ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΜΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΟΙ ΕΛΕΓΧΟΙ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

ΣΑΛΙΒΕΡΟΣ Π. ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ

Α.Μ. 09109100

Επιβλέπουσα:

ΒΟΝΤΑ ΦΙΛΙΑ

ΑΝΑΠΛΗΡΩΤΡΙΑ ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ 2016

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΜΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΟΙ ΕΛΕΓΧΟΙ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

ΣΑΛΙΒΕΡΟΣ Π. ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ

Α.Μ. 09109100

Επιβλέπουσα:

ΒΟΝΤΑ ΦΙΛΙΑ

ΑΝΑΠΛΗΡΩΤΡΙΑ ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ Ε.Μ.Π.

ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

ΚΟΥΚΟΥΒΙΝΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ, ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Ε.Μ.Π.

ΚΑΡΩΝΗ ΧΡΥΣΗΙΣ, ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ 2016

Ευχαριστίες

Για την εκπόνηση της παρακάτω διπλωματικής εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω την επιβλέπουσα Καθηγήτρια μου, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. Ίλια Βόντα για την μεγάλη βοήθεια που μου παρείχε καθ' όλη την διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής μου. Ακόμα θα ήθελα να ευχαριστήσω την Καθηγήτρια Σ.Ε.Μ.Φ.Ε Χρυσηίς Καρώνη και τον Καθηγητή Χρήστο Κουκουβίνο, για την συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή αξιολόγησης της διπλωματικής μου εργασίας. Τέλος ένα μεγάλο ευχαριστώ οφείλω και στον φίλο μου Δρ Χαράλαμπο Αγκυρόπουλο για την αμέριστη βοήθεια του τόσο για τις συντακτικές όσο και για τις επιστημονικές διορθώσεις που μου πρότεινε.

Αφιερωμένο σε όσους με βοήθησαν να ακολουθήσω πιο γρήγορα τα μελλοντικά μου σχέδια και τα όνειρα μου.

Abstract

This Thesis was prepared during my undergraduate studies and in order to obtain the Bachelors degree of the faculty of Applied Mathematical and Physical Sciences (S.E.M.F.E.) of the National Technical University of Athens (N.T.U.A). The goal of this thesis is the presentation and comparison of various nonparametric tests for the exponential distribution.

It consists of four chapters. The first chapter generally refers to historical data and definitions for the non-parametric statistics. The second chapter deals with non-parametric tests based on the binomial distribution. The third chapter deals with non-parametric tests for the exponential distribution. Various tests for the exponential distribution are presented. In the fourth chapter we compare the Shapiro-Wilk test, Kolmogorov test, Pietra test and Gini test for the exponential distribution using simulated data. The comparison is made through the size and power of the tests. For the simulations the free statistical program R, version 2.14.1 was used.

Περίληψη

Η παρούσα Διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών μου για την απόκτηση του προπτυχιακού διπλώματος της σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Εφαρμογών (Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.) του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου (Ε.Μ.Π.). Σκοπός της είναι η παρουσίαση και η σύγκριση διαφόρων μη παραμετρικών ελέγχων υποθέσεως για την εκθετική κατανομή.

Η εργασία εκτείνεται σε 4 κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο αναφερόμαστε σε γενικά ιστορικά στοιχεία και ορισμούς σχετικά με την μη παραμετρική στατιστική. Στο δεύτερο κεφάλαιο ασχολούμαστε με τους μη παραμετρικούς ελέγχους που βασίζονται στην διωνυμική κατανομή. Στο τρίτο κεφάλαιο ασχολούμαστε με τους μη παραμετρικούς ελέγχους για την εκθετική κατανομή. Γίνεται απαρίθμηση και επεξήγηση διαφόρων ελέγχων για την εκθετική κατανομή. Στο τέταρτο κεφάλαιο γίνεται σύγκριση των ελέγχων Shapiro-Wilk, Kolmogorov, Pietra και Gini για την εκθετική κατανομή μέσω προσομοιωμένων δεδομένων. Η σύγκριση γίνεται μέσω του μεγέθους και της ισχύος των ελέγχων. Για την ανάλυση των δεδομένων χρησιμοποιούμε το ελεύθερο πρόγραμμα στατιστικής ανάλυσης R, έκδοση 2.14.1.

Πίνακας Περιεχομένων

Κεφάλαιο 1

Μη παραμετρική στατιστική

1.1 Εισαγωγή

Η Στατιστική σήμερα χρησιμοποιείται ευρύτατα σε όλους σχεδόν τους τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας. Η ανάλυση στατιστικών δεδομένων είναι το κυριότερο εργαλείο έρευνας σε ένα μεγάλο φάσμα εφαρμογών σχεδόν σε όλες τις επιστήμες. Ένα πολύ σημαντικό πεδίο της στατιστικής με πολλές εφαρμογές αποτελεί η μη παραμετρική στατιστική.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναφερθούν γενικοί ορισμοί σχετικά με την στατιστική, κάποια στοιχεία της εκτιμητικής, ο έλεγχος υποθέσεων και κάποια γενικά στοιχεία για την μη παραμετρική στατιστική όπως ορισμοί και εφαρμογές και γνωστά μοντέλα μη παραμετρικής στατιστικής.

1.2 Πληθυσμός, Δείγματα, και Στατιστική Συμπερασματολογία

Πείραμα

Ένα πείραμα είναι οποιαδήποτε διαδικασία ή μελέτη, η οποία έχει ως αποτέλεσμα τη συλλογή των δεδομένων, η έκβαση της οποίας είναι άγνωστη. Στην στατιστική ο όρος περιορίζεται συνήθως σε περιπτώσεις κατά τις οποίες ο ερευνητής έχει τον έλεγχο ορισμένων από τις συνθήκες στις οποίες το πείραμα λαμβάνει χώρα.

Παράδειγμα

Πριν από την εισαγωγή μιας νέας φαρμακευτικής αγωγής για τη μείωση της υψηλής πίεσης του αίματος, ο κατασκευαστής διεξάγει ένα πείραμα για να συγκριθεί η αποτελεσματικότητα του νέου φαρμάκου με εκείνη που συνταγογραφούνταν πριν. Οι μισοί από τους ασθενείς επιλέγονται τυχαία για να λάβουν το νέο φάρμακο, ενώ οι υπόλοιποι λαμβάνουν το παλιό. Έτσι, ο ερευνητής έχει τον έλεγχο των ασθενών που παίρνουν το κάθε φάρμακο και τον τρόπο με τον οποίο κατανέμονται σε θεραπεία.

Πληθυσμός

Ένας πληθυσμός είναι ένα σύνολο ανθρώπων, ζώων, φυτών ή πραγμάτων από τα οποία μπορούμε να συλλέξουμε στοιχεία. Είναι το σύνολο της ομάδας που μας ενδιαφέρει και το οποίο θέλουμε να περιγράψουμε ή για το οποίο θέλουμε να εξάγουμε σχετικά συμπεράσματα.

Προκειμένου να προβούμε σε γενικεύσεις σχετικά με τον πληθυσμό, πρέπει να επιλέξουμε ένα δείγμα από αυτόν, το οποίο πρέπει να είναι αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού. Από κάθε πληθυσμό υπάρχουν πολλά πιθανά δείγματα που μπορούν να επιλεγούν. Ένα στατιστικό δείγμα σκοπό έχει να παρέχει πληροφορίες σχετικά με κάποια παράμετρο του πληθυσμού.

Είναι σημαντικό ο ερευνητής προσεκτικά και πλήρως να ορίζει τον πληθυσμό πριν από τη συλλογή του δείγματος και να είναι σίγουρος ότι περιγράφονται σωστά τα μέλη που περιλαμβάνονται σε αυτόν.

Παράδειγμα

Ο πληθυσμός για τη μελέτη της βρεφικής υγείας μπορεί να είναι όλα τα παιδιά που γεννήθηκαν στη Βρετανία στη δεκαετία του 1980. Το δείγμα μπορεί να είναι όλα τα μωρά που γεννήθηκαν στις 7 Μαΐου, σε οποιοδήποτε από αυτά τα χρόνια.

Δείγμα

Ένα δείγμα είναι μια ομάδα από μονάδες που επιλέγονται από μια μεγαλύτερη ομάδα (του πληθυσμού). Με τη μελέτη του δείγματος ελπίζεται να εξαχθούν έγκυρα συμπεράσματα σχετικά με την μεγαλύτερη ομάδα.

Ένα δείγμα γενικά επιλέγεται για τη μελέτη, επειδή ο πληθυσμός είναι πολύ μεγάλος για να μελετηθεί στο σύνολό του. Το δείγμα πρέπει να είναι αντιπροσωπευτικό του γενικού πληθυσμού. Αυτό συχνά επιτυγχάνεται καλύτερα με τυχαία δειγματοληψία.

Τυχαίο δείγμα

Τυχαίο δείγμα είναι ένα δείγμα το οποίο έχει εκλεγεί με τέτοιο τρόπο ώστε τα αποτελέσματα της ανάλυσής του να μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να εξαχθούν στατιστικά συμπεράσματα για τον πληθυσμό από τον οποίο το δείγμα έχει επιλεγεί. Ένα τυχαίο δείγμα έχει επιλεγεί με τη χρήση τυχαίων αριθμών ή με έναν άλλο τελείως τυχαίο μηχανισμό.

Παράδειγμα

Αν λάβουμε, τους 5 πρώτους φοιτητές μιας τάξης στα Μαθηματικά, η εκλογή αυτή δεν αποτελεί ένα τυχαίο δείγμα από το σύνολο των φοιτητών της τάξης αυτής. Ας υποθέσουμε, όμως ότι αριθμούμε τους 50 φοιτητές μιας τάξης από 1 ως 50 και αναγράφουμε τον κάθε αριθμό σε ένα φύλλο χαρτιού, τα φύλλα αυτά τα τοποθετούμε σε ομοιόμορφους φακέλους, τους οποίους κλείνουμε και τους τοποθετούμε σε ένα κλειστό κουτί, το οποίο ανακινούμε για να αναμιχθούν οι φάκελοι. Κατόπιν επιλέγουμε τυχαία, χωρίς επανατοποθέτηση, ένα δείγμα 5 φακέλων, τους οποίους ανοίγουμε και αναγράφουμε τους αριθμούς των φύλλων χαρτιού που περιέχουν. Οι 5 αριθμοί τους οποίους βρίσκουμε, με τον τρόπο αυτό, αποτελούν ένα απλό τυχαίο δείγμα μεγέθους 5 από τον πληθυσμό των 50 φοιτητών της τάξης.

Ορισμός. Ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n είναι μια ακολουθία από n ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, ..., X_n$.

(Statistics Glossary v1.1 (Valerie J. Easton & John H. McColl)

http://www.stats.gla.ac.uk/steps/glossary/index.html)

1.3 Εκτιμητική

Εμπειρική συνάρτηση κατανομής

Η πραγματική συνάρτηση κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής είναι σχεδόν πάντα άγνωστη. Για αυτό τον λόγο κάνουμε κάποιες υποθέσεις για την πραγματική κατανομή, οι οποίες θεωρούμε ότι είναι κοντά στην πραγματικότητα του θέματος με το οποίο ασχολούμαστε και θεωρούμε ότι αυτή είναι η συνάρτηση κατανομής.

Ορισμός 1. Έστω $X_1, X_2, ..., X_n$ ένα τυχαίο δείγμα. Η εμπειρική συνάρτηση κατανομής (ε.σ.κ) $S(x)$ είναι η συνάρτηση του x η οποία ορίζεται ως ο αριθμός των X_i τα οποία είναι μικρότερα ή ίσα από το x για κάθε, $x \in (-\infty, \infty)$.

(Conover, W.J (1999). Practical nonparametric statistics 3rd ed.)

Εκτιμήτρια

Εκτιμήτρια είναι οποιαδήποτε συνάρτηση των τυχαίων μεταβλητών του δείγματος η οποία χρησιμοποιείται για να δώσει πληροφορίες σχετικά με μια άγνωστη ποσότητα στον πληθυσμό. Για παράδειγμα, η μέση τιμή του δείγματος είναι μία εκτιμήτρια της μέσης τιμής του πληθυσμού.

Οι εκτιμήτριες των παραμέτρων του πληθυσμού συμβολίζονται συνήθως, και ξεχωρίζονται από την πραγματική παράμετρο, με το σύμβολο «καπέλο». Για παράδειγμα, σ είναι η πραγματική τυπική απόκλιση του πληθυσμού ενώ $\hat{\sigma}$ είναι η εκτιμήτρια (από ένα δείγμα) της τυπικής απόκλισης του πληθυσμού.

Παράδειγμα

Η συνήθης εκτιμήτρια της μέσης τιμής του πληθυσμού είναι

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

όπου n είναι το μέγεθος του δείγματος και $X_1, X_2, ..., X_n$ είναι οι τυχαίες μεταβλητές του δείγματος. Μια τιμή της εκτιμήτριας που θα συμβολίζεται με $\bar{x}$, που βρίσκεται από τα δεδομένα, ονομάζεται εκτίμηση της παραμέτρου μ. Η εκτιμήτρια $\bar{X}$ είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του μέσου του πληθυσμού μ.

Παράδειγμα

Μια αμερόληπτη εκτιμήτρια για την διασπορά σ^2 του πληθυσμού είναι η εκτιμήτρια s^2 η οποία ορίζεται ως:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

(Statistics Glossary v1.1 (Valerie J. Easton & John H. McColl)

http://www.stats.gla.ac.uk/steps/glossary/index.html)

1.4 Έλεγχοι Υποθέσεων

Κρίσιμη περιοχή

Η κρίσιμη περιοχή Critical Region (CR) ή περιοχή απόρριψης,Rejection Region (RR), είναι ένα σύνολο τιμών της στατιστικής συνάρτησης, στο οποίο η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται σε έναν έλεγχο υποθέσεων. Πιο συγκεκριμένα αν ο δειγματικός χώρος για την στατιστική συνάρτηση χωριστεί σε δύο περιοχές τότε η μια θα οδηγεί σε απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης ενώ η άλλη σε αποδοχή. Έτσι αν η παρατηρούμενη τιμή της στατιστικής συνάρτησης ανήκει στην κρίσιμη περιοχή τότε υποδηλώνεται ότι απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση. Αλλιώς δεν απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση.

Σφάλμα τύπου I

Σε έναν έλεγχο υποθέσεων, το σφάλμα τύπου I λαμβάνει χώρα όταν η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται όταν αυτή είναι στην πραγματικότητα αληθινή. Δηλαδή, η H_0 κακώς απορρίφθηκε.

Για παράδειγμα, σε μια κλινική δοκιμή ενός νέου φαρμάκου, η μηδενική υπόθεση θα μπορούσε να είναι ότι το νέο φάρμακο δεν είναι καλύτερο, κατά μέσο όρο, από το τρέχον φάρμακο, δηλαδή H_0: δεν υπάρχει καμία διαφορά μεταξύ των δύο φαρμάκων κατά μέσο όρο.

Ένα σφάλμα τύπου I θα συμβεί αν καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι τα δύο φάρμακα παράγουν διαφορετικά αποτελέσματα, ενώ στην πραγματικότητα δεν υπήρχε καμία διαφορά μεταξύ τους.

Ο ακόλουθος πίνακας δίνει μια περίληψη των πιθανών αποτελεσμάτων οποιουδήποτε ελέγχου υποθέσεων:

		Απόφαση	
		Απόρριψη της H_0	Δεν απορρίπτουμε H_0
Πραγματικότητα	H_0 αληθινή	Σφάλμα τύπου I α	Σωστή απόφαση Ισχύς $= 1-\alpha$
	H_0 εσφαλμένη	Σωστή απόφαση Ισχύς $= 1-\beta$	Σφάλμα τύπου II β

Το σφάλμα τύπου I συχνά θεωρείται ότι είναι πιο σοβαρό, και συνεπώς πιο σημαντικό για να αποφεύγεται, από το σφάλμα τύπου II. Η διαδικασία του ελέγχου υποθέσεων, επομένως, ρυθμίζεται έτσι ώστε να υπάρχει μια εγγυημένα «χαμηλή» πιθανότητα απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης εσφαλμένα, ενώ αυτή η πιθανότητα δεν είναι ποτέ 0. Αυτή η πιθανότητα σφάλματος τύπου I μπορεί να υπολογιστεί με ακρίβεια αφούP(τύπος σφάλματος I) = επίπεδο σημαντικότητας $=\alpha$

Η ακριβής πιθανότητα σφάλματος τύπου II είναι εκ των προτέρων άγνωστη. Αν δεν απορρίψουμε την μηδενική υπόθεση, μπορεί παρ΄ όλα αυτά να είναι ψευδής (σφάλμα τύπου II) καθώς το δείγμα μπορεί να μην είναι αρκετά μεγάλο για να προσδιορίσει ότι η μηδενική υπόθεση είναι εσφαλμένη (ειδικά όταν η αλήθεια είναι πολύ κοντά με την μηδενική υπόθεση).

Για οποιοδήποτε έλεγχο υποθέσεων, τα σφάλματα τύπου I και τύπου II σχετίζονται αντίστροφα, δηλαδή όσο μικρότερος είναι ο κίνδυνος του ενός, τόσο υψηλότερος είναι ο κίνδυνος του άλλου. Ένα σφάλμα τύπου I μπορεί επίσης να αναφέρεται ως σφάλμα του πρώτου είδους.

Σφάλμα τύπου I I

Σε ένα έλεγχο υποθέσεων, το σφάλμα τύπου II παρουσιάζεται όταν η μηδενική υπόθεση H_0, δεν απορρίπτεται, όταν είναι στην πραγματικότητα ψευδής.

Για παράδειγμα, σε μια κλινική δοκιμή ενός νέου φαρμάκου, η μηδενική υπόθεση θα μπορούσε να είναι ότι το νέο φάρμακο δεν είναι καλύτερο κατά μέσο όρο, από το τρέχον φάρμακο.

Δηλαδή H_0: δεν υπάρχει καμία διαφορά μεταξύ των δύο φαρμάκων κατά μέσο όρο.

Ένα σφάλμα τύπου II οφείλεται συχνά στο ότι το μέγεθος του/των δείγματος/των είναι πολύ μικρό/α. Η πιθανότητα σφάλματος τύπου II είναι γενικά άγνωστη, αλλά συμβολίζεται με β και πιο συγκεκριμέναP(σφάλματος τύπου II) $=\beta$ Ένα σφάλμα τύπου II μπορεί επίσης να αναφέρεται ως σφάλμα του δεύτερου είδους.

Επίπεδο σημαντικότητας

Το επίπεδο σημαντικότητας ενός στατιστικού ελέγχου υποθέσεων είναι μια σταθερή πιθανότητα (η οποία προεπιλέγεται) κακής απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης H_0, όταν αυτή είναι όντως αληθινή.

Είναι η πιθανότητα σφάλματος τύπου Ι και καθορίζεται από τον ερευνητή σε σχέση με τις συνέπειες ενός τέτοιου σφάλματος. Δηλαδή, θέλουμε να καταστήσουμε το επίπεδο σημαντικότητας όσο το δυνατόν μικρότερο, προκειμένου να προστατευθεί η μηδενική υπόθεση και να αποτρέψει, στο μέτρο του δυνατού, τον εξεταστή από ακούσιους ψευδείς ισχυρισμούς.

Το επίπεδο σημαντικότητας συνήθως συμβολίζεται με α

Επίπεδο σημαντικότητας $= P$ (σφάλμα τύπου Ι) $=\alpha$

Συνήθως, το επίπεδο σημαντικότητας επιλέγεται να είναι 0,05 (ή ισοδύναμα, 5%).

Ισχύς

Η ισχύς ενός στατιστικού ελέγχου υποθέσεων μετρά την ικανότητα του τεστ να απορρίπτει τη μηδενική υπόθεση όταν είναι στην πραγματικότητα ψευδής - δηλαδή, να πάρει μια σωστή απόφαση.

Με άλλα λόγια, η ισχύς ενός ελέγχου υποθέσεων είναι η πιθανότητα να μην συμβαίνει ένα σφάλμα τύπου ΙΙ. Υπολογίζεται αφαιρώντας την πιθανότητα σφάλματος τύπου ΙΙ από τη μονάδα και συνήθως εκφράζεται ως: Ισχύς $= 1 - P$ (σφάλματος τύπου ΙΙ) $=1-\beta$

Η μέγιστη ισχύς που μπορεί να έχει ένας έλεγχος είναι 1, το ελάχιστο είναι 0. Ιδανικά θέλουμε έναν έλεγχο να έχει μεγάλη ισχύ, κοντά στο 1.

(Statistics Glossary v1.1 (Valerie J. Easton & John H. McColl)

http://www.stats.gla.ac.uk/steps/glossary/index.html*)*

P-Value (ή *significance value*).

Αν η περιοχή απόρριψης της H_0 είναι της μορφής $T(x) > c$ τότε το p-value των τιμών xτου δείγματος είναι η πιθανότητα

$$p-value = P(T(X) > T(x) \mid H_0) = 1 - F_{T|H_0}(T(x))$$

η οποία μπορεί να θεωρηθεί ότι εκφράζει την πιθανότητα να εμφανιστεί ένα τόσο ή ακόμη και πιο «ακραίο» δείγμα από αυτό που εμφανίστηκε, δεδομένου ότι ισχύει η H_0 (συνήθως η T(X) είναι συνεχής οπότε μπορεί να θεωρηθεί ότι έχουμε $\geq$ μέσα στην παραπάνω πιθανότητα). Διαισθητικά, αν το pvalue είναι «κοντά» στο 0 τότε συμπεραίνουμε ότι είναι «απίθανο», δεδομένης της H_0, να εμφανιστεί αυτό το δείγμα, και όπως είναι φυσικό φτάνουμε στο συμπέρασμα ότι μάλλον δεν πρέπει να ισχύει η H_0. Πράγματι, αν p-value <a, απορρίπτουμε την H_0 διότι

$$T(x) > c = F^{-1}_{T|H_0}(1-a) \Leftrightarrow F_{T|H_0}(T(X)) > 1-a \Leftrightarrow P(T(X) > T(x) \mid H_0) < a$$

Επομένως αντί να εξετάζουμε αν $T(x) > c$, ισοδύναμα εξετάζουμε:

- αν το p-value<a: απορρίπτουμε την H_0, ενώ

- αν p-value $\geq$ a: δεν απορρίπτουμε την H_0.

Αν το p-value είναι πάρα πολύ μικρό (π.χ. 0.0001) τότε απορρίπτουμε την H_0 χωρίς δεύτερη σκέψη ενώ αν το p-value είναι σχετικά μικρό (π.χ. «κοντά» στο 0.05) τότε μπορεί μεν να απορρίψουμε την H_0 αλλά με κάποια επιφυλακτικότητα.

Στα στατιστικά πακέτα, μετά την εισαγωγή των τιμών **x**του δείγματος και την επιλογή του επιθυμητού ελέγχου, εμφανίζεται η τιμή του p-value που αντιστοιχεί στο **x**. Σύμφωνα με τα παραπάνω, αν η τιμή αυτή είναι μικρή (μικρότερη του *a*= 0.01 ή 0.05) τότε απορρίπτουμε την H_0.

Το πλεονέκτημα από την χρήση του p-value είναι ότι δεν απορρίπτουμε ή δεχόμαστε απλώς την H_0 αλλά μπορούμε να δούμε και πόσο πιθανή ήταν η εμφάνιση του δείγματος **x**που πήραμε (υπό την H_0) ενώ επίσης μπορούμε να την συγκρίνουμε άμεσα με όποιο *a*και αν επιλέξουμε. Ο λόγος για τον οποίο το p-value συνήθως προϋποθέτει τη χρήση Η/Υ είναι διότι χωρίς τον Η/Υ δεν είναι πάντοτε εύκολο να υπολογιστεί ή να πινακοποιηθεί για κάθε τιμή του *T*(**x**).

Boutsikas M.V. (2004), Σημειώσεις μαθήματος «Στατιστικά Προγράμματα»

Τμήμα Στατ. & Ασφ. Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς

Μερικές ιδιότητες των ελέγχων υποθέσεων

Από όλους τους ελέγχους που είναι κατάλληλοι για συγκεκριμένη μηδενική και εναλλακτική, ο καλύτερος έλεγχος μπορεί να επιλεγεί επί τη βάσει κάποιων ιδιοτήτων των ελέγχων.

Αυτές οι ιδιότητες έχουν ως εξής.

1. Ο έλεγχος θα πρέπει να είναι αμερόληπτος.
2. Ο έλεγχος θα πρέπει να είναι συνεπής.
3. Ο έλεγχος θα πρέπει να είναι πιο αποτελεσματικός κατά κάποιο τρόπο από ότι οι υπόλοιποι έλεγχοι.

Από αυτές τις ιδιότητες η αποτελεσματικότητα, η οποία σχετίζεται με την ισχύ, είναι η πιο σημαντική και η πιο ευρέως χρησιμοποιούμενη.

Μερικές φορές είμαστε ικανοποιημένοι αν ισχύουν ένα ή δύο από τα τρία κριτήρια. Μόνο σπάνια ισχύουν και οι τρεις προϋποθέσεις.

(Conover, W.J (1999). Practical non parametric statistics 3rd ed.)

1.5Γενικά στοιχεία στην μη παραμετρική στατιστική

Σε αυτή την παράγραφο θα γίνει μια προσπάθεια να διαχωριστούν οι όροι παραμετρική και μη παραμετρική στατιστική συγκρίνοντας τις δύο κατευθύνσεις και δίνοντας τον ορισμό της μη παραμετρικής στατιστικής. Ακόμα θα αναφερθούν κάποιες εφαρμογές και μέθοδοι της μη παραμετρικής στατιστικής που χρησιμοποιούνται ευρέως

1.5.1 Εισαγωγή στην μη παραμετρική στατιστική

Πολλές παραμετρικές στατιστικές μέθοδοι ελέγχου υποθέσεων στηρίζονται στην υπόθεση ότι η κατανομή των δεδομένων περιγράφεται από μία κατανομή συγκεκριμένης μορφής (για παράδειγμα, κανονική ή κάποια άλλη κατανομή που δεν απέχει πολύ από την κανονική). Έτσι, στους ελέγχους υποθέσεων που αναφέρονται στην μέση τιμή ενός πληθυσμού, γίνεται η υπόθεση ότι ο δειγματικός μέσος κατανέμεται κανονικά. Στους ελέγχους υποθέσεων που αναφέρονται στις παραμέτρους ενός γραμμικού μοντέλου, ο προσθετέος που αντιστοιχεί στο τυχαίο σφάλμα θεωρείται ότι κατανέμεται σύμφωνα με την κανονική κατανομή. Τέλος, στους ελέγχους υποθέσεων στο πλαίσιο προβλημάτων ανάλυσης διασποράς, υποθέτουμε ότι η εντός των επιδράσεων μεταβλητότητα περιγράφεται από την κανονική κατανομή. Οποτεδήποτε δεν είναι επιτρεπτή η οποιαδήποτε υπόθεση για την μορφή του πληθυσμού, ο ερευνητής στρέφεται στο Κεντρικό Οριακό Θεώρημα και σε εμπειρικές μελέτες για την θεωρητική και εμπειρική υποστήριξη αυτής της "βολικής" υπόθεσης κανονικότητας προκειμένου να χρησιμοποιήσει μια παραμετρική μέθοδο. Στην πράξη, όμως, εμφανίζονται συχνά περιπτώσεις στις οποίες τα δείγματα είναι μικρά και τα δεδομένα κατανέμονται εμφανώς μη κανονικά. Εμφανίζονται επίσης περιπτώσεις, όπου και αν ακόμα υπάρχει κάποια ένδειξη κανονικότητας, ο ερευνητής που ενδεχομένως έχει βαθειά γνώση του πληθυσμού, είναι επιφυλακτικός στο να κάνει μια τέτοια υπόθεση.

Οι στατιστικοί επινόησαν αρκετές εναλλακτικές τεχνικές για τον ερευνητή ο οποίος διστάζει να υποθέσει κανονικότητα. Οι τεχνικές αυτές δεν απαιτούν συγκεκριμένες υποθέσεις για την μορφή του πληθυσμού από τον οποίο προέρχονται τα δεδομένα και μπορούν να χρησιμοποιηθούν τόσο για μικρά όσο και για μεγάλα δείγματα. Είναι δηλαδή σχεδιασμένες για να μπορούν να χρησιμοποιηθούν ανεξάρτητα από την κατανομή των δεδομένων. Επομένως, οι τεχνικές αυτές μπορούν να χρησιμοποιηθούν τόσο για κανονικούς πληθυσμούς όσο και για μη κανονικούς πληθυσμούς. Για τον λόγο αυτό, οι τεχνικές αυτές ονομάζονται ελεύθερες κατανομών ή μη παραμετρικές τεχνικές (distribution-free ή non parametric techniques).

Οι μη παραμετρικές τεχνικές είναι πολύ απλές στην χρήση τους εν γένει, και ο σχεδιασμός τους είναι αποτέλεσμα στοιχειωδών θεωρήσεων. Εάν τα δεδομένα ακολουθούν στην πραγματικότητα την κανονική κατανομή, τότε οι μη παραμετρικοί έλεγχοι υποθέσεων δεν είναι το ίδιο ισχυροί όπως οι αντίστοιχοι παραμετρικοί έλεγχοι, οι οποίοι κάνουν χρήση της υπόθεσης της κανονικότητας. Για δεδομένη πιθανότητα σφάλματος τύπου Ι, οι μη παραμετρικοί έλεγχοι έχουν υψηλότερη πιθανότητα σφάλματος τύπου ΙΙ. Ένας έλεγχος, ο οποίος αγνοεί πληροφορίες σχετικά με τα δεδομένα, όπως είναι η μορφή της κατανομής τους, δεν αναμένεται να είναι το ίδιο καλός όπως ένας έλεγχος ο οποίος κάνει χρήση αυτής της πληροφορίας. Έτσι, ένας έλεγχος, ο οποίος δεν λαμβάνει υπόψη του ότι τα δεδομένα προέρχονται από μια κανονική κατανομή, δεν αναμένεται να είναι το ίδιο ισχυρός όπως ένας έλεγχος ο οποίος χρησιμοποιεί αυτή την υπόθεση. Από την άλλη μεριά, εάν τα δεδομένα προέρχονται από μη κανονικό πληθυσμό, τότε οι μη παραμετρικοί έλεγχοι έχουν ένα σαφές πλεονέκτημα έναντι των παραμετρικών ελέγχων, οι οποίοι στηρίζονται στην εσφαλμένη υπόθεση της κανονικότητας των δεδομένων. Η σοβαρότητα του σφάλματος και, επομένως, η ακρίβεια των παραμετρικών ελέγχων εξαρτάται, κατά συνέπεια, από το πόσο εσφαλμένη είναι η υπόθεση της κανονικότητας. Επειδή οι μη παραμετρικοί έλεγχοι στηρίζονται σε ελάχιστες υποθέσεις για τους πληθυσμούς από τους οποίους προέρχονται τα δεδομένα και, πάντως, όχι σε υποθέσεις οι οποίες αναφέρονται στην μορφή των πληθυσμών αυτών, είναι εν γένει πολύ ευσταθείς (robust).

Συνοψίζοντας, οι μη παραμετρικές μέθοδοι :

i. αποβλέπουν σε ευρύτερα πεδία εφαρμογής λόγω του ότι οι κατανομές στις οποίες αναφέρονται είναι λιγότερο περιορισμένες από ότι στα αντίστοιχα παραμετρικά προβλήματα,
ii. δεν είναι εξίσου ισχυρές με τις αντίστοιχες παραμετρικές μεθόδους και
iii. είναι περισσότερο ευσταθείς επειδή ακριβώς δεν επηρεάζονται από την μορφή της κατανομής των δεδομένων.

Παρ' όλα αυτά, οι μη παραμετρικές μέθοδοι συχνά είναι σχεδόν το ίδιο αποτελεσματικές όπως οι παραμετρικές μέθοδοι οι οποίες κάνουν αυστηρές υποθέσεις για τον πληθυσμό από τον οποίο προέρχονται τα δεδομένα. Ένα άλλο σημαντικό πλεονέκτημα των μη παραμετρικών μεθόδων είναι ότι μπορούν να εφαρμοσθούν σε δεδομένα που είναι ταξινομημένα σε κατηγορίες (κατηγορικά δεδομένα) και τα οποία είναι σε κλίμακα διάταξης ή ακόμα και απλώς σε ονομαστική κλίμακα, ενώ οι παραμετρικές μέθοδοι προϋποθέτουν ακριβείς μετρήσεις. Τέλος, θα πρέπει να σημειωθεί ότι οι μη παραμετρικές μέθοδοι μπορούν να θεωρηθούν ως προπαρασκευαστικές για τις παραμετρικές μεθόδους, με την έννοια ότι, η χρησιμοποίηση μιας παραμετρικής μεθόδου, η οποία βασίζεται στην υπόθεση της κανονικότητας, θα πρέπει να έπεται ενός ελέγχου, με μία μη παραμετρική μέθοδο, της υπόθεσης ότι τα δεδομένα έχουν προέλθει από μια κανονική κατανομή.

Ε. Ξεκαλάκη, Μη παραμετρική στατιστική (2001)

1.5.2Ορισμός μη παραμετρικής στατιστικής

Ο όρος «μη- παραμετρική στατιστική" έχει τουλάχιστον δύο διαφορετικές έννοιες:

Η πρώτη έννοια της μη-παραμετρικής στατιστικής καλύπτει τις τεχνικές που δεν βασίζονται σε πληθυσμούς που ανήκουν σε κάποια συγκεκριμένη κατανομή. Αυτά περιλαμβάνουν, μεταξύ άλλων:

- Μεθόδους ελεύθερες κατανομής, οι οποίες δεν βασίζονται σε υποθέσεις ότι τα δεδομένα προέρχονται από μια δεδομένη κατανομή πιθανοτήτων. Ως εκ τούτου, είναι το αντίθετο της παραμετρικής στατιστικής. Περιλαμβάνει μη-παραμετρικά περιγραφικά στατιστικά στοιχεία, στατιστικά μοντέλα εξαγωγής συμπερασμάτων και στατιστικών αναλύσεων.

- Μη παραμετρικές ελεγχοσυναρτήσεις (με την έννοια μιας ελεγχοσυνάρτησης «πάνω» από τα δεδομένα, η οποία ορίζεται να είναι μια συνάρτηση του δείγματος που δεν έχει καμία εξάρτηση από την παράμετρο), των οποίων η ερμηνεία δεν εξαρτάται από τον πληθυσμό και μπορούν να ακολουθούν οποιαδήποτε παραμετροποιημένη κατανομή. Ελεγχοσυναρτήσεις τάξης, οι οποίες βασίζονται στις τάξεις των παρατηρήσεων, είναι ένα παράδειγμα τέτοιων ελεγχοσυναρτήσεων και αυτές διαδραματίζουν κεντρικό ρόλο σε πολλές μη-παραμετρικές τεχνικές.

Η δεύτερη έννοια της μη-παραμετρικής στατιστικής καλύπτει τις τεχνικές που δεν υποθέτουν ότι η δομή του μοντέλου είναι σταθερή. Τυπικά, το μοντέλο μεγαλώνει σε μέγεθος για να φιλοξενήσει την πολυπλοκότητα των δεδομένων. Σε αυτές τις τεχνικές, οι ανεξάρτητες μεταβλητές συνήθως θεωρείται ότι ανήκουν σε κάποια παραμετρική κατανομή, και επίσης γίνονται παραδοχές σχετικά με τα μοντέλα που συνδέουν τις μεταβλητές.

Αυτές οι τεχνικές περιλαμβάνουν:

- Μη-παραμετρική παλινδρόμηση, η οποία αναφέρεται στην μοντελοποίηση όπου η δομή της σχέσης μεταξύ των μεταβλητών θεωρείται μη παραμετρική, αλλά όπου, ωστόσο, μπορεί να υπάρχουν παραμετρικές υποθέσεις σχετικά με την κατανομή των σφαλμάτων του μοντέλου.
- Μη-παραμετρικά Μπεϋζιανά ιεραρχικά μοντέλα, όπως μοντέλα που βασίζονται στην διαδικασία του Dirichlet, η οποία επιτρέπει τον αριθμό των έμμεσων μεταβλητών να μεγαλώνει έτσι ώστε να προσαρμόζεται κατάλληλα στα δεδομένα, αλλά και όπου οι ανεξάρτητες μεταβλητές συνεχίζουν να ακολουθούν παραμετρικές κατανομές και επίσης η διαδικασία ελέγχου του ρυθμού προσθήκης εμμέσων μεταβλητών ακολουθεί παραμετρική κατανομή.

http://en.wikipedia.org

1.5.3 Εφαρμογές και μέθοδοι της μη παραμετρικής στατιστικής

Μη-παραμετρικές μέθοδοι χρησιμοποιούνται ευρέως για τη μελέτη πληθυσμών που αποτελούνται από κατηγορικά δεδομένα (όπως οι κριτικές ταινιών που λαμβάνουν ένα έως τέσσερα αστέρια). Η χρήση των μη-παραμετρικών μεθόδων μπορεί να είναι απαραίτητη όταν τα δεδομένα έχουν κατηγορίες, αλλά καμία σαφή αριθμητική ερμηνεία, όπως κατά την αξιολόγηση των προτιμήσεων. Όσον αφορά τα επίπεδα της μέτρησης, οι μη παραμετρικές μέθοδοι μετασχηματίζουν τα δεδομένα σε κλίμακες μέτρησης (ordinal data).

Ως μη-παραμετρικές, οι μέθοδοι κάνουν λιγότερες υποθέσεις, και η εφαρμογή τους είναι ευρύτερη από τις αντίστοιχες παραμετρικές μεθόδους. Ειδικότερα, μπορούν να εφαρμοστούν σε καταστάσεις όπου λιγότερα είναι τα δεδομένα από αυτά που ζητούνται. Επίσης, λόγω της εξάρτησης από λιγότερες υποθέσεις, οι μη-παραμετρικές μέθοδοι είναι πιο ισχυρές.

Ένα άλλο πλεονέκτημα για τη χρήση των μη-παραμετρικών μεθόδων είναι η απλότητα. Σε ορισμένες περιπτώσεις, ακόμη και όταν η χρήση των παραμετρικών μεθόδων είναι δικαιολογημένη, οι μη-παραμετρικές μέθοδοι μπορεί να είναι πιο εύκολες στη χρήση.

Μη-παραμετρικές μέθοδοι επαγωγικής στατιστικής είναι μαθηματικές διαδικασίες για τον έλεγχο στατιστικών υποθέσεων οι οποίες, σε αντίθεση με τις παραμετρικές ελεγχοσυναρτήσεις, δεν κάνουν υποθέσεις για την κατανομή των τυχαίων μεταβλητών που περιγράφουν το πρόβλημα που μας ενδιαφέρει.

Οι πιο συχνά χρησιμοποιούμενοι έλεγχοι είναι:

- Anderson–Darlingtest: ελέγχει κατά πόσον ένα δείγμα προέρχεται από μια δεδομένη κατανομή,
- Kaplan–Meier: υπολογίζει τη συνάρτηση επιβίωσης από δεδομένα χρόνων επιβίωσης,
- Kendall'stau: ελέγχει την στατιστική εξάρτηση μεταξύ δύο μεταβλητών,
- Kolmogorov–Smirnov test: ελέγχει κατά πόσον ένα δείγμα προέρχεται από μια δεδομένη κατανομή, ή αν δύο δείγματα προέρχονται από την ίδια κατανομή,
- Kuiper's test: ελέγχει κατά πόσον ένα δείγμα προέρχεται από μια δεδομένη κατανομή, ευαίσθητη σε κυκλικές μεταβολές όπως π.χ. ημέρα της εβδομάδας,
- Logrank test: συγκρίνει καμπύλες επιβίωσης δύο από δεξιά λογοκριμένων δειγμάτων,
- Mann–Whitney Uor Wilcoxon rank sum test: ελέγχει αν δύο δείγματα ελήφθησαν από την ίδια κατανομή, σε σύγκριση με μία δεδομένη εναλλακτική υπόθεση. Στην πραγματικότητα πρόκειται για ένα "ημι" μη-παραμετρικό τεστ, δεδομένου ότι υποθέτει ότι τα δύο δείγματα έχουν την ίδια παραμέτρο κλίμακας.
- McNamara's test: ελέγχει εάν, σε 2 × 2 πίνακες συνάφειας για δύο χαρακτηριστικά-κατηγορίες με δύο δυνατά αποτελέσματα το κάθε ένα, έχουμε ίσες πιθανότητες.
- Median test: ελέγχει αν δύο δείγματα ακολουθούν κατανομές με ίσες διαμέσους

- Siegel–Tukey test: ελέγχει για τις διαφορές στην κλίμακα-διασπορά μεταξύ δύο ομάδων
- Spearman's rank correlation coefficient: μετρά τη στατιστική εξάρτηση μεταξύ δύο μεταβλητών, χρησιμοποιώντας μια μονότονη συνάρτηση,
- Squared ranks test: ελέγχει την ισότητα των διακυμάνσεων σε δύο ή περισσότερα δείγματα,
- Wald–Wolfowitzruns test: ελέγχει εάν τα στοιχεία μιας ακολουθίας είναι αμοιβαία ανεξάρτητα / τυχαία.

http://en.wikipedia.org

Κεφάλαιο 2

Μη παραμετρικοί Έλεγχοι Υποθέσεων βασισμένοι στην διωνυμική κατανομή

2.1 Εισαγωγή

Η Στατιστική σήμερα χρησιμοποιείται ευρύτατα σε όλους σχεδόν τους τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας. Η ανάλυση στατιστικών δεδομένων είναι το κυριότερο εργαλείο έρευνας σε ένα μεγάλο φάσμα εφαρμογών σχεδόν σε όλες τις επιστήμες. Ένα πολύ σημαντικό πεδίο της στατιστικής με πολλές εφαρμογές αποτελεί η μη παραμετρική στατιστική.

2.2 Η διωνυμική κατανομή

Όπως είναι ήδη γνωστό, η διωνυμική κατανομή χρησιμοποιείται για να περιγράψει πιθανότητες που σχετίζονται με τον αριθμό των επιτυχιών σε μια σειρά n ανεξαρτήτων δοκιμών. Κάθε μια από τις n ανεξάρτητες δοκιμές μπορεί να καταλήξει σε επιτυχία με πιθανότητα p, ή αποτυχία με πιθανότητα $q = 1 - p$. Η διωνυμική κατανομή περιγράφει την πιθανότητα να παρατηρηθούν ακριβώς k επιτυχίες.

2.3 Ο διωνυμικός έλεγχος

Με λίγη εφευρετικότητα ο διωνυμικός έλεγχος μπορεί να προσαρμοστεί σχεδόν σε κάθε έλεγχο οποιασδήποτε υπόθεσης και σχεδόν με κάθε τύπο δεδομένων που επιδέχονται στατιστική ανάλυση. Σε ορισμένες περιπτώσεις, ο διωνυμικός έλεγχος είναι ο πιο ισχυρός έλεγχος. Σε αυτές τις περιπτώσεις ο έλεγχος βασίζεται σε παραμετρικές και μη παραμετρικές στατιστικές συναρτήσεις. Σε άλλες περιπτώσεις πιο ισχυροί έλεγχοι είναι διαθέσιμοι, στην οποία περίπτωση ο έλεγχος γίνεται μέσω μιας μη παραμετρικής στατιστικής συνάρτησης. Ακόμη και στις περιπτώσεις όπου πιο ισχυροί έλεγχοι είναι διαθέσιμοι, ο διωνυμικός έλεγχος μερικές φορές προτιμάται επειδή είναι απλός στην χρήση του, απλός στην ερμηνεία του, και μερικές φορές αρκετά ισχυρός για την απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης όταν θα πρέπει να απορριφθεί.

Το δείγμα αποτελείται από τα αποτελέσματα n ανεξάρτητων δοκιμών. Κάθε αποτέλεσμα ανήκει είτε στην "κατηγορία 1" (επιτυχία) είτε στην "κατηγορία 2" (αποτυχία), αλλά όχι και στις δύο κατηγορίες. Ο αριθμός των παρατηρήσεων της κατηγορίας 1 είναι O_1 και ο αριθμός των παρατηρήσεων στην κατηγορία 2 είναι $O_2 = n - O_1$.

Παραδοχές

1. Οι n δοκιμές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.
2. Κάθε δοκιμή έχει πιθανότητα p ως αποτέλεσμα της "κατηγορίας 1", όπου p είναι η ίδια πιθανότητα για όλες τις n δοκιμές.

Στατιστικός έλεγχος. Από τη στιγμή που ασχολούμαστε με την πιθανότητα του αποτελέσματος "κατηγορίας 1", θα αφήσουμε το στατιστικό έλεγχο T να είναι ο αριθμός των φορών που το αποτέλεσμα είναι "κατηγορίας 1". Αυτό είναι,

$$T = O_1 \ (1)$$

Για κάποιες τιμές του n και του p χρησιμοποιείται η κανονική προσέγγιση. Δηλαδή, η προσέγγιση των ποσοστημορίων x_q, για T δίνεται από:

$$x_q = n \cdot p + z_q \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \ (2)$$

όπου z_q είναι το q-οστό ποσοστημόριο της τυποποιημένης κανονικής τυχαίας μεταβλητής.

Υποθέσεις

Α. Αμφίπλευρος έλεγχος

$$H_0 : p = p^*$$
$$H_1 : p \neq p^*$$

Η κρίσιμη περιοχή απόρριψης μεγέθους a για τον έλεγχο των υποθέσεων της περίπτωσης αυτής αντιστοιχεί στις δύο ουρές της διωνυμικής κατανομής με παραμέτρους p^* και n, όπου το μέγεθος της κάτω ουράς είναι a_1 και το μέγεθος της πάνω ουράς είναι a_2. Το πραγματικό επίπεδο σημαντικότητας είναι $a = a_1 + a_2$, το οποίο σπάνια είναι ένας στρογγυλός αριθμός, λόγω της διακριτής φύσης του T.

Από τον πίνακα 1 του παραρτήματος για τις διάφορες τιμές του p^* και n, βρίσκουμε το t_1, έτι ώστε

$$P(Y \leq t_1) = \alpha_1 \ (3)$$

και βρίσκουμε το t_2 έτσι ώστε

$$P(Y \le t_2) = 1 - \alpha_2 \quad (4)$$

όπου Y είναι μια διωνυμική τυχαία μεταβλητή με παραμέτρους p^* και n .

Σε κάποιες περιπτώσεις χρησιμοποιείται η Εξίσωση 2 για την προσέγγιση του α/2 ποσοστημορίου και του (1-α/2) ποσοστημορίου, μια τυχαίας διωνυμικής μεταβλητής με παραμέτρους p^* και n . Συγκεκριμένα, χρησιμοποιείται η κανονική προσέγγιση αν το n είναι μεγαλύτερο από 20. Δηλαδή χρησιμοποιείται η εξίσωση (2) για την προσέγγιση του t_1 του a/2 ποσοστημορίου, και του t_2 του (1-a/2) ποσοστημορίου μιας διωνυμικής τυχαίας μεταβλητής με παραμέτρους p^* και n , γιαq = a / 2 και q = 1-α / 2 αντίστοιχα.

Η υπόθεση H_0 απορρίπτεται εάν η τιμή της στατιστικής συνάρτησης Τ είναι μικρότερη ή ίσο από το t_1 ή αν το Τ είναι μεγαλύτερο από το t_2 . Αλλιώς γίνεται δεκτή η μηδενική υπόθεση.

Το p-value είναι διπλάσιο από τη μικρότερη των πιθανοτήτων αφ΄ενός τουΥνα είναι μικρότερο ή ίσο από την παρατηρούμενη τιμή της στατιστικής συνάρτησης*T*, αφ΄ετέρου του Y να μεγαλύτερο ή ίσο από την παρατηρούμενη τιμή της στατιστικής συνάρτησης*T*. Για n> 20, χρησιμοποιούμε τους τύπους:

$$P(Y \le t_{obs}) \cong P(Z \le \frac{t_{obs} - n \cdot p^* + 0.5}{\sqrt{n \cdot p^*(1-p^*)}}) \quad (5)$$

και

$$P(Y \ge t_{obs}) \cong 1 - P(Z \le \frac{t_{obs} - n \cdot p^* - 0.5}{\sqrt{n \cdot p^*(1-p^*)}}) \quad (6)$$

οι οποίοι ενσωματώνουν το 0,5 ως "διόρθωση συνεχείας" που βελτιώνει την κανονική προσέγγιση της διωνυμικής κατανομής.

B . Μονόπλευρος έλεγχος

$$H_0 : p \ge p^*$$
$$H_1 : p < p^*$$

Για μικρές τιμές της στατιστικής συνάρτησης T υποδεικνύεται ότι η H_0 είναι ψευδής, οπότε η περιοχή απόρριψης του ελέγχου μεγέθους α αποτελείται από όλες τις τιμές του T μικρότερες από ή ίσες με t, όπου το t βρίσκεται από τον Πίνακα 1, χρησιμοποιώντας p^* και n, έτσι ώστε

$$P(Y \leq t) = \alpha \quad (7)$$

όπου το Y είναι μια διωνυμική τυχαία μεταβλητή με παραμέτρους p^* και n.

Αν το n είναι μεγαλύτερο του 20 τότε γίνεται χρήση της κανονικής προσέγγισης. Δηλαδή, χρησιμοποιείται η Εξίσωση 2 για την προσέγγιση του t, του ποσοστημορίου α της τυχαίας διωνυμικής μεταβλητής με παραμέτρους p^* και n, γιαq = α.

Η υπόθεση H_0 απορρίπτεται εάν η τιμή της στατιστικής συνάρτησης T είναι μικρότερη ή ίση του t. Διαφορετικά, αποδεχόμαστε την μηδενική υπόθεση.

Γ. Μονόπλευρος έλεγχος

$$H_0 : p \leq p^*$$
$$H_1 : p > p^*$$

Για μεγάλες τιμές της στατιστικής συνάρτησης του T υποδεικνύεται ότι η H_0 είναι ψευδής, οπότε η περιοχή απόρριψης του ελέγχου μεγέθους α αντιστοιχεί σε όλες τις τιμές της T που είναι μεγαλύτερες ή ίσες από t, όπου t λαμβάνεται από τον Πίνακα 1 με χρήση των p^* και n, έτσι ώστε να

$$P(Y \leq t) = 1 - \alpha \quad (8)$$

όπου το Y είναι μια τυχαία διωνυμική μεταβλητή με παραμέτρους p^* και n.

Αν το nείναι μεγαλύτερο από 20 γίνεται χρήση της κανονικής προσέγγισης. Δηλαδή, χρησιμοποιούμε την Εξίσωση 2για την προσέγγιση του t, του (1-α) ποσοστημορίου της διωνυμικής τυχαίας μεταβλητής με παραμέτρους p^* και n για q=1-α.

Η υπόθεση H_0 απορρίπτεται εάν η τιμή της στατιστικής συνάρτησης T είναι μεγαλύτερη ή ίση τουt. Διαφορετικά, αποδεχόμαστε την μηδενική υπόθεση.

Ε. Ξεκαλάκη, Μη παραμετρική στατιστική (2001)

2.4 Έλεγχος ποσοστιαίων σημείων μίας κατανομής (The Quantile Test)

Ο διωνυμικός έλεγχος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον έλεγχο υποθέσεων που αναφέρονται στα ποσοστιαία σημεία μίας τυχαίας μεταβλητής. Στην περίπτωση αυτή ονομάζεται Έλεγχος Ποσοστιαίων Σημείων (Quantile Test). Για παράδειγμα, ενδέχεται να ενδιαφερόμαστε να εξετάσουμε αν ένα τυχαίο δείγμα τιμών μιας τυχαίας μεταβλητής X παρέχει ενδείξεις υπέρ της υπόθεσης ότι η διάμεσος της X είναι μεγαλύτερη από κάποια τιμή. Η κλίμακα μέτρησης είναι συνήθως τουλάχιστον κλίμακα διάταξης (ordinal), παρά το ότι για τον διωνυμικό έλεγχο απαιτείται η (ασθενέστερη) ονομαστική (nominal) κλίμακα.

Έστω $X_1, X_2, ..., X_n$ ένα τυχαίο δείγμα παρατηρήσεων από την τυχαία μεταβλητή X και x_p το p -ποσοστιαίο σημείο της κατανομής της

Υπενθυμίζεται ότι το p -ποσοστιαίο σημείο μίας κατανομής ορίζεται ως το σημείο x_p με την ιδιότητα

$P(X > x_p) \leq 1 - p$ και $P(X < x_p) \leq p$ (διακριτή περίπτωση)

$P(X < x_p) = p$ (συνεχής περίπτωση)

Έστω ότι x^* και p^* είναι κάποιες συγκεκριμένες τιμές, $0 < p^* < 1$. Οι υποθέσεις που ενδέχεται να ενδιαφερόμαστε να ελέγξουμε μπορούν να έχουν μία από τις εξής τρεις μορφές.

Α. Αμφίπλευρος Έλεγχος

$$H_0 : x_{p^*} = x^*$$
$$H_1 : x_{p^*} \neq x^*$$

Β. Μονόπλευρος Έλεγχος

$$H_0 : x_{p^*} \geq x^*$$
$$H_1 : x_{p^*} < x^*$$

Γ. Μονόπλευρος Έλεγχος

$$H_0 : x_{p^*} \le x^*$$
$$H_1 : x_{p^*} > x^*$$

Και στις τρεις περιπτώσεις, το δείγμα $X_1, X_2, ..., X_n$ των παρατηρήσεων από την τυχαία μεταβλητή X μπορεί να θεωρηθεί ως μία ακολουθία αποτελεσμάτων n ανεξαρτήτων δοκιμών. Κάθε αποτέλεσμα ανήκει στην κατηγορία $\{ X < x^* \}$ *(επιτυχία)* με πιθανότητα

$p = P(X < x^*)$ ή στην κατηγορία $\{ X > x^* \}$ *(αποτυχία)* με πιθανότητα $1 - p = P(X > x^*)$.

Α. Αμφίπλευρος Έλεγχος

Συνεχής περίπτωση

Από τον ορισμό του p -ποσοστιαίου σημείου, προκύπτει ότι η μηδενική υπόθεση $H_0 : x_{p^*} = x^*$ είναι ισοδύναμη με την υπόθεση $H_0 : P(X < x^*) = p^*$

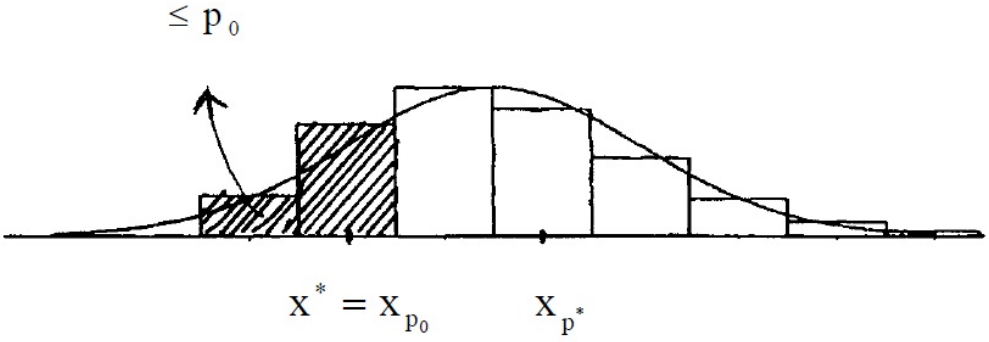
Επομένως, ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n θα περιέχει T επιτυχίες κάθε μία από τις οποίες έχει πιθανότητα $p = P(X < x)$. Κατά συνέπεια, η μηδενική υπόθεση $H_0 : x_{p^*} = x^*$ είναι ισοδύναμη με την υπόθεση $H_0 : p = p^*$. Άρα ο έλεγχος των υποθέσεων της μορφής Α είναι ισοδύναμος με έναν διωνυμικό έλεγχο για την παράμετρο p μιας διωνυμικής κατανομής με παραμέτρους n, p .

Β. Μονόπλευρος Έλεγχος

Για τον έλεγχο των υποθέσεων

$$H_0 : x_{p^*} \ge x^*$$
$$H_1 : x_{p^*} < x^*$$

της περίπτωσης αυτής, θεωρούμε μία τιμή p_0, τέτοια ώστε $x^* = x_{p_0}$



Τότε, από τον ορισμό του p_0-ποσοστιαίου σημείου μιας κατανομής, x_{p_0}, ισχύει ότι

$$x_{p^*} \geq x^* \equiv x_{p_0} \Leftrightarrow p^* \geq p_0 \geq P(X < x_{p_0}) \equiv P(X < x^*) \Leftrightarrow P(X < x^*) \leq p^*$$

Άρα, οι προς έλεγχο υποθέσεις είναι ισοδύναμες με τις υποθέσεις

$$H_0 : P(X < x^*) \leq p^*$$
$$H_1 : P(X < x^*) > p^*$$

Η προφανής επιλογή στατιστικής ελεγχοσυνάρτησης για τον έλεγχο των παραπάνω υποθέσεων είναι ο αριθμός των παρατηρήσεων του δείγματος που δεν υπερβαίνουν την τιμή x^*.Δηλαδή,

$$T_2 = \#\ \text{παρατηρήσεων}\ X_i\ \text{που είναι} < x^*$$

Επομένως, ο κανόνας απόρριψης είναι ο εξής:

Η υπόθεση H_0 απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας περίπου ίσο με a αν $T_2 > t_2$, όπου η τιμή t_2 ορίζεται από την σχέση $P(T_2 > t_2 | n, p = p^*) \cong a$.

Γ. Μονόπλευρος Έλεγχος

Για τον έλεγχο των υποθέσεων

$$H_0 : x_{p^*} \leq x^*$$
$$H_1 : x_{p^*} > x^*$$

θεωρούμε πάλι μία τιμή p_0 τέτοια ώστε $x^* = x_{p_0}$ και παρατηρούμε ότι, από τον ορισμό του p_0-ποσοστιαίου σημείου, x_{p_0}, ισχύει ότι

$$x_{p^*} \le x^* \equiv x_{p_0} \Leftrightarrow p^* \le p_0 \le P(X \le x_{p_0}) \equiv P(X \le x^*)$$

Άρα οι προς έλεγχο υποθέσεις είναι ισοδύναμες με τις υποθέσεις

$$H_0 : P(X \le x^*) \ge p^*$$
$$H_1 : P(X \le x^*) < p^*$$

Η προφανής επιλογή στατιστικής ελεγχοσυνάρτησης για τον έλεγχο των παραπάνω υποθέσεων είναι η $T_1 = \#$ παρατηρήσεων X_i που είναι $\le x^*$ και η κρίσιμη περιοχή του ελέγχου ορίζεται από την ανισότητα $T_1 \le t_1$ όπου η τιμή t_1 ορίζεται από την σχέση:

$$P(T_1 \le t_1 \,|\, n, p = p^*) = a_1 \cong a\ .$$

Ε. Ξεκαλάκη, Μη παραμετρική στατιστική (2001)

2.5 Ο προσημικός έλεγχος ή έλεγχος προσήμων (The Sign Test)

Ο *προσημικός* έλεγχος ή έλεγχος *προσήμων* (sign test) είναι ο αρχαιότερος από όλους τους μη παραμετρικούς ελέγχους. Χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά το 1710. Στην πραγματικότητα, ο προσημικός έλεγχος δεν είναι παρά ο διωνυμικός έλεγχος, όταν $p_0 = 1/2$. Παρά το γεγονός αυτό, ο προσημικός έλεγχος αποτελεί μια παραλλαγή του διωνυμικού ελέγχου, η οποία απαιτεί ξεχωριστή μελέτη λόγω του ενδιαφέροντος που παρουσιάζει η ευέλικτη μορφή της που οφείλεται στο γεγονός ότι $p_0 = 1/2$.

Ο προσημικός έλεγχος χρησιμοποιείται κυρίως για τον έλεγχο της υπόθεσης ότι οι τιμές μιας από τις τυχαίες μεταβλητές του ζεύγους (X, Y) τείνουν να είναι μεγαλύτερες από τις τιμές της άλλης. Χρησιμοποιείται επίσης για τον έλεγχο ύπαρξης τάσης σε μια ακολουθία μετρήσεων σε κλίμακα διάταξης (ordinal measurements), όπως επίσης και ως έλεγχος ύπαρξης συσχέτισης. Σε πολλές από τις περιπτώσεις όπου μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο προσημικός έλεγχος, υπάρχουν διαθέσιμοι περισσότερο ισχυροί μη παραμετρικοί έλεγχοι για το ίδιο μοντέλο. Παρ' όλα αυτά, ο προσημικός έλεγχος προτιμάται λόγω της απλότητάς του.

Τα δεδομένα αποτελούνται από n' παρατηρήσεις πάνω σε ένα δισδιάστατο τυχαίο δείγμα $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), ..., (X_{n'}, Y_{n'})$. Ο τρόπος πραγματοποίησης των παρατηρήσεων αυτών θα πρέπει να υπαινίσσεται ότι η μεταβλητή $X_i (i = 1, 2, ..., n')$ δεν είναι ανεξάρτητη από την μεταβλητή $\mathrm{Y}_i (i = 1, 2, ..., n')$ που αντιστοιχεί σ' αυτήν στο ζεύγος (X_i, Y_i). Στην αντίθετη περίπτωση, η υπόθεση ότι οι τιμές της μίας μεταβλητής τείνουν να είναι μεγαλύτερες από τις τιμές της άλλης στο ζεύγος (X, Y), μπορεί να ελεγχθεί με ένα ισχυρότερο έλεγχο, ο οποίος αναπτύσσεται στα επόμενα και είναι γνωστός στην βιβλιογραφία ως έλεγχος των Mann και Whitney (Mann- Whitney test).

Σε κάθε ζεύγος (X_i, Y_i) γίνεται μια εσωτερική σύγκριση και το ζεύγος αυτό ταξινομείται ως "+" ή "συν" ζεύγος ("+" ή "plus" pair), εάν $X_i < Y_i$, ως "–" ή "πλην" ζεύγος ("–" ή "minus" pair), αν $X_i > Y_i$, ή ως "0" ή "ισοβαθμούν" ζεύγος ("0" ή "tied" pair), αν $X_i = Y_i$, i = 1, 2, …, n΄. Επομένως, η κλίμακα μέτρησης των δεδομένων αρκεί να είναι κλίμακα διάταξης (ordinal scale).

Αν οι τιμές της μεταβλητής X τείνουν να είναι μεγαλύτερες από τις τιμές της μεταβλητής Y, τότε τα ζεύγη (X_i, Y_i) είναι εσωτερικά συνεπή, με την έννοια ότι αν $P(+) > P(-)$ για κάποιο ζεύγος (X_i, Y_i), τότε $P(+) > P(-)$, για όλα τα ζεύγη. Η εσωτερική συνέπεια ορίζεται με ανάλογο τρόπο και στην περίπτωση κατά την οποία οι τιμές της μεταβλητής Y τείνουν να είναι μεγαλύτερες από τις τιμές της μεταβλητής X (οπότε οι αντίστοιχες πιθανότητες των "+" και "–" ζευγών ικανοποιούν την ανισότητα $P(+) < P(-)$)όπως επίσης και στην περίπτωση που δεν υπάρχει τάση στις τιμές της μιας μεταβλητής να υπερβαίνουν τις τιμές της άλλης (οπότε οι πιθανότητες των "+" και "–" ζευγών είναι ίσες, δηλαδή, $P(+) = P(-)$). Επομένως, οι υποθέσεις τις οποίες ενδέχεται να ενδιαφερόμαστε να ελέγξουμε έχουν τη μορφή:

Α. Αμφίπλευρος έλεγχος:

$$H_0 : P(+) = P(-)$$
$$H_1 : P(+) \neq P(-)$$

Β. Μονόπλευρος έλεγχος:

$$H_0 : P(+) \leq P(-)$$
$$H_1 : P(+) > P(-)$$

Γ. Μονόπλευρος έλεγχος:

$$H_0 : P(+) \geq P(-)$$
$$H_1 : P(+) < P(-)$$

Η μορφή της μηδενικής υπόθεσης στην περίπτωση Α υπαινίσσεται ότι οι μεταβλητές Χ και Υ έχουν την ίδια παράμετρο θέσης. Επίσης, στην περίπτωση Β η μηδενική υπόθεση μπορεί να θεωρηθεί ενδεικτική του ότι οι τιμές της μεταβλητής Χ τείνουν να είναι μεγαλύτερες από τις τιμές της μεταβλητής Υ, αφού η H_0 δηλώνει ότι το ενδεχόμενο οι τιμές της μεταβλητής Χ να υπερβαίνουν τις τιμές της μεταβλητής Υ είναι περισσότερο πιθανό από το ενδεχόμενο οι τιμές της μεταβλητής Υ να υπερβαίνουν τις τιμές της μεταβλητής Χ. Αντίστοιχα, στην περίπτωση Γ, η μηδενική υπόθεση δηλώνει ότι η μεταβλητή Χ έχει την τάση να παίρνει τιμές μικρότερες από τις τιμές της μεταβλητής Υ, αφού θεωρεί ότι το ενδεχόμενο οι τιμές της Υ να υπερβαίνουν τις τιμές της Χ είναι περισσότερο πιθανό από το ενδεχόμενο οι τιμές της Χ να υπερβαίνουν τις τιμές της Υ. Επομένως, ο προσημικός έλεγχος θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί και για τον έλεγχο υποθέσεων της μορφής:

Α. Αμφίπλευρος έλεγχος:

$$H_0 : E(X) = E(Y)$$
$$H_1 : E(X) \neq E(Y)$$

Β. Μονόπλευρος έλεγχος:

$$H_0 : E(X) \geq E(Y)$$
$$H_1 : E(X) < E(Y)$$

Γ. Μονόπλευρος έλεγχος:

$$H_0 : E(X) \leq E(Y)$$
$$H_1 : E(X) > E(Y)$$

Για τους ίδιους λόγους, ο προσημικός έλεγχος μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως έλεγχος υποθέσεων για τις διαμέσους των μεταβλητών Χ και Υ.

Είναι προφανές, ότι μια κατάλληλη μορφή στατιστικής συνάρτησης για τον έλεγχο των παραπάνω υποθέσεων είναι η

T = αριθμός των "+" ζευγών.

Δηλαδή, η στατιστική συνάρτηση T συμβολίζει τον αριθμό των ζευγών (X_i, Y_i) στα οποία η μεταβλητή X_i είναι μικρότερη από τη μεταβλητή Y_i. Αγνοώντας τα "0" ενδεχόμενα, και περιοριζόμενοι σε n ζεύγη, όπου

n = (αριθμός των "+" ζευγών) + (αριθμός των "–" ζευγών),

μπορούμε εύκολα να δούμε ότι το πρόβλημα του ελέγχου των παραπάνω υποθέσεων τοποθετείται στο πλαίσιο του διωνυμικού μοντέλου.

Πράγματι, κάθε ζεύγος από τα απομένοντα n ζεύγη παρατηρήσεων (X_i, Y_i) θεωρείται ως μια δοκιμή, η οποία μπορεί να οδηγήσει σε ένα από δύο δυνατά αποτελέσματα:

επιτυχία, “+” (X_i, Y_i) με πιθανότητα $P(+)$

αποτυχία, “–” (X_i, Y_i) με πιθανότητα $P(-)$

Κατά συνέπεια, η ελεγχοσυνάρτηση T ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n και $p = P(+)$. Συμβολικά,

$T \sim$ διωνυμική (n , $p = P(+)$).

Επομένως, οι υποθέσεις των περιπτώσεων Α, Β και Γ γράφονται

ισοδύναμα με την εξής μορφή:

Α. Αμφίπλευρος έλεγχος:

$$H_0 : P(+) = 1/2$$
$$H_1 : P(+) \neq 1/2$$

Β. Μονόπλευρος έλεγχος:

$$H_0 : P(+) \leq 1/2$$
$$H_1 : P(+) > 1/2$$

Γ. Μονόπλευρος έλεγχος:

$$H_0 : P(+) \geq 1/2$$
$$H_1 : P(+) < 1/2$$

Είναι προφανές ότι για τον έλεγχο των παραπάνω υποθέσεων μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο διωνυμικός έλεγχος, αφού κάτω από τη μηδενική υπόθεση, η στατιστική συνάρτηση T ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n και $p = P(+) = 1/2$. Συμβολικά,

$$T \sim \text{διωνυμική } (n \,,\, p = P(+) = 1/2).$$

Τότε, σε επίπεδο σημαντικότητας περίπου ίσο με a, ο κανόνας απόφασης έχει την μορφή:

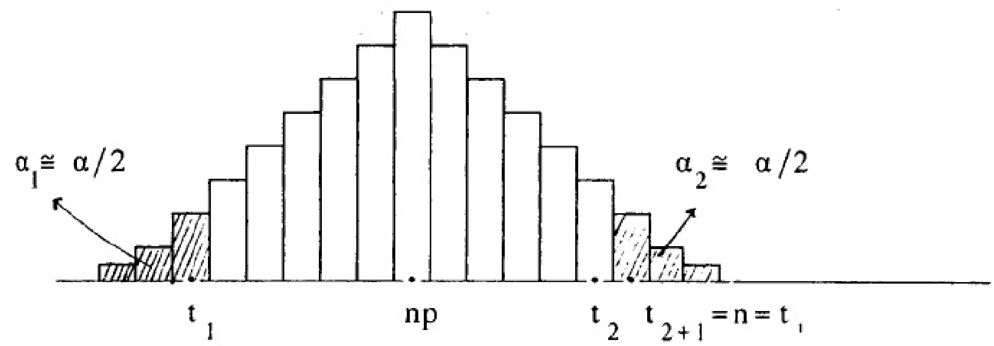
Α. Η H_0 απορρίπτεται αν $T \leq t_1$ ή $T > t_2$, όπου t_1, t_2 ορίζονται έτσι ώστε $P(T \leq t_1 | n, p = 1/2) \cong a/2$ και $P(T > t_2 | n, p = 1/2) \cong a/2$.

Β. Η H_0 απορρίπτεται αν $T > t$,όπου t ορίζεται έτσι ώστε $P(T > t | n, p = 1/2) \cong a$

Γ. Η H_0 απορρίπτεται αν $T \leq t$,όπου t ορίζεται έτσι ώστε $P(T \leq t | n, p = 1/2) \cong a$. Λόγω συμμετρίας ($p = 1/2$), ισχύει για την κρίσιμη περιοχή της περίπτωσης Α ότι

$$\begin{aligned} a/2 &\cong P(T \leq t_1 | n, p = 1/2) \\ &= P(T > t_2 | n, p = 1/2) \\ &= P(T \geq t_2 + 1 | n, p = 1/2) \\ &= P(T \geq n - t_1 | n, p = 1/2) \end{aligned}$$

Η αλήθεια της παραπάνω σχέσης επιβεβαιώνεται και από το σχήμα



Κατά συνέπεια, η κρίσιμη περιοχή μεγέθους κατά προσέγγιση ίσου με α του ελέγχου των υποθέσεων Α, Β και Γ έχει την μορφή:

Α. $T \le t$ και $T \ge n - t$, όπου η τιμή t προσδιορίζεται από τον πίνακα 1του παραρτήματος, έτσι ώστε $P(T \le t | n, p = 1/2) \cong a/2$.

Β. $T \ge n - t$, όπου t ορίζεται έτσι ώστε $P(T \le t | n, p = 1/2) \cong a$.

Γ. $T \le t$, όπου t ορίζεται έτσι ώστε $P(T \le t | n, p = 1/2) \cong a$.

Ε. Ξεκαλάκη, Μη παραμετρική στατιστική (2001)

2.6 Παραλλαγές του προσημικού ελέγχου

2.6.1 Ο Έλεγχος McNemar για την Σημαντικότητα της Αλλαγής μιας Κατάστασης*(McNemar Test for Significance of Changes)*

Τα δεδομένα αποτελούνται από παρατηρήσεις πάνω σε n΄ ανεξάρτητες δισδιάστατες τυχαίες μεταβλητές $(X_i, Y_i), i = 1, 2, ..., n'$. Η κλίμακα μέτρησης των X_i και Y_i είναι ονομαστική (nominal scale) με δύο κατηγορίες, τις οποίες μπορούμε να ονομάσουμε "0" και "1". Δηλαδή, οι δυνατές τιμές του ζεύγους (X_i, Y_i) είναι (0, 0), (0, 1), (1,0) και (1, 1). Το ερώτημα που συχνά απασχολεί σε σχέση με δεδομένα αυτής της μορφής αφορά το κατά πόσο μπορούμε να ανιχνεύσουμε μια διαφορά μεταξύ της πιθανότητας πραγματοποίησης του ενδεχομένου (0, 1) και της πιθανότητας πραγματοποίησης του ενδεχομένου (1, 0). Ερωτήματα αυτής της μορφής αναφύονται όταν η μεταβλητή X_i στο ζεύγος (X_i, Y_i) συμβολίζει την κατάσταση της i μονάδας ενός πληθυσμού πριν από κάποιο πείραμα, ενώ η μεταβλητή Y_i συμβολίζει την κατάστασή της μετά το πείραμα.

Τα ζεύγη των παρατηρήσεων είναι συνήθως ταξινομημένα στις κατηγορίες (0, 0), (0, 1), (1, 0) και (1, 1) ως εξής:

		Y: 0	Y: 1
X	0	(0,0)	(0,1)
X	1	(1,0)	(1,1)

Ο έλεγχος της σημαντικότητας μιας αλλαγής θα βασίζεται στην συχνότητα εμφάνισης των ζευγών (0, 1) και (1, 0). Επομένως, οι υποθέσεις που ενδέχεται να ενδιαφερόμαστε να ελέγξουμε έχουν τη μορφή:

$$H_0 : P(X_i = 0, Y_i = 1) = P(X_i = 1, Y_i = 0) \text{ για όλα τα } i.$$

$$H_1 : P(X_i = 0, Y_i = 1) \neq P(X_i = 1, Y_i = 0) \text{ για όλα τα } i.$$

Είναι προφανές ότι τα ζεύγη (0, 0) και (1, 1) (δηλαδή ζεύγη (X_i, Y_i) για τα οποία ισχύει $\{X_i = Y_i\}$) υπονοούν ότι δεν πραγματοποιήθηκε καμία αλλαγή και, επομένως, μπορούν να αγνοηθούν. Ας θεωρήσουμε, λοιπόν, τα απομένοντα n ζεύγη, όπου

$$n = (\text{αριθμός } (0, 1) \text{ ζευγών}) + (\text{αριθμός } (1, 0) \text{ ζευγών}).$$

Ας θεωρήσουμε επίσης το ζεύγος (0, 1) ως επιτυχία ($\{X_i < Y_i\}$"+" ζεύγος) και το ζεύγος (1, 0) ως αποτυχία ($\{X_i > Y_i\}$= "–" ζεύγος). Τότε, η στατιστική συνάρτηση

$$T = \text{αριθμός των επιτυχιών}$$

ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n και $p = 1/2$ ($T \sim$ διωνυμική (n, $p = 1/2$)). Είναι προφανές, επομένως, ότι οι υποθέσεις που θέλουμε να ελέγξουμε γράφονται με την μορφή:

$$\begin{aligned} &H_0 : P(+) = P(-) \\ &H_1 : P(+) \neq P(-) \end{aligned},$$

ή, ισοδύναμα

$$\begin{aligned} &H_0 : P(+) = 1/2 \\ &H_1 : P(+) \neq 1/2 \end{aligned},$$

οι οποίες μπορούν να ελεγχθούν σύμφωνα με την προηγούμενη ενότητα.

Ε. Ξεκαλάκη, Μη παραμετρική στατιστική (2001)

2.6.2 Ο Έλεγχος των Cox και Stuart για την Ύπαρξη Τάσης σε μια Ακολουθία Παρατηρήσεων*(Cox and Stuart Test for Trend)*

Μια άλλη παραλλαγή του προσημικού ελέγχου προτάθηκε από τους Cox και Stuart το 1955 για τον έλεγχο ύπαρξης *τάσης* σε μια ακολουθία παρατηρήσεων. Μια ακολουθία παρατηρήσεων λέγεται ότι έχει *τάση (trend)*, εάν οι τελευταίοι όροι της ακολουθίας τείνουν να έχουν μεγαλύτερες τιμές από τους πρώτους όρους της ακολουθίας (*αυξητική τάση*, *upward strend*) ή μικρότερες τιμές από τις τιμές των πρώτων όρων της ακολουθίας (*πτωτική τάση*, *downward strend*). Ο έλεγχος αυτός βασίζεται στην δημιουργία ζευγών παρατηρήσεων, των οποίων το πρώτο μέλος προέρχεται από τους πρώτους όρους της ακολουθίας και το δεύτερο μέρος από τους τελευταίους όρους της ακολουθίας. Εάν υπάρχει τάση, το ένα μέλος κάθε ζεύγους θα έχει την τάση να έχει υψηλότερη ή χαμηλότερη τιμή από το άλλο. Από το άλλο μέρος, αν δεν υπάρχει τάση και η ακολουθία των παρατηρήσεων στην πραγματικότητα αποτελείται από παρατηρήσεις πάνω σε ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, τότε οι τιμές ενός μέλους του ζεύγους δεν θα τείνουν να είναι μεγαλύτερες ή μικρότερες από τις τιμές του άλλου μέλους.

Τα δεδομένα αποτελούνται από n΄ παρατηρήσεις πάνω σε μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, ... X_{n'}$, των οποίων οι δείκτες υποδεικνύουν την σειρά με την οποία οι τυχαίες μεταβλητές παρατηρήθηκαν. Για τον έλεγχο της υπόθεσης ότι οι όροι της ακολουθίας παρουσιάζουν τάση, συνδυάζουμε τις τυχαίες μεταβλητές

σε ζεύγη της μορφής $(X_1, X_{1+c}), (X_2, X_{2+c}), ..., (X_{n'-c}, X_{n'})$, όπου $c = n'/2$ αν το n' είναι άρτιο , και $c = (n'+1)/2$ αν το n' είναι περιττό

(Δηλαδή, η μεσαία τυχαία μεταβλητή αγνοείται με αυτό τον τρόπο συνδυασμού των μεταβλητών, αν η τιμή του n' είναι περιττός αριθμός). Στην συνέχεια, σε κάθε ζεύγος (X_i, X_{i+c}) (i = 1, 2, ..., n΄–c) αντιστοιχίζεται ένα "+" εάν $X_i < X_{i+c}$, ένα "–" εάν $X_i > X_{i+c}$ ή ένα "0" αν $X_i = X_{i+c}$. Έστω n ο αριθμός των "+" και "–" ζευγών.

Οι υποθέσεις που συνήθως ενδιαφερόμαστε να ελέγξουμε έχουν τη μορφή:

Α. Αμφίπλευρος έλεγχος

$$H_0 : \Delta \varepsilon \nu\ \upsilon \pi \acute{\alpha} \rho \chi \varepsilon \iota\ \tau \acute{\alpha} \sigma \eta$$
$$H_1 : \Upsilon \pi \acute{\alpha} \rho \chi \varepsilon \iota\ \tau \acute{\alpha} \sigma \eta.$$

Β. Μονόπλευρος έλεγχος

$$H_0: \Delta\varepsilon\nu\ \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota \text{ αυξητική } \tau\acute{\alpha}\sigma\eta$$
$$H_1: \Upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota \text{ αυξητική} \tau\acute{\alpha}\sigma\eta$$

Γ. Μονόπλευρος έλεγχος

$$H_0: \Delta\varepsilon\nu\ \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ \pi\tau\omega\tau\iota\kappa\acute{\eta}\ \tau\acute{\alpha}\sigma\eta$$
$$H_1: \Upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ \pi\tau\omega\tau\iota\kappa\acute{\eta}\ \tau\acute{\alpha}\sigma\eta.$$

Η μορφή της μηδενικής υπόθεσης στην περίπτωση Α υπαινίσσεται ότι η σειρά εμφάνισης ή καταγραφής των παρατηρήσεων $X_1, X_2, ...X_n$, πάνω στην τυχαία μεταβλητή X είναι τυχαία, αφού, σύμφωνα με την H_0, η κατανομή των παρατηρήσεων X_i, i = 1, 2, .., n δεν συνδέεται με την χρονική στιγμή ή την σειρά κατά την οποία αυτές ελήφθησαν. Η εναλλακτική υπόθεση αντίθετα, υπαινίσσεται ότι η κατανομή των X_i, i = 1, 2, .., n συνδέεται με τον χρόνο με τρόπο ώστε, με την πάροδο του χρόνου οι τιμές της ακολουθίας παρατηρήσεων τείνουν να είναι μεγαλύτερες ή μικρότερες. Ο έλεγχος αυτός μπορεί, επομένως, να χρησιμοποιηθεί για την ανίχνευση οποιασδήποτε μορφής μη τυχαίου σχήματος στην σειρά πραγματοποίησης των παρατηρήσεων $X_1, X_2, ...X_{n'}$, όπως ημιτονοειδή κύμανση ή άλλης μορφής περιοδικότητα. Οι παρατηρήσεις ανακατατάσσονται ώστε οι μικρότερες (σύμφωνα με το προς έλεγχο σχήμα) να είναι πιο κοντά στην αρχή της ακολουθίας και οι μεγαλύτερες προς το τέλος.

Προφανώς, η ύπαρξη αυξητικής ή πτωτικής τάσης στην προκύπτουσα ακολουθία αποτελεί ένδειξη παρουσίας μη τυχαίου σχήματος στην αρχική ακολουθία παρατηρήσεων.

Είναι προφανές, ότι οι παραπάνω υποθέσεις μπορούν να γραφούν με την μορφή:

Α. Αμφίπλευρος έλεγχος:

$$H_0: P(+) = P(-)$$
$$H_1: P(+) \neq P(-)$$

Β. Μονόπλευρος έλεγχος:

$$H_0: P(+) \leq P(-)$$
$$H_1: P(+) > P(-)$$

Γ. Μονόπλευρος έλεγχος:

$$H_0 : P(+) \geq P(-)$$
$$H_1 : P(+) < P(-)$$

Η στατιστική συνάρτηση Τ, όπως και στον προσημικό έλεγχο, ορίζεται ως ο αριθμός των "+" ζευγών (ζευγών, δηλαδή, όπου $X_i < X_{i+c}$) και ο έλεγχος διεξάγεται όπως περιγράφτηκε νωρίτερα.

Ε. Ξεκαλάκη, Μη παραμετρική στατιστική (2001)

Κεφάλαιο 3

Μη παραμετρικοί Έλεγχοι Υποθέσεων για την εκθετική κατανομή

3.1 Εισαγωγή

Στις εφαρμοσμένες επιστήμες υπάρχουν πολλοί μη παραμετρικοί έλεγχοι υποθέσεων οι οποίοι βασίζονται στην εκθετική κατανομή. Σε αυτό το κεφάλαιο αναφέρουμε μερικούς από τους διαθέσιμους ελέγχους. Δεν φαίνεται να υπάρχει οποιαδήποτε συμφωνία ως προς το ποια διαδικασία είναι η καλύτερη, ή ακόμα και για το πώς καθορίζεται μια διαδικασία ως η καλύτερη.

3.2 Περιγραφή των Ελέγχων

Έστω $X_1,...,X_n$ ένα τυχαίο δείγμα από έναν πληθυσμό με συνάρτηση πυκνότητας $f_x(.)$. Η υπό εξέταση μηδενική υπόθεση είναι $H_0 : f_x(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ (δηλαδή, η τυχαία μεταβλητή X είναι εκθετικά κατανεμημένη με παράμετρο λ), όπου $x \geq 0$ και $\lambda > 0$. Για κάθε έναν από τους ελέγχους που θα συζητηθούν παρακάτω το λ, δεν θα χρειάζεται να προσδιορίζεται διότι οι έλεγχοι είναι scale in variant, δηλαδή δεν μεταβάλλονται με την παράμετρο κλίμακας της κατανομής. Οι κανονικοποιημένες διαφορές, οι οποίες χρησιμοποιούνται στους διάφορους ελέγχους ορίζονται ως εξής: $D_i = (N-i+1)(X_{(i)} - X_{(i-1)})$ όπου $i = 1,...,n$, $X_{(0)} = 0$, και $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq .... \leq X_{(n)}$ είναι το διατεταγμένο δείγμα. Στη συνέχεια θα περιγράψουμε κάποιους ελέγχους για την εκθετική κατανομή.

3.2.1. Gnedenko F-έλεγχος: Q(R)

Η διαδικασία αυτή οφείλεται στονGnedenko (1969) και συζητήθηκε στην συνέχεια από τουςLin και Mudholkar (1980) και τους Fercho και Ringer (1972). Τα N δεδομένα διατάσσονται και χωρίζονται σε δύο ομάδες τέτοιες ώστε η μία ομάδα να περιέχει τα πρώτα R δεδομένα και η άλλη ομάδα να περιέχει τα υπόλοιπα N-R.O στατιστικός έλεγχος είναι ο εξής:

$$Q(R) = \frac{\sum_{i=1}^{R} D_i / R}{\sum_{i=R+1}^{N} D_i / (N-R)}$$

Εάν η μηδενική υπόθεση για την εκθετικότητα είναι αληθής, τότε το Q(R) ακολουθεί μια κατανομή F με 2R και 2(N-R) βαθμούς ελευθερίας. Η υπόθεση απορρίπτεται τόσο για τις μικρές όσο και για τις μεγάλες τιμές τουQ(R). Οι Fercho και Ringer πρότειναν R=N/2 και ισχυρίστηκαν ότι ο έλεγχος είναι κατάλληλος και για την Weibull κατανομή ή εναλλακτικά για την Γάμμα κατανομή με μονότονες συναρτήσεις κίνδυνου.

3.2.2. Η τροποποίηση του Harris στον F-έλεγχο του Gnedenco: Q'(R)

Ο έλεγχος αυτός προτάθηκε από τον Harris (1976), και συζητήθηκε από τους Lin και Mudholkar (1980). Η ελεγχοσυνάρτηση του ελέγχου είναι:

$$Q'(R) = \frac{\left(\sum_{i=1}^{R} D_i + \sum_{i=N-R+1}^{N} D_i \right) \Big/ 2R}{\sum_{i=R+1}^{N-R} D_i / (N-2R)}$$

Το Q '(R) κατανέμεται σαν ένα F με 4R και 2(N-2R) βαθμούς ελευθερίας, με δεδομένη την μηδενική υπόθεση να είναι αληθής. Η υπόθεση απορρίπτεται τόσο για τις μικρές όσο και για τις μεγάλες τιμές του Q'(R). Η διαδικασία αυτή φέρεται να είναι ισχυρή έναντι της log-κανονικής κατανομής (η οποία μια συνάρτηση κινδύνου σχήματος U) και ασθενέστερη για μονότονες συναρτήσεις κινδύνου. Ο Harris συνιστά τη χρήση R=N/4.

3.2.3 O Bivariate F-έλεγχος των Lin και Mudholkar's: BF(R)

Ο έλεγχος αυτός, αποτελεί ουσιαστικά ένα συνδυασμό των παραπάνω ελέγχων, και προτάθηκε από τους Lin και Mudholkar (1980). Έστω:

$$F_L = \frac{\sum_{i=1}^{R} D_i / R}{\sum_{i=R+1}^{N-R} D_i / (N-2R)} \quad F_U = \frac{\sum_{i=N-R+1}^{N} D_i / R}{\sum_{i=R+1}^{N-R} D_i / (N-2R)}$$

Κάτω από την μηδενική υπόθεση, οι F_L και F_U από κοινού ακολουθούν μια διμεταβλητή κατανομή F. Η απόρριψη της εκθετικής θα συμβεί εάν είτε η F_L ή η F_U δεν ανήκουν μέσα σε κάποιο διάστημα(a,b).

Αυτό το διάστημα καθορίζεται με βάση το ακόλουθο θεώρημα των Hewett και Bulgren (1971): Για κάθε $0 \le a \le b < +\infty$, $P(a \le F_L \le b, a \le F_U \le b \mid H_0) \le [P(a \le F \le b)]^2$, όπου F είναι η τυχαία μεταβλητή του Snedecor με 2R και 2(n-2R) βαθμούς ελευθερίας. Η δεξιά πλευρά της ανισότητας τίθεται ίση με 1-α (όπου α είναι ο επιθυμητός τύπος σφάλματος I) και υποθέτοντας ίσες ουρές πιθανοτήτων για το F, τα α και β λαμβάνονται εύκολα.

Η διαδικασία αυτή φέρεται να είναι ισχυρή έναντι στις εναλλακτικές υποθέσεις με μη-μονότονες συναρτήσεις κινδύνων (π.χ. log-κανονική). Οι Lin και Mudholkar (1980) συστήνουν τη χρήση R=N/10. *(LinC. C. and Mudholkar, G. S. (1980). A test of exponentiality based on the bivariate F distribution . Technometrics 22, 79-82.)*

3.2.4 Λοξότητα και κύρτωση: KUSK

Η ελεγχοσυνάρτηση που προτείνεται εδώ είναι: $K = \left(\hat{\beta}_1 + 0.5\right) / \hat{\beta}_2$, όπου $\hat{\beta}_1 = \hat{\mu}_3^2 / \hat{\mu}_2^3$ (συντελεστής λοξότητας του δείγματος) και $\hat{\beta}_2 = \hat{\mu}_4 / \hat{\mu}_2^2$ (συντελεστής κύρτωσης του δείγματος). Όταν η μηδενική υπόθεση είναι αληθής, τότε το $\left(\beta_1 + 0.5\right) / \beta_2$ παίρνει την τιμή 0.5. Οι κατώτερες και ανώτερες κρίσιμες τιμές για το K λαμβάνονται χρησιμοποιώντας προσομοιώσεις. Για μικρά μεγέθη δείγματος, αυτός ο έλεγχος μπορεί είναι παραπλανητικός, καθώς τα $\hat{\beta}_1$ και $\hat{\beta}_2$ είναι ευαίσθητα σε ακραίες τιμές.

3.2.5 Ο έλεγχος των Hollander και Proschan με τίτλο: " New Better Than Used ": HP

Αυτή η διαδικασία, η οποία προτάθηκε από τους Hollander και Proschan (1972), εφαρμόζεται συνήθως σε μονόπλευρες εναλλακτικές υποθέσεις(η νέα υπόθεση είναι καλύτερη ή χειρότερη από την χρησιμοποιούμενη). Στην εργασία αυτή, δεδομένου ότι δεν έχει υποτεθεί ότι υπάρχει εκ των προτέρων γνώση για την εναλλακτική υπόθεση, ο έλεγχος είναι αμφίπλευρος. Ο στατιστικός έλεγχος είναι:

$$T = \sum_{i>j>k} G\left(X_{(i)}, X_{(j)} + X_{(k)}\right) \text{where}$$

$$G(a,b) = \begin{cases} 1 & if\ a > b \\ 0.5 & if\ a = b \\ 0 & if\ a < b \end{cases}$$

Παρακάτω ορίζουμε το T *που ακολουθεί την κανονική κατανομή προσεγγιστικά:

$$T^* = \frac{T - E(T \mid H_0)}{[VAR(T \mid H_0)]^{1/2}}$$

όπου $E(T \mid H_0) = N(N-1)(N-2)/8$ και

$$[VAR(T \mid H_0)] = (1.5(N)(N-1)(N-2)[(5/2592)(N-3)(N-4) + (N-3)(7/432) + (1/48)])$$

Όταν η μηδενική υπόθεση είναι αληθής και το Ν τείνει στο άπειρο, το Τ* έχει μια ασυμπτωτική κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση 1.

3.2.6Ο έλεγχος WE: WEI

Ο στατιστικός έλεγχος WE προτάθηκε από τους Hahn και Shapiro (1967) και συζητήθηκε από τον Lee(1980) και τους Lee, Locke, καιSpurrier(1980) και είναι ο εξής:

$$WEI = \sum_{i=1}^{N}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 \Big/ \left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)^2 = \left(N-1\right)S^2 / N^2 \bar{X}^2$$

όπου S^2 είναι η διακύμανση του δείγματος και $\bar{X}$ είναι ο δειγματικός μέσος. Ένας πίνακας με τις άνω και κάτω κρίσιμες τιμές μπορεί να βρεθεί στον Lee(1980).

3.2.7 ΟGini στατιστικός έλεγχος

Ο Gini έλεγχος, εισήχθηκε από τους Gail και Gastwirth (1978), και ορίζεται ως:

$$G = \left[\sum_{i=1}^{N-1} i\left(N-i\right)\left(X_{(i+1)} - X_{(i)}\right)\right] \Big/ \left[\left(N-i\right)\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = \sum_{i=1}^{N-1} iD_{i+1} \Big/ \left(N-i\right)\sum_{i=1}^{N} X_i$$

Παρατίθεται ένας πίνακας για την προσέγγιση των κάτω και άνω κρίσιμων τιμών για την ακόλουθη κανονική κατανομή προσεγγιστικά:

$$G^* = \frac{G - E(G \mid H_0)}{[VAR(G \mid H_0)]^{1/2}}$$

όπου $E(G \mid H_0) = 0.5$ και $VAR(G \mid H_0) = 1 \big/ \left[12\left(N-1\right)\right]$. Κάτω από την υπόθεση της εκθετικής κατανομής, το G^* ακολουθεί ασυμπτωτικά τυπική κανονική κατανομή, ακόμη και όταν πρόκειται για δείγματα τόσο μικρά όσο ίσα με 10. Έχει καλή ισχύ για εναλλακτικές υποθέσεις από τις κατανομές Weibull, Uniform (ομοιόμορφη) και Γάμμα. Ο στατιστικός έλεγχος Gini μπορεί να χρησιμοποιηθεί και να προσαρμοσθεί και σε ένα λογοκριμένο τυχαίο δείγμα σε κάποιο χρόνο $X_{(R)}$ όπου $R \leq N$.

3.2.8 Ο στατιστικός έλεγχος Lorenz: L

Οι Gail και Gastwirth (1978) βρήκαν ότι ο στατιστικός έλεγχος Lorenz αποτελούσε έναν ισχυρό έλεγχο για την εκθετική κατανομή. Η ελεγχοσυνάρτηση του ελέγχου είναι:

$$L_N(p) = \sum_{i=1}^{[Np]} x_{(i)} \Big/ N\bar{x}$$

όπου $0 < p < 1$ και $[Np]$ είναι το ακέραιο μέρος του Np. Οι συγγραφείς παρέχουν τις κάτω και άνω κρίσιμες τιμές και πρότειναν $p = 0.5$.

3.2.9 Η στατιστική συνάρτηση Pietra: P

Η P-στατιστική συνάρτηση συζητήθηκε από τους Gail και Gastwirth (1978), οι οποίοι παρείχαν τον ακόλουθο στατιστικό έλεγχο:

$$P = \sum_{i-1}^{N} | X_i - \bar{X} | \Big/ 2N\bar{X}\,.$$

Οι συγγραφείς παρέχουν κατώτερες και ανώτερες κρίσιμες τιμές.

3.2.10Epstein: EPS

Ο έλεγχος αυτός οφείλεται στον Epstein (1960) και συζητήθηκε από τους Fercho και Ringer (1972). Ο στατιστικός έλεγχος είναι:

$$EPS = 2N\left[Ln\left(\sum_{i=1}^{N} D_i/N\right) - N^{-1}\sum_{i=1}^{N} Ln\left(D_i\right)\right] \Big/ \left[1+\left(N+1\right)/6N\right],$$

όπου Ln είναι ο φυσικός λογάριθμος.

Με δεδομένη ότι η μηδενική υπόθεση είναι αληθής, μπορούμε να πούμε ότι ο EPS ακολουθεί την χ^2-κατανομή N-1 βαθμούς ελευθερίας. Η υπόθεση απορρίπτεται για μεγάλες τιμές του EPS. Η διαδικασία αυτή φέρεται να είναι ισχυρή έναντι εναλλακτικών υποθέσεων Γάμμα ή Weibull.

3.2.11Ο Έλεγχος Kolmogorov-Smirnov: KSL

Η παράμετρος λ εκτιμήθηκε από το αντίστροφο της δειγματικής μέσης τιμής και των κρίσιμων τιμών που παρέχονται από τους Lilliefors (1969).

3.2.12 Deshpande έλεγχος:J.b

Αυτός ο έλεγχος προτάθηκε από τον Deshpande (1983) για την εκθετική κατανομή έναντι εναλλακτικών κατανομών που παρουσιάζουν αυξανόμενο ρυθμό αποτυχίας-κινδύνου. Για να υπολογίσουμε την στατιστική ελεγχοσυνάρτηση κάνουμε τα εξής: Πολλαπλασιάζουμε τα $X_i, i = 1, 2, ...N$ με b (προτείνεται εδώ $b = 0.5$ ή 0,9) και έτσι προκύπτουν οι $X_1,...,X_N$ και

$bX_1,\ldots,bX_N$ οι οποίες διατάσσονται κατ 'αύξουσα σειρά. Έτσι προκύπτει η εξής ελεγχοσυνάρτηση:

$$S = \sum_{i=1}^{N} R_i - 0.5(N)(N+1) - N$$

όπου R_i είναι η τάξη του X_i . Κρίσιμες τιμές για τους μονόπλευρους ελέγχους που λαμβάνονται χρησιμοποιώντας αυτόν τον τύπο στατιστικής συνάρτησης (η οποία είναι τύπου Wilcox on) δίνονται από το συγγραφέα για $b = 0.5$ και 0.9, όταν $N \le 15$. Προτείνεται η τιμή $b = 0.5$ ως η καλύτερη, όταν η κατανομή στην εναλλακτική υπόθεση ανήκει στην ευρύτερη 'new better than used' κατηγορία ενώ η τιμή 0,9 είναι καλύτερη όταν η κατανομή στην εναλλακτική υπόθεση ανήκει στην κατανομές με αυξανόμενο ρυθμό αποτυχίας-κινδύνου. Εφόσον έχουμε υποθέσει ότι δεν υπάρχουν εκ των προτέρων πληροφορίες για την κατανομή της εναλλακτικής υπόθεσης, οι κρίσιμες τιμές για τον αμφίπλευρο έλεγχο, όταν N=20 προκύπτουν από προσομοιώσεις, και χρησιμοποιούνται σε αυτή τη μελέτη. Ο Deshpande δίνει επίσης την ακόλουθη κανονική προσέγγιση για την ελεγχοσυνάρτηση: $n^{1/2}\left[J.b - M(F)\right]$ η οποία ακολουθεί ασυμπτωτικά την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση 4c όπου κάτω από την υπόθεση της εκθετικής κατανομής, $M(F) = (b+1)^{-1}$, και

$$c = \frac{1}{4}\left[1 + \frac{b}{b+2} + \frac{1}{2b+1} + \frac{2(1-b)}{b+1} - \frac{2b}{b^2+b+1} - \frac{4}{(b+1)^2}\right]$$

3.2.13 O Hartley F Max έλεγχος: HARTF

–Ο έλεγχος αυτός, ο οποίος προτάθηκε από τον Hartley (1950) και συζητήθηκε από τους Fercho και Ringer(1972), προέκυψε από ένα έλεγχο για την ομοιογένεια των διακυμάνσεων. Η ελεγχοσυνάρτηση του ελέγχου είναι:

$$HARTF = Max\left(W_i\right)/Min\left(W_i\right),\ where \quad 1 \le i \le K$$

$$W_i = \sum_{j=(i-1)R+1}^{iR} D_j,$$

όπου K είναι ο αριθμός των ομάδων, και Rείναι το μέγεθος της κάθε ομάδας. Με δεδομένο ότι η μηδενική υπόθεση είναι αληθής, το HARTF έχει μια F Max κατανομή με 2R και K βαθμούς ελευθερίας. Η υπόθεση απορρίπτεται για μεγάλες τιμές τουHARTF. Όταν το N ισούται με 20, οι Fercho και Ringer συνέστησαν ρύθμιση του K να ισούται με 2 και του R με 10.

3.2.14. Cox και Oakes Score έλεγχος: Cox

(Το Score test χρησιμοποιείται για να παράγει στατιστικούς ελέγχους για τις παραμέτρους που έχουν εκτιμηθεί με την μέθοδο της Μέγιστης Πιθανοφάνειας):COX–

Αυτός ο έλεγχος, ο οποίος παρουσιάστηκε στους Cox και Oakes (1984), βασίζεται στην εξής στατιστική συνάρτηση:

$$U = d + \sum Ln(\mathrm{X}_i) - d\sum_{i=1}^{N} \mathrm{X}_i Ln(\mathrm{X}_i) \Big/ \sum_{i=1}^{N} \mathrm{X}_i$$

όπου το πρώτο άθροισμα είναι ως προς όλες τις μη λογοκριμένες παρατηρήσεις και d το πλήθος τους. Στην προκειμένη περίπτωση d=N. Με τη χρήση του πίνακα πληροφορίας, μπορεί να κατασκευαστεί, με βάση τη U, μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί ασυμπτωτικά την τυπική κανονική κατανομή. Η υπόθεση της εκθετικής απορρίπτεται και για μεγάλες αλλά και για μικρές τιμές της παραπάνω τυχαίας μεταβλητής. Ένα βασικό χαρακτηριστικό αυτής της διαδικασίας είναι η ικανότητα να χειρίζεται λογοκριμένες παρατηρήσεις. Οι συγγραφείς ισχυρίζονται ότι ο έλεγχος αυτός είναι πιο χρήσιμος έναντι των εναλλακτικών υποθέσεων που προσδιορίζουν κατανομές με μονότονες συναρτήσεις κινδύνων.

Όταν συζητάμε για κρίσιμες περιοχές σχετικά με την απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης στους παραπάνω ελέγχους, δεν θεωρήθηκε καμία γνώση της εναλλακτικής υπόθεσης. Ως εκ τούτου, για τους ελέγχους που θα μπορούσαν να είναι μονόπλευροι ή αμφίπλευροι, χρησιμοποιήθηκε η αμφίπλευρη επιλογή. Οι έλεγχοι με αυτή την επιλογή περιλαμβάνονται στους αριθμούς1, 2, 4-9 και 13.

Υπάρχουν πολλοί εκθετικοί έλεγχοι που δεν συζητούνται εδώ. Ορισμένοι από αυτούς περιλαμβάνουν τη χρήση των στατιστικών ελέγχων των Cramer - von Mises με λογοκριμένα δεδομένα (Pettit (1977) και Sirvanci και Levent (1982)), τροποποιήσεις του ελέγχου του Epsteinσε K ομάδες από R στοιχεία (Epstein (1960)), επεκτάσεις του WEI ελέγχου (Shapiro και Wilk (1972)), τροποποιήσεις της διαδικασίας Kolmogorov - Smirnov (από τους Margolin και Maurer (1976) και από τον Durbin (1975)), έναν έλεγχο ο οποίος βασίζεται στην εμπειρική χαρακτηριστική συνάρτηση (Epps και Pulley (1986)), και άλλους ελέγχους που προτάθηκαν από τον Jackson (1967), τον Moran (1951), τους Proschan και Pyke (1967), τους Bickel και Doksum (1969), τους Chen, Hollander, και Langberg (1983), τον Koul (1978), τον Kimber (1985), και τους Spinelli και Stephens (1987). Τα έργα των Spurrier (1984), των

Leem Locke και Spurrier (1980) και του Stephens (1986) παρέχουν επίσης σχόλια και αναφορές για άλλους εκθετικούς ελέγχουςπου δεν αναφέρονται εδώ.

Steven Ascher (1990)

3.3 Έλεγχοι καλής προσαρμογής για οικογένειες κατανομών

Ο έλεγχος καλής προσαρμογής του Kolmogorov είναι ένας "καλός" έλεγχος για τον έλεγχο της υπόθεσης ότι ένα τυχαίο δείγμα προέρχεται από μία συγκεκριμένη κατανομή. Ο έλεγχος Kolmogorov καλύπτει μόνο τις περιπτώσεις στις οποίες η υποτεθείσα συνάρτηση κατανομής είναι εξ ολοκλήρου ορισμένη, δηλαδή, όταν δεν υπάρχουν άγνωστες παράμετροι που πρέπει να εκτιμηθούν με βάση το δείγμα. Διαφορετικά, ο έλεγχος γίνεται συντηρητικός.

Αντίθετα, ο έλεγχος καλής προσαρμογής χ^2 είναι ευέλικτος και επιτρέπει την εκτίμηση ορισμένων παραμέτρων με βάση τα δεδομένα (Ένας βαθμός ελευθερίας απλώς αφαιρείται για κάθε παράμετρο που εκτιμάται). Όμως, ο έλεγχος χ^2 απαιτεί την ομαδοποίηση των δεδομένων και μια τέτοια ομαδοποίηση είναι συχνά αυθαίρετη.

Επιπλέον, η κατανομή της στατιστικής συνάρτησης είναι μόνο κατά προσέγγιση γνωστή και, μερικές φορές, η ισχύς του ελέγχου δεν είναι πολύ καλή. Για τους λόγους αυτούς, έχουν μελετηθεί άλλοι έλεγχοι καλής προσαρμογής, κυρίως για κατανομές που συχνά χρησιμοποιούνται σε σχέση με πρακτικές εφαρμογές.

Στην βιβλιογραφία, έχουν μελετηθεί αρκετές παραλλαγές του ελέγχου Kolmogorov, οι οποίες επιτρέπουν την χρήση του σε περιπτώσεις όπου παράμετροι εκτιμώνται από τα δεδομένα. Στην πραγματικότητα, η στατιστική συνάρτηση παραμένει μεν η ίδια, αλλά η κατανομή της είναι διαφορετική. Για τον προσδιορισμό, επομένως ποσοστιαίων σημείων και κρίσιμων τιμών, απαιτούνται διαφορετικοί πίνακες. Οι πίνακες αυτοί δεν είναι οι ίδιοι για όλες τις κατανομές, αλλά αλλάζουν ανάλογα με τη μορφή της κατανομής κάτω από την μηδενική.

Μία τέτοια παραλλαγή του ελέγχου Kolmogorov είναι αυτή για τον έλεγχο της σύνθετης υπόθεσης της κανονικότητας, δηλαδή, της υπόθεσης ότι ο πληθυσμός ανήκει στην οικογένεια των κανονικών κατανομών, χωρίς να προσδιορίζεται η μέση τιμή ή η διασπορά της κανονικής κατανομής. Ο έλεγχος αυτός μελετήθηκε για πρώτη φορά από τον Lilliefors το 1967. Για το λόγο αυτό ο έλεγχος αυτός είναι γνωστός ως *έλεγχος κανονικότητας του Lilliefors*.

3.3.1 Ο Έλεγχος Κανονικότητας του Lillefors

Έστω $X_1, X_2, ..., X_n$ ένα δείγμα μεγέθους n από κάποιο πληθυσμό με άγνωστη συνάρτηση κατανομής $F(x)$. Να ελεγχθεί η υπόθεση

H_0 : Το τυχαίο δείγμα προέρχεται από την κανονική κατανομή με άγνωστη μέση τιμή μ και άγνωστη διασπορά σ^2.

έναντι της εναλλακτικής

H_1 : Το τυχαίο δείγμα προέρχεται από μία μη κανονική κατανομή.

Οι υποθέσεις αυτές μπορούν να ελεγχθούν με την χρήση της συνήθους αμφίπλευρης ελεγχοσυνάρτησης του Kolmogorov, η οποία ορίζεται ως η μέγιστη κατακόρυφη απόσταση μεταξύ της εμπειρικής συνάρτησης κατανομής των X_i και της συνάρτησης κατανομής της κανονικής κατανομής με μέση τιμή ίση με τον μέσο του δείγματος και τυπική απόκλιση ίση με την αμερόληπτη εκτίμησή της μέσω του δείγματος. Με άλλα λόγια, ως στατιστική συνάρτηση ελέγχου, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η συνάρτηση T του αμφίπλευρου ελέγχου Kolmogorov για τον έλεγχο της μηδενικής υπόθεσης ότι η άγνωστη κατανομή του πληθυσμού είναι η κανονική με μέση τιμή ίση με $\bar{X}$ και τυπική απόκλιση ίση με s^*, όπου $\bar{X}$ είναι η παρατηρηθείσα τιμή του μέσου του δείγματος, όπως αυτός ορίζεται από την σχέση

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i / n$$

και s^* είναι η τιμή της συνάρτησης

$$S^* = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X} \right)^2}$$

που χρησιμοποιείται ως αμερόληπτη εκτιμήτρια της σ.

Ισοδύναμα, μπορούμε να υπολογίσουμε τις *τυποποιημένες* τιμές $Z_1, Z_2, ..., Z_n$ του δείγματος $X_1, X_2, ..., X_n$ που ορίζονται από την σχέση

$$Z_i = \frac{X_i - \bar{X}}{S^*}, \; i = 1, 2, ..., n.$$

Τότε, οι αρχικές υποθέσεις μας είναι ισοδύναμες με τις υποθέσεις

H_0^* : Το τυχαίο δείγμα $Z_1, Z_2, ..., Z_n$ προέρχεται από την τυποποιημένη κανονική κατανομή.

H_1^* : Το τυχαίο δείγμα $Z_1, Z_2, ..., Z_n$ δεν προέρχεται από την τυποποιημένη κανονική κατανομή.

Η κατάλληλη στατιστική συνάρτηση ελέγχου, στην περίπτωση αυτή, θα είναι η μέγιστη κατακόρυφη απόκλιση της εμπειρικής συνάρτησης κατανομής $S^*(z)$ του τυποποιημένου δείγματος από την συνάρτηση κατανομής $F_0^*(z)$ της τυποποιημένης κανονικής κατανομής. Δηλαδή, η ελεγχοσυνάρτηση του Lilliefors ορίζεται από τη σχέση

$$T_1 = \sup_z \left| F_0^*(z) - S^*(z) \right|$$

Όπως και στην περίπτωση της ελεγχοσυνάρτησης T του Kolmogorov, η αναλυτική μορφή της συνάρτησης κατανομής της στατιστικής συνάρτησης T_1 του Lilliefors είναι δύσκολο να προσδιορισθεί. Έτσι, ο Lilliefors μελέτησε και πινακοποίησε την ασυμπτωτική κατανομή της στατιστικής συνάρτησης T_1. Ο πίνακας 2 του παραρτήματος περιέχει τα κρίσιμα σημεία της κατανομής αυτής.

Προφανώς και στην περίπτωση αυτού του ελέγχου, είναι οι μεγάλες τιμές της στατιστικής συνάρτησης T, οι οποίες συνηγορούν υπέρ της απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης, αφού τέτοιες τιμές αντανακλούν χαμηλό βαθμό εγγύτητας της εμπειρικής συνάρτησης κατανομής του τυποποιημένου δείγματος προς την συνάρτηση κατανομής της τυποποιημένης κανονικής κατανομής.

Παράδειγμα 3.3.1: Από τις ταφόπετρες του νεκροταφείου του Badenscallie του WesterRoss της Σκωτίας, έγινε μία καταγραφή των ηλικιών θανάτου των αρρένων, οι οποίοι ανήκαν σε τέσσερις εξέχουσες Σκωτικές οικογένειες (clans) της περιοχής αυτής. Από το σύνολο των 117 ηλικιών θανάτου που καταγράφηκαν, επελέγη ένα τυχαίο δείγμα 30 ηλικιών. Οι ηλικίες του δείγματος αυτού, διατεταγμένες κατά αύξουσα σειρά μεγέθους, ήταν οι εξής:

11	13	14	22	29	30	41	41	52	55	56	59	65	65	66
74	74	75	77	81	82	82	82	82	83	85	85	87	87	88

Είναι εύλογο να υποθέσουμε ότι οι ηλικίες θανάτου κατανέμονται κανονικά;

Λύση: Από τα δεδομένα, υπολογίζουμε την τιμή του δειγματικού μέσου και της συνήθους αμερόληπτης εκτιμήτριας της τυπικής απόκλισης του πληθυσμού. Συγκεκριμένα, βρίσκουμε ότι $\overline{x} = 61.43$ και $s^* = 25.04$. Τότε, τυποποιώντας τις τιμές του δείγματος, οδηγούμεθα στον πίνακα 3.3.1.

Πίνακας 3.3.1

Έλεγχος κανονικότητας Lilliefors για τις ηλικίες θανάτου στο Badenscallie

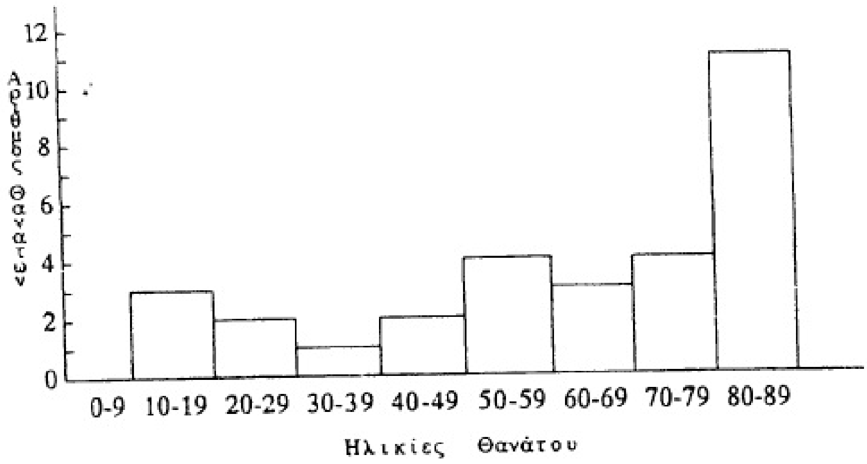
x	z	$F^*(z)$	$S^*(z)$	$F^*(z_i)-S^*(z_i)$	$F^*(z_i)-S^*(z_{i-1})$
11	-2.014	0.022	0.033	-0.011	0.022
13	-1.934	0.026	0.064	-0.044	-0.007
14	–1.894	0.029	0.100	–0.071	–0.038
22	–1.575	0.058	0.133	–0.075	–0.042
29	–1.295	0.098	0.167	–0.069	–0.035
30	–1.255	0.105	0.200	–0.095	–0.062
$41^{(2)}$	–0.816	0.207	0.267	–0.060	0.007
52	-0.377	0.353	0.300	0.053	0.086
55	-0.257	0.399	0.333	0.066	0.099
56	-0.217	0.414	0.367	0.047	0.081
59	-0.097	0.461	0.400	0.061	0.094
$65^{(2)}$	0.142	0.556	0.467	0.089	0.156
66	0.183	0.572	0.500	0.072	0.105
$74^{(2)}$	0.502	0.692	0.567	0.125	0.192
75	0.542	0.706	0.600	0.106	0.139
77	0.622	0.733	0.633	0.100	0.133
81	0.781	0.782	0.667	0.115	0.149
$82^{(4)}$	0.821	0.794	0.800	-0.006	0.127
83	0.861	0.805	0.833	-0.028	-0.05
$85^{(2)}$	0.942	0.827	0.900	-0.073	-0.006
$87^{(2)}$	1.021	0.846	0.967	-0.121	-0.054
88	1.061	0.856	1.000	-0.144	-0.111

Σε παρένθεση δεξιά από την τιμή των παρατηρήσεων που εμφανίζονται στο δείγμα περισσότερες από μία φορά, σημειώνεται η συχνότητά τους. Η τρίτη στήλη του πίνακα αυτού περιέχει τις τιμές της συνάρτησης κατανομής της τυποποιημένης κανονικής κατανομής στα σημεία z, τα οποία αντιστοιχούν στις διάφορες ηλικίες θανάτου και περιέχονται στη δεύτερη στήλη. Η τέταρτη στήλη περιέχει τις αντίστοιχες τιμές της εμπειρικής συνάρτησης κατανομής στα σημεία που αντιστοιχούν στις διάφορες ηλικίες θανάτου. Από την έκτη στήλη, είναι προφανές ότι η μέγιστη διαφορά έχει μέγεθος 0.192 και παρατηρείται όταν $x = 74$ (ή, ισοδύναμα, όταν $z = 0.502$). Από τον πίνακα 2 του παραρτήματος, προκύπτει ότι το παρατηρούμενο επίπεδο σημαντικότητας είναι

$$\begin{aligned}\hat{a} &= P\left(T_1 \geq 0.192 \mid H_0\right) = 1 - P\left(T_1 < 0.192 \mid H_0\right) \\ &< 1 - P\left(T_1 < 0.187\right) = 1 - 0.99 = 0.01\end{aligned}$$

Είναι, δηλαδή, η τιμή του $\hat{a}$ μικρότερη από 1%. Επομένως, η μέγιστη κατακόρυφη απόσταση μεταξύ της εμπειρικής συνάρτησης κατανομής του τυποποιημένου δείγματος και της συνάρτησης κατανομής της τυποποιημένης κανονικής είναι στατιστικά σημαντική σε επίπεδο σημαντικότητας 1% ή μεγαλύτερο. Κατά συνέπεια, η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται σε όλα τα συνήθη επίπεδα σημαντικότητας.

Παρατήρηση: Το αποτέλεσμα του ελέγχου δεν είναι διαφορετικό από ότι θα περίμενε κανείς κοιτάζοντας λίγο πιο προσεκτικά τα δεδομένα. Πράγματι, μία ματιά στα δεδομένα δείχνει ότι μερικοί από τους άρρενες πέθαναν πολύ νέοι και ότι η κατανομή είναι κάπως στρεβλή (ασύμμετρη). Ένας μεγάλος αριθμός θανάτων, από την άλλη μεριά, συνέβη μετά την 3^{η}ηλικία των 80. Το σχήμα 3.3.1 απεικονίζει τα δεδομένα του δείγματος σε μορφή ιστογράμματος με μήκος κλάσης 10.



Σχήμα 3.3.1

Ιστόγραμμα ηλικιών θανάτου στο Badenscallie

Παρατήρηση: Συνήθως, η τιμή της ελεγχοσυνάρτησης του Lilliefors προσδιορίζεται γραφικά θεωρώντας τις αποστάσεις των γραφημάτων της εμπειρικής συνάρτησης κατανομής και της μηδενικής συνάρτησης κατανομής στα σημεία $z_i = \left(x_i - \overline{x}\right)/s^*, i = 1,2,...,n$. Προσδιορίζεται, δηλαδή, ως η μέγιστη απόσταση μεταξύ των σημείων $\left(z_i, F_0^*\left(z_i\right)\right) \kappa\alpha\iota \left(z_i, S^*\left(z_i\right)\right)$.

Παράδειγμα 3.3.2: Πενήντα διψήφιοι αριθμοί επελέγησαν τυχαία από ένα τηλεφωνικό κατάλογο. Οι αριθμοί, κατά αύξουσα σειρά μεγέθους, είναι οι εξής:

23	23	24	27	29	31	32	33	33	35
36	37	40	42	43	43	44	45	48	48
54	54	56	57	57	58	58	58	58	59
61	61	62	63	64	65	66	68	68	70
73	73	74	75	77	81	87	89	93	97

Να ελεγχθεί η υπόθεση ότι οι αριθμοί αυτοί θα μπορούσαν να αποτελούν παρατηρήσεις πάνω σε μια κανονική τυχαία μεταβλητή.

Λύση: Παρά το γεγονός ότι οι παρατηρήσεις προέρχονται από ένα σαφώς διακριτό δειγματοληπτικό πλαίσιο, έχει έννοια να ελεγχθεί η υπόθεση της κανονικότητας. Αυτό, γιατί η μη απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης δεν συνεπάγεται ότι ο πληθυσμός είναι κανονικός και, επομένως, συνεχής, αλλά ότι η διαφορά μεταξύ της κανονικής και της πραγματικής συνάρτησης κατανομής είναι αρκετά μικρή (ασήμαντη), ώστε να μην είναι δυνατή η ανίχνευσή της.

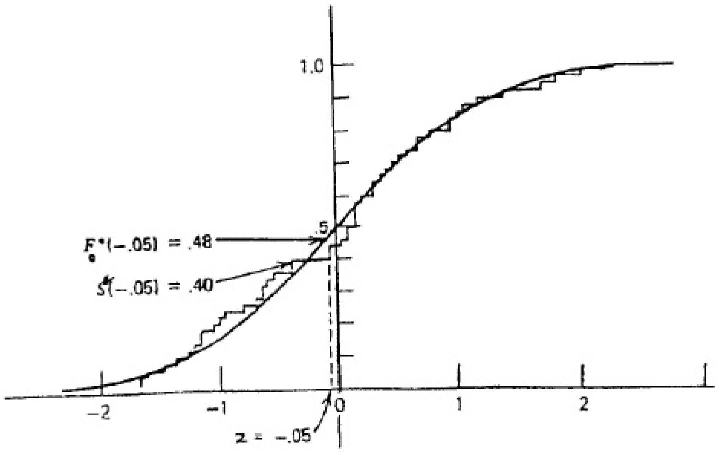
Τα στοιχεία $X_i, i = 1, 2, ..., 50$ του παραπάνω πίνακα τυποποιούνται αφαιρώντας από κάθε ένα από αυτά τον μέσο τους $\overline{x} = 55.04$ και διαιρώντας το αποτέλεσμα με $s^* = 19.00$.

X_i	Z_i	X_i	Z_i	X_i	Z_i	X_i	Z_i	X_i	Z_i
23	-1.69	36	-1.00	54	-0.05	61	0.31	73	0.95
23	-1.69	37	-0.95	54	-0.05	61	0.31	73	0.95
24	-1.63	40	-0.79	56	0.05	62	0.37	74	1.00
27	-1.48	42	-0.69	57	0.10	63	042	75	1.05
29	-1.37	43	-0.63	57	0.10	64	0.47	77	1.16
31	-1.27	43	-0.63	58	0.16	65	0.52	81	1.37
32	-1.21	44	-0.58	58	0.16	66	0.58	87	1.68
33	-1.16	45	-0.53	58	0.16	68	0.68	89	1.79
33	-1.16	48	-0.37	58	0.16	68	0.68	93	2.00
35	-1.05	48	-0.37	59	0.21	70	0.79	97	2.21

Τότε, η τιμή της ελεγχοσυνάρτησης του Lilliefors $T_1 = \sup_z \left| F_0^*(z) - S^*(z) \right|$ μπορεί να προσδιορισθεί από το σχήμα 3.3.2.

Από το σχήμα αυτό, φαίνεται ότι η μέγιστη απόσταση μεταξύ $F_0^*(z)$ και $S^*(z)$ επιτυγχάνεται στα αριστερά του σημείου $z = -0.05$, οπότε $S^*(-0.05) = 0.40$ και $F_0^*(-0.05) = 0.48$. Τότε, η τιμή της T_1 είναι $\tau_1 = 0.08$.

Σύμφωνα με τον έλεγχο Lilliefors, η μηδενική υπόθεση θα απορριφθεί σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0.05$ αν η τιμή της T_1 υπερβαίνει το 0.95-ποσοστιαίο σημείο της κατανομής της.



Σχήμα 3.3.2

Γραφήματα των συναρτήσεων $F_0^*(z)$ και $S^*(z)$ που δείχνουν την μέγιστη απόκλισή τους

Από τον πίνακα 2 του παραρτήματος όμως, το σημείο αυτό είναι ίσο με

$$w_{0.95} = \frac{0.886}{\sqrt{50}} = 0.125$$

Επομένως, η μηδενική υπόθεση δεν απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας 0.05. (Στην πραγματικότητα, $\hat{a} > 0.20$).

Για λόγους σύγκρισης, αξίζει να ελεγχθεί η ίδια υπόθεση με τον έλεγχο χ^2 : Έτσι, για παράδειγμα, θεωρώντας την ομαδοποίηση των δεδομένων στις κατηγορίες $"x < 20","20 \le x < 40","40 \le x < 60","60 \le x < 80","80 \le x < 100" \kappa\alpha\iota "x > 100"$ προκύπτει ο εξής πίνακας:

Κατηγορία i	< 20	$20 \le x < 40$	$40 \le x < 60$	$60 \le x < 80$	$80 \le x < 100$	$x > 100$
Παρατηρούμενη Συχνότητα O_i	0	12	18	15	5	0
Αναμενόμενη Συχνότητα E_i	1,5	9,0	19,5	15,5	4	0,5

Εδώ, $E_i = 50\ P$ (η μεταβλητή $\dfrac{X-\overline{x}}{S^*}$ ανήκει στην κατηγορία i), όπου, από τα δεδομένα, $\overline{x} = 55.04$ και $s^* = 19.00$.

Θεωρώντας την ομαδοποίηση που φαίνεται στον παραπάνω πίνακα, προκύπτει ότι η τιμή της στατιστικής συνάρτησης

$$T = \sum_{i=1}^{4} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

είναι ίση με 0.395. Η τιμή αυτή δεν υπερβαίνει το 0.95-ποσοστιαίο σημείο της κατανομής χ^2 με 4–2–1=1 βαθμό ελευθερίας που είναι ίσο με $\chi^2 = 3.841$, όπως προκύπτει από τον πίνακα 4 του παραρτήματος.

Επομένως, η μηδενική υπόθεση δεν απορρίπτεται και με αυτόν τον έλεγχο σε επίπεδο σημαντικότητας 0.05. Το παρατηρούμενο επίπεδο σημαντικότητας $\hat{a}$ προκύπτει ότι είναι μεγαλύτερο του 0.25.

3.3.2 Ο Έλεγχος Lilliefors για την Εκθετική Κατανομή

Μια δεύτερη παραλλαγή του ελέγχου Kolmogorov εξετάσθηκε από τον Lilliefors το 1969. Ο έλεγχος αυτός χρησιμοποιείται για τον έλεγχο της υπόθεσης ότι ο γεννήτορας πληθυσμός είναι εκθετικός με συνάρτηση κατανομής

$$F(x) = 1 - e^{-x/\mu}, x > 0$$

όπου μ είναι μία άγνωστη παράμετρος, η οποία πρέπει να εκτιμηθεί με βάση τα δεδομένα.

Όπως είναι γνωστό, η εκθετική κατανομή χρησιμοποιείται για την περιγραφή της κατανομής του χρονικού διαστήματος μεταξύ δύο διαδοχικών γεγονότων, όταν αυτά συμβαίνουν τυχαία μέσα στον χρόνο. Επομένως, ένας έλεγχος για την εκθετική κατανομή, όπως αυτός που θα περιγράψουμε, χρησιμοποιείται στην πραγματικότητα κυρίως ως έλεγχος τυχαιότητας.

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ένα τυχαίο δείγμα n παρατηρήσεων πάνω στην τυχαία μεταβλητή X της οποίας η συνάρτηση κατανομής είναι

$$F_X(x), x \in \mathbb{R}.$$

Οι υποθέσεις που ενδιαφερόμαστε να ελέγξουμε είναι

$$H_0 : F_X\left(x\right) = \begin{cases} 1 - e^{-x/\mu} \; x > 0, \; \mu & \acute{\alpha}\gamma\nu\omega\sigma\tau\eta \quad \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\mu\varepsilon\tau\rho o\varsigma \\ 0 & \delta\iota\alpha\varphi o\rho\varepsilon\tau\iota\kappa\acute{\alpha} \end{cases}$$

H_1 : η κατανομή της X δεν είναι εκθετική.

Από τη μορφή της μηδενικής κατανομής, είναι προφανές ότι ο κατάλληλος μετασχηματισμός των δεδομένων, ο οποίος θα οδηγήσει στην παραλλαγή του ελέγχου Kolmogorov που απαιτείται στην προκειμένη περίπτωση, είναι ο

$$Z_i = X_i \big/ \bar{X}, \; i = 1,2,\ldots,n,$$

όπου $\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i \big/ n$.Έτσι, η στατιστική συνάρτηση που θα χρησιμοποιηθεί, αντί να εκφράζει ένα μέτρο της απόστασης μεταξύ της εμπειρικής συνάρτησης κατανομής $S(x)$ από την συνάρτηση κατανομής κάτω από την μηδενική υπόθεση $F_0\left(x\right) = 1 - e^{-x/\mu}$, $x > 0$ θα εκφράζει την απόσταση μεταξύ της εμπειρικής συνάρτησης κατανομής $S^*(z)$ των μετασχηματισμένων δεδομένων $Z_1, Z_2, \ldots Z_n$ από την συνάρτηση κατανομής

$$F^*\left(z\right) = 1 - e^{-z}, \; z > 0 \; .$$

Δηλαδή, ως στατιστική συνάρτηση, στην προκειμένη περίπτωση, χρησιμοποιείται η μέγιστη κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των συναρτήσεων $S^*(z)$ και $F^*(z)$:

$$T_2 = \sup_z \left| F^*(z) - S^*(z) \right|$$

Είναι προφανές ότι μεγάλες τιμές της στατιστικής συνάρτησης T_2 αποτελούν ένδειξη ότι η μηδενική υπόθεση δεν αληθεύει.

Επομένως, ο κανόνας απόφασης έχει την μορφή: Απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση H_0 σε επίπεδο σημαντικότητας α αν η τιμή της στατιστικής συνάρτησης T_2 υπερβαίνει το $1-\alpha$ -ποσοστιαίο σημείο της κατανομής της, όπως αυτό δίνεται στον πίνακα 3 του παραρτήματος.

(Ο Lilliefors μελέτησε την κατανομή της στατιστικής συνάρτησης T_2 και προσδιόρισε κατά προσέγγιση τα ποσοστιαία σημεία της, αλλά η πραγματική κατανομή της συνάρτησης αυτής μελετήθηκε αργότερα από τον Durbin το 1975. Ο πίνακας 3 του παραρτήματος αναφέρεται στην πραγματική κατανομή της στατιστικής συνάρτησης T_2).

Παράδειγμα 3.3.3: Πιστεύεται ότι ο αριθμός των υπεραστικών τηλεφωνημάτων μέσω κάποιου τηλεφωνικού κέντρου είναι μία τυχαία διαδικασία με χρόνους μεταξύ των διαδοχικών τηλεφωνημάτων οι οποίοι ακολουθούν την εκθετική κατανομή. Ας υποθέσουμε ότι τα 10 πρώτα τηλεφωνήματα μετά την 1:00 το μεσημέρι κάποιας Δευτέρας έγιναν κατά τις εξής ώρες:

1:06 1:08 1:16 1:22 1:23 1:34 1:44 1:47 1:51 1:57.

Να ελεγχθεί η υπόθεση ότι ο χρόνος μεταξύ διαδοχικών τηλεφωνημάτων ακολουθεί την εκθετική κατανομή έναντι της εναλλακτικής ότι η κατανομή του χρόνου αυτού δεν είναι η εκθετική.

Λύση: Οι διαδοχικοί χρόνοι μεταξύ τηλεφωνημάτων, μετρώντας ως πρώτο διάστημα το διάστημα μεταξύ 1:00 και 1:06, είναι (σε πρώτα λεπτά) 6, 2, 8, 6, 1, 11, 10, 3, 4, 6, με μέσο $\bar{x} = 5.7$. Οι προκύπτουσες τιμές των Z_i , $S^*(z_i)$ και $F^*(z_i) = 1 - e^{-z_i}$, $= 1 - e^{-z_i}$, $i = 1, 2, ..., n$, καθώς και των διαφορών μεταξύ $S^*(z)$ και $F^*(z)$ και στις δύο πλευρές καθενός από τα άλματα της $S^*(z)$ δίνονται στον πίνακα που ακολουθεί. (Σημειώνεται ότι οι τιμές των X_i , $i = 1, 2, ..., n$ έχουν διαταχθεί κατά αύξουσα σειρά μεγέθους).

i	x_i	$Z_i = X_i / \bar{X}$	$F^*(z_i) = 1 - e^{-z_i}$	$S^*(z_i)$	$F^*(z_i) - S^*(z_i)$	$F^*(z_i) - S^*(z_{i-1})$
1	1	0,1754	0,1609	0,1	0,0609	0,1609
2	2	0,3508	0,2959	0,2	0,0959	0,1959
3	3	0,5263	0,4092	0,3	0,1092	0,2092
4	4	0,7018	0,5043	0,4	0,1043	0,2043
5	6	1,0526	0,6510	0,7	-0,0490	0,2510
6	8	1,4035	0,7543	0,8	-0,0457	0,0543
7	10	1,7544	0,8270	0,9	-0,0730	0,0270
8	11	1,9298	0,8548	1,0	-0,1452	-0,0452

Από τις δύο τελευταίες στήλες του πίνακα, είναι προφανές ότι η μέγιστη απόλυτη απόκλιση μεταξύ $S^*(z)$ και $F^*(z)$ είναι ίση με 0.2510. Η μηδενική υπόθεση ότι η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X είναι εκθετική πρέπει να απορριφθεί σε επίπεδο σημαντικότητας $a = 0.05$ μόνο εάν η τιμή της στατιστικής συνάρτησης T_2 υπερβαίνει την τιμή 0.3244 (η οποία προκύπτει από τον πίνακα 3 του παραρτήματος για $n = 10$ και $1 - a = 0.95$). Επειδή, όμως, $T_2 = 0.2510$, η μηδενική υπόθεση δεν απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας 5%. Το κρίσιμο επίπεδο προκύπτει από τον σχετικό πίνακα, με την χρήση γραμμικής παρεμβολής, ότι είναι ίσο με $\hat{a} = 0.25$. Επομένως, η υπόθεση ότι ο χρόνος μεταξύ διαδοχικών τηλεφωνημάτων ακολουθεί την εκθετική κατανομή είναι μία *εύλογη* υπόθεση.

Ο έλεγχος αυτός, στην πράξη, γίνεται κυρίως με γραφικό τρόπο, χρησιμοποιώντας την γραφική παράσταση της εμπειρικής συνάρτησης κατανομής $S^*(z)$ και της συνάρτησης $F^*(z)$. Οι γραφικές αυτές παραστάσεις γίνονται με βάση τιμές μόνο στα n σημεία των μετασχηματισμένων δεδομένων $Z_1, Z_2, ... Z_n$.

3.3.3 Ο Έλεγχος των Shapiro-Wilk για την Κανονική Κατανομή

Ένας άλλος πολύ γνωστός έλεγχος καλής προσαρμογής για την κανονική κατανομή, ο οποίος μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην θέση του ελέγχου Lilliefors, είναι ο έλεγχος κανονικότητας των Shapiro και Wilk. Εμπειρικές μελέτες έχουν δείξει ότι αυτός ο έλεγχος έχει υψηλή ισχύ σε πολλές περιπτώσεις σε σύγκριση με πολλούς άλλους ελέγχους της σύνθετης υπόθεσης της κανονικότητας, περιλαμβανομένου και του ελέγχου του Lilliefors και του ελέγχου χ^2. Θα πρέπει να τονισθεί, βέβαια, ότι ο έλεγχος αυτός δεν είναι τύπου Kolmogorov. Παρ' όλα αυτά, περιλαμβάνεται στο κεφάλαιο αυτό λόγω της μεγάλης του χρησιμότητας.

Έστω $X_1, X_2, ... X_n$ δείγμα n παρατηρήσεων πάνω στην τυχαία μεταβλητή X, της οποίας η άγνωστη συνάρτηση κατανομής είναι

$$F_X(x), x \in \mathbb{R}.$$

Οι προς έλεγχο υποθέσεις είναι οι εξής:

H_0: η $F_X(x)$ είναι η συνάρτηση κατανομής της κανονικής κατανομής με άγνωστη μέση τιμή και άγνωστη διασπορά

H_1: η $F_X(x)$ είναι η συνάρτηση κατανομής μίας μη κανονικής κατανομής.

Η στατιστική συνάρτηση για τον έλεγχο των υποθέσεων αυτών είναι η

$$T_3 = \frac{\left[\sum_{i=1}^{k} a_i \left(X^{(n-i+1)} - X^{(i)}\right)\right]^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2},$$

όπου $X^{(i)}$ είναι η i παρατήρηση του διατεταγμένου κατά αύξουσα τάξη μεγέθους δείγματος, k είναι ένας ακέραιος αριθμός περίπου ίσος με $n/2$ και a_i, $i = 1,2,...,k$ είναι σταθεροί συντελεστές. Εξαρτάται, δηλαδή, η T_3 τόσο από τις τετραγωνικές αποκλίσεις των παρατηρήσεων X_i από τον μέσο τους $\bar{X}$, όσο και από τις αποκλίσεις που έχουν στο διατεταγμένο δείγμα η πρώτη (ελάχιστη) παρατήρηση από την τελευταία (μέγιστη) παρατήρηση, η δεύτερη από την προτελευταία κ.ο.κ. (Στην πράξη, για τον καθορισμό της τιμής της στατιστικής συνάρτησης T_3, υπολογίζουμε πρώτα τον παρονομαστή

$$D = \sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2$$

όπου $\bar{X}$ είναι ο μέσος των παρατηρήσεων. Στην συνέχεια, διατάσσουμε κατά αύξουσα σειρά μεγέθους το δείγμα των παρατηρήσεων $X^{(1)} \le X^{(2)} \le \ldots \le X^{(n)}$. Από τον πίνακα 5 του παραρτήματος προσδιορίζουμε τους συντελεστές a_i, $i = 1,2,...,k$, για το δοθέν μέγεθος δείγματος n, και για $k = n/2$. Η στατιστική συνάρτηση T_3 υπολογίζεται, τότε, από τον τύπο

$$T_3 = \left[\sum_{i=1}^{k} a_i \left(X^{(n-i+1)} - X^{(i)}\right)\right]^2 \Big/ D$$

Η στατιστική συνάρτηση T_3 συχνά συμβολίζεται με W και ο έλεγχος συχνά ονομάζεται έλεγχος W.

Παρατηρούμε ότι οι μικρές τιμές της στατιστικής συνάρτησης T_3 είναι εκείνες οι οποίες αποτελούν ένδειξη ότι η μηδενική υπόθεση δεν είναι αληθής. Επομένως, ο κανόνας απόφασης είναι ο εξής:

Η μηδενική υπόθεση H_0 απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας a εάν η τιμή της στατιστικής συνάρτησης T_3 είναι μικρότερη από το α-ποσοστιαίο σημείο της κατανομής της, όπως αυτό δίνεται στον πίνακα 6 του παραρτήματος.

Σημείωση: Όπως φαίνεται, ο σχετικός πίνακας επιτρέπει την χρήση του ελέγχου W μόνο στην περίπτωση που $n \leq 50$. Για την περίπτωση $n > 50$, έχουν μελετηθεί εναλλακτικοί και παρόμοιας φύσης έλεγχοι από τους D' Agostino (1971) και από τους Shapiro και Francia (1972).

Παράδειγμα 3.3.4: Ας θεωρήσουμε τους 50 διψήφιους αριθμούς του παραδείγματος 3.3.2 που αναφέρεται στον έλεγχο κανονικότητας του Lilliefors. Όπως είδαμε εκεί, ο έλεγχος του Lilliefors οδήγησε στην μη απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης με κρίσιμο επίπεδο $\hat{\alpha} > 0.20$. Είδαμε, επίσης εκεί, ότι ο έλεγχος χ^2 οδήγησε και αυτός στην μη απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης με κρίσιμο επίπεδο $\hat{\alpha}$ αρκετά μεγαλύτερο από το 0.25. Η υπόθεση της κανονικότητας θα ελεγχθεί τώρα με τον έλεγχο W.

Λύση: Από τον σχετικό πίνακα του παραρτήματος, υπολογίζονται οι σταθεροί συντελεστές a_i , $i = 1,2,...,25$. Οι τιμές αυτές μαζί με τις τιμές των στατιστικών συναρτήσεων $X^{(50-i+1)} - X^{(i)}$, $i = 1,2,...,25$ δίνονται στον πίνακα που ακολουθεί.

i	a_i	$X^{(50-i+1)} - X^{(i)}$	i	a_i	$X^{(50-i+1)} - X^{(i)}$
1	0,3751	97-23	14	0,0846	66-42
2	0,2574	93-23	15	0,0764	65-43
3	0,2260	98-24	16	0,0685	64-43
4	0,2032	87-27	17	0,0608	63-44
5	0,1847	81-29	18	0,0532	62-45
6	0,1691	77-31	19	0,0459	61-48
7	0,1554	75-32	20	0,0386	61-48
8	0,1430	74-33	21	0,0314	59-48
9	0,1317	73-33	22	0,0244	58-54
10	0,1212	73-35	23	0,0174	58-56
11	0,1113	70-36	24	0,0104	58-57
12	0,1020	68-37	25	0,0035	58-57
13	0,0932	68-40			

Από τα στοιχεία του πίνακα, προκύπτει ότι ο αριθμητής της στατιστικής συνάρτησης T_3 είναι

$$\left[\sum_{i=1}^{25} a_i\left(X^{(50-i+1)} - X^{(i)}\right)\right]^2 = \left[(0.3751)(97-23)+...+(0.0035)(58-57)\right]^2$$
$$=\left[130.63\right]^2 = 17064$$

ενώ ο παρονομαστής έχει την τιμή

$$D = \sum_{i=1}^{50}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 = 17698$$

Επομένως, η τιμή τ_3 της στατιστικής συνάρτησης T_3 είναι

$$\tau_3 = \frac{17064}{17698} = 0.9642$$

Παρατηρούμε ότι η τιμή αυτή βρίσκεται μεταξύ των 0.10 και 0.50 ποσοστιαίων σημείων της κατανομής της στατιστικής συνάρτησης T_3. Με την μέθοδο της παρεμβολής, βρίσκουμε ότι $\hat{a} = 0.29$, κατά προσέγγιση.

Παρατήρηση 1: Συχνά, η στατιστική συνάρτηση T_3 μετασχηματίζεται σε μία κατά προσέγγιση κανονική μεταβλητή, της οποίας η τιμή συγκρίνεται, στην συνέχεια, με τα ποσοστιαία σημεία της τυποποιημένης κανονικής κατανομής οδηγώντας, έτσι, στην τιμή του κρίσιμου επιπέδου $\hat{a}$. Η εκτίμηση του κρίσιμου επιπέδου με την μέθοδο αυτή είναι, εν γένει, περισσότερο ακριβής. Ο μετασχηματισμός της στατιστικής συνάρτησης T_3 σε μία κατά προσέγγιση κανονική μεταβλητή γίνεται με την βοήθεια του πίνακα 7 του παραρτήματος. Στο πλαίσιο του παραδείγματός μας, έχουμε από τον πίνακα αυτό για $n = 50$, $b_{50} = -7.677$, $c_{50} = 2.212$ και $d_{50} = 0.1436$. Η παρατηρηθείσα τιμή της στατιστικής συνάρτησης T_3 αντικαθίσταται, τότε, στον τύπο

$$G = b_{50} + c_{50}\ln\left[\frac{T_3 - d_{50}}{1-T_3}\right],$$

οδηγώντας, έτσι, στην τιμή

$$G = -7.677 + (2.212)\ln\left[\frac{0.9642 - 0.1436}{1-0.9642}\right] = -0.7488$$

Η τιμή αυτή είναι τιμή μίας κατά προσέγγιση τυποποιημένης κανονικής κατανομής και οδηγεί στο κρίσιμο επίπεδο $\hat{a} = 0.227$ με βάση τον πίνακα της τυποποιημένης κανονικής κατανομής.

Παρατήρηση 2: Ένα πολύ χρήσιμο χαρακτηριστικό του ελέγχου Shapiro-Wilk είναι ότι αρκετοί ανεξάρτητοι έλεγχοι καλής προσαρμογής μπορούν να συνδυασθούν (ενοποιηθούν) σε έναν ενιαίο έλεγχο κανονικότητας. Αυτό βοηθά πολύ στην περίπτωση όπου αρκετά μικρά δείγματα από, ενδεχομένως, διαφορετικούς πληθυσμούς είναι ανεπαρκή από μόνα τους να οδηγήσουν σε απόρριψη της υπόθεσης της κανονικότητας, αλλά συνδυαζόμενα παρέχουν ενδείξεις που είναι αρκετές για την απόρριψη της υπόθεσης της κανονικότητας.

Ε. Ξεκαλάκη, Μη παραμετρική στατιστική (2001) και Conover, W.J (1999). Practical non parametric statistics 3rd ed

3.3.4 Ο Έλεγχος των Shapiro-Wilk για την Εκθετική Κατανομή

Σύμφωνα με τους Shapriro και Wilk ο έλεγχος για την εκθετικότητα περιλαμβάνει την μηδενική υπόθεση H_0 ότι το τυχαίο δείγμα $X_1, X_2, \dots, X_n$ προέρχεται από την εκθετική κατανομή με συνάρτηση κατανομής

$$F(x) = 1 - \exp\left\{\frac{x-a}{b}\right\}, x \geq a, a > 0, b > 0, a = a_0$$

Υποθέτουμε ότι για τις τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \dots, X_n$ ισχύει $X_1 \leq X_2 \leq \cdots \leq X_n$. Η στατιστική συνάρτηση W_e , προκύπτει από παλινδρόμηση των x_i στα m_i, όπου m_i είναι η ανμενόμενη τιμή της i τυχαίας μεταβλητής με $a = 0 \; \kappa\alpha\iota b = 1$ και ισουται με

$$W_e = \frac{n(\bar{x} - x_i)^2}{(n-1)S^2}$$

όπου $S^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$.

Η ακριβής κατανομή της W_e δεν είναι γνωστή αλλά δεν εξαρτάται από την τιμή των $\alpha \kappa \alpha \iota b$. Οι Shapriro και Wilk έφτιαξαν πίνακες για τις άνω και κάτω τιμές των οριακών σημείων για τις τιμές του n από 3 εώς 100. Για τις διάφορες εναλλακτικές υποθέσεις, είτε για χαμηλές είτε για υψηλές τιμές της W_e το test οδηγεί σε έναν αμφίπλευρο έλεγχο.

Αφού τα $\alpha\kappa\alpha\iota b$ είναι άγνωστα για την εφαρμογή αυτού του ελέγχου, τα $\alpha\kappa\alpha\iota b$επιλέγονται με τέτοιον τρόπο ώστε η συνάρτηση κατανομής των τυχαίων μεταβλητών να μπορεί να αντιστοιχίζεται με τα δεδομένα των ελάχιστων τετραγώνων. Σε μερικά προβλήματα υπάρχει περίπτωση είτε το a ναείναι γνωστό είτε να καθορίζεται ως μέρος της μηδενικής υπόθεσης H_0. Στην πρώτη περίπτωση δεν θα χρειάζεται να ταιριάξουμε το a με τα δεδομένα. Στην δεύτερη περίπτωση πρέπει κάποιος να ελέγξει αν η τιμή η τιμή για το a είναι αληθής ($a = a_0$) και αν μπορεί να ενσωματωθεί ένας τέτοιος έλεγχος με τον έλεγχο για την παραπάνω συνάρτηση κατανομής. Και στις δύο περιπτώσεις το b επιλέγεται έτσι ώστε να ταιριάζει με τα δεδομένα. Ο έλεγχος των Shapriro και Wilk στην ουσία περιλαμβάνει δύο ανεξάρτητους στατιστικούς ελέγχους, έναν για τον έλεγχο $a = a_0$ και έναν έλεγχο κατανομής και συνδυάζοντας τους προκύπτει ο τελικός στατιστικός έλεγχος.

Στο παράρτημα A στον πίνακας 8 βρίσκεται πίνακας με τις οριακές τιμές για την στατιστική συνάρτηση W_e.

http://mvpprograms.com/help/mvpstats/distributions/ShapiroWilkExponTest

Κεφάλαιο 4

Σύγκριση μη παραμετρικών ελέγχων για την εκθετική κατανομή

4.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με τη συμπεριφορά κάποιων μη παραμετρικών ελέγχων για την εκθετική κατανομή μέσω προσομοιώσεων. Θα προσομοιώσουμε δεδομένα (για την ακρίβεια 100 data sets κάθε φορά) από την εκθετική κατανομή (π.χ. exp(1) και exp(3)) και θα χρησιμοποιήσουμε τέσσερεις από τους πιο συνήθεις μη παραμετρικούς ελέγχους: τον έλεγχο Shapiro-Wilk, τον έλεγχο Kolmogorov, τον έλεγχο Pietra, και τον έλεγχο Gini χρησιμοποιώντας το στατιστικό πρόγραμμαR. Αρχικά θα συγκρίνουμε τους ελέγχους ως προς το μέγεθος(size) σε επίπεδο σημαντικότητας 5%. Στην συνέχεια θα εξετάσουμε και την ισχύ (power) των ελέγχων, όπου θα προσομοιώσουμε δεδομένα (100 κάθε φορά) από διαφορετική κατανομή από την Εκθετική (π.χ. μια γενικότερη Γάμμα) και θα υπολογίσουμε την ισχύ των ελέγχων με σκοπό την σύγκριση της αποδόσεώς τους.

4.2 Μέγεθος ελέγχου (size)

Χρησιμοποιώντας το στατιστικό πρόγραμμα R συγκρίναμε τους ελέγχους Shapiro-Wilk, Kolmogorov, Pietra, και Gini ως προς το μέγεθος του ελέγχου(size) σε επίπεδο σημαντικότητας 5%. Σκοπός μας ήταν να συγκρίνουμε πόσες φορές απορρίπτουν οι έλεγχοι την μηδενική υπόθεση της εκθετικής κατανομής. Αυτό πρέπει να συμβαίνει σε περίπου 5 από τους 100 ελέγχους για επίπεδο σημαντικότητας 5%.

Ακολουθούν οι πίνακες με τα αποτελέσματα για τους διάφορους ελέγχους.

Σε αυτά που ακολουθούν, το n είναι το μέγεθος του δείγματος, το λ είναι η παράμετρος της εκθετικής κατανομής και το T είναι ο αριθμός των επαναλήψεων (100).

(για τον κώδικα στην R δες ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β)

Shapiro-Wilk test for exponentiality

Έλεγχος Shapiro-Wilk για την Εκθετική Κατανομή				
ΔΕΔΟΜΕΝΑ			ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	
n	λ	T	Συχνότητα Απόρριψης	Ποσοστό Απόρριψης
50	1	100	4	0.04
100	1	100	7	0.07
500	1	100	7	0.07
1000	1	100	4	0.04
50	3	100	4	0.04
100	3	100	7	0.07
500	3	100	7	0.07
1000	3	100	4	0.04

Παρατηρούμε ότι γενικώς έχουμε καλά ποσοστά απόρριψης με τον έλεγχο Shapiro-Wilk.

Μέγεθος Ελέγχου (size)

Kolmogorov-Smirnov test for exponentiality

Έλεγχος Kolmogorov-Smirnov για την Εκθετική Κατανομή				
ΔΕΔΟΜΕΝΑ			ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	
n	λ	T	Συχνότητα Απόρριψης	Ποσοστό Απόρριψης
50	1	100	3	0.03
100	1	100	2	0.02
500	1	100	6	0.06
1000	1	100	8	0.08
50	3	100	3	0.03
100	3	100	2	0.02
500	3	100	6	0.06
1000	3	100	8	0.08

Παρατηρούμε ότι τα ποσοστά απόρριψης με τον έλεγχο Kolmogorov-Smirnov είναι λίγο χειρότερα από του ελέγχου Shapiro-Wilk.

Μέγεθος Ελέγχου (size)

Test for exponentiality based on the Pietra statistic

Έλεγχος Pietra για την Εκθετική Κατανομή				
ΔΕΔΟΜΕΝΑ			ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	
n	λ	T	Συχνότητα Απόρριψης	Ποσοστό Απόρριψης
50	1	100	1	0.01
100	1	100	3	0.03
500	1	100	7	0.07
1000	1	100	5	0.05
50	3	100	1	0.01
100	3	100	3	0.03
500	3	100	3	0.03
1000	3	100	5	0.05

Παρατηρούμε ότι ο Pietra έλεγχος έχει το καλύτερο ποσοστό απόρριψης σε σχέση με τους άλλους ελέγχους όταν το μέγεθος του δείγματος είναι μεγάλο.

Μέγεθος Ελέγχου (size)

Test for exponentiality based on the Gini statistic

Έλεγχος Gini για την Εκθετική Κατανομή				
ΔΕΔΟΜΕΝΑ			ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	
n	λ	T	Συχνότητα Απόρριψης	Ποσοστό Απόρριψης
50	1	100	6	0.06
100	1	100	6	0.06
500	1	100	4	0.04
1000	1	100	4	0.04
50	3	100	6	0.06
100	3	100	6	0.06
500	3	100	4	0.04
1000	3	100	4	0.04

Παρατηρούμε ότι ο Gini έλεγχος δίνει επίσης πολύ καλά αποτελέσματα.

4.3 Ισχύς ελέγχου (power)

Στην συνέχεια θα εξετάσουμε την ισχύ (power) των ελέγχων, όπου θα προσομοιώσουμε δεδομένα (100 κάθε φορά) από άλλες κατανομές και μετρώντας πάλι πόσες φορές ο έλεγχος απορρίπτει την μηδενική υπόθεση θα υπολογίσουμε την ισχύ του ελέγχου. Εδώ επιθυμούμε να έχουμε μεγάλο ποσοστό απορρίψεων. Θα συνδυάσουμε την μηδενική υπόθεση της εκθετικής με εναλλακτικές όπως η Uniform, Weibull ή η Gamma. Θα εξετάσουμε τις περιπτώσεις των monotonic increasing hazard κατανομών, monotonic decreasing hazard κατανομών και non-monotonic hazard κατανομών.

Ακολουθούν οι πίνακες με τα αποτελέσματα των ελέγχων για την περίπτωση των monotonic increasing hazard κατανομών με πρώτη την Uniform(0,1).

Ισχύς Ελέγχου

Έλεγχος Kolmogorov-Smirnov για την Uniform(0,1)			
ΔΕΔΟΜΕΝΑ		ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	
n	T	Συχνότητα Απόρριψης	Ποσοστό Απόρριψης
50	100	94,00	0,9400
100	100	100,00	1,0000
500	100	100,00	1,0000
1000	100	100,00	1,0000

Ισχύς Ελέγχου

Έλεγχος Pietra για την Uniform(0,1)			
ΔΕΔΟΜΕΝΑ		ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	
n	T	Συχνότητα Απόρριψης	Ποσοστό Απόρριψης
50	100	96,00	0,9600
100	100	100,00	1,0000
500	100	100,00	1,0000
1000	100	100,00	1,0000

Ισχύς Ελέγχου

Έλεγχος Gini για την Uniform(0,1)			
ΔΕΔΟΜΕΝΑ		ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	
n	T	Συχνότητα Απόρριψης	Ποσοστό Απόρριψης
50	100	100,00	1,0000
100	100	100,00	1,0000
500	100	100,00	1,0000
1000	100	100,00	1,0000

Παρατηρούμε ότι έχουμε εξαιρετική ισχύ για όλους τους ελέγχους με 100% απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης στις περισσότερες περιπτώσεις. Πρέπει να αναφέρουμε ότι ο έλεγχος Gini είναι ο καλύτερος αφού έχει ισχύ 1 ακόμα και για μικρό μέγεθος δείγματος.

Ακολουθούν οι πίνακες με τα αποτελέσματα για την περίπτωση των monotonic increasing hazard κατανομών για την Weibull(1.5).

Ισχύς Ελέγχου

Έλεγχος Kolmogorov-Smirnov για την Weibull				
ΔΕΔΟΜΕΝΑ			ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	
n	shape	T	Συχνότητα Απόρριψης	Ποσοστό Απόρριψης
50	1.5	100	78,00	0,7800
100	1.5	100	99,00	0,9900
500	1.5	100	100,00	1,0000
1000	1.5	100	100,00	1,0000

Ισχύς Ελέγχου

Έλεγχος Pietra για την Weibull				
ΔΕΔΟΜΕΝΑ			ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	
n	shape	T	Συχνότητα Απόρριψης	Ποσοστό Απόρριψης
50	1.5	100	87,00	0,8700
100	1.5	100	100,00	1,0000
500	1.5	100	100,00	1,0000
1000	1.5	100	100,00	1,0000

Ισχύς Ελέγχου

Έλεγχος Gini για την Weibull				
ΔΕΔΟΜΕΝΑ			ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	
n	shape	T	Συχνότητα Απόρριψης	Ποσοστό Απόρριψης
50	1.5	100	94,00	0,9400
100	1.5	100	100,00	1,0000
500	1.5	100	100,00	1,0000
1000	1.5	100	100,00	1,0000

Παρατηρούμε ότι έχουμε πολύ υψηλή ισχύ για όλους τους ελέγχους και για μικρά και για μεγάλα μεγέθη δείγματος με καλύτερο από όλους τον έλεγχο Gini.

Ακολουθούν οι πίνακες των monotonic increasing hazard κατανομών με τρίτη περίπτωση την Gamma(1.5).

Ισχύς Ελέγχου

Distribution with monotonically increasing hazard rate

Έλεγχος Kolmogorov-Smirnov για την Gamma				
ΔΕΔΟΜΕΝΑ			ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	
n	shape	T	Συχνότητα Απόρριψης	Ποσοστό Απόρριψης
50	1.5	100	47,00	0,4700
100	1.5	100	62,00	0,6200
500	1.5	100	100,00	1,0000
1000	1.5	100	100,00	1,0000

Ισχύς Ελέγχου

Distribution with monotonically increasing hazard rate

Έλεγχος Pietra για την Gamma				
ΔΕΔΟΜΕΝΑ			ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	
n	shape	T	Συχνότητα Απόρριψης	Ποσοστό Απόρριψης
50	1.5	100	43,00	0,4300
100	1.5	100	62,00	0,6200
500	1.5	100	100,00	1,0000
1000	1.5	100	100,00	1,0000

Ισχύς Ελέγχου

Distribution with monotonically increasing hazard rate

Έλεγχος Gini για την Gamma				
ΔΕΔΟΜΕΝΑ			ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	
n	shape	T	Συχνότητα Απόρριψης	Ποσοστό Απόρριψη ς
50	1.5	100	54,00	0,5400
100	1.5	100	81,00	0,8100
500	1.5	100	100,00	1,0000
1000	1.5	100	100,00	1,0000

Παρατηρούμε ότι ο έλεγχος Gini δίνει την καλύτερη ισχύ για μικρά μεγέθη δείγματος ενώ για μεγάλα μεγέθη δείγματος οι έλεγχοι είναι ισοδύναμοι.

Ο έλεγχος Shapiro-Wilk δεν έδωσε γενικά καθόλου καλά αποτελέσματα για την περίπτωση των monotonic increasing hazard κατανομών για αυτό το λόγο δεν δίνουμε εδώ αυτά τα αποτελέσματα. Επίσης δεν αναφέρεται στις διάφορες κατανομές το scale parameter της κατανομής διότι δεν παίζει ρόλο στον έλεγχο αφού αυτές οι κατανομές είναι scale in variant.

Ακολουθούν οι πίνακες για monotonic decreasing hazard κατανομές**.**

Ισχύς Ελέγχου

Distribution with monotonically decreasing hazard rate

Έλεγχος Shapiro-Wilk για την Weibull				
ΔΕΔΟΜΕΝΑ			ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	
N	shape	T	Συχνότητα Απόρριψης	Ποσοστό Απόρριψης
50	0.8	100	44,00	0,4400
100	0.8	100	68,00	0,6800
500	0.8	100	100,00	1,0000
1000	0.8	100	100,00	1,0000

Distribution with monotonically decreasing hazard rate

Έλεγχος Kolmogorov-Smirnov για την Weibull				
ΔΕΔΟΜΕΝΑ			ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	
N	shape	T	Συχνότητα Απόρριψης	Ποσοστό Απόρριψης
50	0.8	100	0,41	0,4100
100	0.8	100	0,57	0,5700
500	0.8	100	100,00	1,0000
1000	0.8	100	100,00	1,0000

Ισχύς Ελέγχου

Distribution with monotonically decreasing hazard rate

Έλεγχος Pietra για την Weibull				
ΔΕΔΟΜΕΝΑ			ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	
N	shape	T	Συχνότητα Απόρριψης	Ποσοστό Απόρριψης
50	0.8	100	45,00	0,4500
100	0.8	100	68,00	0,6800
500	0.8	100	100,00	1,0000
1000	0.8	100	100,00	1,0000

Ισχύς Ελέγχου

Distribution with monotonically decreasing hazard rate

Έλεγχος Gini για την Weibull				
ΔΕΔΟΜΕΝΑ			ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	
N	shape	T	Συχνότητα Απόρριψης	Ποσοστό Απόρριψης
50	0.8	100	53,00	0,5300
100	0.8	100	75,00	0,7500
500	0.8	100	100,00	1,0000
1000	0.8	100	100,00	1,0000

Παρατηρούμε ότι η ισχύς για όλους τους ελέγχους είναι γενικά καλή. Για μικρά μεγέθη δείγματος η ισχύς του ελέγχου Gini είναι η καλύτερη ενώ για n=500 και n=1000 έχουμε ισχύ 1 για όλους τους ελέγχους.

Ακολουθούν οι πίνακες των non-monotonic hazard κατανομών και συγκεκριμένα έλεγχοι για την Beta(0.5,1).

Ισχύς Ελέγχου

Distribution with non-monotonic hazard rate

Έλεγχος Kolmogorov-Smirnov για την Beta					
ΔΕΔΟΜΕΝΑ			ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ		
n	shape1	shape2	T	Συχνότητα Απόρριψης	Ποσοστό Απόρριψης
50	0.5	1.0	100,00	38,00	0,3800
100	0.5	1.0	100,00	65,00	0,6500
500	0.5	1.0	100,00	100,00	1,0000
1000	0.5	1.0	100,00	100,00	1,0000

Ισχύς Ελέγχου

Distribution with non-monotonic hazard rate

Έλεγχος Pietra για την Beta					
ΔΕΔΟΜΕΝΑ			ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ		
n	shape1	shape2	T	Συχνότητα Απόρριψης	Ποσοστό Απόρριψης
50	0.5	1.0	100,00	6,00	0,0600
100	0.5	1.0	100,00	13,00	0,1300
500	0.5	1.0	100,00	45,00	0,4500
1000	0.5	1.0	100,00	55,00	0,5500

Ισχύς Ελέγχου

Distribution with non-monotonic hazard rate

Έλεγχος Gini για την Beta					
ΔΕΔΟΜΕΝΑ			ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ		
n	shape1	shape2	T	Συχνότητα Απόρριψης	Ποσοστό Απόρριψης
50	0.5	1.0	100,00	10,00	0,1000
100	0.5	1.0	100,00	8,00	0,0800
500	0.5	1.0	100,00	8,00	0,0800
1000	0.5	1.0	100,00	5,00	0,0500

Παρατηρούμε ότι στον έλεγχο Gini έχουμε ποσοστό απόρριψης κάτω του 10%, στον έλεγχο Pietra το ποσοστό απόρριψης κυμαίνεται από 6% μέχρι και 55% και ο έλεγχος Kolmogorov-Smirnov έχει το καλύτερο ποσοστό απόρριψης όπου για μεγάλο nφτάνει μέχρι και το 100% . Τέλος ο έλεγχος Shapiro-Wilk δεν εμφανίζεται γιατί παρουσιάζει πολύ χαμηλό ποσοστό απόρριψης.

Συμπεράσματα

Στην εν λόγω διπλωματική εξετάσαμε πώς συμπεριφέρονται οι έλεγχοι Shapiro-Wilk, Kolmogorov, Pietra και Gini στην περίπτωση της μηδενικής υπόθεσης της εκθετικής κατανομής προσομοιώνοντας δεδομένα στο στατιστικό πρόγραμμα R.

Προσομοιώσαμε δεδομένα (για την ακρίβεια 100 datasets κάθε φορά) από την εκθετική κατανομή (π.χ. exp(1) και exp(3)) και χρησιμοποιήσαμε τέσσερεις από τους πιο συνήθεις μη παραμετρικούς ελέγχους: τον έλεγχο Shapiro-Wilk, τον έλεγχο Kolmogorov, τον έλεγχο Pietra, και τον έλεγχο Gini χρησιμοποιώντας το στατιστικό πρόγραμμαR. Αρχικά συγκρίναμε τους ελέγχους ως προς το μέγεθος(size) σε επίπεδο σημαντικότητας 5%. Στην συνέχεια εξετάσαμε και την ισχύ (power) των ελέγχων, όπου προσομοιώσαμε δεδομένα (100 κάθε φορά) από διαφορετική κατανομή από την Εκθετική (π.χ. μια γενικότερη Γάμμα) και υπολογίσαμε την ισχύ των ελέγχων με σκοπό την σύγκριση της αποδόσεώς τους.

Παρατηρήσαμε ότι μέγεθος ελέγχου (ποσοστό απόρριψης) κοντά στο 5% (οπότε ικανοποιητικό) δίνουν οι έλεγχοι Shapiro-Wilk και Gini. Για την ισχύ των ελέγχων, παρατηρούμε ότι είχαμε εξαιρετική ισχύ στην περίπτωση των monotonic increasing hazard κατανομών για μικρά και μεγάλα δείγματα ενώ μέτρια ισχύ είχαμε για την περίπτωση των non- monotonic increasing hazard κατανομών για μικρά δείγματα. Γενικά ο έλεγχος Gini υπερέχει των άλλων ελέγχων που εξετάσαμε ως προς το μέγεθος αλλά και την ισχύ για την περίπτωση των monotonic increasing hazard κατανομών και την περίπτωση των monotonic decreasing hazard κατανομών. Για την περίπτωση των non-monotonic hazard κατανομών υπερείχε ο έλεγχος Kolmogorov-Smirnov.

Βιβλιογραφία

Ξενόγλωση Βιβλιογραφία

Agresti, A. (1977). “Considerations in Measuring Partial Association for Ordinal Categorical Data”, Journal of the American Statistical Association, 72, 37-45.

Aitchinson, I. (1970). “Choice against Chance. An Introduction to Statistical Decision Theory”, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Massachussetts.

Anderson, T.W. (1962). “On the Distribution of the Two-Sample Cramér-von Mises Criterion”, The Annals of Mathematical Statistics, 33, 1148-1159.

Anderson, T.W. and Darling, D.A. (1952). “Asymptotic Theory of Certain “Goodness of Fit” Criteria Based on Stochastic Processes”, The Annals of Mathematical Statistics, 23, 193-212.

Baird, B.F. (1978). “Introduction to Decision Analysis”, Duxbury Press, Boston.

Bagdonavicius, V., Kruopis, J., Nikulin, M.S. (2011). "Non-parametric tests for complete data", ISTE & WILEY: London & Hoboken. ISBN 978-1-84821-269-5.

Brown, R.V., Kahr, A.S. & Peterson, C. (1974). “Decision Analysis for the Manager”, Holt, Rinehart and Winston, New York.

Burr, E.J. (1963). “Distribution of the Two-Sample Cramér-von Mises Criterion for Small Equal Samples”, The Annals of Mathematical Statistics, 34, 95- 101.

Burr, E.J. (1964). “Small-Sample Distributions of the Two-Sample Cramér-von Mises W2 and Watson’s U2”, The Annals of Mathematical Statistics, 35, 1091-1098.

Cochran, W.G. (1952). “The χ 2 Test of Goodness of Fit”, Annals of Mathematical Statistics. 23, 315-345.

Conover, W.J. (1965). “Several k-sample Kolmogorov-Smirnov Tests”, The Annals of Mathematical Statistics, 36, 1019-1026.

Conover, W.J. (1967). “A k-sample Extension of the One-sided Two-sample Smirnov Test Statistic”, The Annals of Mathematical Statistics, 38, 1726-1730.

Conover, W.J. (1973). “Rank Tests for One Sample, Two Samples and k Samples Without the Assumption of a Continuous Distribution Function”, The Annals of Statistics, 1, 1105-1125.

Conover, W.J. (1980). “Practical Nonparametric Statistics (2nd ed.)”, John Wiley & Sons, New York.

Conover, W.J (1999). Practical nonparametric statistics 3rd ed

Corder, G. W.; Foreman, D. I. (2014). Nonparametric Statistics: A Step-by-Step Approach. Wiley. ISBN 978-1118840313.

D’ Agostino, R.B. (1971). “An Omnibus Test of Normality for Moderate and Large Size Samples”, Biometrika, 58, 341-348(6.2).

Daniels, H.E. (1950). “Rank Correlation and Population Models”, Journal of the Royal Statistical Society (B), 12, 171-181 (5.4).

Durbin, J. (1975). “Kolmogorov-Smirnov Tests When Parameters Are Estimated With Applications to Tests of Exponentiality and Tests on Spacings”, Biometrika, 62, 5-22 (6.2, Appendix).

Gelman, A., Carlin, J., Stern, H. & Rubin, D. (1995). “Bayesian Data Analysis”, Chapman and Hall, London.

Gibbons, Jean Dickinson; Chakraborti, Subhabrata (2003). Nonparametric Statistical Inference, 4th Ed. CRC Press. ISBN 0-8247-4052-1.

Hettmansperger, T. P.; McKean, J. W. (1998). Robust nonparametric statistical methods. Kendall's Library of Statistics 5 (First ed.). London: Edward Arnold. New York: John Wiley & Sons. ISBN 0-340-54937-8. MR 1604954. also ISBN 0-471-19479-4.

Hollander M., Wolfe D.A., Chicken E. (2014). Nonparametric Statistical Methods, John Wiley & Sons.

Hardley, G. (1967). “Introduction to Probability and Statistical Decision Theory”, Holden-Day, San Francisco.

Hollander, M. and Proschan, F. (1972) Testing whether new in better than used. Annals of Math. JRSS B 29, 540-549

Iman, R.L., Quade, D. & Alexander, D.A. (1975). “Exact Probability Levels for the Kruskal-Wallis Test”, Selected Tables in Mathematical Statistics, 3, 329-384.

Kendall, M.G. (1938). “A New Measure of Rank Correlation”, Biometrika, 30, 81-93.

Kendall, M.G. (1949). “Rank and Product-moment Correlation”, Biometrika, 36,177.

Kolmogorov, A.N. (1933). “Sulla Determinazione Empirica di Una Legge di Distribuzione”, Giornale dell’ Istituto Italiano degli Attuari. 4, 83-91.

Kolmogorov, A.N. (1941). “Confidence Limits for an Unknown Distribution Function”, Ann. Math. Statist. 12, 461-3.

Kruskal, W.H. & Wallis, W.A. (1952). “Use of Ranks on One-Criterion Variance Analysis”, Journal of the American Statistical Association, 47, 583-621 (Corrections appear in Vol. 48, 907-911).

Lilliefors, H.W. (1967). “On the Kolmogorov-Smirnov Test for Normality With Mean and Variance Unknown”, J. Amer. Statist. Assos. 62, 399-402.

Lilliefors, H.W. (1973). “The Kolmogorov-Smirnov and Other Distance Tests for the Gamma Distribution and for the Extreme-value Distribution When Parameters Must be Estimated”, Department of Statistics, George Washington University, unpublished manuscript (6.2)

Lin C. C. and Mudholkar, G. S. (1980). A test of exponentiality based on the bivariate F distribution . Technometrics 22, 79-82.

Lindley, D.V. (1965). “Introduction to Probability and Statistics from a Bayesian Viewpoint”, Cambridge University Press, New York.

Mann, H. & Whitney, D. (1947). “On a Test of Whether One or Two Random Variables is Stochastically Larger Than the Other”, Annals of Mathematical Statistics, 18, 50-60.

Moore, G.H. & Wallis, W.A. (1943). “Time Series Significance Tests Based on Signs of Differences”, Journal of the American Statistical Association,38, 153.Bayesian Viewpoint”, Cambridge University Press, New York.

Noether, G.E. (1967). “Wilcoxon Confidence Intervals for Location Parametersin the Discrete Case”, Journal of the American Statistical Association,62, 184-188.

Noether, G.E. (1991). “Introduction to Statistics, the Nonparametric Way”,Springer-Verlag, New York.

Pearson, K. (1900). “On a Criterion That a Given System of Deviations from the Probable in the Case of a Correlated System of Variables is Such That it Can be Reasonably Supposed to Have Arisen from Random Sampling”, Philos. Mag. (5) 50, 157-175.

Raiffa, H. (1968). “Decision Analysis”, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Massachusetts.

Raiffa, H. & Schlaifer, R. (1961). “Applied Statistical Decision Theory”, Harvard Business School, Boston, Massachusetts.

Randles, R.H. & Wolfe, D.A. (1979). “Introduction to the Theory of Non parametric Statistics”, John Wiley & Sons, New York.

Sartwell, P.E., Masi, A.T., Arthes, E.G., Greene, G.R. & Smith, H.E. (1969)“Thromboembolism and Oral Contraceptives an Epidemiologic Ease-Control Study”, American Journal of Epidemiology, 90: 365-380.

Schlaifer, R. (1959). “Probability and Statistics for Business Decisions”,McGraw-Hill Book Company, New York.

Shapiro, S.S. and Francia, R.S. (1972). “An Approximate Analysis of VarianceTest for Normality”, Journal of the American Statistical Association, 67,215-216(6.2).

Simon, G. (1977a). “A Nonparametric Test of Total Independence Based onKendall’s Tau”, Biometrika, 64, 277-282.

Simon, G. (1977b). “Multivariate Generalization of Kendall’s Tau With Application to Data Reduction’, Journal of the American Statistical Association, 72, 367-376.

Slakter, M.J. (1973). “Large Values for the Number of Groups With the Pearson Chi-squared Goodness-of-fit Test”, Biometrika. 60, 420-421.

Smirnov, N.V. (1939). “Estimate of Deviation Between Empirical Distribution Functions in Two Independent Samples”, (Russian) Bulletin Moscow University. 2 (2), 3-16.

Smirnov, N.V. (1948). “Table for Estimating Goodness of Fit of Empirical Distributions”, The Annals of Mathematical Statistics. 19, 279-281.

Sprent, P. (1989). “Applied Nonparametric Statistical Methods”, Chapman and Hall, London.

Steven Ascher (1990) A survey of tests for exponentiality (www.tandfonline.com/loi/lsta20).

Stuart, A. (1954). “Asymptotic Relative Efficiency of Tests and the Derivatives of Their Power Functions”, Scandinavisk Aktaurietidskrift, 3-4, 163-169.

Stuart, A. (1956). “The Efficiencies of Test of Randomness Against Normal Regression”, Journal of the American Statistical Association, 51, 285-287.

Theil, H. (1950). “A Rank Invariant Method of Linear and Polynomial Regression Analysis I, II, III”, Proc. Kon. Nederl. Akd. Wetensch., A, 53,386-92, 521-5, 1397-412.

Wald, A. (1950). “Statistical Decision Functions”, Wiley, New York.

Wilcoxon, F. (1945). “Individual Comparisons by Ranking Methods”,Biometrics, 1, 80-83.

Wilcoxon, F. (1949). “Some Rapid Approximate Statistical Procedures”,Stamford, CT: Stamford Research Laboratories, American CyanamidCorporation.

Wolfe, D.A. (1977). “A Distribution-free Test for Related CorrelationCoefficients”, Technometrics, 19, 507-509.

Yarnold, J.K. (1970). “The Minimum Expectations in χ 2Goodness to Fit Testsand the Accuracy of Approximations for the Null Distribution”, Journalof the American Statistical Association. 65, 864-886.

Wasserman, Larry (2007). All of Nonparametric Statistics, Springer. ISBN 0-387-25145-6.

ΕλληνικήΒιβλιογραφία

Ξεκαλάκη, Ε. (1993). “Μη Παραμετρική Στατιστική (Πανεπιστημιακές Παραδόσεις)”.

Ξεκαλάκη, Ε. (1994). “Ειδικά Θέματα Μη Παραμετρικής Στατιστικής”.

Πανάρετος, Ι. (1994). “Γραμμικά Μοντέλα με Έμφαση στις Εφαρμογές”.

Πανάρετος, Ι. & Ξεκαλάκη, Ε. (1995). “Εισαγωγή στη Στατιστική Σκέψη, Τόμος Ι (Περιγραφική Στατιστική)”.

Πανάρετος, Ι. & Ξεκαλάκη, Ε. (1998). “Εισαγωγή στη Στατιστική Σκέψη, (Συμπλήρωμα)”.

Πανάρετος, Ι. & Ξεκαλάκη, Ε. (2000). “Εισαγωγή στη Στατιστική Σκέψη, Τόμος ΙΙ (Εισαγωγή στις Πιθανότητες και στην Στατιστική Συμπερασματολογία)”.

ΜπούτσικαςΜ. Β. (2004), Σημειώσεις μαθήματος «Στατιστικά Προγράμματα» Τμήμα Στατ. & Ασφ. Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς)

Διαδικτυακή Βιβλιογραφία

Statistics Glossary*v1.1* (ValerieJ. Easton & John H. McColl)http://www.stats.gla.ac.uk/steps/glossary/index.html

www.fil.ion.ucl.ac.uk/

http://en.wikipedia.org

www.stat-athens.aueb.gr/~exek/NPar-Statistics/chapter4.pdf

www.minitab.com

www.ncss.com

www.stata.com

www.math.ntua.gr/~fouskakis/descriptive.pdf

http://mvpprograms.com/help/mvpstats/distributions/ShapiroWilkExponTest

Παράρτημα Α

Πίνακες

Πίνακας 1. Διωνυμική Κατανομή

Πίνακας 1

Διωνυμική Κατανομή

$$P(X \leq x) = \sum_{k=0}^{x} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

		p									
n	x	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
2	0	0.9025	0.8100	0.7225	0.6400	0.5625	0.4900	0.4225	0.3600	0.3025	0.2500
	1	0.9975	0.9900	0.9775	0.9600	0.9375	0.9100	0.8775	0.8400	0.7975	0.7500
	2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3	0	0.8574	0.7290	0.6141	0.5120	0.4219	0.3430	0.2746	0.2160	0.1664	0.1250
	1	0.9928	0.9720	0.9392	0.8960	0.8438	0.7840	0.7182	0.6480	0.5748	0.5000
	2	0.9999	0.9990	0.9966	0.9920	0.9844	0.9730	0.9571	0.9360	0.9089	0.8750
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4	0	0.8145	0.6561	0.5220	0.4096	0.3164	0.2401	0.1785	0.1296	0.0915	0.0625
	1	0.9860	0.9477	0.8905	0.8192	0.7383	0.6517	0.5630	0.4752	0.3910	0.3125
	2	0.9995	0.9963	0.9880	0.9728	0.9492	0.9163	0.8735	0.8208	0.7585	0.6875
	3	1.0000	0.9999	0.9995	0.9984	0.9961	0.9919	0.9850	0.9744	0.9590	0.9375
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
5	0	0.7738	0.5905	0.4437	0.3277	0.2373	0.1681	0.1160	0.0778	0.0503	0.0312
	1	0.9774	0.9185	0.8352	0.7373	0.6328	0.5282	0.4284	0.3370	0.2562	0.1875
	2	0.9988	0.9914	0.9734	0.9421	0.8965	0.8369	0.7648	0.6826	0.5931	0.5000
	3	1.0000	0.9995	0.9978	0.9933	0.9844	0.9692	0.9460	0.9130	0.8688	0.8125
	4	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9976	0.9947	0.9898	0.9815	0.9688
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
6	0	0.7351	0.5314	0.3771	0.2621	0.1780	0.1176	0.0754	0.0467	0.0277	0.0156
	1	0.9672	0.8857	0.7765	0.6553	0.5339	0.4202	0.3191	0.2333	0.1636	0.1094
	2	0.9978	0.9842	0.9527	0.9011	0.8306	0.7443	0.6471	0.5443	0.4415	0.3438
	3	0.9999	0.9987	0.9941	0.9830	0.9624	0.9295	0.8826	0.8208	0.7447	0.6562
	4	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9954	0.9891	0.9777	0.9590	0.9308	0.8906
	5	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9993	0.9982	0.9959	0.9917	0.9844
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
7	0	0.6983	0.4783	0.3206	0.2097	0.1335	0.0824	0.0490	0.0280	0.0152	0.0078
	1	0.9556	0.8503	0.7166	0.5767	0.4449	0.3294	0.2338	0.1586	0.1024	0.0625
	2	0.9962	0.9743	0.9262	0.8520	0.7564	0.6471	0.5323	0.4199	0.3164	0.2266
	3	0.9998	0.9973	0.9879	0.9667	0.9294	0.8740	0.8002	0.7102	0.6083	0.5000
	4	1.0000	0.9998	0.9988	0.9953	0.9871	0.9712	0.9444	0.9037	0.8471	0.7734
	5	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9987	0.9962	0.9910	0.9812	0.9643	0.9375
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9984	0.9963	0.9922
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
8	0	0.6634	0.4305	0.2725	0.1678	0.1001	0.0576	0.0319	0.0168	0.0084	0.0039
	1	0.9428	0.8131	0.6572	0.5033	0.3671	0.2553	0.1691	0.1064	0.0632	0.0352

(Συνεχίζεται)

Πίνακας 1
(συνέχεια)

<u>Διωνυμική Κατανομή</u>

$$P(X \leq x) = \sum_{k=0}^{x} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

	2	0.9942	0.9619	0.8948	0.7969	0.6785	0.5518	0.4278	0.3154	0.2201	0.1445
	3	0.9996	0.9950	0.9786	0.9437	0.8862	0.8059	0.7064	0.5941	0.4770	0.3633
	4	1.0000	0.9996	0.9971	0.9896	0.9727	0.9420	0.8939	0.8263	0.7396	0.6367
	5	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9958	0.9887	0.9747	0.9502	0.9115	0.8555
	6	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9987	0.9964	0.9915	0.9819	0.9648
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9993	0.9983	0.9961
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
9	0	0.6302	0.3874	0.2316	0.1342	0.0751	0.0404	0.0207	0.0101	0.0046	0.0020
	1	0.9288	0.7748	0.5995	0.4362	0.3003	0.1960	0.1211	0.0705	0.0385	0.0195
	2	0.9916	0.9470	0.8591	0.7382	0.6007	0.4628	0.3373	0.2318	0.1495	0.0898
	3	0.9994	0.9917	0.9661	0.9144	0.8343	0.7297	0.6089	0.4826	0.3614	0.2539
	4	1.0000	0.9991	0.9944	0.9804	0.9511	0.9012	0.8283	0.7334	0.6214	0.5000
	5	1.0000	0.9999	0.9994	0.9969	0.9900	0.9747	0.9464	0.9006	0.8342	0.7461
	6	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987	0.9957	0.9888	0.9750	0.9502	0.9102
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9986	0.9962	0.9909	0.9805
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9980
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
10	0	0.5987	0.3487	0.1969	0.1074	0.0563	0.0282	0.0135	0.0060	0.0025	0.0010
	1	0.9139	0.7361	0.5443	0.3758	0.2440	0.1493	0.0860	0.0464	0.0233	0.0107
	2	0.9885	0.9298	0.8202	0.6778	0.5256	0.3828	0.2616	0.1673	0.0996	0.0547
	3	0.9990	0.9872	0.9500	0.8791	0.7759	0.6496	0.5138	0.3823	0.2660	0.1719
	4	0.9999	0.9984	0.9901	0.9672	0.9219	0.8497	0.7515	0.6331	0.5044	0.3770
	5	1.0000	0.9999	0.9986	0.9936	0.9803	0.9527	0.9051	0.8338	0.7384	0.6230
	6	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9965	0.9894	0.9740	0.9452	0.8980	0.8281
	7	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9952	0.9877	0.9726	0.9453
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9983	0.9955	0.9893
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
11	0	0.5688	0.3138	0.1673	0.0859	0.0422	0.0198	0.0088	0.0036	0.0014	0.0005
	1	0.8981	0.6974	0.4922	0.3221	0.1971	0.1130	0.0606	0.0302	0.0139	0.0059
	2	0.9848	0.9104	0.7788	0.6174	0.4552	0.3127	0.2001	0.1189	0.0652	0.0327
	3	0.9984	0.9815	0.9306	0.8389	0.7133	0.5696	0.4256	0.2963	0.1911	0.1133
	4	0.9999	0.9972	0.9841	0.9496	0.8854	0.7897	0.6683	0.5328	0.3971	0.2744
	5	1.0000	0.9997	0.9973	0.9883	0.9657	0.9218	0.8513	0.7535	0.6331	0.5000
	6	1.0000	1.0000	0.9997	0.9980	0.9924	0.9784	0.9499	0.9006	0.8262	0.7256
	7	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9957	0.9878	0.9707	0.9390	0.8867
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9980	0.9941	0.9852	0.9673
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9993	0.9978	0.9941
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9995
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
12	0	0.5404	0.2824	0.1422	0.0687	0.0317	0.0138	0.0057	0.0022	0.0008	0.0002
	1	0.8816	0.6590	0.4435	0.2749	0.1584	0.0850	0.0424	0.0196	0.0083	0.0032
	2	0.9804	0.8891	0.7358	0.5583	0.3907	0.2528	0.1513	0.0834	0.0421	0.0193
	3	0.9978	0.9744	0.9078	0.7946	0.6488	0.4925	0.3467	0.2253	0.1345	0.0730
	4	0.9998	0.9957	0.9761	0.9274	0.8424	0.7237	0.5833	0.4382	0.3044	0.1938
	5	1.0000	0.9995	0.9954	0.9806	0.9456	0.8822	0.7873	0.6652	0.5269	0.3872
	6	1.0000	0.9999	0.9993	0.9961	0.9857	0.9614	0.9154	0.8418	0.7393	0.6128
	7	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9972	0.9905	0.9745	0.9427	0.8883	0.8062

(Συνεχίζεται)

Πίνακας 1
(συνέχεια)

Διωνυμική Κατανομή

$$P(X \le x) = \sum_{k=0}^{x} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

	8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9983	0.9944	0.9847	0.9644	0.9270
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9992	0.9972	0.9921	0.9807
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9989	0.9968
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
13	0	0.5133	0.2542	0.1209	0.0550	0.0238	0.0097	0.0037	0.0013	0.0004	0.0001
	1	0.8646	0.6213	0.3983	0.2336	0.1267	0.0637	0.0296	0.0126	0.0049	0.0017
	2	0.9755	0.8661	0.6920	0.5017	0.3326	0.2025	0.1132	0.0579	0.0269	0.0112
	3	0.9969	0.9658	0.8820	0.7473	0.5843	0.4206	0.2783	0.1686	0.0929	0.0461
	4	0.9997	0.9935	0.9658	0.9009	0.7940	0.6543	0.5005	0.3530	0.2279	0.1334
	5	1.0000	0.9991	0.9924	0.9700	0.9198	0.8346	0.7159	0.5744	0.4268	0.2905
	6	1.0000	0.9999	0.9987	0.9930	0.9757	0.9376	0.8705	0.7712	0.6437	0.5000
	7	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9944	0.9818	0.9538	0.9023	0.8212	0.7095
	8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9990	0.9960	0.9874	0.9679	0.9302	0.8666
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9975	0.9922	0.9797	0.9539
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9987	0.9959	0.9888
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9983
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
14	0	0.4877	0.2288	0.1028	0.0440	0.0178	0.0068	0.0024	0.0008	0.0002	0.0001
	1	0.8470	0.5846	0.3567	0.1979	0.1010	0.0475	0.0205	0.0081	0.0029	0.0009
	2	0.9699	0.8416	0.6479	0.4481	0.2811	0.1608	0.0839	0.0398	0.0170	0.0065
	3	0.9958	0.9559	0.8535	0.6982	0.5213	0.3552	0.2205	0.1243	0.0632	0.0287
	4	0.9986	0.9908	0.9533	0.8702	0.7415	0.5842	0.4227	0.2793	0.1672	0.0898
	5	1.0000	0.9985	0.9885	0.9561	0.8883	0.7805	0.6405	0.4859	0.3373	0.2120
	6	1.0000	0.9998	0.9978	0.9884	0.9617	0.9067	0.8164	0.6925	0.5461	0.3953
	7	1.0000	1.0000	0.9997	0.9976	0.9897	0.9685	0.9247	0.8499	0.7414	0.6047
	8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9996	0.9978	0.9917	0.9757	0.9417	0.8811	0.7880
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9983	0.9940	0.9825	0.9574	0.9102
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9989	0.9961	0.9886	0.9713
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9978	0.9935
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9991
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
15	0	0.4633	0.2059	0.0874	0.0352	0.0134	0.0047	0.0016	0.0005	0.0001	0.0000
	1	0.8290	0.5490	0.3186	0.1671	0.0802	0.0353	0.0142	0.0052	0.0017	0.0005
	2	0.9638	0.8159	0.6042	0.3980	0.2361	0.1268	0.0617	0.0271	0.0107	0.0037
	3	0.9945	0.9444	0.8227	0.6482	0.4613	0.2969	0.1727	0.0905	0.0424	0.0176
	4	0.9994	0.9873	0.9383	0.8358	0.6865	0.5155	0.3519	0.2173	0.1204	0.0592
	5	0.9999	0.9978	0.9832	0.9389	0.8516	0.7216	0.5643	0.4032	0.2608	0.1509
	6	1.0000	0.9997	0.9964	0.9819	0.9434	0.8689	0.7548	0.6098	0.4522	0.3036
	7	1.0000	1.0000	0.9994	0.9958	0.9827	0.9500	0.8868	0.7869	0.6535	0.5000
	8	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9958	0.9848	0.9578	0.9050	0.8182	0.6964
	9	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9963	0.9876	0.9662	0.9231	0.8491
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9972	0.9907	0.9745	0.9408
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9981	0.9937	0.9824
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9989	0.9963
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Πίνακας 2. p – ποσοστιαία Σημεία της Ελεγχοσυνάρτησης Lilliefors για τον Ελεγχο Κανονικότητας

p-ποσοστιαία Σημεία της Ελεγχοσυνάρτησης Lilliefors
για τον Ελεγχο Κανονικότητας

		p = .80	.85	.90	.95	.99
Μέγεθος δείγματος	n= 4	.300	.319	.325	.381	.417
	5	.285	.299	.315	.337	.405
	6	.265	.277	.294	.319	.364
	7	.247	.258	.276	.300	.348
	8	.233	.244	.261	.285	.331
	9	.223	.233	.249	.271	.311
	10	.215	.224	.239	.258	.294
	11	.206	.217	.230	.249	.284
	12	.199	.212	.223	.242	.275
	13	.190	.202	.214	.234	.268
	14	.183	.194	.207	.227	.261
	15	.177	.187	.201	.220	.257
	16	.173	.182	.195	.213	.250
	17	.169	.177	.189	.206	.245
	18	.166	.173	.184	.200	.239
	19	.163	.169	.179	.195	.235
	20	.160	.166	.174	.190	.231
	25	.142	.147	.158	.173	.200
	30	.131	.136	.144	.161	.187
	>30	$\frac{.736}{\sqrt{n}}$	$\frac{.768}{\sqrt{n}}$	$\frac{.805}{\sqrt{n}}$	$\frac{.886}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.031}{\sqrt{n}}$

Η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας α όταν η τιμή της ελεγχοσυνάρτησης υπερβαίνει το (1-α)-ποσοστιαίο σημείο της κατανομής της .

Πίνακας 3. p – ποσοστιαία Σημεία της Ελεγχοσυνάρτησης Lilliefors για τον Ελεγχο Καλής Προσαρμογής της Εκθετικής Κατανομής.

p-ποσοστιαία Σημεία της Ελεγχοσυνάρτησης Lilliefors
για τον Ελεγχο Καλης Προσαρμογής της Εκθετικής Κατανομής

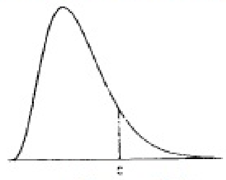
	p = .05	.10	.20	.30	.50	.70	.80	.90	.95	.99	.999
n = 2	.3127	.3200	.3337	.3617	.4337	.5034	.5507	.5934	.6133	.6284	.6317
3	.2299	.2544	.2899	.3166	.3645	.4122	.4508	.5111	.5508	.6003	.6296
4	.2072	.2281	.2545	.2766	.3163	.3685	.4007	.4442	.4844	.5574	.6215
5	.1884	.2052	.2290	.2483	.2877	.3317	.3603	.4045	.4420	.5127	.5814
6	.1726	.1882	.2102	.2290	.2645	.3045	.3320	.3732	.4085	.4748	.5497
7	.1604	.1750	.1961	.2136	.2458	.2838	.3098	.3481	.3811	.4459	.5181
8	.1506	.1646	.1845	.2006	.2309	.2671	.2914	.3274	.3590	.4208	.4913
9	.1426	.1561	.1746	.1897	.2186	.2529	.2758	.3101	.3404	.3995	.4679
10	.1359	.1486	.1661	.1805	.2082	.2407	.2626	.2955	.3244	.3813	.4473
12	.1249	.1364	.1524	.1657	.1912	.2209	.2411	.2714	.2981	.3511	.4132
14	.1162	.1268	.1418	.1542	.1778	.2054	.2242	.2525	.2774	.3272	.3858
16	.1091	.1191	.1332	.1448	.1669	.1929	.2105	.2371	.2606	.3076	.3632
18	.1032	.1127	.1260	.1369	.1578	.1824	.1990	.2242	.2465	.2911	.3441
20	.0982	.1073	.1199	.1303	.1501	.1735	.1893	.2132	.2345	.2771	.3277
22	.0939	.1025	.1146	.1245	.1434	.1657	.1809	.2038	.2241	.2649	.3135
24	.0901	.0984	.1099	.1195	.1376	.1590	.1735	.1954	.2150	.2542	.3010
26	.0868	.0947	.1058	.1150	.1324	.1530	.1670	.1881	.2069	.2447	.2899
28	.0838	.0914	.1021	.1110	.1278	.1477	.1611	.1815	.1997	.2362	.2799
30	.0811	.0885	.0988	.1074	.1236	.1428	.1559	.1756	.1932	.2286	.2709
35	.0754	.0822	.0918	.0997	.1148	.1326	.1447	.1630	.1793	.2123	.2517
40	.0707	.0771	.0861	.0935	.1077	.1243	.1356	.1528	.1681	.1990	.2361
45	.0668	.0729	.0814	.0884	.1017	.1174	.1281	.1443	.1588	.1880	.2231
50	.0636	.0693	.0774	.0840	.0966	.1116	.1217	.1371	.1509	.1787	.2121
60	.0582	.0635	.0708	.0769	.0885	.1021	.1114	.1255	.1381	.1635	.1943
70	.0541	.0589	.0658	.0714	.0821	.0946	.1033	.1164	.1281	.1517	[b]
80	.0507	.0553	.0616	.0669	.0769	.0887	.0968	.1090	.1200	.1421	[b]
90	.0479	.0522	.0582	.0632	.0726	.0838	.0914	.1029	.1132	.1341	[b]
n = 100	.0455	.0496	.0553	.0600	.0690	.0796	.0868	.0977	.1075	.1274	[b]
Approximation for n > 100	$\frac{.4550}{\sqrt{n}}$	$\frac{.4959}{\sqrt{n}}$	$\frac{.5530}{\sqrt{n}}$	$\frac{.6000}{\sqrt{n}}$	$\frac{.6898}{\sqrt{n}}$	$\frac{.7957}{\sqrt{n}}$	$\frac{.8678}{\sqrt{n}}$	$\frac{.9773}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.0753}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.2743}{\sqrt{n}}$	[b]

Η H_o απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας α αν η τιμή της ελεγχοσυνάρτησης υπερβαίνει το (1-α)-ποσοστιαίο σημείο της κατανομής. Αυτά τα ποσοστιαία σημεία δεν είναι διαθέσιμα.

Πίνακας 4. Ποσοστιαία Σημεία της Κατανομής χ^2

Πίνακας 4

Ποσοστιαία Σημεία της Κατανομής X^2



Τα στοιχεία του πίνακα εκφράζουν τα (1-α) ποσοστιαία σημεία της Κατανομής X^2 με ν βαθμούς ελευθερίας, δηλαδή τις μέσες τιμές $X^2_{v,1-\alpha}$ για τις οποίες $P(X^2 \leq X^2_{v,1-\alpha}) = 1-\alpha$.

1-α = εμβαδόν

ν	0.010	0.050	0.100	0.300	0.500	0.700	0.900	0.950	0.990	0.999
1	0.0002	0.0039	0.0158	0.1485	0.4549	1.0742	2.7055	3.8415	6.6349	10.8277
2	0.0201	0.1026	0.2107	0.7133	1.3863	2.4079	4.6052	5.9915	9.2103	13.8155
3	0.1148	0.3518	0.5844	1.4237	2.3660	3.6649	6.2514	7.8147	11.3449	16.2663
4	0.2971	0.7107	1.0636	2.1947	3.3567	4.8784	7.7794	9.4877	13.2767	18.4669
5	0.5543	1.1455	1.6103	2.9999	4.3515	6.0644	9.2364	11.0705	15.0863	20.5150
6	0.8721	1.6354	2.2041	3.8276	5.3481	7.2311	10.6446	12.5916	16.8119	22.4578
7	1.2390	2.1674	2.8331	4.6713	6.3458	8.3834	12.0170	14.0671	18.4753	24.3220
8	1.6465	2.7326	3.4895	5.5274	7.3441	9.5245	13.3616	15.5073	20.0902	26.1246
9	2.0879	3.3251	4.1682	6.3933	8.3428	10.6564	14.6837	16.9190	21.6660	27.8771
10	2.5582	3.9403	4.8652	7.2672	9.3418	11.7807	15.9872	18.3070	23.2093	29.5884
11	3.0535	4.5748	5.5778	8.1479	10.3410	12.8987	17.2750	19.6751	24.7250	31.2642
12	3.5706	5.2260	6.3038	9.0343	11.3403	14.0111	18.5493	21.0261	26.2170	32.9097
13	4.1069	5.8919	7.0415	9.9257	12.3398	15.1187	19.8119	22.3620	27.6882	34.5278
14	4.6604	6.5706	7.7895	10.8215	13.3393	16.2221	21.0641	23.6848	29.1413	36.1235
15	5.2293	7.2609	8.5468	11.7212	14.3389	17.3217	22.3071	24.9958	30.5779	37.6973

Πίνακας 5. Οι συντελεστές α της Στατιστικής Συνάρτησης Shapiro-Wilk για τον Ελεγχο της Κανονικότητας

Οι συντελεστές α της Στατιστικής Συνάρτησης Shapiro-Wilk
για τον Ελεγχο της Κανονικότητας (i=1,2,......n/2)

i \ n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.7071	0.7071	0.6872	0.6646	0.6431	0.6233	0.6052	0.5888	0.5739
2	—	0.0000	0.1667	0.2413	0.2806	0.3031	0.3164	0.3244	0.3291
3	—	—	—	0.0000	0.0875	0.1401	0.1743	0.1976	0.2141
4	—	—	—	—	—	0.0000	0.0561	0.0947	0.1224
5	—	—	—	—	—	—	—	0.0000	0.0399

i \ n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0.5601	0.5475	0.5359	0.5251	0.5150	0.5056	0.4968	0.4886	0.4808	0.4734
2	0.3315	0.3325	0.3325	0.3318	0.3306	0.3290	0.3273	0.3253	0.3232	0.3211
3	0.2260	0.2347	0.2412	0.2460	0.2495	0.2521	0.2540	0.2553	0.2561	0.2565
4	0.1429	0.1586	0.1707	0.1802	0.1878	0.1939	0.1988	0.2027	0.2059	0.2085
5	0.0695	0.0922	0.1099	0.1240	0.1353	0.1447	0.1524	0.1587	0.1641	0.1686
6	0.0000	0.0303	0.0539	0.0727	0.0880	0.1005	0.1109	0.1197	0.1271	0.1334
7	—	—	0.0000	0.0240	0.0433	0.0593	0.0725	0.0837	0.0932	0.1013
8	—	—	—	—	0.0000	0.0196	0.0359	0.0496	0.0612	0.0711
9	—	—	—	—	—	—	0.0000	0.0163	0.0303	0.0422
10	—	—	—	—	—	—	—	—	0.0000	0.0140

i \ n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	0.4643	0.4590	0.4542	0.4493	0.4450	0.4407	0.4366	0.4328	0.4291	0.4254
2	0.3185	0.3156	0.3126	0.3098	0.3069	0.3043	0.3018	0.2992	0.2968	0.2944
3	0.2578	0.2571	0.2563	0.2554	0.2543	0.2533	0.2522	0.2510	0.2499	0.2487
4	0.2119	0.2131	0.2139	0.2145	0.2148	0.2151	0.2152	0.2151	0.2150	0.2148
5	0.1736	0.1764	0.1787	0.1807	0.1822	0.1836	0.1848	0.1857	0.1864	0.1870
6	0.1399	0.1443	0.1480	0.1512	0.1539	0.1563	0.1584	0.1601	0.1616	0.1630
7	0.1092	0.1150	0.1201	0.1245	0.1283	0.1316	0.1346	0.1372	0.1395	0.1415
8	0.0804	0.0878	0.0941	0.0997	0.1046	0.1089	0.1128	0.1162	0.1192	0.1219
9	0.0530	0.0618	0.0696	0.0764	0.0823	0.0876	0.0923	0.0965	0.1002	0.1036
10	0.0263	0.0368	0.0459	0.0539	0.0610	0.0672	0.0728	0.0778	0.0822	0.0862
11	0.0000	0.0122	0.0228	0.0321	0.0403	0.0476	0.0540	0.0598	0.0650	0.0697
12	—	—	0.0000	0.0107	0.0200	0.0284	0.0358	0.0424	0.0483	0.0537
13	—	—	—	—	0.0000	0.0094	0.0178	0.0253	0.0320	0.0381
14	—	—	—	—	—	—	0.0000	0.0084	0.0159	0.0227
15	—	—	—	—	—	—	—	—	0.0000	0.0076

(Συνεχίζεται)

(συνέχεια)

i \ n	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	0.4220	0.4188	0.4156	0.4127	0.4096	0.4068	0.4040	0.4015	0.3989	0.3964
2	0.2921	0.2898	0.2876	0.2854	0.2834	0.2813	0.2794	0.2774	0.2755	0.2737
3	0.2475	0.2462	0.2451	0.2439	0.2427	0.2415	0.2403	0.2391	0.2380	0.2368
4	0.2145	0.2141	0.2137	0.2132	0.2127	0.2121	0.2116	0.2110	0.2104	0.2098
5	0.1874	0.1878	0.1880	0.1882	0.1883	0.1883	0.1883	0.1881	0.1880	0.1878
6	0.1641	0.1651	0.1660	0.1667	0.1673	0.1678	0.1683	0.1686	0.1689	0.1691
7	0.1433	0.1449	0.1463	0.1475	0.1487	0.1496	0.1505	0.1513	0.1520	0.1526
8	0.1243	0.1265	0.1284	0.1301	0.1317	0.1331	0.1344	0.1356	0.1366	0.1376
9	0.1066	0.1093	0.1118	0.1140	0.1160	0.1179	0.1196	0.1211	0.1225	0.1237
10	0.0899	0.0931	0.0961	0.0988	0.1013	0.1036	0.1056	0.1075	0.1092	0.1108
11	0.0739	0.0777	0.0812	0.0844	0.0873	0.0900	0.0924	0.0947	0.0967	0.0986
12	0.0585	0.0629	0.0669	0.0706	0.0739	0.0770	0.0798	0.0824	0.0848	0.0870
13	0.0435	0.0485	0.0530	0.0572	0.0610	0.0645	0.0677	0.0706	0.0733	0.0759
14	0.0289	0.0344	0.0395	0.0441	0.0484	0.0523	0.0559	0.0592	0.0622	0.0651
15	0.0144	0.0206	0.0262	0.0314	0.0361	0.0404	0.0444	0.0481	0.0515	0.0546
16	0.0000	0.0068	0.0131	0.0187	0.0239	0.0287	0.0331	0.0372	0.0409	0.0444
17	—	—	0.0000	0.0062	0.0119	0.0172	0.0220	0.0264	0.0305	0.0343
18	—	—	—	—	0.0000	0.0057	0.0110	0.0158	0.0203	0.0244
19	—	—	—	—	—	—	0.0000	0.0053	0.0101	0.0146
20	—	—	—	—	—	—	—	—	0.0000	0.0049

i \ n	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
1	0.3940	0.3917	0.3894	0.3872	0.3850	0.3830	0.3808	0.3789	0.3770	0.3751
2	0.2719	0.2701	0.2684	0.2667	0.2651	0.2635	0.2620	0.2604	0.2589	0.2574
3	0.2357	0.2345	0.2334	0.2323	0.2313	0.2302	0.2291	0.2281	0.2271	0.2260
4	0.2091	0.2085	0.2078	0.2072	0.2065	0.2058	0.2052	0.2045	0.2038	0.2032
5	0.1876	0.1874	0.1871	0.1868	0.1865	0.1862	0.1859	0.1855	0.1851	0.1847
6	0.1693	0.1694	0.1695	0.1695	0.1695	0.1695	0.1695	0.1693	0.1692	0.1691
7	0.1531	0.1535	0.1539	0.1542	0.1545	0.1548	0.1550	0.1551	0.1553	0.1554
8	0.1384	0.1392	0.1398	0.1405	0.1410	0.1415	0.1420	0.1423	0.1427	0.1430
9	0.1249	0.1259	0.1269	0.1278	0.1286	0.1293	0.1300	0.1306	0.1312	0.1317
10	0.1123	0.1136	0.1149	0.1160	0.1170	0.1180	0.1189	0.1197	0.1205	0.1212
11	0.1004	0.1020	0.1035	0.1049	0.1062	0.1073	0.1085	0.1095	0.1105	0.1113
12	0.0891	0.0909	0.0927	0.0943	0.0959	0.0972	0.0986	0.0998	0.1010	0.1020
13	0.0782	0.0804	0.0824	0.0842	0.0860	0.0876	0.0892	0.0906	0.0919	0.0932
14	0.0677	0.0701	0.0724	0.0745	0.0765	0.0783	0.0801	0.0817	0.0832	0.0846
15	0.0575	0.0602	0.0628	0.0651	0.0673	0.0694	0.0713	0.0731	0.0748	0.0764
16	0.0476	0.0506	0.0534	0.0560	0.0584	0.0607	0.0628	0.0648	0.0667	0.0685
17	0.0379	0.0411	0.0442	0.0471	0.0497	0.0522	0.0546	0.0568	0.0588	0.0608
18	0.0283	0.0318	0.0352	0.0383	0.0412	0.0439	0.0465	0.0489	0.0511	0.0532
19	0.0188	0.0227	0.0263	0.0296	0.0328	0.0357	0.0385	0.0411	0.0436	0.0459
20	0.0094	0.0136	0.0175	0.0211	0.0245	0.0277	0.0307	0.0335	0.0361	0.0386
21	0.0000	0.0045	0.0087	0.0126	0.0163	0.0197	0.0229	0.0259	0.0288	0.0314
22		—	0.0000	0.0042	0.0081	0.0118	0.0153	0.0185	0.0215	0.0244
23	—	—	—	—	0.0000	0.0039	0.0076	0.0111	0.0143	0.0174
24	—	—	—	—	—	—	0.0000	0.0037	0.0071	0.0104
25	—	—	—	—	—	—	—	—	0.0000	0.0035

Πίνακας 6. p – ποσοστιαία Σημεία της Ελεγχοσυνάρτησης Shapiro-Wilk

p-ποσοστιαία Σημεία της Ελεγχοσυνάρτησης Shapiro-Wilk

n	*0.01*	*0.02*	*0.05*	*0.10*	*0.50*	*0.90*	*0.95*	*0.98*	*0.99*
3	0.753	0.756	0.767	0.789	0.959	0.998	0.999	1.000	1.000
4	0.687	0.707	0.748	0.792	0.935	0.987	0.992	0.996	0.997
5	0.686	0.715	0.762	0.806	0.927	0.979	0.986	0.991	0.993
6	0.713	0.743	0.788	0.826	0.927	0.974	0.981	0.986	0.989
7	0.730	0.760	0.803	0.838	0.928	0.972	0.979	0.985	0.988
8	0.749	0.778	0.818	0.851	0.932	0.972	0.978	0.984	0.987
9	0.764	0.791	0.829	0.859	0.935	0.972	0.978	0.984	0.986
10	0.781	0.806	0.842	0.869	0.938	0.972	0.978	0.983	0.986
11	0.792	0.817	0.850	0.876	0.940	0.973	0.979	0.984	0.986
12	0.805	0.828	0.859	0.883	0.943	0.973	0.979	0.984	0.986
13	0.814	0.837	0.866	0.889	0.945	0.974	0.979	0.984	0.986
14	0.825	0.846	0.874	0.895	0.947	0.975	0.980	0.984	0.986
15	0.835	0.855	0.881	0.901	0.950	0.975	0.980	0.984	0.987
16	0.844	0.863	0.887	0.906	0.952	0.976	0.981	0.985	0.987
17	0.851	0.869	0.892	0.910	0.954	0.977	0.981	0.985	0.987
18	0.858	0.874	0.897	0.914	0.956	0.978	0.982	0.986	0.988
19	0.863	0.879	0.901	0.917	0.957	0.978	0.982	0.986	0.988
20	0.868	0.884	0.905	0.920	0.959	0.979	0.983	0.986	0.988
21	0.873	0.888	0.908	0.923	0.960	0.980	0.983	0.987	0.989
22	0.878	0.892	0.911	0.926	0.961	0.980	0.984	0.987	0.989
23	0.881	0.895	0.914	0.928	0.962	0.981	0.984	0.987	0.989
24	0.884	0.898	0.916	0.930	0.963	0.981	0.984	0.987	0.989
25	0.888	0.901	0.918	0.931	0.964	0.981	0.985	0.988	0.989
26	0.891	0.904	0.920	0.933	0.965	0.982	0.985	0.988	0.989
27	0.894	0.906	0.923	0.935	0.965	0.982	0.985	0.988	0.990
28	0.896	0.908	0.924	0.936	0.966	0.982	0.985	0.988	0.990
29	0.898	0.910	0.926	0.937	0.966	0.982	0.985	0.988	0.990
30	0.900	0.912	0.927	0.939	0.967	0.983	0.985	0.988	0.990
31	0.902	0.914	0.929	0.940	0.967	0.983	0.986	0.988	0.990
32	0.904	0.915	0.930	0.941	0.968	0.983	0.986	0.988	0.990
33	0.906	0.917	0.931	0.942	0.968	0.983	0.986	0.989	0.990
34	0.908	0.919	0.933	0.943	0.969	0.983	0.986	0.989	0.990
35	0.910	0.920	0.934	0.944	0.969	0.984	0.986	0.989	0.990
36	0.912	0.922	0.935	0.945	0.970	0.984	0.986	0.989	0.990
37	0.914	0.924	0.936	0.946	0.970	0.984	0.987	0.989	0.990
38	0.916	0.925	0.938	0.947	0.971	0.984	0.987	0.989	0.990
39	0.917	0.927	0.939	0.948	0.971	0.984	0.987	0.989	0.991
40	0.919	0.928	0.940	0.949	0.972	0.985	0.987	0.989	0.991
41	0.920	0.929	0.941	0.950	0.972	0.985	0.987	0.989	0.991
42	0.922	0.930	0.942	0.951	0.972	0.985	0.987	0.989	0.991
43	0.923	0.932	0.943	0.951	0.973	0.985	0.987	0.990	0.991
44	0.924	0.933	0.944	0.952	0.973	0.985	0.987	0.990	0.991
45	0.926	0.934	0.945	0.953	0.973	0.985	0.988	0.990	0.991
46	0.927	0.935	0.945	0.953	0.974	0.985	0.988	0.990	0.991
47	0.928	0.936	0.946	0.954	0.974	0.985	0.988	0.990	0.991
48	0.929	0.937	0.947	0.954	0.974	0.985	0.988	0.990	0.991
49	0.929	0.937	0.947	0.955	0.974	0.985	0.988	0.990	0.991
50	0.930	0.938	0.947	0.955	0.974	0.985	0.988	0.990	0.991

Η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας p όταν η τιμή της ελεγχοσυνάρτησης είναι μικρότερη από το p-ποσοστιαίο σημείο της κατανομής της.

Πίνακας 7. Συντελεστές για τον Μετασχηματισμό της Στατιστικής Συνάρτησης των Shapiro-Wilk κατά Προσέγγιση Κανονική Μεταβλητή

Συντελεστές για τον Μετασχηματισμό της Στατιστικής Συνάρτησης των Shapiro-Wilk κατά Προσέγγιση Κανονική Μεταβλητή

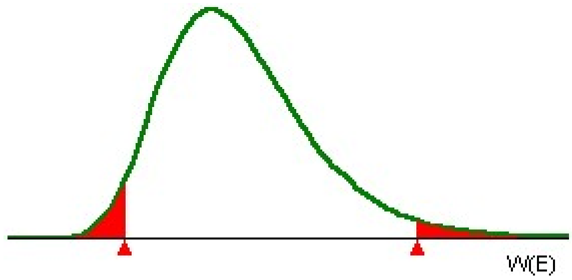
$v \backslash n$ (d_n)	3 (0.7500)	4 (0.6297)	5 (0.5521)	6 (0.4963)	v \ n (d_n)	3 (0.7500)	4 (0.6297)	5 (0.5521)	6 (0.4963)
−7.0	−3.29	—	—	—	**2.2**	0.52	0.74	0.75	0.64
−5.4	−2.81	—	—	—	**2.6**	0.67	1.00	1.09	1.06
−5.0	−2.68	—	—	—	**3.0**	0.81	1.23	1.40	1.45
−4.6	−2.54	—	—	—	**3.4**	0.95	1.44	1.67	1.83
−4.2	−2.40	—	—	—	**3.8**	1.07	1.65	1.91	2.17
−3.8	−2.25	−3.50	—	—	**4.2**	1.19	1.85	2.15	2.50
−3.4	−2.10	−3.27	—	—	**4.6**	1.31	2.03	2.47	2.77
−3.0	−1.94	−3.05	−4.01	—	**5.0**	1.42	2.19	2.85	3.09
−2.6	−1.77	−2.84	−3.70	—	**5.4**	1.52	2.34	3.24	3.54
−2.2	−1.59	−2.64	−3.38	—	**5.8**	1.62	2.48	3.64	—
−1.8	−1.40	−2.44	−3.11	—	**6.2**	1.72	2.62	—	—
−1.4	−1.21	−2.22	−2.87	—	**6.6**	1.81	2.75	—	—
−1.0	−1.01	−1.96	−2.56	−3.72	**7.0**	1.90	2.87	—	—
−0.6	−0.80	−1.66	−2.20	−2.88	**7.4**	1.98	2.97	—	—
−0.2	−0.60	−1.31	−1.81	−2.27	**7.8**	2.07	3.08	—	—
0.2	−0.39	−0.94	−1.41	−1.85	**8.2**	2.15	3.22	—	—
0.6	−0.19	−0.57	−0.97	−1.38	**8.6**	2.23	3.36	—	—
1.0	−0.00	−0.19	−0.51	−0.84	**9.0**	2.31	—	—	—
1.4	0.18	0.15	−0.06	−0.33	**9.4**	2.38	—	—	—
1.8	0.35	0.45	0.37	0.18	**9.8**	2.45	—	—	—

Για $3 \leq n \leq 6$ υπολογίζεται πρώτα η τιμή $v = \ell n\{(T - d_n)/(1-T)\}$, όπου d_n δίνεται στην κορυφή του πίνακα και T είναι η στατιστική συνάρτηση των Shapiro-Wilk. Για τον προσδιορισμό της τιμής G που είναι τιμή μιας κατά προσέγγιση κανονικής μεταβλητής εισερχόμεθα στο κύριο σώμα του πίνακα με τις τιμές v και n. Για $7 \geq n \geq 50$ εισερχόμεθα στο πίνακα με την τιμή n και προσδιορίζουμε τους συντελεστές b_n, c_n και d_n. Η τιμή G τότε υπολογίζεται από τον τύπο $G = b_n + c_n \ell n\{(T - d_n)/(1-T)\}$.

(Συνεχίζεται)

n	b_n	c_n	d_n	n	b_n	c_n	d_n
7	−2.356	1.245	0.4533	**29**	−6.074	1.934	0.1907
8	−2.696	1.333	0.4186	**30**	−6.150	1.949	0.1872
9	−2.968	1.400	0.3900				
10	−3.262	1.471	0.3600	**31**	−6.248	1.965	0.1840
				32	−6.324	1.976	0.1811
11	−3.485	1.515	0.3451	**33**	−6.402	1.988	0.1781
12	−3.731	1.571	0.3270	**34**	−6.480	2.000	0.1755
13	−3.936	1.613	0.3111	**35**	−6.559	2.012	0.1727
14	−4.155	1.655	0.2969				
15	−4.373	1.695	0.2842	**36**	−6.640	2.024	0.1702
				37	−6.721	2.037	0.1677
16	−4.567	1.724	0.2727	**38**	−6.803	2.049	0.1656
17	−4.713	1.739	0.2622	**39**	−6.887	2.062	0.1633
18	−4.885	1.770	0.2528	**40**	−6.961	2.075	0.1612
19	−5.018	1.786	0.2440				
20	−5.153	1.802	0.2359	**41**	−7.035	2.088	0.1591
				42	−7.111	2.101	0.1572
21	−5.291	1.818	0.2264	**43**	−7.188	2.114	0.1552
22	−5.413	1.835	0.2207	**44**	−7.266	2.128	0.1534
23	−5.508	1.848	0.2157	**45**	−7.345	2.141	0.1516
24	−5.605	1.862	0.2106				
25	−5.704	1.876	0.2063	**46**	−7.414	2.155	0.1499
				47	−7.484	2.169	0.1482
26	−5.803	1.890	0.2020	**48**	−7.555	2.183	0.1466
27	−5.905	1.905	0.1980	**49**	−7.615	2.198	0.1451
28	−5.988	1.919	0.1943	**50**	−7.677	2.212	0.1436

Πίνακας 8. Πίνακας οριακών τιμών για την στατιστική συνάρτηση W_e



Alpha (single-tailed values)

n	0.005	0.010	0.025	0.050	0.100	0.500	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995
3	0.2519	0.2538	0.2596	0.2697	0.2915	0.5714	0.9709	0.9926	0.9981	0.9997	0.9999
4	0.1241	0.1302	0.1434	0.1604	0.1891	0.3768	0.7514	0.8581	0.9236	0.9680	0.9837
5	0.0845	0.0905	0.1048	0.1187	0.1442	0.2875	0.5547	0.6682	0.7590	0.8600	0.9192
6	0.0610	0.0665	0.0802	0.0956	0.1173	0.2276	0.4292	0.5089	0.5842	0.6775	0.7501
7	0.0514	0.0591	0.0700	0.0810	0.0986	0.1874	0.3474	0.4162	0.4852	0.5706	0.6426
8	0.0454	0.0512	0.0614	0.0710	0.0852	0.1625	0.2934	0.3497	0.4033	0.4848	0.5428
9	0.0404	0.0442	0.0537	0.0633	0.0751	0.1415	0.2553	0.3005	0.3454	0.4015	0.4433
10	0.0369	0.0404	0.0487	0.0568	0.0678	0.1225	0.2178	0.2525	0.2879	0.3391	0.3701
11	0.0339	0.0380	0.0447	0.0528	0.0616	0.1112	0.1934	0.2265	0.2619	0.3039	0.3314
12	0.0311	0.0358	0.0410	0.0494	0.0567	0.1009	0.1723	0.2019	0.2364	0.2716	0.2978
13	0.0287	0.0337	0.0382	0.0460	0.0528	0.0925	0.1563	0.1829	0.2113	0.2422	0.2642
14	0.0265	0.0317	0.0362	0.0428	0.0496	0.0847	0.1417	0.1647	0.1862	0.2131	0.2315
15	0.0247	0.0298	0.0344	0.0398	0.0466	0.0778	0.1285	0.1485	0.1669	0.1926	0.2123
16	0.0233	0.0280	0.0326	0.0374	0.0438	0.0728	0.1187	0.1355	0.1542	0.1770	0.1931
17	0.0222	0.0264	0.0310	0.0352	0.0412	0.0684	0.1099	0.1257	0.1423	0.1614	0.1794
18	0.0212	0.0250	0.0294	0.0332	0.0388	0.0640	0.1015	0.1164	0.1311	0.1483	0.1668
19	0.0203	0.0238	0.0278	0.0314	0.0368	0.0600	0.0935	0.1071	0.1199	0.1374	0.1452
20	0.0196	0.0227	0.0264	0.0302	0.0353	0.0570	0.0884	0.1002	0.1121	0.1286	0.1369
21	0.0190	0.0217	0.0250	0.0290	0.0337	0.0540	0.0839	0.0948	0.1054	0.1198	0.1288
22	0.0185	0.0208	0.0238	0.0278	0.0323	0.0516	0.0794	0.0894	0.0988	0.1118	0.1212
23	0.0181	0.0201	0.0230	0.0266	0.0310	0.0492	0.0749	0.0836	0.0933	0.1043	0.1142
24	0.0177	0.0194	0.0224	0.0256	0.0298	0.0468	0.0704	0.0788	0.0882	0.0984	0.1071
25	0.0173	0.0188	0.0218	0.0248	0.0286	0.0447	0.0668	0.0749	0.0836	0.0927	0.1000
26	0.0169	0.0182	0.0213	0.0240	0.0274	0.0426	0.0636	0.0712	0.0791	0.0885	0.0948
27	0.0165	0.0177	0.0208	0.0232	0.0264	0.0407	0.0606	0.0678	0.0747	0.0843	0.0896
28	0.0161	0.0172	0.0203	0.0225	0.0256	0.0391	0.0576	0.0649	0.0706	0.0801	0.0859
29	0.0157	0.0168	0.0198	0.0219	0.0249	0.0377	0.0555	0.0621	0.0671	0.0759	0.0822
30	0.0153	0.0164	0.0193	0.0213	0.0242	0.0364	0.0536	0.0593	0.0643	0.0719	0.0786
31	0.0149	0.0160	0.0188	0.0207	0.0235	0.0352	0.0518	0.0569	0.0615	0.0719	0.0753
32	0.0145	0.0156	0.0183	0.0201	0.0229	0.0340	0.0491	0.0547	0.0591	0.0686	0.0722
33	0.0141	0.0152	0.0178	0.0195	0.0223	0.0329	0.0475	0.0527	0.0573	0.0661	0.0691
34	0.0137	0.0148	0.0173	0.0190	0.0217	0.0319	0.0459	0.0507	0.0555	0.0636	0.0660

35	0.0133	0.0144	0.0168	0.0185	0.0211	0.0309	0.0444	0.0488	0.0537	0.0611	0.0639
36	0.0129	0.0141	0.0164	0.0180	0.0205	0.0300	0.0429	0.0470	0.0519	0.0588	0.0608
37	0.0125	0.0138	0.0160	0.0176	0.0200	0.0291	0.0414	0.0454	0.0501	0.0567	0.0578
38	0.0122	0.0135	0.0156	0.0172	0.0195	0.0283	0.0400	0.0440	0.0483	0.0546	0.0553
39	0.0120	0.0133	0.0152	0.0168	0.0190	0.0275	0.0386	0.0426	0.0465	0.0525	0.0531
40	0.0118	0.0131	0.0148	0.0164	0.0186	0.0267	0.0375	0.0414	0.0447	0.0512	0.0510
41	0.0116	0.0129	0.0144	0.0161	0.0182	0.0260	0.0364	0.0402	0.0430	0.0499	0.0493
42	0.0114	0.0127	0.0140	0.0158	0.0178	0.0253	0.0355	0.0389	0.0417	0.0476	0.0482
43	0.0112	0.0125	0.0137	0.0155	0.0174	0.0248	0.0346	0.0379	0.0405	0.0464	0.0471
44	0.0110	0.0123	0.0134	0.0152	0.0170	0.0243	0.0338	0.0369	0.0394	0.0452	0.0460
45	0.0108	0.0121	0.0131	0.0149	0.0166	0.0238	0.0329	0.0359	0.0385	0.0440	0.0449
46	0.0106	0.0119	0.0129	0.0146	0.0162	0.0233	0.0320	0.0349	0.0376	0.0423	0.0438
47	0.0104	0.0117	0.0127	0.0143	0.0158	0.0228	0.0311	0.0340	0.0367	0.0416	0.0427
48	0.0103	0.0115	0.0125	0.0143	0.0158	0.0228	0.0311	0.0340	0.0367	0.0394	0.0426
49	0.0102	0.0113	0.0123	0.0141	0.0155	0.0223	0.0303	0.0332	0.0358	0.0382	0.0416
50	0.0101	0.0111	0.0122	0.0137	0.0149	0.0213	0.0288	0.0317	0.0340	0.0360	0.0394
51	0.0100	0.0109	0.0120	0.0135	0.0147	0.0209	0.0282	0.0310	0.0331	0.0349	0.0383
52	0.0099	0.0107	0.0119	0.0133	0.0145	0.0205	0.0276	0.0303	0.0323	0.0341	0.0373
53	0.0097	0.0106	0.0118	0.0131	0.0143	0.0201	0.0270	0.0296	0.0315	0.0332	0.0363
54	0.0095	0.0104	0.0116	0.0129	0.0141	0.0197	0.0264	0.0289	0.0307	0.0329	0.0353
55	0.0094	0.0103	0.0115	0.0127	0.0139	0.0193	0.0258	0.0282	0.0299	0.0321	0.0343
56	0.0093	0.0102	0.0113	0.0125	0.0137	0.0189	0.0252	0.0275	0.0292	0.0313	0.0333
57	0.0092	0.0101	0.0112	0.0123	0.0135	0.0185	0.0247	0.0268	0.0285	0.0306	0.0324
58	0.0091	0.0100	0.0110	0.0121	0.0133	0.0182	0.0242	0.0262	0.0279	0.0301	0.0318
59	0.0090	0.0098	0.0109	0.0119	0.0131	0.0179	0.0238	0.0257	0.0274	0.0296	0.0312
60	0.0089	0.0095	0.0108	0.0117	0.0129	0.0176	0.0234	0.0252	0.0270	0.0291	0.0306
61	0.0088	0.0093	0.0107	0.0115	0.0127	0.0173	0.0230	0.0247	0.0266	0.0286	0.0301
62	0.0087	0.0092	0.0105	0.0113	0.0125	0.0170	0.0226	0.0242	0.0262	0.0281	0.0296
63	0.0086	0.0091	0.0104	0.0112	0.0123	0.0167	0.0222	0.0238	0.0257	0.0276	0.0291
64	0.0085	0.0090	0.0102	0.0111	0.0121	0.0164	0.0218	0.0234	0.0252	0.0271	0.0286
65	0.0084	0.0089	0.0101	0.0109	0.0119	0.0161	0.0215	0.0230	0.0247	0.0266	0.0281
66	0.0082	0.0088	0.0099	0.0108	0.0117	0.0159	0.0211	0.0225	0.0242	0.0261	0.0276
67	0.0081	0.0087	0.0098	0.0107	0.0115	0.0157	0.0207	0.0221	0.0237	0.0256	0.0271
68	0.0080	0.0086	0.0096	0.0105	0.0114	0.0155	0.0204	0.0217	0.0232	0.0251	0.0266
69	0.0079	0.0085	0.0095	0.0104	0.0113	0.0152	0.0198	0.0213	0.0227	0.0246	0.0261
70	0.0078	0.0084	0.0094	0.0103	0.0111	0.0150	0.0194	0.0209	0.0222	0.0241	0.0256
71	0.0077	0.0083	0.0093	0.0102	0.0109	0.0147	0.0191	0.0205	0.0218	0.0237	0.0251
72	0.0076	0.0082	0.0092	0.0101	0.0108	0.0145	0.0188	0.0201	0.0214	0.0232	0.0246
73	0.0075	0.0081	0.0091	0.0100	0.0107	0.0143	0.0185	0.0198	0.0211	0.0228	0.0241
74	0.0074	0.0080	0.0090	0.0098	0.0106	0.0141	0.0182	0.0195	0.0208	0.0224	0.0236
75	0.0073	0.0079	0.0089	0.0097	0.0105	0.0139	0.0179	0.0192	0.0205	0.0220	0.0231
76	0.0073	0.0078	0.0088	0.0096	0.0104	0.0137	0.0176	0.0189	0.0202	0.0217	0.0227
77	0.0072	0.0077	0.0087	0.0095	0.0103	0.0135	0.0173	0.0186	0.0199	0.0214	0.0223
78	0.0071	0.0077	0.0086	0.0093	0.0101	0.0134	0.0170	0.0183	0.0196	0.0211	0.0219

79	0.0070	0.0076	0.0085	0.0092	0.0100	0.0132	0.0168	0.0180	0.0193	0.0208	0.0215
80	0.0070	0.0075	0.0084	0.0091	0.0099	0.0131	0.0166	0.0177	0.0190	0.0205	0.0211
81	0.0069	0.0074	0.0083	0.0090	0.0098	0.0129	0.0164	0.0175	0.0187	0.0202	0.0207
82	0.0068	0.0074	0.0082	0.0088	0.0097	0.0128	0.0162	0.0173	0.0184	0.0199	0.0203
83	0.0067	0.0073	0.0081	0.0087	0.0096	0.0126	0.0160	0.0170	0.0181	0.0196	0.0199
84	0.0067	0.0073	0.0080	0.0086	0.0095	0.0125	0.0158	0.0168	0.0178	0.0193	0.0196
85	0.0065	0.0072	0.0079	0.0085	0.0094	0.0123	0.0156	0.0166	0.0174	0.0190	0.0193
86	0.0066	0.0071	0.0078	0.0085	0.0093	0.0122	0.0154	0.0164	0.0172	0.0187	0.0190
87	0.0065	0.0071	0.0077	0.0084	0.0092	0.0120	0.0152	0.0162	0.0170	0.0184	0.0187
88	0.0065	0.0070	0.0077	0.0084	0.0091	0.0119	0.0150	0.0160	0.0168	0.0181	0.0185
89	0.0064	0.0070	0.0076	0.0083	0.0090	0.0117	0.0148	0.0158	0.0166	0.0179	0.0183
90	0.0064	0.0069	0.0075	0.0082	0.0089	0.0116	0.0147	0.0156	0.0164	0.0176	0.0181
91	0.0063	0.0068	0.0075	0.0082	0.0088	0.0114	0.0145	0.0154	0.0162	0.0173	0.0179
92	0.0063	0.0068	0.0074	0.0081	0.0087	0.0113	0.0143	0.0153	0.0160	0.0171	0.0177
93	0.0062	0.0067	0.0073	0.0081	0.0086	0.0112	0.0141	0.0151	0.0158	0.0168	0.0175
94	0.0062	0.0067	0.0073	0.0080	0.0085	0.0110	0.0139	0.0149	0.0156	0.0165	0.0173
95	0.0061	0.0066	0.0072	0.0079	0.0084	0.0109	0.0138	0.0147	0.0154	0.0163	0.0171
96	0.0061	0.0065	0.0072	0.0078	0.0083	0.0108	0.0136	0.0145	0.0153	0.0161	0.0169
97	0.0060	0.0065	0.0071	0.0077	0.0082	0.0107	0.0134	0.0143	0.0152	0.0159	0.0167
98	0.0060	0.0064	0.0070	0.0076	0.0081	0.0105	0.0133	0.0142	0.0151	0.0157	0.0165
99	0.0059	0.0064	0.0070	0.0075	0.0080	0.0104	0.0132	0.0140	0.0150	0.0155	0.0163
100	0.0059	0.0063	0.0069	0.0074	0.0079	0.0103	0.0131	0.0139	0.0149	0.0153	0.0161

Παράρτημα Β

Αποσπάσματα από τον κώδικα στο στατιστικό πρόγραμμα R

```
install.packages("exptest")
library("exptest")

############################################################
set.seed(123)
p.value1 <- vector()
count1 <- 0
for(i in 1:100){
 p.value1[i] <- shapiro.exp.test(rexp(50,rate=1))$p.value1
 if(p.value1[i]<0.05){
   count1 <- count1 + 1
}
}
print(count1)
print(count1/100)

############################################################
set.seed(123)
p.value9 <- vector()
count9 <- 0
for(i in 1:100){
  p.value9[i] <- pietra.exp.test(rexp(50,rate=1))$p.value9
  if(p.value9[i]<0.05){
    count9 <- count9 + 1
  }
}
print(count9)
print(count9/100)

##################################################################
rgamma(n, shape=1.5)
rweibull(n, shape=1.5)
runif(n, min = 0, max = 1)
rgamma(n, shape=1)
rweibull(n, shape=1)
#Distributions with monotonically decreasing hazard rates
rweibull(n, shape=0.8)
#Distributions with monotonically increasing hazard rates
rgamma(n,shape=1.5)
#Distributions with non-monotonically hazard rates
rbeta(n, shape1=0.5, shape2=1.0)
###############################################################################

##runif(n, min = 0, max = 1) , ΓΙΑΝ=50, 100, 500 ΚΑΙ 1000

set.seed(123)
p.value29 <- vector()
count29 <- 0
for(i in 1:100){
  p.value29[i] <- shapiro.exp.test(runif(50, min = 0, max = 1))$p.value29
```

```
  if(p.value29[i]<0.05){
    count29 <- count29 + 1
  }
}
print(count29)
print(count29/100)

set.seed(123)
p.value33 <- vector()
count33 <- 0
for(i in 1:100){
  p.value33[i] <- shapiro.exp.test(rgamma(50, shape=1))$p.value33
  if(p.value33[i]<0.05){
    count33 <- count33 + 1
  }
}
print(count33)
print(count33/100)
##########################################################################
#rweibull(n, shape=1), ΓΙΑΝ=50, 100, 500 ΚΑΙ 1000

set.seed(123)
p.value38 <- vector()
count38 <- 0
for(i in 1:100){
  p.value38[i] <- shapiro.exp.test(rweibull(50, shape=1))$p.value38
  if(p.value38[i]<0.05){
    count38 <- count38 + 1
  }
}
print(count38)
print(count38/100)
##########################################################################
##runif(n, min = 0, max = 1) , ΓΙΑΝ=50, 100, 500 ΚΑΙ 1000

set.seed(123)
p.value55 <- vector()
count55 <- 0
for(i in 1:100){
  p.value55[i] <- gini.exp.test(runif(50, min = 0, max = 1))$p.value55
  if(p.value55[i]<0.05){
    count55 <- count55 + 1
  }
}
print(count55)
print(count55/100)

##########################################################################

#rgamma(n, shape=1) , ΓΙΑΝ=50, 100, 500 ΚΑΙ 1000

set.seed(123)
p.value58 <- vector()
count <- 0
for(i in 1:100){
```

```
  p.value58[i] <- gini.exp.test(rgamma(50, shape=1))$p.value58
  if(p.value58[i]<0.05){
    count58 <- count58 + 1
  }
}
print(count58)
print(count58/100)

##########################################################################
#rbeta(n, shape1=0.5, shape2=1.0)

set.seed(123)
p.value73 <- vector()
count73 <- 0
for(i in 1:100){
  p.value73[i] <- gini.exp.test(rbeta(50, shape1=0.5, shape2=1.0))$p.value73
  if(p.value[i]<0.05){
    count73 <- count73 + 1
  }
}
print(count73)
print(count73/100)

##########################################################################
#rgamma(n, shape=1) , ΓΙΑΝ=50, 100, 500 ΚΑΙ 1000

#####
set.seed(123)
p.value82 <- vector()
count82 <- 0
for(i in 1:100){
  p.value82[i] <- pietra.exp.test(rgamma(100, shape=1))$p.value82
  if(p.value82[i]<0.05){
    count82 <- count82 + 1
  }
}
print(count82)
print(count82/100)

##########################################################################
#rweibull(n, shape=1), ΓΙΑΝ=50, 100, 500 ΚΑΙ 1000

set.seed(123)
p.value88 <- vector()
count88 <- 0
for(i in 1:100){
  p.value88[i] <- pietra.exp.test(rweibull(1000 , shape=1))$p.value88
  if(p.value88[i]<0.05){
    count88 <- count88 + 1
  }
}
print(count88)
print(count88/100)

##########################################################################
```

```
#rweibull(n, shape=0.8)

set.seed(123)
p.value89 <- vector()
count89 <- 0
for(i in 1:100){
  p.value89[i] <- pietra.exp.test(rweibull(50, shape=0.8))$p.value89
  if(p.value89[i]<0.05){
    count89 <- count89 + 1
  }
}
print(count89)
print(count89/100)

################################################################################
##runif(n, min = 0, max = 1) , ΓΙΑΝ=50, 100, 500 ΚΑΙ 1000

set.seed(123)
p.value101 <- vector()
count101 <- 0
for(i in 1:100){
  p.value101[i] <- ks.exp.test(runif(50, min = 0, max = 1))$p.value101
  if(p.value101[i]<0.05){
    count101 <- count101 + 1
  }
}
print(count101)
print(count101/100)

################################################################################
#rgamma(n, shape=1) , ΓΙΑΝ=50, 100, 500 ΚΑΙ 1000

set.seed(123)
p.value105 <- vector()
count105 <- 0
for(i in 1:100){
  p.value105[i] <- ks.exp.test(rgamma(50, shape=1))$p.value105
  if(p.value105[i]<0.05){
    count105 <- count105 + 1
  }
}
print(count105)
print(count105/100)

################################################################################
#rweibull(n, shape=1), ΓΙΑΝ=50, 100, 500 ΚΑΙ 1000

set.seed(123)
p.value109 <- vector()
count109 <- 0
for(i in 1:100){
  p.value109[i] <- ks.exp.test(rweibull(50, shape=1))$p.value109
  if(p.value109[i]<0.05){
    count109 <- count109 + 1
  }
```

```
}
print(count109)
print(count109/100)

###############################################################################
#rgamma(n,shape=1.5)

set.seed(123)
p.value117 <- vector()
count117 <- 0
for(i in 1:100){
  p.value117[i] <- ks.exp.test(rgamma(50,shape=1.5))$p.value117
  if(p.value117[i]<0.05){
    count117 <- count117 + 1
  }
}
print(count117)
print(count117/100)

###############################################################################
#rbeta(n, shape1=0.5, shape2=1.0)

set.seed(123)
p.value121 <- vector()
count121 <- 0
for(i in 1:100){
  p.value121[i] <- ks.exp.test(rbeta(50, shape1=0.5, shape2=1.0))$p.value121
  if(p.value121[i]<0.05){
    count121 <- count121 + 1
  }
}
print(count121)
print(count121/100)

###############################################################################
#rweibull(n, shape=1.5), ΓΙΑΝ=50, 100, 500 ΚΑΙ 1000

set.seed(123)
p.value125 <- vector()
count125 <- 0
for(i in 1:100){
  p.value125[i] <- shapiro.exp.test(rweibull(50, shape=1.5))$p.value125
  if(p.value125[i]<0.05){
    count125 <- count125 + 1
  }
}
print(count125)
print(count125/100)
```