Εθνικό Μετσόβειο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών Και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Πληροφορικής και Υπολογιστών

# Σχήματα Διαμοιρασμού και Επιδότησης Κόστους σε Παίγνια Χωροθέτησης

Διπλωματική Εργασία

της

**Ιωάννας Γ. Τζιάλλα**

**Επιβλέπων:** Δημήτριος Φωτάκης
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Μάιος 2016

Εθνικό Μετσόβειο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών Και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Πληροφορικής και Υπολογιστών

# Σχήματα Διαμοιρασμού και Επιδότησης Κόστους σε Παίγνια Χωροθέτησης

## Διπλωματική Εργασία

της

**Ιωάννας Γ. Τζιάλλα**

**Επιβλέπων:** Δημήτριος Φωτάκης
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την ........

| | | |
|---|---|---|
| *(Υπογραφή)* | *(Υπογραφή)* | *(Υπογραφή)* |
| ........................ | ........................ | ........................ |
| Δημήτριος Φωτάκης | Ευάγγελος Μαρκάκης | Αριστείδης Παγουρτζής |
| Επίκουρος Καθηγητής | Επίκουρος Καθηγητής | Αναπληρωτής Καθηγητής |
| Ε.Μ.Π. | Ε.Κ.Π.Α. | Ε.Μ.Π. |

Αθήνα, TBD

*(Υπογραφή)*

..........................................
**Ιωάννα Τζιάλλα**

Εθνικό Μετσόβειο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών Και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Πληροφορικής και Υπολογιστών

# Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια του προπτυχιακού προγράμματος σπουδών της σχολής Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τους καθηγητές μου κ. Ευστράθιο Ζάχο και κ. Δημήτρη φωτάκη. Ιδιαίτερα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντά μου κ. Δημήτρη Φωτάκη για τις πολύτιμες υποδείξεις και βοήθεια που μου προσέφερε για την συγγραφή αυτής της διπλωματικής εργασίας (και όχι μόνο) καθώς και για το γεγονός ότι με γνώρισε στην θεωρητική πληροφορική δείχνοντας μου νέους τρόπους σκέψης.

Ακόμα, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου και τους φίλους μου για την στήριξή τους καθ' όλη την διάρκεια των σπουδών μου.

# Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετάμε το Πρόβλημα Χωροθέτησης Υπηρεσιών (Facility Location) στο οποίο έχουμε ένα σύνολο παικτών σε έναν χώρο και επιθυμούμε να τους παρέχουμε υπηρεσίες ανοίγοντας κέντρα παροχής υπηρεσιών (facilities) σε κατάλληλα επιλεγμένα σημεία του χώρου. Για παράδειγμα μπορεί να θέλουμε να παρέχουμε υπηρεσίες τηλεφωνίας ή να χτίσουμε ένα δημόσιο κτήριο (π.χ. νοσοκομείο). Το πόσο κοντά ή μακριά είναι τα facilities στους παίκτες επηρεάζει την ποιότητα των υπηρεσιών που τους παρέχεται και σκοπός μας είναι να τα τοποθετήσουμε στις βέλτιστες θέσεις έτσι ώστε το κοινωνικό όφελος από αυτά να είναι όσο το δυνατόν μεγαλύτερο. Στην περίπτωση που γνωρίζουμε τις θέσεις όλων των παικτών και υπάρχει μία κεντρική αρχή που αποφασίζει το που θα ανοιχτούν τα facilities το πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί αποδοτικά, όπως θα φανεί στο 3ο κεφάλαιο. Το ερώτημα που θα ερευνήσουμε είναι τι συμβαίνει όταν οι παίκτες είναι αυτοί που αποφασίζουν τις τοποθεσίες στις οποίες θα ανοιχτούν τα facilities και οι ίδιοι καλύπτουν το κόστος τους. Σε αυτή την περίπτωση, ο κάθε παίκτης δρα εγωιστικά με στόχο να λάβει υπηρεσίες ελαχιστοποιώντας το ποσό που πληρώνει για αυτές και, συνεπώς, το συνολικό κόστος του δικτύου που δημιουργούν οι παίκτες προσπαθώντας ο καθένας να εξυπηρετήσει τα προσωπικά του συμφέροντα μπορεί να είναι πολύ υψηλό σε σχέση με το βέλτιστο. Το παραπάνω κινητοποιεί την μελέτη του παιγνίου από παιγνιοθεωρητική σκοπιά.

Συγκεκριμένα, στο παίγνιο που θα αναλύσουμε θεωρούμε ότι έχουμε $N$ παίκτες οι οποίοι καταφτάνουν ένας ένας και κάθε παίκτης, ανάλογα με το δίκτυο το οποίο έχει δημιουργηθεί την στιγμή που μπαίνει στο παιχνίδι, αποφασίζει από ποιο facility θα εξυπηρετηθεί έτσι ώστε να ελαχιστοποιήσει το κόστος του. Κάθε παίκτης πρέπει να πληρώσει ένα κόστος εξυπηρέτησης το οποίο ισούται με την απόσταση του από το facility το οποίο τον εξυπηρετεί και (ίσως) ένα μέρος του κόστους ανοίγματος/λειτουργίας του facility. Θεωρούμε ότι τα κόστη ανοίγματος όλων των facilities είναι ίσα με $f$.

Το ερώτημα που μας απασχολεί είναι πώς επηρεάζουν ο τρόπος διαμοιρασμού του κόστους των facilities και η σειρά άφιξης των παικτών στο κόστος του τελικού δικτύου που δημιουργούν οι παίκτες σε σχέση με το βέλτιστο. Εστιάζουμε σε σχήματα διαμοιρασμού κόστους στα οποία τα ποσά που πληρώνουν οι παίκτες καλύπτουν πλήρως το κόστος του δικτύου (budget balanced) και όπου το ποσό που πληρώνει κάθε παίκτης για ένα μέρος του δικτύου που χρησιμοποιεί καθορίζεται πλήρως από τους παίκτες που το χρησιμοποιούν (separable).

Αρχικά, εστιάζουμε στην περίπτωση όπου δεν γνωρίζουμε την τοπολογία των παικτών ούτε την σειρά αφίξεώς τους. Σε αυτή την περίπτωση, δείχνουμε ότι εάν δεν επιβάλλουμε σε κάποιους παίκτες να πληρώνουν όλο το κόστος του facility από το οποίο λαμβάνουν υπηρεσία, ακόμα και εάν λαμβάνουν και άλλοι υπηρεσίες από αυτό, (δικτατορικοί παίκτες) τότε υπάρχουν τοπολογίες παικτών στις οποίες οποιαδήποτε σειρά άφιξης των παικτών οδηγεί τους παίκτες στο να δημιουργήσουν ένα δίκτυο κόστους $O(N)$ αυτό του βέλτιστου. Από την άλλη πλευρά, εάν έχουμε δικτατορικούς παίκτες, τότε μπορεί να υπάρχουν σειρές άφιξης των παικτών οι οποίες οδηγούν σε φτηνά δίκτυα και άλλες που οδηγούν σε ακριβά: Εστιάζουμε σε ένα σχήμα διαμοιρασμού κόστους στο οποίο επιβάλλουμε στον παίκτη με την μεγαλύτερη ταμπέλα/index να πληρώνει όλο το κόστος του facility που τον εξυπηρετεί (δικτατορικό), δίνουμε παραδείγματα καλών και κακών σειρών για τοπολογίες και δείχνουμε ότι για κάθε τοπολογία παικτών μπορούμε να υπολογίσουμε σε χρόνο $O(NlogN)$ μία σειρά άφιξης των παικτών η οποία οδηγεί τους παίκτες σε φτηνά δίκτυα (κόστος $O(logN)$ του βέλτιστου). Ακόμα, για το δικτατορικό σχήμα, μελετάμε την περίπτωση όπου η βέλτιστη λύση αποτελείται από ένα μόνο facility και δείχνουμε ότι εάν οι παίκτες καταφτάνουν με τυχαία σειρά το αναμενόμενο κόστος του δικτύου είναι $O(\sqrt{N})$ του βέλτιστου. Τέλος, αποδεικνύουμε ότι στην γενική περίπτωση όπου μπορούμε να καθορίσουμε τόσο το σχήμα διαμοιρασμού κόστους όσο και την σειρά άφιξης των παικτών, για κάθε σχήμα διαμοιρασμού κόστους και σειρά, υπάρχει μία τοπολογία παικτών στην οποία τα παραπάνω οδηγούν στην δημιουργία δικτύου κόστους $N$ φορές αυτό του βέλτιστου.

Στην συνέχεια, μελετάμε την περίπτωση όπου γνωρίζουμε την τοπολογία των παικτών αλλά δεν μπορούμε να ελέγξουμε την σειρά αφίξεως τους και αποδεικνύουμε ότι υπάρχει ένα σχήμα διαμοιρασμού κόστους το οποίο, ορίζοντας κατάλληλους δικτατορικούς παίκτες, ανεξαρτήτως της σειράς αφίξεως των παικτών, μπορεί να οδηγήσει τους παίκτες στην βέλτιστη λύση.

Επειδή όμως ένα σχήμα με δικτατορικούς παίκτες δεν είναι δίκαιο ούτε μπορεί να γίνει εύκολα αποδεκτό σε μία κοινωνία, στρέφουμε την προσοχή μας στο Δίκαιο σχήμα διαμοιρασμού κόστους στο οποίο το κόστος ενός facility μοιράζεται εξίσου στους παίκτες που το χρησιμοποιούν και το οποίο έχει σημαντικές οικονομικές ιδιότητες καθώς προκύπτει από τον διαμοιρασμό κόστους κατά Shapley. Ως σχήμα χωρίς δικτατορικούς παίκτες, υπάρχουν τοπολογίες στις οποίες οι παίκτες θα οδηγηθούν πάντα σε δίκτυα υψηλού κόστους οπότε το σχήμα από μόνο του δεν οδηγεί τους παίκτες σε δίκτυα κοντά στο βέλτιστο. Για αυτό, μελετήσαμε το εάν μπορούμε να οδηγήσουμε τους παίκτες σε καλύτερες λύσεις επιχορηγώντας την αγορά κάποιων μερών του δικτύου. Κατ' αρχάς, δείξαμε ότι εάν δεν παίρνουμε πίσω τις επιχορηγήσεις που δίνουμε, υπάρχει μία τοπολογία στην οποία μία σειρά άφιξης των παικτών μπορεί να μας οδηγήσει στο να πληρώσουμε $O(\sqrt{N})f$ επιχορηγήσεις για να οδηγήσουμε τους παίκτες στην βέλτιστη λύση αλλιώς το κόστος του δικτύου θα είναι $\sqrt{N}$ αυτό του βέλτιστου. Για αυτή την τοπολογία, ακόμα και εάν μπορούμε να πάρουμε πίσω τις επιχορηγήσεις που δίνουμε στους παίκτες, εάν οι παίκτες καταφτάνουν με τυχαία σειρά, φαίνεται από τις προσομοιώσεις που κάναμε ότι το αναμενόμενο συνολικό ποσό των επιχορηγήσεων που πρέπει να πληρώσουμε είναι ανάλογο του $logN$. Παρόλα αυτά, στην περίπτωση όπου οι ομάδες παικτών που εξυπηρετούνται στην βέλτιστη λύση από το ίδιο facility (clusters) είναι μακριά το ένα από το άλλο, μπορούμε να υπολογίσουμε μία σειρά άφιξης των παικτών για την οποία πληρώνοντας κάθε χρονική στιγμή ποσό επιχορηγήσεων το πολύ $f$ μπορούμε να οδηγήσουμε τους παίκτες στο να δημιουργήσουν ένα δίκτυο κόστους το πολύ 8 φορές μεγαλύτερο του βέλτιστου. Τέλος, δείξαμε ότι στην γενική περίπτωση όπου τα clusters είναι κοντά μεταξύ τους μπορούμε επιχορηγώντας τους με $O(logN)$ φορές το κόστος της βέλτιστης λύσης να τους οδηγήσουμε στο βέλτιστο δίκτυο.

## Λέξεις Κλειδιά

Χωροθέτηση Υπηρεσιών, Σχήματα Διαμοιρασμού Κόστους, Επιχορηγήσεις, Δίκαιο σχήμα Διαμοιρασμός Κόστους

# Abstract

In the facility location problem we are given a set of players and their locations in a metric space and we want to select and/or place certain facilities to serve them efficiently. For instance, we may want to provide mobile phone services or build a public building (for example, a hospital). The distance of a facility from the players it serves affects the quality of the services it provides: the closer it is to the players, the more efficiently it serves them. Our goal is to select the positions of the facilities to maximize the social welfare. In the case where we know the locations of the players beforehand and there is a central authority that decides where the facilities will open, the optimum solution of the problem can be approximated efficiently. The question we would like to answer is what happens when the players are the ones to decide where the facilities will open and will pay the opening costs of the facilities. In this case, each player acts selfishly in order to receive services and minimize the cost he pays for them. This selfish behaviour of the players may result to expensive networks as players do not cooperate with each other. The above motivates a game theoretic approach of the problem.

In the game we study we assume that we have  players who arrive one by one and each player, based on the network that has been created by the moment he joins the game, decides from which facility he will be serviced in order to minimize the cost he will incur. Each player who receives service from a facility must pay a service cost that is equal to his distance from it and (maybe) a part of the opening cost of the facility. We are focusing in the case where the opening costs of all the facilities are $f$.

First of all, we will analyse on the effect that the arrival order of the players and the cost sharing scheme (the way the facility costs are split among the players who use them) have on the cost of the network that the players may create. We will focus on cost sharing schemes that are budget-balanced, i.e. the cost of the network is completely covered by the sum of the costs that the players pay and separable i.e. the cost share that a player pays for a part of the network is completely determined by the set of players who use it.

First, for the case where we do not know the topology of the game beforehand, we show that if we don't force any players to pay the whole cost of the facility that serves them even if other players may use it (dictatorial players) then there exist topologies of players in which any arrival order of the players will result to a network that has cost $O(N)$ times that of the optimum. However, if the cost sharing scheme contains dictatorial players there are arrival order of the players that lead to chap networks and others that lead to expensive ones. To see this, we analyse a cost sharing scheme which forces the player with the largest index among the ones who use a facility to pay the whole cost of the facility (dictatorial). For this scheme, we give examples of good and bad orders for some topologies and we prove that for any topology of players we can compute in $O(NlogN)$ time an arrival order of the players that leads to cheap networks (cost $O(logN)$ that of the optimum). We, also, study the case where the optimum solution has only one facility and show that if the players arrive in random order the expected cost of the network is $O(\sqrt{N})$ that of the optimum. Last, we prove that in the general case where we can determine the cost sharing scheme and the arrival order of players but we have no information about the topology of players there is always one topology in which the above lead the players to a network of cost $N$ times that of the optimum.

Next, we analyze the case where we know the topology of the game beforehand but we cannot control the arrival order of the players. We show that, by appropriately choosing some players to be dicatorial, we can design a cost sharing scheme that, for any arrival order of the players, it leads them to a Nash equilibrium that has cost equal to the cost of the optimal solution.

As a scheme with dictatorial players is not fair and, thus, cannot be easily accepted in a society, we study the Fair cost sharing scheme in which the cost of each facility is equally split among the players who use it. This cost sharing scheme has important economic motivations one of which is that it can be derived from the Shapley value. As a scheme without dictatorial players, there are topologies of players in which players will always create expensive networks no matter their order of arrival. Since this cost sharing scheme cannot be efficient on its own, we study if subsidizing the players can lead them to better solutions and what is the cost of the subsidies we must pay. First, we show that if we cannot take back the subsidies we give, there is a topology of players and an arrival order that will make us pay $O(\sqrt{N})$ subsidies in order to make the players buy the optimal solution. Otherwise, the cost of the final network will have cost $\sqrt{N}$ times that of the optimum. For this topology, even if we can take back the subsidies we give, when the players arrive in random order, our simulations indicated that the expected cost of the subsidies we must give is proportional to $logN$. However, in the case where the groups of players that in the optimum solution are served by the same facility (clusters) are far from each other, we can compute an arrival order of the players for which, if at each moment we pay at most $f$ in subsidies, we can lead the players to a network that has cost at most 8 times that of the optimum. Last, we showed that in the general case where the clusters are close to each other, by subsidizing them $O(logN)$ times the cost of the optimum solution we can lead them to the optimum network.

## Keywords

Facility Location, Cost Sharing Schemes, Subsidies, Fair Cost Sharing

# Περιεχόμενα

# Κεφάλαιο 1

# Εισαγωγή

## 1.1 Δομή

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετάμε το Πρόβλημα Χωροθέτησης Υπηρεσιών (Facility Location) στο οποίο έχουμε ένα σύνολο παικτών σε έναν χώρο και επιθυμούμε να τους παρέχουμε υπηρεσίες ανοίγοντας κέντρα παροχής υπηρεσιών (facilities) σε κατάλληλα επιλεγμένα σημεία του χώρου. Για παράδειγμα μπορεί να θέλουμε να παρέχουμε υπηρεσίες τηλεφωνίας ή να χτίσουμε ένα δημόσιο κτήριο (π.χ. νοσοκομείο). Το πόσο κοντά ή μακριά είναι τα facilities στους παίκτες επηρεάζει την ποιότητα των υπηρεσιών που τους παρέχεται και σκοπός μας είναι να τα τοποθετήσουμε στις βέλτιστες θέσεις έτσι ώστε το κοινωνικό όφελος από αυτά να είναι όσο το δυνατόν μεγαλύτερο. Στην περίπτωση που γνωρίζουμε τις θέσεις όλων των παικτών και υπάρχει μία κεντρική αρχή που αποφασίζει το που θα ανοιχτούν τα facilities το πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί αποδοτικά, όπως θα φανεί στο 3ο κεφάλαιο. Το ερώτημα που θα ερευνήσουμε είναι τι συμβαίνει όταν οι παίκτες είναι αυτοί που αποφασίζουν τις τοποθεσίες στις οποίες θα ανοιχτούν τα facilities και οι ίδιοι καλύπτουν το κόστος τους. Σε αυτή την περίπτωση, ο κάθε παίκτης δρα εγωιστικά με στόχο να λάβει υπηρεσίες ελαχιστοποιώντας το ποσό που πληρώνει για αυτές και, συνεπώς, το συνολικό κόστος του δικτύου που δημιουργούν οι παίκτες προσπαθώντας ο καθένας να εξυπηρετήσει τα προσωπικά του συμφέροντα μπορεί να είναι πολύ υψηλό σε σχέση με το βέλτιστο. Το παραπάνω κινητοποιεί την μελέτη του παιγνίου από παιγνιοθεωρητική σκοπιά.

Συγκεκριμένα, στο παίγνιο που θα αναλύσουμε θεωρούμε ότι έχουμε $N$ παίκτες οι οποίοι καταφτάνουν ένας ένας και κάθε παίκτης, ανάλογα με το δίκτυο το οποίο έχει δημιουργηθεί την στιγμή που μπαίνει στο παιχνίδι, αποφασίζει από ποιο facility θα εξυπηρετηθεί έτσι ώστε να ελαχιστοποιήσει το κόστος του. Κάθε παίκτης πρέπει να πληρώσει ένα κόστος εξυπηρέτησης το οποίο ισούται με την απόσταση του από το facility το οποίο τον εξυπηρετεί και (ίσως) ένα μέρος του κόστους ανοίγματος/λειτουργίας του facility. Θεωρούμε ότι τα κόστη ανοίγματος όλων των facilities είναι ίσα με $f$.

Το ερώτημα που μας απασχολεί είναι πώς επηρεάζουν ο τρόπος διαμοιρασμού του κόστους των facilities και η σειρά άφιξης των παικτών στο κόστος του τελικού δικτύου που δημιουργούν οι παίκτες σε σχέση με το βέλτιστο. Εστιάζουμε σε σχήματα διαμοιρασμού κόστους στα οποία τα ποσά που πληρώνουν οι παίκτες καλύπτουν πλήρως το κόστος του δικτύου (budget balanced) και όπου το ποσό που πληρώνει κάθε παίκτης για ένα μέρος του δικτύου που χρησιμοποιεί καθορίζεται πλήρως από τους παίκτες που το χρησιμοποιούν (separable).

Αρχικά, εστιάζουμε στην περίπτωση όπου δεν γνωρίζουμε την τοπολογία των παικτών ούτε την σειρά αφίξεώς τους. Σε αυτή την περίπτωση, δείχνουμε ότι εάν δεν επιβάλλουμε σε κάποιους παίκτες να πληρώνουν όλο το κόστος του facility από το οποίο λαμβάνουν υπηρεσία, ακόμα και εάν λαμβάνουν και άλλοι υπηρεσίες από αυτό, (δικτατορικοί παίκτες) τότε υπάρχουν τοπολογίες παικτών στις οποίες οποιαδήποτε σειρά άφιξης των παικτών οδηγεί τους παίκτες στο να δημιουργήσουν ένα δίκτυο κόστους $O(N)$ αυτό του βέλτιστου. Από την άλλη πλευρά, εάν έχουμε δικτατορικούς παίκτες, τότε μπορεί να υπάρχουν σειρές άφιξης των παικτών οι οποίες οδηγούν σε φτηνά δίκτυα και άλλες που οδηγούν σε ακριβά: Εστιάζουμε σε ένα σχήμα διαμοιρασμού κόστους στο οποίο επιβάλλουμε στον παίκτη με την μεγαλύτερη ταμπέλα/index να πληρώνει όλο το κόστος του facility που τον εξυπηρετεί (δικτατορικό), δίνουμε παραδείγματα καλών και κακών σειρών για τοπολογίες και δείχνουμε ότι για κάθε τοπολογία παικτών μπορούμε να υπολογίσουμε σε χρόνο $O(NlogN)$ μία σειρά άφιξης των παικτών η οποία οδηγεί τους παίκτες σε φτηνά δίκτυα (κόστος $O(logN)$ του βέλτιστου). Ακόμα, για το δικτατορικό σχήμα, μελετάμε την περίπτωση όπου η βέλτιστη λύση αποτελείται από ένα μόνο facility και δείχνουμε ότι εάν οι παίκτες καταφτάνουν με τυχαία σειρά το αναμενόμενο κόστος του δικτύου είναι $O(\sqrt{N})$ του βέλτιστου. Τέλος, αποδεικνύουμε ότι στην γενική περίπτωση όπου μπορούμε να καθορίσουμε τόσο το σχήμα διαμοιρασμού κόστους όσο και την σειρά άφιξης των παικτών, για κάθε σχήμα διαμοιρασμού κόστους και σειρά, υπάρχει μία τοπολογία παικτών στην οποία τα παραπάνω οδηγούν στην δημιουργία δικτύου κόστους $N$ φορές αυτό του βέλτιστου.

Στην συνέχεια, μελετάμε την περίπτωση όπου γνωρίζουμε την τοπολογία των παικτών αλλά δεν μπορούμε να ελέγξουμε την σειρά αφίξεως τους και αποδεικνύουμε ότι υπάρχει ένα σχήμα διαμοιρασμού κόστους το οποίο, ορίζοντας κατάλληλους δικτατορικούς παίκτες, ανεξαρτήτως της σειράς αφίξεως των παικτών, μπορεί να οδηγήσει τους παίκτες στην βέλτιστη λύση.

Επειδή όμως ένα σχήμα με δικτατορικούς παίκτες δεν είναι δίκαιο ούτε μπορεί να γίνει εύκολα αποδεκτό σε μία κοινωνία, στρέφουμε την προσοχή μας στο Δίκαιο σχήμα διαμοιρασμού κόστους στο οποίο το κόστος ενός facility μοιράζεται εξίσου στους παίκτες που το χρησιμοποιούν και το οποίο έχει σημαντικές οικονομικές ιδιότητες καθώς προκύπτει από τον διαμοιρασμό κόστους κατά Shapley. Ως σχήμα χωρίς δικτατορικούς παίκτες, υπάρχουν τοπολογίες στις οποίες οι παίκτες θα οδηγηθούν πάντα σε δίκτυα υψηλού κόστους οπότε το σχήμα από μόνο του δεν οδηγεί τους παίκτες σε δίκτυα κοντά στο βέλτιστο. Για αυτό, μελετήσαμε το εάν μπορούμε να οδηγήσουμε τους παίκτες σε καλύτερες λύσεις επιχορηγώντας την αγορά κάποιων μερών του δικτύου. Κατ' αρχάς, δείξαμε ότι εάν δεν παίρνουμε πίσω τις επιχορηγήσεις που δίνουμε, υπάρχει μία τοπολογία στην οποία μία σειρά άφιξης των παικτών μπορεί να μας οδηγήσει στο να πληρώσουμε $O(\sqrt{N})f$ επιχορηγήσεις για να οδηγήσουμε τους παίκτες στην βέλτιστη λύση αλλιώς το κόστος του δικτύου θα είναι $\sqrt{N}$ αυτό του βέλτιστου. Για αυτή την τοπολογία, ακόμα και εάν μπορούμε να πάρουμε πίσω τις επιχορηγήσεις που δίνουμε στους παίκτες, εάν οι παίκτες καταφτάνουν με τυχαία σειρά, φαίνεται από τις προσομοιώσεις που κάναμε ότι το αναμενόμενο συνολικό ποσό των επιχορηγήσεων που πρέπει να πληρώσουμε είναι ανάλογο του $logN$. Παρόλα αυτά, στην περίπτωση όπου οι ομάδες παικτών που εξυπηρετούνται στην βέλτιστη λύση από το ίδιο facility (clusters) είναι μακριά το ένα από το άλλο, μπορούμε να υπολογίσουμε μία σειρά άφιξης των παικτών για την οποία πληρώνοντας κάθε χρονική στιγμή ποσό επιχορηγήσεων το πολύ $f$ μπορούμε να οδηγήσουμε τους παίκτες στο να δημιουργήσουν ένα δίκτυο κόστους το πολύ 8 φορές μεγαλύτερο του βέλτιστου. Τέλος, δείξαμε ότι στην γενική περίπτωση όπου τα clusters είναι κοντά μεταξύ τους μπορούμε επιχορηγώντας τους με $O(logN)$ φορές το κόστος της βέλτιστης λύσης να τους οδηγήσουμε στο βέλτιστο δίκτυο.

Η δομή των κεφαλαίων είναι η ακόλουθη:

**Κεφάλαιο 1:** Πέραν της σύντομης παρουσίασης των αποτελεσμάτων μας η οποία προηγήθηκε, στο επόμενο υποκεφάλαιο θα δώσουμε κάποιους βασικούς ορισμούς και εισαγωγικές έννοιες.

**Κεφάλαιο 2:** Σε ένα παίγνιο Χωροθέτησης σκοπός των παικτών είναι η δημιουργία ενός δικτύου οπότε το παίγνιο μπορεί να ενταχθεί στην κατηγορία των Παιγνίων Σχηματισμού Δικτύων. Τα παίγνια αυτά έχουν μελετηθεί εκτενώς τα τελευταία χρόνια και έχει γίνει κατανοητό ότι το πόσο πληρώνουν οι παίκτες για να χρησιμοποιήσουν τα διάφορα μέρη του δικτύου είναι καθοριστικής σημασίας για το κόστος του τελικού δικτύου το οποίο θα δημιουργήσουν. Για να γίνει αυτό κατανοητό στον αναγνώστη, παρουσιάζουμε εδώ ένα κομμάτι της έρευνας που έχει γίνει στα Παίγνια Σχηματισμού Δικτύων σε σχέση με τον τρόπο διαμοιρασμού κόστους των μερών του δικτύου ανάμεσα στους παίκτες. Πρώτα, παρουσιάζουμε 2 βασικά παίγνια: το Παίγνιο Σύνδεσης στο οποίο οι παίκτες είναι ελεύθεροι να συνεισφέρουν όσο οι ίδιοι επιθυμούν σε κάθε μέρος του δικτύου και το Δίκαιο Παίγνιο Σύνδεσης όπου το κόστος κάθε πόρου μοιράζεται εξίσου ανάμεσα στους παίκτες που το χρησιμοποιούν. Στην συνέχεια, παρουσιάζουμε το πώς μπορεί να επηρεαστεί το παίγνιο όταν οι παίκτες δεν έχουν πλήρη γνώση του τι παίζουν οι υπόλοιποι παίκτες. Τέλος, παρουσιάζουμε την έρευνα του [20] στο οποίο μελετούνται τρόποι διαμοιρασμού κόστους σε σχέση με την σειρά με την οποία φτάνουν οι παίκτες έτσι ώστε το παίγνιο να καταλήγει σε καλύτερες λύσεις και διερευνάται το αν η γνώση της τοπολογίας των παικτών αλλά όχι της σειράς αφίξεώς τους μπορεί να μας οδηγήσει στην επιλογή ενός κατάλληλου σχήματος διαμοιρασμού κόστους. Την παραπάνω προσέγγιση ακολουθήσαμε και εμείς στην έρευνά μας.

**Κεφάλαιο 3:** Εδώ, παρουσιάζουμε το πρόβλημα βέλτιστης χωροθέτησης υπηρεσιών και κάποιους αλγορίθμους που το επιλύουν οι οποίοι μας δίνουν μία διαίσθηση για την συμπεριφορά που θέλουμε να έχουν οι παίκτες ώστε να καταλήγουν σε δίκτυα χαμηλού κόστους. Έπειτα παρουσιάζουμε κάποια παίγνια χωροθέτησης τα οποία έχουν ήδη μελετηθεί

**Κεφάλαιο 4:** Το κεφάλαιο αυτό είναι αφιερωμένο στα δικά μας αποτελέσματα

## 1.2 Εισαγωγικές Έννοιες

### 1.2.1 Μη Συνεργατικά Παίγνια

Τα μη-συνεργατικά παίγνια (non cooperative games)[41] είναι μία ευρεία κατηγορία παιχνιδιών η οποία μοντελοποιεί την κατάσταση στην οποία ο κάθε παίκτης επιθυμεί να ικανοποιήσει τα προσωπικά του συμφέροντα χωρίς να συνεργάζεται με τους υπόλοιπους παίκτες που συμμετέχουν στο παίγνιο. Επειδή κάθε παίκτης δρα εγωιστικά χωρίς να συνεργάζεται με τους υπόλοιπους δεν είναι απαραίτητο ότι οι επιλογές που κάνουν οι παίκτες είναι οι βέλτιστες για την κοινωνία.

Ας δούμε έναν τυπικό τρόπο να ορίσουμε τα μη συνεργατικά παίγνια και τις κύριες έννοιες που έχουν χρησιμοποιηθεί για να γίνουν κατανοητά. Εφεξής, σε όποιο παίγνιο αναλύουμε σε αυτή την διπλωματική εργασία θα θεωρούμε ότι συμμετέχουν $N$ παίκτες οι οποίοι αποτελούν ένα σύνολο $U$.

Κάθε παίκτης $i$ έχει ένα σύνολο αμιγών (pure) στρατηγικών $S_i$ και μία συνάρτηση κόστους $p_i$ η οποία ορίζεται πάνω σε κάθε διάνυσμα στρατηγικών των παικτών $S = (S_1, ..., S_N)$ και εκφράζει το κόστος του παίκτη $i$ εάν οι παίκτες ακολουθούν αυτές τις στρατηγικές. Ένας παίκτης μπορεί να αποφασίσει να ακολουθήσει μία αμιγή στρατηγική, δηλαδή να επιλέξει μία μόνο από το σύνολο των στρατηγικών του με πιθανότητα 1, είτε μία μικτή, δηλαδή ένα υποσύνολο των στρατηγικών του κάθε μία εκ των οποίων επιλέγεται με πιθανότητα μικρότερη της μονάδας. Εφεξής, θα μας απασχολήσουν κύριως αμιγείς στρατηγικες οπότε θα θεωρούμε ότι με τον όρο στρατηγική αναφερόμαστε σε αμιγή στρατηγική εκτός και αν επισημαίνεται διαφορετικά.

Κάθε παίκτης επιλέγει την στρατηγική του δεδομένου του τι παίζουν οι άλλοι παίκτες δηλαδή με βάση το διάνυσμα στρατηγικών των υπόλοιπων παικτών το οποίο εφεξής θα συμβολίζουμε $S_{-i}$. Οι παίκτες ξεκινώντας από ένα αρχικό διάνυσμα στρατηγικών παίζουν ένας ένας και έχουν την επιλογή να αλλάξουν την στρατηγική τους εάν αυτό οδηγεί σε μείωση του κόστους τους. Η διαδικασία αυτή αναφέρεται στην βιβλιογραφία με τον όρο best response. Ένα ερώτημα που θα θέλαμε να απαντήσουμε είναι πότε τελειώνει το best response δηλαδή ποια συνθήκη θα πρέπει να ικανοποιείται ώστε να μπορούμε να πούμε ότι κανένας παίκτης δεν θέλει να αλλάξει την στρατηγική του και συνεπώς το παίγνιο είναι σε Ισορροπία. Μία φυσική συνθήκη που χρησιμοποιείται συνήθως είναι η συνθήκη του Nash η οποία εξετάζει εάν κάποιος παίκτης, δεδομένου ότι κανένας από τους υπόλοιπους παίκτες δεν θέλει να αλλάξει την στρατηγική του, επιθυμεί να αλλάξει την στρατηγική του. Εαν δεν υπάρχει κανένας τέτοιος παίκτης τότε λέμε ότι το διάνυσμα στρατηγικών των παικτών είναι μία **Ισορροπία Nash**. Τυπικά:

***Ορισμός* 1.1.** *(Αμιγής) Ισορροπία Nash ενός μη συνεργατικού παιγνίου για $N$ παίκτες είναι ένα διάνυσμα στρατηγικών $S = (S_1, ..., S_N)$ τέτοιο ώστε για κάθε παίκτη $i$ που αλλάζει την στρατηγική του απο $S_i$ σε $S'_i$ να ισχύει $p_i(S_i, S_{-i}) <= p_i(S'_i, S_{-i})$.*

Ένας ακόμα χρήσιμος ορισμός αφορά σε περιπτώσεις στις οποίες οι παίκτες είναι κοντά σε Ισορροπία Nash δηλαδή αλλάζοντας την στρατηγική τους, δεν μπορούν να κερδίσουν πολύ.

Έτσι έχουμε τον παρακάτων ορισμό:

***Ορισμός* 1.2.** *(Αμιγής) $(1+\epsilon)$-Προσεγγιστική Ισορροπία Nash ενός μη συνεργατικού παιγνίου για $N$ παίκτες είναι ένα διάνυσμα στρατηγικών $S = (S_1, ..., S_N)$ τέτοιο ώστε για κάθε παίκτη $i$ που αλλάζει την στρατηγική του απο $S_i$ σε $S'_i$ να ισχύει $(1+\epsilon)p_i(S_i, S_{-i}) <= p_i(S'_i, S_{-i})$.*

Τέλος ένα άλλο είδος ισορροπίας που αξίζει να αναφερθεί είναι η Ισχυρή Ισορροπία Nash από την οποία οι παίκτες δεν μπορούν να παρεκκλίνουν ακόμα και αν συνεργαστούν μεταξύ τους. Συγκεκριμένα, για κάθε σύνολο παικτών που αποφασίζουν να αλλάξουν την στρατηγική τους, εάν υπάρχει ένας παίκτης του οποίου το κόστος αυστηρώς μειώνεται από αυτή την αλλαγή, υπάρχει κάποιος του οποίου το κόστος αυστηρώς αυξάνεται (και συνεπώς δεν τον συμφέρει να συνεργαστεί με τους υπολοίπους και να αλλάξει την στρατηγική του). Αντιστοιχα με την Προσεγγιστική Ισορροπία Nash ορίζεται και η Ισχυρή Προσεγγιστική Ισορροπία Nash.

Συνήθως, αυτό που μας ενδιαφέρει σε ένα μη-συνεργατικό παίγνιο είναι το να μετρήσουμε την επίπτωση που έχει η μη-συνεργατικότητα των παικτών στην κοινωνία. Το κοινωνικό κόστος ενός διανύσματος στρατηγικών των παικτών ισούται, κατά κανόνα, με το συνολικό κόστος, δηλαδή με το άθροισμα των κοστών των παικτών, και ως βέλτιστη λύση ορίζουμε συνήθως την λύση αυτή η οποία ελαχιστοποιεί το κοινωνικό κόστος. Αυτό που μας απασχολεί συνήθως σε ένα μη-συνεργατικό παίγνιό είναι να κατανοήσουμε το πόσο κοντά ή μακριά μπορεί να ισορροπήσει στην βέλτιστη λύση. Για αυτό χρησιμοποιούμε συνήθως 2 μετρικές οι οποίες εισήχθησαν αντίστοιχα στα [43] και [2]:

***Ορισμός* 1.3.** *Τίμημα της Αναρχίας (Price of Anarchy) ενός μη-συνεργατικού παιγνίου: ο λόγος του (συνολικού) κόστος της χειρότερης (πιο ακριβής) ισορροπίας Nash προς το (συνολικό) κόστος της βέλτιστης λύσης.*

***Ορισμός* 1.4.** *Τίμημα της Σταθερότητας (Price of Stability) ενός παιγνίου: ο λόγος του (συνολικού) κόστους της καλύτερης (πιο φτηνής) ισορροπίας Nash προς το (συνολικό) κόστος της βέλτιστης λύσης.*

Η πρώτη μετρική μας είναι χρήσιμη καθώς εκφράζει το πόσο η έλλειψη οποιουδήποτε ελέγχου στο παίγνιο μπορεί να επηρεάσει αρνητικά την έκβαση του παιγνίου. Η δεύτερη μετρική, από την άλλη, μας δείχνει την ποιότητα των ισορροπιών στις οποίες μπορεί να καταλήξει ένα παίγνιο ακόμα και αν υπάρχει μία κεντρική αρχή η οποία οδηγεί τους παίκτες στην καλύτερη Ισορροπία.

Στην περίπτωση που μας ενδιαφέρουν Ισχυρές Ισορροπίες Nash οι παραπάνω 2 ορισμοί μπορούν να διαμορφωθούν κατάλληλα.

Τέλος αξίζει να αναφέρουμε ότι κάθε παίκτης μπορεί να είναι συσχετισμένος με μία συνάρτηση κέρδους αντί για μία συνάρτηση κόστους οπότε κάθε παίκτης προσπαθεί να μεγιστοποιήσει το κέρδος του. Οι παραπάνω έννοιες όρίζονται αντίστοιχα σε αυτή την περίπτωση.

### 1.2.2 Παίγνια συμφόρησης και Παίγνια Δυναμικού

Ας μιλήσουμε τώρα για μία γενική υποκατηγορία των μη-συνεργατικών παιγνίων τα οποία ονομάζονται παίγνια συμφόρησης (congestion games) και, όπως θα δούμε, σχετίζονται στενά με μία άλλη κατηγορία παιγνίων: τα Παίγνια Δυναμικού (Potential Games):

Τα Παίγνια Συμφόρησης ορίστηκαν για πρώτη φορά από τον Rosenthal το 1973 [44] και μοντελοποιούν καταστάσεις στις οποίες οι παίκτες θέλουν να χρησιμοποιήσουν κάποιους πόρους διαμοιράζοντας το κόστος τους αναμεταξύ τους. Σε κάθε στιγμιότυπο αυτής της κλάσης παιγνίων, υπάρχουν παίκτες οι οποίοι επιθυμούν να χρησιμοποιήσουν κάποιους πόρους και το κόστος κάθε παίκτη από τους πόρους που χρησιμοποιεί εξαρτάται από τους πόρους που επιλέγει και από τον αριθμό των παικτών που χρησιμοποιούν αυτούς τους πόρους. Για παράδειγμα ένα παίγνιο συμφόρησης που μπορεί να σκεφτεί κανείς είναι το να έχουμε παίκτες ο καθένας εκ των οποίων θέλει να πάει με το αυτοκίνητο του από ένα σημείο μιας πόλης στο άλλο επιλέγοντας μια διαδρομή μέσα στην πόλη και επιθυμεί να ελαχιστοποιήσει τον χρόνο που θα πρέπει να ταξιδέψει. Εδώ οι δρόμοι αντιστοιχούν στους δρόμους και ο χρόνος που χρειάζεται ο κάθε παίκτης για να διανύσει ένα δρόμο (το κόστος του) εξαρτάται από το μήκος του δρόμου και από τους υπόλοιπους παίκτες που τον χρησιμοποιούν (δηλαδή αν έχει κίνηση ή όχι). Επειδή κάθε παίκτης ενδιαφέρεται για το πώς ο ίδιος θα χρησιμοποιήσει τους πόρους ελαχιστοποιώντας το προσωπικό του κόστος τα παίγνια αυτά είναι μη-συνεργατικά.

Είναι γνωστό ότι κάθε παίγνιο συμφόρησης έχει Ισορροπία Nash αφού για κάθε τέτοιο παίγνιο υπάρχει μία συνάρτηση η οποία αντιστοιχίζει μία αριθμητική τιμή σε κάθε δυνατό διάνυσμα στρατηγικών των παικτών και έχει την ιδιότητα ότι κάθε φορά που κάποιος παίκτης αλλάζει την στρατηγική του, η μεταβολή της τιμής της να ισούται με την μεταβολή του κόστους του παίκτη αυτού. Η συνάρτηση αυτή αναφέρεται ευρέως ως Συνάρτηση Δυναμικού (Potential Function). Τυπικά, αν $\Phi$ η συνάρτηση δυναμικού η οποία αντιστοιχεί ένα δυναμικό σε κάθε διάνυσμα στρατηγικών των παικτών $S$, τότε εάν ο παίκτης $i$ αποφασίσει να αλλάξει την στρατηγική του από $S_i$ σε $S'_i$ και οι υπόλοιποι δεν αλλάξουν την στρατηγική τους τότε:

$$\Phi(S'_i, S_{-i}) - \Phi(S_i, S_{-i}) = p_i(S'_i, S_{-i}) - p_i(S_i, S_{-i})$$

Αξίζει να σημειωθεί σε αυτό το σημείο ότι, αν και η αλλαγή στρατηγικής του παίκτη $i$ έχει ως αποτέλεσμα να αλλάζουν τα κόστη που πληρώνουν και οι υπόλοιποι παίκτες που συμμετέχουν στο παιχνίδι, η Συνάρτηση Δυναμικού παρακαλουθεί μόνο την μεταβολή του κόστους του παίκτη $i$ που άλλαξε την στρατηγική του.

Στη συνέχεια, οι Dov Monderer και Lloyd Shapley όρισαν τα Παίγνια Δυναμικού Potential Games) ως όλα τα παίγνια τα οποία έχουν Συνάρτηση Δυναμικού και απέδειξαν ότι για κάθε Παίγνιο Δυναμικού υπάρχει ένα Παίγνιο Συμφόρησης που έχει την ίδια Συνάρτηση Δυναμικού ([36]).

Συμπερασματικά κάθε Παίγνιο Συμφόρησης είναι και Παίγνιο Δυναμικού ([44]) και κάθε Παίγνιο Δυναμικού είναι ισομορφικό με κάποιο Παίγνιο Συμφόρησης ([36]).

### 1.2.3 Πρωτόκολλα Διαμοιρασμού Κόστους

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι όταν σε ένα παίγνιο μοιράζουμε τα κόστη των πόρων σε ένα σύνολο παικτών, το μερίδιο που αναθέτουμε στον εκάστοτε παίκτη να πληρώσει είναι καθοριστικό για το ποιους πόρους θα αποφασίσει να χρησιμοποιήσει. Το παραπάνω κινητοποίησε την μελέτη πρωτοκόλλων διαμοιρασμού κόστους και των ιδιοτήτων τους σε σχέση με τα χαρακτηριστικά των παιγνίων όταν χρησιμοποιούνται αυτά τα πρωτόκολλα. Εδώ θα παρουσιάσουμε κάποια από αυτά τα αποτελέσματα καθώς και κάποιες επιθυμητές ιδιότητες των πρωτοκόλλων διαμοιρασμού κόστους.

Αρχικά, ας ορίσουμε τι είναι μια μέθοδος και τι ένα πρωτόκολλο διαμοιρασμού κόστους: Μία μέθοδος διαμοιρασμού κόστους είναι μία συνάρτηση η οποία παίρνοντας ως είσοδο έναν παίκτη, έναν πόρο και το σύνολο των παικτών που τον χριησιμοποιούν και βγάζει ως έξοδο το ποσό το οποίο πληρώνει ο παίκτης για αυτό τον πόρο. Τυπικά:

***Ορισμός* 1.5.** *Μέθοδος Διαμοιρασμού Κόστους(Cost Sharing Method) είναι μία συνάρτηση $\xi$ : $2^N \to \mathbb{R}_+^N$ η οποία για κάθε $R \subseteq U$ αποφασίζει το μερίδιο κόστους $\xi(i, R) \forall i \in R$.*

Ένας φυσικός κανόνας που μπορεί να σκεφτεί κανείς είναι ότι αν κάποιος παίκτης δεν χρησιμοποιεί κάποιον πόρο τότε δεν πρέπει να πληρώνει τίποτα για αυτόν. Συνεπώς, εάν $i \notin R, \xi(i, R) = 0$.

Ας παρουσιάσουμε τώρα κάποιες από τις επιθυμητές ιδιότητες ενός πρωτοκόλλου οι οποίες το καθιστούν πρακτικά εφαρμόσιμο εάν $c(\pi)$ είναι το κόστος του πόρου $\pi$:

1. Σε κάθε παίγνιο που προκύπτει από τον διαμοιρασμό κόστους $\Xi$, το κόστος κάθε πόρου που χρησιμοποιείται πρέπει να καλύπτεται ακριβώς από το άθροισμα των ποσών που πληρώνουν οι παίκτες για αυτόν, δηλαδή $\sum_{i \in R} \xi(i, R) = c(\pi)$. Η ιδιότητα αυτή είναι ευρέως γνωστή ως **Budget-Balance** ή Αναπλήρωση Κόστους (Cost Recovery).

2. Σε κάθε παίγνιο που προκύπτει από τον διαμοιρασμό κόστους $\Xi$, το ποσό που συνεισφέρει κάθε παίκτης για έναν πόρο που χρησιμοποιεί καθορίζεται πλήρως από το σύνολο των παικτών που χρησιμοποιεί τον πόρο αυτή. Συνεπώς ένας παίκτης δεν επηρεάζεται από τις επιλογές άλλων παικτών όσο αυτοί δεν μπαίνουν στον δρόμο του. Η ιδιότητα αυτή ονομάζεται Ιδιότητα Διαχωρισμού ή **Separability**.

3. Σε κάθε παίγνιο που προκύπτει από τον διαμοιρασμό κόστους $\Xi$, υπάρχει τουλάχιστον μία Ισορροπία Nash για κάθε στιγμιότυπο του παιχνιδιού. Η ιδιότητα αυτή καλείται Ιδιότητα Σταθερότητας ή **Stability**.

4. Σε όλα τα παίγνια που προκύπτουν από τον διαμοιρασμό κόστους $\Xi$, το πως επιμερίζεται το κόστος ενός πόρου (σε οποιοδήποτε σύνολο παικτών) εξαρτάται μόνο από το κόστος του πόρου, και όχι από το ίδιο το στιγμιότυπο του παιγνίου. Αυτό σημαίνει ότι ο τρόπος διαμοιρασμού κόστους είναι ενιαίος και δεν εξαρτάται το εκάστοτε στιγμιότυπο. Η ιδιότητα αυτή ονομάζεται Ομοιομορφία ή **Uniformity**.

Η Ιδιότητα 4 είναι ιδιαίτερα σημαντική καθώς απαγορεύει στο πρωτόκολλο να αλλάζει τον τρόπο διαμοιρασμού κόστους ανάλογα με το στιγμιότυπο του παιχνιδιού που του δίδεται. Έτσι, τα Cost Sharing Schemes τα οποία ικανοποιούν μόνο τις ιδιότητες (1)-(4) ονομάζονται Ομοιόμορφα (Uniform) καθώς σε αυτά ορίζεται ένα ενιαίο Cost Sharing Scheme για όλα τα στιγμιότυπα του παιγνίου. Αντίστοιχα, τα Cost Sharing Schemes που ικανοποιούν τις Ιδιότητες (1)-(3) ονομάζονται Μη-Ομοιόμορφα (Non-Uniform).

Συμπληρωματική της Cost recovery είναι η ιδιότητα της **ανταγωνιστικότητας (competitiveness)** η οποία υπαγορεύει ότι οι παίκτες δεν πρέπει να χρεώνονται συνολικά περισσότερο από το κόστος του βέλτιστου δικτύου.

Μία ακόμα χρήσιμη ιδιότητα είναι η **αποδοτικότητα (Efficiency)** η οποία υπαγορεύει ότι σε κάθε παίγνιο που προκύπτει από το πρωτόκολλο διαμοιρασμό κόστους $\Xi$, υπάρχει μία Ισορροπία Nash το συνολικό κόστος της οποίας ισούται με το βέλτιστο δυνατό.

Αξίζει να αναφερθεί ότι σε πολλές περιπτώσεις το πόσο χρεώνουμε έναν παίκτη για έναν πόρο εξαρτάται από το πόσο είναι διατεθειμένος να πληρώσει για αυτόν. Όμως αυτή είναι μία προσωπική πληροφορία του παίκτη και δεν είναι απαραίτητο ότι θα μας την αποκαλύψει. Μια σημαντική ιδιότητα που θέλουμε να έχει το πρωτόκολλο διαμοιρασμού κόστους σε τέτοιες περιπτώσεις είναι να είναι έτσι ορισμένο ώστε να είναι στο συμφέρον κάθε παίκτη να αποκαλύψει το πόσο πραγματικά εκτιμά έναν πόρο. Η ιδιότητα αυτή ονομάζεται **συμβατότητα με κίνητρα (incentive compatibility), φιλαλήθεια (truthfulness) ή strategyproofness**. Μία πιο ισχυρή εκδοχή αυτής της ιδιότητας είναι το να μην συμφέρει καμία ομάδα παικτών να συνεργαστούν και να αναφέρουν ψευδώς την αξία τους. Η ιδιότητα αυτή αναφέρεται ως **group strategyproofness** και τυπικά δηλώνει ότι για κάθε ομάδα παικτών που αναφέρουν ψευδώς την αξία τους και υπάρχει ένας παίκτης της ομάδας ο οποίος αυστηρά κερδίζει από αυτή την ενέργεια υπάρχει ένας παίκτης της ομάδας ο οποίος χάνει από αυτή την ενέργεια.

Πρέπει να αναφερθεί σε αυτό το σημείο ότι δεν υπάρχουν cost sharing schemes τα οποία είναι ταυτόχρονα αποδοτικά, budget-balanced και incentive compatible ([40]).

Για τον λόγο αυτό, έχουν μελετηθεί μηχανισμοί που καταλήγουν σε πρωτόκολλα διαμοιρασμού κόστους που έχουν κάποιες από τις παραπάνω ιδιότητες και δίνουν εγγυήσεις για τις υπόλοιπες. Μία σημαντική κατηγορία τέτοιων μηχανισμών είναι οι μηχανισμοί Moulin ([37]) οι οποίοι είναι μηχανισμοί οι οποίοι υπολογίζουν το πόσο πρέπει να πληρώσει κάθε παίκτης έτσι ώστε το τελικό σχήμα διαμοιρασμού κόστους να είναι φιλαλήθες και, επιπλέον, να αναπληρώνει ένα β ποσοστό του συνολικού κόστους ($\beta$-budget balanced). Οι μηχανισμοί αυτοί προσομοιώνουν επαναληπτικές αύξουσες δημοπρασίας. Σε κάθε επανάληψη, ο μηχανισμός προσφέρει ταυτόχρονα στους παίκτες τιμές. Όσοι παίκτες δέχονται να πληρώσουν τα προτεινόμενα ποσά παραμένουν στο παιχνίδι και στην επόμενη επανάληψη ενώ όσοι αρνούνται διώχνονται από το παιχνίδι. Η διαδικασία σταματάει όταν όλοι οι παίκτες που έχουν μείνει στο παιχνίδι δέχονται τα ποσά που τους προσφέρει ο μηχανισμός. Η παραπάνω διαδικασία αν και είναι φιλαλήθεις, οπότε όλοι οι παίκτες αναφέρουν τις πραγματικές τους αξίες, σε πολλά βασικά προβλήματα δεν είναι effective ενώ οι παίκτες καταλήγουν να πληρώνουν μικρά ποσοστά της λύσης (poor budget balance). Για να αρθούν αυτά τα προβλήματα στο [34] προτείνεται ένα άλλο γενικό πλάισιο σχεδίασης μηχανισμών, οι ακυκλικοί μηχανισμοί.

Ας στρέψουμε τώρα την προσοχή μας σε μία ακόμα ιδιότητα η οποία μπορεί να οδηγήσει σε καλή συμπεριφορά ενός τρόπου διαμοιρασμού κόστους και ονομάζεται **cross monotonicity**. Αυτή υπαγορεύει ότι όταν μία ομάδα παικτών χρησιμοποιεί έναν πόρο, το αντίτιμο που πληρώνει ο κάθε παίκτης για να χρησιμοποιεί τον πόρο αυτό δεν μπορεί να αυξηθεί εάν ένας ακόμη παίκτης αποφασίσει να αρχίσει να χρησιμοποιεί τον πόρο αυτό, δηλαδή αν $R' \subseteq R$ και $i \in R', \xi(i, R') \geq \xi(i, R)$. Στο [39], δείχθηκε η χρησιμότητα των cost sharing schemes που διαθέτουν την παραπάνω ιδιότητα καθώς οδηγούν σε μηχανισμούς που είναι Group Strategyproof.

Τρόποι διαμοιρασμού κόστους οι οποίοι προέρχονται από cross-monotonic, competitive και cost-recovering cost sharing schemes λέμε ότι ανήκουν στον **πυρήνα (core)** ο οποίος έχει μελετηθεί αρκετά στην θεωρία παιγνίων ([38]). Δυστυχώς ,για πολλά παίγνια είναι γνωστό ότι ο πυρήνας είναι κενός και συνεπώς τέτοια cost sharing schemes για αυτά δεν υπάρχουν.

# Κεφάλαιο 2

# Παίγνια Σχηματισμού Δικτύων

Σκοπός του παρόντος κεφαλαίου είναι η παρουσίαση μίας σημαντικής κατηγορίας παιχνιδιών τα οποία έχουν μελετηθεί εκτενώς τα τελευταία χρόνια: τα Παίγνια Σχηματισμού Δικτύων (Network Design Games). Η παρουσίαση αυτή κρίνεται σκόπιμη στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας καθώς το πρόβλημα που θα ερευνήσουμε ανήκει σε αυτή την κλάση παιγνίων όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο και είναι χρήσιμο να δούμε πώς έχουν προσεγγιστεί αφού η προσέγγιση του Παιγνίου Χωροθέτησης θα είναι αντίστοιχη . Ακόμα, η ανάλυση των παιγνίων αυτών έχει από μόνη της ενδιαφέρον καθώς μπορεί να βοηθήσει στην κατανόηση πολλών δικτύων που είναι ευρέως διαδεδομένα σήμερα ενώ, μέσω της κατανόησης αυτών των παιγνίων καθώς και των Σχημάτων Διαμοιρασμού Κόστους που έχουν δοκιμαστεί σε αυτά, μπορεί κανείς να αποκτήσει μια διαίσθηση για το πως να αντιμετωπίσει την ευρύτερη κλάση των μη-συνεργατικών παιγνίων.

## 2.1 Εισαγωγή

Πολλά σύγχρονα δίκτυα σχεδιάζονται, δημιουργούνται και διατηρούνται από παίκτες οι οποίοι δεν συνεργάζονται μεταξύ τους αλλά ο καθένας έχει τους δικούς του στόχους τους οποίους προσπαθεί να επιτεύξει παίρνοντας εγωιστικές αποφάσεις. Για παράδειγμα, το διαδίκτυο, το οποίο είναι, ίσως, το πρώτο πράγμα που μας έρχεται στο μυαλό ακούγοντας την λέξη δίκτυο, δημιουργείται με αυτόν ακριβώς τον τρόπο: κάθε "παίκτης" θέλει να συνδεθεί σε έναν εξυπηρετητή (server) με όσο το δυνατόν χαμηλότερο κόστος χωρίς να ενδιαφέρεται για τις επιθυμίες των υπολοίπων παικτών.

Πως συμπεριφέρονται όμως αυτοί οι εγωιστές παίκτες και τι μορφή έχουν τα δίκτυα που δημιουργούν; Το γεγονός ότι ο κάθε παίκτης προσπαθεί να ελαχιστοποιήσει το κόστος του κατά τον σχηματισμό τους έχει ως αποτέλεσμα το τελικό συνολικό δίκτυο να είναι φτηνό ή η έλλειψη συνεργασίας από την πλευρά των παικτών οδηγεί σε ένα ακριβό δίκτυο; Στην περίπτωση που ισχύει το δεύτερο, θα μπορούσαμε ίσως να επιβάλλουμε κανόνες στις επιλογές που μπορούν να κάνουν οι παίκτες ή να επιβάλλουμε κατάλληλους περιορισμούς στους παίκτες ώστε να τους οδηγήσουμε να κάνουν πιο συμφέρουσες επιλογές για το κοινό καλό;

Στο υποκεφάλαιο 2.2 παρουσιάζεται το Παίγνιο Σύνδεσης (Connection Game) το οποίο είναι ένα μοντέλο στο οποίο οι παίκτες παίζουν ένας ένας και σχηματίζουν ένα δίκτυο χωρίς να έχουν κανέναν περιορισμό στα ποσά τα οποία συνεισφέρουν σε αυτό. Γίνεται σαφές πως αυτή τους η ελευθερία - αυθαιρεσία όχι μόνο μπορεί να μην οδηγήσει ποτέ σε ένα σταθερό δίκτυο αλλά, ακόμα και εάν οδηγήσει, το δίκτυο αυτό μπορεί να είναι πολύ ακριβό.

Στο υποκεφάλαιο 2.3 παρουσιάζεται ένα μοντέλο το οποίο επιβάλλει περιορισμούς στους παίκτες στα ποσά που πληρώνουν για τους πόρους του δικτύου που χρησιμοποιούν. Συγκεκριμένα, επιβάλλει τον φυσικό κανόνα ότι οι παίκτες που χρησιμοποιούν έναν πόρο μοιράζονται εξίσου το κόστος του. Μελετάται τόσο η ευστάθεια αυτού του παιχνιδιού όσο και το κόστος των δικτύων στα οποία μπορεί να καταλήξει και φαίνεται ότι η χρήση του μπορεί να οδηγήσει τους παίκτες στο να κάνουν καλύτερες επιλογές.

Στο υποκεφάλαιο 2.4 κάνουμε μία σύντομη παρουσίαση των ιδεών που έχουν δοκιμαστεί ώστε να βελτιωθεί η ποιότητα των δικτύων που δημιουργούν οι παίκτες σε ένα δίκτυο σύνδεσης. Ακόμα, γίνεται σύντομη αναφορά στα αποτελέσματα της εφαρμογής αυτών των ιδεών αλλά δεν παρουσιάζονται λεπτομέρειες καθώς θεωρούμε ότι ξεφεύγουν από τους σκοπούς της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στην σχετική βιβλιογραφία.

## 2.2 Παίγνιο Σύνδεσης

Μία πρώτη απόπειρα να μοντελοποιηθεί η διαδικασία σχηματισμού δικτύων από ανεξάρτητους και εγωιστές παίκτες υπό την μορφή ενός Μη-Συνεργατικού Παίγνιου(Non-Cooperative Game) έγινε στο [3]. Εδώ, κάθε παίκτης που συμμετέχει στον σχηματισμό του δικτύου έχει 2 ή παραπάνω τοποθεσίες τις οποίες επιθυμεί να δει συνδεδεμένες στο τελικό δίκτυο και, προς επίτευξη του στόχου του, δημιουργεί συνδέσεις. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι σε πολλές πραγματικές περιπτώσεις οι παίκτες δεν μπορούν να δημιουργήσουν συνδέσεις μεταξύ οποιωνδήποτε τοποθεσιών αλλά υπάρχουν κάποιες "επιτρεπτές" συνδέσεις τις οποίες μπορούν να αγοράσουν (για παράδειγμα, στην περίπτωση του διαδικτύου μπορεί να μην είναι εφικτή η απευθείας σύνδεση δύο τοποθεσιών λόγω φυσικών εμποδίων). Για να μπορούμε να αντιμετωπίσουμε τέτοιου είδους περιορισμούς, στο μοντέλο που χρησιμοποιούμε θεωρούμε ότι στους παίκτες δίδεται ένας γράφος του οποίου οι ακμές αντιστοιχούν στις συνδέσεις που μπορούν να δημιουργήσουν και οι τερματικοί κόμβοι στις τοποθεσίες των παικτών.

Οι παίκτες δημιουργούν ένα δίκτυο αγοράζοντας έναν υπογράφο του γράφου που τους δίδεται και καθένας από αυτούς στοχεύει στο να συνδέσει τα τερματικά του με όσο το δυνατόν χαμηλότερο κόστος. Προς επίτευξη αυτού του σκοπού, οι συμμετέχοντες παίζουν ένας ένας και κάθε παίκτης προσφέρει για κάθε ακμή του δικτύου ένα ποσό το οποίο είναι διατεθειμένος να πληρώσει για την αγορά της. Εάν το άθροισμα των προσφορών των παικτών είναι μεγαλύτερο από το κόστος της ακμής -σύνδεσης, τότε η ακμή χαρακτηρίζεται ως "αγορασμένη", δηλαδή προστίθεται στο αγορασθέν δίκτυο και μπορεί, εν συνεχεία, να χρησιμοποιηθεί από οποιονδήποτε παίκτη (είτε έχει συνεισφέρει στην αγορά της είτε όχι).

Ένας τυπικός ορισμός του Παιγνίου Σύνδεσης είναι:

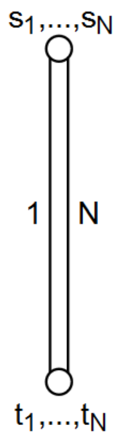
***Ορισμός* 2.6.** *Παίγνιο Σύνδεσης (Connection Game) για N παίκτες: Έστω ένας μη κατευθυνόμενος γράφος $G(V, E)$ στον οποίο κάθε ακμή $e$ έχει μη αρνητικό κόστος $c(e)$. Κάθε παίκτης $i$ έχει ένα σύνολο τερματικών κόμβων τους οποίους θέλει να συνδέσει (τα σύνολα των τερματικών των παικτών δεν είναι απαραίτητα ξένα μεταξύ τους). Μία στρατηγική για τον παίκτη $i$ είναι μία συνάρτηση πληρωμής (payment function) $p_i$ όπου $p_i(e)$ δηλώνει το ποσό το οποίο είναι διατεθειμένος να συνεισφέρει ο παίκτης i για την αγορά της ακμής e. Οποιαδήποτε ακμή $e$ για την οποία $\sum_i p_i(e) \geq c(e)$ θεωρείται "αγορασμένη" και με $G_p$ συμβολίζουμε τον γράφο από αγορασμένες ακμές εάν οι παίκτες προσφέρουν πληρωμές $p = (p_1, p_2, ..., p_N)$. Εφόσον ο κάθε παίκτης θέλει οπωσδήποτε να συνδέσει τα τερματικά του, αυτά θα πρέπει να είναι συνδεδεμένα στον τελικό γράφο $G_p$. Επίσης κάθε παίκτης προσπαθεί να ελαχιστοποιήσει το ποσό το οποίο θα πληρώσει.*

Σε κάθε βήμα του παιχνιδιού παίζει μόνο ένας παίκτης ο οποίος βλέπει το τι παίζουν οι υπόλοιποι και μπορεί να αλλάξει την στρατηγική του εάν τον συμφέρει (δηλαδή μειώνει το κόστος του). Οι παίκτες λοιπόν κάνουν best-response έως ότου φτάσουν σε μία ισορροπία Nash. Για το παίγνιο σύνδεσης μία ισορροπία Nash ορίζεται ως εξής:

***Ορισμός* 2.7.** *Ισορροπία Nash του Παιγνίου Σύνδεσης (Nash Equilibrium of the Connection Game): Μία συνάρτηση πληρωμής p έτσι ώστε αν οι παίκτες πληρώνουν κόστη p, κανένας παίκτης δεν έχει κίνητρο να αλλάξει τα ποσά που προσφέρει. Ισοδύναμα, αν $p_j$ για κάθε $j$ είναι σταθερό τότε η συνάρτηση πληρωμής $p_i$ ελαχιστοποιεί το ποσό το οποίο πληρώνει ο παίκτης $i$.*

Για παράδειγμα έστω το παρακάτω παίγνιο στο οποίο συμμετέχουν N παίκτες:

***Παράδειγμα* 2.1.** *Ας θεωρήσουμε το παρακάτω στιγμιότυπο παιγνίου όπου κάθε παίκτης $i$ έχει δύο τερματικά $s_i$ και $t_i$ τα οποία επιθυμεί να συνδέσει μεταξύ τους.*




*Σχήμα 2.1: Παίγνιο για N παίκτες στο οποίο υπάρχει Ισορροπία Nash*

*Εάν όλοι οι παίκτες επιλέξουν να αγοράσουν την σύνδεση μήκους 1 τότε, επειδή ο κάθε* *παίκτης θα πληρώνει λιγότερο από 1, δεν θα έχει κίνητρο να αλλάξει την στρατηγική του αγοράζοντας την ακμή κόστους N. Συνεπώς όλες οι στρατηγικές στις οποίες οι παίκτες συνεισφέρουν ποσά μόνο για την αγορά της ακμής μήκους 1 έτσι ώστε το άθροισμα των προσφορών τους να ισούται με 1 (το κόστος της ακμής) είναι Ισορροπίες Nash για αυτό το παίγνιο.*

Αξίζει σε αυτό το σημείο να σημειωθεί ότι, στο παραπάνω παράδειγμα, η κατάσταση στην οποία μόνο ένας παίκτης επωμίζεται το κόστος την ακμής πληρώνοντας 1 και οι υπόλοιποι παίκτες δεν πληρώνουν τίποτα (free-riders) είναι και αυτή ισορροπία Nash για το παιχνίδι. Το γεγονός ότι στο συγκεκριμένο μοντέλο, υπάρχουν Ισορροπίες οι οποίες περιέχουν free-riders είναι ένα βασικό μειονέκτημα του Connection Game, καθώς θα μπορούσε κανείς να το χαρακτηρίσει "άδικο". Σε επόμενα κεφάλαια, θα μελετήσουμε άλλα μοντέλα τα οποία δεν επιτρέπουν την ύπαρξη τέτοιων παικτών.

Ακόμα, για να περιγράψουμε καταστάσεις που είναι "σχεδόν" σταθερές υπό την έννοια ότι οι παίκτες δεν μπορούν να μειώσουν πολύ το κόστος τους αλλάζοντας την στρατηγική τους θα χρησιμοποιήσουμε την (1+ε)-Προσεγγιστική Ισορροπία Nash η οποία για το συγκεκριμένο παίγνιο ορίζεται ως εξής:

***Ορισμός* 2.8.** *(1+ε)-Προσεγγιστική Ισορροπία Nash του Παιγνίου Σύνδεσης ( (1+ε)-Approximate Nash Equilibrium of the Connection Game): Μία συνάρτηση πληρωμής p έτσι ώστε αν οι παίκτες πληρώνουν κόστη p, κανένας παίκτης δεν μπορεί να μειώσει το ποσό που πληρώνει κατά έναν παράγοντα μεγαλύτερο του (1+ε) αλλάζοντας την στρατηγική του.*

Ας εστιάσουμε αρχικά την προσοχή μας στις Ισορροπίες Nash:

Μία ερώτηση που θα θέλαμε να απαντήσουμε είναι: Όταν το παιχνίδι φτάσει σε ισορροπία Nash τι μορφή έχει το δίκτυο που σχηματίζουν οι παίκτες και τι πληρώνει ο καθένας από αυτούς;

Έστω μία ισορροπία Nash $p$ και έστω $T^i$ το μικρότερο δέντρο στο $G_p$ το οποίο περιέχει όλα τα τερματικά του παίκτη $i$. Στο [3] αποδεικνύονται οι παρακάτω χρήσιμες ιδιότητες:

***Πρόταση* 2.1.** *Το $G_p$ είναι δέντρο (ακυκλικός γράφος).*

*Απόδειξη.* Εάν το $G_p$ δεν είναι δέντρο, τότε θα πρέπει να περιέχει (τουλάχιστον) έναν κύκλο και θα υπάρχει κάποιος παίκτης ο οποίος θα πληρώνει ένα μη αρνητικό ποσό για μία ακμή που ανήκει στον κύκλο αυτόν. Τότε όμως αυτός ο παίκτης θα μπορούσε να σταματήσει να πληρώνει για την ακμή αυτή μειώνοντας το κόστος του ενώ στον τελικό γράφο τα τερματικά του θα παρέμεναν συνδεδεμένα. Συνεπώς το παιχνίδι δεν είναι σε ισορροπία Nash. □

***Πρόταση* 2.2.** *Κάθε παίκτης $i$ συνεισφέρει μόνο σε ακμές στο $T^i$.*

*Απόδειξη.* Έστω ότι υπάρχει ένας παίκτης $i$ ο οποίος πληρώνει για μία ακμή $e$ η οποία δεν ανήκει στο $T^i$. Τότε, ο παίκτης αυτός θα μπορούσε να σταματήσει να πληρώνει για την ακμή αυτή χωρίς να αποσυνδέσει τα τερματικά του. □

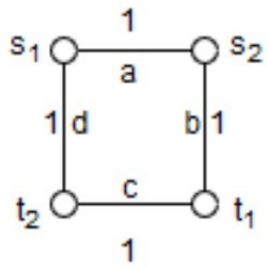
***Πρόταση* 2.3.** *Κάθε ακμή πληρώνεται τελείως ή καθόλου, δηλαδή για κάθε ακμή $e$ είτε θα ισχύει $\sum_i p_i(e) = c(e)$ είτε $\sum_i p_i(e) = 0$.*

*Απόδειξη.* Εάν ισχύει $\sum_i p_i(e) > c(e)$ ή $0 < \sum_i p_i(e) < c(e)$ τότε κάποιος παίκτης $j$ θα μπορούσε να πληρώσει λιγότερο για την αγορά της ακμής αυτής χωρίς να αλλάξει καθόλου ο γράφος από αγορασμένες ακμές $G_p$. □

Έχοντας καθορίσει την μορφή μιας ισορροπίας Nash μπορούμε να απαντήσουμε στο ερώτημα εάν όλα τα στιγμιότυπα αυτού του παιχνιδιού έχουν μία ισορροπία Nash:

***Θεώρημα* 2.1.** *Υπάρχουν δίκτυα στα οποία δεν υπάρχει ισορροπία Nash.*

*Απόδειξη.* Ας θεωρήσουμε το δίκτυο του επόμενου σχήματος:




Σχήμα 2.2: Παίγνιο για 2 παίκτες στο οποίο δεν υπάρχει Ισορροπία Nash

Στο παιχνίδι αυτό συμμετέχουν 2 παίκτες: Ο παίκτης 1 θέλει να συνδέσει τα τερματικά $s_1$ και $t_1$ και ο παίκτης 2 τα τερματικά $s_2$ και $t_2$. Για να έχουμε ισορροπία Nash θα πρέπει το αγορασμένο δίκτυο να είναι δέντρο(Πρόταση 2.1). Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το αγορασμένο δίκτυο αποτελείται από τις ακμές $a, b$ και $c$. Από την Πρόταση 2.2, ο παίκτης 1 συνεισφέρει μόνο στις ακμές $a$ και $b$ και ο παίκτης 2 μόνο στις ακμές $b$ και $c$ οπότε ο παίκτης 1 πληρώνει μόνος του όλο το κόστος της ακμής $a$ και ο παίκτης 2 όλο το κόστος της ακμής $c$. Ακόμα, τουλάχιστον ένας από τους παίκτες θα πρέπει να πληρώνει ένα θετικό ποσό $\epsilon$ για την αγορά της ακμής $b$ οπότε συνολικά αυτός ο παίκτης θα πληρώνει $1+\epsilon$. Όμως σε μία Ισορροπία Nash κανένας παίκτης δεν μπορεί να το κάνει αυτό γιατί θα έχει το κίνητρο να αλλάξει την στρατηγική του και να αγοράσει μόνο την ακμή $d$ συνδέοντας τα τερματικά του και μειώνοντας το κόστος του σε 1.Συνεπώς, σε αυτό το παράδειγμα δεν υπάρχει ισορροπία Nash. □

Εφόσον δεν υπάρχει σε όλα τα παιχνίδια Ισορροπία Nash υπάρχει κάποιος "εύκολος" τρόπος δοθέντος ενός παιχνιδιού να καθορίσουμε εάν έχει Ισορροπία Nash ή όχι; Στο [3] αποδεικνύεται ότι το πρόβλημα αυτό είναι NP-δύσκολο καθότι ανάγεται στο 3-SAT και συνεπώς έχουμε το ακόλουθο θεώρημα:

***Θεώρημα* 2.2.** *Στην γενική περίπτωση, όταν ο αριθμός των παικτών είναι $O(n)$ όπου $n$ ο αριθμός των κόμβων του γράφου, είναι NP-δύσκολο να προσδιορίσουμε αν το παιχνίδι έχει Ισορροπία Nash.*

Τα παραπάνω δύο θεωρήματα μας λένε ότι όχι μόνο δεν έχουν όλα τα στιγμιότυπα αυτού του παιχνιδιού ισορροπία Nash αλλά δεν μπορούμε να διαχωρίσουμε και "εύκολα" αυτά που έχουν από αυτά που δεν έχουν. Στα παιχνίδια που έχουν Ισορροπία Nash, τουλάχιστον, είναι αυτή η Ισορροπία φτηνή; Το γεγονός ότι κανένας παίκτης δεν μπορεί να μειώσει άλλο το κόστος του συνεπάγεται ότι το κόστος του δικτύου είναι το ελάχιστο δυνατό ή είναι κοντά σε αυτό;

Για να απαντήσουμε στα παραπάνω ερωτήματα χρειαζόμαστε καταρχάς ένα σημείο αναφοράς, δηλαδή με βάση ποιο κόστος θα ορίσουμε το πόσο ακριβή ή φτηνή είναι μία Ισορροπία; Ένα φυσικό τέτοιο σημείο αναφοράς είναι το κόστος του βέλτιστου (φτηνότερου) δικτύου στο οποίο τα τερματικά του κάθε παίκτη είναι συνδεδεμένα μεταξύ τους. Αξίζει να σημειωθεί ότι αυτό είναι το δίκτυο το οποίο θα δημιουργούσε μια κεντρική αρχή (central authority) εάν αυτή ήταν υπεύθυνη να συγκεντρώσει τις απαιτήσεις σύνδεσης των παικτών και, εν συνεχεία, να τις ικανοποιήσει με όσο το δυνατόν μικρότερο κόστος.

Για να μετρήσουμε το πόσο ακριβό ή φτηνό είναι το δίκτυο που αγοράζουν οι παίκτες όταν το παιχνίδι φτάσει σε ισορροπία συνήθως χρησιμοποιούμε τις μετρικές Τίμημα της Αναρχίας και Τίμημα της Σταθερότητας που παρουσιάστηκαν στο εισαγωγικό κεφάλαιο.

Για παράδειγμα, στο Παράδειγμα 2.1 το Τίμημα της Σταθερότητας είναι 1 διότι, όπως είδαμε, υπάρχει μία Ισορροπία Nash στην οποία οι παίκτες αγοράζουν την ακμή κόστους 1, η οποία αποτελεί και την βέλτιστη λύση.

Ποιο είναι όμως το Τίμημα της Αναρχίας σε αυτό το παίγνιο; Είναι εύκολο να παρατηρήσει κανείς ότι, εάν όλοι οι παίκτες αποφασίσουν να αγοράσουν την ακμή μήκους N και πληρώνει ο καθένας 1 για αυτή, τότε κανένας από τους παίκτες, δεδομένου ότι οι υπόλοιποι δεν θα αλλάξουν την στρατηγική τους, δεν θα επιθυμεί να αλλάξει την στρατηγική του αγοράζοντας την ακμή κόστους 1. Συνεπώς, αυτή είναι η χειρότερη Ισορροπία Nash και έχει κόστος N φορές το κόστος της βέλτιστης λύσης. Άρα το Τίμημα της Αναρχίας για αυτό το παιχνίδι είναι N.

Αφού λοιπόν υπάρχει ένα παιχνίδι στο οποίο το Τίμημα της Αναρχίας είναι N μπορούμε να καταλήξουμε στο ακόλουθο θεώρημα:

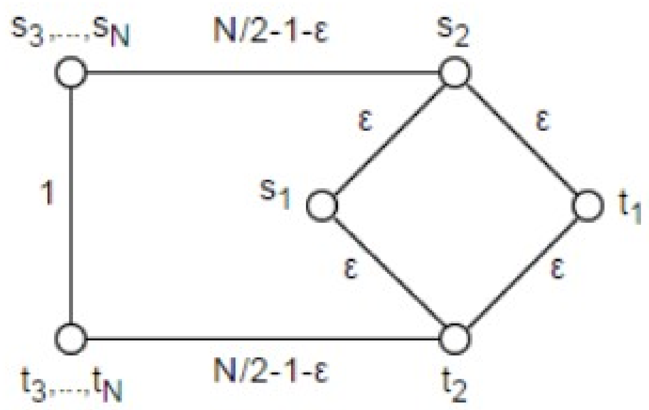
***Θεώρημα* 2.3.** *Το Τίμημα της Αναρχίας στο Παίγνιο σύνδεσης μπορεί να είναι το πολύ N και το όριο αυτό είναι ακριβές.*

*Απόδειξη.* Καταρχάς, το Τίμημα της αναρχίας μπορεί να είναι το πολύ N γιατί αν είναι μεγαλύτερο από N τότε θα υπάρχει τουλάχιστον ένας παίκτης ο οποίος πληρώνει αυστηρά περισσότερο από το κόστος της βέλτιστης λύσης και ο παίκτης αυτός θα έχει το κίνητρο να αλλάξει την στρατηγική του και να αγοράσει τον γράφο της βέλτιστης λύσης, συνδέοντας τα τερματικά του με μικρότερο κόστος.
Ακόμα, το όριο είναι ακριβές γιατί στο Παράδειγμα 2.1, όπως αναλύθηκε παραπάνω, υπάρχει μία Ισορροπία Nash η οποία έχει κόστος N φορές το κόστος της βέλτιστης λύσης. □

Συνεπώς, η χειρότερη Ισορροπία Nash σε ένα Παίγνιο Σύνδεσης μπορεί να έχει κόστος N φορές αυτό της βέλτιστης. Τι συμβαίνει όμως με την καλύτερη Ισορροπία Nash;

***Θεώρημα* 2.4.** *Το Τίμημα της Σταθερότητας, στην γενική περίπτωση μπορεί να είναι έως και N.*

*Απόδειξη.* Ας θεωρήσουμε τον γράφο:




Σχήμα 2.3: Παίγνιο όπου το Τίμημα της Σταθερότητας είναι N

Στο παίγνιο που ορίζεται πάνω σε αυτόν το γράφο, ο κάθε παίκτης $i$ έχει δύο τερματικά $s_i$ και $t_i$ τα οποία επιθυμεί να συνδέσει.
Η βέλτιστη λύση είναι το να αγοράσουν όλοι οι παίκτες $i \geq 3$ την ακμή κόστους 1 που συνδέι απευθείας τα τερματικά τους και οι 1,2 να αγοράζουν 3 από τις ακμές μήκους $\epsilon$. Το κόστος λοιπόν της βέλτιστης κεντρικής λύσης είναι 3+ε.
Ποιο είναι το κόστος της βέλτιστης Ισορροπίας Nash σε αυτό το παίγνιο; Έστω ότι στην βέλτιστη ισορροπία Nash οι παίκτες $i \geq 3$ αγοράζουν την ακμή μήκους 1. Τότε δεν θα έχουν κανένα κίνητρο να συνεισφέρουν στην αγορά των ακμών μήκους $\epsilon$ οπότε μόνο οι παίκτες 1 και 2 θα πληρώνουν για αυτές. Τότε όμως αυτοί οι δύο παίκτες δεν μπορούν να είναι σε ισορροπία όπως φάνηκε στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.1. Συνεπώς, κάθε ισορροπία Nash θα πρέπει να περιλαμβάνει το μονοπάτι κόστους $(N/2-1+\epsilon)+2\epsilon+(N/2-1+\epsilon) = N-2$. Ακόμα, εάν ο κάθε παίκτης $i > 2$ πληρώνει $1/N-2$ του κόστους αυτού του μονοπατιού τότε το παιχνίδι είναι σε ισορροπία. Επομένως, για κάθε $N > 2$ υπάρχει ένα παιχνίδι στο οποίο η καλύτερη ισορροπία Nash έχει κόστος περίπου ίσο με $N$. □

Ανακεφαλαιώνοντας, ένα στιγμιότυπο του Παιγνίου Σύνδεσης δεν έχει πάντα Ισορροπία Nash ούτε υπάρχει εύκολος τρόπος, στην γενική περίπτωση, να αποφασίσουμε εάν έχει ή όχι. Επίσης, ακόμα και εάν έχει ισορροπίες Nash, τόσο η καλύτερη όσο και η χειρότερη από αυτές μπορεί να είναι πολύ ακριβές σε σχέση με την βέλτιστη λύση.

Παρόλα αυτά, στο [3] παρουσιάζονται τα ακόλουθα θετικά αποτελέσματα:

Εφόσον μία "φτηνή" Ισορροπία Nash δεν είναι, σε πολλές περιπτώσεις, εφικτή σε αυτό το παιχνίδι, ας μελετήσουμε καταστάσεις στις οποίες στις οποίες το παίγνιο είναι σχεδόν σταθερό υπό την έννοια ότι οι παίκτες δεν μπορούν να αλλάξουν πολύ το κόστος τους αλλάζοντας την στρατηγική τους:

***Θεώρημα* 2.5.** *Για κάθε βέλτιστη κεντρική λύση $T^*$ υπάρχει μία 3-προσεγγιστική Ισορροπία Nash τέτοια ώστε οι αγορασμένες ακμές να είναι ακριβώς το $T^*$.*

Επίσης, μία απλή κατηγορία Παιγνίων Σύνδεσης έχουν πάντα ισορροπία Nash. Η κατηγορία αυτή ορίζεται ως εξής:

***Ορισμός* 2.9.** *Παιχνίδια με μοναδική πηγή (Single Source Games): Τα παίγνια στα οποία όλοι οι παίκτες μοιράζονται ένα κοινό τερματικό $s$ και, επιπλέον, κάθε παίκτης έχει μόνο ένα ακόμα τερματικό $t_i$.*

Σε αυτά τα παιχνίδια, είναι εύκολο να δει κανείς ότι η βέλτιστη λύση είναι αυτή που αγοράζει το δέντρο Steiner ελαχίστου κόστους του δικτύου, δηλαδή το δέντρο το οποίο συνδέει τα τερματικά των παικτών με ελάχιστο κόστος.

***Θεώρημα* 2.6.** *Σε κάθε παίγνιο με μοναδική πηγή, υπάρχει μία Ισορροπία Nash στην οποία οι παίκτες αγοράζουν το δέντρο Steiner ελαχίστου κόστους $T^*$*

Η απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος παρουσιάζεται στο [3] αλλά κρίνουμε ότι ξεφεύγει από τα πλαίσια αυτής της διπλωματικής εργασίας. Αξίζει να αναφερθεί, ωστόσο, ότι κατά την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος, παρουσιάζεται ένας αλγόριθμος ο οποίος, εάν του δοθεί το δέντρο Steiner ελαχίστου κόστους, μπορεί να υπολογίσει το μερίδιο κάθε παίκτη για την αγορά κάθε ακμής του δέντρου έτσι ώστε το παιχνίδι να είναι σε ισορροπία. Επειδή όμως η εύρεση ενός δέντρου Steiner ελαχίστου κόστους σε έναν γράφο δεν είναι πάντα υπολογιστικά εφικτή,παρουσιάζεται το ακόλουθο αποτέλεσμα:

***Θεώρημα* 2.7.** *Έστω ότι έχουμε ένα παίγνιο με μοναδική πηγή και ένα α-προσεγγιστικό ελάχιστο δέντρο Steiner $T$. Τότε για κάθε $> 0$, υπάρχει ένας αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου ο οποίος επιστρέφει μία (1+ε)-Προσεγγιστική Ισορροπία Nash σε ένα δέντρο Steiner $T'$ όπου $c(T') < c(T)$ ($c(G)$ συμβολίζουμε το κόστος του δέντρου G).*

Αξίζει να σημειωθεί ότι τα δύο τελευταία θεωρήματα ισχύουν και στην περίπτωση όπου ο γράφος του παιγνίου είναι κατευθυνόμενος.

## 2.3 Δίκαιο Παίγνιο Σύνδεσης

Όπως είδαμε, στο Παίγνιο Σύνδεσης δεν υπάρχει Ισορροπία Nash για όλα τα στιγμιότυπα του παιχνιδιού αλλά, ακόμα και να υπάρχει, μπορεί να είναι ακριβή ή/και να περιλαμβάνει free-riders. Αυτή η έλλειψη καλών Ισορροπιών Nash οφείλεται σε μεγάλο βαθμό στο γεγονός ότι το μοντέλο δεν επιβάλλει κανέναν κανόνα στους παίκτες, δηλαδή ο κάθε παίκτης είναι τελείως ελεύθερος να ορίσει την στρατηγική του και να καθορίσει αυθαίρετα τα ποσά που συνεισφέρει για την δημιουργία του δικτύου. Αυτό όμως δεν είναι κάτι φυσιολογικό στην πραγματική ζωή: όταν 2 άτομα χρησιμοποιούν από κοινού ένα προϊόν ή υπηρεσία δεν είναι δίκαιο ο ένας να πληρώνει πολύ περισσότερο από τον άλλον. Επίσης, ίσως εάν επιβάλλαμε περιορισμούς στις επιλογές που μπορεί να κάνει ένας παίκτης μειώνοντας έτσι τον χώρο τον δυνατών στρατηγικών του να μπορούσαμε να οδηγήσουμε το σύνολο των παικτών σε καλύτερες Ισορροπίες.

Κινητοποιημένοι από τις παραπάνω δύο παρατηρήσεις, στο παρόν κεφάλαιο στρέφουμε την προσοχή μας σε ένα μοντέλο το οποίο επιβάλλει ένα δίκαιο πρωτόκολλο διαμοιρασμού κόστους των αγορασμένων ακμών: το κόστος κάθε ακμής του αγορασμένου δικτύου πρέπει να διαμοιράζεται εξίσου στους παίκτες που την χρησιμοποιούν. Το μοντέλο αυτό ορίστηκε και μελετήθηκε για πρώτη φορά στο [2] και ονομάστηκε Δίκαιο Παίγνιο Σύνδεσης (Fair Connection Game). Αξίζει, εδώ, να σημειωθεί ότι η χρήση αυτού του πρωτοκόλλου έχει σημαντικά οικονομικά κίνητρα καθώς προκύπτει από τον διαμοιρασμό κόστους κατά Shapley (Shapley Cost Sharing) [39].

Ένας τυπικός ορισμός του παιγνίου, κατ' αντιστοιχία με τον ορισμό 2.6 του Παιγνίου Σύνδεσης είναι:

***Ορισμός* 2.10.** *Δίκαιο Παίγνιο Σύνδεσης (Fair Connection Game): Έστω ένας γράφος $G(V, E)$ με μη αρνητικά μήκη ακμών. Κάθε παίκτης $i$ έχει ένα σύνολο τερματικών κόμβων $T_i$ τους οποίους θέλει να συνδέσει μεταξύ τους. Μία στρατηγική για τον παίκτη $i$ είναι ένα σύνολο ακμών $S_i \subseteq E$ τέτοια ώστε το $S_i$ να συνδέει όλους τους κόμβους στο $T_i$. Θεωρούμε ότι τα κόστη των ακμών στους επιμέρους παίκτες διαμοιράζονται κατά Shapley, δηλαδή όλοι οι παίκτες που χρησιμοποιούν μία ακμή μοιράζονται εξίσου το κόστος της. Δοθέντος ενός διανύσματος στρατηγικών των παικτών $S = (S_1, S_2, ..., S_N)$, έστω $x_e$ ο αριθμός των παικτών των οποίων η στρατηγική περιλαμβάνει την ακμή $e$. Τότε το συνολικό κόστος που πληρώνει ο παίκτης $i$ είναι $C_i(S) = \sum_{e \in S_i}(c_e/x_e)$ και ο στόχος του κάθε παίκτη είναι να συνδέσει τους τερματικούς του κόμβους με ελάχιστο κόστος.*

Όπως θα φανεί στα επόμενα 2 υποκεφάλαια, το Δίκαιο Παίγνιο Σύνδεσης έχει διαφορετικά χαρακτηριστικά αναλόγως εάν ο γράφος $G$ είναι κατευθυνόμενος ή όχι.

### 2.3.1 Δίκαιο Παίγνιο Σύνδεσης σε κατευθυνόμενο γράφο

Στο κεφάλαιο αυτό θα προσπαθήσουμε να κατανοήσουμε την συμπεριφορά των παικτών σε ένα Δίκαιο Παίγνιο Σύνδεσης όταν ο γράφος είναι κατευθυνόμενος. Το τι συμβαίνει σε αυτή την περίπτωση έγινε αρκετά κατανοητό στο [2].

Καταρχάς, είναι εύκολο να δει κανείς χρησιμοποιώντας τα επιχειρήματα του θεωρήματος 2.3, ότι το Τίμημα της Αναρχίας για αυτό το παίγνιο είναι το πολύ $N$. Ακόμα εάν θεωρήσουμε ένα παίγνιο πάνω στον γράφο του σχήματος 3.1 όπου οι ακμές είναι κατευθυνόμενες από τα $s_i$ στα $t_i$ και οι παίκτες θέλουν να δημιουργήσουν συνδέσεις από τα $s_i$ στα $t_i$ τότε η χειρότερη και η καλύτερη Ισορροπία Nash είναι ίδιες με αυτές της μη κατευθυνόμενης περίπτωσης και έχουν κόστος $N$ και $1$ αντίστοιχα. Άρα το Τίμημα της Αναρχίας σε αυτό το παιχνίδι είναι $N$. Με βάση τα παραπάνω καταλήγουμε στο ακόλουθο θεώρημα:

***Θεώρημα* 2.8.** *Το Τίμημα της Αναρχίας στο Δίκαιο Παίγνιο Σύνδεσης σε κατευθυνόμενο γράφο είναι το πολύ $N$ και αυτό το όριο είναι ακριβές.*

Φτάνουν όμως πάντα σε αυτό το παίγνιο οι παίκτες σε σταθερή κατάσταση και είναι σε όλα τα παίγνια η καλύτερη σταθερή κατάσταση στην οποία μπορεί να φτάσουν οι παίκτες φτηνή;

Αρχικά πρέπει να παρατηρήσουμε ότι το Δίκαιο Παίγνιο Σύνδεσης είναι ένα παίγνιο συμφόρησης όπου οι πόροι που αγοράζουν οι παίκτες είναι οι ακμές του δικτύου και το κόστος μίας ακμής $e$ για τον παίκτη $i$ που την χρησιμοποιεί είναι $f_e(x) = c_e/x$ το οποίο εξαρτάται μόνο από την ακμή $e$ και από τον αριθμό παικτών $x$ που την χρησιμοποιούν. Ως παίγνιο συμφόρησης, το παίγνιο έχει Συνάρτηση Δυναμικού:

$$\Phi(S) = \sum_{e \in E} \sum_{x=1}^{x=x_e} f_e(x)$$

Ως Παίγνιο Συμφόρησης, το Δίκαιο Παίγνιο Σύνδεσης έχει πάντα Ισορροπία Nash: Εάν το παίγνιο ξεκινήσει από μία αρχική κατάσταση $S = (S_1, ..., S_N)$ και αφήσουμε τους παίκτες να παίξουν ένας -ένας, κάθε φορά που κάποιος παίκτης αλλάζει την στρατηγική του μειώνοντας το κόστος του μειώνεται και η τιμή της συνάρτησης Δυναμικού. Όμως, εφόσον η συνάρτηση είναι μη αρνητική δεν μπορεί να μειώνεται επ' άπειρον αλλά θα πρέπει κάποια στιγμή να φτάσει σε τοπικό ελάχιστο. Όταν αυτό συμβεί, κανένας παίκτης δεν θα μπορεί μειώσει άλλο την τιμή της συνάρτησης και, συνεπώς, ούτε και να βελτιώσει το κόστος του.

Άρα το παιχνίδι καταλήγει πάντα σε κατάσταση Ισορροπίας. Είναι όμως αυτή η Ισορροπία πάντα φτηνή;

***Θεώρημα 2.9.*** *Το Τίμημα της Σταθερότητας για το Δίκαιο Παίγνιο Σύνδεσης σε κατευθυνόμενο γράφο είναι το πολύ $H(N)$. ([2])*

*Απόδειξη.* Στο Δίκαιο Παίγνιο Σύνδεσης η συνάρτηση δυναμικού μπορεί να γραφτεί ως:

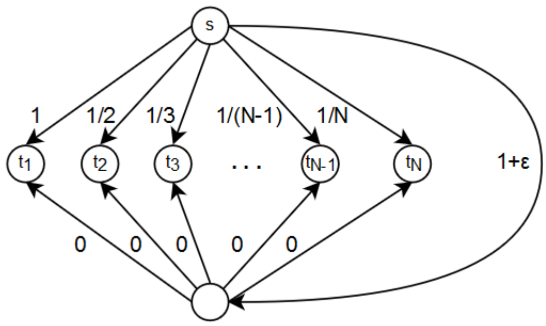
$$\Phi(S) = \sum_{e \in E} (c_e H(x_e))$$

όπου $H(x) = 1 + 1/2 + .... + 1/x$.

Έστω $S^* = (S_1^*, S_2^*, ..., S_N^*)$ το διάνυσμα στρατηγικών το οποίο αντιστοιχεί στην βέλτιστη κεντρική λύση και $OPT = \sum_{e \in S^*} c_e$ το κόστος αυτής. Τότε $\Phi(S^*) = \sum_{e \in S^*} (c_e H(x_e)) \leq \sum_{e \in S^*} (c_e H(N)) = H(N) * OPT$. Αν ξεκινήσουμε από την βέλτιστη κεντρική λύση $S^*$ και επιτρέψουμε στους παίκτες να αλλάζουν στρατηγικές ένας -ένας μειώνοντας κάθε φορά το κόστος τους, οι παίκτες θα καταλήξουν σε μία σταθερή κατάσταση $S$ για την οποία θα ισχύει $\Phi(S) \leq \Phi(S^*)$. Ακόμα για κάθε $S$ ισχύει $\Phi(S) \geq \sum_{e \in S} c_e = cost(S)$. Συνολικά λοιπόν έχουμε $cost(S) \leq H(N) * OPT$. Άρα το Τίμημα της Σταθερότητας σε αυτό το παιχνίδι είναι το πολύ $H(N)$. □

Το παραπάνω όριο είναι ακριβές δηλαδή υπάρχει ένα στιγμιότυπο του παιχνιδιού στο οποίο η πιο φτηνή ισορροπία Nash έχει κόστος $(N)$ φορές αυτό της βέλτιστης λύσης:

Ας πάρουμε το ακόλουθο παίγνιο:




Σχήμα 2.4: Παίγνιο όπου το Τίμημα της Σταθερότητας είναι H(N)

όπου οι παίκτες θέλουν να δημιουργήσουν συνδέσεις από τα $s_i$ προς τα $t_i$. Κάθε παίκτης $i$ μπορεί να συνδεθεί είτε μέσω του μονοπατιού μήκους $1+\epsilon$ είτε μέσω του μονοπατιού μήκους $1/i$. Η βέλτιστη λύση είναι το να επιλέξουν όλοι οι παίκτες το μονοπάτι $1+\epsilon$ οπότε ο κάθε παίκτης $i$ θα πληρώνει $(1+\epsilon)/N$ και το συνολικό κόστος του αγορασμένου δικτύου θα είναι $1+\epsilon$. Ας υποθέσουμε ότι αρχικά οι παίκτες αγοράζουν την βέλτιστη λύση. Τότε ο παίκτης $N$ θα έχει κίνητρο να αλλάξει την στρατηγική του αγοράζοντας την ακμή κόστους $1/N < (1+\epsilon)/N$ και μειώνοντας το κόστος του. Αφού αυτός αλλάξει την στρατηγική του οι υπόλοιποι παίκτες θα πληρώνουν $(1+\epsilon)/N-1$ και τότε ο παίκτης $N-1$ θα θέλει να αλλάξει την στρατηγική του. Έτσι, ένας ένας όλοι οι παίκτες $i$ θα καταλήξουν να αγοράζουν τις ακμές κόστους $1/i$ και το τελικό κόστος αυτής της Ισορροπίας Nash θα είναι $H(N)$. Άρα σε αυτό το παίγνιο το Τίμημα της Σταθερότητας είναι $H(N)/(1+\epsilon) \simeq H(N)$

Καταλήγουμε λοιπόν στο ακόλουθο θεώρημα:

***Θεώρημα* 2.10.** *Το άνω όριο $H(N)$ στο Τίμημα της Σταθερότητας στα Δίκαια Παίγνια Σύνδεσης πάνω σε κατευθυνόμενους γράφους είναι ακριβές.*

Παρόλα αυτά, αξίζει σε αυτό το σημείο να σημειωθεί ότι ακόμα και αν υπάρχουν φτηνές Ισορροπίες Nash σε αυτά τα παιχνίδια είναι NP-δύσκολο να τις βρούμε ενώ ο χρόνος που μπορεί να χρειαστεί ένα παιχνίδι για να φτάσει σε κατάσταση Ισορροπίας μπορεί να είναι εκθετικός στον αριθμό των παικτών.

### 2.3.2 Δίκαιο Παίγνιο Σύνδεσης σε Μη-Κατευθυνόμενο Γράφο

Όπως είδαμε στο προηγούμενο υποκεφάλαιο, στο Δίκαιο Παίγνιο Σύνδεσης σε κατευθυνόμενο γράφο το ακριβές άνω όριο στο Τίμημα την Αναρχίας και το ακριβές κάτω όριο στο Τίμημα της Σταθερότητας μπορούν να ευρεθούν με σχετικά απλό τρόπο και οι πιθανές εκβάσεις του παιγνίου έγιναν κατανοητές στα πρώτα βήματα της μελέτης των Παιγνίων Σχηματισμού Δικτύων. Τι συμβαίνει όμως στην περίπτωση που ο γράφος είναι μη-κατευθυνόμενος;

Όσον αφορά στο άνω όριο στο Τίμημα της Αναρχίας είναι προφανές ότι είναι $N$ καθώς η απόδειξη είναι ακριβώς ίδια με την απόδειξη του θεωρήματος 2.3. Ακόμα, επειδή το παίγνιο έχει Συνάρτηση Δυναμικού (η απόδειξη είναι απολύτως αντίστοιχη με αυτή της κατευθυνόμενης περίπτωσης), αν οι παίκτες ξεκινήσουν από μία αρχική κατάσταση θα φτάσουν πάντα σε μία σταθερή κατάσταση. Ακόμα, το άνω όριο $H(N)$ στο Τίμημα της Σταθερότητας συνεχίζει να ισχύει. Είναι όμως ακριβές;

Στο [2] αποδεικνύεται ότι στην περίπτωση που στο παιχνίδι συμμετέχουν 2 παίκτες οι οποίοι έχουν από 2 τερματικά εκ των οποίων το ένα κοινό (common sink) το Τίμημα της Σταθερότητας μπορεί να βελτιωθεί σε $4/3$ έναντι του $H(2) = 1 + 1/2 = 3/2$, και το όριο αυτό είναι ακριβές. Τι συμβαίνει όμως στην γενική περίπτωση όταν οι παίκτες είναι περισσότεροι από 2 και μοιράζονται ένα τερματικό; Είναι το Τίμημα της Σταθερότητας σταθερός αριθμός; Αυτό το ερώτημα παρέμεινε ανοιχτό για σχεδόν 10 χρόνια αφότου το παίγνιο μελετήθηκε για πρώτη φορά στο [2] το 2004. Στο υποκεφάλαιο αυτό θα κάνουμε μία σύντομη παρουσίαση της έρευνας που έγινε ώσπου να αποδειχθεί ότι το Τίμημα της Σταθερότητας σε αυτά τα παίγνια είναι όντως σταθερός αριθμός, δηλαδή υπάρχει ένας αριθμός $a$ τέτοιος ώστε για κάθε στιγμιότυπο του παιγνίου να υπάρχει μία Ισορροπία Nash η οποία έχει κόστος $a$ φορές το κόστος της βέλτιστης λύσης.

Η κατηγορία των παιγνίων σύνδεσης όπου οι παίκτες μοιράζονται έναν κοινό κόμβο/πηγή έχει, όπως φάνηκε από τα πρώτα βήματα της έρευνας σε αυτό τον τομέα, όχι μόνο θεωρητικό αλλά και πρακτικό ενδιαφέρον καθώς σε πολλά πραγματικά δίκτυα (όπως για παράδειγμα στο διαδίκτυο) οι παίκτες θέλουν να συνδέσουν τα τερματικά τους σε ένα μόνο τερματικό ή σε κάποιο μικρό αριθμό τερματικών (για παράδειγμα στο διαδίκτυο πολλοί παίκτες θέλουν να συνδεθούν σε μόνο έναν server). Τα παίγνια αυτά αναφέρονται συνήθως στην βιβλιογραφία ως Παίγνια Πολλαπλής Διανομής (Multicast Games) ενώ αναγνωρίστηκε και μία ειδική κατηγορία αυτών με ειδικό ενδιαφέρον, τα Παίγνια Εκπομπής (Broadcast Games), στα οποία κάθε κόμβος του δικτύου είναι συσχετισμένος με κάποιον παίκτη ο οποίο θέλει να το συνδέσει στην πηγή.

Το 2006, στο [22], οι Fiat et al. έδειξαν ότι στα Broadcast games το Τίμημα της Σταθερότητας είναι $(loglog(N))$. Ακόμα, έδειξαν ένα σταθερό κάτω όριο στο Τίμημα της Σταθερότητας σε αυτά τα παίγνια (που ισχύει συνεπώς και στην γενική περίπτωση) αναγνωρίζοντας μία κατηγορία παιγνίων στα οποία το Τίμημα της Σταθερότητας είναι $12/7 = 1.714$. Ακόμα, όσον αφορά στα (Multicast Games), το 2008 η Jian Li έδειξε ότι το άνω όριο είναι $O(logN/loglogN)$.

Το 2009, στο [19], οι Christodoulou et al. έδειξαν για πρώτη φορά ότι, στην γενική εκδοχή του παιγνίου στην οποία οι παίκτες μπορεί να έχουν παραπάνω από 2 τερματικά και να είναι όλα διαφορετικά μεταξύ τους, το Τίμημα της Σταθερότητας είναι σίγουρα πολύ διαφορετικό στην μη-κατευθυνόμενη περίπτωση από ό,τι στην κατευθυνόμενη: Συγκεκριμένα, έδειξαν ότι το Τίμημα της Σταθερότητας σε μη-κατευθυνόμενο γράφο όταν στο παίγνιο συμμετέχουν 3 παίκτες είναι τουλάχιστον $74/48 = 1.542$ και το πολύ $1.65$ δηλαδή μικρότερο από $H(3) = 11/6 = 1.833$ (το Τίμημα της Σταθερότητας στην κατευθυνόμενη περίπτωση). Ακόμα, για $N$ παίκτες, απέδειξαν ότι το Τίμημα της Σταθερότητας είναι τουλάχιστον $42/23 > 1.826$ βελτιώνοντας το αντίστοιχο κάτω όριο του [22].

Ένα χρόνο μετά, στο [7], το κάτω όριο στο Τίμημα της Σταθερότητας για την γενική περίπτωση βελτιώθηκε σε $348/155 \simeq 2.245$ ενώ τα κάτω όρια για τα Multicast Games και Broadcast Games βελτιώθηκαν σε $1.862$ και $1.818$ αντίστοιχα.

Το 2013, το χάσμα μεταξύ του άνω και του κάτω ορίου παρέμενε μεγάλο και είχε γίνει κατανοητό ([32],[10]) ότι οι διαδεδομένες μέθοδοι απόδειξης κάτω ορίων που χρησιμοποιούνται στην ανάλυση παιγνίων δεν μπορούν να επεκταθούν "φυσιολογικά" ώστε να μας δώσουν σταθερό Τίμημα Σταθερότητας στα Broadcast και Multicast Games. Δοκιμάστηκαν, λοιπόν, 2 νέες μέθοδοι εκ των οποίων η μία ([32]) κατέληξε στην βελτίωση του άνω ορίου στο Τίμημα της Σταθερότητας σε $logloglogN$ για τα Broadcast Games ενώ η άλλη ([10]) στην τελική γεφύρωση του χάσματος μεταξύ άνω και κάτω ορίου στο Τίμημα της Σταθερότητας για τα Broadcast Games αποδεικνύοντας ότι το Τίμημα της Σταθερότητας είναι $O(1)$. Πρέπει να παρατηρήσουμε πάντως ότι ακόμα και αν το Τίμημα της Σταθερότητας είναι σταθερός αριθμός, ο αριθμός αυτός μπορεί να είναι πολύ μεγάλος.

Τα παραπάνω όρια ισχύουν όταν το παίγνιο μπορεί να βρίσκεται αρχικά σε οποιαδήποτε κατάσταση. Στην πραγματική ζωή όμως, μπορεί οι παίκτες να έρχονται ένας ένας. Ένας τυπικός τρόπος να μοντελοποιήσουμε αυτό το φαινόμενο είναι να το χωρίσουμε σε δύο φάσεις:

1. Αρχικά δεν είναι αγορασμένη καμία σύνδεση(empty configuration). Οι παίκτες καταφτάνουν ένας ένας και κάθε φορά που κάποιος παίκτης μπαίνει στο παιχνίδι ικανοποιεί τις απαιτήσεις συνδεσιμότητάς του αγοράζοντας τις συνδέσεις που του είναι πιο συμφέρουσες δεδομένου του δικτύου που έχει δημιουργηθεί εκείνη την χρονική στιγμή. Συνεπώς κάθε φορά που κάποιος παίκτης επιλέγει μία στρατηγική γνωρίζει μόνο τη στρατηγική των παικτών που έχουν φτάσει πριν από αυτόν. Κατά τη διάρκεια αυτής της φάσης κάθε παίκτης παίζει μόνο μία φορά (όταν μπαίνει στο παιχνίδι)

2. Όταν όλοι οι παίκτες φτάσουν, ξεκινάει η δεύτερη φάση κατά την οποία οι παίκτες μπορούν να αλλάξουν την στρατηγική τους (best response) έχοντας τώρα υπόψη τους τις στρατηγικές όλων των υπολοίπων παικτών. Η φάση αυτή σταματάει όταν το παίγνιο φτάσει σε ισορροπία.

Η παραπάνω εκδοχή όταν έχουμε ένα Multicast Game σε μη κατευθυνόμενο γράφο έχει μελετηθεί στα [17] και [16]:

Στο πρώτο αρχικά παρατηρείται ότι, ως υποπερίπτωση του Δίκαιου Παίγνιου Σύνδεσης, το παιχνίδι αυτό ανήκει στην κλάση των Παιγνίων Συμφόρησης, έχει Συνάρτηση Δυναμικού και, συνεπώς, κάθε στιγμιότυπο του έχει τουλάχιστον μία Ισορροπία Nash. Αποδεικνύεται ότι η εύρεση μίας Ισορροπίας Nash που να ελαχιστοποιεί την Συνάρτηση Δυναμικού είναι NP-δύσκολη και ότι το Τίμημα της Αναρχίας (στο τέλος της δεύτερης φάσης) είναι $O(\sqrt(N)log^2N)$ και $\Omega(logN/loglogN)$.

Στο δεύτερο αρχικά δείχνεται ότι στο τέλος της πρώτης φάσης, το κόστος του δικτύου που δημιουργούν οι παίκτες προς το κόστος του βέλτιστου είναι $O(log^2N)$ και $\Omega(logN)$. Ακόμα, βελτιώνονται τα όρια για το Τίμημα της Αναρχίας σε $O(log^3N)$ και $\Omega(logN)$. Τέλος, μελετάται η περίπτωση όπου οι παραπάνω φάσεις δεν είναι διακεκριμένες μεταξύ τους αλλά σε κάθε βήμα του παιχνιδιού μπορεί είτε να καταφτάσει ένας καινούργιος παίκτης είτε κάποιος παίκτης που συμμετέχει ήδη στο παίγνιο να αλλάξει την στρατηγική του. Αν υποθέσουμε ότι το τι από τα 2 θα συμβεί καθορίζεται από κάποιον αντίπαλο αλλά το ποιος παίκτης θα παίξει καθορίζεται τυχαία, τότε αποδεικνύεται ότι το αναμενόμενο κόστος της τελικής κατάστασης του παιγνίου είναι $O(polylog(N)\sqrt{N})$ φορές το κόστος της βέλτιστης λύσης.

Αξίζει σε αυτό το σημείο να σημειώσουμε ότι, όπως θα αναλυθεί στο επόμενο κεφάλαιο, τα όρια αυτά για τα Multicast Games είναι πολύ σημαντικά για το πρόβλημα που μελετάμε καθώς το Facility Location μπορεί να αντιμετωπιστεί ως ένα Multicast Game.

## 2.4 Οδηγώντας το παιχνίδι σε καλύτερες Ισορροπίες...

Στο παραπάνω κεφάλαιο είδαμε ότι η επιβολή ενός φυσικού κανόνα διαμοιρασμού κόστους, του δίκαιου, έχει ως αποτέλεσμα όχι μόνο το παίγνιο σχηματισμού δικτύου να φτάνει πάντα σε ισορροπία, αλλά οι ισορροπίες αυτές να μπορούν να είναι και φτηνότερες από αυτές στο Παίγνιο Σύνδεσης το οποίο δεν επιβάλλει κανέναν κανόνα στον τρόπο διαμοιρασμού του κόστους. Παρόλα αυτά, το Τίμημα της Αναρχίας παραμένει υψηλό ($O(N)$) και το Τίμημα της Σταθερότητας σε μη κατευθυνόμενους γράφους παραμένει στην γενική περίπτωση κακό. Επίσης, παρατηρούμε ότι το μοντέλο είναι αρκετά ευνοϊκό για τους παίκτες γιατί:

1. Τους δίνει αρκετή δύναμη επιτρέποντας τους να έχουν πλήρη γνώση για το τι παίζουν οι υπόλοιποι παίκτες

2. Ο τρόπος διαμοιρασμού κόστους είναι ενιαίος και δεν εξαρτάται από το εκάστοτε στιγμιότυπο του παιγνίου

Είναι φυσικό να ρωτήσουμε λοιπόν: *Τι συμβαίνει όταν οι παίκτες δεν γνωρίζουν τις στρατηγικές όλων των υπολοίπων παικτών;* και *Πόσο μπορεί να βελτιωθεί η ποιότητα των Ισορροπιών σε αυτό το παίγνιο εάν μια κεντρική αρχή έχει κάποιες πληροφορίες για τον γράφο του παιγνίου και, λαμβάνοντας τον υπόψη, μπορεί να καθορίσει τον τρόπο διαμοιρασμού κόστους ανάλογα;*.

### 2.4.1 Έλλειψη γνώσης

Στο Δίκαιο Παίγνιο Σύνδεσης γίνεται η υπόθεση ότι όλοι οι παίκτες γνωρίζουν την στρατηγική των υπολοίπων παικτών. Αυτή η υπόθεση μπορεί να είναι λογική στην περίπτωση όπου λίγοι παίκτες συμμετέχουν στο παιχνίδι αλλά στην περίπτωση που έχουμε πολλούς παίκτες είναι αδύνατο όλοι να γνωρίζουν τις στρατηγικές όλων. Τι συμβαίνει λοιπόν όταν κάθε παίκτης γνωρίζει την στρατηγική ενός υποσυνόλου των υπολοίπων παικτών και σε τι καταστάσεις μπορεί να καταλήξει το παίγνιο;

Στο [9], ακολουθώντας το πλαίσιο του [8], οι Bilò et al., μελετούν το Παίγνιο Σύνδεσης με Δίκαιο Διαμοιρασμό Κόστους πάνω σε έναν μη-κατευθυνόμενο γράφο $G$ στο οποίο κάθε παίκτης γνωρίζει ένα υποσύνολο των υπολοίπων παικτών και το κόστος του επηρεάζεται μόνο από αυτούς. Συγκεκριμένα, σε κάθε Παίγνιο Σύνδεσης, εκτός από τον γράφο $G$ που αναπαριστά τις θέσεις των παικτών και τις συνδέσεις που μπορούν να κάνουν, υπάρχει και άλλος ένας γράφος $K$ ο οποίος ονομάζεται Γράφος Κοινωνικής Δικτύωσης (Social Knowledge Graph) και δηλώνει το αν κάποιος παίκτης γνωρίζει κάποιον άλλον παίκτη. Εάν ο γράφος $K$ είναι μη-κατευθυνόμενος, τότε κάθε ακμή μεταξύ 2 παικτών δηλώνει ότι οι δύο παίκτες γνωρίζουν ο ένας τον άλλον ενώ, αν ο γράφος $K$ είναι μη κατευθυνόμενος, κάθε ακμή από έναν παίκτη σε έναν άλλο δηλώνει ότι ο πρώτος γνωρίζει και επηρεάζεται από τον δεύτερο αλλά μπορεί να μην ισχύει το αντίστροφο. Κάθε παίκτης μοιράζεται εξίσου το κόστος κάθε ακμής που χρησιμοποιεί με τους παίκτες τους οποίους γνωρίζει και χρησιμοποιούν την ακμή. Για παράδειγμα, αν κανείς δεν γνωρίζει κανένα, τότε όλοι οι παίκτες θα πληρώνουν για κάθε ακμή που χρησιμοποιούν όλο το κόστος της ακόμα και αν άλλοι παίκτες την χρησιμοποιούν.

Όσον αφορά την ύπαρξη Ισορροπιών στο παραπάνω μοντέλο, αποδεικνύεται ότι το γεγονός ότι κάποιοι παίκτες κρύβονται από τους άλλους έχει ως αποτέλεσμα το να μην φτάνουν οι παίκτες πάντα σε Ισορροπία. Στα Multicast Games αποδεικνύεται ότι εάν ο Social Knowledge Graph είναι μη-κατευθυνόμενος ή κατευθυνόμενος και περιέχει κύκλους τότε η ύπαρξη Ισορροπιών Nash δεν είναι εξασφαλισμένη. Αντίθετα, αν ο γράφος είναι κατευθυνόμενος και ακυκλικός (DAG: Directed Acyclic Graph) τότε το παίγνιο καταλήγει πάντοτε σε Ισορροπία. Αξίζει εδώ να παρατηρηθεί ότι το να είναι ο Social Knowledge Graph DAG έχει πρακτικό ενδιαφέρον καθώς εκφράζει την κατάσταση στην οποία οι παίκτες φτάνουν ένας ένας και ο κάθε ένας γνωρίζει μόνο τους παίκτες που έχουν φτάσει πριν από αυτόν. Επίσης, στην γενική περίπτωση, εάν η στρατηγική κάθε παίκτη αποτελείται από μία μόνο ακμή του γράφου $G$ (Singleton Game), τότε το παίγνιο οδηγείται σίγουρα σε ισορροπία εάν ο $K$ είναι μη-κατευθυνόμενος ενώ, εάν ο $K$ είναι κατευθυνόμενος και περιέχει κύκλους, τότε το παίγνιο δεν φτάνει σίγουρα σε ισορροπία.

Όσον αφορά στην ποιότητα των Ισορροπιών όταν υπάρχουν: Στα Multicast Games αποδεικνύεται ότι το Τίμημα της Σταθερότητας είναι τουλάχιστον $1/2logN$ ενώ το Τίμημα της Αναρχίας το πολύ $log^2N$. Αυτό σημαίνει ότι όταν το παιχνίδι έχει ισορροπία, στην μέση περίπτωση, δεν θα είναι πολύ κακή ούτε πολύ καλή. Ακόμα αξίζει να παρατηρήσουμε ότι το Τίμημα της Αναρχίας είναι καλύτερο όταν υπάρχει Social Knowledge Graph από ό,τι όταν δεν υπάρχει, συνεπώς, όταν οι παίκτες φτάνουν ένας ένας και ο καθένας γνωρίζει μόνο την στρατηγική των παικτών που έφτασαν πριν από αυτόν τότε το παίγνιο μπορεί να οδηγηθεί σε καλύτερες ισορροπίες από ό,τι εάν όλοι γνώριζαν όλους. Ακόμα αποδεικνύεται ότι για κάθε DAG υπάρχει ένας γράφος $G$ στον οποίο το Τίμημα της Σταθερότητας είναι τουλάχιστον $(4N)/(N+3)$ ενώ για κάθε γράφο $G$ υπάρχει ένας Social Knowledge Graph στον οποίο το Τίμημα της Αναρχίας είναι το πολύ $8/5$ αν $N = 2$ και το πολύ $(4(N-1))/(N+1)$ εάν $N \geq 3$.

Συμπερασματικά, από τα παραπάνω φαίνεται ότι ο περιορισμός ότι ο κάθε παίκτης δεν γνωρίζει όλους τους υπόλοιπους παίκτες (για παράδειγμα όταν οι παίκτες φτάνουν με την σειρά) μπορεί να επενεργήσει ευνοϊκά σε ένα παίγνιο οδηγώντας τους παίκτες σε καλές ισορροπίες.

### 2.4.2 Σχήματα Διαμοιρασμού Κόστους

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, ως τώρα είδαμε το πως η επιβολή ενός σχήματος διαμοιρασμού κόστους το οποίο φαίνεται φυσιολογικό, έχει ως αποτέλεσμα το παίγνιο να μπορεί να οδηγηθεί σε καλύτερες Ισορροπίες. Κάτι το οποίο είναι φυσικό να αναρωτηθεί κανείς είναι: *αν δοκιμάζαμε άλλα σχήματα διαμοιρασμού κόστους θα μπορούσε η κατάσταση να βελτιωθεί κι άλλο;*. Επίσης, *υποθέτοντας ότι υπάρχει κάποιος σχεδιαστής ο οποίος μπορεί να επιλέξει* *ένα πρωτόκολλο διαμοιρασμού κόστους (Protocol Designer), εάν αυτός γνωρίζει από πριν την τοπολογία των παικτών, μπορεί αυτό να τον βοηθήσει στο να κάνει μία καλή επιλογή που να οδηγεί σε φτηνές Ισορροπίες;*

Στο [18] οι Chen et al. άνοιξαν το πεδίο της συστηματικής μελέτης Cost Sharing Schemes για τα Παίγνια Δημιουργίας Δικτύων όσον αφορά στο Τίμημα της Σταθερότητας και το Τίμημα της Αναρχίας.

Ένα σημαντικό αποτέλεσμα τους, αφορά στα Multicast Games: Εάν γνωρίζουμε εκ των προτέρων τον γράφο $G$ του παιγνίου μπορούμε να διατάξουμε τους παίκτες έτσι ώστε για κάθε υποσύνολο παικτών που χρησιμοποιούν μία ακμή το κόστος της να πληρώνεται από τον παίκτη που είναι πρώτος στην διάταξη (Ordered Protocol). Εάν διατάξουμε τους παίκτες κατάλληλα αποδεικνύεται ότι το παραπάνω Non-Uniform πρωτόκολλο έχει Τίμημα Αναρχίας το πολύ 2.

Ακόμα, καταλήγουν σε έναν γενικό χαρακτηρισμό των Uniform γραμμικών πρωτοκόλλων (δηλαδή αυτών που η συνάρτηση $\xi$ είναι γραμμική στον αριθμό των παικτών): Όταν ο γράφος του παιγνίου είναι μη-κατευθυνόμενος τότε τα Ordered Protocols υπερτερούν των υπολοίπων ενώ όταν ο γράφος είναι κατευθυνόμενος, ο διαμοιρασμός κόστους κατά Shapley(Δίκαιος Διαμοιρασμός Κόστους) έχει τα καλύτερα χαρακτηριστικά.

Παρατηρούμε ότι στα παραπάνω, υποθέτουμε ότι ο Protocol Designer είτε γνωρίζει πλήρως το στιγμιότυπο του παιγνίου που θα του δοθεί για να εφαρμόσει το πρωτόκολλο διαμοιρασμού κόστους είτε δεν γνωρίζει τίποτα για αυτό. Οι δύο αυτές υποθέσεις είναι ακραίες καθώς η μία είναι πολύ αισιόδοξη και η άλλη πολύ απαισιόδοξη. Τι συμβαίνει λοιπόν όταν ο Protocol Designer έχει κάποιες πληροφορίες για το στιγμιότυπο του παιγνίου αλλά δεν γνωρίζει τα πάντα για αυτό;

Στο [20] οι Christodoulou et al. μελετούν πρωτόκολλα τα οποία ικανοποιούν τις ιδιότητες (1)-(3) (βλ. 1.2.3) και στα οποία ο Protocol Designer έχει πληροφορίες για το στιγμιότυπο του παιγνίου αλλά είναι ελλιπείς. Ακόμα, θεωρούν ότι οι παίκτες παίζουν ένας-ένας ώστε να μπορέσουν να μειώσουν το Τίμημα της Αναρχίας. Έτσι, θεωρούν ότι, ο Protocol Designer γνωρίζει τον γράφο του παιγνίου και τα τερματικά των παικτών αλλά δεν γνωρίζει την σειρά με την οποία παίζουν οι παίκτες και ποιοι από αυτούς θα ενεργοποιηθούν. Σε τέτοιου είδους πρωτόκολλα, τα οποία ονομάζονται **Universal**, βοηθούν όντως αυτές οι πληροφορίες τον Protocol Designer να επιλέξει το κατάλληλο πρωτόκολλο; Αποδεικνύεται ότι στην περίπτωση όπου η σειρά των παικτών επιλέγεται από κάποιον αντίπαλο ο οποίος επιθυμεί να καταλήξει το παίγνιο στην χειρότερη δυνατή κατάσταση(Adversarial Model) υπάρχει μία κατηγορία γράφων στην οποία η γνώση του γράφου βοηθά τον Protocol Designer να σχεδιάσει ένα σωστό πρωτόκολλο αλλά, στην γενική περίπτωση, δεν τον βοηθά. Στην περίπτωση όμως που η σειρά των παικτών καθορίζεται από μία γνωστή συνάρτηση κατανομής πιθανότητας (Stochastic Model) υπάρχει ένα τυχαίο (randomized) πρωτόκολλο και ένα ντετερμινιστικό στα οποία το Τίμημα της Αναρχίας είναι σταθερός αριθμός.

Συνεπώς, εάν γνωρίζουμε τον γράφο του παιγνίου, σε κάποιες περιπτώσεις, μπορούμε να υπολογίσουμε μία σειρά με την οποία παίζουν οι παίκτες ώστε το κόστος του τελικού δικτύου όταν οι παίκτες φτάσουν σε ισορροπία να είναι μεγαλύτερο από το βέλτιστο το πολύ κατά μία σταθερά.

Από τα παραπάνω καταλήγουμε ότι η χρήση άλλων Cost Sharing Schemes καθώς και η αποκάλυψη κάποιων πληροφοριών για το στιγμιοτύπο του παιγνίου στον Protocol Designer είναι δύο πολλά υποσχόμενες μέθοδοι ώστε να καταλήξουμε σε πρωτόκολλα τα οποία οδηγούν στον σχηματισμό φτηνών δικτύων.

# Κεφάλαιο 3

# Πρόβλημα Χωροθέτησης Υπηρεσιών

Στο παρόν κεφάλαιο περιγράφουμε το πρόβλημα το οποίο αποτελεί το θέμα της παρούσας διπλωματικής εργασίας και παρουσιάζουμε ένα κομμάτι της έρευνας που έχει γίνει σε αυτό. Θα ξεκινήσουμε παρουσιάζοντας την βέλτιστη λύση του προβλήματος και αλγορίθμους εύρεσης της. Το παραπάνω μέρος κρίνουμε ότι, στην μετέπειτα παρουσίαση των παιγνίων χωροθέτησης, μας βοηθά στο να κατανοήσουμε τον τρόπο με τον οποίο πρέπει να παίζουν οι παίκτες ώστε να οδηγούνται στην βέλτιστη λύση. Στην συνέχεια, θα γίνει μία σύντομη παρουσίαση κάποιων αντιπροσωπευτικών παιγνίων χωροθέτησης

## 3.1 Εισαγωγή

Έστω ότι θέλουμε να παρέχουμε υπηρεσίες σε ένα σύνολο παικτών και θέλουμε να τοποθετήσουμε κάπου έναν εξυπηρετητή (facility) ο οποίος να τους παρέχει τις υπηρεσίες αυτές. Για παράδειγμα μπορεί να θέλουμε να χτίσουμε μία βιβλιοθήκη ή να παρέχουμε υπηρεσίες τηλεφωνίας. Και στα δύο παραπάνω παραδείγματα, όσο κοντινότερα είναι ο πάροχος υπηρεσιών στους παίκτες τόσο καλύτερες υπηρεσίες τους παρέχει. Πως τοποθετούμε, όμως, τον πάροχο υπηρεσιών στην καλύτερη θέση και με ποια κριτήρια ορίζουμε ότι είναι αυτή η καλύτερη; Μας ενδιαφέρει η θέση αυτή να είναι σχετικά κεντρικά για όλους ή όσο το δυνατόν πιο κοντά στον πιο απομακρυσμένο παίκτη; Επίσης, υπάρχει όριο στο ποσό των υπηρεσιών που μπορεί να παρέχει ένα facility ή όριο στο πόσα facilities μπορούν να ανοίξουν; Το παραπάνω πρόβλημα ονομάζεται Πρόβλημα Χωροθέτησης Υπηρεσιών (Facility Location Problem) και ανάλογα με το πως απαντάμε στις παραπάνω ερωτήσεις, ορίζουμε τις διάφορες παραλλαγές του.

Επίσης, τι μπορούμε να κάνουμε εάν γνωρίζουμε όλες τις τοποθεσίες των ανθρώπων που θέλουν να εξυπηρετηθούν εκ των προτέρων και τι εάν αυτές φτάνουν μία - μία και δεν μπορούμε να γνωρίζουμε ποια θα είναι η επόμενη; Όταν γνωρίζουμε τις τοποθεσίες των παικτών πριν αποφασίσουμε την θέση του facility τότε το πρόβλημα ονομάζεται (Off-line) Facility Location. Αντίθετα, όταν οι παίκτες έρχονται ένας - ένας ονομάζεται Online Facility Location.

Στο πρώτο υπο-κεφάλαιο περιγράφεται, αρχικά, η off-line εκδοχή του Facility Location και οι διάφορες παραλλαγές του προβλήματος.

Στο δεύτερο υπο-κεφάλαιο, γίνεται μία εισαγωγή στις online και incremental εκδόσεις του παιχνιδιού.

Στο τρίτο υπο-κεφάλαιο, παρουσιάζονται διάφορα πρωτόκολλα τα οποία έχουν δοκιμαστεί ώστε να καταλήγει το παίγνιο σε λύσεις χαμηλού κόστους.

Στο τέταρτο υπο-κεφάλαιο παρουσιάζονται παίγνια Χωροθέτησης Υπηρεσιών.

## 3.2 Πρόβλημα Χωροθέτησης Υπηρεσιών

Έστω ότι έχουμε έναν χώρο στον οποίο υπάρχουν κάποιοι παίκτες οι οποίοι επιθυμούν το άνοιγμα ενός παρόχου υπηρεσιών (facility) που να τους εξυπηρετεί. Μπορούμε να φανταστούμε ότι αυτοί οι παίκτες είναι άνθρωποι και επιθυμούν το άνοιγμα ενός νοσοκομείου, ενός πυσοσβεστικού τμήματος ή ενός εκπομπού ραδιοφωνίας. Τα παραπάνω παραδείγματα έχουν ένα κοινό χαρακτηριστικό: ο πάροχος υπηρεσιών πρέπει να τοποθετηθεί σε ένα σημείο στο οποίο να εξυπηρετεί τους παίκτες όσο το δυνατόν καλύτερα. Το παραπάνω πρόβλημα αναφέρεται συνήθως στην βιβλιογραφία ως Facility Location Problem και οι πολλές εκδοχές του έχουν μελετηθεί εκτενώς τα τελευταία χρόνια.

Δύο βασικές εκδοχές του παιγνίου ορίζονται με βάση το αν υπάρχει άνω όριο στην ποσότητα των υπηρεσιών που μπορεί να παρέχει ένα facility. Εάν υπάρχει, το πρόβλημα αναφέρεται ως **Capacitated Facility Location Problem (CFLP)** ενώ, εάν δεν υπάρχει, τότε ονομάζεται **Uncapacitated Facility Location (UFLP)**.

Ας επικεντρώσουμε την προσοχή μας στο UFLP καθώς αυτό θα μας απασχολήσει στα επόμενα: Εδώ υπάρχει ένας χώρος (για παράδειγμα ένα επίπεδο) στο οποίο θέλουμε να ανοίξουμε facilities. Αρχκά, συγκεντρώνουμε όλες τις αιτήσεις (demands) για facility κάθε μία εκ των οποίων αντιστοιχεί σε ένα σημείο του χώρου (μπορεί ένα σημείο του χώρου να αντιστοιχεί σε παραπάνω από ένα demand). Εφεξής, κάνουμε την σύμβαση ότι όταν θα αναφερόμαστε στο σημείο το οποίο αντιστοιχεί σε ένα demand θα λέμε απλά demand. Με βάση αυτά τα demands ένας αλγόριθμος ο οποίος επιλύει το πρόβλημα αποφασίζει που θα τοποθετηθούν τα facilities και ποιος παίκτης θα εξυπηρετηθεί από ποιο facility. Όταν ένας παίκτης εξυπηρετείται από ένα facility θα λέμε ότι έχει ανατεθεί σε αυτό. Έτσι, προκύπτουν 2 ειδών κόστη: τα κόστη ανοίγματος facility (facility costs) τα οποία αντιστοιχούν στα κόστη ανοίγματος και λειτουργίας των facilities και τα κόστη εξυπηρέτησης (assignment costs) τα οποία αντιστοιχούν στα κόστη που πληρώνουν οι παίκτες για να λάβουν εξυπηρέτηση από τα facilities. Όπως είπαμε παραπάνω, θέλουμε να τοποθετήσουμε τα facilities στις βέλτιστες θέσεις. Συνήθως η βέλτιστη θέση των facilities είναι αυτή που ελαχιστοποιεί μια συνάρτηση κοινής ωφέλειας (social cost) η οποία αντικατοπτρίζει πόσο καλή ή κακή είναι η εκάστοτε τοποθέτηση για το κοινό καλό. Οι πιο διαδεδομένες συναρτήσεις κοινής ωφέλειας θα αναλυθούν στην συνέχεια. Προς το παρόν, ας δούμε έναν τυπικό ορισμό του UFLP:

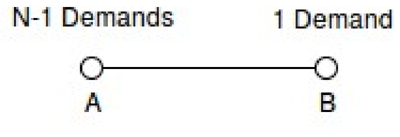
Εφεξής, θα θεωρούμε ότι έχουμε έναν μετρικό χώρο (Metric Space) $(M, d)$ όπου $M$ το σύνολο των τοποθεσιών (ή σημείων) και $d : M \times M \longmapsto \mathbb{N}_+$ είναι η συνάρτηση απόστασης η οποία είναι μη-αρνητική και συμμετρική. Για κάθε σημείο $u \in M$ και υποσύνολο σημείων $M' \subseteq$ ορίζουμε $d(M', u) \equiv min_{v \in M'}\{d(v, u)\}$ την απόσταση του σημείου $u$ από το κοντινότερο του σημείο στο $M'$. Επίσης, ορίζουμε $Ball(u, r) \equiv \{v \in M : d(u, v) < r\}$ το σύνολο των σημείων τα οποία είναι σε απόσταση το πολύ $r$ από το σημείο $u$. Για κάθε $x, y$ έστω $(x - y)_+ \equiv max\{x - y, 0\}$.

***Ορισμός* 3.11.** *Το Uncapacitated Facility Location παίρνει ως είσοδο έναν μετρικό χώρο $(M, d)$, ένα κόστος ανοίγματος facility (facility cost) $f_z$ για κάθε σημείο $z \in M$ και ένα (πολυ)σύνολο $\{u_1, ..., u_N\}$ από αιτήσεις (demands) στο $M$. Στόχος είναι να βρεθεί ένα υποσύνολο από σημεία $F \subseteq M$ στα οποία εάν ανοιχτούν facilities θα ελαχιστοποιηθεί η τιμή μίας συνάρτησης κοινής ωφέλειας $c(F, u_1, ..., u_N)$. Το κόστος εξυπηρέτησης κάθε αίτησης i ισούται με την απόσταση της από το κοντινότερο facility $d(u_i, F)$.*

Ποια είναι όμως αυτή η συνάρτηση κοινής ωφέλειας και ποια η βέλτιστη τοποθέτηση των facilities; Εξαρτάται αν θέλουμε να τοποθετήσουμε το facility όσο πιο κεντρικά γίνεται για όλους τους παίκτες και, συνεπώς, να ελαχιστοποιήσουμε την μέση απόσταση όλων των demands από το facility ή εάν θέλουμε να μην υπάρχει κάποιος ο οποίος να εξυπηρετείται πολύ κακά. Με βάση αυτούς τους 2 αντικειμενικούς σκοπούς έχουμε τις ακόλουθες εκδοχές του παιχνιδιού ανάλογα με το τι ορίζουμε ως βέλτιστη θέση των facilities:

1. Η βέλτιστη τοποθέτηση των facilities αντιστοιχεί στην τοποθέτηση αυτή η οποία ελαχιστοποιεί το άθροισμα των κοστών ανοίγματος των facilities και των κοστών εξυπηρέτησης των παικτών. Το πρόβλημα στο οποίο η παραπάνω θεωρείται η βέλτιστη τοποθέτηση ονομάζεται **Min Facility Location**. Σε αυτή την περίπτωση θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε την συνάρτηση
$$\sum_{z \in F} f_z + \sum_{i=1}^{N} d(F, u_i)$$
2. Η βέλτιστη τοποθέτηση των facilities αντιστοιχεί στην τοποθέτηση αυτή η οποία ελαχιστοποιεί το μέγιστο κόστος εξυπηρέτησης που πληρώνουν οι παίκτες. Το παραπάνω στο οποίο θεωρείται αυτή η βέλτιστη τοποθέτηση ονομάζεται **Minmax Facility Location**. Σε αυτή την περίπτωση η συνάρτηση κοινής ωφέλειας της οποίας την τιμή θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε είναι:
$$max_{i=1,...,N} d(u_i, F)$$

Για να καταλάβουμε την διαφορά των δύο παραπάνω εκδοχών ας θεωρήσουμε το παρακάτω σχήμα όπου θέλουμε να ανοίξουμε 1 facility και έχουμε πολλά demands συγκεντρωμένα στην μία άκρη ενός ευθυγράμμου τμήματος και ένα μόνο demand στην άλλη άκρη η οποία μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι πολύ μακριά:




Σχήμα 3.1: Min vs Minmax Facility Location

Ενώ στο Min Facility Location το facility θα τοποθετηθεί πολύ κοντά στην άκρη A ώστε να εξυπηρετεί καλά την πλειονότητα των παικτών, το Minmax Facility Location θα τοποθετήσει το facility στην μέση του AB και έτσι, αν και η πλειονότητα των παικτών εξυπηρετείται χειρότερα, ο μακρύτερος παίκτης λαμβάνει καλύτερη ποιότητα υπηρεσιών.

Ας επικεντρωθούμε στο Min Facility Location καθώς με αυτό θα ασχοληθούμε στην συνέχεια: η πιο απλή εκδοχή του είναι το να θέλουμε να ανοίξουμε ένα μόνο facility και τα σημεία των αιτήσεων(demands) να είναι συνευθειακά. Σε αυτή την περίπτωση, εάν θεωρήσουμε ότι η γραμμή στην οποία ανήκουν όλα τα demands είναι ένας άξονας του οποίου η αρχή O είναι αριστερά του αριστερότερου demand, και υπολογίσουμε τις αποστάσεις από το O, τότε, τοποθετώντας το facility στο σημείο που αντιστοιχεί στο μέσο όρο των αποστάσεων αυτών, έχουμε την βέλτιστη λύση.

Παρόλα αυτά, όταν το παίγνιο ορίζεται πάνω σε ένα γράφο αποδεικνύεται με επαγωγή από το Set Cover Problem ότι, στην γενική περίπτωση, είναι NP-δύσκολο να επιλύσουμε το πρόβλημα βέλτιστα. Παρόλα αυτά έχουν δημιουργηθεί αλγόριθμοι που υπολογίζουν προσεγγιστικές λύσεις για τις διάφορες εκδοχές του προβλήματος:

- Στην περίπτωση που δεν υπάρχει κανένας περιορισμός στις αποστάσεις των σημείων του χώρου το πρόβλημα είναι γνωστό ως **Non-Metric Facility Location** και αποδεικνύεται ότι μπορεί να προσεγγιστεί εντός $O(logN)$ [29]

- Στην περίπτωση που οι τα σημεία του χώρου ικανοποιούν την τριγωνική ανισότητα $(d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) forall x, y, y \in M)$ και ο γράφος του δικτύου είναι μη κατευθυνόμενος το πρόβλημα αναφέρεται ως **Metric Facility Location** και αποδεικνύεται ότι δεν μπορεί να προσεγγιστεί σε παράγοντα μικρότερο από 1.463 [27] ενώ ο καλύτερος γνωστός αλγόριθμος για υπολογισμό μίας προσεγγιστικής βέλτιστης λύσης έχει αναλογία προσέγγισης (approximation ratio) 1.488 [33]

Πρέπει σε αυτό το σημείο να αναφέρουμε, ότι το Facility Location είναι ιδιαίτερα σημαντικό γιατί έχει άλλη μία πρακτική εφαρμογή η οποία είναι ιδιαιτέρως χρήσιμη στον τομέα διαχείρισης και ανάλυσης δεδομένων(Data Management): στην κατηγοριοποίηση δεδομένων (clustering). Συγκεκριμένα, όλα τα demands (τα οποία μπορούν σε αυτή την περίπτωση ότι αναπαριστούν αντικείμενα με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά) τα οποία συνδέονται στο ίδιο facility(συνεπώς είναι κοντά το ένα στον άλλο) μπορούν να θεωρηθούν ότι ανήκουν στην ίδια κατηγορία (cluster). Τελικά, οι ομάδες που δημιουργούνται με αυτό τον τρόπο αποτελούν ένα clustering.

Αξίζει, επιπροσθέτως, να παρατηρήσουμε ότι, σε αυτό το μοντέλο, θεωρούμε ότι όλες οι αιτήσεις είναι για το ίδιο ποσό υπηρεσιών (unit demands) δηλαδή δεν επιτρέπουμε στους παίκτες να ζητούν περισσότερη ή λιγότερη εξυπηρέτηση. Ακόμα, επιτρέπουμε σε 2 ή περισσότερα demands να βρίσκονται στο ίδιο σημείο. Τέλος, συνήθως ξεχωρίζουμε 2 περιπτώσεις ανάλογα με το αν το κόστος ανοίγματος facility είναι ίδιο για όλα τα σημεία $z \in M$ ή όχι. Στην πρώτη περίπτωση, λέμε ότι έχουμε uniform facility costs και συμβολίζουμε το κόστος κάθε facility απλά με $f$. Στην δεύτερη περίπτωση όπου το κόστος ανοίγματος του facility εξαρτάται από το σημείο $z \in M$ στο οποίο θα ανοιχτεί, λέμε ότι έχουμε Non-Uniform Facility Costs.

Κλείνοντας, ας παρουσιάσουμε άλλες 2 εκδοχές του προβλήματος: το k-facility location και το k-median. Στο πρώτο, υπάρχει όριο στον αριθμό των facilities που μπορούν να ανοιχθούν και μπορούμε να τοποθετήσουμε έως k facilities. Ο καλύτερος προσεγγιστικός αλγόριθμος για αυτό το πρόβλημα στην περίπτωση που οι αποστάσεις των σημείων του χώρου ικανοποιούν την τριγωνική ανισότητα παρουσιάστηκε στο [30] και προσεγγίζει την βέλτιστη λύση εντός ενός παράγοντα παράγοντα 6. Στο k-median, πάλι μπορούμε να τοποθετήσουμε μόνο k facilities αλλά αυτή την φορά δεν υπάρχουν κόστη ανοίγματος των facilities και μας ενδιαφέρει μόνο η ελαχιστοποίηση των κοστών εξυπηρέτησης. Η εκδοχή αυτή είναι ιδιαίτερα σημαντική σε περιπτώσεις clustering όπου απλά θέλουμε να διαχωρίσουμε δεδομένα σε clusters όσο το δυνατόν καλύτερα. Ο καλύτερος προσεγγιστικός αλγόριθμος για το k-median στην περίπτωση που οι αποστάσεις των σημείων του χώρου ικανοποιούν την τριγωνική ανισότητα παρουσιάστηκε στο [15] και είναι 2-προσεγγιστικός.

## 3.3 Άμεση και Επαυξητική Εκδοχή του Προβλήματος Χωροθέτησης Υπηρεσιών

Στο Πρόβλημα Χωροθέτησης Υπηρεσιών θεωρούμε ότι γνωρίζουμε όλα τα demands προτού τοποθετήσουμε τα facilities. Αυτή η υπόθεση όμως δεν ισχύει σε πολλές περιπτώσεις στην πραγματική ζωή: για παράδειγμα, εάν θέλουμε να δημιουργήσουμε ένα τηλεφωνικό δίκτυο, δεν μπορούμε να θεωρήσουμε ότι θα γνωρίζουμε όλους τους πελάτες εκ των προτέρων. Επίσης δεν μπορούμε να περιμένουμε μέχρι να έχουμε όλα τα demands γιατί κάθε φορά που έρχεται κάποιος πελάτης πρέπει να συνδεθεί στο δίκτυο μέσω κάποιου παρόχου όσο το δυνατόν γρηγορότερα. Αυτό οδήγησε στη μελέτη 2 βασικών παραλλαγών του παιχνιδιού: την άμεση (Online) και την Επαυξητική (Incremental):

**Online Facility Location:** Η online εκδοχή του παιχνιδιού εισήχθηκε από τον Meyerson [35]. Στο Online Facility Location οι παίκτες καταφτάνουν ένας - ένας και μόλις φτάσουν πρέπει να εξυπηρετηθούν από κάποιο facility. Σκοπός του παιχνιδιού είναι, στο τέλος του, το άθροισμα του κόστους των facilities που έχουν ανοιχθεί και του κόστους εξυπηρέτησης των παικτών από τα facilities στα οποία έχουν ανατεθεί να είναι ελάχιστο (αντίστοιχα του Min Offline Facility Location).

Κάθε φορά που έρχεται κάποιος καινούργιος παίκτης πρέπει να αποφασίσουμε εάν θα ανοίξουμε κάποιο καινούργιο facility και θα αναθέσουμε τον παίκτη σε αυτό ή εάν θα αναθέσουμε την εξυπηρέτηση του παίκτη σε κάποιο υπάρχον facility. Αξίζει να σημειωθεί ότι κάθε φορά που ανοίγει ένα facility δεν μπορεί να κλείσει. Επίσης, κάθε φορά που ένας παίκτης ανατίθεται σε κάποιο facility δεν μπορεί, στην συνέχεια, να ανατεθεί σε κάποιο άλλο facility. Οι αποφάσεις που παίρνουμε λοιπόν κάθε φορά που έρχεται ένας παίκτης είναι οριστικές. Αυτός ο περιορισμός είναι φυσικός εάν αναλογιστεί κανείς πραγματικές συνθήκες: για παράδειγμα, σε ένα δίκτυο τηλεπικοινωνίας, το να πρέπει να ξαναφτιάξουμε όλο το δίκτυο κάθε φορά που έρχεται κάποιος καινούργιος παίκτης μπορεί να είναι όχι μόνο ακριβό αλλά, σε κάποιες περιπτώσεις, αδύνατο.

Ας ορίσουμε τώρα το Online Facility Location και ας περιγράψουμε έναν αλγόριθμο που το επιλύει πιο τυπικά:

Έστω ότι τα demands καταφτάνουν ένα-ένα και πρέπει να ανατεθούν σε κάποιο ανοιχτό facility μόλις φτάσουν. Στην περίπτωση που έχουμε **uniform facility costs**, η είσοδος αποτελείται από το κόστος ανοίγματος facility $f$ και μία ακολουθία demands $\{u_1, ..., u_N\}$ τα οποία δεν είναι απαραιτήτως όλα διαφορετικά μεταξύ τους και ανήκουν σε έναν μετρικό χώρο $(M, d)$. Ο online αλγόριθμος ο οποίος επιλύει το πρόβλημα ανοίγει facilities ανταποκρινόμενος στην ακολουθία των demands. Το σύνολο των facilities που έχει ανοίξει ο αλγόριθμος αναφέρεται συχνά ως facility configuration. Εφεξής θα συμβολίζουμε με $F_i$ το facility configuration του αλγορίθμου ακριβώς μετά την άφιξη του demand $u_i$ με $F_0 = \emptyset$. Εφόσον ένας online αλγόριθμος μπορεί μόνο να ανοίγει καινούργια facilities και όχι να κλείνει υπάρχοντα, κατά την διάρκεια του παιγνίου θα πρέπει να ισχύει: $F_{i-1} \subseteq F_i$ για κάθε $i \geq 1$.

Κάθε φορά που φτάνει ένα demand $u_i$, ο online αλγόριθμος εφαρμόζει έναν κανόνα ανοίγματος facility (*facility opening rule*) ο οποίος λαμβάνει υπόψη του το κόστος $f$ του να ανοίξει ένα καινούργιο facility, το τρέχον facility configuration $F_{i-1}$, την θέση του demand $u_i$ και ίσως κάποια από τα προηγούμενα demands $u_1, ..., u_{i-1}$ και αποφασίζει εάν και σε ποια τοποθεσία πρέπει να ανοίξει ένα καινούργιο facility. Εάν ανοιχτεί ένα καινούργιο facility στην τοποθεσία $w$, τότε $F_i = F_{i-1} \cup \{w\}$ και το κόστος ανοίγματος facility του αλγορίθμου αυξάνεται κατά $f$. Διαφορετικά, $F_i = F_{i-1}$. Τελικά, το $u_i$ ανατίθεται στο κοντινότερό του facility στο $F_i$ και το συνολικό κόστος εξυπηρέτησης του αλγορίθμου αυξάνεται κατά $d(F_i, u_i)$. Συνεπώς, το κόστος του αλγορίθμου ακριβώς μετά την επεξεργασία του demand $u_i$ είναι:

$$|F_i|f + \sum_{l=1}^{i} d(F_l, u_l)$$

Στην γενική περίπτωση όπου έχουμε **non-uniform facility costs** ο μετρικός χώρος $M$ καθώς και τα κόστη ανοίγματος των facilities $f_z$ για κάθε $z \in M$ δίνονται στον αλγόριθμο εκ των προτέρων. Ο online αλγόριθμος διατηρεί ένα facility configuration $F_0 = \emptyset, F_1, ..., F_N$ ανταποκρινόμενος στην ακολουθία των demands $u_1, ..., u_N$ όπως και προηγουμένως. Το κόστος του αλγορίθμου αμέσως μετά την επεξεργασία ενός demand $u_i$ είναι:

$$\sum_{z \in F_i} f_z + \sum_{l=1}^{i} d(F_l, u_l)$$

Παρόλα αυτά, εάν θεωρήσουμε την εφαρμογή του Προβλήματος Χωροθέτησης σε προβλήματα clustering ο περιορισμός ότι οι αποφάσεις που παίρνουμε καθώς οι παίκτες φτάνουν είναι οριστικές δεν είναι επιθυμητός: Εδώ θέλουμε να "χαλαρώσουμε" αυτόν τον περιορισμό ώστε να μπορούμε να αλλάξουμε την ανάθεση ενός παίκτη σε κάποιο facility. Από την άλλη μεριά όμως, μόλις σχηματιστεί ένα cluster, δεν θέλουμε να το σπάσουμε αφενός γιατί σε πολλές περιπτώσεις θέλουμε να διατηρήσουμε μία ιεραρχία clusters και, αφετέρου, γιατί το να το "σπάσουμε" μπορεί να είναι υπολογιστικά ακριβό.

**Incremental Facility Location:** Τα παραπάνω οδήγησαν στην μελέτη επαυξητικών αλγορίθμων (Incremental Algorithms) για διάφορα προβλήματα data clustering ([14]) όπως τα k-Center, Sum k-Radius και k-Median. Σε αυτούς τους επαυξητικούς αλγορίθμους, οι παίκτες καταφτάνουν ένας - ένας και, κάθε φορά που κάποιος νέος παίκτης φτάνει, επιτρέπεται η δημιουργία νέων clusters και η συγχώνευση (merge) clusters. Παρόλα αυτά απαγορεύεται η διάσπαση των clusters. Αυτοί οι κανόνες εφαρμόστηκαν και στην επαυξητική (Incremental) έκδοση του Προβλήματος Χωροθέτησης: Στο Incremental Facility Location, το οποίο μελετήθηκε για πρώτη φορά στο [23], τα demands καταφτάνουν ένα - ένα και πρέπει να ανατεθούν μόλις φτάσουν σε κάποιο ανοιχτό facility. Κάθε χρονική στιγμή, ο αλγόριθμος μπορεί να αποφασίσει να συγχωνεύσει δύο facilities κλείνοντας το ένα εξ αυτών και αναθέτοντας τους πελάτες του στο άλλο. Όπως και στην online έκδοση του Προβλήματος Χωροθέτησης, τελικός στόχος είναι η ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους (άθροισμα των κοστών ανοίγματος των facilies και των κοστών εξυπηρέτησης).

Ας δούμε, τώρα, τυπικά ένα μοντέλο για το Incremental Facility Location και έναν αλγόριθμο που το επιλύει εστιάζοντας στην περίπτωση όπου έχουμε uniform facility costs: Όπως και στην online εκδοχή, η είσοδος του αλγορίθμου είναι το κόστος ανοίγματος facility $f$ και μία ακολουθία demands $u_1, ..., u_N$ τα οποία καταφτάνουν ένα ένα. Ο incremental αλγόριθμος διατηρεί ένα facility configuration $F_0 = \emptyset, F_1, ..., F_N$ και ένα clustering των demands τα οποία έχει επεξεργαστεί ανταποκρινόμενος στην ακολουθία $u_1, ..., u_N$. Σε κάθε χρονική στιγμή, για κάθε facility $z \in F_i$, ο αλγόριθμος κρατάει το σύνολο $C(z)$ των demands που έχουν ανατεθεί ως τώρα στο $z$ (το cluster του $z$) και, πιθανώς, κάποιες επιπλέον πληροφορίες για το $z$. Αμέσως μετά την επεξεργασία ενός demand $u_i$ η ένωση όλων των συνόλων $C(z)$ για κάθε $z \in F_i$ πρέπει να είναι το σύνολο $\{u_1, ..., u_i\}$.

Όταν φτάνει ένα demand $u_i$, ο incremental αλγόριθμος εφαρμόζει έναν κανόνα ανοίγματος facility (facility opening rule) και αποφασίζει εάν θα αναθέσει το $u_i$ σε κάποιο υπάρχον facility ή εάν θα ανοίξει κάποιο καινούργιο facility στο οποίο και θα αναθέσει το $u_i$. Ο αλγόριθμος εφαρμόζει, ακόμα, έναν κανόνα συγχώνευσης (*merge rule*) και καθορίζει εάν κάποια facilities θα πρέπει να συγχωνευθούν. Εάν ένα facility $z$ συγχωνευθεί με ένα άλλο facility $z'$, το $z$ κλείνει, δηλαδή αφαιρείται από το $F_i$ και τα demands που είχαν ανατεθεί σε αυτό μεταφέρονται στο $z'$. Το κόστος ενός Incremental αλγόριθμου αμέσως μετά την επεξεργασία ενός demand $u_i$ είναι:

$$|F_i|f + \sum_{z \in F_i} \sum_{u \in C(z)} d(u, z)$$

## 3.4 Αλγόριθμοι για την Άμεση και Επαυξητική Εκδοχή του Προβλήματος Χωροθέτησης

Τόσο στο Online όσο και στο Incremental Facility Location τα demands έρχονται ένα - ένα και θέλουμε να τα αναθέσουμε σε facilities ώστε να ελαχιστοποιήσουμε το άθροισμα των κοστών ανοίγματος των facilities και των κοστών εξυπηρέτησης των demands. Διαισθητικά, για να μειώσουμε τα κόστη ανοίγματος, πρέπει να ανοίξουμε όσο το δυνατόν λιγότερα facilities. Εάν όμως ανοίγουμε λίγα facilities πολλοί παίκτες θα είναι μακριά τους και συνεπώς θα πληρώνουν πολύ για να εξυπηρετηθούν από αυτά με αποτέλεσμα να αυξάνεται πολύ το κόστος εξυπηρέτησης. Από την άλλη πλευρά, εάν θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε τα κόστη εξυπηρέτησης θα μπορούσαμε να ανοίξουμε ένα facility στην θέση κάθε demand οπότε τα κόστη εξυπηρέτησης θα ήταν όλα 0. Σε αυτή την περίπτωση όμως αυξάνονται πάρα πολύ τα κόστη ανοίγματος των facilities. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι για να ελαχιστοποιήσουμε τα κόστη εξυπηρέτησης χρειάζεται να αυξήσουμε τα κόστη ανοίγματος και όταν ελαχιστοποιούμε τα κόστη ανοίγματος αυξάνονται πολύ τα κόστη εξυπηρέτησης. Πρέπει, συνεπώς, ένας αλγόριθμος που επιλύει το πρόβλημα να κρατάει μία ισορροπία μεταξύ των δύο ειδών κοστών ώστε να καταλήγει σε μία καλή λύση.

**Competitive Analysis:** Οι αλγόριθμοι που θα παρουσιαστούν στο υπόλοιπο κεφάλαιο, αναλύονται ανταγωνιστικά (Competitive Analysis) [11] δηλαδή η επίδοση τους αξιολογείται με βάση την βέλτιστη λύση του προβλήματος, δηλαδή με την λύση που θα παρήγαγε ο βέλτιστος αλγόριθμος στον οποίο θα δινόταν εξαρχής η πλήρης ακολουθία των demands (ο βέλτιστος off-line αλγόριθμος). Τυπικά:

***Ορισμός* 3.12.** *Ένας ντετερμινιστικός (αντίστοιχα τυχαιοποιημένος ή randomized) αλγόριθμος ονομάζεται c-ανταγωνιστικός ή c-competitive όταν για κάθε ακολουθία demands το κόστος του (αντίστοιχα το αναμενόμενο κόστος του ή expected cost) είναι το πολύ c φορές μεγαλύτερο από το βέλτιστο κόστος του αντίστοιχου στιγμιοτύπου του Offline Facility Location, όπου η πλήρης ακολουθία των demands είναι γνωστή εκ των προτέρων.*

Για να εφαρμόσουμε competitive analysis καθορίζουμε μία ακολουθία από $N$ demands και συγκρίνουμε το κόστος του αλγορίθμου με το κόστος μίας (καθορισμένης off-line) βέλτιστης λύσης. Συμβολίζουμε με $Fac^*$ το κόστος ανοίγματος facility και με $Asg^*$ το συνολικό κόστος εξυπηρέτησης της βέλτιστης λύσης. Για να μην μπερδεύουμε το facility ενός αλγορίθμου με το facility της βέλτιστης λύσης, αναφερόμαστε στο δεύτερο με τον όρο βέλτιστο κέντρο (optimal center) ή απλά κέντρο (center).

Συνήθως, όταν εφαρμόζουμε competitive analysis, εστιάζουμε σε ένα μόνο βέλτιστο κέντρο $c$ και στα demands που του έχουν ανατεθεί στην βέλτιστη λύση. Ορίζουμε:

- $d_u^* = d(u, c)$ το βέλτιστο κόστος εξυπηρέτησης ενός demand $u$ το οποίο έχει ανατεθεί στο $c$
- $Asg^*(c) = \sum_u d_u^*$ το βέλτιστο κόστος εξυπηρέτησης των demands που έχουν ανατεθεί στο $c$
- $\delta^*$ το μέσο βέλτιστο κόστος εξυπηρέτησης των demands που έχουν ανατεθεί $c$

**Adversary Models:** Πολύ συχνά, σε online αλγόριθμους θεωρούμε ότι υπάρχει κάποιος αντίπαλος (adversary) ο οποίος καθορίζει τις θέσεις των demands και την σειρά με την οποία έρχονται. Το πόση δύναμη δίνουμε σε αυτόν το αντίπαλο εξαρτάται από το πόσες πληροφορίες έχει αυτός για τον αλγόριθμο και τα αποτελέσματα του. Εμάς θα μας απασχολήσει η περίπτωση του αδύναμου αντιπάλου (weak ή oblivious adversary) στην οποία ο αντίπαλος γνωρίζει τον αλγόριθμο αλλά δεν μπορεί να προβλέψει τα τυχαιοποιημένα αποτελέσματα του αλγορίθμου.

**Κάτω όριο στο competitive ratio κάθε αλγορίθμου:** Πριν παρουσιάσουμε τους αλγορίθμους που επιλύουν τα παραπάνω προβλήματα ας σκεφτούμε πόσο καλοί μπορούν να είναι, δηλαδή ποιό είναι το καλύτερο competitive ratio που μπορούν να επιτύχουν; Στην περίπτωση όπου έχουμε uniform facility costs και oblivious adversary το παρακάτω αποτέλεσμα είναι γνωστό [26]:

***Θεώρημα* 3.11.** *Κανένας randomized ή ντετερμινιστικός online αλγόριθμος για το Πρόβλημα Χωροθέτησης δεν μπορεί να επιτύχει competitive ratio καλύτερο από $\Omega(\frac{logn}{loglogn})$ ενάντια σε έναν oblivious adversary ακόμα και αν ο μετρικός χώρος είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα.*

**Βασικές αρχές των Online Αλγορίθμων για το Facility Location:** Στους αλγορίθμους που θα παρουσιάσουμε, υπάρχουν 2 κοινές αρχές όσον αφορά στο πότε ο αλγόριθμος αποφασίζει να ανοίξει ένα facility τις οποίες πρέπει να έχουμε στο μυαλό μας εφεξής καθώς θα μας βοηθήσουν και στην δική μας ανάλυση στο επόμενο κεφάλαιο:

1. Όπως είπαμε πιο πριν κάθε αλγόριθμος που επιλύει το πρόβλημα πρέπει να κρατάει μία ισορροπία μεταξύ των κοστών εξυπηρέτησης και των κοστών ανοίγματος των facilities. Αυτό συνήθως γίνεται με το να αναθέτουμε ένα δυναμικό (potential) για άνοιγμα facility σε κάθε demand το οποίο ισούται με $d(F_{i-1}, u_i)$ δηλαδή με την απόσταση του demand $u_i$ από το κοντινότερο του facility μόλις φτάσει. Το δυναμικό αυτό λειτουργεί ως άνω όριο όχι μόνο στο κόστος εξυπηρέτησης του demand αλλά και στο πόσο το demand αυτό μπορεί να συνεισφέρει στο άνοιγμα κάποιου facility που να είναι πιο κοντά του.

2. Η δεύτερη αρχή είναι ότι όταν σε μια περιοχή το συσσωρευμένο δυναμικό των demands ξεπεράσει (κατά πολύ) το κόστος ανοίγματος ενός facility θα πρέπει στην περιοχή να ανοίξει ένα facility. Δηλαδή εάν σε μια περιοχή τα demands πληρώνουν πάρα πολύ μεγάλο συνολικό κόστος εξυπηρέτησης για να συνδεθούν σε facilities εκτός της περιοχής, το άνοιγμα ενός facility στην περιοχή κατά πάσα πιθανότητα θα ρίξει αρκετά το κόστος εξυπηρέτησης.

Από εδώ και στο εξής θα θεωρούμε ότι οι αποστάσεις των σημείων του χώρου πάνω στον οποίο ορίζεται το πρόβλημα ικανοποιούν την τριγωνική ανισότητα.

Ας προχωρήσουμε τώρα σε μία συνοπτική παρουσίαση κάποιων αλγορίθμων που επιλύουν το πρόβλημα ξεκινώντας από κάποιους αλγορίθμους που επιλύουν το Online facility location:

**Τυχαιοποιημένος Αλγόριθμος του Meyerson για το Online Facility Location([35])**

Εδώ εφαρμόζεται ένας απλός και κομψός κανόνας ανοίγματος facility: Ένα demand $u_i$ ανοίγει ένα facility στην τοποθεσία του $u_i$ με πιθανότητα $d(F_{i-1}, u_i)/f$. Έπειτα το $u_i$ ανατίθεται στο κοντινότερο facility. Έτσι, όταν ένα demand $u_i$ ανοίγει ένα καινούργιο facility το κόστος του αλγορίθμου αυξάνεται κατά ένα κόστος ανοίγματος $f$ και το κόστος εξυπηρέτησης είναι μηδενικό. Αλλιώς αυξάνεται κατά ένα κόστος εξυπηρέτησης $d(F_{i-1}, u_i)$ και το κόστος ανοίγματος είναι μηδενικό. Είναι απλό να δούμε ότι το αναμενόμενο κόστος ανοίγματος facility και το αναμενόμενο κόστος εξυπηρέτησης του αλγορίθμου είναι φραγμένα από την ποσότητα $d(F_{i-1}, u_i)$ (το δυναμικό του $u_i$).

Ακόμα εφαρμόζεται εδώ μία στοχαστική εκδοχή της 2ης αρχής. Είτε αναλύοντας την συνάρτηση δυναμικού είτε με χρήση τεχνικών αναμενόμενου χρόνου αναμονής μπορεί να δει κανείς ότι το αναμενόμενο κόστος του αλγορίθμου λόγω ενός οποιουδήποτε συνόλου demands $D$ μέχρι κάποιο από αυτά να ανοίξει facility είναι το πολύ $2f$. Αυτό το κόστος αποτελείται από το κόστος ανοίγματος facility $f$ και ένα κόστος εξυπηρέτησης $f$ λόγω των demands που φτάνουν προτού ανοίξει το facility.

Ο αλγόριθμος αυτός είναι $\Theta logN/loglogN$-competitive (ισχύει και για non uniform facility costs) ενώ στην περίπτωση όπου η σειρά των demands είναι τυχαία το αναμενόμενο κόστος είναι το πολύ 8 φορές μεγαλύτερο του βέλτιστου

**Ντετερμινιστικός Primal-Dual Αλγόριθμος ([25])**

Ας πάρουμε την γενική περίπτωση όπου έχουμε non-uniform facility costs. Ο αλγόριθμος γνωρίζει τον μετρικό χώρο $M$ καθώς και το κόστος ανοίγματος facility $f_z$ σε κάθε τοποθεσία $z \in M$ και σε κάθε χρονική στιγμή κρατάει το facility configuration $F_0 = \emptyset, F_1, ..., F_N$ για την ακολουθία demands $u_1, ..., u_N$. Όταν φτάνει ένα demand $u_i$ ο αλγόριθμος υπολογίζει το δυναμικό $p_i(z) = \sum_{l=1}^{i}(d(F_{i-1}, u_l) - d(z, u_l))_+$ για κάθε τοποθεσία $z \in M$ και αναζητά την τοποθεσία $w$ για την οποία η ποσότητα $p_i(w) - f_w$ είναι μέγιστη. Εάν $p_i(w) > f_w$ ανοίγει ένα facility στο $w$ αλλιώς δεν ανοίγει κανένα καινούργιο facility και, τελικά, το $u_i$ ανατίθεται στο κοντινότερο facility στο $F_i$.

Διαισθητικά, σε κάθε demand ανατίθεται ένα δυναμικό $d(F_{i-1}, u_i)$ το οποίο αντιστοιχεί στο ποσό το οποίο μπορεί να συνεισφέρει το συγκεκριμένο demand για άνοιγμα facilities κοντά του. Συγκεκριμένα, κάθε φορά που ανοίγει ένα facility σε μία τοποθεσία $z$ το δυναμικό κάθε demand $u_i$ γίνεται $d(F_{i-1} \cup \{z\}, u_i) \leq d(F_{i-1}, u_i)$. Επομένως, κάθε $u_i$ συνεισφέρει την διαφορά $(d(F_{i-1}, u_i) - d(z, u_i))_+$ στο δυναμικό του για το άνοιγμα ενός facility στο $z$. Το δυναμικό $p_i(z)$ του $z$ ισούται με το άθροισμα των διαφορών δυναμικών των demands $u_1, ..., u_i$ εάν ανοίξει ένα facility στο $z$. Εάν αυτό το δυναμικό είναι μεγαλύτερο από $f_z$, οπότε οι παίκτες της περιοχής αυτής επιθυμούν το άνοιγμα ενός facility, τότε ο αλγόριθμος ανοίγει ένα facility στο $z$. Επιπλέον η τοποθεσία του νέου facility επιλέγεται ώστε να ανοίγει εκεί όπου οι παίκτες το θέλουν πιο πολύ, δηλαδή εκεί όπου μεγιστοποιείται η ποσότητα $p_i(z) - f_z$. Στον αλγόριθμο αυτό διατηρείται η ιδιότητα ότι το δυναμικό σε κάθε τοποθεσία $z$ δεν ξεπερνάει το $f_z$. Αν το ξεπεράσει, τότε ανοίγει ένα facility στο $z$.

Η παραπάνω προσέγγιση προέρχεται από τον Γραμμικό Προγραμματισμό:

Συγκεκριμένα, το Γραμμικό Πρόγραμμα που αντιστοιχεί στο Online Faclity Location είναι το:

$$
\begin{aligned}
& min \sum_{z \in M} f_z y_z + \sum_{i=1}^{N} x_{zi}\, d(z, u_i) & \\
& s.t. \sum_{z \in M} x_{zi} = 1 & \forall\ demand\ u_i \\
& \quad x_{zi} \leq y_z & \forall z \in M, \forall\ demand\ u_i \\
& \quad y_z \in \{0,1\}, x_{zi} \in \{0,1\} & \forall z \in M, \forall\ demand\ u_i
\end{aligned}
$$

και η απλοποιημένη εκδοχή του διττού (dual) του είναι το:

$$\begin{aligned}
&max \sum_{i=1}^{N} \alpha_i & \\
&s.t. \ \sum_{i=1}^{N} (\alpha_i - d(z, u_i))_+ \leq f_z & \forall z \in M \\
&\alpha_i \geq 0 & \forall \ demand \ u_i
\end{aligned}$$

όπου η μεταβλητή $a_i$ αντιστοιχεί στο δυναμικό $p_i(w)$.

Το competitive ratio του παραπάνω αλγορίθμου είναι το πολύ $4H_n - 2$ αν και δεν έχει αποδειχθεί εάν αυτό το όριο είναι ακριβές.

Ακόμα, αξίζει να αναφερθεί η ύπαρξη άλλων 2 αλγορίθμων:

Ο πρώτος είναι ένας ασυμπτωτικά βέλτιστος ντετερμιτιστικός αλγόριθμος ο οποίος παρουσιάζεται στο [26] ο οποίος βασίζεται στην απλή ιδέα ότι όσο έρχονται facilities τους αναθέτει ένα δυναμικό και τα σημειώνει ως μη ικανοποιημένα έως ότου στην περιοχή τους συσσωρευτεί αρκετό δυναμικό ώστε να ανοιχθεί ένα facility οπότε και τα σημειώνει ως ικανοποιημένα. Παρά την βελτιστότητα του ο αλγόριθμος αυτός δεν μπορεί να θεωρηθεί πρακτικός καθώς μπορεί να καταναλώσει έως και $\Omega(N)$ μνήμη και χρειάζεται εώς και $\Omega(N^2)$ χρόνο για να τρέξει.

Η μη πρακτικότητα του παραπάνω αλγορίθμου οδήγησε στην ανάπτυξη ενός αλγορίθμου στο [1]ο οποίος στην περίπτωση όπου ο χώρος των demands είναι επίπεδος είναι $\Theta(logN)$ ανταγωνιστικός ενώ για d-διάστατους χώρους $O(2^d logN)$ ανταγωνιστικός. Η ιδέα είναι ίδια με την ιδέα του προηγούμενου αλγορίθμου αλλά εδώ ο χώρος $M$ χωρίζεται στατικά σε περιοχές (στην περίπτωση που έχουμε 2 διαστάσεις τετραγωνικές) στις οποίες καταγράφει το συσσωρευμένο δυναμικό των demands που καταφτάνουν σε αυτές. Όταν το συσσωρευμένο δυναμικό μιας περιοχές καλύπτει το κόστος ανοίγματος facility ανοίγει ένα facility εκεί σε ένα κατάλληλα επιλεγμένο σημείο.

Στην περίπτωση του Incremental Facility Location όπου ο αλγόριθμος όχι μόνο μπορεί να ανοίγει καινούργια facilities και να αναθέτει demands αλλά και να συγχωνεύει facilities (και τους παίκτες που εξυπηρετούνται από αυτά) μεταξύ τους στο [23] αποδεικνύεται ότι στην περίπτωση που έχουμε uniform facility costs υπάρχει αλγόριθμος του οποίου το competitive ratio είναι σταθερός αριθμός. Όπως στους 2 παραπάνω αλγορίθμους για το Online Facility Location, ο αλγόριθμος αποθηκεύει το δυναμικό σε κάθε περιοχή και όταν συσσωρευθεί αρκετό ανοίγει ένα facility στην περιοχή αυτή. Επιπλέον, εφαρμόζεται ένας κανόνας συγχώνευσης facilites. Συγκεκριμένα, για κάθε facility ορίζεται μία ακτίνα συγχώνευσης έτσι ώστε αν ένα facility είναι στην ακτίνα συγχώνευσης ενός άλλου το δεύτερο να συγχωνεύεται με το πρώτο. Με αυτό τον τρόπο ο αλγόριθμος εξασφαλίζει ότι αν 2 facilities είναι αρκετά κοντά τότε θα πρέπει να συγχωνευθούν.

Αξίζει επιπλέον να σημειωθεί μία παραλλαγή του Incremental facility Location στην οποία ο αλγόριθμος μπορεί, επιπρόσθετα, κατά την διάρκεια του παιχνιδιού να αλλάζει την ανάθεση των demands και να τα αναθέτει σε άλλα facilities. Παρόλα αυτά, κάθε φορά που ανοίγει ένα facility το κόστος ανοίγματος αυξάνεται και δεν μπορεί να μειωθεί, ακόμα και αν το facility κλείσει. Για αυτή την εκδοχή, στο [24] εφαρμόζεται ο κανόνας ανοίγματος facility του τυχαιοποιημένου αλγορίθμου για το Online Facility Location και μία παραλλαγή του κανόνα συγχώνευσης του προηγούμενου αλγορίθμου ενώ ο αλγόριθμος δεν αποθηκεύει κάθε φορά που επεξεργάζεται ένα demand το πλήρες configuration του αλγορίθμου αλλά μόνο τις τοποθεσίες των facilities. Αποδεικνύεται ότι ο αλγόριθμος αυτός έχει competitive ratio σταθερό αριθμό (στην περίπτωση που έχουμε uniform facility costs είναι μικρότερο του 14, αλλιώς μικρότερο του 49).

## 3.5 Παίγνια Χωροθέτησης Υπηρεσιών

Στα προηγούμενα κεφάλαια είδαμε πως ορίζεται το Πρόβλημα Χωροθέτησης και οι διάφορες παραλλαγές του. Ακόμα, παρουσιάσαμε κάποιους αλγόριθμους οι οποίοι το επιλύουν και αναλύσαμε το πόσο καλές είναι οι λύσεις που δίνουν σε σχέση με τη βέλτιστη λύση. Στα παραπάνω όμως υποθέτουμε ότι υπάρχει μία κεντρική αρχή η οποία αποφασίζει πότε ανοίγουν τα facilities και από που εξυπηρετούνται τα demands. Παρόλα αυτά, σε πολλές πραγματικές καταστάσεις δεν υπάρχει μία κεντρική αρχή αλλά οι παίκτες που συμμετέχουν στο παιχνίδι είναι αυτοί που αποφασίζουν εάν και πού θα ανοιχτούν facilities και από ποιο από αυτά θα εξυπηρετηθούν. Για παράδειγμα, πολλοί servers σήμερα ανήκουν σε ιδιώτες οι οποίοι αποφασίζουν πού θα εγκατασταθούν ανάλογα με τα προσωπικά τους συμφέροντα. Επειδή κάθε παίκτης επιθυμεί να εξυπηρετηθεί όσο το δυνατόν φτηνότερα χωρίς να συνεργάζεται με τους άλλους έχει ενδιαφέρον να αναλύσουμε τέτοιες καταστάσεις από παιγνιοθεωρητική σκοπιά.

Συνήθως, σε τέτοιες καταστάσεις θεωρούμε έναν μετρικό χώρο $M$ και δύο σύνολα σημείων $C$ και $F$. Το σύνολο σημείων $F$ αναπαριστά τις θέσεις στις οποίες μπορούν να ανοιχθούν facilities και το σύνολο σημείων $C$ αναπαριστά τις θέσεις των πελατών καθένας από τους οποίους επιθυμεί να συνδεθεί σε κάποιο από τα σημεία στο $F$. Κάθε παίκτης $i$ είναι συσχετισμένος με μία τοποθεσία στο $C$ (εφεξής θα χρησιμοποιούμε το $i$ για να αναφερθούμε τόσο στον παίκτη όσο και στην τοποθεσία του). Επίσης σε κάθε δυνατή τοποθεσία facility $j \in F$ αντιστοιχεί ένα κόστος ανοίγματος facility $f_j$ και για να εξυπηρετηθεί ένας παίκτης $i$ από ένα facility $j$ πρέπει να καλυφθεί ένα κόστος εξυπηρέτησης $c_{ij}$.

Τα παίγνια χωροθέτησης υπηρεσιών μπορούν να χωριστούν σε 2 ευρείες κλάσεις ανάλογα με το ποιός αποφασίζει και πληρώνει το κόστος του δικτύου. Στην πρώτη κλάση θεωρούμε ότι υπάρχουν κάποιοι πάροχοι-εταιρείες οι οποίοι αποφασίζουν για τις τοποθεσίες των facilities και πληρώνουν το κόστος του δικτύου. Οι πάροχοι εξυπηρετούν τους παίκτες-πελάτες χρεώνοντάς τους κάποιο αντίτιμο για τις υπηρεσίες που τους παρέχουν και σκοπός κάθε παρόχου είναι να μεγιστοποιήσει τα κέρδη του. Το παραπάνω παίγνιο σχετίζεται άμεσα με ιδιωτικές αγορές όπως τα δίκτυα τηλεφωνίας όπου τα δίκτυα δημιουργούνται όχι από τους ίδιους τους παίκτες που θέλουν να λαμβάνουν υπηρεσίες αλλά από κάποιους παρόχους-πωλητές υπηρεσιών.Στην δεύτερη κλάση θεωρούμε ότι οι ίδιοι οι παίκτες οι οποίοι θέλουν να λάβουν εξυπηρέτηση είναι αυτοί που είναι υπεύθυνοι να αποφασίσουν που θα ανοιχθούν τα facilities και πληρώνουν για το άνοιγμά τους και για να συνδεθούν σε αυτά. Αυτό το παίγνιο έχει άμεση σχέση με καταστάσεις στις οποίες η υπηρεσία που παρέχεται είναι ένα δημόσιο αγαθό. Ακόμα, έχει άμεση σχέση με εφαρμογές clustering.

### 3.5.1 Παίγνιο χωροθέτησης Υπηρεσιών με παρόχους

Όπως είδαμε παραπάνω, σε πολλές περιπτώσεις, δεν είναι οι πελάτες που αποφασίζουν πού θα ανοιχτούν facilities αλλά τα facilities ανοίγονται από παίκτες-παρόχους και οι υπόλοιποι παίκτες-πελάτες συνδέονται στο facility που τους εξυπηρετεί καλύτερα. Τέτοια παραδείγματα είναι το Διαδίκτυο, στο οποίο οι πάροχοι/εταιρείες εγκαθιστούν servers και κάθε πελάτης συνδέεται στον κοντινότερό του, ή το Ιδιωτικό Σύστημα Υγείας, όπου οι πάροχοι ανοίγουν νοσοκομεία και οι παίκτες εξυπηρετούνται από αυτό που είναι πιο κοντά τους. Σε τέτοιες περιπτώσεις, το κόστος δημιουργίας του δικτύου καλύπτεται από τους παροχείς οι οποίοι χρεώνουν του παίκτες που εξυπηρετούν μία τιμή $p_i$. Στόχος κάθε παρόχου είναι να ανοίξει facilities σε τέτοιες θέσεις ώστε να μεγιστοποιεί τα κέρδη του και οι πάροχοι ανταγωνίζονται μεταξύ τους ώστε να μεγιστοποιήσει ο καθένας το κέρδος του. Αυτή η μη-συνεργατικότητα των παικτών-παρόχων οδήγησε στην παιγνιοθεωρητική ανάλυση του προβλήματος ώστε να γίνει κατανοητή η μορφή των δικτύων που σχηματίζονται όταν το παίγνιο φτάνει σε Ισορροπία, οι τιμές οι οποίες χρεώνουν οι πάροχοι τους πελάτες και το κόστος των τελικών δικτύων σε σχέση με το βέλτιστο.

Εδώ θα παρουσιάσουμε 2 κατηγορίες παιγνίων με παρόχους: το **Ανταγωνιστικό Παίγνιο Χωροθέτησης Υπηρεσιών** (**Competitive Facility Location**) και το **παίγνιο παροχής υπηρεσιών** (**Service Provider Game**). Και στα δύο, θεωρούμε ότι οι πάροχοι πληρώνουν όλο το κόστος του δικτύου και κάθε παίκτης πληρώνει στον πάροχο που έχει το facility που χρησιμοποιεί ένα αντίτιμο για τις υπηρεσίες που λαμβάνει. Στην πρώτη, θεωρούμε ότι το συνολικό κόστος του δικτύου ισούται με το άθροισμα των κοστών εξυπηρέτησης και των κοστών ανοίγματος των facilities και, το αντίτιμο που πληρώνει κάθε παίκτης καθορίζεται από τον πάροχο αρκεί να μην υπερβαίνει την προσωπική αξία του παίκτη για να συνδεθεί στο δίκτυο και ότι οι παίκτες είναι ελεύθεροι να επιλέξουν από ποιο facility θα λάβουν υπηρεσία. Αντίθετα, στην δεύτερη περίπτωση, θεωρούμε ότι τα κόστη εξυπηρέτησης είναι μηδενικά ενώ οι παίκτες δεν έχουν κάποια προσωπική αξία σύνδεσης στο δίκτυο και συνδέονται πάντα στο κοντινότερο τους facility πληρώνοντας αντίτιμο που εξαρτάται από την απόστασή τους από το δεύτερο κοντινότερό τους facility.

Έτσι, στο [45], ορίστηκαν δύο παίγνια ανάλογα με το αν υπάρχει περιορισμός στον αριθμό των facilities που μπορούν να ανοίξουν οι πάροχοι: αν δεν υπάρχει περιορισμός το παίγνιο ονομάζεται **Ανταγωνιστικό Παίγνιο Χωροθέτησης Υπηρεσιών** (**Competitive Facility Location**) ενώ αν κάθε πάροχος μπορεί να ανοίξει έως $k$ facilities ονομάζεται **Ανταγωνιστικό Παίγνιο Χωροθέτησης k-Υπηρεσιών** (**Competitive k-Facility Location**). Στο παίγνια αυτά θεωρούμε ότι οι πάροχοι πληρώνουν τόσο το κόστος ανοίγματος των facilities που τους ανήκουν όσο και τα κόστη εξυπηρέτησης των παικτών που υπηρεσιών. Κάθε πελάτης έχει μία προσωπική αξία η οποία δηλώνει το μέγιστο που είναι διατεθειμένος να πληρώσει για να λάβει υπηρεσίες και οι πάροχοι χρεώνουν τους πελάτες τους ένα αντίτιμο για τις υπηρεσίες που τους παρέχουν.

Τα δύο παίγνια μελετούνται ως υποπεριπτώσεις μίας κατηγορίας παιγνίων στα οποία το πόσο είναι ευχαριστημένος κάθε παίκτης από μία έκβαση του παιχνιδιού εκφράζεται μέσω μίας συνάρτησης (player's utility function). Ακόμα, το πόσο ωφέλιμη είναι μία έκβαση για την κοινωνία εκφράζεται επίσης μέσω μίας συνάρτησης (social utility function). Οι υποθέσεις που γίνονται είναι:

- Οι utility functions των παικτών και η social utility function μετρώνται στις ίδιες μονάδες μέτρησης πχ χρήματα, χρυσός κλπ
- Η social utility function είναι submodular, δηλαδή όσο αυξάνεται η κινητικότητα μέσα σε μία κοινωνία η χρησιμότητα μίας μεμονωμένης πράξης μειώνεται. Αυτό είναι μία ιδιότητα που προκύπτει συχνά στην οικονομία. Για παράδειγμα εάν ανοίξει ένα νοσοκομείο σε μία κοινωνία στην οποία δεν υπάρχουν άλλα νοσοκομεία το όφελος για την κοινωνία είναι πολύ μεγαλύτερο από ότι αν στην κοινωνία αυτή υπάρχουν πολλά νοσοκομεία.
- Το personal utility ενός παίκτη ισούται τουλάχιστον με τη διαφορά του social utility εάν ο παίκτης αποφασίσει να μην συμμετάσχει στο παιχνίδι. Η παραπάνω ιδιότητα προκύπτει φυσικά εάν αναλογιστεί κανείς ότι εάν με κάποιο τρόπο οι παίκτες μπορούσαν να καθορίσουν πώς το social utility διαμοιράζεται μεταξύ τους τότε, εάν κάποιος παίκτης αποφάσιζε να αποσυρθεί από το παιχνίδι, οι υπόλοιποι παίκτες θα ήταν διατεθειμένοι να τον πληρώσουν το ποσό κατά το οποίο θα μεταβαλλόταν το social utility ώστε να παραμείνει στο παιχνίδι. Συνεπώς αυτό είναι και το ελάχιστο ποσό το οποίο είναι διατεθειμένος να κερδίσει ο παίκτης. Ακόμα, από οικονομικής απόψεως, το ποσό αυτό αντιστοιχεί στο Vickrey utility

Συστήματα τα οποία ικανοποιούν τις παραπάνω 3 ιδιότητες ονομάζονται Utility Systems και αποδεικνύεται ότι:

1. Στην περίπτωση που το social utility είναι μη-φθίνουσα submodular συνάρτηση, κάθε Ισορροπία Nash έχει social utility το πολύ 2 φορές μεγαλύτερο του βέλτιστου.
2. Στην περίπτωση που το social utility είναι submodular συνάρτηση, κάθε Ισορροπία Nash έχει social utility το πολύ 2 φορές μεγαλύτερο του βέλτιστου αυξημένο κατά έναν όρο που εξαρτάται από την μορφή της συνάρτησης.

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα μπορεί κανείς να αναλύσει τα Competitive Facility Location και Competitive k-Facility Location: Ας θεωρήσουμε ότι κάθε πελάτης $i$ έχει μία αξία $\pi_i$ που αναπαριστά το πόσο θέλει να λάβει εξυπηρέτηση από κάποιο facility. Τότε, αν $S$ το διάνυσμα στρατηγικών των παικτών σε μία Ισορροπία Nash, μπορούμε να ορίσουμε:

- $\bar{\zeta}(S)$ το αναμενόμενο ποσό κατά το οποίο επωφελούνται οι παίκτες δηλαδή το άθροισμα των αξιών τους μείον το πόσο πληρώνουν στους παροχέες
- $\bar{\mu}(S)$ το αναμενόμενο κοινωνικό πλεόνασμα δηλαδή το αναμενόμενο άθροισμα των αξιών των παικτών μείον το αναμενόμενο άθροισμα των κοστών που πληρώνουν οι εταιρείες

(άθροισμα των κοστών ανοίγματος των facilities και των κοστών εξυπηρέτησης ) ή αλλιώς η αναμενόμενη συνολική αξία μείον τα αναμενόμενα συνολικά έξοδα

- $FC(S)$ τα αναμενόμενα facility costs
- $MP(S)$ τα αναμενόμενα marginal profits δηλαδή η αναμενόμενη διαφορά του αθροίσματος των κοστών εξυπηρέτησης από το άθροισμα των κερδών των παρόχων
- $OPT$ το κοινωνικό πλεόνασμα της βέλτιστης λύσης

Αποδεικνύεται ότι για το Competitive Facility Location και για το Competitive k-Facility Location ισχύει:

$$OPT \leq 2\mu(\bar{S}) + FC(S) = \bar{\mu}(S) + MP(S) + \bar{\zeta}(S)$$

και το όριο αυτό είναι ακριβές.

Το παραπάνω μπορεί να μεταφραστεί φυσικά ως εξής: Στην περίπτωση που είτε τα κόστη ανοίγματος των facilities είτε το άθροισμα των marginal profits και το κοινωνικού πλεονάσματος είναι μικρά σχετικά με το κόστος της βέλτιστης λύσης η αγορά μπορεί να ισορροπήσει αρκετά κοντά σε αυτή. Σε διαφορετική περίπτωση, εάν οι παραπάνω δύο παράγοντες είναι μεγάλοι, το κοινωνικό πλεόνασμα μπορεί να είναι πολύ μικρότερο του βέλτιστου. Τέτοιες περιπτώσεις εμφανίζονται όταν το κόστος ανοίγματος των facilities είναι πολύ υψηλά και, παράλληλα, υπάρχουν πελάτες που είναι διατεθειμένοι να πληρώσουν πολύ για να λάβουν εξυπηρέτηση. Παραδείγματα τέτοιων αγορών είναι η βιομηχανία της υψηλής τεχνολογίας και το σύστημα Υγείας.

Ακόμα, στην περίπτωση του Competitive k-Facility Location όπου τα κόστη ανοίγματος facilities είναι όλα μηδενικά έχουμε ότι για κάθε ισορροπία Nash όπου το διάνυσμα των στρατηγικών των παικτών είναι $S$ έχουμε:

$$OPT \leq \bar{\mu}(S)$$

Τέλος, τόσο για το Competitive Facility Location όσο και για το k-Facility Location υπάρχει πάντα Ισορροπία Nash.

Ας δούμε τώρα ένα άλλο παίγνιο το οποίο ονομάζεται **παίγνιο παροχής υπηρεσιών (Service Provider Game)** και παρουσιάστηκε στο [21]: Εδώ θεωρούμε ότι έχουμε k παροχείς καθένας εκ των οποίων θέλει να ανοίξει το πολύ ένα facility σε κάποια από τις τοποθεσίες στο $F$ αλλά 2 διαφορετικοί παροχείς δεν μπορούν να ανοίξουν facilities στην ίδια τοποθεσία. Οι παροχείς πληρώνουν μόνο το κόστος ανοίγματος του facility τους και θεωρούμε ότι τα κόστη εξυπηρέτησης είναι μηδενικά. Ένα τέτοιο παράδειγμα από την καθημερινή ζωή είναι τα δίκτυα κινητής τηλεφωνίας όπου τα facilities είναι κεραίες οπότε ο πάροχος πληρώνει μόνο την εγκατάστασή τους και δεν πληρώνει επιπλέον κόστος εξυπηρέτησης για κάθε πελάτη που εξυπηρετεί. Επίσης, εδώ είναι καθορισμένο το από που εξυπηρετείται ο κάθε πελάτης και πόσο πληρώνει: λαμβάνει υπηρεσίες από το κοντινότερό του facility και καταβάλει στον αντίστοιχο παροχέα αντίτιμο για τις υπηρεσίες που δέχεται ίσο με την απόστασή του από το δεύτερο κοντινότερο facility (κόστος VCG). Κάθε παροχέας επιθυμεί να μεγιστοποιήσει το κέρδος του δηλαδή το άθροισμα των χρημάτων που του καταβάλλουν οι παίκτες μείον το κόστος ανοίγματος των facilities και θέλουμε να μελετήσουμε το Τίμημα της Αναρχίας αυτού του παιγνίου.

Αρχικά, ορίζεται ένας αλγόριθμος ο οποίος κάνει τοπική αναζήτηση για την βέλτιστη λύση του k-facility Location και αποδεικνύεται ότι η λύση που βρίσκει έχει κόστος το πολύ 5 φορές μεγαλύτερο του κόστους της βέλτιστης καθολικής λύσης. Λαμβάνοντας υπόψη ότι η μέγιστη τιμή του λόγου του κόστους της τοπικά βέλτιστης λύσης προς το κόστος της καθολικά βέλτιστης λύσης αναφέρεται στην βιβλιογραφία ως locality gap([4]), μπορούμε να πούμε ότι το k-facility location έχει locality gap 5. Στην συνέχεια αποδεικνύεται ότι το Τίμημα της Αναρχίας του Service Provider Game ισούται με το locality Gap του k-facility location και, συνεπώς, το Τίμημα της Αναρχίας του παιγνίου είναι 5.

Το παραπάνω αποτέλεσμα είναι ιδιαίτερα σημαντικό καθώς αποτελεί ένα αποδεικτικό στοιχείο ότι το Τίμημα της Αναρχίας ορισμένων παιγνίων πρέπει να σχετίζεται με την ευριστικά τοπική αναζήτηση. Διαισθητικά, όταν κάποιος παίκτης προσπαθεί εγωιστικά να ικανοποιήσει τα συμφέροντα του, ισοδύναμα, προσπαθεί να ελαχιστοποιήσει τοπικά μία συνάρτηση κόστους, συνεπώς το μέγιστο κόστος μίας ισορροπίας σε σχέση με το βέλτιστο θα πρέπει να σχετίζεται με το μέγιστο κόστος μίας τοπικά βέλτιστης λύσης σε σχέση με το ολικά βέλτιστο.

### 3.5.2 Παίγνιο χωροθέτησης Υπηρεσιών χωρίς παρόχους

Ας κάνουμε μία σύντομη επισκόπηση της έρευνας που έχει γίνει στην περίπτωση που στο παίγνιο δεν υπάρχουν πάροχοι αλλά οι ίδιοι οι παίκτες που θέλουν να εξυπηρετηθούν από τα facilities είναι αυτοί που αποφασίζουν και πληρώνουν για το δίκτυο. Για παράδειγμα, τέτοιες περιπτώσεις προκύπτουν όταν σε μία κοινωνία θέλει να ανοιχτεί μία δημόσια υπηρεσία (π.χ. σχολείο) της οποίας το κόστος καλύπτεται από τα μέλη της κοινωνίας που τη χρησιμοποιούν.

Έχουν ερευνηθεί τα ακόλουθα παίγνια στην περίπτωση όπου δεν υπάρχουν πάροχοι, τα οποία θα παρουσιαστούν με περισσότερες λεπτομέρειες στην συνέχεια:

- το Δίκαιο Παίγνιο χωροθέτησης όπου οι παίκτες που χρησιμοποιούν ένα facility μοιράζονται εξίσου το κόστος του
- το Αυθαίρετο Παίγνιο Χωροθέτησης στο οποίο οι παίκτες είναι ελεύθεροι να συνεισφέρουν όσο επιθυμούν στο κόστος του δικτύου
- το Παίγνιο Καθορισμού Συμμετεχόντων και Σχήματος Διαμοιρασμού Κόστους, στο οποίο το οποίο ερευνά το ποιοί παίκτες πρέπει να συμμετάσχουν στο παίγνιο και τι πρέπει να πληρώσει καθένας από αυτούς ώστε το παίγνιο, όταν φτάνει σε Ισορροπία Nash να έχει κόστος κοντά στην βέλτιστη λύση
- το Δίκαιο Παίγνιο Χωροθέτησης με βεβαρυμένους παίκτες πάνω σε γράφο, το μερίδιο του κόστους ανοίγματος facility που πληρώνει κάθε παίκτης είναι ανάλογο του ποσού υπηρεσίας που λαμβάνει από αυτό σε σχέση με το πόση υπηρεσία λαμβάνουν οι υπόλοιποι οι οποίοι είναι συνδεδεμένοι στο facility αυτό

Ας δούμε τώρα τα παραπάνω παίγνια πιο αναλυτικά:

**Δίκαιο Παίγνιο Χωροθέτησης**

Έστω ότι όλοι οι παίκτες επιθυμούν να συνδεθούν σε ένα ανοικτό facility για να λαμβάνουν υπηρεσίες από αυτό και τόσο τα κόστη εξυπηρέτησης όσο και τα κόστη ανοίγματος των facilities καλύπτονται από τους παίκτες. Ας σκεφτούμε αρχικά την περίπτωση όπου οι παίκτες οι οποίοι εξυπηρετούνται από ένα facility μοιράζονται εξίσου το κόστος του. Αυτός ο τρόπος διαμοιρασμού κόστους είναι, όπως αναφέρθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, όχι μόνο δίκαιος αλλά έχει και σημαντικές οικονομικές ιδιότητες.

Σε αυτή την περίπτωση, το παίγνιο είναι ισοδύναμο με ένα multicast game σε κατευθυνόμενο γράφο: Συγκεκριμένα ας θεωρήσουμε ότι υπάρχει ένας κόμβος-ρίζα $r$, ένα σύνολο κόμβων $F$ στους οποίους δεν υπάρχει κανένας παίκτης και ένα σύνολο κόμβων $C$ με καθέναν από τους οποίους είναι συσχετισμένος ένας παίκτης $i$. Για κάθε κόμβο $j \in F$ υπάρχει μία κατευθυνόμενη ακμή από τον $j$ στην ρίζα $r$ με μήκος $f_j$ και για κάθε κόμβους $i \in C$ και $j \in F$ υπάρχει μία ακμή από τον $i$ στο $j$ μήκους $c_{ij}$. Κάθε παίκτης $i$ θέλει να συνδεθεί στην ρίζα $r$ μέσω ενός κόμβου $j \in F$ και πληρώνει την ακμή μήκους $c_{ij}$ και το μερίδιο κόστους της ακμής μήκους $f_j$ που του αναλογεί.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η μελέτη των Multicast Games([17]) που παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο παρακινήθηκε σε μεγάλο βαθμό από το Facility Location. Ως Multicast Game και, συνεπώς, Fair Connection Game τα όρια $O(logN)$ στο Τίμημα της Σταθερότητας και $O(N)$ στο Τίμημα της Αναρχίας συνεχίζουν να ισχύουν.

**Αυθαίρετο Παίγνιο Χωροθέτησης**

Όπως είδαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, η μελέτη των παιγνίων σχηματισμού δικτύων στην περίπτωση όπου δίνεται η ελευθερία στους παίκτες να καθορίσουν οι ίδιοι το ποσό που συνεισφέρουν στο δίκτυο μπορεί να μας δώσει μία καλή διαίσθηση του πόσο η αναρχία μπορεί να βλάψει ένα παιχνίδι. Έτσι, στο [13] ερευνάται ένα Uncapacitated Facility Location Game στο οποίο οι παίκτες επιθυμούν να συνδεθούν σε κάποιο ανοικτό facility και είναι ελεύθεροι να αποφασίσουν πόσο θα συνεισφέρουν τόσο στο κόστος εξυπηρέτησης από το facility που θα επιλέξουν όσο και στο κόστος ανοίγματός του.

Το παίγνιο ερευνάται στα πλαίσια μίας κλάσης παιγνίων τα οποία ονομάζονται παίγνια κάλυψης (covering games) και οι δύο βασικές υποκατηγορίες τους είναι τα παίγνια κάλυψης κόμβων (vertex cover games) και τα παίγνια κάλυψης ακμών (edge cover games). Συσχετίζοντας τα vertex cover games με τα παίγνια κάλυψης ακεραίων (integer cover games) μπορεί κανείς να καταλήξει σε κάποια αποτελέσματα για την ύπαρξη και ποιότητα των ισορροπιών Nash στα Vertex Cover Games και, συνεπώς, σε συμπεράσματα για το εν λόγω Uncapacitated Facility Location Game.

Συγκεκριμένα, αρχικά, καταλήγουμε στο ότι υπάρχει ένα στιγμιότυπο αυτού του παιγνίου το οποίο δεν διαθέτει Ισορροπία Nash και ότι το Τίμημα της Σταθερότητας είναι τουλάχιστον $N-2$. Ακόμα, η εύρεση μίας Ισορροπίας Nash σε αυτά τα παίγνια είναι, γενικά, NP-δύσκολη αλλά υπάρχει μία υποκατηγορία τους για την οποία υπάρχει πολυωνυμικός αλγόριθμος που υπολογίζει την βέλτιστη Ισορροπία Nash. Τέλος, όσον αφορά στις προσεγγιστικές Ισορροπίες Nash του παιγνίου, κάθε στιγμιότυπο του παιγνίου έχει (3,3)-ισορροπία Nash, δηλαδή μία κατάσταση στην οποία κανένας παίκτης δεν μπορεί να αλλάξει την στρατηγική του ώστε να πληρώνει το $1/3$ αυτού που πληρώνει και στην οποία το συνολικό κόστος είναι το πολύ 3 φορές το κόστος της βέλτιστης λύσης. Τέλος, υπάρχει αλγόριθμος ο οποίος μπορεί να υπολογίσει μία (3,3)-προσεγγιστική Ισορροπία Nash.

**Παίγνιο Καθορισμού Συμμετεχόντων και Σχήματος Διαμοιρασμού Κόστους**

Στο [42] ερευνάται μία άλλη εκδοχή του παιγνίου όπου όλοι οι παίκτες θέλουν να λάβουν υπηρεσίες και έχουν ένα άνω όριο στο ποσό το όποιο είναι διατεθειμένοι να πληρώσουν για αυτές (προσωπική αξία). Εδώ, ερευνάται ένα γενικό παίγνιο σχηματισμού δικτύου στο οποίο πρέπει να δημιουργηθεί ένα δίκτυο του οποίου κάθε ακμή έχει ένα προκαθορισμένο κόστος και το συνολικό κόστος του πρέπει να καλυφθεί από τους παίκτες που συμμετέχουν στο παίγνιο. Κάθε παίκτης $i$ έχει μία αξία $\pi_i$ η οποία αναπαριστά το πόσο θέλει να συμμετάσχει στο δίκτυο. Η ερώτηση που πρέπει να απαντηθεί είναι: ποιοι παίκτες πρέπει να συμμετάσχουν στο τελικό δίκτυο και πως πρέπει να μοιραστούν το κόστος ώστε το τελικό δίκτυο να είναι το φτηνότερο δυνατό δεδομένου του γράφου του δικτύου και των αξιών των παικτών.

Το γεγονός ότι ο πυρήνας για αυτό το πρόβλημα είναι κενός, κινητοποίησε την μελέτη cost sharing schemes που είναι $\alpha$-approximate cost recovery δηλαδή το άθροισμα των ποσών που πληρώνουν οι παίκτες αναπληρώνει τουλάχιστον $1/\alpha$ του κόστους του αγορασμένου δικτύου. Εδώ, παρουσιάζεται ένας μηχανισμός ο οποίος στην περίπτωση που το facility location game ορίζεται σε ένα χώρο στον οποίο οι αποστάσεις των σημείων ικανοποιούν την τριγωνική ανισότητα καταλήγει στην διαμόρφωση cross-monotonic cost shares για τους παίκτες έτσι ώστε το άθροισμα τους να καλύπτει το $1/3$ του κόστους του δικτύου. Αξίζει να τονιστεί, ότι με αυτά τα cost shares, επειδή είναι cross-monotonic όπως είδαμε στην εισαγωγή, οι παίκτες δεν έχουν λόγο να κρύψουν την πραγματική τους αξία αλλά, δυστυχώς, αναπληρώνουν μόνο ένα ποσοστό του συνολικού κόστους του δικτύου.

**Δίκαιο Παίγνιο Χωροθέτησης με βεβαρυμένους παίκτες πάνω σε γράφο**

Στο [28] ερευνάται μία παραλλαγή του competitive facility location στην οποία, σε αντίθεση με τις προηγούμενες περιπτώσεις, τα σημεία στα οποία μπορούν να ανοιχτούν facilities και τα σημεία στα οποία αντιστοιχούν τα demands των παικτών δεν είναι απαραίτητα διακριτά (ισοδύναμα, τα σύνολα $F$ και $C$ ταυτίζονται). Συγκεκριμένα, το παίγνιο ορίζεται πάνω σε έναν γράφο $G(V, E)$. Κάθε παίκτης $i$ είναι συσχετισμένος με έναν κόμβο $u_i \in V$ και με ένα βάρος $w_i$ το οποίο εκφράζει το πόση υπηρεσία θέλει να λάβει. Όλοι οι παίκτες θέλουν να συνδεθούν σε κάποιο ανοικτό facility και να λάβουν υπηρεσία από αυτό ίση με το βάρος τους. Τα facilities μπορούν να ανοιχτούν σε οποιονδήποτε κόμβο $v \in V$ και το κόστος ανοίγματος τους μοιράζεται στους παίκτες που το χρησιμοποιούν ανάλογα με τον αριθμό τους και το πόση υπηρεσία λαμβάνει ο καθένας από αυτούς. Συγκεκριμένα το κόστος ενός παίκτη $i$ ο οποίος λαμβάνει υπηρεσία από ένα facility $v$ ισούται με $w_i d(u_i, v) + w_i c_v / W_v$ όπου $W_v$ το άθροισμα των βαρών των παικτών που εξυπηρετούνται από το facility του κόμβου $v$. Είναι εύκολο να δούμε ότι στην περίπτωση που δεν έχουμε βάρη (θεωρούμε ότι όλα τα demands είναι ίσα με 1), οι παίκτες που χρησιμοποιούν ένα facility μοιράζονται δίκαια το κόστος του οπότε έχουμε δίκαιο διαμοιρασμό κόστους.

Στην περίπτωση όπου δεν έχουμε βάρη και το παίγνιο ορίζεται πάνω σε έναν γράφο στον οποίο οι αποστάσεις των κόμβων ικανοποιούν την τριγωνική ανισότητα, αποδεικνύεται ότι εάν το παίγνιο ξεκινήσει από οποιαδήποτε κατάσταση και στην συνέχεια οι παίκτες αρχίσουν ένας ένας να αλλάζουν την στρατηγική τους για να μειώσουν το κόστος τους (best response) όταν το παίγνιο φτάσει σε Ισορροπία το κόστος του δικτύου είναι το πολύ 2.36 φορές το κόστος του αρχικού δικτύου. Έτσι καταλήγουμε ότι το Τίμημα της Σταθερότητας για αυτό το παίγνιο είναι το πολύ 2.36. Ακόμα δίνεται ένα κάτω όριο στο Τίμημα της Σταθερότητας για αυτό το παίγνιο ίσο με 1.45. Στην συνέχεια, μελετούνται Ισχυρές Ισορροπίες Nash δηλαδή Ισορροπίες όπου, ακόμα και αν μία ομάδα παικτών συνεργαστεί και όλοι μαζί οι παίκτες αποφασίσουν να αλλάξουν την στρατηγική τους να μην έχουν όλοι όφελος. Αρχικά παρατηρείται ότι υπάρχουν στιγμιότυπα του παιγνίου στα οποία δεν υπάρχουν Ισχυρές Ισορροπίες Nash. Παρόλα αυτά αν αναζητήσουμε $\alpha$-προσεγγιστικές Ισχυρές Ισορροπίες Nash, δηλαδή Ισορροπίες στις οποίες, αν μία όμάδα παικτών αποφασίσει να αλλάξει την στρατηγική της, κανένας παίκτης να μην μπορεί να μειώσει το κόστος του παραπάνω από έναν παράγοντα $\alpha$, αποδεικνύεται ότι για κάθε $\alpha > 0$ υπάρχει μία $alpha$-προσεγγιστική Ισχυρή Ισορροπία Nash στο Facility Location Game με δίκαιη κατανομή των κοστών των facilities, ακόμα και για γενικά δίκτυα και παίκτες με βάρη. Αποδεικνύεται, ακόμα, ότι για κάθε $\alpha \geq e$ το Τίμημα της Αναρχίας των $\alpha$-προσεγγιστικών Ισχυρών Ισορροπιών Nash είναι άνω φραγμένο από $O(H(N))$ και αυτό το όριο είναι ακριβές στην περίπτωση όπου οι παίκτες δεν έχουν βάρη. Στην περίπτωση που οι παίκτες έχουν βάρη είναι άνω φραγμένο από $O(lnW)$ όπου $W$ το άθροισμα των βαρών των παικτών. Τέλος, για $e$-προσεγγιστικές Ισχυρές Ισορροπίες Nash στην περίπτωση όπου έχουμε γράφο στον οποίο οι αποστάσεις ικανοποιούν την τριγωνική ανισότητα και οι παίκτες δεν έχουν βάρη, το Τίμημα της Αναρχίας είναι άνω φραγμένο από έναν σταθερό αριθμό.

# Κεφάλαιο 4

# Σχήματα διαμοιρασμού και επιδότησης κόστους στο Πρόβλημα Χωροθέτησης Υπηρεσιών

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα της δικής μας έρευνας για ένα Παίγνιο Χωροθέτησης Υπηρεσιών. Στο παίγνιο αυτό, οι παίκτες επιθυμούν να λάβουν εξυπηρέτηση από κάποιο ανοικτό facility και πληρώνουν οι ίδιοι τα κόστη εξυπηρέτησης και τα κόστη ανοίγματος των facilities, τα οποία εφεξής θα θεωρήσουμε ότι είναι όλα ίσα με $f$. Σε αντίθεση με τα παίγνια που παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο και κινητοποιημένοι από το [20], θεωρούμε ότι οι παίκτες καταφτάνουν ένας ένας στο παίγνιο και κάθε παίκτης που καταφτάνει στο παιχνίδι αποφασίζει εγωιστικά εάν θα ανοιχτεί καινούργιο facility και από ποιο facility θα εξυπηρετηθεί λαμβάνοντας υπόψη του μόνο τις επιλογές των παικτών που έχουν φτάσει πριν από αυτόν. Αντίστοιχα με την προαναφερθείσα δουλειά, ερευνάμε τις σειρές των παικτών που, σε συνδυασμό με την εφαρμογή των εκάστοτε σχημάτων διαμοιρασμού κόστους, μπορούν να οδηγήσουν σε δίκτυα υψηλού ή χαμηλού κόστους σε σχέση με το βέλτιστο.

Τυπικά, όπως και στα προηγούμενα, θεωρούμε ότι υπάρχει ένα σύνολο παικτών $U$ όπου $|U| = N$ οι οποίοι θέλουν να συνδεθούν σε κάποιο ανοικτό facility. Ακόμα, υπάρχει ένας μετρικός χώρος $(M, d)$ και κάθε παίκτης $i$ είναι συσχετισμένος με κάποιο σημείο $u_i \in M$ το οποίο δηλώνει την τοποθεσία του (2 ή παραπάνω παίκτες μπορούν να είναι στην ίδια τοποθεσία). Όπως και πριν, κάθε φορά που αναφερόμαστε σε κάποιον παίκτη ή facility θα θεωρούμε ότι αναφερόμαστε και στην τοποθεσία του. Οι παίκτες καταφτάνουν ένας ένας και κάθε παίκτης $i$ που λαμβάνει υπηρεσία από κάποιο facility $c$ πληρώνει ένα κόστος εξυπηρέτησης το οποίο ισούται με την απόσταση του από αυτό $d(u_i, c)$ και ένα μερίδιο του κόστους του facility το οποίο δίνεται από μία συνάρτηση $\xi(i, S)$ όπου $S \subseteq U$ είναι το σύνολο των παικτών που χρησιμοποιούν το facility $c$.

## 4.1 Μελέτη Σχημάτων Διαμοιρασμού Κόστους στο Πρόβλημα Χωροθέτησης

Σκοπός του παρόντος υποκεφαλαίου είναι να μελετήσουμε την συνάρτηση $\xi$ και τις ιδιότητες του παιγνίου ανάλογα με την μορφή της. Η μόνες υποθέσεις που κάνουμε είναι ότι το σχήμα διαμοιρασμού κόστους είναι budget balanced, δηλαδή το κόστος του facility καλύπτεται πλήρως από το άθροισμα των ποσών που πληρώνουν για αυτό οι παίκτες οι οποίοι το χρησιμοποιούν, και ότι είναι separable, δηλαδή ότι το πώς διαμοιράζεται το κόστος του facility στους παίκτες εξαρτάται μόνο από τους παίκτες που το χρησιμοποιούν. Τυπικά, για κάθε facility $c$, $\sum_{i \in S} \xi(i, S) = f$ όπου $S$ το σύνολο παικτών που λαμβάνει εξυπηρέτηση από το facility $c$. Αξίζει σε αυτό το σημείο να παρατηρήσουμε ότι

$$\xi(i, \{i\}) = f$$

δηλαδή εάν από ένα facility εξυπηρετείται μόνο ένας παίκτης, τότε αυτός θα πληρώνει όλο το κόστος ανοίγματος του facility.

Ας αναλογιστούμε αρχικά την περίπτωση όπου όταν 2 ή παραπάνω παίκτες εξυπηρετούνται από 1 facility δεν επιτρέπεται το κόστος ανοίγματος του facility να καλύπτεται μόνο από έναν από αυτούς. Αυτός ο περιορισμός είναι φυσικός αφού δεν είναι δίκαιο μόνο ένας παίκτης να επωμίζεται όλο το κόστος του facility όταν υπάρχουν και άλλοι που το χρησιμοποιούν. Τυπικά $\xi(i, S) < f, \forall S \supset \{i\}$. Αντίθετα, εάν υπάρχουν παίκτες οι οποίοι πληρώνουν όλο το κόστος κάποιου facility ακόμα και αν χρησιμοποιείται από άλλους, θα χαρακτηρίζουμε τους παίκτες δικτατορικούς.

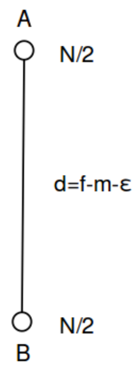
### 4.1.1 Αν δεν γνωρίζουμε την τοπολογία του δικτύου

Ας εστιάσουμε, αρχικά στην περίπτωση όπου δεν γνωρίζουμε την τοπολογία του δικτύου και καλούμαστε να ορίσουμε ένα ενιαίο σχήμα διαμοιρασμού κόστους για όλα τα πιθανά δίκτυα που μπορεί να μας δοθούν.

Στην περίπτωση όπου το σχήμα διαμοιρασμού κόστους δεν περιέχει δικτατορικούς παίκτες μπορούμε να καταλήξουμε στο ακόλουθο συμπέρασμα:

***Θεώρημα* 4.12.** *Όταν ένα σχήμα διαμοιρασμού κόστους δεν περιέχει δικτατορικούς παίκτες, υπάρχει μία τοπολογία παικτών στην οποία οποιαδήποτε σειρά άφιξης των παικτών οδηγεί σε μία Ισορροπία Nash η οποία έχει κόστος $O(N)$ φορές το κόστος της βέλτιστης λύσης.*

*Απόδειξη.* Ας θεωρήσουμε την τοπολογία του επόμενου σχήματος:




όπου $m = max_{i \in U, i \subset S \subseteq U} \xi(i, S)$ και $\epsilon > 0$.

Ας θεωρήσουμε μία τυχαία σειρά με την οποία καταφτάνουν οι παίκτες. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι ο πρώτος παίκτης φτάνει στον κόμβο A. Ο παίκτης αυτός θα ανοίξει ένα facility στον κόμβο A πληρώνοντας f. Ας σκεφτούμε τώρα τον πρώτο παίκτη που θα φτάσει στον κόμβο B. Ο παίκτης αυτός εάν αποφασίσει να ανοίξει δικό του facility θα πρέπει να πληρώσει κόστος f. Αντίθετα, εάν συνδεθεί στο facility στο A στο οποίο θεωρούμε ότι είναι συνδεδεμένοι οι παίκτες $S$ θα πληρώσει κόστος

$$d(B, A) + \xi(i, S) = f - m - \epsilon + \xi(i, S) = f - max_{i \in U, i \subset S \subseteq U} \xi(i, S) - \epsilon + \xi(i, S) \leq f - \epsilon < f$$

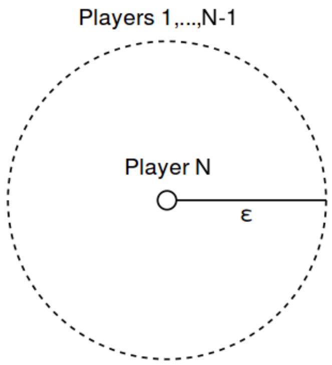
Άρα ο πρώτος παίκτης που θα φτάσει στον κόμβο B δεν θα ανοίξει facility σε αυτό και, συνεπώς ούτε και οι υπόλοιποι παίκτες που θα φτάσουν στον B δεν θα ανοίξουν facility σε αυτό. Επίσης, όσοι παίκτες φτάσουν στον κόμβο A θα συνδεθούν στον κόμβο A αφού αν ανοίξουν δικό τους facility θα πρέπει να πληρώσουν κόστος τουλάχιστον f ενώ συνδεόμενοι στο facility στο A θα πληρώσουν κόστος το πολύ f (έχουν μηδενικό κόστος εξυπηρέτησης και το μερίδιο του κόστους ανοίγματος του facility που θα πληρώσουν είναι το πολύ f). Επίσης, αφού φτάσουν όλοι οι παίκτες, οι παραπάνω παρατηρήσεις συνεχίζουν να ισχύουν και, συνεπώς, κανένας παίκτης δεν θα θέλει να παρεκκλίνει από το να συνδεθεί στον A. Άρα το παίγνιο θα είναι σε Ισορροπία Nash. Επίσης, το κόστος αυτού του δικτύου ισούται με το άθροισμα κοστών ανοίγματος των facilities και το άθροισμα των κοστών εξυπηρέτησης, δηλαδή $f + (f - m - \epsilon) * N/2$. Από την άλλη πλευρά το βέλτιστο δίκτυο είναι να ανοίξουν 2 facilities, ένα στον κόμβο A και ένα στον B και έχει κόστος $2f$. Συνεπώς το κόστος του τελικού δικτύου είναι $O(N)$ φορές μεγαλύτερο του βέλτιστου. □

Είναι ενδιαφέρον να ερευνήσουμε τι συμβαίνει όταν ένα σχήμα διαμοιρασμού κόστους περιέχει δικτατορικούς παίκτες οπότε επιβάλλουμε σε κάποιους παίκτες να αναλάβουν όλο το κόστος των facilities που χρησιμοποιούν ακόμα και εάν αυτό χρησιμοποιείται και από άλλους παίκτες. Σε αυτή την περίπτωση, φαίνεται ότι για κάποια τέτοια σχήματα υπάρχουν τοπολογίες παικτών στις οποίες, ανάλογα με την σειρά με την οποία καταφτάνουν οι παίκτες, το τελικό αποτέλεσμα μπορεί να είναι καλό ή κακό. Εφεξής θα εστιάσουμε σε χώρους στους οποίους ισχύει η τριγωνική ανισότητα.

Ας θεωρήσουμε το ακόλουθο σχήμα διαμοιρασμού κόστους: Θεωρούμε ότι έχουμε τους παίκτες $1, 2, ..., N$

***Ορισμός* 4.13. *Δικτατορικό σχήμα διαμοιρασμού κόστους*:** *υπαγορεύει ότι το κόστος ενός facility καλύπτεται πλήρως από τον μεγαλύτερο παίκτη (δηλαδή αυτόν που έχει την μεγαλύτερη ταμπέλα-index). Τυπικά,* $\xi(i, \{i\} \subset S \subseteq \cup_{j \leq i} j) = f$ *και* $\xi(i, \{i\} \subset S \subseteq \cup_{j \geq i} j) = 0$. *Έτσι, κάθε φορά που καταφτάνει κάποιος παίκτης στον χώρο, ανοίγει ένα facility στην τοποθεσία του, εάν όλοι οι παίκτες που είναι στην περιοχή του έχουν μικρότερα indexes. Διαφορετικά, θα συνδέεται στο κοντινότερό του facility.*

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι για την τοπολογία του επόμενου σχήματος, εάν το σχήμα διαμοιρασμού κόστους είναι το δικτατορικό, υπάρχουν σειρές άφιξης των παικτών που τους οδηγούν στο να δημιουργήσουν το βέλτιστο δίκτυο και σειρές που τους οδηγούν σε δίκτυα πολύ υψηλού κόστους:




όπου ο παίκτης N βρίσκεται στο κέντρο του κύκλου, η ακτίνα είναι $\epsilon = f/N - 1$ και οι παίκτες είναι ομοιόμορφα διεσπαρμένοι στην περιφέρεια του κύκλου.

Η βέλτιστη λύση αποτελείται από μόνο ένα facility στο κέντρο του κύκλου και έχει συνολικό κόστος:

$$f + \sum_{i<N} d(i, N) = f + (N-1)\epsilon = 2f$$

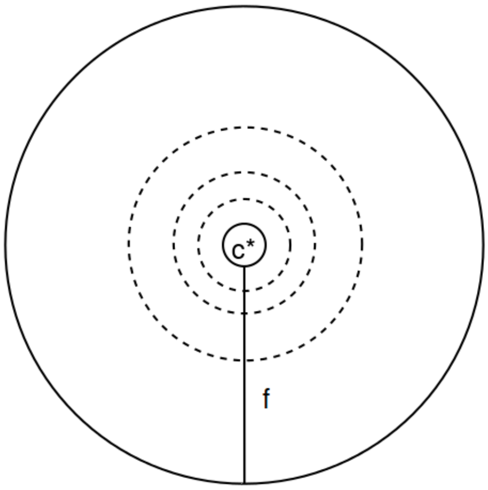
Εάν οι παίκτες φτάσουν σε φθίνουσα σειρά, ο παίκτης N θα φτάσει πρώτος και θα ανοίξει ένα facility στο κέντρο του κύκλου. Στην συνέχεια, οι υπόλοιποι παίκτες θα αποφασίσουν να λάβουν εξυπηρέτηση από αυτό πληρώνοντας μηδενικό κόστος ανοίγματος και κόστος εξυπηρέτησης ίσο με την ακτίνα του κύκλου $\epsilon$. Συνεπώς, το παίγνιο θα καταλήξει στην βέλτιστη λύση και το κόστος του δικτύου θα είναι ίσο με το βέλτιστο.

Αντίθετα, αν οι παίκτες φτάσουν σε αύξουσα σειρά κάθε παίκτης που θα φτάνει θα αποφασίζει να ανοίξει δικό του facility και, έτσι το τελικό κόστος του δικτύου θα είναι $Nf$ δηλαδή $N/2$ φορές το κόστος της βέλτιστης λύσης.

Η παραπάνω παρατήρηση μας κινητοποίησε να ερευνήσουμε εάν για κάθε τοπολογία που μπορεί να μας δοθεί μπορούμε να βρούμε μία σειρά άφιξης των παικτών έτσι ώστε, εάν οι παίκτες καταφτάσουν με αυτή την σειρά και χρησιμοποιώντας το παραπάνω σχήμα διαμοιρασμού κόστους, οι παίκτες να οδηγούνται στην βέλτιστη λύση. Πράγματι:

***Θεώρημα* 4.13.** *Για το δικτατορικό σχήμα διαμοιρασμού κόστους, εάν μας δοθεί μια οποιοδήποτε τοπολογία παικτών μπορούμε σε χρόνο* $O(N log N)$ *να υπολογίσουμε μία σειρά άφιξης* *των παικτών που οδηγεί τους παίκτες σε ένα δίκτυο κόστους το πολύ $O(logN)$ αυτό του βέλτιστου.*

*Απόδειξη.* Ας εστιάζουμε, αρχικά, στην περίπτωση που η βέλτιστη λύση περιέχει ένα μόνο ανοικτό facility. Διαισθητικά, εάν ο παίκτης με το μεγαλύτερο index είναι μακριά από την βέλτιστη τοποθεσία του facility, εάν έρθει πρώτος, θα ανοίξει ένα facility στην τοποθεσία του και όλοι οι υπόλοιποι παίκτες θα συνδεθούν σε αυτόν. Έτσι, το κόστος του τελικού δικτύου μπορεί να είναι πολύ υψηλό. Αυτό που μπορούμε να δοκιμάσουμε όμως είναι να τοποθετήσουμε πρώτα αυτούς που είναι σχετικά κοντά στο βέλτιστο κέντρο και έχουν μεγάλα indexes έτσι ώστε αυτοί να ανοίξουν facilities σχετικά κοντά σε αυτό οπότε τα κόστη εξυπηρέτησης των υπολοίπων να μην αυξηθούν πολύ. Ας υποθέσουμε ότι η βέλτιστη λύση αποτελείται από ένα μόνο facility στην τοποθεσία $c^*$ και ας συμβολίσουμε την απόσταση κάθε παίκτη $i$ από αυτή την τοποθεσία με $d_i^* = d(i, c^*)$. Ακόμα, η μέση απόσταση των παικτών από το $c^*$ θα είναι $a^* = A * /N$ όπου $A^* = \sum_{i=1}^{N} d_i^*$. Αρχικά, θα χωρίσουμε την περιοχή γύρω από το $c^*$ σε υπό-περιοχές $1, 2, 3, ...$ όπως στο κάτωθι σχήμα όπου η περιοχή 1 αντιστοιχεί στην περιοχή εντός του κύκλου με κέντρο $c^*$ και ακτίνα $a^*$ και κάθε περιοχή $i > 1$ αντιστοιχεί στην περιοχή μεταξύ των ομόκεντρων κύκλων με κέντρο $c^*$ και ακτίνες $2^{i-1}a^*$ και $2^i a^*$ αντίστοιχα.




Παρατηρούμε ότι πρέπει $\forall i$:

$$2^i a^* \leq A^* \Rightarrow 2^i A^*/N \leq A^* \Rightarrow 2^i \leq N \Rightarrow i \leq log_2 N$$

Στην συνέχεια, μπορούμε να καθορίσουμε την σειρά των παικτών ως εξής: τοποθετούμε πρώτο στην σειρά τον παίκτη της περιοχής 1 με το μεγαλύτερο index $i_1$ ο οποίος θα ανοίξει facility στην τοποθεσία του. Έπειτα, μπορούν να έρθουν όλοι οι υπόλοιποι παίκτες της περιοχής 1 οι οποίοι όλοι θα αποφασίσουν να λάβουν εξυπηρέτηση από το facility του πρώτου. Επόμενος θα είναι ο παίκτης της περιοχής 2 με το μεγαλύτερο index $i_2$ ο οποίος, αν $i_2 > i_1$ θα ανοίξει facility στην τοποθεσία του. Όλοι οι υπόλοιποι παίκτες της περιοχής 2 μπορούν να έρθουν με οποιαδήποτε σειρά και θα συνδεθούν σε κάποιο υπάρχον facility. Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο με τους παίκτες της περιοχής 3 κ.ο.κ. Τυπικά, η διαδικασία που θα ακολουθήσουμε για να καθορίσουμε την σειρά των παικτών είναι:

- **Βήμα 1**: Αρχικά χωρίζουμε όλους τους παίκτες ανάλογα με την περιοχή στην οποία ανήκουν και για κάθε περιοχή βρίσκουμε τον παίκτη με το μεγαλύτερο index. Θα συμβολίζουμε με $i_k$ το μεγαλύτερο index (και τον αντίστοιχο παίκτη) της περιοχής $k$. Η παραπάνω διαδικασία έχει πολυπλοκότητα $O(N)$.

- **Βήμα 2**:Τοποθετούμε τον παίκτη $i_1$ πρώτο στην σειρά. Ο παίκτης αυτός, αφού βρίσκεται στην περιοχή $1$, είναι σε απόσταση το πολύ $a^*$ από το $c^*$ και θα ανοίξει ένα facility στην τοποθεσία του πληρώνοντας κόστος $f$. Στην συνέχεια, τοποθετούμε όλους τους υπόλοιπους παίκτες της περιοχής $1$ στην σειρά με τυχαίο τρόπο. Κάθε τέτοιος παίκτης $j$ θα θέλει να συνδεθεί στο facility του $i_1$ και θα πληρώσει κόστος σύνδεσης το πολύ

  $$d(j, i_1) \leq d(j, c^*) + d(i_1, c^*) \Rightarrow d(j, i_1) \leq 2a^*$$

  Συνεπώς κάθε παίκτης το πολύ διπλασιάζει το κόστος σύνδεσής του.

- **Βήμα 3**: Για $l = 2$ έως $\lfloor logN \rfloor + 1$:

  – Τοποθετούμε τον παίκτη $i_l$ επόμενο στην σειρά. Ο παίκτης αυτός, εάν έχει φτάσει προηγούμενος κάποιος παίκτης με μεγαλύτερο indexθα θέλει να ανοίξει δικό του facility πληρώνοντας $f$. Διαφορετικά θα θέλει να συνδεθεί σε κάποιο υπάρχον facility πληρώνοντας το πολύ f

  – Τοποθετούμε τους υπόλοιπους παίκτες της περιοχής $l$ στην σειρά με τυχαίο τρόπο. Κάθε τέτοιος παίκτης $j$ πληρώνει το πολύ

  $$d(i_l, j) \leq d(i_l, c^*) + d(j, c^*) \leq 2^{l+1}a^* = 4 * 2^{l-1}a^* \leq 4d_j^*$$

  Συνεπώς κάθε τέτοιος παίκτης το πολύ τετραπλασιάζει το κόστος σύνδεσης του.

Η παραπάνω διαδικασία έχει πολυπλοκότητα το πολύ $O(N)$. Επίσης το τελικό δίκτυο θα έχει κόστος ίσο με το άθροισμα των κοστών ανοίγματος των facilities και των κοστών εξυπηρέτησης των παικτών. Τα facilities που ανοίγουν είναι το πολύ $\lfloor logN \rfloor + 1$ όποτε το συνολικό κόστος ανοίγματος είναι $O(flogN)$. Όσον αφορά στο κόστος εξυπηρέτησης, στο βήμα 2 είναι το πολύ $2Na^* = 2A^*$ και στο βήμα 3 είναι το πολύ $4A_i^*$ αφού, κάθε παίκτης, όπως φάνηκε παραπάνω, το πολύ τετραπλασιάζει το κόστος εξυπηρέτησής του. Συνεπώς, το τελικό κόστος του δικτύου είναι $O(logN)$ αυτό του βέλτιστου. Στην περίπτωση όπου έχουμε περισσότερα από 1 facilities μπορούμε να γενικεύσουμε την παραπάνω μέθοδο ως εξής: Μπορούμε να εφαρμόσουμε το βήμα 1 του παραπάνω αλγορίθμου για κάθε cluster παικτών (δηλαδή παίκτες που εξυπηρετούνται από το ίδιο facility στην βέλτιστη λύση) και στην συνέχεια, αφού τους διατάξουμε σε αύξουσα σειρά, να τους τοποθετήσουμε πρώτους. Το βήμα αυτό έχει πολυπλοκότητα $O(NlogN)$ λόγω του ότι πρέπει να διατάξουμε τους παίκτες. Έτσι θα ανοιχτούν τα κατάλληλα facilities. Στην συνέχεια μπορούν να έρθουν όλοι οι υπόλοιποι παίκτες με τυχαία σειρά και να συνδεθούν στα υπάρχοντα facilities τετραπλασιάζοντας το κόστος τους όπως και πριν. Συνεπώς, οι παίκτες θα οδηγηθούν σε ένα δίκτυο με κόστος το πολύ $O(logN)$ αυτό του βέλτιστου. $\square$

Παρόλα αυτά, στην περίπτωση που η βέλτιστη λύση αποτελείται από 1 μόνο facility και οι παίκτες έρχονται στο παίγνιο με τυχαία σειρά, το αναμενόμενο κόστος του δικτύου είναι τουλάχιστον $\sqrt{N}$ φορές αυτό του βέλτιστου.

***Θεώρημα* 4.14.** *Για το δικτατορικό σχήμα διαμοιρασμού κόστους, αν η βέλτιστη λύση αποτελείται από 1 μόνο facility και οι παίκτες καταφτάνουν με τυχαία σειρά το αναμενόμενο κόστος του δικτύου είναι τουλάχιστον $\sqrt{N}$ φορές αυτό του βέλτιστου*

*Απόδειξη.* Από το [31] γνωρίζουμε ότι για οποιαδήποτε ακολουθία $N$ διακριτών αριθμών, αν κάθε μετάθεση είναι το ίδιο πιθανή, το αναμενόμενο μήκος της μακρύτερης αύξουσας υποακολουθίας είναι $2\sqrt{N}$. Συνεπώς στην περίπτωση που οι παίκτες έρχονται με τυχαία σειρά και ένας παίκτης ανοίγει facilities αν έχει μεγαλύτερο index από όλους τους παίκτες που έχουν φτάσει πριν από αυτόν ο αναμενόμενος αριθμός των facilities που θα ανοιχτούν θα είναι $2\sqrt{N}$ και συνεπώς το αναμενόμενο κόστος ανοίγματος των facilities θα είναι $2\sqrt{N}$ φορές αυτό της βέλτιστης λύσης και το συνολικό τουλάχιστον $2\sqrt{N}$ αυτό του βέλτιστου. □

Από το παραπάνω, καταλαβαίνουμε ότι για το δικτατορικό σχήμα διαμοιρασμού κόστους εάν μας δοθεί μία τοπολογία παικτών μπορούμε να υπολογίσουμε μία σειρά αφίξεως των παικτών η οποία να τους οδηγεί σε δίκτυα σχετικά μικρού κόστους αλλά, αν οι παίκτες έρχονται με τυχαία σειρά, το αναμενόμενο κόστος του δικτύου είναι υψηλό.

Ας σκεφτούμε τώρα την γενική περίπτωση όπου μπορούμε να καθορίσουμε εμείς το σχήμα διαμοιρασμού κόστους το όποιο πρέπει να είναι budget balanced και μπορεί να περιέχει δικτατορικούς παίκτες. Ακόμα, έστω ότι μπορούμε εμείς να καθορίσουμε την σειρά άφιξης των παικτών αλλά δεν ξέρουμε εκ των προτέρων την τοπολογία των παικτών, συνεπώς θέλουμε να φτιάξουμε ένα uniform πρωτόκολλο.

***Θεώρημα* 4.15.** *Για κάθε budget balanced σχήμα διαμοιρασμού κόστους και για κάθε σειρά άφιξης των παικτών μπορούμε να βρούμε μία τοπολογία παικτών στην οποία το κόστος του τελικού δικτύου είναι $\Omega(N)$ φορές το κόστος του βέλτιστου.*

*Απόδειξη.* Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι η σειρά άφιξης των παικτών είναι $1, 2, 3, ..., N$. Ακόμα, για κάθε παίκτη $i$ και σύνολο σημείων C συμβολίζουμε $d(i, C)$ την ελάχιστη απόσταση του $i$ από κάθε σημείο στο $C$ δηλαδή $d(i, C) = min_{j \in C} d(i, j)$ Διαισθητικά, θα προσπαθήσουμε να δημιουργήσουμε μία τοπολογία παικτών δεδομένου του σχήματος διαμοιρασμού κόστους και της σειράς αφίξεως των παικτών έτσι ώστε τα facilities που ανοίγουν να είναι κοντά το ένα στο άλλο και οι παίκτες που συνδέονται σε αυτά να είναι όσο το δυνατόν πιο μακριά τους. Η διαδικασία που θα ακολουθήσουμε είναι η εξής:

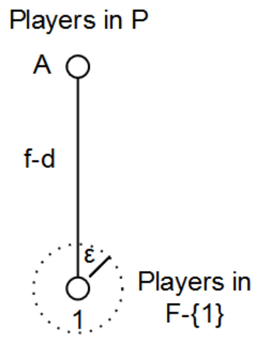
1. Αρχικοποιούμε 2 σύνολα $F = \{1\}$ και$P = \{\}$. Το σύνολο $F$ περιέχει τους παίκτες που θα ανοίξουν facilities (θα περιέχει σίγουρα τον παίκτη 1 αφού αυτός έρχεται πρώτος και δεν έχει άλλη επιλογή από το να ανοίξει facility) και το σύνολο $P$ αυτούς που δεν θα ανοίξουν. Επιπλέον, αρχικοποιούμε τα σύνολα $C_i = \{\} \; \forall i \neq 1$, $C_1 = \{1\}$ τα οποία περιέχουν όλους τους παίκτες που λαμβάνουν υπηρεσία από το facility που ανοίγεται από τον παίκτη $i$ (εάν ανοίξει κάποιο). Τέλος, αρχικοποιούμε την μεταβλητή $max = 0$

η οποία θα ισούται κάθε στιγμή με το μέγιστο κόστος ανοίγματος που πληρώνεται από οποιονδήποτε παίκτη ο οποίος δεν έχει ανοίξει δικό του facility

2. Για κάθε παίκτη $i = 2$ εώς $N$:

   - Εάν $d(i, C_j \cup \{i\}) = f \; \forall j < i$ δηλαδή εάν τη στιγμή που φτάνει ο παίκτης $i$, για να λάβει υπηρεσία από κάποιο υπάρχον facility πρέπει να πληρώσει όλο το κόστος ανοίγματός του, τότε ο παίκτης αυτός θα θέλει να ανοίξει οπωσδήποτε facility στην τοποθεσία του και συνεπώς $F = F \cup \{i\}$
   - Σε διαφορετική περίπτωση $P = P \cup \{i\}$. Επίσης, από τα υπάρχοντα facilities βρίσκουμε αυτό στο οποίο αν συνδεθεί ο παίκτης $i$ θα πληρώνει το λιγότερο κόστος ανοίγματος, δηλαδή το $j$ για το οποίο $d(i, C_j \cup \{i\})$ είναι ελάχιστο. Ακόμα, εάν $max < d(i, C_j \cup \{i\})$ θέτουμε $max = d(i, C_j \cup \{i\})$. Τέλος $C_j = C_j \cup \{i\}$. Σημειώνεται εδώ ότι θα ισχύει πάντα $max < f$.

3. Στην συνέχεια δημιουργούμε την ακόλουθη τοπολογία παικτών:




όπου $d = max - \delta$, $\epsilon > 0, 0 < \delta < \epsilon$ και οι παίκτες στο $F - \{1\}$ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένοι στην περιφέρεια του κύκλου με κέντρο την τοποθεσία του παίκτη 1 και ακτίνα $\epsilon$.

Καταρχάς, παρατηρούμε ότι με τον τρόπο με τον οποίο έχουμε διαμορφώσει τα σύνολα $F$ και $P$, οι παίκτες στο $F$ θα έχουν ανοίξει όλοι facilities και οι παίκτες στο $P$ θα έχουν συνδεθεί σε αυτά τα facilities. Το συνολικό κόστος του δικτύου θα είναι (αμελώντας τα $\epsilon$ και $\delta$ αφού θεωρούμε ότι είναι πολύ μικρά):

$$|P|(f - d) + |F|f$$

Στην βέλτιστη λύση οι παίκτες στην τοποθεσία A ανοίγουν ένα facility στην τοποθεσία A και οι παίκτες στο $F$ λαμβάνουν υπηρεσία από το facility που έχει ανοίξει ο παίκτης 1. Συνεπώς, το συνολικό κόστος της βέλτιστης λύσης είναι $2f + (|F - 1|\epsilon)$. Επειδή το $\epsilon$ είναι πολύ μικρό μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\epsilon < 1/|F| - 1$ και, έτσι, το συνολικό κόστος της βέλτιστης λύσης είναι το πολύ $3f$. Επομένως, ο λόγος του συνολικού κόστους του δικτύου που δημιουργούν οι παίκτες προς το συνολικό κόστος της βέλτιστης λύσης είναι:

$$|P|(f-d)+|F|f/2f+(|F-1|\epsilon) > (|P|+|F|)f-|F|d/3f =$$
$$= Nf - a*N*max/3f = N*const$$

όπου θέτουμε $|F|/N = a$.

□

Συμπερασματικά, φαίνεται ότι όταν δεν γνωρίζουμε την τοπολογία του δικτύου, η εφαρμογή ενός σχήματος διαμοιρασμού κόστους που δεν περιλαμβάνει δικτατορικούς παίκτες μπορεί να τους οδηγήσει σε δίκτυα υψηλού κόστους ανεξαρτήτως σειράς. Εάν, από την άλλη πλευρά, εφαρμόσουμε ένα σχήμα με δικτατορικούς παίκτες, δεν έχουμε καμία εγγύηση ότι το παίγνιο θα καταλήξει σε καλές λύσεις καθώς η σειρά αφίξεως των παικτών έχει μεγάλη σημασία.

### 4.1.2 Εάν γνωρίζουμε την τοπολογία του παιγνίου αλλά όχι την σειρά αφίξεως των παικτών

Όπως και στο [20], θα ερευνήσουμε το εάν η γνώση της τοπολογίας του παιγνίου χωρίς όμως να μπορούμε να ελέγξουμε την σειρά αφίξεως των παικτών, μπορεί να μας οδηγήσει στην επιλογή ενός καλού σχήματος διαμοιρασμού κόστους ανεξαρτήτως της σειράς αφίξεως των παικτών.

Πράγματι:

***Θεώρημα* 4.16.** *Εάν γνωρίζουμε την τοπολογία των παικτών αλλά δεν μπορούμε να ελέγξουμε την σειρά αφίξεώς τους μπορούμε να ορίσουμε ένα σχήμα διαμοιρασμού κόστους το οποίο οδηγεί τους παίκτες να ισορροπήσουν στην βέλτιστη λύση (ή σε μία προσέγγισή της) ανεξαρτήτως της σειράς αφίξεως τους.*

*Απόδειξη.* Έστω ότι έχουμε μία βέλτιστη λύση (ή μια προσέγγισή της) για την τοπολογία που μας δίδεται. Για κάθε βέλτιστο cluster $C^*$ με κέντρο $c^*$ ορίζουμε το ακόλουθο σχήμα διαμοιρασμού κόστους:

- $\xi(i,S) = f, \forall i \in C^*$ εάν στο $S$ υπάρχει τουλάχιστον ένας παίκτης ο οποίος ανήκει σε άλλο βέλτιστο cluster
- $\xi(i,S) = f, \forall i \in C^*$ εάν στο $S$ υπάρχει ένας παίκτης $j \neq i$ με $d^*_j \geq d^*_i$
- $\xi(i,S) = 0, \forall i \in C^*$, εάν στο $S$ υπάρχει ένας παίκτης $j$ με $d^*_j < d^*_i$

Παρατηρούμε, κατ' αρχάς, ότι κανένας παίκτης δεν θα θέλει να λάβει εξυπηρέτηση από facility εκτός του βέλτιστου cluster του αφού θα πρέπει να πληρώσει όλο το κόστος του. Ακόμα, όσο έρχονται παίκτες, είτε ανοίγουν δικό τους facility πιο κοντά στο $c^*$ είτε συνδέονται σε κάποιο υπάρχον facility που είναι πιο κοντά στο $c^*$ από αυτούς. Την στιγμή που έρχεται ο παίκτης στο $c^*$ θα ανοίξει δικό του facility στο $c^*$ καθώς για να λάβει εξυπηρέτηση από οποιοδήποτε άλλο facility θα πρέπει να πληρώσει όλο το κόστος του. Τότε όλοι οι παίκτες του cluster που έχουν ανοίξει δικό τους facility (και πληρώνουν όλο το κόστος τους) θα θέλουν να λάβουν εξυπηρέτηση από το $c^*$ (αφού θα πληρώνουν μόνο την απόστασή τους που είναι μικρότερη του $f$) και συνεπώς θα κλείσουν τα facilities τους. Οι υπόλοιποι παίκτες θα συνδεθούν και αυτοί στο $c^*$ καθώς το να ανοίξουν δικό τους facility έχει κόστος μεγαλύτερο του να συνδεθούν στο $c^*$. Τελικά, λοιπόν, οι παίκτες θα ισορροπήσουν στην βέλτιστη λύση ανεξαρτήτως της σειράς αφίξεώς τους. □

## 4.2 Δίκαιο Σχήμα Διαμοιρασμού Κόστους και Επιχορηγήσεις στο Πρόβλημα Χωροθέτησης Υπηρεσιών

Εφεξής, θα στρέψουμε την προσοχή μας στον δίκαιο διαμοιρασμό κόστους αφενός επειδή, όπως έχει αναφερθεί και στα προηγούμενα κεφάλαια, είναι αρκετά "φυσικός" και, αφετέρου, επειδή ακόμα και η δημιουργία πιο "περίεργων" σχημάτων διαμοιρασμού κόστους στην περίπτωση όπου δεν ξέρουμε την τοπολογία του παιγνίου δεν μπορεί να μας εγγυηθεί, όπως φάνηκε παραπάνω, φτηνά δίκτυα.

Αρχικά, παρατηρούμε ότι, ως σχήμα διαμοιρασμού κόστους χωρίς δικτατορικούς παίκτες, για το δίκαιο σχήμα διαμοιρασμού κόστους υπάρχει μία τοπολογία παικτών στην οποία η εφαρμογή του οδηγεί σε δίκτυο κόστους $O(N)$ του κόστους του βέλτιστου ανεξαρτήτως της σειράς αφίξεως των παικτών (4.12). Συνεπώς, το σχήμα αυτό από μόνο του δεν μπορεί να οδηγήσει τους παίκτες σε φτηνά δίκτυα. Για αυτό, εδώ θα μελετήσουμε το αν μπορούμε επιχορηγώντας κάποια facilities ή/και συνδέσεις να οδηγήσουμε τους παίκτες σε φτηνά δίκτυα.

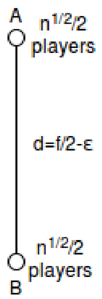
Αξίζει σε αυτό το σημείο να σημειώσουμε ότι οι επιχορηγήσεις ως μέσο για να οδηγήσουμε τους παίκτες σε καλές λύσεις έχει μελετηθεί τόσο στα παίγνια σχηματισμού δικτύων όσο και στα παίγνια χωροθέτησης υπηρεσιών: Στο [5], ερευνούνται επιχορηγήσεις σε παίγνια σχηματισμού δικτύων και αποδεικνύεται ότι, χωρίζοντας το παίγνιο σε κατάλληλα υπό-παίγνια, μπορούμε να οδηγήσουμε τους παίκτες στην βέλτιστη λύση δίνοντάς τους επιχορηγήσεις συνολικού κόστους 37% του κόστους της βέλτιστης λύσης. Στο [12], μελετώνται επιχορηγήσεις σε Παίγνια Χωροθέτησης Υπηρεσιών σε συνδυασμό με κατάλληλη φορολογία στα ποσά που πληρώνουν οι παίκτες.

Εμείς θα θεωρήσουμε ότι δεν επιβάλλουμε φορολογία στους παίκτες αλλά τους δίνουμε μόνο επιχορηγήσεις και το ερώτημα που θα μας απασχολήσει είναι πόσο πρέπει να επιχορηγούμε τους παίκτες ώστε να τους οδηγήσουμε στην βέλτιστη λύση ή κοντά σε αυτή. Είναι σαφές ότι αν επιχορηγήσουμε όλα τα βέλτιστα facilities, οπότε οι παίκτες θα πληρώνουν μηδενικά κόστη ανοίγματος, οι παίκτες θα επιλέγουν να λαμβάνουν υπηρεσίες από τα κοντινότερά τους facilities και, συνεπώς, το δίκτυο που θα δημιουργούν σε μία Ισορροπία Nash θα είναι το βέλτιστο. Παρόλα αυτά, σε αυτή την περίπτωση, θα πρέπει να πληρώσουμε έως και $Nf$ χρήματα σε επιχορηγήσεις και το κόστος αυτό είναι πολύ υψηλό. Συνεπώς, το ζητούμενο είναι όχι μόνο να οδηγήσουμε τους παίκτες στην βέλτιστη λύση αλλά να το κάνουμε και με όσο το δυνατόν χαμηλότερο κόστος επιχορηγήσεων.

Ας σκεφτούμε αρχικά την περίπτωση όπου κάθε φορά που δίνουμε επιχορήγηση σε μία ομάδα παικτών δεν μπορούμε να πάρουμε τα χρήματα της επιχορήγησης πίσω. Τότε:

***Θεώρημα* 4.17.** *Στην περίπτωση όπου κάθε φορά που δίνουμε μία επιχορήγηση δεν μπορούμε να την πάρουμε πίσω, υπάρχει μία τοπολογία παικτών όπου το κόστος των συνολικών επιχορηγήσεων που θα πρέπει να πληρώσουμε ώστε να οδηγήσουμε τους παίκτες στο βέλτιστο δίκτυο είναι $O(\sqrt{N})$. Αλλιώς, το κόστος του δικτύου που θα δημιουργήσουν οι παίκτες είναι $O(\sqrt{N})$ αυτό του βέλτιστου.*

*Απόδειξη.* Έστω ότι οι παίκτες είναι χωρισμένοι σε $\sqrt{N}$ ομάδες των $\sqrt{N}$ ατόμων και ότι οι ομάδες αυτές στον χώρο είναι "μακριά" η μία από την άλλη (απόσταση μεγαλύτερη από $f$). Οι παίκτες κάθε ομάδας είναι τοποθετημένοι στον χώρο ως εξής:




Σχήμα 4.1: Τοπολογία cluster

όπου $\epsilon > 0$. Όπως είδαμε στην απόδειξη του θεωρήματος 4.12, εάν αφήσουμε τους παίκτες μίας ομάδας ελεύθερους και δεν τους δώσουμε καμία επιχορήγηση, αυτοί θα ανοίξουν ένα μόνο facility και ο λόγος του τελικού συνολικού κόστους τους σε σχέση με το βέλτιστο κόστος τους είναι:

$$f + \frac{f}{2} * \frac{\frac{\sqrt{N}}{2}}{2f} = \frac{1 + \frac{\sqrt{N}}{4}}{2}$$

Ας σκεφτούμε τώρα πόσο πρέπει να επιχορηγήσουμε τους παίκτες για να ανοίξουν 2 facilities: Χωρίς βλάβη της γενικότητας ας υποθέσουμε ότι έχουμε ήδη ανοίξει ένα facility στον κόμβο A και έρχεται ένας παίκτης στο facility B. Ο παίκτης αυτός, εάν την χρονική στιγμή που έρχεται έχουν ήδη φτάσει $k \geq 1$ παίκτες στον κόμβο A, για να λάβει εξυπηρέτηση από το facility του κόμβου A θα πρέπει να πληρώσει $f/2 - \epsilon + \frac{f}{k+1} < f - \epsilon$. Για να ανοίξει δικό του facility στον κόμβο B εμείς του δίνουμε $s$ έτσι ώστε

$$f - s < \frac{f}{2} - \epsilon + \frac{f}{k+1} < f - \epsilon \Leftarrow s > \epsilon$$

Συνεπώς, σε κάθε ομάδα θα πρέπει να δίνουμε τουλάχιστον $\epsilon$ επιχορήγηση έτσι ώστε να οδηγούμε τους παίκτες στην βέλτιστη λύση. Συνολικά λοιπόν θα πρέπει σε όλες τις ομάδες να δώσουμε $\epsilon\sqrt{N}$ επιχορηγήσεις. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι ακόμα και αν αποφασίσουμε να μην επιχορηγήσουμε τους παίκτες μίας μόνο ομάδας, η ομάδα αυτή θα πληρώνει κόστος

$O(\sqrt{N})$ φορές αυτό του βέλτιστου και, επομένως, και το κόστος του συνολικού δικτύου θα είναι $O(\sqrt{N})$ αυτό του βέλτιστου. $\square$

Συμπερασματικά, όταν δεν μπορούμε να παίρνουμε τις επιχορηγήσεις που δίνουμε πίσω, υπάρχουν τοπολογίες παικτών στις οποίες, εάν δεν τους επιχορηγήσουμε πολύ, θα οδηγηθούν σε δίκτυα υψηλού κόστους.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι μπορούμε να παίρνουμε πίσω τις επιχορηγήσεις που δίνουμε από κάποιους παίκτες και ότι μπορούμε να τις δίνουμε σε άλλους. Σε αυτή την περίπτωση, μας ενδιαφέρει να οδηγήσουμε τους παίκτες σε φτηνά δίκτυα ελαχιστοποιώντας το μέγιστο ποσό επιχορηγήσεων που τους δίνουμε σε κάθε στιγμή του παιγνίου.

Στην τοπολογία που είδαμε στην προηγούμενη απόδειξη όπου θεωρούμε ότι το, υπάρχει μία σειρά αφίξεως των παικτών έτσι ώστε το μέγιστο ποσό που δίνουμε σε κάθε χρονική στιγμή σε επιχορηγήσεις να είναι το πολύ $f$ και οι παίκτες να οδηγούνται στην βέλτιστη λύση: Συγκεκριμένα, ας θεωρήσουμε ότι οι παίκτες κάθε ομάδας καταφτάνουν διαδοχικά: δηλαδή, εάν οι ομάδες είναι αριθμημένες $1, 2, ..., \sqrt{N}$, πρώτα θα έρθουν όλοι οι παίκτες της ομάδας 1 ο ένας μετά τον άλλον, μετά όλοι οι παίκτες της ομάδας 2 ο ένας μετά τον άλλον κ.ο.κ. Ακόμα, υποθέτουμε ότι πρώτα καταφτάνουν όλοι οι παίκτες ενός κόμβου και έπειτα όλοι οι παίκτες του άλλου κόμβου. Έστω ότι οι παίκτες της ομάδας 1 έχουν ανοίξει ένα facility στον κόμβο A, και την στιγμή που έρχεται κάποιος παίκτης στον κόμβο B τον επιχορηγούμε με ένα ποσό το πολύ f για να ανοίξει facility εκεί. Όταν έρθει ο δεύτερος παίκτης στο facility B, μπορούμε να αποσύρουμε το ποσό της επιχορήγησης: κάθε παίκτης του facility B πληρώνει $f/2$ και δεν τον συμφέρει να αλλάξει την στρατηγική του και να συνδεθεί στο facility A καθώς, έτσι, θα πρέπει να πληρώσει τουλάχιστον $\frac{f}{2} - \epsilon + \frac{2f}{\sqrt{N}} \leq \frac{f}{2}$ αφού θεωρούμε ότι το $\epsilon$ είναι πάρα πολύ μικρό και συνεπώς $\epsilon < \frac{2f}{\sqrt{N}}$. Οι υπόλοιποι παίκτες της ομάδας θα συνδέονται και αυτοί στα facilities που είναι στις τοποθεσίες τους και συνεπώς η ομάδα θα ισορροπήσει στην βέλτιστη λύση. Ομοίως, μπορούμε να οδηγήσουμε όλες τις υπόλοιπες ομάδες στην βέλτιστη λύση επιχορηγώντας τους για μικρό χρονικό διάστημα λιγότερο από $f$ και παίρνοντας πίσω την επιχορήγηση όταν εξασφαλίσουμε ότι οι παίκτες δεν θα θέλουν να κλείσουν ένα από τα 2 facilities. Συνεπώς, εάν οι παίκτες καταφτάσουν με την παραπάνω σειρά, κάθε χρονική στιγμή του παιγνίου θα πληρώνουμε το πολύ $f$ σε επιχορηγήσεις και το παίγνιο τελικά θα ισορροπήσει στην βέλτιστη λύση.

Παρόλα αυτά, για την παραπάνω τοπολογία παικτών, εάν η σειρά άφιξης των παικτών είναι τυχαία, μπορεί να χρειαστεί να πληρώσουμε μεγάλο ποσό επιχορηγήσεων. Το ποσό των επιχορηγήσεων που πρέπει να πληρώνουμε κάθε χρονική στιγμή εξαρτάται από τον αριθμό των ομάδων στις οποίες έχουν φτάσει περισσότεροι από 1 παίκτες στον έναν κόμβο και 1 μόνο παίκτης στον 2ο κόμβο, οι οποίες εφεξής θα αποκαλούνται "ανοικτές". Προσομοιώνοντας το παραπάνω στον υπολογιστή βρίσκουμε το μέγιστο αριθμό αυτών των ομάδων ανάλογα με τον αριθμό των παικτών:

| Αριθμός Παικτών | Μέσος αριθμός "ανοικτών" ομάδων |
|---|---|
| $10^2 = 100$ | 3 |

| | |
|---|---|
| $15^2 = 225$ | 4 |
| $20^2 = 400$ | 5 |
| $25^2 = 625$ | 6 |
| $30^2 = 900$ | 7 |
| $35^2 = 1225$ | 8 |
| $40^2 = 1600$ | 9 |
| $45^2 = 2025$ | 10 |
| $50^2 = 2500$ | 11 |
| $55^2 = 3025$ | 11.5 |
| $60^2 = 3600$ | 12.5 |
| $80^2 = 6400$ | 16 |
| $100^2 = 10000$ | 20 |
| $200^2 = 40000$ | 37 |

Πίνακας 4.1: Αποτελέσματα Προσομοίωσης

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός των "ανοικτών" ομάδων και, συνεπώς, ο αριθμός των facilities που θα πρέπει να επιχορηγήσουμε φαίνεται να είναι ανάλογος του $\log N$. Οπότε, όταν οι παίκτες φτάνουν ένας-ένας και η σειρά αφίξεώς τους είναι τυχαία οι επιχορηγήσεις που χρειάζεται να δίνουμε κάθε χρονική στιγμή μπορεί να είναι υψηλού κόστους.

Κινητοποιημένοι από το παραπάνω παράδειγμα, θα προσπαθήσουμε να απαντήσουμε εάν υπάρχουν τοπολογίες παικτών για τις οποίες να μπορούμε να υπολογίσουμε σε πολυωνυμικό χρόνο μία σειρά άφιξης των παικτών η οποία τους οδηγεί σε φτηνά δίκτυα και το κόστος των επιχορηγήσεων είναι μικρό. Πράγματι, ας επικεντρώσουμε την προσοχή μας σε τοπολογίες παικτών στις οποίες τα βέλτιστα clusters είναι "αρκετά μακριά μεταξύ τους" ώστε οι αποφάσεις των παικτών ενός cluster να μην επηρεάζουν το άλλο. Αξίζει εδώ να σημειωθεί ότι αυτό μπορεί να σημαίνει ότι η βέλτιστη λύση είναι ανθεκτική σε διαταραχές, δηλαδή για $a > 1$ εάν κάθε απόσταση στην τοπολογία την πολλαπλασιάσουμε με έναν παράγοντα στο $[1, a]$ η βέλτιστη λύση παραμένει η ίδια ([6]).

***Θεώρημα* 4.18.** *Για τις τοπολογίες παικτών στις οποίες τα βέλτιστα facilities είναι μακριά μεταξύ τους (οι παίκτες ενός facility δεν επηρεάζονται από τις επιλογές των παικτών των άλλων facilities) μπορούμε να βρούμε μία σειρά άφιξης των παικτών και μία σειρά με την οποία παίζουν οι παίκτες για τις οποίες πληρώνοντας το πολύ $f$ σε επιχορηγήσεις οδηγούμε τους παίκτες σε δίκτυα κόστους το πολύ 8 φορές μεγαλύτερο του κόστους της βέλτιστης λύσης.*

*Απόδειξη.* Έστω ότι μας δίνεται μία τοπολογία παικτών και ότι γνωρίζουμε την βέλτιστη λύση της ή μία προσέγγισή της. Τότε, εάν τα βέλτιστα facilities είναι $c_1^*, c_2^*, ..., c_k^*$ μπορούμε να τοποθετήσουμε πρώτους στην σειρά όλους τους παίκτες που λαμβάνουν εξυπηρέτηση από το $c_1^*$

μετά όλους τους παίκτες που λαμβάνουν εξυπηρέτηση από το $c_2^*$ κ.ο.κ. Για όσο χρονικό διάστημα έρχονται παίκτες που στην βέλτιστη λύση εξυπηρετούνται από το $c_i^*$, επιχορηγούμε το $c_i^*$ πληρώνοντας $f$ και αποσύρουμε την επιχορήγηση όταν καταφτάσουν όλοι οι παίκτες που εξυπηρετούνται από αυτό. Έτσι, οι παίκτες κάθε cluster μέχρι την στιγμή που αποσύρουμε την επιχορήγηση λαμβάνουν εξυπηρέτηση από το βέλτιστο facility αφού πληρώνουν μόνο το κόστος σύνδεσής τους το οποίο είναι το ελάχιστο δυνατό. Όταν αποσύρουμε την επιχορήγηση, όμως, οι παίκτες θα πληρώνουν και ένα μερίδιο του facility οπότε μπορεί να είναι στο συμφέρον τους να μην λαμβάνουν υπηρεσία από το βέλτιστο facility πια. Έτσι, είναι ελεύθεροι να κινηθούν ελαχιστοποιώντας ο καθένας το προσωπικό του κόστος μέχρι να φτάσουν σε Ισορροπία Nash. Υπάρχει μία σειρά με την οποία παίζουν οι παίκτες η οποία οδηγεί σε μία Ισορροπία που έχει κόστος το πολύ ίσο με 8 φορές το κόστος της βέλτιστης λύσης:

Ας θεωρήσουμε μία οποιαδήποτε ομάδα παικτών που στην βέλτιστη λύση λαμβάνουν υπηρεσία από το ίδιο facility. Έστω ότι η τοποθεσία του βέλτιστου facility είναι $c^*$, $S$ το σύνολο των παικτών που λαμβάνουν υπηρεσία από αυτό το facility και $|S| = l$. Ακόμα $d_i^* = d(i, c^*)$, $\forall i \in S$. Τότε έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις για το πως θα κινηθούν οι παίκτες όταν αποσύρουμε την επιχορήγηση του facility:

1. Έστω ότι δεν υπάρχει κανένας σε απόσταση μεγαλύτερη από $f - f/k$ από το $c^*$. Τότε, κανένας παίκτης δεν θα θέλει να αλλάξει την στρατηγική ανοίγοντας δικό του facility αφού θα πρέπει να πληρώσει $f$ ενώ λαμβάνοντας εξυπηρέτηση από το $c^*$ πληρώνει συνολικά κόστος μικρότερο από $f - f/k + f/k = f$.

2. Έστω ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας παίκτης σε απόσταση μεγαλύτερη από $f - f/k$ από το $c^*$. Το ότι αυτός ο παίκτης θα επιθυμεί να αλλάξει την στρατηγική του ανοίγοντας δικό του facility μπορεί να προκαλέσει και άλλους παίκτες που είναι κοντά στο $c^*$ να αλλάξουν την στρατηγική τους. Τότε μπορούμε να βάλουμε τους παίκτες να παίζουν με την ακόλουθη σειρά έτσι ώστε το κόστος του δικτύου να μην αυξηθεί πολύ:

   (α΄) Αρχικά παίζουν οι παίκτες που είναι σε απόσταση μεγαλύτερη του $f/8$ από το $c^*$ μέχρι να φτάσουν σε Ισορροπία. Καθένας από αυτούς τους παίκτες το πολύ 8-πλασιάζει το κόστος που συνεισφέρει στο συνολικό κόστος του δικτύου.

   (β΄) Στην συνέχεια, αφήνουμε τους παίκτες που είναι σε απόσταση μικρότερη από $f/8$ να παίξουν: Έστω ότι υπάρχει ένας μόνος παίκτης (αυτός στο $c^*$) είτε περισσότεροι από 1 αλλά κανείς από τους παίκτες αυτούς δεν επιθυμεί να αλλάξει την στρατηγική του. Τότε, το κόστος του δικτύου που θα έχει δημιουργηθεί θα έχει κόστος το πολύ 8 φορές το κόστος του βέλτιστου λόγω των παικτών σε απόσταση μεγαλύτερη από $f/8$. Έστω ότι σε απόσταση μικρότερη από $f/8$ υπάρχουν 2 ή περισσότεροι παίκτες και τουλάχιστον ένας παίκτης από αυτούς επιθυμεί να αλλάξει την στρατηγική του. Αρχικά, παρατηρούμε ότι όσο υπάρχουν $k \geq 2$ παίκτες που λαμβάνουν υπηρεσία από το $c^*$, κανένας παίκτης σε απόσταση μικρότερη από $f/2$ από το $c^*$ δεν επιθυμεί να ανοίξει δικό του facility καθώς θα πρέπει να πληρώσει $f$ ενώ λαμβάνοντας υπηρεσία από το $c^*$ πληρώνει κόστος $f/2 + f/k < f$. Έστω ότι ο παίκτης $i$ με $d_i^* < f/8$ αντί να εξυπηρετείται από το facility $c^*$ από το οποίο λαμβάνουν εξυπηρέτηση $l$ παίκτες συμπεριλαμβανομένου του $i$, επιθυμεί να αλλάξει την στρατηγική του συνδεόμενος σε ένα facility $c$ το οποίο συμπεριλαμβανομένου του $i$ θα εξυπηρετεί $l'$ παίκτες. Θα πρέπει:

$$d(i,c)+f/l' < d_i^*+f/l \Rightarrow d(i,c)+f/l' < d_i^*+f/2 \Rightarrow d(i,c) < d_i^*+f/2 < f/2+f/8 = 5f/8$$

Επίσης, από την τριγωνική ανισότητα γνωρίζουμε ότι:

$$d(c,c^*) \leq d_i^* + d(i,c) < f/8 + 5f/8 = 3f/4$$

. Άρα το facility $c$ θα πρέπει να είναι σε απόσταση το πολύ $3f/4$ από το $c^*$. Γνωρίζουμε ότι όταν άνοιξε το facility $c$ (στην πρώτη φάση του αλγορίθμου) το $c^*$ ήταν ακόμα ανοιχτό και συνεπώς θα πρέπει $d(c,c^*) > f/2$. Άρα αν ήταν $r$ άτομα συνδεδεμένα στο $c^*$ αφού άνοιξε το $c$, θα πρέπει

$$f < d(c,c^*) + \frac{f}{r+1} < \frac{3f}{4} + \frac{f}{r+1} \Rightarrow r < 3$$

. Συνεπώς, το συνολικό κόστος του δικτύου σε σχέση με το βέλτιστο θα είναι:

$$\frac{TotalCost}{Optimum} < \frac{3f + 8\sum_{i:d_i^*>f/8} d_i^*}{f + \sum_{i:d_i^*>f/8} d_i^* + \sum_{i:d_i^*\leq f/8} d_i^*} <$$
$$< \frac{3f + 8\sum_{i:d_i^*>f/8} d_i^*}{f + \sum_{i:d_i^*>f/8} d_i^*} < 8$$

□

Άρα, εάν τα clusters είναι "μακριά" μεταξύ τους, μπορούμε να βρούμε μία σειρά με την οποία παίζουν οι παίκτες έτσι ώστε οι παίκτες να οδηγηθούν σε μία Ισορροπία Nash κοντά στην βέλτιστη λύση με επιχορηγήσεις που κάθε χρονική στιγμή δεν υπερβαίνουν το $f$.

Εάν τα clusters είναι κοντά μεταξύ τους τότε μπορούμε με την ίδια σειρά με πριν να οδηγήσουμε τους παίκτες στην βέλτιστη λύση αλλά, επειδή εδώ μπορεί οι παίκτες ενός cluster να έχουν κίνητρο να συνδεθούν σε κάποιο άλλο βέλτιστο facility αυξάνοντας το συνολικό κόστος πολύ, θα πρέπει, αφού φέρνουμε τους παίκτες ενός cluster, να συνεχίζουμε να τους επιχορηγούμε ώστε να μην θέλουν να αλλάξουν την στρατηγική τους. Η ερώτηση λοιπόν που πρέπει, αρχικά, να απαντηθεί είναι, αφού φτάσει ο τελευταίος παίκτης, ποιο είναι το ποσό των επιχορηγήσεων που πρέπει να πληρώνουμε για να συντηρούμε την βέλτιστη λύση. Προφανώς άμα επιχορηγήσουμε όλο το δίκτυο της βέλτιστης λύσης οδηγούμε τους παίκτες στην βέλτιστη λύση. Πόσο όμως μπορούμε να μειώσουμε τα ποσά τα οποία προσφέρουμε;

Κάτι που μπορούμε αρχικά να παρατηρήσουμε είναι ότι αν δίνουμε σε κάθε παίκτη που θέλει να αλλάξει στρατηγική το μερίδιο του κόστους ανοίγματος facility που πληρώνει ο παίκτης δεν θα θέλει να συνδεθεί κάπου αλλού αφού θα πληρώνει μόνο το κόστος εξυπηρέτησής του. Επειδή στην χειρότερη περίπτωση θα πρέπει να επιχορηγήσουμε όλους τους παίκτες ενός cluster οι επιχορηγήσεις που δίνουμε σε κάθε cluster θα είναι το πολύ f ενώ το κόστος του βέλτιστου cluster θα είναι τουλάχιστον f. Άρα επιχορηγώντας τους παίκτες με ποσό το πολύ ίσο με το κόστος της βέλτιστης λύσης μπορούμε να τους κάνουμε να ισορροπήσουν σε αυτή.

Ένα ακόμα χρήσιμο θεώρημα είναι το ακόλουθο:

***Θεώρημα* 4.19.** *Επιχορηγώντας τους παίκτες με $O(logN)$ το κόστος της βέλτιστης λύσης, οι παίκτες ισορροπούν σε αυτή*

*Απόδειξη.* Έστω ένα βέλτιστο cluster με k παίκτες. Για να επιθυμούν οι παίκτες να συντηρήσουν την βέλτιστη λύση αρκεί να τους δώσουμε τα ποσά που συνεισφέρουν στο facility. Ο πρώτος που θα φύγει συνεισφέρει στο facility $\frac{f}{k}$, ο δεύτερος $\frac{f}{k-1}$ κ.ο.κ. Συνεπώς, αν $H(k) = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k}$, αρκεί να τους δώσουμε ποσό ίσο με $f * H(k) < f * log(k)$. Εάν θεωρήσουμε ότι έχουμε $l$ βέλτιστα clusters και $k_i$ ο αριθμός των παικτών σε κάθε βέλτιστο cluster $i$, συνολικά θα πληρώνουμε σε επιχορηγήσεις:

$$\sum_{i=1}^{l} f * log(k_i) = f * log(\prod_{i=1}^{l} k_i)$$

Όμως γνωρίζουμε ότι:

$$\prod_{i=1}^{l} k_i \leq (\sum_{i=1}^{l} \frac{k_i}{l})^l = (\frac{N}{l})^l$$

Συνεπώς,

$$\sum_{i=1}^{l} f * log(k_i) \leq f * log((\frac{N}{l})^l) = l * f * log(\frac{N}{l})$$

και το κόστος των επιχορηγήσεων σε σχέση με το κόστος της βέλτιστης λύσης η οποία έχει κόστος τουλάχιστον ίσο με το συνολικό κόστος ανοίγματος των facilities που είναι $lf$ θα είναι το πολύ:

$$\frac{l * f * log(\frac{N}{l})}{f * l} = O(logN)$$

□

Αναφορικά με το προηγούμενο θεώρημα, αξίζει να παρατηρήσουμε ότι, εάν οι παίκτες έρχονται με τυχαία σειρά, μπορούμε δίνοντας τους $O(logN)$ φορές το κόστος του δικτύου που θα δημιουργήσουν σε επιχορηγήσεις να τους οδηγήσουμε κοντά στην βέλτιστη λύση με τον ακόλουθο τρόπο: Ας υποθέσουμε ότι χρησιμοποιούμε τον Online αλγόριθμο του Meyerson που παρουσιάσουμε στο προηγούμενο κεφάλαιο για να αποφασίσουμε ποια είναι η καλύτερη επιλογή κάθε παίκτη που μπαίνει στο παιχνίδι. Για να τον οδηγήσουμε τον εκάστοτε παίκτη να κάνει την επιλογή που θέλουμε την στιγμή που μπαίνει στο παιχνίδι, του επιδοτούμε το μερίδιο του κόστους του facility που θα πληρώσει. Έτσι, στον πρώτο παίκτη που θέλουμε να ανοίξει το facility του επιδοτούμε όλο το κόστος του facility, στον δεύτερο παίκτη που θέλουμε να συνδεθεί στο facility του δίνουμε f/2 κ.ο.κ.. Με αυτόν τον τρόπο, μπορούμε να οδηγήσουμε τους παίκτες σε ένα δίκτυο κόστους $O(1)$ φορές μεγαλύτερο του βέλτιστου (η προσέγγιση του αλγορίθμου του Meyerson) πληρώνοντας $(logN)$ φορές το κόστος του δικτύου που δημιουργείται σε επιχορηγήσεις.

## 4.3 Συμπεράσματα

Ακολουθώντας την προσέγγιση του [20], μελετήσαμε ένα παίγνιο χωροθέτησης στο οποίο οι παίκτες καταφτάνουν ένας ένας και προσπαθήσαμε να επιλέξουμε κατάλληλα σχήματα διαμοιρασμού κόστους τα οποία οδηγούν σε χαμηλό Τίμημα της Αναρχίας. Στην περίπτωση όπου δεν γνωρίζουμε την τοπολογία του παιγνίου, η χρήση φυσικών σχημάτων διαμοιρασμού κόστους χωρίς να επιβάλλουμε σε κάποιους παίκτες το να πληρώνουν όλο το κόστος των facilities που χρησιμοποιούν (δικτατορικοί παίκτες), μπορεί να οδηγήσει σε δίκτυα υψηλού κόστους ανεξαρτήτως της σειράς αφίξεως των παικτών. Εάν, από την άλλη ορίσουμε σχήματα διαμοιρασμού κόστους με δικτατορικούς παίκτες δεν μπορούμε να έχουμε καμία εγγύηση ότι το παίγνιο θα καταλήξει σε καλές λύσεις καθώς, ανάλογα με την σειρά αφίξεως των παικτών και με την τοπολογία τους, το παίγνιο μπορεί να καταλήγει σε καλές ή κακές λύσεις. Από την άλλη πλευρά, εάν γνωρίζουμε την τοπολογία των παικτών αλλά όχι την σειρά αφίξεώς τους, μπορούμε να ορίσουμε ένα σχήμα διαμοιρασμού κόστους το οποίο οδηγεί τους παίκτες να ισορροπήσουν στην βέλτιστη λύση.

Στην συνέχεια μελετήσαμε το Δίκαιο Σχήμα Διαμοιρασμού κόστους και το πως μπορούμε δίνοντας όσο το δυνατόν λιγότερες επιδοτήσεις να οδηγήσουμε τους παίκτες σε λύσεις κοντά στην βέλτιστη. Δείξαμε ότι, εάν δεν παίρνουμε πίσω τις επιχορηγήσεις που δίνουμε, μπορεί να χρειαστεί να δώσουμε υψηλό ποσό επιχορηγήσεων (έως $\sqrt{N}f$). Εάν, όμως, τις παίρνουμε πίσω, όταν τα clusters είναι μακριά μεταξύ τους, μπορούμε να υπολογίσουμε μία σειρά αφίξεως των παικτών που τους οδηγεί να ισορροπήσουν σε ένα δίκτυο κόστους 8 φορές μεγαλύτερο του βέλτιστου πληρώνοντας κάθε χρονική στιγμή το πολύ $f$ σε επιχορηγήσεις. Ακόμα, στην γενική περίπτωση, μπορούμε να υπολογίσουμε μία σειρά αφίξεως για την οποία πληρώνοντας το πολύ $logN$ το κόστος της βέλτιστης λύσης σε επιχορηγήσεις οδηγούμε τους παίκτες να ισορροπήσουν στην βέλτιστη λύση.

# Βιβλιογραφία


[1] Aris Anagnostopoulos, Russell Bent, Eli Upfal, and Pascal Van Hentenryck. A simple and deterministic competitive algorithm for online facility location. *Information and Computation*, 194(2):175--202, 2004.

[2] Elliot Anshelevich, Anirban Dasgupta, Jon Kleinberg, Eva Tardos, Tom Wexler, and Tim Roughgarden. The price of stability for network design with fair cost allocation. In *45th Annual IEEE Symposium on In Foundations of Computer Science*, pages 295--304. IEEE, 2004.

[3] Elliot Anshelevich, Anirban Dasgupta, Eva Tardos, and Tom Wexler. Near-optimal network design with selfish agents. In *Proceedings of the thirty-fifth annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 511--520. ACM, 2003.

[4] Vijay Arya, Naveen Garg, Rohit Khandekar, Adam Meyerson, Kamesh Munagala, and Vinayaka Pandit. Local search heuristics for k-median and facility location problems. *SIAM Journal on computing*, 33(3):544--562, 2004.

[5] John Augustine, Ioannis Caragiannis, Angelo Fanelli, and Christos Kalaitzis. Enforcing efficient equilibria in network design games via subsidies. *Algorithmica*, 72(1):44--82, 2015.

[6] Maria Florina Balcan and Yingyu Liang. Clustering under perturbation resilience. In *International Colloquium on Automata, Languages, and Programming*, pages 63--74. Springer, 2012.

[7] Vittorio Bilò, Ioannis Caragiannis, Angelo Fanelli, and Gianpiero Monaco. Improved lower bounds on the price of stability of undirected network design games. In *Algorithmic Game Theory*, pages 90--101. Springer, 2010.

[8] Vittorio Bilò, Angelo Fanelli, Michele Flammini, and Luca Moscardelli. Graphical congestion games with linear latencies. In *Proceedings of the twentieth annual symposium on Parallelism in algorithms and architectures*, pages 194--196. ACM, 2008.

[9] Vittorio Bilò, Angelo Fanelli, Michele Flammini, and Luca Moscardelli. When ignorance helps: Graphical multicast cost sharing games. *Theoretical Computer Science*, 411(3):660--671, 2010.

[10] Vittorio Bilò, Michele Flammini, and Luca Moscardelli. The price of stability for undirected broadcast network design with fair cost allocation is constant. In *Proceedings of the 2013 IEEE*

*54th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 638--647. IEEE Computer Society, 2013.

[11] Allan Borodin and Ran El-Yaniv. *Online computation and competitive analysis*. cambridge university press, 2005.

[12] Niv Buchbinder, Liane Lewin-Eytan, Joseph Seffi Naor, and Ariel Orda. Non-cooperative cost sharing games via subsidies. In *International Symposium on Algorithmic Game Theory*, pages 337--349. Springer, 2008.

[13] Jean Cardinal and Martin Hoefer. Non-cooperative facility location and covering games. *Theoretical Computer Science*, 411(16):1855--1876, 2010.

[14] Moses Charikar, Chandra Chekuri, Tomás Feder, and Rajeev Motwani. Incremental clustering and dynamic information retrieval. In *Proceedings of the twenty-ninth annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 626--635. ACM, 1997.

[15] Moses Charikar and Sudipto Guha. Improved combinatorial algorithms for the facility location and k-median problems. In *Foundations of Computer Science, 1999. 40th Annual Symposium on*, pages 378--388. IEEE, 1999.

[16] Moses Charikar, Howard Karloff, Claire Mathieu, Joseph Seffi Naor, and Michael Saks. Online multicast with egalitarian cost sharing. In *Proceedings of the twentieth annual symposium on Parallelism in algorithms and architectures*, pages 70--76. ACM, 2008.

[17] Chandra Chekuri, Julia Chuzhoy, Liane Lewin-Eytan, Joseph Seffi Naor, and Ariel Orda. Non-cooperative multicast and facility location games. *Selected Areas in Communications, IEEE Journal on*, 25(6):1193--1206, 2007.

[18] Ho-Lin Chen, Tim Roughgarden, and Gregory Valiant. Designing network protocols for good equilibria. *SIAM Journal on Computing*, 39(5):1799--1832, 2010.

[19] George Christodoulou, Christine Chung, Katrina Ligett, Evangelia Pyrga, and Rob Van Stee. On the price of stability for undirected network design. In *Approximation and Online Algorithms*, pages 86--97. Springer, 2009.

[20] George Christodoulou and Alkmini Sgouritsa. Designing networks with good equilibria under uncertainty. *arXiv preprint arXiv:1503.03392*, 2015.

[21] Nikhil Devanur, Naveen Garg, Rohit Khandekar, Vinayaka Pandit, Amin Saberi, and Vijay Vazirani. Price of anarchy, locality gap, and a network service provider game. In *Internet and Network Economics*, pages 1046--1055. Springer, 2005.

[22] Amos Fiat, Haim Kaplan, Meital Levy, Svetlana Olonetsky, and Ronen Shabo. On the price of stability for designing undirected networks with fair cost allocations. In *Automata, Languages and Programming*, pages 608--618. Springer, 2006.

[23] Dimitris Fotakis. Incremental algorithms for facility location and k-median. *Theoretical Computer Science*, 361(2):275--313, 2006.

[24] Dimitris Fotakis. Memoryless facility location in one pass. In *STACS 2006*, pages 608--620. Springer, 2006.

[25] Dimitris Fotakis. A primal-dual algorithm for online non-uniform facility location. *Journal of Discrete Algorithms*, 5(1):141--148, 2007.

[26] Dimitris Fotakis. On the competitive ratio for online facility location. *Algorithmica*, 50(1):1--57, 2008.

[27] Sudipto Guha and Samir Khuller. Greedy strikes back: Improved facility location algorithms. *Journal of algorithms*, 31(1):228--248, 1999.

[28] Thomas Dueholm Hansen and Orestis Telelis. On pure and (approximate) strong equilibria of facility location games. In *WINE*, pages 490--497. Springer, 2008.

[29] Dorit S Hochbaum. Heuristics for the fixed cost median problem. *Mathematical programming*, 22(1):148--162, 1982.

[30] Kamal Jain and Vijay V Vazirani. Approximation algorithms for metric facility location and k-median problems using the primal-dual schema and lagrangian relaxation. *Journal of the ACM (JACM)*, 48(2):274--296, 2001.

[31] SV Kerov and AM Vershik. Asymptotics of the plancherel measure of the symmetric group and the limiting form of young tableaux. In *Soviet Math. Dokl*, volume 18, pages 527--531, 1977.

[32] Euiwoong Lee and Katrina Ligett. Improved bounds on the price of stability in network cost sharing games. In *Proceedings of the fourteenth ACM conference on Electronic commerce*, pages 607--620. ACM, 2013.

[33] Shi Li. A 1.488 approximation algorithm for the uncapacitated facility location problem. *Information and Computation*, 222:45--58, 2013.

[34] Aranyak Mehta, Tim Roughgarden, and Mukund Sundararajan. Beyond moulin mechanisms. In *Proceedings of the 8th ACM Conference on Electronic Commerce*, pages 1--10. ACM, 2007.

[35] Adam Meyerson. Online facility location. In *Foundations of Computer Science, 2001. Proceedings. 42nd IEEE Symposium on*, pages 426--431. IEEE, 2001.

[36] Dov Monderer and Lloyd S Shapley. Potential games. *Games and economic behavior*, 14(1):124--143, 1996.

[37] Hervé Moulin. Incremental cost sharing: Characterization by coalition strategy-proofness. *Social Choice and Welfare*, 16(2):279--320, 1999.

[38] Hervé Moulin. *Cooperative microeconomics: a game-theoretic introduction*. Princeton University Press, 2014.

[39] Hervé Moulin and Scott Shenker. Strategyproof sharing of submodular costs: budget balance versus efficiency. *Economic Theory*, 18(3):511--533, 2001.

[40] Roger B Myerson and Mark A Satterthwaite. Efficient mechanisms for bilateral trading. *Journal of economic theory*, 29(2):265--281, 1983.

[41] John Nash. Non-cooperative games. *Annals of mathematics*, pages 286--295, 1951.

[42] Martin Pál and Éva Tardos. Group strategy proof mechanisms via primal-dual algorithms. In *Foundations of Computer Science, 2003. Proceedings. 44th Annual IEEE Symposium on*, pages 584--593. IEEE, 2003.

[43] Christos Papadimitriou. Algorithms, games, and the internet. In *Proceedings of the thirty-third annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 749--753. ACM, 2001.

[44] Robert W Rosenthal. The network equilibrium problem in integers. *Networks*, 3(1):53--59, 1973.

[45] Adrian Vetta. Nash equilibria in competitive societies, with applications to facility location, traffic routing and auctions. In *Foundations of Computer Science, 2002. Proceedings. The 43rd Annual IEEE Symposium on*, pages 416--425. IEEE, 2002.