Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

# Θεωρήματα Σταθερού Σημείου και Εφαρμογές τους

Γεωργίου Αλέξανδρος

Επιβλέπων Καθηγητής : Σπυρίδων Αργυρός

26 Οκτωβρίου 2016

# Εισαγωγή.

Σκοπός αυτής της διπλωματικής εργασίας είναι η μελέτη μερικών από τα βασικότερα θεωρήματα σταθερού σημείου και κάποιων εφαρμογών τους.

Στο κεφάλαιο 1, αναφέρουμε τα αναγκαία μαθηματικά προαπαιτούμενα που θα μας χρειαστούν για την απόδειξη των εν λόγω θεωρημάτων καθώς και άλλων αποτελεσμάτων.

Στο κεφάλαιο 2, παρουσιάζουμε δυο συνδυαστικά λήμματα, αυτά των Sperner και Tucker, τα οποία αποτελούν και τη βάση για την απόδειξη των θεωρημάτων σταθερού σημείου αυτής της εργασίας.

Στο κεφάλαιο 3, μελετάμε το θεώρημα Κ.Κ.Μ, των Knaster, Kuratowski και Mazurkiewicz, το οποίο αποτελεί συνέπεια του λήμματος του Sperner αλλά επίσης και μια ισοδύναμη μορφή στο θεώρημα του Brouwer. Το θεώρημα αυτό αποτέλεσε αφετηρία για τη μελέτη μιας κατηγορίας πλειότιμων απεικονίσεων, των απεικονίσεων Κ.Κ.Μ, οι οποίες βρίσκουν εφαρμογή σε πολυάριθμα προβλήματα. Κεντρικό ρόλο στην εργασία κατέχει η γενίκευση του θεωρήματος από τον Fan.

Τέλος, στα κεφάλαια 4 και 5, παρουσιάζουμε και αποδεικνύουμε το θεώρημα σταθερού σημείου του Brouwer όπως και μερικές από τις μετέπειτα γενικεύσεις του, καθώς επίσης και το θεωρήματα των Markov-Kakutani και Borsuk-Ulam, δίνοντας στη συνέχεια μερικές από τις εφαρμογές που βρίσκουν τα θεωρήματα αυτά.

# Περιεχόμενα

# 1 Προαπαιτούμενα.

## 1.1 Τοπολογικοί χώροι Hausdorff.

**Ορισμός 1.1.** *Ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$ καλείται **Hausdorff** ή $\mathbf{T_2}$ αν για κάθε $x, y \in X$ με $x \neq y$, υπάρχουν $U, V$ ανοιχτά και ξένα υποσύνολα του $X$, τέτοια ώστε $x \in U$, $y \in V$.*

**Πρόταση 1.2.** *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος, $K$ συμπαγές υποσύνολο του $X$ και $F$ κλειστό υποσύνολο του $K$, τότε το $F$ είναι συμπαγές.*

*Απόδειξη.* Έστω $\{V_i\}_{i\in I}$ ανοιχτό κάλυμμα του $F$, τότε το $F^c \cup \big(\bigcup_{i\in I} V_i\big)$ είναι ανοιχτό κάλυμμα του K και επομένως υπάρχουν $i_1, \ldots, i_n \in I$ τέτοια ώστε $K \subset F^c \cup \big(\bigcup_{k=1}^n V_{i_k}\big)$. Τότε $F \subset \bigcup_{k=1}^n V_{i_k}$. □

**Πρόταση 1.3.** *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος Hausdorff, $K$ συμπαγές υποσύνολο του $X$ και $p \in K^c$. Τότε υπάρχουν $U, W \subset X$ ανοιχτά και ξένα υποσύνολα του $X$, τέτοια ώστε $p \in U$ και $K \subset W$.*

*Απόδειξη.* Έστω $q \in K$, τότε υπάρχουν ξένα ανοιχτά σύνολα $U_p$ και $V_q$ τέτοια ώστε $p \in U_q$ και $q \in V_q$. Τότε $K \subset \bigcup_{q\in K} V_q$ και άρα υπάρχουν $q_1, \ldots, q_n \in K$ ώστε $K \subset \bigcup_{i=1}^n V_{q_i}$. Τα σύνολα $U = \bigcap_{i=1}^n U_{q_i}$ και $W = \bigcup_{i=1}^n V_{q_i}$ ικανοποιούν το ζητούμενο. □

**Πόρισμα 1.3.1.** *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος Hausdorff και $K$ συμπαγές υποσύνολο του $X$. Τότε το $K$ είναι κλειστό.*

*Απόδειξη.* Έστω $x \in K^c$, τότε από την πρόταση 1.3 υπάρχει ανοιχτό σύνολο $V_x$ ώστε $V_x \cap K = \emptyset$. Παρατηρούμε ότι το $K^c = \bigcup_{x\in K^c} V_x$ είναι ανοιχτό και άρα το $K$ είναι κλειστό στον $X$. □

**Πόρισμα 1.3.2.** *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος Hausdorff, $K$ συμπαγές και $F$ κλειστό υποσύνολο του $X$. Τότε το $F \cap K$ είναι συμπαγές.*

*Απόδειξη.* Από το 1.3.1 το $K$ ως συμπαγές είναι κλειστό και άρα το $F \cap K$ είναι κλειστό υποσύνολο του $K$. Από την πρόταση 1.2 το $F \cap K$ είναι συμπαγές. □

**Πρόταση 1.4.** *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος Hausdorff και $\{K_i\}_{i\in I}$ οικογένεια συμπαγών υποσυνόλων του $X$, με $\bigcap_{i\in I} K_i = \emptyset$. Τότε υπάρχει $I' \subset I$, πεπερασμένο και τέτοιο ώστε $\bigcap_{i\in I'} K_i = \emptyset$.*

*Απόδειξη.* Θέτουμε $V_i = K_i^c$ και έστω $K_{i_0}$, για κάποιο $i_0 \in I$. Το $\{V_i\}_{i\in I}$ είναι ανοιχτό κάλυμμα του $K_{i_0}$, αφού για κάθε $x \in K_{i_0}$ υπάρχει $i_x \in I$ τέτοιο ώστε $x \notin K_{i_x}$, δηλαδή $x \in V_{i_x}$. Τότε υπάρχουν $i_1, \ldots, i_n \in I$ ώστε $K_{i_0} \subset \bigcup_{k=1}^n V_{i_k}$, δηλαδή $K_{i_0} \subset \bigcup_{k=1}^n K_{i_k}^c$. Επομένως $K_{i_0} \cap \big(\bigcap_{k=1}^n K_{i_k}\big) = \emptyset$. □

## 1.2 Φυσιολογικοί τοπολογικοί χώροι.

**Ορισμός 1.5.** *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος, αν $A, B$ είναι ξένα υποσύνολα του $X$, τότε θα λέμε ότι τα $A$ και $B$*

*α) διαχωρίζονται από ανοιχτά σύνολα, αν υπάρχουν $U, V$ ανοιχτά και ξένα υποσύνολα του $X$, τέτοια ώστε $A \subset U$ και $B \subset V$.*

*β) διαχωρίζονται από συνεχή συνάρτηση, αν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : X \to [0, 1]$, τέτοια ώστε $f(x) = 0$, για κάθε $x \in A$ και $f(x) = 1$, για κάθε $x \in B$.*

**Λήμμα 1.6.** *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A, B$ ξένα υποσύνολα του $X$. Αν τα $A, B$ διαχωρίζονται από συνεχή συνάρτηση, τότε διαχωρίζονται και από ανοιχτά σύνολα.*

*Απόδειξη.* Έστω $A, B$ υποσύνολα του $X$ και $f : X \to [0, 1]$ συνεχής συνάρτηση, με $f(x) = 1$, για κάθε $x \in A$ και $f(x) = 0$, για κάθε $x \in B$. Τότε τα σύνολα $f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$, $f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$ είναι ανοιχτά και διαχωρίζουν τα $A, B$. □

**Ορισμός 1.7.** *Ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$ καλείται **φυσιολογικός** αν κάθε ζεύγος $K_1, K_2$ κλειστών και ξένων υποσυνόλων του $X$, διαχωρίζονται από ανοιχτά σύνολα.*

**Πρόταση 1.8.** *Έστω $(X, \mathcal{T})$ φυσιολογικός τοπολογικός χώρος, $K$ κλειστό και $U$ ανοιχτό υποσύνολο του $X$ με $K \subset U$, τότε υπάρχει $V \subset X$ ανοιχτό ώστε $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$.*

*Απόδειξη.* Επειδή ο $X$ είναι φυσιολογικός υπάρχουν $V, W$ ξένα ανοιχτά με $K \subset V$, $U^c \subset W$. Τότε αν $x \in W \cap \overline{V}$ υπάρχει περιοχή $O_x$ του $x$ με $O_x \subset W$ και $O_x \cap V \neq \emptyset$ το οποίο είναι άτοπο, δηλαδή $W \cap \overline{V} = \emptyset$. Άρα $\overline{V} \subset W^c \subset U$. □

**Θεώρημα 1.9** (Λήμμα του Urysohn)**.** *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος, τότε ο $X$ είναι φυσιολογικός αν και μόνο αν κάθε ζεύγος $K_1, K_2$ κλειστών υποσυνόλων του, διαχωρίζεται από συνεχή συνάρτηση.*

*Απόδειξη.* Έστω ότι ο $X$ είναι φυσιολογικός και $K_1, K_2$ ξένα, κλειστά υποσύνολα του. Έστω ακόμη $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ μια αρίθμηση του $I = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$, με $r_1 = 0, r_2 = 1$. Από την πρόταση 1.8, υπάρχουν $V_{r_1}, V_{r_2}$ ανοιχτά, τέτοια ώστε

$$K_1 \subset V_{r_2} \subset \overline{V}_{r_2} \subset V_{r_1} \subset \overline{V}_{r_1} \subset K_2^c.$$

Επαγωγικά, έστω ότι έχουμε επιλέξει τα ανοιχτά σύνολα $V_{r_1}, \ldots, V_{r_n}$, ώστε αν $r_i < r_j$ να ισχύει ότι $K_1 \subset V_{r_j} \subset \overline{V}_{r_j} \subset V_{r_i}$. Τότε κάποιος αριθμός από τους $r_1, \ldots, r_n$, έστω $r'$, είναι ο μεγαλύτερος μεταξύ τους, ο οποίος είναι μικρότερος από το $r_{n+1}$. Αντίστοιχα, υπάρχει κάποιος $r''$, ο οποίος είναι ο μικρότερος αριθμός που είναι μεγαλύτερος από το $r_{n+1}$, δηλαδή

$$r' = \max\{r_k : r_k < r_{n+1},\ 0 \le k \le n\}$$

και

$$r'' = \min\{r_k : r_k > r_{n+1},\ 0 \le k \le n\}.$$

Τότε από την πρόταση 1.8, υπάρχει ανοιχτό σύνολο $V_{r_{n+1}}$ με

$$\overline{V}_{r''} \subset V_{r_{n+1}} \subset \overline{V}_{r_{n+1}} \subset V_{r'}.$$

Έτσι κατασκευάζουμε οικογένεια ανοιχτών συνόλων $(V_r)_{r\in I}$ με $K_1 \subset V_r \subset K_2^c$, για κάθε $r \in I$ και $\overline{V}_s \subset V_r$ για $s, r \in I$ με $s > r$ και ορίζουμε $f : X \to [0, 1]$ με

$$f(x) = \begin{cases} \sup\{r : x \in V_r\}, & x \in V_{r_1} \\ 0 & \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι αν $x \in K_1 \subset V_{r_2} \subset V_{r_1}$, τότε $f(x) = r_2 = 1$. Αν $x \in K_2$, τότε $x \notin V_{r_1}$ και άρα $f(x) = 0$. Δηλαδή η $f$ διαχωρίζει τα $K_1, K_2$ και είναι επίσης συνεχής. Πράγματι έστω $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Υποθέτουμε αρχικά ότι $0 \le f(x) < 1$ και επιλέγουμε $s, t \in I$ ώστε $f(x) < s < t < f(a) + \varepsilon$. Τότε αφού $\overline{V}_t \subset V_s$ και $f(x) < s$, δηλαδή $x \notin V_s$, προκύπτει ότι $x \notin \overline{V}_t$.

Αν $f(x) > 0$, επιλέγουμε $r \in I$ ώστε $f(x) - \varepsilon < r < f(x)$ και $x \in V_r$. Θέτουμε $U = V_r \setminus \overline{V}_t$, το οποίο είναι προφανώς περιοχή του $x$ και επιπλέον αν $z \in U$ τότε ισχύει ότι $r \le f(z) \le t$ και επομένως η $f$ είναι συνεχής στο $x$ αφού

$$f(x) - \varepsilon < r \le f(z) \le t < f(x) + \varepsilon \implies |f(z) - f(x)| < \varepsilon.$$

Αν $f(x) = 0$, θέτουμε $U = X \setminus \overline{V}_t$. Τότε το $U$ είναι περιοχή του $x$ και για κάθε $z \in U$ ισχύει ότι $0 \le f(z) \le t$. Όμοια με πρίν προκύπτει ότι η $f$ είναι συνεχής στο $x$.

Τέλος, αν $f(x) = 1$, επιλέγουμε $r \in I$ ώστε $x \in V_r$ και $1 - \varepsilon < r$. Το $V_r$ είναι περιοχή του $x$ και αν $z \in V_r$ τότε $r \le f(z) \le 1$. Άρα $|f(z) - f(x)| < \varepsilon$, για κάθε $z \in V_r$, δηλαδή η $f$ είναι συνεχής στο $x$ σε κάθε περίπτωση. □

**Ορισμός 1.10.** *Ένα κάλυμμα $\{U_i\}_{i\in I}$ ενός συνόλου $X$ καλείται* ***σημειακά πεπερασμένο*** *αν για κάθε $x \in X$, υπάρχει $F \subset I$ πεπερασμένο τέτοιο ώστε $x \notin U_i$, για κάθε $i \in I \setminus F$.*

**Θεώρημα 1.11.** *Έστω $(X, \mathcal{T})$ φυσιολογικός τοπολογικός χώρος και $\{U_i\}_{i\in I}$ ένα σημειακά πεπερασμένο ανοιχτό κάλυμμα του $X$. Τότε ο $X$ έχει σημειακά πεπερασμένο, ανοιχτό κάλυμμα $\{V_i\}_{i\in I}$ τέτοιο ώστε $\overline{V_i} \subset U_i$, για κάθε $i \in I$.*

*Απόδειξη.* Θεωρούμε καλή διάταξη του $I$. Τότε επειδή το $\{U_i\}_{i\in I}$ είναι σημειακά πεπερασμένο, για κάθε $x \in X$ ορίζουμε $i_x = \max\{i : i \in I, \ x \in U_i\}$. Θα κατασκευάσουμε το $\{V_i\}_{i\in I}$ επαγωγικά και ώστε για κάθε $i \in I$ να ισχύει ότι

*α)* $\overline{V}_i \subset U_i$.

*β)* Το $\{V_j : j \leq i\} \cup \{U_j : j > i\}$ είναι κάλυμμα του $X$.

Θέτουμε $F_1 = X \setminus \bigcup_{i>1} U_i$, όπου 1 το ελάχιστο στοιχείο στην καλή διάταξη του $I$. Τότε το $F_1$ είναι κλειστό και $F_1 \subset U_1$, άρα από την πρόταση 1.8 υπάρχει $V_1$ ανοιχτό ώστε $F_1 \subset V_1 \subset \overline{V}_1 \subset U_1$. Τότε είναι άμεσο ότι το $V_1 \cup (\bigcup_{i>1} U_i)$ είναι κάλυμμα του $X$.

Επαγωγικά, αν έχουμε ορίσει τα $V_j$ για κάθε $j < i$, παρατηρούμε ότι το $\{V_j : j < i\} \cup \{U_j : j \geq i\}$ είναι επίσης κάλυμμα του $X$. Πράγματι, αν $x \in X$ και $i_x \geq i$ τότε $x \in \bigcup_{j\geq i} U_j$, ενώ αν $i_x < i$ τότε $x \notin \{U_j : j \geq i\}$ καθώς και $x \notin V_i$, επομένως από το *β)* έχουμε ότι $x \in \{V_j : j < i\}$. Θέτουμε

$$F_i = X \setminus [(\bigcup_{j<i} V_j) \cup (\bigcup_{k>i} U_k)] \subset U_i$$

και αν $F_i = \emptyset$ τότε το αντικαθιστούμε με ένα σημείο του $U_i$. Το $F_i$ είναι κλειστό, επομένως από την πρόταση 1.8 υπάρχει ανοιχτό σύνολο $V_i$ με $F_i \subset \overline{V}_i \subset U_i$ και παρατηρούμε ότι οι συνθήκες *α)* και *β)* ικανοποιούνται άμεσα από το $V_i$.

Έστω $x \in X$, τότε $x \notin \bigcup_{j>i_x} U_j$ και άρα από το *β)*, $x \in V_j$, για κάποιο $j \leq i_x$. Επιπλέον υπάρχει $F_x \subset I$ πεπερασμένο ώστε $x \notin U_i$, για κάθε $i \in I \setminus F_x$. Αν υπάρχει $i_0 \in I \setminus F_x$ με $x \in V_{i_0}$, τότε $x \in U_{i_0}$ το οποίο είναι άτοπο. Επομένως το $\{V_i\}_{i\in I}$ είναι ένα σημειακά πεπερασμένο κάλυμμα του $X$. □

**Ορισμός 1.12.** *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $f : X \to \mathbb{C}$, ορίζουμε ως **στήριγμα** της $f$ το σύνολο*

$$\mathrm{supp}(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$$

**Θεώρημα 1.13** (Διαμέριση της μονάδας)**.** *Έστω $(X, \mathcal{T})$ φυσιολογικός τοπολογικός χώρος και $\{U_i\}_{i\in I}$ ένα σημειακά πεπερασμένο ανοιχτό κάλυμμα του, τότε υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις $\{f_i\}_{i\in I}$ στον $X$, με*

*α)* $0 \leq f_i(x) \leq 1$, *για κάθε* $x \in X$ *και* $i \in I$.

*β)* $\mathrm{supp}(f_i) \subset U_i$ *για κάθε* $i \in I$.

*γ) Για κάθε $x \in X$ υπάρχει $V_x$, μια περιοχή του, και $F \subset I$ πεπερασμένο τέτοια ώστε $f_i(V_x) = 0$, για κάθε $i \in I \setminus F$.*

*δ)* $\sum_{i\in I} f_i(x) = 1$, *για κάθε* $x \in X$.

*Απόδειξη.* Από το προηγούμενο θεώρημα, ο $X$ έχει σημειακά πεπερασμένο ανοιχτό κάλυμμα $\{V_i\}_{i\in I}$, με $\overline{V_i} \subset U_i$, για κάθε $i \in I$. Τότε από το θεώρημα 1.9, για κάθε $i \in I$, υπάρχει συνεχής συνάρτηση $\phi_i : X \to [0,1]$ με $\phi_i(\overline{V_i}) = 1$ και $\phi_i(X \setminus U_i) = 0$, δηλαδή $\mathrm{supp}(f_i) \subset U_i$. Επιπλέον για κάθε $x \in X$, έχουμε ότι $\phi_i(x) \neq 0$, για πεπερασμένα το πλήθος $i \in I$.

Ορίζουμε απεικόνιση $\psi : X \to \mathbb{R}$ με $\psi(x) = \sum_{i\in I} \phi_i(x)$ και παρατηρούμε ότι αν $x \in X$, τότε υπάρχει $W_x$ περιοχή του $x$, η οποία συναντάει πεπερασμένα το πλήθος $U_i$, έστω $U_{i_1}, \dots, U_{i_n}$. Δηλαδή $\psi(z) = \sum_{k=1}^{n} \phi_{i_k}(z)$, για κάθε $z \in W_x$. Επομένως η $\psi$ είναι συνεχής στο $W_x$ και άρα συνεχής στο $X$. Για κάθε $i \in I$ ορίζουμε $f_i : X \to [0,1]$ με $f_i(x) = \phi_i(x)/\psi(x)$, για κάθε $x \in X$. □

## 1.3 Τοπικά συμπαγείς τοπολογικοί χώροι.

**Ορισμός 1.14.** *Ένας τοπολογικός χώρος $(X,\mathcal{T})$ καλείται **τοπικά συμπαγής** αν για κάθε $x \in X$, υπάρχει περιοχή του με συμπαγή κλειστότητα.*

Στα θεωρήματα 1.17 και 1.18 αποδεικνύουμε τις αντίστοιχες μορφές του λήμματος του Urysohn και του θεωρήματος της διαμέρισης της μονάδας, για τοπικά συμπαγείς χώρους. Δίνουμε όμως πρώτα ένα παράδειγμα ενός τοπικά συμπαγούς χώρου Hausdorff, ο οποίος δεν είναι φυσιολογικός.

**Παράδειγμα.** [50] Έστω $\omega$ ο πρώτος άπειρος διατακτικός και $\omega_1$ ο πρώτος υπεραριθμήσιμος διατακτικός, θεωρούμε τους διατακτικούς χώρους $[0,\omega]$ και $[0,\omega_1]$ εφοδιασμένους με την τοπολογία που ορίζει η καλή διάταξη. Τότε το γινόμενο τους ονομάζεται *Tychonoff plank* και είναι ένας συμπαγής Hausdorff τοπολογικός χώρος.

Θεωρούμε το σύνολο $X$ το οποίο προκύπτει αφαιρώντας το σημείο $(\omega,\omega_1)$. Τότε το $X$ είναι ένας τοπικά συμπαγής Hausdorff χώρος, ως ανοιχτός υπόχωρος συμπαγή Hausdorff χώρου, στον οποίο τα σύνολα $A = [0,\omega) \times \{\omega_1\}$ και $B = \{\omega\} \times [0,\omega_1)$ δε μπορούν να διαχωριστούν από ανοιχτά σύνολα. Δηλαδή ο $X$ είναι ένας τοπικά συμπαγής Hausdorff χώρος που δεν είναι φυσιολογικός.

**Λήμμα 1.15.** *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος, $n \in \mathbb{N}$ και $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ οικογένεια υποσυνόλων του $X$. Τότε αν $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, ισχύει ότι $\overline{A} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$.*

*Απόδειξη.* Για κάθε $i$, ισχύει ότι $A_i \subset A$ και άρα $\overline{A_i} \subset \overline{A}$. Δηλαδή $\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i} \subset \overline{A}$. Αρκεί να δείξουμε ότι $X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i} \subset X \setminus \overline{A}$. Έστω $x \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$, τότε για κάθε $i$ υπάρχει περιοχή $U_{i,x}$ του $x$ ώστε $U_{i,x} \cap A_i = \emptyset$. Παρατηρούμε ότι το σύνολο $U_x = \bigcap_{i=1}^{n} U_{i,x}$ είναι μια περιοχή του $x$ τέτοια ώστε $U_x \cap A = \emptyset$. Άρα $x \in X \setminus \overline{A}$. □

**Πρόταση 1.16.** *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπικά συμπαγής χώρος Hausdorff, $U$ ανοιχτό και $K$ συμπαγές υποσύνολα του $X$, με $K \subset U$. Τότε υπάρχει $V \subset X$ ανοιχτό με $\overline{V}$ συμπαγές και τέτοιο ώστε $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$.*

*Απόδειξη.* Κάθε $x \in K$ έχει περιοχή $V_x$ με $\overline{V}_x$ συμπαγές και το $(V_x)_{x\in K}$ είναι ανοιχτό κάλυμμα του $K$, άρα υπάρχουν $x_1, \dots, x_n \in K$ ώστε $K \subset \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$. Επομένως για το $G = \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$, έχουμε ότι $K \subset G \subset \overline{G}$ όπου το $\overline{G} = \bigcup_{i=1}^n \overline{V}_{x_i}$ είναι συμπαγές ως πεπερασμένη ένωση συμπαγών. Αν $U = X$, το ζήτουμενο ικανοποιείται για $V = G$.

Διαφορετικά από την πρόταση 1.3, για κάθε $p \in U^c$ υπάρχει $W_p \subset X$ ανοιχτό ώστε $K \subset W_p$ και $p \notin \overline{W}_p$. Τότε η οικογένεια $(U^c \cap \overline{G} \cap \overline{W}_p)_{p\in U^c}$ αποτελείται από συμπαγή σύνολα τα οποία έχουν κενή τομή. Επομένως από την πρόταση 1.4 υπάρχουν $p_1, \dots, p_n \in U^c$, ώστε $U^c \cap \overline{G} \cap \left(\bigcap_{i=1}^n \overline{W}_{p_i}\right) = \emptyset$. Τότε το σύνολο $V = G \cap \left(\bigcap_{i=1}^n W_{p_i}\right)$ αποδεικνύει το ζητούμενο. □

**Θεώρημα 1.17.** *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπικά συμπαγής χώρος Hausdorff, $V$ ανοιχτό και $K$ συμπαγές υποσύνολα του $X$. Τότε υπάρχει $f : X \to [0, 1]$ με $f \in C_c(X)$, τέτοια ώστε $f(x) = 1$ για κάθε $x \in K$ και $f(x) = 0$ για κάθε $x \in V^c$.*

*Απόδειξη.* Επαναλαμβάνουμε την απόδειξη του θεωρήματος 1.9 χρησιμοποιώντας την πρόταση 1.16. □

**Θεώρημα 1.18.** *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπικά συμπαγής χώρος Hausdorff, $K$ συμπαγές και $V_1, \dots, V_n$ ανοιχτά υποσύνολα του $X$ με $K \subset \bigcup_{i=1}^n V_i$. Τότε υπάρχουν πραγματικές συναρτήσεις $f_1, \dots, f_n \in C_c(X)$, τέτοιες ώστε*

*α)* $0 \le f_i(x) \le 1$, *για κάθε* $x \in X$ *και* $1 \le i \le n$.

*β)* $\operatorname{supp}(f_i) \subset V_i$ *για κάθε* $1 \le i \le n$.

*γ)* $f_1(x) + \cdots + f_n(x) = 1$, *για κάθε* $x \in K$.

*Απόδειξη.* Από την πρόταση 1.16, για κάθε $x \in K$ υπάρχει περιοχή $U_x$ με συμπαγή κλειστότητα, ώστε $\overline{U}_x \subset V_{i_x}$ για κάποιο $i_x \in \{1, \dots, n\}$. Τότε υπάρχουν $x_1, \dots, x_m \in K$ τέτοια ώστε $K \subset \bigcup_{i=1}^m U_{x_i}$ και ορίζουμε τα σύνολα

$$W_i = \bigcup_{j=1}^n \{\overline{U}_{x_j} : \overline{U}_{x_j} \subset V_i\}.$$

Από το θεώρημα 1.17, για κάθε $1 \le i \le n$, υπάρχει πραγματική συνάρτηση $g_i : X \to [0, 1]$ με $g_i \in C_c(X)$ ώστε $g_i(x) = 1$ για κάθε $x \in W_i$ και $g_i(x) = 0$ για κάθε $x \in V_i^c$. Ορίζουμε τις συναρτήσεις $f_1, \dots, f_n : X \to [0, 1]$ με

$$\begin{aligned}
f_1 &= g_1 \\
f_2 &= (1 - g_1)g_2 \\
&\dots\dots\dots \\
f_n &= (1 - g_1)(1 - g_2)\cdots(1 - g_{n-1})g_n
\end{aligned}$$

Τότε, επειδή $W_i \subset V_i$, $\operatorname{supp}(f_i) \subset \operatorname{supp}(g_i) \subset V_i$ και $f_i \in C_c(X)$ αφού $g_i \in C_c(X)$. Επαγωγικά είναι επίσης άμεσο να δούμε ότι

$$f_1 + \cdots + f_n = 1 - (1 - g_1)(1 - g_2) \cdots (1 - g_{n-1})g_n.$$

Τέλος, αφού $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} W_i$, τότε για κάθε $x \in K$, υπάρχει $i_x$ ώστε $g_{i_x}(x) = 1$ και άρα $\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = 1$. □

## 1.4 Τοπικά συμπαγείς ομάδες.

**Ορισμός 1.19.** *Ένα σύνολο $G$ εφοδιασμένο με διμελή πράξη $\cdot : G \times G \to G$ καλείται **ημιομάδα** αν*

*α) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$, για κάθε $x, y, z \in G$.*

*Ενώ καλείται **ομάδα**, αν επιπλέον*

*β) Υπάρχει $e_G \in G$, τέτοιο ώστε $e_G \cdot g = g \cdot e_G$, για κάθε $g \in G$.*

*γ) Για κάθε $g \in G$, υπάρχει $g^{-1} \in G$ τέτοιο ώστε $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e_G$.*

**Ορισμός 1.20.** *Έστω $(G, \cdot)$ ημιομάδα ή ομάδα, αν $x \cdot y = y \cdot x$, για κάθε $x, y \in G$, τότε η $G$ καλείται **αβελιανή**.*

**Ορισμός 1.21.** *Έστω $G$ ομάδα εφοδιασμένη με μια τοπολογία $\mathcal{T}$ τέτοια ώστε*

*α) Η απεικόνιση $(x, y) \mapsto x \cdot y$ είναι συνεχής στην τοπολογία γινόμενο του $G \times G$.*

*β) Η απεικόνιση $x \mapsto x^{-1}$ είναι συνεχής.*

*γ) Ο $(G, \mathcal{T})$ είναι ένας τοπολογικός χώρος Hausdorff.*

*Τότε το ζεύγος $(G, \mathcal{T})$ καλείται **τοπολογική ομάδα** και αν επιπλέον είναι τοπικά συμπαγής χώρος, τότε καλείται **τοπικά συμπαγής ομάδα**.*

**Λήμμα 1.22.** *Έστω $G$ τοπολογική ομάδα και $O \subset G$ ανοιχτό με $e_G \in O$. Τότε υπάρχει ανοιχτό σύνολο $U$ με $e_G \in U$ τέτοιο ώστε $U = U^{-1}$ και $U \cdot U \cdot U \subset O$.*

*Απόδειξη.* Η πράξη της ομάδας είναι συνεχής στο $e_G$, επομένως υπάρχουν περιοχές $W_1, W_2$ του $e_G$ με $W_1 \cdot W_2 \subset O$. Τότε το $W = W_1 \cap W_2$ είναι ανοιχτό και $W \cdot W \subset O$. Επαναλαμβάνοντας την διαδικασία αντικαθιστώντας το $O$ με το $W$ υπάρχει ανοιχτό σύνολο $V$ με $e \in V$ τέτοιο ώστε $V \cdot V \subset W$ και άρα

$$V \cdot V \cdot V \subset V \cdot V \cdot V \cdot V \subset W \cdot W \subset O.$$

Τότε σύνολο $U = V \cap V^{-1}$ αποδεικνύει το ζητούμενο. □

**Λήμμα 1.23.** *Έστω $G$ τοπικά συμπαγής ομάδα και $K_1, K_2 \subset G$ ξένα συμπαγή σύνολα. Τότε υπάρχει ανοιχτή περιοχή $U$ του $e_G$, τέτοια ώστε κάθε μετατόπισή της να μην τέμνει ταυτόχρονα τα $K_1$ και $K_2$.*

*Απόδειξη.* Για κάθε $x \in K_1$, από το λήμμα 1.3 υπάρχει ανοιχτό σύνολο $O_x$ με $O_x \cap K_2 = \emptyset$. Θέτουμε $O = \bigcup_{x\in K_1} O_x$, τότε $K_1 \subset O$, $O \cap K_2 = \emptyset$ και για κάθε $x \in K_1$, $e_G \in x^{-1}O$. Έστω $x \in K_1$, από το λήμμα 1.22 υπάρχει ανοιχτό σύνολο $U_x$ με $U_x = U_x^{-1}$, $U_x \cdot U_x \cdot U_x \subset x^{-1}O$ και $e_G \in U_x$. Θέτουμε $V_x = x \cdot U_x \cap U_x \cdot x$ και παρατηρούμε ότι το $(V_x)_{x\in K_1}$ είναι ανοιχτό κάλυμμα του $K_1$. Επομένως υπάρχουν $x_1, \dots, x_n \in K_1$ τέτοια ώστε $K_1 \subset \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$ και ορίζουμε $U = \bigcap_{i=1}^n V_{x_i}$.

Θεωρούμε ότι κάποια μετατόπιση του $U$ τέμνει ταυτόχρονα τα $K_1, K_2$, δηλαδή υπάρχει $g \in G$ ώστε το $g \cdot U$ ή το $U \cdot g$ να τέμνει τα $K_1, K_2$. Έστω ότι αυτό συμβαίνει για το $g \cdot U$, τότε υπάρχουν $u, v \in U$, $k_1 \in K_1$, $k_2 \in K_2$ τέτοια ώστε $g \cdot u = k_1$ και $g \cdot v = k_2$. Επομένως $k_2 = k_1 \cdot u^{-1} \cdot v$ και $k_1 \in V_{x_i} \subset x_i \cdot U_{x_i}$ για κάποιο $i \in \{1, \dots, n\}$, τότε

$$k_2 \in x_i \cdot U_{x_i} \cdot U^{-1} \cdot U \subset x_i \cdot U_{x_i} \cdot (x_i \cdot U_{x_i})^{-1} \cdot x_i \cdot U_{x_i} = x_i \cdot U_{x_i} \cdot U_{x_i}^{-1} \cdot U_{x_i}$$

Αφού $U_x = U_x^{-1}$ και $U_x \cdot U_x \cdot U_x \subset x^{-1}O$, για κάθε $x \in K_1$, τελικά έχουμε ότι

$$k_2 \in x_i \cdot x_i^{-1} O = O$$

το οποίο είναι άτοπο καθώς $k_2 \in K_2$. Αντίστοιχα καταλήγουμε σε άτοπο αν το $U \cdot g$ τέμνει τα $K_1, K_2$, όπου τότε υπάρχουν $u, v \in \mathcal{U}$ με $k_2 = v \cdot u^{-1} \cdot k_1$. □

## 1.5 Στοιχεία θεωρίας μέτρου.

**Ορισμός 1.24.** *Έστω $X$ ένα σύνολο, μια συνολοσυνάρτηση $\mu^* : 2^X \to [0, \infty]$ καλείται **εξωτερικό μέτρο** στο $X$ αν*

*α)* $\mu^*(\emptyset) = 0$.

*β)* *Αν $A \subset B \subset X$, τότε $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.*

*γ)* *Αν $(A_n)_n$ είναι ακολουθία υποσυνόλων του $X$, τότε*

$$\mu^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

**Ορισμός 1.25.** *Έστω $\mu^*$ ένα εξωτερικό μέτρο στον $X$, τότε ένα σύνολο $B \subset X$ καλείται $\mu^*$-μετρήσιμο αν για κάθε $A$ υποσύνολο του $X$, ισχύει ότι*

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c).$$

*Συμβολίζουμε $\Sigma_{\mu^*}$ την οικογένεια όλων των $\mu^*$-μετρήσιμων υποσυνόλων του $X$.*

**Θεώρημα 1.26** (Καραθεοδωρή). *Έστω $\mu^*$ ένα εξωτερικό μέτρο στον $X$, τότε η $\Sigma_{\mu^*}$ είναι σ-άλγεβρα στο $X$ και το $\mu = \mu^*|_{\Sigma_{\mu^*}}$ είναι μέτρο στον $X$.*

*Απόδειξη.* [4], σελ. 380. ◻

**Σημείωση.** Συμβολίζουμε $\mathcal{B}(X)$, τη σ-άλγεβρα των Borel υποσυνόλων του $X$.

**Ορισμός 1.27.** *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος Hausdorff και $\mathcal{A}$ μια σ-άλγεβρα στον $X$ τέτοια ώστε $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{A}$. Τότε ένα μέτρο $\mu$ στον $(X, \mathcal{A})$ καλείται* ***κανονικό*** *αν*

*α) είναι* ***εσωτερικά κανονικό*** *σε κάθε $A \in \mathcal{A}$, δηλαδη*

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subset U,\ U \subset X \text{ ανοιχτό}\}$$

*β) είναι* ***εξωτερικά κανονικό*** *σε κάθε $U \subset X$ ανοιχτό, δηλαδή*

$$\mu(U) = \sup\{\mu(K) : K \subset U,\ K \subset X \text{ συμπαγές}\}$$

*γ) $\mu(K) < \infty$, για κάθε $K \subset X$ συμπαγές.*

**Λήμμα 1.28.** *Έστω $X$ τοπικά συμπαγής χώρος Hausdorff και $\mathcal{K}$ η οικογένεια των συμπαγών υποσυνόλων του $X$. Αν $\psi : \mathcal{K} \to [0, \infty)$ είναι τέτοια ώστε*

*α) $\psi(K_1) \leq \psi(K_2)$, για κάθε $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ με $K_1 \subset K_2$.*

*β) $\psi(K_1 \cup K_2) = \psi(K_1) + \psi(K_2)$, για κάθε $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ με $K_1 \cap K_2 = \emptyset$.*

*Τότε υπάρχει κανονικό μέτρο $\mu$ στον $X$, τέτοιο ώστε για κάθε $U \subset X$ ανοιχτό*

$$\mu(U) = \sup\{\psi(K) : K \subset U,\ K \in \mathcal{K}\}.$$

*Απόδειξη.* Ορίζουμε $\mu^* : 2^X \to [0, \infty]$, ώστε για κάθε $U \subset X$ ανοιχτό

$$\mu^*(U) = \sup\{\psi(K) : K \subset U, K \in \mathcal{K}\}$$

και για κάθε $A \subset X$

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu^*(V) : A \subset V, V \text{ ανοιχτό}\}$$

και παρατηρούμε ότι οι δύο αυτοί ορισμοί συμπίπτουν στα ανοιχτά υποσύνολα του $X$. Θα δείξουμε ότι το $\mu^*$ είναι ένα εξωτερικό μέτρο στον $X$.

Έχουμε ότι $\mu^*(\emptyset) = \psi(\emptyset) = 0$. Έστω $A \subset B \subset X$, τότε κάθε $V \subset X$ ανοιχτό με $B \subset V$ είναι και $A \subset V$, επομένως είναι άμεσο ότι $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$. Τέλος, έστω $(A_n)_n$ ακολουθία υποσυνόλων του $X$ και $\varepsilon > 0$, επιλέγουμε $(U_n)_n$

ανοιχτά στο $X$, με $\mu^*(U_n) \le \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2}$ και $A_n \subset U_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω $K \subset U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ συμπαγές, τότε μέσω μια αναδιάταξης αν απαιτείται, έχουμε ότι $K \subset \bigcup_{n=1}^{k} U_n$. Από το θεώρημα 1.18, υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις $\{f_n\}_{n=1}^{k}$, τέτοιες ώστε $\text{supp} f_n \subset U_n$ και $\sum_{n=1}^{k} f_i(x) = 1$, για κάθε $x \in K$. Για κάθε $n$, θέτουμε $K_n = \{x \in X : f_n(x) \ge \frac{1}{k}\}$. Τότε τα $K \cap K_n$ είναι συμπαγή, $K \cap K_n \subset U_n$ και $K \subset \bigcup_{n=1}^{k} K \cap K_n$, αφού διαφορετικά θα ήταν $\sum_{n=1}^{k} f_i(x) < 1$, για κάποιο $x \in K$. Επομένως προκύπτει ότι

$$\psi(K) \le \sum_{n=1}^{k} \psi(K \cap K_n) \le \sum_{n=1}^{k} \mu^*(U_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(U_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \varepsilon.$$

Δηλαδή για κάθε $K \in \mathcal{K}$ με $K \subset U$, έχουμε ότι $\psi(K) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$ και άρα

$$\mu^*(U) = \sup\{\psi(K) : K \subset U, K \in \mathcal{K}\} \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

Όμως $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = U$, επομένως $\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \le \mu^*(U) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$, το οποίο αποδεικνύει τη σ-υποαθροιστικότητα του $\mu^*$ και τελικά το ότι είναι εξωτερικό μέτρο.

Από το θεώρημα 1.26, το $\mu = \mu^*|_{\Sigma_{\mu^*}}$ είναι μέτρο στον $X$ και επιπλέον τα ανοιχτά υποσύνολα του $X$ είναι $\mu^*$-μετρήσιμα. Πράγματι, έστω $U \subset X$ ανοιχτό, $B \subset X$ και $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $A \subset X$ ανοιχτό με $\mu^*(A) \le \mu^*(B) + \varepsilon$, καθώς και συμπαγή σύνολα $K_1 \subset A \cap U$ και $K_2 \subset A \cap K_1^c$, τέτοια ώστε

$$\mu^*(A \cap U) \le \psi(K_1) + \varepsilon \quad \text{και} \quad \mu^*(A \cap K_1^c) \le \psi(K_2) + \varepsilon.$$

Τότε

$$\begin{aligned} \mu^*(B \cap U) + \mu^*(B \cap U^c) &\le \mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \cap U^c) \\ &\le \psi(K_1) + \psi(K_2) + 2\varepsilon \\ &\le \psi(K_1 \cup K_2) + 2\varepsilon \\ &\le \mu^*(A) + 2\varepsilon \\ &\le \mu^*(B) + 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Δηλαδή η $\Sigma_{\mu^*}$ περιέχει τη σ-άλγεβρα Borel. Επιπλέον αν $K \in \mathcal{K}$, τότε για κάθε $K \subset V$ ανοιχτό, ισχύει ότι $\mu^*(V) \ge \psi(K)$ και επομένως

$$\mu^*(K) = \inf\{\mu^*(V) : K \subset V, V \text{ ανοιχτό}\} \ge \psi(K).$$

Λόγω της μονοτονίας της $\psi$, έχουμε επίσης ότι

$$\mu^*(K^\circ) = \sup\{\psi(H) : H \in \mathcal{K}, H \subset K^\circ \subset K\} \le \psi(K)$$

και άρα για κάθε $K \in \mathcal{K}$

$$\mu^*(K^\circ) \leq \psi(K) \leq \mu^*(K).$$

Το $\mu$ είναι εκ κατασκευής εξωτερικά κανονικό μέτρο. Έστω $U \subset X$ ανοιχτό, τότε για κάθε $K \subset U$ συμπαγές ισχύει ότι $\psi(K) \leq \mu^*(K) \leq \mu^*(U)$ και άρα

$$\sup\{\psi(K) : K \in \mathcal{K}, K \subset U\} \leq \sup\{\mu^*(K) : K \in \mathcal{K}, K \subset U\} \leq \mu^*(U).$$

Επομένως $\sup\{\mu^*(K) : K \in \mathcal{K}, K \subset U\} = \mu^*(U)$, δηλαδή το $\mu^*$ είναι και εσωτερικά κανονικό. Τέλος, έστω $K \in \mathcal{K}$, τότε από την πρόταση 1.16, υπάρχει $V \subset X$ ανοιχτό με $\overline{V}$ συμπαγές, ώστε $K \subset V \subset \overline{V} \subset G$ και άρα

$$\mu^*(K) \leq \mu^*(V) \leq \mu^*(\overline{V}^\circ) \leq \psi(\overline{V}) < \infty.$$

Δηλαδή το $\mu$ είναι ένα κανονικό μέτρο στον $X$. □

## 1.6 Πλειότιμες απεικονίσεις.

**Ορισμός 1.29.** *Έστω $X, Y$ μη κενά σύνολα. Μια απεικόνιση $f : X \to 2^Y$ η οποία αντιστοιχεί σε κάθε $x \in X$ ένα υποσύνολο $f(x)$ του $Y$ καλείται* ***πλειότιμη****.*

Για μια πλειότιμη απεικόνιση $f : X \to 2^Y$ θα συμβολίζουμε $f : X \twoheadrightarrow Y$. Όμοια με τις συναρτήσεις, θα αναφερόμαστε στο σύνολο $X$ ως το *πεδίο ορισμού* της $f$ και το $Y$ ως το *πεδίο τιμών* της. Επιπλέον, η *εικόνα* ενός συνόλου $A \subset X$ μέσω της $f$ είναι το σύνολο $f(A) = \bigcup_{x \in A} f(x)$.

Σε πλήρη αναλογία με την αντίστροφη εικόνα μιας συνάρτησης, κατά φυσιολογικό τρόπο δίνουμε για μια πλειότιμη απεικόνιση τον εξής ορισμό.

**Ορισμός 1.30.** *Έστω $X, Y$ μη κενά σύνολα, $A \subset Y$ και $f : X \twoheadrightarrow Y$, ορίζουμε*

*α)* ***άνω*** *ή* ***ισχυρή αντίστροφη εικόνα*** *του $A$*

$$f^u(A) = \{x \in X : f(x) \subset A\}.$$

*β)* ***κάτω*** *ή* ***ασθενής αντίστροφη εικόνα*** *του $A$*

$$f^\ell(A) = \{x \in X : f(x) \cap A \neq \emptyset\}.$$

**Παρατήρηση.** Αν οι τιμές της $f$ είναι μονοσύνολα, τότε τα σύνολα $f^u(A)$ και $f^\ell(A)$ συμπίπτουν με την αντίστροφη εικόνα του $A$, θεωρώντας την $f$ ως συνάρτηση. Επίσης αν η $f$ έχει μόνο μη κενές τιμές, τότε είναι άμεσο ότι $f^u(A) \subset f^\ell(A)$, για κάθε μη κενό $A \subset Y$.

**Λήμμα 1.31.** *Έστω $X, Y$ μη κενά σύνολα, $A \subset Y$ και $f : X \twoheadrightarrow Y$, τότε $f^u(A)^c = f^\ell(A^c)$ και $f^\ell(A)^c = f^u(A^c)$.*

*Απόδειξη.* Χρησιμοποιώντας τους παραπάνω ορισμούς έχουμε ότι

$$f^u(A)^c = \{x \in X : f(x) \cap A^c \neq \emptyset\} = f^\ell(A^c)$$

και αντίστοιχα το συμπλήρωμα της ασθενούς αντίστροφης εικόνας του $A$

$$f^\ell(A)^c = \{x \in X : f(x) \subset A^c\} = f^u(A^c).$$

□

**Ορισμός 1.32.** *Έστω $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ τοπολογικοί χώροι και $f : X \twoheadrightarrow Y$, τότε η $f$ καλείται*

*α)* ***upper hemicontinuous*** *στο $x \in X$ αν για κάθε περιοχή $U$ του $f(x)$, η άνω αντίστροφη εικόνα $f^u(U)$ είναι περιοχή του $x$, ενώ θα λέμε ότι η $f$ είναι upper hemicontinuous στον $X$, αν είναι upper hemicontinuous σε κάθε $x \in X$.*

*β)* ***lower hemicontinuous*** *στο $x \in X$ αν για κάθε ανοιχτό σύνολο $U \subset Y$ τέτοιο ώστε $U \cap f(x) \neq \emptyset$, η κάτω αντίστροφη εικόνα του $f^\ell(U)$ του $U$ είναι περιοχή του $x$. Θα λέμε ότι η $f$ είναι lower hemicontinuous στον $X$, αν είναι lower hemicontinuous σε κάθε $x \in X$.*

*γ)* ***συνεχής*** *στο $x \in X$ αν είναι upper και lower hemicontinuous στο $x$. Θα λέμε ότι η $f$ είναι συνεχής στον $X$ αν είναι συνεχής σε κάθε $x \in X$.*

**Πρόταση 1.33.** *Έστω $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ τοπολογικοί χώροι και $f : X \twoheadrightarrow Y$, τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα*

*α) Η $f$ είναι upper hemicontinuous.*

*β) Το $f^u(V)$ είναι ανοιχτό, για κάθε ανοιχτό υποσύνολο $V$ του $Y$.*

*γ) Το $f^\ell(W)$ είναι κλειστό, για κάθε κλειστό υποσύνολο $W$ του $Y$.*

*Απόδειξη.* *α)* $\Longrightarrow$ *β).* Έστω $V$ ανοιχτό στον $Y$ και $x \in f^u(V)$, δηλαδή $f(x) \subset V$ και άρα το $V$ είναι περιοχή του $x$. Αφού η $f$ είναι upper hemicontinuous, το $f^u(V)$ είναι περιοχή του $x$, επομένως το $f^u(V)$ είναι ανοιχτό.
*β)* $\Longrightarrow$ *γ).* Έστω $W \subset Y$ κλειστό, τότε από το λήμμα 1.31 προκύπτει ότι $f^\ell(W)^c = f^u(W^c)$, όπου το $f^u(W^c)$ είναι ανοιχτό από το *β)* και άρα το $f^\ell(W)$ είναι κλειστό στον $X$.
*γ)* $\Longrightarrow$ *α).* Έστω $x \in X$ και $V \subset Y$ ανοιχτό με $f(x) \subset V$, δηλαδή $f(x) \cap V^c = \emptyset$ και άρα $x \notin f^\ell(V^c)$. Επομένως από το *γ)* έπεται ότι $x \in f^\ell(V^c)^c = f^u(V)$, όπου το $f^u(V)$ είναι ανοιχτό, δηλαδή είναι περιοχή του $x$. □

**Ορισμός 1.34.** *Έστω $(X, \mathcal{T}_X)$ τοπολογικός χώρος, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ τοπολογικός γραμμικός χώρος και $f : X \twoheadrightarrow Y$, τότε η $f$ καλείται*

α) ***upper demicontinuous*** *αν για κάθε $y^* \in Y^*$ και $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο $f^u(\{y \in Y : \langle y, y^* \rangle < a\})$ είναι ανοιχτό στον $X$. Δηλαδή η άνω αντίστροφη εικόνα κάθε ανοιχτού ημιχώρου του $Y$ είναι ανοιχτό σύνολο στον $X$.*

β) ***lower demicontinuous*** *αν για κάθε $y^* \in Y^*$ και $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο $f^\ell(\{y \in Y : \langle y, y^* \rangle < a\})$ είναι ανοιχτό στον $X$. Δηλαδή η κάτω αντίστροφη εικόνα κάθε ανοιχτού ημιχώρου του $Y$ είναι ανοιχτό σύνολο στον $X$.*

**Ορισμός 1.35.** *Έστω $X, Y$ μη κενά σύνολα και $f : X \twoheadrightarrow Y$, ορίζουμε ως* ***γράφημα*** *της $f$ το σύνολο*

$$\mathrm{Gr}f = \{(x, y) \in X \times Y : y \in f(x)\}$$

**Ορισμός 1.36.** *Έστω $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ τοπολογικοί χώροι και $f : X \twoheadrightarrow Y$, θα λέμε ότι η $f$ έχει* ***κλειστό γράφημα*** *αν το σύνολο $\mathrm{Gr}f$ είναι κλειστό στο $X \times Y$.*

**Παρατήρηση.** Μία πλειότιμη απεικόνιση με κλειστό γράφημα έχει κλειστές τιμές, δηλαδή το σύνολο $f(x)$ είναι κλειστό στον $Y$ για κάθε $x \in X$. Το αντίστροφο δεν ισχύει, έστω $\varphi : [0, 1] \twoheadrightarrow [0, 1]$ με $\varphi(x) = \{0\}, x > 0$ και $\varphi(0) = \{1\}$. Η $\varphi$ έχει κλειστές τιμές αλλά όχι κλειστό γράφημα.

**Θεώρημα 1.37** (Θεώρημα Κλειστού Γραφήματος)**.** *Έστω $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ τοπολογικοί χώροι, όπου ο $Y$ είναι συμπαγής και Hausdorff, και έστω $f : X \twoheadrightarrow Y$. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα*

α) *Η $f$ έχει κλειστό γράφημα.*

β) *Η $f$ είναι upper hemicontinuous και έχει κλειστές τιμές.*

*Απόδειξη. α) $\Longrightarrow$ β).* Έστω ότι η $f$ δεν είναι upper hemicontinuous, τότε υπάρχει $x \in X$ και ανοιχτό σύνολο $V \supset f(x)$, ώστε για κάθε περιοχή $U$ του $x$ υπάρχει $x_U \in U$ και $y_U \in f(x_U)$ με $y_U \notin V$. Κατασκευάζουμε έτσι ένα δίκτυο $\{y_U\} \subset V^c$, το οποίο λόγω συμπάγειας του $Y$ έχει υποδίκτυο που συγκλίνει, έστω στο $y \in Y$. Επειδή το $V^c$ είναι κλειστό, τότε $y \notin f(x) \subset V$. Δηλαδή $\{(x_U, y_U)\} \subset \mathrm{Gr}f$ και ένα υποδίκτυο του $\{(x_U, y_U)\}$ συγκλίνει στο $(x, y) \notin \mathrm{Gr}f$, το οποίο είναι άτοπο καθώς το γράφημα της $f$ είναι κλειστό.
*β) $\Longrightarrow$ α).* Οι τιμές της $f$ είναι συμπαγείς, ως κλειστά υποσύνολα του συμπαγούς χώρου $Y$. Έστω $(x, y) \notin \mathrm{Gr}f$, δηλαδή $y \notin f(x)$, τότε υπάρχουν περιοχές $V$ του $y$ και $W$ του $f(x)$ με $V \cap W = \emptyset$. Επειδή η $f$ είναι upper hemicontinuous, το σύνολο $U = f^u(W)$ είναι ανοιχτό και το $U \times V$ είναι περιοχή του $(x, y)$ με $\mathrm{Gr}f \cap (U \times V) = \emptyset$. Επομένως το $\mathrm{Gr}f$ είναι κλειστό. □

## 1.7 Γεωμετρικά Simplicial Complex.

**Ορισμός 1.38.** *Έστω $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$, τότε αυτά καλούνται* ***αφφινικά ανεξάρτητα*** *αν για κάθε $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0 \ \ \text{και} \ \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0,$$

*έπεται ότι $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.*

**Λήμμα 1.39.** *Έστω $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$, τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα*

*α) Τα $x_1, \dots, x_n$ είναι αφφινικά ανεξάρτητα.*

*β) Τα $x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_n - x_1$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

*Απόδειξη.* *α)* $\implies$ *β).* Έστω $\lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $\sum_{i=2}^{n} \lambda_i (x_i - x1) = 0$. Θέτουμε $\lambda_1 = -\sum_{i=2}^{n} \lambda_i$, τότε $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$ και $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$. Λόγω αφφινικής ανεξαρτησίας, έπεται ότι $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n$.
*β)* $\implies$ *α).* Έστω $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$ και $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$. Τότε $\lambda_1 = -\sum_{i=2}^{n} \lambda_i$, δηλαδή $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i (x_i - x_1)$. Άρα $\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$, από όπου είναι άμεσο ότι $\lambda_1 = 0$. □

**Ορισμός 1.40.** *Έστω $A \subset \mathbb{R}^d$, ορίζουμε ως* ***αφφινική θήκη*** *του $A$ το σύνολο*

$$\operatorname{aff}(A) = \left\{ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i : n \in \mathbb{N}, x_i \in A, \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1 \right\}.$$

**Ορισμός 1.41.** *Έστω $A \subset \mathbb{R}^d$, τότε το $A$ καλείται* ***αφφινικά εξαρτημένο*** *αν υπάρχουν $x_1, \dots, x_n \in A$ και $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, τα οποία δεν είναι όλα μηδέν, ώστε $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$ και $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$. Αν το $A$ δεν είναι αφφινικά εξαρτημένο, τότε αυτό καλείται* ***αφφινικά ανεξάρτητο****.*

**Παρατήρηση.** Έστω $A \subset \mathbb{R}^d$ αφφινικά ανεξάρτητο, τότε από το λήμμα **;;** έπεται ότι $|A| \leq d + 1$.

**Λήμμα 1.42.** *Έστω $A \subset \mathbb{R}^d$ αφφινικά ανεξάρτητο, τότε αν $x \in \mathbb{R}^d \setminus \operatorname{aff}(A)$, το σύνολο $A \cup \{x\}$ είναι αφφινικά ανεξάρτητο.*

*Απόδειξη.* Έστω $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ με $n \leq d+1$ και θεωρούμε ότι το $A \cup \{x\}$ είναι αφφινικά εξαρτημένο. Τότε, επειδή επιπλέον το $A$ είναι αφφινικά ανεξάρτητο, υπάρχουν $\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_m$, $m \leq n$, με $\lambda \neq 0$ ώστε $\lambda x + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i = 0$ και $\lambda + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 0$. Παρατηρούμε ότι υπάρχει $1 \leq i_0 \leq m$ ώστε $\lambda_{i_0} \neq 0$. Τότε έχουμε ότι $x = \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i \in \operatorname{aff}(A)$, το οποίο είναι άτοπο. □

**Ορισμός 1.43.** *Έστω $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$ αφφινικά ανεξάρτητα, τότε η κυρτή τους θήκη, έστω σ, καλείται **simplex***

$$\sigma = \mathrm{co}(\{x_0, \dots, x_n\}) = \left\{ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i : \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Τα στοιχεία $x_0, \dots, x_n$ καλούνται *κορυφές* του $\sigma$ και θα συμβολίζουμε το σύνολο τους ως $V(\sigma)$. Η *διάσταση* του ορίζεται ως $\dim(\sigma) = |V(\sigma)| - 1$ και ένα simplex διάστασης $n$ θα καλείται ***n-simplex***. Το κενό σύνολο $\emptyset$ είναι simplex και θεωρούμε ότι $\dim(\emptyset) = -1$.

**Ορισμός 1.44.** *Έστω $\sigma \subset \mathbb{R}^d$ είναι ένα n-simplex, τότε η κυρτή θήκη ενός αυθαίρετου υποσυνόλου του $V(\sigma)$ καλείται **face** του σ.*

Κάθε face $\tau$ του $\sigma$ είναι ένα simplex διάστασης $k$, με $k \leq \dim(\sigma)$, και για να δηλώσουμε τη διάστασή του $\tau$, θα λέμε ότι είναι ένα ***k-face*** του $\sigma$. Ένα face διάστασης $\dim(\sigma) - 1$ καλείται ***facet*** του $\sigma$.

Αν $\sigma, \tau$ είναι simplex και $\tau$ είναι face του $\sigma$ τότε θα συμβολίζουμε $\tau \leq \sigma$, ενώ αν το $\tau$ είναι γνήσιο face του $\sigma$ τότε $\tau < \sigma$.

**Ορισμός 1.45.** *Έστω $\sigma \subset \mathbb{R}^d$ είναι ένα simplex, τότε ορίζουμε το **σχετικό εσωτερικό** του σ να είναι το σύνολο*

$$\mathrm{ri}(\sigma) = \sigma \setminus \bigcup_{\tau < \sigma} \tau.$$

**Παρατήρηση.** Ένα simplex $\sigma$ είναι η ξένη ένωση των σχετικών εσωτερικών των face του, δηλαδή $\sigma = \bigcup_{\tau \leq \sigma} \mathrm{ri}(\tau)$.

**Ορισμός 1.46.** *Μια μη κενή οικογένεια $\Delta \subset 2^{\mathbb{R}^d}$, η οποία αποτελείται από simplex, καλείται **sipmlicial complex** αν ισχύουν*

*α) Αν $\sigma \in \Delta$ και $\tau \leq \sigma$, τότε $\tau \in \Delta$.*

*β) Αν $\sigma, \tau \in \Delta$ τότε η τομή $\sigma \cap \tau$ είναι ένα κοινό face των σ και τ.*

Το σύνολο $\|\Delta\| = \bigcup_{\sigma \in \Delta} \sigma$ καλείται **πολύεδρο** του $\Delta$. Ορίζουμε ως *διάσταση* του $\Delta$ την ποσότητα $\dim(\Delta) = \max_{\sigma \in \Delta} \dim(\sigma)$ και ως *σύνολο κορυφών* του, το σύνολο $V(\Delta) = \bigcup_{\sigma \in \Delta} V(\sigma)$. Τέλος θα συμβολίζουμε $\mu(\Delta) = \max_{\sigma \in \Delta} \mathrm{diam}(\sigma)$.

**Πρόταση 1.47.** *Έστω $\sigma \subset \mathbb{R}^d$ είναι ένα simplex, τότε το σύνολο όλων των face του σ αποτελεί simplicial complex.*

*Απόδειξη.* Το *α)* του ορισμού είναι άμεσο. Έστω $V \subset \mathbb{R}^d$ αφφινικά ανεξάρτητο και $F, G \subset V$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\text{co}(F) \cap \text{co}(G) \subset \text{co}(F \cap G)$. Έστω $x \in \text{co}(F) \cap \text{co}(G)$, τότε $x = \sum_{y \in F} \lambda_y y = \sum_{z \in G} \mu_z z$. όπου $\lambda_y, \mu_z \geq 0$ και $\sum_{y \in F} \lambda_y = \sum_{z \in G} \mu_z = 1$. Αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε ότι

$$\sum_{y \in F \setminus G} \lambda_y y - \sum_{z \in G \setminus F} \mu_z z + \sum_{w \in F \cap G} (\lambda_w - \mu_w) w = 0.$$

Τα στοιχεία του $F \cup G$ είναι αφφινικά ανεξάρτητα, επομένως όλοι συντελεστές στην παραπάνω σχέση είναι μηδενικοί. Δηλαδή τα $\lambda_w, \mu_w$ μπορεί να είναι μη μηδενικά μόνο αν $w \in F \cap G$ και άρα $x \in \text{co}(F \cap G)$. □

**Ορισμός 1.48.** *Έστω $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ τοπολογικοί χώροι. Τότε μια απεικόνιση $f : X \to Y$ καλείται **ομοιομορφισμός** αν είναι 1-1, επί και αμφισυνεχής. Αν υπάρχει τέτοια απεικόνιση, λέμε ότι οι $X$ και $Y$ είναι ομοιομορφικοί και συμβολίζουμε $X \cong Y$.*

**Ορισμός 1.49.** *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος, ένα simplicial complex $\Delta$ τέτοιο ώστε $\|\Delta\| \cong X$ καλείται **τριγωνοποίηση** του $X$.*

**Σημείωση.** Θα θεωρούμε ότι ένα simplicial complex περιέχει πεπερασμένα το πλήθος simplex. Από τοπολογικής άποψης η υπόθεση αυτή είναι περιοριστική, καθώς το πολύεδρό του είναι συμπαγές και επομένως δε μπορούμε να εκφράσουμε, μέσω τριγωνοποίησης, χώρους που δεν είναι συμπαγείς.

Είναι όμως αρκετή για να αποδείξουμε τα συνδυαστικά αποτελέσματα που μας ενδιαφέρουν και με αυτό τον τρόπο αποφεύγουμε να επεκταθούμε σε περαιτέρω τοπολογικά αποτελέσμα, από ότι μας είναι αρκετό.

**Ορισμός 1.50.** *Έστω $\Delta_1$, $\Delta_2 \subset 2^{\mathbb{R}^d}$ είναι simplicial complex, το $\Delta_2$ καλείται **υποδιαίρεση** του $\Delta_1$ αν ισχύουν τα παρακάτω*

*α)* $\|\Delta_1\| = \|\Delta_2\|$.

*β) Για κάθε $\tau \in \Delta_2$ υπάρχει $\sigma \in \Delta_1$ ώστε $\tau \subset \sigma$.*

**Παρατήρηση.** Κάθε υποδιαίρεση ενός simplicial complex $\Delta$ αποτελεί τριγωνοποίησή του, καθώς και κάθε χώρου του οποίου το $\Delta$ είναι τριγωνοποίηση.

**Θεώρημα 1.51** (Baire). *Ένας μη κενός, πλήρης μετρικός χώρος δεν είναι αριθμήσιμη ένωση κλειστών συνόλων με κενό εσωτερικό.*

**Λήμμα 1.52.** *Έστω $\Delta_1$, $\Delta_2 \subset 2^{\mathbb{R}^d}$ είναι simplicial complex και το $\Delta_2$ αποτελεί υποδιαίρεση του $\Delta_1$. Τότε* $\dim(\Delta_2) = \dim(\Delta_1)$.

*Απόδειξη.* Επειδή το $\Delta_2$ είναι υποδιαίρεση του $\Delta_1$, από το *β)* έπεται άμεσα ότι $\dim(\Delta_2) \le \dim(\Delta_1)$. Υποθέτουμε ότι $\dim(\Delta_2) < \dim(\Delta_1)$ και έστω $\sigma \in \Delta_1$ με $\dim(\sigma) = \dim(\Delta)$, τότε υπάρχουν $\tau_1, \ldots, \tau_n \in \Delta_2$ ώστε $\sigma = \bigcup_{i=1}^n \tau_i$. Επομένως από το θεώρημα του Baire έπεται ότι υπάρχει $i_0$ ώστε $\operatorname{int}(\tau_{i_0}) \neq \emptyset$, το οποίο είναι άτοπο αφού $\dim(\tau_{i_0}) < \dim(\sigma) \le d$. □

**Ορισμός 1.53.** *Έστω $\sigma \subset \mathbb{R}^d$ είναι ένα n-simplex με $V(\sigma) = \{x_0, \ldots, x_n\}$, τότε ορίζουμε το* ***βαρύκεντρο*** *του σ ως το στοιχείο*

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} x_i.$$

**Ορισμός 1.54.** *Έστω $\Delta \subset 2^{\mathbb{R}^d}$ είναι ένα simplicial complex, ονομάζουμε* ***πρώτη βαρυκεντρική υποδιαίρεση*** *του Δ την οικογένεια*

$$\Delta' = \left\{ \operatorname{co}(\{\hat{\sigma}_1, \ldots, \hat{\sigma}_n\}) : n \in \mathbb{N}, \sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \Delta, \sigma_1 \prec \cdots \prec \sigma_n \right\}$$

**Λήμμα 1.55.** *Έστω $\sigma_1, \ldots \sigma_n \subset \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, είναι simplex με $\sigma_1 \prec \cdots \prec \sigma_n$, τότε τα $\hat{\sigma}_1, \ldots, \hat{\sigma}_n$ είναι αφφινικά ανεξάρτητα και $\sigma = \operatorname{co}(\{\hat{\sigma}_1, \ldots, \hat{\sigma}_n\}) \subset \sigma_n$.*

*Απόδειξη.* Θεωρούμε $V(\sigma_i) = \{x_0, \ldots, x_{k_i}\}$, όπου $k_i > k_j$ όταν $i > j$. Τότε παρατηρούμε ότι $\operatorname{aff}(V(\sigma_j)) \subsetneq \operatorname{aff}(V(\sigma_i))$ και επειδή τα $x_0, \ldots, x_{k_n}$ είναι αφφινικά ανεξάρτητα, ότι $\hat{\sigma}_i \in \operatorname{aff}(V(\sigma_i)) \setminus \operatorname{aff}(V(\sigma_j))$, για κάθε $1 \le j < i \le n$. Επομένως από το λήμμα 1.42 έχουμε ότι τα $\hat{\sigma}_1, \ldots, \hat{\sigma}_n$ είναι αφφινικά ανεξάρτητα. Επιπλέον $\{\hat{\sigma_1}, \ldots, \hat{\sigma}_n\} \subset \sigma_n$ και άρα $\operatorname{co}(\{\hat{\sigma_1}, \ldots, \hat{\sigma}_n\}) \subset \sigma_n$, λόγω κυρτότητας. □

**Πρόταση 1.56.** *Έστω $\Delta \subset 2^{\mathbb{R}^d}$ είναι ένα simplicial complex, τότε το $\Delta'$ είναι simplicial complex.*

*Απόδειξη.* Το *α)* του ορισμού 1.46 είναι άμεσο ότι ικανοποείται από το $\Delta'$. Θα αποδείξουμε ότι το $\Delta'$ είναι ένα simplicial complex, επαγωγικά ως προς το πλήθος των simplex που περιέχονται στη Δ.

Έστω ότι το Δ αποτελείται από ένα μόνο simplex, τότε αυτό πρέπει να είναι ένα μονοσύνολο, αφού διαφορετικά το Δ θα περιείχε και κάθε γνήσιο face του. Επομένως $\Delta' = \Delta$. Στη γενική περίπτωση έστω ένα αυθαίρετο complex Δ και θεωρούμε ότι η βαρυκεντρική υποδιαίρεση, για κάθε complex που περιέχει λιγότερα simplex από το Δ, είναι ένα simplicial complex.

Έστω $\sigma \in \Delta$, τέτοιο ώστε $\dim(\sigma) = \dim(\Delta)$, και $\Delta_0 = \Delta \setminus \{\sigma\}$. Τότε το $\Delta_0$ είναι ένα simplicial complex αφού το σ δεν αποτελεί γνήσιο face σε κάποιο simplex του Δ και επιπλέον το $\Delta_0$ περιέχει λιγότερα simplex από το Δ. Από την επαγωγική υπόθεση το $\Delta_0'$ είναι simplicial complex. Παρατηρούμε ότι το $\Delta'$ αποτελείται από τα εξής simplex

- Τα simplex του $\Delta_0'$.
- Το βαρύκεντρο $\hat{\sigma}$ του $\sigma$.
- Τα simplex $\tau$ με $V(\tau) = \{\hat{\sigma}\} \cup V(\rho)$, όπου $\rho \in \Delta_0'$ και του οποίου οι κορυφές είναι βαρύκεντρα γνήσιων face του $\sigma$. Συμβολίζουμε $\tau = \hat{\sigma}\rho$.

Έστω $\sigma_1, \sigma_2 \in \Delta'$, τότε διακρίνουμε τρείς περιπτώσεις. Αν $\sigma_1, \sigma_2 \in \Delta_0'$, δηλαδή δεν έχουν το $\hat{\sigma}$ ως κορυφή τους, τότε από την επαγωγική υπόθεση η τομή $\sigma_1 \cap \sigma_2$ είναι είτε κενή είτε κάποιο κοινό τους face. Αν $\sigma_1 = \hat{\sigma}\rho_1$ και $\sigma_2 = \hat{\sigma}\rho_2$ για κατάλληλα $\rho_1, \rho_2 \in \Delta_0'$, τότε $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \hat{\sigma}(\rho_1 \cap \rho_2)$, όπου το $\rho_1 \cap \rho_2$ είναι ένα κοινό face των $\rho_1, \rho_2$ από την επαγωγική υπόθεση. Τέλος αν $\sigma_1 \in \Delta_0'$ και $\sigma_2 = \hat{\sigma}\rho$, για κατάλληλο $\rho \in \Delta_0'$, τότε $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \sigma_1 \cap \rho$. Επομένως σε κάθε περίπτωση η τομή δυο simplex του $\Delta'$ είναι είτε κενή είτε ένα κοινό face τους, δηλαδή το $\Delta'$ είναι ένα simplicial complex. □

**Πρόταση 1.57.** *Έστω $\Delta \subset 2^{\mathbb{R}^d}$ είναι ένα simplicial complex, τότε το $\Delta'$ είναι μια υποδιαίρεση του $\Delta$.*

*Απόδειξη.* Από το λήμμα 1.55 ισχύει ότι για κάθε $\tau \in \Delta'$, υπάρχει $\sigma \in \Delta$ ώστε $\tau \subset \sigma$ και άρα $\|\Delta'\| \subset \|\Delta\|$. Έστω $\sigma \in \Delta$ με $V(\sigma) = \{x_0, \dots, x_n\}$, τότε χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ με $1 \geq \lambda_0 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$ και $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Τότε για $i = 0, \dots, n$, ορίζουμε $\sigma_i$ να είναι το simplex με $V(\sigma_i) = \{x_0, \dots, x_i\}$ και παρατηρούμε ότι $x = \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda_{i+1})(i+1)\hat{\sigma}_i$, όπου $\lambda_{n+1} = 0$, δηλαδή $x \in \mathrm{co}(\{\hat{\sigma}_0, \dots, \hat{\sigma}_n\})$. □

**Λήμμα 1.58.** *Έστω $\sigma \subset \mathbb{R}^d$ είναι ένα $n$-simplex με $V(\sigma) = \{x_0, \dots, x_n\}$, τότε*

$$\mathrm{diam}(\sigma) = \max_{0 \leq i,j \leq n} \|x_i - x_j\|$$

*Απόδειξη.* Έστω $x, y \in \sigma$ με $y = \sum_{i=0}^n \lambda_i x_i$, όπου $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$, τότε

$$\begin{aligned} \|x - y\| = \Big\| \sum_{i=0}^n \lambda_i x - \sum_{i=0}^n \lambda_i x_i \Big\| &= \Big\| \sum_{i=0}^n \lambda_i (x - x_i) \Big\| \\ &\leq \sum_{i=0}^n \lambda_i \|x - x_i\| \\ &\leq \max_{0 \leq i \leq n} \|x - x_i\| \end{aligned}$$

Επομένως για κάθε $x \in \sigma$ και $0 \leq i \leq n$, έχουμε ότι

$$\|x - x_i\| = \max_{0 \leq j \leq n} \|x_i - x_j\|$$

και άρα

$$\|x - y\| \leq \max_{0 \leq i,j \leq n} \|x_i - x_j\|, \ \forall x, y \in \sigma.$$

□

**Λήμμα 1.59.** *Έστω $\sigma, \tau \subset \mathbb{R}^d$ είναι simplex με $\tau \leq \sigma$, τότε*

$$\|\hat{\sigma} - \hat{\tau}\| \leq \frac{\dim(\sigma)}{1 + \dim(\sigma)} \operatorname{diam}(\sigma).$$

*Απόδειξη.* Έστω $V(\tau) = \{x_0, \ldots, x_m\}$ και $V(\sigma) = \{x_0, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n\}$, με $\dim(\sigma) = n$. Τότε $\hat{\sigma} - \hat{\tau} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} (x_i - \hat{\tau})$ και $\sum_{i=0}^{m} (x_i - \hat{\tau}) = 0$, επομένως

$$\begin{aligned}
\|\hat{\sigma} - \hat{\tau}\| &= \left\| \frac{1}{n+1} \sum_{i=m+1}^{n} (x_i - \hat{\tau}) \right\| \\
&\leq \frac{1}{n+1} \sum_{i=m+1}^{n} \|x_i - \hat{\tau}\| \\
&\leq \frac{1}{n+1} \sum_{i=m+1}^{n} \operatorname{diam}(\sigma) = \frac{n-m}{n+1} \operatorname{diam}(\sigma).
\end{aligned}$$

□

**Πρόταση 1.60.** *Έστω $\Delta \subset 2^{\mathbb{R}^d}$ είναι ένα simplicial complex, τότε*

$$\mu(\Delta') \leq \frac{\dim(\Delta)}{1 + \dim(\Delta)} \mu(\Delta).$$

*Απόδειξη.* Έστω $\tau \in \Delta'$, υπάρχουν $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \Delta$ με $\sigma_1 \prec \cdots \prec \sigma_n$ και τέτοια ώστε $V(\tau) = \{\hat{\sigma}_1, \ldots, \hat{\sigma}_n\}$. Από τα λήμματα 1.58 και 1.59 έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\operatorname{diam}(\tau) = \max_{0 \leq i, j \leq n} \|\hat{\sigma}_i - \hat{\sigma}_j\| &\leq \frac{\dim(\sigma_n)}{1 + \dim(\sigma_n)} \operatorname{diam}(\sigma_n) \\
&\leq \frac{\dim(\Delta)}{1 + \dim(\Delta)} \mu(\Delta).
\end{aligned}$$

□

**Ορισμός 1.61.** *Έστω $\Delta \subset 2^{\mathbb{R}^d}$ είναι ένα simplicial complex, τότε ορίζουμε επαγωγικά την k-οστή βαρυκεντρική υποδιαίρεση $\Delta^{(k)}$ του $\Delta$ ως εξής*

- $\Delta^{(1)} = \Delta'$, *δηλαδή η πρώτη βαρυκεντρική υποδιαίρεση του $\Delta$.*
- $\Delta^{(k)} = \left(\Delta^{(k-1)}\right)'$, *δηλαδή η πρώτη βαρυκεντρική υποδιαίρεση του $\Delta^{(k-1)}$.*

Η επόμενη πρόταση θα μας επιτρέψει να θεωρήσουμε τριγωνοποιήση ενός συνόλου, έτσι ώστε η μέγιστη διάμετρος των simplex που την αποτελούν να είναι αυθαίρετα μικρή.

**Πρόταση 1.62.** *Έστω $\Delta \subset 2^{\mathbb{R}^d}$ είναι ένα simplicial complex, τότε*

$$\mu(\Delta^{(k)}) \leq \left(\frac{\dim(\Delta)}{1 + \dim(\Delta)}\right)^k \mu(\Delta).$$

*Απόδειξη.* Είναι άμεση συνέπεια της πρότασης 1.60. □

# 2 Τα λήμματα των Sperner και Tucker.

## 2.1 Το λήμμα του Sperner.

Το 1928, ο Emanuel Sperner [43] δημοσίευσε το παρακάτω συνδυαστικό λήμμα, το οποίο χρησιμοποίησε αρχικά για να δώσει μια εναλλακτική απόδειξη σε ένα θεώρημα που χαρακτηρίζει τη διάσταση των Ευκλείδειων χώρων.

Στη συνεχεία παρατηρήθηκε ότι το θέωρημα του σταθερού σημείου του Brouwer μπορεί να αποδειχτεί άμεσα από το λήμμα του Sperner, χωρίς τη χρήση της θεωρίας τοπολογικού βαθμού ή άλλων εργαλείων της αλγεβρικής τοπολογίας, όπως στην αρχική απόδειξη του Brouwer.

**Λήμμα 2.1** (Sperner). *Έστω $\sigma \subset \mathbb{R}^d$ είναι ένα simplex με $V(\sigma) = \{x_0, \ldots, x_d\}$ και $T$ μια τριγωνοποίηση του. Θεωρούμε χρωματισμό $f : V(T) \to \{0, 1, \ldots, d\}$ στις κορυφές της $T$ τέτοιο ώστε*

*α) Η απεικόνιση $f\big|_{V(\sigma)}$ είναι αμφιμονοσήμαντη. Δηλαδή οι κορυφές του $\sigma$ χρωματίζονται με διαφορετικό χρώμα η κάθε μία.*

*β) Έστω $x \in V(T)$, τότε για κάθε $I \subset \{0, \ldots, d\}$ με $x \in \mathrm{co}(\{x_i : i \in I\})$, ισχύει ότι $f(x) \in f(\{x_i : i \in I\})$. Δηλαδή κάθε κορυφή της τριγωνοποίησης που ανήκει σε κάποιο face του $\sigma$ χρωματίζεται μόνο με κάποιο από τα χρώματα των κορυφών που το ορίζουν.*

*Τότε η $T$ περιέχει περιττό το πλήθος $d$-simplex, των οποίων οι κορυφές χρωματίζονται με διαφορετικό χρώμα η κάθε μία, ακριβώς όπως αυτές του $\sigma$.*

*Απόδειξη.* Αν η τριγωνοποίηση $T$ είναι τετριμμένη, δηλαδή περιέχει μόνο το $\sigma$ και τα face του, τότε το αποτέλεσμα είναι άμεσο. Άρα υποθέτουμε διαφορετικά. Η απόδειξη θα γίνει επαγωγικά ως προς τη διάσταση του simplex.

Έστω ότι το $\sigma$ είναι 1-simplex, δηλαδή ένα ευθύγραμμο τμήμα, με άκρα $V(\sigma) = \{x_0, x_1\}$, όπου $x_0 < x_1$. Μια τριγωνοποίηση $T$ του $\sigma$ αποτελείται από ευθύγραμμα τμήματα που διαμερίζουν το αρχικό, δηλαδή

$$T = (\{a_i\})_{i=0}^{m} \cup ([a_{i-1}, a_i])_{i=1}^{m}, \quad a_0 = x_0, a_m = x_1, m \in \mathbb{N}$$

Θεωρούμε ένα χρωματισμό $f$ που ικανοποιεί τα παραπάνω και χωρίς βλάβη της γενικότητας έστω ότι $f(x_0) = 0$ και $f(x_1) = 1$. Παρατηρούμε ότι το *β)* ικανοποιείται με όποιο τρόπο και αν χρωματιστούν οι υπόλοιπες κορυφές, αφού δεν ανήκουν σε κανένα γνήσιο face του $\sigma$.

Θα αποδείξουμε επαγωγικά ως προς το πλήθος των ευθυγράμμων τμημάτων από τα οποία αποτελείται η τριγωνοποίηση, ότι περιττό πλήθος από αυτά έχουν άκρα χρωματισμένα ως «0» και «1».

Έστω μια τριγωνοποίηση $T$ του $\sigma$ σε δύο ευθύγραμμμα τμήματα, δηλαδή

$$T = \{\{a_0\}, \{a_1\}, \{a_2\}, [a_0, a_1], [a_1, a_2]\}, \quad a_0 = x_0, a_2 = x_1.$$

Τότε αν $f(a_1) = 0$ το $[a_1, a_2]$ είναι χρωματισμένο με «0» στο αριστερό του άκρο και «1» στο δεξί του. Διαφορετικά αν $f(a_1) = 1$ ίσχυει το ίδιο για το $[a_0, a_1]$.

Έστω $m \in \mathbb{N}$, υποθέτουμε ότι μια διαμέριση του $\sigma$ σε $k$ το πλήθος ευθύγραμμα τμήματα, με $k < m$, περιέχει περιττό πλήθος τμήματα με άκρα χρωματισμένα ως «0» και «1». Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις

- Αν $f(a_i) = 0$ για κάθε $1 \leq i < m$, τότε

$$f(\{a_{m-1}, a_m\}) = \{0, 1\} \text{ και } f(\{a_{i-1}, a_i\}) = \{0\}, \; 1 \leq i < m$$

- Αν υπάρχει $1 \leq i < m$ με $f(a_i) = 1$ θέτουμε $i_0 = \max\{i : f(a_i) = 1\}$. Τότε από την επαγωγική υπόθεση το $[a_0, a_{i_0}]$ περιέχει περιττό πλήθος ευθύγραμμα τμήματα της τριγωνοποίησης με άκρα χρωματισμένα ως «0» και «1». Αν $i_0 = m - 1$ τότε το ζητούμενο αποδείχθηκε. Διαφορετικά παρατηρούμε ότι τα τμήματα $[a_{i_0}, a_{i_0+1}]$ και $[a_{m-1}, a_m]$ έχουν επίσης άκρα χρωματισμένα με τα δύο χρώματα. Επομένως το συνολικό πλήθος των εν λόγω ευθυγράμμων τμημάτων είναι περιττό σε κάθε περίπτωση.

Έστω $\sigma$ ένα 2-simplex, δηλαδή ένα τρίγωνο, και $T$ μια τριγωνοποίησή του. Θεωρούμε χρωματισμό $f : V(T) \to \{0, 1, 2\}$, ο οποίος ικανοποιεί τις παραπάνω ιδιότητες, καθώς και τις ποσότητες

- $R$ να είναι το πλήθος των τριγώνων της $T$, των οποίων οι κορυφές χρωματίζονται και με τα τρία χρώματα.

- $Q$ να είναι το πλήθος των τριγώνων της $T$, των οποίων είτε δύο κορυφές χρωματίζονται ως «1» και η τρίτη ως «2», είτε δύο κορυφές χρωματίζονται ως «2» και η τρίτη ως «1».

- $X$ να είναι το πλήθος των ευθυγράμμων τμημάτων της $T$, που βρίσκονται στο σύνορο του $\sigma$ και τα άκρα τους χρωματίζονται ως «1» και «2».

- $Y$ να είναι το πλήθος των ευθυγράμμων τμημάτων της $T$, που βρίσκονται στο εσωτερικό του $\sigma$ και τα άκρα τους χρωματίζονται ως «1» και «2».

Θα μετρήσουμε το πλήθος των ευθυγράμμων τμημάτων της $T$ με άκρα χρωματισμένα ως «1» και «2» με δύο τρόπους. Πρώτον παρατηρούμε ότι κάθε τρίγωνο τύπου $Q$ έχει δύο πλευρές (facet) με άκρα χρωματισμένα ως «1» και «2», ενώ κάθε τρίγωνο τύπου $R$ έχει ακριβώς μία τέτοια πλευρά. Επιπλέον τα ευθύγραμμα τμήματα τύπου $Y$ αποτελούν κοινή πλευρά δύο τριγώνων της $T$

ενώ αντίστοιχα κάθε ευθύγραμμο τμήμα τύπου $X$ αποτελεί πλευρά ενός μόνο τριγώνου. Επομένως καταλήγουμε στη σχέση

$$2Q + R = X + 2Y$$

Από τη συνθήκη *β)* για τον χρωματισμό $f$ έπεται ότι κάθε ευθύγραμμο τμήμα τύπου $X$ ανήκει στην πλευρά του $\sigma$ της οποίας τα άκρα είναι χρωματισμένα ως «1» και «2». Αποδείξαμε όμως στη μονοδιάσταση περίπτωση ότι το πλήθος τους είναι περιττό. Άρα το $R$ είναι περιττό.

Στη γενική περίπτωση έστω ότι $\sigma$ είναι ένα n-simplex, $T$ μια τριγωνοποίησή του και $f : V(T) \to \{0, \ldots, n\}$ ένας συνεπής με τις υποθέσεις χρωματισμός. Υποθέτουμε ότι το ζητούμενο ισχύει για κάθε $(n-1)$-simplex και ορίζουμε

- $R$ να είναι το πλήθος των n-simplex της $T$, των οποίων οι κορυφές χρωματίζονται και με τα $n+1$ χρώματα.
- $Q$ να είναι το πλήθος των n-simplex της $T$, των οποίων οι κορυφές χρωματίζονται με τα «1»,«2»,. . .,«n», έτσι ώστε για κάθε simplex κάποιο χρώμα να χρησιμοποιείται δυο φορές και τα υπόλοιπα από μία.
- $X$ να είναι το πλήθος των $(n-1)$-simplex της $T$, που βρίσκονται στο σύνορο του $\sigma$ και οι κορυφές τους χρωματίζονται ακριβώς με τα χρώματα «1»,«2»,. . .,«n».
- $Y$ να είναι το πλήθος των $(n-1)$-simplex της $T$, που βρίσκονται στο εσωτερικό του $\sigma$ και οι κορυφές τους χρωματίζονται ακριβώς με τα χρώματα «1»,«2»,. . .,«n».

Θα μετρήσουμε με δύο τρόπους το πλήθος των $(n-1)$-simplex της $T$ με κορυφές χρωματισμένες χρησιμοποιώντας ακριβώς τα χρώματα «1»,«2»,. . .,«n». Παρατηρούμε ότι κάθε simplex τύπου $Q$ έχει δύο facet με κορυφές χρωματισμένες με τα χρώματα «1»,«2»,. . .,«n», ενώ κάθε simplex τύπου $R$ έχει ένα τέτοιο facet. Επιπλέον τα simplex τύπου $Y$ αποτελούν κοινό facet σε δύο n-simplex της $T$ ενώ αντίστοιχα κάθε simplex τύπου $X$ αποτελεί facet ενός μόνο simplex. Επομένως όμοια με πριν καταλήγουμε ότι

$$2Q + R = X + 2Y$$

Από την επαγωγική υπόθεση και το γεγονός ότι κάθε simplex τύπου $X$ ανήκει στο facet του $\sigma$ που ορίζουν οι κορυφές οι οποίες ειναι χρωματισμένες με τα χρώματα «1»,«2»,. . .,«n», λόγω του *β)*, προκύπτει ότι το $X$ είναι περιττό. Επομένως το ίδιο ισχύει και το $R$. $\square$

Εκτός από το θεώρημα του Brouwer, το λήμμα του Sperner καθώς και οι μετέπειτα γενικεύσεις του, βρήκαν εφαρμογή σε διάφορα προβλήματα όπως η κατασκευή αλγορίθμων για την εύρεση ριζών και δίκαιων μοιρασμάτων (fair division), καθώς και το θεώρημα του Monsky. Στο [44], ο Sperner πενήντα χρόνια αργότερα από την απόδειξη του λήμματος του, παρουσίασε διάφορες γενικεύσεις και εφαρμογές του.

## 2.2 Το λήμμα του Tucker.

Όμοια με το λήμμα του Sperner, το λήμμα του Tucker [46] αποτελεί το συνδυαστικό ανάλογο ενός κλασσικού θεωρήματος της τοπολογίας, του θεωρήματος Borsuk-Ulam, το οποίο θα αποδείξουμε στη συνέχεια.

**Ορισμός 2.2.** *Ονομάζουμε* ***μη κατευθυνόμενο γράφο*** *ένα διατεταγμένο ζεύγος $G = (V, E)$, όπου το $V$ είναι ένα σύνολο, του οποίου τα στοιχεία καλούνται κορυφές και το $E$ ένα σύνολο το οποίο αποτελείται από δισύνολα κορυφών του $V$, τα οποία ονομάζουμε ακμές. Αν δύο κορυφές του $V$ σχηματίζουν ένα δισύνολο στο $E$, τότε θα λέμε ότι συνδέονται με μια ακμή.*

**Ορισμός 2.3.** *Έστω $G = (V, E)$ είναι ένα μη κατευθυνόμενος γράφος, τότε για κάθε κορυφή $\mathrm{v} \in V$ ορίζουμε τον βαθμό της $\mathrm{v}$, $\deg(\mathrm{v})$, να είναι το πλήθος των στοιχείων του $E$ που περιέχουν τη $\mathrm{v}$.*

**Λήμμα 2.4.** *Κάθε μη κατευθυνόμενος γράφος $G = (V, E)$, όπου το $V$ είναι πεπερασμένο, έχει άρτιο πλήθος κορυφών περιττού βαθμού.*

*Απόδειξη.* Μετράμε τα ζεύγη $(\mathrm{v}, e)$, όπου $e$ είναι μία ακμή του γράφου και $\mathrm{v}$ μια κορυφή της που βρίσκεται στην $e$, με δυο διαφορετικούς τρόπους. Είναι άμεσο ότι η $\mathrm{v}$ ανήκει σε $\deg(\mathrm{v})$ το πλήθος ακμές του γράφου και άρα το άθροισμα των βαθμών όλων των κορυφών του γράφου ισούται με το πλήθος των εν λόγω ζευγών. Όμως κάθε ακμή του γράφου ανήκει σε ακριβώς δύο τέτοια ζεύγη και επομένως το πλήθος τους είναι $2|E|$, δηλαδή

$$\sum_{\mathrm{v} \in V} \deg(\mathrm{v}) = 2|E|.$$

□

**Σημείωση.** *α).* Θα συμβολίζουμε $\hat{B}_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n |x_i| \leq 1\}$ και $\hat{\mathrm{S}}_{n-1} = \partial \hat{B}_n$. *β).* Θα συμβολίζουμε $\hat{T}_n$ την τριγωνοποίηση της $\hat{B}_n$, η οποία επάγεται κατά φυσιολογικό τρόπο από τα υπερεπίπεδα $(\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_k = 0\})_{k=1}^n$.

**Θεώρημα 2.5** (Λήμμα του Tucker). *Έστω $T$ μια τριγωνοποίηση της $\hat{B}_n$ ώστε*

*α) Η οικογένεια $\{\sigma \in T : \sigma \subset \hat{S}_{n-1}\}$ είναι τριγωνοποίηση της $\hat{S}_{n-1}$.*

*β) Αν $\sigma \in T$ με $\sigma \subset \hat{S}_{n-1}$, τότε $-\sigma \in T$.*

*γ) Για κάθε $\sigma \in T$, υπάρχει $\tau \in \hat{T}_n$ τέτοιο ώστε $\sigma \subset \tau$.*

*Αν $\lambda : V(T) \to \{\pm 1, \dots, \pm n\}$ είναι ένας χρωματισμός στις κορυφές της $T$, ο οποίος είναι περιττός στο $\hat{S}_{n-1}$, δηλαδή $\lambda(-x) = -\lambda(x)$ για κάθε $x \in \hat{S}_{n-1}$, τότε υπάρχει $\sigma \in T$ με $V(\sigma) = \{x_1, x_2\}$, τέτοιο ώστε $\lambda(x_1) = -\lambda(x_2)$.*

**Παρατήρηση.** Το *γ)* μας εξασφαλίζει ότι αν $\sigma \in T$, τότε το πρόσημο σε κάθε συντεταγμένη, διατηρείται μεταξύ των στοιχείων του $\mathrm{ri}(\sigma)$.

*Απόδειξη.* Έστω ότι η $T$ δεν περιέχει ένα τέτοιο ευθύγραμμο τμήμα, τότε για κάθε $\sigma \in T$ επιλέγουμε $x \in \mathrm{ri}(\sigma)$ και ορίζουμε τα σύνολα

$$\lambda(\sigma) = \{\lambda(y) : y \in V(\sigma)\},$$

$$S(\sigma) = \{i : x_i > 0\} \cup \{-i : x_i < 0\}.$$

Η παραπάνω παρατήρηση μας εξασφαλίζει ότι το $S(\sigma)$ είναι καλά ορισμένο και θεωρούμε επιπλέον ότι $S(\emptyset) = \emptyset$. Για κάθε $\sigma \in T$, θα συμβολίζουμε $k_\sigma = |S(\sigma)|$, $\lambda_\sigma = |\lambda(\sigma)|$ και $L_\sigma = \langle \{e_i : i \in S(\sigma) \vee -i \in S(\sigma)\} \rangle$.

Θα λέμε ότι ένα $\sigma \in T$ είναι ένα ***happy*** simplex, αν $S(\sigma) \subset \lambda(\sigma)$. Έστω $\sigma \in T$ ένα τέτοιο simplex, τότε αυτό βρίσκεται στον υπόχωρο $L_\sigma$, ο οποίος είναι διάστασης $k_\sigma$. Δηλαδή $\dim(\sigma) \leq k_\sigma$. Επιπλέον το $\sigma$ έχει τουλάχιστον $k$ διαφορετικούς χρωματισμούς μεταξύ των κορυφών του και άρα έχει τουλάχιστον έχει $k_\sigma$ το πλήθος κορυφές, δηλαδή $\dim(\sigma) \geq k_\sigma - 1$. Τέλος, ένα happy simplex $\sigma \in T$ θα καλείται

- ***tight***, αν $\dim(\sigma) = k_\sigma - 1$.
- ***loose***, αν $\dim(\sigma) = k_\sigma$.

Παρατηρούμε ότι αν $\sigma \in T$ είναι tight, τότε έχουμε ότι $\lambda_\sigma \geq k_\sigma = \dim(\sigma) + 1$ και $\lambda_\sigma \leq \dim(\sigma) + 1$, δηλαδή $k_\sigma = \lambda_\sigma$. Άρα οι κορυφές του $\sigma$ χρωματίζονται με διαφορετικό χρώμα η κάθε μία, με κάθε ένα από τα στοιχεία του $S(\sigma)$. Αντίστοιχα αν το $\sigma \in T$ είναι loose, είτε οι κορυφές του χρωματίζονται με διαφορετικά χρώματα η κάθε μία, εκτός από ένα ζευγάρι κορυφών οι οποίες έχουν κοινό χρώμα, χρησιμοποιώντας πάλι κάθε ένα από τα στοιχεία του $S(\sigma)$, είτε υπάρχει ένα επιπλέον χρώμα που μαζί με αυτά του $S(\sigma)$ χρωματίζουν ακριβώς τις κορυφές του $\sigma$. Για το $\{0\}$ έχουμε ότι $S(\{0\}) = \emptyset \subset \{\lambda(0)\}$, δηλαδή είναι είναι ένα happy και loose simplex.

Έστω $\sigma \in T$ με $\sigma \subset \hat{S}_{n-1}$, αν το $\sigma$ είναι happy τότε είναι tight. Πράγματι το $\sigma$ ανήκει στον $L_\sigma$ ο οποίος είναι διάστασης $k_\sigma$, όμως στην τομή $L_\sigma \cap \hat{S}_{n-1}$ υπάρχουν το πολύ $k_\sigma$ αφφινικά ανεξάρτητα στοιχεία και άρα $\dim(\sigma) \leq k_\sigma - 1$.

Θα ορίσουμε ένα μη κατευθυνόμενο γράφο, ώστε οι κορυφές του να είναι τα happy simplex της $T$ και δύο τέτοιες κορυφές του $\sigma, \tau$, θα συνδέονται με μία ακμή αν ισχύει ένα από τα παρακάτω

- $\sigma = -\tau$ και $\sigma, \tau \subset \hat{S}_{n-1}$.
- Το $\sigma$ είναι facet του $\tau$ και $S(\tau) = \mathcal{A}(\sigma)$.

Όπως είδαμε το $\{0\}$ είναι happy και $\deg(0) = 1$, διότι συνδέεται ακριβώς με το ευθύγραμμο τμήμα της $T$, το οποίο έχει το 0 σαν άκρο και εκτείνεται στον άξονα του $e_{\mathcal{A}(0)}$, προς την κατεύθυνση που ορίζει το πρόσημο του $\mathcal{A}(0)$. Έστω $\sigma \in T$ είναι ένα tight simplex, τότε διακρίνουμε δυο περιπτώσεις

- Αν $\sigma \subset \hat{S}_{n-1}$, τότε το $-\sigma$ ανήκει στην $T$ και συνδέεται με ακμή με το $\sigma$. Θεωρούμε το $L_\sigma \cap \hat{B}_n$ και παρατηρούμε ότι τα simplex της $T$ το τριγωνοποιούν. Τότε το $\sigma$ βρίσκεται στο σύνορο του $L_\sigma \cap \hat{B}_n$ και επομένως αποτελεί facet σε ένα ακριβώς $k_\sigma$-simplex $\tau$ της $T$ με το οποίο είναι άμεσο ότι συνδέεται, αφού $\mathcal{A}(\sigma) = S(\sigma) = S(\tau)$.
- Αν $\sigma \subset \hat{B}_n \setminus \hat{S}_{n-1}$, τότε με παρόμοια επιχειρήματα με προηγουμένως παρατηρούμε ότι το $\sigma$ αποτελεί facet σε δύο ακριβώς simplex $\tau_1, \tau_2 \in T$ και αφού $S(\sigma) = \mathcal{A}(\sigma)$ έχουμε ότι $S(\tau_1) = S(\tau_2) = \mathcal{A}(\sigma)$.

Αντίστοιχα αν $\sigma \in T$ είναι loose, τότε

- Αν $S(\sigma) = \mathcal{A}(\sigma)$, τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in V(\sigma)$ ώστε $\mathcal{A}(x_1) = \mathcal{A}(x_2)$. Επομένως τα $\tau_1, \tau_2 \in T$ με $V(\tau_1) = V(\sigma) \setminus \{x_1\}$ και $V(\tau_2) = V(\sigma) \setminus \{x_2\}$ αποτελούν facet του $\sigma$ και είναι άμεσο ότι $S(\sigma) = \mathcal{A}(\tau_1) = \mathcal{A}(\tau_2)$.
- Έστω ότι υπάρχει $i \in \mathcal{A}(\sigma) \setminus S(\sigma)$, τότε $-i \notin S(\sigma)$ αφού διαφορετικά θα είχαμε ένα ευθύγραμμο τμήμα στην $T$ με άκρα χρωματισμένα αντίθετα. Τότε το $\sigma$ συνδέεται με το $\tau \in T$ το οποίο ορίζεται από τις κορυφές του $\sigma$, πλήν αυτής που είναι χρωματισμένη ως $i$. Τέλος το $\sigma$ αποτελεί facet ενός simplex $\tau \in T$, το οποίο είναι loose και τέτοιο ώστε $S(\tau) = S(\sigma) \cup \{i\}$, δηλαδή $S(\tau) = \mathcal{A}(\sigma)$. Παρατηρούμε ότι ένα τέτοιο $\tau$, υπάρχει λόγω του ότι $k_\sigma < n$. Διαφορετικά $\mathcal{A}_\sigma = n + 1$, το οποίο είναι άτοπο αφού τότε το $\sigma$ θα περιείχε ένα ευθύγραμμο τμήμα, χρωματισμένο με αντίθετα χρώματα στα άκρα του.

Επομένως $\deg(\sigma) = 2$, για κάθε $\sigma \in T \setminus \{0\}$ και το οποίο είναι happy. Δηλαδή μόνο μία κορυφή του γράφου έχει περιττό βαθμό και όλες οι άλλες έχουν άρτιο, το οποίο από το λήμμα 2.4 είναι άτοπο. $\square$

# 3 Το θεώρημα K.K.M.

Το 1929, οι Knaster, Kuratowski και Mazurkiewicz [28] χρησιμοποίησαν το λήμμα του Sperner και απέδειξαν το παρακάτω θεώρημα.

**Θεώρημα 3.1** (K.K.M.). *Έστω $\sigma \subset \mathbb{R}^d$ είναι ενα simplex με $V(\sigma) = \{x_0, \dots, x_d\}$. Αν $F_0, \dots, F_d$ είναι κλειστά υποσυνόλα του $\sigma$, τέτοια ώστε για κάθε $I \subset \{0, \dots, d\}$ να ισχύει ότι*

$$\operatorname{co}(\{x_i : i \in I\}) \subset \bigcup_{i \in I} F_i,$$

*τότε $\bigcap_{i=0}^d F_i \neq \emptyset$.*

*Απόδειξη.* Θεωρούμε ακολουθία $(T_n)_n$ τριγωνοποιήσεων του $\sigma$, ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η $T_n$ να είναι υποδιαίρεση της $T_{n-1}$ και $\operatorname{diam}(\tau) \leq \frac{1}{n}$ για κάθε $\tau \in T_n$.

Έστω $x \in V(T_n)$, για $n \in \mathbb{N}$, θέτουμε $I_x$ ώστε το $\operatorname{co}(\{x_i : i \in I_x\})$ να είναι το μικρότερο, ως προς τη διάσταση, face του $\sigma$ στο οποίο ανήκει το $x$. Τότε από την υπόθεση, υπάρχει $i_x \in I_x$ ώστε $x \in F_{i_x}$.

Ορίζουμε χρωματισμό $\ell : V(T_n) \to \{0, \dots, d\}$ στις κορυφές της $T_n$, με $\ell(x) = \min_{i \in I_x} \{i : x \in F_i\}$ και παρατηρούμε ότι αν $x_i \in V(\sigma)$ τότε $I_{x_i} = \{i\}$, αφού το $\operatorname{co}(\{x_i\}) = \{x_i\}$ είναι το μικρότερο face που περιέχει το $x_i$. Δηλαδή $\ell(x_i) = i$, για κάθε $i \in \{0, \dots, d\}$. Επιπλέον αν $x \in V(T_n)$, τότε $\ell(\{x_i : i \in I_x\}) = I_x$ και εξ ορισμού $\ell(x) \in I_x$.

Δηλαδή ο χρωματισμός που ορίσαμε ικανοποιεί τις υποθέσεις του λήμματος του Sperner. Επομένως υπάρχει $\tau \in T_n$ με $V(\tau) = \{v_0^n, \dots, v_d^n\}$, έτσι ώστε χωρίς βλάβη της γενικότητας $\ell(v_i^n) = i$. Δηλαδή $v_i^n \in F_i$ για κάθε $i \in \{0, \dots, d\}$.

Τότε η ακολουθία $(v_0^n)_n$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, λόγω συμπάγειας του $S$, και χάριν ευκολίας ας υποθέσουμε ότι η ίδια είναι συγκλίνουσα. Έστω το όριό της $\lim_n v_0^n = v^*$, τότε για $i \in \{1, \dots, d\}$ έχουμε ότι

$$\|v_i^n - v^*\| \leq \|v_i^n - v_0^n\| + \|v_0^n - v^*\| \leq \frac{1}{n} + \|v_0^n - v^*\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Δηλαδή $\lim_n v_i^n = v^*$, όπου $(v_i^n)_n \subset F_i$ για κάθε $i \in \{0, \dots, d\}$. Άρα αφού κάθε $F_i$ είναι κλειστό, έχουμε ότι $v^* \in F_i$ και άρα $v^* \in \bigcap_{i=0}^d F_i$. □

Παρότι είμαστε σε θέση να αποδείξουμε το θεώρημα σταθερού σημείου του Brouwer άμεσα από το λήμμα του Sperner, το παραπάνω θεώρημα μας δίνει μια γεωμετρική μορφή του 2.1, η οποία είναι καταλληλότερη για εφαρμογές.

Από το θεώρημα, με τελείως φυσιολογικό τρόπο δίνουμε στη συνέχεια τον ορισμό των *απεικονίσεων KKM*. Τέτοιες απεικονίσεις θα αποδειχτούν χρήσιμες στη συνέχεια και στο ιδιαίτερα σημαντικό θεώρημα 3.3, όπου ο Ky Fan [19], απέδειξε μια απειροδιάσταστη μορφή του 3.1.

**Ορισμός 3.2.** *Έστω $X$ διανυσματικός χώρος και $K \subset X$, μια πλειότιμη απεικόνιση $f : K \twoheadrightarrow X$ καλείται **απεικόνιση KKM** αν για κάθε $F \subset K$ πεπερασμένο*

$$\mathrm{co}(F) \subset \bigcup_{x \in F} f(x).$$

**Θεώρημα 3.3** (Fan-K.K.M.). *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός γραμμικός χώρος και $K$ υποσύνολο του $X$. Αν $f : K \twoheadrightarrow X$ είναι απεικόνιση KKM και για κάθε $x \in K$, το $f(x)$ είναι κλειστό στον $X$, τότε η οικογένεια $\{f(x)\}_{x \in K}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής.*

*Απόδειξη.* Έστω $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset K$, θεωρούμε το $(n-1)$-simplex $\sigma$ με σύνολο κορυφών $\{e_i\}_{i=1}^n$, τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^n$ και ορίζουμε $\phi : \sigma \to X$ με

$$\phi\Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\Big) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, \quad \text{για} \ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \ \lambda_i \geq 0$$

καθώς και για κάθε $1 \leq i \leq n$, το κλειστό σύνολο $G_i = \phi^{-1}(f(x_i))$. Έστω $I \subset \{1, \ldots, n\}$, αν $x \in F = co(\{e_i : i \in I\})$, τότε $\phi(x) = \phi\big(\sum_{i \in I} \lambda_i e_i\big) = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$ και άρα $\phi(x) \in \bigcup_{i \in I} f(x_i)$. Επομένως προκύπτει ότι

$$\phi(F) \subset \bigcup_{i \in I} f(x_i) \Leftrightarrow F \subset \phi^{-1}\Big(\bigcup_{i \in I} f(x_i)\Big) = \bigcup_{i \in I} \phi^{-1}(f(x_i)) = \bigcup_{i \in I} G_i.$$

Δηλαδή για κάθε $I \subset \{1, \ldots, n\}$ έχουμε ότι $co(\{e_i : i \in I\}) \subset \bigcup_{i \in I} G_i$. Από το θεώρημα 3.1 έπεται ότι $\bigcap_{i=1}^n G_i \neq \emptyset$ και άρα $\bigcap_{i=1}^n f(x_i) \neq \emptyset$ για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $\{x_1, \ldots, x_n\}$ του $K$. $\square$

**Παρατήρηση.** Αν επιπλέον υπάρχει $x_0 \in X$, ώστε το $f(x_0)$ να είναι συμπαγές υποσύνολο του $X$, τότε η τομή $\{f(x)\}_{x \in K}$ είναι μη κενή.

Ο Fan [19],[20] έδωσε στη συνέχεια το παρακάτω θεμελιώδες πόρισμα του θεωρήματός του και παρουσίασε μερικά πορίσματα που προκύπτουν.

**Πόρισμα 3.3.1.** *Εστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός γραμμικός χώρος και $K$ μη κενό, κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του $X$. Αν $A \subset K \times K$ κλειστό και τέτοιο ώστε*

*α) $(x, x) \in A$ για κάθε $x \in K$.*

*β) Για κάθε $x \in K$ το σύνολο $\{z \in K : (z, x) \notin A\}$ είναι κυρτό.*

*Τότε υπάρχει $x_0 \in K$ τέτοιο ώστε $K \times \{x_0\} \subset A$.*

*Απόδειξη.* Ορίζουμε πλειότιμη απεικόνιση $f : K \twoheadrightarrow X$ με

$$f(x) = \{z \in K : (x, z) \in A\}.$$

Επειδή το $A$ είναι κλειστό, παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in K$ το $f(x)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $K$, δηλαδή συμπαγές. Έστω $F \subset K$ πεπερασμένο και $x \in co(F)$, τότε ορίζουμε το σύνολο

$$f^*(x) = \{z \in K : x \notin f(z)\} = \{z \in K : (z, x) \notin A\}.$$

το οποίο από το *β)* είναι κυρτό και από το *α)* προκύπτει ότι

$$x \in f(x) \Rightarrow x \notin f^*(x) \Rightarrow \mathrm{co}(F) \not\subset f^*(x).$$

Επομένως επειδή το $f^*(x)$ είναι κυρτό, υπάρχει $y \in F$ τέτοιο ώστε

$$y \notin f^*(x) \Rightarrow x \in f(y) \Rightarrow \mathrm{co}(F) \subset \bigcup_{z \in F} f(z).$$

Δηλαδή η $f$ είναι απεικόνιση ΚΚΜ και από το προηγούμενο θεώρημα έπεται ότι $\bigcap_{x \in K} f(x) \neq \emptyset$, το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Άμεση συνέπεια του 3.3.1 είναι το παρακάτω αποτέλεσμα για χώρους με νόρμα μέσω του οποίου θα αποδείξουμε, σχεδόν τετριμμένα, τα θεωρήματα σταθερού σημείου των Brouwer και Schauder.

**Πόρισμα 3.3.2.** *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα, $K$ μη κενό, κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του $X$. Τότε αν $f : K \to X$ συνεχής, υπάρχει $x_0 \in K$ τέτοιο ώστε*

$$\|x_0 - f(x_0)\| = \min_{x \in K} \|x - f(x_0)\| = \mathrm{d}(f(x_0), K)$$

*Απόδειξη.* Θεωρούμε το σύνολο

$$A = \{(x, y) \in K \times K : \|f(y) - y\| \leq \|f(y) - x\|\}$$

και έστω ακολουθία $\left((x_n, y_n)\right)_n$ στο $A$ ώστε $\lim_n (x_n, y_n) = (x, y)$, τότε

$$\|f(y_n) - y_n\| \leq \|f(y_n) - x_n\| \implies \|f(y) - y\| \leq \|f(y) - x\|$$

λόγω συνέχειας της νόρμας και της $f$. Δηλαδή $(x, y) \in A$ και άρα το $A$ είναι κλειστό. Έστω $z_1, z_2 \in \{z \in K : (z, x) \notin A\}$, δηλαδή $\|f(x) - z_i\| < \|f(x) - x\|$ για $i = 1, 2$, τότε αν $\lambda \in (0, 1)$

$$\begin{aligned}
\|f(x) - (\lambda z_1 + (1-\lambda) z_2)\| &= \|(\lambda f(x) + (1-\lambda) f(x)) - (\lambda z_1 + (1-\lambda) z_2)\| \\
&\leq \lambda \|f(x) - z_1\| + (1-\lambda)\|f(x) - z_2\| \\
&< \lambda \|f(x) - x\| + (1-\lambda)\|f(x) - x\| \\
&= \|f(x) - x\|
\end{aligned}$$

Δηλαδή το σύνολο $\{z \in K : (z, x) \notin A\}$ είναι κυρτό. Τέλος για $x \in K$, τότε τετριμμένα $(x, x) \in A$. Επομένως από το πόρισμα 3.3.1 υπάρχει $x_0 \in K$ τέτοιο ώστε $K \times \{x_0\} \subset A$, ή ισοδύναμα

$$\|f(x_0) - x_0\| \leq \|f(x_0) - x\|, \text{ για κάθε } x \in K$$

Άρα $\|f(x_0) - x_0\| = \mathrm{d}(f(x_0), K)$. □

Η μελέτη των *απεικονίσεων KKM* και των περαιτέρω αποτελεσμάτων του θεωρήματος 3.1 έχουν βρει εφαρμογές σε θέματα οικονομικών μαθηματικών, θεωρίας παιγνίων, μη γραμμικής ανάλυσης, θεωρήματα minmax και άλλα. Στο [52] παρουσιάζονται αναλυτικά αποτελέσματα και γενικεύσεις που έπονται του 3.1, καθώς και εφαρμογές του, και προσφέρεται εκτενής βιβλιογραφία.

# 4 Θεωρήματα Σταθερού Σημείου.

Σε αυτό το κεφάλαιο αποδεικνύουμε, κάνοντας χρήση των λημμάτων 3.3.1 και 3.3.2 του Fan, το θεώρημα του σταθερού σημείου του Brouwer και τις μετέπειτα γενικεύσεις αυτού, των Schauder και Tychonoff, καθώς και μια γενίκευση του για πλειότιμες απεικονίσεις.

Επιπλέον αποδεικνύουμε το θεώρημα σταθερού σημείου των Markov και Kakutani και τέλος χρησιμοποιούμε το λήμμα του Tucker για να αποδείξουμε το θεώρημα Borsuk-Ulam.

**Ορισμός 4.1.** *Έστω $X$ ένα μη κενό σύνολο και $f : X \to X$. Ένα $x \in X$ καλείται **σταθερό σημείο** της $f$ αν $f(x) = x$ και θα συμβολίζουμε*

$$\mathrm{Fix}(f) = \{x \in X : f(x) = x\}.$$

**Ορισμός 4.2.** *Έστω $X$ ένα μη κενό σύνολο και $f : X \twoheadrightarrow X$, ένα $x \in X$ καλείται **σταθερό σημείο** της πλειότιμης απεικόνισης $f$ αν $x \in f(x)$.*

**Ορισμός 4.3.** *Θα λέμε ότι ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$ έχει την **ιδιότητα του σταθερού σημείου**, αν κάθε συνεχής συνάρτηση $f : X \to X$ έχει σταθερό σημείο.*

Στην επόμενη πρόταση αποδεικνύουμε ότι η ιδιότητα του σταθερού σημείου είναι μια *τοπολογική ιδιότητα*, δηλαδή παραμένει αναλλοίωτη μέσω ομοιομορφισμών.

**Πρόταση 4.4.** *Έστω $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ ομοιομορφικοί τοπολογικοί χώροι. Αν ο $X$ έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου, τότε την έχει και ο $Y$.*

*Απόδειξη.* Έστω $f : Y \to Y$ συνεχής συνάρτηση και $h : X \to Y$ ομοιομορφισμός. Παρατηρούμε ότι η $h^{-1}f\,h : X \to X$ είναι συνεχής και αφού ο $X$ έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου, υπάρχει $x \in X$ ώστε $x = h^{-1}f\,h(x)$. Άρα $f(h(x)) = h(x)$ και επομένως το $h(x)$ είναι σταθερό σημείο για την $f$. □

## 4.1 Το θεώρημα του Brouwer.

Η μελέτη του θεωρήματος του Brouwer, ξεκίνησε με τη γενίκευση που εδώσε ο Poincaré [36],[37] στο θεώρημα του Bolzano, ώστε μελετήσει το πρόβλημα των τριών σωμάτων [8]. Στη συνέχεια ο Miranda [33] απέδειξε το θεώρημα του Poincaré καθώς και την ισοδυναμία του με το θεώρημα του Brouwer.

Μερικά χρόνια μετά το επίσης ισοδύναμο θεώρημα του Bohl [6], ο Brouwer [11] με τη βοήθεια του Hadamard [24], απέδειξε το παρακάτω αποτέλεσμα.

**Θεώρημα 4.5** (Brouwer). *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η $B_n$ έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου.*

*Απόδειξη.* Προκύπτει άμεσα από το πόρισμα 3.3.2. □

Ισοδύναμα το θεώρημα του Brouwer μπορεί να διατυπωθεί και στη μορφή του θεωρήματος 4.6, το οποίο οφείλεται στο ότι η ιδιότητα του σταθερού σημείου είναι μια τοπολογική ιδιότητα.

**Θεώρημα 4.6.** *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα πεπερασμένης διάστασης, τότε κάθε μη κενό, κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του $X$ έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου.*

*Απόδειξη.* Προκύπτει άμεσα από το πόρισμα 3.3.2. □

**Παρατηρήσεις.** *α).* Η υπόθεση της κυρτότητας *δεν* είναι απαραίτητη στο θεώρημα 4.6. Στο [42] περιγράφονται αναλυτικότερα το θεώρημα του Lefschetz καθώς και άλλα παραδείγματα συνόλων που έχουν την ιδιότητα του σταθερού σημείου χωρίς την υπόθεση της κυρτότητας.
*β).* Η υπόθεση της συμπάγειας είναι απαραίτητη, το οποίο αποδεικνύεται στο θεώρημα 4.9. Για παράδειγμα θεωρούμε την $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x + 1$, η οποία δεν έχει σταθερά σημεία.

Ο Yoseloff [51] απέδειξε ότι το λήμμα του Sperner, και επομένως και το θεώρημα KKM, είναι τελικά ισοδύναμα με το θεώρημα του Brouwer.

Μια άλλη ισοδύναμη μορφή του 4.5 βρίσκεται στο 4.7, η οποία αποδείχτηκε από τον Borsuk και χαρακτηρίζει τους χώρους πεπερασμένης διάστασης.

**Θεώρημα 4.7** (Borsuk). *Για κάθε $n \geq 1$, δεν υπάρχει $f : B_n \to S_{n-1}$ τέτοια ώστε $f(x) = x$, για κάθε $x \in S_{n-1}$.*

*Απόδειξη.* Έστω ότι υπάρχει τέτοια $f$, τότε η $g : B_n \to S_{n-1}$ με $g(x) = -f(x)$ είναι άμεσο ότι δεν έχει σταθερό σημείο, το οποίο είναι άτοπο από το 4.5. □

## 4.2 Το θεώρημα του Schauder.

Το 1930, ο Schauder [41] απέδειξε το θεώρημα 4.10 γενικεύοντας πλέον το θεώρημα του Brouwer σε απειροδιάστατους χώρους με νόρμα.

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη του, παραθέτουμε το παρακάτω παράδειγμα του Kakutani, το οποίο παρουσιάζει το κεντρικό ρόλο της συμπάγειας στο θεώρημα του Schauder και το γεγονός ότι δεν είναι δυνατή η γενίκευση του θεωρήματος του Brouwer στη μορφή του θεωρήματος 4.5.

**Θεώρημα 4.8** (Riesz). *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα, τότε η $B_X$ είναι συμπαγής αν και μόνο αν ο $X$ έχει πεπερασμένη διάσταση.*

*Απόδειξη.* [4], σελ. 180. □

**Παράδειγμα** (Kakutani). Ορίζουμε απεικόνιση $f_\varepsilon : B_{\ell_2} \to B_{\ell_2}$, $\varepsilon \in (0, 1]$, με

$$f_\varepsilon(x) = (\varepsilon(1 - \|x\|), x_1, x_2, \dots).$$

Η $f_\varepsilon$ είναι Lipschitz και άρα συνεχής, πράγματι για κάθε $x, y \in B_{\ell_2}$

$$\|f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(y)\| \leq \sqrt{1 + \varepsilon^2}\|x - y\|.$$

Η $B_{\ell_2}$ είναι κλειστό, φραγμένο και κυρτό σύνολο αλλά όχι συμπαγές. Έστω ότι η $f_\varepsilon$ έχει σταθερό σημείο, έστω $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots) \in B_{\ell_2}$, τότε

$$(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots) = (\varepsilon(1 - \|\hat{x}\|), \hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots).$$

Δηλαδή $\hat{x}_n = \varepsilon(1 - \|\hat{x}\|)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και άρα

$$1 \geq \|\hat{x}\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varepsilon(1 - \|\hat{x}\|)|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

το οποίο είναι άτοπο, αφού η σειρά αποκλίνει. Επομένως η $B_{\ell_2}$ δεν έχει την ιδιότητα του σταθερου σημείου.

Ένα φυσιολογικό ερώτημα που προκύπτει είναι πότε μια συνεχής συνάρτηση $f : X \to X$, όπου το $X$ είναι ένα μη κενό, κυρτό, κλειστό και φραγμένο υποσύνολο ενός χώρου με νόρμα, έχει σταθερό σημείο. Το θεώρημα 4.6 μας το εξασφαλίζει στην περίπτωση ενός χώρου πεπερασμένης διάστασης, καθώς τέτοια υποσύνολα του είναι συμπαγή. Το επόμενο θεώρημα του Klee [27] δίνει απάντηση στο ερώτημα στην απειροδιάστατη περίπτωση.

**Θεώρημα 4.9** (Klee). *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και $K$ μη κενό, κυρτό υποσύνολο του $X$, τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα*

*α) Το $K$ είναι συμπαγές.*

*β) Το $K$ έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου.*

Το θεώρημα του Klee μας εξασφαλίζει ουσιαστικά την ύπαρξη μιας συνεχούς συνάρτησης $f : B_X \to B_X$ χωρίς σταθερά σημεία, σε έναν απειροδιάστατο χώρο με νόρμα $X$. Αυτό μας επιτρέπει να δώσουμε, σε αντιστοιχία με το θεώρημα 4.7, ένα χαρακτηρισμό για τέτοιους χώρους.

**Πόρισμα 4.9.1.** *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ απειροδιάστατος χώρος με νόρμα. Τότε υπάρχει συνεχής απεικόνιση $f : B_X \to S_X$ τέτοια ώστε $f(x) = x$, για κάθε $x \in S_X$.*

*Απόδειξη.* Έστω $g : B_X \to B_X$ μια συνεχής συνάρτηση χωρίς σταθερά σημεία. Τότε επεκτείνουμε την $g$ στη $f_1 : 2B_x \to 2B_x$ ως

$$f_1(x) = \begin{cases} (2 - \|x\|)g\Big(\frac{x}{\|x\|}\Big), & 1 < \|x\| \leq 2 \\ g(x) & \end{cases}$$

και θεωρούμε την απεικόνιση $f_2 : B_X \to B_x$ με $f_2(x) = \frac{1}{2}f_1(2x)$. Παρατηρούμε ότι η $f_2$ δεν έχει σταθερά σημεία και για κάθε $x \in S_X$ είναι $f_2(x) = 0$. Τότε η συνάρτηση $f : B_x \to S_x$ με

$$f(x) = \frac{x - f_2(x)}{\|x - f_2(x)\|}$$

αποδεικνύει το ζητούμενο. □

**Θεώρημα 4.10** (Schauder). *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα, τότε κάθε μη κενό, κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του $X$ έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου.*

*Απόδειξη.* Προκύπτει άμεσα από το πόρισμα 3.3.2. □

**Θεώρημα 4.11.** *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και $F$ μη κενό, κυρτό υποσύνολο του $X$. Έστω $K \subset F$ συμπαγές και συνεχής συνάρτηση $f : F \to K$, τότε η $f$ έχει σταθερό σημείο.*

*Απόδειξη.* Το θεώρημα αποδεικνύεται στο 4.20 στην γενικότερη περίπτωση, όπου ο $X$ είναι ένας τοπικά κυρτός χώρος. □

## 4.3 Τα θεωρήματα των Fan-Glicksberg και Tychonoff.

Ο Tychonoff [47] γενίκευσε περαιτέρω το αποτέλεσμα του Schauder αποδεικνύοντας ότι κάθε κυρτό, συμπαγές υποσύνολο ενός τοπικά κυρτού χώρου έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου.

Θα αποδείξουμε το θεώρημα του Tychonoff ως ειδική περίπτωση του θεωρήματος 4.17 των Fan [18] και Glicksberg [21], ακολουθώντας το [4]. Τα παρακάτω αποτελέσματα βασίζονται σε τεχνικές που ανέπτυξαν οι Fan και Browder χρησιμοποιώντας τις *απεικονίσεις KKM*.

Τέτοια θεωρήματα για πλειότιμες απεικονίσεις βρίσκουν πολλές εφαρμογές σε θέματα των οικονομικών μαθηματικών, της θεωρίας παιγνίων, του βέλτιστου ελέγχου καθώς και άλλων σχετικών κλάδων. Η πιο γνωστή τέτοια εφαρμογή είναι στην απόδειξη του Nash [34], για την ύπαρξη ισορροπίας σε ένα μη συνεργατικό παιχνίδι δύο ή περισσότερων παικτών.

Θα ξεκινήσουμε δίνοντας μια σύντομη απόδειξη του θεωρήματος 4.13 χρησιμοποιώντας το λήμμα 3.3.1 του Fan.

**Ορισμός 4.12.** *Έστω $(X_1, \mathcal{T}_1), \ldots, (X_n, \mathcal{T}_n), (X, \mathcal{T}_X)$ τοπολογικοί χώροι, μια απεικόνιση $f : X_1 \times \cdots \times X_n \to X$ καλείται jointly continuous αν*

*α) Η $f$ είναι συνεχής στον $X_1 \times \cdots \times X_n$ ως προς την τοπολογία γινόμενο.*

*β) Αν $(Y, \mathcal{T}_Y)$ είναι ένας τοπολογικός χώρος και $g_i : Y \to X_i$ είναι συνεχείς απεικονίσεις, τότε η απεικόνιση $g(x) = f(g_1(x), \ldots, g_n(x))$ είναι συνεχής.*

**Θεώρημα 4.13** (Browder-Hartman-Stampacchia)**.** *Έστω $X$ τοπικά κυρτός χώρος Hausdorff, $K$ ένα μη κενό, κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του $X$ και $f : K \to X^*$. Αν η απεικόνιση $(x, y) \mapsto \langle y, f(x)\rangle$ είναι jointly continuous στο $K \times K$, τότε υπάρχει $x_0 \in K$ τέτοιο ώστε*

$$\langle x_0, f(x_0)\rangle \leq \langle y, f(x_0)\rangle, \text{ για κάθε } y \in K.$$

*Απόδειξη.* Θεωρούμε το σύνολο $A = \{(x, y) \in K \times K : \langle y, f(y)\rangle \leq \langle x, f(y)\rangle\}$. Έστω $x \in K$, τότε τετριμμένα $(x, x) \in A$. Θεωρούμε το σύνολο

$$A'_x = \{z \in K : (z, x) \notin A\} = \{z \in K : \langle z, f(x)\rangle < \langle x, f(x)\rangle\}$$

και έστω $z_1, z_2 \in A'_x$, δηλαδή $\langle z_i, f(x)\rangle < \langle x, f(x)\rangle$ για $i = 1, 2$. Τότε

$$\begin{aligned}\langle x, f(x)\rangle = \lambda\langle x, f(x)\rangle + (1-\lambda)\langle x, f(x)\rangle &> \lambda\langle z_1, f(x)\rangle + (1-\lambda)\langle z_2, f(x)\rangle \\ &= \langle \lambda z_1, f(x)\rangle + \langle (1-\lambda) z_2, f(x)\rangle \\ &= \langle (\lambda z_1 + (1-\lambda) z_2), f(x)\rangle\end{aligned}$$

για $\lambda \in (0, 1)$, δηλαδή το $A'_x$ είναι κυρτό για κάθε $x \in K$. Επιπλέον λόγω συνέχειας των απεικονίσεων

$$(x, y) \mapsto (y, x - y) \mapsto \langle x - y, f(y)\rangle$$

έπεται ότι η απεικόνιση $g : K \times K \to \mathbb{R}$ με $g(x, y) = \langle x - y, f(y)\rangle$ είναι jointly continuous στο $K \times K$. Τότε $A = g^{-1}([0, \infty))$ και άρα το $A$ είναι κλειστό. Από το πόρισμα 3.3.1 υπάρχει $x_0 \in K$ τέτοιο ώστε $K \times \{x_0\} \subset A$, το οποίο αποδεικνύει και το ζητούμενο. □

**Ορισμός 4.14.** *Έστω $X$ διανυσματικός χώρος και $K \subset X$. Μια πλειότιμη απεικόνιση $f : K \twoheadrightarrow X$ καλείται **inward** (αντ. **outward**) **pointing** αν για κάθε $x \in K$ υπάρχει $y \in f(x)$ και $\lambda > 0$ (αντ. $\lambda < 0$) ώστε $x + \lambda(y - x) \in K$.*

**Θεώρημα 4.15** (Halpern-Bergman). *Έστω $X$ τοπικά κυρτός χώρος Hausdorff και $K$ ένα μη κενό, κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του $X$. Έστω επιπλέον $f : K \twoheadrightarrow X$ inward pointing και upper demicontinuous πλειότιμη απεικόνιση με κλειστές και κυρτές τιμές. Τότε η $f$ έχει σταθερό σημείο.*

*Απόδειξη.* Έστω ότι $x \notin f(x)$ για κάθε $x \in K$, τότε από διαχωριστικό θεώρημα ([4], σελ. 208), για κάθε $x \in K$ υπάρχει $q_x \in X^*$ το οποίο διαχωρίζει ισχυρά το $x$ από το $f(x)$, δηλαδή υπάρχει πραγματικός αριθμός $a_x$ ώστε $q_x(z) < a_x$ για κάθε $z \in f(x)$ και $q_x(x) > a_x$. Αφού η $f$ είναι upper demicontinuous το σύνολο

$$U_x = f^u(\{z \in K : q_x(z) < a_x\}) \cap \{z \in K : q_x(z) > a_x\}$$

είναι ανοιχτή περιοχή του $x$ στο $K$ και η οικογένεια $(U_x)_{x\in K}$ είναι ανοιχτό κάλυμμα του $K$. Τότε υπάρχουν $x_1, \dots, x_n \in K$ τέτοια ώστε $K \subset \bigcup_{i=1}^n U_{x_1}$. Από το θεώρημα 1.13 υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις $f_i : X \to [0,1]$, $i = 1, \dots, n$, τέτοιες ώστε $\mathrm{supp}(f_i) \subset U_{x_i}$, για κάθε $i = 1, \dots, n$ και $f_1(x) + \dots + f_n(x) = 1$, για κάθε $x \in K$. Ορίζουμε απεικόνιση $g : K \to X^*$

$$g(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) q_{x_i}$$

και εφόσον κάθε $q_{x_i} \in X^*$, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση

$$(x,y) \mapsto \langle y, g(x)\rangle = \sum_{i=1}^n f_i(x) q_{x_i}(y)$$

είναι jointly continuous στο $K \times K$. Επομένως εφαρμόζοντας το θεώρημα 4.13 για την $g$, υπάρχει $x_0 \in K$ τέτοιο ώστε για κάθε $y \in K$

$$\langle y, g(x_0)\rangle \geq \langle x_0, g(x_0)\rangle \tag{$*$}$$

Επιπλέον, για $x \in K$, παρατηρούμε ότι αν $f_i(x) > 0$ τότε $x \in U_{x_i}$ και άρα $q_{x_i}(x) > a_{x_i}$ και $q_{x_i}(z) < a_{x_i}$, για κάθε $z \in f(x)$. Επομένως για κάθε $x \in K$ και $y \in f(x)$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
\langle x, g(x)\rangle = \sum_{i=1}^n f_i(x) q_{x_i}(x) &= \sum_{\substack{i=1\\ f_i(x)\neq 0}}^n f_i(x) q_{x_i}(x) + \sum_{\substack{i=1\\ f_i(x)= 0}}^n f_i(x) q_{x_i}(x) \\
&= \sum_{\substack{i=1\\ f_i(x)\neq 0}}^n f_i(x) q_{x_i}(x) \\
&> \sum_{i=1}^n f_i(x) a_{x_i} \\
&> \sum_{i=1}^n f_i(x) q_{x_i}(y) = \langle y, g(x)\rangle.
\end{aligned} \tag{$**$}$$

Αφού η $f$ είναι inward pointing, υπάρχει $y_0 \in f(x_0)$ και $\lambda > 0$ τέτοια ώστε $x_0 + \lambda(y_0 - x_0) \in K$. Θέτοντας $y = x_0 + \lambda(y_0 - x_0)$ στην (*) έχουμε

$$\langle x_0 + \lambda(y_0 - x_0), g(x_0)\rangle \geq \langle x_0, g(x_0)\rangle \implies \langle y_0, g(x_0)\rangle \geq \langle x_0, g(x_0)\rangle.$$

Το οποίο είναι άτοπο λόγω της (**), επομένως υπάρχει $x \in K$ με $x \in f(x)$. □

**Λήμμα 4.16.** *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος Hausdorff, $K$ ένα μη κενό υποσύνολο του $X$ και $f : K \twoheadrightarrow X$, η οποία έχει κλειστό γράφημα. Τότε το σύνολο των σταθερών σημείων της $f$ είναι κλειστό στο $K$.*

*Απόδειξη.* Παρατηρούμε ότι ένα σημείο $x$ είναι σταθερό σημείο της $f$ αν και μόνο αν $(x, x) \in \mathrm{Gr}f$, τότε το σύνολο

$$F = \mathrm{Gr}f \cap \{(x, x) : x \in K\}$$

είναι κλειστό στο $K \times K$ και η συνάρτηση $g : K \to K \times K$ με $g(x) = (x, x)$ είναι συνεχής. Επομένως το $\mathrm{Fix}(f) = g^{-1}(F)$ είναι κλειστό στο $K$. □

Ο Kakutani [26] απέδειξε το θεώρημα 4.17 στην περίπτωση των πεπερασμένων διαστάσεων και στη συνέχεια οι Bohnenblust και Karlin [7] το επέκτειναν σε χώρους Banach. Τέλος οι Fan και Glicksberg εδώσαν την παρακάτω μορφή του για τοπικά κυρτούς χώρους.

**Θεώρημα 4.17** (Kakutani-Fan-Glicksberg)**.** *Έστω $X$ τοπικά κυρτός χώρος Hausdorff και $K$ ένα μη κενό, κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του $X$. Έστω επιπλέον μια πλειότιμη απεικόνιση $f : K \twoheadrightarrow K$ η οποία έχει κλειστό γράφημα και μη κενές, κυρτές τιμές. Τότε η $f$ έχει σταθερό σημείο.*

*Απόδειξη.* Από το θεώρημα 1.37 η $f$ είναι upper hemicontinuous και άρα upper demicontinuous. Επιπλέον επειδή η $f$ απεικονίζει το $K$ στο $K$ είναι άμεσο ότι είναι inward pointing. Από το θεώρημα 4.15 η $f$ έχει σταθερό σημείο. Τέλος, παρατηρούμε από το λήμμα 4.16, ότι το $\mathrm{Fix}(f)$ είναι ένα κλειστό υποσύνολο του $K$ και άρα είναι συμπαγές. □

**Παρατήρηση.** Μπορούμε να δούμε μια συνάρτηση $f : K \to K$ ως πλειότιμη απεικόνιση $f : K \twoheadrightarrow K$ όπου η εικόνα του κάθε στοιχείου είναι μονοσύνολο. Επιπλέον αν η $f$ είναι συνεχής συνάρτηση τότε ορίζει upper hemicontinuous πλειότιμη απεικόνιση. Βάσει αυτού έπεται άμεσα το επόμενο θεώρημα.

**Θεώρημα 4.18** (Tychonoff)**.** *Έστω $X$ τοπικά κυρτός χώρος Hausdorff, τότε κάθε μη κενό, κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου.*

Στη συνέχεια δίνουμε στο θεώρημα 4.20 την απόδειξη του Singbal [8] για μια διαφορετική μορφή του θεωρήματος του 4.18, η οποία χρησιμοποιεί την τεχνική της προβολής του Schauder προσαρμοσμένη σε τοπικά κυρτό χώρο.

**Λήμμα 4.19** (Nagumo)**.** *Έστω $X$ τοπικά κυρτός χώρος Hausdorff, $K$ μη κενό, συμπαγές υποσύνολο του $X$ και $V$ μια περιοχή του 0. Τότε υπάρχει $F \subset K$ πεπερασμένο και συνεχής απεικόνιση $P : K \to co(F)$, ώστε για κάθε $x \in K$*

$$P(x) - x \in V.$$

*Απόδειξη.* Έστω $W$ ανοιχτή, κυρτή και συμμετρική περιοχή του 0 με $W \subset V$. Τότε υπάρχουν $x_1, \dots, x_n \in K$ τέτοια ώστε $K \subset \bigcup_{i=1}^{n}(x_i + W)$. Έστω $p_W$ το συναρτησιακό Minkowski του $W$. Αφού το $W$ είναι ανοιχτό, ισχύει ότι

$$x \in W \Leftrightarrow p_W(x) < 1.$$

Επομένως, για κάθε $x \in K$ υπάρχει $i_x \in \{1, \dots, n\}$ με

$$x \in x_{i_x} + W \Leftrightarrow p_W(x - x_{i_x}) < 1.$$

Θέτουμε για κάθε $1 \leq i \leq n$

$$q_i(x) = \max\{1 - p_W(x - x_i), 0\}, \quad \forall x \in K.$$

Τότε για κάθε $x \in K$, $q_{i_x}(x) \neq 0$. Ορίζουμε την απεικόνιση $P : K \to X$ με

$$P(x) = \left[\sum_{i=1}^{n} q_i(x)\right]^{-1} \sum_{i=1}^{n} q_i(x)x_i, \quad \forall x \in K.$$

Παρατηρούμε ότι αν $q_i(x) \neq 0$, τότε $p_W(x - x_i) < 1$ και άρα $x - x_i \in W$. Επομένως αφού το $W$ είναι κυρτό, προκύπτει ότι για κάθε $x \in K$

$$\begin{aligned}
x - P(x) &= x - \left[\sum_{i=1}^{n} q_i(x)\right]^{-1} \sum_{i=1}^{n} q_i(x)x_i \\
&= x - \left[\sum_{\substack{i=1 \\ q_i(x)\neq 0}}^{n} q_i(x)\right]^{-1} \sum_{\substack{i=1 \\ q_i(x)\neq 0}}^{n} q_i(x)x_i \\
&= \left[\sum_{\substack{i=1 \\ q_i(x)\neq 0}}^{n} q_i(x)\right]^{-1} \sum_{\substack{i=1 \\ q_i(x)\neq 0}}^{n} q_i(x)(x - x_i) \in W \subset V.
\end{aligned}$$

□

**Θεώρημα 4.20** (Singbal)**.** *Έστω $X$ τοπικά κυρτός χώρος Hausdorff και $F$ μη κενό, κυρτό υποσύνολο του $X$. Αν $K \subset F$ συμπαγές και $f : F \to K$ είναι μια συνεχής απεικόνιση, τότε η $f$ έχει σταθερό σημείο.*

*Απόδειξη.* Από το λήμμα 4.19, για κάθε περιοχή $V$ του 0, υπάρχει $K_V \subset K$ πεπερασμένο και συνεχής απεικόνιση $P_V : K \to co(K_V)$, ώστε για κάθε $x \in K$

$$P_V(x) - x \in V, \quad \forall x \in K.$$

Θέτουμε $f_V : co(K_V) \to co(K_V)$ με $f_V(x) = P_V(f(x))$, για κάθε $x \in co(K_V)$. Από το θεώρημα 4.5, η $f_V$ έχει σταθερό σημείο $x_V \in co(K_V) \subset K$, δηλαδή $f_V(x_V) = x_V$. Τότε το $(x_V)_V$ αποτελεί ένα δίκτυο στο $K$, το οποίο λόγω συμπάγειας έχει συγκλίνον υποδίκτυο και χάριν ευκολίας ας θεωρήσουμε ότι συγκλίνει το ίδιο, δηλαδή $x_V \to x \in K$. Λόγω συνέχειας της $f$ είναι $x_V - f(x_V) \to x - f(x)$ και επιπλέον για κάθε περιοχή $V$ του 0 έχουμε ότι

$$P_V(f(x_V)) - f(x_V) = x_V - f(x_V) \in V.$$

Δηλαδή $x_V - f(x_V) \to 0$ και άρα $x - f(x) = 0$.

□

## 4.4 Το θεώρημα των Markov-Kakutani.

Έστω $X$ ένα μη κενό σύνολο και $f : X \to X$ και έστω ότι η $f$ έχει σταθερό σημείο, έστω $x$, στο $X$. Τότε είναι άμεσο ότι το $x$ μένει σταθερό για κάθε δύναμη της $f$. Όμοια, ένα σημείο $x \in X$ μένει σταθερό για κάθε $f \in \mathcal{F}$, όπου $\mathcal{F}$ είναι μια οικογένεια συναρτήσεων από το $X$ στο $X$, αν και μόνο αν το $x$ είναι σταθερό σημείο για κάθε $\bigcirc_{i\in I} f_i$, με $f_i \in \mathcal{F}$ και $I$ πεπερασμένο.

Δεν είναι όμως γνωστό, στη γενική περίπτωση, πότε δύο συνεχείς συναρτήσεις που αντιμετατίθενται έχουν κοινό σταθερό σημείο. Οι Markov [31] και Kakutani [25] δώσαν απάντηση στην ειδική περίπτωση, όπου οι συναρτήσεις αυτές είναι αφφινικές απεικονίσεις.

Η απόδειξη που παρουσιάζουμε στο θεώρημα 4.21 είναι αυτή του Markov στο [31], στην οποία κάνει χρήση του θεώρηματος του Tychonoff. Ο Kakutani δίνει στο [25] τη σκιαγράφηση μιας πιο άμεσης απόδειξης και στη συνέχεια αποδεικνύει ως εφαρμογή το θεώρημα Hahn-Banach. Στο [49] δίνεται από τον Werner μια τρίτη απόδειξη, στην οποία κάνει χρήση του θεωρήματος Hahn-Banach, αποδεικνύοντας έτσι την ισοδυναμία τους.

**Θεώρημα 4.21** (Markov-Kakutani)**.** *Έστω $X$ τοπικά κυρτός χώρος Hausdorff και $K$ ένα μη κενό, κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του $X$. Αν $\mathcal{F}$ είναι μια αντιμεταθετική οικογένεια συνεχών αφφινικών απεικονίσεων από το $K$ στο $K$, τότε υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $f(x) = x$, για κάθε $f \in \mathcal{F}$.*

*Απόδειξη* (Markov). Θα δείξουμε επαγωγικά ότι η οικογένεια $\{\mathrm{Fix}(f)\}_{f\in\mathcal{F}}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής. Από το θεώρημα 4.18 το σύνολο $\mathrm{Fix}(f)$ είναι συμπαγές και μη κενό, για κάθε $f \in \mathcal{F}$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ και κάθε επιλογή $f_1, \ldots, f_{n-1} \in \mathcal{F}$ είναι $\mathrm{Fix}(f_1, \ldots, f_{n-1}) \neq \emptyset$. Έστω $f_n \in \mathcal{F}$, τότε επειδή η οικογένεια $\mathcal{F}$ είναι αντιμεταθετική έπεται ότι

$$f_n(\mathrm{Fix}(f_1, \ldots, f_{n-1})) \subset \mathrm{Fix}(f_1, \ldots, f_{n-1})$$

διότι αν $x \in \mathrm{Fix}(f_1, \ldots, f_{n-1})$, τότε για κάθε $1 \leq i < n$

$$f_i(f_n(x)) = f_n(f_i(x)) = f_n(x)$$

Έστω $f \in \mathcal{F}$, παρατηρούμε ότι επειδή η $f$ είναι αφφινική το σύνολο $\mathrm{Fix}(f)$ είναι κυρτό. Επομένως το $\mathrm{Fix}(f_1, \ldots, f_{n-1})$ μένει αναλλοίωτο υπό την $f_n$, είναι κυρτό και συμπαγές ως τομή κυρτών και συμπαγών συνόλων, και από την επαγωγική υπόθεση είναι μη κενό. Εφαρμόζοντας πάλι το θεώρημα σταθερού σημείου του Tychonoff έπεται ότι η $f_n$ έχει σταθερό σημείο στο $\mathrm{Fix}(f_1, \ldots, f_{n-1})$.

Δηλαδή η $\{\mathrm{Fix}(f)\}_{f\in\mathcal{F}}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής και αφού το $K$ είναι συμπαγές η οικογένεια έχει μη κενή τομή. □

Παρατηρούμε ότι το παραπάνω αποτέλεσμα παραμένει σωστό, αν αντικαταστήσουμε την οικογένεια $\mathcal{F}$ με τη $\Sigma(\mathcal{F})$, τη μικρότερη ημιομάδα (ως προς τη σύνθεση συναρτήσεων) συνεχών αφφινικών μετασχηματισμών από το $K$ στο $K$, η οποία περιέχει την $\mathcal{F}$. Επίσης είναι άμεσο ότι η αντιμεταθετικότητα της $\mathcal{F}$ μεταφέρεται στην $\Sigma(\mathcal{F})$.

Στο [12] ο Day δίνει δυο γενικεύσεις του παραπάνω θεωρήματος κάνοντας χρήση των *αναλλοίωτων μέσων* και των *amenable ημιομάδων*, τα οποία θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια.

## 4.5 Το θεώρημα Borsuk-Ulam.

Το θεώρημα Borsuk-Ulam 4.23, διατυπώθηκε από τον S. Ulam και στη συνέχεια αποδείχτηκε από τον Borsuk [10], και παρότι δεν αποτελεί ένα κλασσικό θεώρημα σταθερού σημείου, σχετίζεται άμεσα με τη θεωρία τους. Στη συνηθέστερη μορφή του, το θεώρημα εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός «αντιποδικού» σημείου για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : S_n \to \mathbb{R}^n$, δηλαδή ενός $x \in S_n$ τέτοιου ώστε $f(x) = f(-x)$.

Το θεώρημα βρίσκει και αυτό πολλές εφαρμογές σε θέματα συνδυαστικής, θεωρίας γράφων, διαφορικών εξισώσεων και οικονομικών.

Αποδεινκύουμε αρχικά μια ισοδύναμη μορφή του θεωρήματος, κάνοντας χρήση του λήμματος του Tucker και στη συνέχεια στο θεώρημα 4.23 δίνουμε περισσότερες ισοδύναμες διατυπώσεις του.

**Θεώρημα 4.22.** *Δεν υπάρχει απεικόνιση $f : B_n \to S_{n-1}$, η οποία είναι συνεχής και τέτοια ώστε $f(-x) = -f(x)$, για κάθε $x \in S_{n-1}$.*

*Απόδειξη.* Έστω συνεχής συνάρτηση $f : \hat{B}_n \to \hat{S}_{n-1}$, περιττή στο $\hat{S}_{n-1}$ και $\varepsilon = \frac{1}{n}$. Η $f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής ως συνεχής συνάρτηση σε συμπαγές σύνολο. Επομένως υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για $x, x' \in \hat{B}_n$ με $|x - x'| < \delta$ να ισχύει ότι $\|f(x) - f(x')\|_\infty < 2\varepsilon$.

Θεωρούμε τριγωνοποίηση $T$ της $\hat{B}_n$ όπως στην απόδειξη του λήμματος του Tucker με $\mathrm{diam}(\sigma) \leq \delta$, για κάθε $\sigma \in T$ και ορίζουμε για κάθε $x \in V(T)$

$$k_x := \min\{i : |f(x)_i| \geq \varepsilon\}$$

Το $k_x$ είναι καλά ορισμένο αφού για κάθε $y \in \hat{S}_{n-1}$ ισχύει ότι $\|y\|_\infty \geq \varepsilon$, δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον μια συντεταγμένη του $y$ μεγαλύτερη από $\varepsilon$, αφού διαφορετικά $\|y\|_1 < 1$. Ορίζουμε $\lambda : V(T) \to \{\pm 1, \dots, \pm n\}$ με

$$\lambda(x) = \begin{cases} k_x, & f(x)_{k_x} > 0 \\ -k_x, & f(x)_{k_x} < 0 \end{cases}$$

Αφού η $f$ είναι περιττή στο $\partial\hat{B}_n$, τότε ισχύει ότι $\lambda(x) = -\lambda(-x)$ για κάθε $x \in \hat{S}_{n-1} \cap V(T)$ και άρα ο χρωματισμός $\lambda$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του λήμματος του Tucker. Επομένως υπάρχει $\sigma \in T$ με $V(\sigma) = \{x_1, x_2\}$ ώστε $i_0 = \lambda(x_1) = -\lambda(x_2) > 0$. Τότε $f_{i_0}(x_1) \geq \varepsilon$ και $f_{i_0}(x_2) \leq -\varepsilon$, δηλαδή

$$\|f(x_1) - f(x_2)\|_\infty \geq 2\varepsilon$$

το οποίο είναι άτοπο αφού $x_1, x_2 \in \sigma$ και άρα $\|x_1 - x_2\| \leq \mathrm{diam}(\sigma) < \delta$.

Έστω $g : B_n \to \hat{B}_n$ ομοιομορφισμός και υποθέτουμε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : B_n \to S_{n-1}$ τέτοια ώστε $f(x) = -f(-x)$, για κάθε $x \in \partial B_n$. Τότε θέτουμε $h : \hat{B}_n \to \hat{S}^n$ με $h(x) = gfg^{-1}(x)$. Η $g$ είναι περιττή και $g(\partial B_n) = \partial\hat{B}_n$, επομένως η $h$ είναι συνεχής και περιττή στο $\partial\hat{B}_n$, το οποίο είναι άτοπο. □

**Θεώρημα 4.23** (Borsuk-Ulam). *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τα επόμενα είναι ισοδύναμα*

*α) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : S_n \to \mathbb{R}^n$, υπάρχει $x \in S_n$ τέτοιο ώστε $f(x) = f(-x)$.*

*β) Για κάθε περιττή, συνεχή συνάρτηση $f : S_n \to \mathbb{R}^n$, υπάρχει $x \in S_n$ με $f(x) = 0$.*

*γ) Δεν υπάρχει περιττή συνεχής συνάρτηση $f : S_n \to S_{n-1}$.*

*δ) Δεν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : B_n \to S_{n-1}$, ώστε $f(-x) = -f(x)$, για κάθε $x \in S_{n-1}$.*

*Απόδειξη.* *α)* $\Longrightarrow$ *β)*. Είναι προφανές.
*β)* $\Longrightarrow$ *γ)*. Έστω περιττή συνεχής συνάρτηση $f : S_n \to S_{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, τότε υπάρχει $x \in S_n$ με $f(x) = 0$, το οποίο είναι όμως άτοπο.
*γ)* $\Longrightarrow$ *β)*. Έστω $f : S_n \to \mathbb{R}^n$ περιττή συνεχής συνάρτηση με $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in S_n$. Ορίζουμε τότε $g : S_n \to S_{n-1}$ με $g(x) = f(x)/\|f(x)\|$, η οποία είναι περιττή και συνεχής το οποίο είναι άτοπο.
*γ)* $\Longrightarrow$ *δ)*. Έστω ότι υπάρχει συνάρτηση $f$ όπως στο *δ)*, τότε η $g : S_n \to S_{n-1}$ με $g(x) = f(\pi(x))$ και $g(-x) = -f(\pi(x))$, για $x \in U$, είναι περιττή και συνεχής.
*δ)* $\Longrightarrow$ *γ)*. Έστω ότι υπάρχει συνάρτηση όπως στο *γ)*, ορίζουμε $g : B_n \to S_{n-1}$ με $g(x) = f(\pi^{-1}(x))$, για $x \in B_n$. Τότε η $g$ είναι περιττή στο $\partial B_n$, το οποίο είναι άτοπο. □

Ένα επίσης ισοδύναμο θεώρημα με αυτό του Borsuk είναι το θεώρημα 4.24 των Lyusternik και Shnirel'man [30].

**Θεώρημα 4.24.** *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τα επόμενα είναι ισοδύναμα*

*α) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : S_n \to \mathbb{R}^n$, υπάρχει $x \in S_n$ τέτοιο ώστε $f(x) = f(-x)$.*

*β) Αν $F_1, \ldots, F_{n+1}$ είναι ένα κλειστό κάλυμμα της $S_n$, τότε υπάρχει $i_0$ τέτοιο ώστε $F_{i_0} \cap (-F_{i_0}) \neq \emptyset$.*

*γ) Αν $U_1, \ldots, U_{n+1}$ είναι ένα ανοιχτό κάλυμμα της $S_n$, τότε υπάρχει $i_0$ τέτοιο ώστε $U_{i_0} \cap (-U_{i_0}) \neq \emptyset$.*

*Απόδειξη.* *α)* $\Longrightarrow$ *β)*. Θεωρούμε τη συνεχή απεικόνιση $f : S_n \to \mathbb{R}^n$ με

$$f(x) = (\mathrm{dist}(x, F_1), \ldots, \mathrm{dist}(x, F_n)).$$

Τότε από το *α)*, υπάρχει $x \in S_n$ με $f(x) = f(-x)$. Αν η $i$-οστή συντεταγμένη του $f(x)$ είναι μηδέν, τότε τα $x$ και $-x$ ανήκουν στο $F_i$, ενώ διαφορετικά αν είναι κάθε συντεταγμένη του είναι μη μηδενική ανήκουν στο $F_{n+1}$.
*β)* $\Longrightarrow$ *γ)*. Από την πρόταση 1.11, μπορούμε να βρούμε ένα κλειστό κάλυμμα $F_1, \ldots, F_{n+1}$ της $S_n$, ώστε $F_i \subset U_i$ για κάθε $i$. Επομένως το συμπέρασμα είναι άμεσο από το *β)*.

[32], σελ. 24-25. □

Στο [32] παρουσιάζεται αναλυτικότερα η ιστορία του θεωρήματος Borsuk-Ulam καθώς και δίνεται μια σειρά από εφαρμογές του, καθώς και εκτενής βιβλιογραφία.

# 5 Εφαρμογές.

## 5.1 Το θεώρημα Perron-Frobenius.

Παρουσιάζουμε ως εφαρμογή του θεωρήματος του Brouwer, μια γεωμετρική απόδειξη του θεωρήματος Perron-Frobenius, των Borobia και Trías [9].

Το θεώρημα βρίσκει εφαρμογή σε θέματα θεωρίας πιθανοτήτων, οικονομικών, δυναμικών συστημάτων και άλλων. Η πιο διάσημη από αυτές είναι η χρήση του θεωρήματος στη θεωρία του αλγορίθμου *PageRank* της *Google*.

**Ορισμός 5.1.** *Έστω $A = (a_{ij}) \in R_{n\times n}$ ένας $n \times n$ πίνακας, τότε ο $A$ καλείται **reducible** αν υπάρχει πίνακας μετάθεσης $P$ τέτοιος ώστε*

$$PAP^T = \begin{bmatrix} B & 0 \\ C & D \end{bmatrix} \tag{$*$}$$

*όπου οι $B$ και $D$ είναι τετραγωνικοί πίνακες. Ισοδύναμα αν δεν υπάρχει διαμέριση του $\{1, \ldots, n\}$ σε δυο ξένα σύνολα $I$ και $J$ ώστε $a_{ij} = 0$ για κάθε $i \in I$, $j \in J$. Ένας πίνακας ο οποίος δεν είναι reducible καλείται **irreducible**.*

**Ορισμός 5.2.** *Μία **ημιευθεία** στον $\mathbb{R}^n$, κατά την κατεύθυνση $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, θα είναι το σύνολο $\mathrm{r}[x] = \{\lambda x : \lambda > 0\}$. Ταυτίζουμε την κλάση των ημιευθειών του $\mathbb{R}^n$ με τη σφαίρα $S^{n-1}$.*

**Θεώρημα 5.3** (Perron-Frobenius)**.** *Έστω $A \in \mathbb{R}_{n\times n}$ ένας irreducible $n \times n$ πίνακας με μη αρνητικές τιμές. Τότε ο $A$ έχει μια απλή θετική ιδιοτιμή, της οποίας το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι θετικό, δηλαδή κάθε συντεταγμένη του έχει θετική τιμή. Επιπλέον η $\lambda$ έχει τη μεγαλύτερη τιμή μεταξύ των ιδιοτιμών του $A$.*

*Απόδειξη.* Θεωρούμε τα σύνολα $\mathbf{C}^+ = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, i = 1, \ldots, n\}$ και $\mathbf{R}^+ = \{r[x] : x \in \mathbf{C}^+ \cap S^{n-1}\}$. Επειδή ο $A$ έχει μη αρνητικές τιμές, αφήνει αναλλοίωτο το $\mathbf{R}^+$ και επιπλέον $0 \notin A(r)$ για κάθε $r \in \mathbf{R}^+$, αφού διαφορετικά ο $A$ θα είχε τουλάχιστον μια μηδενική στήλη, το οποίο είναι άτοπο καθώς ο $A$ είναι irreducible.

Έστω $r = r[x] \in \mathbf{R}^+$ με $r \subset \partial\mathbf{C}^+$ και τέτοιο ώστε $A(r) = r$. Δηλαδή $x \in \mathbf{C}^+$ και άρα υπάρχει $0 < k < n$, ώστε οι $k$ πρώτες συντεταγμένες του $x$ να είναι μηδενικές, μετά από μια μετάθεση των στοιχείων της βάσης αν αυτό απαιτείται. Επομένως, επειδή $A(r) = r$, παρατηρούμε ότι ο $A$ θα είναι ισοδύναμος, μέσω μετάθεσης, με ένα πίνακα της μορφής ($*$), όπου $B \in \mathbb{R}_{k\times k}$.

Επομένως, από το θεώρημα 4.10 υπάρχει $r = r[x] \in \mathbf{R}^+$ με $A(r) = r$ και $x_i > 0$ για κάθε $1 \leq i \leq n$. Θεωρούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\|x\| = 1$ και επομένως υπάρχει $\lambda$ ώστε $A(x) = \lambda x$. Επιπλέον είναι άμεσο ότι $\lambda > 0$, αφού $r \subset \mathbf{C}^+$. □

## 5.2 Το πρόβλημα του αναλλοίωτου υπόχωρου.

Ένα από τα μεγαλύτερα προβλήματα στη θεωρία τελεστών είναι αυτό του αναλλοίωτου υπόχωρου. Το ερώτημα είναι κάτω υπό ποιες προϋποθέσεις οι συνεχείς γραμμικοί τελεστές ενός χώρου Banach αφήνουν ένα μη τετριμμένο, κλειστό υπόχωρό του αναλλοίωτο.

Ο Enflo [17] κατασκεύασε ένα αντιπαράδειγμα, στο οποίο αποδείκνυε την ύπαρξη ενός χώρου Banach και ενός τελεστή σε αυτόν, για τον οποίο δεν υπάρχει μη τετριμμένος αναλλοίωτος υπόχωρος.

Μεταξύ άλλων αποτελεσμάτων, τα οποία αποδεικνύουν την ύπαρξη τέτοιων υποχώρων για τελεστές που ικανοποιούν ορισμένες κατάλληλες ιδιότητες, βρίσκεται και αυτό του Lomonosov. Το θεώρημα του είναι το είναι γενικότερο αποτέλεσμα που αφορά το εν λόγω πρόβλημα και ο Lomonosov, στην απλή αλλά ευφυέστατη απόδειξή του, κάνει χρήση του θεωρήματος σταθερού σημείου του Schauder.

**Ορισμός 5.4.** *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και $K \in \mathcal{L}(X)$, τότε ο $K$ καλείται **συμπαγής** αν για κάθε $F \subset X$ φραγμένο, η εικόνα $\overline{K(F)}$ είναι συμπαγής. Θα συμβολίζουμε το σύνολο των συμπαγών τελεστών στο $X$ ως $\mathcal{K}(X)$.*

**Πρόταση 5.5.** *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα, $K \in \mathcal{K}(X)$ και $\lambda$ μια ιδιοτιμή του $K$. Τότε ο ιδιόχωρος $E_\lambda = \{x \in X : K(x) = \lambda x\}$ έχει πεπερασμένη διάσταση.*

*Απόδειξη.* Παρατηρούμε ότι $K(\frac{1}{\lambda}B_{E_\lambda}) = B_{E_\lambda}$, δηλαδή η $B_{E_\lambda}$ είναι συμπαγής καθώς ο $K$ είναι συμπαγής. Από το θεώρημα 4.8 προκύπτει το ζητούμενο. □

**Σημείωση.** Έστω $X$ χώρος με νόρμα και $Y$ ένας υπόχωρος του. Είναι άμεση συνέπεια της συνέχειας των πράξεων στον $X$ ότι και ο $\overline{Y}$ είναι υπόχωρος.

**Ορισμός 5.6.** *Έστω $X$ διανυσματικός χώρος και $T$ ένας γραμμικός τελεστής στον $X$. Ένας υπόχωρος $Y$ του $X$ τέτοιος ώστε $T(Y) \subset Y$ καλείται **αναλλοίωτος υπόχωρος** του $T$.*

**Παρατήρηση.** Οι τετριμμένοι υπόχωροι του $X$, δηλαδή το $\{0\}$ και ο $X$, αποτελούν αναλλοίωτους υπόχωρους για κάθε γραμμικό τελεστή στον $X$.

**Θεώρημα 5.7** (Lomonosov)**.** *Έστω $X$ απειροδιάστατος χώρος Banach και $T \in \mathcal{L}(X)$, $K \in \mathcal{K}(X)$ τέτοιοι ώστε $TK = KT$. Τότε ο $T$ έχει μη τετριμμένο, κλειστό αναλλοίωτο υπόχωρο.*

*Απόδειξη.* Έστω ότι ο $T$ δεν έχει μη τετριμμένο κλειστό αναλλοίωτο υπόχωρο και χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι $\|K\| = 1$.

Επιλέγουμε $x_0 \in X$ τέτοιο ώστε $\|K(x_0)\| > 1$ και θέτουμε $B = B(x_0, 1)$ και $C = \overline{K(B)}$. Παρατηρούμε ότι $0 \notin B$ και άρα $0 \notin C$, και θεωρούμε το σύνολο

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{L}(X) : TA = AT\}.$$

Το $\mathcal{A}$ είναι μη κενό αφού $T \in \mathcal{A}$ και για $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ και βαθμωτά $\lambda, \mu$ είναι

$$T(\lambda A_1 + \mu A_2) = \lambda T A_1 + \mu T A_2 = \lambda A_1 T + \mu A_2 T = (\lambda A_1 + \mu A_2)T.$$

Επομένως για κάθε $x \in C$ το σύνολο $\mathcal{A}_x = \{A(x) : A \in \mathcal{A}\}$ είναι υπόχωρος του $X$ και επιπλέον $\mathcal{A}_x \neq \{0\}$, αφού $x \neq 0$ και $I \in \mathcal{A}$. Τότε παρατηρούμε ότι το $\overline{\mathcal{A}_x}$ είναι κλειστός αναλλοίωτος υπόχωρος για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Πράγματι έστω $y \in \overline{\mathcal{A}_x}$, τότε υπάρχει ακολουθία $(A_n)_n \subset \mathcal{A}$ ώστε $y = \lim_n A_n(x)$ και για κάθε $A \in \mathcal{A}$ είναι άμεσο ότι $AA_n \in \mathcal{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως έχουμε ότι

$$A(y) = A(\lim_n A_n(x)) = \lim_n A(A_n(x)) = \lim_n AA_n(x) \in \overline{\mathcal{A}_x}$$

Δηλαδή για κάθε $x \in C$, ο $\overline{\mathcal{A}_x}$ είναι ένας κλειστός αναλλοίωτος υπόχωρος για τον $T$ και άρα $\overline{\mathcal{A}_x} = \{0\}$ ή $\overline{\mathcal{A}_x} = X$, αλλά επειδή $\mathcal{A}_x \neq \{0\}$ έπεται ότι $\overline{\mathcal{A}_x} = X$. Άρα για κάθε $x \in C$ υπάρχει $A_x \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $\|A_x(x) - x_0\| < 1$, δηλαδή

$$x \in U_x = \{z \in X : \|A_x(z) - x_0\| < 1\}$$

Η οικογένεια $\{U_x\}_{x \in C}$ αποτελεί ανοικτό κάλυμμα του $C$ και επειδή ο $K$ είναι συμπαγής τελεστής, δηλαδή το $C$ είναι συμπαγές, υπάρχουν $x_1, \ldots, x_n \in C$ τέτοια ώστε $C \subset \bigcap_{i=1}^n U_{x_i}$.

Από το θεώρημα 1.13 υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις $f_i : C \to [0, 1]$, τέτοιες ώστε $\operatorname{supp}(f_i) \subset U_{y_i}$, για κάθε $1 \leq i \leq n$ και $\sum_{i=1}^n f_i(x) = 1$, για κάθε $x \in C$. Τότε ορίζουμε την απεικόνιση $\phi : B \to X$ με

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^n f_i(K(x)) A_{x_i}(K(x))$$

και παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} f_i(K(x)) \neq 0 &\implies K(x) \in U_{x_i} \\ &\implies \|A_{x_i}(K(x)) - x_0\| < 1 \\ &\implies A_{x_i}(K(x)) \in B \end{aligned}$$

Δηλαδή $\phi(B) \subset B$. Έστω $(z_n)_n \subset B$, τότε η $(K(z_n))_n$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, $(K(z_{n_k}))_k$ και άρα οι ακολουθίες $(A_{x_i} K(z_{n_k}))_k$, $(f_i(z_{n_k}))_k$ συγκλίνουν για κάθε $i$. Τότε η $(\phi(z_{n_k}))_k$ είναι συγκλίνουσα και επομένως το $\phi(B)$ είναι συμπαγές. Από το θεώρημα 4.11 η $\phi$ έχει σταθερό σημείο $\hat{x} \in B$, δηλαδή $\phi(\hat{x}) = \hat{x}$, με $\hat{x} \neq 0$. Ορίζουμε το γραμμικό τελεστή $S : X \to X$ με

$$S(x) = \sum_{i=1}^n f_i(K(\hat{x})) A_{x_i}(K(x))$$

Με παρόμοια επιχειρήματα με αυτά για τη $\phi$ είναι άμεσο ότι ο $K$ είναι συμπαγής. Επιπλέον $S(\hat{x}) = \phi(\hat{x}) = \hat{x}$, δηλαδή το $\hat{x}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του $S$ με αντίστοιχη ιδιοτιμή $\lambda = 1$. Άρα από την πρόταση 5.5 έπεται ότι ο ιδιόχωρος $V = \{x \in X : S(x) = x\}$ είναι πεπερασμένης διάστασης, δηλαδή $V \neq X$ καθώς και $V \neq \{0\}$, αφού $\hat{x} \in V$. Παρατηρούμε ότι ο $S$ αντιμετατίθενται με τον $T$, επομένως για κάθε $x \in V$ έχουμε ότι

$$S(T(x)) = T(S(x)) = T(x).$$

Δηλαδή $T(x) \in V$, το οποίο είναι άτοπο καθώς υποθέσαμε ότι ο $T$ δεν έχει μη τετριμμένους, κλειστούς αναλλοίωτους υποχώρους. □

Παρατηρώντας την απόδειξη του Lomonosov αποδεικνύουμε στο 5.11, μια επέκταση του παραπάνω θεωρήματος για μιγαδικούς χώρους Banach.

Δίνουμε αρχικά μια απόδειξη του Θεμελιώδους Θεωρήματος της Άλγεβρας κάνοντας χρήση του θεωρήματος του Brouwer, ώστε να αποδείξουμε τελικά στην πρόταση 5.9, ένα γνωστό αποτέλεσμα για μιγαδικούς χώρους πεπερασμένης διάστασης.

**Θεώρημα 5.8** (Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας)**.** *Έστω $p \in \mathbb{C}[X]$ με $\deg(p) \geq 1$, τότε το $p$ έχει ρίζα στο $\mathbb{C}$.*

*Απόδειξη.* Έστω $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, $n \geq 1$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ και χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε επιπλέον ότι $a_n = 1$. Τότε θέτουμε

$$r = 2 + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|.$$

και ορίζουμε τη συνεχή απεικόνιση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με

$$f(z) = \begin{cases} z - \frac{p(z)}{r} e^{i(1-n)\vartheta}, & |z| \leq 1 \\ z - \frac{p(z)}{r} z^{(1-n)} \end{cases}$$

όπου $\vartheta = \arg(z) \in [0, 2\pi)$. Παρατηρούμε ότι αν $|z| \leq 1$, τότε

$$|f(z)| \leq |z| + \frac{|p(z)|}{r} \leq 1 + \frac{1 + |a_0| + \cdots + |a_{n-1}|}{r} \leq 2 \leq r$$

ενώ αν $1 < |z| \leq r$

$$\begin{aligned} |f(z)| \leq \left| z - \frac{p(z)}{rz^{n-1}} \right| &= \left| z - \frac{z}{r} - \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1}}{rz^{n-1}} \right| \\ &\leq r - 1 + \frac{|a_0| + |a_1| r + \cdots + |a_{n-1}| r^{n-1}}{r^n} \\ &\leq r - 1 + \frac{|a_0| + \cdots + |a_{n-1}|}{r} \leq r - 1 + \frac{r-2}{r} \leq r. \end{aligned}$$

Δηλαδή $f(B(0, r)) \subset B(0, r)$. Επομένως από το θεώρημα 4.6 η $f$ έχει σταθερό σημείο το οποίο είναι και ρίζα του $p$. □

**Πρόταση 5.9.** *Έστω $X$ μιγαδικός διανυσματικός χώρος, πεπερασμένης διάστασης. Τότε κάθε γραμμικός τελεστής στον $X$ έχει ιδιοτιμή.*

*Απόδειξη.* Έστω γραμμικός τελεστής $T : X \to X$ και $x \in X$ με $x \neq 0$. Τότε παρατηρούμε ότι τα στοιχεία $x, Tx, \ldots, T^n x$, όπου $n = \dim X$, είναι γραμμικώς εξαρτημένα καθώς είναι $n+1$ το πλήθος. Επομένως υπάρχουν $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, τα οποία δεν είναι όλα μηδέν, τέτοια ώστε

$$\lambda_0 x + \lambda_1 Tx + \cdots + \lambda_n T^n x = 0$$

Επιπλέον τα $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ δεν μπορούν να είναι όλα μηδέν, αφού διαφορετικά θα είχαμε $\lambda_0 x = 0$ και άρα $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$. Τότε το πολυώνυμο

$$p(z) = \lambda_0 + \lambda_1 z + \cdots + \lambda_n z^n$$

από το θεώρημα 5.8, έχει παραγοντοποίηση

$$p(z) = z_0(z - z_1) \cdots (z - z_m)$$

όπου $z_0, \ldots, z_m \in \mathbb{C}$ με $z_0 \neq 0$ και $m \leq n$, όπου δεν ισχύει απαραίτητα $m = n$ καθώς μπορεί το $\lambda_n$ να είναι μηδέν. Επομένως έχουμε ότι

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_0 x + \lambda_1 Tx + \cdots + \lambda_n T^n x \\ &= (\lambda_0 I + \lambda_1 T + \cdots + \lambda_n T^n)x \\ &= z_0(T - \lambda_1 I) \cdots (T - \lambda_m I)x. \end{aligned}$$

Δηλαδή για κάποιο $1 \leq i \leq m$ το $\lambda_i$ είναι ιδιοτιμή του $T$. □

**Ορισμός 5.10.** *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και $T \in \mathcal{L}(X)$ με αναλλοίωτο υπόχωρο $Y$. Αν για κάθε $S \in \mathcal{L}(X)$ με $TS = ST$ ισχύει ότι $S(Y) \subset Y$, τότε ο $Y$ καλείται **υπεραναλλοίωτος υπόχωρος** του $T$.*

**Θεώρημα 5.11.** *Έστω $X$ απειροδιάστατος μιγαδικός χώρος Banach, $T \in \mathcal{L}(X)$ και $K \in \mathcal{K}(X)$ τέτοιοι ώστε $KT = TK$. Τότε ο $T$ έχει μη τετριμμένο κλειστό υπεραναλλοίωτο υπόχωρο.*

*Απόδειξη.* Θεωρούμε $T \neq \lambda I$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$, καθώς επίσης και ότι δεν υπάρχει τέτοιος υπόχωρος για τον $T$ και θέτουμε

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{L}(X) : TA = AT\}.$$

Ακολουθώντας την απόδειξη του θεωρήματος 5.7, ο $T$ έχει μη τετριμμένο κλειστό αναλλοίωτο υπόχωρο πεπερασμένης διάστασης. Επομένως από την πρόταση 5.9, ο $T$ έχει ιδιοτιμή $\lambda \in \mathbb{C}$ και θεωρούμε τον ιδιόχωρο $E_\lambda$ της $\lambda$

$$E_\lambda = \{x \in X : T(x) = \lambda x\}.$$

Έστω $x \in E_\lambda$ και $A \in \mathcal{A}$, τότε

$$T(A(x)) = A(T(x)) = A(\lambda x) = \lambda A(x)$$

δηλαδή $A(x) \in E_\lambda$. Άρα ο $E_\lambda$ είναι αναλλοίωτος υπόχωρος για κάθε $A \in \mathcal{A}$ και $E_\lambda \neq X$ καθώς υποθέσαμε ότι $T \neq \lambda I$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$, το οποίο είναι ατόπο. □

**Πόρισμα 5.11.1.** *Έστω $X$ ένας απειροδιάστατος μιγαδικός χώρος Banach και $K \in \mathcal{K}(X)$. Τότε ο $K$ έχει μη τετριμμένο, κλειστό υπεραναλλοίωτο υπόχωρο.*

## 5.3 Amenability.

Με αφετηρία τον Lebesgue και στη συνέχεια το θεώρημα των Banach-Tarski [35], ο Von Neuman εισήγαγε την έννοια των *amenable ομάδων*, με σκοπό να δώσει μια απάντηση στο γιατί το παράδοξο εμφανιζόταν μόνο σε χώρους διάστασης μεγαλύτερης ή ίσης του τρία.

Τα μετέπειτα αποτελέσματα του Day [13], [14], θεμελίωσαν τη μελέτη των amenable ομάδων και ημιομάδων και το θεωρήμα του, δίνει έναν ισοδύναμο χαρακτηρισμό για αυτές τις ομάδες μέσω της ύπαρξης σταθερών σημείων.

### 5.3.1 Αναλλοίωτοι μέσοι και amenable ημιομάδες.

Έστω $X$ μη κενό σύνολο, συμβολίζουμε $(\ell_\infty(X), \|\cdot\|_\infty)$ το χώρο Banach των πραγματικών φραγμένων συναρτήσεων στο $X$, όπου $\|f\|_\infty := \sup_{x\in X} |f(x)|$.

$$\ell_\infty(X) = \{ f : X \to \mathbb{R} : \| f \|_\infty < \infty \}.$$

**Σημείωση.** Θα συμβολίζουμε $\mathbb{1} \in \ell_\infty(X)$, τη σταθερή συνάρτηση $\mathbb{1}(x) = 1$, για κάθε $x \in X$.

**Ορισμός 5.12.** *Έστω $X$ μη κενό σύνολο, τότε ένα $\mu \in \ell_\infty(X)^*$ καλείται **μέσος** στον $\ell_\infty(X)$ αν για κάθε $f \in \ell_\infty(X)$ ισχύει ότι*

$$\inf_{x\in X} f(x) \leq \langle f, \mu\rangle \leq \sup_{x\in X} f(x),$$

*ή ισοδύναμα αν $\|\mu\| = \langle \mathbb{1}, \mu\rangle = 1$.*

**Παρατήρηση.** Το σύνολο $\mathfrak{M}(\Sigma) = \{\mu \in \ell_\infty(\Sigma)^* : \|\mu\| = \langle 1, \mu\rangle = 1\}$ των μέσων στον $\ell_\infty(X)$ είναι ένα κυρτό και w$^*$-συμπαγές υποσύνολο του $\ell_\infty(X)^*$.

**Ορισμός 5.13.** *Ένα στοιχείο $f \in \ell_\infty(X)$ καλείται **θετικό**, συμβολικά $f \geq 0$, αν $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in X$. Επιπλέον ένα $\mu \in \ell_\infty(X)^*$ καλείται **θετικό** αν $\langle f, \mu\rangle \geq 0$, για κάθε θετικό $f \in \ell_\infty(X)$.*

**Λήμμα 5.14.** *Έστω $X$ μη κενό σύνολο και $\mu \in \ell_\infty(X)^*$ ένας μέσος στον $\ell_\infty(X)$. Τότε το $\mu$ είναι θετικό.*

*Απόδειξη.* Υποθέτουμε πως το $\mu$ δεν είναι θετικό, δηλαδή υπάρχει $f \in \ell_\infty(X)$, $f \geq 0$, τέτοιο ώστε $\langle f, \mu \rangle = c < 0$. Τότε για $0 < \varepsilon < \|f\|^{-1}$, έχουμε ότι

$$\|1 - \varepsilon f\| = \sup_{x \in X} |1 - \varepsilon f(x)| \leq 1$$

και επομένως

$$1 < 1 - \varepsilon c < |1 - \varepsilon c| = |\langle (1 - \varepsilon f), \mu \rangle| \leq \|1 - \varepsilon f\| \leq 1,$$

το οποίο είναι άτοπο. □

**Ορισμός 5.15.** *Έστω $\Sigma$ ημιομάδα, τότε για κάθε $s \in \Sigma$ ορίζουμε τους τελεστές αριστερής $\lambda_s$ και αντίστοιχα δεξιάς $\rho_s$ μετατόπισης στον $\ell_\infty(\Sigma)$ με*

$$\lambda_s(f)(x) = f(sx) \quad \text{και} \quad \rho_s(f)(x) = f(xs)$$

*για κάθε $f \in \ell_\infty(\Sigma)$ και $x \in \Sigma$.*

**Ορισμός 5.16.** *Έστω $\Sigma$ ημιομάδα, τότε ένας μέσος $\mu \in \ell_\infty(\Sigma)^*$ καλείται αριστερά (αντ. δεξιά)* ***αναλλοίωτος μέσος*** *αν για κάθε $s \in \Sigma$ και $f \in \ell_\infty(\Sigma)$*

$$\langle \lambda_s(f), \mu \rangle = \langle f, \mu \rangle.$$

**Σημείωση.** Στην περίπτωση του $(\mathbb{N}, +)$, $\ell_\infty(\mathbb{N}) = \ell_\infty$, ένας αναλλοίωτος μέσος ονομάζεται **όριο Banach**. Ο λόγος είναι ότι αν $\mu \in \ell_\infty^*$ είναι ένας αναλλοίωτος μέσος και $x = (x_n)_n \in \ell_\infty$ τέτοια ώστε $\lim_n x_n = c \in \mathbb{R}$, τότε $\langle x, \mu \rangle = c$. Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$, επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|x_n - c| \leq \varepsilon$, για κάθε $n \geq n_0$. Ορίζουμε $y = (y_n)_n \in \ell_\infty$ με $y_n = x_{n+n_0}$, τότε $\langle x, \mu \rangle = \langle y, \mu \rangle$ και

$$c - \varepsilon = \langle c - \varepsilon, \mu \rangle \leq \langle y, \mu \rangle \leq \langle c + \varepsilon, \mu \rangle = c + \varepsilon$$

από όπου προκύπτει άμεσα ότι $\langle y, \mu \rangle = c$. Ο Banach απέδειξε την ύπαρξη αναλλοίωτου μέσου για συγκεκριμένες ημιομάδες χρησιμοποιώντας το θεώρημα Hahn-Banach.

**Ορισμός 5.17.** *Μια ημιομάδα $\Sigma$ καλείται αριστερά (αντ .δεξία)* ***amenable*** *αν υπάρχει $\mu \in \ell_\infty(\Sigma)^*$ αριστερά (αντ. δεξιά) αναλλοίωτος μέσος. Επιπλέον, η $\Sigma$ καλείται amenable αν είναι αριστερά και δεξιά amenable.*

Στο επόμενο θεώρημα, ο Day, κάνοντας χρήση του θεωρήματος των Markov-Kakutani, απέδειξε ότι κάθε αβελιανή ημιομάδα είναι amenable.

**Θεώρημα 5.18** (Day). *Έστω $\Sigma$ αβελιανή ημιομάδα, τότε η $\Sigma$ είναι amenable.*

*Απόδειξη.* Ορίζουμε οικογένεια $(T_s)_{s\in\Sigma}$ γραμμικών τελεστών στο $\ell_\infty(\Sigma)^*$, ώστε για κάθε $f \in \ell_\infty(\Sigma)$ και $\mu \in \ell_\infty(\Sigma)^*$ να είναι

$$\langle f, T_s(\mu)\rangle = \langle \mathcal{A}_s(f), \mu\rangle.$$

Έστω $V$ περιοχή του $0 \in \ell_\infty(\Sigma)^*$, δηλαδή

$$V = \{\mu \in \ell_\infty(\Sigma)^* : |\langle f_i, \mu\rangle| < \varepsilon_i,\ i = 1, \dots, n\}$$

για $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n > 0$ και $f_1, \dots, f_n \in \ell_\infty(\Sigma)$. Τότε για $s \in \Sigma$ το

$$\begin{aligned} T_s^{-1}(V) &= \{\mu \in \ell_\infty(\Sigma)^* : |\langle f_i, T_s(\mu)\rangle| < \varepsilon_i,\ i = 1, \dots, n\} \\ &= \{\mu \in \ell_\infty(\Sigma)^* : |\langle \mathcal{A}_s(f_i), \mu\rangle| < \varepsilon_i,\ i = 1, \dots, n\}, \end{aligned}$$

είναι επίσης περιοχή του 0 και επομένως για κάθε $s \in \Sigma$, ο $T_s$ είναι φραγμένος τελεστής. Έστω $\mu \in \mathfrak{M}(\Sigma)$ και $s \in \Sigma$, τότε

$$\langle 1, T_s(\mu)\rangle = \langle \mathcal{A}_s(1), \mu\rangle = \langle 1, \mu\rangle = 1.$$

Παρατηρούμε ότι $\|\mathcal{A}_s(f)\| \leq \|f\|$, για κάθε $f \in \ell_\infty(\Sigma)$ αφού

$$\{f(sx) : x \in \Sigma\} \subset \{f(x) : x \in \Sigma\}$$

και τότε

$$\|T_s(\mu)\| = \sup_{\substack{f\in\ell_\infty(\Sigma)\\ \|f\|\leq 1}} |\langle f, T_s(\mu)\rangle| = \sup_{\substack{f\in\ell_\infty(\Sigma)\\ \|f\|\leq 1}} |\langle \mathcal{A}_s(f), \mu\rangle| \leq \sup_{\substack{f\in\ell_\infty(\Sigma)\\ \|f\|\leq 1}} |\langle f, \mu\rangle| = \|\mu\| = 1.$$

Δηλαδή για κάθε $s \in \Sigma$, $T_s(\mathfrak{M}(\Sigma)) \subset \mathfrak{M}(\Sigma)$. Επιπλέον, αν $s, t \in \Sigma$, επειδή η $\Sigma$ είναι αβελιανή έχουμε ότι για κάθε $x \in \Sigma$

$$\mathcal{A}_{st}(f)(x) = f(stx) = f(tsx) = \mathcal{A}_{ts}(f)(x).$$

Τότε για κάθε $s, t \in \Sigma$ έχουμε ότι

$$T_sT_t(\mu) = T_s(\mu \circ \mathcal{A}_t) = \mu \circ \mathcal{A}_t \circ \mathcal{A}_s = \mu \circ \mathcal{A}_{st} = \mu \circ \mathcal{A}_{ts} = T_tT_s(\mu).$$

Από το θεώρημα 4.21 υπάρχει $\mu \in \mathfrak{M}(\Sigma)$ ώστε $T_s(\mu) = \mu$ για κάθε $s \in \Sigma$, δηλαδή $\langle \mathcal{A}_s(f), \mu\rangle = \langle f, \mu\rangle$ για κάθε $s \in \Sigma$ και $f \in \ell_\infty(\Sigma)$. $\square$

Ο Day απέδειξε στο [12] μια γενίκευση του θεωρήματος 4.21 των Markov-Kakutani, όπου αντικατέστησε την υπόθεση η $\mathcal{F}$ να είναι αβελιανή ημιομάδα, με την ύπαρξη τουλάχιστον ενός αριστερού αναλλοίωτου μέσου στον $\ell_\infty(\Sigma)$.

### 5.3.2 Το μέτρο Haar σε τοπικά συμπαγείς ομάδες.

Το μέτρο Haar είναι ένα αναλλοίωτο μέτρο σε συμπαγείς η τοπικά συμπαγείς ομάδες, το οποίο ορίζει κατ' επέκταση ένα ολοκλήρωμα για τις συναρτήσεις τους. Η χρήση του μέτρου Haar συναντάται συχνά στην αρμονική ανάλυση, τη θεωρία ομάδων ακόμη και τη στατιστική.

Η ύπαρξη του μέτρου Haar για συμπαγείς ομάδες, αποδεικνύεται άμεσα με τη χρήση θεωρημάτων σταθερού σημείου, όπως αυτά του Kakutani η του Ryll-Nardzewski, όμως η απόδειξη αποτυγχάνει στην περίπτωση των τοπικά συμπαγών ομάδων.

Δίνουμε στο 5.20, ως εφαρμογή του θεωρήματος 5.18 του Day, την ύπαρξη του μέτρου σε τοπικά συμπαγείς ομάδες.

**Ορισμός 5.19.** *Έστω $G$ τοπικά συμπαγής ομάδα, ένα αριστερό (αντ. δεξιό)* ***μέτρο Haar*** *στη $G$ είναι ένα μη τετριμμένο κανονικό μέτρο $\mu$, τέτοιο ώστε $\mu(B) = \mu(g \cdot B)$ (αντ. $\mu(B) = \mu(B \cdot g)$), για κάθε $g \in G$ και $B$ μετρήσιμο υποσύνολο της $G$.*

**Θεώρημα 5.20.** *Έστω $G$ τοπικά συμπαγής ομάδα, τότε υπάρχει αριστερό (αντ. δεξιό) μέτρο Haar στη $G$.*

*Απόδειξη.* Έστω $\mathcal{K}$ η οικογένεια των συμπαγών υποσυνόλων της $G$ και $\mathcal{U}$ η οικογένεια των ανοιχτών υποσυνόλων της $G$ που περιέχουν το $e_G$. Αν $K \in \mathcal{K}$ και $U \in \mathcal{U}$, μπορούμε να καλύψουμε το $K$, ως συμπαγές σύνολο, από πεπερασμένες το πλήθος μετατοπίσεις του $U$. Συμβολίζουμε $[K : U]$ το ελάχιστο πλήθος των μετατοπίσεων του $U$ που απαιτούνται για να καλυφθεί το $K$. Σταθεροποιούμε ένα $K_0 \in \mathcal{K}$ με $e_G \in K_0^\circ$ και ορίζουμε για κάθε $K \in \mathcal{K}$

$$\xi(K, U) = \frac{[K : U]}{[K_0 : U]}, \quad \forall U \in \mathcal{U}.$$

Τότε παρατηρούμε ότι $[K : U] \leq [K : K_0^\circ] \cdot [K_0 : U]$, αφού μπορούμε να καλύψουμε το $K$ από $[K : K_0^\circ]$ μετατοπίσεις του $K_0^\circ$ και το $K_0$ από $[K_0 : U]$ το πλήθος μετατοπίσεις του $U$, επομένως για κάθε $K \in \mathcal{K}$ έχουμε ότι

$$0 \leq \xi(K, U) \leq [K : K_0], \quad \forall U \in \mathcal{U}.$$

$$\xi(K_1, U) \leq \xi(K_2, U), \quad \forall K_1, K_2 \in \mathcal{K},\ K_1 \subset K_2. \tag{α}$$

$$\xi(g \cdot K, U) = \xi(K, U), \quad \forall U \in \mathcal{U},\ g \in G. \tag{β}$$

$$\xi(K_1 \cup K_2, U) \leq \xi(K_1, U) + \xi(K_2, U), \quad \forall K_1, K_2 \in \mathcal{K},\ U \in \mathcal{U}.$$

Αν $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ με $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, τότε από το λήμμα 1.23 υπάρχει $V \in \mathcal{U}$ ώστε καμία μετατόπιση του $V$ να μην τέμνει ταυτόχρονα τα $K_1, K_2$. Άρα κάθε κάλυμμα του $K_1 \cup K_2$ από μετατοπίσεις του $V$ θα πρέπει να είναι η ξένη ένωση ενός καλύμματος του $K_1$ και ενός του $K_2$, δηλαδή

$$\xi(K_1 \cup K_2, V) \geq \xi(K_1, V) + \xi(K_2, V).$$

Επομένως για κάθε $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ με $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, υπάρχει $V \in \mathcal{U}$ ώστε

$$\xi(K_1 \cup K_2, U) = \xi(K_1, U) + \xi(K_2, U), \quad \forall U \in \mathcal{U}, U \subset V. \tag{γ}$$

Το ζεύγος $(\mathcal{U}, \cap)$ είναι αβελιανή ημιομάδα, επομένως από το θεώρημα 5.18 υπάρχει αναλλοίωτος μέσος $\Lambda$ στο $\mathcal{U}$. Αφού $\xi(K, \cdot) \in \ell_\infty(\mathcal{U})$, ορίζουμε

$$\psi(K) = \langle \xi(K, \cdot), \Lambda \rangle, \quad \forall K \in \mathcal{K}.$$

Τότε $\psi(\emptyset) = \langle 0, \Lambda \rangle = 0$ και από τις (α) και (β) έπεται ότι

$$\psi(K_1) \leq \psi(K_2), \quad \forall K_1, K_2 \in \mathcal{K},\ K_1 \subset K_2,$$

$$\psi(g \cdot K) = \psi(K), \quad \forall K \in \mathcal{K},\ g \in G.$$

Επιπλέον, $\xi(K_0, U) = 1$, για κάθε $U \in \mathcal{U}$ προκύπτει ότι

$$\psi(K_0) = \langle \xi(K_0, \cdot), \Lambda \rangle = \langle \mathbb{1}, \Lambda \rangle = 1$$

και αφού $\xi(K, \cdot) \leq [K : K_0^\circ]$, έχουμε ότι

$$\psi(K) \leq [K : K_0], \quad \forall K \in \mathcal{K}.$$

Έστω $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ με $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, θέτουμε

$$\xi(\cdot) = \xi(K_1 \cup K_2, \cdot) - \xi(K_1, \cdot) - \xi(K_2, \cdot).$$

Τότε $\xi \in \ell_\infty(\mathcal{U})$ και από την (γ) υπάρχει $U_\xi \in \mathcal{U}$ ώστε $\xi(U) = 0$, για κάθε $U \in \mathcal{U}$ με $U \subset U_\xi$. Όμως $\langle \xi, \Lambda \rangle = \langle R_{U_\xi}(\xi), \Lambda \rangle$ και $R_U(\xi)(V) = \xi(V \cap U_\xi) = 0$ για κάθε $V \subset \mathcal{U}$, άρα

$$\begin{aligned} 0 = \langle \xi, \Lambda \rangle &= \langle \xi(K_1 \cup K_2, \cdot) - \xi(K_1, \cdot) - \xi(K_2, \cdot), \Lambda \rangle \\ &= \langle \xi(K_1 \cup K_2, \cdot), \Lambda \rangle - \langle \xi(K_1, \cdot), \Lambda \rangle - \langle \xi(K_2, \cdot), \Lambda \rangle \\ &= \psi(K_1 \cup K_2) - \psi(K_1) - \psi(K_2). \end{aligned}$$

Δηλαδή η $\psi$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του λήμματος 1.28 και επομένως υπάρχει κανονικό μέτρο $\mu$ τέτοιο ώστε για κάθε $U \subset G$ ανοιχτό

$$\mu(U) = \sup\{\psi(K) : K \subset U,\ K \in \mathcal{K}\}$$

και για κάθε $B \in \mathcal{B}(G)$

$$\mu(B) = \inf\{\mu(V) : B \subset V,\ V \text{ ανοιχτό}\}.$$

Έστω $U \subset X$ ανοιχτό και $g \in G$, τότε

$$\begin{aligned}\mu(gU) &= \sup\{\psi(K) : K \subset gU,\ K \in \mathcal{K}\}\\ &= \sup\{\psi(gK) : K \subset U,\ K \in \mathcal{K}\}\\ &= \sup\{\psi(K) : K \subset U,\ K \in \mathcal{K}\} = \mu(U).\end{aligned}$$

Επομένως για κάθε $B \in \mathcal{B}(G)$, $g \in G$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\mu(gB) &= \inf\{\mu(V) : gB \subset V,\ V \text{ ανοιχτό}\}\\ &= \inf\{\mu(gV) : B \subset V,\ V \text{ ανοιχτό}\}\\ &= \inf\{\mu(V) : B \subset V,\ V \text{ ανοιχτό}\} = \mu(B).\end{aligned}$$

□

**Σημείωση.** Το μέτρο Haar είναι μοναδικό, δηλαδή αν και $\mu, \nu$ αριστερά (αντ. δεξιά) μέτρα Haar στη $G$, τότε υπάρχει $c > 0$, τέτοιο ώστε $\mu = c\nu$.

### 5.3.3 Amenable τοπικά συμπαγείς ομάδες.

Έχοντας πλέον αποδείξει την ύπαρξη του μέτρου Haar για τοπικά συμπαγείς ομάδες, δίνουμε σε πλήρη αντιστοιχία με την περίπτωση των ημιομάδων, τους παρακάτω ορισμούς.

**Ορισμός 5.21.** *Έστω $G$ τοπικά συμπαγής ομάδα και $\mu_G$ ένα μέτρο Haar σε αυτή, τότε ένα $\mu \in \mathcal{L}_\infty(G, \mu_G)^*$ καλείται μέσος στον $\mathcal{L}_\infty(G, \mu_G)$ αν*

$$\|\mu\| = \langle \mathbb{1}, \mu \rangle = 1.$$

Αντίστοιχα δίνουμε τους ορισμούς του αναλλοίωτου μέσου στον $\mathcal{L}_\infty(G, \mu_G)$ και της amenable ομάδας. Μια αρκετά χρήσιμη ιδιότητα βρίσκεται στο επόμενο λήμμα.

**Λήμμα 5.22.** *Έστω $G$ τοπικά συμπαγής ομάδα, τα επόμενα είναι ισοδύναμα*

*α) Η $G$ είναι amenable.*

*β) Η $G$ έχει αναλλοίωτο μέσο στον $C_b(G)$, το χώρο των φραγμένων, συνεχών πραγματικών συναρτήσεων στη $G$.*

*Απόδειξη.* [40], σελ. 21. □

**Ορισμός 5.23.** *Έστω $X$ διανυσματικός χώρος και $K$ κυρτό υποσύνολο του $X$. Το $x \in K$ καλείται **ακραίο σημείο** του $K$, αν δεν υπάρχουν $y, z \in K$ με $y \neq z$ και $0 < \lambda < 1$ ώστε $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$. Το σύνολο των ακραίων σημείων του $K$ συμβολίζεται $ex(K)$.*

**Θεώρημα 5.24** (Krein-Milman)**.** *Έστω $X$ τοπικά κυρτός χώρος και $K$ μη κενό, κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του $X$. Τότε $K = \overline{co}(ex(K))$.*

*Απόδειξη.* [4], σελ. 297. □

**Λήμμα 5.25.** *Έστω $G$ τοπικά συμπαγής ομάδα, τότε το σύνολο*

$$D = co(\{\delta_g : g \in G\}) \tag{$*$}$$

*όπου $\langle f, \delta_g \rangle = f(g), f \in C_b(G)$, είναι $\mathrm{w}^*$-πυκνό στο σύνολο των μέσων στο $C_b(G)$.*

*Απόδειξη.* Έστω $g \in G$ και $\delta_g = \lambda\mu_1 + (1 - \lambda)\mu_2$ για $\mu_1, \mu_2$ μέσους στο $C_b(G)$ με $\mu_1 \neq \mu_2$ και $0 < \lambda < 1$. Τότε για κάθε $U \subset G$ ανοιχτό με $x \notin U$ έπεται ότι $\langle \mathbb{1}_U, \delta_g \rangle = 0$, επομένως $\mu_1(U) = \mu_2(U) = 0$ και άρα το $\delta_g$ είναι ακραίο σημείο. Έστω $\mu$ μέσος στο $C_b(G)$ και $\mu \notin \{\delta_g : g \in G\}$, τότε υπάρχει $U \subset G$ με $0 < c = \langle \mathbb{1}_{U_i}, \mu \rangle < 1$. Ορίζουμε τα $\mu_1$, $\mu_2$, ώστε για κάθε $f \in C_b(G)$

$$\langle f, \mu_1 \rangle = \frac{1}{c}\langle f \cdot \mathbb{1}_U, \mu \rangle \quad \text{και} \quad \langle f, \mu_2 \rangle = \frac{1}{1-c}\langle f \cdot \mathbb{1}_{U^c}, \mu \rangle,$$

και τα οποία είναι μέσοι στον $C_b(G)$. Τότε $\mu = c\mu_1 + (1 - c)\mu_2$, δηλαδή το $\mu$ δεν είναι ακραίο σημείο.

Παρατηρούμε ότι το σύνολο $M$ των μέσων στο $C_b(G)$ είναι ένα κυρτό και $\mathrm{w}^*$-συμπαγές υποσύνολο του $C_b(G)^*$, επομένως από το θεώρημα 5.24 έχουμε ότι $M = \overline{co}(ex(M)) = \overline{co}(\{\delta_g : g \in G\})$. □

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε το θεώρημα σταθερού σημείου του Day, στο οποίο δίνεται ένας ισοδύναμος χαρακτηρισμός για το πότε μια τοπικά συμπαγής ομάδα είναι amenable.

**Θεώρημα 5.26** (Day)**.** *Έστω $G$ τοπικά συμπαγής ομάδα, τα επόμενα είναι ισοδύναμα*

*α) Η $G$ είναι amenable.*

*β) Έστω ότι η $G$ δρά αφφινικά σε ένα συμπαγές, κυρτό υποσύνολο $K$ ενός τοπικά κυρτού χώρου $X$, δηλαδή για κάθε $g \in G, x, y \in K$ και $t \in [0, 1]$*

$$g \cdot (tx + (1 - t)y) = t(g \cdot x) + (1 - t)(g \cdot y)$$

*έτσι ώστε η απεικόνιση $(g, x) \mapsto g \cdot x$ να είναι συνεχής και ως προς τις δύο μεταβλητές της, τότε υπάρχει $x \in K$ ώστε $g \cdot x = x$, για κάθε $g \in G$.*

*Απόδειξη.* *α)* $\Longrightarrow$ *β)*. Έστω $x_0 \in K$. Θέτουμε $A(K)$ το σύνολο των συνεχών, αφφινικών συναρτήσεων στο $K$. Για κάθε $\psi \in A(K)$ ορίζουμε $\phi_\psi : G \to \mathbb{C}$ με $\phi_\psi(g) = \psi(gx_0)$, τότε $\psi_\psi \in C_b(G)$ αφού η απεικόνιση $(g, x) \mapsto g \cdot x$ είναι συνεχής ως προς τις δυο μεταβλητές της και το $K$ είναι συμπαγές.

Έστω $m \in C_b(G)^*$ ένας μέσος, τότε από το λήμμα 5.25 υπάρχει δίκτυο $(m_a)_a$ στοιχείων του συνόλου ($*$), με $m_a \to m$. Είναι άμεσο ότι για κάθε $m_a$ υπάρχει $x_a \in K$ ώστε $\langle \phi_\psi, m_a\rangle = \psi(x_a)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι $x_a \to x \in K$. Τότε για κάθε $\psi \in A(K)$

$$\psi(x) = \lim_a \psi(x_a) = \lim_a \langle \phi_\psi, m_a\rangle = \langle \phi_\psi, m\rangle$$

Για $g \in G$ και $\xi \in X^*$ ορίζουμε $\psi_{g,\xi} : K \to \mathbb{C}$ με $\psi_{g,\xi}(z) = \langle gz, \xi\rangle$. Πάλι από τη συνέχεια της απεικόνισης $(g, x) \mapsto g \cdot x$ ως προς τη δεύτερη μεταβλητή προκύπτει ότι $\psi_{g,\xi} \in A(K)$. Παρατηρούμε ότι

$$\phi_{\psi_{g,\xi}}(h) = \psi_{g,\xi}(hx_0) = \langle ghx_0, \xi\rangle = \delta_{g^{-1}}\phi_{\psi_{e,\xi}}(h), \quad g, h \in G, \ \xi \in X^*$$

Επομένως έχουμε ότι για κάθε $g \in G$ και $\xi \in X^*$

$$\begin{aligned}
\langle gx, \xi\rangle &= \psi_{g,\xi}(x) \\
&= \langle \phi_{\psi_{g,\xi}}, m\rangle \\
&= \langle \delta_{g^{-1}}\phi_{\psi_{e,\xi}}, m\rangle \\
&= \langle \phi_{\psi_{e,\xi}}, m\rangle \\
&= \phi_{\psi_{e,\xi}}(x) = \langle x, \xi\rangle.
\end{aligned}$$

Αφού ο $X^*$ διαχωρίζει τα στοιχεία του $X$, έπεται ότι το $x$ είναι το ζητούμενο σταθερό σημείο.

*β)* $\Longrightarrow$ *α)*. Θεωρούμε τον $C_b(G)^*$ εφοδιασμένο με τη w$^*$ τοπολογία. Το σύνολο των μέσων του $C_b(G)$ είναι κυρτό και w$^*$-συμπαγές υποσύνολο του $C_b(G)^*$. Θεωρούμε την αφφινική δράση της $G$ σε αυτό ώστε

$$\langle x, gf\rangle = \langle x_g, f\rangle, \quad g \in G, x \in C_b(G), f \in C_b(G)^*$$

Τότε υπάρχει $f \in C_b(G)^*$ με $gf = f$, για κάθε $g \in G$, δηλαδή

$$\langle x, f\rangle = \langle x, gf\rangle = \langle x_g, f\rangle, \quad g \in G, x \in C_b(G)$$

□

Τέλος, ως εφαρμογή του θεωρήματος 5.26 και του θεωρήματος των Markov-Kakutani 4.21, δίνουμε την απόδειξη ότι οι τοπικά συμπαγείς αβελιανές ομάδες είναι amenable.

**Πόρισμα 5.26.1.** *Έστω $G$ τοπικά συμπαγής αβελιανή ομάδα, τότε η $G$ είναι amenable.*

*Απόδειξη.* Δοθείσης μιας αφφινικής δράσης της $G$ σε ένα μη κενό, κυρτό και συμπαγές υποσύνολο $K$ ενός τοπικά κυρτού χώρου $X$, ορίζουμε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $g \in G$, ένα συνεχή αφφινικό μετασχηματισμό $A_n(g) : K \to K$ με

$$A_n(g)(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n+1} g^i x, \quad x \in K.$$

Έστω $\mathcal{G}$ η ημιομάδα των συνεχών αφφινικών μετασχηματισμών του $K$ που παράγεται από το σύνολο $\{A_n(G) : n \in \mathbb{N}, g \in G\}$. Λόγω συμπάγειας του $K$, το $\gamma(K)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $K$ για κάθε $\gamma \in \mathcal{G}$.

Ισχυριζόμαστε ότι $\bigcap_{\gamma \in \mathcal{G}} \gamma(K) \neq \emptyset$ και παρατηρούμε ότι αρκεί να δείξουμε ότι $\bigcap_{i=1}^{n} \gamma_i(K) \neq \emptyset$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \mathcal{G}$. Θέτουμε $\gamma = \gamma_1\gamma_2 \cdots \gamma_n \in \mathcal{G}$ και παρατηρούμε τότε, επειδή η $\mathcal{G}$ είναι αβελιανή, ότι $\gamma(K) \subset \gamma_i(K)$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Επομένως $\bigcap_{i=1}^{n} \gamma_i(K) \supset \gamma(K) \neq \emptyset$.

Έστω $x_0 \in \bigcap_{\gamma \in \mathcal{G}} \gamma(K)$, τότε το $x_0$ είναι σταθερό σημείο για την δράση της $G$. Πράγματι για κάθε $g \in G$ και $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x \in K$ ώστε $x_0 = A_n(g)(x)$. Άρα για κάθε $f \in X^*$, αν $C = \sup_{z \in K} f(z)$, έχουμε ότι

$$|\langle x_0 - gx_0, f\rangle| = \frac{1}{n+1} |\langle x, f\rangle - \langle g^{n+1}x, f\rangle| \leq \frac{2C}{n+1}.$$

Επειδή η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι

$$\langle x_0, f\rangle = \langle gx_0, f\rangle, \quad \forall g \in G, f \in X^*$$

και άρα $x_0 = gx_0$, για κάθε $g \in G$. □

Μια εκτενέστερη ανάλυση των amenable ομάδων και ημιομάδων, και των αναλλοίωτων μέσων δίνεται στα [23], [35], [40], [48].

## 5.4 Κατά σημείο και ομοιόμορφη προσέγγιση τελεστών.

Έστω $X$ χώρος Banach, $W$ ένα $\|\cdot\|$-συμπαγές υποσύνολο του $\mathcal{L}(X)$, $A \in \mathcal{L}(X)$ και $\varepsilon > 0$, έτσι ώστε για κάθε $x \in B_X$, υπάρχει $B_x \in W$ με $\|(A - B_x)x\| < \varepsilon$. Το ερώτημα που τίθεται είναι αν υπάρχει $c > 0$ και $B \in W$ ώστε $\|A - B\| < c\varepsilon$.

Το παρακάτω παράδειγμα, το οποίο υποδείχτηκε από τον W. B. Johnson, δίνει αρνητική απάντηση στο ερώτημα, στη γενική του αυτή μορφή.

**Παράδειγμα 1.** Έστω $\varepsilon > 0$, τότε για κάθε $x, x^* \in \mathbb{R}^2$, ορίζουμε το γραμμικό τελεστή $x^* \otimes x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, τέτοιο ώστε για κάθε $y \in \mathbb{R}^2$

$$x^* \otimes x\ (y) = \langle y, x^* \rangle\, x$$

και θεωρούμε το σύνολο

$$W = \overline{\mathrm{co}}(\{x^* \otimes x : x, x^* \in B_{\mathbb{R}^2}\}).$$

Έστω $y \in B_{\mathbb{R}^2}$, τότε από γνωστό πόρισμα του θεωρήματος Hahn-Banach, υπάρχει $x^* \in \mathbb{R}^2$, με $\|x^*\| = 1$, τέτοιο ώστε $\langle y, x^* \rangle = \|y\|$. Επομένως για $x = \frac{y}{\|y\|}$, προκύπτει ότι $x^* \otimes x\,(y) = y$ και άρα $\|(I - x^* \otimes x)y\| = 0 < \varepsilon$.

Έστω $B \in W$, από το θεώρημα του Καραθεοδωρή, το $B$ είναι ένας κυρτός συνδυασμός το πολύ πέντε ακραίων σημείων του $W$, δηλαδή υπάρχουν $B_1, \ldots, B_5 \in W$ και $\lambda_1, \ldots, \lambda_5 \in \mathbb{R}$, ώστε $B = \sum_{n=1}^{5} \lambda_n B_n$ και $\sum_{n=1}^{5} \lambda_n = 1$. Τότε, μέσω μίας αναδιάταξης αν αυτή απαιτείται, $\lambda_5 \geq \frac{1}{5}$. Επιλέγουμε $x \in \ker x_5^*$ με $\|x\| = 1$, όπου $B_5 = x_5^* \otimes x_5$ και παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
\|(I - B)x\| &= \Big\|\Big(I - \sum_{n=1}^{5} \lambda_n B_n\Big)x\Big\| = \Big\|\Big(I - \sum_{n=1}^{4} \lambda_n B_n\Big)x\Big\| \\
&\geq \|Ix\| - \Big\|\Big(\sum_{n=1}^{4} \lambda_n B_n\Big)x\Big\| \\
&\geq \|x\| - \sum_{n=1}^{4} \lambda_n \|B_n x\| \\
&\geq 1 - \sum_{n=1}^{4} \lambda_n = \lambda_5 \geq \frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

Δηλαδή $\|I - B\| \geq \frac{1}{5}$, για κάθε $B \in W$.

**Σημείωση.** Έστω $x = (x_n)_n$ είναι μία ακολουθία, τότε θα συμβολίζουμε

$$x\Big|_m^M = \begin{cases} x_n, & m \leq n \leq M \\ 0 \end{cases} \qquad x\Big|_m = \begin{cases} x_n, & m \leq n \\ 0 \end{cases} \qquad x\Big|^M = \begin{cases} x_n, & n \leq M \\ 0 \end{cases}$$

**Παράδειγμα 2.** Έστω $\varepsilon > 0$, θεωρούμε τον $\ell_2$ με τη συνήθη βάση του $(e_n)_n$, καθώς και τους υπόχωρους $Y = \langle \{e_n : n > 2\} \rangle$ και $Z = \ell_2 \setminus Y$, όπου $\ell_2 = Z \oplus Y$. Θεωρούμε το σύνολο

$$W = \overline{\mathrm{co}}\Big(\Big\{z^* \otimes z + I|_Y : z \in B_Z, z^* \in B_{Z^*}\}\Big).$$

Έστω $x \in B_{\ell_2}$, όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, υπάρχουν $z^* \in Z^*$, $z \in Z$ τέτοια ώστε $z^* \otimes z\,(x|^2) = x|^2$ και άρα

$$\left(z^* \otimes z + I|_Y\right) x = z^* \otimes z\,(x|^2) + x|_3 = x|^2 + x|_3 = x.$$

Δηλαδή για κάθε $x \in B_{\ell_2}$, υπάρχει $B \in W$ με $\|(I-B)x\| = 0 < \varepsilon$. Είναι τότε άμεσο ότι για κάθε $B \in W$, έχουμε ότι $\|(I-B)|_Y\| = 0 < \varepsilon$.

Το προηγούμενο παράδειγμα μας οδηγεί πλέον να διατυπώσουμε διαφορετικά το αρχικό ερώτημα, δηλαδή αν υπάρχει $Y$, ένας υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης του $X$, $c > 0$ και $B \in W$ τέτοια ώστε $\|A - B|_Y\| < c\varepsilon$.

Στην περίπτωση που το $W$ είναι ένα σύνολο το οποίο αποτελείται από συμπαγείς τελεστές σε ένα χώρο με την approximation property, τότε όπως αποδεικνύουμε στο θεώρημα 5.30, η απάντηση στο ερώτημα είναι θετική.

**Ορισμός 5.27.** *Έστω $X$ χώρος Banach, τότε θα λέμε ότι ο $X$ έχει την* ***approximation property*** *αν κάθε συμπαγής τελεστής στον $X$ είναι όριο τελεστών πεπερασμένης τάξης.*

**Πρόταση 5.28.** *Έστω $X$ χώρος Banach με βάση $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, τότε ο $X$ έχει την approximation property.*

**Ορισμός 5.29.** *Έστω $(X, \rho)$ μετρικός χώρος και $\varepsilon > 0$. Ένα υποσύνολο $Y$ του $X$ καλείται $\varepsilon$-net αν για κάθε $x \in X$, υπάρχει $y \in Y$ με $\rho(x, y) < \varepsilon$.*

**Θεώρημα 5.30.** *Έστω $X$ χώρος Banach ο οποίος έχει την approximation property, $W$ ένα $\|\cdot\|$-συμπαγές υποσύνολο του $\mathcal{K}(X)$, $A \in \mathcal{L}(X)$ και $\varepsilon > 0$. Αν για κάθε $x \in B_X$, υπάρχει $B_x \in W$ με $\|(A - B_x)x\| < \varepsilon$, τότε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει υπόχωρος πεπερασμένης συνδιάστασης $Y_\delta$ του $X$, ώστε $\|(A - B)|_{Y_\delta}\| < \varepsilon + \delta$.*

*Απόδειξη.* Έστω $\delta > 0$, θεωρούμε ένα $\frac{\delta}{4}$-net στο $W$, έστω $\{B_1, \dots, B_n\}$. Τότε υπάρχουν $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{K}(X)$, τελεστές πεπερασμένης τάξης στον $X$, τέτοιοι ώστε $\|B_i - F_i\| < \frac{\delta}{4}$, για κάθε $i$. Τότε ο $Y = \bigcap_{i=1}^n \ker F_i$ είναι ένας υπόχωρος πεπερασμένης συνδιάστασης και για κάθε $B \in W$ έχουμε ότι

$$\|B|_Y\| \leq \|(B - B_i)|_Y\| + \|B_i|_Y\| = \|(B - B_i)|_Y\| + \|(B_i + F_i)|_Y\| < \frac{\delta}{2}.$$

Επομένως για κάθε $x \in B_Y$, υπάρχει $B \in W$ με $\|(A - B)x\| < \varepsilon$ και άρα

$$\|Ax\| \leq \|(A - B)x\| + \|Bx\| < \varepsilon + \frac{\delta}{2}.$$

Δηλάδη τελικά έχουμε ότι

$$\|(A - B)|_Y\| \leq \|A|_Y\| + \|B|_Y\| < \varepsilon + \delta.$$

□

Ειδικότερα για τους χώρους $\ell_p$, με $1 < p < \infty$, αποδεικνύουμε με χρήση του θεωρήματος σταθερού σημείου των Fan-Glicksbgerg, το θεώρημα 5.31 και επιπλέον παρουσιάζουμε ένα παράδειγμα όπου το θεώρημα δεν ισχύει στην περίπτωση του $\ell_1$.

**Θεώρημα 5.31.** *Έστω $1 < p < \infty$, $W$ ένα κυρτό και $\|\cdot\|$-συμπαγές υποσύνολο του $\mathcal{L}(\ell_p)$, $A \in \mathcal{L}(\ell_p)$ και $\varepsilon > 0$. Αν για κάθε $x \in B_{\ell_p}$, υπάρχει $B \in W$ ώστε $\|(A-B)x\| < \varepsilon$, τότε για κάθε $\delta > 0$, υπάρχουν $N_\delta \in \mathbb{N}$ και $B_\delta \in W$, τέτοια ώστε $\|(A-B_\delta)|_{Y_\delta}\| < \varepsilon + \delta$, όπου $Y_\delta = \langle\{e_n : n \geq N_\delta\}\rangle$.*

**Παράδειγμα 3.** Έστω $\varepsilon, \delta > 0$ με $\varepsilon + \delta < \frac{1}{2}$. Θεωρούμε τον $\ell_1$ με τη συνήθη βάση του $(e_n)_n$ και το τελεστή $A \in \mathcal{L}(\ell_1)$ με

$$A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_{2n-1} e_1 + \sum_{n=1}^{\infty} x_{2n} e_2.$$

Για κάθε $z \in \ell_1$, ορίζουμε τους τελεστές $B_z^+, B_z^- \in \mathcal{L}(\ell_1)$ με

$$B_z^+(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_n z \quad \text{και} \quad B_z^-(x) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_{2n-1} - \sum_{i=1}^{\infty} x_{2n}\right) z$$

και θεωρούμε το σύνολο

$$W = \overline{\text{co}}(\{B_z^\pm : z \in B_{\langle e_1, e_2\rangle}\}).$$

Έστω $x \in B_{\ell_1}$, τότε $A(x) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$, όπου $\lambda_1 = \sum_{n=1}^{\infty} x_{2n-1}$ και $\lambda_2 = \sum_{n=1}^{\infty} x_{2n}$. Αν $A(x) \neq 0$, θεωρούμε την ποσότητα

$$\lambda = \max\{|\lambda_1 + \lambda_2|, |\lambda_1 - \lambda_2|\} = |\lambda_1| + |\lambda_2|.$$

Αν $\lambda = |\lambda_1 + \lambda_2|$, τότε για $z = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} A(x)$ έχουμε ότι

$$\|z\| = \frac{1}{|\lambda_1 + \lambda_2|} \|\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2\| = \frac{|\lambda_1| + |\lambda_2|}{|\lambda_1 + \lambda_2|} = 1$$

και

$$B_z^+(x) = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} x_n}{\lambda_1 + \lambda_2} A(x) = A(x).$$

Διαφορετικά αν $\lambda = |\lambda_1 - \lambda_2|$, τότε για $z = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} A(x)$ είναι $\|z\| = 1$ και

$$B_z^-(x) = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} x_{2n-1} - \sum_{i=1}^{\infty} x_{2n}}{\lambda_1 - \lambda_2} A(x) = A(x).$$

Αν $A(x) = 0$, παρατηρούμε ότι $0 \in W$ και επομένως για κάθε $x \in B_{\ell_1}$, υπάρχει $B \in W$ με $\|(A-B)x\| = 0 < \varepsilon$.

Έστω $B \in W$, τότε υπάρχουν $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\ell}, \{\mu_i\}_{i=1}^{m}$ στο $\mathbb{R}$ και $\{y_i\}_{i=1}^{\ell}, \{z_i\}_{i=1}^{m}$ στη $B_{\langle e_1, e_2\rangle}$, με $B = (1-\mu)B_{y_i}^{+} + \mu B_{z_i}^{-}$, όπου $\mu = \sum_{i=1}^{m} \mu_i$ και $\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i + \sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1$. Για κάθε $k, k' \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι

$$B(e_{2k-1}) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i y_i + \sum_{i=1}^{m} \mu_i z_i \quad \text{και} \quad B(e_{2k'}) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i y_i - \sum_{i=1}^{m} \mu_i z_i.$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
\left\|(A-B)\frac{e_{2k-1}+e_{2k'}}{2}\right\| &= \left\|\frac{e_1+e_2}{2} - B\Big(\frac{e_{2k-1}+e_{2k'}}{2}\Big)\right\| \\
&= \left\|\frac{e_1+e_2}{2} - \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i y_i\right\| \\
&\geq 1 - \left\|\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i y_i\right\| \geq 1 - \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i = \mu
\end{aligned}$$

και αντίστοιχα

$$\left\|(A-B)\frac{e_{2k-1}-e_{2k'}}{2}\right\| \geq 1 - \left\|\sum_{i=1}^{m} \mu_i z_i\right\| \geq 1 - \sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1-\mu.$$

Επομένως αν $Y$ είναι ένας υπόχωρος του $\ell_1$ της μορφής $\langle\{e_n : n \geq N\}\rangle$, για κάποιο $N \in \mathbb{N}$, τότε υπάρχουν $k_\alpha \in \mathbb{N}$ άρτιος και $k_\pi \in \mathbb{N}$ περιττός, τέτοιοι ώστε $e_{k_\alpha}, e_{k_\pi} \in Y$. Παρατηρούμε ότι αν $\mu \geq \frac{1}{2}$, είναι $\left\|(A-B)\big|_Y \frac{e_{k_\pi}+e_{k_\alpha}}{2}\right\| \geq \varepsilon + \delta$, ένω αν $\mu < \frac{1}{2}$ έχουμε ότι $\left\|(A-B)\big|_Y \frac{e_{k_\pi}-e_{k_\alpha}}{2}\right\| \geq \varepsilon + \delta$. Δηλαδή $\|(A-B)|_Y\| \geq \varepsilon + \delta$.

Παρατηρούμε ότι το $W$ αποτελείται από συμπαγείς τελεστές, επομένως το θεώρημα 5.30 μας εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός υπόχωρου πεπερασμένης συνδιάστασης $Y$, του $\ell_1$, ώστε $\|(A-B)|_Y\| < \varepsilon + \delta$. Επομένως είναι ανοιχτό το ερώτημα, αν το θεώρημα 5.31 ισχύει στην περίπτωση για $p = 1$, όπου ο $Y_\delta$ να είναι ένας υπόχωρος πεπερασμένης συνδιάστασης του $\ell_1$.

**Ορισμός 5.32.** *Έστω $X$ διανυσματικός χώρος, $(x_n)_n$ μια βάση του και $(k_n)_n$ μια γνησίως αύξουσα ακολουθία, μη αρνητικών ακεραίων. Τότε μια μη μηδενική ακολουθία $(y_n)_n \subset X$ καλείται **block**, ως προς την $(x_n)_n$, αν είναι της μορφής*

$$y_n = \sum_{i=k_n+1}^{k_{n+1}} \lambda_i x_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

**Παρατήρηση.** (1). Αν η $(y_n)_n$ είναι μια block ακολουθία, τότε $y_n \xrightarrow{w} 0$, αφού η ίδια συγκλίνει κατά συντεταγμένη στο μηδέν.

(2). Αν η $(y_n)_n \subset \ell_p$ είναι block ακολουθία, τότε $\|(\lambda_n y_n)_n\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^p \|y_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

**Ορισμός 5.33.** *Έστω $X$ διανυσματικός χώρος, $(x_n)_n$ μια βάση του και $y \in X$. Τότε ορίζουμε ως **φορέα** του $y$ το σύνολο*

$$\operatorname{supp}(y) = \{n : y_n \neq 0\}.$$

*Θα συμβολίζουμε $m(y) = \min(\operatorname{supp}(y))$ και $M(y) = \sup(\operatorname{supp}(y))$.*

*Απόδειξη του 5.31.* Έστω $\delta > 0$, θεωρούμε ότι για κάθε $N \in \mathbb{N}$ και κάθε $B \in W$ ισχύει ότι $\|(A-B)|_Y\| \geq \varepsilon + \delta$, όπου $Y = \langle\{e_n : n \geq N\}\rangle$. Επομένως, για κάθε $m \in \mathbb{N}$, υπάρχει $x \in B_{\ell_p}$ με $m(x) \geq m$ και $\|(A-B)x\| \geq \varepsilon + \frac{3\delta}{4}$.

Έστω $B_1, \ldots, B_\ell \in W$ με $W \subset \bigcup_{i=1}^{\ell} B(B_i, \frac{\delta}{4})$. Για κάθε $i$, κατασκευάζουμε την ακολουθία $(x_n^i)_n \subset \ell_p$, η οποία είναι block και $\|(A-B_i)x_n^i\| \geq \varepsilon + \frac{\delta}{2}$. Έστω $1 \leq i \leq \ell$, υπάρχει $x \in B_{\ell_p}$ με $\|(A-B_i)x\| \geq \varepsilon + \frac{3\delta}{4}$. Λόγω συνέχειας του $A - B_i$, υπάρχει $\delta' > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $x' \in B(x, \delta')$ να ισχύει ότι $\|(A-B_i)(x-x')\| \leq \frac{\delta}{4}$. Τότε επειδή ο $c_{00}$ είναι πυκνός στον $\ell_p$, υπάρχει $N_1^i \in \mathbb{N}$, ώστε $\|x - x_1^i\| < \delta'$, με $x_1^i = x|^{N_1^i}$. Δηλαδή $M(x_1^i) = N_1^i$ και

$$\left\|(A-B_i)x_1^i\right\| \geq \left\|(A-B_i)x\right\| - \left\|(A-B_i)(x-x_1^i)\right\| \geq \varepsilon + \frac{\delta}{2}.$$

Έστω ότι έχουμε ορίσει την $x_n^i$, τότε υπάρχει $y \in B_{\ell_p}$ ώστε $m(y) \geq M(x_n^i) + 1$ και $\|(A-B_i)y\| \geq \varepsilon + \frac{3\delta}{4}$. Άρα όμοια μπορούμε να ορίσουμε την $x_{n+1}^i = y|^{N_{n+1}^i}$ με $\|(A-B_i)x_{n+1}^i\| \geq \varepsilon + \frac{\delta}{2}$ και επιπλέον $m(x_{n+1}^i) = m(y) > M(x_n^i)$. Επομένως για κάθε $B \in B(B_i, \frac{\delta}{4})$, έχουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$\left\|(A-B)x_n^i\right\| \geq \left\|(A-B_i)x_n^i\right\| - \left\|(B-B_i)x_n^i\right\| \geq \varepsilon + \frac{\delta}{4}.$$

Θεωρούμε για κάθε $i$, ένα $\delta_i$-net της $B(B_i, \frac{\delta}{4})$, έστω $F_i = \{B_{i1}, \ldots, B_{iN_i}\}$, όπου κάθε τέτοιο net είναι πεπερασμένο λόγω της συμπάγειας του $W$ και τα $\delta_i$ θα επιλεγούν κατάλληλα στην συνέχεια. Επιπλέον για κάθε $i,j$, θα συμβολίζουμε ως $(y_n^{ij})_n$ την ακολουθία με $y_n^{ij} = (A-B_{ij})x_n^i$, $n \in \mathbb{N}$, και η οποία λόγω συνέχειας είναι ασθενώς μηδενική.

Για κάθε $i,j$ κατασκευάζουμε την ακολουθία $(z_n^{ij})_{n\in M}$, η οποία είναι block και τέτοια ώστε $\|y_n^{ij} - z_n^{ij}\| \leq \frac{1}{n}$, για κάθε $n \in M$, όπου $M \subset \mathbb{N}$ αριθμήσιμο. Έστω $1 \leq i \leq \ell$, $1 \leq j \leq N_i$ και $n_1 \in \mathbb{N}$, τότε με παρόμοια επιχειρήματα με προηγουμένως μπορούμε να ορίσουμε τη $z_{n_1}^{ij} \in c_{00}$ με $\|y_{n_1}^{ij} - z_{n_1}^{ij}\| \leq \frac{1}{n_1}$. Έστω ότι έχουμε ορίσει την $z_{n_k}^{ij}$, επειδή η $(y_n^{ij})_n$ συγκλίνει ασθενώς στο μηδέν, υπάρχει $n_{k+1} \in \mathbb{N}$, ώστε $\|y_{n_{k+1}}^{ij}|^{m(z_{n_k}^{ij})}\| < \frac{1}{2n_{k+1}}$ και $n_{k+1} > n_k$. Τότε ορίζουμε τη $z_{n_{k+1}}^{ij}$, η οποία είναι τελικά μηδενική και $\|y_{n_{k+1}}^{ij}|_{m(z_{n_k}^{ij})+1} - z_{n_{k+1}}^{ij}\| < \frac{1}{2n_{k+1}}$. Επομένως έχουμε ότι $\|y_{n_{k+1}}^{ij} - z_{n_{k+1}}^{ij}\| < \frac{1}{n_{k+1}}$ και $m(z_{n_{k+1}}^{ij}) > M(z_{n_{k+1}}^{ij})$. Συνεχίζοντας επαγωγικά, κατασκευάζουμε τη $(z_n^{ij})_{n\in M}$, όπου $M = \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$. Χρησιμοποιώντας ένα διαγώνιο επιχείρημα, μπορούμε να επιλέξουμε το $M$ κοινό για κάθε $i,j$.

Για κάθε $\varepsilon_1 > 0$ και κάθε επιλογή $j_1$, υπάρχει $K_1 \in M$ ώστε $\|y_n^{1j_1} - z_n^{1j_1}\| < \varepsilon_1$, για κάθε $n \geq K_1$. Θέτουμε $k_1 = \max_{j_1} K_1$. Όμοια, για κάθε $\varepsilon_2 > 0$ και κάθε επιλογή $j_2$, υπάρχει $K_2 \in M$ με $\|y_n^{2j_2} - z_n^{2j_2}\| < \varepsilon_2$, για κάθε $n \geq K_2$. Τότε επιλέγουμε $k_2 \in M$ με $k_2 \geq \max_{j_2} K_2$, ώστε $\min_{j_2} m(z_{k_2}^{2j_2}) > \max_{j_1} M(z_{k_1}^{1j_1})$ και $m(x_{k_2}^2) > M(x_{k_1}^1)$, αξιοποιώντας το γεγονός ότι οι $(z_n^{ij})_{n\in M}$ και $(x_n^i)_{n\in M}$ είναι block ακολουθίες. Με παρόμοιο τρόπο επιλέγουμε επαγωγικά τα $k_3, \dots, k_\ell$ ώστε για κάθε επιλογή $j_i$ και $\varepsilon_i$, οι ακολουθίες $(x_{k_i}^i)_{i=1}^{\ell}, (z_{k_i}^{ij_i})_{i=1}^{\ell}$ να είναι block και $\|y_{k_i}^{ij_i} - z_{k_i}^{ij_i}\| < \varepsilon_i$, για κάθε $i$. Τότε έχουμε ότι για κάθε $1 \leq i \leq \ell$ και $1 \leq j \leq N_i$

$$\left\|z_{k_i}^{ij}\right\| \geq \left\|y_{k_i}^{ij}\right\| - \left\|y_{k_i}^{ij} - z_{k_i}^{ij}\right\| \geq \varepsilon + \frac{\delta}{4} - \varepsilon_i.$$

Από το θεώρημα 1.13, υπάρχουν συνεχείς συνάρτησεις $f_i : W \to [0,1]$ με $\operatorname{supp}(f_i) \subset B_i$, για κάθε $1 \leq i \leq \ell$ και $\sum_{i=1}^{\ell} f_i = 1$. Για κάθε $B \in W$ ορίζουμε το

$$x(B) = \sum_{i=1}^{\ell} f_i^{\frac{1}{p}}(B) x_{k_i}^i$$

και παρατηρούμε ότι $x(B) \in B_{\ell_p}$ αφού

$$\|x(B)\| = \left(\sum_{i=1}^{\ell} f_i(B)\|x_{k_i}^i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\ell} f_i(B)\right)^{\frac{1}{p}} = 1.$$

Επιπλέον, λόγω συνέχειας των $f_i$, η απεικόνιση $B \mapsto x(B)$ είναι συνεχής.

Έστω $B \in W$, θέτουμε $I_B = \{i : B \in B(B_i, \frac{\delta}{4})\}$ και για κάθε $i \in I_B$ επιλέγουμε $1 \leq j_i \leq N_i$ τέτοιο ώστε $\|B - B_{ij_i}\| < \delta_i$. Αν $f_i(B) \neq 0$ τότε $i \in I_B$ και

$$\begin{aligned}
\left\|(A-B)x(B)\right\| &= \Big\| \sum_{i\in I_B} f_i^{\frac{1}{p}}(B)\big[(A-B)x_{k_i}^i\big]\Big\| \\
&\geq \Big\| \sum_{i\in I_B} f_i^{\frac{1}{p}}(B)\big[(A-B_{ij_i})x_{k_i}^i\big]\Big\| - \Big\| \sum_{i\in I_B} f_i^{\frac{1}{p}}(B)\big[(B-B_{ij_i})x_{k_i}^i\big]\Big\| \\
&\geq \Big\| \sum_{i\in I_B} f_i^{\frac{1}{p}}(B) y_{k_i}^{ij_i}\Big\| - \sum_{i\in I_B} f_i^{\frac{1}{p}}(B)\left\|(B-B_{ij_i})x_{k_i}^i\right\| \\
&\geq \Big\| \sum_{i\in I_B} f_i^{\frac{1}{p}}(B) y_{k_i}^{ij_i}\Big\| - \sum_{i\in I_B} f_i^{\frac{1}{p}}(B)\delta_i \\
&\geq \Big\| \sum_{i\in I_B} f_i^{\frac{1}{p}}(B) y_{k_i}^{ij_i}\Big\| - \sum_{i\in I_B} \delta_i \\
&\geq \Big\| \sum_{i\in I_B} f_i^{\frac{1}{p}}(B) z_{k_i}^{ij_i}\Big\| - \Big\| \sum_{i\in I_B} f_i^{\frac{1}{p}}(B)\big(y_{k_i}^{ij_i} - z_{k_i}^{ij_i}\big)\Big\| - \sum_{i\in I_B} \delta_i
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \Big\| \sum_{i\in I_B} f_i^{\frac{1}{p}}(B) z_{k_i}^{ij_i} \Big\| - \sum_{i\in I_B} f_i^{\frac{1}{p}}(B) \Big\| y_{k_i}^{ij_i} - z_{k_i}^{ij_i} \Big\| - \sum_{i\in I_B} \delta_i \\
&\geq \Big\| \sum_{i\in I_B} f_i^{\frac{1}{p}}(B) z_{k_i}^{ij_i} \Big\| - \sum_{i\in I_B} f_i^{\frac{1}{p}}(B) \varepsilon_i - \sum_{i\in I_B} \delta_i \\
&\geq \Big\| \sum_{i\in I_B} f_i^{\frac{1}{p}}(B) z_{k_i}^{ij_i} \Big\| - \sum_{i\in I_B} \varepsilon_i - \sum_{i\in I_B} \delta_i .
\end{aligned}
$$

Επομένως θέτοντας $\varepsilon_{\max} = \max_i \varepsilon_i$ και $\delta_{\max} = \max_i \delta_i$, έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\Big\|(A-B)x(B)\Big\| &\geq \Big\| \sum_{i\in I_B} f_i^{\frac{1}{p}}(B) z_{k_i}^{ij} \Big\| - \sum_{i\in I_B} (\varepsilon_i + \delta_i) \\
&\geq \Big( \sum_{i\in I_B} f_i(B) \Big\| z_{k_i}^{ij} \Big\|^p \Big)^{\frac{1}{p}} - \ell\, (\varepsilon_{\max} + \delta_{\max}) \\
&\geq \Big( \sum_{i\in I_B} f_i(B) \Big( \varepsilon + \frac{\delta}{4} - \varepsilon_i \Big)^p \Big)^{\frac{1}{p}} - \ell\, (\varepsilon_{\max} + \delta_{\max}) \\
&\geq \Big( \sum_{i\in I_B} f_i(B) \Big( \varepsilon + \frac{\delta}{4} - \varepsilon_{\max} \Big)^p \Big)^{\frac{1}{p}} - \ell\, (\varepsilon_{\max} + \delta_{\max}) \\
&\geq \Big( \varepsilon + \frac{\delta}{4} - \varepsilon_{\max} \Big) \Big( \sum_{i\in I_B} f_i(B) \Big)^{\frac{1}{p}} - \ell\, (\varepsilon_{\max} + \delta_{\max}) \\
&= \varepsilon + \frac{\delta}{4} - (\ell+1)\, \varepsilon_{\max} - \ell\, \delta_{\max}.
\end{aligned}
$$

Επιλέγοντας κατάλληλα τα $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{\ell}, \{\delta_i\}_{i=1}^{\ell}$, για κάθε $B \in W$ έχουμε ότι

$$
\Big\|(A-B)x(B)\Big\| \geq \varepsilon + \frac{\delta}{8}. \tag{$*$}
$$

Θεωρούμε την πλειότιμη απεικόνιση $\phi : W \twoheadrightarrow W$ με

$$
\phi(B) = \Big\{ B' \in W : \Big\|(A-B')x(B)\Big\| \leq \varepsilon \Big\}.
$$

Τότε για κάθε $B \in W$, επειδή $x(B) \in B_{\ell_p}$, από την υπόθεση η $\phi$ έχει μη κενές τιμές, οι οποίες είναι και κυρτές. Έστω $(B_n)_n, (B'_n)_n \subset W$ με $B_n \to B$ και $B'_n \to B'$ τέτοιες ώστε $B'_n \in \phi(B_n)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε

$$
\Big\|(A-B')x(B)\Big\| = \lim_{n\to\infty} \Big\|(A-B'_n)x(B_n)\Big\| \leq \varepsilon.
$$

Δηλαδή η $\phi$ έχει κλειστό γράφημα. Επομένως από το θεώρημα 4.17 υπάρχει $B \in W$ τέτοιο ώστε $B \in \phi(B)$, το οποίο είναι άτοπο λόγω της ($*$). □

**Παρατήρηση.** Η απόδειξη μπορεί να προσαρμοστεί κατάλληλα και στην περίπτωση κάθε απειροδιάστατου υπόχωρου του $\ell_p$, $1 < p < \infty$, ή του $c_0$.

## 5.5 Το θεώρημα Ham Sandwich.

Το θεώρημα Ham Sandwich εμφανίστηκε πρώτη φορά στο [45], προτάθηκε από τον Steinhaus και αποδείχτηκε από τον Banach στη τριδιάστατη περίπτωσή του, κάνοντας χρήση του θεωρήματος Borsuk-Ulam.

**Θεώρημα 5.34** (Ham Sandwich). *Έστω $K_1, \dots, K_d$ φραγμένα, Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$, τότε υπάρχει υπερεπίπεδο το οποίο χωρίζει κάθε $K_i$ σε δύο σύνολα ίσου μέτρου Lebesgue.*

*Απόδειξη.* Έστω $u = (u_0, \dots, u_n) \in S^n$, αν τουλάχιστον ένα από τα $u_1, \dots, u_n$ είναι μη μηδενικό, τότε αντιστοιχούμε στο $u$ τον ημίχωρο

$$h^+(u) = \{(x_1, \dots, x_n) \subset \mathbb{R}^n : u_1x_1 + \cdots + u_nx_n < u_0\}.$$

Επιπλέον $h^+((1, 0, \dots, 0)) = \mathbb{R}^n$ και $h^+((-1, 0, \dots, 0)) = \emptyset$. Παρατηρούμε ότι $h^+(-u) = X \setminus h^+(u)$. Για κάθε $1 \leq i \leq n$ θέτουμε $\mu_i(B) = \mu(B \cap K_i)$ και ορίζουμε την απεικόνιση $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ με

$$f(u) = (\mu_1(h^+(u)), \dots, \mu_n(h^+(u))$$

Η $f$ είναι συνεχής. Πράγματι, έστω $(u^k)_{k\in\mathbb{N}} \subset S^n$ και $u \in S^n$ με $u^k \to u$. Ορίζουμε ακολουθία $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ με $g_k = \mathbb{1}_{h^+(u^k)}$, $k \in \mathbb{N}$. Τότε $g_k \to g$ όπου $g = \mathbb{1}_{h^+(u)}$. Πράγματι, έστω $x \in h^+(u)$, δηλαδή $x_1u_1 + \cdots + x_nu_n < u_0$. Θέτουμε $\delta = u_0 - \sum_{i=1}^n u_ix_i$, τότε υπάρχει $N_1 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $k \geq N_1$

$$|u_i^k - u_i| \leq \frac{\delta}{2nx_i}.$$

Επομένως προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} u_1^kx_1 + \cdots + u_n^kx_n &< x_1(u_1 + \frac{\delta}{2nx_1}) + \cdots + x_n(u_n + \frac{\delta}{2nx_n}) \\ &= u_1x_1 + \cdots + u_nx_n + \frac{\delta}{2} \\ &= u_1x_1 + \cdots + u_nx_n + \delta - \frac{\delta}{2} = u_0 - \frac{\delta}{2} = u_0^k. \end{aligned}$$

Άρα για κάθε $k \geq N_1$ ισχύει ότι $x \in h^+(u^k)$. Έστω $x \notin h^+(u)$, τότε θέτοντας $\delta = \sum_{i=1}^n u_ix_i - u_0$, καταλήγουμε όμοια ότι υπάρχει $N_2 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $k \geq N_2$ να ισχύει ότι $x \notin h^+(u^k)$.

Από το θεώρημα 4.23 υπάρχει $u_0 \in S^n$ τέτοιο ώστε $f(u_0) = f(-u_0)$. Παρατηρούμε επιπλέον ότι $u_0 \neq (1, 0, \dots, 0)$ και $u_0 \neq (-1, 0, \dots, 0)$ αφού ισχύει ότι $f((1, 0, \dots, 0)) \neq f((-1, 0, \dots, 0))$. Επομένως το ζητούμενο υπερεπίπεδο είναι το σύνορο του $h^+(u_0)$. □

## 5.6 Ύπαρξη υπόχωρων πεπερασμένης διάστασης με καλή unconditional βάση.

Το θεώρημα 5.39 αποτελεί μια συνέπεια του θεωρήματος του Dvoretzky [15]. Ο J. Elton [16] έδωσε μια απλή, αλλά κατασκευαστική απόδειξη του, χρησιμοποιώντας το θεώρημα Borsuk-Ulam.

**Λήμμα 5.35.** *Έστω $X$ διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει $\varepsilon$-net $\Delta$ της $B_X$, με $|\Delta| \leq \left(\frac{3}{\varepsilon}\right)^n$, όπου $n = \dim X$.*

*Απόδειξη.* Έστω $\Delta$, ένα μεγιστικό $\varepsilon$-διαχωρισμένο υποσύνολο της $B_X$. Αν $y_1, y_2 \in \Delta$, τότε η τομή των $B(y_1, \frac{\varepsilon}{2})$, $B(y_2, \frac{\varepsilon}{2})$ είτε είναι κενή, είτε περιέχει το πολύ σημεία της τομής των συνόρων τους. Επιπλέον και τα δύο αυτά συνολά περιέχονται στο $(1 + \frac{\varepsilon}{2})B_X$ και άρα

$$\begin{aligned}
&\mathrm{vol}\Big(\frac{\varepsilon}{2}B_X\Big)\,|\Delta| \leq \mathrm{vol}\Big(\Big(1+\frac{\varepsilon}{2}\Big)B_X\Big)\\
\Longrightarrow\ &\Big(\frac{\varepsilon}{2}\Big)^n |\Delta|\,\mathrm{vol}(B_X) \leq \Big(1+\frac{\varepsilon}{2}\Big)^n \mathrm{vol}(B_X)\\
\Longrightarrow\ &|\Delta| \leq \frac{\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^n}{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n} = \Big(1+\frac{2}{\varepsilon}\Big)^n \leq \Big(\frac{3}{\varepsilon}\Big)^n.
\end{aligned}$$

□

**Λήμμα 5.36.** *Έστω $X$ χώρος Banach, $\varepsilon > 0$ και $Y, Z$, υπόχωροι του $X$ πεπερασμένης διάστασης, τέτοιοι ώστε*

$$\dim Y < \log_b \dim Z, \quad b = \frac{3}{\varepsilon^2}.$$

*Τότε υπάρχει $z \in Z$, με $\|z\| = 1$, ώστε για κάθε $y \in Y$*

$$\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\|y - z\| \leq \|y + z\| \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\|y - z\|.$$

*Απόδειξη.* Από το λήμμα 5.35 υπάρχει $\varepsilon^2$-net $\Delta$ για την $B_Y$ με $|\Delta| \leq (\frac{3}{\varepsilon^2})^m$, όπου $m = \dim Y$. Τότε το $\frac{1}{\varepsilon}\Delta$ είναι $\varepsilon$-net της $\frac{1}{\varepsilon}B_Y$. Πράγματι, αν $x \in \frac{1}{\varepsilon}B_Y$, τότε υπάρχει $x_0 \in B_Y$ με $x = \frac{1}{\varepsilon}x_0$. Επιπλέον υπάρχει $y_0 \in \Delta$ με $\|x_0 - y\| < \varepsilon^2$ και άρα για $y = \frac{1}{\varepsilon}y_0 \in \frac{1}{\varepsilon}\Delta$, ισχύει ότι $\|x - y\| = \frac{1}{\varepsilon}\|x_0 - y_0\| < \varepsilon$. Τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
&\dim Y < \log_b \dim Z\\
\Longrightarrow\ &m < \log_b \dim Z\\
\Longrightarrow\ &\Big(\frac{3}{\varepsilon^2}\Big)^m < \dim Z.
\end{aligned}$$

Έστω $n = dimZ$, προσθέτουμε στοιχεία της $B_Y$ στο $\Delta$ αν αυτό απαιτείται ώστε $|\Delta| = n-1$. Δηλαδή $\Delta = \{y_i\}_{i=1}^{n-1}$ και ορίζουμε απεικόνιση $\Phi : S_Z \to \mathbb{R}^{n-1}$ με

$$\Phi(z) = (\|y_i - z\| - \|y_i + z\|)_{i=1}^{n-1}.$$

Από το θεώρημα 4.23 υπάρχει $z_0 \in Z$ με $\|z_0\| = 1$, τέτοιο ώστε

$$\Phi(z_0) = 0 \Leftrightarrow \|y_i - z_0\| = \|y_i + z_0\|, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Τότε για κάθε $1 \le i \le n-1$

$$\begin{aligned} 1 = \|z_0\| &= \frac{1}{2}\|y_i + z_0 - (y_i - z_0)\| \\ &\le \frac{1}{2}(\|y_i + z_0\| + \|y_i - z_0\|) \\ &= \|y_i + z_0\| = \|y_i - z_0|. \end{aligned}$$

Έστω $y \in \frac{1}{\varepsilon}B_Y$, επιλέγουμε $y_{i_0} \in \frac{1}{\varepsilon}\Delta$ τέτοιο ώστε $\|y_{i_0} - y\| < \varepsilon$ και τότε

$$\begin{aligned} \|y + z_0\| &\le \|y_{i_0} + z_0\| + \|y - y_{i_0}\| \\ &\le \|y_{i_0} + z_0\| + \varepsilon = \|y_{i_0} - z_0\| + \varepsilon \\ &\le \|y - z_0\| + \|y - y_{i_0}\| + \varepsilon \\ &\le \|y - z_0\| + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Έχουμε ότι

$$1 + \varepsilon \le \|y_{i_0} + z_0\| + \varepsilon \le \|y - z_0\| + 2\varepsilon \implies \|y - z_0\| \ge 1 - \varepsilon$$

και επομένως

$$\|y + z_0\| \le \|y - z_0\| + 2\varepsilon\frac{\|y - z_0\|}{1 - \varepsilon} = \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}\|y - z_0\|.$$

Όμοια δείχνουμε ότι

$$\begin{aligned} &1 + \varepsilon \le \|y_i - z_0\| + \varepsilon \le \|y + z_0\| + 2\varepsilon \\ \implies &\|y + z_0\| \ge 1 - \varepsilon \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} &\|y - z_0\| \le \|y + z_0\| + 2\varepsilon \\ \implies &\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}\|y - z_0\| \le \|y + z_0\|. \end{aligned}$$

Έστω $y \notin \frac{1}{\varepsilon}B_Y$, δηλαδή $\|y\| \geq \frac{1}{\varepsilon}$, τότε

$$\|y + z_0\| \geq \|y\| - \|z_0\| \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\|y + z_0\|} \leq \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}$$

και

$$\|y - z_0\| \geq \|y\| - \|z_0\| \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\|y - z_0\|} \leq \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}.$$

Επομένως, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} &\|y + z_0\| - \|y - z_0\| \leq \|y\| + \|z_0\| - (\|y\| - \|z_0\|) = 2 \\ \Longrightarrow &\frac{\|y + z_0\|}{\|y - z_0\|} \leq \frac{2}{\|y - z_0\|} + 1 \leq \frac{2\varepsilon}{1 - \varepsilon} + 1 = \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \end{aligned}$$

και όμοια

$$\begin{aligned} &\|y + z_0\| - \|y - z_0\| \geq -2 \\ \Longrightarrow &\frac{\|y - z_0\|}{\|y + z_0\|} \leq \frac{2}{\|y + z_0\|} + 1 \leq \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}. \end{aligned}$$

□

**Ορισμός 5.37.** *Έστω $X$ χώρος Banach , τότε μια βάση $(x_n)_n$ του $X$ καλείται* ***unconditional*** *αν για κάθε μετάθεση $\sigma$ του $\mathbb{N}$ ισχύει ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ συγκλίνει. Ισοδύναμα αν για κάθε $(\varepsilon_n)_n \subset \{-1, 1\}$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n$ συγκλίνει.*

**Ορισμός 5.38.** *Έστω $X$ χώρος Banach , τότε μια βάση $(x_n)_n$ του $X$ θα λέμε ότι έχει unconditional σταθερά $K$ αν για κάθε $(\varepsilon_n)_n \subset \{-1, 1\}$ και $(\lambda_n)_n \in \mathbb{R}$*

$$\Big\| \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \lambda_n x_n \Big\| < K \Big\| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \Big\|.$$

**Θεώρημα 5.39.** *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $K > 1$, υπάρχει $N = N(n, K) < \infty$ ώστε κάθε χώρος Banach $X$, με $\dim X \geq N$, να περιέχει υπόχωρο διάστασης $n$ και ο οποίος έχει βάση με unconditional σταθερά μικρότερη ίση του $K$.*

*Απόδειξη.* Επιλέγουμε $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε

$$K = \left(\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}\right)^n$$

Θέτουμε $a = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$, $b = \frac{3}{\varepsilon^2}$ και ορίζουμε τη σχέση

$$c_1 \sim_a c_2 \Leftrightarrow \frac{1}{a} \leq \frac{c_1}{c_2} \leq a, \quad c_1, c_2 > 0.$$

Έστω $X_1$ υπόχωρος του $X$ με $\dim X_1 = \left[\log_b \dim X\right]$, τότε από το λήμμα 5.36, υπάρχει $z_1 \in X$ με $\|z_1\| = 1$, τέτοιο ώστε

$$\|x + z_1\| \sim_a \|x - z_1\|, \quad \forall x \in X_1.$$

Έστω $X_2$ υπόχωρος του $X_1 + \langle\{z_1\}\rangle$ τέτοιος ώστε $z_1 \in X_2$ και $\dim X_2 = [\log_b \dim X_1]$. Τότε υπάρχει $z_2 \in X_1$ με $\|z_2\| = 1$, τέτοιο ώστε

$$\|x + z_2\| \sim_a \|x - z_2\|, \quad \forall x \in X_2.$$

Θεωρούμε τον $X_3$, υπόχωρο του $X_2 + \langle\{z_2\}\rangle$, τέτοιον ώστε $z_1, z_2 \in X_3$ και με $\dim X_3 = [\log_b \dim(X_2 - 1)]$. Τότε υπάρχει $z_3 \in X_1 \cap X_2$ με $\|z_3\| = 1$, ώστε

$$\|x + z_3\| \sim_a \|x - z_3\|, \quad \forall x \in X_3.$$

Επομένως επαγωγικά, έχοντας ορίσει τον $X_k$ παρατηρούμε ότι

$$X_k \subset X_{k-1} + \langle\{z_{k-1}\}\rangle \subset \ldots \subset X_1 + \langle\{z_1\}\rangle + \cdots + \langle\{z_{k-1}\}\rangle,$$

δηλαδή $\dim(X_1 \cap \cdots \cap X_k) \geq \dim X_k - (k-1)$. Θεωρούμε τον $X_{k+1}$ υπόχωρο του $X_k + \langle\{z_n\}\rangle$ τέτοιο ώστε $z_i \in X_{k+1}$, $i = 1, \ldots, k$ και με διάσταση

$$\dim X_{k+1} = [\log_b(\dim X_k - (k-1)].$$

Τότε υπάρχει $z_{k+1} \in X_1 \cap \cdots \cap X_k$ με $\|z_{k+1}\| = 1$, τέτοιο ώστε

$$\|x + z_{k+1}\| \sim_a \|x - z_{k+1}\|, \quad \forall x \in X_{k+1}.$$

Επιλέγουμε το $N = \dim X$ ώστε

$$[\log_b \ldots [\log_b[\log_b N] - 1] - 2] \ldots - (n-2)] \geq 1,$$

όπου εμφανίζονται $n$ επαναλήψεις του $\log_b$ στην παραπάνω έκφραση.

Η $\{z_i\}_{i=1}^n$ είναι η ζητούμενη βάση. Πράγματι, παρατηρούμε αρχικά ότι

$$\{z_1, \ldots, z_{k-1}, z_{k+1}, \ldots, z_n\} \subset X_k, \quad k = 1, \ldots, n$$

και για κάθε $x \in K$

$$\|x + z_k\| \sim_a \|x - z_k\|.$$

Έστω $\{\lambda_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$, τότε

$$\Big\| \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i \Big\| = \Big\| \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \lambda_i z_i + \lambda_k z_k \Big\|$$

$$
\begin{aligned}
&= |\lambda_k| \Big\| \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_k} z_i + \lambda_k z_k \Big\| \\
&\sim_a |\lambda_k| \Big\| \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_k} z_i - \lambda_k z_k \Big\| \\
&= \Big\| \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \lambda_i z_i - \lambda_k z_k \Big\|
\end{aligned}
$$

Επομένως τελικά επαγωγικά έχουμε ότι για κάθε $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n \subset \{-1, 1\}$

$$
\Big\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i \Big\| \sim_{a^n} \Big\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \lambda_i z_i \Big\| \implies \Big\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \lambda_i z_i \Big\| \leq a^n \Big\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i \Big\| = K \Big\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i \Big\|
$$

Έστω $F \subset \{1, \ldots, n\}$, τότε

$$
\begin{aligned}
\Big\| \sum_{i \in F} \lambda_i z_i \| &= \frac{1}{2} \Big\| \sum_{i \in F} \lambda_i z_i + \sum_{i \in F} \lambda_i z_i + \sum_{i \in F^c} \lambda_i z_i - \sum_{i \in F^c} \lambda_i z_i \Big\| \\
&\leq \frac{1}{2} \Bigg( \Big\| \sum_{i \in F} \lambda_i z_i + \sum_{i \in F^c} \lambda_i z_i \Big\| + \Big\| \sum_{i \in F} \lambda_i z_i - \sum_{i \in F^c} \lambda_i z_i \Big\| \Bigg) \\
&\leq \frac{1}{2} \Bigg( K \Big\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i \Big\| + K \Big\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i \Big\| \Bigg) = \Big\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i \Big\|
\end{aligned}
$$

Επομένως αν $\sum_{i=1}^n \lambda_i z_i = 0$ τότε $\lambda_i = 0$, για κάθε $i = 1, \ldots, n$ και άρα τα $\{z_i\}_{i=1}^n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. □

# Αναφορές.


[1] http://math.mit.edu/~fox/MAT307-lecture03.pdf.

[2] https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~marin/une_autre_crypto/Livres/Fathi-Plane_topology/chap1.pdf.

[3] http://old.mate.polimi.it/viste/pagina_personale/pp/121/FPT.pdf.

[4] C. Aliprantis and K. Border. *Infinite dimensional analysis*. Springer, 2006.

[5] C. Aliprantis and O. Burkinshaw. *Principles of real analysis*. Academic Press, 1998.

[6] P. Bohl. Über die bewegung eines mechnischen systems in der nähe einer gleichgewichtslage. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 127:179–276, 1904.

[7] H. F. Bohnenblust and S. Karin. *Contributions to the Theory of Games*, volume 24. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1950.

[8] F. Bonsall and K.B. Vedak. Lectures on some fixed point theorems of functional analysis. (26), 1962.

[9] A. Borobia and U. Trías. A geometric proof of the perron-frobenius theorem. *Revista Matemática de la Universidad Complutense de Madrid*, 5(1):57–63, 1992.

[10] K. Borsuk. Drei sätze über die n-dimensionale euklidische sphäre. *Fund. Math.*, 20:177–190, 1933.

[11] L.E.J. Brouwer. Über abbildung von mannigfaltigkeiten. *Mathematische Annalen*, 71:97–115, 1911.

[12] Mahlon M. Day. Fixed-point theorems for compact convex sets. *Illinois J. Math.*, 5(4):585–590, 12 1961.

[13] M.M. Day. Ergodic theorems for abelian semigroups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 51:399–412, 1942.

[14] M.M. Day. Amenable semigroups. *Illinois J. Math.*, 1:509–544, 1957.

[15] A. Dvoretzky. Some results on convex bodies and banach spaces. *Proc. Symp. on Linear Spaces*, 1961.

[16] J. Elton. On the existence of finite-dimensional subspaces with good unconditional basis. *Longhorn Notes, Texas Functional Analysis Seminar*, 1982-1983.

[17] Per Enflo. On the invariant subspace problem for banach spaces. *Acta Mathematica*, 158(1):213–313, 1987.

[18] K. Fan. Fixed-point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 38(2):121–126.

[19] K. Fan. A generalization of tychonoff's fixed point theorem. *Mathematische Annalen*, 142:305–310, 1961.

[20] K. Fan. Extensions of two fixed point theorems of f.e. browder. *Mathematische Zeitschrift*, 112:234–240, 1969.

[21] I.L. Glicksberg. A further generalization of the kakutani fixed point theorem, with application to nash equilibrium points. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 3(1):170–174, 1952.

[22] A. Granas and J. Dugundji. *Fixed point theory*. Springer, New York London, 2003.

[23] F.P. Greenleaf. *Invariant means on topological groups and their applications*. Van Nostrand mathematical studies. Van Nostrand Reinhold Co., 1969.

[24] M.J. Hadamard. Sur quelques applications de l'indice de kronecker. 1910.

[25] S. Kakutani. Two fixed-point theorems concerning bicompact convex sets. *Proc. Imp. Acad.*, 14(7):242–245, 1938.

[26] S. Kakutani. A generalization of brouwer's fixed point theorem. *Duke Math. J.*, 8(3):457–459, 09 1941.

[27] V.L. Klee. Some topological properties of convex sets. *Transactions of the American Mathematical Society*, 78:30–45, 1955.

[28] B. Knaster, C. Kuratowski, and S. Mazurkiewicz. Ein beweis des fixpunktsatzes für n-dimensionale simplexe. *Fundamenta Mathematicae*, 14(1):132–137, 1929.

[29] V. I. Lomonosov. Invariant subspaces for the family of operators which commute with a completely continuous operator. *Functional Analysis and Its Applications*, 7(3):213–214, 1973.

[30] L. Lyusternik and S. Shnirel'man. Topological methods in variational problems. *Issledowatelskiĭ Institut Matematiki i Mechaniki pri O. M. G. U.*, pages 23–25, 1930.

[31] A. Markov. Quelques théorèmes sur les ensembles abéliens. *Doklady Akademii Nauk*, 10:311–314, 1936.

[32] J. Matoušek. *Using the Borsuk-Ulam theorem*. Springer, 2003.

[33] C. Miranda. Un'osservazione su una teorema di brouwer. *Boll. Un. Mat. Ital.*, 3:11–16, 1941.

[34] J.F. Nash. Equilibrium points in n-person games. *Proceedings of the National Academy of Science*, 36:48–49, 1950.

[35] A.L.T. Paterson. *Amenability*. Mathematical surveys and monographs. American Mathematical Soc., 1988.

[36] H. Poincaré. Sur certaines solutions particulières du problème de trois corps. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 97:251–252, 1883.

[37] H. Poincaré. Sur certaines solutions particulières du problème de trois corps. *Bull. Astronomique*, 1:65–74, 1884.

[38] H. L. Royden. *Real analysis*. Macmillan Collier Macmillan, 1988.

[39] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, 1987.

[40] V. Runde. *Lectures on amenability*. Springer, Berlin New York, 2002.

[41] J. Schauder. Der fixpunktsatz in funktionalraumen. *Studia Mathematica*, 2(1):171–180, 1930.

[42] D.R. Smart. *Fixed point theorems*. Cambridge University Press, Cambridge etc, 1974.

[43] E. Sperner. Neuer beweis für die invarianz der dimensionszahl und des gebietes. 1928.

[44] E. Sperner. Emanuel fifty years of further development of a combinatorial lemma. *Numerical solution of highly nonlinear problems (Sympos. Fixed Point Algorithms and Complementarity Problems*, pages 183–197, 199–217, 1980.

[45] Hugo Steinhaus. A note on the ham sandwich theorem. *Mathesis Polska*, pages 26–28, 1938.

[46] A. W. Tucker. Some topological properties of disk and sphere. *Proceedings of the First Canadian Mathematical Congress*, page 285–309, 1946.

[47] A. Tychonoff. Ein fixpunktsatz. *Mathematische Annalen*, 111:767–776, 1935.

[48] S. Wagon. *The Banach-Tarski Paradox*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 1993.

[49] D. Werner. A proof of the markov-kakutani fixed point theorem via the hahn-banach theorem. *Extracta Math*, 8:37–38, 1993.

[50] S. Willard. *General Topology*. Addison-Wesley Pub. Co, 1970.

[51] M. Yoseloff. Topologic proofs of some combinatorial theorems. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 17(1):95 – 111, 1974.

[52] G. Yuan. *KKM theory and applications in nonlinear analysis*. M. Dekker, New York, 1999.