



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΤΥΠΟΠΟΙΗΣΗ ΚΥΚΛΟΦΟΡΙΑΣ
ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟΔΡΟΜΩΝ**

ΓΥΦΤΟΔΗΜΟΥ ΓΕΩΡΓΙΑ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΚΑΡΑΦΥΛΛΗΣ ΙΑΣΩΝ

ΑΘΗΝΑ 2016

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Πριν ο αναγνώστης ξεκινήσει την μελέτη της παρούσας εργασίας, κρίνω σκόπιμο να αναφέρω και να ευχαριστήσω όσους με βοήθησαν στην ολοκλήρωσή της. Θα ήθελα λοιπόν να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντά μου, Επίκουρο Καθηγητή Ιάσωνα Καραφύλλη για την πολύτιμη συμπαράσταση και βοήθειά του στην εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας. Η συνεργασία μας ήταν άψογη και η παρουσία του ενεργή όποτε τον είχα ανάγκη. Επιπλέον, ευχαριστώ τον Αναπληρωτή Καθηγητή Αντώνιο Χαραλαμπόπουλο όπως επίσης και τον Καθηγητή Ιωάννη Τσινιά για τον χρόνο που αφιέρωσαν και το ενδιαφέρον που έδειξαν για την παρούσα διπλωματική εργασία. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους εκείνους που στέκονται δίπλα μου και με βοηθούν στο να ξεπεράσω κάθε είδους δυσκολίες, αλλά ιδιαιτέρως την οικογένειά μου που βρίσκεται πάντοτε δίπλα μου στις ευχάριστες αλλά και στις δυσάρεστες στιγμές της ζωής μου.

Τριμελής επιτροπή:

1. Καραφύλλης Ιάσων, Επίκουρος Καθηγητής (Επιβλέπων)
2. Χαραλαμπόπουλος Αντώνιος, Αναπληρωτής Καθηγητής
3. Τσινιάς Ιωάννης, Καθηγητής

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στην εργασία αυτή χρησιμοποιούμε τη μαθηματική προτυποποίηση για την περιγραφή και την ανάλυση της κυκλοφορίας σε αυτοκινητόδρομο. Στο κεφάλαιο 1 γίνεται ανάλυση της βιβλιογραφίας και παρουσιάζουμε τη δημιουργία του μοντέλου. Στο κεφάλαιο 2 γίνεται αναφορά σε γενικές έννοιες για συστήματα διακριτού χρόνου. Έννοιες γύρω από την ευστάθεια και τη θεωρία ελέγχου που είναι πολύ σημαντικές και αναγκαίες στην κατανόηση του μαθηματικού μοντέλου που κατασκευάσαμε. Στο κεφάλαιο 3 μελετάμε το κύριο αποτέλεσμα του μοντέλου αυτοκινητοδρόμων και το θεώρημα μαζί με την απόδειξή του. Στο κεφάλαιο 4 παρουσιάζουμε μια εφαρμογή για να κατανοήσουμε τη χρησιμότητα του θεωρήματος. Τέλος, στο κεφάλαιο 5 εκθέτουμε τα συμπεράσματά μας. Οδηγός για την παρούσα διπλωματική ήταν η εργασία των I. Karafyllis, M. Kontorinaki and M. Papageorgiou, “Global Exponential Stabilization of Freeway Models”, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 26(6), 2016, pp. 1184-1210.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

| | |
|--|-----------|
| ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ..... | 5 |
| ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΚΥΚΛΟΦΟΡΙΑΣ ΣΕ ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟΔΡΟΜΟ..... | 6 |
| 1.1 Ανάλυση της βιβλιογραφίας..... | 6 |
| 1.2 Η δημιουργία του μοντέλου..... | 9 |
| ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΓΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ..... | 18 |
| 2.1 Ευστάθεια..... | 18 |
| 2.2 Θεωρία ελέγχου..... | 26 |
| ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΚΥΡΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟΔΡΟΜΩΝ... | 29 |
| 3.1 Κύριο αποτέλεσμα και θεώρημα..... | 29 |
| 3.2 Απόδειξη του κύριου αποτελέσματος..... | 34 |
| ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΕΦΑΡΜΟΓΗ..... | 78 |
| ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ..... | 89 |
| ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ..... | 91 |

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

Σε όλη την εργασία, έχουμε υιοθετήσει τον ακόλουθο συμβολισμό και ορολογία [34]:

- $\mathfrak{R}_+ := [0, +\infty)$. Για κάθε σύνολο S , $S^n = \underbrace{S \times \dots \times S}_{n \text{ φορές}}$ για κάθε θετικό ακέραιο n .
- Με $C^0(A; \Omega)$, συμβολίζουμε την τάξη των συνεχών συναρτήσεων στο $A \subseteq \mathfrak{R}^n$, που παίρνουν τιμές στο $\Omega \subseteq \mathfrak{R}^m$. Με $C^k(A; \Omega)$, όπου $k \geq 1$ είναι ακέραιος αριθμός, συμβολίζουμε την τάξη των συναρτήσεων στο $A \subseteq \mathfrak{R}^n$ με συνεχείς παραγώγους k τάξης, που παίρνουν τιμές στο $\Omega \subseteq \mathfrak{R}^m$.
- Έστω $x \in \mathfrak{R}^n$. Ο ανάστροφος του $x \in \mathfrak{R}^n$ συμβολίζεται με x' . Με $|x|$ συμβολίζουμε την Ευκλείδεια νόρμα του $x \in \mathfrak{R}^n$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΚΥΚΛΟΦΟΡΙΑΣ ΣΕ ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟΔΡΟΜΟ

1.1 ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

Ένα σημαντικό πρόβλημα για τις σύγχρονες κοινωνίες είναι η κυκλοφοριακή συμφόρηση των αυτοκινητοδρόμων σε περιόδους αιχμής, η οποία οδηγεί σε υπερβολικές καθυστερήσεις, μειωμένη ασφάλεια της κυκλοφορίας, αυξημένη κατανάλωση καυσίμων και ρύπανση του περιβάλλοντος. Τα κύρια μέτρα ελέγχου της κυκλοφορίας για την αντιμετώπιση της κυκλοφοριακής συμφόρησης είναι ο έλεγχος ραμπών εισόδου αυτοκινητοδρόμων RM (ramp metering) και τα μεταβλητά όρια ταχύτητας VSL (variable speed limits). Το RM υλοποιείται με την χρήση φωτεινών σηματοδοτών (φανάκια), που τοποθετούνται σε σημεία εισόδου σε αυτοκινητόδρομο (on-ramps) ώστε να ελέγχουν την ροή των οχημάτων που εισέρχονται σε αυτόν [26]. Τα VSL χρησιμοποιούνται για την εναρμόνιση της ταχύτητας αν και πρόσφατες μελέτες έδειξαν ότι μπορούν να χρησιμοποιηθούν και σαν κύριο μέτρο στην διαχείριση της κυκλοφορίας [3]. Για την επίτευξη του στόχου τους, αυτά τα μέτρα ελέγχου πρέπει να ακολουθούνται από κατάλληλες στρατηγικές ελέγχου.

Κλάδοι σχετικοί με τα παραπάνω θεωρούνται οι Nonlinear Optimal Control και Model Predictive Control ως προσεγγίσεις για τον έλεγχο της κυκλοφορίας ολόκληρου του δικτύου του αυτοκινητοδρόμου, βλέπε π.χ. [1], [2], [9], [12]. Ωστόσο, ενδεχομένως λόγω της πολυπλοκότητας της στρατηγικής ελέγχου, καμία από τις προτεινόμενες μεθόδους δεν έχει προχωρήσει σε κάποιο λειτουργικό εργαλείο. Ένας άλλος σημαντικός κλάδος της έρευνας για τον έλεγχο της κυκλοφορίας σε αυτοκινητόδρομο, θεωρείται ο Explicit Feedback Control που αντιμετωπίζει προβλήματα συμφόρησης. Μια πρωτοποριακή εξέλιξη προς αυτή την κατεύθυνση ήταν ο I-type local feedback RM regulator ALINEA [24], ο οποίος χρησιμοποιείται σε εκατοντάδες πεδία εφαρμογής σε όλο τον κόσμο, βλέπε π.χ. [25], [27]. Ο ALINEA ελέγχει την κίνηση των οχημάτων που μπαίνουν από μία ράμπα εισόδου και στοχεύει σε μια κρίσιμη πυκνότητα στην κύρια κατηγορία συγχώνευσης, ούτως ώστε να

μεγιστοποιηθεί η διέλευση στον αυτοκινητόδρομο. Άλλοι προτεινόμενοι local feedback control algorithms για RM περιλαμβάνονται στα [13], [15], [29], [30]. Διάφορες επεκτάσεις και τροποποιήσεις του ALINEA προτάθηκαν με τα χρόνια και εφαρμόστηκαν για την αντιμετώπιση συγκεκριμένων αναγκών που προέκυπταν. Στη συγκεκριμένη εργασία πιο σχετική είναι η επέκταση σε PI-type regulator, έτσι ώστε να αντιμετωπιστεί αποτελεσματικά η συμφόρηση που βρίσκεται μακριά από το επόμενο κελί της περιοχής συγχώνευσης [31] και η παράλληλη ανάπτυξη των PI-type regulators για την αντιμετώπιση πολλαπλών πιθανών σημείων συμφόρησης στο επόμενο κελί από την ράμπα εισόδου σε αυτοκινητόδρομο [32]. Από την άλλη, έλεγχοι ανάδρασης με τη χρήση των VSL για τον κύριο έλεγχο της κυκλοφορίας είναι σπάνιοι, βλέπε [4]. Επίσης βλέπε [14] για μία πρόσφατη επέκταση σε περίπτωση πολλαπλής συμφόρησης.

Για να αντιμετωπιστούν επαρκώς τα αυξανόμενα προβλήματα κυκλοφοριακής συμφόρησης σε αυτοκινητόδρομο, είναι απαραίτητο να διερευνήσουμε και να αναπτύξουμε τις δυνητικά πιο αποτελεσματικές μεθόδους. Για το σκοπό αυτό θα πρέπει να αξιοποιηθούν σωστά και οι πρόσφατες προσεγγίσεις της θεωρίας ελέγχου. Σε αυτή την εργασία, παρέχουμε μια εμπειριστατωμένη μεθοδολογία για την κατασκευή των ρητών νόμων ανάδρασης που εγγυώνται την εύρωστη ολική εκθετική ευστάθεια (robust global exponential stability) του μη κορεσμένου σημείου ισορροπίας για γενικά μη γραμμικά, διακριτού χρόνου μοντέλα αυτοκινητοδρόμων. Έχουμε επικεντρωθεί στα διακριτού χρόνου μοντέλα αυτοκινητοδρόμων τα οποία είναι η γενικευμένη εκδοχή των γνωστών first-order discrete Godunov approximations [8] to the kinematic-wave partial differential equation of the LWR-model (βλέπε [23], [28]) με μη γραμμικές [19] ή τμηματικά γραμμικές (Cell Transmission Model – CTM, [6], [7], [10]) συναρτήσεις εκροών (fundamental diagram (FD)).

Συγκεκριμένα, η κατηγορία των μοντέλων αυτοκινητοδρόμων που έχει δημιουργηθεί μας επιτρέπει:

- i. Τη μελέτη των εν γένει μη γραμμικών (συμπεριλαμβανομένων των τμηματικά γραμμικών) θεμελιωδών διαγραμμάτων (FDs).
- ii. Τη μελέτη όλων των πιθανών περιπτώσεων για τη σχετική προτεραιότητα των εισροών στους κόμβους των αυτοκινητοδρόμων (βλέπε [7]), ακόμα και για χρονικά μεταβαλλόμενα μοντέλα ή με άγνωστους κανόνες προτεραιότητας.

- iii. Τη μελέτη των τροποποιημένων συναρτήσεων ζήτησης (demand functions) σύμφωνα με το [20], οι οποίες αντιπροσωπεύουν το capacity drop phenomenon, που δεν αντικατοπτρίζεται στο κλασικό LWR-model and its Godunov discretization.

Η κατασκευή του εύρωστου ολικά εκθετικού σταθεροποιητή ανάδρασης βασίζεται στην προσέγγιση της Control Lyapunov Function (CLF) βλέπε [16], καθώς και σε ορισμένες σημαντικές ιδιότητες των μοντέλων αυτοκινητοδρόμων.

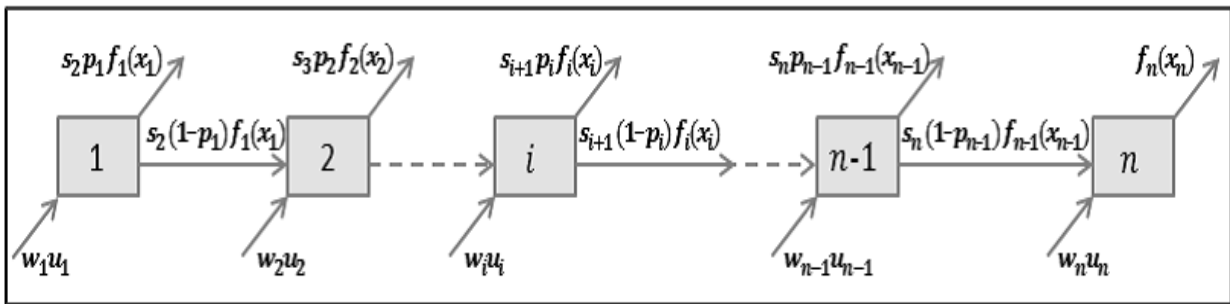
Συνοψίζοντας, η συνεισφορά της παρούσας εργασίας είναι τριπλή:

- Έχει κατασκευαστεί μια CLF για μια κατηγορία μοντέλων αυτοκινητοδρόμων. Οι τύποι για την συνάρτηση Lyapunov είναι σαφείς (βλέπε τύπους (3.4), (3.5) και (3.6)) και μπορούν να χρησιμοποιηθούν με απλό τρόπο για διάφορους σκοπούς.
- Έχουν αποδειχθεί σημαντικές ιδιότητες των γενικά μη γραμμικών και αβέβαιων μοντέλων αυτοκινητοδρόμων διακριτού χρόνου (βλέπε ιδιότητες **(Σ1)**, **(Σ2)**, **(Σ3)**, **(Σ4)** και **(Σ5)** στο κεφάλαιο 3).
- Κατασκευάζεται μια παραμετροποιημένη οικογένεια ολικά εκθετικών σταθεροποιητών ανάδρασης για το μη κορεσμένο σημείο ισορροπίας των μοντέλων αυτοκινητοδρόμων. Η επιτευχθείσα σταθεροποίηση είναι εύρωστη σε σχέση με όλους τους κανόνες προτεραιότητας που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τις εισροές.

Μέσω προσομοίωσης, είδαμε πως ο προτεινόμενος ρυθμιστής ανάδρασης οδήγησε τον αυτοκινητόδρομό μας σε ισορροπία ώστε να μη παρουσιάζει φαινόμενα συμφόρησης. Η προσομοίωση αυτή που παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 4 της παρούσας εργασίας, μελετά την απόδοση του αντίστοιχου συστήματος κλειστού βρόχου, καθώς και την ευρωστία του και πως επηρεάζεται η σύγκλιση αλλάζοντας τις αρχικές καταστάσεις και τα δεδομένα. Σε μελλοντικές εργασίες θα εξεταστούν περαιτέρω θέματα ευρωστίας όταν έχουμε σφάλματα μοντελοποίησης και επίμονες διαταραχές.

1.2 Η ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

Θεωρούμε έναν αυτοκινητόδρομο που αποτελείται από $n \geq 3$ τμήματα ή κελιά (χαρακτηριστικά το μήκος κάθε κελιού μπορεί να είναι 200-500 μέτρα) [34]. Κάθε κελί μπορεί να έχει μια εξωτερική ελεγχόμενη εισροή (π.χ. από αντίστοιχες ράμπες εισόδου σε αυτοκινητόδρομο), που βρίσκεται κοντά στο όριο του προηγούμενου κελιού (upstream cell) και μια εξωτερική εκροή (π.χ. μέσω αντίστοιχων ραμπών εξόδου από αυτοκινητόδρομο), που βρίσκεται κοντά στο όριο του επόμενου κελιού (downstream cell) (Σχήμα 1).



Σχήμα 1: Το μοντέλο του αυτοκινητοδρόμου (σηματικά).

Ο αριθμός των οχημάτων σε χρόνο $t \geq 0$ στο τμήμα/κελί $i \in \{1, \dots, n\}$ συμβολίζεται με $x_i(t)$. Η συνολική εκροή και η συνολική εισροή των οχημάτων στο τμήμα $i \in \{1, \dots, n\}$ σε χρόνο $t \geq 0$ συμβολίζονται με $F_{i,out}(t) \geq 0$ και $F_{i,in}(t) \geq 0$, αντίστοιχα. Όλες οι ροές κατά τη διάρκεια ενός χρονικού διαστήματος μετρώνται σε [veh]. Κατά συνέπεια, η σχέση των οχημάτων (εξίσωση διατήρησης) για κάθε τμήμα $i \in \{1, \dots, n\}$ δίνεται από:

$$x_i(t+1) = x_i(t) - F_{i,out}(t) + F_{i,in}(t), \quad i = 1, \dots, n, \quad t \geq 0. \quad (1.1)$$

Κάθε τμήμα του δικτύου έχει χωρητικότητα αποθήκευσης (storage capacity) $\alpha_i > 0$ ($i = 1, \dots, n$). Η πρώτη μας υπόθεση αναφέρει ότι οι εξωτερικές ροές (ράμπα εξόδου από αυτοκινητόδρομο) από κάθε κελί είναι σταθερά ποσοστά της συνολικής ροής εξόδου, δηλαδή υπάρχουν σταθερές $p_i \in [0, 1]$, $i = 1, \dots, n$, τέτοιες ώστε:

$$\left(\begin{array}{l} \text{ροή των οχημάτων από το} \\ \text{τμήμα } i \text{ στο τμήμα } i + 1 \end{array} \right) = (1 - p_i)F_{i,out}(t), \text{ για } i = 1, \dots, n - 1 \quad (1.2)$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{ροή των οχημάτων από το} \\ \text{τμήμα } i \text{ σε περιοχές έξω από} \\ \text{τον αυτοκινητόδρομο} \end{array} \right) = p_i F_{i,out}(t), \text{ για } i = 1, \dots, n. \quad (1.3)$$

Οι σταθερές p_i είναι γνωστές ως ποσοστά εξόδου (exit rates), δηλαδή μέρη του $F_{i,out}(t)$ που δεσμεύονται για την ράμπα εξόδου από αυτοκινητόδρομο του i -οστού κελιού. Εφόσον το n -οστό κελί είναι το τελευταίο επόμενο κελί του εξεταζόμενου αυτοκινητοδρόμου, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $p_n = 1$. Υποθέτουμε επίσης ότι τα $p_i < 1$ για $i = 1, \dots, n - 1$ και ότι όλες οι έξοδοι σε περιοχές εκτός του δικτύου μπορούν να φιλοξενήσουν τις αντίστοιχες ροές εξόδου.

Η δεύτερη υπόθεσή μας ασχολείται με τις εκροές $f_i(x_i)$ (attempted outflows), δηλαδή τις ροές που θα εξέρχονταν από το κελί, αν υπήρχε αρκετός χώρος στο επόμενο κελί. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν συναρτήσεις $f_i \in C^0([0, a_i]; \mathfrak{R}_+)$ με $0 < f_i(x_i) < x_i$ για όλα τα $x_i \in (0, a_i]$ και μεταβλητές $s_i(t) \in [0, 1]$, $i = 2, \dots, n$, έτσι ώστε:

$$\left. \begin{array}{l} F_{i-1,out}(t) = s_i(t)f_{i-1}(x_{i-1}(t)), i = 2, \dots, n, t \geq 0 \\ \text{και} \quad F_{n,out}(t) = f_n(x_n(t)) \end{array} \right\}. \quad (1.4)$$

Οι μεταβλητές $s_i(t) \in [0, 1]$, για κάθε $i = 2, \dots, n$, υποδεικνύουν το ποσοστό της προαναφερθείσας εκροής (attempted outflow) από το κελί $(i - 1)$ που γίνεται πραγματική εκροή από το ίδιο κελί. Η συνάρτηση $f_i: [0, a_i] \rightarrow \mathfrak{R}_+$ ονομάζεται ζήτηση του θεμελιώδους διαγράμματος του i -οστού κελιού, στην εξειδικευμένη βιβλιογραφία of traffic engineering (βλέπε [19]), δηλαδή η ροή που θα εξέλθει από το κελί i αν υπάρχει αρκετός χώρος στο επόμενο κελί $i + 1$. Παρατηρούμε ότι η εξίσωση (1.4) για $F_{n,out}(t)$ ακολουθεί την υπόθεσή μας ότι όλες οι έξοδοι σε περιοχές εκτός του δικτύου μπορούν να φιλοξενήσουν τις ροές εξόδου.

Έστω $u_i > 0$ ($i = 1, \dots, n$) η εξωτερική εισροή (attempted external inflow) στο τμήμα $i \in \{1, \dots, n\}$ από την περιοχή έξω από τον αυτοκινητόδρομο.

Τυπικά, τα u_i , $i = 2, \dots, n$, αντιστοιχούν σε εξωτερικές ροές ραμπών εισόδου που μπορούν να προσδιοριστούν με μια στρατηγική ελέγχου ραμπών εισόδου αυτοκινητοδρόμων. Για το πρώτο κελί 1, υποθέτουμε για ευκολία ότι υπάρχει μόνο μία εξωτερική εισροή, η u_1 . Έστω οι μεταβλητές $w_i(t) \in [0,1]$, $i = 1, \dots, n$, που δείχνουν το ποσοστό της προαναφερθείσας εξωτερικής εισροής στο τμήμα $i \in \{1, \dots, n\}$ που γίνεται πραγματική εισροή. Τότε, παίρνουμε από την (1.2) και (1.4):

$$\left. \begin{aligned} F_{1,in}(t) &= w_1(t)u_1(t) && \text{και} \\ F_{i,in}(t) &= w_i(t)u_i(t) + s_i(t)(1 - p_{i-1})f_{i-1}(x_{i-1}(t)), \\ & && i = 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

Η επόμενη υπόθεσή μας προέρχεται από τη Godunov discretization (βλέπε [19]), η οποία απαιτεί η εισροή των οχημάτων στο κελί $i \in \{1, \dots, n\}$ σε χρόνο $t \geq 0$, συμβολίζεται με $F_{i,in}(t) \geq 0$, να μη μπορεί να υπερβαίνει τη συνάρτηση προσφοράς (supply function) του κελιού $i \in \{1, \dots, n\}$ σε χρόνο $t \geq 0$, δηλαδή:

$$F_{i,in}(t) \leq \min(q_i, c_i(a_i - x_i(t))), \quad i = 1, \dots, n, \quad t \geq 0 \quad (1.6)$$

όπου $q_i \in (0, +\infty)$ συμβολίζει τη μέγιστη ροή που μπορεί να λάβει το i -οστό κελί (ή τη χωρητικότητα ροής (capacity flow) του i -οστού κελιού) και $c_i \in (0,1]$ ($i = 1, \dots, n$) είναι η ταχύτητα συνωστισμού (congestion wave speed) του i -οστού κελιού.

Σύμφωνα με το [7], υποθέτουμε ότι όταν η συνολική ροή ζήτησης ενός κελιού είναι χαμηλότερη από την προσφορά του επόμενου κελιού, δηλαδή όταν

$$u_i(t) + (1 - p_{i-1})f_{i-1}(x_{i-1}(t)) \leq \min(q_i, c_i(a_i - x_i(t)))$$

για κάποια $i \in \{2, \dots, n\}$, τότε η ροή ζήτησης μπορεί να φιλοξενηθεί πλήρως από το επόμενο κελί και ως εκ τούτου έχουμε $s_i(t) = w_i(t) = 1$. Ομοίως όταν $u_1(t) \leq \min(q_1, c_1(a_1 - x_1(t)))$, τότε έχουμε $w_1(t) = 1$. Αντίθετα,

όταν η συνολική ροή ζήτησης ενός κελιού είναι μεγαλύτερη από την προσφορά του επόμενου κελιού, δηλαδή όταν

$$u_i(t) + (1 - p_{i-1})f_{i-1}(x_{i-1}(t)) > \min(q_i, c_i(a_i - x_i(t)))$$

για κάποια $i \in \{2, \dots, n\}$ (ή όταν $u_1(t) > \min(q_1, c_1(a_1 - x_1(t)))$), τότε η ροή ζήτησης δεν μπορεί να φιλοξενηθεί πλήρως από το επόμενο κελί και η πραγματική ροή καθορίζεται από τη συνάρτηση προσφοράς, δηλαδή έχουμε

$$F_{i,in}(t) = \min(q_i, c_i(a_i - x_i(t))) \text{ ή } F_{1,in}(t) = \min(q_1, c_1(a_1 - x_1(t))).$$

Επομένως, έχουμε:

$$F_{1,in}(t) = \min(q_1, c_1(a_1 - x_1(t)), u_1(t)), \quad t \geq 0 \quad (1.7)$$

$$s_i(t) = (1 - d_i(t)) \min\left(1, \max\left(0, \frac{\min(q_i, c_i(a_i - x_i(t))) - u_i(t)}{(1 - p_{i-1})f_{i-1}(x_{i-1}(t))}\right)\right) +$$

$$+ d_i(t) \min\left(1, \frac{\min(q_i, c_i(a_i - x_i(t)))}{(1 - p_{i-1})f_{i-1}(x_{i-1}(t))}\right), \quad i = 2, \dots, n, t \geq 0 \quad (1.8)$$

$$F_{i,in}(t) = \min(q_i, c_i(a_i - x_i(t)), u_i(t) + (1 - p_{i-1})f_{i-1}(x_{i-1}(t))),$$

$$i = 2, \dots, n, t \geq 0 \quad (1.9)$$

όπου

$$d_i(t) \in [0,1], \quad i = 2, \dots, n, \quad t \geq 0 \quad (1.10)$$

είναι χρονικά μεταβαλλόμενοι παράμετροι. Σημειώνουμε ότι, αν η προσφορά είναι μεγαλύτερη από τη συνολική ζήτηση, τότε η (1.8) δίνει $s_i = 1$, ανεξάρτητα από την τιμή των d_i , δεδομένου ότι η συνολική ροή ζήτησης μπορεί να φιλοξενηθεί από το επόμενο κελί. Έτσι, η παράμετρος d_i καθορίζει τις σχετικές προτεραιότητες εισροής, όταν επικρατεί η προσφορά του επόμενου κελιού. Συγκεκριμένα, όταν $d_i(t) = 0$, τότε η εισροή της ράμπας εισόδου έχει απόλυτη προτεραιότητα σε σχέση με την εσωτερική εισροή. Από την άλλη πλευρά, όταν $d_i(t) = 1$, τότε η εσωτερική εισροή έχει απόλυτη προτεραιότητα σε σχέση με την εισροή της ράμπας εισόδου. Οι ενδιάμεσες τιμές των d_i αντικατοπτρίζουν ενδιάμεσες περιπτώσεις προτεραιότητας. Οι παράμετροι $d_i(t) \in [0,1]$ αντιμετωπίζονται ως άγνωστες παράμετροι (διαταραχές). Σημειώνουμε ότι με την εισαγωγή των παραμέτρων $d_i(t) \in [0,1]$ (και επιτρέποντάς τους να είναι χρονικά μεταβαλλόμενοι), έχουμε λάβει υπόψη όλες τις πιθανές περιπτώσεις για τις σχετικές προτεραιότητες των εισροών (και επίσης επιτρέπουμε οι κανόνες προτεραιότητας να είναι χρονικά μεταβαλλόμενοι). Για μοντέλα αυτοκινητοδρόμων με ειδικούς κανόνες προτεραιότητας, που είναι ειδικές περιπτώσεις της γενικής μας προσέγγισης, βλέπε [5],[17],[18],[21],[22].

Όλα τα παραπάνω απεικονίζονται στο Σχήμα 1. Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (1.1), (1.2), (1.3), (1.4), (1.7) και (1.9), παίρνουμε το ακόλουθο δυναμικό σύστημα διακριτού χρόνου:

$$x_1^+ = x_1 - s_2 f_1(x_1) + \min(q_1, c_1(a_1 - x_1), u_1) = x_1 - s_2 f_1(x_1) + w_1 u_1 \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} x_i^+ &= x_i - s_{i+1} f_i(x_i) + \min(q_i, c_i(a_i - x_i), u_i + (1 - p_{i-1}) f_{i-1}(x_{i-1})) = \\ &= x_i - s_{i+1} f_i(x_i) + w_i u_i + s_i (1 - p_{i-1}) f_{i-1}(x_{i-1}), \quad \text{για } i = 2, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} x_n^+ &= x_n - f_n(x_n) + \min(q_n, c_n(a_n - x_n), u_n + (1 - p_{n-1}) f_{n-1}(x_{n-1})) = \\ &= x_n - f_n(x_n) + w_n u_n + s_n (1 - p_{n-1}) f_{n-1}(x_{n-1}) \end{aligned} \quad (1.13)$$

όπου τα $s_i \in [0,1]$, $i = 2, \dots, n$ δίνονται από την (1.8). Οι τιμές των $w_i \in [0,1]$, $i = 1, \dots, n$, μπορούν ομοίως να προέρχονται από την (1.5) όταν $u_i > 0$, αλλά δεν είναι απαραίτητες σε ό, τι ακολουθεί.

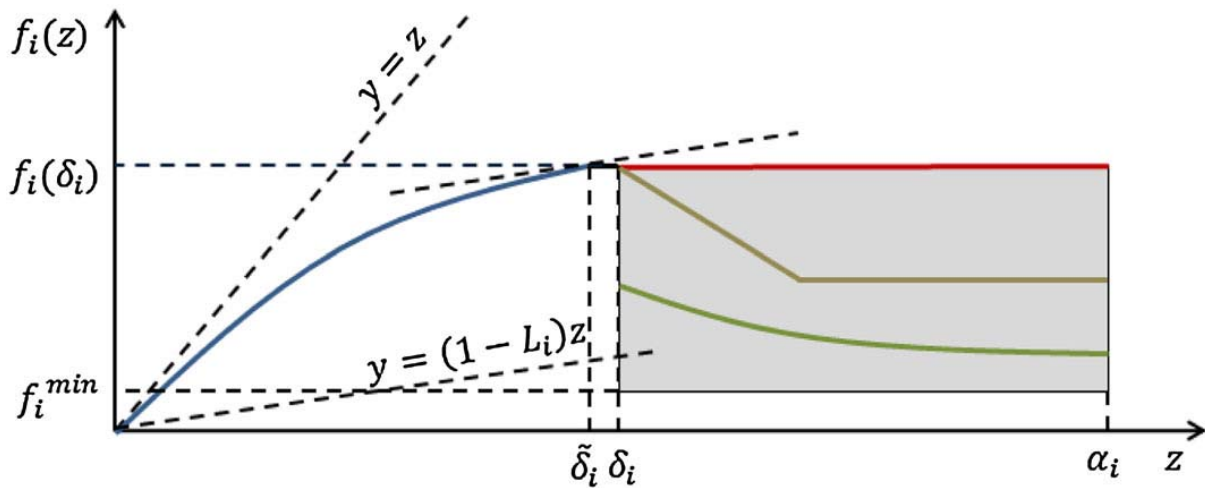
Ορίζουμε $S = (0, a_1] \times (0, a_2] \times \dots \times (0, a_n]$. Εφόσον οι συναρτήσεις $f_i: [0, a_i] \rightarrow \mathfrak{R}_+$ ικανοποιούν την $0 < f_i(x_i) < x_i$ για όλα τα $x_i \in (0, a_i]$, έπεται ότι οι (1.11), (1.12), (1.13) είναι ένα αβέβαιο σύστημα ελέγχου στο S (δηλαδή, $x = (x_1, \dots, x_n)' \in S$) με εισόδους $u = (u_1, \dots, u_n)' \in (0, +\infty) \times \mathfrak{R}_+^{n-1}$ και διαταραχές $d = (d_2, \dots, d_n) \in [0,1]^{n-1}$. Τονίζουμε και πάλι ότι η αβεβαιότητα $d \in [0,1]^{n-1}$ εμφανίζεται στις εξισώσεις (1.11), (1.12) και (1.13) μόνο όταν υπερिσχύει η συνάρτηση προσφοράς, δηλαδή μόνο όταν:

$$u_i(t) + (1 - p_{i-1})f_{i-1}(x_{i-1}(t)) > \min(q_i, c_i(a_i - x_i(t)))$$

για κάποια $i \in \{2, \dots, n\}$.

Για τις συναρτήσεις $f_i: [0, a_i] \rightarrow \mathfrak{R}_+$ ($i = 1, \dots, n$) κάνουμε την ακόλουθη υπόθεση:

(H) Η συνάρτηση $f_i: [0, a_i] \rightarrow \mathfrak{R}_+$ ικανοποιεί την $0 < f_i(z) < z$ για όλα τα $z \in (0, a_i]$. Υπάρχουν $\delta_i \in (0, a_i]$ τέτοια ώστε η f_i να είναι συνεχής και αύξουσα στο $[0, \delta_i]$. Επιπλέον, υπάρχουν σταθερές $L_i \in (0,1)$, $\tilde{\delta}_i \in (0, \delta_i]$ τέτοιες ώστε η $f_i: [0, a_i] \rightarrow \mathfrak{R}_+$ να είναι C^1 στο $(0, \delta_i)$, $1 - L_i \leq f_i'(z)$ για όλα τα $z \in (0, \tilde{\delta}_i)$, $f_i'(z) \leq 1$ για όλα τα $z \in (0, \delta_i)$. Τέλος, υπάρχει μία θετική σταθερά $f_i^{min} > 0$ τέτοια ώστε $f_i(\delta_i) \geq f_i(z) \geq f_i^{min}$ για όλα τα $z \in [\delta_i, a_i]$.



Σχήμα 2: Σχηματική απεικόνιση της υπόθεσης **(H)**.

Η υπόθεση **(H)** περιλαμβάνει τις βασικές ιδιότητες της λεγόμενης συνάρτησης ζήτησης [19] στην Godunov discretization, όπου δ_i είναι η κρίσιμη πυκνότητα (critical density), στην οποία η $f_i(x_i)$ επιτυγχάνει τη μέγιστη τιμή. Οι επιπτώσεις της υπόθεσης **(H)** στη συνάρτηση ζήτησης απεικονίζονται στο Σχήμα 2. Με άλλα λόγια, το θεμελιώδες διάγραμμα (FD) του κελιού i αποτελείται από την αύξουσα συνάρτηση $f_i(x_i)$ για $x_i \in [0, \delta_i]$ και από τη φθίνουσα συνάρτηση της προσφοράς $\min(q_i, c_i(a_i - x_i))$ για $x_i \in [\delta_i, a_i]$. Σημειώστε, ωστόσο, ότι η υπόθεση **(H)** συμπεριλαμβάνει τη δυνατότητα της μειωμένης ροής ζήτησης (reduced demand flow) για κρίσιμες πυκνότητες (δηλαδή, όταν $x_i(t) \geq \delta_i$), επειδή η $f_i(x_i)$ επιτρέπεται να είναι οποιαδήποτε αυθαίρετη συνάρτηση (π.χ. ασυνεχής, φθίνουσα ή ακόμη και αύξουσα) που λαμβάνει όμως τιμές μέσα στα όρια που αναφέρονται στην **(H)** (αντιστοιχεί στην γκρίζα ζώνη στο Σχήμα 2), για $x_i \in [\delta_i, a_i]$. Αυτό θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για να αντικατοπτρίσει το capacity drop phenomenon, όπως αντιμετωπίζεται σε κάποιες πρόσφατες εργασίες [35], [36]. Μέσα στην γκρίζα ζώνη των κρίσιμων πυκνοτήτων (Σχήμα 2), παρουσιάζονται τρία παραδείγματα συναρτήσεων ζήτησης που ικανοποιούν την υπόθεση **(H)**. Συμπερασματικά, το μοντέλο (1.11)-(1.13) είναι μια γενικευμένη εκδοχή της γνωστής first-order discrete Godunov approximation to the kinematic-wave partial differential equation of the LWR-model (βλέπε [23], [28]) με μη γραμμικό [19] ή τμηματικά γραμμικό (CTM-model [6], [7]) θεμελιώδες διάγραμμα. Ωστόσο, στο πλαίσιο αυτό μπορεί επίσης να φιλοξενηθούν οι

τελευταίες τροποποιήσεις του LWR-model όπως στο [20], [35], [36] που αντικατοπτρίζουν το λεγόμενο “capacity drop phenomenon”.

Παρατηρήστε ότι οι τμηματικά λείες επιλογές $f_i(z) = q_i \delta_i^{-1} z$ για $z \in [0, \delta_i]$ και $f_i(z) = q_i$ για $z \in (\delta_i, a_i]$ ($i = 1, \dots, n$) με $a_i \geq \delta_i + c_i^{-1} q_i$ μας επιτρέπουν να λάβουμε το πρότυπο CTM με:

- i) τριγωνικό -FD (θεμελιώδες διάγραμμα) (εάν $a_i = \delta_i + c_i^{-1} q_i$) και
- ii) τραπεζοειδές -FD (εάν $a_i > \delta_i + c_i^{-1} q_i$).

Στην δεύτερη περίπτωση, η υπόθεση **(H)** ισχύει με την αυθαίρετη $\tilde{\delta}_i \in (0, \delta_i]$.

Ορίζουμε το διανυσματικό πεδίο $\tilde{F}: [0,1]^{n-1} \times S \times (0, +\infty) \times \mathfrak{R}_+^{n-1} \rightarrow S$ για όλα τα $x \in S := (0, a_1] \times \dots \times (0, a_n]$, $d = (d_2, \dots, d_n) \in D = [0,1]^{n-1}$ και $u = (u_1, \dots, u_n) \in (0, +\infty) \times \mathfrak{R}_+^{n-1}$:

$$\tilde{F}(d, x, u) = (\tilde{F}_1(d, x, u), \dots, \tilde{F}_n(d, x, u))' \in \mathfrak{R}^n$$

$$\text{με } \tilde{F}_1(d, x, u) := x_1 - s_2 f_1(x_1) + \min(q_1, c_1(a_1 - x_1), u_1),$$

$$\tilde{F}_i(d, x, u) = x_i - s_{i+1} f_i(x_i) + \min(q_i, c_i(a_i - x_i), u_i + (1 - p_{i-1}) f_{i-1}(x_{i-1}))$$

για $i = 2, \dots, n - 1$,

$$\begin{aligned} \tilde{F}_n(d, x, u) = x_n - f_n(x_n) + \min(q_n, c_n(a_n - x_n), u_n + \\ +(1 - p_{n-1}) f_{n-1}(x_{n-1})) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} s_i = (1 - d_i) \min\left(1, \max\left(0, \frac{\min(q_i, c_i(a_i - x_i)) - u_i}{(1 - p_{i-1}) f_{i-1}(x_{i-1})}\right)\right) + \\ + d_i \min\left(1, \frac{\min(q_i, c_i(a_i - x_i))}{(1 - p_{i-1}) f_{i-1}(x_{i-1})}\right), \quad \text{για } i = 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Παρατηρούμε ότι, χρησιμοποιώντας την σχέση (1.14), το σύστημα ελέγχου (1.11), (1.12), (1.13) μπορεί να γραφτεί στην παρακάτω διανυσματική μορφή:

$$\begin{aligned}x^+ &= \tilde{F}(d, x, u) \\x \in S, d \in D, u &\in (0, +\infty) \times \mathfrak{R}_+^{n-1}\end{aligned}\tag{1.15}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΓΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

2.1 ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ

Η ευστάθεια (stability) είναι μια από τις πιο σημαντικές ιδιότητες ενός συστήματος και σχετίζεται με τη συμπεριφορά του όταν αυτό υφίσταται ανεπιθύμητες διαταραχές. Υπάρχουν πολλών ειδών διαταραχές, αλλά ξεχωρίζουν δύο μεγάλες κατηγορίες. Την πρώτη κατηγορία διαταραχών αποτελούν εκείνες που επιδρούν στην ίδια την δομή του συστήματος ή που μεταβάλλουν τις τιμές των παραμέτρων του, έχοντας και στις δύο περιπτώσεις, σαν αποτέλεσμα να αλλοιώνουν τη σχέση εισόδου-εξόδου του συστήματος. Η δεύτερη κατηγορία διαταραχών αποτελείται από εκείνες οι οποίες μπορούν να εκφραστούν υπό την μορφή σήματος, το οποίο επιδρά στην είσοδο του συστήματος, έχοντας σαν αποτέλεσμα να αλλοιώνεται η προβλεπόμενη έξοδος χωρίς ωστόσο να μεταβάλλεται η σχέση εισόδου-εξόδου του συστήματος.

Η ευστάθεια αποτελεί θεμελιώδες κεφάλαιο στην ανάλυση και το σχεδιασμό συστημάτων ελέγχου. Για να μπορέσουμε να χαρακτηρίσουμε με σαφήνεια τα περίπλοκα θέματα συμπεριφοράς ευστάθειας που παρουσιάζονται στα μη γραμμικά συστήματα, πρέπει να ορίσουμε έννοιες όπως ευστάθεια κατά Lyapunov, ασυμπτωτική ευστάθεια, εκθετική ευστάθεια και ολική ασυμπτωτική ή εκθετική ευστάθεια.

Έστω ότι $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $D \subseteq \mathbb{R}^l$ είναι μη κενά σύνολα [34]. Θεωρούμε το αβέβαιο, διακριτού χρόνου, δυναμικό σύστημα

$$x^+ = F(d, x), \quad x \in S, d \in D, \quad (2.1)$$

όπου $F: D \times S \rightarrow S$ είναι μια συνάρτηση. Η μεταβλητή $x \in S$ υποδηλώνει την κατάσταση του (2.1), ενώ εδώ (και στην υπόλοιπη εργασία) το x^+ υποδηλώνει την τιμή της κατάστασης του (2.1) την επόμενη χρονική στιγμή, που περιγράφεται με την αναδρομική σχέση $x(t+1) = F(d(t), x(t))$. Έστω $x^* \in S$ ένα σημείο ισορροπίας της (2.1), δηλαδή το $x^* \in S$ ικανοποιεί την $x^* = F(d, x^*)$ για όλα τα $d \in D$. Παρατηρούμε ότι η απαίτηση $x^* = F(d, x^*)$ για όλα τα $d \in D$ σημαίνει ότι το $d \in D$ υποδηλώνει μια διαταραχή που δεν μετατοπίζει το σημείο ισορροπίας του συστήματος (vanishing perturbation). Σε γενικές γραμμές, η απόφαση για το ποιες μεταβλητές είναι vanishing perturbation ή non-vanishing perturbation εξαρτάται από το σημείο ισορροπίας που έχουμε στο μυαλό μας. Για παράδειγμα, μια διαταραχή μπορεί να αλλάζει τη θέση άλλων ισορροπιών αλλά όχι τη θέση του σημείου ισορροπίας που σκοπεύουμε να μελετήσουμε εμείς.

Ορισμός 2.1: Το σημείο ισορροπίας $x = 0$ ονομάζεται *ευσταθές* για το σύστημα (2.1) εάν για οποιοδήποτε $R > 0$, υπάρχει $r > 0$, τέτοιο ώστε εάν $\|x(0)\| < r$, τότε υπάρχει $\|x(t)\| < R$ για κάθε $t > 0$. Σε αντίθετη περίπτωση το σημείο ισορροπίας είναι *ασταθές* [11].

Στην ουσία, η έννοια της ευστάθειας και της ασυστάθειας κατά Lyapunov, δηλώνει ότι η τροχιά του συστήματος παραμένει αρκετά κοντά στο μηδενικό σημείο ισορροπίας εάν ξεκινήσει αρκετά κοντά σε αυτό. Σε πολλά προβλήματα όμως δεν μας είναι αρκετό αυτό, καθώς δεν επιθυμούμε απλώς να παραμείνει κοντά του αλλά να επιστρέψει πλήρως στην αρχική θέση. Η απαίτηση αυτή περιγράφεται από τον ακόλουθο ορισμό της ασυμπτωτικής ευστάθειας.

Ορισμός 2.2: Το σημείο ισορροπίας $x = 0$ είναι *ασυμπτωτικά ευσταθές* για το σύστημα (2.1) εάν είναι ευσταθές και επιπλέον υπάρχει κάποιο $r > 0$ τέτοιο ώστε εάν $\|x(0)\| < r$, τότε ισχύει $x(t) \rightarrow 0$, καθώς $t \rightarrow \infty$.

Ωστόσο, πολλές φορές θέλουμε την εκτίμηση της ταχύτητας με την οποία η τροχιά του συστήματος πλησιάζει το σημείο ισορροπίας. Για το σκοπό αυτό, χρησιμοποιούμε την έννοια της εκθετικής ευστάθειας.

Ορισμός 2.3: Το σημείο ισορροπίας $x = 0$ είναι *εκθετικά ευσταθές* για το σύστημα (2.1) εάν υπάρχουν δύο αυστηρά θετικοί αριθμοί M και σ τέτοιοι ώστε:

$$\forall t > 0, \quad \|x(t)\| < M\|x(0)\|e^{-\sigma t}$$

σε κάποια περιοχή B_r (περιοχή έλξης), γύρω από την αρχή.

Ορισμός 2.4: Αν η ασυμπτωτική (ή εκθετική) ευστάθεια ισχύει για κάθε αρχική κατάσταση, το σημείο ισορροπίας λέγεται ότι είναι *ολικά ασυμπτωτικά (ή εκθετικά) ευσταθές*.

Ορισμός 2.5: Λέμε ότι το $x^* \in S$ είναι *Εύρωστα Ολικά Εκθετικά Ευσταθές* (Robustly Globally Exponentially Stable - RGES) για το σύστημα (2.1), εάν υπάρχουν σταθερές $M, \sigma > 0$ τέτοιες ώστε για κάθε $x_0 \in S$ και για κάθε ακολουθία $\{d(t) \in D\}_{t=0}^{\infty}$ η λύση $x(t)$ του (2.1) με αρχική συνθήκη $x(0) = x_0$ που αντιστοιχεί στην είσοδο $\{d(t) \in D\}_{t=0}^{\infty}$ (δηλαδή, η λύση που ικανοποιεί την $x(t+1) = F(d(t), x(t))$ και $x(0) = x_0$) ικανοποιεί την ανισότητα $|x(t) - x^*| \leq M \exp(-\sigma t) |x_0 - x^*|$ για κάθε $t \geq 0$.

Ορισμός 2.6: Μια συνάρτηση $V: S \rightarrow \mathbb{R}_+$ για την οποία υπάρχουν σταθερές $K_2 \geq K_1 > 0$, $p > 0$ και $\lambda \in [0, 1)$ τέτοιες ώστε να ισχύουν οι ανισότητες $K_1 |x - x^*|^p \leq V(x) \leq K_2 |x - x^*|^p$ και $V(F(d, x)) \leq \lambda V(x)$ για κάθε $(d, x) \in D \times S$, ονομάζεται *συνάρτηση Lyapunov* με εκθέτη $p > 0$ για το (2.1).

Θεώρημα 2.7: Θεωρούμε το μη γραμμικό, διακριτού χρόνου, δυναμικό σύστημα (βλέπε [11] κεφ. 13)

$$x(t+1) = F(x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad t \in \bar{\mathbb{Z}}_+, \quad (2.2)$$

όπου $x(t) \in S \subseteq \mathbb{R}^n$, $t \in \bar{\mathbb{Z}}_+$, S είναι ένα ανοικτό σύνολο, $0 \in S$, $F: S \rightarrow S$ είναι συνεχής στο S και $F(0) = 0$. Αν υπάρχουν σταθερές $K_1, K_2 > 0$, $\rho > 1$ και $p \geq 1$, τέτοιες ώστε η συνεχής συνάρτηση $V: S \rightarrow \mathbb{R}$ να ικανοποιεί τις

$$K_1 \|x\|^p \leq V(x) \leq K_2 \|x\|^p, \quad x \in S \quad (2.3)$$

$$\rho V(F(x)) \leq V(x), \quad x \in S \quad (2.4)$$

τότε η μηδενική λύση $x(t) \equiv 0$ του (2.2) είναι εκθετικά ευσταθής.

Απόδειξη Θεωρήματος 2.7: Αρχικά γράφουμε τη σχέση (2.4) στην ισοδύναμη μορφή

$$V(F(x)) \leq \lambda V(x), \quad \lambda \in [0,1), \quad x \in S \quad (2.5)$$

όπου $\lambda = \frac{1}{\rho}$.

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της επαγωγής για να αποδείξουμε τη σχέση

$$V(x(t)) \leq \lambda^t V(x(0)), \quad t \geq 0 \quad (2.6)$$

η οποία συνεπάγεται από τη (2.5).

Για $t = 0$: $V(x(0)) \leq V(x(0))$ ισχύει.

Έστω ότι ισχύει η (2.6) για κάθε $t \geq 0$, θα δείξουμε ότι ισχύει για κάθε $t + 1$.

Αντικαθιστώ στη (2.5) όπου $x = x(t)$ και παίρνω

$$V(F(x(t))) \leq \lambda V(x(t)) \xrightarrow{\text{(λόγω της (2.2))}}$$

$$V(x(t+1)) \leq \lambda V(x(t)) \Rightarrow$$

$$V(x(t+1)) \leq \lambda^{t+1} V(x(0)).$$

Για το τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε τη (2.6) την οποία πολλαπλασιάσαμε με λ και πήραμε

$$\lambda V(x(t)) \leq \lambda^{t+1} V(x(0)).$$

Έχοντας αποδείξει τη (2.6) και γνωρίζοντας τη (2.3) λαμβάνουμε από την τελευταία για $x = x(0)$

$$V(x(0)) \leq K_2 \|x(0)\|^p$$

και για $x = x(t)$

$$K_1 \|x(t)\|^p \leq V(x(t)).$$

Συνδυάζοντας τις δύο αυτές σχέσεις και με βάση τη (2.6), παίρνουμε

$$K_1 \|x(t)\|^p \leq \lambda^t V(x(0)) \Rightarrow$$

$$K_1 \|x(t)\|^p \leq K_2 \|x(0)\|^p \lambda^t, t \geq 0 \Rightarrow \quad (2.7)$$

$$\|x(t)\| \leq \left(\frac{K_2}{K_1}\right)^{1/p} \|x(0)\| \lambda^{t/p}. \quad (2.8)$$

Η (2.8) μας δίνει τη σχέση

$$\|x(t)\| \leq M \|x(0)\| \exp(-\sigma t), \text{ όπου } M = \left(\frac{K_2}{K_1}\right)^{1/p} \text{ και } \sigma = -\frac{\ln(\lambda)}{p}.$$

Οπότε αποδείξαμε την εκθετική ευστάθεια. ■

Πρόταση 2.8: Εάν υπάρχει μία συνάρτηση Lyapunov με εκθέτη $p > 0$ για το (2.1), τότε το $x^* \in S$ είναι RGES (Εύρωστα Ολικά Εκθετικά Ευσταθές) [34].

Πράγματι, εάν ο χώρος κατάστασης ήταν \mathbb{R}^n και όχι $S \subseteq \mathbb{R}^n$ και αν δεν υπήρχαν διαταραχές, τότε θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε το προηγούμενο θεώρημα (Θεώρημα 13.2 στις σελίδες 765-766 του [11]). Ωστόσο, επειδή το αβέβαιο δυναμικό σύστημα (2.1) ορίζεται στο $S \subseteq \mathbb{R}^n$ με διαταραχές $d \in D$, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το συγκεκριμένο θεώρημα.

Απόδειξη Πρότασης 2.8: Το σύστημα (2.1) γράφεται στην ισοδύναμη μορφή του

$$x(t+1) = F(d(t), x(t)), x \in S, d \in D, t \geq 0 \quad (2.9)$$

Στη συνέχεια, θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγικά την ανισότητα

$$V(F(d, x)) \leq \lambda V(x) \quad (2.10)$$

και θα λάβουμε την εκτίμηση

$$V(x(t)) \leq \lambda^t V(x(0)), t \geq 0 \quad (2.11)$$

για κάθε λύση του (2.1), για κάθε ακολουθία $\{d(t) \in [0,1]^{n-1}\}_{t=0}^{\infty}$ και για κάθε ακέραιο $t \geq 0$.

Κάνουμε επαγωγή στη (2.11).

Για $t = 0$: $V(x(0)) \leq V(x(0))$ ισχύει.

Έστω ότι ισχύει η (2.11) για κάθε $t \geq 0$, θα δείξουμε ότι ισχύει για κάθε $t + 1$.

Αντικαθιστώ στη (2.10) όπου $d = d(t)$, $x = x(t)$ και παίρνω

$$V(F(d(t), x(t))) \leq \lambda V(x(t)) \xrightarrow{\text{(λόγω της (2.9))}}$$

$$V(x(t+1)) \leq \lambda V(x(t)) \Rightarrow$$

$$V(x(t+1)) \leq \lambda^{t+1} V(x(0)).$$

Για το τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε τη (2.11) την οποία πολλαπλασιάσαμε με λ και πήραμε

$$\lambda V(x(t)) \leq \lambda^{t+1} V(x(0)).$$

Η ζητούμενη εκθετική εκτίμηση της λύσης λαμβάνεται με συνδυασμό της εκτίμησης (2.11) και της ανισότητας

$$K_1 |x - x^*|^p \leq V(x) \leq K_2 |x - x^*|^p. \quad (2.12)$$

Έχοντας αποδείξει τη (2.11) και γνωρίζοντας τη (2.12) λαμβάνουμε από την τελευταία για $x = x(0)$

$$V(x(0)) \leq K_2 |x(0) - x^*|^p$$

και για $x = x(t)$

$$K_1 |x(t) - x^*|^p \leq V(x(t)).$$

Συνδυάζοντας τις δύο αυτές σχέσεις και με βάση τη (2.11), παίρνουμε

$$K_1 |x(t) - x^*|^p \leq \lambda^t V(x(0)) \Rightarrow$$

$$K_1 |x(t) - x^*|^p \leq K_2 |x(0) - x^*|^p \lambda^t, \quad t \geq 0 \Rightarrow \quad (2.13)$$

$$|x(t) - x^*| \leq \left(\frac{K_2}{K_1}\right)^{1/p} |x(0) - x^*| \lambda^{t/p}. \quad (2.14)$$

Στο σημείο αυτό διακρίνουμε περιπτώσεις για το $\lambda \in [0,1)$:

i) $\lambda = 0$

Τότε $x(t) = 0$ για $t \geq 1$ και άρα η σχέση
 $|x(t) - x^*| \leq |x(0) - x^*| * \exp(-\sigma t)$ ισχύει για κάθε $\sigma > 0$.

ii) $\lambda > 0$

Τότε $\lambda = \exp(-\sigma)$ για κάποιο $\sigma > 0$ και αντικαθιστώντας στη (2.14)
 παίρνουμε τη σχέση

$$|x(t) - x^*| \leq M * |x(0) - x^*| * \exp(-rt), \quad \text{όπου} \quad M = \left(\frac{K_2}{K_1}\right)^{1/p} \quad \text{και}$$

$$r = \frac{\sigma}{p} = -\frac{\ln(\lambda)}{p}.$$

Οπότε αποδείξαμε ότι το $x^* \in S$ είναι RGES. ■

2.2 ΘΕΩΡΙΑ ΕΛΕΓΧΟΥ

Η *Θεωρία Ελέγχου* είναι το πεδίο των μαθηματικών που ασχολείται με τις βασικές αρχές που διέπουν την ανάλυση και το σχεδιασμό συστημάτων ελέγχου [33].

Σύστημα ονομάζουμε γενικά ένα σύνολο στοιχείων κατάλληλα συνδεδεμένων μεταξύ τους για να επιτελέσουν κάποιο έργο. Η συμπεριφορά του συστήματος περιγράφεται από τις ακόλουθες μεταβλητές:

- Είσοδοι (ελέγχου)
- Έξοδοι
- Διαταραχές (μη ελεγχόμενες εισοδοι)

Είσοδο ονομάζουμε τη διέγερση, εντολή ή αιτία η οποία εφαρμόζεται στο σύστημα ώστε να επιτελεστεί το ζητούμενο έργο και *έξοδος* είναι το πραγματικό αποτέλεσμα ή απόκριση η οποία λαμβάνεται από την εφαρμογή της εισόδου στο σύστημα. *Διαταραχές* ονομάζουμε τις μεταβολές του περιβάλλοντος ή του υπό έλεγχο συστήματος ή άλλες αιτίες που έχουν ως αποτέλεσμα η έξοδος του συστήματος να αποκλίνει από την επιθυμητή συμπεριφορά.

Ο έλεγχος ενός αντικείμενου σημαίνει να επηρεάσουμε τη συμπεριφορά του, ώστε να επιτευχθεί ένας επιθυμητός στόχος. Γενικά, υπάρχουν δύο κύριες γραμμές που εργαζόμαστε στη θεωρία ελέγχου, που μερικές φορές φαίνεται να κινούνται σε πολύ διαφορετικές κατευθύνσεις αλλά στην πραγματικότητα είναι συμπληρωματικές. Η μία βασίζεται στην ιδέα ότι ένα καλό μοντέλο που πρόκειται να ελεγχθεί είναι διαθέσιμο και το οποίο με κάποιο τρόπο θέλει να βελτιστοποιήσει τη συμπεριφορά του. Η άλλη κύρια γραμμή βασίζεται στους περιορισμούς που επιβάλλονται από την αβεβαιότητα σχετικά με το μοντέλο ή το περιβάλλον στο οποίο λειτουργεί το αντικείμενο. Το βασικό εργαλείο εδώ είναι η χρήση της ανάδρασης, προκειμένου να διορθωθούν οι αποκλίσεις από την επιθυμητή συμπεριφορά.

Ανάδραση ή ανατροφοδότηση (feedback) ονομάζουμε τη διαδικασία διοχέτευσης πληροφορίας όσον αφορά την τρέχουσα έξοδο του συστήματος στην είσοδό του.

Η δυναμική συμπεριφορά ενός συστήματος είναι δυνατό να διερευνηθεί με τη βοήθεια ενός μαθηματικού μοντέλου (προτύπου) που συνήθως αποτελείται από ένα σύστημα διαφορικών και αλγεβρικών εξισώσεων. Η αναλυτική ή αριθμητική επίλυση του δυναμικού μοντέλου ενός συστήματος επιτρέπει τη

μελέτη της μεταβατικής συμπεριφοράς του συστήματος (transient behaviour), δηλαδή τη χρονική μετάβασή του από μία αρχική κατάσταση σε μία νέα τελική κατάσταση.

Τα συστήματα ελέγχου ταξινομούνται σε δύο κατηγορίες:

- Συστήματα ελέγχου ανοικτού βρόχου
- Συστήματα ελέγχου κλειστού βρόχου

Ένα σύστημα ανοικτού βρόχου ρυθμίζει την απόκριση που προκύπτει χωρίς τη χρήση της ανάδρασης. Αντίθετα ένα σύστημα κλειστού βρόχου χρησιμοποιεί ανάδραση μεταβλητής και σύγκρισή της με την επιθυμητή, με σκοπό την επίτευξη της επιθυμητής απόκρισης.

Ορισμός 2.7: Ένα σύστημα $\Sigma = (T, X, U, \Phi)$ αποτελείται από:

- Ένα σύνολο χρόνου T
- Ένα μη κενό σύνολο X που ονομάζεται χώρος καταστάσεων (state space) του Σ
- Ένα μη κενό σύνολο U που ονομάζεται χώρος ελέγχου-τιμής (control-value space) ή εισόδου-τιμής (input-value space) του Σ και
- Μία συνάρτηση $\Phi: D_\Phi \rightarrow X$ που ονομάζεται συνάρτηση μετάβασης (transition map) του Σ , η οποία ορίζεται σε ένα υποσύνολο D_Φ του $\{(\tau, \sigma, x, \omega) | \sigma, \tau \in T, \sigma \leq \tau, x \in X, \omega \in U^{[\sigma, \tau]}\}$

έτσι ώστε να ισχύουν κάποιες ιδιότητες που μπορούμε να δούμε αναλυτικά στο [33].

Ορισμός 2.8: Ένα σύστημα με εκροές (outputs) δίνεται από ένα σύστημα Σ μαζί με

- Ένα σύνολο Y που ονομάζεται χώρος μέτρησης-τιμών (measurement-value space) ή εξόδου-τιμών (output-value space) και
- Μία συνάρτηση $h: T \times X \rightarrow Y$ που ονομάζεται συνάρτηση ανάγνωσης (readout map) ή συνάρτηση μέτρησης (measurement map).

Τα στοιχεία του X ονομάζονται καταστάσεις (states), τα στοιχεία του U οι τιμές ελέγχου ή τιμές εισόδου και τα στοιχεία του Y είναι οι τιμές εξόδου ή τιμές μέτρησης. Οι συναρτήσεις $\omega \in U^{[\sigma, \tau]}$ ονομάζονται έλεγχοι ή είσοδοι. Η κατάσταση x συνοψίζει όλη τη πληροφορία που χρειαζόμαστε για να γνωρίζουμε τη μελλοντική εξέλιξη του συστήματος.

Ορισμός 2.9: Το σύστημα Σ δεν έχει ελέγχους (no controls) εάν το U είναι ένα σύνολο με ένα στοιχείο.

Τότε λέμε ότι το Σ είναι ένα κλασικό δυναμικό σύστημα. Συχνά χρησιμοποιείται η ορολογία αυτόνομο (autonomous) αλλά έχει το μειονέκτημα ότι εμφανίζεται στη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων να αναφέρεται σε αυτό που ονομάζουμε παρακάτω χρονικά-αναλλοίωτο (time-invariance). Για συστήματα χωρίς ελέγχους, για κάθε σ, τ υπάρχει μόνο ένα πιθανό στοιχείο στο $U^{[\sigma, \tau]}$, οπότε το $\Phi(\tau, \sigma, x, \omega)$ είναι ανεξάρτητο από τη τελευταία συντεταγμένη και έτσι μπορούμε να γράψουμε απλά $\Phi(\tau, \sigma, x)$. Η πιο σημαντική γενική υποκατηγορία των συστημάτων είναι αυτή των χρονικά-αναλλοίωτων (time-invariant systems), η δομή των οποίων είναι ανεξάρτητη του χρόνου, δηλαδή $\Phi(\tau, \sigma, x, \omega)$ εξαρτάται μόνο από τα $\tau - \sigma, x, \omega$ (για περισσότερα βλέπε [33]).

Τα φυσικά συστήματα συχνά δεν προσδιορίζονται από την περιγραφή του χώρου-καταστάσεων τους αλλά μάλλον μέσω της συμπεριφοράς εισόδου/εξόδου (input/output behavior), δηλαδή η επίδραση που έχει η είσοδος στην έξοδο που παρατηρούμε. Τεχνικά υπάρχουν τουλάχιστον δύο πιθανοί τρόποι προσδιορισμού της συμπεριφοράς. Στον πρώτο, δίνουμε έναν κανόνα που μας λέει ποια θα είναι η τιμή της εξόδου που θα προκύψει αμέσως μετά την εφαρμογή της εισόδου. Στο δεύτερο, προσδιορίζουμε το σύνολο των εξόδων σαν μία συνάρτηση του χρόνου, που δημιουργείται από αυτή την είσοδο που εφαρμόσαμε. Στην εργασία μας, θα ασχοληθούμε με συστήματα διακριτού χρόνου στα οποία ο χρόνος θεωρείται ως το σύνολο των ακεραίων.

Ορισμός 2.10: Ένα σύστημα διακριτού χρόνου (discrete-time system) είναι αυτό για το οποίο $T = \mathbb{Z}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΚΥΡΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟΔΡΟΜΩΝ

3.1 ΚΥΡΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑ

Μελετάμε το μοντέλο αυτοκινητοδρόμου (1.15) υπό την υπόθεση **(H)** [34]. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $u_1^* > 0$, $u_i^* \geq 0$ ($i = 2, \dots, n$) και ένα διάνυσμα $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \in (0, \tilde{\delta}_1) \times \dots \times (0, \tilde{\delta}_n)$ με

$$f_1(x_1^*) = u_1^*$$

$$f_i(x_i^*) = u_i^* + (1 - p_{i-1})f_{i-1}(x_{i-1}^*) = u_i^* + \sum_{j=1}^{i-1} \left(\prod_{k=j}^{i-1} (1 - p_k) \right) u_j^*$$

$$(i = 2, \dots, n) \tag{3.1}$$

και

$$u_1^* < \min(q_1, c_1(a_1 - x_1^*))$$

$$u_i^* + (1 - p_{i-1})f_{i-1}(x_{i-1}^*) < \min(q_i, c_i(a_i - x_i^*)) \quad (i = 2, \dots, n). \tag{3.2}$$

Αυτό είναι το μη κορεσμένο σημείο ισορροπίας του μοντέλου αυτοκινητοδρόμων (1.15). Παρατηρήστε ότι η υπόθεση **(H)** εγγυάται ότι υπάρχει πάντα ένα μη κορεσμένο σημείο ισορροπίας για το μοντέλο αυτοκινητοδρόμων (1.15), όταν $u_1^* > 0$ και $u_i^* \geq 0$ ($i = 2, \dots, n$) είναι επαρκώς μικρά. Το μη κορεσμένο σημείο ισορροπίας δεν είναι ολικά εκθετικά ευσταθές για αυθαίρετα $u_1^* > 0$, $u_i^* \geq 0$ ($i = 2, \dots, n$). Πράγματι, για σχετικά μεγάλες τιμές των εξωτερικών απαιτήσεων $u_1^* > 0$, $u_i^* \geq 0$ ($i = 2, \dots, n$) υπάρχουν άλλες ισορροπίες για το μοντέλο (1.15) (κορεσμένες ισορροπίες –

congested equilibria) για τις οποίες οι πυκνότητες των κελιών είναι μεγάλες και μπορούν να προσελκύσουν τη λύση του (1.15).

Το ακόλουθο αποτέλεσμα είναι το κύριο αποτέλεσμά μας στο σχεδιασμό της ανάδρασης. Το αποτέλεσμα αυτό δείχνει ότι υπάρχει ένας συνεχής, εύρωστος, ολικά εκθετικός σταθεροποιητής, για κάθε μοντέλο αυτοκινητοδρόμου της μορφής (1.15) υπό την υπόθεση **(H)**.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.1: Θεωρούμε το σύστημα (1.15) με $n \geq 3$ υπό την υπόθεση **(H)**. Τότε υπάρχει ένα υποσύνολο $R \subseteq \{1, \dots, n\}$ του συνόλου όλων των δεικτών $i \in \{1, \dots, n\}$ με $u_i^* > 0$, σταθερές $\sigma \in (0, 1]$, $b_i \in (0, u_i^*)$ για $i \in R$ και μια σταθερά $\tau^* > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $\tau \in (0, \tau^*)$ ο νόμος ανάδρασης $k: S \rightarrow \mathfrak{R}_+^n$ που ορίζεται από τη σχέση:

$$k(x) := (k_1(x), \dots, k_n(x))' \in \mathfrak{R}^n$$

με

$$k_i(x) := \max(u_i^* - \gamma_i \mathcal{E}(x), b_i), \text{ για όλα τα } x \in S, i \in R \quad (3.3)$$

$$\text{και } k_i(x) := u_i^*, \text{ για όλα τα } x \in S, i \notin R$$

όπου

$$\gamma_i := \tau^{-1}(u_i^* - b_i)$$

και

$$\mathcal{E}(x) := \sum_{i=1}^n \sigma^i \max(0, x_i - x_i^*), \text{ για όλα τα } x \in S \quad (3.4)$$

επιτυγχάνει εύρωστη ολική εκθετική σταθεροποίηση του μη κορεσμένου σημείου ισορροπίας x^* του συστήματος (1.15), δηλαδή, το x^* είναι RGES για το σύστημα κλειστού βρόχου (1.15) με $u = k(x)$. Επιπλέον, για κάθε $\tau \in (0, \tau^*)$, υπάρχουν σταθερές $Q, h, \theta, A, K > 0$ έτσι ώστε η συνάρτηση $V: S \rightarrow \mathfrak{R}_+$ που ορίζεται από τη σχέση:

$$V(x) := \sum_{i=1}^n \sigma^i |x_i - x_i^*| + A\varepsilon(x) + K \max \left(0, \sum_{i=1}^n I_i(x) - P(x) \right), \quad (3.5)$$

για όλα τα $x \in S$

όπου

$$I_j(x) := \sum_{i=1}^j x_i, \quad \text{για } j = 1, \dots, n \quad \text{και}$$

$$P(x) := Q - \theta \min(h, \varepsilon(x)) \quad (3.6)$$

είναι μια Lyapunov function με εκθέτη 1 για το σύστημα κλειστού βρόχου (1.15) με $u = k(x)$.

Παρά το γεγονός ότι το Θεώρημα 3.1 είναι ένα αποτέλεσμα ύπαρξης, η απόδειξή του είναι κατασκευαστική και παρέχει τύπους για όλες τις σταθερές και για το σύνολο δεικτών R . Παρατηρήστε ότι το σύνολο δεικτών R είναι το σύνολο όλων των εισροών που πρέπει να ελέγχονται, ώστε να είναι σε θέση να εγγυηθεί ότι το μη κορεσμένο σημείο ισορροπίας είναι RGES. Συνεπώς, η γνώση του συνόλου δεικτών R είναι κρίσιμη.

Η σημασία του Θεωρήματος 3.1 βασίζεται στα ακόλουθα:

- Το Θεώρημα 3.1 παρέχει μία οικογένεια εύρωστων ολικά εκθετικών σταθεροποιητών (που παραμετροποιούνται από την παράμετρο $\tau \in (0, \tau^*)$) και ένα σαφή τύπο για το νόμο ανάδρασης (τύπος (3.3)).
- Η σταθεροποίηση που επιτυγχάνεται είναι ισχυρή για όλους τους πιθανούς (ακόμα και χρονικά μεταβαλλόμενους) κανόνες προτεραιότητας για τις διασταυρώσεις που μπορεί να υπάρχουν σε

συγκεκριμένους αυτοκινητόδρομους. Συνεπώς, δεν χρειάζεται να γνωρίζουμε ή να εκτιμήσουμε τους κανόνες προτεραιότητας που ισχύουν.

- Το Θεώρημα 3.1 παρέχει ένα σαφή τύπο για τη συνάρτηση Lyapunov του συστήματος κλειστού βρόχου. Κάτι τέτοιο είναι σημαντικό, διότι η γνώση της συνάρτησης Lyapunov μας επιτρέπει να μελετήσουμε κατά πόσο είναι ισχυρό το σύστημα κλειστού βρόχου στις διάφορες διαταραχές (μέτρηση σφαλμάτων, σφάλματα μοντελοποίησης, κλπ), καθώς και τη μελέτη της επίδρασης των διασυνδέσεων των αυτοκινητοδρόμων (μέσω του small-gain theorem, βλέπε [16]).

Η βασική ιδέα πίσω από την απόδειξη του Θεωρήματος 3.1 είναι η κατασκευή της συνάρτησης Lyapunov του συστήματος κλειστού βρόχου, η οποία δρα ως μία CLF (βλέπε [16]) για το σύστημα ανοικτού βρόχου. Η κατασκευή της συνάρτησης Lyapunov βασίζεται στην παρατήρηση ότι δεν υπάρχουν φαινόμενα συμφόρησης όταν οι πυκνότητες των κελιών είναι αρκετά μικρές, δηλαδή,

“Υπάρχει ένα σύνολο $\Omega \subset S$ της μορφής $\Omega = (0, \mu_1] \times \dots \times (0, \mu_n]$, όπου $\mu_i > 0$ για $i = 1, \dots, n$ είναι σταθερές, έτσι ώστε να μην εμφανίζονται φαινόμενα συμφόρησης όταν $x \in \Omega$.”

Η ύπαρξη του συνόλου $\Omega \subset S$ είναι σημαντική, διότι όταν δεν εμφανίζονται φαινόμενα συμφόρησης, τότε το μοντέλο αυτοκινητοδρόμου ακολουθεί τον απλό τύπο (αλληλουχία):

$$x_1^+ = x_1 - f_1(x_1) + u_1$$

$$x_i^+ = x_i - f_i(x_i) + (1 - p_{i-1})f_{i-1}(x_{i-1}) + u_i \quad \text{για } i = 2, \dots, n, \quad x \in \Omega.$$

και μια συνάρτηση Lyapunov για τον παραπάνω τύπο μπορεί να είναι μια συνάρτηση της μορφής:

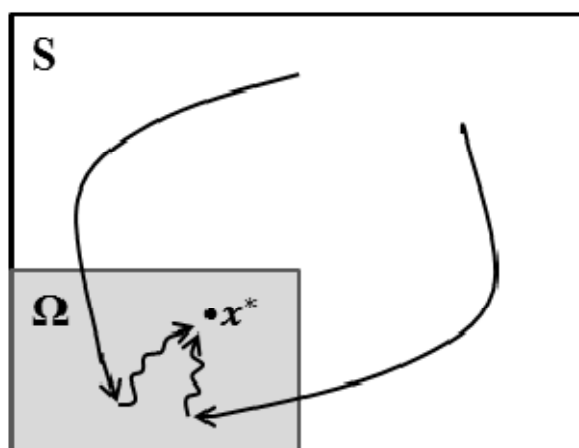
$$V_1(x) := \sum_{i=1}^n \sigma^i |x_i - x_i^*| + A\Xi(x),$$

όπου

$$\Xi(x) := \sum_{i=1}^n \sigma^i \max(0, x_i - x_i^*)$$

και $\sigma \in (0,1]$ και $A > 0$ είναι κατάλληλες σταθερές.

Η συνάρτηση Lyapunov για το μοντέλο αυτοκινητοδρόμου είναι ο γραμμικός συνδυασμός της “συνάρτησης Lyapunov” για το μη κορεσμένο μοντέλο (δηλαδή, $V_1(x) := \sum_{i=1}^n \sigma^i |x_i - x_i^*| + A\Xi(x)$) και ένας όρος ποινή (penalty term), δηλαδή ο όρος $\max(0, \sum_{i=1}^n I_i(x) - P(x))$, που πλήττει τις μεγάλες πυκνότητες κελιών (και επομένως τιμωρεί το ενδεχόμενο να είναι η κατάσταση εκτός του συνόλου $\Omega \subset S$). Η κατάλληλη επιλογή της ποινής $K > 0$ αναγκάζει την επιλεγμένη ενέργεια ελέγχου να οδηγήσει την κατάσταση στο σύνολο $\Omega \subset S$ (βλέπε Σχήμα 3). Με άλλα λόγια, η κατασκευή της CLF εγγυάται ότι η ενέργεια ελέγχου θα εξαλείψει πρώτα όλα τα φαινόμενα συμφόρησης και στη συνέχεια θα οδηγήσει την κατάσταση στην επιθυμητή ισορροπία.



Σχήμα 3: Η ιδέα πίσω από το Θεώρημα 3.1.

3.2 ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΚΥΡΙΟΥ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΟΣ

Η υπόθεση **(H)** έχει μη τετριμμένες συνέπειες. Παρακάτω δίνεται μια λίστα με τις πιο σημαντικές συνέπειες της υπόθεσης **(H)** [34]. Όλες οι ακόλουθες συνέπειες εκμεταλλεύονται στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.

Συνέπειες της υπόθεσης **(H)**:

(Σ1) Η συνάρτηση $[0, \delta_i] \ni z \rightarrow (z - f_i(z)) \geq 0$ είναι αύξουσα για $i = 1, \dots, n$.

Η **(Σ1)** είναι άμεση συνέπεια του δεδομένου ότι $f_i'(z) \leq 1$ για όλα τα $z \in (0, \delta_i)$. Πράγματι, έστω $g_i(z) = z - f_i(z)$. Τότε $g_i'(z) = 1 - f_i'(z) \geq 0$ για κάθε $z \in (0, \delta_i)$.

(Σ2) Για κάθε $i = 1, \dots, n$ υπάρχουν σταθερές $\lambda_i \in (0, 1)$, $G_i \in [0, 1]$ τέτοιες ώστε:

$$|x_i - x_i^* - f_i(x_i) + f_i(x_i^*)| \leq \lambda_i |x_i - x_i^*|$$

και

(3.7)

$$|f_i(x_i) - f_i(x_i^*)| \leq G_i |x_i - x_i^*|,$$

για όλα τα $x_i, x_i^* \in [0, \tilde{\delta}_i]$.

Η **(Σ2)** είναι άμεση συνέπεια του δεδομένου ότι υπάρχουν σταθερές $L_i \in (0, 1)$, $\tilde{\delta}_i \in (0, \delta_i]$ τέτοιες ώστε $f_i: [0, a_i] \rightarrow \mathfrak{R}_+$ είναι C^1 στο $(0, \delta_i)$ και $1 - L_i \leq f_i'(z)$ για όλα τα $z \in (0, \tilde{\delta}_i)$ και $f_i'(z) \leq 1$ για όλα τα $z \in (0, \delta_i)$. Πράγματι, έστω $g_i(x_i) = x_i - f_i(x_i)$. Από το Θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει τουλάχιστον ένα $z \in (0, \tilde{\delta}_i)$ τέτοιο ώστε:

$$|g_i(x_i) - g_i(x_i^*)| = |g_i'(z)| |x_i - x_i^*|$$

όπου $g'_i(z) = 1 - f'_i(z)$. Για $z \in (0, \tilde{\delta}_i)$ έχουμε

$$1 - L_i \leq f'_i(z) \leq 1$$

$$L_i - 1 \geq -f'_i(z) \geq -1$$

$$L_i \geq 1 - f'_i(z) \geq 0$$

$$L_i \geq g'_i(z) \geq 0$$

Οπότε $|g'_i(z)| = g'_i(z) \leq L_i$.

Άρα

$$|g_i(x_i) - g_i(x_i^*)| = |g'_i(z)| |x_i - x_i^*| \leq L_i |x_i - x_i^*|.$$

Ομοίως εργαζόμαστε για την $f_i(x_i)$. Από το Θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει τουλάχιστον ένα $z \in (0, \tilde{\delta}_i)$ τέτοιο ώστε:

$$|f_i(x_i) - f_i(x_i^*)| = |f'_i(z)| |x_i - x_i^*| \leq 1 |x_i - x_i^*|.$$

Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η (3.7) ισχύει με $\lambda_i = L_i \in (0,1)$ και $G_i = 1$.

(Σ3) Υπάρχουν σταθερές $\theta_i > 0$ ($i = 1, \dots, n$) τέτοιες ώστε $f_i(z) \geq \theta_i z$ για όλα τα $z \in [0, a_i]$ και $i = 1, \dots, n$.

Η **(Σ3)** είναι άμεση συνέπεια του δεδομένου ότι $f_i(z) \geq (1 - L_i)z$ για όλα τα $z \in (0, \tilde{\delta}_i]$ (άμεση συνέπεια του δεδομένου ότι $1 - L_i \leq f_i'(z)$ για όλα τα $z \in (0, \tilde{\delta}_i)$), του δεδομένου ότι $f_i(z) \geq f_i(\tilde{\delta}_i)$ για όλα τα $z \in [\tilde{\delta}_i, \delta_i]$ και του δεδομένου ότι $f_i(z) \geq f_i^{\min}$ για όλα τα $z \in [\delta_i, a_i]$. (Για παράδειγμα, η επιλογή του

$$\theta_i = \min \left(1 - L_i, \frac{f_i(\tilde{\delta}_i)}{\delta_i}, \frac{f_i^{\min}}{a_i} \right)$$

ικανοποιεί τη **(Σ3)**).

Η ακόλουθη συνέπεια μας παρέχει ένα χρήσιμο γραμμικό κάτω φράγμα για ένα σταθμισμένο άθροισμα των ποσοστών εξόδου.

(Σ4) Για κάθε $r_2, \dots, r_n \geq 0$ με $r_i < \min(q_i, c_i a_i)$ για $i = 2, \dots, n$, υπάρχει μία σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε να ισχύει η ακόλουθη ανισότητα για όλα τα $x \in S := (0, a_1] \times \dots \times (0, a_n]$, $u \in U = (0, +\infty) \times [0, r_2] \times \dots \times [0, r_n]$, $d = (d_2, \dots, d_n) \in [0, 1]^{n-1}$ με $p_n = 1 = s_{n+1}$:

$$\sum_{i=1}^n (1 + p_i(n - i))s_{i+1}f_i(x_i) \geq C \sum_{i=1}^n (n + 1 - i)x_i. \quad (3.8)$$

Απόδειξη της (Σ4): Αποδεικνύουμε τον ακόλουθο ισχυρισμό.

(Ισχυρισμός): Για όλα τα $m = 1, \dots, n - 1$ υπάρχει μία σταθερά $C_m > 0$ τέτοια ώστε να ισχύει η ακόλουθη ανισότητα για όλα τα $x \in S := (0, a_1] \times \dots \times (0, a_n]$, $u \in U = (0, +\infty) \times [0, r_2] \times \dots \times [0, r_n]$, $d = (d_2, \dots, d_n) \in [0, 1]^{n-1}$:

$$\sum_{i=m}^n (1 + p_i(n - i))s_{i+1}f_i(x_i) \geq C_m \sum_{i=m}^n (n + 1 - i)x_i. \quad (3.9)$$

Η **(Σ4)** είναι άμεση συνέπεια του παραπάνω ισχυρισμού.

Πρώτα αποδεικνύουμε τον ισχυρισμό για $m = n - 1$.

Ορίζουμε

$$l_n = \min\left(1, \frac{c_n a_n - r_n}{2(1 - p_{n-1})f_{n-1}(\delta_{n-1})}\right).$$

Πράγματι, χρησιμοποιώντας τη **(Σ3)**, λαμβάνουμε για όλα τα

$$\begin{aligned} (x_{n-1}, x_n) &\in (0, a_{n-1}] \times (0, a_n], \quad u \in U = (0, +\infty) \times [0, r_2] \times \dots \times [0, r_n], \\ d &= (d_2, \dots, d_n) \in [0, 1]^{n-1} \quad \text{με } s_n \geq l_n: \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_n(x_n) + (1 + p_{n-1})s_n f_{n-1}(x_{n-1}) &\geq l_n(1 + p_{n-1})\theta_{n-1}x_{n-1} + \theta_n x_n \geq \\ &\geq (x_n + 2x_{n-1}) \min\left(\theta_n, \frac{1 + p_{n-1}}{2} l_n \theta_{n-1}\right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Από την άλλη, για όλα τα

$$\begin{aligned} (x_{n-1}, x_n) &\in (0, a_{n-1}] \times (0, a_n], \quad u \in U = (0, +\infty) \times [0, r_2] \times \dots \times [0, r_n], \\ d &= (d_2, \dots, d_n) \in [0, 1]^{n-1} \quad \text{με } s_n < l_n, \quad \text{έπεται από την (1.8) ότι} \end{aligned}$$

$$(1 - p_{n-1})f_{n-1}(x_{n-1}) + u_n > \min(q_n, c_n(a_n - x_n)).$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $\min(q_n, c_n(a_n - x_n)) = c_n(a_n - x_n)$.

Σε αυτή τη περίπτωση, έχουμε

$$c_n(a_n - x_n) \leq q_n \Rightarrow a_n - x_n \leq c_n^{-1}q_n \Rightarrow a_n - c_n^{-1}q_n \leq x_n.$$

Η υπόθεση **(H)** σε συνδυασμό με το γεγονός ότι $u_n \leq r_n < c_n a_n$ συνεπάγεται ότι $l_n(1 - p_{n-1})f_{n-1}(\delta_{n-1}) + r_n > c_n(a_n - x_n)$, που εξαιτίας του ορισμού

$$l_n = \min\left(1, \frac{c_n a_n - r_n}{2(1 - p_{n-1})f_{n-1}(\delta_{n-1})}\right), \quad \text{δίνει}$$

$$l_n(1 - p_{n-1})f_{n-1}(\delta_{n-1}) + r_n > c_n(a_n - x_n) \Rightarrow$$

$$\frac{c_n a_n - r_n}{2(1 - p_{n-1})f_{n-1}(\delta_{n-1})} (1 - p_{n-1})f_{n-1}(\delta_{n-1}) + r_n > c_n(a_n - x_n) \Rightarrow$$

$$\frac{c_n a_n - r_n}{2} + r_n > c_n(a_n - x_n) \Rightarrow$$

$$\frac{c_n a_n - r_n + 2r_n}{2} > c_n a_n - c_n x_n \Rightarrow$$

$$c_n a_n + r_n > 2c_n a_n - 2c_n x_n \Rightarrow$$

$$2c_n x_n > c_n a_n - r_n \Rightarrow$$

$$x_n > \frac{1}{2}(a_n - c_n^{-1}r_n).$$

Χρησιμοποιώντας τη **(Σ3)**, λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} f_n(x_n) + (1 + p_{n-1})s_n f_{n-1}(x_{n-1}) &\geq \theta_n x_n \geq \theta_n \frac{1}{2}(a_n - c_n^{-1}r_n) \geq \\ &\geq \theta_n \frac{1}{2}(a_n - c_n^{-1}r_n) \frac{x_n + 2x_{n-1}}{a_n + 2a_{n-1}}. \end{aligned}$$

- $\min(q_n, c_n(a_n - x_n)) = q_n.$

Σε αυτή τη περίπτωση, παίρνουμε από την (1.8) και το γεγονός ότι $u_n \leq r_n < q_n$ την ανισότητα

$$s_n \geq \frac{q_n - r_n}{(1 - p_{n-1})f_{n-1}(x_{n-1})}.$$

Χρησιμοποιώντας τη **(Σ3)**, λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} f_n(x_n) + (1 + p_{n-1})s_n f_{n-1}(x_{n-1}) &\geq \theta_n x_n + (1 + p_{n-1}) \frac{q_n - r_n}{1 - p_{n-1}} \geq \\ &\geq \theta_n x_n + (1 + p_{n-1}) \frac{q_n - r_n}{1 - p_{n-1}} \frac{2x_{n-1}}{2a_{n-1}} \\ &\geq (x_n + 2x_{n-1}) \min\left(\theta_n, \frac{q_n - r_n}{1 - p_{n-1}} \frac{1 + p_{n-1}}{2a_{n-1}}\right). \end{aligned}$$

Από την (3.10) και τις παραπάνω ανισότητες, έπεται ότι ισχύει η (3.9) με

$$C_{n-1} := \min \left(\theta_n, \frac{1 + p_{n-1}}{2} l_n \theta_{n-1}, \frac{\theta_n (a_n - c_n^{-1} r_n)}{2(a_n + 2a_{n-1})}, \frac{1 + p_{n-1}}{1 - p_{n-1}} \frac{q_n - r_n}{2a_{n-1}} \right).$$

Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι ο ισχυρισμός ισχύει για $m = k \in \{2, \dots, n-1\}$ και θα δείξουμε ότι ο ισχυρισμός ισχύει για $m = k-1$.

Ορίζουμε

$$l_k = \min \left(1, \frac{c_k a_k - r_k}{2(1 - p_{k-1}) f_{k-1}(\delta_{k-1})} \right).$$

Χρησιμοποιώντας την (3.9) για $m = k$ και τη **(Σ3)**, λαμβάνουμε για όλα τα $x \in S := (0, a_1] \times \dots \times (0, a_n]$, $u \in U = (0, +\infty) \times [0, r_2] \times \dots \times [0, r_n]$, $d = (d_2, \dots, d_n) \in [0, 1]^{n-1}$ με $s_k \geq l_k$:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=k-1}^n (1 + p_i(n-i)) s_{i+1} f_i(x_i) = \\ & = \sum_{i=k}^n (1 + p_i(n-i)) s_{i+1} f_i(x_i) + (1 + p_{k-1}(n+1-k)) s_k f_{k-1}(x_{k-1}) \geq \\ & \geq C_k \sum_{i=k}^n (n+1-i) x_i + (1 + p_{k-1}(n+1-k)) l_k \theta_{k-1} x_{k-1} \geq \\ & \geq \min \left(C_k, \frac{1 + (n+1-k) p_{k-1}}{n+2-k} l_k \theta_{k-1} \right) \sum_{i=k-1}^n (n+1-i) x_i. \quad (3.11) \end{aligned}$$

Από την άλλη, για όλα τα

$x \in S := (0, a_1] \times \dots \times (0, a_n]$, $u \in U = (0, +\infty) \times [0, r_2] \times \dots \times [0, r_n]$, $d = (d_2, \dots, d_n) \in [0, 1]^{n-1}$ με $s_k < l_k$, έπεται από την (1.8) ότι

$$l_k (1 - p_{k-1}) f_{k-1}(x_{k-1}) + u_k > \min(q_k, c_k(a_k - x_k)).$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $\min(q_k, c_k(a_k - x_k)) = c_k(a_k - x_k)$.

Η υπόθεση **(H)** σε συνδυασμό με το γεγονός ότι $u_k \leq r_k < c_k a_k$ συνεπάγεται ότι $l_k(1 - p_{k-1})f_{k-1}(\delta_{k-1}) + r_k > c_k(a_k - x_k)$, που εξαιτίας του ορισμού

$$l_k = \min\left(1, \frac{c_k a_k - r_k}{2(1 - p_{k-1})f_{k-1}(\delta_{k-1})}\right), \text{ δίνει } x_k > \frac{1}{2}(a_k - c_k^{-1}r_k).$$

Χρησιμοποιώντας την (3.9) για $m = k$ και τη **(Σ3)**, λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} \sum_{i=k-1}^n (1 + p_i(n - i))s_{i+1}f_i(x_i) &\geq \sum_{i=k}^n (1 + p_i(n - i))s_{i+1}f_i(x_i) \\ &\geq C_k \sum_{i=k}^n (n + 1 - i)x_i = C_k \sum_{i=k+1}^n (n + 1 - i)x_i + C_k(n + 1 - k)x_k \\ &\geq C_k \sum_{i=k+1}^n (n + 1 - i)x_i + C_k(n + 1 - k)\frac{1}{2}(a_k - c_k^{-1}r_k) \\ &\geq C_k \sum_{i=k+1}^n (n + 1 - i)x_i + C_k(n + 1 - k)\frac{1}{2}(a_k - c_k^{-1}r_k) \cdot \\ &\quad \cdot \frac{(n + 1 - k)x_k + (n + 2 - k)x_{k-1}}{(n + 1 - k)a_k + (n + 2 - k)a_{k-1}} \\ &\geq C_k \min\left(1, \frac{(n + 1 - k)(a_k - c_k^{-1}r_k)}{2(n + 1 - k)a_k + 2(n + 2 - k)a_{k-1}}\right) \sum_{i=k-1}^n (n + 1 - i)x_i \end{aligned}$$

- $\min(q_k, c_k(a_k - x_k)) = q_k$.

Σε αυτή τη περίπτωση, παίρνουμε από την (1.8) και το γεγονός ότι $u_k \leq r_k < q_k$ την ανισότητα

$$s_k \geq \frac{q_k - r_k}{(1 - p_{k-1})f_{k-1}(x_{k-1})}.$$

Συνεπώς, λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=k-1}^n (1 + p_i(n - i))s_{i+1}f_i(x_i) = \\ & = \sum_{i=k}^n (1 + p_i(n - i))s_{i+1}f_i(x_i) + (1 + p_{k-1}(n + 1 - k))s_k f_{k-1}(x_{k-1}) \\ & \geq C_k \sum_{i=k}^n (n + 1 - i)x_i + (1 + p_{k-1}(n + 1 - k)) \frac{q_k - r_k}{1 - p_{k-1}} \\ & \geq C_k \sum_{i=k}^n (n + 1 - i)x_i + (1 + p_{k-1}(n + 1 - k)) \frac{q_k - r_k}{1 - p_{k-1}} \cdot \\ & \quad \cdot \frac{(n + 2 - k)x_{k-1}}{(n + 2 - k)a_{k-1}} \\ & \geq \min \left(C_k, \frac{q_k - r_k}{1 - p_{k-1}} \frac{1 + p_{k-1}(n + 1 - k)}{(n + 2 - k)a_{k-1}} \right) \sum_{i=k-1}^n (n + 1 - i)x_i. \end{aligned}$$

Έπεται από την (3.11) και τις παραπάνω ανισότητες ότι ο ισχυρισμός ισχύει για $m = k - 1$ με:

$$C_{k-1} =$$

$$= \min \left(C_k, \frac{1 + p_{k-1}(n+1-k)}{n+2-k} l_k \theta_{k-1}, \frac{(n+1-k)C_k(a_k - c_k^{-1}r_k)}{2(n+1-k)a_k + 2(n+2-k)a_{k-1}}, \right. \\ \left. \frac{q_k - r_k}{1 - p_{k-1}} \frac{1 + p_{k-1}(n+1-k)}{(n+2-k)a_{k-1}} \right). \quad \blacksquare$$

Παρατήρηση 3.1: Η απόδειξη της **(Σ4)** συνεπάγεται ότι η σταθερά $C > 0$ μπορεί να εκτιμηθεί με απλό τρόπο. Ορίζουμε τις θετικές σταθερές $Y_i > 0$ ($i = 1, \dots, n$) χρησιμοποιώντας τον αναδρομικό τύπο:

$$Y_{k-1} = \\ = \min \left(Y_k, \frac{1 + p_{k-1}(n+1-k)}{n+2-k} l_k \theta_{k-1}, \frac{(n+1-k)(a_k - c_k^{-1}r_k)Y_k}{2(n+1-k)a_k + 2(n+2-k)a_{k-1}}, \right. \\ \left. \frac{q_k - r_k}{1 - p_{k-1}} \frac{1 + p_{k-1}(n+1-k)}{(n+2-k)a_{k-1}} \right) \quad (3.12)$$

για $k = n, n-1, \dots, 2$, με $Y_n = \theta_n$, όπου $\theta_i > 0$ ($i = 1, \dots, n$) είναι οι σταθερές που εμπλέκονται στη **(Σ3)**

και

$$l_k = \min \left(1, \frac{c_k a_k - r_k}{2(1 - p_{k-1})f_{k-1}(\delta_{k-1})} \right) \text{ για } k = 2, \dots, n.$$

Στη συνέχεια, η σταθερά $C > 0$ μπορεί να επιλεγεί ως $C = Y_1$. Ωστόσο, η εκτίμηση της σταθεράς $C > 0$ από τον αναδρομικό τύπο (3.12) είναι σε γενικές γραμμές συντηρητική.

Ολοκληρώνοντας, η τελευταία συνέπεια μας παρέχει χρήσιμες ισότητες και ανισότητες για ένα σταθμισμένο άθροισμα όλων των πυκνοτήτων των οχημάτων του αυτοκινητοδρόμου.

(Σ5) Η ακόλουθη ισότητα ισχύει για όλα τα $x \in S := (0, a_1] \times \dots \times (0, a_n]$,
 $u = (u_1, \dots, u_n)' \in (0, +\infty) \times \mathfrak{R}_+^{n-1}$, $d = (d_2, \dots, d_n) \in [0, 1]^{n-1}$ με
 $p_n = 1 = s_{n+1}$:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n I_i(x^+) = \\ & = \sum_{i=1}^n I_i(x) + \sum_{i=1}^n (n+1-i)w_i u_i - \sum_{i=1}^n (1+p_i(n-i))s_{i+1}f_i(x_i) \end{aligned} \quad (3.13)$$

όπου

$$I_j(x) := \sum_{i=1}^j x_i \quad \text{για } j = 1, \dots, n.$$

Επιπλέον, για κάθε $r_2, \dots, r_n \geq 0$ με $r_i < \min(q_i, c_i a_i)$ για $i = 2, \dots, n$, ισχύει η ακόλουθη ανισότητα:

$$\sum_{i=1}^n I_i(x^+) \leq (1-C) \sum_{i=1}^n I_i(x) + \sum_{i=1}^n (n+1-i)u_i, \quad (3.14)$$

για όλα τα $(x, u, d) \in S \times U \times [0, 1]^{n-1}$,

όπου $U = (0, +\infty) \times [0, r_2] \times \dots \times [0, r_n]$, και $C > 0$ είναι η σταθερά που εμπλέκεται στη (3.8).

Απόδειξη της (Σ5): Οι ακόλουθες εξισώσεις ισχύουν για όλα τα $x \in S := (0, a_1] \times \dots \times (0, a_n]$, $u = (u_1, \dots, u_n)' \in (0, +\infty) \times \mathfrak{R}_+^{n-1}$, $d = (d_2, \dots, d_n) \in [0, 1]^{n-1}$ με $p_n = 1 = s_{n+1}$ και είναι άμεσες συνέπειες των (1.11), (1.12), (1.13) και του ορισμού

$$I_j(x) := \sum_{i=1}^j x_i, \quad \text{για } j = 1, \dots, n:$$

$$I_j(x^+) = I_j(x) + \sum_{i=1}^j w_i u_i - \sum_{i=1}^{j-1} s_{i+1} p_i f_i(x_i) - s_{j+1} f_j(x_j), \text{ για } j = 2, \dots, n-1 \quad (3.15)$$

$$I_n(x^+) = I_n(x) + \sum_{i=1}^n w_i u_i - \sum_{i=1}^{n-1} s_{i+1} p_i f_i(x_i) - f_n(x_n). \quad (3.16)$$

Θα δείξουμε αναλυτικά την (3.15) και με όμοιο τρόπο προκύπτει και η (3.16).

$$\begin{aligned} I_j(x^+) &= \sum_{i=1}^j x_i^+ = \\ &= \sum_{i=1}^j x_i - \sum_{i=1}^j s_{i+1} f_i(x_i) + \sum_{i=1}^j w_i u_i + \sum_{i=1}^j s_i (1 - p_{i-1}) f_{i-1}(x_{i-1}) = \\ &= I_j(x) + \sum_{i=1}^j w_i u_i - \sum_{i=1}^j s_{i+1} f_i(x_i) + \sum_{i=1}^j s_i f_{i-1}(x_{i-1}) - \sum_{i=1}^j s_i p_{i-1} f_{i-1}(x_{i-1}) = \\ &= I_j(x) + \sum_{i=1}^j w_i u_i - \sum_{i=1}^{j-1} s_{i+1} p_i f_i(x_i) - \sum_{i=1}^j s_{i+1} f_i(x_i) + \sum_{i=1}^{j-1} s_{i+1} f_i(x_i) = \end{aligned}$$

$$I_j(x) + \sum_{i=1}^j w_i u_i - \sum_{i=1}^{j-1} s_{i+1} p_i f_i(x_i) - s_{j+1} f_j(x_j), \quad j = 2, \dots, n-1.$$

Η ισότητα (3.13) είναι συνέπεια των (1.11), (3.15), (3.16) και του ορισμού $p_n = 1 = s_{n+1}$. Πράγματι:

$$\sum_{j=1}^n I_j(x^+) = I_1(x^+) + \sum_{j=2}^n I_j(x^+) =$$

$$I_1(x_1) - s_2 f_1(x_1) + w_1 u_1 + \sum_{j=2}^n \left(I_j(x) + \sum_{i=1}^j w_i u_i - \sum_{i=1}^{j-1} s_{i+1} p_i f_i(x_i) - s_{j+1} f_j(x_j) \right) =$$

$$I_1(x_1) - s_2 f_1(x_1) + w_1 u_1 + \sum_{j=2}^n I_j(x) + \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^j w_i u_i - \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} s_{i+1} p_i f_i(x_i) - \sum_{j=2}^n s_{j+1} f_j(x_j). \quad (**)$$

Δουλεύουμε ξεχωριστά τους όμοιους όρους της (**) και λαμβάνουμε:

$$I_1(x_1) + \sum_{j=2}^n I_j(x) = \sum_{j=1}^n I_j(x)$$

Επίσης

$$w_1 u_1 + \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^j w_i u_i =$$

$$\underbrace{w_1 u_1}_{j=1} + \underbrace{w_1 u_1 + w_2 u_2}_{j=2} + \cdots + \underbrace{w_1 u_1 + w_2 u_2 + \cdots + w_n u_n}_{j=n} =$$

$$n w_1 u_1 + (n-1) w_2 u_2 + \cdots + (n-k+1) w_k u_k + \cdots + w_n u_n =$$

$$\sum_{j=1}^n (n+1-j) w_j u_j$$

Και τέλος

$$-s_2 f_1(x_1) - \sum_{j=2}^n s_{j+1} f_j(x_j) - \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} s_{i+1} p_i f_i(x_i) =$$

$$-s_2 f_1(x_1) - s_3 f_2(x_2) - \cdots - s_n f_{n-1}(x_{n-1}) - s_{n+1} f_n(x_n) - \underbrace{s_2 p_1 f_1(x_1)}_{j=2}$$

$$- \underbrace{s_2 p_1 f_1(x_1) - s_3 p_2 f_2(x_2)}_{j=3} - \cdots$$

$$- \underbrace{s_2 p_1 f_1(x_1) - s_3 p_2 f_2(x_2) - \cdots - s_n p_{n-1} f_{n-1}(x_{n-1})}_{j=n} =$$

$$-s_2 f_1(x_1) - (n-1) s_2 p_1 f_1(x_1) - s_3 f_2(x_2) - (n-2) s_3 p_2 f_2(x_2) - \cdots$$

$$- s_{k+1} f_k(x_k) - (n-k) s_{k+1} p_k f_k(x_k) - \cdots - s_n f_{n-1}(x_{n-1})$$

$$- s_n p_{n-1} f_{n-1}(x_{n-1}) - s_{n+1} f_n(x_n) =$$

$$-(1 + (n-1) p_1) s_2 f_1(x_1) - (1 + (n-2) p_2) s_3 f_2(x_2) - \cdots$$

$$- (1 + (n-k) p_k) s_{k+1} f_k(x_k) - \cdots - (1 + p_{n-1}) s_n f_{n-1}(x_{n-1})$$

$$- s_{n+1} f_n(x_n) =$$

$$- \sum_{j=1}^n (1 + p_j (n-j)) s_{j+1} f_j(x_j) .$$

Οπότε

$$\sum_{j=1}^n I_j(x^+) = \sum_{j=1}^n I_j(x) + \sum_{j=1}^n (n+1-j)w_j u_j - \sum_{j=1}^n (1+p_j(n-j))s_{j+1}f_j(x_j).$$

Συνδυάζοντας τις (3.13) και (3.8), λαμβάνουμε:

$$\sum_{i=1}^n I_i(x^+) \leq \sum_{i=1}^n I_i(x) - C \sum_{i=1}^n (n+1-i)x_i + \sum_{i=1}^n (n+1-i)w_i u_i, \quad (3.17)$$

για όλα τα $(x, u, d) \in S \times U \times [0,1]^{n-1}$.

Εφόσον $w_i \in [0,1]$ ($i = 1, \dots, n$) και $\sum_{i=1}^n I_i(x) = \sum_{i=1}^n (n+1-i)x_i$, από την (3.17) έπεται ότι ισχύει η (3.14). ■

Στο σημείο αυτό είμαστε έτοιμοι να αποδείξουμε το Θεώρημα 3.1.

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.1:

Ορίζουμε την $\beta_n = \tilde{\delta}_n$ και $\beta_i \in (0, \tilde{\delta}_i]$, για $i = 1, \dots, n-1$ να είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης

$$f_i(\beta_i) = \min \left(f_i(\tilde{\delta}_i), \frac{q_{i+1} - u_{i+1}^*}{1 - p_i} \right). \quad (3.18)$$

Λόγω των ανισοτήτων (3.2) και του γεγονότος ότι $\beta_n = \tilde{\delta}_n$, προκύπτει ότι $\beta_i > x_i^*$ για $i = 1, \dots, n$.

Ορίζουμε

$$\omega_i = c_i(a_i - x_i^*) - u_i^* - (1 - p_{i-1})f_{i-1}(x_{i-1}^*) \quad \text{για } i = 2, \dots, n$$

$$\text{και} \quad \omega_1 = c_1(a_1 - x_1^*) - u_1^*.$$

Έπειτα ορίζουμε:

$$\mu_i = \min\left(\beta_i, x_i^* + \frac{\omega_i}{2c_i}, x_i^* + \frac{\omega_{i+1}}{2(1-p_i)}\right) \quad \text{για } i = 1, \dots, n-1$$
(3.19)

$$\text{και} \quad \mu_n = \min\left(\beta_n, x_n^* + \frac{\omega_n}{2c_n}\right)$$

Και πάλι, λόγω των ανισοτήτων (3.2) και του δεδομένου ότι $\beta_i > x_i^*$ για $i = 1, \dots, n$, προκύπτει ότι $\mu_i > x_i^*$ για $i = 1, \dots, n$.

Όπως προκύπτει από τις (1.5), (1.7), (1.8), (1.9), (1.11), (1.12), (1.13), (3.18) και (3.19) οι ακόλουθες εξισώσεις ισχύουν όταν $x \in \Omega = (0, \mu_1] \times \dots \times (0, \mu_n]$ και $u_i \in [0, u_i^*]$ για $i = 1, \dots, n$:

$$w_i = 1, \text{ για } i = 1, \dots, n \text{ και } s_i = 1, \text{ για } i = 2, \dots, n$$
(3.20)

$$x_1^+ = x_1 - f_1(x_1) + u_1,$$
(3.21)

$$x_i^+ = x_i - f_i(x_i) + (1 - p_{i-1})f_{i-1}(x_{i-1}) + u_i, \quad \text{για } i = 2, \dots, n.$$

Για να το δούμε αυτό, παρατηρήστε ότι για όλα τα $x \in \Omega = (0, \mu_1] \times \dots \times (0, \mu_n]$ και $u \in [0, u_1^*] \times \dots \times [0, u_n^*]$ έχουμε

$$u_1 \leq \min(q_1, c_1(a_1 - x_1))$$

και

$$u_i + (1 - p_{i-1})f_{i-1}(x_{i-1}) \leq \min(q_i, c_i(a_i - x_i)) \quad \text{για } i = 2, \dots, n.$$

Πράγματι, η υπόθεση **(H)** σε συνδυασμό με την εξίσωση (3.18) και τον ορισμό (3.19) συνεπάγονται ότι

$$u_i + (1 - p_{i-1})f_{i-1}(x_{i-1}) \leq u_i^* + (1 - p_{i-1})f_{i-1}(\mu_{i-1}) \leq$$

$$\leq u_i^* + (1 - p_{i-1})f_{i-1}(\beta_{i-1}) \leq q_i$$

για $i = 2, \dots, n$ και για όλα τα $x \in \Omega = (0, \mu_1] \times \dots \times (0, \mu_n]$ και

$$u \in [0, u_1^*] \times \dots \times [0, u_n^*].$$

Η ανισότητα $u_1 \leq u_1^* \leq q_1$ συνεπάγεται άμεσα από τη (3.2). Επιπλέον, η υπόθεση **(H)** (και ιδίως το γεγονός ότι η f_i είναι αύξουσα στο $[0, \delta_i]$ με $f_i'(z) \leq 1$ για όλα τα $z \in (0, \delta_i)$ για $i = 1, \dots, n$) σε συνδυασμό με τη (3.2) και τον ορισμό (3.19) συνεπάγεται ότι

$$u_i + (1 - p_{i-1})f_{i-1}(x_{i-1}) \leq$$

$$\leq u_i^* + (1 - p_{i-1})f_{i-1}(x_{i-1}^*) + (1 - p_{i-1})(f_{i-1}(x_{i-1}) - f_{i-1}(x_{i-1}^*)) \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq u_i^* + (1 - p_{i-1})f_{i-1}(x_{i-1}^*) + (1 - p_{i-1}) \max(0, x_{i-1} - x_{i-1}^*) \leq \\
&\leq u_i^* + (1 - p_{i-1})f_{i-1}(x_{i-1}^*) + \frac{\omega_i}{2} = \\
&= \frac{1}{2}c_i(a_i - x_i^*) + \frac{1}{2}u_i^* + \frac{1}{2}(1 - p_{i-1})f_{i-1}(x_{i-1}^*) = c_i(a_i - x_i^*) - \frac{\omega_i}{2} \leq \\
&\leq c_i(a_i - x_i^*) - c_i \max(0, x_i - x_i^*) \leq c_i(a_i - x_i^*) + c_i(x_i^* - x_i) = \\
&= c_i(a_i - x_i)
\end{aligned}$$

για $i = 2, \dots, n$ και για όλα τα $x \in \Omega = (0, \mu_1] \times \dots \times (0, \mu_n]$ και $u \in [0, u_1^*] \times \dots \times [0, u_n^*]$.

Η ανισότητα $u_1 \leq u_1^* \leq c_1(a_1 - x_1)$ είναι συνέπεια της (3.2), του ορισμού (3.19) και των ανισοτήτων

$$\begin{aligned}
u_1^* &\leq \frac{1}{2}u_1^* + \frac{1}{2}c_1(a_1 - x_1^*) = c_1(a_1 - x_1^*) - \frac{\omega_1}{2} \leq \\
&\leq c_1(a_1 - x_1^*) - c_1 \max(0, x_1 - x_1^*) \leq c_1(a_1 - x_1^*) + c_1(x_1^* - x_1) = \\
&= c_1(a_1 - x_1)
\end{aligned}$$

Έστω $\lambda_i \in (0,1)$, $G_i \in [0,1]$ ($i = 1, \dots, n$) οι σταθερές που εμπλέκονται στη **(Σ2)**. Επίσης, έστω $\sigma \in (0,1]$ σταθερά έτσι ώστε

$$L := \max\left(\lambda_n, \max_{i=1, \dots, n-1} (\lambda_i + \sigma G_i(1 - p_i))\right) < 1. \quad (3.22)$$

Σε ό, τι ακολουθεί, έχουμε $p_n = 1 = s_{n+1}$. Έστω $r_i = u_i^*$ για $i = 2, \dots, n$ και έστω $C > 0$ η σταθερά που εμπλέκεται στη (3.8). Έστω $R \subseteq \{1, \dots, n\}$ ένα υποσύνολο του συνόλου όλων των δεικτών $i \in \{1, \dots, n\}$ για το οποίο $u_i^* > 0$ και τέτοιο ώστε:

$$\sum_{i \notin R} (n+1-i)u_i^* < \min_{i=1, \dots, n} \left(((n-i)p_i + 1)f_i(x_i^*) \right)$$

και

$$\sum_{i \notin R} (n+1-i)u_i^* < C \min_{i=1, \dots, n} ((n+1-i)\mu_i) \quad (3.23)$$

όπου $\mu_i > x_i^*$ για $i = 1, \dots, n$ είναι οι σταθερές που ορίζονται από τη (3.19). Ένα τέτοιο σύνολο $R \subseteq \{1, \dots, n\}$ υπάρχει πάντα (για παράδειγμα, το $R \subseteq \{1, \dots, n\}$ μπορεί να είναι το σύνολο όλων των δεικτών $i \in \{1, \dots, n\}$ για το οποίο $u_i^* > 0$).

Οι ανισότητες (3.23) συνεπάγονται ότι υπάρχουν σταθερές $\varepsilon \in (0, 1)$ και $b_i \in (0, u_i^*)$ για $i \in R$ έτσι ώστε:

$$\sum_{i \in R} (n+1-i)b_i + \sum_{i \notin R} (n+1-i)u_i^* \leq \min_{i=1, \dots, n} \left(((n-i)p_i + 1)f_i(x_i^*) \right)$$

και

$$\sum_{i \in R} (n+1-i)b_i + \sum_{i \notin R} (n+1-i)u_i^* \leq \varepsilon C \min_{i=1, \dots, n} ((n+1-i)\mu_i). \quad (3.24)$$

Στη συνέχεια ορίζουμε τις ακόλουθες παραμέτρους:

- Ορίζουμε $h := \min_{i=1, \dots, n} (\sigma^i (\mu_i - x_i^*))$.

- Ορίζουμε

$$Q := \max \left(\min_{i=1, \dots, n} (\mu_i (n+1-i)), (1-C) \sum_{i=1}^n I_i(x^*) \right. \\ \left. + (1-C)h \max_{i=1, \dots, n} ((n+1-i)\sigma^{-i}) + \sum_{i=1}^n (n+1-i)u_i^* \right) \\ \text{και } \theta := h^{-1} \left(Q - \varepsilon \min_{i=1, \dots, n} ((n+1-i)\mu_i) \right).$$

- Ορίζουμε $\tau^* := \min(h, (\theta L)^{-1} \sum_{i \in R} (n+1-i)(u_i^* - b_i))$
και έστω $\tau \in (0, \tau^*)$.

- Ορίζουμε $A := 1 + (1-L)^{-1} \sum_{i \in R} \sigma^i \gamma_i$, όπου $\gamma_i := \tau^{-1}(u_i^* - b_i)$ για $i \in R$.

- Ορίζουμε

$$K := \frac{\sum_{i=1}^n \sigma^i \max(a_i - x_i^*, x_i^*) + A \sum_{i=1}^n \sigma^i (a_i - x_i^*) - (A+L)h}{(1-\varepsilon)C \min_{i=1, \dots, n} ((n+1-i)\mu_i)}.$$

Έπειτα αποδεικνύουμε την πρόταση:

$$\text{Εάν } x \in \Omega = (0, \mu_1] \times \dots \times (0, \mu_n], \quad d \in [0, 1]^{n-1} \quad \text{και} \quad u \in [0, u_1^*] \times \dots \times [0, u_n^*] \quad \text{τότε } \mathcal{E}(x^+) \leq L\mathcal{E}(x) \quad (3.25)$$

όπου $L \in (0, 1)$ ορίζεται από τη (3.22) και $x^+ = \tilde{F}(d, x, u)$.

Πράγματι, χρησιμοποιώντας τη (3.21) και τον ορισμό (3.4), παίρνουμε για όλα τα $x \in \Omega = (0, \mu_1] \times \dots \times (0, \mu_n]$, $d \in [0, 1]^{n-1}$ και $u \in [0, u_1^*] \times \dots \times [0, u_n^*]$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(x^+) &= \sum_{i=2}^n \sigma^i \max(0, x_i - f_i(x_i) + (1 - p_{i-1})f_{i-1}(x_{i-1}) + u_i - x_i^*) + \\ &\quad + \sigma \max(0, x_1 - f_1(x_1) + u_1 - x_1^*) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^n \sigma^i \max(0, x_i - x_i^* + f_i(x_i^*) - f_i(x_i) + (1 - p_{i-1})f_{i-1}(x_{i-1}) + u_i - f_i(x_i^*)) \\ + \sigma \max(0, x_1 - x_1^* + f_1(x_1^*) - f_1(x_1) + u_1 - f_1(x_1^*)) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^n \sigma^i \max(0, x_i - x_i^* + f_i(x_i^*) - f_i(x_i) + u_i - u_i^* \\ + (1 - p_{i-1})(f_{i-1}(x_{i-1}) - f_{i-1}(x_{i-1}^*))) \\ + \sigma \max(0, x_1 - x_1^* + f_1(x_1^*) - f_1(x_1) + u_1 - u_1^*) \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^n \sigma^i \left[\max(0, x_i - x_i^* + f_i(x_i^*) - f_i(x_i)) \right. \\ \left. + \max(0, u_i - u_i^* + (1 - p_{i-1})(f_{i-1}(x_{i-1}) - f_{i-1}(x_{i-1}^*))) \right] \\ + \sigma \max(0, x_1 - x_1^* + f_1(x_1^*) - f_1(x_1)) + \underbrace{\sigma \max(0, u_1 - u_1^*)}_{=0} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^n \sigma^i \max(0, x_i - x_i^* + f_i(x_i^*) - f_i(x_i)) \\ + \sum_{i=2}^n \sigma^i \max(0, u_i - u_i^* + (1 - p_{i-1})(f_{i-1}(x_{i-1}) - f_{i-1}(x_{i-1}^*))) \\ + \sigma \max(0, x_1 - x_1^* + f_1(x_1^*) - f_1(x_1)) \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \sigma^i \max(0, x_i - x_i^* + f_i(x_i^*) - f_i(x_i)) + \\
& \sum_{i=2}^n \sigma^i \left[\underbrace{\max(0, u_i - u_i^*)}_{=0} + \max\left(0, (1 - p_{i-1})(f_{i-1}(x_{i-1}) - f_{i-1}(x_{i-1}^*))\right) \right] = \\
& \sum_{i=1}^n \sigma^i \max(0, x_i - x_i^* + f_i(x_i^*) - f_i(x_i)) \\
& + \sum_{i=2}^n \sigma^i \max\left(0, (1 - p_{i-1})(f_{i-1}(x_{i-1}) - f_{i-1}(x_{i-1}^*))\right) = \\
& \sum_{i=1}^n \sigma^i \max(0, x_i - f_i(x_i) + f_i(x_i^*) - x_i^*) \\
& + \sum_{i=2}^n \sigma^i (1 - p_{i-1}) \max(0, f_{i-1}(x_{i-1}) - f_{i-1}(x_{i-1}^*)) \quad (3.26)
\end{aligned}$$

Σημείωση: Στα παραπάνω βήματα χρησιμοποιήσαμε δύο γνωστές ιδιότητες,

- i) $\max(0, a + b) \leq \max(0, a) + \max(0, b)$
- ii) $\max(0, \lambda a) = \lambda \max(0, a)$, για $\lambda \geq 0$

Χρησιμοποιώντας τη (3.7), το γεγονός ότι $\mu_i \leq \tilde{\delta}_i$ για $i = 1, \dots, n$ (συνέπεια των (3.18) και (3.19)) και το γεγονός ότι η f_i είναι αύξουσα στο $[0, \tilde{\delta}_i]$ για $i = 1, \dots, n$ (συνέπεια της υπόθεσης **(H)**), λαμβάνουμε:

$$\max(0, f_i(x_i) - f_i(x_i^*)) \leq G_i \max(0, x_i - x_i^*), \quad (3.27)$$

για όλα τα $x_i \in [0, \mu_i]$, $i = 1, \dots, n$.

Χρησιμοποιώντας τις **(Σ1)**, **(Σ2)** και το γεγονός ότι $\mu_i \leq \tilde{\delta}_i$ για $i = 1, \dots, n$ (συνέπεια των (3.18) και (3.19)), λαμβάνουμε:

$$\max(0, x_i - f_i(x_i) + f_i(x_i^*) - x_i^*) \leq \lambda_i \max(0, x_i - x_i^*), \quad (3.28)$$

για όλα τα $x_i \in [0, \mu_i]$, $i = 1, \dots, n$.

Συνδυάζοντας τις (3.22), (3.26), (3.27), (3.28), λαμβάνουμε την πρόταση (3.25):

$$\begin{aligned} E(x^+) &\leq \sum_{i=1}^n \sigma^i \max(0, x_i - f_i(x_i) + f_i(x_i^*) - x_i^*) \\ &\quad + \sum_{i=2}^n \sigma^i (1 - p_{i-1}) \max(0, f_{i-1}(x_{i-1}) - f_{i-1}(x_{i-1}^*)) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sigma^i \lambda_i \max(0, x_i - x_i^*) + \sum_{i=2}^n \sigma^i (1 - p_{i-1}) G_{i-1} \max(0, x_{i-1} - x_{i-1}^*) \\ &= \sum_{i=1}^n \sigma^i \lambda_i \max(0, x_i - x_i^*) + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \sigma^{k+1} (1 - p_k) G_k \max(0, x_k - x_k^*)}_{\text{θέσαμε } k=i-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{i=1}^n \sigma^i \lambda_i \max(0, x_i - x_i^*) + \underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} \sigma^{i+1} (1 - p_i) G_i \max(0, x_i - x_i^*)}_{\text{θέσαμε } k=i} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \sigma^i [\lambda_i + \sigma G_i (1 - p_i)] \max(0, x_i - x_i^*) + \sigma^n \lambda_n \max(0, x_n - x_n^*) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n-1} \sigma^i L \max(0, x_i - x_i^*) + \sigma^n L \max(0, x_n - x_n^*) \\
&= L \sum_{i=1}^n \sigma^i \max(0, x_i - x_i^*) = L E(x).
\end{aligned}$$

Σημείωση: Στα παραπάνω βήματα χρησιμοποιήσαμε την εξής ιδιότητα,

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i + \sum_{i=1}^{n-1} b_i = \sum_{i=1}^{n-1} (a_i + b_i).$$

Οπότε αποδείξαμε την πρόταση (3.25).

Στη συνέχεια, θα δείξουμε την πρόταση:

Εάν $x \in S$, $d \in [0,1]^{n-1}$ και $u \in [0, u_1^*] \times \dots \times [0, u_n^*]$ τότε $P(x^+) \geq P(x)$, όπου $x^+ = \tilde{F}(d, x, u)$. (3.29)

Πράγματι, η (3.29) είναι άμεση συνέπεια της (3.25) και του ορισμού (3.6), όταν $x \in \Omega = (0, \mu_1] \times \dots \times (0, \mu_n]$. Από την άλλη, όταν $x \in S \setminus \Omega$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $i \in \{1, \dots, n\}$ για το οποίο $x_i > \mu_i$. Επομένως, ο ορισμός (3.4) συνεπάγεται $\Xi(x) > \min_{i=1, \dots, n} (\sigma^i (\mu_i - x_i^*))$ και επομένως ο ορισμός (3.6) μας δίνει $P(x) = Q - \theta h$ (συνέπεια του δεδομένου ότι $h = \min_{i=1, \dots, n} (\sigma^i (\mu_i - x_i^*))$). Εφόσον $P(x) \geq Q - \theta h$ για όλα τα $x \in S$ (συνέπεια της (3.6)), λαμβάνουμε $P(x^+) \geq Q - \theta h = P(x)$ όταν $x \in S \setminus \Omega$.

Σε ό, τι ακολουθεί, έχουμε $x^+ = \tilde{F}(d, x, k(x))$. Στη συνέχεια παραθέτουμε τους ακόλουθους ισχυρισμούς.

(Ισχυρισμός 1): Για όλα τα $x \in S$, $d \in [0,1]^{n-1}$, ισχύει η ακόλουθη ανισότητα:

$$V(x^+) \leq V(x) - (1 - L) \sum_{i=1}^n \sigma^i |x_i - x_i^*|. \quad (3.30)$$

Απόδειξη του Ισχυρισμού 1: Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

Περίπτωση 1: $x \in \Omega = (0, \mu_1] \times \dots \times (0, \mu_n]$, $d \in [0,1]^{n-1}$.

Ο ορισμός (3.5) και οι εξισώσεις (3.13), (3.20), (3.21) με $u_i = k_i(x) \leq u_i^*$ μας δίνουν:

$$\begin{aligned} V(x^+) &= \sigma |x_1 - f_1(x_1) + u_1 - x_1^*| + \\ &+ \sum_{i=2}^n \sigma^i |x_i - f_i(x_i) + (1 - p_{i-1})f_{i-1}(x_{i-1}) + u_i - x_i^*| + \end{aligned}$$

$$+Kmax \left(0, \sum_{i=1}^n I_i(x) - \sum_{i=1}^n (1 + (n - i)p_i)f_i(x_i) + \sum_{i=1}^n (n + 1 - i)u_i - P(x^+) \right) + A\mathcal{E}(x^+) \quad (3.31)$$

με $p_n = 1$.

Χρησιμοποιώντας τη (3.25), τη **(Σ2)**, το γεγονός ότι $\mu_i \leq \tilde{\delta}_i$ ($i = 1, \dots, n$) (συνέπεια των (3.18) και (3.19)) και τον ορισμό (3.22), λαμβάνουμε από την (3.31):

Θα εργαστούμε πρώτα ξεχωριστά στους δύο πρώτους όρους της (3.31):

$$\begin{aligned} & \sigma |x_1 - f_1(x_1) + u_1 - x_1^*| \\ & \quad + \sum_{i=2}^n \sigma^i |x_i - f_i(x_i) + (1 - p_{i-1})f_{i-1}(x_{i-1}) + u_i - x_i^*| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sigma |x_1 - x_1^* - f_1(x_1) + f_1(x_1^*) + u_1 - f_1(x_1^*)| \\ & \quad + \sum_{i=2}^n \sigma^i |x_i - x_i^* + f_i(x_i^*) - f_i(x_i) + u_i + (1 - p_{i-1})f_{i-1}(x_{i-1}) \\ & \quad - f_i(x_i^*)| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sigma |x_1 - x_1^* - f_1(x_1) + f_1(x_1^*) + u_1 - u_1^*| \\ & \quad + \sum_{i=2}^n \sigma^i |x_i - x_i^* + f_i(x_i^*) - f_i(x_i) + u_i - u_i^* \\ & \quad + (1 - p_{i-1})f_{i-1}(x_{i-1}) - (1 - p_{i-1})f_{i-1}(x_{i-1}^*)| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sigma |x_1 - x_1^* - f_1(x_1) + f_1(x_1^*)| + \sigma |u_1 - u_1^*| + \sum_{i=2}^n \sigma^i |x_i - x_i^* + f_i(x_i^*) - f_i(x_i)| \\ & \quad + \sum_{i=2}^n \sigma^i |u_i - u_i^*| + \sum_{i=2}^n \sigma^i (1 - p_{i-1}) |f_{i-1}(x_{i-1}) - f_{i-1}(x_{i-1}^*)| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \sigma^i |u_i - u_i^*| + \sum_{i=1}^n \sigma^i |x_i - x_i^* + f_i(x_i^*) - f_i(x_i)| \\ & \quad + \sum_{i=2}^n \sigma^i (1 - p_{i-1}) |f_{i-1}(x_{i-1}) - f_{i-1}(x_{i-1}^*)| \leq \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n \sigma^i |u_i - u_i^*| + \sum_{i=1}^n \sigma^i \overbrace{\lambda_i |x_i - x_i^*|}^{\text{από (3.7)}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \sigma^{k+1} (1 - p_k) |f_k(x_k) - f_k(x_k^*)|}_{\text{θέσαμε } k=i-1} \leq$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \sigma^i |u_i - u_i^*| + \sum_{i=1}^{n-1} \sigma^i \lambda_i |x_i - x_i^*| + \sigma^n \lambda_n |x_n - x_n^*| \\ & \quad + \underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} \sigma^{i+1} (1 - p_i) \overbrace{G_i |x_i - x_i^*|}^{\text{από (3.7)}}}_{\text{θέσαμε } k=i} = \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n \sigma^i |u_i - u_i^*| + \sum_{i=1}^{n-1} \sigma^i [\lambda_i + \sigma(1 - p_i) G_i] |x_i - x_i^*| + \sigma^n \lambda_n |x_n - x_n^*| \leq$$

$$\sum_{i=1}^n \sigma^i |u_i - u_i^*| + L \underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} \sigma^i |x_i - x_i^*| + \sigma^n L |x_n - x_n^*|}_{\text{από (3.22)}} =$$

$$\sum_{i=1}^n \sigma^i |u_i - u_i^*| + L \sum_{i=1}^n \sigma^i |x_i - x_i^*|.$$

Σημείωση: Στα παραπάνω βήματα χρησιμοποιήσαμε τις ακόλουθες ιδιότητες:

- i) $|a + b| \leq |a| + |b|$
- ii) $|\lambda a| = \lambda|a|, \text{ για } \lambda \geq 0$
- iii) $\sum_{i=1}^{n-1} a_i + \sum_{i=1}^{n-1} b_i = \sum_{i=1}^{n-1} (a_i + b_i)$

Οπότε από την (3.31) λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned}
 V(x^+) \leq & L \sum_{i=1}^n \sigma^i |x_i - x_i^*| + \sum_{i=1}^n \sigma^i |u_i - u_i^*| + LA\Xi(x) + \\
 & + K \max \left(0, \sum_{i=1}^n I_i(x) - \sum_{i=1}^n (1 + (n-i)p_i) f_i(x_i) + \sum_{i=1}^n (n+1-i) u_i \right. \\
 & \left. - P(x^+) \right). \tag{3.32}
 \end{aligned}$$

Από τον συνδυασμό της (3.3) και της ανισότητας (3.32), έπεται ότι ισχύει η ακόλουθη ανισότητα για όλα τα $x \in \Omega$:

$$\begin{aligned}
 V(x^+) \leq & L \sum_{i=1}^n \sigma^i |x_i - x_i^*| + \sum_{i \in R} \sigma^i \min(\gamma_i \Xi(x), u_i^* - b_i) + LA\Xi(x) + \\
 & + K \max \left(0, \sum_{i=1}^n I_i(x) - \sum_{i=1}^n (1 + (n-i)p_i) f_i(x_i) + \sum_{i=1}^n (n+1-i) u_i \right. \\
 & \left. - P(x^+) \right). \tag{3.33}
 \end{aligned}$$

Η ανισότητα (3.8) και οι εξισώσεις (3.20) συνεπάγονται ότι:

$$\sum_{i=1}^n (1 + (n - i)p_i)f_i(x_i) \geq C \sum_{i=1}^n I_i(x). \quad (3.34)$$

Χρησιμοποιώντας τις (3.33) και (3.34), λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} V(x^+) \leq & L \sum_{i=1}^n \sigma^i |x_i - x_i^*| + \sum_{i \in R} \sigma^i \min(\gamma_i \mathcal{E}(x), u_i^* - b_i) + LA\mathcal{E}(x) + \\ & + K \max \left(0, (1 - C) \sum_{i=1}^n I_i(x) + \sum_{i=1}^n (n + 1 - i)u_i - P(x^+) \right). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Στη συνέχεια διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση 1(i): $\mathcal{E}(x) \leq \tau$.

Σε αυτή τη περίπτωση έχουμε $\gamma_i \mathcal{E}(x) \leq u_i^* - b_i$ για όλα τα $i \in R$. Εφόσον $\mathcal{E}(x) \leq h$ (συνέπεια του $\tau < \tau^* \leq h$), λαμβάνουμε από την (3.25) και τον ορισμό (3.3) ότι $u_i = k_i(x) = u_i^* - \gamma_i \mathcal{E}(x) \geq b_i$ για όλα τα $i \in R$ και $\min(h, \mathcal{E}(x^+)) = \mathcal{E}(x^+) \leq L\mathcal{E}(x) = L \min(h, \mathcal{E}(x))$ (διότι εάν $\mathcal{E}(x^+) > h$ τότε $\mathcal{E}(x) \geq L^{-1}\mathcal{E}(x^+) > L^{-1}h > h$, Άτοπο). Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς

$$I_j(x) := \sum_{i=1}^j x_i, \text{ για } j = 1, \dots, n, \quad P(x) := Q - \theta \min(h, \mathcal{E}(x))$$

και τα δεδομένα

- $Q \geq (1 - C) \sum_{i=1}^n I_i(x^*) + (1 - C)h \max_{i=1, \dots, n} \left((n + 1 - i)\sigma^{-i} \right) +$

- $$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^n (n+1-i)u_i^*, \\
\bullet \quad \sum_{i \in R} (n+1-i)\gamma_i &= \tau^{-1} \sum_{i \in R} (n+1-i)(u_i^* - b_i) \geq \\
& \geq (\tau^*)^{-1} \sum_{i \in R} (n+1-i)(u_i^* - b_i) \geq \theta L \text{ (συνέπεια του } \tau \leq \tau^* \leq \\
& \leq (\theta L)^{-1} \sum_{i \in R} (n+1-i)(u_i^* - b_i)),
\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}
\bullet \quad \sum_{i=1}^n (n+1-i)(x_i - x_i^*) &\leq \sum_{i=1}^n \left((n+1-i)\sigma^{-i} \right) \sigma^i \max(0, x_i - x_i^*) \\
&\leq \max_{i=1, \dots, n} \left((n+1-i)\sigma^{-i} \right) \mathbb{E}(x) \text{ για } i = 1, \dots, n \text{ (συνέπεια του} \\
&\text{ορισμού (3.4)),}
\end{aligned}$$

λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned}
Q &\geq (1-C) \sum_{i=1}^n I_i(x^*) + (1-C)h \max_{i=1, \dots, n} \left((n+1-i)\sigma^{-i} \right) + \\
&\quad + \sum_{i=1}^n (n+1-i)u_i^* \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q &\geq (1-C) \sum_{i=1}^n I_i(x^*) + (1-C)\mathbb{E}(x) \max_{i=1, \dots, n} \left((n+1-i)\sigma^{-i} \right) + \\
&\quad + \sum_{i=1}^n (n+1-i)u_i^* \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q &\geq \theta L \mathbb{E}(x) - \sum_{i \in R} (n+1-i)\gamma_i \mathbb{E}(x) + (1-C) \sum_{i=1}^n I_i(x^*) + \\
&\quad + (1-C) \sum_{i=1}^n (n+1-i)(x_i - x_i^*) + \sum_{i=1}^n (n+1-i)u_i^* \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$Q \geq \theta \min(h, \mathbb{E}(x^+)) + (1-C) \sum_{i=1}^n I_i(x) + \sum_{i \in R} (n+1-i) \left(\underbrace{u_i^* - \gamma_i \mathbb{E}(x)}_{=u_i} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i \notin R} (n+1-i)u_i^* \Rightarrow \\
0 & \geq \sum_{i=1}^n (n+1-i)u_i + (1-C) \sum_{i=1}^n I_i(x) - P(x^+).
\end{aligned}$$

Σημείωση:

$$\sum_{i=1}^n (n+1-i)u_i = \sum_{i \in R} (n+1-i)u_i + \sum_{i \notin R} (n+1-i)u_i^*.$$

Συνδυάζοντας την (3.35) με την παραπάνω ανισότητα, λαμβάνουμε:

$$V(x^+) \leq L \sum_{i=1}^n \sigma^i |x_i - x_i^*| + \sum_{i \in R} \sigma^i \gamma_i \bar{E}(x) + LA\bar{E}(x). \quad (3.36)$$

Από την (3.36) και το γεγονός ότι $A \geq (1-L)^{-1} \sum_{i \in R} \sigma^i \gamma_i$ έπεται ότι ισχύει η (3.30) όταν $\bar{E}(x) \leq \tau$.

$$\begin{aligned}
V(x^+) & \leq L \sum_{i=1}^n \sigma^i |x_i - x_i^*| + \sum_{i \in R} \sigma^i \gamma_i \bar{E}(x) + LA\bar{E}(x) \\
& = V(x) + L \sum_{i=1}^n \sigma^i |x_i - x_i^*| + \sum_{i \in R} \sigma^i \gamma_i \bar{E}(x) + LA\bar{E}(x) - \sum_{i=1}^n \sigma^i |x_i - x_i^*| \\
& \quad - A\bar{E}(x) - K \max \left(0, \sum_{i=1}^n I_i(x) - P(x) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= V(x) - (1 - L) \sum_{i=1}^n \sigma^i |x_i - x_i^*| + \left(LA + \sum_{i \in R} \sigma^i \gamma_i - A \right) \Xi(x) \\
&\quad - K \max \left(0, \sum_{i=1}^n I_i(x) - P(x) \right) \\
&\leq V(x) - (1 - L) \sum_{i=1}^n \sigma^i |x_i - x_i^*| + \underbrace{\left(LA + \sum_{i \in R} \sigma^i \gamma_i - A \right)}_{\leq 0} \Xi(x) \\
&\leq V(x) - (1 - L) \sum_{i=1}^n \sigma^i |x_i - x_i^*|.
\end{aligned}$$

Σημείωση:

$$LA + \sum_{i \in R} \sigma^i \gamma_i - A \leq 0, \quad \text{γιατί } A \geq \frac{\sum_{i \in R} \sigma^i \gamma_i}{1 - L}.$$

Οπότε αποδείξαμε ότι ισχύει η (3.30) όταν $\Xi(x) \leq \tau$.

Περίπτωση 1(ii): $\Xi(x) > \tau$.

Σε αυτή τη περίπτωση $\gamma_i \Xi(x) > u_i^* - b_i$ για όλα τα $i \in R$. Ο ορισμός (3.3) συνεπάγεται ότι $k_i(x) = b_i$ για όλα τα $i \in R$. Επιπλέον, σε αυτή τη περίπτωση υπάρχει τουλάχιστον ένα $i \in \{1, \dots, n\}$ για το οποίο $x_i > x_i^*$. Δεδομένου ότι η f_i είναι αύξουσα στο $[0, \mu_i]$ για $i = 1, \dots, n$ (συνέπεια της **(H)** και του δεδομένου ότι $\mu_i \leq \tilde{\delta}_i$), καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $i \in \{1, \dots, n\}$ για το οποίο $f_i(x_i) > f_i(x_i^*)$. Ως εκ τούτου, από την (3.24) και το γεγονός ότι $u_i = k_i(x) = b_i$ για όλα τα $i \in R$, λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (n+1-i)u_i &= \sum_{i \in R} (n+1-i)b_i + \sum_{i \notin R} (n+1-i)u_i^* \leq \\ &\leq \min_{i=1, \dots, n} \left(((n-i)p_i + 1)f_i(x_i^*) \right) \leq \sum_{i=1}^n ((n-i)p_i + 1)f_i(x_i^*). \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τις (3.29), (3.33) με την παραπάνω ανισότητα και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $A \geq (1-L)^{-1} \sum_{i \in R} \sigma^i \gamma_i$, καταλήγουμε ότι ισχύει η (3.30) όταν $E(x) > \tau$.

$$\begin{aligned} V(x^+) &\leq L \sum_{i=1}^n \sigma^i |x_i - x_i^*| + \sum_{i \in R} \sigma^i \min(\gamma_i E(x), u_i^* - b_i) + LAE(x) \\ &\quad + K \max \left(0, \sum_{i=1}^n I_i(x) - \sum_{i=1}^n (1 + (n-i)p_i) f_i(x_i) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^n (n+1-i)u_i - P(x^+) \right) \\ &= V(x) + L \sum_{i=1}^n \sigma^i |x_i - x_i^*| + \sum_{i \in R} \sigma^i (u_i^* - b_i) + LAE(x) - \sum_{i=1}^n \sigma^i |x_i - x_i^*| \\ &\quad - AE(x) - K \max \left(0, \sum_{i=1}^n I_i(x) - P(x) \right) \\ &\quad + K \max \left(0, \sum_{i=1}^n I_i(x) - \underbrace{\sum_{i=1}^n (1 + (n-i)p_i) f_i(x_i) + \sum_{i=1}^n (n+1-i)u_i}_{\leq 0} \right. \\ &\quad \left. - P(x^+) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq V(x) - (1-L) \sum_{i=1}^n \sigma^i |x_i - x_i^*| + (LA - A)\mathcal{E}(x) + \sum_{i \in R} \sigma^i (u_i^* - b_i) \\ &\quad - K \max \left(0, \sum_{i=1}^n I_i(x) - P(x) \right) \\ &\quad + K \max \left(0, \sum_{i=1}^n I_i(x) \underbrace{- P(x^+)}_{\leq -P(x) \text{ από (3.29)}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq V(x) - (1-L) \sum_{i=1}^n \sigma^i |x_i - x_i^*| + (LA - A)\mathcal{E}(x) + \sum_{i \in R} \sigma^i (u_i^* - b_i) \\ &\quad - K \max \left(0, \sum_{i=1}^n I_i(x) - P(x) \right) + K \max \left(0, \sum_{i=1}^n I_i(x) - P(x) \right) \end{aligned}$$

$$= V(x) - (1-L) \sum_{i=1}^n \sigma^i |x_i - x_i^*| + (LA - A)\mathcal{E}(x) + \sum_{i \in R} \sigma^i (u_i^* - b_i)$$

$$\leq V(x) - (1-L) \sum_{i=1}^n \sigma^i |x_i - x_i^*| + (LA - A)\mathcal{E}(x) + \sum_{i \in R} \sigma^i \gamma_i \mathcal{E}(x)$$

$$= V(x) - (1-L) \sum_{i=1}^n \sigma^i |x_i - x_i^*| + \underbrace{\left(LA - A + \sum_{i \in R} \sigma^i \gamma_i \right)}_{\leq 0} \mathcal{E}(x)$$

$$\leq V(x) - (1-L) \sum_{i=1}^n \sigma^i |x_i - x_i^*|.$$

Οπότε αποδείξαμε τη (3.30) όταν $\mathcal{E}(x) > \tau$.

Περίπτωση 2: $x \in S \setminus \Omega$, $d \in [0,1]^{n-1}$.

Σε αυτή τη περίπτωση, υπάρχει τουλάχιστον ένα $i \in \{1, \dots, n\}$ για το οποίο $x_i > \mu_i$. Ως εκ τούτου, ο ορισμός (3.4) συνεπάγεται ότι

$$\Xi(x) > h = \min_{i=1, \dots, n} \left(\sigma^i(\mu_i - x_i^*) \right),$$

και συνεπώς ο ορισμός (3.6) δίνει $P(x) = Q - \theta h$.

Επιπλέον, ο ορισμός (3.3) δίνει $k_i(x) = b_i$ για όλα τα $i \in R$ (άμεση συνέπεια του δεδομένου ότι $\tau < \tau^* \leq h$ και $\gamma_i = \tau^{-1}(u_i^* - b_i) \geq h^{-1}(u_i^* - b_i)$). Συνδυάζοντάς τα, λαμβάνουμε από τον ορισμό (3.5) και την (3.29):

$$\begin{aligned} V(x^+) &= \sum_{i=1}^n \sigma^i |x_i^+ - x_i^*| + A\Xi(x^+) + K \max \left(0, \sum_{i=1}^n I_i(x^+) - P(x^+) \right) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sigma^i |x_i^+ - x_i^*| + K \max \left(0, \sum_{i=1}^n I_i(x^+) - Q + \theta h \right) + A\Xi(x^+) \quad (3.37) \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την (3.14), το γεγονός ότι $u_i = k_i(x) = b_i$ για όλα τα $i \in R$, $Q - \theta h = \varepsilon \min_{i=1, \dots, n} ((n+1-i)\mu_i)$ και

$$\sum_{i \in R} (n+1-i)b_i + \sum_{i \notin R} (n+1-i)u_i^* \leq \varepsilon C \min_{i=1, \dots, n} ((n+1-i)\mu_i)$$

(όπου και οι δύο συνεπάγονται ότι

$$\sum_{i \in R} (n+1-i)b_i + \sum_{i \notin R} (n+1-i)u_i^* \leq C(Q - \theta h),$$

λαμβάνουμε:

$$\sum_{i=1}^n I_i(x^+) \leq (1-C) \sum_{i=1}^n I_i(x) + \sum_{i=1}^n (n+1-i)u_i \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^n I_i(x^+) \leq (1-C) \sum_{i=1}^n I_i(x) + \sum_{i \in R} (n+1-i)b_i + \sum_{i \notin R} (n+1-i)u_i^* \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^n I_i(x^+) \leq (1-C) \sum_{i=1}^n I_i(x) + C(Q - \theta h) \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^n I_i(x^+) - Q + \theta h \leq (1-C) \sum_{i=1}^n I_i(x) + C(Q - \theta h) - (Q - \theta h) \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^n I_i(x^+) - Q + \theta h \leq (1-C) \sum_{i=1}^n I_i(x) - (1-C)(Q - \theta h) \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^n I_i(x^+) - Q + \theta h \leq (1-C) \left[\sum_{i=1}^n I_i(x) - Q + \theta h \right].$$

Οπότε,

$$\max\left(0, \sum_{i=1}^n I_i(x^+) - Q + \theta h\right) \leq (1-C) \max\left(0, \sum_{i=1}^n I_i(x) - Q + \theta h\right). \quad (3.38)$$

Σημείωση: Χρησιμοποιήσαμε τις ακόλουθες ιδιότητες:

- i) $a \leq b \Rightarrow \max(0, a) \leq \max(0, b)$
- ii) $\max(0, \lambda a) = \lambda \max(0, a)$, για $\lambda \geq 0$

Συνδυάζοντας τις (3.37) και (3.38), λαμβάνουμε:

$$V(x^+) \leq \sum_{i=1}^n \sigma^i |x_i^+ - x_i^*| + K(1 - C) \max\left(0, \sum_{i=1}^n I_i(x) - Q + \theta h\right) + A\Xi(x^+) \quad (3.39)$$

Ο ορισμός (3.4) σε συνδυασμό με την (3.39) συνεπάγεται ότι ισχύει η ακόλουθη ανισότητα:

$$V(x^+) \leq \sum_{i=1}^n \sigma^i \max(a_i - x_i^*, x_i^*) + K(1 - C) \max\left(0, \sum_{i=1}^n I_i(x) - Q + \theta h\right) + A \sum_{i=1}^n \sigma^i \max(0, x_i^+ - x_i^*) \Rightarrow$$

$$V(x^+) \leq \sum_{i=1}^n \sigma^i \max(a_i - x_i^*, x_i^*) + K(1 - C) \max\left(0, \sum_{i=1}^n I_i(x) - Q + \theta h\right) + A \sum_{i=1}^n \sigma^i (a_i - x_i^*) \quad (3.40)$$

Σημείωση: Ισχύει,

$$0 \leq x_i^+ \leq a_i \Rightarrow -x_i^* \leq x_i^+ - x_i^* \leq a_i - x_i^*.$$

Άρα

$$\max(0, x_i^+ - x_i^*) \leq \max(0, a_i - x_i^*) = a_i - x_i^*$$

και

$$|x_i^+ - x_i^*| \leq \max(a_i - x_i^*, x_i^*).$$

Το γεγονός ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $i \in \{1, \dots, n\}$ για το οποίο $x_i > \mu_i$, συνεπάγεται ότι

$$\sum_{i=1}^n I_i(x) = \sum_{i=1}^n (n+1-i)x_i \geq \min_{i=1,\dots,n} ((n+1-i)\mu_i). \quad (3.41)$$

Χρησιμοποιώντας τις (3.40), (3.41) και το γεγονός ότι

$$Q - \theta h = \varepsilon \min_{i=1,\dots,n} ((n+1-i)\mu_i),$$

λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} V(x^+) &\leq \sum_{i=1}^n \sigma^i \max(a_i - x_i^*, x_i^*) + K \max\left(0, \sum_{i=1}^n I_i(x) - Q + \theta h\right) + \\ &+ A \sum_{i=1}^n \sigma^i (a_i - x_i^*) - KC(1-\varepsilon) \min_{i=1,\dots,n} ((n+1-i)\mu_i). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Εφόσον,

$$\begin{aligned} K &\geq \frac{\sum_{i=1}^n \sigma^i \max(a_i - x_i^*, x_i^*) + A \sum_{i=1}^n \sigma^i (a_i - x_i^*) - (A+L)h}{(1-\varepsilon)C \min_{i=1,\dots,n} ((n+1-i)\mu_i)}, \\ &\sum_{i=1}^n \sigma^i |x_i - x_i^*| \geq \varepsilon(x) > h, \end{aligned}$$

καταλήγουμε από την (3.42) και τον ορισμό (3.5) ότι ισχύει η (3.30).

$$\begin{aligned} V(x^+) &\leq \sum_{i=1}^n \sigma^i \max(a_i - x_i^*, x_i^*) + K \max\left(0, \sum_{i=1}^n I_i(x) - Q + \theta h\right) \\ &+ A \sum_{i=1}^n \sigma^i (a_i - x_i^*) - KC(1-\varepsilon) \min_{i=1,\dots,n} ((n+1-i)\mu_i) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(x^+) &\leq V(x) + \sum_{i=1}^n \sigma^i \max(a_i - x_i^*, x_i^*) + K \max\left(0, \sum_{i=1}^n I_i(x) - Q + \theta h\right) \\
&\quad + A \sum_{i=1}^n \sigma^i (a_i - x_i^*) - \sum_{i=1}^n \sigma^i |x_i - x_i^*| - A\mathcal{E}(x) \\
&\quad - K \max\left(0, \sum_{i=1}^n I_i(x) - P(x)\right) \\
&\quad - KC(1 - \varepsilon) \min_{i=1, \dots, n} ((n + 1 - i)\mu_i) \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(x^+) &\leq V(x) + \sum_{i=1}^n \sigma^i \max(a_i - x_i^*, x_i^*) + A \sum_{i=1}^n \sigma^i (a_i - x_i^*) \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \sigma^i |x_i - x_i^*| - A\mathcal{E}(x) - KC(1 - \varepsilon) \min_{i=1, \dots, n} ((n + 1 - i)\mu_i) \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(x^+) &\leq V(x) + \sum_{i=1}^n \sigma^i \max(a_i - x_i^*, x_i^*) + A \sum_{i=1}^n \sigma^i (a_i - x_i^*) \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \sigma^i |x_i - x_i^*| - A\mathcal{E}(x) - \sum_{i=1}^n \sigma^i \max(a_i - x_i^*, x_i^*) \\
&\quad - A \sum_{i=1}^n \sigma^i (a_i - x_i^*) + (A + L)h \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$V(x^+) \leq V(x) - \sum_{i=1}^n \sigma^i |x_i - x_i^*| - A\mathcal{E}(x) + (A + L)h \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
V(x^+) &\leq V(x) - \sum_{i=1}^n \sigma^i |x_i - x_i^*| - A \sum_{i=1}^n \sigma^i |x_i - x_i^*| + (A + L) \sum_{i=1}^n \sigma^i |x_i - x_i^*| \\
&\hspace{20em} \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$V(x^+) \leq V(x) - (1 + A - A - L) \sum_{i=1}^n \sigma^i |x_i - x_i^*| \Rightarrow$$

$$V(x^+) \leq V(x) - (1 - L) \sum_{i=1}^n \sigma^i |x_i - x_i^*|.$$

Η απόδειξη είναι πλήρης. ■

(Ισχυρισμός 2): Υπάρχουν σταθερές $K_2 \geq K_1 > 0$ έτσι ώστε να ισχύει η ακόλουθη ανισότητα:

$$K_1 |x - x^*| \leq V(x) \leq K_2 |x - x^*| \text{ για όλα τα } x \in S. \quad (3.43)$$

Απόδειξη του Ισχυρισμού 2: Εφόσον $\sigma \in (0,1]$, λαμβάνουμε για όλα τα $x \in S$:

$$\sigma^n |x - x^*| \leq \sum_{i=1}^n \sigma^i |x_i - x_i^*| \leq |x - x^*| \sum_{i=1}^n \sigma^i. \quad (3.44)$$

Ομοίως, χρησιμοποιώντας τον ορισμό (3.4), λαμβάνουμε για όλα τα $x \in S$:

$$0 \leq E(x) \leq \sum_{i=1}^n \sigma^i |x_i - x_i^*| \leq |x - x^*| \sum_{i=1}^n \sigma^i. \quad (3.45)$$

Χρησιμοποιώντας την (3.45), το γεγονός ότι

$$I_j(x) := \sum_{i=1}^j x_i, \quad \text{για } j = 1, \dots, n,$$

τον ορισμό (3.6) και το γεγονός ότι

$$Q \geq \sum_{i=1}^n I_i(x^*)$$

(συνέπεια της (3.14) η οποία για $x = x^*, u_i = u_i^*$ τότε $x^+ = x^*$ και άρα η σχέση γίνεται

$$\sum_{i=1}^n I_i(x^*) \leq (1 - C) \sum_{i=1}^n I_i(x^*) + \sum_{i=1}^n (n + 1 - i)u_i^*$$

και δεδομένου ότι

$$Q \geq (1 - C) \sum_{i=1}^n I_i(x^*) + \sum_{i=1}^n (n + 1 - i)u_i^* \quad),$$

λαμβάνουμε για όλα τα $x \in S$:

$$\max\left(0, \sum_{i=1}^n I_i(x) - P(x)\right) \leq$$

$$\max\left(0, \sum_{i=1}^n I_i(x) - \sum_{i=1}^n I_i(x^*)\right) + \max\left(0, \sum_{i=1}^n I_i(x^*) - P(x)\right) \leq$$

$$\max\left(0, \sum_{i=1}^n (n+1-i)(x_i - x_i^*)\right) + \max\left(0, \sum_{i=1}^n I_i(x^*) - Q + \theta \min(h, \mathcal{E}(x))\right) \leq$$

$$\sum_{i=1}^n (n+1-i)|x_i - x_i^*| + \max\left(0, \sum_{i=1}^n I_i(x^*) - Q\right) + \theta \min(h, \mathcal{E}(x)) \leq$$

$$\sum_{i=1}^n (n+1-i)|x_i - x_i^*| + \theta \mathcal{E}(x) \leq$$

$$|x - x^*| \sum_{i=1}^n (n+1-i) + \theta |x - x^*| \sum_{i=1}^n \sigma^i \quad (3.46)$$

Έπεται από τον ορισμό (3.5) και τις (3.44), (3.45), (3.46) ότι υπάρχουν σταθερές $K_2 \geq K_1 > 0$ τέτοιες ώστε να ισχύει η ανισότητα (3.43). Η απόδειξη είναι πλήρης. ■

Χρησιμοποιώντας τη (3.30), το γεγονός ότι $\sigma \in (0,1]$ και τη (3.43), λαμβάνουμε για όλα τα $x \in S$, $d \in [0,1]^{n-1}$:

$$V(x^+) \leq V(x) - (1-L) \sum_{i=1}^n \sigma^i |x_i - x_i^*| \leq V(x) - (1-L)\sigma^n |x - x^*| \leq$$

$$\leq (1 - (1-L)\sigma^n K_2^{-1})V(x).$$

Η παραπάνω ανισότητα συνεπάγεται ότι η ανισότητα

$$V\left(\tilde{F}(d, x, k(x))\right) \leq \tilde{L}V(x) \text{ για όλα τα } x \in S, d \in [0,1]^{n-1} \quad (3.47)$$

ισχύει με $\tilde{L} := 1 - (1 - L)\sigma^n K_2^{-1}$. Παρατηρήστε ότι $\tilde{L} \in (0,1)$.

Οι ανισότητες (3.43) και (3.47) μας δείχνουν ότι η συνάρτηση $V: S \rightarrow \mathfrak{R}_+$ είναι μία συνάρτηση Lyapunov με εκθέτη 1 για το σύστημα κλειστού βρόχου (1.15) με $u = k(x)$. Η Πρόταση 2.8 εγγυάται ότι το x^* είναι RGES για το σύστημα κλειστού βρόχου (1.15) με $u = k(x)$. Η απόδειξη είναι πλήρης. ■

Παρατήρηση 3.2: Η απόδειξη του Θεωρήματος 3.1 μας παρέχει μια μεθοδολογία για την απόκτηση μιας εκτίμησης του συνόλου $R \subseteq \{1, \dots, n\}$, της σταθεράς $\sigma \in (0,1]$ και της κρίσιμης σταθεράς $\tau^* > 0$. Έστω $r_i = u_i^*$ για $i = 2, \dots, n$ και έστω $C > 0$ η σταθερά που εμπλέκεται στη (3.8). Επιλέγουμε $R \subseteq \{1, \dots, n\}$ υποσύνολο του συνόλου όλων των δεικτών $i \in \{1, \dots, n\}$, για το οποίο $u_i^* > 0$ και για το οποίο υπάρχει $b_i \in (0, u_i^*)$ έτσι ώστε:

$$\sum_{i \in R} (n+1-i)b_i + \sum_{i \notin R} (n+1-i)u_i^* \leq \min_{i=1, \dots, n} \left(((n-i)p_i + 1)f_i(x_i^*) \right)$$

και

$$\sum_{i \in R} (n+1-i)b_i + \sum_{i \notin R} (n+1-i)u_i^* < C \min_{i=1, \dots, n} \left((n+1-i)\mu_i \right)$$

όπου $\mu_i > x_i^*$, για $i = 1, \dots, n$, είναι οι σταθερές που ορίζονται στη (3.18). Έστω $\varepsilon \in (0,1)$ μια σταθερά η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$\sum_{i \in R} (n+1-i)b_i + \sum_{i \notin R} (n+1-i)u_i^* \leq \varepsilon C \min_{i=1, \dots, n} \left((n+1-i)\mu_i \right).$$

Η εκτίμηση της κρίσιμης σταθεράς $\tau^* > 0$ μπορεί να γίνει με τον ακόλουθο τρόπο:

- Επιλέγουμε $\sigma \in (0,1]$ έτσι ώστε

$$L = \max\left(\lambda_n, \max_{i=1, \dots, n-1} (\lambda_i + \sigma G_i(1 - p_i))\right) < 1$$

όπου $\lambda_i \in (0,1)$, $G_i \in [0,1]$ ($i = 1, \dots, n$), είναι οι σταθερές που εμπλέκονται στη **(Σ2)**.

- Ορίζουμε $h := \min_{i=1, \dots, n} (\sigma^i (\mu_i - x_i^*))$.

- Ορίζουμε

$$Q := \max\left(\min_{i=1, \dots, n} (\mu_i(n+1-i)), (1-C) \sum_{i=1}^n I_i(x^*) + (1-C)h \max_{i=1, \dots, n} ((n+1-i)\sigma^{-i}) + \sum_{i=1}^n (n+1-i)u_i^*\right)$$

και

$$\theta := h^{-1} \left(Q - \varepsilon \min_{i=1, \dots, n} ((n+1-i)\mu_i) \right)$$

όπου

$$I_j(x) := \sum_{i=1}^j x_i \quad \text{για } j = 1, \dots, n.$$

Η εκτιμώμενη τιμή της $\tau^* > 0$ δίνεται από τη σχέση

$$\tau^* := \min\left(h, (\theta L)^{-1} \sum_{i \in R} (n+1-i)(u_i^* - b_i)\right).$$

Ωστόσο, η εκτιμώμενη τιμή της $\tau^* > 0$, η οποία προκύπτει από την εφαρμογή της παραπάνω μεθοδολογίας, μπορεί να είναι συντηρητική (σημαντικά μικρότερη από την πραγματική τιμή).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Θεωρούμε ένα μοντέλο αυτοκινητοδρόμου της μορφής (1.11), (1.12), (1.13) και (1.8) με $n = 4$ κελιά. Οι χρονικά μεταβαλλόμενοι παράμετροι $d_i(t) \in [0,1], i = 2,3,4$ που εμφανίζονται στη σχέση (1.8) ορίστηκαν ως $d_2 = |\sin t|, d_3 = |\cos t|$ και $d_4 = 1$. Το πρώτο και το τρίτο κελί έχουν από μία ράμπα εισόδου ενώ το δεύτερο κελί έχει μία ράμπα εξόδου (δηλαδή, $u_2 = u_4 = 0, u_3 = 0.1$ και $p_1 = p_3 = 0, p_2 = 0.1$). Η εισροή u_1 του πρώτου κελιού θα ελεγχθεί για τη σταθεροποίηση του μη κορεσμένου σημείου ισορροπίας του συγκεκριμένου αυτοκινητοδρόμου.

Κάθε κελί έχει πυκνότητα συνωστισμού $a_i = 10$ [veh] για $i = 1,2,3,4$ και χαρακτηρίζεται από τις ίδιες συναρτήσεις ζήτησης που δίνονται από:

$$f_i(x) = \begin{cases} k_i x & \text{για } 0 \leq x \leq \delta_i \\ k_i \delta_i - \mu_i (x - \delta_i) & \text{για } \delta_i < x \leq a_i \end{cases} \quad (i = 1, \dots, 4)$$

όπου, $0 < k_i < 1$ και $k_i \delta_i - \mu_i (a_i - \delta_i) > 0$. Για το παράδειγμά μας δώσαμε τις τιμές $k_i = 0.5, \delta_i = 5$ για $i = 1, \dots, 4, \mu_i = 0.4$ για $i = 1,2,3$ και $\mu_4 = 0.1$. Υποθέτουμε επίσης ότι η ικανότητα ροής των κελιών είναι $q_i = 10$ [veh] για $i = 1, \dots, 4$ και η ταχύτητα συμφόρησης είναι $c_i = 1$ για $i = 1, \dots, 4$.

Η υπόθεση **(H)** ισχύει με $\delta_i = \tilde{\delta}_i = 5$ [veh] ($i = 1, \dots, 4$) και $L_i = 1/2$ ($i = 1, \dots, 4$). Από την προσομοίωση βρήκαμε ότι το μη κορεσμένο σημείο ισορροπίας είναι $x_i^* = 2$ [veh] ($i = 1, \dots, 4$) που υπάρχει για $u_1^* = 1$ [veh]. Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε και θεωρητικά λύνοντας τις εξισώσεις (3.1) και (3.2). Πράγματι η (3.1) μας δίνει:

$$f_1(x_1^*) = u_1^* \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} * x_1^* = 1 \Rightarrow$$

$$x_1^* = 2.$$

Επίσης βλέπουμε ότι ισχύει η (3.2):

$$u_1^* < \min(q_1, c_1(a_1 - x_1^*)) \Rightarrow$$

$$1 < \min(10, 1 * (10 - 2)) = 8.$$

Για $i = 2$ βρίσκουμε από τη (3.1):

$$f_2(x_2^*) = u_2^* + (1 - p_1)f_1(x_1^*) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} * x_2^* = 0 + (1 - 0) * 1 \Rightarrow$$

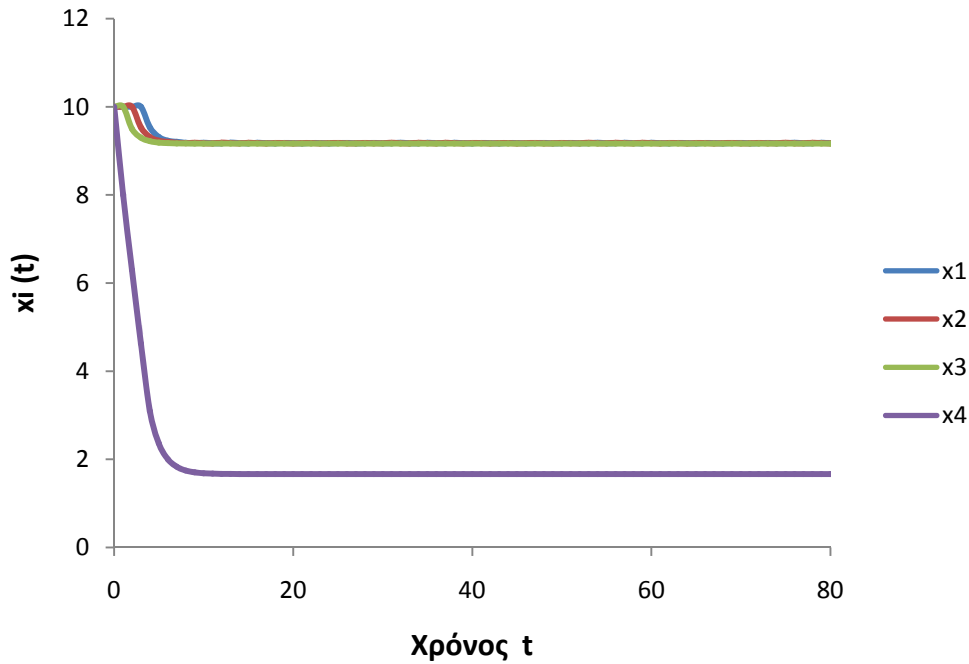
$$x_2^* = 2.$$

Επίσης βλέπουμε ότι ισχύει η (3.2):

$$u_2^* + (1 - p_1)f_1(x_1^*) < \min(q_2, c_2(a_2 - x_2^*)) \Rightarrow$$

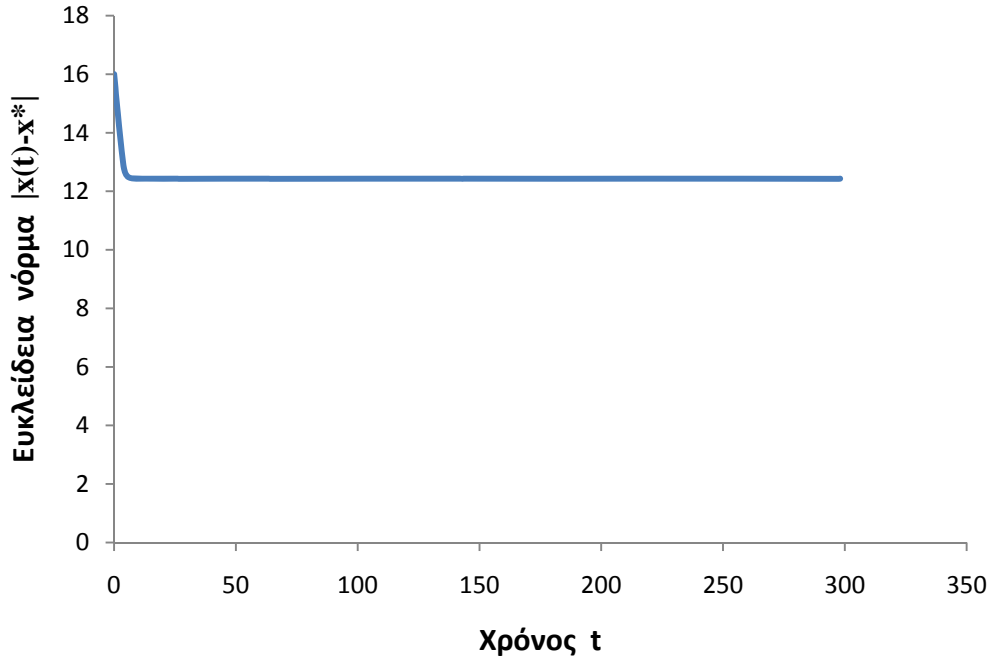
$$0 + 1 < \min(10, 1 * (10 - 2)) = 8.$$

Ομοίως εργαζόμαστε για $i = 3, 4$ και βρίσκουμε $x_3^* = 2$ και $x_4^* = 2$.



Σχήμα 4: Σχηματική απεικόνιση των x_i ($i = 1, \dots, 4$) με το χρόνο t για το σύστημα ανοικτού βρόχου με αρχική κατάσταση $x_0 = (10, 10, 10, 10)'$ και $u_1 = 1$.

Από το Σχήμα 4 φαίνεται ότι το σημείο ισορροπίας $x^* = (2, 2, 2, 2)$ δεν είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές. Πιο συγκεκριμένα, υπάρχουν αρχικές συνθήκες για τις οποίες η λύση οδηγείται σε άλλο σημείο ισορροπίας στο οποίο υπάρχει συμφόρηση.



Σχήμα 5: Σχηματική απεικόνιση της εξέλιξης της Ευκλείδειας νόρμας της απόκλισης των x_i ($i = 1, \dots, 4$) από τη μη κορεσμένη ισορροπία, δηλαδή $|x(t) - x^*|$, για το σύστημα ανοικτού βρόχου με αρχική κατάσταση $x_0 = (10, 10, 10, 10)'$ και $u_1 = 1$.

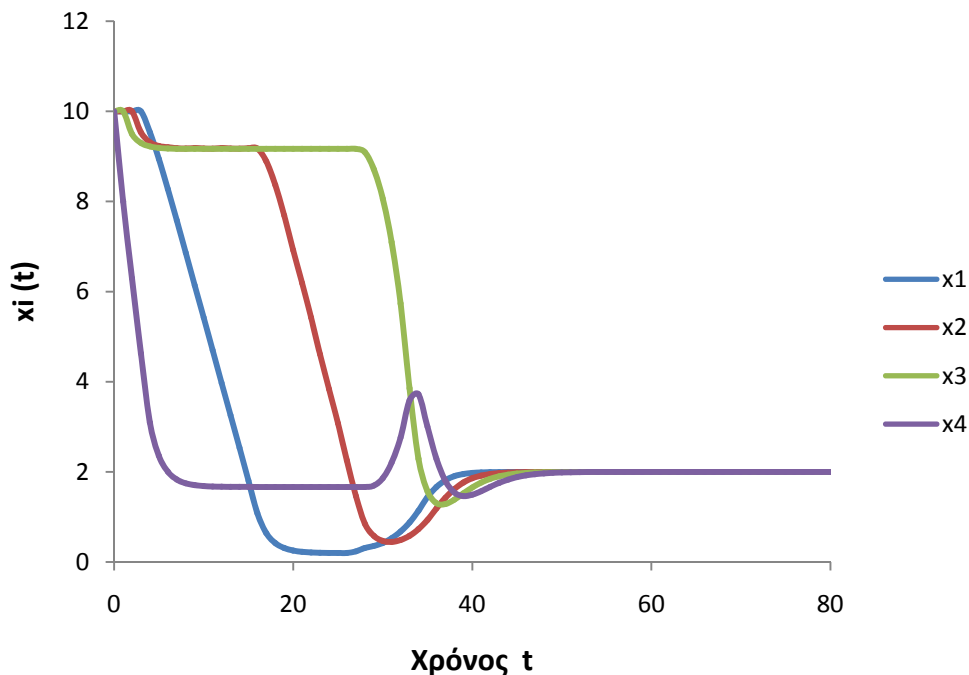
Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι ισχύει η **(Σ2)** με $\lambda_i = 1/2$ και $G_i = 1/2$ ($i = 1, \dots, 4$). Επομένως, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.1, είμαστε σε θέση να πετύχουμε ολική εκθετική σταθεροποίηση του μη κορεσμένου σημείου ισορροπίας για το μοντέλο. Πράγματι, το Θεώρημα 3.1 εγγυάται ότι για κάθε $\sigma \in (0, 1]$, υπάρχουν μία σταθερά $b_1 \in (0, u_1^*)$ και μία σταθερά $\gamma > 0$ τέτοιες ώστε ο νόμος ανάδρασης $k: (0, 10]^4 \rightarrow \mathbb{R}_+^4$ που ορίζεται από

$$u_1 = \max \left(u_1^* - \gamma \sum_{i=1}^4 \sigma^i \max(0, x_i - x_i^*), b_1 \right) \quad (4.1)$$

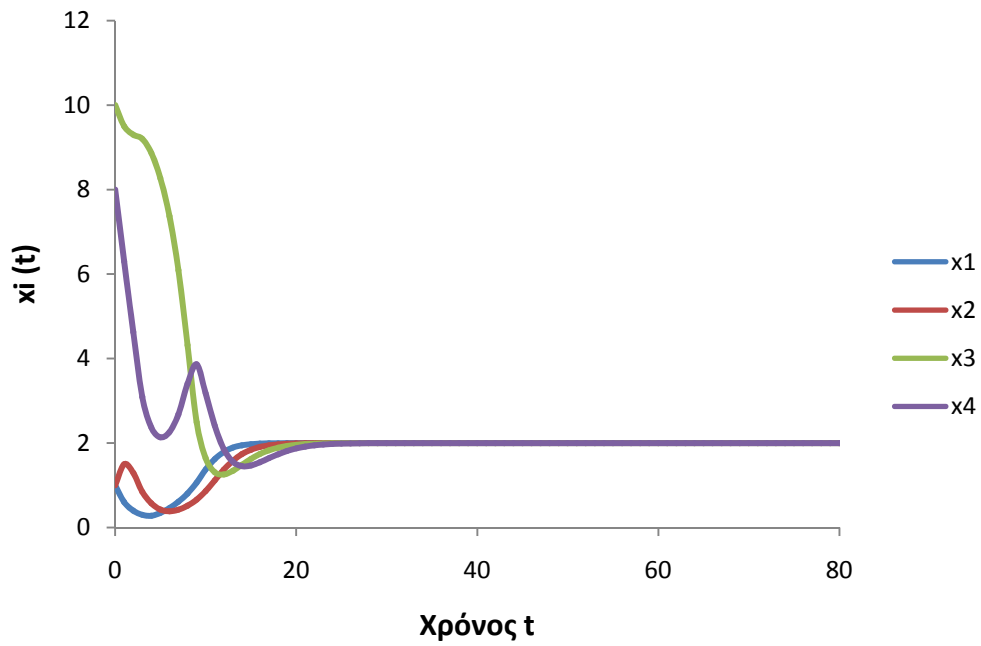
να επιτυγχάνει εύρωστη ολική εκθετική σταθεροποίηση του μη κορεσμένου σημείου ισορροπίας $x^* = (x_1^*, \dots, x_4^*)' \in (0, 5)^4$ για το σύστημα κλειστού βρόχου. Η τιμή της σταθεράς $b_1 \in (0, u_1^*)$ επελέγη να είναι 0.1 [veh], που

είναι μάλλον χαμηλή τιμή ελάχιστης ροής στην πράξη αλλά μας επιτρέπει εδώ να μελετήσουμε τις δυναμικές ιδιότητες των ρυθμιστών σε μια ευρύτερη εφικτή περιοχή ελέγχου. Στο $\tau \in (0, \tau^*)$ δώσαμε την τιμή 1, στο $\sigma = 0.5$ και ακολούθως υπολογίσαμε το γ να είναι 0.9 σύμφωνα με τον τύπο

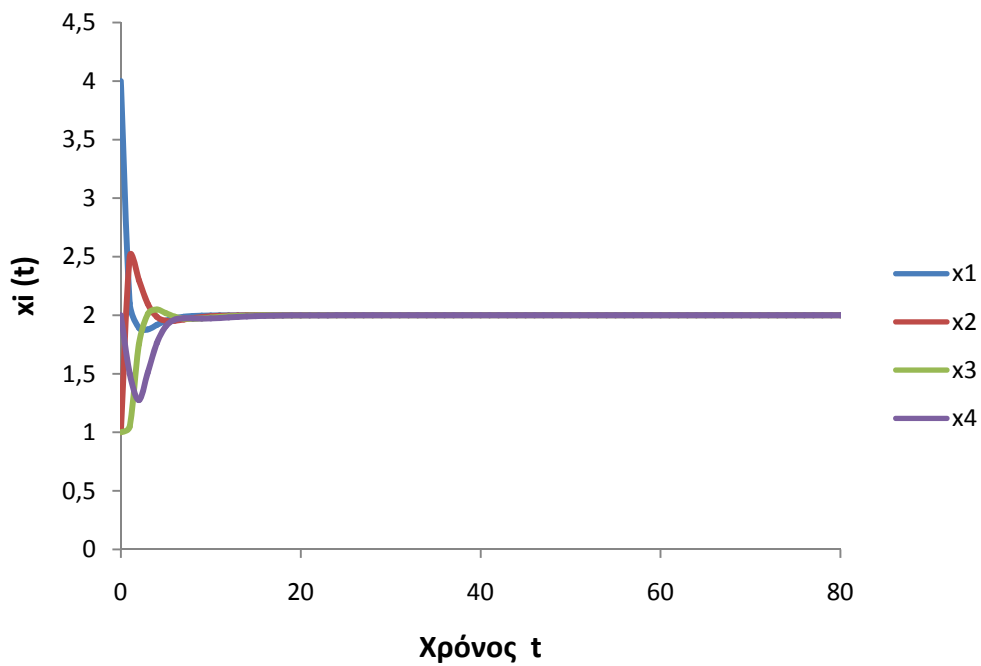
$$\gamma = \tau^{-1}(u_1^* - b_1), \quad \text{όπου } \tau = 1, u_1^* = 1 \text{ και } b_1 = 0.1.$$



Σχήμα 6: Σχηματική απεικόνιση των x_i ($i = 1, \dots, 4$) με το χρόνο t για το σύστημα κλειστού βρόχου με αρχική κατάσταση $x_0 = (10, 10, 10, 10)'$ χρησιμοποιώντας τον προτεινόμενο ρυθμιστή ανάδρασης (4.1).

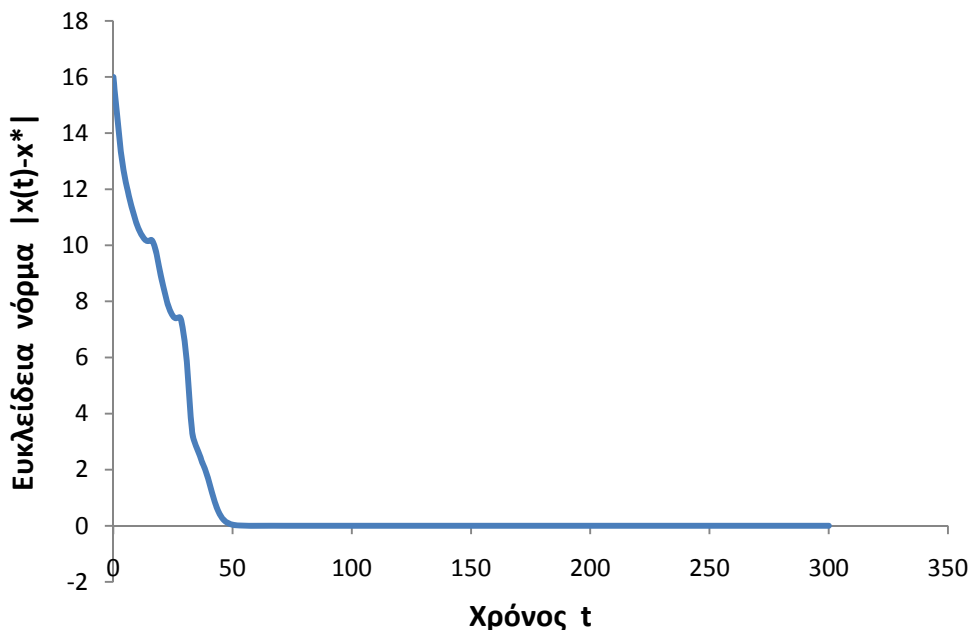


Σχήμα 7: Σχηματική απεικόνιση των x_i ($i = 1, \dots, 4$) με το χρόνο t για το σύστημα κλειστού βρόχου με αρχική κατάσταση $x_0 = (1, 1, 10, 8)'$ χρησιμοποιώντας τον προτεινόμενο ρυθμιστή ανάδρασης (4.1).



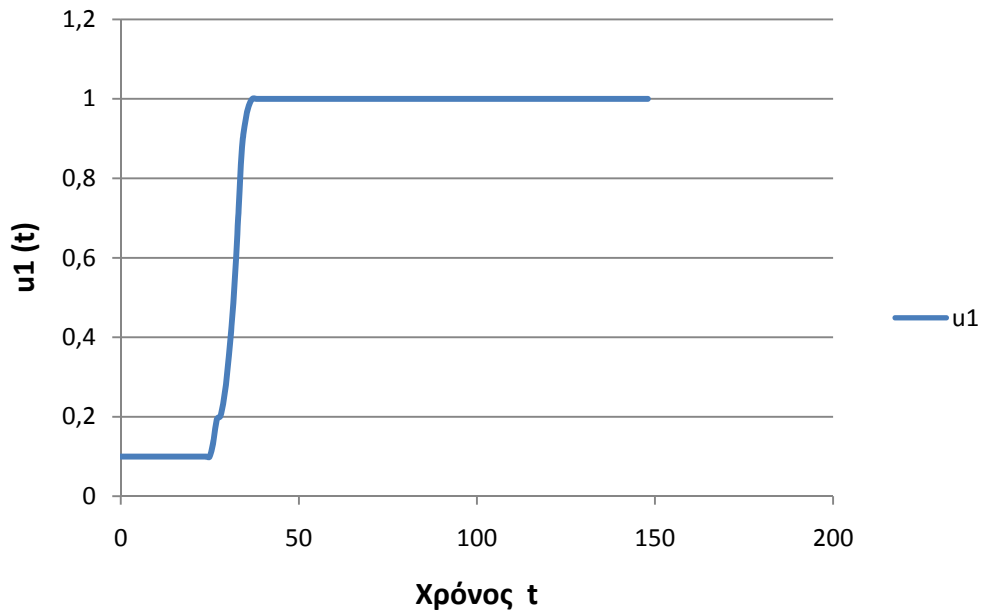
Σχήμα 8: Σχηματική απεικόνιση των x_i ($i = 1, \dots, 4$) με το χρόνο t για το σύστημα κλειστού βρόχου με αρχική κατάσταση $x_0 = (4, 1, 1, 2)'$ χρησιμοποιώντας τον προτεινόμενο ρυθμιστή ανάδρασης (4.1).

Παρατηρώντας τα Σχήματα 6,7 και 8 οδηγούμαστε σε ενδιαφέροντα συμπεράσματα για τη σύγκλιση του συστήματός μας σε σχέση με τις αρχικές συνθήκες που ορίζουμε. Πιο συγκεκριμένα, στο Σχήμα 6 όπου τα κελιά μας είναι όλα γεμάτα $x_0 = (10, 10, 10, 10)'$ παρατηρούμε ότι η σύγκλιση επέρχεται αργότερα σε σχέση με το επόμενο σχήμα (Σχήμα 7) όπου ξεκινάμε με ελάχιστα οχήματα στα δύο πρώτα κελιά και είναι γεμάτο το τρίτο και το τέταρτο έχει επίσης πολλά ($x_0 = (1, 1, 10, 8)'$). Τέλος, στο Σχήμα 8 όπου ξεκινάμε με λίγα οχήματα στο πρώτο κελί και τα επόμενα τρία είναι σχεδόν άδεια $x_0 = (4, 1, 1, 2)'$, βλέπουμε ακόμα πιο γρήγορη σύγκλιση στο σημείο ισορροπίας $x^* = (2, 2, 2, 2)$ σε σχέση με τα δύο προηγούμενα.



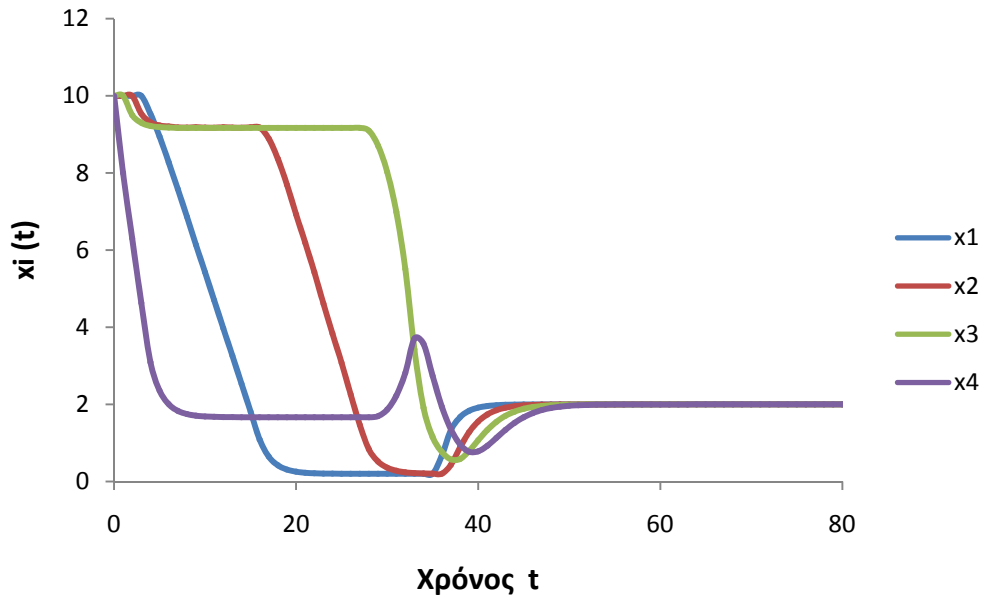
Σχήμα 9: Σχηματική απεικόνιση της εξέλιξης της Ευκλείδειας νόρμας της απόκλισης των x_i ($i = 1, \dots, 4$) από τη μη κορεσμένη ισορροπία, δηλαδή $|x(t) - x^*|$, για το σύστημα κλειστού βρόχου με αρχική κατάσταση

$x_0 = (10, 10, 10, 10)'$ και χρησιμοποιώντας τον προτεινόμενο ρυθμιστή ανάδρασης (4.1).

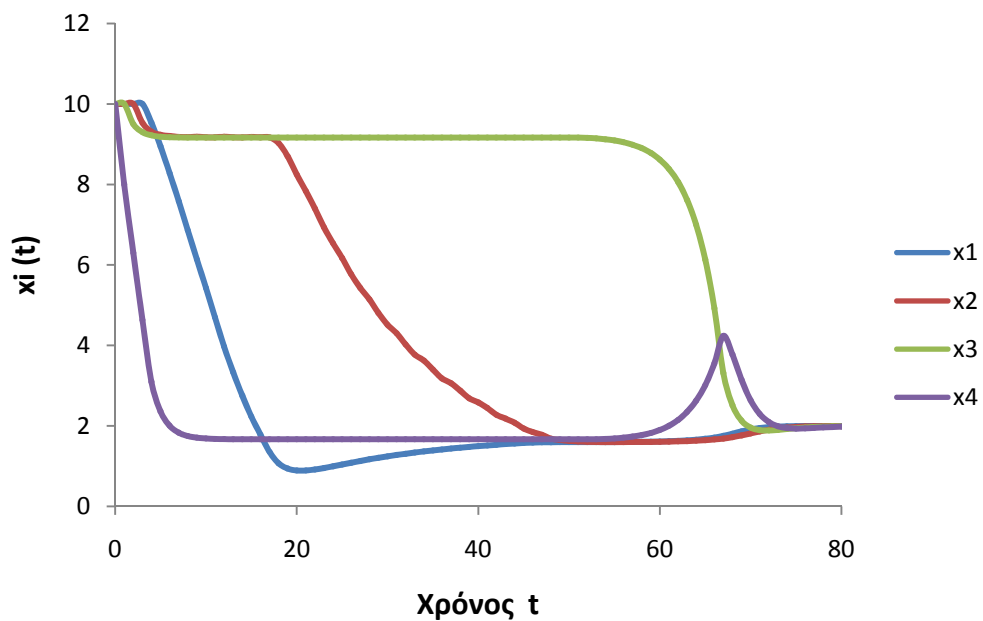


Σχήμα 10: Σχηματική απεικόνιση της εισόδου u_1 με το χρόνο t για το σύστημα κλειστού βρόχου με αρχική κατάσταση $x_0 = (10, 10, 10, 10)'$ χρησιμοποιώντας τον προτεινόμενο ρυθμιστή ανάδρασης (4.1).

Ακολουθώς δίνουμε διαφορετικές τιμές στο $\sigma \in (0,1]$ και στο $\tau \in (0, \tau^*)$ και βλέπουμε τι αλλαγές προκαλούνται στο διάγραμμα των x_i ($i = 1, \dots, 4$) με το χρόνο.

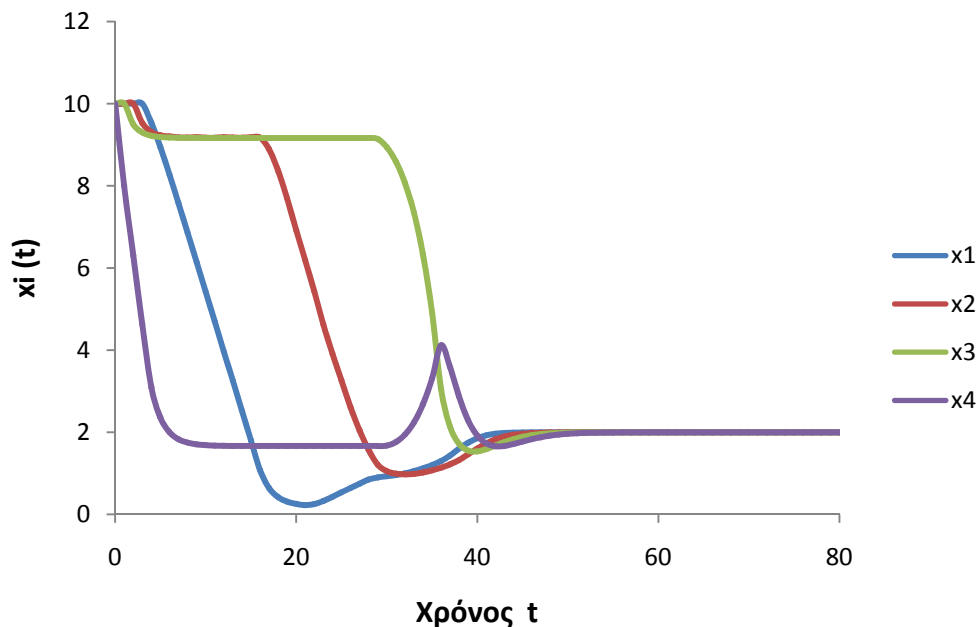


Σχήμα 11: Σχηματική απεικόνιση των x_i ($i = 1, \dots, 4$) με το χρόνο t για το σύστημα κλειστού βρόχου με αρχική κατάσταση $x_0 = (10, 10, 10, 10)'$ χρησιμοποιώντας τον προτεινόμενο ρυθμιστή ανάδρασης (4.1) ($\sigma = 0.9$ και $\tau = 1$).



Σχήμα 12: Σχηματική απεικόνιση των x_i ($i = 1, \dots, 4$) με το χρόνο t για το σύστημα κλειστού βρόχου με αρχική κατάσταση $x_0 = (10, 10, 10, 10)'$

χρησιμοποιώντας τον προτεινόμενο ρυθμιστή ανάδρασης (4.1) ($\sigma = 0.5$ και $\tau = 4$).



Σχήμα 13: Σχηματική απεικόνιση των x_i ($i = 1, \dots, 4$) με το χρόνο t για το σύστημα κλειστού βρόχου με αρχική κατάσταση $x_0 = (10, 10, 10, 10)'$ χρησιμοποιώντας τον προτεινόμενο ρυθμιστή ανάδρασης (4.1) ($\sigma = 0.9$ και $\tau = 9$).

Στο Σχήμα 11 όπου δώσαμε την τιμή $\sigma = 0.9$ χωρίς να πειράξουμε το τ , παρατηρούμε το διάγραμμά μας να έχει μετατοπιστεί ελάχιστα δεξιά, δηλαδή η σύγκλιση να επέρχεται λίγο αργότερα σε σχέση με την αρχική τιμή που είχαμε δώσει στο σ ($\sigma = 0.5$ Σχήμα 6). Στο επόμενο σχήμα (Σχήμα 12) όπου έχουμε δώσει την τιμή $\tau = 4$ χωρίς να πειράξουμε το σ ($\sigma = 0.5$), παρατηρούμε όλα τα x_i να συγκλίνουν πολύ αργότερα στο σημείο ισορροπίας $x^* = (2, 2, 2, 2)$ σε σχέση με την αρχική τιμή που είχε το τ στο Σχήμα 6 ($\tau = 1$). Τέλος, στο Σχήμα 13 όπου $\sigma = 0.9$ και $\tau = 9$, παρατηρούμε και πάλι τη σύγκλιση να επέρχεται λίγο αργότερα σε σχέση με τα αρχικά δεδομένα (Σχήμα 6).

Συνοψίζοντας όσα είδαμε με αυτή την εφαρμογή, είμαστε σε θέση να πούμε ότι ο προτεινόμενος ελεγκτής πάνω στον οποίο εργαστήκαμε, οδήγησε τον αυτοκινητόδρομό μας σε ισορροπία ώστε να μη παρουσιάζει φαινόμενα συμφόρησης. Δοκιμάσαμε διαφορετικές αρχικές καταστάσεις και δεδομένα για να διαπιστώσουμε πως επηρεάζεται η σύγκλιση, γεγονός που αποτυπώθηκε στα διαγράμματα. Οι επεκτάσεις που θα γίνουν στο μέλλον πρόκειται να βελτιώσουν τις ιδιότητες του προτεινόμενου ρυθμιστή ανάδρασης σε περιπτώσεις σφαλμάτων μοντελοποίησης ή επίμονων διαταραχών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η παρούσα εργασία παρέχει μια αυστηρή μεθοδολογία για την κατασκευή μιας παραμετροποιημένης οικογένειας σαφών νόμων ανάδρασης, που εγγυώνται την εύρωστη ολική εκθετική ευστάθεια του μη κορεσμένου σημείου ισορροπίας, για γενικά μη γραμμικά και αβέβαια μοντέλα διακριτού χρόνου για αυτοκινητόδρομο. Η κατασκευή του ολικά εκθετικού σταθεροποιητή ανάδρασης βασίστηκε στην προσέγγιση της CLF (Control Lyapunov Function) καθώς επίσης και σε ορισμένες σημαντικές ιδιότητες των μοντέλων αυτοκινητοδρόμων.

Αρχικά παρουσιάσαμε το μοντέλο πάνω στο οποίο δουλέψαμε. Έπειτα δώσαμε κάποιες γενικές έννοιες για συστήματα διακριτού χρόνου (ευστάθεια, εκθετική ευστάθεια, εύρωστη ολική εκθετική ευστάθεια, συνάρτηση Lyapunov) καθώς και κάποιες έννοιες για τη θεωρία ελέγχου που μας ήταν εξαιρετικά χρήσιμες στην πορεία της εργασίας για την κατανόησή της. Στη συνέχεια διατυπώσαμε το Θεώρημα 3.1 με το οποίο επιτυγχάνουμε εύρωστη ολική εκθετική σταθεροποίηση του μη κορεσμένου σημείου ισορροπίας και ακολούθησε η αναλυτική απόδειξή του.

Μέσω προσομοίωσης, είδαμε πως ο προτεινόμενος ρυθμιστής ανάδρασης οδήγησε τον αυτοκινητόδρομό μας σε ισορροπία ώστε να μη παρουσιάζει φαινόμενα συμφόρησης. Η προσομοίωση αυτή, μελετά την απόδοση του αντίστοιχου συστήματος κλειστού βρόχου, καθώς και την ευρωστία του και πως επηρεάζεται η σύγκλιση αλλάζοντας τις αρχικές καταστάσεις και τα δεδομένα. Μέσω γραφημάτων έγινε πιο εύκολα κατανοητή η χρησιμότητα καθώς και η αποτελεσματικότητα του προτεινόμενου ελεγκτή.

Η μελλοντική έρευνα θα ασχοληθεί με τα θέματα ευρωστίας με πιο αυστηρό τρόπο. Για το σκοπό αυτό, μπορεί να αξιοποιηθεί η γνώση μιας συνάρτησης Lyapunov για το σύστημα κλειστού βρόχου. Επίσης, σε μελλοντικές επεκτάσεις θα αντιμετωπίσουν κατάλληλα ζητήματα όπως ο έλεγχος των εισροών από ουρές που σχηματίζονται στις ράμπες εισόδου σε αυτοκινητόδρομο. Τέλος, είναι σε εξέλιξη δοκιμές της προτεινόμενης ανάδρασης που προσεγγίσαμε κι

εμείς με άλλα μοντέλα (π.χ. δεύτερης τάξης) που προσομοιώνουν την κυκλοφορία. Κλείνοντας την εργασία θα ήθελα να αναφέρω ότι οδηγός για την εκπόνησή της ήταν η εργασία των I. Karafyllis, M. Kontorinaki and M. Papageorgiou, “Global Exponential Stabilization of Freeway Models”, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 26(6), 2016, pp. 1184-1210.

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Burger, M., M. van den Berg, A. Hegyi, B. De Schutter, and J. Hellendoorn, "Considerations for Model-Based Traffic Control", *Transportation Research-Part C*, 35, 2013, 1-19.
- [2] Carlson, R.C., I. Papamichail, M. Papageorgiou, and A. Messmer, "Optimal Motorway Traffic Flow Control Involving Variable Speed Limits and Ramp Metering", *Transportation Science*, 44, 2010, 238-253.
- [3] Carlson, R.C., I. Papamichail, M. Papageorgiou, and A. Messmer, "Variable Speed Limits as a Mainline Metering Device", 89th Annual Meeting of the Transportation Research Board, Washington, D.C., January 10-14, 2010, paper No. 10-1529.
- [4] Carlson, R.C., I. Papamichail and M. Papageorgiou, "Local Feedback-Based Mainstream Traffic Flow Control on Motorways Using Variable Speed Limits", *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 12, 2011, 1261-1276.
- [5] Coogan, S. and M. Arcak, "Dynamical Properties of a Compartmental Model for Traffic Networks", *Proceedings of the American Control Conference*, 2014.
- [6] Daganzo, C., "The Cell Transmission Model: A Dynamic Representation of Highway Traffic Consistent With the Hydrodynamic Theory", *Transportation Research, Part B*, 28(4), 1994, 269-287.
- [7] Daganzo, C.F., "The Cell Transmission Model. Part II: Network Traffic", *Transportation Research, Part B*, 29(2), 1995, 79-93.
- [8] Godunov, S., "A Difference Method for Numerical Calculation of Discontinuous Solutions of Hydrodynamic Equations", *Matematicheskii Sbornik*, 47, 1959, 271-290.
- [9] Gomes, G. and R. Horowitz, "Optimal Freeway Ramp Metering Using the Asymmetric Cell Transmission Model", *Transportation Research-Part C*, 14(4), 2006, 244-262.
- [10] Gomes, G., R. Horowitz, A. A. Kurzhanskiy, P. Varaiya and J. Kwon, "Behavior of the Cell Transmission Model and Effectiveness of Ramp Metering", *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 16(4), 2008, 485-513.

- [11] Haddad, W. M. and V. Chellaboina, *Nonlinear Dynamical Systems and Control a Lyapunov-Based Approach*, Princeton University Press, 2008, Princeton.
- [12] Hegyi, A., B. De Schutter and H. Hellendoorn, "Model Predictive Control for Optimal Coordination of Ramp Metering and Variable Speed Limits", *Transportation Research-Part C*, 13(1), 2005, 185-209.
- [13] Hou, Z., J.-X. Xu and J. Yan, "An Iterative Learning Approach for Density Control of Freeway Traffic Flow via Ramp Metering", *Transportation Research-Part C*, 16, 2008, 71-97.
- [14] Iordanidou, G.-R., C. Roncoli, I. Papamichail and M. Papageorgiou, "Feedback-Based Mainstream Traffic Flow Control for Multiple Bottlenecks on Motorways", to appear in *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*.
- [15] Kachroo, P. and K. Ozbay, *Feedback Ramp Metering in Intelligent Transportation Systems*, Springer, 2003.
- [16] Karafyllis, I., and Z.-P. Jiang, *Stability and Stabilization of Nonlinear Systems*, Springer-Verlag London (Series: Communications and Control Engineering), 2011.
- [17] Karafyllis, I., and M. Papageorgiou, "Global Stability Results for Traffic Networks", to appear in *IEEE Transactions on Control of Network Systems* (see also [arXiv:1401.0496](https://arxiv.org/abs/1401.0496) [math.OC]).
- [18] Kurzhanskiy, A. A. and P. Varaiya, "Active Traffic Management on Road Networks: A Macroscopic Approach", *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 368(1928), 2010, 4607-4626.
- [19] Lebacque, J. P., "The Godunov Scheme and What it Means for First Order Traffic Flow Models", *Proceedings of the 13th International Symposium on Transportation and Traffic Theory*, 1996, Pergamon, 647-677.
- [20] Lebacque, J. P., "Two-Phase Bounded Acceleration Traffic Flow Model Analytical Solutions and Applications", *Transportation Research Record* 1852, Paper No. 03-4397, 2003, 220-230.

- [21] Lebacque, J. P. and M. Khoshyaran, "First Order Macroscopic Traffic Flow Models for Networks in the Context of Dynamic Assignment", *Transportation Planning*, 2004, 119-140.
- [22] Lebacque, J. P., "Intersection Modeling, Application to Macroscopic Network Traffic Flow Models and Traffic Management", *Traffic and Granular Flow '03*, 2005, 261-278.
- [23] Lighthill, M., and G. Whitham, "On Kinematic Waves I: Flow Movement in Long Rivers. II: A Theory of Traffic Flow on Long Crowded Roads", *Proceedings of the Royal Society of London Part A*, 229(1178), 1955, 281-345.
- [24] Papageorgiou, M., H. Hadj-Salem and J.-M. Blosseville, "ALINEA: A Local Feedback Control Law for On-Ramp Metering", *Transportation Research Record*, 1320, 1991, 58-64.
- [25] Papageorgiou, M., H. Haj-Salem and F. Middelham, "ALINEA Local Ramp Metering: Summary of Field Results", *Transportation Research Record*, 1603, 1997, 90-98.
- [26] Papageorgiou, M., and A. Kotsialos, "Freeway Ramp Metering: An Overview", *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 3, 2002, 271-281.
- [27] Papamichail, I., M. Papageorgiou, V. Vong and J. Gaffney, "Heuristic Ramp-Metering Coordination Strategy Implemented at Monash Freeway, Australia", *Transportation Research Record*, 2178, 2010, 10-20.
- [28] Richards, P., "Shock Waves on the Highway", *Operations Research*, 4(1), 1956, 42-51.
- [29] Shlayan, N. and P. Kachroo, "Feedback Ramp Metering Using Godunov Method Based Hybrid Model", *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 135(5), 2013.
- [30] Sun, X. and R. Horowitz, "Set of New Traffic-Responsive Ramp-Metering Algorithms and Microscopic Simulation Results", *Transportation Research Record*, 1959, 2007, 9-18.
- [31] Wang, Y., and M. Papageorgiou, "Local Ramp Metering in the Case of Distant Downstream Bottlenecks", *Proceedings of the IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems*, Toronto, Canada, September 17-20, 2006, 426-431.

- [32] Wang, Y., M. Papageorgiou, J. Gaffney, I. Papamichail, G. Rose and W. Young, "Local Ramp Metering in Random-Location Bottlenecks Downstream of Metered On-Ramp", Transportation Research Record, No. 2178, 2010, 90-100.
- [33] Sontag, E.D., Mathematical Control Theory, 2nd Edition, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [34] I. Karafyllis, M. Kontorinaki and M. Papageorgiou, "Global Exponential Stabilization of Freeway Models", International Journal of Robust and Nonlinear Control, 26(6), 2016, pp. 1184-1210.
- [35] Muralidharan A., Horowitz R. and Varaiya P., "Model predictive control of a freeway network with capacity drops", ASME 2012 5th Annual Dynamic Systems and Control Conference Joint with the JSME 2012 11th Motion and Vibration Conference, American Society of Mechanical Engineers, Fort Lauderdale Florida, 2012, 303-312.
- [36] Roncoli C., Papageorgiou M. and Papamichail I., "An optimisation-oriented first-order multi-lane model for motorway traffic", Proceedings of the 94th Annual Meeting of the Transportation Research Board (TRB), Washington, D.C., USA, 2015, 11-15.