



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
**ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**  
**ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ**

Θεωρητική διερεύνηση της συμπεριφοράς  
υπερελαστικών χωροδικτυωμάτων με μεγάλες  
παραμορφώσεις

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟΥ

Μπεντούρ Γιούνη

**Για τη Σχολή Πολιτικών Μηχανικών,**

**Ακαδημαϊκό Έτος 2015-2016**

**Επιβλέπων:** Κωνσταντίνος Σπηλιόπουλος  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Νοέμβριος 2016

Θα ήθελα να ευχαριστήσω από καρδιάς τον καθηγητή Κύριο Κωνσταντίνο Σπηλιόπουλο τόσο για την στήριξη που μου πρόσφερε για την διεκπεραίωση αυτής της εργασίας, αλλά κυρίως για την διαρκή και αμέριστη πίστη που έχει για τις δυνάμεις μου.



## Abstract

*A truss is defined as a three dimensional continuum whose kinematics, kinetics and constitutive behavior are governed by only one of its dimensions. The longitudinal dimension is the controlling dimension of the truss and it readily assumed to have the longest spatial extent. Thus, in essence the truss is a one-dimensional continuum, augmented with certain relations describing the kinematics and kinetics in the other two dimensions, as functions of the behavior of the controlling dimension. It is because of these relations that one can describe the truss as being a semi- one-dimensional continuum rather than simply one-dimensional.*

*In this treatise we present a comprehensive theory of hyperelastic trusses, i.e. trusses that undergo elastic deformations of any magnitude. The fundamental building blocks of the theory rest on the concepts and ideas found in the general theory of continuum mechanics. In the process of applying the theory of continuum mechanics to this semi-one dimensional continuum, we had to clarify various delicate theoretical issues pertaining the concept of work conjugacy of the various stress and strain measures. In addition, we used some concepts and ideas of the Differential Geometry of Manifolds in order to separate the cross section and the longitudinal directions, and unite them so as to show the new behavior of the truss when large deformations appear. Moreover, we were able to define in the most fundamental way, the differences between the Updated and Total Lagrangian description. Finally, it is found that the assumptions concerning the kinematics of the cross sectional dimensions of the truss are highly related to the constitutive law utilized and consequently, different cross sectional kinematic assumptions lead to different structural behavior of truss structures.*

## Περίληψη

Ως δικτύωμα ορίζεται το τρισδιάστατο συνεχές του οποίου η κινηματική, κινητική, και καταστατική συμπεριφορά καθορίζεται μόνο από μια εκ των διαστάσεων του. Η διαμήκης διεύθυνση είναι η κύρια, και είναι λογικό να υποθέσουμε ότι έχει την μεγαλύτερη χωρική έκταση. Έτσι στην ουσία, το δικτύωμα είναι ένα μονοδιάστατο συνεχές, επαυξημένο με συγκεκριμένες σχέσεις της κινηματικής και της κινητικής του στις άλλες δύο διευθύνσεις, που είναι συναρτήσεις που εμπλέκουν την συμπεριφορά της κύριας διεύθυνσης.

Σε αυτήν την εργασία, παρουσιάζουμε μια κατανοητή θεωρία υπερελαστικών δικτυωμάτων, δηλαδή δικτυωμάτων που υπόκεινται σε ελαστικές παραμορφώσεις οποιουδήποτε μεγέθους. Οι θεμελιώδεις δομικοί λίθοι αυτής της θεωρίας βασίζονται σε ιδέες της γενικής θεωρίας της Μηχανικής του Συνεχούς Μέσου προκειμένου να πετύχουμε μια σύζευξη τάσεων και τροπών σε θεωρία μεγάλων παραμορφώσεων. Ακόμη χρησιμοποιήθηκαν στοιχεία Διαφορικής Γεωμετρίας Πολλαπλοτήτων με στόχο να αποχωριστούν η έννοια της διατομής με την διαμήκη διεύθυνση του δικτυώματος, και να ενωθούν με τέτοιο τρόπο ώστε να αναδειχθεί η νέα συμπεριφορά του δικτυώματος σε μεγάλες παραμορφώσεις. Επιπλέον είμαστε σε θέση να ορίσουμε με τον πιο θεμελιώδη τρόπο τις διαφορές μεταξύ της Βελτιωμένης και Ολικής περιγραφής Lagrange. Τέλος, βρίσκουμε ότι οι υποθέσεις που αφορούν την κινηματική των διαστάσεων της διατομής είναι στενά συνδεδεμένες με τους καταστατικούς νόμους που χρησιμοποιούνται, και συνεπώς διαφορετικές υποθέσεις για την συμπεριφορά της διατομής οδηγούν σε διαφορετική δομική συμπεριφορά των κατασκευών με δικτύωματα.

## Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1 .....	8
1.1 Ορισμός του δικτύωματος σε επίπεδο πολλαπλότητας .....	8
Κεφάλαιο 2: Κινηματική .....	10
2.1 Εμφυτεύσεις της μονοδιάστατης υποπολλαπλότητας $s_1$ στον Ευκλείδειο χώρο .....	10
2.1.1 Θεώρημα της Αντίστροφης Απεικόνισης .....	11
2.2 Διάφορες παραμετρικές αναπαραστάσεις της εμφυτευμένης $s_1$ υποπολλαπλότητας .....	13
2.3 Περιγραφή της εμφυτευμένης $s_1$ υποπολλαπλότητας σύμφωνα με κάποιον ενδιάμεσο σηματισμό .....	15
2.4 Μετασχηματισμοί μεταξύ καθολικών και τοπικών πλαισίων συντεταγμένων .....	18
2.5 Εμφυτεύσεις της δισδιάστατης υποπολλαπλότητας $s_2, s_3$ στον Ευκλείδειο χώρο .....	27
2.6 Περιγραφή της εμφυτευμένης $s_2$ - $s_3$ υποπολλαπλότητας σύμφωνα με κάποιον ενδιάμεσο σηματισμό .....	36
2.7 Εμφυτεύσεις της τρισδιάστατης πολλαπλότητας – Ένωση των εμφυτευμένων υποπολλαπλοτήτων .....	43
2.8 Περιγραφή εμφυτευμένης πολλαπλότητας σύμφωνα με κάποιον ενδιάμεσο σηματισμό .....	50
Κεφάλαιο 3 .....	59
3.1 Το gradient της παραμόρφωσης (κλίση παραμόρφωσης) .....	59
3.2 Το θεώρημα της πολικής ανάλυσης .....	66
Κεφάλαιο 4 .....	75
4.1 Στοιχεία Τανυστικού λογισμού .....	75
4.2 Η τρισδιάστατη Ελαστικότητα στο δίκτυωμα. Τροπή-Μέγεθος μέτρησης της παραμόρφωσης .....	79
4.3 Το δίκτυωμα μέσα από χρονική περιγραφή .....	84
Κεφάλαιο 5: Κινητική του δικτύωματος-Καταστατικοί νόμοι .....	93
5.1 Η τάση Cauchy και ο κινητικός ορισμός του δικτύωματος .....	93
5.2 Ισορροπία Μηχανικής Ενέργειας- Ισχύς τάσης .....	95
5.3 Καταστατικοί νόμοι- Σύζευξη και καταστατικές σχέσεις, συνοριακές συνθήκες και κινηματικές δεσμεύσεις .....	96
5.4 Τροπική ενέργεια του δικτύωματος και σχέσεις κλειστής μορφής .....	105
Συμπεράσματα .....	109

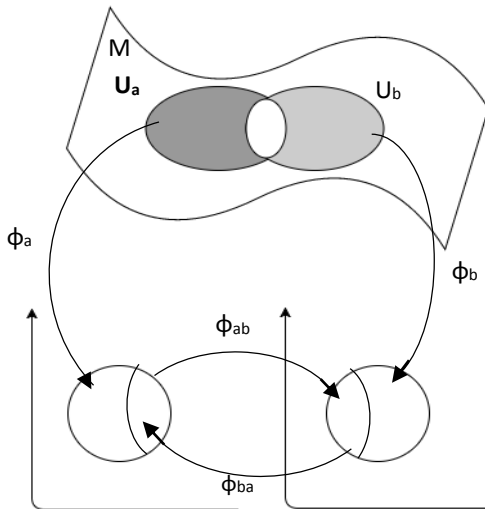


# Κεφάλαιο 1

## 1.1 Ορισμός του δικτυώματος σε επίπεδο πολλαπλότητας

Όπως σε κάθε έννοια η οποία έχει μία αφηρημένη μαθηματική σημασία, έτσι και για τον ορισμό του δικτυώματος σε επίπεδο πολλαπλότητας θα συνοδεύεται και από τον αντίστοιχο μαθηματικό ορισμό (για να αποφευχθεί κατά το δυνατό σύγχυση και για ακόμα μεγαλύτερη κατανόηση των συμβολισμών που θα χρησιμοποιηθούν).

Ορισμός: Μία  $n$ -διάστατη λεία πολλαπλότητα  $M$  είναι ένας τοπολογικός χώρος Hausdorff με μία αριθμήσιμη βάση, εφοδιασμένος με ένα μέγιστο λείο άτλα. Ο παραπάνω άτλας περιέχει μία οικογένεια χαρτών  $\phi_\alpha: U_\alpha \rightarrow U'_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ , έτσι ώστε η ένωση όλων των  $U_\alpha$  να είναι ένα ανοιχτό κάλυμμα της  $M$ , τα  $U'_\alpha$  ανοιχτά υποσύνολα του  $\mathbb{R}^n$ , οι χάρτες  $\phi_\alpha$  να είναι ομοιομορφισμοί, (συνεχής συνάρτηση μεταξύ των δύο τοπολογικών χώρων  $M$  και  $\mathbb{R}^n$  που έχει συνεχή αντιστροφή) και κάθε αλλαγή χαρτών  $\phi_{ab} = \phi_b \circ \phi_a^{-1}: \phi_a(U_\alpha \cap U_b) \rightarrow (U_\alpha \cap U_b)$  να είναι λεία απεικόνιση με την ευκλείδεια έννοια τότε λέμε ότι οι χάρτες σχετίζονται με λείο τρόπο μεταξύ τους. Με τον όρο μέγιστο εννοούμε ότι κάθε χάρτης της  $M$ , ο οποίος σχετίζεται με λείο τρόπο με όλους τους άλλους χάρτες, περιέχεται στον άτλαντα.



Ορισμός: Έστω  $M, N$  δύο πολλαπλότητες. Αν η απεικόνιση  $f: M \rightarrow N$  είναι λεία και σε κάθε σημείο  $\mu \in M$  το διαφορικό  $df$  είναι 1-1 τότε λέγεται εμβάπτιση.

Στα παρακάτω θα χρησιμοποιηθεί πολύ ο όρος εμφύτευση οπότε ας τον ορίσουμε. Μία 1-1 εμβάπτιση  $f: M \rightarrow N$  μεταξύ δύο λείων πολλαπλοτήτων καλείται εμφύτευση αν η επαγόμενη απεικόνιση  $M \rightarrow f(M) \subset N$  είναι ένας ομοιομορφισμός από την  $M$  στην εικόνα  $f(M) \subset N$ .

Τέλος, όπως θα δοθεί και στον “μαθηματικό” ορισμό του δικτυώματος παρακάτω, υπάρχει η απαίτηση η πολλαπλότητα να είναι διαφορίσιμη.

Αυτό ικανοποιείται αν απαιτήσουμε στον παραπάνω ορισμό της πολλαπλότητας να εξοπλιστεί με μία ισοδύναμη τάξη ατλάντων των οποίων οι χάρτες να είναι όλοι διαφορίσιμοι. Θα θεωρήσουμε λείες πολλαπλότητες, όπου η παραπάνω τάξη είναι  $\infty$ . Και καταλήγουμε στον παρακάτω ορισμό.

Μαθηματικώς, κάθε σώμα ορίζεται ως μία τριών διαστάσεων διαφορίσιμη πολλαπλότητα, τα στοιχεία της οποίας ονομάζονται σωματίδια. Σε κάθε τέτοιο σωματίδιο  $\mathcal{P}$  αντιστοιχίζουμε με αμφιμονοσήμαντο τρόπο μία τριπλέτα πραγματικών αριθμών  $(s_1, s_2, s_3)$



που παίζουν το ρόλο των παραμέτρων. Έτσι δημιουργείται μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ σωματιδίων και τριπλετών όπως  $\mathcal{P} = \mathcal{P}(s_1, s_2, s_3)$ . (1)

Με άλλα λόγια η (1) μας υποδεικνύει ότι οι παραπάνω συντεταγμένες είναι στην πολλαπλότητα.

Όταν θεωρούμε ένα δικτύωμα, θεωρούμε μία ευθύγραμμη πρισματική λεπτή ράβδο της οποίας η διαμήκης διεύθυνση είναι κατά πολύ μεγαλύτερη των διαστάσεων της διατομής χωρίς όμως αυτό να σημαίνει ότι η διατομή πρέπει να είναι κυκλική αρκεί όμως η επιφάνεια της διατομής να είναι πάντοτε κάθετη στο διαμήκη άξονα του μέλους. Αξίζει να σχολιαστεί ότι αυτός ο αυστηρός μαθηματικός ορισμός είναι απαραίτητος για το δικτύωμα, παρέχει ωστόσο ένα γόνιμο έδαφος για τη μελέτη πιο περίπλοκων στοιχείων.

Στο εξής όταν αναφερόμαστε στη διαμήκη διεύθυνση θα θεωρούμε την παράμετρο  $s_1$  και για τις διευθύνσεις της διατομής τις  $s_2, s_3$  (παρόλο που οι έννοιες του μήκους και της διατομής δεν έχουν οριστεί σε επίπεδο πολλαπλότητας).

Να αναφέρουμε κάτι σημαντικό:

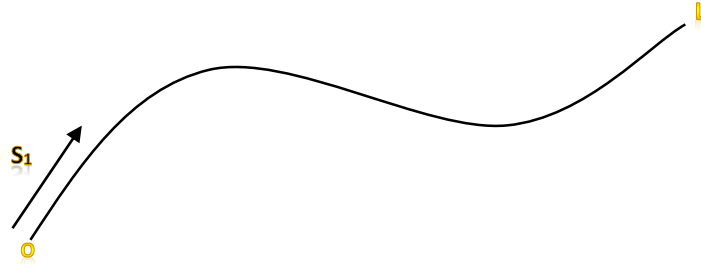
Θεωρούμε αξιωματικώς την ύπαρξη μίας οικογένειας παραμέτρων  $A(s_1)$  φραγμένων περιοχών στο  $\mathbb{R}^2$  που περιγράφουν τις διατομές καθώς κινούμαστε κατά μήκος της  $s_1$  διατομής, υποθέτουμε ότι η μονοδιάστατη υποπολλαπλότητα της πολλαπλότητας του δικτυώματος που περιγράφεται από την  $s_1$  είναι καθολικώς ομοιόμορφη με το  $\mathbb{R}$ . Αυτή η υπόθεση σημαίνει ότι για σταθερές τιμές που αναθέτουμε στις παραμέτρους  $s_2, s_3$  παίρνουμε ισοδύναμες υποπολλαπλότητες κάθε μία από τις οποίες περιγράφεται ως τμήμα της πραγματικής γραμμής.

Υπό αυτές τις υποθέσεις, οι έννοιες του μήκους και του εμβαδού  $A(s_1)$  μπορούν να οριστούν. Έτσι σε επίπεδο περιγραφής ορίζουμε το δικτύωμα ως μία τρισδιάστατη διαφορίσιμη πολλαπλότητα όταν κάθε μία από τις παραμέτρους είναι πραγματικοί αριθμοί. Υποθέτουμε ότι η  $s_1$  είναι ανεξάρτητη των  $s_2, s_3$ , δηλαδή  $A(s_1)=A$ .

Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε ένα κυλινδρικό δικτύωμα με ακτίνα διατομής  $r_0$ . Σε επίπεδο διατομής μπορούμε να περιγράψουμε την  $A(s_1)$  ως

$$s_1 \in [0,1], \text{ για } s_2 \in [-r_0, r_0], s_3 \in \left[-\sqrt{r_0^2 - s_2^2}, \sqrt{r_0^2 - s_2^2}\right] \text{ και} \\ \text{για } s_3 \in [-r_0, r_0], s_2 \in \left[-\sqrt{r_0^2 - s_3^2}, \sqrt{r_0^2 - s_3^2}\right]$$

Με χρήση κατάλληλων συναρτήσεων, είναι δυνατή η θεώρηση οποιουδήποτε σχήματος ως διατομή του δικτυώματος. Στα πλαίσια της εργασίας αυτής δεν φαινόταν να υπάρχει νόημα.



Η εικόνα αυτή παρέχει μία απεικόνιση της πολλαπλότητας (αφορά τη διάσταση  $s_1$  όπου  $s_1 \in [0,1]$  δηλαδή παίρνει τιμές στην ίδια την πολλαπλότητα).

Σημειώνεται ότι όπως θα εξηγηθεί αργότερα για να οπτικοποιηθεί μία πολλαπλότητα είναι απαραίτητο να θεωρηθεί ότι είναι εμφυτευμένη σε ένα χώρο. Έτσι η παραπάνω εικόνα ανταποκρίνεται σε μία τέτοια εμφύτευση. Θα δούμε αργότερα ότι όλες οι δυνατές εμφυτεύσεις πολλαπλοτήτων δικτυώματος θα έπρεπε να ανταποκρίνονται στο ευθύγραμμο τμήμα και κατά συνέπεια θα μπορούσε κανείς να πει ότι η εικόνα αυτή δεν είναι αντιπροσωπευτική. Όμως σε αυτό το επίπεδο ορισμού του δικτυώματος, η παραπάνω εμφύτευση είναι αποδεκτή, περιλαμβάνει όμως απροσδιοριστίες που πρέπει να άρουμε. Η  $s_1$  παράμετρος καθορίζει το μήκος της καμπύλης, ενώ οι άλλες δύο παράμετροι περιγραφών της διατομής  $A$  που παραμένει αναλλοίωτη όσο η παράμετρος  $s_1$  μεταβάλλεται μεταξύ των ακραίων τιμών της.

## Κεφάλαιο 2: Κινηματική

### 2.1 Εμφυτεύσεις της μονοδιάστατης υποπολλαπλότητας $s_1$ στον Ευκλείδειο χώρο

Για να κάνουμε παρατηρήσεις στο δικτύωμα θα πρέπει να το θεωρήσουμε στον Ευκλείδειο χώρο. Η πολλαπλότητα του δικτυώματος είναι μία μαθηματική δομή απαλλαγμένη από οποιοδήποτε πλαίσιο συντεταγμένων και έτσι πρέπει να εφαρμόσουμε τις παραπάνω εμφυτεύσεις. Κάθε μία από τις πιθανές εμφυτεύσεις αντιστοιχεί σε έναν σαφή σχηματισμό καταλαμβάνοντας κάποιο τμήμα του Ευκλείδειου χώρου. Τους διάφορους αυτούς σχηματισμούς θα τους συμβολίζουμε στο εξής με  $C^m$  (κατ' αντιστοιχία με το  $\mathbb{R}^n$ ), αν και η προηγούμενη σήμανση δεν έχει κάποια μαθηματική σημασία, απλώς θα συνοδεύει τις εξισώσεις που θα διατυπώσουμε.

Ακόμη, θεωρούμε αξιωματικώς την ύπαρξη ενός φυσικού σχηματισμού αναφοράς η οποία αντιστοιχεί στην τιμή του δείκτη  $m=0$  και αναφέρεται στην κατάσταση κατά την οποία το δικτύωμα είναι απαραμόρφωτο και απομονωμένο από το υπόλοιπο σύμπαν. Αυτός ο σχηματισμός αναφοράς θα μας απασχολήσει σε επόμενο κεφάλαιο που θα εισαχθεί η έννοια του χρόνου.

Όπως αναφέρθηκε και στο κεφάλαιο της εισαγωγής με τον όρο εμφύτευση εννοούμε μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοίχιση συντεταγμένων σε κάθε παράμετρο της πολλαπλότητας με τέτοιο τρόπο ώστε το δικτύωμα να μην αυτοτέμνεται.

Οι συντεταγμένες αναφέρονται σε κάποιο προσαρμοσμένο πλαίσιο στο χώρο και εφόσον σε κάθε σημείο της  $\mathcal{P}$  αντιστοιχίζεται μία μοναδική τριάδα παραμέτρων  $(s_1, s_2, s_3)$ , έπεται ότι μετά την εμβάπτιση θα αντιστοιχίζεται μία μοναδική τριάδα Ευκλείδειων Συντεταγμένων (σχετικών με το πλαίσιο που επιλέχθηκε). Ας συμβολίσουμε το προσαρμοσμένο αυτό πλαίσιο στον Ευκλείδειο χώρο με  $\vec{X} = \vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3$  υπό την έννοια ότι τα  $X_1, X_2, X_3$  ορίζουν ένα σύστημα αξόνων τρισσορθογώνιο και ορθοκανονικό. Ακόμη τα  $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3$  θα αποτελούν τα διανύσματα βάσης αυτού.

Τότε μαθηματικά η εμφύτευση περιγράφεται ως  $X_i = X_i(s_j)$ , με  $i, j=1,2,3$ . (2.1.1.a)

Σε αυτό το σημείο αξίζει να χρησιμοποιήσουμε ένα πολύ χρήσιμο θεώρημα από τα μαθηματικά.

Θεώρημα της Αντίστροφης Απεικόνισης

Έστω  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  μία λεία απεικόνιση ορισμένη σε ένα ανοιχτό υποσύνολο  $U$  των  $\mathbb{R}^n$ . Αν υποθέσουμε ότι σε κάποιο σημείο  $x_0 \in U$  ο Ιακωβιανός πίνακας  $\zeta(f)$  είναι αντιστρέψιμος. Τότε υπάρχει ένα ανοιχτό υποσύνολο  $V$  του  $\mathbb{R}^n$  και μία λεία απεικόνιση  $g: V \rightarrow \mathbb{R}^n$  ώστε (i)  $y_0 = f(x_0) \in V$ , (ii)  $g(y_0) = x_0$ , (iii)  $g(V) \subseteq U$ , (iv)  $g(V)$  ανοιχτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^n$ , (v)  $f(g(y)) = y \forall y \in V$ .

Με άλλα λόγια οι  $g: V \rightarrow g(V)$  και  $f: g(V) \rightarrow V$  είναι αντίστροφες 1-1 και επί απεικονίσεις. Το αποτέλεσμα που θα χρησιμοποιήσουμε είναι ότι αν ο  $\zeta(f)$  είναι αντιστρέψιμος σε κάποιο σημείο, τότε η  $f$  είναι 1-1 και έτσι κοντά σε αυτό το σημείο, και επί κοντά σε αυτό το σημείο και ότι η αντίστροφη απεικόνιση της είναι επίσης λεία.

Η εφαρμογή αυτού του σπουδαίου αποτελέσματος στο θέμα μας είναι για  $n=3$ .

Πράγματι η σχέση  $s_j = s_j(X_i)$  (2.1.1.b) πάντα προκύπτει επιλύοντας την (2.1.1.a) όταν ισχύει ότι:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial s_1} & \frac{\partial X_1}{\partial s_2} & \frac{\partial X_1}{\partial s_3} \\ \frac{\partial X_2}{\partial s_1} & \frac{\partial X_2}{\partial s_2} & \frac{\partial X_2}{\partial s_3} \\ \frac{\partial X_3}{\partial s_1} & \frac{\partial X_3}{\partial s_2} & \frac{\partial X_3}{\partial s_3} \end{vmatrix} \neq 0$$

Εν συνεχεία ορίζουμε το δικτύωμα ως μία 3 διαστάσεων διαφορίσιμη πολλαπλότητα της οποίας η υποπολλαπλότητα  $s_1$  εμφυτεύεται ομογενώς σε ευθύγραμμα τμήματα του  $\mathbb{R}^3$ . Έτσι όλες οι αποδεκτές εμφυτεύσεις στον  $\mathbb{R}^3$  υποτίθεται ότι αντιστοιχούν σε ευθύγραμμα τμήματα. Για να περιγράψουμε μαθηματικά την παραπάνω υπόθεση (της ομογενούς εμφύτευσης ευθύγραμμων τμημάτων της υποπολλαπλότητας του δικτυώματος) πρέπει να κατασκευάσουμε μία συναρτησιακή σχέση που να εμπλέκει μόνο την παράμετρο  $s_1$ , με τέτοιο τρόπο ώστε το αποτέλεσμα του γεωμετρικού σχήματος στον  $\mathbb{R}^3$  να είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα. Στο σημείο αυτό ενδιαφερόμαστε μόνο για την υποπολλαπλότητα που περιγράφεται από το  $s_1$ . Δεν θα χρησιμοποιηθεί κάποιος δείκτης για να το συμβολίσουμε αυτό, απλώς απαιτείται προσοχή για να μην υπάρξει σύγχυση με τα επόμενα.

Και μία ακόμη παρατήρηση που θα φανεί πολύ χρήσιμη στα επόμενα, όπου και οι εκφράσεις που θα διατυπωθούν θα είναι πιο πολύπλοκες. Όταν αναφερόμαστε σε διανύσματα που ανήκουν στο σχηματισμό  $C^m$  θα χρησιμοποιείται το σύμβολο  $\vec{X}$  για το διάνυσμα χωρίς κάποια παραπάνω διευκρίνιση. Αυτό γίνεται για να μην υπάρχει συμφόρηση των δεικτών για να περιγραφούν σχέσεις μεταξύ διανυσμάτων που ανήκουν σε διαφορετικούς σχηματισμούς.

Έτσι, με όσα αναφέρθηκαν, μία τέτοια εμφύτευση (που αντιστοιχεί στο σχηματισμό  $m$  της πολλαπλότητας του δικτυώματος) περιγράφεται ως  $X_k = X_k(s_1) = \alpha_k s_1 + \beta_k$ ,  $k=1,2,3$  (2.1.2)

Σημειώνουμε ότι  $s_1 \in [0,1]$ . Συμβολίζοντας με  $i$  και  $j$  τους κόμβους αρχής και πέρατος του ευθύγραμμου τμήματος αντίστοιχα παίρνουμε τις ακραίες τιμές των  $X_k$  που είναι συνεπείς με τις ακραίες τιμές του  $s_1$ .

$$\text{Πράγματι: } X_k(i) = X_k(0) \quad (2.1.3.a) \text{ και έτσι } \beta_k = X_k(0) \quad (2.1.4.a)$$

$$X_k(j) = X_k(L) \quad (2.1.3.b) \text{ και έτσι } \alpha_k = \frac{X_k(L) - X_k(0)}{L} \quad (2.1.4.b)$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω λαμβάνουμε την ακόλουθη μορφή της εμφύτευσης του δικτυώματος στον  $\mathbb{R}^3$ :

$$X_k(s_1) = \left(1 - \frac{s_1}{L}\right) X_k(0) + \frac{s_1}{L} X_k(L), \quad \text{για } k=1,2,3, \quad s_1 \in [0,1] \quad (2.1.5)$$

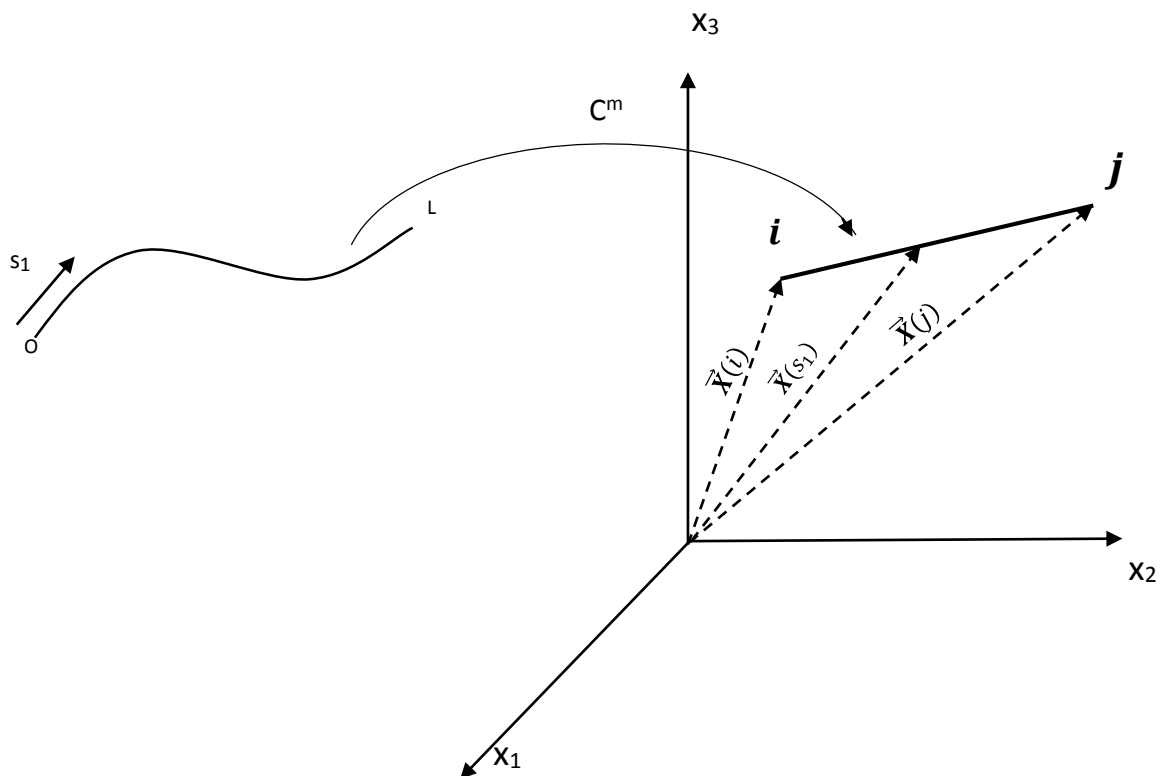
Η παραπάνω εξίσωση (2.1.5) είναι  $k$ -συνιστώσα της παραμετρικής αναπαράστασης ενός ευθύγραμμου τμήματος στον  $\mathbb{R}^3$  με το  $s_1$  να είναι η παράμετρος. Σε διανυσματική μορφή μπορούμε να γράψουμε:

$$\vec{X}(s_1) = \left(1 - \frac{s_1}{L}\right) \vec{X}(i) + \frac{s_1}{L} \vec{X}(j), \quad s_1 \in [0,1] \quad (2.1.6)$$

και με χρήση διανυσμάτων βάσης:

$$\vec{X}(s_1) = X_1(s_1) \vec{X}_1 + X_2(s_1) \vec{X}_2 + X_3(s_1) \vec{X}_3, \quad s_1 \in [0,1] \quad (2.1.7)$$

Η παρακάτω εικόνα δείχνει τη διαδικασία εμφύτευσης της υποπολλαπλότητας  $s_1$ .



Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος, όταν ανήκει στο  $C^m$  θα συμβολίζεται με  $L_m$  (για να αποφευχθεί σύγχυση όταν στα παρακάτω γίνονται συγκρίσεις με μήκη διαφορετικών εμφυτεύσεων, χρησιμοποιείται ο δείκτης  $m$ ).

Είναι:

$$L_m = \int_0^{s_1} \sqrt{\frac{d\vec{X}(s_1)}{ds_1} \frac{d\vec{X}(s_1)}{ds_1}} ds_1 \quad (2.1.8)$$

Άλλες πιθανές εκφράσεις για το μήκος προκύπτουν από την Ευκλείδεια νόρμα του  $\mathbb{R}^3$ :

$$L_m = \sqrt{(X_{1(j)} - X_{1(i)})^2 + (X_{2(j)} - X_{2(i)})^2 + (X_{3(j)} - X_{3(i)})^2} \quad (2.1.9.a)$$

ή σε διαφορετική μορφή

$$L_m = \sqrt{(\vec{X}(j) - \vec{X}(i))(\vec{X}(j) - \vec{X}(i))} \quad (2.1.9.b)$$

## 2.2 Διάφορες παραμετρικές αναπαραστάσεις της εμφυτευμένης $s_1$ υποπολλαπλότητας

Σημειώνουμε ότι το μήκος  $L_m$  της εμφυτευμένης πολλαπλότητας γενικώς δεν είναι ίσο με το μήκος  $L$  το οποίο καθορίζεται από το εύρος της παραμέτρου  $s_1$ . Το ερώτημα που τίθεται είναι

αν είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε μία αναπαραμέτρηση αυτού του ευθύγραμμου τμήματος χρησιμοποιώντας παράμετρο διάφορη της  $s_1$  και εύρους  $0-L_m$  (αντί  $0-L$ ). Αυτό που χρειαζόμαστε είναι το πραγματικό μήκος τόξου αυτού του ευθύγραμμου τμήματος.

Αυτό δίδεται από τη σχέση (2.1.8), αλλά η ολοκλήρωση πραγματοποιείται μέχρι κάποια ενδιάμεση τιμή της  $s_1$ . Παίρνουμε επομένως το πραγματικό μήκος τόξου:

$$X_1 = \int_0^{s_1} \sqrt{\frac{dX(s'_1)}{ds'_1} \frac{dX(s'_1)}{ds'_1}} ds'_1 \quad (2.2.1)$$

Όπου υπενθυμίζεται η συμβολική σύμβαση που ακολουθείται: διανύσματα (ή άλλο μέγεθος που αφορούν μήκη, όταν βρίσκονται στο  $C^m$  θα συμβολίζονται με το γράμμα  $x$ ).

Έτσι παίρνουμε την ακόλουθη σχέση:

$$X_1 = \left(\frac{L_m}{L}\right)s_1 \quad (2.2.2)$$

Όπου εισάγεται ο ακόλουθος λόγος επιμηκύνσεων (stretch ratio):

$$\lambda_m = \frac{L_m}{L} \quad (2.2.3)$$

Με αυτόν τον τρόπο πετύχαμε μία νέα αναπαραμέτρηση του ευθυγράμμου τμήματος στον  $C^m$  σχηματισμό, όπου η νεοεισαχθείσα παράμετρος  $X_1$  κυμαίνεται μεταξύ  $0$  και  $L_m$  που όπως ειπώθηκε προηγουμένως είναι το πραγματικό μήκος του ευθυγράμμου τμήματος.

Έτσι:

$$\vec{X}(x_1) = \left(1 - \frac{x_1}{L_m}\right)\vec{X}(i) + \left(\frac{x_1}{L_m}\right)\vec{X}(j), \quad X_1 \in [0, L_m] \quad (2.2.4.a)$$

$$\vec{X}(x_1) = X_1(x_1)\hat{X}_1 + X_2(x_1)\hat{X}_2 + X_3(x_1)\hat{X}_3 \quad (2.2.4.b)$$

Η ποσότητα που βρέθηκε στη σχέση (2.2.1) είναι γνωστή ως η επαγόμενη από την εμφύτευση μετρική. Γενικώς χρησιμοποιείται για να ορίσει οποιοδήποτε βαθμωτό γινόμενο δύο διανυσμάτων εδώ όμως η τιμή του δίνει το τετράγωνο του μήκος οποιουδήποτε απειροστού τμήματος της γραμμής. Αυτή ισούται με:

$$\frac{dX(s_1)}{ds_1} \frac{dX(s_1)}{ds_1} = \lambda_m^2 \quad (2.2.5)$$

Έτσι η επαγόμενη μετρική είναι ίση με το τετράγωνο του λόγου των μηκών της εμφυτευμένης υποπολλαπλότητας  $L_m$  και του μήκους  $L$  της ίδιας πολλαπλότητας. Για να κατανοήσουμε τη σημασία της μετρικής σημειώνουμε ότι η (2.2.5) δύναται να γραφεί:

$$d\vec{X} d\vec{X} = \lambda_m^2 ds_1^2 \quad (2.2.6)$$

Όμως από την (2.2.4.a) παίρνουμε:

$$d\vec{X} = \frac{\vec{X}(j) - \vec{X}(i)}{L_m} dx_1 \quad (2.2.7)$$

Από την (2.2.7) και την (2.1.9.b) έχουμε:

$$d\vec{X}d\vec{X}^T = dx_1^2 \quad (2.2.8)$$

Έτσι η επαγόμενη μετρική, μας λέει πως το τετράγωνο ενός μήκους στην υποπολλαπλότητα μετασχηματίζεται στη διαδικασία εμφύτευσης. Τέλος, εφόσον η μετρική ορίζεται σε τετραγωνική μορφή είναι μία Riemannian μετρική και η επαγόμενη γεωμετρία είναι Riemannian.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, θα θεωρούμε ότι το δικτύωμα υπόκειται σε μεγάλες παραμορφώσεις, μεγάλες (πεπερασμένες) μετακινήσεις των άκρων του που έχουν ως συνέπεια τη μεταβολή της διατομής του δικτυώματος. Επομένως, με αυτή τη θεώρηση, οδηγούμαστε στη θεωρία πεπερασμένης ελαστικότητας. Υπό αυτήν την έννοια δεν έχει νόημα η διατύπωση των εξισώσεων ισορροπίας στην απαραμόρφωτη κατάσταση (που όπως έχουμε πει αποτελεί το φυσικό σχηματισμό  $C^0$ ) αλλά σε κάποιο ενδιάμεσο σχηματισμό τον οποίο στο εξής θα ονομάζουμε σχηματισμό αναφοράς  $C^n$ . Αυτό είναι το αντικείμενο μελέτης της επόμενης παραγράφου.

### 2.3 Περιγραφή της εμφυτευμένης $s_1$ υποπολλαπλότητας σύμφωνα με κάποιον ενδιάμεσο σχηματισμό

Κατ' αναλογία με την παράγραφο 2.2 θα ορίσουμε τα ακόλουθα μεγέθη:

$$\lambda_m = \frac{L_m}{L_n} = \frac{\lambda_m}{\lambda_n} \quad (2.3.1)$$

που είναι ο λόγος επιμήκυνσης στην μετάβαση από το σχηματισμό  $C^n \rightarrow C^m$  όπου:

$$L_n = \sqrt{(\vec{X}_n(j) - \vec{X}_n(i)) \cdot (\vec{X}_n(j) - \vec{X}_n(i))} \quad (2.3.2.a)$$

Είναι προφανές ότι το διάνυσμα  $\vec{X}_n$  στον  $C^n$  σχηματισμό παίζει το ρόλο του  $\vec{X}$  στον  $C^m$  σχηματισμό. Και:

$$\lambda_n = \frac{L_n}{L} \quad (2.3.2.b)$$

Μπορούμε να ορίσουμε ακόμη:

$$x_n = \lambda_n s_1 \quad (2.2.3)$$

το οποίο συμβολίζει το πραγματικό μήκος τόξων στον  $C^n$  σχηματισμό οπότε εύκολα βρίσκουμε την ακόλουθη συσχέτιση:

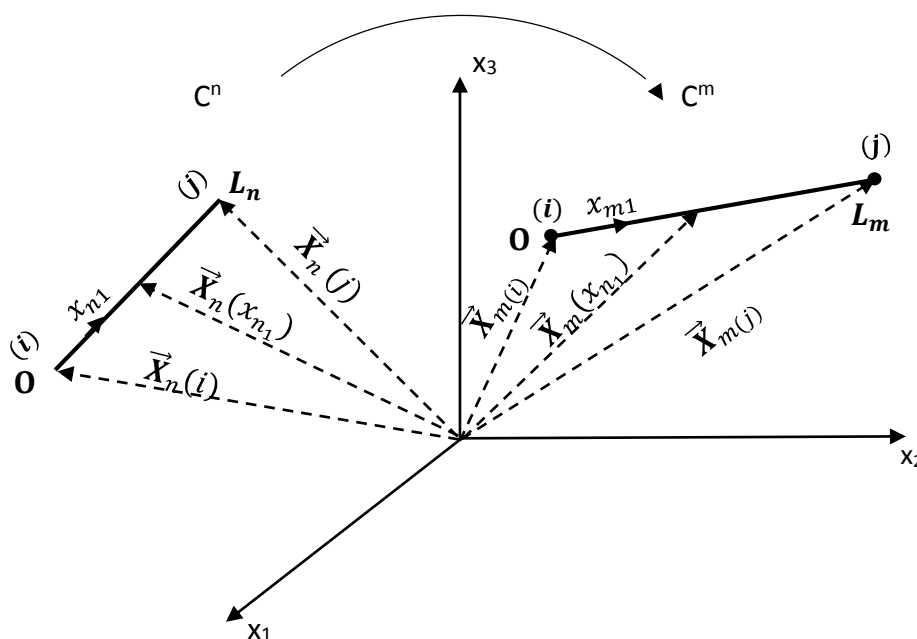
$$X_1 = \lambda_{mn} X_1 \quad (2.3.4)$$

Με αυτόν τον τρόπο η διανυσματική εξίσωση (2.2.4) με χρήση των μεταβλητών του  $C^n$  σχηματισμού γράφεται:

$$\vec{X}(x_n) = \left(1 - \frac{\lambda_{mn} x_n}{L_m}\right) \vec{X}(i) + \frac{\lambda_{mn} x_n}{L_m} \vec{X}(j) \quad , x_n \in [0, L_n] \quad (2.3.5)$$

Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε τη μετάβαση από τον  $C^n$  σχηματισμό στον  $C^m$  σχηματισμό, όπου το  $C^n$  τον χειριζόμαστε ως έναν ενδιάμεσο σχηματισμό αναφοράς.

Ακόμη έχουμε ότι:



$$\frac{d\vec{X}(x_n)}{dx_n} \frac{d\vec{X}(x_n)}{dx_n} = \lambda_{mn}^2 \quad (2.3.6)$$

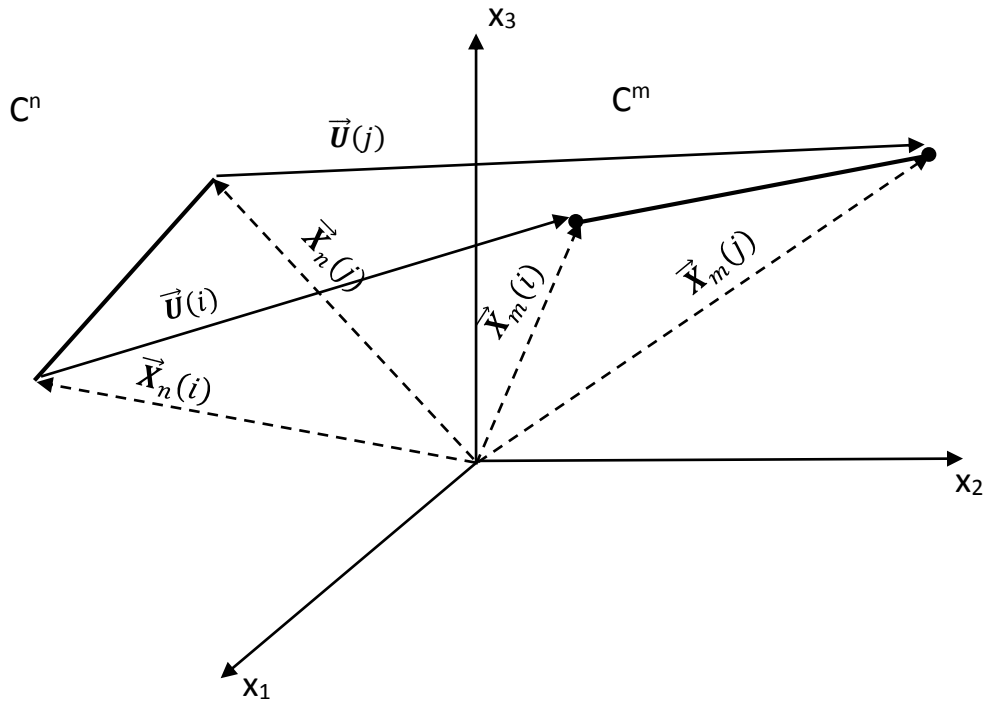
Βλέπουμε ότι η  $\lambda_{mn}^2$  είναι επαγόμενη μετρική κατά τη διαδικασία μετάβασης από το  $C_n \rightarrow C_m$  σχηματισμό. Οι συντεταγμένες των άκρων της γραμμής  $i, j$  στον  $C_n$  σχηματισμό είναι σύμφωνα με το καθορισμένο καθολικό πλαίσιο  $(X_{n_1}(i), X_{n_2}(i), X_{n_3}(i)), (X_{n_1}(j), X_{n_2}(j), X_{n_3}(j))$ . Εφόσον θέλουμε να περιγράψουμε το σχηματισμό  $C^m$  σύμφωνα με το  $C^n$  πρέπει να εισάγουμε τις αντίστοιχες καθολικές επικόμβιες μετακινήσεις του δικτυώματος (σε διανυσματική μορφή).

Είναι:

$$\vec{U}(i) = \vec{X}(i) - \vec{X}_n(i) \quad , \quad k=1,2,3 \quad (2.3.7.a)$$

$$\vec{U}(j) = \vec{X}(j) - \vec{X}_n(j) \quad , \quad k=1,2,3 \quad (2.3.7.b)$$





Το παραπάνω σχήμα δείχνει τις μετακινήσεις.

Η (2.3.5) μέσω των (2.3.7) γίνεται:

$$\vec{X}(x_n) = \left(1 - \frac{\lambda_{mn}x_n}{L_m}\right) \vec{X}_n + \frac{\lambda_{mn}x_n}{L_m} \vec{X}_n + \left(1 - \frac{\lambda_{mn}x_n}{L_m}\right) \vec{U}(i) + \frac{\lambda_{mn}x_n}{L_m} \vec{U}(j) \quad (2.3.8)$$

Με μία σύντομη γραφή μπορούμε να γράψουμε:

$$\vec{X}_m(x_{n_1}) = \vec{X}_m(x_{n_1}) + \vec{U}(x_{n_1}) \quad (2.3.9)$$

$$\vec{U}(x_{n_1}) = \left(1 - \frac{\lambda_{mn}x_{n_1}}{L_m}\right) \vec{U}(i) + \frac{\lambda_{mn}x_{n_1}}{L_m} \vec{U}(j) \quad (2.3.10.a)$$

$$\vec{X}_n(x_{n_1}) = \left(1 - \frac{x_{n_1}}{L_n}\right) \vec{X}_n(i) + \frac{x_{n_1}}{L_n} \vec{X}_n(j) \quad (2.3.10.b)$$

Σε αυτό το σημείο αξίζει να κάνουμε μία παρατήρηση. Όλες οι δυνατές εμφυτεύσεις της υποπολλαπλότητας του δικτυώματος είναι τμήματα ευθύγραμμα. Ακόμη οι διάφορες επαγόμενες μετρικές εφαρμόζονται σε όλο το μήκος του και όχι μόνο στα διαφορικά στοιχεία. Με άλλα λόγια οι επαγόμενες μετρικές είναι σταθερές κατά την έννοια του μήκους, με καθολική εφαρμογή. Μαθηματικά η μετρική συσχετίζει μήκη διανυσμάτων που ανήκουν στον εφαπτόμενο χώρο της πολλαπλότητας και έτσι στην περίπτωση μας μπορούμε να πούμε ότι ο εφαπτόμενος χώρος της υποπολλαπλότητας του δικτυώματος συμπίπτει με ολόκληρη την υποπολλαπλότητα.

Μέχρι στιγμής είμαστε σε θέση να κατανοήσουμε το δικτύωμα ως μία μαθηματική οντότητα. Ακόμη έχουμε διερευνήσει τη διαδικασία της εμφύτευσης της υποπολλαπλότητας  $s_1$

και τις ιδιότητες που αποκτά το δικτύωμα στον  $\mathbb{R}^3$ . Όμως δεν έχει γίνει λόγος για τη διατομή του δικτύωματος. Στη θεωρία αυτή θα φανεί ότι η διατομή (ή αλλιώς η  $S_2$ - $S_3$  υποπολλαπλότητα) είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την  $S_1$ . Πρωτού όμως προχωρήσουμε σε αυτή την διερεύνηση, θα μας φανεί χρήσιμη η εισαγωγή ορισμένων στοιχείων τανυστικού λογισμού και ειδικότερα αυτά που θα παρουσιαστούν παρακάτω.

#### 2.4 Μετασχηματισμοί μεταξύ καθολικών και τοπικών πλαισίων συντεταγμένων

Κατ' αρχάς, θα πρέπει να ορίσουμε τι εννοούμε με τον όρο τοπικό πλαίσιο συντεταγμένων. Ξεκινώντας από την εξίσωση (2.1.6) η οποία γράφεται:

$$\vec{X}(s_1) = \vec{X}(i) + s_1 \left( \frac{X(j) - X(i)}{L} \right), \quad s_1 \in [0,1] \quad (2.4.1)$$

Η (2.4.1) μας λέει ότι η  $s_1$  είναι μία συντεταγμένη κατά μήκος της σταθερής διεύθυνσης του διανύσματος  $\frac{\vec{X}(j) - \vec{X}(i)}{L}$ . Το εφαπτόμενο μοναδιαίο διάνυσμα σε κάθε καμπύλη έχει την ακόλουθη περιγραφή:

$$\hat{t} = \frac{\frac{d\vec{X}(s_1)}{ds_1}}{\left\| \frac{d\vec{X}(s_1)}{ds_1} \right\|} \quad (2.4.2)$$

Έτσι αφού η ευθεία είναι καμπύλη 1<sup>ου</sup> βαθμού:

$$\hat{t} = \frac{\vec{X}(j) - \vec{X}(i)}{\|\vec{X}(j) - \vec{X}(i)\|} \quad (2.4.3)$$

Σημειώνεται ότι ανάλογες σχέσεις για το εφαπτόμενο διάνυσμα προκύπτουν όποιο και αν είναι το προσαρμοσμένο πλαίσιο που περιγράφει την εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα. Αυτό το αποτέλεσμα ήταν αναμενόμενο μιας και όπως αναφέρθηκε παραπάνω όλες οι αποδεκτές εμφυτεύσεις στην  $\mathbb{R}^3$  είναι ευθύγραμμα τμήματα.

Επομένως μία πιο κομψή περιγραφή των σχέσεων στις προηγούμενες παραγράφους είναι:

$$\vec{X}(s_1) = \vec{X}(i) + \lambda_m s_1 \hat{t}, \quad s_1 \in [0,1] \quad (2.4.4.a)$$

$$\vec{X}(x_1) = \vec{X}(i) + x_1 \hat{t}, \quad x_1 \in [0, L_m] \quad (2.4.4.b)$$

$$\vec{X}(x_n) = \vec{X}(i) + \lambda_{mn} x_n \hat{t}, \quad x_n \in [0, L_n] \quad (2.4.4.c)$$

Το τοπικό πλαίσιο συντεταγμένων αποτελείται από μία τριάδα διανυσμάτων τα οποία συνιστούν (συνήθως) το τρίεδρο του Frenet. Πριν ορίσαμε το εφαπτόμενο διάνυσμα, μένει να ορίσουμε το πρωτεύον και το δευτερεύον κάθετο διάνυσμα.

Για την περίπτωση της τυχαίας καμπύλης έχουμε:

$$\hat{\mathbf{n}}_{(s_1)} = \frac{\frac{d\hat{\mathbf{t}}_{(s_1)}}{ds_1}}{\left\| \frac{d\hat{\mathbf{t}}_{(s_1)}}{ds_1} \right\|}, \quad \hat{\mathbf{b}}_{(s_1)} = \hat{\mathbf{t}}_{(s_1)} \times \hat{\mathbf{n}}_{(s_1)} \quad (2.4.5)$$

Ωστόσο στη δική μας περίπτωση η καμπύλη είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα, και έτσι η 1<sup>η</sup> του παράγωγος (που ορίζει το  $\hat{\mathbf{n}}$ ) μηδενίζεται. Εφόσον η μόνη απάντηση που πρέπει να ικανοποιεί το πλαίσιο αυτό είναι τα διανύσματα που συνιστούν να είναι τρισσορθογώνια, ορθοκανονικά και το σύστημα που ορίζουν να είναι δεξιόστροφο αναπόφευκτα προκύπτει ότι υπάρχει μία μονοπαραμετρική απειρία στην εκλογή του τριέδρου (μονοπαραμετρική υπό την έννοια ότι αν προσδιοριστεί το ένα, έστω το  $\hat{\mathbf{n}}$ , τότε αμφιμονοσήμαντα προσδιορίζεται το άλλο).

Συνεπώς αυθαίρετα πρέπει να κάνουμε μία θεώρηση ώστε τα διανύσματα αυτά να ορίζονται κατά μοναδικό τρόπο.

Έτσι το  $\hat{\mathbf{n}}$  θα κείται πάντα στο επίπεδο των  $\hat{\mathbf{t}}$  και  $\hat{\mathbf{X}}_3$ . Τότε το  $\hat{\mathbf{b}}$  θα προσδιορίζεται από την απαίτηση το σύστημα να είναι δεξιόστροφο.

Οι μαθηματικές πράξεις που εμπλέκονται δεν έχουν κάποια χρησιμότητα και για αυτό θα δοθούν οι τελικές σχέσεις:

$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{X_1(j)-X_1(i)}{L_m} \hat{\mathbf{X}}_1 + \frac{X_2(j)-X_2(i)}{L_m} \hat{\mathbf{X}}_2 + \frac{X_3(j)-X_3(i)}{L_m} \hat{\mathbf{X}}_3 \quad (2.4.6.a)$$

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{(X_1(j)-X_1(i))(X_3(j)-X_3(i))}{L_m L'_m} \hat{\mathbf{X}}_1 + \frac{(X_2(j)-X_2(i))(X_3(j)-X_3(i))}{L_m L'_m} \hat{\mathbf{X}}_2 + \frac{L'_m}{L_m} \hat{\mathbf{X}}_3 \quad (2.4.6.b)$$

$$\hat{\mathbf{b}} = \frac{X_2(j)-X_2(i)}{L_m} \hat{\mathbf{X}}_1 + \frac{X_1(j)-X_1(i)}{L'_m} \hat{\mathbf{X}}_2 \quad (2.4.6.c)$$

όπου:

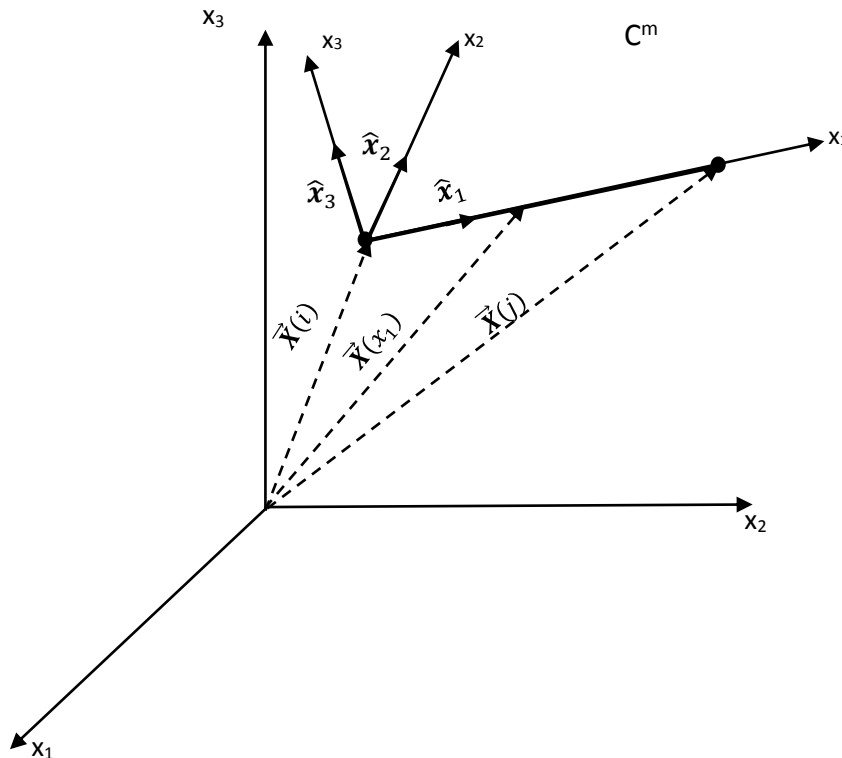
$$L'_m = \sqrt{(X_1(j) - X_1(i))^2 + (X_2(j) - X_2(i))^2}$$

Σε αυτό το σημείο βρίσκεται όλη η απαραίτητη πληροφορία για το τοπικό σύστημα. Διότι μπορούμε να γράψουμε:

$$\vec{\mathbf{X}}(x_1) = \vec{\mathbf{X}}(i) + x_1 \hat{\mathbf{t}}, \quad x_1 \in [0, L_m]$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι το  $x_1$  παίζει ρόλο παραμέτρου της οποίας η τιμή δίνει το πραγματικό μήκος της ευθείας γραμμής του δικτύωματος. Έτσι φυσιολογικά μπορούμε να σκεφτούμε ότι το  $\hat{\mathbf{t}}$  είναι τοπικό μοναδιαίο διάνυσμα που αναπαριστά τον άξονα των συντεταγμένων που μελετούμε το ευθύγραμμο τμήμα της εμφυτευμένης υποπολλαπλότητας. Επομένως ας επιχειρήσουμε μία απλή αλλαγή στα σύμβολα, δηλαδή  $\hat{\mathbf{t}} = \hat{\mathbf{x}}_1$ . Με αυτή την ερμηνεία, τα  $\hat{\mathbf{t}}, \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{b}}$  είναι μοναδιαία διανύσματα ενός τοπικού συστήματος συντεταγμένων που κείται στην εμφυτευμένη  $s_1$  υποπολλαπλότητα. Ανάλογη θεώρηση μπορούμε να κάνουμε και

για τα άλλα μοναδιαία διανύσματα δηλαδή  $\hat{x}_2 \equiv \hat{b}$ ,  $\hat{x}_3 \equiv \hat{b}$ . Το παρακάτω σχήμα δείχνει το τοπικό πλαίσιο συντεταγμένων  $x \equiv (x_1, x_2, x_3)$ .



Και τώρα υπεισερχόμαστε στο κύριο αντικείμενο της παραγράφου αυτής. Μέχρι στιγμής οι εξισώσεις (2.4.6) ορίζουν το τοπικό πλαίσιο κατά συγκεκριμένο τρόπο στους διάφορους σχηματισμούς  $C^m$ . Ο άξονας  $x_1$  είναι κατά μήκος της εμφυτευμένης πολλαπλότητας και ενώ είναι μοναδικό δεν ορίζει τα  $x_2$ ,  $x_3$  κατά μοναδικό τρόπο. Αντιθέτως, αν θεωρούσαμε την εμφύτευση ολόκληρης της τρισδιάστατης πολλαπλότητας θα ήμασταν σε θέση να αντιστοιχίσουμε μοναδικές φυσικές διευθύνσεις για τα  $x_2$ ,  $x_3$  (αυτό που περιγράψουμε θα συμβεί μόνον αργότερα).

Έτσι μέχρι στιγμής έχουμε ορίσει ένα προσαρμοσμένο πλαίσιο συντεταγμένων το  $X$  (καθολικό) και ένα τοπικό πλαίσιο το  $x$  που συνοδεύει την εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα όπως διάφορους σχηματισμούς  $C^m$ . Αυτό το τοπικό πλαίσιο συντεταγμένων μπορεί να θεωρηθεί ως ένα κινούμενο πλαίσιο υπό την έννοια ότι κινείται κατά μήκος του δικτύωματος προσαρμοσμένο πάνω του. Πρέπει να σημειώσουμε ότι καθώς το δικτύωμα “κινείται” καταλαμβάνει διαφορετικό τμήμα του  $\mathbb{R}^3$  και γι’ αυτό χρησιμοποιούμε διαφορετικά σύμβολα στις εξισώσεις μας ώστε να τονίσουμε αυτό το γεγονός.

Αυτό που θέλουμε να ορίσουμε τώρα είναι τον πίνακα μετασχηματισμού ο οποίος συσχετίζει το καθολικό πλαίσιο συντεταγμένων με το τοπικό. Στο εξής για πίνακες που θα μετασχηματίζουν πλαίσια (ή και διανύσματα, ταυιστές) στο  $C^m$  σχηματισμό θα χρησιμοποιείται

ο συμβολισμός  $T_m$  (transform) (και αυτό μόνον όταν εμπλέκονται πίνακες άλλων σχηματισμών, αλλιώς θα παραλείπεται ο δείκτης). Η κατασκευή του πίνακα γίνεται με γνωστές μεθόδους,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \hat{X}_1 & \hat{x}_1 \hat{X}_2 & \hat{x}_1 \hat{X}_3 \\ \hat{x}_2 \hat{X}_1 & \hat{x}_2 \hat{X}_2 & \hat{x}_2 \hat{X}_3 \\ \hat{x}_3 \hat{X}_1 & \hat{x}_3 \hat{X}_2 & \hat{x}_3 \hat{X}_3 \end{bmatrix} \quad (2.4.7)$$

Εφαρμόζοντας και αναλυτικά τις εκφράσεις των πλαισίων που βρέθηκαν πριν:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta X_1}{L} & \frac{\Delta X_2}{L} & \frac{\Delta X_3}{L} \\ -\frac{\Delta X_2}{L'} & \frac{\Delta X_1}{L'} & 0 \\ -\frac{\Delta X_1 \Delta X_3}{L L'} & -\frac{\Delta X_2 \Delta X_3}{L L'} & \frac{L'}{L} \end{bmatrix} \quad (2.4.8)$$

όπου  $\Delta X_k = X_{k(j)} - X_{k(i)}$ ,  $k=1,2,3$

$$L' = \sqrt{\Delta X_1^2 + \Delta X_2^2}$$

Προφανώς  $T$  είναι ένα ορθογώνιο μητρώο (ο ανάστροφος είναι ίσος με τον αντίστροφο)

$$\mathbf{T} \mathbf{T}^T = \mathbf{T}^T \mathbf{T} = \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T \quad (2.4.9)$$

Ας θεωρήσουμε ένα αυθαίρετο ελεύθερο διάνυσμα  $\vec{a}$ . Η αναπαράσταση αυτού του διανύσματος σε κάποιο πλαίσιο  $\xi$  συμβολίζεται με  $\vec{a}|_{\xi}$ . Στην ουσία με τον όρο αναπαράστασης ενός διανύσματος σε ένα πλαίσιο  $\xi$  εννοούμε ανάλυση αυτού του διανύσματος σε συνιστώσες του πλαισίου  $\xi$ . Έτσι τα  $\vec{a}|_X$  και  $\vec{a}|_x$  είναι αναπαραστάσεις του ίδιου διανύσματος  $\vec{a}$  στα  $X$  και  $x$  πλαίσια αντίστοιχα.

Ο πίνακας μετασχηματισμού  $\mathbf{T}$  συσχετίζει αυτές τις δύο αναπαραστάσεις ενός διανύσματος  $\vec{a}$  στον  $C^m$  σχηματισμό ως ακολούθως:

$$\vec{a}|_{x_m} = \mathbf{T} \vec{a}|_X \quad (2.4.10.a)$$

$$\vec{a}|_X = \mathbf{T}^T \vec{a}|_{x_m} \quad (2.4.10.b)$$

Βλέποντας το  $\mathbf{T}$  ως τελεστή, έχουμε ότι δρα στο  $\vec{a}|_X$  και δίδει στο  $\vec{a}|_x$ . Όμως το  $\vec{a}|_X$  συμβολίζει τις συνιστώσες ενός διανύσματος  $\vec{a}$  στο  $X$  πλαίσιο, ενώ το  $\vec{a}|_x$  συμβολίζει τις συνιστώσες ενός διανύσματος  $\vec{a}$  στο  $x$  πλαίσιο, οπότε ίσως να είναι ορθότερο να πούμε ότι το  $T$  δρα στις συνιστώσες ενός διανύσματος  $\vec{a}$  στο  $X$  πλαίσιο και δίνει συνιστώσες του διανύσματος στο  $x$  πλαίσιο. Έτσι το  $\mathbf{T}$  δεν δρα στο διάνυσμα αλλά στο σύστημα συντεταγμένων. Έτσι σε αυτή την ερμηνεία το διάνυσμα μένει παθητικό όσο τα πλαίσια συντεταγμένων μετασχηματίζονται το

ένα στο άλλο. Γι' αυτό και οι εξισώσεις (2.4.10) είναι γνωστές ως το παθητικό μέρος του μετασχηματισμού.

Στο ενεργητικό μέρος του μετασχηματισμού θα μπορούσαμε να πούμε ότι το  $\vec{\alpha}|_X$  είναι ένα διαφορετικό διάνυσμα από το  $\vec{\alpha}|_{x_m}$  ενώ και τα δύο διανύσματα αναπαρίστανται στο ίδιο πλαίσιο, ας πούμε το  $X$ . Σε αυτή την ερμηνεία θα πρέπει να τροποποιήσουμε το συμβολισμό μας για να είμαστε συνεπείς. Συμβολίζουμε το  $\vec{\alpha}|_X$  με  $\vec{\alpha}'|_X$  για να τονίσουμε ότι το  $\vec{\alpha}'$  είναι διαφορετικό από το  $\vec{\alpha}$ . Οπότε η (2.4.10) γράφεται:

$$\vec{\alpha}'|_X = \mathbf{T}\vec{\alpha}|_{x_m} \quad (2.4.11.a)$$

$$\vec{\alpha}|_X = \mathbf{T}^T \vec{\alpha}'|_{x_m} \quad (2.4.11.b)$$

με:

$$\vec{\alpha}'|_X = \vec{\alpha}|_{x_m} \quad (2.4.11.c)$$

Στις δύο τελευταίες εξισώσεις το  $\mathbf{T}$  δρα σε ένα διάνυσμα  $\vec{\alpha}$  και δίνει ένα καινούριο διάνυσμα, το  $\vec{\alpha}'$ . Σε αυτή την ερμηνεία τα διανύσματα μετασχηματίζονται το ένα στο άλλο ενώ το πλαίσιο συντεταγμένων είναι καθορισμένο.

Ας διερευνήσουμε σε αυτό το σημείο και το σχηματισμό  $\mathbf{C}^n$ . Όμοια οι σχέσεις (2.4.10) και (2.4.11) μπορούν να διατυπωθούν και για αυτό τον τύπο:

$$\vec{\alpha}|_{x_n} = \mathbf{T}_n \vec{\alpha}|_X \quad (2.4.12.a)$$

$$\vec{\alpha}|_X = \mathbf{T}_n^T \vec{\alpha}|_{x_n} \quad (2.4.12.b)$$

Πώς όμως θα μπορούσαμε να συσχετίσουμε τα διανύσματα που ανήκουν σε διαφορετικούς σχηματισμούς και είναι εκφρασμένα στα πλαίσια των σχηματισμών που ανήκουν; Θα καταφύγουμε στον ορισμό (2.1.10).

$$\vec{\alpha}|_{x_m} = \mathbf{T}_m \mathbf{T}_n^T \vec{\alpha}|_{x_n} \quad (2.4.13.a)$$

$$\vec{\alpha}|_{x_n} = \mathbf{T}_n \mathbf{T}_m^T \vec{\alpha}|_{x_m} \quad (2.4.13.b)$$

Όπου ορίσαμε:

$$\mathbf{R}_p = \mathbf{T}_n \mathbf{T}_m^T \quad (2.4.14)$$

ο οποίος μετασχηματίζει τις συνιστώσες ενός διανύσματος από το τοπικό  $\mathbf{C}^m$  πλαίσιο στο τοπικό  $\mathbf{C}^n$  πλαίσιο, δρα δηλαδή ως τελευταία αλλά μέσω του παθητικού μέρους του μετασχηματισμού, γι' αυτό το λόγο είναι ο κάτω δείκτης  $p$ . Ακόμη να σημειώσουμε ότι ο  $\mathbf{R}_p$  είναι ορθογώνιος πίνακας, ως γινόμενο ορθογώνιου πίνακα.

Ανάλογες σχέσεις μετασχηματισμού δίνονται να προκύψουν και για την περίπτωση τανυστών. Ας θεωρήσουμε έναν αυθαίρετο τανυστή δευτέρας τάξης  $\mathbf{A}$  και τις αναπαραστάσεις αυτού που θα χρησιμοποιήσουμε στο εξής  $\mathbf{A}|_X, \mathbf{A}|_{x_m}, \mathbf{A}|_{x_n}$ .

$$\mathbf{A}|_{x_m} = \mathbf{T}_m \mathbf{A}|_X \mathbf{T}_m^T \quad (2.4.15.a)$$

$$\mathbf{A}|_X = \mathbf{T}_m^T \mathbf{A}|_{x_m} \mathbf{T}_m \quad (2.4.15.b)$$

$$\mathbf{A}|_{x_n} = \mathbf{T}_n \mathbf{A}|_X \mathbf{T}_n^T \quad (2.4.16.a)$$

$$\mathbf{A}|_X = \mathbf{T}_n^T \mathbf{A}|_{x_n} \mathbf{T}_n \quad (2.4.16.b)$$

$$\mathbf{A}|_{x_m} = \mathbf{R}_p^T \mathbf{A}|_{x_n} \mathbf{R}_p \quad (2.4.17.a)$$

$$\mathbf{A}|_{x_n} = \mathbf{R}_p \mathbf{A}|_{x_m} \mathbf{R}_p^T \quad (2.4.17.b)$$

Εφαρμόζοντας το παθητικό μέρος του μετασχηματισμού για το διάνυσμα  $\hat{\mathbf{x}}_k$  παίρνουμε:

$$\hat{\mathbf{x}}_k|_{x_m} = \mathbf{T}_m \hat{\mathbf{x}}_k|_X = \hat{\mathbf{x}}_{m,k}|_X \times \mathbf{T}_m^T, \quad k = 1,2,3 \quad (2.4.18)$$

Δηλαδή,

$$\hat{\mathbf{x}}_1|_{x_m} = (1,0,0)^T \quad \hat{\mathbf{x}}_2|_{x_m} = (0,1,0)^T \quad \hat{\mathbf{x}}_3|_{x_m} = (0,0,1)^T$$

Ισχύει ακόμα ότι  $\hat{\mathbf{x}}_1|_X = (1,0,0)^T$ ,  $\hat{\mathbf{x}}_2|_X = (0,1,0)^T$ ,  $\hat{\mathbf{x}}_3|_X = (0,0,1)^T$  (στο  $X$  πλαίσιο). Αν εφαρμόσουμε το παθητικό μέρος του μετασχηματισμού θα έχουμε:

$$\hat{\mathbf{x}}_k'|_X = \mathbf{T}_m \hat{\mathbf{x}}_k|_X = \hat{\mathbf{x}}_k|_X \times \mathbf{T}_m^T, \quad k = 1,2,3 \quad (2.4.19)$$

όπου το  $\hat{\mathbf{x}}_k'$  θεωρείται ότι είναι διαφορετικό διάνυσμα από το  $\hat{\mathbf{x}}_k$ .

Από την (2.4.8) έχουμε:

$$\hat{\mathbf{x}}_k|_{x_n} = \mathbf{T}_m \hat{\mathbf{x}}_k|_X = \hat{\mathbf{x}}_k|_X \times \mathbf{T}_m^T, \quad k = 1,2,3 \quad (2.4.20)$$

Η σύγκριση των (2.4.19) και (2.4.20) δίνει ότι πράγματι  $\hat{\mathbf{x}}_k' \equiv \hat{\mathbf{x}}_k$ .

Έτσι στο ενεργητικό μέρος του μετασχηματισμού ο  $\mathbf{T}_m$  ενεργεί στο  $\hat{\mathbf{x}}_k$  και δίνει ένα νέο διάνυσμα το  $\hat{\mathbf{X}}_k$ . Αυτή η ερμηνεία ωστόσο υποθέτει ότι το πλαίσιο συντεταγμένων παραμένει αναλλοίωτο και ότι οι αναπαραστάσεις και των δύο διανυσμάτων γίνονται στο ίδιο πλαίσιο (δηλαδή χρησιμοποιείται μία κοινή βάση).

Αναμενόμενα παρόμοιες σχέσεις ισχύουν και για  $C^n$  σχηματισμό:

$$\hat{\mathbf{x}}_k|_X = \mathbf{T}_n \hat{\mathbf{x}}_{nk}|_X = \hat{\mathbf{x}}_{nk}|_X \mathbf{T}_n^T, \quad k=1,2,3 \quad (2.4.21)$$

Όπου, όπως έχει αναφερθεί, ο δείκτης  $n$  συμβολίζει το γεγονός ότι το διάνυσμα  $\hat{\mathbf{x}}$  είναι στο σχηματισμό  $n$ , και αντιπροσωπεύει τις συνιστώσες του.

Λόγω των (2.4.20), (2.4.21) και της συνθήκης ορθογωνικότητας του μητρώου μετασχηματισμού.

$$\mathbf{T}_m \hat{\mathbf{x}}_{mk}|_X = \mathbf{T}_n \hat{\mathbf{x}}_{nk}|_X \rightarrow \hat{\mathbf{x}}_{mk}|_X \mathbf{T}_m^T \mathbf{T}_n \hat{\mathbf{x}}_{nk}|_X, \quad k = 1,2,3 \quad (2.4.22)$$

Ορίζουμε:

$$\mathbf{R}_a = \mathbf{T}_n^T \mathbf{T}_m \quad (2.4.23)$$

Όπου το  $a$  ως δείκτης υπονοεί το ενεργητικό μέρος του μετασχηματισμού και πως ο  $\mathbf{R}_p$  είναι ο ορθογώνιος πίνακας. Αξίζει να σημειωθεί ότι το πλαίσιο συντεταγμένων που περιγράφει τα διανύσματα, είναι σταθερό.

Μπορούμε ακόμα να γράψουμε:

$$\mathbf{T}_m^T \hat{\mathbf{x}}_{mk}|_{x_m} = \mathbf{T}_m^T \mathbf{T}_n \hat{\mathbf{x}}_{nk}|_X \rightarrow \hat{\mathbf{x}}_{mk}|_{x_m} = \mathbf{T}_n \hat{\mathbf{x}}_{nk}|_X \quad (2.4.24)$$

Η εξίσωση (2.3.24) παρουσιάζει την αναπαράσταση δύο διαφορετικών διανυσμάτων βάσης ( $\hat{\mathbf{x}}_m, \hat{\mathbf{x}}_n$ ) σε δύο διαφορετικά πλαίσια ( $x_m, X$ ). Αυτό έχει μία ιδιαίτερη, ανορθόδοξη ερμηνεία όπου το  $\mathbf{T}_n$  δρα σε ένα μοναδιαίο διάνυσμα στο  $X$  πλαίσιο και δίνει ένα διαφορετικό μοναδιαίο διάνυσμα και μάλιστα εκφρασμένο σε μία διαφορετική βάση  $\hat{\mathbf{x}}_{mk}|_{x_m}$ . Συνεπώς, για να κατανοήσουμε τι σημαίνει η (2.4.22) εφαρμόζουμε τη σχέση (2.4.12) για το  $\hat{\mathbf{x}}_{nk}$  για να πάρουμε ότι:  $\hat{\mathbf{x}}_{nk}|_X = \mathbf{T}_n^T \hat{\mathbf{x}}_{nk}|_{x_n}$

Άρα έχουμε:

$$\hat{\mathbf{x}}_{mk}|_{x_m} = \hat{\mathbf{x}}_{nk}|_{x_n}, \quad \text{για } k = 1,2,3 \quad (2.4.25)$$

Το παραπάνω είναι ένα σπουδαίο, αν και ίσως λίγο αναμενόμενο αποτέλεσμα και συνοψίζεται στο ότι οι συνιστώσες των μοναδιαίων διανυσμάτων που ανήκουν σε διαφορετικούς σχηματισμούς, αριθμητικώς είναι ίσες όταν αυτές εκφράζονται στα αντίστοιχα πλαίσια των σχηματισμών όπου ανήκουν.

Παρατηρήσεις:

- Στο παθητικό μέρος του μετασχηματισμού το διάνυσμα παραμένει ακίνητο καθώς τα πλαίσια συντεταγμένων μετασχηματίζονται. Αυτός ο μετασχηματισμός αναγκάζει τις συνιστώσες των διανυσμάτων να μετασχηματιστούν αναλόγως.
- Στο ενεργητικό μέρος του μετασχηματισμού το πλαίσιο συντεταγμένων παραμένει σταθερό καθώς το διάνυσμα μετασχηματίζεται σε ένα άλλο διάνυσμα.
- Ενώ στην (2.4.25) βλέπουμε ότι αν τόσο τα πλαίσια συντεταγμένων όσο και τα αντίστοιχα διανύσματα βάσης μετασχηματίζονται το αποτέλεσμα είναι μία ταυτότητα.

Ας θεωρήσουμε έναν παρατηρητή προσαρμοσμένο στην εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα και ακολουθεί τις διάφορες εμφυτεύσεις. Όταν βρίσκεται στον  $C^n$  σχηματισμό παρατηρεί τα  $\hat{\mathbf{x}}_{nk}$  ως μοναδιαία διανύσματα. Στη μεταγενέστερη εμφύτευση  $C^m$  παρατηρεί τα ίδια διανύσματα, τίποτα δεν έχει αλλάξει. Υποθέτουμε συγχρόνως, ότι ο παρατηρητής και η υποπολλαπλότητα είναι απαλλαγμένοι από αδράνεια, οπότε στην



διαδικασία μετάβασης από τον  $C^n \rightarrow C^m$  σχηματισμό δεν υπάρχει τρόπος ο παρατηρητής να αντιληφθεί την αλλαγή. Σημειώνουμε ότι ακόμα και να υποθέσουμε ότι υπάρχει αδράνεια, μπορούμε να πούμε ότι η μετάβαση συμβαίνει απείρως αργά και τα φαινόμενα αδράνειας εξαφανίζονται. Άλλωστε η απουσία αδράνειας καθώς και η υπόθεση απείρως αργής μετάβασης από τον ένα σχηματισμό στον επόμενο είναι συνεπής με το στόχο της ανάπτυξής μας που είναι να περιγράψουμε τη συμπεριφορά δικτυωμάτων υπό στατικά φορτία.

Έτσι σε αυτή την ερμηνεία θεωρούμε ένα προσαρμοσμένο παρατηρητή που ακολουθεί τις διάφορες εμφυτεύσεις της υποπολλαπλότητας  $S_1$ . Με άλλα λόγια μεταφέρεται (convected along with) μαζί με την υποπολλαπλότητα. Έτσι μπορούμε να πούμε ότι η (2.4.25) αποτελεί το προσαρμοσμένο μέρος του μετασχηματισμού όπου οι περιγραφές που γίνονται είναι σχετικές με τα προσαρμοσμένα πλαίσια του σώματος. Αξίζει να σημειωθεί ότι αυτή η περιγραφή είναι η ενδιάμεση μεταξύ των δύο που αναπτύχθηκαν παραπάνω. Πράγματι το πλαίσιο  $\hat{x}_n$  παραμένει αναλλοίωτο κατά τη μετάβαση από τον  $C^n \rightarrow C^m$  σχηματισμό αλλά συμβολίζεται με  $\hat{x}_m$  για να υπάρχει ακριβής διάκριση των σχηματισμών μεταξύ τους. Με άλλα λόγια τα  $\hat{x}_n$ ,  $\hat{x}_m$  συμβολίζουν τα ίδια διανύσματα του κινούμενου πλαισίου, η χρησιμοποίηση διαφορετικών συμβόλων αναδεικνύει το γεγονός ότι καταλαμβάνουν διαφορετικό τμήμα του  $\mathbb{R}^3$ .

Πρωτού όμως συνεχίσουμε με τις διατυπώσεις των εξισώσεων του δικτύωματος που εμπλέκουν εκφράσεις σε διαφορετικούς σχηματισμούς, αξίζει να δοθούν οι διάφορες σχέσεις των διανυσμάτων.

(i) Χρησιμοποιώντας αναπαραστάσεις στο  $X$  πλαίσιο:

$$\hat{x}_m|_X = R_\alpha \hat{x}_n|_X \quad (2.4.26.a)$$

$$\hat{x}_n|_X = R_\alpha^T \hat{x}_m|_X \quad (2.4.26.b)$$

Προφανώς πρόκειται για το ενεργητικό μέρος του μετασχηματισμού καθώς αλλάζουν μόνο οι συνιστώσες του διανύσματος, το πλαίσιο συντεταγμένων  $X$  παραμένει σταθερό.

(ii) Χρησιμοποιώντας αναπαραστάσεις στο  $x_m$  πλαίσιο

$$\hat{x}_m|_{x_m} = R_p \hat{x}_n|_{x_m} \quad (2.4.27.a)$$

$$\hat{x}_n|_{x_m} = R_p^T \hat{x}_m|_{x_m} \quad (2.4.27.b)$$

(iii) Χρησιμοποιώντας αναπαραστάσεις στο  $x_n$  πλαίσιο

$$\hat{x}_m|_{x_n} = R_p \hat{x}_n|_{x_n} \quad (2.4.28.a)$$

$$\hat{x}_n|_{x_n} = R_p^T \hat{x}_m|_{x_n} \quad (2.4.28.b)$$

Προφανώς πρόκειται για το παθητικό μέρος μετασχηματισμού, εφόσον αυτός δρα στο σύστημα συντεταγμένων, χωρίς να αλλάζει τα διανύσματα.

(iv) Χρησιμοποιώντας μικτές αναπαραστάσεις στα  $X$  και  $x_m$  πλαίσια

$$\hat{\mathbf{x}}_m|_{x_m} = \mathbf{T}_n \hat{\mathbf{x}}_n|_X \quad (2.4.29.a)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_n|_X = \mathbf{T}_n^T \hat{\mathbf{x}}_m|_{x_m} \quad (2.4.29.b)$$

(v) Χρησιμοποιώντας μικτές αναπαραστάσεις στα  $X$  και  $x_n$  πλαίσια

$$\hat{\mathbf{x}}_m|_X = \mathbf{T}_m^T \hat{\mathbf{x}}_n|_{x_n} \quad (2.4.30.b)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_n|_{x_n} = \mathbf{T}_m \hat{\mathbf{x}}_m|_X \quad (2.4.30.a)$$

(vi) Χρησιμοποιώντας μικτές αναπαραστάσεις στα  $x_m, x_n$  πλαίσια

$$\hat{\mathbf{x}}_m|_{x_m} = \mathbf{I} \hat{\mathbf{x}}_n|_{x_n} \quad (2.4.31.a)$$

Άρα στο μεταφερόμενο μέρος του μετασχηματισμού βλέπουμε ότι ο πίνακας είναι ο μοναδιαίος.

Είμαστε σε θέση τώρα να διατυπώσουμε τις παρακάτω πολύ σημαντικές εξισώσεις. Σημειώνεται ότι η μεταβλητή που χρησιμοποιείται για την περιγραφή της  $s_1$  υποπολλαπλότητας είναι η  $x_{n_1}$  αφού η περιγραφή γίνεται με βάση τον αρχικό σχηματισμό  $C_n$  που είναι ο σχηματισμός αναφοράς. Ακόμη, ο κάτω δείκτης 1 υποδηλώνει την πρώτη συνιστώσα του διανύσματος και εδώ θα μπορούσε να παραληφθεί.

$$(\vec{\mathbf{X}}_n(x_n) - \vec{\mathbf{X}}_m(i))|_X = \lambda_{mn} \mathbf{R}_a (\vec{\mathbf{X}}_n(x_n) - \vec{\mathbf{X}}_n(i))|_X \quad (2.4.32)$$

$$(\vec{\mathbf{X}}_m(x_n) - \vec{\mathbf{X}}_m(i))|_{x_m} = \lambda_{mn} \mathbf{R}_p (\vec{\mathbf{X}}_n(x_n) - \vec{\mathbf{X}}_n(i))|_{x_m} \quad (2.4.33)$$

$$(\vec{\mathbf{X}}_m(x_n) - \vec{\mathbf{X}}_m(i))|_{x_m} = \lambda_{mn} (\vec{\mathbf{X}}_n(x_n) - \vec{\mathbf{X}}_n(i))|_{x_n} \quad (2.4.34)$$

Παρατηρήσεις:

1. στην εξίσωση (2.4.33) το πλαίσιο αναφοράς μπορεί να είναι το  $x_n$ . Καμία αλλαγή δε φέρει στη διατύπωση της εξίσωσης η αλλαγή του συμβόλου
2. η εξίσωση (2.4.34) κρύβει μεγάλη σημασία. Είναι το μεταφερόμενο μέρος του μετασχηματισμού στο οποίο δεν έχουμε στροφή, παρά μόνο επιμήκυνση του μήκους του διανύσματος
3. βλέπουμε ακόμη ότι οι παραπάνω εξισώσεις στην ουσία περιγράφουν το διάνυσμα θέσης οποιουδήποτε σημείου της εμφυτευμένης  $s_1$  υποπολλαπλότητας μέσω της παράστασης  $(\vec{\mathbf{X}}_n(x_n) - \vec{\mathbf{X}}_m(i))$ . Άρα κινηματικώς, η εμφύτευση είναι πράγματι ένα ευθύγραμμο τμήμα που κινείται στο χώρο και η κίνησή του που περιγράφεται από μία στροφή στερεού σώματος σαν μία αλλαγή στο μήκος.

## 2.5 Εμφυτεύσεις της δισδιάστατης υποπολλαπλότητας $S_2, S_3$ στον Ευκλείδειο χώρο

Στην περιγραφή σε επίπεδο πολλαπλότητας θεωρήσαμε αξιωματικώς την ύπαρξη μίας μονοπαραμετρικής οικογένειας φραγμένων περιοχών  $A(S_1) = A$  που περιγράφουν τη διατομή. Ακόμη, κάνουμε την παραδοχή ότι για σταθερές τιμές στα  $S_2, S_3$  παίρνουμε ισοδύναμες υποπολλαπλότητες κάθε μία από τις οποίες είναι τμήμα πραγματικής γραμμής. Στη διαδικασία εμφύτευσης της δεσπόζουσας μονοδιάστατης υποπολλαπλότητας ήμασταν σε θέση να κατασκευάσουμε το  $X_m$  τοπικό πλαίσιο συντεταγμένων του οποίου η  $x_{m_1}$  συντεταγμένη έπαιζε ρόλο παραμέτρου. Ακόμη μπορούμε να πούμε ότι η  $S_1$  υποπολλαπλότητα που θεωρήσαμε στην διαδικασία εμφύτευσης είναι μία από τις απείρως πολλές ισοδύναμες υποπολλαπλότητες που μπορούμε να πάρουμε από την ανάθεση σταθερών τιμών στις παραμέτρους  $S_2, S_3$ . Έτσι τα επαγόμενα (από την εμφύτευση) τοπικά πλαίσια συντεταγμένων αντιστοιχούν σε αυτή την ιδιαίτερη επιλογή της υπό έλεγχο υποπολλαπλότητας. Στο εξής θα θεωρήσουμε εμφυτεύσεις της  $S_2, S_3$  υποπολλαπλότητας του δικτυώματος.

Όπως είπαμε νωρίτερα, ο  $x_{m_1}$  άξονας έχει μία μοναδική διεύθυνση κατά μήκος της εμφυτευμένης υποπολλαπλότητας σε αντίθεση με τα  $x_{m_2}, x_{m_3}$  που δεν αντιστοιχούν σε κάποια φυσική επιλογή διεύθυνσης. Φυσιολογικά, η εμφύτευση των  $S_2, S_3$  θα έπρεπε να δώσει μία φυσική διεύθυνση για τους άξονες  $x_{m_2}, x_{m_3}$ , ώστε να μην υπάρχει ασάφεια στην αναγνώριση του κινούμενου πλαισίου. Στα προηγούμενα, όταν θεωρήσαμε εμφυτεύσεις της υποπολλαπλότητας  $S_1$  οι διάφοροι δυνατοί σχηματισμοί συμβολίζονται με  $C^m$ . Χρησιμοποιούμε τον ίδιο συμβολισμό για να περιγράψουμε τις εμφυτεύσεις της  $S_2, S_3$  εφόσον υποθέτουμε (και αργότερα θα αποδείξουμε) ότι οι υποπολλαπλότητες δεν είναι ασύνδετα αντικείμενα αλλά συνθέτουν αυτό που πολλάκις έχουμε ονομάσει ως πολλαπλότητα δικτυώματος. Ως προοικονομία για όσα ακολουθήσουν στη συνέχεια αξίζει να πούμε ότι ο  $C^m$  παράγεται από την εμφύτευση της  $S_1$  υποπολλαπλότητας και επαυξάνεται με τις  $S_2, S_3$ . Γι' αυτό άλλωστε λέμε ότι η  $S_1$  είναι η δεσπόζουσα υποπολλαπλότητα του δικτυώματος.

Στο εξής θα θεωρούμε εμφυτεύσεις της  $S_2, S_3$  υποπολλαπλότητας χωριστά χωρίς κάποιο σύμβολο να επεξηγεί το γεγονός αυτό. Αυτό θα ισχύσει μέχρι την παράγραφο 2.6. άλλωστε η διάκριση από το υπόλοιπα θα είναι εύκολη. Όλα τα μεγέθη που αφορούν την  $S_2, S_3$  υποπολλαπλότητα θα εξαρτώνται από τις παραμέτρους  $S_2, S_3$  με τον ίδιο τρόπο που διακρίναμε.

Κατ' αναλογία με τα προηγούμενα η εξίσωση της επιφάνειας θα είναι:

$$\vec{X}_m - \vec{X}_m(S_2, S_3) \quad (2.5.1)$$

Η (2.5.1) είναι διανυσματική εξίσωση της επιφάνειας στον  $\mathbb{R}^3$ .

Ως τώρα ως δικτύωμα έχουμε ορίσει την τρισδιάστατη πολλαπλότητα της οποίας η δισδιάστατη υποπολλαπλότητα  $S_2, S_3$  είναι ομογενώς εμφυτευμένη σε φραγμένες επίπεδες περιοχές του  $\mathbb{R}^3$ . Έτσι όλες οι αποδεκτές εμφυτεύσεις της  $S_2-S_3$  υποπολλαπλότητας στον  $\mathbb{R}^3$  υποτίθεται ότι είναι φραγμένες διατομές που όμως είναι επίπεδες. Άρα η (2.5.1) θα έπρεπε να είναι μία ομογενής παραμέτρηση μίας φραγμένης επίπεδης επιφάνειας του  $\mathbb{R}^3$ .

Τα επαπτόμενα διανύσματα της επιφάνειας όπως αυτή ορίζεται στην (2.5.1) δίδονται ως:

$$\vec{t}_{ms_2}(s_2, s_3) = \frac{\partial \vec{X}_m(s_2, s_3)}{\partial s_2} \quad (2.5.2.a)$$

$$\vec{t}_{ms_3} = \frac{\partial \vec{X}_m(s_2, s_3)}{\partial s_3} \quad (2.5.2.b)$$

όπου όπως πάντα ο κάτω δείκτης  $m$  δείχνει τον σχηματισμό  $C^m$ ,  $s_2$  υποδεικνύει ότι η παραγωγή γίνεται ως προς τη μεταβλητή  $s_2$ .

Παρατηρούμε ότι δεν είναι μοναδιαία διανύσματα, είναι όμως γραμμικώς ανεξάρτητα εφόσον η (2.5.1) αναπαριστά επιφάνεια. Ακόμη απαιτήσαμε η επιφάνεια αυτή να είναι ομογενής, δηλαδή οι παράγωγοι ως προς τα  $s_2, s_3$  να είναι μηδενικές. Αυτό είναι ισοδύναμο με το να πει κανείς ότι να επαπτόμενα διανύσματα είναι σταθερά.

$$\text{Δηλαδή: } \vec{t}_{m_2}(s_2, s_3) = \vec{t}_{m_2} \quad (2.5.3.a) \quad \vec{t}_{m_3}(s_2, s_3) = \vec{t}_{m_3} \quad (2.5.3.b)$$

$$\text{Έτσι ορίζουμε: } \vec{t}_{m_2} = \sum_{k=1}^3 \alpha_k \hat{X}_k \quad (2.5.4.a) \quad \vec{t}_{m_3} = \sum_{k=1}^3 \alpha_k \hat{X}_k \quad (2.5.4.b)$$

Συνδυάζοντας τις προηγούμενες σχέσεις βλέπουμε ότι για να είναι η (2.5.1) μία αναπαραμέτρηση ομογενούς επιφάνειας θα πρέπει για κάθε μία συνιστώσα  $k$  να ισχύει η ακόλουθη γραμμική μορφή:

$$X_k = X_k(s_2, s_3) = \alpha_k s_2 + \beta_k s_3 + \gamma_k \quad \text{για } k=1,2,3 \quad (2.5.5)$$

Και τα  $\alpha, \beta, \gamma$  πραγματικοί αριθμοί, διαφορετικοί όμως για κάθε συνιστώσα.

Μένει μόνο να ορίσουμε ένα μέγεθος για να δώσουμε την διανυσματική εξίσωση του επιπέδου. Ως γνωστόν αυτή δίδεται από τον γραμμικό συνδυασμό δύο γραμμικώς ανεξαρτήτων μεταβλητών και ενός διανύσματος θέσης κάποιου σημείου που ανήκει στην επίπεδη επιφάνεια.

$$\text{Ας ονομάσουμε } c \text{ το σημείο αυτό και θα ορίσουμε ως } \vec{X}_{mt(c)} = \gamma_c \hat{X}_k \quad (2.5.6)$$

Τότε:

$$\vec{X}_{mt}(s_2, s_3) = s_2 \vec{t}_{m_2} + s_3 \vec{t}_{m_3} + \vec{X}_{mt(c)} \quad (2.5.7)$$

Ο κάτω δείκτης  $t$  χρησιμοποιείται για να δηλώσει ότι τα διανύσματα  $\vec{t}_{m_2}, \vec{t}_{m_3}$  χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν την εμφυτευμένη επιφάνεια.

Ας ορίσουμε τη νόρμα των διανυσμάτων αυτών:

$$\lambda_{mt_2} = \sqrt{\vec{t}_{m_2} \vec{t}_{m_2}} \quad (2.5.8.a)$$

$$\lambda_{mt_3} = \sqrt{\vec{t}_{m_3} \vec{t}_{m_3}} \quad (2.5.8.b)$$

Ορίζουμε ακόμη τα μοναδιαία διανύσματα που έχουν φυσικά τις διευθύνσεις των  $\vec{t}_{m_2}, \vec{t}_{m_3}$  αλλά μοναδιαίο μέτρο.

$$\hat{\mathbf{t}}_{m_2} = \frac{\vec{t}_{m_2}}{\lambda_{mt_2}} \quad (2.5.9.a)$$

$$\hat{\mathbf{t}}_{m_3} = \frac{\vec{t}_{m_3}}{\lambda_{mt_2}} \quad (2.5.9.b)$$

Από την (2.5.7) βλέπουμε ότι το  $\vec{X}_{mt}(c)$  είναι σημείο της επιφάνειας που αντιστοιχεί για  $s_2 = s_3 = 0$  δηλαδή  $\vec{X}_{mt}(0,0) = \vec{X}_{mt}(c)$ . Ακόμη εν γένει τα  $\hat{\mathbf{t}}_{m_2}, \hat{\mathbf{t}}_{m_3}$  δεν είναι ορθογώνια, ούτε όμως συγγραμμικά εφόσον υποθέτουμε ότι ο Ιακωβιανός πίνακας της διανυσματικής συνάρτησης της επιφάνειας υποτίθεται ότι είναι τάξης 2 (άρα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα).

Αργότερα θα οριστεί το πλαίσιο  $t$  (σε διάφορους σχηματισμούς) οπότε είναι λογικό να δείξουμε τις συντεταγμένες σε αυτό το πλαίσιο. Πράγματι:

$$t_{m_2} = \lambda_{mt_2} s_2 \quad (2.5.10.a)$$

$$t_{m_3} = \lambda_{mt_3} s_3 \quad (2.5.10.b)$$

Με αυτή την αλλαγή μεταβλητών πετυχαίνουμε μία πιο κομψή διατύπωση της (2.5.7):

$$\vec{X}_{m\hat{t}}(t_{m_1}, t_{m_2}) = t_{m_2} \hat{\mathbf{t}}_{m_2} + t_{m_3} \hat{\mathbf{t}}_{m_3} + \vec{X}_{m\hat{t}}(c) \quad (2.5.11)$$

Η παράμετρος  $\lambda$  που εισήχθη, όπως και στην περίπτωση της εμφύτευσης της  $S_1$  υποπολλαπλότητας, συμβολίζει κάποιον λόγο επιμήκυνσης. Επειδή όμως στα επόμενα θα εμπλακεί ο  $C^n$  σχηματισμός, για να μην υπάρχει σύγχυση με τους δείκτες (που θα συγχωνευθούν) όταν χρησιμοποιείται το σύμβολο  $\lambda$  θα εννοείται κάποιος λόγος επιμήκυνσης. Εν προκειμένου θα διερευνήσουμε τη φυσική σημασία τους.

Σε επίπεδο πολλαπλότητας θεωρήσαμε αξιωματικά την ύπαρξη μίας οικογένειας φραγμένων επιφανειών  $AS_1 = A$ . Έστω ότι  $A = \iint ds_2 ds_3$  (2.5.12), όπου τα όρια ολοκλήρωσης καθορίζονται από το εύρος των παραμέτρων στις σχέσεις της παραγράφου 2.1.

Παρατηρούμε ότι στην θεώρηση της (2.5.12) φαίνεται ότι η εσωτερική μετρική της  $S_2$ - $S_3$  υποπολλαπλότητας είναι Καρτεσιανή. Πράγματι μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οποιαδήποτε μορφή εσωτερικής μετρικής για την  $S_2$ - $S_3$  υποπολλαπλότητα και μάλιστα τίποτα δεν θα αλλάξει στη συζήτηση μας αλλά χρησιμοποιώντας αυτή την μετρική είναι βολικό εφόσον η επιφάνεια που ορίζεται σε επίπεδο πολλαπλότητας γίνεται παράμετρος στην  $S_2$ - $S_3$  υποπολλαπλότητα σε πλήρη αναλογία με την παράμετρο  $L$  που χρησιμοποιείται στην  $S_1$  υποπολλαπλότητα.

Το εμβαδόν της επίπεδης παραμετροποιημένης επιφάνειας είναι:

$$A_m = \iint \left\| \frac{\partial \vec{X}_m(s_2, s_3)}{\partial s_2} \times \frac{\partial \vec{X}_m(s_2, s_3)}{\partial s_3} \right\| ds_2 ds_3 \quad (2.5.13.a)$$

$$A_m = \iint \left\| \frac{\partial \vec{X}_m(t_{m_2}, t_{m_3})}{\partial t_{m_2}} \times \frac{\partial \vec{X}_m(t_{m_2}, t_{m_3})}{\partial t_{m_3}} \right\| dt_{m_2} dt_{m_3} \quad (2.5.13.b)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι δεν χρησιμοποιούμε το  $\hat{t}$  ως κάτω δείκτη στις παραπάνω εκφράσεις των εμβαδών εφόσον οι τύποι είναι γενικώς έγκυροι, ανεξάρτητοι από τα διανύσματα που χρησιμοποιούνται και ότι το εμβαδόν είναι γεωμετρική ποσότητα της εμφυτευμένης  $S_2$ - $S_3$  υποπολλαπλότητας, μοναδική για κάθε σχηματισμό.

Η (2.5.13) γράφεται:

$$A_m = \iint \|\vec{t}_{m_2} \times \vec{t}_{m_3}\| ds_2 ds_3 = \mu_m \iint ds_2 ds_3 = \mu_m A \quad (2.5.14)$$

όπου  $\mu_m = \frac{A_m}{A}$  προφανώς ανεξάρτητο των παραμέτρων ολοκλήρωσης.

Με φυσιολογικό τρόπο ορίζεται το διάνυσμα  $\vec{t}_{m_1} = \vec{t}_{m_2} \times \vec{t}_{m_3}$  (2.5.15) το οποίο είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζεται από τα εφαπτόμενα διανύσματα στην επιφάνεια. Εφόσον όμως στα προηγούμενα υποθέσαμε ότι έχουμε σταθερά εφαπτόμενα διανύσματα (δηλαδή έχουμε επίπεδη επιφάνεια) έπεται ότι και το διάνυσμα που ορίζεται από την (2.5.15) είναι επίσης σταθερό. Θα δείξουμε αργότερα ότι οποιαδήποτε δύο διανύσματα τα οποία είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και ορίζονται στο επίπεδο της διατομής ορίζουν (μέσω του εξωτερικού γινομένου) ένα επίσης σταθερό διάνυσμα και μάλιστα ίδιο για κάθε τέτοιο γινόμενο. Συνεπώς η σχέση (2.5.15) είναι ορθή.

Από τις (2.5.14), (2.5.15) εύκολα βλέπουμε ότι  $\mu_m$  είναι η νόρμα του  $t_{m_1}$ . Μάλιστα η νόρμα του διανύσματος όντως μας δίνει την απαραίτητη παράμετρο που περιγράφει τη μεγέθυνση του εμβαδού της επιφάνειας  $A$  στη διαδικασία εμφύτευσης σε κάποιο  $C^m$  σχηματισμό. Ακόμη βλέπουμε ότι παίρνουμε μία μοναδική (σταθερή) παράμετρο κλίμακας ακριβώς επειδή τα διανύσματα βάσης είναι σταθερά (ασχολούμαστε με ομογενείς επιφάνειες).

Από την ταυτότητα Lagrange έχουμε:

$$\begin{aligned} \vec{t}_{m_1} \vec{t}_{m_1} &= (\vec{t}_{m_2} \vec{t}_{m_2})(\vec{t}_{m_2} \vec{t}_{m_3}) - (\vec{t}_{m_2} \vec{t}_{m_3})^2 = \lambda_{mt_2}^2 \lambda_{mt_3}^2 - (\vec{t}_{m_2} \vec{t}_{m_3})^2 = \\ &= \lambda_{mt_2}^2 \lambda_{mt_3}^2 \left[ 1 - (\hat{t}_{m_2} \hat{t}_{m_3})^2 \right] \end{aligned} \quad (2.5.16)$$

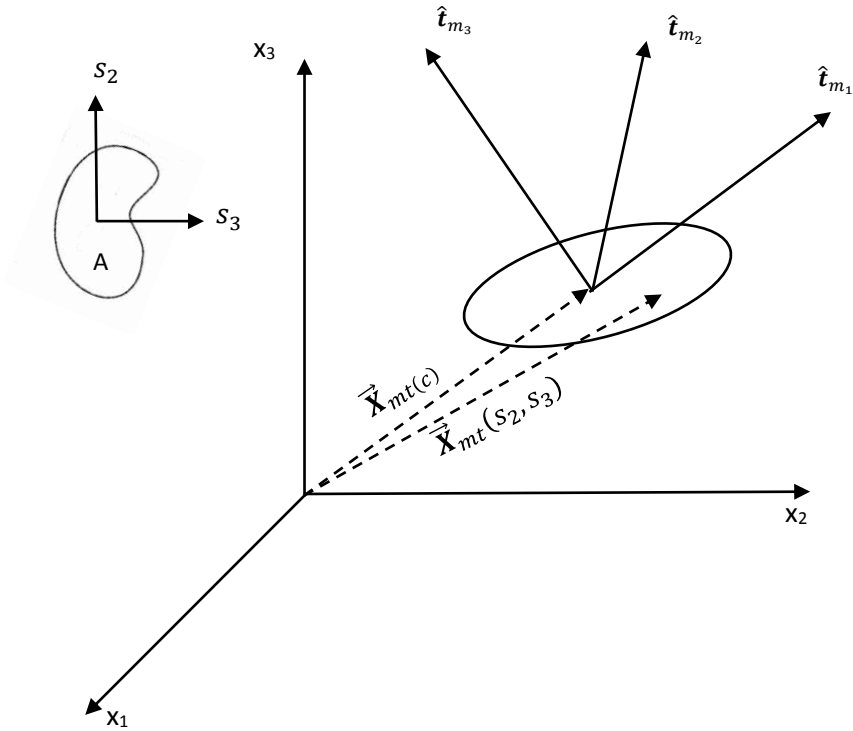
και

$$\mu_m = \frac{A_m}{A} = \|\vec{t}_{m_1}\| \quad (2.5.17)$$

οπότε παίρνουμε μία αναλυτική σχέση για την παράμετρο κλίμακας:

$$\mu_m = \lambda_{mt_2} \lambda_{mt_3} \sqrt{1 - (t_{m_2} t_{m_3})^2} \quad (2.5.18)$$

Παρατηρούμε ότι το ριζικό είναι στην πραγματικότητα το ημίτονο της γωνίας που σχηματίζεται μεταξύ των  $\vec{t}_{m_2}, \vec{t}_{m_3}$  εφόσον το  $\hat{t}_{m_2} \hat{t}_{m_3}$  είναι το συνημίτονο αυτής της γωνίας. Αυτό το αποτέλεσμα είναι συνεπές με τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου. Αν τα  $\hat{t}_{m_2} \hat{t}_{m_3}$  είναι ορθογώνια τότε πολύ απλά η μεγέθυνση της επιφάνειας είναι απλά ίση με το γινόμενο των νορμών δύο γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων. Στην παρακάτω εικόνα δείχνουμε τη διαδικασία εμφύτευσης της υποπολλαπλότητας  $s_2$ - $s_3$  στον  $\mathbb{R}^3$ .



Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις μπορούμε να γράψουμε μία νέα έκφραση για το  $A_m$

$$\begin{aligned} A_m &= \iint \|\vec{t}_{m_2} \times \vec{t}_{m_3}\| ds_2 ds_3 = \lambda_{mt_2} \lambda_{mt_3} \iint \|\hat{t}_{m_2} \times \hat{t}_{m_3}\| ds_2 ds_3 = \\ &= \lambda_{mt_2} \lambda_{mt_3} \sqrt{1 - (t_{m_2} t_{m_3})^2} A \end{aligned} \quad (2.5.19)$$

Πρέπει να πούμε ότι το  $\mu_m^2$  είναι γνωστό ως η επαγόμενη από την εμφύτευση νόρμα της μετρικής της επιφάνειας (δηλαδή είναι η 1<sup>η</sup> θεμελιώδης μορφή της επιφάνειας) και σχετίζεται με τις ορίζουσες του Ιακωβιανού μητρώου.

Αν συμβολίσουμε τα ακόλουθα:

$$\mathbf{D}_1 = \begin{vmatrix} \frac{dX_{m_1}}{ds_2} & \frac{dX_{m_1}}{ds_3} \\ \frac{dX_{m_2}}{ds_2} & \frac{dX_{m_2}}{ds_3} \end{vmatrix} \quad \mathbf{D}_2 = \begin{vmatrix} \frac{dX_{m_2}}{ds_2} & \frac{dX_{m_2}}{ds_3} \\ \frac{dX_{m_3}}{ds_2} & \frac{dX_{m_3}}{ds_3} \end{vmatrix} \quad \mathbf{D}_3 = \begin{vmatrix} \frac{dX_{m_3}}{ds_2} & \frac{dX_{m_3}}{ds_3} \\ \frac{dX_{m_1}}{ds_2} & \frac{dX_{m_1}}{ds_3} \end{vmatrix} \quad (2.5.20)$$

Τότε παίρνουμε ότι:  $\mu_m^2 = D_{m_1}^2 + D_{m_2}^2 + D_{m_3}^2$

Έτσι το εμβαδόν  $A$  της υποπολλαπλότητας μεταβάλλει το μέγεθος της σύμφωνα με την παράμετρο  $\mu_m$ . Βλέπουμε ότι τα  $\lambda_{mt_2}, \lambda_{mt_3}$  παίζουν ζωτικό ρόλο στην τιμή του  $\mu_m$  αλλά η φυσική τους σημασία δεν είναι ακόμα ξεκάθαρη. Αυτό θα διερευνήσουμε στο εξής.

Παρατηρούμε ότι η βασική μας υπόθεση που αφορά τις επιτρεπόμενες εμφυτεύσεις της  $S_2$ - $S_3$  υποπολλαπλότητας είναι ότι η ομοιόμορφη εμφυτευμένη πολλαπλότητα θα έπρεπε να είναι επίπεδη. Αυτή η θεμελιώδης υπόθεση επιβεβαιώνεται με την απαίτηση τα επαπτόμενα διανύσματα να είναι σταθερά και μάλιστα επιτρέπεται να λαμβάνονται αυθαίρετα όσο είναι

γραμμικώς ανεξάρτητα. Έτσι ο ορισμός του πλαισίου  $t_m$ , σε συνδυασμό με την υπόθεση το Ιακωβιανό μητρώο να είναι  $\text{rank}=2$  περιγράφει δύο γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα που σχηματίζουν μία μη ορθογώνια (εν γένει) βάση που καλύπτει όλη την εμφυτευμένη επίπεδη επιφάνεια.

Όμως εφόσον οποιαδήποτε δύο μη συγγραμμικά διανύσματα θα κάνουν την ίδια δουλειά, βλέπουμε ότι οι νόρμες τους και οι διευθύνσεις τους είναι αυθαίρετες και έτσι αναπόφευκτα η επαγόμενη παράμετρος κλίμακας  $\mu_m$  θα είναι επίσης αυθαίρετη. Ωστόσο, εφόσον η  $\mu_m$  περιγράφει μία μοναδική εμφύτευση, η τιμή της και όχι η έκφρασή της θα έπρεπε να είναι μοναδική και άρα ανεξάρτητη από τα διανύσματα που χρησιμοποιήθηκαν για την παραμετροποίηση. Αυτή η ανακάλυψη μας δείχνει ότι η  $S_2$ - $S_3$  υποπολλαπλότητα μπορεί να εμφυτευθεί με απείρως διαφορετικούς τρόπους σε διάφορους διακριτούς σχηματισμούς, καθένας από τους οποίους αναφέρεται σε διαφορετική τιμή ενός επαγόμενου εμβαδού  $A_m$  καθώς και σε διαφορετικό σχήμα διατομής.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι επιλέγουμε δύο διαφορετικά γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα για να περιγράψουν την επίπεδη επιφάνεια όπως αυτή ορίστηκε προηγουμένως. Για λόγους συντομίας, να αποφευχθεί η διατύπωση των αναλυτικών σχέσεων που διατυπώνει το νέο πλαίσιο, καθώς είναι καθ' όλα όμοιες με αυτές που διατυπώθηκαν για το πλαίσιο  $t_m$  (μόνο το σύμβολο αλλάζει). Αντιθέτως, θα επιχειρηθεί να δοθεί μία σαφής σχέση που διέπει τα πλαίσια αυτά.

Έχει υπονοηθεί σε προηγούμενο κεφάλαιο και στην πορεία της εργασίας αυτής θα αποδειχθεί, ότι η διατομή του δικτυώματος είναι άρρηκτα συνδεδεμένα με τη διαμήκη διεύθυνση του. Για την πρώτη έχουμε πει ότι αποδεκτές εμφυτεύσεις είναι όλα τα πιθανά σχήματα τα οποία είναι όμως επίπεδα. Για τη δε δεύτερη αποδεκτές εμφυτεύσεις λογίζονται όλα τα ευθύγραμμα τμήματα οποιουδήποτε σχήματος. Αυτό είναι ισοδύναμο με το να πει κανείς ότι το διάμηκες (εφαπτόμενο) διάνυσμα του δικτυώματος (που για παράδειγμα στην περίπτωση του  $x_m$  πλαισίου είναι  $\hat{x}_{m_1}$ ) οφείλει να είναι μονίμως κάθετο στη διατομή αφού δεχόμαστε ότι αυτή είναι επίπεδη. Με αυτό το συλλογισμό αποδεικνύεται ότι οποιαδήποτε δύο πλαίσια διαλέξει κάποιος, αυτά θα έχουν κοινό κάθετο (στο επίπεδο της διατομής) μοναδιαίο διάνυσμα. Το συμπέρασμα αυτό θα μπορούσε να εξαχθεί με μαθηματικές σχέσεις, ξεφεύγει όμως από τον σκοπό αυτής της εργασίας και είναι αρκετά τετριμμένο και λογικοφανές.

Άρα αν  $u_m$  συμβολίσουμε ένα δεύτερο προσαρμοσμένο πλαίσιο θα ισχύει (δίχως περαιτέρω διερεύνηση) ότι  $\hat{u}_{m_1} \equiv \hat{t}_{m_1}$  (2.5.11). Για τις άλλες συνιστώσες του πλαισίου, αυτό που χρειάζεται να πούμε είναι ότι απλώς αποτελούν ένα πλαγιόγωνο τοπικό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο της διατομής.

Είμαστε σε θέση επομένως με απλή άλγεβρα, να εκφράσουμε τις σχέσεις των συνιστωσών του κάθε πλαισίου σε σχέση με την καθολική  $X$  βάση. Για να μην προκύψει παρατεταμένη συσσώρευση τύπων που στην ουσία λένε το ίδιο πράγμα αλλά με άλλο σύμβολο, πολλές φορές θα παραληφθεί η διατύπωση τύπων για το  $u_m$  πλαίσιο αλλά θα εννοείται ότι ισχύει ισοδύναμα με το  $t_m$  πλαίσιο.



Έχουμε:

$$\mathbf{P}_{m,t}^T = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{t}}_{m_1} \hat{\mathbf{X}}_1 & \hat{\mathbf{t}}_{m_2} \hat{\mathbf{X}}_1 & \hat{\mathbf{t}}_{m_3} \hat{\mathbf{X}}_1 \\ \hat{\mathbf{t}}_{m_1} \hat{\mathbf{X}}_2 & \hat{\mathbf{t}}_{m_2} \hat{\mathbf{X}}_2 & \hat{\mathbf{t}}_{m_3} \hat{\mathbf{X}}_2 \\ \hat{\mathbf{t}}_{m_1} \hat{\mathbf{X}}_3 & \hat{\mathbf{t}}_{m_2} \hat{\mathbf{X}}_3 & \hat{\mathbf{t}}_{m_3} \hat{\mathbf{X}}_3 \end{bmatrix} \quad (2.5.22)$$

Σημειώνουμε ότι ο πίνακας δεν είναι ορθογώνιος εφόσον το πλαίσιο  $t_m$  δεν είναι.

Κατ' αναλογία με τα προηγούμενα κεφάλαια μπορούμε να εκφράσουμε ένα διάνυσμα  $t_m$  στο πλαίσιο. Είναι:

$$\vec{\alpha}|_X = \mathbf{P}_{mt}^T \vec{\alpha}|_{t_m} \quad (2.5.23)$$

$$\vec{\alpha}|_{t_m} = \mathbf{P}_{mt}^{-T} \vec{\alpha}|_X \quad (2.5.24)$$

όπου  $P^{-1} \neq P^T$  αφού δεν έχουμε ορθογώνιο μητρώο και μάλιστα:

$$\mathbf{P}_{mt}^{-T} = \frac{1}{|\mathbf{P}_{mt}^T|} \begin{bmatrix} (\hat{\mathbf{t}}_{m_2}, \hat{\mathbf{t}}_{m_3}, \hat{\mathbf{X}}_1) & (\hat{\mathbf{t}}_{m_2}, \hat{\mathbf{t}}_{m_3}, \hat{\mathbf{X}}_2) & (\hat{\mathbf{t}}_{m_2}, \hat{\mathbf{t}}_{m_3}, \hat{\mathbf{X}}_3) \\ (\hat{\mathbf{t}}_{m_3}, \hat{\mathbf{t}}_{m_1}, \hat{\mathbf{X}}_1) & (\hat{\mathbf{t}}_{m_3}, \hat{\mathbf{t}}_{m_1}, \hat{\mathbf{X}}_2) & (\hat{\mathbf{t}}_{m_3}, \hat{\mathbf{t}}_{m_1}, \hat{\mathbf{X}}_3) \\ (\hat{\mathbf{t}}_{m_1}, \hat{\mathbf{t}}_{m_2}, \hat{\mathbf{X}}_1) & (\hat{\mathbf{t}}_{m_1}, \hat{\mathbf{t}}_{m_2}, \hat{\mathbf{X}}_2) & (\hat{\mathbf{t}}_{m_1}, \hat{\mathbf{t}}_{m_2}, \hat{\mathbf{X}}_3) \end{bmatrix} \quad (2.5.25)$$

όπου βλέπουμε το σύνηθες μικτό γινόμενο και:

$$|\mathbf{P}_{mt}^T| = \sqrt{1 - (t_{m_2} \times t_{m_3})^2} \quad (2.5.26)$$

Ακόμη:

$$\hat{\mathbf{u}}_{m_1} = \frac{\hat{\mathbf{u}}_{m_2} \times \hat{\mathbf{u}}_{m_3}}{|\mathbf{P}_{mu}^T|} = \hat{\mathbf{t}}_{m_1} = \frac{\hat{\mathbf{t}}_{m_2} \times \hat{\mathbf{t}}_{m_3}}{|\mathbf{P}_{mt}^T|} \quad (2.5.27)$$

Έτσι:

$$\hat{\mathbf{u}}_{m_2} \times \hat{\mathbf{u}}_{m_3} = \frac{|\mathbf{P}_{mu}^T|}{|\mathbf{P}_{mt}^T|} \hat{\mathbf{t}}_{m_2} \times \hat{\mathbf{t}}_{m_3} \quad (2.5.28)$$

Ας δούμε τι θα γίνει αν τα πλαίσια  $t_m$  και  $u_m$  ήταν ορθογώνια τότε οι ορίζουσες των μητρώων μετασχηματισμού θα ήταν ίσα με τη μονάδα και οι πίνακες οι ίδιοι είναι ορθογώνιοι.

Στη συνέχεια της (2.5.13) μπορούμε να γράψουμε:

$$\vec{\alpha}|_{u_m} = \mathbf{P}_{mu}^{-T} \mathbf{P}_{mt}^T \vec{\alpha}|_{t_m} = \mathbf{P}_{m,ut} \vec{\alpha}|_{t_m} \quad (2.5.29)$$

και όμοια:

$$\vec{\alpha}|_{t_m} = \mathbf{P}_{m,ut}^{-1} \vec{\alpha}|_{u_m} \quad (2.5.30)$$

όπου:

$$\mathbf{P}_{m,ut} = \frac{1}{|\mathbf{P}_{m,u}^T|} \begin{bmatrix} (\hat{\mathbf{u}}_{m_2}, \hat{\mathbf{u}}_{m_3}, \hat{\mathbf{t}}_{m_1}) & (\hat{\mathbf{u}}_{m_2}, \hat{\mathbf{u}}_{m_3}, \hat{\mathbf{t}}_{m_2}) & (\hat{\mathbf{u}}_{m_2}, \hat{\mathbf{u}}_{m_3}, \hat{\mathbf{t}}_{m_3}) \\ (\hat{\mathbf{u}}_{m_3}, \hat{\mathbf{u}}_{m_1}, \hat{\mathbf{t}}_{m_1}) & (\hat{\mathbf{u}}_{m_3}, \hat{\mathbf{u}}_{m_1}, \hat{\mathbf{t}}_{m_2}) & (\hat{\mathbf{u}}_{m_3}, \hat{\mathbf{u}}_{m_1}, \hat{\mathbf{t}}_{m_3}) \\ (\hat{\mathbf{u}}_{m_1}, \hat{\mathbf{u}}_{m_2}, \hat{\mathbf{t}}_{m_1}) & (\hat{\mathbf{u}}_{m_1}, \hat{\mathbf{u}}_{m_2}, \hat{\mathbf{t}}_{m_2}) & (\hat{\mathbf{u}}_{m_1}, \hat{\mathbf{u}}_{m_2}, \hat{\mathbf{t}}_{m_3}) \end{bmatrix} \quad (2.5.31)$$

και  $\mathbf{P}_{m,ut}^{-1}$  ακριβώς όπως το  $\mathbf{P}_{m,ut}$  με εναλλαγή των  $u$  και  $t$ .

Η προηγούμενη σχέση χρειάζεται τροποποίηση προκειμένου να είναι ορθή. Το γεγονός αυτό προκύπτει από τις σχέσεις του μικτού γινομένου καθώς και από τη θεώρηση του εφαπτόμενου διανύσματος.

Ειδικότερα έχει δειχθεί ότι τα διανύσματα  $\vec{\mathbf{u}}_{m_1}, \vec{\mathbf{t}}_{m_1}$  είναι συγγραμμικά και κάθετα στο επίπεδο της διατομής όπου κείνται οι άλλες δύο συνιστώσες του πλαισίου. Το διάνυσμα  $\hat{\mathbf{u}}_{m_2} \times \hat{\mathbf{u}}_{m_3}$  είναι ένα διάνυσμα παράλληλο στα  $\hat{\mathbf{u}}_{m_1}, \hat{\mathbf{t}}_{m_1}$  δηλαδή κάθετο στο επίπεδο της διατομής. Έτσι οι όροι 12,13 μηδενίζονται. Με όμοιο σκεπτικό μηδενίζονται και οι όροι 21, 31. Όσον αφορά τον όρο 11 βλέπουμε ότι:

$$(\hat{\mathbf{u}}_{m_2} \times \hat{\mathbf{u}}_{m_3}) \hat{\mathbf{t}}_{m_1} = |\mathbf{P}_{m,u}^T| \hat{\mathbf{u}}_{m_1} \hat{\mathbf{t}}_{m_1} = |\mathbf{P}_{m,u}^T| \hat{\mathbf{t}}_{m_1} \hat{\mathbf{t}}_{m_1} = |\mathbf{P}_{m,u}^T| \quad (2.5.32)$$

Οπότε ύστερα από αυτή την τροποποίηση μπορούμε να γράψουμε:

$$\mathbf{P}_{m,ut}^T = \frac{1}{|\mathbf{P}_{m,u}^T|} \begin{bmatrix} |\mathbf{P}_{m,u}^T| & 0 & 0 \\ 0 & (\hat{\mathbf{u}}_{m_3}, \hat{\mathbf{u}}_{m_1}, \hat{\mathbf{t}}_{m_2}) & (\hat{\mathbf{u}}_{m_3}, \hat{\mathbf{u}}_{m_1}, \hat{\mathbf{t}}_{m_3}) \\ 0 & (\hat{\mathbf{u}}_{m_1}, \hat{\mathbf{u}}_{m_2}, \hat{\mathbf{t}}_{m_2}) & (\hat{\mathbf{u}}_{m_1}, \hat{\mathbf{u}}_{m_2}, \hat{\mathbf{t}}_{m_3}) \end{bmatrix} \quad (2.5.32)$$

Εντελώς ανάλογα με την (2.4.20) μπορούμε να γράψουμε ότι:

$$\hat{\mathbf{t}}_{m,k} \Big|_{t_m} = \hat{\mathbf{u}}_{m,k} \Big|_{u_m} \quad \text{για } k=1,2,3 \quad (2.5.33)$$

Η παραπάνω εξίσωση μας λέει κάτι το προφανές. Ότι δηλαδή οι αριθμητικές τιμές των συνιστωσών των μοναδιαίων διανυσμάτων είναι ίσες όταν τα διανύσματα εκφράζονται στα πλαίσια τα οποία ανήκουν.

Αν θελήσουμε να κάνουμε μία «μικτή» περιγραφή έστω για το διάνυσμα  $\hat{\mathbf{t}}_m$  τότε θα έχουμε:

$$\hat{\mathbf{t}}_{m,k} \Big|_{u_m} = \mathbf{P}_{m,ut} \hat{\mathbf{u}}_{m,k} \Big|_{u_m} \quad (2.5.34)$$

Στα επόμενα θα γίνει προσπάθεια να διατυπωθούν σχέσεις μεταξύ των διανυσμάτων που χρησιμοποιούνται να περιγράψουν την εμφυτευμένη επιφάνεια όταν αυτά εκφράζονται με διάφορες μεταβλητές σε διάφορα πλαίσια (η απόδειξη δεν έχει κάποιο διδακτικό χαρακτήρα γι' αυτό θα γραφούν απευθείας οι εξισώσεις που θα μας χρειαστούν).

Ορίζουμε τον πίνακα αλλαγής κλίμακας (ή μητρώο επιμήκυνσης):

$$\mathbf{S}_{m,ut} = \text{diag}(1, \lambda_{m,ut_2}, \lambda_{m,ut_3}) \quad (2.5.35.a)$$

με

$$\lambda_{m,ut_2} = \frac{\lambda_{mt_2}}{\lambda_{m,u_2}} \quad (2.5.35.b)$$

$$\lambda_{m,ut_3} = \frac{\lambda_{mt_3}}{\lambda_{m,u_3}} \quad (2.5.35.c)$$

Συσχέτιση της έκφρασης της εμφυτευμένης επιφάνειας:

(i) με τις μεταβλητές  $t, u$  στο πλαίσιο  $u_m$

$$(\vec{X}_{m,t}(s_2, s_3) - \vec{X}_{m,t(c)})|_{u_m} = \mathbf{P}_{m,ut} \mathbf{S}_{m,ut} (\vec{X}_{m,u}(s_2, s_3) - \vec{X}_{m,\hat{u}(c)})|_{u_m} \quad (2.5.36)$$

(ii) με τις μεταβλητές  $t, u$  στο καθολικό πλαίσιο  $X$

$$(\vec{X}_{m,t}(s_2, s_3) - \vec{X}_{m,t(c)})|_X = \mathbf{P}_{m,t}^T \mathbf{S}_{m,ut} \mathbf{P}_{m,t}^{-T} (\vec{X}_{m,u}(s_2, s_3) - \vec{X}_{m,\hat{u}(c)})|_X \quad (2.5.37)$$

(iii) με τις μεταβλητές  $t, u$  στο πλαίσιο  $t_m$

$$(\vec{X}_{m,t}(s_2, s_3) - \vec{X}_{m,t(c)})|_{t_m} = \mathbf{P}_{m,ut} \mathbf{S}_{m,ut} (\vec{X}_{m,u}(s_2, s_3) - \vec{X}_{m,\hat{u}(c)})|_{t_m} \quad (2.5.38)$$

(iv) με τη μεταβλητή  $t$  στα πλαίσια  $u_m, X$

$$(\vec{X}_{m,t}(s_2, s_3) - \vec{X}_{m,t(c)})|_{u_m} = \mathbf{P}_{m,t}^{-T} (\vec{X}_{m,t}(s_2, s_3) - \vec{X}_{m,t(c)})|_X \quad (2.5.39)$$

Σχόλιο: Αν αντί της  $t$  χρησιμοποιηθεί η  $u$  μεταβλητή τότε η εξίσωση δεν αλλάζει. Η χρήση του κατάλληλου πίνακα εξαρτάται από το πλαίσιο που χρησιμοποιείται.

(v) με τις μεταβλητές  $t, u$  στα πλαίσια  $u_m, X$

$$(\vec{X}_{m,t}(s_2, s_3) - \vec{X}_{m,t(c)})|_X = \mathbf{P}_{m,t}^T (\vec{X}_{m,t}(s_2, s_3) - \vec{X}_{m,t(c)})|_{t_m} \quad (2.5.40)$$

(vi) Χρησιμοποιώντας τις μεταβλητές  $t, u$  στα πλαίσια  $t_m, u_m$  αντίστοιχα

$$(\vec{X}_{m,t}(s_2, s_3) - \vec{X}_{m,t(c)})|_{t_m} = \mathbf{S}_{m,ut} (\vec{X}_{m,u}(s_2, s_3) - \vec{X}_{m,u(c)})|_{u_m} \quad (2.5.41)$$

Η (2.5.31) μας θυμίζει κάτι από τα προηγούμενα, είναι το μεταφερόμενο μέρος του μετασχηματισμού όπου βλέπουμε ότι δεν εμπλέκεται κάποιος πίνακας στροφής παρά μόνο η επιμήκυνση.

Ανάλογα με τη (2.5.18) μπορούμε να γράψουμε:

$$\mu_m = \frac{A_m}{A} = \lambda_{mu_2} \lambda_{mu_3} \sqrt{1 - (\hat{u}_{m_2}, \hat{u}_{m_3})^2} \quad (2.5.42)$$

Επειδή όμως ως  $A_m$  έχουμε συμβολίσει το εμβαδόν της εμφυτευμένης υποπολλαπλότητας στον  $C^n$  σχηματισμό, το οποίο φυσικά είναι μοναδικό, προκύπτει ότι η παράμετρος κλίμακας  $\mu_m$  είναι ανεξάρτητη των διανυσμάτων βάσης που χρησιμοποιούνται δηλαδή ισχύει:

$$\lambda_{mu_2} \lambda_{mu_3} \sqrt{1 - (\hat{\mathbf{u}}_{m_2}, \hat{\mathbf{u}}_{m_3})^2} = \lambda_{mt_2} \lambda_{mt_3} \sqrt{1 - (\hat{\mathbf{t}}_{m_2}, \hat{\mathbf{t}}_{m_3})^2} \quad (2.5.43)$$

Άλλωστε έχουμε ορίσει τα διανύσματα  $\vec{\mathbf{t}}_{m_1} = \vec{\mathbf{t}}_{m_2} \times \vec{\mathbf{t}}_{m_3}$  και  $\vec{\mathbf{u}}_{m_1} = \vec{\mathbf{u}}_{m_2} \times \vec{\mathbf{u}}_{m_3}$  τα οποία μοιράζονται την ίδια μοναδική κάθετη προς το επίπεδο της διατομής διεύθυνση και μάλιστα έχουν το ίδιο μέτρο  $\mu_m$ . Επίσης οι σχέσεις (2.5.31), (2.5.33) μας λένε ότι η επιλογή των διανυσμάτων για την αναπαράσταση της εμφυτευμένης επίπεδης επιφάνειας που αντιστοιχεί σε κάποιο σχηματισμό  $C^m$  δηλαδή είναι εντελώς αυθαίρετη. Έτσι αν διαγραμμακώς ανεξάρτητα διανύσματα όπως τα  $\vec{\mathbf{t}}_{m_2}$ ,  $\vec{\mathbf{t}}_{m_3}$  έχουν επιλεγεί για να αναπαραστήσουν την επίπεδη επιφάνεια στο  $C^m$  πρέπει να ικανοποιούν αυτές τις εξισώσεις. Λόγω της (2.5.33) παρατηρούμε ότι αν η γωνία μεταξύ των νέων διανυσμάτων είναι διαφορετική από αυτή των αρχικών τότε τα μήκη τους πρέπει να είναι τέτοια ώστε να αποσβέσουν τη διαφορά.

Από αυτή τη συζήτηση βλέπουμε ότι η επίπεδη επιφάνεια μπορεί να αναγνωριστεί από ένα διάνυσμα που είναι κάθετο σε αυτήν και μέτρο ίσο με  $\mu_m$ . Αυτή είναι πολύ σημαντική διαπίστωση, διότι αν κάποιος ενδιαφέρεται μόνο για το εμβαδόν και τον προσανατολισμό της επίπεδης επιφάνειας το μόνο που έχει να κάνει είναι να ακολουθήσει το διάνυσμα αυτό. Ακόμη, αν υποθέταμε ότι τα  $\mathbf{t}_m$ ,  $\mathbf{u}_m$  ήταν ορθογώνιες βάσεις όλες οι παραπάνω εξισώσεις θα ήταν πολύ απλούστερες όμως τώρα αποδείξαμε τη γενική περίπτωση εφόσον δεν είχαμε κάποια θεωρητική αιτία για να υποθέσουμε την ορθογωνιότητα των βάσεων. Άλλωστε η παρούσα εργασία θα μπορούσε να αποτελέσει προθάλαμο για άλλα πιο περίπλοκα δομικά στοιχεία στα οποία η χρήση πλαγιογωνίων και καμπυλόγραμμων συστημάτων συντεταγμένων είναι μάλλον επιβεβλημένη.

## 2.6 Περιγραφή της εμφυτευμένης $s_2$ - $s_3$ υποπολλαπλότητας σύμφωνα με κάποιον ενδιάμεσο σχηματισμό

Όπως και στην περίπτωση της εμφύτευσης της  $s_1$  υποπολλαπλότητας έτσι και στην περίπτωση της  $s_2$ - $s_3$  υποπολλαπλότητας (που περιγράφει τη διατομή του δικτύωματος) γνωρίζουμε ότι υφίσταται καταστάσεις διαδοχικών πεπερασμένων παραμορφώσεων. Επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε ότι κάθε διακριτός σχηματισμός πράγματι αποτελεί μία τέτοια κατάσταση παραμόρφωσης και ύστερα να διατυπώσουμε τις εξισώσεις ισορροπίας.

Οι σχέσεις που διέπουν τα διανύσματα αλλά και άλλα βαθμωτά μεγέθη ισχύουν για τον  $C^n$  σχηματισμό στο ακέραιο, οπότε σκοπός της παραγράφου αυτής είναι η διατύπωση νόμων για διάφορα μεγέθη που όμως ανήκουν σε διαφορετικούς σχηματισμούς.

Όμως το ότι ισχύουν και στους δύο σχηματισμούς δεν σημαίνει ότι δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα. Το αντίθετο ισχύει και μάλιστα για να διατηρηθεί η καθολικότητα της εφαρμογής των σχέσεων των προηγούμενων παραγράφων ο συμβολισμός θα διατηρηθεί ίδιος, απλώς τα

μεγέθη αναφέρονται αποκλειστικά στον  $C^n$  σχηματισμό θα συνοδεύονται από ένα κάτω δείκτη  $n$  ενώ τα μεγέθη που εμπλέκουν ποσότητες που ανήκουν και στους δύο σχηματισμούς θα συνοδεύονται με διπλό κάτω δείκτη  $mn$  (υπό την έννοια ότι η μετάβαση γίνεται από τον  $C^n \rightarrow C^m$ ) χωρίς όμως να κρύβεται κάποια μαθηματική ουσία.

Καθ' όλα όμοια με την εξίσωση (2.5.33) μπορεί κανείς να αποδείξει ότι:

$$\hat{\mathbf{t}}_{m,k}|_{t_m} = \hat{\mathbf{t}}_{n,k}|_{t_n} \quad \text{για } k = 1,2,3 \quad (2.6.1)$$

υπό την έννοια ότι τα διανύσματα  $\hat{\mathbf{t}}_n, \hat{\mathbf{t}}_m$  είναι το ίδιο διαφορετικά όπως τα  $\hat{\mathbf{t}}_m, \hat{\mathbf{u}}_m$ . Εφόσον αναφέρονται σε διαφορετικούς σχηματισμούς και τα πλαίσια  $t_m, t_n$  είναι εξ' ορισμού διαφορετικά. Τονίζεται ότι οι αριθμητικές τιμές των παραπάνω διανυσμάτων ταυτίζονται (δηλαδή οι διευθύνσεις τους είναι εν γένει διαφορετικές).

Αυτό έχει ως συνέπεια να ισχύει η παρακάτω ισοδυναμία:

$$\begin{aligned} (\vec{\mathbf{X}}_{mt}(s_2, s_3) - \vec{\mathbf{X}}_{mt(c)})|_{t_m} &= s_2 \lambda_{mt_2} \hat{\mathbf{t}}_{m_2}|_{t_m} + s_3 \lambda_{mt_3} \hat{\mathbf{t}}_{m_3}|_{t_m} \leftrightarrow \\ (\vec{\mathbf{X}}_{mt}(s_2, s_3) - \vec{\mathbf{X}}_{mt(c)})|_{t_m} &= s_2 \lambda_{mt_2} \hat{\mathbf{t}}_{n_2}|_{t_n} + s_3 \lambda_{mt_3} \hat{\mathbf{t}}_{n_3}|_{t_n} \end{aligned} \quad (2.6.2)$$

Ακόμη γράφουμε:

$$(\vec{\mathbf{X}}_{nt}(s_2, s_3) - \vec{\mathbf{X}}_{nt(c)})|_{t_n} = s_2 \lambda_{nt_2} \hat{\mathbf{t}}_{n_2}|_{t_n} + s_3 \lambda_{nt_3} \hat{\mathbf{t}}_{n_3}|_{t_n} \quad (2.6.3)$$

Ορίζουμε:

$$Y_{mn} = \text{diag}(1, \lambda_{mnt_2}, \lambda_{mnt_3}) \quad (2.6.4.a)$$

$$\lambda_{mnt_2} = \frac{\lambda_{wt_2}}{\lambda_{nt_2}} \quad (2.6.4.b)$$

$$\lambda_{mnt_3} = \frac{\lambda_{wt_3}}{\lambda_{nt_3}} \quad (2.6.4.c)$$

Οπότε καταλήγουμε σε μία γενική έκφραση που συνδέει τα διανύσματα θέσης των σημείων που ανήκουν εμφυτευμένες (σε διαφορετικούς σχηματισμούς) υποπολλαπλότητας και εκφράζονται σε πλαίσιο  $t$  του αντίστοιχου σχηματισμού.

$$(\vec{\mathbf{X}}_{mt}(s_2, s_3) - \vec{\mathbf{X}}_{mt(c)})|_{t_m} = Y_{mn} (\vec{\mathbf{X}}_{nt}(s_2, s_3) - \vec{\mathbf{X}}_{nt(c)})|_{t_n} \quad (2.6.5)$$

Η μη ύπαρξη μητρώου στροφής υπονοεί ότι βρισκόμαστε στο μεταφερόμενο μέρος του μετασχηματισμού και είναι σύμφωνα με την εμπειρία μας από τα προηγούμενα όπου σε αυτές τις περιπτώσεις εμπλέκεται μόνο η μεταβολή στο μήκος των διανυσμάτων.

Υπάρχουν και άλλες σχέσεις σαν την (2.6.2). Μπορούμε να γράψουμε για το τυχαίο διάνυσμα  $\vec{\mathbf{a}}$ :

$$\vec{\mathbf{a}}|_{m_t} = \mathbf{P}_{nt}^{-T} \mathbf{P}_{nt}^T \vec{\mathbf{a}}|_{t_u} = \mathbf{P}_{mn,p}^{-1} \vec{\mathbf{a}}|_{t_n} \quad (2.6.6)$$

και αναστρέφοντας έχουμε:

$$\vec{\alpha}|_{t_n} = \mathbf{P}_{nt}^{-T} \mathbf{P}_{mt}^T \vec{\alpha}|_{t_m} = \mathbf{P}_{mn,p}^{-1} \vec{\alpha}|_{t_m} \quad (2.6.7)$$

όπου το  $p$  (passive) δείχνει ότι βρισκόμαστε στο παθητικό μέρος του μετασχηματισμού.

Αυτές οι δύο σχέσεις είναι πολύ καθολικές, εφαρμόζονται για όλα τα μοναδιαία διανύσματα. Πιο συγκεκριμένα έχουμε:

$$\hat{\mathbf{t}}_{nk}|_{t_m} = \mathbf{P}_{mn,p}^{-1} \hat{\mathbf{t}}_{mk}|_{t_m} \quad \text{για } k = 1,2,3 \quad (2.6.8.a)$$

$$\hat{\mathbf{t}}_{nk}|_{t_n} = \mathbf{P}_{mn,p}^{-1} \hat{\mathbf{t}}_{mk}|_{t_n} \quad \text{για } k = 1,2,3 \quad (2.6.8.b)$$

$$\hat{\mathbf{t}}_{mk}|_{t_m} = \mathbf{P}_{mn,p}^{-1} \hat{\mathbf{t}}_{nk}|_{t_n} \quad \text{για } k = 1,2,3 \quad (2.6.9.a)$$

$$\hat{\mathbf{t}}_{mk}|_{t_u} = \mathbf{P}_{mn,p}^{-1} \hat{\mathbf{t}}_{nk}|_{t_m} \quad \text{για } k = 1,2,3 \quad (2.6.9.b)$$

Από τις οποίες είναι φανερό ότι η (2.6.9.b) είναι αντίστροφη της (2.6.8.a) και όμοια και οι άλλες δύο.

Εφαρμόζοντας τις σχέσεις αυτές για τα διανύσματα θέσης έχουμε:

$$(\vec{\mathbf{X}}_{mt}(s_2, s_3) - \vec{\mathbf{X}}_{mt(c)})|_{t_m} = \mathbf{P}_{mn,p}^{-1} (\vec{\mathbf{X}}_{mt}(s_2, s_3) - \vec{\mathbf{X}}_{mt(c)})|_{t_n} \quad (2.6.10.a)$$

$$(\vec{\mathbf{X}}_{nt}(s_2, s_3) - \vec{\mathbf{X}}_{nt(c)})|_{t_n} = \mathbf{P}_{mn,p} (\vec{\mathbf{X}}_{m,t}(s_2, s_3) - \vec{\mathbf{X}}_{m,t(c)})|_{t_m} \quad (2.6.10.b)$$

Συνδυάζοντας τις (2.6.10.a) και (2.6.5) έχουμε:

$$(\vec{\mathbf{X}}_{mt}(s_2, s_3) - \vec{\mathbf{X}}_{mt(c)})|_{t_n} = \mathbf{P}_{mn,p} \mathbf{Y}_{mn} (\vec{\mathbf{X}}_{nt}(s_2, s_3) - \vec{\mathbf{X}}_{nt(c)})|_{t_n} \quad (2.6.11)$$

Σημειώνουμε ότι αν θέσουμε  $m=u$  (χωρίς όμως να αλλάξουμε το πλαίσιο παίρνουμε ισοδύναμες σχέσεις. Πράγματι από την (2.6.7):

$$(\vec{\mathbf{X}}_{nt}(s_2, s_3) - \vec{\mathbf{X}}_{nt(c)})|_{t_n} = \mathbf{P}_{mn,p} (\vec{\mathbf{X}}_{nt}(s_2, s_3) - \vec{\mathbf{X}}_{nt(c)})|_{t_m} \quad (2.6.12)$$

Η οποία είναι ίδια με την (2.6.11) αν  $m=n$ .

Συνδυάζοντας την (2.6.10.b) με τις (2.6.11) και (2.6.12) παίρνουμε:

$$(\vec{\mathbf{X}}_{mt}(s_2, s_3) - \vec{\mathbf{X}}_{mt(c)})|_{t_m} = \mathbf{Y}_{mn} \mathbf{P}_{mn,p} (\vec{\mathbf{X}}_{nt}(s_2, s_3) - \vec{\mathbf{X}}_{nt(c)})|_{t_n} \quad (2.6.13)$$

Παρατηρούμε ότι η (2.6.13) είναι ίδια με την (2.6.11) με τη διαφορά να βρίσκεται στον πολλαπλασιασμό των μητρώων και ότι χρησιμοποιείται το  $t_n$  πλαίσιο αντί του  $t_m$ . Μένει να εισάγουμε στις εξισώσεις μας και το καθολικό πλαίσιο  $X$ .

Στα προηγούμενα είχαμε δείξει ότι:

$$(\vec{\mathbf{X}}_{mt}(s_2, s_3) - \vec{\mathbf{X}}_{mt(c)})|_{t_m} = \mathbf{P}_{mt}^{-T} (\vec{\mathbf{X}}_{mt}(s_2, s_3) - \vec{\mathbf{X}}_{mt(c)})|_X \quad (2.6.14)$$

οπότε μπορούμε να πούμε:

$$(\vec{X}_{nt}(s_2, s_3) - \vec{X}_{nt(c)})|_{t_n} = \mathbf{P}_{nt}^{-T} (\vec{X}_{nt}(s_2, s_3) - \vec{X}_{nt(c)})|_X \quad (2.6.15)$$

Έτσι καταλήγουμε σε μία σχέση της μορφής:

$$\vec{X}_{mt}(s_2, s_3) - \vec{X}_{mt(c)}|_X = \mathbf{P}_{mt}^T \mathbf{Y}_{mn} \mathbf{P}_{nt}^{-T} (\vec{X}_{nt}(s_2, s_3) - \vec{X}_{nt(c)})|_X \quad (2.6.16)$$

Σε αυτό το σημείο θεωρούμε σκόπιμο να γενικεύσουμε/συνοψίσουμε την παραπάνω σχέση και να τις παρουσιάσουμε με ένα κομψό/συμπαγή τρόπο. Συμβολίζουμε με  $\xi$  το τυχαίο πλαίσιο το οποίο μπορεί να είναι οποιοδήποτε μεταξύ  $t_m$ ,  $t_n$  ή  $X$ .

Πιο συγκεκριμένα:

$$(\vec{X}_{mt}(s_2, s_3) - \vec{X}_{t(c)})|_{\xi} = \mathbf{P}_{\xi} (\vec{X}_{nt}(s_2, s_3) - \vec{X}_{nt(c)})|_{\xi} \quad (2.6.17)$$

Αν  $\xi=X$  τότε  $\mathbf{P}_{\xi} = \mathbf{P}_{mt}^T \mathbf{Y}_{mn} \mathbf{P}_{nt}^{-T}$  αλλιώς  $\mathbf{P}_{\xi} = \mathbf{Y}_{mn} \mathbf{P}_{mn,p}$  ή  $\mathbf{P}_{\xi} = \mathbf{P}_{mn,p} \mathbf{Y}_{mn}$  αντίστοιχα.

Σε αυτό το σημείο αξίζει να σημειωθεί η γενικότητα της θεωρίας μας. Αυτό επιβεβαιώνεται με άμεσο τρόπο αν συγκρίνει κανείς την (2.6.16) με τις (2.4.32)-(2.4.34). Η μόνη διαφορά που θα εντοπιστεί θα είναι ότι οι δεύτερες μετασχηματίζουν διανύσματα που ανήκουν στην  $S_1$  υποπολλαπλότητα. Γενικά όμως η φύση των εξισώσεων είναι ίδια. Αυτή όμως η ομοιότητα είναι παραπλανητική. Αν και το πλαίσιο  $X$  είναι κοινό και στα δύο σετ εξισώσεων, δεν συμβαίνει το ίδιο με τα  $t_m$ ,  $t_n$  και τα  $x_m$ ,  $x_n$ . Τα τελευταία είναι ορθογώνια (και ορθοκανονικά) τα πρώτα εν γένει όχι. Και αυτό γιατί η εμφύτευση της  $S_2$ - $S_3$  υποπολλαπλότητας δεν έχει συσχετισθεί ακόμα με την εμφύτευση της  $S_1$  αλλά τη μεταχειριζόμαστε ως μία ξεχωριστή διαδικασία.

Σύμφωνα με τη συζήτηση που έκλεισε την παράγραφο 2.5 είδαμε ότι το διάνυσμα  $\vec{t}_{m_1}$  χαρακτηρίζει πλήρως την εμφυτευμένη επίπεδη επιφάνεια εφόσον παρέχει πληροφορίες και το εμβαδόν της και τον προσανατολισμό της. Αυτό το διάνυσμα έχει διαφορετικό μέτρο και προσανατολισμό σε κάθε σχηματισμό. Οπότε κρίνεται εύλογο το ερώτημα για το πώς μετασχηματίζεται ένα τέτοιο διάνυσμα όταν μεταφέρεται από τον  $C^n \rightarrow C^m$  σχηματισμό ανάλογα με το πλαίσιο που είναι εκφρασμένο.

Η διατύπωση των σχέσεων έχει ως εξής: (λαμβάνοντας υπόψη τον ορισμό του  $\vec{t}_1$ )

$$\vec{t}_{m_1}|_X = \frac{|\mathbf{P}_{mt}^T| |\mathbf{Y}_{mn}|}{|\mathbf{P}_{nt}^T|} \mathbf{P}_{mt}^{-1} \mathbf{Y}_{mn}^{-1} \mathbf{P}_{nt} \vec{t}_{n_1}|_X \quad (2.6.18)$$

$$\vec{t}_{m_1}|_{t_m} = \frac{|\mathbf{P}_{mt}^T| |\mathbf{Y}_{mn}|}{|\mathbf{P}_{nt}^T|} \mathbf{P}_{mt}^{-T} \mathbf{P}_{mt}^{-1} \mathbf{Y}_{mn}^{-1} \mathbf{P}_{nt} \mathbf{P}_{mt}^T \vec{t}_{n_1}|_{t_m} \quad (2.6.19)$$

$$\vec{t}_{m_1}|_{t_n} = \frac{|\mathbf{P}_{mt}^T| |\mathbf{Y}_{mn}|}{|\mathbf{P}_{nt}^T|} \mathbf{P}_{nt}^{-T} \mathbf{P}_{mt}^{-1} \mathbf{Y}_{mn}^{-1} \mathbf{P}_{nt} \mathbf{P}_{nt}^T \vec{t}_{n_1}|_{t_n} \quad (2.6.20)$$

Ειδικά για το διάνυσμα  $\vec{t}_{n_1}$  έχουμε ακριβώς όπως για το  $\vec{t}_{m_1}$ :

$$\vec{t}_{n_1} = \mu_n \hat{t}_{n_1} = \lambda_{nt_2} \lambda_{nt_3} \sqrt{1 - (\hat{t}_{n_2} \hat{t}_{n_3})^2} \hat{t}_{n_1} \quad (2.6.21)$$

Ας υπολογίσουμε τους όρους των οριζουσών που εμφανίζονται ανωτέρω. Κατ' αρχάς  $|Y_{mn}| = \lambda_{mnt_2} \lambda_{mnt_3}$  (2.6.22) αφού η ορίζουσα ενός διαγώνιου μητρώου είναι ίση με το γινόμενο των όρων της διαγώνιου και ακόμη:

$$P_{p,nt} = \frac{|P_{mt}^T|}{|P_{nt}^T|} = \frac{\sqrt{1 - (\hat{t}_{m_2} \hat{t}_{m_3})^2}}{\sqrt{1 - (\hat{t}_{n_2} \hat{t}_{n_3})^2}} \quad (2.6.23)$$

οπότε έχουμε με συνδυασμό των παραπάνω:

$$\frac{|P_{mt}^T| |Y_{mn}|}{|P_{nt}^T|} = \frac{\mu_m}{\mu_n} \mu_{mn} \quad (2.6.24)$$

Για την πλήρη κατανόηση των τύπων απαιτείται ο υπολογισμός του γινομένου των πινάκων. Είναι καθαρά θέμα άλγεβρας πινάκων οπότε δίδεται απευθείας το αποτέλεσμα.

$$P_{mt}^T Y_{mn} P_{nt}^{-T} [P_{mt}^{-T} P_{mt}^{-1} Y_{mn}^{-1} P_{nt} P_{nt}^{-T}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & f_{22} & f_{23} \\ 0 & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \quad (2.6.25)$$

όταν:

$$\begin{aligned} f_{22} &= \frac{1}{\lambda_{mnt_2} |P_{mt}^T|^2} + \frac{[(\hat{t}_{m_3} \times \hat{t}_{m_1})(\hat{t}_{m_1} \times \hat{t}_{m_2})](\hat{t}_{n_2} \hat{t}_{n_3})}{\lambda_{mnt_3} |P_{mt}^T|^2} \\ f_{23} &= \frac{[(\hat{t}_{m_3} \times \hat{t}_{m_1})(\hat{t}_{m_1} \times \hat{t}_{m_2})]}{\lambda_{mnt_3} |P_{mt}^T|^2} + \frac{(\hat{t}_{n_2} \hat{t}_{n_3})}{\lambda_{mnt_2} |P_{mt}^T|^2} \\ f_{32} &= \frac{[(\hat{t}_{m_3} \times \hat{t}_{m_1})(\hat{t}_{m_1} \times \hat{t}_{m_2})]}{\lambda_{mnt_2} |P_{mt}^T|^2} + \frac{(\hat{t}_{n_2} \hat{t}_{n_3})}{\lambda_{mnt_3} |P_{mt}^T|^2} \\ f_{33} &= \frac{1}{\lambda_{mnt_3} |P_{mt}^T|^2} + \frac{[(\hat{t}_{m_3} \times \hat{t}_{m_1})(\hat{t}_{m_1} \times \hat{t}_{m_2})](\hat{t}_{n_2} \hat{t}_{n_3})}{\lambda_{mnt_2} |P_{mt}^T|^2} \end{aligned} \quad (2.6.26)$$

οπότε σε πιο συμπαγή γραφή:

$$\frac{\vec{t}_{m_1}}{t_m} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & f_{22} & f_{23} \\ 0 & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \mu_{mn} \frac{\vec{t}_{n_1}}{t_n} \quad (2.6.27)$$

και  $\lambda_{mn} = \mu_{nm}^{-1}$  γενικώς.

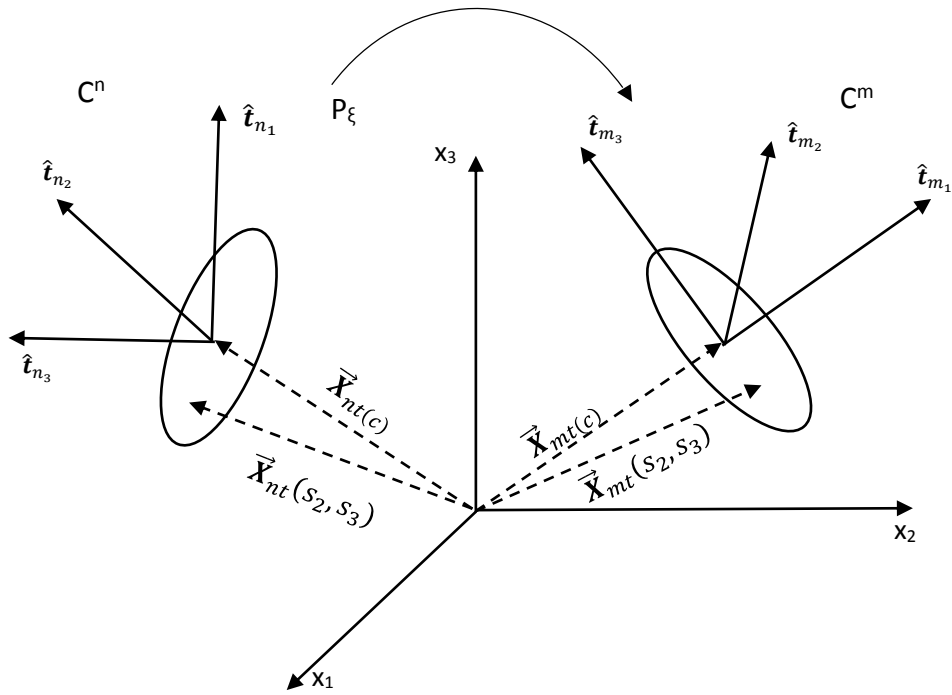


Με τις εξισώσεις (2.6.5),(2.6.17) είμαστε σε θέση να περιγράψουμε πως τα διανύσματα θέσης των σημείων στην  $S_2-S_3$  υποπολλαπλότητα μετασχηματίζονται κατά τη μετάβαση από τον  $C^n \rightarrow C^m$  σχηματισμό. Βλέπουμε ότι ο μετασχηματισμός αυτός γενικώς εμπλέκει το γινόμενο ενός πίνακα στροφής όπως ο  $P_{nt,p}$  και ενός πίνακα αλλαγής κλίμακας όπως ο  $Y_{mn}$ . Εφόσον τα  $t_m$  και  $t_n$  πλαίσια γενικώς είναι πλαγιογώνια ο πίνακας στροφής δεν είναι ορθογώνιος και αυτό περιπλέκει τους υπολογισμούς. Στο μεταφερόμενο μέρος του μετασχηματισμού αναμενόμενα η στροφή εξαφανίζεται και μας μένει μόνο η μεταβολή κλίμακας.

Στις σχέσεις (2.5.30)-(2.5.32) η επιμήκυνση περιγράφεται από ένα βαθμωτό μέγεθος το  $\lambda_{mn}$ , κατά συνέπεια η σειρά που θα γίνουν οι πολλαπλασιασμοί είναι αδιάφορη. Εντούτοις στην (2.6.17) η σειρά πολλαπλασιασμού έχει σημασία. Αυτό το περιμέναμε καθώς η (2.6.17) αναφέρεται στο μετασχηματισμό ενός δισδιάστατου αντικειμένου στον Ευκλείδειο χώρο του οποίου η μεταβολή εμβαδού εξαρτάται από ένα πίνακα.

Κάθε σημείο της εμφυτευμένης  $S_2-S_3$  υποπολλαπλότητας περιγράφεται από το διάνυσμα  $\vec{X}_{mt}(S_2, S_3) - \vec{X}_{t(c)}$ . Από τις (2.6.5) και (2.6.17) βλέπουμε ότι καθώς η υποπολλαπλότητα καταλαμβάνει διαφορετικούς σχηματισμούς αυτό το διάνυσμα στρέφεται και αλλάζει το μήκος του. Έτσι κινηματικώς μπορούμε να πούμε ότι η εμφυτευμένη  $S_2-S_3$  υποπολλαπλότητα είναι στην πραγματικότητα μια φραγμένη επίπεδη επιφάνεια που κινείται στο χώρο. Η δε κίνηση της περιγράφεται ως μία στροφή στερεού σώματος συν μία μεταβολή στο εμβαδόν της.

Στην παρακάτω εικόνα βλέπουμε τη μετάβαση από το  $C^n \rightarrow C^m$  όπου ο  $C^n$  είναι ένας ενδιάμεσος σχηματισμός αναφοράς.



Κλείνοντας αυτό το κεφάλαιο είναι σημαντικό να διερευνήσουμε πως αυτές οι σχέσεις αλλάζουν όταν η μεταβλητή που χρησιμοποιούμε είναι η  $u$  αντί της  $t$ .

Εφαρμόζοντας έναν απλό μετασχηματισμό στο 1<sup>ο</sup> μέλος της (2.6.17) παίρνουμε:

$$(\bar{X}_{mu}(s_2, s_3) - \bar{X}_{mu(c)})|_{\xi} = T_{m\xi}^{-1} P_{mn,\xi} (\bar{X}_{nt}(s_2, s_3) - \bar{X}_{nt(c)})|_{\xi} \quad (2.6.28)$$

Όπου το  $\xi$  μπορεί να είναι οποιαδήποτε μεταξύ των  $X$ ,  $t_m$ ,  $t_n$ ,  $u_m$ ,  $u_n$  οπότε διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

$$\xi = X \rightarrow T_{m\xi} = P_{mt}^T S_{m,ut} P_{mt}^{-T} P_{mn,\xi} = P_{mt}^T Y_{mn} P_{mt}^{-T} \quad (2.6.29)$$

$$\xi = u_m \rightarrow R_{\xi} = P_{mn}^{-T}$$

$$\xi = t_m \rightarrow R_{\xi} = P_{mt}^{-T}$$

$$\xi = t_n \rightarrow R_{\xi} = P_{nt}^{-T}$$

$$\xi = u_n \rightarrow R_{\xi} = P_{nu}^{-T}$$

Και έτσι καταλήγουμε στην διατύπωση των ακόλουθων δύο εξισώσεων:

$$(\bar{X}_{mt}(s_2, s_3) - \bar{X}_{mt(c)})|_{\xi} = P_{mn,\xi} T_{n\xi} (\bar{X}_{nu}(s_2, s_3) - \bar{X}_{nu(c)})|_{\xi} \quad (2.6.30)$$

και

$$(\vec{X}_{mu}(S_2, S_3) - \vec{X}_{mu(c)})|_{\xi} = \mathbf{T}_{m\xi}^{-1} \mathbf{P}_{mn,\xi} \mathbf{T}_{n\xi} (\vec{X}_{nu}(S_2, S_3) - \vec{X}_{nu(c)})|_{\xi} \quad (2.6.31)$$

Οι τελευταίες δύο εξισώσεις έχουν μεγάλη σημασία. Μας δίδουν τον νόμο μετασχηματισμών των σημείων στην εμφυτευμένη  $S_2$ - $S_3$  υποπολλαπλότητα κατά τη μετάβαση από το  $C^n \rightarrow C^m$  ανεξάρτητα από το ποιο ζευγάρι διανυσμάτων χρησιμοποιείται για να παραμετροποιήσει τις αντίστοιχες επίπεδες επιφάνειες.

## 2.7 Εμφυτεύσεις της τρισδιάστατης πολλαπλότητας – Ένωση των εμφυτευμένων υποπολλαπλοτήτων

Μέχρι τώρα περιγράψαμε ξεχωριστά τις εμφυτεύσεις των  $S_2$ - $S_3$  υποπολλαπλοτήτων και τους τρόπους που αυτές οι εμφυτευμένες υποπολλαπλότητες μετασχηματίζονται ή αλλάζουν από τον ένα σχηματισμό στον άλλο. Εφόσον αυτές οι υποπολλαπλότητες αναφέρονται στην ίδια οντότητα που ονομάζουμε υποπολλαπλότητα δικτυώματος δεν είναι ανεξάρτητες αλλά σχετίζονται μεταξύ τους. Αυτό είναι το αντικείμενο μελέτης αυτών, να βρεθεί ένας τρόπος περιγραφής του τρόπου εξάρτησής τους.

Κάναμε μία σημαντική υπόθεση ότι οποιοσδήποτε δοσμένος σχηματισμός δεν αναφέρεται στην εμφύτευση της  $S_1$  ή της  $S_2$ - $S_3$  υποπολλαπλότητας αλλά στην εμφύτευση ολόκληρης της τρισδιάστατης πολλαπλότητας που συνιστά το δικτύωμα. Ακόμα θεωρήσαμε αξιωματικά ότι η  $S_1$  είναι η δεσπόζουσα υποπολλαπλότητα του δικτυώματος. Συνεπώς τώρα υποθέτουμε ότι ο σχηματισμός  $C^m$  αρχικώς παράγεται από την εμφύτευση της  $S_1$  υποπολλαπλότητας και βαθμιαίως αυξάνεται με την εμφύτευση της  $S_2$ - $S_3$  υποπολλαπλότητας. Η  $S_1$  υποπολλαπλότητα θεωρήθηκε στη διαδικασία εμφύτευσης ότι είναι μία από τις απείρως πολλές ισοδύναμες υποπολλαπλότητες που μπορούμε να λάβουμε για σταθερές τιμές των παραμέτρων  $S_2$ - $S_3$ . Έτσι το επαγόμενο (από την εμφύτευση)  $X_m$  τοπικό πλαίσιο συντεταγμένων αντιστοιχεί σε αυτή την ιδιαίτερη επιλογή της δεσπόζουσας υποπολλαπλότητας.

Για να κατασκευάσουμε την εμφύτευση ολόκληρης της πολλαπλότητας του δικτυώματος κάνουμε την ακόλουθη θεμελιώδη υπόθεση:

Η φραγμένη επίπεδη επιφάνεια που είναι αποτέλεσμα της εμφύτευσης της  $S_2$ - $S_3$  υποπολλαπλότητας που αντιστοιχεί σε οποιαδήποτε δοσμένη τιμή της παραμέτρου  $S_1$  σε οποιοδήποτε σχηματισμό  $C^m$  θα έπρεπε να είναι τέτοια ώστε η  $\hat{x}_{m_1}$  διεύθυνση που αντιστοιχεί στην εμφυτευμένη  $S_1$  υποπολλαπλότητα να είναι πάντα κάθετη σε αυτή.

Αυτή η υπόθεση μας λέει ότι η διατομή του δικτυώματος πάντοτε πρέπει να είναι μία επίπεδη επιφάνεια κάθετη στο διαμήκη άξονα του δικτυώματος. Ουσιαστικά μας λέει πως οι  $S_1$  και  $S_2$ - $S_3$  υποπολλαπλότητες σχετίζονται μεταξύ τους αφού έχει πραγματοποιηθεί η εμφύτευση του σε κάποιον κοινό σχηματισμό.

Από τα προηγούμενα γνωρίζουμε ότι το  $\hat{\mathbf{t}}_{m_1}$  είναι ένα μοναδικό διάνυσμα που είναι πάντοτε κάθετο στην εμφυτευμένη  $S_2$ - $S_3$  υποπολλαπλότητα. Οπότε αν το συνδυάσουμε με την παραπάνω υπόθεση λαμβάνουμε ότι οι εμφυτεύσεις της  $S_2$ - $S_3$  υποπολλαπλότητας θα πρέπει να είναι πάντα τέτοιες ώστε:

$$\hat{\mathbf{t}}_{m_1} = \hat{\mathbf{x}}_{m_1} \quad (2.7.1)$$

Η (2.7.1) είναι ουσιαστικά η μαθηματική διατύπωση της παραπάνω υπόθεσης και μάλιστα μας παρέχει το μέσο να ενώσουμε τις εμφυτευμένες υποπολλαπλότητες ώστε να πάρουμε μία μοναδική οντότητα που αντιστοιχεί στην εμφύτευση της πολλαπλότητας. Παρατηρούμε ότι η ομοιότητα των (2.7.1) και (2.5.33) μας λέει ότι μπορούμε ισοδύναμα να χρησιμοποιήσουμε δύο ορθογώνια διανύσματα για να περιγράψουμε την  $S_2$ - $S_3$  εμφύτευση. Γνωρίζουμε ότι η  $\chi_m$  είναι μία ορθογώνια βάση και έτσι μπορούμε να γράψουμε:

$$\hat{\mathbf{x}}_{m_1} = \hat{\mathbf{x}}_{m_2} \times \hat{\mathbf{x}}_{m_3} \quad (2.7.2)$$

Εφόσον η θεμελιώδης μας υπόθεση, μας λέει ότι  $\hat{\mathbf{t}}_{m_1} = \hat{\mathbf{x}}_{m_1}$  βλέπουμε ότι συγκρίνοντας την (2.7.1) με την (2.5.33) και την (2.7.2) με την (2.5.32) βλέπουμε ότι μπορούμε να περιγράψουμε την εμφυτευμένη  $S_2$ - $S_3$  υποπολλαπλότητα επιλέγοντας ένα πολύ συγκεκριμένο ζεύγος ορθογώνιων διανυσμάτων τα  $\hat{\mathbf{x}}_{m_2}$  και  $\hat{\mathbf{x}}_{m_3}$ . Έτσι μπορούμε να περιγράψουμε την εμφυτευμένη επίπεδη επιφάνεια απευθείας μέσω της βάσης  $\chi_m$  που κατασκευάστηκε από την εμφύτευση της  $s_1$  υποπολλαπλότητας του δικτυώματος.

Συγχρόνως έχουμε τονίσει ότι η επιλογή των διανυσμάτων στην (2.5.3) η επιλογή των διανυσμάτων είναι αυθαίρετη. Αυτό που βλέπουμε τώρα είναι ότι αν διαλέξουμε τις διευθύνσεις των διανυσμάτων της (2.5.3) να αντιστοιχούν στα  $\hat{\mathbf{x}}_{m_2}$  και  $\hat{\mathbf{x}}_{m_3}$  παίρνουμε την (2.7.1) άμεσα.

Έτσι η (2.7.1) μας παρέχει τα μέσα να συσχετίσουμε την ορθοκανονική  $\chi_m$  βάση της  $S_1$  υποπολλαπλότητας με την μη ορθογώνια  $\mathbf{t}_m$  βάση. Με αυτό τον τρόπο οι εμφυτεύσεις των υποπολλαπλοτήτων που θεωρούνται ανεξάρτητες τώρα ενώθηκαν.

Για να δείξουμε πως συμβαίνει αυτό ορίζουμε το ακόλουθο στην (2.5.3):

$$\vec{\mathbf{t}}_{ms_2}(s_2, s_3) = \vec{\mathbf{x}}_{m_2} = \lambda_{m_2} \hat{\mathbf{x}}_{m_2} \quad (2.7.3.a)$$

$$\vec{\mathbf{t}}_{ms_3}(s_2, s_3) = \vec{\mathbf{x}}_{m_3} = \lambda_{m_3} \hat{\mathbf{x}}_{m_3} \quad (2.7.3.a)$$

όπου πρέπει να τονιστεί ότι αυτά εξακολουθούν και παραμένουν διανύσματα στην επίπεδη επιφάνεια της διατομής του δικτυώματος.

Στα προηγούμενα διατυπώσαμε τις διάφορες σχέσεις με τη βοήθεια των πλαισίων  $u_m$ ,  $\mathbf{t}_m$  τα οποία εν γένει δεν είναι ορθογώνια. Πριν προχωρήσουμε στην εμφύτευση ολόκληρης της τρισδιάστατης πολλαπλότητας του δικτυώματος θα διατυπώσουμε τις ίδιες σχέσεις και για το πλαίσιο  $\chi_m$  το οποίο είναι ορθογώνιο. Έτσι:

$$\vec{x}_{mx}(s_2, s_3) = s_2 \lambda_{m_2} \hat{x}_{m_2} + s_3 \lambda_{m_3} \hat{x}_{m_3} + \vec{X}_{mx(c)} \quad (2.7.4)$$

και

$$\vec{x}_{m_1} = \vec{t}_{m_1} = \vec{u}_{m_1} = \hat{x}_{m_2} \times \hat{x}_{m_3} \quad (2.7.5)$$

Συνδυάζοντας τη (2.7.5) και τη (2.7.3) παίρνουμε:

$$\vec{x}_{m_1} = \vec{t}_{m_1} = \vec{u}_{m_1} = \lambda_{m_2} \lambda_{m_3} \hat{x}_{m_1} \quad (2.7.6)$$

Άρα η μορφή εμβαδού  $\mu_m$  γράφεται:

$$\mu_m = \frac{A_m}{A} = \sqrt{\vec{x}_{m_1} \vec{x}_{m_1}} = \lambda_{m_2} \lambda_{m_3} \quad (2.7.7)$$

προκύπτει επομένως το προφανές και που είχε συζητηθεί στα προηγούμενα, ότι δηλαδή  $\hat{t}_{m_1} = \hat{x}_{m_1} = \hat{u}_{m_1}$  (2.7.9). έτσι η θεμελιώδης υπόθεση (2.7.1) παράγεται αν κάποιος υποθέσει ότι τα εφαπτόμενα διανύσματα στην εμφυτευμένη επίπεδη επιφάνεια έχουν διευθύνσεις που ταυτίζονται με τα  $\hat{x}_{m_2}$  και  $\hat{x}_{m_3}$ . Συνοψίζοντας μπορούμε με ασφάλεια να πούμε ότι η εμφύτευση  $s_2$ - $s_3$  υποπολλαπλότητα μπορεί να περιγραφεί με  $\hat{x}_{m_2}, \hat{x}_{m_3}$  ή με τα  $\hat{t}_{m_2}, \hat{t}_{m_3}$  ή με οποιοδήποτε άλλο ζεύγος γραμμικώς ανεξαρτήτων διανυσμάτων.

Ο περιορισμός στη σχέση  $\hat{t}_{m_1} = \hat{x}_{m_1} = \hat{u}_{m_1} = \hat{x}_{m_2} \times \hat{x}_{m_3}$  στην ουσία μας λέει ότι η εμφυτευμένη  $s_2$ - $s_3$  υποπολλαπλότητα δεν διακρίνεται από το υπόλοιπο δικτύωμα αλλά στην πραγματικότητα είναι μία επίπεδη επιφάνεια που είναι κάθετη στην εμφυτευμένη  $s_1$  υποπολλαπλότητα. Αυτή η επίπεδη επιφάνεια είναι η διατομή του δικτύωματος. Έτσι βλέπουμε ότι η θεμελιώδης υπόθεση που έγινε στην αρχή της παραγράφου μπορεί να αναδιατυπωθεί λέγοντας ότι στη διαδικασία εμφύτευσης της  $s_2$ - $s_3$  υποπολλαπλότητας μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις (2.7.1), (2.7.3) για να περιγράψουμε την επίπεδη επιφάνεια που είναι αποτέλεσμα της εμφύτευσης. Στην ουσία αυτή η επιφάνεια κείται πάντα στο επίπεδο που ορίζουν τα  $\hat{x}_{m_2}, \hat{x}_{m_3}$ . Εφόσον έχουμε δείξει ότι το  $x_m$  αποτελεί και αυτό ένα πλαίσιο οφείλουμε να πούμε ότι μεγέθη σχετικά με αυτό ορίζονται με καθ' όλα όμοιο τρόπο όπως και στα άλλα πλαίσια.

Για παράδειγμα:

$$x_{m_2} = \lambda_{mx_2} s_2 \quad (2.7.8.a)$$

$$x_{m_3} = \lambda_{mx_3} s_3 \quad (2.7.8.b)$$

Τώρα θέλουμε να δούμε πως η περιγραφή της εμφυτευμένης επίπεδης επιφάνειας αλλάζει αν κάποιος χρησιμοποιήσει το πλαίσιο  $x_m$  αντί του  $t_m$ . οπότε αναμενόμενα πρέπει να εισάγουμε τον πίνακα μετασχηματισμού βάσεων μεταξύ των  $X$  και  $x_m$  πλαισίων και μάλιστα αναμένουμε αυτός ο πίνακας να είναι ορθογώνιος αφού ορθογώνια είναι τα πλαίσια που μετασχηματίζει. Έτσι:

$$\mathbf{P}_{mx}^T = \begin{bmatrix} \hat{x}_{m_1} \hat{X}_1 & \hat{x}_{m_2} \hat{X}_1 & \hat{x}_{m_3} \hat{X}_1 \\ \hat{x}_{m_1} \hat{X}_2 & \hat{x}_{m_2} \hat{X}_2 & \hat{x}_{m_3} \hat{X}_2 \\ \hat{x}_{m_1} \hat{X}_3 & \hat{x}_{m_2} \hat{X}_3 & \hat{x}_{m_3} \hat{X}_3 \end{bmatrix} \quad (2.7.10)$$

Δηλαδή ότι:

$$\mathbf{P}_{mx}^T = \mathbf{T}_m^T \quad (2.7.11)$$

λόγω του ότι είναι ορθογώνιο μητρώο και:

$$|\mathbf{P}_{mx}^T| = 1$$

λόγω του ότι είναι ορθοκανονικό.

Ακόμα:

$$\vec{\alpha} |_{x_m} = \mathbf{T}_m \mathbf{P}_{mt}^{-T} \vec{\alpha} |_{t_m} = \mathbf{P}_{m,xt}^T \vec{\alpha} |_{t_m} \quad (2.7.12)$$

$$\vec{\alpha} |_{t_m} = \mathbf{P}_{m,xt}^{-1} \vec{\alpha} |_{x_m} \quad (2.7.13)$$

Όπου ο πίνακας:

$$\mathbf{P}_{m,xt}^{-1} = \mathbf{T}_m \mathbf{P}_{mt}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{x}_{m_2} \hat{t}_{m_2} & \hat{x}_{m_2} \hat{t}_{m_3} \\ 0 & \hat{x}_{m_3} \hat{t}_{m_2} & \hat{x}_{m_3} \hat{t}_{m_3} \end{bmatrix} \quad (2.7.14)$$

Ο δε υπολογισμός του αντιστρόφου πίνακα έχει γίνει στα προηγούμενα και ως εκ τούτου συνιστά λογιστικό φόρτο.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι οι παραπάνω αναλυτικές εκφράσεις στους πίνακες απλοποιούνται ακόμη περισσότερο αν και το  $t_m$  πλαίσιο είναι ορθογώνιο και ορθοκανονικό οπότε η σχέση που θα συνδέει τα πλαίσια  $x_m$  και  $t_m$  θα συνιστάται από μία απλή στροφή.

Ο πίνακας μεταβολής κλίμακας ορίζεται και είναι:

$$\mathbf{S}_{m,xt} = \text{diag}(1, \lambda_{m,xt_2}, \lambda_{m,xt_3}) \quad (2.7.15.a)$$

όπου:

$$\lambda_{m,xt_2} = \frac{\lambda_{mt_2}}{\lambda_{mx_2}} \quad (2.7.15.b)$$

$$\lambda_{m,xt_3} = \frac{\lambda_{mt_3}}{\lambda_{mx_3}} \quad (2.7.15.c)$$

Όποτε παίρνουμε μια άλλη έκφραση του μεταφερόμενου μέρους του μετασχηματισμού που εμπλέκει τα πλαίσια  $x_m$ ,  $t_m$  όπου εκφράζονται οι μεταβλητές  $x, t$  αντίστοιχα.

$$(\vec{X}_{mt}(s_2, s_3) - \vec{X}_{mt(c)})|_{t_m} = \mathbf{S}_{m,xt}(\vec{X}_{mx}(s_2, s_3) - \vec{X}_{mx(c)})|_{x_m} \quad (2.7.16)$$

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι λογικό επακόλουθο του συλλογισμού μας:

$$\hat{t}_{mk}|_{t_m} = \hat{x}_{mk}|_{x_m} \quad \text{για } k = 1,2,3 \quad (2.7.17)$$

Υιοθετώντας μία πιο γενική γραφή:

$$(\vec{X}_{mt}(s_2, s_3) - \vec{X}_{mt(c)})|_{\xi} = \mathbf{T}_{m,\xi}(\vec{X}_{mx}(s_2, s_3) - \vec{X}_{mx(c)})|_{\xi} \quad (2.7.18)$$

Όπου το  $\xi$  μπορεί να είναι  $X$ ,  $x_m$ ,  $t_m$ . Ειδικότερα αν:

$$\xi = X \rightarrow \mathbf{T}_{m,\xi} = \mathbf{P}_{m,t}^T \mathbf{S}_{m,xt} \mathbf{T}_m = \mathbf{T}_{m,x}$$

$$\xi = t_m \rightarrow \mathbf{T}_{m,\xi} = \mathbf{S}_{m,xt} \mathbf{T}_m \mathbf{P}_{m,t}^T = \mathbf{T}_{m,t_m}$$

$$\xi = x_m \rightarrow \mathbf{T}_{m,\xi} = \mathbf{T}_m \mathbf{P}_{m,t}^T \mathbf{S}_{m,xt} = \mathbf{T}_{m,x_m}$$

Δηλαδή στην ουσία η (2.7.18) μας λέει πως η περιγραφή της εμφυτευμένης πολλαπλότητας αλλάζει αν κάποιος χρησιμοποιήσει ως διανύσματα βάσης τα  $\hat{t}_{m_1} \equiv \hat{x}_{m_1}, \hat{x}_{m_2}, \hat{x}_{m_3}$  αντί των  $\hat{t}_{m_1} \equiv \hat{x}_{m_1}, \hat{t}_{m_2}, \hat{t}_{m_3}$ .

Η θεμελιώδης υπόθεση (2.7.1) που σχετίζει τις εμφυτεύσεις των  $s_2$ - $s_3$  και  $s_1$  υποπολλαπλοτήτων δεν είναι επαρκής για να μας παρέχει την εμφύτευση της τρισδιάστατης υποπολλαπλότητας. Με τον όρο εμφύτευση άλλωστε εννοούμε μία αμφιμονοσήμαντη ανάθεση συντεταγμένων σε κάθε παράμετρο του δικτυώματος με τέτοιο τρόπο ώστε το δικτύωμα να μην τέμνεται. Με άλλα λόγια, η εμφύτευση ολόκληρης της πολλαπλότητας θα έπρεπε να μας δώσει μία ένα προς ένα αντιστοιχία διανυσμάτων θέσης στον Ευκλείδειο χώρο για κάθε στοιχείο της πολλαπλότητας.

Με αυτόν τον συλλογισμό οδηγούμαστε στη σχέση που διέπει την εμφύτευση της τρισδιάστατης πολλαπλότητας σε κάποιο σχηματισμό.

$$\vec{X}_m = \vec{X}_m(s_1, s_2, s_3) \quad (2.7.19)$$

Μία ποιοτική παρατήρηση, χρήσιμη για την κατανόηση του κειμένου και απαραίτητη για τη σύνδεση με τα προηγούμενα, είναι η ακόλουθη. Ο συμβολισμός που χρησιμοποιήθηκε στις προηγούμενες παραγράφους και αφορούσε τα διανύσματα θέσης σημείων που αντιστοιχούσαν στις εμφυτεύσεις των  $s_1$  και  $s_2$ - $s_3$  υποπολλαπλοτήτων χρησιμοποιούσαμε το ίδιο σύμβολο  $\vec{X}$  και σαν ορίσματα τις μεταβλητές  $s_1$  και  $s_2$ - $s_3$  αντίστοιχα. Εφόσον στόχος είναι να διατηρηθεί ένας ενιαίος συμβολισμός (και να μην εισάγουμε πολλούς δείκτες για την περιγραφή συγγενών μεγεθών) στο εξής τα διανύσματα  $\vec{X}_m(s_1, s_2, s_3)$ ,  $\vec{X}_m(s_1)$ ,  $\vec{X}_m(s_2, s_3)$ . Είναι διαφορετικά μεταξύ τους καθώς αναφέρονται σε διαφορετικές εμφυτεύσεις στον ίδιο σχηματισμό.

Στη συνέχεια (2.7.19) θεωρήσαμε αξιωματικά ότι για σταθερές τιμές που δίνουμε στις παραμέτρους  $s_2$ - $s_3$  παίρνουμε ισοδύναμες υποπολλαπλότητες κάθε μία από τις οποίες είναι

τμήμα πραγματικής γραμμής. Ακόμη, το ίδιο υποθέσαμε για σταθερές τιμές της παραμέτρου  $s_1$ . Αυτές οι δύο υποθέσεις καθώς και το γεγονός ότι ολόκληρη η πολλαπλότητα είναι η ένωση των δύο υποπολλαπλοτήτων μας ώθησε να τις αποδεσμεύσουμε και να τις μεταχειριστούμε ως διαφορετικές οντότητες. Η (2.7.1) μας παρέχει το πρώτο απαραίτητο βήμα για να ενώσουμε τις δύο αυτές υποπολλαπλότητες, δεν μας δίνει μία σχέση όπως η (2.7.19).

Για να πάρουμε μία σχέση όπως η (2.7.19) πρέπει να κάνουμε και άλλη υπόθεση. Εφόσον ολόκληρη η πολλαπλότητα είναι ένωση δύο κινηματικών αδέσμευτων υποπολλαπλοτήτων η εμφύτευση της θα έπρεπε να είναι το άθροισμά τους ικανοποιώντας τη σχέση:

$$\hat{\mathbf{x}}_{m_1} = \hat{\mathbf{t}}_{m_1} = \hat{\mathbf{u}}_{m_1} \quad (2.7.20)$$

Έτσι απαιτούμε την παρακάτω θεμελιώδη σχέση:

$$\vec{\mathbf{X}}_m(s_1, s_2, s_3) = \vec{\mathbf{X}}_m(s_1) + \vec{\mathbf{X}}_m(s_2, s_3) \quad (2.7.21)$$

Σημειώνουμε ότι το διάνυσμα  $\vec{\mathbf{X}}_m(s_2, s_3) \neq \vec{\mathbf{X}}_m(s_1, s_2, s_3)$  ακόμα και αν χρησιμοποιείται η ίδια τιμή της παραμέτρου  $s_1$  για να περιγράψει τη φραγμένη οικογένεια  $A(s_1)$ . Ακόμα θυμίζουμε ότι το  $\vec{\mathbf{X}}_m(s_2, s_3)$  εξαρτάται από το πλαίσιο που χρησιμοποιείται. Λόγω της (2.7.20) αντιλαμβανόμαστε ότι κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει για το  $\vec{\mathbf{X}}_m(s_1)$  έχει αναλλοίωτη υπόσταση, εξαρτάται μόνο από τον σχηματισμό όπου γίνεται η εμφύτευση.

Κατά συνέπεια η θεμελιώδης σχέση (2.7.21) μπορεί να γραφεί στα τρία πλαίσια που έχουμε εισάγει στη μελέτη μας. Στη συνέχεια της (2.7.21) για το πλαίσιο  $\chi_m$  μπορούμε να γράψουμε:

$$\vec{\mathbf{X}}_{mx}(s_1, s_2, s_3) = s_1 \lambda_m \hat{\mathbf{x}}_{m_1} + s_2 \lambda_{mx_2} \hat{\mathbf{x}}_{m_2} + s_3 \lambda_{mx_3} \hat{\mathbf{x}}_{m_3} + \vec{\mathbf{X}}_{m(c)} + \vec{\mathbf{X}}_{m(i)} \quad (2.7.22)$$

Η εξίσωση (2.7.22) αλλά και παράγωγες της που προκύπτουν αν στη θέση του  $\chi_m$  βάλω το  $u_m$  ή το  $t_m$  μας δίνουν την εμφύτευση ολόκληρης της πολλαπλότητας στο  $C^m$  σχηματισμό. Υπενθυμίζουμε ότι τα τρία αυτά πλαίσια χρησιμοποιούν ένα κοινό διάνυσμα βάσης το  $\hat{\mathbf{x}}_{m_1} = \hat{\mathbf{t}}_{m_1} = \hat{\mathbf{u}}_{m_1}$  ενώ τα άλλα δύο διανύσματα είναι ορθογώνια στο πρώτο είναι διαφορετικά για καθένα από τα πλαίσια, δεν είναι κατ' ανάγκη ορθογώνια μεταξύ τους (εκτός του  $\chi_m$ ) και κείνται στο ίδιο επίπεδο που ονομάζεται επίπεδο της διατομής του δικτυώματος.

Η (2.7.21) εκφράζεται στο πλαίσιο  $\chi_m$  αλλιώς γράφεται:

$$\vec{\mathbf{X}}_{mx}(s_1, s_2, s_3) - \vec{\mathbf{X}}_{m(c)} + \vec{\mathbf{X}}_{m(s_1)} = \vec{\mathbf{X}}_m(s_2, s_3) - \vec{\mathbf{X}}_{m(c)} \quad (2.7.23)$$

Δηλαδή:

$$(\vec{\mathbf{X}}_{mt}(s_1, s_2, s_3) - \vec{\mathbf{X}}_{m(s_1)} - \vec{\mathbf{X}}_{mt(c)})|_X =$$



$$= \mathbf{P}_{m,t}^T \mathbf{S}_{m,xt} \mathbf{T}_m (\vec{\mathbf{X}}_{mx}(s_1, s_2, s_3) - \vec{\mathbf{X}}_{m(s_1)} - \vec{\mathbf{X}}_{mx(c)}) \Big|_X \quad (2.7.24)$$

Εισάγοντας την έκφραση του  $\vec{\mathbf{X}}_m(s_1)$ :

$$\begin{aligned} (\vec{\mathbf{X}}_{mt}(s_1, s_2, s_3) - \vec{\mathbf{X}}_{m(i)} - \vec{\mathbf{X}}_{mt(c)}) \Big|_X &= s_1 \lambda_m (\hat{\mathbf{x}}_{m_1} \Big|_X - \mathbf{P}_{m,t}^T \mathbf{S}_{m,xt} \mathbf{T}_m \hat{\mathbf{x}}_1 \Big|_X) + \\ &+ \mathbf{P}_{m,t}^T \mathbf{S}_{m,xt} \mathbf{T}_m (\vec{\mathbf{X}}_{mx}(s_1, s_2, s_3) - \vec{\mathbf{X}}_{m(c)} + \vec{\mathbf{X}}_{m,x(c)}) \end{aligned} \quad (2.7.25)$$

Θα διερευνήσουμε τον 1<sup>ο</sup> όρο του 2<sup>ου</sup> μέλους. Είναι:

$$\hat{\mathbf{x}}_{m_1} \Big|_{x_m} = (1, 0, 0)^T$$

Και έχουμε δείξει ότι:

$$\hat{\mathbf{x}}_{m_1} \Big|_{x_m} = \mathbf{T}_m \hat{\mathbf{x}}_{m_1} \Big|_X$$

Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με  $\mathbf{S}_{m,xt}$  έχουμε:

$$\mathbf{S}_{m,xt} \hat{\mathbf{x}}_{m_1} \Big|_{x_m} = \mathbf{S}_{m,xt} \mathbf{T}_m \hat{\mathbf{x}}_{m_1} \Big|_X = \mathbf{S}_{m,xt} (1, 0, 0)^T = (1, 0, 0)^T = \hat{\mathbf{x}}_{m_1} \Big|_{x_m}$$

Πολλαπλασιάζοντας πάλι από αριστερά με  $\mathbf{P}_{m,t}^T$  παίρνουμε:

$$\mathbf{P}_{m,t}^T \mathbf{S}_{m,xt} \hat{\mathbf{x}}_{m_1} \Big|_{x_m} - \mathbf{P}_{m,t}^T \mathbf{S}_{m,xt} \mathbf{T}_m \hat{\mathbf{x}}_{m_1} \Big|_X \mathbf{P}_{m,t}^T \hat{\mathbf{x}}_{m_1} \Big|_{x_m} \hat{\mathbf{x}}_{m_1} \Big|_X$$

οπότε:

$$\hat{\mathbf{x}}_{m_1} \Big|_X - \mathbf{P}_{m,t}^T \mathbf{S}_{m,xt} \mathbf{T}_m \hat{\mathbf{x}}_{m_1} \Big|_X = 0$$

δηλαδή ο όρος στην (2.7.25) διαγράφεται.

Ακόμη η έκφραση (σε γενικό πλαίσιο)  $\vec{\mathbf{X}}_m(s_1, s_2, s_3) - \vec{\mathbf{X}}_{m(i)} - \vec{\mathbf{X}}_{m(c)}$  θα εμφανίζεται συχνά στα επόμενα. Οπότε για να πετύχουμε μία πιο συμπαγή γραφή θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο  $\mathcal{X}$  συνοδευόμενο από δύο δείκτες ένα m ή n για να δηλώσει το σχηματισμό που γίνεται η εμφύτευση και τα σύμβολα των πλαισίων όπου γίνεται η περιγραφή.

Ακόμη ορίζουμε:

$$\mathbf{T}_{m,\hat{\mathbf{x}}} \Big|_X = \mathbf{P}_{m,t}^T \mathbf{S}_{m,xt} \mathbf{T}_m \quad (2.7.26)$$

$$\mathbf{T}_{m,\hat{\mathbf{n}}} \Big|_X = \mathbf{P}_{m,t}^T \mathbf{S}_{m,nt} \mathbf{P}_{m,n}^{-T} \quad (2.7.27)$$

Άρα γράφουμε:

$$\vec{\mathbf{X}}_{mt} \Big|_X = \mathbf{T}_{m,\hat{\mathbf{x}}} \Big|_X \vec{\mathbf{X}}_{mx} \Big|_X \quad (2.7.28)$$

$$\vec{\mathbf{x}}_{mt}|_X = \mathbf{T}_{m,\hat{t}\hat{n}}|_X \vec{\mathbf{x}}_{mn}|_X \quad (2.7.29)$$

Οπότε στην γενική περίπτωση γράφουμε (τυχαίο πλαίσιο  $\xi$ ):

$$\vec{\mathbf{x}}_{mt}|_\xi = \mathbf{T}_{m,tx}|_\xi \vec{\mathbf{x}}_{mx}|_\xi \quad (2.7.30)$$

όπου:

$$\mathbf{T}_{m,tx}|_\xi = \mathbf{R}_\xi \mathbf{T}_{m,tx} \times \mathbf{R}_\xi^{-1} \quad (2.7.31)$$

Όπου  $\mathbf{R}_\xi$  είναι ο γνωστός πίνακας μετασχηματισμού ενός διανύσματος ανάμεσα στο καθολικό πλαίσιο  $X$  και κάποιο τοπικό πλαίσιο. Παρόμοια αποτελέσματα προκύπτουν και για τα πλαίσια  $u$  και  $t$ . Συνοψίζοντας μπορούμε να πούμε ότι η (2.7.30) μας δίνει τη σχέση μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων της εμφυτευμένης πολλαπλότητας σε οποιοδήποτε σχηματισμό.

## 2.8 Περιγραφή εμφυτευμένης πολλαπλότητας σύμφωνα με κάποιον ενδιάμεσο σχηματισμό

Η εξίσωση (2.7.22) και οι συγγενείς της αν αλλάζει το πλαίσιο περιγράφουν την  $C^m$  εμφύτευση της πολλαπλότητας. Αν θελήσουμε να αποκτήσουμε τη  $C^n$  εμφύτευση θέτουμε απλώς  $m=n$ , οπότε για το  $x_n$  πλαίσιο για παράδειγμα:

$$\vec{\mathbf{X}}_{nx}(s_1, s_2, s_3) = s_1 \lambda_{nx_1} \hat{\mathbf{x}}_{n_1} + s_2 \lambda_{nx_2} \hat{\mathbf{x}}_{n_2} + s_3 \lambda_{nx_3} \hat{\mathbf{x}}_{n_3} + \vec{\mathbf{X}}_{nx(c)} + \vec{\mathbf{X}}_{(c)} \quad (2.8.1)$$

Ακριβώς ανάλογες σχέσεις μπορούμε να διατυπώσουμε και για τα υπόλοιπα πλαίσια. Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι να βρούμε το μετασχηματισμό που συσχετίζει την (2.8.1) και την (2.7.22) και τα παράγωγά τους.

Για να συμβεί κάτι τέτοιο πρέπει πρώτα να δούμε πως τα διάφορα διανύσματα βάσης  $x_m, t_m, u_m$  πλαισίων σχετίζονται με τα διανύσματα βάσης των  $x_n, t_n, u_n$  πλαισίων.

Για τις αριθμητικές τιμές των διανυσμάτων έχουμε δει ότι: για  $k = 1,2,3$

$$\hat{\mathbf{x}}_{mk}|_{x_m} = \hat{\mathbf{t}}_{mk}|_{t_m} = \hat{\mathbf{u}}_{mk}|_{u_m} \quad \text{για } k = 1,2,3 \quad (2.8.2)$$

Και μάλιστα λόγω της σπουδαιάς υπόθεσης (2.7.1) έχουμε ότι οι πρώτες συνιστώσες των διανυσμάτων αυτών είναι αριθμητικώς ίσες όποιο και αν είναι το πλαίσιο  $C^m$  σχηματισμού που χρησιμοποιείται για την περιγραφή.

Ακριβώς το ίδιο σύμβολο και για τον σχηματισμό  $C^n$ . Αναφορικά με τις υπόλοιπες συνιστώσες του πλαισίου έχουμε την ακόλουθη ισότητα.

$$\hat{\mathbf{x}}_{mk}|_{x_m} = \hat{\mathbf{x}}_{nk}|_{x_n} = \hat{\mathbf{t}}_{mk}|_{t_m} = \hat{\mathbf{t}}_{nk}|_{t_n} = \hat{\mathbf{u}}_{mk}|_{u_m} = \hat{\mathbf{u}}_{nk}|_{u_n} \quad \text{για } k = 1,2,3 \quad (2.8.3)$$

Καθαρά για λόγους συμβολισμού θέτουμε  $\mathbf{R}_{mn,a} = \mathbf{R}_{mn,x}|_X$  οπότε:

$$\hat{\mathbf{x}}_{mk}|_X = \mathbf{R}_{mn,x}|_X \vec{\mathbf{x}}_{nk}|_X \quad \text{για } k = 1,2,3 \quad (2.8.4)$$

Δηλαδή ότι:

$$\mathbf{R}_{mn,x}|_X = \mathbf{T}_m^T \mathbf{T}_n \quad (2.8.5)$$

Μπορούμε να γενικεύσουμε την παραπάνω σχέση και να εφαρμόζεται καθολικώς ανεξάρτητα του πλαισίου. Πράγματι:

$$\hat{\mathbf{x}}_{mk}|_\xi = \mathbf{R}_{mn,x}|_\xi \hat{\mathbf{x}}_{nk}|_\xi \quad \text{για } k = 1,2,3 \quad (2.8.6)$$

Όπου τώρα  $\mathbf{R}_{mn,x}|_\xi = \mathbf{R}_\xi \mathbf{R}_{mn,x}|_X \mathbf{R}_\xi^{-1}$  (2.8.7) και  $\mathbf{R}_\xi$  είναι ο πίνακας μετασχηματισμού που συσχετίζει τις συνιστώσες οποιουδήποτε διανύσματος  $\vec{\mathbf{a}}$  στο X πλαίσιο με αυτές στο πλαίσιο μέσω της σχέσης  $\vec{\mathbf{a}}|_\xi = \mathbf{R}_\xi \vec{\mathbf{a}}|_X$ .

Για παράδειγμα για  $\xi=X$  έχουμε ότι  $\mathbf{R}_\xi = \mathbf{T}_n$  οπότε:

$$\mathbf{R}_{mn,x}|_{x_n} = \mathbf{T}_n \mathbf{R}_{mn,x}|_X \mathbf{T}_n^T = \mathbf{T}_n \mathbf{T}_m^T \mathbf{T}_n \mathbf{T}_n^T = \mathbf{T}_n \mathbf{T}_m^T$$

Μπορούμε την (2.7.22) να τη γράψουμε ως:

$$\vec{\mathbf{x}}_{mt}|_{x_n} = s_1 \lambda_m \hat{\mathbf{x}}_{m_1}|_{x_n} + s_2 \lambda_{mx_2} \hat{\mathbf{x}}_{m_2}|_{x_n} + s_3 \lambda_{mx_3} \hat{\mathbf{x}}_{m_3}|_{x_n} \quad (2.8.8)$$

$$\vec{\mathbf{x}}_{nx}|_{x_n} = s_1 \lambda_m \hat{\mathbf{x}}_{n_1}|_{x_n} + s_2 \lambda_{nx_2} \hat{\mathbf{x}}_{n_2}|_{x_n} + s_3 \lambda_{nx_3} \hat{\mathbf{x}}_{n_3}|_{x_n} \quad (2.8.9)$$

Ορίζουμε τον παρακάτω πίνακα αλλαγής κλίμακας. Το σύμβολο  $\Lambda$  που χρησιμοποιείται σε αντιδιαστολή με το  $S$  που γνωρίσαμε στα προηγούμενα υποδεικνύει την εμπλοκή των σχηματισμών  $C^m$  και  $C^n$ .

Έχουμε:

$$\Lambda_{mn,x} = \text{diag}(\lambda_{mn}, \lambda_{mn_2}, \lambda_{mn_3}) \quad (2.8.10.a)$$

όπου:

$$\lambda_{mn} = \frac{\lambda_m}{\lambda_n} \quad (2.8.10.b)$$

$$\lambda_{mn_2} = \frac{\lambda_{m_2}}{\lambda_{n_2}} \quad (2.8.20.b)$$

$$\lambda_{mn_3} = \frac{\lambda_{m_3}}{\lambda_{n_3}} \quad (2.8.10.c)$$

Η προσπάθειά μας θα εστιάσει στην εύρεση σχέσεων που συνδέουν τα διανύσματα θέσης  $\mathcal{X}$ , όπως τα έχουμε ορίσει, που ανήκουν σε διαφορετικούς σχηματισμούς και έχουν ως κοινή μεταβλητή την  $\hat{x}$ . Όσον αφορά το πλαίσιο στο οποίο γίνεται η περιγραφή αρχικώς επιλέγεται να είναι το καθολικό πλαίσιο  $X$  αργότερα όμως μπορούμε να το αντικαταστήσουμε με οποιοδήποτε πλαίσιο, κοινό και για τα δύο διανύσματα.

Η (2.8.9) μέσω της (2.8.10) γράφεται:

$$\Lambda_{mn,x} + \vec{\mathcal{X}}_{nx}|_{x_n} = s_1 \lambda_{m_1} \hat{\mathbf{x}}_{n_1}|_{x_n} + s_2 \lambda_{m_2} \hat{\mathbf{x}}_{n_2}|_{x_n} + s_3 \lambda_{m_3} \hat{\mathbf{x}}_{n_3}|_{x_n} \quad (2.8.11)$$

Πολλαπλασιάζουμε από αριστερά με  $\mathbf{R}_{mn,x}|_{x_n}$  και λαμβάνεται υπόψη ότι:

$$\hat{\mathbf{x}}_{mk}|_{x_n} = \mathbf{R}_{mn,x}|_{x_n} \hat{\mathbf{x}}_{nk}|_{x_n} = \mathbf{T}_n \mathbf{T}_m^T \hat{\mathbf{x}}_{nk}|_{x_n} \quad \text{για } k = 1,2,3 \quad (2.8.12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{mn,x}|_{x_n} \Lambda_{mn,x} \vec{\mathcal{X}}_{nx}|_{x_n} &= s_1 \lambda_{m_1} \hat{\mathbf{x}}_{n_1}|_{x_n} \mathbf{R}_{mn,x}|_{x_n} + \\ & s_2 \lambda_{m_2} \hat{\mathbf{x}}_{n_2}|_{x_n} \mathbf{R}_{mn,x}|_{x_n} + s_3 \lambda_{m_3} \hat{\mathbf{x}}_{n_3}|_{x_n} \mathbf{R}_{mn,x}|_{x_n} \xrightarrow{(2.8.12)} \mathbf{R}_{mn,x}|_{x_n} \Lambda_{mn,x} \vec{\mathcal{X}}_{nx}|_{x_n} = \\ & s_1 \lambda_{m_1} \hat{\mathbf{x}}_{m_1}|_{x_n} + s_2 \lambda_{m_2} \hat{\mathbf{x}}_{m_2}|_{x_n} + s_3 \lambda_{m_3} \hat{\mathbf{x}}_{m_3}|_{x_n} \end{aligned} \quad (2.8.13)$$

Οπότε συγκρίνοντας τις (2.8.13) και (2.8.8) βλέπουμε ότι:

$$\vec{\mathcal{X}}_{mx}|_{x_n} = \mathbf{R}_{mn,x}|_{x_n} \Lambda_{mn,x} \vec{\mathcal{X}}_{nx}|_{x_n} \quad (2.8.14)$$

Μένει να μεταφέρουμε τις εκφράσεις αυτές στο καθολικό πλαίσιο. Πράγματι έχουμε:

$$\vec{\mathcal{X}}_{mx}|_{x_n} = \mathbf{T}_n \vec{\mathcal{X}}_{mx}|_X \quad (2.8.15)$$

$$\vec{\mathcal{X}}_{nx}|_{x_n} = \mathbf{T}_n \vec{\mathcal{X}}_{nx}|_X \quad (2.8.16)$$

Συνδυάζοντας τις τρεις τελευταίες έχουμε:

$$\mathbf{T}_n \vec{\mathcal{X}}_{mx}|_X = \mathbf{T}_n \mathbf{T}_m^T \Lambda_{mn,x} \mathbf{T}_n \vec{\mathcal{X}}_{nx}|_X \rightarrow \vec{\mathcal{X}}_{mx}|_X = \mathbf{T}_m^T \Lambda_{mn,x} \mathbf{T}_n \vec{\mathcal{X}}_{nx}|_X \quad (2.8.17)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι το αποτέλεσμα που θα παίρναμε αν στη θέση του  $x_n$  πλαισίου ήταν το  $x_m$  θα ήταν ακριβώς το ίδιο. Ορίζουμε:

$$\mathbf{F}_{mn,x}|_X = \mathbf{T}_m^T \Lambda_{mn,x} \mathbf{T}_n \quad (2.8.18)$$

Συνεπώς:

$$\vec{\mathcal{X}}_{mx}|_X = \mathbf{F}_{mn,x}|_X \vec{\mathcal{X}}_{nx}|_X \quad (2.8.19)$$

και σε μία γενική γραφή:

$$\vec{\mathcal{X}}_{mx}|_\xi = \mathbf{F}_{mn,x}|_\xi \vec{\mathcal{X}}_{nx}|_\xi \quad (2.8.20)$$

όπου

$$\mathbf{F}_{mn,x}|_{\xi} = \mathbf{R}_{\xi} \mathbf{F}_{mn,x}|_X \bar{\mathbf{X}}_{nx}|_{\xi} \quad (2.8.21)$$

Σημειώνουμε ότι το  $\bar{\mathbf{X}}_{mx}$  δίδει τη σχετική θέση των διανυσμάτων θέσης της εμφυτευμένης πολλαπλότητας στο  $C^m$  σχηματισμό χρησιμοποιώντας το  $X_m$  πλαίσιο για την αναπαράσταση σχετικά με το σημείο που αντιστοιχεί στην αρχή  $(s_1, s_2, s_3) = (0,0,0)$  και έχοντας  $m$  διάνυσμα θέσης το  $\bar{\mathbf{X}}_{mx(c)} + \bar{\mathbf{X}}_{m(i)}$ . Ακριβώς το ίδιο ισχύει για το  $\bar{\mathbf{X}}_{nx}$ .

Έτσι η (2.8.21) μας δίνει το (γενικό) μετασχηματισμό που συνδέει τα διανύσματα της εμφυτευμένης πολλαπλότητας στο  $C^m$  σχηματισμό με τα αντίστοιχα διανύσματα θέσης στο  $C^n$  σχηματισμό. Τα συστατικά του μετασχηματισμού μας είναι γνωστά, στροφές και αλλαγή στις διαστάσεις.

Οι παραπάνω σχέσεις που εξήχθησαν βασίστηκαν στα πλαίσια  $X_m$  και  $X_n$  που όπως έχουμε επαναλάβει είναι ορθογώνια και έτσι προκύπτει η απλότητα στη διατύπωσή τους. Θέλουμε να βρούμε ανάλογες σχέσεις μετασχηματισμού που να αναφέρονται όμως σε μη ορθογώνια πλαίσια όπως τα  $t_m$ ,  $t_n$ . μία πορεία σκέψης είναι η ακόλουθη (χωρίς να είναι η μοναδική). Γράφουμε:

$$\bar{\mathbf{X}}_{nt}|_X = \mathbf{T}_{n,tX}|_X \bar{\mathbf{X}}_{nx}|_X \quad (2.8.22)$$

όπου

$$\mathbf{T}_{n,tX}|_X = \mathbf{P}_{nt}^T \mathbf{S}_{n,xt} \mathbf{T}_n \quad (2.8.23)$$

Αντιστρέφοντας παίρνουμε:

$$\bar{\mathbf{X}}_{nx}|_X = \mathbf{T}_{n,tX}^{-1}|_X \bar{\mathbf{X}}_{nt}|_X \quad (2.8.24)$$

$$\mathbf{T}_{n,tX}|_X = \mathbf{T}_n^T \mathbf{S}_{n,xt}^{-1} \mathbf{P}_{nt}^{-T} \quad (2.8.25)$$

όμοια πράττουμε και για το σχηματισμό  $C^m$ . Προκύπτει:

$$\bar{\mathbf{X}}_{mt}|_X = \mathbf{T}_{m,tX}|_X \mathbf{F}_{mn,x}|_X \mathbf{T}_{n,tX}^{-1}|_X \bar{\mathbf{X}}_{nt}|_X \quad (2.8.26)$$

όπου:

$$\mathbf{F}_{mn,t}|_X = \mathbf{T}_{m,tX}|_X \mathbf{F}_{mn,x}|_X \mathbf{T}_{n,tX}^{-1}|_X \quad (2.8.27)$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των πινάκων παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{mn,t}|_X &= \mathbf{P}_{mt}^T \mathbf{S}_{m,xt} \mathbf{T}_m \mathbf{T}_m^T \mathbf{S}_{n,xt}^{-1} \mathbf{P}_{nt}^{-T} \\ \mathbf{F}_{mn,t}|_X &= \mathbf{P}_{mt}^T \mathbf{S}_{m,xt} \mathbf{A}_{mn,x} \mathbf{S}_{n,xt}^{-1} \mathbf{P}_n^{-T} \end{aligned} \quad (2.8.28)$$

Ορίζουμε:

$$\mathbf{A}_{mn,t} = \mathbf{S}_{m,xt} \mathbf{A}_{mn,x} \mathbf{S}_{n,xt}^{-1} \quad (2.8.29)$$

Οπότε:

$$\mathbf{F}_{mn,t}|_X = \mathbf{P}_{mt}^T \mathbf{A}_{mn,t} \mathbf{P}_{nt}^{-T} \quad (2.8.30)$$

Και έτσι πετύχαμε τη διατύπωση μίας σχέσης ανάλογης της (2.8.19) για τη μεταβλητή  $\mathbf{t}$  των πλαισίων  $\mathbf{t}_m, \mathbf{t}_n$ .

$$\vec{\mathbf{X}}_{mt}|_X = \mathbf{F}_{mn,t}|_X \vec{\mathbf{X}}_{nt}|_X \quad (2.8.31)$$

και σε πιο γενική μορφή:

$$\vec{\mathbf{X}}_{mt}|_\xi = \mathbf{F}_{mn,t}|_\xi \vec{\mathbf{X}}_{nt}|_\xi \quad (2.8.32)$$

Ανάλογη διαδικασία θα ακολουθήσουμε για τη μεταβλητή  $\mathbf{u}$  των πλαισίων  $\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_n$ . ο τρόπος που θα γίνει αυτό περιλαμβάνει την εμπλοκή του πλαισίου  $\mathbf{t}$  το οποίο αργότερα θα απαλειφθεί από τους υπολογισμούς.

$$\vec{\mathbf{X}}_{mt}|_X = \mathbf{T}_{n,tu}|_X \vec{\mathbf{X}}_{nu}|_X \quad (2.8.33)$$

και

$$\mathbf{T}_{n,tu}|_X = \mathbf{P}_{nt}^T \mathbf{S}_{n,ut} \mathbf{P}_{nu}^{-T} \quad (2.8.34)$$

Από την (2.8.26) πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με  $\mathbf{T}_{n,tu}|_X$  και μέσω της (2.8.33) προκύπτει ότι:

$$\vec{\mathbf{X}}_{mu}|_X = \mathbf{T}_{m,tu}^{-1}|_X \mathbf{F}_{mn,t}|_X \mathbf{T}_{n,tu}|_X \vec{\mathbf{X}}_{nu}|_X \quad (2.8.35)$$

Ορίζουμε:

$$\mathbf{F}_{mn,u}|_X = \mathbf{T}_{m,tu}^{-1}|_X \mathbf{F}_{mn,t}|_X \mathbf{T}_{n,tu}|_X \quad (2.8.36)$$

Η (2.8.36) με αντικατάσταση των τιμών των πινάκων μπορεί να γραφεί:

$$\mathbf{F}_{mn,u}|_X = \mathbf{P}_{mu}^T \mathbf{S}_{m,ut}^{-1} \mathbf{A}_{mn,t} \mathbf{S}_{n,ut} \mathbf{P}_{nu}^{-T} \quad (2.8.37)$$

Στο εξής θα θέτουμε:

$$\mathbf{A}_{mn,u} = \mathbf{S}_{m,ut}^{-1} \mathbf{A}_{mn,t} \mathbf{S}_{n,ut} \quad (2.8.38)$$

Άρα:

$$\mathbf{F}_{mn,u}|_X = \mathbf{P}_{mu}^T \mathbf{A}_{mn,u} \mathbf{P}_{nu}^{-T} \quad (2.8.39)$$

Οπότε μπορούμε να γράψουμε:

$$\vec{\mathbf{x}}_{mu}|_X = \mathbf{F}_{mn,u}|_X \vec{\mathbf{x}}_{nu}|_X \quad (2.8.40)$$

Και πιο γενικά:

$$\vec{\mathbf{x}}_{mu}|_\xi = \mathbf{F}_{mn,u}|_\xi \vec{\mathbf{x}}_{nu}|_\xi \quad (2.8.41)$$

Ας δούμε πιο αναλυτικά τα συστατικά του  $\mathbf{F}_{mn,u}|_X$ . Όσον αφορά το  $\mathbf{S}_{n,ut}$  έχουμε:

$$\mathbf{S}_{n,ut} = \text{diag}(1, \lambda_{n,ut_2}, \lambda_{n,ut_3}) \quad (2.8.41.a)$$

με

$$\lambda_{n,ut_2} = \frac{\lambda_{nu_2}}{\lambda_{nt_2}} \quad (2.8.41.b)$$

$$\lambda_{n,ut_3} = \frac{\lambda_{nu_3}}{\lambda_{nt_3}} \quad (2.8.41.c)$$

Οπότε:

$$\mathbf{\Lambda}_{mn,u} = \mathbf{S}_{m,ut}^{-1} \mathbf{\Lambda}_{mn,t} \mathbf{S}_{n,ut} = \text{diag}(\lambda_{mn}, \lambda_{mn,u_2}, \lambda_{mn,u_3}) \quad (2.8.42.a)$$

με

$$\lambda_{mn,u_2} = \frac{\lambda_{mu_2}}{\lambda_{n,u_2}} \frac{\lambda_{nu_3}}{\lambda_{nt_3}} \quad (2.8.42.b)$$

$$\lambda_{mn,u_3} = \frac{\lambda_{mu_3}}{\lambda_{n,u_3}} \quad (2.8.42.c)$$

Στόχος μας τώρα είναι να ενώσουμε τις παραπάνω εξισώσεις σε μία μοναδική εξίσωση με καθολική εφαρμογή. Βάση μας για να το πετύχουμε αυτό είναι να χρησιμοποιήσουμε τη μεταβλητή  $\hat{\mathbf{x}}$  του πλαισίου  $\mathbf{x}_m$  ή  $\mathbf{x}_n$  και όλες οι εκφράσεις θα είναι ως προς το πλαίσιο  $\mathbf{X}$ . Θυμίζουμε:

$\mathbf{P}_{m,x} = \mathbf{T}_m$  ορθογώνιο μητρώο και ισχύει  $m=n$ .

Οπότε:

$$\mathbf{F}_{mn,x}|_X = \mathbf{P}_{m,x}^T \mathbf{\Lambda}_{mn,x} \mathbf{P}_{n,x}^{-T} \quad (2.8.43)$$

Η πλέον γενική εξίσωση που μπορούμε να διατυπώσουμε μέχρι στιγμής έχει την ακόλουθη μορφή.

$$\vec{\mathbf{x}}_{mz}|_\xi = \mathbf{F}_{mn,z}|_\xi \vec{\mathbf{x}}_{nz}|_\xi \quad (2.8.44)$$

με:

$$\mathbf{F}_{mn,z}|_X = \mathbf{R}_\xi \mathbf{F}_{mn,t}|_X \mathbf{R}_\xi^{-1} \quad (2.8.45)$$

και

$$\mathbf{F}_{mn,z}|_X = \mathbf{P}_{mz}^T \mathbf{\Lambda}_{mn,z} \mathbf{P}_{nz}^{-T} \quad (2.8.46)$$

Όπου το  $z$  μπορεί να είναι οποιοδήποτε μεταξύ των  $x, t, u, R_\xi$  ο γνωστός πίνακας μετασχηματισμού που συνδέει τις συνιστώσες οπουδήποτε διανύσματος  $\vec{\alpha}$  στο  $X$  πλαίσιο με αυτές στο  $\xi$  πλαίσιο. Στην πραγματικότητα η σχέση (2.8.45) γενικεύεται ακόμα περισσότερο αν σκεφτεί κανείς να θεωρήσει ότι τόσο τα πλαίσια όσο και η μεταβλητή  $z$  στα δύο μέλη της εξίσωσης ότι είναι διαφορετικά μεταξύ τους.

Ας θεωρήσουμε την περίπτωση  $z=t$  και  $\xi=X$ , τότε  $R_\xi=R_x=I$  οπότε:

$$\vec{\mathbf{X}}_{mt}|_X = \mathbf{F}_{mn,t}|_X \vec{\mathbf{X}}_{nt}|_X \quad (2.8.47)$$

με

$$\mathbf{F}_{mn,t}|_X = \mathbf{P}_{mt}^T \mathbf{\Lambda}_{mn,t} \mathbf{P}_{nt}^{-T} \quad (2.8.48)$$

Εισάγοντας στην παρακάτω εξίσωση και τις εκφράσεις  $u$  παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{n,tu}|_X \vec{\mathbf{X}}_{mu}|_X &= \mathbf{F}_{mn,t}|_X \vec{\mathbf{X}}_{nt}|_X \rightarrow \mathbf{P}_{mt}^T \mathbf{S}_{m,ut} \mathbf{P}_{mn}^{-T} \vec{\mathbf{X}}_{mu}|_X = \mathbf{P}_{mt}^T \mathbf{\Lambda}_{mn,t} \mathbf{P}_{nt}^{-T} \vec{\mathbf{X}}_{nt}|_X \\ &\rightarrow \\ \vec{\mathbf{X}}_{mu}|_X &= \mathbf{P}_{mu}^T \mathbf{S}_{m,ut}^{-1} \mathbf{P}_{mt}^{-T} \mathbf{P}_{mt}^T \mathbf{\Lambda}_{mn,t} \mathbf{P}_{nt}^{-T} \vec{\mathbf{X}}_{nt}|_X \\ &\rightarrow \vec{\mathbf{X}}_{mu}|_X \mathbf{P}_{mu}^T \mathbf{S}_{m,ut}^{-1} \mathbf{\Lambda}_{mn,t} \mathbf{P}_{nt}^{-T} \vec{\mathbf{X}}_{nt}|_X \end{aligned} \quad (2.8.49)$$

Ορίζουμε τον ακόλουθο πίνακα:

$$\mathbf{\Lambda}_{mn,ut} = \mathbf{S}_{m,ut}^{-1} \mathbf{\Lambda}_{mn,t} \quad (2.8.50)$$

Δηλαδή:

$$\mathbf{\Lambda}_{mn,ut} = \text{diag}(\lambda_{mn}, \lambda_{mn,ut_2}, \lambda_{mn,ut_3}) \quad (2.8.51)$$

Ακόμη ορίζουμε τον παρακάτω πίνακα:

$$\mathbf{F}_{mn,ut}|_X = \mathbf{P}_{mu}^T \mathbf{\Lambda}_{mn,ut} \mathbf{P}_{ut}^{-T} \quad (2.8.52)$$

οπότε:

$$\vec{\mathbf{X}}_{mu}|_X = \mathbf{F}_{mn,ut}|_X \vec{\mathbf{X}}_{nt}|_X \quad (2.8.53)$$

Σε αυτό το σημείο ας κάνουμε μία παρένθεση. Ενδεχομένως να υπάρχει ένας καταγισμός ορισμών για μεγέθη και πίνακες που ωστόσο μοιάζουν πολύ μεταξύ τους, κρίνεται



όμως ως επιτακτική η ανάγκη για την πλήρη κατανόηση των τύπων αυτών να γράφονται με τον απλούστερο δυνατό τρόπο και να είναι το δυνατόν γενικοί.

Έτσι σε μία σχέση όπως η (2.8.53) η σύνδεση δύο διανυσμάτων γίνεται μέσω του πίνακα. Όσο πιο «ξένα» είναι τα διανύσματα μεταξύ του τόσο πιο πολύπλοκη γίνεται η περιγραφή του πίνακα. Το βασικό νόημα όμως παραμένει το ίδιο.

Ας θεωρήσουμε ένα πλαίσιο  $\psi$  που σχετίζεται με το  $X$  πλαίσιο μέσω του μετασχηματισμού  $R_\psi$ . Θεωρούμε και ένα δεύτερο πλαίσιο  $\xi$ . Εφαρμόζοντας τον 1<sup>ο</sup> μετασχηματισμό για το  $\vec{X}_{mu}$  έχουμε:

$$\vec{X}_{mu}|_X = R_\psi^{-1} \vec{X}_{mu}|_\psi \quad (2.8.54)$$

Εφαρμόζοντας τον 2<sup>ο</sup> μετασχηματισμό για το  $\vec{X}_{nt}$  έχουμε:

$$\vec{X}_{nt}|_X = R_\xi^{-1} \vec{X}_{nt}|_\xi \quad (2.8.55)$$

Συνδέοντας τις (2.8.54) και (2.8.55) έχουμε:

$$\vec{X}_{mu}|_\psi = R_\psi F_{mn,ut}|_X R_\xi^{-1} \vec{X}_{nt}|_\xi \quad (2.8.56)$$

όπου:

$$F_{mn,ut}|_{\psi\xi} = R_\psi F_{mn,ut}|_X R_\xi^{-1} \quad (2.8.57)$$

Οπότε είμαστε σε θέση να γενικεύσουμε την (2.8.45). Δηλαδή:

$$\vec{X}_{mz}|_\psi = F_{mn,zy}|_{\psi\xi} \vec{X}_{ny}|_\xi \quad (2.8.58)$$

όπου:

$$F_{mn,zy}|_{\psi\xi} = R_\psi F_{mn,zy}|_X R_\xi^{-1} \quad (2.8.59)$$

και

$$F_{mn,zy}|_X = P_{mz}^T \Lambda_{mn,zy} P_{ny}^{-T} \quad (2.8.60)$$

και  $\Lambda_{mn,zy}$  είναι ένας πίνακας μεταβολής κλίμακας μεταξύ των σχηματισμών  $C^m$  και  $C^n$  εκεί δηλαδή που ανήκουν τα πλαίσια  $z$  και  $y$  αντίστοιχα.

$$\Lambda_{mn,zy} = \text{diag}(\lambda_{mn}, \lambda_{mn,zy_2}, \lambda_{mn,zy_3}) \quad (2.8.61)$$

Ας εξετάσουμε τη μορφή της (2.8.60). Εφόσον τα  $z$  και  $y$  μπορεί να είναι  $x, t, u$  βλέπουμε ότι το ίδιο ισχύει για τα  $P_{mz}^T$  και  $P_{ny}^T$ . Βλέπουμε δηλαδή ότι αυτοί οι πίνακες είναι στην πραγματικότητα πίνακες μετασχηματισμών όπως τα  $R_\psi, R_\xi$ . έτσι η (2.8.60) μας λέει ότι η παράσταση  $F_{mn,zy}$  στο  $X$  πλαίσιο συνιστάται από έναν μετασχηματισμό (που δεν είναι

μετασχηματισμός ομοιότητας εκτός αν  $z=y$ ) ενός διαγώνιου πίνακα  $\Lambda_{mn,zy}$  της ακόλουθης μορφής:

$$\mathbf{F}_{mn,zy}|_X = \mathbf{R}_z^{-1} \Lambda_{mn,zy} \mathbf{R}_y \quad (2.8.62)$$

όπου  $\mathbf{R}_z = \mathbf{R}_{mz}^{-T}$  συνδέει τα πλαίσια του  $C^m$  σχηματισμού και  $\mathbf{R}_y = \mathbf{R}_{ny}^{-T}$  αυτά του  $C^n$  σχηματισμού.

Ακόμη ο διπλός δείκτης  $zy$  έχει τη σημασία του. Στην πραγματικότητα μας λέει ότι ο  $\mathbf{F}_{mn,zy}$  είναι ένας τανυστής δύο σημείων, δηλαδή ένας τανυστής του οποίου η δυαδική αναπαράσταση περιλαμβάνει τανυστικά γινόμενα των διανυσμάτων βάσης του  $z$  πλαισίου του  $C^m$  σχηματισμού με τα διανύσματα βάσης του  $y$  πλαισίου  $C^n$  σχηματισμού. Συγχρόνως, το γεγονός ότι ο  $\mathbf{F}_{mn,zy}$  είναι ένας τανυστής δύο σημείων μπορεί να φανεί από το γεγονός ότι μετασχηματίζει διανύσματα από το  $C^n \rightarrow C^m$ .

Κλείνοντας αυτή την παράγραφο έχει ενδιαφέρον να διερευνήσουμε τη σχέση που συνδέει τα  $z_{m_1}$  και  $y_{n_1}$ , δηλαδή θέλουμε να δούμε πως το διάνυσμα που περιγράφει τη διατομή του δικτυώματος μετασχηματίζεται από τον ένα σχηματισμό στον άλλο. Για να γίνει αυτό παρατηρούμε ότι έχουμε τις παρακάτω σχέσεις:

$$\left. \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}_{mz}(s_1, s_2, s_3)}{\partial s_r} \right|_{\psi} = \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}_{mz}}{\partial s_r} \quad \text{για } r = 2,3 \quad (2.8.63)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}_{ny}(s_1, s_2, s_3)}{\partial s_r} \right|_{\xi} = \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}_{ny}}{\partial s_r} \quad \text{για } r = 2,3 \quad (2.8.64)$$

Ακόμη:

$$\left. \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}_{mz}(s_1, s_2, s_3)}{\partial s_r} \right|_X = \mathbf{F}_{mn,zy}|_X \left. \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}_{ny}}{\partial s_r} \right|_X \quad (2.8.65)$$

και

$$\vec{z}_{m_1}|_X = \left. \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}_{mz}(s_1, s_2, s_3)}{\partial s_2} \right|_X \times \left. \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}_{mz}(s_1, s_2, s_3)}{\partial s_3} \right|_X \quad (2.8.66.a)$$

$$\vec{y}_{n_1}|_X = \left. \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}_{ny}(s_1, s_2, s_3)}{\partial s_2} \right|_X \times \left. \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}_{ny}(s_1, s_2, s_3)}{\partial s_3} \right|_X \quad (2.8.66.b)$$

Όπου το σύμβολο  $\times$  σημαίνει ότι το εξωτερικό γινόμενο γίνεται στο πλαίσιο  $X$  οπότε:

$$\mathbf{z}_{m_1}|_X = \left[ \left( \mathbf{F}_{mn,zy}|_X \left. \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}_{ny}}{\partial s_2} \right|_X \right) \times \left( \mathbf{F}_{mn,zy}|_X \left. \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}_{ny}}{\partial s_3} \right|_X \right) \right] \quad (2.8.67)$$

Από τις ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου η (2.8.67) γράφεται:

$$\vec{z}_{m_1}|_X = \left| \mathbf{F}_{mn,zy}|_X \right| \mathbf{F}_{mn,zy}^{-T}|_X \left( \frac{\partial \vec{X}_{ny}}{\partial s_2} \Big|_X \times \frac{\partial \vec{X}_{ny}}{\partial s_3} \Big|_X \right) \quad (2.8.68)$$

$$\vec{z}_{m_1}|_X = \mathbf{F}_{mn,zy}|_X \mathbf{F}_{mn,zy}^{-T}|_X \mathbf{y}_{n_1}|_X \quad (2.8.69)$$

Η (2.8.64) αναφέρεται στο πλαίσιο  $X$  που είναι το καθολικό. Γενικεύοντας μπορούμε να γράψουμε ότι:

$$\vec{z}_{m_1}|_\psi = \mathbf{R}_\psi \vec{z}_{m_1}|_X \quad (2.8.70)$$

$$\vec{y}_{n_1}|_\xi = \mathbf{R}_\xi \vec{y}_{n_1}|_X \quad (2.8.71)$$

Οπότε συνδυάζοντας έχουμε:

$$\mathbf{z}_{m_1}|_\psi = \left| \mathbf{F}_{mn,zy}|_X \right| \mathbf{R}_\psi \mathbf{F}_{mn,zy}^{-T}|_X \mathbf{R}_\xi^{-1} \vec{y}_{n_1}|_\xi \quad (2.8.72)$$

Ορίζουμε:

$$\Phi_{mn,zy}^{-T}|_{\psi\xi} = \mathbf{R}_\psi \mathbf{F}_{mn,zy}^{-T}|_X \mathbf{R}_\xi^{-1} \quad (2.8.73)$$

Και με αυτό τον τρόπο η (2.8.72) μας λέει πως το διάνυσμα που περιγράφει το εμβαδόν της διατομής του δικτύωματος μετασχηματίζεται από τον ένα σχηματισμό στον άλλο.

## Κεφάλαιο 3

### 3.1 Το gradient της παραμόρφωσης (βαθμίδα παραμόρφωσης)

Το διάνυσμα  $\vec{X}_{mz}$  δίδει το σχετικό διάνυσμα θέσης των σημείων της εμφυτευμένης πολλαπλότητας στο  $C^m$  σχηματισμό χρησιμοποιώντας το  $z_m$  πλαίσιο για την περιγραφή πάντα σε σχέση με το σημείο  $(s_1, s_2, s_3) = (0,0,0)$  που έχει ως διάνυσμα θέσης το  $\vec{X}_{mz(c)} + \vec{X}_{m(i)}$ . Αντίστοιχα ισχύουν για το  $C^n$  σχηματισμό. Έτσι οι σχέσεις (2.8.44)-(2.8.46) μας δίδουν το μετασχηματισμό που σχετίζει τα διανύσματα θέσης της εμφυτευμένης πολλαπλότητας στο  $C^m$  σχηματισμό με τα αντίστοιχα στο  $C^n$  σχηματισμό. Αυτός όμως ο μετασχηματισμός είναι μετασχηματισμός σημείου (ή αλλιώς χαρτογράφηση σημείων). Αυτό που θέλουμε να ανακαλύψουμε τώρα είναι πως γραμμικά στοιχεία που ανήκουν στην εμφυτευμένη πολλαπλότητα μετασχηματίζονται κατά τη μετάβαση  $C^n \rightarrow C^m$ .

Για να γίνει αυτό πρέπει πρώτα να ορίσουμε τι εννοούμε με τον όρο γραμμικό στοιχείο που ανήκει στην εμφυτευμένη πολλαπλότητα σε κάποιο σχηματισμό  $C^m$ . Υπό μία αφηρημένη

έννοια με τον όρο γραμμικό στοιχείο εννοούμε ένα διάνυσμα που ενώνει δύο σημεία στον ευκλείδειο χώρο. Μεταξύ των ορίων αυτών του αφηρημένου ορισμού μπορούμε να πούμε ότι ένα γραμμικό στοιχείο που ανήκει σε κάποιο σχηματισμό  $C^n$  είναι ένα διάνυσμα που ενώνει δύο σημεία που ανήκουν στην εμφυτευμένη πολλαπλότητα στο δοσμένο σχηματισμό όπου ένα από τα δύο σημεία του χρησιμεύει ως η βάση όπου το διάνυσμα δεσμεύεται.

Αν όμως κάνουμε μία πιο διεξοδική σκέψη σε αυτό, θα διαπιστώσουμε ότι ο ορισμός αυτός δεν είναι απόλυτα σωστό. Για να το δούμε αυτό ας θεωρήσουμε μία δοσμένη πολλαπλότητα της οποίας η εμφύτευση στον  $\mathbb{R}^3$  αντιστοιχεί σε κάποια επιφάνεια. Τότε σύμφωνα με αυτόν τον αφηρημένο ορισμό, ένα γραμμικό στοιχείο της εμφυτευμένης πολλαπλότητας θα ήταν ένα διάνυσμα και ενώνει δύο σημεία της επιφάνειας και εκτός αν η επιφάνεια είναι επίπεδη αυτό το διάνυσμα δεν θα κείται στην εμφυτευμένη πολλαπλότητα. Έτσι αν θέλουμε να βρούμε το μήκος που θα έπρεπε να διανυθεί για να μεταβούμε από το ένα σημείο στο άλλο δεν θα μπορούμε να πούμε ότι είναι ίσο με το μέτρο του διανύσματος που ενώνει τα σημεία (εκτός και αν όπως έχουμε πει πρόκειται για επίπεδη επιφάνεια). Άλλωστε όταν σκεφτόμαστε ένα διάνυσμα μας έρχεται στο μυαλό το μήκος του.

Παρ' όλα αυτά μέσω του χαλαρού αυτού ορισμού ότι το μήκος του γραμμικού στοιχείου δεν αντιστοιχεί σε αποστάσεις που μετρούνται πάνω στην πολλαπλότητα και έτσι δεν είναι σωστό να θεωρήσουμε αυτό το γραμμικό στοιχείο ως γραμμικό στοιχείο που ανήκει στην εμφυτευμένη πολλαπλότητα.

Για να αναπτύξουμε τον ορισμό αυτό ας θεωρήσουμε μία καμπύλη  $C$  στο χώρο παραμετροποιημένη με μία παράμετρο  $a$  τέτοια ώστε  $C = C(a) \forall a \in [\alpha_i, \alpha_f]$ . Το μήκος της καμπύλης  $\ell_\alpha$  μέσω των καθορισμένων ορίων της δίδεται ως:

$$\ell_\alpha = \int_{\alpha_i}^{\alpha_f} \left\| \frac{d\vec{c}(a)}{da} \right\| da \quad (3.1.1)$$

Το δε εφαπτόμενο διάνυσμα είναι:

$$dc(a) = \frac{dc(a)}{da} da \quad (3.1.2)$$

Από τις (3.1.1) και (3.1.2) βλέπουμε ότι το διαφορικό μήκος τόξων της καμπύλης είναι ίσο με τη νόρμα του εφαπτόμενου διανύσματος σε αυτή την καμπύλη. Σημειώνουμε ότι το εφαπτόμενο διάνυσμα στην καμπύλη είναι δεσμευμένο στο σημείο που αντιστοιχεί στην τιμή  $a$  που χρησιμοποιήθηκε στην εκτίμηση της παραγώγου της (3.1.2). Παρ' όλα το εφαπτόμενο διάνυσμα δεν ανήκει στην καμπύλη εκτός και αν αυτή είναι ευθεία (με άλλα λόγια δεν ενώνει δύο σημεία της καμπύλης). Όμως από τις γνώσεις διαφορικής γεωμετρίας καμπύλων και επιφανειών μπορούμε να πούμε ότι το εφαπτόμενο διάνυσμα ενώνει δύο σημεία της καμπύλης που είναι απείρως κοντά. Βλέπουμε συγχρόνως ότι το εφαπτόμενο διάνυσμα έχει την ιδέα του μήκους μέσα στην κατασκευή του. Αυτή η συνειδητοποίηση μας ωθεί στο να χρησιμοποιήσουμε την ιδέα του εφαπτόμενου διανύσματος ως το πρωτότυπο μοντέλο στην προσπάθειά μας να ορίσουμε τι είναι γραμμικό στοιχείο σε μια εμφυτευμένη πολλαπλότητα.

Ένα γραμμικό στοιχείο μιας εμφυτευμένης πολλαπλότητας στον Ευκλείδειο χώρο θεωρείται ένα διάνυσμα δεσμευμένο σε κάποιο δοσμένο σημείο της εμφυτευμένης πολλαπλότητας και συνδέει αυτό το σημείο με ένα άλλο που είναι απείρως κοντά του.

Αυτή η συλλογή που είναι απείρως κοντά σε ένα δοσμένο σημείο της εμφυτευμένης πολλαπλότητας συνιστά τον εφαπτόμενο χώρο της.

Έτσι μπορούμε να πούμε ότι το γραμμικό στοιχείο μίας εμφυτευμένης πολλαπλότητας είναι οποιοδήποτε διάνυσμα που ανήκει στον εφαπτόμενο χώρο της ή αλλιώς είναι ένα διάνυσμα που έχει απείρως κοντινά σημεία.

Τώρα είμαστε σε θέση να αποκαλύψουμε τη μορφή των γραμμικών στοιχείων της πολλαπλότητας. Για να το κάνουμε αυτό θα θεωρήσουμε ένα σημείο  $(s_1, s_2, s_3)$  της πολλαπλότητας και ένα δεύτερο το  $(s_1 + ds_1, s_2 + ds_2, s_3 + ds_3)$  που είναι απείρως κοντά σε αυτό. Το διάνυσμα  $\vec{X}_{mz}$  δίδει τη σχετική θέση του διανύσματος θέσης των σημείων  $(s_1, s_2, s_3)$  της πολλαπλότητας στο  $C^m$  σχηματισμό, χρησιμοποιώντας το  $z_m$  πλαίσιο για την αναπαράσταση σχετικά με την αρχή  $(s_1, s_2, s_3) = (0,0,0)$ . Ακριβώς τα ίδια ισχύουν και για το διάνυσμα  $\vec{X}_{mz}$  στο σημείο  $(s_1 + ds_1, s_2 + ds_2, s_3 + ds_3)$ . Το διάνυσμα  $d\vec{X}_{mz}$  που ενώνει τα δύο απείρως κοντινά σημεία δίδεται ως:

$$d\vec{X}_{mz} = \vec{X}_{mz}(s_1 + ds_1, s_2 + ds_2, s_3 + ds_3) - \vec{X}_{mz}(s_1, s_2, s_3) \quad (3.1.3)$$

Σύμφωνα με τον ορισμό που δώσαμε για το ευθύγραμμο στοιχείο μπορούμε να πούμε ότι το  $d\vec{X}_{mz}$  είναι το ευθύγραμμο στοιχείο της εμφυτευμένης πολλαπλότητας στον  $C^m$  σχηματισμό χρησιμοποιώντας το πλαίσιο  $z_m$  για την αναπαράσταση.

Από το ανάπτυγμα Taylor:

$$\vec{X}_{mz}(s_1 + ds_1, s_2 + ds_2, s_3 + ds_3) = \vec{X}_{mz}(s_1, s_2, s_3) + \frac{\partial \vec{X}_{mz}(s_1, s_2, s_3)}{\partial s_k} ds_k$$

με  $k = 1, 2, 3$  (3.1.4)

Αν θεωρήσουμε το όριο  $(s_1 + ds_1, s_2 + ds_2, s_3 + ds_3) \rightarrow (s_1, s_2, s_3)$  που συμβολίζεται για λόγους συντομίας με  $\ell$  η (3.1.4) μας δίνει:

$$X_{mz}(s_1 + ds_1, s_2 + ds_2, s_3 + ds_3) \stackrel{\ell}{=} X_{mz}(s_1, s_2, s_3) + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \vec{X}_{mz}(s_1, s_2, s_3)}{\partial s_k} ds_k \quad (3.1.5)$$

όπου αγνοούμε τους όρους ανώτερης τάξης. Οπότε μπορούμε να πούμε ότι:

$$d\vec{X}_{mz} \stackrel{\ell}{=} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \vec{X}_{mz}(s_1, s_2, s_3)}{\partial s_k} ds_k \quad (3.1.6)$$

Η ποσότητα στην (3.1.6) αντιστοιχεί όπως είδαμε στους γραμμικούς όρους του αναπτύγματος Taylor και είναι γνωστή ως το ολικό διαφορικό του  $\vec{X}_{mz}(s_1, s_2, s_3)$ . Έτσι η (3.1.6) μας δίνει την έκφραση για το γραμμικό στοιχείο της εμφυτευμένης πολλαπλότητας στο  $C^m$

σηματισμό χρησιμοποιώντας το  $z_m$  πλαίσιο για την αναπαράσταση. Αφού  $z$  μπορεί να είναι οποιοδήποτε από τα  $x, t, u$  μπορούμε να γράψουμε:

$$\vec{X}_{mz}(s_1, s_2, s_3) = s_1 \lambda_m \hat{z}_{m_1} + s_2 \lambda_{mz_2} \hat{z}_{m_2} + s_3 \lambda_{mz_3} \hat{z}_{m_3} + \vec{X}_{mz(c)} + \vec{X}_{m(i)} \quad (3.1.7)$$

Βλέπουμε ότι η σχέση αυτή είναι αμιγώς γραμμική. Οπότε εξ' ορισμού οι όροι ανώτερης τάξης εξαφανίζονται. Υπό αυτήν την έννοια η (3.1.5) δεν ισχύει μόνο στο όριο αλλά γενικά. Οπότε με ασφάλεια μπορούμε να γράψουμε ότι:

$$d\vec{X}_{mz} = \frac{\partial \vec{X}_{mz}(s_1, s_2, s_3)}{\partial s_k} ds_k \quad (3.1.8)$$

Η (3.1.8) ισχύει και για  $m=n$  και  $z=y$  δηλαδή:

$$d\vec{X}_{ny} = \frac{\partial \vec{X}_{ny}(s_1, s_2, s_3)}{\partial s_k} ds_k \quad (3.1.9)$$

όπου η χρήση του δείκτη  $k$  εννοεί άθροιση για  $k=1,2,3$ .

Ακόμη έχουμε:

$$\left. \frac{\partial \vec{X}_{mz}(s_1, s_2, s_3)}{\partial s_k} \right|_{\psi} = \left. \frac{\partial \vec{X}_{mz}}{\partial s_k} \right|_{\psi} \quad \text{για } k = 1, 2, 3 \quad (3.1.10)$$

$$\left. \frac{\partial \vec{X}_{ny}(s_1, s_2, s_3)}{\partial s_k} \right|_{\xi} = \left. \frac{\partial \vec{X}_{ny}}{\partial s_k} \right|_{\xi} \quad \text{για } k = 1, 2, 3 \quad (3.1.11)$$

Οπότε με τον παραπάνω συνδυασμό των (3.1.8)-(3.1.11) παίρνουμε:

$$d\vec{X}_{mz}|_{\psi} = \left. \frac{\partial \vec{X}_{mz}}{\partial s_k} \right|_{\psi} ds_k \quad \text{για } k=1,2,3 \quad (3.1.12)$$

$$d\vec{X}_{ny}|_{\xi} = \left. \frac{\partial \vec{X}_{ny}}{\partial s_k} \right|_{\xi} ds_k \quad \text{για } k=1,2,3 \quad (3.1.13)$$

Από την εξίσωση (2.8.58) έχουμε:

$$\left. \frac{\partial \vec{X}_{mz}}{\partial s_k} \right|_{\psi} = \mathbf{F}_{mn,zy} \Big|_{\psi\xi} \left. \frac{\partial \vec{X}_{ny}}{\partial s_k} \right|_{\xi} \quad (3.1.14)$$

Συνεπώς με άμεσο τρόπο προκύπτει από τις τρεις τελευταίες σχέσεις ότι:

$$d\vec{X}_{mz}|_{\psi} = \mathbf{F}_{mn,zy}|_{\psi\xi} d\vec{X}_{ny}|_{\xi} \quad (3.1.15)$$

Η εξίσωση (3.1.15) μας λέει πως διαφορικά στοιχεία που ανήκουν στην εμφυτευμένη πολλαπλότητα μετασχηματίζονται κατά τη μετάβαση  $C^n \rightarrow C^m$ . Η ποσότητα  $\mathbf{F}_{mn,zy}$  είναι γνωστή ως κλίση παραμόρφωσης (deformation gradient) και από την ανάπτυξη του μπορούμε να πούμε ότι είναι γραμμικός μετασχηματισμός. Έτσι μπορούμε να πούμε ότι η κλίση παραμόρφωσης είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός που μετασχηματίζει στοιχεία στους σχηματισμούς  $C^n$  και  $C^m$ . Η συλλογή όλων των γραμμικών στοιχείων  $d\vec{X}_{mz}$  σχηματίζει τον εφαπτόμενο χώρο της εμφυτευμένης πολλαπλότητας στον  $C^m$  σχηματισμό, ενώ το  $d\vec{X}_{ny}$  το αντίστοιχο για τον  $C^n$  σχηματισμό. Έτσι η κλίση παραμόρφωσης  $\mathbf{F}_{mn,zy}|_{\psi\xi}$  είναι μία γραμμική απεικόνιση μεταξύ δύο εφαπτόμενων χώρων.

Σε μία πιο «ελεύθερη» συμβολική γραφή μπορούμε να διατυπώσουμε την (3.1.15) ως:

$$d\vec{X}_{mz} = \mathbf{F}_{mn,zy}|_{\psi\xi} d\vec{X}_{ny} \quad (3.1.16)$$

Το ίδιο μπορούμε να κάνουμε για την (2.8.58):

$$\vec{X}_{mz} = \mathbf{F}_{mn,zy} \vec{X}_{ny} \quad (3.1.17)$$

με:

$$\vec{X}_{mz} = \vec{X}_{mz}(s_1, s_2, s_3) - \vec{X}_{mz(c)} + \vec{X}_{m(i)}$$

$$\vec{X}_{ny} = \vec{X}_{ny}(s_1, s_2, s_3) - \vec{X}_{ny(c)} + \vec{X}_{m(i)}$$

Οπότε μπορούμε να γράψουμε:

$$\vec{X}_{mz} = \mathbf{F}_{mn,zy} \vec{X}_{ny} - \mathbf{F}_{mn,zy} (\vec{X}_{n(i)} + \vec{X}_{mz(c)}) \quad (3.1.18)$$

Αν παραγωγίσουμε την (3.1.18) θα πάρουμε την (3.1.16). Άλλωστε από την φύση του δικτυώματος αλλά και την θεώρηση μεγάλων παραμορφώσεων που έχουμε κάνει το γεγονός ότι η κλίση παραμόρφωσης είναι σταθερή ποσότητα δεν μας προκαλεί έκπληξη.

Έτσι ολοκληρώνοντας την (3.1.16) παίρνουμε:

$$\vec{X}_{mz} = \mathbf{F}_{mn,zy} \vec{X}_{ny} + c \quad (3.1.19)$$

όπου  $c$  είναι ένα σταθερό διάνυσμα. Αν κάνουμε σύγκριση με την (3.1.18) θα δούμε ότι το  $c$  ισούται με:

$$-\mathbf{F}_{mn,zy} (\vec{X}_{n(i)} + \vec{X}_{ny(c)}) + (\vec{X}_{m(i)} + \vec{X}_{mz(c)})$$

Από την (3.1.18) βλέπουμε ότι η κλίση παραμόρφωσης εκτός του ότι συσχετίζει γραμμικά στοιχεία που ανήκουν σε διαφορετικούς εφαπτόμενους χώρους της εμφυτευμένης πολλαπλότητας συσχετίζει τα σχετικά διανύσματα θέσης  $\vec{X}_{mz}, \vec{X}_{ny}$ . Αυτά τα διανύσματα δεν ανήκουν στον εφαπτόμενο χώρο της εμφυτευμένης πολλαπλότητας, είναι όμως διανύσματα που ανήκουν στον τμήμα του  $\mathbb{R}^3$  που καταλαμβάνει η πολλαπλότητα. Αυτά τα σχετικά διανύσματα θέσης συνδέουν σημεία της εμφυτευμένης πολλαπλότητας δηλαδή το σημείο  $\vec{X}_{m(i)} + \vec{X}_{mz(c)}$  με κάποιο αυθαίρετο σημείο  $\vec{X}_{mz}(s_1, s_2, s_3)$  του  $C^m$ . Έτσι μπορούμε να πούμε ότι αυτά τα σχετικά διανύσματα θέσης είναι γραμμικά στοιχεία υπό την αφηρημένη έννοια που διατυπώθηκε παραπάνω, σύμφωνα με την οποία γραμμικά στοιχεία λογίζονται τα διανύσματα που ενώνουν δύο σημεία του  $\mathbb{R}^3$ . Για να ξεχωρίσουμε αυτή την «χαλαρή» σύλληψη γραμμικού στοιχείου από τον ορθό ορισμό που δόθηκε παραπάνω τα μεταχειριζόμαστε ως «υλικά γραμμικά στοιχεία». Αυτός ο όρος αναφέρεται σε διανύσματα που ενώνουν δύο σημεία που ανήκουν στο τμήμα του  $\mathbb{R}^3$  που καταλαμβάνεται από την πολλαπλότητα. Αυτονόητα τα διανύσματα αυτά επίσης ανήκουν στον  $\mathbb{R}^3$ .

Από αυτή τη συζήτηση βλέπουμε ότι σύμφωνα με την (3.1.18) η κλίση παραμόρφωσης  $F_{mn,zy}$  μετασχηματίζει τα υλικά γραμμικά στοιχεία από τον  $C^n \rightarrow C^m$  σχηματισμό. Ακόμη από την (3.1.15) βλέπουμε ότι η κλίση παραμόρφωσης  $F_{mn,zy}$  μετασχηματίζει γραμμικά στοιχεία που ανήκουν στον εφαπτόμενο χώρο της εμφυτευμένης πολλαπλότητας, δηλαδή εφαπτόμενα γραμμικά στοιχεία  $C^n \rightarrow C^m$ . Έτσι, για το δικτύωμα τα υλικά και εφαπτόμενα γραμμικά στοιχεία μετασχηματίζονται από τον ένα σχηματισμό στον άλλο μέσω της ίδιας απεικόνισης της  $F_{mn,zy}$ .

Αυτό σημαίνει ότι ο εφαπτόμενος χώρος του δικτυώματος συμπίπτει με το πραγματικό τμήμα του Ευκλείδειου χώρου που καταλαμβάνει η εμφυτευμένη πολλαπλότητα. Αυτό συμβαίνει γιατί οι κινηματικές του δικτυώματος είναι ουσιαστικά ομογενείς παραμορφώσεις δηλαδή ευθείες, γραμμικά τμήματα και επίπεδες επιφάνειες παραμένουν αναλλοίωτα κατά τη μετάβαση από τον ένα σχηματισμό στον άλλο (δηλαδή κατά τη μετάβαση του δικτυώματος στις διάφορες καταστάσεις παραμόρφωσης).

Αυτό βέβαια δεν παράγεται από τα υπόλοιπα, αλλά βασίζεται στις θεμελιώδεις υποθέσεις που έγιναν για το δικτύωμα ότι δηλαδή σε αυτό τον τύπο πολλαπλότητας της  $s_1$  υποπολλαπλότητα πάντα εμφυτεύεται ως ευθεία γραμμή ενώ η  $s_2$ - $s_3$  ως επίπεδη επιφάνεια. Έτσι οι θεμελιώδεις υποθέσεις για τις επιτρεπόμενες εμφυτεύσεις ωθούν την κίνηση του δικτυώματος ή αλλιώς την κινηματική του να συνιστάται σε ομοιόμορφες παραμορφώσεις. Η εξίσωση (3.1.19) μας δείχνει ότι πράγματι η κινηματική του δικτυώματος είναι ομοιόμορφες παραμορφώσεις εφόσον η σχέση μεταξύ των διανυσμάτων στα  $C^n$  και  $C^m$  είναι γραμμική. Η πλέον άμεση συνέπεια αυτής της διαπίστωσης είναι ότι τα υλικά και τα εφαπτόμενα γραμμικά στοιχεία ταυτίζονται.

Επίσης βλέπουμε ότι ένα υλικό γραμμικό στοιχείο δίδει το πραγματικό μήκος μεταξύ δύο σημείων του δικτυώματος. Έτσι η κλίση παραμόρφωσης μας λέει πως τα μήκη μεταξύ αλλάζουν από τον ένα σχηματισμό στον άλλο. Αλλά αυτή δεν είναι η μόνη πληροφορία που μας παρέχει. Ουσιαστικά περιλαμβάνει όλη την πληροφορία της κίνησης του δικτυώματος εφόσον μας λέει



πως υλικά στοιχεία μετασχηματίζονται κατά τη μετάβαση από τον ένα σχηματισμό στον άλλο. Ακόμη παίρνουμε αντίστοιχες πληροφορίες για στοιχεία εμβαδού και όγκου.

Ως τώρα έχουμε εξετάσει τους νόμους μετασχηματισμού των γραμμικών στοιχείων. Θα δούμε ότι και στα στοιχεία εμβαδού η κλίση παραμόρφωσης εμπλέκεται επίσης. Για να το κάνουμε αυτό θεωρούμε τρία γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία στον  $C^m$  σχηματισμό, τα  $d\vec{X}_{mz(p)}$  και  $d\vec{X}_{ny(p)}$  όπου ο δείκτης  $p=1,2,3$  χρησιμεύει για συμβολικούς λόγους όπως θα φανεί παρακάτω.

$$d\vec{X}_{mz(p)}|_X = \mathbf{F}_{mn,zy}|_X d\vec{X}_{ny(p)}|_X \quad (3.1.20)$$

Οποιοδήποτε εμβαδόν στον  $C^m$  σχηματισμό περιγράφεται ως:

$$d\vec{A}_{mz}|_X = d\vec{X}_{mz(1)}|_X \times d\vec{X}_{mz(2)}|_X \quad (3.1.21)$$

όμοια για τον  $C^n$  σχηματισμό:

$$d\vec{A}_{ny}|_X = d\vec{X}_{ny(1)}|_X \times d\vec{X}_{ny(2)}|_X \quad (3.1.22)$$

Ο μετασχηματισμός που συνδέει τα δύο στοιχεία εμβαδού είναι:

$$d\vec{A}_{mz}|_X = (\mathbf{F}_{mn,zy}|_X d\vec{X}_{ny(1)}|_X) \times (\mathbf{F}_{mn,zy}|_X d\vec{X}_{ny(2)}|_X) \quad (3.1.23)$$

Από γνωστές ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου:

$$d\vec{A}_{mz}|_X = |\mathbf{F}_{mn,zy}|_X |\mathbf{F}_{mn,zy}^{-T}|_X (d\vec{X}_{ny(1)}|_X) \times (d\vec{X}_{ny(2)}|_X) \rightarrow d\vec{A}_{mz}|_X = |\mathbf{F}_{mn,zy}|_X |\mathbf{F}_{mn,zy}^{-T}|_X (d\vec{X}_{ny(1)}|_X) d\vec{A}_{ny}|_X \quad (3.1.24)$$

Αν θελήσουμε να εκφράσουμε την παραπάνω σχέση σε όρους τυχαίων πλαισίων δεν έχουμε παρά να εφαρμόσουμε τους γνωστούς μας μετασχηματισμούς πλαισίων. Πράγματι:

$$d\vec{A}_{mz}|_\psi = \mathbf{R}_\psi d\vec{A}_{mz}|_\psi \quad (3.1.25)$$

$$d\vec{A}_{ny}|_\xi = \mathbf{R}_\xi d\vec{A}_{ny}|_\xi \quad (3.1.26)$$

Οπότε:

$$d\vec{A}_{mz}|_\psi = |\mathbf{F}_{mn,zy}|_X |\Phi_{mn,zy}^{-T}|_{\psi\xi} d\vec{A}_{ny}|_\xi \quad (3.1.27)$$

Όπου  $\Phi_{mn,zy}^{-T}|_{\psi\xi}$  όπως ορίζεται στη (2.8.73).

Τέλος, μένει να βρούμε το νόμο μετασχηματισμού των στοιχείων όγκου.

$$d\vec{V}_m|_X = (d\vec{X}_{mz(1)}, d\vec{X}_{mz(2)}, d\vec{X}_{mz(3)})|_X \quad (\text{μικτό γινόμενο}) \quad (3.1.28)$$

$$d\vec{V}_n|_X = (d\vec{X}_{ny(1)}, d\vec{X}_{ny(2)}, d\vec{X}_{ny(3)})|_X \quad (3.1.29)$$

Η σύνδεση των στοιχείων όγκου είναι καθαρά στο πεδίο της γραμμικής άλγεβρας.

Αποδεικνύεται ότι:

$$d\vec{V}_m = \left| F_{mn,zy}|_X \right| d\vec{V}_n \quad (3.1.30)$$

Η εξίσωση (3.1.30) μας λέει κάτι που γνωρίζαμε ήδη. Ο όγκος είναι βαθμωτό μέγεθος. Οπότε αναμένουμε η μεταβολή του κατά την  $C^n \rightarrow C^m$  μετάβαση να γίνεται κατά σταθερό τρόπο. Αυτό εξασφαλίζεται από το γεγονός ότι η ορίζουσα έχει σταθερή τιμή. Συνεπώς η (3.1.30) δεν ισχύει μόνο σε απειρωτικό επίπεδο αλλά για ολόκληρο δικτύωμα.

Κλείνοντας ας κάνουμε μία ανασκόπηση αυτού του σημαντικού κεφαλαίου. Έχουμε δείξει ότι η κλίση παραμόρφωσης του δικτυώματος περιλαμβάνει όλη την πληροφορία που είναι απαραίτητη για να περιγράψουμε πως γραμμικά, επιφανειακά και χωρικά στοιχεία μετασχηματίζονται κατά τη μετάβαση από τον ένα σχηματισμό στον άλλο. Ακόμη δείξαμε ότι για το δικτύωμα η κλίση παραμόρφωσης είναι σταθερή οπότε οι μετασχηματισμοί εφαρμόζονται όχι μόνο σε απειροστά στοιχεία αλλά στο δικτύωμα σαν οντότητα. Έτσι η κλίση παραμόρφωσης περιέχει όλη την απαραίτητη πληροφορία για την περιγραφή της κίνησης του δικτυώματος. Στα ακόλουθα θα θέλαμε να διερευνήσουμε περισσότερο την κίνηση του ώστε να καθορίσουμε την φύση της και σε τι συνιστάται. Γενικά όταν οπτικοποιούμε ένα δικτύωμα που μεταβάλλει από ένα δεδομένο σχηματισμό σε ένα άλλο, το φανταζόμαστε να κινείται στο χώρο, να στρέφεται και να μετατοπίζεται ως στερεό σώμα, ενώ συγχρόνως αλλάζει το μήκος του, το εμβαδόν του, τον όγκο του. Στα ακόλουθα θα διερευνήσουμε αν η κλίση παραμόρφωσης είναι αρκετή να μας παρέχει αυτή την πληροφορία αν δηλαδή μπορεί να περιγράψει μαθηματικά τα συστατικά της κίνησης που εμείς θεωρούμε ως κίνηση δικτυώματος.

### 3.2 Το θεώρημα της πολικής ανάλυσης

Για να μπορέσουμε να αποκαλύψουμε τους δομικούς λίθους της κίνησης του δικτυώματος όπως αυτή δίδεται από το deformation gradient θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα της πολικής ανάλυσης της γραμμικής άλγεβρας το οποίο ισχυρίζεται ότι:

Κάθε πραγματικός αντιστρέψιμος πίνακας  $A$  μπορεί να αναλυθεί στη μορφή  $A=RU=VR$  όπου  $R$  είναι ένας ορθογώνιος πίνακας,  $U, V$  είναι συμμετρικοί, θετικοί ορισμένοι πίνακες. Στις τρεις διαστάσεις δηλαδή στο σύνολο των  $3 \times 3$  πινάκων  $M_{3 \times 3}$  ένας ορθογώνιος πίνακας όπως ο  $R$  αναπαριστά στροφή και είναι ασφαλώς αντιστρέψιμος εφόσον μετασχηματίζει συστήματα συντεταγμένων. Ακόμη κάθε πίνακας της μορφής  $L_{mn,zy}$  έχει ορίζουσα  $\neq 0$  και μάλιστα είναι θετική αφού τα στοιχεία του διαγώνιου αυτού πίνακα είναι μεγέθη μεταβολής κλίμακας εξ'

ορισμού θετικά. Εφόσον αυτά τα μητρώα έχουν ορίζουσα  $\neq 0$  έπεται ότι αντιστρέφονται, δηλαδή το θεώρημα της πολικής ανάλυσης εφαρμόζεται για τον πίνακα της κλίσης παραμόρφωσης.

Ας παρουσιάσουμε τον αλγόριθμο της πολικής ανάλυσης.

Στη γενική περίπτωση ας θεωρήσουμε ένα πραγματικό αντιστρέψιμο πίνακα  $\mathbf{A}_{3 \times 3}$ . Ο  $\mathbf{A}$  γενικώς δεν είναι συμμετρικός οπότε σχηματίζουμε τον  $\mathbf{C} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$  που είναι, εφόσον  $\mathbf{C}^T = \mathbf{C}$ . Ακόμη από τη γραμμική άλγεβρα γνωρίζουμε ότι ένας πραγματικός συμμετρικός πίνακας  $\mathbf{C}$  είναι διαγωνοποιήσιμος δηλαδή όμοιος με έναν διαγώνιο πίνακα  $\mathbf{D}$  του οποίου τα διαγώνια στοιχεία είναι οι ιδιοτιμές του  $\mathbf{C}$ . Και εφόσον ο  $\mathbf{C}$  είναι συμμετρικός γνωρίζουμε ότι θα έχει τρία διακριτά ιδιοδιανύσματα τα οποία μπορούν να γίνουν ορθοκανονικά. Αν συμβολίσουμε με  $\mathbf{Q}$  τον πίνακα του οποίου οι στήλες είναι τα κανονικοποιημένα ιδιοδιανύσματα του  $\mathbf{C}$  τότε έχουμε:

$$\mathbf{D} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{Q} \quad (3.2.1)$$

Η (3.2.1) μας λέει ότι ο  $\mathbf{C}$  είναι όμοιος με έναν διαγώνιο πίνακα  $\mathbf{D}$ . Ακόμη εφόσον τα ιδιοδιανύσματα είναι ορθοκανονικά έχουμε ότι ο  $\mathbf{Q}$  είναι ορθογώνιος πίνακας δηλαδή  $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$  οπότε η (3.2.1) γράφεται:

$$\mathbf{D} = \mathbf{Q}^T \mathbf{C} \mathbf{Q} \quad (3.2.2)$$

Για να συνθέσουμε την πολική ανάλυση του  $\mathbf{A}$  ορίζουμε:

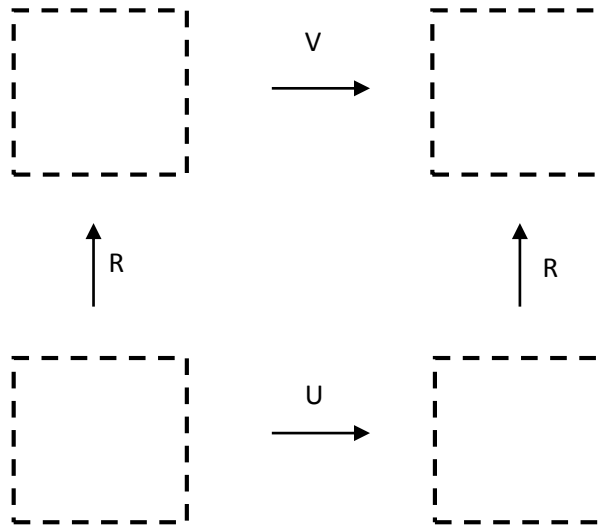
$$\mathbf{U} = \mathbf{Q} \mathbf{D}^{\frac{1}{2}} \mathbf{Q}^T \quad (3.2.3)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{A} \mathbf{Q} \mathbf{D}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{Q}^T \quad (3.2.4)$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^T \mathbf{R} &= \mathbf{Q} \mathbf{D}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{Q}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} \mathbf{D}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{Q}^T \rightarrow \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{Q} \mathbf{D}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{Q}^T \mathbf{C} \mathbf{Q} \mathbf{D}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{Q}^T \\ &\xrightarrow{(3.2.2)} \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{Q} \mathbf{D}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{D} \mathbf{D}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{Q}^T \rightarrow \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T = \mathbf{I} \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Δηλαδή αν ο  $\mathbf{R}$  είναι ορθογώνιος ο  $\mathbf{U}$  είναι συμμετρικός. Έτσι παίρνουμε ότι  $\mathbf{A} = \mathbf{R} \mathbf{U}$  από την (3.2.4) όπου ο  $\mathbf{U}$  δίδεται από την (3.2.3) και ο  $\mathbf{R}$  από την (3.2.4). Από το ίδιο θεώρημα έχουμε ότι:  $\mathbf{A} = \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{V} \mathbf{R}$  οπότε  $\mathbf{V} = \mathbf{R} \mathbf{U} \mathbf{R}^T$  (3.2.6)



Στο παραπάνω σχήμα φαίνεται ποιοτικά ο αλγόριθμος της πολικής ανάλυσης.

Με τις εξισώσεις (3.2.1)-(3.2.5) έχουμε έναν αλγόριθμο για τη σύνθεση της πολικής ανάλυσης για κάθε πραγματικό αντιστρέψιμο πίνακα. Αυτό που χρειαζόμαστε τώρα είναι να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $\mathbf{C}$ . Στην περίπτωση ενός ορθογώνιου μητρώου όπως τα  $\mathbf{R}_\psi$  για  $\psi = \mathbf{X}$  ή  $\mathbf{x}$  τα πράγματα είναι αρκετά απλά υπό την έννοια ότι  $\mathbf{U} = \mathbf{V} = \mathbf{I}$ . Τα πράγματα όμως περιπλέκονται όταν το μητρώο δεν είναι ορθογώνιο. Αυτό συμβαίνει όταν για την περιγραφή χρησιμοποιούνται μη ορθογώνια πλαίσια συντεταγμένων. Ο υπολογισμός των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων κρίνεται αρκετά δυσχερής καθώς συνιστά ιδιαίτερο αλγεβρικό λογιστικό φόρτο. Άλλωστε όπως θα δειχθεί στη συνέχεια για την διατύπωση των σχέσεων πεπερασμένης ελαστικότητας χρήσιμα θα μας φανούν πλαίσια τα οποία είναι ορθογώνια και κάποια πλαγιογώνια που συνδέονται με κάποιες ιδιαίτερες σχέσεις. Απουσία επομένως κάποιου εμφανούς διδακτισμού θα γίνει προσπάθεια παράλειψης κάποιων υπολογισμών ή και αποδείξεων θα γίνει όμως σχολαστική παρουσίαση των συμπερασμάτων ώστε να υπάρχει πλήρης κατανόηση του σπουδαίου αποτελέσματος που μας παρέχει το θεώρημα της πολικής ανάλυσης.

Στόχος μας είναι να αναλύσουμε τον πίνακα της κλίσης παραμόρφωσης ως εξής:

$$\mathbf{F}_{mn,zy}|_{\psi\xi} = \mathbf{R}_{mn,zy}|_{\psi\xi} \mathbf{U}_{mn,zy}|_{\psi\xi} = \mathbf{V}_{mn,zy}|_{\psi\xi} \mathbf{R}_{mn,zy}|_{\psi\xi} \quad (3.2.7)$$

Όπου ο πίνακας  $\mathbf{R}_{mn,zy}|_{\psi\xi}$  είναι ένας ορθογώνιος πίνακας που αναπαριστά στροφή σε τρεις διαστάσεις. Οι άλλοι δύο πίνακες είναι συμμετρικοί. Μπορούμε να γράψουμε ότι:

$$d\vec{\mathbf{X}}_{mz}|_{\psi} = \mathbf{R}_{mn,zy}|_{\psi\xi} \mathbf{U}_{mn,zy}|_{\psi\xi} d\vec{\mathbf{X}}_{ny}|_{\xi} = \mathbf{V}_{mn,zy}|_{\psi\xi} \mathbf{R}_{mn,zy}|_{\psi\xi} d\vec{\mathbf{X}}_{ny}|_{\xi} \quad (3.2.8)$$

Η (3.2.8) μας λέει πως ένα εφαπτόμενο γραμμικό στοιχείο στον  $C^n$  σχηματισμό το  $d\vec{X}_{ny}$  μετασχηματίζεται στο  $d\vec{X}_{mz}$  του  $C^m$  σχηματισμού. Αυτός ο μετασχηματισμός συνιστάται από δύο μέρη:

Είτε το  $d\vec{X}_{ny}$  πρώτα μεταβάλλει το μήκος του μέσω του συμμετρικού πίνακα  $U_{mn,zy}|_{\psi\xi}$  και ύστερα στρέφεται μέσω του  $R_{mn,zy}|_{\psi\xi}$  για να γίνει ίσο με  $d\vec{X}_{mz}$ . Είτε πρώτα στρέφεται μέσω του  $R_{mn,zy}|_{\psi\xi}$  και ύστερα αλλάζει το μήκος του από το  $V_{mn,zy}|_{\psi\xi}$  για να γίνει ίσο με το  $d\vec{X}_{mz}$  όπως προβλέπεται από το δεύτερο μέρος της (3.2.8).

Σημειώνεται ότι υπάρχουν τρία είδη τανυστών 2<sup>ης</sup> τάξης: Eulerian, Lagrangian, μικτού όπου μόνο ο  $C^m$  σχηματισμός, ο  $C^n$  σχηματισμός ή και οι δύο εμπλέκονται αντίστοιχα. Υπενθυμίζουμε ότι ο  $C^m$  είναι ο τωρινός σχηματισμός ενώ ο  $C^n$  ο σχηματισμός αναφοράς. Είναι πλέον αντιληπτό ότι οι δύο σχηματισμοί συνδέονται μεταξύ τους με ένα πίνακα στροφής. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο  $R_{mn,zy}|_{\psi\xi}$  είναι τανυστής δύο σημείων. Μπορούμε ακόμη να πούμε ότι το  $U_{mn,zy}|_{\psi\xi}$  είναι ένας Lagrangian τανυστής. Εφόσον δρα σε στραμμένα στοιχεία του  $C^m$  σχηματισμού.

Αξίζει να σχολιαστεί ότι η ονομασία Eulerian και Lagrangian είναι πολύ στοχευμένη. Βασίζεται στη περιγραφή της κίνησης όπου στην μεν Lagrangian η περιγραφή γίνεται στο σχηματισμό που βρισκόμαστε (που θεωρείται σχηματισμός αναφοράς) σύμφωνα με ένα σταθερό πλαίσιο χωρίς να μας ενδιαφέρει η κίνηση στοιχείων στο χώρο. Αντίθετα ισχύουν στην Eulerian περιγραφή της κίνησης όπου δεν υιοθετείται κάποιο σταθερό πλαίσιο αλλά κάθε φορά περιγράφουμε την κίνηση συναρτήσει της θέσης του στοιχείου.

Το τετράγωνο του διαφορικού μήκους των  $d\vec{X}_{mz}$  και  $d\vec{X}_{ny}$  αντίστοιχα δίδεται ως:

$$ds_n^2 = d\vec{X}_{ny}^T|_{\xi} d\vec{X}_{ny}|_{\xi} \quad (3.2.9)$$

$$ds_m^2 = d\vec{X}_{mz}^T|_{\psi} d\vec{X}_{mz}|_{\psi} \quad (3.2.10)$$

Μία κίνηση στερεού σώματος του δικτυώματος ορίζεται η κίνηση που αφήνει τις αποστάσεις μεταξύ των σημείων του δικτυώματος αναλλοίωτες ή αλλιώς η κίνηση δεν αλλάζει τα διαφορικά μήκη των υλικών γραμμικών στοιχείων. Εφόσον όμως στο δικτύωμα το υλικό γραμμικό στοιχείο ταυτίζεται με το εφαπτόμενο γραμμικό στοιχείο μπορούμε να πούμε ότι μία κίνηση στερεού σώματος είναι αυτή για την οποία  $ds_m^2 = ds_n^2$  (3.2.11)

Συνδυάζοντας τις (3.2.9) και (3.2.10) καθώς και το γεγονός ότι ο  $U_{mn,zy}|_{\psi\xi}$  είναι συμμετρικός:

$$ds_m^2 = d\vec{X}_{ny}|_{\xi}^T \mathbf{U}_{mn,zy}|_{\psi\xi} \mathbf{R}_{mn,zy}|_{\psi\xi}^T \mathbf{R}_{mn,zy}|_{\psi\xi} \mathbf{U}_{mn,zy}|_{\psi\xi} d\vec{X}_{ny}|_{\xi} \rightarrow ds_m^2 = d\vec{X}_{ny}|_{\xi}^T \mathbf{U}_{mn,zy}^2|_{\psi\xi} d\vec{X}_{ny}|_{\xi} \quad (3.2.12)$$

Έχουμε δείξει ότι ο εφαπτόμενος χώρος του δικτυώματος ταυτίζεται με το τμήμα του Ευκλείδειου Χώρου που καταλαμβάνεται από το ίδιο το δικτύωμα. Έτσι οποιαδήποτε συμπεριφορά ή σχέση που αναφέρεται στα εφαπτόμενα διανύσματα εφαρμόζεται στο ίδιο δικτύωμα στη φυσική του κατάσταση στον Ευκλείδειο Χώρο. Έτσι η συνθήκη  $\mathbf{U}_{mn,zy}|_{\psi\xi} = I$  μας λέει ότι έχουμε μία κίνηση στερεού σώματος για το δικτύωμα ενώ στην (3.2.8) ισχύει  $d\vec{X}_{mz}|_{\psi} = \mathbf{R}_{mn,zy}|_{\psi\xi} d\vec{X}_{ny}|_{\xi}$  ότι δηλαδή τα εφαπτόμενα υλικά γραμμικά στοιχεία στρέφονται και πιθανώς μετατοπίζονται ως στερεά σώματα μέσω του ορθογωνίου πίνακα στροφής  $\mathbf{R}_{mn,zy}|_{\psi\xi}$ .

Από αυτή τη συζήτηση είναι ξεκάθαρο ότι τα  $\mathbf{U}_{mn,zy}|_{\psi\xi}$  και  $\mathbf{V}_{mn,zy}|_{\psi\xi}$  περιγράφουν την παραμόρφωση του δικτυώματος δηλαδή δίνουν ένα μέτρο της απόκλισης της κίνησης του δικτυώματος από το να είναι στερεού σώματος.

Αυτός είναι ο λόγος που η πολική ανάλυση είναι τόσο σημαντική. Επειδή μας παρέχει τα συστατικά της κίνησης του δικτυώματος δηλαδή τη συνιστώσα της κίνησης στερεού σώματος και τη συνιστώσα της κίνησης που αποκλίνει από το να είναι στερεού σώματος αυτή δηλαδή που περιγράφει την αλλαγή σχήματος του δικτυώματος.

Άλλωστε σύμφωνα με όσα είπαμε στην αρχή της παραγράφου εφόσον το  $\mathbf{U}_{mn,zy}|_{\psi\xi}$  είναι ένας θετικά ορισμένος συμμετρικός πίνακας πάντα μπορεί να μετασχηματιστεί σε έναν διαγώνιο πίνακα με στοιχεία τις τρεις θετικές ιδιοτιμές του. Τότε η επιρροή του  $\mathbf{U}_{mn,zy}|_{\psi\xi}$  στο δικτύωμα είναι να το παραμορφώνει (όχι απλώς τα υλικά γραμμικά στοιχεία εφόσον το  $\mathbf{U}_{mn,zy}|_{\psi\xi}$  είναι σταθερό, ανεξάρτητο από το σημείο εφαρμογής στο δικτύωμα) κατά μήκος των τριών καθέτων διευθύνσεων που υποδεικνύεται από τα ιδιοδιανύσματά του.

Αυτός είναι ο λόγος που τα  $\mathbf{U}_{mn,zy}|_{\psi\xi}$  και  $\mathbf{V}_{mn,zy}|_{\psi\xi}$  καλούνται πίνακες αλλαγής κλίμακας διότι στη διαγώνιο μορφή τους μεταβάλλουν το μέγεθος οπουδήποτε διανύσματα όπου εφαρμόζονται. Η διαφορά μεταξύ τους είναι ότι το μεν πρώτο δρα σε άστρεπτα διανύσματα και λέγεται δεξιός πίνακας αλλαγής κλίμακας ενώ το δεύτερο σε στραμμένα διανύσματα και λέγεται αριστερός πίνακας αλλαγής κλίμακας.

Γενικώς ο υπολογισμός του ιδιοσυστήματος του μητρώου  $\mathbf{C}_{mn,zy}|_{\psi\xi} = \mathbf{F}_{mn,zy}^{-T}|_{\psi\xi} \mathbf{F}_{mn,zy}|_{\psi\xi}$  κρίνεται ιδιαίτερα δυσχερής ακόμα και αν τα πλαίσια  $\psi, \xi$  είναι ορθογώνια. Αν βέβαια δεν είναι ορθογώνια τότε κρίνεται επιτακτική η ανάγκη επινόησης ενός συστηματικού τρόπου εύρεσης των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων. Από τη γνώση μας στη γραμμική άλγεβρα ξέρουμε ότι με έναν κατάλληλο μετασχηματισμό στροφής κάθε μη

ορθογώνιο μητρώο δύναται να μετατραπεί σε ορθογώνιο, αλλά αναπόφευκτα αυτός ο τρόπος οδηγεί σε υπολογιστικό ναυάγιο.

Συνεπώς σε πιο μαθηματική ορολογία το ερώτημα που τίθεται είναι αν είναι δυνατόν το μητρώο  $\mathbf{U}_{mn,zy} \Big|_{\psi\xi}$  να είναι εγγενώς διαγώνιο χωρίς περαιτέρω μετασχηματισμό και αν ναι ποιες συνθήκες πρέπει να πληρούνται.

Παραλείποντας της άλγεβρα η απαραίτητη συνθήκη που πρέπει να ικανοποιείται είναι:

$$z_{m_{23}} = \frac{(\lambda_{mn,zy_2}^2 + \lambda_{mn,zy_3}^2) y_{n_{23}}}{2\lambda_{mn,zy_2}\lambda_{mn,zy_3}} \quad (3.2.13)$$

Το οποίο είναι ισοδύναμο με το να πούμε ότι:

$$\lambda_{mn,zy_2} = \lambda_{mn,zy_3} \text{ και } z_{m_{23}} = y_{n_{23}} \quad (3.2.14)$$

$$z_{m_{23}} = y_{n_{23}} = 0 \quad (3.2.15)$$

Όπου  $z_{m_{23}} = \hat{\mathbf{z}}_{m_2} \hat{\mathbf{z}}_{m_3} = \hat{\mathbf{y}}_{n_2} \hat{\mathbf{y}}_{n_3}$ . Η (3.2.14) μας λέει ότι τα διανύσματα που χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν τη διατομή του δικτυώματος στους  $C^m$ ,  $C^n$  σχηματίζουν ίδια γωνία μεταξύ τους.

Για τους στόχους της παρούσας εργασίας προκρίνουμε την περίπτωση (3.2.15) καθώς το θεώρημα της πολικής ανάλυσης απλοποιείται σημαντικά στην περίπτωση που χρησιμοποιήσουμε ορθογώνια πλαίσια. Πράγματι τα μόνα πλαίσια που ικανοποιούν την (3.2.15) είναι τα  $x_m$  και  $x_n$  (με την προϋπόθεση ότι ανήκουν σε διαφορετικούς σχηματισμούς).

Συγχρόνως σημειώνουμε ότι η διερεύνηση των σχέσεων (3.2.13), (3.2.14) θα οδηγήσουν σε παρόμοιες εκφράσεις οι οποίες είναι αρκετά δυσχερείς στον υπολογισμό τους και δεν προσφέρουν κάτι ουσιώδες στην ανάπτυξή μας.

Εφόσον δεχόμαστε ότι η (3.2.15) ισχύει μπορούμε να πούμε ότι:

$$\mathbf{U}_{mn,x} \Big|_{x_n} = \mathbf{D}_{mn,x}^{-\frac{1}{2}} \quad (3.2.16)$$

Όπου:

$$\mathbf{D}_{mn,x} = \text{diag}(\lambda_{mn}^2, \lambda_{mn_2}^2, \lambda_{mn_3}^2) \quad (3.2.17)$$

Δηλαδή έχουμε ότι:

$$\mathbf{U}_{mn,x} \Big|_{x_n} = \mathbf{D}_{mn,x}^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{\Lambda}_{mn,x} \quad (3.2.18)$$

Δηλαδή το μητρώο  $\mathbf{D}$  είναι διαγώνιο.

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα πολικής ανάλυσης:

$$\mathbf{F}_{mn,x}|_{x_m x_m} = \mathbf{F}_{mn,x}|_{x_m} \mathbf{\Lambda}_{mn,x} \mathbf{T}_n \mathbf{T}_n^T \quad (3.2.19)$$

$$\mathbf{F}_{mn,x}|_{x_n x_n} = \mathbf{F}_{mn,x}|_{x_n} \mathbf{T}_n^T \mathbf{T}_m^T \mathbf{\Lambda}_{mn,x} \quad (3.2.20)$$

και

$$\mathbf{F}_{mn,x}|_{x_m x_n} = \mathbf{F}_{mn,x}|_{x_n x_m} = \mathbf{\Lambda}_{mn,x} \quad (3.2.21)$$

(μεταφερόμενο μέρος του μετασχηματισμού)

και

$$\mathbf{F}_{mn,x}|_X = \mathbf{T}_m^T \mathbf{\Lambda}_{mn,x} \mathbf{T}_n \quad (3.2.22)$$

Όπου στις σχέσεις (3.2.19), (3.2.20) το F είναι τανυστής δύο σημείων απλώς αναλύεται στο ίδιο πλαίσιο το  $x_m$  και  $x_n$  αντίστοιχα (συγχώνευση πλαισίων).

Ακόμη:

$$\mathbf{F}_{mn,x}|_{x_m} = \mathbf{R}_{mn,x}|_{x_m} \mathbf{U}_{mn,x}|_{x_m} = \mathbf{V}_{mn,x}|_{x_m} \mathbf{R}_{mn,x}|_{x_m} \quad (3.2.23)$$

$$\mathbf{F}_{mn,x}|_{x_n} = \mathbf{R}_{mn,x}|_{x_n} \mathbf{U}_{mn,x}|_{x_n} = \mathbf{V}_{mn,x}|_{x_n} \mathbf{R}_{mn,x}|_{x_n} \quad (3.2.24)$$

Από όπου παίρνουμε εκφράσεις για το V:

$$\mathbf{V}_{mn,x}|_{x_m} = \mathbf{R}_{mn,x}|_{x_m} \mathbf{U}_{mn,x}|_{x_m} \mathbf{R}_{mn,x}^T|_{x_m} \quad (3.2.25)$$

$$\mathbf{V}_{mn,x}|_{x_n} = \mathbf{R}_{mn,x}|_{x_n} \mathbf{U}_{mn,x}|_{x_n} \mathbf{R}_{mn,x}^T|_{x_n} \quad (3.2.26)$$

Η παραπάνω εξίσωση μας δίνει μία αντιστοίχιση μεταξύ των Eulerian και Lagragian τανυστών όπου ο  $\mathbf{U}_{mn,x}|_{x_m}$  είναι ένας Lagragian τανυστής και ο  $\mathbf{V}_{mn,x}|_{x_n}$  μπορεί να θεωρηθεί ως το Eulerian συζυγές του  $\mathbf{U}_{mn,x}|_{x_m}$  και αντίστροφα ότι δηλαδή το  $\mathbf{U}_{mn,x}|_{x_m}$  είναι το Lagragian συζυγές του  $\mathbf{V}_{mn,x}|_{x_n}$ .

Ακόμη τα  $\mathbf{R}_{mn,x}|_{x_m}$  και  $\mathbf{R}_{mn,x}|_{x_n}$  είναι ορθογώνιοι πίνακες ενώ οι  $\mathbf{U}_{mn,x}|_{x_m}$ ,  $\mathbf{U}_{mn,x}|_{x_n}$ ,  $\mathbf{V}_{mn,x}|_{x_m}$ ,  $\mathbf{V}_{mn,x}|_{x_n}$  είναι συμμετρικοί θετικά ορισμένοι πίνακες. Από όσα διατυπώθηκαν στις προηγούμενες σχέσεις καθώς και από το ότι το  $\mathbf{\Lambda}_{mn,x}$  είναι επίσης συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας χωρίς να ξεχνάμε τη μοναδικότητα του θεωρήματος της πολικής ανάλυσης μπορούμε να πούμε ότι:

$$\mathbf{V}_{mn,x}|_{x_m} = \mathbf{U}_{mn,x}|_{x_m} = \mathbf{\Lambda}_{mn,x} \quad (3.2.27)$$

και



$$\mathbf{R}_{mn,x}|_{x_m} = \mathbf{R}_{mn,x}|_{x_n} = \mathbf{T}_m^T \mathbf{T}_n = \mathbf{R}_{mn,p} \quad (3.2.28)$$

Όμως για τον πίνακα  $\mathbf{R}_{mn,p}$  γνωρίζουμε ότι μετασχηματίζει τα πλαίσια συντεταγμένων. Ειδικά για το  $\mathbf{U}_{mn,x}$  έχουμε:

$$\mathbf{U}_{mn,x}|_{x_m} = \mathbf{R}_{mn,p}^T \mathbf{U}_{mn,x}|_{x_n} \mathbf{R}_{mn,p} \quad (3.2.29)$$

Αντίστοιχα για το  $\mathbf{V}_{mn,x}|_{x_m}$ :

$$\mathbf{V}_{mn,x}|_{x_m} = \mathbf{R}_{mn,p}^T \mathbf{V}_{mn,x}|_{x_n} \mathbf{R}_{mn,p} \quad (3.2.20)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (3.2.25)-(3.2.30) μπορούμε να οδηγηθούμε στο ακόλουθο συμπέρασμα:

Το  $\mathbf{U}_{mn,x}|_{x_m}$  είναι το Lagragian συζυγές του  $\mathbf{V}_{mn,x}|_{x_m}$  εκτός του ότι είναι Lagragian συζυγές του  $\mathbf{U}_{mn,x}|_{x_n}$ .

Αντίστοιχα το  $\mathbf{V}_{mn,x}|_{x_m}$  είναι το Eulerian συζυγές του  $\mathbf{U}_{mn,x}|_{x_m}$ . Εκτός του ότι είναι το Lagragian συζυγές του  $\mathbf{V}_{mn,x}|_{x_n}$ .

Ύστερα από αυτή τη συζήτηση βλέπουμε ότι τα  $z_m, \gamma_n$  πλαίσια λαμβάνονται ως τα  $x_m, x_n$  τότε ο συμβολισμός  $|_{x_m}, |_{x_n}$  μπορεί να ερμηνευθεί λέγοντας ότι το ένα λόγου χάρη το  $|_{x_n}$  είναι το Eulerian συζυγές του άλλου του  $|_{x_m}$  πάντα αναφερόμενοι στον τανυστή 2ας τάξης που εφαρμόζονται και αντίστροφα. Αυτό συμβαίνει διότι λόγω της (3.2.28) που μας λέει ότι ο πίνακας μετασχηματισμού που συσχετίζει τις συνιστώσες στα  $x_m$  και  $x_n$  πλαίσια είναι ο ίδιος πίνακας στροφής που εμφανίζεται στην πολική ανάλυση.

Οι εκφράσεις των διανυσμάτων θέσης του κεφαλαίου 2 τροποποιούνται καταλλήλως:

$$\vec{\mathbf{X}}_{mx}|_{x_m} = \mathbf{F}_{mn,x}|_{x_m} \vec{\mathbf{X}}_{nx}|_{x_m} \quad (3.2.31)$$

Όμοια:

$$\vec{\mathbf{X}}_{mx}|_{x_n} = \mathbf{F}_{mn,x}|_{x_n} \vec{\mathbf{X}}_{nx}|_{x_n} \quad (3.2.32)$$

Όπου τα  $\vec{\mathbf{F}}_{mn,x}|_{x_m}, \vec{\mathbf{F}}_{mn,x}|_{x_n}$  όπως ορίστηκαν στις (3.2.19), (3.2.20).

Γνωρίζουμε ότι ο  $\mathbf{R}_{mn,p}$  είναι ένας πίνακας του οποίου η επιρροή σε οποιοδήποτε διάνυσμα είναι να το στρέψει σε τρεις διευθύνσεις κατά την  $C^n \rightarrow C^m$  μετάβαση.

Ακόμη το  $\mathbf{A}_{mn,x}$  είναι ένα διαγώνιο μητρώο του οποίου η επιρροή σε οποιοδήποτε διάνυσμα είναι να του μεταβάλει την κλίμακα κατά μήκος τριών αμοιβαίως καθέτων

διευθύνσεων. Έτσι η (3.2.21) μας λέει πως οποιοδήποτε υλικό γραμμικό στοιχείο του δικτυώματος στον  $C^n$  σχηματισμό πρώτα στρέφεται για να βρεθεί στον  $C^m$  σχηματισμό και ύστερα μεταβάλλει την κλίμακά του. Όμοια η (3.2.32) μας λέει ότι μπορεί κανείς να περιγράψει την κινηματική του δικτυώματος με ανάποδη σειρά δηλαδή πρώτα να εφαρμόσει μία τρισσορθογώνια παραμόρφωση και μόνο τότε να εφαρμόσει μία στροφή στερεού σώματος στο ήδη παραμορφωμένο δικτύωμα.

Έχουμε φυσικά και το μεταφερόμενο μέρος του μετασχηματισμού που περιλαμβάνει μόνο αλλαγή στην κλίμακα των υλικών γραμμικών στοιχείων.

$$\vec{\mathbf{X}}_{mx}|_{x_m} = \mathbf{A}_{mn,x} \vec{\mathbf{X}}_{nx}|_{x_n} \quad (3.2.33)$$

Σαν επίλογος για αυτό το πολύ σημαντικό κεφάλαιο ας υπολογίσουμε την πολική ανάλυση του  $\mathbf{F}_{mn,x}|_X$  που είναι διαφωτιστική χάρη στην καθαρή ερμηνεία του τι σημαίνουν οι διάφορες ποσότητες όταν όλες αναφέρονται στο καθολικό  $X$  πλαίσιο.

Ορίζουμε:

$$\mathbf{C}_{mn,x}|_X = \mathbf{F}_{mn,x}|_X^T \mathbf{F}_{mn,x}|_X = \mathbf{T}_n^T \mathbf{A}_{mn,x} \mathbf{T}_m \mathbf{T}_m^T \mathbf{A}_{mn,x} \mathbf{T}_n \rightarrow \mathbf{C}_{mn,x}|_X = \mathbf{T}_n \mathbf{A}_{mn,x}^2 \mathbf{T}_n \quad (3.2.34)$$

Εφόσον το  $\mathbf{A}_{mn,x}^2$  είναι διαγώνιο μητρώο προκύπτει άμεσα από τον αλγόριθμο της πολικής ανάλυσης ότι τον ρόλο του  $Q$  στην (3.2.1) παίζει το  $\mathbf{T}_n^T$ .

Οπότε έχουμε:

$$\mathbf{U}_{mn,x}|_X = \mathbf{T}_n^T \mathbf{A}_{mn,x} \mathbf{T}_n \quad (3.2.35)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{mn,x}|_X &= \mathbf{F}_{mn,x}|_X \mathbf{T}_n^T \mathbf{A}_{mn,x}^{-1} \mathbf{T}_n \rightarrow \mathbf{R}_{mn,x}|_X = \mathbf{T}_m^T \mathbf{A}_{mn,x} \mathbf{T}_n \mathbf{T}_n^T \mathbf{A}_{mn,x}^{-1} \mathbf{T}_n \rightarrow \\ \mathbf{R}_{mn,x}|_X &= \mathbf{T}_m^T \mathbf{T}_n = \mathbf{R}_{mn,\alpha} \end{aligned} \quad (2.3.36)$$

Οπότε:

$$\mathbf{F}_{mn,x}|_X = \mathbf{R}_{mn,\alpha} \mathbf{U}_{mn,x}|_X = \mathbf{V}_{mn,x}|_X \mathbf{R}_{mn,\alpha} \quad (3.2.37)$$

και με  $\mathbf{U}_{mn,x}|_X$  όπως δίδεται στην (2.3.35) και:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{mn,x}|_X &= \mathbf{R}_{mn,\alpha} \mathbf{U}_{mn,x}|_X \mathbf{R}_{mn,\alpha}^T = \mathbf{T}_m^T \mathbf{T}_n \mathbf{T}_n^T \mathbf{A}_{mn,x} \mathbf{T}_n \mathbf{T}_n^T \mathbf{T}_m \rightarrow \\ \mathbf{V}_{mn,x}|_X &= \mathbf{T}_m^T \mathbf{A}_{mn,x} \mathbf{A}_{mn,x} \end{aligned} \quad (3.2.38)$$

Ακόμη:

$$\mathbf{U}_{mn,x}|_X = \mathbf{T}_n^T \mathbf{U}_{mn,x}|_{x_n} \mathbf{T}_n \quad (3.2.39)$$

$$\mathbf{V}_{mn,x}|_X = \mathbf{T}_m^T \mathbf{V}_{mn,x}|_{x_m} \mathbf{T}_m \quad (3.2.40)$$

Οι δύο τελευταίες σχέσεις είναι η σφραγίδα για τον τανυστικό χαρακτήρα των  $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ .

Μπορούμε να γενικεύσουμε τις παραπάνω εξισώσεις σε μία κομψή έκφραση που περιλαμβάνει μόνο περιπτώσεις ορθογώνιων πλαισίων:

$$\mathbf{F}_{mn,x}|_\xi = \mathbf{R}_{mn,x}|_\xi \mathbf{U}_{mn,x}|_\xi = \mathbf{V}_{mn,x}|_\xi \mathbf{R}_{mn,x}|_\xi \quad (3.2.41)$$

Όπου  $\xi$  μπορεί να είναι  $X, x_n, x_m$ . Αν  $\xi=X$  τότε  $\mathbf{R}_{mn,x}|_X = \mathbf{R}_{mn,\alpha}$  όπως δείχνουν οι (3.2.35), (3.2.38) οι τανυστές  $\mathbf{U}, \mathbf{V}$  δεν είναι σε διαγώνια μορφή. Αν  $\xi= x_m$  ή  $x_n$  τότε τα  $\mathbf{U}, \mathbf{V}$  είναι διαγώνια. Αυτό το τελευταίο θα μας φανεί ιδιαίτερα χρήσιμο στη συνέχεια.

## Κεφάλαιο 4

Το κεφάλαιο αυτό θα αφιερωθεί στην έννοια της τροπής καθώς και στους ρυθμούς αυτής (strain rates) όπου θα γίνει προσπάθεια εύρεσης καταλλήλων συναρτήσεων παραμόρφωσης για την περιγραφή της παραμορφωσιακής κατάστασης του δικτυώματος σε καταστάσεις μεγάλων παραμορφώσεων. Οι δομικοί λίθοι πάνω στους οποίους θα θεμελιωθεί η θεωρία μας είναι η πεπερασμένη, τρισδιάστατη ελαστικότητα συνοδευόμενη από τα απαραίτητα στοιχεία τανυστικού λογισμού. Αυτούς θα προσπαθήσουμε να εισάγουμε στην αρχή του κεφαλαίου.

### 4.1 Στοιχεία Τανυστικού λογισμού

Τα σημαντικά μεγέθη που θα μας απασχολήσουν όπως τροπή, τάση και οι ρυθμοί της είναι τανυστές. Ως τανυστές λογίζονται εκείνα τα μεγέθη που έχουν κάποια φυσική σημασία καθώς εκφράζουν κάποιο φυσικό μέγεθος και σχετίζουν τις εκφράσεις αυτού του μεγέθους όταν το σύστημα συντεταγμένων αλλάζει. Αν και κάπως δύσχρηστος ο τανυστής παρουσιάζει σαφές πλεονέκτημα διότι οδηγεί σε πιο συνεπτυγμένες και κομψές εκφράσεις οι οποίες μπορούν εύκολα να μετασχηματιστούν σε οποιαδήποτε συστήματα συντεταγμένων ανεξάρτητα σχηματισμού  $C$ .

Για την κομψή περιγραφή τους οι τανυστές χρησιμοποιούν δείκτες. Ανάλογα με το πλήθος και τη θέση των δεικτών στο σύμβολο του τανυστή διακρίνουμε τις εξής κυρίαρχες κατηγορίες τανυστών που θα μας απασχολήσουν.

- 1) Απουσία δείκτη: Μιλάμε για βαθμωτά μεγέθη όπως το έργο ή η τροπική ενέργεια παραμόρφωσης. Αυτά τα μεγέθη είναι ανεξάρτητα από την εκλογή του συστήματος συντεταγμένων και γι' αυτό ονομάζονται αναλλοίωτα

- 2) Ένας δείκτης  $i$ : Πρόκειται περί διανυσμάτων ή τανυστών 1<sup>ης</sup> τάξης και διακρίνονται σε συναλλοίωτα και ανταλλοίωτα. Ο τελευταίος χαρακτηρισμός αφορά τον τρόπο με τον οποίο μετασχηματίζονται σε αλλαγές συστημάτων συντεταγμένων. Θα συμβολίσουμε με  $A_i$  ένα συναλλοίωτο τανυστή 1<sup>ης</sup> τάξης και με  $A_j$  έναν ανταλλοίωτο τανυστή 2<sup>ας</sup> τάξης.
- 3) Ύπαρξη δύο δεικτών  $ij$ : Αφορά τανυστές 2<sup>ας</sup> τάξης. Οι δυνατοί τύποι είναι οι ακόλουθοι.
- $A_{ij}$  = διπλά συναλλοίωτος τανυστής 2<sup>ας</sup> τάξης  
 $A^{ij}$  = διπλά ανταλλοίωτος τανυστής 2<sup>ας</sup> τάξης  
 $A_j^i$  = μικτός τανυστής 2<sup>ας</sup> τάξης

Τέτοιοι τανυστές είναι ο τανυστής της τροπής και της τάσης. Ο χαρακτηρισμός συναλλοίωτο, ανταλλοίωτο θα διαλευκανθεί πλήρως στη συνέχεια.

Χρήσιμη για την ανάπτυξη μας θα είναι η αθροιστική σύμβαση. Αν δηλαδή σε ένα όρο ο ίδιος δείκτης (άνω ή κάτω) εμφανίζεται ακριβώς δύο φορές τότε ο όρος αυτός ισούται με το άθροισμα των όρων που προκύπτουν από τον αρχικό αν ο επαναλαμβανόμενος δείκτης πάρει όλες τις επιτρεπόμενες τιμές. Βέβαια η σύμβαση αυτή δύναται να ανασταλεί αν αποδειχθεί καταλλήλως. Προκύπτει έτσι το λογικό συμπέρασμα ότι κάθε δείκτης που υποδηλώνει άθροιση μπορεί να αντικατασταθεί από οποιοδήποτε άλλο γράμμα δίχως να αλλάξει η τιμή του αθροίσματος δηλαδή  $A^i B_i = A^j B_j$ . Τέτοιοι δείκτες ονομάζονται βοηθοί. Όλοι οι υπόλοιποι ονομάζονται ελεύθεροι.

Γενικεύοντας τα παραπάνω εύκολα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι αν ένα σύμβολο περιέχει αθροιστικούς δείκτες το σύστημα που αντιπροσωπεύει είναι της τάξεως του τύπου που δηλώνουν οι ελεύθεροι δείκτες. Αυτό έχει ως συνέπεια ένα σύμβολο που δεν έχει ελεύθερους δείκτες τότε είναι τανυστής μηδενικής τάξεως.

Για την περίπτωση του δικτυώματος θα μας χρειαστούν μόνο τα καρτεσιανά συστήματα συντεταγμένων. Θα αναπτυχθούν και τα καμπυλόγραμμα συστήματα βέβαια καθώς αποτελούν τη βάση για την περιγραφή πιο πολύπλοκων δομικών στοιχείων με καμπύλη επιφάνεια όπως μεμβράνες.

Δύο ειδικοί τανυστές είναι το δέλτα του Kronecker  $\delta_{ij}, \delta^{ij}, \delta_j^i$ :

$$\delta_{ij} = \delta^{ij} = \delta_j^i = 0 \quad \text{αν } i \neq j \quad (4.1.1.a)$$

$$\delta_{ij} = \delta^{ij} = \delta_j^i = 1 \quad \text{αν } i = j, j \neq \Sigma \quad (4.1.1.b)$$

Και τα μεταθετικά σύμβολα  $e_{ijk}, e^{ijk}$ :

$$e_{ijk}, e^{ijk} = 0 \quad \text{αν δύο από τους τρεις δείκτες είναι ίσοι} \quad (4.1.2.a)$$

$$e_{ijk}, e^{ijk} = +1 \quad \text{αν οι δείκτες είναι μία άρτια μετάθεση των 1,2,3} \quad (4.1.2.b)$$

$$e_{ijk}, e^{ijk} = -1 \quad \text{αν οι δείκτες είναι μία περιττή μετάθεση των 1,2,3} \quad (4.1.2.c)$$

Ας θεωρήσουμε τους δύο σχηματισμούς  $C^m, C^n$  κάθε ένας από τους οποίους περιγράφεται από τη βάση  $x_m, x_n$  αντίστοιχα που όπως έχουμε δει είναι ορθογώνια και ορθοκανονικά. Έχουμε δει ακόμα την ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε να μετασχηματίζει τις συντεταγμένες δηλαδή να ορίσουμε σχέση της μορφής:

$$x_m^i = x_m^i(x_n^1, x_n^2, x_n^3) \quad (4.1.3)$$

Εδώ βλέπουμε κάτι που ίσως προκαλεί σύγχυση. Έχουμε συνηθίσει τις συντεταγμένες στα πλαίσια να τις γράφουμε ως  $x_{m_i}$ . Στην πραγματικότητα όμως τα διανύσματα θέσης είναι ανταλλοίωτα διανύσματα γι' αυτό συνοδεύονται οι συντεταγμένες τους με ένα άνω δείκτη  $i$ . Αυτό όμως βρίσκει εφαρμογή στα καμπυλόγραμμα συστήματα και σ' όλη την προηγούμενη ανάπτυξη μας τα πλαίσια  $x_m, x_n$  ήταν ορθογώνια. Συνεπώς δεν υπήρχε η ανάγκη διάκρισης συναλλοίωτων και ανταλλοίωτων τανυστών καθώς αυτοί οι χαρακτηρισμοί εκφυλίζονται στο ίδιο πράγμα. Για λόγους πληρότητας η διάκριση αυτή θα τηρηθεί τουλάχιστον στα πλαίσια των παραγράφων 4.1, 4.2 και ύστερα θα υιοθετηθεί ο κλασικός συμβολισμός.

Επιστρέφουμε στην (4.1.3). όπως έχουμε δει ικανή και αναγκαία συνθήκη για να ισχύει η (4.1.3) είναι ο μη μηδενισμός της συναρτησιακής ορίζουσας.

$$\zeta = \left| \frac{\partial x_m^i}{\partial x_n^j} \right| \neq 0$$

Υπό αυτή τη συνθήκη προκύπτουν οι σχέσεις:

$$x_n^i = x_n^i(x_m^1, x_m^2, x_m^3) \quad (4.1.4)$$

Παραγωγίζοντας τις (4.1.4), (4.1.3) παίρνουμε:

$$dx_m^i = \frac{\partial x_m^i}{\partial x_n^j} dx_n^j = C_{m,j}^i dx_n^j \quad (4.1.5)$$

$$dx_n^i = \frac{\partial x_n^i}{\partial x_m^j} dx_m^j = C_{n,j}^i dx_m^j \quad (4.1.6)$$

Όπου οι συναρτήσεις  $C_{m,j}^i, C_{n,j}^i$  συνδέονται μεταξύ τους μέσω της:

$$C_{m,k}^i C_{n,j}^k = C_{n,k}^i C_{m,j}^k = \delta_{mn,j}^i \quad (4.1.7)$$

Όπου ως συνήθως τα  $m, n$  δείχνουν το σχηματισμό όπου ανήκει το πλαίσιο (χωρίς να περιέχουν μαθηματική σημασία). Είναι φανερό από τις παραπάνω εξισώσεις ότι ο μετασχηματισμός των διαφορικών είναι γραμμικός παρόλο που ο μετασχηματισμός των  $x_m^i, x_n^i$  εν γένει είναι μη γραμμικός.

Ας θεωρήσουμε το σύστημα των συναρτήσεων  $A(x_n^1, x_n^2, x_n^3)$ , οι συνιστώσες του οποίου είναι συναρτήσεις των συντεταγμένων  $x_n^i$ . Αν οι μεταβλητές  $x_n^i$  μετασχηματιστούν στις  $x_m^i$  χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (4.1.3) τότε μπορούμε να ορίσουμε νέες συνιστώσες του  $A$  οι οποίες είναι συναρτήσεις των  $x_m^i$ . Το σύστημα συναρτήσεων  $A$  είναι τανυστής όταν οι συνιστώσες του μπορούν να μετασχηματιστούν από τις συντεταγμένες  $x_n^i$  και  $x_m^i$  βάσει συγκεκριμένων νόμων.

Οι τρεις συναρτήσεις  $A^i(x_n^1, x_n^2, x_n^3)$ , είναι εξ' ορισμού συνιστώσες ενός ανταλλοίωτου τανυστή 1<sup>ης</sup> τάξεως ή ενός ανταλλοίωτου διανύσματος αν κατά το μετασχηματισμό μετασχηματίζονται σύμφωνα με τη σχέση:

$$A_m^i = \frac{\partial x_m^i}{\partial x_n^j} A_n^i \quad (4.1.8)$$

Βλέπουμε ότι τα διαφορικά  $dx_m^i$  αποτελούν συνιστώσες ανταλλοίωτου διανύσματος. Άρα στο εξής με τον χαρακτηρισμό ανταλλοίωτο θα εννοούμε ότι το διάνυσμα μετασχηματίζεται ακριβώς όπως οι συντεταγμένες.

Κατ' αντιστοιχία οι τρεις συναρτήσεις  $A_i$  είναι εξ' ορισμού συναρτήσεις ενός συναλλοίωτου τανυστή 1<sup>ης</sup> τάξης όταν μετασχηματίζονται σύμφωνα με το νόμο:

$$A_{mi} = \frac{\partial x_n^i}{\partial x_m^j} A_{ni} \quad (4.1.9)$$

Συναλλοίωτα επομένως θα λογίζονται εκείνα τα διανύσματα των οποίων ο νόμος μετασχηματισμού είναι ίδιος με αυτόν των διανυσμάτων βάσης (μοναδιαίων).

Κατ' αντιστοιχία οι εννέα συναρτήσεις  $A^{ij}$  είναι εξ' ορισμού συνιστώσες ενός ανταλλοίωτου τανυστή 2<sup>ας</sup> τάξεως αν:

$$A_m^{ij} = \frac{\partial x_m^i}{\partial x_n^k} \frac{\partial x_m^j}{\partial x_n^l} A_n^{kl} \quad (4.1.10)$$

Όμοια για τον ανταλλοίωτο τανυστή 2<sup>ας</sup> τάξεως:

$$A_{m,ij} = \frac{\partial x_n^k}{\partial x_m^i} \frac{\partial x_n^l}{\partial x_m^j} A_{n,kl} \quad (4.1.11)$$

Για τον μικτό 2<sup>ας</sup> τάξεως:

$$A_{m,j}^i = \frac{\partial x_m^i}{\partial x_n^k} \frac{\partial x_n^l}{\partial x_m^j} A_{n,l}^k \quad (4.1.12)$$

Είναι άξιο επισημάνσης ότι κάθε συνιστώσα τανυστή στο νέο σύστημα συντεταγμένων είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των συνιστωσών του τανυστή στο αρχικό. Έχουμε ήδη αναφέρει ότι λόγω του τρόπου που εμφυτεύεται το δικτύωμα στον  $\mathbb{R}^3$  (ότι δηλαδή γίνεται ένα ευθύγραμμο τμήμα) χρήσιμα είναι τα καρτεσιανά συστήματα. Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν καμπυλόγραμμες συντεταγμένες. Άλλωστε ο  $\mathbb{R}^3$  μπορεί να απεικονίζεται συναρτήσει των καμπυλόγραμμων συντεταγμένων  $x_m^i$  αντί των καρτεσιανών  $x_n^i$  παραμένει όμως ευκλείδειος.

Ισχύει ανάλογα με την (4.1.3)  $x_m^i = x_m^j(x_n^1, x_n^2, x_n^3)$  όπου οι συντεταγμένες  $x_n^i$  θα μπορούσαν να είναι στον  $C^n$  σχηματισμό οι δε  $x_m^i$  στον  $C^m$  σχηματισμό.

Στα προηγούμενα έχει γίνει αναφορά για τα μήκη των γραμμικών στοιχείων όπου δείξαμε ότι ο εφαπτόμενος χώρος του δικτύωματος και το ίδιο το δίκτυωμα (όταν έχει εμφυτευθεί στον  $\mathbb{R}^3$ ) ταυτίζονται. Αυτό έχει ως συνέπεια τα εφαπτόμενα γραμμικά στοιχεία και

τα υλικά γραμμικά στοιχεία να συμπίπτουν. Ας μελετήσουμε την έννοια της απόστασης από σκοπιά του τανυστικού λογισμού.

Η απόσταση μεταξύ δύο γειτονικών στοιχείων του Ευκλείδειου χώρου αποτελεί θεμελιώδες μέγεθος του χώρου και υπολογίζεται με τη βοήθεια του μετρικού τανυστή. Ας θεωρήσουμε ένα γραμμικό στοιχείο  $ds$  το οποίο έχει καρτεσιανές συνιστώσες τα τρία διαφορετικά  $dx_n^i$ . Είναι:

$$ds = \sum (dx_n^i)^2 = d_{ij} dx_n^i dx_n^j \quad (4.1.13)$$

Η τετραγωνική μορφή  $ds^2$  καλείται όπως έχουμε δει μετρική επαγόμενη από το  $C^n \rightarrow C^m$  σχηματισμό και αποτελεί αναλλοίωτη.

Η (4.1.13) αλλιώς γράφεται:

$$ds^2 = g_{ij} dx_m^i dx_m^j \quad (4.1.14)$$

όπου:

$$g_{ij} = \frac{\partial x_n^k}{\partial x_m^i} \frac{\partial x_n^l}{\partial x_m^j} \quad (4.1.15)$$

δηλαδή  $g_{ij}$  είναι συναλλοίωτος τανυστής 2<sup>ας</sup> τάξης και ονομάζεται θεμελιώδης μετρικός τανυστής του  $C^m$  σχηματισμού του  $\mathbb{R}^3$  ως προς τη  $x_m$  συντεταγμένη.

Η σπουδαία παρατήρηση που αξίζει να κάνουμε είναι ότι στην περίπτωση του δικτυώματος ο  $g_{ij}$  είναι σταθερός και ανεξάρτητος από το σημείο που εφαρμόζεται. Αυτό ισχύει επειδή τα πλαίσια  $x_m, x_n$  είναι ορθογώνια, επομένως στην περίπτωση αυτή που εξετάζουμε όλοι οι νόμοι μετασχηματισμού είναι γραμμική. Βλέπουμε επομένως ότι η θεώρηση που κάναμε στην παράγραφο 3.1 είναι συνεπής με τις αρχές του τανυστικού λογισμού και μάλιστα πολύ βολική καθώς η διατύπωση των συναρτήσεων παραμόρφωσης στη συνέχεια θα απλοποιηθεί σημαντικά.

## 4.2 Η τρισδιάστατη Ελαστικότητα στο δικτύωμα. Τροπή-Μέγεθος μέτρησης της παραμόρφωσης

Από την παράγραφο 3.2 έχουμε ότι  $\mathbf{F}_{mn,x}|_{\xi} = \mathbf{R}_{mn,x}|_{\xi} \mathbf{U}_{mn,x}|_{\xi} = \mathbf{V}_{mn,x}|_{\xi} \mathbf{R}_{mn,x}|_{\xi}$  όπου  $\xi$  μπορεί να είναι  $X$  ή  $x_m$  ή  $x_n$ . Έχουμε δει ότι το  $\mathbf{R}_{mn,x}|_{\xi}$  παριστάνει στροφή στερεού σώματος ενώ τα  $\mathbf{U}_{mn,x}|_{\xi}, \mathbf{V}_{mn,x}|_{\xi}$  την παραμόρφωση αυτού δηλαδή το κομμάτι της κίνησης που αποκλίνει από το να είναι στερεού σώματος και είναι υπεύθυνο για αλλαγές στις αποστάσεις μεταξύ των σημείων του δικτυώματος κατά τη μετάβαση από τον ένα σχηματισμό στον άλλο. Για να περιγράψουμε αυτή την παραμόρφωση χρειαζόμαστε ένα τρόπο να την μετρήσουμε. Αυτό το πετυχαίνουμε βλέποντας τον τρόπο που αλλάζουν οι αποστάσεις μεταξύ

των σημείων του δικτυώματος κατά τη μετάβαση από τον ένα σχηματισμό στον άλλο. Πράγματι ισχύει:

$$d\vec{X}_{m,x}|_{\xi} = \mathbf{R}_{mn,x}|_{\xi} \mathbf{U}_{mn,x}|_{\xi} d\vec{X}_{n,x}|_{\xi} = \mathbf{V}_{mn,x}|_{\xi} \mathbf{R}_{mn,x}|_{\xi} d\vec{X}_{n,x}|_{\xi} \quad (4.2.1)$$

Από όσα δείξαμε στην παράγραφο 3.1 και στην 4.1 μπορούμε να γράψουμε:

$$ds_n^2 = d\vec{X}_{n,x}|_{\xi}^T d\vec{X}_{n,x}|_{\xi} \quad (4.2.2.a)$$

$$ds_m^2 = d\vec{X}_{m,x}|_{\xi}^T d\vec{X}_{m,x}|_{\xi} \quad (4.2.2.b)$$

Η (4.2.2.b) μέσω της (4.2.1) γράφεται:

$$ds_m^2 = d\vec{X}_{n,x}|_{\xi}^T \mathbf{U}_{mn,x}^2|_{\xi} d\vec{X}_{n,x}|_{\xi} \quad (4.2.3)$$

Οπότε:

$$ds_m^2 - ds_n^2 = d\vec{X}_{n,x}|_{\xi}^T \left[ \mathbf{U}_{mn,x}^2|_{\xi} - I \right] d\vec{X}_{n,x}|_{\xi} \quad (4.2.4)$$

Από την (4.2.4) βλέπουμε ότι η διαφορά των τετραγώνων των διαφορικών μηκών μεταξύ απείρων κοντινών σημείων εξαφανίζεται κατά την  $C^n \rightarrow C^m$  μετάβαση όταν:

$$\mathbf{U}_{mn,x}|_{\xi} = \mathbf{V}_{mn,x}|_{\xi} = I$$

Συνεπώς το  $\mathbf{U}_{mn,x}^2|_{\xi} - I$  είναι μία έγκυρη ποσότητα μέτρησης της παραμόρφωσης του δικτυώματος. Ακόμη πρέπει να αναφέρουμε ότι εφαρμόζονται σε γραμμικά στοιχεία του  $C^n$  σχηματισμού οπότε είναι Lagrangian ποσότητα. Το ερώτημα που τίθεται είναι πώς μπορεί κανείς να εκφράσει την (4.2.4) σε μία μορφή ώστε μόνο τα διαφορικά του σχηματισμού που βρισκόμαστε να εμπλέκονται. Για να το κάνουμε αυτό γράφουμε:

$$d\vec{X}_{n,x}|_{\xi} = \mathbf{R}_{mn,x}^T|_{\xi} \mathbf{V}_{mn,x}^{-1}|_{\xi} d\vec{X}_{m,x}|_{\xi} \quad (4.2.5)$$

Ακόμη από την παράγραφο 3.2 έχουμε  $\mathbf{V}_{mn,x}|_{\xi} = \mathbf{R}_{mn,x}|_{\xi} \mathbf{V}_{mn,x}|_{\xi} \mathbf{R}_{mn,x}^T|_{\xi}$ . Είναι:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{mn,x}^2|_{\xi} &= \mathbf{V}_{mn,x}|_{\xi} \mathbf{V}_{mn,x}^T|_{\xi} = \\ \mathbf{R}_{mn,x}|_{\xi} \mathbf{U}_{mn,x}|_{\xi} \mathbf{R}_{mn,x}^T|_{\xi} \mathbf{R}_{mn,x}|_{\xi} \mathbf{U}_{mn,x}|_{\xi} \mathbf{R}_{mn,x}^T|_{\xi} &\rightarrow \mathbf{V}_{mn,x}^2|_{\xi} = \\ \mathbf{R}_{mn,x}|_{\xi} \mathbf{U}_{mn,x}^2|_{\xi} \mathbf{R}_{mn,x}^T|_{\xi} & \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

(λόγω του ότι το V είναι διαγώνιο)

Οπότε:

$$ds_m^2 - ds_n^2 = d\vec{X}_{m,x}|_{\xi}^T \left[ I - \mathbf{V}_{mn,x}^2|_{\xi} \right] d\vec{X}_{m,x}|_{\xi} \quad (4.2.7)$$



Κατ' αντιστοιχία με την (4.2.4) βλέπουμε ότι το  $I - \mathbf{V}_{mn,x}^2|_{\xi}$  δρα σε διαφορικά του  $C^m$  σχηματισμό οπότε είναι Eulerian ποσότητα και αποτελεί και αυτό ένα έγκυρο μέγεθος μέτρησης της παραμόρφωσης.

Από όλη αυτή τη συζήτηση βλέπουμε ότι μπορούμε να πάρουμε έγκυρα μεγέθη παραμόρφωσης αναθέτοντας κατάλληλες συναρτήσεις στα  $\mathbf{U}_{mn,x}|_{\xi}, \mathbf{V}_{mn,x}|_{\xi}$ . Γενικώς υπάρχουν άπειρες τέτοιες συναρτήσεις που θα ονομάσουμε  $f$  που δύναται να χρησιμοποιηθούν για την περιγραφή της παραμόρφωσης του δικτυώματος. Οπότε σε καθαρά συμβολική μορφή μπορούμε να εισάγουμε τα ακόλουθα τροπικά μεγέθη:

$$\mathbf{E}_{mn,x} = f(\mathbf{U}_{mn,x}) \quad (4.2.8)$$

$$\mathbf{E}_{mn,x} = f(\mathbf{V}_{mn,x}) \quad (4.2.9)$$

Όπου το  $\mathbf{E}_{mn,x}$  είναι ένα Lagrangian μέγεθος μέτρησης τροπής και το  $\mathbf{E}_{mn,x}$  είναι ένα Eulerian μέγεθος μέτρησης τροπής.

Είναι εμφανές ότι τα  $E, \mathcal{E}$  εξαρτώνται και αυτά από το πλαίσιο που χρησιμοποιείται για την περιγραφή. Σύμφωνα με την απαίτηση μας για την καταλληλότητα ενός μεγέθους τροπής απαιτούμε:

$$f(I) = 0 \quad (4.2.10)$$

ακόμη:

$$\left. \frac{df(\mathbf{U}_{mn})}{d\mathbf{U}_{mn}} \right|_{\mathbf{V}_{mn}=I} = \left. \frac{df(\mathbf{V}_{mn})}{d\mathbf{V}_{mn}} \right|_{\mathbf{V}_{mn}=I} = I \quad (4.2.11)$$

Και ότι  $f$  είναι λείες και γνησίως αύξουσες συναρτήσεις. Ο λόγος για τον οποίο απαιτούμε να ισχύει η (4.2.11) θα γίνει εμφανής στη συνέχεια όταν απαιτήσουμε όλα τα τροπικά μεγέθη να εκφυλιστούν στο γνωστό μας απειροστικό τανυστή τροπής όταν η παραμόρφωση είναι αρκούντως μικρές.

Παρ' όλα αυτά οι εκφράσεις για τα  $E, \mathcal{E}$  εξακολουθούν να είναι πολύ γενικές καθώς δεν έχουμε δώσει ακόμα κάποια ακριβή έκφραση. Το μόνο που έχουμε εξασφαλίσει είναι ότι θα ισχύουν οι (4.2.10), (4.2.11) και ότι τα μητρώα  $U, V$  θα είναι στη διαγώνιο μορφή τους εφόσον ισχύει η (3.2.27). γενικώς χρησιμοποιούνται σχέσεις όπως οι  $f(\mathbf{A}|_{\xi}) = \frac{1}{k}(\mathbf{A}^k|_{\xi} - I)$  όπου  $A$  είναι οποιοσδήποτε τανυστής  $2^{as}$  τάξης,  $\xi$  ένα πλαίσιο που χρησιμοποιείται για την αναπαράσταση ενώ  $k$  οποιοσδήποτε ακέραιος, θετικός, αρνητικός ή μηδέν. Χρονικά είχαν προηγηθεί άλλοι τανυστές τροπής τους οποίους θα προσπαθήσουμε να εισάγουμε στη συνέχεια πριν αναλύσουμε την περίπτωση Seth-Hill τροπών.

Ήδη από τα προηγούμενα σιωπηρά εισαγάγαμε τον Lagrangian τανυστή πεπερασμένης τροπής. Πράγματι από την (4.2.4) έχουμε ότι η ποσότητα  $\mathbf{U}_{mn,x}^2|_{\xi} - I$  αποτελεί τανυστή

τροπής τον Lagrangian τανυστή πεπερασμένης τροπής και μάλιστα  $\mathbf{U}_{mn,x}^2|_{\xi} - I = 2\mathbf{E}_{mn,x}|_{\xi}$ .  
Είναι προφανές ότι είναι ειδική περίπτωση του Seth για  $k=2$ .

Ανάλογη σχέση είναι δυνατόν να προκύψει χρησιμοποιώντας τον αριστερό τανυστή παραμόρφωσης τον  $\mathbf{V}_{mn,x}|_{\xi}$  και τότε παίρνουμε τον Eulerian τανυστή πεπερασμένης τροπής.

Βλέπουμε επομένως ότι όλα τα γνωστά μεγέθη τροπής που είναι γνωστά στη μηχανική συνεχούς μέσου περιλαμβάνονται στις παρακάτω εξισώσεις:

$$\mathbf{E}_{mn,x}|_{\xi} = \frac{1}{k} \left( \mathbf{U}_{mn,x}|_{\xi} - I \right) \quad k=-2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (4.2.13)$$

$$\mathbf{E}_{mn,x}|_{\xi} = \frac{1}{k} \left( \mathbf{V}_{mn,x}|_{\xi} - I \right) \quad k=-2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (4.2.14)$$

Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι να βρούμε τη σχέση που συνδέουν τα δύο μεγέθη τροπής  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{E}$  (για δεδομένο  $k$ ) όταν το καθένα εκφράζεται στο πλαίσιο του σχηματισμού όπου ανήκει(το  $x_m$  στο  $\mathcal{E}$ , το  $x_n$  στο  $\mathbf{E}$ ). Είναι:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{mn,x}|_{x_n} &= \frac{1}{k} \left( \mathbf{U}_{mn,x}|_{x_n} - I \right) = \frac{1}{k} \left( \mathbf{V}_{mn,x}|_{x_n} - I \right) \rightarrow \mathbf{E}_{mn,x}|_{x_n} = \mathbf{E}_{mn,x}|_{x_m} = \\ &= \frac{1}{k} \left( \mathbf{A}_{mn,x}|_{x_n} - I \right) \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

Όπου εκμεταλλευτήκαμε την (3.2.27). τώρα είναι φανερό πόσο χρήσιμο και σημαντικό είναι οι τανυστές  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$  να είναι διαγώνιοι.

Ακόμη:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{mn,x}|_{x_n} &= \frac{1}{k} \left( \mathbf{V}_{mn,x}|_{x_n} - I \right) = \mathbf{R}_{mn,x}|_{x_m} \frac{1}{k} \left( \mathbf{V}_{mn,x}|_{x_m} - I \right) \mathbf{R}_{mn,x}^T|_{x_m} \rightarrow \\ \mathbf{E}_{mn,x}|_{x_n} &= \mathbf{R}_{mn,p} \mathbf{E}_{mn,x}|_{x_m} \mathbf{R}_{mn,p}^T \end{aligned}$$

(όπου χρησιμοποίησαμε την 3.2.8)

$$\xrightarrow{(4.2.15)} \quad \text{ή} \quad \mathbf{E}_{mn,x}|_{x_n} = \mathbf{R}_{mn,p} \mathbf{E}_{mn,x}|_{x_m} \mathbf{R}_{mn,p}^T = \mathbf{R}_{mn,p} \mathbf{E}_{mn,x}|_{x_n} \mathbf{R}_{mn,p}^T \quad (4.2.16)$$

Όμοια βρίσκουμε:

$$\mathbf{E}_{mn,x}|_{x_n} = \mathbf{R}_{mn,p} \mathbf{E}_{mn,x}|_{x_m} \mathbf{R}_{mn,p}^T \quad (4.2.17)$$

$$\mathbf{E}_{mn,x}|_{x_m} = \mathbf{R}_{mn,p} \mathbf{E}_{mn,x}|_{x_m} \mathbf{R}_{mn,p}^T \quad (4.2.18)$$

Όπως στην (3.2.27) έτσι και στην (4.2.15) μπορούμε να πούμε ότι το Lagrangian συζυγές του  $\mathbf{E}_{mn,x}^{(k)} \Big|_{x_n}$  είναι ίσο με το Eulerian συζυγές του  $\mathbf{E}_{mn,x}^{(k)} \Big|_{x_m}$ .

Ακριβείς σχέσεις για τους Seth's τανυστές πεπερασμένης τροπής έχουμε:

$$\mathbf{E}_{mn,x}^{(k)} \Big|_{x_n} = \mathbf{E}_{mn,x}^{(k)} \Big|_{x_m} = \frac{1}{k} (\mathbf{A}_{mn,x}^{(k)} - I) = \frac{1}{k} \text{diag}(\lambda_{mn}^k - 1, \lambda_{mn_2}^k - 1, \lambda_{mn_3}^k - 1) \quad (4.2.19)$$

Όπου  $\lambda_{mn}$  είναι οι λόγοι επιμηκύνσεων στις τρεις αμοιβαίες κάθετες διευθύνσεις που ορίζουν τα διανύσματα βάσης πλαισίων  $\chi_m, \chi_n$ .

Αναπόφευκτα τίθεται το ερώτημα ποια είναι η φυσική σημασία των όρων της διαγωνίου των δύο τανυστών πεπερασμένης τροπής. Ο πρώτος όρος εξηγήθηκε παραπάνω και είναι ίσος με:

$$\lambda_{mn} = \frac{L_m^2}{L_n} = \frac{\sqrt{d\bar{\mathbf{X}}_m^T d\bar{\mathbf{X}}_m}}{\sqrt{d\bar{\mathbf{X}}_n^T d\bar{\mathbf{X}}_n}} \quad (4.2.20)$$

Κάτι τέτοιο όμως δεν συμβαίνει με τις δύο άλλες μη μηδενικές συνιστώσες. Αυτό που μπορούμε μέχρι στιγμής είναι ότι είναι συναρτήσεις του λόγου των νορμών των διανυσμάτων που χρησιμοποιήθηκαν για να περιγράψουν τη διατομή του δικτυώματος στον  $C^m$  σχηματισμό προς τα αντίστοιχα  $C^n$  σχηματισμό. Έτσι από μία έννοια η 2<sup>η</sup> και 3<sup>η</sup> τροπική συνιστώσα μας λέει πως ευθύγραμμα τμήματα στη διατομή του δικτυώματος προσανατολισμένη κατά μήκος δύο ορθογώνιων διευθύνσεων αλλάζουν από τον ένα σχηματισμό στον άλλο. Έτσι αυτές οι δύο τροπικές συνιστώσες περιγράφουν την παραμόρφωση της διατομής αλλά η φυσική τους σημασία δεν είναι όνομα εμφανής όπως στην περίπτωση της 1<sup>ης</sup> συνιστώσας.

Μία ακόμα σπουδαία συνέπεια της διαγώνιας μορφής του μητρώου  $\mathbf{A}_{mn,x}$  είναι ότι οι κινηματική του δικτυώματος μέσω της περιγραφής που παρέχουν τα  $\chi_m, \chi_n$  πλαίσια οδηγεί μόνο σε ορθές παραμορφώσεις δηλαδή σε μηδενικές διατμητικές τροπές. Αυτό συνεπάγεται ότι τα πλαίσια  $\chi_m, \chi_n$  ορίζουν τις διευθύνσεις των κυρίων αξόνων του δικτυώματος. Οπότε στην ουσία η κινηματική του δικτυώματος συνιστάται στην κίνηση του ως στερεό σώμα στο χώρο με μία αλλαγή στο σχήμα του που περιλαμβάνει αλλαγή στη διαμήκη ένταση μαζί με μία αλλαγή στο σχήμα της διατομής που είναι φυσικό αποτέλεσμα της αλλαγής της απόστασης των διατομών κατά μήκος δύο αμοιβαίων καθέτων διευθύνσεων.

### 4.3 Το δικτύωμα μέσα από χρονική περιγραφή.

Οι κινηματικές που περιγράφηκαν ως τώρα υποτίθενται ότι είναι χρονοανεξάρτητες υπό την έννοια ότι η μετάβαση από τον ένα σχηματισμό στον άλλο γίνεται στατικά. Θέλουμε να εισάγουμε την χρονοεξάρτηση στη διατύπωση μας οπότε υποθέτουμε ότι ο χρόνος μετράται από ένα σταθερό χρονοανεξάρτητο σχηματισμό αναφοράς. Ας θεωρήσουμε ένα τέτοιο χρονοανεξάρτητο σχηματισμό  $C^r$ . Θα θεωρούμε ότι ο χρόνος στο  $C^r$  είναι προγενέστερος του  $C^n$  με το  $C^n$  να είναι χρονοανεξάρτητο. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο με τον  $C^m$  όπου όλες οι ποσότητες που εμπλέκονται σε αυτόν είναι χρονοεξαρτημένες.

Ίσως να φανεί παράδοξη αυτή η εμπλοκή του χρόνου στη μελέτη μας. Ωστόσο στην ουσία αυτό που θέλουμε να μάθουμε είναι τι εννοούμε με τον όρο χρονική παράγωγος του τανυστή της κλίσης παραμόρφωσης ώστε αργότερα να μπορούμε να ορίσουμε μεγέθη σημαντικά όπως οι διάφοροι ρυθμοί τροπών (strain rates).

Εφόσον έχουμε πει όλα τα μεγέθη που εμπλέκονται στον  $C^m$  σχηματισμό είναι χρονοεξαρτημένα οι εξισώσεις της παραγράφου 3.2 οφείλουν να επαναδιατυπωθούν ώστε να συμπεριλάβουν αυτή την χρονοεξάρτηση. Σε έκφραση ελεύθερης βάσης πράγματι πλέον ισχύει:

$$\vec{\mathcal{X}}_{m,x}(t) = \mathbf{F}_{mn,x}(t) \vec{\mathcal{X}}_{n,x} \quad (4.3.1)$$

Συγχρόνως έχει σημασία το πλαίσιο στο οποίο δίδονται οι εκφράσεις των διανυσμάτων της (4.3.1). το  $\vec{\mathcal{X}}_{m,x}(t)$  είναι χρονοεξαρτώμενο οποιοδήποτε πλαίσιο κι αν χρησιμοποιηθεί. Το δε  $\vec{\mathcal{X}}_{n,x}$  είναι σταθερό ως προς το χρόνο αρκεί να χρησιμοποιείται το  $\mathbf{X}_n$  ή το  $\mathbf{X}$  πλαίσιο. Αυτό συμβαίνει γιατί το πλαίσιο  $\mathbf{X}_m$  εξαρτάται από το χρόνο.

Σε πλήρη ισοδυναμία με την (4.3.1) εμπλέκουμε το σχηματισμό  $C^r$ . Πράγματι σε ελεύθερη βάση γραφή έχουμε:

$$\vec{\mathcal{X}}_{m,x}(t) = \mathbf{F}_{mr,x}(t) \vec{\mathcal{X}}_{r,x} \quad (4.3.2)$$

$$\vec{\mathcal{X}}_{n,x} = \mathbf{F}_{nr,x} \vec{\mathcal{X}}_{r,x} \quad (4.3.3)$$

Προφανώς η (4.3.3) είναι πάντα χρονοεξάρτητη. Εφαρμόζουμε τώρα διαδοχικά τη μετάβαση  $C^r \rightarrow C^n \rightarrow C^m$ . Είναι:

$$\vec{\mathcal{X}}_{m,x}(t) = \mathbf{F}_{mn,x}(t) \mathbf{F}_{rn,x} \vec{\mathcal{X}}_{r,x} \quad (4.3.4)$$

Συγκρίνοντας την (4.3.4) με την (4.3.2) βλέπουμε ότι:

$$\mathbf{F}_{mr,x}(t) = \mathbf{F}_{mn,x}(t) \mathbf{F}_{rn,x} \quad (4.3.5)$$

Είμαστε σχεδόν έτοιμοι να υπολογίσουμε το  $\dot{\mathbf{F}}_{mn,x}(t)$ . Για να γίνει όμως αυτό πρέπει να βρούμε τις ταχύτητες των στοιχείων στο  $C^m$  σχηματισμό και ύστερα να δούμε πως αυτές κατανέμονται στο χώρο. Θα παρουσιάσουμε μερικές σχέσεις που θα μας είναι χρήσιμες για να το πετύχουμε αυτό. Είναι:

$$\mathbf{R}_{mn,p}(t) = \mathbf{T}_n \mathbf{T}_m^T(t) \quad (4.3.6)$$

Εφόσον ο  $\mathbf{T}_m(t)$  είναι ορθογώνιος πίνακας μπορούμε να γράψουμε:

$$\mathbf{T}_m(t) \mathbf{T}_m^T(t) = \mathbf{T}_m^T(t) \mathbf{T}_m(t) = \mathbf{I} \quad (4.3.7)$$

Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο:

$$\dot{\mathbf{T}}_m(t) \mathbf{T}_m^T(t) = -\mathbf{T}_m(t) \dot{\mathbf{T}}_m^T(t) = \mathbf{I} \quad (4.3.8)$$

ή

$$\mathbf{T}_m^T(t) \dot{\mathbf{T}}_m(t) = -\dot{\mathbf{T}}_m^T(t) \mathbf{T}_m(t) = \mathbf{I} \quad (4.3.9)$$

Ορίζουμε τον πίνακα:

$$\boldsymbol{\Omega}_m(t)|_X = \dot{\mathbf{T}}_m^T \mathbf{T}_m(t) \quad (4.3.10)$$

Για τον οποίο ισχύει σε κάθε πλαίσιο:

$$\boldsymbol{\Omega}_m(t) = \boldsymbol{\Omega}_m^T(t) \quad (4.3.11)$$

Δηλαδή είναι ένας αντισυμμετρικός τανυστής. Ισχύουν ακόμα γι' αυτόν:

$$\boldsymbol{\Omega}_m(t)|_{x_m} = \mathbf{T}_m(t) \boldsymbol{\Omega}_m(t)|_X \mathbf{T}_m^T(t) \quad (4.3.12)$$

$$\xrightarrow{(4.3.10)} \boldsymbol{\Omega}_m(t)|_{x_m} = \mathbf{T}_m(t) \dot{\mathbf{T}}_m^T \quad (4.3.13)$$

Ας βρούμε τη φυσική σημασία. Είναι γνωστό ότι σε οποιοδήποτε αντισυμμετρικό πίνακα μπορούμε να συσχετίσουμε ένα διάνυσμα με τέτοιο τρόπο ώστε η επιρροή του πίνακα σε οποιοδήποτε άλλο διάνυσμα  $\vec{\alpha}$  είναι ίδια με το να σχηματίζει κανείς το αριστερό εξωτερικό γινόμενο του διανύσματος  $\vec{\alpha}$  με το συσχετισμένο διάνυσμα.

Έστω  $\vec{\omega}_m(t)$  το συσχετισμένο διάνυσμα. Τότε μπορούμε να πούμε ότι:

$$\boldsymbol{\Omega}_m(t) \vec{\alpha} = \vec{\omega}_m(t) \times \vec{\alpha}$$

Αυτή η εξίσωση μπορεί να ερμηνευθεί ως ότι δίνουμε την ταχύτητα  $\vec{\alpha}$  όταν αυτό στρέφεται ε γωνιακή ταχύτητα  $\vec{\omega}_m(t)$ . Γι' αυτό το λόγο ο  $\boldsymbol{\Omega}_m(t)$  λέγεται τανυστής στροβιλισμού.

Εφαρμόζουμε τη συλλογιστική της (4.3.7) για το  $\mathbf{R}_{mn,p}$ . Είναι:

$$\mathbf{R}_{mn,p}^T(t) = \mathbf{R}_{mn,p}(t) \mathbf{R}_{mn,p}(t) = \mathbf{I} \quad (4.3.14)$$

Και έτσι:

$$\begin{aligned} & \mathbf{R}_{mn,p}^T(t) \mathbf{R}_{mn,p}(t) + \mathbf{R}_{mn,p}^T(t) \dot{\mathbf{R}}_{mn,p}(t) = \\ & = \dot{\mathbf{R}}_{mn,p}(t) \mathbf{R}_{mn,p}^T(t) + \mathbf{R}_{mn,p}(t) + \dot{\mathbf{R}}_{mn,p}^T(t) \rightarrow \end{aligned}$$

$$\mathbf{R}_{mn,p}^T(t) \dot{\mathbf{R}}_{mn,p}(t) = -\dot{\mathbf{R}}_{mn,p}^T(t) \mathbf{R}_{mn,p}(t) = \boldsymbol{\Omega}_m(t)|_{x_m(t)} \quad (4.3.15)$$

$$\dot{\mathbf{R}}_{mn,p}(t) \mathbf{R}_{mn,p}^T(t) = -\mathbf{R}_{mn,p}(t) \dot{\mathbf{R}}_{mn,p}^T(t) = \boldsymbol{\Omega}_m(t)|_{x_n} \quad (4.3.16)$$

Όπου εκμεταλλευτήκαμε το γεγονός ότι:

$$\boldsymbol{\Omega}_m(t)|_{x_n} = \mathbf{T}_n \boldsymbol{\Omega}_m(t)|_X \mathbf{T}_n^T \quad (4.3.17)$$

στην (4.3.16) όπως και τις εξισώσεις (4.3.8)-(4.3.10).

Οπότε μέχρι στιγμής έχουμε δει πως παραγωγίζεται το  $\mathbf{R}_{mn,p}(t)$ . Αυτό είναι ένα συστατικό του  $\mathbf{F}$ . Το δεύτερο είναι το  $\boldsymbol{\Lambda}$ . Αυτό θα διερευνήσουμε τώρα.

Από τον ορισμό του μπορούμε να γράψουμε:

$$\boldsymbol{\Lambda}_{mn,x}(t) = \boldsymbol{\Lambda}_m(t) \boldsymbol{\Lambda}_n \quad (4.3.18)$$

Όπου:

$$\boldsymbol{\Lambda}_m(t) = \text{diag}(\lambda_{m_1}(t), \lambda_{m_2}(t), \lambda_{m_3}(t)) \quad (4.3.19)$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_n^{-1}(t) = \text{diag}(\lambda_{n_1}^{-1}(t), \lambda_{n_2}^{-1}(t), \lambda_{n_3}^{-1}(t)) \quad (4.3.20)$$

Οπότε:

$$\dot{\boldsymbol{\Lambda}}_{mn,x}(t) = \dot{\boldsymbol{\Lambda}}_m(t) \boldsymbol{\Lambda}_n^{-1} \quad (4.3.21)$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_{mn,x}(t) = \boldsymbol{\Lambda}_n \boldsymbol{\Lambda}_m^{-1}(t) \quad (4.3.22)$$

Οπότε:

$$\dot{\boldsymbol{\Lambda}}_{mn,x}^{-1}(t) = -\boldsymbol{\Lambda}_n \boldsymbol{\Lambda}_m^{-2}(t) \dot{\boldsymbol{\Lambda}}_m(t) \quad (4.3.23)$$

Έτσι καταλήγουμε σε μία μορφή παρόμοια των (4.3.15), (4.3.16):

$$\dot{\boldsymbol{\Lambda}}_{mn,x}(t) \dot{\boldsymbol{\Lambda}}_{mn,x}^{-1}(t) = \dot{\boldsymbol{\Lambda}}_m(t) \boldsymbol{\Lambda}_m^{-1}(t) \quad (4.3.24)$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_{mn,x}(t) \dot{\boldsymbol{\Lambda}}_{mn,x}^{-1}(t) = -\dot{\boldsymbol{\Lambda}}_m(t) \boldsymbol{\Lambda}_m^{-1}(t) \quad (4.3.25)$$

Αυτό που θέλουμε τώρα να βρούμε είναι τις ταχύτητες των διαφόρων σημείων του δικτυώματος στον  $\mathbf{C}^m$  σχηματισμό, (αφού στον  $\mathbf{C}^n$  υποθέσαμε ότι είναι σταθερή). Η ταχύτητα ενός σημείου δίδεται από το ρυθμό που αλλάζει η θέση του. Αυτή ορίζεται ως:

$$\mathbf{V}_m(\mathbf{X}_{m,x,t}) = \frac{d \bar{\mathbf{X}}_{m,x}(t)}{dt} \quad (4.3.26)$$

Πρέπει να τονίσουμε ότι η παραπάνω σχέση εξαρτάται από το πλαίσιο που χρησιμοποιείται για την περιγραφή. Αυτό ήταν αναμενόμενο καθώς ένα διάνυσμα είναι σταθερό για ένα σύστημα αναφοράς δεν είναι σταθερό σε σχέση με ένα άλλο που στρέφεται σε σχέση με το αρχικό. Αυτό έχει εφαρμογή στην περίπτωση της ταχύτητας  $\mathbf{V}_{n,x}$  διότι ενώ προφανώς ισχύει:

$$\mathbf{V}_{n,x}|_{x_n} = 0 \quad (4.3.27)$$

εντούτοις  $\mathbf{V}_{n,x}|_{x_m} \neq 0$  και μάλιστα ισχύει:

$$\bar{\mathbf{X}}_{n,x}|_{x_n} = \mathbf{R}_{mn,p}(t) \bar{\mathbf{X}}_{n,x}|_{x_m(t)} \quad (4.3.28)$$

Παραγωγίζοντας την (4.3.28) ως προς  $t$  το αριστερό μέλος μηδενίζεται. Δηλαδή έχουμε μετά από πράξεις:

$$\mathbf{V}_{n,x}(\bar{\mathbf{X}}_{n,x,t})|_{x_m(t)} = \mathbf{R}_{mn,p}^T \dot{\mathbf{R}}_{mn,p}(t) \bar{\mathbf{X}}_{n,x}|_{x_m(t)} \quad (4.3.29)$$

Ή χρησιμοποιώντας τον τανυστή που βρήκαμε η (4.3.29) γράφεται:

$$\mathbf{V}_{n,x}(\bar{\mathbf{X}}_{n,x,t})|_{x_m(t)} = \boldsymbol{\Omega}_m(t)|_{x_m(t)} \bar{\mathbf{X}}_{n,x}|_{x_m(t)} \quad (4.3.30)$$

Απομένει ο υπολογισμός του  $\bar{\mathbf{V}}_{m,x}(\bar{\mathbf{X}}_{mx,t})$  στα πλαίσια  $x_m(t)$  και  $x_n$ . Έχει ήδη φανεί ότι:

$$\bar{\mathbf{V}}_{m,x}(\bar{\mathbf{X}}_{mx,t}) = \frac{d \bar{\mathbf{X}}_{m,x}(t)}{dt} \quad (4.3.31)$$

$$\bar{\mathbf{V}}_{n,x}(\bar{\mathbf{X}}_{nx,t}) = \frac{d \bar{\mathbf{X}}_{nx}(t)}{dt} \quad (4.3.32)$$

Οι παραπάνω εκφράσεις είναι γενικές και ισχύουν για κάθε πλαίσιο  $x_m(t)$  και  $x_n$ . Αυτό που αλλάζει είναι η τιμή της ταχύτητας.

Ακόμη η (4.3.32) ισχύει και για τα δύο πλαίσια  $x_m(t)$ ,  $x_n$ . Αντιστρέφοντας την έχουμε:

$$\bar{\mathbf{X}}_{nx} = \mathbf{F}_{mn,x}^{-1}(t) \bar{\mathbf{X}}_{mx}(t) \quad (4.3.33)$$

Παραγωγίζουμε την (4.3.32) ως προς  $t$  και μέσω των (4.3.32), (4.3.33) έχουμε:

$$\bar{\mathbf{V}}_{m,x}(\bar{\mathbf{X}}_{mx,t}) = \dot{\mathbf{F}}_{mn,x}(t) \bar{\mathbf{X}}_{nx} + \mathbf{F}_{mn,x}(t) \bar{\mathbf{V}}_{n,x}(\bar{\mathbf{X}}_{nx,t}) \quad (4.3.34)$$

Στην περίπτωση που επιλέξουμε για την περιγραφή το  $x_n$  πλαίσιο τότε ο δεύτερος όρος στο 2<sup>ο</sup> μέλος μηδενίζεται και μέσω της (4.3.33) γράφουμε:

$$\bar{\mathbf{V}}_{m,x}(\bar{\mathbf{X}}_{nx,t})|_{x_n} = \dot{\mathbf{F}}_{mn,x}(t)|_{x_n} \mathbf{F}_{mn,x}^{-1}(t)|_{x_n} \bar{\mathbf{X}}_{mx}(t)|_{x_n} \quad (4.3.35)$$

Στην περίπτωση που επιλέξουμε για την περιγραφή το  $x_m(t)$  πλαίσιο τότε μέσω της (4.3.33) και με αναγωγή όμοιων όρων έχουμε:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{V}}_{m,x}(\bar{\mathbf{X}}_{mx,t})|_{x_m(t)} = & \left[ \dot{\mathbf{F}}_{mn,x}(t)|_{x_m(t)} \mathbf{F}_{mn,x}^{-1}(t)|_{x_m(t)} - \right. \\ & \left. \mathbf{F}_{mn,x}(t)|_{x_m(t)} \boldsymbol{\Omega}_m(t)|_{x_m(t)} \mathbf{F}_{mn,x}^{-1}(t)|_{x_m(t)} \right] \bar{\mathbf{X}}_{mx}(t)|_{x_m(t)} \end{aligned} \quad (4.3.36)$$

Οι (4.3.36), (4.3.35) μας δίνουν τις εκφράσεις των διανυσμάτων της ταχύτητας στο  $C^m$  σχηματισμό. Κοιτώντας με προσοχή τη μορφή των δύο παραπάνω εξισώσεων βλέπουμε ότι οι ταχύτητες των σημείων του δικτυώματος είναι συναρτήσεις των αντιστοίχων διανυσμάτων θέσης. Με άλλα λόγια η ταχύτητα σε οποιοδήποτε σημείο του δικτυώματος εξαρτάται από το διάνυσμα θέσης δηλαδή υπάρχει μία χωρική εξάρτηση της ταχύτητας. Αυτό ορίζουμε ως κλίση ταχύτητας, δηλαδή είναι ο ρυθμός αλλαγής της ταχύτητας σύμφωνα με τη θέση.

Ορίζεται ως:

$$\mathbf{L}_{m,x}(\vec{\mathbf{X}}_{mx,t}) = \frac{\partial \mathbf{V}_{m,x}(\vec{\mathbf{X}}_{mx,t})}{\partial \vec{\mathbf{X}}_{mx(t)}} \quad (4.3.37)$$

Οπότε σύμφωνα με τις (4.3.32), (4.3.36) έχουμε:

$$\mathbf{L}_{m,x}(t)|_{x_n} = \dot{\mathbf{F}}_{mn,x}(t)|_{x_n} \mathbf{F}_{mn,x}^{-1}(t)|_{x_n} \quad (4.3.38)$$

και

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{m,x}(t)|_{x_m} &= \dot{\mathbf{F}}_{mn,x}(t)|_{x_m(t)} \mathbf{F}_{mn,x}^{-1}(t)|_{x_m(t)} - \\ &- \mathbf{F}_{mn,x}(t)|_{x_m(t)} \boldsymbol{\Omega}_m(t)|_{x_m(t)} \mathbf{F}_{mn,x}^{-1}(t)|_{x_m(t)} \end{aligned} \quad (4.3.39)$$

Γενικώς η κλίση ταυτότητας ορίζεται (σε έκφραση ανεξάρτητη πλαισίου) ως ο ρυθμός της κλίσης παραμόρφωσης επί το αντίστροφο της κλίσης παραμόρφωσης. Δηλαδή:

$$\mathbf{L}_{m,x}(t) = \dot{\mathbf{F}}_{mn,x}(t) \mathbf{F}_{mn,x}^{-1}(t) \quad (4.3.40)$$

Η απουσία του δείκτη  $n$  στην έκφραση  $\mathbf{L}_{m,x}(t)$  υπονοεί ότι η κλίση ταχύτητας είναι ανεξάρτητη από το σχηματισμό αναφοράς. Με όσα έχουμε πει είμαστε πλέον σε θέση να εκφράσουμε το ρυθμό της κλίσης παραμόρφωσης. Εφόσον ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\mathbf{F}_{mn,x}(t)|_{x_n} = \mathbf{R}_{mn,p}(t) \boldsymbol{\Lambda}_{mn,x}(t) \quad (4.3.41)$$

$$\mathbf{F}_{mn,x}(t)|_{x_m(t)} = \boldsymbol{\Lambda}_{mn,x}(t) \mathbf{R}_{mn,p}(t) \quad (4.3.42)$$

Αντιστρέφοντας:

$$\mathbf{F}_{mn,x}^{-1}(t)|_{x_n} = \boldsymbol{\Lambda}_{mn,x}^{-1}(t) \mathbf{R}_{mn,p}^T(t) \quad (4.3.43)$$

$$\mathbf{F}_{mn,x}^{-1}(t)|_{x_m(t)} = \mathbf{R}_{mn,p}^T(t) \boldsymbol{\Lambda}_{mn,x}^{-1}(t) \quad (4.3.44)$$

Οπότε:



$$\dot{\mathbf{F}}_{mn,x}(t)|_{x_n} = \dot{\mathbf{R}}_{mn,p}(t)\mathbf{A}_{mn,x}(t) + \mathbf{R}_{mn,p}(t)\dot{\mathbf{A}}_{mn,x}(t) \quad (4.3.45)$$

$$\dot{\mathbf{F}}_{mn,x}(t)|_{x_m(t)} = \dot{\mathbf{A}}_{mn,x}(t)\mathbf{R}_{mn,p}(t) + \mathbf{A}_{mn,x}(t)\dot{\mathbf{R}}_{mn,p}(t) \quad (4.3.46)$$

Σύμφωνα με όλα τα παραπάνω ο ρυθμός της κλίσης παραμόρφωσης δεν είναι τίποτα άλλο από το γινόμενο της κλίσης της ταχύτητας επί την κλίση παραμόρφωσης.

Δηλαδή ισχύει γενικά:

$$\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{L}\mathbf{F} \quad (4.3.47)$$

Αναλυτικές εκφράσεις για την κλίση ταχύτητας προκύπτουν:

$$\mathbf{L}_{mn,x}(t)|_{x_n} = \mathbf{\Omega}_m(t)|_{x_n} + \mathbf{R}_{mn,p}(t)\dot{\mathbf{A}}_m(t)\mathbf{A}_m^{-1}(t)\mathbf{R}_{mn,p}^T(t) \quad (4.3.48)$$

$$\mathbf{L}_{mn,x}(t)|_{x_m(t)} = \dot{\mathbf{A}}_m(t)\mathbf{A}_m^{-1}(t) \quad (4.3.49)$$

Σημειώνουμε ότι ένα διάνυσμα  $\vec{\alpha}$  λέγεται ότι είναι ανεξάρτητο πλαισίου αν μετασχηματίζεται σύμφωνα με τη σχέση  $\vec{\alpha}|_{x_n} = \mathbf{R}_{mn,p}(t)\vec{\alpha}|_{x_m}$ .

Ένας ταυστής δύο σημείων λέγεται ότι είναι ανεξάρτητος πλαισίου αν μετασχηματίζεται σύμφωνα με τη σχέση:  $\mathbf{A}|_{x_m} = \mathbf{R}_{mn,p}^T(t)\mathbf{A}|_{x_n}\mathbf{R}_{mn,p}(t)$ .

Η κλίση παραμόρφωσης είναι ένας τέτοιος ταυστής. Από τις σχέσεις (4.3.48), (4.3.49) βλέπουμε ότι η κλίση δεν είναι ένας τέτοιος ταυστής. Αυτό οφείλεται στην ύπαρξη του ταυστή στροβιλισμού στο άθροισμα. Είναι γνωστό ότι κάθε πίνακας  $\mathbf{A}$  δύναται να αναλυθεί στο άθροισμα ενός συμμετρικού πίνακα  $\mathbf{A}_s = \frac{1}{2}[\mathbf{A} + \mathbf{A}^T]$  και ενός αντισυμμετρικού πίνακα  $\mathbf{A}_a = \frac{1}{2}[\mathbf{A} - \mathbf{A}^T]$ .

Αυτό θα κάνουμε με την κλίση ταχύτητας. Έστω  $\mathbf{d}_m$  το συμμετρικό τμήμα του  $\mathbf{L}_m$  και  $\mathbf{w}_m$  το αντισυμμετρικό. Άρα στα πλαίσια  $x_m(t)$  και  $x_n$  θα ισχύει:

$$\mathbf{L}_{m,x}(t) = \mathbf{d}_{mx}(t) + \mathbf{w}_{mx}(t) \quad (4.3.50)$$

Όπου:

$$\mathbf{d}_{mx}(t) = \frac{1}{2}[\mathbf{L}_{m,x}(t) + \mathbf{L}_{mx}^T(t)] \quad (4.3.51)$$

$$\mathbf{w}_{mx}(t) = \frac{1}{2}[\mathbf{L}_{m,x}(t) - \mathbf{L}_{mx}^T(t)] \quad (4.3.52)$$

Γνωρίζουμε ότι ο πίνακας  $\mathbf{\Omega}_m(t)|_{x_n}$  είναι αντισυμμετρικός ενώ ο  $\mathbf{L}_{m,x}(t)|_{x_m(t)}$  είναι διαγώνιος το οποίο σημαίνει ότι  $\mathbf{R}_{mn,p}(t)\mathbf{L}_{m,x}(t)|_{x_m(t)}\mathbf{R}_{mn,p}^T(t)$  είναι συμμετρικός.

Οπότε έχουμε:

$$\mathbf{d}_{mx}(t)|_{x_m(t)} = \dot{\Lambda}_m(t)\Lambda_m^{-1}(t) \quad (4.3.53)$$

$$\mathbf{w}_{mx}(t)|_{x_m(t)} = 0 \quad (4.3.53)$$

Ενώ:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{mx}(t)|_{x_n} &= \mathbf{R}_{mn,p}(t)\dot{\Lambda}_m(t)\Lambda_m^{-1}(t)\mathbf{R}_{mn,p}^T(t) = \\ &\mathbf{R}_{mn,p}(t)\mathbf{d}_{mx}(t)|_{x_m(t)}\mathbf{R}_{mn,p}^T(t) \end{aligned} \quad (4.3.55)$$

με:

$$\mathbf{w}_{mx}(t)|_{x_n} = \boldsymbol{\Omega}_m(t)|_{x_n} \quad (4.3.56)$$

Πράγματι βλέπουμε ότι το  $\mathbf{d}_m$  είναι μία αντικειμενική ποσότητα. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο με το  $\mathbf{w}_m$ . Στη βιβλιογραφία ο  $\mathbf{d}_m$  είναι γνωστός ως ο τανυστής επιμήκυνσης ενώ ο  $\mathbf{w}_m$  ως ο τανυστής του spin. Για το πρώτο δεν είχαμε κάποια αμφιβολία καθώς από τη μορφή του είναι εμφανές ότι είναι συνάρτηση των επιμηκύνσεων και των μεταβολών τους. Για το δεύτερο είναι επίσης εμφανές από το γεγονός ότι ισούται με τον τανυστή του στροβιλισμού.

Ας δούμε τη φυσική σημασία του  $\mathbf{d}_m$  για να δούμε για ποιο λόγο ακριβώς ονομάζεται τανυστής επιμήκυνσης. Είναι:

$$\frac{d(ds_m^2)}{dt} = d\vec{\mathbf{X}}_{mx}^T d\vec{\mathbf{X}}_{mx} + d\vec{\mathbf{X}}_{mx}^T d\vec{\mathbf{X}}_{mx} \quad (4.3.57)$$

Φυσικά στην (4.3.57) υπάρχει χρονοεξάρτηση. Έχουμε δείξει στα προηγούμενα ότι:

$$d\vec{\mathbf{X}}_{mx} = \mathbf{L}_{m,x}(t)d\vec{\mathbf{X}}_{mx} \quad (4.3.58)$$

Οπότε τώρα συνδυάζοντας τις (4.3.57), (4.3.58) παίρνουμε:

$$\frac{d(ds_m^2)}{dt} = 2d\vec{\mathbf{X}}_{mx}^T \mathbf{d}_{mx} d\vec{\mathbf{X}}_{mx} \quad (4.3.59)$$

Βλέπουμε από την (4.3.59) ότι το  $\mathbf{d}_m$  είναι ένας Eulerian τανυστής εφόσον ενεργεί σε γραμμικά στοιχεία του τωρινού σχηματισμού και μάλιστα δίνει το διπλάσιο του ρυθμού παραμόρφωσης του τετραγώνου του διαφορικού μήκους των γραμμικών στοιχείων του  $C^m$  σχηματισμού, δηλαδή υπό μία έννοια μας δίνει το ρυθμό παραμόρφωσης του δικτυώματος.

Ύστερα από αυτή την συζήτηση είμαστε σε θέση να δώσουμε τους ρυθμούς των τροπών που παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο. Είναι λογικό επομένως εφόσον το  $\mathbf{d}_m$  δίνει τον ρυθμό παραμόρφωσης να θέλουμε να δούμε πως οι ρυθμοί τροπής σχετίζονται με αυτό. Λαμβάνοντας υπόψη τη χρονοεξάρτηση έχουμε ότι:

$$\dot{\mathbf{E}}_{mn,x}^{(k)}(t)|_{x_n} = \dot{\mathbf{E}}_{mn,x}^{(k)}(t)|_{x_m(t)} = \Lambda_{mn,x}^T(t)\Lambda_{mn,x}(t) \quad (4.3.60)$$

Όπου το 2<sup>ο</sup> μέλος αλλιώς γράφεται ως:

$$\Lambda_{mn,x}^{k-1}(t) \dot{\Lambda}_{mn,x}(t) = \Lambda_m^k \Lambda_n^{-1} [\dot{\Lambda}_m(t) \Lambda_m^{-1}] = \Lambda_m^k \Lambda_n^{-1} \mathbf{d}_{mx}(t)|_{x_m(t)} \quad (4.3.61)$$

Οπότε:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{mn,x}^{(k)}(t)|_{x_m(t)} = \Lambda_m^k \Lambda_n^{-1} \mathbf{d}_{mx}(t)|_{x_m(t)} \quad (4.3.62)$$

Και έτσι:

$$\dot{\mathbf{E}}_{mn,x}^{(k)}(t)|_{x_n} = \Lambda_m^k \Lambda_n^{-1} \mathbf{R}_{mn,p}^T(t) \mathbf{d}_{mx}(t)|_{x_n} \mathbf{R}_{mn,p}(t) \quad (4.3.63)$$

Είναι προφανές ότι το  $\mathbf{R}_{mn,p}^T(t) \mathbf{d}_{mx}(t)|_{x_n} \mathbf{R}_{mn,p}(t)$  είναι το Lagrangian συζυγές του  $\mathbf{d}_{mx}(t)|_{x_n}$ . Έτσι είναι βολικό να το ορίσουμε μέσω ενός συμβόλου.

Ορίζουμε:

$$\mathbf{D}_{m,x}(t) = \mathbf{R}_{mn,p}^T(t) \mathbf{d}_{mx}(t) \mathbf{R}_{mn,p}(t) \quad (4.3.64)$$

όπου το πλαίσιο που χρησιμοποιείται για την περιγραφή είναι είτε το  $x_m(t)$  είτε το  $x_n$ . Βλέπουμε ότι εφόσον το  $\mathbf{d}_m$  είναι αντικειμενική ποσότητα το ίδιο ισχύει και για το  $\mathbf{D}_m$ .

Βλέπουμε ότι από τις (4.3.62), (4.3.63) ότι ο τρόπος με τον οποίο οι ρυθμοί τροπής εξαρτώνται από τον σχηματισμό αναφοράς  $C^n$ . Η ύπαρξη του  $\Lambda_n$  στην (4.3.62) μας λέει ότι οι ρυθμοί των Eulerian τροπών εξαρτώνται από το σχηματισμό αναφοράς μόνο μέσω ενός πίνακα επιμήκυνσης που λαμβάνεται στη διαγώνια μορφή του. Έτσι μπορούμε να πούμε ότι αυτό ο πίνακας λειτουργεί ως παράμετρος κλίμακας. Από την άλλη η παρουσία του  $\mathbf{R}_{mn,p}(t)$  επιπλέον του  $\Lambda_n$  στην (4.3.63) υποδεικνύει ότι αυτοί οι ρυθμοί των Lagrangian τροπών σχετίζονται με τον σχηματισμό αναφοράς  $C^n$  όχι μόνο μέσω μίας παραμέτρου κλίμακας αλλά και μέσω στροφής.

Ας πάρουμε την τετριμμένη περίπτωση όπου οι δύο σχηματισμοί ταυτίζονται. Τότε αναμενόμενα οι τροπές μηδενίζονται. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο με τους ρυθμούς τους. Ισχύει:

$$\mathbf{E}_{mn,x}^{(k)}(t)|_{x_m(t)} = \boldsymbol{\epsilon}_{mn,x}^{(k)}(t)|_{x_m(t)} = 0 \quad (4.3.65)$$

$$\dot{\mathbf{E}}_{mn,x}^{(k)}(t)|_{x_m(t)} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{mn,x}^{(k)}(t)|_{x_m(t)} = \mathbf{D}_{m,x}(t)|_{x_m(t)} = \mathbf{d}_{mx}(t)|_{x_m(t)} \quad (4.3.66)$$

Συμπεραίνουμε επομένως ότι όταν ισχύει  $C^m \equiv C^n$  τότε η τροπή εξαφανίζεται εφόσον δεν υπάρχει παραμόρφωση στον τωρινό σχηματισμό σχετική με τον εαυτό του. Για τους ρυθμούς τους παρατηρούμε ότι δεν εξαφανίζονται αλλά είναι ίσοι με τον ρυθμό παραμόρφωσης. Και στις δύο περιπτώσεις τα αντίστοιχα Eulerian και Lagrangian μεγέθη ταυτίζονται.

Το ερώτημα που τίθεται τώρα είναι κατά πόσο οι Eulerian και Lagrangian ρυθμοί τροπής είναι αντικειμενικές ποσότητες. Διερευνάται δηλαδή η εξάρτησή τους από το πλαίσιο που

χρησιμοποιείται. Παίρνουμε την περίπτωση όπου  $k=0$  στις Eulerian και Lagrangian τροπές που στη βιβλιογραφία συναντώνται ως Λογαριθμική Eulerian και Lagrangian τροπή αντίστοιχα. Οι ρυθμοί τους ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{mn,x}^{(0)} \Big|_{x_m(t)} = \mathbf{d}_{mx} \Big|_{x_m(t)} \quad (4.3.67)$$

$$\dot{\mathbf{E}}_{mn,x}^{(0)} \Big|_{x_m(t)} = \mathbf{D}_{m,x} \Big|_{x_n} \quad (4.3.68)$$

Από τις (4.3.64) και (4.3.45) έχουμε ότι:

$$\mathbf{D}_{m,x} \Big|_{x_n} = \mathbf{d}_{mx} \Big|_{x_m(t)} \quad (4.3.69)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις μας λένε ότι όταν χρησιμοποιείται το  $x_m(t)$  πλαίσιο για την παραμέτρηση τότε ο υλικός ρυθμός της Eulerian λογαριθμικής τροπής ταυτίζεται με τον Eulerian ρυθμό του τανυστή παραμόρφωσης. Όμοια όταν χρησιμοποιείται το  $x_m$  πλαίσιο τότε είναι ο υλικός ρυθμός της Lagrangian λογαριθμικής τροπής που ταυτίζεται με τον Lagrangian ρυθμό του τανυστή παραμόρφωσης.

Το ερώτημα που τίθεται τώρα είναι αν μπορούμε να βρούμε σχέσεις όπως οι (4.3.67) και (4.3.68) όπου στις αναπαραστάσεις των Eulerian λογαριθμικών ρυθμών τροπής χρησιμοποιείται το  $x_n$  πλαίσιο και στις εκφράσεις των Lagrangian λογαριθμικών ρυθμών τροπής χρησιμοποιείται το  $x_m(t)$  πλαίσιο. Το ερώτημα αυτό τίθεται με φυσικό τρόπο αφού οι υλικοί ρυθμοί τροπών δεν είναι αντικειμενικές ποσότητες διότι αν ήταν τότε οι (4.3.67), (4.3.68) θα ίσχυαν ανεξάρτητα από το πλαίσιο που χρησιμοποιείται για την παραμέτρηση. Από την προηγούμενη παράγραφο έχουμε ότι  $\boldsymbol{\epsilon}_{mn,x}^{(k)}(t) \Big|_{x_n} = \mathbf{R}_{mn,p} \boldsymbol{\epsilon}_{mn,x}^{(k)} \Big|_{x_m} \mathbf{R}_{mn,p}^T$ . Λαμβάνοντας υπόψη τη χρονοεξάρτηση παραγωγίζουμε ως προς το χρόνο και έχουμε:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{mn,x}^{(k)}(t) \Big|_{x_n} &= \mathbf{R}_{mn,p}(t) \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{mn,x}^{(k)}(t) \Big|_{x_m(t)} \mathbf{R}_{mn,p}^T(t) + \\ &+ \dot{\mathbf{R}}_{mn,p}(t) \boldsymbol{\epsilon}_{mn,x}^{(k)}(t) \Big|_{x_m(t)} \mathbf{R}_{mn,p}^T(t) + \mathbf{R}_{mn,p}(t) \boldsymbol{\epsilon}_{mn,x}^{(k)}(t) \Big|_{x_m} \dot{\mathbf{R}}_{mn,p}^T(t) \end{aligned} \quad (4.3.70)$$

Όμως έχουμε ακόμα ότι:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{mn,x}^{(k)}(t) \Big|_{x_m(t)} = \mathbf{R}_{mn,p}^T(t) \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{mn,x}^{(k)}(t) \Big|_{x_n} \mathbf{R}_{mn,p}$$

Άρα συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{mn,x}^{(k)}(t) \Big|_{x_n} &= \mathbf{R}_{mn,p}(t) \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{mn,x}^{(k)}(t) \Big|_{x_m(t)} \mathbf{R}_{mn,p}^T(t) + \boldsymbol{\Omega}_m(t) \Big|_{x_n} \boldsymbol{\epsilon}_{mn,x}^{(k)}(t) \Big|_{x_n} - \\ &- \boldsymbol{\epsilon}_{mn,x}^{(k)}(t) \Big|_{x_n} \boldsymbol{\Omega}_m(t) \Big|_{x_n} \end{aligned} \quad (4.3.71)$$

$$\begin{aligned}
& \dot{\boldsymbol{\xi}}_{mn,x}^{(k)}(t) \Big|_{x_m(t)} \\
&= \mathbf{R}_{mn,p}^T(t) \dot{\boldsymbol{\xi}}_{mn,x}^{(k)}(t) \Big|_{x_n} \mathbf{R}_{mn,p}(t) + \boldsymbol{\varepsilon}_{mn,x}^{(k)}(t) \Big|_{x_n} \boldsymbol{\Omega}_m(t) \Big|_{x_m(t)} \\
&- \boldsymbol{\Omega}_m(t) \Big|_{x_m(t)} \boldsymbol{\varepsilon}_{mn,x}^{(k)}(t) \Big|_{x_n}
\end{aligned} \tag{4.3.72}$$

Είναι προφανές ότι οι παραπάνω ρυθμοί δεν είναι αντικειμενικοί. Ανάλογες σχέσεις είναι δυνατόν να προκύψουν για το E. Αποδεικνύεται ότι ούτε αυτό είναι αντικειμενικό (υπάρχει και στις δύο περιπτώσεις το  $\Omega$ ). Εμπνευσμένοι από τις παραπάνω σχέσεις εισάγουμε ένα νέο συστρεφόμενο ρυθμό γνωστό ως Jaumann's ρυθμό:

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}_{mn,x}^{(k)}(t) = \dot{\boldsymbol{\xi}}_{mn,x}^{(k)}(t) + \boldsymbol{\varepsilon}_{mn,x}^{(k)}(t) \mathbf{w}_{mx}(t) - \mathbf{w}_{mx}(t) \boldsymbol{\varepsilon}_{mn,x}^{(k)}(t) \tag{4.3.73}$$

Αυτός ο ρυθμός είναι ίδιος ανεξάρτητα από το πλαίσιο που χρησιμοποιείται, που μπορεί να είναι το  $x_m(t)$  ή το  $x_n$ . Αν διαλέξουμε το  $x_n$  τότε ο Jaumann ρυθμός ταυτίζεται με τον γνωστό Green-Naghdi ρυθμό ενώ αν διαλέξουμε το  $x_m(t)$  ταυτίζεται με τον υλικό ρυθμό. Δηλαδή ικανοποιούνται αντίστοιχα οι (4.3.54) και η (4.3.56).

Γενικώς μέσω αυτού του ρυθμού μπορούμε να πούμε ότι για το δικτύωμα ο Jaumann ρυθμός της Eulerian λογαριθμικής τροπής είναι ίσος με το ρυθμό παραμόρφωσης. Αυτό προκύπτει ως εξής:

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}_{mn,x}^{(k)}(t) \Big|_{x_m(t)} = \dot{\boldsymbol{\xi}}_{mn,x}^{(0)}(t) \Big|_{x_m(t)} = \mathbf{d}_{mx}(t) \Big|_{x_m(t)} \tag{4.3.74}$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}_{mn,x}^{(k)}(t) \Big|_{x_n} = \mathbf{d}_{mx}(t) \Big|_{x_n} \tag{4.3.75}$$

Με τους ρυθμούς των τροπών υπολογισμένους το κομμάτι της εργασίας αυτής που αφορά την κινηματική φτάνει στο τέλος του. Οι κινηματικές περιγράφουν την γεωμετρία της κίνησης του δικτυώματος και τις παραμορφώσεις. Αυτό που ακολουθεί είναι μία συζήτηση για την κινητική του δικτυώματος, δηλαδή τις εξισώσεις ισορροπίας που περιγράφουν την αλληλεπίδραση του δικτυώματος με τον περιβάλλοντα χώρο. Αυτές οι εξισώσεις περιλαμβάνουν μηχανική και θερμοδυναμική θεώρηση. Τέλος η σύνδεση κινητικής και κινηματικής επιτυγχάνεται μέσω καταστατικών νόμων που είναι σχέσεις τάσεων παραμορφώσεων.

## Κεφάλαιο 5: Κινητική του δικτυώματος-Καταστατικοί νόμοι

### 5.1 Η τάση Cauchy και ο κινητικός ορισμός του δικτυώματος

Το δικτύωμα είναι ένα υλικό σώμα που σε οποιοδήποτε σχηματισμό καταλαμβάνει ένα πεπερασμένο τμήμα του Ευκλείδειου χώρου. Το υπόλοιπο τμήμα ονομάζεται εξωτερικός

κόσμος του δικτύματος και η επιρροή του στο δικτύωμα αντικαθίσταται πλήρως από κατάλληλες φυσικές ποσότητες σύμφωνα με την αρχή του ελευθέρου σώματος. Σύμφωνα με τη Νευτώνια μηχανική οι κατάλληλες φυσικές ποσότητες που χρησιμοποιούνται στην αναπαράσταση της επιρροής που έχει ο εξωτερικός χώρος στο δικτύωμα είναι η δύναμη. Η προσωρινή αλλαγή οποιασδήποτε ποσότητας που ανήκει στον τωρινό σχηματισμό ενός υλικού σώματος έρχεται σε συμφωνία με την επιρροή του εξωτερικού χώρου μέσω της ικανοποίησης των λεγόμενων σχέσεων ισορροπίας όπως ο 2ος νόμος του Νεύτωνα.

Με τον ίδιο τρόπο που το δικτύωμα μπορεί να οπτικοποιηθεί ως κάτι διακριτό από τον υπόλοιπο χώρο κάθε τμήμα του δικτύματος μπορεί να οπτικοποιηθεί ως κάτι διακριτό από το υπόλοιπο δικτύωμα. Ας θεωρήσουμε ένα απειροστό τμήμα του δικτύματος που κείται εξ' ολοκλήρου σ' αυτό. Σύμφωνα με την αρχή ελευθέρου σώματος μπορούμε να απομονώσουμε αυτό το τμήμα από το υπόλοιπο δικτύωμα και να αντικαταστήσουμε την επιρροή αυτή μέσω δυνάμεων. Υποθέτουμε ακόμη ότι αυτό το τμήμα είναι τόσο μικρό που περιβάλλει ένα μόνο σημείο του δικτύματος οπότε στην ουσία το σημείο που περιβάλλεται και το τμήμα του δικτύματος δεν μπορούν να διακριθούν. Τότε με αυτό τον τρόπο επιβεβαιώνεται η φύση του δικτύματος όσον αφορά την ανάληψη φορτίων, αναλαμβάνει μόνο δυνάμεις και μάλιστα αξονικές.

Υποθέτουμε ότι το δικτύωμα είναι στον  $C^m$  και θεωρούμε ένα απειροστό επιφανειακό στοιχείο το  $da_{m,x}$ . Σύμφωνα με τη θεώρηση μας θα υπάρχουν μόνο δυνάμεις που δρουν σε τέτοια απειροστά επιφανειακά στοιχεία που περιγράφουν την επιρροή του υπόλοιπου δικτύματος σε αυτό. Συμβολίζουμε το αποτέλεσμα όλων αυτών των δυνάμεων που δρουν στο απειροστό στοιχείο  $da_{m,x}$  με  $df_{m,x}$ .

Οπότε μπορούμε να γράψουμε:

$$d\vec{f}_{m,x} = \boldsymbol{\tau}_{m,x} da_{m,x} \quad (5.1.1)$$

Η οποία ισχύει για τα πλαίσια  $x_m, x_n$ . Είναι γνωστό ότι ο τανυστής τάσης του Cauchy είναι τανυστής 2<sup>ος</sup> τάξης και μάλιστα είναι αντικειμενικός καθώς μετασχηματίζεται σύμφωνα με τους νόμους.

$$\boldsymbol{\tau}_{m,x}|_{x_n} = \mathbf{R}_{mn,p}(t) \boldsymbol{\tau}_{m,x}|_{x_m} \mathbf{R}_{mn,p}^T(t) \quad (5.1.2)$$

Ως δικτύωμα θεωρούμε το σώμα εκείνο του οποίου ο τανυστής τάσης Cauchy δίδεται στην ακόλουθη μορφή:

$$\boldsymbol{\tau}_{m,x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_{m,x_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.1.3)$$

Ο οποίος είναι συμμετρικός και μάλιστα σταθερός κατά μήκος του δικτύματος. Δηλαδή ότι αναπτύσσεται τάση μόνο κατά τη διαμήκη διεύθυνση του δικτύματος.

Το στοιχείο εμβαδού μπορεί να γραφεί σε διανυσματική μορφή ως εξής:

$$d\vec{\alpha}_{m,x} = \sum_{i=1}^3 (da_{m,x})_i \hat{\mathbf{x}}_{m_i} \quad (5.1.4)$$

Τότε αν ακόμη δεχθούμε ότι το διάνυσμα της δύναμης έχει μορφή:

$$d\vec{\mathbf{f}}_{m,x} = \sum_{i=1}^3 (df_{m,x})_i \hat{\mathbf{x}}_{m_i} \quad (5.1.5)$$

Τότε μέσω της (5.1.3) έχουμε:

$$d\vec{\mathbf{f}}_{m,x_1} = \boldsymbol{\tau}_{m,x_{11}} da_{m,x} \hat{\mathbf{x}}_{m_1} \quad (5.1.6)$$

Ασφαλώς οι υπόλοιπες δύο συνιστώσες είναι μηδέν. Ας θεωρήσουμε ένα άλλο διάνυσμα το οποίο δεν είναι μοναδιαίο αλλά πάντα συγγραμμικό με το  $\hat{\mathbf{x}}_{m_1}$ . Θα έχουμε:

$$d\vec{\mathbf{x}}_{m_1} = d\mu_m \hat{\mathbf{x}}_{m_1} = \frac{dA_m}{dA} \hat{\mathbf{x}}_{m_1} \quad (5.1.7)$$

Οπότε η δύναμη που θα προκύπτει θα είναι ανάλογη του εμβαδού. Θα ισχύει δηλαδή:

$$d\mathbf{F}_{m,x} = \boldsymbol{\tau}_{m,x_{11}} \frac{dA_m}{dA} \hat{\mathbf{x}}_{m_1} \quad (5.1.8)$$

Αυτό το περιμέναμε διότι εφόσον το  $\vec{\mathbf{x}}_{m_1}$  είναι συγγραμμικό με το  $\hat{\mathbf{x}}_{m_1}$  θα είναι και αυτό κάθετο στην επιφάνεια της διατομής του δικτυώματος. Το μέτρο αυτού του διανύσματος είναι ίσο με το εμβαδόν της. Ενδιαφερόμαστε για τη συνολική δύναμη του δικτυώματος μόνο καθώς όπως έχουμε πει η δύναμη αυτή είναι σταθερή στο μήκος του δικτυώματος. Είναι:

$$\mathbf{N}_{m,x} = \iint_{CS} d\vec{\mathbf{F}}_{m,x} = \boldsymbol{\tau}_{m,x_{11}} \mu_m \hat{\mathbf{x}}_{m_1} \quad (5.1.9)$$

ή αλλιώς:

$$\mathbf{N}_{m,x} = \boldsymbol{\tau}_{m,x_{11}} \lambda_{m_2} \lambda_{m_3} \hat{\mathbf{x}}_{m_1} \quad (5.1.10)$$

## 5.2 Ισορροπία Μηχανικής Ενέργειας- Ισχύς τάσης

Μπορεί να δειχθεί ότι για κάθε κίνηση ενός υλικού σώματος ο ρυθμός του έργου των εξωτερικών δυνάμεων ισούται με το άθροισμα των μεταβολών της δυναμικής ενέργειας συν την ισχύ τάσης  $\dot{W}_m$ . Ένα ελαστικό σώμα του οποίου η ισχύς τάσης  $\dot{W}$  είναι ίση με την υλική παράγωγο της τροπικής ενέργειας παραμόρφωσης όταν απουσιάζει η ανταλλαγή θερμότητας με το περιβάλλον καλείται υπερελαστικό. Μπορεί να δειχθεί ότι αν οι δυνάμεις που δρουν στο υπερελαστικό σώμα παράγονται από δυναμικό τότε όλες οι δυνατές κινήσεις του σώματος ικανοποιούν την αρχή της διατήρησης της μηχανικής ενέργειας. Στη συνέχεια της ανάπτυξης μας τέτοια είναι τα σώματα που θα μας απασχολήσουν. Είναι γνωστό ότι η ισχύς τάσης  $\dot{W}_m$  ή ο ρυθμός τροπικής ενέργειας  $\dot{U}_m$  δίδεται ως:

$$\dot{U}_{mx} = \iiint_{V_m} t_r [\boldsymbol{\tau}_{m,x} \mathbf{d}_{m,x}] dV_m \quad (5.2.1)$$

Όπου  $t_r$  =τελευταίος ίχνους τετραγωνικού πίνακα. Αθροίζει δηλαδή τα στοιχεία της διαγώνιου του πίνακα  $\boldsymbol{\tau}_{m,x}\boldsymbol{d}_{m,x}$ . Ορίζουμε την πυκνότητα τροπικής ενέργειας στον τωρινό σχηματισμό το παραπάνω γινόμενο πινάκων.

$$\dot{u}_{mx} = t_r[\boldsymbol{\tau}_{m,x}\boldsymbol{d}_{m,x}] \quad (5.2.2)$$

Όπως θα ειπωθεί αρκετές φορές στο εξής η ποσότητα στην έκφραση (5.2.2) είναι αναλλοίωτη δηλαδή έχει την ίδια τιμή σ' όλα τα συστήματα συντεταγμένων. Ο λόγος για τον οποίο συμβαίνει αυτό δεν είναι τόσο προφανής και έχει να κάνει με ένα ειδικό γινόμενο στους τανυστές που ονομάζεται συστολή (contracted product). Οι λόγοι που αυτό δεν είναι προφανές είναι επειδή χρησιμοποιούμε ορθογώνιες συντεταγμένες και όχι καμπυλόγραμμες. Γενικώς σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες ο τανυστής της τάσης του Cauchy είναι ένας συναλλοίωτος τανυστής. Ο δε τανυστής του ρυθμού παραμόρφωσης είναι και αυτός τανυστής 2<sup>ος</sup> τάξης αλλά αναλλοίωτος. Το γινόμενο δύο τέτοιων τανυστών σύμφωνα με τις αρχές του τανυστικού λογισμού οφείλει να είναι ένα βαθμωτό μέγεθος. Έτσι αναμενόμενα προκύπτει ότι η πυκνότητα τροπικής ενέργειας είναι πράγματι ένας τανυστής μηδενικής τάξης.

Γνωρίζουμε ότι οι στοιχειώδεις όγκοι στους δύο σχηματισμούς  $C^m$  και  $C^n$  συνδέονται μεταξύ του μεσου της σχέσης:

$$dV_n = \lambda_{mn}\lambda_{mn_2} \lambda_{mn_3}\hat{x}_{m_1}dV_n$$

Οπότε είμαστε σε θέση να πάρουμε την έκφραση της πυκνότητας τροπικής ενέργειας σε όρους του σχηματισμού αναφοράς  $C^n$ . Εφαρμόζοντας τον παραπάνω απλό μετασχηματισμό έχουμε:

$$\dot{U}_{mx} = \iiint_{V_n} tr[\boldsymbol{\tau}_{m,x}\boldsymbol{d}_{m,x}]\lambda_{mn}\lambda_{mn_2} \lambda_{mn_3}dV_n \quad (5.2.3)$$

### 5.3 Καταστατικοί νόμοι- Σύζευξη και καταστατικές σχέσεις, συνοριακές συνθήκες και κινηματικές δεσμεύσεις

Στην παράγραφο 5.2 είδαμε πως η υλική παράγωγος ως προς το χρόνο της τροπικής ενέργειας ενός υπερελαστικού σώματος μπορεί να υπολογιστεί με ολοκλήρωση στον τωρινό ή τον όγκο αναφοράς αντίστοιχα. Για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε αυτά τα ολοκληρώματα θα πρέπει να γνωρίζουμε πως ο τανυστής της τάσης του Cauchy εξαρτάται από τις επιμηκύνσεις. Στην έκφραση του Cauchy τανυστή τάσης στην (5.1.3) στην οποία λάβαμε υπόψη τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος αλλά και τη φόρτιση που υπόκειται στο δικτύωμα (που οδήγησε στον μηδενισμό όλων των όρων εκτός του  $\boldsymbol{\tau}_{m,x_{11}}$  ίσως μας δοθεί η εντύπωση ότι ο τανυστής της τάσης αφού είναι σταθερός δεν εξαρτάται από τις επιμηκύνσεις. Μπορεί όμως να δειχθεί εκτός και αν γίνει μία σύνδεση μεταξύ του Cauchy τανυστή τάσης και των επιμηκύνσεων ότι οι εξισώσεις που περιγράφουν την κίνηση του δικτυώματος είναι ακαθόριστες.



Γενικώς η σύνδεση Cauchy τανυστή τάσης και των επιμηκύνσεων είναι ένα μαθηματικό μοντέλο που χρησιμοποιείται για να περιγράψει την κίνηση των σωμάτων σύμφωνα με την αρχή της δράσης. Χρησιμοποιώντας θεωρήματα αναπαράστασης τανυστικών συναρτήσεων μπορούμε να δείξουμε ότι ο Cauchy τανυστής τάσης γενικώς θα είναι μία τανυστική συνάρτηση της ιστορίας της κίνησης του σώματος.

Όμως εφόσον υποθέτουμε ότι ασχολούμαστε με ισότροπα υπερελαστικά υλικά, ο τανυστής τάσης του Cauchy θα είναι συνάρτηση των ιδιοτιμών της κλίσης παραμόρφωσης (των στοιχείων του  $\Lambda_m$  δηλαδή). Έτσι έχουμε:

$$\boldsymbol{\tau}_{mx} = \boldsymbol{\tau}_{mx}(\Lambda_m) \quad (5.3.1)$$

Οπότε ο ρυθμός της πυκνότητας της τροπικής ενέργειας θα είναι:

$$\dot{u}_{m,x}(\Lambda_m) = [t_r(\Lambda_m)\dot{\Lambda}_m\Lambda_m^{-1}] \quad (5.3.2)$$

Από την παράγραφο 4.2 είδαμε ότι τα μεγέθη τροπής του Seth για  $k=0$  μας δίνουν τα Lagrangian και Eulerian τροπικά μεγέθη. Βρήκαμε δηλαδή ότι:

$$\mathbf{E}_{mn,x}^{(0)} \Big|_{x_n} = \boldsymbol{\varepsilon}_{mn,x}^{(0)} \Big|_{x_m} = \ln(\Lambda_{mn,x}) = \text{diag}(\ln(\lambda_{mn_1}), \ln(\lambda_{mn_2}), \ln(\lambda_{mn_3})) \quad (5.3.3)$$

Στην (5.3.2) θέτουμε όπου  $\Lambda_m$  το λογάριθμό του και έχουμε:

$$\dot{u}_{m,x} \ln(\Lambda_m) = \left[ \boldsymbol{\tau}_{mx}(\ln(\Lambda_m)) \frac{d \ln(\Lambda_m)}{dt} \right] \quad (5.3.4)$$

Αν εφαρμόσουμε μερική παραγωγή στο  $u_{m,x}(\ln(\Lambda_m))$  θα έχουμε ότι:

$$\dot{u}_{m,x} \ln(\Lambda_m) = t_r \left[ \frac{\partial u_{m,x}(\ln(\Lambda_m))}{\partial \ln(\Lambda_m)} \frac{d \ln(\Lambda_m)}{dt} \right] \quad (5.3.5)$$

Από τις (5.3.4) και (5.3.5) βλέπουμε ότι για να ολοκληρώσουμε το ρυθμό της πυκνότητας τροπικής ενέργειας για να μας δώσει την τροπική ενέργεια ανά μονάδα όγκου  $V_m$  θα πρέπει να ισχύει:

$$\boldsymbol{\tau}_{mx}(\ln(\Lambda_m)) = \frac{\partial u_{m,x}(\ln(\Lambda_m))}{\partial \ln(\Lambda_m)} \quad (5.3.6)$$

Επομένως βλέπουμε ότι ο Cauchy τανυστής τάσης παράγεται από δυναμικό δηλαδή την πυκνότητα τροπικής ενέργειας (ανά μονάδα όγκου  $V_m$ ). Όταν η (5.3.6) ικανοποιείται βλέπουμε ότι η (5.3.5) γίνεται ακριβές διαφορικό άρα ολοκληρώνεται. Έτσι βλέπουμε ότι τελεστής ίχνος του Cauchy τανυστή τάσης με το ρυθμό παραμόρφωσης όταν ολοκληρώνεται στο χρόνο μας δίνει την πυκνότητα τροπικής ενέργειας (αν μονάδα όγκου  $V_m$ ). Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι ο τανυστής τάσης Cauchy είναι συζευγμένος με το ρυθμό παραμόρφωσης.

Αν εκφράσουμε τον ρυθμό της πυκνότητας τροπικής ενέργειας ως προς τον όγκο  $V_n$  θα προκύψει από τη σχέση  $\dot{u}_{m,xV_n} = \det \Lambda_m \dot{u}_{m,xV_m}$  στην (5.3.4).

$$\dot{u}_{m,x} \ln(\Lambda_m) = t_r \left[ \sigma_{mn,x} (\ln(\Lambda_m)) \frac{d \ln(\Lambda_m)}{dt} \right] \quad (5.3.7)$$

Από όπου προκύπτει ότι:

$$\sigma_{mn,x} (\ln(\Lambda_m)) = \det \Lambda_m \tau_{mx} (\ln(\Lambda_m)) \quad (5.3.8)$$

στην οποία ο  $\sigma_{mn,x}$  καλείται Kirchhoff τανυστής τάσης και ουσιαστικά είναι ο Cauchy τανυστής τάσης μεγεθυμένος κατά την ορίζουσα  $\Lambda_m$  της βαθμίδας παραμόρφωσης. Όμοια με την διαδικασία (5.3.5) με μερική παραγωγή του  $u_{m,xV_n} (\ln(\Lambda_m))$ .

$$u_{m,xV_n} (\ln(\Lambda_m)) = t_r \left[ \frac{\partial u_{m,xV_n} (\ln(\Lambda_m))}{\partial \ln(\Lambda_m)} \frac{d \ln(\Lambda_m)}{dt} \right] \quad (5.3.9)$$

Βλέπουμε ότι για να είναι η (5.3.7) ακριβές διαφορικό πρέπει:

$$\sigma_{mn,x} (\ln(\Lambda_m)) = \frac{\partial u_{m,xV_n} (\ln(\Lambda_m))}{\partial \ln(\Lambda_m)} \quad (5.3.10)$$

Δηλαδή όπως και πριν ο Kirchhoff τανυστής τάσης θα πρέπει να παράγεται από διαφορικό το οποίο είναι η πυκνότητα τροπικής ενέργειας αν μονάδα όγκου  $V_m$ .

Μέχρι στιγμής είδαμε ότι όταν συνδέουμε τις τάσεις Cauchy με τις επιμηκύνσεις  $\ln(\Lambda_m)$  μέσω κάποιου δυναμικού όπως στην (5.3.6) μπορούμε να λάβουμε την πυκνότητα τροπικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου  $V_m$ . Τώρα διερωτόμαστε: είναι δυνατό να συσχετίσουμε τις τάσεις Cauchy ή άλλα κατάλληλα μεγέθη τάσης με τροπικά μεγέθη που έχουμε εισάγει; Για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό χρησιμοποιούμε:

$$d_{m,x} \Big|_{x_m} = \Lambda_m^{-k} \Lambda_n^k \boldsymbol{\varepsilon}_{mn,x}^{(k)} \Big|_{x_m} \quad (5.3.11)$$

Έτσι έχουμε:

$$\dot{u}_{m,x} \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{mn,x}^{(k)} \Big|_{x_m} \right) = t_r \left[ \Lambda_m^{-k} \Lambda_n^k \tau_{mx} (\ln(\Lambda_m)) \boldsymbol{\varepsilon}_{mn,x}^{(k)} \Big|_{x_m} \right] \text{ στον όγκο } V_m \quad (5.3.12)$$

Με μερική διαφόριση της έκφρασης  $\dot{u}_{m,x} \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{mn,x}^{(k)} \Big|_{x_m} \right)$  στον όγκο  $V_m$ :

$$\dot{u}_{m,x} \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{mn,x}^{(k)} \Big|_{x_m} \right) = t_r \left[ \frac{\partial u_{m,x} (\boldsymbol{\varepsilon}_{mn,x}^{(k)} \Big|_{x_m})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{mn,x}^{(k)} \Big|_{x_m}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{mn,x}^{(k)} \Big|_{x_m} \right] \quad (5.3.13)$$

Συνεπώς για να είναι η έκφραση στην (5.3.12) ακριβές διαφορικό θα πρέπει:

$$\Lambda_m^{-k} \Lambda_n^k \tau_{m,x} (\ln(\Lambda_m)) = \frac{\partial u_{m,x} (\boldsymbol{\varepsilon}_{mn,x}^{(k)} \Big|_{x_m})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{mn,x}^{(k)} \Big|_{x_m}} \quad (5.3.14)$$

Η (5.3.14) αλλιώς μπορεί να γραφεί ως:

$$\boldsymbol{\tau}_{mx}^{(k)} \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{mn,x}^{(k)} \Big|_{x_m} \right) = \frac{\partial u_{m,x}(\boldsymbol{\varepsilon}_{mn,x}^{(k)} \Big|_{x_m})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{mn,x}^{(k)} \Big|_{x_m}} \quad (5.3.15)$$

όπου σιωπηρά εισαγάγαμε ένα νέο τανυστή 2<sup>ας</sup> τάξης:

$$\boldsymbol{\tau}_{mn,x}^{(k)} = \boldsymbol{\Lambda}_m^{-k} \boldsymbol{\Lambda}_n^k \boldsymbol{\tau}_{m,x} \quad (5.3.16)$$

Οι τανυστές 2<sup>ας</sup> τάξης στην (5.3.16) αντιστοιχούν σε διάφορα μεγέθη τάσης (ανάλογα με την τιμή του k). Εφόσον έχουμε δει ότι ο τελεστής ίχνος για τον πίνακα  $\boldsymbol{\tau}_{mn,x}^{(k)} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{mn,x}^{(k)}$  όταν ολοκληρώνεται στο χρόνο δίνει την πυκνότητα τροπικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου  $V_m$  μπορούμε να πούμε ότι τα μεγέθη τάσης στην (5.3.16) είναι συζυγή με τα αντίστοιχα μεγέθη τροπής (πάντα σύμφωνα με τον όγκο  $V_m$ ).

Ανάλογα αποτελέσματα είναι δυνατόν να προκύψουν και για το Kirchhoff τανυστή τάσης. Έχουμε δει ότι αν η πυκνότητα τροπικής ενέργειας (σε όποιον όγκο αναφοράς και αν αναφέρεται) δίδεται ως συνάρτηση των τροπικών μεγεθών τότε μπορούμε να πάρουμε τα κατάλληλα μεγέθη τάσης τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να υπολογίσουμε την τροπική ενέργεια του δικτυώματος. Με αυτό τον τρόπο τάσεις και τροπές συνδέονται με έναν συνεπή και συστηματικό τρόπο. Αυτή η σύνδεση των διαφόρων τάσεων και των αντιστοιχών τροπών καλούνται καταστατικοί νόμοι για ένα υπερελαστικό υλικό. Ασφαλώς πολλές συναρτησιακές μορφές πυκνότητας τροπικής ενέργειας δύνανται να χρησιμοποιηθούν κάθε μία από τις οποίες οδηγεί σε διαφορετικό μοντέλο υπερελαστικού υλικού. Στο υπόλοιπο της ανάπτυξης μας θα θεωρούμε το μοντέλο ισότροπης υπερελαστικότητας για την οποία η πυκνότητα τροπικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου  $V_m$  είναι:

$$u_{m,x} \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{mn,x}^{(k)} \Big|_{x_m} \right) = \frac{1}{2} (a + 2b) I_{\varepsilon}^2 + 2b II_{\varepsilon} + c \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{mn,x}^{(k)} \Big|_{x_m} \right)_{11} + d \quad (5.3.17)$$

όπου  $I_{\varepsilon}, II_{\varepsilon}$  είναι η 1η και η 2η αναλλοίωτος του τανυστή τροπής  $\boldsymbol{\varepsilon}_{mn,x}^{(k)}$ .

$$I_{\varepsilon} = \sum_{i=1}^3 \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{mn,x}^{(k)} \Big|_{x_m} \right)_{ii} \quad (\text{Άθροισμα των στοιχείων της διαγωνίου}) \quad (5.3.18)$$

$$II_{\varepsilon} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left[ \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{mn,x}^{(k)} \Big|_{x_m} \right)_{ii}^2 - \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{mn,x}^{(k)} \Big|_{x_m} \right)_{11} \right] \quad (5.3.19)$$

Παρατηρούμε ότι οι παραπάνω εκφράσεις των  $u_{m,x}$  ως συνάρτηση των  $\boldsymbol{\varepsilon}_{mn,x}^{(k)} \Big|_{x_m}$  είναι ίδιες με το αν εκφράζουμε την πυκνότητα τροπικής ενέργειας σε όρους κύριων τάσεων εφόσον οι τανυστές  $\boldsymbol{\varepsilon}_{mn,x}^{(k)} \Big|_{x_m}$  είναι σε διαγώνιο μορφή.

Σημειώνουμε ότι οι σταθερές a, b, c, d δεν μπορούν να είναι εξαρτημένες από το  $C^m$  σχηματισμό εφόσον η πυκνότητα τροπικής ενέργειας (όπως αυτή εκφράζεται μέσω των (5.3.17)-(5.3.19) δίδεται ως συνάρτηση των τροπών που μετρούν την παραμόρφωση από τον

σηματισμό αναφοράς στον τωρινό σχηματισμό. Αν οι σταθερές που συνδέουν αυτές τις τροπές με την πυκνότητα τροπικής ενέργειας εξαρτώνται από τον τωρινό  $C^m$  σχηματισμό, τότε η πυκνότητα τροπικής ενέργειας θα εξαρτώνταν από τη διαδρομή και έτσι δεν θα ήταν συνάρτηση δυναμικού όπως χρειάζεται για να έχουμε την περιγραφή ενός ελαστικού δικτυώματος. Επιπλέον θα παραβιαζόταν η αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας. Αυτό μπορεί να δειχθεί εύκολα θεωρώντας τη μετάβαση της εμφυτευμένης πολλαπλότητας του δικτυώματος από τον ένα σχηματισμό στον άλλο μέσω δύο διαφορετικών διαδρομών. Αν οι σταθερές  $a, b, c, d$  εξαρτώνται από τον τωρινό σχηματισμό η δυνατή ενέργεια του δικτυώματος θα ήταν διαφορετική για κάθε διαδρομή που αποτελεί καθαρή παραβίαση των νόμων της θερμοδυναμικής που καθορίζουν τη μηχανική συμπεριφορά των υπερελαστικών δικτυωμάτων.

Ας δούμε πως τροποποιούνται οι εκφράσεις για τις τάσεις. Είναι:

$$\left( \boldsymbol{\tau}_{mn,x}^{(k)} \Big|_{x_m} \right)_{11} = 2b \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{mn,x}^{(k)} \Big|_{x_m} \right)_{11} + c + a \sum \left[ \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{mn,x}^{(k)} \Big|_{x_m} \right)_{11} \right] \quad (5.3.20)$$

Όπως έχουμε δείξει οι υπόλοιπες συνιστώσες του τανυστή της τάσης είναι 0 (για το δικτύωμα) καθώς ο Cauchy τανυστής τάσης (ανεξάρτητα του  $k$ ) οφείλει να ικανοποιεί τις φυσικές συνθήκες της τάσης. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο και για τις τροπές στις άλλες δύο διευθύνσεις. Πράγματι έχουμε:

$$\left( \boldsymbol{\varepsilon}_{mn,x}^{(k)} \Big|_{x_m} \right)_{22} = \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{mn,x}^{(k)} \Big|_{x_m} \right)_{33} = \frac{a}{2(a+b)} \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{mn,x}^{(k)} \Big|_{x_m} \right)_{11} \quad (5.3.21)$$

Η εξίσωση (5.3.21) είναι η κινηματική δέσμευση οπότε βλέπουμε ότι οι συνοριακές συνθήκες στην τάση Cauchy προκαλούν κινηματικές δεσμεύσεις.

Η (5.3.21) μέσω της (5.3.20) γίνεται:

$$\left( \boldsymbol{\tau}_{mn,x}^{(k)} \Big|_{x_m} \right)_{11} = \frac{b(3a+2b)}{a+b} \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{mn,x}^{(k)} \Big|_{x_m} \right)_{11} + c \quad (5.3.22)$$

Ορίζουμε τα ακόλουθα μεγέθη των οποίων η σημασία είναι γνωστή από την κλασσική θεωρία ελαστικότητας. Από την (5.3.22):

$$E_{n,\varepsilon_{mn},V_m} = \frac{b(3a+2b)}{a+b} \quad (5.3.23)$$

$$\nu_{n,\varepsilon_{mn},V_m} = \frac{a}{2(a+b)} \quad (5.3.24)$$

όπου  $E$  αντιστοιχεί στο μέτρο Young και  $\nu$  στο λόγο Poisson.

Οπότε η (5.3.20) γράφεται:

$$\left( \boldsymbol{\tau}_{mn,x}^{(k)} \Big|_{x_m} \right)_{11} = E_{n,\varepsilon_{mn},V_m} \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{mn,x}^{(k)} \Big|_{x_m} \right)_{11} + \quad (5.3.25)$$

$$\left( \boldsymbol{\varepsilon}_{mn,x}^{(k)} \Big|_{x_m} \right)_{22} = \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{mn,x}^{(k)} \Big|_{x_m} \right)_{33} = \nu_{n,\varepsilon_{mn},V_m} \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{mn,x}^{(k)} \Big|_{x_m} \right)_{11} \quad (5.3.26)$$

Ή αλλιώς:

$$\left( \boldsymbol{\tau}_{mn,x}^{(k)} \Big|_{x_m} \right)_{11} = \frac{\mathbf{E}_{n,\varepsilon mn} V_m}{k} (\lambda_n^k \lambda_m^{-k} - 1) + \mathbb{C} \quad (5.3.27)$$

$$\frac{1}{k} (\lambda_{mn_2}^k - 1) = \frac{1}{k} (\lambda_{mn_3}^k - 1) = -\frac{\nu_{n,\varepsilon mn} V_m}{k} (\lambda_n^k \lambda_m^{-k} - 1) \quad (5.3.28)$$

Από την (5.3.26) βρίσκουμε την παρακάτω κινηματική δέσμευση:

$$\lambda_{mn_2} = \lambda_{mn_3} = [1 + \nu - \nu \lambda_n^k \lambda_m^{-k}]^{\frac{1}{k}} \quad (5.3.29)$$

Ζητούμενο είναι να βρεθούν οι σταθερές  $a, b, c, d$ . Βέβαια αυτή που θα μας είναι απαραίτητη είναι η  $\mathbb{C}$  που είναι στην έκφραση της (5.3.27). Θέλουμε να βρούμε τη σχέση που συνδέει την πυκνότητα τροπικής ενέργειας στους όγκους αναφοράς των σχηματισμών  $C^m, C^n$ . Από την παράγραφο 5.3 έχουμε βρει:

$$\dot{u}_{m,x_{V_n}} = \det[\boldsymbol{\Lambda}_m] \dot{u}_{m,x_{V_m}} \quad (5.3.30)$$

Αν την ολοκληρώσουμε ως προς το χρόνο θα πάρουμε:

$$u_{m,x_{V_n}} = \det[\boldsymbol{\Lambda}_m] u_{m,x_{V_m}} + g \quad (5.3.31)$$

Όπου η σταθερά  $g$  (όπως όλες οι σταθερές εξαρτώνται από τον σχηματισμό αναφοράς  $C^n$ ) και από τον όγκο αναφοράς. Βέβαια σε όλα τα προηγούμενα οι σταθερές να μεν αναφέρονταν στον  $C^n$  σχηματισμό αλλά ήταν συναρτήσεις του όγκου  $V_m$ . Στα επόμενα όπου θα εκφράσουμε την πυκνότητα τροπικής ενέργειας στον όγκο  $V_n$  θα χρησιμοποιούμε ως δείκτη το  $V_n$  καθώς και τη συνάρτηση παραμόρφωσης που χρησιμοποιείται για να πετύχουμε αυτή τη διάκριση.

Η (5.3.31) μέσω της (5.3.17) γίνεται:

$$u_{m,x_{V_n}} \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{mn,x}^{(k)} \Big|_{x_m} \right) = \frac{1}{2} (a' + 2b) I_{\boldsymbol{\varepsilon}}^2 + 2b I_{\boldsymbol{\varepsilon}} + c' \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{mn,x}^{(k)} \Big|_{x_m} \right)_{11} + d' \quad (5.3.32)$$

απ' όπου παίρνουμε ότι:

$$a' = \lambda_{mn} \lambda_{mn_2} \lambda_{mn_3} a \quad (5.3.33)$$

$$b' = \lambda_{mn} \lambda_{mn_2} \lambda_{mn_3} b \quad (5.3.34)$$

$$c' = \lambda_{mn} \lambda_{mn_2} \lambda_{mn_3} c \quad (5.3.35)$$

$$d' = \lambda_{mn} \lambda_{mn_2} \lambda_{mn_3} d + g' \quad (5.3.36)$$

Οπότε οι καταστατικοί νόμοι στον σχηματισμό αναφοράς  $C^n$  γράφονται:

$$\left( \boldsymbol{\sigma}_{mn,x}^{(k)} \Big|_{x_m} \right)_{11} = \frac{E_{n,\varepsilon_{mn}V_n}}{k} (\lambda_n^k \lambda_m^{-k} - 1) + \mathbb{C} \quad (5.3.37)$$

$$\frac{1}{k} (\lambda_{mn_2}^k - 1) = \frac{1}{k} (\lambda_{mn_3}^k - 1) = \frac{v_{n,\varepsilon_{mn}V_m}}{k} (\lambda_n^k \lambda_m^{-k} - 1) \quad (5.3.38)$$

Έτσι μπορούμε να βρούμε σχέση με τα  $E'$ ,  $E$ ,  $v$ ,  $v'$ .

$$E_{n,\varepsilon_{mn}V_n} = \lambda_{mn} \lambda_{mn_2} \lambda_{mn_3} E_{n,\varepsilon_{mn}V_m} \quad (5.3.39)$$

$$v_{n,\varepsilon_{mn}V_n} = v_{n,\varepsilon_{mn}V_m} \quad (5.3.40)$$

Οπότε με την παραπάνω παρατήρηση μπορούμε να βρούμε τα  $c$  και  $c'$ . Πράγματι από τις σχέσεις:

$$\boldsymbol{\tau}_{mn,x}^{(k)} \Big|_{x_m} = \boldsymbol{\Lambda}_m^{-k} \boldsymbol{\Lambda}_n^k \boldsymbol{\tau}_{m,x}^{(k)} \Big|_{x_n}$$

και

$$\boldsymbol{\sigma}_{mn,x}^{(k)} (\boldsymbol{\varepsilon}_{mn,x}^{(k)} \Big|_{x_m}) \Big|_{x_m} = \lambda_{mn} \lambda_{mn_2} \lambda_{mn_3} \boldsymbol{\tau}_{mn,x}^{(k)} (\boldsymbol{\varepsilon}_{mn,x}^{(k)} \Big|_{x_m}) \Big|_{x_m}$$

Για  $m=n$  παίρνουμε:

$$\boldsymbol{\tau}_{n,x}^{(k)} \Big|_{x_m} = \boldsymbol{\tau}_{n,x}^{(k)} \Big|_{x_n} \quad (5.3.41)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n,x}^{(k)} \Big|_{x_m} = \boldsymbol{\tau}_{n,x}^{(k)} \Big|_{x_n} \quad (5.3.42)$$

Οπότε η (5.3.37) για  $m=n$  και μέσω των (5.3.42)-(5.3.41):

$$\left( \boldsymbol{\tau}_{n,x}^{(k)} \Big|_{x_n} \right)_{11} = c' \quad (5.3.43)$$

και έτσι:

$$c = \lambda_{mn}^{-1} \lambda_{mn_2}^{-1} \lambda_{mn_3}^{-1} \left( \boldsymbol{\tau}_{n,x}^{(k)} \Big|_{x_n} \right)_{11} \quad (5.3.44)$$

Οπότε παίρνουμε την τελική μορφή των καταστατικών νόμων για ένα υπερελαστικό δικτύωμα στη θεωρία μεγάλων παραμορφώσεων.

$$\left( \boldsymbol{\tau}_{mn,x}^{(k)} \Big|_{x_m} \right)_{11} = E_{n,\varepsilon_{mn}V_m} \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{mn,x}^{(k)} \Big|_{x_m} \right)_{11} + \det[\boldsymbol{\Lambda}_m^{-1}] \left( \boldsymbol{\tau}_{n,x}^{(k)} \Big|_{x_n} \right)_{11} \quad (5.3.45)$$

$$\left( \boldsymbol{\sigma}_{mn,x}^{(k)} \Big|_{x_m} \right)_{11} = E_{n,\varepsilon_{mn}V_n} \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{mn,x}^{(k)} \Big|_{x_m} \right)_{11} + \left( \boldsymbol{\tau}_{n,x}^{(k)} \Big|_{x_n} \right)_{11} \quad (5.3.46)$$

Σε αυτό το σημείο οφείλουμε να αποκαλύψουμε τον βασικό σκοπό αυτής της εργασίας. Όπως αναφέρθηκε στην αρχή ένας τρόπος για την περιγραφή της κίνησης του δικτύωματος

είναι να μετράμε τις παραμορφώσεις από έναν σχηματισμό αναφοράς ο οποίος διαρκώς αλλάζει. Είναι δηλαδή ένα είδος Lagrangian περιγραφής. Για να το κάνουμε αυτό θα πρέπει να δούμε πως μετασχηματίζονται τα μεγέθη  $E$  και  $v$  στο μετασχηματισμό αναφοράς  $C'$  σε ένα άλλο σχηματισμό αναφοράς  $C^n$  θεωρώντας τη γνωστή πλέον περιγραφή στην  $x$  σε μεταβλητή έχουμε:

$$\left( \boldsymbol{\sigma}_{mr,x}^{(k)} \Big|_{x_m} \right)_{11} = E_{r,\varepsilon_{mr}V_r} (\lambda_m^k \lambda_r^{-k} - 1) + \left( \boldsymbol{\tau}_{r,x}^{(k)} \Big|_{x_r} \right)_{11} \quad (5.3.47)$$

Αν θέσουμε  $m=n$  θα πάρουμε:

$$\left( \boldsymbol{\sigma}_{nr,x}^{(k)} \Big|_{x_n} \right)_{11} = E_{r,\varepsilon_{nr}V_r} (\lambda_n^k \lambda_r^{-k} - 1) + \left( \boldsymbol{\tau}_{r,x}^{(k)} \Big|_{x_r} \right)_{11} \quad (5.3.48)$$

Επειδή το μέγεθος  $E$  εξαρτάται μόνο από το σχηματισμό αναφοράς δηλαδή είναι ανεξάρτητο του  $C^m$  έχουμε  $E_{r,\varepsilon_{nr}V_r} = E_{r,\varepsilon_{mr}V_r}$ .

Παρατηρούμε ότι:

$$(\lambda_m^k \lambda_n^{-k} - 1) = \lambda_n^{-k} \lambda_r^k [(\lambda_m^k \lambda_r^{-k} - 1) - (\lambda_n^k \lambda_r^{-k} - 1)] \quad (5.3.49)$$

Και ύστερα από πράξεις:

$$\lambda_{mr}^{-k} \lambda_{mn}^k = (\lambda_m^{-k} \lambda_r^k) (\lambda_m^k \lambda_n^{-k}) = \lambda_r^k \lambda_n^{-k} = \lambda_{nr}^{-k} \quad (5.3.50)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις (5.3.47), (5.3.48):

$$\left( \boldsymbol{\sigma}_{mr,x}^{(k)} \Big|_{x_m} \right)_{11} - \left( \boldsymbol{\sigma}_{nr,x}^{(k)} \Big|_{x_n} \right)_{11} = \frac{E_{r,\varepsilon_{mr}V_r}}{k} \left( \boldsymbol{\sigma}_{mr,x}^{(k)} \Big|_{x_m} \right)_{11} - \left( \boldsymbol{\sigma}_{nr,x}^{(k)} \Big|_{x_n} \right)_{11} \quad (5.3.51)$$

$$= (\lambda_{mn}^k - 1) \frac{E_{r,\varepsilon_{mr}V_r}}{k} (\lambda_{mn}^k - 1) \quad (5.3.52)$$

όπου για να προκύψει η (5.3.52) χρησιμοποιήθηκε στην (5.3.51) η (5.3.49).

Συνδέοντας τις τάσεις Kirchhoff με τις Cauchy έχουμε ήδη:

$$\left( \boldsymbol{\sigma}_{mn,x}^{(k)} \Big|_{x_m} \right)_{11} = \det[\Lambda_{mn}] \lambda_{mn}^k \left( \boldsymbol{\tau}_{m,x}^{(k)} \Big|_{x_m} \right)_{11} \quad (5.3.53)$$

$$\text{όπου } \left( \boldsymbol{\tau}_{m,x}^{(k)} \Big|_{x_m} \right)_{11} = \lambda_{mn}^k \left( \boldsymbol{\tau}_{m,x} \Big|_{x_m} \right)_{11}$$

Η (5.3.53) για  $n=r$  και  $m=r$  διαδοχικά δίνει:

$$n = r \Rightarrow \left( \boldsymbol{\sigma}_{mr,x}^{(k)} \Big|_{x_m} \right)_{11} = \det[\Lambda_{mr}] \lambda_{mr}^k \left( \boldsymbol{\tau}_{m,x} \Big|_{x_m} \right)_{11} \quad (5.3.54)$$

$$m = r \Rightarrow \left( \boldsymbol{\sigma}_{nr,x}^{(k)} \Big|_{x_n} \right)_{11} = \det[\Lambda_{nr}] \lambda_{nr}^k \left( \boldsymbol{\tau}_{n,x} \Big|_{x_n} \right)_{11} \quad (5.3.55)$$

Η (5.3.51) μέσω του (5.3.53)-(5.3.55) και (5.3.49) γράφεται:

$$\frac{E_{r,\varepsilon_{mr}V_r}}{k} (\lambda_{mn}^k - 1) = \det[\Lambda_{nr}] \lambda_{nr}^{-2k} \left( \left( \sigma_{mn,x}^{(k)} \Big|_{x_m} \right)_{11} - \left( \tau_{m,x}^{(k)} \Big|_{x_m} \right)_{11} \right) \quad (5.3.56)$$

Η (5.3.56) μέσω της (5.3.46) δίνει:

$$\begin{aligned} \frac{E_{r,\varepsilon_{mr}V_r}}{k} (\lambda_{mn}^k - 1) &= \det[\Lambda_{nr}]^k \lambda_{nr}^{-2k} \frac{E_{n,\varepsilon_{mn}V_n}}{k} (\lambda_{mn}^k - 1) \rightarrow E_{r,\varepsilon_{mr}V_r} = \\ &= \det[\Lambda_{nr}] \lambda_{nr}^{-2k} E_{n,\varepsilon_{mn}V_n} \end{aligned} \quad (5.3.57)$$

Ακόμη η σχέση (5.3.40)  $E_{n,\varepsilon_{mn}V_n} = \det[\Lambda_{mn}] E_{n,\varepsilon_{mn}V_m}$  για  $n=r$  δίνει:

$$E_{r,\varepsilon_{mr}V_r} = \det[\Lambda_{mr}] E_{r,\varepsilon_{mr}V_m} \quad (5.3.58)$$

$$\begin{aligned} \text{Οπότε οι (5.3.58), (5.3.57) δίνουν: } E_{r,\varepsilon_{mr}V_m} &= \det[\Lambda_{mr}^{-1}] \det[\Lambda_{nr}] \lambda_{nr}^{-2k} E_{n,\varepsilon_{mn}V_n} \rightarrow \\ E_{r,\varepsilon_{mr}V_m} &= \det[\Lambda_{mr}^{-1}] \det[\Lambda_{nr}] \lambda_{nr}^{-2k} \det[\Lambda_{mn}] E_{n,\varepsilon_{mn}V_m} \\ \rightarrow E_{r,\varepsilon_{mr}V_m} &= \lambda_{nr}^{-2k} E_{n,\varepsilon_{mn}V_m} \end{aligned} \quad (5.3.59)$$

Η σχέση (5.3.59) είναι σπουδαία. Μας λέει πως αλλάζει το E (όταν αναφέρεται στον όγκο  $V_m$  ως συνήθως) αν αλλάξουμε σχηματισμό αναφοράς.

Ακριβώς την ίδια διαδικασία θα ακολουθήσουμε και για το λόγο  $v$ . Από την (5.3.28) για  $n=r$  έχουμε:

$$\frac{1}{k} (\lambda_{mr_2}^k - 1) = \frac{1}{k} (\lambda_{mr_3}^k - 1) = -\frac{v_{r,\varepsilon_{mr}V_m}}{k} (\lambda_{mr}^k - 1) \quad (5.3.60)$$

Η (5.3.60) για  $m=n$  δίνει:

$$\frac{1}{k} (\lambda_{mr_2}^k - 1) = \frac{1}{k} (\lambda_{mr_3}^k - 1) = -\frac{v_{r,\varepsilon_{nr}V_n}}{k} (\lambda_{nr}^k - 1) \quad (5.3.61)$$

Όπου πάλι έχουμε το ανάλογο της περίπτωσης του E δηλαδή  $v_{r,\varepsilon_{mr}V_n} = v_{r,\varepsilon_{nr}V_n}$  καθώς δεν εξαρτάται από τον τωρινό σχηματισμό  $C^m$ .

Από τη σχέση (5.3.40) για  $n=r$  έχουμε:

$$v_{r,\varepsilon_{mr}V_r} = v_{r,\varepsilon_{nr}V_m} \quad (5.3.62)$$

Η (5.3.62) για  $m=n$  δίνει:

$$v_{r,\varepsilon_{nr}V_r} = v_{r,\varepsilon_{nr}V_n} \quad (5.3.63)$$

Έτσι έχουμε:

$$v_{r,\varepsilon_{mr}V_n} = v_{r,\varepsilon_{mr}V_m} \quad (5.3.64)$$



Από τον καταστατικό νόμο των παραμορφώσεων για τους σχηματισμούς  $C^m$ ,  $C^n$ ,  $C^r$  και μέσω της (5.3.60) έχουμε:

$$v_{n,\varepsilon_{mn}}V_m(\lambda_{mn}^k - 1) = \lambda_{nr_2}^{-k} [v_{r,\varepsilon_{mr}}V_m(\lambda_{mr}^k - 1) - v_{r,\varepsilon_{mr}}V_n(\lambda_{nr}^k - 1)] \quad (5.3.65)$$

Η (5.3.65) μέσω της (5.3.64) γράφεται:

$$v_{n,\varepsilon_{mn}}V_m(\lambda_{mn}^k - 1) = v_{r,\varepsilon_{mr}}V_m \lambda_{nr_2}^{-k} [(\lambda_{mr}^k - 1) - (\lambda_{nr}^k - 1)] \quad (5.3.66)$$

Η τελευταία μέσω της (5.3.49) μας δίνει μία σχέση ανάλογη της (5.3.59):

$$v_{r,\varepsilon_{mr}}V_m = \lambda_{nr}^{-k} \lambda_{nr_2}^k v_{n,\varepsilon_{mn}}V_m \quad (5.3.67)$$

Συνοψίζοντας με τους μετασχηματισμούς (5.3.59) και (5.3.67) μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει δύο διαφορετικές θεωρήσεις για την κίνηση του δικτυώματος. Στην 1<sup>η</sup> θεώρηση όλα τα μεγέθη θα μετρούνται με βάση τις σταθερές που ανήκουν σε ένα καθορισμένο σχηματισμό τον  $C^r$  δηλαδή η κίνηση του δικτυώματος θα γίνεται ως προς αυτό. Στη γλώσσα των πεπερασμένων στοιχείων αυτό απαντάται ως ολική Λαγκρατζιανή περιγραφή. Στη 2<sup>η</sup> προσέγγιση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διάφορους σχηματισμούς αναφοράς για τη μετάβαση του δικτυώματος όπως μας βολεύει οπότε ποσότητες όπως οι παραμορφώσεις θα μετρούνται σύμφωνα με το σχηματισμό αναφοράς που χρησιμοποιούμε. Βέβαια αυτές οι σταθερές πρέπει να καθοριστούν αρχικά σύμφωνα με κάποιον σχηματισμό  $C^r$  και μόνο τότε να προσαρμοστούν σε κάθε επόμενο  $C^n$  σχηματισμό. Άλλωστε μας είναι ιδιαίτερα βολικό να παίρνουμε ως πρώτο σχηματισμό αναφοράς την απαραμόρφωτη κατάσταση όπου αυτές οι σταθερές είναι γνωστές. Αυτό το συμβολίζουμε με ένα δείκτη  $r=0$ . Αυτή η περιγραφή είναι γνωστή ως βελτιωμένη περιγραφή Lagrange.

#### 5.4 Τροπική ενέργεια του δικτυώματος και σχέσεις κλειστής μορφής

Έχουμε πλέον εισάγει τους καταστατικούς νόμους στην ανάπτυξη μας οπότε είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε την τροπική ενέργεια του δικτυώματος. Έχουμε:

$$\dot{u}_{m,x} = \iiint_{V_m} \dot{u}_{m,x_{V_m}} dV_m = \iiint_{V_n} \dot{u}_{m,x_{V_n}} dV_n \quad (5.4.1)$$

Ο όγκος δίδεται ως:

$$V_m = A_m L_m = A_m L \lambda_{m_2} \lambda_{m_3} \quad (5.4.2)$$

Αν θεωρήσουμε  $A=1$  τότε:

$$V_m = A_m L_m = L_m \lambda_{m_2} \lambda_{m_3} \quad (5.4.3)$$

Η (5.4.2) ισχύει και για  $m=n$  οπότε:

$$V_n = A_n L_n = L_n \lambda_{n_2} \lambda_{n_3} \quad (5.4.4)$$

Από τις (5.4.3), (5.4.4) μπορούμε να πούμε ότι:

$$A_m = \lambda_{m_2} \lambda_{m_3} \quad (5.4.5)$$

$$A_n = \lambda_{n_2} \lambda_{n_3} \quad (5.4.6)$$

Όμοια αν  $L=1$  τότε:

$$\lambda_m = L_m \quad (5.4.7)$$

$$\lambda_n = L_n \quad (5.4.6)$$

Από τη σχέση της παραγράφου 5.3  $\lambda_{mn_2} = \lambda_{mn_3} = \left[1 + \nu_{n,\varepsilon_{mn}} V_m - \nu_{n,\varepsilon_{mn}} V_m \lambda_{mn}^k\right]^{\frac{1}{k}}$  και τις (5.4.7), (5.4.8) παίρνουμε:

$$\lambda_{m_2} = \lambda_{n_2} = \left[1 + \nu_{n,\varepsilon_{mn}} V_m - \nu_{n,\varepsilon_{mn}} V_m L_m^k L_n^{-k}\right]^{\frac{1}{k}} \quad (5.4.9)$$

$$\lambda_{m_3} = \lambda_{n_3} = \left[1 + \nu_{n,\varepsilon_{mn}} V_m - \nu_{n,\varepsilon_{mn}} V_m L_m^k L_n^{-k}\right]^{\frac{1}{k}} \quad (5.4.10)$$

Οπότε συνδυασμός των (5.4.5), (5.4.6), (5.4.9), (5.4.10) δίνει την κατάσταση της διατομής του δικτυώματος.

$$A_m = A_n \left[1 + \nu_{n,\varepsilon_{mn}} V_m - \nu_{n,\varepsilon_{mn}} V_m L_m^k L_n^{-k}\right]^{\frac{2}{k}} \quad (5.4.11)$$

Ολοκληρώνοντας την (5.4.1) στο χρόνο και στον όγκο  $V_m$  θα πάρουμε:

$$U_{m,x} = L_m A_m \frac{\varepsilon_{n,\varepsilon_{mn}} V_m}{2} \left(\boldsymbol{\varepsilon}_{mn,x}^{(k)} \Big|_{x_m}\right)_{11} + L_n A_n \left(\boldsymbol{\tau}_{n,x} \Big|_{x_m}\right)_{11} \left(\boldsymbol{\varepsilon}_{mn,x}^{(k)} \Big|_{x_m}\right)_{11} + U_n \quad (5.4.12)$$

Η (5.4.12) μας δίνει την τροπική ενέργεια του δικτυώματος για όλα τα δυνατά τροπικά μεγέθη. Εφόσον χρησιμοποιείται κάποιος αυθαίρετος σχηματισμός για την περιγραφή η τιμή του  $U_n$  δεν είναι γνωστή. Ακόμη οι σταθερές  $E$  και  $r$  πρέπει να προσδιοριστούν σύμφωνα με τον  $C^n$ . Βλέπουμε επομένως ότι όλες οι ποσότητες του  $C^n$  παραμένουν άγνωστες. Άρα για να εφαρμόσουμε κάποια από τις δύο θεωρήσεις που αναφέραμε πρέπει να βρούμε ένα σχηματισμό  $C$  στον οποίο τα μεγέθη αυτά είναι γνωστά ή μπορούν να βρεθούν. Ο φυσικός σχηματισμός αναφοράς είναι ένας τέτοιος σχηματισμός εφόσον από τον ορισμό του το δικτύωμα λογίζεται ως απαραμόρφωτο και πλήρης μονωμένο.

Συνεπώς μπορούμε με ασφάλεια να πούμε ότι  $U_0=0$ . Ακόμη όλα τα μεγέθη που έχουμε γνωρίσει είναι γνωστά δηλαδή τα  $A_0$  και  $L_0$ . Το ίδιο θεωρούμε και για την μη μηδενική τάση Cauchy η οποία στον  $C^0$  σχηματισμό θα καλείται αρχική τάση.

Οπότε η αξονική δύναμη θα είναι:

$$\vec{N}_{0,x} = \left(\boldsymbol{\tau}_{0,x}\right)_{11} A_0 \hat{x}_{0,1} \quad (5.4.13)$$

Ασφαλώς το μέτρο της θα είναι:

$$\mathbf{N}_{0,x} = \left( \boldsymbol{\tau}_{0,x} \Big|_{x_0} \right)_{11} A_0 \quad (5.4.14)$$

Άρα για  $n=0$  η (5.4.12) γράφεται:

$$U_m = L_m A_m \frac{E_{0,\varepsilon_{m0}} V_m}{2} \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{m0,x}^{(k)} \Big|_{x_m} \right)_{11}^2 + L_0 N_{0,x} \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{mn,x}^{(k)} \Big|_{x_m} \right)_{11} \quad (5.4.15)$$

Αφού:

$$\left( \boldsymbol{\varepsilon}_{mn,x}^{(k)} \Big|_{x_m} \right)_{11} = \frac{1}{k} (L_m^k L_0^{-k} - 1) \quad (5.4.16)$$

και

$$A_m = A_0 \left[ 1 + \nu_{0,\varepsilon_{m0}} V_m - \nu_{0,\varepsilon_{m0}} V_m L_m^k L_0^{-k} \right]^{\frac{2}{k}} \quad (5.4.17)$$

Η σχέση ανάμεσα στα μέτρα ελαστικότητας είναι:

$$E_{0,\varepsilon_{m0} V_0} = \det[\mathbf{A}_{m0}] E_{0,\varepsilon_{m0} V_m} \quad (5.4.18)$$

Οπότε η έκφραση της τροπικής ενέργειας είναι:

$$U_m = L_0 A_0 \frac{E_{0,\varepsilon_{m0} V_0}}{2} \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{m0}^{(k)} \Big|_{x_m} \right)_{11}^2 + L_0 N_0 \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{m0}^{(k)} \Big|_{x_m} \right)_{11} \quad (5.4.19)$$

Άρα αν γνωρίζουμε τις καταστατικές σταθερές στον  $C^0$  σχηματισμό στον όγκο  $V_0$  η τροπική ενέργεια δίνεται από την (5.4.19) μαζί με την (5.4.16). Αν γνωρίζουμε τα καταστατικά μεγέθη στον  $C^0$  σχηματισμό στον όγκο  $V_m$  (που προϋποθέτει ότι με κάποιον τρόπο τα έχουμε υπολογίσει αφού είμαστε σε κατάσταση παραμόρφωσης) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την (5.4.15), (5.4.16), (5.4.17). Στην 1<sup>η</sup> περίπτωση βλέπουμε ότι το  $\nu$  δεν εμφανίζεται στην έκφραση της τροπικής ενέργειας οπότε φαίνεται ότι δεν υπάρχει κάποια κινηματική δέσμευση στη διατομή του δικτυώματος. Δηλαδή η περιγραφή της κίνησης του δικτυώματος είναι ανεξάρτητη της αλλαγής της διατομής. Κάτι τέτοιο βέβαια είναι αδύνατο οπότε συνειδητοποιούμε ότι η επιρροή της αλλαγής της διατομής στην κίνηση του δικτυώματος περιέχεται στο  $\mathbf{E}_{0,\varepsilon_{m0} V_0}$ . Με άλλα λόγια αυτό πρέπει να καθοριστεί με τέτοιο τρόπο ώστε να συνυπολογίζονται οι πιθανές αλλαγές στη διατομή. Γι' αυτό θα θεωρούμε ότι  $E_{0,\varepsilon_{m0} V_0} = E_{0,\varepsilon_{m0} V_m}$  και έτσι οι (5.4.10), (5.4.15) θα είναι ίδιες.

Ας πάρουμε την περίπτωση του  $k=0$  θα έχουμε:

$$\left( \boldsymbol{\tau}_{m,x}^{(k)} \Big|_{x_m} \right)_{11} = E_{0,\varepsilon_{m0} V_m} \ln \left( \frac{L_m}{L_0} \right) \frac{L_0 N_{0,x}}{A_m L_m} \quad (5.4.20)$$

$$\left( \boldsymbol{\sigma}_{m0,x}^{(k)} \Big|_{x_m} \right)_{11} = E_{0,\varepsilon_{m0} V_0} \ln \left( \frac{L_m}{L_0} \right) \frac{N_{0,x}}{A_0} \quad (5.4.21)$$

Όπου  $\left(\boldsymbol{\sigma}_{m0,x}^{(k)}\right)_{11}$  είναι η τάση Kirchhoff:

$$\left(\boldsymbol{\sigma}_{m0,x}^{(k)}\right)_{11} = \frac{L_m A_m}{L_0 A_0} \left(\boldsymbol{\tau}_{m,x}^{(k)}\right)_{11} \quad (5.4.22)$$

Οπότε θα λέμε ότι αν η τάση Kirchhoff είναι γραμμικώς εξαρτημένη με την Λογαριθμική τροπή τότε εφαρμόζουμε την (5.4.19). Αν η τάση Cauchy είναι γραμμικώς εξαρτημένη με την Λογαριθμική τροπή τότε εφαρμόζουμε την (5.4.15).

Ας υποθέσουμε τώρα ότι γνωρίζουμε τα  $\nu_{0,\varepsilon m_0 V_m}$ ,  $E_{0,\varepsilon m_0 V_m}$  για  $k=0$ . Από την (5.4.19) παίρνουμε:

$$U_m = \frac{E_{0,\varepsilon m_0 V_0} L_0 A_0}{2} \left[ \ln\left(\frac{L_m}{L}\right) \right]^2 + L_0 N_0 \ln\left(\frac{L_m}{L}\right) \quad (5.4.23)$$

Ορίζουμε  $L_m = L_0 + \delta L$  δηλαδή το μήκος  $L_m$  θα είναι το φυσικό συν μία μικρή μεταβολή. Άρα η τροπική ενέργεια θα είναι:

$$U_m(L_0 + \delta L) = \frac{E_{0,\varepsilon m_0 V_0} L_0 A_0}{2} \left[ \ln\left(\frac{L_0 + \delta L}{L_0}\right) \right]^2 + L_0 N_0 \ln\left(\frac{L_0 + \delta L}{L_0}\right) \quad (5.4.24)$$

Από το 1<sup>ο</sup> θεώρημα Castigliano στην (5.4.24) θα έχουμε:

$$F_{\delta L} = \frac{\partial U_m(L_0 + \delta L)}{\partial \delta L} = \frac{E_{0,\varepsilon m_0 V_0} L_0 A_0}{L_m} \ln\left(\frac{L_m}{L_0}\right) + \frac{L_0 N_0}{L_m} \quad (5.4.25)$$

Όμως λόγω της (5.4.18) ισχύει:

$$L_0 A_0 E_{0,\varepsilon m_0 V_0} = L_m A_m E_{0,\varepsilon m_0 V_m} \quad (5.4.26)$$

Άρα η (5.4.25) γράφεται:

$$F_{\delta L} = E_{0,\varepsilon m_0 V_m} A_m \ln\left(\frac{L_m}{L_0}\right) + \frac{L_0 N_0}{L_m} \quad (5.4.27)$$

Έχουμε ήδη μία έκφραση για την αξονική δύναμη του δικτυώματος στον  $C^m$ .

$$N_{m,x} = \left(\boldsymbol{\tau}_{m,x}^{(k)}\right)_{11} A_m \quad (5.4.28)$$

Χρησιμοποιώντας την έκφραση του  $\left(\boldsymbol{\tau}_{m,x}^{(k)}\right)_{11}$  από την (5.4.20) στην (5.4.28) έχουμε:

$$N_{m,x} = E_{0,\varepsilon m_0 V_m} A_m \ln\left(\frac{L_m}{L_0}\right) + \frac{L_0 N_0}{L_m} \quad (5.4.29)$$

Είναι προφανές ότι  $F_{\delta L} = N_{m,x}$ . Και έτσι πετύχαμε μία έκφραση της δύναμης του δικτυώματος σε μεγάλες παραμορφώσεις που είναι σε κλειστή μορφή.

Από τη σχέση (5.4.17) για  $k=0$  παίρνουμε:

$$A_m = A_0 \left(\frac{L_m}{L_0}\right)^{-2\nu_{0,\varepsilon mn} V_m} \quad (5.4.30)$$

Άρα:

$$N_m = E_{0,\varepsilon m_0} V_m A_0 \left(\frac{L_m}{L_0}\right)^{-2\nu_{0,\varepsilon mn} V_m} \ln\left(\frac{L_m}{L_0}\right) + \frac{L_0 N_0}{L_m} \quad (5.4.31)$$

Που είναι η δύναμη δικτυώματος όταν χρησιμοποιείται η λογαριθμική τροπή.

Κλείνουμε την ανάπτυξη μας με το θέμα που αφορά τις επικόμβιες μετακινήσεις σε όρους συντεταγμένων.

$$L_0 = \left(\sum_{k=1}^3 (X_{0,k(j)} - X_{0,k(i)})^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.4.32)$$

$$L_m = \left(\sum_{k=1}^3 \left((X_{0,k(j)} - U_{m0,k(j)}) - (X_{0,k(i)} - U_{m0,k(i)})\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.4.33)$$

Όπου  $U_{m0,k(j)}, U_{m0,k(i)}$  είναι οι επικόμβιες μετακινήσεις στην  $C^0 \rightarrow C^m$  μετάβαση και εκφράζονται στο καθολικό  $X$  πλαίσιο. Η σύνδεση με τις δυνάμεις γίνεται με τις παρακάτω εξισώσεις:

$$F_{k(i)} = N_m \left(\frac{\Delta U_{m0,k} + \Delta X_{0,k}}{L_m}\right) \quad (5.4.34)$$

$$F_{k(j)} = -F_{k(i)} \quad (5.4.35)$$

Όπου:

$$\Delta U_{m0,k} = U_{m0,k(j)} - U_{m0,k(i)} \quad (5.4.36)$$

$$\Delta X_{0,k} = X_{0,k(j)} - X_{0,k(i)} \quad (5.4.37)$$

## Συμπεράσματα

Η διατύπωση μίας θεωρίας μεγάλων παραμορφώσεων απαιτεί μία αυστηρή εφαρμογή των αρχών της Γενικής Θεωρίας Συνεχών Μέσων. Παρουσιάσαμε τις κινηματικές του δικτυώματος που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη διατύπωση θεωρίας δικτυώματος για ένα γενικό τύπο υλικών. Η κλίση παραμόρφωσης του δικτυώματος παράχθηκε από τις πρώτες βασικές αρχές ενώ στη διαδικασία διάφορα ερωτήματα που αφορούν την κινηματική της διατομής αποσαφηνίστηκε και όλες οι κινηματικές παράμετροι απέκτησαν μία καθαρή γεωμετρική ερμηνεία.

Η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε χρησιμοποιεί στοιχεία της θεωρίας πολλαπλοτήτων που μας επιτρέπει να χειριστούμε τις κινηματικές της διαμήκους διεύθυνσης και της διατομής χωριστά. Μία ανάλογη προσέγγιση είναι δυνατόν να ακολουθηθεί και για τη διατύπωση θεωρίας και για άλλα πιο περίπλοκα δομικά στοιχεία.

Όσον αφορά γραμμικά ισότροπα υπερελαστικά υλικά βρήκαμε ότι υπάρχει μία σύζευξη (φυσικά αναμενόμενη) της συμπεριφοράς του δικτυώματος και των τροπών που αλλάζει η διατομή του ειδικά όταν η σύζευξη πραγματοποιείται σύμφωνα με τον τωρινό όγκο. Η ανάπτυξη αποκάλυψε τις ρίζες αυτής της σύνδεσης και έδειξε την αναγκαιότητα θεώρησης των τρισδιάστατων συνεχούς χαρακτήρα του δικτυώματος στη θεωρία μεγάλων παραμορφώσεων.

Γενικώς η διατομή του δικτυώματος μπορεί να αλλάζει κατά μήκος δύο ορθογωνίων διευθύνσεων. Αν οι καταστατικοί νόμοι που υιοθετήθηκαν και οι συνοριακές συνθήκες ικανοποιούνται με συνέπεια τότε η επιφάνεια της διατομής αναγκάζεται να εξαρτάται στην παράμετρο  $\nu$  και στο μήκος των στοιχείων. Αυτό το αποτέλεσμα δείχνει ότι για γραμμικά υπερελαστικά δικτυώματα η εξάρτηση από τις καταστατικές παραμέτρους της συναρτησιακής μορφής των τροπικών μεγεθών παράγει μία κινηματική δέσμευση για τη διατομή. Έτσι το δικτύωμα παύει πλέον να είναι ένα μονοδιάστατο στοιχείο όπως το γνωρίζουμε.