

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΣΤΟΒΙΟ ΠΟΛΤΣΕΧΝΕΙΟ ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ

«Ανάπτυξη εργαλείου ανάλυσης αεροελαστικής ευστάθειας ανεμογεννήτριας με κυρτωμένα πτερύγια»

Διπλωματική Εργασία του Μπαρμπαγιάννη Ευάγγελου Επιβλέπων Καθηγητής: Βασίλης Α. Ριζιώτης

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου κύριο Ριζιώτη, ο οποίος μέσα από τα μαθήματά του με ενέπνευσε ώστε να επιλέξω διπλωματική εργασία στον τομέα ρευστών και συγκεκριμένα γύρω από το αντικείμενο της αιολικής ενέργειας, που μου παρείχε όλα τα απαραίτητα εφόδια για να ολοκληρώσω την διπλωματική μου και που ήταν εκεί και με στήριξε σε όλη την διάρκεια της διπλωματικής και στις δυσκολίες που προέκυψαν.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου που με στήριξε και ήταν δίπλα μου καθ' όλη την διάρκεια της σχολής και μου παρείχε όλα όσα χρειάστηκα για να φέρω σε πέρας την σχολή και να αντιμετωπίσω όλες τις δυσκολίες που προέκυψαν κατά την διάρκεια των σπουδών μου.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τους φίλους μου που με στήριξαν και αυτοί στην μέχρι τώρα πορεία μου και ήταν πάντα δίπλα μου.

Πίνακας Περιεχομένων

1.Εισαγωγή
2. Δυναμική ανάλυση της ανεμογεννήτριας9
2.1 Μοντελοποίηση των συνιστωσών της ανεμογεννήτριας με την μέθοδο της δοκού και ανάλυση με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων
2.1.1 Κινηματική της δοκού9
2.1.3 Προσέγγιση της δυναμικής εξίσωσης της δοκού με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων(FEM)17
2.2 Δυναμική της πλήρους ανεμογεννήτριας και ανάλυση με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων24
2.2.1 Ένωση κινηματικών και δυναμικών συνθηκών
2.2.2 Κινηματική και δυναμική της κινούμενης δοκού — η γενικευμένη περίπτωση της πλήρους ανεμογεννήτριας
2.2.3 Προσέγγιση του πλήρους συστήματος της ανεμογεννήτριας με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων
2.2.4 Γραμμικοποίηση των μη-γραμμικών κινηματικών εξισώσεων
2.2.5 Μοντελοποίηση των συγκεντρωμένων ιδιοτήτων αδράνειας
2.2.6 Μοντελοποίηση της απόσβεσης της κατασκευής
3. Αεροδυναμική του ρότορα
3.1 Πρότυπο ομμόρου
3.2 Μοντελοποίηση της τοπικής τμηματικής αεροδυναμικής
3,2,1 Μόνιμη αεροδυναμική – γραμμικοποιημένο μοντέλο
3,2,2 Μη-μόνιμο μοντέλο αεροδυναμικής ΟΝΕRΑ – γραμμικοποιημένο μοντέλο 52
3,2,3 Αεροελαστική σύζευξη – Ορισμός του "αεροελαστικού" στοιχείου της δοκού… 62
4.Παράθεση αποτελεσμάτων69
5. Παραπομπές

1.Εισαγωγή

Το θέμα της παρούσας διπλωματικής είναι η αναβάθμιση του αεροελαστικού γραμμικοποιημένου κώδικα GAST (General Aerodynamic and Structural Tool) δίνοντας έμφαση στο ελαστικό του κομμάτι και συγκεκριμένα στην προσομοίωση της κυρτής γεωμετρίας των πτερυγίων της ανεμογεννήτριας. Σκοπός είναι να διαπιστωθεί κατά πόσο επηρεάζει αυτή η αλλαγή τα αποτελέσματα στην ανάλυση ευστάθειας που γίνεται στη μηχανή, αρχικά συγκρίνοντάς τα με τα αντίστοιχα του αρχικού κώδικα για ευθύ πτερύγιο και στην συνέχεια να διαπιστωθεί κατά πόσο επηρεάζονται όταν προσομοιώνεται η πραγματική γεωμετρία του πτερυγίου.

Η ανάλυση ευστάθειας στις ανεμογεννήτριες είναι κομβικό κομμάτι στην σχεδίαση και στην κατασκευή, ειδικά στις μέρες μας όπου υπάρχει ανάγκη για ελαφρύτερα πτερύγια, με χρήση προηγμένων μεθόδων παραγωγής, τα οποία οδηγούν σε μειωμένη κατασκευαστική απόσβεση, μιας ιδιότητας που πριν κάποια χρόνια ήταν πολύ δύσκολο να μοντελοποιηθεί και να αναλυθεί. Καθώς τα πτερύγια θα μεγαλώνουν (100μ και πάνω) για μηχανές 10MW και μεγαλύτερες, η ανάγκη για ανάλυση της αεροδυναμικής ευστάθειας θα είναι όλο και πιο επιτακτική καθώς τα πτερύγια γίνονται όλο και πιο εύκαμπτα.

Από το παρελθόν έχουν γίνει διάφορες προσεγγίσεις στο πρόβλημα. Αρχικά οι αναλύσεις έγιναν σε μια τυπική διατομή πτερυγίου με τις πιο γνωστές να είναι του Thomsen[2] ο οποίος έφτιαξε εμπειρικό μοντέλο για να υπολογίσει την απόσβεση για τις ιδιομορφές στην κατεύθυνση περιστροφής του πτερυγίου, του Rasmussen ο οποίος έφτιαξε ένα dynamic stall μοντέλο λαμβάνοντας υπόψιν διάφορες γωνίες πρόσπτωσης και ταχυτήτων, και του Χαβιαρόπουλου ο οποίος χρησιμοποίησε την μέθοδο της ανάλυσης ιδιοτιμών μαζί με μημόνιμη αεροδυναμική με το μοντέλο ΟΝΕRΑ. Στη συνέχεια για την ανάλυση της μη μόνιμης αεροδυναμικής χρησιμοποιήθηκαν οι εξισώσεις Navier-Stokes και αποδείχθηκε ότι τα γραμμικά μοντέλα είναι πιο συντηρητικά στην αξιολόγηση αστάθειας. Στην συνέχεια ακολουθήθηκε η ανάλυση σε ολόκληρο πτερύγιο επιβεβαιώνοντας ότι είχε προκύψει στις προηγούμενες αναλύσεις. Τέλος έχουμε την προσέγγιση της πλήρους ανεμογεννήτριας που προσθέτει στοιχεία τα οποία δεν μπορούσαν να ληφθούν υπόψιν με της προηγούμενες αναλύσεις[2].

Μέσα από τις αναλύσεις ευστάθειας που έχουν πραγματοποιηθεί, έχουν διαπιστωθεί μορφές αστάθειας ανάλογα με το είδος της ανεμογεννήτριας που εξετάζεται. Οι αστάθειες προκύπτουν λόγω της σύζευξης των ελαστικών ταλαντώσεων της κατασκευής μαζί με τις μημόνιμες δυνάμεις αεροδυναμικής που ασκούνται πάνω της. Οι κυριότερες αστάθειες που έχουν προκύψει σε ανεμογεννήτριες μαζικής παραγωγής είναι οι εξής:

- Ταλαντώσεις που εισάγονται λόγω αποκόλλησης της ροής σε ανεμογεννήτριες τύπου active-stall
- Classical flutter όπου το φαινόμενο αυτό εμφανίζεται σε ανεμογεννήτριες με ρύθμιση βήματος και μεταβλητής ταχύτητας.

Στο πρώτο φαινόμενο σημαντικό ρόλο παίζει η κατεύθυνση των ταλαντώσεων που δεν εξαρτάται μόνο από τα κατασκευαστικά χαρακτηριστικά του πτερύγιου (κατανομή ακαμψίας, συστροφή πτερυγίου κ.τ.λ.) αλλά από την δυναμική της ανεμογεννήτριας μέσω των μετακινήσεων στην κατεύθυνση πτερύγισης (flap) και περιστροφής (edge) του ρότορα, των διαφόρων μορφών που παρουσιάζουν οι υπόλοιπες συνιστώσες (π.χ. κάμψη πύργου)

αλλά και από τα αεροδυναμικά χαρακτηριστικά του πτερυγίου και κατά κύριο λόγω από τις ιδιότητες που εμφανίζει στην περιοχή της αποκόλλησης.

Το δεύτερο φαινόμενο μπορεί να παρουσιαστεί στις ανεμογεννήτριες του τύπου που αναφέραμε και συγκεκριμένα σε αυτές με μακριά και πολύ λεπτά πτερύγια που λειτουργούν με προσκολλημένη ροή και ο λόγος συχνοτήτων μεταξύ της flap μορφής και της στρέψης είναι χαμηλός, η ταχύτητα περιστροφής του ρότοτρα είναι σαφώς μεγάλη και το κέντρο μάζας είναι αρκετά μπροστά από την διατομή του πτερυγίου.

Πέραν αυτών των 2 βασικών μηχανισμών αστάθειας υπάρχουν και άλλοι παράγοντες ελέγχου που μπορούν να οδηγήσουν σε παρόμοια αποτελέσματα όπως π.χ. ο συνεχής έλεγχος της ισχύος σε ταχύτητες πάνω από τις ονομαστικές, μπορεί να οδηγήσει σε αρνητική απόσβεση από την γεννήτρια στον άξονα**[18]**.

Σε πρόσφατα ερευνητικά έργα που πραγματοποιούνται στο χώρο της αιολικής ενέργειας (όπως το AVATAR) εξετάζεται σε ποιο βαθμό τα εργαλεία ανάλυσης ευστάθειας είναι κατάλληλα για μηχανές 10MW και μεγαλύτερες. Οι αναλύσεις που έγιναν είναι με τέσσερα μοντέλα σε μια ανεμογεννήτρια αναφοράς, την DTU 10MW και σε ανεμογεννήτρια με το πτερύγιο INNWIND ,που είναι αντίστοιχου μεγέθους και χαρακτηριστικών, έδειξαν ότι τα τέσσερα μοντέλα που χρησιμοποιήθηκαν, σε συνθήκες κανονικής λειτουργίας αλλά και καταιγίδας, είχαν ασυμφωνίες.

Οι αναλύσεις που έγιναν για να διαπιστωθεί η προέλευση αυτών των ασυμφωνιών ήταν σε τρείς περιπτώσεις: σκέτο πτερύγιο, στρεφόμενο και ακινητοποιημένο πτερύγιο. Σε κάθε περίπτωση εφαρμόστηκαν διάφορες, γνωστές μέχρι σήμερα, τεχνικές κατασκευαστικής αλλά και αεροδυναμικής μοντελοποίησης και προέκυψαν τα εξής αποτελέσματα.

Στην περίπτωση του σκέτου πτερυγίου διαπιστώθηκε ότι ανάλογα με την μέθοδο που χρησιμοποιήθηκε στην μοντελοποίηση της κατασκευής με την μέθοδο της δοκού, υπήρχαν διαφορές στην ακαμψία και κατ' επέκταση στις μετατοπίσεις έχοντας σαν αποτέλεσμα να υπάρχουν διαφορές της τάξης του 3% στην πρώτη ιδιομορφή στην κατεύθυνση περιστροφής. Επίσης υπήρχαν διαφορές στο κατασκευαστικό βήμα πτερυγίου αλλά και στο δυναμικό (συστροφή). Αυτό εξηγεί γιατί υπάρχει υπερεκτίμηση της απόσβεσης όταν χρησιμοποιείται quasy-steady αεροδυναμική στην περίπτωση των edgewise stall induced ταλαντώσεων.

Στην περίπτωση του ακινητοποιημένου πτερυγίου στην συντριπτική πλειοψηφία, τα αποτελέσματα της απόσβεσης είναι κάτω από το -3% ενώ ο λόγος απόσβεσης κάτω από το -5% σε μερικά σημεία. Εφόσον η κατασκευαστική απόσβεση συνήθως τίθεται σε τιμές μεταξύ 0,5% και 1.5% τότε η αστάθεια είναι πιθανή σε πολλές συνθήκες ροής εξαιρώντας την προσκολλημένη ροή. Η επιλογή του μοντέλου δοκού από τα πιο απλά μέχρι το πιο σύνθετο έχει μικρή επίδραση στην ευστάθεια όταν χρησιμοποιείται quassy-steady αεροδυναμική ενώ τα αποτελέσματα της ευστάθειας του μονού ΑVATAR πτερυγίου τελικά επηρεάζονται από το μοντέλο δυναμικής αποκόλλησης και από τις αντίστοιχες παραμέτρους της αεροτομής.

Τέλος στην περίπτωση του στρεφόμενου πτερυγίου η επιλογή του μοντέλου της δοκού έχει μεγαλύτερη επιρροή στην απόσβεση σε σύγκριση με την προηγούμενη περίπτωση και αυτό έχει να κάνει με το ότι η αεροδυναμική απόσβεση μειώνεται συνεχώς με τους αυξανόμενους περιορισμούς στο επίπεδο τομής της παραμόρφωσης. Επίσης η επιλογή του μοντέλου ομμόρου έχει μικρή επίδραση γενικά και καμία επίδραση στο κομμάτι της απόσβεσης. Τέλος στην περίπτωση των αποτελεσμάτων της προσκολλημένης ροής οι διαφορές στα μοντέλα να υπάρχει ευαισθησία στην επιλογή της μεθόδου αναγνώρισης αλλά και των παραμέτρων της και κατά κύριο λόγο εξαιτίας της μη-γραμμικότητας του συστήματος. Παρόλα αυτά τα αποτελέσματα από τα γραμμικά μοντέλα είναι διαθέσιμα και ίσως θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν για τον σωστό συντονισμό των αλγορίθμων.

Κλείνοντας από τα αποτελέσματα των παραπάνω προσομοιώσεων παρατηρήθηκε:

- ότι το μοντέλο του dynamic-stall μπορεί να κάνει την διαφορά μεταξύ αποσβενούμενης και ασταθούς ταλάντωσης στην κατεύθυνση περιστροφής, στο μεμονωμένο AVATAR πτερύγιο
- η διαφορά στην επιλογή του μοντέλου της δοκού, δηλαδή στη δυναμική και στην κατασκευαστική και δυναμική συστροφή παίζει δευτερεύοντα ρόλο στην απόσβεση στις stall-induced ταλαντώσεις, το οποίο γίνεται περισσότερο αισθητό σε υψηλότερα φορτισμένους στρεφόμενους ρότορες
- η επιλογή του μοντέλου ομμόρου είχε αμελητέες επιπτώσεις
- τέλος, η ανάλυση των αποτελεσμάτων ήταν ανεπιτυχής στο κομμάτι της μεθόδου αναγνώρισης εάν τα αποτελέσματα της απόσβεσης των διαφόρων μη-γραμμικών προσομοιώσεων ήταν αξιόπιστα. [19]

2. Δυναμική ανάλυση της ανεμογεννήτριας

2.1 Μοντελοποίηση των συνιστωσών της ανεμογεννήτριας με την μέθοδο της δοκού και ανάλυση με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων

Η μονοδιάστατη προσέγγιση των στερεών κατασκευών (θεωρία δοκού) είναι ίσως η πιο ευρέως χρησιμοποιημένη στην μοντελοποίηση για εφαρμογές στις ανεμογεννήτριες. Τα περισσότερα ήδη υπάρχοντα εργαλεία ανάλυσης δυναμικής και αεροελαστικότητας [4] μιας κατασκευής είναι βασισμένα σε αυτή την προσέγγιση για την μοντελοποίηση της κατασκευής των ελαστικών συνιστωσών της ανεμογεννήτριας (π.χ. πτερύγια , πύργος , άξονας) . Η βασική προϋπόθεση αυτής της προσέγγισης είναι ότι η κατασκευή θα πρέπει να είναι λεπτή στο σχήμα ή με άλλα λόγια η μια αυτή διάσταση να είναι σημαντικά μεγαλύτερη από τις άλλες δύο. Συχνά ασυμπτωτικές αναλύσεις δικαιολογούν την εξάλειψη της εξάρτησης από τις δύο μικρότερες διαστάσεις και, συνεπώς, η διατύπωση του προβλήματος μπορεί να γίνει μόνο με βάση την εναπομένουσα τρίτη διάσταση. Κατά την κατεύθυνση αυτής της κυρίαρχης διάστασης καθορίζεται ο ελαστικός άξονας της δοκού ο οποίος συνήθως θεωρείται να είναι ευθύγραμμος(κυρτός άξονας δοκού έχει εξεταστεί επίσης από τον Hodges[5]). Στο κοντινό παρελθόν η πρώτης τάξης μη γραμμικά μοντέλα δοκού η ακόμα και γραμμικοποιημένες μέθοδοι που βασίζονται στη μέθοδο ιδιομορφών χρησιμοποιούνταν στα μοντέρνα σχεδιαστικά εργαλεία για ανεμογεννήτριες υποστηρίζοντας μικρές ή μέτριες μετατοπίσεις. Με την αύξηση του μεγέθους και της ελαστικότητας των μοντέρνων ανεμογεννητριών παρουσιάστηκε η ανάγκη για μεγαλύτερης τάξης μοντέλα τα οποία θα μπορούν να υπολογίζουν μεγαλύτερες μετατοπίσεις και τα μοντέλα αυτού του τύπου έχουν πρόσφατα εφαρμοστεί σε αεροελαστικούς κώδικες([6],[7],[8]). Στην παρούσα ενότητα , παρουσιάζεται το μη-γραμμικό πρώτης τάξης μοντέλο δοκού στο εργαλείο ευστάθειας που έχει αναπτυχθεί στο Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο το οποίο είναι μια μείωση του γενικότερου υψηλότερης τάξης μοντέλου το οποίο λαμβάνει υπόψιν γεωμετρικές μηγραμμικότητες εξαιτίας των μεγάλων μετατοπίσεων. Επίσης περιγράφεται και η χρήση των πεπερασμένων στοιχείων για την αριθμητική διακριτοποίηση και επίλυση των διαφορικών εξισώσεων.

2.1.1 Κινηματική της δοκού

Ας υποθέσουμε ότι Οxyz είναι το γενικό σύστημα συντεταγμένων της δοκού(βλέπε σχήμα 1).Ο άξονας y του συστήματος είναι ευθυγραμμισμένος με τον άξονα της δοκού(άξονας του κέντρου διάτμησης) ενώ ο x και z έγκεινται στο επίπεδο τομής της μη-μετατοπισμένης δοκού, καθορίζοντας τις δυο κατευθύνσεις κάμψης της δοκού. Το τοπικό σύστημα συντεταγμένων της απαραμόρφωτης δοκού είναι το Ο'ξ₀η₀ζ₀ (σχήμα 1) όπου ξ₀ και ζ₀ έχουν στραφεί σε συμφωνία με το γενικό x και z μόνο για το κομμάτι της συστροφής. Τέλος το Ο₁ ξηζ είναι το τοπικό σύστημα συντεταγμένων του παραμορφωμένου επιπέδου τομής(σχήμα 1). Η παρούσα ανάλυση έχει βασιστεί στις παραδοχές της θεωρίας δοκού Euler Bernoulli. Σύμφωνα με την υπόθεση των Euler Bernoulli**[9]**, κάθε επίπεδο τομής κατά μήκος της δοκού μπορεί μόνο να μετακινηθεί και να στραφεί ομοιόμορφα κάτω από την εφαρμογή εξωτερικών καμπτικών , αξονικών και στρεπτικών φορτίων. Παρόλα αυτά πάντα παραμένει επίπεδο και το σχήμα του δεν διαστρεβλώνεται. Αυτή είναι μια λογική παραδοχή λαμβάνοντας υπόψιν ότι για τις δοκούς οι διαστάσεις του επιπέδου τομής είναι πολύ μικρότερες από την κύρια διάσταση της δοκού. Επιπλέον τα επίπεδα τομής της δοκού απαραμόρφωτο ελαστικό άξονα. Αυτό σημαίνει ότι οι στροφές των επιπέδων επιφέρονται μόνο από την κάμψη της κατασκευής και κατ' επέκταση παραμορφώσεις λόγω διατμητικών τάσεων αμελούνται. Κατά αυτό τον τρόπο μπορούμε να διατυπώσουμε την άμεση σχέση μεταξύ μετατοπίσεων και στροφών.



Σχήμα 1: Κινηματική της δοκού

Το διάνυσμα θέσης **r** ενός τυχαίου σημείου κατά μήκος της δοκού, στην παραμορφωμένη κατάσταση μπορεί να δοθεί με την ακόλουθη γενική έκφραση:

$$\mathbf{r} = \begin{cases} \mathbf{0} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{0} \end{cases} + \begin{cases} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{cases} + \mathbf{E} \cdot \begin{cases} \boldsymbol{\xi} \\ \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\zeta} \end{cases}$$
(1)

όπου ¹¹, W είναι οι δύο καμπτικές μετατοπίσεις κατά τη διεύθυνση των γενικών αξόνων x και z αντίστοιχα, ενώ ν είναι η αξονική μετατόπιση των επιπέδων τομής τα οποία βρίσκονται αρχικά στην κατά y αξονική θέση. Ο πίνακας \mathbf{E} , είναι ο πίνακας μεταφοράς από τις τοπικές συντεταγμένες του παραμορφωμένου τμήματος (ξ, η, ζ) στις γενικές συντεταγμένες της δοκού (x, y, z).

Υπό τους όρους των γωνιών Euler ϕ , ψ και ω που φαίνονται στο Σχήμα 2 , ο πίνακας ${f E}$ γράφεται υπό την ακόλουθη μορφή:

 $(\cos \psi - \sin \psi 0)$ (1) 0 $\cos \phi$ 0 sinφ $0 | \cdot | 0 \cos \omega - \sin \omega | \cdot | 0 1$ 0 (2) $\mathbf{E} = |\sin \psi|$ $\cos \psi$ $\cos \omega / (-\sin \phi \ 0 \ \cos \phi)$ 0 0 1) $\left(0 \right)$ sinω

όπου Ψ και Θ σχετίζονται άμεσα με τις υ και w (τις δυο καμπτικές μετατοπίσεις) ενώ η Φ παριστάνει την στρεπτική παραμόρφωση μαζί με τη συστροφή του επιπέδου τομής.



Σχήμα 2: Μεταφορά από το τοπικό σύστημα του επιπέδου τομής στο γενικό σύστημα της δοκού



Σχήμα 3: Σχέσεις μεταξύ γωνιών Euler και καμπτικών μετατοπίσεων.

Σύμφωνα με το σχήμα 1, απεικονίζοντας ένα απειροελάχιστο στοιχείο dr της δοκού στην παραμορφωμένη κατάσταση του, οι γωνίες Euler Ψ και Φ μπορούν να εκφραστούν σαν συνάρτηση των καμπτικών μετατοπίσεων χρησιμοποιώντας τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\cos \omega = \sqrt{1 - {w'}^2}$$
, $\sin \omega = w'$, $\cos \psi = \frac{\sqrt{1 - {u'}^2 - {w'}^2}}{\sqrt{1 - {w'}^2}}$, $\sin \psi = \frac{-u'}{\sqrt{1 - {w'}^2}}$

Ακολουθώντας το σχήμα τάξης μεγέθους στο οποίο οι όροι διατηρούνται μέχρι ακρίβεια δεύτερης τάξης, εκφράζοντας τις γωνίες Euler σε όρους καμπτικών μετατοπίσεων υ και w ο πίνακας **E** μπορεί να γραφτεί στην ακόλουθη μορφή:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{t} + \hat{\theta} - \mathbf{u}'\mathbf{w}') \cdot \left(1 - \frac{\mathbf{u}'^{2}}{2}\right) & \mathbf{u}' & \sin(\theta_{t} + \hat{\theta} - \mathbf{u}'\mathbf{w}') \cdot \left(1 - \frac{\mathbf{u}'^{2}}{2}\right) \\ -\mathbf{u}'\cos(\theta_{t} + \hat{\theta}) + \mathbf{w}'\sin(\theta_{t} + \hat{\theta}) & 1 - \frac{\mathbf{u}'^{2}}{2} - \frac{\mathbf{w}'^{2}}{2} & -\mathbf{u}'\sin(\theta_{t} + \hat{\theta}) - \mathbf{w}'\cos(\theta_{t} + \hat{\theta}) \\ -\sin(\theta_{t} + \hat{\theta}) \cdot \left(1 - \frac{\mathbf{w}'^{2}}{2}\right) & \mathbf{w}' & \cos(\theta_{t} + \hat{\theta}) \cdot \left(1 - \frac{\mathbf{w}'^{2}}{2}\right) \end{bmatrix}$$
(3)

Στον πίνακα (3), ()' υποδηλώνει χωρικές παραγώγους σε σχέση με την συντεταγμένη **y** της δοκού. Επιπλέον, θ_t είναι η τοπική συστροφή του πτερυγίου, θ είναι η στρεφόμενη παραμόρφωση σε σχέση με τον γενικό άξονα της δοκού **y** και $\hat{\theta} = \theta + \int_{0}^{y} u''w' \, dy$, είναι η τοπική στρεπτική παραμόρφωση με σεβασμό στο τοπικά παραμορφωμένο άξονα της δοκού **η** [9], τέτοια ώστε $\phi = \hat{\theta} + \theta_t$.

Εάν οι όροι δεύτερης τάξης μειωθούν σε πρώτης,(3) θα είναι φανερά απλοποιημένος και θα πάρει την μορφή (πρώτης τάξης ακρίβεια):

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{t} - \sin\theta_{t} \cdot \theta & u' & \sin\theta_{t} + \cos\theta_{t} \cdot \theta \\ -u'\cos\theta_{t} + w'\sin\theta_{t} & 1 & -u'\sin\theta_{t} - w'\cos\theta_{t} \\ -\sin\theta_{t} - \cos\theta_{t} \cdot \theta & w' & \cos\theta_{t} - \sin\theta_{t} \cdot \theta \end{bmatrix}$$
(4)

Κάνοντας την παραδοχή ότι, το τοπικό στο επίπεδο τομής σύστημα Ο' $\xi_0 \eta_0 \zeta_0$ (απαραμόρφωτη κατάσταση) και Ο₁ ξηζ (παραμορφωμένη κατάσταση) δεν περιστρέφονται με την γωνία συστροφής (το τοπικό σύστημα συντεταγμένων δεν συμπίπτει με τους αρχικούς άξονες του επίπεδου τομής) προκύπτει η ακόλουθη έκφραση για το διάνυσμα θέσης **Γ** στο επίπεδο τομής:

$$\mathbf{r} = \begin{cases} 0 \\ y \\ 0 \end{cases} + \begin{cases} u \\ v \\ w \end{cases} + \begin{bmatrix} 1 & u' & \theta \\ -u' & 1 & -w' \\ -\theta & w' & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{cases} x \\ 0 \\ z \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -x \end{bmatrix} \cdot \begin{cases} u \\ v \\ w \\ \theta \end{cases} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x & 0 & -z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{cases} u \\ v \\ w \\ \theta \end{cases}' = \mathbf{r}_{0} + \mathbf{S}^{0} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{S}^{1} \cdot \mathbf{u}'$$
(5)

όπου $\mathbf{r}_{\mathbf{0}}$ είναι το διάνυσμα θέσης του αυθαίρετου σημείου πάνω στο επίπεδο τομής, στην απαραμόρφωτη κατάσταση, ενώ $\mathbf{u} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{\theta}\}^{\mathrm{T}}$ είναι το πεδίο μετατοπίσεων, το οποίο περιλαμβάνει όλους τους ανεξάρτητους βαθμούς ελευθερίας (DOFs) για τις μετατοπίσεις και τις στροφές. Τονίζεται ότι βασιζόμενοι στην Euler Bernoulli υπόθεση και στο πλαίσιο της πρώτης-τάξης ανάλυσης οι δυο καμπτικές στροφές ισούνται με τις χωρικές παραγώγους των καμπτικών μετατοπίσεων: $\psi = -\mathbf{u}'$, $\omega = \mathbf{w}'$ (6).

Επίσης τονίζεται ότι λόγω της προσέγγισης πρώτης τάξης, παράγεται μια γραμμική εξάρτηση του διανύσματος θέσης του αυθαίρετου σημείου στο παραμορφωμένο επίπεδο τομής σε σχέση με το άγνωστο πεδίο μετατοπίσεων.

2.1.2 Εξισώσεις κατασκευαστικής ισορροπίας - εξισώσεις δοκού

Βασισμένοι στις παραπάνω κινηματικές εκτιμήσεις μπορούν να διατυπωθούν οι εξισώσεις δυναμικής ισορροπίας για την κατασκευή της δοκού. Ας θεωρήσουμε ένα διαφορικό στοιχείο της δοκού, με επίπεδο τομής A, και πλάτος dy, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.Η επαυξημένη μάζα του απειροελάχιστου στοιχείου dA είναι $dm = \rho dA$, όπου ρ είναι η τοπική πυκνότητα του υλικού του επίπεδου τομής (βλέπε Σχήμα 4).

As upobésoume epiism ofti $\delta \mathbf{P} = \left\{ \delta P_x, \ \delta P_y, \ \delta P_z \right\}^T$ eíval ol exuterixés duvámels aná monáda múkos askoúmenes stostavej, $\mathbf{d} \mathbf{F} = \left\{ d F_x, \ d F_y, \ d F_z \right\}^T$ ol kabarés elastikés adrantikés adrantikés (antidrásels) dunámels, , $\mathbf{g} = \left\{ g_x, \ g_y, \ g_z \right\}^T \eta$ epiitáxuns, the monasteria formation of the matrix of the matr



$$\underbrace{\left(\int_{A} \boldsymbol{\rho} \cdot d\mathbf{A} \cdot \ddot{\mathbf{r}}\right) dy}_{\mathbf{p}^{i} \cdot dy} = d\mathbf{F} + \underbrace{\left(\int_{A} \boldsymbol{\rho} \cdot d\mathbf{A} \cdot \mathbf{g}\right) dy}_{\mathbf{p}^{e} \cdot dy} + \delta \mathbf{P} dy$$
(7)

Ομοίως, η ισορροπία των ροπών με βάση την έκφραση (1) του επαυξημένου στοιχείου dy (βλέπε Σχήμα 4) γράφεται ως εξής:

$$\underbrace{\left(\int_{A} \rho \cdot dA \cdot \mathbf{r}_{p} \times \ddot{\mathbf{r}}\right) dy}_{\mathbf{q}^{d} dy} = d\mathbf{M} + d\mathbf{r}_{e} \times \left(\mathbf{F} + d\mathbf{F}\right) + \underbrace{\left(\int_{A} \rho \cdot dA \cdot \mathbf{r}_{p} \times \mathbf{g}\right) dy + \mathbf{r}_{a} \times \delta \mathbf{P} dy}_{\mathbf{q}^{e} dy}$$
(8)

Στην εξίσωση (8), $\mathbf{F} + d\mathbf{F}$ είναι το διάνυσμα της προκύπτουσας ελαστικής δύναμης στο τέλος της (2), $d\mathbf{M} = \left\{ d\mathbf{M}_x, d\mathbf{M}_y, d\mathbf{M}_z \right\}^T$ οι καθαρές ελαστικές ροπές του στοιχείου, $\mathbf{q}^i = \left\{ q_x^i, q_y^i, q_z^i \right\}^T$ και $\mathbf{q}^e = \left\{ q_x^e, q_y^e, q_z^e \right\}^T$ οι αδρανειακές και εξωτερικές ροπές ασκούμενες στο στοιχείο και \mathbf{r}_a το τοπικό διάνυσμα θέσης του κέντρου των εξωτερικών δυνάμεων σε σχέση με τον ελαστικό άξονα της δοκού. Επιπλέον, $\mathbf{r}_p = \mathbf{r} - \mathbf{r}_e^{(1)}$ και $d\mathbf{r}_e = \mathbf{r}_e^{(2)} - \mathbf{r}_e^{(1)}$ όπου \mathbf{r}_e είναι το διάνυσμα θέσης ενός σημείου στον παραμορφωμένο ελαστικό άξονα, καθώς τα (1) και (2) δηλώνουν την αρχή και το τέλος του διαφορικού

στοιχείου dy .Το διάνυσμα θέσης $\mathbf{r}_{\mathbf{e}}$ δίνεται ως εξής: $\mathbf{r}_{\mathbf{e}} = \begin{cases} 0 \\ y \\ 0 \end{cases} + \begin{cases} u \\ v \\ w \end{cases}$ (9)

Οι διανυσματικές εξισώσεις ισορροπίας (7) και (8) αναλύονται σε σχέση με τους απαρομόρφωτους άξονες x, y και z. Οι εξισώσεις των δυνάμεων γράφονται ως εξής:

$$\mathbf{p}_{\mathbf{x}}^{i} = \mathbf{F}_{\mathbf{x}}^{\prime} + \mathbf{p}_{\mathbf{x}}^{e} \tag{6}$$

$$\mathbf{p}_{v}^{i} = \mathbf{F}_{v}' + \mathbf{p}_{v}^{e} \tag{7}$$

$$\mathbf{p}_{z}^{i} = \mathbf{F}_{z}^{\prime} + \mathbf{p}_{z}^{e} \tag{8}$$

Παρόμοια οι εξισώσεις των ροπών γράφονται ως εξής:

$$q_x^i = M'_x + F_z - F_y w' + q_x^e$$
 (9)

$$q_{v}^{i} = M_{v}' - F_{z}u' + F_{x}w' + q_{v}^{e}$$
(10)

$$q_{z}^{i} = M_{z}' - F_{x} + F_{y}u' + q_{z}^{e}$$
(11)

Όπως έχει ήδη ειπωθεί οι διατμητικές τάσεις αγνοούνται σε αυτή την ανάλυση.

Με την παραδοχή της πολύ υψηλής ακαμψίας στην διάτμηση (αμελητέες διατμητικές παραμορφώσεις) το επίπεδο τομής παραμένει πάντα κάθετο στον παραμορφωμένο ελαστικό άξονα και έτσι οι καμπτικές στροφές (γωνίες Ψ και Ω) δεν είναι ανεξάρτητες μεταβλητές του προβλήματος. Επομένως, οι δυο εξισώσεις καμπτικών ροπών (13) και (15) χρησιμοποιούνται για να απαλειφθούν οι χωρικές παράγωγοι των αδρανειακών διατμητικών δυνάμεων F'_{x} και F'_{z} από τις εξισώσεις (10) και (12) αντίστοιχα. Ως εκ τούτου, οι έξι εξισώσεις ισορροπίας μπορούν να μειωθούν σε τέσσερις για τις τέσσερις ανεξάρτητες μετατοπίσεις I, V, W και θ οι οποίες ορίζονται σε σχέση με το απαραμόρφωτο σύστημα:

$$p_x^i + (q_z^i)' = M_z'' + (F_y u')' + p_x^e + (q_z^e)'$$
 (δύναμη κατά τον x) (16)

$$p_{y}^{i} = F_{y}' + p_{y}^{e}$$
 (δύναμη κατά τον γ) (17)

$$p_{z}^{i} - (q_{x}^{i})' = -M_{x}'' + (F_{y}w')' + p_{z}^{e} - (q_{x}^{e})'$$
 (δύναμη κατά τον z) (128)

$$q_{y}^{i} + q_{x}^{i}u' + q_{z}^{i}w' = M_{y}' + M_{x}u' + M_{z}w' + q_{y}^{e} + q_{x}^{e}u' + q_{z}^{e}w'$$
(ροπή κατά τον γ) (139)

Για να κλείσουμε το σύστημα των εξισώσεων (16)-(19), πρέπει να οριστούν οι εκφράσεις για τα αδρανειακά φορτία που προκύπτουν σε σχέση με το άγνωστο πεδίο μετατοπίσεων. Τα αδρανειακά φορτία προκύπτουν από την ολοκλήρωση των τάσεων πάνω στο επίπεδο τομής A. Οι τάσεις σχετίζονται με τις πιέσεις και κατ' επέκταση με τις ελαστικές μετατοπίσεις μέσω του νόμου του Hooke.

Ο πίνακας των τάσεων ε βασισμένος στην θεωρία του Green [10] καθορίζεται ως εξής:

$$d\mathbf{r}^{\mathrm{T}} \cdot d\mathbf{r} - d\mathbf{r}_{0}^{\mathrm{T}} \cdot d\mathbf{r}_{0} = 2 \cdot \{ dx \quad dy \quad dz \} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$$
(20)

Επιπλέον , με την παραδοχή του ομογενούς και ισοτροπικού υλικού ο νόμος του Hooke παίρνει την μορφή:

$$\begin{cases} \sigma_{yy} \\ \sigma_{yx} \\ \sigma_{yz} \end{cases} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \cdot \begin{cases} \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{yx} \\ \varepsilon_{yz} \end{cases}$$
(21)

Η εξίσωση (20) μας δίνει τις εκφράσεις για τις μετατοπίσεις λόγω πιέσεων .Κρατώντας μόνο τους όρους πρώτης τάξης οι ακόλουθες σχέσεις γράφονται ως εξής:

$$\varepsilon_{yy} = \mathbf{v}' - \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}'' - \mathbf{z} \cdot \mathbf{w}'' \tag{22}$$

$$\varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} z \cdot \theta' \tag{2314}$$

$$\varepsilon_{\rm yz} = -\frac{1}{2} \mathbf{x} \cdot \mathbf{\theta}' \tag{15}$$

Από τις εξισώσεις (21)-(24) προκύπτουν οι σχέσεις τάσεων-μετατοπίσεων.

Ολοκληρώνοντας αξονικές και διατμητικές τάσεις πάνω στο επίπεδο τομής προκύπτουν οι δυνάμεις σε σχέση με το τοπικό παραμορφωμένο σύστημα συντεταγμένων.

<u>Αξονική Δύναμη</u>

$$F_{y} = \int_{A} \sigma_{yy} dA = EA \cdot v' - EA_{z} \cdot u'' - EA_{x} \cdot w''$$
(165)

<u>Καμπτική Δύναμη κατά τον x</u>

$$M_{x} = -\int_{A} z \cdot \sigma_{yy} \, dA = EI_{xz} \cdot u'' + EI_{xx} \cdot w'' - EA_{x} \cdot v'$$
(26)

<u>Καμπτική Δύναμη κατά τον z</u>

$$M_{z} = \int_{A} x \cdot \sigma_{yy} \, dA = -EI_{zz} \cdot u'' - EI_{xz} \cdot w'' + EA_{z} \cdot v'$$
(27)

<u>Ροπή Στρέψης</u>

$$\mathbf{M}_{y} = \int_{\mathbf{A}} \left(z \cdot \boldsymbol{\sigma}_{yx} - x \cdot \boldsymbol{\sigma}_{yz} \right) d\mathbf{A} = \mathbf{GI}_{t} \cdot \boldsymbol{\theta}'$$
(28)

ΟΙ κατασκευαστικές ιδιότητες της δοκού που εμπλέκονται στις (25)-(28)καθορίζονται ως εξής:

$$EA = \int_{A} E \cdot dA, \quad EA_{x} = \int_{A} E \cdot z \, dA, \quad EA_{z} = \int_{A} E \cdot x \, dA,$$
$$EI_{xx} = \int_{A} E \cdot z^{2} \, dA, \quad EI_{zz} = \int_{A} E \cdot x^{2} \, dA,$$
$$GI_{t} = \int_{A} G \cdot (x^{2} + z^{2}) \, dA$$

Αντικαθιστώντας τις (25)-(28) στις (16)-(19) προκύπτει το τελικό σύστημα των εξισώσεων της δοκού :

<u>Δύναμη κατά τον x</u>

$$p_{x}^{i} + (q_{z}^{i})' - p_{x}^{e} - (q_{z}^{e})' = (-EI_{zz} \cdot u'' - EI_{xz}w'' + EA_{z} \cdot v')'' + (F_{y}u')'$$
(29)

<u>Δύναμη κατά τον γ</u>

$$p_{y}^{i} - p_{y}^{e} = (EA \cdot v' - EA_{z} \cdot u'' - EA_{x} \cdot w'')'$$
(30)

<u>Δύναμη κατά τον z</u>

$$p_{z}^{i} - (q_{x}^{i})' - p_{z}^{e} + (q_{x}^{e})' = (-EI_{xz} \cdot u'' - EI_{xx} \cdot w'' + EA_{x} \cdot v')'' + (F_{y}w')'$$
(31)

<u>Ροπή κατά τον γ</u>

$$q_{y}^{i} + q_{x}^{i}u' + q_{z}^{i}w' - q_{y}^{e} - q_{x}^{e}u' - q_{z}^{e}w' = (GI_{t}\theta')'$$
(32)

Το αριστερό μέλος των εξισώσεων (29)-(32) παρουσιάζουν τα αδρανειακά και εξωτερικά φορτία ενώ το δεξί μέλος περιγράφει τα κατασκευαστικά αδρανειακά φορτία και είναι συνδεδεμένο με την ακαμψία της δοκού. Οι όροι $(F_y \cdot u')'$ και $(F_y \cdot W')'$ στην δύναμη κατά τον x και δύναμη κατά τον z είναι οι μόνοι μη-γραμμικοί όροι που εμφανίζονται στις εκφράσεις των αδρανειακών φορτίων όταν ακολουθείται ανάλυση πρώτης τάξης. Αυτοί οι όροι αναμένουμε να συμβάλλουν ιδιαίτερα στην περίπτωση της περιστρεφόμενης δοκού όπου τα αξονικά φορτία αυξάνονται λόγω των φυγόκεντρων που αναπτύσσονται. Οι δύο όροι δίνουν μια αύξηση στην φαινόμενη ακαμψία της δοκού όσο η ταχύτητα περιστροφής αυξάνεται.

Η παραγώγιση που παρουσιάζεται στην παρούσα ενότητα είναι βασισμένα στην εφαρμογή του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα (προσέγγιση κατά Newton). Με την προοπτική ενός πιο συστηματικού και γενικού πλαισίου για την διαμόρφωση των δυναμικών εξισώσεων έχει χρησιμοποιηθεί η προσέγγιση κατά Hamilton**[11]**.

Το σύστημα των εξισώσεων (29)-(32) μπορεί να γραφεί σε έναν πίνακα της μορφής:

$$\int_{A} (\rho dA) \mathbf{H}_{0} \cdot \mathbf{S}^{0} \cdot \ddot{\mathbf{u}} + \int_{A} (\rho dA) \mathbf{H}_{0} \cdot \mathbf{S}^{1} \cdot \ddot{\mathbf{u}}'$$
$$-\left(\int_{A} (\rho dA) \mathbf{H}_{1} \cdot \mathbf{S}^{0} \cdot \ddot{\mathbf{u}}\right)' - \left(\int_{A} (\rho dA) \mathbf{H}_{1} \cdot \mathbf{S}^{1} \cdot \ddot{\mathbf{u}}'\right)' =$$
(17)
$$\left(\mathbf{K}_{11} \mathbf{u}'\right)' + \left(\mathbf{K}_{22} \mathbf{u}''\right)'' + \left(\mathbf{K}_{12} \mathbf{u}''\right)' + \left(\mathbf{K}_{21} \mathbf{u}'\right)'' + \int_{A} (\rho dA) \mathbf{H}_{0} \cdot \mathbf{g} + \mathbf{H}_{a} \cdot \delta \mathbf{P}$$

όπου,

$$\mathbf{H}_{0} = \left(\mathbf{S}^{0}\right)^{T}, \ \mathbf{H}_{1} = \left(\mathbf{S}^{1}\right)^{T}, \ \mathbf{H}_{a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ z_{a} & 0 & -x_{a} \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{K}_{11} = \begin{bmatrix} F_{y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{EA} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{GI}_{t} \end{bmatrix}, \ \mathbf{K}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{EA}_{z} & 0 & -\text{EA}_{x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{K}_{21} = -\mathbf{K}_{12}^{T}, \qquad \mathbf{K}_{22} = \begin{bmatrix} -\text{EI}_{zz} & 0 & -\text{EI}_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{EI}_{xz} & 0 & -\text{EI}_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και X_a , Z_a είναι οι συντεταγμένες του αεροδυναμικού κέντρου του επιπέδου τομής.

Το σύστημα (32) περιγράφει την κίνηση της δοκού, κάτω από την επίδραση των εξωτερικών αεροδυναμικών και βαρυτικών δυνάμεων, όταν το σύστημα συντεταγμένων της δοκού(τοπικό σύστημα δοκού) δεν κινείται σε σχέση με κάποιο γενικό αδρανειακό πλαίσιο.

Το παραπάνω σύστημα είναι γραμμικό, λαμβάνοντας υπόψιν ότι όταν η δοκός δεν περιστρέφεται οι μη-γραμμικοί φυγοκεντρικοί όροι ακαμψίας εν μέρει εξουδετερώνονται. Παρακάτω θα προστεθούν στο παραπάνω σύστημα επιπλέον όροι οι οποίοι χρειάζονται για την ανάλυση της δυναμικής συμπεριφοράς της κινούμενης δοκού. Επίσης, η αριθμητική προσέγγιση του παραπάνω συστήματος διαφορικών εξισώσεων θα παρουσιαστεί αργότερα στην ανάλυση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων.

2.1.3 Προσέγγιση της δυναμικής εξίσωσης της δοκού με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων(FEM)

Θεωρώντας την εξίσωση (33) στην μορφή $F(\mathbf{u}) = 0$, τότε για κάθε δυνατή μετατόπιση $\delta \mathbf{u}$ το έργο των φορτίων $F(\mathbf{u})$ πρέπει να είναι ίσο με μηδέν. Το έργο είναι μια προβαλλόμενη λειτουργία που καθορίζεται από το εσωτερικό γινόμενο της ολοκληρωματικής εξίσωσης $(f,g) \equiv \int f(x)g(x)dx$ με το ολοκλήρωμα να ορίζεται στο πεδίο ορισμού που στην προκυμμένη περίπτωση είναι το μήκος της δοκού *L*. Έτσι

$$\int_{0}^{L} \delta \mathbf{u}^{T} F(\mathbf{u}) dy = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u}$$
(184)

Να σημειωθεί ότι η απαίτηση για μηδενικό έργο για κάθε δυνατή μετατόπιση ισοδυναμεί με το να οριστεί με μια συγκεκριμένη βάση. Σωστή βάση σημαίνει να ληφθούν υπόψιν οι οριακές συνθήκες. Για όλους τους προκαθορισμένους βαθμούς ελευθερίας που σχετίζονται στις κινηματικές συνθήκες ,πρέπει να θέσουμε όπου $\delta u_p = 0$. Για παράδειγμα εφαρμόζοντας ολοκλήρωση ανά τμήματα στους αδρανειακούς όρους της εξίσωσης (33) έχουμε:

$$\int_{0}^{L} \delta \mathbf{u}^{T} \left[\left(\mathbf{K}_{11} \mathbf{u}' \right)' + \left(\mathbf{K}_{22} \mathbf{u}'' \right)'' + \left(\mathbf{K}_{12} \mathbf{u}'' \right)' + \left(\mathbf{K}_{21} \mathbf{u}' \right)' \right] dy = \\ = \left[\frac{\delta \mathbf{u}^{T} \left(\mathbf{K}_{11} \mathbf{u}' \right) \right]_{0}^{L} + \left[\delta \mathbf{u}^{T} \left(\mathbf{K}_{22} \mathbf{u}'' \right)' - \delta \mathbf{u}'^{T} \left(\mathbf{K}_{22} \mathbf{u}'' \right) \right]_{0}^{L} + \\ + \left[\frac{\delta \mathbf{u}^{T} \left(\mathbf{K}_{12} \mathbf{u}'' \right) \right]_{0}^{L} + \left[\delta \mathbf{u}^{T} \left(\mathbf{K}_{21} \mathbf{u}' \right)' - \delta \mathbf{u}'^{T} \left(\mathbf{K}_{21} \mathbf{u}' \right) \right]_{0}^{L} - \\ - \int_{0}^{L} \delta \mathbf{u}'^{T} \left(\mathbf{K}_{11} \mathbf{u}' \right) dy + \int_{0}^{L} \delta \mathbf{u}''^{T} \left(\mathbf{K}_{22} \mathbf{u}'' \right) dy - \int_{0}^{L} \delta \mathbf{u}'^{T} \left(\mathbf{K}_{12} \mathbf{u}'' \right) dy + \int_{0}^{L} \delta \mathbf{u}''^{T} \left(\mathbf{K}_{21} \mathbf{u}' \right) dy$$

Οι υπογραμμισμένοι όροι ανταποκρίνονται στις οριακές συνθήκες και παρουσιάζουν το δυνατό έργο που γίνεται από τις δυνάμεις και ροπές που ασκούνται στα σημεία στήριξης της δοκού. Εάν καθοριστεί η μετατόπιση ή η περιστροφή τότε αυτοί οι όροι ισούνται με μηδέν επειδή $\delta \mathbf{u}$ ή $\delta \mathbf{u}'$ είναι μηδέν. Αντίθετα εάν καθοριστεί το φορτίο τότε είτε η δύναμη είτε η ροπή τίθεται στην τιμή που της έχει δοθεί. Με παρόμοιο τρόπο οι τρίτοι και οι τέταρτοι αδρανειακοί όροι στο αριστερό μέλος γράφονται ως εξής:

$$-\int_{0}^{L} \delta \mathbf{u}^{T} \left(\int_{A} (\rho dA) \mathbf{H}_{1} \cdot \mathbf{S}^{0} \cdot \ddot{\mathbf{u}} \right)' dy - \int_{0}^{L} \delta \mathbf{u}^{T} \left(\int_{A} (\rho dA) \mathbf{H}_{1} \cdot \mathbf{S}^{1} \cdot \ddot{\mathbf{u}}' \right)' dy =$$
$$= -\left[\delta \mathbf{u}^{T} \left(\int_{A} (\rho dA) \mathbf{H}_{1} \cdot \mathbf{S}^{0} \cdot \ddot{\mathbf{u}} \right) \right]_{0}^{L} - \left[\delta \mathbf{u}^{T} \left(\int_{A} (\rho dA) \mathbf{H}_{1} \cdot \mathbf{S}^{1} \cdot \ddot{\mathbf{u}}' \right) \right]_{0}^{L}$$
$$+ \int_{0}^{L} \delta \mathbf{u}'^{T} \left(\int_{A} (\rho dA) \mathbf{H}_{1} \cdot \mathbf{S}^{0} \cdot \ddot{\mathbf{u}} \right) dy + \int_{0}^{L} \delta \mathbf{u}'^{T} \left(\int_{A} (\rho dA) \mathbf{H}_{1} \cdot \mathbf{S}^{1} \cdot \ddot{\mathbf{u}}' \right) dy$$



Σχήμα 5: Περιγραφή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων της δοκού.

Η πιο διαδεδομένη μέθοδος για την επίλυση δυναμικών εξισώσεων είναι τα πεπερασμένα στοιχεία[12],[13],[14]. Αποτελείται από την προβολή των εξισώσεων με βάση την πεπερασμένη διάσταση. Για τον σκοπό αυτό η πρώτη δοκός χωρίζεται σε στοιχεία. Έπειτα για κάθε στοιχείο καθορίζονται οι ίδιες τοπικές προσεγγίσεις **μ** και δ **u**. Για να γίνει αυτό χρησιμοποιούνται συγκεκριμένες πολυωνυμικές σχέσεις και επιλέγονται διακριτοί βαθμοί ελευθερίας **μ** (βλέπε Σχήμα 5).

Η επιλογή των πολυωνύμων εξαρτάται από την τάξη του προβλήματος. Οι εξισώσεις της δοκού για την τάση και την στρέψη είναι δευτέρου βαθμού οπότε μπορούμε να επιλέξουμε γραμμικά πολυώνυμα ($\gamma_n, n = 1, 2$), και τετάρτου βαθμού για την κάμψη οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τρίτου βαθμού πολυώνυμα ($\beta_n^a, n = 1, 2, a = 0, 1$). Οι διακριτοί βαθμοί ελευθερίας συνήθως ανταποκρίνονται στις τιμές των **U** στους κόμβους αλλά επίσης μπορούν να περιέχουν τις χωρικές παραγώγους όπως στην περίπτωση της κάμψης. Λαμβάνοντας σαν κόμβο τα δύο άκρα του κάθε στοιχείου *e*,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(y) &= \beta_1^0(y) \cdot \hat{\mathbf{u}}_1 + \beta_1^1(y) \cdot \hat{\mathbf{u}}_1' + \beta_2^0(y) \cdot \hat{\mathbf{u}}_2 + \beta_2^1(y) \cdot \hat{\mathbf{u}}_2' = \\ &= \beta_1^0(y) \cdot \hat{\mathbf{u}}_1 - \beta_1^1(y) \cdot \hat{\theta}_{z1} + \beta_2^0(y) \cdot \hat{\mathbf{u}}_2 - \beta_2^1(y) \cdot \hat{\theta}_{z2} \\ \mathbf{w}(y) &= \beta_1^0(y) \cdot \hat{\mathbf{w}}_1 + \beta_1^1(y) \cdot \hat{\mathbf{w}}_1' + \beta_2^0(y) \cdot \hat{\mathbf{w}}_2 + \beta_2^1(y) \cdot \hat{\mathbf{w}}_2' = \\ &= \beta_1^0(y) \cdot \hat{\mathbf{w}}_1 + \beta_1^1(y) \cdot \hat{\theta}_{x1} + \beta_2^0(y) \cdot \hat{\mathbf{w}}_2 + \beta_2^1(y) \cdot \hat{\theta}_{x2} \\ \mathbf{v}(y) &= \gamma_1(y) \cdot \mathbf{v}_1 + \gamma_2(y) \cdot \mathbf{v}_2 \end{aligned}$$

$$\theta_{y}(y) = \gamma_{1}(y) \cdot \theta_{y1} + \gamma_{2}(y) \cdot \theta_{y2}$$

όπου,



Σχήμα 6: Καθορισμός του στοιχείου και των πολυωνύμων παρεμβολής.

Όπως είναι φανερό στις παραπάνω σχέσεις, αντί των χωρικών παραγώγων των καμπτικών μετατοπίσεων, μπορούν ενναλακτικά οι καμπτικές περιστροφές να παρουσιαστούν σαν βαθμοί ελευθερίας του προβλήματος. Αυτή η παρουσίαση βολεύει περισσότερο γιατί μπορούν να αναχθούν κατευθείαν σε μετατοπίσεις και περιστροφές σε σχέση με τους άξονες του συστήματος συντεταγμένων της δοκού και συνεπώς ο μετασχηματισμός σε άλλο σύστημα είναι απλός. Αυτό μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας την εξίσωση (6) σχετίζοντας αυτές τις δυο. Ενναλακτικά τα πολυώνυμα δευτέρου και τρίτου βαθμού μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως συναρτήσεις για τον στρεπτικό και τον εφελκιστικό βαθμό ελευθερίας αντίστοιχα, η οποία είναι και η προσέγγιση στο GAST[1]. Αυτό απαιτεί την εισαγωγή ενδιάμεσων κόμβων και βαθμών ελευθερίας μέσα στο στοιχείο όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.

Βασισμένοι σε αύτη την προσέγγιση οι εκφράσεις για τον εφελκισμό και την στρέψη γίνονται ως εξής:

$$\begin{split} \mathbf{v}(y) &= \delta_{1}(y) \cdot \mathbf{v}_{1} + \delta_{2}(y) \cdot \mathbf{v}_{m1} + \delta_{3}(y) \cdot \mathbf{v}_{m2} + \delta_{4}(y) \cdot \mathbf{v}_{2} \\ \theta_{y}(y) &= \eta_{1}(y) \cdot \theta_{y1} + \eta_{2}(y) \cdot \theta_{ym1} + \eta_{3}(y) \cdot \theta_{y2} \\ \delta n o \upsilon, \\ \delta_{1} &= 0.125 \cdot (1 - \xi) \cdot (-1 + 9 \cdot (2\xi - 1)^{2}) \\ \delta_{3} &= 4.5 \cdot (1 - \xi) \cdot \xi \cdot (-1 + 3\xi) \\ \eta_{1} &= -(1 - \xi) \cdot (2\xi - 1) \end{split} \qquad \delta_{2} &= 4.5 \cdot (1 - \xi) \cdot \xi \cdot (2 - 3\xi) \\ \delta_{4} &= 0.125 \cdot \xi \cdot (-1 + 9 \cdot (2\xi - 1)^{2}) \\ \eta_{1} &= -(1 - \xi) \cdot (2\xi - 1) \\ \eta_{2} &= 4 \cdot (1 - \xi) \cdot \xi \end{split}$$

 $\eta_3 = \xi \cdot (2\xi - 1)$

Σε μορφή πινάκων , οι παραπάνω εξισώσεις γράφονται:

$$\mathbf{u}_{e}(y) = (\mathbf{u} \quad \mathbf{v} \quad \mathbf{w} \quad \mathbf{\theta}_{y})^{T} = \mathbf{N}_{e}(y) \cdot \hat{\mathbf{u}}_{e}$$
, where

Για ένα στοιχείο με 12 Βαθμούς ελευθερίας και 2 κόμβους

$$\hat{\mathbf{u}}_{e} = \left(\underbrace{\hat{\mathbf{u}}_{1}, \hat{\theta}_{z1}, \hat{\mathbf{v}}_{1}, \hat{\mathbf{w}}_{1}, \hat{\theta}_{x1}, \hat{\theta}_{y1}}_{node 1}, \underbrace{\hat{\mathbf{u}}_{2}, \hat{\theta}_{z2}, \hat{\mathbf{v}}_{2}, \hat{\mathbf{w}}_{2}, \hat{\theta}_{x2}, \hat{\theta}_{y2}}_{node 2}\right)^{T} \text{ and}$$

$$\mathbf{N}_{e} = \begin{bmatrix} \beta_{1}^{0} & -\beta_{1}^{1} & 0 & 0 & 0 & \beta_{2}^{0} & -\beta_{2}^{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_{1}^{0} & \beta_{1}^{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{2}^{0} & \beta_{2}^{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_{2} \end{bmatrix}$$

ενώ για το στοιχείο με 15 βαθμούς ελευθερίας και 5 κόμβους,

$$\hat{\mathbf{u}}_{e} = \left(\underbrace{\hat{\mathbf{u}}_{1}, \hat{\theta}_{z1}, \hat{\mathbf{v}}_{1}, \hat{\mathbf{w}}_{1}, \hat{\theta}_{z1}, \hat{\theta}_{y1}}_{node 1}, \quad \hat{\mathbf{v}}_{m1}, \quad \hat{\theta}_{ym1}, \quad \hat{\mathbf{v}}_{m2}, \quad \underbrace{\hat{\mathbf{u}}_{2}, \hat{\theta}_{z2}, \hat{\mathbf{v}}_{2}, \hat{\mathbf{w}}_{2}, \hat{\theta}_{x2}, \hat{\theta}_{y2}}_{node 5}\right)^{T} \kappa \alpha \mathbf{I}$$

$$\mathbf{N}_{e} = \begin{bmatrix} \beta_{1}^{0} & -\beta_{1}^{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{2}^{0} & -\beta_{2}^{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{1} & 0 & 0 & \delta_{2} & 0 & \delta_{3} & 0 & 0 & \delta_{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_{1}^{0} & \beta_{1}^{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{2}^{0} & \beta_{2}^{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta_{1} & 0 & \eta_{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta_{3} \end{bmatrix}$$

Επειδή οι εξισώσεις είναι σε ολοκληρωτική μορφή, όλοι οι υπολογισμοί μπορούν πρώτα να διεξαχθούν στο επίπεδο του στοιχείου και μετά να προχωρήσουν στην σύσταση ολόκληρου του συστήματος των εξισώσεων για ολόκληρο το σώμα αθροίζοντας τα δυνατά έργα του κάθε ανεξάρτητου στοιχείου. Έτσι, εφαρμόζοντας αυτή την προσέγγιση (στο επίπεδο του στοιχείου) οι ακόλουθοι πίνακες λαμβάνονται για το *e-στο* στοιχείο:

$$\mathbf{M}_{e} = \int_{L_{e}} \left(\int_{A} (\rho dA) \mathbf{N}_{e}^{T} \cdot \mathbf{I}_{0} \cdot \mathbf{S}^{0} \cdot \mathbf{N}_{e} \right) dy + \int_{L_{e}} \left(\int_{A} (\rho dA) \mathbf{N}_{e}^{T} \cdot \mathbf{I}_{0} \cdot \mathbf{S}^{1} \cdot \mathbf{N}_{e}' \right) dy$$
$$+ \int_{L_{e}} \left(\int_{A} (\rho dA) \mathbf{N}_{e}'^{T} \cdot \mathbf{I}_{1} \cdot \mathbf{S}^{0} \cdot \mathbf{N}_{e} \right) dy + \int_{L_{e}} \left(\int_{A} (\rho dA) \mathbf{N}_{e}'^{T} \cdot \mathbf{I}_{1} \cdot \mathbf{S}^{1} \cdot \mathbf{N}_{e}' \right) dy + boundary terms$$

$$\mathbf{K}_{\mathbf{e}} = \int_{L_{e}} \mathbf{N}_{e}^{\prime \mathrm{T}} \cdot \mathbf{K}_{11} \cdot \mathbf{N}_{e}^{\prime} \, dy - \int_{L_{e}} \mathbf{N}_{e}^{\prime \mathrm{T}} \cdot \mathbf{K}_{22} \cdot \mathbf{N}_{e}^{\prime \prime} \, dy$$
$$+ \int_{L_{e}} \mathbf{N}_{e}^{\prime \mathrm{T}} \cdot \mathbf{K}_{12} \cdot \mathbf{N}_{e}^{\prime \prime} \, dy - \int_{L_{e}} \mathbf{N}_{e}^{\prime \mathrm{T}} \cdot \mathbf{K}_{21} \cdot \mathbf{N}_{e}^{\prime} \, dy + boundary \, terms$$
$$\mathbf{Q}_{\mathbf{e}} = \int_{L_{e}} \left(\int_{A} (\rho \mathrm{dA}) \, \mathbf{N}_{e}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{H}_{0} \cdot \mathbf{g} \right) dy + \int_{L_{e}} \mathbf{N}_{e}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{H}_{\alpha} \cdot \delta \mathbf{P} \, dy$$

•••

Οι παραπάνω πίνακες μπορούν εύκολα να οριστούν είτε αναλυτικά είτε αριθμητικά. Το τελικό αποτέλεσμα μετά την συναρμολόγηση των πινάκων των στοιχείων (τοπικοί πίνακες) θα έχουν την συνήθη μορφή:

$$\mathbf{M}\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{Q} \tag{35}$$

Το σχήμα των γενικών Πινάκων M, K και Q, μετά την συναρμολόγηση των τοπικών πινάκων των διαδοχικών πεπερασμένων στοιχείων παίρνει τη μορφή του Σχήματος 7. Να τονιστεί ότι μετά την συναρμολόγηση των τοπικών πινάκων στους πλήρης πίνακες του σώματος οι οριακοί όροι μεταξύ των παρακείμενων στοιχείων θα απαλειφθούν. Έτσι οι μόνοι οριακοί που παραμένουν είναι αυτοί του πρώτου και του τελευταίου κόμβου της δοκού. Όταν το τέλος της δοκού είναι ελεύθερο άκρο (π.χ. άκρη πτερυγίου) οι αντιδράσεις στήριξης θα είναι μηδέν εφόσον στα ελεύθερα άκρα δεν ασκείται κάποιο φορτίο. Επίσης στον πρώτο κόμβο συνήθως οι παραμορφώσεις περιορίζονται (εφαρμόζονται οι συνθήκες Dirichlet) και κατ' επέκταση οριακοί όροι εξαφανίζονται επίσης. Σε κάθε άλλη περίπτωση όπου η δοκός συνδέεται με κάποιο άλλο σώμα θα συμπεριληφθούν οι αντιδράσεις στήριξης από το άλλο σώμα. Τέτοιου είδους αντιδράσεις στήριξης ισοδυναμούν με εξωτερικά φορτία και έτσι μπορούν να συμπεριληφθούν στον πίνακα **Q**. Η εξήγηση της περίπτωσης όπου οριακοί όροι και ότοι πρωτο της δοκού με άλλο σώμα παρουσιάζεται παρακάτω.





Σχήμα 7: Σχηματισμός του συστήματος των πινάκων για ένα σώμα στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων του.

2.2 Δυναμική της πλήρους ανεμογεννήτριας και ανάλυση με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων

Στην προηγούμενη ενότητα, οι εξισώσεις της κατασκευής της δοκού παραγωγίστηκαν για την περίπτωση όπου το σύστημα των συντεταγμένων Oxyz, που είναι δεμένο στη δοκό είναι ακίνητο. Σε αυτή την περίπτωση, η δοκός παραμορφώνεται σε σχέση με το σταθερό σύστημα Oxyz.

Φυσικά στην περίπτωση της ανεμογεννήτριας , οι διάφορες συνιστώσες (π.χ. πτερύγια, άξονας, πύργος) όχι μόνο αλληλοεπιδρούν αλλά υφίστανται και κίνηση από μόνα τους(π.χ. αζιμουθιακή περιστροφή πτερυγίων και βήμα πτερυγίου) . Από την άλλη εφόσον είναι συνδεμένα μεταξύ τους σαν αποτέλεσμα έχει να ακολουθούν και τις κινήσεις των άλλων σωμάτων που είναι συνδεδεμένα (άκαμπτο και ελαστικό σώμα).

Η εμπλοκή διαφορετικών κινήσεων προερχόμενες από τις άλλες συνιστώσες για την κάθε συνιστώσα, σε συνδυασμό με το γεγονός ότι υπάρχουν συγκεκριμένα σημεία σύνδεσης μεταξύ αυτών, όπου φορτία και μετατοπίσεις περνούν από το ένα σώμα στο άλλο ,μας δημιουργεί την ανάγκη για μια γενική αντιμετώπιση του δυναμικού προβλήματος. Κάτω από αυτό το πρόβλημα στις περισσότερες αναλύσεις χρησιμοποιείται η προσέγγιση των πολλαπλών – σωμάτων[1],[15], η οποία θεωρεί κάθε σώμα ξεχωριστά από το άλλο αλλά υποβαλλόμενο σε συγκεκριμένες οριακές κινηματικές συνθήκες και/ή συνθήκες φορτίου από το ελεύθερο σώμα οι οποίες ταιριάζουν στις διαφορετικές συνιστώσες της πλήρους κατασκευής. Στην προσέγγιση των πολλαπλών – σωμάτων Γαυγες όπως έχει οριστεί στην ενότητα 2,1,1.Η ελαστική κίνηση της κάθε συνιστώσας σε σχέση με το δικό του σύστημα καθορίζεται μέσω της σχέσης (1). Όλες οι άλλες κινήσεις επικοινωνούν μέσω κατάλληλων κινηματικών συνθηκών. Έχοντας αυτό κατά νου , το διάνυσμα θέσης $\mathbf{r}_{\rm Gk}$ ενός σημείου στο \mathbf{k} εξάρτημα σε σχέση με ένα αδρανειακό αναφορικό πλαίσιο $O_{\rm G}x_{\rm G}y_{\rm G}z_{\rm G}$ δίνεται από (βλέπε Σχήμα 8):

$$\mathbf{r}_{\mathrm{Gk}} = \mathbf{\rho}_{\mathrm{k}} + \mathbf{A}_{\mathrm{k}} \cdot \mathbf{r}_{\mathrm{k}} \tag{36}$$

όπου \mathbf{p}_k είναι το διάνυσμα θέσης της αρχής Oxyz σε σχέση με ένα σταθερό σύστημα και \mathbf{A}_k είναι ο πίνακας στροφών από το τοπικό σύστημα στο γενικό σύστημα. Η ακριβής μορφή του \mathbf{p}_k και του \mathbf{A}_k εξαρτάται από τις κινηματικές συνθήκες που ισχύουν όταν συνδέεται το σώμα στην πλήρη εγκατάσταση(π.χ. τα πτερύγια στην πλήμνη ή ο άξονας στην κορυφή του πύργου)αλλά επίσης και από τον τύπο των δικών του κινήσεων(π.χ. βήμα των πτερυγίων, περιστροφή του άξονα). Για κάθε σώμα εισάγεται ένας αριθμός από κινηματικούς βαθμούς ελευθερίας (αποτελούμενος από μετατοπίσεις και στροφές) ο οποίος καθορίζει το \mathbf{p}_k και \mathbf{A}_k . Αυτό το σετ των κινηματικών βαθμών ελευθερίας ορίζεται ως \mathbf{q}_k και έτσι προκύπτει ότι $\mathbf{p}_k = \mathbf{p}_k(\mathbf{q}_k;t)$ και $\mathbf{A}_k = \mathbf{A}_k(\mathbf{q}_k,t)$. Ειδικότερα , ο πίνακας \mathbf{q}_k μπορεί να περιέχει και μεγάλες στροφές και μετακινήσεις του σώματος αλλά και κατασκευαστικές παραμορφώσεις (μετατοπίσεις και στροφές) των σωμάτων που είναι συνδεδεμένα στο k σώμα. Για παράδειγμα , τα πτερύγια ακολουθούν την κίνηση του πύργου και έτσι για τα πτερύγια ο πίνακας **ξ** θα περιλαμβάνει τις μετακινήσεις της κορυφής του πύργου όπως φαίνεται στο Σχήμα 9α. Επίσης για τα πτερύγια ο πίνακας **ξ** θα περιλαμβάνει το γαν της πλήμνης , την περιστροφή του άξονα και την περιστροφή του βήματος του πτερυγίου, τα οποία όλα είναι βαθμοί ελευθερίας ελεγχόμενων κινήσεων, αλλά επίσης βασικές κινήσεις (για πλωτές ανεμογεννήτριες) και ταλαντώσεις (για ανεμογεννήτριες με δύο πτερύγια), που και στις δύο περιπτώσεις είναι βαθμοί ελευθερίας των ελεύθερων κινήσεων.(βλέπε Σχήμα 9β). Από την παραπάνω εξήγηση είναι προφανές ότι το ρ_k καθορίζεται από μία σειρά μετατοπίσεων και στροφών των στοιχείων, όπου το A_k καθορίζεται αποκλειστικά από μια σειρά στροφών των στοιχείων το οποίο αποδίδεται από την παρακάτω σχέση:

$$\mathbf{R}_{1}^{q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos q & -\sin q \\ 0 & \sin q & \cos q \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_{2}^{q} = \begin{pmatrix} \cos q & 0 & \sin q \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin q & 0 & \cos q \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_{3}^{q} = \begin{pmatrix} \cos q & -\sin q & 0 \\ \sin q & \cos q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Να τονιστεί επίσης ότι για να επιτευχθεί η σύνδεση μεταξύ των σωμάτων, εκτός των κινηματικών συνθηκών πρέπει να ικανοποιηθούν συνθήκες που σχετίζονται με τα φορτία όπου και θα εξηγηθούν παρακάτω. Έτσι είναι προφανές ότι τα σώματα τα οποία συμβάλλουν στην κινηματική θα λαμβάνουν εσωτερικά φορτία αντίδρασης. Έτσι στο προηγούμενο παράδειγμα ο πύργος θα συμμετέχει στα φορτία της πλήμνης.

Η συνολική επιτάχυνση του k σώματος, εκφράζεται σχέση με το τοπικό σύστημα του ως εξής:

$$\mathbf{A}_{k}^{\mathrm{T}} \cdot \ddot{\mathbf{r}}_{\mathrm{Gk}} = \underbrace{\mathbf{A}_{k}^{\mathrm{T}} \cdot \ddot{\mathbf{p}}_{k}}_{\text{acceleration of the origin}} + \underbrace{\mathbf{A}_{k}^{\mathrm{T}} \cdot \ddot{\mathbf{A}}_{k} \cdot \mathbf{r}_{k}}_{\text{centrifugal acceleration}} + \underbrace{2 \cdot \mathbf{A}_{k}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{A}}_{k} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{k}}_{\text{Coriolis acceleration}} + \ddot{\mathbf{r}}_{k}$$
(37)

Εισάγοντας την εξίσωση (37) στις δυναμικές εξισώσεις της δοκού (7) και (8) ,οι φυγοκεντρικοί και Coriolis όροι των αδρανειακών φορτίων θα εμφανιστούν σαν αποτέλεσμα της χρονικής παραγώγου του **A**_k.

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις όλων των συνιστωσών θα ληφθεί τελικά το πλήρες σύστημα των δυναμικών εξισώσεων πάλι στην μορφή της εξίσωσης (35), σε σχέση με τον εκτεταμένο πίνακα των βαθμών ελευθερίας ο οποίος θα περιέχει και τους **q** βαθμούς ελευθερίας. Επιπλέον, στην εξίσωση (35) το σύστημα της κινούμενης δοκού θα συμβάλλει στους όρους της απόσβεσης προερχόμενη από του αδρανειακούς όρους Coriolis. Αναλυτική παρουσίαση των δυναμικών εξισώσεων της κινούμενης δοκού (συμπεριλαμβανομένων και της προσέγγισης των εξισώσεων κίνησης αλλά και των γραμμικοποιημένων εκφράσεων με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων) ,θα παρουσιαστεί στα επόμενα τμήματα με την προσέγγιση του προβλήματος της πλήρους ανεμογεννήτριας.



Σχήμα 8: Αδρανειακό σύστημα ανεμογεννήτριας και τοπικά συστήματα συντεταγμένων



Σχήμα 9: Υλοποίηση της κινηματικής με βάση την προσέγγιση πολλαπλών - σωμάτων.

2.2.1 Ένωση κινηματικών και δυναμικών συνθηκών

Αρχικά ας θεωρήσουμε ότι δύο σώματα συνδέονται σε ένα σημείο όπως φαίνεται στο Σχήμα 10. Εάν η ένωση είναι τελείως άκαμπτη τότε η μετατόπιση και η περιστροφή στο σημείο σύνδεσης πρέπει να είναι ίδια. Επίσης, η φόρτιση πρέπει να είναι η ίδια. Ο πρώτος περιορισμός ανταποκρίνεται σε κινηματική συνθήκη, ενώ ο δεύτερος σε μια στατική κατάσταση. Να σημειωθεί ότι μπορούμε να προσδιορίσουμε είτε μια στατική είτε μια κινηματική κατάσταση και όχι και τις δύο. Στην πραγματικότητα κάθε κινηματική συνθήκη έχει μια αντίστοιχη στατική συνθήκη που σχετίζεται με αυτή. Έτσι, εάν μια μετατόπιση (ή στροφή) έχει καθοριστεί, τότε η συσχετιζόμενη δύναμη αντίδρασης (ή ροπή) γίνεται μέρος της λύσης και έτσι πρέπει να παραμένει ελεύθερη. Είναι προφανές ότι η αντίδραση εξαρτάται από την τιμή της καθορισμένης μετατόπισης. Αντιθέτως εάν καθοριστεί η δύναμη, τότε η μετατόπιση θα εξαρτάται από εισαγόμενο φορτίο. Έτσι οι συνθήκες εμφανίζονται σε ζευγάρι ζευγάρια και σε κάθε μπορούμε να καθορίσουμε μόνο μια. Στα σημεία σύνδεσης η κατάσταση είναι κάπως διαφορετική επειδή υπάρχουν τουλάχιστον δύο σώματα συνδεδεμένα , καθένα από τα οποία χρειάζεται τις δικές του οριακές συνθήκες στο σημείο σύνδεσης. Επίσης οι ενδείξεις και στις δύο συνθήκες είναι άγνωστες. Ας ορίσουμε η τις μετατοπίσεις και τις στροφές στο σημείο σύνδεσης και Q τα αντίστοιχα φορτία. Θεωρώντας κάθε σώμα χωριστά, είναι πιθανόν να σχηματίσουμε ξεχωριστές λύσεις θέτοντας σαν \P τις κινηματικές συνθήκες για το σώμα 1 και ${f Q}$ τις στατικές συνθήκες του σώματος 2. Η λύση για το σώμα 1 θα παρέχει \mathbf{Q} σαν συνάρτηση του \mathbf{q} ενώ το σώμα 2 θα παρέχει (σαν συνάρτηση του Q. Αυτές οι δύο συνθήκες καθορίζουν τις συνθήκες σύνδεσης που χρειάζονται. Να σημειωθεί ότι κάθε είδους συνδυασμός είναι πιθανός εξασφαλίζοντας όμως ότι το ζευγάρι των συνθηκών είναι χωρισμένο σωστά.

Εάν η σύνδεση δεν είναι άκαμπτη αλλά επιτρέπει την ελεύθερη κίνηση σε συγκεκριμένες κατευθύνσεις, τότε οι συνθήκες στο σημείο σύνδεσης δεν υπόκεινται σε αυτή την συγκεκριμένη κατεύθυνση. Για παράδειγμα, ένας δίπτερος ταλαντευόμενος δρομέας θα μεταδίδει όλα τα φορτία στο σύστημα μετάδοσης εκτός της ροπής ταλάντωσης. Επίσης οι μετατοπίσεις και οι 2 στροφές στο τέλος του συστήματος μετάδοσης θα επικοινωνούν με τα πτερύγια. Όσο η ροπή ταλάντωσης δεν μεταδίδεται μπορεί μόνο να είναι μηδενική και αυτό αντικατοπτρίζεται στην δυναμική εξίσωση όπου καθορίζεται η γωνία ταλάντωσης.

Συγκεκριμένες συνδέσεις εμπλέκουν περισσότερα από δύο πτερύγια. Σε αυτές τις περιπτώσεις να σημειωθεί ότι ενώ οι μετατοπίσεις και οι στροφές δεν πρέπει να προστεθούν, τα φορτία πρέπει. Έτσι εάν το σώμα 1 παρέχει μια μετατόπιση τότε πρέπει να δεχτεί το άθροισμα των ανταποκρινόμενων φορτίων από όλα τα άλλα συνδεδεμένα σώματα.



Σχήμα 10: Υλοποίηση των κινηματικών και δυναμικών συνθηκών σύζευξης.

2.2.2 Κινηματική και δυναμική της κινούμενης δοκού – η γενικευμένη περίπτωση της πλήρους ανεμογεννήτριας

Προκειμένου να διευκολυνθεί η εφαρμογή του κώδικα για συστήματα με διάφορες συνδέσεις και βαθμούς ελευθερίας προερχόμενους από τις κινήσεις των σωμάτων, το σετ όλων των κινηματικών βαθμών ελευθερίας που εμπλέκονται στην σύνδεση, οι μεταβλητές ελέγχου και οι κινήσεις των σωμάτων εισάγονται σαν ένα επιπλέον διάνυσμα το οποίο συμβολίζουμε ως **q**. Ως εκ τούτου, πρέπει να οριστούν καινούριες εξισώσεις για τους **q**^s βαθμούς ελευθερίας. Να σημειωθεί ότι το **q** θα περιέχει όχι μόνο τους ελαστικούς βαθμούς ελευθερίας του σώματος όπως π.χ. yaw ,teeter, βήμα πτερυγίου και την περιστροφή του αζιμούθιου. Εάν ένα συγκεκριμένο q_i είναι ένας ελαστικός βαθμός ελευθερίας **u**_p τότε απλά θέτουμε $q_i \equiv u_p$.

Διαφορετικά χρειάζεται μια επιπλέον εξίσωση. Η συνθήκη για μηδενική ροπή για την γωνία teeter είναι ένα τέτοιο παράδειγμα. Άλλο παράδειγμα είναι η γωνία βήματος του πτερυγίου η οποία καθορίζεται από το σύστημα ελέγχου. Σε αυτή την περίπτωση, η εξίσωση που χρειάζεται θα αντιστοιχεί στην εξίσωση ελέγχου(ή στις εξισώσεις).

H εισαγωγή του διανύσματος **q**, καθορίζει την μορφή του $\mathbf{\rho}_k$ και του \mathbf{A}_k . Αρχίζοντας από το γενικό σύστημα της k συνιστώσας, μία σειρά μετατοπίσεων και στροφών του συστήματος θα μας φέρει στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων και αντίστροφα: $\mathbf{r}_{Gk} = \mathbf{R}_*^{q_k^i} \cdots \mathbf{R}_*^{q_m^k} \cdot \mathbf{P}_*^{q_{n+1}^k} + \mathbf{R}_*^{q_{n+2}^k} \cdots \mathbf{R}_*^{q_m^k} \cdot \left(\mathbf{P}_*^{q_{m+1}^k} + \cdots \left(\cdots + \mathbf{R}_*^{q_{r+2}^k} \cdots \mathbf{R}_*^{q_r^k} \cdot \left(\mathbf{r}_0 + \mathbf{S}^0 \cdot \mathbf{u} + \mathbf{S}^1 \cdot \mathbf{u}'\right) \cdots\right)$ (38) Στην παραπάνω σχέση, τα $\mathbf{R}_{*}^{q_{i}^{k}}$ και $\mathbf{P}_{*}^{q_{i}^{k}}$ αντιπροσωπεύουν τους πίνακες των στροφών και των μετακινήσεων του κάθε στοιχείου, ορισμένα για μια δεδομένη κατεύθυνση *=1,2,3 (όπου το 1 αντιστοιχεί στον x άξονα, το 2 αντιστοιχεί στον y άξονα και το 3 στον z άξονα) και για μια δοσμένη γωνία ή μετατόπιση q_{i}^{k} . Στην (38), μερικά από τα q_{i} , αντιστοιχούν σε σταθερές γωνίες στροφής ή μετατοπίσεις (π.χ. titl της πλήμνης). Έτσι, από τις r γωνίες/μετατοπίσεις που παρουσιάζονται στην (38) μόνο μερικές ανταποκρίνονται σε βαθμούς ελευθερίας του προβλήματος. Από την (38) είναι προφανές ότι,

$$\mathbf{A}_{k} = \mathbf{R}_{*}^{\mathbf{q}_{1}^{k}} \cdots \mathbf{R}_{*}^{\mathbf{q}_{n}^{k}} \cdot \mathbf{R}_{*}^{\mathbf{q}_{n+2}^{k}} \cdots \mathbf{R}_{*}^{\mathbf{q}_{m}^{k}} \cdot \mathbf{R}_{*}^{\mathbf{q}_{n+2}^{k}} \cdots \mathbf{R}_{*}^{\mathbf{q}_{\ell}^{k}} \cdot \mathbf{R}_{*}^{\mathbf{q}_{\ell+2}^{k}} \cdots \mathbf{R}_{*}^{\mathbf{q}_{r}^{k}}$$
(199)

$$\boldsymbol{\rho}_{k} = \mathbf{R}_{*}^{q_{1}^{k}} \cdots \mathbf{R}_{*}^{q_{n}^{k}} \cdot \mathbf{P}_{*}^{q_{n+1}^{k}} + \mathbf{R}_{*}^{q_{n+2}^{k}} \cdots \mathbf{R}_{*}^{q_{m}^{k}} \cdot \left(\mathbf{P}_{*}^{q_{m+1}^{k}} + \cdots \left(\cdots \mathbf{R}_{*}^{q_{\ell}^{k}} \cdot \mathbf{P}_{*}^{q_{\ell+1}^{k}}\right)\cdots\right)$$
(40)

Παραδείγματος χάρη , η περίπτωση του k πτερυγίου παρουσιάζεται για μια τυπική τρίπτερη ανεμογεννήτρια:

$$\mathbf{r}_{Gk} = \mathbf{R}_{1}^{90} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ h_{\text{tower}} \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{P}_{1}^{q_{1}} + \mathbf{P}_{2}^{q_{2}} + \mathbf{P}_{3}^{q_{3}} + \mathbf{R}_{1}^{q_{4}} \cdot \mathbf{R}_{3}^{q_{6}} \cdot \mathbf{R}_{2}^{q_{5}} \cdot \mathbf{R}_{3}^{90} \cdot \mathbf{R}_{1}^{q_{7}} \cdot \left(\begin{pmatrix} h_{\text{shaft-offset}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{R}_{3}^{-q_{8}} \cdot \mathbf{R}_{3}^{-q_{8}} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ h_{shaft} \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{P}_{1}^{q_{9}} + \mathbf{P}_{2}^{q_{10}} + \mathbf{P}_{3}^{q_{11}} + \mathbf{R}_{1}^{q_{12}} \cdot \mathbf{R}_{3}^{q_{13}} \cdot \mathbf{R}_{2}^{-90} \cdot \mathbf{R}_{3}^{90} \cdot \mathbf{R}_{3}^{90} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ h_{hub} \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{R}_{2}^{q_{15}} \cdot \mathbf{R}_{1}^{q_{16}} \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{3}^{q_{17}} \cdot \mathbf{R}_{1}^{q_{18}} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{0} \\ \mathbf{y}_{0} \\ \mathbf{z}_{0} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{r}_{k} \\ \mathbf{z}_{0} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \right)$$

 $\dot{\mathbf{A}}_{k} = \mathbf{R}_{1}^{90} \cdot \mathbf{R}_{1}^{q_{4}} \cdot \mathbf{R}_{3}^{q_{6}} \cdot \mathbf{R}_{2}^{q_{5}} \cdot \mathbf{R}_{3}^{90} \cdot \mathbf{R}_{1}^{q_{7}} \cdot \mathbf{R}_{3}^{-q_{8}} \cdot \mathbf{R}_{1}^{q_{12}} \cdot \mathbf{R}_{3}^{q_{14}} \cdot \mathbf{R}_{2}^{q_{13}} \cdot \mathbf{R}_{3}^{-90} \cdot \mathbf{R}_{2}^{90} \cdot \mathbf{R}_{3}^{\varphi_{0}} \cdot \mathbf{R}_{2}^{q_{15}} \cdot \mathbf{R}_{1}^{q_{16}} \cdot \mathbf{R}_{3}^{q_{17}} \cdot \mathbf{R}_{1}^{q_{18}}$

$$\begin{split} \mathbf{\rho}_{k} &= \mathbf{R}_{1}^{90} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{h}_{tower} \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{P}_{1}^{q_{1}} + \mathbf{P}_{2}^{q_{2}} + \mathbf{P}_{3}^{q_{3}} \right) + \\ &+ \mathbf{R}_{1}^{90} \cdot \mathbf{R}_{1}^{q_{4}} \cdot \mathbf{R}_{3}^{q_{6}} \cdot \mathbf{R}_{2}^{q_{5}} \cdot \mathbf{R}_{3}^{90} \cdot \mathbf{R}_{1}^{q_{7}} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{h}_{shaft-offset} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \\ &+ \mathbf{R}_{1}^{90} \cdot \mathbf{R}_{1}^{q_{4}} \cdot \mathbf{R}_{3}^{q_{6}} \cdot \mathbf{R}_{2}^{q_{5}} \cdot \mathbf{R}_{3}^{90} \cdot \mathbf{R}_{1}^{q_{7}} \cdot \mathbf{R}_{3}^{-q_{8}} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{h}_{shaft} \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{P}_{1}^{q_{9}} + \mathbf{P}_{2}^{q_{10}} + \mathbf{P}_{3}^{q_{10}} + \mathbf{P}_{3}^{q_{11}} \right) + \\ &+ \mathbf{R}_{1}^{90} \cdot \mathbf{R}_{1}^{q_{4}} \cdot \mathbf{R}_{3}^{q_{6}} \cdot \mathbf{R}_{2}^{q_{5}} \cdot \mathbf{R}_{3}^{90} \cdot \mathbf{R}_{1}^{q_{7}} \cdot \mathbf{R}_{3}^{-q_{8}} \cdot \mathbf{R}_{1}^{q_{12}} \cdot \mathbf{R}_{3}^{q_{13}} \cdot \mathbf{R}_{2}^{q_{13}} \cdot \mathbf{R}_{3}^{-90} \cdot \mathbf{R}_{2}^{90} \cdot \mathbf{R}_{3}^{90} \cdot \left(\begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{h}_{hub} \\ \mathbf{h}_{hub} \\ 0 \end{array} \right) + \\ &\mathbf{R}_{1}^{90} \cdot \mathbf{R}_{1}^{q_{4}} \cdot \mathbf{R}_{3}^{q_{6}} \cdot \mathbf{R}_{2}^{q_{5}} \cdot \mathbf{R}_{3}^{90} \cdot \mathbf{R}_{1}^{q_{7}} \cdot \mathbf{R}_{3}^{-q_{8}} \cdot \mathbf{R}_{1}^{q_{12}} \cdot \mathbf{R}_{3}^{q_{14}} \cdot \mathbf{R}_{3}^{q_{13}} \cdot \mathbf{R}_{3}^{-90} \cdot \mathbf{R}_{2}^{90} \cdot \mathbf{R}_{3}^{90} \cdot \mathbf{R}_{1}^{q_{16}} \cdot \mathbf{R}_{3}^{q_{17}} \cdot \mathbf{R}_{1}^{q_{18}} \cdot \left(\begin{array}{c} \mathbf{x}_{0} \\ \mathbf{y}_{0} \\ \mathbf{z}_{0} \end{array} \right) \\ &+ \\ &\mathbf{R}_{1}^{90} \cdot \mathbf{R}_{1}^{q_{4}} \cdot \mathbf{R}_{3}^{q_{6}} \cdot \mathbf{R}_{2}^{q_{5}} \cdot \mathbf{R}_{3}^{90} \cdot \mathbf{R}_{1}^{q_{7}} \cdot \mathbf{R}_{3}^{-q_{8}} \cdot \mathbf{R}_{1}^{q_{12}} \cdot \mathbf{R}_{3}^{q_{14}} \cdot \mathbf{R}_{3}^{-90} \cdot \mathbf{R}_{2}^{90} \cdot \mathbf{R}_{3}^{90} \cdot \mathbf{R}_{1}^{q_{16}} \cdot \mathbf{R}_{3}^{q_{17}} \cdot \mathbf{R}_{1}^{q_{18}} \cdot \left(\begin{array}{c} \mathbf{x}_{0} \\ \mathbf{y}_{0} \\ \mathbf{y}_{0} \\ \mathbf{z}_{0} \end{array} \right) \\ &+ \\ &\mathbf{R}_{1}^{90} \cdot \mathbf{R}_{1}^{q_{4}} \cdot \mathbf{R}_{3}^{q_{6}} \cdot \mathbf{R}_{2}^{q_{5}} \cdot \mathbf{R}_{3}^{90} \cdot \mathbf{R}_{1}^{q_{7}} \cdot \mathbf{R}_{3}^{-q_{8}} \cdot \mathbf{R}_{1}^{q_{12}} \cdot \mathbf{R}_{3}^{q_{14}} \cdot \mathbf{R}_{3}^{q_{13}} \cdot \mathbf{R}_{3}^{-90} \cdot \mathbf{R}_{2}^{90} \cdot \mathbf{R}_{3}^{90} \cdot \mathbf{R}_{1}^{q_{16}} \cdot \mathbf{R}_{3}^{q_{17}} \cdot \mathbf{R}_{1}^{q_{18}} \cdot \left(\begin{array}{c} \mathbf{x}_{0} \\ \mathbf{x}_{0} \\ \mathbf{x}_{0} \end{array} \right) \\ &+ \\ &\mathbf{R}_{1}^{90} \cdot \mathbf{R}_{1}^{q_{14}} \cdot \mathbf{R}_{3}^{q_{16}} \cdot \mathbf{R}_{3}^{q_{16}} \cdot \mathbf{R}_{1}^{q_{16}} \cdot \mathbf{R}_{3}^{q_{16}} \cdot \mathbf{R}_{1}^{q_{16}} \cdot \mathbf{R}_{1}^{q_{16}} \cdot \mathbf{R}_{1}^{q_{16}} \cdot \mathbf{R}_{1}^{q_{16}} \cdot \mathbf{R}_{$$

Το Σχήμα 12 και ο Πίνακας 1 παρουσιάζουν αναλυτικά τις διάφορες μετατοπίσεις και στροφές και την αλληλουχία τους, που οδηγούν από το γενικό (αδρανειακό) πλαίσιο στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων του πτερυγίου.

Είναι φανερό από τα παραπάνω ότι ο πίνακας \mathbf{A}_k γράφεται σαν ένα προϊόν διαδοχικών μητρώων στροφής στοιχείου, στην μορφή:

$$\mathbf{A}_{k} = \mathbf{R}_{*}^{q_{1}} \cdot \mathbf{R}_{*}^{q_{2}} \cdot \mathbf{R}_{*}^{q_{3}} \cdot \mathbf{R}_{*}^{q_{4}} \cdots \mathbf{R}_{*}^{q_{m}}$$

$$\tag{41}$$

Από την άλλη το ρ_k γράφεται ως το άθροισμα των όρων στην ακόλουθη μορφή:

$$\mathbf{R}_{*}^{q_{1}} \cdot \mathbf{R}_{*}^{q_{2}} \cdot \mathbf{R}_{*}^{q_{3}} \cdot \mathbf{R}_{*}^{q_{4}} \cdots \mathbf{R}_{*}^{q_{m}} \cdot \mathbf{P}_{*}^{q_{m+1}}$$

$$\tag{42}$$

Οι πρώτης και δεύτερης τάξης παράγωγοι ως προς τον χρόνο του πίνακα A_k θα δοθούν από την ακόλουθη έκφραση:

$$\dot{\mathbf{A}}_{k} = \frac{\partial \mathbf{R}_{*}^{q_{1}}}{\partial q_{1}} \cdot \mathbf{R}_{*}^{q_{2}} \cdots \mathbf{R}_{*}^{q_{m}} \cdot \dot{q}_{1} + \mathbf{R}_{*}^{q_{1}} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}_{*}^{q_{2}}}{\partial q_{2}} \cdots \mathbf{R}_{*}^{q_{m}} \cdot \dot{q}_{2} + \dots + \mathbf{R}_{*}^{q_{1}} \cdot \mathbf{R}_{*}^{q_{2}} \cdots \frac{\partial \mathbf{R}_{*}^{q_{m}}}{\partial q_{m}} \cdot \dot{q}_{m}$$
(43)

$$\begin{split} \ddot{\mathbf{A}}_{k} &= \frac{\partial \mathbf{R}_{*}^{q_{1}}}{\partial q_{1}} \cdot \mathbf{R}_{*}^{q_{2}} \cdots \mathbf{R}_{*}^{q_{m}} \cdot \ddot{\mathbf{q}}_{1} + \mathbf{R}_{*}^{q_{1}} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}_{*}^{q_{2}}}{\partial q_{2}} \cdots \mathbf{R}_{*}^{q_{m}} \cdot \ddot{\mathbf{q}}_{2} + \cdots + \mathbf{R}_{*}^{q_{1}} \cdot \mathbf{R}_{*}^{q_{2}} \cdots \frac{\partial \mathbf{R}_{*}^{q_{m}}}{\partial q_{m}} \cdot \ddot{\mathbf{q}}_{m} + \\ &+ \frac{\partial^{2} \mathbf{R}_{*}^{q_{1}}}{\partial q_{1}^{2}} \cdot \mathbf{R}_{*}^{q_{2}} \cdots \mathbf{R}_{*}^{q_{m}} \cdot \dot{\mathbf{q}}_{1}^{2} + \frac{\partial \mathbf{R}_{*}^{q_{2}}}{\partial q_{1}} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}_{*}^{q_{2}}}{\partial q_{2}} \cdots \mathbf{R}_{*}^{q_{m}} \cdot \dot{\mathbf{q}}_{1} \cdot \dot{\mathbf{q}}_{2} + \cdots + \frac{\partial \mathbf{R}_{*}^{q_{1}}}{\partial q_{1}} \cdot \mathbf{R}_{*}^{q_{2}} \cdots \frac{\partial \mathbf{R}_{*}^{q_{m}}}{\partial q_{m}} \cdot \dot{\mathbf{q}}_{1} \cdot \dot{\mathbf{q}}_{m} + \\ &\vdots & \vdots \\ &+ \frac{\partial \mathbf{R}_{*}^{q_{1}}}{\partial q_{1}} \cdot \mathbf{R}_{*}^{q_{2}} \cdots \frac{\partial \mathbf{R}_{*}^{q_{m}}}{\partial q_{m}} \cdot \dot{\mathbf{q}}_{1} \cdot \dot{\mathbf{q}}_{m} + \mathbf{R}_{*}^{q_{1}} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}_{*}^{q_{2}}}{\partial q_{2}} \cdots \frac{\partial \mathbf{R}_{*}^{q_{m}}}{\partial q_{m}} \cdot \dot{\mathbf{q}}_{2} \cdot \dot{\mathbf{q}}_{m} + \cdots + \mathbf{R}_{*}^{q_{1}} \cdot \mathbf{R}_{*}^{q_{2}} \cdots \frac{\partial^{2} \mathbf{R}_{*}^{q_{m}}}{\partial q_{m}^{2}} \cdot \dot{\mathbf{q}}_{m}^{2} + \\ &+ \frac{\partial \mathbf{R}_{*}^{q_{1}}}{\partial q_{1}} \cdot \mathbf{R}_{*}^{q_{2}} \cdots \frac{\partial \mathbf{R}_{*}^{q_{m}}}{\partial q_{m}} \cdot \dot{\mathbf{q}}_{1} \cdot \dot{\mathbf{q}}_{m} + \mathbf{R}_{*}^{q_{1}} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}_{*}^{q_{2}}}{\partial q_{2}} \cdots \frac{\partial \mathbf{R}_{*}^{q_{m}}}{\partial q_{m}} \cdot \dot{\mathbf{q}}_{2} \cdot \dot{\mathbf{q}}_{m} + \cdots + \mathbf{R}_{*}^{q_{1}} \cdot \mathbf{R}_{*}^{q_{2}} \cdots \frac{\partial^{2} \mathbf{R}_{*}^{q_{m}}}{\partial q_{m}^{2}} \cdot \dot{\mathbf{q}}_{m}^{2} + \\ & \end{array}$$

Με παρόμοιο τρόπο η δεύτερης τάξης παράγωγος του ρ_k θα γραφτεί σαν το άθροισμα των παρακάτω εκφράσεων:

$$\frac{\partial \mathbf{R}_{*}^{q_{1}}}{\partial q_{1}} \cdot \mathbf{R}_{*}^{q_{2}} \cdots \mathbf{R}_{*}^{q_{m}} \cdot \mathbf{P}_{*}^{q_{m+1}} \cdot \ddot{\mathbf{q}}_{1} + \dots + \mathbf{R}_{*}^{q_{1}} \cdot \mathbf{R}_{*}^{q_{2}} \cdots \frac{\partial \mathbf{R}_{*}^{q_{m}}}{\partial q_{m}} \cdot \mathbf{P}_{*}^{q_{m+1}} \cdot \ddot{\mathbf{q}}_{m} + \\
\frac{\partial^{2} \mathbf{R}_{*}^{q_{1}}}{\partial q_{1}^{2}} \cdot \mathbf{R}_{*}^{q_{2}} \cdots \mathbf{R}_{*}^{q_{m}} \cdot \mathbf{P}_{*}^{q_{m+1}} \cdot \dot{\mathbf{q}}_{1}^{2} + \dots + \frac{\partial \mathbf{R}_{*}^{q_{1}}}{\partial q_{1}} \cdot \mathbf{R}_{*}^{q_{2}} \cdots \frac{\partial \mathbf{R}_{*}^{q_{m}}}{\partial q_{m}} \cdot \mathbf{P}_{*}^{q_{m+1}} \cdot \dot{\mathbf{q}}_{1} \cdot \dot{\mathbf{q}}_{m} + \\
\vdots & \vdots \\
\frac{\partial \mathbf{R}_{*}^{q_{1}}}{\partial q_{1}} \cdot \mathbf{R}_{*}^{q_{2}} \cdots \frac{\partial \mathbf{R}_{*}^{q_{m}}}{\partial q_{m}} \cdot \mathbf{P}_{*}^{q_{m+1}} \cdot \dot{\mathbf{q}}_{1} \cdot \dot{\mathbf{q}}_{m} + \dots + \mathbf{R}_{*}^{q_{1}} \cdot \mathbf{R}_{*}^{q_{2}} \cdots \frac{\partial^{2} \mathbf{R}_{*}^{q_{m}}}{\partial q_{m}^{2}} \cdot \mathbf{P}_{*}^{q_{m+1}} \cdot \dot{\mathbf{q}}_{m}^{2} + (45) \\
\mathbf{R}_{*}^{q_{1}} \cdot \mathbf{R}_{*}^{q_{2}} \cdots \mathbf{R}_{*}^{q_{m}} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}_{*}^{q_{m+1}}}{\partial q_{m+1}} \cdot \ddot{\mathbf{q}}_{m+1} + \\
\mathbf{R}_{*}^{q_{1}} \cdot \mathbf{R}_{*}^{q_{2}} \cdots \mathbf{R}_{*}^{q_{m}} \cdot \frac{\partial^{2} \mathbf{P}_{*}^{q_{m+1}}}{\partial q_{m+1}^{2}} \cdot \dot{\mathbf{q}}_{m+1}^{2} + \\
\frac{\partial \mathbf{R}_{*}^{q_{1}}}{\partial q_{1}} \cdot \mathbf{R}_{*}^{q_{2}} \cdots \mathbf{R}_{*}^{q_{m}} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}_{*}^{q_{m+1}}}{\partial q_{m+1}^{2}} \cdot \dot{\mathbf{q}}_{m+1}^{2} + \dots + \mathbf{R}_{*}^{q_{1}} \cdot \mathbf{R}_{*}^{q_{2}} \cdots \frac{\partial \mathbf{R}_{*}^{q_{m}}}{\partial q_{m}}} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}_{*}^{q_{m+1}}}{\partial q_{m+1}} \cdot \dot{\mathbf{q}}_{m+1} + \\
\frac{\partial \mathbf{R}_{*}^{q_{1}}}{\partial q_{1}} \cdot \mathbf{R}_{*}^{q_{2}} \cdots \mathbf{R}_{*}^{q_{m}} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}_{*}^{q_{m+1}}}{\partial q_{m+1}^{2}} \cdot \dot{\mathbf{q}}_{m+1}^{2} + \dots + \mathbf{R}_{*}^{q_{1}} \cdot \mathbf{R}_{*}^{q_{2}} \cdots \frac{\partial \mathbf{R}_{*}^{q_{m}}}{\partial q_{m}}} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}_{*}^{q_{m+1}}}{\partial q_{m+1}} \cdot \dot{\mathbf{q}}_{m} \cdot \dot{\mathbf{q}}_{m+1} + \\
\frac{\partial \mathbf{R}_{*}^{q_{1}}}{\partial q_{1}} \cdot \mathbf{R}_{*}^{q_{2}} \cdots \mathbf{R}_{*}^{q_{m}} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}_{*}^{q_{m+1}}}{\partial q_{m+1}^{q_{m+1}}} \cdot \dot{\mathbf{q}}_{1} \cdot \dot{\mathbf{q}}_{m+1} + \dots + \mathbf{R}_{*}^{q_{1}} \cdot \mathbf{R}_{*}^{q_{2}} \cdots \frac{\partial \mathbf{R}_{*}^{q_{m}}}{\partial q_{m}} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}_{*}^{q_{m+1}}}{\partial q_{m+1}} \cdot \dot{\mathbf{q}}_{m} \cdot \dot{\mathbf{q}}_{m+1} + \\
\frac{\partial \mathbf{R}_{*}^{q_{1}}}{\partial q_{1}} \cdot \mathbf{R}_{*}^{q_{2}} \cdots \mathbf{R}_{*}^{q_{m}} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}_{*}^{q_{m+1}}}{\partial q_{m+1}^{q_{m+1}}} \cdot \dot{\mathbf{q}}_{1} \cdot \dot{\mathbf{q}}_{m+1} + \dots + \\
\frac{\partial \mathbf{R}_{*}^{q_{1}}}{\partial q_{1}} \cdot \mathbf{R}_{*}^{q_{2}} \cdots \mathbf{R}_{*}^{q_{1}} \cdot \dot{\mathbf$$

Είναι προφανές ότι η παραπάνω έκφραση μπορεί να γενικευθεί σε αυθαίρετες διατάξεις ανεξάρτητα με το παράδειγμα που παρουσιάστηκε στο Σχήμα 12 και στον Πίνακα 1, εφόσον έχει οριστεί η ακολουθία των στροφών και των μετατοπίσεων.

Έτσι για παράδειγμα η επιτάχυνση σε σχέση με το σταθερό σύστημα του σώματος δίνεται από την παρακάτω έκφραση:

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \ddot{\mathbf{r}}_{\mathrm{G}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \ddot{\boldsymbol{\rho}} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \ddot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{r} + 2 \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{A}} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \ddot{\mathbf{r}}$$

Ως εκ τούτου, με σκοπό να καθορίσουμε την επιτάχυνση ενός σημείου πάνω στη κινούμενη δοκό πρέπει να υπολογιστούν οι πίνακες $A^{T} \cdot \ddot{p}$, $A^{T} \cdot \dot{A}$, $A^{T} \cdot \ddot{A}$. Η διαδικασία γραμμικοποίησης των πινάκων παρουσιάζεται στην παράγραφο 2,2,5.

Σε αυτό το κομμάτι παρουσιάζονται οι αλλαγές που έγιναν στον κώδικα στην διπλωματική.

Η πρώτη αλλαγή που έγινε στο κατασκευαστικό κομμάτι είναι η προσθήκη γωνίας κώνου του δίσκου ορμής με το επίπεδο του πτερυγίου όπου στον Πίνακα 1 αντιστοιχεί στην στροφή q₁₆.

Έπειτα προστέθηκαν οι συντεταγμένες, αρχής και τέλους, του στοιχείου κάθε πτερυγίου στους άξονες Χ και Ζ που καθορίζουν την θέση του στο χώρο αφού πλέον δεν είναι ευθύ αλλά κυρτό με prebend και sweep.Τα σημεία αυτά χρησιμοποιήθηκαν για να βρεθούν και οι γωνίες $arphi_{sweep}$ και $arphi_{prebend}$ που αντιστοιχούν στις στροφές που έγιναν για να φτάσουμε στη καινούρια θέση του στοιχείου στο χώρο και αφού πλέον έχουμε τις δυο γωνίες(στροφές) μπορούμε να βρούμε τα μητρώα R_3^{sweep} και $R_1^{prebend}$. Η αρχή κάθε στοιχείου αποτελεί τις μετατοπίσεις x₀,z₀ στο διάνυσμα θέσης του τυχαίου σημείου και έτσι πλέον η εξίσωση (36) είναι πλήρως ορισμένη για την νέα γεωμετρία. Για να υπολογιστούν τα μητρώα στροφών και μετατοπίσεων οι ταχύτητες και οι επιταχύνσεις τους αλλά και οι παράγωγοι των πινάκων αυτών, που θα χρησιμοποιηθούν αργότερα στην γραμμικοποίηση για την επίλυση της ευστάθειας, έγιναν τροποποιήσεις και προσθήκες σε διάφορες υπορουτίνες του κώδικα όπως η ROTMAT_el και ROTMATP_el. Εδώ θα πρέπει να τονιστεί ότι μία πολύ σημαντική αλλαγή που έγινε είναι ότι ενώ στον παλιό κώδικα οι πίνακες στροφών και μετατοπίσεων ήταν συναρτήσει μόνο του σώματος, πλέον είναι συναρτήσει και του σώματος αλλά και του στοιχείου γιατί αλλάζουν από στοιχείο σε στοιχείο σε αντίθεση με το ευθύ πτερύγιο που ήταν ίδιοι καθ' όλο το μήκος του. Να τονιστεί ότι οι νέες προσθήκες είναι σταθερές μετατοπίσεις και στροφές και αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να μην επηρεάζεται η διαδικασία εύρεσης των παραγώγων των παραπάνω πινάκων που είναι απαραίτητοι για την επίλυση της ευστάθειας. Παρόλα αυτά λόγω της καινούριας γεωμετρίας επηρεάζεται το αεροδυναμικό κομμάτι όπου θα αναφερθούμε αναλυτικά στην επόμενη ενότητα.









* x

rotation / translation	axis	type
90 degs	х	Ευθυγράμμιση άξονα πύργου με τον άξονα γ
h _{tower}	У	Ύψος πύργου
q ₁	x	Ελαστική μετατόπιση στην κορυφή του πύργου
q ₂	У	Ελαστική μετατόπιση στην κορυφή του πύργου
q ₃	Z	Ελαστική μετατόπιση στην κορυφή του πύργου
Q ₄	x	Ελαστική περιστροφή στην κορυφή του πύργου
q ₅	У	Ελαστική περιστροφή στην κορυφή του πύργου
Q ₆	Z	Ελαστική περιστροφή στην κορυφή του πύργου
90 degs	Z	Ευθυγράμμιση άξονα μετάδοσης με τον άξονα γ
q ₇	x	Γωνία Yaw
h _{shaft-offset}	х	Εκκεντρότητα μεταξύ άξονα μετάδοσης και κορυφής του πύργου
q ₈	Z	Κλίση του άξονα μετάδοσης
h _{shaft}	У	Μήκος άξονα μετάδοσης
q ₉	х	Ελαστική μετατόπιση στο τέλος του άξονα μετάδοσης
q ₁₀	У	Ελαστική μετατόπιση στο τέλος του άξονα μετάδοσης
q ₁₁	Z	Ελαστική μετατόπιση στο τέλος του άξονα μετάδοσης
q ₁₂	х	Ελαστική περιστροφή στο τέλος του άξονα μετάδοσης
q ₁₃	У	Ελαστική περιστροφή στο τέλος του άξονα μετάδοσης
Q14	Z	Ελαστική περιστροφή στο τέλος του άξονα μετάδοσης
-90 degs	Z	Ευθυγράμμιση άξονα πτερυγίου με τον άξονα γ
90 degs	У	Ευθυγράμμιση άξονα περιστροφής με τον άξονα z
φ ₀	Z	Αρχικό αζιμούθιο του πτερύγιου
h _{hub}	У	Εκκεντρότητα της πλήμνης
q ₁₅	У	Γωνία βήματος του πτερυγίου
q ₁₆	x	Γωνία κώνου του δίσκου ορμής με το επίπεδο του πτερυγίου
q ₁₇	Z	Γωνία sweep του πτερυγίου
q ₁₈	x	Γωνία prebend του πτερυγίου
х0	x	Μετατόπιση στοιχείου κατά τον άξονα x (Αρχική συντεταγμένη στοιχείου)
YO	У	Μετατόπιση στοιχείου κατά τον άξονα γ(Αρχική συντεταγμένη στοιχείου)
ZO	z	Μετατόπιση στοιχείου κατά τον άξονα z(Αρχική συντεταγμένη στοιχείου)

Πίνακας 1: Αλληλουχία των στροφών και μετατοπίσεων από το γενικό στο τοπικό σύστημα.

2.2.3 Προσέγγιση του πλήρους συστήματος της ανεμογεννήτριας με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (38) στην (33), προκύπτει το τελικό σύστημα των δυναμικών εξισώσεων του k σώματος:

$$\frac{\int_{A}^{(\rho dA)} \mathbf{H}_{0} \cdot \mathbf{A}_{k}^{T} \cdot \ddot{\mathbf{p}}_{k}^{T} + \frac{\int_{A}^{(\rho dA)} \mathbf{H}_{0} \cdot \mathbf{A}_{k}^{T} \cdot \ddot{\mathbf{A}}_{k} \cdot (\mathbf{r}_{0} + \mathbf{S}^{0} \cdot \mathbf{u}_{ek} + \mathbf{S}^{1} \cdot \mathbf{u}_{ek}') + \frac{\int_{A}^{(\rho dA)} \mathbf{H}_{0} \cdot 2 \cdot \mathbf{A}_{k}^{T} \cdot \dot{\mathbf{A}}_{k} \cdot (-\mathbf{S}^{0} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{ek} + \mathbf{S}^{1} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{ek}') + \frac{\int_{A}^{(\rho dA)} \mathbf{H}_{0} \cdot 2 \cdot \mathbf{A}_{k}^{T} \cdot \dot{\mathbf{A}}_{k} \cdot (-\mathbf{S}^{0} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{ek} + \mathbf{S}^{1} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{ek}') + \frac{\int_{A}^{(\rho dA)} \mathbf{H}_{0} \cdot (-\mathbf{S}^{0} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{ek} + \mathbf{S}^{1} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{ek}') - \frac{\int_{A}^{(\rho dA)} \mathbf{H}_{1} \cdot \mathbf{A}_{k}^{T} \cdot \ddot{\mathbf{p}}_{k}' - \frac{\int_{A}^{(\rho dA)} \mathbf{H}_{1} \cdot \mathbf{A}_{k}^{T} \cdot \ddot{\mathbf{A}}_{k} \cdot (\mathbf{r}_{0} + \mathbf{S}^{0} \cdot \mathbf{u}_{ek} + \mathbf{S}^{1} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{ek}') - \frac{\int_{A}^{(\rho dA)} \mathbf{H}_{1} \cdot 2 \cdot \mathbf{A}_{k}^{T} \cdot \dot{\mathbf{A}}_{k} \cdot (-\mathbf{S}^{0} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{ek} + \mathbf{S}^{1} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{ek}') - \frac{\int_{A}^{(\rho dA)} \mathbf{H}_{1} \cdot 2 \cdot \mathbf{A}_{k}^{T} \cdot \dot{\mathbf{A}}_{k} \cdot (-\mathbf{S}^{0} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{ek} + \mathbf{S}^{1} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{ek}') - \frac{\int_{A}^{(\rho dA)} \mathbf{H}_{1} \cdot (-\mathbf{S}^{0} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{ek} + \mathbf{S}^{1} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{ek}') - \frac{\int_{A}^{(\rho dA)} \mathbf{H}_{1} \cdot (-\mathbf{S}^{0} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{ek} + \mathbf{S}^{1} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{ek}') - \frac{\int_{A}^{(\rho dA)} \mathbf{H}_{1} \cdot (-\mathbf{S}^{0} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{ek} + \mathbf{S}^{1} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{ek}') - \frac{\int_{A}^{(\rho dA)} \mathbf{H}_{1} \cdot (-\mathbf{S}^{0} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{ek} + \mathbf{S}^{1} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{ek}') - \frac{\int_{A}^{(\rho dA)} \mathbf{H}_{1} \cdot (-\mathbf{S}^{0} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{ek} + \mathbf{S}^{1} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{ek}') - \frac{\int_{A}^{(\rho dA)} \mathbf{H}_{1} \cdot (-\mathbf{S}^{0} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{ek} + \mathbf{S}^{1} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{ek}') - \frac{\int_{A}^{(\rho dA)} \mathbf{H}_{1} \cdot (-\mathbf{S}^{0} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{ek}' + \mathbf{S}^{1} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{ek}') - \frac{\int_{A}^{(\rho dA)} \mathbf{H}_{1} \cdot (-\mathbf{S}^{0} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{ek}' + \mathbf{S}^{1} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{ek}') - \frac{\int_{A}^{(\rho dA)} \mathbf{H}_{1} \cdot (-\mathbf{S}^{0} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{ek}' + \mathbf{S}^{1} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{ek}') - \frac{\int_{A}^{(\rho dA)} \mathbf{H}_{1} \cdot (-\mathbf{S}^{0} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{ek}' + \mathbf{S}^{1} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{ek}') - \frac{\int_{A}^{(\rho dA)} \mathbf{H}_{1} \cdot (-\mathbf{S}^{0} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{ek}' + \mathbf{S}^{1} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{ek}') - \frac{\int_{A}^{(\rho dA)} \mathbf{H}_{1} \cdot (-\mathbf{S}^{0} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{ek}' + \mathbf{S}^{1} \cdot \dot{\mathbf$$

$$= \left(\mathbf{K}_{11} \mathbf{u}_{k}^{\prime}\right)^{\prime} + \left(\mathbf{K}_{22} \mathbf{u}_{k}^{\prime\prime}\right)^{\prime\prime} + \left(\mathbf{K}_{12} \mathbf{u}_{k}^{\prime\prime}\right)^{\prime\prime} + \left(\mathbf{K}_{21} \mathbf{u}_{k}^{\prime}\right)^{\prime\prime} + \int_{A} \left(\rho dA\right) \mathbf{II}_{0} \cdot \mathbf{A}_{k}^{T} \cdot \mathbf{g} + \mathbf{II}_{a} \cdot \delta \mathbf{P}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις είναι οι δυναμικές εξισώσεις του κινούμενου σώματος εκφρασμένες ως προς το τοπικό σύστημα συντεταγμένων του σώματος. Οι υπογραμμισμένοι όροι στο αριστερό τμήμα του συστήματος αντιστοιχούν στους επιπλέον αδρανειακούς όρους (φορτία γραμμικής επιτάχυνσης του σώματος, φυγοκεντρικά φορτία και φορτία Coriolis) και προκύπτουν όταν το σώμα κινείται σε σχέση με το αδρανειακό πλαίσιο.

Στο πλαίσιο της διακριτοποίησης με τα πεπερασμένα στοιχεία που συζητήθηκε στο 2,1,3 ,προκύπτουν επιπλέον πίνακες από τα αδρανειακά φορτία (σε σύγκριση με αυτά που παρουσιάστηκαν στο 2,1,3). Φυσικά, εφόσον οι υπογραμμισμένοι όροι στην (46) είναι μηγραμμικοί (εμπεριέχουν περιέχουν μικτά γινόμενα των q βαθμών ελευθερίας καθώς και προϊόντα των q βαθμών ελευθερίας με τους τοπικούς \mathbf{u}_k βαθμούς ελευθερίας) πρέπει να γραμμικοποιηθούν ούτως ώστε να προστεθούν στα μητρώα μάζας, απόσβεσης και ακαμψίας, τα οποία είναι απαραίτητη προϋπόθεση για να σχηματιστεί το σύστημα των δυναμικών εξισώσεων στην μορφή της εξίσωσης (35). Με σκοπό την γραμμικοποίηση των παραπάνω μη-γραμμικών εξισώσεων, οι \mathbf{q} και \mathbf{u}_k βαθμοί ελευθερίας γράφονται στην
παρακάτω μορφή , σε σχέση με κάποια αναφορά (σταθερή η περιοδική κατάσταση) συμβολίζεται με τον δείκτη (0):

$$q = q^0 + \delta q$$
, $\dot{q} = \dot{q}^0 + \delta \dot{q}$ and $\ddot{q} = \ddot{q}^0 + \delta \ddot{q}$

 $\mathbf{u}_{ek} = \mathbf{u}_{ek}^{0} + \delta \mathbf{u}_{ek}$, $\dot{\mathbf{u}}_{ek} = \dot{\mathbf{u}}_{ek}^{0} + \delta \dot{\mathbf{u}}_{ek}$ and $\ddot{\mathbf{u}}_{ek} = \ddot{\mathbf{u}}_{ek}^{0} + \delta \ddot{\mathbf{u}}_{ek}$ (παρόμοιες εκφράσεις υπάρχουν και για τις στροφές)

Ως εκ τούτου, οι διάφοροι μη-γραμμικοί όροι στην (46) μπορούν να γραφούν στην παρακάτω μορφή σε σχέση με την αναφορική κατάσταση:

$$\begin{split} \mathbf{A}_{k}^{\mathrm{T}} \cdot \ddot{\mathbf{p}}_{k} &= \left(\mathbf{A}_{k}^{\mathrm{T}} \cdot \ddot{\mathbf{p}}_{k}\right)^{0} + \partial_{q} \left(\mathbf{A}_{k}^{\mathrm{T}} \cdot \ddot{\mathbf{p}}_{k}\right)^{0} \cdot \delta \mathbf{q} + \partial_{\dot{q}} \left(\mathbf{A}_{k}^{\mathrm{T}} \cdot \ddot{\mathbf{p}}_{k}\right)^{0} \cdot \delta \dot{\mathbf{q}} + \partial_{\ddot{q}} \left(\mathbf{A}_{k}^{\mathrm{T}} \cdot \ddot{\mathbf{p}}_{k}\right)^{0} \cdot \delta \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{A}_{k}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{A}}_{k} &= \left(\mathbf{A}_{k}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{A}}_{k}\right)^{0} + \partial_{q} \left(\mathbf{A}_{k}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{A}}_{k}\right)^{0} \cdot \delta \mathbf{q} + \partial_{\dot{q}} \left(\mathbf{A}_{k}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{A}}_{k}\right)^{0} \cdot \delta \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{A}_{k}^{\mathrm{T}} \cdot \ddot{\mathbf{A}}_{k} &= \left(\mathbf{A}_{k}^{\mathrm{T}} \cdot \ddot{\mathbf{A}}_{k}\right)^{0} + \partial_{q} \left(\mathbf{A}_{k}^{\mathrm{T}} \cdot \ddot{\mathbf{A}}_{k}\right)^{0} \cdot \delta \mathbf{q} + \partial_{\dot{q}} \left(\mathbf{A}_{k}^{\mathrm{T}} \cdot \ddot{\mathbf{A}}_{k}\right)^{0} \cdot \delta \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{A}_{k}^{\mathrm{T}} \cdot \ddot{\mathbf{A}}_{k} &= \left(\mathbf{A}_{k}^{\mathrm{T}} \cdot \ddot{\mathbf{A}}_{k}\right)^{0} + \partial_{q} \left(\mathbf{A}_{k}^{\mathrm{T}} \cdot \ddot{\mathbf{A}}_{k}\right)^{0} \cdot \delta \mathbf{q} + \partial_{\dot{q}} \left(\mathbf{A}_{k}^{\mathrm{T}} \cdot \ddot{\mathbf{A}}_{k}\right)^{0} \cdot \delta \dot{\mathbf{q}} \\ \end{bmatrix}$$

Βασιζόμενοι στην διακριτοποίηση με τα πεπερασμένα στοιχεία που παρουσιάστηκε στην 2,1,3 και στην γραμμικοποιημένη μορφή των παραπάνω πινάκων , προκύπτει το παρακάτω σύστημα πινάκων:

$$\mathbf{M}_{e} = \int_{L_{e}} \left(\int_{A} (\rho dA) \mathbf{N}_{e}^{T} \cdot \mathbf{H}_{0} \cdot \mathbf{S}^{0} \cdot \mathbf{N}_{e} \right) dy + \int_{L_{e}} \left(\int_{A} (\rho dA) \mathbf{N}_{e}^{T} \cdot \mathbf{H}_{0} \cdot \mathbf{S}^{1} \cdot \mathbf{N}_{e}^{\prime} \right) dy + \int_{L_{e}} \left(\int_{A} (\rho dA) \mathbf{N}_{e}^{\prime T} \cdot \mathbf{H}_{1} \cdot \mathbf{S}^{0} \cdot \mathbf{N}_{e} \right) dy + \int_{L_{e}} \left(\int_{A} (\rho dA) \mathbf{N}_{e}^{\prime T} \cdot \mathbf{H}_{1} \cdot \mathbf{S}^{1} \cdot \mathbf{N}_{e}^{\prime} \right) dy$$
(47)

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{e} &= \int_{L_{e}} \mathbf{N}_{e}^{'\mathrm{T}} \cdot \mathbf{K}_{11} \cdot \mathbf{N}_{e}^{'} \, dy - \int_{L_{e}} \mathbf{N}_{e}^{''\mathrm{T}} \cdot \mathbf{K}_{22} \cdot \mathbf{N}_{e}^{''} \, dy \\ &+ \int_{L_{e}} \mathbf{N}_{e}^{'\mathrm{T}} \cdot \mathbf{K}_{12} \cdot \mathbf{N}_{e}^{''} \, dy - \int_{L_{e}} \mathbf{N}_{e}^{''\mathrm{T}} \cdot \mathbf{K}_{21} \cdot \mathbf{N}_{e}^{'} \, dy \end{aligned} \tag{48} \\ \mathbf{C}_{e}^{a} &= \int_{L_{e}} \left(\int_{A} (\rho dA) \, \mathbf{N}_{e}^{T} \cdot \mathbf{I}_{0} \cdot 2 \cdot \left(\mathbf{A}_{k}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{A}}_{k} \right)^{0} \cdot \mathbf{S}^{0} \cdot \mathbf{N}_{e} \right) dy \\ &+ \int_{L_{e}} \left(\int_{A} (\rho dA) \, \mathbf{N}_{e}^{T} \cdot \mathbf{I}_{0} \cdot 2 \cdot \left(\mathbf{A}_{k}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{A}}_{k} \right)^{0} \cdot \mathbf{S}^{1} \cdot \mathbf{N}_{e}^{'} \right) dy \\ &+ \int_{L_{e}} \left(\int_{A} (\rho dA) \, \mathbf{N}_{e}^{''} \cdot \mathbf{I}_{1} \cdot 2 \cdot \left(\mathbf{A}_{k}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{A}}_{k} \right)^{0} \cdot \mathbf{S}^{0} \cdot \mathbf{N}_{e} \right) dy \\ &+ \int_{L_{e}} \left(\int_{A} (\rho dA) \, \mathbf{N}_{e}^{''} \cdot \mathbf{I}_{1} \cdot 2 \cdot \left(\mathbf{A}_{k}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{A}}_{k} \right)^{0} \cdot \mathbf{S}^{1} \cdot \mathbf{N}_{e}^{'} \right) dy \\ &+ \int_{L_{e}} \left(\int_{A} (\rho dA) \, \mathbf{N}_{e}^{''} \cdot \mathbf{I}_{1} \cdot 2 \cdot \left(\mathbf{A}_{k}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{A}}_{k} \right)^{0} \cdot \mathbf{S}^{1} \cdot \mathbf{N}_{e}^{'} \right) dy \end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{split} \mathbf{K}_{e}^{\circ} &= \int_{L_{e}}^{L} \left(\int_{A}^{c} (\rho dA) \mathbf{N}_{e}^{T} \cdot \mathbf{I}_{0} \cdot (\mathbf{A}_{k}^{T} \cdot \ddot{\mathbf{A}}_{k})^{0} \cdot \mathbf{S}^{0} \cdot \mathbf{N}_{e}^{0} \right) dy \\ &+ \int_{L_{e}}^{L} \left(\int_{A}^{c} (\rho dA) \mathbf{N}_{e}^{T} \cdot \mathbf{I}_{0} \cdot (\mathbf{A}_{k}^{T} \cdot \ddot{\mathbf{A}}_{k})^{0} \cdot \mathbf{S}^{0} \cdot \mathbf{N}_{e}^{0} \right) dy \\ &+ \int_{L_{e}}^{L} \left(\int_{A}^{c} (\rho dA) \mathbf{N}_{e}^{T} \cdot \mathbf{I}_{1} \cdot (\mathbf{A}_{k}^{T} \cdot \ddot{\mathbf{A}}_{k})^{0} \cdot \mathbf{S}^{0} \cdot \mathbf{N}_{e}^{0} \right) dy \\ &+ \int_{L_{e}}^{L} \left(\int_{A}^{c} (\rho dA) \mathbf{N}_{e}^{T} \cdot \mathbf{I}_{1} \cdot (\mathbf{A}_{k}^{T} \cdot \ddot{\mathbf{A}}_{k})^{0} \cdot \mathbf{S}^{0} \cdot \mathbf{N}_{e}^{0} \right) dy \\ &+ \int_{L_{e}}^{L} \left(\int_{A}^{c} (\rho dA) \mathbf{N}_{e}^{T} \cdot \mathbf{I}_{0} \cdot \partial_{\tilde{q}} (\mathbf{A}_{k}^{T} \cdot \ddot{\mathbf{A}}_{k})^{0} \cdot (\mathbf{r}_{0} + \mathbf{S}^{0} \cdot \mathbf{u}_{ek}^{0} + \mathbf{S}^{1} \cdot \mathbf{u}_{ek}^{0}) \right) dy \\ &+ \int_{L_{e}}^{L} \left(\int_{A}^{c} (\rho dA) \mathbf{N}_{e}^{T} \cdot \mathbf{I}_{1} \cdot \partial_{\tilde{q}} (\mathbf{A}_{k}^{T} \cdot \ddot{\mathbf{R}}_{k})^{0} \right) dy \\ &+ \int_{L_{e}}^{L} \left(\int_{A}^{c} (\rho dA) \mathbf{N}_{e}^{T} \cdot \mathbf{I}_{1} \cdot \partial_{\tilde{q}} (\mathbf{A}_{k}^{T} \cdot \ddot{\mathbf{R}}_{k})^{0} \right) dy \\ &+ \int_{L_{e}}^{L} \left(\int_{A}^{c} (\rho dA) \mathbf{N}_{e}^{T} \cdot \mathbf{I}_{1} \cdot \partial_{\tilde{q}} (\mathbf{A}_{k}^{T} \cdot \ddot{\mathbf{R}}_{k})^{0} \right) dy \\ &+ \int_{L_{e}}^{L} \left(\int_{A}^{c} (\rho dA) \mathbf{N}_{e}^{T} \cdot \mathbf{I}_{0} \cdot \partial_{\tilde{q}} (\mathbf{A}_{k}^{T} \cdot \ddot{\mathbf{R}}_{k})^{0} \cdot (\mathbf{r}_{0} + \mathbf{S}^{0} \cdot \mathbf{u}_{ek}^{0} + \mathbf{S}^{1} \cdot \mathbf{u}_{ek}^{0}) \right) dy \\ &+ \int_{L_{e}}^{L} \left(\int_{A}^{c} (\rho dA) \mathbf{N}_{e}^{T} \cdot \mathbf{I}_{0} \cdot \partial_{\tilde{q}} (\mathbf{A}_{k}^{T} \cdot \ddot{\mathbf{R}}_{k})^{0} \cdot (\mathbf{r}_{0} + \mathbf{S}^{0} \cdot \mathbf{u}_{ek}^{0} + \mathbf{S}^{1} \cdot \mathbf{u}_{ek}^{0}) \right) dy \\ &+ \int_{L_{e}}^{L} \left(\int_{A}^{c} (\rho dA) \mathbf{N}_{e}^{T} \cdot \mathbf{I}_{1} \cdot \partial_{\tilde{q}} (\mathbf{A}_{k}^{T} \cdot \ddot{\mathbf{R}}_{k})^{0} \right) dy \\ &+ \int_{L_{e}}^{L} \left(\int_{A}^{c} (\rho dA) \mathbf{N}_{e}^{T} \cdot \mathbf{I}_{1} \cdot \partial_{\tilde{q}} (\mathbf{A}_{k}^{T} \cdot \ddot{\mathbf{R}}_{k})^{0} \cdot (\mathbf{r}_{0} + \mathbf{S}^{0} \cdot \mathbf{u}_{ek}^{0} + \mathbf{S}^{1} \cdot \mathbf{u}_{ek}^{0}) \right) dy \\ &+ \int_{L_{e}}^{L} \left(\int_{A}^{c} (\rho dA) \mathbf{N}_{e}^{T} \cdot \mathbf{I}_{1} \cdot \partial_{\tilde{q}} (\mathbf{A}_{k}^{T} \cdot \ddot{\mathbf{R}}_{k})^{0} \cdot (\mathbf{r}_{0} + \mathbf{S}^{0} \cdot \mathbf{u}_{ek}^{0} + \mathbf{S}^{1} \cdot \mathbf{u}_{ek}^{0}) \right) dy \\ &+ \int_{L_{e}}^{L} \left(\int_{A}^{c} (\rho dA) \mathbf{N}_{e}^{T} \cdot \mathbf{I}_{0} \cdot \partial_{\tilde{q}} (\mathbf{A}_{k}^{T} \cdot \ddot{\mathbf{A}}_{k})^{0} \cdot (\mathbf{r}_{0} + \mathbf{S}^{0} \cdot \mathbf{u}_{ek}^{0} + \mathbf{S}^{1} \cdot$$

$$+ \int_{L_{e}} \left(\int_{A} (\rho dA) \mathbf{N}_{e}^{\prime T} \cdot \mathbf{II}_{1} \cdot \partial_{q} \left(\mathbf{A}_{k}^{T} \cdot \ddot{\mathbf{p}}_{k} \right)^{0} \right) dy$$

+
$$\int_{L_{e}} \left(\int_{A} (\rho dA) \mathbf{N}_{e}^{\prime T} \cdot \mathbf{II}_{1} \cdot \partial_{q} \left(\mathbf{A}_{k}^{T} \cdot \ddot{\mathbf{A}}_{k} \right)^{0} \cdot \left(\mathbf{r}_{0} + \mathbf{S}^{0} \cdot \mathbf{u}_{ek}^{0} + \mathbf{S}^{1} \cdot \mathbf{u}_{ek}^{\prime 0} \right) \right) dy$$

+
$$\int_{L_{e}} \left(\int_{A} (\rho dA) \mathbf{N}_{e}^{\prime T} \cdot \mathbf{II}_{1} \cdot 2 \cdot \partial_{q} \left(\mathbf{A}_{k}^{T} \cdot \dot{\mathbf{A}}_{k} \right)^{0} \cdot \left(\mathbf{S}^{0} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{ek}^{0} + \mathbf{S}^{1} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{ek}^{\prime 0} \right) \right) dy$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{e} &= -\int_{L_{e}} \left(\int_{A} (\rho dA) \mathbf{N}_{e}^{T} \cdot \mathbf{II}_{0} \cdot (\mathbf{A}_{k}^{T} \cdot \ddot{\mathbf{p}}_{k})^{0} \right) dy \\ &- \int_{L_{e}} \left(\int_{A} (\rho dA) \mathbf{N}_{e}^{T} \cdot \mathbf{II}_{0} \cdot (\mathbf{A}_{k}^{T} \cdot \ddot{\mathbf{A}}_{k})^{0} \cdot (\mathbf{r}_{0} + \mathbf{S}^{0} \cdot \mathbf{u}_{ek}^{0} + \mathbf{S}^{1} \cdot \mathbf{u}_{ek}^{\prime 0}) \right) dy \\ &- \int_{L_{e}} \left(\int_{A} (\rho dA) \mathbf{N}_{e}^{T} \cdot \mathbf{II}_{0} \cdot 2 \cdot (\mathbf{A}_{k}^{T} \cdot \dot{\mathbf{A}}_{k})^{0} \cdot (-\mathbf{S}^{0} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{ek}^{0} + \mathbf{S}^{1} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{ek}^{\prime 0}) \right) dy \\ &- \int_{L_{e}} \left(\int_{A} (\rho dA) \mathbf{N}_{e}^{T} \cdot \mathbf{II}_{0} \cdot (-\mathbf{S}^{0} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{ek}^{0} + \mathbf{S}^{1} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{ek}^{\prime 0}) \right) dy \\ &- \int_{L_{e}} \left(\int_{A} (\rho dA) \mathbf{N}_{e}^{\prime T} \cdot \mathbf{II}_{1} \cdot (\mathbf{A}_{k}^{T} \cdot \ddot{\mathbf{p}}_{k})^{0} \right) dy \\ &- \int_{L_{e}} \left(\int_{A} (\rho dA) \mathbf{N}_{e}^{\prime T} \cdot \mathbf{II}_{1} \cdot (\mathbf{A}_{k}^{T} \cdot \ddot{\mathbf{A}}_{k})^{0} \cdot (\mathbf{r}_{0} + \mathbf{S}^{0} \cdot \mathbf{u}_{ek}^{0} + \mathbf{S}^{1} \cdot \mathbf{u}_{ek}^{\prime 0}) \right) dy \\ &- \int_{L_{e}} \left(\int_{A} (\rho dA) \mathbf{N}_{e}^{\prime T} \cdot \mathbf{II}_{1} \cdot 2 \cdot (\mathbf{A}_{k}^{T} \cdot \ddot{\mathbf{A}}_{k})^{0} \cdot (-\mathbf{S}^{0} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{ek}^{0} + \mathbf{S}^{1} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{ek}^{\prime 0}) \right) dy \\ &- \int_{L_{e}} \left(\int_{A} (\rho dA) \mathbf{N}_{e}^{\prime T} \cdot \mathbf{II}_{1} \cdot 2 \cdot (\mathbf{A}_{k}^{T} \cdot \dot{\mathbf{A}}_{k})^{0} \cdot (-\mathbf{S}^{0} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{ek}^{0} + \mathbf{S}^{1} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{ek}^{\prime 0}) \right) dy \\ &- \int_{L_{e}} \left(\int_{A} (\rho dA) \mathbf{N}_{e}^{\prime T} \cdot \mathbf{II}_{1} \cdot 2 \cdot (\mathbf{A}_{k}^{T} \cdot \dot{\mathbf{A}}_{k})^{0} \cdot (-\mathbf{S}^{0} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{ek}^{0} + \mathbf{S}^{1} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{ek}^{\prime 0}) \right) dy \\ &- \int_{L_{e}} \left(\int_{A} (\rho dA) \mathbf{N}_{e}^{\prime T} \cdot \mathbf{II}_{1} \cdot 2 \cdot (\mathbf{A}_{k}^{T} \cdot \dot{\mathbf{A}}_{k})^{0} \cdot (-\mathbf{S}^{0} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{ek}^{0} + \mathbf{S}^{1} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{ek}^{\prime 0}) \right) dy \\ &- \int_{L_{e}} \left(\int_{A} (\rho dA) \mathbf{N}_{e}^{\prime T} \cdot \mathbf{II}_{1} \cdot 2 \cdot (\mathbf{A}_{k}^{T} \cdot \dot{\mathbf{A}}_{k})^{0} \cdot (-\mathbf{S}^{0} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{ek}^{0} + \mathbf{S}^{1} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{ek}^{\prime 0}) \right) dy \end{aligned}$$

$$+ \int_{L_e} \left(\int_A (\rho dA) \mathbf{N}_e^T \cdot \mathbf{II}_0 \cdot \mathbf{A}_k^T \cdot \mathbf{g} \right) dy + \int_{L_e} \mathbf{N}_e^T \cdot \mathbf{II}_\alpha \cdot \delta \mathbf{P} \, dy$$

Οι παραπάνω πίνακες μπορούν εύκολα να καθοριστούν είτε αναλυτικά είτε αριθμητικά. Υπενθυμίζεται ότι σύμφωνα με τους ορισμούς στο 2,1,3:

$$\mathbf{u}_{ek}(y) = (\mathbf{u} \quad \mathbf{v} \quad \mathbf{w} \quad \mathbf{\theta}_{y})^{T} = \mathbf{N}_{e}(y) \cdot \hat{\mathbf{u}}_{ek}$$

Το τελικό αποτέλεσμα μετά από την συναρμολόγηση των στοιχειωδών πινάκων (τοπικοί πίνακες) θα έχει την συνήθη μορφή:

$$\mathbf{M} \cdot \begin{cases} \mathbf{\delta} \mathbf{\hat{u}}_k \\ \mathbf{\delta} \mathbf{q} \end{cases} + \mathbf{C} \cdot \begin{cases} \mathbf{\delta} \mathbf{\hat{u}}_k \\ \mathbf{\delta} \mathbf{q} \end{cases} + \mathbf{K} \cdot \begin{cases} \mathbf{\delta} \mathbf{\hat{u}}_k \\ \mathbf{\delta} \mathbf{q} \end{cases} = \mathbf{Q}$$
(55)

Οι γενικοί M, C, K και Q πίνακες του σώματος, μετά την συναρμολόγηση των τοπικών πινάκων των διαδοχικών πεπερασμένων στοιχείων, παίρνουν την μορφή του Σχήματος 13.



Σχήμα 13: Διαμόρφωση του συστήματος των πινάκων για ένα κινούμενο σύστημα

Μέσω του ¶ πίνακα, εξασφαλίζεται η κινηματική σύζευξη των διαφόρων σωμάτων. Παρόλα αυτά, με σκοπό να ολοκληρώσουμε την σύζευξη μεταξύ των ενωμένων σωμάτων, πρέπει να καθοριστούν οι εξισώσεις για τους ¶ βαθμούς ελευθερίας καθώς επικοινωνούν τα φορτία από το ένα σώμα στο άλλο.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί οι η πίνακες εμπεριέχουν τους ελαστικούς βαθμούς ελευθερίας που σχετίζονται με την ελαστικότητα των προηγουμένων σωμάτων (συνδεδεμένων με το υπό εξέταση σώμα) αλλά και τις κινήσεις των άκαμπτων βαθμών ελευθερίας των σωμάτων όπως το yaw, teeter, βήμα πτερυγίου και την αζιμουθιακή περιστροφή. Εάν ένας συγκεκριμένος q_i είναι ελαστικός βαθμός ελευθερίας u_p τότε απλά θέτουμε $q_i \equiv u_p$.Διαφορετικά χρειάζεται μια επιπλέον εξίσωση (ελέγχου/δυναμική εξίσωση). Έχει δοθεί ήδη ένα παράδειγμα στην παράγραφο 2,2,3.

Επιστρέφοντας στο Σχήμα 10, τα φορτία που επικοινωνούν από το σώμα 1 στο σώμα 2 (με την προϋπόθεση ότι είναι ενωμένα άκαμπτα μεταξύ τους) είναι τα φορτία αντίδρασης στην αρχή του σώματος 1.Με άλλα λόγια, είναι φορτία αντίδρασης υπολογισμένα στον πρώτο κόμβο του πρώτου στοιχείου του σώματος 1.Οι αντιδράσεις και στους 2 ακραίους κόμβους του κάθε στοιχείου υπολογίζονται μέσω της ακόλουθης έκφρασης, χρησιμοποιώντας τους πίνακες φορτίων του στοιχείου.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{e} & \mathbf{M}_{e}^{q} \end{bmatrix} \cdot \begin{cases} \mathbf{\delta} \hat{\mathbf{u}}_{ek} \\ \mathbf{\delta} \mathbf{q} \end{cases} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{e}^{a} & \mathbf{C}_{e}^{q} \end{bmatrix} \cdot \begin{cases} \mathbf{\delta} \hat{\mathbf{u}}_{ek} \\ \mathbf{\delta} \mathbf{q} \end{cases} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{e} + \mathbf{K}_{e}^{a} & \mathbf{K}_{e}^{q} \end{bmatrix} \cdot \begin{cases} \mathbf{\delta} \hat{\mathbf{u}}_{ek} \\ \mathbf{\delta} \mathbf{q} \end{cases} = \mathbf{Q}_{e} + \mathbf{R}_{e}^{12}$$

Στην παραπάνω έκφραση, \mathbf{R}_{e}^{12} είναι τα φορτία αντίδρασης στους ακραίους κόμβους του κάθε στοιχείου. Οι έξι πρώτες γραμμές του \mathbf{R}_{e}^{12} είναι οι αντιδράσεις (δυνάμεις και ροπές) στον κόμβο 1 ενώ οι έξι τελευταίες είναι οι αντιδράσεις στον κόμβο 2(ή 5 ανάλογα με το πόσοι ενδιάμεσοι κόμβοι υπάρχουν). Ο πίνακας \mathbf{R}_{e}^{12} παρουσιάζει τους οριακούς όρους που, όπως έχουν ήδη εξηγηθεί, απαλείφονται όταν το στοιχείο είναι συνδεδεμένο στο προηγούμενο ή όταν έχουν εφαρμοστεί οι οριακές συνθήκες (μετατόπισης). Στην παρούσα περίπτωση, επειδή έχει εφαρμοστεί η λογική του ελεύθερου σώματος ψάχνουμε να βρούμε τα εξωτερικά φορτία που χρειάζονται να εφαρμοστούν στους δύο ακραίους κόμβους του κάθε στοιχείου, (όταν έχει κοπεί από την υπόλοιπη κατασκευή) έτσι ώστε να επιτύχουμε την ισορροπία. Έτσι, είναι πρωτεύον ο υπολογισμός των φορτίων αντίδρασης κατά μήκος ενός σώματος (και κατά κύριο λόγο στην αρχή του).

Τα φορτία **R**¹²_e υπολογίζονται σε σχέση με το τοπικό σύστημα συντεταγμένων του σώματος 1.Με σκοπό να μεταφερθούν στο σώμα 2 πρέπει να στραφούν στο τοπικό σύστημα του σώματος 2.Αυτή η στροφή των φορτίων στο σύστημα του σώματος 2 πραγματοποιείται μέσω της παρακάτω έκφρασης:

$\mathbf{A}_1^2 = \mathbf{A}_2^{\mathrm{T}} \mathbf{A}_1$

Έτσι δεδομένου ότι έχουν καθοριστεί οι τοπικοί πίνακες στροφής **A**_kτων διαφόρων σωμάτων, μπορούν εύκολα να καθοριστούν οι πίνακες που οδηγούν από το ένα σώμα στο άλλο.

Μετά την συναρμολόγηση των διαφόρων πινάκων των σωμάτων το τελικό αποτέλεσμα παίρνει πάλι την μορφή του συστήματος (55). Η μορφή των γενικών πινάκων της ανεμογεννήτριας M, C και K μετά την συναρμολόγηση των εμπλεκόμενων σωμάτων παίρνει την μορφή στου Σχήματος 14.



Σχήμα 14: Μορφή του τελικού συστήματος

2.2.4 Γραμμικοποίηση των μη-γραμμικών κινηματικών εξισώσεων

Η μη-γραμμικότητα των δυναμικών εξισώσεων κίνησης προέρχεται από το μη-γραμμικό κινηματικό κομμάτι του δυναμικού συστήματος. Αυτή η μη-γραμμικότητα οφείλεται στην μη-γραμμική εξάρτηση των $\mathbf{A}^{T}(\mathbf{q};t)$, $\mathbf{A}^{T}\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{q};t)$, $\mathbf{A}^{T}\ddot{\mathbf{A}}(\mathbf{q};t)$, $\mathbf{A}^{T}\dot{\mathbf{p}}(\mathbf{q};t)$ και $\mathbf{A}^{T}\ddot{\mathbf{p}}(\mathbf{q};t)$ κ.λπ. ως προς το \mathbf{q} . Όπως έχει ήδη ειπωθεί στην παράγραφο 2,2,4, οι παραπάνω πίνακες μπορούν να γραμμικοποιηθούν σε σχέση με την κατάσταση αναφοράς (είτε περιοδική είτε στατική) βάζοντάς τους τον δείκτη 0. Θεωρώντας ότι έχουμε μικρές διαταραχές σχετικά με την κατάσταση αναφοράς ο πίνακας \mathbf{q} και οι χρονικές παράγωγοι του (ταχύτητα και επιτάχυνση) μπορούν να γραφτούν στην μορφή:

 ${\bf q}={\bf q}^0+\delta {\bf q}$, $\dot{{\bf q}}=\dot{{\bf q}}^0+\delta \dot{{\bf q}}$ kal $\ddot{{\bf q}}=\ddot{{\bf q}}^0+\delta \ddot{{\bf q}}$

Ο πίνακας **ρ** και οι παράγωγοί του μπορούν να εκφραστούν σαν μια σειρά στοιχειωδών μετατοπίσεων και στροφών, ενώ ο πίνακας **A** εκφράζεται μόνο σαν μια σειρά στροφών, όπως έχει συζητηθεί στην παράγραφο 2,2,3. Εάν τα $\mathbf{R}_1(q)$, $\mathbf{R}_2(q)$, $\mathbf{R}_3(q)$ εκφράζουν τους στοιχειώδεις πίνακες στροφών ως προς τους x, y και z κατευθύνσεις, και τα $\mathbf{P}_1(q)$, $\mathbf{P}_2(q)$, $\mathbf{P}_3(q)$ εκφράζουν τους στοιχειώδεις πίνακες στροφών και οι παράγωγοί τους στο χρόνο μπορούν να γραφτούν στην ακόλουθη γραμμικοποιημένη μορφή:

$$\mathbf{R}(\mathbf{q}) = \mathbf{R}(\mathbf{q}^0) + \mathbf{R}'(\mathbf{q}^0) \cdot \delta \mathbf{q}$$
(56)

$$\dot{\mathbf{R}}(q) = \mathbf{R}'(q^0) \cdot \dot{q}^0 + \mathbf{R}''(q^0) \cdot \dot{q}^0 \cdot \delta q + \mathbf{R}'(q^0) \cdot \delta \dot{q}$$
(57)

$$\ddot{\mathbf{R}}(q) = \mathbf{R}''(q^0) \cdot \dot{q}^{0\,2} + \mathbf{R}'(q^0) \cdot \ddot{q}^0 + \mathbf{R}'''(q^0) \cdot \dot{q}^{0\,2} \cdot \delta q + \mathbf{R}''(q^0) \cdot \ddot{q}^0 \cdot \delta q + + 2 \cdot \mathbf{R}''(q^0) \cdot \dot{q}^0 \cdot \delta \dot{q} + \mathbf{R}'(q^0) \cdot \delta \ddot{q} +$$
(58)

όπου, το σύμβολο $\begin{pmatrix} \end{pmatrix}'$ υποδηλώνει την παραγώγιση σε σχέση με το \mathbf{q}^0 . Οι ίδιες εκφράσεις ισχύουν και για τα \mathbf{P} , $\dot{\mathbf{P}}$ και $\ddot{\mathbf{P}}$. Χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις (56)-(58) σε συνδυασμό με τις (41)-(45), μπορεί να γραφτεί η γραμμικοποιημένη μορφή του $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\mathbf{q};t)$, $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{q};t)$, $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\dot{\mathbf{p}}(\mathbf{q};t)$ και $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\ddot{\mathbf{p}}(\mathbf{q};t)$.

2.2.5 Μοντελοποίηση των συγκεντρωμένων ιδιοτήτων αδράνειας

των φορτίων που αντιστοιχούν σε αυτή την μάζα είναι οι εξής:

Η μοντελοποίηση των συγκεντρωμένων ιδιοτήτων αδράνειας είναι παρόμοια με την μοντελοποίηση των κατανεμημένων ιδιοτήτων αδράνειας. Για ένα σημείο μάζας m, το οποίο μπορεί να βρίσκεται σε κάποιο σημείο y_0 ή ξ_0 (σε σχέση με τις αδιάστατες συντεταγμένες) κατά μήκος της δοκού και έκκεντρα σε σχέση με τον άξονα της δοκού $\{X_{cm}, Y_{cm}, Z_{cm}\}$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 15, οι τοπικοί πίνακες μάζας απόσβεσης και δυσκαμψίας και οι πίνακες

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{e} &= \mathbf{m} \, \mathbf{N}_{e}^{T}(\xi_{0}) \cdot \mathbf{II}_{\mathrm{C0}} \cdot \mathbf{S}^{\mathrm{C0}} \cdot \mathbf{N}_{e}(\xi_{0}) + \mathbf{m} \, \mathbf{N}_{e}^{T}(\xi_{0}) \cdot \mathbf{II}_{\mathrm{C0}} \cdot \mathbf{S}^{\mathrm{C1}} \cdot \mathbf{N}_{e}'(\xi_{0}) \\ &+ \mathbf{m} \, \mathbf{N}_{e}'^{T}(\xi_{0}) \cdot \mathbf{II}_{\mathrm{C1}} \cdot \mathbf{S}^{\mathrm{C0}} \cdot \mathbf{N}_{e}(\xi_{0}) + \mathbf{m} \, \mathbf{N}_{e}'^{T}(\xi_{0}) \cdot \mathbf{II}_{\mathrm{C1}} \cdot \mathbf{S}^{\mathrm{C1}} \cdot \mathbf{N}_{e}'(\xi_{0}) \\ \\ \mathbf{C}_{e}^{a} &= \mathbf{m} \, \mathbf{N}_{e}^{T}(\xi_{0}) \cdot \mathbf{II}_{\mathrm{C0}} \cdot 2 \cdot \left(\mathbf{A}_{k}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{A}}_{k} \right)^{0} \cdot \mathbf{S}^{\mathrm{C0}} \cdot \mathbf{N}_{e}(\xi_{0}) \\ &+ \mathbf{m} \, \mathbf{N}_{e}^{T}(\xi_{0}) \cdot \mathbf{II}_{\mathrm{C0}} \cdot 2 \cdot \left(\mathbf{A}_{k}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{A}}_{k} \right)^{0} \cdot \mathbf{S}^{\mathrm{C1}} \cdot \mathbf{N}'(\xi_{0}) \\ &+ \mathbf{m} \, \mathbf{N}_{e}^{T}(\xi_{0}) \cdot \mathbf{II}_{\mathrm{C1}} \cdot 2 \cdot \left(\mathbf{A}_{k}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{A}}_{k} \right)^{0} \cdot \mathbf{S}^{\mathrm{C0}} \cdot \mathbf{N}_{e}(\xi_{0}) \\ &+ \mathbf{m} \, \mathbf{N}_{e}'^{T}(\xi_{0}) \cdot \mathbf{II}_{\mathrm{C1}} \cdot 2 \cdot \left(\mathbf{A}_{k}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{A}}_{k} \right)^{0} \cdot \mathbf{S}^{\mathrm{C1}} \cdot \mathbf{N}_{e}'(\xi_{0}) \\ &+ \mathbf{m} \, \mathbf{N}_{e}'^{T}(\xi_{0}) \cdot \mathbf{II}_{\mathrm{C0}} \cdot \left(\mathbf{A}_{k}^{\mathrm{T}} \cdot \ddot{\mathbf{A}}_{k} \right)^{0} \cdot \mathbf{S}^{\mathrm{C1}} \cdot \mathbf{N}_{e}'(\xi_{0}) \\ &+ \mathbf{m} \, \mathbf{N}_{e}'^{T}(\xi_{0}) \cdot \mathbf{II}_{\mathrm{C0}} \cdot \left(\mathbf{A}_{k}^{\mathrm{T}} \cdot \ddot{\mathbf{A}}_{k} \right)^{0} \cdot \mathbf{S}^{\mathrm{C1}} \cdot \mathbf{N}_{e}'(\xi_{0}) \\ &+ \mathbf{m} \, \mathbf{N}_{e}'^{T}(\xi_{0}) \cdot \mathbf{II}_{\mathrm{C1}} \cdot \left(\mathbf{A}_{k}^{\mathrm{T}} \cdot \ddot{\mathbf{A}}_{k} \right)^{0} \cdot \mathbf{S}^{\mathrm{C1}} \cdot \mathbf{N}_{e}'(\xi_{0}) \\ &+ \mathbf{m} \, \mathbf{N}_{e}'^{T}(\xi_{0}) \cdot \mathbf{II}_{\mathrm{C1}} \cdot \left(\mathbf{A}_{k}^{\mathrm{T}} \cdot \ddot{\mathbf{A}}_{k} \right)^{0} \cdot \mathbf{S}^{\mathrm{C1}} \cdot \mathbf{N}_{e}'(\xi_{0}) \\ &+ \mathbf{m} \, \mathbf{N}_{e}'^{T}(\xi_{0}) \cdot \mathbf{II}_{\mathrm{C1}} \cdot \left(\mathbf{A}_{k}^{\mathrm{T}} \cdot \ddot{\mathbf{A}}_{k} \right)^{0} \cdot \mathbf{S}^{\mathrm{C1}} \cdot \mathbf{N}_{e}'(\xi_{0}) \\ &+ \mathbf{m} \, \mathbf{N}_{e}'^{T}(\xi_{0}) \cdot \mathbf{II}_{\mathrm{C1}} \cdot \left(\mathbf{A}_{k}^{\mathrm{T}} \cdot \ddot{\mathbf{A}}_{k} \right)^{0} \cdot \mathbf{S}^{\mathrm{C1}} \cdot \mathbf{N}'(\xi_{0}) \end{aligned}$$

$$\mathbf{M}_{e}^{q} = \mathbf{m} \ \mathbf{N}_{e}^{T}(\xi_{0}) \cdot \mathbf{H}_{C0} \cdot \quad \partial_{\ddot{q}} \left(\mathbf{A}_{k}^{T} \cdot \ddot{\boldsymbol{p}}_{k} \right)^{0} + \mathbf{m} \ \mathbf{N}_{e}^{T}(\xi_{0}) \cdot \mathbf{H}_{C0} \cdot \quad \partial_{\ddot{q}} \left(\mathbf{A}_{k}^{T} \cdot \ddot{\mathbf{A}}_{k} \right)^{0} \cdot \left(\mathbf{r}_{0} + \mathbf{S}^{C0} \cdot \mathbf{u}_{ek}^{0} + \mathbf{S}^{C1} \cdot \mathbf{u}_{ek}^{\prime 0} \right)$$
(62)

$$\begin{split} &+ \mathbf{m} \mathbf{N}_{e}^{rr}(\xi_{0}) \cdot \mathbf{H}_{C1} \cdot \quad \partial_{q} \left(\mathbf{A}_{k}^{\mathrm{T}} \cdot \ddot{\mathbf{p}}_{k} \right)^{0} \\ &+ \mathbf{m} \mathbf{N}_{e}^{rr}(\xi_{0}) \cdot \mathbf{H}_{C1} \cdot \quad \partial_{q} \left(\mathbf{A}_{k}^{\mathrm{T}} \cdot \ddot{\mathbf{A}}_{k} \right)^{0} \cdot \left(\mathbf{r}_{0} + \mathbf{S}^{\mathrm{C0}} \cdot \mathbf{u}_{ck}^{0} + \mathbf{S}^{\mathrm{C1}} \cdot \mathbf{u}_{ck}^{0} \right) \\ &+ \mathbf{m} \mathbf{N}_{e}^{rr}(\xi_{0}) \cdot \mathbf{H}_{C0} \cdot \quad \partial_{q} \left(\mathbf{A}_{k}^{\mathrm{T}} \cdot \ddot{\mathbf{A}}_{k} \right)^{0} \cdot \left(\mathbf{r}_{0} + \mathbf{S}^{\mathrm{C0}} \cdot \mathbf{u}_{ek}^{0} + \mathbf{S}^{\mathrm{C1}} \cdot \mathbf{u}_{ek}^{0} \right) \\ &+ \mathbf{m} \mathbf{N}_{e}^{rr}(\xi_{0}) \cdot \mathbf{H}_{C0} \cdot \partial_{q} \left(\mathbf{A}_{k}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{A}}_{k} \right)^{0} \cdot \left(\mathbf{S}^{\mathrm{C0}} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{ek}^{0} + \mathbf{S}^{\mathrm{C1}} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{ek}^{0} \right) \\ &+ \mathbf{m} \mathbf{N}_{e}^{rr}(\xi_{0}) \cdot \mathbf{H}_{C1} \cdot \partial_{q} \left(\mathbf{A}_{k}^{\mathrm{T}} \cdot \ddot{\mathbf{A}}_{k} \right)^{0} \cdot \left(\mathbf{S}^{\mathrm{C0}} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{ek}^{0} + \mathbf{S}^{\mathrm{C1}} \cdot \mathbf{u}_{ek}^{0} \right) \\ &+ \mathbf{m} \mathbf{N}_{e}^{rr}(\xi_{0}) \cdot \mathbf{H}_{C1} \cdot \partial_{q} \left(\mathbf{A}_{k}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{A}}_{k} \right)^{0} \cdot \left(\mathbf{S}^{\mathrm{C0}} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{ek}^{0} + \mathbf{S}^{\mathrm{C1}} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{ek}^{0} \right) \\ &+ \mathbf{m} \mathbf{N}_{e}^{rr}(\xi_{0}) \cdot \mathbf{H}_{C1} \cdot \partial_{q} \left(\mathbf{A}_{k}^{\mathrm{T}} \cdot \ddot{\mathbf{A}}_{k} \right)^{0} \cdot \left(\mathbf{S}^{\mathrm{C0}} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{ek}^{0} + \mathbf{S}^{\mathrm{C1}} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{ek}^{0} \right) \\ &+ \mathbf{m} \mathbf{N}_{e}^{rr}(\xi_{0}) \cdot \mathbf{H}_{C0} \cdot \partial_{q} \left(\mathbf{A}_{k}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{A}}_{k} \right)^{0} \cdot \left(\mathbf{S}^{\mathrm{C0}} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{ek}^{0} + \mathbf{S}^{\mathrm{C1}} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{ek}^{0} \right) \\ &+ \mathbf{m} \mathbf{N}_{e}^{rr}(\xi_{0}) \cdot \mathbf{H}_{C1} \cdot \partial_{q} \left(\mathbf{A}_{k}^{\mathrm{T}} \cdot \ddot{\mathbf{A}}_{k} \right)^{0} \cdot \left(\mathbf{S}^{\mathrm{C0}} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{ek}^{0} + \mathbf{S}^{\mathrm{C1}} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{ek}^{0} \right) \\ &+ \mathbf{m} \mathbf{N}_{e}^{rr}(\xi_{0}) \cdot \mathbf{H}_{C1} \cdot \partial_{q} \left(\mathbf{A}_{k}^{\mathrm{T}} \cdot \ddot{\mathbf{A}}_{k} \right)^{0} \cdot \left(\mathbf{S}^{\mathrm{C0}} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{ek}^{0} + \mathbf{S}^{\mathrm{C1}} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{ek}^{0} \right) \\ &+ \mathbf{m} \mathbf{N}_{e}^{rr}(\xi_{0}) \cdot \mathbf{H}_{C1} \cdot \partial_{q} \left(\mathbf{A}_{k}^{\mathrm{T}} \cdot \ddot{\mathbf{A}}_{k} \right)^{0} \cdot \left(\mathbf{S}^{\mathrm{C0}} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{ek}^{0} + \mathbf{S}^{\mathrm{C1}} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{ek}^{0} \right) \\ &+ \mathbf{m} \mathbf{N}_{e}^{rr}(\xi_{0}) \cdot \mathbf{H}_{C1} \cdot \left(\mathbf{A}_{k}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{A}}_{k} \right)^{0} \cdot \left(\mathbf{S}^{\mathrm{C0}} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{ek}^{0} + \mathbf{S}^{\mathrm{C1}} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{ek}^{0} \right) \\ &- \mathbf{m} \mathbf{N}_{e}^{rr}(\xi_{0}) \cdot \mathbf{H}_{C1} \cdot \left(\mathbf{A}_{k}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{A}}_{k} \right)^{0} \cdot \left(\mathbf{S}^{\mathrm{C0}} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{ek}^{0} + \mathbf{S}^{\mathrm$$

Οι παραπάνω εκφράσεις είναι παρόμοιες με τις εξισώσεις (47)-(54). Η μόνη διαφορά είναι ότι τα ολοκληρώματα πάνω στο επίπεδο τομής της δοκού έχουν αντικατασταθεί από την μάζα m, και ότι η ολοκλήρωση κατά μήκος της δοκού έχει αντικατασταθεί από την τιμή των εξισώσεων μορφής στο y_0 ή ξ_0 .

Επίσης,

$$\mathbf{S}^{\text{C0}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z_{\text{cm}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\mathbf{x}_{\text{cm}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}^{\text{C1}} = \begin{bmatrix} y_{\text{cm}} & 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{x}_{\text{cm}} & 0 & -\mathbf{z}_{\text{cm}} & 0 \\ 0 & 0 & y_{\text{cm}} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{II}_{\text{C0}} = \left(\mathbf{S}^{\text{C0}}\right)^{T}, \quad \mathbf{II}_{\text{C1}} = \left(\mathbf{S}^{\text{C1}}\right)^{T},$$
$$\mathbf{r}_{\mathbf{0}} = \begin{cases} x_{\text{cm}} \\ y_{0} + y_{\text{cm}} \\ z_{\text{cm}} \end{cases}$$

Η σύζευξη των παραπάνω τοπικών πινάκων στο γενικό σύστημα γίνεται με τον ίδιο τρόπο όπως με τους πίνακες (47)-(54) όπως φαίνεται στο Σχήμα 13.



Σχήμα 15: Μοντελοποίηση περίπτωσης συγκεντρωμένης μάζας πάνω στην δοκό.

2.2.6 Μοντελοποίηση της απόσβεσης της κατασκευής

Η απόσβεση της κατασκευής μπορεί να εισαχθεί με την μορφή της απόσβεσης μορφής. Διαφορετικές τιμές απόσβεσης μορφής μπορούν να παρθούν στους διαφορετικούς τρόπους λειτουργίας των ανεξαρτήτων σωμάτων (διάφορες συνιστώσες της ανεμογεννήτριας) υπό την προϋπόθεση ότι οι φυσικές συχνότητες, η μάζα μορφής και τα σχήματα των μορφών αυτών είναι γνωστά.

ΟΙ παραπάνω πληροφορίες λαμβάνονται μέσω της ανάλυσης των ιδιοτιμών των διαφόρων συνιστωσών της ανεμογεννήτριας(π.χ. πτερύγια, άξονας και ο πύργος). Για να λάβουμε τα χαρακτηριστικά των μορφών των απομονωμένων σωμάτων κρατάμε μόνο τα διαγώνια κομμάτια του πίνακα μάζας και δυσκαμψίας όπως φαίνεται στο Σχήμα 14. Οι ιδιοτιμές ω_{ki} των ανεξάρτητων σωμάτων προσδιορίζονται ως οι λύσεις του $\left|-\omega_{ki}^{2}\mathbf{M}_{k}+\mathbf{K}_{k}\right|=0$ και κάθε ιδιομορφή $\boldsymbol{\phi}_{ki}$ προκύπτει λύνοντας :

$$\left(\mathbf{K}_{k}-\boldsymbol{\omega}_{ki}^{2}\mathbf{M}_{k}\right)\cdot\boldsymbol{\varphi}_{ki}=0$$
(66)

Οι ιδιομορφές λαμβάνονται μόνο σαν πολλαπλάσια αυτών. Συνήθως αδιαστατοποιούνται στην μονάδα. Εάν το $Φ_k$ υποδηλώνει τον πίνακα που περιέχει τις ιδιομορφές του k σώματος υπολογισμένες από την (69) σαν στήλες ,τότε η μάζα μορφής των μορφών του σώματος υπολογίζεται ως εξής:

$$\mathbf{M}_{k}^{*} = \mathbf{\Phi}_{k}^{\mathrm{T}} \mathbf{M}_{k} \mathbf{\Phi}_{k} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{k1}^{*} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \mathbf{m}_{k2}^{*} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{m}_{kN}^{*} \end{bmatrix}$$
(67)

Εξαιτίας της ιδιότητας της ορθοκανονικότητας ο πίνακας \mathbf{M}_{k}^{*} θα είναι ένας διαγώνιος πίνακας του οποίου τα στοιχεία θα είναι οι μάζες μορφών.

Ο πίνακας απόσβεσης της κατασκευής που προκύπτει για την ανάλυση με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων είναι ο εξής:

$$\mathbf{C}_{k}^{s} = \mathbf{\Phi}_{k}^{T-1} \begin{bmatrix} 2\xi_{k1}\omega_{k1}m_{k1}^{*} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2\xi_{k2}\omega_{k2}m_{k2}^{*} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\xi_{kN}\omega_{kN}m_{kN}^{*} \end{bmatrix} \mathbf{\Phi}_{k}^{-1}$$
(68)

όπου ξ_{ki} είναι οι αναλογίες κρίσιμης απόσβεσης των διαφόρων μορφών.Να σημειωθεί ότι η πιστοποίηση των πινάκων απόσβεσης της κατασκευής απαιτεί την αναστροφή του πίνακα $\mathbf{\Phi}_k$.

3. Αεροδυναμική του ρότορα

3.1 Πρότυπο ομμόρου

Το δεύτερο μεγάλο κομμάτι που τροποποιήθηκε στα πλαίσια της διπλωματικής είναι ο υπολογισμός των αεροδυναμικών φορτίων σύμφωνα με την νέα κυρτή γεωμετρία του πτερυγίου που προστέθηκε στο κατασκευαστικό κομμάτι όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη ενότητα. Ο υπολογισμός γίνεται με την μέθοδο των στοιχείων πτερύγωσης (BEM- Blade Element Momentum Theory). Εξαιτίας της αλλαγής στην γεωμετρία πλέον για το κάθε αεροδυναμικό στοιχείο θα αναφερόμαστε σε δυο συστήματα συντεταγμένων, το σύστημα του επιπέδου του δρομέα (RD) και το τοπικό σύστημα του πτερυγίου (BLD).Ο υπολογισμός των φαινόμενων ταχυτήτων που έχουν γίνει με τα καινούρια μητρώα στροφών λόγω της προσθήκης του pre-bend και του pre-sweep αλλά και οι παράγωγοι τους έχουν παρουσιαστεί στην παράγραφο 3.2.

Η μοντελοποίηση της ροής εισόδου απαιτεί να καθοριστούν οι συντελεστές αξονικής(a) και εφαπτομενικής (a') επαγωγής . Αυτό γίνεται στην αρχή της ανάλυσης ευστάθειας λύνοντας το μη-γραμμικό σύστημα των εξισώσεων (82) και (83) με την μέθοδο Newton Raphson που θα παρουσιαστούν στην συνέχεια, παρέχοντας έτσι για κάθε αεροδυναμικό στοιχείο του συντελεστές a και a'.Οι συντελεστές επαγωγής μπορούν είτε να υπολογιστούν μια φορά και κρατηθούν σταθεροί με την παραδοχή ότι οι διαταραχές της ανεμογεννήτριας δεν επηρεάζουν τις επαγόμενες ταχύτητες(μοντέλο παγωμένου ομμόρου). Οι εξισώσεις είναι οι εξής:

$$4a(1-a)F - \frac{Nc}{2\pi r_{RD}} \frac{dr_{BLD}}{dr_{RD}} C_{n_{-RD}} \frac{U_{eff_{-BLD}}^2}{U_{n_{-RD}}^2} = 0$$

$$C_{T} - \frac{\sigma C_{n_{-RD}} U_{eff_{-BLD}}^2}{U_{n_{-RD}}^2} = 0$$

$$4a'(1-a)\lambda F - \sigma C_{t_{-RD}} \frac{U_{eff_{-BLD}}^2}{U_{n_{-RD}}^2} = 0$$
(83)

Όπου dr_{BLD} παριστάνει το πραγματικό πλάτος του δακτυλιοειδούς σωλήνα , dr_{RD} το προβαλλόμενο πλάτος στο επίπεδο του δρομέα, λ τον λόγο της τοπικής ταχύτητας ακροπτερυγίου και σ την τοπική σταθερότητα :

$$\sigma = \frac{\mathrm{Nc}}{2\pi r_{\mathrm{RD}}} \frac{\mathrm{dr}_{\mathrm{BLD}}}{\mathrm{dr}_{\mathrm{RD}}}$$

$$\lambda = \frac{U_{t_RD}}{U_{n_RD}}$$

Οι τοπικοί συντελεστές στο σύστημα του πτερυγίου C_T και C_n καθορίζονται ως εξής:

$$C_{t_{BLD}} = -(C_{D} \cos \varphi_{L} - C_{L} \sin \varphi_{L})$$
$$C_{n_{BLD}} = C_{D} \sin \varphi_{L} + C_{L} \cos \varphi_{L}$$

Και μεταφερόμενοι στο σύστημα του RD προκύπτουν ως εξής:

$$C_{t_{RD}} = -(A_{p}^{T}(1,1)(-C_{t_{BLD}}) + A_{p}^{T}(1,3)C_{n_{BLD}})$$
$$C_{n_{RD}} = A_{p}^{T}(3,1)(-C_{t_{BLD}}) + A_{p}^{T}(3,3)C_{n_{BLD}}$$

Όπου F = F(r) υποδηλώνεται ο συντελεστής διόρθωσης απωλειών ακροπτερυγίου Prandtl's ο οποίος δίνεται από την σχέση:

$$F(r) = \frac{2}{\pi} \cos^{-1}(e^{-r}), \quad f(r_{RD}) = \frac{N}{2} \frac{R_{RD} - r_{RD}}{r_{RD} \sin \phi}$$

Όπου R_{RD} υποδηλώνεται η προβαλλόμενη ακτίνα του ακροπτερυγίου πάνω στο επίπεδο του δρομέα και $\varphi = \tan^{-1}(\frac{U_{t_RD}}{U_{n_RD}})$ η γωνία της ροής σε σχέση με το σύστημα του επιπέδου του δρομέα

του δρομέα.

Επίσης έχουμε προσθέσει την διόρθωση του συντελεστή ώσης για υψηλές τιμές στον συντελεστή αξονικής επαγωγής που συνεπάγεται υψηλά φορτισμένους ρότορες:

$$C_{T} = 4a \cdot (1-a) \cdot F \qquad a < 0.33$$

$$C_{\rm T} = (0.425 + 1.39 \cdot a) \cdot F$$
 $a > 0.33$

3.2 Μοντελοποίηση της τοπικής τμηματικής αεροδυναμικής

Στην εφαρμογή της θεωρίας της δοκού για την κατασκευαστική μοντελοποίηση των πτερυγίων, τα εξωτερικά αεροδυναμικά φορτία δ \mathbf{P} στην εξίσωση (33) αναπαριστούν τα αεροδυναμικά φορτία ανά μονάδα μήκους του πτερυγίου. Είναι τμηματικά φορτία τα οποία μπορούν να εκφραστούν σε όρους τμηματικών αδιάστατων αεροδυναμικών ιδιοτήτων ως εξής: συντελεστής άνωσης C_L , αντίστασης C_D και ροπής C_M . Τα τοπικά αεροδυναμικά φορτία της διατομής του πτερυγίου δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\delta P_{x} = -\delta L \sin \varphi_{L} + \delta D \cos \varphi_{L} = \left(-C_{L} \sin \varphi_{L} + C_{D} \cos \varphi_{L} \right) \cdot \frac{\rho}{2} W_{\text{eff sect}}^{\text{ind} 2} c$$

$$\delta P_{z} = \delta L \cos \varphi_{L} + \delta D \sin \varphi_{L} = \left(C_{L} \cos \varphi_{L} + C_{D} \sin \varphi_{L} \right) \cdot \frac{\rho}{2} W_{\text{eff sect}}^{\text{ind} 2} c$$

$$\delta M_{y} = \delta M_{p} = C_{M} \cdot \frac{\rho}{2} W_{\text{eff sect}}^{\text{ind} 2} c$$
(69)

Όπου δL , δD είναι οι τοπικές δυνάμεις άνωσης και αντίστασης, δM_y η ροπή λόγω βήματος πτερυγίου, ϕ_L η τοπική γωνία ροής σε σχέση με τη χορδή ενός τμήματος του πτερυγίου με μηδενική συστροφή και στρέψη, $W_{\rm eff\ sect}^{\rm ind}$ η τοπική ως προς το τμήμα του πτερυγίου φαινόμενη ταχύτητα και cη τοπική χορδή του πτερυγίου. Δεδομένου ότι οι ταχύτητες επαγώμενες από τον ομμόρου είναι γνωστές, τα τοπικά χαρακτηριστικά της ροής(γωνία και ταχύτητα) προκύπτουν χρησιμοποιώντας τις ακόλουθες εκφράσεις:

$$\tan \varphi_{\rm L} = \frac{U_{\rm effz \, \rm sec \, t}^{\rm ind}}{U_{\rm effx \, \rm sec \, t}^{\rm ind}}$$
(70)

$$W_{\text{eff sect}}^{\text{ind}} = \sqrt{U_{\text{effx sect}}^{\text{ind } 2} + U_{\text{effz sect}}^{\text{ind } 2}}$$
(71)

$$\alpha_{\rm eff} = \phi_{\rm L} + \theta_{\rm t} + \theta_{\rm y} \tag{72}$$

Όπου α_{eff} είναι η τοπική γωνία πρόσπτωσης, θ_t η τοπική συστροφή του πτερυγίου (θετική δεξιόστροφα-ανάποδα από τη συνηθισμένη σύμβαση), θ_y η τοπική γωνία στρέψης του πτερυγίου, $U_{effx \, sect}^{ind}$ και $U_{effz \, sect}^{ind}$ είναι οι κατά x, z συνιστώσες της τοπικής φαινόμενης ταχύτητας U_{sect}^{ind} (συμπεριλαμβανομένων των συντελεστών μείωσης της ταχύτητας).Οι ταχύτητες αυτές προσδιορίζονται από τους ακόλουθους τύπους:

$$\boldsymbol{U}_{B \text{ sect}} = \left(\dot{\mathbf{u}}_{B \text{ sect}}, \quad \dot{\mathbf{v}}_{B \text{ sect}}, \quad \dot{\mathbf{w}}_{B \text{ sect}}\right)^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{U}_{w \text{ sect}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \left(\mathbf{U}_{w\mathrm{G}}, \quad 0, \quad 0\right)^{\mathrm{T}} = \left(\mathbf{U}_{wx \text{ sect}}, \quad \mathbf{U}_{wy \text{ sect}}, \quad \mathbf{U}_{wz \text{ sect}}\right)^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{U}_{B \text{ rd}} = \mathbf{A}_{\mathrm{sect}} \cdot \boldsymbol{U}_{B \text{ sect}} = \left(\dot{\mathbf{u}}_{B \text{ rd}}, \quad \dot{\mathbf{v}}_{B \text{ rd}}, \quad \dot{\mathbf{w}}_{B \text{ rd}}\right)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{U}_{w rd} = \boldsymbol{A}_{p}^{T} \cdot \boldsymbol{U}_{w} = \boldsymbol{A}_{p}^{T} \cdot \left(\boldsymbol{U}_{wG}, 0, 0\right)^{T} = \left(\boldsymbol{U}_{wx rd}, \boldsymbol{U}_{wy rd}, \boldsymbol{U}_{wz rd}\right)^{T}$$
$$\boldsymbol{U}_{rd}^{ind} = \left(\left(\boldsymbol{U}_{wx} - \dot{\boldsymbol{u}}_{B}\right)_{rd} (1 + a'), \left(\boldsymbol{U}_{wy} - \dot{\boldsymbol{v}}_{B}\right)_{rd}, \left(\boldsymbol{U}_{wz} - \dot{\boldsymbol{w}}_{B}\right)_{rd} (1 - a)\right)^{T}$$
$$\boldsymbol{U}_{sect}^{ind} = \boldsymbol{A}_{sect}^{T} \cdot \boldsymbol{U}_{rd ind} = \left(\boldsymbol{U}_{effx sect}^{ind}, \boldsymbol{U}_{effy sect}^{ind}, \boldsymbol{U}_{effz sect}^{ind}\right)^{T}$$

$$\begin{split} \delta \boldsymbol{U}_{w\,rd}^{\text{ind}} &= \left(\delta (\boldsymbol{A}_{p}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{x} (1+a'), \quad \delta (\boldsymbol{A}_{p}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{y}, \quad \delta (\boldsymbol{A}_{p}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{z} (1-a) \right)^{\mathrm{T}} \\ &= \left((\delta \boldsymbol{A}_{p}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{x} (1+a'), \quad (\delta \boldsymbol{A}_{p}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{y}, \quad (\delta \boldsymbol{A}_{p}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{z} (1-a) \right)^{\mathrm{T}} \\ \delta \boldsymbol{U}_{w\,sect}^{\text{ind}} &= \boldsymbol{A}_{sect}^{\mathrm{T}} \cdot \delta \boldsymbol{U}_{w\,rd}^{\text{ind}} + \delta \boldsymbol{A}_{sect}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w\,rd}^{\text{ind}} = \\ &= \boldsymbol{A}_{sect}^{\mathrm{T}} \cdot \left((\delta \boldsymbol{A}_{p}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{x} (1+a'), \quad (\delta \boldsymbol{A}_{p}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{y}, \quad (\delta \boldsymbol{A}_{p}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{z} (1-a) \right)^{\mathrm{T}} \\ &+ \delta \boldsymbol{A}_{sect}^{\mathrm{T}} \cdot \left((\boldsymbol{A}_{p}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{x} (1+a'), \quad (\boldsymbol{A}_{p}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{y}, \quad (\boldsymbol{A}_{p}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{z} (1-a) \right)^{\mathrm{T}} \\ &= \left(\delta \boldsymbol{U}_{wx\,sect}^{\text{ind}}, \quad \delta \boldsymbol{U}_{wy\,sect}^{\text{ind}}, \quad \delta \boldsymbol{U}_{wz\,sect}^{\text{ind}} \right)^{\mathrm{T}} \end{split}$$

Εδώ θα πρέπει να αναφέρουμε ότι μια ακόμα αλλαγή που έγινε είναι ότι οι πίνακες στροφών. οι ταχύτητες, οι επιταχύνσεις και οι παράγωγοί τους προκύπτουν από το κατασκευαστικό κομμάτι μέσω αντιστοίχισης, που γίνεται στον κώδικα του αεροδυναμικού πλέγματος με το κατασκευαστικό. Δηλαδή για κάθε αεροδυναμικό στοιχείο βρίσκουμε σε ποιο κατασκευαστικό στοιχείο του πτερυγίου αντιστοιχεί.

Nα τονιστεί ότι
$$\dot{u}_{B \text{ sect}}$$
, $\dot{v}_{B \text{ sect}}$ και $\dot{w}_{B \text{ sect}}$ μπορούν να γραφούν στην εξής μορφή:
 $\dot{u}_{B \text{ sect}} = \dot{u}_{B}^{G} + \dot{u}$
 $\dot{v}_{B \text{ sect}} = \dot{v}_{B}^{G} + \dot{v}$
 $\dot{w}_{B \text{ sect}} = \dot{w}_{B}^{G} + \dot{w}$

Όπου, ^μ και ŵ είναι οι τοπικές μετατοπίσεις του πτερυγίου ενώ μ^G_B και ŵ^G_B είναι οι ταχύτητες οι οποίες προέρχονται από την γενική κίνηση του ρότορα εξαιτίας της ελαστικότητάς της υποστηρικτικής κατασκευής (άξονας, πλήμνη πύργος).Για παράδειγμα η κίνηση του πύργου θα δώσει μια αύξησή της κίνησης του πτερυγίου κατά την κατεύθυνση πτερύγισης.



Σχήμα 16: Βασικές αναφορές στο τμήμα του πτερυγίου

Για την επεξεργασία του ομμόρου ,στο GAST, εφαρμόζεται η παραδοχή του παγωμένου ομμόρου. Εάν ο ομμόρους θεωρηθεί παγωμένος πρέπει να γίνει η υπόθεση ότι κάθε διαταραχή που σχετίζεται με τον ρότορα δεν επηρεάζει τις επαγώμενες ταχύτητες.

Τα αεροδυναμικά φορτία είναι μη μόνιμα και κατ' επέκταση στο πλαίσιο μιας προσέγγισης με τη μέθοδο των στοιχείων πτερύγωσης, οι μη μόνιμοι συντελεστές C_L, C_D και C_M μπορούν να υπολογιστούν με την εφαρμογή ενός μη μόνιμου-dynamic stall αεροδυναμικού μοντέλου**[16],[17]**. Είναι προφανές ότι τα αεροδυναμικά φορτία (69) σχετίζονται άμεσα με τη δυναμική του συστήματος και την απόκριση της κατασκευής. Έτσι εκτός από τις δυναμικές εξισώσεις της κατασκευής που είναι μη γραμμικές ,έρχονται να προστεθούν μη γραμμικότητες στο σύστημα μέσω των αεροδυναμικών φορτίων.

3,2,1 Μόνιμη αεροδυναμική – γραμμικοποιημένο μοντέλο

Κάνοντας την παραδοχή της μόνιμης αεροδυναμικής, οι τοπικοί συντελεστές άνωσης C_L , αντίστασης C_D και ροπής C_M ,είναι μόνο συνάρτηση της γωνίας πρόσπτωσης α_{eff} . Σε αυτή την περίπτωση η γραμμικοποιήση των εξωτερικών αεροδυναμικών φορτίων είναι απλή. Δεδομένης της μορφής της, η εξίσωση (69) μπορεί να γραμμικοποιηθεί ως εξής:



λαμβάνοντας υπόψη ότι η δP_y ισούται με μηδέν εξαιτίας των 2D χαρακτηριστικών της μεθόδου των στοιχείων πτερύγωσης.

3,2,2 Μη-μόνιμο μοντέλο αεροδυναμικής ΟΝΕRΑ – γραμμικοποιημένο μοντέλο Στο GAST, τα μη-μόνιμα αεροδυναμικά φορτία στα τμήματα των πτερυγίων καθορίζονται χρησιμοποιώντας το μοντέλο ΟΝΕRΑ. Οι μη-μόνιμες δυνάμεις άνωσης και αντίστασης, και η ροπή βήματος του πτερυγίου σύμφωνα με το μοντέλο της ΟΝΕRΑ δίνονται από τις ακόλουθες εκφράσεις:

$$\delta L = \frac{\rho c}{2} \cdot \left[W_{\text{eff sect}}^{\text{ind}} \cdot (\Gamma_{1L} + \Gamma_{2L}) + \frac{s^{L} c}{2} \dot{w}_{0} + \frac{k^{L} \cdot c}{2} \dot{w}_{1} \right]$$

$$\delta D = \frac{\rho c}{2} \cdot \left[W_{\text{eff sect}}^{\text{ind}} \cdot C_{\text{Dlin}} + \frac{\sigma^{D} c}{2} \dot{w}_{0} + W_{\text{eff sect}}^{\text{ind}} \cdot \Gamma_{2D} \right]$$

$$\delta M_{y} = \frac{\rho c^{2}}{2} \cdot \left[W_{\text{eff sect}}^{\text{ind}} \cdot C_{\text{Mlin}} + \frac{(\overline{\sigma}^{M} + d^{M}) \cdot c}{2} \dot{w}_{0} + \sigma^{M} W_{\text{eff sect}}^{\text{ind}} \cdot w_{1} + \frac{s^{M} c}{2} \cdot \dot{w}_{1} + W_{\text{eff sect}}^{\text{ind}} \cdot \Gamma_{2M} \right]$$
(75)

όπου ρ είναι η τοπική πυκνότητα της ροής ,c η τοπική χορδή του πτερυγίου , C_{Dlin} και C_{Mlin} είναι οι συντελεστές αντίστασης και ροπής της εν δύναμη ροής (εξηγούνται στο Σχήμα 17), Γ_{IL} και Γ_{2L} είναι δύο συντελεστές για την επαλήθευση της άνωσης , ο πρώτος αντιστοιχεί στις συνθήκες της προσκολλημένης ροής και ο δεύτερος στην διόρθωση λόγο αποκόλλησης της ροής, Γ_{2D} και Γ_{2M} είναι αντίστοιχα δυο "ισοδύναμοι" συντελεστές για την επαλήθευση της αντίστασης και η κάθετη

συνιστώσα της ταχύτητας στο τμήμα της χορδής και w_i είναι η γωνιακή ταχύτητα του τμήματος και δίνονται από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\begin{split} \mathbf{w}_{0} &= \mathbf{W}_{eff \text{ sect}}^{\text{ind}} \sin \alpha_{eff} - l_{c/4} \cdot \dot{\theta}_{y} \\ \dot{\mathbf{w}}_{0} &= \dot{\mathbf{W}}_{eff \text{ sect}}^{\text{ind}} \sin \alpha_{eff} + \dot{\alpha}_{eff} \mathbf{W}_{eff \text{ sect}}^{\text{ind}} \cos \alpha_{eff} - l_{c/4} \cdot \ddot{\theta}_{y} \\ \mathbf{w}_{1} &= \frac{c}{2} \dot{\theta}_{y} \\ \dot{\mathbf{w}}_{1} &= \frac{c}{2} \ddot{\theta}_{y} \end{split}$$
(76)
$$\dot{\mathbf{w}}_{eff} &= \dot{\mathbf{\phi}}_{L} + \dot{\theta}_{y} \end{split}$$

$$\dot{\phi}_{L} = \frac{-U_{\text{effz sect}}^{\text{ind}} \dot{U}_{\text{effx sect}}^{\text{ind}} + U_{\text{effx sect}}^{\text{ind}} \dot{U}_{\text{effz sect}}^{\text{ind}}}{U_{\text{effx sect}}^{\text{ind}} + U_{\text{effz sect}}^{\text{ind}}}$$

$$\dot{W}_{eff \text{ sect}} = \frac{U_{effx \text{ sect}}^{ind} \dot{U}_{effx \text{ sect}}^{ind} + U_{effz \text{ sect}}^{ind} \dot{U}_{effz \text{ sect}}^{ind}}{\sqrt{U_{effx \text{ sect}}^{ind 2} + U_{effz \text{ sect}}^{ind 2}}}$$

$$\dot{\boldsymbol{U}}_{B \text{ sect}} = \begin{pmatrix} \ddot{\boldsymbol{u}}_{B \text{ sect}}, & \ddot{\boldsymbol{v}}_{B \text{ sect}}, & \ddot{\boldsymbol{w}}_{B \text{ sect}} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\dot{\boldsymbol{U}}_{ws sect} = \dot{\boldsymbol{A}}^{T} \cdot \boldsymbol{U}_{w} = \dot{\boldsymbol{A}}^{T} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}_{wG}, & \boldsymbol{0}, & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{U}}_{wx sect}, & \dot{\boldsymbol{U}}_{wy sect}, & \dot{\boldsymbol{U}}_{wz sect} \end{pmatrix}^{T}$$

$$\dot{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{B\,rd}} = \boldsymbol{\mathrm{A}}_{\mathrm{sect}} \cdot \dot{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{B\,sect}} = \begin{pmatrix} \ddot{\boldsymbol{\mathrm{u}}}_{\mathrm{B\,rd}}, & \ddot{\boldsymbol{\mathrm{v}}}_{\mathrm{B\,rd}}, & \ddot{\boldsymbol{\mathrm{w}}}_{\mathrm{B\,rd}} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\dot{\boldsymbol{U}}_{w rd} = \dot{\boldsymbol{A}}_{p}^{T} \cdot \boldsymbol{U}_{w} = \dot{\boldsymbol{A}}_{p}^{T} \cdot \left(\boldsymbol{U}_{wG}, 0, 0\right)^{T} = \left(\dot{\boldsymbol{U}}_{wx rd}, \dot{\boldsymbol{U}}_{wy rd}, \dot{\boldsymbol{U}}_{wz rd}\right)^{T}$$

$$\dot{\boldsymbol{U}}_{rd}^{ind} = \left(\left(\dot{\boldsymbol{U}}_{wx} - \ddot{\boldsymbol{u}}_{B} \right)_{rd} (1 + a'), \quad \left(\dot{\boldsymbol{U}}_{wy} - \ddot{\boldsymbol{v}}_{B} \right)_{rd}, \quad \left(\dot{\boldsymbol{U}}_{wz} - \ddot{\boldsymbol{w}}_{B} \right)_{rd} (1 - a) \right)^{T}$$

$$\dot{\boldsymbol{U}}_{\text{sect}}^{\text{ind}} = \boldsymbol{A}_{\text{sect}}^{\text{T}} \cdot \dot{\boldsymbol{U}}_{\text{rd ind}} = \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{U}}_{\text{effx sect}}^{\text{ind}}, & \dot{\boldsymbol{U}}_{\text{effy sect}}^{\text{ind}}, & \dot{\boldsymbol{U}}_{\text{effz sect}}^{\text{ind}} \end{pmatrix}^{\text{T}}$$

$$\begin{split} \delta \dot{\boldsymbol{U}}_{w\,rd}^{\text{ind}} &= \left(\delta (\dot{\boldsymbol{A}}_{p}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{x} (1+a'), \quad \delta (\dot{\boldsymbol{A}}_{p}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{y}, \quad \delta (\dot{\boldsymbol{A}}_{p}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{z} (1-a) \right)^{\mathrm{T}} \\ &= \left((\delta \dot{\boldsymbol{A}}_{p}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{x} (1+a'), \quad (\delta \dot{\boldsymbol{A}}_{p}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{y}, \quad (\delta \dot{\boldsymbol{A}}_{p}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{z} (1-a) \right)^{\mathrm{T}} \end{split}$$

$$\begin{split} \delta \dot{\boldsymbol{U}}_{w \, \text{sect}}^{\text{ind}} &= \boldsymbol{A}_{\text{sect}}^{\text{T}} \cdot \delta \dot{\boldsymbol{U}}_{w \, \text{rd}}^{\text{ind}} = \boldsymbol{A}_{\text{sect}}^{\text{T}} \cdot \left(\left(\delta \dot{\boldsymbol{A}}_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w} \right)_{x} (1+a'), \quad \left(\delta \dot{\boldsymbol{A}}_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w} \right)_{y}, \quad \left(\delta \dot{\boldsymbol{A}}_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w} \right)_{z} (1-a) \right)^{\text{T}} \\ &= \left(\delta \dot{\boldsymbol{U}}_{wx \, \text{sect}}^{\text{ind}}, \quad \delta \dot{\boldsymbol{U}}_{wy \, \text{sect}}^{\text{ind}}, \quad \delta \dot{\boldsymbol{U}}_{wz \, \text{sect}}^{\text{ind}} \right)^{\text{T}} \end{split}$$

$$\begin{split} \delta \dot{\boldsymbol{U}}_{sect}^{ind} &= \left(\delta \dot{\boldsymbol{U}}_{effx\,sect}^{ind}, \quad \delta \dot{\boldsymbol{U}}_{effy\,sect}^{ind}, \quad \delta \dot{\boldsymbol{U}}_{effz\,sect}^{ind} \right)^{T} = \\ &= \left(\delta \dot{\boldsymbol{U}}_{wx\,sect}^{ind} - \delta \ddot{\boldsymbol{u}}_{B\,sect}, \quad \delta \dot{\boldsymbol{U}}_{wy\,sect}^{ind} - \delta \ddot{\boldsymbol{v}}_{B\,sect}, \quad \delta \dot{\boldsymbol{U}}_{wz\,sect}^{ind} - \delta \ddot{\boldsymbol{w}}_{B\,sect} \right)^{T} = \\ &= \left(\delta (\dot{A}^{T} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{x} - \delta \ddot{\boldsymbol{u}}_{B\,sect}, \quad \delta (\dot{A}^{T} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{y} - \delta \ddot{\boldsymbol{v}}_{B\,sect}, \quad \delta (\dot{A}^{T} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{z} - \delta \ddot{\boldsymbol{w}}_{B\,sect} \right)^{T} = \\ &= \left((\delta \dot{A}^{T} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{x} - \delta \ddot{\boldsymbol{u}}_{B\,sect}, \quad (\delta \dot{A}^{T} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{y} - \delta \ddot{\boldsymbol{v}}_{B\,sect}, \quad (\delta \dot{A}^{T} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{z} - \delta \ddot{\boldsymbol{w}}_{B\,sect} \right)^{T} = \\ &= \left(\delta \dot{A}^{T} \cdot \boldsymbol{U}_{w} - \delta \ddot{\boldsymbol{u}}_{B\,sect}, \quad (\delta \dot{A}^{T} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{y} - \delta \ddot{\boldsymbol{v}}_{B\,sect}, \quad (\delta \dot{A}^{T} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{z} - \delta \ddot{\boldsymbol{w}}_{B\,sect} \right)^{T} = \\ &= \delta \dot{A}^{T} \cdot \boldsymbol{U}_{w} - \delta \dot{\boldsymbol{U}}_{B\,sect} \end{split}$$

$$\begin{split} \delta \dot{\boldsymbol{U}}_{w\,\text{sect}}^{\text{ind}} &= \mathbf{A}_{\text{sect}}^{\text{T}} \cdot \delta \dot{\boldsymbol{U}}_{w\,\text{rd}}^{\text{ind}} + \delta \mathbf{A}_{\text{sect}}^{\text{T}} \cdot \dot{\boldsymbol{U}}_{w\,\text{rd}}^{\text{ind}} + \dot{\boldsymbol{A}}_{\text{sect}}^{\text{T}} \cdot \delta \boldsymbol{U}_{w\,\text{rd}}^{\text{ind}} + \delta \dot{\mathbf{A}}_{\text{sect}}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w\,\text{nd}}^{\text{T}} \\ &= \mathbf{A}_{\text{sect}}^{\text{T}} \cdot \left((\delta \dot{\mathbf{A}}_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{x} (1 + a'), \quad (\delta \dot{\mathbf{A}}_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{y}, \quad (\delta \dot{\mathbf{A}}_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{z} (1 - a) \right)^{\text{T}} + \\ &\delta \mathbf{A}_{\text{sect}}^{\text{T}} \cdot \left((\dot{\mathbf{A}}_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{x} (1 + a'), \quad (\dot{\mathbf{A}}_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{y}, \quad (\dot{\mathbf{A}}_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{z} (1 - a) \right)^{\text{T}} + \\ &\dot{\mathbf{A}}_{\text{sect}}^{\text{T}} \cdot \left((\delta \mathbf{A}_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{x} (1 + a'), \quad (\delta \mathbf{A}_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{y}, \quad (\delta \mathbf{A}_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{z} (1 - a) \right)^{\text{T}} + \\ &\delta \dot{\mathbf{A}}_{\text{sect}}^{\text{T}} \cdot \left((\mathbf{A}_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{x} (1 + a'), \quad (\mathbf{A}_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{y}, \quad (\mathbf{A}_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{z} (1 - a) \right)^{\text{T}} + \\ &\delta \dot{\mathbf{A}}_{\text{sect}}^{\text{T}} \cdot \left((\mathbf{A}_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{x} (1 + a'), \quad (\mathbf{A}_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{y}, \quad (\mathbf{A}_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{z} (1 - a) \right)^{\text{T}} + \\ &\delta \dot{\mathbf{A}}_{\text{sect}}^{\text{T}} \cdot \left((\mathbf{A}_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{x} (1 + a'), \quad (\mathbf{A}_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{y}, \quad (\mathbf{A}_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{z} (1 - a) \right)^{\text{T}} \\ &= \left(\delta \dot{\mathbf{U}}_{wx\,\text{sect}}^{\text{ind}}, \quad \delta \dot{\mathbf{U}}_{wy\,\text{sect}}^{\text{ind}}, \quad \delta \dot{\mathbf{U}}_{wz\,\text{sect}}^{\text{ind}} \right)^{\text{T}} \end{split}$$



Σχήμα 17: Βασικοί παράμετροι του μοντέλου ONERA.



Σχήμα 18: Ορισμός των w₀ και w₁ στην περίπτωση συνδυασμένης κίνησης (κάθετης στην διατομή - βήματος).

Παραπάνω το $l_{c/4}$ είναι το έκκεντρο του ενός τετάρτου της χορδής από τον ελαστικό άξονα του πτερυγίου και θ_y είναι η τοπική στρεπτική παραμόρφωση του πτερυγίου. Οι s^L, k^L, σ^D, $\overline{\sigma}^{M}$, d^M, σ^M και s^M είναι παράμετροι του μοντέλου (όλες οι σταθερές και οι παράμετροι του μοντέλου θα προσδιοριστούν στο τέλος της παραγράφου). Στην (76), η \dot{w}_0 έχει υπολογιστεί με την παραδοχή ενός ομοιόμορφου προφίλ ταχύτητας εισόδου και του παγωμένου ομμόρου. Στην περίπτωση όπου η ταχύτητα του ανέμου μεταβάλλεται με το χρόνο ή ο ομμόρους είναι δυναμικός, προκύπτουν οι αντίστοιχες αλλαγές στον υπολογισμό της \dot{w}_0 .

Οι συντελεστές $\Gamma_{\rm 1L}$, $\Gamma_{\rm 2L}$, $\Gamma_{\rm 2D}$ και $\Gamma_{\rm 2M}$ καθορίζονται μέσω των ακόλουθων διαφορικών εξισώσεων:

$$\dot{\Gamma}_{1L} + \frac{\lambda^{L}}{\tau} \Gamma_{1L} = \frac{1}{2} \frac{\lambda^{L}}{\tau} \left(\frac{dC_{L}}{d\alpha} \right)_{lin} \cdot W_{eff \, sect}^{ind} \cdot \sin\left[2(\alpha_{eff} - \alpha_{0})\right] + \\ + \frac{\lambda^{L}}{\tau} \sigma^{L} w_{1} + \left(\alpha^{L} \left(\frac{dC_{L}}{d\alpha}\right)_{lin} + d^{L}\right) \dot{w}_{0} + \alpha^{L} \sigma^{L} \dot{w}_{1} \\ \ddot{\Gamma}_{2L} + \frac{a^{L}}{\tau} \cdot \dot{\Gamma}_{2L} + r^{L} \cdot \frac{\Gamma_{2L}}{\tau^{2}} = -\left[\frac{r^{L}}{\tau^{2}} \cdot W_{eff \, sect}^{ind} \cdot \left(\Delta C_{L}\right) + \frac{E^{L}}{\tau} \cdot \dot{w}_{0}\right] \\ \ddot{\Gamma}_{2D} + \frac{a^{D}}{\tau} \cdot \dot{\Gamma}_{2D} + r^{D} \cdot \frac{\Gamma_{2D}}{\tau^{2}} = -\left[\frac{r^{D}}{\tau^{2}} \cdot W_{eff \, sect}^{ind} \cdot \left(\Delta C_{D}\right) + \frac{E^{D}}{\tau} \cdot \dot{w}_{0}\right] \\ \ddot{\Gamma}_{2M} + \frac{a^{M}}{\tau} \cdot \dot{\Gamma}_{2M} + r^{M} \cdot \frac{\Gamma_{2M}}{\tau^{2}} = -\left[\frac{r^{M}}{\tau^{2}} \cdot W_{eff \, sect}^{ind} \cdot \left(\Delta C_{M}\right) + \frac{E^{M}}{\tau} \cdot \dot{w}_{0}\right]$$

$$(77)$$

H εξίσωση από την οποία προκύπτει ο συντελεστής Γ_{1L} είναι πρώτου βαθμού διαφορική εξίσωση, ενώ οι συντελεστές Γ_{2D} και Γ_{2M} είναι δευτέρου βαθμού. Στην εξίσωση (75), $\left(\frac{dC_L}{d\alpha}\right)_{lin}$ είναι η κλίση του γραμμικού τμήματος της καμπύλης $C_L - \alpha$, (ΔC_L) , (ΔC_D) και (ΔC_M) είναι οι διαφορές των συντελεστών της πραγματικής συνεκτικής άνωσης, αντίστασης και ροπής από τις αντίστοιχες μη συνεκτικές που αντιστοιχούν στην α_{eff} (βλέπε Σχήμα 17), τ είναι μια χρονική παράμετρος η οποία προκύπτει από την σχέση $\tau = \frac{c}{2 \cdot W_{eff sect}^{ind}}$, και λ^L , σ^L , α^L , d^L , a^L , r^L , E^L , a^D , r^D , E^D , a^M , r^M , E^M είναι παράμετροι του μοντέλου για τους οποίους ισχύει ότι , a^L , a^D , a^M , r^L , r^D , r^M , E^L , E^D , $E^M = f(\Delta C_L^2)$. Δεδομένου της δεύτερης τάξης του συστήματος των δυναμικών εξισώσεων είναι βολικό να μετατρέψουμε επίσης και την εξίσωση για το Γ_{1L} σε δευτεροβάθμια εισάγοντας την σχέση $\dot{\gamma}_{1L} = \Gamma_{1L}$. Για τις διάφορες παραμέτρους του μοντέλου ΟΝΕRA εισάγονται οι ακόλουθες σχέσεις οι οποίες λαμβάνουν υπόψιν την συμπιεστότητα της ροής μέσω του αριθμού Mach (M):

$$\begin{split} \lambda^{L} &= 0.17 - 0.13 \cdot M \\ \alpha^{L} &= 0.53 + 0.25 \cdot (\sqrt{1 - M^{2}} - 1) \\ s^{L} &= \pi + 5\pi [(1 - M^{2})^{0.285} - 1] \\ \sigma^{L} &= 2\pi / (\sqrt{1 - M^{2}}) \\ d^{L} &= \sigma_{1} |\Delta C_{L}|, \quad \sigma_{1} = 0.00 \div - 0.15 \\ k^{L} &= \frac{\pi}{2} + 1.96\pi \Big(\sqrt{1 - M^{2}} - 1\Big) \\ \sqrt{r^{L}} &= r_{0}^{L} + r_{2}^{L} \Delta C_{L}^{2}, \quad r_{0}^{L} = 0.10 \div 0.40, \quad r_{2}^{L} = 0.00 \div 0.50 \\ a^{L} &= a_{0}^{L} + a_{2}^{L} \Delta C_{L}^{2}, \quad a_{0}^{L} = 0.10 \div 0.40, \quad a_{2}^{L} = 0.00 \div 0.60 \\ E^{L} &= E_{2}^{L} \cdot \Delta C_{L}^{2}, \quad E_{2}^{L} = (0.00 \div - 0.20) \cdot \frac{180}{\pi} \\ \sigma^{D} &= \sigma_{0}^{D} \cdot \alpha_{eff} + \sigma_{1}^{D} |\Delta C_{L}|, \quad \sigma_{0}^{D} = (0.000 \div 0.003) \cdot \frac{180}{\pi}, \quad \sigma_{1}^{D} = (0.00 \div - 0.05) \cdot \frac{180}{\pi} \\ \sqrt{r^{D}} &= r_{0}^{D} + r_{2}^{D} \cdot \Delta C_{L}^{2}, \quad r_{0}^{D} = 0.10 \div 0.40, \quad r_{2}^{D} = 0.00 \div 0.50 \\ a^{D} &= a_{0}^{D} + a_{2}^{D} \cdot \Delta C_{L}^{2}, \quad a_{0}^{D} = 0.00 \div 0.50, \quad a_{2}^{D} = 0.00 \div 0.60 \\ E^{D} &= E_{2}^{D} \cdot \Delta C_{L}^{2}, \quad E_{2}^{D} = (0.00 \div - 0.05) \cdot \frac{180}{\pi} \end{split}$$

$$\begin{split} \mathbf{s}^{M} &= -\frac{3\pi}{16} \cdot \left[-1.26 - 1.53 \cdot \tan^{-1} (15 \cdot (M - 0.7)) \right] \\ \sigma^{M} &= \sigma_{0}^{M} + \sigma_{1}^{M} \left| \Delta C_{L} \right| \\ \sigma_{0}^{M} + \mathbf{s}^{M} &= -\frac{\pi}{2} \cdot \left[1 + 1.4 \cdot M^{2} \right], \quad \sigma_{1}^{M} = (0.00 \div 0.15) \cdot \frac{180}{\pi} \\ \overline{\sigma}^{M} &= -\frac{\pi}{4} \cdot \left[1 + 1.4 \cdot M^{2} \right] \\ \mathbf{d}^{M} &= \sigma_{1}^{M} \cdot \left| \Delta C_{L} \right| \\ \sqrt{\mathbf{r}^{M}} &= \mathbf{r}_{0}^{M} + \mathbf{r}_{2}^{M} \Delta C_{L}^{2} \qquad \mathbf{r}_{0}^{M} = 0.10 \div 0.40, \quad \mathbf{r}_{2}^{M} = 0.00 \div 0.50 \\ \mathbf{a}^{M} &= \mathbf{a}_{0}^{M} + \mathbf{a}_{2}^{M} \Delta C_{L}^{2} \qquad \mathbf{a}_{0}^{M} = 0.10 \div 0.40, \quad \mathbf{a}_{2}^{M} = 0.00 \div 0.60 \\ \mathbf{E}^{M} &= \mathbf{E}_{2}^{M} \Delta C_{L}^{2} \qquad \mathbf{E}_{2}^{M} = (0.00 \div 0.06) \cdot \frac{180}{\pi} \end{split}$$

Στην περίπτωση της μόνιμης αεροδυναμικής ,τα αεροδυναμικά φορτία μπορούν να γραμμικοποιηθούν ως εξής σε σχέση με τους βαθμούς ελευθερίας της ελαστικής κίνησης αλλά επίσης και σε σχέση με τους αεροδυναμικούς όρους γ_{1L} , Γ_{2L} , Γ_{2D} και Γ_{2M} :

$$\begin{cases} \delta P_{x} \\ \delta P_{y} \\ \delta$$



Εκτός από τις εκφράσεις για τα αεροδυναμικά φορτία πρέπει να γραμμικοποιηθούν επίσης και οι μη γραμμικές εκφράσεις των εξισώσεων του μοντέλου ΟΝΕRA, βάζοντας τις εξισώσεις στην ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned} F_{1} &= \ddot{\gamma}_{1L} + \frac{\lambda^{L}}{\tau} \dot{\gamma}_{1L} - \frac{1}{2} \frac{\lambda^{L}}{\tau} \left(\frac{dC_{L}}{d\alpha} \right)_{lin} \cdot W_{eff sect}^{ind} \cdot \sin\left[2(\alpha_{eff} - \alpha_{0}) \right] - \\ &- \frac{\lambda^{L}}{\tau} \sigma^{L} w_{1} - \left(\alpha^{L} \left(\frac{dC_{L}}{d\alpha} \right)_{lin} + d^{L} \right) \dot{w}_{0} - \alpha^{L} \sigma^{L} \dot{w}_{1} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{2} &= \ddot{\Gamma}_{2L} + \frac{a^{L}}{\tau} \cdot \dot{\Gamma}_{2L} + r^{L} \cdot \frac{\Gamma_{2L}}{\tau^{2}} + \left[\frac{r^{L}}{\tau^{2}} \cdot W_{eff sect}^{ind} \cdot (\Delta C_{L}) + \frac{E^{L}}{\tau} \cdot \dot{w}_{0} \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{3} &= \ddot{\Gamma}_{2D} + \frac{a^{D}}{\tau} \cdot \dot{\Gamma}_{2D} + r^{D} \cdot \frac{\Gamma_{2D}}{\tau^{2}} + \left[\frac{r^{D}}{\tau^{2}} \cdot W_{eff sect}^{ind} \cdot (\Delta C_{D}) + \frac{E^{D}}{\tau} \cdot \dot{w}_{0} \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{4} &= \ddot{\Gamma}_{2M} + \frac{a^{M}}{\tau} \cdot \dot{\Gamma}_{2M} + r^{M} \cdot \frac{\Gamma_{2M}}{\tau^{2}} + \left[\frac{r^{M}}{\tau^{2}} \cdot W_{eff sect}^{ind} \cdot (\Delta C_{M}) + \frac{E^{M}}{\tau} \cdot \dot{w}_{0} \right] = 0 \end{aligned}$$

Η γραμμικοποιημένη μορφή της εξίσωσης προκύπτει ως εξής:

$$\begin{cases} F_{1}^{0} \\ F_{2}^{0} \\ F_{3}^{0} \\ F_{4}^{0} \end{cases} = \begin{cases} \frac{\partial(F_{1})}{\partial U_{ws\,set}^{ind}} & 0 & \frac{\partial(F_{2})}{\partial U_{ws\,set}^{ind}} \\ \frac{\partial(F_{3})}{\partial U_{ws\,set}^{ind}} & 0 & \frac{\partial(F_{3})}{\partial U_{ws\,set}^{ind}} \\ \frac{\partial(F_{3})}{\partial U_{ws\,set}^{ind}} & 0 & \frac{\partial(F_{$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{\partial(E)}{\partial U_{max}^{n}} & 0 & \frac{\partial(E)}{\partial U_{max}^{n}} \\ \frac{\partial(E)}{\partial U_{max}^{n}} & \frac{\partial(E)$$

3,2,3 Αεροελαστική σύζευξη – Ορισμός του "αεροελαστικού" στοιχείου της δοκού. Εισάγοντας τα αεροδυναμικά φορτία (που δίνονται είτε από την (74) όταν έχουμε μόνιμες συνθήκες ή από την (78) στις μη-μόνιμες συνθήκες) στον πίνακα των εξωτερικών φορτίων

στην εξίσωση (54), και συγκεκριμένα στον όρο: $\int_{L_e} \mathbf{N}_e^T \cdot \mathbf{II}_{\alpha} \cdot \delta \mathbf{P} \, \mathrm{dy} = \int_{L_e} \mathbf{N}_e^T \cdot \begin{cases} \delta \mathbf{P}_x \\ \delta \mathbf{P}_y \\ \delta \mathbf{P}_z \\ z_a \delta \mathbf{P}_x - x_a \delta \mathbf{P}_z \end{cases} \, \mathrm{dy}$

πραγματοποιείται η αεροελαστική σύζευξη.

Το παραπάνω ολοκλήρωμα συμπληρώνεται επίσης με την αεροδυναμική ροπή δM_y και παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$\int_{L_e} \mathbf{N}_e^T \cdot \begin{cases} \delta \mathbf{P}_x \\ \delta \mathbf{P}_y \\ \delta \mathbf{P}_z \\ \mathbf{z}_a \delta \mathbf{P}_x - \mathbf{x}_a \delta \mathbf{P}_z + \delta \mathbf{M}_y \end{cases} d\mathbf{y}$$

Τα αεροδυναμικά φορτία στο ρότορα εξαρτώνται από την κίνηση των πτερυγίων (άκαμπτο και ελαστικό σώμα).Σύμφωνα με την (36) και (37) , οι ταχύτητες και οι επιταχύνσεις ενός σημείου κατά μήκος του ελαστικού άξονα του πτερυγίου δίνονται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}}_{B \text{ sect}} \\ \dot{\mathbf{v}}_{B \text{ sect}} \\ \dot{\mathbf{w}}_{B \text{ sect}} \end{cases} = \begin{cases} \dot{\mathbf{u}}_{B}^{G} \\ \dot{\mathbf{v}}_{B}^{G} \\ \dot{\mathbf{w}}_{B}^{G} \end{cases} + \begin{cases} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\mathbf{w}} \\ \dot{\mathbf{w}} \end{cases} = \mathbf{A}^{T} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{G} = \mathbf{A}^{T} \dot{\boldsymbol{\rho}} + \mathbf{A}^{T} \dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{r}_{e} + \dot{\mathbf{r}}_{e} \\ \\ \dot{\mathbf{w}}_{B \text{ sect}} \\ \ddot{\mathbf{w}}_{B \text{ sect}} \\ \ddot{\mathbf{w}}_{B \text{ sect}} \end{cases} = \begin{cases} \ddot{\mathbf{u}}_{B}^{G} \\ \ddot{\mathbf{v}}_{B}^{G} \\ \ddot{\mathbf{w}}_{B}^{G} \\ \ddot{\mathbf{w}}_{B}^{G} \end{cases} + \begin{cases} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\mathbf{v}} \\ \ddot{\mathbf{w}} \\ \ddot{\mathbf{w}} \end{cases} = \mathbf{A}^{T} \cdot \ddot{\mathbf{r}}_{G} = \mathbf{A}^{T} \ddot{\boldsymbol{\rho}} + \mathbf{A}^{T} \ddot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{r}_{e} + 2 \cdot \mathbf{A}^{T} \dot{\mathbf{A}} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{e} + \ddot{\mathbf{r}}_{e} \end{cases}$$

όπου,

$$\mathbf{r}_{e} = \mathbf{r}_{e0} + \begin{cases} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{cases} = \begin{cases} \mathbf{0} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{0} \end{cases} + \begin{cases} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{cases}$$

Το διάνυσμα θέσης ενός τυχαίου σημείου της δοκού κατά μήκος του παραμορφωμένου άξονα του πτερυγίου, εκφρασμένο ως προς το τοπικό σύστημα συντεταγμένων του στοιχείου. Έτσι έχουμε:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}}_{B}^{G} \\ \dot{\mathbf{v}}_{B}^{G} \\ \dot{\mathbf{w}}_{B}^{G} \end{cases} = \mathbf{A}^{T} \dot{\boldsymbol{\rho}} + \mathbf{A}^{T} \dot{\mathbf{A}} \cdot \begin{cases} 0 \\ \mathbf{y} \\ 0 \end{cases} + \mathbf{A}^{T} \dot{\mathbf{A}} \cdot \begin{cases} u \\ v \\ w \end{cases}$$

και

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{u}}_{B}^{G} \\ \ddot{\mathbf{v}}_{B}^{G} \\ \ddot{\mathbf{w}}_{B}^{G} \end{cases} = \mathbf{A}^{T} \ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{A}^{T} \ddot{\mathbf{A}} \cdot \begin{cases} \mathbf{0} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{0} \end{cases} + \mathbf{A}^{T} \ddot{\mathbf{A}} \cdot \begin{cases} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{cases} + 2 \cdot \mathbf{A}^{T} \dot{\mathbf{A}} \cdot \begin{cases} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\mathbf{w}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}}_{n}^{G} \\ \dot{\mathbf{v}}_{n}^{G} \\ \dot{\mathbf{v}}$$

$$+ \partial_{q} \left(\mathbf{A}^{T} \ddot{\mathbf{A}} \right)^{0} \cdot \left\{ \begin{matrix} \mathbf{u}^{0} \\ \mathbf{v}^{0} \\ \mathbf{w}^{0} \end{matrix} \right\} \cdot \delta \mathbf{q} + \partial_{\dot{q}} \left(\mathbf{A}^{T} \ddot{\mathbf{A}} \right)^{0} \cdot \left\{ \begin{matrix} \mathbf{u}^{0} \\ \mathbf{v}^{0} \\ \mathbf{w}^{0} \end{matrix} \right\} \cdot \delta \dot{\mathbf{q}} + \partial_{\ddot{q}} \left(\mathbf{A}^{T} \ddot{\mathbf{A}} \right)^{0} \cdot \left\{ \begin{matrix} \delta \mathbf{u} \\ \delta \mathbf{v} \\ \mathbf{w}^{0} \end{matrix} \right\} + 2 \cdot \partial_{q} \left(\mathbf{A}^{T} \dot{\mathbf{A}} \right)^{0} \cdot \left\{ \begin{matrix} \dot{\mathbf{u}}^{0} \\ \dot{\mathbf{v}}^{0} \\ \dot{\mathbf{w}}^{0} \end{matrix} \right\} \cdot \delta \mathbf{q} + 2 \cdot \partial_{\dot{q}} \left(\mathbf{A}^{T} \dot{\mathbf{A}} \right)^{0} \cdot \left\{ \begin{matrix} \dot{\mathbf{u}}^{0} \\ \dot{\mathbf{v}}^{0} \\ \dot{\mathbf{w}}^{0} \end{matrix} \right\} \cdot \delta \dot{\mathbf{q}} + 2 \cdot \left(\mathbf{A}^{T} \dot{\mathbf{A}} \right)^{0} \cdot \left\{ \begin{matrix} \delta \dot{\mathbf{u}} \\ \delta \dot{\mathbf{v}} \\ \delta \dot{\mathbf{w}} \end{matrix} \right\}$$

$$(\mathbf{u}) = \left(\begin{matrix} \mathbf{u}^{0} \\ \dot{\mathbf{w}}^{0} \end{matrix} \right) = \left(\begin{matrix} \delta \mathbf{u} \\ \delta \mathbf{v} \\ \delta \dot{\mathbf{w}} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\mathbf{v}} \\ \ddot{\mathbf{w}} \end{cases} = \begin{cases} \ddot{\mathbf{u}}^{0} \\ \ddot{\mathbf{v}}^{0} \\ \ddot{\mathbf{w}}^{0} \end{cases} + \begin{cases} \delta \ddot{\mathbf{u}} \\ \delta \ddot{\mathbf{v}} \\ \delta \ddot{\mathbf{w}} \end{cases}$$

Όταν οι παραπάνω γραμμικές εκφράσεις των αεροδυναμικών φορτίων αντικατασταθούν στον πίνακα των φορτίων, είναι προφανές ότι θα προκύψουν επιπλέον όροι μάζας, απόσβεσης και ακαμψίας.

$$\begin{split} \delta \boldsymbol{U}_{w\,\text{sect}}^{\text{ind}} &= \begin{cases} \delta U_{wx\,\text{sect}}^{\text{ind}} \\ \delta U_{wy\,\text{sect}}^{\text{ind}} \\ \delta U_{wz\,\text{sect}}^{\text{ind}} \end{cases} = \mathbf{A}_{\text{sect}}^{\text{T}} \cdot \begin{bmatrix} (\delta A_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{x}(1+a') \\ (\delta A_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{y} \\ (\delta A_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{z}(1-a) \end{bmatrix} + \delta \mathbf{A}_{\text{sect}}^{\text{T}} \cdot \begin{bmatrix} (A_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{x}(1+a') \\ (A_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{y} \\ (A_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{z}(1-a) \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{A}_{\text{sect}}^{\text{T}} \cdot \begin{bmatrix} (\partial_{q} A_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{x}(1+a') \\ (\partial_{q} A_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{y} \\ (\partial_{q} A_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{y} \end{bmatrix} \delta \mathbf{q} + \partial_{q} A_{\text{sect}}^{\text{T}} \cdot \begin{bmatrix} (\partial_{q} A_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{x}(1+a') \\ (\partial_{q} A_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{y} \\ (\partial_{q} A_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{z}(1-a) \end{bmatrix} \delta \mathbf{q} + \partial_{q} A_{\text{sect}}^{\text{T}} \cdot \begin{bmatrix} (\partial_{q} A_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{x}(1+a') \\ (\partial_{q} A_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{y} \\ (\partial_{q} A_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{z}(1-a) \end{bmatrix} \delta \mathbf{q} + \partial_{q} A_{\text{sect}}^{\text{T}} \cdot \begin{bmatrix} (\partial_{q} A_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{x}(1+a') \\ (\partial_{q} A_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{z}(1-a) \end{bmatrix} \delta \mathbf{q} \end{split}$$

και,

$$\begin{split} \delta\dot{\boldsymbol{U}}_{w\,\text{sect}}^{\text{ind}} &= \begin{cases} \delta\dot{\boldsymbol{U}}_{w\,\text{sect}}^{\text{ind}} \\ \delta\dot{\boldsymbol{U}}_{w\,\text{sect}}^{\text{ind}} \end{cases} = \mathbf{A}_{\text{sect}}^{\text{T}} \cdot \begin{cases} (\delta\dot{A}_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{x}(1+a') \\ (\delta\dot{A}_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{y} \\ (\delta\dot{A}_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{z}(1-a) \end{cases} + \dot{\mathbf{A}}_{\text{sect}}^{\text{T}} \cdot \begin{cases} (\delta\dot{A}_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{y} \\ (\delta\dot{A}_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{z}(1-a) \end{cases} + \dot{\mathbf{A}}_{\text{sect}}^{\text{T}} \cdot \begin{cases} (\delta\dot{A}_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{y} \\ (\delta\dot{A}_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{z}(1-a) \end{cases} + \dot{\mathbf{A}}_{\text{sect}}^{\text{T}} \cdot \begin{pmatrix} (\delta_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{x}(1+a') \\ (\delta\dot{A}_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{z}(1-a) \end{cases} + \dot{\mathbf{A}}_{\text{sect}}^{\text{T}} \cdot \begin{pmatrix} (A_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{z}(1-a) \\ (A_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{z}(1-a) \end{cases} = \\ \mathbf{A}_{\text{sect}}^{\text{T}} \cdot \begin{pmatrix} (\partial_{q}\dot{A}_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{z}(1-a) \\ (\partial_{q}\dot{A}_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{z}(1-a) \end{pmatrix} \\ \dot{\mathbf{A}}_{\text{sect}}^{\text{T}} \cdot \begin{pmatrix} (\partial_{q}\dot{A}_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{z}(1-a) \\ (\partial_{q}\dot{A}_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{z}(1-a) \end{pmatrix} \\ \dot{\mathbf{A}}_{\text{sect}}^{\text{T}} \cdot \begin{pmatrix} (\partial_{q}\dot{A}_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{z}(1-a) \\ (\partial_{q}\dot{A}_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{z}(1-a) \end{pmatrix} \\ \dot{\mathbf{A}}_{\text{sect}}^{\text{T}} \cdot \begin{pmatrix} (\partial_{q}\dot{A}_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{z}(1-a) \end{pmatrix} \\ \dot{\mathbf{A}}_{p}\dot{\mathbf{A}}_{p} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{z}(1-a) \end{pmatrix} \\ \dot{\mathbf{A}}_{q}\dot{\mathbf{A}}_{\text{sect}}^{\text{T}} \cdot \begin{pmatrix} (\dot{A}_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{z}(1-a) \end{pmatrix} \\ \dot{\mathbf{A}}_{q}\dot{\mathbf{A}}_{\text{sect}}^{\text{T}} \cdot \begin{pmatrix} (\dot{A}_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{z}(1-a) \end{pmatrix} \\ \dot{\mathbf{A}}_{q}\dot{\mathbf{A}}_{\text{sect}} \cdot \begin{pmatrix} (\dot{A}_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{z}(1-a) \end{pmatrix} \\ \dot{\mathbf{A}}_{p}\dot{\mathbf{A}}_{\text{sect}} \cdot \begin{pmatrix} (A_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{z}(1-a) \end{pmatrix} \\ \dot{\mathbf{A}}_{q}\dot{\mathbf{A}}_{\text{sect}} \cdot \begin{pmatrix} (\dot{A}_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{z}(1-a) \end{pmatrix} \\ \dot{\mathbf{A}}_{q}\dot{\mathbf{A}}_{\text{sect}} \cdot \begin{pmatrix} (\dot{A}_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{z}(1-a) \end{pmatrix} \\ \dot{\mathbf{A}}_{q}\dot{\mathbf{A}}_{\text{sect}} \cdot \begin{pmatrix} (\dot{A}_{p}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{w})_{z}(1-a) \end{pmatrix} \\ \dot{\mathbf{A}}_{q}\dot{\mathbf{A}}_{\text{sect}} \cdot \begin{pmatrix} (\dot{A$$

Εδώ θα πρέπει να αναφερθεί ότι ο πίνακας $\mathbf{A}_p^{\mathrm{T}}$ είναι ο πίνακας στροφών που μας φέρνει από το γενικό σύστημα στο σύστημα του επιπέδου του δρομέα.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, εισάγοντας τα αεροδυναμικά φορτία στον πίνακα των φορτίων στις εξισώσεις της δοκού, πραγματοποιείται η αεροελαστική σύζευξη. Παρόλα αυτά, εκτός των αεροδυναμικών φορτίων πρέπει να ενσωματωθούν στο σύστημα των κατασκευαστικών εξισώσεων οι εξισώσεις του μη μόνιμου μοντέλου αεροδυναμικής. Ένας αποτελεσματικός τρόπος να γίνει αυτό είναι μέσω της αεροελαστικής προσέγγισης του στοιχείου[**3**]. Αυτή η προσέγγιση ισχύει λύνοντας τις εξισώσεις του μοντέλου ΟΝΕRΑ (79) ή (80) μαζί με τις εξισώσεις της κατασκευής χρησιμοποιώντας τα πεπερασμένα στοιχεία. Έτσι η δυναμική εξίσωση (46) συνδυάζεται με την εξίσωση (80) σε ένα σετ της γνωστής

μορφής
$$F(\mathbf{u}) = 0$$
 και μετά απαιτούμε να: $\int_{0}^{z} \delta \mathbf{u}^{T} F(\mathbf{u}) dy = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u}$ (81)





Σχήμα 19: Ορισμός του αεροελαστικού στοιχείου και των εξισώσεων παρεμβολής.

Στην αριθμητική προσέγγιση των πεπερασμένων στοιχείων , οι ελαστικές παραμορφώσεις προσεγγίζονται χρησιμοποιώντας τις ίδιες εξισώσεις όπως έχουν οριστεί στην 2,1,3. Όσον αφορά τα αεροδυναμικά στοιχεία θεωρείται ότι υπάρχει γραμμική μεταβολή μεταξύ του τελικού κόμβου. Τονίζεται ότι οι αεροδυναμικές εξισώσεις έχουν μόνο χρονική μεταβολή(δεν υπάρχουν χωρικές εξαρτήσεις) έτσι δεν υπάρχει καμία ιδιαίτερη εξάρτηση για τον βαθμό των πολυωνύμων που χρησιμοποιούνται. Έτσι για ένα στοιχείο με 15 ελαστικούς βαθμούς ελευθερίας θα υπάρχουν επιπλέον 8 αεροδυναμικοί βαθμοί ελευθερίας (4 για κάθε κόμβο):

$$\hat{\mathbf{u}}_{e} = \left(\underbrace{\hat{\mathbf{u}}_{1}, \hat{\theta}_{z1}, \hat{\mathbf{v}}_{1}, \hat{\mathbf{w}}_{1}, \hat{\theta}_{x1}, \hat{\theta}_{y1}, \hat{\gamma}_{1L1}, \hat{\Gamma}_{2L1}, \hat{\Gamma}_{2D1}, \hat{\Gamma}_{2M1}}_{node 1}, & \hat{\mathbf{v}}_{m1}, & \hat{\theta}_{ym1}, & \hat{\mathbf{v}}_{m2}, \\ \underbrace{\hat{\mathbf{u}}_{2}, \hat{\theta}_{z2}, \hat{\mathbf{v}}_{2}, \hat{\mathbf{w}}_{2}, \hat{\theta}_{y2}, \hat{\gamma}_{1L2}, \hat{\Gamma}_{2L2}, \hat{\Gamma}_{2D2}, \hat{\Gamma}_{2M2}}_{node 5}\right)^{T}$$

και

	β_1^0	$-\beta_1^1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	eta_2^0	$-\beta_2^1$	0	0	0	0	0	0	0	0]
N	0	0	$\delta_{\scriptscriptstyle 1}$	0	0	0	0	0	0	0	δ_2	0	δ_3	0	0	δ_4	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	eta_1^0	β_1^1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	eta_2^0	β_2^1	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	η_1	0	0	0	0	0	η_2	0	0	0	0	0	0	η_2	0	0	0	0
$\mathbf{N}_e =$	0	0	0	0	0	0	γ_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	γ_2	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	γ_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	γ_2	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	γ_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	γ_2	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	γ_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	γ_2

4.Παράθεση αποτελεσμάτων

Τα τρεξίματα έγιναν χρησιμοποιώντας τα πτερύγια της μηχανής αναφοράς DTU 10MW της οποίας το μήκος του πτερυγίου είναι 100.08m.Το sweep ορίστηκε στα 3.0596m ακολουθώντας μια δευτέρου βαθμού κατανομή. Αντίστοιχα το prebend ορίστηκε στο μισό του sweep ,δηλαδή στα 1.5296m.Τα αποτελέσματα που θα παρουσιαστούν είναι οι τιμές των συχνοτήτων και των αποσβέσεων για την πρώτη και δεύτερη μορφή στην κατεύθυνση περιστροφής, σε hz και ποσοστό επί τοις εκατό αντίστοιχα, τριών ταχυτήτων 7m/s , 11m/s και 15 m/s ,από έξι τρεξίματα που έγιναν εκ των οποίων ένα για ευθύ πτερύγιο με τον παλιό κώδικα και ένα για ευθύ πτερύγιο με τον καινούριο κώδικα για να γίνει η επιβεβαίωση ότι ο καινούριος δίνει σωστά αποτελέσματα και τα άλλα τέσσερα με κυρτές γεωμετρίες ,δυο με αρνητικό και θετικό prebend ,μια με θετικό sweep και άλλη μία με θετικό prebend και sweep ταυτόχρονα. Στα τρεξίματα με τον καινούριο κώδικα θα παρουσιαστούν οι διάφορες που προκύπτουν επί τοις εκατό για τις καινούριες γεωμετρίες που αναφέρθηκαν προηγουμένως, στις συχνότητες και στην απόσβεση, για να δούμε κατά πόσο επηρεάζονται τα αποτελέσματα με τις καινούριες προσθήκες.

• Ευθύ πτερύγιο με τον παλιό κώδικα:

Παρουσιάζονται τα διαγράμματα συχνοτήτων – ταχύτητας ανέμου και απόσβεσης-ταχύτητας ανέμου, για την πρώτη και δεύτερη συχνότητα στην κατεύθυνση περιστροφής σαν ζευγάρι τριών συχνοτήτων, μιας συλλογικής συχνότητας για ένα τρίπτερο ρότορα και των άλλων δύο συχνοτήτων που διαφέρουν από αυτή κατά +Ω και –Ω.







• Ευθύ πτερύγιο με τον καινούριο κώδικα:

Παρουσιάζονται στις 2 πρώτες στήλες οι συχνότητες και η απόσβεση και στις επόμενες δύο στήλες οι διάφορές επί τοις εκατό με τον παλιό κώδικα. Οι διαφορές με τον παλιό κώδικα ήταν μηδενικές στις συχνότητες αφού προέκυψαν ίδιες με τον καινούριο και παρουσιάστηκαν μόνο στην απόσβεση σε μικρό ποσοστό. Παρατίθεται ο πίνακας με τα αποτελέσματα:

u=	7 m/s		7 m/s	
	Frequency	Damping	Difference in	Difference in
	(hz)	(%)	frequency(%)	damping(%)
1^{ST} edge - ω	0.80052	3.38130	0.0%	-0.2595794%
1 ^{s⊤} edge	0.91497	2.95840	0.0%	-0.2596001%
1^{ST} edge + ω	1.02940	2.62950	0.0%	-0.2579373%
2^{ND} edge - ω	2.52730	0.82347	0.0%	-0.4244359%
2 ND edge	2.64180	0.78780	0.0%	-0.4246929%
2^{ND} edge + ω	2.75620	0.75509	0.0%	-0.4233153%
u=	11 m/s		11 m/s	
	Frequency	Damping	Difference in	Difference in
	(hz)	(%)	frequency(%)	damping(%)
1^{ST} edge - ω	0.77301	3.85470	0.0%	-0.3438469%
1 ^{s⊤} edge	0.91745	3.24780	0.0%	-0.3436637%
1^{ST} edge + ω	1.06190	2.80610	0.0%	-0.3409454%
				0.000000%
2^{ND} edge - ω	2.50370	1.12390	0.0%	-0.6541147%
2 ND edge	2.64810	1.06260	0.0%	-0.6544503%
2^{ND} edge + ω	2.79260	1.00760	0.0%	-0.6605541%
u=	15	m/s	15	m/s
	Frequency	Damping	Difference in	Difference in
	(hz)	(%)	frequency(%)	damping(%)
1^{ST} edge - ω	0.75856	1.35060	0.0%	-0.7568521%
1 st edge	0.91856	1.11530	0.0%	-0.7563623%
1^{ST} edge + ω	1.07860	0.94989	0.0%	-0.7533173%
2^{ND} edge - ω	2.49030	0.69367	0.0%	-1.3131313%
2 ND edge	2.65030	0.65180	0.0%	-1.3127016%
2ND EDGE + ω	2.81030	0.61469	0.0%	-1.3132756%
u=	7 m/s		7 m/s	
--------------------------	-------------	---------	---------------	---------------
	Frequency	Damping	Difference in	Difference in
	(hz)	(%)	frequency(%)	damping(%)
1^{ST} edge - ω	0.799469638	3.5016	0.13121%	3.55780%
1 st edge	0.91391	3.0631	0.11585%	3.53908%
1^{ST} edge + ω	1.028350362	2.7222	0.10197%	3.52539%
2^{ND} edge - ω	2.522859638	0.8397	0.17570%	1.97093%
2 ND edge	2.6373	0.80326	0.17034%	1.96243%
2^{ND} edge + ω	2.751740362	0.76986	0.16180%	1.95606%
u=	11 m/s		11 m/s	
	Frequency	Damping	Difference in	Difference in
	(hz)	(%)	frequency(%)	damping(%)
1^{ST} edge - ω	0.771938931	3.9726	0.13856%	3.05860%
1 ^{s⊤} edge	0.91638	3.3464	0.11663%	3.03590%
1^{ST} edge + ω	1.060821069	2.8908	0.10160%	3.01842%
2^{ND} edge - ω	2.499258931	1.143	0.17738%	1.69944%
2 ND edge	2.6437	1.0806	0.16616%	1.69396%
2^{ND} edge + ω	2.788141069	1.0246	0.15967%	1.68718%
u=	15	m/s	15	m/s
	Frequency	Damping	Difference in	Difference in
	(hz)	(%)	frequency(%)	damping(%)
1 ^{sτ} edge - ω	0.757451536	1.3639	0.14613%	0.98475%
1 ^{s⊤} edge	0.91745	1.1261	0.12084%	0.96835%
1^{ST} edge + ω	1.077448464	0.95884	0.10676%	0.94221%
2^{ND} edge - ω	2.485801536	0.69644	0.18064%	0.39933%
2 ND edge	2.6458	0.65432	0.16979%	0.38662%
2^{ND} edge + ω	2.805798464	0.61701	0.16018%	0.37743%

 Αποτελέσματα καινούριου κώδικα για αρνητικό prebend μόνο και επί τοις εκατό διαφορές σε σύγκριση με τα αποτελέσματα του καινούριου κώδικα για ευθύ πτερύγιο :

Η μεταβολή της απόσβεσης για θετικό ή αρνητικό prebend σχετίζεται με την σύζευξη της κάμψης στην κατεύθυνση πτερύγισης με την κατεύθυνση στρέψης και την κατεύθυνση την οποία αυτή ενεργοποιείται ανάλογα με το πρόσημο prebend.

 Αποτελέσματα καινούριου κώδικα για θετικό prebend μόνο και επί τοις εκατό διαφορές σε σύγκριση με τα αποτελέσματα του καινούριου κώδικα για ευθύ πτερύγιο:

u=	7 m/s		7 m/s	
	Frequency	Damping	Difference in	Difference in
	(hz)	(%)	frequency(%)	damping(%)
1^{ST} edge - ω	0.799369638	3.2696	0.14370%	-3.3035%
1 ^{s⊤} edge	0.91381	2.8601	0.12678%	-3.3227%
1^{ST} edge + ω	1.028250362	2.5417	0.11168%	-3.3390%
2^{ND} edge - ω	2.522759638	0.8106	0.17965%	-1.5629%
2 ND edge	2.6372	0.77542	0.17412%	-1.5715%
2^{ND} edge + ω	2.751640362	0.74317	0.16543%	-1.5786%
u=	11 m/s		11 m/s	
	Frequency (hz)	Damping (%)	Difference in frequency(%)	
1^{ST} edge - ω	0.771858931	3.7109	0.14891%	-3.7305%
1 ^{s⊤} edge	0.9163	3.1259	0.12535%	-3.7533%
1^{ST} edge + ω	1.060741069	2.7003	0.10914%	-3.7704%
2^{ND} edge - ω	2.499058931	1.1038	0.18537%	-1.7884%
2 ND edge	2.6435	1.0435	0.17371%	-1.7975%
2^{ND} edge + ω	2.787941069	0.98943	0.16683%	-1.8033%
u=	15	m/s	15	
	Frequency	Damping	Difference in	
	(nz)	(%)	frequency(%)	
1 ^{s1} edge - ω	0.757431536	1.3176	0.14876%	-2.4434%
1 ^{s⊤} edge	0.91743	1.0878	0.12302%	-2.4657%
1^{ST} edge + ω	1.077428464	0.9263	0.10862%	-2.4834%
-				
2^{ND} edge - ω	2.485801536	0.69025	0.18064%	-0.4930%
2 ND edge	2.6458	0.64851	0.16979%	-0.5048%
2^{ND} edge + ω	2.805798464	0.61152	0.16018%	-0.5157%

 Αποτελέσματα καινούριου κώδικα για θετικό sweep μόνο και επί τοις εκατό διαφορές σε σύγκριση με τα αποτελέσματα του καινούριου κώδικα για ευθύ πτερύγιο:

u=	7 m/s		7 m/s	
	Frequency	Damping	Difference in	Difference in
	(hz)	(%)	frequency(%)	damping(%)
1^{ST} edge - ω	0.79902	3.3869	0.18738%	0.16562%
1 ^{s⊤} edge	0.91347	2.9625	0.16394%	0.13859%
1^{ST} edge + ω	1.0279	2.6327	0.14572%	0.12170%
2^{ND} edge - ω	2.5212	0.82567	0.24136%	0.26716%
2 ND edge	2.6357	0.78981	0.23090%	0.25514%
2 ND edge +			0 22132%	0 24633%
ω	2.7501	0.75695	0.22102/0	012 1000/0
u=	11 m/s		11 m/s	
	Frequency	Damping	Difference in	
	(hz)	(%)	frequency(%)	
1^{ST} edge - ω	0.77151	3.8356	0.19405%	-0.495499%
1 ^{s⊤} edge	0.91595	3.2307	0.16350%	-0.526510%
1^{ST} edge + ω	1.0604	2.7907	0.14126%	-0.548804%
2^{ND} edge - ω	2.4976	1.123	0.24364%	-0.080078%
2 ND edge	2.642	1.0616	0.23035%	-0.094109%
2 ND edge +			0 21843%	-0 099246%
ω	2.7865	1.0066	0121010/0	01033210/0
u=	15	m/s	15	
	Frequency	Damping	Difference in	
	(hz)	(%)	frequency(%)	
1^{ST} edge - ω	0.75705	1.3347	0.19906%	-1.177255%
1 st edge	0.91705	1.1018	0.16439%	-1.210437%
1^{ST} edge + ω	1.0771	0.93815	0.13907%	-1.235933%
2^{ND} edge - ω	2.4842	0.69283	0.24495%	-0.121095%
2 ND edge	2.6442	0.65091	0.23016%	-0.136545%
2 ND edge +			0 21706%	-0 1/9669%
ω	2.8042	0.61377	0.21700/0	-0.14900970

 Αποτελέσματα καινούριου κώδικα για θετικό sweep και prebend και επί τοις εκατό διαφορές σε σύγκριση με τα αποτελέσματα του καινούριου κώδικα για ευθύ πτερύγιο:

u=	7 m/s		7 m/s	
	Frequency	Damping	Difference in	Difference in
	(hz)	(%)	frequency(%)	damping(%)
1^{ST} edge - ω	0.798839638	3.2417	0.20991%	-4.12859%
1 ^{s⊤} edge	0.91328	2.8355	0.18471%	-4.15427%
1^{ST} edge + ω	1.027720362	2.5197	0.16317%	-4.17570%
2^{ND} edge - ω	2.520659638	0.80619	0.26275%	-2.09844%
2 ND edge	2.6351	0.77117	0.25361%	-2.11094%
2^{ND} edge + ω	2.749540362	0.73907	0.24162%	-2.12160%
u=	11 m/s		11 m/s	
	Frequency	Damping	Difference in	Difference in
	(hz)	(%)	frequency(%)	damping(%)
1^{ST} edge - ω	0.771328931	3.6609	0.21747%	-5.027629%
1 ^{s⊤} edge	0.91577	3.0835	0.18312%	-5.058809%
1^{ST} edge + ω	1.060211069	2.6634	0.15905%	-5.085350%
2^{ND} edge - ω	2.496958931	1.0935	0.26924%	-2.704867%
2 ND edge	2.6414	1.0337	0.25301%	-2.719744%
2^{ND} edge + ω	2.785841069	0.98014	0.24203%	-2.725288%
u=	15	m/s	15	m/s
	Frequency	Damping	Difference in	Difference in
	(hz)	(%)	frequency(%)	damping(%)
1^{ST} edge - ω	0.756911536	1.3066	0.21731%	-3.257811%
1 ^{s⊤} edge	0.91691	1.0786	0.17963%	-3.290594%
1^{ST} edge + ω	1.076908464	0.91836	0.15683%	-3.319332%
2^{ND} edge - ω	2.483701536	0.68839	0.26497%	-0.761169%
2 ND edge	2.6437	0.64673	0.24903%	-0.777846%
2^{ND} edge + ω	2.803698464	0.60983	0.23491%	-0.790642%

5. Παραπομπές

- Riziotis, V.A., Voutsinas, S.G., "GAST: A General Aerodynamic and Structural Prediction tool for Wind Turbines," Proceedings of the 1997 European Wind Energy Conference & Exhibition, Dublin, Ireland.
- Riziotis, V.A., Voutsinas, S.G., Politis, E.S., Chaviaropoulos, P.K., "Aeroelastic Stability of Wind Turbines: The Problem, the Methods and the Issues," Wind Energy, 2004, 7, 373– 392.
- 3. Chaviaropoulos, P.K., "Flap/Lead–lag Aero-elastic Stability of Wind Turbine Blades," Wind Energy, 2001, 4, 183–200.
- 4. Schepers, J.G., (2002), 'Verification of European wind turbine design codes, VEWTDC: final report', Technical report ECN-C-01-055, Netherlands Energy Research Foundation ECN.
- 5. Hodges, D.H., (2003), 'Geometrically exact, intrinsic theory for dynamics of curved and twisted anisotropic beams', *AIAA Journal*, Vol. 41, No. 6.
- Riziotis, V.A., Voutsinas, S.G., (2006) 'Advanced aeroelastic modelling of complete wind turbine configurations in view of assessing stability characteristics', Proceedings of the EWEC '06, Scientific Track, Athens, Greece, February 27 – March 2.
- 7. Kallesøe B S, (2007), 'Equations of motion for a rotor blade, including gravity pitch action and rotor speed variations', *Wind Energy*, 10, pp. 207-230
- Riziotis, V.A., Voutsinas, S.G., Politis, E.S., Chaviaropoulos, P.K., Hansen A.M., Madsen, H.A., Rasmussen, F., (2008) 'Identification of structural non-linearities due to large deflections on a 5MW wind turbine blade', Proceedings of the EWEC '08, Scientific Track, Brussels, Belgium, March 31 – April 3.
- 9. Hodges, D. H. and Dowell, E. H., (1974), 'Nonlinear Equations of Motion for the Elastic Bending and Torsion of Twisted Non-uniform Rotor Blades', NASA TN D-7818, 1974.
- 10. Crisfield, M.A., (1998), *Non linear finite element analysis of solids and structures, essentials*, Jon Wiley and Sons.
- 11. Hodges, D. H. (1990), 'A mixed variational formulation based on exact intrinsic equations for dynamics of moving beams', *Int. J. Solids Structures,* Vol.26, No. 11, pp. 1253-1273.
- 12. Bathe, K. J., (1981), *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice Hall.
- 13. Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., (2005), *The Finite Element Method for solid and structural mechanics*", Elsevier Butterworth Heinemann.
- 14. Crisfield, M. A., (1991) *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, John Wiley & Sons.

- 15. Larsen T J, Hansen A, Buhl T, (2004), 'Aeroelastic effects of large blade deflections for wind turbines', Proceedings of the special topic conference "The Science of making Torque from Wind", pp. 238–246.
- 16. Leishman, J.G. and Crouse, G.L, (1989), 'State-space model for unsteady airfoil behavior and dynamic stall', *AIAA*, Paper 89-1319 CP,1989.
- 17. Petot, D., (1989), 'Differential Equation Modelling of Dynamic Stall', *Recherché Aerospatiale*, 1989, 5, 59–72
- 18. M. H. Hansen, "Aeroelastic Instability Problems for Wind Turbines"
- 19. M Stettner, M J Reijerkerk, A Lünenschloß, V Riziotis, A Croce, L Sartori, R Riva, J M Peeringa, "Stall-Induced Vibrations of the AVATAR Rotor Blade"