



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ

**ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΡΟΗΣ ΣΕ ΑΕΡΟΤΟΜΗ ΣΕ
ΜΕΓΑΛΕΣ ΓΩΝΙΕΣ ΠΡΟΣΠΤΩΣΗΣ ΜΕ ΕΜΦΑΣΗ ΣΤΑ
ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ ΕΚΚΛΥΣΗΣ ΔΙΝΩΝ**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Γκουσδοβάς Κωνσταντίνος

Επιβλέπων καθηγητής

Ριζιώτης Βασίλειος

Επ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Συνεπιβλέπων

Προσπαθόπουλος Ιωάννης

Μέλος Ε.Ε.ΔΙ.Π. Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος 2016

Ευχαριστίες

Η διπλωματική μου δε θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί χωρίς τη συμβολή ορισμένων ανθρώπων, που από τα πρώτα στάδια της εκπόνησής της, στάθηκαν με ειλικρινές ενδιαφέρον κοντά μου.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα, τον επιβλέποντα καθηγητή μου κύριο Ριζιώτη Βασίλειο για την ανάθεση της εργασίας, την έμπνευση και την αμέριστη βοήθεια που μου προσέφερε και τον συνεπιβλέποντα κύριο Προσπαθόπουλο Ιωάννη για την συνεχή βοήθειά του, τις υποδείξεις και καθοδήγησή του σε όλη την διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής.

Θερμές ευχαριστίες οφείλονται επίσης:

Στον Διδάκτορα, Παπαδάκη Γεώργιο και τον υποψήφιο Διδάκτορα Διακάκη Κωνσταντίνο για την βοήθεια και καθοδήγησή τους κατά την διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής, ο καθένας στο μέρος της εργασίας που εμπίπτει στα επιστημονικά τους πεδία.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια και τους φίλους μου, που στήριξαν την προσπάθειά μου, δίνοντας το έναυσμα να ολοκληρώσω το έργο μου.

Περίληψη

Όταν ο δρομέας μιας ανεμογεννήτριας λειτουργεί σε μεγάλες γωνίες απόκλισης οι γωνίες προσβολής κατά μήκος των πτερυγίων μεγαλώνουν με αποτέλεσμα η ροή κατάντη των πτερυγίων να αποκολλάται. Η αποκόλληση αυτή, έχει ως συνέπεια την δημιουργία εναλλασσόμενων δινών οι οποίες προκαλούν περιοδικές ταλαντώσεις στα πτερύγια με συχνότητα που αντιστοιχεί στον αδιάστατο αριθμό Strouhal.

Στη παρούσα διπλωματική εργασία εξετάστηκαν οι συχνότητες έκλυσης των δινών σε διδιάστατη αεροτομή υπό το παραπάνω καθεστώς μη μόνιμης ροής. Η ανάλυση έγινε με την χρήση κώδικα στροβιλής μεθοδολογίας ελεύθερου ομόρρου στον οποίο προσαρμόστηκε η τεχνική του particle mesh με σκοπό την μείωση του υπολογιστικού κόστους. Για την σύγκριση των αποτελεσμάτων έγινε επίλυση των μη μόνιμων εξισώσεων Navier Stokes με την χρήση Eulerian CFD επιλύτη. Τα υπολογιστικά εργαλεία αναπτύχθηκαν από το εργαστήριο Αεροδυναμικής του Ε.Μ.Π.

Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται αφορούν 4 διαφορετικές γωνίες προσβολής της αεροτομής στην περιοχή των 90° . Παρουσιάζονται οι συχνότητες έκλυσης δινών, οι αεροδυναμικοί συντελεστές της αεροτομής και οι πιέσεις που αναπτύσσονται στην επιφάνειά της.

Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή	9
1.1. Τεχνολογικό Πρόβλημα	9
1.2. Σκοπός της Εργασίας	10
1.3. Διάρθρωση της Εργασίας	10
2. Στροβιλή μέθοδος ελεύθερου ομόρρου – Μεθοδολογία Particle Mesh	11
2.1. Στροβιλή μέθοδος ελεύθερου ομόρρου	11
2.1.1. Εισαγωγή	11
2.1.2. Περιγραφή του μοντέλου	12
2.1.3. Συνθήκες για την έκλυση δινών στον ομόρρου	15
2.1.4. Το Αριθμητικό Μοντέλο	18
2.1.5. Συνάρτηση φίλτρου	28
2.1.6. Υπολογισμός των δυνάμεων	29
2.2. Μέθοδος Particle Mesh	34
3. Eulerian CFD Solver	41
3.1. Εισαγωγή	41
3.2. Εξισώσεις Navier – Stokes	41
3.3. Χωρική διακριτοποίηση	42
3.3.1. Ανακατασκευή Μεταβλητών	44
3.3.2. Limiters	46
3.3.3. Υπολογισμός συντηρητικών παροχών	47
3.3.4. Υπολογισμός συνεκτικών μεταβλητών	48
3.4. Συνοριακές συνθήκες	49
3.4.1. Συνοριακές συνθήκες τοίχου	49
3.4.2. Συνοριακές συνθήκες εισόδου/εξόδου	50
3.5. Χρονική διακριτοποίηση	52
3.5.1. Υπολογισμοί σε μόνιμη ροή (Steady State Computations)	53
3.5.2. Τοπικό Χρονικό Βήμα (Local Time Stepping)	53
3.5.3. Μη μόνιμες ροές	54
3.6. Μοντελοποίηση Τύρβης	56

4. Αποτελέσματα Εφαρμογής των μεθόδων	58
4.1. Γεωμετρία της αεροτομής	58
4.2. Ανάλυση αποτελεσμάτων του υπολογιστικού κώδικα Foil2w	59
4.3. Ανάλυση αποτελεσμάτων της CFD προσομοίωσης	63
4.3.1. Υπολογιστικές λεπτομέρειες πλέγματος	64
4.3.2. Αποτελέσματα CFD προσομοίωσης	66
4.4. Ανάλυση αποτελεσμάτων τεχνικής Particle Mesh	69
4.4.1. Υπολογιστικές λεπτομέρειες πλέγματος	69
4.4.2. Αποτελέσματα μεθόδου particle mesh	69
4.5. Σύγκριση αποτελεσμάτων μεθόδων	73
4.5.1. Αποτελέσματα CFD προσομοιώσεων για όλες τις εξεταζόμενες γωνίες	73
4.5.2. Αποτελέσματα για 70° μοίρες γωνία προσβολής	75
4.5.3. Αποτελέσματα για 80° μοίρες γωνία προσβολής	77
4.5.4. Αποτελέσματα για 90° μοίρες γωνία προσβολής	80
4.5.5. Αποτελέσματα για 100° μοίρες γωνία προσβολής	82
4.6. Αποτελέσματα κατανομής πίεσης CP σε γωνία προσβολής 90°	85
5. Συμπεράσματα - Συστάσεις για μελλοντική έρευνα	89
5.1. Συμπεράσματα	89
5.2. Συστάσεις για μελλοντική έρευνα	90
6. Βιβλιογραφία	91

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Τεχνολογικό Πρόβλημα

Οι ταλαντώσεις των πτερυγίων σε ακινητοποιημένες ανεμογεννήτριες αποτελούν ένα τεχνολογικό πρόβλημα ιδιαίτερης σημασίας εξαιτίας των αστοχιών που μπορούν να προκαλέσουν. Με βάση αναφοράς την κατεύθυνση του ανέμου, οι γωνίες πρόσπτωσης της ροής στα πτερύγια της ανεμογεννήτριας μπορούν να γίνουν ιδιαίτερα μεγάλες. Στην πραγματικότητα μπορούν να πάρουν τιμές σε ολόκληρο το εύρος $[-180^\circ, +180^\circ]$. Σε τέτοιου είδους γωνίες η ροή αποκολλάται κατά μήκος ολόκληρου του πτερυγίου. Υπό τέτοιες αντίξοες συνθήκες δύναται να εμφανιστούν ταλαντώσεις οι οποίες οφείλονται σε δύο ξεχωριστά αλλά αλληλένδετα φαινόμενα : τις ταλαντώσεις που οφείλονται στην έκλυση δινών (Vortex Induced Vibrations - VIV) και τις ταλαντώσεις λόγω μεγάλων γωνιών πρόσπτωσης και αποκόλλησης της ροής (Stall Induced Vibrations – SIV) [1].

Στις SIV, μία μικρή μετατόπιση του σώματος προκαλεί αντίστοιχα αύξηση στην δύναμη κατά την κατεύθυνση της κίνησης. Αποτέλεσμα αυτής είναι μία αεροελαστικά ασταθής σύζευξη. Τέτοιου είδους ταλαντώσεις σχετίζονται με την παρουσίαση χαμηλής ή ακόμη και αρνητικής απόσβεσης των πτερυγίων μίας ακινητοποιημένης ανεμογεννήτριας.

Στις VIV, το σώμα ταλαντώνεται εξαιτίας του φαινομένου της έκλυσης δινών, όπου η συχνότητα κάτω από την οποία εκλύονται συμπίπτει με την φυσική συχνότητα της κατασκευής. Ως επακόλουθο αυτού είναι παρατήρηση συντονισμού. Οι ταλαντώσεις δημιουργούνται εξαιτίας των διαδοχικών και αντίθετης φοράς δινών κατάντη του πτερυγίου. Η συχνότητα έκλυσης των δινών (f) υπολογίζεται μέσω του αριθμού Strouhal ($St = fc/U$). Στη περίπτωση όπου η συχνότητα των δινών λάβει παραπλήσιες τιμές με τις φυσικές συχνότητες της ανεμογεννήτριας παρατηρείται συντονισμός της κατασκευής. Οι ταλαντώσεις αυτές πέρα από το γεγονός ότι συμβάλουν στην κόπωση του πτερυγίου οδηγούν και σε επιπλέον φορτία ειδικά αν συνδυαστούν με ακραίες περιπτώσεις ανέμων.

Οι μελέτες γύρω από την επίδραση των δινών στις ανεμογεννήτριες έχουν επικεντρωθεί κυρίως στην ανάλυση διδιάστατων αεροτομών όπου επικρατούν συνθήκες εκτεταμένης αποκόλλησης της ροής. Τέτοιου είδους ανάλυση λαμβάνει χώρα και στην παρούσα διπλωματική εργασία. Επιπρόσθετα, η επίδραση της συχνότητας των δινών στις αεροτομές έχει αναλυθεί στο πλαίσιο της εξαναγκασμένης κίνησης του πτερυγίου και στην προσθήκη ελαστικών χαρακτηριστικών σε αυτό [1].

1.2 Σκοπός της Εργασίας

Στην συγκεκριμένη διπλωματική εργασία έχει γίνει ανάλυση της μη μόνιμης ροής μίας διδιάστατης αεροτομής DU96-W-180 σε μεγάλες γωνίες πρόσπτωσης (περιοχή γύρω από τις 90°) με έμφαση στα φαινόμενα έκλυσης δινών. Η ανάλυση αυτή έγινε με την χρήση ενός κώδικα στροβιλής μεθοδολογίας (Foil2w) στην οποία προσαρμόστηκε για μείωση του υπολογιστικού κόστους η μέθοδος Particle Mesh. Επίσης χρησιμοποιήθηκε ο διδιάστατος URANS επιλύτης (κώδικας MaPFlow) προκειμένου να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων. Σκοπός της εργασίας ήταν η ανάλυση των συχνοτήτων με τις οποίες εκλύονται οι στρόβιλοι στον ομόρρου και κατά πόσο επηρεάζει το στροβιλό κομμάτι του ομόρρου αυτή την διαδικασία. Τέλος, έγινε το πρώτο βήμα για την μείωση του υπολογιστικού κόστους του κώδικα στροβιλής μεθοδολογίας (Foil2w) πράγμα που επιτρέπει την μελλοντική τροποποίησή του σ' ένα υπολογιστικό εργαλείο που θα μπορεί να αντικαταστήσει ενδεχόμενες CFD προσομοιώσεις που συνεχίζουν έχουν υψηλό υπολογιστικό κόστος.

1.3 Διάρθρωση της Εργασίας

- Στο Κεφάλαιο 1 γίνεται παρουσίαση του τεχνολογικού προβλήματος και αναλύεται ο σκοπός της διπλωματικής εργασίας
- Στο Κεφάλαιο 2 γίνεται παρουσίαση του κώδικα της στροβιλής μεθόδου ελεύθερου ομόρρου (FOIL2W) και της μεθόδου Particle Mesh
- Στο Κεφάλαιο 3 γίνεται παρουσίαση του CFD επιλύτη (MaPFlow)
- Στο Κεφάλαιο 4 γίνεται παρουσίαση και σύγκριση των αποτελεσμάτων από τις διαφορετικές μεθόδους
- Στο Κεφάλαιο 5 αναλύονται τα συμπεράσματα και γίνονται προτάσεις για μελλοντική έρευνα

Κεφάλαιο 2

Στροβιλή μέθοδος ελεύθερου ομόρρου – Μεθοδολογία Particle Mesh

2.1 Στροβιλή μέθοδος ελεύθερου ομόρρου

2.1.1 Εισαγωγή

Τα υπάρχοντα δυναμικά μοντέλα (dynamic stall models) δεν είναι κατάλληλα για την ανάλυση των φορτίων σε ακίνητες ανεμογεννήτριες σε μεγάλες γωνίες πρόσπτωσης της ροής. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τα συγκεκριμένα μοντέλα παρέχουν τα αεροδυναμικά φορτία σε συνθήκες αποκόλλησης της ροής, αλλά μόνο στις περιπτώσεις όπου οι γωνίες πρόσπτωσης βρίσκονται στην περιοχή των γωνιών που παρέχουν μέγιστο συντελεστή άνωσης (CL_{max}). Κανένα από τα υπάρχοντα μοντέλα δεν είναι επαρκές σε περιπτώσεις όπου η γωνία πρόσπτωσης της τοπικής ροής γίνεται πολύ μεγάλη (90°) [2]. Σε τέτοιες γωνίες λαμβάνει χώρα το φαινόμενο έκλυσης δινών κατάντη του πτερυγίου όπου επηρεάζει με την σειρά του τα φορτία.

Για τον λόγο αυτό παρουσιάζεται ένα μοντέλο στροβιλής μεθοδολογίας (κώδικας Foil2w) για την μοντελοποίηση της αποκολλημένης ροής στο πτερύγιο. Αυτή η μοντελοποίηση γίνεται με βάση την ιδέα του «διπλού ομόρρου». Σε περιπτώσεις μεγάλων γωνιών πρόσπτωσης ο ομόρρος δεν πηγάζει μόνο από την ακμή εκφυγής της αεροτομής αλλά επίσης και από την ακμή προσβολής της. Τα φύλλα στροβιλότητας που δημιουργούνται αλληλεπιδρούν το ένα με το άλλο με αποτέλεσμα να σχηματίζονται στρόβιλοι που μεταφέρονται στην περιοχή πάνω από την πλευρά υποπίεσης της αεροτομής [3][4].

2.1.2 Περιγραφή του Μοντέλου

Σύμφωνα με την θεωρία του δυναμικού, η ταχύτητα u γύρω από μία αεροτομή μπορεί να γραφτεί στην μορφή :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x};t) = \mathbf{U}_\infty(\mathbf{x};t) + \mathbf{u}_i(\mathbf{x};t) \quad (2.1)$$

όπου \mathbf{U}_∞ είναι η ταχύτητα στο άπειρο και η \mathbf{u}_i αφορά την διαταραχή της ταχύτητας εξαιτίας της παρουσίας της αεροτομής στην ροή.

Το πρόβλημα του δυναμικού μπορεί να διατυπωθεί με τον παρακάτω τρόπο. Το μη μόνιμο πεδίο ροής $\mathbf{u}_i(\cdot;t)$ στην εξίσωση (1), παριστάνεται από διανομές τμηματικά σταθερών πηγών και επιφανειακών στροβιλοτήτων κατά μήκος της επιφάνειας της αεροτομής και διανομή στροβιλότητας στον ομόρρου σύμφωνα με την γνωστή μέθοδο των Basu και Hancock [5]. Στην περίπτωση του «διπλού ομόρρου» [3],[6],[7],[8],[9] εισάγεται ένα επιπλέον φύλλο στροβιλότητας, που ξεκινάει από το σημείο $P_S(t)$ όπου αρχίζει η αποκόλληση της ροής (Σχήμα 2.1). Σε περιπτώσεις μεγάλων γωνιών στην γωνία προσβολής το σημείο αποκόλλησης τοποθετείται στο σημείο της ακμής προσφυγής της αεροτομής (LE).

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Green, το πεδίο ταχύτητας $\mathbf{u}_i(\cdot;t)$ της καθαρά μη συνεκτικής ροής παριστάνεται από σημειακές κατανομές στην αεροτομή και τον ομόρρου. Στο όριο της αεροτομής S γίνεται κατανομή σημειακών πηγών $\sigma(\cdot;t)$ και επιφανειακών στροβιλοτήτων $\gamma(\cdot;t)$. Αντίστοιχα επιφανειακές στροβιλότητες $\gamma_w(\cdot;t)$ και $\gamma_s(\cdot;t)$ κατανέμονται στα δύο φύλλα του ομόρρου S_w και S_s , τα οποία εκλύονται από την αρχή εκφυγής (TE) και ακμή το σημείο αποκόλλησης αντίστοιχα (Σχήμα 2.1). Το πεδίο ταχύτητας του δυναμικού γράφεται τότε στην ολοκληρωματική μορφή:

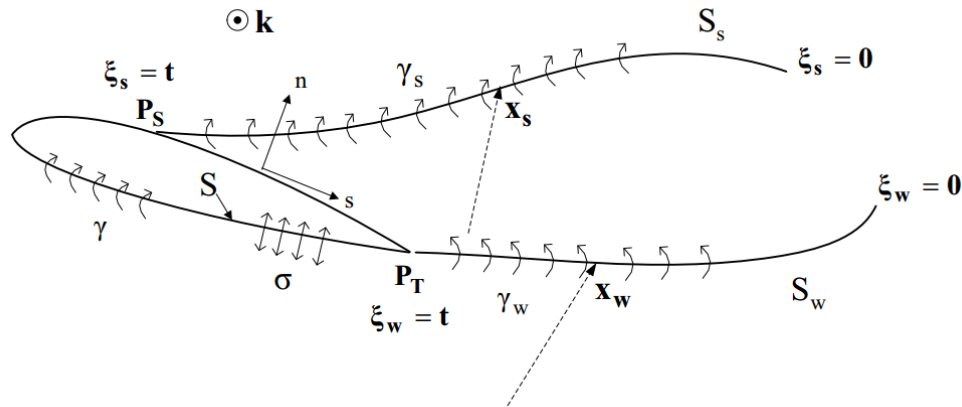
$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i(\mathbf{x}_0;t) = & \int_S \sigma(\mathbf{x};t) \cdot \frac{\mathbf{r}}{2\pi \cdot r^2} ds(\mathbf{x}) + \int_S \gamma(\mathbf{x};t) \cdot \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{k}}{2\pi \cdot r^2} ds(x) + \\ & + \int_{S_w} \gamma_w(\mathbf{x}_w;t) \cdot \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{k}}{2\pi \cdot r^2} ds(\mathbf{x}_w) + \int_{S_s} \gamma_s(\mathbf{x}_s;t) \cdot \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{k}}{2\pi \cdot r^2} ds(\mathbf{x}_s) \end{aligned} \quad (2.2)$$

όπου $\mathbf{r} = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}$ είναι η διανυσματική απόσταση μεταξύ του σημείου \mathbf{x}_0 όπου υπολογίζεται η ταχύτητα και της αυθαίρετης τοποθεσίας \mathbf{x} των σημειακών πηγών και στροβιλοτήτων που την επάγουν είτε στην επιφάνεια της αεροτομής είτε στον ομόρρου. Τέλος \mathbf{k} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο διδιάστατο επίπεδο της ροής.

Η ταχύτητα του πεδίου ροής \mathbf{u} της μη συνεκτικής ροής ικανοποιεί την συνθήκη μη εισχώρησης σε κάθε σημείου του στερεού ορίου :

$$(\mathbf{u}(\mathbf{x};t) - \mathbf{U}_b(\mathbf{x};t)) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x};t) = \mathbf{w}(\mathbf{x};t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x};t) = 0 \quad (2.3)$$

όπου $\mathbf{U}_b(\cdot;t)$ είναι η ταχύτητα της κινούμενης επιφάνειας. Η εξίσωση (3) δηλώνει ότι η σχετική ταχύτητα $\mathbf{w}(\cdot;t)$ της ροής έχει μηδενικό κάθετο διάνυσμα στο όριο του στερεού σώματος.



Σχήμα 2.1 - Κατανομή ιδιόμορφων σημείων (singularities) στην αεροτομή και στον διπλό ομόρρου [2]

Το πρόβλημα του δυναμικού συμπληρώνεται από τις συνθήκες που περιγράφουν την κινηματική και την δυναμική των δύο φύλλων στροβιλότητας. Η εξέλιξη του ομόρρου ορίζεται από τις ακόλουθες συνθήκες κινηματικής :

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{x}_w(\xi_w;t)}{Dt} &= \mathbf{u}(\mathbf{x}_w(\xi_w;t);t) \\ \frac{D\mathbf{x}_s(\xi_s;t)}{Dt} &= \mathbf{u}(\mathbf{x}_s(\xi_s;t);t) \end{aligned} \quad (2.4)$$

με \mathbf{x}_w και \mathbf{x}_s να είναι τα διανύσματα θέσης και ξ_w και ξ_s οι συντεταγμένες Lagrange οποιουδήποτε σημείου στα δύο φύλλα στροβιλότητας που δημιουργούνται από την ακμή εκφυγής της αεροτομής και το σημείο αποκόλλησης. Η εξίσωση (2.4) δηλώνει ότι τα δύο φύλλα του ομόρρου είναι υλικές γραμμές που μετακινούνται με την ταχύτητα της ελεύθερης ροής.

Η ένταση των στροβιλοτήτων που εκλύονται από την ακμή εκφυγής (TE) $\gamma_w(\mathbf{x}_w(\xi_w; \xi_w); \xi_w)$ και το σημείο αποκόλλησης $\gamma_s(\mathbf{x}_s(\xi_s; \xi_s); \xi_s)$ την χρονική στιγμή $t = \xi_w = \xi_s$ ορίζεται μέσω της συνθήκης Kutta, η οποία επιβάλλει μηδενική μεταβολή της πίεσης στα σημεία εκπομπής (σημειώνεται ότι οι παρενθέσεις δηλώνουν την μεταβολή μίας ποσότητας):

$$[p]_{\xi_w = \xi_s = t} = 0 \quad (2.5)$$

Από την στιγμή που η στροβιλότητα εκλυθεί, τότε σύμφωνα με το θεώρημα του Helmholtz, στην περίπτωση διδιάστατης ροής, διατηρείται κατά μήκος των υλικών γραμμών που απαρτίζουν τα δύο φύλλα στροβιλότητας του ομόρρου :

$$\begin{aligned} \gamma_w(\mathbf{x}_w(\xi_w; t); t) &= \gamma_w(\mathbf{x}_w(\xi_w; \xi_w); \xi_w) \\ \gamma_s(\mathbf{x}_s(\xi_s; t); t) &= \gamma_s(\mathbf{x}_s(\xi_s; \xi_s); \xi_s) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Η εξίσωση (2.6) υποδεικνύει ότι η ένταση της στροβιλότητας σε οποιοδήποτε σημείο $\mathbf{x}_w(\xi_w; t)$ ή $\mathbf{x}_s(\xi_s; t)$ στον ομόρρου σε χρόνο t , παραμένει το ίδιο με την χρονική στιγμή $t = \xi_w = \xi_s$ της έκλυσής του.

Η στροβιλότητα που κατανεμήθηκε στην αεροτομή ρυθμίζεται από το θεώρημα του Kelvin σύμφωνα με το οποίο η κυκλοφορία γύρω από οποιαδήποτε υλική γραμμή που περιλαμβάνει την αεροτομή διατηρείται.

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0 \quad (2.7)$$

2.1.3 Συνθήκες για την έκλυση δινών στον ομόρρου

Η εφαρμογή της εξίσωσης του Bernoulli ανάμεσα σε δύο σημεία στην περιοχή της ακμής εκφυγής (Σχήμα 2.2), με το ένα να εντοπίζεται στην άνω επιφάνεια (υποδηλώνεται με +) και το άλλο να βρίσκεται στην κάτω επιφάνεια (υποδηλώνεται με -), δίνει [1]:

$$\frac{\partial \Phi_w^+}{\partial t} + \frac{p_w^+}{\rho} + \frac{\mathbf{w}_w^{+2}}{2} - \frac{\mathbf{U}_{bw}^{+2}}{2} = \frac{\partial \Phi_w^-}{\partial t} + \frac{p_w^-}{\rho} + \frac{\mathbf{w}_w^{-2}}{2} - \frac{\mathbf{U}_{bw}^{-2}}{2} + \Delta h \quad (2.8)$$

όπου Φ είναι το συνολικό δυναμικό της ροής ορισμένο από $\mathbf{u} = \nabla \Phi$, \mathbf{w} είναι η σχετική ταχύτητα της ροής η οποία δίνεται από $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{U}_b$ και Δh είναι η διαφορά πίεσης μεταξύ των δύο ξεχωριστών περιοχών που είναι χωρισμένη η ροή από τα δύο φύλλα στροβιλότητας. Χρησιμοποιώντας την συνθήκη του μηδενικού πηδήματος της πίεσης (2.5) η εξίσωση (2.8) απλοποιείται ως εξής:

$$\frac{w_w^{-2}}{2} - \frac{w_w^{+2}}{2} = \frac{\partial}{\partial t} (\Phi_w^+ - \Phi_w^-) + \Delta h \quad (2.9)$$

Με παρόμοιο τρόπο, η εξίσωση Bernoulli εφαρμόζεται για δύο σημεία στην κάθε πλευρά του σημείου ανακοπής, ανάντη και κατάντη (Σχήμα 2.3) και δίνει:

$$\frac{\partial \Phi_s^+}{\partial t} + \frac{p_s^+}{\rho} + \frac{\mathbf{w}_s^{+2}}{2} - \frac{\mathbf{U}_{bs}^{+2}}{2} = \frac{\partial \Phi_s^-}{\partial t} + \frac{p_s^-}{\rho} + \frac{\mathbf{w}_s^{-2}}{2} - \frac{\mathbf{U}_{bs}^{-2}}{2} + \Delta h \quad (2.10)$$

όπου ο εκθέτης + στη συγκεκριμένη περίπτωση χρησιμοποιείται για να δηλώσει τις ποσότητες στο ανάντη σημείο και ο εκθέτης - στο κατάντη σημείο αντίστοιχα. Η εξίσωση (2.10) απλοποιείται χρησιμοποιώντας την συνθήκη πίεσης (2.5) στο σημείο αποκόλλησης (P_s). Επιπλέον, κατάντη της αποκόλλησης μπορεί να θεωρηθεί σημείο ανακοπής στην γωνία που σχηματίζεται μετά του αποκολλημένου φύλλου στροβιλότητας και του στερεού ορίου (Σχήμα 2.3). Επομένως, η εξίσωση (2.10) γράφεται:

$$\frac{w_s^{+2}}{2} = \frac{\partial}{\partial t} (\Phi_s^- - \Phi_s^+) + \Delta h \quad (2.11)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη την εξίσωση (2.9) από την (2.11) και χρησιμοποιώντας:

$$\Phi_s^+ - \Phi_w^- + \Phi_w^+ - \Phi_s^- = \Gamma \quad (2.12)$$

παίρνουμε,

$$-\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \frac{\mathbf{w}_s^{+2}}{2} + \frac{\mathbf{w}_w^{+2}}{2} - \frac{\mathbf{w}_w^{-2}}{2} = u_s^+ \frac{u_s^+}{2} + (u_w^+ - u_w^-) \frac{u_w^+ + u_w^-}{2} \quad (2.13)$$

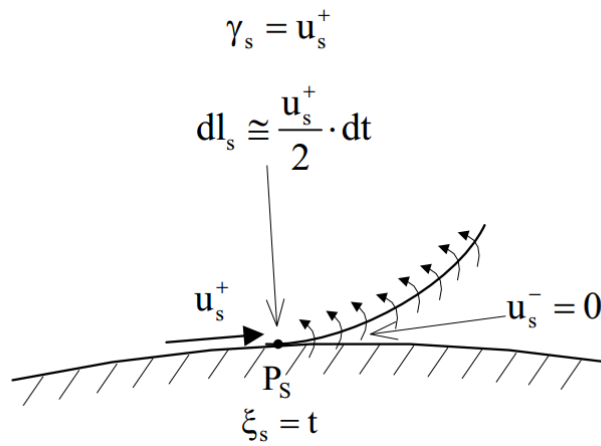
όπου u είναι η συνιστώσα του \mathbf{w} παράλληλη στην επιφάνεια της αεροτομής (η κάθετη συνιστώσα της σχετικής ταχύτητας είναι μηδέν σύμφωνα με την συνθήκη μη εισχώρησης). Η εξίσωση (2.13) παρέχει τον ρυθμό με τον οποίο η κυκλοφορία γύρω από την αεροτομή μεταβάλλεται στον χρόνο. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, ο ρυθμός μεταβολής της κυκλοφορίας γύρω από την αεροτομή διέπεται από το θεώρημα του Kelvin το οποίο εναλλακτικά μπορεί να γραφτεί στην μορφή:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \gamma_s(\mathbf{x}_s(\xi_s; \xi_s); \xi_s) \frac{dl_s}{dt} + \gamma_w(\mathbf{x}_w(\xi_w; \xi_w); \xi_w) \frac{dl_w}{dt} = 0 \quad (2.14)$$

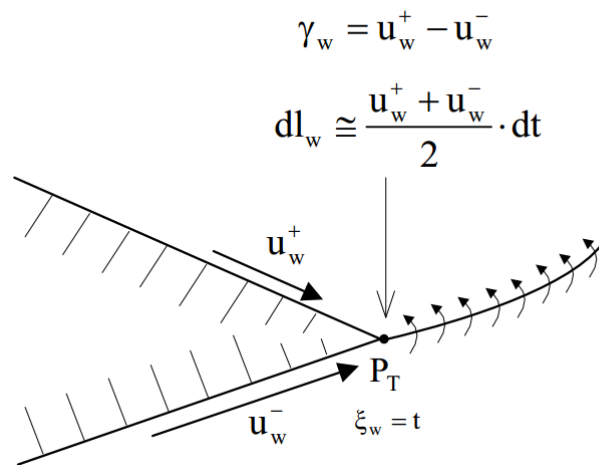
όπου l_w και l_s είναι τα μήκη των φύλλων στροβιλότητας που εκλύονται από την ακμή εκφυγής (TE) και το σημείο αποκόλλησης (Ps) αντίστοιχα. Απλά συγκρίνοντας τις εξισώσεις (2.13) και (2.14) λαμβάνουμε τις παρακάτω συνθήκες για τις στροβιλότητες που πρόκειται να εκλυθούν στον ομόρροτο

$$\begin{aligned} \gamma_w(\mathbf{x}_w(\xi_w; \xi_w); \xi_w) &= \mathbf{w}_w^+ \cdot \boldsymbol{\tau}_{TE}^+ - \mathbf{w}_w^- \cdot \boldsymbol{\tau}_{TE}^- = u_w^+ - u_w^- \\ \gamma_s(\mathbf{x}_s(\xi_s; \xi_s); \xi_s) &= \mathbf{w}_s^+ \cdot \boldsymbol{\tau}_{Ps}^+ = u_s^+ \end{aligned} \quad (2.15)$$

όπου $\boldsymbol{\tau}_{TE}^+$ και $\boldsymbol{\tau}_{TE}^-$ είναι τα μοναδιαία εφαπτομενικά διανύσματα στην άνω και κάτω επιφάνεια της ακμής εκφυγής και $\boldsymbol{\tau}_{Ps}^+$ είναι το μοναδιαίο εφαπτομενικό διάνυσμα στην ανάντη επιφάνεια του σημείου αποκόλλησης.



Σχήμα 2.2 - Εφαρμογή της συνθήκης Kutta στο σημείο αποκόλλησης της ροής, σημείο ανακοπής. [2]



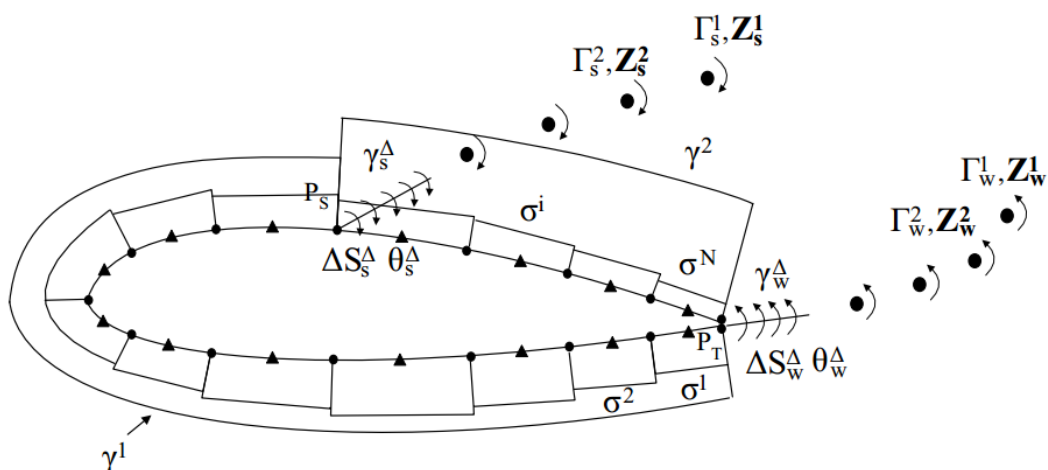
Σχήμα 2.3 - Εφαρμογή της συνθήκης Kutta στην ακμή εκφυγής της αεροτομής. [2]

2.1.4 Το Αριθμητικό Μοντέλο

Η γεωμετρία της αεροτομής χωρίζεται σε N ευθύγραμμα στοιχεία (πλαίσια). Σε αυτά τα στοιχεία γίνεται κατανομή σημειακών σταθερών πηγών και επιφανειακών στροβιλοτήτων. Ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας (degrees of freedom – d.o.f.) για τις πηγές είναι ο ίδιος με τον αριθμό των τμημάτων που έχει χωριστεί το σύνορο της αεροτομής

$$\sigma^i, i = 1, 2, \dots, N$$

Για την κατανομή της στροβιλοτήτας, στην περίπτωση του διπλού ομόρρου, χρησιμοποιούνται 2 βαθμοί ελευθερίας. Μία σταθερή τιμή γ^1 από την ακμή εκφυγής έως το σημείο αποκόλλησης της ροής και μία ακόμη τιμή γ^2 για το εναπομείναν κομμάτι εντός της αποκολλημένης περιοχής (Σχήμα 2.4). Ο λόγος που εισάγεται ένας επιπλέον βαθμός ελευθερίας για το γ στην περίπτωση του διπλού ομόρρου οφείλεται στην εφαρμογή συνθήκης ανακοπής ανάντη του σημείου αποκόλλησης, γεγονός που αριθμητικά απαιτεί έναν επιπλέον βαθμό ελευθερίας για την λύση του προβλήματος. Αυτός ο επιπλέον βαθμός ελευθερίας εναποτίθεται στην επιφανειακή στροβιλότητα της αεροτομής για την οποία υποθέτουμε ότι μετά την αποκόλληση παίρνει διαφορετική τιμή από την στιγμή που μέρος της ελευθερώνεται στον ομόρρο. Καθένα από τα δύο φύλλα του ομόρρου S_w και S_s αποτελείται από το κοντινό τμήμα που φέρει επιφανειακή στροβιλότητα έντασης γ_w^Δ και γ_s^Δ αντίστοιχα και από το μακρινό τμήμα που αποτελείται από ένα σύνολο στοιχείων στροβιλοτήτας (Γ_w^j και Γ_s^j όπου ο δείκτης j δείχνει το χρονικό βήμα κατά το οποίο ελευθερώθηκαν αυτές οι σημειακές δίνες) που αντιπροσωπεύουν την στροβιλότητα που εκλύθηκε σε προηγούμενα χρονικά βήματα. Κατά συνέπεια στην περίπτωση του διπλού ομόρρου οι βαθμοί ελευθερίας του προβλήματος του δυναμικού ανάγονται σε $N+4$.



Σχήμα 2.4 - Βαθμοί Ελευθερίας του προβλήματος – Διακριτή απεικόνιση της αποκολλημένης ροής. [2]

Το πεδίο ταχύτητας του δυναμικού όπως αυτό ορίζεται από τις εξισώσεις (2.1) και (2.2), σε διακριτή μορφή γράφεται ως:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}(\mathbf{x};t) &= \mathbf{U}_\infty(\mathbf{x};t) + \mathbf{u}_i(\mathbf{x};t) = \\
&\mathbf{U}_\infty(\mathbf{x};t) + \sum_{i=1}^N \sigma^i \int_{\Delta S^i} \frac{\mathbf{r}}{2\pi \cdot r^2} ds(\mathbf{x}) + \gamma^1 \sum_{i=1}^{N_{Ps}} \int_{\Delta S^i} \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{k}}{2\pi \cdot r^2} ds(\mathbf{x}) + \gamma^2 \sum_{i=N_{Ps}+1}^N \int_{\Delta S^i} \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{k}}{2\pi \cdot r^2} ds(\mathbf{x}) \\
&+ \sum_{p=w,s} \gamma_p^\Delta \int_{\Delta S_p^\Delta} \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{k}}{2\pi \cdot r^2} ds(\mathbf{x}_p) + \sum_{\substack{p=w,s \\ m=1,M}} \frac{\Gamma_p^m}{2\pi} \cdot \frac{\mathbf{r}_p^m \times \mathbf{k}}{\mathbf{r}_p^{m2}}
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Όπου N_{Ps} είναι ο αριθμός των στοιχείων μέχρι το σημείο αποκόλλησης, $\mathbf{r} = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}$, $\mathbf{r}_p^m = \mathbf{x}_0 - \mathbf{Z}_p^m$, $p=w,s$ όπου \mathbf{Z}_p^m είναι το διάνυσμα θέσης του m -οστού σωματιδίου στροβιλότητας (δίνης) και ΔS_w^Δ , ΔS_s^Δ είναι τα μήκη των στοιχείων του κοντινού ομόρρου.

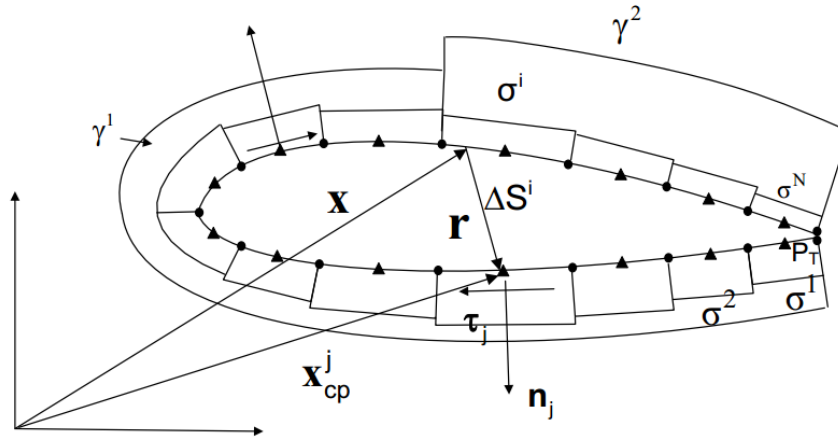
Για τον προσδιορισμό των αγνώστων του προβλήματος του δυναμικού πρέπει να ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες :

1. Η συνθήκη μη εισχώρησης

Η εξίσωση (2.3), ικανοποιείται στα κέντρα των στοιχείων \mathbf{x}_{cp} και δίνει N ανεξάρτητες εξισώσεις

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^N \sigma^i \int_{\Delta S^i} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_j}{2\pi \cdot r^2} ds(\mathbf{x}) + \gamma^1 \sum_{i=1}^{N_{Ps}} \int_{\Delta S^i} \frac{(\mathbf{r} \times \mathbf{k}) \cdot \mathbf{n}_j}{2\pi \cdot r^2} ds(\mathbf{x}) + \gamma^2 \sum_{i=N_{Ps}+1}^N \int_{\Delta S^i} \frac{(\mathbf{r} \times \mathbf{k}) \cdot \mathbf{n}_j}{2\pi \cdot r^2} ds(\mathbf{x}) \\
&+ \sum_{p=w,s} \gamma_p^\Delta \int_{\Delta S_p^\Delta} \frac{(\mathbf{r} \times \mathbf{k}) \cdot \mathbf{n}_j}{2\pi \cdot r^2} ds(\mathbf{x}_p) + \sum_{\substack{p=w,s \\ m=1,M}} \frac{\Gamma_p^m}{2\pi} \cdot \frac{(\mathbf{r}_p^m \times \mathbf{k}) \cdot \mathbf{n}_j}{\mathbf{r}_p^{m2}} = (\mathbf{U}_b - \mathbf{U}_\infty) \cdot \mathbf{n}_j
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Η παραπάνω εξίσωση ικανοποιείται στο j – οστό πλαίσιο της αεροτομής (Σχήμα 2.5). Είναι φανερό ότι $\mathbf{r} = \mathbf{x}_{cp}^j - \mathbf{x}$ και $\mathbf{r}_p^m = \mathbf{x}_{cp}^j - \mathbf{Z}_p^m$.

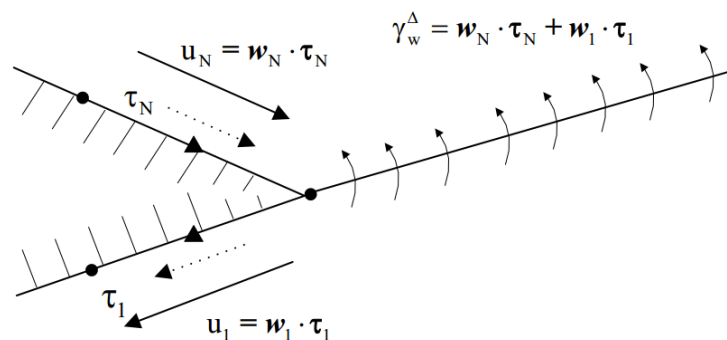


Σχήμα 2.5 - Ικανοποίηση συνθήκης μη εισχώρησης. Συνεισφορά του i στοιχείου στον σημείου ελέγχου j . [2]

2. Η συνθήκη Kutta στην ακμή εκφυγής και στο σημείο αποκόλλησης
Στην ακμή εκφυγής ισχύει

$$\gamma_w^\Delta = \mathbf{w}_N \cdot \boldsymbol{\tau}_N + \mathbf{w}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_1 \quad (2.18)$$

όπου \mathbf{w}_1 και \mathbf{w}_N είναι οι σχετικές ταχύτητες της ροής στο πρώτο και στο τελευταίο πλαίσιο της αεροτομής και $\boldsymbol{\tau}_1$, $\boldsymbol{\tau}_N$ τα μοναδιαία εφαπτομενικά διανύσματα στο πρώτο και στο τελευταίο πλαίσιο της αεροτομής. Οι δύο συνεισφορές προστίθενται αντί να αφαιρεθούν μεταξύ τους επειδή τα μοναδιαία διανύσματα κατά μήκος της αεροτομής ακολουθούν την ίδια κατεύθυνση (ωρολογιακά). Αυτό σημαίνει ότι το διάνυσμα $\boldsymbol{\tau}_1$ είναι αντίθετο με την κατεύθυνση της ροής (Σχήμα 2.6).



Σχήμα 2.6 - Ικανοποίηση της συνθήκης Kutta στην ακμή εκφυγής της αεροτομής. [2]

Σημειώνεται ότι η σχετική ταχύτητα ορίζεται ως:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{w} &= \mathbf{u} - \mathbf{U}_b = \mathbf{U}_\infty + \mathbf{u}_i - \mathbf{U}_b = \\
 &= \mathbf{U}_\infty + \sum_{i=1}^N \sigma^i \int_{\Delta S^i} \frac{\mathbf{r}}{2\pi \cdot r^2} ds(\mathbf{x}) + \gamma^1 \sum_{i=1}^{N_{Ps}} \int_{\Delta S^i} \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{k}}{2\pi \cdot r^2} ds(\mathbf{x}) + \gamma^2 \sum_{i=N_{Ps}+1}^N \int_{\Delta S^i} \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{k}}{2\pi \cdot r^2} ds(\mathbf{x}) \\
 &+ \sum_{p=w,s} \gamma_p^\Delta \int_{\Delta S_p^\Delta} \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{k}}{2\pi \cdot r^2} ds(\mathbf{x}_p) + \sum_{\substack{p=w,s \\ m=1,M}} \frac{\Gamma_p^m}{2\pi} \cdot \frac{\mathbf{r}_p^m \times \mathbf{k}}{r_p^{m2}} - \mathbf{U}_b
 \end{aligned}$$

Στο σημείο αποκόλλησης ισχύει

$$\gamma_s^\Delta = \mathbf{w}_{N_{Ps}} \cdot \boldsymbol{\tau}_{N_{Ps}} \quad (2.19)$$

όπου $\mathbf{w}_{N_{Ps}}$ είναι η σχετική ταχύτητα της ροής στο πλαίσιο του N_{Ps} της αεροτομής και $\boldsymbol{\tau}_{N_{Ps}}$ το μοναδιαίο εφαπτομενικό διάνυσμα στο αντίστοιχο πλαίσιο (Σχήμα 2.7).

3. Το θεώρημα Kelvin

$$\Delta\Gamma = \Gamma^n - \Gamma^{n-1} = -\gamma_s^\Delta \cdot \Delta l_s^\Delta - \gamma_w^\Delta \cdot \Delta l_w^\Delta \quad (2.20)$$

όπου Γ^n και Γ^{n-1} είναι οι κυκλοφορίες γύρω από την αεροτομή στο τωρινό και στο προηγούμενο χρονικό βήμα αντίστοιχα. Η κυκλοφορία δίνεται από την σχέση

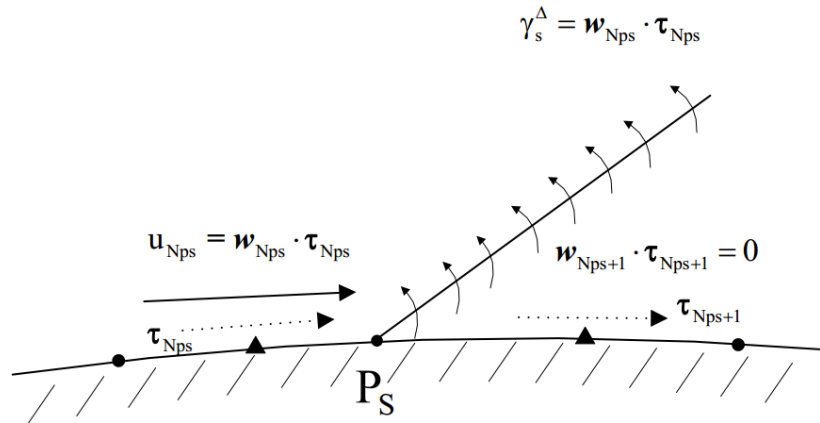
$$\Gamma^n = \gamma^1 S^1 - \gamma^2 S^2$$

όπου S^1 είναι το μήκος της αεροτομής από την ακμή εκφυγής έως το σημείο αποκόλλησης, ακολουθώντας την πλευρά υπερπίεσης και S^2 είναι το μήκος από το σημείο αποκόλλησης μέχρι την ακμή εκφυγής ακολουθώντας την πλευρά υποπίεσης αυτή την φορά.

4. Σημείο ανακοπής κατάντη της αποκόλλησης

Η σχετική ταχύτητα της ροής θεωρείται μηδέν στο σημείο ελέγχου κατάντη της θέσης αποκόλλησης (Σχήμα 2.7).

$$\mathbf{w}_{Nps+1} \cdot \boldsymbol{\tau}_{Nps+1} = 0 \quad (2.21)$$



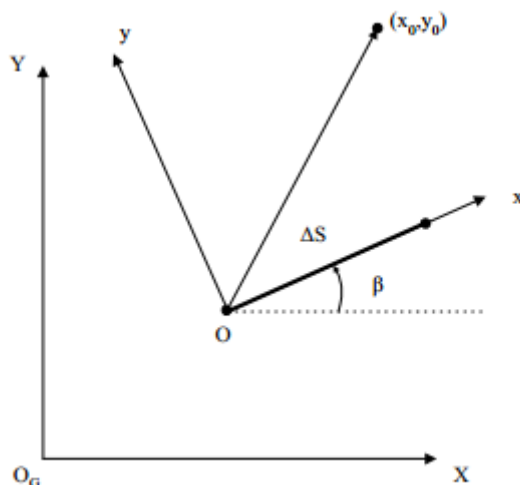
Σχήμα 2.7 - Συνθήκη Kutta στο σημείο αποκόλλησης της ροής και το σημείο ανακοπής κατάντη αυτής. [2]

Οι εξισώσεις που προκύπτουν από το πρόβλημα του δυναμικού είναι γραμμικές δεδομένου ότι η γεωμετρία των στοιχείων του κοντινού ομόρρου και η θέση του σημείου αποκόλλησης της ροής είναι γνωστά. Το γραμμικό σύστημα εξισώσεων που προκύπτει είναι το παρακάτω:

Συνθήκη μη εισχώρησης	σ^1	=	B
A	σ^2		
	\vdots		
	\vdots		
	σ^N		
Συνθήκη Kutta στην ακμή εκφυγής	γ^1		
Συνθήκη Kutta στο σημείο αποκόλλησης	γ_w^Δ		
Θεώρημα του Kelvin	γ_s^Δ		
Σημείο ανακοπής στην αποκόλληση	γ^2		

Ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων που προκύπτουν από την ικανοποίηση των τεσσάρων προαναφερθέντων συνθηκών και κατ'αναλογία των στοιχείων του μητρώου A και B που απαιτούνται για την επίλυση του συστήματος των N+4 εξισώσεων, φαίνεται στην διαδικασία που ακολουθεί.

Έστω ευθύγραμμο τμήμα ΔS πάνω στο οποίο τοποθετείται μία διανομή ιδιόμορφων σημείων. Έστω τοπικό σύστημα συντεταγμένων Oxy το οποίο ορίζεται βάση του ευθύγραμμου τμήματος ΔS , με τον άξονα x να τοποθετείται κατά το μήκος του και O_GXY το απόλυτο σύστημα συντεταγμένων. Το ευθύγραμμο τμήμα ΔS θεωρείται ότι σχηματίζει γωνία β με τον απόλυτο σύστημα συντεταγμένων.



Σχήμα 2.8 - Σύστημα συντεταγμένων ευθύγραμμου τμήματος ΔS πάνω στο οποίο τοποθετείται διανομή ιδιόμορφων σημείων

Επαγωγή ταχύτητας από τμηματικά σταθερή διανομή πηγών

Αν στο ΔS τοποθετηθεί σταθερή διανομή πηγών έντασης σ , τότε αυτή επάγει ταχύτητα σε σημείο (x_0, y_0) ως προς το τοπικό σύστημα συντεταγμένων που ορίζεται ως [10]:

$$u^\sigma(x_0, y_0) = \frac{\sigma}{2\pi} \cdot \int_0^{\Delta S} \frac{x_0 - x}{(x_0 - x)^2 + y_0^2} dx \tag{2.22}$$

$$u^\sigma(x_0, y_0) = \frac{\sigma}{2\pi} \cdot \int_0^{\Delta S} \frac{y_0}{(x_0 - x)^2 + y_0^2} dx \tag{2.23}$$

Η ολοκλήρωση των 2 παραπάνω σχέσεων κατά το μήκος ΔS δίνει

$$u^\sigma(x_0, y_0) = -\frac{\sigma}{2\pi} \ln \sqrt{\frac{(x_0 - \Delta S)^2 + y_0^2}{x_0^2 + y_0^2}} \quad (2.24)$$

$$v^\sigma(x_0, y_0) = -\frac{\sigma}{2\pi} \left[\tan^{-1} \left(\frac{x_0 - \Delta S}{y_0} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{x_0}{y_0} \right) \right] \quad (2.25)$$

Η μεταφορά τους στο απόλυτο σύστημα συντεταγμένων γίνεται με στροφή κατά την γωνία β

$$\begin{pmatrix} \frac{u_G^\sigma}{v_G^\sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u^\sigma \\ v^\sigma \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

Τμηματικά σταθερή διανομή στροβιλότητας

$$u^\gamma(x_0, y_0) = \frac{\gamma}{2\pi} \cdot \int_0^{\Delta S} \frac{y_0}{(x_0 - x)^2 + y_0^2} dx \quad (2.27)$$

$$v^\sigma(x_0, y_0) = -\frac{\gamma}{2\pi} \cdot \int_0^{\Delta S} \frac{x_0 - x}{(x_0 - x)^2 + y_0^2} dx \quad (2.28)$$

Συνεπάγεται επομένως ότι

$$u^\gamma(x_0, y_0) = v^\sigma(x_0, y_0) \quad (2.29)$$

$$v^\gamma(x_0, y_0) = -u^\sigma(x_0, y_0) \quad (2.30)$$

Με βάση τα παραπάνω υπολογίζονται τα στοιχεία του μητρώου A και B του συστήματος των εξισώσεων του προβλήματος.

Λύνοντας το γραμμικό σύστημα εξισώσεων, οι βαθμοί ελευθερίας (N+4 άγνωστες κατανομές ιδιόμορφων σημείων) προσδιορίζονται για τις δεδομένες τιμές των μηκών και γωνιών του κοντινού ομόρρου. Τα πραγματικά μήκη ΔS_w^Δ , ΔS_s^Δ και οι γωνίες προσανατολισμού θ_w^Δ , θ_s^Δ των κοντινών τμημάτων των 2 φύλλων του ομόρρου συσχετίζονται με τους βαθμούς ελευθερίας, επομένως σε κάθε χρονικό βήμα ακολουθείται μία επαναληπτική διαδικασία μέχρις ότου η γεωμετρία του ομόρρου να συγκλίνει. Σημειώνεται ότι η ένταση των δινών του μακρινού τμήματος του ομόρρου είναι γνωστή από το προηγούμενο χρονικό βήμα.

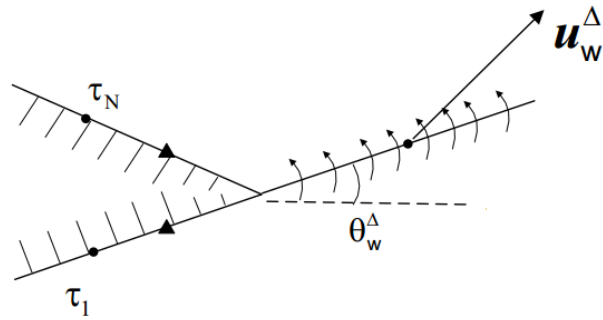
Στην αρχή της κάθε επανάληψης οι παράμετροι ΔS_w^Δ , ΔS_s^Δ , θ_w^Δ , θ_s^Δ θεωρούνται γνωστοί και ισούνται με τις τιμές του προηγούμενου χρονικού βήματος). Στο τέλος της κάθε επανάληψης τα μήκη των στοιχείων του κοντινού ομόρρου ΔS_w^Δ και ΔS_s^Δ επαναπροσδιορίζονται από την τοπική μέση ταχύτητα πολλαπλασιασμένη με το χρονικό βήμα στην ακμή εκφυγής και στο σημείο αποκόλλησης αντίστοιχα:

$$\begin{aligned}\Delta S_w^\Delta &= \frac{(\mathbf{w}_N \cdot \boldsymbol{\tau}_N - \mathbf{w}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_1)}{2} \Delta t \\ \Delta S_s^\Delta &= \frac{\mathbf{w}_{Nps} \cdot \boldsymbol{\tau}_{Nps}}{2} \Delta t\end{aligned}\tag{2.31}$$

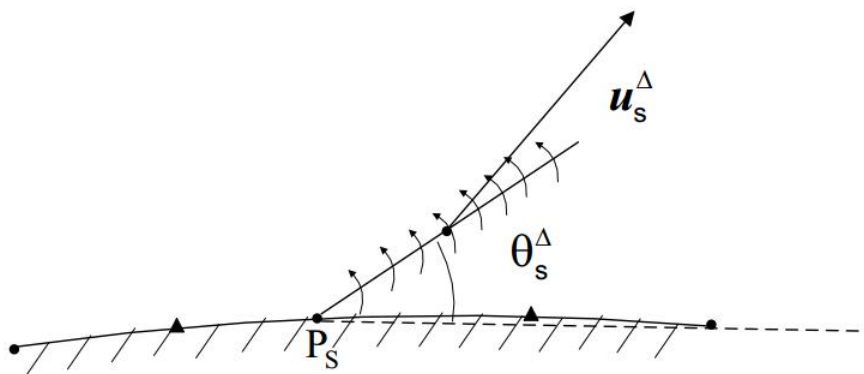
Σε ότι αφορά την κατεύθυνση των στοιχείων του κοντινού ομόρρου στην ακμή εκφυγής και στο σημείο αποκόλλησης, οι κατευθύνσεις θ_w^Δ του ΔS_w^Δ και θ_s^Δ του ΔS_s^Δ προκύπτουν από τον υπολογισμό των επαγόμενων ταχυτήτων στα κέντρα των πλαϊσίων του κοντινού ομόρρου (Σχήμα 2.8 και Σχήμα 2.9). Οι επαγόμενες ταχύτητες προκύπτουν από την Εξίσωση (2.16). Για αριθμητικούς λόγους ορίζονται όρια και για τις 2 γωνίες έτσι ώστε τα πλαίσια του κοντινού ομόρρου να μην πλησιάζουν στα πλαίσια της αεροτομής που γειτονεύουν με την ακμή εκφυγής και το σημείο αποκόλλησης αντίστοιχα.

Όταν επιτευχθεί σύγκλιση, τα 2 νέα σωματίδια στροβιλότητας δημιουργούνται στο τέλος του χρονικού βήματος ολοκληρώνοντας την στροβιλότητα στα κοντινά τμήματα του ομόρρου. Τα δύο νέα αυτά σωματίδια τοποθετούνται στο κέντρο των μηκών ΔS_w^Δ και ΔS_s^Δ . Τέλος οι υπολογισμοί που αφορούν το κάθε χρονικό βήμα ολοκληρώνονται με την μεταφορά των σημειακών δινών σύμφωνα με τις κινηματικές συνθήκες, εξίσωση (2.4), που περιγράφουν την εξέλιξη του ομόρρου. Επομένως με βάση την εξίσωση (2.16) η θέση των δινών (Σχήμα 2.10) ορίζεται ως:

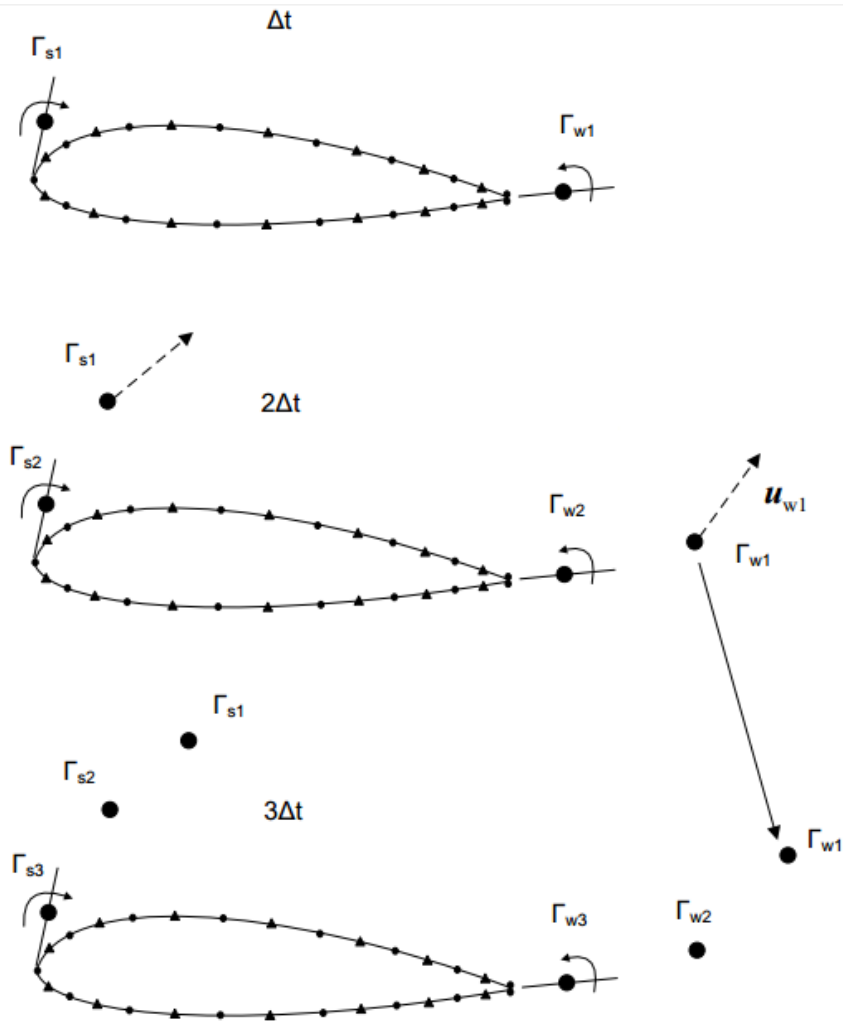
$$\mathbf{Z}_p^{mnew} = \mathbf{Z}_p^{mold} + \mathbf{u}_p^m \cdot \Delta t, \quad p=w,s \quad m=1,M\tag{2.32}$$



Σχήμα 2.9 - Αριθμητική μέθοδος για τον προσδιορισμό της κατεύθυνσης του στοιχείου του κοντινού ομόρρου στην ακμή εκφυγής. Η τοπική ταχύτητα της ροής υπολογίζεται στο κέντρο του πλαισίου. Η κατεύθυνση του διανύσματος της ταχύτητας \mathbf{u}_w^Δ προσδιορίζει την νέα τιμή της γωνίας θ_w^Δ . [2]



Σχήμα 2.10 - Αριθμητική μέθοδος για τον προσδιορισμό της κατεύθυνσης του στοιχείου του κοντινού ομόρρου στο σημείο αποκόλλησης της ροής. Η τοπική ταχύτητα της ροής υπολογίζεται στο κέντρο του πλαισίου. Η κατεύθυνση του διανύσματος της ταχύτητας \mathbf{u}_s^Δ προσδιορίζει την νέα τιμή της γωνίας θ_s^Δ . [2]



Σχήμα 2.11 – Η επαγωγή στις δίνες που αποτελούν τα φύλλα του ομόρρου. Η ταχύτητα υπολογίζεται στο τέλος κάθε χρονικού βήματος. Με βάση αυτή την ταχύτητα γίνεται η επαγωγή των υπόλοιπων σωματιδίων στροβιλότητας. [2]

2.1.5 Συνάρτηση φίλτρου

Όπως περιγράφεται στο αριθμητικό μοντέλο, οι σημειακές δίνες που αποτελούν τον ομόρροο μετακινούνται με την πάροδο του χρόνου (Σχήμα 2.11). Το πεδίο ταχύτητας που επάγεται από μία σημειακή δίνη δίνεται από την σχέση:

$$\mathbf{U}(\mathbf{x};t) = \frac{\Gamma_p}{2\pi} \cdot \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{Z}_p) \times \mathbf{k}}{|\mathbf{x} - \mathbf{Z}_p|^2} \quad (2.33)$$

όπου Γ_p η ένταση της δίνης και \mathbf{Z}_p το διάνυσμα θέσης αυτής. Όπως είναι φανερό από την παραπάνω σχέση η επαγόμενη ταχύτητα από σημειακή δίνη απειρίζεται καθώς πλησιάζει κανείς το κέντρο της. Προκειμένου να αρθεί ο απειρισμός αυτός, εισάγεται μία συνάρτηση φίλτρου που εξασφαλίζει τον μηδενισμό της επαγόμενης ταχύτητας από την δίνη καθώς η απόσταση $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{Z}_p$ μικραίνει. Έτσι η επαγόμενη ταχύτητα από σημειακή δίνη μπορεί να γραφτεί

$$\mathbf{U}(\mathbf{x};t) = \frac{\Gamma_p}{2\pi} \cdot \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{k}}{|\mathbf{r}|^2 + \varepsilon^2} \quad (2.34)$$

όπου η παράμετρος ε ονομάζεται μήκος αποκοπής και η τιμή της καθορίζει την ακτίνα γύρω από το κέντρο της δίνης Γ_p όπου η συνάρτηση φίλτρου επιδρά στο πεδίο ταχύτητας αυτής.

2.1.6 Υπολογισμός των δυνάμεων

Για τον υπολογισμό των πιέσεων κατά μήκος της αεροτομής γίνεται εφαρμογή της εξίσωσης του Bernoulli στην μη μόνιμη μορφή της, η οποία εκφρασμένη για την για την σχετική ταχύτητα $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{U}_b$, [10]:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{U}_b + \frac{\mathbf{u}^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\mathbf{w}^2}{2} - \frac{\mathbf{U}_b}{2} + \frac{p_1}{\rho} = c(t) \quad (2.35)$$

όπου στην παραπάνω έκφραση το Φ αποτελεί το συνολικό δυναμικό της ροής $\nabla \Phi = \mathbf{u}$.

Στην περίπτωση του διπλού ομόρρου η ολική πίεση στο εσωτερικό της κλειστής φυσαλίδας δεν είναι η ίδια με την ολική πίεση στο άπειρο. Για ένα σημείο στο εσωτερικό της φυσαλίδας αποκόλλησης η εξίσωση Bernoulli γράφεται στην μορφή:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\mathbf{w}^2}{2} - \frac{\mathbf{U}_b}{2} + \frac{p_1}{\rho} + \Delta h(t) = c(t) \quad (2.36)$$

όπου η διαφορά πίεσης $\Delta h(t)$ υπολογίζεται από την εξίσωση (2.9).

Υποθέτοντας συνθήκες ως συνθήκες αναφοράς, την πίεση και την ταχύτητα στο άπειρο, $p_\infty(t)$ και $\mathbf{U}_\infty(t)$ μπορούμε αντιστοίχως να γράψουμε :

- εκτός της περιοχής αποκόλλησης : $\frac{p_1 - p_\infty}{\rho} = \frac{U_\infty^2}{2} - \frac{u^2}{2} + \frac{U_b^2}{2} - \frac{\partial(\Phi - \Phi_\infty)}{\partial t}$
- εντός της περιοχής αποκόλλησης : $\frac{p_1 - p_\infty}{\rho} = \frac{U_\infty^2}{2} - \frac{u^2}{2} + \frac{U_b^2}{2} - \frac{\partial(\Phi - \Phi_\infty)}{\partial t} - \Delta h$

όπου $\Phi_\infty = \mathbf{U}_{\infty x} \cdot x + \mathbf{U}_{\infty y} \cdot y$ είναι το δυναμικό της ροής στο άπειρο.

Για τον υπολογισμό του δυναμικού της ροής γίνεται υπέρθεση του δυναμικού της ελεύθερης ροής με το δυναμικό των ιδιόμορφων σημείων στο σώμα της αεροτομής:

$$\Phi = \Phi_\infty + \varphi_\sigma + \varphi_\gamma \quad (2.37)$$

όπου φ_σ είναι το δυναμικό των τμηματικά σταθερών πηγών κατά μήκος της αεροτομής, φ_γ το δυναμικό από την στροβιλότητα της επιφάνειας της αεροτομής.

Το φ^σ υπολογίζεται μέσω της ολοκληρωματικής έκφρασης για τμηματικά σταθερή διανομή πηγών από την ακόλουθη σχέση [10]:

$$\varphi^\sigma(x_0, y_0) = \frac{\sigma}{2\pi} \cdot \ln \sqrt{(x_0 - x)^2 + y_0^2} dx \quad (2.38)$$

έχοντας σαν βάση το σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό των επαγόμενων ταχυτήτων από σταθερή κατανομή πηγών και στροβιλότητας (Σχήμα 2.8).

Η ολοκλήρωση της παραπάνω σχέσης κατά μήκος του ΔS δίνει:

$$\begin{aligned} \varphi^\sigma(x_0, y_0) = & -\frac{\sigma}{2\pi} \left[(x_0 - \Delta S) \cdot \ln \sqrt{(x_0 - x)^2 + y_0^2} - x_0 \cdot \ln \sqrt{x_0^2 + y_0^2} + \right. \\ & \left. + y_0 \left(\tan^{-1} \frac{x_0 - \Delta S}{y_0} - \tan^{-1} \frac{x_0}{y_0} \right) + \Delta S \right] \end{aligned} \quad (2.39)$$

Σε ότι αφορά το δυναμικό που επάγεται από το στροβιλό τμήμα της ροής (στροβιλότητα αεροτομής) ο υπολογισμός του μέσω διανομής στροβιλότητας εισάγει ασυνέχειες εξαιτίας της εμφάνισης συνάρτησης τόξου εφαπτομένης όπως φαίνεται παρακάτω (η έκφραση γίνεται με βάση το Σχήμα 2.8) [10]:

$$\varphi^\gamma(x_0, y_0) = \frac{\gamma}{2\pi} \cdot \int_0^{\Delta S} \tan^{-1} \frac{y_0}{(x_0 - x)} dx \quad (2.40)$$

Επομένως ορίζεται μία διανομή διπόλων ισοδύναμη προς την διανομή στροβιλότητας, η οποία λαμβάνεται στην αεροτομή και στα 2 φύλλα του ομόρρου. Η ισοδυναμία μίας διανομής στροβιλότητας σε μία διανομή διπόλων εκφράζεται μέσω της σχέσης:

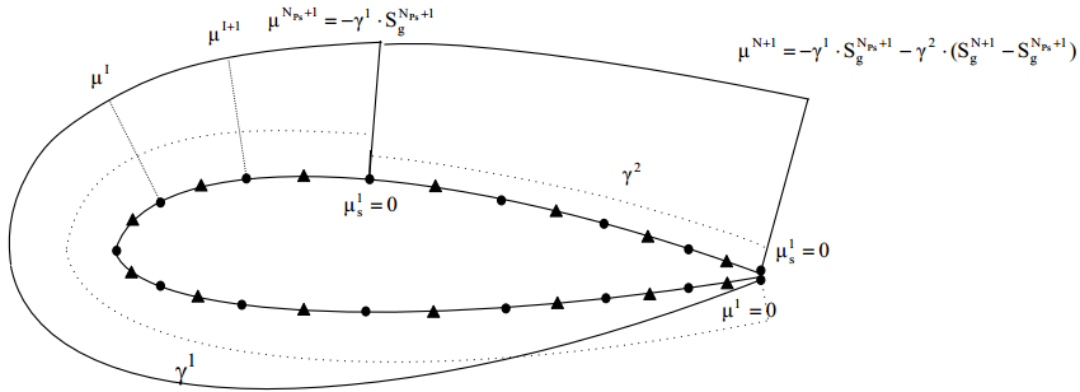
$$\nabla_s \gamma = [\mathbf{u}] = [\nabla_s \varphi] = \nabla_s [\varphi] = -\nabla_s \mu \quad (2.41)$$

όπου ∇_s είναι η παράγωγος κατά μήκος καμπύλης S.

Με ολοκλήρωση της σχέσης (2.39) κατά το μήκος της επιφάνειας της αεροτομής προκύπτει μία τμηματικά γραμμική διανομή διπόλων σύμφωνα με την σχέση:

$$\mu^{l+1} = \mu^l - \gamma^l \cdot \Delta S^i \quad (2.42)$$

Η ολοκλήρωση ξεκινά από την ακμή εκφυγής όπου υποθέτουμε $\mu^1 = 0$ και μετακινείται κατά μήκος της επιφάνειας της αεροτομής μέχρι να φτάσει ξανά στην ακμή εκφυγής από την πάνω πλευρά (Σχήμα 2.12).



Σχήμα 2.12 - Ορισμός της διανομής διπόλων κατά μήκος της επιφάνειας της αεροτομής [2]

Το δυναμικό που επάγεται από τμηματικά γραμμική διανομή διπόλων έντασης

$$\mu(x) = \mu^1 \left(1 - \frac{x}{\Delta S}\right) + \mu^2 \frac{x}{\Delta S}$$

τοποθετημένη σε ευθύγραμμο τμήμα ΔS σε σημείο (x_0, y_0) , (Σχήμα 2.8), δίνεται από την εξίσωση [10]:

$$\varphi''(x_0, y_0) = -\frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{\Delta S} \mu(x) \cdot \frac{y_0}{(x_0 - x)^2 + y_0^2} dx \quad (2.43)$$

Η ολοκλήρωση της παραπάνω εξίσωσης κατά το μήκος του τμήματος ΔS δίνει:

$$\varphi''(x_0, y_0) = \mu^1 (I_1 - I_2) + \mu^2 I_2 \quad (2.44)$$

όπου

$$I_1 = -\frac{1}{2\pi} \left(\tan^{-1} \frac{x_0 - \Delta S}{y_0} - \tan^{-1} \frac{x_0}{y_0} \right)$$

$$I_2 = \frac{1}{4\pi\Delta S} \left(y_0 \cdot \ln \frac{(x_0 - \Delta S)^2 + y_0^2}{x_0^2 + y_0^2} - 2x_0 \left(\tan^{-1} \frac{x_0 - \Delta S}{y_0} - \tan^{-1} \frac{x_0}{y_0} \right) \right)$$

Για τον υπολογισμό του χρονικού όρου στην εξίσωση του διαφορικού χρησιμοποιείται πρώτης τάξης πίσω διαφορά :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\Phi(t) - \Phi(t - \Delta t)}{\Delta t}$$

Δεδομένου ότι τα δύο φύλλα στροβιλότητας του ομόρρου, αμέσως μετά την έκλυσή τους, αρχίζουν να τυλίγονται, είναι σχεδόν αδύνατο να οριστεί μία συνεχής γραμμή στροβιλότητας όπου συνδέει διαδοχικές δίνες στον ομόρρου και να ολοκληρώνει την εξίσωση (2.39) κατ' αυτό το μήκος. Η επαγωγή στην πίεση από τον ομόρρου (τμήμα στροβιλότητας) υπολογίζεται μέσω της παρακάτω εξίσωσης :

$$\nabla^2 p_2 = -\rho \nabla (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) \quad (2.45)$$

Η εξίσωση (2.43) αποτελεί εξίσωση Poisson για την πίεση p_2 που σχηματίστηκε παίρνοντας το div της εξίσωσης συνεισφοράς στροβιλότητας του ελεύθερου ομόρρου

$$\frac{\partial \nabla \times \mathbf{A}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} + \frac{\nabla p_2}{\rho} = 0$$

όπου \mathbf{A} είναι διανυσματικό πεδίο δυναμικού. Είναι γνωστό ότι $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$.

Το πεδίο στροβιλότητας εκφράζεται ως το σύνολο των σημειακών δινών

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}; t) = \sum_{\substack{p=w,s \\ m=1,M}} \Gamma_p^m \delta(\mathbf{x} - \mathbf{Z}_p^m(t)) \mathbf{k} \quad (2.46)$$

όπου δ είναι η συνάρτηση Dirac.

Εφαρμογή της δεύτερης ταυτότητας του Green στην εξίσωση (2.43) δίνει

$$\int_D [\nabla^2 p_2 G - p_2 \nabla^2 G] dD = \int_S [G \nabla p_2 \cdot \mathbf{n} - p_2 \nabla G \cdot \mathbf{n}] dS \quad (2.47)$$

όπου D είναι το χωρίο εξωτερικά της επιφάνειας της αεροτομής S και G είναι η συνάρτηση Green στις 2 διαστάσεις η οποία ορίζεται ως

$$G(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}| \quad (2.48)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.43) και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\nabla^2 G = \delta(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x})$, η εξίσωση (2.45) γράφεται στην μορφή:

$$-p_2(\mathbf{x}_0; t) - \int_D \rho \nabla(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) G dD = \int_S [G \nabla p_2 \cdot \mathbf{n} - p_2 \nabla G \cdot \mathbf{n}] dS \quad (2.49)$$

Με ολοκλήρωση κατά μέλη του δευτέρου όρου του αριστερού μέλους της παραπάνω εξίσωσης παίρνουμε:

$$-p_2(\mathbf{x}_0; t) - \int_S \rho(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} G dD + \int_D \rho(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) \nabla G dD = \int_S [G \nabla p_2 \cdot \mathbf{n} - p_2 \nabla G \cdot \mathbf{n}] dS$$

Επομένως η επιπλέον διανομή πίεσης που οφείλεται στο κομμάτι στροβιλότητας της ροής δίνεται από την λύση στην παρακάτω ολοκληρωματική εξίσωση:

$$p_2(\mathbf{x}_0; t) = \int_S p_2(\mathbf{x}; t) \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}) dS + \rho \sum_{\substack{p=w,s \\ m=1,M}} [\Gamma_m^p(\mathbf{k} \times \mathbf{u}_p^m) \cdot \nabla] G(\mathbf{x} - \mathbf{Z}_p^m(t)) \quad (2.50)$$

Για την λύση της παραπάνω εξίσωσης θεωρείται τμηματικά σταθερή διανομή πίεσης p_2 στην αεροτομή οπότε η ολοκληρωματική έκφραση παίρνει την μορφή:

$$p_2(\mathbf{x}_0; t) = \sum_{i=1}^N \int_{\Delta S^i} p_2^i \frac{(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_i}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}|^2} dS + \rho \sum_{\substack{p=w,s \\ m=1,M}} [\Gamma_m^p(\mathbf{k} \times \mathbf{u}_p^m) \cdot \nabla] G(\mathbf{x} - \mathbf{Z}_p^m(t)) \quad (2.51)$$

Η παραπάνω εξίσωση ικανοποιείται στα κέντρα των πλαισίων και δίνει ένα σύστημα εξισώσεων για τις άγνωστες πιέσεις. Τα ολοκληρώματα που εμφανίζονται είναι ισοδύναμα με αυτά της διανομής διπόλων η αναλυτική έκφραση των οποίων έχει αναφερθεί προηγουμένως (2.43),(2.44).

Τα αεροδυναμικά φορτία υπολογίζονται ολοκληρώνοντας το πεδίο πιέσεων γύρω από την αεροτομή:

$$C_L = \frac{-\sum_{i=1}^N (p^i - p_\infty) \cdot \mathbf{n}^i \cdot \mathbf{e}_L \Delta S^i}{\frac{\rho}{2} U_\infty^2 c} = -\frac{1}{c} \sum_{i=1}^N C_p^i \cdot \mathbf{n}^i \cdot \mathbf{e}_L \Delta S^i \quad (2.52)$$

$$C_D = \frac{-\sum_{i=1}^N (p^i - p_\infty) \cdot \mathbf{n}^i \cdot \mathbf{e}_D \Delta S^i}{\frac{\rho}{2} U_\infty^2 c} = -\frac{1}{c} \sum_{i=1}^N C_p^i \cdot \mathbf{n}^i \cdot \mathbf{e}_D \Delta S^i \quad (2.53)$$

όπου \mathbf{e}_L και \mathbf{e}_D είναι οι κατευθύνσεις της άνωσης και αντίστασης αντίστοιχα και C_p^i ο συντελεστής πίεσης στο πλαίσιο ΔS^i .

2.2 Μέθοδος Particle Mesh

Στην ανάλυση που έγινε για την στροβιλή μέθοδο ελεύθερου ομόρρου, αναφέρεται ότι η επαγωγή της ταχύτητας των σωματιδίων στροβιλότητας στην ταχύτητα του ελεύθερου ομόρρου γίνεται με χρήση της σχέσης (2.33)

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}; t) = \frac{\Gamma_p}{2\pi} \cdot \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{Z}_p) \times \mathbf{k}}{|\mathbf{x} - \mathbf{Z}_p|^2}$$

η οποία αποτελεί την ταχύτητα που επάγει σημειακή δίνη σε σημείο.

Στο αριθμητικό μοντέλο έχει παρατηρηθεί ότι όταν ο αριθμός των σωματιδίων στροβιλότητας που απαρτίζουν τα δύο φύλλα στροβιλότητας μεγαλώνει με την πάροδο του χρόνου, το υπολογιστικό κόστος για τις επαγόμενες ταχύτητες σε καθένα από τα αυτά τείνει να αυξάνει όλο και περισσότερο.

Γ'αυτό τον λόγο υιοθετήθηκε η τεχνική Particle Mesh για τον υπολογισμό των ταχυτήτων στα σωματίδια στροβιλότητας του ομόρρου. Η βασική ιδέα του Particle Mesh είναι η επίλυση της εξίσωσης Poisson

$$\nabla^2 \psi = -\omega \quad (2.54)$$

πάνω σε δομημένο ομοιόμορφο πλέγμα (Σχήμα 2.13). Με αυτόν τον τρόπο το υπολογιστικό κόστος μειώνεται από N^2 σε $\log N$ [11].

Η εξίσωση Poisson λύνεται με βάση τον αλγόριθμο των James-Lackner [25],[26]. Στην γενική περίπτωση, το πρόβλημα Poisson στον χώρο ορίζεται ως

$$\nabla^2 w = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in R^n \quad (2.55)$$

Εάν με D συμβολιστεί ένα υποσύνολο (compact subset) του R^n που εμπεριέχει την συνάρτηση φόρτισης f (forcing function) τότε το ανωτέρω πρόβλημα λαμβάνει την μορφή

$$\begin{aligned} \nabla^2 w &= f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} &\in D \\ w &= w_B, & \mathbf{x} &\in \partial D \end{aligned} \quad (2.56)$$

Η οριακή συνθήκη (Dirichlet) w_B , με εφαρμογή της συνάρτησης του Green, λαμβάνει την ολοκληρωματική μορφή:

$$w_B(\mathbf{x}_0) = \int_{\text{supp}\{f\}} f(\mathbf{x}) G(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}) dD(\mathbf{x}) \quad (2.57)$$

Με σκοπό την μείωση του υπολογιστικού κόστους των παραπάνω εξισώσεων οι James και Lackner [25],[26] χώρισαν το πρόβλημα σε δύο μέρη:

Το ομογενές (Homogeneous Problem)

$$\begin{aligned} \nabla^2 w_0 &= f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in D \\ w_0 &= 0, \quad \mathbf{x} \in \partial D \end{aligned} \quad (2.58)$$

Και Single Layer Problem

$$\begin{aligned} \nabla^2 w_1 &= 0, \quad \mathbf{x} \in D \\ w_1 &= w_B, \quad \mathbf{x} \in \partial D \end{aligned} \quad (2.59)$$

όπου

$$w = w_0 + w_1 \quad (2.60)$$

Στην σχέση (2.59) μπορεί να δοθεί έκφραση πηγής:

$$w_1(\mathbf{x}_0) = \int_{\partial D} \sigma(\mathbf{x}) G(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) \quad (2.61)$$

όπου το

$$\sigma = \left[\frac{\partial w_1}{\partial n} \right]$$

δηλώνει την μεταβολή της κάθετης παραγώγου στο ∂D .

Με την απαίτηση συνέχειας της συνάρτησης w κατά μήκος του ∂D ,

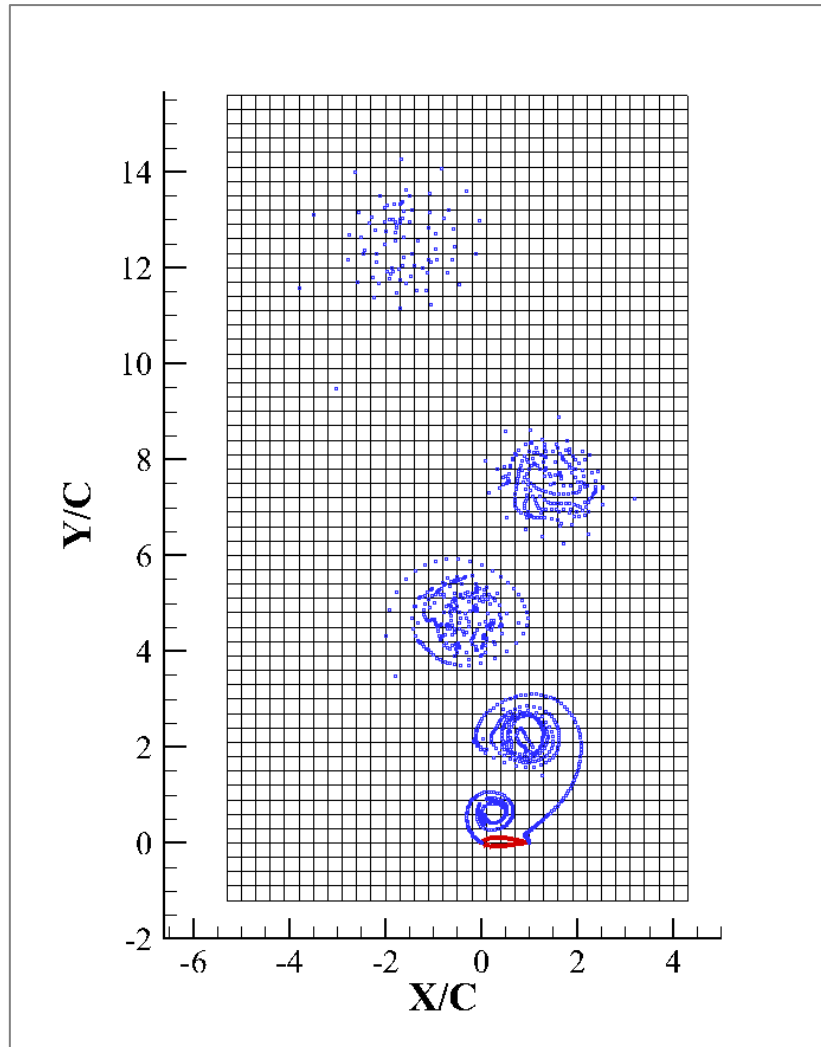
$$\left[\frac{\partial w}{\partial n} \right] = \left[\frac{\partial w_0}{\partial n} \right] + \left[\frac{\partial w_1}{\partial n} \right] = 0, \text{ στο } \partial D \quad (2.62)$$

συνεπάγεται ότι

$$\sigma = - \left[\frac{\partial w_0}{\partial n} \right]$$

Εν κατακλείδι, η ολοκληρωματική πεπλεγμένη μορφή της εξίσωσης (2.57) αντικαθίσταται από έκφραση πηγής. Εντός του χωρίου D , γίνεται επίλυση δύο εξισώσεων Poisson: η πρώτη αφορά το βοηθητικό πρόβλημα w_0 από το οποίο προσδιορίζεται η πηγή σ και μέσω αυτής ορίζεται η w_B . Η δεύτερη αφορά το αρχικό πρόβλημα (2.56) μέσω του προσδιορισμού της w_B . Σημειώνεται ότι χρησιμοποιείται μέθοδος πεπερασμένων διαφορών για την επίλυση των 2 παραπάνω εξισώσεων επάνω στο καρτεσιανό πλέγμα.

Η επίλυση αυτή, προϋποθέτει ένα τρόπο με τον οποίο θα μεταφέρεται η πληροφορία της ροής από τα στοιχεία στροβιλότητας στο πλέγμα και αφού γίνει η επίλυση της εξίσωσης επάνω στο πλέγμα, ένα τρόπο για να επιστρέψει η πληροφορία πίσω στα στοιχεία στροβιλότητας.



Σχήμα 2.13 - Πλέγμα πάνω στο οποίο εφαρμόζεται η τεχνική Particle Mesh. Το μήκος των κελιών είναι $\Delta x=0.3$ και $\Delta y = 0.3$. Οι άξονες είναι αδιαστατοποιημένοι. Με κόκκινο χρώμα διακρίνεται η αεροτομή, ενώ με μπλε χρώμα τα σωματίδια στροβιλότητας.

Εάν με $Q_p = q_p \cdot V_p$ συμβολίζεται το μέγεθος που μεταφέρεται από τα στοιχεία στροβιλότητας, με το q_p να αποτελεί την στροβιλότητα και V_p να αποτελεί τον όγκο του κάθε στοιχείου αντίστοιχα, τότε χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις προβολής (projection functions):

$$q_{i,j,k} \equiv \text{Proj}_{\text{PM}}(q_p; V_p) = \frac{\sum_p q_p V_p W(\mathbf{x}_{i,j,k} - \mathbf{Z}_p)}{\sum_p V_p W(\mathbf{x}_{i,j,k} - \mathbf{Z}_p)} \quad (2.63)$$

όπου $\mathbf{x}_{i,j,k}$ είναι το διάνυσμα θέσης των κόμβων i, j, k του πλέγματος και W η συνάρτηση παρεμβολής.

Η συνάρτηση παρεμβολής ορίζεται ως:

$$W(\mathbf{r}) = W_1\left(\frac{r_x}{h}\right) W_1\left(\frac{r_y}{h}\right) W_1\left(\frac{r_z}{h}\right) \quad (2.64)$$

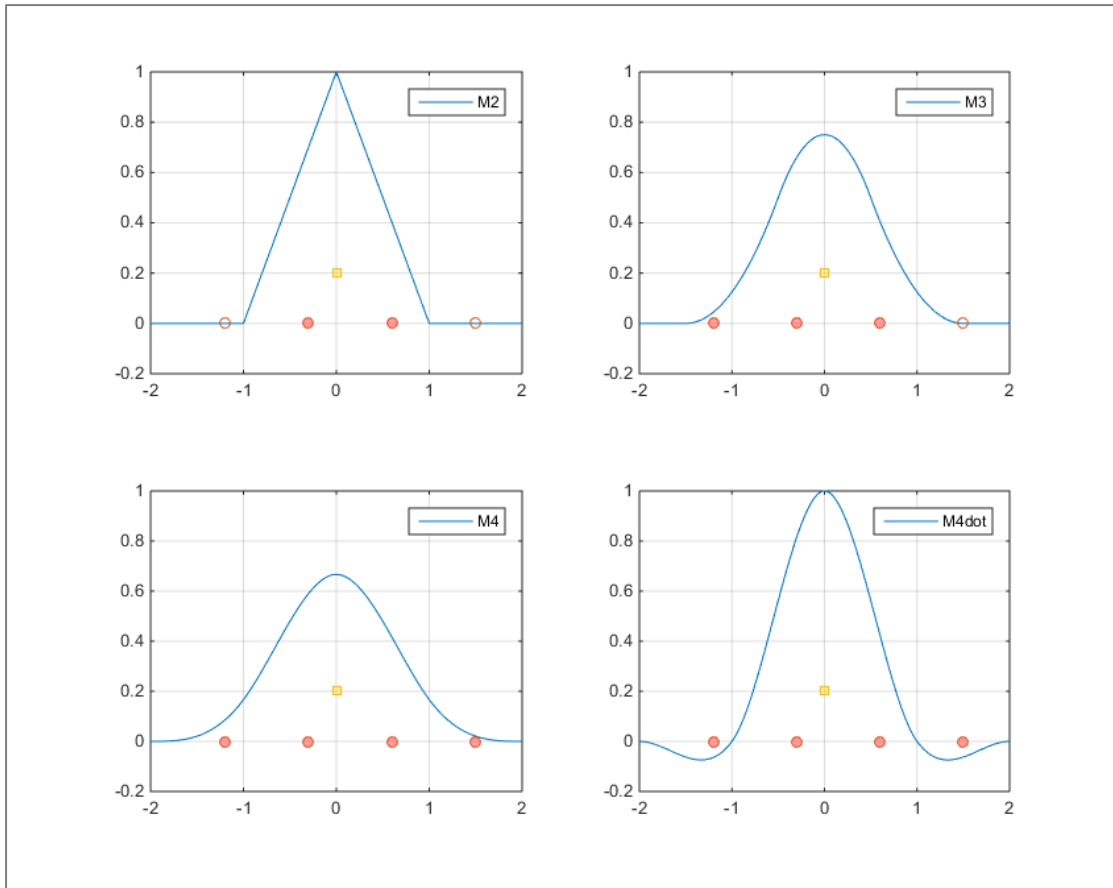
όπου το h συμβολίζει την απόσταση μεταξύ δύο κόμβων του πλέγματος. Η συνάρτηση W_1 είναι η μονοδιάστατη συνάρτηση παρεμβολής. Στη συγκεκριμένη περίπτωση χρησιμοποιείται η συνάρτηση M_4' [5], η οποία ορίζεται ως:

$$M_4'(x) = \begin{cases} 0 & , |x| > 2 \\ \frac{1}{2}(2 - |x|)^2(1 - |x|) & , 1 \leq |x| \leq 2 \\ 1 - \frac{5x^2}{2} + \frac{3|x|^3}{2} & , |x| \leq 1 \end{cases} \quad (2.65)$$

Αφού επιλυθεί η εξίσωση Poisson, η πληροφορία επιστρέφει από το πλέγμα πίσω στα στοιχεία στροβιλότητας χρησιμοποιώντας τις ίδιες συναρτήσεις παρεμβολής (interpolation functions):

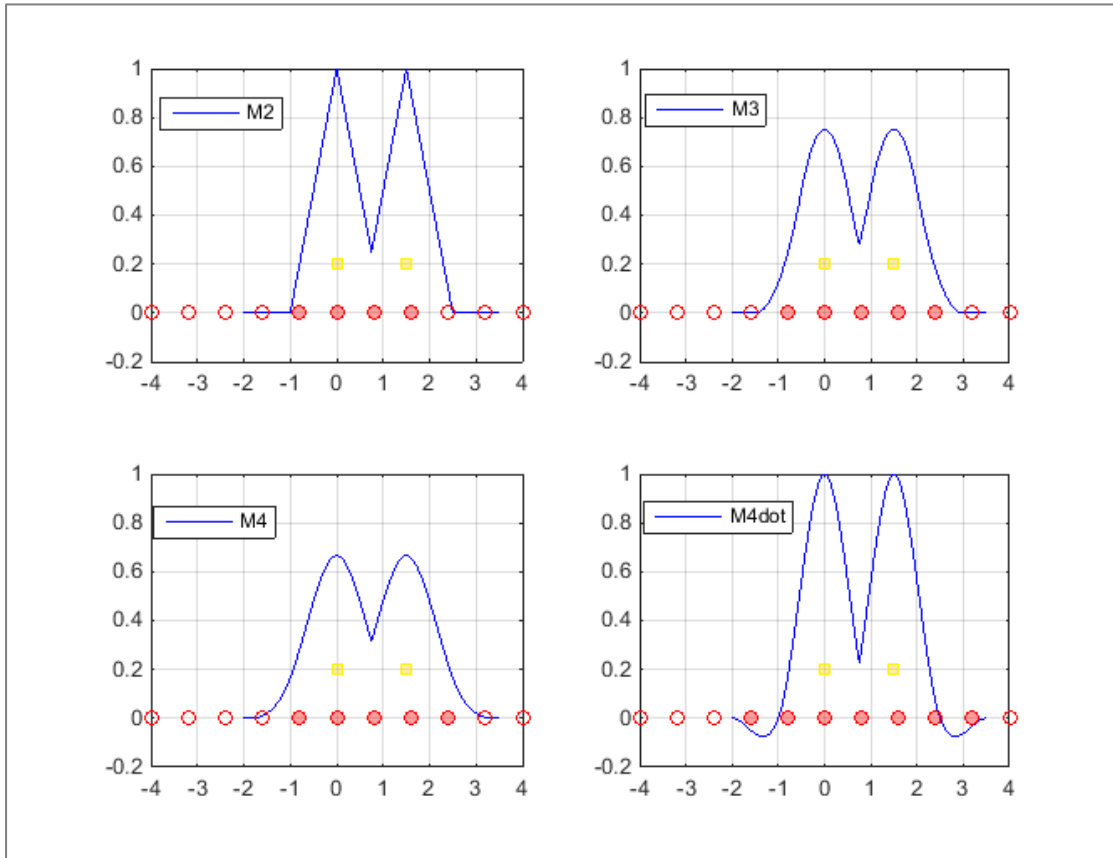
$$q_{i,j,k} \equiv \text{Interp}_{\text{PM}}(q_p; V_p) = \sum_{i,j,k} q_{i,j,k} W(\mathbf{x}_{i,j,k} - \mathbf{Z}_p) \quad (2.66)$$

Για δεδομένο πλέγμα η διαδικασία προβολής μεταφέρει την πληροφορία από ένα στοιχείο στροβιλότητας σε δύο ή παραπάνω πλεγματούς κόμβους. Στο Σχήμα 2.15 φαίνονται οι πλεγματούς κόμβοι που ενεργοποιούνται (κόκκινοι κόμβοι) στη διαδικασία προβολής ανάλογα με την συνάρτηση που θα επιλεγεί ($2^{\text{ης}}$, $3^{\text{ης}}$ ή $4^{\text{ης}}$ τάξης) [12].

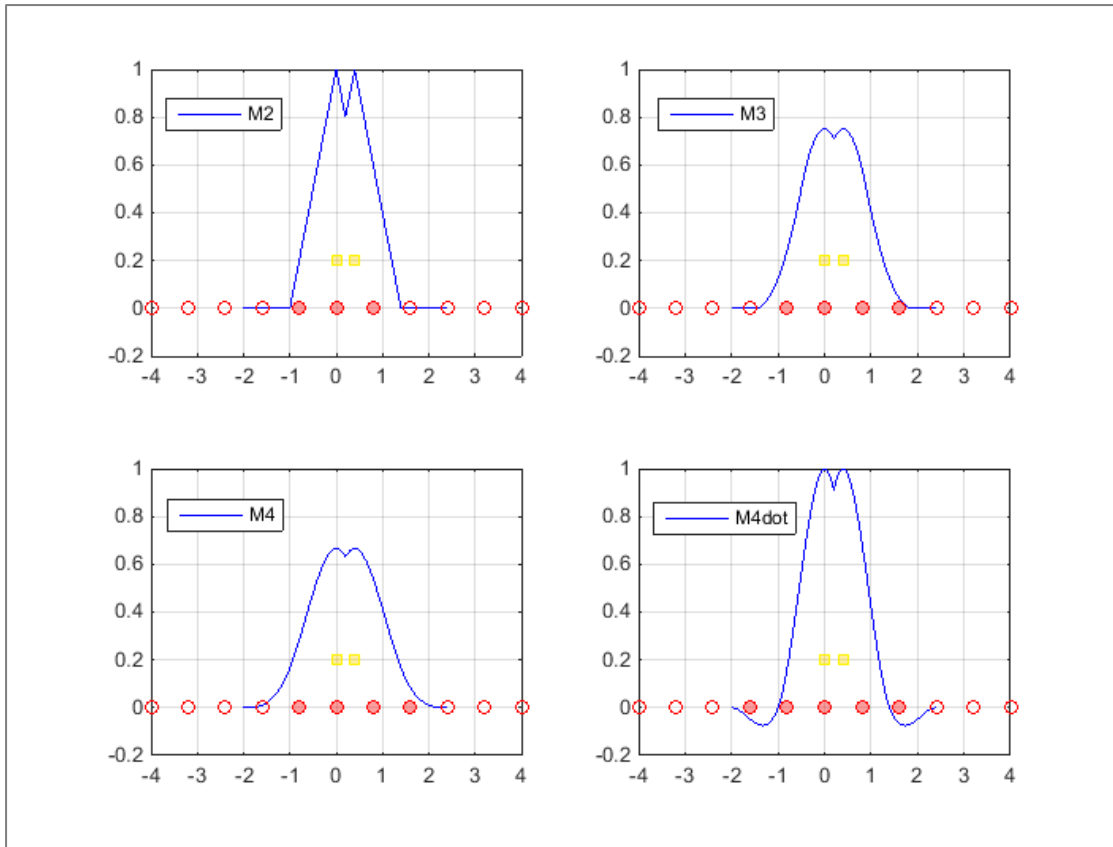


Σχήμα 2.14 - Συναρτήσεις προβολής της πληροφορίας στους κόμβους του πλέγματος (με κόκκινο χρώμα). Το στοιχείο στροβιλότητας ορίζεται αντίστοιχα με κίτρινο χρώμα.

Η επιρροή της κατανομής των στοιχείων στροβιλότητας στις συναρτήσεις παρεμβολής φαίνεται στο Σχήμα (2.15). Στην περίπτωση που τα στοιχεία στροβιλότητας κατανέμονται ομοιόμορφα η ποιότητα της προβεβλημένης πληροφορίας είναι πολύ καλύτερη από την περίπτωση που η κατανομή των στοιχείων είναι ανομοιόμορφη (Σχήμα 2.16).



Σχήμα 2.15 – Συναρτήσεις προβολής της πληροφορίας στους κόμβους του πλέγματος (με κόκκινο χρώμα). Η απόσταση των στοιχείων στροβιλότητας (κίτρινο χρώμα) είναι μεγαλύτερη αυτής του αριθμητικού πλέγματος με αποτέλεσμα η ποιότητα της προβεβλημένης πληροφορίας να είναι χαμηλή.



Σχήμα 2.16 - Συναρτήσεις προβολής της πληροφορίας στους κόμβους του πλέγματος (με κόκκινο χρώμα). Η απόσταση των στοιχείων στροβιλότητας (κίτρινο χρώμα) είναι μικρότερη αυτής του αριθμητικού πλέγματος με αποτέλεσμα η προβεβλημένη πληροφορία να είναι υψηλής ποιότητας.

Συμπερασματικά, για έναν αριθμό σωματιδίων : $\{ \mathbf{Z}_p^n, \mathbf{\Omega}_p^n \}$ σε χρόνο $t = n\Delta t$ ακολουθούνται τα παρακάτω βήματα:

- Προβολή της στροβιλότητας $\{ \mathbf{\Omega}_p^n \}$ στο δομημένο πλέγμα: $\omega_{i,j}^n$
- Επίλυση της $\nabla^2 \psi = -\omega$ και υπολογισμός των $\psi_{i,j}^n, \mathbf{u}_{i,j}^n$ με χρήση πεπερασμένων διαφορών
- Παρεμβολή των ποσοτήτων $q_{i,j}^n$ από τους κόμβους του πλέγματος πίσω στις θέσεις των στοιχείων στροβιλότητας
- Αναέωση των ποσοτήτων που μεταφέρουν τα σωματίδια

Κεφάλαιο 3

Eulerian CFD Solver

3.1 Εισαγωγή

Ο Eulerian CFD επιλύτης (MaPFlow) αποτελεί ένα συμπιεστό URANS επιλύτη που λύνει την ροή επάνω σε μη δομημένα πλέγματα. Ο συγκεκριμένος επιλύτης είναι εφοδιασμένος με προσταθεροποιητή για χαμηλούς αριθμούς Mach για την προσομοίωση ασυμπίεστων ροών. Η μοντελοποίηση της τύρβης γίνεται είτε με το μοντέλο μίας εξίσωσης του Spalart-Almaras είτε με το μοντέλο δύο εξισώσεων k- ω SST του Menter. Ακόμη, ο επιλύτης μπορεί να χειριστεί κινούμενα ή παραμορφώσιμα πλέγματα ενώ έχει παραλληλοποιηθεί με τη χρήση του πρωτοκόλλου MPI [4].

3.2 Εξισώσεις Navier – Stokes

Το σύστημα των εξισώσεων Navier – Stokes ολοκληρωμένο σε όγκο Ω με σύνορο $\partial\Omega$ έχει την μορφή [4]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \mathbf{U} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} (\mathbf{F}_c dS - \mathbf{F}_v) dS = \int_{\Omega} \mathbf{Q} d\Omega \quad (3.1)$$

όπου \mathbf{U} , είναι το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών της ροής,

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

με το ρ να δηλώνει την πυκνότητα, (u, v, w) τις τρεις συνιστώσες του πεδίου ταχύτητας και το E την ολική ενέργεια,

\mathbf{F}_c , είναι το διάνυσμα των συντηρητικών γενικευμένων παροχών (Convective Fluxes),

$$\mathbf{F}_c = \begin{pmatrix} \rho V \\ \rho u V + n_x p \\ \rho v V + n_y p \\ \rho w V + n_z p \\ \rho \left(E + \frac{p}{\rho} \right) V \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

με το V να ορίζεται ως $V = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$,

\mathbf{F}_v , είναι το διάνυσμα των συνεκτικών παροχών (Viscous fluxes),

$$\mathbf{F}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ n_x \tau_{xx} + n_y \tau_{xy} + n_z \tau_{xz} \\ n_x \tau_{yx} + n_y \tau_{yy} + n_z \tau_{yz} \\ n_x \tau_{zx} + n_y \tau_{zy} + n_z \tau_{zz} \\ n_x \Theta_x + n_y \Theta_y + n_z \Theta_z \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

με

$$\begin{aligned} \Theta_x &= u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} + k \frac{\partial T}{\partial x} \\ \Theta_y &= u\tau_{yx} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} + k \frac{\partial T}{\partial y} \\ \Theta_z &= u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w\tau_{zz} + k \frac{\partial T}{\partial z} \end{aligned}$$

Το σύστημα των εξισώσεων κλείνει με την καταστατική εξίσωση για ιδανικό αέριο:

$$p = (\gamma - 1) \rho \left[E - \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right] \quad (3.5)$$

3.3 Χωρική Διακριτοποίηση

Η χωρική διακριτοποίηση αφορά στην αριθμητική προσέγγιση των συντηρητικών και των συνεκτικών παροχών καθώς και των πηγαίων όρων. Ανάλογα με τον τρόπο που γίνεται η διακριτοποίηση του χώρου, επιλέγεται και η κατάλληλη μέθοδος για την επίλυση των εξισώσεων [4]. Οι μέθοδοι διακρίνονται κατά κύριο λόγο σε :

- Μεθόδους πεπερασμένων διαφορών (Finite Difference)
- Μεθόδους πεπερασμένων όγκων (Finite Volume)
- Μεθόδους πεπερασμένων στοιχείων (Finite Element)

Οι μέθοδοι επίσης διακρίνονται σε δύο κατηγορίες ανάλογα με το πλέγμα πάνω στο οποίο γίνεται η επίλυση των εξισώσεων:

- Μεθόδους δομημένων πλεγμάτων (Structured Grid)
- Μεθόδους μη δομημένων πλεγμάτων (Unstructured Grid)

Για την επίλυση των εξισώσεων Navier Stokes, ο CFD επιλύτης MaPFlow, χρησιμοποιεί την μέθοδο των πεπερασμένων όγκων για τους παρακάτω λόγους :

- i. Η χωρική διακριτοποίηση γίνεται στο φυσικό υπολογιστικό χωρίο
- ii. Δύναται να εφαρμοστεί τόσο σε δομημένα αλλά και σε μη δομημένα πλέγματα

Οι μέθοδοι των πεπερασμένων όγκων διακρίνονται σε :

- Κεντροκυβελικές (Cell-centered), στις οποίες οι μεταβλητές των εξισώσεων υπολογίζονται στα κέντρα των κελιών του πλέγματος. Σε αυτή την περίπτωση τα κελιά του πλέγματος που χρησιμοποιείται ταυτίζονται με τα υπολογιστικά κελιά.
- Κεντροκομβικές (Vertex-centered), στις οποίες οι μεταβλητές των εξισώσεων υπολογίζονται στους κόμβους του πλέγματος. Σε αυτή την περίπτωση το υπολογιστικό κελί ορίζεται σε ένα όγκο γύρω από τον κόμβο του πλέγματος.

Ο επιλύτης MaPFlow, χρησιμοποιεί την κεντροκυβελική διάταξη, οπότε τα υπολογιστικά κελιά ορίζονται από κελιά του πλέγματος που χρησιμοποιείται με τις μεταβλητές της ροής να υπολογίζονται στα κέντρα αυτών [4]. Δεδομένου ότι ο όγκος των κελιών δεν μεταβάλλεται με τον χρόνο ισχύει ότι:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \mathbf{U} d\Omega = \Omega \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \quad (3.6)$$

όπου

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \mathbf{U}_{\text{exact}} d\Omega \quad (3.7)$$

Κατά συνέπεια η εξίσωση (3.1) γίνεται:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\frac{1}{\Omega} \left[\oint_{\partial\Omega} (\mathbf{F}_c - \mathbf{F}_v) dS - \int_{\Omega} \mathbf{Q} d\Omega \right] \quad (3.8)$$

Σημειώνεται ότι το επιφανειακό ολοκλήρωμα στην παραπάνω εξίσωση προσεγγίζεται χρησιμοποιώντας τμηματικά σταθερές ροές στις όψεις (faces) του κελιού που υπολογίζονται στα κέντρα τους.

Για ένα κελί I , η εξίσωση (3.8) γράφεται στην μορφή:

$$\frac{\partial \mathbf{U}_I}{\partial t} = -\frac{1}{\Omega_I} \underbrace{\left[\sum_{m=1}^{N_f} (\mathbf{F}_c - \mathbf{F}_v)_m \Delta S_m - (\mathbf{Q}\Omega)_I \right]}_{R_I} \quad (3.9)$$

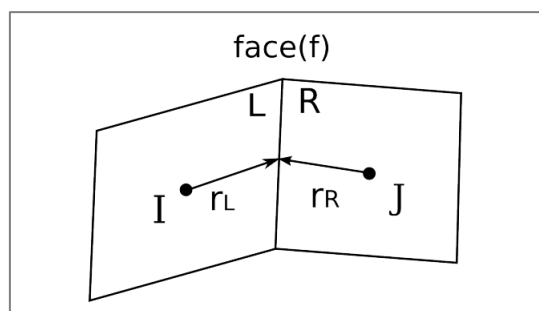
όπου N_f είναι ο αριθμός των επιφανειών που περιγράφουν το υπολογιστικό κελί και ΔS_m είναι η επιφάνεια της πλευράς “m”. Οι όροι $(\mathbf{F}_c)_m$ και $(\mathbf{F}_v)_m$ αποτελούν τις συντηρητικές και συνεκτικές παροχές της πλευράς “m” αντίστοιχα. Ο όρος R_I ονομάζεται υπόλοιπο (residual) με αποτέλεσμα η τελική διακριτοποιημένη εξίσωση να γράφεται ως:

$$\frac{\partial \mathbf{U}_I}{\partial t} = -\frac{1}{\Omega_I} \mathbf{R}_I \quad (3.10)$$

3.3.1 Ανακατασκευή μεταβλητών

Προκειμένου να υπολογιστούν οι παροχές που εμφανίζονται στο δεξί μέλος της εξίσωσης (3.9), απαιτούνται οι τιμές όλων των μεταβλητών της ροής στο κέντρο της επιφάνειας (face). Αυτή η πληροφορία λείπει από την στιγμή που όλες οι μεταβλητές της ροής προσδιορίζονται στα κέντρα των κελιών. Η μεταφορά της πληροφορίας της ροής από τα κέντρα των κελιών στις όψεις γίνεται μέσω της διαδικασίας ανακατασκευής μεταβλητών (variable reconstruction).

Ας θεωρήσουμε δύο κελιά I, J να βρίσκονται σε επαφή μέσω της επιφάνεια f (Σχήμα 3.1). Η ανακατασκευή μεταβλητών στην επιφάνεια f μπορεί να οριστεί είτε ξεκινώντας από το κελί I , είτε από το κελί J . Για τους επιλυτές συμπίεστικότητας γίνεται η υπόθεση ότι κατά μήκος της επιφάνειας η ροή υποκύπτει σε άλμα που ορίζεται από τις καταστάσεις L και R (Left Right states). Ο προσδιορισμός των L και R εξαρτάται από την κάθετο στην f που οδηγεί από το L στο R.



Σχήμα 3.1 – Ανακατασκευή μεταβλητών στην επιφάνεια f

Στον επιλύτη MaPFlow, χρησιμοποιείται η τμηματικά γραμμική ανακατασκευή (Piecewise Linear Reconstruction - PLR) η οποία είναι δεύτερης τάξης σε κανονικά πλέγματα [13]. Η προσέγγιση PLR υποδηλώνει ότι οι μεταβλητές της ροής είναι γραμμικά κατανομημένες στον όγκο ελέγχου. Κατά συνέπεια, τα left και right states ορίζονται ως εξής:

$$\mathbf{V}_L = \mathbf{V}_I + \Psi_I (\nabla \mathbf{V}_I \cdot \mathbf{r}_L) \quad (3.11)$$

$$\mathbf{V}_R = \mathbf{V}_J - \Psi_J (\nabla \mathbf{V}_J \cdot \mathbf{r}_R) \quad (3.12)$$

όπου \mathbf{V} είναι το διάνυσμα των πρωτογενών μεταβλητών

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ v \\ w \\ E \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

\mathbf{r}_L και \mathbf{r}_R είναι τα διανύσματα απόστασης που ορίζονται από το κέντρο των κελιών με κατεύθυνση προς την επιφάνεια (Σχήμα 3.1) και Ψ μία συνάρτηση περιορισμού (Limiter). Στην παραπάνω έκφραση, οι κλίσεις υπολογίζονται στα αντίστοιχα κέντρα των κελιών με χρήση της διατύπωσης των Green – Gauss:

$$\nabla \mathbf{V} \approx \frac{1}{D} \int_{\partial D} \mathbf{V} \mathbf{n} dS \quad (3.14)$$

όπου στην περίπτωση της κεντροκυβελικής μεθόδου παίρνουν την μορφή:

$$\nabla \mathbf{V}_I \approx \frac{1}{D} \sum_{j=1}^{N_f} \frac{1}{2} (\mathbf{V}_I + \mathbf{V}_J) \mathbf{n}_{IJ} \Delta S_{IJ} \quad (3.15)$$

3.3.2 Limiters

Η συνάρτηση Ψ που εμφανίζεται στις εξισώσεις (3.11) και (3.12) είναι μία συνάρτηση περιορισμού (limiter) που μειώνει τις κλίσεις $\nabla \mathbf{V}_I, \nabla \mathbf{V}_J$. Οι συναρτήσεις περιορισμού ορίζονται ευρέως στους επιλυτές συμπίεστικότητας προκειμένου να εξασφαλιστεί η σύγκλιση σε περιοχές με μεγάλες κλίσεις. Στον υπολογιστικό κώδικα MaPFlow χρησιμοποιείται ο Venkatakrishnan limiter εξαιτίας των καλών του ιδιοτήτων στην σύγκλιση [14],[15].

$$\Psi_i = \min_j \begin{cases} \frac{1}{\Delta_2} \left[\frac{(\Delta_{1,\max}^2 + \varepsilon^2) \Delta_2 + 2\Delta_2^2 \Delta_{1,\max}}{\Delta_{1,\max}^2 + 2\Delta_2^2 + \Delta_{1,\max} \Delta_2 + \varepsilon^2} \right] & \text{εάν } \Delta_2 > 0 \\ \frac{1}{\Delta_2} \left[\frac{(\Delta_{1,\min}^2 + \varepsilon^2) \Delta_2 + 2\Delta_2^2 \Delta_{1,\min}}{\Delta_{1,\min}^2 + 2\Delta_2^2 + \Delta_{1,\min} \Delta_2 + \varepsilon^2} \right] & \text{εάν } \Delta_2 < 0 \\ 1 & \text{εάν } \Delta_2 = 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

όπου

$$\Delta_2 = \nabla \mathbf{V}_i \cdot \mathbf{r}_i \quad (3.17)$$

$$\Delta_{1,\max} = \mathbf{V}_{\max} - \mathbf{V}_i \quad (3.18)$$

$$\Delta_{1,\min} = \mathbf{V}_{\min} - \mathbf{V}_i \quad (3.19)$$

με $\mathbf{V}_{\max}, \mathbf{V}_{\min}$ να αναφέρονται στο μέγιστο και ελάχιστο \mathbf{V} όλων των γειτονικών κελιών. Η παράμετρος ε^2 ορίζει το μέγεθος του περιορισμού. Στην πράξη το ε είναι ανάλογο του μήκους αναφοράς του πλέγματος (Δh),

$$\varepsilon^2 = (K\Delta h)^3 \quad (3.20)$$

όπου το K είναι ελεύθερη παράμετρος. Μικρές τιμές του K κάνουν τον περιορισμό αυστηρό καθιστώντας την PLR πρώτης τάξης, ενώ $K = \infty$ επιστρέφει τιμές κοντά στην μονάδα. Τυπικά η τιμή του $K = 5$ χρησιμοποιείται.

3.3.3 Υπολογισμός συντηρητικών παροχών

Ο υπολογισμός των συντηρητικών παροχών γίνεται με τον προσεγγιστικό Riemann επιλύτη του Roe [16].

Αρχικά υπολογίζονται οι κατά Roe μεταβλητές όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\begin{aligned}\tilde{\rho} &= \sqrt{\rho_L \rho_R} \\ \tilde{u} &= \frac{u_L \sqrt{\rho_L} + u_R \sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \\ \tilde{v} &= \frac{v_L \sqrt{\rho_L} + v_R \sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \\ \tilde{w} &= \frac{w_L \sqrt{\rho_L} + w_R \sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \\ \tilde{H} &= \frac{H_L \sqrt{\rho_L} + H_R \sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \\ \tilde{c} &= \sqrt{(\gamma - 1) \left(\tilde{H} - \frac{\tilde{q}^2}{2} \right)} \\ \tilde{q} &= \tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 + \tilde{w}^2\end{aligned}$$

Σύμφωνα με το σχήμα του Roe η παροχή στην επιφάνεια $I + \frac{1}{2}$ ορίζεται ως

$$(\mathbf{F}_C)_{I+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[\mathbf{F}_c(\mathbf{U}_R) + \mathbf{F}_c(\mathbf{U}_L) - |A_{Roe}|_{I+\frac{1}{2}} (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L) \right] \quad (3.21)$$

όπου

$$|A_{Roe}|_{I+\frac{1}{2}} (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L) = |\Delta \mathbf{F}_1| + |\Delta \mathbf{F}_{2,3,4}| + |\Delta \mathbf{F}_5| \quad (3.22)$$

με

$$|\Delta \mathbf{F}_1| = |\tilde{V} - \tilde{c}| \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} - \tilde{c}n_x \\ \tilde{v} - \tilde{c}n_y \\ \tilde{w} - \tilde{c}n_z \\ \tilde{H} - \tilde{c}\tilde{V} \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

$$|\Delta \mathbf{F}_{2,3,4}| = |\tilde{V}| \left\{ \left(\Delta \rho - \frac{\Delta p}{\tilde{c}^2} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{w} \\ \tilde{q}^2/2 \end{pmatrix} + \tilde{\rho} \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta u - \Delta V n_x \\ \Delta v - \Delta V n_y \\ \Delta w - \Delta V n_z \\ \tilde{u}\Delta u + \tilde{v}\Delta v + \tilde{w}\Delta w - \tilde{V}\Delta V \end{pmatrix} \right\} \quad (3.24)$$

$$|\Delta \mathbf{F}_5| = |\tilde{V} + \tilde{c}| \left(\frac{\Delta p + \tilde{\rho}\tilde{c}\Delta V}{2\tilde{c}^2} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} + \tilde{c}n_x \\ \tilde{v} + \tilde{c}n_y \\ \tilde{w} + \tilde{c}n_z \\ \tilde{H} + \tilde{c}\tilde{V} \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

$$\Delta(\cdot) = (\cdot)_R - (\cdot)_L \quad (3.26)$$

Η παραπάνω διατύπωση επιτρέπει λύσεις που δεν είναι από φυσικής απόψεως σωστές και γι' αυτό εισάγεται η διόρθωση εντροπίας (entropy correction) του Harten [10] στις ιδιοτιμές του συστήματος:

$$|\Lambda_c| = \begin{cases} |\Lambda_c| & \text{αν } |\Lambda_c| > \delta \\ \frac{|\Lambda_c|^2 + \delta^2}{2\delta} & \text{αν } |\Lambda_c| \leq \delta \end{cases} \quad (3.27)$$

όπου $\delta = \frac{1}{10}c$

3.3.4 Υπολογισμός συνεκτικών παροχών

Για τον υπολογισμό των συνεκτικών παροχών (viscous fluxes) απαιτούνται οι τιμές των μεταβλητών και οι χωρικοί τους παράγωγοι. Για την επιφάνεια ανάμεσα στα κελιά I και J, οι τιμές των μεταβλητών προκύπτουν από τον απλό μέσο όρο:

$$\mathbf{V}_{IJ} = \frac{1}{2}(\mathbf{V}_I + \mathbf{V}_J) \quad (3.28)$$

ενώ για τις κλίσεις (gradients), εφαρμόζεται η σχέση των Green – Gauss χρησιμοποιώντας τις κατά μέσο όρο τιμές της επιφάνειας \mathbf{V}_{IJ} όπως αυτές ορίζονται από την εξίσωση (3.28) αλλά συμπληρωμένες με μία παράγωγο κατεύθυνσης [17]:

$$\nabla \mathbf{V}_{IJ} = \overline{\nabla \mathbf{V}_{IJ}} - \left[\overline{\nabla \mathbf{V}_{IJ}} \cdot \mathbf{t}_{IJ} - \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \right)_{IJ} \right] \cdot \mathbf{t}_{IJ} \quad (3.29)$$

όπου η μέση κλίση (gradient) ορίζεται ως

$$\overline{\nabla \mathbf{V}_I} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{V}_I + \nabla \mathbf{V}_J) \quad (3.30)$$

και

$$\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial l} \right)_{IJ} \approx \frac{\mathbf{V}_J - \mathbf{V}_I}{l_{IJ}} \quad (3.31)$$

με το l_{IJ} να αποτελεί την απόσταση μεταξύ των κέντρων των κελιών I και J και το \mathbf{t}_{IJ} το μοναδιαίο διάνυσμα με κατεύθυνση από το κέντρο του κελιού I στο κέντρο του κελιού J .

3.4 Συνοριακές Συνθήκες

Οι συνοριακές συνθήκες χωρίζονται σε:

- Συνοριακές συνθήκες τοίχου (Solid Wall)
- Συνοριακές συνθήκες εισόδου/εξόδου (Farfield inflow/outflow)
- Συνοριακές συνθήκες ανάμεσα σε blocks (Multiblock)

Για την εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών χρησιμοποιούνται φανταστικά κελιά (dummy cells) τα οποία μεγαλώνουν σε υπολογιστικά χωρία, ώστε να γίνεται πιο εύκολα ο υπολογισμός των μεγεθών στα σύνορα. Οι συνοριακές συνθήκες εισόδου εξόδου και τοίχου ικανοποιούνται στην επιφάνεια των συνόρων ενώ οι υπόλοιπες στο κέντρο του φανταστικού κελιού.

3.4.1 Συνοριακές συνθήκες τοίχου

Οι συνοριακές συνθήκες τοίχου έχουν διαφορετική έκφραση στην περίπτωση του συνεκτικού και του μη συνεκτικού ρευστού.

Στην περίπτωση του μη συνεκτικού ρευστού οι συνοριακές συνθήκες τοίχου εκφράζονται από την συνθήκη μη εισχώρησης:

$$V = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ στον τοίχο} \quad (3.32)$$

Συνεπώς το διάνυσμα των συντηρητικών παροχών στον τοίχο γίνεται:

$$(\mathbf{F}_c)_w = \begin{pmatrix} 0 \\ n_x p_x \\ n_y p_y \\ n_z p_z \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

όπου p_w είναι η πίεση στον τοίχο.

Στην περίπτωση του συνεκτικού ρευστού η ταχύτητα στον τοίχο είναι μηδενική (συνοριακή συνθήκη μη ολίσθησης). Συνεπώς η οριακή συνθήκη στον τοίχο είναι:

$$u = v = w = 0 \text{ στον τοίχο} \quad (3.34)$$

3.4.2 Συνοριακές συνθήκες εισόδου/εξόδου

Ανάλογα με το πρόσημο των ιδιοτιμών των συντηρητικών παροχών, η πληροφορία μεταφέρεται από ή προς τα έξω από το υπολογιστικό χωρίο πάνω στις χαρακτηριστικές. Ο αριθμός των επιβαλλόμενων συνθηκών στο σύνορο πρέπει να είναι ο ίδιος με τον αριθμό των χαρακτηριστικών που εισέρχονται στο υπολογιστικό χωρίο.

Η ροή μπορεί είτε να εισέρχεται είτε να εξέρχεται από το υπολογιστικό χωρίο. Συνεπώς ανάλογα με τον τοπικό αριθμό Mach προκύπτουν 4 τύποι συνοριακών συνθηκών:

- Υπερηχητική είσοδος (Supersonic inflow)
- Υπερηχητική έξοδος (Supersonic outflow)
- Υποχηχητική είσοδος (Subsonic inflow)
- Υποχηχητική έξοδος (Subsonic outflow)

Υπερηχητική είσοδος : Σε αυτή την περίπτωση όλες οι ιδιοτιμές είναι θετικές και άρα όλη η πληροφορία εισέρχεται στο χωρίο. Συνεπώς οι συντηρητικές μεταβλητές στο σύνορο υπολογίζονται μόνο από την επερχόμενη ροή.

$$\mathbf{U}_{boundary} = \mathbf{U}_{freestream}$$

Υπερηχητική έξοδος: Σε αυτή την περίπτωση όλες οι ιδιοτιμές έχουν το ίδιο πρόσημο και εξέρχονται από το χωρίο. Συνεπώς οι συντηρητικές μεταβλητές στο σύνορο υπολογίζονται προεκβάλλοντας την υπάρχουσα λύση στο χωρίο.

$$\mathbf{U}_{boundary} = \mathbf{U}_{computational}$$

Υποηχητική είσοδος: Σε αυτήν την περίπτωση, τέσσερις χαρακτηριστικές εισέρχονται στο χωρίο και μία εξέρχεται. Συνεπώς μία χαρακτηριστική μεταβλητή υπολογίζεται στο σύνορο από το εσωτερικό του χωρίου:

$$p_b = \frac{1}{2} \left\{ p_a + p_d - \rho_0 c_0 \left[n_x (u_a - u_d) + n_y (v_a - v_d) + n_z (w_a - w_d) \right] \right\}$$

$$\rho_b = \rho_a + (p_a - p_b) / c_0^2$$

$$u_b = u_a - n_x (p_a - p_b) / (\rho_0 c_0)$$

$$v_b = v_a - n_y (p_a - p_b) / (\rho_0 c_0)$$

$$w_b = w_a - n_z (p_a - p_b) / (\rho_0 c_0)$$

όπου το ρ_0, c_0 αναφέρονται στο εσωτερικό του χωρίου.

Υποηχητική έξοδος: Σε αυτή την περίπτωση, τέσσερις χαρακτηριστικές εξέρχονται από το χωρίο και μία εισέρχεται σε αυτό. Συνεπώς τέσσερις μεταβλητές υπολογίζονται από το εσωτερικό του χωρίου και μία (συνήθως η πίεση) επιβάλλεται εξωτερικά:

$$p_b = p_a$$

$$\rho_b = \rho_d + (p_b - p_d) / c_0^2$$

$$u_b = u_d + n_x (p_b - p_d) / (\rho_0 c_0)$$

$$v_b = v_d + n_y (p_b - p_d) / (\rho_0 c_0)$$

$$w_b = w_d + n_z (p_b - p_d) / (\rho_0 c_0)$$

Οι παραπάνω συνοριακές συνθήκες υποθέτουν μηδενική κυκλοφορία το οποίο είναι λάθος για ένα ανωστικό σώμα. Για τον λόγο αυτό πρέπει να βρίσκεται μακριά από το σώμα. Η απόσταση του εξωτερικού ορίου μπορεί να μειωθεί σημαντικά, αν η επερχόμενη ροή περιστραφεί αναλογικά με την κυκλοφορία. Αυτή η διόρθωση ονομάζεται vortex correction.

3.5 Χρονική διακριτοποίηση

Στον επιλύτη MaPFlow, χρησιμοποιείται η μέθοδος των γραμμών (method of lines). Αυτό σημαίνει ότι η χρονική διακριτοποίηση ξεχωρίζεται από την χωρική διακριτοποίηση οπότε προκύπτει ένα σύστημα πεπλεγμένων διαφορικών εξισώσεων στον χρόνο για το κάθε κελί:

$$\frac{d(\Omega \bar{M}U)_i}{dt} = -R_i \quad (3.35)$$

Σε σύγκριση με την εξίσωση (3.10) η παραπάνω έκφραση είναι πιο γενική υπό την έννοια ότι ο όγκος ελέγχου μπορεί να μεταβληθεί με τον χρόνο.

Η χρονική διακριτοποίηση μπορεί να γίνει άμεσα ή έμμεσα. Οι άμεσοι μέθοδοι χρησιμοποιούν την γνωστή λύση U_n και προχωράνε στον χρόνο χρησιμοποιώντας το αντίστοιχο υπόλοιπο R_n για την εύρεση της λύσης σε χρόνο $(t + \Delta t)$. Οι έμμεσοι μέθοδοι χρησιμοποιούν $R(U^{n+1}) = R^{n+1}$ ώστε να πάρουν την νέα λύση και τους ευνοεί το γεγονός ότι μπορούν να χρησιμοποιήσουν μεγαλύτερα χρονικά βήματα. Από την στιγμή που το R^{n+1} είναι άγνωστο, ακολουθείται η παρακάτω γραμμική προσέγγιση:

$$R^{n+1} \approx R^n + \left(\frac{\partial R}{\partial U} \right)_n \cdot \Delta U^n \quad (3.36)$$

$$\Delta U^n = U^{n+1} - U^n$$

Στο MaPFlow χρησιμοποιείται μέθοδος πεπερασμένων διαφορών για την χρονική παράγωγο [18]:

$$\frac{1}{\Delta t} \left[\phi_{n+1} (DU)^{n+1} + \phi_n (DU)^n + \phi_{n-1} (DU)^{n-1} + \phi_{n-2} (DU)^{n-2} + \dots \right] = -R^{n+1} \quad (3.37)$$

Ανάλογα με την επιλογή του ϕ_n η αντίστοιχη προς τα πίσω μέθοδος πεπερασμένων διαφορών χρονικών παραγώγων χρησιμοποιείται (backwards difference formulae – BDF). Το BFF2OPT αναφέρεται σε μια βελτιστοποιημένη, δευτέρας τάξεως προς τα πίσω μέθοδο πεπερασμένων διαφορών (optimized, second order, backwards difference methods) με σφάλμα συνεχώς το μισό από μια συμβατική δευτέρας τάξεως μεθόδου [19]:

Τάξη	ϕ_{n+1}	ϕ_n	ϕ_{n-1}	ϕ_{n-2}
1 ^{ης}	1	-1	0	0
2 ^{ης}	3/2	-2	1/2	0
3 ^{ης}	11/6	-3	3/2	-1/3
BFF2OPT	$3/2 - \phi_{n-2}$	$-2 + 3\phi_{n-2}$	$1/2 - 3\phi_{n-2}$	-0.58/3

Πίνακας 3.1 - Μέθοδοι πίσω διαφορών

3.5.1 Υπολογισμοί σε μόνιμη ροή (Steady State Computations)

Ακόμη και στις περιπτώσεις των προσομοιώσεων μόνιμης ροής ακολουθείται μία τεχνική μη μόνιμης ροής. Για τέτοιου είδους προσομοιώσεις ακολουθούνται μέθοδοι 1^{ης} τάξης μέχρι να υπάρξει σύγκλιση στον ψευδοχρόνο. Σε 1^{ης} τάξης μεθόδους, αφού γίνει γραμμικοποίηση του υπολοίπου \mathbf{R}_I^{n+1} (3.36) η εξίσωση (3.37) παίρνει την μορφή:

$$\frac{(\Omega_I \Delta \mathbf{U}_I^n)}{\Delta t_I} = \mathbf{R}_I^n + \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} \right)_I \Delta \mathbf{U}_I^n \quad (3.38)$$

Ανακατατάσσοντας τους όρους προκύπτει το τελικό σύστημα των διακριτών εξισώσεων στο οποίο ο πίνακας του συστήματος ορίζει και τον έμμεσο τελεστή (implicit operator) της μεθόδου:

$$\underbrace{\left[\frac{(\Omega)_I}{\Delta t_I} + \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} \right)_I \right]}_{\text{implicit operator}} \Delta \mathbf{U}^n = -\mathbf{R}_I^n \quad (3.39)$$

3.5.2 Τοπικό Χρονικό Βήμα (Local Time Stepping)

Προκειμένου να επιτευχθεί σύγκλιση, χρησιμοποιείται η τεχνική του τοπικού χρονικού βήματος [20]. Το χρονικό βήμα για μόνιμες ροές μπορεί να ορισθεί από τη φασματική ακτίνα κάθε κελιού. Για κάθε κελί, ένα διαφορετικό χρονικό βήμα ορίζεται ως:

$$\Delta t_I = CFL \frac{\Omega_I}{(\hat{\Lambda}_c + C \cdot \hat{\Lambda}_v)_I} \quad (3.40)$$

όπου τα $\hat{\Lambda}_c, \hat{\Lambda}_v$ είναι το άθροισμα των ιδιοτιμών των συντηρητικών και συνεκτικών παροχών των επιφανειών που αποτελούν το κελί. Η μεταβλητή CFL (Courant–Friedrichs–Lewy) είναι μία απαραίτητη συνθήκη για την σύγκλιση στην αριθμητική λύση μερικών διαφορικών εξισώσεων [21]. Στον επιλύτη MaPFlow έχει προσαρμοστεί να αλλάζει ανάλογα με το χρονικό βήμα. Οι φασματικές ακτίνες των συντηρητικών και συνεκτικών παροχών ορίζονται ως:

$$(\hat{\Lambda}_c)_I = \sum_{j=1}^{N_f} (|\mathbf{u}_{IJ} \cdot \mathbf{n}_{IJ}| + c_{IJ}) \Delta S_{IJ} \quad (3.41)$$

$$(\hat{\Lambda}_v)_I = \frac{1}{\Omega_I} \sum_{j=1}^{N_f} \left[\max \left(\frac{3}{3\rho_{IJ}}, \frac{\gamma_{IJ}}{\rho_{IJ}} \right) \left(\frac{\mu_L}{Pr_L} + \frac{\mu_T}{Pr_T} \right)_{IJ} (\Delta S_{IJ})^2 \right] \quad (3.42)$$

3.5.3 Μη Μόνιμες Ροές

Για τον υπολογισμό των μη μόνιμων ροών χρησιμοποιείται από τον επιλύτη MaPFlow η τεχνική dual stepping [22]. Η προσέγγιση αυτή εισάγει μία επιπλέον χρονική παράγωγο στην εξίσωση μεταφοράς που αντιστοιχεί σε μία διαφορετική «χρονική μεταβλητή» τ και ονομάζεται ψευδοχρόνος. Οι συντηρητικές μεταβλητές στο πρόβλημα του ψευδοχρόνου συμβολίζονται με \mathbf{U}^* επειδή μέχρι να επιτευχθεί σύγκλιση δεν ικανοποιούν το αρχικό μη μόνιμο πρόβλημα.

Χρησιμοποιώντας την τεχνική αυτή ένα πρόβλημα μη μόνιμης ροής μετατρέπεται σε πρόβλημα μόνιμης ροής. Σε κάθε πραγματικό χρονικό βήμα το ακόλουθο πρόβλημα λύνεται στον ψευδοχρόνο (τ):

$$\frac{\partial(\Omega^{n+1}\mathbf{U}^*)}{\partial\tau} + \mathbf{R}^* = 0 \quad (3.43)$$

Θέτοντας,

$$\mathbf{R}^* = \frac{\partial(\Omega\mathbf{U}^*)}{\partial\tau} + R(\mathbf{U}^*) \quad (3.44)$$

προκύπτει η παρακάτω τελική μορφή:

$$\frac{\partial(\Omega^{n+1}\mathbf{U}^*)}{\partial\tau} + \frac{\partial(\Omega\mathbf{U}^*)}{\partial t} = -R(\mathbf{U}^*) \quad (3.45)$$

Όταν η (3.45) συγκλίνει, τότε $R^* = 0$, $\mathbf{U}^* = \mathbf{U}$ όπου ικανοποιούν το αρχικό μη μόνιμο πρόβλημα.

Η διακριτή μορφή της (3.45) γράφεται ως:

$$\frac{\Omega^{n+1}\Delta U^{*k}}{\Delta\tau} + \frac{1}{\Delta t} \left[\phi_{n+1}(\Omega\mathbf{U}^*)^{n+1} + \phi_n(\Omega\mathbf{U}^*)^n + \phi_{n-1}(\Omega\mathbf{U}^*)^{n-1} \right] = -R^{k+1} \quad (3.46)$$

ή ως

$$\frac{\Omega^{n+1}\Delta U^{*k}}{\Delta\tau} = -R^{*k+1} \quad (3.47)$$

με $\Delta U^{*k} = U^{*k+1} - U^{*k}$ και

$$R^{*k+1} = R^{k+1} - \frac{1}{\Delta t} \left[\phi_{n+1}(\Omega\mathbf{U}^*)^{n+1} + \phi_n(\Omega\mathbf{U}^*)^n + \phi_{n-1}(\Omega\mathbf{U}^*)^{n-1} \right] \quad (3.48)$$

όπου με k συμβολίζεται η εσωτερική επανάληψη για το μόνιμο πρόβλημα.

Προκειμένου να εφαρμοστεί μία έμμεση μέθοδος στην διαδικασία του dual stepping πρέπει να γραμμικοποιηθεί το μη μόνιμο υπόλοιπο R^{*k+1} σύμφωνα με την σχέση:

$$\mathbf{R}^{*k+1} \approx \mathbf{R}^{*k} + \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}^*} \right)_k \cdot \Delta \mathbf{U}^{*k} \quad (3.49)$$

ή

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{*k+1} \approx \mathbf{R}^{*k} - \frac{1}{\Delta t} \left[\phi_{n+1} (\Omega \mathbf{U}^*)^{n+1} + \phi_n (\Omega \mathbf{U})^n + \phi_{n-1} (\Omega \mathbf{U})^{n-1} \right] \\ + \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}^*} \right) \cdot \Delta \mathbf{U}^* - \phi_{n+1} \frac{\Omega^{n+1}}{\Delta t} \Delta \mathbf{U}^* \end{aligned} \quad (3.50)$$

Η διόρθωση $\Delta \mathbf{U}^*$ αναφέρεται στο μόνιμο πρόβλημα όπως ορίζεται στον ψευδοχρόνο. Κατά συνέπεια, όταν το μόνιμο πρόβλημα συγκλίνει, $\Delta \mathbf{U}^* = 0$. Αυτό δεν σημαίνει ότι $U^{n+1} - U^n = 0$ αλλά ότι $U^{k+1,n+1} - U^{k,n+1} = 0$. Οι συντελεστές του ϕ αλλάζουν ανάλογα με την επιθυμητή μέθοδο (Πίνακας 3.1).

Αντικαθιστώντας την παραπάνω εξίσωση στην εξίσωση (3.47) λαμβάνεται η παρακάτω τελική μορφή:

$$\left[\frac{\Omega^{n+1}}{\Delta \tau} + \phi_{n+1} \frac{\Omega^{n+1}}{\Delta t} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}^*} \right] \Delta \mathbf{U}^{*k} = -R^k - Q_{dual}^k \quad (3.51)$$

όπου οι dual step μη μόνιμοι πηγαίοι όροι εκφράζονται ως

$$Q_{dual}^k = \frac{1}{\Delta t} \left[\phi_{n+1} (\Omega \mathbf{U}^*)^{n+1} + \phi_n (\Omega \mathbf{U})^n + \phi_{n-1} (\Omega \mathbf{U})^{n-1} \right] \quad (3.52)$$

Σημειώνεται ότι ο το χρονικό βήμα του ψευδοχρόνου $\Delta \tau$ ορίζεται όπως στους υπολογισμούς του μόνιμου προβλήματος που χρησιμοποιεί το τοπικό χρονικό βήμα (3.40).

3.6 Μοντελοποίηση Τύρβης

Όπως προαναφέρθηκε ο υπολογιστικός κώδικας MaPFlow χρησιμοποιεί δύο διαφορετικά μοντέλα τύρβης, το μοντέλο μίας εξίσωσης του Spalart-Almaras και το μοντέλο δύο εξισώσεων k- ω SST του Menter. Στην παρούσα διπλωματική χρησιμοποιήθηκε το k- ω SST μοντέλο 2 εξισώσεων του Menter [23].

Η πρώτη μεταβλητή που μετατρέπεται στα μοντέλα αυτά, είναι η κινητική ενέργεια της τύρβης, K. Η δεύτερη μεταβλητή είναι ο συγκεκριμένος ρυθμός απαγωγής, ω . Οι δύο εξίσωσης μεταφορά του k και ω , δίνονται παρακάτω (σε συντηρητική μορφή):

$$\frac{\partial \rho K}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho K u_j) = P - \beta^* \rho \omega K + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_k \mu_T) \frac{\partial K}{\partial x_j} \right] \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \omega u_j) = & \frac{\gamma}{\nu_T} - \beta^* \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_\omega \mu_T) \frac{\partial K}{\partial x_j} \right] \\ & + 2(1 - F_1) \frac{\rho \sigma_{\omega 2}}{\omega} \frac{\partial K}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (3.54)$$

όπου

$$P = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad \tau_{ij} = \mu_T \left(2S_{ij} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) - \frac{2}{3} \rho K \delta_{ij}, \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.55)$$

και η τυρβώδης κινηματική συνεκτικότητα

$$\mu_T = \frac{\rho a_1 K}{\max(a_1 \omega, \Omega F_2)}, \quad \nu_T = \mu_T / \rho \quad (3.56)$$

όπου Ω η ένταση στροβιλότητας

$$\Omega = \sqrt{2W_{ij}W_{ij}}, \quad W_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (3.57)$$

Οι σταθερές για το μοντέλο τύρβης SST του Menter είναι συνισταμένες μιας εσωτερικής (inner) (1) και μιας εξωτερικής (outer) (2) σταθεράς οι οποίες σχετίζονται με τον τύπο:

$$\varphi = F_1 \varphi_1 + (1 - F_1) \varphi_2 \quad (3.58)$$

με το F_1 να ορίζεται από:

$$F_1 = \tanh(\arg_1^4), \quad \arg_1 = \min \left[\max \left(\frac{\sqrt{K}}{\beta^* \omega d}, \frac{500\nu}{d^2 \omega} \right), \frac{4\rho\sigma_{\omega 2} K}{CD_{K\omega} d^2} \right] \quad (3.59)$$

$$CD_{K\omega} = \max \left(2\rho\sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial K}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 10^{-20} \right) \quad (3.60)$$

$$F_2 = \tanh(\arg_2), \quad \arg_2 = \max \left(2 \frac{\sqrt{K}}{\beta^* \omega d}, \frac{500\nu}{d^2 \omega} \right) \quad (3.61)$$

Στις ανωτέρω εξισώσεις, d είναι η απόσταση από το κέντρο του κελιού στον τοίχο (στερεό όριο).

Οι εσωτερικές σταθερές (με τον δείκτη 1) είναι:

$$\gamma_1 = \frac{\beta_1}{\beta^*} - \frac{\sigma_{\omega 1} \kappa^2}{\sqrt{\beta^*}},$$

$$\sigma_{k1} = 0.85, \quad \sigma_{\omega 1} = 0.5, \quad \beta_1 = 0.075$$

$$\beta^* = 0.09, \quad \kappa = 0.41, \quad a_1 = 0.31$$

και οι εξωτερικές (με τον δείκτη 2):

$$\gamma_2 = \frac{\beta_2}{\beta^*} - \frac{\sigma_{\omega 2} \kappa^2}{\sqrt{\beta^*}},$$

$$\sigma_{k2} = 1.0, \quad \sigma_{\omega 2} = 0.856, \quad \beta_2 = 0.0828$$

Στο συγκεκριμένο μοντέλο προτείνεται να χρησιμοποιείται περιορισμός [24] για να μην υπάρχουν μεγάλες τιμές στις προς υπολογισμό μεταβλητές.

Στην περίπτωση αυτή, ο όρος P στην εξίσωση που αφορά την κινητική ενέργεια (3.53) αντικαθίσταται από:

$$P = \min(P, 20\beta^* \rho K \omega) \quad (3.62)$$

Οι οριακές συνθήκες είναι:

$$\frac{U_\infty}{L} < \omega_\infty < 10 \frac{U_\infty}{L}, \quad \frac{10^{-5} U_\infty^2}{\text{Re}_L} < K_\infty < \frac{10^{-1} U_\infty^2}{\text{Re}_L} \quad (3.63)$$

$$\omega_{\text{wall}} = \frac{6\nu}{\beta_1 d_1^2}, \quad K_{\text{wall}} = 0$$

όπου L είναι το μήκος του υπολογιστικού χωρίου και d_1 η απόσταση μέχρι το επόμενο σημείο στον τοίχο.

Κεφάλαιο 4

Αποτελέσματα Εφαρμογής των μεθόδων

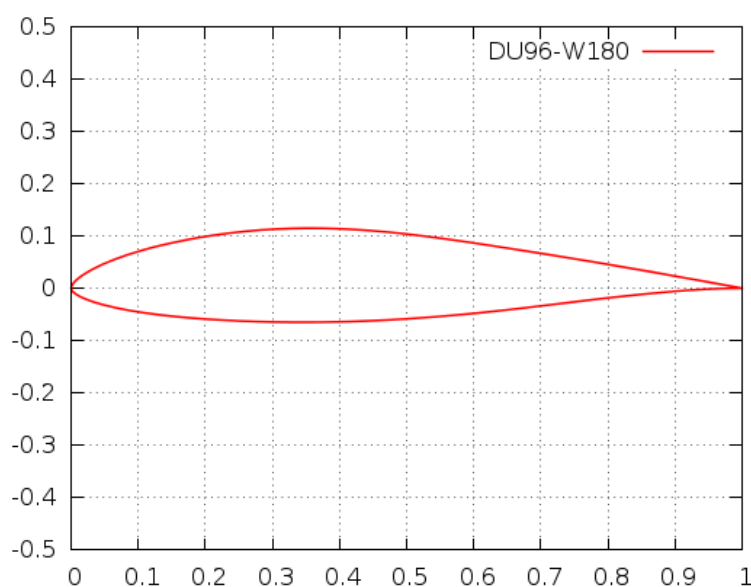
Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο γίνεται ανάλυση των αριθμητικών παραμέτρων που χρησιμοποιήθηκαν σε καθεμία από τις μεθόδους και των αποτελεσμάτων για τις τέσσερις περιπτώσεις των $70^\circ, 80^\circ, 90^\circ$ και 100° γωνία προσβολής που εξετάστηκαν. Στο τέλος του κεφαλαίου παρουσιάζονται συγκριτικά διαγράμματα του συντελεστή πίεσης για την περίπτωση των 90° γωνία προσβολής.

Η ανάλυση έγινε σε μεγάλους αριθμούς Reynolds τόσο για μην μη συνεκτική μέθοδο όσο και για την CFD προσομοίωση. Ο λόγος είναι ότι ο αδιάστατος αριθμός Strouhal σε μεγάλους αριθμούς Reynolds ($Re > 1 \cdot 10^6$) εξαρτάται αποκλειστικά από την γωνία προσβολής.

4.1 Γεωμετρία της αεροτομής

Στην παρούσα διπλωματική εργασία έγινε αεροδυναμική ανάλυση σε μία αεροτομή DU96_W180. Η γεωμετρία της φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



Σχήμα 4.1 – Γεωμετρία αεροτομής DU96-W180

Η αεροτομή έχει μήκος χορδής $c = 1$ ενώ το πάχος της είναι $\delta / c = 0.18$.

4.2 Ανάλυση αποτελεσμάτων του υπολογιστικού κώδικα Foil2w

Στον υπολογιστικό κώδικα οι αριθμητικές παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν είναι οι ακόλουθες :

Αριθμός σημείων συντεταγμένων της γεωμετρίας της αεροτομής	$N = 100$
Επ'άπειρο ταχύτητα ροής	$U_{\infty} = 1m/s$
Χρονικό βήμα	$\Delta t = \frac{0.025 \cdot c}{U_{\infty}} = 0.025s$
Μήκος αποκοπής (cut-off length)	$\varepsilon = 8 \cdot U_{\infty} \cdot \Delta t = 0.2$
Ελάχιστη απόσταση σωματιδίων από την επιφάνεια της αεροτομής	$\delta y = 0.002 \cdot c = 0.002$

Πίνακας 4.1 – Αριθμητικές παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν στον υπολογιστικό κώδικα Foil2w

Οι τιμές των παραπάνω παραμέτρων δόθηκαν με σκοπό τα αποτελέσματα να είναι αδιάστατα ως προς την ταχύτητα της ροής στο άπειρο και το μήκος της χορδής. Με αυτόν τον τρόπο είναι άμεσα συγκρίσιμα με αυτά των CFD προσομοιώσεων. Σημειώνεται ότι η γεωμετρία της αεροτομής δίνεται ως ένα σύνολο σημείων με το πρώτο να αποτελεί την ακμή εκφυγής της αεροτομής, να ακολουθείται πορεία προς την ακμή προσβολής μέσω της κάτω πλευράς και στη συνέχεια προς την ακμή εκφυγής μέσω της άνω πλευράς.

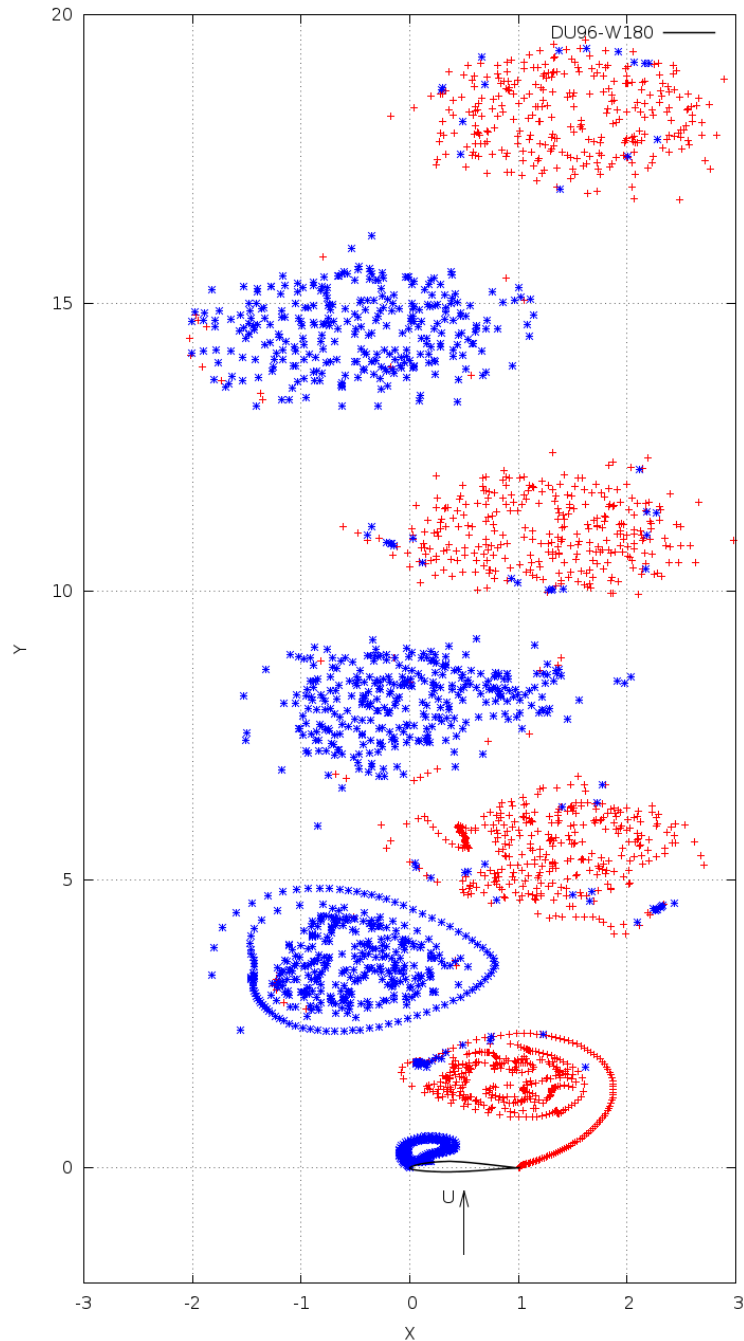
Σαν αποτελέσματα ο υπολογιστικός κώδικας Foil2w δίνει τις χρονοσειρές των αεροδυναμικών φορτίων της αεροτομής όπως επίσης και τις θέσεις των σημειακών δινών που απαρτίζουν τον ομόρρου χωρίς όμως να διατηρείται η θέση τους σε κάθε χρονικό βήμα.

Στο Σχήμα (4.2) παρουσιάζεται ο ομόρρους που σχηματίζεται για την αεροτομή DU96-W180. Ο ομόρρους εμφανίζει χαρακτηριστική δομή δινών κατά Karman. Πιο συγκεκριμένα οι δίνες που παράγονται λόγω αποκόλλησης της ροής στην ακμή προσβολής και εκφυγής εναλλάσσονται με συχνότητα (f_{ws}) η οποία καθορίζει και

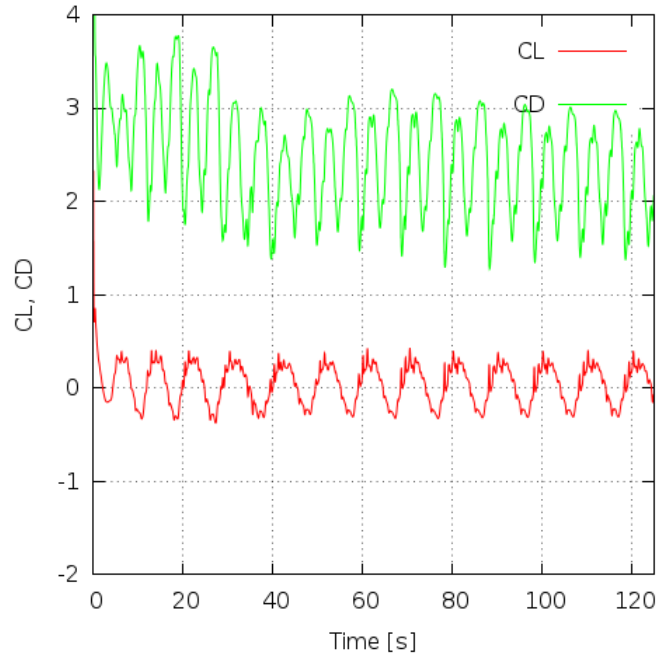
τον αριθμό Strouhal $\left(St = \frac{f_{ws}}{U} \right)$. Ο σχηματισμός της δίνης στην ακμή προσβολής

δημιουργεί τοπική αύξηση της ταχύτητας της ροής σε αυτή την περιοχή με την αντίστοιχη μείωση της πίεσης. Στο παρακάτω στιγμιότυπο ο συντελεστής άνωσης λαμβάνει τη μέγιστη τιμή.

Ομοίως συμβαίνει και κατά την έκλυση της δίνης στην ακμή εκφυγής όπου ο συντελεστής άνωσης λαμβάνει την ελάχιστη τιμή του (Σχήμα 4.2 και 4.3). Συμπερασματικά, η συχνότητα μεταβολής του συντελεστή άνωσης συνδέεται άμεσα με τη συχνότητα σχηματισμού των δινών (f_{ws}). Αναφορικά με τον συντελεστή αντίστασης η συχνότητα μεταβολής των τιμών του είναι ($2f_{ws}$) [1].



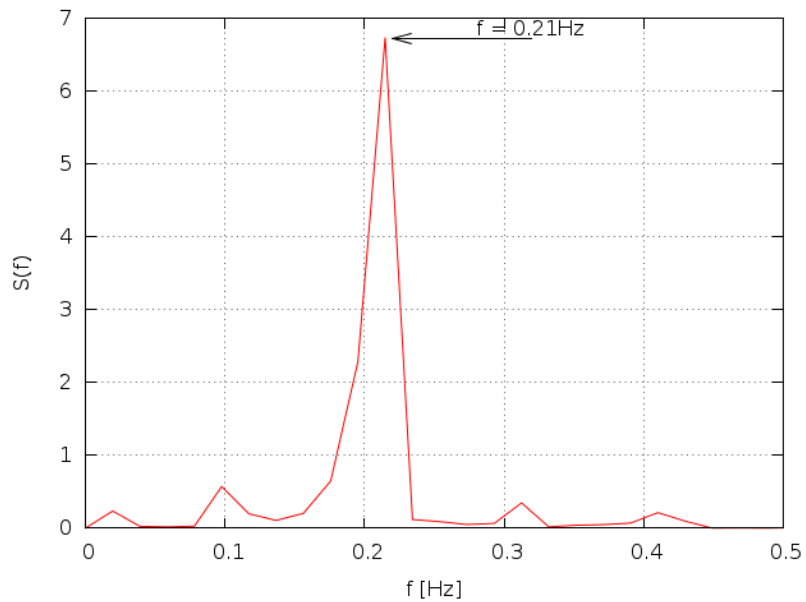
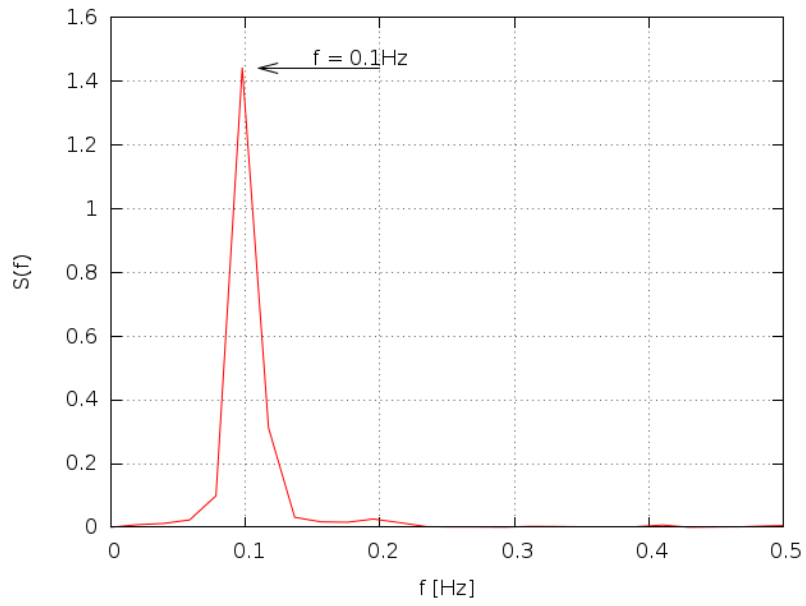
Σχήμα 4.2 - Ομόρρους που σχηματίζεται για γωνία 90° σε αεροτομή DU96-W180. Με κόκκινο σημειώνονται οι θέσεις των στοιχείων στροβιλότητας που εκλύθηκαν από την ακμή εκφυγής και με μπλε όσων εκλύθηκαν από το σημείο αποκόλλησης της ροής.



Σχήμα 4.3 – Μεταβολή του συντελεστή άνωσης CL και αντίστασης CD συναρτήσει του χρόνου για την αεροτομή DU96-W180 για γωνία προσβολής 90°

Για τη διερεύνηση της συχνότητας που κυριαρχεί στους αεροδυναμικούς συντελεστές επομένως και στην συχνότητα μετασχηματισμού των δινών, πραγματοποιήθηκε μετασχηματισμός Fourier (FFT). Επειδή τα αποτελέσματα από τον μετασχηματισμό Fourier πραγματοποιήθηκαν για ταχύτητα ροής ίση με $U_\infty = 1\text{m/s}$ και για χορδή $c = 1$, από τον ορισμό του αδιάστατου αριθμού Strouhal προκύπτει ότι η κυριαρχούσα συχνότητα του αεροδυναμικού συντελεστή άνωσης είναι ίση με τον αριθμό Strouhal. Ενδεικτικά παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του μετασχηματισμού για την αεροτομή για 90° γωνία προσβολής (Σχήμα 4.4).

Η φασματική ισχύς (Power Spectrum) του αεροδυναμικού συντελεστή άνωσης εμφανίζει μέγιστη τιμή για $f = 0.1\text{Hz}$ ενώ η αμέσως μεγαλύτερη τιμή αντιστοιχεί σε $f = 0.21\text{Hz}$. Σχετικά με τον αεροδυναμικό συντελεστή αντίστασης η κυριαρχούσα συχνότητα είναι η $f = 0.21\text{Hz}$. Ο διπλασιασμός της συχνότητας έναντι του συντελεστή άνωσης δύναται να επαληθευτεί ποιοτικά και από τις αντίστοιχες χρονοσειρές (Σχήμα 4.3).



Σχήμα 4.4 – Φασματικό Ισχύς (Power Spectrum) για τις χρονοσειρές των αεροδυναμικών συντελεστών όπως αυτές προέκυψαν από τον υπολογιστικό κώδικα Foil2w για γωνία προσβολής 90° (Σχήμα 4.3). Το επάνω διάγραμμα αφορά τον συντελεστή άνωσης CL ενώ το κάτω τον συντελεστή αντίστασης CD.

4.3 Ανάλυση αποτελεσμάτων της CFD προσομοίωσης

Η υλοποίηση των εξισώσεων Navier-Stokes (MaPFlow) είναι γραμμένη σε Fortran90 και χρησιμοποιεί τα παρακάτω αρχεία εισόδου:

- Ένα αρχείο grid.msh ή grid.inp, το οποίο περιέχει τα σημεία του πλέγματος για την εν λόγω αεροτομή.
- Ένα αρχείο euler.inp το οποίο εμπεριέχει τα δεδομένα της ροής.

Συγκεκριμένα, οι υπολογισμοί του μη μόνιμου προβλήματος, για συνεκτική ροή (viscous) έγιναν με βάση τα παρακάτω στοιχεία εισόδου:

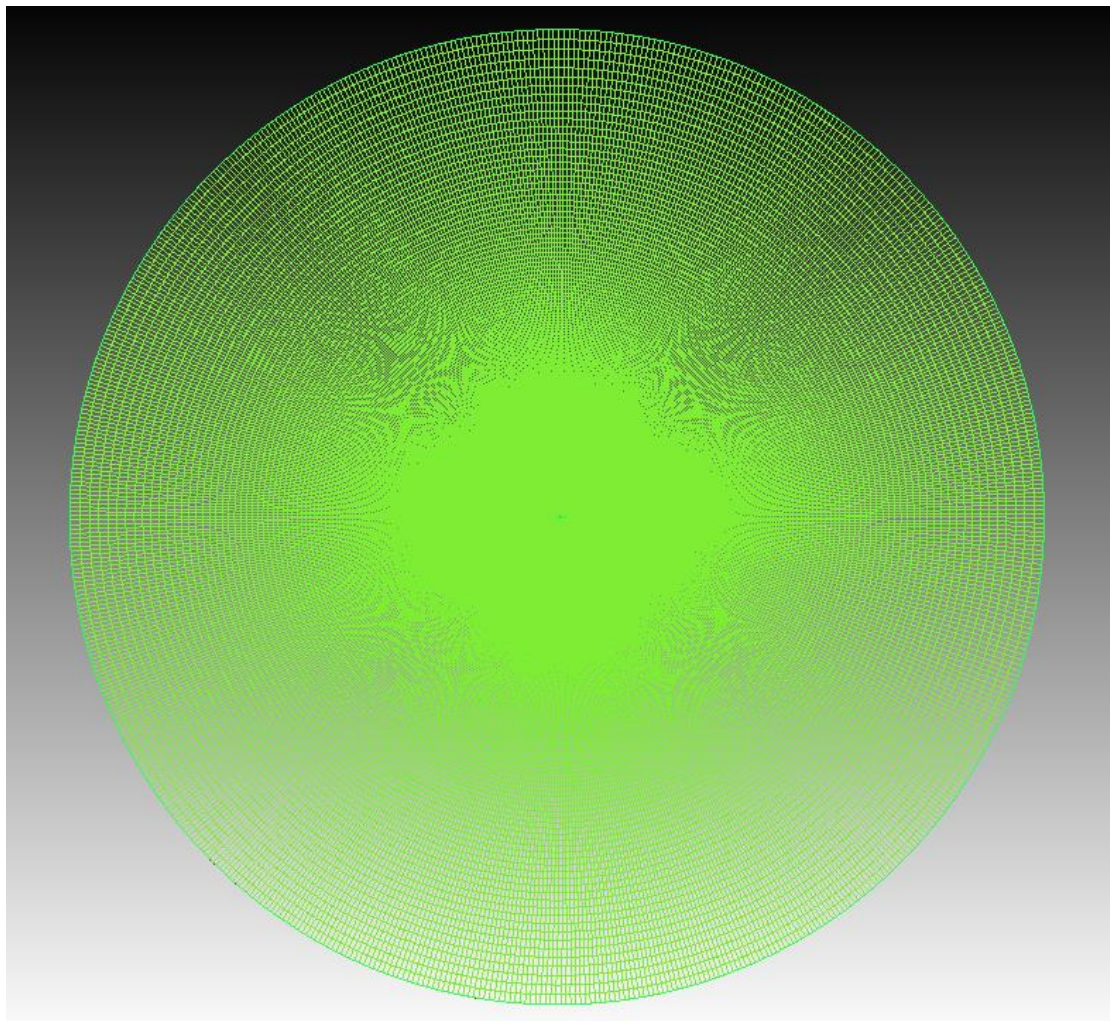
Αριθμός χρονικών βημάτων (Number of timesteps)	60000
Αριθμός μόνιμων χρονικών βημάτων (Number of steady timesteps)	0
Χρονικό βήμα (Timestep)	0.002
Ροή στο άπειρο	$U_{\infty} = 1m / s$
Αριθμός Mach	$M = 0.1$
Μέγιστος αριθμός dual step επαναλήψεων	20
Απόλυτο σφάλμα dual stepping	$1 \cdot 10^{-9}$
Αριθμός Reynolds	$Re = 10^6$
Μοντέλο τύρβης	k- ω

Πίνακας 4.2 – Αριθμητικές παράμετροι αρχείου εισόδου euler.inp για τους CFD υπολογισμούς.

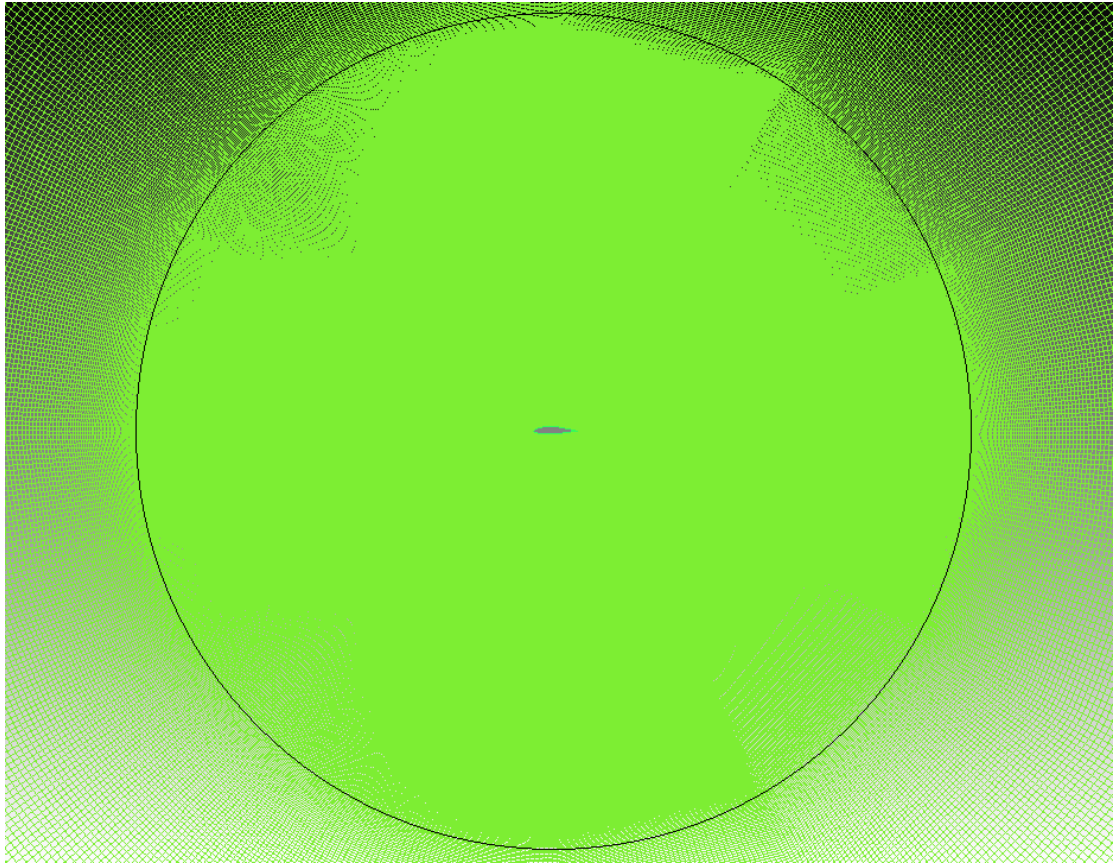
4.3.1 Υπολογιστικές λεπτομέρειες πλέγματος

Για την δημιουργία του πλέγματος χρησιμοποιήθηκε το πακέτο ICEM CFD του ANSYS. Το πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε είναι ένα O-Type πλέγμα εξαιτίας του γεγονότος ότι ο ομόρρους αναπτύσσεται κατάντι της άνω πλευράς (suction side) της αεροτομής. Λόγω της φύσης του προβλήματος χρειάστηκε να γίνει κατασκευή πυκνού υπολογιστικού πλέγματος εξαιτίας της αριθμητικής διάχυσης που παρατηρήθηκε με πλέγματα μικρότερης πυκνότητας. Το πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε (Σχήμα 4.5 – Σχήμα 4.7) για τους υπολογισμούς έχει τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

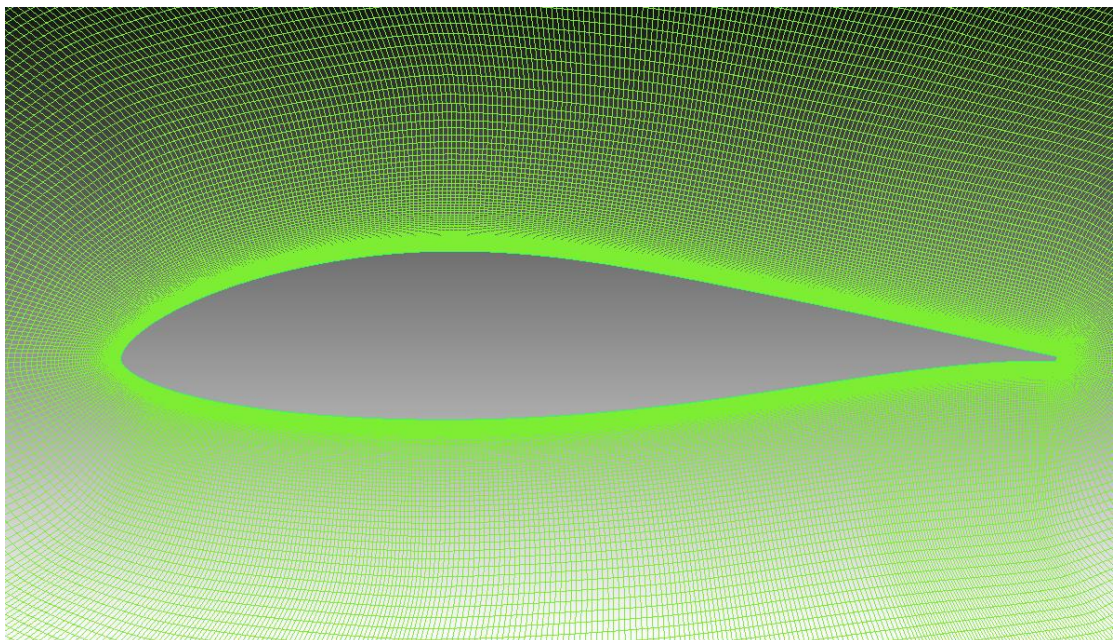
- O – Type
- Ορισμός Farfield στις 50 χορδές
- Πύκνωση πλέγματος σε απόσταση 10 χορδών από την αεροτομή ώστε να μειωθεί η αριθμητική διάχυση (Σχήμα 4.6)
- Αριθμός κελιών : 526792



Σχήμα 4.5 – Ολική άποψη πλέγματος αεροτομής DU96-W180



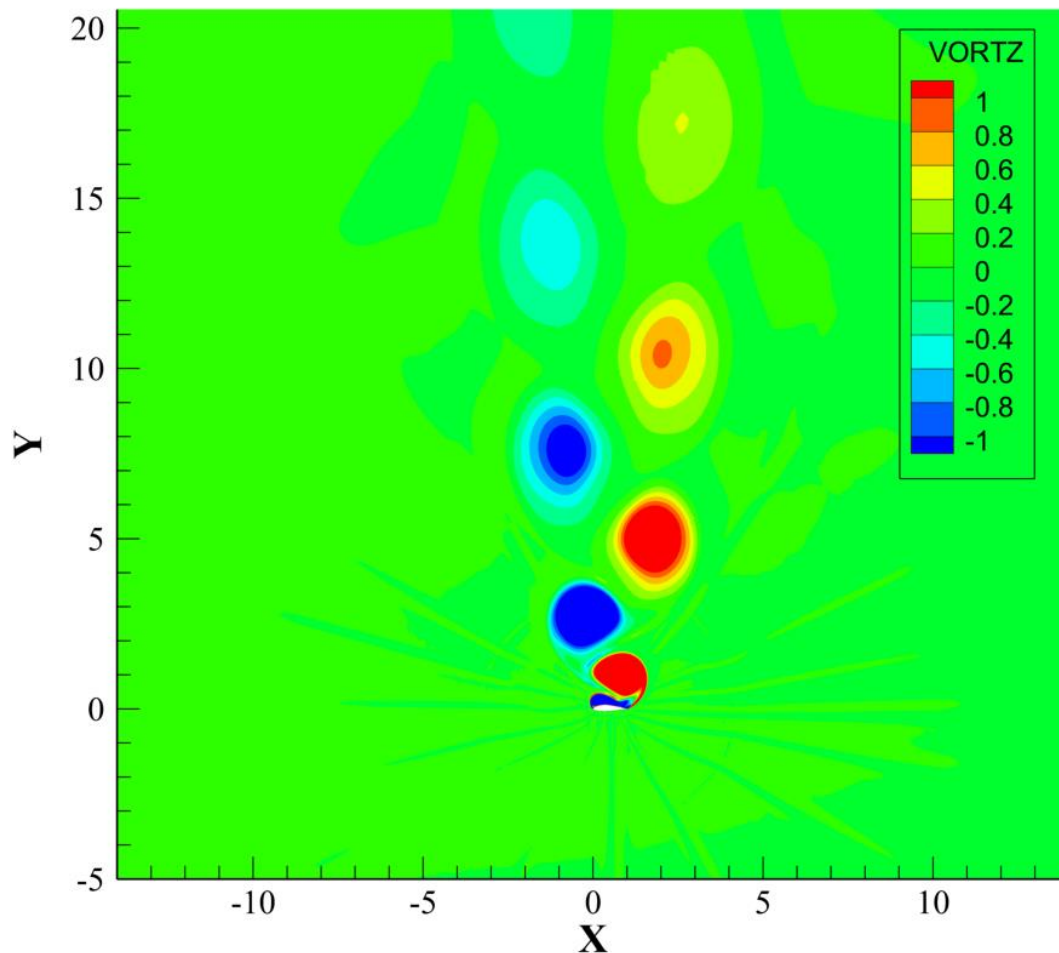
Σχήμα 4.6 – Περιοχή εσωτερικά της οποίας έγινε πύκνωση του πλέγματος με σκοπό την μείωση της αριθμητικής διάχυσης. Η ακτίνα του κύκλου είναι 10 χορδές.



Σχήμα 4.7 - Μερική άποψη πλέγματος κοντά στην αεροτομή

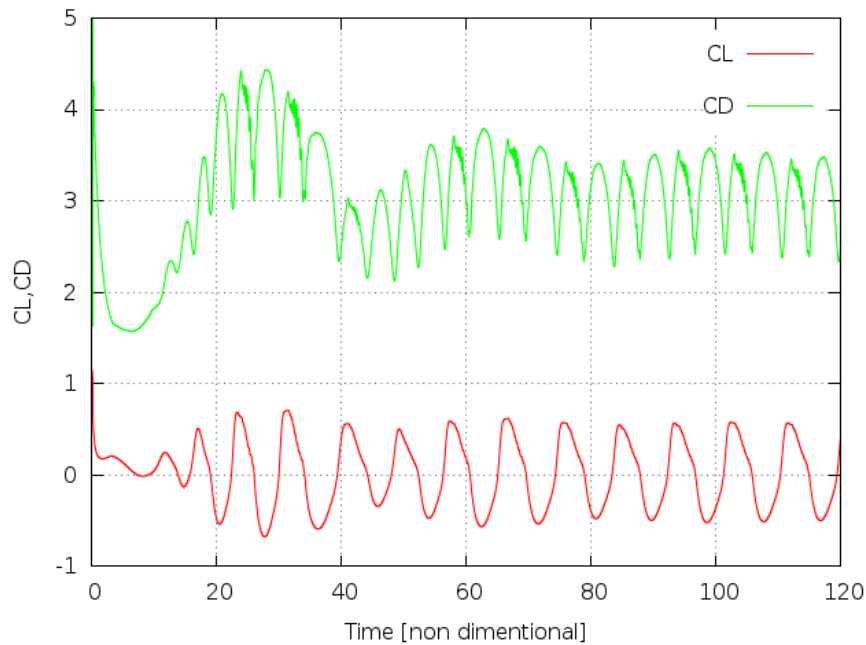
4.3.2 Αποτελέσματα CFD προσομοίωσης

Στο σχήμα (4.8) παρουσιάζεται ο ομόρρους (ένταση της στροβιλότητας) όπως αυτός προκύπτει σε γωνία προσβολής 90° . Παρατηρείται ότι σε απόσταση μεγαλύτερη των 10 χορδών κατά τον άξονα Y η ένταση των στροβίλων χάνεται, κάτι το οποίο αναμενόταν εξαιτίας της σταδιακής αραίωσης του πλέγματος που χρησιμοποιήθηκε. Τέλος επιβεβαιώνεται ο χαρακτήρας Karman που αναφέρθηκε και προηγουμένως.

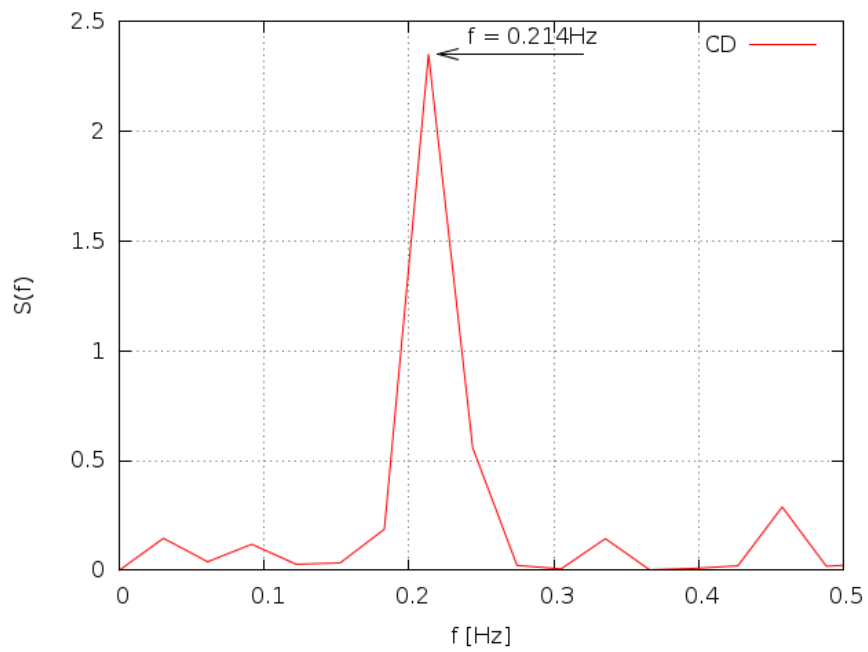
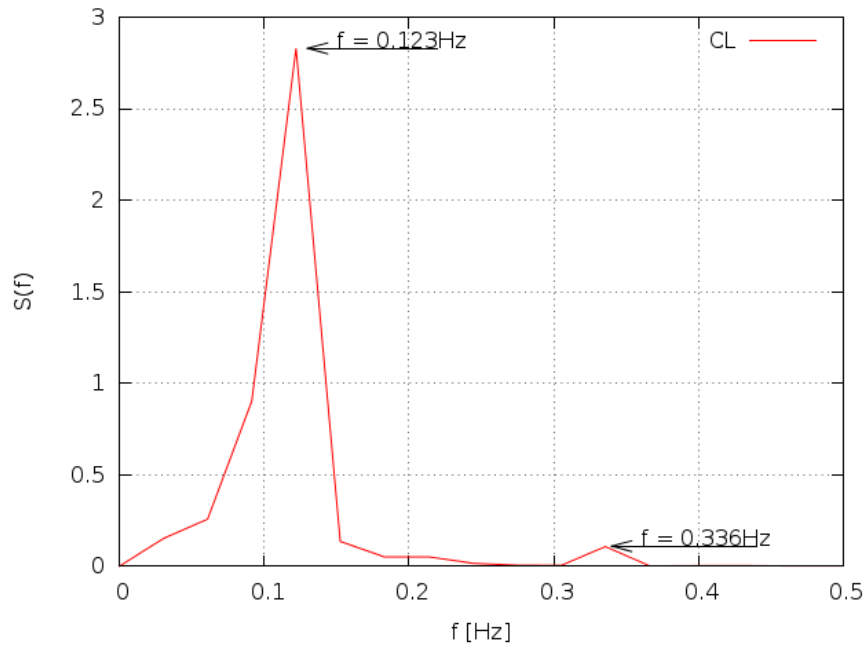


Σχήμα 4.8 - Ομόρρους σε αεροτομή DU96-W180 για γωνία προσβολής 90°

Τα αεροδυναμικά φορτία που προκύπτουν στην αεροτομή παρουσιάζονται στο Σχήμα 4.9. Στις χρονοσειρές του συντελεστή άωσης και αντίστασης γίνεται μετασχηματισμός Fourier (FFT) προκειμένου να βρεθούν οι κυρίαρχες συχνότητες (Σχήμα 4.10). Παρατηρείται ότι για την φασματική ισχύ (Power Spectrum Density) του συντελεστή άωσης CL, η μέγιστη τιμή εμφανίζεται στην κυρίαρχη συχνότητα $f = 0.124\text{Hz}$, ενώ η δεύτερη μεγαλύτερη τιμή εμφανίζεται στην συχνότητα $f = 0.336\text{Hz}$. Για την αντίστοιχη περίπτωση του συντελεστή αντίστασης CD, η κυρίαρχη συχνότητα που εμφανίζεται είναι $f = 0.214\text{Hz}$.



Σχήμα 4.9 - Μεταβολή του συντελεστή άωσης CL και αντίστασης CD συναρτήσει του αδιάστατου χρόνου όπως αυτά προέκυψαν από την CFD προσομοίωση για την αεροτομή DU96-W180 για γωνία προσβολής 90° .



Σχήμα 4.10 - Φασματικό Ισχύς (Power Spectrum Density) για τις χρονοσειρές των αεροδυναμικών συντελεστών όπως αυτές προέκυψαν από τον υπολογιστικό κώδικα MarFlow για γωνία προσβολής 90° (Σχήμα 4.9).

4.4 Υπολογιστικές λεπτομέρειες πλέγματος

4.4.1 Υπολογιστικές λεπτομέρειες πλέγματος

Η τεχνική του Particle Mesh όπως αναφέρθηκε και στο κεφάλαιο 2, χρειάζεται μεγάλο πλήθος σωματιδίων στροβιλότητας τα οποία να είναι κατανομημένα σε σταθερές περίπου αποστάσεις μεταξύ τους. Με αυτόν τον τρόπο δεν χάνεται πληροφορία εξαιτίας των ασυνεχειών που θα εμφανίζονται ενδεχομένως στην ένταση των στροβίλων του ομόρρου. Με άξονα τον ομόρρο του σχήματος (4.2), παρατηρείται ότι τα σωματίδια στροβιλότητας δεν έχουν σταθερές μεταξύ τους αποστάσεις καθώς εξελίσσεται ο ομόρρος. Για την αντιμετώπιση του προβλήματος των ασυνεχειών έγινε εξέταση πολλών διαφορετικών πλεγμάτων προκειμένου το κάθε κελί να περιλαμβάνει αρκετά σωματίδια τόσο κοντά στο σύνορο της αεροτομής όσο και σε απόσταση αρκετών χορδών από αυτή. Βρέθηκε ότι τα καλύτερα αποτελέσματα τα παρέχει ένα μήκος κελιού στην περιοχή $\Delta x = \Delta y = (0.40 \sim 0.50)c$.

Για τους υπολογισμούς χρησιμοποιήθηκαν οι παρακάτω αριθμητικές παράμετροι:

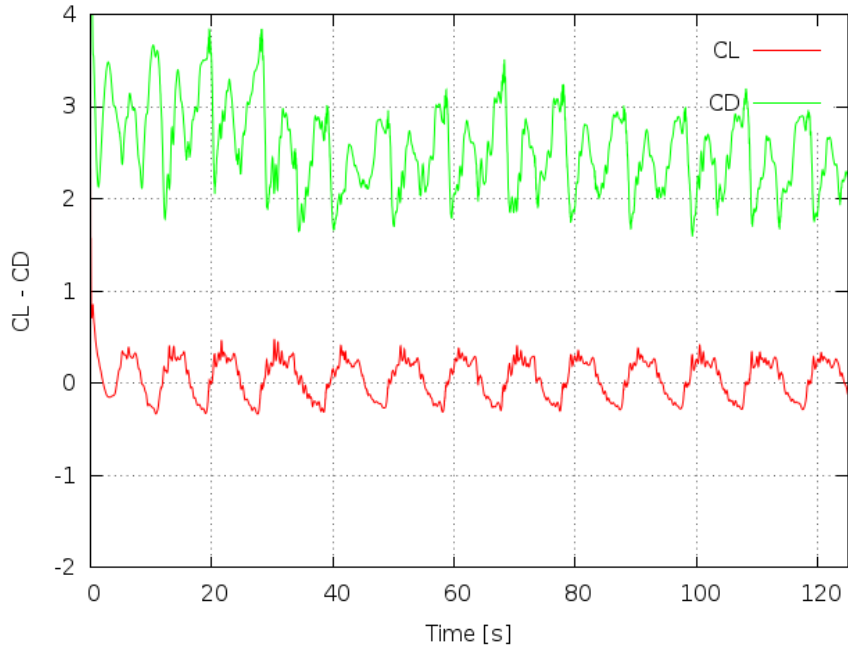
Μήκος κελιού	$\Delta x = \Delta y = 0.35$
Τάξη συνάρτησης για την μεταφορά της πληροφορίας στο πλέγμα	4η

Πίνακας 4.3 - Αριθμητικές παράμετροι αρχείου εισόδου pm.inp για τους Particle Mesh υπολογισμούς.

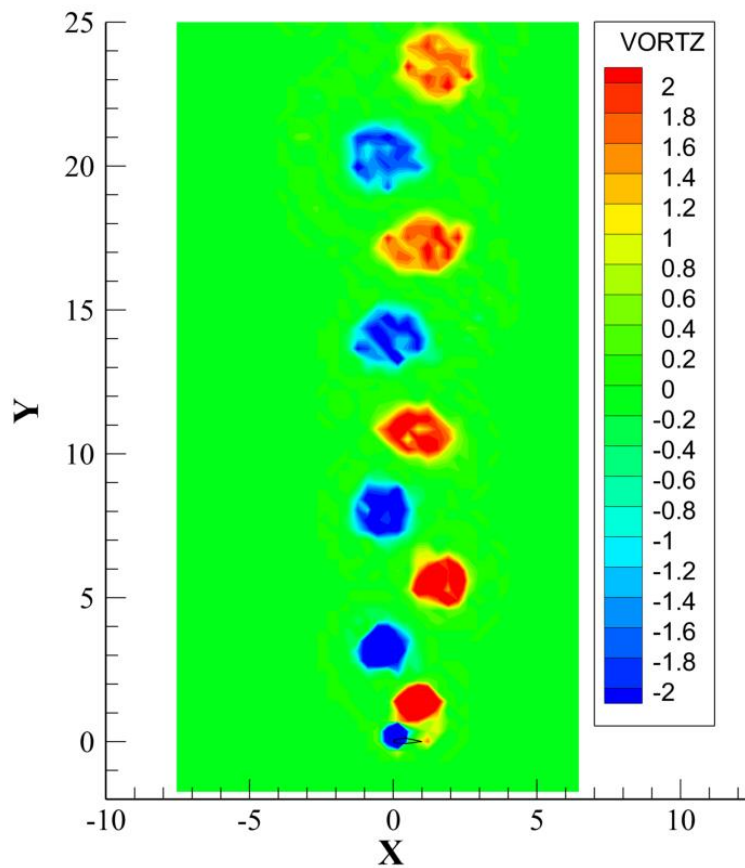
Σημειώνεται ότι η μέθοδος σε όλες τις περιπτώσεις έτρεχε σειριακά από την στιγμή που το πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε δεν ήταν πυκνό και ότι η λύση της εξίσωσης Poisson ξεκινάει από το χρονικό βήμα 501 και μετά, αφού έχουν δημιουργεί ήδη 1000 σωματίδια στροβιλότητας.

4.4.2 Αποτελέσματα μεθόδου particle mesh

Στο σχήμα (4.11) φαίνονται οι χρονοσειρές του συντελεστή άνωσης και αντίστασης όπως αυτές προκύπτουν από τον υπολογιστικό κώδικα Foil2w με ενσωματωμένη την τεχνική particle mesh. Στο σχήμα (4.12) φαίνεται ο ομόρρος που έχει δημιουργεί για την μέγιστη τιμή του συντελεστή άνωσης σε χρόνο 60.25s. Παρατηρείται ότι ο στρόβιλος που αναπτύσσεται από το σημείο αποκόλλησης της ροής εισέρχεται στο στερεό όριο της αεροτομής. Αυτή η συμπεριφορά οφείλεται στο γεγονός ότι για την εφαρμογή της μεθόδου δεν ελήφθη υπόψη η συνεισφορά του στερεού σώματος της αεροτομής, παρά μόνο τα σημεία στροβιλότητας που απαρτίζουν τα δύο φύλλα του ομόρρου. Η συνεισφορά του στερεού σώματος γίνεται μέσω του κώδικα Foil2w. Η συνεισφορά του στερεού δύναται να ενσωματωθεί στην μέθοδο του particle mesh αλλά δεν αφορούσε το αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής εργασίας και αποτελεί αντικείμενο για μελλοντική έρευνα.

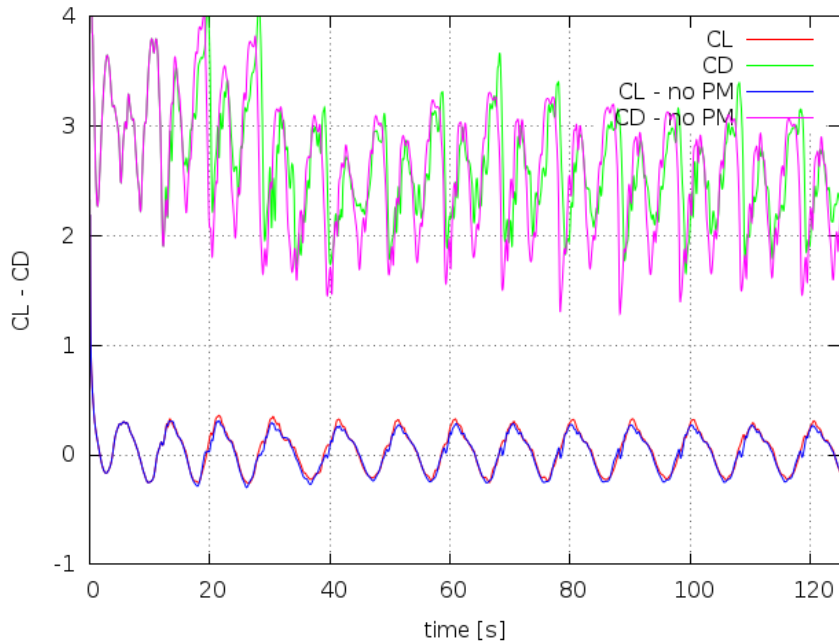


Σχήμα 4.11 – Χρονοσειρές συντελεστή άνοσης CL και συντελεστή αντίστασης CD για 90° γωνία προσβολής όπως αυτές προκύπτουν με εφαρμογή της τεχνικής particle mesh.

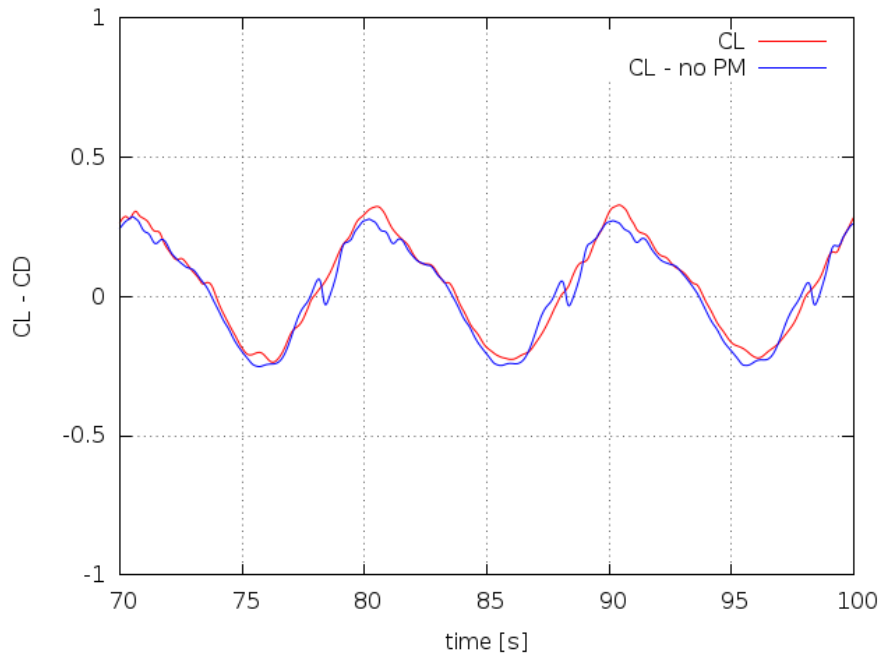


Σχήμα 4.12 – Ομόρρους που δημιουργείται σε γωνία προσβολής 90° με εφαρμογή της τεχνικής particle mesh.

Με την εφαρμογή *particle mesh* παρατηρείται θόρυβος στην χρονοσειρά του CL και του CD ο οποίος οφείλεται κατά κύριο λόγο στις ασυνέχειες της στροβιλότητας στον ομόρρου (Σχήμα 4.12). Για τον λόγο αυτό προτιμήθηκε να αφαιρεθεί η συνεισφορά του στροβιλού κομματιού στις πιέσεις. Κατ'αυτό τον τρόπο οι συντελεστές άωσης και αντίστασης λαμβάνουν την μορφή που φαίνεται στο σχήμα (4.13).

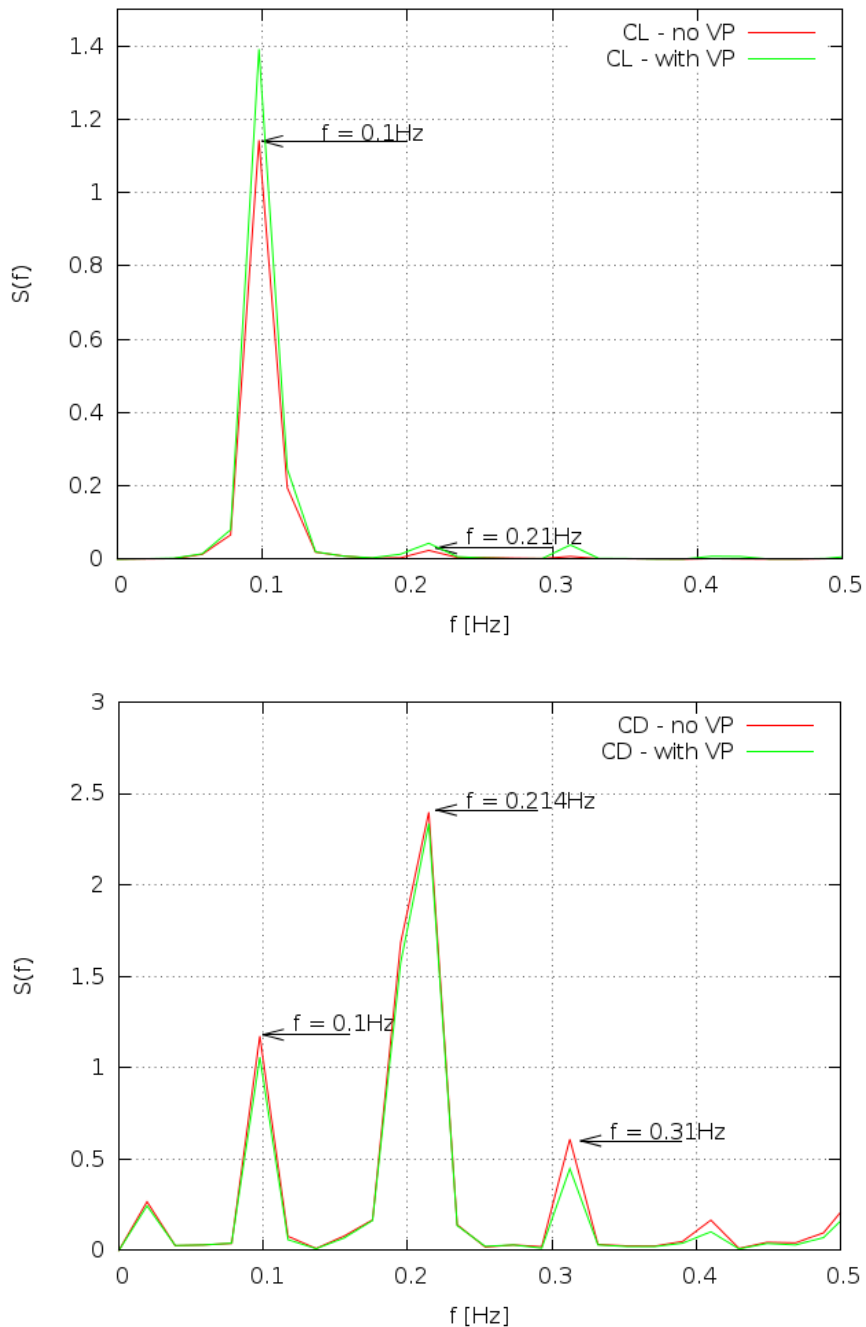


Σχήμα 4.13 - Χρονοσειρές συντελεστή άωσης CL και συντελεστή αντίστασης CD για 90° γωνία προσβολής όπως αυτές προκύπτουν χωρίς το στροβιλό κομμάτι του ομόρρου στον υπολογισμό των πιέσεων με και χωρίς εφαρμογή της τεχνικής *particle mesh*.



Σχήμα 4.14 – Εστίαση στην περιοχή 70 με 100 sec του σχήματος (4.13).

Όπως φαίνεται στο σχήμα (4.14) ο συντελεστής άωσης τείνει να πάρει μία ομαλή μορφή εξαιτίας του particle mesh. Το χαρακτηριστικό αυτό αναμενόταν εξαιτίας της λειτουργίας της τεχνικής ως φίλτρο. Με μετασχηματισμό Fourier (FFT) στις χρονοσειρές του σχήματος (4.13) και (4.11) λαμβάνεται η παρακάτω μορφή στην φασματική ισχύ (Σχήμα 4.15). Ο λόγος που έγινε η ανάλυση αυτή είναι για να εμφανιστεί η ανεξαρτησία των κυρίαρχων συχνοτήτων στην έκλυση των δινών από την επίδραση του στροβιλού κομματιού του ομόρρου στον υπολογισμό των πιέσεων.



Σχήμα 4.15 - Φασματικό Ισχύς (Power Spectrum Density) για τις χρονοσειρές των αεροδυναμικών συντελεστών όπως αυτές προέκυψαν με την τεχνική particle mesh για γωνία προσβολής 90° (Σχήμα 4.11,4.13). Και στις 2 περιπτώσεις φαίνεται η επίδραση στις συχνότητες του στροβιλού κομματιού του ομόρρου (vortical part) στον υπολογισμό των πιέσεων.

Παρατηρείται ότι για την φασματική ισχύ του συντελεστή άωσης CL η μέγιστη τιμή εμφανίζεται στην κυρίαρχη συχνότητα $f = 0.1Hz$ ενώ η δεύτερη μεγαλύτερη τιμή εμφανίζεται για $f = 0.21Hz$. Για την αντίστοιχη περίπτωση του συντελεστή αντίστασης CD, η κυρίαρχη συχνότητα που εμφανίζεται είναι $f = 0.214Hz$ ενώ εμφανίζονται άλλες 2 αριστερά – δεξιά της κύριας συχνότητας με τιμή $f = 0.1Hz$ και $f = 0.31Hz$ αντίστοιχα.

Επιπρόσθετα φαίνεται ότι η επαγωγή του στροβιλού κομματιού (vortical part) του ομόρρου στον υπολογισμό των πιέσεων δεν επιφέρει αλλαγές στις συχνότητες παρά μόνο στην τιμή της φασματικής ισχύος.

4.5 Σύγκριση αποτελεσμάτων μεθόδων

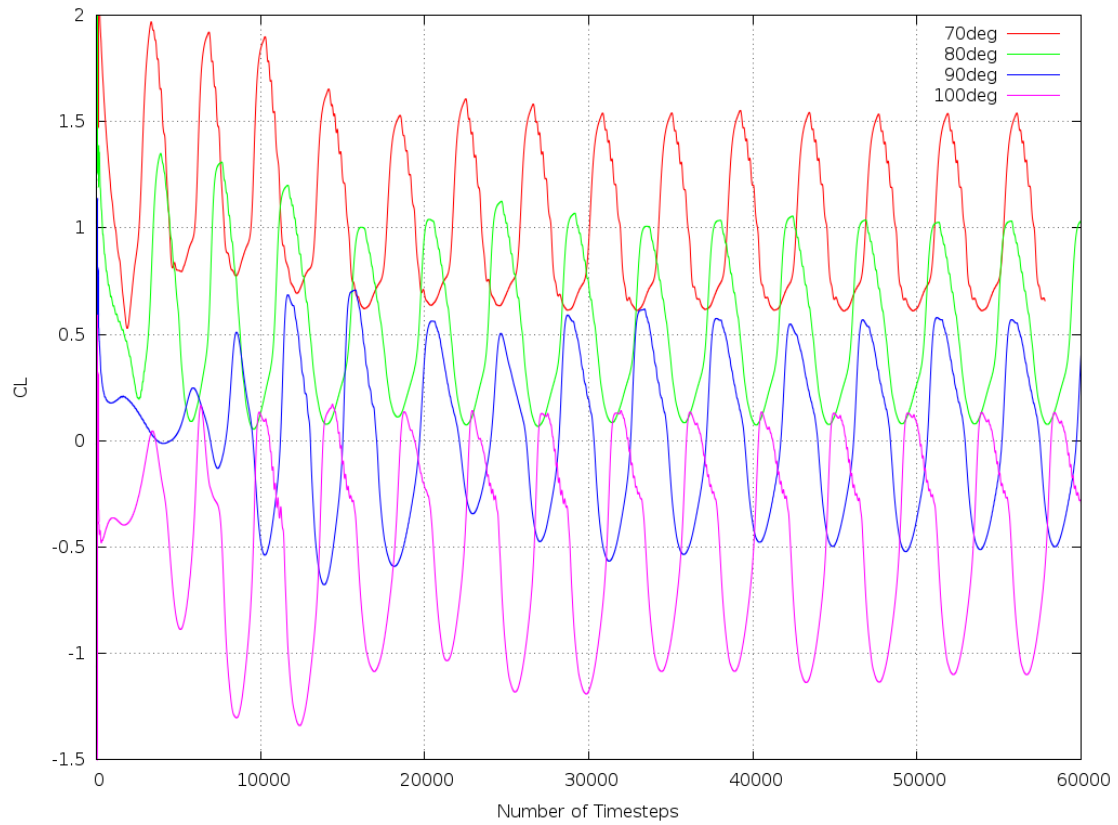
Στην παρούσα διπλωματική εργασία έγιναν υπολογισμοί για γωνίες προσβολής 70° , 80° , 90° και 100° αντίστοιχα. Αρχικά παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από τον υπολογιστικό κώδικα MaPFlow επειδή αποτελούν το μέτρο σύγκρισης για τον κώδικα Foil2w και την τεχνική Particle Mesh. Εν συνεχεία παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για καθεμία γωνία χωριστά.

4.5.1 Αποτελέσματα CFD προσομοιώσεων για όλες τις εξεταζόμενες γωνίες

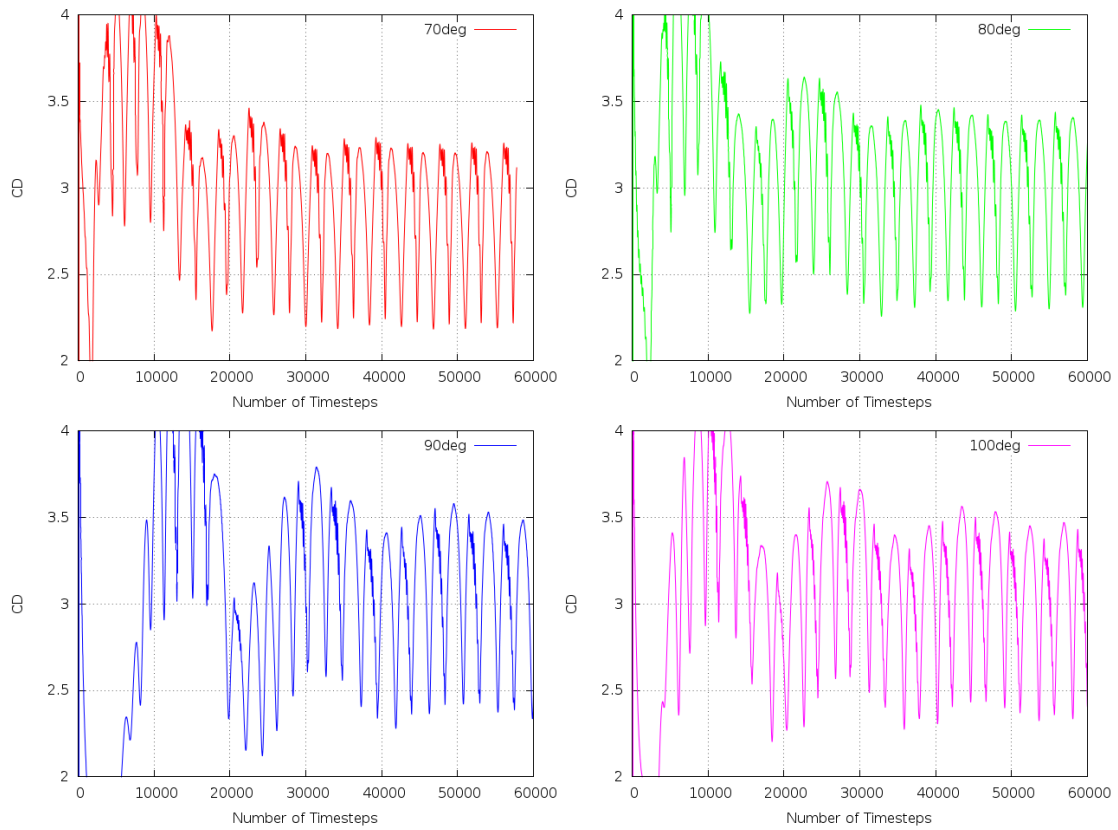
Οι χρονοσειρές των αεροδυναμικών συντελεστών που προέκυψαν από τις CFD προσομοιώσεις για αυτές τις γωνίες φαίνονται στο σχήματα (4.16) και (4.17). Οι τιμές της μέγιστης, ελάχιστης και μέσης τιμής του κάθε συντελεστή φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Γωνία προσβολής	CL_{min}	CL_{max}	CL_{avg}	CD_{min}	CD_{max}	CD_{avg}
70°	0.61	1.55	1.08	2.19	3.25	2.72
80°	0.08	1.04	0.56	2.29	3.42	2.85
90°	-0.52	0.58	0.03	2.42	3.58	3
100°	-1.09	0.13	-0.48	2.33	3.45	2.89

Πίνακας 4.4 – Μέγιστη, ελάχιστη και μέση τιμή των αεροδυναμικών συντελεστών άωσης και αντίστασης για μια περιοχή γωνιών γύρω από τις 90° . Οι παραπάνω τιμές αποτελούν αποτελέσματα των CFD προσομοιώσεων για αεροτομή DU96-W180



Σχήμα 4.16 – Χρονοσειρά αεροδυναμικού συντελεστή άνωσης C_L για περιοχή γωνιών γύρω από τις 90° . Τα αποτελέσματα αφορούν τις CFD προσομοιώσεις για μία αεροτομή DU96-W180.

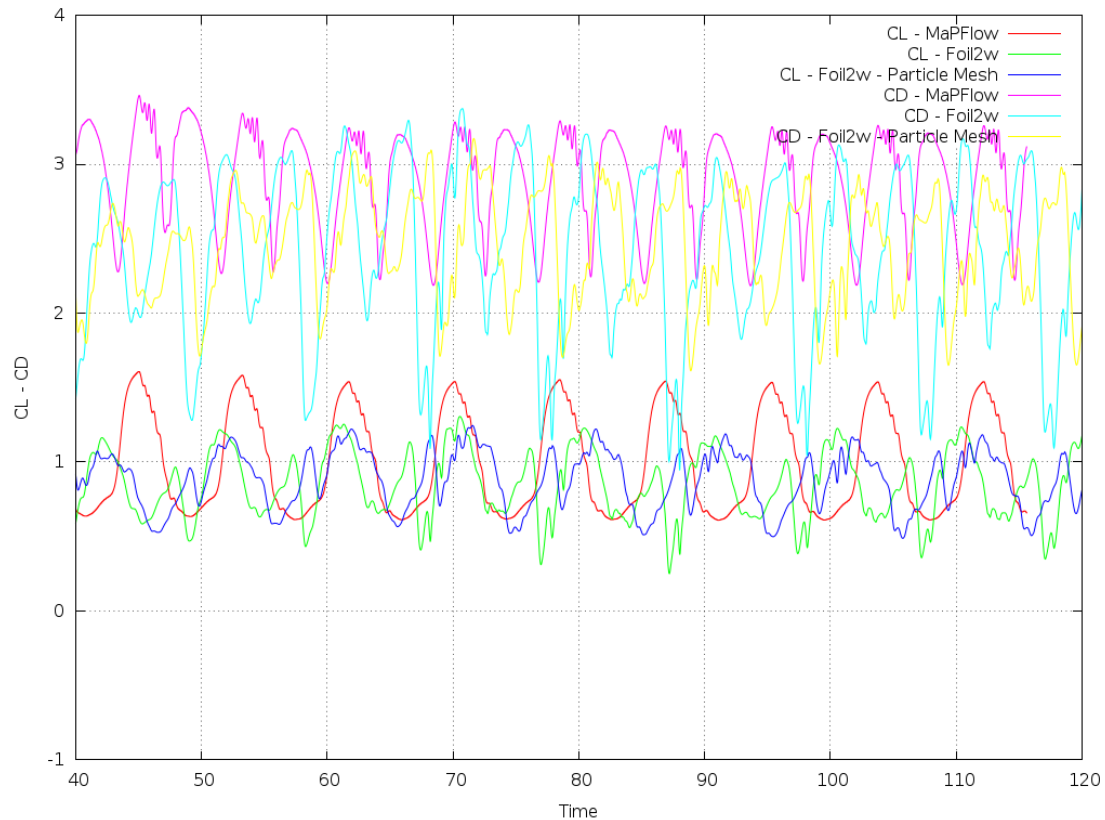


Σχήμα 4.17 - Χρονοσειρά αεροδυναμικού συντελεστή αντίστασης C_D για περιοχή γωνιών γύρω από τις 90° . Τα αποτελέσματα αφορούν τις CFD προσομοιώσεις για μία αεροτομή DU96-W180.

4.5.2 Αποτελέσματα για 70° μοίρες γωνία προσβολής

Μέθοδος	CL _{min}	CL _{max}	CL _{avg}	CD _{min}	CD _{max}	CD _{avg}
MaPFlow	0.61	1.55	1.08	2.19	3.25	2.72
Foil2w	0.36	1.23	0.8	1.16	3.15	2.15
Foil2w - Particle Mesh	0.48	1.17	0.825	1.65	2.91	2.28

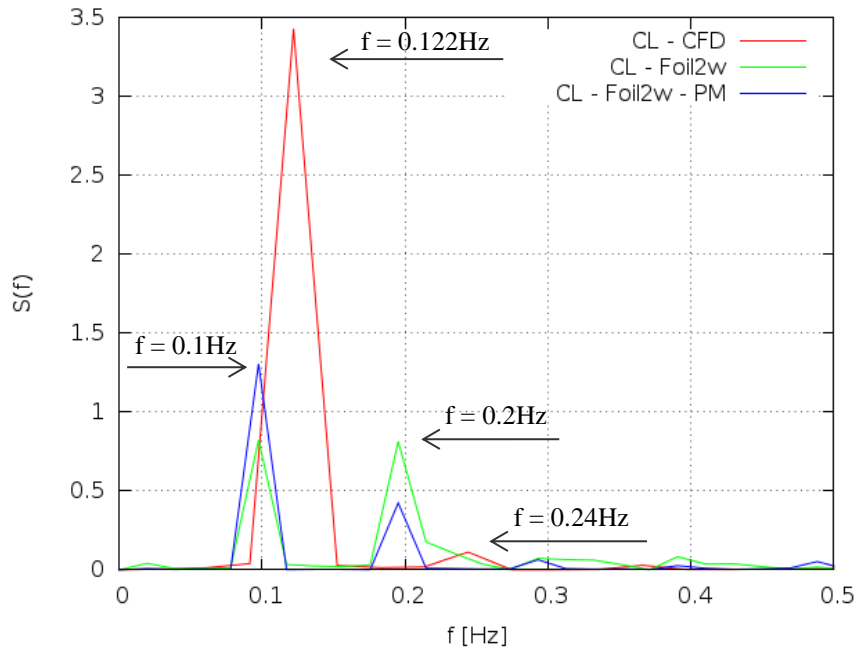
Πίνακας 4.5 - Αεροδυναμικοί συντελεστές για γωνία προσβολής 70° με χρήση των 3 διαφορετικών μεθόδων.



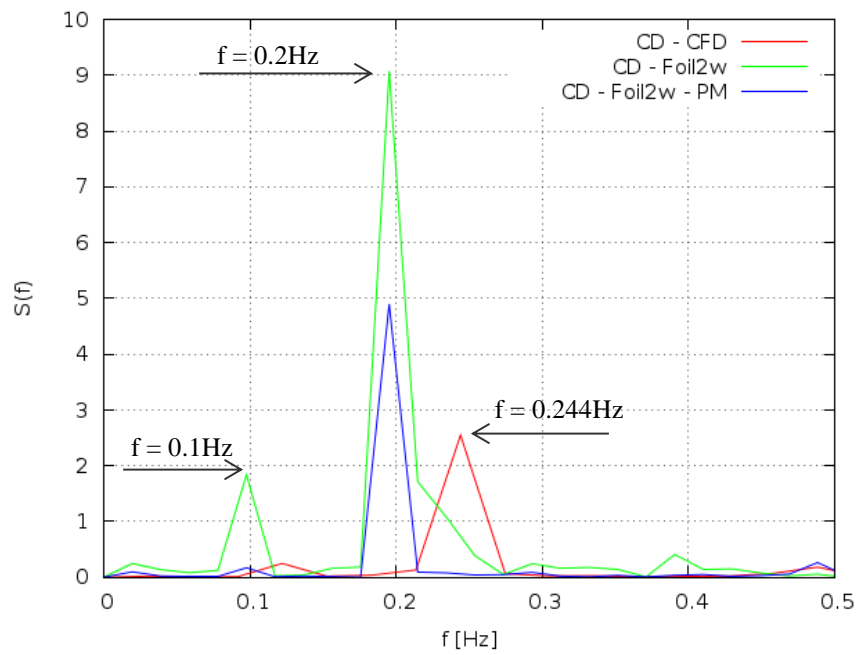
Σχήμα 4.18 - Χρονοσειρές αεροδυναμικών συντελεστών για γωνία προσβολής 70° με χρήση των 3 διαφορετικών μεθόδων σε αεροτομή DU96-W180.

Παρατηρείται ότι ο υπολογιστικός κώδικας foil2w διαφέρει στην μέγιστη τιμή του συντελεστή άνωσης κατά 26% , στην ελάχιστη τιμή 69% ενώ αντίστοιχα στην μέση τιμή κατά 35% σε σχέση με τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τον υπολογιστικό κώδικα MaPFlow. Με την εισαγωγή της τεχνικής particle mesh στους υπολογισμούς οι διαφορές αυτές γίνονται 32%, 44% και 31%. Η εισαγωγή της μεθόδου βελτιώνει κάπως το προφίλ του συντελεστή άνωσης αλλά οι διαφορές συνεχίζουν να είναι μεγάλες.

Στα σχήματα (4.19),(4.20) παρουσιάζεται η φασματική ισχύς των για τις 3 περιπτώσεις χρονοσειρών μετά από διακριτό μετασχηματισμό Fourier.



Σχήμα 4.19 – Φασματική ισχύς (PSD) για τις χρονοσειρές του συντελεστή άνοψης CL σε γωνία προσβολής 70° (Σχήμα 4.18).



Σχήμα 4.20 - Φασματική ισχύς (PSD) για τις χρονοσειρές του συντελεστή αντίστασης CD σε γωνία προσβολής 70° (Σχήμα 4.18).

Στην περίπτωση του συντελεστή άνωσης (Σχήμα 4.19) οι κυρίαρχες συχνότητες που προκύπτουν τον κώδικα Foil2w με ή χωρίς την χρήση της μεθόδου particle mesh λαμβάνουν την ίδια τιμή $f = 0.1Hz$ ενώ στην περίπτωση της CFD προσομοίωσης η κυρίαρχη συχνότητα εντοπίζεται την τιμή $f = 0.122Hz$. Πρόκειται για μία διαφορά της τάξης του 22%. Η διαφορά που εντοπίζεται στην φασματική ισχύ στις κύριες συχνότητες οφείλεται στην μεγαλύτερη μέση τιμή και το μεγαλύτερο εύρος του συντελεστή άνωσης στην περίπτωση της CFD προσομοίωσης.

Στην περίπτωση του συντελεστή αντίστασης (Σχήμα 4.20) παρατηρείται το ίδιο μοτίβο με τον συντελεστή άνωσης. Οι κυρίαρχες συχνότητες που προκύπτουν από τον κώδικα Foil2w με ή χωρίς την χρήση της μεθόδου particle mesh έχουν την ίδια τιμή $f = 2 \cdot 0.1 = 0.2Hz$ ενώ στην περίπτωση της CFD προσομοίωσης η κυρίαρχη συχνότητα λαμβάνει την τιμή $f = 2 \cdot 0.122 = 0.244Hz$. Εξαιτίας της μεγάλης διαφοράς στο εύρος του συντελεστή άνωσης για την περίπτωση της στροβιλής μεθοδολογίας (Σχήμα 4.18, Πίνακας 4.5) η τιμή της φασματικής ισχύος λαμβάνει μεγαλύτερη ισχύ.

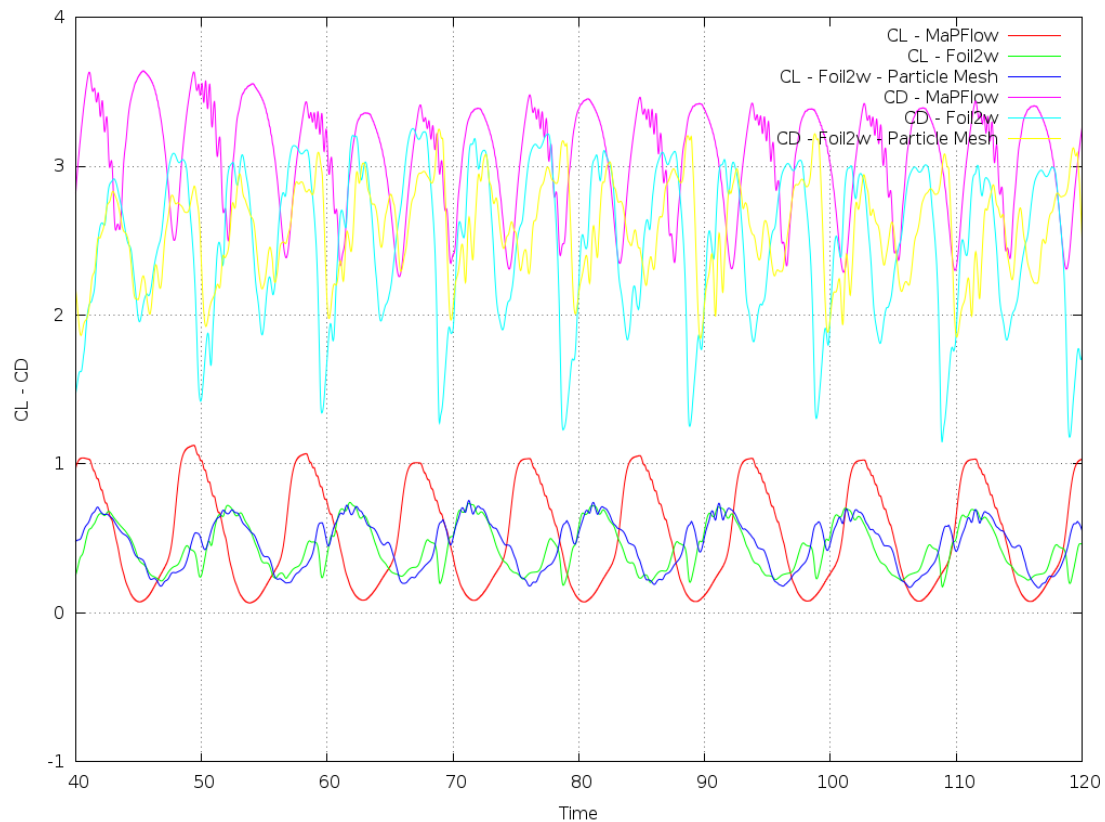
Σημειώνεται ότι εμφανίζονται και μεγαλύτερες συχνότητες της κύριας συχνότητας με τιμές $f = 0.2Hz$ για την στροβιλή μεθοδολογία και $f = 0.24Hz$ για την CFD προσομοίωση. Αυτές συνδέονται άμεσα με τις κύριες συχνότητες στον συντελεστή αντίστασης και η μεταξύ τους διαφορά σημειώνεται εξίσου στο 22%.

4.5.3 Αποτελέσματα για 80° μοίρες γωνία προσβολής

Μέθοδος	CL_{min}	CL_{max}	CL_{avg}	CD_{min}	CD_{max}	CD_{avg}
MaPFlow	0.08	1.04	0.56	2.29	3.42	2.85
Foil2w	0.18	0.71	0.44	1.18	3.01	2.09
Foil2w - Particle Mesh	0.17	0.70	0.43	1.85	3.08	2.46

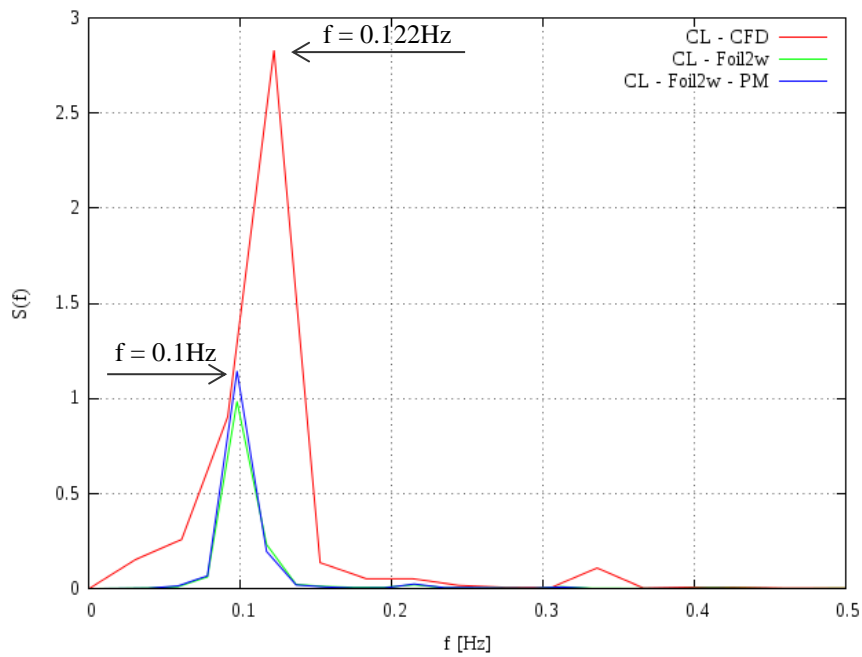
Πίνακας 4.6 - Αεροδυναμικοί συντελεστές για γωνία προσβολής 80° με χρήση των 3 διαφορετικών μεθόδων.

Σε γωνία προσβολής 80° τα αποτελέσματα της στροβιλής μεθοδολογίας σε άμεση σύγκριση με αυτά της CFD προσομοίωσης παρουσιάζουν διαφορά της τάξης του 27% σε ότι αφορά την μέση τιμή του συντελεστή άνωσης και 46% σε ότι αφορά την μέγιστη τιμή. Παρόμοια συμπεριφορά παρουσιάζεται και στα αποτελέσματα του συντελεστή αντίστασης με την μέση τιμή του να διαφέρει κατά 36%, την μέγιστη κατά 14% και την ελάχιστη κατά 94% σε σχέση με τις αντίστοιχες τιμές των αποτελεσμάτων του MaPFlow. Η χρησιμοποίηση της μεθόδου του particle mesh δίνει ένα προφίλ συντελεστή αντίστασης πιο κοντά σε αυτό της CFD προσομοίωσης κυρίως λόγω της εξομάλυνσης που επιφέρει στην χρονοσειρά (Σχήμα 4.21).

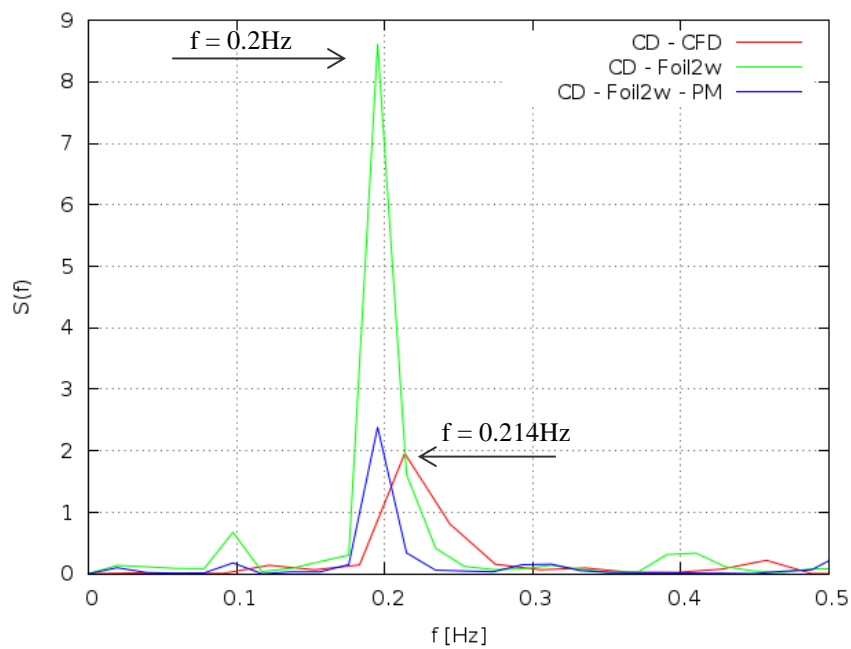


Σχήμα 4.21 - Χρονοσειρές αεροδυναμικών συντελεστών για γωνία προσβολής 80° με χρήση των 3 διαφορετικών μεθόδων σε αεροτομή DU96-W180.

Με μετασχηματισμό Fourier των χρονοσειρών του συντελεστή άωσης και αντίστασης που παρουσιάζονται στο παραπάνω σχήμα (Σχήμα (4.22),(4.33)) λαμβάνονται οι ίδιες συχνότητες με αυτές της περίπτωσης των 70° γωνία προσβολής της ροής. Στη μέγιστη φασματική ισχύ του συντελεστή άωσης CL της CFD προσομοίωσης προκύπτει κυρίαρχη συχνότητα $f = 0.122Hz$, ενώ στην αντίστοιχη περίπτωση της στροβιλής μεθοδολογίας προκύπτει συχνότητα $f = 0.1Hz$. Η εισαγωγή της μεθόδου particle mesh δεν μεταβάλλει καθόλου την κυρίαρχη συχνότητα. Σε ότι αφορά τον συντελεστή αντίστασης CD προκύπτουν οι διπλάσιες συχνότητες, $f = 0.214Hz$ και $f = 0.2Hz$. Η διαφορά της τάξης του 20% συνεχίζει να υφίσταται και στην περίπτωση των 80° γωνία πρόσπτωσης.



Σχήμα 4.22 - Φασματική ισχύς (PSD) για τις χρονοσειρές του συντελεστή άνωσης CL σε γωνία προσβολής 80° (Σχήμα 4.21).

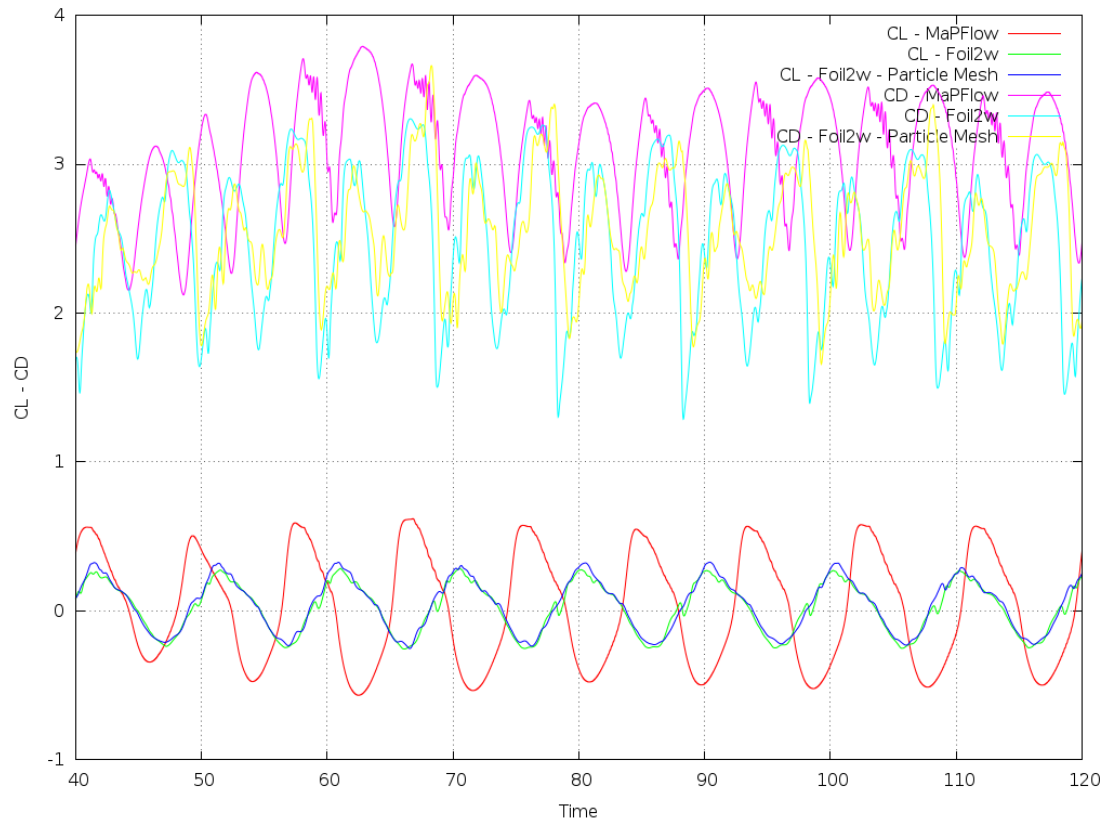


Σχήμα 4.23 - Φασματική ισχύς (PSD) για τις χρονοσειρές του συντελεστή αντίστασης CD σε γωνία προσβολής 80° (Σχήμα 4.21).

4.5.4 Αποτελέσματα για 90° μοίρες γωνία προσβολής

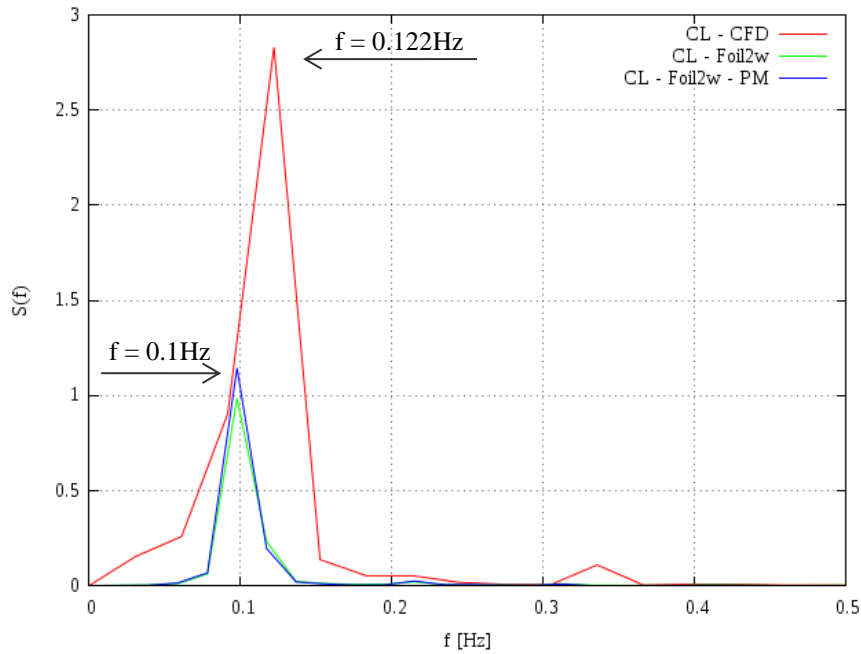
Μέθοδος	CL_{min}	CL_{max}	CL_{avg}	CD_{min}	CD_{max}	CD_{avg}
MaPFlow	-0.52	0.58	0.03	2.42	3.58	3
Foil2w	-0.25	0.26	0.01	1.5	3.1	2.3
Foil2w - Particle Mesh	-0.23	0.33	0.05	1.82	3.38	2.6

Πίνακας 4.7 – Αεροδυναμικοί συντελεστές για γωνία προσβολής 90° με χρήση των 3 διαφορετικών μεθόδων.

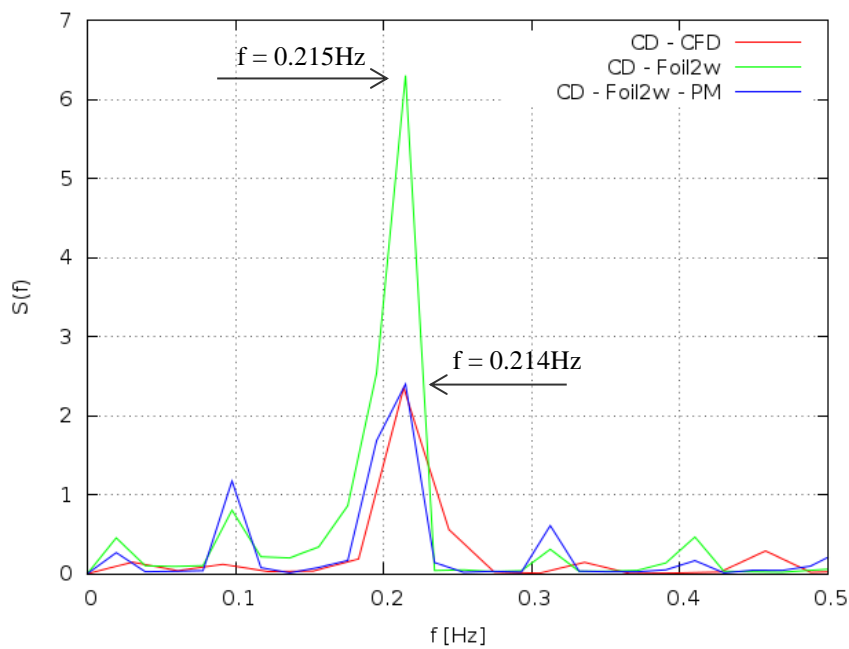


Σχήμα 4.24 - Χρονοσειρές αεροδυναμικών συντελεστών για γωνία προσβολής 90° με χρήση των 3 διαφορετικών μεθόδων σε αεροτομή DU96-W180.

Στην περίπτωση των 90° γωνία πρόσπτωσης τόσο η ελάχιστη όσο και η μέγιστη τιμή του συντελεστή άνωσης όπως αυτές προκύπτουν μέσω του URANS επιλυτή είναι διπλάσιες από τις αντίστοιχες τιμές της στροβιλής μεθοδολογίας. Παρά το διπλάσιο εύρος της χρονοσειράς του συντελεστή άνωσης του κώδικα MaPFlow, η μέση τιμή του είναι ίδια με αυτή του υπολογιστικού κώδικα Foil2w. Σε ότι αφορά τον συντελεστή αντίστασης παρατηρούνται μεγάλες διαφορές στην ελάχιστη τιμή που λαμβάνει για τις 2 διαφορετικές διαφορετικούς μεθόδους, όπως και στις 2 προηγούμενες περιπτώσεις που μελετήθηκαν (4.4.2,4.4.3). Συγκεκριμένα η διαφορά αυτή υπολογίζεται στο 38% χωρίς την χρήση της τεχνικής του particle mesh και στο 33% με την χρήση της. Λόγω του καλύτερου προφίλ χρονοσειράς που παρουσιάζουν τα αποτελέσματα της τεχνικής του particle mesh σε ότι αφορά το εύρος, η διαφορά της μέση τιμής του συντελεστή άνωσης μειώνεται από το 30% στο 15%.



Σχήμα 4.25 - Φασματική ισχύς (PSD) για τις χρονοσειρές του συντελεστή άνωσης CL σε γωνία προσβολής 90° (Σχήμα 4.24).



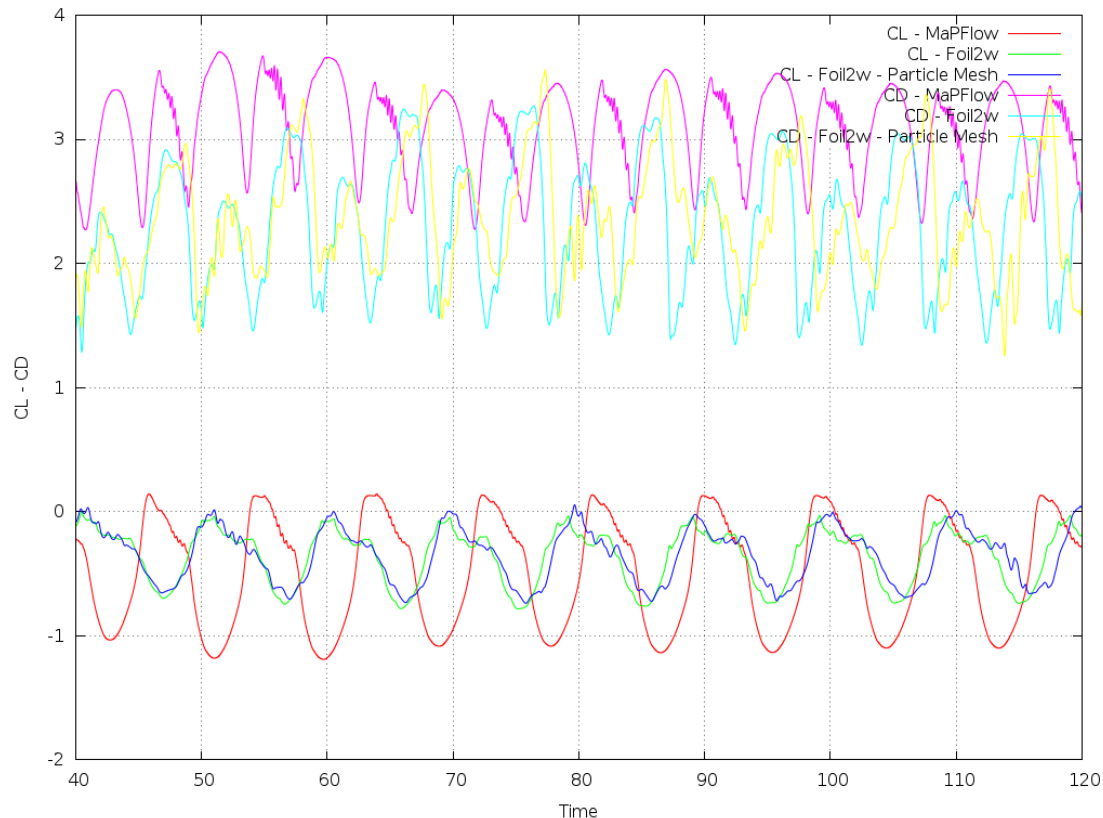
Σχήμα 4.26 - Φασματική ισχύς (PSD) για τις χρονοσειρές του συντελεστή αντίστασης CD σε γωνία προσβολής 90° (Σχήμα 4.24).

Με μετασχηματισμό Fourier των χρονοσειρών που παρουσιάζονται στο σχήμα (4.24) προκύπτει η φασματική ισχύς των 2 αεροδυναμικών συντελεστών. Στην περίπτωση του συντελεστή άνωσης (Σχήμα 4.25) οι συχνότητες παραμένουν $f = 0.122\text{Hz}$ για τον URANS επιλύτη και $f = 0.1\text{Hz}$ για τον υπολογιστικό κώδικα Foil2w. Παρά την διαφορά 20% στις προαναφερόμενες συχνότητες στην περίπτωση του συντελεστή άνωσης οι κυρίαρχες συχνότητες συμπίπτουν στην τιμή $f = 0.214\text{Hz}$.

4.5.5 Αποτελέσματα για 100° μοίρες γωνία προσβολής

Μέθοδος	CL _{min}	CL _{max}	CL _{avg}	CD _{min}	CD _{max}	CD _{avg}
MaPFlow	-1.09	0.13	-0.48	2.33	3.45	2.89
Foil2w	-0.72	-0.02	-0.37	1.34	3.05	2.19
Foil2w - Particle Mesh	-0.69	0	-0.345	1.61	3.38	2.49

Πίνακας 4.8 – Αεροδυναμικοί συντελεστές για γωνία προσβολής 100° με χρήση των 3 διαφορετικών μεθόδων.

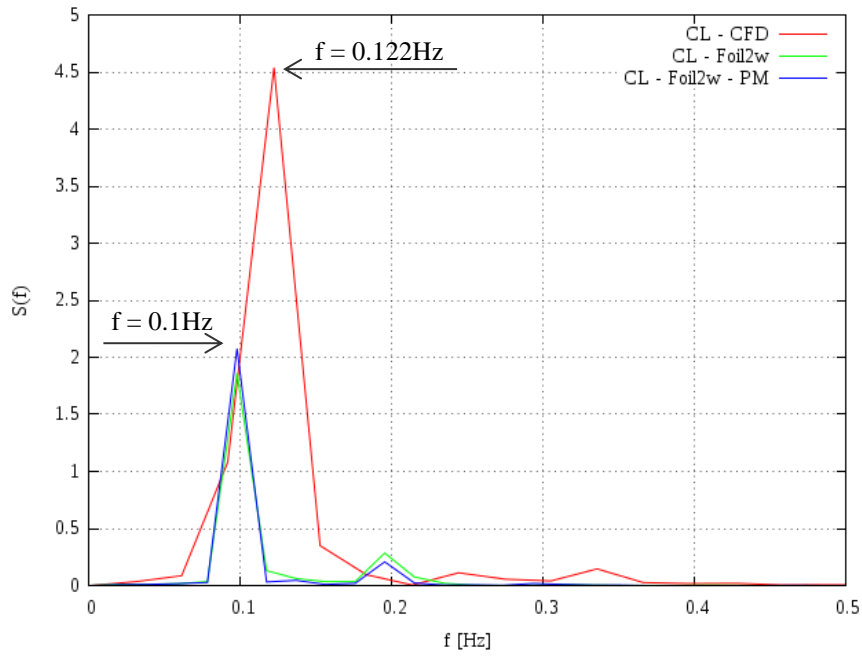


Σχήμα 4.27 - Χρονοσειρές αεροδυναμικών συντελεστών για γωνία προσβολής 100° με χρήση των 3 διαφορετικών μεθόδων σε αεροτομή DU96-W180.

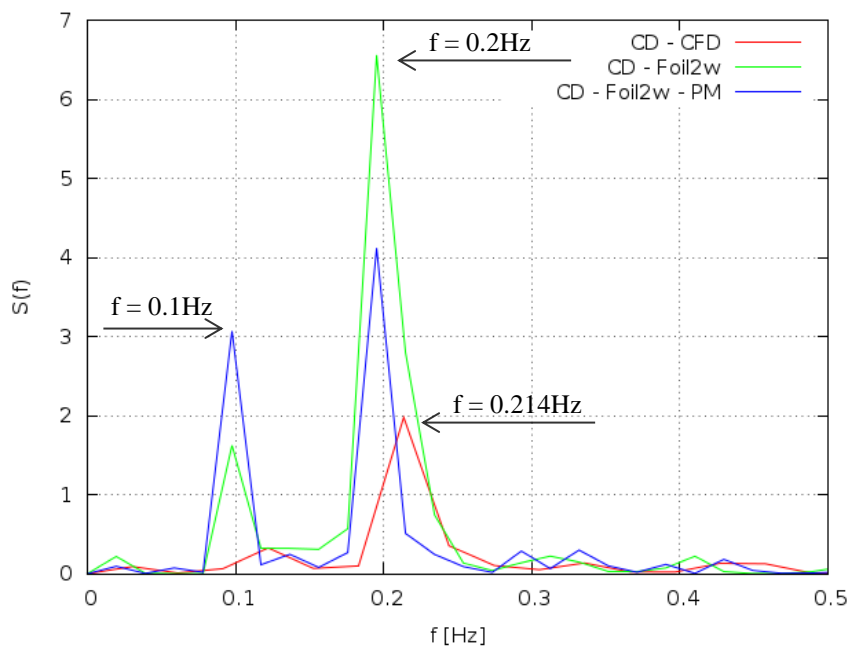
Στις 100° γωνία προσβολής ο αεροδυναμικός συντελεστής άνωσης λαμβάνει αρνητικές τιμές όπως είναι φυσικό. Συγκεκριμένα, μεταξύ των αποτελεσμάτων της προσομοίωσης CFD και της στροβιλής μεθοδολογίας παρατηρούνται διαφορές της τάξης του 23% για την μέση τιμή του CL με τις διαφορές να εντοπίζονται κυρίως στην ελάχιστη τιμή που λαμβάνει ο συντελεστής. Παρόμοια συμπεριφορά παρατηρείται και μεταξύ των αποτελεσμάτων για τον συντελεστή αντίστασης για τις 2 μεθόδους. Συγκεκριμένα η μέση τιμή του παρουσιάζει διαφορά της τάξης του 32% με τις μεγαλύτερες διαφορές να εντοπίζονται στην ελάχιστη τιμή που λαμβάνει. Η εισαγωγή του particle mesh στην συγκεκριμένη περίπτωση δεν παρουσιάζει πιο ομαλό προφίλ με αποτέλεσμα ο υπολογιστικός κώδικας Foil2w να παράγει καλύτερα αποτελέσματα για τον συντελεστή άνωσης. Σε ότι αφορά τον συντελεστή αντίστασης η χρονοσειρά που παράγεται μέσω της χρήσης της μεθόδου particle mesh ανταποκρίνεται καλύτερα σε αυτή της CFD προσομοίωσης.

Με μετασχηματισμό Fourier (DFT) των χρονοσειρών των αεροδυναμικών συντελεστών του σχήματος (4.27) λαμβάνεται η φασματική ισχύς τους συναρτήσει της συχνότητας. Στην μέγιστη τιμή της φασματικής ισχύος του συντελεστή άωσης CL προκύπτει η κύρια συχνότητα $f = 0.1\text{Hz}$ για τα αποτελέσματα της στροβιλής μεθοδολογίας και η συχνότητα $f = 0.122\text{Hz}$ για τα αντίστοιχα της CFD προσομοίωσης (Σχήμα 4.28). Παρατηρείται η ίδια διαφορά της τάξης του 20% με τις περιπτώσεις γωνιών προσβολής 70° , 80° και 90° . Η διαφορά που παρατηρείται στην μέγιστη τιμή της φασματικής ισχύος έχει να κάνει με το γεγονός ότι το εύρος που παρουσιάζει η χρονοσειρά του συντελεστή άωσης CL είναι πολύ μεγαλύτερο από αυτό της στροβιλής μεθοδολογίας.

Σε ότι αφορά τον συντελεστή αντίστασης CD, η κυρίαρχη συχνότητα που αποκομίζεται στην μέγιστη φασματική ισχύ της χρονοσειράς της CFD προσομοίωσης αντιστοιχεί στην τιμή $f = 0.214\text{Hz}$ ενώ στην αντίστοιχη της στροβιλής μεθοδολογίας στην τιμή $f = 0.2\text{Hz}$. Στην περίπτωση του συντελεστή αντίστασης η διαφορά μεταξύ των συχνοτήτων σημειώνεται στο 7% καθώς η κυρίαρχη συχνότητα της στροβιλής μεθοδολογίας είναι πιο αντιπροσωπευτική. Εξαιτίας της αρκετά μικρότερης τιμής που λαμβάνεται στον συντελεστή αντίστασης CD με άμεση συνέπεια το εύρος και η μέση τιμή της χρονοσειράς να διαφέρουν σημαντικά (Σχήμα 4.27) παρατηρείται μεγαλύτερη τιμή στην φασματική ισχύ.



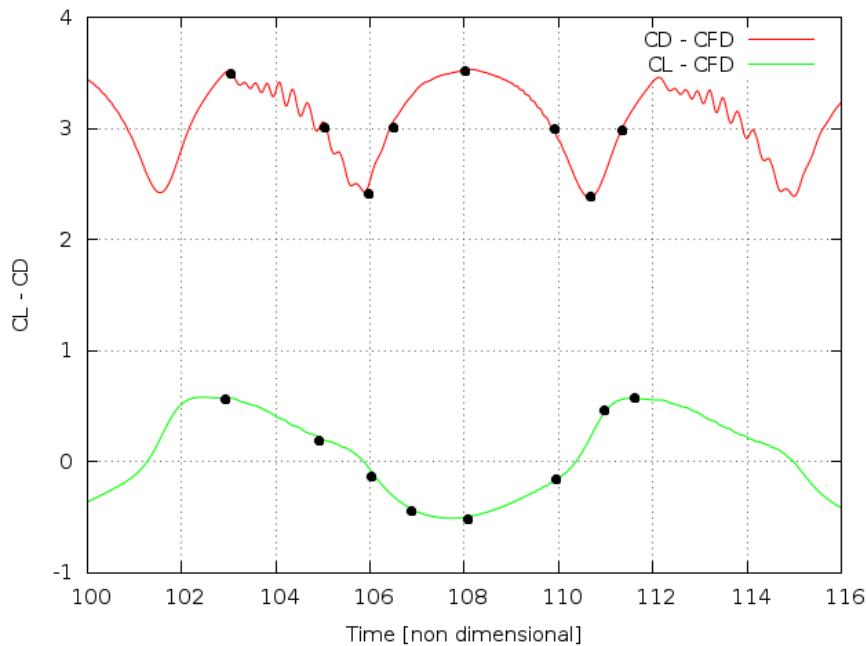
Σχήμα 4.28 - Φασματική ισχύς (PSD) για τις χρονοσειρές του συντελεστή άνωσης CL σε γωνία προσβολής 100° (Σχήμα 4.27).



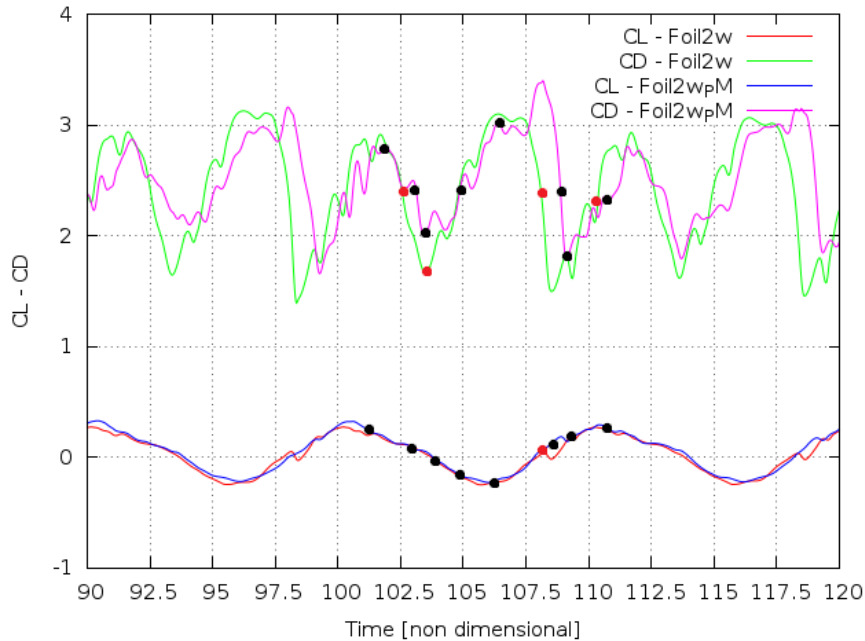
Σχήμα 4.29 - Φασματική ισχύς (PSD) για τις χρονοσειρές του συντελεστή αντίστασης CD σε γωνία προσβολής 100° (Σχήμα 4.27).

4.6 Αποτελέσματα κατανομής πίεσης CP σε γωνία προσβολής 90°

Εξαιτίας του διαφορετικού εύρους που παρατηρείται στις χρονοσειρές των αεροδυναμικών συντελεστών μεταξύ του URANS επιλυτή MaPFlow και της μη συνεκτικής στροβιλής μεθοδολογίας Foil2w, κρίθηκε σκόπιμο να παρουσιαστούν ενδεικτικά οι διαφορές στην πίεση στην επιφάνεια της αεροτομής για γωνία προσβολής 90°. Επειδή το πρόβλημα που εξετάζεται είναι μη μόνιμο, επιλέχθηκε μία περίοδος εφόσον έχει επέλθει σύγκλιση σε μία σταθερή μορφή και για τις 3 διαφορετικές μεθόδους που χρησιμοποιήθηκαν. Έγινε επιλογή 8 διαφορετικών σημείων για αυτή την περίοδο που φυσικά είναι αντίστοιχα μεταξύ τους (Σχήματα 4.30,4.31).

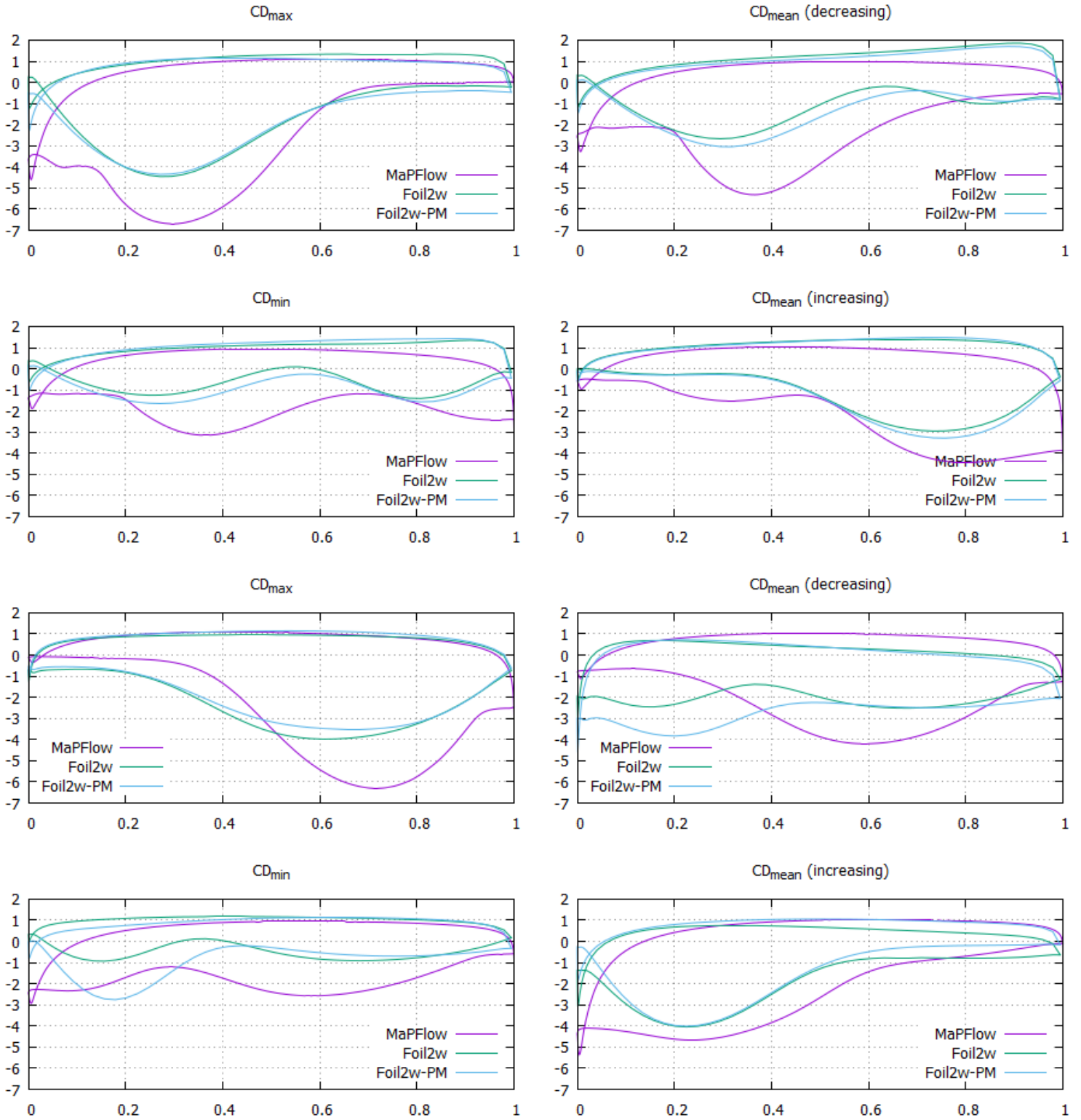


Σχήμα 4.30 – Περίοδος που επιλέχθηκε για τα αποτελέσματα της CFD προσομοίωσης. Οι χρονικές στιγμές κατά τις οποίες εξετάζεται ο συντελεστής πίεσης φαίνονται στο σχήμα (μαύρες τελείες).

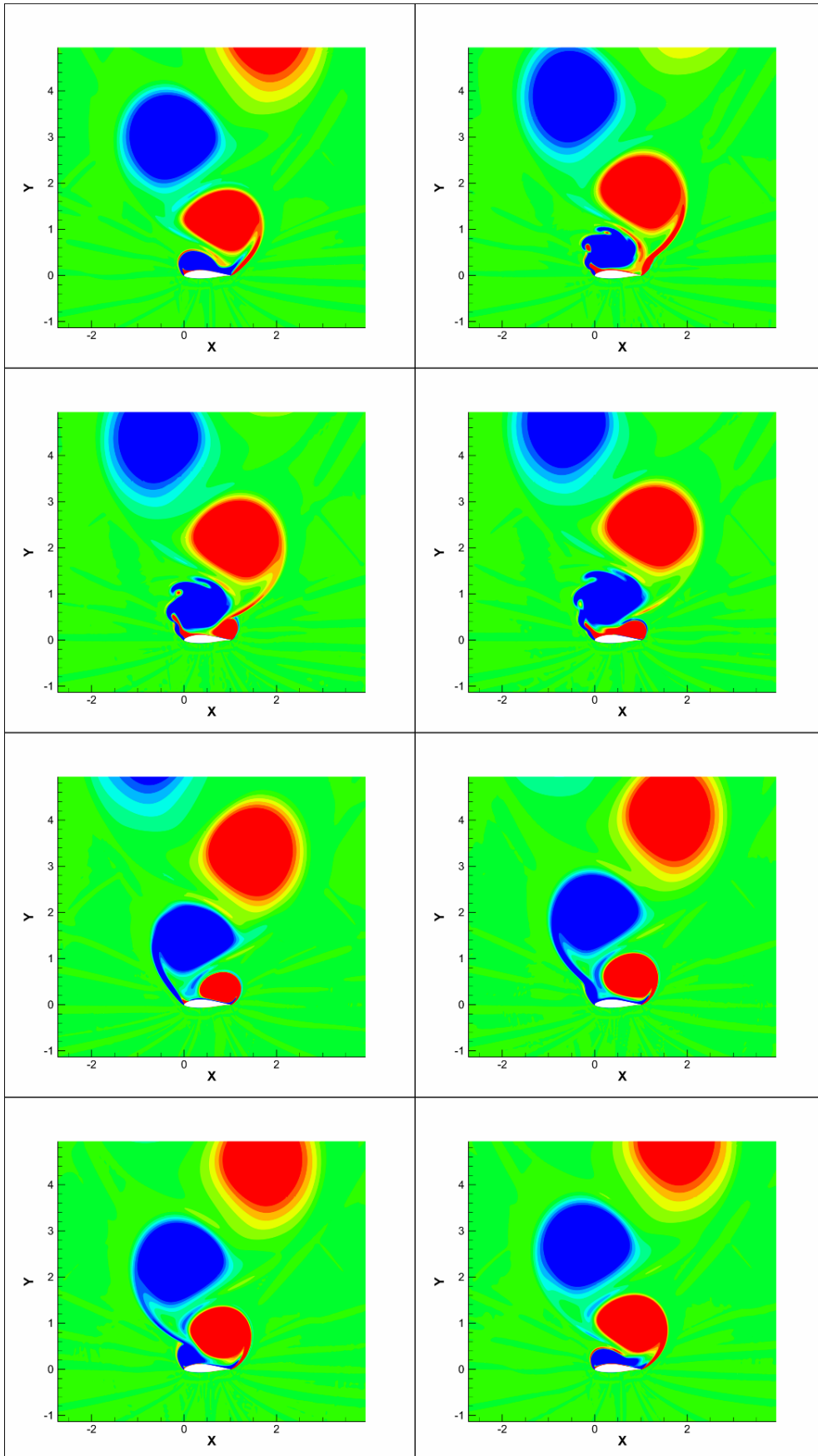


Σχήμα 4.31 - Περίοδος που επιλέχθηκε για τα αποτελέσματα της στροβιλής μεθοδολογίας Foil2w. Οι χρονικές στιγμές κατά τις οποίες εξετάζεται ο συντελεστής πίεσης φαίνονται στο σχήμα (μαύρες τελείες). Με κόκκινες τελείες σημειώνονται τα σημεία όπου διαφοροποιείται η χρονική στιγμή που εξετάζεται ανάλογα με το αν χρησιμοποιείται η τεχνική particle mesh.

Οι συντελεστές πίεσης για τις διάφορες χρονικές στιγμές μεταξύ των 3 διαφορετικών μεθόδων παρουσιάζονται με βάση την τιμή του συντελεστή άνωσης (Σχήμα 4.32). Στην περίπτωση της προσομοίωσης CFD παρατηρείται ο συντελεστής πίεσης να ισούται με την μονάδα από το 20% μέχρι το 90% άνω πλευράς της αεροτομής (suction side). Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι η ταχύτητα σε εκείνη την περιοχή είναι μηδενική, γεγονός που οφείλεται στην πλήρως αποκολλημένη ροή που εμφανίζεται. Σε ότι αφορά τον μέγιστο συντελεστή πίεσης, παρατηρείται μεταβολή του σημείου που εμφανίζεται ανάλογα με την χρονική στιγμή που εξετάζεται. Η μεταβολή αυτή οφείλεται στην μεταβαλλόμενη υπερίσχυση του στροβίλου που εκλύεται είτε από το σημείο αποκόλλησης (ακμή προσφυγής), είτε από την ακμή εφύγης (Σχήμα 4.33). Στις υποπίεσεις που εμφανίζονται, ο υπολογιστικός κώδικας MaPFlow παρουσιάζει μέγιστο σε συντελεστή πίεσης στην περιοχή του -6.5, σε αντίθεση με την στροβιλή μεθοδολογία που εμφανίζει μέγιστο στην περιοχή του -4.5, διαφορά της τάξης του 45%. Οι αντίστοιχες ελάχιστες τιμές εντοπίζονται στον υπολογιστικό κώδικα Foil2w στο -1 ενώ στον κώδικα MaPFlow στο -2. Εξαιτίας αυτών των διαφορών τα φορτία στην αεροτομή διαφέρουν μεταξύ τους γι'αυτό και το εύρος στις αντίστοιχες χρονοσειρές παρουσιάζει μεγάλες διαφορές. Τέλος, η εισαγωγή του Particle Mesh δεν δείχνει να μεταβάλλει ιδιαίτερα τις πιέσεις στην αεροτομή εκτός από την περίπτωση της δεύτερης ελάχιστης τιμής του συντελεστή αντίστασης. Η συμπεριφορά αυτή οφείλεται στο γεγονός ότι η μέθοδος επιδρά σαν φίλτρο στις ελάχιστες τιμές όπως έχει προαναφερθεί.



Σχήμα 4.32 – Συντελεστές πίεσης για 8 διαδοχικές χρονικές στιγμές σε μία περίοδο των αεροδυναμικών συντελεστών CL και CD (Σχήματα 4.31,4.32). Η γωνία προσβολής είναι 90° .



Σχήμα 4.33 - Αποτύπωση των στροβίλων του υπολογιστικού κώδικα MaPFlow για τις χρονικές στιγμές του σχήματος (4.32). Τα όρια της έντασης των στροβίλων είναι [-1:1] και το βήμα 0.2.

Κεφάλαιο 5

Συμπεράσματα - Συστάσεις για μελλοντική έρευνα

5.1 Συμπεράσματα

Στην παρούσα διπλωματική εργασία αναλύθηκε αεροδυναμικά η αεροτομή DU96_W180 με 3 διαφορετικές μεθόδους:

- URANS επιλύτη (MaPFlow)
- Μη συνεκτική στροβιλή μεθοδολογία ελεύθερου ομόρρου (Foil2w)
- Μη συνεκτική στροβιλή μεθοδολογία ελεύθερου ομόρρου στην οποία προσαρμόστηκε η τεχνική particle mesh

Σκοπός της εργασίας είναι η μελέτη των φαινομένων έκλυσης δινών και η συχνότητα με την οποία εκλύονται. Τα δεδομένα εισόδου που χρησιμοποιήθηκαν στοχεύουν σε αδιάστατα αποτελέσματα. Για το λόγο αυτό η συχνότητα ταυτίζεται με τον αριθμό Strouhal.

Η σύγκριση των αποτελεσμάτων έδειξε ότι:

- Ο αριθμός St παρουσιάζει διαφορά 20% μεταξύ της στροβιλής μεθοδολογίας και της CFD προσομοίωσης με την τιμή της συχνότητας στην πρώτη περίπτωση να ανέρχεται στο $f = 0.1\text{Hz}$ και στην δεύτερη στο $f = 0.122\text{Hz}$. Η τιμή αυτή παραμένει σταθερή και στις 4 περιπτώσεις γωνιών που μελετήθηκαν ($70^\circ, 80^\circ, 90^\circ$ και 100°).
- Η εισαγωγή της μεθόδου Particle Mesh στην στροβιλή μεθοδολογία δεν επιφέρει αλλαγές στον αριθμό Strouhal αλλά καταφέρνει να βελτιώσει την μορφή των χρονοσειρών άνωσης και αντίστασης. Το αποτέλεσμα αυτών είναι να πλησιάζουν περισσότερο αυτές της CFD προσομοίωσης.

Εξαιτίας της απουσίας πειραματικών αποτελεσμάτων σε αεροτομή όπου η γωνία προσβολής είναι 90° για μεγάλους αριθμούς Reynolds, δεν εξάγονται διακριτά συμπεράσματα για το ποια από τις 2 μεθόδους που αναλύθηκαν, ανταποκρίνεται στο συγκεκριμένο πρόβλημα. Ο λόγος έγκειται στο ότι ο URANS επιλύτης MaPFlow δεν έχει πιστοποιηθεί σε τέτοιες αντίξοες συνθήκες ροής.

Σε ότι αφορά την τεχνική του particle mesh η χρησιμοποίησή της ενδείκνυται σε περιπτώσεις όπου ο αριθμός των σωματιδίων στροβιλότητας είναι μεγάλος. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα ο αριθμός των σωματιδίων δεν ήταν ικανοποιητικός με αποτέλεσμα να εμφανίζονται ασυνέχειες στην δημιουργία των στροβίλων. Παρ'όλα αυτά όμως δημιουργεί τις προϋποθέσεις για τροποποίηση του υπολογιστικού κώδικα Foil2w με τη προσθήκη επιπλέον υπολογισμών, καθώς ο υπολογιστικός χρόνος που χρειάστηκε η μέθοδος να τρέξει με αραιό σχετικά πλέγμα, σε ένα φυσικό πυρήνα H/Y για τις 90° ήταν $1498\text{s} = 25\text{min}$, ενώ ο αντίστοιχος χρόνος χωρίς την χρησιμοποίησή της ήταν $6967\text{s} = 116\text{min}$. Επιτεύχθηκε δηλαδή μείωση του υπολογιστικού χρόνου στο $\frac{1}{4}$ του αρχικού.

5.2 Συστάσεις για μελλοντική έρευνα

Από την στιγμή που ο υπολογιστικός χρόνος με την εφαρμογή της τεχνικής του Particle Mesh μειώθηκε σημαντικά και έγινε το πρώτο βήμα μπορούν να εφαρμοστούν τα παρακάτω:

- Τροποποίηση του υπολογιστικού κώδικα Foil2w
 - Προσομοίωση οριακού στρώματος με την έκλυση σωματιδίων στροβιλότητας στην άνω πλευρά της αεροτομής με ένταση που θα είναι διπλάσια της ταχύτητας στα σημεία ελέγχου της αεροτομής.
 - Εισαγωγή της επίδρασης του στερεού σώματος στον υπολογισμό των επαγόμενων ταχυτήτων όπως επίσης και της επίλυσης της εξίσωσης Poisson για τις πιέσεις μέσω της μεθόδου του particle mesh.
 - Εισαγωγή περισσότερων σωματιδίων είτε στο τέλος κάθε χρονικού βήματος, είτε μέσω της ίδιας της μεθόδου του particle mesh. Στην δεύτερη περίπτωση στις θέσεις όπου παρουσιάζονται ασυνέχειες αντιστοιχούνται σωματίδια με σκοπό την εξάλειψη αυτών και την επαναπλεγματοποίηση (remeshing).
 - Συνδυασμός των ανωτέρω
- Διεξαγωγή πειράματος σε αεροτομή σε ροή 90° ώστε να υπάρχουν πειραματικά δεδομένα με τα οποία θα μπορούν να συγκριθούν και να πιστοποιηθούν τα υπολογιστικά εργαλεία.
- Επιπλέον υπολογισμοί με τον υβριδικό υπολογιστικό κώδικα HopFlow και επιπλέον διερεύνηση των παραμέτρων και πλέγματος που χρησιμοποιήθηκαν στον URANS επιλύτη MaPFlow με σκοπό την πιο άμεση επίλυση προβλημάτων παρόμοιου χαρακτήρα.

Βιβλιογραφία

- [1] Voutsinas S. G. Zou F. Riziotis V. A. and Wang J. “Analysis of vortex-induced and stall induced vibrations at standstill conditions using a free wake aerodynamic code”. Wind Energy. 2014
- [2] Riziotis A. Vasilis. “Adaptation of a vortex code for the modelling of highly separated flows in NEREA/ATENEA aeroelastic tools”. Αδημοσίευτη ερευνητική εργασία. NTUA. 2012
- [3] Riziotis, V. A., Voutsinas S. G., “Dynamic Stall on Wind Turbine Rotors: Comparative Evaluation Study of Different Models,” Proceedings of the EWEC, Dublin, Ireland, 1997
- [4] Riziotis, V.A., Voutsinas, S.G. “Dynamic stall modeling on airfoils based on strong viscous-inviscid interaction coupling,” J. Numerical Methods in Fluids. 56, pp 185-208, 2008
- [5] Basu, B.C. and Hancock, G.J., “The Unsteady Motion of a Two-Dimensional Airfoil in Incompressible, Inviscid Flow”, J. Fluid Mech., 87, part 1, pp 159-178, 1978
- [6] Voutsinas, S.G, Riziotis, V.A., “A viscous-inviscid interaction model for dynamic stall simulations on airfoils”, AIAA paper 99-0038, 1999
- [7] Katz, J., “A discrete vortex method for the non-steady separated flow over an airfoil”, J. Fluid Mech., vol. 102, pp. 315-328, 1981
- [8] Vezza, M. and McD Galbraith, R.A., “ An Inviscid Model of Unsteady Aerofoil Flow with Fixed Upper Surface Separation”, J. for Numerical Methods in Fluids, vol 5, pp 577-592, 1981
- [9] Maskew, B. and Dvorak, F.A., “The Prediction of C_{lmax} Using a Separated Flow Model”, J. American Helicopter Society, vol 23, no. 2, pp 2-8, 1999
- [10] Ριζιώτης Α. Βασιλῆς. “Αεροδυναμική και Αεροελαστική Ανάλυση της Απώλειας Στήριξης σε Δρομείς Ανεμογεννητριών”. Διδακτορική Διατριβή. Ε.Μ.Π. Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών. Τομέας Πρυστών. 2003
- [11] Papadakis Giorgos. “Development of a hybrid compressible vortex particle method and application to external problems including helicopter flows”. Phd Thesis. NTUA. Aerodynamics Laboratory. 2014
- [12] G-H. Cottet and P.D. Koumoutsakos. “Vortex methods: Theory and Practice.” Cambridge University Press, 2000
- [13] Aftosmis M., Gaitonde D., and Tavares T.S. “Behavior of Linear Reconstruction Techniques on Unstructured Meshes.” AIAA Journal, 33:2038–2049, nov 1995
- [14] V. Venkatakrishnan. “On the Accuracy of Limiters and Convergence to Steady State Solutions.” AIAA paper 93-0880, 1993
- [15] V. Venkatakrishnan. “Convergence to Steady State Solutions of the Euler Equations on Unstructured Grids with Limiters.” Journal of Computational Physics, 118(1):120–130, 1995
- [16] Philip L Roe. “Approximate riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes.” Journal of computational physics, 43(2):357–372, 1981

- [17] Jiri Blazek. “Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications.” Elsevier Science, 2001
- [18] Biedron Robert, Vatsa Veer, and Atkins Harold. “Simulation of Unsteady Flows Using an Unstructured Navier-Stokes Solver on Moving and Stationary Grids.” 23rd AIAA Applied Aerodynamics Conference, pages 1–17, June 2005
- [19] Veer N Vatsa, Mark H Carpenter, and David P Lockard. “Re-evaluation of an optimized second order backward difference (bdf2opt) scheme for unsteady flow applications.” AIAA Paper, 122:2010, 2010
- [20] D.J. Mavriplis and A. Jameson. “Multigrid solution of the Navier-Stokes equations on triangular meshes.” AIAA Journal, 28(8):1415-1425, Aug 1990
- [21] https://en.wikipedia.org/wiki/Courant%E2%80%93Friedrichs%E2%80%93Lewy_condition
- [22] Antony Jameson. “Time dependent calculations using multigrid, with applications to unsteady flows past airfoils and wings.” AIAA paper, 1596:1991, 1991
- [23] F.R. Menter. “Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications.” AIAA Journal, 32:1598-1605., 1994
- [24] Menter, F. R.: “Zonal Two Equation k-omega Turbulence Models for Aerodynamic Flows.” AIAA Paper 93-2906, July 1993
- [25] RA James. “The solution of poisson’s equation for isolated source distributions.” Journal of Computational Physics, 25(2):71-93, 1977
- [26] Karl Lackner. “Computation of ideal mhd equilibria.” Computer Physics Communications, 12(1):33-44, 1976