ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Quaternionic Πολυωνυμικές Εξισώσεις

Διπλωματική εργασία

της

Πολυμέρου Δήμητρας

Επιβλέπων: Φελλούρης Αργύρης
Καθηγητής ΕΜΠ

Ιούλιος, 2015

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Πολυωνυμικές Εξισώσεις Quaternions

Διπλωματική εργασία

της

Πολυμέρου Δήμητρας

Επιβλέπων: Φελλούρης Ανάργυρος
Καθηγητής ΕΜΠ

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 20η Ιουλίου 2015.

Φελλούρης Ανάργυρος Καθηγητής	Ψαρράκος Παναγιώτης Καθηγητής	Στεφανέας Πέτρος Λέκτορας

....
Πολυμέρου Δήμητρα
Διπλωματούχος Μαθηματικός Εφαρμογών ΣΕΜΦΕ-ΕΜΠ

Ευχαριστίες

Καταρχήν θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους όσους συνέβαλαν με οποιονδήποτε τρόπο στην επιτυχή εκπόνηση αυτής της διπλωματικής εργασίας. Ειδικότερα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου, κύριο Ανάργυρο Φελλούρη για την επίβλεψη αυτής της διπλωματικής εργασίας, για την καθοδήγηση και την άμεση και ουσιαστική βοήθεια που μου παρείχε. Η πολύτιμη βοήθειά του εξέληξε αυτή τη διπλωματική εργασία και την έκανε ικανή να παρουσιαστεί στο 32ο Συνέδριο της Μαθηματικής Εταιρείας στην Καστοριά.

Έπειτα θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου η οποία αποτέλεσε αρωγός σε όλους τους στόχους και τα όνειρά μου κατά τη διάρκεια των σπουδών μου καθώς και για την υποστήριξη και την πίστη στις δυνατότητές μου.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τους φίλους μου από τα σχολικά και φοιτητικά χρόνια, μαζί με τους οποίους διαμορφώθηκα και συνέπλευσα όλα αυτά τα χρόνια. Η πνευματική και πρακτική βοήθειά τους ήταν καθοριστική για την ολοκλήρωση αυτού του κύκλου σπουδών μου.

Τα άτομα και το κενό είναι η αρχή των πάντων,τα υπόλοιπα είναι κατασκευάσματα του νου.

Δημόκριτος

Περίληψη

Στη συγκεκριμένη διπλωματική γίνεται αναφορά στους αριθμούς quaternions οι οποίοι είναι η επέκταση των μιγαδικών αριθμών στον $\mathbb{R}^4$. Στα πρώτα κεφάλαια γίνεται αναφορά στα σώματα των αριθμών με ιδιαίτερη νύξη στους πίνακες και στις ιδιότητες των quaternions. Έπειτα επικεντρωνόμαστε στις εξισώσεις Sylvester που είναι της μορφής $aw + wb = c$ όπου οι συντελεστές της εξίσωσης είναι οι $a, b, c \in \mathbb{H}$, ενώ ο $w \in \mathbb{H}$ είναι ο άγνωστος της εξίσωσης. Οι λύσεις των εξισώσεων αυτών και οι συνθήκες ύπαρξης τους δίνονται μέσω γραμμικών απεικονίσεων και πινάκων. Σε αυτή την εργασία, χρησιμοποιούμε τη γνώση της θεωρίας των γινομένων των διανυσμάτων του χώρου για τον προσδιορισμό και την παράσταση των λύσεων μέσω διανυσματικών γινομένων. Έτσι επιχειρούμε την εκμετάλλευση των βασικών γνώσεων των πρωτοετών φοιτητών σε προβλήματα ανώτερης άλγεβρας με σκοπό την απλοποίησή τους. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν επιβεβαιώνονται μέσω παραδειγμάτων τα οποία παρατίθενται στο τέλος της εργασίας. Στο τέταρτο κεφάλαιο δίνονται μέθοδοι υπολογισμού των ριζών των πολυωνύμων των quaternions όπως η πρώτη μέθοδος γνωστή και ως μέθοδος του Niven, η μέθοδος των R.Serodio-Lok-Shun Siu, και η μέθοδος υπολογισμού ριζών των R.Serodio-Edgar Pereira και Jose Vitoria.Τα πολυώνυμα που ορίζονται πάνω στην άλγεβρα $\mathbb{H}$ των τετράδων (quaternions) εμφανίζουν γενικές ιδιότητες οι οποίες είναι ανάλογες μεαυτές της άλγεβρας των τετράδων. Στο πέμπτο και τελευταίο κεφάλαιο γίνεται αναφορά στους πίνακες Vandermonde και στο άλυτο πρόβλημα και του πλήθους των ριζών.

Abstract

This thesis is referred to quaternions which are extensions of complex numbers in $\mathbb{R}^4$. The first two chapters introduce the sets of numbers and focus on quaternion matrices. In the third chapter there is further reference to Sylvester's equation which is of the form $aw + wb = c$, where $a, b, c \in \mathbb{H}$ are the coefficients and $w \in \mathbb{H}$ is the unknown of the equation. The solutions of these equations and their conditions of their existence are given by linear maps and matrices. In this paper, we use the well-known theory of vector products of space vectors to approach and represent the solutions by using vector multiplications. So we try to transfer the fundamental knowledge of first year students in higher algebra problems in order to simplify them. The out coming results are confirmed through examples that are listed at the end of work. The methods of calculating the zeros of the quaternion polynomials are given in the fourth chapter; these methods are Niven's, R.Serodio-Lok-Shun Siu and finally the method of R.Serodio-Edgar Pereira and Jose Vitoria. The polynomials defined over the algebra of quaternions, H, have general properties which are similar to those of the algebra of quaternions. The last chapter refers to Vandermonde matrices and the unsolved problem of finding the number of zeros.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Εισαγωγή

Τα Μαθηματικά είναι η επιστήμη που μελετά θέματα που αφορούν την ποσότητα, δηλαδή τους αριθμούς, τη δομή (σχήματα), το χώρο, τη μεταβολή, τις σχέσεις όλων των μετρήσιμων αντικειμένων της πραγματικότητας και της φαντασίας ή σύμφωνα με το βιβλίο του Ian Stewart[2] τα Μαθηματικά συνδέουν τον αφηρημένο κόσμο των πνευματικών ιδεών με τον πραγματικό κόσμο των φυσικών πραγμάτων χωρίς να βρίσκονται σε κανένα από τους δύο.

Η λέξη *μαθηματικά* προέρχεται από την ελληνική γλώσσα και ειδικότερα από το ρήμα *μανθάνω* και το επίθετο αυτού *μαθηματικός*. Η κυριολεκτική ερμηνεία είναι η απόκτηση γνώσεων, εμπειρίας, παιδείας αλλά αρκετά σύντομα συνδέθηκε με την ενασχόληση με μαθηματικά προβλήματα. Ο Πυθαγόρας ήταν ο πρώτος ο οποίος αντιλήφθηκε τις έννοιες της *γεωμετρίας* και της *αριθμητικής* με τον χαρακτηρισμό *μαθηματική*. Παράλληλα ο Αρχύτας χρησιμοποιεί την έκφραση *τοί περί τά μαθήματα* η οποία σημαίνει *σε ό,τι αφορά στα μαθήματα* με την έννοια των μαθηματικών. Ο Πλάτωνας χρησιμοποιεί τη λέξη *μάθημα* με μια γενικότερη ερμηνεία αλλά και με μια τάση να την συγκεκριμενοποιήσει στα μαθηματικά ζητήματα. Από την εποχή του Αριστοτέλη (384 π.Χ.-322π.Χ) καθιερώνεται η σημερινή ερμηνεία της λέξης *μαθηματικά*. [3]

Οι ρίζες των μαθηματικών ξεκινούν από την προιστορική περίοδο στα πεδία των αριθμών, των σχημάτων και των μεγεθών. Προιστορικά ευρήματα 20.000 ετών δείχνουν την προσπάθεια των ανθρώπων να ορίσουν τον χρόνο. Με την πάροδο των χρόνων πολιτισμοί όπως αυτοί των Βαβυλώνιων, των Αιγυπτίων, των Ινδών και των Κινέζων ανέπτυξαν τα μαθηματικά στα πεδία της γεωμετρίας μέσω εμπειρικών μεθόδων. Η αποδεικτική διαδικασία των μαθηματικών εδραιώθηκε στον Ελληνικό πολιτισμό καθώς οι Έλληνες μαθηματικοί εισήγαγαν έννοιες όπως *παραγωγικός συλλογισμός, μαθηματκό σθένος* και *απόδειξη* .

Κεφάλαιο 1

Ιστορική Αναδρομή στους Αριθμούς

1.1 Πραγματικοί Αριθμοί

Η ανάπτυξη των αριθμών ιστορικά ξεκινά από την εύρεση των φυσικών αριθμών μέσα από τη διαδικασία της μέτρησης η οποία ήταν αναγκαία στην καθημερινότητα των ανθρώπων.

Περί το 1000 π.Χ. τα απλά κλάσματα εμφανίζονται στους Αιγύπτιους και η πρώτη εμφάνιση των άρρητων γίνεται κατά τη Βεδική περίοδο (η περίοδος ξεκινά στο 1500π.Χ. στην περιοχή της Ινδικής χερσονήσου) στα *Σουλβασούτρας* ("Κανόνες των Σχοινιών", αρχαιότερα κείμενα όπου υπάρχουν πληροφορίες για την απαρχή των μαθηματικών) στα οποία περιγράφονται τρόποι για κατασκευή βωμών καθώς και κάποια στοιχεία αστρονομίας. Η αρρητότητα των αριθμών έγινε έμμεσα αποδεκτή από τους Ινδούς μαθηματικούς μέχρι τον *Μανάβα* (750-690π.Χ.) οι οποίοι ήξεραν το πρόβλημα της αρρητότητας των τετραγωνικών ριζών του 2 και του 61. Οι Έλληνες μαθηματικοί ηγούμενοι από τον *Πυθαγόρα* (500 π.Χ.) αναγνώρισαν την ανάγκη ύπαρξης των άρρητων αριθμών και ειδικότερα την αρρητότητα της ρίζας 2 ($\sqrt{2}$). Ο *Ίππασος*, ο οποίος ήταν ιδρυτής του *Μαθηματικού Τμήματος* της Πυθαγόρειας Σχολής, απέδειξε (γεωμετρικά) την αρρητότητα της ρίζας 2 κάτι το οποίο ο Πυθαγόρας δεν μπορούσε να αποδεχτεί καθώς πίστευε στην τελειότητα των αριθμών.

Πρώτοι οι Ινδοί, οι Κινέζοι και οι Αιγύπτιοι μαθηματικοί χρησιμοποίησαν τους άρρητους ως αλγεβρικά αντικείμενα [4] και έπειτα κατά τη διάρκεια του Μεσαίωνα γίνεται αποδεκτή η ύπαρξη του μηδενός, των αρνητικών, των ακεραίων και των κλασματικών αριθμών. Ο *Abū Kāmil Shujā ibn Aslam*, Αιγύπτιος μαθηματικός (850-930 μ.Χ.) αποδέχτηκε τους άρρητους αριθμούς ως λύσεις στην δευτεροβάθμια εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0$ ή ως συντελεστές σε εξισώσεις με τη μορφή τετραγωνικών, κυβικών και τέταρτων ριζών.

Ο *Simon Stevin* (1548 – 1620), έκανε τη βαση για τη μοντέρνα σημειογραφία και επεσήμανε ότι δεν υπάρχει διαφορά μεταξύ ρητών και άρρητων αριθμών.

Ο *René Descartes* (1596-1650) εισήγαγε τον όρο *πραγματικός* προκειμένου να περιγράψει και να διαχωρίσει τις ρίζες ενός πολυωνύμου από τις *φανταστικές*.

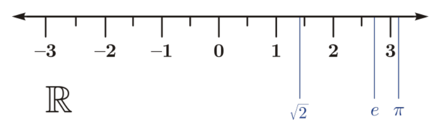
Κατά τη διάρκεια του 18ου και 19ου αιώνα γίνεται πρόοδος στους άρρητους και στους υπερβατικούς αριθμούς, ξεκινώντας με τον *Johann Heinrich Lambert* (1761) ο οποίος δεν αποδεικνύει ολοκληρωμένα ότι ο αριθμός π δεν μπορεί να είναι ρητός, απόδειξη την οποία ολοκληρώνει ο *Adrien-Marie Legendre* (1794) δείχνοντας ότι ο π δεν είναι τετραγωνική ρίζα ρητού αριθμού. Αργότερα ο *Paolo Ruffini*(1799) και ο *Niels Henrik Abel* (1842) δημιουργούν το θεώρημα *Abel-Ruffini* σύμφωνα με τους οποίους δεν υπάρχει γενική αλγεβρική λύση με ρίζες που να επιλύει πολυώνυμα πέμπτου ή μεγαλύτερου βαθμού.

Εν συνεχεία, ο *Évariste Galois* (1832), αντιλήφθηκε ότι η εύρεση ενός τύπου για τις ρίζες ενός πολυωνύμου συνδέεται με τη δομή της ομάδας μεταθέσεων.

Αργότερα ο *Joseph Liouville* (1840) έδειξε ότι ούτε ο e ούτε ο e^2 μπορεί να είναι ρίζα δευτεροβάθμιας εξίσωσηςμε ρητούς συντελεστές και έτσι καθιέρωσε τους υπερβατικούς αριθμούς. Ο *George Cantor* (1873) [5] απέδειξε την ύπαρξη υπερβατικών αριθμών χρησιμοποιώντας πιο απλές μεθόδους από τον Liouville. Πρώτος ο *Charles Hermite* (1873) απέδειξε ότι ο e είναι υπερβατικός αριθμός και ο *Ferdinand von Lindemann* (1882) απέδειξε ότι και ο π είναι υπερβατικός. Την απόδειξη του *Lindemann* την απλοποίησε ο *Weierstrass* (1885), έπειτα ο *David Hilbert* (1893) και τέλος έγινε σε πιο σύντομη μορφή από τον *Adolf Hurwitz* και τον *Paul Gordan*.

Ο πρώτος ορισμός του σώματος των πραγματικών αριθμών έγινε από τον *George Cantor* (1871) όταν το 1874 δημοσίευσε την απόδειξη ότι το σώμα των πραγματικών αριθμών είναι ένα μη αριθμήσιμο άπειρο σύνολο ενώ οι αλγεβρικοί αριθμοί ($\mathbb{A}$) είναι αριθμήσιμο άπειρο σύνολο [6]. Ο ορισμός αυτός των πραγματικών αριθμών δεν είναι επαρκής γι'αυτό κατά τη διάρκεια του 19ου αιώνα δώθηκε ένας πιο σαφής ορισμός. Ο αξιωματικός ορισμός των πραγματικών αριθμών ξεκινά από το ότι πληρούν την *Αρχιμήδεια Ιδιότητα* για πλήρη και ολικά ορισμένο χώρο $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$, μέχρι ισομορφισμού, ενώ δημοφιλείς ορισμοί των πραγματικών αριθμών εμπεριέχουν τη δήλωσή τους ως *κλάσεις ισοδυναμίας* από τις *σειρές Cauchy* των πραγματικών αριθμών, τις *διαμερίσεις Dedekind*, ή με ορισμένες άπειρες *δεκαδικές αναπαραστάσεις* συνοδευόμενες από ακριβείς αριθμητικές μεθόδους και σχέσεις διάταξης. Αυτοί οι ορισμοί είναι ισοδύναμοι στον χώρο των *κλασσικών μα-*

θηματικών.



Σχήμα 1.1: *Ευθεία των πραγματικών αριθμών*

1.2 Μιγαδικοί Αριθμοί

Πολύ συχνά όταν θέλουμε να δικαιολογήσουμε τον λόγο ύπαρξης των μιγαδικών αριθμών χρησιμοποιούμε το παράδειγμα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $x^2 + 1 = 0$ η οποία δεν έχει πραγματικές ρίζες κάτι το οποίο μας ώθησε στην επινόηση των μιγαδικών αριθμών. Στην πραγματικότητα ο *Ήρων ο Αλεξανδρεύς* ο οποίος ήταν γεωμέτρης και μηχανικός ήταν ο πρώτος που συνέλαβε την ιδέα αυτών των αριθμών.

Το πρόβλημα της μή ύπαρξης ριζών ορισμένων δευτεροβάθμιων εξισώσεων είχε σαν αποτέλεσμα την ανακάλυψη της λύσης όλων των τριτοβάθμιων εξισώσεων και άρα την επίλυση όλων των δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Η μέθοδος επίλυσης των τριτοβάθμιων εξισώσεων περιγράφεται στο βιβλίο *Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus* (Βιβλίο μεγάλης τέχνης περί αλγεβρικών μεθόδων , ένα) που εκδόθηκε απο τον Ιταλό *Cardano* το 1545 αν και στην πραγματικότητα αυτός ο τρόπος επίλυσης είχε βρεθεί από τον *Dal Ferro* και τον *Tartaglia*. Σε ορισμένες περιπτώσεις τριτοβάθμιων εξισώσεων η επίλυσή τους σταματούσε αφού δεν υπήρχαν πραγματικές ρίζες ("Casus irredusibillis", περίπτωση μη αναγωγής).

Ο πρώτος ο οποίος έριξε φώς στις περιπτώσεις μη αναγωγής ήταν ο Ιταλός μηχανικός *Raffaele Bombelli* στο μοναδικό του έργο το 1572 όπου χρησιμοποιεί νέους κανόνες και συμβολισμούς για την επίλυση τριτοβάθμιων εξισώσεων αλλά θέτει και τα θεμέλια του μιγαδικού λογισμού.

Με το ίδιο ζήτημα ασχολήθηκε και ο *René Descartes* στο έργο του *La Géométrie* στο οποίο παραδέχτηκε ότι μια αλγεβρική εξίσωση εκτός από πραγματικές μπορεί να έχει και άλλες ρίζες τις οποίες δεν μπορούσε να εντάξει σε κάποιες από τις γνωστές κατηγορίες αριθμών επομένως τις ονόμασε *φανταστικές* (imaginaires), ονομασία που διατηρείται μέχρι και σήμερα.

Οι δύο μαθηματικοί οι οποίοι χρησιμοποίησαν ευρύτερα τους μιγαδικούς ήταν οι *Leonhard Euler* (1707-1783) και ο *Joseph Louis Lagrange* (1736-1813).Σε έργο του πρώτου το 1777 βλέπουμε πρώτη φορά το σύμβολο i σε αντικατάσταση του $\sqrt{-1}$.

Το 1799 ο Γερμανός μαθηματικός *Carl Friedrich Gauss* (1777-1855) στη διδακτορική διατριβή του συμβάλει στην μετέπειτα διευθέτηση του ζητήματος των μιγαδικών αριθμών. Την ίδια χρονιά δημοσιεύεται και η πρώτη σημαντική εργασία στο θέμα της γεωμετρικής παράστασης των μιγαδικών αριθμών του Νορβηγού *Gaspar Wessel* (1745-1818).

Τέλος το 1837 ο *Rowan Hamilton* (1805-1865) δημοσίευσε το έργο του *Theory of conjugate functions or algebraic couples with a preliminary and elementary essay on algebra as the science of pure time,* (Θεωρία των συζυγών συναρτήσεων ή αλγεβρικών ζευγών με ένα προκαταρκτικό και στοιχειώδες δοκίμιο της άλγεβρας ως επιστήμης του καθαρού χρόνου) στο οποίο περιγράφει τους μιγαδικούς σε διατεταγμένα ζεύγη. Με την εργασία αυτή ο Hamilton περιγράφει άριστα τους μιγαδικούς και βάζει στέρεες βάσεις στη θεωρία των μιγαδικών καθώς επίσης τους διεύρυνει σε χώρο τεσσάρων διαστάσεων και δημιουργεί τις τετράδες (quaternions) [1] .

1.3 Quaternions-΄Αλγεβρα των τετράδων

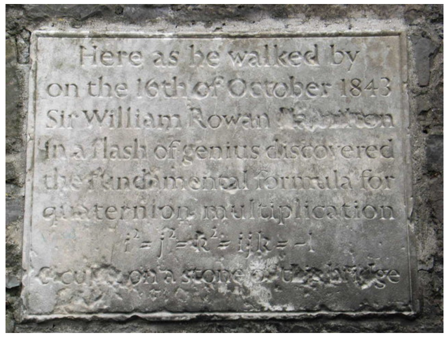
Ο *William Rowan Hamilton* (1805-1865) είχε υπόψη του την γεωμετρική αναπαράσταση των μιγαδικών αριθμών που είχε προτείνει ο *Carl Friedrich Gauss* (1777-1855). Ανέπτυξε όμως ότι οι μιγαδικοί αριθμοί έχουν τη μορφή $z = a+bi$ επομένως μπορούν να αντιμετωπιστούν ως διατεταγμένα ζεύγη (a, b) και να συστηματοποιηθούν ως μια άλγεβρα διατεταγμένων ζευγών. Έπειτα από αυτό ο Hamilton ήθελε να γενικεύσει την ιδέα των ζευγών σε τριάδες αλλά δεν μπόρεσε να ορίσει τις πράξεις τους, τη διαίρεση και τον πολλαπλασιασμό, διότι δεν μπορούσε να υπολογίσει το πηλίκο των συντεταγμένων δύο σημείων στο χώρο.

Στις 16 Οκτωβρίου 1843 στο Δουβλίνο,καθώς περπατούσε με τη γυναίκα του, σχηματοποιήθηκε στο μυαλό του η μορφή των *τετράδων (quaternions)* με αποτέλεσμα να χαράξει σε μία πέτρα της Brougham (Broom) γέφυρας τη φόρμουλα των τετράδων:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

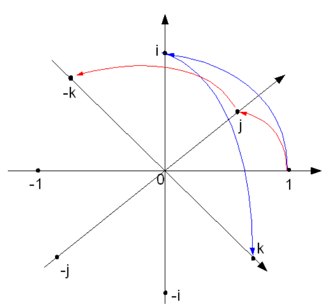
και κάθε τετράδα έχει τη μορφή:

$$q = a + bi + cj + dk$$



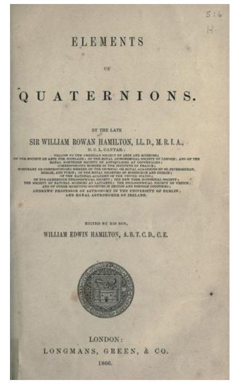
Σχήμα 1.2: *Εδώ όπως περπατούσε στις 16 Οκτωβρίου 1843, ο Σερ William Rowan Hamilton σε μία αναλαμπή ανακάλυψε τη θεμελιώδη φόρμουλα για τον πολλαπλασιασμό τετραδονίων την οποία και χάραξε σε μια πέτρα στη γέφυρα.*

Την επόμενη μέρα, έστειλε στον μαθηματικό *John Thomas Graves* (1806–1870) τη σκέψη του για αυτή την ανακάλυψη και αργότερα το γράμμα αυτό δημοσιεύτηκε στο περιοδικό *"London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, vol. xxv (1844), pp 489-495"*, το οποίο ανέφερε "Ξαφνικά συνειδητοποίησα την ιδέα την οποία πρέπει να παραδεχτούμε, ότι με κάποια έννοια, μια τέταρτη διάσταση του χώρου με στόχο τον υπολογισμό των τριάδων... Ένα κύκλωμα φάνηκε να κλείνει και μία σπίθα έλαμψε εμπρός."



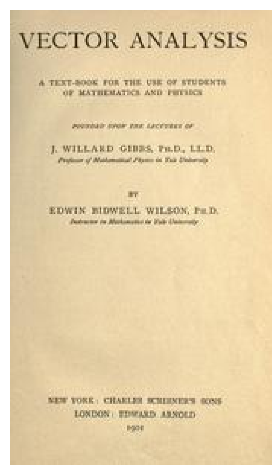
Σχήμα 1.3: *Γραφική αναπαράσταση quaternion σε στροφή 90°σε χώρο τεσσάρων διαστάσεων όπου ισχύει:* $ij = k, ji = -k, ij = -ji$

Ο Hamilton ονόμασε αυτές τις τετράδες με αυτές τις ιδιότητες του πολλαπλασιασμού *quaternions* και αφιέρωσε τη ζωή του στο να τα μελετά και να τα διδάσκει. Η προσέγγισή του στα quaternions είναι περισσότερο γεωμετρική κάτι το οποίο δίνει έμφαση στις αλγεβρικές ιδιότητες των quaternions. Ίδρυσε τη σχολή των *"Quaternionists"* και προσπάθησε να τα διαδώσει με διάφορα βιβλία του. Το τελευταίο και πιο μεγάλο βιβλίο του εκδόθηκε λίγο μετά τον θάνατό του και ήταν *"Elements of Quaternions"*.



Μετά τον θάνατο του Hamilton, ο μαθητής του *Peter Tait* (1831–1901) και έπειτα καθηγητής στο πανεπιστήμιο του Belfast, αλληλογραφούσε με τον Maxwell για τη προώθηση της θεωρίας των τετράδων (quaternions). Κεφάλαια της φυσικής και της γεωμετρίας τα οποία περιγράφονται με διανύσματα, όπως οι εξισώσεις Maxwell, μπορούσαν να περιγραφούν πλήρως με τις τετράδες. Η έρευνα συνεχίστηκε στις τετράδες αλλά και στους υπερμιγαδικούς αριθμούς δηλαδή την *Άλγεβρα Clifford* (τετράδες, οκτάδες, split-complex numbers, υπερβολικές τετράδες, υπέρ-αριθμοί, multicomplex number,biqutatenions και twistors) από την *Quaternion Society*.

Από τα μέσα του 1880 ο Διανυσματικός Λογισμός ο οποίος αναπτύχθηκε από τους *Josiah Willard Gibbs, Oliver Heaviside* και *Hermann von Helmholtz* παραμέρισε τις τετράδες. Η επιστημονική δραστηριότητα των Gibbs και Heaviside ήταν στο χώρο των ηλεκτρολόγων-μηχανικών που ήταν σε άνθηση.Το 1901 εκδίδεται το εγχειρίδιο *"Vector Analysis"* από τους Gibbs και Wilson με αποτέλεσμα ο κλάδος του *Διανυσματικού Λογισμού* να καθιερώνεται διεθνώς. Συνέπεια της μετάβασης ήταν ότι η δουλεία του Hamilton ήταν δύσκολη στην κατανόηση με αποτέλεσμα οι τετράδες να υποβιβαστούν σε ελάσσονος σημασίας ρόλο στα μαθηματικά και τη φυσική.



Τέλος, η αναβίωση των τετράδων έγινε στα τέλη του 20ου αιώνα κυρίως λόγω της χρησιμότητας να περιγράφουν περιστροφές στον χώρο. Οι αναπαραστάσεις των περιστροφών με τετράδες ήταν πιο συμπαγείς και σύντομες να υπολογιστούν σε σχέση με τη χρήση των πινάκων. Επιπλέον αντίθετα με τις γωνίες Euler, οι τετράδες δεν είναι ευπαθείς σε κλείδωμα πλατφόρμας (gimbal lock). Γι'αυτούς τους λόγους οι τετράδες χρησιμοποιούνται σε γραφικά υπολογιστών, ρομποτική, στη θεωρία ελέγχου, στην επεξεργασία σήματος, στη βιοπληροφορική, σε προσομοιώσεις και στη μηχανική των τροχιών. Άλλη μια ώθηση που πήραν ήταν από τη θεωρία αριθμών λόγω της σχέσης τους με τις τετραδικές μορφές.

Από το 1989, ο τομέας των Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο της Ιρλανδίας, Maynooth, οργανώνει προσκύνημα από το Dunsink Observatory στο Royal Canal bridge, όπου η επιγραφή του Hamilton δεν είναι πλέον ορατή. Στο προσκύνημα συμμετέχουν πολλοί επιστήμονες όπως ο φυσικός Murray Gell-Mann το 2002, ο Steven Weinberg το 2005 και ο Andrew Wiles το 2003.

Στην Ελλάδα αναφορά στα στοιχεία των τετράδων του Hamilton και κάποια ίχνη των ιδεών Grassmann έχουμε στο βιβλίο *"Ανωτέρα Άλγεβρα"*(1879) του *Ιωάννη Χατζιδάκη* (1844-1921), καθηγητή στη τότε Σχολή Ευελπίδων. Η πρώτη δημοσιευμένη εργασία για τις τετράδες του Hamilton έγινε το 1883 από τον *Κυπάρισσο Στέφανο* (1857-1917), καθηγητή Μαθηματικών στο Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, για το Γερμανικό περιοδικό *"Mathematische Annalen"* τομέας του Διανυσματικού Λογισμού ο οποίος δεν αναπτύχθηκε διδακτικά και ερευνητικά στην Ελλάδα.

Κεφάλαιο 2

Τα Σώματα των Αριθμών

2.1 Σώμα Πραγματικών Αριθμών

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών μπορεί να κατασκευαστεί από τους ρητούς αριθμούς μέσω *θεμελιωδών ακολουθιών* (μέθοδος του Cantor). Το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ είναι ένα σύνολο εφοδιασμένο με δύο εσωτερικές πράξεις, αυτές της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού.

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (a, b) \to a + b$$
$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (a, b) \to a \cdot b$$

Το σώμα των πραγματικών αριθμών διέπεται από τα **αξιώματα δομής**, **διάταξης** και **πληρότητας**.

Αξιώματα δομής

Οι εσωτερικές πράξεις ικανοποιούν τις παρακάτω ιδιότητες. Αρχικά για την πρόσθεση ισχύει η *αντιμεταθετική, η προσεταιριστική* ιδιότητα καθώς και το ότι το *ουδετερό στοιχείο είναι το 0*. Ακολουθούν οι παραπάνω ιδιότητες με την αντίστοιχη σειρά:

- $a + b = b + a$, για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$
- $(a + b) + c = a + (b + c)$, για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$
- υπάρχει $0 \in \mathbb{R} : a + 0 = a$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$

Ορισμός 2.1.1. *Στα μαθηματικά* ***αβελιανή*** *(ή αντιμεταθετική) ομάδα καλείται η ομάδα στην οποία οι πράξεις των στοιχείων της δεν εξαρτώνται από τη σειρά τους.*

Ο αντίθετος ενός αριθμού ορίζεται όπως παρακάτω:

- αν $a \in \mathbb{R} \exists -a \in \mathbb{R} : a + (-a) = 0$
  (δηλαδή το $(\mathbb{R}, +)$ είναι αβελιανή ομάδα

Για τον πολλαπλασιασμό ισχύει επίσης η *αντιμεταθετική* και *προσεταιριστική ιδιότητα* καθώς επίσης το *ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού είναι το 1.* Ακολουθούν οι παραπάνω ιδιότητες με την αντίστοιχη σειρά:

- $ab = ba$, για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$
- $(ab)c = a(bc)$, για κάθε $a, b, c \in \mathbb{R}$
- υπάρχει $1 \in \mathbb{R}$ και $1 \neq 0$ τέτοιο ώστε $1a = a1 = a$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$

Τέλος έχουμε και τον *αντίστροφο* που ορίζεται όπως παρακάτω:

- αν $a \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$, τότε υπάρχει $a^{-1} \in \mathbb{R} : aa^{-1} = 1$

Η *επιμεριστική ιδιότητα* είναι κρίσιμη διότι συνδέει τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού:

- $a(b + c) = ab + ac$, για κάθε $a, b, c \in \mathbb{R}$

Αξιώματα διάταξης

Η διάταξη είναι μια πολύ σημαντική συνιστώσα των πραγματικών. Η βασική ιδιότητά της είναι η καλή διάταξη, δηλαδή ότι κάθε υποσύνολο έχει ελάχιστο στοιχείο.

Έστω ότι υπάρχει μη κενό υποσύνολο P του $\mathbb{R}$, το οποίο ονομάζουμε σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών και ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

- αν $a, b \in P$, τότε $a + b \in P$
- αν $a, b \in P$, τότε $a \cdot b \in P$
- αν $a \in \mathbb{R}$, τότε ισχύει ακριβώς μια από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$a \in P, a = 0, -a \in P$$

Η τελευταία λέγεται **ιδιότητα τριχοτομίας** , γιατί διαμερίζει το $\mathbb{R}$ σε τρία υποσύνολα $P, -P := \{a : a \in P\}$ και το μονοσύνολο $\{0\}$. Τα στοιχεία του συνόλου P λέγονται **θετικοί αριθμοί**, ενώ τα στοιχεία του συνόλου $-P$ λέγονται **αρνητικοί αριθμοί**. Από την τρίτη ιδιότητα που αναφέραμε προηγουμένως, τα σύνολα P και $-P$ δεν έχουν κοινά στοιχεία. Επίσης έχουμε και τους παρακάτω συμβολισμούς:

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}, \mathbb{R}^*_+ = P, \mathbb{R}^*_- = -P$$

$$\mathbb{R}_+ = P \cup \{0\}, \mathbb{R}_- = -P \cup \{0\}, \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_+ = \{0\}$$

Με χρήση του συνόλου P μπορούμε να ορίσουμε τους θετικούς και αρνητικούς ως εξής:

- $a > 0$, αν, και μόνον αν, $a \in P$, δηλαδή, αν ο a είναι θετικός αριθμός.
- $a < 0$, αν, και μόνον αν, $-a \in P$, δηλαδή, αν ο a είναι αρνητικός αριθμός.

Επιπλέον μπορούμε να ορίσουμε στο $\mathbb{R}$ μια **σχέση (ολικής) διάταξης** που συμβολίζεται με $\geq$ και ορίζεται ως εξής:

$$a \geq b \Leftrightarrow a - b \in P \text{ ή } a = b (\Leftrightarrow a - b \in \mathbb{R}_+).$$

Επίσης αποδεικνύονται οι παρακάτω ιδιότητες:

- $a \geq a$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$, **(αυτοπαθής ή ανακλαστική ιδιότητα)**
- $a \geq b$ και $b \geq a \Rightarrow a = b$, **(αντισυμμετρική ιδιότητα)**
- $a \geq b$ και $b \geq c \Rightarrow a \geq c$, **(μεταβατική ιδιότητα)**

Τέλος ένας διατεταγμένος χώρος καλείται *ολικά διατεταγμένος* και η " $\leq$ " καλείται *ολική διάταξη* αν οποιαδήποτε δύο στοιχεία του συνόλου είναι συγκρίσιμα. Δηλαδή για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι :

$$a \geq b \text{ ή } b \geq a.$$

Αξιώματα πληρότητας

Το $\mathbb{R}$ έχει επιπλέον την ιδιότητα της πληρότητας, για την οποία ισχύουν οι παρακάτω ορισμοί:

Ορισμός 2.1.2. *Έστω $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}$ και $x \in \mathbb{R}$. Το x καλείται **άνω φράγμα** του $\mathbb{A}$ αν για κάθε $y \in \mathbb{A}$ ισχύει $y \leq x$.*

Ορισμός 2.1.3. *Έστω $\emptyset \neq \mathbb{A} \subset \mathbb{R}$ και $s \in \mathbb{R}$. Το s καλείται **supremum**(ελάχιστο άνω φράγμα) του $\mathbb{A}$ (supA) αν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:*

- *Το s είναι άνω φράγμα του $\mathbb{A}$.*
- *Για κάθε s' άνω φράγμα του $\mathbb{A}$ έχουμε $s \leq s'$.*

Ορισμός 2.1.4. *Έστω $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}$ και $s \in \mathbb{R}$. Το s καλείται **infimum**(ελάχιστο κάτω φράγμα) του $\mathbb{A}$ (infA) αν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:*

- *Το s είναι κάτω φράγμα του $\mathbb{A}$.*

- *Για κάθε s' κάτω φράγμα του $\mathbb{A}$ έχουμε $s' \leq s$.*

Ορισμός 2.1.5. *Ένα υποσύνολο s του $\mathbb{R}$ είναι **φραγμένο**, αν είναι άνω και κάτω φραγμένο.*

Αξίωμα 2.1.1. ***Αξίωμα της πληρότητας**: Κάθε μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα. Κάθε μη κενό και κάτω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει μέγιστο κάτω φράγμα.*

2.2 Σώμα Μιγαδικών Αριθμών

Στους μιγαδικούς αριθμούς ορίζονται οι πράξεις της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης, όπως και στους πραγματικούς αριθμούς. Στα μαθηματικά, το σύνολο που έχει αυτές τις πράξεις λέγεται σώμα, επομένως και το σύνολο των μιγαδικών είναι σώμα.

Η βασική διαφορά των μιγαδικών αριθμών με τους πραγματικούς είναι η ύπαρξη του στοιχείου i και των πολλαπλασίων του, που όταν υψωθούν στο τετράγωνο δίνουν αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς. Επιπλέον στους μιγαδικούς αριθμούς δεν ισχύει η έννοια της διάταξης, δηλαδή δεν μπορούμε να συγκρίνουμε δύο μιγαδικούς και να καταλήξουμε στο ότι ο ένας είναι μεγαλύτερος ή μικρότερος από τον άλλο μιγαδικό αριθμό.

Σε έργο του *Leonhard Euler* (1707-1783) το 1777 βλέπουμε πρώτη φορά το σύμβολο i σε αντικατάσταση του $\sqrt{-1}$, καθώς επίσης και τη μορφή $a + bi$ και την έκφραση $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. Επομένως ο Euler θεώρησε το σύνολο:

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1.\}$$

Το σύνολο αυτό μπορεί να πάρει μορφή αλγεβρικού σώματος, αν ορίσουμε τις πράξεις:

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, (a + bi, c + di) \to (a + bi) + (c + di) := (a + c) + (b + d)i$$

$$\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, (a + bi, c + di) \to (a + bi) \cdot (c + di) := (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Στο δισδιάστατο πραγματικό γραμμικό χώρο $\mathbb{R}^2$ των διατεταγμένων ζευγών πραγματικών αριθμών εισάγουμε ένα πολλαπλασιασμό που ορίζεται ως εξής:

$$(a,b)(c,d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Ο γραμμικός χώρος $\mathbb{R}^2$, εφοδιασμένος και με τη πράξη αυτή αποτελεί **το σώμα των μιγαδικών αριθμών**. Το σώμα των μιγαδικών αριθμών περιέχει μια ισομορφική εικόνα του σώματος των πραγματικών αριθμών μέσω της απεικόνισης

$$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, x \to \phi(x) := (x, 0)$$

.

Το διατεταγμένο ζευγάρι $i = (0,1)$ ορίζεται ως φανταστική μονάδα και έχει την ιδιότητα:

$$(0,1)^2 := (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) \equiv -1,$$

δηλαδή $i^2 = -1$ οπότε στο σώμα $\mathbb{C}$ έχει λύση η εξίσωση $z^2 + 1 = 0$ όπου $z = x + yi$. Έτσι έχουμε την ταύτιση $(x, 0) = x$ και

$$(x,y) = (x,0) + (0,y) = (x,0) + y(0,1) \equiv x + yi.$$

Στον μιγαδικό $z = x + yi$, ο πραγματικός αριθμός x ονομάζεται **πραγματικό μέρος** του μιγαδικού αριθμού z, ενώ ο πραγματικός αριθμός y ονομάζεται **φανταστικό μέρος** του z. Επομένως έχουμε:

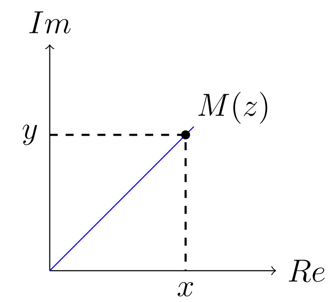
$$x = Rez \text{ και } y = Imz.$$

Μιγαδικό Επίπεδο

Οι μιγαδικοί αριθμοί αναπαριστώνται γεωμετρικά στο Καρτεσιανό επίπεδο μέσω της απεικόνισης

$$f : \mathbb{C} \to \Pi, z = x + yi \to f(z) := M(x,y).$$

Το σημείο M λέγεται **εικόνα** του μιγαδικού αριθμού στο Καρτεσιανό επίπεδο και συμβολίζεται $M(z)$ ή $M(x,y)$. Σε αυτή την περίπτωση, το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων λέγεται **μιγαδικό επίπεδο** ή **διάγραμμα Argand**. Κάθε μιγαδικός αριθμός αντιστοιχίζεται αμφιμονοσήμαντα στη διανυσματική ακτίνα **OM** του σημείο M. Επίσης, η αναπαράσταση ενός μιγαδικού στο μιγαδικό επίπεδο γίνεται με το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$, που έχει αρχή το κέντρο $O(0,0)$ των αξόνων και τέλος το σημείο $M(x,y)$.



Μέτρο Μιγαδικού Αριθμού

Το μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού ορίζεται ως το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{OM}$ ή ισοδύναμα, ως η απόσταση του M από το κέντρο O του μιγαδικού επιπέδου:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$$

Για το μέτρο ενός μιγαδικού ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

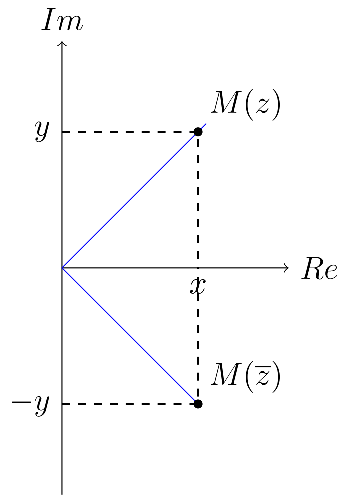
- $z \cdot \overline{z} = |z|^2$
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ και $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$, αν $z, z_2 \neq 0$
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (τριγωνική ανισότητα)
- $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2|$

Η **απόσταση** μεταξύ δύο σημείων $M_1(z_1), M_2(z_2)$ του επιπέδου δίνεται από τη σχέση

$$d(M_1, M_2) = M_1M_2 = |z_1 - z_2|.$$

Συζυγής Μιγαδικός Αριθμός

Ο συζυγής ενός μιγαδικού αριθμού $z = x + yi$ ορίζεται ως $x - yi$ και συμβολίζεται $\overline{z}$. Γεωμετρικά, ο $\overline{z}$ αποτελεί τον συμμετρικό του z ως προς τον άξονα των πραγματικών, όπως στο σχήμα:



Για τον συζυγή και το μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

- $|z|^2 = z\overline{z}$
- $|z| = |\overline{z}| = |-z| = |-\overline{z}|$
- $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$
- $\overline{zw} = \overline{z}\overline{w}$
- $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$
- $\overline{z} = z$ αν και μόνο αν $Im(z) = 0$
- $\overline{z} = -z$ αν και μόνο αν $Re(z) = 0$
- $\overline{(\overline{z})} = z$
- $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}, z \neq 0$

Τέλος χρησιμοποιώντας τον συζυγή του μιγαδικού αριθμού z έχουμε τις παρακάτω ισότητες:

$$x = Rez = \frac{z+\overline{z}}{2} \text{ και } y = Imz = \frac{z-\overline{z}}{2i}.$$

Πολική ή Τριγωνομετρική μορφή Μιγαδικού

Εκτός από τις καρτεσιανές συντεταγμένες $z = x + yi$, ένας μιγαδικός μπορεί να γραφεί και με πολική ή τριγωνομετρική μορφή:

$$z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$$

Οι πολικές συντεταγμένες ενός μιγαδικού z είναι το ζευγάρι (z, ϕ), όπου

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

είναι το μέτρο του μιγαδικού και ϕ το πρωτεύον όρισμα του z. Η γωνία ϕ προκύπτει από τις εξισώσεις:

$$\cos\phi = \frac{x}{r}, \sin\phi = \frac{y}{r}.$$

Αν η γωνία ϕ είναι μία λύση των παραπάνω εξισώσεων τότε και οι γωνίες της μορφής $\phi + 2\kappa\pi$ αποτελούν και αυτές λύσεις.

Οι καρτεσιανές συντεταγμένες ενός μιγαδικού z μπορούν να εκφραστούν και μέσω των πολικών ως εξής:

$$x = \cos(\phi), y = r\sin(\phi),$$

επομένως έχουμε:

$$z = x + yi = r\cos(\phi) + ir\sin(\phi) = re^{i\phi}.$$

Από το τελευταίο μέρος της παραπάνω ισότητας προκύπτει ο **τύπος του Euler**, σύμφωνα με τον οποίο

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi.$$

Θεώρημα 2.2.1. Όρισμα ενός μιγαδικού z είναι κάθε μία από τις γωνίες ϕ που σχηματίζει ο θετικός οριζόντιος ημιάξονας $\mathbb{R}$ με το αντίστοιχο διάνυσμα του z και συμβολίζεται με $arg(z)$.

Θεώρημα 2.2.2. Πρωτεύον όρισμα είναι η γωνία ϕ που βρίσκεται στο διάστημα $(-\pi, \pi]$ και συμβολίζεται με $Arg(z)$.Οπότε κάθε άλλο όρισμα του z, διαφέρει κατά $2\kappa\pi$ από το $Arg(z)$, όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$ (ακέραιος).

Παράδειγμα Έστω ο μιγαδικός $z = -\sqrt{3} + i$ έχει μέτρο 2 και όρισμα $\phi = \frac{5\pi}{6}$ επομένως έχει την τριγωνομετρική μορφή

$$z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right).$$

Κάθε θετικός πραγματικός αριθμός $z = x > 0$ έχει όρισμα $\phi = 0$ και γράφεται $z = x(\cos 0 + i \sin 0)$, ενώ ο αριθμός $z = x < 0$ έχει όρισμα $\phi = \pi$ και γράφεται $z = |x|(\cos \pi + i \sin \pi)$. Για τον μιγαδικό $z = yi$ έχουμε:

$$arg(yi) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & , y > 0 \\ \frac{3\pi}{2} & , y < 0 \end{cases}$$

επομένως

$$z = yi = \begin{cases} y\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) & , y > 0 \\ |y|\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right) & , y < 0 \end{cases}$$

Ιδιότητες για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση

Έστω $z = r(\cos \phi + i \sin \phi), z_1 = r(\cos \phi_1 + i \sin \phi_1), z_2 = r(\cos \phi_2 + i \sin \phi_2)$ τότε:

- $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2[\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2)]$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\phi_1 - \phi_2) + \sin(\phi_1 - \phi_2)], z_2 \neq 0$
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}[\cos(-\phi) + i \sin(-\phi)]$

Τύπος του De Moirve

Ο τύπος του De Moirve μας λέει ότι το όρισμα της n-στής δύναμης ενός μιγαδικού ισούται με n φορές το όρισμα του μιγαδικού. Είναι πολύ χρήσιμος για τον υπολογισμό δυνάμεων τριγωνομετρικών συναρτήσεων μέσω τριγωνομετρικών συναρτήσεων πολλαπλάσιων τόξων και αντίστροφα.

- $z^n = r^n(\cos n\phi + i \sin n\phi], n \in \mathbb{N}$

Ιδιότητες Ορίσματος

Ένα από τα κίνητρα για να καθορίσουμε την τιμή του ορίσματος ήταν να μπορέσουμε να γράψουμε του μιγαδικούς αριθμούς με την μορφή modulo. Ως εκ τούτου για κάθε μιγαδικό αριθμό z έχουμε $z = |z|e^{iarg(z)}$. Αυτή η ιδιότητα ορίζεται αν ο z είναι μη μηδενικός αριθμός, αλλά και όταν $z = 0$ αν $arg(0)$ θεωρείται αόριστη μορφή και όχι απροσδιόριστη. Σχετικά με το όρισμα προκύπτουν οι παρακάτω ισότητες οι οποίες ισχύουν πάντοτε για $modulo 2\pi$ αφού το όρισμα μιγαδικού αριθμού δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένο.

- $arg(z_1 \cdot z_2) = arg(z_1) + arg(z_2)(mod 2\pi)$
- $arg\left(arg\frac{1}{z}\right) = -argz(mod 2\pi)$
- $arg\left(z^n\right) = nargz(mod 2\pi), n \in \mathbb{N}$

2.3 Τετράδες ή Quaternions

Το 1833 ο Hamilton θέλησε να αναπαραστήσει τους μιγαδικούς αριθμούς με διατεταγμένα ζεύγη πραγματικών αριθμών, και όρισε τον παρακάτω ισομορφισμό:

$$\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2, a + bi \mapsto (a, b)$$

και μέσω αυτού του ισομορφισμού όρισε τη δομή του αλγεβρικού σώματος πάνω στο $\mathbb{R}^2$ με τις παρακάτω πράξεις:

$$(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d)$$

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Θεώρησε το $\mathbb{R}^2$ διανυσματικό χώρο πάνω στο $\mathbb{R}$ με την πράξη:

$$\lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b), \lambda \in \mathbb{R}$$

Το σώμα $\mathbb{R}^2$ περιέχει μία ισομορφική εικόνα του σώματος των πραγματικών αριθμών μέσω της απεικόνισης:

$$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, x \mapsto (x, 0).$$

Ο Hamilton, έχοντας πετύχει να ορίσει τη σχέση των μιγαδικών αριθμών και της γεωμετρίας δύο διαστάσεων, θέλησε να ορίσει και τη δομή του αλγεβρικού σώματος πάνω στον $\mathbb{R}^3$, το οποίο να περιέχει μία ισόμορφη εικόνα του $\mathbb{R}^2$. Ήθελε να εφεύρει μία μεγαλύτερη άλγεβρα η οποία να έχει παρόμοιο ρόλο στη γεωμετρία τριών διαστάσεων. Συγκεκριμένα θεώρησε τις πράξεις:

$$(a_1, a_2, a_3) + (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (a_1 + \beta_1, a_2 + \beta_2, a_3 + \beta_3)$$

$$\lambda(a_1, a_2, a_3) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$$

όπου $a_1, a_2, a_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \lambda \in \mathbb{R}$ και χρησιμοποίησε του συμβολισμούς:

$$x_1 = (1, 0, 0), x_2 = (0, 1, 0), x_3 = (0, 0, 1)$$

$$(a_1, a_2, a_3) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$$

Ο Hamilton προσπάθησε, χωρίς επιτυχία, να βρεί έναν καλά ορισμένο πολλαπλασιασμό μεταξύ των τριπλετών (a_1, a_2, a_3), με $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, ο οποίος να ικανοποιεί την μεταθετική και την προσεταιριστική ιδιότητα. Χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα έγραψε την ισότητα

$$(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)(\beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \beta_3x_3) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_i\beta_j x_i x_j$$

και παρατήρησε ότι ο πολλαπλασιασμός ορίζεται πλήρως, αν είναι γνωστά τα γινόμενα

$$x_ix_j = \delta_{ij1}x_1 + \delta_{ij2}x_2 + \delta_{ij3}x_3, i, j = 1, 2, 3$$

όπου το x_1 είναι το μοναδιαίο στοιχείο και ισχύει ότι $x_2x_3 = x_3x_2$. Ο πίνακας πολλαπλασιασμού που κατασκεύασε είναι ο εξής:

	x_1	x_2	x_3
x_1	x_1	x_2	x_3
x_2	x_2	$x_1 + (\beta - \beta^{-1})x_2$	βx_3
x_3	x_3	βx_3	$x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3$

όπου $b, c \in \mathbb{R}^*$. Παρατήρησε ότι:

$$(a, \beta a, \beta) \cdot (-\beta\gamma, \gamma, 0) = (0, 0, 0)$$

δηλαδή υπάρχουν μηδενοδιαιρέτες, κάτι που δεν μπορεί να ισχύει σε ένα σώμα. Ο Hamilton το 1843 θεώρησε τα $1, i, j$ στη θέση των x_1, x_2, x_3 και τον πίνακα:

	1	i	j
1	1	i	j
i	i	-1	
j	j		-1

Στον πίνακα αυτό άφησε τα γινόμενα ij, ji απροσδιόριστα, αλλά πάλι δεν είχε επιτυχία η προσπάθειά του, επειδή θεώρησε ότι η πράξη είναι μεταθετική κάτι το οποίο οδηγεί σε άτοπο όπως θα δούμε παρακάτω. Έστω ότι προσπαθούμε να ορίσουμε τα γινόμενα ij και ji, τότε έχουμε:

$$ij = ji = x1 + yi + zj, x, y, z \in \mathbb{R}$$

Συνεχίζοντας:

$$(ji)i = j(ii) = j(-1) = -j$$

$$(ji)i = (x1 + yi + zj)i = xi + yi^2 + z(ji)$$

$$= xi + y(-1) + z(x + yi + zj)$$
$$= (xz - y)1 + (x + zy)i + z^2 j$$

Επομένως, καταλήγουμε στο $z^2 = -1, z \in \mathbb{R}$, που είναι άτοπο.
Τελικά, την ίδια χρονιά θεωρήσε τις τετράδες συμβολίζοντας:

$$1 = (1, 0, 0, 0), i = (0, 1, 0, 0), j = (0, 0, 1, 0), k = (0, 0, 0, 1).$$

Θεωρώντας το 1 μοναδιαίο στοιχείο και:

$$ij = k, ji = -k$$

και μεέσω της προσεταιριστικής ιδιότητας έλαβε:

$$\begin{aligned}
&k^2 = (ij)(ij) = i(ji)j = i(-ij)j = -i^2 j^2 = -(-1)(-1) = -1,\\
&ik = i(ij) = i^2 j + -j,\\
&ki = (ij)i = -ji^2 = j,\\
&jk = j(ij) = (ji)j = -ij^2 = (-i)(-1) = i
\end{aligned}$$

Έτσι θεώρησε τον πίνακα:

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Με αυτή τη θεώρηση ο Hamilton εισήγαγε την **άλγεβρα των τετράδων (quaternions)** η οποία είναι μια προσεταιριστική, αλλά όχι μεταθετική άλγεβρα πάνω στο σώμα των πραγματικών. Με την κατασκευή αυτής της άλγεβρας, ο Hamilton άνοιξε δρόμο για τη θεώρηση αλγεβρικών δομών στις οποίες δεν ισχύει η μεταθετικότητα. Η άλγεβρα των τετράδων είναι η εξής:

$$\mathbb{H} = a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Κάνοντας πράξεις:

$$(a + bi + cj + dk) + (a' + b'i + c'j + d'k) = (a + a') + (b + b')i + (c + c')j + (d + d')k,$$
$$\lambda(a + bi + cj + dk) = \lambda a + (\lambda b)i + (\lambda c)j + (\lambda d)k$$
$$(a + bi + cj + dk) + (a' + b'i + c'j + d'k) = a" + b"i + c"j + d"k$$

όπου

$$\begin{aligned} a" &= aa' - bb' - cc' - dd' \\ b" &= ab' + ba' + cd' - dc' \\ c" &= ac' + ca' + db' - bd' \\ d" &= ad' + da' + bc' - cb'. \end{aligned}$$

Μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)[(a')^2 + (b')^2 + (c')^2 + (d')^2] = (a")^2 + (b")^2 + (c")^2 + (d")^2$$

Επομένως για την απεικόνιση

$$\mathbb{N} : \mathbb{H} \to \mathbb{R}, q = a + bi + cj + dk \to \mathbb{N}(q) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

ισχύει:

$$\mathbb{N}(qq') = \mathbb{N}(q)\mathbb{N}(q')$$

δηλαδή η άλγεβρα των Quaternions είναι ένα παράδειγμα *άλγεβρας συνθέσεων (composision algebra)*, όπως είναι επίσης οι πραγματικοί αριθμοί, οι μιγαδικοί αριθμοί και μια ακόμη άλγεβρα διάστασης 8, η άλγεβρα των οκτονίων (octonions).

Συζυγής τετράδα

Έστω μια τετράδα $q = a + bi + cj + dk$ τότε η συζηγής τετράδα θα είναι η

$$\overline{q} = a - bi - cj - dk$$

για την οποία ισχύουν τα εξής:

$$q + \overline{q} = 2a \in \mathbb{R}$$

και

$$q\overline{q} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \in \mathbb{R}$$

Νόρμα(ή μέτρο) της τετράδας q

Η **νόρμα(ή μέτρο) της τετράδας q** είναι ο μη αρνητικός πραγματικός αριθμός $||q|| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$. Επίσης ισχύει ότι $q\overline{q} = ||q||^2$ και για $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$||\lambda q|| = |\lambda|||q||.$$

Επίσης, για $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$:

- $\overline{q_1 + q_2} = \overline{q_1} + \overline{q_2}$
- $\overline{\overline{q_1}} = q_1$
- $\overline{q_1 q_2} = \overline{q_2 q_1}$

Η τελευταία ισότητα προκύπτει από τη χρήση του πίνακα πολλαπλασιασμού των τετράδων, όταν τα q_1, q_2 είναι οποιεσδήποτε από τις τετράδες i, j, k. Η συζυγία ως απεικόνιση είναι εξέλιξη της άλγεβρας $\mathbb{H}$.

Για q_1, q_2 από την προσεταιριστικότητα του πολλαπλασιασμού των τετράδων σε συνδιασμό με τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει:

$$\begin{aligned}||q_1 q_2||^2 &= (q_1 q_2)(\overline{q_1 q_2})\\ &= (q_1 q_2)(\overline{q_2})(\overline{q_1})\\ &= q_1(q_2\overline{q_2})\overline{q_1} = ||q_1||^2 ||q_2||^2,\end{aligned}$$

οπότε $||q_1 q_2|| = ||q_1||||q_2||$.

Διαίρεση στις τετράδες q

Η διαφορά μεταξύ της διαίρεσης των τετράδων και της διαίρεσης των μιγαδικών έγγειται στο ότι ο πολλαπλασιασμός στις τετράδες δεν είναι μεταθετική πράξη επομένως έχουμε τις παρακάτω εξισώσεις:

$q_2 x = q_1$ και $y q_2 = q_1, q_2 \neq 0 + 0i + 0j + 0k$,

επομένως έχω τις παρακάτω λύσεις:

$$x = \frac{\overline{q_2} q_1}{||q_2||^2}, y = \frac{q_1 \overline{q_2}}{||q_2||^2}.$$

Αντίστροφη τετράδας q

Η αντίστροφη κάθε τετράδας ορίζεται:

$$q^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}(a - bi - cj - dk) = \frac{\overline{q}}{||q||^2}, \text{εφόσον} ||q|| \neq 0.$$

Από τα παραπάνω μπορούμε να καταλάβουμε ότι η δομή των τετράδων δεν είναι δομή σώματος. Ο Hamilton γι'αυτό εγκατέλειψε το νόμο της μεταθετικότητας για τον ορισμό των τετράδων. Η δομή των τετράδων είναι *διαιρετική άλγεβρα* και η μοναδική ιδιότητα που δεν ικανοποιεί για να είναι σώμα, είναι η μεταθετικότητα του πολλαπλασιασμού.

Σύμφωνα με τη σχέση $ij = k$ μπορούμε να γράψουμε οποιαδήποτε τετράδα $q = a + bi + cj + dk$ με τη μορφή:

$$q = (a + bi) + (c + di)j \text{ ή } q = z_1 + z_2 j$$

όπου $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$ και $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Έτσι μπορούμε να γράψουμε μια τετράδα σαν ένα ζεύγος μιγαδικών αριθμών. Αυτό αποτελεί μία γενίκευση της κατασκευής των μιγαδικών αριθμών ως ζεύγη πραγματικών αριθμών. Παρατηρούμε ότι:

$$(a + bi)j = j(a - bi).$$

Για τους μιγαδικούς αριθμούς ισχύει ότι $a + bi = a + ib$ και $i^2 = -1$. Επομένως για τις τετράδες έχω:

$$q = z_1 + z_2 j = z_1 + j\overline{z_2}$$

Δεδομένου ότι ο πολλαπλασιασμός των τετράδων είναι προσεταιριστική πράξη και ο πολλαπλασιασμός των μιγαδικών αριθμών είναι μεταθετική πράξη, έχουμε:

$$\begin{aligned}(z_1 + jz_2)(w_1 + jw_2) &= (z_1 + \overline{z_2}j)(w_1 + \overline{w_2}j) \\ &= (z_1 w_1 - \overline{z_2} w_2) + j(\overline{z_1} w_2 + w_1 z_2).\end{aligned}$$

Η συζυγής της q είναι:

$$\overline{q} = a - bi - cj - dk = a - bi - (c + di)j = \overline{z_1} - z_2 j.$$

Έστω η τετραγωνική μορφή:

$$n : \mathbb{H} \to \mathbb{R}, q \mapsto n(q) := ||q||^2 = q\overline{q}$$

Δείξαμε παραπάνω ότι ισχύει $n(q_1 q_2) = n(q_1)n(q_2)$, επομένως η άλγεβρα των τετράδων είναι μια *composition* $\mathbb{R}$-*άλγεβρα*.

Μπορούμε να δούμε ότι η μη ικανοποίηση της μεταθετικότητας προκύπτει κατά φυσικό τρόπο από μία γεωμετρική θεώρηση.

Έστω οι στροφές τις μοναδιαίας σφαίρας $S(0, 1)$ όπου το O είναι η αρχή των αξόνων. Έστω f μία στροφή της σφαίρας $S(0, 1)$ κατά $\frac{\pi}{2}$ γύρω από τον άξονα των z, όπου $(0, i, j, k)$ είναι ένα Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς. Έστω g μία στροφή της σφαίρας $S(0, 1)$ κατά $\frac{\pi}{2}$ γύρω από τον άξονα των x. Επίσης $A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1)$ οι τομές της σφαίρας $S(0, 1)$ με τους θετικούς ημιάξονες Ox, Oy, Oz αντίστοιχα. Επομένως:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

$$A \xrightarrow{g} A \xrightarrow{f} B$$

δηλαδή οι στροφές f, g δεν ικανοποιούν τη μεταθετική ιδιότητα ως προς τη σύνθεση απεικονίσεων. Η στροφή R_θ της σφαίρας $S(0,1)$ κατά γωνία θ γύρω από έναν άξονα που διέρχεται από το κέντρο της μπορεί να παρασταθεί από μία τετράδα

$$q = a + bi + cj + dk,$$

με

$$a = \tan\frac{\theta}{2}, b = a\cos a, c = a\cos\beta, d = a\cos\gamma,$$

όπου $\cos a, \cos\beta, \cos\gamma$ είναι συνημίτονα κατεύθενσης του άξονα περιστροφής. Γράφοντας κάθε σημείο της σφαίρας στη μορφή $xi + yj + zk$, με $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, η στροφή R_θ μπορεί να δοθεί στη μορφή

$$r_\theta(xi + yj + zk) = q(xi + yj + zk)q^{-1}.$$

Οι τετράδες είναι στοιχεία του $\mathbb{R}^4$ και υπάρχει πιθανή χρήση των τετράδων στη θεωρία της σχετικότητας. Η νόρμα μιας τετράδας $q = a + bi + cj + dk$ είναι:

$$||q||^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2,$$

ενώ η σχετικότητα απαιτεί νόρμα της μορφής:

$$-a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Έτσι ο J.Synge(1972) εισήγαγε τις *τετράδες του Minkowski ή minquats*

$$q = q_4 + q_1 i + q_2 j + q_3 k,$$

όπου ο q_4 είναι καθαρά φανταστικός αριθμός. Το γινόμενο δύο τετράδων του Minkowski δεν αποτελεί τετράδα του Minkowski, οπότε οι τετράδες του Minkowski δεν αποτελούν άλγεβρα. Τέλος οι τετράδες του Hamilton, αν οριστούν πάνω στους μιγαδικούς ορίζουν την άλγεβρα των *biquaternions*.

2.3.1 Πίνακες Quaternions και οι Αντίστροφοί τους

Στους πίνακες των quaternions υπάρχει το ερώτημα για το ποιες ιδιότητες των πινάκων μπορούν να γενικευτούν και στα quaternions από τη στιγμή που στους συγκεκριμένους αριθμούς δεν ισχύει η ιδιότητα της αντιμεταθετικότητας.

Έστω $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{Q})$, δηλαδή το $\mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$ όταν $m = n$, υποδηλώνει το σύνολο όλων των $m \times n$ πινάκων με στοιχεία quaternions. Εκτός από την πρόσθεση και τον πολλαπλασιαμό, το *αριστερό (ή δεξί) βαθμωτό γινόμενο* ορίζεται όπως παρακάτω:
Για $A = (a_{st}) \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{Q}), q \in \mathbb{Q}$,

$$qA = (qa_{st}) \quad [Aq = (a_{st}q)].$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι για $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{Q}), B_{n\times o}(\mathbb{Q})$, και $p, q \in \mathbb{Q}$

$$(qA)b = Q(AB),$$

$$(Aq)B = A(qB),$$

$$(pq)A = p(qA).$$

Επιπλέον $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{Q})$ είναι ένας αριστερός (ή δεξιός) διανυσματικός χώρος στο $\mathbb{Q}$.

Όλοι οι τελεστές των μιγαδικών πινάκων μπορούν να εκτελεστούν, εκτός από αυτούς που εμπεριέχουν αντιμεταθετικότητα, όπως: $(qA)B = A(qB)$.

Όπως για τους μιγαδικούς πίνακες, συνδέουμε τον πίνακα $A = (a_{st}) \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{Q})$ με τον συζυγή του $\overline{A} = (\overline{a_{st}}) = (a^*_{st})$. Ο αντίστροφος είναι $A^T = (a_{st}) \in \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{Q})$, και ο αντίστροφος συζυγής του A είναι $A^* = (\overline{A})^T \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{Q})$.

Ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Q})$ είναι κανονικός αν $AA^* = A^*A$, Ερμιτιανός όταν $A^* = A$,μοναδιαίος όταν $A^*A = I$ και αντιστρέψιμος όταν $AB = BA = I$ για κάποια $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$.

Όπως στους μιγαδικούς πίνακες, ορίζουμε για πίνακες quaternions τους τελεστές στοιχειώδους σειράς(στήλης) [elementary row operators] και τους αντίστοιχους στοιχειώδεις πίνακες quaternions. Εύκολα παρατηρούμε ότι η εφαρμογή στον A μιας στοιχειώδους πράξης σε μία σειρά ή στήλη, ισούται με τον πολλαπλασιασμό του A με τον αντίστοιχο στοιχειώδη πίνακα quaternion από αριστερά ή δεξιά. Επίσης βλέπουμε ότι κάθε τετραγωνικός πίνακας quaternion μπορεί να γίνει διαγώνιος λόγω των στοιχειωδών πινάκων quaternions [20].

Θεώρημα 2.3.1. Έστω $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{Q}), B \in \mathbb{M}_{n\times o}(\mathbb{Q})$. Τότε:

1. $(\overline{A})^T = \overline{(A^T)}$
2. $(AB)^* = B^*A^*$
3. $\overline{AB} \neq \overline{A}\,\overline{B}$
4. $(AB)^T \neq B^TA^T$
5. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, αν οι A, B είναι αντιστρέψιμοι
6. $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$, αν ο A είναι αντιστρέψιμος
7. $(\overline{A})^{-1} \neq \overline{A^{-1}}$
8. $(A^T)^{-1} \neq (A^{-1})^T$.

Για την ιδιότητα 7 και 8 του παραπάνω θεωρήματος ισχύει ότι,A= $\begin{bmatrix} i & k \\ 0 & j \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 0 & -j \end{bmatrix}$.

Μια προσέγγιση στη μελέτη των πινάκων quaternions μπορεί να γίνει μετατρέποντας αυτούς τους πίνακες σε ζεύγη μιγαδικών πινάκων. Πρώτη αναφορά σε αυτό τον τρόπο μελέτης γίνεται από τον Lee [16].

Πρόταση 2.3.1. *Έστω $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$. Αν $AB = I$, τότε $BA = I$.*

Απόδειξη. Αρχικά σημειώνουμε ότι η παραπάνω πρόταση ισχύει για μιγαδικούς αριθμούς. Έστω $A = A_1 + A_2 j, B = B_1 + B_2 j$ όπου A_1, A_2, B_1 και B_2 είναι μιγαδικοί πίνακες $n \times n$ διαστάσεων.Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned}
AB = I &\Rightarrow (A_1B_1 - A_2\overline{B_2}) + (A_1B_2 + A_2\overline{B_1})j = I \\
&\Rightarrow (A_1, A_2)\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ -\overline{B_2} & \overline{B_1} \end{pmatrix} = (I, 0) \\
&\Rightarrow \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ -\overline{A_2} & \overline{A_1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ -\overline{B_2} & \overline{B_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ -\overline{B_2} & \overline{B_1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ -\overline{A_2} & \overline{A_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow B_1A_1 - B_2\overline{A_2} = I, \quad B_1A_2 + B_2\overline{A_1} = 0 \\
&\Rightarrow (B_1A_1 - B_2\overline{A_2}) + (B_1A_2 + B_2\overline{A_1})j = I \\
&\Rightarrow BA = I.
\end{aligned}$$

□

Για $A = A_1 + A_2 j \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$ μπορούμε να ονομάσουμε *συζυγή μιγαδικό πίνακα ή συζυγή πίνακα quaternion* τον παρακάτω πίνακα $2n \times 2n$ διαστάσεων, ο οποίος είναι μοναδικά ορισμένος από τον A, ο οποίος είναι:

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ -\overline{A_2} & \overline{A_1} \end{pmatrix}$$

και συμβολίζεται χ_A. Αν ο A είναι μιγαδικός πίνακας, τότε:

$$\chi_A = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \overline{A} \end{pmatrix}$$

.

Έστω για παράδειγμα ένας 2×2 πίνακας quaternions,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

όπου $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k = (q_0 + q_1 i) + (q_2 + q_3 i)j$, τότε έχουμε:

$$\chi_P = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & q_0 + q_1 i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & q_2 + q_3 i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -q_2 + q_3 i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & q_0 - q_1 i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι $det(\chi_P) = |\chi_P| = 1$. Γενικότερα:

$$|\chi_A| = |\chi_B| \quad \text{όταν} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Θεώρημα 2.3.2. Έστω $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$. Τότε:

1. $\chi_{I_n} = I_{2n}$,
2. $\chi_{AB} = \chi_A \chi_B$,
3. $\chi_{A+B} = \chi_A + \chi_B$,
4. $\chi_{A^*} = (\chi_A)^*$,
5. $\chi_{A^{-1}} = (\chi_A)^{-1}$, αν ορίζεται το$A^{-1}$,
6. χ_A είναι μοναδιαίος, Ερμιτιανός ή κανονικός πίνακας αν και μόνο αν ο A είναι μοναδιαίος, Ερμιτιανός ή κανονικός πίνακας αντίστοιχα.
7. αν ο J_λ είναι πίνακας Jordan με λ στη διαγώνιο τότε:

$$\chi_{J_A} = \begin{pmatrix} J_\lambda & 0 \\ 0 & J_{\overline{\lambda}} \end{pmatrix}.$$

Πρόταση 2.3.2. *Έστω A και B δύο μιγαδικοί πίνακες $n \times n$, τότε:*

$$\begin{vmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{vmatrix} \geq 0.$$

Συγκεκριμένα:

1. $|\chi_c| \geq 0$ για κάθε $C \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$,

2. $|I + \overline{A}A| \geq 0$,

3. $|A\overline{A} + B\overline{B}| \geq 0$, όταν τα A, B αντιμετατίθενται.

Απόδειξη. Είναι γνωστό ότι για κάθε $n \times n$ μιγαδικό πίνακα A οι μη πραγματικές ιδιοτιμές του $\overline{A}A$ επηρρεάζουν τα συζυγή ζεύγη και κάθε αρνητική ιδιοτιμή του $\overline{A}A$ έχει μια αλγεβρική πολλαπλότητα. Έπεται ότι $|I + \overline{A}A| \geq 0$ το οποίο είναι:

$$\begin{vmatrix} I & A \\ -\overline{A} & I \end{vmatrix} \geq 0,$$

για κάθε μιγαδικό πίνακα A.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, συμπεραίνουμε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος. Αφού:

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & (\overline{A})^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ -\overline{A^{-1}B} & I \end{pmatrix},$$

και πέρνουμε:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{vmatrix} \geq 0.$$

Όταν οι A, B αντιμετατίθενται,

$$\begin{vmatrix} A & \overline{B} \\ -B & \overline{A} \end{vmatrix} = |A\overline{A} + B\overline{B}| \geq 0.$$

□

Θεώρημα 2.3.3. Έστω $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

1. ο A είναι αντιστρέψιμος,

2. $Ax = 0$ έχει μία μοναδική λύση 0,

3. $|\chi_A| \neq 0$, δηλαδή χ_A είναι αντιστέψιμος,

4. ο A έχει μη μηδενικές ιδιοτιμές. Συγκεκριμένα, αν $Ax = \lambda x$ ή $Ax = x\lambda$ για κάποιο quaternion λ και κάποιο διάνυσμα $x \neq 0$, τότε $\lambda \neq 0$.

5. ο A είναι το γινόμενο elementary πινάκων quaternion.

Απόδειξη. 1⇒2: είναι προφανές.
2⇒3: Έστω $A = A_1 + A_2 j, x = x_1 + x_2 j$, όπου A_1, A_2 είναι μιγαδικοί πίνακες και x_1, x_2 είναι μιγαδικά διανύσματα στήλης. Άρα:

$$\begin{aligned} Ax &= (A_1 + A_2 j)(x_1 + x_2 j) \\ &= A_1 x_1 + A_1 x_2 j + A_2 j x_1 + A_2 j x_2 j \\ &= (A_1 x_1 - A_2 \overline{x_2}) + (A_1 x_2 + A_2 \overline{x_1}) j. \end{aligned}$$

Όμως αν $Ax = 0$ τότε είναι ισοδύναμο με

$$A_1 x_1 - A_2 \overline{x_2} = 0$$

και

$$A_1 x_2 + A_2 \overline{x_1} = 0.$$

Ξαναγράφοντας τις παραπάνω εξισώσεις έχουμε

$$A_1 x_1 + A_2(-\overline{x_2}) = 0$$

και

$$(-\overline{A_2}) x_1 + \overline{A_1}(-\overline{x_2}) = 0$$

έχουμε ότι $Ax = 0$ αν και μόνο αν:

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ -\overline{A_2} & \overline{A_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ -\overline{x_2} \end{pmatrix} = 0,$$

ή διαφορετικά $\chi_A (x_1 - \overline{x_2})^T = 0$. Από αυτό προκύπτει άμεσα ότι το $Ax = 0$ έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν $\chi_A (x_1 - \overline{x_2})^T = 0$ δηλαδή $|\chi_A| \neq 0$.

3⇔4: Αυτό προκύπτει και από το $2 \Rightarrow 3$.

3⇒1: Έστω ότι ο χ_A είναι αντιστρέψιμος και ότι:

$$\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ -\overline{A_2} & \overline{A_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Έστω $B = B_1 + B_2 j$. Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι $BA = I$ και ότι ο A είναι αντιστρέψιμος από την πρόταση 2.3.1.

1⇒5: Αυτό συμβαίνει επειδή αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε ο A μπορεί να γινεί ταυτοτικός πίνακας (elementary row and column operations). □

Σημείωση. *Ένας διαφορετικός τρόπος να ορίσουμε τα quaternions είναι να θεωρήσουμε ένα υποσύνολο ενός δακτυλίου $M_2(\mathbb{C})$ κάποιων 2×2 πινάκων με ορίσματα μιγαδικούς τέτοιους ώστε:*

$$\mathbb{Q}' = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -\overline{a_2} & \overline{a_1} \end{pmatrix} |a_1, a_2 \in \mathbb{C} \right\}.$$

Το $\mathbb{Q}'$ είναι ένας υποδακτύλιος(subring) του $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ με πράξεις του $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$. Ουσιαστικά τα $\mathbb{Q}'$ και $\mathbb{Q}$ είναι τα ίδια. Πράγματι, έστω:

$$\mathscr{M} : q = a_1 + a_2 j \in \mathbb{Q} \to q' = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -\overline{a_2} & \overline{a_1} \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}'.$$

Άρα το $\mathscr{M}$ είναι αμφιμονοσήμαντο και διατηρεί τις πράξεις. Επιπλέον, $|q|^2 = detq'$, και τα ιδιοδιανύσματα q' είναι $Req \pm |Imq|i$.

Σημείωση. *Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας quaternions. Εφαρμόζοντας $\mathscr{M}$ σε κάθε στοιχείο του A, μπορούμε να έχουμε ένα μιγαδικό πίνακα, μια άλλη αναπαράσταση του A, που συμβολίζεται με $\mathscr{M}_A$, το οποίο χρησιμοποιείται στη μελέτη* ***quaternionic numerical ranges*** *και* ***similarity****. Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι υπάρχει μετάθεση πίνακα P τέτοια ώστε $P^T \chi_A P = \mathscr{M}_A$.*

2.3.2 Ιδιοτιμές

Στους πίνακες με ορίσματα quaternions οι βαθμωτοί πολλαπλασιασμοί είναι διαφορετικοί όταν συμβαίνουν από δεξιά ή από αριστερά επομένως θα πρέπει να διερευνήσουμε ξεχωριστά αυτές τις περιπτώσεις.

Ένα quaternion λ λέγεται *αριστερή (ή δεξιά)* ιδιοδιοτιμή υπό την προυπόθεση ότι $Ax = \lambda x$(ή $Ax = x\lambda$). Το σύνολο $\{\lambda \in \mathbb{Q} | Ax = \lambda_x \text{για κάποια} x \neq 0\}$ λέγεται *αριστερό φάσμα (left spectrum)* του A και συμβολίζεται με $\sigma_l(A)$. Το *δεξί φάσμα (right spectrum)* είναι παρόμοιο και συμβολίζεται με $\sigma_r(A)$.

Παράδειγμα 2.3.1. *Έστω:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ j & 0 \end{pmatrix}.$$

Τότε οι αριστερές ιδιοτιμές του A είναι τα 1 και i, ενώ οι δεξιές ιδιοδιοτιμές του A είναι τα 1 και όλα τα quaternions [i].

Παράδειγμα 2.3.2. *Έστω:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ j & 0 \end{pmatrix}.$$

Τότε ο A έχει δύο αριστερές ιδιοτιμές $\pm 1/(\sqrt{2})(i+j)$, και άπειρες δεξιές ιδιοτιμές οι οποίες είναι quaternions που ικανοποιούν την $\lambda^4 + 1 = 0$. Σημειώνουμε ότι $\sigma_r(A)$ δεν είναι διακριτή και ότι $\sigma_l(A) \cap \sigma_r(A) = \emptyset$.

Παράδειγμα 2.3.3. *Έστω:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Τότε το k είναι μία αριστερή ιδιοτιμή αλλά όχι δεξιά. Σημειώνομε ότι ο A είναι Ερμιτιανός.

Θεώρημα 2.3.4. Έστω $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ είναι ένας άνω τριγωνικός πίνακας. Τότε ένα quaternion λ είναι αριστερή ιδιοτιμή του A αν και μόνο αν το λ είναι διαγώνια καταχώρηση (diagonal entry).

Για κάθε πραγματικό πίνακα έχουμε το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.3.5. Έστω A ένας πραγματικός πίνακας $n \times n$, τότε οι αριστερές και δεξιές ιδιοτιμές θα συμπίπτουν, δηλαδή $\sigma_l(A) = \sigma_r(A)$.

Απόδειξη. Έστω λ μια αριστερή ιδιοτιμή του A, όπως $Ax = \lambda x$ για κάποιο $x \neq 0$. Για κάθε quaternion $q \neq 0$ έχουμε:

$$(qAq^{-1}) = qx = (q\lambda q^{-1})qx$$

και

$$Aqx = (q\lambda q^{-1})qx,$$

από τη στιγμή που ο A είναι πραγματικός. Παίρνοντας $0 \neq q \in \mathbb{Q}$ τέτοιο ώστε $q\lambda q^{-1}$ ο οποίος είναι μιγαδικός αριθμός και γράφοντας $qx = y = y_1 + y_2 j$, έχουμε $Ay_1 = y_1 q\lambda q^{-1}$ και $Ay_2 = y_2 q\lambda q^{-1}$. Αυτό έπεται ότι το λ είναι δεξιά ιδιοτιμή του A. Παρομοίως αποδεικνύεται ότι κάθε δεξιά ιδιοτιμή είναι και αριστερή. □

Για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$, το αν υπάρχει πάντα $\lambda \in \mathbb{Q}$ και μη μηδενικό διάνυσμα στήλης x quaternions τέτοιο ώστε $Ax = \lambda x$ απαντάται παρακάτω από τον Wood (Θεώρημα 2.3.6).

Θεώρημα 2.3.6. Κάθε $n \times n$ πίνακας quaternions έχει τουλάχιστον μια αριστερή ιδιοτιμή στο $\mathbb{Q}$.

Απόδειξη. Γράφουμε το $Ax = \lambda x$ ως $(\lambda I - A)x = 0$, και θεωρούμε ότι ο $\lambda I - A$ είναι αντιστρέψιμος για κάθε $\lambda \in \mathbb{Q}$.

Θεωρούμε τη γενική γραμμική ομάδα $GL(n, \mathbb{Q})$, η οποία είναι η αναγωγή όλων των αντιστρέψιμων $n \times n$ πινάκων quaternions.

Έστω

$$f(t, \lambda) := f_t(\lambda) = t\lambda I - A, \quad 0 \leq t \leq 1, |\lambda| = 1$$

και

$$g(t, \lambda) := g_t(\lambda) = \lambda I - tA, \quad 0 \leq t \leq 1, |\lambda| = 1.$$

Τότε οι f, g είναι ομοτοπίες του $GL(n, \mathbb{Q})$. Σημειώνουμε ότι:

$$f_0(\lambda) = -A$$

$$f_1(\lambda) = \lambda I - A = g_1(\lambda),$$

και

$$g_0(\lambda) = \lambda I.$$

Επομένως η g_0 είναι ομότοπη με τη f_0. Από την άλλη πλευρά, οι g_0 και f_0 είναι οι απεικονήσεις τρισδιάστατης σφαίρας S^3 στο $GL(n, \mathbb{Q})$, που αντιστοιχούν στους ακέραιους 0 και n αντίστοιχα, στο $\pi_3 GL(n, \mathbb{Q})$, που είναι η τρίτη ομότοπη ομάδα (ισομορφική με τους ακεραίους) του $GL(n, \mathbb{Q})$. Το οποίο είναι άτοπο. □

Μια αρχική απόδειξη των περιπτώσεων πινάκων διαστάσεων 2×2 και 3×3 έγινε πρόσφατα στο [17].

Αντίθετα, οι δεξιές ιδιοτιμές είναι πιο χρήσιμες και έχουν μελετηθεί περισσότερο. Από εδώ και πέρα τις δεξιές ιδιοτιμές θα τις αποκαλούμε ιδιοτιμές.

Λήμμα 2.3.1. *Έστω $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{Q}), m < n$, τότε $Ax = 0$ έχει μη μηδενική λύση.*

Απόδειξη. Έστω $A = A_1 + A_2 j, x = x_1 + x_2 j$. Τότε $Ax = 0$ γίνεται:

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ -\overline{A_2} & \overline{A_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0,$$

όπου υπάρχει μη μηδενική μιγαδική λύση, αφού $2m < 2n$. □

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω λήμμα προκύπτει ότι:

Λήμμα 2.3.2. *Έστω u_1 είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα στήλης με n συνιστώσες quaternions. Τότε υπάρχει $n-1$ (unit column vector) $u_2, ..., u_n$ με n συνιστώσες quaternions τέτοιο ώστε τα $\{u_1, ..., u_n\}$ είναι ορθογώνια βάση, δηλαδή $u_s^* u_t = 0, s \neq t$.*

Το παραπάνω λήμμα μπορεί να ερμηνευτεί και ως εξής: έστω u_1 ένα μοναδιαίο διάνυσμα, τότε μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα μοναδιαίο πίνακα U, $n \times n$ διαστάσεων ο οποίος θα έχει το διάνυσμα u_1 στην πρώτη στήλη.

Αφού $Ax = x\lambda \Rightarrow A(xq) = (Ax)q = x\lambda q = (xq)(q^{-1}\lambda q)$, τότε έπεται ότι αν η λ είναι μια ιδιοτιμή του A, τότε και η $q^{-1}\lambda q$ είναι ιδιοτιμή για κάθε μη μηδενικό quaternion q. Έτσι, αν η λ είναι μη πραγματική ιδιοτιμή του A, τότε το ίδιο ισχύει για κάθε στοιχείο στο $[\lambda]$. Επομένως ο A έχει πεπερασμένες ιδιοτιμές αν και μόνο αν οι ιδιοτιμές του A είναι πραγματικές.

Θεώρημα 2.3.7. Κάθε πίνακας quaternions A, $n \times n$ διαστάσεων έχει ακριβώς n (δεξιές) ιδιοτιμές οι οποίες είναι μιγαδικοί αριθμοί με μη αρνητικό φανταστικό μέρος. Αυτές οι ιδιοτιμές λέγονται standard eigenvalues του A.

Απόδειξη. Έστω $A = A_1 + A_2 j$ και $x = x_1 + x_2 j$ όπου A_1, A_2 είναι μιγαδικοί πίνακες $n \times n$ διαστάσεων, και x_1, x_2 είναι μιγαδικά διανύσματα στήλης. Τότε $Ax = x\lambda$ ισούται με:

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ -\overline{A_2} & \overline{A_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ -\overline{x_2} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ -\overline{x_2} \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

ή

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ -\overline{A_2} & \overline{A_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ \overline{x_1} \end{pmatrix} = \overline{\lambda} \begin{pmatrix} x_2 \\ \overline{x_1} \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

όπου ο λ είναι μιγαδικός αριθμός.

Αφού ο

$$\chi_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ -\overline{A_2} & \overline{A_1} \end{pmatrix}$$

είναι ένας μιγαδικός πίνακας $2n \times 2n$ διαστάσεων, έχει ακριβώς $2n$ μιγαδικές ιδιοτιμές, συμπεριλαμβανομένης και της πολλαπλότητας.

Σημειώνουμε ότι αν ένας μιγαδικός πίνακας X είναι όμοιος με τον συζυγή του, άρα οι μη πραγματικές ιδιοτιμές του X βρίσκονται σε ζεύγη (αυτό το βλέπουμε με το αν θεωρήσουμε ότι $|\lambda I - X| = |\lambda I - \overline{X}| = \overline{|\lambda I - X|}$ για κάθε πραγματικό λ). Το χ_A είναι όμοιο με το $\overline{\chi_A}$, επομένως οι μη πραγματικές ιδιοτιμές του χ_A εμφανίζονται σε συζυγή ζεύγη (με την ίδια πολλαπλότητα). Για τις πραγματικές ιδιοτιμές, δείχνουμε μέσω επαγωγής ότι κάθε πραγματική ιδιοτιμή του χ_A εμφανίζεται άρτιες φορές. Αυτό είναι προφανές όταν $n = 1$.

Για $n \geq 2$: Έστω $Ax = x\lambda = \lambda x$, όπου ο λ είναι πραγματικός και το $x \neq 0$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα. Έστω $u_2, ..., u_n$ είναι τέτοια ώστε ο U να είναι ένας μοναδιαίος πίνακας $U = (x, u_2, ..., u_n)$ και έστω:

$$U^* A U = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

όπου B είναι ένας πίνακας quaternions διαστάσεων $(n-1) \times (n-1)$. Το α είναι ένα διάνυσμα σειράς quaternions, με $n - 1$ συνιστώσες. Είναι εύκολο να δούμε ότι υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πίνακας T διαστάσεων $2n \times 2n$, τέτοιος ώστε:

$$T^{-1} \chi_U * \chi_A \chi_U T = ((\chi_U T))^{-1} \chi_A (\chi_U T) = \begin{pmatrix} \chi_\lambda & \chi_\alpha \\ 0 & \chi_B \end{pmatrix}.$$

Με επαγωγή έχουμε ότι κάθε πραγματική ιδιοτιμή του χ_B εμφανίζεται άρτιες φορές. Επομένως ο χ_A έχει ακριβώς $2n$ ιδιοτιμές, τοποθετημένες συμμετρικά στο μιγαδικό επίπεδο, και ο A έχει ακριβώς n μιγαδικές ιδιοτιμές στο επάνω μισό του μιγαδικού επιπέδου (συμπεριλαμβανομένου και του άξονα των πραγματικών). Το συμπέρασμα των πραγματικών ιδιοτιμών μπορεί να παρατηρηθεί και από ένα επιχείρημα (continuity) αντικαθιστώντας τον A με $A - tiI$. $\square$

Πόρισμα 2.3.1. *Έστω A, B δύο μιγαδικοί πίνακες $n \times n$ διαστάσεων. Άρα κάθε πραγματική ιδιοτιμή του πίνακα (αν υπάρχει)*

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix}$$

εμφανίζεται άρτιες φορές και οι μιγαδικές ιδιοτιμές αυτού του πίνακα εμφανίζονται κατά συζυγή ζεύγη.

Σημειώνουμε ότι η πρόταση 2.3.2 είναι άμμεση συνέπεια από το πόρισμα 2.3.1. Η δομή της κανονικής μορφής του πίνακα Jordan στο παραπάνω πόρισμα, δίνεται σε παρακάτω αναφορά.

Εδώ θα εξηγήσουμε γιατί αυτός ο συλλογισμός, για τις αριστερές ιδιοτιμές, δεν ισχύει για το σύστημα $Ax = \lambda x$.

Έστω $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 j$. Τότε:

$$\begin{aligned} Ax &= (A_1 + A_2 j)(x_1 + x_2 j) \\ &= A_1 x_1 + A_1 x_2 j + A_2 j x_1 + A_2 j x_2 j \\ &= (A_1 x_1 - A_2 \overline{x_2}) + (A_1 x_2 + A_2 \overline{x_1}) j, \end{aligned}$$

και

$$\lambda x = (\lambda_1 x_1 - \lambda_2 \overline{x_2}) + (\lambda_1 x_2 + \lambda_2 \overline{x_1}) j.$$

Επομένως το quaternion σύστημα $Ax = \lambda x$ είναι ισοδύναμο με το παρακάτω σύστημα των μιγαδικών:

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ -\overline{A_2} & \overline{A_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \overline{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 I & \lambda_2 I \\ \overline{\lambda_2} I & \overline{\lambda_1} I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \overline{x_2} \end{pmatrix}$$

το οποίο είναι οπτικά διαφορετικό από το (1) και (2).

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να ξαναγραφεί ως:

$$\begin{pmatrix} A_1 - \lambda_1 I & A_2 - \lambda_2 I \\ -\overline{A_2} + \overline{\lambda_2} I & \overline{A_1} - \overline{\lambda_1} I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ -\overline{x_2} \end{pmatrix} = 0.$$

Ως εκ τούτου, ο τετραγωνικός πίνακας $A = A_1 + A_2 j$ έχει αριστερή quaternion ιδιοτιμή, αν και μόνο αν υπάρχουν μιγαδικοί αριθμοί λ_1, λ_2 τέτοιοι ώστε:

$$\begin{vmatrix} A_1 - \lambda_1 I & A_2 - \lambda_2 I \\ -\overline{A_2} + \overline{\lambda_2} I & \overline{A_1} - \overline{\lambda_1} I \end{vmatrix} = 0. \tag{2.3}$$

Σημειώνουμε ότι από την πρόταση 2.3.2, το αριστερό μέρος(left-hand side) της παραπάνω ταυτότητας είναι μη αρνητικό.

Πόρισμα 2.3.2. *Έστω ένας πίνακας , $n \times n$ διαστάσεων με quaternion στοιχεία. Τότε ο A έχει ακριβώς n (δεξιές) ιδιοτιμές μέχρι τάξεις ισοδυναμίας.*

Σημείωση. *Ο όρος "αριστερή ιδιοτιμή" εμφανίστηκε στη βιβλιογραφία με διαφορετικές ερμηνείες. Σε ένα skew field, ορίζεται ένα στοιχείο λ τέτοιο ώστε $xA = \lambda x$ για κάποιο $x \neq 0$. Όπως έχει διαπιστωθέι από το [19] ένας πίνακας μπορεί να μην έχει καμία αριστερή ιδιοτιμή με αυτή την έννοια. Στην περίπτωση των quaternions, όμως, οι δεξιές και αριστερές ιδιοτιμές δεν κάνουν τη διαφορά σε αυτή τη μελέτη, αφού $xA = \lambda x$ αν και μόνο αν $A^*x^* = x^*\lambda^*$. Τα στοιχεία λ που ικανοποιούν την $Ax = \lambda x$ για κάποια $x \neq 0$ λέγονται χαρακτηριστικές ιδιοτιμές του A και σε κάποιες περιπτώσεις ταυτίζονται με τις αριστερές ιδιοτιμές.*

2.3.3 Τάξη, Ομοιότητα και Ορίζουσες Πινάκων

Μπορεί κανείς να ορίσει για ένα σύνολο διανυσμάτων quaternions, με τη συνήθη έννοια, την αριστερή και δεξιά γραμμική ανεξαρτησία στο $\mathbb{Q}$. Σημειώνουμε ότι δύο γραμμικά εξαρτημένα διανύσματα στο $\mathbb{Q}$ μπορεί να είναι γραμμικά ανεξάρτητα στο $\mathbb{C}$. Επίσης είναι εύκολο να βρεθεί ένα παράδειγμα δύο διανυσμάτων τα οποία είναι αριστερά γραμμικώς εξαρτημένα αλλά δεξιά γραμμικώς ανεξάρτητα.

Η *τάξη* ενός πίνακα quaternions A, ορίζεται από τον μέγιστο αριθμό των στηλών του A οι οποίες είναι δεξιά γραμμικώς ανεξάρτητες. Είναι εύκολο να δούμε ότι για κάθε αντιστρέψιμους πίνακες P και Q που έχουν ανάλογα μεγέθη, οι A και PAQ έχουν την ίδια τάξη. Επομένως η τάξη του A είναι ίση με τον αριθμό των θετικών *χαρακτηριστικών τιμών* του A. Αν ένας πίνακας A είναι τάξης r, τότε r είναι ο μέγιστος αριθμός σειρών του A οι οποίες είναι αριστερά γραμμικώς ανεξάρτητες, και ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος (ή $BA = AB = I$) αν και μόνο αν ο A είναι **full rank** n.

Έστω $\mathbb{Q}_c^n$ ο συμβολισμός για την αναγωγή των διανυσμάτων στήλης, με n quaternion συνιστώσες. Ο $\mathbb{Q}_c^n$ είναι ένας δεξίος διανυσματικός χώρος στο $\mathbb{Q}$ με πρόσθεση και δεξῖ βαθμωτό πολλαπλασιασμό. Αν ο A είναι ένας πίνακας quaternions διαστάσεων $n \times n$, τότε οι λύσεις της $Ax = 0$ συγκροτούν έναν υπόχωρο του $\mathbb{Q}_c^n$ ο οποίος έχει διάσταση r αν και μόνο αν ο A έχει τάξη $n - r$.

Θεώρημα 2.3.8. Έστω $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$. Τότε υπάρχει ένας μοναδιαίος πίνακας quaternions U, και ένα quaternion πίνακας H ο οποίος είναι θετικός ή μηδενικός (**positive semidefinite**) Ερμιτιανός τέτοιος ώστε $A = HU$. Επιπλέον οι H, U είναι μοναδικοί όταν ο A είναι τάξης n.

Απόδειξη. Έστω X ένας $n \times n$ μοναδιαίος πίνακας quaternions τέτοιος ώστε ο $X^*AA^*X = D$ είναι ένας διαγώνιος πίνακας με τα τετράγωνα των χαρακτηριστικών τιμών του A να βρίσκονται στη διαγώνιο. Έστω $\chi_A = KY$ μια πολική ανάλυση του μιγαδικού πίνακα χ_A, όπου K είναι ένας θετικός ημιορισμένος Ερμιτιανός(μιγαδικός) πίνακας $2n \times 2n$ διαστάσεων και ο Y ένας μοναδιαίος (μιγαδικός) πίνακας $2n \times 2n$ διαστάσεων. Πρέπει να δείξουμε ότι $K = \chi_H$ για κάποιο θετικά ημιορισμένο Ερμιτιανό πίνακα H, και $Y = \chi_U$ για κάποιο μοναδιαίο πίνακα quaternions U.

Πρώτα έχουμε ότι

$$\chi_A \chi_{A^*} = K^2, \quad \chi_{X^*}\chi_A\chi_{A^*}\chi_X = \chi_D.$$

Έτσι

$$\chi_X K^2 \chi_X = \chi_D$$

επομένως

$$\chi_{X^*} K \chi_X = \chi_{D^{1/2}},$$

άρα

$$K = (\chi_{X^*})^{-1}\chi_{D^{1/2}}(\chi_X)^{-1} = \chi_{XD^{1/2}X^*}.$$

Έστω $H = XD^{1/2}X^*$, τότε $\chi_A = \chi_H Y$. Υποθέτουμε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος επομένως ο H είναι επίσης αντιστρέψιμος και

$$Y = (\chi_H)^{-1}\chi_A = \chi_{H^{-1}}\chi_A = \chi_{H^{-1}A}.$$

Θέτουμε $U = H^{-1}A$. Τότε $A = HU$, και οι H, U είναι οι ζητούμενοι. □

Θεώρημα 2.3.9. Έστω $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{Q})$ είναι τάξης r. Τότε υπάρχουν μοναδιαίοι πίνακες quaternions $U \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Q})$ και $V \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$ τέτοιοι ώστε:

$$UAV = \begin{pmatrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

όπου $D_r = diag\{d_1, ..., d_r\}$. Οι αριθμοί d είναι θετικές χαρακτηριστικές τιμές του A.

Είναι πάντα επιθυμιτό να μετατρέπουμε ένα πίνακα quaternions σε μιγαδικό πίνακα. Έτσι ακολουθούν τα επόμενα θεωρήματα.

Θεώρημα 2.3.10. Η τάξη ενός πίνακα quaternions A είναι r αν και μόνο αν ο A έχει r μη μηδενικές χαρακτιριστικές τιμές και αν και μόνο αν η τάξη του μιγαδικού συζυγή πίνακα χ_A είναι $2r$.

Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι οι πίνακες A, A^*, AA^*, A^*A είναι της ίδιας τάξης.

Δύο τετραγωνικοί πίνακες quaternions A, B λέγονται *όμοιοι* αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας quaternions S που είναι μεγέθους τέτοιου ώστε $S^{-1}AS = B$. Προκύπτει άμμεσα ότι όμοιοι πίνακες quaternions έχουν ίδιες(δεξιές) ιδιοτιμές, κάτι το οποίο δεν ισχύει και για τις αριστερές ιδιοτιμές. Όπως θα δούμε παρακάτω, ακόμα και το ίχνος ενός πίνακα δεν διατηρείται όμοιο. Θυμίζουμε ότι το ίχνος ενός τετραγωνικού πίνακα είναι το άθροισμα των στοιχείων των κύριων διαγωνίων του πίνακα το οποίο ισούται με το άθροισμα των ιδιοτιμών του πίνακα στην περίπτωση που έχουμε μιγαδικούς αριθμούς.

Παράδειγμα 2.3.4. *Έστω*

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \quad \textit{και} \quad B = \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}.$$

Τότε οι A, B είναι όμοιοι αλλα με διαφορετικά ίχνη και διαφορετικές αριστερές ιδιοτιμές.

Παράδειγμα 2.3.5. *Έστω*

$$A = \begin{pmatrix} i & i \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} (1/\sqrt{2}) & -(1/\sqrt{2})j \\ -(1/\sqrt{2})j & (1/\sqrt{2}) \end{pmatrix} \quad \textit{και} \quad B = U^*AU.$$

Τότε ο U είναι μοναδιαίος και τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του B είναι $i = \frac{1}{2}k$ και $-i - \frac{1}{2}k$. Όμως, $trA = 0, trB = -k$. Έχουμε ότι trA, trB έχουν το ίδιο πραγματικό μέρος αλλά δεν είναι απαραίτητα ούτε ίσα ούτε όμοια (όπως τα quaternions).

Παράδειγμα 2.3.6. *Έστω*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ j & k \end{pmatrix}.$$

Τότε τα διανύσματα στήλης του A είναι αριστερά γραμμικώς εξαρτημένα και δεξιά γραμμικώς ανεξάρτητα. Ο A είναι τάξης 2 και είναι αντιστρέψιμος.

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι ένας πίνακας quaternions A διάστασης $n \times n$ είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνο αν ο A έχει n δεξιά γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα που ανήκουν σε δεξιές ιδιοτιμές. Το παρακάτω παράδειγμα μας δείχνει ότι τα ιδιοδιανύσματα που ανήκουν σε διαφορετικές ιδιοτιμές δεν είναι απαραίτητα (δεξιά ή αριστερά) γραμμικώς ανεξάρτητα.

Παράδειγμα 2.3.7. *Έστω*

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & j \end{pmatrix}.$$

Τότε τα ιδιοδιανύσματα $(1,0)^T$ και $(i+j,0)^T$, που ανήκουν στις (δεξιές) ιδιοτιμές i και j, αντίστοιχα, δεν είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Επιπλέον, ο πίνακας A δεν διαγωνοποιείται. Έχουμε ότι αν ένας πίνακας $n \times n$ διαστάσεων έχει n διαφορετικές δεξιές ιδιοτιμές που δεν είναι όμοιες μεταξύ τους, τότε ο πίνακας είναι διαγωνοποιήσιμος.

Θεώρημα 2.3.11. Έστω A και B δύο πίνακες quaternions, $n \times n$ διαστάσεων. Τότε οι A και B είναι όμοιοι αν και μόνο αν χ_A και χ_B είναι όμοια.

Πόρισμα 2.3.3. *Ο $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$ είναι διαγωνοποιήσιμος πίνακας αν και μόνο αν το χ_A είναι διαγονωποιήσιμο.*

Πόρισμα 2.3.4. *Ένας μιγαδικός πίνακας είναι διαγωνοποιήσιμος στο $\mathbb{Q}$ αν και μόνο αν είναι διαγωνοποιήσιμος στο $\mathbb{C}$.*

Έστω ένας quaternion πίνακας ο οποίος είναι $n \times n$ διαστάσεων, και έστω χ_A ένας μιγαδικός συζυγής πίνακας του . Ορίζουμε ως ορίζουσα quaternions, q-ορίζουσα, του A να είναι $|\chi_A|$, και την αποκαλούμε απλώς ορίζουσα του , και συμβολίζεται με $|A|_q$, όπως $|A|_q = |\chi_A|$ από ορισμό.

Προκύπτει άμμεσα ότι $|A|_q = |A||\overline{A}| = |detA|^2$ όταν ο είναι μιγαδικός πίνακας.

Κεφάλαιο 3

Εξισώσεις Sylvester $aw + wb = c$

3.1 Η εξίσωση $aw + wb = c$

Στο περιοδικό Advances in Applied Clifford Algebras υπάρχουν δύο άρθρα του D.Mierzejewski [7] [8] στα οποία γίνεται αναφορά σε δύο είδη quaternionic πολυώνυμων. Πρώτα σε πολυώνυμα με μια quaternionic μεταβλητή w που είναι πολυώνυμα με συντελεστές στο $\mathbb{H}$ και έπειτα σε πολυώνυμα με μια μεταβλητή w η οποία δεν αλληλεπιδρά με τους συντελεστές. Επομένως ένα μονώνυμο βαθμού p πρέπει να γραφεί με $p+1$ συντελεστές, δηλαδή: $a^{(1)}wa^{(2)}wa^{(3)}...a^{(p)}wa^{(p+1)}$. Κάθε τέτοιο πολυώνυμο καθορίζει μια απεικόνιση $\mathbb{H} \to \mathbb{H}$. Αφ'ης στιγμής ο Mierzejewski φαίνεται να επικεντρώνεται σε αυτή την απεικόνιση $\mathbb{H} \to \mathbb{H}$, έτσι θεωρούμε ότι δύο τέτοια πολυώνυμα θεωρούνται ίσα αν αυτά ορίζουν την ίδια απεικόνιση $\mathbb{H} \to \mathbb{H}$. Έτσι αντικαθιστούμε τη μεταβλητή w με $w_0 + w_1 i + w_2 j + w_3 k$ όπου $i, j, k,$ είναι οι συνήθεις τετράδες έτσι ώστε $i^2 = j^2 = -1$ και $k = ij = -ji$. Έτσι κάθε quaternionic πολυώνυμο με w έχει εικόνα στο $\mathbb{H}[w_0, w_1, w_2, w_3]$ η οποία είναι η άλγεβρα των πολυωνύμων με συντελεστές στο $\mathbb{H}$ και με τέσσερις μεταβλητές που εναλλάσονται μεταξύ τους και με τους συντελεστές. Προφανώς η εικόνα τους στο $\mathbb{H}[w_0, w_1, w_2, w_3]$ δίνει την ίδια πληροφορία όπως η απεικόνιση $\mathbb{H} \to \mathbb{H}$ την οποία καθορίζει.

Αντίστροφα κάθε στοιχείο του $\mathbb{H}[w_0, w_1, w_2, w_3]$ είναι εικόνα κάθε πολυώνυμου των τετράδων με w , το οποίο υπολογίζεται μέσω των παρακάτω αντικαταστάσεων:

$$w_0 = \frac{1}{4}(w - iwi - jwj - kwk), w_1 = \frac{1}{4}(-wi - iw - kwj + jwk)$$

$$w_2 = \frac{1}{4}(-wj - jw - iwk + kwi), w_3 = \frac{1}{4}(-wk - kw - jwi + iwj)$$

.
όπου:

$$\begin{gathered}
w = w_0 + w_1 i + w_2 j + w_3, wi = w_0 i - w_1 - w_2 k + w_3 j \\
iw = w_0 i - w_1 + w_2 k - w_3 j, iwi = -w_0 - w_1 i + w_2 j + w_3 k \\
wj = w_0 j + w_1 k - w_2 - w_3 i, jw = w_0 j - w_1 k - w_2 + w_3 i \\
jwj = -w_0 + w_1 i - w_2 j + w_3 k, iwj = w_0 k - w_1 j - w_2 i + w_3 \\
wk = w_0 k - w_1 j + w_2 i - w_3, kw = w_0 k + w_1 j - w_2 i - w_3 \\
kwk = -w_0 + w_1 i + w_2 j - w_3 k, kwj = -w_0 i - w_1 - w_2 k - w_3 j \\
jwk = w_0 i + w_1 - w_2 k - w_3 j, iwk = -w_0 j - w_1 k - w_2 - w_3 i \\
kwi = w_0 j - w_1 k + w_2 - w_3 i, jwi = -w_0 k - w_1 j - w_2 i - w_3.
\end{gathered}$$

Συνεπώς οι γενικές ιδιότητες των quaternionic πολυώνυμων είναι οι ίδιες με τις ιδιότητες των στοιχείων του $\mathbb{H}[w_0, w_1, w_2, w_3]$.

3.1.1 Συγκεκριμένη Περίπτωση

Ενδιαφέρουσες ιδιότητες μπορούν να προκύψουν μόνο για τα quaternionic πολυώνυμα w που έχουν μια ιδιαίτερα "καλή έκφραση" δεδομένου ότι οι γενικές ιδιότητες των quaternionic πολυωνύμων με w είναι οι ίδιες με τις γενικές ιδιότητες των στοιχείων $\mathbb{H}[w_0, w_1, w_2, w_3]$. Επομένως έχουμε κάποιες ειδικές περιπτώσεις όπως για παράδειγμα το πολυώνυμο $aw + wb - c$ στο κεφάλαιο 3 του [8]. Ειδικότερα έχουμε την εξίσωση:

$$aw + wb = c \tag{3.1}$$

στην οποία τα a, b, c έχουν δωθεί ως συντελεστές στο $\mathbb{H}$ και το w είναι ένα άγνωστο στοιχείο του $\mathbb{H}$. Στο Θεώρημα 1 του [8] αναφέρεται ότι, έστω ότι έχουμε μια εξίσωση quaternion της μορφής (3.1), τότε το σύνολο όλων των λύσεων αυτής της εξίσωσης ακολουθούν μία από τις παρακάτω μορφές: ένα κενό σύνολο, ένα σημείο, μια (ευθεία) γραμμή, ένα επίπεδο και τέλος το σύνολο όλων των quaternions. Όμως το ζευγάρι των λύσεων της (3.1) δεν μπορεί να είναι μια ευθεία γραμμή (ένας συσχετισμένος χώρος διάστασης 1 στο $\mathbb{R}$). Πρωτού αναφέρουμε το διορθωμένο θεώρημα 3.1.1 πρέπει να διευκρινήσουμε ότι όπως ένας διανυσματικός χώρος στο $\mathbb{R}$, έτσι και ο $\mathbb{H}$ είναι το άθροισμα του $\mathbb{R}$ και του ευκλείδιου χώρου $\mathbb{E}$, διευρυμένο κατά i, j, k. Για κάθε $u \in \mathbb{H}$, τα $S(u)$ και $V(u)$ είναι συνιστώσες στο $\mathbb{R}$ και $\mathbb{E}$ αντίστοιχα, και επίσης το $\overline{u}$ είναι το συζυγές quaternion και $|u|$ είναι η αντίστοιχη νόρμα του, επομένως:

$$S(u) = S(\overline{u}) = \frac{1}{2}(u + \overline{u}),\ |u|^2 = |\overline{u}|^2 = u\overline{u} = \overline{u}u, \tag{3.2}$$

$$\forall u, v \in \mathbb{H}, S(uv) = S(vu). \tag{3.3}$$

Θεώρημα 3.1.1. Μια από τις παρακάτω υποθέσεις ισχύει για κάθε a και b:

(α′) ισχύει τουλάχιστον μία από τις $S(a+b) \neq 0$ ή $|a| \neq |b|$

(β′) $S(a+b) = 0$, $|a| = |b|$ και $a \notin \mathbb{R}$ (όπου $b \notin \mathbb{R}$)

(γ′) $a + b = 0$ και $a \in \mathbb{R}$ (όπου $b \in \mathbb{R}$).

Όταν ισχύει η (α) τότε η εξίσωση (3.1) έχει ακριβώς μια λύση. Όταν ισχύει η (β), τότε δεν υποδηλώνει καμία λύση αν $\overline{a}c + cb \neq 0$, όμως αν $\overline{a}c + cb = 0$ τότε το σύνολο των λύσεων είναι ένα επίπεδο (ένας συσχετισμενος υπόχωρος διάστασης 2 στο $\mathbb{R}$) . Όταν ισχύει η (γ), τότε δεν υπάρχει λύση αν $c \neq 0$, αλλά κάθε στοιχείο του $\mathbb{H}$ αποτελεί λύση αν $c = 0$.

Θεώρημα 3.1.2. Ο εσωτερικός αυτομορφισμός του $\mathbb{H}$ είναι όλες οι $\mathbb{R}$-γραμμικές απεικονήσεις από $\mathbb{H} \to \mathbb{H}$ που ικανοποιούν τις παρακάτω ιδιότητες: αφήνουν αναλλοίωτο το στοιχείο 1, αφήνουν αναλλοίωτο το $\mathbb{E}$ και προκαλούν στο $\mathbb{E}$ μια ισομετρία με ορίζουσα +1.

Θεώρημα 3.1.3. Για κάθε $u, v \in \mathbb{H}$ ισχύουν οι παρακάτω ισότητες:

$$S(u\overline{v}) = S(v\overline{u}) = S(\overline{u}v) = S(\overline{v}u) = \frac{1}{2}(u\overline{v} + v\overline{u}) = \frac{1}{2}(\overline{u}v + \overline{v}u)$$

η απουσία αυτών των σταθερών (**scalars**) ισούται με την ορθογωνιότητα των u και v για τη τετραδική μορφή $w \mapsto |w|^2$.

3.1.2 Απόδειξη Θεωρήματος 3.1.1 και περισσότερες πληροφορίες

Η μελέτη της εξίσωσης (3.1) είναι αντίστοιχη με τη μελέτη της γραμμικής απεικόνισης $F_{a,b} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ ορισμένη από $w \mapsto aw + wb$. Ειδικότερα πρέπει να μελετηθούν ο πυρήνας και η εικόνα της απεικόνισης, εφόσον $dim(ker(F_{a,b}) + dim(im(F_{a,b}) = 4$. Κάνοντας απλούς υπολογισμούς χρησιμοποιώντας τους τύπους (3.2),(3.3) καταλήξαμε στις παρακάτω ισότητες:

$$\forall w \in \mathbb{H},\ F_{a,b}(aw) = aF_{a,b}(w) \ \text{και} F_{a,b}(wb) = F_{a,b}(w)b \tag{3.4}$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}
F_{a,b}(aw) &= a(aw) + (aw)b \\
aF_{a,b}(w) &= a(aw + wb) = a(aw) + a(wb) \\
&\text{και} \\
F_{a,b}(wb) &= a(wb) + (wb)b \\
F_{a,b}(w)b &= (aw + wb)b = (aw)b + (wb)b = a(wb) + (wb)b
\end{aligned}$$

□

$$F_{a,b} + F_{\overline{a},\overline{b}} = F_{\overline{a},b} + F_{a,\overline{b}} = 2S(a+b)id_{\mathbb{H}} \tag{3.5}$$

Απόδειξη.

$F_{a,b} + F_{\overline{a},\overline{b}} = aw + wb + \overline{a}w + w\overline{b}$

$F_{\overline{a},b} + F_{a,\overline{b}} = \overline{a}w + wb + aw + w\overline{b}$

όμως ισχύει ότι:

$\overline{a}w + wb + aw + w\overline{b} = (\overline{a} + a)w + w(b + \overline{b})$

επίσης γνωρίζουμε:

$\overline{a} + a = a_0 - ai - aj - ak + a_0 + ai + aj + ak = 2a_0$

αντικαθιστώντας την τελευταία ισότητα στην προηγούμενη έχουμε ότι:

$2a_0w + 2wb_0 = 2(a_0w + wb_0) = 2S(a+b)id_{\mathbb{H}}$

□

Πρόταση 3.1.1. *Έστω η απεικόνιση $F_{a,b} : H \to H, w \to F_{a,b}(w) = aw + wb$. Τότε έχουμε:*

1. *Η απεικόνιση $F_{a,b}$ είναι $\mathbb{R}$-γραμμική.*
2. *Αν $dimKerF_{a,b} = m$ τότε ισχύουν:*
   - *(α΄) Αν $Re(a+b) \neq 0$ ή $|a| \neq |b|$, τότε $m = 0$.*
   - *(β΄) Αν $Re(a+b) = 0, |a| = |b|$ και $a \notin \mathbb{R}$, τότε $m = 2$.*
   - *(γ΄) Αν $a + b = 0$ και $a = a_0 \in \mathbb{R}$, τότε $m = 4$.*

Απόδειξη. 1. $F_{a,b}(\lambda x+\mu y)+(\lambda x+\mu y)b = \lambda(ax+xb)+\mu(ay+yb) = \lambda F_{a,b}(x)+\mu F_{a,b}(y)$, για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, x, y \in \mathbb{H}$

2. Έστω $a = (a_0, a_1, a_2, a_3) = a_0 1 + (a_1 i + a_2 j + a_3 k) \equiv a_0 + \overrightarrow{a}, b = (b_0, b_1, b_2, b_3) = b_0 1 + (b_1 i + b_2 j + b_3 k) \equiv b_0 + \overrightarrow{b}$, και $w = (w_0, w_1, w_2, w_3) = w_0 1 + (w_1 i + w_2 j + w_3 k) \equiv w_0 + \overrightarrow{w}$

Τότε έχουμε:

$$
\begin{aligned}
& aw + wb = (a_0 + \overrightarrow{a})(w_0 + \overrightarrow{w}) + (w_0 + \overrightarrow{w})(b_0 + \overrightarrow{b}) \\
& = a_0 w_0 - \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{w} + a_0 \overrightarrow{w} + w_0 \overrightarrow{a} + \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{w} + w_o b_0 - \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{b} + b_0 \overrightarrow{w} + w_0 \overrightarrow{b} + \overrightarrow{w} \times \overrightarrow{b} \\
& = [(a_0 + b_0) w_0 - (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{w}] + [(a_0 + b_0) \overrightarrow{w} + w_0 (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{w}].
\end{aligned}
$$

Επομένως έχουμε:

$$
\begin{aligned}
& w \in Ker F_{a,b} \Leftrightarrow aw + wb = 0 \\
& \Leftrightarrow [(a_0 + b_0) w_0 - (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{w}] + [(a_0 + b_0) \overrightarrow{w} + w_0 (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{w}] \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} (a_0 + b_0) w_0 - (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{w} = 0, & (1) \\ (a_0 + b_0) \overrightarrow{w} + w_0 (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}, & (2) \end{cases}
\end{aligned}
$$

(α′) Έστω ότι $Re(a + b) \neq 0$. Τότε $a_0 + b_0 \neq 0$. Από τη σχέση (2) πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά και τα δύο μέλη με το διάνυσμα $\overrightarrow{w}$, λαμβάνουμε:

$$
\begin{aligned}
& (a_0 + b_0) |\overrightarrow{w}|^2 + w_0 (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{w} = 0 \Rightarrow (a_0 + b_0) |\overrightarrow{w}|^2 + w_0^2 (a_0 + b_0) = 0 \\
& \Rightarrow (a_0 + b_0)(w_0^2 + |\overrightarrow{w}|^2) = 0 \overset{a_0 + b_0 \neq 0}{\Rightarrow} w_0^2 + |\overrightarrow{w}|^2 = 0 \Rightarrow w = 0.
\end{aligned}
$$

Τώρα υποθέτουμε ότι $|a| \neq |b|$ και $a_0 + b_0 = 0$. Τότε $b_0 = -a_0$, οπότε από τη σχέση $|a| \neq |b|$ έπεται ότι $|\overrightarrow{a}| \neq |\overrightarrow{b}|$.

Τότε οι σχέσεις (1), (2) γίνονται: $\begin{cases} (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{w} = 0, & (3) \\ w_0 (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}. & (4) \end{cases}$

Από την (4) θεωρώντας το εσωτερικό γινόμενο με το διάνυμα $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ έχουμε:

$$
w_0 (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \cdot (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) = 0 \Rightarrow w_0 (|\overrightarrow{a}|^2 - |\overrightarrow{b}|^2) = 0 \Rightarrow w_0 = 0.
$$

Τότε έχουμε:

$$
\begin{aligned}
& (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{w} = \lambda (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}), \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \overrightarrow{w} \cdot (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \lambda (|\overrightarrow{a}|^2 - |\overrightarrow{b}|^2) \\
& \overset{(3)}{\Rightarrow} \lambda = 0 \Rightarrow \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}.
\end{aligned}
$$

Επομένως και σε αυτή την περίπτωση προκύπτει ότι $w = w_0 + \overrightarrow{w} = 0 + \overrightarrow{0} = 0$.

(β′) Έστω $a_0+b_0=0, \quad$ και $\quad |a|=|b|, a\notin\mathbb{R}$. Τότε αφού $a_0^2=b_0^2$, έπεται ότι $|\overrightarrow{a}|=|\overrightarrow{b}|, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\neq\overrightarrow{0}$ και οι εξισώσεις (1) και (2) γίνονται:

$$\begin{cases}(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{w}=0,\\ w_0(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})+(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})\times\overrightarrow{w}=\overrightarrow{0}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{w}=0, & (5)\\ (\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})\times\overrightarrow{w}=-w_0(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}), & (6)\end{cases}$$

(i) Αν $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\neq\overrightarrow{0}$, τότε απο την (6) θεωρώντας το εσωτερικό γινόμενο με το διάνυσμα $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ έχουμε:

$$w_0(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})=0\Rightarrow w_0(|\overrightarrow{a}|^2-|\overrightarrow{b}|^2)=0\Rightarrow w_0\in\mathbb{R}.$$

Επίσης από την σχέση (6) προκύπτει ότι:

$$\overrightarrow{w}=\lambda(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})+\mu(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})\times(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}), \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

Τότε πρέπει:

$$\begin{aligned}&(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})\times\overrightarrow{w}=-w_0(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\\ &\Leftrightarrow \mu(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})\times[(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})\times(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})]=-w_0(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}), \lambda\in\mathbb{R}\\ &\Leftrightarrow \mu[(|\overrightarrow{a}|^2-|\overrightarrow{b}|^2)\times(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})-|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|^2(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})]=-w_0(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}), \lambda\in\mathbb{R}\\ &\Leftrightarrow -\mu[|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|^2(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})]=-w_0(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}), \lambda\in\mathbb{R}\\ &\mu=+\frac{w_0}{|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|^2}, \lambda\in\mathbb{R} \quad \text{αφού} \quad \overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\neq\overrightarrow{0}\end{aligned}$$

Επομένως είναι:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{w}&=\lambda(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})+\frac{w_0}{|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|^2}(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})\times(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})=\\ &=\lambda(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})+\frac{2w_0}{|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|^2}(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}),\end{aligned}$$

και $\lambda\in\mathbb{R}$

$$w=w_0+\overrightarrow{w}=w_0+[\lambda(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})+\frac{2w_0}{|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|^2}(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})], w_0,\lambda\in\mathbb{R}.$$

(ii) Αν $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=\overrightarrow{0}$ τότε $w_0\overrightarrow{a}=\overrightarrow{0}$ και $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{w}=0\Leftrightarrow(w_0=0 \quad \text{και} \quad \overrightarrow{w}\perp\overrightarrow{a})$, αφού $\overrightarrow{a}\neq\overrightarrow{0}$.

(γ′) Έστω $a+b=0$ και $a=a_0\in\mathbb{R}$, τότε $b=-a_0\in\mathbb{R}$ και $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{b}=\overrightarrow{0}$, ενώ οι σχέσεις (1),(2) γίνονται:

$$\begin{cases}(a_0+b_0)w_0=0, & (1a)\\ (a_0+b_0)\overrightarrow{w}=\overrightarrow{0}, & (2a)\end{cases} \overset{\text{αφού} a_0+b_0}{\Rightarrow} w\in\mathbb{H}.$$

$\square$

Όταν η (β) είναι αληθής, τότε από την ισότητα (3.5) προκύπτει ότι $F_{\bar{a},\bar{b}} = -F_{a,b}$ και $F_{a,\bar{b}} = -F_{\bar{a},b}$.

Από την πρόταση έχουμε ότι τρείς περιπτώσεις για τη διάσταση του πυρήνα και κατ'επέκταση τρείς τύπους ανεύρεσης ριζών στην εξίσωση $aw + wb = c$.

(α′) Αν $Re(a+b) \neq 0$ ή $|a| \neq |b|$, τότε $kerF_{a,b} = \{0\}$ άρα $dimImF_{a,b} = 4$. Επομένως η $F_{a,b}$ είναι συνάρτηση 1-1 και επί, με αποτέλεσμα για κάθε c να υπάρχει w_0 τέτοιο ώστε η εξίσωση $aw + wb = c$ να έχει μοναδική λύση η οποία είναι η [21]:

$$w = (2b_0 + a + |b|^2 a^{-1})^{-1}(c + a^{-1}c\bar{b}) = (c + \bar{a}cb^{-1})(2a_0 + b + |a|^2 b^{-1})^{-1}.$$

Μια δεύτερη προσέγγιση για τη μοναδική λύση έγινε από τον R. Michael Porter [22]. Η λύση αυτή θα είναι της μορφής $w = \frac{\alpha}{\beta}$ όπου τα α, β είναι τα παρακάτω:

$$\alpha = (|a|^2 + |b|^2)(\bar{a}c + c\bar{b}) + \bar{a}(\bar{a}c + c\bar{b})\bar{b} + (|a|^2 cb + |b|^2 ac),$$

$$\beta = [|a|^2 + |b|^2 + 2(a_0 b_0 + |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|)][|a|^2 + |b|^2 + 2(a_0 b_0 - |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|)], \text{ με } \beta \neq 0.$$

(β′) Αν $Re(a+b) = 0, |a| = |b|$ με $a, b \notin \mathbb{R}$ τότε $kerF_{a,b} = 2$ και $ImF_{a,b} = 2$. Στην συγκεκριμένη περίπτωση κάνουμε διερεύνηση για δύο περιπτώσεις αρχικά αν $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$ και έπειτα αν $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{b}$.

- αν $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$ και $a_0 + b_0 = 0$ τότε οι (1), (2) γίνονται:

$$\begin{cases} -2\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{w} = c_0 \\ 2w_0(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{c} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{w} = -\frac{c_0}{2} \\ 2w_0\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{w} = -\dfrac{c_0}{2}} \\ \boxed{w_0 = \dfrac{\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a}}{2|\overrightarrow{a}|^2}} \end{cases}$$

- αν $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{b}$ τότε:

$$\begin{cases} (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{w} = -c_0, & (15) \\ w_0(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{w} = \overrightarrow{c} & (16) \end{cases}$$

$$(16) \Rightarrow (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{w} = \overrightarrow{c} - w_0(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \Rightarrow$$
$$\overrightarrow{w} = \lambda(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) + \mu[(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) \times (\overrightarrow{c} - w_0(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}))]$$

άρα

$$
\begin{aligned}
&(\vec{a} - \vec{b}) \times \vec{w} = \mu[(\vec{a} - \vec{b})] \times [(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{c} - w_0(\vec{a} + \vec{b}))] \\
&= \mu\{[(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{c} - w_0(\vec{a} + \vec{b})](\vec{a} - \vec{b}) - |\vec{a} - \vec{b}|^2[\vec{c} - w_0(\vec{a} + \vec{b})]\} \\
&= \mu[\cancelto{0}{(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c}} - w_0\cancelto{0}{(|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2)}](\vec{a} - \vec{b}) - |\vec{a} - \vec{b}|^2(\vec{c} - w_0(\vec{a} + \vec{b})) \\
&= \mu[(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c}] - \mu|\vec{a} - \vec{b}|^2(\vec{c} - w_0(\vec{a} + \vec{b})). \qquad (17)
\end{aligned}
$$

Αν ισχύει ότι $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$ τότε ο τύπος (17) γίνεται:

$$
\begin{aligned}
&-\mu|\vec{a} - \vec{b}|^2 = 1 \Rightarrow \mu = -\frac{1}{|\vec{a} - \vec{b}|^2} \\
&\Rightarrow \vec{w} = \lambda(\vec{a} - \vec{b}) - \frac{1}{|\vec{a} - \vec{b}|^2}[(\vec{a} - \vec{b}) \times [\vec{c} - w_0(\vec{a} + \vec{b})] \\
&\vec{w} = \lambda(\vec{a} - \vec{b}) - \frac{1}{|\vec{a} - \vec{b}|^2}(\vec{a} - \vec{b}) \times \vec{c} + \frac{2w_0}{|\vec{a} - \vec{b}|^2}(\vec{a} \times \vec{b}), \quad \lambda, w_0 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Όμως από την (16) έχω τις αναγκαίες συνθήκες:

$$
\boxed{\vec{c} \cdot \vec{w} = -c_0 w_0} \text{ και } \boxed{(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0}
$$

Άρα έχω:

$$
-c_0 w_0 = \vec{c} \cdot \vec{w} = \cancelto{0}{\lambda \vec{c}(\vec{a} - \vec{b})} - \cancelto{0}{\frac{1}{|\vec{a} - \vec{b}|^2}} + \frac{2w_0}{|\vec{a} - \vec{b}|^2}(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) \Rightarrow \begin{cases} w_0 = 0, \text{ ή} \\ c_0 = -\frac{2(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a} - \vec{b}|^2} \end{cases}
$$

Οι συνθήκες είναι οι εξής:

$$
\boxed{(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0} \quad \text{και} \quad \boxed{2(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = -c_0|\vec{a} - \vec{b}|^2}
$$

Από την (15) έχω:

$$\cancel{\lambda(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})}^{0}-\frac{1}{|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|^2}(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot[(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})\times\overrightarrow{c}]$$

$$+\cancel{\frac{2w_0}{|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|^2}(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})}^{0}=-c_0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|^2}(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{c}-\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}]=-c_0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|^2}[(\overrightarrow{b},\overrightarrow{a},\overrightarrow{c})-(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})]=-c_0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2(\overrightarrow{c},\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})}{|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|^2}=c_0, \text{που ισχύει.}$$

Επίσης:

$$\overrightarrow{c}\times(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})=[(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})\times\overrightarrow{w}]\times(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{c}\times(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})=\cancel{(|a|^2-|b|^2)\overrightarrow{w}}^{0}-[\overrightarrow{w}\cdot(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})](\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{c}\times(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})=c_0(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})}\begin{cases}\overrightarrow{c}(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})=0 \quad \text{ή}\\ c_0|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|^2=-2(\overrightarrow{c},\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}).\end{cases}$$

Αφού

$$[\overrightarrow{c}\times(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})]\cdot(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})=c_0|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|^2$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{c},\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b},\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})=c_0|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|^2$$

$$\Leftrightarrow -(\overrightarrow{c},\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})+(\overrightarrow{c},\overrightarrow{b},\overrightarrow{a})=c_0|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|^2$$

$$2(\overrightarrow{c},\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})=-c_0|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|^2.$$

(γ′) Αν $a+b=0$ και $a=a_0\in\mathbb{R}$ τότε $kerF_{a,b}=4$ άρα $ImF_{a,b}=0$. Αν $c=0$ τότε έχουμε λύσεις, αν όμως $c\neq 0$ η εξίσωση είναι αδύνατη.

Συνοψίζοντας καταλήγουμε στα παρακάτω συμπεράσματα:

- Αν $Re(a+b) \neq 0$ ή $|a| \neq |b|$, τότε η εξίσωση $aw + wb = c$ να έχει μοναδική λύση η οποία είναι η:

$$w = (2b_0 + a + |b|^2 a^{-1})^{-1}(c + a^{-1}c\bar{b}) = (c + \bar{a}cb^{-1})(2a_0 + b + |a|^2 b^{-1})^{-1}.$$

- Αν $Re(a+b) = 0, |a| = |b|$ με $a, b \notin \mathbb{R}$
  - αν $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$ και $a_0 + b_0 = 0$ τότε υπάρχει διπαραμετρική απειρία λύσεων που δίνονται από τις παρακάτω:

$$\boxed{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{w} = -\frac{c_0}{2}}, \boxed{w_0 = \frac{\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a}}{2|\overrightarrow{a}|^2}}$$

    Η πρώτη είναι της μορφής $a_1 w_1 + a_2 w_2 + a_3 w_3 = -\frac{c_0}{2}$ και έχει λύση $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3)$ για κάθε $c_0 \in \mathbb{R}$.
  - αν $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{b}$ τότε η εξίσωση $aw + wb = c$ έχει λύσεις $w = w_0 + \overrightarrow{w}$, με

$$\overrightarrow{w} = \lambda(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) - \frac{1}{|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|^2}(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c} + \frac{2w_0}{|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|^2}(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}), \begin{cases} w_0 = 0, \text{ή} \\ c_0 = -\frac{2(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})}{|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|^2} \end{cases}$$

    όπου τα $\lambda, w_0 \in \mathbb{R}$ και υπό την προυπόθεση ότι ικανοποιούνται οι συνθηκες:

$$\boxed{\overrightarrow{c} \cdot (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) = 0}$$

$$\boxed{\overrightarrow{c} \times (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = c_0(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})}.$$

    Από αυτές προκύπτει ότι: $2(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = -c_0|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|^2$.
    Οι παραπάνω συνθήκες ισοδυναμούν με τη συνθήκη: $\bar{a}c + cb = 0$. Πράγματι:

$$\bar{a}c + cb = 0 \Leftrightarrow (a_0 - \overrightarrow{a})(c_0 + \overrightarrow{c}) + (c_0 + \overrightarrow{c})(b_0 + \overrightarrow{b}) = 0$$

$$\cancelto{0}{(a_0 + b_0)c_0} + \overrightarrow{c} \cdot (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) + [\cancelto{(a_0+b_0)\overrightarrow{c}}{-}c_0(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) - (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c}] = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{c} \cdot (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) = 0 \quad \text{και} \quad \overrightarrow{c} \times (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = +c_0(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}).$$

- Αν $a + b = 0$ και $a = a_0 \in \mathbb{R}$ τότε στην $aw + wb = c$ αν $c = 0$ τότε έχουμε λύσεις, αν όμως $c \neq 0$ η εξίσωση είναι αδύνατη.

3.1.3 Παράδειγμα

- Έστω:
  $a = 0 + (0,0,1), |a| = 1, a^{-1} = 0 - (0,0,1)$
  $b = 1 + (0,0,2), |b| = \sqrt{5}, b^{-1} = 1 - (0,0,2)$
  $c = 0 + (0,0,3)$.
  Τότε σύμφωνα με τον τύπο $w = (2b_0 + a + |b|^2 a^{-1})^{-1}(c + a^{-1}c\bar{b})$ έχουμε μοναδική λύση:

$$
\begin{aligned}
w = &\{2 + (0,0,1) + 5[0 - (0,0,1)]\}^{-1}\{0 + (0,0,3) + \\
&+ [0 - (0,0,1)][0 + (0,0,3)][1 - (0,0,2)]\} \\
&= \{2 + (0,0,1) + 0 - (0,0,5)\}^{-1}\{[0 + (0,0,3)] + [3 + (0,0,-6)]\} \\
&= \{2 + (0,0,-4)\}^{-1}\{3 + (0,0,-3)\} \\
&= \{\frac{1}{10}, 0, 0, \frac{2}{10}\}\{3 + (0,0,-3)\} \\
&= \{\frac{9}{10}, 0, 0, \frac{3}{10}\} \\
&= \frac{9}{10} + \frac{3}{10}k.
\end{aligned}
$$

- Αν $Re(a+b) = 0, |a| = |b|$
  * Έστω $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} \neq 0, a_0 + b_0 = 0$, δηλαδή για $a = 1 + (1,0,1)$, $b = -1 + (1,0,1), c = 1 + (0,0,1)$ έχουμε:

$$
\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{w} = -\frac{c_0}{2} \Rightarrow a_1 w_1 + a_3 w_3 = -\frac{1}{2} \Rightarrow w_1 + w_3 = -\frac{1}{2}
$$
$$
w_0 = \frac{\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a}}{2|\overrightarrow{a}|^2} = \frac{(1,0,1)(1,0,1)}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}
$$

    άρα $w = w_0 + \overrightarrow{w} = \frac{1}{2} + (0, 0, -\frac{1}{2} + w_1(1,0,-1) + w_2(0,1,0), w_1, w_2 \in \mathbb{R}$

    δηλαδή υπάρχει διπαραμετρική απειρία λύσεων.
  * αν $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{b}$, δηλαδή $a_0 = 1, b_0 = -1, \overrightarrow{a} = (1,0,1), \overrightarrow{b} = (0,1,1)$, $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = (1,-1,0), \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = (1,1,2)$ τότε πρέπει να ισχύουν οι προϋποθέσεις:

$$
\overrightarrow{c} \cdot (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) = 0
$$

    και

$$
\overrightarrow{c} \times (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = c_0(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})
$$

    Από την πρώτη προκύπτει ότι:

$$
\overrightarrow{c}(1,-1,0) = 0 \Rightarrow (c_1, c_2, c_3)(1,-1,0) = 0 \Rightarrow c_1 - c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = c_2
$$

Από τη δεύτερη προκύπτει ότι:

$$\overrightarrow{c} \times (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = (2c_1 - c_3, -2c_1 + c_3, 0) = c_0(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) = c_0(1, -1, 0)$$

$$c_0 = 2c_1 - c_3$$

· αν $w_0 = 0$ τότε $w = \overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3)$,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{w} &= \lambda(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) - \frac{1}{|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|^2}(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c} \\ &= \lambda(1, -1, 0) - \frac{1}{2}(-c_3, c_3, 2c_1) + w_0(-1, -1, +1)\end{aligned}$$

· αν $c_0 = -\frac{2(a,b,c)}{|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|^2}$ τότε $c_0 = 2c_1 - c_3$ και ισχύει και η σχέση $c_1 = c_2$. Επομένως έχω:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{w} &= \lambda(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c} + \frac{2w_0}{|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|^2}(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}), \lambda, w_0 \in \mathbb{R} \\ &= \lambda(1, -1, 0) - \frac{1}{2}(-c_3, c_3, 2c_1) + w_0(-1, +1, -1).\end{aligned}$$

Επίσης ισχύουν οι σχέσεις:

$$(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{w} = -c_0$$

$$w_0(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{w} = \overrightarrow{c}$$

Από την πρώτη έχω:

$$(1, 1, 2) \cdot (w_1, w_2, w_3) = -c_0 \Rightarrow w_1 + w_2 + 2w_3 = -c_0$$

Και από την δεύτερη μέσω πράξεων προκύπτει:

$$w_0 = c_1 + w_3$$

Επομένως ο τύπος για τον υπολογισμό του w είναι:

$$\begin{aligned}w = w_0 + \overrightarrow{w} &= (c_1 + w_3, -c_0 - w_2 - 2w_3, w_2, w_3) \\ &= (c_1, -c_0, 0, 0) + \kappa(0, -1, 1, 0) + \lambda(1, -2, 0, 1), \kappa, \lambda \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

– αν $a + b = 0$ με $a = a_0 \in \mathbb{R}$ και $a = 1 + (1, -1, 0), b = -1 + (-1, 1, 0)$ τότε:

$$b = -a = -[1 + (1, -1, 0)] = -1 + (-1, 1, 0)$$

άρα $aw + wb = aw - wa = 0$ που ισχύει αν $c = 0$.

Κεφάλαιο 4

Ρίζες Πολυωνύμων στο σύνολο $\mathbb{H}$

4.1 Η Μέθοδος Niven

Η πρώτη προσπάθεια για επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων quaternions (**quaternionic quadratic equations**) και μελέτης του *Θεμελιώδους Θεωρήματος της άλγεβρας για τετράδες* έγινε απο τους Niven και Eilenberg [10]. Μετά από αυτές τις θεμελιώδεις δουλειές, γεννήθηκε το ερώτημα για τον τρόπο υπολογισμού του αριθμού των ριζών στα πολυώνυμα quaternions νιοστού βαθμού. Μια ενδιαφέρουσα εφαρμογή unilateral δευτεροβάθμιων εξισώσεων βρίσκεται στην επίλυση δευτέρου βαθμού ομογενών τετραδικών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές [11, 12]. Έστω:

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) - a_1 \frac{d}{dx}\Psi(x) - a_0\Psi(x) = 0, \tag{4.1}$$

όπου $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{H}, a_{0,1} \in \mathbb{H}$ (το σύνολο των quaternions) και $x \in \mathbb{R}$. Θέτουμε $\Psi(x) = exp[qx](q \in \mathbb{H})$ και χρησιμοποιώντας την $\mathbb{H}$-γραμμικότητα της εξίσωσης (**linearity**) (4.1) έχουμε:

$$q^2 - a_1 q - a_0 = 0. \tag{4.2}$$

Γενικεύοντας αυτό το αποτέλεσμα, βλέπουμε ότι το πρόβλημα επίλυσης νιοστού βαθμού διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές,

$$\frac{d^n}{dx^n}\Psi(x) - \sum_{s=1}^{n-1} a_s \frac{d^s}{dx^s}\Psi(x) - a_0\Psi(x) = 0 \tag{4.3}$$

όπου $a_{0,1,..,n-1} \in \mathbb{H}$, μπορεί να αλλάξει σε πρόβλημα ανεύρεσης ριζών του αντίστοιχου νιοστού πολυωνύμου quaternion:

$$A_n(q) := q^n - \sum_{s=0}^{n-1} a_s q^s. \tag{4.4}$$

Σε αυτό το σημείο είναι σημαντικό να επισημάνουμε ότι αυτή η μέθοδος επίλυσης που βασίζεται στο να βρίσκουμε ρίζες από τα αντίστοιχα πολυώνυμα quaternions $\mathbb{H}$-γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές, δεν λειτουργεί στο $\mathbb{R}$ και σε $\mathbb{C}$- γραμμικές διαφορικές εξισώσεις.

Το 1941 το πρόβλημα εύρεσης ριζών σε unilateral quaternionic πολυώνυμα επιλύεται χρησιμοποιώντας ένα *αλγόριθμο δύο βημάτων*. Σε αυτό το πρώιμο στάδιο ο Niven πρότινε να διαιρούμε το νιοστού βαθμού unilateral quaternionic πολυώνυμο (4.4) με ένα δευτεροβάθμιο πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές ($c_{0,1} \in \mathbb{R}$):

$$C_2(q) := q^2 - c_1 q - c_0. \tag{4.5}$$

Έπειτα, με χρήση της πολυωνυμικής εξίσωσης:

$$A_n(q) = B_{n-2}(q)C_2(q) - D_1(q), \tag{4.6}$$

όπου

$$B_{n-2} := q^{n-2} - \sum_{s=0}^{n-3} b_s q^s,\ D_1 := d_1 q + d_0, b_{0,1,\dots,n-3},\ d_{0,1} \in \mathbb{H}$$

το πρόβλημα ανεύρεσης ριζών του $A_n(q)$ μεταφράζεται στο παρακάτω πρόβλημα των *δύο βημάτων*:

- βήμα 1: ορίζουμε το d_0 και d_1 σε ότι αφορά τα $c_{0,1}$ και $a_{0,1,\dots,n-1}$
- βήμα 2: βρίσκουμε δύο ζεύγη πραγματικών εξισώσεων οι οποίες μας επιτρέπουν να υπολογίσουμε τα c_0 και c_1.

4.1.1 Ο αλγόριθμος του Niven

Αρχικά αναφέρουμε την μέθοδο που πρότινε ο Niven για ένα quaternionic πολυώνυμο νιοστού βαθμού . Προκειμένου να ορίσουμε τους quaternionic συντελεστές d_0 και d_1 με όρους πραγματικών συντελεστών μιας δεύτερης τάξης πολυώνυμου $C_2(q)$ και των quaternion συντελεστών ενός νιοστού βαθμού πολυώνυμο $A_n(q)$, πρέπει να επεκτίνουμε το γινόμενο $B_{n-2}(q)C_2(q)$,

$$\begin{aligned} B_{n-2}(q)C_2(q) = & q^n - (b_{n-3} + c_1)q^{n-1} - (b_{n-4} - c_1 b_{n-3} + c_0)q^{n-2} + \\ & - \sum_{s=2}^{n-3}(b_{s-2} - c_1 b_{s-1} - c_0 b_s)q^s + \\ & + (c_1 b_0 + c_0 b_1)q + c_0 b_0. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Για συγκεκριμένη επιλογή τετραδικών συντελεστών του πολυωνύμου $B_{n-2}(q)$ όπως

$$\begin{aligned} b_{n-3} =& a_{n-1} - c_1, \\ b_{n-4} =& a_{n-2} + c_1 b_{n-3} - c_0, \\ b_{s-2} =& a_s + c_1 b_{s-1} + c_0 b_s,\ (s = 2, 3, ..., n-3) \end{aligned} \tag{4.8}$$

μπορούμε να ξαναγράψουμε την εξίσωση (4.7):

$$B_{n-2}(q)C_2(q) = A_n(q) + (a_1 + c_1 b_0 + c_0 b_1)q + a_0 + c_0 b_0. \tag{4.9}$$

Συγκρίνοντας αυτή την εξίσωση με την πολυωνυμική εξίσωση (4.6) έχουμε το *πρώτο βήμα*:

$$\begin{aligned} d_1 =& a_1 + c_1 b_0(c_{0,1}; a_{2,3,...,n-1}) + c_0 b_1(c_{0,1}; a_{2,3,...,n-1}), \\ d_0 =& a_0 + c_0 b_0(c_{0,1}; a_{2,3,...,n-1}). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Έτσι με κάποιους απλούς αλγεβρικούς χειρισμούς, μπορούμε να εκφράσουμε τους quaternionic συντελεστές $d_{0,1}$ με όρους πραγματικών συντελεστών $c_{0,1}$ και με quaternionic συντελεστές $a_{0,1,...,n-1}$. Αυτό είναι το πρώτο βήμα του αλγόριθμου του Niven. Προκειμένου να ολοκληρώσουμε τον συγκεκριμένο αλγόριθμο πρέπει να ορίσουμε τους πραγματικούς συντελεστές $c_{0,1}$ (δεύτερο βήμα). Αφού λάβουμε τους συντελεστές, μπορούμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές $d_{0,1}$ κάνοντας χρήση της εξίσωσης (4.10) η οποία μετά το δεύτερο βήμα έχει μόνο γνωστές ποσότητες. Είναι φυσικό να αναρωτηθούμε γιατί οι quaternionc συντελεστές $d_{0,1}$ είναι σημαντικοί στον υπολογισμό της quaternionic λύσης του πολυωνύμου $A_n(q)$. Η απάντηση δίνεται με το να παρατηρήσουμε ότι αν η q_* είναι λύση της $A_n(q)[\Rightarrow A_n(q_*) = 0]$ και $\{c_0, c_1\} = \{-|q_*|^2, 2Re[q_*]\}[\Rightarrow C_2(q*) = 0]$, και χρησιμοποιώντας και την εξίσωση (4.6) έχουμε:

$$D_1(q_*) = 0 \Rightarrow q_* = -\overline{d_1} d_0/|d_1|^2. \tag{4.11}$$

Η quaternionic λύση μπορεί να έτσι να εκφραστεί με όρους των συντελεστών $d_{0,1}$. Επανερχόμαστε στο πρόβλημα του ορισμού των πραγματικών συντελεστών $c_{0,1}$ όπου ο Niven επεσήμανε ότι:

$$c_0 = -|q_*|^2 = -|d_0|^2/|d_1|^2 \text{ και } c_1 = 2Re[q_*] = -2Re[\overline{d_1} d_0]/|d_1|^2.$$

Συνεπώς, προκειμένου να βρούμε τα $c_{0,1}$ πρέπει πρώτα να λύσουμε το σύστημα(δεύτερο βήμα):

$$\begin{aligned} c_0|d_1(c_{0,1}; a_{1,2,3,...,n-1})|^2 + |d_0(c_{0,1}; a_{0,2,3,...,n-1})|^2 = 0, \\ c_1|d_1(c_{0,1}; a_{1,2,3,...,n-1})|^2 + 2Re[\overline{d_1}(c_{0,1}; a_{1,2,3,...,n-1}) d_0(c_{0,1}; a_{0,2,3,...,n-1})] = 0 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Συνεπώς *πραγματικό* ζευγάρι λύσεων $\{c_0, c_1\}$ δίνει το μόντουλο και το πραγματικό μέρος της quaternionic πολυωνυμικής λύσης.

- **Δεύτερης Τάξης Quaternionic Πολυώνυμα**

Το κύριο και πρακτικό πρόβλημα στη χρήση του αλγόριθμου του Niven είναι στο δεύτερο βήμα, στο τρόπο δηλαδή εύρεσης των πραγματικών λύσεων του συστήματος (4.12). Για δείξουμε τη δυσκολία στη χρήση του αλγόριθμου του Niven λίνουμε την παραπάνω δευτεροβάθμια τετραδική εξίσωση:

$$q^2 + jq + (1-k) = 0 \quad [A_2(q) = q^2 - a_1 q - a_0, \quad a_0 = k-1, a_1 = -j]. \tag{4.13}$$

Τα πολυώνυμα δεύτερου βαθμού αντιπροσωπεύουν την πιο απλή περίπτωση στην οποία μπορούμε να ελέγξουμε τον αλγόριθμο του Niven. Σε αυτή την περίπτωση το quaternionic πολυώνυμο $B_{n-2}(q)$ μειώνεται σε $B_0(q) = -b_0 = -1$. Συνεπώς:

$$\begin{aligned} B_0(q)C_2(q) &= q^2 - c_1 q - c_0 \\ &= q^2 - a_1 q - a_0 + (a_1 - c_1)q + a_0 - c_0 \\ &= A_2(q) + D_1(q). \end{aligned}$$

Από την προηγούμενη εξίσωση ή ισοδύναμα θέτοντας $b_1 = 0$ και $b_0 = -1$ στην (4.10) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} d_1 &= a_1 - c_1, \\ d_0 &= a_0 - c_0. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Τώρα για τα πολυώνυμα δεύτερης τάξης, η εξίσωση (4.12) μειώνεται σε:

$$\begin{aligned} c_0|a_1 - c_1|^2 + |a_0 - c_0|^2 &= 0 \\ c_1|a_1 - c_1|^2 + 2Re[(\overline{a} - c_1)(a_0 - c_0)] &= 0. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Η λύση αυτού του συστήματος δεν είναι απλή. Σε αυτή την περίπτωση η επιλογή των:

$$a_1 = -j \quad \text{και} \quad a_0 = k - 1,$$

μειώνει το σύστημα (4.15) σε:

$$\begin{aligned} c_0(1 + c_1^2) + (1 + c_0)^2 + 1 &= 0 \\ c_1(1 + c_1^2) + 2c_1(1 + c_0) &= 0. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Αν θεωρήσουμε ότι $c_1 \neq 0$ και $c_1 = 0$ τότε απλοποιείται το σύστημα. Στην πρώτη περίπτωση, $c_1 \neq 0$, δεν υπάρχει κανένα ζευγάρι πραγματικών λύσεων. Στη δεύτερη, $c_1 = 0$, έχουμε:

$$(c_0, c_1) = \begin{cases} (-1, 0) \\ (-2, 0) \end{cases} \Rightarrow (d_0, d_1) = \begin{cases} (k, -j) \\ (k+1, -j) \end{cases} \tag{4.17}$$

Τέλος χρησιμοποιώντας την (4.11) συμπεραίνουμε ότι οι λύσεις της quaternionic εξίσωσης (4.13) δίνονται από

$$q_* = \begin{cases} -i \\ -(i+j) \end{cases} \tag{4.18}$$

Με άμμεση αντικατάσταση, μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι τα $-i$ και $-(i+j)$ αναπαριστούν τις ρίζες των δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Πρωτού ολοκληρώσουμε αυτή τη σύντομη αναφορά του αλγόριθμου του Niven και υπογραμμίζοντας ότι όντως είναι είναι μια σημαντική μέθοδος με την οποία παίρνουμε τη λύση των μονομερών τετραδικών εξισώσεων νιοστού βαθμού, θέλουμε να δώσουμε έμφαση στο ότι τα συστήματα (4.15) και (4.10) δεν είναι πολύ πρακτικά και οι λύσεις τους χρήζουν επίπονων υπολογισμών.

4.2 Η Μέθοδος των R.Serodio-Lok-Shun Siu

Είναι γνωστό ότι σε ένα skew field, κάθε ρίζα ενός πολυωνύμου $f(x) = (x - x_1)\cdots(x - x_n)$ συγκλίνει σε ένα x_r για κάποιο r. Ο R.Serodio και ο Lok-Shun Siu, έδειξαν ότι στο πεδίο των quaternions υπάρχει τουλάχιστον ένα q_r που συγκλίνει σε κάθε x_r, και λόγω αυτού του αποτελέσματος μπορεί να δημιουργηθεί μια μέθοδος ορισμού των ριζών στα πολυώνυμα των quaternions.

Πρόταση 4.2.1. *Για κάθε* $q \in \mathbb{H}, [q] = \{x \in \mathbb{H} : Rex = Req \text{ και } |x| = |q|\}$

Πρόταση 4.2.2. *Για κάθε* $q \in \mathbb{H}\ \mathbb{R}, [q] = Zero(f_q)$.

Πρόταση 4.2.3. *(i) Θεώρημα Παραγόντων: Έστω* $f(x) \in \mathbb{H}$ *και* $q \in \mathbb{H}$. *Τότε* $q \in Zero(f)$ *αν και μόνο αν υπάρχει* $g(x) \in \mathbb{H}[x]$ *τέτοιο ώστε* $f(x) = g(x)(x - q)$.

(ii) Έστω $f(x) = g(x)h(x) \in \mathbb{H}[x]$. *Τότε*

$$Zero(f) = Zero(h) \cup \{x \in \mathbb{H} : h(x) \neq 0 \quad \text{και} \quad h(x)xh(x)^{-1} \in Zero(g)\}.$$

Θεωρούμε ότι $f(x)$ μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο γραμμικών παραγόντων:

$$f(x) = (x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

Τότε από την πρόταση 4.2.3, μπορούμε επαγωγικά να δείξουμε ότι $Zero(f) \subset [x_1] \cup \cdots \cup [x_n]$. Ως εκ τούτου, $Zero(f) = (Zero(f) \cap [x_1]) \cup \cdots \cup (Zero(f) \cap [x_n])$. Αργότερα αποδεικνύεται ότι κάθε $Zero(f) \cap [x_r]$ είναι μη κενό.

Λήμμα 4.2.1. *Έστω $p, q \in \mathbb{H}$. Τότε:*

$$(x-p)(x-q) = \begin{cases} [x-(p-\bar{q})q(p-\bar{q})^{-1}][x-(q-\bar{p})^{-1}p(q-\bar{p})], & \text{αν } q \neq \bar{p} \\ (x-q)(x-p), & \text{αν } q = \bar{p}. \end{cases}$$

Θεώρημα 4.2.1. Για κάθε r, το υποσύνολο $Zero(f) \cap [x_r]$ είναι μη κενό.

Απόδειξη. Από το λήμμα 4.2.1, κάθε γραμμικός συντελεστής $(x - x_r)$ μπορεί να μετακινηθεί από τα δεξιά της παραγοντοποίησης χωρίς να αλλάζει η αντιστοιχία των τάξεων. Επομένως το αποτέλεσμα προέρχεται από το Θεώρημα των Παραγόντων. □

Ο Niven έδειξε την ύπαρξη των ριζών στα πολυώνυμα των quaternions. Ως εκ τούτου, από το Θεώρημα των Παραγόντων, κάθε $f(x)$ μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο παραγόντων όπως η εξίσωση $f(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_n)$.

Πρόταση 4.2.4. *Θεωρούμε ότι το q είναι ένα ρίζα της $f(x)$. Επομένως διαιρώντας την $f(x)$ από τα δεξιά με την $f_q(x)$, έχουμε:*

$$f(x) = g(x)f_q(x) + ux + v.$$

Επομένως, $[q] \subset Zero(f)$, όταν $u = v = 0$, διαφορετικά, $q = -u^{-1}v$ είναι η μοναδική λύση στο $[q]$.

Μπορούμε να ορίσουμε το υποσύνολο $Zero(f) \cap [x_r]$, δεδομένου ότι όλα τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα είναι γνωστά. Έτσι, προκειμένου να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = 0$, πρώτα πρέπει να ορίσουμε τα Rex_r και $|x_r|^2$ για κάθε r. Σύμφωνα με τον Niven προκειμένου να ορίσουμε τα παραπάνω πρέπει πρώτα να λύσουμε ένα μη γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων $2n + 1$ βαθμού με δύο πραγματικούς αγνώστους, κάτι το οποίο όπως έχουμε ξαναναφέρει δεν είναι πρακτικό. Γι'αυτό τον λόγο θεωρούμε το πολυώνυμο $F(x) = \bar{f}(x)f(x)$, όπου $\bar{f}(x)$ έχει οριστεί για αντικαταστήσει όλους τους συντελεστές a_r του $f(x)$ με τους συζυγείς τους.

Θεώρημα 4.2.2. Το σύνολο των $F(x)$ είναι κλειστή αναλογία του $Zero(f)$, όπως

$$Zero(F) = \bigcup_{x \in Zero(F)} [x].$$

Απόδειξη. Γνωρίζοντας ότι για κάθε $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$, $\overline{q_1 + q_2} = \overline{q_1} + \overline{q_2}$ και $\overline{q_1 q_2} = \overline{q_2 q_1}$, έχουμε ότι $\bar{f}(x) = (x - \overline{x_n}) \cdots (x - \overline{x_1})$ και από υπολογισμούς μπορούμε να δείξουμε ότι $F(x) = f_{x_1}(x) \cdots f_{x_n}(x)$. Το αποτέλεσμα προέρχεται και από το την πρόταση 4.2.3 (ii). □

Από την πρόταση 4.2.4, για κάθε τάξη αναλογίας $[x_r]$, υπάρχει μιγαδικός αριθμός z_r τέτοιος ώστε $Req = Rez$ και $|q| = |z|$. Το θεώρημα 4.2.2 εγγυάται ότι μπορούμε να ορίσουμε κάθε χαρακτηριστικό πολυώνυμο $f_{x_r}(x)$ λύνοντας απευθείας την εξίσωση $F(x)$ για τις μιγαδικές ρίζες.

4.3 Η Μέθοδος Υπολογισμού Ριζών των Rogério Serôdio, Edgar Pereira και Jose Vitoria (SPV)

Η μοναδική αναφορά στον τρόπο υπολογισμού των ριζών στα unilateral quaternion πολυώνυμα είναι στον αλγόριθμο του Niven. Αυτός ο τρόπος δεν είναι πρακτικός καθότι απαιτεί πολλούς υπολογισμούς. Στόχος των R.Serodio, E. Pereira και J. Vitoria ήταν να κάνουν ένα διαφορετικό τρόπο για να πάρουν αυτές τις παραμέτρους και να τις εφαρμόσουν στον τύπο του Niven προκειμένου να κάνουν τον αλγόριθμο πιο πρακτικό.

Ορισμός 4.3.1. *Δύο quaternions x, y λέγονται όμοια αν υπάρχει ένα μη μηδενικό quaternion σ τέτοιο ώστε $\sigma^{-1}x\sigma = y$. Αυτό γράφεται $x \sim y$.*

Η σχέση $\sim$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στα quaternions. Συμβολίζουμε με $[x]$ την ισοδύναμη κλάση που περιέχει το x ή απλώς την κλάση που περιέχει το x.

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι σημαντικό διότι συσχετίζει κάθε quaternion με μία σχέση ισοδυναμίας η οποία προκύπτει από ένα συγκεκριμένο quaternion το οποίο είναι ισομορφισμός με ένα μιγαδικό αριθμό ο οποίος έχει μη μηδενικό φανταστικό μέρος.

Θεώρημα 4.3.1. Έστω $q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$, με $a_i \in \mathbb{R}(i = 0, ..., 3)$, τότε το q και το $a_0 + i\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ είναι όμοια δηλαδή $q \in\ [a_0 + i\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}]$.

Η έννοια της ιδιοτιμής είναι λίγο διαφορετική στο $\mathbb{H}$ από τη στιγμή που στο βαθμωτό γινόμενο δεν ισχύει η αντιμεταθετικότητα.

Ορισμός 4.3.2. *Ένα quaternion λ θεωρείται αριστερή (ή αντίστοιχα δεξιά) ιδιοτιμή ενός πίνακα A αν $Au = \lambda u$ με $u \neq 0$(ή$Au = u\lambda$). Το u το οποίο σχετίζεται με κάθε λ, λέγεται αριστερό(ή αντίστοιχα δεξί) ιδιοδιάνυμα.*

Αφού ισχύει $Au = u\lambda$, τότε ισχύει και $A(uq) = u\lambda q = (uq)q^{-1}\lambda q$ για κάθε μη μηδενικό q. Αυτό συνεπάγεται ότι αν το λ είναι μια δεξιά ιδιοτιμή τότε το ίδιο ισχύει και για το $q^{-1}\lambda q$. Επομένως, αν το λ είναι ένα δεξί ιδιοδιάνυσμα, τότε όλα τα στοιχεία του $[\lambda]$ είναι επίσης δεξιά ιδιοδιανύσματα. Αυτή η ιδιότητα δεν επαληθεύεται και για τα αριστερά ιδιοδιανύσματα. Το παρακάτω αποτέλεσμα ορίζει ότι ο αριθμός των δεξιών ιδιοτιμών είναι ένας τετραγωνικός πίνακας με quaternion στοιχεία.

Θεώρημα 4.3.2. Κάθε $x \times x$ πίνακας με στοιχεία quaternion έχει ακριβώς m δεξιές ιδιοτιμές οι οποίες είναι μιγαδικοί αριθμοί με μη αρνητικό φανταστικό μέρος.

Σημειώνουμε ότι σε κάθε δεξιά μιγαδική ιδιοτιμή αντιστοιχεί μία τάξη ισοδυναμίας των quaternions τα οποία είναι επίσης δεξιές ιδιοτιμές. Επομένως αν γνωρίζουμε τις m μιγαδικές δεξιές ιδιοτιμές, τότε γνωρίζουμε όλες τις δεξιές ιδιοτιμές.

Θεώρημα 4.3.3. Αν γράψουμε $A = A_1 + A_2 j$, όπου A_1, A_2 είναι $m \times m$ πίνακες με μιγαδικά στοιχεία, οι δεξιές ιδιοτιμές του A είναι ιδιοτιμές (με την κλασική έννοια) του πίνακα διαστάσεων $2m \times 2m$ με μιγαδικά στοιχεία:

$$\Phi(A) = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ -\bar{A}_2 & \bar{A}_1 \end{bmatrix}$$

Ορισμός 4.3.3. *Έστω το πολυώνυμο $p(x) = x^m + q_{m-1}x^{m-1} + \cdots + q_0$ τότε έχουμε τον πίνακα:*

$$C_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -q_0 & -q_1 & \cdots & -q_{m-2} & -q_{m-1} \end{bmatrix}$$

*ο οποίος είναι ένας (κάτω) συνοδός πίνακας (**companion matrix**) ο οποίος σχετίζεται με το πολυώνυμο $p(x)$.*

Πρόταση 4.3.1. *Έστω λ μία δεξιά ιδιοτιμή ενός συνοδού πίνακα που σχετίζεται με ένα πολυώνυμο $p(x)$, τότε:*

(i) *λ είναι ένα ρίζα του $p(x)$*

(ii) *$u = [1\ \lambda\ \lambda^2\ \cdots \lambda^{m-1}]^\top$ είναι ένα συσχετισμένο αριστερό ιδιοδιάνυσμα.*

Απόδειξη. (i) Έστω ότι θεωρούμε τον συνοδό πίνακα C_p του πολυώνυμου $p(x) = x^m + q_{m-1}x^{m-1} + \cdots + q_0$ και έστω ότι το λ είναι μια αριστερή ιδιοτιμή του C_p, τότε μπορούμε να γράψουμε $C_p u = \lambda u$, από το οποίο προκύπτει:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -q_0 & -q_1 & \cdots & -q_{m-2} & -q_{m-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{m-2} \\ v_{m-1} \\ v_m \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{m-2} \\ v_{m-1} \\ v_m \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

Πολλαπλασιάζοντας και τις δύο πλευρές, παίρνουμε το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων:

$$\begin{aligned} v_2 &= \lambda v_1, \\ v_3 &= \lambda v_2, \\ &\vdots \\ v_m &= \lambda v_{m-1}, \\ -q_0 u_1 - q_1 u_2 - \cdots - q_{m-1} v_m &= \lambda v_m. \end{aligned}$$

Διαδοχικές αντικαταστάσεις του $(m-1)^{st}$ εξισώσεων μας οδηγούν στο:

$$v_i = \lambda^{i-1} v_1, i = 2, ..., m. \tag{4.20}$$

Αντικαθιστώντας αυτό το αποτέλεσμα στη τελευταία εξίσωση του συστήματος, έχουμε:

$$-q_0 v_1 - q_1 \lambda v_1 - q_2 \lambda^2 v_1 - \cdots - q_{m-1} \lambda^{m-1} v_1 = \lambda^m v_1 \tag{4.21}$$

και μετά την παραμετροποίηση

$$(\lambda^m + q_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + q_2\lambda^2 + q_1\lambda + q_0)v_1 = 0.$$

Αφού $v_1 \neq 0$, αφού το v δεν μπορεί να είναι ένα μηδενικό διάνυσμα, καταλήγουμε στο ότι:

$$\lambda^m + q_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + q_2\lambda^2 + q_1\lambda + q_0 = 0$$

και η αριστερή ιδιοτιμή λ είναι ένα ρίζα του πολυωνύμου $p(x)$.

(ii) Έστω λ μία αριστερή ιδιοτιμή του συνοδού πίνακα που σχετίζεται με τον πολυώνυμο $p(x) = x^m + q_{m-1}x^{m-1} + \cdots + q_0$. Τότε επιλέγουμε $u_1 = 1$ και μέσω της (4.20) έχουμε:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{m-1} \end{bmatrix}$$

και καταλήγουμε στο ότι $[1 \; \lambda \; \lambda^2 \; \cdots \; \lambda^{m-1}]^\top$ είναι ένα αριστερό ιδιοδιάνυσμα που σχετίζεται με την ιδιοτιμή λ.

□

Πόρισμα 4.3.1. *Έστω λ ένα αριστερό ιδιοδιάνυσμα ενός συνοδού πίνακα, τότε είναι ταυτόχρονα και δεξί ιδιοδιάνυσμα.*

Απόδειξη. Έστω λ ένα αριστερό ιδιοδιάνυσμα ενός συνοδού πίνακα που σχετίζεται με το πολυώνυμο $p(x) = x^m + q_{m-1}x^{m-1} + \cdots + q_0$. Τότε,

$$C_p v = \lambda v.$$

Από το (ii) της 1 πρόταση 4.3.1, έχουμε

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -q_0 & -q_1 & \cdots & -q_{m-2} & -q_{m-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{m-1} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{m-1} \end{bmatrix}$$

και αφού για το λ ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα τότε έχουμε:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -q_0 & -q_1 & \cdots & -q_{m-2} & -q_{m-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{m-1} \end{bmatrix} \lambda$$

Επομένως καταλήγουμε στο ότι $C_p v = v\lambda$ και ότι το λ είναι επίσης δεξί ιδιοδιάνυσμα. □

Ορισμός 4.3.4. *Έστω ένα πολυώνυμο quaternions $p(x)$, τότε λέμε ότι το λ είναι ένα ρίζα, αν $p(\lambda) = 0$.*

Με αυτή τη θεωρία, παίρνουμε το παρακάτω αποτέλεσμα, το οποίο είναι ένα πόρισμα του Θεμελιώδους Θεωρήματος της Άλγεβρας στο $\mathbb{H}$ για πολυώνυμα, όπως θεωρήθηκε στον παραπάνω ορισμό.

Πρόταση 4.3.2. *Έστω $p(x)$ ένα πολυώνυμο quaternions βαθμού m, τότε το σύνολο των ριζών ανήκει το πολύ σε m τάξεις ισοδυναμίας.*

Απόδειξη. Έστω το πολυώνυμο βαθμού m, $p(x) = x^m + q_{m-1}x^{m-1} + \cdots + q_0, q_i \in \mathbb{H}$. Ο συνοδός πίνακας που σχετίζεται με το πολυώνυμο είναι τάξης $m \times m$ (θεώρημα 4.3.2) έχει ακριβώς m δεξιές μιγαδικές ιδιοτιμές. Θεωρούμε ότι το λ είναι μια τέτοια ιδιοτιμή. Τότε, έχουμε τη σχέση $C_p v = v\lambda$, και ακολουθώντας την απόδειξη της πρόταση 4.3.1, παίρνουμε μια παρόμοια σχέση με την (4.21) με το λ στη δεξιά πλευρά. Πολλαπλασιάζοντας τη σχέση από δεξιά με v_1^{-1}, έχουμε:

$$-q_0 - q_1 v_1 \lambda v_1^{-1} - \cdots - q_{m-1} v_1 \lambda^{m-1} v_1^{-1} = v_1 \lambda^m v_1^{-1}$$

Θέτοντας $v_1 \lambda^m v_1^{-1} = \sigma$, έχουμε

$$\sigma^m + q_{m-1}\sigma^{m-1} + \cdots + q_1\sigma + q_0 = 0.$$

Ως εκ τούτου, για κάθε δεξιά μιγαδική ιδιοτιμή, υπάρχει τουλάχιστον ένα όμοιο quaternion το οποίο είναι αριστερή ιδιοτιμή. Αφού υπάρχουν μόνο m δεξιές μιγαδικές ιδιοτιμές, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι οι ρίζες πρέπει να ανήκουν στο πολύ m διαφορετικές τάξεις ισοδυναμίας quaternions.

□

4.3.1 Εφαρμογή της Μεθόδου SPV

Η μέθοδος αποτελείται από την εφαρμογή του τύπου του Niven

$$x = -\frac{1}{f(q_i, t, n)} \cdot g(q_i, t, n) \tag{4.22}$$

με το ίχνος t και τη νόρμα n τα οποία τα παίρνουμε απο τις ιδιοτιμές του συνοδού πίνακα.

Ορισμός 4.3.5. *Το ίχνος t, ενός quaternion είναι το άθροισμα ενός quaternion και του συζυγή του.*

Ορισμός 4.3.6. *Η νόρμα n, ενός quaternion είναι το γινόμενο ενός quaternion επί τον συζυγή του.*

Στην πρόταση 4.3.2, έχουμε δείξει ότι οι ρίζες ενός πολυωνύμου βαθμού m ανήκουν το πολύ σε m διαφορετικές τάξεις ισοδυναμίας και ότι αυτές οι τάξεις παράγονται από m μη αρνητικές μιγαδικές ιδιοτιμές του αντίστοιχου συνοδού πίνακα. Ως εκ τούτου, από το θεώρημα 4.3.1, μπορούμε να πάρουμε από αυτές τις m ιδιοτιμές, τα ίχνη και τις νόρμες των ριζών. Στον Αλγόριθμο του Niven, έπειτα από τη διαδικασία της διαίρεσης, μπορεί να προκύψει ότι η f δεν ορίζεται για ένα συγκεκριμένο ζευγάρι (t, n). Σε αυτή την περίπτωση δεν ορίζεται και η g [10]. Όταν δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τον τύπο (4.22) έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα.

Πρόταση 4.3.3. *Έστω $f(q_i, t, n)$ και $g(q_i, t, n)$ οι οποίες δεν ορίζονται για ένα συγκριμένο ζευγάρι (t, n), τότε όλα τα quaternions που ανήκουν στην τάξη $[t/2 + i\sqrt{n - (t/2)^2}]$ είναι ρίζες του πολυωνύμου $p(x)$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε ότι τα $f(q_i, t, n)$ και $g(q_i, t, n)$ δεν ορίζονται για ένα συγκριμένο ζευγάρι (t, n). Τότε

$$p(x) = q(x)(x^2 - tx + n).$$

Έστω ένα x_1 το μηδενικό που αντιστοιχεί στο εν λόγω ζευγάρι, τότε:

$$p(x_1) = q(x_1)(x_1^2 - tx_1 + n) = 0$$

Θεωρούε ένα quaternion $x_2 = \sigma x_1 \sigma^{-1}$ όμοιο με το x_1. Τότε:

$$\begin{aligned} p(x_2) &= q(x_2)(x_2^2 - tx_2 + n) \\ &= q(x_2)[(\sigma x_1 \sigma^{-1})^2 - t(\sigma x_1 \sigma^{-1}) + n] \end{aligned}$$

και αφού τα t και n είναι πραγματικοί αριθμοί, και $\sigma\sigma^{-1} = 1$, τότε:

$$\begin{aligned} p(x_2) &= q(x_2)(x_1^2 - tx_1 + n)\sigma^{-1} \\ &= q(x_2)\sigma.0.\sigma^{-1} \\ &= 0, \end{aligned}$$

επομένως το x_2 είναι επίσης ρίζα. Όπως θεωρήσαμε ένα αυθαίρετο σ, καταλήγουμε στο ότι όλα τα quaternions που είναι όμοια με το x_1 είναι ρίζες της πολυωνυμικής εξίσωσης $p(x) = 0$. Έστω $x_1 = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ τότε $t = 2a_0$ και $n = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$. Διαφορετικά το γράφουμε ως εξής, $a_0 = t/2$ και $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = n - (t/2)^2$. Από το θεώρημα 4.3.1, καταλήγουμε στο ότι $x_1 \in [t/2 + i\sqrt{n - (t/2)^2}]$ και όλα τα quaternion που ανήκουν σε αυτή την τάξη μηδενίζουν το πολυώνυμο. □

Πόρισμα 4.3.2. *Έστω ένα πολυώνυμο έχει δύο άνισες ρίζες που ανήκουν στην ίδια τάξη ισοδυναμίας, τότε όλα τα quaternion αυτής της τάξης είναι επίσης ρίζες του πολωνύμου.*

Απόδειξη. Έστω ένα πολυώνυμο έχει δύο διαφορετικές και άνισες ρίζες που ανήκουν στην ίδια τάξη ισοδυναμίας. Τότε από το θεώρημα 4.3.1, έχουν το ίδιο ίχνος και την ίδια νόρμα. Αντικαθιστούμε αυτές τις τιμές στον τύπο του Niven, θερώντας ότι τα f και g δεν θα εξαφανιστούν. Επομένως θα πάρουμε μία μοναδική λύση η οποία αντιτίθεται με την υπόθεση ότι υπάρχουν δύο λύσεις.

Ως εκ τούτου, τα f και g πρεπέι να μην ορίζονται, από την πρόταση 4.3.3, όλα τα quaternion σε αυτή την κλάση είναι επίσης ρίζες για τα πολυώνυμα. □

Σημείωση. *Μπορούμε να αναπτύξουμε μία ανάλογη θεωρία για πολυώνυμα quaternion με συντελεστές στα δεξιά του:*

$$\tilde{p}(x) = x^m + x^{m-1}q_{m-1} + \cdots + xq_1 + q_0. \tag{4.23}$$

Διαιρώντας το πολυώνιμο (4.23) απο τα αριστερά με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $x^2 - tx + n$, έχουμε τον τύπο

$$x = -g(q_i, t, n) \cdot \frac{1}{f(q_i, t, n)}.$$

Σε αυτή την περίπτωση το ίχνος και τη νόρμα τα παίρνουμε με ένα παρόμοιο τρόπο με αύτο του (δεξιού) συνοδού πίνακα:

$$C_{\tilde{p}} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -q_0 \\ 1 & \cdots & 0 & -q_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & -q_{m-1} \end{bmatrix}$$

του πολυωνύμου $\tilde{p}$, αφού οι αριστερές ιδιοτιμές του $C_{\tilde{p}}$ και τα μηδενικά του $\tilde{p}$ είναι ίδια.

4.3.2 Αριθμητικά Παραδείγματα

Έστω ότι έχουμε τρία πολυώνυμα: το πρώτο έχει πεπερασμένο αριθμό ριζών και τα υπόλοιπα δύο έχουν άπειρο αριθμό ριζών. Το ένα πολυώνυμο που έχει άπειρο αριθμό ριζών έχει συντελεστές quaternions και το άλλο έχει πραγματικούς συντελεστές.

Παράδειγμα 4.3.1. *Έστω το πολυώνυμο:*

$$p(x) = x^{10} + (1 + 2i - 4j)x^9 - (3.1i + k)x^8 + (2.5j + 2.1k)x^7 + (3 - i)x^6 \\ -1.7x^5 - (i + j)x^4 - 7.2x^3 - jx + 2.9(j - k) - 4.$$

Οι ιδιοτιμές του κάτω συζυγούς πίνακα είναι στον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 4.1

i	λ_i	t	n
1	$-1.26112 \pm 4.56864i$	-2.52223	22.46292
2	$0.93019 \pm 0.73780i$	1.86037	1.40960
3	$-1.07301 \pm 0.49536i$	-2.14602	1.39674
4	$1.14205 \pm 0.12193i$	2.28409	1.31914
5	$-0.65287 \pm 0.927141i$	-1.30574	1.28583
6	$0.21713 \pm 1.06495i$	0.43427	1.18127
7	$-0.38874 \pm 0.96394i$	-0.77748	1.08031
8	$0.28474 \pm 0.81268i$	0.56948	0.74152
9	$0.60157 \pm 0.57023i$	1.20314	0.68705
10	$-0.79994 \pm 0.18175i$	-1.59988	0.67294

Πίνακας 4.2

$x_1 =$	$-1.26112 - 1.92564i + 4.10523j - 0.55813k$
$x_2 =$	$0.93019 + 0.27871i - 0.51178j - 0.45249k$
$x_3 =$	$-1.07301 + 0.46409i - 0.09237j - 0.14655k$
$x_4 =$	$1.14205 + 0.08057i + 0.07784j - 0.04811k$
$x_5 =$	$-0.65287 - 0.01858i + 0.88395j - 0.27907k$
$x_6 =$	$0.21713 - 0.24588i + 1.02275j + 0.16627k$
$x_7 =$	$-0.38874 + 0.08867i - 0.46591j - 0.83920k$
$x_8 =$	$0.28474 - 0.45581i - 0.33143j + 0.58552k$
$x_9 =$	$0.60157 + 0.21245i + 0.44266j - 0.28997k$
$x_{10} =$	$-0.79994 - 0.03749i + 0.16559j - 0.06588k$

Αντικαθιστώντας τις τιμές του ίχνους και της νόρμας κάθε ιδιοτιμής στον αλγόριθμο του Niven, παίρνουμε τις ρίζες του Πίνακα 2.

Παράδειγμα 4.3.2. *Έστω το πολυώνυμο:*

$$p(x) = x^6+(i+3k)x^5+(3+j)x^4+(5i+15k)x^3+(-4+5j)x^2+(6i+18k)x-12+6j.$$

Τα ιδιοδιανύμσατα του κάτω συνοδού πίνακα βρίσκονται στον Πίνακα 3.

Πίνακας 4.3

i	λ_i	t	n
1	$\pm\sqrt{5}i$	0	5
2	$\pm\sqrt{3}i$	0	3
3	$\pm\sqrt{3}i$	0	3
4	$\pm\sqrt{2}i$	0	2
5	$\pm\sqrt{2}i$	0	2
6	$\pm i$	0	1

Αντικαθιστώντας τις τιμές του ίχνους και της νόρμας κάθε ιδιοτιμής στον αλγόριθμο του Niven, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} x_1 &= -i - 2k, \\ x_2 &= [i\sqrt{3}] \\ x_3 &= [i\sqrt{2}] \\ x_4 &= -0.6i - 0.8k. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 4.3.3. *Έστω ότι θεωρούμε το πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές:*

$$p(x) = x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 8x + 12.$$

Οι ιδιοτιμές του κάτω συζυγούς πίνακα είναι στον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 4.4

i	λ_i	t	n
1	$0.359481 \pm 1.91107i$	0.718963	3.78143
2	$-1.359481 \pm 1.15118i$	-2.718963	3.17340

Αντικαθιστώντας τις τιμές, έχουμε:

$$x_1 = [0.359481 \pm 1.91107i],$$
$$x_2 = [-1.359481 \pm 1.15118i].$$

Επομένως ο αριθμός των ριζών είναι άπειρος, και χωρίζεται σε δύο τάξεις που συνάδουν με το αποτέλεσμα του Spira [18] για πολυώνυμα quaternions με πραγματικούς συντελεστές και φανταστικές ρίζες στο $\mathbb{C}$ *(τα αντίστοιχα* λ *στα παραδείγματα μας).*

Κεφάλαιο 5

Πίνακες Vandermonde

5.1 Πίνακες Vandermonde

Έστω $B \subset \mathbb{H}$ ένα συμπαγές σύνολο και $X := C(\mathbb{B})$ ο χώρος όλων των συνεχών συναρτήσεων quaternion στο B. Θα δείξουμε παρακάτω ότι ο χώρος των πολυωνύμων που έχει συσταθεί από απλά πολυώνυμα δεν είναι χώρος Haar $V \subset C(B)$. Γι'αυτό τον λόγο μελετάμε δύο προβλήματα γραμμικών παρεμβολών (interpolation problems), given arbitrary, but pairwise distinct points $t_j \in \mathbb{H}$ και αυθαίρετων αριθμών $u_j \in \mathbb{H}, j = 0, 1, ..., n,$. Ενδιαφερόμαστε λοιπόν για το αν τα παρακάτω προβλήματα παρεμβολών έχουν λύση:

$$p_l(t_j) = u_j, \tag{5.1}$$

$$p_r(t_j) := u_j, j = 0, 1, ..., n, \tag{5.2}$$

όπου p_l, p_r είναι απλά πολυώνυμα n-βαθμού , που ορίζονται από τις:

$$p_l(x) := a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, \tag{5.3}$$

$$p_r(x) := a_0 + xa_1 + x^2a_2 + \cdots + x^na_n, \quad \text{όπου} a_0, a_1, ..., a_n \quad x \in \mathbb{H}. \tag{5.4}$$

Ο παρακάτω πίνακας V λέγεται *πίνακας Vandermonde* και είναι:

$$V := \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t_0 & t_1 & \cdots & t_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_0^n & t_1^n & \cdots & t_0^n \end{bmatrix} \in \mathbb{H}^{(n+1)\times(n+1)}$$

Τα προβλήματα (5.1) και (5.2) είναι ισοδύναμα με τα παρακάτω προβλήματα πινάκων, αντίστοιχα:

$$a^T V = u^T, V^T a = u$$

όπου:

$$a^T := (a_0, a_1, ..., a_n), u^T := (u_0, u_1, ..., u_n).$$

Το κύριο σημείο είναι ότι αυτά τα προβλήματα είναι διαφορετικά. Από τη στιγμή που οι πίνακες quaternions δεν έχουν ορίζουσες ([15]), η μοναδικότητα ενός πίνακα μπορεί να οριστεί με ένα πιο στοιχειώδη(elementary) τρόπο.

5.1.1 Αναφορά στα γραμμικά συστήματα στο $\mathbb{H}$

Θα κάνουμε μια αναφορά σε πρωταρχικές ιδιότητες πινάκων με στοιχεία εισόδου quaternions και απεικονήσεις που ορίζονται από τους πίνακες (Zang [**?**], Opfer [**?**])

Ορισμός 5.1.1. *Έστω $A \in \mathbb{H}^{p \times p}$. Ο μέγιστος αριθμός των δεξιών ανεξάρτητων στηλών του πίνακα A λέγεται right column rank του A. Ο τετραγωνικός πίνακας θα λέγεται αντιστέψιμος, αν η right column rank είναι μέγιστη, όπως $rank(A) = p$, όπου η τάξη είναι η right column rank. Η απεικόνηση $f : \mathbb{H}^p \to \mathbb{H}^p$ ορίζεται από:*

$$f(x) := Ax \tag{5.5}$$

και λέγεται αντιστρέψιμη αν ο A είναι αντιστρέψιμος.

Με τον ίδιο τρόπο ορίζουμε και την τάξη της αριστερής στήλης. Ένα θεώρημα στη μη αντιμεταθετική γραμμική άλγεβρα είναι: Η τάξη της δεξιάς στήλης συμπίπτει με τη τάξη της αριστερής γραμμής και η τάξη της αριστερής στήλης συμπίπτει με την τάξη της δεξιάς γραμμής. Έτσι ένας πίνακας quaternions έχει δύο τάξεις, αυτές της δεξιάς και της αριστερής τάξης. Ο παραπάνω ορισμός υποδηλώνει ότι η τάξη της δεξιάς στήλης είναι πιο σημαντική από αυτή της αριστερής στήλης αφού στον Ax οι συνιστώσες του x είναι πάντα στα δεξιά των στοιχείων του πίνακα A.

Ορισμός 5.1.2. *Έστω $A \in \mathbb{H}^{p \times p}$ ένας τετραγωνικός πίνακας. Η απεικόνιση f όπως ορίζεται στην (5.5) είναι μη αντιστρέψιμη αν και μόνο αν το ομογενές σύστημα $f(x) = 0$ έχει μη προφανείς λύσεις. Το σύστημα $f(x) = c$ έχει μοναδική λύση για κάθε $c \in \mathbb{H}^p$ αν και μόνο αν η f είναι μη αντιστρέψιμη. Η απεικόνιση g ορίζεται ως $g(x) := x^T A$ είναι μη αντιστρέψιμη αν και μόνο αν η f είναι μη αντιστρέψιμη, όπου το x^T δηλώνει τη μεταφορά του x.*

Απόδειξη. Η απεικόνιση f που ορίζεται στην (5.5) μπορεί να θεωρηθεί ως ένας δεξής γραμμικός συνδιασμός των στηλών του A. Η απεικόνιση της g μπορεί να θεωρηθεί ένας αριστερός γραμμικός συνδιασμός των σειρών του A, και η τάξη της δεξιάς στήλης συμπίπτει με την τάξη της αριστερής γραμμής. Η συνέχεια είναι εύκολη. □

Ορισμός 5.1.3. *Έστω $A \in \mathbb{H}^{p\times p}$. Η τάξη της δεξιάς στήλης του A θα λέγεται τάξη του A.*

Οι $f(x) := Ax$ και $f(x)^T := x^T A^T$ δεν ορίζουν την ίδια απεικόνιση κάτι το οποίο φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα 5.1.1. *Έστω ο πίνακας:*

$$A := \begin{bmatrix} 1 & i \\ j & k \end{bmatrix}.$$

Αυτός ο πίνακας έχει τάξη δεξιάς στήλης 2 και τάξη αριστερής στήλης 1. Η τελευταία δήλωση μπορεί εύκολα να επιβεβαιωθεί πολλαπλασιάζοντας με i από αριστερά την πρώτη στήλη του A. Το αποτέλεσμα θα είναι η δεύτερη στήλη. Η μεταφορά A^T έχει τάξη δεξιάς στήλης 1 και τάξη αριστερής στήλης 2. Επομένως ο A είναι αντιστρέψιμος και το A^T είναι μη αντιστρέψιμος.

5.1.2 Συνέχεια Πινάκων Vandermonde

Είναι σαφές ότι οι πίνακες Vandermonde και οι μεταθέσεις τους είναι αντιστρέψιμες για $n \leq 1$. Προκειμένου να δείξουμε ότι είναι πιθανό να βρούμε μη αντιστρέψιμους πίνακες Vandermonde για $n \geq 3$ ακολουθούμε τον παρακάτω συλλογισμό: Προσπαθούμε να βρούμε ζεύγη διακριτών σημείων $t_0, t_1, ..., t_n$ τέτοια ώστε το άθροισμα της πρώτης και της προτελευταίας σειράς ισούται με το άθροισμα της δεύτερης και της τελευταίας σειράς. Αν είναι δυνατό, η τάξη της αριστερής και της δεξιάς σειράς να δεν πρέπει να είναι μέγιστες, διότι η τάξη δεν θα είναι μέγιστη. Ως εκ τούτου, οι πίνακες V και V^T είναι μη αντιστρέψιμοι.

Θεώρημα 5.1.1. Έστω $n = 2$. Ορίζουμε $t_0 := i := (0,1,0,0)$, $t_1 := j := (0,0,1,0)$, $t_2 := k := (0,0,0,1)$ και

$$V := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t_0 & t_1 & t_2 \\ t_0^2 & t_1^2 & t_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ i & j & k \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}. \tag{5.6}$$

Έστω $n \geq 3$ και η μεταβλητή $h \in \mathbb{H}\backslash\{\mathbb{C}\}$. Ορίζουμε τον παρακάτω πίνακα Vandermonde V : με $t_0 = 1$ και έχουμε:

$$V := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & e_1 & e_2 & \cdots & e_{n-1} & h^{-1}e_{n-1}h \\ 1 & e_1^2 & e_2^2 & \cdots & e_{n-1}^2 & h^{-1}e_{n-1}^2h \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & -e_1 & -e_2 & \cdots & -e_{n-1} & -h^{-1}e_{n-1}h \end{bmatrix} \in \mathbb{H}^{(n+1)\times(n+1)},$$

όπου $e_1, e_2, ..., e_{n-1}$ είναι πραγματικές ή μιγαδικές ρίζες της:

$$t^{n-1} + 1 = 0. \tag{5.7}$$

Αν μία από τις ρίζες είναι -1 τότε $e_1 = -1$, διαφορετικά διαλέγουμε κάποια τιμή των ριζών. Τότε ο πίνακας V και η μεταφορά V^T είναι μη αντιστρέψιμοι.

Απόδειξη. Για $n = 2$ είναι προφανές ότι τα t_0, t_1, t_2 είναι διακριτά ζεύγη και ο πίνακας V που ορίζεται στην (5.6) αλλά και ο V^T είναι μη αντιστρέψιμοι. Έστω $n \geq 3$, είναι σαφές ότι η δεύτερη σειρά του V περιέχει μόνο διακριτά ζεύγη, συγκεκριμένα $t_n := h^{-1}e_{n-1}h \notin \mathbb{C}$. Ο τύπος (5.7) συνεπάγεται ότι $t^n + t = 0$ για κάθε ρίζα, το οποίο συνεπάγεται ότι η δεύτερη σειρά και η τελευταία αθροίζουν $(2, 0, ..., 0)$. Έτσι, η τάξη (της δεξιάς και αριστερής) γραμμής δεν είναι μέγιστες. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα ότι η τάξη δεν είναι μέγιστη και ότι σε κάθε περίπτωση για $n \geq 2$ ο πίνακας Vandermonde V και η μεταφορά του V^T είναι μη αντιστρέψιμοι. □

Παρατηρούμε ότι η απόλυτη τιμή για όλα τα επιλεγμένα σημεία (της δεύτερης σειράς του πίνακα Vandermonde) είναι μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να περιορίσουμε τις εκτιμήσεις μας στο μοναδιαίο κύκλο $\mathbb{B} := \{z \in \mathbb{H} : |z| \leq 1\}$ ή στη μοναδιαία σφαίρα $\partial B := \{z \in \mathbb{H} : |z| = 1\}$.

5.1.3 Το άλυτο πρόβλημα και το πλήθος των ριζών

Στη θεωρία των πραγματικών και των μιγαδικών συνεχών συναρτήσεων η ύπαρξη χώρων Haar διάστασης n είναι ισοδυναμη με το γεγονός ότι τα στοιχεία ενός χώρου Haar δεν έχουν περισσότερες από $n - 1$ ριζες, με μόνη εξαίρεση τη μηδενική συνάρτηση. Θα δούμε ότι ακόμα και σε quaternionic χώρους ισχύει κάτι ανάλογο.

Θεώρημα 5.1.2. Έστω $V \subset C(B)$ ένας διανυσματικός χώρος διάστασης n (δεξιός ή αριστερός) όπου το σύνολο $C(B)$ αποτελείται από συνεχείς συναρτήσεις quaternions στο B, και $B \subset \mathbb{H}$ ένα συνοδεύον compact σύνολο. Ο χώρος V είναι ένας χώρος Haar αν και μόνο αν όλες οι συναρτήσεις στο V $\{0\}$ έχουν το πολύ $n - 1$ ριζες.

Απόδειξη. ($\Rightarrow$)Έστω ότι το V είναι ένας Haar χώρος. Τότε για τα $v(t_j) = 0, j = 1, 2, ..., n$ για διακριτά ζεύγη $t_j \in B$ συνεπάγεται ότι $v = 0$. Άρα κάθε $v \neq 0$ μπορεί να έχει το πολύ $n - 1$ ριζες στο B.
($\Leftarrow$) Έστω ότι το V δεν είναι ένας Haar χώρος. Τότε υπάρχουν t_j διακριτά ζεύγη σημείων και τιμές $u_j, j = 1, 2, ..., n$, τέτοια ώστε το πρόβλημα παρεμβολής $v(t_j) = u_j, j = 1, 2, ..., n$ έχει καθόλου λύσεις ή έχει δύο διαφορετικές λύσεις v_1, v_2. Στην τελευταία περίπτωση η $v := v_1 - v_2$, είναι μη μηδενική συνάρτηση αλλά έχει n

ρίζες για δοσμένα n σημεία t_j. Αν το πρόβλημα παρεμβολής δεν έχει λύση, τότε το ομογενές πρόβλημα $v(t_j) = 0, j = 1, 2, ..., n$ πρέπει να έχει τετριμένη λύση. Σε κάθε περίπτωση υπάρχει μη μηδενική συνάρτηση v με τουλάχιστον n ρίζες. $\square$

Επομένως, το γεγονός ότι τα πολυώνυμα έχουν πολλά ρίζες είναι υπεύθυνο για το ότι τα πολυώνυμα δεν πληρούν ένα χώρο Haar. Το ερώτημα για το αν υπάρχουν χώροι Haar για το τετραδικό $C(B)$ παραμένει ανοιχτό.

Βιβλιογραφία

[1] Γιάννης Θωμαίδης *Ιστορική Αναδρομή στους Μιγαδικούς Αριθμούς*. Μαθηματική Επιθεώρηση 21, 1981, Σελίδες 95-109

[2] *What Is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods Paperback* – July 18, 1996 by Richard Courant (Author), Herbert Robbins (Author), Ian Stewart (Editor)

[3] Sir Thomas L. Heath,*A Manual of Greek Mathematics*, Dover, 1963

[4] O'Connor, John J.; Robertson, Edmund F., *Arabic mathematics: forgotten brilliance?*, MacTutor History of Mathematics archive, University of St Andrews

[5] Dunham, William (2015), The Calculus Gallery: Masterpieces from Newton to Lebesgue, Princeton University Press, p. 127, "Cantor found a remarkable shortcut to reach Liouville's conclusion with a fraction of the work".

[6] Cantor 1874. English translation: Ewald 1996, pp. 840–843.

[7] D.Mierzejewski, Quasi-Spherical and Multi-Quasi-Spherical Polynomial Quaternionic Equations: Introduction of the Notions and Some Examples. Adv. Appl. Clifford Algebras 21 (2) (2011), pp. 407-416.

[8] D.Mierzejewski, Linear manifolds in Sets of Solutions of Quaternionic Polynomial Equations of Several Types. Adv. Appl. Clifford Algebras 21 (2) (2011), pp. 417-428.

[9] Jaques Helmstetter, Adv. Appl. Clifford Algebras 22 (2012), 1055-1059

[10] S.Eilenberg and I.Niven. The fundamental theorem of algebra for quaternions. Bulletin of American Mathematical Society, 50:246-248, 1944

[11] S. De Leo and G. C. Ducati, Quaternionic differential operators, Journal of Mathematical Physics, 42:2236-2265,2001.

[12] S. De Leo and G. C. Ducati, Solving simple quaternionc differential equation, Journal of Mathematical Physics, 43:2224-2233,2003.

[13] Rogério Pedro Serôdio, Lok-Shun Siu, Zeros of quaternion polynomials. Appl. Math. Lett. 14(2): 237-239 (2001)

[14] R. Serodio, E. Pereira, J. Vitoria,Computing the zeros of quaternion polynomials Proceedings of the 5th International Conference on Numerical Methods and Computational Mechanics NMCM August 1998, University of Miskolc, Miskole, Hungary (1998)

[15] J.Fan, Determinants and multiplicative functionals on quaternionic matrices, Linear Algebra Appl., 369 (2003), pp. 193-201.

[16] H.C.Lee, Eigenvalues of canonical forms of matrices with quaternion coefficients, Proc. R.I.A. 52, Sect. A (1949).

[17] W. So,Left eigenvalues of quaternionic matrices, a Private communication (1994).

[18] R.Spira, The complex and quaternion sum of divisors inequality.

[19] P.M. Cohn, The similarity reduction of matrices over a skew field, Math. Z. 132:151-163 (1973).

[20] Fuzhen Zhang, Quaternions and matrices of quaternions, Linear Algebra and its Applications, Volume 251, 15 January 1997, Pages 21–57.

[21] Drahoslava Janovska and Gerhard Opfer, Linear equations in quaternionic variables, Mitt. Math. Ges. Hamburg,27(2008), 223–234.

[22] R. Michael Porter,Quaternionic Linear and Quadratic Equations, Journal of Natural Geometry, 11(1997)101-106.