ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ

Βέλτιστες στρατηγικές διακοπής μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ ΖΑΧΑΡΙΑΔΗΣ

Αθήνα, Ιούνιος 2016
Επιβλέπων Καθηγητής : Μιχαήλ Λουλάκης

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ

Βέλτιστες στρατηγικές διακοπής μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ ΖΑΧΑΡΙΑΔΗ

Επιβλέπων : Μιχαήλ Λουλάκης
Επικ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 27^{η} Ιουνίου 2016

(Υπογραφή)	*(Υπογραφή)*	*(Υπογραφή)*
....	....	....
Μιχαήλ Λουλάκης	Δημήτριος Φουσκάκης	Βασίλειος Κοκκίνης
Επικ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Αναπλ Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Αναπλ Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούνιος 2016

Περίληψη

Οι Στοχαστικές Ανελίξεις μελετούν πιθανοθεωρητικά μοντέλα και περιγράφουν φαινόμενα που εξαρτώνται από το χρόνο και υπόκεινται σε τυχαιότητα. Είναι λογικό επομένως να έχουν εφαρμογή σε διάφορους κλάδους επιστημών και να προσελκύουν κάθε μαθηματικό. Οι martingale προσεγγίσεις είναι κατηγορία Στοχαστικών Ανελίξεων που έχουν εντυπωσιακές εφαρμογές στα Οικονομικά Μαθηματικά. "Martingale" είναι γαλλικό ακρωνύμιο που προέρχεται από τη στρατηγική που ακολουθεί ένας παίκτης για να κερδίσει το παιχνίδι. Οι Στοχαστικές Ανελίξεις που έχουν την ιδιότητα να κατασκευάζουν την πιθανοθεωρητική δομή τους για το μέλλον με βάση μόνο τη γνώση μέχρι το παρόν, ονομάζονται Markovian προσεγγίσεις. Οι Μαρκοβιανές αλυσίδες είναι ίσως η πιο σημαντική κατηγορία Στοχαστικών Ανελίξεων

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι να παρουσιάσουμε την βέλτιστη στρατηγική διακοπής για διακριτό χρόνο χρησιμοποιώντας martingale και Markovian προσεγγίσεις. Στην πραγματικότητα ο χρονικός ορίζοντας ενός προβλήματος μπορεί να είναι πεπερασμένος αλλά και μη πεπερασμένος. Γι'αυτό τον λόγο θα παρουσιάσουμε και τις δύο περιπτώσεις με δύο εφαρμογές.

Πιο αναλυτικά στο πρώτο κεφάλαιο αναλύεται η θεωρία της βέλτιστης διακοπής. Θα παρουσιάσουμε martingale και Markovian προσεγγίσεις για διακριτό χρόνο και τα αποτελέσματα τους. Αρχικά θα αναφερθούμε στην martingale προσέγγιση και στην συνέχεια θα ακολουθήσει η Markovian.

Στο δευτερο κεφάλαιο κάνουμε μία γρήγορη εισαγωγή στα χρηματοοικονομικά μαθηματικά για την ευκολότερη κατανόηση της εφαρμογής μας για πεπερασμένο χρονικό ορίζοντα. Αναφερόμαστε στα ευρωπαϊκού και αμερικανικού τύπου δικαιώματα, όπως επίσης και στον αλγόριθμο τιμολόγησης τους. Αναφέρουμε το διωνυμικό υπόδειγμα πολλών περιόδων και αναλύουμε την βέλτιστη στρατηγική άσκησης ενός αμερικανικού δικαιώματος. Στο τέλος υπάρχει και η αντίστοιχη εφαρμογή με τον κώδικα και τα αποτελέσματα του.

Στο τρίτο κεφάλαιο αναλύεται μία εφαρμογή για μη πεπερασμένο χρονικό ορίζοντα. Το πρόβλημα που παρουσιάζουμε, είναι ένα "παιχνίδι ζαριού". Βρίσκουμε την βέλτιστη στρατηγική που πρέπει να ακολουθήσουμε, όπως και τις πιθανότητες "νίκης". Το κεφάλαιο κλείνει με τον μέσο χρόνο διάρκειας της στρατηγικής μας. Για όλα αυτά υπάρχουν και οι αντίστοιχοι κώδικες με τα αποτελέσματα τους.

Στο τελευταίο κεφάλαιο έχουμε τις αριθμητικές μεθόδους βελτιστοποίησης. Γίνεται αναφορά στην μέθοδο Monte Carlo, με την οποία προσομοιώνουμε το "παιχνίδι ζαριού" του τρίτου κεφαλαίου. Στο τέλος εφαρμόζουμε την μέθοδο δειγματοληψίας με κριτήριο σημαντικότητας στο πρόβλημά μας.

Όλοι οι κώδικες που χρησιμοποιήθηκαν κατασκευάστηκαν στην Java .

Λέξεις κλειδιά: martingale, Markovian, βέλτιστη στρατηγική διακοπής, βέλτιστος χρόνος διακοπής, αναμενόμενο κέρδος, υπάρχον κέρδος, Monte Carlo, δειγματοληψία με κριτήριο σημαντικότητας, αρχή της μη επιτηδειότητας, αμερικανικό δικαίωμα.

Abstract

Stochastic Processes study probability models and describe time-dependent phenomena that are subject to randomness. Therefore, it is reasonable that they have application to many different disciplines and attract every mathematician. Martingale approach are a branch of Stochastic processes that have impressive applications to Mathematical Economics. “Martingale” is a French acronym that comes from the strategy that a player follows to win the game. Stochastic Processes that have the property to construct their own probabilistic structure for the future based only on the knowledge of the present, are called as Markovian approach. Markovian chains are probably the most important section of Stochastic processes

The purpose of this dissertation is to present the optimal strategy with stopping rule for discrete time using martingale and Markovian approaches. In reality the time horizon of a problem could either be finite or infinite. For that reason we will present both cases with two applications.

Specifically, in the first chapter we analyze the theory of optimal stopping. We will present martingale and Markovian approximations for discrete time and their results. At first we will refer to the martingale approximation and then to the Markovian.

In the second chapter, we are making an introduction to Mathematical Economics in order to better expand on our application for the finite time horizon. We refer to the European and American options, as well as, their pricing algorithms. We will mention the binomial model for many times and will analyze the optimal strategy of implementation of the American option. In the end, there is also the corresponding application with the code and its outputs.

In the third chapter, an implementation for the infinite time horizon is being analyzed. The problem that we present is a “dice game”. We find the optimal strategy that needs to be followed and the “victory” probabilities. This chapter is concluded with mean time of the duration of our strategy. For all of these there are and the relevant codes with their outputs.

In the last chapter, we have the optimization numerical methods. We mention the Monte Carlo method with which we simulate the “dice game” of the third chapter. In the end we implement the importance sampling method in our problem.

All the codes used were created with Java.

Key words: martingale, Markovian, optimal strategy with stopping rule, optimal stopping time, expected profit, existing profit, Monte Carlo, importance sampling, principle of no arbitrage, American option.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέπων καθηγητή κ. Μιχαήλ Λουλάκη για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε αναθέτοντας μου την εργασία αυτή. Τον ευχαριστώ για την υπομονή και την αμέριστη καθοδήγησή του με καίριες υποδείξεις καθ'όλη την διάρκεια της εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα την οικογενειά μου για την υποστήριξη τους και την πολύτιμη βοήθεια τους σε όλη την διάρκεια των σπουδών μου.

Πίνακας περιεχομένων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΔΙΑΚΟΠΗ: Γενική Θεωρία

Στο πρώτο κεφάλαιο θα αναφερθούμε στην θεωρία της βέλτιστης διακοπής. Θα παρουσιάσουμε martingale και Markovian προσεγγίσεις για διακριτό χρόνο και τα αποτελέσματα τους. Αρχικά θα αναφερθούμε στην martingale προσέγγιση και στην συνέχεια θα ακολουθήσει η Markovian.

1.1 Martingale προσέγγιση

Έστω $G = (G_n)_{n\ge 0}$ είναι μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών που ορίζονται στον φιλτραρισμένο χώρο πιθανότητας $(\Omega, F, (F_n)_{n\ge 0}, P)$. G_n είναι το κέρδος που λαμβάνουμε αν η παρατήρηση μας G σταματίσει σε χρόνο n. Κάθε G_n είναι F_n-μετρήσιμη. Τυπικά η $(F_n)_{n\ge 0}$ συμπίπτει με την $(F_n^G)_{n\ge 0}$, αλλά γενικά είναι μεγαλύτερη. F_n είναι οι διαθέσιμες πληροφορίες που έχουμε μέχρι την χρονική στιγμή n. Όλες οι αποφάσεις μας για την βέλτιστη διακοπή θα πρέπει να βασίζονται σε αυτές τις πληροφορίες.

Ορισμός (Markov time): Μαρκοβιανός χρόνος είναι η τυχαία μεταβλητή $\tau : \Omega \to \{0,1,...,\infty\}$, αν $\{\tau \le n\} \in F_n$, $\forall n \ge 0$. Ο χρόνος τ ονομάζεται χρόνος διακοπής αν $\tau < \infty$, $P-a.s.$.

Το σύνολο των χρόνων διακοπής συμβολίζεται με $\mathfrak{M}$ και το σύνολο όλων των Μαρκοβιανών χρόνων με $\overline{\mathfrak{M}}$. Τα υποσύνολα του $\mathfrak{M}$ είναι:

$$\mathfrak{M}_n^N = \{\tau \in \mathfrak{M} : n \le \tau \le N\}, \quad 0 \le n \le N$$

Η συνάρτηση που θα μελετηθεί στα προβλήματα βέλτιστης διακοπής είναι :

$$V_* = \sup_{\tau} EG_\tau$$

Όπου V_* είναι η συνάρτηση αξίας που πρέπει να υπολογίσουμε και τ_* είναι ο βέλτιστος χρόνος διακοπής στο μέγιστο της συνάρτησης.

Για να εξασφαλίσουμε την ύπαρξης της EG_τ προϋποθέτουμε ότι $E(\sup_{n\le k\le N} |G_k|) < \infty$, τοτε είναι καλά ορισμένη $\forall \tau \in \mathfrak{M}_n^N$ (με $G_N \equiv 0$ αν $N = \infty$). Ωστόσο σε πολλές περιπτώσεις μπορούμε να αντικαταστήσουμε το $|G_k|$ με G_k^+ ή G_k^-.Για λόγους απλότητας υποθέτουμε ότι η παραπάνω προϋπόθεση ισχύει πάντα.

Εισάγωντας το υποσύνολο $\mathfrak{M}_n^N$ στο πρόβλημα μας , η συνάρτηση γίνεται:

$$V_n^N = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_n^N} EG_\tau, \quad 0 \le n \le N \quad (1.1.1)$$

Μερικές φορές διαπιστώνουμε ότι το χρόνος μας τ, παίρνει την τιμή ∞ το οποίο ανήκει στο $\overline{\mathfrak{M}}$. Σε αυτή την περίπτωση υπάρχουν τρείς επιλογές, που ωστόσο για καμία δεν μπορούμε να πούμε ότι είναι καλύτερη από την άλλη. Αν $\limsup_{n\to\infty} G_n$ τότε G_∞ είναι η αξία που θα λάβουμε. Ένας άλλος τρόπος είναι να ορίσουμε αυθαίρετα την G_∞ σαν μία σταθερά. Τέλος για περισσότερη ευκολία να ορίσουμε ότι $G_\infty = \limsup_{n\to\infty} G_n$.

Μέθοδος πίσω επαγωγής (backward induction)

Για να λύσουμε την (1.1.1) με $N<\infty$, θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο πίσω επαγωγής για να δημιουργήσουμε μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $(S_n^N)_{0\le n\le N}$ που θα λύσει το πρόβλημα μας στοχαστικά. Η συνάρτηση (1.1.1) γράφεται :

$$V_n^N = \sup_{n\le\tau\le N} EG_\tau,\ \ 0\le n\le N \qquad (1.1.2)$$

με τ να είναι ο χρόνος διακοπής. Για να λυθεί το πρόβλημα πρέπει να αφήσουμε τον χρόνο να πάει προς τα πίσω και να προχωρήσει αναδρομικά ως εξής: Αν n=N τότε σταματάμε και το κέρδος μας είναι $S_N^N = G_N$. Για $n=N-1$ μπορούμε να συνεχίσουμε ή να σταματήσουμε. Στην περίπτωση που σταματήσουμε το κέρδος S_{N-1}^N είναι ίσο με G_{N-1}, αν όμως συνεχίσουμε το βέλτιστο κέρδος μας είναι S_{N-1}^N = $E(S_N^N | F_{N-1})$. Η απόφαση αυτή, αν θα συνεχίσουμε ή θα σταματήσουμε, πρέπει να βασίζεται μόνο στην πληροφορία της F_{N-1}. Πιο συγκεκριμένα, αν $G_{N-1} \ge E(S_N^N | F_{N-1})$ πρέπει να σταματήσουμε την χρονική στιγμή $n=N-1$, ενώ για $G_{N-1} < E(S_N^N | F_{N-1})$ συνεχίζουμε. Ομοίως εργαζόμαστε και για $n=N-2,....,0$. Η μέθοδος δημιουργεί μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $(S_n^N)_{0\le n\le N}$ που ορίζεται ως εξής:

$$S_n^N = G_N\ ,\ n=N \qquad (1.1.3)$$

$$S_n^N = \max(G_n, E(S_{n+1}^N | F_n))\ ,\ \ n=N-1,...,0 \qquad (1.1.4)$$

Επίσης μας δίνει τον χρόνο διακοπής:

$$\tau_n^N = \inf\{n\le k\le N : S_k^N = G_k\}\ ,\ 0\le n\le N$$

Θεώρημα (Για Πεπερασμένο χρόνο):

Εξετάζοντας το πρόβλημα της βέλτιστης διακοπής (1.1.2) και θεωρώντας ότι η υπόθεση μας ($E(\sup_{n\le k\le N}|G_k|)<\infty$) ισχύει, έχουμε $\forall 0\le n\le N$:

$$S_n^N \ge E(G_\tau|F_n), \forall\, \tau\in\mathfrak{M}_n^N$$
$$S_n^N = E(G_{\tau_n^N}|F_n) \qquad (1.1.5)\text{-}(1.1.6)$$

Επιπλέον αν $0\le n\le N$ είναι δεδομένο και σταθερό τότε έχουμε:

i. Ο χρόνος διακοπής τ_n^N είναι ο βέλτιστος.
ii. Αν τ_* είναι ο βέλτιστος χρόνος διακοπής , τότε $\tau_n^N\le\tau_*$.
iii. Η ακολουθία $(S_k^N)_{n\le k\le N}$ είναι η μικρότερη supermartingale $(S_k^N)_{n\le k\le N}$ που κυριαρχεί της $(G_k)_{n\le k\le N}$
iv. Η ακολουθία διακοπής $(S_{k\wedge\tau_n^N}^N)_{n\le k\le N}$ είναι martingale.

<u>Απόδειξη:</u>

Η απόδειξη θα πραγματοποιηθεί με επαγωγή για $n=N,N-1,\dots,0$. Σημειώστε ότι και οι δύο σχέσεις (1.1.5)-(1.1.6) είναι τετριμμένες και ικανοποιούνται όταν για $n=N$, λόγω της (1.1.3). Θα υποθέσουμε ότι ισχύουν για $n=N,N-1,\dots,k$, με $k\ge 1$, και θα δείξουμε ότι ισχύουν και για $n=k-1$.

(1.1.5): Παίρνουμε $\tau\in\mathfrak{M}_{k-1}^N$ και ορίζουμε $\bar\tau=\tau\vee k$. Στην συνέχεια με $\bar\tau\in\mathfrak{M}_k^N$ και $\{\tau\ge k\}\in F_{k-1}$ έχουμε:

$$E(G_\tau|F_{k-1}) = E(I(\tau\ge k)G_{\bar\tau}|F_{k-1}) + E(I(\tau=k-1)G_{k-1}|F_{k-1})$$

$$= I(\tau=k-1)G_{k-1} + I(\tau\ge k)E(E(G_{\bar\tau}|F_k)|F_{k-1}) \quad .(\alpha)$$

Από την επαγωγική υπόθεση, η ανισότητα (1.1.5) ισχύει για $n=k$. Όμως $\bar\tau\in\mathfrak{M}_k^N$ το οποίο σημαίνει ότι $E(G_{\bar\tau}|F_k)\le S_k^N$. Από την άλλη πλευρά, η (1.1.4) μας δείχνει ότι $G_{k-1}\le S_{k-1}^N$ και $E(S_{k-1}^N|F_{k-1})\le S_{k-1}^N$. Με την εφαρμογή των τριών αυτών ανισοτήτων στην παραπάνω σχέση έχουμε:

$$E(G_\tau|F_{k-1}) \le I(\tau=k-1)S_{k-1}^N + I(\tau\ge k)E(S_k^N|F_{k-1})$$

$$\le I(\tau=k-1)S_{k-1}^N + I(\tau\ge k)S_{k-1}^N = S_{k-1}^N \quad .(\beta)$$

Το οποίο μας δείχνει ότι η (1.1.5) ισχύει και για $n=k-1$.

(1.1.6): Για να αποδείξουμε ότι η (1.1.6) ισχύει για $n=k-1$ είναι αρκετό να ελέγξουμε αν οι ανισότητες (α) και (β) γίνονται ισότητες για $\tau=\tau_{k-1}^N$. Από

$$\tau_n^N=\inf\{n\le k\le N: S_k^N=G_k\}\text{.(γ)}$$

σημειώνουμε ότι $\tau_{k-1}^N=\tau_k^N$ για $\{\tau_{k-1}^N\ge k\}$, έτσι ώστε από την (α) με

$\tau=\tau_{k-1}^N$ και με την υπόθεση επαγωγής (1.1.6) για $n=k$ έχουμε:

$$E(G_{\tau_{k-1}^N}\left|F_{k-1}\right.)=I(\tau_{k-1}^N=k-1)G_{k-1}+I(\tau_{k-1}^N\ge k)E(E(G_{\tau_k^N}\left|F_k\right.)\left|F_{k-1}\right.)$$

$$=I(\tau_{k-1}^N=k-1)G_{k-1}+I(\tau_{k-1}^N\ge k)E(S_k^N\left|F_{k-1}\right.)$$

$$=I(\tau_{k-1}^N=k-1)S_{k-1}^N+I(\tau_{k-1}^N\ge k)S_{k-1}^N=S_{k-1}^N$$

όπου στην προτελευταία ισότητα χρησιμοποιούμε ότι $G_{k-1}=S_{k-1}^N$ για $\{\tau_{k-1}^N=\kappa-1\}$ απο (γ), καθώς επίσης και $E(S_k^N\left|F_{k-1}\right.)=S_{k-1}^N$ για $\{\tau_{k-1}^N\ge\kappa\}$ απο την (γ) και (1.1.4). Αυτό δείχνει ότι η (1.1.6) ισχύει για $n=k-1$.

(i): Λαμβάνοντας Ε στην (1.1.5) βρίσκουμε ότι $ES_n^N\ge EG_\tau$ για όλα τα $\tau\in\mathfrak{M}_n^N$ και ως εκ τούτου με τη λήψη του supremum για όλα τα $\tau\in\mathfrak{M}_n^N$ βλέπουμε ότι $ES_n^N\ge V_n^N$. Από την άλλη πλευρά από την (1.1.6) έχουμε $ES_n^N=EG_{\tau_n^N}$ το οποίο μας φανερώνει ότι $ES_n^N\le V_n^N$. Οι δύο ανισότητες μας δίνουν την ισότητα $V_n^N=ES_n^N$, και από την στιγμή που ισχύει $ES_n^N=EG_{\tau_n^N}$, θα ισχύε και $V_n^N=EG_{\tau_n^N}$.

(ii): Ισχυριζόμαστε ότι η βελτιστοποίηση του τ_* σημαίνει ότι $S_{\tau_*}^N=G_{\tau_*}, P-a.s.$ Πράγματι, αν αυτό δεν συνέβαινε, χρησιμοποιώντας ότι $S_k^N\ge G_k,\forall n\le k\le N$ από (1.1.3)-(1.1.4), βλέπουμε ότι $S_{\tau_*}^N\ge G_{\tau_*}$ με $P(S_{\tau_*}^N>G_{\tau_*})>0$. Έτσι προκύπτει ότι $EG_{\tau_*}<ES_{\tau_*}^N\le ES_n^N=V_n^N$. Η αυστηρή ανισότητα έρχεται σε αντίθεση με το γεγονός ότι το τ_* είναι βέλτιστο. Επομένως $S_{\tau_*}^N=G_{\tau_*}, P-a.s$ όπως ισχυριστήκαμε και δεδομένου ότι $\tau_n^N\le\tau_*\ P-a.s.$ προκύπτει από τον ορισμό της (γ).

(iii): Από την (β) έχουμε

$$S_n^N\ge E(S_{k+1}^N\left|F_k\right.)$$

για όλα τα $n \le k \le N-1$ δείχνει ότι $(S_n^N)_{n\le k\le N}$ είναι supermartingale. Από την (1.1.3) και (1.1.4) προκύπτει ότι $S_k^N \ge G_k \;\; P-a.s.$ για όλα τα $n \le k \le N$ πράγμα που σημαίνει ότι $(S_n^N)_{n\le k\le N}$ επικρατεί της $(G_k)_{n\le k\le N}$. Επιπλέον αν $(\widetilde{S}_k)_{n\le k\le N}$ είναι μία άλλη supermartingale που επικρατεί της $(G_k)_{n\le k\le N}$, τότε ο ισχυρισμός ότι $\widetilde{S}_k \ge S_n^N$ $P-a.s.$ μπορεί να επαληθευτεί με επαγωγη για $k = N, N-1,\ldots,l$. Πράγματι αν $k = N$ τότε ο ισχυρισμός είναι ακόλουθως από την (1.1.3). Υποθέτουμε ότι $\widetilde{S}_k \ge S_n^N$ $P-a.s.$ για $k = N, N-1,\ldots,l$ με $l \ge n+1$ από την (1.1.4) έχουμε ότι :

$$S_{l-1}^N = \max(G_{l-1}, E(S_l^N | F_{l-1})) \le \max(G_{l-1}, E(\widetilde{S}_l | F_{l-1})) \le \widetilde{S}_{l-1} \;\; P-a.s.$$

χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της supermartingale $(\widetilde{S}_k)_{n\le k\le N}$ το ποιο αποδεικνύει και τον ισχυρισμό.

(iv): Για να αποδείξουμε την martingale ιδιότητα

$$E(S_{(k+1)\wedge\tau_n^N}^N | F_k) = S_{k\wedge\tau_n^N}^N$$

με $n \le k \le N-1$ δοσμένο και σταθερό, σημειώνουμε ότι

$$\begin{aligned} E(S_{(k+1)\wedge\tau_n^N}^N | F_k) &= E(I(\tau_n^N \le k) S_{k\wedge\tau_n^N}^N | F_k) + E(I(\tau_n^N \ge k+1) S_{k+1}^N | F_k) \\ &= I(\tau_n^N \le k) S_{k\wedge\tau_n^N}^N + I(\tau_n^N \ge k+1) \mathrm{E}(S_{k+1}^N | F_k) \\ &= I(\tau_n^N \le k) S_{k\wedge\tau_n^N}^N + I(\tau_n^N \ge k+1) S_k^N = S_{k\wedge\tau_n^N}^N \end{aligned}$$

όπου η προτελευταία ισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι $S_k^N = E(S_{k+1}^N | F_k)$ για $\{\tau_n^N \ge k+1\}$, ενώ $\{\tau_n^N \ge k+1\} \in F_k$ από την στιγμή που τ_n^N είναι χρόνος διακοπής . Άρα η απόδειξή μας είναι πλήρης.

■

Από το παραπάνω θεώρημα διακρίνουμε ότι η λύση του προβλήματος μας V_0^N (βέλτιστη διακοπή), μπορεί να πραγματοποιηθεί λύνοντας επαγωγικά τα προβλήματα V_n^N για $n = N, N-1,\ldots,0$. Μία γενική αρχή που λαμβάνεται στο πρόβλημα μας είναι: Αν ο κανόνας διακοπής τ_0^N είναι βέλτιστος για την V_0^N και δεν ήταν βέλτιστος για να σταματήσει στο χρονικό διάστημα $\{0,1,\ldots,n-1\}$, τότε ξεκινώντας την παρατήρησή μας στο χρόνο n και βασιζόμενοι στην πληροφορία της F_n, αυτός ο κανόνας διακοπής θα είναι βέλτιστος και για την V_n^N .

Μέθοδος σημαντικού άνω πέρατος (essential supremum)

Η μέθοδος πίσω επαγωγής χρειάζεται να έχει πεπερασμένο N. Ώστόσο οι τ.μ S_n^N που ορίζονται από δύο επαναλαμβανόμενες σχέσεις (1.1.3)-(1.1.4), φανερώνουν ένα χαρακτηριστικό το οποίο δύναται να επεκταθεί και σε μη πεπερασμένο N και θα αποτελεί την βάση για αυτή την μέθοδο.

Τα παραπάνω μαζί με τα (1.1.5)-(1.1.6) δείχνουν ότι ισχύει η ακόλουθος τύπος:

$$S_n^N = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_n^N} E(G_\tau \mid F_n) \qquad (1.1.7)$$

Όπως βλέπουμε προκύπτει ένα πρόβλημα στην περίπτωση που το εξαιρούμενο σύνολο P-null εξαρτάται από συγκεκριμένο $\tau \in \mathfrak{M}_n^N$. Έτσι μπορεί να αποτύχει η παραπάνω ταυτότητα, αν παίρνει μη μετρήσιμα τ γιατί το δεξί μέρος δεν χρειάζεται να ορίζετε από μία μετρήσιμη συνάρτηση. Για να ξεπεράσουμε αυτό το πρόβλημα χρησιμοποιούμε την μέθοδο του σημαντικού άνω πέρατος (essential supremum).

Λήμμα (essential supremum):

Έστω ότι $\{Z_a : a \in I\}$ είναι μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών που ορίζονται στο (Ω, G, P), όπου I είναι ένα αυθαίρετο σύνολο. Τότε $\exists J \subseteq I$ μετρήσιμο, τέτοιο ώστε η τυχαία μεταβλητή $Z^* : \Omega \to \overline{R}$ ορίζεται ως εξής:

$$Z^* = \sup_{a \in J} Z_a$$

και πληροί τις ακόλουθες ιδιότητες:

i. $P(Z_a \le Z^*) = 1, \forall a \in I$
ii. Αν $\overline{Z} : \Omega \to \overline{R}$ είναι μια άλλη τ.μ που ικανοποιεί την προηγούμενη ιδιότητα στην θέση της Z^*, τότε $P(Z^* \le \overline{Z}) = 1$.

Η τ.μ. Z^* ονομάζεται σημαντικό άνω πέρας της $\{Z_a : a \in I\}$ και συμβολίζεται ως εξής:

$$Z^* = ess\sup_{a \in I} Z_a$$

Επιπλέον το σύνολο $\{Z_a : a \in I\}$ είναι άνω κατευθυνόμενο, με την έννοια ότι $\forall a, b \in I,\ \exists c \in I$ τέτοιο ώστε $Z_a \vee Z_b \le Z_c$ P-a.s, τότε το σύνολο $J = \{a_n : n \ge 1\}$

μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε (iii). $Z^* = \lim_{n\to\infty} Z_{a_n}$ P-a.s. όπου $Z_{a_1} \le Z_{a_2} \le ....$ P-a.s. . Αυτό θα μας φανεί χρήσιμο για την απόδειξη σε μη-πεπερασμένο N.

<u>Απόδειξη:</u> Από την στιγμή που $x \mapsto (2/\pi)\arctan(x)$ είναι μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση από $\overline{\mathbb{R}}$ στο $[-1,1]$, δεν μας περιορίζει κανένας να υποθέσουμε ότι $|Z_a| \le 1$ για όλα τα $a \in T$. Σε αντίθετη περίπτωση αντικαθιστούμε την Z_a με $(2/\pi)\arctan(Z_a)$ για $a \in I$.

Ας θέσουμε ως $\mathcal{C}$ την οικογένεια όλων των μετρήσιμων υποσυνόλων C των I. Επιλέγουμε μια αύξουσα ακολουθία $\{C_n : n \ge 1\}$ στο $\mathcal{C}$ έτσι ώστε

$$a = \sup_{C\in\mathcal{C}} E(\sup_{a\in C} Z_a) = \sup_{n\ge 1} E(\sup_{a\in C_n} Z_a)$$

Τότε το σύνολο $J := \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ είναι ένα μετρήσιμο υποσύνολο του I και ισχυριζόμαστε ότι Z^* ορίζεται από την

$$Z^* = \sup_{a\in J} Z_a$$

και ικανοποιεί τις ιδιότητες. Για να επαληθεύσουμε τον ισχυρισμό μας παίρνουμε αυθαίρετα ένα α ∈ I. Αν α ∈ J τότε

$$Z_a \le Z^*$$

Από την άλλη πλευρά, αν $a \notin J$ υποθέτουμε ότι $P(Z_a > Z^*) > 0$, τότε $a < E(Z^* \vee Z_a) \le a$ από την στιγμή που $a = EZ^* \in [-1,1]$ και $J \cup \{a\}$ ανήκει στο $\mathcal{C}$. Επειδή η αυστηρή ανισότητα είναι προφανώς αδύνατη, βλέπουμε ότι η (i) ισχύειε για όλα τα $a \in I$ όπως ισχυριστήκαμε. Επιπλέον το (ii) είναι φυσικό ακόλουθο για J μετρήσιμο.

Τέλος αν η (iii) ικανοποιείτε τότε το αρχικό αριθμήσιμο σύνολο $J = \{a_1^0, a_2^0, ...\}$ μπορεί να αντικατασταθεί με ένα καινούργιο αριθμήσιμο σύνολο $J = \{a_1, a_2, ...\}$ αν ορίσουμε $a_1 = a_1^0$, και στην συνέχεια επιλέξουμε επαγωγικά $a_{n+1} \ge a_n \vee a_{n+1}^0$ για $n \ge 1$ όπου $\gamma \ge \alpha \vee \beta$ αντιστοιχούν σε $Z_\alpha, Z_\beta, Z_\gamma$ έτσι ώστε $Z_\alpha \vee Z_\beta \le Z_\gamma$ $P - a.s.$

■

Επομένως με το essential supremum οι (1.1.5) και (1.1.6) μπορούν να γραφούν και ως εξής:

$$S_n^N = ess\sup_{n\le\tau\le N} E(G_\tau \,|F_n)\,,\quad \forall 0 \le n \le N$$

Αυτή η ταυτότητα μας παρέχει ένα επιπλέον χαρακτηριστικό για την ακολουθία $(S_n^N)_{0\le n\le N}$. Το πλεονέκτημα της είναι ότι μπορεί να επεκταθεί και σε μη-πεπερασμένο N.

Ας εξετάσουμε το πρόβλημα (1.1.1) για N = ∞. Έχουμε :

$$V_n = \sup_{\tau\ge n} EG_\tau\,,\quad n \ge 0 \quad (1.1.8)$$

Με τ να είναι ο χρόνος διακοπής. Για να το λύσουμε θα πρέπει να εξετάσουμε την ακολουθία $(S_n)_{n\ge0}$ που ορίζεται ως εξής:

$$S_n = ess\sup_{\tau\ge n} E(G_\tau \,|F_n) \quad (1.1.9)$$

με χρόνο διακοπής

$$\tau_n = \inf\{k \ge n : S_k = G_k\}\,,\quad n \ge 0 \quad (1.1.10)$$

όπου $\inf\varnothing = \infty$.

Θεώρημα (Για Μη Πεπερασμένο Χρόνο)

Για το βέλτιστο πρόβλημα διακοπής (1.1.9), θεωρώντας ότι ισχύει $E(\sup_{n\le k\le N}|G_k|) < \infty$, ισχύουν και οι ακόλουθοι τύποι:

$$S_n = \max(G_n, E(S_{n+1}\,|F_n))\,,\quad \forall n \ge 0 \quad (1.1.11)$$

Υπέθεσε επίσης ότι χρειάζεται ότι

$$P(\tau_n < \infty) = 1\,,\quad n \ge 0$$

Τότε έχουμε για όλα τα $n \ge 0$:

$$S_n \ge E(G_\tau\,|F_n), \forall\,\tau \in \mathfrak{M}_n \quad (1.1.12)$$

$$S_n = E(G_{\tau_n}\,|F_n) \quad (1.1.13)$$

Επιπλέον αν το $n \ge 0$ είναι δοσμένο και σταθερό ,έχουμε:

i. Ο τ_n είναι ο βέλτιστος χρόνος διακοπής για την (1.1.9)

ii. Αν τ_* είναι ο βέλτιστος χρόνος διακοπής για την (1.1.9) τότε $\tau_n \leq \tau_*$ P-a.s.

iii. Η $(S_k)_{k\geq n}$ είναι η μικρότερη supermartingale ακολουθία που κυριαρχεί της $(G_k)_{k\geq n}$.

iv. Η σταματημένη ακολουθία $(S_{k\wedge\tau_n})_{k\geq n}$ είναι martingale.

Εν τέλει διαπιστώνουμε ότι δεν υπάρχει βέλτιστος χρόνος στην (1.1.9), αν η συνθήκη $P(\tau_n < \infty) = 1$ αποτύχει, έτσι ώστε $P(\tau_n = \infty) > 0$.

Απόδειξη:

Αρχικά θα δείξουμε ότι αριστερή πλευρά είναι μικρότερη από την δεξιά όταν το $n \geq 0$ είναι δοσμένο και σταθερό. Παίρνουμε $\tau \in \mathfrak{M}_n$ και το σύνολο $\bar{\tau} = \tau \vee (n+1)$. Τότε $\bar{\tau} \in \mathfrak{M}_{n+1}$ από τη στιγμή που $\{\tau \geq n+1\} \in F_n$, έχουμε:

$$E(G_\tau \left| F_n \right.) = E(I(\tau = n)G_n \left| F_n \right.) + E(I(\tau \geq n+1)G_{\bar{\tau}} \left| F_n \right.)$$

$$= I(\tau = n)G_n + I(\tau \geq n+1)E(G_{\bar{\tau}} \left| F_n \right.)$$

$$= I(\tau = n)G_n + I(\tau \geq n+1)E(E(G_{\bar{\tau}} \left| F_{n+1} \right.) \left| F_n \right.)$$

$$\leq I(\tau = n)G_n + I(\tau \geq n+1)E(S_{n+1} \left| F_n \right.) \leq \max(G_n, E(S_{n+1} \left| F_n \right.))$$

Από αυτή την ανισότητα προκύπτει ότι

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\geq n} E(G_n \left| F_n \right.) \leq \max(G_n, E(S_{n+1} \left| F_n \right.))$$

που είναι η επιθυμητή. Για να αποδείξουμε αντίστροφα την ανισότητα αρχικά σημειώνουμε ότι $S_n \geq G_n, P-a.s.$ από τον ορισμό της S_n επομένως $S_n \geq E(S_{n+1} \left| F_n \right.)$, που είναι supermartingale ιδιότητα της $(S_n)_{n\geq 0}$. Για την επαλήθευση της ανισότητας ας δείξουμε αρχικά ότι η οικογένεια $\{E(G_\tau \left| F_{n+1} \right.) : \tau \in \mathfrak{M}_{n+1}\}$ ικανοποιεί το (iii) του λήμματος. Σημειώνουμε ότι αν σ_1 και σ_2 είναι από $\mathfrak{M}_{n+1}$ και θέσουμε $\sigma_3 = \sigma_1 I_A + \sigma_2 I_{A^C}$, όπου $A = \{E(G_{\sigma_1} \left| F_{n+1} \right.) \geq E(G_{\sigma_2} \left| F_{n+1} \right.)\}$, τότε το σ_3 ανήκει στο $\mathfrak{M}_{n+1}$ και έχουμε

$$E(G_{\sigma_3} \left| F_{n+1} \right.) = E(G_{\sigma_1} I_A + G_{\sigma_2} I_{A^C} \left| F_{n+1} \right.)$$

$$= I_A E(G_{\sigma_1} \left| F_{n+1} \right.) + I_{A^C} E(G_{\sigma_2} \left| F_{n+1} \right.)$$

$$= E(G_{\sigma_1} \left| F_{n+1} \right.) \vee E(G_{\sigma_2} \left| F_{n+1} \right.)$$

που το ικανοποιεί. Από $Z^* = \lim_{n\to\infty} Z_{a_n}$ υπάρχει μία ακολουθία $\{\sigma_k : k \geq 1\}$ στο $\mathfrak{M}_{n+1}$ τέτοια ώστε

$$ess\sup_{\tau\geq n+1} E(G_\tau \left| F_{n+1}\right.) = \lim_{k\to\infty} E(G_{\sigma_k} \left| F_{n+1}\right.)$$

όπου $E(G_{\sigma_1} \left| F_{n+1}\right.) \leq E(G_{\sigma_2} \left| F_{n+1}\right.) \leq ..., P - a.s.$ Από την στιγμή που το αριστερό μέρος της ισότητας , ισούται με S_{n+1}, από την συνθήκη του θεωρήματος μονότονης σύγκλισης έχουμε:

$$E(S_{n+1} \left| F_n\right.) = E(\lim_{k\to\infty} E(G_{\sigma_k} \left| F_{n+1}\right.) \left| F_n\right.) = \lim_{k\to\infty} E(E(G_{\sigma_k} \left| F_{n+1}\right.) \left| F_n\right.) = \lim_{k\to\infty} E(G_{\sigma_k} \left| F_n\right.) \leq S_n$$

Όπου η τελευταία ανισότητα είναι από τον ορισμό της S_n. Η απόδειξη της (1.1.11) είναι πλήρης.

(1.1.12): Η ανισότητα προκύπτει άμεσα από τον ορισμό.

(1.1.13): Η απόδειξη για το (iv) που ακολουθεί δείχνει ότι η ακολουθία $(S_{k\wedge\tau_n})_{k\geq n}$ είναι martingale. Επιπλέον θέτωντας $G_n^* = \sup_{k\geq n} \left| G_k \right|$ έχουμε

$$\left| S_k \right| \leq ess\sup_{\tau\geq k} E(\left| G_\tau \right| \left| F_k \right|) \leq E(G_n^* \left| F_k\right.)$$

Για όλα τα $k \geq n$. Επειδή η G_n^* είναι ολοκληρώσιμη , προκύπτει από την παραπάνω ανισότητα ότι η $(S_k)_{k\geq n}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη. Εφαρμόζοντας την optional sampling στην $(M_k)_{k\geq n} = (S_{k\wedge\tau_n})_{k\geq n}$ με χρόνο διακοπής τ_n έχουμε

$$M_n = E(M_{\tau_n} \left| F_n\right.).$$

Με $M_n = S_n$ και $M_{\tau_n} = S_{\tau_n}$ βλέπουμε ότι ισούται με την (1.1.13).

(i): Αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο όπως στο θεώρημα για πεπερασμένο N.

(ii): Αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο όπως στο θεώρημα για πεπερασμένο N.

(iii): Έχουμε αποδείξει ότι η $(S_n)_{k\geq n}$ είναι supermartingale. Επιπλέον από την (1.1.9) έχουμε ότι $S_k \geq G_k, P - a.s.$ για όλα τα $k \geq n$ που σημαίνει ότι η $(S_n)_{k\geq n}$ κυριαρχεί επι της $(G_n)_{k\geq n}$. Ας υποθέσω στο τέλος ότι $(\widetilde{S}_n)_{k\geq n}$ είναι μία άλλη supermartingale που κυριαρχει της $(G_n)_{k\geq n}$, τότε έχουμε

$$S_k = E(G_{\tau_k} \left| F_k\right.) \leq E(\widetilde{S}_{\tau_k} \left| F_k\right.) \leq \widetilde{S}_k$$

για όλα τα $k \geq n$ όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει από το θεώρημα optional sampling.

(iv): Αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο όπως στο θεώρημα για πεπερασμένο N.

∎

Ένα τελευταίο θεώρημα που χρειάζεται να αναφέρουμε είναι ο συνδιασμός των δύο παραπάνω μεθόδων. Όταν δηλαδή έχουμε πεπερασμένο N που τείνει στο άπειρο.

Σε αυτή την περίπτωση από την (1.1.8) σημειώνουμε ότι $N \mapsto S_n^N$ και $N \mapsto \tau_n^N$ αυξάνονται έτσι ώστε:

$$S_n^\infty = \lim_{N\to\infty} S_n^N \ , \quad \tau_n^\infty = \lim_{N\to\infty} \tau_n^N$$

υπάρχει P-a.s. $\forall n \geq 0$. Όπως επίσης και $N \mapsto V_n^N$ με

$$V_n^\infty = \lim_{N\to\infty} V_n^N \ , \ \forall n \geq 0$$

Από $S_n^N = \underset{n\leq\tau\leq N}{ess\sup} E(G_\tau \left| F_n \right.)$, $S_n = \underset{\tau\geq n}{ess\sup} E(G_\tau \left| F_n \right.)$

Έχουμε :

$$S_n^\infty \leq S_n \ , \ \tau_n^\infty \leq \tau_n$$

Ομοίως

$$V_n^\infty \leq V_n$$

$\forall n \geq 0$.

Θεώρημα (Από πεπερασμένο σε μη πεπερασμένο ορίζοντα):

Εξετάζοντας τα προβλήματα βέτιστης διακοπής (1.1.2), (1.1.9) και ισχύοντας $E(\sup_{n\leq k\leq N} \left| G_k \right|) < \infty$.

Ισχύουν οι τύποι :

$$S_n^\infty \leq S_n \,, \tau_n^\infty \leq \tau_n \,, \ V_n^\infty \leq V_n \,, \forall n \geq 0 \,.$$

<u>Απόδειξη:</u>

Αφήνουμε το $N \to \infty$ και χρησιμοποιώντας τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μονότονης σύγκλισης, έχουμε τις ακόλουθες επαναλαμβανόμενες σχέσεις:

$$S_n^\infty = \max(G_n, E(S_{n+1}^\infty | F_n))$$

για όλα τα $n \geq 0$. Συγκεκριμένα , έπεται ότι $(S_n^\infty)_{n\geq 0}$ είναι supermantigale. Από την στιγμή που $S_n^\infty \geq G_n, P-a.s.$, βλέπουμε ότι $(S_n^\infty)^- \leq G_n^- \leq \sup_{n\geq 0} G_n^-, P-a.s.$ για όλα τα $n \geq 0$ το οποίο σημαίνει από την $E(\sup_{n\leq k\leq N} |G_k|) < \infty$ ότι η $((S_n^\infty)^-)_{n\geq 0}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη. Επιπλέον από optional sampling έχουμε

$$S_n^\infty \geq E(S_\tau^\infty | F_n)$$

για $\tau \in \mathfrak{M}_n$. Όμως $S_k^\infty \geq G_k$ για όλα τα $k \geq n$ από το οποίο συνεπάγεται ότι $S_\tau^\infty \geq G_\tau, P-a.s.$ για όλα τα $\mathfrak{M}_n$ και

$$E(S_\tau^\infty | F_n) \geq E(G_\tau | F_n)$$

για όλα τα $\tau \in \mathfrak{M}_n$. Συνδυάζοντας τις δύο παραπάνω ανισότητες , από την (1.1.9) έχουμε ότι $S_n^\infty \geq S_n \;\; P-a.s.$ για $n \geq 0$. Δεδομένου ότι ισχύει και το αντίστροφο της ανισότητας έχουμε $S_n^\infty = S_n \;\; P-a.s.$ για $n \geq 0$. Από αυτό επίσης προκύπτει ότι $\tau_n^\infty = \tau_n \;\; P-a.s.$ για $n \geq 0$. Τέλος η τρίτη ταυτότητα , $V_n^\infty = V_n$ προκύπτει από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης . Άρα η απόδειξη είναι πλήρης.

■

1.2 Μαρκοβιανή προσέγγιση

Υποθέτουμε ότι έχουμε μια χρονικά-ομοιογενή Μαρκοβιανή αλυσίδα $\mathrm{X} = (\mathrm{X}_n)_{n\geq 0}$ που ορίζεται στον φιλτραρισμένο χώρο πιθανότητας $(\Omega, F, (F_n)_{n\geq 0}, P_x)$ και παίρνει τιμές από τον μετρήσιμο χώρο $(E, \mathcal{B})$ όπου για απλότητα θα υποθέσουμε ότι $E = \mathbb{R}^d$ για κάποια $d \geq 1$ και $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ είναι σ-άλγεβρα Borel στο $\mathbb{R}^d$. Εικάζεται ότι η αλυσίδα ξεκινάει από το x υπο την P_x για $x \in E$. Θεωρείτε επίσης ότι η απεικόνιση $x \mapsto P_x(f)$ είναι μετρήσιμη $\forall f \in F$ και ακολουθεί ότι η απεικόνιση $x \mapsto E_x(Z)$ είναι μετρήσιμη για κάθε τ.μ. Z. Εν τέλει χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι (Ω, F) ισούται με τον κανονικό χώρο $(E^{\mathbb{N}_0}, \mathcal{B}^{\mathbb{N}_0})$ με αποτέλεσμα η εκτιμήτρια μετατόπισης $\theta_n : \Omega \to \Omega$ να είναι καλά ορισμένη από $\theta_n(\omega)(k) = \omega(n+k)$ για $\omega = (\omega(k))_{k\geq 0} \in \Omega$ και $n, k \geq 0$.

(Υπενθύμιση $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$)

Έστω μια μετρήσιμη συνάρτηση $G: E \to \mathbb{R}$, που ικανοποιεί την συνθήκη (με $G(X_N) = 0, \alpha\nu N = \infty$):

$$E_x(\sup_{0 \le n \le N} |G(X_n)|) < \infty, \forall x \in E \quad (1.2.1)$$

Εξετάζουμε το πρόβλημα βέλτιστης διακοπής:

$$V^N(x) = \sup_{0 \le \tau \le N} E_x G(X_\tau) \quad (1.2.2)$$

Με $x \in E$ και το supremum επιλέγεται από όλους τους χρόνους διακοπής τ της X. Να σημειώσουμε ότι N εδώ μπορεί να είναι το άπειρο. Σε αυτή την περίπτωση ακόμα ισχυριζόμαστε ότι το supremum επιλέγεται από τους χρόνους διακοπής τ , δηλαδή από τους χρόνους Markov τ με $\tau < \infty$ P-a.s. Με αυτό τον τρόπο οποιαδήποτε περιγραφή της $G(X_\infty)$ είναι άνευ σημασίας για το προβλημά μας (1.2.2).

Για να λύσουμε το πρόβλημα (1.2.2) όταν $N < \infty$, θέτουμε :

$$G_n = G(X_n)$$

Για $n \ge 0$ η (1.2.2) απλοποιείται στο πρόβλημα (1.1.2), όπου στις θέσεις των P και E έχουμε P_x και E_x αντίστοιχα με $x \in E$. Έχοντας απλοποιήσει το προβλημά μας μπορούμε πλέον να εφαρμοσουμε και την μέθοδο πίσω επαγωγής που μας οδηγεί σε μία ακολουθία τ.μ. $(S_n^N)_{0 \le n \le N}$ και χρόνο διακοπής τ_n^N. Η S_n^N είναι :

$$S_n^N = V^{N-n}(X_n), \; 0 \le n \le N \quad (1.2.3)$$

Και χρόνο διακοπής

$$\tau_D = \inf\{0 \le n \le N : X_n \in D_n\} \quad (1.2.4)$$

έχουμε θέσει

$$C_n = \{x \in E : V^{N-n}(x) > G(x)\} \quad (1.2.5)$$

$$D_n = \{x \in E : V^{N-n}(x) = G(x)\} \quad (1.2.6)$$

με $0 \le n \le N$.

Τέλος ο τελεστής μετάβασης T της X είναι:

$$TF(x) = E_x F(X_1)$$

με $x \in E$ και $F : E \to \mathbb{R}$ να είναι μια μετρήσιμη συνάρτηση έτσι ώστε η $F(X_1)$ να είναι ολοκληρώσιμη σε σχέση με την P_x , $\forall x \in E$.

Θεώρημα (Πεπερασμένο N: Ομοιογενής χρόνος):

Έχουμε το πρόβλημα βέλτιστης διακοπής (1.2.2) ισχύοντας η συνθήση (1.2.1), τότε η συνάρτηση αξίας V^n ικανοποιεί τις εξισώσεις Wald-Bellman.

$$V^n(x) = \max(G(x), TV^{n-1}(x)) \quad (1.2.7)$$

με $x \in E$ και *n=1,….,N.* Όπου $V^0 = G$. Επιπλέον έχουμε:

i. Ο χρόνος διακοπής τ_D είναι βέλτιστος.
ii. Αν τ_* είναι βέλτιστος χρόνος διακοπής , τότε $\tau_D \leq \tau_*$ P-a.s. για κάθε $x \in E$.
iii. Η ακολουθία $(V^{N-n}(X_n))_{0 \leq n \leq N}$ είναι η μικρότερη supermartingale που κυριαρχεί της $(G(X_n))_{0 \leq n \leq N}$ υπο την P_x για $x \in E$ δεδομένο και σταθερό.
iv. Η σταματημένη ακολουθία $(V^{N-n \wedge \tau_D}(X_{n \wedge \tau_D}))_{0 \leq n \leq N}$ είναι martingale υπο την P_x για κάθε $x \in E$.

<u>Απόδειξη:</u>

Για να επαληθεύσουμε την (1.2.3) ανατρέχουμε στην (1.1.6) και έχουμε

$$S_n^N = E_x(G(X_{\tau_n^N}) \,|\, F_n), \; 0 \leq n \leq N$$

Από την στιγμή που $S_k^{N-n} \circ \theta_n = S_{n+k}^N$, παίρνουμε ότι το τ_n^N ικανοποιεί την σχέση :

$$\tau_n^N = \inf\{n \leq k \leq N : S_k^N = G(X_k)\} = n + \tau_0^{N-n} \circ \theta_n, \; 0 \leq n \leq N$$

Από τα παραπάνω και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα Markov έχουμε

$$S_n^N = E_x(G(X_{n+\tau_0^{N-n} \circ \theta_n}) \,|\, F_n) = E_x(G(X_{\tau_0^{N-n}}) \circ \theta_n \,|\, F_n) = E_{X_n} G(X_{\tau_0^{N-n}}) = V^{N-n}(X_n)$$

με την τελευταία ισότητα να προκύπτει από (1.1.5) και (1.1.6) από το οποίο συνεπάγεται

$$E_x S_0^{N-n} = E_x(G(X_{\tau_0^{N-n}}) = \sup_{0 \leq \tau \leq N-n} E_x G(X_\tau) = V^{N-n}(x)$$

με $0 \leq n \leq N$ και $x \in E$. Επομένως η (1.2.3) ισχύει.

Για να επαληθεύσουμε την (1.2.7) ανατρέχουμε στην (1.1.4) και χρησιμοποιώντας την (1.2.3) όπως επίσης και την ιδιότητα Markov έχουμε:

$$V^{N-n}(X_n) = \max(G(X_n), E_x(V^{N-n-1}(X_{n+1}) \big| F_n))$$

$$= \max(G(X_n), E_x(V^{N-n-1}(X_1) \circ \theta_n \big| F_n))$$

$$= \max(G(X_n), E_{X_n}(V^{N-n-1}(X_1)))$$

$$= \max(G(X_n), TV^{N-n-1}(X_n))$$

για όλα τα $0 \le n \le N$. Για $n = 0$ και χρησιμοποιώντας $X_0 = x$ υπο την P_x, η παραπάνω ισότητα μας δίνει την (1.2.3). Επομένως η απόδειξη είναι πλήρης.

■

Θέτουμε έναν τελεστή Q:

$$QF(x) = \max(G(x), TF(x)) \quad (1.2.8)$$

με $x \in E$ και $F: E \to \mathbb{R}$ να είναι μια μετρήσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει $F(X_1) \in L^1(P_x)$ για $x \in E$. Τότε οι εξισώσεις (1.2.7) γράφονται :

$$V^n(x) = Q^n G(x), \; 1 \le n \le N \quad (1.2.9)$$

Q^n είναι η νιοστή δύναμη του Q. Ο παραπάνω αναδρομικός τυπος είναι μια αποτελεσματική μέθοδος για να βρούμε το V^N όταν $Law(X_1 \big| P_x)$ με $x \in E$. (Σημείωση: $P_x^X = Law(X \big| X_0 = x)$)

Ας μελετήσουμε τώρα την περίπτωση που έχουμε μη-ομογενή χρόνο. Θέτουμε $Z_n = (n, X_n)$ με $n \ge 0$ γνωρίζουμε ότι $Z = (Z_n)_{n \ge 0}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα ομογενής χρονικά. Δίνεται μετρήσιμη συνάρτηση $G: \{0,1,\dots,N\} \otimes E \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί την σχέση :

$$E_{n,x}\Big(\sup_{0 \le k \le N-n} \big|G(n+k, X_{n+k})\big|\Big) < \infty, \; \forall 0 \le n \le N, x \in E \quad (1.2.1')$$

και η (1.2.2) γίνεται

$$V^N(n,x) = \sup_{0 \le \tau \le N-n} E_{n,x} G(n+\tau, X_{n+\tau}) \quad (1.2.2')$$

το supremum επιλέγεται από όλους τους χρόνους διακοπής **τ** της X και $X_n = x$ υπο την $P_{n,x}$ με $0 \le n \le N, x \in E$ δεδομένα και σταθερά.

Ένα από τα παραπάνω επιβεβαιώνει ότι

$$S_{n+k}^N = V^N(n+k, X_{n+k}) \;,\; 0 \le n \le N-n \quad (1.2.10)$$

Αν λάβουμε υπόψιν και τον (1.1.4) όπως επίσης και μία ιδιότητα Markov έχουμε:

$$V^N(n+k, X_{n+k}) = \max(G(Z_{n+k}), E_{Z_{n+k}}(V^N(Z_1))) \;,\; 0 \le k \le N-n-1 \quad (1.2.11)$$

με $z = (n,x), 0 \le n \le N$ και $x \in E$. Θέτοντας $k = 0$ και χρησιμοποιώντας $Z_n = z = (n,x)$ υπο την P_z παίρνουμε την:

$$V^N(n,x) = \max(G(n,x), TV^N(n,x)) \;,\; n = N-1, \ldots, 1, 0 \quad (1.2.12)$$

με $TV^N(N-1,x) = E_{N-1,x}G(N, X_N)$ και T είναι ο τελεστής μετάβασης της Z που δίνεται από:

$$TF(n,x) = E_{n,x}F(n+1, X_{n+1}) \;,\; \forall 0 \le n \le N, x \in E$$

Να σημειώσουμε ότι οι αναδρομικοί τύποι (1.2.11) είναι εξισώσεις Wald-Bellman για προβλήματα με μη ομογενείς χρόνους. Επίσης όταν για ομογενή χρόνους και $G = G(x)$, έχουμε $V^N(n,x) = V^{N-n}(x)$ και η (1.2.12) απλοποιείται στην (1.2.7).

Στην συνέχεια δίνεται ένας πολύ σημαντικός ορισμός για την επίλυση της (1.2.2').

Ορισμός (Υπεραρμονικής)

Μια μετρήσιμη συνάρτηση $F : \{0,1,\ldots,N\} \otimes E \to \mathbb{R}$ ονομάζεται υπεραρμονική αν

$$TF(n,x) \le F(n,x) \;,\; \forall (n,x) \in \{0,1,\ldots,N\} \otimes E \quad (1.2.13)$$

Θεωρούμε ότι η $TF(n,x)$ είναι καλά ορισμένη, δηλαδή $F(n+1, X_{n+1}) \in L^1(P_{n,x})$, $\forall (n,x)$. Επιπλέον αν $F(n+k, X_{n+k}) \in L^1(P_{n,x})$, $\forall 0 \le k \le N-n$ και $(n,x) \in \{0,1,\ldots,N\} \otimes E$, τότε επαληθεύεται άμεσα από ιδιότητα του Markov ο παρακάτω χαρακτηρισμός για την υπεραρμονική συνάρτηση:

*Η **F** είναι υπεραρμονική αν και μόνο αν η $F(n+k, X_{n+k})_{0 \le k \le N-n}$ είναι υπεραρμονική υπο την $P_{n,x}$ $\forall (n,x) \in \{0,1,\ldots,N\} \otimes E$.* (1.2.14)

$\blacksquare$

Συνοψίζοντας τα παραπάνω σε ένα θεώρημα προκύπτει το ακόλουθο.

Θεώρημα (Πεπερασμένο N: Μη Ομοιογενής Χρόνος):

Έστω ένα πρόβλημα βέλτιστης διακοπής (1.2.2′) και με την (1.2.1′) να ισχύει, η συνάρτηση αξίας V^N ικανοποιεί τις εξισώσεις Wald-Bellman με

$$V^N(n,x) = \max(G(n,x), TV^N(n,x)),\quad n = N-1,\dots,1,0 \qquad (1.2.15)$$

όπου $TV^N(N-1,x) = E_{N-1,x}G(N, X_N)$ και $x \in E$.

Περαιτέρω βλέπουμε ότι :

- Ο χρόνος διακοπής τ_D είναι βέλτιστος για την (1.2.2′)
- Αν τ_* είναι ένας βέλτιστος χρόνος διακοπής στην (1.2.2′) τότε $\tau_D \le \tau_*$ $P_{n,x} - a.s.\ \forall (n,x) \in \{0,1,\dots,N\} \otimes E$.
- Η συνάρτηση αξίας V^N είναι η μικρότερη υπεραρμονική που κυριαρχεί της συνάρτησης κέρδους G στο $\{0,1,\dots,N\} \otimes E$.
- Η σταματημένη ακολουθία $(V^N((n+k)\wedge \tau_D, X_{(n+k)\wedge\tau_D}))_{0\le k\le N-n}$ είναι μία martingale υπο την $P_{n,x}$, $\forall (n,x) \in \{0,1,\dots,N\} \otimes E$.

<u>Απόδειξη:</u>

Η απόδειξη είναι ίδια με του θεωρήματος για πεπερασμένο και και ομογενή χρόνο. Το κλειδί της ταυτότητας της (1.2.2′) που την συνδέει με την (1.1.2) είναι η

$$S^N_{n+k} = V^N(n+k, X_{n+\tau}).$$

■

Στην συνέχεια θα ασχοληθούμε για μη πεπερασμένο **N.** Σε αυτή την περίπτωση η (1.2.2) γίνεται :

$$V(x) = \sup_\tau E_x G(X_\tau) \qquad (1.2.16)$$

Με **τ** να είναι ο χρόνος διακοπής και $P_x(X_0 = x) = 1, \forall x \in E$.

Επίσης έχουμε τα σύνολα C και D, που είναι τα σύνολα των x για τα οποία συνεχίζουμε και διακόπτουμε αντίστοιχα.

$$C = \{x \in E : V(x) > G(x)\}$$
$$D = \{x \in E : V(x) = G(x)\}$$

Προσθέτουμε τους αρχικούς χρόνους εισόδου τ_D στο D θέτοντας

$$\tau_D = \inf\{t \geq 0 : X_t \in D\}$$

Ο παρακάτω ορισμός είναι πόλυ σημαντικός για την λύση της (1.2.16)

Ορισμός: Έστω μία μετρήσιμη συνάρτηση $F : E \to \mathbb{R}$, ονομάζεται υπεραρμονική αν $TF(x) \leq F(x)$, $x \in E$ (1.2.17)

η $TF(x)$ είναι καλά ορισμένη, δηλαδή $F(X_1) \in L^1(P_x)$, αν επίσης έχουμε $F(X_n) \in L^1(P_x), \forall n \geq 0, x \in E$, τότε ισχύει :

*Η **F** είναι υπεραρμονική αν και μόνο αν η $(F(X_n))_{n\geq 0}$ είναι supermartingale υπο την P_x, $\forall x \in E$.* (1.2.18) $\blacksquare$

Στην περίπτωση μη πεπερασμένου **N** δεν είναι απαραίτητο να ασχοληθούμε ξεχωριστά για ομογενής και μη ομογενής χρόνους, γιατί ο χρόνος διακοπής μας δεν επηρεάζεται όπως συμβαίνει για πεπερασμένο **N.**

Θεώρημα(Για Μη πεπερασμένο N):

Έστω το πρόβλημα βέλτιστης διακοπής (1.2.16), με την υπόθεση (1.2.1) να ισχύει, τότε η συνάρτηση αξίας V ικανοποιεί τις εξισώσεις Wald-Bellman:

$$V(x) = \max(G(x), TV(x)), \ \forall x \in E \quad (1.2.19)$$

Υποθέτουμε ότι απαιτείται: $P_x(\tau_D < \infty) = 1$. Έτσι έχουμε:

- Ο χρόνος διακοπής τ_D είναι βέλτιστος για την (1.2.16)
- Αν τ_* είναι ένας βέλτιστος χρόνος διακοπής για την (1.2.16) τότε $\tau_D \leq \tau_*$ $P_x - a.s$, $\forall x \in E$.
- Η συνάρτηση αξίας V είναι η μικρότερη υπεραρμονική συνάρτηση που επικρατεί της συνάρτησης κέρδους G στην E
- Η σταματημένη ακολουθία $(V(X_{n\wedge\tau_D}))_{n\geq 0}$ είναι μία martinagale υπο την P_x, $\forall x \in E$.

Σε περίπτωση που ισχύει $P_x(\tau_D = \infty) > 0$ για μερικά $x \in E$, τότε δεν έχουμε σίγουρα βέλτιστο χρόνο διακοπής για την (1.2.16) .

Απόδειξη:

Η ταυτότητα που είναι το «κλειδί» για να προσαρμόσουμε το προβλημά μας (1.2.16) στο πρόβλημα (1.1.8) είναι

$$S_n = V(X_n)$$

για $n \geq 0$. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί με το πέρασμα στο όριο $N \to \infty$ για την (1.2.3) και χρησιμοποιώντας το θεώρημα από πεπερασμένο σε μη πεπερασμένο N. Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο απορρέει η (1.2.19) από την (1.2.7). Οι υπόλοιπες καταστάσεις προκύπτουν από το θεώρημα για μη πεπερασμένο N (martingale-1ο μέρος). Η (iii) τελειοποιεί την (iii) του θεωρήματος για μη πεπερασμένο N (martingale-1ο μέρος). Η απόδειξη είναι πλήρης.

■

Πόρισμα (Επαναληπτική Μέθοδο)

Σύμφωνα με την αρχική υπόθεση του παραπάνω θεωρήματος έχουμε:

$$V(x) = \lim_{n\to\infty} Q^n G(x), \quad \forall x \in E \qquad (1.2.20)$$

Για να μην υπάρχει σύγχυση για πεπερασμένο και μη πεπερασμένο N, αναφέρουμε το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα (Η Μοναδικότητα Στην Wald-Bellman Εξίσωση):

Σύμφωνα με την υπόθεση του θεωρήματος για μη πεπερασμένο N, έχουμε $F : E \to \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση που λύνει την εξίσωση Wald-Bellman

$$F(x) = \max(G(x), TF(x)), \quad x \in E \qquad (1.2.21)$$

Θεωρείται ότι η F είναι μετρήσιμη και $F(X_1) \in L^1(P_x), \forall x \in E$. Επιπλέον υποθέτουμε ότι η F ικανοποιεί την

$$E(\sup_{n\geq 0} F(X_n)) < \infty \qquad (1.2.22)$$

Η F ισούται με την συνάρτηση αξίας V αν και μόνο αν ισχύει η παρακάτω οριακή συνθήκη στο άπειρο:

$$\limsup_{n\to\infty} F(X_n) = \limsup_{n\to\infty} G(X_n), \quad \forall x \in E \qquad P_x - a.s. \qquad (1.2.23)$$

Σε αυτή την περίπτωση το αριστερό limsup ισούται με liminf., δηλαδή η ακολουθία $(F(X_n))_{n\geq 0}$ είναι συγκλίνουσα $P_x - a.s.$, $\forall x \in E$.

<u>Απόδειξη:</u>

Αν $F = V$ τότε η (iii) από το θεώρημα για μη πεπερασμένο N (markovian) παραπάνω, γνωρίζουμε ότι η F είναι η μικρότερη υπεραρμονική συνάρτηση που κυριαρχεί της G στο E. Θα δείξουμε ότι μία τέτοια συνάρτηση πρέπει να ικανοποιεί την (1.2.23).

Από τη στιγμή που $F \geq G$ ισχύει , είναι προφανές ότι το αριστερό μέρος της (1.2.34) είναι μεγαλύτερο από το δεξί. Για να αποδείξουμε την αντίστροφη φορά της ανισότητας θα μελετήσουμε την συνάρτηση $H : E \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως

$$H(x) = E_x(\sup_{n\geq 0} G(X_n)) \;,\; x \in E$$

Η σημαντική ιδιότητα της H είναι ότι είναι υπεραρμονική. Αυτό αποδεικνύεται με τον ακόλουθο τρόπο.

Από την ιδιότητα Markov έχουμε:

$$TH(x) = E_z H(X_1) = E_x(E_{X_1}(\sup_{n\geq 0} G(X_n)))$$

$$= E_x(E_x(\sup_{n\geq 0} G(X_n)\circ\theta_1 \big| F_1)) = E_x(\sup_{n\geq 0} G(X_{n+1})) \leq H(x)$$

για όλα τα $x \in E$. Επιπλέον , για $X_0 = x$ υπο την P_x βλέπουμε ότι $H(x) \geq G(x)$ για όλα τα $x \in E$.Ωστόσο $F(x) \leq H(x)$ για όλα τα $x \in E$ από την υπόθεση. Ως εκ τούτου από την ιδιότητα Markov προκύπτει

$$F(X_n) \leq H(X_n) = E_{X_n}(\sup_{k\geq 0} G(X_k))$$

$$= E_x(\sup_{k\geq 0} G(X_k)\circ\theta_n \big| F_n)$$

$$= E_x(\sup_{k\geq 0} G(X_{k+1}) \big| F_n)$$

$$\leq E_x(\sup_{l\geq m} G(X_l) \big| F_n) \quad .(\alpha)$$

για κάθε $m \leq n$ δοσμένο και σταθερό όπου $x \in E$. Η τελική έκφραση του παραπάνω, ορίζει μία γενικευμένη martingale για $n \geq 1$ υπο την P_x , είναι γνωστό ότι $P_x - a.s.$ συγκλίνει για $n \to \infty$ και κάθε $x \in E$ με το όριο που ικανοποιεί την ανισότητα :

$$\lim_{n\to\infty} E_x(\sup_{l\geq m} G(X_l) \big| F_n) \leq E_x(\sup_{l\geq m} G(X_l) \big| F_\infty) = \sup_{l\geq m} G(X_l) \quad .(\beta)$$

όπου η τελικλη ταυτότητα προκύπτει από το γεγονός ότι $\sup_{l\geq m} G(X_l)$ είναι F_∞-μετρήσιμη. Για $n \to \infty$ στην (α) και χρησιμοποιώντας την (β) έχουμε:

$$\limsup_{n\to\infty} F(X_n) \leq \sup_{l\geq m} G(X_l) \quad P_x - a.s.$$

για όλα τα $m \geq 0$ και $x \in E$. Τέλος για $m \to \infty$ στην πάνω ανισότητα, καταλήγουμε να έχουμε την (1.2.23). Αυτό είναι το πρώτο κομμάτι της απόδειξης.

Αντίστροφα , ας υποθέσουμε ότι η F ικανοποιεί τις (1.2.21)-(1.2.23) , θα δείξουμε ότι η F θα πρέπει να είναι ίση με την V. Ας σημειώσουμε ότι η F είναι υπεραρμονική από την (1.2.21) και ότι $F \geq G$. Επιπλέον από (iii) του θεώρηματος για μη πεπερασμένο N (markovian), έχουμε ότι $F \geq V$. Για να δείξουμε ότι $F \leq V$ θα εξετάσουμε τον χρόνο διακοπής

$$\tau_{D_\varepsilon} = \inf\{n \geq 0 : F(X_n) \leq G(X_n) + \varepsilon\}$$

με $\varepsilon > 0$ δοσμένο και σταθερό. Στη συνέχεια από την (1.2.23) βλέπουμε ότι $\tau_{D_\varepsilon} < \infty$ $P_x - a.s.$ για $x \in E$. Επιπλέον ισχυριζόμαστε ότι η $(F(X_{\tau_{D_\varepsilon} \wedge n}))_{n\geq 0}$ είναι μία martingale υπο την P_x για $x \in E$. Από την ιδιότητα Markov και την (1.2.21) συνεπάγεται

$$\begin{aligned}
E_x(F(X_{\tau_{D_\varepsilon} \wedge n}) \big| F_{n-1}) &= E_x(F(X_n) I(\tau_{D_\varepsilon} \geq n \big| F_{n-1}) + E_x(F(X_{\tau_{D_\varepsilon}}) I(\tau_{D_\varepsilon} < n) \big| F_{n-1}) \\
&= E_x(F(X_n) I(\tau_{D_\varepsilon} \geq n \big| F_{n-1}) + E_x(F(X_{\tau_{D_\varepsilon}}) I(\tau_{D_\varepsilon} < n) \big| F_{n-1}) \\
&= E_x(F(X_n) \big| F_{n-1}) I(\tau_{D_\varepsilon} \geq n) + E_x(\textstyle\sum_{k=0}^{n-1} F(X_k) I(\tau_{D_\varepsilon} = k) \big| F_{n-1}) \\
&= E_{X_{n-1}}(F(X_1)) I(\tau_{D_\varepsilon} \geq n) + \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} F(X_k) I(\tau_{D_\varepsilon} = k) \\
= TF(X_{n-1}) I(\tau_{D_\varepsilon} \geq n) + F(X_{\tau_{D_\varepsilon}}) I(\tau_{D_\varepsilon} < n) &= F(X_{n-1}) I(\tau_{D_\varepsilon} \geq n) + F(X_{\tau_{D_\varepsilon}}) I(\tau_{D_\varepsilon} < n) \\
&= F(X_{\tau_{D_\varepsilon} \wedge (n-1)}) I(\tau_{D_\varepsilon} \geq n) + F(X_{\tau_{D_\varepsilon} \wedge (n-1)}) I(\tau_{D_\varepsilon} < n) = F(X_{\tau_{D_\varepsilon} \wedge (n-1)})
\end{aligned}$$

για όλα τα $n \geq 1$ και $x \in E$ αποδεικνύει τον ισχυρισμό μας. Ως εκ τούτου

$$E_x(F(X_{\tau_{D_\varepsilon} \wedge n})) = F(x)$$

για $n \geq 0$ και $x \in E$. Επίσης

$$E_x(F(X_{\tau_{D_\varepsilon} \wedge n})) = E_x(F(X_{\tau_{D_\varepsilon} \wedge n}) I(\tau_{D_\varepsilon} \leq n)) + E_x(F(X_n) I(\tau_{D_\varepsilon} > n))$$

με $n \geq 0$. Για $n \to \infty$, και χρησιμοποιώντας (1.2.22) και (1.2.1) με $F \geq G$, έχουμε

$$E_x(F(X_{\tau_{D_\varepsilon}})) = F(x) \quad , \quad \forall x \in E .$$

Τέλος , αφού η V είναι υπεραρμονική, έχουμε ότι

$$V(x) \geq E_x V(X_{\tau_{D_\varepsilon}}) \geq E_x G(X_{\tau_{D_\varepsilon}}) \geq E_x F(X_{\tau_{D_\varepsilon}}) - \varepsilon = F(x) - \varepsilon$$

$\forall \varepsilon > 0, x \in E$. Για πολύ μικρό $\varepsilon \to 0$ έχουμε $F \leq V$. Η απόδειξη είναι πλήρης.

■

Έστω ότι έχουμε ένα δοσμένο $a \in (0,1]$ και μία φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση $g : E \to \mathbb{R}$ και $c : E \to \mathbb{R}_+$, εξετάζουμε το πρόβλημα βέλτιστης διακοπής :

$$V(x) = \sup_{\tau} E_x (a^{\tau} g(X_{\tau}) - \sum_{k=1}^{\tau} a^{k-1} c(X_{k-1})) \quad (1.2.24)$$

τ είναι ο χρόνος διακοπής της X και $P_x(X_0 = x) = 1$. Η $c(x)$ είναι η συνάρτηση που μας δείχνει το κόστος για να πάμε στην επόμενη παρατήρηση του X όταν $X = x$. Το $\sum_{k=1}^{\tau} a^{k-1} c(X_{k-1}))$ εξ ορισμού είναι 0 όταν $\tau = 0$. Θέτουμε $\widetilde{X} = (\widetilde{X}_n)_{n \geq 0}$, που χαρακτηρίζει μία Μαρκοβιανή αλυσίδα που διακόπτεται με ρυθμό a. Ο τελεστής μετάβασης της $\widetilde{X}$ είναι :

$$\widetilde{T}F(x) = aTF(x), x \in E \quad (1.2.25)$$

Όταν $F(X_1) \in L^1(P_x)$. Έτσι το πρόβλημα μας γίνεται :

$$V(x) = \sup_{\tau} E_x (g(\widetilde{X}_{\tau}) - \sum_{k=1}^{\tau} c(\widetilde{X}_{k-1}))$$

με τ να είναι ο χρόνος διακοπής για την $\widetilde{X}$ και $P_x(\widetilde{X}_0 = x) = 1$.

Εισάγουμε την ακολουθία $\widetilde{I_n}$

$$\widetilde{I_n} = a + \sum_{k=1}^{n} c(\widetilde{X}_{k-1})$$

με $n \geq 1$ και $\widetilde{I_0} = a$ στο $\mathbb{R}$. Τότε η $\widetilde{Z_n} = (\widetilde{X_n}, \widetilde{I_n})$ ορίζει μια Μαρκοβιανή αλυσίδα για $n \geq 0$ και $\widetilde{Z_0} = (\widetilde{X_0}, \widetilde{I_0}) = (x, a)$ υπο την $P_{x,a}$. Ο τελεστής μετάβασης της $\widetilde{Z} = (\widetilde{X}, \tilde{I})$ ισούται με:

$$T_{\widetilde{Z}} F(x,a) = E_{x,a} F(\widetilde{X_1}, \widetilde{I_1})$$

για $(x,a) \in E \otimes \mathbb{R}$ και $F(\widetilde{X_1}, \widetilde{I_1}) \in L^1(P_{x,a})$.

Εν συνεχεία ξαναγράφουμε την V(x) ως εξής:

$$W(x,a) = \sup_{\tau} E_{x,a} G(Z_{\tau})$$

Με $G(z) = g(x) - a$ για $z = (x,a) \in E \otimes \mathbb{R}$.

Αφαιρώντας το a και από τα δύο μέλη της V(x) έχουμε:

$$W(x,a)=V(x)-a\,,\ \forall (x,a)\in E\otimes\mathbb{R}$$

Όπως διακρίνουμε η W είναι παρόμοιο πρόβλημα με την V στην εξίσωση (1.2.16). Επομένως ισχύει και το θεώρημα για μη πεπερασμένο N. Σημειώνουμε επίσης ότι :

$$T_{\widetilde{Z}}W(x,a)=E_{x,a}W(\widetilde{X_1},\widetilde{I_1})=E_{x,a}(V(\widetilde{X_1})-\widetilde{I_1})=E_xV(\widetilde{X_1})-a-c(x)=aTV(x)-a-c(x)$$

Έτσι χρησιμοποιώντας τα παραπάνω η (1.2.19) γράφεται σαφέστερα ως :

$$V(x)-a=\max(g(x)-a,aTV(x)-a-c(x))$$

Και απαλείφοντας το α έχουμε:

$$V(x)=\max(g(x),aTV(x)-c(x))$$

Επίσης η (1.2.17) παίρνει την μορφή :

$$aTF(x)-c(x)\le F(x)$$

για $x\in E$. Η F ικανοποιεί την ανισότητα αν και μόνο αν $(x,a)\mapsto F(x)-a$ είναι υπεραρμονική σε σχέση με την $\widetilde{Z}=(\widetilde{X},\tilde{I})$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΜΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΧΡΟΝΙΚΟ ΟΡΙΖΟΝΤΑ

2.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο θα κάνουμε μία εισαγωγή στα Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά. Αρχικά θα παρουσιάσουμε τα βασικότερα χρηματοοικονομικά παράγωγα και την αρχή της μη επιτηδειότητας. Θα αναφερθούμε στα ευρωπαϊκού και αμερικανικού τύπου δικαιώματα αγοράς και πώλησης. Εν συνεχεία θα εξηγήσουμε τι είναι το διωνυμικό υπόδειγμα και πώς εφαρμόζεται σε πολλές περιόδους. Θα παρουσιάσουμε τον αλγόριθμο τιμολόγησης των αμερικανικών δικαιωμάτων, όπως επίσης και την βέλτιστη στρατηγική του δικαιώματος. Στο τέλος του κεφαλαίου θα παραθέσουμε ένα παράδειγμα που θα εφαρμόζουμε την βέλτιστη στρατηγική άσκηση του αμερικανικού δικαιώματος.

2.2 Βασικά χρηματοοικονομικά παράγωγα και η αρχή της μη επιτηδειότητας.

2.2.1 Γενικά

Επικαλούμενοι την εμπειρία μας με τις τράπεζες, είτε ως καταθέτες είτε ως δανειολήπτες, γνωρίζουμε την ύπαρξη του τόκου και του επιτοκίου. Τόκος είναι το κέρδος που αποφέρει η επένδυση που γίνεται (ως καταθέσης από την πλευρά του πολίτη και ως δανείου από την πλευρά των τραπεζών) και επιτόκιο είναι ο ρυθμός απόδοσής της.

Ορισμός

Ονομάζουμε προϊόν χωρις κίνδυνο με σταθερό επιτόκιο r ένα προϊόν που η αξία του μεταβάλλεται στον χρόνο με τη σχέση

$$A(t) = A(0)e^{rt}$$

Το βασικό χαρακτηριστικό του προϊόντος χωρίς κίνδυνο είναι ότι γνωρίζουμε από σήμερα την αξία του στο μέλλον. Αντίστοιχα για ένα ποσό A που θα πληρωθεί τη χρονική στιγμή T, έχει σημερινή αξία Ae^{-rT} .

Ένα απλό ομόλογο, με χρόνο ωρίμανσης T και τιμή όψεως A, δίνει στον κάτοχό του το δικαίωμα να εισπράξει από τον εκδότη του το ποσό A στην χρονική στιγμή T. Ο κάτοχος θεωρούμε ότι έχει την θετική θέση και ο εκδότης την αρνητική σε αυτή την συμφωνία. Επομένως για να γίνει μία τέτοια συμφωνία θα πρέπει ο εκδότης του ομολόγου να εισπράξει ένα ποσό για την παραχώρηση του.

2.2.2 Βασικά χρηματοοικονομικά παράγωγα

Παράγωγα προϊόντα είναι τα συμβόλαια που καθορίζουν μια συμφωνία, η οποία θα πραγματοποιηθεί στον μέλλον και η αξία της εξαρτάται από άλλο προϊόν που ονομάζεται πρωτογενές.

Τα προθεσμιακά συμβόλαια είναι δικαιώματα προαίρεσης που συνάπτονται μεταξύ δύο μερών. Είναι προκαθορισμένη η ποσότητα αγοραπωλησίας του πρωτογενούς προϊόντος την χρονική στιγμή T και με προσυμφωνημένη τιμή παράδοσης K. Τα δικαιώματα προαίρεσης είναι ευρωπαϊκού και αμερικανικού τύπου αγοράς και πώλησης.

Το **ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς**, με χρόνο ωρίμανσης T και τιμή άσκησης K, δίνει την δυνατότητα στον κάτοχο του να αγοράσει από τον αντισυμβαλλόμενο το προκαθορισμένο ποσοστό πρωτογενούς προϊόντος την χρονική στιγμή T στην τιμή

Κ. Το δικαίωμα ασκείται εφόσον η τιμή του προϊόντος την χρονική στιγμή Τ , S_T είναι μεγαλύτερη από την Κ. Επομένως η απόδοση του δικαιώματος για τον κάτοχο του είναι $(S_T - K)^+ = \max\{S_T - K, 0\}$ και είναι πάντοτε μη αρνητική.

Στο **αμερικανικό δικαίωμα αγοράς**, μπορούμε να ασκήσουμε το δικαίωμα μας οποιαδήποτε στιγμή μέχρι το πέρας του χρόνου Τ. Στο ευρωπαϊκό μπορεί να ασκηθεί μόνο στο πέρας του, δηλαδή την χρονική στιγμή Τ.

Το **ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης**, με χρόνο ωρίμανσης Τ και τιμή άσκησης Κ, δίνει την δυνατότητα στον κάτοχο του να πουλήσει στον αντισυμβαλλόμενο το προκαθορισμένο ποσοστό πρωτογενούς προϊόντος την χρονική στιγμή Τ στην τιμή Κ. Το δικαίωμα ασκείται εφόσον η τιμή του προϊόντος την χρονική στιγμή Τ, S_T είναι μικρότερη από την Κ. Επομένως η απόδοση του δικαιώματος για τον κάτοχο του είναι $(K - S_T)^+$ και είναι πάντοτε μη αρνητική.

Το **αμερικανικό δικαίωμα πώλησης,** όπως και στην περίπτωση του δικαιώματος αγοράς, μπορεί να ασκηθεί οποιαδήποτε στιγμή μέχρι το πέρας του χρόνου. Στο ευρωπαϊκό μπορεί να ασκηθεί μόνο στο πέρας του, δηλαδή την χρονική στιγμή Τ.

Είναι κατανοητό ότι ένα δικαίωμα αγοράς ή πώλησης, μόνο θετικό μπορεί να αποβεί για τον κάτοχο του. Αυτός ακριβώς είναι και ο λόγος που πρέπει να καταβάλει κάποιο αρχικό ποσό για την απόκτηση του. Για τα αμερικανικά δικαιώματα είναι εύλογο ότι το ποσό αυτό θα είναι μεγαλύτερο.

2.2.3 Αρχή της μη επιτηδειότητας

Η αρχή της μη επιτηδειότητας αξιώνει ότι δεν μπορεί να υπάρξει δυνατότητα κέρδους χωρίς την ανάληψη ρίσκου. Στα Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά δεχόμαστε την αρχή αυτή ως αξίωμα. Η τιμολόγηση παραγώγων βασίζεται στην αρχή της μη επιτηδειότητας.

Οι παρακάτω προτάσεις είναι οι περιορισμοί που εξάγονται από την *αρχή της μη επιτηδειότητας* για την αρχική αξία των ευρωπαϊκών δικαιωμάτων.

Πρόταση 1

1) Αν τη στιγμή $T \geq 0$ ένα χαρτοφυλάκιο Α έχει σε κάθε πιθανό ενδεχόμενο μη αρνητική αξία, τότε η αρχική αξία του είναι μη αρνητική
$$V_T(A) \geq 0 \Rightarrow V_0(A) \geq 0$$
2) Αν τη στιγμή $T \geq 0$ η αξία ενός χαρτοφυλακίου Α είναι σε κάθε πιθανό ενδεχόμενο όση η αξία ενός χαρτοφυλακίου Β, τότε η αρχική αξία του Α πρέπει να είναι τουλάχιστον όση αυτή του Β.

$$V_T(A) \geq V_T(B) \Rightarrow V_0(A) \geq V_0(B)$$

3) Η παραπάνω ανισοισότητα μπορεί να σταθεί και μόνο με ισότητα

$$V_T(A) = V_T(B) \Rightarrow V_0(A) = V_0(B) .$$

<u>Πρόταση 2</u>

Η αξία $F(S_0, T, K)$ ενός προθεσμιακού συμβολαίου με ωρίμανση Τ και τιμή παράδοσης Κ είναι

$$F(S_0, T, K) = S_0 - Ke^{-rT} .$$

<u>Πρόταση 3</u>

Η αξία $c(S_0, T, K)$ ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς με ωρίμανση Τ και τιμή άσκησης Κ ικανοποιεί τις ανισότητες

$$(S_0 - Ke^{-rT})^+ \leq c(S_0, T, K) \leq S_0 .$$

<u>Πρόταση 4</u>

Οι αρχικές αξίες $c(S_0, T, K)$ και $p(S_0, T, K)$ των ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης αντίστοιχα, συνδέονται με τη σχέση

$$F(S_0, T, K) = c(S_0, T, K) - p(S_0, T, K) .$$

Στην συνέχεια θα αναφερθούμε, με βάση την αρχή της μη επιτηδειότητας, στην αρχική αξία ενός αμερικανικού δικαιώματος. Είναι προφανές, όπως αναφέραμε, ότι το αμερικανικό δικαίωμα αγοράς ($C(S_0, T, K)$) πρέπει να αξίζει τουλάχιστον όσο το ευρωπαϊκό, γιατί μπορεί να ασκηθεί οποιαδήποτε στιγμή.

Θεώρημα 1:

Αν η κατοχή του πρωτογενούς προϊόντος δεν έχει κόστος ή αποφέρει έσοδα, οι αξίες ενός ευρωπαϊκού και ενός αμερικανικού δικαιώματος αγοράς είναι ίσες.

$$C(S_0, T, K) = c(S_0, T, K) .$$

Ένα άμεσο συμπέρασμα για το παραπάνω θεώρημα είναι ότι ο κατοχός ενός τέτοιου δικαιώματος, η βέλτιστη στρατηγική που μπορεί να ακολουθήσει είναι να μην το ασκήσει πρώιμα. Στην περίπτωση όμως ενός αμερικανικού δικαιώματος πώλησης, η πρώιμη άσκηση του είναι η βέλτιστη στρατηγική.

Θεώρημα 2:

Στην περίπτωση των αμερικανικών δικαιωμάτων η ισοτιμία αγοράς και πώλησης (για προϊόντα που η κατοχή τους δεν επιφέρει κόστος ή έσοδα) εκφράζεται με την ακόλουθη σχέση

$$S_0 - K \leq C(S_0, T, K) - P(S_0, T, K) \leq S_0 - Ke^{-rT}.$$

Οι αποδείξεις των παραπάνω θεωρημάτων και προτάσεων σκοπίμως παραλείπονται. Στόχος μας είναι η γρήγορη εισαγωγή στο κομμάτι των Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών που θα ασχοληθούμε (για περαιτέρω πληροφορίες ανατρέξτε στην βιβλιογραφία). Σε όλες τις περιπτώσεις το πρωτογενές προϊόν **δεν** αποδίδει μερίσματα σε χρονο $t < T$, σε περίπτωση που αποδίδει τότε οι σχέσεις αλλάζουν.

2.3 Διωνυμικό υπόδειγμα πολλών περιόδων

Κάθε ρεαλιστικό υπόδειγμα θα πρέπει να εμπεριέχει την τυχαιότητα ως προς την χρονική εξέλιξη της αξίας του πρωτογενούς προϊόντος και να λαμβάνει υπ' όψιν την μεταβολή της αξίας του χρήματος με την πάροδο του χρόνου. Με αυτό τον τρόπο θέλουμε να κάνουμε ακριβέστερη τιμολόγηση των παραγώγων με βάση την αρχη της μη επιτηδειότητας. Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε ένα διακριτό και ρεαλιστικό υπόδειγμα αγοράς.

Στο υπόδειγμα αυτό θα εξετάσουμε δύο προϊόντα, ένα προϊόν χωρίς κίνδυνο και ένα με κίνδυνο. Το προϊόν με κίνδυνο θα αναφέρουμε ως πρωτογενές προϊον και συνήθως αυτού το παράγωγο θέλουμε να τιμολογήσουμε. Έστω ότι έχουμε χρόνο ωρίμανσης T, μπορούμε να χωρίσουμε το χρονικό διάστημα $[0,T]$ σε N μικρότερα και ίσα διαστήματα. Κάθε τέτοιο διάστημα έχει εύρος $h = T / N$.

Για το προϊόν χωρίς κίνδυνο υποθέτουμε ότι η σημερινή αξία του είναι $B_0 = 1$, και μεταβάλλεται με σταθερό ρυθμό στο χρόνο, επομένως ισχύει η σχέση $\Lambda = B_{t_{k+1}} / B_{t_k} = e^{rh}$, με r το σταθερό επιτόκιο. Για το πρωτογενές προϊόν, η σημερινή του αξία είναι $S_0 > 0$, ενώ η εξέλιξη της στο χρόνο είναι στοχαστική. Την στιγμή t_k η αξία του πρωτογενούς προϊόντος είναι S_{t_k} και ισχύει

$$S_{t_{k+1}} = S_{t_k} \xi_{k+1}$$

με $\{\xi_k\}$ μία ακολουθία με ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που έχουν κατανομή:

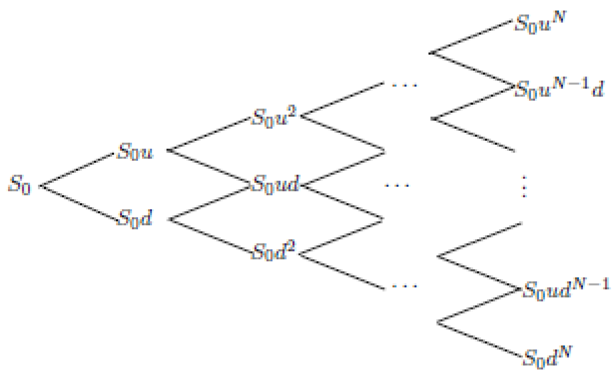
$$\xi_k = \begin{matrix} u, 0 < p < 1 \\ d, 0 < 1 - p < 1 \end{matrix}$$

με p να είναι η πιθανότητα μετάβασης.

Λαμβάνοντας υπ' όψιν την αρχή της μη επιτηδειότητας προκύπτει ο ακόλουθος περιορισμός:

$$d < e^{rh} < u .$$

Πρέπει να σημειώσουμε επίσης ότι $d > 0$, ώστε η τιμή του πρωτογενούς προϊόντος να είναι πάντα θετική. Μία γραφική απεικόνιση του πρωτογενούς προϊόντος στο υπόδειγμα μας είναι :

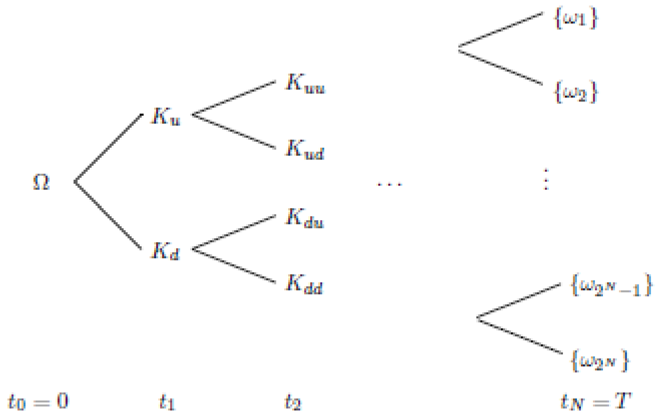


Όπως βλέπουμε οι πιθανές τροχιές της αξίας του πρωτογενούς προϊόντος στο διάστημα $[0,T]$ είναι 2^N, όσες και οι συνδυασμοί τιμών που παίρνουν οι τυχαίες μεταβλητές $\{\xi_k\}$. Τα χρηματοοικονομικά μαθηματικά θεωρούν το μοντέλο μας σαν ένα χώρο πιθανότητας Ω, τα σημεία του οποίου είναι τα πιθανά σενάρια εξέλιξης της αγοράς. Είναι ξεκάθαρο πλέον και ότι η αξία του πρωτογενούς προϊόντος την χρονική στιγμή t_k, S_{t_k} είναι τυχαία μεταβλητή όπως επίσης και μία στοχαστική διαδικασία ορισμένη στον Ω εφοδιασμένο με ένα μέτρο πιθανότητας P (το μέτρο πιθανότητας μας δείχνει πόσο πιθανή είναι κάθε τιμή της τ.μ, δηλαδη την κατανομή της).

Το μοντέλο μας ολοκληρώνεται με την έννοια της διήθησης. Θεωρούμε τον Ω ως ένα σύνολο από όλες τις δυνατές εκβάσεις της αγοράς που εξελίσσονται στον χρόνο. Στην αρχή είναι αδύνατο να αναφέρουμε ποιό σενάριο θα πραγματοποιηθεί, αν όμως περιμένουμε ως το πέρας του χρόνου μπορούμε να πούμε ποιό είναι το σενάριο. Αν πάλι θελήσουμε να το μελετήσουμε για τους ενδιάμεσους χρόνους π.χ. t_1, τότε μπορούμε να αποφανθούμε σε ποιό ενδεχόμενο ανήκει.

$$K_u = \{\omega_1,..,\omega_{N/2}\} \text{ ή στο } K_d = \{\omega_{(N/2)+1},..,\omega_N\}.$$

Η εξέλιξη της αγοράς αναπαρίσταται γραφικά



$\mathcal{F}_k$ θα είναι η διαμέριση του Ω και ισούται:

$$\mathcal{F}_0 = \{\Omega\}$$
$$\mathcal{F}_1 = \{K_u, K_d\}$$
$$.$$
$$.$$
$$\mathcal{F}_T = \{\{\omega_1\},..\{\omega_{2^N}\}\}$$

Η απόδοση , $X(\omega)$, ενός παραγώγου με ωρίμανση T είναι μία τυχαία μεταβλητή που εξαρτάται μόνο από το ω, δηλαδή το πιθανό σενάριο της αγοράς. Στα ευρωπαϊκού τύπου (π.χ αγοράς) εξαρτάται μόνο από την τιμή του πρωτογενούς προϊόντος στην ωρίμανση, $X(\omega) = (S_T(\omega) - K)^+$. Σε περίπτωση όμως ύπαρξης φράγματος M, τότε εξαρτάται από όλη την τροχιά της τιμής, δηλαδή αποδίδει όσο ένα απλό μόνο αν δεν ξεπεράσει η τιμή του πρωτογενούς προϊόντος το φράγμα μας.

Στο συγκεκριμένο σημείο είναι απαραίτητο να αναφέρουμε τι είναι χαρτοφυλάκιο και τι είναι αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο. *Χαρτοφυλάκιο* είναι το σύνολο των περιουσιακών στοιχείων που έχει ένας πελάτης στην κατοχή του πχ. Μετοχές, ομόλογα, δικαιώματα προαίρεσης κτλ. Ένα χαρτοφυλάκιο που εξελίσσεται στον χρόνο με μια σειρά από συναλλαγές, οι οποίες εξαρτώνται μονο από την πληροφορία που είναι διαθέσιμη μέχρι τη στιγμή εκείνη και δεν μεταβάλουν την αξία του χαρτοφυλακίου τη στιγμή που συντελούνται, ονομάζεται *αυτοχρηματοδοτούμενο*.

Για την τιμολόγηση ενός παραγώγου πρέπει να αναπαραγάγουμε την απόδοση του με ένα χαρτοφυλάκιο με δύο προϊόντα. Είναι αδύνατο όμως να αντισταθμίσουμε το χαρτοφυλάκιο μας την στιγμή $t = 0$ με την απόδοση του παραγώγου την στιγμή T. Γι' αυτό το λόγο χρησιμοποιούμε ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο

(α_n, β_n) το οποίο επιτρέπει τις συναλλαγές και κατ'επέκταση την θέση μας σε αυτό. Στην επόμενη παράγραφο θα δούμε πώς κατασκευάζουμε ένα τέτοιο χαρτοφυλάκιο που αναπαράγει την απόδοση και τιμολόγηση του παραγώγου με ωρίμανση Τ.

2.3.1 Αναδρομικός αλγόριθμος τιμολόγησης και αντιστάθμισης

Μια τυχαία μεταβλητή Χ είναι $\mathcal{F}_k$-μετρήσιμη, όταν η τιμή της εξαρτάται μόνο από τις τιμές του πρωτογενούς προϊόντος μέχρι τη στιγμή t_k, δηλαδή

$$X(\omega) = \Phi(S_{t_0}(\omega), ..., S_{t_k}(\omega))$$

Φ είναι συνάρτηση. Επίσης $\mathcal{F}_0$-μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή είναι σταθερά.

Ορισμός

Μια αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική θα είναι μια ακολουθία χαρτοφυλακίων $\{(\varphi_k, \psi_k)\}_k$ έτσι ώστε $\forall k = 0, ..., N-1$, έχουμε

1. Οι φ_k, ψ_k είναι $\mathcal{F}_k$-μετρήσιμες τυχαίες μεταβλητές
2. $\varphi_k S_{t_{k+1}} + \psi_k B_{t_{k+1}} = \varphi_{k+1} S_{t_{k+1}} + \psi_{k+1} B_{t_{k+1}}$

Στην πρώτη συνθήκη είναι φανερό ότι η θέση που έχουμε την στιγμή t_k, εξαρτάται από την εξέλιξη της αγοράς μέχρι αυτή τη στιγμή. Η δεύτερη συνθήκη μας δείχνει την αλλαγή θέσης που μπορούμε να κάνουμε την χρονική στιγμή t_{k+1}, το αριστερό μέρος είναι η αξία του χαρτοφυλακίου πριν την αλλαγή και το δεξί η αξία του μετά.

Έστω ότι θέλουμε να τιμολογήσουμε ένα παράγωγο με δεδομένη απόδοση τη στιγμή Τ ίση με $V_T = U_{t_N}(S_{t_0}, ..., S_{t_N})$. Κατασκευάζουμε μία αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική που αναπαράγει την απόδοση του στην ωρίμανση.

$$\varphi_{N-1} S_T + \psi_{N-1} B_T = V_T$$

Η σχέση πρέπει να ισχύει και για $\{\xi_N = u\}$ όσο και για $\{\xi_N = d\}$. Έτσι ορίζουμε

$$V_T^{\uparrow} = U_{t_N}(S_{t_0}, ..., S_{t_{N-1}} u) \text{ και } V_T^{\downarrow} = U_{t_N}(S_{t_0}, ..., S_{t_{N-1}} d)$$

έχουμε

$$\varphi_{N-1} = \frac{V_T^{\uparrow} - V_T^{\downarrow}}{S_{t_{N-1}}(u-d)} \text{ και } \psi_{N-1} = \frac{V_T^{\downarrow} u - V_T^{\uparrow} d}{B_{t_N}(u-d)}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει αμέσως ότι οι $(\varphi_{N-1}, \psi_{N-1})$ είναι $\mathcal{F}_{N-1}$-μετρήσιμες τυχαίες μεταβλητές. Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε την αξία του παραγώγου τη στιγμή t_{N-1} ως την αξία του χαρτοφυλακίου μας την χρονική στιγμή t_N.

$$V_{t_{N-1}} = U_{t_{N-1}}(S_{t_0},...,S_{t_{N-1}}) := \varphi_{N-1}S_{t_{N-1}} + \psi_{N-1}B_{t_{N-1}}.$$

Με αντικατάσταση των φ_{N-1},ψ_{N-1} έχουμε

$$V_{t_{N-1}} = e^{-rh}(qV_N^{\uparrow} + (1-q)V_N^{\downarrow})$$

όπου $q = \dfrac{e^{rh}-d}{u-d}$.

Επαναλαμβάνοντας την διαδικασία οπισθοδρομώντας μέχρι τον χρόνο t_0, προκύπτει ο αλγόριθμος

$$V_{t_k} = e^{-rh}(qV_k^{\uparrow} + (1-q)V_k^{\downarrow}).$$

Η αρχή της μη επιτηδειότητας μας επιβάλλει την αρχική αξία του παραγώγου προκειμένου να μην υπάρχει στρατηγική επιτηδειότητας. Η αξία αυτή πρέπει να είναι $V_{t_0} = \varphi_0 S_{t_0} + \psi_0$.

2.4 Δικαιώματα αμερικανικού τύπου

Σε αυτή την ενότητα θα δείξουμε πώς γίνεται η τιμολόγηση των αμερικανικών δικαιωμάτων στο διωνυμικό υπόδειγμα πολλών περιόδων. Όπως επίσης θα μιλήσουμε για τους χρόνους διακοπής και το θεώρημα επιλεκτικής διακοπής.

2.4.1 Αλγόριθμος τιμολόγησης αμερικανικών δικαιωμάτων

Θα παρουσιάσουμε έναν αλγόριθμο τιμολόγησης και αντιστάθμισης αμερικανικών δικαιωμάτων που ξεκινά από τον χρόνο ωρίμανσης του παραγώγου και κατασκευάζει ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο που αντισταθμίζει τις απαιτήσεις του κατόχου του. Για την γρηγορότερη κατανόηση του, θα δούμε πώς λειτουργεί στο διωνυμικό υπόδειγμα μίας περιόδου.

Έστω ότι έχουμε δύο προϊόντα στην αγορά , ένα χωρίς κίνδυνο με επιτόκιο r όπου η αξία του προϊόντος είναι $B_{t_t} = e^{rt_k}$ τη στιγμή t_k, και ένα προϊόν με κίνδυνο που έχει αρχική αξία s_o , την αμέσως επόμενη χρονική στιγμή h s_1 με πιθανότητα p ή s_2 με πιθανότητα 1-p. Η αρχή της μη επιτηδειότητας μας επιβάλλει τον περιορισμό $s_2 < s_0 e^{rh} < s_1$.

Ένα δικαίωμα αμερικανικού τύπου στην ωρίμανση, αποδίδει στον κάτοχο του f_1 αν η τιμή του πρωτογενούς προϊόντος είναι s_1 ή f_2 αν η τιμή είναι s_2. Σε περίπτωση όμως που ασκηθεί άμεσα αποδίδει f_0. Αν επιλέξουμε να μην ασκήσουμε άμεσα το δικαίωμα, τότε η παρούσα αξία του δικαιώματος είναι :

$$u_0 = e^{-rh}(qf_1 + (1-q) f_2), \quad \text{με } q = \frac{e^{rh} - s_2}{s_1 - s_2}.$$

Είναι προφανές ότι αν $f_0 \geq u_0$ μας συμφέρει να ασκήσουμε άμεσα το δικαίωμα ειδάλλως θα πρέπει να περιμένουμε μέχρι την ωρίμανση h. Επομένως η αξία του αμερικανικού παραγώγου σήμερα είναι:

$$V_0 = \max\{ f_0, u_0\} = f_0 \vee u_0 = f_0 \vee e^{-rh}(qf_1 + (1-q) f_2) = u_0 + (f_0 - u_0)^+ .$$

Είναι η μόνη τιμή του δικαιώματος που είναι συμβατή με την αρχή της μη επιτηδειότητας.

Ένα αμερικανικό δικαίωμα μπορεί να ασκηθεί οποιαδήποτε στιγμή όταν πρόκειται για διωνυμικό υπόδειγμα πολλών περιόδων. Το αμερικανικό παράγωγο την χρονική στιγμή t_k αποδίδει στον κάτοχο του Y_k. Η $\{Y_k\}_{0\leq k\leq N}$ ονομάζεται εγγενής αξία και επιπλέον $\forall k \in [0, N]$ είναι μία $\mathcal{F}_k$-μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή. Ισχύει δηλαδή

$$Y_k = Y_k(S_0, ..., S_k)$$

με S_k να είναι η τιμή του πρωτογενούς προϊόντος τη στιγμή $t_k = kh$. Αν έχουμε ένα αμερικανικού τύπου δικαίωμα πώλησης, τότε η εγγενής αξία του είναι $Y_k = K - S_k$, όπου *K* η τιμή άσκησης. Αν το αμερικανικό δικαίωμα δεν ασκηθεί μέχρι την ωρίμανση του η αξία του θα είναι $V_N = Y_N^+$. Κάτι τέτοιο είναι λογικό γιατί ο κάτοχος του θα το ασκήσει μόνο αν έχει θετική εσωτερική αξία.

Έστω t_{N-1} είναι η χρονική στιγμή που μελετάμε. Η τιμή του πρωτογενούς προϊόντος είναι S_{N-1}, η εσωτερική αξία του αμερικανικού δικαιώματος είναι Y_{N-1}. Αν δεν ασκηθεί στην ωρίμανση θα έχει απόδοση $V_N^{\uparrow} = Y_N(S_0, ..., S_{N-1}u_{N-1})$ αν η αξία του προϊόντος γίνει $S_{N-1}u_{N-1}$, ειδάλλως $V_N^{\downarrow} = Y_N(S_0, ..., S_{N-1}d_{N-1})$ για $S_{N-1}d_{N-1}$. Για να αποφασίσει ο κάτοχος του αν θα το ασκήσει ή όχι θα πρέπει να συγκρίνει την εσωτερική αξία Y_{N-1} με την αξία του παραγώγου αν δεν ασκηθεί. Η αξία του την χρονική στιγμή t_N μπορεί να υπολογιστεί δημιουργώντας ένα χαρτοφυλάκιο

$(\alpha_{N-1}, \beta_{N-1})$ το οποίο θα έχει ίδια απόδοση με το παράγωγο. Επομένως η αξία του παραγώγου αν δεν ασκηθεί θα είναι

$$U_{N-1} = e^{-rh}(q_{N-1}V_N^{\uparrow} + (1-q_{N-1})V_N^{\downarrow}) = e^{-rh}E[V_N \,|\mathcal{F}_{N-1}].$$

Αν $Y_{N-1} \geq U_{N-1}$ τότε ο κάτοχος του δικαιώματος θα ασκήσει το δικαίωμα την στιγμή t_{N-1}, σε αντίθετη περίπτωση θα περιμένει ως την ωρίμανση. Μην ξεχνάμε ότι Y_{N-1}, U_{N-1} είναι $\mathcal{F}_{N-1}$ μετρήσιμες τυχαίες μεταβλητές, μπορεί να εξαρτώνται από την ιστορία της αγοράς μέχρι εκείνη την στιγμή αλλά είναι διαφορετικές στους κόμβους ανάμεσα. Αυτό σημαίνει ότι είναι πιθανό σε κάποιους κομβους να συμφέρει τον κάτοχο του να το ασκήσει.

Ορίζουμε

$$V_{N-1} = Y_{N-1} \vee U_{N-1} = Y_{N-1} \vee e^{-rh}E^{Q}[V_N \,|\mathcal{F}_{N-1}].$$

Οπισθοδρομώντας για $t_{N-2},...,t_0$ βρίσκουμε τον αλγόριθμο.

Ο αλγόριθμος περιγράφει την εξής διαδικασία:

- Ορίζουμε $U_N = 0, V_N = Y_N \vee U_N = Y_N^{+}(S_0,..,S_N)$
- Για $k = N, N-1,..,1$, έχοντας ορίσει την $V_k = V_k(S_0,..,S_N) \geq 0$
  1. Βρίσκουμε χαρτοφυλάκιο $(\alpha_{k-1}, \beta_{k-1})$ ώστε $\alpha_{k-1}, \beta_{k-1}$ να είναι $\mathcal{F}_{k-1}$-μετρήσιμες τυχαίες μεταβλητές και $\alpha_{k-1}S_k + \beta_{k-1}e^{rhk} = V_k$
  2. Βρίσκουμε την αξία του χαρτοφυλακίου $U_{k-1} = e^{-rh}(q_{k-1}V_k^{\uparrow} + (1-q_{k-1})V_k^{\downarrow}) = e^{-rh}E[V_k \,|\mathcal{F}_{k-1}]$.
  3. Συγκρίνουμε την U_{k-1} με την Y_{k-1} και ορίζουμε την $V_{k-1} = Y_{k-1} \vee U_{k-1} = U_{k-1} + (Y_{k-1} - U_{k-1})^{+}$.
- Για $k = 0,...,N-1$ ορίζουμε το χαρτοφυλάκιο (φ_k, ψ_k), με $\varphi_k = \alpha_k$ και $\psi_k = \beta_k + \sum_{j=0}^{k}(Y_j - U_j)^{+}e^{-rjh}$.

<u>Λήμμα 1</u>

Το χαρτοφυλάκιο $\{(\varphi_k, \psi_k)\}_{0 \leq k \leq N-1}$ είναι αυτοχρηματοδοτούμενο και η αξία του τη χρονική στιγμή t_k είναι :

$$V_k^{\varphi} = V_k + \sum_{j=0}^{k-1}(Y_j - U_j)^{+}e^{r(k-j)h}.$$

Ένα πολύ σημαντικό θεώρημα που θα χρησιμοποιήσουμε στην εφαρμογή μας είναι το ακόλουθο.

Θεώρημα 3:

I. Η μόνη αρχική αξία στο αμερικανικό δικαίωμα με εσωτερική αξία $\{Y_k\}_{0\le k\le N}$ που δεν αφήνει περιθώριο για επιτηδειότητα είναι η V_0 από τον παραπάνω αλγόριθμο.

II. Η βέλτιστη περίοδος άσκησης είναι $k_* = \inf\{k : Y_k \ge U_k = e^{-rh} E^Q[V_{k+1} | \mathcal{F}_k]\}$.

III. Η στρατηγική αντιστάθμισης του αμερικανικού δικαιώματος από τον πωλητή του δίνεται από το χαρτοφυλάκιο $\{(\varphi_k, \psi_k)\}_{0\le k\le N-1}$.

Παρατηρούμε δηλαδή ότι η βέλτιστη στρατηγική που πρέπει να ακολουθήσει ο κάτοχος ενός αμερικανικού δικαιώματος, είναι να το ασκήσει όταν η εσωτερική αξία του δικαιώματος είναι τουλάχιστον όση η αναμενόμενη αξία του δικαιώματος την αμέσως επόμενη χρονική στιγμή. Κάτι επίσης που πρέπει να αναφέρουμε είναι ότι η βέλτιστη περίοδος διακοπής k_* είναι και αυτή μια τυχαία μεταβλητή.

2.4.2 Χρόνοι διακοπής

Ορισμός

Θα λέμε ότι ένα ενδεχόμενο A ανήκει στην οικογένεια ενδεχομένων $\mathcal{F}_k$, αν η δείκτρια συνάρτηση του A είναι $\mathcal{F}_k$-μετρήσιμη

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{matrix} 1, \omega \in A \\ 0, \omega \notin A \end{matrix}$$

Ο ορισμός μας λέει ότι το ενδεχόμενο A ανήκει στην κλάση $\mathcal{F}_k$, αν αρκεί να γνωρίζουμε τις τιμές $S_0, \dots, S_{t_k}$.

Πρόταση 5

Οι ιδιότητες των ενδεχομένων $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι:

- $\forall n \in \mathbb{N}_0$ έχουμε $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$.
- $\Omega \in \mathcal{F}_n$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$
- Αν $A \in \mathcal{F}_n$, τότε $A^c \in \mathcal{F}_n$

- Αν $A, B \in \mathcal{F}_n$, τότε $A \cap B \in \mathcal{F}_n$ και $A \cup B \in \mathcal{F}_n$.

<u>Ορισμός</u>

Θα ονομάζουμε την τυχαία μεταβλητή $T : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ ως *χρόνος διακοπής* της $\{S_{t_n}\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ αν $\forall n \in \mathbb{N}_0$, το ενδεχόμενο $\{T = n\}$ ανήκει στην $\mathcal{F}_n$.

Ο χρόνος διακοπής μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μία στρατηγική σταματήματος που βέβαια δεν της επιτρέπεται να δει το μέλλον. Αν και η στρατηγική εξαρτάται από την τροχιά του πρωτογενούς προϊόντος, ο ορισμός επιβάλλει ότι η απόφαση που θα παρθεί για την διακοπή, εξαρτάται μονο από τις τιμές μέχρι εκείνη την στιγμή $S_0, \ldots, S_{t_k}$ και όχι από τις επόμενες τιμές του πρωτογενούς προϊόντος.

<u>Λήμμα 2</u>

Η τυχαία μεταβλητή $T : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ είναι χρόνος διακοπής, αν και μόνο αν , $\forall n \in \mathbb{N}_0$ το ενδεχόμενο $\{T \le n\}$ ανήκει στην $\mathcal{F}_n$.

<u>Απόδειξη</u>:

Έστω Τ ο χρόνος διακοπής. Για $\forall n \in \mathbb{N}_0$ έχουμε $\{T \le n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \{T = k\}$. Όμως $\{T = k\} \in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n$ για $k = 0, 1, \ldots, n$. Επιπλέον η $\mathcal{F}_n$ είναι κλειστή ως προς τις ενώσεις άρα έχουμε $\{T \le n\} \in \mathcal{F}_n$.

Αντιστρόφως,

Υποθέτουμε ότι $\{T \le n\} \in \mathcal{F}_n$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$. Έχουμε $\{T = 0\} = \{T \le 0\} \in \mathcal{F}_0$ ενώ για $n \in \mathbb{N}$

$$\{T = n\} = \{T \le n\} \cap \{T \le n - 1\}^c \in \mathcal{F}_n$$

αφού όλες οι $\mathcal{F}_n$ είναι κλειστές ως προς συμπληρώματα και τομές. Επομένως ο Τ είναι χρόνος διακοπής.

<u>Πόρισμα</u>

Αν οι T, S είναι χρόνοι διακοπής, τότε οι $T \wedge S$ με $(T \wedge S)(\omega) = \min\{T(\omega), S(\omega)\}$ και με $(T \wedge S)(\omega) = \max\{T(\omega), S(\omega)\}$, είναι και αυτοί χρόνοι διακοπής.

Θεώρημα 4 (optional stopping)*:*

Αν η διαδικασία $\{\ V_n\ _n\ \}_{\in \mathbb{N}_0}$ είναι $\mathcal{F}_n$-martingale και ο τυχαίος χρόνος Τ είναι φραγμένος χρόνος διακοπής της $\{S_{t_n}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, τότε

$$E[V_T] = E[V_0]\,.$$

Παρατήρηση: Η προεξοφλημένη αξία οποιουδήποτε αυτοχρηματοδοτούμενου χαρτοφυλακίου είναι martingale ως προς το μέτρο martingale Q.

2.5 Βέλτιστη στρατηγική άσκησης

Σε αυτήν την παράγραφο θα παρουσιάσουμε πώς επιτυγχάνουμε την βέλτιστη στρατηγική άσκησης του δικαιώματος μας.

<u>Λήμμα 3</u>

Έστω ο χρόνος διακοπής k_* που είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, η αρχική αξία του χαρτοφυλακίου $\{(\varphi_k, \psi_k)\}_k$ από τον αλγόριθμο τιμολόγησης αμερικανικών δικαιωμάτων είναι

$$V_0 = V_0^{\varphi} = E^Q[e^{-r\tau_*} Y_{\tau_*}^+], \quad \tau_* = k_* \wedge N\,.$$

<u>Απόδειξη:</u>

Από το Λήμμα 1 έχουμε ότι το χαρτοφυλάκιο είναι αυτοχρηματοδοτούμενο και από ένα θεώρημα που λέει ότι, αν το Q είναι μέτρο martingale στον Ω, τότε η προεξοφλημένη αξία κάθε αυτοχρηματοδοτούμενου χαρτοφυλακίου $e^{-rt_k} V_{t_k}$ είναι $(Q, \mathcal{F}_k)$-martingale, η προεξοφλημένη αξία του είναι martingale

$$M_k = e^{-rkh} V_k^{\varphi}$$

Ο χρόνος $k_* = \inf\{k \ge 0 : Y_k \ge U_k\}$ είναι χρόνος διακοπής. Επίσης από το πόρισμα είδα ότι ο τ_* είναι ένας φραγμένος χρόνος διακοπής. Επομένως, από το Θεώρημα (optional stopping) έχουμε

$$V_0^{\varphi} = E^Q[M_{\tau_*}] = E^Q[e^{-r\tau_*} V_{\tau_*}^{\varphi}]\,.$$

Από το λήμμα 1 έχουμε ότι $V_k^{\varphi} = V_k$, αν $k_* \geq k$. Συμπεραίνουμε ότι $V_{\tau_*}^{\varphi} = V_{\tau_*}$ και η παραπάνω σχέση γίνεται

$$V_0^{\varphi} = E^Q[e^{-rh\tau_*}V_{\tau_*}]$$

Αν $\tau_* = N$, έχουμε $V_{\tau_*} = V_N = Y_N^+ = Y_{\tau_*}^+$. Αν $\tau_* < N$ και $V_{k_*} = Y_{k_*} \vee U_{k_*} = Y_{k_*} = Y_{k_*}^+$ αφού $0 \leq U_{k_*} \leq Y_{k_*}$. Σε κάθε περίπτωση έχουμε $V_{\tau_*} = Y_{\tau_*}^+$ και ο ισχυρισμός μας προκύπτει από την προηγούμενη εξίσωση.

∎

<u>Λήμμα 4</u>

Έστω τ ο χρόνος διακοπής της $\{S_{t_k}\}_k$ με $\tau \leq N$. Τότε $V_0^{\varphi} \geq E^Q[e^{-rh\tau}Y_\tau^+]$.

<u>Απόδειξη:</u>

Από το λήμμα 1 έχουμε ότι $V_k^{\varphi} \geq V_k$, $\forall k \leq N$. Γνωρίζουμε ότι $U_k \geq 0$, άρα έχουμε $V_k = Y_k \vee U_k \geq Y_k^+$. Είναι προφανές ότι προκύπτει $V_\tau^{\varphi} \geq Y_\tau^+$. Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με $e^{-rh\tau}$ και στην συνέχεια παίρνοντας την αναμενόμενη τιμή ως προς Q έχουμε

$$E^Q[e^{-rh\tau}V_\tau^{\varphi}] \geq E^Q[e^{-rh\tau}Y_\tau^+].$$

Από το θεώρημα (optional stopping) έχουμε ότι $V_0^{\varphi} = E^Q[e^{-rh\tau}V_\tau^{\varphi}] \geq E^Q[e^{-rh\tau}Y_\tau^+]$.

∎

Παρατήρηση: Συνδυάζοντας τα λήμματα 3 και 4 έχουμε ότι

$$V_0^{\varphi} = \sup_{\tau \leq N} E^Q[e^{-rh\tau}Y_\tau^+]$$

και το supremum επιτυγχάνεται για χρόνο διακοπής $\tau_* = k_* \wedge N$.

2.6 Εφαρμογή της βέλτιστης στρατηγικής άσκησης.

Σε αυτή την ενότητα θα εφαρμόσουμε τα όσα αναφέραμε μέχρι τώρα. Θα σχοληθούμε με ένα αμερικανικό δικαίωμα πώλησης. Θα δείξουμε πότε και πού πρέπει να ασκήσουμε το δικαίωμα που θα έχουμε στην κατοχή μας, ώστε να έχουμε ακολουθήσει την βέλτιστη δυνατή στρατηγική.

Έστω λοιπόν ότι κατέχουμε ένα αμερικανικό δικαίωμα πώλησης με τιμή άσκησης K=90, r=0.0325, σ=0,228035085, N=100 για 1 χρόνο. Το πρωτογενές μας προϊόν έχει αρχική τιμή 100.

Κατασκευάζουμε έναν κώδικα που ασκεί την βέλτιστη στρατηγική και να μας τυπώνει τους κόμβους άσκησης του δικαιώματος.

Υποσημείωση: Ο κώδικας, όπως και όλοι οι κώδικες της υπάρχουσας εργασίας είναι σε γλώσσα προγραμματισμού *JAVA.*

<u>ΚΩΔΙΚΑΣ</u>

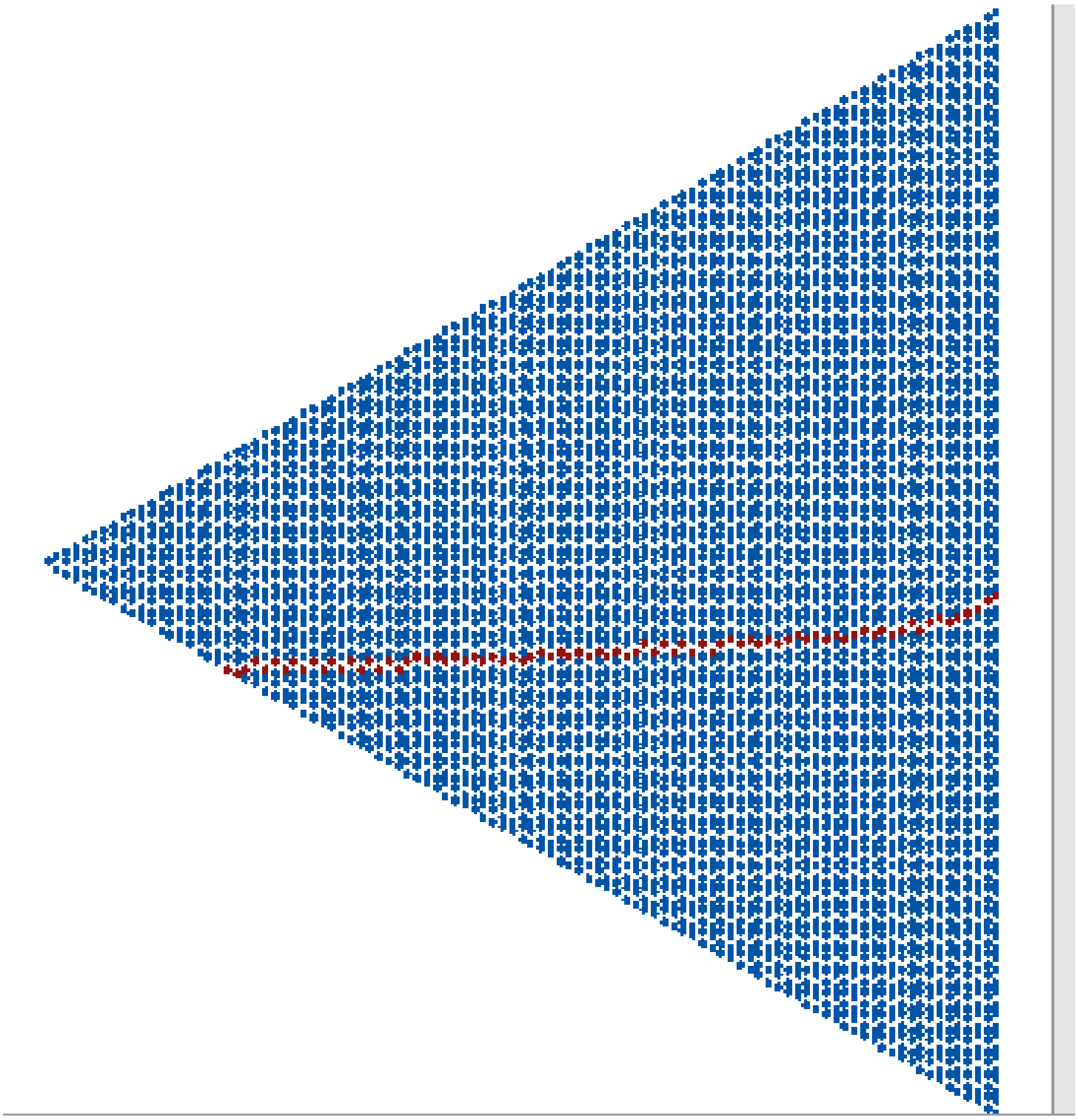
```
public class Func {
public static void main(String[] args) {
  double S[][]=new double[101][101];
  double Y[][]=new double[101][101];
  double V[][]=new double[101][101];
  double q=(Math.exp(0.000228035085)-Math.exp(-
0.0227385085))/(Math.exp(0.0228685085)-Math.exp(-0.0227385085));
  int So=100;
  int a=1000;

for(int j=0;j<101;j++)
{
 for(int i=0; i<j+1; i++)
{
   S[j][i]=So*Math.pow(Math.exp(0.0228685085),j-
i)*Math.pow(Math.exp(-0.0227385085),i);
System.out.println(j+"  "+S[j][i]);
}
  }//System.out.print(S[99][33]);System.out.println();
  for(int j=0;j<101;j++)
{
 for(int i=0; i<j+1; i++)
{
  Y[j][i]=90-S[j][i];



}
  }
  //System.out.print(Y[100][33]);System.out.println();

  for(int i=0;i<101;i++)
  {if (90-S[100][i]<=0)
  {V[100][i]=0;

  }   if (90-S[100][i]>0)
  {V[100][i]=90-S[100][i];
    //System.out.println("Kombos askisews
einai:"+"["+100+","+i+"]"+S[100][i]);
   if (a>i)
   {a=i;
  System.out.println("Call option:"+100+"  "+(a));
   }
  }
   //System.out.print(V[100][i]);System.out.println();
  }
  for(int j=99;j>=0;j--)
{int b=1000;
 for(int i=0; i<j+1; i++)
{
```

```
   if (Math.exp(-0.000228035085)*(q*V[j+1][i]+(1-
q)*V[j+1][i+1])<=Y[j][i])
   {V[j][i]=Y[j][i];
   //System.out.println("Kombos askisews
einai:"+"["+j+","+i+"]"+S[j][i]);
    if(b>i)
    {b=i;
     System.out.println("Call option:"+j+"  "+(b));    }
   }
   if(Math.exp(-0.000228035085)*(q*V[j+1][i]+(1-
q)*V[j+1][i+1])>Y[j][i])
   {V[j][i]=Math.exp(-0.000228035085)*(q*V[j+1][i]+(1-
q)*V[j+1][i+1]);}
 }}

   //System.out.print(V[2][2]);System.out.println();

  }
}
```

Γράφημα κόμβων και αποτελέσματα:

```
Call option100  53
Call option:99  53
Call option:98  53
Call option:97  53
Call option:96  53
Call option:95  53
Call option:94  52
Call option:93  52
Call option:92  52
Call option:91  51
Call option:90  51
Call option:89  51
Call option:88  50
Call option:87  50
Call option:86  49
Call option:85  49
Call option:84  49
Call option:83  48
Call option:82  48
Call option:81  47
Call option:80  47
Call option:79  46
Call option:78  46
Call option:77  46
Call option:76  45
Call option:75  45
Call option:74  44
Call option:73  44
Call option:72  43
Call option:71  43
Call option:70  43
Call option:69  42
```

```
Call option:68  42
Call option:67  41
Call option:66  41
Call option:65  40
Call option:64  40
Call option:63  39
Call option:62  39
Call option:61  39
Call option:60  38
Call option:59  38
Call option:58  37
Call option:57  37
Call option:56  36
Call option:55  36
Call option:54  35
Call option:53  35
Call option:52  34
Call option:51  34
Call option:50  34
Call option:49  33
Call option:48  33
Call option:47  32
Call option:46  32
Call option:45  31
Call option:44  31
Call option:43  30
Call option:42  30
Call option:41  29
Call option:40  29
Call option:39  28
Call option:38  28
Call option:37  28
Call option:36  27
Call option:35  27
Call option:34  26
Call option:33  26
Call option:32  25
Call option:31  25
Call option:30  24
Call option:29  24
Call option:28  23
Call option:27  23
Call option:26  22
Call option:25  22
Call option:24  21
Call option:23  21
Call option:22  20
Call option:21  20
Call option:20  20
Call option:19  19
```



Συμπεράσματα:

Κοιτάζοντας το γράφημα, παρατηρούμε καλύτερα τους κόμβους άσκησης. Οι κόμβοι άσκησης είναι με κόκκινο χρώμα. Η πρώτη χρονική στιγμή που μας συμφέρει να ασκήσουμε το δικαίωμα είναι για N=18 όπου το πρωτογενές προϊόν κοστίζει $S_{t_{18}} = 66.41195151544242$. Επίσης διακρίνουμε ότι η καμπύλη που δημιουργείται από τους κόμβους άσκησης, πλησιάζει σιγά σιγά τον κόμβο στον οποίο η τιμή άσκησης ισούται με την τιμή του πρωτογενούς προϊόντος, όπου και εν τέλει τον φτάνει στο πέρας των περιόδων μας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΜΕ ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΧΡΟΝΙΚΟ ΟΡΙΖΟΝΤΑ

3.1 Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο κάναμε μια εισαγωγή στην χρηματοοικονομική θεωρία, για την καλύτερη κατανόηση της εφαρμογής που παρουσιάσαμε με πεπερασμένο χρονικό ορίζοντα. Στο παρόν κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με πρόβλημα μη πεπερασμένου χρονικού ορίζοντα. Θα βρούμε την βέλτιστη στρατηγική με βάση την θεωρία του $1^{ου}$ κεφαλαίου. Θα υπολογίσουμε τον μέσο χρόνο άφιξης, όπως επίσης και τις πιθανότητες εμφάνισης τους.

3.2 Παρουσίαση Προβλήματος (Παιχνίδι ζαριού)

Το πρόβλημα μας είναι ένα «παιχνίδι ζαριού». Έστω ένας παίχτης ρίχνει ένα «δίκαιο» εξάεδρο ζάρι, δηλαδή είναι ισοπίθανα όλα τα ενδεχόμενα 1,…,6. Αν ο παίχτης φέρει αποτέλεσμα {2,3,4,5,6}, μπορεί είτε να σταματήσει και να πάρει αυτό που έφερε, είτε να συνεχίσει να ρίχνει αθροίζοντας όλα τα επόμενα αποτελέσματα. Όταν ο παίχτης φέρει 1 τότε είναι αναγκασμένος να σταματήσει και χάνει ότι έχει «κερδίσει» μέχρι εκείνη την στιγμή, δηλαδή 0 κέρδος. Ο παίχτης μπορεί να σταματήσει οποιαδήποτε στιγμή θελήσει έχοντας κρατήσει το άθροισμα των ρίψεων που έφερε.

3.3 Βέλτιστη στρατηγική

Όπως διαπιστώνουμε το πρόβλημα μας είναι μη πεπερασμένου χρονικού ορίζοντα. Η βέλτιστη στρατηγική λοιπόν που πρέπει να ακολουθήσουμε, είναι να σταματήσουμε όταν το αναμενόμενο κέρδος μας ισούται με το υπάρχον κέρδος. Δηλαδή θα ψάξουμε να βρούμε ποιο είναι το άθροισμα που πρέπει να έχουμε συλλέξει ώστε να ισχύει η ισότητα.

Ο παρακάτω κώδικας μας βοηθάει να βρούμε αυτό το άθροισμα.

```
 public class Func {
public static void main(String[] args) {
double h[]=new double[41];
for(int j=8;j<40;j++)
{
double G[]=new double[j];
for(int i=j-7; i>0; i--)
{
G[j-6]=j-6;
G[j-1]=j-1;
G[j-2]=j-2;
G[j-3]=j-3;
G[j-4]=j-4;
G[j-5]=j-5;
G[i]=(G[i+2]+G[i+3]+G[i+4]+G[i+5]+G[i+6])/
6;
}
```

```
G[0]=(G[2]+G[3]+G[4]+G[5]+G[6])/6;
System.out.println(G[0]);
}
}
}
```

Αποτελέσματα:

k	EY_{τ_k}	k	EY_{τ_k}
1	3.3333	21	8.1418
2	3.3333	22	8.1260
3	3.8333	23	8.0957
4	4.3056	24	8.0524
5	4.8241	25	7.9972
6	5.3796	26	7.9312
7	5.9738	27	7.8554
8	6.2446	28	7.7709
9	6.5795	29	7.6786
10	6.8737	30	7.5794
11	7.1414	31	7.4740
12	7.3739	32	7.3631
13	7.5668		
14	7.7162		
15	7.8476		
16	7.9516		
17	8.0316		
18	8.0886		
19	8.1246		
20	8.1418		

Συμπεράσματα

Όπως παρατηρούμε στα αποτελέσματα μας, η ισότητα επιτυγχάνεται για κ=20 και κ=21. Δηλαδή η βέλτιστη στρατηγική που πρέπει να ακολουθήσουμε είναι να συνεχίσουμε να ρίχνουμε το ζάρι έως ότου φτάσει το άθροισμα μας να είναι 20 ή 21.

3.4 Μέσος χρόνος αφίξεως (E[T])

Είδαμε ποια είναι η βέλτιστη στρατηγική για το πρόβλημα μας. Ποιός είναι όμως ο μέσος χρόνος άσκησης αυτής της στρατηγικής; Πόσο χρόνο θα χρειαστούμε για να φτάσουμε άθροισμα 20 ή 21; Ακόμα καλύτερα πόσες ρίψεις θα χρειαστούμε;

Ο ακόλουθος κώδικας μας διευκολύνει να δώσουμε την απάντηση.

```
public class Mpilos {
public static void main(String[] args) {
float g[]=new float[22];
g[2]=(float)1;
g[3]=(float)1;
g[4]=(float)7/6;
g[5]=(float)8/6;
g[6]=(float)55/36;
g[7]=(float)7/4;
float pN;
for(int i=8; i<g.length; i++)
{
g[i]=((g[i-2]+g[i-3]+g[i-4]+g[i-5]+g[i-6])/6)+1;
System.out.println(g[i]);
}
System.out.println("E(T) for k= 20 or 21 is
:g[20]="+g[20]+","+"g[21]="+g[21]);
}
}
```

Αποτελέσματα:

```
2.0046296
2.1296296
2.2970679
2.4575615
2.618184
2.773148
2.9178452
3.0459318
```

3.1773012
3.3021119
3.4220684
3.5360563
3.6442099
3.747245
E(T) for k= 20 or 21 is :g[20]=3.6442099,g[21]=3.747245.

<u>Συμπεράσματα</u>

Όπως διαπιστώνουμε ο μέσος χρόνος ή καλύτερα ο μέσος αριθμός ρίψεων είναι τέσσερις φορές.

3.5 Πιθανότητες εμφάνισης και νίκης

Ένα πολύ ενδιαφέρον στοιχείο για το πρόβλημα μας, είναι να υπολογίσουμε την πιθανότητα να «κερδίσουμε». Δηλαδή ποια είναι η πιθανότητα να έχουμε άθροισμα πάνω απο 20. Επίσης θα βρούμε τις πιθανότητες να έχουμε ακριβώς άθροισμα 20 και 21. Υπενθυμίζουμε ότι το ζάρι είναι δίκαιο επομένως κάθε ενδεχόμενο {1,2,3,4,5,6} έχει πιθανότητα εμφάνισης 1/6. Επομένως ο πίνακας μετάβασης πιθανοτήτων είναι :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC
1		0	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
2	0	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	2	1/6	0	0	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	3	1/6	0	0	0	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	4	1/6	0	0	0	0	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	5	1/6	0	0	0	0	0	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	6	1/6	0	0	0	0	0	0	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	7	1/6	0	0	0	0	0	0	0	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	8	1/6	0	0	0	0	0	0	0	0	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	9	1/6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	10	1/6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	11	1/6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	12	1/6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	13	1/6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	14	1/6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	0	0	0	0	0	0	0	0
16	15	1/6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	0	0	0	0	0	0	0
17	16	1/6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	0	0	0	0	0	0
18	17	1/6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	0	0	0	0	0
19	18	1/6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	0	0	0	0
20	19	1/6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	0	0	0
21	20	1/6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	0	0
22	21	1/6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	0
23	22	1/6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
24	23	1/6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/6	1/6	1/6	1/6
25	24	1/6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/6	1/6	1/6
26	25	1/6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/6	1/6
27	26	1/6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/6
28	27	1/6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
29	28	1/6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Πίνακας μετάβασης

Ο κώδικας που ακολουθεί, χρησιμοποιώντας τον πίνακα μετάβασης, υπολογίζει τις πιθανότητες που χρειαζόμαστε.

```
public class Mpilos {
public static void main(String[] args) {
float p[]=new float[22];
p[2]=(float)1/6;
p[3]=(float)1/6;
p[4]=(float)7/36;
p[5]=(float)8/36;
p[6]=(float)55/216;
p[1]=(float)0;
float pN;
for(int i=7; i<p.length; i++)
{
p[i]=(p[i-2]+p[i-3]+p[i-4]+p[i-5]+p[i-6])/6;
System.out.println(p[i]);
}
System.out.println("P(20) and P(21) are: "+p[20]+" , "+p[21]);
pN=p[20]+p[21]+(p[19]*4/6)+(p[18]*3/6)+(p[17]*2/6)+(p[16]/6);
System.out.println("Pwin: "+pN);
}
}
```

Αποτελέσματα:

```
0.12500001
0.16743828
0.16049384
0.16062243
0.15496399
0.14469737
0.12808642
0.13136931
0.12481067
0.11995658
0.11398796
0.108153395
0.10303515
0.09971299
0.09499063
P(20) and P(21) are : 0.09971299 , 0.09499063
Pwin: 0.3754592
```

Συμπεράσματα:

Η πιθανότητα να «κερδίσουμε» στο παιχνίδι ακολουθώντας την βέλτιστη στρατηγική είναι περίπου 37,5%. Ενώ οι πιθανότητες να έχουμε άθροισμα 20 και 21, όταν θα διακόψουμε το παιχνίδι, είναι περίπου 9,97% και 9,49% αντίστοιχα.

Διασπορά

Τέλος για να είναι πιο ολοκληρωμένη η αναφορά σε αυτή την εφαρμογή θα πρέπει να υπολογίσουμε και την διασπορά για κάθε στρατηγική k. Η διασπορά υπολογίζεται από τον τύπο:

$$Var[V] = E[(V - E[V])^2] = ... = E[V^2] - (E[V])^2$$

Ο κώδικας μας υπολογίζει τις διασπορές που ψάχνουμε.

```
public class Func {
public static void main(String[] args) {
double h[]=new double[41];
for(int j=8;j<40;j++)
{
double G[]=new double[j];
  double V[]=new double[j];
for(int i=j-7; i>0; i--)
{
G[j-6]=j-6;
G[j-1]=j-1;
G[j-2]=j-2;
G[j-3]=j-3;
G[j-4]=j-4;
G[j-5]=j-5;
G[i]=(G[i+2]+G[i+3]+G[i+4]+G[i+5]+G[i+6])/6;
  V[j-6]=Math.pow(j-6,2);
V[j-1]=Math.pow(j-1,2);
V[j-2]=Math.pow(j-2,2);
V[j-3]=Math.pow(j-3,2);
V[j-4]=Math.pow(j-4,2);
V[j-5]=Math.pow(j-5,2);
V[i]=(V[i+2]+V[i+3]+V[i+4]+V[i+5]+V[i+6])/6;
}
G[0]=(G[2]+G[3]+G[4]+G[5]+G[6])/6;
  V[0]=(V[2]+V[3]+V[4]+V[5]+V[6])/6;
System.out.println("k="+(j-7)+"  Var="+(V[0]-Math.pow(G[0],2)));
}
}
}
```

Αποτελέσματα:

```
k=1  Var=3.8888888888888875
k=2  Var=4.916666666666664
k=3  Var=6.65663580246914
k=4  Var=9.50608710562414
k=5  Var=13.652177640603561
k=6  Var=19.383571006706298
k=7  Var=22.761930703208343
k=8  Var=28.12305610329983
k=9  Var=34.03497777005116
k=10  Var=40.72352803031933
k=11  Var=47.91288772705292
k=12  Var=55.30390192331821
k=13  Var=62.434448300556035
k=14  Var=70.33011727900667
k=15  Var=78.35968662289024
k=16  Var=86.55806478938294
k=17  Var=94.77734810073204
k=18  Var=102.95326884698545
k=19  Var=111.07129874806594
k=20  Var=119.214525990792
k=21  Var=127.21380955463896
k=22  Var=135.06024865588608
k=23  Var=142.70601288408875
k=24  Var=150.13165083523108
k=25  Var=157.32081908613196
k=26  Var=164.25512583147298
k=27  Var=170.89683797418024
k=28  Var=177.23642851287676
k=29  Var=183.25897488184597
k=30  Var=188.95590580162815
k=31  Var=194.3190868743175
k=32  Var=199.3414713392182
```

Συμπεράσματα:

Διαπιστώνουμε ότι η διασπορά δεν είναι ίδια για όλες τις στρατηγικές διακοπής. Πιο συγκεκριμένα όσο «μεγαλώνει» η στρατηγική μας τόσο μεγαλώνει και η διασπορά.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Αριθμητικοί Μέθοδοι Βελτιστοποίησης

4.1 Εισαγωγή

Η επιστημονική κοινότητα πολλές φορές αντιμετωπίζει προβλήματα που δεν λύνονται αναλυτικά. Για την επίλυση τους χρησιμοποιούνται πολλές φορές προσεγγιστικές μέθοδοι. Η εξέλιξη όμως των υπολογιστών ανάγκασε τους επιστήμονες να στραφούν στην στατιστική και σε διάφορες υπολογιστικές τεχνικές. Μια τέτοια τεχνική είναι η μέθοδος προσομοίωσης Monte Carlo που αποτελείται από υπολογιστικούς αλγορίθμους που μιμούνται την συμπεριφορά των προβλημάτων μας.

Η πρώτη χρήση της Monte Carlo φημολογείται ότι έγινε από τον Enrico Fermi, γνωστό και ως τον πατέρα της βόμβας υδρογόνου, σε μια εργασία του για την διάχυση των νετρονίων. Αργότερα η μέθοδος Monte Carlo έπαιξε καθοριστικό ρόλο στην κατασκευή της πρώτης ατομικής βόμβας, κατά την διάρκεια του Β′ Παγκοσμίου Πολέμου με το Project Manhattan.

Ο Stanislaw Ulam (πολωνός μαθηματικός) ήταν αυτός που ξεκίνησε την μελέτη της Monte Carlo. Εμπνεύστηκε από την προσπάθεια του να υπολογίσει τις πιθανότητες νίκης στην πασιέτζα Canfield. Ο υπολογισμός αυτός ήταν όμως αδύνατος και έτσι αποφάσισε να επαναλάβει το παιχνίδι 100 φορές και να βγάλει «εμπειρικά» αποτελέσματα. Έπειτα διερωτήθηκε αν μπορεί να εκτιμήσει μια συνάρτηση πιθανότητας χρησιμοποιώντας δείγματα από την εμπειρική συνάρτηση πιθανότητας.

Το 1946 ξεκινάει η συνεργασία με τον John von Neumann για την Monte Carlo όπου και της δόθηκε το σημερινό της όνομα. Ο Neumann ανέπτυξε έναν αλγόριθμο που κατασκεύαζε τυχαίους αριθμούς για να αποφύγουν άλλες χρονοβόρες τεχνικές.

Η μέθοδος Monte Carlo αποτελείται από υπολογιστικούς αλγόριθμους που βασίζονται στην επαναλαμβανόμενη τυχαία δειγματοληψία με σκοπό την ανάκτηση αριθμητικών αποτελεσμάτων. Η πολλαπλή προσομοίωση του προβλήματος, μας δίνει την δυνατότητα να υπολογίσουμε τις ίδιες πιθανότητες επαγωγικά όπως ακριβώς παίζουμε και καταγράφουμε τα αποτελέσματα (στην παρούσα εργασία με την επαναλαμβανόμενη ρίψη ζαριού).

Στις μέρες μας η Monte Carlo έχει εφαρμογή σε όλους τους επιστημονικούς τομείς όπως για παράδειγμα στην υγεία, στην φυσική, στα μαθηματικά, στην ρομποτική, στα οικονομικά όπως και σε πολλούς ακόμα.

Γενικά, η αρχική ιδέα της Monte Carlo είναι: ***Ό,τι χρειαζόμαστε για μια τυχαία μεταβλητή X μπορούμε να το μάθουμε μέσω της επαναλαμβανόμενης δειγματοληψίας από τη συνάρτηση κατανομής της***.

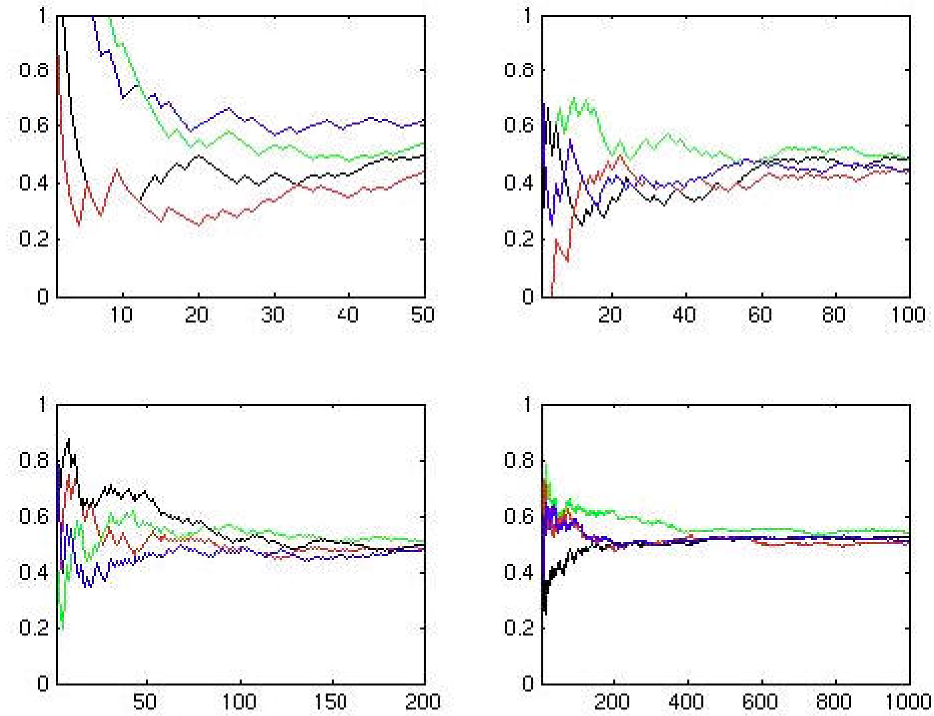
4.2 Στοιχεία Στατιστικής Στην Monte Carlo.

Τα προβλήματα των μετρήσεων έχουν να κάνουν με το τι συμβαίνει εάν επαναλάβουμε την ίδια μέτρηση ξανά και ξανά. Οι μαθηματικοί νόμοι που διέπουν τις επαναλαμβανόμενες μετρήσεις λέγονται **οριακοί νόμοι,** γιατί περιγράφουν τι γίνεται στο όριο , όταν το πείραμα εκτελείται όλο και περισσότερες φορές. Από τους νόμους που θα αναφερθούμε παρακάτω ο πρώτος λέγεται **Νόμος των Μεγάλων Αριθμών** και ο δεύτερος **Κεντρικό Οριακό Θεώρημα.**

Νόμος των μεγάλων αριθμών

Για να περιγράψουμε τον νόμο αυτόν , υποθέτουμε ότι ρίχνουμε ένα νόμισμα πολλές φορές. Αν το νόμισμα είναι «τίμιο», θα περιμέναμε η αναλογία των «κεφαλιών » που εμφανίζονται να είναι περίπου το 1/2 του συνόλου των ρίψεων, καθώς οι ρίψεις γίνονται όλο και περισσότερες .

Αυτό προβλέπει ο Νόμος των Μεγάλων Αριθμών**,** ο οποίος μας λέει ότι αν επαναλάβουμε το πείραμα όλο και περισσότερες φορές, η αναλογία των κεφαλιών θα τείνει ακριβώς στην τιμή 1/2 .



Σχήμα 2.1

Τα παραπάνω σχήματα δείχνουν τι ακριβώς συμβαίνει, όταν κάθε φορά έχουν εκτελεστεί 4 ακολουθίες ρίψεως νομίσματος, και έχουν υπολογιστεί οι αναλογίες με τις οποίες εμφανίζεται το κεφάλι. Κάθε εικόνα αναφέρεται σε συγκεκριμένο αριθμό ρίψεων. Από εικόνα σε εικόνα, ο αριθμός αυτός γίνεται όλο και μεγαλύτερος. Παρατηρούμε ότι η σύγκλιση είναι αργή και όταν ακόμα οι ρίψεις γίνουν 1000, τα αποτελέσματα ακόμη ξεχωρίζουν.

Ο Νόμος των Μεγάλων Αριθμών έχει δύο εκφράσεις: **Τον Ασθενή και τον Ισχυρό νόμο.**

Έστω $X_1, X_2, \ldots$ είναι μία ακολουθία από απλές τυχαίες μεταβλητές σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες αν οι κατανομές τους είναι ίδιες. Ορίζουμε $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.

ΙΣΧΥΡΟΣ ΝΟΜΟΣ

Θεώρημα (Strong Law) :

Αν οι X_n είναι ανεξάρτητες και ομοιόμορφα κατανεμημένες με $E[X_n] = m$, τότε

$$P[\lim_n \frac{S_n}{n} = m] = 1$$

Απόδειξη:

Το συμπέρασμα είναι ότι $\frac{S_n}{n} - m = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)}{n} \to 0$ με πιθανότητα 1. Αντικαθιστώντας την X_i με $X_i - m$ αποδεικνύει ότι δεν υπάρχει καμία απώλεια της γενικότητας αν υποθέσουμε ότι $m = 0$. Το σύνολο πράγματι βρίσκεται στο $\mathcal{F}$, το όριο $\lim_n X_n = X$ συγκλίνει με πιθανότητα 1 αν ισχύει για $\forall \varepsilon$ η σχέση $P[|X_n - X| \geq \varepsilon] = 0$,αυτό είναι αρκετό για να δείξουμε ότι $P[\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \varepsilon] = 0$, $\forall \varepsilon$.

Έστω ότι $E[X_i^2] = \sigma^2$ και $E[X_i^4] = \xi^4$. Έχουμε $E[S_i^4] = \sum E[X_a X_\beta X_\gamma X_\delta]$, οι τέσσερις δείκτες κυμαίνονται ανεξάρτητα από το 1 εως το n. Δεδομένου ότι $E[X_i] = 0$, συνεπάγεται από τον κανόνα γινομένου ($E[X_1 X_2 .....X_n] = E[X_1]....E[X_n]$) για ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές ότι ο προσθετέος μηδενίζεται αν ένας δείκτης είναι διαφορετικός από τους άλλους τρείς. Αυτό αφήνει τους όρους της μορφής $E[X_i^4] = \xi^4$, εκ των οποίων υπάρχουν n, και τους όρους της μορφής $E[X_i^2 X_\xi^2] = E[X_i^2]E[X_\xi^2] = \sigma^4$ για $i \neq j$, εκ των οποίων υπάρχουν 3n(n-1). Ωστόσο

$$E[S_n^4] = n\xi^4 + 3n(n-1)\sigma^4 \leq Kn^2$$

Το K δεν εξαρτάται από το n. Από τις Μαρκοβιανές ανισότητες για $k = 4, P[|S_n| \geq n\varepsilon] \leq \frac{K}{n^2 \varepsilon^4}$, από το λήμμα Borel-Cantelli έχουμε $P[\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \varepsilon] = 0$. $\blacksquare$

<u>**ΑΣΘΕΝΗΣ ΝΟΜΟΣ**</u>

Θεώρημα (Weak Law):

Αν οι X_n είναι ανεξάρτητες και ομοιόμορφα κατανεμημένες με $E[X_n] = m$, τότε $\forall \varepsilon > 0$ έχουμε

$$\lim_{n \to \infty} P[\left|\frac{S_n}{n} - m\right| > \varepsilon] = 0$$

<u>Απόδειξη:</u>

Ο ασθενής νόμος των μεγάλων αριθμών είναι ένα αποτέλεσμα της θεωρίας πιθανοτήτων, επίσης γνωστή ως θεώρημα του Bernoulli. Για κάθε τυχαία μεταβλητή X_n έχουμε ότι $E[X_n] = m$ και τυπική απόκλιση σ. Ορίζουμε μία νέα μεταβλητή X έτσι ώστε

$$X = \frac{S_n}{n}$$

Όσο το $n \to \infty$ το δειγματικό μέσο ισούται με το πληθυσμιακό μέσο της κάθε μεταβλητής. Δηλαδή

$$\begin{aligned} E[X] &= E[\frac{S_n}{n}] = E[\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}] \\ &= \frac{1}{n}(E[X_1] + \ldots + E[X_n]) \\ &= \frac{nm}{n} = m \end{aligned}$$

Επιπλέον έχουμε

$$\begin{aligned} Var[X] &= Var[\frac{S_n}{n}] = Var[\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}] \\ &= Var[\frac{X_1}{n}] + \ldots + Var[\frac{X_n}{n}] \\ &= \frac{\sigma^2}{n^2} + \ldots + \frac{\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

Παρατηρώντας την ανισότητα Chebyshev όπου $\forall \varepsilon > 0$ ισχύει :

$$P(\left|X - m\right| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var[X]}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

Για $n \to \infty$ και λαμβάνοντας υπόψιν την παραπάνω ανισότητα έχουμε:

$$\lim_{n \to \infty} P[\left|X - m\right| \geq \varepsilon] = 0$$

Δηλαδή

$$\lim_{n \to \infty} P[\left|\frac{S_n}{n} - m\right| > \varepsilon] = 0$$

$\blacksquare$

Κεντρικό οριακό θεώρημα

Για να περιγράψουμε το κεντρικό οριακό θεώρημα θεωρούμε ότι έχουμε ένα δείγμα το οποίο περιέχει ένα μεγάλο αριθμό παρατηρήσεων. Κάθε παρατήρηση παράγεται τυχαία με τέτοιο τρόπο ώστε να μην εξαρτάται απο τις τιμές των άλλων παρατηρήσεων και ο αριθμητικός μέσος όρος των παρατηρούμενων τιμών να μπορεί να υπολογισθεί. Αν αυτή η διαδικασία επαναληφθεί πολλές φορές, σύμφωνα με το κεντρικό οριακό θεώρημα, οι υπολογισμένες τιμές του μέσου όρου θα ακολουθούν την κανονική κατανομή. Ένα απλό παράδειγμα είναι ότι αν ένας ρίξει ένα κέρμα πολλές φορές η πιθανότητα να λάβει ένα συγκεκριμένο αριθμό κεφαλιών θα ακολουθεί την κανονική καμπύλη με μέση τιμή ίση με το μισό αριθμό των συνολικών ρίψεων.

Η κλασσική μορφη του κεντρικού οριακού θεώρηματος προϋποθέτει ότι οι τυχαίες μεταβλητές πρέπει να ακολουθούν την ίδια κατανομή. Σε παραλλαγές, η σύγκλιση του μέσου όρου στην κανονική κατανομή παρουσιάζεται επίσης για μη ταυτόσημες κατανομές ή για μη ανεξάρτητες παρατηρήσεις (π.χ. Lyapunov-CLT, Lindeberg-CLT) δεδομένου ότι πληρούν ορισμένες προϋποθέσεις.

Θεώρημα (Κεντρικό Οριακό Θεώρημα-cCLT):

Έστω $X_1, X_2, ..., X_n$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές ομοιόμορφα καταναμημένες (δηλαδή έχουν την ίδια συνάρτηση μάζας πιθανότητας για διακριτές τυχαίες μεταβλητές ή ίδια συνάρτηση πυκνότητα πιθανότητας για συνεχείς τυχαίες μεταβλητές) και έχουν πεπερασμένη μέση τιμή μ και διακύμανση σ^2. Ορίζουμε $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$.

$$\lim_{n\to\infty} P(a \le \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-u^2/2} du$$

Η ποσότητα $\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ είναι μία τυχαία μεταβλητή η οποία είναι τυποποιημένη μεταβλητή που αντιστοιχεί στην Sn, είναι ασυμπτωτικά κανονική κατανομή.

Το θεώρημα ισχύει και υπο γενικότερες συνθήκες. Για παράδειγμα έστω $X_1, X_2, ..., X_n$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με ίδια μέση τιμή και διακύμανση, χωρίς να είναι απαραίτητα ομοιόμορφα κατανεμημένες.

4.3 Μείωση της Διασποράς

Ίσως το σημαντικότερο ελλάτωμα της Monte Carlo, είναι ότι μπορεί να γίνει εξαιρετικά αργή. Επομένως για να βελτιωθεί η μέθοδος είναι αρκετό να βελτιώσουμε την ταχύτητα της.

Ο κύριος τρόπος για να βελτιώσουμε την ταχύτητα των υπολογισμών Monte Carlo είναι η μείωση της διασποράς (Variance Reduction). Οι μέθοδοι Μείωσης της Διασποράς της Monte Carlo αποσκοπούν να επιταχύνουν τον ρυθμό σύγκλισης. Η μείωση επιτυγχάνεται με διάφορες μεθόδους.

Κάποιες μέθοδοι είναι :

- Αντίθετες μεταβλητές (Antithetic Variables)
- Μεταβλητές Ελέγχου (Control Variables)
- Matching Moments Μέθοδος
- Διαστρωματωμένη δειγματοληψία (Stratified Sampling)
- Δειγματοληψία με κριτήριο σημαντικότητας (Importance Sampling). Που είναι η πλέον διαδεδομένη, για την οποία αναφερθήκαμε στην παρούσα εργασία.
- Προσαρμοστικές τεχνικές μείωσης της διακύμανσης (Adaptive variance-reducing techniques)

4.4 Εφαρμογή της Monte Carlo.

Στο 3ο κεφάλαιο βρήκαμε την βέλτιστη στρατηγική που πρέπει να ακολουθήσουμε, στο «παιχνίδι του ζαριού», με βάση τα όσα αναφέραμε στο 1ο κεφάλαιο. Στην συγκεκριμένη παράγραφο θα εφαρμόσουμε την μέθοδο Monte Carlo για το ίδιο «παιχνίδι ζαριού». Ο παρακάτω κώδικας θα μας υποδείξει την βέλτιστη στρατηγική εφαρμόζοντας την MC. Η προσομοίωση επαναλαμβάνεται 50x1.000 φορές.

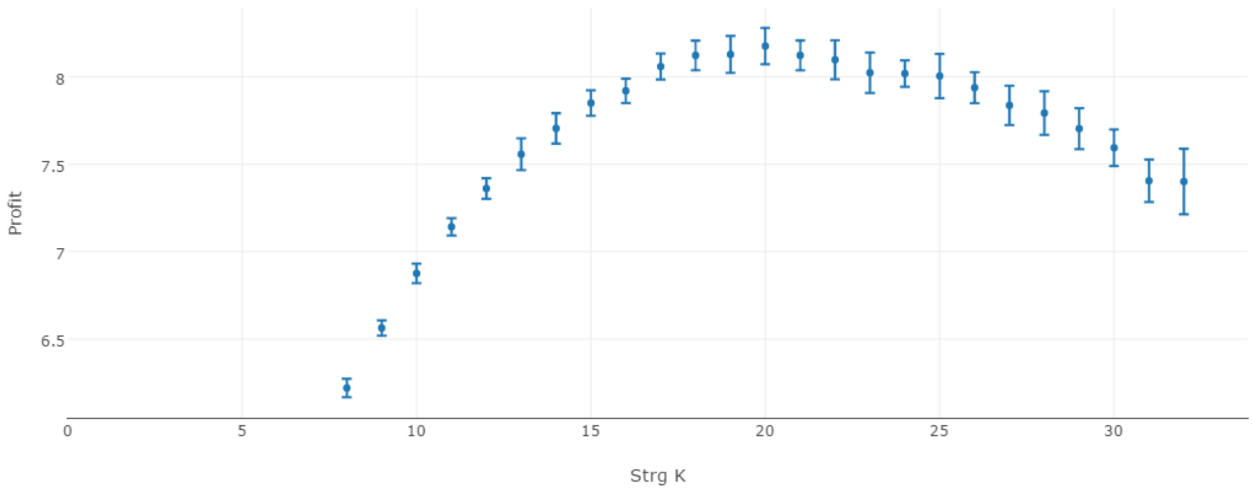
```
import java.util.Random;
public class montecarlo {
public static void main(String[] args) {
int dice=0;
int sum=0;
int counter1=0;
for(int j=8;j<40;j++){
double sumol=0;
Random rand = new Random();
for(int i=0; i < 10000; i++)
{
while(dice !=1 && sum<j)
{
dice = rand.nextInt(6 ) + 1;
sum +=dice;
counter1++;
}
if (dice ==1)
{
sum=0;
}
sumol=sumol+sum;
dice=0;
sum=0;
counter1=0;
}
System.out.println("Profit.stopping strg at "+j
+" :"+(float)sumol/10000); }
}}
```

Το πρόγραμμα μας επιστρέφει το εξής:

```
Profit.stopping strg at 8 :6.23088
Profit.stopping strg at 9 :6.63316
Profit.stopping strg at 10 :6.85226
Profit.stopping strg at 11 :7.14901
Profit.stopping strg at 12 :7.38316
Profit.stopping strg at 13 :7.5361
Profit.stopping strg at 14 :7.72125
Profit.stopping strg at 15 :7.86314
Profit.stopping strg at 16 :7.9392
Profit.stopping strg at 17 :7.9978
Profit.stopping strg at 18 :8.04541
```

```
Profit.stopping strg at 19 :8.14106
Profit.stopping strg at 20 :8.18908
Profit.stopping strg at 21 :8.07924
Profit.stopping strg at 22 :8.112
Profit.stopping strg at 23 :8.10375
Profit.stopping strg at 24 :8.03231
Profit.stopping strg at 25 :7.91538
Profit.stopping strg at 26 :7.93328
Profit.stopping strg at 27 :7.85339
Profit.stopping strg at 28 :7.76171
Profit.stopping strg at 29 :7.61761
Profit.stopping strg at 30 :7.63446
Profit.stopping strg at 31 :7.49229
Profit.stopping strg at 32 :7.37732
Profit.stopping strg at 33 :7.21248
Profit.stopping strg at 34 :7.09653
Profit.stopping strg at 35 :7.00494
Profit.stopping strg at 36 :6.82255
Profit.stopping strg at 37 :6.75259
Profit.stopping strg at 38 :6.6258
Profit.stopping strg at 39 :6.46268
```

Διάγραμμα αναμενόμενου κέρδους και στρατηγικής διακοπής k.



Συμπεράσματα:

- Η MC μας υποδεικνύει ότι η βέλτιστη στρατηγική που πρέπει να ακολουθήσουμε, είναι να σταματήσουμε εφόσον έχουμε φτάσει στο 20. Ένας λογικός παίχτης, δεν θα σταματούσε νωρίτερα ή πιο μετά. Στο παραπάνω διάγραμμα βλέπουμε και την διασπορά για κάθε στρατηγική K.
- Παρατηρώντας το διάγραμμα, αλλά κυρίως τα αποτελέσματα που επιστρέφει το πρόγραμμα μας, θα διαπιστώσουμε ότι υπάρχει ένας θόρυβος. Ο θόρυβος οφείλεται στην διασπορά. Στην επόμενη παράγραφο θα μειώσουμε την διασπορά με την εφαρμογή της μεθόδου *Importance Sampling.* Η εκτιμώμενη διασπορά που βλέπουμε στο παραπάνω διάγραμμα ισούται με την διασπορά που βρήκαμε θεωρητικά στο κεφάλαιο 3 δια 50.

4.5 Δειγματοληψία με κριτήριο Σημαντικότητας (Importance Sampling)

Η δειγματοληψία με κριτήριο σημαντικότητας είναι η πλέον διαδεδομένη μέθοδος μείωσης της διασποράς. Ένας καλός τρόπος για να μειώσουμε την διασπορά είναι να παίρνουμε περισσότερα δείγματα-αριθμούς από κάποιες περιοχές σε σύγκριση με κάποιες άλλες. Είναι μια τεχνική που χρησιμοποιείται για να υπολογίσει την αναμενόμενη τιμή μίας ποσότητας που αποτελείται από τυχαίες μεταβλητές που προέρχονται από μια κατανομή που είναι αδύνατη ή πολύ δύσκολη η δειγματοληψία της. Για να μπορέσει να γίνει η δειγματοληψία , χρησιμοποιείται μία διαφορετική κατανομή δειγματοληψίας και πραγματοποιείται μια διόρθωση για την αλλαγή στην κατανομή. Για διακριτή τυχαία μεταβλητή $X \sim f$ που παίρνει τις τιμές απο ένα πεπερασμένο σύνολο $\aleph$, υποθέτουμε ότι θέλουμε να μετρήσουμε :

$$H = E[h(X)] = \sum_{x \in \aleph} h(x) f(x)$$

Η Monte Carlo εκτιμήτρια παίρνει ένα δείγμα $(x_1, x_2, ..., x_n)$ από την $X \sim f$ και χρησιμοποιεί τις τιμές ως εκτιμήτριες για να υπολογίσει το άθροισμα ως μία συνολική εκτίμηση.

$$\widehat{H}_{MC} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h(x_i)$$

Ωστόσο στην f μπορεί να είναι δύσκολο ή αδύνατο να γίνει δειγματοληψία. Έτσι υποθέτουμε ότι η g είναι μια συνάρτηση μάζας πιθανότητας, που είναι εύκολο εδώ να γίνει δειγματοληψία. Επομένως επαναπροσδιορίζουμε την H .

$$H = \sum_{x \in \aleph} h(x) f(x) = \sum_{x \in \aleph} h(x) f(x) \frac{g(x)}{g(x)} = \sum_{x \in \aleph} \frac{h(x) f(x)}{g(x)} g(x) = E_g(Y)$$

με $Y = h(X) f(X) / g(X)$ και $E_g(Y)$ είναι αναμενόμενη τιμή της Y υπό την πιθανότητα κατανομής της g . Αντικαθιστούμε το δείγμα μας, $X_1, X_2, ..., X_n \sim g$ και εκτιμάται η H :

$$\widehat{H}_{IS} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Y_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{h(X_i) f(X_i)}{g(X_i)} .$$

Εδώ η τιμή του $f(X_i) / g(X_i)$ ενισχύει την σημαντικότητα της $h(X_i)$ σε σχέση με την εκτίμηση της επιθυμητής ποσότητας. Ο στόχος μας, αν είναι δυνατόν, είναι να επιλέξουμε μια κατανομή g έτσι ώστε τα δείγματα της να είναι σημαντικά. Δηλαδή η g να μεροληπτεί για τις πιο σημαντικές περιοχές των X_i και να εκτιμάει την ποσότητα που επιθυμούμε.

Εφαρμογή της Importance Sampling στο παράδειγμα μας .

Εφαρμόζουμε την μέθοδο για το αριθμήσιμο διακριτό Μαρκοβιανό σύνολο $\Im = (J_0, J_1, ..., J_n)$, με J_i να είναι μαρκοβιανές αλυσίδες με πιθανότητα μετάβασης 1/6. Έχουμε συνάρτηση μάζας πιθανότητας $p(x)$ έτσι ώστε

$$p(x) = \begin{matrix} p(x, x+k) = \dfrac{1}{6}, k = 2,3,4,5,6 \\ p(x,0) = \dfrac{1}{6} \end{matrix}$$

Θεωρούμε ένα νέο αριθμήσιμο διακριτό Μαρκοβιανό σύνολο $Y = (Y_0(=0), Y_1, Y_2, ..., Y_n)$, με Y_i να είναι μαρκοβιανές αλυσίδες με πιθανότητα μετάβασης 1/5 χωρίς να μπορούνε να πάνε στο 0. Έτσι έχουμε συνάρτηση μάζας πιθανότητας $q(x)$ με:

$$q(x) = \begin{matrix} q(x, x+k) = \dfrac{1}{5}, k = 2,3,4,5,6 \\ q(x,0) = 0 \end{matrix}$$

Από την μέθοδο έχουμε :

$$E[h(\Im)] = E[h(Y)\frac{p(Y)}{q(Y)}] = E[h(Y_1, Y_2, ..., Y_n)\frac{p(0,Y_1)....p(Y_{n-1},Y_n)}{q(0,Y_1)....q(Y_{n-1},Y_n)}] = .. = E[h(Y)(\frac{5}{6})^{\tau}].$$

Με «τ» να είναι ο χρόνος διακοπής της εκάστοτε αλυσίδας.

Πρόγραμμα και αριθμητικά αποτελέσματα για το παράδειγμα μας με Importance Sampling.

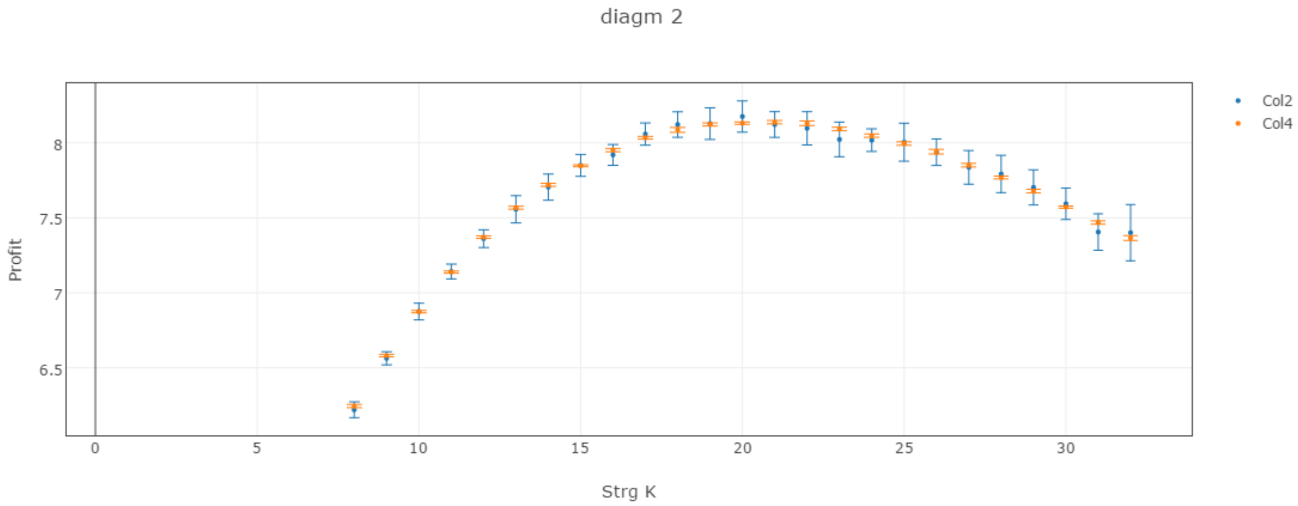
```
import java.util.Random;
public class Mpilos {
public static void main(String[] args) {
int dice=0;
int sum=0;
  int counter1=0;
for(int j=8;j<40;j++){

double sumol=0;
Random rand = new Random();
for(int i=0; i < 100000; i++)
{

while(dice !=1 && sum<j)
{
```

```
dice = rand.nextInt(5 ) + 2;
sum +=dice;
  counter1++;

}
  sumol=sumol+sum*Math.pow(5,counter1)/ Math.pow(6,counter1);

dice=0;
sum=0;
  counter1=0;
}

System.out.println("Kerdos me stratigiki stamatimou sto "+j+"
:"+(float)sumol/100000); }
}}
```

Αποτελέσματα :

```
Kerdos me stratigiki stamatimou sto 8 :6.2502294
Kerdos me stratigiki stamatimou sto 9 :6.58218
Kerdos me stratigiki stamatimou sto 10 :6.8717375
Kerdos me stratigiki stamatimou sto 11 :7.139732
Kerdos me stratigiki stamatimou sto 12 :7.3781114
Kerdos me stratigiki stamatimou sto 13 :7.565168
Kerdos me stratigiki stamatimou sto 14 :7.7131796
Kerdos me stratigiki stamatimou sto 15 :7.8458786
Kerdos me stratigiki stamatimou sto 16 :7.943207
Kerdos me stratigiki stamatimou sto 17 :8.026789
Kerdos me stratigiki stamatimou sto 18 :8.09073
Kerdos me stratigiki stamatimou sto 19 :8.125338
Kerdos me stratigiki stamatimou sto 20 :8.1455145
Kerdos me stratigiki stamatimou sto 21 :8.141435
Kerdos me stratigiki stamatimou sto 22 :8.1301155
Kerdos me stratigiki stamatimou sto 23 :8.094762
Kerdos me stratigiki stamatimou sto 24 :8.053522
Kerdos me stratigiki stamatimou sto 25 :7.9917564
Kerdos me stratigiki stamatimou sto 26 :7.9334955
Kerdos me stratigiki stamatimou sto 27 :7.856154
Kerdos me stratigiki stamatimou sto 28 :7.7736464
Kerdos me stratigiki stamatimou sto 29 :7.682061
Kerdos me stratigiki stamatimou sto 30 :7.5895233
Kerdos me stratigiki stamatimou sto 31 :7.4660387
Kerdos me stratigiki stamatimou sto 32 :7.363404
Kerdos me stratigiki stamatimou sto 33 :7.2486215
Kerdos me stratigiki stamatimou sto 34 :7.122777
Kerdos me stratigiki stamatimou sto 35 :6.996502
Kerdos me stratigiki stamatimou sto 36 :6.879383
Kerdos me stratigiki stamatimou sto 37 :6.745997
Kerdos me stratigiki stamatimou sto 38 :6.6196675
Kerdos me stratigiki stamatimou sto 39 :6.484976
```

Γραφική παράσταση βέλτιστου κέρδους με στρατηγικές διακοπής Κ με την MC με εφαρμογή της μεθόδου Importance Sampling και χωρίς.



> *Col2: Είναι το διάγραμμα χωρίς εφαρμογή της IS*
> *Col3: Είναι το διάγραμμα με εφαρμογή της IS*

Συμπέρασμα

Διαπιστώνουμε οτι με την εφαρμογή της *IS* μειώσαμε την διασπορά και επομένως και τον θόρυβο που είχαμε στα αποτελέσματα μας. Πλέον μας είναι ξεκάθαρο ό τι η βέλτιστη στρατηγική που πρέπει να ακολουθήσουμε, είναι να σταματή σουμε στην θέση 20. Η εκτιμώμενη διασπορά εφαρμόζωντας IS είναι για 50 προσομοιώσεις.

Βιβλιογραφία

Goran Peskir , Albert Shiryaev (2006), *Optimal Stopping and Free-Boundary Problems*, Birkhäuser Verlag Basel · Boston · Berlin

A.N. Γιαννακόπουλος (2003), *Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στη Χρηματοοικονομική,* Τόμος I: Εισαγωγή στην Στοχαστική Ανάλυση

A.N. Γιαννακόπουλος (2004), *Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στη Χρηματοοικονομική,* Τόμος II: Εφαρμογές στην Χρηματοοικονομική

Ουρανία Χρυσαφίνου (2008), *Εισαγωγή στις Στοχαστικές Ανελίξεις,* Εκδόσεις «σοφία»

Alan D.SOKAL (1994), *MONTE CARLO METHODS FOR THE SELF-AVOIDING WALK*

Charles M.Grinstead & J.Laurie Snell, *Introduction to Probability*

Papoulis, A (1984), Probability, Random Variables, and Stochastic Processes, 2nd ed. New York: McGraw-Hill, pp. 69-71

Nicholas Pippenger (2012), *Elementary Proofs of the Main Limit Theorems ok Probability.*

Matthew M.Conroy (2014), *A Collection of Dice Problems with solutions and useful appendices,* version January 25,2014

Markus Roters (1998), *Optimal Stopping in a Dice Game*, J. Appl. Prob. 35.229-235, Printed in Israel

Todd W. Neller_, Ingrid Russell, Zdravko Markov (2005), *Solving the Dice Game Pig: an introduction to dynamic programming and value iteration,* July 5,2005

Reuven Y.Rubinstein, Ad Ridder, Radislav Vaisman (2014), *Fast Sequential Monte Carlo Methods for Counting and Optimization*

Eric C. Anderson (1999), *Monte Carlo Methods and Importance Sampling*, Lecture Notes for Stat 578C

Μιχάλης Λουλάκης (2015), *Εισαγωγή στη Μαθηματική Χρηματοοικονομία,* Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και Βοηθήματα, www.kallipos.gr

Ιστοσελίδες, pdf

Lecture notes: Simulation , http://people.hss.caltech.edu/~mshum/gradio/simulation.pdf

Importance sampling, http://statweb.stanford.edu/~owen/mc/Ch-var-is.pdf

https://en.wikipedia.org/wiki/Importance_sampling

https://en.wikipedia.org/wiki/Monte_Carlo_method

http://mathworld.wolfram.com/CentralLimitTheorem.html

http://mathworld.wolfram.com/WeakLawofLargeNumbers.html

http://mathworld.wolfram.com/MonteCarloMethod.html