστήματα της μορφής (1.2) στις οποίες αυτές βρίσκονται σε φάση.

Κεφάλαιο 2

Μη γραμμικά συντηρητικά πολυβάθμια συστήματα

Η έννοια των ιδιομορφών, όπως περιγράφεται στο εισαγωγικό κεφάλαιο, είναι θεμελιώδους σημασίας για τη γραμμική θεωρία, διότι οι ιδιότητές τους βοηθούν τον μελετητή μηχανικό για την ανάλυση και το σχεδιασμό κατασκευών που προσομοιώνονται με βάση τη γραμμική θεωρία. Όμως η γραμμικότητα είναι μια εξιδανίκευση αφού η μη γραμμική συμπεριφορά εμφανίζεται στις πραγματικές κατασκευές και εφαρμογές του μηχανικού. Επι παραδείγματι, μη γραμμικότητες εξαιτίας της γεωμετρίας ή μη γραμμικότητες λόγω του υλικού εμφανίζονται σε μεταλλικές κατασκευές, όταν οι διατομές διαρρέουν λόγω φόρτισης ή σε σύγχρονες κατασκευές από σύνθετα υλικά. Οι τεχνικές ανάλυσης αυτών των κατασκευών που στηρίζονται στις γραμμικές ιδιομορφές οδηγούν σε αντιοικονομικό σχεδιασμό ενώ οι μέθοδοι ανάλυσης των μη γραμμικών πεπερασμένων στοιχείων οδηγούν σε αναλύσεις χρονοϊστορίας.

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται η έννοια της μη γραμμικής ιδιομορφής και χρησιμοποιείται σε εφαρμογές, ώστε να γίνει αντιληπτό ότι αποτελεί ένα θεωρητικό και μαθηματικό εργαλείο για την ερμηνεία μιας κλάσης μη γραμμικών φαινομένων.

Υπάρχουν διάφοροι ορισμοί της μη γραμμικής ιδιομορφής (ΜΓΙ), αλλά σε αυτήν την εργασία θα εξετάσουμε τους δύο βασικούς ορισμούς της ΜΓΙ κατά Rosenberg και κατά Shaw και Pierre.

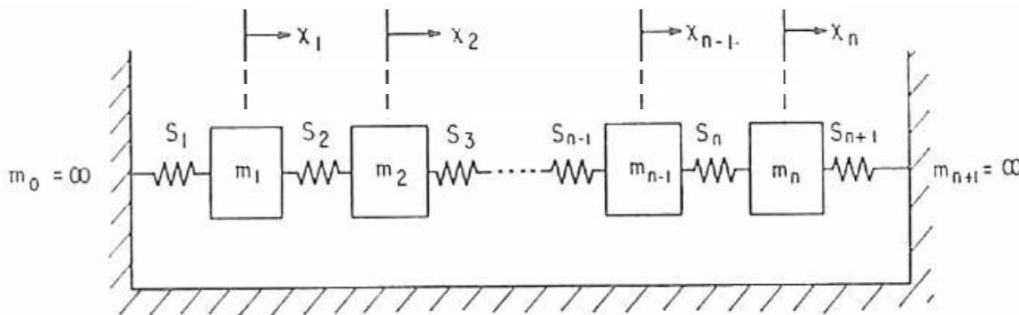
Σε αυτό το σημείο, πρέπει να αναφερθούν κάποια χαρακτηριστικά των ΜΓΙ. Η απουσία μη γραμμικών όρων στην εξίσωση κίνησης, και με τους δύο ορισμούς, οδηγεί στη γνωστή θεωρία των γραμμικών ιδιομορφών (ΓΙ). Με άλλα λόγια, υπάρχει θεωρητική συμβατότητα μεταξύ των μη γραμμικών ιδιομορφών με τις γραμμικές ιδιομορφές. Επίσης, η ύπαρξη των ΜΓΙ, αποδεικνύεται θεωρητικά από εργασίες του Lyapunov και του Poincaré. Τέλος, όσον αφορά στο πλήθος των διαφορετικών ορισμών, θα γίνει αντιληπτό, από την παρουσίασή τους ότι είναι πρακτικά ισοδύναμοι για μια κλάση συστημάτων.

2.1 Ιδιομορφή κατά Rosenberg

Ο πιο άμεσος ορισμός μιας μη γραμμικής ιδιομορφής (ΜΓΙ) με βάση τις γραμμικές ιδιομορφές (ΓΙ), δόθηκε από τις ερευνητικές εργασίες του Rosenberg [13,14,15,16].

Σε ένα συντηρητικό γραμμικό σύστημα, που κινείται σύμφωνα με μια ιδιομορφή, όλοι οι βαθμοί ελευθερίας κινούνται με την ίδια συχνότητα, ενώ το πηλίκο δυο διαφορετικών μετατοπίσεων παραμένει σταθερό. Ο Rosenberg, στηριζόμενος στην προαναφερθείσα παρατήρηση, όρισε τη ΜΓΙ ως την συγχρονισμένη ταλάντωση (“vibration in unison”) που είναι λύση της εξίσωσης κίνησης. Με άλλα λόγια, μια μη γραμμική ιδιομορφή είναι μια λύση της εξίσωσης κίνησης που οι βαθμοί ελευθερίας του συστήματος βρίσκονται όλοι μαζί ταυτόχρονα στις μέγιστες τιμές τους και περνούν από το μηδέν ταυτόχρονα. Ο ορισμός επιτρέπει κάθε μετατόπιση να εκφράζεται ως συνάρτηση μιας μετατόπισης αναφοράς. Πιο συγκεκριμένα, στην εργασία [1962] περιγράφεται αναλυτικά η έννοια της ΜΓΙ σε ένα πολυβάθμιο μη γραμμικό σύστημα με n βαθμούς ελευθερίας.

Για να δοθεί ο ορισμός μιας μη γραμμικής ιδιομορφής κατά Rosenberg θα πρέπει πρώτα να περιγραφεί ένα πολυβάθμιο σύστημα και να παραχθούν οι εξισώσεις κίνησης του. Με βάση αυτό το σύστημα θα οριστεί η έννοια της μη γραμμικής ιδιομορφής.



Σχ. 2.1: Πολυβάθμιο σύστημα για τον ορισμό μιας μη γραμμικής ιδιομορφής κατά Rosenberg

Θεωρούμε ένα σύστημα n διαδοχικών μαζών που συνδέονται μεταξύ τους με μη γραμμικά ελατήρια, των οποίων η δύναμη επαναφοράς είναι περιττή συνάρτηση ως προς την εκτροπή. Οι δύο ακραίες μάζες συνδέονται με παρόμοια ελατήρια με σταθερά σημεία. Η προαναφερθείσα διάταξη απεικονίζεται στο Σχ. 2.1. Συμβολίζουμε ως x_i την μετατόπιση της i μάζας από ένα σημείο ισορροπίας και με αποτέλεσμα τα x_i να είναι οι βαθμοί ελευθερίας του συστήματος. Αν $S_i(u)$ είναι η δύναμη επαναφοράς που ασκείται σε κάποια μάζα λόγω της εκτροπής u του ελατηρίου i τότε το σύστημα των εξισώσεων κίνησης παίρνει τη μορφή:

$$m_i \ddot{x}_i = S_i(x_{i-1} - x_i) - S_{i+1}(x_i - x_{i+1}), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{και} \quad x_0 = x_{n+1} = 0 \quad (2.1)$$

Με την υπόθεση ότι οι συναρτήσεις επαναφοράς S_i είναι αρκετά ομαλές συναρτήσεις, έτσι ώστε, να μπορούμε να τις γράψουμε σε αναπτύγματα Taylor και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι είναι όλες περιττές συναρτήσεις με $S_i(-x) = -S_i(x)$, καταλήγουμε σε μια νέα μορφή του συστήματος των εξισώσεων κίνησης:

$$m_i \ddot{x}_i = \sum_{j=1,3,\dots}^{r_i} a_{i,j} \cdot (x_{i-1} - x_i)^j - \sum_{j=1,3,\dots}^{r_{i+1}} a_{i+1,j} \cdot (x_i - x_{i+1})^j \quad (2.2)$$

$$i = 1, 2, \dots, n \text{ και } x_0 = x_{n+1} = 0$$

Για λόγους αδιαστατοποίησης εισάγω τις μεταβλητές $\xi_i = \sqrt{m_i} x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ οπότε το σύστημα των εξισώσεων κίνησης παίρνει τη μορφή:

$$\ddot{\xi}_i = \sum_{j=1,3,\dots}^{r_i} \frac{a_{i,j}}{\sqrt{m_i}} \cdot \left(\frac{\xi_{i-1}}{\sqrt{m_{i-1}}} - \frac{\xi_i}{\sqrt{m_i}} \right)^j - \sum_{j=1,3,\dots}^{r_{i+1}} \frac{a_{i+1,j}}{\sqrt{m_i}} \cdot \left(\frac{\xi_i}{\sqrt{m_i}} - \frac{\xi_{i+1}}{\sqrt{m_{i+1}}} \right)^j \quad (2.3)$$

$$i = 1, 2, \dots, n \text{ και } m_0 = m_{n+1} = \infty$$

Επειδή το σύστημα είναι συντηρητικό, το σύστημα γράφεται στη μορφή:

$$\ddot{\xi}_i = \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.4)$$

Συνάρτηση Δυναμικού U	
$U = - \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1,3,\dots}^{r_i} \left[\frac{a_{i,j}}{j+1} \cdot \left(\frac{\xi_{i-1}}{\sqrt{m_{i-1}}} - \frac{\xi_i}{\sqrt{m_i}} \right)^{j+1} \right], \quad i = 1, 2, \dots, n \text{ και } m_0 = m_{n+1} = \infty$	(2.5)
Κινητική Ενέργεια T	
$2T(\dot{\xi}_i) = \sum_i^n \dot{\xi}_i^2$	(2.6)

Ιδιομορφές σε γραμμικό σύστημα

Όπως είδαμε στην εισαγωγή, για να βρούμε τις ιδιομορφές ενός γραμμικού συστήματος ($j=1$) αναζητούμε λύσεις της μορφής $\xi_i(t) = \beta_i \cos(\omega t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ και καταλήγουμε σε ένα πρόβλημα ιδιοτιμών. Συνεπώς, πρώτα βρίσκουμε τις ιδιοτιμές (που σχετίζονται με τις ιδιοσυχνότητες) και κατόπιν βρίσκουμε τις ιδιομορφές. Η μέθοδος αυτή, όπως είναι διατυπωμένη, δεν μπορεί να γενικευτεί άμεσα αφού σε ένα πρόβλημα μη γραμμικού πολυβάθμιου συστήματος δεν γνωρίζουμε a priori τη μορφή των ξ_i όπως στη γραμμική περίπτωση.

Αναζητούμε μια συγκεκριμένη ιδιότητα των γραμμικών πολυβάθμιων συστημάτων που εύκολα να γενικεύεται και στα μη γραμμικά συστήματα. Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι για τις γραμμικές ιδιομορφές ισχύουν τα παρακάτω:

$$\xi_i(t) = \xi_i(t+T) \quad (2.7)$$

$$\xi_i(t) = c_i \cdot \xi_1(t) \quad (2.8)$$

Από τη σχέση (2.8) αντιλαμβανόμαστε, ότι όλες οι μάζες διέρχονται από το σημείο ισορροπίας ταυτόχρονα. Αυτό το χαρακτηριστικό επιθυμούμε να διατηρηθεί και στον ορισμό της μη γραμμικής ιδιομορφής αλλά δεν είναι πάντα εφικτό να υπάρχει η αναλογία που εμφανίζεται στη σχέση (2.8). Συνεπώς, απαιτούμε κάτι ασθενέστερο και συγκεκριμένα:

$$\xi_i = \xi_i(\xi_1) \text{ με } \xi_i(0) = 0 \quad (2.9)$$

όπου $\xi_i(\bullet)$ είναι μια πραγματική συνάρτηση μιας μεταβλητής.

Τέλος, πρέπει να παρατηρήσουμε μια τελευταία ιδιότητα που έχουν οι γραμμικές ιδιοτιμές και πρέπει να διατηρηθεί και στις μη γραμμικές ιδιομορφές. Για να γίνει αντιληπτή, θεωρούμε το πολυβάθμιο σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση (2.4) για $j=1$ στη συνάρτηση δυναμικού (2.5), ώστε να έχουμε ένα γραμμικό σύστημα. Αν τη στιγμή $t=0$ απομακρύνουμε το σύστημα σε παραμόρφωση που δίνεται από μια ιδιομορφή και το αφήσουμε χωρίς αρχική ταχύτητα, τότε το σύστημα θα κάνει ταλάντωση σύμφωνα με τις σχέσεις (2.7) και (2.8). Στο χρόνο $t=0$ παρατηρούμε ότι ισχύει:

$$\frac{d\xi_1}{\partial U/\partial \xi_1} = \frac{d\xi_2}{\partial U/\partial \xi_2} = \dots = \frac{d\xi_n}{\partial U/\partial \xi_n} \quad (2.10)$$

Όλα τα προηγούμενα έχουν μια γεωμετρική ερμηνεία στο ορθοκανονικό σύστημα $n+1$ διαστάσεων με άξονες τα $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, U$. Αφού τα σώματα αφήνονται, η αρχική ενέργεια $U = -U_0$ που είναι μόνο δυναμική αποτελεί το σύνολο της μηχανικής ενέργειας του. Επειδή το σύστημα είναι συντηρητικό και δεν υπάρχει αιτία που να προσφέρει ενέργεια στο συνολικό σύστημα, η δυναμική ενέργεια δεν μπορεί να ξεπεράσει την αρχική δυναμική ενέργεια $-U_0$ που έχει το σύστημα. Αυτό το χαρακτηριστικό απεικονίζεται με την προβολή της ισοδυναμικής καμπύλης $U = -U_0$ στον n -διάστατο χώρο με άξονες $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ ως μια οριακή επιφάνεια που δεν μπορεί να ξεπεραστεί καθώς μεταβάλλεται το t . Ταυτόχρονα, οι σχέσεις (2.8) για $i=2, \dots, n$ απεικονίζουν ένα ευθύγραμμο τμήμα στον προαναφερθέντα χώρο αφού υπάρχει η οριακή επιφάνεια $U = -U_0$. Τέλος, η σχέση (2.10) μεταφράζεται ως μια συνθήκη καθετότητας σε αυτήν την οριακή επιφάνεια.

Συγκεντρωτικά, μπορούμε να διατυπώσουμε τους ορισμούς του Rosenberg (1962) για τη γραμμική ιδιομορφή, που είναι σε συμφωνία με τον κλασσικό ορισμό της, ενώ επίσης μπορεί να γενικευτεί και σε μη γραμμικά συστήματα σύμφωνα με τις παρατηρήσεις που προαναφέρθηκαν.

- Ορισμός Γραμμικής Ιδιομορφής (Rosenberg 1962)

Μια ιδιομορφή ενός γραμμικού συστήματος της μορφής (2.4) με συνάρτηση δυναμικού που δίνεται από τη σχέση (2.5) με $j=1$ είναι μια ευθεία γραμμή στο χώρο $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ που ορίζεται από $n-1$ εξισώσεις:

$$\xi_i(t) = c_i \cdot \xi_1(t), \quad i = 2, \dots, n \quad (2.11)$$

όπου για κάθε t ισχύουν συνθήκες περιοδικότητας $\xi_i(t) = \xi_i(t+T)$ για τις λύσεις του συστήματος των εξισώσεων (2.4). Αυτή η ευθεία γραμμή βρίσκεται μέσα στο ελλειψοειδές που ορίζεται από τη σχέση $U = -U_0$, το τέμνει κάθετα σύμφωνα με τη σχέση (2.10) και διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

- ✓ Παράδειγμα για ένα διβάθμιο σύστημα

Για $n=2$ και $m_1 = m_2 = 1$ το διβάθμιο σύστημα της σχέσης (2.4) παίρνει τη μορφή:

$$\ddot{\xi}_1 = \frac{\partial U}{\partial \xi_1} \quad \text{και} \quad \ddot{\xi}_2 = \frac{\partial U}{\partial \xi_2} \quad (2.12)$$

όπου η συνάρτηση δυναμικού για $j=1$ είναι:

$$U = -\frac{a_1}{2} \cdot (\xi_1)^2 - \frac{a_2}{2} \cdot (\xi_1 - \xi_2)^2 - \frac{a_3}{2} \cdot (\xi_2)^2 \quad (2.13)$$

Οι εξισώσεις κίνησης στις φυσικές συντεταγμένες x_1 και x_2 είναι οι ακόλουθες:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -a_1 \cdot x_1 - a_2 \cdot (x_1 - x_2) \\ \ddot{x}_2 &= a_2 \cdot (x_1 - x_2) - a_3 \cdot x_2 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Οι παραπάνω σχέσεις γράφονται σε μητρική μορφή:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & -a_2 \\ -a_2 & a_2 + a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Λόγω της επιλογής των μοναδιαίων μαζών ($m_1 = m_2 = 1$), οι φυσικές συντεταγμένες που περιγράφουν το σύστημα είναι ίσες με τις κανονικοποιημένες οπότε $x_i = \xi_i$. Επιλέγω συγκεκριμένες τιμές των a_1, a_2 και a_3 ώστε να παρουσιαστούν αριθμητικά αποτελέσματα. Υποθέτοντας ότι οι δυσκαμψίες είναι $a_1 = 1, a_2 = 2$ και $a_3 = 3$, το σύστημα μας μπορεί να περιγραφεί με τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

$$M\ddot{u} + Ku = 0 \quad (2.16)$$

με μητρώα $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ και $K = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$.

Επιλύοντας το κλασσικό ιδιοπρόβλημα βρίσκουμε:

- ✓ Ιδιοσυχνότητα: $\omega_1 = 1.328$ με αντίστοιχη ιδιομορφή: $v_1 = [0.851 \quad 0.526]^T$
- ✓ Ιδιοσυχνότητα: $\omega_2 = 2.497$ με αντίστοιχη ιδιομορφή: $v_2 = [-0.526 \quad 0.851]^T$.

Σύμφωνα με τον ορισμό του Rosenberg οι ιδιομορφές περιγράφονται από τις ακόλουθες ευθείες:

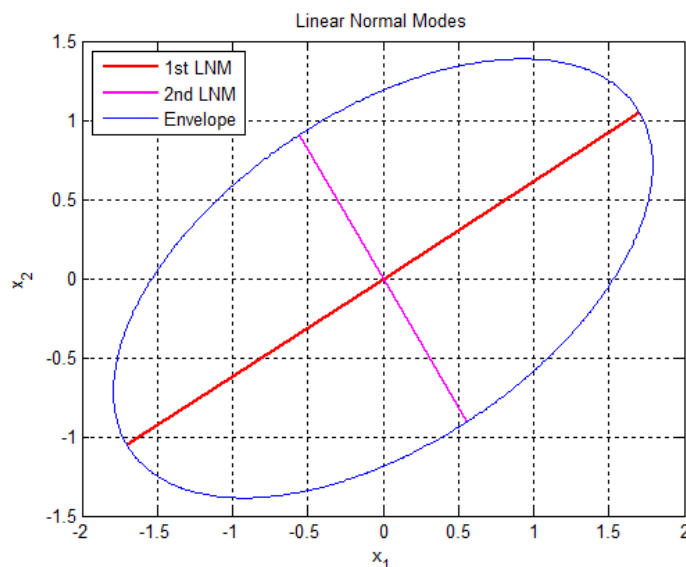
$$1^{\text{η}} \text{ ιδιομορφή: } x_2(t) = 0.618 \cdot x_1(t) \text{ και } 2^{\text{η}} \text{ ιδιομορφή: } x_2(t) = -1.618 \cdot x_1(t)$$

όπου $x_1(t)$ και $x_2(t)$ περιοδικές λύσεις του συστήματος.

Επιλέγοντας μια συγκεκριμένη ενέργεια για το σύστημα $U_0 = 3.528$ χαράσσω την περιβάλλουσα έλλειψη ενέργειας:

$$U(x_1, x_2) = -\frac{1}{2} \cdot (x_1)^2 - (x_1 - x_2)^2 - \frac{3}{2} \cdot (x_2)^2 = -U_0 \quad (2.17)$$

και τις ευθείες-ιδιομορφές στο σχήμα που ακολουθεί:



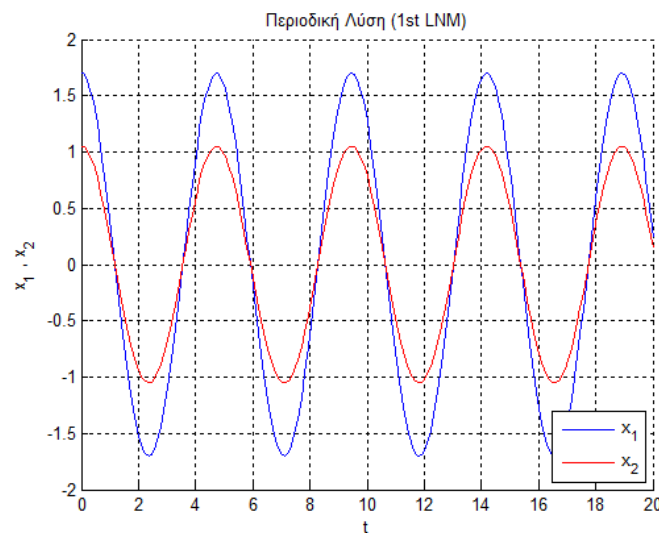
Σχ. 2.2: Γραμμικές ιδιομορφές (configuration space) – Ιδιομορφικές σχέσεις

Μετασχηματίζουμε το σύστημα των εξισώσεων κίνησης σε μορφή χώρου κατάστασης (State space):

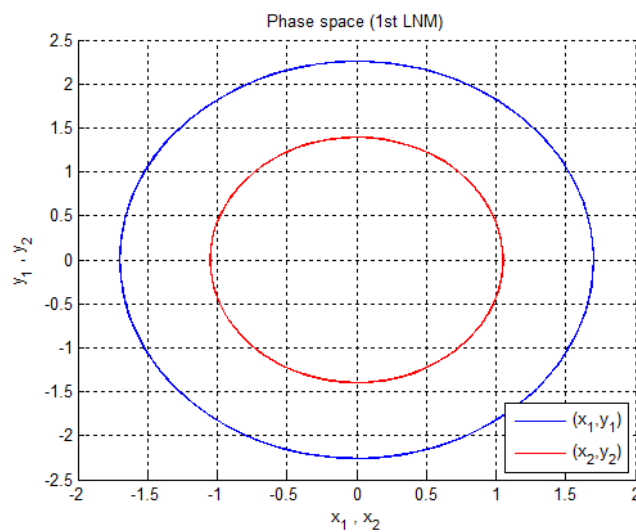
$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_1 - a_2 & a_2 & 0 & 0 \\ a_2 & -a_2 - a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Σύμφωνα με τον ορισμό του Rosenberg, αν αφήσουμε το σύστημα από το σημείο της περιβάλλουσας που τέμνεται με κάποια ιδιομορφή τότε αυτό θα εκτελέσει περιοδική κίνηση και για κάθε χρόνο t θα ισχύει η εξίσωση (2.11). Εκτελώντας το αριθμητικό πείραμα παράγονται τα ακόλουθα σχήματα.

Για $[x_1 \ x_2 \ \dot{x}_1 \ \dot{x}_2]^T = [1.701 \ 1.052 \ 0 \ 0]^T$ θα εμφανίζεται η πρώτη ιδιομορφή:

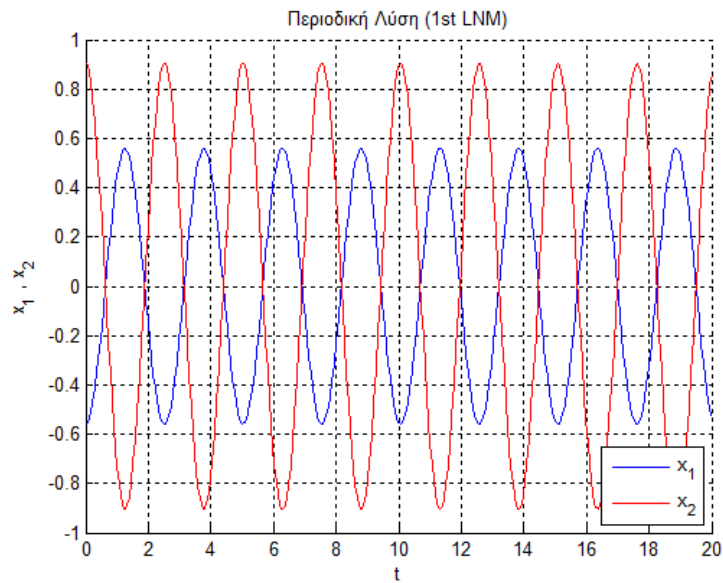


Σχ. 2.3: Η περιοδική λύση της πρώτης ιδιομορφής – Συγχρονισμός συντεταγμένων

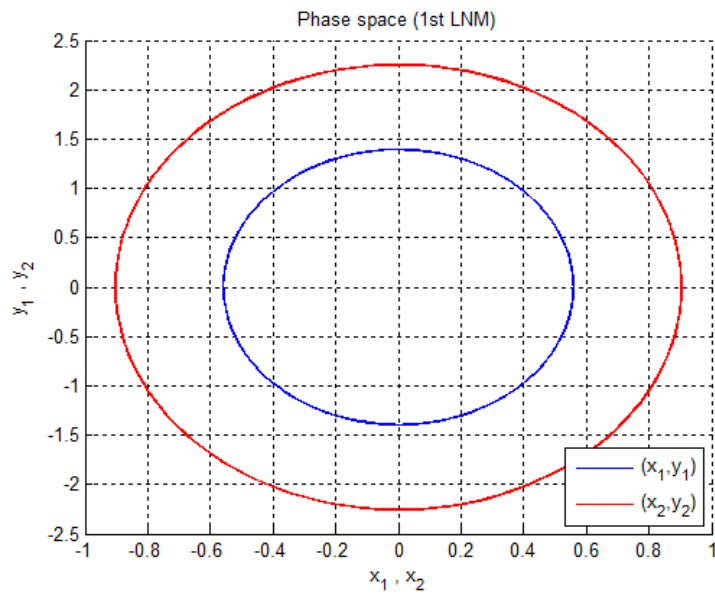


Σχ. 2.4: Οι περιοδικές λύσεις στο χώρο φάσης ως κλειστές καμπύλες

Για $[x_1 \ x_2 \ \dot{x}_1 \ \dot{x}_2]^T = [-0.559 \ 0.905 \ 0 \ 0]^T$ θα εμφανίζεται η δεύτερη ιδιομορφή:



Σχ. 2.5: Περιοδική λύση της δεύτερης ιδιομορφής



Σχ. 2.6: Επίπεδο φάσης των συντεταγμένων της δεύτερης ιδιομορφής

- Ορισμός Μη Γραμμικής Ιδιομορφής (Rosenberg 1962)

Μια ιδιομορφή ενός συστήματος της μορφής (2.4), με συνάρτηση δυναμικού που δίνεται από τη σχέση (2.5), είναι μια γραμμή στο χώρο $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ που ορίζεται από $n-1$ συναρτήσεις:

$$\xi_i = \xi_i(\xi_1) \quad i = 2, 3, \dots, n \quad (2.19)$$

όπου για κάθε t ισχύουν συνθήκες περιοδικότητας $\xi_i(t) = \xi_i(t+T)$ για τις λύσεις του συστήματος των εξισώσεων (2.4). Αυτή η καμπύλη γραμμή βρίσκεται μέσα στη περιβάλλουσα, που ορίζεται από τη σχέση $U = -U_0$, διέρχεται από την αρχή των αξόνων στο σύστημα $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ δηλαδή ισχύει $\xi_i(0) = 0$ και τέλος τέμνει κάθετα την περιβάλλουσα του δυναμικού.

Όλα τα προαναφερθέντα αναφέρονται για την περιγραφή μιας μόνο ιδιομορφής. Συνεπώς για m ιδιομορφές ενός μη γραμμικού συστήματος, χρειάζονται $m \cdot (n-1)$ συναρτήσεις σύμφωνα με τη σχέση (2.19) και τις οποίες συμβολίζουμε ως ξ_{im} .

Πέρα από τον αυστηρό ορισμό που αναφέραμε, η μη γραμμική ιδιομορφή ως έννοια μπορεί να γίνει αντιληπτή από τις ιδιοτητές της. Λέμε ότι ένα μη γραμμικό σύστημα ταλαντώνεται σύμφωνα με μια ΜΓΙ, όταν όλες οι μάζες εκτελούν περιοδική κίνηση ίδιας περιόδου και διέρχονται ταυτόχρονα από τα σημεία ισορροπίας του (συνήθως εξ ορισμού το μηδέν). Επιπρόσθετα, ένα βασικό χαρακτηριστικό της κίνησης σύμφωνα με μια μη γραμμική ιδιομορφή, είναι ότι, σε κάθε χρονική στιγμή οι θέσεις όλων των μαζών προσδιορίζονται μονοσήμαντα συναρτήσει της θέσης μιας συγκεκριμένης μάζας από αυτές (κόμβος αναφοράς).

Όλα τα προαναφερθέντα περιγράφουν τα χαρακτηριστικά μιας μη γραμμικής ιδιομορφής αλλά δεν έχει περιγραφεί ακόμα μια τεχνική υπολογισμού τους. Υπάρχουν αναλυτικές, ημιαναλυτικές και υπολογιστικές τεχνικές για τον υπολογισμό τους. Προτού εστιάσουμε στον τρόπο υπολογισμού τους, θα πρέπει να παρουσιάσουμε κάποιες ιδιότητες των μη γραμμικών συστημάτων και πως αυτές συνδέονται με τις μη γραμμικές ιδιομορφές.

2.2 Ιδιότητες των μη γραμμικών ιδιομορφών (συστημάτων)

Ήδη από την εργασία του Rosenberg διακρίνονται κατηγορίες των ΜΓΙ, προκειμένου να μελετηθούν οι ιδιοτητές τους και να κατηγοριοποιηθούν. Οι σχέσεις (2.19) στη γενικότερη περίπτωση περιγράφουν γραμμές στο χώρο $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ που είναι, είτε καμπύλες, είτε ευθείες. Στην ειδική περίπτωση, που έχουμε ένα γραμμικό σύστημα, ο ορισμός τους είναι ισοδύναμος με τη σχέση (2.11) και συνεπώς στο χώρο $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ έχουμε ευθείες γραμμές, όπως είδαμε και στο παράδειγμα. Ο Rosenberg έδειξε πως υπάρχουν συστήματα (ομογενή ή εκφυλισμένα), που έχουν ευθύγραμμες ιδιομορφικές γραμμές, όπως τα γραμμικά συστήματα. Οι τελευταίες ιδιομορφές αποκαλούνται «όμοιες ιδιομορφές» (similar NNMs) όπου συναντώνται, ενώ όλες οι υπόλοιπες, που έχουν καμπύλη μορφή στο χώρο $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ θεωρούνται «ανόμοιες ιδιομορφές» (Nonsimilar NNMs).

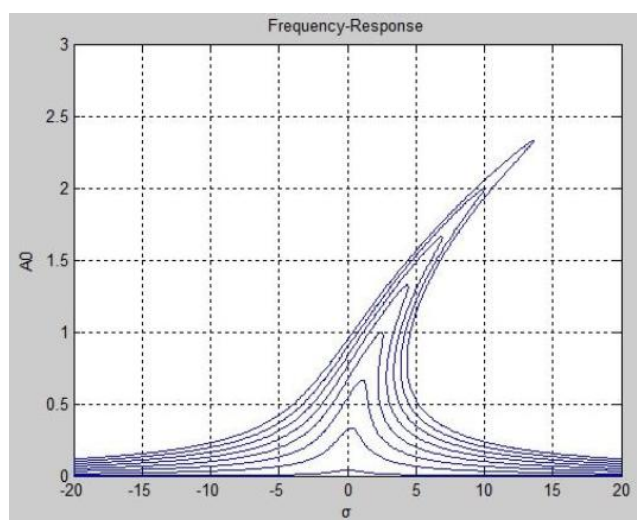
Σε αυτό το σημείο θα αναφερθούν θεμελιώδεις ιδιότητες των NNMs και θα γίνει σύγκριση με τις γραμμικές ιδιομορφές, ώστε να αναδειχθούν φαινόμενα των μη γραμμικών συστημάτων.

1. Επιρροή της ενέργειας του συστήματος στις συχνότητες ταλάντωσης

Σε ένα μονοβάθμιο σύστημα, που περιγράφεται από την εξίσωση Duffing

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon k x^3 = \varepsilon f \cos(\Omega t) \quad (2.20)$$

και υποβάλλεται σε εξωτερικό αρμονικό φορτίο, είναι δυνατό να σχεδιάσουμε το διάγραμμα συχνότητας-απόκρισης με τη βοήθεια της θεωρίας διαταραχών σε μια περιοχή του κύριου συντονισμού.



Σχ. 2.7: Διάγραμμα συχνότητας-απόκρισης για εξαναγκασμένη ταλάντωση μονοβάθμιου ταλαντωτή

Η μεταβλητή «σ», που εμφανίζεται στο σχήμα, δηλώνει την απόσταση της συχνότητας που μας ενδιαφέρει από τη συχνότητα του γραμμικού συντονισμού, ενώ οι διαφορετικές καμπύλες αντιστοιχούν σε διαφορετική εξωτερική διέγερση. Παρατηρούμε ότι, καθώς αυξάνεται η ενέργεια του συστήματος (μέσω της αύξησης του πλάτους διέγερσης), υπάρχει «καμπύλωση» του διαγράμματος και συγκεκριμένα υπάρχει αλλαγή στη συχνότητα όπου παρατηρείται συντονισμός και μέγιστο πλάτος ταλάντωσης.

Όλα τα προηγούμενα αποτελούν βασικό χαρακτηριστικό των μη γραμμικών συστημάτων και παρατηρούνται και σε πολυβάθμια συστήματα. Αυτή η εξάρτηση κρίσιμης συχνότητας-ενέργειας αποτυπώνεται και στις μη γραμμικές ιδιομορφές, όπως ορίστηκαν. Σε αντίθεση με τα γραμμικά συστήματα, που καθώς αυξάνεται η ενέργειά τους η συχνότητα μιας ιδιομορφής παραμένει σταθερή, στα μη γραμμικά συστήματα αναμένεται ότι μια ιδιομορφή δεν θα αντιστοιχεί σε συγκεκριμένη συχνότητα καθώς μεταβάλλεται η ενέργεια του συστήματος.

Είναι αναμενόμενο ότι για χαμηλές ενέργειες, δηλαδή όταν ένα συντηρητικό σύστημα αφήνεται με αρχικές συνθήκες $\|x_0\| \ll 1$, ένα σύστημα με πολυωνυμικούς όρους όπως το (2.20) θα συμπεριφέρεται πολύ κοντά στο αντίστοιχο γραμμικό σύστημα ($\varepsilon = 0$). Επομένως, οι ιδιομορφές ενός μη γραμμικού συστήματος για χαμηλές ενέργειες θα πρέπει να έχουν κοινά χαρακτηριστικά με τις αντίστοιχες γραμμικές ιδιομορφές. Η προαναφερθείσα παρατήρηση είναι συμβατή με τον ορισμό κατά Rosenberg και μάλιστα, όπως θα δούμε, χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό των ΜΓΙ σε υψηλότερες ενέργειες.

Σε αυτό το σημείο, γίνεται αντιληπτό ότι δεν έχει νόημα η χάραξη μιας μη γραμμικής ιδιομορφής ανεξάρτητα της ενέργειας που πραγματοποιείται. Στη διεθνή βιβλιογραφία έχει προταθεί η αναπαράσταση Συχνότητας-Ενέργειας (Frequency-Energy Plot, FEP) στην οποία είναι ορατή η συμπεριφορά που προαναφέραμε αφού για χαμηλές ενέργειες μια ιδιομορφή βρίσκεται κοντά στην αντίστοιχη μη γραμμική ενώ καθώς η ενέργεια αυξάνεται παρατηρούμε μεταβολή στη συχνότητα των ιδιομορφών. Πιο συγκεκριμένα για το διάγραμμα FEP, μια κίνηση σύμφωνα με μια μη γραμμική ιδιομορφή αντιστοιχεί σε ένα σημείο σε αυτό που έχει ως τεταγμένη τη συνολική ενέργεια του συντηρητικού συστήματος κατά τη διάρκεια της κίνησης και ως τεταγμένη τη συχνότητα που αντιστοιχεί στην ελάχιστη περίοδο της περιοδική κίνησης του συστήματος.

Όλη αυτή η λογική χάραξης του διαγράμματος συχνότητας-ενέργειας οδηγεί στη δημιουργία κλάδων που αποτυπώνονται στο διάγραμμα ως συνεχείς γραμμές και κάθε σημείο τους αποτελεί μια μη γραμμική ιδιομορφή. Αυτή η οικογένεια μη γραμμικών ιδιομορφών έχει κοινά ποιοτικά χαρακτηριστικά και συνεπώς τη χρησιμοποιούμε ως εργαλείο για εκτίμηση της συμπεριφοράς της κατασκευής μας.

Σε αυτό το σημείο, αξίζει να αναφερθεί, ότι αν προσπαθήσουμε να σχεδιάσουμε το διάγραμμα συχνότητας-ενέργειας για ένα γραμμικό σύστημα, οι κλάδοι των ιδιομορφών θα είναι παράλληλοι με τον άξονα της ενέργειας αφού, όλες οι ιδιομορφικές κινήσεις θα αντιστοιχούν σε μια μόνο συχνότητα, αυτήν που υπολογίζεται λύνοντας το ιδιοπρόβλημα.

2. Ιδιομορφική αλληλεπίδραση – Εσωτερικοί συντονισμοί

Ένα ιδιαίτερο φαινόμενο που παρατηρείται στα μη γραμμικά συστήματα, ενώ δε λαμβάνει χώρα στα γραμμικά, είναι η ιδιομορφική αλληλεπίδραση και η ύπαρξη εσωτερικών συντονισμών. Με άλλα λόγια, στα μη γραμμικά συστήματα είναι δυνατή η «απότομη» μεταβολή της συχνότητας και του πλάτους ταλάντωσης, στα πλαίσια της αλληλεπίδρασης δύο διαφορετικών ιδιομορφών σε ένα επίπεδο ενέργειας. Αυτό το χαρακτηριστικό δεν υπάρχει στα γραμμικά συστήματα. Η απεικόνισή του στο διάγραμμα συχνότητας-ενέργειας επιτυγχάνεται με την παρουσία νέων κλάδων ιδιομορφών, που συνθέτουν οικογένειες με τα χαρακτηριστικά αλληλεπίδρασης. Ο μηχανισμός λειτουργίας τους θα περιγραφεί αναλυτικότερα στο σημείο που θα παραχθούν τα διαγράμματα συχνότητας-ενέργειας.

3. Ιδιομορφικές διακλαδώσεις και ευστάθεια

Ήδη, από την περίπτωση της ιδιομορφικής αλληλεπίδρασης είδαμε ότι υπάρχουν κλάδοι ιδιομορφών που δεν εμφανίζονται στα γραμμικά συστήματα. Εκτός από αυτούς τους εσωτερικούς συντονισμούς σε ένα μη γραμμικό σύστημα υπάρχουν και άλλες ιδιομορφές, που δεν συνδέονται με αυτές που υπάρχουν στα γραμμικά συστήματα. Αυτές οι επιπρόσθετες ιδιομορφές εμφανίζονται λόγω ιδιομορφικών διακλαδώσεων και έχουν σαν αποτέλεσμα ο τελικός αριθμός των ιδιομορφικών κλάδων να ξεπερνά το πλήθος των βαθμών ελευθερίας. Με άλλα λόγια, θα πρέπει να ξεφύγουμε από τη λογική ότι ένα n – βαθμιο μη γραμμικό σύστημα θα έχει n το πλήθος ιδιομορφικών κλάδων κάτι το οποίο ισχύει για τα γραμμικά συστήματα.

2.3 Αριθμητικός υπολογισμός των ιδιομορφών

Ο Rosenberg όρισε τις μη γραμμικές ιδιομορφές το 1962 όπως είδαμε και παρουσίασε κάποιες αναλυτικές και ημιαναλυτικές τεχνικές για τον υπολογισμό τους σε συγκεκριμένους τύπους συστημάτων. Ύστερα από τις εργασίες αυτές, υπήρχαν ερευνητές (Manevitch, Mikhlin και Vakakis) που πρότειναν νέες αναλυτικές λύσεις [21]. Στην παρούσα εργασία, θα εστιάσουμε σε υπολογιστικούς τρόπους. Αρχικά παρουσιάζουμε μια τεχνική που αναπτύχθηκε από τις εργασίες του Kerschen και Peeters [5,6] και κατόπιν γίνεται περιγραφή και εφαρμογή ενός αλγόριθμου βελτιστοποίησης του Slater [26] για τον αριθμητικό υπολογισμό των ιδιομορφών.

2.3.1 Τεχνική αριθμητικής συνέχειας (numerical continuation)

Υπολογίζονται οι κινήσεις των μη γραμμικών ιδιομορφών με τη χρήση μιας τεχνικής «σκόπευσης» (shooting), σε συνδυασμό με μια pseudo-arclength μέθοδο προκειμένου να επιτευχθεί αριθμητικά η συνέχεια του κλάδου των ιδιομορφών.

Ο ορισμός του Rosenberg απαιτεί τον προσδιορισμό περιοδικών λύσεων ενός συστήματος συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Αρχικά, μετασχηματίζουμε αυτές τις εξισώσεις κίνησης του πολύβαθμιου συστήματος σε μορφή χώρου κατάστασης:

$$\dot{z} = g(z) \quad (2.21)$$

όπου $z = [x^T \quad \dot{x}^T]^T$ και x το διάνυσμα των n βαθμών ελευθερίας.

Αυτό το μετασχηματισμό τον έχουμε κάνει ήδη στη περίπτωση του γραμμικού συστήματος, αφού η σχέση (2.15) μετασχηματίστηκε στη σχέση (2.18). Η μητρική παρουσίαση της σχέσης (2.18) στη μορφή $g(z) = Az$ είναι ίδιον φαινόμενο των γραμμικών συστημάτων. Στη γενικότερη περίπτωση των μη γραμμικών συστημάτων οι εξισώσεις κίνησης γράφονται:

$$M\ddot{x} + Kx + F_{nl}(x, \dot{x}) = 0 \quad (2.22)$$

και συνεπώς μετά το μετασχηματισμό στη μορφή (2.21) έχουμε:

$$\dot{z} = g(z) = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ -M^{-1}[Kx + F_{nl}(x, \dot{x})] \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Το τελευταίο είναι ουσιαστικά ένα σύστημα $2n$ εξισώσεων με $2n$ αγνώστους. Η λύση του $z(t; z_0)$ είναι ένα διάνυσμα διάστασης $2n$ που εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες $z_0 = z(0)$.

✓ Μέθοδος σκόπευσης

Για την εύρεση των μη γραμμικών ιδιομορφών κατά Rosenberg, αναζητούμε ουσιαστικά τις περιοδικές λύσεις του αυτόνομου συστήματος (2.21). Οι άγνωστοι που θέλουμε να προσδιορίσουμε είναι οι αρχικές συνθήκες z_{p0} και η περίοδος T για τα οποία ισχύει η συνθήκη περιοδικότητας:

$$H(z_{p0}, T) = z_p(T; z_{p0}) - z_{p0} = 0 \quad (2.24)$$

Για κάθε διάνυσμα αρχικών συνθηκών z_0 και ένα χρόνο T ορίζεται η συνάρτηση σκόπευσης $H(z_0, T) = z(T; z_0) - z_0$, όπου υπολογίζει τη διαφορά μεταξύ κάποιων αρχικών συνθηκών και της καταστάσής του συστήματος μετά από χρόνο T . Η περιοδικότητα της λύσης προκύπτει, λοιπόν, από τον μηδενισμό αυτής της ποσότητας για κατάλληλα z_{p0} και T . Ο αριθμητικός υπολογισμός της τιμής που παίρνει η συνάρτηση σε ένα σημείο (z_0, T) , γίνεται με κάποια μέθοδο επίλυσης προβλημάτων αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.) για συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (όπως Runge-Kutta 4^{ης} τάξης) ώστε να προσδιορίσουμε το διάνυσμα $z(T; z_0)$ και μετά αφαιρούμε το διάνυσμα z_0 .

Όπως είδαμε, υπάρχει μεγάλο πλήθος ιδιομορφών ανάλογα με την ενέργεια του συστήματος και με τη συχνότητα της ταλάντωσης. Η επίλυση, λοιπόν, της (2.23) με τη συνθήκη περιοδικότητας θα γίνει με μια επαναληπτική λογική τύπου Newton-Raphson σε συγκεκριμένες περιοχές (z_0, T) .

Ξεκινάμε από το σημείο $(z_0^{(0)}, T^{(0)})$ και με μια επαναληπτική διαδικασία κάνουμε διορθώσεις σε αυτές της τιμές, ώστε να καταλήξουμε να ισχύει η σχέση (2.24). Αν συμβολίσουμε $\Delta z_{p0}^{(k)}$ και $\Delta T^{(k)}$ τις διορθώσεις των αρχικών συνθηκών και του χρόνου αντίστοιχα τότε μπορούμε να βρούμε το επαναληπτικό σχήμα χρησιμοποιώντας το θεώρημα Taylor. Πιο συγκεκριμένα, για τις διορθώσεις έχουμε:

$$z_{p0}^{(k+1)} = z_{p0}^{(k)} + \Delta z_{p0}^{(k)} \quad (2.25)$$

$$T^{(k+1)} = T^{(k)} + \Delta T^{(k)} \quad (2.26)$$

ενώ χρησιμοποιώντας το θεώρημα Taylor (αμελώντας όρους υψηλότερης τάξης) ισχύουν τα παρακάτω:

$$H(z_{p0}^{(k+1)}, T^{(k+1)}) = H(z_{p0}^{(k)} + \Delta z_{p0}^{(k)}, T^{(k)} + \Delta T^{(k)}) = 0 \quad (2.27)$$

$$\left. \frac{\partial H}{\partial z_{p0}} \right|_{(z_{p0}^{(k)}, T^{(k)})} \Delta z_{p0}^{(k)} + \left. \frac{\partial H}{\partial T} \right|_{(z_{p0}^{(k)}, T^{(k)})} \Delta T^{(k)} = -H(z_{p0}^{(k)}, T^{(k)}) \quad (2.28)$$

Αυτή η επαναληπτική μέθοδος συγκλίνει γρήγορα σε ένα σημείο τέτοιο, ώστε $H(z_{p0}, T) \approx 0$ όταν το σημείο που ξεκινάμε είναι σε μια περιοχή του. Ο τοπικός χαρακτήρας της σύγκλισης οφείλεται στο γεγονός ότι είναι μέθοδος τύπου Newton-Rashson και θέλει ιδιαίτερη προσοχή κατά την υλοποίηση του αλγορίθμου μην απομακρυνθούμε από τις περιοχές που ανήκουν στον ίδιο κλάδο ιδιομορφών.

Η υλοποίηση της μεθόδου σκόπευσης σύμφωνα με τη σχέση (2.28) απαιτεί τον υπολογισμό του Ιακωβιανού πίνακα $\left. \frac{\partial H}{\partial z_{p0}} \right|_{(z_{p0}^{(k)}, T^{(k)})}$ διαστάσεων $2n \times 2n$ και του

διανύσματος $\left. \frac{\partial H}{\partial T} \right|_{(z_{p0}^{(k)}, T^{(k)})}$ διάστασης $2n$. Αφού $H(z_0, T) = z(T; z_0) - z_0$ ισχύουν:

$$\left. \frac{\partial H}{\partial T} (z_0, T) = \left. \frac{\partial z(t; z_0)}{\partial t} \right|_{t=T} = g(z(T; z_0)) \quad (2.29)$$

$$\left. \frac{\partial H}{\partial z_0} (z_0, T) = \left. \frac{\partial z(t; z_0)}{\partial z_0} \right|_{t=T} - I_{2n} \quad (2.30)$$

όπου I_{2n} ο μοναδιαίος πίνακας διαστάσεων $2n \times 2n$.

Από τη σχέση (2.29) καταλαβαίνουμε ότι το διάνυσμα $\partial H / \partial T$ το υπολογίζουμε εύκολα, αφού πρώτα με τη βοήθεια κάποιας μεθόδου, όπως η Runge-Kutta, επιλύσουμε το Π.Α.Τ. και βρούμε το $z(T; z_0)$ για κάποιες αρχικές συνθήκες z_0 . Αντίθετα, ο Ιακωβιανός πίνακας $\partial H / \partial z_0$ είναι πιο δύσκολο να προσδιορισθεί διότι πρέπει να γίνει εκτίμηση του $\partial z(t; z_0) / \partial z_0$. Στην βιβλιογραφία έχουν προταθεί δύο τρόποι υπολογισμού του τελευταίου πίνακα.

- i. Ο πρώτος τρόπος βασίζεται στο γεγονός ότι, ο πίνακας είναι η μεταβολή της λύσης $z(t; z_0)$ στο χρόνο t όταν οι αρχικές συνθήκες z_0 διαταράσσονται. Χρησιμοποιώντας μεθόδους πεπερασμένων διαφορών και διαταράσσοντας κατάλληλα τις αρχικές συνθήκες ώστε να γίνει αριθμητική επίλυση των εξισώσεων κίνησης με αυτές τις διαταραγμένες συνθήκες, επιτυγχάνουμε τον υπολογισμό του $\partial z(t; z_0) / \partial z_0$ και κατ'επέκταση του $\partial H / \partial z_0$.
- ii. Ο δεύτερος τρόπος στηρίζεται στη δημιουργία ενός Π.Α.Τ. που μετά την επίλυση του θα προσδιορίσουμε το $\partial z(t; z_0) / \partial z_0$. Παραγωγίζοντας τις εξισώσεις κίνησης ως προς z_0 παράγεται η διαφορική εξίσωση:

$$\frac{\partial}{\partial z_0} [\dot{z}(t; z_0)] = \frac{\partial}{\partial z_0} [g(z(t; z_0))] \quad (2.31)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial z(t; z_0)}{\partial z_0} \right] = \frac{\partial g}{\partial z_0} \Big|_{z(t; z_0)} \left[\frac{\partial z(t; z_0)}{\partial z_0} \right] \quad (2.32)$$

Για να σχηματισθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών αρκεί να βρούμε μια αρχική συνθήκη του $\partial z(t; z_0)/\partial z_0$ για $t = 0$. Μπορεί να δειχθεί αλγεβρικά ότι:

$$\frac{\partial z(0; z_0)}{\partial z_0} = I_{2n} \quad (2.33)$$

Επιλύοντας το πρόβλημα της εξίσωσης (2.32) με συνθήκη την (2.33) όπου ο άγνωστος είναι ένας πίνακας $2n \times 2n$ βρίσκουμε μετά από χρόνο T τη ζητούμενη ποσότητα. Ύστερα ο υπολογισμός του $\partial H/\partial z_0$ γίνεται από τη σχέση (2.30).

Όπως φαίνεται και στους δύο τρόπους, το υπολογιστικό κόστος είναι αρκετά μεγάλο σε αυτό το σημείο. Παρ'όλα αυτά επειδή οι εξισώσεις (2.32) είναι γραμμικές μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο σε ικανοποιητικό χρόνο. Επίσης, αν η $g(z)$ δεν είναι διαφορίσιμη τότε η μέθοδος (i) είναι μόνος τρόπος υλοποίησης.

Το σύστημα (2.28) αποτελείται από $2n$ εξισώσεις αλλά έχει $2n+1$ αγνώστους. Ο λόγος που συμβαίνει αυτό είναι διότι αν προσδιορίσουμε μια περιοδική λύση $z(t)$ τότε και κάθε άλλη συνάρτηση της μορφής $z(t + \Delta t)$ είναι λύση του συστήματος όπου Δt ένα τυχαίο χρονικό διάστημα. Αυτή η κατάσταση οφείλεται στο γεγονός ότι, από οποιοδήποτε σημείο μια τροχιάς και αν ξεκινήσουμε σε μια περιοδική λύση θα έχουμε μια αποδεκτή λύση σύμφωνα με αυτά που έχουμε υποθέσει. Επομένως, χρειαζόμαστε ακόμα μια συνθήκη που να περιορίζει αυτή την κατάσταση και ουσιαστικά να βρίσκουμε μόνο μια περιοδική λύση. Αυτή η «συνθήκη φάσης» στην απλούστερη μορφή αποτυπώνεται με το μηδενισμό κάποιας συνιστώσας της λύσης (συνήθως κάποιας ταχύτητας). Στη γενικότερη μορφή η συνθήκη φάσης είναι:

$$h(z_{p0}) = 0 \quad (2.34)$$

Συνεπώς, αναζητούμε ζεύγη (z_0, T) που να δημιουργούν περιοδικές λύσεις της (2.23) τέτοιες ώστε:

$$\begin{cases} H(z_{p0}, T) = 0 \\ h(z_{p0}) = 0 \end{cases} \quad (2.35)$$

Αυτές οι λύσεις μπορούν να προσεγγιστούν με τον αλγόριθμο σκόπευσης που έχει την επαναληπτική μορφή που διατυπώνεται από τις σχέσεις (2.25), (2.26) και (2.28).

✓ Μέθοδος αριθμητικής συνέχειας των περιοδικών λύσεων

Ο αλγόριθμος σκόπευσης, που διατυπώθηκε προηγουμένως, προσδιορίζει περιοδικές λύσεις (δηλαδή μη γραμμικές ιδιομορφές) σε μια περιοχή αρχικών συνθηκών z_0 και περιόδου T από την οποία ξεκινάμε την επαναληπτική διαδικασία. Αυτή η περιοχή, όμως, αντιπροσωπεύει ένα συγκεκριμένο επίπεδο ενέργειας μέσω των αρχικών συνθηκών z_0 που ξεκινάμε για ένα συντηρητικό σύστημα. Σε ένα γραμμικό σύστημα θα αρκούσε ένα επίπεδο ενέργειας, διότι οι ιδιοσυχνότητες δεν εξαρτώνται από την ενέργεια που βρίσκεται το σύστημα. Αντιθέτως, στα μη γραμμικά συστήματα τα ιδιομορφικά χαρακτηριστικά μεταβάλλονται συναρτήσει της ενέργειας που είναι αποθηκευμένη.

Σε αυτό το σημείο, γίνεται αντιληπτό ότι χρειαζόμαστε μια τεχνική για να μεταβούμε από ένα σημείο περιοδικής λύσης $(z_{p0(j)}, T_{(j)})$ που βρέθηκε από τον αλγόριθμο σκόπευσης σε ένα νέο σημείο περιοδική λύσης $(z_{p0(j+1)}, T_{(j+1)})$ χωρίς να αλλοιώνονται ποιοτικά χαρακτηριστικά της λύσης (π.χ. ταλάντωση σε φάση). Για αυτό το σκοπό χρησιμοποιείται μια μέθοδος συνέχειας περιοδικών λύσεων και συγκεκριμένα η τεχνική ψευδό-μήκος τόξου (pseudo-arclength method). Γνωρίζοντας ότι όλα αυτά τα σημεία $(z_{p0(j)}, T_{(j)})$ ανήκουν σε ένα κλάδο ιδιομορφών και ότι για χαμηλές ενέργειες τα συστήματα με πολυωνυμικές μη γραμμικότητες έχουν ιδιομορφές κοντά στις αντίστοιχες γραμμικές, διαθέτουμε ένα σημείο του κλάδου των ιδιομορφών από το οποίο μπορούμε να ξεκινήσουμε την επαναληπτική διαδικασία της μεθόδου pseudo-arclength. Αυτό το σημείο είναι ουσιαστικά η ιδιοσυχνότητα και οι αρχικές συνθήκες του γραμμικού ταλαντωτή που προκύπτει εάν αγνοήσουμε τις μη γραμμικότητες. Ακολουθεί αναλυτική περιγραφή της μεθόδου Pseudo-Arclength, για να αναδειχθούν πρακτικά οι προηγούμενες παρατηρήσεις που έγιναν

Pseudo-Arclength Continuation

Ξεκινώντας από ένα γνωστό ζεύγος $(z_{p0(j)}, T_{(j)})$ όπως η γραμμική ιδιομορφή για χαμηλές ενέργειες δηλαδή $(z_{p0(j)}, T_{(j)}) = (\lambda v_i, T_i)$ όπου (T_i, v_i) το ζεύγος ιδιοπεριόδου και αντίστοιχου ιδιοδιανύσματος και λ ένας συντελεστής για να οδηγηθούμε σε χαμηλές ενέργειες, μπορούμε να προσδιορίσουμε την επόμενη περιοδική λύση $(z_{p0(j+1)}, T_{(j+1)})$ σε δύο βήματα. Το πρώτο βήμα αποτελεί ένα είδος εκτίμησης του επόμενου σημείου και ονομάζεται βήμα πρόβλεψης (predictor step) ενώ το δεύτερο βήμα στηρίζεται σε μια λογική σκόπευσης και ονομάζεται βήμα διόρθωσης (corrector step). Αυτά τα βήματα φαίνονται στο σχήμα που ακολουθεί και καταλαβαίνουμε γιατί είναι απαραίτητα ώστε να ξεπεραστούν σημεία καμψής.

- Βήμα Πρόβλεψης

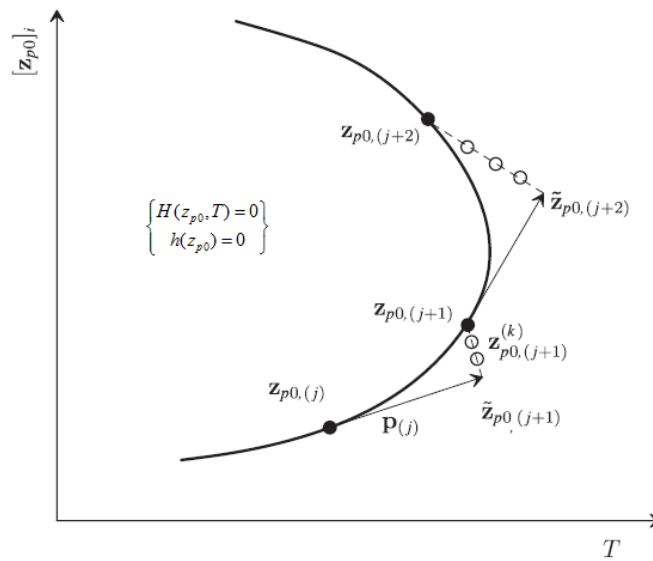
Αρχίζοντας από το σημείο j πραγματοποιείται μια πρόβλεψη της μορφής $(\tilde{z}_{p0(j+1)}, \tilde{T}_{(j+1)})$ για τις συντεταγμένες $(z_{p0(j+1)}, T_{(j+1)})$ του σημείου $j+1$. Αυτή η πρόβλεψη γίνεται σε διεύθυνση εφαπτομενικά του σημείου j οπότε ισχύει:

$$\begin{bmatrix} \tilde{z}_{p0(j+1)} \\ \tilde{T}_{(j+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{p0(j)} \\ T_{(j)} \end{bmatrix} + s_{(j)} \begin{bmatrix} p_{z(j)} \\ p_{T(j)} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

όπου $s_{(j)}$ είναι ένας πολλαπλασιαστής του μοναδιαίου εφαπτομενικού διανύσματος $p_{(j)} = [p_{z(j)}^T \ p_{T(j)}^T]^T$ που λειτουργεί ως συντελεστής βήματος. Το διάνυσμα $p_{(j)}$ προσδιορίζεται από το ακόλουθο σύστημα:

$$\begin{bmatrix} \left. \frac{\partial H}{\partial z_{p0}} \right|_{(z_{p0(j)}, T_{(j)})} & \left. \frac{\partial H}{\partial T} \right|_{(z_{p0(j)}, T_{(j)})} \\ \left. \frac{\partial h^T}{\partial z_{p0}} \right|_{(z_{p0(j)})} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{z(j)} \\ p_{T(j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Επειδή το διάνυσμα $p_{(j)}$ πρέπει να είναι μοναδιαίο, δηλαδή να ισχύει $\|p_{(j)}\|=1$, σταθεροποιούμε μια συντεταγμένη του στο σύστημα (2.37) με αποτέλεσμα να δημιουργείται ένα σύστημα με περισσότερες εξισώσεις από ότι αγνώστους. Χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο Moore-Penrose παράγεται το μοναδιαίο διάνυσμα $p_{(j)}$.



Σχ. 2.8: Απεικόνιση της διαδικασίας Pseudo-Arclength

- Βήμα διόρθωσης

Σε αυτό το βήμα, που ακολουθεί πάντα μετά από ένα βήμα πρόβλεψης, χρησιμοποιείται μια λογική σκόπευσης προκειμένου να βρεθούν περιοδικές λύσεις της (2.23) που να ικανοποιούν τις σχέσεις (2.35). Ταυτόχρονα απαιτούμε αυτές οι διορθώσεις να λαμβάνουν χώρα κάθετα στο διάνυσμα πρόβλεψης $p_{(j)}$. Όλα αυτά οδηγούν στην διατύπωση του επαναληπτικού σχήματος:

$$z_{p0(j+1)}^{(k+1)} = z_{p0(j+1)}^{(k)} + \Delta z_{p0(j+1)}^{(k)} \quad (2.38)$$

$$T_{(j+1)}^{(k+1)} = T_{(j+1)}^{(k)} + \Delta T_{(j+1)}^{(k)} \quad (2.39)$$

όπου τα $\Delta z_{p0(j+1)}^{(k)}$ και $\Delta T_{(j+1)}^{(k)}$ υπολογίζονται σύμφωνα με τις απαιτήσεις που ορίστηκαν παραπάνω και έχουν κοινή λογική προσδιορισμού με τη σχέση (2.28).

$$\begin{bmatrix} \left. \frac{\partial H}{\partial z_{p0}} \right|_{(z_{p0}^{(k)}, T_{(j+1)}^{(k)})} & \left. \frac{\partial H}{\partial T} \right|_{(z_{p0}^{(k)}, T_{(j+1)}^{(k)})} \\ \left. \frac{\partial h^T}{\partial z_{p0}} \right|_{(z_{p0}^{(k)})} & 0 \\ P_{z(j)}^T & P_{T(j)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_{p0(j+1)}^{(k)} \\ \Delta T_{(j+1)}^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -H(z_{p0}^{(k)}, T_{(j+1)}^{(k)}) \\ -h(z_{p0}^{(k)}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

Το ανωτέρω σύστημα έχει περισσότερες εξισώσεις από ότι αγνώστους, οπότε ξανά καταφεύγουμε σε μια λογική αντιστρόφου κατά Moore-Penrose που μας δίνει μια λύση ελαχίστων τετραγώνων ως σφάλμα προσέγγισης.

Η επαναληπτική διαδικασία ολοκληρώνεται όταν το σχετικό σφάλμα είναι αρκετά μικρό. Αυτό διατυπώνεται με το ακόλουθο έλεγχο σύγκλισης:

$$\frac{\|H(z_{p0}, T)\|}{\|z_{p0}\|} < \varepsilon \quad (2.41)$$

για δεδομένο μικρό ε που επιλέγεται από το χρήστη του προγράμματος.

Παρατηρήσεις

Ο πολλαπλασιαστής $s_{(j)}$ του μοναδιαίου διανύσματος $p_{(j)}$, που χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό του διανύσματος πρόβλεψης, πρέπει να ελέγχεται μέσα από το πρόγραμμα, διότι υπάρχει ο κίνδυνος, είτε να απομακρυνθούμε αρκετά από τον κλάδο των ιδιομορφών που μας ενδιαφέρει, είτε να γίνονται τόσο μικρά βήματα και να οδηγούμαστε σε μεγάλο υπολογιστικό κόστος. Προτείνονται διάφοροι τρόποι στη βιβλιογραφία [6] όπως το να εξαρτάται από το πλήθος των επαναλήψεων που χρειάστηκαν στο προηγούμενο βήμα διόρθωσης αλλά να έχει κάποιου είδους άνω φράγμα.

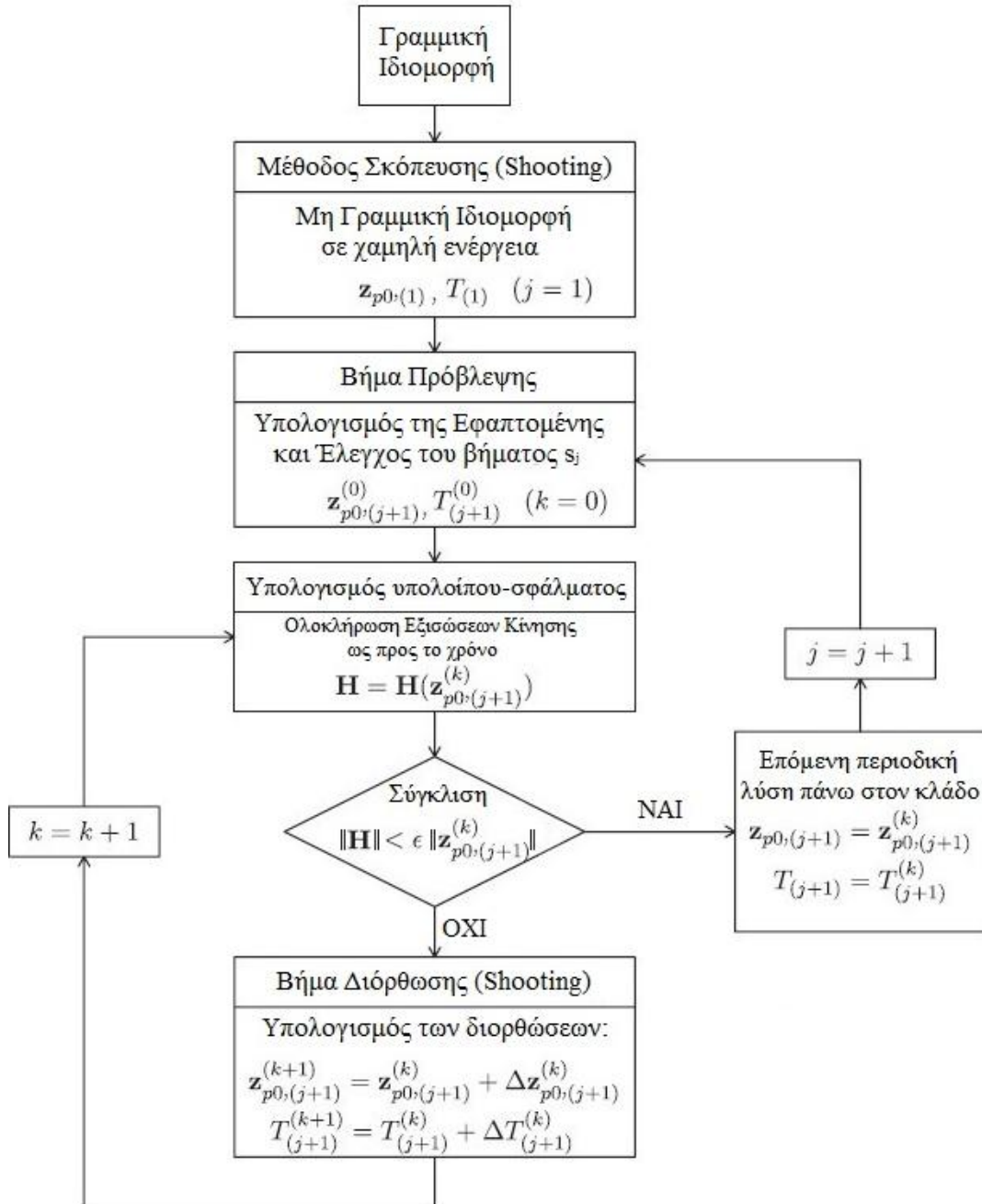
Πολύ βασικό όμως χαρακτηριστικό του για τον προσδιορισμό όλου του κλάδου των ιδιομορφών είναι το πρόσημο του $s_{(j)}$. Πρέπει να ισχύει:

$$[s_{(j)}p_{(j)}]^T [s_{(j-1)}p_{(j-1)}] > 0 \quad (2.42)$$

διότι με αυτόν τον τρόπο, δεν θα αλλάζει κατεύθυνση η διαδικασία πρόβλεψης του επόμενου σημείου πάνω στον κλάδο των ιδιομορφών. Συνεπώς, ο κλάδος των ιδιομορφών θα διατρέχεται προς τη μια κατεύθυνση χωρίς να επιστρέφουμε με τις επαναλήψεις σε περιοχές σημείων που ήδη έχουν υπολογισθεί και άρα να αυξάνεται το υπολογιστικό κόστος άσκοπα. Αυτό έχει ως συνέπεια να ισχύει:

$$\text{sign}(s_{(j)}) = \text{sign}(s_{(j-1)}p_{(j)}^T p_{(j)}) \quad (2.43)$$

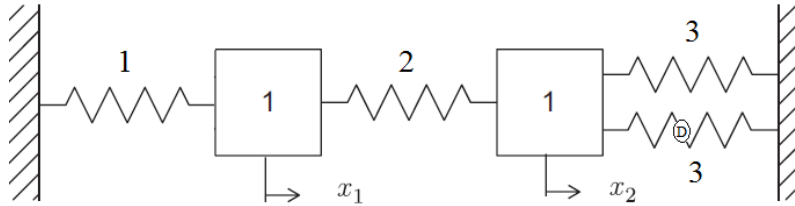
Διάγραμμα Ροής του Αλγορίθμου (Peeters et al.)



Σχ. 2.9: Διάγραμμα ροής της μεθόδου “numerical continuation”

Εφαρμογή της μεθόδου

Σε αυτό το σημείο γίνεται εφαρμογή της μεθόδου σε ένα μηχανικό σύστημα με κοινά χαρακτηριστικά με αυτό που περιγράφεται από τη σχέση (2.16). Συγκεκριμένα, διατηρούμε το ίδιο μητρώο μάζας και δυσκαμψίας αλλά προσθέτουμε ένα ελατήριο που να συμβάλλει με μια δύναμη τύπου Duffing ώστε να παραχθεί ένα μη γραμμικό σύστημα της μορφής (2.4). Όλα τα ανωτέρω προκύπτουν θεωρώντας την ακόλουθη διάταξη:



Σχ. 2.10: Μοντέλο διβάθμιου συστήματος με ελατήριο τύπου Duffing

Από τις σχέσεις (2.4) και (2.5) με δεδομένο ότι $\xi_i = x_i$ έχουμε:

$$\ddot{x}_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1} \quad \text{και} \quad \ddot{x}_2 = \frac{\partial U}{\partial x_2} \quad (2.44)$$

όπου η συνάρτηση δυναμικού για $j = 3$ και $n = 2$ γίνεται:

$$U = -\sum_{i=1}^3 \left[\frac{a_{i,1}}{2} \cdot \left(\frac{\xi_{i-1}}{\sqrt{m_{i-1}}} - \frac{\xi_i}{\sqrt{m_i}} \right)^2 + \frac{a_{i,3}}{4} \cdot \left(\frac{\xi_{i-1}}{\sqrt{m_{i-1}}} - \frac{\xi_i}{\sqrt{m_i}} \right)^4 \right] \quad (2.45)$$

Για δυσκαμψίες $a_1 = a_{1,1} = 1$, $a_{2,1} = 2$ και $a_3 = a_{3,1} = 3$ (σύμφωνα και με το σχήμα) έτσι ώστε το γραμμικοποιημένο σύστημα του (2.44) να έχει την ίδια συνάρτηση δυναμικού με το γραμμικό σύστημα (σχέση (2.17)) και για δυσκαμψίες τύπου Duffing $a_{1,3} = a_{2,3} = 0$, $a_{2,1} = 2$ και $a_D = a_{3,3} = 3$ προκύπτει η συνάρτηση δυναμικού:

$$U(x_1, x_2) = -\frac{1}{2} \cdot (x_1)^2 - (x_1 - x_2)^2 - \frac{3}{2} \cdot (x_2)^2 - \frac{3}{4} \cdot (x_2)^4 = -U_0 \quad (2.46)$$

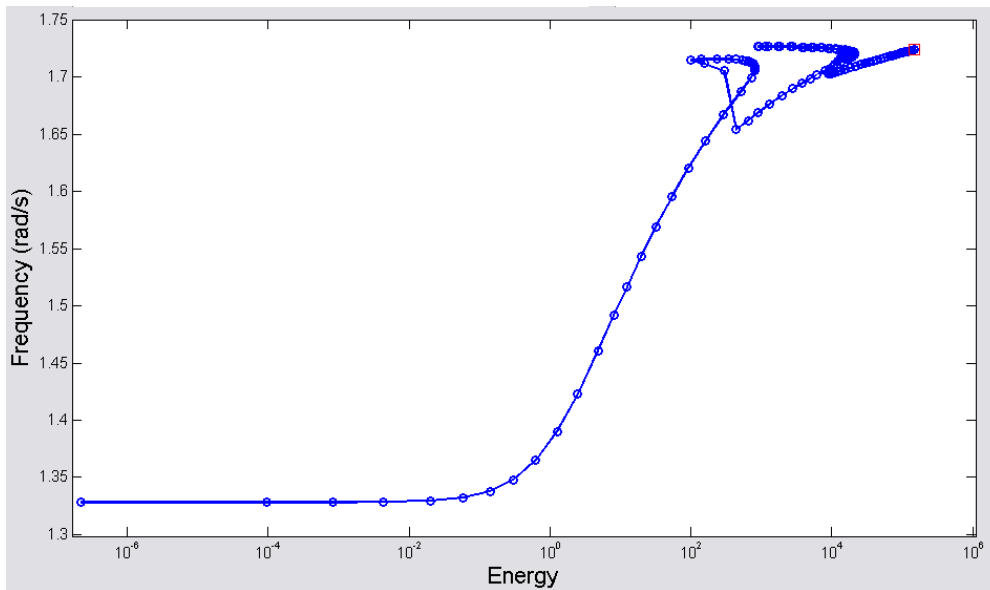
Οι εξισώσεις κίνησης στις φυσικές συντεταγμένες x_1 και x_2 είναι οι ακόλουθες:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -3x_1 + 2x_2 \\ \ddot{x}_2 &= 2x_1 - 5x_2 - 3x_2^3 \end{aligned} \quad (2.47)$$

Οι παραπάνω σχέσεις γράφονται στη μορφή (2.22):

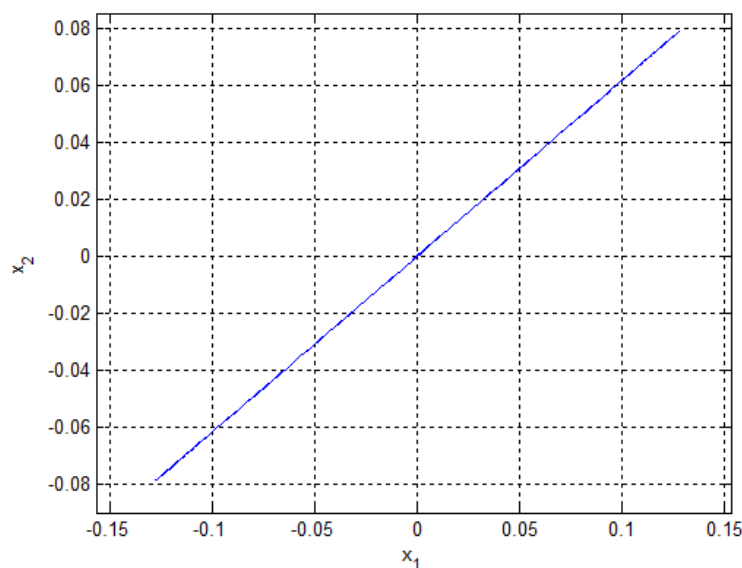
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3x_2^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Peeters et al. παράγεται το διάγραμμα συχνότητας-ενέργειας για το σύστημα και μπορούμε να υπολογίσουμε τις ιδιομορφές κατά Rosenberg. Συγκεκριμένα για τον κλάδο της πρώτης ιδιομορφής του συστήματος (2.48) έχουμε:



Σχ. 2.11: Διάγραμμα συχνότητας-ενέργειας (κλάδος πρώτης ιδιομορφής)

Παρατηρούμε ότι, για χαμηλές ενέργειες ($E \leq 10^{-2}$) η συχνότητα των ιδιομορφών είναι σταθερή και ίση με $\omega_1 = 1.328$. Η τελευταία συμπεριφορά του συστήματος ήταν αναμενόμενη, αφού για μικρές αρχικές μετατοπίσεις περιμένουμε το σύστημα να συμπεριφέρεται παρόμοια με το αντίστοιχο γραμμικοποιημένο. Όμως είχαμε δει ότι, η πρώτη ιδιομορφή είχε συχνότητα $\omega_1 = 1.328$ κάτι το οποίο θα ισχύει κατά προσέγγιση για τα σημεία του κλάδου της πρώτης ιδιομορφής που αντιστοιχούν σε χαμηλές ενέργειες. Απεικονίζουμε τη σχέση $x_2 = x_2(x_1)$ της πρώτης ιδιομορφής:

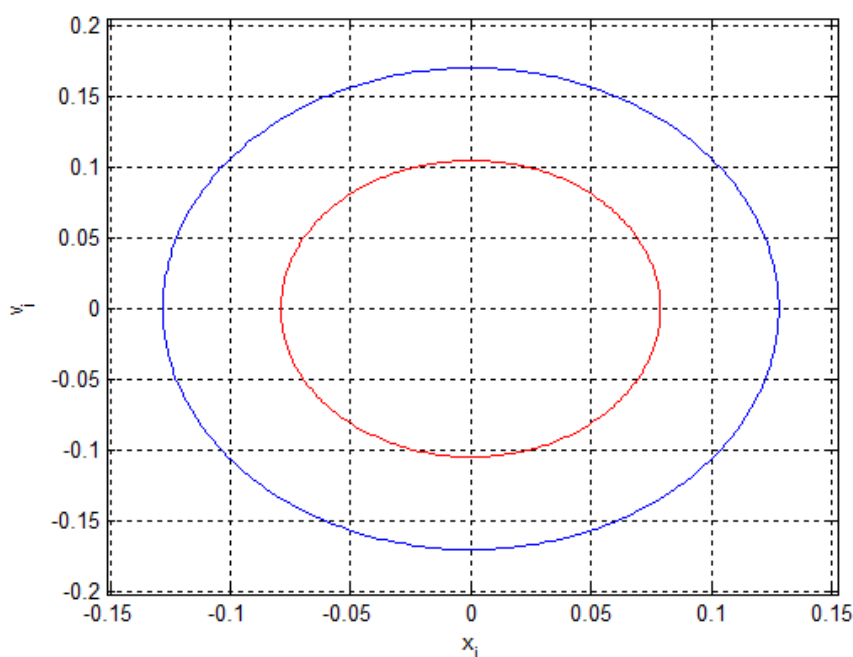


Σχ. 2.12: Μη γραμμική ιδιομορφή για χαμηλές ενέργειες – Configuration space

Από το σχήμα προσδιορίζουμε τις αρχικές συνθήκες, από τις οποίες αν αφήσουμε το σύστημα αυτό θα εκτελέσει περιοδική κίνηση. Επομένως, για αρχικές συνθήκες $\vec{x}_0 = [x_1 \ x_2]^T = [0.128 \ 0.079]^T$ εμφανίζεται κίνηση με $T = 4.73$.

Σε αυτό το σημείο, αξίζει να τονισθεί, ότι οι προαναφερθείσες συνθήκες έχουν μια σχέση με το ιδιοδιάνυσμα $v_1 = [0.851 \ 0.526]^T$ που προσδιορίσαμε στο γραμμικό πρόβλημα. Όπως γνωρίζουμε, στα γραμμικά συστήματα δεν υπάρχει εξάρτηση των ιδιομορφικών χαρακτηριστικών από το επίπεδο ενέργειας του συστήματος. Με άλλα λόγια, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^*$ το διάνυσμα λv_1 θα είναι ιδιοδιάνυσμα του γραμμικού συστήματος σε διαφορετικό επίπεδο ενέργειας. Για χαμηλές ενέργειες, δηλαδή $\|\vec{x}_0\| < 1$, αναμένουμε ότι θα υπάρχει λ τέτοιο ώστε $\vec{x}_0 = \lambda v_1$ (στο συγκεκριμένο παράδειγμα έχουμε ότι $\lambda = 0.15$).

Στο σχήμα που ακολουθεί απεικονίζονται σε ένα επίπεδο φάσης οι περιοδικές λύσεις για κάθε βαθμό ελευθερίας. Με μπλέ χρώμα δίνεται το σημείο (x_1, \dot{x}_1) ενώ με κόκκινο χρώμα το σημείο (x_2, \dot{x}_2) .

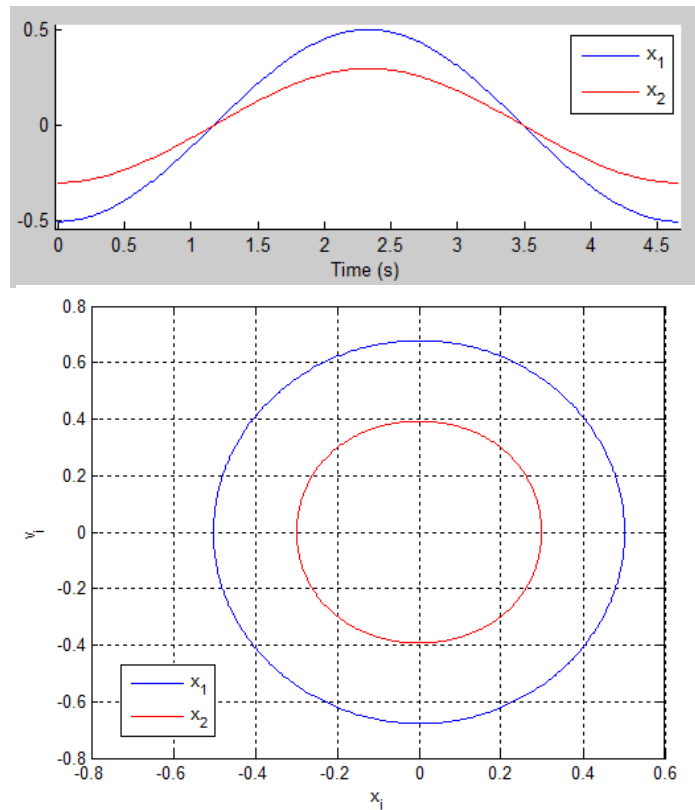


Σχ. 2.13: Επίπεδο φάσης για τις δυο περιοδικές λύσεις της πρώτης ιδιομορφής

Οι μορφές έλλειψης που εμφανίζονται στο παραπάνω σχήμα παραπέμπουν στις αντίστοιχες τροχιές του γραμμικού συστήματος. Αυτό το χαρακτηριστικό αναμένουμε να εξασθενεί καθώς αυξάνεται η ενέργεια στο σύστημα.

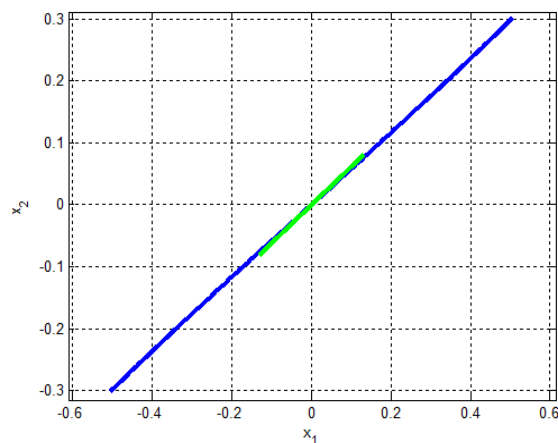
Παρατηρούμε σύμφωνα με το διάγραμμα FEP, ότι καθώς αυξάνονται οι ενέργειες υπάρχει ένα διάστημα ενεργειών ($10^{-2} < E < 10^2$) στο οποίο, υπάρχει μια σχεδόν γραμμική εξάρτηση ενέργειας-συχνότητας στα πλαίσια της λογαριθμικής κλίμακας ενεργειών. Σε αυτήν την περιοχή, αυξάνεται η ιδιοσυχνότητα των μη γραμμικών ιδιομορφών λόγω της αύξησης της δυσκαμψίας τύπου Duffing που ενεργεί στο σύστημα.

Αν αφαιρεθεί το σύστημα με αρχικές συνθήκες $\vec{x}_0 = [x_1 \ x_2]^T = [0.502 \ 0.299]^T$ δηλαδή μια κατάσταση που αντιστοιχεί στο FEP σε ένα σημείο καμπής μεταξύ των περιοχών σταθερής ιδιοσυχνότητας και γραμμικής ως προς το λογάριθμο της ενέργειας, τότε εμφανίζονται περιοδικές λύσεις με περίοδο $T = 4.661$ σύμφωνα με τα σχήματα που ακολουθούν:

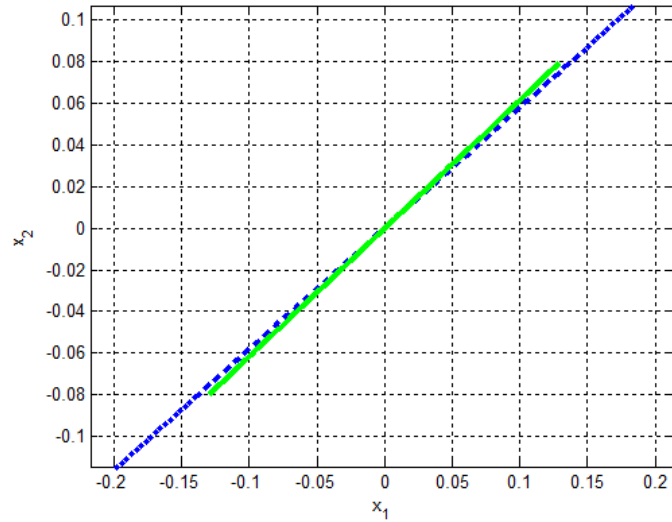


Σχ. 2.14: Περιοδική λύση για υψηλότερες ενέργειες και το επίπεδο φάσης που σχηματίζεται

Όσον αφορά στη γραμμή που θα σχηματίζεται για την πρώτη ιδιομορφή σύμφωνα με τη σχέση (2.19) στο επίπεδο (x_1, x_2) παρατηρούμε ότι παρόλο που παραμένει ευθεία υπάρχει μια μικρή στροφή γύρω από το σημείο μηδέν σε σχέση με την αντίστοιχη ευθεία των χαμηλών ενεργειών.

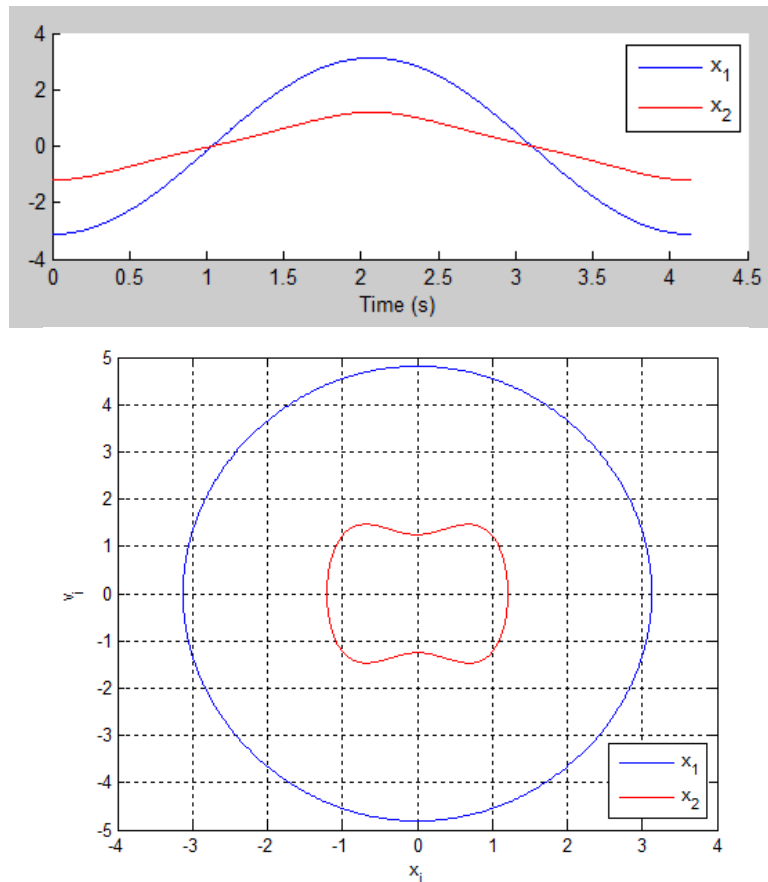


Σχ. 2.15: Ιδιομορφική σχέση (Configuration Space) – Ευθείες γραμμές λόγω χαμηλής ενέργειας



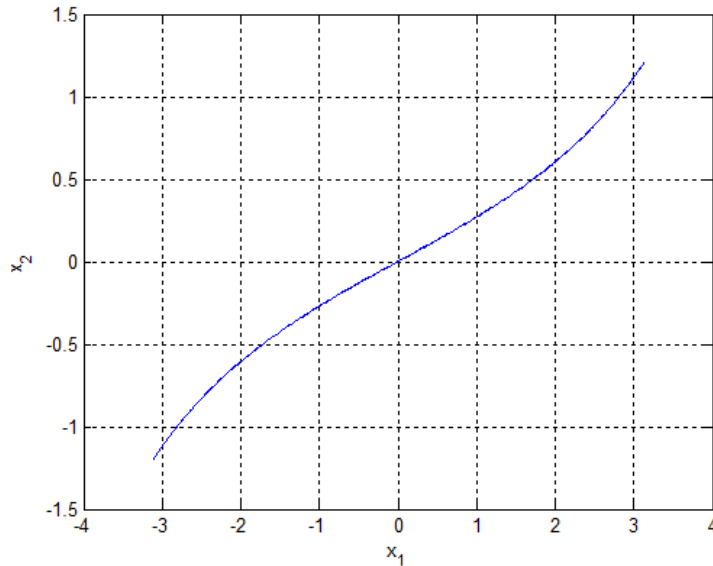
Σχ. 2.16: Εστίαση στην ιδιομορφική σχέση – αλλαγή γωνίας

Αν επιλέξουμε ένα σημείο υψηλότερης ενέργειας του διαγράμματος FEP γίνονται αισθητά τα φαινόμενα των μη γραμμικών συστημάτων εντονότερα. Επi παραδείγματι, για $\omega = 1.517$ προσδιορίζουμε τις αρχικές συνθήκες από τις οποίες αν αφήσουμε το σύστημα θα εκτελέσει περιοδική κίνηση, σύμφωνα με τον ορισμό του Rosenberg. Με τον αλγόριθμο του Peeters et al. βρίσκουμε $\vec{x}_0 = [3.128 \quad 1.207]^T$.



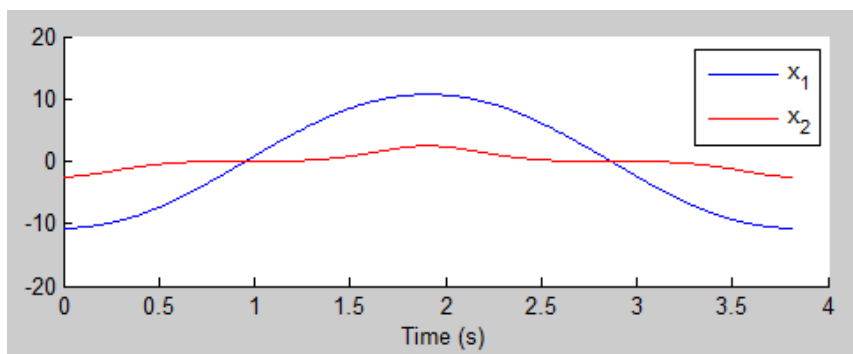
Σχ. 2.17: Περιοδική λύση για υψηλές ενέργειες και το επίπεδο φάσης τους

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει πλέον η ιδιομορφική σχέση που εμφανίζεται μεταξύ των x_1, x_2 , αφού υπάρχει έντονη απόκλιση από τη γραμμική σχέση. Το γεγονός ότι, οι μάζες της ιδιομορφής παραμένουν σε φάση φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί. Σε επόμενο σημείο της εργασίας, θα αναδειχθεί ένα φαινόμενο των μη γραμμικών ταλαντώσεων κατά το οποίο υπάρχει η δυνατότητα αλληλεπίδρασης των ιδιομορφών και η αλλαγή των χαρακτηριστικών όπως της κίνησης από ταλαντώσεις σε φάση σε ταλαντώσεις εκτός φάσης.

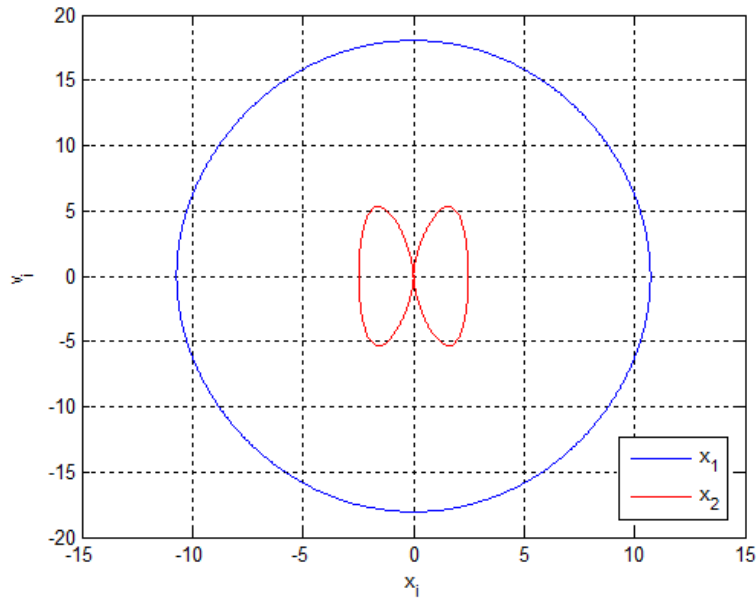


Σχ. 2.18: Ιδιομορφική σχέση – Καμπύλωση γραμμής λόγω μη γραμμικότητας

Φτάνοντας λίγο μετά την τιμή ενέργειας 10^2 τελειώνει η περιοχή που εμφανίζεται γραμμική εξάρτηση μεταξύ συχνότητας ω_1 και ενέργειας στο διάγραμμα ενέργειας-συχνότητας (FEP). Σε αυτό το οριακό σημείο διεγείρουμε το σύστημα τοποθετώντας το σε αρχική κατάσταση $\vec{x}_0 = [10.717 \ 2.479]^T$ δηλαδή με $\|\vec{x}_0\| > 10^2$ και παρατηρούμε το διαφορετικό είδος των περιοδικών λύσεων που προκύπτουν σε σχέση με τις χαμηλές ενέργειες που είμαστε κοντά στην γραμμική συμπεριφορά και οι ημιτονικές-συνημιτονικές αποκρίσεις είναι αναμενόμενες.

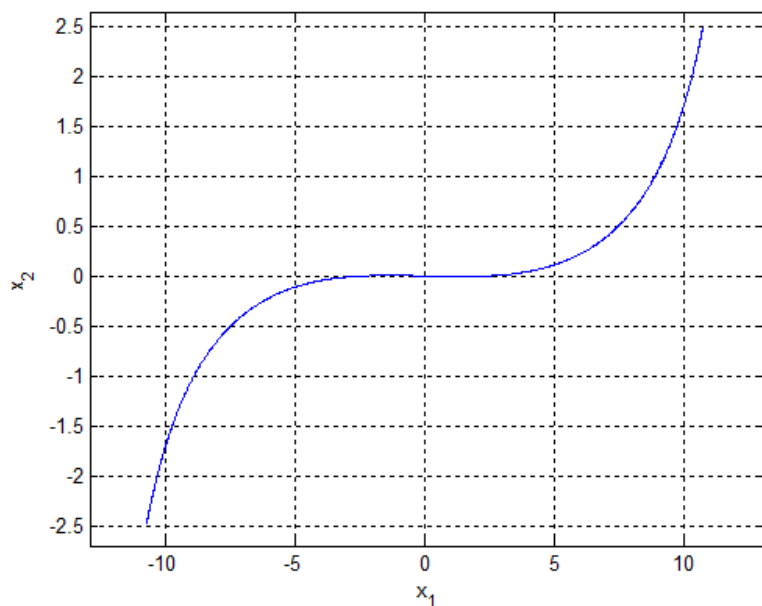


Σχ. 2.19: Περιοδική λύση για πολύ υψηλές ενέργειες



Σχ. 2.20: Επίπεδο φάσης των περιοδικών λύσεων

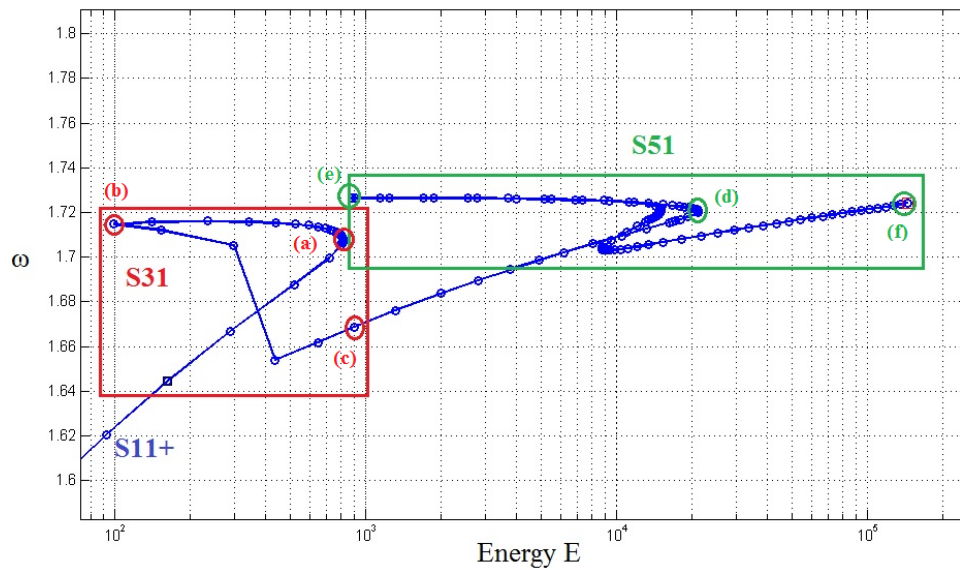
Χαράσσουμε την ιδιομορφική σχέση των x_1, x_2 για την πρώτη ιδιομορφή και παρατηρούμε ότι, η καμπύλωση είναι μεγαλύτερη. Αυτή η απόκλιση από την ευθεία είναι χαρακτηριστικό του μη γραμμικού συστήματος και πρέπει να ληφθεί υπ' όψιν κατά το σχεδιασμό.



Σχ. 2.21: Ιδιομορφική σχέση – Έντονη καμπύλωση λόγω μεγάλου επιπέδου ενέργειας

Παρ' όλα αυτά, το βασικό χαρακτηριστικό των μη γραμμικών συστημάτων, που θέλει ιδιαίτερη προσοχή κατά το σχεδιασμό, είναι η αλληλεπίδραση των ιδιομορφών που πραγματοποιείται συνήθως για μεγάλες ενέργειες που έχουν ενεργοποιηθεί πλήρως οι μη γραμμικότητες της κατασκευής. Αυτό είναι ορατό και από το διάγραμμα συχνότητας-ενέργειας, όπου για υψηλές ενέργειες $E > 10^2$ παρατηρούνται πολλαπλές λύσεις για διάφορες τιμές των ιδιοσυχνοτήτων ω_1 .

Εστιάζοντας στην περιοχή όπου το σύστημα έχει μεγάλη ενέργεια, παρατηρούμε την αλληλεπίδραση των ιδιομορφών $S31$ και $S51$.



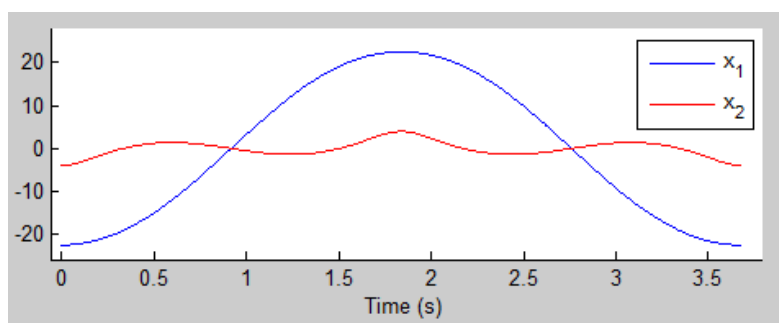
Σχ. 2.22: Περιοχή αλληλεπίδρασης των ιδιομορφών

Πρακτικά, καθώς βρισκόμασταν πάνω στην καμπύλη της πρώτης ιδιομορφής που οι μάζες βρίσκονται σε φάση ($S11+$) υπάρχει ένα σημείο (a) στο οποίο ξεκινάει η διαφορετική συμπεριφορά και η ουσιαστική αλληλεπίδραση των ιδιομορφών. Κοντά στο σημείο (b) είναι η περιοχή $S33-$ στην οποία υπάρχουν περιοδικές λύσεις που δεν είναι σε φάση και σχετίζονται με τη δεύτερη ιδιομορφή όπως προς τις ιδιοσυχνότητες ($\omega_2/3$). Το φαινόμενο ολοκληρώνεται με την επαναφορά σε ένα σημείο (c) του κλάδου της πρώτης ιδιομορφής.

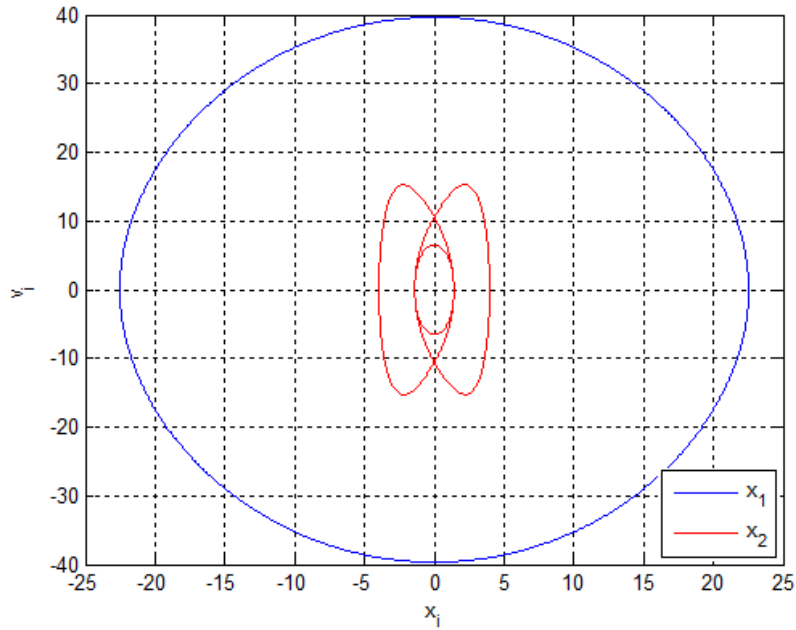
Παρόμοια φαινόμενα λαμβάνουν χώρα σε υψηλότερες ενέργειες για διαφορετικούς τύπους περιοδικών λύσεων όπως η περιοχή $S51$. Αυτά τα φαινόμενα πρέπει να μελετώνται από το μηχανικό διότι υπάρχει έντονη αλλαγή στη συμπεριφορά της κατασκευής μας που μπορεί να οδηγήσει στην αστοχία της κατασκευής μας. Ακολουθούν οι περιοδικές λύσεις για το συγκεκριμένο παράδειγμα που υπάρχουν στα σημεία (a), (b), (c), (d), (e) και (f).

✓ Περιοχή του κλάδου $S31$

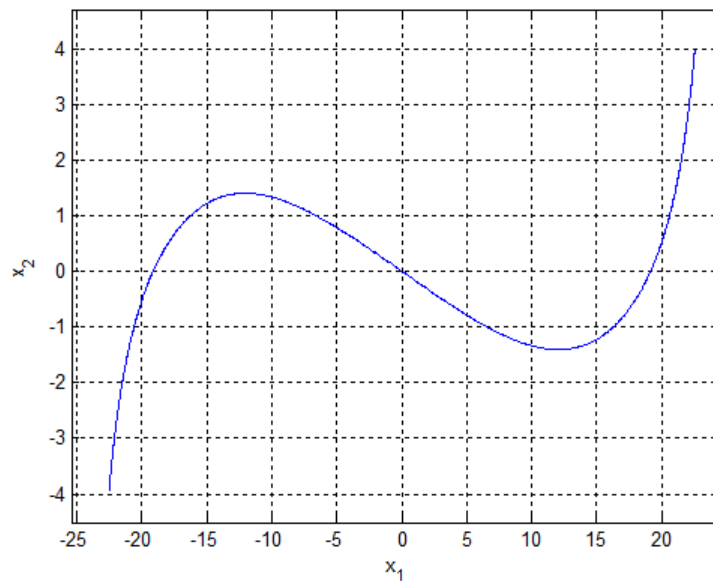
Σημείο (a)



Σχ. 2.23: Περιοδική λύση του συστήματος στο σημείο (a)



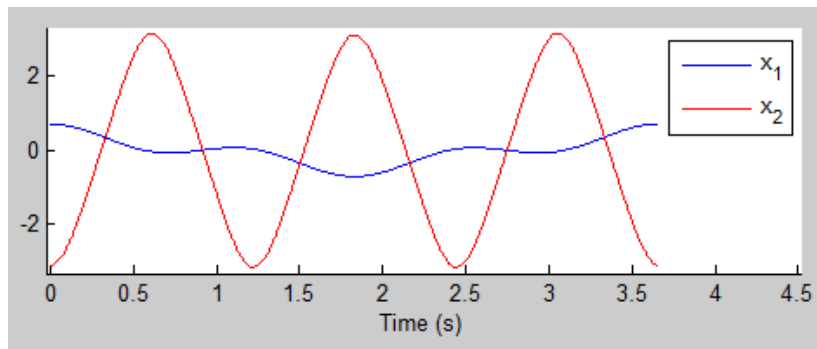
Σχ. 2.24: Επίπεδο φάσης για τις δυο συντεταγμένες του συστήματος στο σημείο (a)



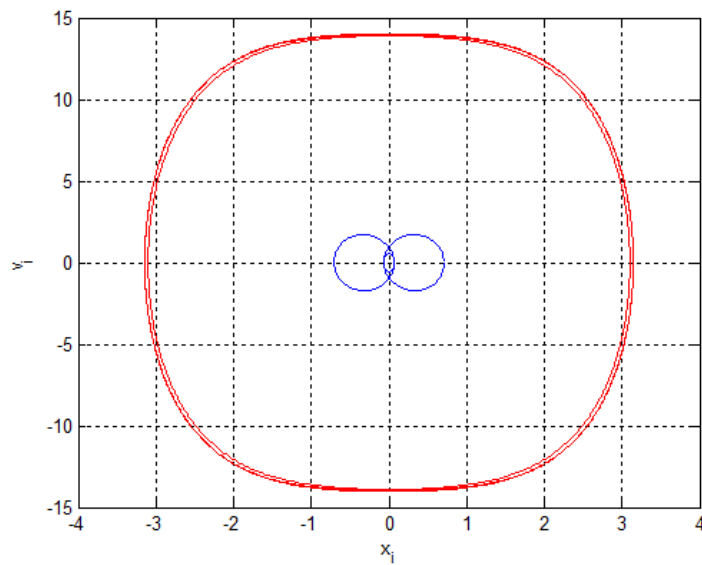
Σχ. 2.25: Ιδιομορφική σχέση στο σημείο (a) – έντονη καμπύλωση λόγω μη γραμμικότητας

Παρατηρούμε ότι ποιοτικά το σημείο (a) έχει χαρακτηριστικά των σημείων του κλάδου $S11+$, αφού οι μάζες του διβάθμιου συστήματος ταλαντώνονται σε φάση, παρόλο που η καμπύλωση της ιδιομορφής είναι έντονη. Αυτό το χαρακτηριστικό χάνεται καθώς κινούμαστε επί του κλάδου της πρώτης ιδιομορφής προς το σημείο (b) αφού αφενός παρατηρείται ταλάντωση σε αντίθετες φάσεις και αφετέρου εμφανίζεται η ιδιοσυχνότητα $\omega_2 / 3$. Αυτά είναι αποτελέσματα της αλληλεπίδρασης των ιδιομορφών.

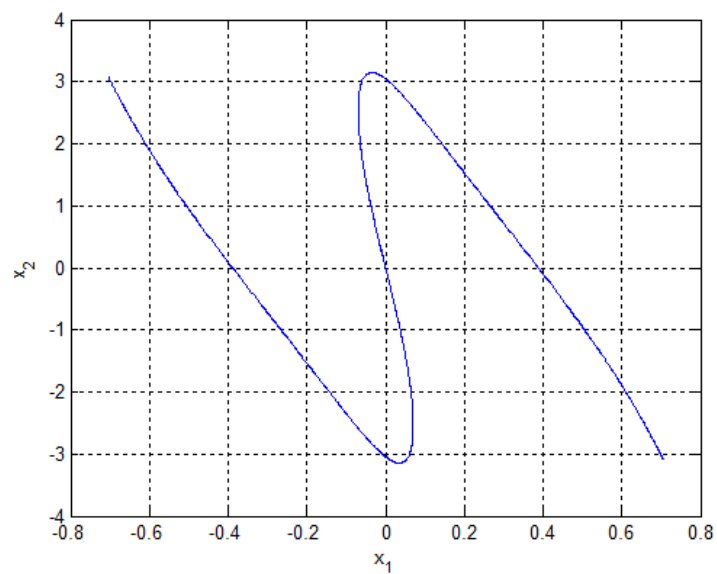
Σημείο (b)



Σχ. 2.26: Περιοδική λύση στο σημείο (b) – αλλαγή της περιόδου για τη μια συντεταγμένη



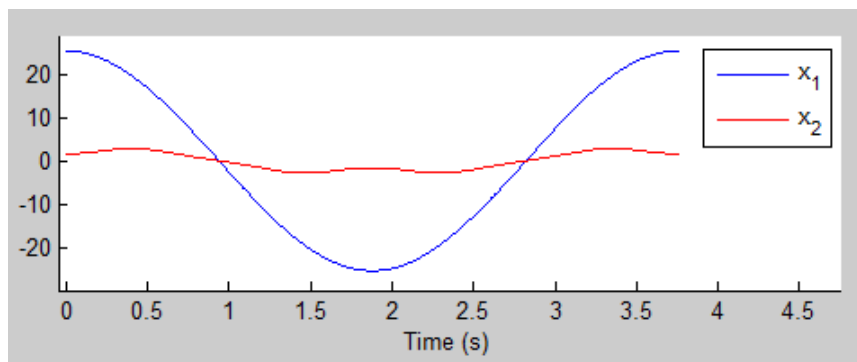
Σχ. 2.27: Επίπεδο φάσης για τις συντεταγμένες του διβάθμιου συστήματος στο σημείο (b)



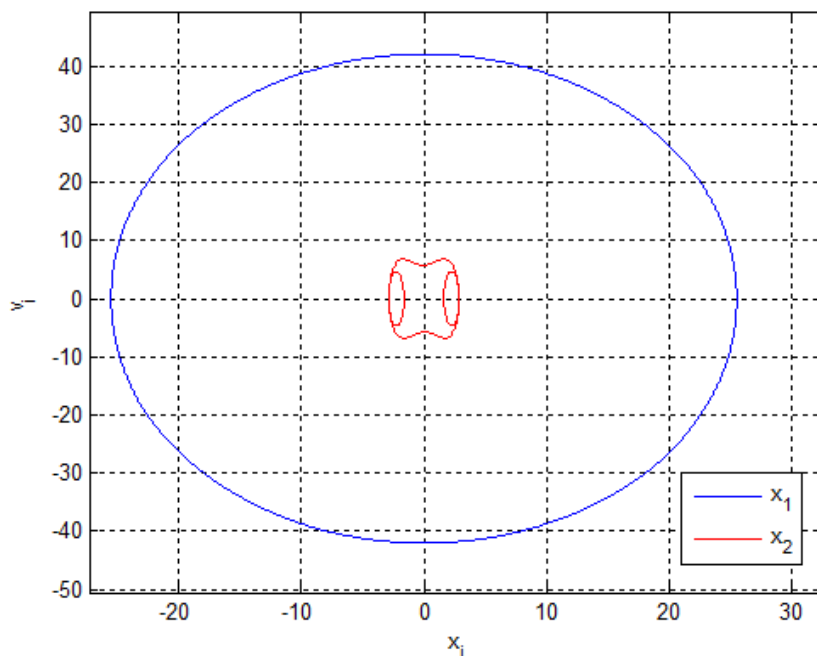
Σχ. 2.28: Ιδιομορφική σχέση – Αντίθετη φάση

Από το σημείο (a) προς το σημείο (b) δεν παρατηρείται μόνο αλλαγή στη συμπεριφορά σε σχέση με το αν είναι σε φάση ή όχι οι ταλαντούμενες μάζες, αλλά και στα πλάτη ταλαντώσεων τους. Η εγγύτητα των δύο σημείων στο διάγραμμα FER, ερμηνεύεται ως περιοχή, που θέλει προσοχή κατά το σχεδιασμό, αφού ουσιαστικά σημαίνει ότι το σύστημα μας έχει τη δυνατότητα να βρεθεί σε κατάσταση πολλαπλών περιοδικών λύσεων. Με άλλα λόγια, μπορεί να εμφανίζεται, είτε η μια λύση, είτε η άλλη λύση σαν τρόπο συμπεριφοράς του διβάθμιου, κάτι που εξαρτάται από άλλους παράγοντες, που πολλές φορές δεν μπορεί να εκτιμήσει ο μηχανικός. Όλη αυτή η κατάσταση, μπορεί να οδηγήσει σε απότομη μεταβολή της συμπεριφοράς της κατασκευής και σε τελική μη ελεγχόμενη αστοχία της.

Επανερχόμαστε στο κλάδο $S11+$ με το σημείο (c) :

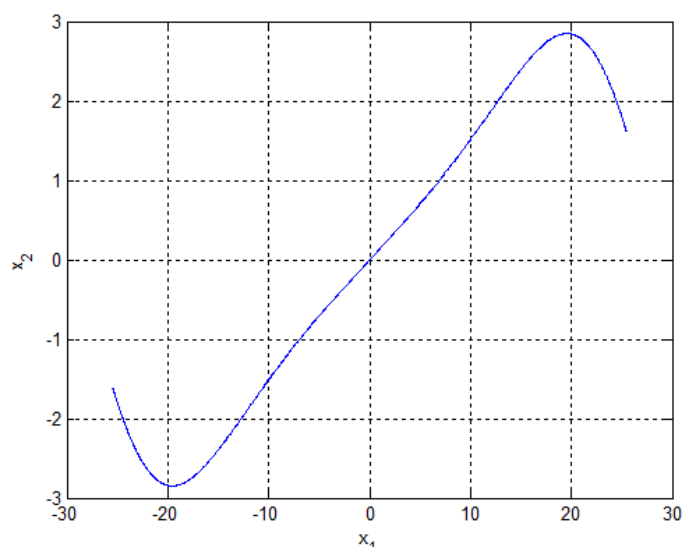


Σχ. 2.29: Περιοδική λύση ως προς χρόνο – απεικόνιση για μια περίοδο για το σημείο (c)



Σχ. 2.30: Επίπεδο φάσης (άξονες: μετατόπιση-ταχύτητα) για το σημείο (c)

Παρατηρούμε τα κοινά χαρακτηριστικά του σημείου (a) και (c) σε σχέση με τα πλάτη ταλάντωσης των βαθμών ελευθερίας και τη μορφή των περιοδικών λύσεων.



Σχ. 2.31: Ιδιομορφική σχέση μεταξύ των συντεταγμένων – Ιδιομορφή κατά Rosenberg στο σημείο (c)

Οι ομοιότητες των προαναφερθέντων σημείων απεικονίζονται και στην εξάρτηση των x_1 και x_2 που επιβάλλει η ιδιομορφική σχέση της συγκεκριμένης ιδιομορφής. Συγκεκριμένα, στο παραπάνω σχήμα παρατηρούμε ότι, οι μάζες επανέρχονται σε φάση στο σημείο (c).

Παρατηρήσεις

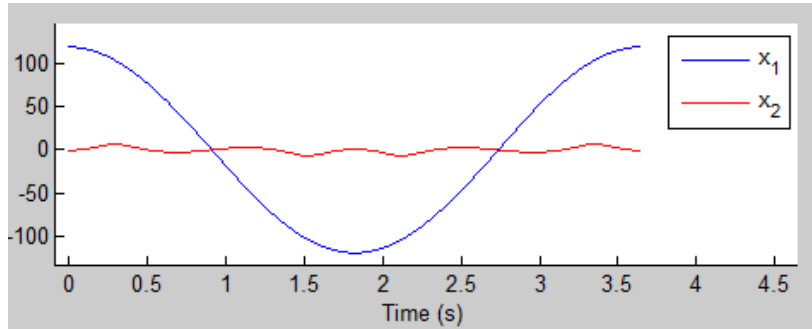
Μελετώντας τον κλάδο $S31$ αντιλαμβανόμαστε τις έντονες διαφορές των γραμμικών συστημάτων από αυτές των μη γραμμικών. Η περιοχή που βρίσκεται αυτός ο κλάδος έχει έντονα πολλαπλές περιοδικές λύσεις, κάτι το οποίο σημαίνει ότι, το σύστημα μπορεί να βρεθεί σε οποιαδήποτε από αυτές για ένα συγκεκριμένο επίπεδο ενέργειας. Αυτό που δημιουργεί το πρόβλημα στα μη γραμμικά συστήματα είναι ότι, οι πολλαπλές λύσεις έχουν διαφορετικά ποιοτικά χαρακτηριστικά γεγονός που δημιουργεί αβεβαιότητες για τη συμπεριφορά του συστήματος μας σε τέτοια επίπεδα ενέργειας. Ο μηχανικός οφείλει να σχεδιάζει λαμβάνοντας υπ' όψιν αυτές τις αβεβαιότητες.

Εκτός από τον κλάδο $S31$ που έχει σημεία στα οποία οι συντεταγμένες του διβάθμιου έχουν ηλίκιο ιδιοσυχνοτήτων $3/1$ υπάρχουν και σημεία που το αντίστοιχο ηλίκιο είναι $5/1$ και είναι ορατά κατά την ανάλυση με τον αλγόριθμο του Peeters. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται κάποια σημεία για υψηλότερες ενέργειες που ανήκουν σε αυτήν την κατηγορία που προαναφέραμε και συνθέτουν τον κλάδο $S51$ καθώς επίσης σχεδιάζονται και οι μορφές των περιοδικών λύσεων για αυτά τα σημεία του διαγράμματος συχνότητας-ενέργειας (FEP).

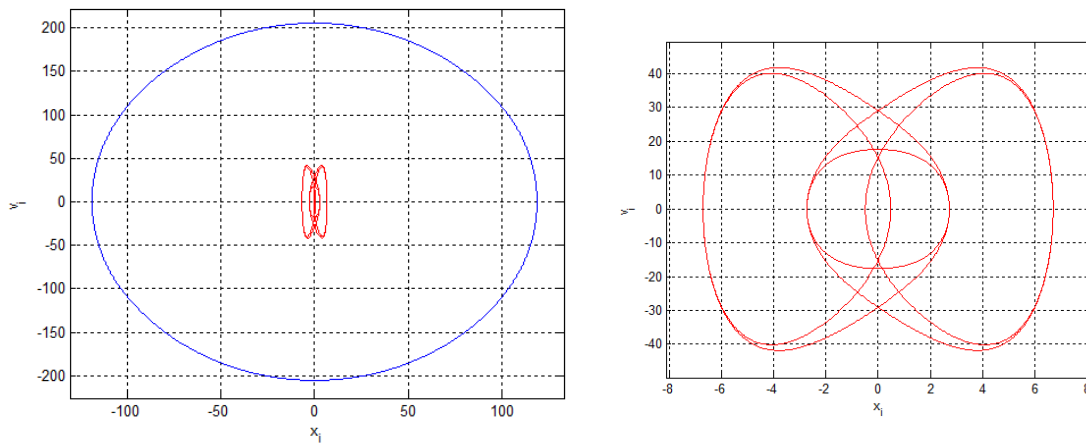
✓ Περιοχή του κλάδου S51

Συνοπτικά παρουσιάζονται και για αυτό το είδος αλληλεπίδρασης των ιδιομορφών παρόλο που το επίπεδο ενέργειας που εμφανίζεται είναι πρακτικά αρκετά υψηλό ώστε να πραγματοποιηθούν.

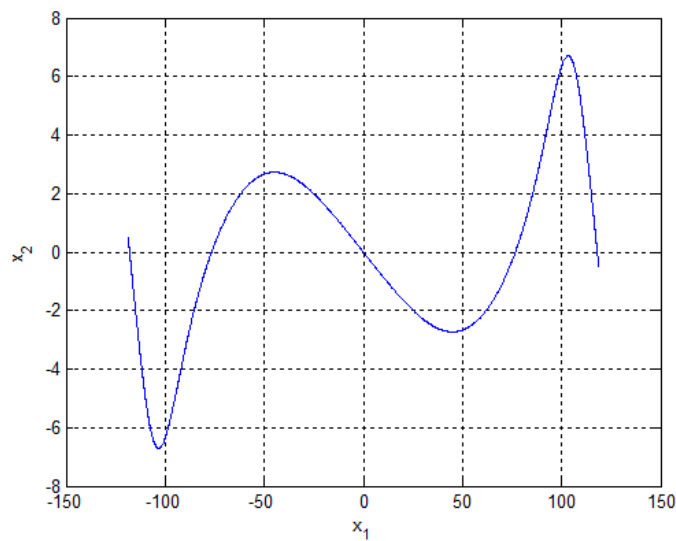
Σημείο (d)



Σχ. 2.32: Περιοδική λύση ως προς το χρόνο – Σημείο (d)



Σχ. 2.33: Επίπεδο φάσης για τις συντεταγμένες που περιγράφουν το σύστημα – μεγέθυνση για το x_2

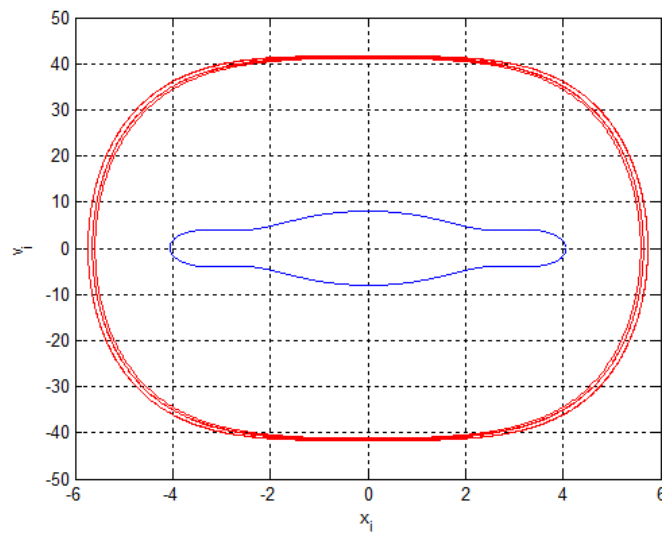


Σχ. 2.34: Ιδιομορφική σχέση στο σημείο (d)

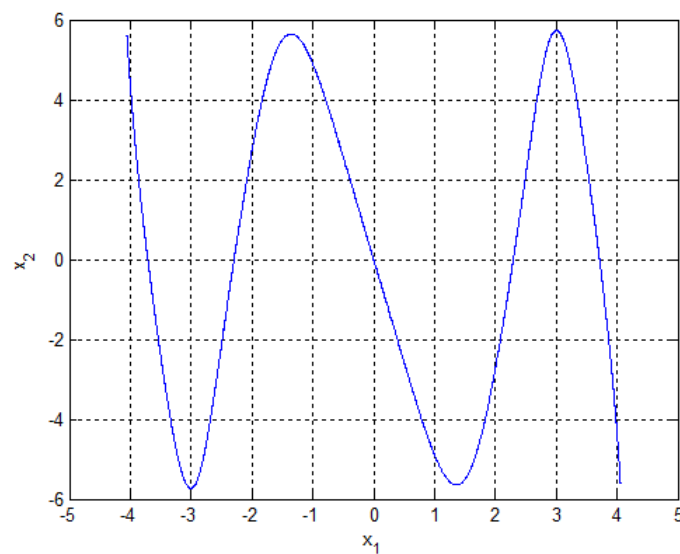
Σημείο (e)



Σχ. 2.35: Περιοδική λύση για το σημείο (e) – Αλληλεπίδραση ιδιομορφών

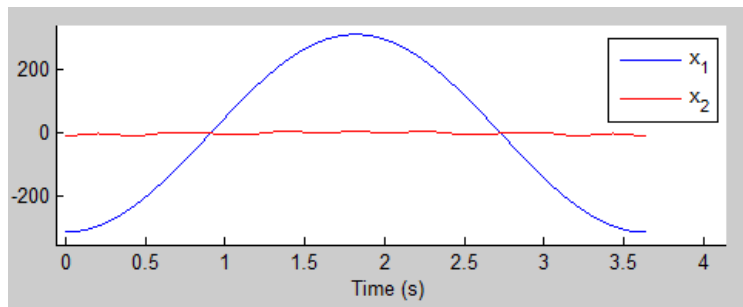


Σχ. 2.36: Επίπεδο φάσης x_1 : μπλέ χρώμα και x_2 : κόκκινο χρώμα

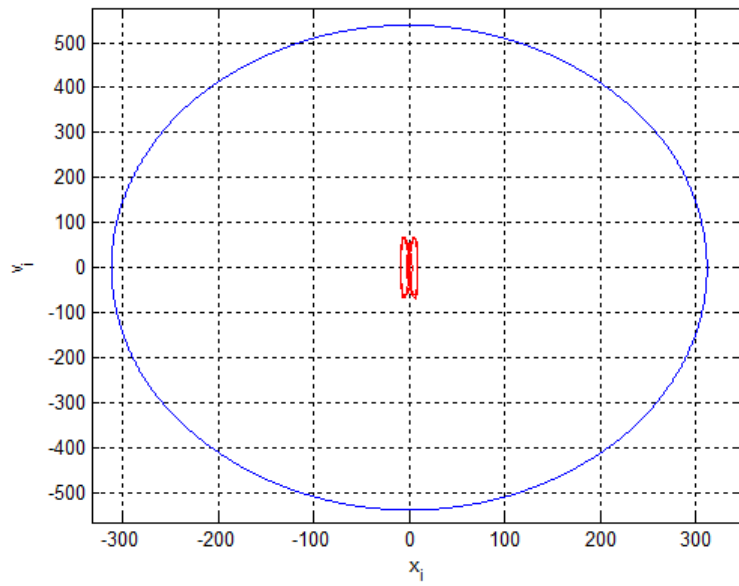


Σχ. 2.37: Ιδιομορφική σχέση – έντονη παραμόρφωση από ευθεία γραμμή

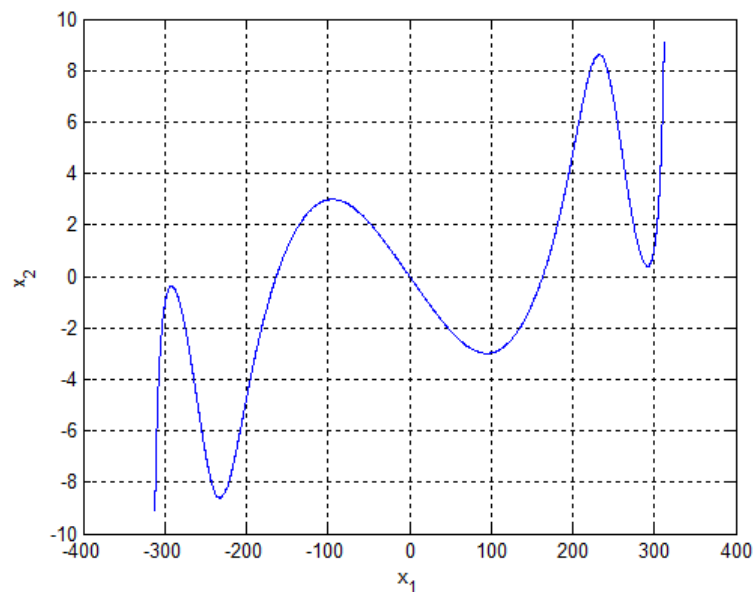
Σημείο (f)



Σχ. 2.38: Περιοδική λύση ως προς το χρόνο

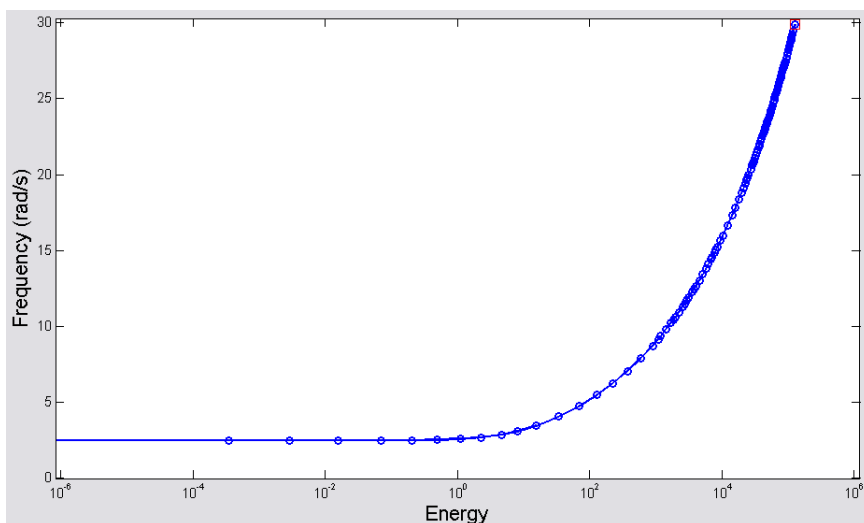


Σχ. 2.39: Επίπεδο φάσης για τις παραπάνω περιοδικές λύσεις



Σχ. 2.40: Ιδιομορφική σχέση στο σημείο (f)

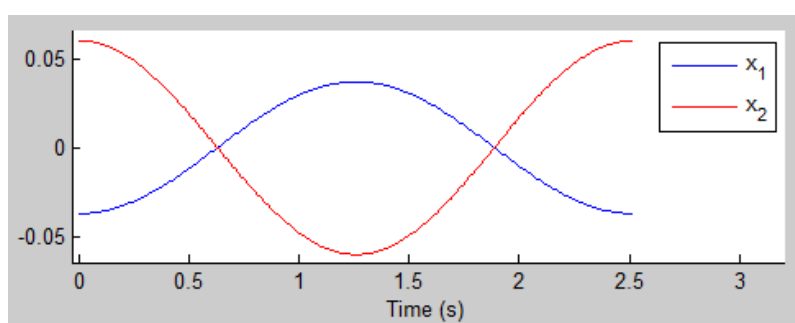
Χρησιμοποιώντας ξανά τον αλγόριθμο του Peeters et al., μπορούμε να υπολογίσουμε τον κλάδο της δεύτερης ιδιομορφής του συστήματος (2.48) έχουμε:



Σχ. 2.41: Διάγραμμα συχνότητας-ενέργειας (FEP) για δεύτερο ιδιομορφικό κλάδο

Παρατηρούμε, όπως περιμέναμε, ότι ο κλάδος της δεύτερης ιδιομορφής ξεκινάει για χαμηλές ενέργειες από την ιδιοσυχνότητα του γραμμικού συστήματος $\omega_2 = 2.497$ ενώ για μεγαλύτερες ενέργειες οι ιδιοσυχνότητες των περιοδικών λύσεων αυξάνονται. Αυτό το φαινόμενο οφείλεται στην παρουσία της δυσκαμψίας τύπου Duffing. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει το γεγονός, ότι δεν παρατηρούνται αλληλεπιδράσεις μεταξύ των ιδιομορφών όπως στον κλάδο της πρώτης ιδιομορφής.

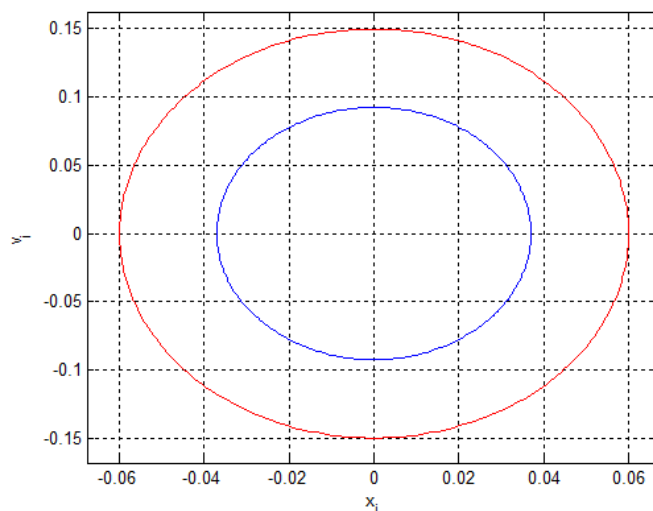
Παρουσιάζουμε κάποιες συγκεκριμένες ιδιομορφές του δεύτερου κλάδου στη συνέχεια της εργασίας προκειμένου να γίνουν αντιληπτά κάποια φαινόμενα του συγκεκριμένου μη γραμμικού συστήματος. Αρχικά για χαμηλές ενέργειες παρατηρούμε τη γραμμική ιδιομορφή όπου οι μάζες βρίσκονται σε αντίθετες φάσεις.



Σχ. 2.42: Περιοδικές λύσεις-ιδιομορφές για χαμηλές ενέργειες

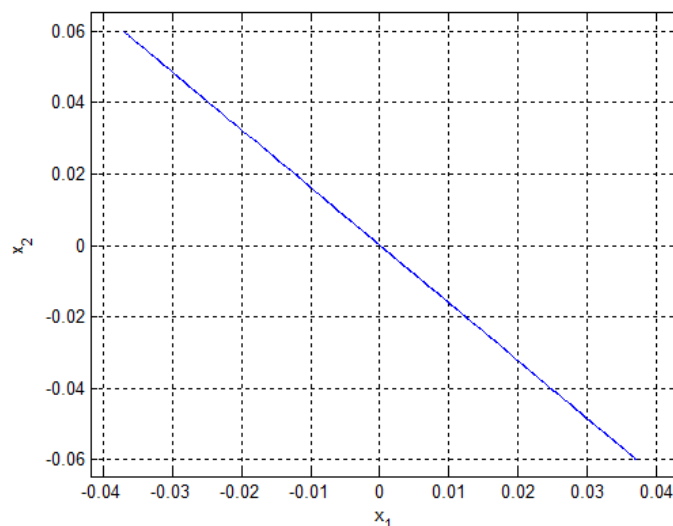
Η αρμονική συμπεριφορά των λύσεων υπάρχει διότι δεν ενεργοποιούνται οι μη γραμμικότητες της κατασκευής για χαμηλά πλάτη ταλάντωσης. Για τη συγκεκριμένη περίπτωση το σύστημα αφήνεται με αρχικές συνθήκες $\bar{x}_0 = [0.037 \ 0.060]^T$ και εκτελεί περιοδική κίνηση με περίοδο $T = 2.515$ όπως φαίνεται και στο σχήμα.

Όλα τα προαναφερθέντα περί αρμονικότητας και περιοδικότητας απεικονίζονται αποτελεσματικά στο ακόλουθο διάγραμμα φάσης για κάθε συντεταγμένη (x_1, x_2)



Σχ. 2.43: Επίπεδο φάσης των συντεταγμένων του διβάθμιου – χαμηλές ενέργειες

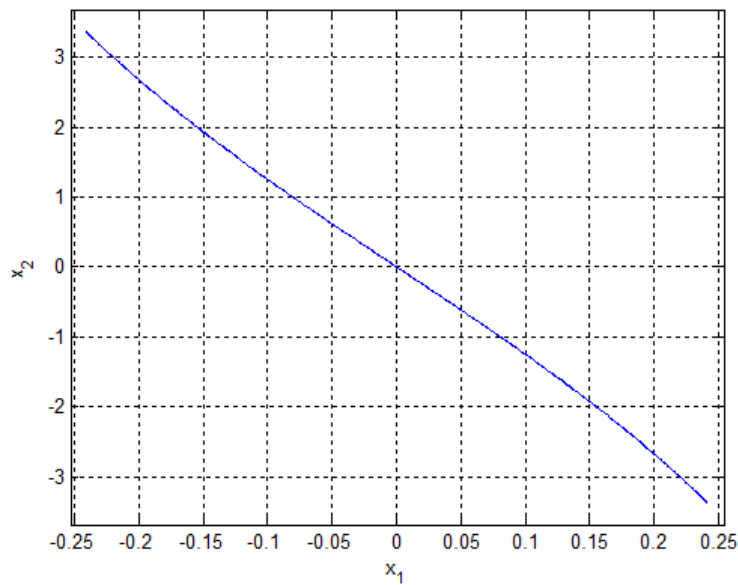
Η εικόνα της ιδιομορφικής σχέσης, που έχουμε για την δεύτερη ιδιομορφή, είναι όμοια με αυτή που θα είχαμε στο γραμμικοποιημένο σύστημα σύμφωνα με τον ορισμό του Rosenberg για τις γραμμικές ιδιομορφές. Είναι γεγονός ότι ο χαρακτήρας της ταλάντωσης σε αντίθετες φάσεις απεικονίζεται με την αρνητική κλίση του διαγράμματος που ακολουθεί.



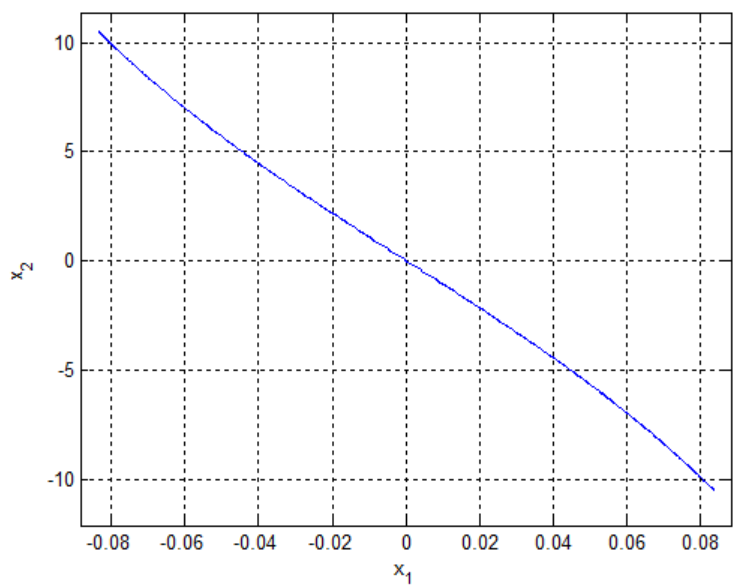
Σχ. 2.44: Ιδιομορφική σχέση – Αντίθετη φάση των μαζών

Αυξάνοντας την ενέργεια του συστήματος απομακρύνοντας το με αρχικές συνθήκες που απέχουν περισσότερο από το σημείο ισορροπίας, παρατηρούμε ότι η περιοχή σταθερής ιδιοσυχνότητας στο διάγραμμα συχνότητας-ενέργειας που είχαμε παρατηρήσει και στον κλάδο της πρώτης ιδιομορφής σταματάει. Η συνολική συμπεριφορά του κλάδου μοιάζει εκθετική στο διάγραμμα FEP αλλά αριθμητικά πειράματα δείχνουν ότι η εξάρτηση σε μη λογαριθμικό άξονα μοιάζει με συνάρτηση ρίζας μεταξύ την ενέργειας και της ιδιοσυχνότητας των ιδιομορφών πάνω στον ίδιο κλάδο (στην περίπτωση μη γραμμικότητας τύπου Duffing).

Ακολουθούν κάποια διαγράμματα, για να γίνει η ποιοτική περιγραφή των ιδιομορφών στον δεύτερο κλάδο για δυο διαφορετικά επίπεδα ενεργειών $E_1 = 10^2$ και $E_2 = 10^4$. Η καμπύλωση του διαγράμματος της ιδιομορφικής σχέσης, που διέπει την οικογένεια της δεύτερης ιδιομορφής, είναι ορατή ακόμα και για ενέργειες όπως η $E_1 = 10^2$ παρόλο που είναι μικρή. Για ακόμα μεγαλύτερες ενέργειες όπως η $E_2 = 10^4$ δεν υπάρχει έντονη καμπύλωση όπως στον κλάδο της πρώτης ιδιομορφής. Όλα τα προαναφερθέντα απεικονίζονται στα σχήματα που ακολουθούν. Δεν εμφανίζονται οι περιοδικές λύσεις όπως στις προηγούμενες περιπτώσεις μέσω των διαγραμμάτων φάσης διότι δεν παρουσιάζουν ποιοτικές διαφορές από αυτές της ίδιας ιδιομορφής για χαμηλές ενέργειες.



Σχ. 2.45: Ιδιομορφική σχέση για E=100



Σχ. 2.46: Ιδιομορφική σχέση για E=10000

2.3.2 Αλγόριθμος μη γραμμικών ιδιομορφών με βελτιστοποίηση

Ο J.C. Slater δημοσίευσε μια μέθοδο υπολογισμού των μη γραμμικών ιδιομορφών, που δεν βασίζεται σε ημιαναλυτικές τεχνικές (όπως η μέθοδος των διαταραχών). Η εργασία του προηγείται χρονικά από αυτή των Peeters et al. αλλά αναφέρεται στην παρούσα διπλωματική, διότι χρησιμοποιεί μια λογική βελτιστοποίησης και δίνει μια καλύτερη εικόνα για τη φύση των μη γραμμικών ιδιομορφών.

Ο αλγόριθμος του Slater έχει 5 βασικά βήματα που εμφανίζονται στο διάγραμμα ροής και κάποια από αυτά επαναλαμβάνονται προκειμένου μέσω της βελτιστοποίησης να καταλήξουμε σε περιοδικές λύσεις σύμφωνα με τον ορισμό του Rosenberg. Ακολουθεί περιγραφή των βημάτων προκειμένου να γίνει αντιληπτός ο τρόπος υπολογισμού των μη γραμμικών ιδιομορφών.

Βήμα 1:

Όπως στον αλγόριθμο των Peeters et al. έτσι και σε αυτόν του Slater, χρειαζόμαστε ένα αρχικό σημείο για να ξεκινήσουμε τον προσδιορισμό του κλάδου μιας ιδιομορφής. Βασισμένοι σε ιδέες από τη θεωρία διαταραχών θεωρούμε ότι οι μη γραμμικές ιδιομορφές υπάρχουν κοντά σε ιδιομορφές του γραμμικοποιημένου συστήματος. Αυτή η παρατήρηση μας βοηθάει αφού έχουμε ένα αρχικό σημείο από το οποίο θα ξεκινήσουμε τη διαδικασία της βελτιστοποίησης.

Πιο συγκεκριμένα, λύνουμε το ιδιομορφικό πρόβλημα που αντιστοιχεί στο γραμμικοποιημένο πρόβλημα και συνεπώς προσδιορίζουμε αφενός τις αρχικές συνθήκες από τις οποίες αν αφήσουμε το σύστημα θα εκτελέσει περιοδική κίνηση και αφετέρου την περίοδο αυτής της κίνησης. Το ιδιοδιάνυσμα αυτού του προαναφερθέντος προβλήματος είναι ουσιαστικά οι αρχικές συνθήκες που αναζητούμε. Γνωρίζοντας ότι αυτό το ιδιοδιάνυσμα είναι στοιχείο βάσης για ένα σύνολο αρχικών καταστάσεων του συστήματος, αναζητούμε ένα διάνυσμα από αυτό το χώρο ώστε να έχει χαμηλή ενέργεια το σύστημα.

Για χαμηλές ενέργειες, η χρήση της γραμμικής ιδιομορφής ως αρχικό σημείο του κλάδου εφαρμόζεται σχεδόν πάντα αποτελεσματικά. Θέλει ιδιαίτερη προσοχή όμως διότι η αναζήτηση μη γραμμικής ιδιομορφής πρέπει να γίνεται σε μια περιοχή κοντά σε αυτήν τη γραμμική ιδιομορφή για χαμηλές ενέργειες διότι αλλιώς υπάρχει ο κίνδυνος να προσδιορίσουμε περιοδικές λύσεις που δεν έχουν τα ίδια ποιοτικά χαρακτηριστικά με την ιδιομορφή από την οποία ξεκινάμε. Με άλλα λόγια, υπάρχει η πιθανότητα αν προσπαθούμε να απομακρυνθούμε πολύ από μια περιοχή μιας γραμμικής ιδιομορφής να βρεθούμε μέσω επαναλήψεων σε άλλο κλάδο ιδιομορφής.

Βήμα 2:

Σε αυτό το βήμα χρησιμοποιούμε τις αρχικές συνθήκες και την περίοδο του προηγούμενου βήματος για να κάνουμε την ολοκλήρωση των εξισώσεων κίνησης ως προς το χρόνο. Πιο συγκεκριμένα, επιλύσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών το οποίο αποτελείται από τις εξισώσεις κίνησης με αρχικές συνθήκες αυτές που βρίσκουμε στο βήμα 1 και σε διάστημα $[-T, 0]$ και $[0, T]$. Πραγματοποιούνται δηλαδή τόσο μια ολοκλήρωση προς θετικούς χρόνους (forward) καθώς επίσης και μια οπισθοδρομική ολοκλήρωση (backward).

Σε αυτό το σημείο, πρέπει να αναφερθεί ότι στην εργασία του Slater υπάρχει διαφορετική αρχική συνθήκη από αυτή που περιγράφηκε παραπάνω. Το σύστημα δεν θεωρείται ότι αφήνεται από μηδενική ταχύτητα, αλλά ότι αρχικά του δίνεται μια αρχική ταχύτητα σύμφωνα με την πρώτη ιδιομορφή του γραμμικοποιημένου συστήματος, ενώ ταυτόχρονα θεωρούνται μηδενικές οι μετατοπίσεις από το σημείο ισορροπίας. Πρακτικά δεν υπάρχει μεγάλη διαφορά στις δυο αυτές θεωρήσεις που προαναφέρθηκαν αλλά υιοθετούμε αυτή των μηδενικών αρχικών ταχυτήτων διότι τότε οι μετατοπίσεις έχουν φυσική σημασία για το μελετητή μηχανικό.

Αυτές οι επιλύσεις των εξισώσεων κίνησης του μη γραμμικού συστήματος που πραγματοποιούνται στο βήμα 2, οδηγούν στο προσδιορισμό λύσεων κοντά στην περιοχή των γραμμικών ιδιομορφών. Αν εφαρμοζόταν στο γραμμικό σύστημα, εξ ορισμού, οι τροχιές αυτών των λύσεων θα ήταν κλειστές και θα ταυτιζόντουσαν. Στην περίπτωση αναζήτησης άλλων περιοδικών λύσεων που ουσιαστικά είναι οι μη γραμμικές ιδιομορφές κατά Rosenberg, υπάρχει κατάλληλο διάστημα χρόνου για το οποίο οι αντίστοιχες τροχιές θα είναι κλειστές. Βασισμένοι σε αυτήν την παρατήρηση μπορούμε να ορίσουμε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης (ελαχιστοποίησης) και αφού το επιλύσουμε να προσδιορίζουμε τις περιοδικές λύσεις. Οι κατάλληλες συναρτήσεις κόστους για αυτό το πρόβλημα δίνονται και υπολογίζονται στο επόμενο βήμα του αλγορίθμου.

Βήμα 3:

Το σφάλμα για τον προσδιορισμό μιας περιοδικής λύσης θα μας δώσει την αντικειμενική συνάρτηση που μας ενδιαφέρει για να λυθεί ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης. Εάν υποθέσουμε ότι $z_i(t)$ είναι η συντεταγμένη i όταν το σύστημα γραφτεί σε μορφή εξισώσεων κατάστασης στο χρόνο t και T μια προσέγγιση της περιόδου τότε για ένα σύστημα n βαθμών ελευθερίας έχουμε συνολικά $2n$ συντεταγμένες στη μορφή εξισώσεων κατάστασης και μια συνάρτηση κόστους μπορεί να έχει τη μορφή:

$$c_1 = \sum_{i=1}^{2n} \left(\int_0^T (z_i(t) - z_i(t-T))^2 dt \right) \quad (2.49)$$

Ουσιαστικά, αυτή η εξίσωση κόστους εκφράζει ποσοτικά κατά πόσο δυο διαδοχικές κλειστές τροχιές απέχουν μεταξύ τους. Κατά την υλοποίηση του αλγορίθμου, το ολοκλήρωμα, που εμφανίζεται στη σχέση (2.49), προσεγγίστηκε από ένα άθροισμα που λαμβάνει υπ' όψιν τις τιμές της υπό ολοκλήρωσης συνάρτησης σε μεγάλο πλήθος σημείων ώστε το σφάλμα αυτής της προσέγγισης να είναι μικρό. Ιδανικότερος τρόπος αντιμετώπισης με μικρότερο υπολογιστικό κόστος θα ήταν η ολοκλήρωση με βάση τα σημεία Gauss.

Μια άλλη συνάρτηση κόστους θα μπορούσε να διατυπωθεί με την παρατήρηση ότι, αν ξεκινήσουμε από κάποιες συντεταγμένες που είναι μηδενικές (όπως οι μετατοπίσεις κατά τον Slater ή οι ταχύτητες αν θέλουμε οι μετατοπίσεις να έχουν κάποια φυσική σημασία) τότε αυτές οι συντεταγμένες x_i θα πρέπει να παραμένουν μηδενικές μετά από μια περίοδο. Μετρώντας την απόκλιση αυτών των συντεταγμένων έχουμε την ακόλουθη συνάσταση κόστους:

$$c_2 = \sum_{i=1}^n (x_i(T))^2 \quad (2.50)$$

Βήμα 4:

Λαμβάνοντας υπ' όψιν όλα τα προαναφερθέντα μπορεί πλέον να διατυπωθεί και να επιλυθεί το πρόβλημα βελτιστοποίησης που θα μας οδηγήσει στον προσδιορισμό των μη γραμμικών ιδιομορφών (εύρεση αρχικών συνθηκών και ιδιοπεριόδου). Χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση `fmincon` για να επιλύσουμε το πρόβλημα στη MatLab. Για την καλή τοποθέτηση του προβλήματος, χρειάζεται μια αντικειμενική συνάρτηση και περιορισμοί για το συγκεκριμένο πρόβλημα που μελετάμε.

Οι αντικειμενικές συναρτήσεις που δίνονται από τις σχέσεις (2.49) και (2.50) δεν ελαχιστοποιούνται αριθμητικά ταυτόχρονα με αποτέλεσμα θα θεωρούμε ένα γραμμικό συνδυασμό τους σαν μια νέα συνάρτηση κόστους και να απαιτούμε την ελαχιστοποίηση της τελευταίας. Επίσης, αξίζει να τονισθεί ότι η περίοδος T είναι και αυτή μεταβλητή σχεδιασμού αφού αναζητούμε και την περίοδο ταλάντωσης μιας μη γραμμικής ιδιομορφής εκτός από τις αρχικές συνθήκες για την οποία πραγματοποιείται.

Αρχικοί περιορισμοί τοποθετούνται στο πρόβλημα λόγω της ίδιας της φύσης. Πιο συγκεκριμένα, γνωρίζουμε υπάρχουν πολλαπλές λύσεις για διαφορετικά επίπεδα ενέργειας. Αυτό το εμπόδιο μπορεί να ξεπεραστεί, είτε απαιτώντας η μηχανική ενέργεια ενός συντηρητικού συστήματος να είναι σταθερή, είτε θεωρώντας μια συγκεκριμένη μη μηδενική συντεταγμένη να είναι σταθερή κατά τη διάρκεια της βελτιστοποίησης. Η τελευταία θέλει ιδιαίτερη προσοχή διότι μπορεί σε κάποια φαινόμενα να οδηγήσει σε πρόβλημα του αλγορίθμου.

Βήμα 5:

Από τα προηγούμενα βήματα μπορεί να δημιουργηθεί μια επαναληπτική διαδικασία. Ξεκινώντας από ένα σημείο του κλάδου της ιδιομορφής και αυξάνοντας κατά 10% τις συντεταγμένες έχουμε τις αρχικές συνθήκες από τις οποίες θα ξεκινήσει η διαδικασία της βελτιστοποίησης. Αυτή η διαδικασία αρχίζει από ένα σημείο που δίνεται από τη γραμμική ιδιομορφή και προσδιορίζει ένα νέο σημείο του κλάδου της ιδιομορφής. Το τελευταίο σημείο που είναι μια μη γραμμική ιδιομορφή, θα λειτουργήσει ως το σημείο από το οποίο θα προσδιορίσουμε τις αρχικές συνθήκες με μια μικρή αύξηση της ενέργειας του. Σε αυτό το σημείο πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή διότι αν αυτή η αύξηση της ενέργειας δεν είναι μικρή, υπάρχει ο κίνδυνος να βρεθούμε εκτός του κλάδου της ιδιομορφής που μας ενδιαφέρει.

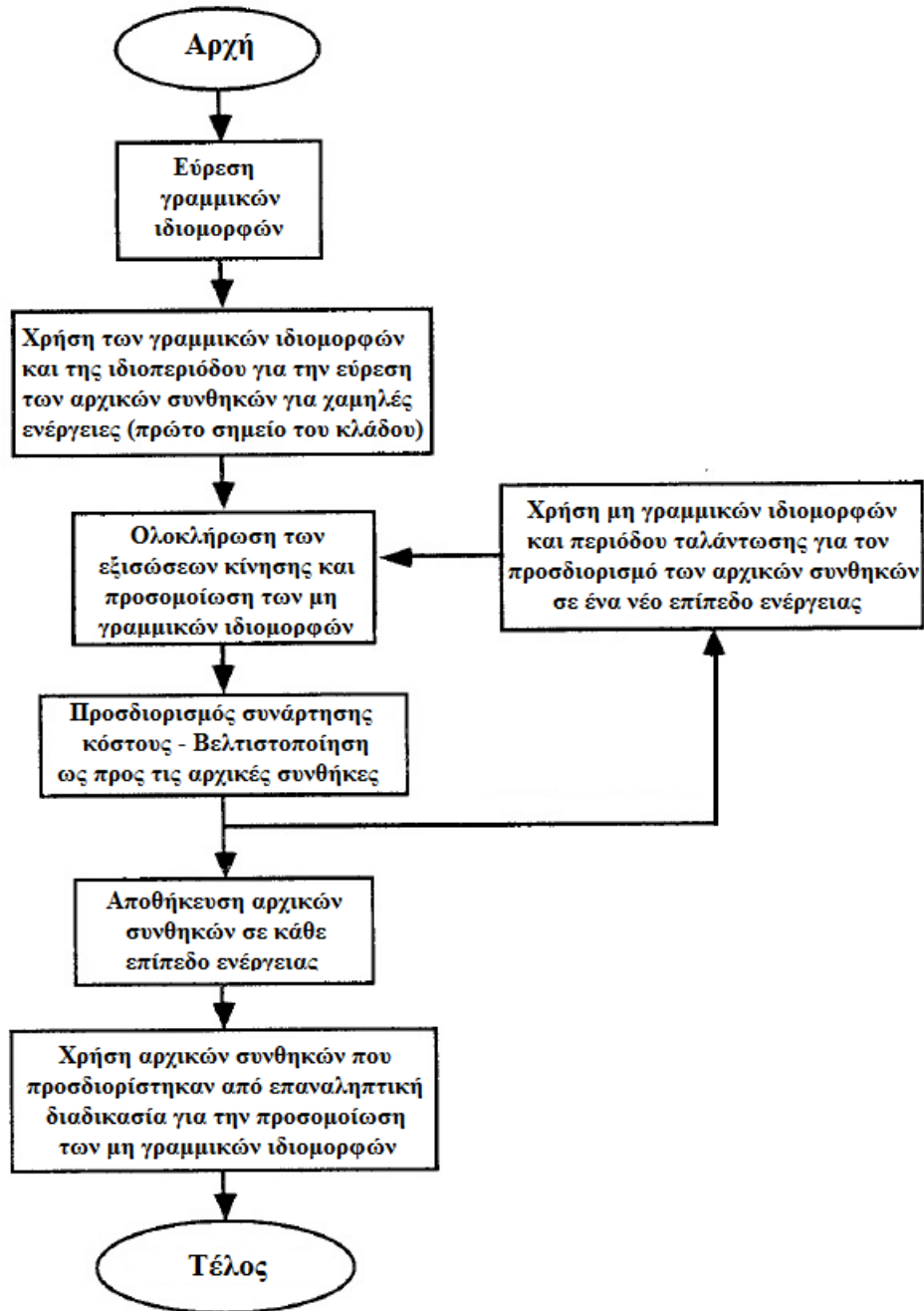
Παρατηρήσεις

Οι τεχνικές του Slater και των Peeters et al. είναι αριθμητικές με αποτέλεσμα, να αποφεύγουμε τις αλγεβρικές πράξεις που χρειάζονται για τον προσδιορισμό των μη γραμμικών ιδιομορφών με κάποια ημιαναλυτική μέθοδο (θεωρία διαταραχών). Η ακρίβεια των τεχνικών αυτών φαίνεται από τα αποτελέσματα όταν εφαρμοστούν σε διάφορα μη γραμμικά συστήματα σε σύγκριση με ασυμπτωτικά αναπτύγματα. Αυτό το γεγονός έχει σαν αποτέλεσμα για το δομοστατικό μηχανικό να είναι χρήσιμα εργαλεία σε αντιθεση με τις ημιαναλυτικές τεχνικές.

Το βασικότερο μειονέκτημα της μεθόδου του Slater είναι ότι, παραβλέπονται φαινόμενα των μη γραμμικών συστημάτων όπως η ύπαρξη ιδιομορφικών διακλαδώσεων. Επίσης, έτσι όπως είναι δομημένος ο αλγόριθμος δεν είναι εύκολο χωρίς κατάλληλη τροποποίηση του η εύρεση της αλληλεπίδρασης των ιδιομορφών σε υψηλότερες ενέργειες όπως εμφανίζεται στον αλγόριθμο των Peeters et al.

Η εμφάνιση των διάφορων ιδιομορφών για διαφορετικά επίπεδα ενέργειας σε άξονες όπως του συστήματος αξόνων (x_1, \dot{x}_1, x_2) , σχηματίζει θεωρητικά μια επιφάνεια (όπως θα δούμε) πάνω στην οποία, αν το σύστημα ξεκινήσει θα παραμείνει μέσα σε αυτήν. Αυτή η αναλλοίωτη ιδιότητα συνδέεται με την έννοια της ιδιομορφικής πολλαπλότητας που εισάγεται από τον ορισμό της μη γραμμικής ιδιομορφής που δίνουν οι Shaw και Pierre. Αυτή η ιδιότητα δεν μπορεί να δειχθεί με την χρήση υπολογιστικών μεθόδων, παρόλο που χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό των μη γραμμικών ιδιομορφών.

Ακολουθεί το διάγραμμα ροής του αλγορίθμου στο οποίο φαίνονται τα προαναφερθέντα βήματα και η επαναληπτική διαδικασία.



Σχ. 2.47: Διάγραμμα ροής αλγορίθμου Slater (με βελτιστοποίηση)

Ακολουθεί εφαρμογή του αλγορίθμου του Slater στο διβάθμιο που μελετήσαμε και με τον αλγόριθμο των Peeters et al. και περιγράφεται από τις εξισώσεις κίνησης στις φυσικές συντεταγμένες x_1 και x_2 :

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= -3x_1 + 2x_2 \\ \ddot{x}_2 &= 2x_1 - 5x_2 - 3x_2^3\end{aligned}\quad (2.51)$$

Οι παραπάνω σχέσεις γράφονται στη μορφή εξισώσεων κατάστασης:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \ddot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ -3x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_2^3 \end{bmatrix} = g(z) \quad (2.52)$$

όπου $z = (x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2)$ το διάνυσμα που περιγράφει την κατάσταση του συστήματος μας και έχει διάσταση $2n$ με n να είναι ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας του συστήματος (στην περίπτωση μας έχουμε διβάθμιο $n = 2$).

Επιλύοντας το ιδιοπρόβλημα για το γραμμικοποιημένο σύστημα βρίσκουμε:

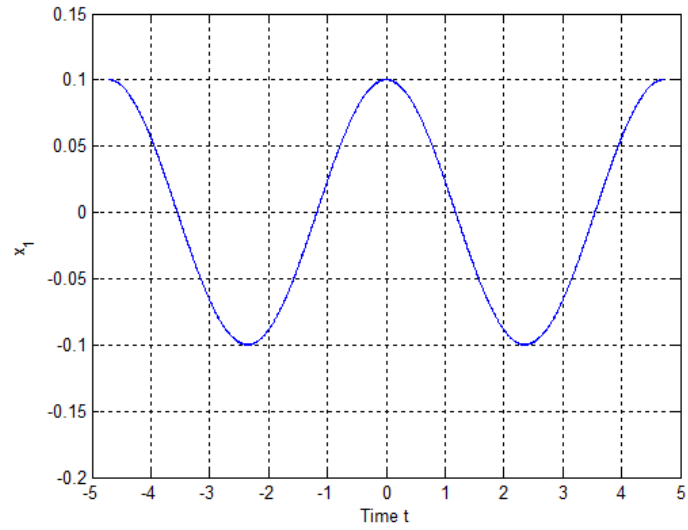
- ✓ Ιδιοσυχνότητα: $\omega_1 = 1.328$ με αντίστοιχη ιδιομορφή: $v_1 = [0.851 \quad 0.526]^T$
- ✓ Ιδιοσυχνότητα: $\omega_2 = 2.497$ με αντίστοιχη ιδιομορφή: $v_2 = [-0.526 \quad 0.851]^T$.

Η συνάρτηση δυναμικού που πρέπει να είναι σταθερή μέσα σε κάθε διαδικασία βελτιστοποίησης σύμφωνα με το βήμα 4 δίνεται από τον τύπο:

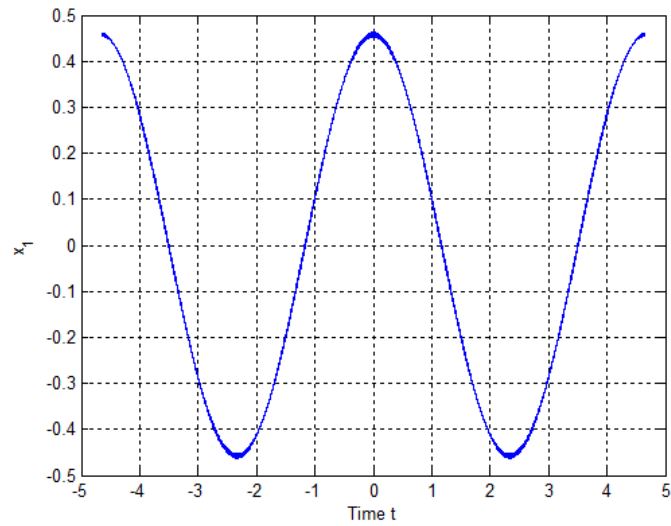
$$U(x_1, x_2) = -\frac{1}{2} \cdot (x_1)^2 - (x_1 - x_2)^2 - \frac{3}{2} \cdot (x_2)^2 - \frac{3}{4} \cdot (x_2)^4 = -U_0 \quad (2.53)$$

Με αυτά τα δεδομένα, μπορούμε να εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο του Slater. Αρχικά μελετάμε την πρώτη ιδιομορφή για την οποία αναμένουμε παρόμοια αποτελέσματα με αυτά που βρέθηκαν από τον αλγόριθμο των Peeters et al. Για μικρές ταλαντώσεις, τα πρώτα σημεία του κλάδου της πρώτης ιδιομορφής βρίσκονται πολύ κοντά στα χαρακτηριστικά της πρώτης ιδιομορφής. Επομένως, ξεκινάμε από ένα διάνυσμα αρχικών συνθηκών που βρίσκεται στον ιδιόχωρο της πρώτης ιδιοπεριόδου και ταυτόχρονα αντιστοιχεί σε ένα επίπεδο ενέργειας πολύ χαμηλό ώστε να μην ενεργοποιηθούν οι μη γραμμικότητες.

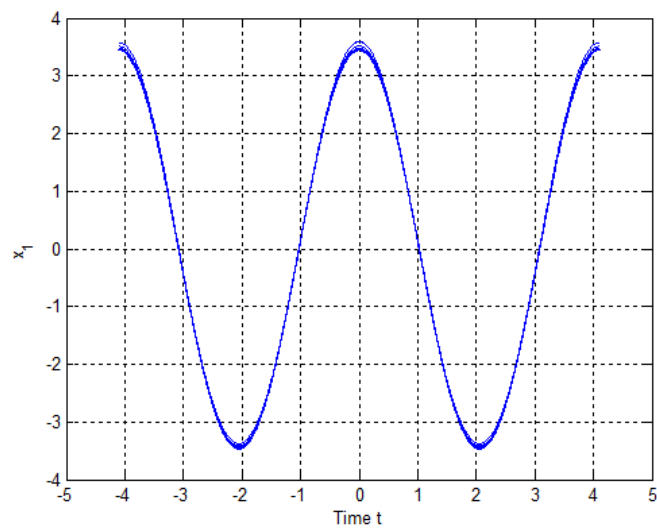
Κατόπιν, ακολουθούμε τα βήματα του αλγορίθμου ώστε μετά τη διαδικασία βελτιστοποίησης να βρούμε το πρώτο σημείο που ανήκει όντως στον κλάδο που εξετάζουμε. Σύμφωνα με το βήμα 2 πραγματοποιείται ολοκλήρωση των εξισώσεων κίνησης (2.52) προς τις δυο κατευθύνσεις του χρόνου σε διαστήματα μήκους $T = 2\pi / \omega_1$.



Σχ. 2.48: Αναζήτηση περιοδικής λύσης στην περιοχή της γραμμικής ιδιομορφής

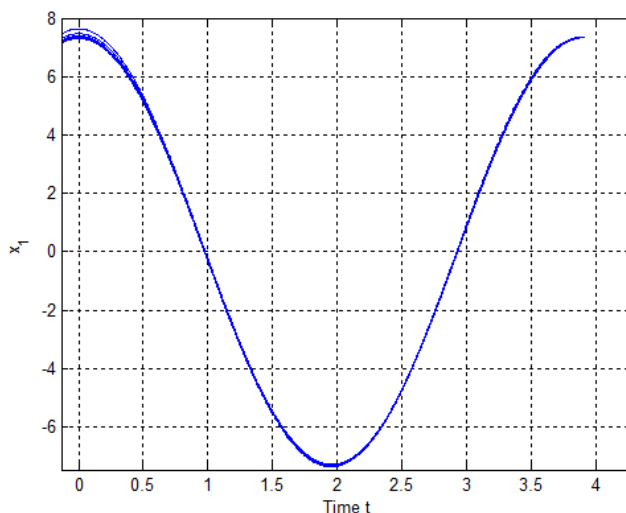


Σχ. 2.49: Αναζήτηση περιοδικής λύσης με επαναληπτική διαδικασία (1)



Σχ. 2.50: Αναζήτηση περιοδικής λύσης με επαναληπτική διαδικασία (2)

Σειρά τώρα στη διαδικασία του αλγορίθμου, έχει ο υπολογισμός των συναρτήσεων κόστους για τις συγκεκριμένες τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού, που υποθέσαμε στα προηγούμενα βήματα. Μόλις ορισθεί η αντικειμενική συνάρτηση ως γραμμικός συνδυασμός των διαφορετικών συναρτήσεων κόστους, επιδιώκουμε την ελαχιστοποίηση της μέσα από την επίλυση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης.

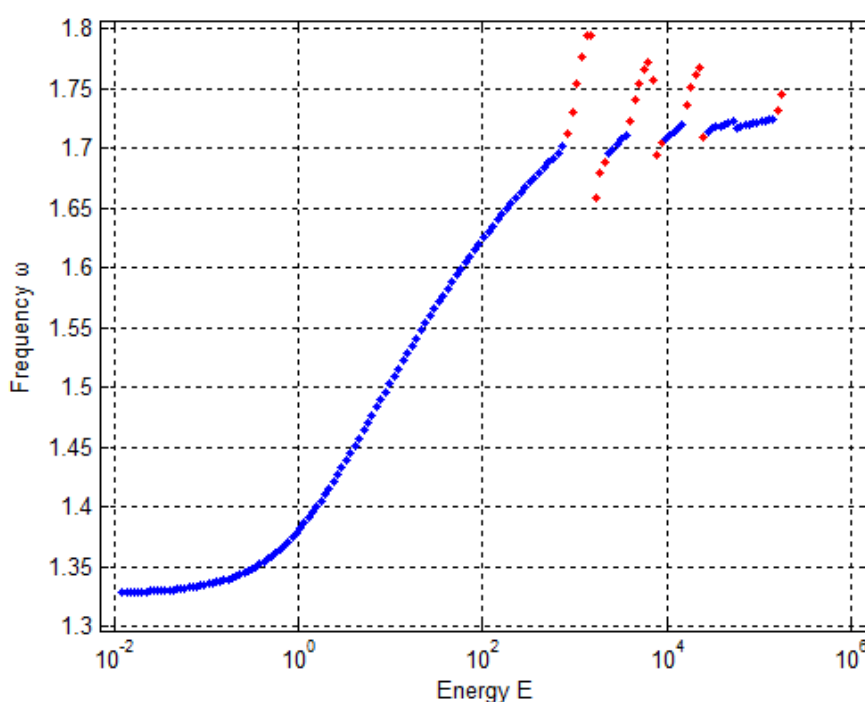


Σχ. 2.51: Εστίαση στη διαδικασία αναζήτησης λύσεων που να ελαχιστοποιούν την αντικειμενική συνάρτηση

Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δοθεί στους περιορισμούς που πρέπει να εισάγουμε στο πρόβλημα, διότι από αυτούς εξαρτάται η σύγκλιση και η ταχύτητα της. Σύμφωνα με την εργασία του Slater η αναζήτηση λύσεων γύρω από τις αρχικές συνθήκες που ξεκινάει η βελτιστοποίηση, πρέπει να γίνεται σε μια περιοχή που να μην είναι μεγαλύτερη από 20% των συνθηκών. Αυτός ο περιορισμός έχει σαν αποτέλεσμα να μην απομακρυνθούμε από τα σημεία που μας ενδιαφέρουν και να μη βρεθούμε σε άλλο κλάδο ιδιομορφών. Το ίδιο συμβαίνει εκτός από τις αρχικές συνθήκες και για την ιδιοπερίοδο που αναζητούμε. Μπορεί η αρχική εκτίμηση της τελευταίας να είναι ίδια με το προηγούμενο βήμα, όπου έχει υπολογισθεί (σε αντίθεση με τις αρχικές συνθήκες που τις αυξάνουμε κατά 10%) αλλά την αντιμετωπίζουμε ως μεταβλητή σχεδιασμού και ο περιορισμός της είναι μέσα σε ένα διάστημα $\pm 10\%$. Τέλος, όπως είδαμε στο 4^ο βήμα υπάρχει ένα περιορισμός στη συμπεριφορά της ενέργειας κατά την αναζήτηση λύσεων στη διαδικασία βελτιστοποίησης γιατί υπάρχουν άπειρες λύσεις του προβλήματος αν δεν εισαχθεί αυτός ο περιορισμός. Επειδή έγινε τροποποίηση του αλγορίθμου ώστε οι αρχικές συνθήκες να έχουν μηδενικές ταχύτητες και αρχικές μετατοπίσεις τη χρονική στιγμή μηδέν, ο περιορισμός που προαναφέραμε, μπορεί να εισαχθεί με το να απαιτούμε η δυναμική ενέργεια του συστήματος να παραμένει σταθερή κατά τη διάρκεια της βελτιστοποίησης. Το πρόβλημα βελτιστοποίησης με τον συγκεκριμένο περιορισμό μετατρέπεται σε μη γραμμικό και επομένως, κάποια επαναληπτική διαδικασία θα μας βοηθήσει να προσδιορίσουμε το ελάχιστο της αντικειμενικής συνάρτησης.

Αφού προσδιορίσουμε τη βέλτιστη λύση, τότε αποθηκεύουμε τις αρχικές συνθήκες για τις οποίες πραγματοποιείται. Στην εργασία του Slater δεν γίνεται αναφορά για την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης όταν έχουμε τη βέλτιστη λύση. Κατά την υλοποίηση του αλγορίθμου παρατηρήθηκε ότι η ελαχιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης μπορεί να μην οδηγήσει πολύ μικρές τιμές όπως θα απαιτούσε η περιοδικότητα κατά τον ορισμό του Rosenberg. Συνεπώς, τα σημεία που δεν δίνουν μικρή τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση εμφανίζονται με διαφορετικό χρώμα στα σχήματα που ακολουθούν.

Για τον κλάδο της πρώτης ιδιομορφής υπολογίζουμε το διάγραμμα συχνότητας-ενέργειας προκειμένου να μπορεί να συγκριθεί με το αντίστοιχο που σχεδιάσαμε με τον αλγόριθμο του Peeters et al.



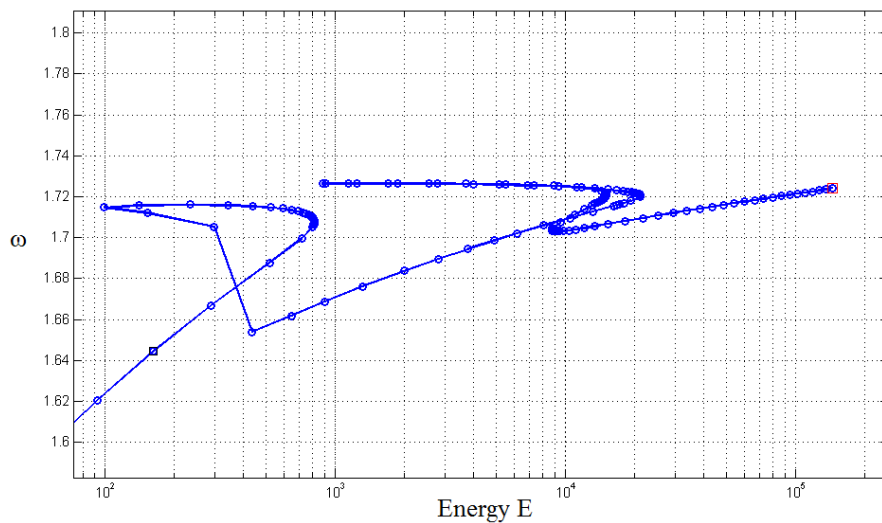
Σχ. 2.52: Διάγραμμα FEP με αλγόριθμο Slater – Με κόκκινο χρώμα απεικονίζονται τα σημεία στα οποία η αντικειμενική συνάρτηση δεν έχει μηδενική τιμή

Παρατηρήσεις

Στα σχήματα φαίνεται η ολοκλήρωση των εξισώσεων κίνησης σε διάστημα μιας περιόδου. Παρατηρούμε ότι, ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης υπολογίζει λύσεις στην περιοχή που ξεκινάμε έτσι ώστε να μειώσει την αντικειμενική συνάρτηση και να βρεθεί η περιοδική λύση που είναι μια μη γραμμική ιδιομορφή για αυτό το επίπεδο ενέργειας. Από το σύνολο των διαγραμμάτων γίνεται αντιληπτό ότι, καθώς αυξάνεται η ενέργεια στο σύστημα (μεγαλύτερο πλάτος ταλάντωσης) μειώνεται η ιδιοπερίοδος και κατ' επέκταση αυξάνεται η ιδιοσυχνότητα. Αυτή η συμπεριφορά είναι αναμενόμενη και παρατηρήθηκε και με την εφαρμογή του αλγορίθμου των Peeters et al.

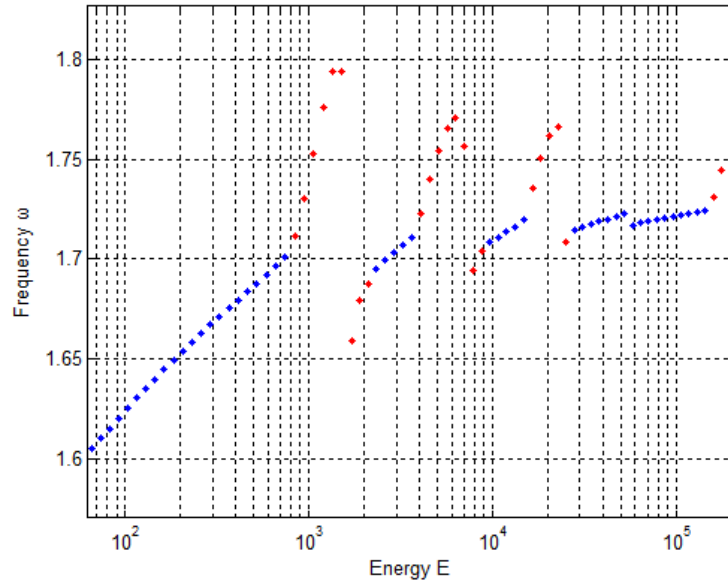
Στο διάγραμμα συχνότητας-ενέργειας (FEP) παρατηρούμε ότι για χαμηλές ενέργειες ξεκινάμε από τη γραμμική ιδιοσυχνότητα $\omega_1 = 1.328$ και καθώς αυξάνεται η ενέργεια αυξάνεται και η ιδιοσυχνότητα στον κλάδο των ιδιομορφών. Το διάγραμμα, μέχρι να φτάσουμε στην περιοχή των πολλαπλών λύσεων και των αλληλεπιδράσεων των ιδιομορφών, παραμένει ίδιο με αυτό που κατασκευάστηκε από τον αλγόριθμο σκόπευσης. Χαρακτηριστικά, παρατηρούμε ότι, για ενέργεια $E = 10^0$ έχουμε $\omega \approx 1.38$ όπως και στο σχήμα Σχ. 2.11 ενώ για $E = 10^2$ έχουμε $\omega \approx 1.62$ και στα δύο διαγράμματα FEP.

Οι διαφορές εμφανίζονται για $E \approx 10^3$ όπου έχουμε τις περιοχές αλληλεπίδρασης των ιδιομορφών και τις πολλαπλές λύσεις. Ο αλγόριθμος της σκόπευσης, είχε μια λογική arc length που επέτρεπε της εύρεση σημείων ύστερα από έντονη καμπύλωση όπως στο Σχ. 2.8 σε αντίθεση με τον αλγόριθμο του Slater που δεν προέβλεπε αυτή τη συμπεριφορά. Παρόλα αυτά, μπορεί να γίνει κατάλληλη τροποποίηση του αλγορίθμου του Slater που να μεταβάλλει το βήμα ανάλογα με το επίπεδο ενέργειας που βρίσκεται το σύστημα και να εισαχθούν επιπρόσθετοι περιορισμοί ώστε να δίνεται κατεύθυνση στον κλάδο των ιδιομορφών.



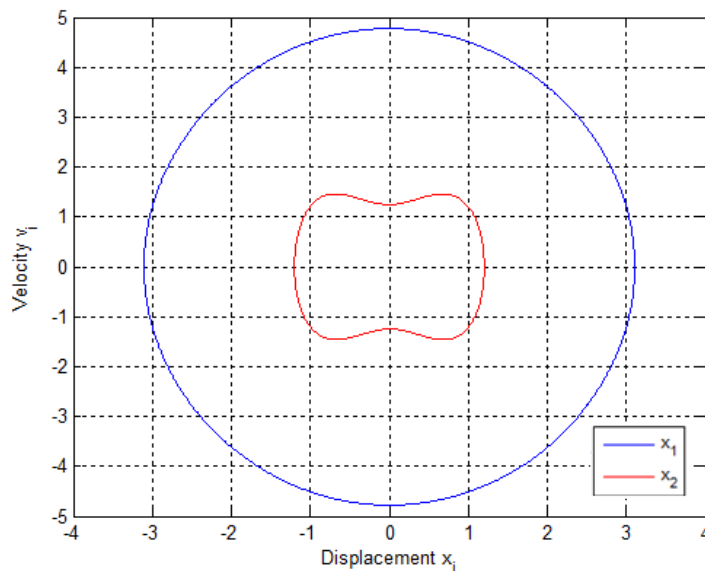
Σχ. 2.53: Περιοχή αλληλεπίδρασης ιδιομορφών με τη μέθοδο των Peeters et. al

Ο αλγόριθμος του Slater ελαχιστοποιεί τις συναρτήσεις κόστους χωρίς να ελέγχεται η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης αν είναι κοντά στο μηδέν, όπου είναι το κριτήριο να εμφανίζεται μια μη γραμμική ιδιομορφή. Στο Σχ. 2.52 με κόκκινο χρώμα εμφανίζονται τα σημεία που η αντικειμενική συνάρτηση έχει τιμή μεγαλύτερη από ένα όριο ($\text{px} \geq 10^{-4}$). Αυτά τα σημεία πρέπει να θεωρούνται ότι δεν ανήκουν στον κλάδο των ιδιομορφών με τα ίδια χαρακτηριστικά. Ακολουθεί ένα σχήμα, που να απεικονίζει την περιοχή που εμφανίζονται οι αλληλεπιδράσεις των ιδιομορφών και τα σημεία που υπολογίζει ο αλγόριθμος του Slater.



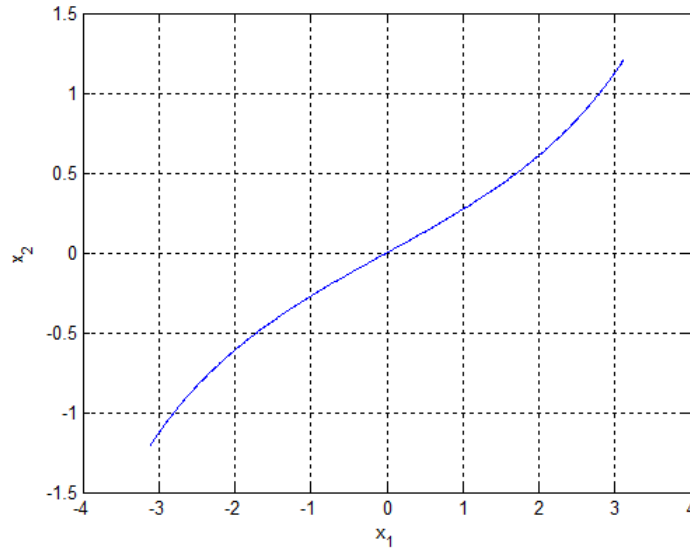
Σχ. 2.54: Περιοχή αλληλεπίδρασης ιδιομορφών με τη μέθοδο του Slater

Για ενέργειες $E < 10^3$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα για να έχουμε ποιοτικά χαρακτηριστικά για το σύστημα που μελετάμε. Θα πρέπει να είναι είναι όμοια με αυτά που βρήκαμε με τον αλγόριθμο των Peeters et al. Για χαμηλές ενέργειες, δεν εμφανίζουμε τις ιδιομορφικές σχέσεις των x_1 και x_2 αφού είναι γραμμικές όπως στην περίπτωση της ιδιομορφής στο αντίστοιχο γραμμικοποιημένο σύστημα. Επομένως, για μεγαλύτερες ενέργειες όπως όταν $\omega_1 = 1.516$ σχεδιάζουμε τα επίπεδα φάσης και τις ιδιομορφικές σχέσεις μεταξύ των συντεταγμένων για να συγκριθούν με αυτά που προσδιορίστηκαν με την προηγούμενη μέθοδο.



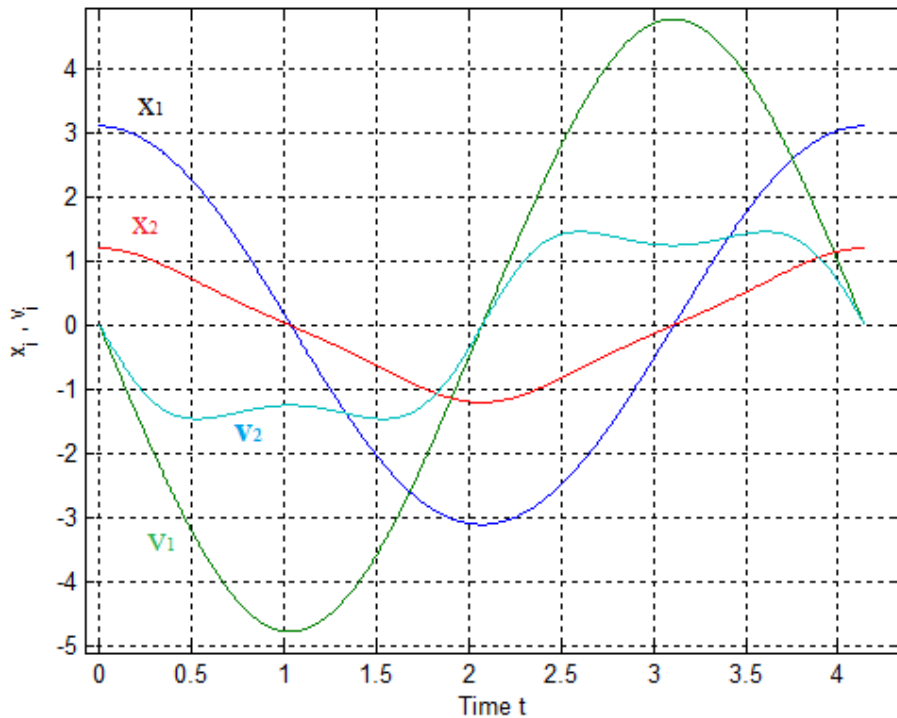
Σχ. 2.55: Επίπεδο φάσης – όμοιο με αυτό που παράχθηκε από την άλλη μέθοδο

Το τελευταίο σχήμα είναι παρόμοιο με το αντίστοιχο Σχ. 2.17. Το ίδιο συμβαίνει και για την ιδιομορφική σχέση των x_1, x_2 , όπως φαίνεται από το σχήμα που ακολουθεί.



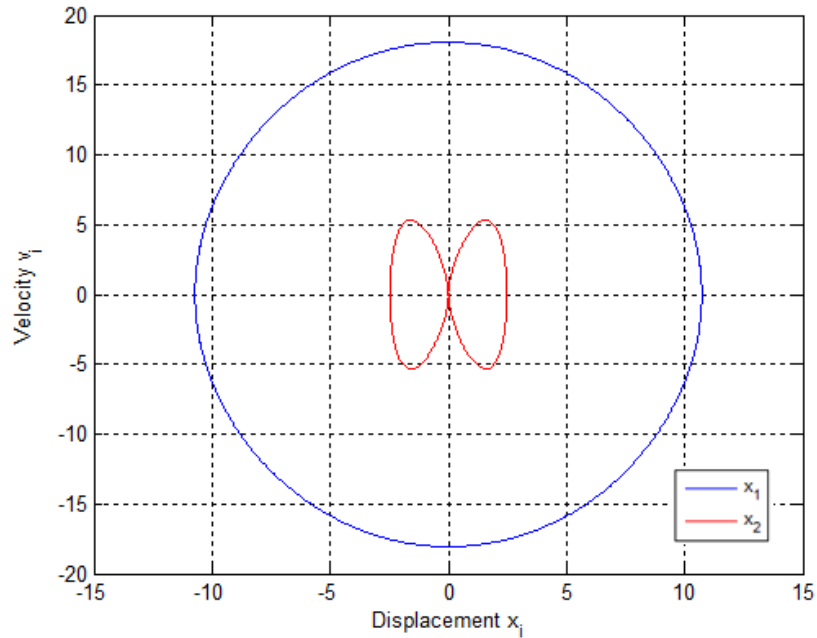
Σχ. 2.56: Ιδιομορφική σχέση των συντεταγμένων (1^η ιδιομορφή) – όμοια με την αντίστοιχη καμπύλη από τη μέθοδο των Peeters et al.

Το Σχ. 2.56 είναι ποιοτικά το ίδιο με το Σχ. 2.18 όπως αναμέναμε. Οι ακραίες τιμές των συντεταγμένων και στις δύο περιπτώσεις είναι ίδιες, αφού αναφερόμαστε σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο ενέργειας όπου δεν υπάρχουν άλλες λύσεις. Χαρακτηριστικά βλέπουμε ότι και στις δύο περιπτώσεις για αρχικές συνθήκες $\vec{x}_0 = [3.13 \ 1.21]^T$ παράγεται περιοδική κίνηση με ιδιοσυχνότητα $\omega_1 = 1.516$.

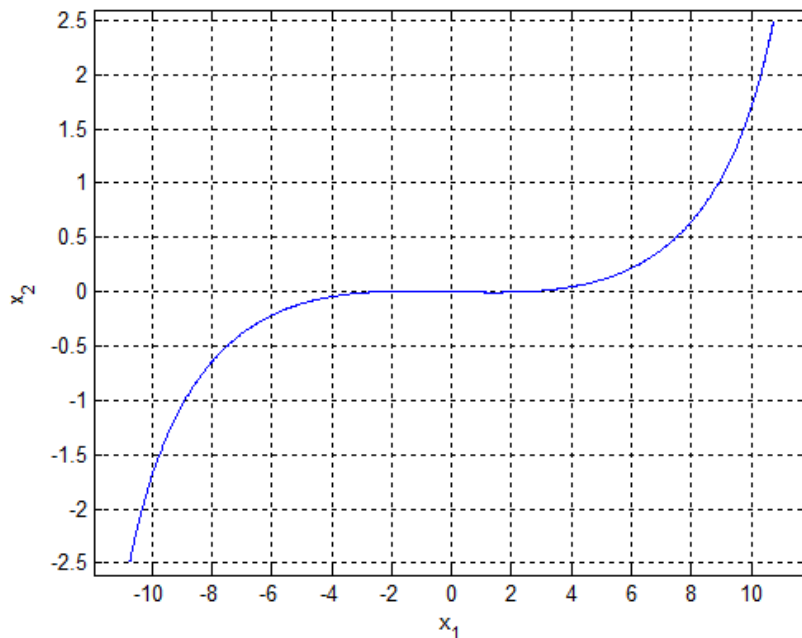


Σχ. 2.57: Περιοδικές λύσεις των συντεταγμένων του διβάθμιου συστήματος

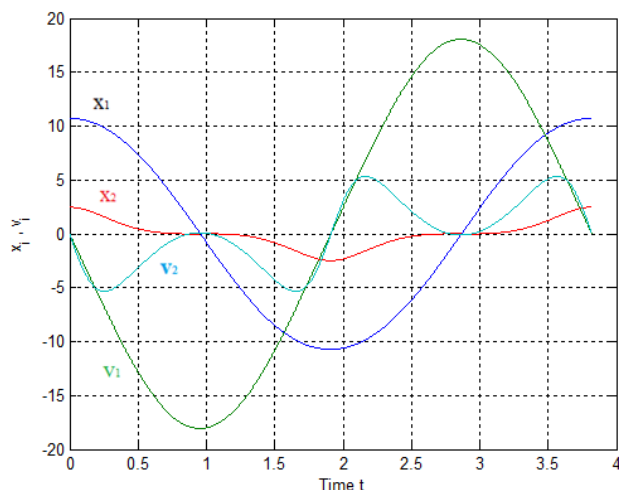
Ίδιες παρατηρήσεις μπορούν να γίνουν και για $\omega_1 = 1.64$, σύμφωνα με τα ακόλουθα διαγράμματα, αν συγκριθούν με τα Σχ. 2.20 και Σχ. 2.21 αντίστοιχα.



Σχ. 2.58: Επίπεδο φάσης για υψηλότερες ενέργειες

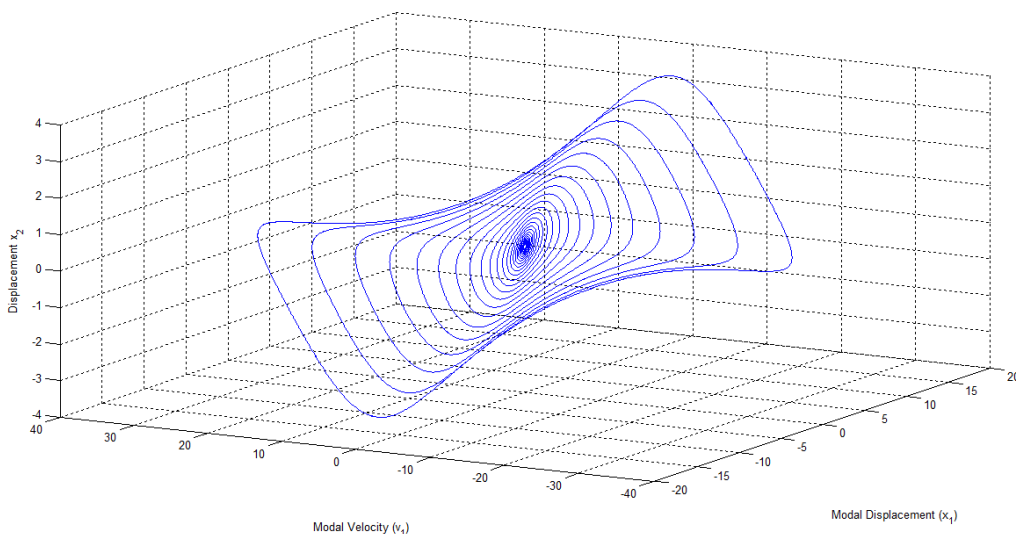


Σχ. 2.59: Ιδιομορφική σχέση για υψηλότερες ενέργειες στον κλάδο της πρώτης ιδιομορφής

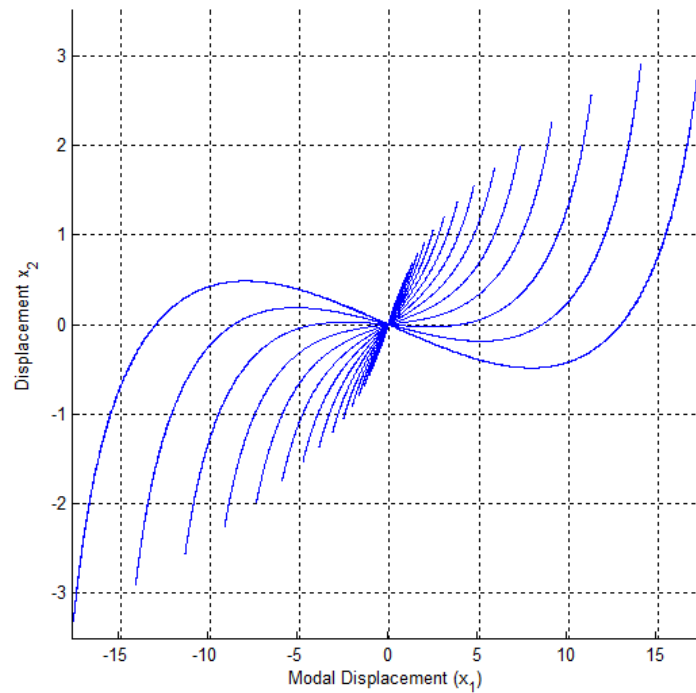


Σχ. 2.60: Περιοδικές λύσεις για υψηλότερες ενέργειες των μετατοπίσεων και των ταχυτήτων

Υπάρχει η δυνατότητα η συμπεριφορά του κλάδου της πρώτης ιδιομορφής να μελετηθεί με ένα τρισδιάστατο διάγραμμα με άξονες (x_1, \dot{x}_1, x_2) . Σε αυτό το διάγραμμα, η μεταβλητή x_1 θεωρείται ως συντεταγμένη αναφοράς αφού όλες οι άλλες συντεταγμένες εκφράζονται συναρτήσει αυτής (στην περίπτωση του διβάθμιου συστήματος υπάρχει μόνο η x_2 ως εξαρτημένη μεταβλητή). Οι διαφορετικές λύσεις ανάλογα με τα επίπεδα ενέργειας σχηματίζουν μια επιφάνεια σε αυτό το σύστημα που, όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, έχει ιδιαίτερες ιδιότητες όπως το γεγονός ότι αν το σύστημα μας ξεκινήσει από ένα σημείο που βρίσκεται πάνω σε αυτήν την επιφάνεια τότε θα παραμείνει σε αυτήν την επιφάνεια καθώς ταλαντώνεται το σύστημα που εξετάζουμε. Αυτή η αναλλοίωτη συμπεριφορά της επιφάνειας-πολλαπλότητας ως προς τη τροχιά πάνω σε αυτήν, θα μας δώσει ένα νέο ορισμό της μη γραμμικής ιδιομορφής κατά Shaw & Pierre. Ακολουθούν μερικά σχήματα για να αναδειχθούν τα προηγούμενα σχόλια.

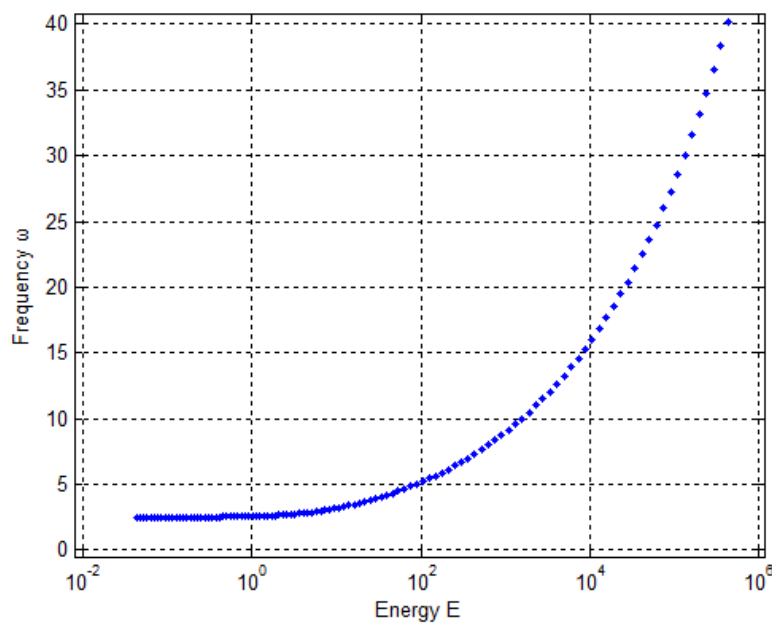


Σχ. 2.61: Τροχιές στο χώρο (x_1, v_1, x_2)



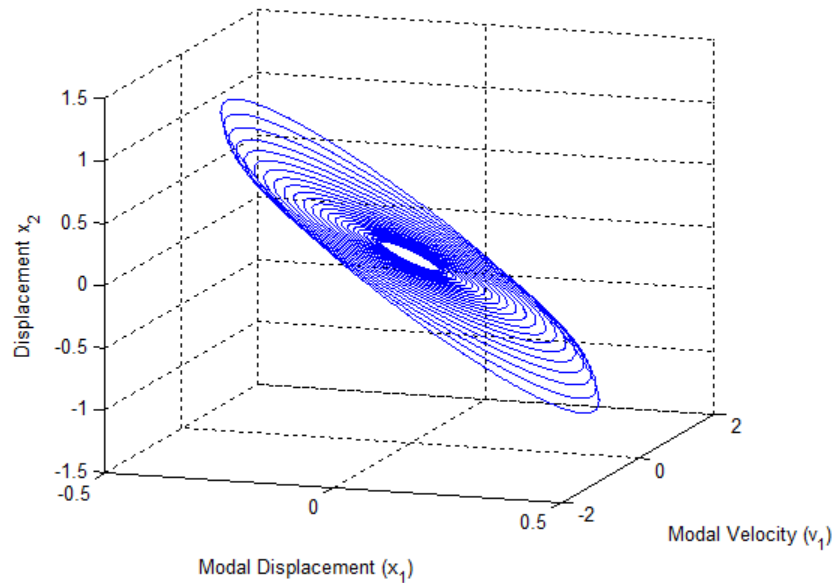
Σχ. 2.62: Ιδιομορφικές σχέσεις για διαφορετικά επίπεδα ενέργειας

Όλα τα προηγούμενα αποτελέσματα αναφέρονται στην οικογένεια των ιδιομορφών που επεκτείνονται από την πρώτη ιδιομορφή του γραμμικοποιημένου συστήματος. Για να έχουμε ποιοτική συμπεριφορά και της δεύτερης οικογένειας μη γραμμικών ιδιομορφών, παραθέτουμε τα αποτελέσματα που εξάγονται από τον αλγόριθμο του Slater. Παραθέτω το διάγραμμα συχνότητας-ενέργειας και την επιφάνεια που σχηματίζεται για διαφορετικά επίπεδα ενεργειών:



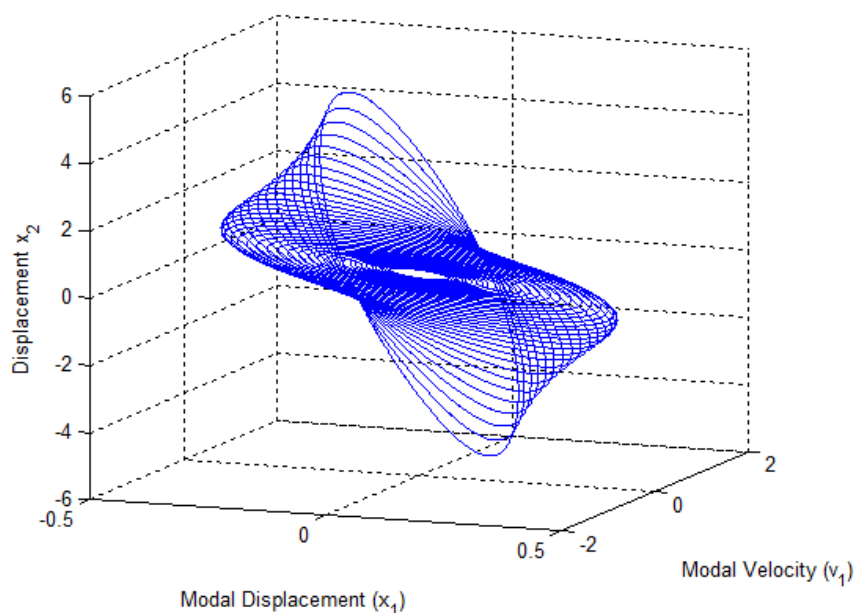
Σχ. 2.63 Διάγραμμα FEP για κλάδο δεύτερης ιδιομορφής

Για ενέργειες $E < 6.50$ που έχουμε σχεδόν σταθερή ιδιοπερίοδο χαράσσουμε την επιφάνεια στους άξονες (x_1, \dot{x}_1, x_2) και παρατηρούμε την καμπύλωση της σε σχέση με την θεωρητικά επίπεδη του γραμμικοποιημένου συστήματος.

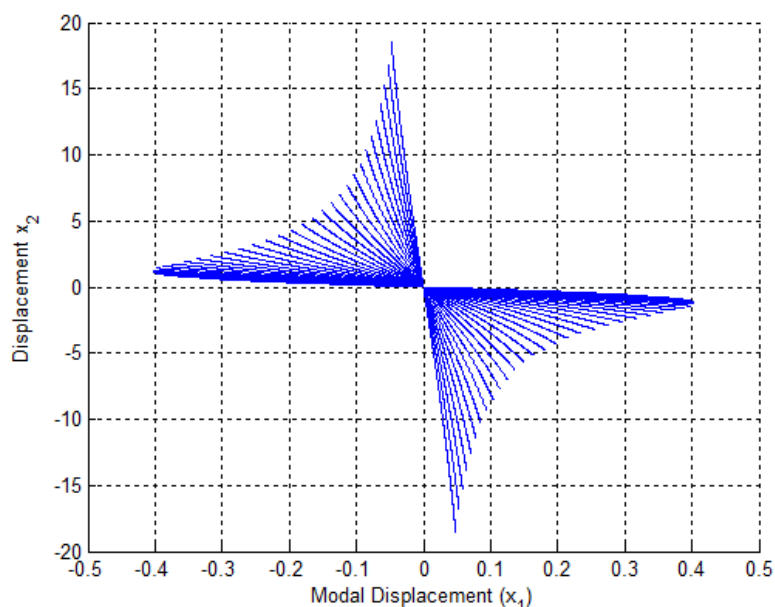


Σχ. 2.64: Τροχιές για χαμηλές ενέργειες – προσέγγιση επιπέδου

Αν συμπεριλάβουμε και καμπύλες για μεγαλύτερα ενεργειακά επίπεδα, τότε μπορούμε να παρατηρήσουμε το φαινόμενο τοπικής συγκέντρωσης της ενέργειας ταλάντωσης. Παρατηρούμε από το Σχ. 2.66 ότι οι περιοδικές λύσεις που ανήκουν στη δεύτερη οικογένεια ιδιομορφών για μεγάλες ενέργειες οδηγούνται σε ταλάντωση μόνο της μάζας στο βαθμό ελευθερίας x_2 ενώ ταυτόχρονα πρακτικά η μάζα στη συντεταγμένη x_1 μένει πρακτικά ακίνητη.



Σχ. 2.65: Τροχιές για υψηλές ενέργειες – πολλαπλότητα



Σχ. 2.66: Ιδιομορφικές σχέσεις για διάφορα επίπεδα ενέργειας

Παρατηρήσεις

Σε αυτό το σημείο, πρέπει να τονισθεί ότι, η ανάλυση μας για πολύ μεγάλες ενέργειες των κρίσιμων περιοχών για το σχεδιασμό της κατασκευής όπου υπάρχουν αλληλεπιδράσεις των ιδιομορφών δεν πραγματοποιείται με τον παραπάνω αλγόριθμο και γι' αυτό ο αλγόριθμος των Peeters et al. έχει πλεονέκτημα ως προς την ασφάλεια. Όμως, η ταχύτητα σύγκλισης είναι γρηγορότερη στον αλγόριθμο του Slater ειδικά αν επιλεγούν μικρά βήματα υπολογισμού των ιδιομορφών.

Παρόλα αυτά, μέχρι ένα επίπεδο ενέργειας και με τους δύο αλγορίθμους μπορούμε να υπολογίσουμε με ακρίβεια τις μη γραμμικές ιδιομορφές ενός μη γραμμικού συστήματος. Ο ορισμός του Rosenberg δεν αποτελεί πλέον μόνο ένα θεωρητικό αποτέλεσμα, αφού πρακτικά μπορούμε να βρούμε ποιες είναι οι περιοδικές λύσεις που περιγράφει. Με βάση αυτές τις μη γραμμικές ιδιομορφές, μπορούμε να εκτιμήσουμε σε ποιες ιδιοσυχνότητες και ενέργειες κινδυνεύει η κατασκευή μας και επίσης να εξετάσουμε φαινόμενα των μη γραμμικών συστημάτων που αγνοούνται κατά τη γραμμική θεώρηση.

Όλη η προηγούμενη περιγραφή έγινε για συντηρητικά συστήματα, κάτι το οποίο φαίνεται αρκετά περιοριστικό μιας και οι κατασκευές του μηχανικού έχουν απόσβεση και άλλα φαινόμενα που οδηγούν σε μη συντηρητικά συστήματα. Σε αυτή τη περίπτωση, έγινε προσπάθεια γενίκευσης του ορισμού της μη γραμμικής ιδιομορφής από τους Shaw & Pierre που στηρίζεται σε μια γεωμετρική θεώρηση και σε ιδέες αναλλοίωτων πολλαπλοτήτων.

Κεφάλαιο 3

Ιδιομορφές σε μη συντηρητικά συστήματα

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, παρουσιάστηκε ο ορισμός της μη γραμμικής ιδιομορφής κατά Rosenberg και υπολογίστηκαν αριθμητικά ιδιομορφές για κάποια συστήματα με δυσκαμψίες τύπου Duffing. Με την εργασία των Shaw & Pierre [24] έγινε μια γενίκευση της έννοιας της ιδιομορφής και για μη συντηρητικά συστήματα. Ο τρόπος ορισμού βασίζεται σε γενικεύσεις της θεωρίας της αναλλοίωτης πολλαπλότητας στα δυναμικά συστήματα. Ακολουθεί αναλυτική περιγραφή του ορισμού και στη συνέχεια θα παρουσιαστεί μια μέθοδος υπολογισμού τους.

3.1 Ιδιομορφή κατά Shaw & Pierre

Όπως και στο κεφάλαιο 2.1 που ορίστηκε η ιδιομορφή κατά Rosenberg αφού αρχικά περιγράφηκε ένας πιο γενικευμένος ορισμός της έννοιας της ιδιομορφής για γραμμικά συστήματα, έτσι και εδώ θα δοθεί στην αρχή ο ορισμός του Shaw & Pierre για γραμμικά μη συντηρητικά συστήματα. Συγκεκριμένα θεωρούμε τις εξισώσεις κίνησης ενός πολυβάθμιου συστήματος με ιξώδη απόσβεση που έχουν τη μορφή:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = 0 \quad (3.1)$$

όπου $x = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T$ είναι το διάνυσμα των μετατοπίσεων του συστήματος.

Σύμφωνα με την κλασική θεωρία, υπάρχει η δυνατότητα μέσω της επίλυσης ενός ιδιοπρόβληματος δευτέρου βαθμού (τετραγωνικό ιδιοπρόβλημα), να βρούμε κάποιου είδους ιδιοδιανυσμάτων ($2N$ το πλήθος) για το συγκεκριμένο πρόβλημα. Αυτός ο τρόπος είναι ισοδύναμος με τον τρόπο που θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια, αλλά ο τελευταίος μας επιτρέπει την επέκταση του ορισμού της μη γραμμικής ιδιομορφής για τα μη συντηρητικά συστήματα. Το βασικότερο πρόβλημα είναι ότι με τις $2N$ ιδιομορφές δεν επιτυγχάνεται αποσύζευξη των εξισώσεων κίνησης στη γενικότερη περίπτωση. Δίνουμε στις εξισώσεις κίνησης (3.1) τη μορφή πρώτης τάξης διαφορικής εξίσωσης υποθέτοντας ότι οι ταχύτητες $y_i = \dot{x}_i$ είναι ανεξάρτητες μεταβλητές. Το σύστημα περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$\dot{z} = Dz \quad (3.2)$$

όπου $z = [x \quad y]^T$ και $D = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A & B \end{bmatrix}$ με $A = (\alpha_{ij}) = -M^{-1}K$ και $B = (\beta_{ij}) = -M^{-1}C$.

Εάν υποθέσουμε ότι η εξίσωση (3.2) έχει μια λύση της μορφής: $z(t) = \bar{z} \cdot e^{\lambda t}$ καταλήγουμε σε ένα κλασσικό ιδιοπρόβλημα πρώτης τάξης και μπορούμε να προσδιορίσουμε τα $2N$ ιδιοδιανύσματα και τις αντίστοιχες ιδιοτιμές λ . Όπως είδαμε, το σύστημα κινείται σύμφωνα με μια ιδιομορφή, όταν υπάρχει μια συγκεκριμένη συνάρτηση χρόνου που επηρεάζει κάθε συντεταγμένη σύμφωνα με ένα συντελεστή (τιμή ιδιοδιανύσματος στη συντεταγμένη). Προφανώς, στα συστήματα με απόσβεση αυτή η συνάρτηση θα προκαλεί την μείωση στο πλάτος ταλάντωσης.

Στον ορισμό της μη γραμμικής ιδιομορφής από τους Shaw & Pierre βασικό ρόλο παίζει η ιδιότητα του αναλλοίωτου υπόχωρου των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχεί σε μια ιδιοσυχνότητα. Στη γραμμική περίπτωση, όπως φαίνεται από τη σχέση $z(t) = \bar{z} \cdot e^{\lambda t}$ και από το είδος των ιδιοδιανυσμάτων, αν το σώμα ξεκινήσει από μια κατάσταση (διάνυσμα διάστασης $2N$) που ανήκει σε κάποιο ιδιόχωρο, τότε η λύση μας θα παραμείνει σε αυτόν τον ιδιόχωρο καθώς ταλαντώνεται. Ο χώρος αυτός έχει μια ιδιότητα αναλλοίωτης που θα χρησιμοποιηθεί σε γενικότερα συστήματα.

Η συγχρονισμένη ταλάντωση του συστήματος που εισάγεται με τη συνάρτηση $e^{\lambda t}$ είναι ένα κοινό στοιχείο με τον ορισμό της μη γραμμικής ταλάντωσης κατά Rosenberg. Επίσης, είναι εύκολο να αντιληφθούμε από τις προηγούμενες σχέσεις ότι υπάρχει μια σχέση των μετατοπίσεων όταν το σύστημα ταλαντώνεται σε κάποια ιδιομορφή. Παρ' όλα αυτά, υπάρχει μια βασική διαφορά μεταξύ των συντηρητικών και μη συντηρητικών συστημάτων. Με παρόμοια λογική με αυτήν που αντιληφθήκαμε τη σχέση μεταξύ των μετατοπίσεων, υπάρχει στα συστήματα με ιζώδη απόσβεση και μια εξάρτηση όλων των συντεταγμένων (μετατοπίσεων και ταχυτήτων) μεταξύ τους.

Με βάση όλα τα προαναφερθέντα, μια κίνηση θεωρείται ότι έχει μορφή ιδιομορφής όταν όλες οι συντεταγμένες του εξαρτώνται από ένα απλό ζευγάρι μετατόπισης-ταχύτητας. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι αυτό το ζεύγος είναι τα x_1 και y_1 . Στη γραμμική περίπτωση, η εξάρτηση που αναφέραμε μεταξύ των συντεταγμένων είναι γραμμική οπότε μπορούμε να γράψουμε σε μητρική μορφή τις σχέσεις αυτές:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \\ y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_{12} & a_{22} \\ \vdots & \vdots \\ a_{1N} & a_{2N} \\ 0 & 1 \\ b_{12} & b_{22} \\ \vdots & \vdots \\ b_{1N} & b_{2N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Η εξίσωση (3.3) περιγράφει ένα επίπεδο σε ένα χώρο φάσης διάστασης $2N$. Οποιαδήποτε τροχιά ξεκινήσει από αυτό το επίπεδο, παραμένει σε αυτό σύμφωνα με τις εξισώσεις κίνησης (3.2) και αποτελεί μια μη γραμμική ιδιομορφή του προβλήματος. Η εξάρτηση των ταχυτήτων από τις υπόλοιπες συντεταγμένες επιτρέπει στους βαθμούς ελευθερίας να έχουν διαφορά φάσης μεταξύ τους. Αυτό το τελευταίο χαρακτηριστικό παρατηρείται και μετά τον κλασικό τρόπο εύρεσης των ιδιομορφών (λύνοντας το ιδιομορφικό πρόβλημα δεύτερης τάξης).

Γράφοντας την εξίσωση (3.2) κατά συντεταγμένη για $i = 1, \dots, N$:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_i &= y_i \\ \dot{y}_i &= \sum_{j=1}^N (\alpha_{ij}x_j + \beta_{ij}y_j) \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

και χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.3) ως μετασχηματισμό στις βασικές συντεταγμένες x_1 και y_1 ($x_j = a_{1j}x_1 + a_{2j}y_1$ και $y_j = b_{1j}x_1 + b_{2j}y_1$) έχουμε για $i=1$:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1 \\ \dot{y}_1 &= \sum_{j=1}^N [\alpha_{1j}(a_{1j}x_1 + a_{2j}y_1) + \beta_{1j}(b_{1j}x_1 + b_{2j}y_1)] \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

Στις σχέσεις (3.4) αντικαθιστώ τα (x_j, y_j) ώστε όλες οι εξισώσεις να εκφραστούν συναρτήσει των x_1 και y_1 . Χωρίζοντας τους όρους με τα x_1 και y_1 και εξισώνοντας τους αντίστοιχους συντελεστές καταλήγω στο ακόλουθο σύστημα:

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_{12} & a_{22} \\ \vdots & \vdots \\ a_{1N} & a_{2N} \\ 0 & 1 \\ b_{12} & b_{22} \\ \vdots & \vdots \\ b_{1N} & b_{2N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_{12} & a_{22} \\ \vdots & \vdots \\ a_{1N} & a_{2N} \\ 0 & 1 \\ b_{12} & b_{22} \\ \vdots & \vdots \\ b_{1N} & b_{2N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \sum_{j=1}^N (\alpha_{1j}a_{1j} + \beta_{1j}b_{1j}) & \sum_{j=1}^N (\alpha_{1j}a_{2j} + \beta_{1j}b_{2j}) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Η σχέση (3.6) είναι ένα σύστημα εξισώσεων με αγνώστους τα $(a_{1i}, a_{2i}, b_{1i}, b_{2i})_{i=2, \dots, N}$ που για υποκρίσιμες ταλαντώσεις έχει ακριβώς N ζευγάρια λύσεων ενώ για τις υπόλοιπες περιπτώσεις μπορεί να υπάρχουν πολλαπλές λύσεις. Σε κάθε ζευγάρι αντιστοιχεί και μια διαφορετική πολλαπλότητα στο χώρο φάσεων, που είναι αναλλοίωτη ως προς την κίνηση του συστήματος. Ακολουθώντας τη διαδικασία που περιγράφηκε παραπάνω, επιτυγχάνουμε απαλοιφή του χρόνου και οδηγούμαστε σε ένα σύστημα εξισώσεων που περιγράφει τη γεωμετρία των ιδιόχωρων.

Σε αυτό το σημείο, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την υπέρθεση των λύσεων ενός γραμμικού συστήματος, προκειμένου να προσδιορίσουμε τις συντεταγμένες μιας λύσης που δεν ανήκει σε κάποιο ιδιόχωρο. Πιο συγκεκριμένα, για να γίνει ιδιομορφική ανάλυση εισάγεται ο μετασχηματισμός:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_{12} & a_{22} \\ \vdots & \vdots \\ a_{1N} & a_{2N} \\ 0 & 1 \\ b_{12} & b_{22} \\ \vdots & \vdots \\ b_{1N} & b_{2N} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} u_k(t) \\ v_k(t) \end{bmatrix} = U \cdot w(t) \quad (3.7)$$

όπου U είναι ένας $2N \times 2N$ πίνακας που αποτελείται από τα $k=1, \dots, N$ ζεύγη στηλών-λύσεων του συστήματος (3.6) ενώ το διάνυσμα $w = [u_1, v_1, \dots, u_N, v_N]^T$ περιλαμβάνει τις ιδιομορφικές συντεταγμένες με u_k και v_k να είναι η μετατόπιση και η ταχύτητα-αναφοράς αντίστοιχα για την k ιδιομορφή.

Με κατάλληλη χρήση του παραπάνω μετασχηματισμού, παράγουμε τις εξισώσεις κίνησης του συστήματος στο χώρο των ιδιομορφικών συντεταγμένων. Από τη σχέση (3.2) με τη χρήση του μετασχηματισμού (3.7) έχουμε:

$$U\dot{w} = DUw \quad (3.8)$$

$$\dot{w} = U^{-1}DUw \quad (3.9)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{v}_1 \\ \vdots \\ \dot{u}_N \\ \dot{v}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_1^2 & -2\xi_1\omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_N^2 & -2\xi_N\omega_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_N \\ v_N \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

όπου τα ω_k και ξ_k δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$-\omega_k^2 = \alpha_{11} + \sum_{j=2}^N \alpha_{1j} (a_{1j})_k + \sum_{j=2}^N \beta_{1j} (b_{1j})_k \quad (3.11)$$

$$-2\xi_k \omega_k = \beta_{11} + \sum_{j=2}^N \alpha_{1j} (a_{2j})_k + \sum_{j=2}^N \beta_{1j} (b_{2j})_k \quad (3.12)$$

Παρατηρώντας τη σχέση (3.10), βλέπουμε ότι, ο πίνακας είναι *block* διαγώνιος και συγκεκριμένα τα *blocks* είναι 2×2 κάτι που μας βοηθάει στην αποσύζευξη των εξισώσεων και στην ξεχωριστή μελέτη των ιδιομορφικών μορφών. Η δυναμική του συστήματος μπορεί να αναλυθεί σε N διαφορετικούς αναλλοίωτους ιδιομορφικούς χώρους και σε κάθε έναν από αυτούς να έχουμε ένα μονοβάθμιο σύστημα που περιγράφεται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_k \\ \dot{v}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_k^2 & -2\xi_k \omega_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \end{bmatrix}, \quad k = 1, \dots, N \quad (3.13)$$

Επιλύοντας αυτό το μονοβάθμιο ταλαντωτή για κάθε k , μπορούμε μετά να συνθέσουμε τα αποτελέσματα σύμφωνα με τη σχέση (3.7) ώστε να προσδιορίσουμε τη συμπεριφορά του συστήματος, ανεξάρτητα από το γεγονός ότι η ταλάντωση φθίνει και τείνει προς το σημείο ισορροπίας.

Σε αυτό το σημείο, αξίζει να αναφερθεί ότι, σύμφωνα με την εξίσωση (3.11) η ιδιοσυχνότητα της ταλάντωσης εξαρτάται από το ιδιοδιάνυσμα. Αυτό το χαρακτηριστικό το είχαμε παρατηρήσει και στα συντηρητικά συστήματα αφού καθώς αυξανόταν η ενέργεια του συστήματος αλλάζαν τόσο οι ιδιομορφές όσο και οι ιδιοσυχνότητες του συστήματος όπως απεικονίζεται στο διάγραμμα FEP.

Αυτή η ανάλυση των ιδιομορφών είναι διαφορετική σε σχέση με την κλασσικό τρόπο που έπρεπε να λύσουμε ένα ιδιοπρόβλημα. Σε αυτήν την περίπτωση ζητάμε την επίλυση των $4N - 4$ εξισώσεων που δίνονται από τη σχέση (3.6) χωρίς να βρούμε πρώτα τις ιδιοσυχνότητες. Μετά την επίλυση αυτού του συστήματος μπορούμε να υπολογίσουμε τη γεωμετρία της πολλαπλότητας-ιδιομορφής.

Γενίκευση του ορισμού της μη γραμμικής ιδιομορφής για μη γραμμικά συστήματα

Αφού διατυπώσαμε με διαφορετικό τρόπο την έννοια της ιδιομορφής για γραμμικά μη συντηρητικά συστήματα και αποδεικνύεται ότι είναι ισοδύναμος με τον κλασσικό ορισμό, τώρα μπορούμε να επεκτείνουμε τον ορισμό και για μη γραμμικά συστήματα, βασισμένοι στο χαρακτηριστικό της αναλλοίωτης συμπεριφοράς.

- Ορισμός – Αναλλοίωτο σύνολο

Αναλλοίωτο σύνολο για ένα δυναμικό σύστημα είναι ένα υποσύνολο S του χώρου φάσης τέτοιο ώστε για κάθε σημείο του που λαμβάνεται ως αρχική συνθήκη για τις εξισώσεις κίνησης του συστήματος, η λύση τους παράγει τροχιά που βρίσκεται μέσα στο S για όλους τους χρόνους.

Η έννοια της μη γραμμική ιδιομορφής θα στηριχθεί στον προηγούμενο ορισμό μιας και όπως θα δούμε η μη γραμμική ιδιομορφή ορίζεται ως αναλλοίωτος υπόχωρος για τα μη γραμμικά συστήματα. Αυτοί οι υπόχωροι απεικονίζονται στο χώρο φάσης ως μη επίπεδες διδιάστατες επιφάνειες-πολλαπλότητες, που περιέχουν το σημείο ισορροπίας γύρω από το οποίο εμφανίζονται. Πιο συγκεκριμένα, οι πολλαπλότητες αυτές έχουν ως εφαπτομενικό επίπεδο στο σημείο ισορροπίας τις γραμμικές ιδιομορφές που είναι επίπεδα όπως είδαμε σε προηγούμενο σημείο της εργασίας.

Στη γενική περίπτωση οι εξισώσεις κίνησης γράφονται για κάθε $i = 1, \dots, N$:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_i = y_i \\ \dot{y}_i = f_i(x; y) \end{array} \right\} \quad (3.14)$$

όπου οι γενικευμένες μετατοπίσεις έχουν την μορφή $x = [x_1, \dots, x_N]^T$ ενώ οι αντίστοιχες γενικευμένες ταχύτητες είναι $y = [y_1, \dots, y_N]^T$.

Όπως και στη γραμμική περίπτωση, θεωρούμε μια εξάρτηση των συντεταγμένων (μετατοπίσεων και ταχυτήτων) από δύο συγκεκριμένες συντεταγμένες όπως οι x_1 και y_1 . Αυτή η εξάρτηση αλλάζει ανάλογα με την ιδιομορφή που εξετάζουμε. Υποθέτουμε ότι οι ιδιομορφικές συντεταγμένες της ιδιομορφής που εξετάζουμε είναι η μετατόπιση $u = x_1$ και η ταχύτητα $v = y_1$.

Σε αντίθεση με τη γραμμική περίπτωση που η προαναφερθείσα εξάρτηση είναι γραμμική και εκφράζεται από τη σχέση (3.3), σε ένα γενικό μη γραμμικό σύστημα της μορφής (3.14) θεωρούμε συναρτήσεις X_i και Y_i τέτοιες ώστε:

$$\left. \begin{array}{l} x_i = X_i(u, v) \\ y_i = Y_i(u, v) \end{array} \right\} \quad (3.15)$$

με $i = 1, \dots, N$ όπου εξ' ορισμού $X_1(u, v) = u$ και $Y_1(u, v) = v$. Σε μητρωϊκή μορφή:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \vdots \\ x_N \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ X_2(u, v) \\ Y_2(u, v) \\ \vdots \\ X_N(u, v) \\ Y_N(u, v) \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Η τελευταία αναπαράσταση της επιφάνειας στο χώρο των φάσεων δεν είναι πάντα εφικτή. Υπάρχουν περιπτώσεις, ακόμα και για γραμμικά συστήματα, που δεν υπάρχουν συναρτήσεις X_i και Y_i . Σε μη γραμμικά συστήματα υπάρχουν φαινόμενα όπως η αλληλεπίδραση των ιδιομορφών που για να μελετηθούν χρειάζεται αλλαγή των σχέσεων (3.16).

- Ορισμός – Μη γραμμική ιδιομορφή κατά Shaw & Pierre

Ένα μη γραμμικό, αυτόνομο σύστημα λέμε ότι κινείται σε μορφή μιας μη γραμμικής ιδιομορφής όταν η τροχιά της κίνησης παραμένει σε μια διδιάστατη αναλλοίωτη πολλαπλότητα μέσα στο χώρο φάσης. Αυτή η πολλαπλότητα έχει την ιδιότητα ότι περιέχει το ευσταθές σημείο ισορροπίας του συστήματος και μάλιστα σε αυτό το σημείο έχει εφαπτόμενο το επίπεδο που αντιστοιχεί σε ιδιομορφή του αντίστοιχου γραμμικοποιημένου συστήματος γύρω από το συγκεκριμένο σημείο ισορροπίας.

Για να προσδιορίσουμε τη μη γραμμική ιδιομορφή πρέπει να βρούμε τις συναρτήσεις X_i και Y_i κάτι το οποίο εν γένει δεν είναι μια εύκολη διαδικασία. Θα πρέπει να συνδυάσουμε τις εξισώσεις κίνησης (3.14) με τους περιορισμούς που εισάγει η σχέση (3.16) ώστε να καταλήξουμε σε ένα σύστημα εξισώσεων ως προς τα X_i και Y_i και είτε να αναζητήσουμε ημίαναλυτικές λύσεις είτε να βρούμε προσεγγιστικές λύσεις με χρήση αριθμητικών μεθόδων.

Με διαδικασία παρόμοια με αυτή που εκτελέσαμε στην περίπτωση της γραμμικής ιδιομορφής προσπαθούμε να απαλείψουμε το χρόνο. Αρχικά, παραγωγίζουμε τις εξισώσεις (3.15) χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_i &= \frac{\partial X_i}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial X_i}{\partial v} \dot{v} \\ \dot{y}_i &= \frac{\partial Y_i}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial Y_i}{\partial v} \dot{v} \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

Σύμφωνα με τις εξισώσεις κίνησης (3.14) οι τελευταίες σχέσεις παίρνουν τη μορφή:

$$\left. \begin{aligned} y_i &= \frac{\partial X_i}{\partial u} v + \frac{\partial X_i}{\partial v} f_1(x; y) \\ f_i(x; y) &= \frac{\partial Y_i}{\partial u} v + \frac{\partial Y_i}{\partial v} f_1(x; y) \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

με την παρατήρηση ότι $v = y_1 \Rightarrow \dot{v} = \dot{y}_1 = f_1(x; y)$ και $\dot{u} = v$. Σε αυτό το σημείο θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (3.16) για να εμφανισθούν οι άγνωστες ποσότητες.

Τελικώς, μετά την αντικατάσταση καταλήγουμε στις εξισώσεις που περιγράφουν τη γεωμετρία της πολλαπλότητας για $i = 1, \dots, N$:

$$\begin{aligned}
 Y_i(u, v) &= \frac{\partial X_i(u, v)}{\partial u} v + \frac{\partial X_i(u, v)}{\partial v} f_1(u, X_2(u, v), \dots, X_N(u, v); v, Y_1(u, v), \dots, Y_N(u, v)) \\
 f_i(u, X_2(u, v), \dots, X_N(u, v); v, Y_1(u, v), \dots, Y_N(u, v)) &= \\
 &= \frac{\partial Y_i(u, v)}{\partial u} v + \frac{\partial Y_i(u, v)}{\partial v} f_1(u, X_2(u, v), \dots, X_N(u, v); v, Y_1(u, v), \dots, Y_N(u, v))
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Παρατηρήσεις

1. Το πρόβλημα (3.19) είναι αρκετά σύνθετο σε σχέση με τις αρχικές διαφορικές εξισώσεις (3.14) που περιγράφουν πως κινείται το σύστημα. Παρ' όλα αυτά, το γεγονός ότι μπορούμε να βρούμε ημιαναλυτικές λύσεις του προβλήματος σε τοπικό επίπεδο (γύρω από το σημείο ισορροπίας) υποθέτοντας συγκεκριμένες πολυωνυμικές μορφές για τους αγνώστους X_i και Y_i είναι ο λόγος που διατυπώθηκε από τους Shaw & Pierre το 1992. Μάλιστα μεταγενέστερα διατυπώθηκαν και αριθμητικές τεχνικές που να το επιλύουν και που βασίζονται σε Galerkin μεθόδους για μη γραμμικές εξισώσεις.
2. Αφού επιλυθεί το πρόβλημα (3.19) μπορούμε να προσδιορίσουμε τις τροχιές και γενικότερα τις μη γραμμικές ιδιομορφές λύνοντας το ακόλουθο πρόβλημα:

$$\begin{aligned}
 \dot{u} &= v \\
 \dot{v} &= f_1(u, X_2(u, v), \dots, X_N(u, v); v, Y_1(u, v), \dots, Y_N(u, v))
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Αυτές οι εξισώσεις περιγράφουν την κίνηση ενός μονοβάθμιου συστήματος αντίστοιχα με τις σχέσεις (3.13). Αφού επιλυθούν με κάποια μέθοδο επίλυσης προβλημάτων αρχικών τιμών, μπορούμε κατόπιν να σχεδιάσουμε τροχιές πάνω στην πολλαπλότητα επειδή γνωρίζουμε τα σημεία (u, v) συναρτήσεως του χρόνου και άρα οι συντεταγμένες δίνονται $(u, X_2(u, v), \dots, X_N(u, v); v, Y_1(u, v), \dots, Y_N(u, v))$.

3. Το σύνολο των σημείων που βρίσκουμε παραπάνω συνθέτουν την πολλαπλότητα που μας ενδιαφέρει για περιοχές γύρω από το σημείο ισορροπίας. Εμφανίζοντας πολλές λύσεις για διάφορα επίπεδα ενέργειας μέχρι ένα όριο σχηματίζουμε τη ζητούμενη επιφάνεια. Ακόμα και για την περίπτωση ενός διβάθμιου συστήματος ($N = 2$) χρειαζόμαστε ένα τετραδιάστατο χώρο φάσης ($2N = 4$) για να περιγράψουμε την έννοια της ιδιομορφής που ορίσαμε παραπάνω. Η εποπτικότητα που μπορεί να έχει ένας μηχανικός, ακόμα και για ένα απλό διβάθμιο σύστημα, είναι περιορισμένη. Καταφεύγουμε στην προβολή αυτών των επιφανειών σε διαγράμματα (u, v, x_i) και (u, v, y_i) όπως στα σχήματα Σχ. 2.61 και Σχ. 2.65 που κατασκευάσαμε με τη μέθοδο του Slater. Λύσεις που να ισχύουν σε όλο το χώρο φάσης έχουμε σε συγκεκριμένα συστήματα όπως τα γραμμικά ή αυτά που ο Rosenberg αποκαλεί «όμοια».

3.2 Ιδιότητες των ιδιομορφών

Σε αυτό το σημείο της εργασίας παρουσιάζουμε κάποιες ιδιότητες των μη γραμμικών ιδιομορφών που εμφανίζονται, είτε ως άμεση συνέπεια του ορισμού που έδωσαν οι Shaw & Pierre, είτε ως συμπεράσματα από τον υπολογισμό τους σε μη γραμμικά συστήματα. Όπως προαναφέραμε, για κάθε ιδιομορφή προσδιορίζουμε τις συναρτήσεις X_i και Y_i και οδηγούμαστε σε ένα σύνολο μονοβάθμιων συστημάτων που κινούνται πάνω στις επιφάνειες που ορίζονται από τις συναρτήσεις αυτές. Η ιδιότητα της αναλλοίωτης πολλαπλότητας χρησιμοποιήθηκε ακριβώς για να επιτευχθεί αυτή η έννοια της αποσύζευξης μεταξύ των ιδιομορφικών συντεταγμένων.

Σε αντίθεση με τα γραμμικά συστήματα, όπου υπάρχει η έννοια της υπέρθεσης των λύσεων και χρησιμοποιείται προκειμένου να περιγραφεί μια γενική συμπεριφορά του συστήματος, στα μη γραμμικά συστήματα δεν μπορούμε να επιτύχουμε το ίδιο παρόλο που ορίσαμε τις μη γραμμικές ιδιομορφές έτσι ώστε να έχουμε αποσυζευγμένες ταλαντώσεις. Αυτό είναι το βασικότερο μειονέκτημα των μη γραμμικών ιδιομορφών και γι αυτό η χρήση τους σε προβλήματα μηχανικού είναι δύσκολο να πραγματοποιηθεί. Παρ' όλα αυτά, υπάρχει μια έννοια υπέρθεσης διαφορετική από αυτήν που έχουμε στα γραμμικά συστήματα και μπορεί να χρησιμοποιηθεί προσεγγιστικά με μικρά σφάλματα σε ασθενώς μη γραμμικά συστήματα.

Αν μετασχηματίσουμε το σύστημα μας, έτσι ώστε να εκφράζεται με τη βοήθεια των μη γραμμικών ιδιομορφικών συντεταγμένων, έχουμε τη δυνατότητα να απλοποιήσουμε το μοντέλο μας επιλέγοντας ένα συγκεκριμένο πλήθος ιδιομορφών. Το σφάλμα από αυτήν την προσέγγιση δεν είναι πάντα μικρό για όλα τα συστήματα διότι συνδέεται στενά με το είδος της μη γραμμικότητας που έχουμε. Η ιδέα της κατασκευής συστημάτων με λιγότερους βαθμούς ελευθερίας αλλά που περιγράφουν πλήρως τα φαινόμενα του αρχικού μη γραμμικού συστήματος είναι βασική επιδίωξη στη θεωρία των μη γραμμικών ιδιομορφών και ερευνητικά είναι ένα θέμα που υπάρχουν διάφορες προτάσεις.

Η δημιουργία αποτελεσματικών μοντέλων με λιγότερους βαθμούς ελευθερίας (μοντέλα μειωμένης τάξης) είναι δύσκολη διαδικασία, διότι όπως είδαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο υπάρχει έντονη αλληλεπίδραση μεταξύ των μη γραμμικών ιδιομορφών για υψηλές ενέργειες. Αυτό το χαρακτηριστικό της αλληλεπίδρασης δεν μπορεί να αναπαραχθεί με τη χρήση λίγων μη γραμμικών ιδιομορφών. Υπάρχει η ανάγκη για συμμετοχή πολλών ιδιομορφών προκειμένου, να μην εξάγονται αποτελέσματα αμφισβητήσιμα.

3.3 Αριθμητικός υπολογισμός των ιδιομορφών

Σε αυτό το σημείο θα περιγράψουμε μία μέθοδο τύπου Galerkin, που προτάθηκε από τους Pesheck et al. το 2001 για να προσδιορίσουν τις μη γραμμικές ιδιομορφές κατά Shaw & Pierre. Ο αλγόριθμος στηρίζεται στην αναλλοίωτη ιδιότητα που έχει μια μη γραμμική ιδιομορφή, όπως είδαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο. Πιο συγκεκριμένα, μετασχηματίζουμε το πρόβλημα σε πολικές συντεταγμένες, όπου ανάλογα με το είδος του προβλήματος επιλέγουμε κατάλληλες συναρτήσεις βάσης. Υποθέτοντας ότι η λύση μας έχει τη μορφή μια σειράς με χρήση αυτών των συναρτήσεων βάσης και χρησιμοποιώντας μια έννοια καθετότητας της λύσης στις συναρτήσεις βάσης καταλήγουμε σε ένα μη γραμμικό σύστημα. Η επίλυση του τελευταίου οδηγεί στον προσδιορισμό της σειράς που προσεγγίζει την ακριβή λύση.

Ξεκινώντας από ένα μη γραμμικό σύστημα εξισώσεων κίνησης που γράφεται στην ακόλουθη μορφή:

$$\ddot{\eta} + Z\dot{\eta} + \Omega\eta = f(\eta, \dot{\eta}) \quad (3.21)$$

και λαμβάνοντας τα μητρώα Z και Ω διαγώνια, το σύστημα μπορεί να γραφεί:

$$\ddot{\eta}_i + 2\zeta_i\omega_i\dot{\eta}_i + \omega_i^2\eta_i = f_i(\eta, \dot{\eta}) \quad (3.22)$$

Εισάγουμε το μετασχηματισμό σε πολικές συντεταγμένες a, ϕ των βασικών μεταβλητών $\eta_k, \dot{\eta}_k$ που απαιτούνται για μια σχέση της μορφής (3.15)

$$\left. \begin{aligned} \eta_k &= a \cos \phi \\ \dot{\eta}_k &= -a\omega_k \sin \phi \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

Με αυτόν τον τρόπο έχουμε ένα νέο σύστημα συντεταγμένων με βάση τις οποίες θα γίνει η περιγραφή της πολλαπλότητας και συνεπώς πλέον αναζητούμε συναρτήσεις P_i και Q_i τέτοιες ώστε για $i = 1, \dots, N, \quad i \neq k$:

$$\left. \begin{aligned} \eta_i &= P_i(a, \phi) \\ \dot{\eta}_i &= Q_i(a, \phi) \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

Με άλλα λόγια όλες οι ιδιομορφικές μετατοπίσεις η_i και ταχύτητες $\dot{\eta}_i$ εκφράζονται συναρτήσει των βασικών συντεταγμένων (πλάτος ταλάντωσης και φάσης) που αντιστοιχούν στις κινήσεις της k ιδιομορφής. Όπως και στην περίπτωση που είδαμε στο κεφάλαιο 3.1, πρέπει να προσδιορίσουμε για κάθε ιδιομορφή τις συναρτήσεις P_i και Q_i και στη συνέχεια να επιλύσουμε ένα σύστημα της μορφής (3.20) για κάθε ιδιομορφή ώστε να καταλήξουμε σε μονοβάθμια συστήματα πάνω στις πολλαπλότητες.

Τα πλεονεκτήματα του μετασχηματισμού (3.23) σε πολικές συντεταγμένες είναι ορατά σε πολλά σημεία. Καταρχάς, στην τετριμμένη περίπτωση ($f = 0$) που έχουμε ένα γραμμικό σύστημα μπορούμε εύκολα να προσδιορίσουμε την ακριβή λύση. Επίσης, η ίδια διατύπωση του προβλήματος μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι ζητούμενες συναρτήσεις P_i και Q_i πρέπει να είναι περιοδικές ως προς ϕ και πιο συγκεκριμένα μπορούν να εκφραστούν με χρήση αρμονικών συναρτήσεων ως προς ϕ . Τέλος, οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος απλοποιούνται με τη χρήση των πολικών συντεταγμένων αφού χρειαζόμαστε μόνο έναν περιορισμό ως προς τη μέγιστη τιμή του πλάτους a .

Η εξίσωση κίνησης που περιγράφει τη μεταβλητή η_k μπορεί να μετασχηματισθεί σε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης με μεταβλητές τα a και ϕ . Ακολουθεί αναλυτικά ο τρόπος υπολογισμού αυτού του συστήματος.

Για $i = k$ στις αποσυνζευγμένες εξισώσεις κίνησης (3.22):

$$\ddot{\eta}_k - 2\zeta_k \omega_k^2 a \sin \phi + \omega_k^2 a \cos \phi = f_k(\eta, \dot{\eta}) = f_k \quad (3.25)$$

ενώ λόγω του μετασχηματισμού (3.23) έχουμε:

$$\eta_k = a \cos \phi \Rightarrow \dot{\eta}_k = \dot{a} \cos \phi - a \dot{\phi} \sin \phi \quad (3.26)$$

$$\dot{a} \cos \phi - a \dot{\phi} \sin \phi = -a \omega_k \sin \phi \quad (3.27)$$

$$\dot{a} \cos \phi = a \dot{\phi} \sin \phi - a \omega_k \sin \phi \quad (3.28)$$

Παραγωγίζοντας τη δεύτερη σχέση του μετασχηματισμού (3.23) έχουμε

$$\dot{\eta}_k = -\dot{a} \omega_k \sin \phi - a \dot{\phi} \omega_k \cos \phi \quad (3.29)$$

και κάνοντας αντικατάσταση της σχέσης (3.29) στην εξίσωση κίνησης (3.25) έχω:

$$-\dot{a} \sin \phi - a \dot{\phi} \cos \phi - 2\zeta_k \omega_k a \sin \phi + \omega_k a \cos \phi = f_k / \omega_k \quad (3.30)$$

$$\dot{a} \sin \phi + a \dot{\phi} \cos \phi - \omega_k a \cos \phi = -f_k / \omega_k - 2\zeta_k \omega_k a \sin \phi \quad (3.31)$$

$$\dot{a} \sin^2 \phi + (a \dot{\phi} \sin \phi - \omega_k a \sin \phi) \cos \phi = (-f_k / \omega_k - 2\zeta_k \omega_k a \sin \phi) \sin \phi \quad (3.32)$$

Χρησιμοποιώ τη σχέση (3.28) για να βρώ την πρώτη εξίσωση του ζητούμενου συστήματος πρώτης τάξης και μεταβλητών a και ϕ .

$$\dot{a} = \dot{a} \sin^2 \phi + \dot{a} \cos^2 \phi = \left(-\frac{f_k}{\omega_k} - 2\zeta_k \omega_k a \sin \phi \right) \sin \phi \quad (3.33)$$

Τέλος, με την αντικατάσταση στη σχέση (3.28) του \dot{a} από τη σχέση (3.33) καταλήγουμε και στη δεύτερη ζητούμενη εξίσωση μετά από πράξεις.

$$\left(-\frac{f_k}{\omega_k} - 2\zeta_k \omega_k a \sin \phi\right) \sin \phi \cos \phi = a\dot{\phi} \sin \phi - a\omega_k \sin \phi \quad (3.34)$$

$$a\dot{\phi} = a\omega_k - \left(\frac{f_k}{\omega_k} + 2\zeta_k \omega_k a \sin \phi\right) \cos \phi \quad (3.35)$$

$$\dot{\phi} = \omega_k - \left(\frac{f_k}{a\omega_k} + 2\zeta_k \omega_k \sin \phi\right) \cos \phi \quad (3.36)$$

Για τις υπόλοιπες εξισώσεις κίνησης που ισχύει $i \neq k$ έχουμε:

$$\ddot{\eta}_i + 2\zeta_i \omega_i \dot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta_i = f_i(\eta, \dot{\eta}) = f_i \quad (3.37)$$

$$\eta_i = P_i(a, \phi) \quad (3.38)$$

$$\dot{\eta}_i = Q_i(a, \phi) \quad (3.39)$$

Επομένως ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\dot{P}_i(a, \phi) = Q_i(a, \phi) \quad (3.40)$$

$$\dot{Q}_i(a, \phi) = f_i(P_i(a, \phi), Q_i(a, \phi)) - 2\zeta_i \omega_i Q_i(a, \phi) - \omega_i^2 P_i(a, \phi) \quad (3.41)$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} \dot{P}_i(a, \phi) &= \dot{a} \frac{\partial P_i}{\partial a} + \dot{\phi} \frac{\partial P_i}{\partial \phi} \\ \dot{Q}_i(a, \phi) &= \dot{a} \frac{\partial Q_i}{\partial a} + \dot{\phi} \frac{\partial Q_i}{\partial \phi} \end{aligned} \right\} \quad (3.42)$$

Με συνδυασμό των σχέσεων (3.33), (3.36), (3.40), (3.41) και (3.42) απαλοίφουμε τον χρόνο και προσδιορίζουμε τις εξισώσεις εκείνες που περιγράφουν τη γεωμετρία της πολλαπλότητας, που αναζητούμε για κάθε ιδιομορφή:

$$\left(-\frac{f_k}{\omega_k} - 2\zeta_k \omega_k a \sin \phi\right) \frac{\partial P_i}{\partial a} + \left(\omega_k - \left(\frac{f_k}{a\omega_k} + 2\zeta_k \omega_k \sin \phi\right) \cos \phi\right) \frac{\partial P_i}{\partial \phi} = Q_i \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \left(-\frac{f_k}{\omega_k} - 2\zeta_k \omega_k a \sin \phi\right) \frac{\partial Q_i}{\partial a} + \left(\omega_k - \left(\frac{f_k}{a\omega_k} + 2\zeta_k \omega_k \sin \phi\right) \cos \phi\right) \frac{\partial Q_i}{\partial \phi} = \\ = f_i - 2\zeta_i \omega_i Q_i - \omega_i^2 P_i \end{aligned} \quad (3.44)$$

Θέλουμε να επιλύσουμε αυτό το σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων με μια αριθμητική μέθοδο τύπου Galerkin. Επομένως, η λύση θεωρούμε ότι προσεγγίζεται από μια σειρά συναρτήσεων βάσης στην οποία αναζητούμε τους συντελεστές. Πιο συγκεκριμένα, αναζητούμε λύσεις P_i και Q_i της μορφής για $i = 1, \dots, N$, $i \neq k$:

$$P_i(a, \phi) = \sum_{l=1}^{N_a} \sum_{m=1}^{N_\phi} C_i^{l,m} T_{l,m}(a, \phi) \quad (3.45)$$

$$Q_i(a, \phi) = \sum_{l=1}^{N_a} \sum_{m=1}^{N_\phi} D_i^{l,m} U_{l,m}(a, \phi) \quad (3.46)$$

Αυτές οι προσεγγίσεις, για να έχουν μικρό σφάλμα (με την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων) σε ένα χωρίο της μορφής (a, ϕ) με $a = [0, a_0]$ και $\phi \in [0, 2\pi]$, πρέπει να ικανοποιούν κάποιες συνθήκες ορθογωνιότητας. Οι τελευταίες συνθήκες παίρνουν την μορφή ενός μη γραμμικού συστήματος $2(N-1)N_a N_\phi$ εξισώσεων:

$$\int_{a,\phi} U_{p,q} \left\{ -a \sum_{l,m} D_i^{l,m} U_{l,m} + \sum_{l,m} C_i^{l,m} \frac{\partial T_{l,m}}{\partial a} \left(-\frac{f_k}{\omega_k} - 2\zeta_k \omega_k a \sin \phi \right) a \sin \phi \right. \\ \left. + \sum_{l,m} C_i^{l,m} \frac{\partial T_{l,m}}{\partial \phi} \left[a \omega_k - \left(\frac{f_k}{\omega_k} + 2\zeta_k \omega_k a \sin \phi \right) \cos \phi \right] \right\} dad\phi = 0 \quad (3.47)$$

$$\int_{a,\phi} T_{p,q} \left\{ 2\zeta_i \omega_i a \sum_{l,m} D_i^{l,m} U_{l,m} + \omega_i^2 a \sum_{l,m} C_i^{l,m} T_{l,m} - af_i \right. \\ \left. + \sum_{l,m} D_i^{l,m} \frac{\partial U_{l,m}}{\partial a} \left(-\frac{f_k}{\omega_k} - 2\zeta_k \omega_k a \sin \phi \right) a \sin \phi \right. \\ \left. + \sum_{l,m} D_i^{l,m} \frac{\partial U_{l,m}}{\partial \phi} \left[a \omega_k - \left(\frac{f_k}{\omega_k} + 2\zeta_k \omega_k a \sin \phi \right) \cos \phi \right] \right\} dad\phi = 0 \quad (3.48)$$

για κάθε $i = 1, \dots, N$, $i \neq k$, $p = 1, \dots, N_a$ και $q = 1, \dots, N_\phi$.

Ανάλογα με το είδος του προβλήματος, επιλέγουμε συναρτήσεις βάσης $T_{l,m}$ και $U_{l,m}$ και στη συνέχεια γίνονται οι ολοκληρώσεις που απαιτούν οι σχέσεις (3.47) και (3.48). Επειδή αυτή η ολοκλήρωση σπάνια μπορεί να γίνει αναλυτικά καταφεύγουμε σε κάποια μέθοδο αριθμητικής ολοκλήρωσης. Η επίλυση, τελικά, του συστήματος των αλγεβρικών εξισώσεων γίνεται με κάποια επαναληπτική μέθοδο εύρεσης της ρίζας ενός μη γραμμικού συστήματος. Επίσης, μπορεί να βρεθεί με κάποιο αλγόριθμο βελτιστοποίησης, αν προσπαθήσουμε να ελαχιστοποιήσουμε την απόλυτη τιμή του σφάλματος.

Μετά την επίλυση του συστήματος, μπορούμε να έχουμε μια προσέγγιση των P_i και Q_i στο χωρίο (a, ϕ) με $a = [0, a_0]$ και $\phi \in [0, 2\pi]$ γεγονός που μας βοηθάει να γνωρίζουμε εκ των προτέρων ένα όριο για το οποίο ισχύει η προσέγγιση μας σε αντίθεση με τις ημίαναλυτικές τεχνικές που δεν ξέρουμε. Βέβαια, αξίζει να σημειωθεί ότι, κατά την επίλυση του μονοβάθμιου συστήματος που κινείται πάνω σε μια ιδιομορφή, υπάρχει η περίπτωση το $a(t)$ να ξεπεράσει το όριο a_0 και να μην μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε άλλο την προσέγγιση. Επομένως, για κάποια (a, ϕ) δεν έχει νόημα να γνωρίζουμε τις τιμές των P_i και Q_i στο προηγούμενο χωρίο αφού αν ξεκινήσει μια τροχιά από αυτές θα βγεί έξω από αυτό το πεπερασμένο χωρίο.

Με τη μέθοδο που περιγράψαμε των Pesheck et al. μπορούμε να δημιουργήσουμε μοντέλα πολυβάθμιων συστημάτων που να περιγράφουν τη συμπεριφορά ενός μη γραμμικού συστήματος, χρησιμοποιώντας λιγότερους βαθμούς ελευθερίας και για διάφορους τύπους μη γραμμικότητας. Ακολουθεί ένα παράδειγμα διβάθμιου συστήματος με δυσκαμψίες τύπου Duffing στο οποίο προσδιορίζουμε τα P_i και Q_i .

Παράδειγμα

Θεωρώ ένα διβάθμιο σύστημα που περιγράφεται από το ακόλουθο σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned} \right\} \quad (3.49)$$

με ιδιοσυχνότητες $\omega_1 = 0.69$ και $\omega_2 = 3.24$ ενώ οι μη γραμμικοί όροι δίνονται:

$$f_1(x_1, x_2) = -0.41x_1^3 - 1.34x_1^2x_2 - 1.51x_1x_2^2 - 0.35x_2^3 \quad (3.50)$$

$$f_2(x_1, x_2) = -0.45x_1^3 - 1.51x_1^2x_2 - 1.05x_1x_2^2 - 4.58x_2^3 \quad (3.51)$$

Παρόλο που οι μη γραμμικές ιδιομορφές κατά Shaw & Pierre ορίστηκαν για μη συντηρητικά συστήματα, μπορούμε να τις προσδιορίσουμε και στην περίπτωση του συστήματος που περιγράφεται από τη σχέση (3.49). Στα συντηρητικά συστήματα περιμένουμε παρόμοια συμπεριφορά με αυτές τις ιδιομορφές που όρισε ο Rosenberg. Με άλλα λόγια, αναμένουμε μια ταλάντωση του συστήματος σε συγχρονισμό δηλαδή οι μάζες αφενός να διέρχονται όλες ταυτόχρονα από το σημείο ισορροπίας και αφετέρου να βρίσκονται στις ακραίες θέσεις την ίδια στιγμή (είτε σε φάση είτε όχι). Αυτή η φύση του προβλήματος μας οδηγεί στην επιλογή των συναρτήσεων σχήματος που ακολουθούν.

$$\left. \begin{aligned} T_{l,m}(a, \phi) &= L_l(a) \cos((m-1)\phi) \\ U_{l,m}(a, \phi) &= L_l(a) \sin(m\phi) \end{aligned} \right\} \quad (3.52)$$

Όσον αφορά στην επιλογή των συναρτήσεων $L_l(a)$, οι τελευταίες κατασκευάζονται έτσι ώστε να ισχύει η συνθήκη:

$$\int_0^{a_0} a L_l(a) L_j(a) da = \delta_{lj} \quad (3.53)$$

Με την τελευταία συνθήκη ορθογωνιότητας, εξασφαλίζονται και οι συνοριακές συνθήκες που πρέπει να ισχύουν για το σύνορο $a = 0$ και επίσης απλοποιείται το σύστημα των εξισώσεων (3.47) και (3.48). Οι τύποι των $L_l(a)$ για $l = 1, 2$ και 3 αναγράφονται στην παρούσα εργασία αν και γενικά εξαρτώνται από το πρόβλημα.

$$L_1(a) = \sqrt{6} (a/a_0)^2 \quad (3.54)$$

$$L_2(a) = \sqrt{2} \left[-12(a/a_0)^2 + 14(a/a_0)^3 \right] \quad (3.55)$$

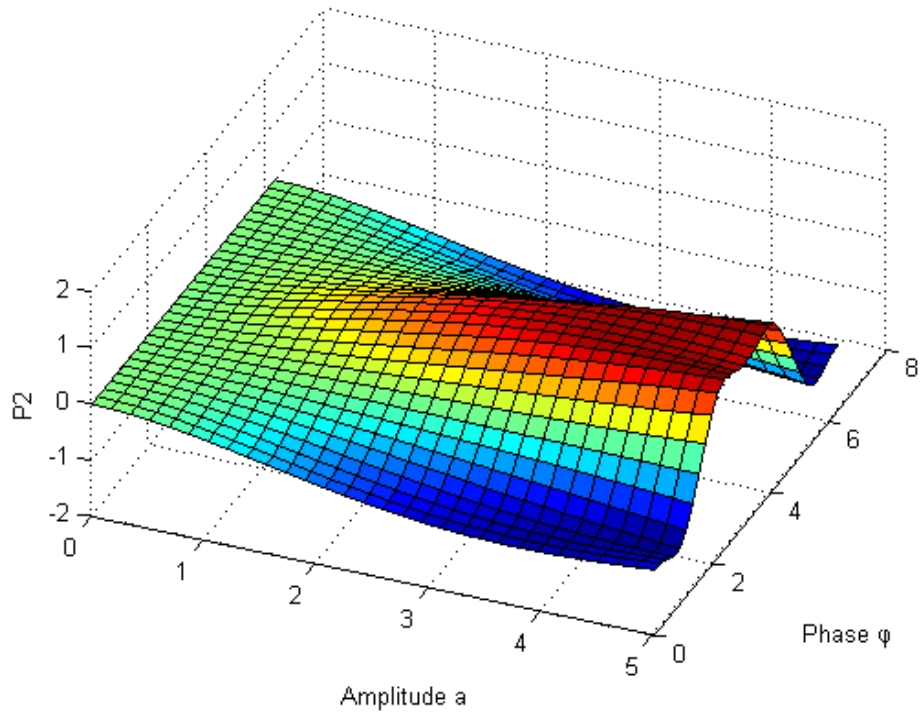
$$L_3(a) = \sqrt{10} \left[-21(a/a_0)^2 + 56(a/a_0)^3 - 36(a/a_0)^4 \right] \quad (3.56)$$

Παρατηρήσεις

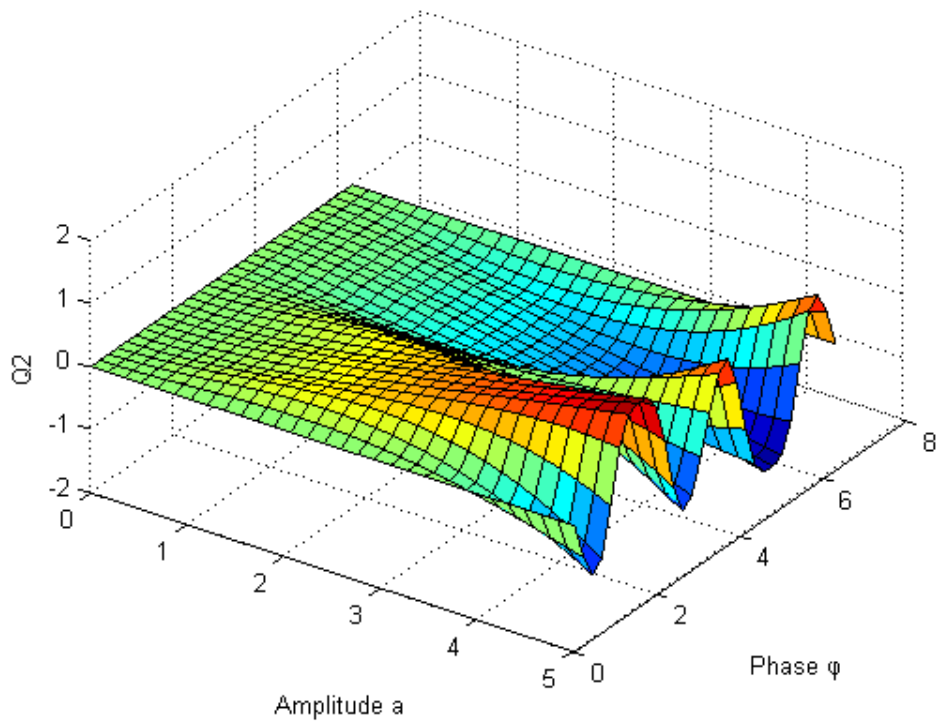
1. Αριθμητικές εφαρμογές της μεθόδου εδείξαν ότι, παρόλο που μέσω των συνθηκών (3.47) και (3.48) επιτυγχάνουμε τη βέλτιστη λύση του προβλήματος σύμφωνα με τα αναπτύγματα (3.45) και (3.46) αυτή η λύση για μεγαλύτερες τιμές του πλάτους a από κάποια οριακή τιμή οδηγεί σε αποκλίσεις από την ακριβή λύση. Χρησιμοποιώντας περισσότερες συναρτήσεις βάσεις αυξάνουμε την ακρίβεια αλλά ταυτόχρονα αυξάνεται και το υπολογιστικό κόστος
2. Οι συναρτήσεις P_i και Q_i , που υπολογίζονται, από τη μέθοδο χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν την κίνηση του συστήματος σε κάποια ιδιομορφή. Επειδή το σύστημα είναι συντηρητικό αναμένουμε να παραχθούν οι περιοδικές λύσεις που προβλέπει ο ορισμός του Rosenberg. Με την τελευταία παρατήρηση μπορούμε να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα της μεθόδου των Pesheck et al. με τα αντίστοιχα αποτελέσματα των αλγορίθμων των Peeters et al. και του Slater.
3. Η χρήση της τεχνικής των Pesheck et al. έχει σαν στόχο την παραγωγή μοντέλων με λιγότερους βαθμούς ελευθερίας αλλά που περιγράφουν πλήρως τα φαινόμενα των μη γραμμικών συστημάτων από τα οποία προέρχονται.

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο που περιγράψαμε, βρίσκουμε τις ιδιομορφές του συστήματος (3.49) σύμφωνα με τον ορισμό των Shaw & Pierre.

1^η Ιδιομορφή – Εύρεση των συναρτήσεων $P_2(a, \phi)$ και $Q_2(a, \phi)$ – Πολλαπλότητα

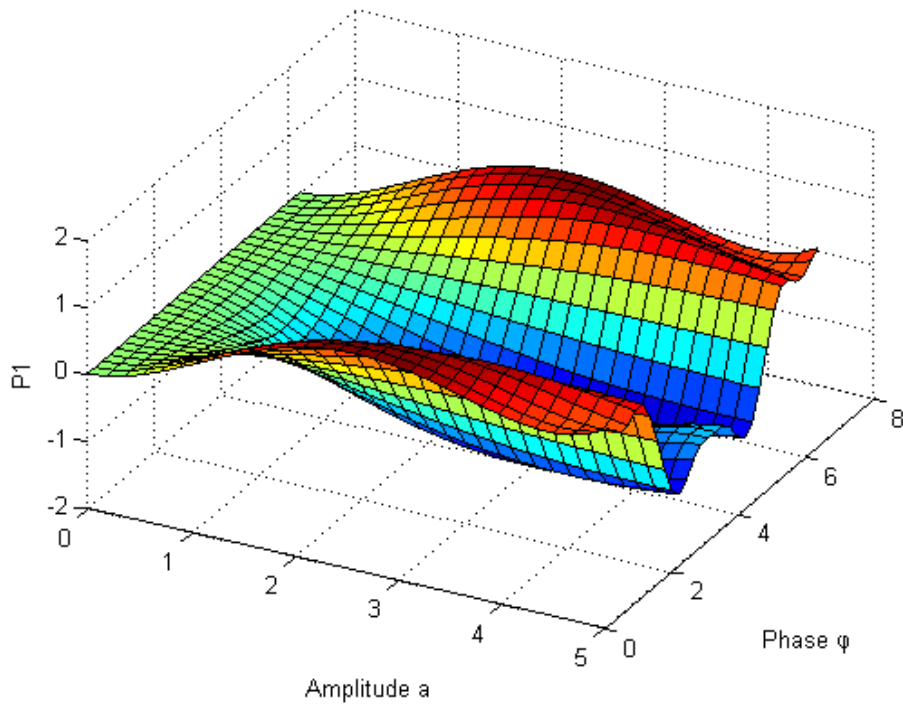


Σχ. 3.1: Μετατόπιση δεύτερου βαθμού ελευθερίας συναρτήσε του πλάτους και της φάσης του πρώτου βαθμού ελευθερίας (1^η ιδιομορφή)

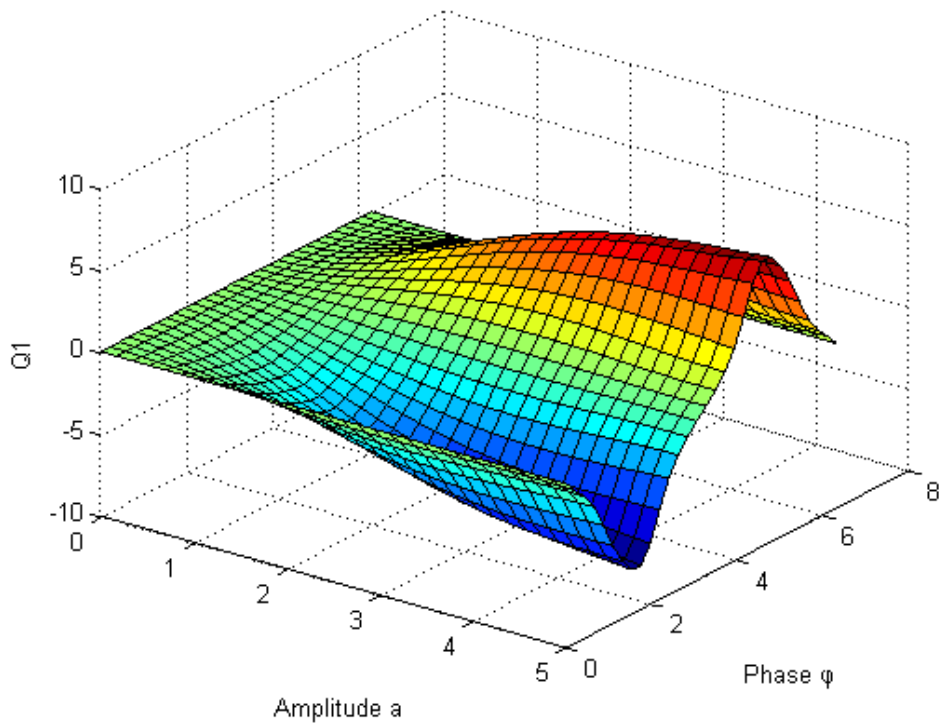


Σχ. 3.2: Ταχύτητα δεύτερου βαθμού ελευθερίας συναρτήσε του πλάτους και της φάσης του πρώτου βαθμού ελευθερίας (1^η ιδιομορφή)

2^η Ιδιομορφή – Εύρεση των συναρτήσεων $P_1(a, \phi)$ και $Q_1(a, \phi)$ – Πολλαπλότητα



Σχ. 3.3: Μετατόπιση πρώτου βαθμού ελευθερίας συναρτήσε του πλάτους και της φάσης του δεύτερου βαθμού ελευθερίας (2^η ιδιομορφή)

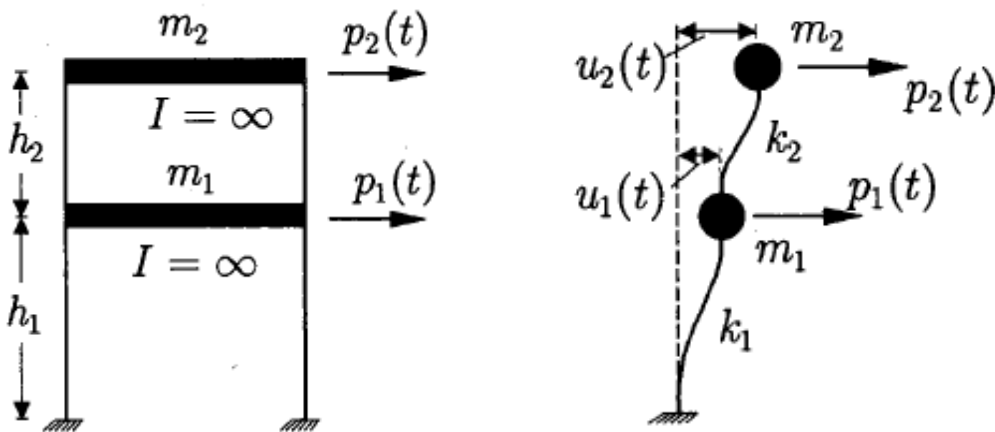


Σχ. 3.4: Ταχύτητα πρώτου βαθμού ελευθερίας συναρτήσε του πλάτους και της φάσης του δεύτερου βαθμού ελευθερίας (2^η ιδιομορφή)

Κεφάλαιο 4

Εφαρμογή μηχανικού

Θεωρούμε ένα διώροφο πλαίσιο του οποίου τα ζυγώματα είναι πρακτικά άκαμπτα. Στις κατασκευές τέτοιου είδους, οι μάζες είναι συγκεντρωμένες στις στάθμες των ορόφων. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να μας δίνεται η δυνατότητα να προσεγγίσουμε την κατασκευή μας με ένα πιο απλό μοντέλο όπως στο σχήμα.



Σχ. 4.1: Μοντέλο της κατασκευής που εξετάζουμε

Μπορούμε να προσδιορίσουμε την κίνηση του πολυβάθμιου γνωρίζοντας τις μετατοπίσεις $u_1(t)$ και $u_2(t)$ σε κάθε χρονική στιγμή t . Αυτό είναι αναμενόμενο, αφού το σύστημα έχει δύο βαθμούς ελευθερίας. Σε αυτό το σύστημα, γίνεται επιπλέον η παραδοχή ότι υπάρχουν κυβικές δυνάμεις επαναφοράς τύπου Duffing που εξαρτώνται από την εκτροπή των υποστυλωμάτων. Μορφώνουμε τις εξισώσεις κίνησης για μια ελεύθερη ταλάντωση του συστήματος:

$$m_1 \ddot{u}_1 + c_1 \dot{u}_1 + k_1 u_1 - k_2 (u_2 - u_1) + k_{13} u_1^3 - k_{23} (u_2 - u_1)^3 = 0 \quad (4.1)$$

$$m_2 \ddot{u}_2 + c_2 \dot{u}_2 + k_2 (u_2 - u_1) + k_{23} (u_2 - u_1)^3 = 0 \quad (4.2)$$

Παρατηρούμε ότι για τη μη γραμμική δύναμη επαναφοράς ισχύει:

$$F_{nl} = \begin{bmatrix} k_{13} u_1^3 - k_{23} (u_2 - u_1)^3 \\ k_{23} (u_2 - u_1)^3 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Το σύστημα των εξισώσεων κίνησης γράφεται σε μορφή χώρου κατάστασης εισάγοντας τις μεταβλητές v_1 και v_2 έτσι ώστε:

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}_1 &= v_1 \\ \dot{u}_2 &= v_2 \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

Συνεπώς, οι εξισώσεις (4.1) και (4.2) παίρνουν τη μορφή:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_1 - k_2 & k_2 & -c_1 & 0 \\ k_2 & -k_2 & 0 & -c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_{23}(u_2 - u_1)^3 - k_{13}u_1^3 \\ -k_{23}(u_2 - u_1)^3 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Επομένως, το σύστημα γράφεται στη μορφή (2.23):

$$\dot{z} = Az + F \quad (4.6)$$

όπου $z = [u_1 \ u_2 \ v_1 \ v_2]^T$ και οι πίνακες A και F να δίνονται από τις σχέσεις:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_1 - k_2 & k_2 & -c_1 & 0 \\ k_2 & -k_2 & 0 & -c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1 + k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & -\frac{c_1}{m_1} & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & 0 & -\frac{c_2}{m_2} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_{23}(u_2 - u_1)^3 - k_{13}u_1^3 \\ -k_{23}(u_2 - u_1)^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{k_{23}}{m_1}(u_2 - u_1)^3 - \frac{k_{13}}{m_1}u_1^3 \\ -\frac{k_{23}}{m_2}(u_2 - u_1)^3 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Για να προσδιορίσουμε τη συμπεριφορά του διβάθμιου συστήματος καταφεύγουμε στην επίλυση του συστήματος συνήθων διαφορικών εξισώσεων (4.6) με κάποια αριθμητική μέθοδο όπως η Runge-Kutta 4^{ης} τάξης.

Στη συνέχεια της εργασίας επιλέγουμε συγκεκριμένα χαρακτηριστικά στοιχεία (μάζες και δυσκαμψίες) του διβάθμιου συστήματος ώστε να γίνει η ανάλυση τους με τα εργαλεία, που περιγράψαμε στα προηγούμενα κεφάλαια (μη γραμμικές ιδιομορφές). Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να εξάγουμε, αφενός ποιοτικά αποτελέσματα για τους κινδύνους που αντιμετωπίζει η κατασκευή μας και αφετέρου ποσοτικά αποτελέσματα για το διάστημα που ισχύει η προσέγγιση των γραμμικών ιδιομορφών και κατ'επέκταση το διάστημα που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα εργαλεία της αντισεισμικής τεχνολογίας με ικανοποιητική ακρίβεια.

Αριθμητικά Αποτελέσματα

Δεδομένα:

Μελετάμε μια διώροφη κατασκευή, παραλείποντας αρχικά την επιρροή της απόσβεσης, για να βρεθούν οι ιδιομορφές κατά Rosenberg και να βγάλουμε συμπεράσματα για την επιρροή της συγκεκριμένης μη γραμμικότητας τύπου Duffing στον τρόπο ταλάντωσης του συστήματος.

Για τα υποστυλώματα γίνεται η παραδοχή των συγκεντρωμένων μαζών, δηλαδή η μάζα τους θεωρείται συγκεντρωμένη στα δύο άκρα τους. Η πλάκα θεωρείται άκαμπτη. Το υλικό της κατασκευής είναι οπλισμένο σκυρόδεμα με ειδικό βάρος $\gamma = 24 \text{ kN/m}^3$ και μέτρο ελαστικότητας $E = 21000 \text{ MPa}$. Ακολουθεί περιγραφή κάθε πλάκας:

1^{ος} όροφος:

Λαμβάνοντας υπ' όψιν το συνολικό φορτίο της πλάκας (μόνιμο και κινητό) καθώς και την μάζα που υπεισέρχεται στο μοντέλο λόγω των υποστυλωμάτων του πρώτου και του δεύτερου ορόφου εκτιμούμε την ταλαντούμενη μάζα $m_1 = 105 \text{ Mgr}$. Επίσης, θεωρούμε ότι η πλάκα στηρίζεται σε 6 υποστυλώματα με τις ακόλουθες διαστάσεις ($4 \times k_1 : 30 \times 30 \text{ cm}^2$ και $2 \times k_2 : 30 \times 20 \text{ cm}^2$).

2^{ος} όροφος:

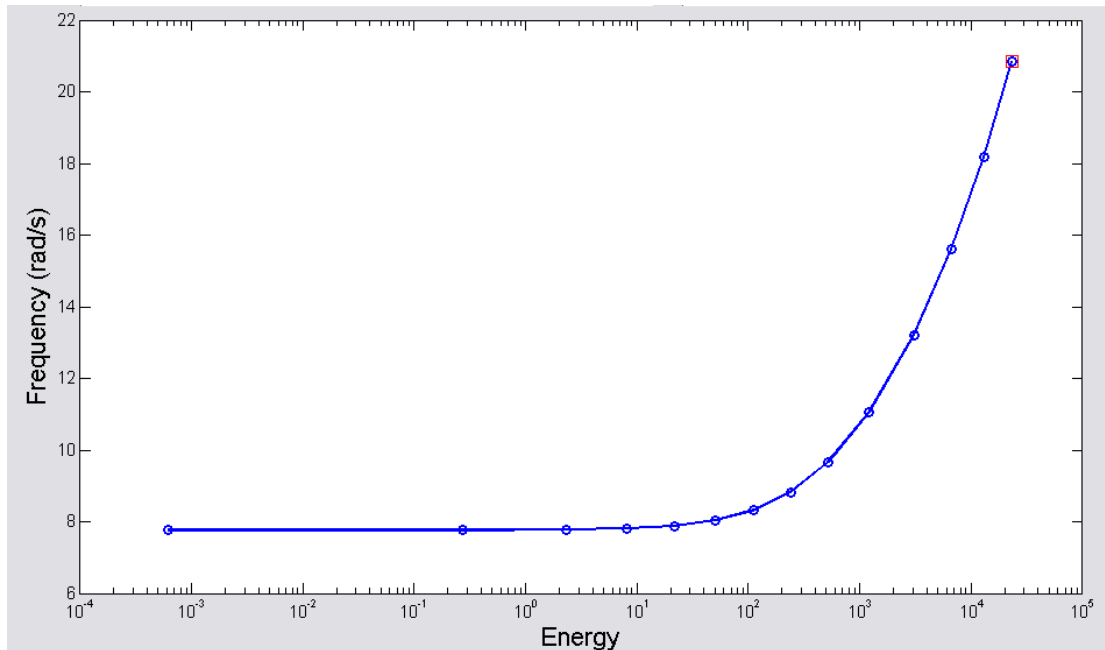
Αντίστοιχα με τον πρώτο όροφο προσδιορίζουμε την μάζα που ταλαντώνεται ως $m_2 = 75 \text{ Mgr}$. Έχει γίνει η παραδοχή ότι έχουμε μικρότερο συνολικό φορτίο που να φέρει η πλάκα καθώς επίσης στη μάζα που εκτιμήσαμε λάβαμε υπ' όψιν μας και τη μισή μάζα των υποστυλωμάτων του δεύτερου ορόφου. Σε αντίθεση με τον πρώτο όροφο, στον συγκεκριμένο όροφο η πλάκα στηρίζεται σε 4 υποστυλώματα με τα ακόλουθα αριθμητικά χαρακτηριστικά ($4 \times k_1 : 30 \times 30 \text{ cm}^2$).

Συνεπώς, είμαστε σε θέση να εκτιμήσουμε τα στοιχεία του πολυβάθμιου συστήματος σύμφωνα με σχέσεις (4.1) και (4.2):

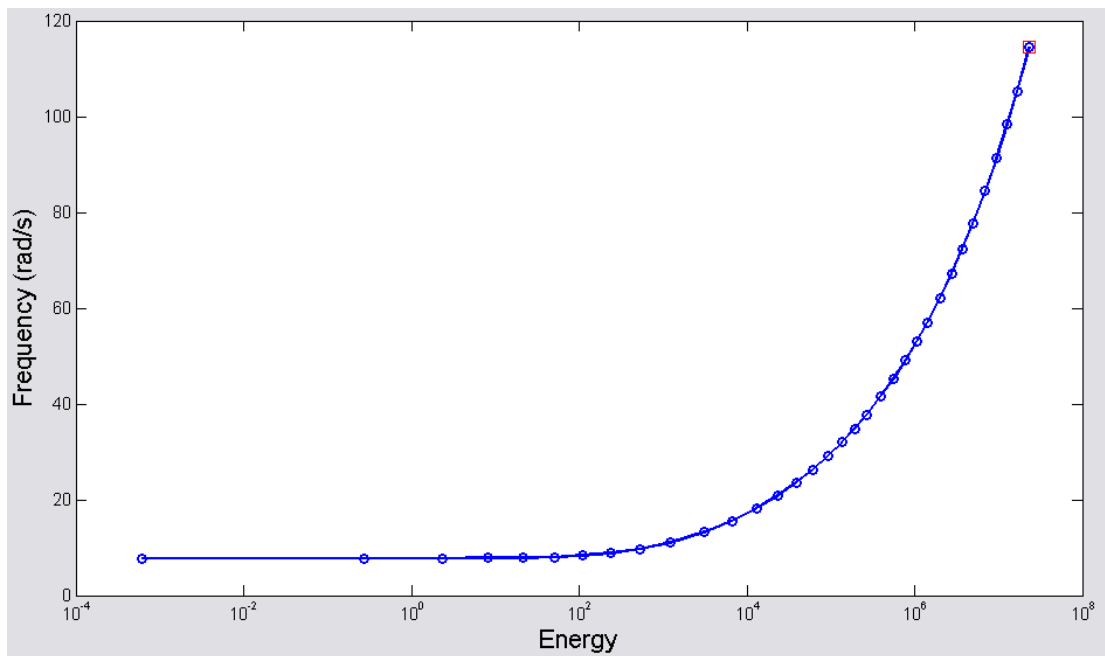
1 ^{ος} Όροφος		2 ^{ος} Όροφος	
$m_1 = 105 \text{ Mgr}$	(4.9)	$m_2 = 75 \text{ Mgr}$	(4.12)
$k_1 = 14175 \text{ kN/m}$	(4.10)	$k_2 = 10630 \text{ kN/m}$	(4.13)
$k_{13} = 250000 \text{ kN/m}^3$	(4.11)	$k_{23} = 500000 \text{ kN/m}^3$	(4.14)

Κλάδος 1^{ης} ιδιομορφής

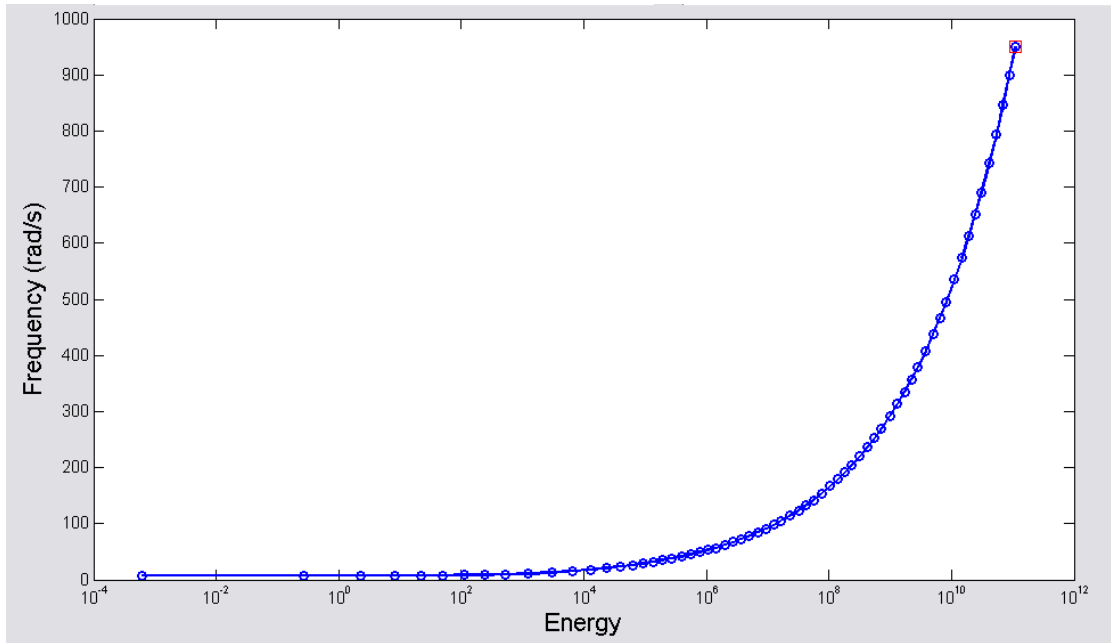
Μέθοδος Peeters et al.



Σχ. 4.2: Διάγραμμα FEP για χαμηλές ενέργειες (κλάδος 1^{ης} ιδιομορφής)

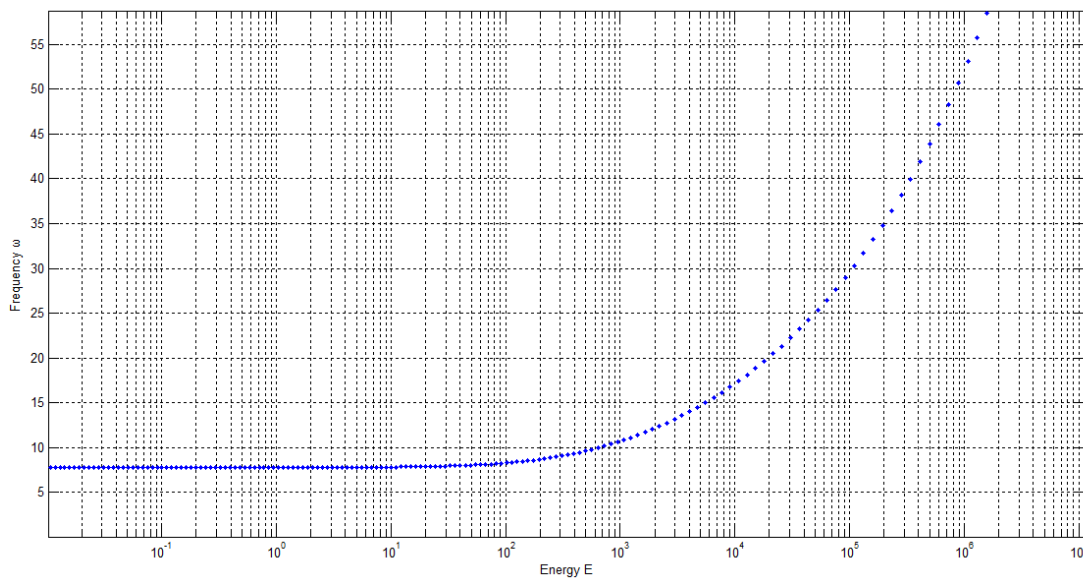


Σχ. 4.3: Διάγραμμα FEP για μεγάλες ενέργειες (κλάδος 1^{ης} ιδιομορφής)



Σχ. 4.4: Διάγραμμα FEP για πολύ μεγάλες ενέργειες (κλάδος 1^{ης} ιδιομορφής) – Δεν εμφανίζονται αλληλεπιδράσεις ιδιομορφών

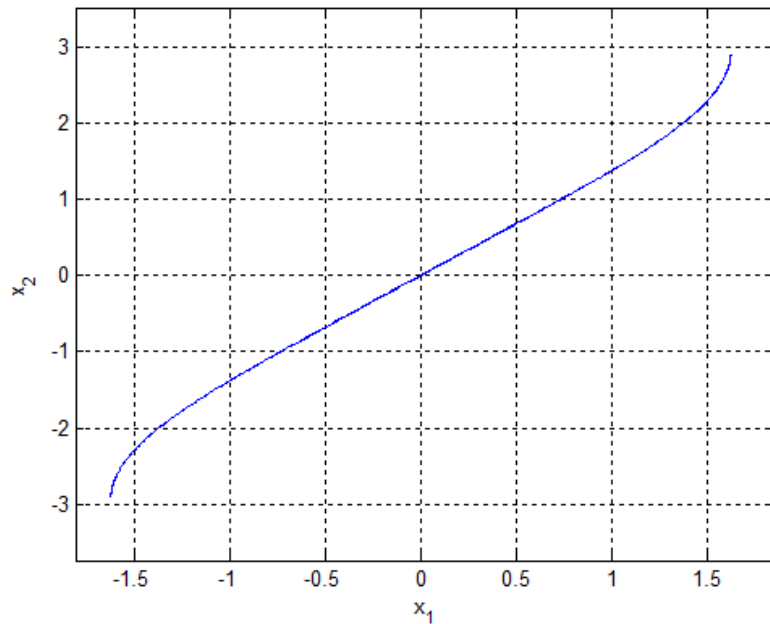
Μέθοδος Slater



Σχ. 4.5: Διάγραμμα FEP με μέθοδο Slater

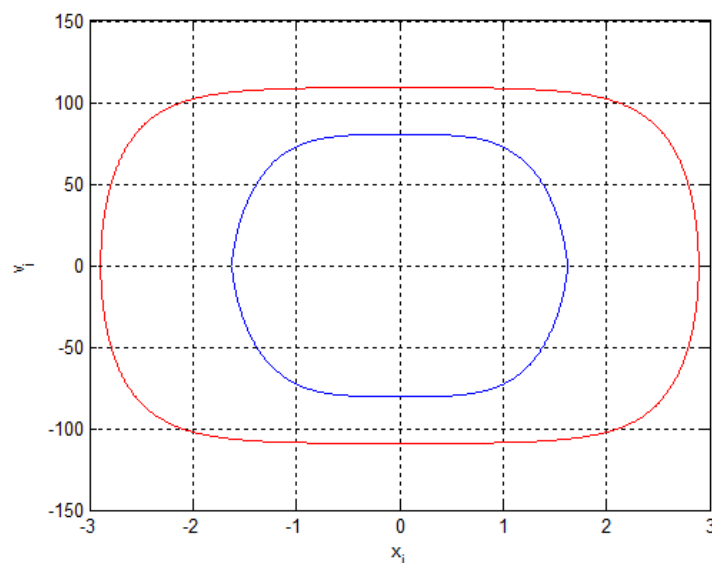
Κάνοντας σύγκριση των σχημάτων (Σχ. 4.2 - Σχ. 4.5), παρατηρούμε ότι, για τιμές ενέργειας 10^n με $n=1, \dots, 6$ τα διαγράμματα FEP διέρχονται από τα ίδια σημεία. Οι δύο μέθοδοι μας δίνουν τα ίδια αποτελέσματα. Αξίζει να σημειωθεί ότι, για ενέργειες $< 10^{10}$ δεν εμφανίζονται πολλαπλές λύσεις και αλληλεπιδράσεις ιδιομορφών, πράγμα ασφαλές για την κατασκευή μας.

Εμφανίζοντας μερικές ιδιομορφικές σχέσεις των x_1 και x_2 , πατηρούμε ότι, γύρω από το σημείο ισορροπίας προσεγγιστικά υπάρχει περιοχή που οι μη γραμμικές ιδιομορφές ταυτίζονται με τις γραμμικές. Παρόλο που λαμβάνει χώρα αυτό το φαινόμενο στα άκρα της, η μη γραμμική ιδιομορφή εμφανίζει έντονη καμπύλωση.



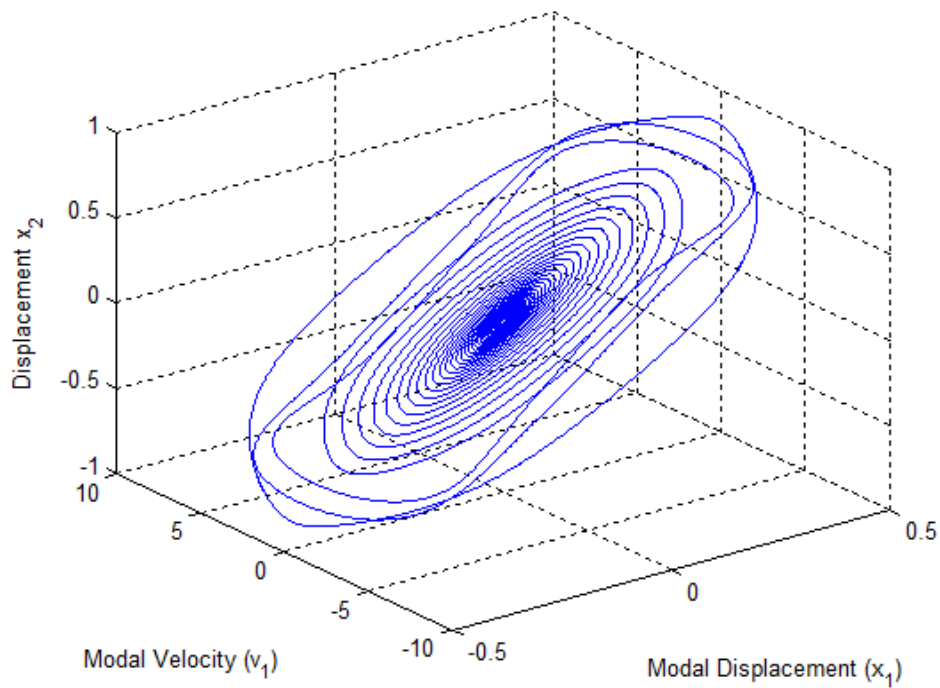
Σχ. 4.6: Σχέση των x_1 και x_2 για την πρώτη ιδιομορφή

Η θεώρηση των γραμμικών ιδιομορφών για αυτό το επίπεδο ενέργειας ($E = 6.3 \cdot 10^5$) ως εργαλείο ανάλυσης της κατασκευής, θα οδηγήσει σε λάθος εκτιμήσεις των μετατοπίσεων και κατ' επέκταση των εντατικών μεγεθών της κατασκευής.

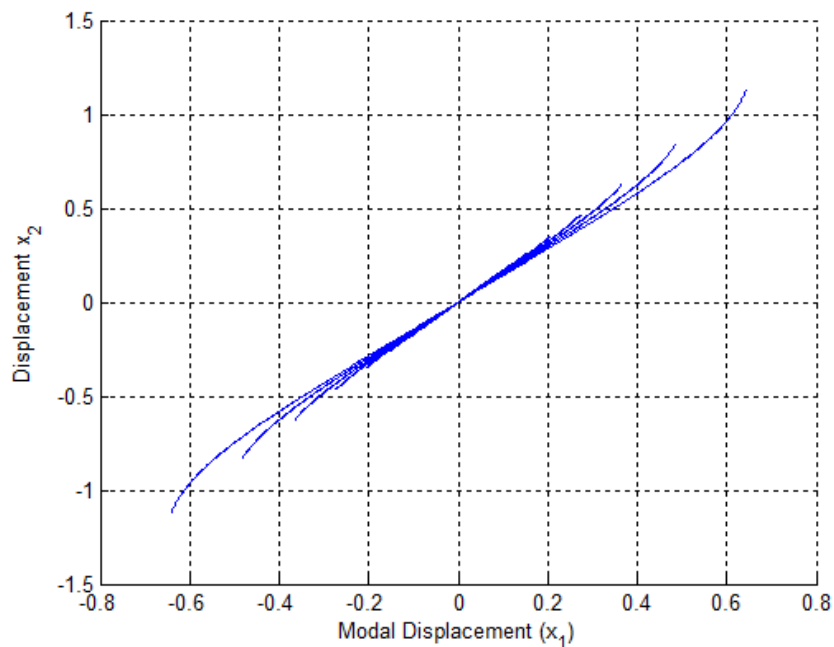


Σχ. 4.7: Επίπεδο φάσης των δύο συντεταγμένων x_1 : μπλέ x_2 : κόκκινο χρώμα

Τροχιές – Πολλαπλότητα



Σχ. 4.8: Τροχιές στο χώρο (x_1, v_1, x_2) – Σηματισμός πολλαπλότητας



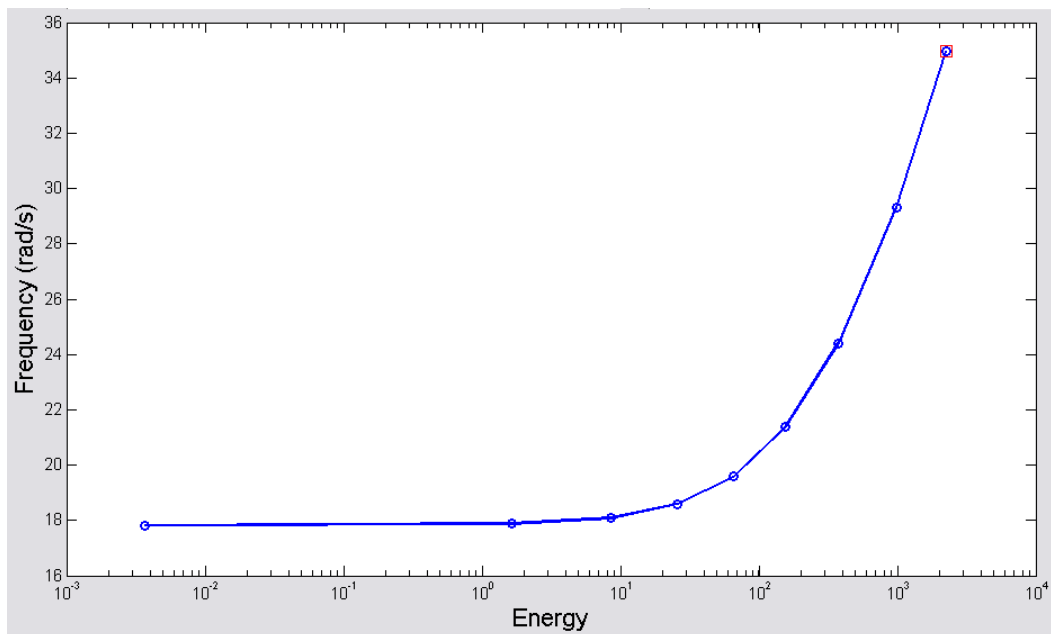
Σχ. 4.9: Ιδιομορφικές σχέσεις καθώς αυξάνεται η ενέργεια του πρώτου κλάδου

Παρατηρήσεις

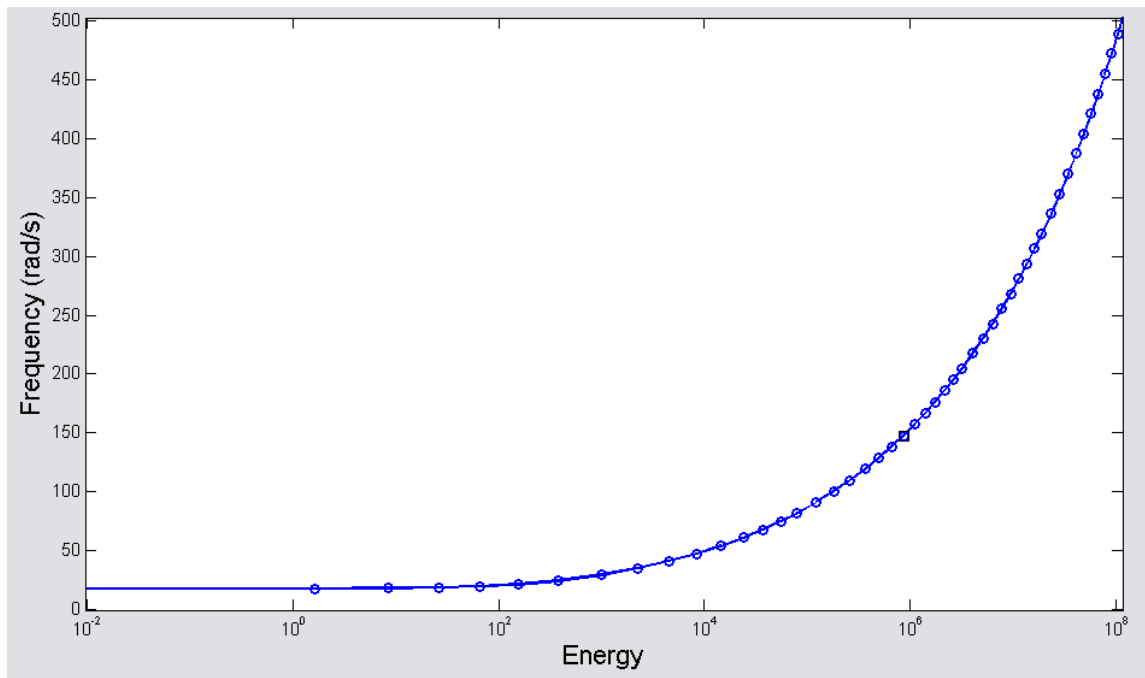
Όπως αναμέναμε, για χαμηλές ενέργειες το σύστημα συμπεριφέρεται όπως το αντίστοιχο γραμμικοποιημένο σύστημα. Στο Σχ. 4.8 οι τροχιές σε αυτά τα επίπεδα ενέργειας ανήκουν στο ίδιο επίπεδο (αυτό που παράγει ο ορισμός των Shaw & Pierre για τα γραμμικά συστήματα). Ο κλάδος της πρώτης ιδιομορφής, όμως, για μεγαλύτερες ενέργειες δεν εμφανίζει πολλαπλές λύσεις όπως στα μονοβάθμια του κεφαλαίου 2. Η αλληλεπίδραση των ιδιομορφών, λοιπόν, δεν είναι τόσο έντονη στο σύστημα που εξετάζουμε. Τέλος, οι ιδιομορφικές σχέσεις μπορεί γύρω από το σημείο ισορροπίας να μοιάζουν με τις αντίστοιχες του γραμμικού, όμως όπως διακρίνουμε από το Σχ. 4.9 για υψηλές ενέργειες έχουμε αποκλίσεις, που θα οδηγήσουν τις μεθόδους που χρησιμοποιούν τις γραμμικές ιδιομορφές σε λάθος εκτιμήσεις των δεδομένων σχεδιασμού.

Κλάδος 2^{ης} ιδιομορφής

Μέθοδος Peeters et al.

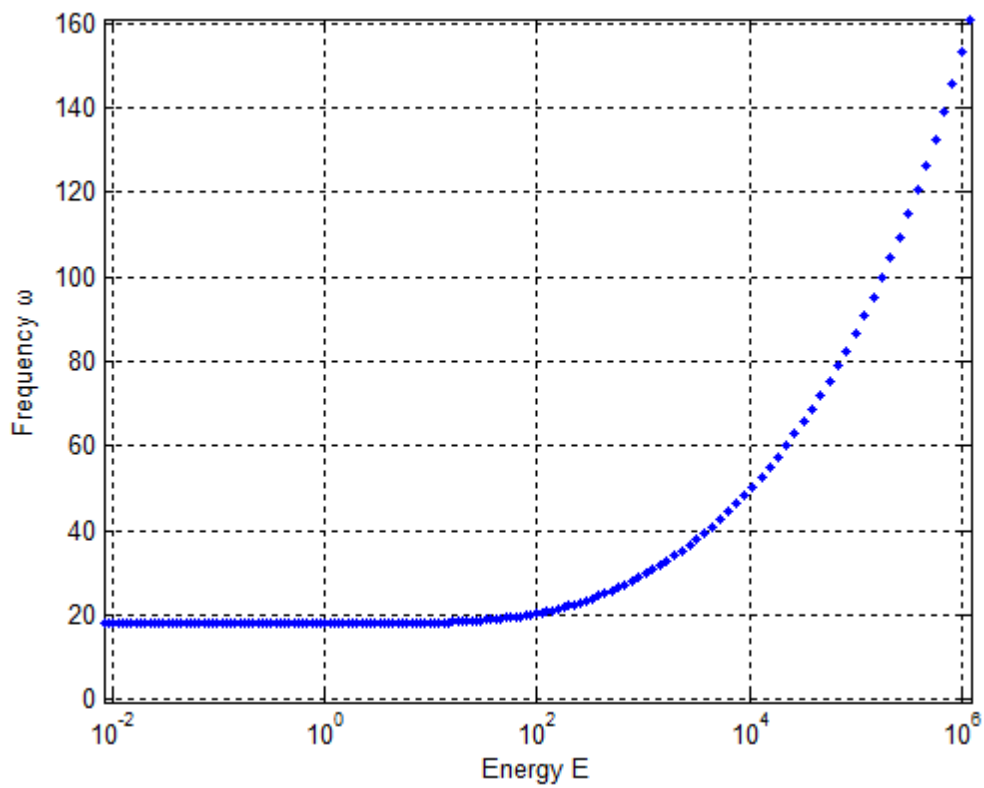


Σχ. 4.10: Διάγραμμα FEP με μέθοδο σκόπευσης



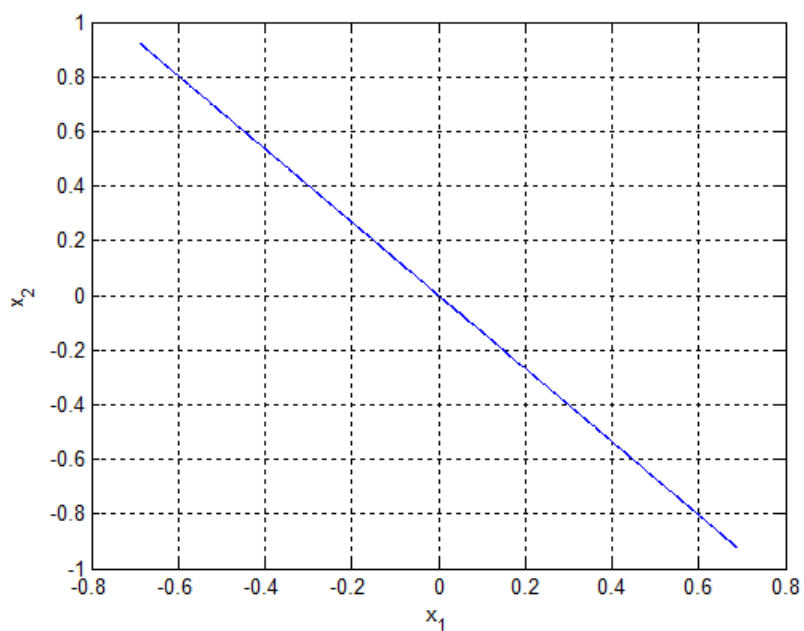
Σχ. 4.11: Διάγραμμα FEP για τον δεύτερο ιδιομορφικό κλάδο για μεγάλες ενέργειες

Μέθοδος Slater

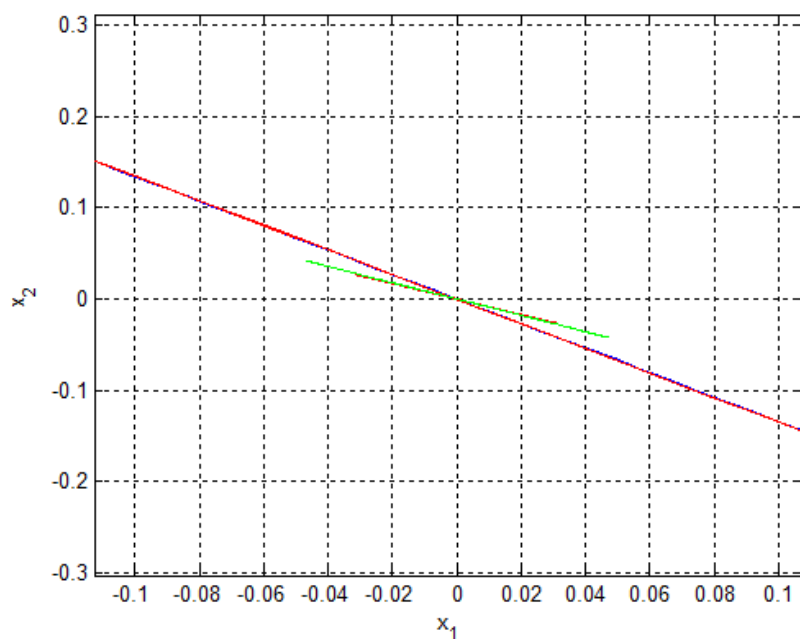


Σχ. 4.12: Διάγραμμα FEP για τον δεύτερο κλάδο ιδιομορφών με τη μέθοδο του Slater

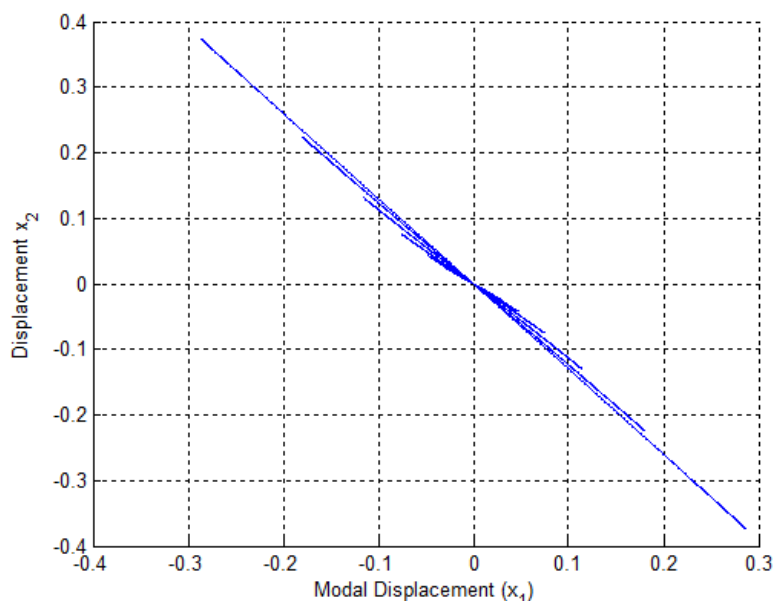
Ιδιομορφικές Σχέσεις



Σχ. 4.13: Ιδιομορφική σχέση για τη δεύτερη ιδιομορφή



Σχ. 4.14: Εστίαση γύρω από το σημείο ισορροπίας – Γραμμική ιδιομορφή (πράσινο χρώμα)

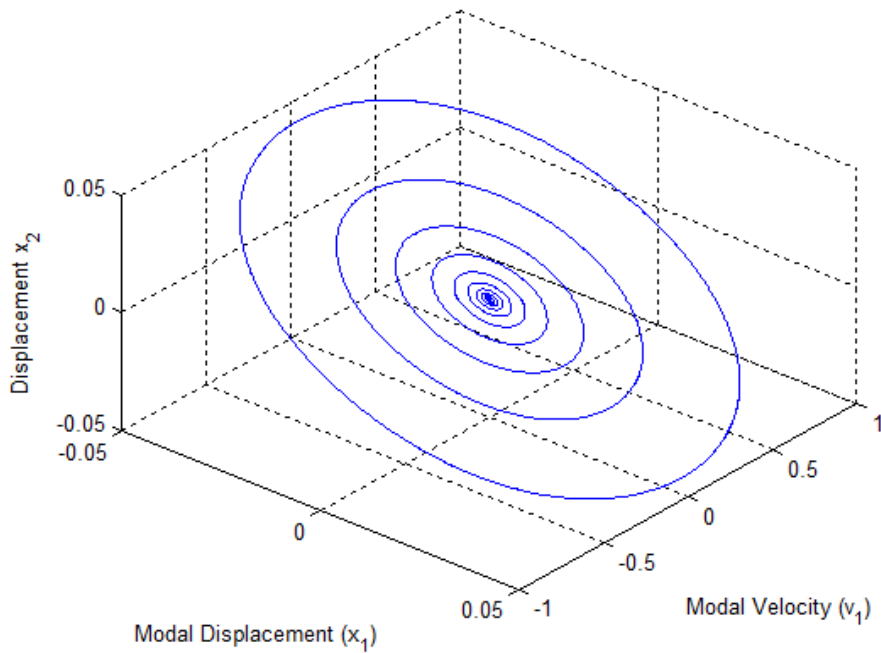


Σχ. 4.15: Όψη της πολλαπλότητας – ιδιομορφικές σχέσεις για διαφορετικά επίπεδα ενέργειας

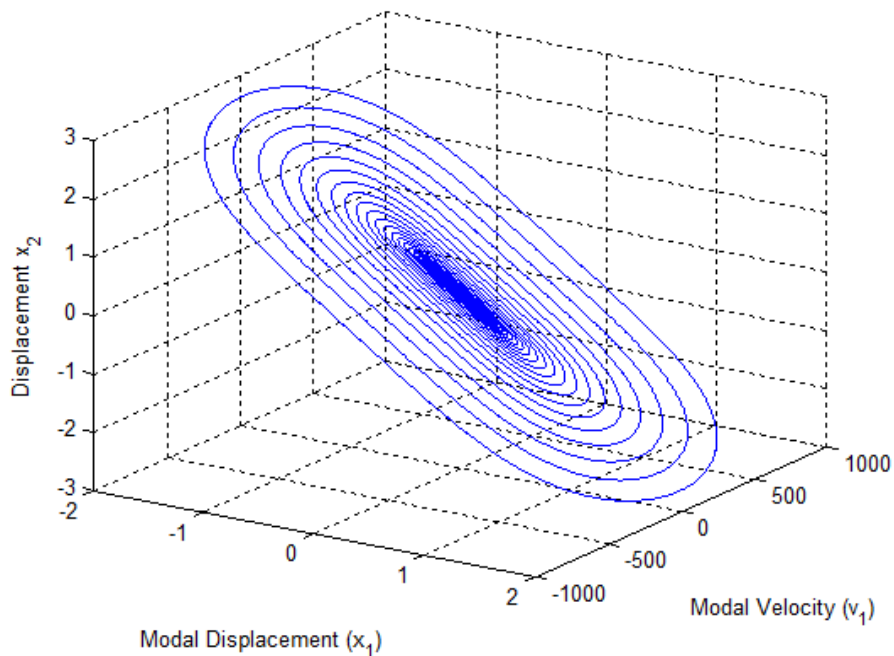
Παρατηρήσεις

Όσον αφορά στο δεύτερο ιδιομορφικό κλάδο του συστήματος μας παρατηρούμε, όπως περιμέναμε, να μην υπάρχουν αλληλεπιδράσεις των ιδιομορφών (Σχ. 4.12) για μεγάλες ενέργειες σύμφωνα με το διβάθμιο που είχαμε επιλύσει στο κεφάλαιο 2. Στο Σχ. 4.13 παρατηρούμε ότι, για σχετικά μεγάλες ενέργειες η ιδιομορφική σχέση έχει γραμμική μορφή. Θα θεωρούσαμε ότι οι γραμμικές ιδιομορφές του συστήματος μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον προσδιορισμό των ποιοτικών χαρακτηριστικών του. Παρ' όλα αυτά, εστιάζοντας λεπτομερώς στην περιοχή γύρω από το σημείο ισορροπίας (Σχ. 4.14) παρατηρούμε ότι υπάρχει στροφή της γραμμικής ιδιομορφής (απεικονίζεται με πράσινο χρώμα) καθώς μεγαλώνει η ενέργεια του συστήματος με αποτέλεσμα να καταλήγουμε σε ιδιομορφές που μοιάζουν με τις γραμμικές αλλά δίνουν διαφορετικά πλάτη ταλάντωσης κατά την πραγματοποίησή τους. Οι πραγματικές διαφορές μεταξύ των ιδιομορφικών σχέσεων απεικονίζονται στο Σχ. 4.15 όπου η στροφή των ευγράμμων τμημάτων καθώς αυξάνεται η ενέργεια είναι ορατή.

Τροχιές – Πολλαπλότητα



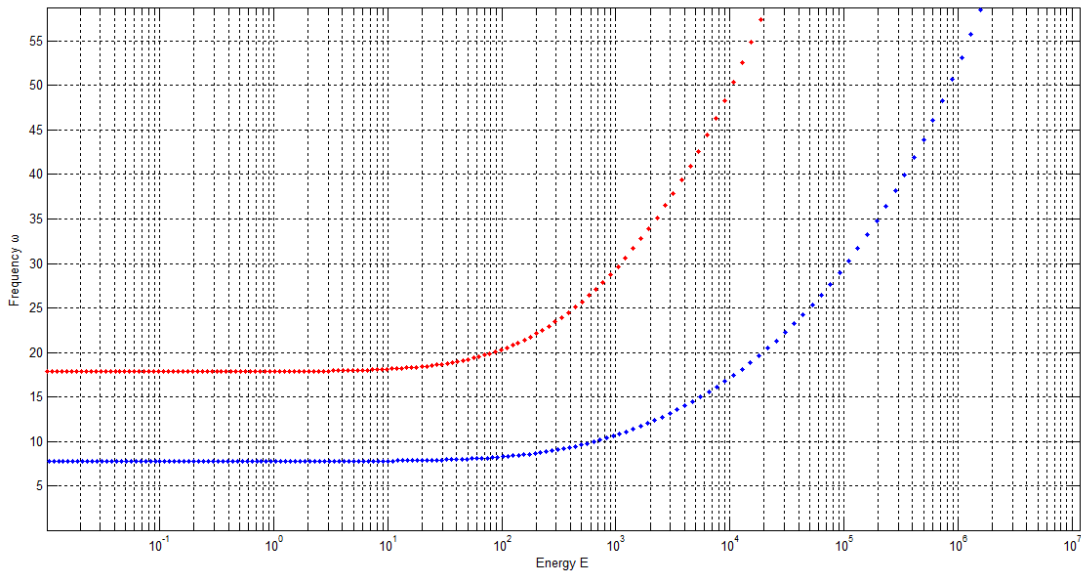
Σχ. 4.16 : Τροχιές για χαμηλές ενέργειες – επίπεδη πολλαπλότητα



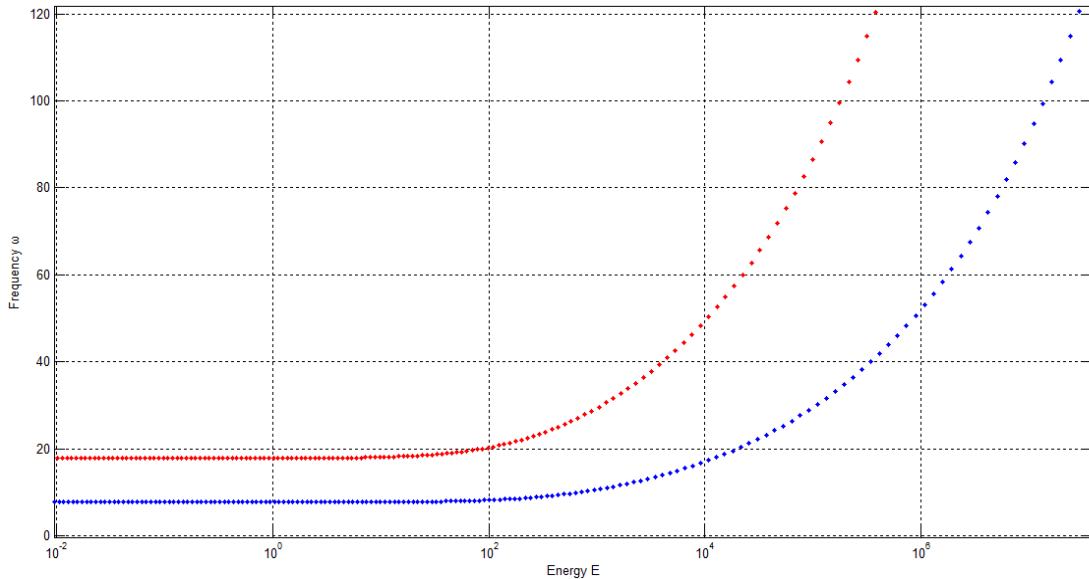
Σχ. 4.17 : Τροχιές για μεγαλύτερες ενέργειες – μικρή καμπύλωση & αλλαγή κλίσης

Συγκεντρωτικά Αποτελέσματα

Οι κλάδοι των δύο ιδιομορφών με την μέθοδο του Slater



Σχ. 4.18: Συγκριτικό διάγραμμα FEP με τους δύο κλάδους για το σύστημα που εξετάζουμε



Σχ. 4.19: Διάγραμμα FEP στην περιοχή των ενεργειών που μας ενδιαφέρει

Στα διαγράμματα FEP δεν απεικονίζονται οι ιδιομορφικές σχέσεις ανάλογα με το επίπεδο ενέργειας, διότι τα σχήματα Σχ. 4.9 και Σχ. 4.15 δίνουν τη συμπεριφορά αυτή με μεγαλύτερη εποπτεία.

Κεφάλαιο 5

Βιβλιογραφία

- [1] P. Apiwattanalungarn, S. W. Shaw, C. Pierre and D. Jiang, “*Finite-Element-Based Nonlinear Modal Reduction of a Rotating Beam with Large-Amplitude Motion*”, *Journal of Vibration and Control*, vol. 9 , 2003, pp. 235-263.
- [2] S. Bellizzi and R. Bouc, “*A new formulation for the existence and calculation of nonlinear normal modes*”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 287, 2005, pp. 545-569.
- [3] T. D. Burton, “*Numerical calculation of nonlinear normal modes in structural systems*”, *Nonlinear Dynamics*, vol. 49, 2007, pp. 425-441.
- [4] G. Kerschen, K. Worden, A. F. Vakakis and J-C. Golinval, “*Past, present and future of nonlinear system identification in structural dynamics*”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 20, 2006, pp. 505-592.
- [5] G. Kerschen, M. Peeters, J.C. Golinval and A. F. Vakakis, “*Nonlinear normal modes, Part I: A useful framework for structural dynamicist*”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 23, 2009, pp. 170-194.
- [6] M. Peeters, R. Vingué, G. Sérandour, G. Kerschen and J. C. Golinval, “*Nonlinear normal modes, Part II: Toward a Practical Computation using Numerical Continuation Techniques*”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 23, 2009, pp. 195-216.
- [7] M. Peeters, G. Kerschen and J-C. Golinval, “*Dynamic testing of nonlinear vibrating structures using nonlinear normal modes*”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 330, 2011, pp. 486-509.
- [8] E. Pesheck, “*Reduced-order modeling of nonlinear structural systems using nonlinear normal modes and invariant manifolds*”, Ph.D. Thesis, University of Michigan, Ann Arbor, 2000.
- [9] E. Pesheck, C. Pierre and S. W. Shaw, “*Accurate reduced-order models for a simple rotor blade model using nonlinear normal modes*”, *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 33, 2001, pp. 1085-1097.
- [10] E. Pesheck, C. Pierre and S. W. Shaw, “*A new Galerkin-based approach for accurate non-linear normal modes through invariant manifolds*”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 249, 2002, pp. 971-993.
- [11] R. H. Rand, “*A direct method for non-linear normal modes*”, *International Journal of Non-linear Mechanics*, vol. 9, 1974, pp. 363-368.

- [12] L. Renson, G. Kerschen and B. Cochelin, “*Numerical computation of nonlinear normal modes in mechanical engineering*”, Journal of Sound and Vibration, vol. 364, 2016, pp. 177-206.
- [13] R. M. Rosenberg, “*Normal Modes of Nonlinear Dual-Mode Systems*”, Journal of Applied Mechanics, vol. 27, Trans. ASME, vol. 82, Series E, June 1960, pp. 263-268.
- [14] R. M. Rosenberg, “*On Normal Vibrations of a General Class of Nonlinear Dual-Mode Systems*”, Journal of Applied Mechanics, vol. 28, Trans. ASME, vol. 83, Series E, June 1961, pp. 275-283.
- [15] R. M. Rosenberg, “*The Normal Modes of Nonlinear n-Degree-of-Freedom Systems*”, Journal of Applied Mechanics, vol. 29, March 1962, pp. 7-14.
- [16] R. M. Rosenberg, “*On nonlinear vibrations of systems with many degrees of freedom*”, Advances in Applied Mechanics, vol. 9, 1966, pp. 155-242.
- [17] A. F. Vakakis, “*Analysis and identification of linear and nonlinear normal modes in vibrating systems*”, Ph.D Dissertation, California Institute of Technology, 1990.
- [18] A. F. Vakakis, “*Non-similar normal oscillations in a strongly non-linear discrete system*”, Journal of Sound and Vibration, vol. 159, 1992, pp. 341-361.
- [19] A. F. Vakakis and R. H. Rand, “*Normal modes and global dynamics of a 2-degree-of-freedom nonlinear-system; part I: low energies*”, International Journal of Non-Linear Mechanics, vol. 27, 1992, pp. 861-874.
- [20] A. F. Vakakis and R. H. Rand, “*Normal modes and global dynamics of a 2-degree-of-freedom nonlinear-system; part II: high energies*”, International Journal of Non-Linear Mechanics, vol. 27, 1992, pp. 875-888.
- [21] A. F. Vakakis, L. I. Manevitch, Y. V. Mikhlin, V. N. Pilipchuk and A. A. Zevin, “*Normal modes and localization in nonlinear systems*”, John Wiley & Sons, 1996.
- [22] S. W. Shaw and C. Pierre, “*Non-linear normal modes and invariant manifolds*”, Journal of Sound and Vibration, vol. 150, 1991, pp. 170-173.
- [23] S. W. Shaw and C. Pierre, “*On nonlinear normal modes*”, ASME Winter Annual Meeting 1992.
- [24] S. W. Shaw and C. Pierre, “*Normal modes for non-linear vibratory systems*”, Journal of Sound and Vibration, 1993, vol. 164, pp. 85-124.
- [25] S. W. Shaw and C. Pierre, “*Normal modes of vibration for non-linear continuous systems*”, Journal of Sound and Vibration, vol. 169, 1994, pp. 319-347.
- [26] J. C. Slater, “*A numerical method for determining nonlinear normal modes*”, Nonlinear Dynamics, vol. 10, 1996, pp. 19-30.
- [27] Ι. Θ. Κατσικαδέλης, “*Δυναμική των κατασκευών*”, Εκδόσεις Συμμετρία, 2007