



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

## Σκέδαση Ακουστικών Κυμάτων από Σφαιρικούς Σκεδαστές

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ  
ΤΟΥ

**Πιερρουτσάκου Δημήτρη**

**Επιβλέπουσα:** Κυριάκη Κυριακή  
Καθηγήτρια Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ, ΙΟΥΛΙΟΣ 2016





ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

## Σκέδαση Ακουστικών Κυμάτων από Σφαιρικούς Σκεδαστές

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ  
ΤΟΥ

**Πιερρουτσάκου Δημήτρη**

**Επιβλέπουσα:** Κυριάκη Κυριακή  
Καθηγήτρια Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την παρακάτω τριμελή επιτροπή την 15/07/16

κα. Κυριάκη Κυριακή  
Καθηγήτρια Ε.Μ.Π.

κ. Γκιντίδης Δρόσος  
Αναπλ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

κ. Ψαρράκος Παναγιώτης  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ, ΙΟΥΛΙΟΣ 2016



# Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαιτέρως την Καθηγήτρια του Ε.Μ.Π. κα. Κυριακή Κυριάκη για την πολύτιμη βοήθεια που μου παρείχε καθ' όλη τη διάρκεια συγγραφής της παρούσας διπλωματικής εργασίας, καθώς επίσης και για το άριστο κλίμα συνεργασίας που αναπτύξαμε. Επίσης, ευχαριστώ θερμά τον Αναπληρωτή Καθηγητή του Ε.Μ.Π. κ. Δρόσο Γκιντίδη για την καθοριστική συμβολή του στο υπολογιστικό κομμάτι της εργασίας με τη χρήση του προγράμματος Mathematica.



# Περίληψη

Ο σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η μελέτη του ευθέως προβλήματος σκέδασης των ακουστικών κυμάτων από σφαιρικούς σκεδαστές.

Αρχικά, υπάρχει ένα εισαγωγικό κεφάλαιο στο οποίο παραθέτουμε συνοπτικά ορισμένες βασικές έννοιες της θεωρίας της σκέδασης που θα μας απασχολήσουν στα επόμενα κεφάλαια.

Στο πρώτο κεφάλαιο, μοντελοποιούμε τη διάδοση ενός ακουστικού κύματος μέσα σε ένα ομογενές μέσο από τη χρονοανεξάρτητη διαφορική εξίσωση του Helmholtz. Επιπλέον, αναφέρουμε τις συνοριακές συνθήκες που ισχύουν στην ακουστική, εισάγουμε και ερμηνεύουμε τη συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld, και στο τελευταίο κομμάτι του κεφαλαίου μελετάμε τη συνάρτηση του πλάτους σκέδασης.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, μελετάμε το πρόβλημα της ακουστικής σκέδασης από μία σφαίρα. Για αυτόν το λόγο, πραγματοποιείται η ανάλυση της διαφορικής εξίσωσης του Helmholtz σε σφαιρική γεωμετρία, καθώς και η μελέτη της γενικής μορφής της λύσης αυτής της εξίσωσης.

Στο τρίτο κεφάλαιο, γίνεται μία εκτενής μελέτη των προσθετικών θεωρημάτων στις τρεις διαστάσεις, τα οποία αποτελούν τα βασικά εργαλεία της θεωρίας της πολλαπλής σκέδασης. Με εφόδιο τη γνώση των προσθετικών θεωρημάτων, προχωράμε στην επίλυση του προβλήματος της ακουστικής σκέδασης από δύο ή περισσότερες σφαίρες, χρησιμοποιώντας την πολυπολική μέθοδο.

Στο τέταρτο κεφάλαιο, ολοκληρώνουμε τη μελέτη μας με ορισμένες υπολογιστικές εφαρμογές σε περιβάλλον Mathematica.

Κλείνοντας, υπάρχει ένα πολύ χρήσιμο παράρτημα στο οποίο εξηγούνται αναλυτικά ορισμένες από τις σημαντικότερες έννοιες που θα συναντήσουμε στην παρούσα εργασία.





# Abstract

In this diploma thesis the purpose is the study of the direct scattering problem of acoustic waves by spherical scatterers.

Firstly, in the introduction we provide shortly a review of the scattering theory, the direct and the inverse scattering problem.

In the first chapter, we present the Helmholtz equation, the boundary conditions in acoustics, the Sommerfeld radiation condition and the far field pattern.

In the second chapter, we study the direct scattering problem by one sphere. For that reason, we handle the Helmholtz equation in spherical geometry.

In the third chapter, we deal with the addition theorems in three dimensions, which play a very important role for the multiple scattering problem. Using the addition theorems, we can solve the direct scattering problem by two or more spheres using the multipole method.

In the fourth chapter, we conclude our work with a presentation of numerical results, which have been done in Mathematica.

Finally, there is one very useful appendix in which we present some useful theorems and definitions of this work.



# Περιεχόμενα

<b>Εισαγωγή</b>	<b>13</b>
<b>Κεφάλαιο 1: Σκέδαση Ακουστικών Κυμάτων</b>	<b>15</b>
1.1 Ακουστικά Κύματα	15
1.2 Συνοριακές Συνθήκες στην Ακουστική	17
1.3 Συνθήκη Ακτινοβολίας	19
1.4 Πλάτος Σκέδασης	21
<b>Κεφάλαιο 2: Ακουστική Σκέδαση από Σφαίρα</b>	<b>29</b>
2.1 Ανάλυση της Δ.Ε. του Helmholtz σε Σφαιρική Γεωμετρία	29
2.2 Η Γενική Μορφή της Λύσης	34
<b>Κεφάλαιο 3: Πολλαπλή Σκέδαση Ακουστικών Κυμάτων</b>	<b>43</b>
3.1 Προσθετικά Θεωρήματα στις τρεις Διαστάσεις	43
3.2 Πολυπολική Μέθοδος για δύο Σφαίρες	48
3.3 Πολυπολική Μέθοδος για N Σφαίρες	52
<b>Κεφάλαιο 4: Αριθμητική Επίλυση του Ευθέως Προβλήματος Σκέδασης σε Περιβάλλον Mathematica</b>	<b>55</b>
4.1 Σκέδαση από Μαλακή Σφαίρα	55
4.2 Σκέδαση από Σκληρή Σφαίρα	59
<b>Παράρτημα: Ειδικές Συναρτήσεις</b>	<b>67</b>
<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>75</b>



# Εισαγωγή: Μαθηματική Θεωρία Σκέδασης

Η Θεωρία Σκέδασης έχει παίξει ένα σημαντικό ρόλο στη Μαθηματική Φυσική του εικοστού αιώνα. Από την εξήγηση που έδωσε ο Rayleigh, γιατί ο ουρανός είναι γαλάζιος, μέχρι τις σύγχρονες εφαρμογές, όπως είναι αυτές στην ιατρική με τις μεθόδους τομογραφίας, πολλοί φυσικοί και μαθηματικοί ασχολούνται με προβλήματα σκέδασης. Αυστηρότερα ως προς τη μαθηματική της ερμηνεία, αυτή η θεωρία ασχολείται με τη μελέτη των διαφορικών εξισώσεων που διέπουν τα διάφορα φαινόμενα σκέδασης. Επιπλέον, έχει εφαρμογές σε πολλούς κλάδους της σύγχρονης επιστήμης, όπως είναι, για παράδειγμα, ο ραδιεντοπισμός, η γεωφυσική, η ακτινοδιαγνωστική και η κβαντική θεωρία πεδίου. Βασικό αντικείμενο μελέτης της Θεωρίας Σκέδασης είναι η επίδραση που έχει ένα ετερογενές μέσο σε ένα προσπίπτον κύμα. Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο θα γίνει αναφορά στις έννοιες των ακουστικών κυμάτων και της απλής σκέδασης.

Η ανάπτυξη και διάδοση των ακουστικών κυμάτων επιτυγχάνεται λόγω της αδράνειας και της ελαστικότητας που χαρακτηρίζουν τα ελαστικά μέσα, είτε πρόκειται για στερεά, είτε για υγρά, είτε για αέρια. Ανάλογα με τον τρόπο διάδοσης των ακουστικών κυμάτων, αυτά διακρίνονται σε κατηγορίες. Έχουμε τα σφαιρικά ακουστικά κύματα, όπου η διαταραχή του μέσου εξαπλώνεται στο χώρο γύρω από την πηγή με τη μορφή σφαιρικής επιφάνειας, τα επίπεδα, όπου η διαταραχή του μέσου εξαπλώνεται με τη μορφή επίπεδης επιφάνειας και τα κυλινδρικά, όπου η διαταραχή του μέσου εξαπλώνεται με τη μορφή κυλινδρικής επιφάνειας. Η διάκριση αυτή έχει ιδιαίτερη σημασία, διότι καθορίζει σε μεγάλο βαθμό τη συμπεριφορά τους στο χώρο.

Η θεωρία σκέδασης ασχολείται με την επίδραση ασυνεχειών στη διάδοση ενός κύματος. Ειδικότερα, αν συμβολίσουμε με  $\Phi$  το προσπίπτον κύμα,  $u$  το σκεδασμένο πεδίο και  $\Psi$  την υπέρθεση των δύο, το *ευθύ πρόβλημα σκέδασης* συνίσταται στον προσδιορισμό του σκεδασμένου πεδίου από τη γνώση του προσπίπτοντος πεδίου και των φυσικών ή και γεωμετρικών ιδιοτήτων του σώματος που παρεμβάλλεται στην κυματική διάδοση, καθώς και της διαφορικής εξίσωσης που διέπει την κυματική διάδοση. Το *αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης* συνίσταται στον προσδιορισμό αυτών των φυσικών ή και γεωμετρικών ιδιοτήτων του σώματος που παρεμβάλλεται στην κυματική διάδοση (π.χ. μέγεθος, εσωτερική δομή), από τη γνώση της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς του σκεδασμένου πεδίου, ή του σκεδασμένου πεδίου σε μια περιοχή κοντά στον σκεδαστή.

Με τον όρο *ακουστική σκέδαση* εννοούμε τη σκέδαση ακουστικών κυμάτων. Η μαθηματική θεμελίωση του προβλήματος προέρχεται από το σύστημα εξισώσεων που περιλαμβάνει την εξίσωση Euler, την εξίσωση συνέχειας, την εξίσωση κατάστασης και την αδιαβατική εξίσωση. Όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, από αυτές τις εξισώσεις προκύπτει η *εξίσωση Helmholtz* που μοντελοποιεί τα προβλήματα ακουστικής σκέδασης.

Για να μιλάμε για σκέδαση, μας είναι απαραίτητη η ύπαρξη ενός σκεδαστή. Στην κλασική θεωρία σκέδασης αυτός μπορεί να είναι ένα σώμα με καθορισμένο σύνορο ή απλώς το ίδιο το μέσο διάδοσης, ενώ στην κβαντική θεωρία σκέδασης η σκέδαση οφείλεται στην ύπαρξη πεδίου. Και στις δύο περιπτώσεις θεωρούμε πως η πηγή της διαταραχής βρίσκεται εκτός της περιοχής του σκεδαστή, έτσι ώστε ο τελευταίος να περιβάλλεται σε κάθε περίπτωση από ένα διαφορετικό μέσο, στο οποίο μάλιστα παράγεται το προσπίπτον κύμα. Στα προβλήματα που θα μελετήσουμε οι σκεδαστές θα είναι σφαιρικά σώματα, στα σύνορα των οποίων πρέπει να ικανοποιούνται ορισμένες συνοριακές συνθήκες. Το μέσο διάδοσης είναι ομογενές (ή μη ομογενές) και υπάρχει μια συνοριακή συνθήκη ακτινοβολίας στο άπειρο, δηλαδή σε μια περιοχή πολύ μακριά από τον σκεδαστή, η οποία μας εξασφαλίζει ότι το σκεδασμένο κύμα (πεδίο) θα απομακρύνεται από τον σκεδαστή και θα μοιάζει σε μεγάλες αποστάσεις με ένα σφαιρικά εκτεινόμενο κύμα.

Το ευθύ πρόβλημα σκέδασης, στην περίπτωση που θεωρούμε αρμονική εξάρτηση ως προς το χρόνο, περιγράφεται σε διαφορετική μορφή ως ένα εξωτερικό πρόβλημα συνοριακών τιμών και είναι καλά τοποθετημένο. Οι μαθηματικές μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για την επίλυση ευθέων προβλημάτων, είτε πρόκειται για ακουστικά, είτε για ηλεκτρομαγνητικά, είτε για ελαστικά κυματικά πεδία, συναρτώνται άμεσα με τη συχνότητα της κυματικής διάδοσης. Ειδικότερα, αν το μήκος κύματος  $\lambda = 2\pi/k$ , όπου  $k$  ο κυματάριθμος, είναι πολύ μικρό σε σχέση με τη χαρακτηριστική διάσταση  $a$  του σκεδαστή (στην περίπτωση του σφαιρικού σκεδαστή με τον οποίον θα ασχοληθούμε, πρόκειται για τη διάμετρο της μικρότερης σφαίρας που περικλείει τον σκεδαστή), δηλαδή ισχύει  $a \gg \lambda$  (ή  $ka \gg 1$ ) μιλάμε για *υψηλές συχνότητες*, ενώ αν ισχύει  $a \ll \lambda$  (ή  $ka \ll 1$ ) μιλάμε για *χαμηλές συχνότητες*. Στις υψηλές συχνότητες το πρόβλημα ανάγεται σε πρόβλημα γεωμετρικής οπτικής, ενώ στις χαμηλές ανάγεται σε προβλήματα θεωρίας δυναμικού. Στις ενδιάμεσες περιοχές τιμών μιλάμε για περιοχή συντονισμού. Οι μαθηματικές μέθοδοι που χρησιμοποιούνται στην προκειμένη περίπτωση διαφέρουν σημαντικά από αυτές που εφαρμόζονται στις περιοχές των χαμηλών και υψηλών συχνοτήτων, απαιτούν δυσκολότερα μαθηματικά εργαλεία, αλλά αντιμετωπίζουν ένα ευρύτερο φάσμα προβλημάτων εφαρμογών.

# Κεφάλαιο 1: Σκέδαση Ακουστικών Κυμάτων

Στο κεφάλαιο αυτό θα περιγράψουμε τη σκέδαση ακουστικών κυμάτων, θα δούμε πώς προκύπτει η εξίσωση Helmholtz από την κυματική εξίσωση και θα παρουσιάσουμε τις συνοριακές συνθήκες στην ακουστική, καθώς και τη συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld.

## 1.1 Ακουστικά Κύματα

Υποθέτουμε ότι έχουμε διάδοση ακουστικών κυμάτων μικρού πλάτους μέσα σε ένα ομογενές και ισότροπο μέσο στον χώρο  $R^3$ , το οποίο λαμβάνουμε ως ιδανικό ρευστό με απουσία επίδρασης εξωτερικών δυνάμεων. Έστω  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  η ταχύτητα ενός σωματιδίου του ρευστού στη θέση  $\mathbf{r} \in R^3$  τη χρονική στιγμή  $t$ . Επίσης, έστω ότι με  $p(\mathbf{r}, t)$ ,  $\rho(\mathbf{r}, t)$  και  $S(\mathbf{r}, t)$  συμβολίζουμε την πίεση, την πυκνότητα και την ειδική ενθαλπία του ρευστού αντίστοιχα.

Τότε η κίνηση του σωματιδίου περιγράφεται από τις εξής σχέσεις:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 \quad (\text{εξίσωση Euler}) \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (\text{εξίσωση συνέχειας}) \quad (1.2)$$

$$p = f(\rho, S) \quad (\text{καταστατική εξίσωση}) \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla S = 0 \quad (\text{αδιαβατική εξίσωση}) \quad (1.4)$$

όπου  $f$  μια συνάρτηση εξαρτώμενη από το ρευστό. Το παραπάνω σύστημα των τεσσάρων εξισώσεων είναι μη γραμμικό ως προς τις άγνωστες συναρτήσεις  $\mathbf{v}, \rho, p$  και  $S$ . Υποθέτουμε ότι στην κατάσταση ισορροπίας έχουμε  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$ , καθώς και ότι η πυκνότητα, η πίεση και η ενθαλπία είναι σταθερές. Τότε, γραμμικοποιώντας το σύστημα με τη μέθοδο των διαταραχών, λαμβάνουμε τις ακόλουθες γραμμικοποιημένες εξισώσεις:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p = 0 \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \rho}(\rho_0, S_0) \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1.7)$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει η *κυματική εξίσωση*:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \Delta p \quad (1.8)$$

όπου  $c$  η ταχύτητα του ήχου η οποία ορίζεται ως

$$c = \sqrt{\frac{\partial f}{\partial \rho}(\rho_0, S_0)} \quad (1.9)$$

Από την γραμμικοποιημένη εξίσωση του Euler (σχέση 1.5) είναι φανερό ότι υπάρχει ένα δυναμικό ταχύτητας  $V = V(\mathbf{r}, t)$  τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\rho_0} \nabla V \quad (1.10)$$

και

$$p = -\frac{\partial V}{\partial t} \quad (1.11)$$

Το δυναμικό ταχύτητας  $V$  ικανοποιεί την κυματική εξίσωση  $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \Delta V$ .

Για χρονικώς αρμονικά ακουστικά κύματα της μορφής:

$$V(\mathbf{r}, t) = \Psi(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \quad (1.12)$$

με κυκλική συχνότητα  $\omega > 0$ , καταλήγουμε στο γεγονός ότι η χωρική εξάρτηση  $\Psi(\mathbf{r})$  ικανοποιεί την *χρονοαanhγμένη κυματική εξίσωση* ή, όπως είναι ευρέως γνωστή, την *εξίσωση Helmholtz*:

$$\Delta \Psi + k^2 \Psi = 0 \quad (1.13)$$

όπου  $k$  ο κυματάρριθμος, που είναι μια σταθερά και δίνεται από τη σχέση  $k = \omega/c$ .



Η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος σκέδασης ενός χρονικώς αρμονικού επίπεδου κύματος από ένα σώμα  $D$  οδηγεί σε ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών για την εξίσωση Helmholtz.

Πιο συγκεκριμένα, έστω ότι το προσπίπτον κύμα περιγράφεται από τη σχέση

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = e^{i(k\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \quad (1.14)$$

το οποίο διαδίδεται στην κατεύθυνση του  $\hat{\mathbf{k}}$  (όπου με  $\hat{\mathbf{k}}$  συμβολίζουμε το μοναδιαίο διάνυσμα της διεύθυνσης πρόσπτωσης).

Ο χώρος  $R^3$ , χωρίς το σκεδαστή, έχει μια στάσιμη κατανομή υπερπίεσης που δίνεται από το προσπίπτον πεδίο

$$\Phi(\mathbf{r}) = e^{ik\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{r}} \quad (1.15)$$

Το  $\Phi$  επιβάλλει στο χώρο ένα περιοδικό στάσιμο κύμα. Το κύμα αυτό έχει τη μορφή επίπεδου κύματος στη διεύθυνση  $\hat{\mathbf{k}}$  με κυματάριθμο  $k$ . Αυτή είναι η φυσική κατάσταση του μέσου διάδοσης, όταν δεν υπάρχει ο σκεδαστής. Στη συνέχεια, τοποθετούμε το σκεδαστή και σκοπός μας είναι να βρούμε τη μορφή του πεδίου υπερπίεσης μετά από αυτή τη διαταραχή.

Αν συμβολίσουμε με  $\Psi$  το πεδίο υπερπίεσης με την παρουσία του σκεδαστή, τότε η διαφορά

$$u = \Psi - \Phi \quad (1.16)$$

περιγράφει την επίδραση του σκεδαστή επάνω στο υπάρχον προσπίπτον πεδίο  $\Phi$ . Το  $u$  ονομάζεται *σκεδασμένο πεδίο* και αποτελεί ένα δευτερογενές κύμα που δημιουργείται από το σκεδαστή και διαδίδεται απομακρυνόμενο από αυτόν.

Έτσι, το πρόβλημα σκέδασης για την περίπτωση ομογενούς μέσου ανάγεται στον προσδιορισμό του ολικού πεδίου  $\Psi$ , το οποίο περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση Helmholtz (σχέση 1.13), την κατάλληλη συνοριακή συνθήκη στο σύνορο του σκεδαστή και τη συνθήκη απείρου (ακτινοβολίας). Οι δύο τελευταίες έννοιες θα εξεταστούν αναλυτικά στις ενότητες που ακολουθούν.

## 1.2 Συνοριακές Συνθήκες στην Ακουστική

Καταρχήν, η εξίσωση του Helmholtz ικανοποιείται σε όλο το χώρο  $R^3$  εκτός του σκεδαστή (έστω  $D$ ) και του συνόρου αυτού (έστω  $\partial D$ ). Ανάλογα το είδος του σκεδαστή, επιβάλλουμε τις κατάλληλες συνθήκες στο σύνορο.

1) *Συνθήκη Dirichlet*: Αν έχουμε μαλακό σκεδαστή, στο σύνορο επιβάλλεται το πεδίο να είναι μηδέν, δηλαδή

$$\Psi = 0 \text{ στο } \partial D \quad (1.17)$$

2) *Συνθήκη Neumann*: Στην περίπτωση που έχουμε σκληρό σκεδαστή, στο σύνορο επιβάλλεται η συνθήκη,

$$\partial\Psi/\partial n = 0 \text{ στο } \partial D \quad (1.18)$$

όπου  $\hat{n}$  είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο σύνορο  $\partial D$  με φορά προς το εξωτερικό του συνόρου.

3) *Συνθήκη Robin*: Στην περίπτωση που έχουμε ανθεκτικό σκεδαστή, στο σύνορο επιβάλλεται η συνθήκη,

$$\partial\Psi/\partial n + i \frac{\omega\rho}{Z_n} \Psi = 0 \text{ στο } \partial D \quad (1.19)$$

όπου  $Z_n$  είναι η κάθετη ακουστική αντίσταση της επιφάνειας και ορίζεται ως το πηλίκο του  $\Psi$  με την κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας,  $\omega$  είναι η κυκλική συχνότητα του κύματος και  $\rho$  είναι η πυκνότητα του ρευστού.

Η κάθετη ακουστική αντίσταση χαρακτηρίζει το είδος του κύματος που μπορεί να παράγει (ή να ανακλάσει) η επιφάνεια του σκεδαστή. Το αντίστροφο της ακουστικής αντίστασης  $Y_n = Z_n^{-1}$  ονομάζεται *κάθετη ακουστική είσοδος*.

Παρατηρούμε πως η συγκεκριμένη συνθήκη αποτελεί γραμμικό συνδυασμό των δύο προηγούμενων. Επιπλέον, ο μαλακός σκεδαστής λαμβάνεται ως όριο του ανθεκτικού όταν  $Z_n \rightarrow 0$ , ενώ ο σκληρός σκεδαστής λαμβάνεται ως όριο του ανθεκτικού όταν  $Y_n \rightarrow 0$ .

#### 4) Διαπερατός Σκεδαστής

Για να μπορέσουμε να ορίσουμε τις συνοριακές συνθήκες που ισχύουν εδώ, είναι απαραίτητος ο διαχωρισμός των μεταβλητών που αναφέρονται στο χώρο εσωτερικά και εξωτερικά του σκεδαστή. Έτσι λοιπόν, χαρακτηρίζουμε με ένα "+" τις μεταβλητές που αναφέρονται στο εξωτερικό του σκεδαστή και με ένα "-" αυτές στο εσωτερικό του.

Οι συνοριακές συνθήκες απαιτούν συνέχεια του ολικού πεδίου και της κάθετης συνιστώσας του πεδίου ταχύτητας. Δηλαδή:

$$\Psi^+ = \Psi^- \text{ στο } \partial D$$

και

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}^+ = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}^- \text{ στο } \partial D$$

Η τελευταία σχέση γράφεται

$$-\frac{i}{\rho^+ \omega} \frac{\partial \Psi^+}{\partial n} = -\frac{i}{\rho^- \omega} \frac{\partial \Psi^-}{\partial n}$$

ή

$$\frac{\partial \Psi^+}{\partial n} = \frac{\rho^+}{\rho^-} \frac{\partial \Psi^-}{\partial n}$$

Εισάγοντας την παράμετρο  $B = \frac{\rho^+}{\rho^-}$  οι συνοριακές συνθήκες διαπερατότητας παίρνουν την τελική τους μορφή:

$$\Psi^+ = \Psi^- \text{ στο } \partial D \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial \Psi^+}{\partial n} = B \frac{\partial \Psi^-}{\partial n} \text{ στο } \partial D \quad (1.21)$$

### 1.3 Συνθήκη Ακτινοβολίας

Ο Rayleigh, πρώτος στη δεκαετία του 1870, έδωσε τη μορφή που θα πρέπει να έχει το σκεδασμένο πεδίο καθώς απομακρυνόμαστε από το σκεδαστή. Έτσι, η συνθήκη ακτινοβολίας του Rayleigh είναι:

$$u = f(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{k}}) \frac{e^{ikr}}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad \text{καθώς } r \rightarrow +\infty \quad (1.22)$$

Στην εν λόγω συνθήκη το κομμάτι  $\frac{e^{ikr}}{r}$  μας περιγράφει το πώς φθίνει ακτινικά το σφαιρικά εκτεινόμενο σκεδασμένο κύμα, ενώ το κομμάτι  $f(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{k}})$  μας περιγράφει το πώς η φυσική και η γεωμετρία του σκεδαστή επηρεάζουν το σφαιρικά εκτεινόμενο κύμα,

όπου  $\hat{\mathbf{r}}$  η διεύθυνση παρατήρησης

$\hat{\mathbf{k}}$  η διεύθυνση πρόσπτωσης

Το βασικό επιχείρημα του Rayleigh ήταν ότι μακριά από τον σκεδαστή το σκεδασμένο πεδίο θα έπρεπε να έχει τη μορφή ενός σφαιρικά εκτεινόμενου κύματος. Η θετική φάση στην παραπάνω σχέση οφείλεται στο ότι η φάση στο χρόνο υποτέθηκε αρνητική.

Έτσι,

$$e^{-i\omega t} u = f \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right), r \rightarrow +\infty$$

το οποίο σημαίνει ότι καθώς περνάει ο χρόνος  $t$  η φάση ταξιδεύει προς αυξανόμενες αποστάσεις  $r$  από το σκεδαστή.

Αξίζει να σημειωθεί εδώ πως ο Rayleigh δεν καθόρισε ποτέ συνθήκες ακτινοβολίας όπως έκανε ο Sommerfeld, αλλά κάθε φορά που αντιμετώπιζε ένα πρόβλημα σκέδασης επέλεγε τη σωστή μορφή του σκεδασμένου πεδίου στο άπειρο.

Ο Sommerfeld, το 1912, καθόρισε αυστηρά τη συνθήκη ακτινοβολίας με την παρακάτω μορφή:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} r \left( \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0 \quad (1.23)$$

Τόσο στην περίπτωση του ομογενούς όσο και του μη ομογενούς μέσου διάδοσης πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld, η οποία εξασφαλίζει τη μοναδικότητα της λύσης σε προβλήματα σκέδασης. Από μαθηματική σκοπιά, η σχέση αυτή μας λέει πως σε μεγάλες αποστάσεις το σκεδασμένο κύμα επεκτείνεται σφαιρικά καθώς περνάει ο χρόνος.

Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι η συνθήκη ακτινοβολίας του Rayleigh προκύπτει από αυτήν του Sommerfeld, το αντίστροφο όμως δεν ισχύει καθώς η συνθήκη του Sommerfeld είναι πιο γενική.

Τέλος, οι Magnus – Wilcox – Mueller στις αρχές του 1950 αντικατέστησαν τη συνθήκη του Sommerfeld με την αντίστοιχη ασθενή της μορφή:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{S(r)} \left| \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right|^2 dS = 0 \quad (1.24)$$

ή

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} r^2 \int_{S_2} \left| \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right|^2 d\Omega = 0 \quad (1.25)$$

όπου με  $S(r)$  συμβολίζουμε τη σφαίρα ακτίνας  $r$  και με  $S_2$  την μοναδιαία σφαίρα του  $R^3$ .

## 1.4 Πλάτος Σκέδασης

Μια πολύ σημαντική συνάρτηση που χρησιμοποιείται στη θεωρία της σκέδασης, είναι το λεγόμενο *πλάτος σκέδασης* των ακουστικών κυμάτων. Η γνώση του πλάτους σκέδασης του σκεδασμένου πεδίου κρίνεται απαραίτητη για το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης, ωστόσο, όπως έχουμε πει στην εισαγωγή, το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης δεν αποτελεί αντικείμενο της παρούσας εργασίας. Θα δούμε όμως στην συγκεκριμένη ενότητα πώς ορίζεται το πλάτος σκέδασης, αφού πρώτα γίνει αναφορά σε κάποιους ορισμούς και θεωρήματα που μας είναι απαραίτητα για τον ορισμό αυτό.

### 1.4.1 Θεμελιώδεις Λύσεις

**Ορισμός:** Η συνάρτηση  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  ονομάζεται *θεμελιώδης λύση* για τον γραμμικό τελεστή  $L$ , όταν επιλύει την εξίσωση

$$LG(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.26)$$

Το σημείο  $\mathbf{r}'$  ονομάζεται *πόλος* ή *ανώμαλο σημείο* της  $G$  και λογίζεται ως μια παράμετρος της λύσης. Εμείς εξετάζουμε την περίπτωση του διαφορικού τελεστή του Helmholtz, δηλαδή  $L = \Delta + k^2$ . Με  $\delta(\mathbf{r})$  συμβολίζουμε τη συνάρτηση του Dirac.

**Ορισμός:** Το γραμμικό και συνεχές συναρτησιακό  $\delta: C_0^\infty \rightarrow R$ , όπου με  $C_0^\infty$  παριστάνουμε το σύνολο των δοκιμαστικών συναρτήσεων, καλείται *συνάρτηση του Dirac*, όταν ισχύει

$$\delta(\Phi) = \Phi(\mathbf{0}) \quad , \quad \forall \Phi \in C_0^\infty \quad (1.27)$$

Ονομάζουμε *δοκιμαστικές συναρτήσεις* τις συναρτήσεις που είναι απείρως διαφορίσιμες και μηδενίζονται έξω από κάποιο φραγμένο χωρίο.

Η σημασία της θεμελιώδους λύσης οφείλεται στο γεγονός ότι η γνώση της για τον τελεστή  $L$  ισοδυναμεί με τη γνώση της λύσης της εξίσωσης

$$Lu = f \quad (1.28)$$

η οποία τότε δίνεται με την ολοκληρωτική μορφή

$$u(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f(\mathbf{r}') dv(\mathbf{r}') \quad (1.29)$$

όπου το χωρίο ολοκλήρωσης  $\Omega$  καθορίζεται από το εκάστοτε πρόβλημα που μελετάμε.

Αποδεικνύεται (οι αναλυτικές αποδείξεις βρίσκονται ενδεικτικά στο «Σεμινάριο Σκέδασης Κυματικών Πεδίων» του Γ.Δάσιου, [2] της βιβλιογραφίας) ότι η θεμελιώδης λύση για την εξίσωση του Helmholtz, σε 1, 2 και 3 διαστάσεις αντίστοιχα, δίνεται από τους παρακάτω τύπους

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{i}{2k} e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (1.30)$$

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \quad (1.31)$$

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{ik}{4\pi} h_0^{(1)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \quad (1.32)$$

όπου  $H_0^{(1)}$  είναι η συνάρτηση Hankel πρώτου είδους μηδενικής τάξης και  $h_0^{(1)}$  η αντίστοιχη σφαιρική συνάρτηση Hankel (βλέπε παράρτημα για αναλυτικότερη περιγραφή).

## 1.4.2 Θεωρήματα Green

**Θεώρημα** (Πρώτο Θεώρημα Green): Έστω  $\Omega$  ένα φραγμένο χωρίο τάξης  $C^1$  και  $\hat{\mathbf{n}}$  το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο σύνορο  $\partial\Omega$  κατευθυνόμενο προς το εξωτερικό του  $\Omega$ . Τότε, αν  $u_1 \in C^1(\Omega)$  και  $u_2 \in C^2(\Omega)$ , ισχύει ότι

$$\int_{\Omega} (u_1 \Delta u_2 + \nabla u_1 \cdot \nabla u_2) dv = \oint_{\partial\Omega} u_1 \frac{\partial u_2}{\partial n} ds \quad (1.33)$$

**Θεώρημα** (Δεύτερο Θεώρημα Green): Έστω  $\Omega$  ένα φραγμένο χωρίο τάξης  $C^1$  και  $\hat{\mathbf{n}}$  το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο σύνορο  $\partial\Omega$  κατευθυνόμενο προς το εξωτερικό του  $\Omega$ . Τότε, αν  $u_1, u_2 \in C^2(\Omega)$ , ισχύει ότι

$$\int_{\Omega} (u_1 \Delta u_2 - u_2 \Delta u_1) dv = \oint_{\partial\Omega} \left( u_1 \frac{\partial u_2}{\partial n} - u_2 \frac{\partial u_1}{\partial n} \right) ds \quad (1.34)$$

### 1.4.3 Ολοκληρωτικές Αναπαράστασεις του Σκεδασμένου Πεδίου

**Ορισμός:** Ονομάζουμε *ολοκληρωτική αναπαράσταση* μιας λύσης της εξίσωσης Helmholtz κάθε αναπαράσταση της λύσης με ένα ολοκλήρωμα επάνω στο σύνορο του θεμελιώδους πεδίου. Πρόκειται δηλαδή για μία έκφραση που περιλαμβάνει, εκτός από γνωστές συναρτήσεις, τις τιμές της λύσης και της κάθετου παραγώγου της.

Το σκεδασμένο πεδίο  $u$  ικανοποιεί την εξίσωση του Helmholtz,  $(\Delta + k^2)u = 0$ . Εφαρμόζοντας τον δεύτερο τύπο του Green (σχέση 1.34) στο θεμελιώδες πεδίο (έστω  $\Omega$ ) για τη λύση  $u$  και τη θεμελιώδη λύση που δίνεται από την (1.32) - ή την (1.31), αν εργαζόμαστε στις δύο διαστάσεις - μπορούμε να εξαγάγουμε την ολοκληρωτική αναπαράσταση του σκεδασμένου στις τρεις (ή τις δύο) διαστάσεις. Η απόδειξη είναι αρκετά εκτενής και υπάρχει αναλυτική περιγραφή της στο «Σεμινάριο Σκέδασης Κυματικών Πεδίων» του Γ. Δάσιου ([2] της βιβλιογραφίας).

Σημειώνεται πως, για να είναι δυνατή η εφαρμογή της ταυτότητας του Green, είναι απαραίτητες δύο προϋποθέσεις:

Πρώτον, η  $u$  πρέπει να έχει συνεχείς πρώτες παραγώγους. Αυτή η συνθήκη εξασφαλίζεται λόγω του ότι η  $u$  αποτελεί λύση της εξίσωσης Helmholtz, άρα έχει δεύτερες παραγώγους, και επομένως έχει συνεχείς πρώτες παραγώγους, αφού, ως γνωστόν, η διαφορισιμότητα συνεπάγεται συνέχεια.

Και δεύτερον, η επιφάνεια  $S$  του σκεδαστή πρέπει να είναι κατά τμήματα ομαλή, δηλαδή θέλουμε η  $S$  να έχει μια πεπερασμένη διαμέριση όπου κάθε στοιχείο της να είναι κομμάτι επιφάνειας με συνεχή πρώτη παράγωγο. Με άλλα λόγια, θέλουμε η κάθετος  $\hat{n}$  στην  $S$  να είναι κατά τμήματα συνεχής.

Εφαρμόζοντας, λοιπόν, το δεύτερο θεώρημα του Green, καταλήγουμε στην ολοκληρωτική αναπαράσταση του σκεδασμένου πεδίου στις τρεις διαστάσεις

$$u(\mathbf{r}) = \frac{ik}{4\pi} \oint_S \left[ u(\mathbf{r}') \frac{\partial h_0^{(1)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial n(\mathbf{r}')} - h_0^{(1)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \frac{\partial u(\mathbf{r}')}{\partial n(\mathbf{r}')} \right] ds(\mathbf{r}') \quad (1.35)$$

όπου  $S$  είναι η επιφάνεια του σκεδαστή,  $\mathbf{r}$  είναι το σημείο παρατήρησης και  $\mathbf{r}'$  η τρέχουσα μεταβλητή ολοκλήρωσης που μεταβάλλεται πάνω στην  $S$ , ενώ η κάθετη παραγωγή διευθύνεται προς το εξωτερικό του  $\Omega$ .

Είναι γνωστό ότι

$$h_0^{(1)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = \frac{e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (1.36)$$

Ανάλογη έκφραση της ολοκληρωτικής αναπαράστασης του σκεδασμένου πεδίου υπάρχει και για τις δύο διαστάσεις

$$u(\mathbf{r}) = \frac{i}{4} \oint_S \left[ u(\mathbf{r}') \frac{\partial H_0^{(1)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial n(\mathbf{r}')} - H_0^{(1)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \frac{\partial u(\mathbf{r}')}{\partial n(\mathbf{r}')} \right] ds(\mathbf{r}') \quad (1.37)$$

#### 1.4.4 Περί Πλάτους Σκέδασης

Όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, η ολοκληρωτική αναπαράσταση του σκεδασμένου πεδίου στις τρεις διαστάσεις δίνεται από τη σχέση (1.35).

Για να βρούμε τη συμπεριφορά της  $u(\mathbf{r})$  στην περιοχή ακτινοβολίας, δηλαδή για

$$r = |\mathbf{r}| > \frac{d^2}{\lambda} \quad (1.38)$$

όπου με  $d$  συμβολίζουμε τη διάμετρο του σκεδαστή και με  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  το μήκος κύματος, θεωρούμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά του ολοκληρώματος (1.35) για  $r \rightarrow +\infty$ .

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| &= (r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + r'^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= r \left[ 1 - \left( 2\hat{\mathbf{r}} \cdot \frac{\mathbf{r}'}{r} - \frac{r'^2}{r^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (1.39)$$

Για  $r$  αρκετά μεγάλο, από το διωνυμικό ανάπτυγμα προκύπτει ότι

$$\left| 2\hat{\mathbf{r}} \cdot \frac{\mathbf{r}'}{r} - \frac{r'^2}{r^2} \right| < 1 \quad (1.40)$$



Από την ανάλυση γνωρίζουμε ότι για την σειρά  $\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{a}{k} x^k$  (η οποία είναι γνωστή ως διωνυμική σειρά) ισχύει

$$(1+x)^a = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{a}{k} x^k \quad (1.41)$$

$\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0$  και  $x \in (-1,1)$ .

Επιστρέφοντας στο πρόβλημά μας, αν θέσουμε  $x = 2\hat{\mathbf{r}} \cdot \frac{\mathbf{r}'}{r} - \frac{r'^2}{r^2} \in (-1,1)$  (λόγω της σχέσης 1.40) και  $a = 1/2$ , τότε προκύπτει

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x = 1 + \hat{\mathbf{r}} \cdot \frac{\mathbf{r}'}{r} - \frac{2r'^2}{r^2} = 1 + \hat{\mathbf{r}} \cdot \frac{\mathbf{r}'}{r} - O\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad (1.42)$$

συνεπώς, για  $r \rightarrow +\infty$ , έχουμε ότι

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| &= r \left( 1 - \hat{\mathbf{r}} \cdot \frac{\mathbf{r}'}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \right) \\ &= r - \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}' + O\left(\frac{1}{r}\right) \end{aligned} \quad (1.43)$$

Χρησιμοποιώντας τον ασυμπτωτικό τύπο (1.43), ο όρος  $h_0^{(1)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$  της σχέσης (1.35) για μεγάλες αποστάσεις γράφεται στην ασυμπτωτική του μορφή:

$$\begin{aligned} h_0^{(1)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) &= \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{ik} (r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + r'^2)^{-\frac{1}{2}} e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \\ &= \frac{1}{ik} r^{-1} \left[ 1 - \left( 2\hat{\mathbf{r}} \cdot \frac{\mathbf{r}'}{r} - \frac{r'^2}{r^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} e^{ik(r - \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}' + O(\frac{1}{r}))} \\ &= \frac{1}{ik} r^{-1} \left[ 1 + \hat{\mathbf{r}} \cdot \frac{\mathbf{r}'}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \right] e^{ik(r - \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}')} e^{O(\frac{1}{r})} \\ &= \frac{1}{ik} \left[ \frac{1}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \right] e^{ikr} e^{-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{r}\right) \right] \\ &= \frac{e^{ikr}}{ikr} e^{-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'} + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \end{aligned} \quad (1.44)$$

Επομένως, για  $r \rightarrow +\infty$ , ισχύει

$$h_0^{(1)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = e^{-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'} h_0^{(1)}(kr) + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad (1.45)$$

Χρησιμοποιώντας την (1.45), η αναπαράσταση (1.35) γράφεται

$$u(\mathbf{r}) = \frac{ik}{4\pi} h_0^{(1)}(kr) \oint_S \left[ u(\mathbf{r}') \frac{\partial e^{-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}}{\partial n(\mathbf{r}')} - e^{-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'} \frac{\partial u(\mathbf{r}')}{\partial n(\mathbf{r}')} \right] ds(\mathbf{r}') \\ + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad \text{για } r \rightarrow +\infty \quad (1.46)$$

Ορίζουμε ως κανονικοποιημένο πλάτος σκέδασης τη συνάρτηση

$$g(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{k}}) = \frac{ik}{4\pi} \oint_S \left[ u(\mathbf{r}') \frac{\partial e^{-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}}{\partial n(\mathbf{r}')} - e^{-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'} \frac{\partial u(\mathbf{r}')}{\partial n(\mathbf{r}')} \right] ds(\mathbf{r}') \quad (1.47)$$

συνεπώς η (1.46) γράφεται

$$u(\mathbf{r}) = g(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{k}}) h_0^{(1)}(kr) + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad \text{για } r \rightarrow +\infty \quad (1.48)$$

Το πλάτος σκέδασης  $g(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{k}})$  αποτελεί ένα μέτρο της πυκνότητας ενέργειας που σκεδάζει ο σκεδαστής στη διεύθυνση  $\hat{\mathbf{r}}$ , όταν αυτός διεγείρεται από ένα προσπίπτον κύμα στη διεύθυνση  $\hat{\mathbf{k}}$ . Επίσης, αποτελεί την σπουδαιότερη συνάρτηση στη θεωρία σκέδασης, καθώς μεταφέρει στην περιοχή ακτινοβολίας όλες τις πληροφορίες σχετικά με το σκεδαστή, τόσο τις γεωμετρικές όσο και τις φυσικές ιδιότητές του.

Η εξάρτηση του  $g$  από το  $\hat{\mathbf{r}}$  γίνεται προφανής από τη σχέση (1.47), ενώ η αντίστοιχη εξάρτηση από το  $\hat{\mathbf{k}}$  είναι ενσωματωμένη μέσα στη λύση  $u(\mathbf{r}')$ . Τέλος, παρατηρούμε ότι εξαρτάται και από τον κυματάρημο  $k$ , όμως, επειδή το  $k$  είναι σταθερό για όλο το πρόβλημα, δεν απαιτείται η εμφάνισή του στην έκφραση του  $g$ .

**Παρατήρηση:** Επειδή το επίπεδο προσπίπτον κύμα  $\Phi$  δεν έχει ανώμαλα σημεία στον  $R^3$ , από τον δεύτερο τύπο του Green έπεται ότι

$$\oint_S \left[ \Phi(\mathbf{r}') \frac{\partial h_0^{(1)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial n(\mathbf{r}')} - h_0^{(1)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}')}{\partial n(\mathbf{r}')} \right] ds(\mathbf{r}') = 0 \quad (1.49)$$

για κάθε  $\mathbf{r} \in V$ , όπου  $V$  ο χώρος εξωτερικά του σκεδαστή.

Κατά συνέπεια, από τους τύπους (1.35) και (1.49), έπεται η ολοκληρωτική αναπαράσταση  $\forall \mathbf{r} \in V$

$$u(\mathbf{r}) = \frac{ik}{4\pi} \oint_S \left[ \Psi(\mathbf{r}') \frac{\partial h_0^{(1)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial n(\mathbf{r}')} - h_0^{(1)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}')}{\partial n(\mathbf{r}')} \right] ds(\mathbf{r}') \quad (1.50)$$

Άρα το ολικό πεδίο γράφεται ως

$$\Psi(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r}) + u(\mathbf{r})$$

ή

$$\Psi(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r})$$

$$+ \frac{ik}{4\pi} \oint_S \left[ \Psi(\mathbf{r}') \frac{\partial h_0^{(1)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial n(\mathbf{r}')} - h_0^{(1)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}')}{\partial n(\mathbf{r}')} \right] ds(\mathbf{r}') \quad (1.51)$$

Ενώ από την (1.50) προκύπτει η ακόλουθη έκφραση του πλάτους σκέδασης

$$g(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{k}}) = \frac{ik}{4\pi} \oint_S \left[ \Psi(\mathbf{r}') \frac{\partial e^{-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}}{\partial n(\mathbf{r}')} - e^{-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'} \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}')}{\partial n(\mathbf{r}')} \right] ds(\mathbf{r}') \quad (1.52)$$

Το πλεονέκτημα της αναπαράστασης (1.50), έναντι της (1.35), είναι ότι τα εμφανιζόμενα πεδία επάνω στην επιφάνεια  $S$  είναι τα  $\Psi$  και  $\frac{\partial \Psi}{\partial n}$ , που είναι ακριβώς αυτά ως προς τα οποία έχουν δοθεί οι συνοριακές συνθήκες, κατά συνέπεια η εφαρμογή αυτών είναι άμεση.



# Κεφάλαιο 2: Ακουστική Σκέδαση από Σφαίρα

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης του Helmholtz στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων. Θα δούμε τη μορφή της σε σφαιρικές συντεταγμένες και στη συνέχεια, με την εφαρμογή της μεθόδου του χωρισμού των μεταβλητών, θα προχωρήσουμε στην επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών. Το σύστημα των σφαιρικών συντεταγμένων επιλέγεται έναντι των άλλων συστημάτων προφανώς γιατί στο πρόβλημά μας δουλεύουμε με σφαιρικό σκεδαστή.

## 2.1 Ανάλυση της Διαφορικής Εξίσωσης του Helmholtz σε Σφαιρική Γεωμετρία

Καταρχήν, ο σκεδαστής μας είναι μια σφαίρα ακτίνας  $a$ . Για να εκμεταλλευτούμε τη συμμετρία της σφαίρας επιλέγουμε ένα σύστημα συντεταγμένων με κέντρο το κέντρο της σφαίρας και με άξονα  $z$  στη διεύθυνση πρόσπτωσης  $\hat{\mathbf{k}}$ . Σημειώνεται πως εξετάζουμε την περίπτωση διάδοσης ακουστικών κυμάτων μέσα σε ένα ομογενές μέσο στον  $R^3$ .

Το πρόβλημα συνοριακών τιμών που έχουμε να λύσουμε είναι το ακόλουθο:

$$(\Delta + k^2)\Psi(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{για } |\mathbf{r}| > a \quad (2.1)$$

$$\text{Συνοριακή Συνθήκη} \quad \text{για } |\mathbf{r}| = a$$

$$\Psi(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r}) + u(\mathbf{r}) \quad (2.2)$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} r \left( \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0 \quad (2.3)$$

Η σχέση (2.1), όπως έχει αναφερθεί, είναι η εξίσωση Helmholtz, η οποία ικανοποιείται σε όλον το χώρο  $R^3$  εκτός του σκεδαστή και του συνόρου αυτού. Στο σύνορο, αναλόγως το είδος του σκεδαστή, επιβάλλεται μία από τις τέσσερις συνοριακές συνθήκες που παρουσιάστηκαν στην ενότητα 1.2 του προηγούμενου κεφαλαίου. Η σχέση (2.3) είναι η συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld (βλέπε ενότητα 1.3), η οποία μας εξασφαλίζει τη μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος.

Οι σφαιρικές συντεταγμένες  $r, \theta, \varphi$  συνδέονται με τις καρτεσιανές συντεταγμένες μέσω των σχέσεων

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \varphi \\y &= r \sin \theta \sin \varphi \\z &= r \cos \theta\end{aligned}$$

όπου  $r \in [0, +\infty)$ ,  $\theta \in [0, \pi]$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi)$ .

Η μεταβλητή  $r$  ονομάζεται ακτινική, η  $\theta$  γωνία ύψους και η  $\varphi$  αζιμουθιακή γωνία.

Συνεπώς, κάνοντας χρήση των σφαιρικών συντεταγμένων

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}} \quad (2.4)$$

ή

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}} \quad (2.5)$$

η εξίσωση (2.1) γράφεται

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + k^2 \Psi = 0 \quad (2.6)$$

Εφαρμόζοντας το χωρισμό των μεταβλητών

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi) \quad (2.7)$$

η σχέση (2.6) γράφεται

$$\frac{\Theta\Phi}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{R\Phi}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{R\Theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + k^2 R\Theta\Phi = 0 \quad (2.8)$$

Πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω σχέση με  $\frac{r^2 \sin^2 \theta}{R \theta \Phi}$  προκύπτει

$$\frac{\sin^2 \theta}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\sin \theta}{\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + k^2 r^2 \sin^2 \theta = 0 \quad (2.9)$$

Στην (2.9), οι δύο πρώτοι και ο τέταρτος όρος έχουν εξάρτηση από τις ανεξάρτητες μεταβλητές  $r$  και  $\theta$ , ενώ ο τρίτος όρος είναι ανεξάρτητος από αυτές – εξαρτάται μόνο από τη  $\varphi$ . Για να μπορεί να ισχύει αυτό πρέπει

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = \text{σταθ.} \Rightarrow \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} - \lambda_1 \Phi = 0, \quad \text{όπου } \lambda_1 \text{ σταθερά} \quad (2.10)$$

Κάνοντας χρήση της (2.10), η (2.9) πολλαπλασιασμένη με  $1/\sin^2 \theta$  παίρνει τη μορφή

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\theta}{d\theta} \right) + \frac{\lambda_1}{\sin^2 \theta} + k^2 r^2 = 0 \quad (2.11)$$

Παρατηρούμε τώρα πως στην (2.11) ο πρώτος και ο τέταρτος όρος εξαρτώνται μόνο από τη μεταβλητή  $r$ , ενώ ο δεύτερος και ο τρίτος μόνο από τη μεταβλητή  $\theta$ . Δηλαδή, επειδή ο δεύτερος και ο τρίτος όρος είναι ανεξάρτητοι από την  $r$ , πρέπει να ισχύει

$$\frac{1}{\theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\theta}{d\theta} \right) + \frac{\lambda_1}{\sin^2 \theta} = \text{σταθ.}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\theta}{d\theta} \right) + \left( \frac{\lambda_1}{\sin^2 \theta} - \lambda_2 \right) \theta = 0 \quad (2.12)$$

όπου  $\lambda_2$  σταθερά

και έτσι η (2.11) γράφεται

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + k^2 r^2 + \lambda_2 = 0 \Rightarrow \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + (k^2 r^2 + \lambda_2) R = 0 \quad (2.13)$$

Συνοψίζοντας όλη την παραπάνω διαδικασία, σημειώνουμε ότι με το χωρισμό των μεταβλητών στην εξίσωση (2.6) καταλήξαμε σε ένα σύστημα τριών χωρισμένων συνήθων διαφορικών εξισώσεων που δίνονται από τις σχέσεις (2.10), (2.12) και (2.13).

Σε αυτό το σημείο χρειάζονται ορισμένες παρατηρήσεις για τις σταθερές χωρισμού  $\lambda_1$  και  $\lambda_2$ :

Στο σύστημα των σφαιρικών συντεταγμένων έχουμε την απαίτηση η  $\Psi(r, \theta, \varphi)$  να είναι περιοδική ως προς τη γωνία  $\varphi$ . Το γεγονός αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι στην εξίσωση (2.10) η σταθερά  $\lambda_1$  πρέπει να είναι ίση με  $-m^2$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ).

Έτσι λοιπόν, αν η  $\Psi(r, \theta, \varphi)$  δεν αναμένεται να είναι ανεξάρτητη της  $\varphi$ , τότε η εξίσωση (2.12) για  $\lambda_1 = -m^2$  και με το μετασχηματισμό  $x = \cos \theta$ ,  $\theta(\theta) = P(x)$  θα πάρει τη μορφή

$$(1 - x^2)P'' - 2xP' - \left(\lambda_2 + \frac{m^2}{1 - x^2}\right)P = 0 \quad (2.14)$$

η οποία είναι γνωστή ως η *προσαρτημένη εξίσωση του Legendre*.

Για να υπάρχει φραγμένη λύση της (2.14) για  $x = \pm 1$  πρέπει  $\lambda_2 = -n(n + 1)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , με  $n \geq m$ .

Επομένως, μπορούμε να γράψουμε τις χωρισμένες εξισώσεις (2.10), (2.12) και (2.13) στην τελική τους μορφή:

$$\Phi'' + m^2\Phi = 0 \quad (2.15)$$

$$(1 - x^2)P'' - 2xP' + \left(n(n + 1) - \frac{m^2}{1 - x^2}\right)P = 0 \quad (2.16)$$

$$r^2R'' + 2rR' + (k^2r^2 - n(n + 1))R = 0 \quad (2.17)$$

όπου  $x = \cos \theta$ , ενώ οι σταθερές χωρισμού παίρνουν τις τιμές

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

$$m = 0, 1, \dots, n - 1, n$$



1) Η εξίσωση (2.15) επιβάλλει την αζιμουθιακή εξάρτηση

$$\Phi_m(\varphi) = \begin{cases} \cos m\varphi & m = 0, 1, 2, \dots \\ \sin m\varphi & m = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (2.18)$$

ή

$$\Phi_m(\varphi) = \begin{cases} e^{im\varphi} & m = 0, 1, 2, \dots \\ e^{-im\varphi} & m = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (2.19)$$

Οι δύο παραπάνω σχέσεις αποτελούν τις λύσεις της εξίσωσης (2.15).

2) Η εξάρτηση από τη γωνία ύψους  $\theta$  περιγράφεται από την προσαρτημένη εξίσωση του Legendre (2.16), η οποία έχει ως λύσεις (βλέπε Παράρτημα) τις προσαρτημένες συναρτήσεις Legendre πρώτου είδους  $P_n^m(x)$  και δευτέρου είδους  $Q_n^m(x)$ , όπου  $n = 0, 1, 2, \dots$  και  $m = 0, 1, 2, \dots, n$ . Από αυτές, μόνο οι πρώτες παραμένουν φραγμένες για  $x = \pm 1$ .

Στην ειδική περίπτωση όπου  $m = 0$ , τότε στο πρόβλημά μας δεν εμφανίζεται εξάρτηση από την αζιμουθιακή γωνία  $\varphi$  και οι αντίστοιχες λύσεις της εξίσωσης Legendre

$$(1 - x^2)P'' - 2xP' + n(n + 1)P = 0 \quad (2.20)$$

δίνονται από τα πολυώνυμα Legendre  $P_n$  και τις συναρτήσεις Legendre δευτέρου είδους  $Q_n$  (βλέπε σχετική ενότητα στο Παράρτημα).

Έχουμε τη δυνατότητα να ενοποιήσουμε τη γωνιακή εξάρτηση μέσω των επιφανειακών σφαιρικών αρμονικών συναρτήσεων (βλέπε Παράρτημα για περισσότερες λεπτομέρειες), οι οποίες δίνονται από τους τύπους:

$$Y_n^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2n + 1}{4\pi} \frac{(n - m)!}{(n + m)!}} P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (2.21)$$

για  $n = 0, 1, 2, \dots$  και  $m = 0, 1, 2, \dots, n$

και

$$\begin{aligned} Y_n^{-m}(\theta, \varphi) &= (-1)^m Y_n^{m*}(\theta, \varphi) \\ &= (-1)^m \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos \theta) e^{-im\varphi} \end{aligned} \quad (2.22)$$

για  $n = 0, 1, 2, \dots$  και  $m = 1, 2, \dots, n$ , όπου με \* συμβολίζουμε τον μιγαδικό συζυγή.

- 3) Τέλος, η ακτινική εξάρτηση της λύσης περιγράφεται από την εξίσωση (2.17), η οποία και είναι γνωστή ως η σφαιρική εξίσωση του Bessel. Οι λύσεις αυτής της εξίσωσης είναι οι σφαιρικές συναρτήσεις Bessel και Neumann.

$$R_n(r) = \begin{cases} j_n(kr) \\ n_n(kr) \end{cases} \quad (2.23)$$

αντίστοιχα, ή ισοδύναμα οι σφαιρικές συναρτήσεις Hankel πρώτου και δευτέρου είδους

$$R_n(r) = \begin{cases} h_n^{(1)}(kr) \\ h_n^{(2)}(kr) \end{cases} \quad (2.24)$$

οι οποίες περιγράφονται αναλυτικά στο Παράρτημα.

## 2.2 Η Γενική Μορφή της Λύσης

### 2.2.1 Πρόσπτωση κατά τον άξονα z

Στην παρούσα ενότητα θα εξετάσουμε την περίπτωση που το μοναδιαίο διάνυσμα  $\hat{k}$  έχει ως κατεύθυνση τη διεύθυνση του άξονα των z.

Για να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε τη συνοριακή συνθήκη επάνω στην επιφάνεια του σκεδαστή ( $|r| = a$ ), πρέπει πρώτα να εκφράσουμε το προσπίπτον κύμα  $\Phi$  σε σφαιρικές συντεταγμένες:

$$\Phi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = e^{ikr\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{r}}} = e^{ikr\cos\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) j_n(kr) P_n(\cos\theta) \quad (2.25)$$

για  $\theta \in [0, \pi]$  και  $r \geq 0$ .

Η απόδειξη της (2.25) παρουσιάζει μία αυξημένη τεχνική πολυπλοκότητα, γι' αυτό και παραλείπεται. Αναλυτική παρουσίασή της υπάρχει στο βιβλίο του Martin [9].

Αντίστοιχη μορφή υπάρχει και για το σκεδασμένο πεδίο  $u$ :

$$u(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n i^n (2n+1) h_n^{(1)}(kr) P_n(\cos\theta) \quad (2.26)$$

Άρα το ολικό πεδίο  $\Psi$  θα έχει το ανάπτυγμα:

$$\Psi(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r}) + u(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) [j_n(kr) + a_n h_n^{(1)}(kr)] P_n(\cos\theta) \quad (2.27)$$

Γίνεται φανερό από τις παραπάνω σχέσεις πως εξετάζουμε την περίπτωση που το πρόβλημά μας δεν εμφανίζει εξάρτηση από την αζιμουθιακή γωνία  $\varphi$ .

Το σκεδασμένο πεδίο που περιγράφεται από τη σχέση (2.26) ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld.

Οι σταθερές  $i^n (2n+1)$  επιλέχθηκαν για να απλοποιήσουν τους τύπους και ο υπολογισμός της σταθεράς  $a_n$  στο ανάπτυγμα (2.27) γίνεται μέσω της συνοριακής συνθήκης.

#### A. Μαλακός Σκεδαστής

Η συνοριακή συνθήκη απαιτεί

$$\Psi(\mathbf{r}) = 0 \quad , \quad \text{για } |\mathbf{r}| = a \quad (2.28)$$

Με αντικατάσταση λοιπόν στη σχέση (2.27), λόγω της ορθογωνιότητας των  $P_n$  (βλέπε Παράρτημα) προκύπτει

$$a_n = -\frac{j_n(ka)}{h_n^{(1)}(ka)} \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.29)$$

και η λύση τότε γράφεται

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \left[ j_n(kr) - \frac{j_n(ka)}{h_n^{(1)}(ka)} h_n^{(1)}(kr) \right] P_n(\cos \theta) \quad (2.30)$$

$\forall \mathbf{r}$  με  $|\mathbf{r}| \geq a$

### B. Σκληρός Σκεδαστής

Η συνοριακή συνθήκη απαιτεί

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = \frac{\partial \Psi(\mathbf{r})}{\partial r} = 0 \quad , \quad \text{για } |\mathbf{r}| = a \quad (2.31)$$

Αντικαθιστούμε στην (2.27) και έχουμε (πάλι λόγω της ορθογωνιότητας των πολυωνύμων  $P_n$ )

$$a_n = -\frac{j_n'(ka)}{h_n^{(1)'}(ka)} \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.32)$$

και έτσι η λύση γράφεται

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \left[ j_n(kr) - \frac{j_n'(ka)}{h_n^{(1)'}(ka)} h_n^{(1)}(kr) \right] P_n(\cos \theta) \quad (2.33)$$

$\forall \mathbf{r}$  με  $|\mathbf{r}| \geq a$

### Γ. Ανθεκτικός Σκεδαστής

Η συνοριακή συνθήκη είναι

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} + i \frac{\omega \rho}{Z_n} \Psi = 0 \quad (2.34)$$

Συνεπώς η σχέση (2.27) δίνει

$$a_n = -\frac{i\rho c j_n(ka) + Z_n j_n'(ka)}{i\rho c h_n^{(1)}(ka) + Z_n h_n^{(1)'}(ka)} \quad (2.35)$$

και έτσι η λύση γράφεται

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \times \left[ j_n(kr) - \frac{i\rho c j_n(ka) + Z_n j_n'(ka)}{i\rho c h_n^{(1)}(ka) + Z_n h_n^{(1)'}(ka)} h_n^{(1)}(kr) \right] P_n(\cos \theta) \quad (2.36)$$

$\forall \mathbf{r}$  με  $|\mathbf{r}| \geq a$

#### Δ. Διαπερατός Σκεδαστής

Στην περίπτωση που ο σκεδαστής είναι ένα διαπερατό αντικείμενο, εκτός του  $\Psi = \Phi + u$  που ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz σε όλον το χώρο  $R^3$  εκτός του σκεδαστή και του συνόρου αυτού, υπάρχει και ένα επιπλέον κύμα, το οποίο διαδίδεται μέσα στο σκεδαστή. Και αυτό το κύμα ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz, με διαφορετικό όμως κυματάριθμο.

Προς διευκόλυνση, θα συμβολίσουμε με  $\Psi^+$  το εξωτερικό πεδίο (δηλαδή για  $r > a$  – σχέση 2.27), με  $\Psi^-$  το εσωτερικό πεδίο (δηλαδή για  $r < a$ ) και με  $k^-$  τον κυματάριθμο που αναφέρεται στον χώρο εσωτερικά του σκεδαστή.

Οι δύο κυματάριθμοι συνδέονται με τη σχέση

$$k^- = \eta k \quad (2.37)$$

όπου με  $\eta$  συμβολίζουμε το δείκτη διάθλασης.

Λαμβάνοντας υπόψη τα όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, το εσωτερικό πεδίο  $\Psi^-$  θα έχει το ανάπτυγμα:

$$\Psi^-(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n i^n (2n+1) j_n(\eta kr) P_n(\cos \theta) \quad (2.38)$$

Οι συνοριακές συνθήκες δίνουν (βλέπε το σχετικό εδάφιο στην ενότητα 1.2)

$$\Psi^+ = \Psi^- \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial \Psi^+}{\partial r} = B \frac{\partial \Psi^-}{\partial r} \quad (2.40)$$

Από τις σχέσεις (2.27) και (2.38) προκύπτει το σύστημα (κάνοντας χρήση της σχέσης ορθογωνιότητας για τα πολυώνυμα  $P_n$ )

$$j_n(ka) + a_n h_n^{(1)}(ka) = c_n j_n(\eta ka) \quad (2.41)$$

$$j_n'(ka) + a_n h_n^{(1)'}(ka) = B \eta c_n j_n'(\eta ka) \quad (2.42)$$

το οποίο έχει τη λύση

$$a_n = \frac{1}{D_n} [B \eta j_n(ka) j_n'(ka) - j_n'(ka) j_n(\eta ka)] \quad (2.43)$$

$$c_n = \frac{1}{D_n} [j_n(ka) h_n^{(1)'}(ka) - j_n'(ka) h_n^{(1)}(ka)] \quad (2.44)$$

όπου

$$D_n = j_n(\eta ka) h_n^{(1)'}(ka) - B \eta j_n'(\eta ka) h_n^{(1)}(ka) \quad (2.45)$$

Επομένως, με αντικατάσταση των σχέσεων (2.43) και (2.44) στις (2.27) και (2.38) αντίστοιχα, παίρνουμε τη λύση του διαπερατού σφαιρικού σκεδαστή.

## 2.2.2 Γενική πρόσπτωση

Στην παρούσα ενότητα θα δούμε μια γενίκευση των πραγμάτων που ειπώθηκαν στην ενότητα 2.2.1, καθώς τώρα θα θεωρήσουμε πως το μοναδιαίο διάνυσμα διάδοσης του κύματος,  $\hat{\mathbf{k}}$ , δεν έχει τη διεύθυνση του άξονα  $z$ . Το εμπόδιο στο οποίο σκεδάζεται το προσπίπτον κύμα  $\Phi = e^{i\mathbf{k}\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{r}}$  είναι μια σφαίρα ακτίνας  $a$ . Ως γνωστόν, χρησιμοποιούμε σφαιρικές συντεταγμένες  $(r, \theta, \varphi)$ , όπου  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ , και θεωρούμε ως αρχή των αξόνων του συστήματος το κέντρο της σφαίρας.

Σε αυτήν την περίπτωση λοιπόν, το προσπίπτον και το σκεδασμένο κύμα δίνονται αντίστοιχα από τους παρακάτω τύπους

$$\Phi(\mathbf{r}) = 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n i^n j_n(kr) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \overline{Y_n^m(\hat{\mathbf{k}})} \quad (2.46)$$

και

$$u(\mathbf{r}) = 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n i^n B_n^m h_n^{(1)}(kr) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \overline{Y_n^m(\hat{\mathbf{k}})} \quad (2.47)$$

όπου οι συντελεστές  $B_n^m$  υπολογίζονται μέσω των συνοριακών συνθηκών. Πρέπει να σημειωθεί ότι η (2.47) ικανοποιεί την τρισδιάστατη εξίσωση Helmholtz και τη συνθήκη ακτινοβολίας για οποιαδήποτε επιλογή των  $B_n^m$ . Με  $\overline{Y_n^m}$  παριστάνουμε το μιγαδικό συζυγή των  $Y_n^m$ .

Στην περίπτωση της σκληρής σφαίρας, εφαρμόζουμε τη συνοριακή συνθήκη Neumann (σχέση 2.31) στο ολικό πεδίο  $\Psi = \Phi + u$  και καταλήγουμε έτσι σε μία έκφραση για τους συντελεστές μας

$$B_n^m = -\frac{j_n'(ka)}{h_n^{(1)'}(ka)} \quad (2.48)$$

η οποία προέκυψε χρησιμοποιώντας τη σχέση ορθογωνιότητας για τις  $Y_n^m$ .

Έτσι, έχουμε:

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ i^n \left[ j_n(kr) - \frac{j_n'(ka)}{h_n^{(1)'}(ka)} h_n^{(1)}(kr) \right] \sum_{m=-n}^n Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \overline{Y_n^m(\hat{\mathbf{k}})} \right\} \quad (2.49)$$

Χρησιμοποιώντας το προσθετικό θεώρημα Legendre (βλέπε παράρτημα) το ολικό πεδίο μπορεί να γραφτεί και ως

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ i^n \left[ j_n(kr) - \frac{j_n'(ka)}{h_n^{(1)'}(ka)} h_n^{(1)}(kr) \right] (2n+1) P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \right\} \quad (2.50)$$

Για να βρούμε το ολικό πεδίο πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας αντικαθιστούμε  $r = a$  στην παραπάνω σχέση, και με τη βοήθεια της Wronskian

$$j_n(ka) h_n^{(1)'}(ka) - h_n^{(1)}(ka) j_n'(ka) = (ka)^{-2} \quad (2.51)$$

έχουμε ότι το ολικό πεδίο πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας τελικά παίρνει τη μορφή

$$\Psi(\alpha, \theta, \varphi) = \frac{1}{(ka)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)i^n}{h_n^{(1)'}(ka)} P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \quad (2.52)$$

Παρακάτω θα δούμε ένα διαφορετικό τρόπο υπολογισμού του ολικού πεδίου  $\Psi$  που θα μας χρησιμεύσει ιδιαίτερα στην πολλαπλή σκέδαση.

Κάνοντας χρήση του ακόλουθου συμβολισμού για τις κυματοσυναρτήσεις

$$\psi_n^m(\mathbf{r}) = h_n^{(1)}(kr) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \quad (2.53)$$

$$\hat{\psi}_n^m(\mathbf{r}) = j_n(kr) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \quad (2.54)$$

οι οποίες καλούνται *εξερχόμενη σφαιρική κυματοσυνάρτηση* και *κανονική σφαιρική κυματοσυνάρτηση* αντίστοιχα, το προσπίπτον και το σκεδασμένο κύμα (σχέσεις 2.46 και 2.47) αντίστοιχα γράφονται

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n d_n^m \hat{\psi}_n^m(\mathbf{r}) \quad (2.55)$$

$$u(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_n^m \psi_n^m(\mathbf{r}) \quad (2.56)$$

όπου

$$d_n^m = 4\pi i^n \overline{Y_n^m(\hat{\mathbf{k}})} \quad (2.57)$$

Ομοίως με πριν, κάνοντας χρήση της συνοριακής συνθήκης Neumann (σχέση 2.31) πάνω στο ολικό πεδίο  $\Psi = \Phi + u$ , μπορούμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές  $c_n^m$ . Συγκεκριμένα, (ξανά κάνοντας χρήση της ορθογωνιότητας των  $Y_n^m$ ) καταλήγουμε στη σχέση  $c_n^m h_n^{(1)'}(ka) + d_n^m j_n'(ka) = 0$ , από την οποία προκύπτει τελικά

$$c_n^m = -\frac{j_n'(ka)}{h_n^{(1)'}(ka)} d_n^m \quad (2.58)$$



Έτσι, το ολικό πεδίο γράφεται:

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n d_n^m \hat{\psi}_n^m(\mathbf{r}) + c_n^m \psi_n^m(\mathbf{r}) \quad (2.59)$$

ή

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ d_n^m Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \left[ j_n(kr) - \frac{j_n'(ka)}{h_n^{(1)'}(ka)} h_n^{(1)}(kr) \right] \right\} \quad (2.60)$$

και συγκεκριμένα πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας (χρησιμοποιώντας ξανά τη Wronskian)

$$\Psi(a, \theta, \varphi) = \frac{1}{(ka)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{d_n^m}{h_n^{(1)'}(ka)} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \quad (2.61)$$

**Παρατήρηση:** Στην ενότητα 1.4 του πρώτου κεφαλαίου έγινε μία εκτενής αναφορά στο πλάτος σκέδασης των ακουστικών κυμάτων.

Συγκεκριμένα, είδαμε ότι το σκεδασμένο πεδίο σε μεγάλες αποστάσεις μακριά από τον σκεδαστή δίνεται ασυμπτωτικά από τη σχέση

$$u(\mathbf{r}) = g(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{k}}) h_0^{(1)}(kr) + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r \rightarrow +\infty \quad (2.62)$$

ή

$$u(\mathbf{r}) \sim g(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{k}}) h_0^{(1)}(kr), \quad r \rightarrow +\infty \quad (2.63)$$

παραλείποντας τον όρο τάξης  $1/r^2$ .

Υπενθυμίζεται ότι

$$h_0^{(1)}(kr) = \frac{e^{ikr}}{ikr} \quad (2.64)$$

είναι η σφαιρική συνάρτηση Hankel πρώτου είδους και μηδενικής τάξης.

Όπως αναφέρθηκε, η συνάρτηση  $g(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{k}})$  αναπαριστά το πλάτος σκέδασης του σκεδασμένου πεδίου  $u$  και δίνεται από τον τύπο

$$g(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{k}}) = \frac{ik}{4\pi} \oint_S \left[ u(\mathbf{r}') \frac{\partial e^{-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}}{\partial n(\mathbf{r}')} - e^{-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'} \frac{\partial u(\mathbf{r}')}{\partial n(\mathbf{r}')} \right] ds(\mathbf{r}') \quad (2.65)$$

Αποδεικνύεται ότι το πλάτος σκέδασης μπορεί να δοθεί επίσης και από την παρακάτω έκφραση

$$g(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{k}}) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) B_n^m P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \quad (2.66)$$

η οποία είναι σαφέστατα απλούστερη και χρησιμοποιείται στα προβλήματα.

Για την απόδειξη της (2.66), ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο βιβλίο του P.A. Martin [9].

Οι συντελεστές  $B_n^m$ , όπως είδαμε προηγουμένως, εμφανίζονται στην σχέση (2.47) για το σκεδασμένο πεδίο και υπολογίζονται βάσει των συνοριακών συνθηκών που ισχύουν στην επιφάνεια της σφαίρας. Για παράδειγμα, στην περίπτωση που έχουμε σκληρή σφαίρα, δίνονται από τον τύπο (2.48).

# Κεφάλαιο 3: Πολλαπλή Σκέδαση Ακουστικών Κυμάτων

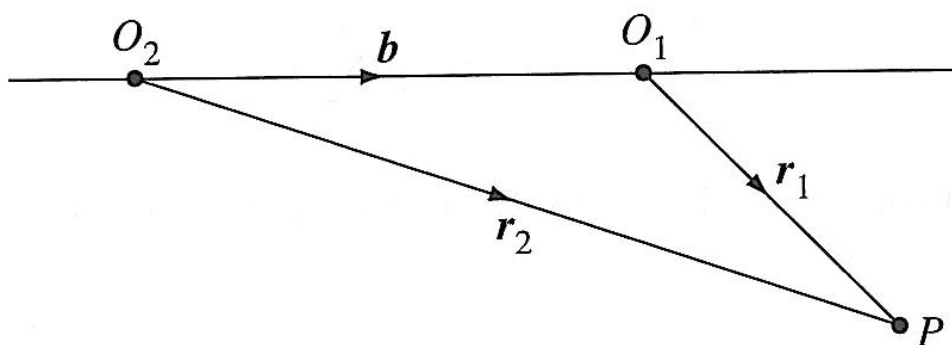
Στο προηγούμενο κεφάλαιο εξετάσαμε αναλυτικά την περίπτωση της απλής σκέδασης, δηλαδή την περίπτωση που το προσπίπτον πεδίο σκεδάζεται από ένα μόνο εμπόδιο, και πιο συγκεκριμένα, μια σφαίρα. Όπως γίνεται φανερό λοιπόν, στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε την μέθοδο επίλυσης της εξίσωσης Helmholtz όταν το εμπόδιο είναι δύο ή περισσότερες σφαίρες. Υπενθυμίζεται ότι πάντα εργαζόμαστε στις τρεις διαστάσεις.

## 3.1 Προσθετικά Θεωρήματα στις 3-Διαστάσεις

Οι περισσότερες θεωρίες πολλαπλής σκέδασης βασίζονται στα προσθετικά θεωρήματα, με τα οποία μπορούμε να μετατρέψουμε το ανάπτυγμα για ένα συγκεκριμένο σημείο του χώρου σε κάποιο παρόμοιο ανάπτυγμα για ένα διαφορετικό σημείο του χώρου. Όπως θα δούμε μέχρι το πέρας του κεφαλαίου, αυτή η διαδικασία μετατροπής μας είναι απαραίτητη στην πολλαπλή σκέδαση.

Στη συνέχεια θα δώσουμε σύντομα τους ορισμούς δύο προσθετικών θεωρημάτων που θα μας χρειαστούν.

Θεωρούμε δύο κέντρα  $O_1$ ,  $O_2$  και ένα σημείο  $P$  με διανύσματα θέσης  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$  αντίστοιχα ως προς αυτά. Έστω ότι το  $O_1$  έχει διάνυσμα θέσης  $\mathbf{b}$  ως προς το  $O_2$ , έτσι ώστε να ισχύει  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{b}$  (βλέπε το παρακάτω σχήμα για καλύτερη κατανόηση της γεωμετρίας του προβλήματος).



Το προσθετικό θεώρημα για τη σφαιρική κυματοσυνάρτηση  $j_n Y_n^m$  δίνεται από τη σχέση

$$j_n(kr_2)Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}_2) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} \hat{S}_{n\nu}^{m\mu}(\mathbf{b}) j_{\nu}(kr_1)Y_{\nu}^{\mu}(\hat{\mathbf{r}}_1) \quad (3.1)$$

ενώ το αντίστοιχο θεώρημα για τη σφαιρική κυματοσυνάρτηση  $h_n^{(1)} Y_n^m$  είναι

$$h_n^{(1)}(kr_2)Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}_2) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} S_{n\nu}^{m\mu}(\mathbf{b}) j_{\nu}(kr_1)Y_{\nu}^{\mu}(\hat{\mathbf{r}}_1) \quad (3.2)$$

για  $r_1 < b$ , και

$$h_n^{(1)}(kr_2)Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}_2) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} \hat{S}_{n\nu}^{m\mu}(\mathbf{b}) h_{\nu}^{(1)}(kr_1)Y_{\nu}^{\mu}(\hat{\mathbf{r}}_1) \quad (3.3)$$

για  $r_1 > b$ .

Κάνοντας χρήση των κυματοσυναρτήσεων  $\psi$  και  $\hat{\psi}$  που αναφέρθηκαν στην ενότητα 2.2.2 του προηγούμενου κεφαλαίου (σχέσεις 2.53 και 2.54), τα προσθετικά θεωρήματα μπορούν να γραφτούν αντίστοιχα και με τις σχέσεις:

$$\hat{\psi}_n^m(\mathbf{r}_2) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} \hat{S}_{n\nu}^{m\mu}(\mathbf{b}) \hat{\psi}_{\nu}^{\mu}(\mathbf{r}_1) \quad (3.4)$$

$$\psi_n^m(\mathbf{r}_2) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} S_{n\nu}^{m\mu}(\mathbf{b}) \hat{\psi}_{\nu}^{\mu}(\mathbf{r}_1) \quad (3.5)$$

$$\psi_n^m(\mathbf{r}_2) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} \hat{S}_{n\nu}^{m\mu}(\mathbf{b}) \psi_{\nu}^{\mu}(\mathbf{r}_1) \quad (3.6)$$

Για τις αποδείξεις των προσθετικών θεωρημάτων, οι οποίες παρουσιάζουν αρκετή τεχνική πολυπλοκότητα, ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στη σχετική ενότητα στο βιβλίο του P.A. Martin [9].

Στις παραπάνω σχέσεις εμφανίζονται δύο καινούργιες ποσότητες, δύο πίνακες συγκεκριμένα, οι  $S$  και  $\hat{S}$ , οι οποίοι καλούνται *πίνακες διαχωρισμού* και δίνονται αντίστοιχα από τους τύπους:

$$\begin{aligned} S_{nv}^{m\mu}(\mathbf{b}) &= 4\pi i^{\nu-n} \sum_q i^q h_q^{(1)}(kb) \overline{Y_q^{\mu-m}(\hat{\mathbf{b}})} G(n, m; q, \mu - m; \nu) \\ &= 4\pi i^{\nu-n} \sum_q i^q (-1)^m h_q^{(1)}(kb) \overline{Y_q^{\mu-m}(\hat{\mathbf{b}})} G(n, m; \nu, -\mu; q) \quad (3.7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{S}_{nv}^{m\mu}(\mathbf{b}) &= 4\pi i^{\nu-n} \sum_q i^q j_q(kb) \overline{Y_q^{\mu-m}(\hat{\mathbf{b}})} G(n, m; q, \mu - m; \nu) \\ &= 4\pi i^{\nu-n} \sum_q i^q (-1)^m j_q(kb) \overline{Y_q^{\mu-m}(\hat{\mathbf{b}})} G(n, m; \nu, -\mu; q) \quad (3.8) \end{aligned}$$

όπου με  $G$  συμβολίζουμε το συντελεστή Gaunt.

Ο *συντελεστής Gaunt* δίνεται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$G(n, m; \nu, \mu; q) = (-1)^{m+\mu} \int_{\Omega} Y_n^m Y_{\nu}^{\mu} Y_q^{-m-\mu} d\Omega \quad (3.9)$$

ή

$$\begin{aligned} G(n, m; \nu, \mu; q) &= \frac{(-1)^{m+\mu}}{2} S \sqrt{\frac{(n-m)!(\nu-\mu)!(q+m+\mu)!}{(n+m)!(\nu+\mu)!(q-m-\mu)!}} \\ &\quad \times \int_{-1}^1 P_n^m(x) P_{\nu}^{\mu}(x) P_q^{-m-\mu}(x) dx \quad (3.10) \end{aligned}$$

$$= (-1)^{m+\mu} S \begin{pmatrix} n & \nu & q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & \nu & q \\ m & \mu & -m-\mu \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

όπου

$$S = \sqrt{\frac{(2n+1)(2\nu+1)(2q+1)}{4\pi}} \quad (3.12)$$

Εδώ να αναφέρουμε ότι με

$$\begin{pmatrix} n & \nu & N \\ m & \mu & M \end{pmatrix}$$

παριστάνεται το *Wigner 3-j symbol*.

Συγκεκριμένα, είναι γνωστό ότι

$$\begin{pmatrix} n & \nu & q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^s s! \sqrt{(2s-2n)! (2s-2\nu)! (2s-2q)!}}{(s-n)! (s-\nu)! (s-q)! \sqrt{(2s+1)!}} \quad (3.13)$$

μόνο στην περίπτωση που ισχύει  $n + \nu + q = 2s$  (δηλαδή το άθροισμα είναι άρτιο), διαφορετικά δεν υφίσταται.

Περισσότερες πληροφορίες για το *Wigner 3-j symbol* υπάρχουν στο Appendix B του βιβλίου του Martin [9].

Ενώ χρήσιμες είναι οι παρακάτω ιδιότητες για τον συντελεστή Gaunt:

$$G(n, m; \nu, \mu; q) = G(\nu, \mu; n, m; q) = G(n, -m; \nu, -\mu; q) \quad (3.14)$$

$$G(n, m; \nu, \mu; q) = (-1)^m G(n, m; q, -m - \mu; \nu) \quad (3.15)$$

$$G(n, m; \nu, \mu; q) = (-1)^\mu G(q, -m - \mu; \nu, \mu; n) \quad (3.16)$$

Επιστρέφουμε τώρα στους πίνακες διαχωρισμού.

Όπως είδαμε προηγουμένως, ο πίνακας  $S$  ορίζεται από τη σχέση (3.7). Κάνοντας συγκεκριμένα τα όρια του αθροίσματος, παίρνουμε

$$S_{n\nu}^{m\mu}(\mathbf{b}) = 4\pi(-1)^{\mu+\nu+Q} \sum_{q=0}^Q (-1)^q \psi_{q_0+2q}^{m-\mu}(\mathbf{b}) G(n, m; \nu, -\mu; q_0 + 2q) \quad (3.17)$$

όπου  $Q = (n + \nu - q_0)/2$  και  $q_0 = q_0(n, m; \nu, -\mu)$ .

Το  $q_0(n, m; \nu, \mu)$  ισούται με:

$$\begin{aligned}
 &|n - \nu|, \quad \text{εάν } |n - \nu| \geq |m + \mu| \\
 &|m + \mu|, \quad \text{εάν } |n - \nu| < |m + \mu| \text{ και } n + \nu + |m + \mu| \text{ είναι άρτιος} \\
 &|m + \mu| + 1, \quad \text{εάν } |n - \nu| < |m + \mu| \text{ και } n + \nu + |m + \mu| \text{ είναι περιττός}
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Μετά από υπολογισμούς καταλήγουμε στις ακόλουθες σχέσεις:

$$S_{n\nu}^{m\mu}(-\mathbf{b}) = (-1)^{n+\nu} S_{n\nu}^{m\mu}(\mathbf{b}) \tag{3.19}$$

$$S_{\nu n}^{-\mu, -m}(-\mathbf{b}) = (-1)^{m+\mu} S_{n\nu}^{m\mu}(\mathbf{b}) \tag{3.20}$$

όπου

$$S_{n\nu}^{m\mu}(\mathbf{b}) = (-1)^{n+m+\nu+\mu} S_{\nu n}^{-\mu, -m}(\mathbf{b}) \tag{3.21}$$

Ο πίνακας  $\hat{S}$  ορίζεται από τη σχέση (3.8). Ομοίως, προσδιορίζοντας τα όρια του αθροίσματος, προκύπτει

$$\hat{S}_{n\nu}^{m\mu}(\mathbf{b}) = 4\pi(-1)^{\mu+\nu+Q} \sum_{q=0}^Q (-1)^q \hat{\psi}_{q_0+2q}^{m-\mu}(\mathbf{b}) G(n, m; \nu, -\mu; q_0 + 2q) \tag{3.22}$$

Ενώ εύκολα αποδεικνύονται οι παρακάτω σχέσεις:

$$\hat{S}_{\nu n}^{\mu m}(\mathbf{b}) = (-1)^{n+\nu} \overline{\hat{S}_{n\nu}^{m\mu}(\mathbf{b})} \tag{3.23}$$

$$\hat{S}_{n\nu}^{-m, -\mu}(\mathbf{b}) = (-1)^{m+\mu} \overline{\hat{S}_{n\nu}^{m\mu}(\mathbf{b})} \tag{3.24}$$

$$\hat{S}_{n\nu}^{m\mu}(-\mathbf{b}) = (-1)^{n+\nu} \hat{S}_{n\nu}^{m\mu}(\mathbf{b}) = \overline{\hat{S}_{\nu n}^{\mu m}(\mathbf{b})} \tag{3.25}$$

Τέλος, η ακόλουθη σχέση δίνει μία σχέση που συνδέει τα  $S$  και  $\hat{S}$

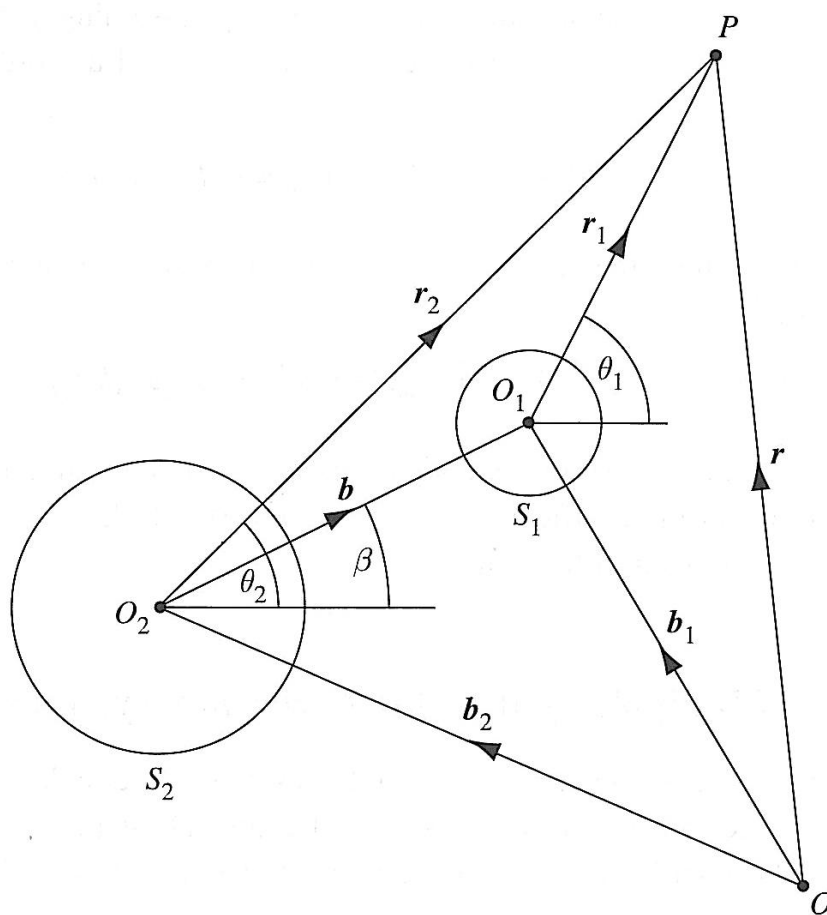
$$S_{n\nu}^{m\mu}(\mathbf{b}) + \overline{S_{\nu n}^{\mu m}(-\mathbf{b})} = 2\hat{S}_{n\nu}^{m\mu}(\mathbf{b}) \tag{3.26}$$

Η απόδειξη της (3.26), καθώς και όλων των σχέσεων που αναφέρθηκαν παραπάνω και αφορούν τους πίνακες διαχωρισμού, υπάρχει αναλυτικά στο βιβλίο του Martin [9].

### 3.2 Πολυπολική Μέθοδος για δύο Σφαίρες

Έστω σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων με αρχή το σημείο  $O$ , έτσι ώστε κάθε σημείο να έχει διάνυσμα θέσης  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  ως προς αυτό. Επιπλέον, θεωρούμε δύο σφαίρες  $S_j$ ,  $j = 1, 2$ , με ακτίνα  $a_j$  και κέντρο  $O_j$  στο  $\mathbf{r} = \mathbf{b}_j$ . Θα χρησιμοποιήσουμε σφαιρικές συντεταγμένες  $(r_j, \theta_j, \varphi_j)$  στο  $O_j$ , έτσι ώστε  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_j + \mathbf{b}_j$ , όπου  $\mathbf{r}_j = r_j(\sin \theta_j \cos \varphi_j, \sin \theta_j \sin \varphi_j, \cos \theta_j)$ . Τέλος, υποθέτουμε ότι το δοσμένο προσπίπτον κύμα  $\Phi$  σκεδάζεται και από τις δύο σφαίρες.

Το παρακάτω σχήμα, αν και στις δύο διαστάσεις, δίνει μια σαφή απεικόνιση της γεωμετρίας του προβλήματος



Υποθέτουμε τώρα πως στην περιοχή κάθε σφαίρας το προσπίπτον κύμα αποτελεί ομαλή λύση της εξίσωσης Helmholtz, έτσι ώστε

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n d_{nj}^m \hat{\psi}_n^m(\mathbf{r}_j) \quad \text{για } j = 1, 2 \quad (3.27)$$



Το σκεδασμένο κύμα μπορεί να γραφτεί ως ένα άθροισμα πολυπόλων ως προς το κέντρο κάθε σφαίρας

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n [c_{n1}^m \psi_n^m(\mathbf{r}_1) + c_{n2}^m \psi_n^m(\mathbf{r}_2)] \quad (3.28)$$

Με αυτόν τον τρόπο παίρνουμε την ακτινική λύση της εξίσωσης Helmholtz για κάθε δυνατή επιλογή των συντελεστών  $c_{n1}^m, c_{n2}^m$ , οι οποίοι καθορίζονται από τη συνοριακή συνθήκη που ισχύει σε κάθε σφαίρα.

Θα πάρουμε ως αναφορά τη σφαίρα  $S_1$ . Επεκτείνουμε έτσι την κυματοσυνάρτηση  $\psi_n^m(\mathbf{r}_2)$  στην περιοχή του κέντρου  $O_1$  σε όρους κανονικών κυματοσυναρτήσεων  $\hat{\psi}_\nu^\mu(\mathbf{r}_1)$ .

Έστω  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{b}$ , όπου  $\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2$ , τότε για  $r_1 < b$  ισχύει

$$\psi_n^m(\mathbf{r}_2) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} S_{n\nu}^{m\mu}(\mathbf{b}) \hat{\psi}_\nu^\mu(\mathbf{r}_1) \quad (3.29)$$

Η σχέση (3.29), όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα του κεφαλαίου, πρόκειται για το προσθετικό θεώρημα αυτού του προβλήματος, και εφαρμόζοντάς το στο σκεδασμένο πεδίο (σχέση 3.28) μπορούμε να πάρουμε την έκφραση του ολικού πεδίου

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ d_{n1}^m \hat{\psi}_n^m(\mathbf{r}_1) + c_{n1}^m \psi_n^m(\mathbf{r}_1) + \hat{\psi}_n^m(\mathbf{r}_1) \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} S_{\nu n}^{\mu m}(\mathbf{b}) c_{\nu 2}^\mu \right\} \quad (3.30)$$

για  $r_1 < b$ .

Στην σχέση (3.30) βγάλαμε εκτός του δευτέρου διπλού αθροίσματος την κυματοσυνάρτηση  $\hat{\psi}_\nu^\mu(\mathbf{r}_1)$  για να μπορέσουμε να εκμεταλλευτούμε την ορθογωνιότητα των  $Y_n^m$ . Διαφορετικά, θα προέκυπτε ο όρος  $Y_\nu^\mu$  και το πρόβλημα δεν θα ήταν επιλύσιμο. Επιπλέον, αντιστρέψαμε τους δείκτες στον  $S$  για να είμαστε μαθηματικά συνεπείς. Σημειώνεται πως  $S_{\nu n}^{\mu m} = S_{n \nu}^{m \mu}$ .

Για τη συνέχεια, έμεινε ο υπολογισμός των συντελεστών  $c_{n1}^m$  και  $c_{n2}^m$ . Υποθέτουμε ότι η σφαίρα  $S_1$  είναι σκληρή, συνεπώς ισχύει η συνοριακή συνθήκη Neumann.

Δηλαδή:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r_1} = 0, \quad \text{για } r_1 = a_1$$

Κάνοντας τις σχετικές πράξεις και χρησιμοποιώντας τη σχέση ορθογωνιότητας για τα  $Y_n^m$ , αφού γράψουμε πρώτα τα  $\psi_n^m$  και  $\hat{\psi}_n^m$  σύμφωνα με τις σχέσεις (2.53), (2.54), καταλήγουμε στη σχέση

$$c_{n1}^m h_n^{(1)'}(ka_1) + j_n'(ka_1) \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} S_{\nu n}^{\mu m}(\mathbf{b}) c_{\nu 2}^{\mu} = -d_{n1}^m j_n'(ka_1) \quad (3.31)$$

για  $n = 0, 1, 2, \dots$  και  $m = -n, \dots, n$ .

Η δεύτερη σχέση που χρειαζόμαστε για τον υπολογισμό των συντελεστών θα προκύψει κάνοντας ακριβώς την ίδια διαδικασία για την άλλη σφαίρα. Δηλαδή, αυτή τη φορά θα πάρουμε ως αναφορά τη σφαίρα  $S_2$  και θα επεκτείνουμε την κυματοσυνάρτηση  $\psi_n^m(\mathbf{r}_1)$  στην περιοχή του κέντρου  $O_2$  σε όρους κανονικών κυματοσυναρτήσεων  $\hat{\psi}_\nu^\mu(\mathbf{r}_2)$ .

Έστω  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 + \mathbf{b}$ , όπου  $\mathbf{b} = \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1 (= -\mathbf{b})$ , τότε για  $r_2 < b$  ισχύει

$$\psi_n^m(\mathbf{r}_1) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} S_{\nu n}^{m\mu}(-\mathbf{b}) \hat{\psi}_\nu^\mu(\mathbf{r}_2) \quad (3.32)$$

και το ολικό πεδίο γράφεται

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ d_{n2}^m \hat{\psi}_n^m(\mathbf{r}_2) + c_{n2}^m \psi_n^m(\mathbf{r}_2) + \hat{\psi}_n^m(\mathbf{r}_2) \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} S_{\nu n}^{\mu m}(-\mathbf{b}) c_{\nu 1}^{\mu} \right\} \quad (3.33)$$

για  $r_2 < b$ .

Υποθέτουμε πως η σφαίρα  $S_2$  είναι σκληρή και εφαρμόζουμε τη συνθήκη Neumann στο σύνορό της, δηλαδή υποθέτουμε ότι ισχύει

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r_2} = 0, \quad \text{για } r_2 = a_2$$

Ομοίως, κάνοντας τις απαραίτητες πράξεις και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.53), (2.54), καταλήγουμε στη σχέση

$$c_{n2}^m h_n^{(1)'}(ka_2) + j_n'(ka_2) \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} S_{\nu n}^{\mu m}(-\mathbf{b}) c_{\nu 1}^{\mu} = -d_{n2}^m j_n'(ka_2) \quad (3.34)$$

για  $n = 0, 1, 2, \dots$  και  $m = -n, \dots, n$ .

Οι εξισώσεις (3.31) και (3.34) αποτελούν ένα σύστημα άπειρων γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων, του οποίου η επίλυση δίνει τους ζητούμενους συντελεστές.

Μπορούμε όμως να απλοποιήσουμε σημαντικά το εν λόγω σύστημα, αν επιλέξουμε το διάνυσμα  $\mathbf{b}$  να βρίσκεται στην κατεύθυνση του άξονα  $z$ , δηλαδή  $\mathbf{b} = b\hat{\mathbf{z}}$ . Τότε τα στοιχεία του πίνακα  $S$  δίνονται από την ακόλουθη σχέση

$$S_{n\nu}^{m\mu}(b\hat{\mathbf{z}}) = (-1)^n S_{n\nu}^m(kb) \delta_{m\mu} = (-1)^{n+\nu} S_{n\nu}^{m\mu}(-b\hat{\mathbf{z}}) \quad (3.35)$$

Η απόδειξη της (3.35) περιγράφεται αναλυτικά στο βιβλίο του Martin [9]. Όπου  $S_{n\nu}^m = S_{\nu n}^m$  και είναι ευκολότερα υπολογίσιμος.

Έτσι, το σύστημα υπολογισμού των συντελεστών μετατρέπεται στο

$$c_{n1}^m h_n^{(1)'}(ka_1) + j_n'(ka_1) \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu S_{\nu n}^m(kb) c_{\nu 2}^m = -d_{n1}^m j_n'(ka_1) \quad (3.36)$$

$$c_{n2}^m h_n^{(1)'}(ka_2) + (-1)^n j_n'(ka_2) \sum_{\nu=0}^{\infty} S_{\nu n}^m(kb) c_{\nu 1}^m = -d_{n2}^m j_n'(ka_2) \quad (3.37)$$

για  $n = 0, 1, 2, \dots$  και  $m = -n, \dots, n$ .

### 3.3 Πολυπολική Μέθοδος για $N$ Σφαίρες

Η μέθοδος που είδαμε στην προηγούμενη ενότητα μπορεί να γενικευθεί για  $N$  σφαίρες. Έστω σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων με αρχή το σημείο  $O$ , έτσι ώστε κάθε σημείο να έχει διάνυσμα θέσης  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  ως προς αυτό. Επιπλέον, θεωρούμε  $N$  σφαίρες  $S_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ , με ακτίνα  $a_j$  και κέντρο  $O_j$  στο  $\mathbf{r} = \mathbf{b}_j$ . Θα χρησιμοποιήσουμε σφαιρικές συντεταγμένες  $(r_j, \theta_j, \varphi_j)$  στο  $O_j$ , έτσι ώστε  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_j + \mathbf{b}_j$ , όπου  $\mathbf{r}_j = r_j(\sin \theta_j \cos \varphi_j, \sin \theta_j \sin \varphi_j, \cos \theta_j)$ . Τέλος, υποθέτουμε ότι το δοσμένο προσπίπτον κύμα  $\Phi$  σκεδάζεται από όλες τις σφαίρες.

Το προσπίπτον πεδίο δίνεται από τη σχέση

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n d_{nj}^m \hat{\psi}_n^m(\mathbf{r}_j) \quad \text{για } j = 1, 2, \dots, N \quad (3.38)$$

ενώ το σκεδασμένο είναι

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n [c_{n1}^m \psi_n^m(\mathbf{r}_1) + c_{n2}^m \psi_n^m(\mathbf{r}_2) + \dots + c_{nN}^m \psi_n^m(\mathbf{r}_N)] \quad (3.39)$$

ή

$$u = \sum_{j=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_{nj}^m \psi_n^m(\mathbf{r}_j) \quad (3.40)$$

Έστω ότι το κέντρο της τυχαίας σφαίρας  $S_i$  θεωρείται ως κέντρο αναφοράς. Με την ίδια ακριβώς λογική που δουλέψαμε για τις δύο σφαίρες, επεκτείνουμε τις κυματοσυναρτήσεις  $\psi_n^m(\mathbf{r}_j)$ , με  $j \neq i$ , στην περιοχή του κέντρου  $O_i$  σε όρους κανονικών κυματοσυναρτήσεων  $\hat{\psi}_v^\mu(\mathbf{r}_i)$ .

Έτσι, χρησιμοποιώντας το προσθετικό θεώρημα για τη σφαίρα  $S_i$  παίρνουμε:

$$\psi_n^m(\mathbf{r}_j) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{\mu=-v}^v S_{nv}^{m\mu}(\mathbf{b}_{ij}) \hat{\psi}_v^\mu(\mathbf{r}_i) \quad (3.41)$$

για  $r_i < b_i$ , όπου  $b_i = \min_{\substack{1 \leq j \leq N \\ j \neq i}} |\mathbf{b}_{ij}|$  και με  $\mathbf{b}_{ij}$  συμβολίζουμε το διάνυσμα θέσης του  $O_i$  ως προς το  $O_j$ , δηλαδή οι σφαίρες δεν τέμνονται πουθενά μεταξύ τους.

Τελικά, το ολικό πεδίο γράφεται:

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ d_{ni}^m \hat{\psi}_n^m(\mathbf{r}_i) + c_{ni}^m \psi_n^m(\mathbf{r}_i) + \hat{\psi}_n^m(\mathbf{r}_i) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{\mu=-v}^v S_{vn}^{\mu m}(\mathbf{b}_{ij}) c_{vj}^{\mu} \right\} \quad (3.42)$$

για  $r_i < b_i$ .

Αν υποθέσουμε ότι όλες οι σφαίρες ικανοποιούν τη συνοριακή συνθήκη του Neumann, τότε για κάθε σφαίρα  $S_i$  προκύπτει η σχέση:

$$c_{ni}^m h_n^{(1)'}(ka_i) + j_n'(ka_i) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{\mu=-v}^v S_{vn}^{\mu m}(\mathbf{b}_{ij}) c_{vj}^{\mu} = -d_{ni}^m j_n'(ka_i) \quad (3.43)$$

για  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $m = -n, \dots, n$  και  $i = 1, 2, \dots, N$ .

Το παραπάνω είναι ένα αλγεβρικό σύστημα εξισώσεων για τους συντελεστές  $c_{ni}^m$ , του οποίου η λύση δίνει την ακριβή λύση για το πρόβλημα της πολλαπλής σκέδασης από  $N$  σφαίρες.

**Παρατήρηση:** Το σκεδασμένο πεδίο παντού στο χώρο για το σύστημα των  $N$  σφαιρών δίνεται από τη σχέση (3.40), ενώ, καθώς το  $r \rightarrow +\infty$ , δίνεται ασυμπτωτικά από την έκφραση

$$u(\mathbf{r}) \sim g(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{k}}) h_0^{(1)}(kr) \quad (3.44)$$

Αποδεικνύεται ότι για  $r_j > b_j$ , για την κυματοσυνάρτηση  $\psi_n^m$  ισχύει

$$\psi_n^m(\mathbf{r}_j) = \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{\mu=-v}^v (-1)^{n+v} \hat{S}_{nv}^{m\mu}(\mathbf{b}_j) \psi_v^{\mu}(\mathbf{r}) \quad (3.45)$$

και έτσι το πλάτος σκέδασης αποδεικνύεται πως γράφεται

$$g(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{k}}) = \sum_{j=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ (-1)^n c_{nj}^m \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} i^{\nu} \hat{S}_{n\nu}^{m\mu}(\mathbf{b}_j) Y_{\nu}^{\mu}(\hat{\mathbf{r}}) \right\} \quad (3.46)$$

# Κεφάλαιο 4: Αριθμητική Επίλυση του Ευθέου Προβλήματος Σκέδασης σε Περιβάλλον Mathematica

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε την αριθμητική επίλυση του ευθέου προβλήματος σκέδασης ακουστικών κυμάτων από μαλακούς και σκληρούς σφαιρικούς σκεδαστές στο περιβάλλον του προγράμματος Mathematica. Συγκεκριμένα, στην πρώτη ενότητα θα εξετάσουμε την περίπτωση της σκέδασης του προσπίπτοντος κύματος από μια μαλακή σφαίρα, ενώ στη δεύτερη ενότητα θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου το προσπίπτον κύμα σκεδάζεται από μια σκληρή σφαίρα.

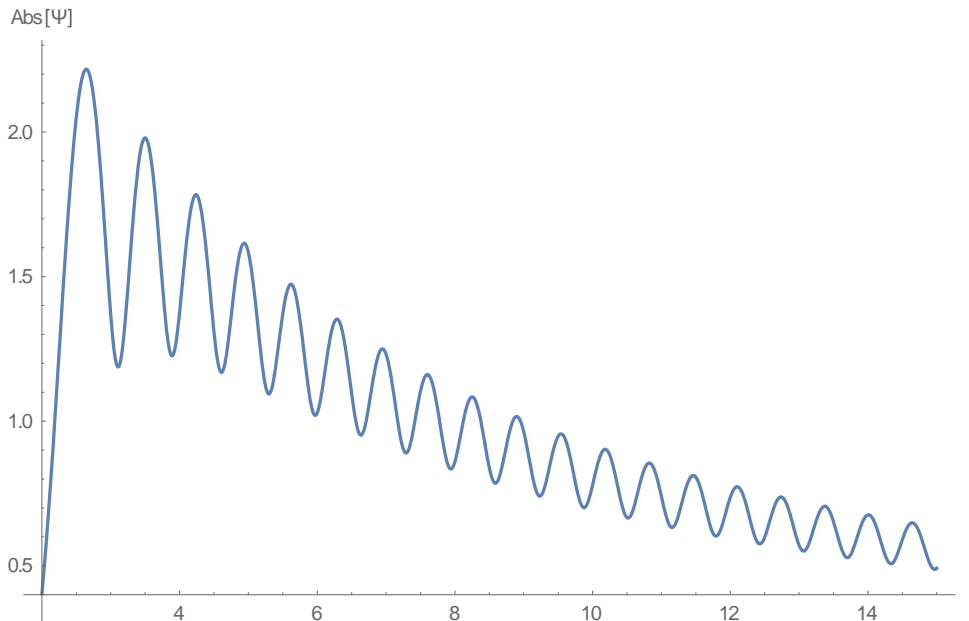
## 4.1 Σκέδαση από μία Μαλακή Σφαίρα

Καταρχήν, εξετάζουμε την περίπτωση που το μοναδιαίο  $\hat{\mathbf{k}}$ , δηλαδή το μοναδιαίο διάνυσμα της διεύθυνσης πρόσπτωσης, έχει ως κατεύθυνση τη διεύθυνση του άξονα των  $z$ , επομένως ισχύουν όλα όσα είπαμε στην ενότητα 2.2.1 του δεύτερου κεφαλαίου.

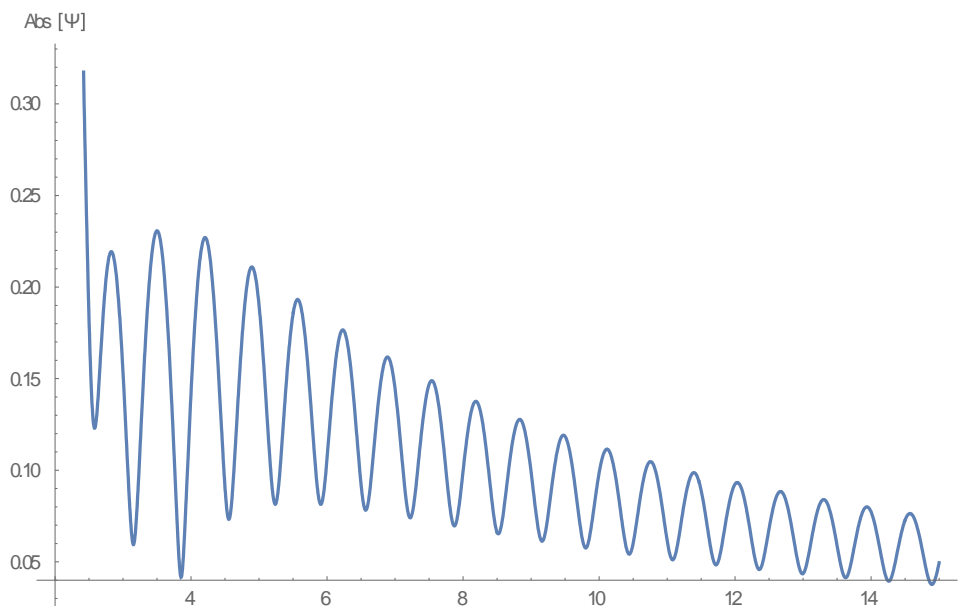
Πιο συγκεκριμένα, είδαμε πως το προσπίπτον πεδίο δίνεται από τη σχέση (2.25), ενώ το σκεδασμένο από την (2.26). Η υπέρθεση αυτών των δύο μας δίνει το ολικό πεδίο  $\Psi$ , το οποίο υπολογίζεται βάσει του τύπου (2.27). Εφόσον η σφαίρα μας είναι μαλακή, ισχύει η συνοριακή συνθήκη του *Dirichlet*, δηλαδή στην επιφάνεια της σφαίρας πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη (2.28), από την οποία εν τέλει προκύπτει η έκφραση για τους συντελεστές  $a_n$  (σχέση 2.29). Αντικαθιστώντας αυτή την έκφραση για τους συντελεστές μας στη σχέση (2.27), μπορούμε να υπολογίσουμε το ολικό πεδίο στο χώρο εξωτερικά του σκεδαστή (σχέση 2.30).

Υπενθυμίζεται ότι το συγκεκριμένο πρόβλημα δεν εμφανίζει εξάρτηση από την αζιμουθιακή γωνία  $\varphi$ . Επίσης, υποχρεωτικά  $\theta \in [0, \pi]$ .

Στα γραφήματα που ακολουθούν, βλέπουμε τη συμπεριφορά του μέτρου της έντασης του ολικού πεδίου  $\Psi$  όσο απομακρυνόμαστε από το σκεδαστή, για συγκεκριμένες γωνίες ύψους (Σημείωση: Ως μέτρο της έντασης του ολικού πεδίου ορίζουμε το μέτρο του μιγαδικού αριθμού  $\Psi$ ). Στα σχήματα 1, 2 και 3, έχουμε θεωρήσει τις γωνίες ύψους  $\theta = 0$ ,  $\theta = \pi/2$  και  $\theta = \pi$  αντίστοιχα, για τιμές της απόστασης  $r \in [2,15]$ . Οι υπολογισμοί έγιναν για σφαίρα ακτίνας  $a = 1$ , κυματάρημο  $k = 5$  και για  $n = 0,1,2, \dots,10$ .

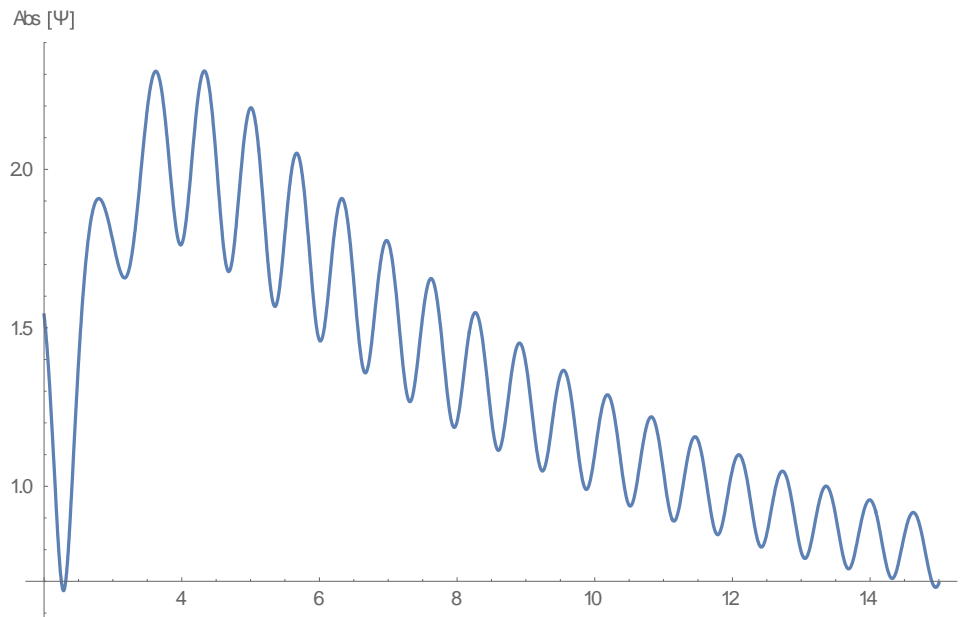


Σχήμα 1



Σχήμα 2

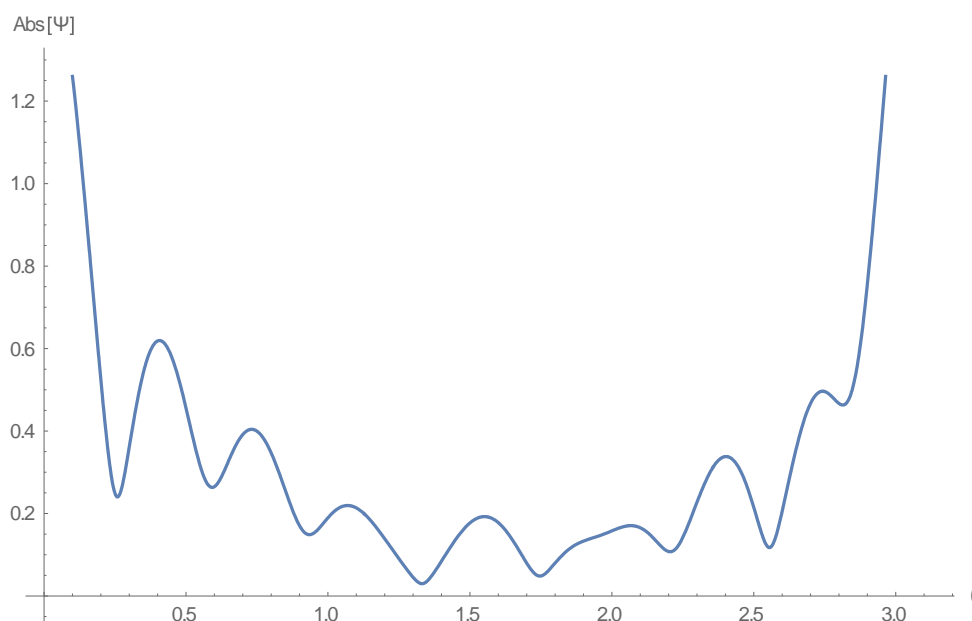




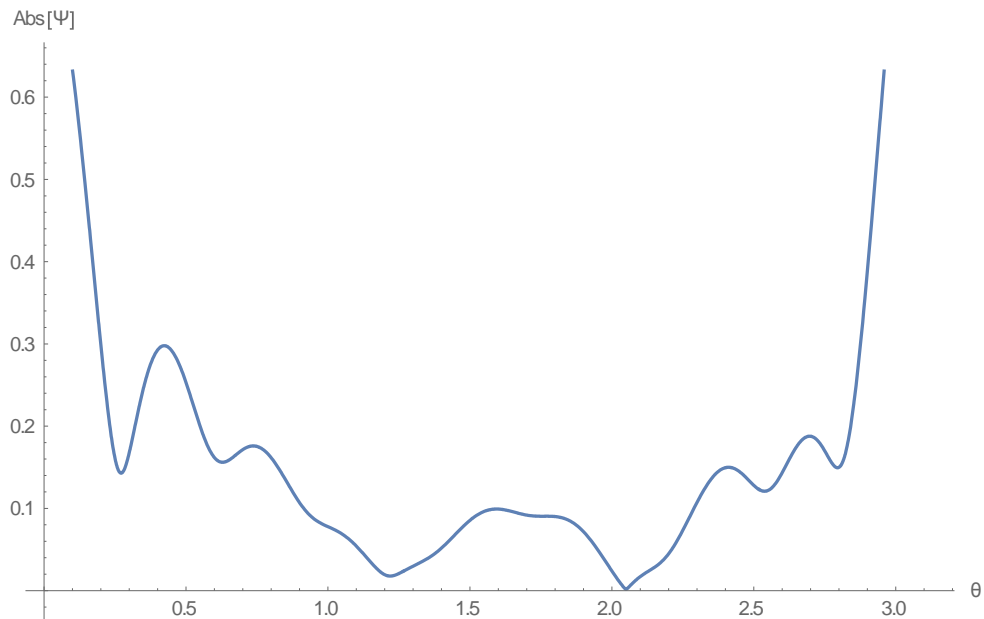
Σχήμα 3

Το συμπέρασμα που προκύπτει μελετώντας τα παραπάνω γραφήματα, είναι ότι το μέτρο της έντασης του ολικού πεδίου  $\Psi$  ελαττώνεται καθώς απομακρυνόμαστε από το σκεδαστή, προσεγγίζοντας τελικά την τιμή 0 σε μεγάλες αποστάσεις από αυτόν. Επιπλέον, οι μέγιστες τιμές της έντασης παρατηρούνται για γωνίες ύψους κοντά στο 0 και στο  $\pi$ , ενώ οι ελάχιστες τιμές κοντά στο  $\pi/2$ . Αυτή η παρατήρηση θα γίνει περισσότερο κατανοητή στα επόμενα παραδείγματα.

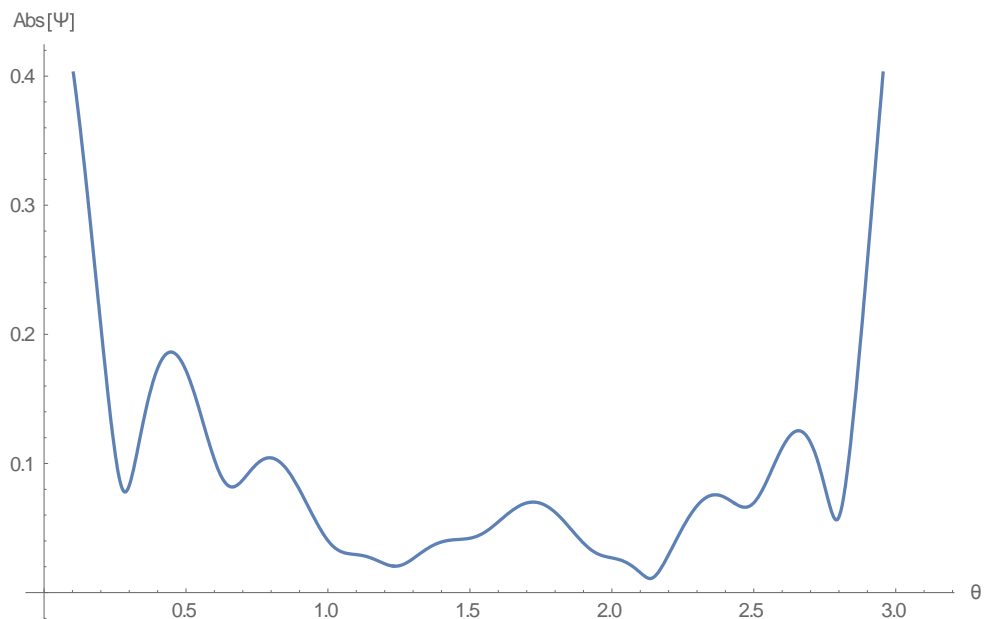
Στα τρία γραφήματα που ακολουθούν απεικονίζουμε το μέτρο της έντασης του ολικού πεδίου, όταν  $r = 5$ ,  $r = 10$  και  $r = 15$  (σχήματα 4, 5 και 6 αντίστοιχα),  $k = 5$ ,  $a = 1$  και για όλες τις γωνίες ύψους από 0 έως  $\pi$ .



Σχήμα 4



Σχήμα 5



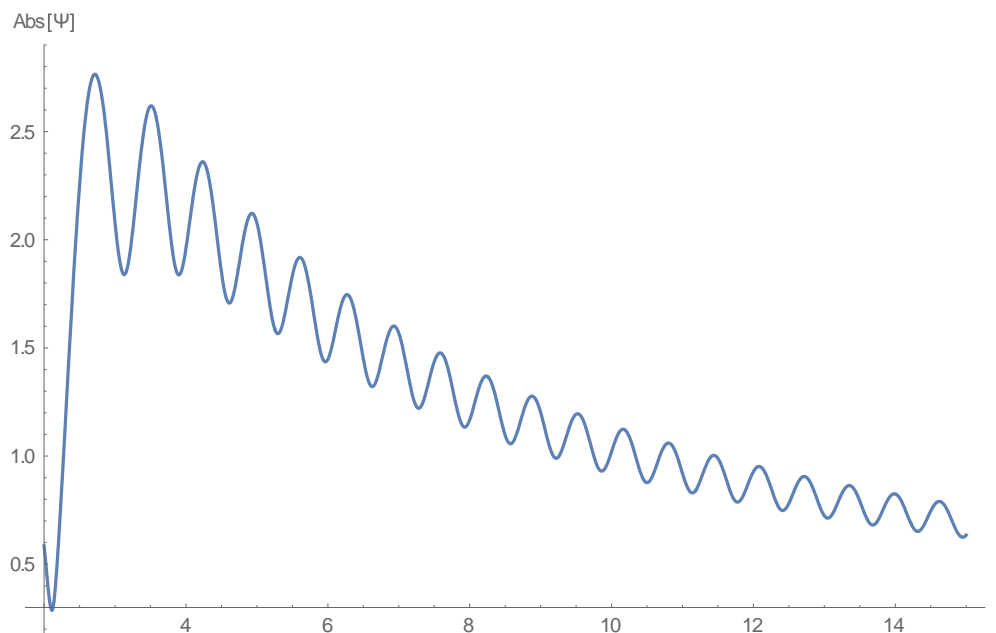
Σχήμα 6

Πράγματι, από τα τρία παραπάνω γραφήματα προκύπτει άμεσα ότι για τιμές της γωνίας  $\theta$  κοντά στο 0 και στο  $\pi$  το μέτρο της έντασης του ολικού πεδίου παίρνει τις μεγαλύτερες τιμές της, ενώ για τιμές κοντά στο  $\pi/2$  παίρνει τις μικρότερες. Επίσης, όπως διαπιστώσαμε στα σχήματα 1, 2 και 3, το μέτρο της έντασης μειώνεται καθώς απομακρυνόμαστε από το σκεδαστή. Για παράδειγμα, είναι εμφανής η διαφορά των τιμών της έντασης για  $r = 5$  (με μέγιστη τιμή περίπου το 1.2), για  $r = 10$  (εδώ η μέγιστη τιμή είναι γύρω στο 0.6) και για  $r = 15$  (εδώ η τιμή αυτή είναι μόλις 0.4).

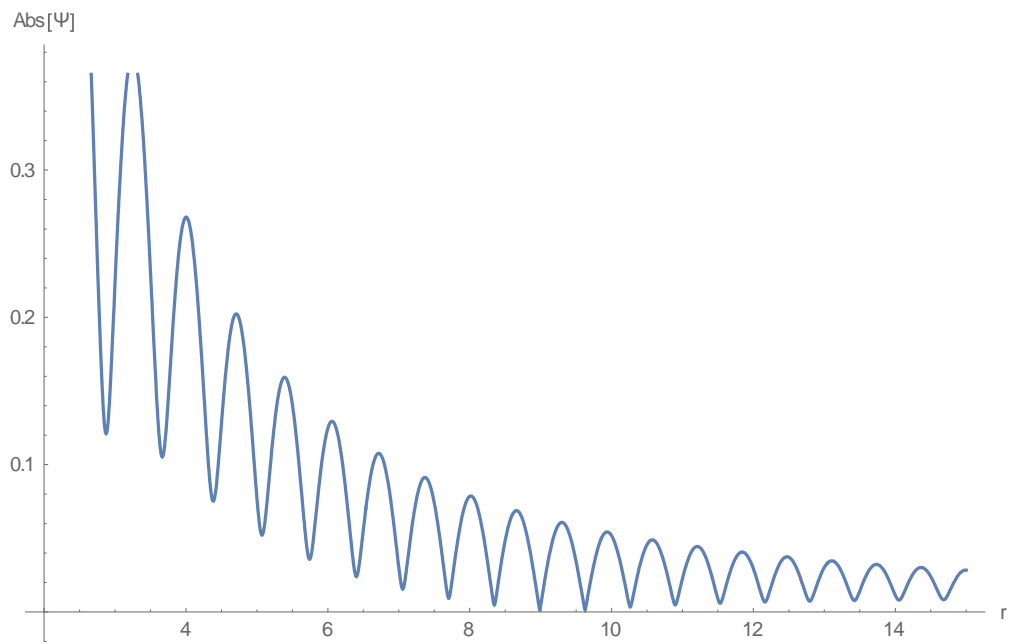
## 4.2 Σκέδαση από μία Σκληρή Σφαίρα

Στην περίπτωση της σκληρής σφαίρας, το μόνο που αλλάζει σε σχέση με την προσέγγιση που ακολουθήσαμε στην ενότητα 4.1, είναι η συνοριακή συνθήκη που πρέπει να ικανοποιείται στην επιφάνεια της σφαίρας. Εν προκειμένω δηλαδή, ισχύει η συνοριακή συνθήκη του *Neumann* (σχέση 2.31), από την οποία ομοίως προκύπτουν οι συντελεστές  $a_n$  (σχέση 2.32). Τελικά παίρνουμε τη σχέση (2.33), η οποία δίνει το ολικό πεδίο στο εξωτερικό του σκεδαστή στην περίπτωση της σκληρής σφαίρας.

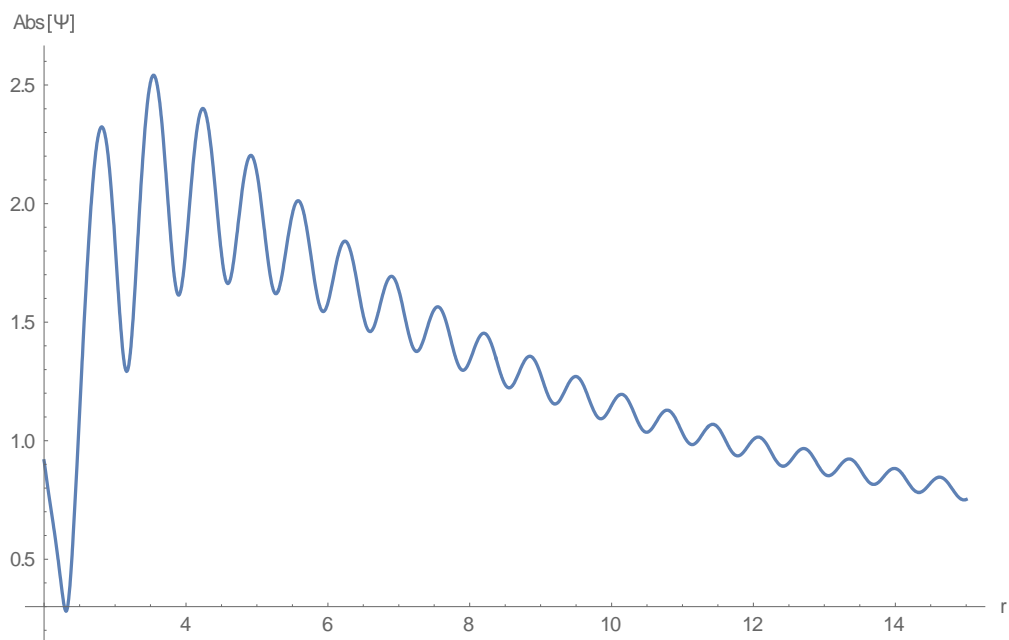
Στα γραφήματα που ακολουθούν, βλέπουμε τη συμπεριφορά του μέτρου της έντασης του ολικού πεδίου  $\Psi$  όσο απομακρυνόμαστε από το σκεδαστή, για συγκεκριμένες γωνίες ύψους. Στα σχήματα 7, 8 και 9, έχουμε θεωρήσει τις γωνίες ύψους  $\theta = 0$ ,  $\theta = \pi/2$  και  $\theta = \pi$  αντίστοιχα, για τιμές της απόστασης  $r \in [2,15]$ . Οι υπολογισμοί έγιναν για σφαίρα ακτίνας  $a = 1$ , κυματάριθμο  $k = 5$  και για  $n = 0,1,2, \dots 10$ .



Σχήμα 7

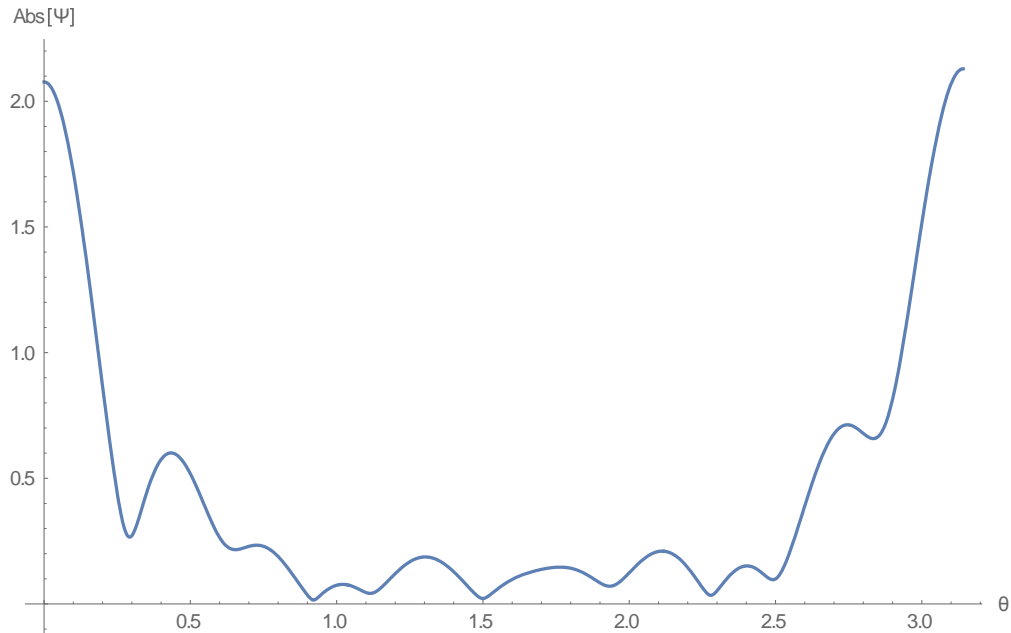


Σχήμα 8

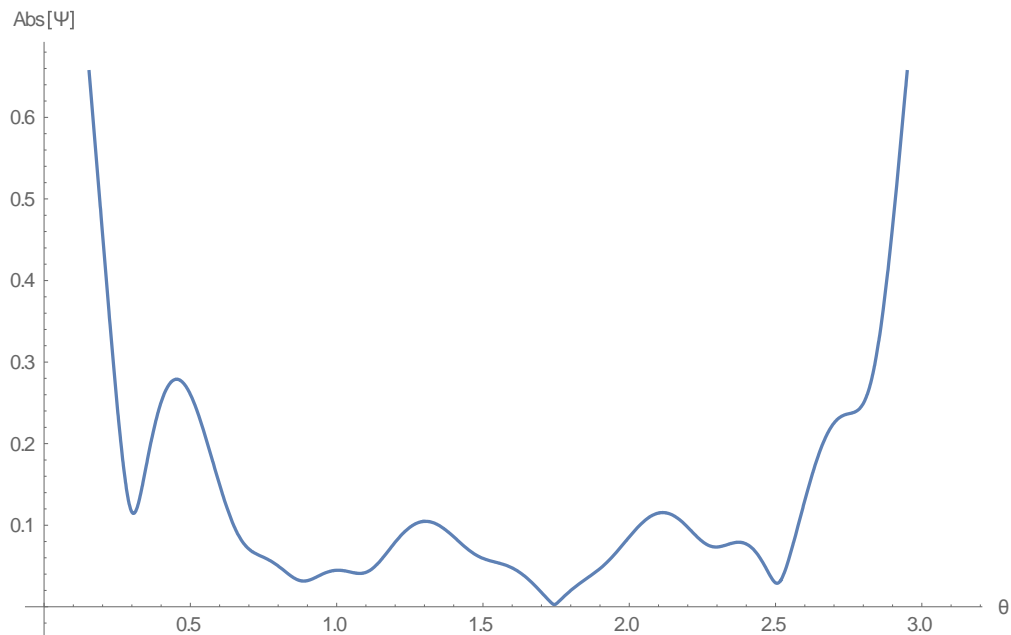


Σχήμα 9

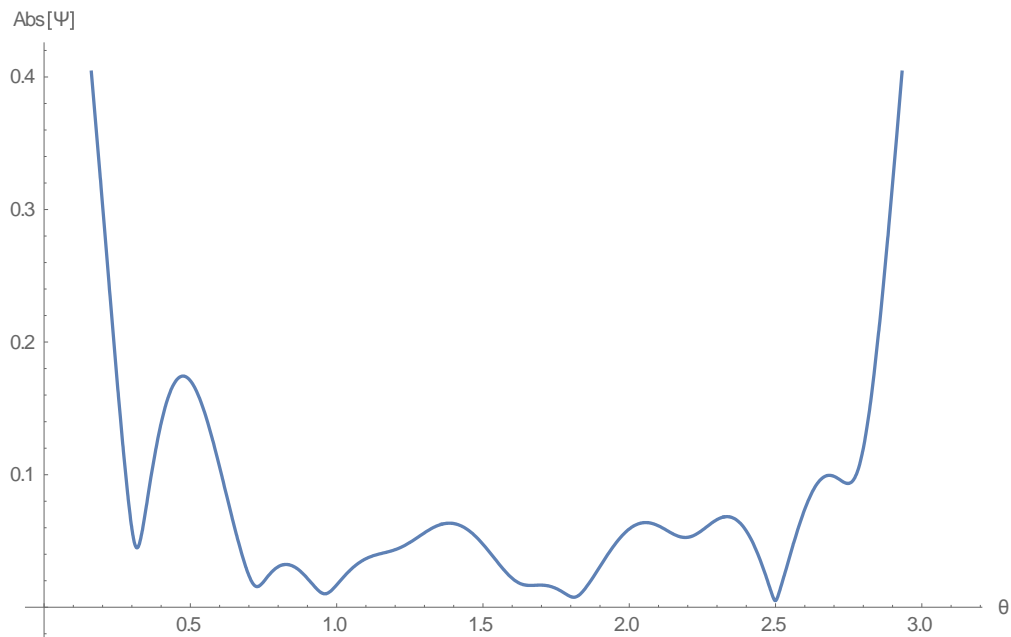
Στα τρία γραφήματα που ακολουθούν απεικονίζουμε το μέτρο της έντασης του ολικού πεδίου, όταν  $r = 5$ ,  $r = 10$  και  $r = 15$  (σχήματα 10, 11 και 12 αντίστοιχα),  $k = 5$ ,  $a = 1$  και για όλες τις γωνίες ύψους από 0 έως  $\pi$ .



Σχήμα 10



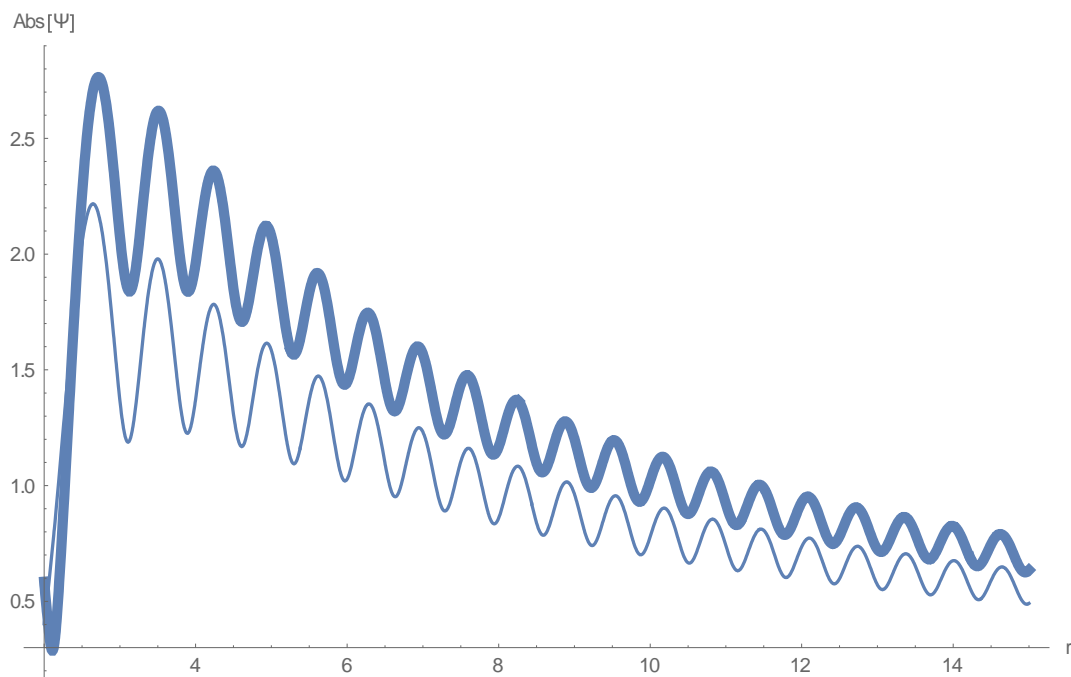
Σχήμα 11



Σχήμα 12

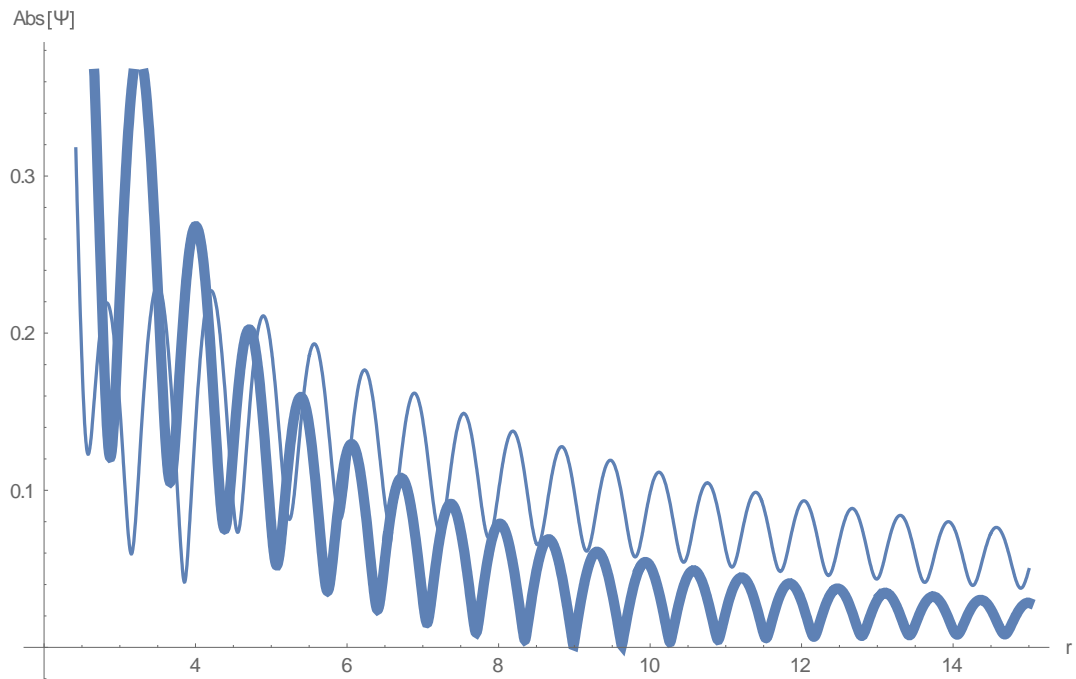
Μελετώντας τα σχήματα 7 έως 12, βλέπουμε ότι υπάρχουν κάποιες διακυμάνσεις στις τιμές του μέτρου της έντασης του ολικού πεδίου  $\Psi$  σε σχέση με αυτές που προέκυψαν στην ενότητα 4.1. Εντούτοις, η συμπεριφορά του πεδίου είναι η ίδια, επομένως οι παρατηρήσεις που κάναμε για το μαλακό σφαιρικό σκεδαστή ισχύουν και εδώ.

Παρακάτω επανασχεδιάζουμε τα γραφήματα των σχημάτων 1 και 7 στο ίδιο σύστημα ορθογωνίων αξόνων.



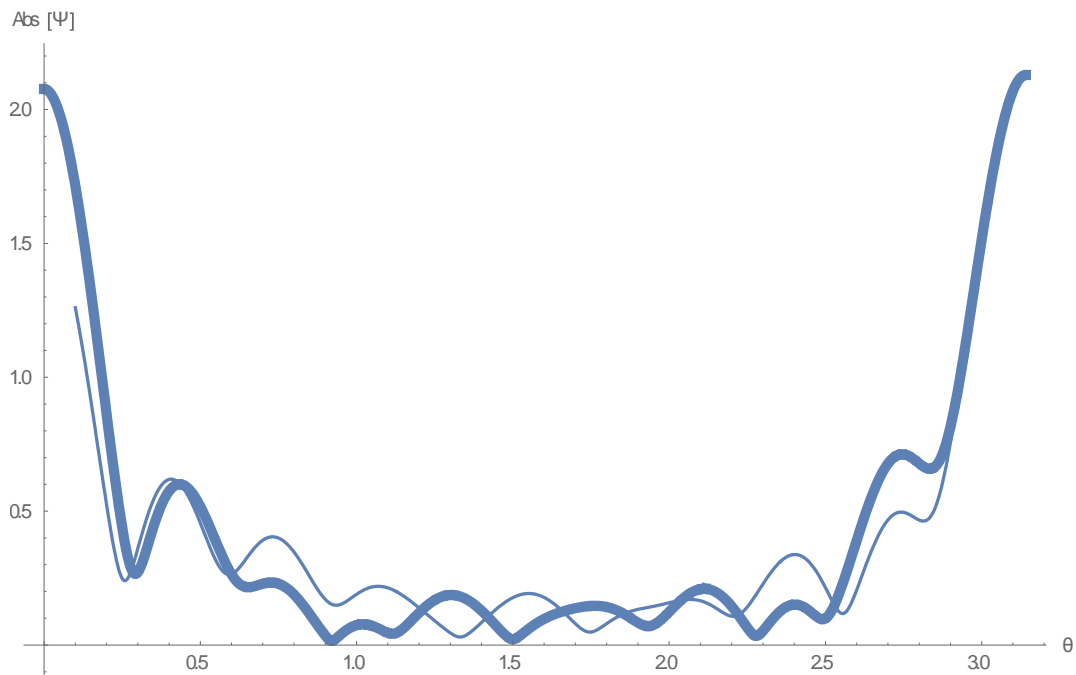
Σχήμα 13

Ομοίως, επανασχεδιάζουμε τα γραφήματα των σχημάτων 2 και 8 στο ίδιο σύστημα ορθογωνίων αξόνων.



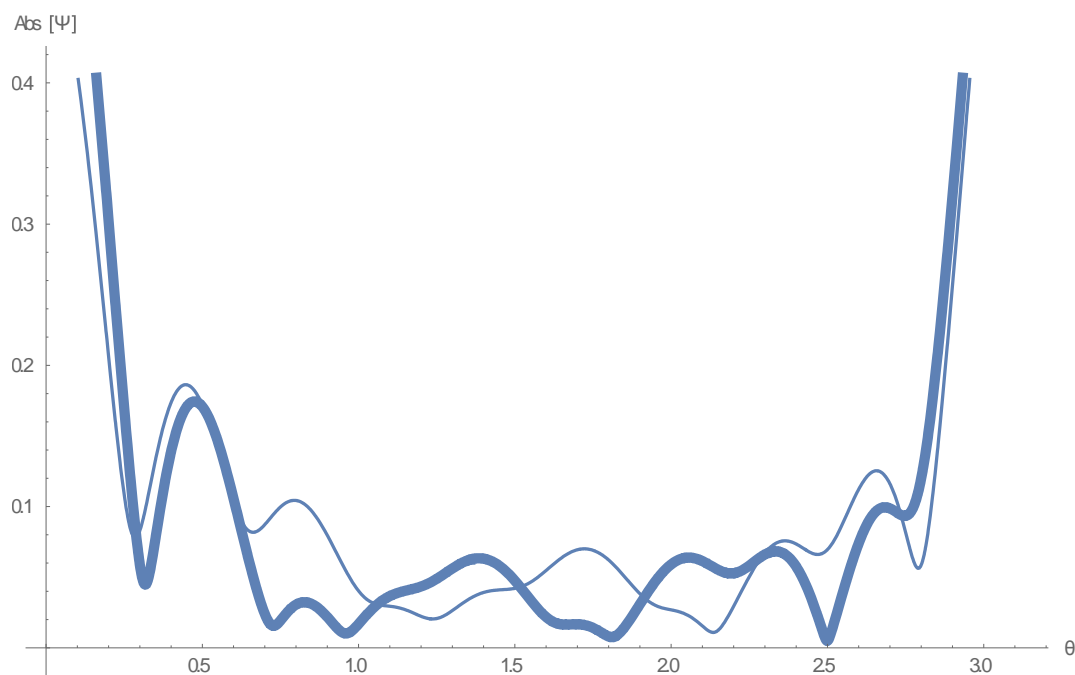
Σχήμα 14

Το ίδιο πράττουμε και για αυτά των σχημάτων 4 και 10.



Σχήμα 15

Και τέλος για τα γραφήματα των σχημάτων 6 και 12.



Σχήμα 16

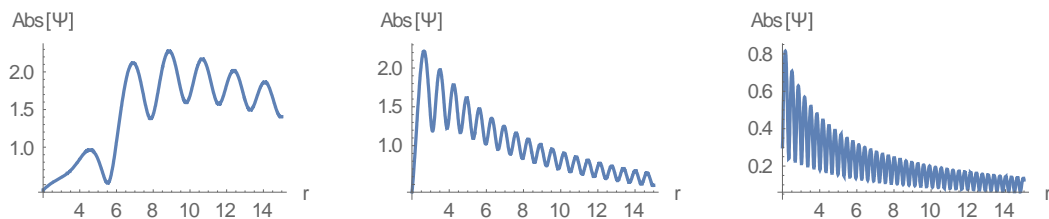
Με τα σχήματα 13 έως 16 μπορεί να πραγματοποιηθεί η σύγκριση της έντασης του ολικού πεδίου για μαλακό σφαιρικό σκεδαστή (λεπτή καμπύλη) και για σκληρό σφαιρικό σκεδαστή (παχιά καμπύλη).

Μπορούμε να κάνουμε την εξής παρατήρηση:

Το μέτρο της έντασης του ολικού πεδίου στην περίπτωση της σκληρής σφαίρας είναι *μεγαλύτερο* συγκριτικά με αυτό στην περίπτωση της μαλακής, σε αποστάσεις *κοντά* στο σκεδαστή. Πράγματι, από το γράφημα του σχήματος 13 βλέπουμε ότι, ενώ αρχικά υπάρχουν σημαντικές διαφορές στις τιμές της έντασης, όσο απομακρυνόμαστε από το σκεδαστή τόσο αυτές οι διαφορές τείνουν να εξομαλυνθούν. Επίσης, στο γράφημα 15, όπου απεικονίζεται η συμπεριφορά του πεδίου για  $r = 5$ , η μέγιστη τιμή του μέτρου της έντασης είναι εμφανώς μεγαλύτερη στην περίπτωση της σκληρής σφαίρας. Αντιθέτως, παρατηρούμε ότι σε μεγάλες αποστάσεις από το σκεδαστή (σχήμα 16, για  $r = 15$ ), δεν υπάρχουν σημαντικές αυξομειώσεις στις τιμές.



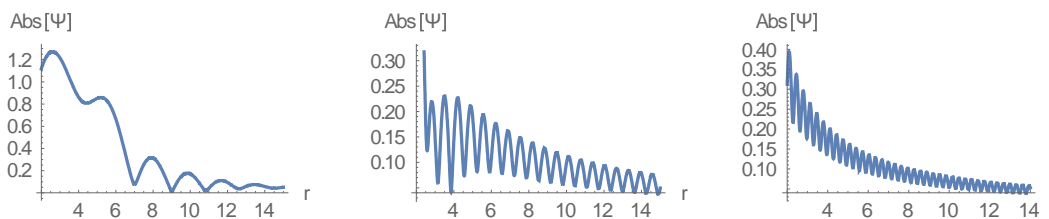
Ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι περιπτώσεις με διαφορετικό κυματάριθμο. Στα προηγούμενα παραδείγματα δουλέψαμε με  $k = 5$ , ενώ παρακάτω θα γίνουν μετρήσεις και για τις τιμές  $k = 2$ ,  $k = 10$ , στην περίπτωση του μαλακού σκεδαστή.



Σχήμα 17

Στα γραφήματα του σχήματος 17, βλέπουμε από αριστερά προς τα δεξιά τη συμπεριφορά του μέτρου της έντασης του ολικού πεδίου για τις τιμές του κυματάριθμου  $k = 2$ ,  $k = 5$ ,  $k = 10$  αντιστοίχως, σε γωνία ύψους  $\theta = 0$  και για αποστάσεις  $r \in [2,15]$ . Είναι προφανές πως όσο μεγαλώνει ο κυματάριθμος, τόσο πιο έντονες είναι οι διακυμάνσεις του πεδίου καθώς απομακρυνόμαστε από το σκεδαστή.

Ομοίως πράττουμε για γωνία ύψους  $\theta = \pi/2$



Σχήμα 18

παίρνοντας παρόμοια αποτελέσματα.



# Παράρτημα: Ειδικές Συναρτήσεις

## A. Συναρτήσεις Bessel

Η εξίσωση Bessel τάξης  $\nu$  έχει την μορφή

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \quad (\text{A.1})$$

όπου  $\nu \in \mathbb{R}$  σταθερά.

Η παράμετρος  $\nu$  είναι συνήθως ένας ακέραιος, όμως μπορεί να είναι και ένας οποιοσδήποτε αριθμός. Ανάλογα με την τιμή που θα της δώσουμε, οι εξισώσεις Bessel ταξινομούνται σε διάφορες κατηγορίες. Για παράδειγμα, για  $\nu = 0$  έχουμε τις εξισώσεις μηδενικής τάξης, για  $\nu = 1$  αυτές της πρώτης τάξης κ.ο.κ. .

Γενικά, για  $\nu \in \mathbb{R}$ , οι δύο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της (A.1) είναι

$$J_\nu(x) = x^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+\nu} m! \Gamma(\nu + m + 1)} \quad (\text{A.2})$$

η οποία καλείται *συνάρτηση Bessel τάξης  $\nu$*

και η

$$J_{-\nu}(x) = x^{-\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m-\nu} m! \Gamma(m - \nu + 1)} \quad (\text{A.3})$$

όπου

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (\text{A.4})$$

είναι η γνωστή *συνάρτηση Γάμμα*.

Σημειώνουμε ότι ισχύουν οι αναγωγικές σχέσεις

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_{\nu}(x) \quad (\text{A. 5})$$

και

$$J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J'_{\nu}(x) \quad (\text{A. 6})$$

από τις οποίες μπορούμε να εκφράσουμε τις συναρτήσεις Bessel ανώτερης τάξης σε όρους συναρτήσεων κατώτερης τάξης.

Για  $\nu = n$  (με  $n = 0, 1, 2, \dots$ ), από την (A.2) έχουμε

$$J_n(x) = x^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+n} m! (n+m)!} \quad (\text{A. 7})$$

και ομοίως προκύπτει η  $J_{-n}(x)$  από την σχέση (A.3). Σημειώνεται εδώ ότι για  $k \in \mathbb{Z}$ , ισχύει  $\Gamma(k+1) = k!$ .

Αποδεικνύεται πως οι συναρτήσεις Bessel  $J_n(x)$  και  $J_{-n}(x)$  συνδέονται με τη σχέση

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad (\text{A. 8})$$

είναι δηλαδή γραμμικά εξαρτημένες, συνεπώς, για ακέραιο  $\nu = n$ , αυτές δεν αποτελούν ένα βασικό σύστημα της εξίσωσης (A.1). Στην περίπτωση αυτή τη δεύτερη γραμμικώς ανεξάρτητη λύση της (A.1) μας παρέχει η *συνάρτηση Neumann τάξης  $\nu$* .

Για  $\nu$  μη ακέραιο έχουμε ότι

$$N_{\nu}(x) = \frac{J_{\nu}(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)} \quad (\text{A. 9})$$

ενώ για  $\nu = n \in \mathbb{Z}$  θεωρούμε την

$$N_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} N_{\nu}(x) \quad (\text{A. 10})$$

Στο σημείο αυτό αναφέρεται ότι υπάρχει πρακτική ανάγκη για λύσεις της εξίσωσης Bessel που είναι μιγαδικές για πραγματικές τιμές της μεταβλητής  $x$ . Για το λόγο αυτό χρησιμοποιούνται συχνά οι λύσεις

$$H_\nu^{(1)} = J_\nu(x) + iN_\nu(x) \quad (\text{A. 11})$$

$$H_\nu^{(2)} = J_\nu(x) - iN_\nu(x) \quad (\text{A. 12})$$

Οι δύο παραπάνω γραμμικά ανεξάρτητες συναρτήσεις λέγονται *συναρτήσεις Hankel*, πρώτου και δεύτερου είδους αντίστοιχα, τάξης  $\nu$ .

Τέλος, να πούμε ότι για τις συναρτήσεις Neumann και Hankel ισχύουν αναγωγικοί τύποι αντίστοιχοι με αυτούς των συναρτήσεων Bessel (σχέσεις A.5 και A.6).

## B. Σφαιρικές Συναρτήσεις Bessel

Η σφαιρική εξίσωση Bessel τάξης  $n$  έχει τη μορφή

$$x^2 y'' + 2xy' + (x^2 - n(n+1))y = 0 \quad (\text{B. 1})$$

όπου  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

Η εξίσωση (B.1) έχει ως λύσεις τις *σφαιρικές συναρτήσεις Bessel*, *Neumann* και *Hankel*, οι οποίες συνδέονται με τις αντίστοιχες συναρτήσεις Bessel, Neumann και Hankel (που είδαμε στην ενότητα A) με τους παρακάτω τύπους:

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+1/2}(x) \quad (\text{B. 2})$$

$$n_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{n+1/2}(x) \quad (\text{B. 3})$$

$$h_n^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{n+1/2}^{(1)}(x) \quad (\text{B. 4})$$

$$h_n^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{n+1/2}^{(2)}(x) \quad (\text{B. 5})$$

Οι σφαιρικές συναρτήσεις ικανοποιούν τις αναγωγικές σχέσεις

$$z_{n-1}(x) + z_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{x} z_n(x) \quad (\text{B. 6})$$

$$n z_{n-1}(x) - (n+1) z_{n+1}(x) = (2n+1) z'_n(x) \quad (\text{B. 7})$$

όπου η  $z$  αντιπροσωπεύει οποιαδήποτε από τις συναρτήσεις  $j_n, n_n, h_n^{(1)}$  και  $h_n^{(2)}$ .

## Γ. Συναρτήσεις Legendre

Η συσχετισμένη ή προσαρτημένη εξίσωση Legendre έχει τη μορφή

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left( n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) y = 0 \quad (\text{Γ. 1})$$

η οποία για  $m = 0$  εκφυλίζεται στην εξίσωση Legendre

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \quad (\text{Γ. 2})$$

Η εξίσωση Legendre (Γ.2) επιδέχεται ως λύσεις τα πολυώνυμα Legendre ή συναρτήσεις Legendre πρώτου είδους για τα οποία ισχύει ο τύπος του Rodrigues

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{Γ. 3})$$

για πραγματικές ή μιγαδικές τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής  $x$ .

Το πολυώνυμο  $P_n$  έχει βαθμό  $n$  και είναι άρτια ή περιττή συνάρτηση του  $x$ , ανάλογα με το αν το  $n$  είναι άρτιος ή περιττός φυσικός αριθμός. Επειδή  $x = \cos \theta$ , τα πολυώνυμα Legendre ορίζονται στο διάστημα  $[-1, 1]$  και είναι κανονικοποιημένα από τη σχέση  $P_n(1) = 1$ . Επίσης, ισχύει ότι  $P_n(-1) = (-1)^n$  και γενικά ισχύει η ισότητα  $P_n(x) = (-1)^n P_n(-x)$ .

Η συνθήκη ορθογωνιότητας απαιτεί

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x) P_{n'}(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{nn'} \quad (\text{Γ. 4})$$

όπου  $\delta_{nn'}$  είναι το δέλτα του Kronecker, δηλαδή

$$\delta_{nn'} = \begin{cases} 0 & \text{για } n \neq n' \\ 1 & \text{για } n = n' \end{cases} \quad (\Gamma.5)$$

Κάθε ομαλή συνάρτηση  $f$  στο  $[-1,1]$  δύναται να αναπτυχθεί σε σειρά πολυωνύμων Legendre, δηλαδή

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x) \quad (\Gamma.6)$$

με

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) P_n(x) dx \quad (\Gamma.7)$$

για  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

Οι συναρτήσεις Legendre δευτέρου είδους

$$Q_n(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{P_n(y)}{x-y} dy \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\Gamma.8)$$

αποτελούν μη φραγμένες λύσεις της εξίσωσης (Γ.2), γραμμικώς ανεξάρτητες των  $P_n$ . Οι συναρτήσεις  $Q_n$  ορίζονται στο διάστημα  $(-1,1)$  και απειρίζονται για  $x = \pm 1$ .

Οι βασικές αναγωγικές σχέσεις για τα πολυώνυμα Legendre είναι οι ακόλουθες:

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0 \quad , \quad n = 1, 2, \dots \quad (\Gamma.9)$$

$$(1-x^2)P'_n(x) = nP_{n-1}(x) - n x P_n(x) \quad , \quad n = 1, 2, \dots \quad (\Gamma.10)$$

ενώ αντίστοιχες σχέσεις ικανοποιούν οι συναρτήσεις Legendre δευτέρου είδους  $Q_n$ .

Για τις συσχετισμένες ή προσαρτημένες συναρτήσεις Legendre πρώτου και δευτέρου είδους ισχύουν αντίστοιχα οι σχέσεις

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \left( \frac{d^m P_n(x)}{dx^m} \right) \quad (\Gamma. 11)$$

$$Q_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \left( \frac{d^m Q_n(x)}{dx^m} \right) \quad (\Gamma. 12)$$

για κάθε  $n = 0, 1, 2, \dots$  και  $m = 0, 1, 2, \dots, n$ . Από τον ορισμό είναι προφανές ότι  $P_n^0(x) = P_n(x)$  και  $Q_n^0(x) = Q_n(x)$ . Επιπλέον, ισχύουν οι ιδιότητες  $P_n^m(\pm 1) = 0$  και  $P_n^m(-x) = (-1)^{n+m} P_n^m(x)$ .

Για τις προσαρτημένες συναρτήσεις Legendre πρώτου είδους, με τον ίδιο άνω δείκτη αλλά διαφορετικό κάτω δείκτη, έχουμε την ακόλουθη σχέση ορθογωνιότητας:

$$\int_{-1}^{+1} P_n^m(x) P_{n'}^{m'}(x) dx = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{nn'} \quad (\Gamma. 13)$$

Ενώ για αυτές με τον ίδιο κάτω δείκτη και διαφορετικό άνω δείκτη ισχύει:

$$\int_{-1}^{+1} P_n^m(x) P_n^{m'}(x) (1-x^2)^{-1} dx = \frac{(n+m)!}{n(n-m)!} \delta_{mm'} \quad (\Gamma. 14)$$

Για κάθε  $n = 0, 1, 2, \dots$  έχουμε  $(2n+1)$  γραμμικώς ανεξάρτητες επιφανειακές σφαιρικές αρμονικές, οι οποίες δίνονται από την ορθοκανονικοποιημένη μορφή:

$$Y_n^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (\Gamma. 15)$$

για  $m = 0, 1, 2, \dots, n$  και  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

Επίσης,

$$Y_n^{-m}(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_n^{m*}(\theta, \varphi) \quad (\Gamma. 16)$$

για  $m = 1, 2, \dots, n$  και  $n = 0, 1, 2, \dots$ , ενώ με \* συμβολίζουμε τον μιγαδικό συζυγή.



Για τις επιφανειακές σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις  $Y_n^m$  ισχύει η παρακάτω σχέση ορθογωνιότητας

$$\oint_{S^2} Y_{n'}^m(\hat{\mathbf{r}}) Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}) ds(\hat{\mathbf{r}}) = \delta_{nn'} \quad (\Gamma.17)$$

για  $m = -n, \dots, n$  και  $n = 0, 1, 2, \dots$ , ενώ  $S^2$  είναι η μοναδιαία σφαίρα στον  $R^3$  και  $\hat{\mathbf{r}} = (\theta, \varphi)$ .

Κάθε ομαλή συνάρτηση  $f: S^2 \rightarrow R$  μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$f(\hat{\mathbf{r}}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_{nm} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \quad (\Gamma.18)$$

όπου

$$c_{nm} = \oint_{S^2} f(\hat{\mathbf{r}}) Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}) ds(\hat{\mathbf{r}}) \quad (\Gamma.19)$$

για κάθε  $m = -n, \dots, n$  και  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

Ειδικότερα, αν συμβολίσουμε με  $\gamma$  τη γωνία δύο διευθύνσεων  $\hat{\mathbf{r}} = (\theta, \varphi)$  και  $\hat{\mathbf{r}}' = (\theta', \varphi')$ , τότε έχουμε το προσθετικό θεώρημα Legendre:

$$P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}') = P_n(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{m=-n}^n Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}') \quad (\Gamma.20)$$

ή

$$P_n(\cos \gamma) = P_n(\cos \theta) P_n(\cos \theta') + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta) P_n^m(\cos \theta') \cos m(\varphi - \varphi') \quad (\Gamma.21)$$

Το προσθετικό θεώρημα Legendre παρέχει τη δυνατότητα να εκφραστεί κάθε πολυώνυμο Legendre στη γωνία  $\gamma$ , ως συνάρτηση των επιφανειακών σφαιρικών αρμονικών στις διευθύνσεις που καθορίζουν τις πλευρές της γωνίας  $\gamma$ .

Τέλος, οι συναρτήσεις  $P_n^m$  ικανοποιούν ορισμένες αναγωγικές σχέσεις (τις αντίστοιχες ικανοποιούν και οι  $Q_n^m$ ):

$$P_n^{m+1}(x) - \frac{2mx}{(1-x^2)^{1/2}} P_n^m(x) + \{n(n+1) - m(m-1)\} P_n^{m-1}(x) = 0 \quad (\Gamma.22)$$

$$(2n+1)xP_n^m(x) = (n+m)P_{n-1}^m(x) + (n-m+1)P_{n+1}^m(x) \quad (\Gamma.23)$$

$$(2n+1)(1-x^2)^{1/2} P_n^m(x) = P_{n+1}^{m+1}(x) - P_{n-1}^{m+1}(x) \quad (\Gamma.24)$$

$$(1-x^2)^{1/2} P_n^m(x) = \frac{1}{2} P_n^{m+1}(x) - \frac{1}{2} (n+m)(n-m+1) P_n^{m-1}(x) \quad (\Gamma.25)$$

Για περισσότερες πληροφορίες, οι οποίες αφορούν τις έννοιες και τις σχέσεις που παρουσιάστηκαν στο παράρτημα, ο αναγνώστης δύναται να ανατρέξει στα βιβλία [1], [3] και [9] που αναφέρονται στη βιβλιογραφία.

# Βιβλιογραφία

---

[1] **Γ. Δάσιος και Κ. Κυριάκη:** «Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις», Αθήνα (1994)

[2] **Γ. Δάσιος:** «Σεμινάριο Σκέδασης Κυματικών Πεδίων», Πάτρα (1987)

[3] **Χ. Μασσαλάς:** «Ειδικές Συναρτήσεις», Εκδόσεις Gutenberg, Αθήνα (2010)

[4] **Σ. Τραχανάς:** «Mathematica και Εφαρμογές», Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο (2004)

[5] **Φ. Δελησάββα:** «Το ευθύ πρόβλημα πολλαπλής σκέδασης ακουστικών κυμάτων και η αριθμητική του επίλυση σε περιβάλλον Mathematica» - Διπλωματική Εργασία, Αθήνα (2011)

[6] **Ε. Μπάντρα:** «Ευθύ και αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης με τη μέθοδο των σημειακών πηγών για σκληρό και μαλακό σώμα» - Διπλωματική Εργασία, Αθήνα (2014)

[7] **Courant R. and Hilbert D.:** «Methods of Mathematical Physics I, II», Interscience, New York (1953, 1966)

[8] **Dassios G. and Kleinman R.:** «Low Frequency Scattering», Oxford Science Publications (2000)

**[9] Martin P.A.:** «Multiple Scattering: Interaction of Time-Harmonic Waves with N Obstacles», Cambridge University Press (2006)

**[10] Moon P. and Spencer D.E.:** «Field Theory Handbook», Springer-Verlag, Berlin (1961)

**[11] Morse P.M. and Feshbach H.:** «Methods of Theoretical Physics I, II», McGraw-Hill, New York (1953)

**[12] Roach G.F.:** «Green's Functions», Van Nostrand, London (1970)