



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ ΚΑΙ ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΤΟΠΟΓΡΑΦΙΑΣ

Διπλωματική εργασία

Ταυτόχρονος προσδιορισμός αστρονομικών συντεταγμένων με τη μέθοδο ίσων υψών

Μπικέρης Παναγιώτης
Επιβλέπων καθηγητής: Ρωμύλος Κορακίτης

Αθήνα 2016

Περιεχόμενα

Περίληψη.....	i
Abstract.....	ii
Εισαγωγή	1

Μέρος Α

1.ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΓΕΩΔΑΙΤΙΚΗΣ ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΑΣ.....	3
1.1.Ουράνια σφαίρα	3
1.2.Συστήματα αναφοράς στην ουράνια σφαίρα.....	3
1.2.1.Ουρανογραφικό σύστημα.....	3
1.2.2.Αστρονομικό σύστημα	5
1.2.3.Οριζόντιο σύστημα.....	6
1.2.4.Ισημερινό σύστημα	8
1.2.5 Γήινα συστήματα αναφοράς.....	9
1.3.Φαινόμενη περιστροφή της ουράνιας σφαίρας.....	9
1.4.Τρίγωνο θέσης.....	10
1.5.Συστήματα χρόνου	11
1.5.1.Κλίμακες ανομοιόμορφου χρόνου.....	11
1.5.1.1.Αστρικός χρόνος.....	13
1.5.1.2.Παγκόσμιος χρόνος.....	13
1.5.2.Κλίμακες ομοιόμορφου χρόνου.....	13
1.5.2.1.Ατομικός χρόνος.....	14
1.5.2.2.Συντονισμένος Παγκόσμιος χρόνος.....	14
1.6.Διαταραχές κινήσεων της Γης	14
1.6.1.Μετάπτωση και κλόνηση	14
1.6.2.Κίνηση πόλου	16
1.7.Αστρονομική διάθλαση.....	16
2.ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΚΩΝ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ	20
2.1.Ανεξάρτητος προσδιορισμός συντεταγμένων	20
2.1.1.Προσδιορισμός αστρονομικού πλάτους.....	20
2.1.2.Προσδιορισμός αστρονομικού μήκους.....	21
2.2.Ταυτόχρονος προσδιορισμός αστρονομικών συντεταγμένων	23
2.2.1.Προσδιορισμός με μετρήσεις οριζοντίων γωνιών	23
2.2.2.Προσδιορισμός με μετρήσεις ζενίθων αποστάσεων.....	24

2.2.2.1.Γεωμετρική ερμηνεία ευθειών ύψους-Μέθοδος ίσων υψών.....	26
3.ΘΕΩΡΙΑ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΣΥΝΟΡΘΩΣΕΩΝ.....	31
3.1.Εισαγωγή.....	31
3.1.1.Πηγές και είδη σφαλμάτων.....	32
3.1.2.Αρχή της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων.....	32
3.2.Χαρακτηριστικές παράμετροι πληθυσμού.....	33
3.2.1.Κανονική κατανομή.....	33
3.2.2.Μέτρα ακρίβειας μετρήσεων-Διαστήματα εμπιστοσύνης.....	35
3.3.Άμεσες παρατηρήσεις μιας μεταβλητής.....	35
3.3.1.Ισοβαρείς παρατηρήσεις.....	36
3.3.2.Ανισοβαρείς παρατηρήσεις.....	37
3.4.Πολυδιάστατα μεγέθη.....	39
3.4.1.Χαρακτηριστικές παράμετροι.....	39
3.4.2.Χαρακτηριστικοί πίνακες.....	40
3.4.3.Νόμος μετάδοσης μεταβλητοτήτων.....	41
3.4.3.1.Περίπτωση γραμμικών σχέσεων.....	41
3.4.3.2.Περίπτωση μή γραμμικών σχέσεων.....	42
3.5.Συνορθώσεις.....	43
3.5.1.Μέθοδος των εμμέσων παρατηρήσεων.....	44
3.5.1.1.Εκτίμηση μεγεθών.....	44
3.5.1.2.Εκτίμηση μεγεθών πριν τη συνόρθωση.....	45
3.5.1.3.Εκτίμηση μεγεθών μετά τη συνόρθωση.....	45
3.5.2.Περίπτωση μή γραμμικών σχέσεων.....	47
3.6.Στατιστικοί έλεγχοι-Έλεγχοι υποθέσεων.....	48
3.6.1.Τεστ χ^2 -Διαστήματα εμπιστοσύνης.....	48
3.7.Εφαρμογή στη μέθοδο ίσων υψών.....	50
3.8.Ευστάθεια γραμμικών συστημάτων.....	53

Μέρος Β

4.ΒΑΣΙΚΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΤΙΚΑ ΕΡΓΑΛΕΙΑ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ.....	57
4.1.Εισαγωγή.....	57
4.2.Λειτουργία βασικών τμημάτων κώδικα.....	58
4.2.1.Επιλογή άστρων.....	58
4.2.2.Προσομοίωση τροχιάς.....	61
4.2.3.Διόρθωση λόγω διάθλασης.....	62

4.2.4.Αντίστροφη διόρθωση λόγω διάθλασης	62
4.2.5.Προσαρμογή πολυωνύμου	63
4.2.6.Συνόρθωση όλων των άστρων	65
5. ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ	68
5.1.Αρχικές παράμετροι	68
5.2.Αρχική επιλογή παραμέτρων	70
5.3. Αναζήτηση βέλτιστης κατανομής άστρων	71
5.4.Επιλογή των άστρων	73
6.ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΕΙΣ	77
6.1.Εισαγωγή	77
6.2.Είσοδος σφαλμάτων	77
6.2.1.Κώδικας εισόδου τυχαίων σφαλμάτων	78
6.3.Διαδικασία επεξεργασίας	79
6.4.Δοκιμές	80
6.4.1.Δεδομένα προσομοιώσεων	80
6.4.2.Αποτελέσματα προσομοιώσεων	83
6.4.2.1.Σφάλμα στη ζενίθια γωνία: 2"	84
6.4.2.2. Σφάλμα στη ζενίθια γωνία: 6"	91
6.5.Συμπεράσματα	99
7.ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ	101
7.1.Εξοπλισμός	101
7.2.Επικοινωνία γεωδαιτικού σταθμού και δέκτη του συστήματος GPS	101
7.3.Διαδικασία μετρήσεων	102
7.3.1.Προσανατολισμός γεωδαιτικού σταθμού	102
7.3.2.Αναγνώριση άστρων	102
7.3.3.Παρατηρήσεις άστρων	103
7.3.4.Καταγραφή θερμοκρασίας και πίεσης	104
7.4.Διορθώσεις του χρόνου παρατήρησης	104
7.4.1.Διόρθωση λόγω σφάλματος χρονομέτρου του γεωδαιτικού σταθμού	104
7.4.2.Διόρθωση λόγω καθυστέρησης στο χρόνο εκτέλεσης της καταγραφής	105
7.4.3.Διόρθωση λόγω καθυστέρησης αντίδρασης του παρατηρητή	105
7.5.Επεξεργασία μετρήσεων	106
8.ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΚΩΝ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ	109
8.1.Εισαγωγή	109

8.2.Μετρήσεις χρόνου	110
8.3.Σειρά μετρήσεων:31 Μαΐου	111
8.4.Σειρά μετρήσεων:14 Ιουνίου	116
9.ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ	124
9.1.Γενικά συμπεράσματα	124
9.2 Η γεωμετρία των παρατηρήσεων και επιλογή των άστρων	125
9.3 Προτάσεις	125
Βιβλιογραφία	128
Περιεχόμενα Πινάκων	129
Περιεχόμενα σχημάτων	130
Περιεχόμενα εικόνων	130
Παράρτημα	131

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία, μελετάται, αναπτύσσεται και αξιολογείται η μέθοδος ταυτόχρονου προσδιορισμού των αστρονομικών συντεταγμένων Φ , Λ ενός σημείου της Φ.Γ.Ε με μία παραλλαγή της μεθόδου μέτρησης ζενίθιων γωνιών, τη μέθοδο των ίσων υψών. Ο προσδιορισμός αυτός είναι εφικτός με την εφαρμογή συγκεκριμένης μεθοδολογίας αστρονομικών παρατηρήσεων, που προϋποθέτει την επικοινωνία σύγχρονου γεωδαιτικού σταθμού και δέκτη GPS, καθώς είναι απαραίτητη η ταυτόχρονη καταγραφή των οριζόντιων και κατακόρυφων γωνιών και των χρονικών στιγμών των παρατηρήσεων.

Η συγκεκριμένη μέθοδος προσδιορισμού του Φ και Λ , βασίζεται στην κίνηση των άστρων κατά την κατακόρυφη διεύθυνση. Ο κύριος περιορισμός της μεθόδου, δηλαδή η αστρονομική διάθλαση που επηρεάζει τις μετρήσεις απαλείφεται με τη μέτρηση άστρων σε ίδιο ύψος. Το μαθηματικό μοντέλο που την περιγράφει βασίζεται στον προσδιορισμό τη ζενίθιας γωνίας ενός άστρου μέσω της ωριαίας γωνίας.

Με την εφαρμογή της συνόρθωσης στον ταυτόχρονο προσδιορισμό και με κριτήριο την ευστάθεια του συστήματος επίλυσης, μετά από δοκιμαστικές επιλύσεις, γίνεται η επιλογή των βέλτιστων θέσεων των άστρων προς παρατήρηση. Έτσι, λοιπόν, για να ευνοείται ο προσδιορισμός των αγνώστων και για να υπάρχει πλεονασμός παρατηρήσεων, επιλέγεται να παρατηρηθούν 12 άστρα, στο ίδιο ύψος και διατεταγμένα κατά αζιμούθιο σε 3 τετράδες, ανά δύο συμμετρικά ως προς τον αστρονομικό μεσημβρινό και τον πρωτεύοντα κατακόρυφο κύκλο.

Για την υλοποίηση του προγράμματος παρατήρησης αλλά και την επεξεργασία των μετρήσεων, αναπτύχθηκαν αλγόριθμοι σε προγραμματιστικό περιβάλλον Η/Υ. Τα πειράματα με δεδομένα προσομοίωσης βοήθησαν στον έλεγχο της αξιοπιστίας του προγράμματος της επίλυσης, στην εκτίμηση των υπολογιστικών σφαλμάτων καθώς και στην ανάλυση της συμπεριφοράς του μαθηματικού μοντέλου που χρησιμοποιήθηκε στη συνόρθωση των παρατηρήσεων.

Η μεθοδολογία εφαρμόστηκε σε μία σειρά αστρονομικών παρατηρήσεων, που έγινε με σκοπό να ελεγχθούν οι δυνατότητες, τα σφάλματα και η αποτελεσματικότητα της μεθόδου. Από τα αποτελέσματα της επεξεργασίας αυτών των παρατηρήσεων, έγινε κατανοητό ότι η μεθοδολογία υστερεί σε ακρίβεια, σε σχέση με τις μεθόδους ανεξάρτητου προσδιορισμού του Φ και Λ , καθώς οι άγνωστοι προσδιορίζονται με σφάλμα της τάξης του δευτερολέπτου τόξου. Όμως, είναι αρκετά ευέλικτη και παρουσιάζει δυνατότητες βελτίωσης. Η ελαχιστοποίηση της επίδρασης της διάθλασης στις μετρήσεις αποτελεί ένα σημαντικό πλεονέκτημα της μεθόδου.

Abstract

In the present thesis, a method of simultaneous determination of astronomical latitude and longitude of a site is being studied, developed and evaluated. This determination is achieved by applying a particular methodology of astronomical observations, which requires the combination of a total station and a GPS receiver, because the simultaneous recording of horizontal angles, zenith angles and time of observations is essential. It is mainly designed to obtain the maximum amount of information from a single set of observations, economizing time spent in observation and computation.

This particular method builds on the vertical component of the stars' movement. The main limitation of the method, which is the astronomical refraction affecting measurements, is eliminated by measuring the stars at the same height. The mathematical model that describes it is based on determining the zenith angle of a star from the hour angle.

By applying the principles of adjustment of measurements on the simultaneous determination and in order to test the stability of the solution, after several trials, the selection of the best positions of stars is made. In order to have a redundancy of observations, it was decided to observe 12 stars at the same height and arranged in azimuth in four triads, two symmetrical with respect to the astronomical meridian and two to the primary vertical circle.

For the implementation of the observation program and the processing of the measurements, several algorithms were developed in the MATLAB programming environment. Experiments with simulated data helped to check the validity of the solution and the assessment of errors, as well as to analyze the behavior of the mathematical model used in the adjustment of measurements.

The methodology is applied in a series of astronomical observations, made with the aim to see the effectiveness of the method. From the results of the processing of these observations, it was understood that the method lacks precision, compared with the independent determination methods of Φ and Λ , as the unknowns are determined with an error of the order of a second of arc. However, it is quite flexible and has the potential for improvement. The minimization of the effect of refraction in the measurements is an important advantage of the method.

Εισαγωγή

Η Γεωδαισία είναι η επιστήμη που είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με τον Τοπογράφο Μηχανικό, μιας και ασχολείται με παρατηρήσεις, μετρήσεις και υπολογισμούς, με σκοπό να προσδιορίσει το σχήμα, το μέγεθος και το πεδίο βαρύτητας της Γης. Η Γεωδαιτική Αστρονομία ασχολείται με τον προσδιορισμό των διευθύνσεων στο χώρο από σημεία πάνω ή κοντά στη Φυσική Γήινη Επιφάνεια, χρησιμοποιώντας ουράνια σώματα ως στόχους, δηλαδή η μεθοδολογία και η πρακτική των παρατηρήσεων είναι γεωδαιτικής προέλευσης, ενώ το βασικό θεωρητικό υπόβαθρο προέρχεται από την Αστρονομία. Οι αστρονομικές παρατηρήσεις, ως εργαλείο της Γεωδαιτικής Αστρονομίας, αποβλέπουν στον προσδιορισμό των αστρονομικών συντεταγμένων ενός τόπου, καθώς και τον αστρονομικό προσανατολισμό μιας διεύθυνσης.

Με βάση τις δυνατότητες του υπάρχοντος εξοπλισμού μετρήσεων και την επιδιωκόμενη ακρίβεια, υπάρχουν διάφορες μέθοδοι προσδιορισμού των αστρονομικών συντεταγμένων (μήκους Λ και πλάτους Φ) είτε ανεξάρτητες είτε ταυτόχρονες. Ο προσδιορισμός αυτός γίνεται με μετρήσεις γωνιών και χρόνου προς άστρα, τα οποία βρίσκονται σε συγκεκριμένες θέσεις, πάνω στην ουράνια σφαίρα και κατάλληλη επεξεργασία των μετρήσεων αυτών. Βασικός στόχος της παρούσας εργασίας είναι να μελετήσει, να εφαρμόσει και να αξιολογήσει μια παραλλαγή μεθόδου ταυτόχρονου προσδιορισμού των αστρονομικών συντεταγμένων με μετρήσεις ζενίθιων γωνιών άστρων, που είχε διατυπωθεί παλαιότερα, προσαρμοσμένη, όμως, στις σημερινές δυνατότητες που προσφέρει ο σύγχρονος γεωδαιτικός εξοπλισμός και η τεχνογνωσία.

Το πρόβλημα της συγκεκριμένης μεθοδολογίας ταυτόχρονου προσδιορισμού των αστρονομικών συντεταγμένων παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, γιατί αναφέρεται σε μετρήσεις ζενίθιων γωνιών άστρων και είναι αρκετά σύνθετο, αφού το μαθηματικό μοντέλο που το περιγράφει περιλαμβάνει πολλές παραμέτρους, που επηρεάζουν την ακρίβεια των αποτελεσμάτων. Έτσι, λοιπόν, μελετώνται οι συνθήκες που ευνοούν τον ταυτόχρονο προσδιορισμό και αναφέρονται στον αριθμό των παρατηρούμενων άστρων, στη γεωμετρική κατανομή τους, στην επίδραση της διάθλασης κλπ και εξετάζεται η επίδρασή τους στην ακρίβεια της μεθόδου. Επιπλέον, γίνεται εκτίμηση των σφαλμάτων των μετρούμενων μεγεθών (ζενίθιες γωνίες και χρόνοι), των τελικών αποτελεσμάτων (αστρονομικές συντεταγμένες Φ , Λ) και των συμμεταβλητοτήτων τους.

Η πρακτική εφαρμογή της μεθοδολογίας είναι εφικτή με τον συνδυασμό των σύγχρονων γεωδαιτικών οργάνων και των συστημάτων εντοπισμού, αλλά και με την ανάπτυξη του κατάλληλου λογισμικού.

Η εργασία αποτελείται από δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος και στο πρώτο κεφάλαιο, γίνεται μια συνοπτική παρουσίαση των βασικών εννοιών της Γεωδαιτικής Αστρονομίας, συμπεριλαμβανομένων των αστρονομικών συστημάτων συντεταγμένων, των συστημάτων χρόνου και των μεταβολών των συντεταγμένων.

Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται αναφορά στις μεθόδους προσδιορισμού των αστρονομικών συντεταγμένων Φ , Λ , αναλύεται η συγκεκριμένη μέθοδος ταυτόχρονου προσδιορισμού με τη μέτρηση ζενιθίων γωνιών άστρων και παρουσιάζεται το μοντέλο που την περιγράφει. Στο τρίτο κεφάλαιο περιγράφονται λεπτομερώς οι μαθηματικοί τύποι που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των παραμέτρων του μοντέλου, με εφαρμογή της μεθόδου Ελαχίστων Τετραγώνων.

Στο δεύτερο μέρος αναλύεται η πρακτική εφαρμογή της συγκεκριμένης μεθοδολογίας παρατήρησης άστρων, με τη χρήση ενός σύγχρονου γεωδαιτικού σταθμού και ενός δέκτη του συστήματος GPS. Ειδικότερα, στο τέταρτο κεφάλαιο αναλύονται και περιγράφονται οι αλγόριθμοι της επεξεργασίας των δεδομένων. Στο πέμπτο κεφάλαιο περιγράφεται ο σχεδιασμός των παρατηρήσεων, δηλαδή η διαδικασία με την οποία επιλέχθηκαν τα κατάλληλα άστρα και ο αλγόριθμος του προγραμματισμού των παρατηρήσεων. Στο έκτο κεφάλαιο αναλύονται οι προσομοιώσεις που πραγματοποιήθηκαν. Στο έβδομο κεφάλαιο περιγράφεται η μέθοδος με την οποία έγιναν οι αστρονομικές παρατηρήσεις. Στο όγδοο κεφάλαιο καταγράφονται τα αποτελέσματα της επεξεργασίας των αστρονομικών παρατηρήσεων με τα αντίστοιχα συμπεράσματα που προέκυψαν από αυτά. Τέλος, στο ένατο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της μεθόδου που αναπτύχθηκε και γίνεται μια συνολική προσπάθεια ερμηνείας των αποτελεσμάτων που προέκυψαν.

Μέρος Α

1. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΓΕΩΔΑΙΤΙΚΗΣ ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΑΣ

1.1. Ουράνια σφαίρα

Σε αντίθεση με τη Γεωδαισία, η Γεωδαιτική Αστρονομία ασχολείται αποκλειστικά με διευθύνσεις, δηλαδή *ελεύθερα, μοναδιαία διανύσματα*. Για την περιγραφή τέτοιων διανυσμάτων μπορούν να χρησιμοποιηθούν ορθογώνιες (καρτεσιανές) συντεταγμένες (X, Y, Z), που έχουν μόνο **δύο** βαθμούς ελευθερίας. Συνήθως χρησιμοποιούνται σφαιρικές συντεταγμένες (Λ, Φ) σε ένα σύστημα που *προσανατολίζεται* στον χώρο βάσει του **γεωειδούς**, βασίζεται επομένως στο Γήινο πεδίο βαρύτητας. Αυτή η δυνατότητα επιλογής τύπου συντεταγμένων βασίζεται στην ισοδυναμία δύο απειροσυνόλων: του συνόλου όλων των μοναδιαίων διανυσμάτων (που εκφράζουν όλες τις δυνατές διευθύνσεις ευθειών στον χώρο) με το σύνολο των σημείων μιας σφαιρικής επιφάνειας.

Συνεπώς, η επιφάνεια αναφοράς της Γεωδαιτικής Αστρονομίας είναι μία μοναδιαία σφαίρα που μπορεί να βρίσκεται οπουδήποτε και να έχει οποιαδήποτε ακτίνα, την οποία δεχόμαστε ίση με την μονάδα. Αυτή η σφαίρα ονομάζεται παραδοσιακά **ουράνια σφαίρα** [Κορακίτης P., 2008]. Τα συστήματα αναφοράς, που ορίζονται στην ουράνια σφαίρα, προσανατολίζονται με βάση συγκεκριμένα χαρακτηριστικά της Γης και, ειδικότερα, των διαφόρων κινήσεών της. Με την βοήθεια των συστημάτων αυτών περιγράφεται η θέση σημείων (παρατηρητών) στην Γη, η θέση των ουρανίων σωμάτων και η διεύθυνση παρατήρησης προς αυτά.

1.2. Συστήματα αναφοράς στην ουράνια σφαίρα

Για την υλοποίηση ενός συστήματος αναφοράς, απαιτείται η επιλογή της βασικής ιδέας στην οποία στηρίζεται το σύστημα. Στη συνέχεια πρέπει να καθοριστεί η φυσική δομή του συστήματος (περίληψη των σωμάτων που συμμετέχουν στον ορισμό), η οποία θα πρέπει να επαληθεύει τη βασική ιδέα, με ταυτόχρονη απόδοση τιμών στις παραμέτρους που το περιγράφουν.

Για τη δόμηση ενός συστήματος αναφοράς στην ουράνια σφαίρα, είναι απαραίτητη η γνώση του προσανατολισμού του στο χώρο μέσω μιας βασικής διεύθυνσης ευθείας ή επιπέδου. Βασικό στοιχείο του συστήματος είναι ο μέγιστος κύκλος που ορίζεται από το επίπεδο αυτό ή που έχει ως πόλους το σημείο που αντιπροσωπεύει τη συγκεκριμένη διεύθυνση ευθείας και το αντιδιαμετρικό του. Από τους άπειρους μέγιστους κύκλους (κάθετους στο βασικό) που διέρχονται από τους πόλους, επιλέγεται αυθαίρετα ένας ως αφετηρία μέτρησης της πρώτης συντεταγμένης. Ο ορισμός του συστήματος ολοκληρώνεται με τον καθορισμό της φοράς μέτρησης των συντεταγμένων, καθώς και της μονάδας μέτρησής τους.

1.2.1. Ουρανογραφικό σύστημα

Το Ουρανογραφικό Σύστημα Αναφοράς (Celestial Reference System) χρησιμοποιείται για την περιγραφή της θέσης των ουρανίων σωμάτων. Η βασική διεύθυνση που το ορίζει είναι η διεύθυνση του διανύσματος της *γωνιακής ταχύτητας*

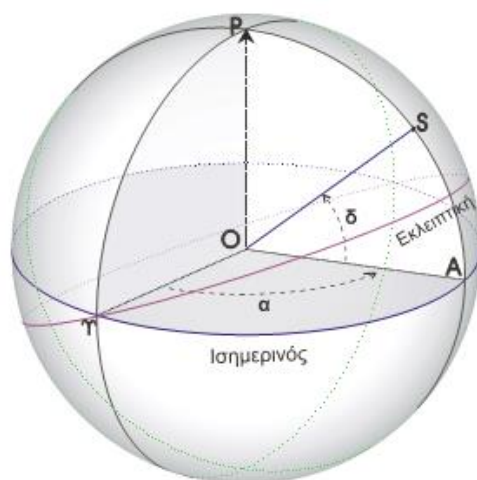
περιστροφής της Γης. Η διεύθυνση αυτή καθορίζει μια διάμετρο της ουράνιας σφαίρας που λέγεται και *άξονας του κόσμου*. Παράλληλη με αυτήν είναι η διεύθυνση του πραγματικού άξονα της ημερήσιας περιστροφής της Γης. Το σημείο της ουράνιας σφαίρας που αντιστοιχεί στο διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας (θετικό σε δεξιόστροφο σύστημα αναφοράς) λέγεται *Βόρειος Πόλος (North Pole)* του ουρανού, ενώ το αντιδιαμετρικό του λέγεται *Νότιος Πόλος (South Pole)*. Αν φανταστούμε την μοναδιαία ακτίνα της ουράνιας σφαίρας ίση με την ακτίνα της Γης, ο Βόρειος Πόλος του ουρανού θα αντιστοιχεί στον γεωγραφικό Βόρειο Πόλο.

Ο μέγιστος κύκλος της ουράνιας σφαίρας που έχει τους Πόλους του ουρανού ως γεωμετρικούς πόλους λέγεται *ουράνιος Ισημερινός (celestial Equator)* και είναι ο βασικός μέγιστος κύκλος του ουρανογραφικού συστήματος. Όλοι οι μέγιστοι κύκλοι που περνούν από τους ουράνιους Πόλους (είναι επομένως κάθετοι στον ουράνιο Ισημερινό) λέγονται *ωριαίοι κύκλοι (hour circles)* και ένας από αυτούς επιλέγεται ως αφετηρία των μετρήσεων. Η επιλογή αυτή βασίζεται στην δεύτερη σημαντική κίνηση της Γης, που είναι η ετήσια περιφορά της γύρω από τον Ήλιο.

Το επίπεδο της ελλειπτικής τροχιάς της Γης ορίζει στην ουράνια σφαίρα ένα μέγιστο κύκλο που λέγεται *Εκλειπτική (ecliptic)*. Ο κύκλος αυτός έχει μια κλίση περίπου 23.5° ως προς τον ουράνιο Ισημερινό (λόξωση της Εκλειπτικής – *obliquity of the ecliptic*) και, συνεπώς, τέμνει τον Ισημερινό σε δύο αντιδιαμετρικά σημεία, το *Εαρινό (γ)* και το *Φθινοπωρινό (γ')* *Ισημερινό σημείο (vernal & autumnal equinox)*. Από τα σημεία αυτά περνά ο Ήλιος κατά την εαρινή και φθινοπωρινή ισημερία, αντίστοιχα, ακολουθώντας την φαινόμενη ετήσια πορεία του πάνω στην Εκλειπτική.

Αφετηρία των μετρήσεων στο ουρανογραφικό σύστημα ορίζεται ο ωριαίος κύκλος που περνά από το Εαρινό Ισημερινό σημείο γ (ή πρώτο σημείο του Κριού - *vernal equinox* ή *first point of Aries*). Η πρώτη συντεταγμένη του συστήματος ονομάζεται *ορθή αναφορά α (right ascension)* και ορίζεται ως η διέδρη γωνία μεταξύ της αφετηρίας (ωριαίος του γ) και του ωριαίου του άστρου (γενικότερα, της διεύθυνσης που μας ενδιαφέρει). Η γωνία αυτή μετράται κατά την ορθή φορά (δηλαδή αντίθετα με τους δείκτες του ρολογιού, όπως παρατηρεί κανείς την ουράνια σφαίρα πάνω από τον Βόρειο Πόλο του ουρανού). Παραδοσιακά μετράται σε συμβατικές μονάδες γωνίας που λέγονται *ώρες*, από 0h ως 24h, αλλά στην εποχή μας και σε *μοίρες*, από 0° έως 360° . Προφανώς, η ορθή αναφορά μπορεί να μετρηθεί και ως τόξο του Ισημερινού μεταξύ των δύο ωριαίων (αντίστοιχη επίπεδη γωνία της διέδρου).

Η δεύτερη συντεταγμένη ονομάζεται *απόκλιση δ (declination)* και μετράται πάνω στον ωριαίο του άστρου, από τον Ισημερινό μέχρι το άστρο (είναι δηλαδή το μέτρο ενός τόξου του ωριαίου). Η απόκλιση μετράται σε *μοίρες*, από 0° ως $+90^\circ$ προς τον Βόρειο Πόλο (*Βόρειο ημισφαίριο* του ουρανού) και από 0° ως -90° προς τον Νότιο Πόλο (*Νότιο ημισφαίριο*).



Σχήμα 1.1: Ουρανογραφικό σύστημα συντεταγμένων

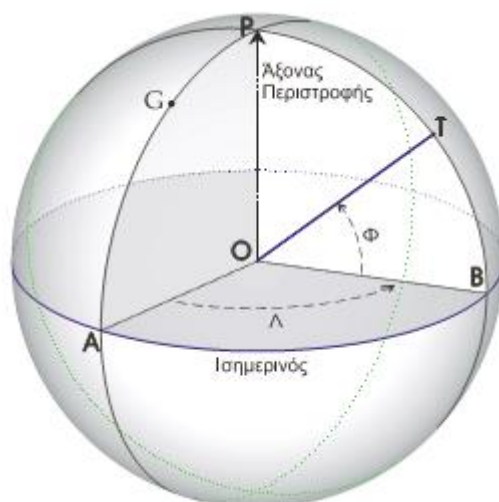
1.2.2. Αστρονομικό σύστημα

Το σύστημα αναφοράς που χρησιμοποιείται για την περιγραφή της θέσης των παρατηρητών (ή γενικότερα σημείων της Γης) είναι το **αστρονομικό (astronomical reference system)**. Η βασική διεύθυνση που το ορίζει είναι και πάλι η διεύθυνση του διανύσματος της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής της Γης, δηλαδή ο άξονας του κόσμου. Επομένως, ο βασικός μέγιστος κύκλος και αυτού του συστήματος είναι ο ουράνιος Ισημερινός. Οι μέγιστοι κύκλοι που περνούν από τους ουράνιους Πόλους λέγονται τώρα *μεσημβρινοί (meridians)* και ως αφετηρία των μετρήσεων επιλέγεται εκείνος που περιέχει το ζενίθ του Γκρήνουιτς (Greenwich) και ονομάζεται *πρωτεύων μεσημβρινός (prime meridian)*.

Στην Αστρονομία, ο όρος ‘θέση’ ενός σημείου **δεν** υπονοεί την *πραγματική του θέση* στην επιφάνεια της Γης (όπως συμβαίνει με τη γεωδαιτική χρήση του όρου) αλλά την *διεύθυνση* ενός διανύσματος, αντιπροσωπευτικού του σημείου αυτού. Σαν τέτοιο χαρακτηριστικό διάνυσμα χρησιμοποιείται η *διεύθυνση της κατακορύφου (direction of the vertical)*, που ορίζεται ως το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι αντίθετο με το διάνυσμα της *έντασης (επιτάχυνσης) του Γήινου πεδίου βαρύτητας* στο σημείο αυτό. Το σημείο της ουράνιας σφαίρας που αντιστοιχεί στο διάνυσμα της κατακορύφου ενός τόπου λέγεται *ζενίθ (zenith)* του τόπου και το αντιδιαμετρικό του σημείο λέγεται *ναδίρ (nadir)*. Από τον ορισμό αυτό προκύπτει πως, σε κάθε τόπο, το ζενίθ βρίσκεται ‘πάνω από το κεφάλι’ του παρατηρητή.

Οι συντεταγμένες στο αστρονομικό σύστημα ορίζονται όπως και στο ουρανογραφικό. Η πρώτη συντεταγμένη του συστήματος ονομάζεται *αστρονομικό μήκος Λ (astronomical longitude)* και ορίζεται ως η διεδρική γωνία (ή επίπεδη γωνία επί του Ισημερινού) μεταξύ της αφετηρίας (πρωτεύων μεσημβρινός) και του μεσημβρινού του τόπου. Η γωνία αυτή μετράται κατά την ορθή φορά σε *μοίρες*, από 0° ως 360° .

Η δεύτερη συντεταγμένη ονομάζεται *αστρονομικό πλάτος Φ (astronomical latitude)* και μετράται πάνω στον μεσημβρινό του τόπου, από τον Ισημερινό μέχρι το ζενίθ (είναι δηλαδή το μέτρο ενός τόξου του μεσημβρινού). Το πλάτος μετράται επίσης σε *μοίρες*, από 0° ως $+90^\circ$ προς τον Βόρειο Πόλο και από 0° ως -90° προς τον Νότιο Πόλο.



Σχήμα 1.2: Αστρονομικό σύστημα συντεταγμένων

Είναι προφανές ότι το αστρονομικό σύστημα ‘μοιράζεται’ τα ίδια ακριβώς γεωμετρικά χαρακτηριστικά με το ουρανογραφικό. Διαφέρουν όμως ως προς την αφετηρία μετρήσεων της πρώτης συντεταγμένης τους (ωριαίος του γ στο ουρανογραφικό και μεσημβρινός του Greenwich στο αστρονομικό). Αυτό σημαίνει ότι τα δύο συστήματα συνδέονται μέσω μιας μεταβαλλόμενης με το χρόνο γωνίας. Για την εύρεση της σχέσης των δύο συστημάτων, είναι λοιπόν αναγκαία η μέτρηση του χρόνου.

1.2.3.Οριζόντιο σύστημα

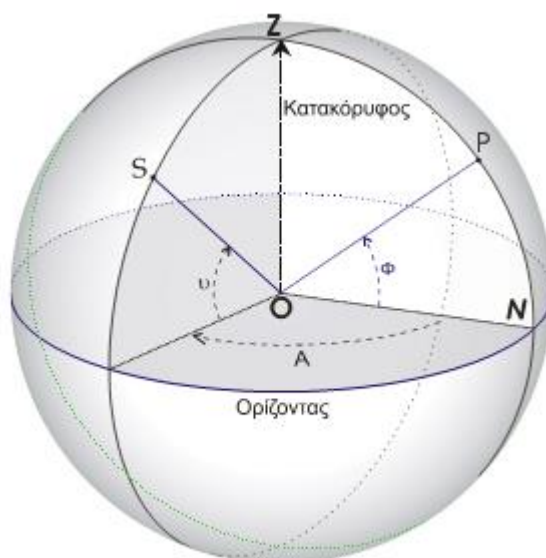
Το **τοπικό ή οριζόντιο** σύστημα (*horizon system*) χρησιμοποιείται για την περιγραφή της διεύθυνσης παρατήρησης προς ένα ουράνιο σώμα, όπως αυτό φαίνεται από ένα τόπο κάποια χρονική στιγμή. Αυτό είναι δηλαδή το σύστημα που περιγράφει τις μετρήσεις σε συγκεκριμένο τόπο και χρόνο.

Η βασική διεύθυνση που ορίζει το σύστημα είναι η *διεύθυνση της κατακορύφου* του τόπου, η οποία περιγράφηκε προηγουμένως. Ο βασικός μέγιστος κύκλος του συστήματος, που έχει ως γεωμετρικούς του πόλους το ζενίθ και το ναδίρ του τόπου, λέγεται *αστρονομικός ορίζοντας* (*astronomical horizon*) του τόπου. Οι μέγιστοι κύκλοι που περνούν από το ζενίθ και το ναδίρ (είναι συνεπώς κάθετοι στον ορίζοντα) ονομάζονται *κατακόρυφοι κύκλοι* (*vertical circles*). Ως αφετηρία των μετρήσεων επιλέγεται ο κατακόρυφος κύκλος που περιέχει το Βόρειο Πόλο του ουρανού, ο οποίος ονομάζεται *αστρονομικός μεσημβρινός* (*astronomical meridian*) του τόπου.

Η πρώτη συντεταγμένη του οριζόντιου συστήματος ονομάζεται *αστρονομικό αζιμούθιο* **A** (*astronomical azimuth*) και ορίζεται ως η διεδρη γωνία (ή ως επίπεδη γωνία επί του ορίζοντα) μεταξύ της αφετηρίας (αστρονομικός μεσημβρινός) και του κατακορύφου κύκλου της διεύθυνσης παρατήρησης. Η γωνία αυτή μετράται κατά την ανάδρομη φορά σε *μοίρες*, από 0° ως 360° (όπως γίνεται δηλαδή η μέτρηση των οριζοντίων γωνιών στην Τοπογραφία).

Η δεύτερη συντεταγμένη ονομάζεται *ύψος* ν (*altitude*) και μετράται πάνω στον κατακόρυφο κύκλο, από τον ορίζοντα μέχρι τη διεύθυνση παρατήρησης (είναι δηλαδή το μέτρο ενός τόξου του κατακορύφου κύκλου). Το ύψος μετράται σε *μοίρες*, από 0° ως $+90^\circ$ προς το ζενίθ (πάνω από τον ορίζοντα) και από 0° ως -90° προς το ναδίρ (κάτω από τον ορίζοντα). Πολλές φορές ως δεύτερη συντεταγμένη χρησιμοποιείται, αντί του ύψους, η *ζενίθια απόσταση* ή *ζενίθια γωνία* z (*zenith distance* or *zenith angle*), που είναι το τόξο του κατακορύφου κύκλου από το ζενίθ μέχρι την διεύθυνση παρατήρησης. Η ζενίθια απόσταση μετράται επίσης σε *μοίρες*, από 0° στο ζενίθ μέχρι 180° στο ναδίρ. Προφανώς, η ζενίθια απόσταση είναι συμπληρωματική γωνία του ύψους, ισχύει δηλαδή πάντα : $z = 90^\circ - \nu$.

Ο κατακόρυφος κύκλος που είναι κάθετος στον αστρονομικό μεσημβρινό λέγεται *πρωτεύων κατακόρυφος κύκλος* (*prime vertical*). Επειδή ο αστρονομικός μεσημβρινός τέμνει το επίπεδο του ορίζοντα στα σημεία *Βορράς* (*North*) με $A = 0^\circ$ και *Νότος* (*South*) με $A = 180^\circ$, ο *πρωτεύων κατακόρυφος κύκλος* τέμνει το επίπεδο του ορίζοντα στα σημεία *Ανατολή* (*East*) με $A = 90^\circ$ και *Δύση* (*West*) με $A = 270^\circ$.



Σχήμα 1.3: Οριζόντιο σύστημα συντεταγμένων

Από τον ορισμό του οριζόντιου συστήματος προκύπτει ότι οι οριζόντιες συντεταγμένες μιας διεύθυνσης παρατήρησης μπορούν να μετρηθούν όταν υλοποιηθεί το αντίστοιχο πλαίσιο αναφοράς με τη βοήθεια ενός θεοδόλιχου. Η υλοποίηση γίνεται με δύο συνθήκες:

- 1) Το θεοδόλιχο είναι οριζοντιωμένο, δηλαδή ο πρωτεύων άξονας περιστροφής του οργάνου είναι παράλληλος με την διεύθυνση της κατακορύφου (ο οριζόντιος δίσκος να βρίσκεται στο επίπεδο του αστρονομικού ορίζοντα).
- 2) Το θεοδόλιχο είναι προσανατολισμένο, δηλαδή η αφετηρία των οριζοντίων αναγνώσεων βρίσκεται στο κατακόρυφο επίπεδο του αστρονομικού μεσημβρινού του τόπου.

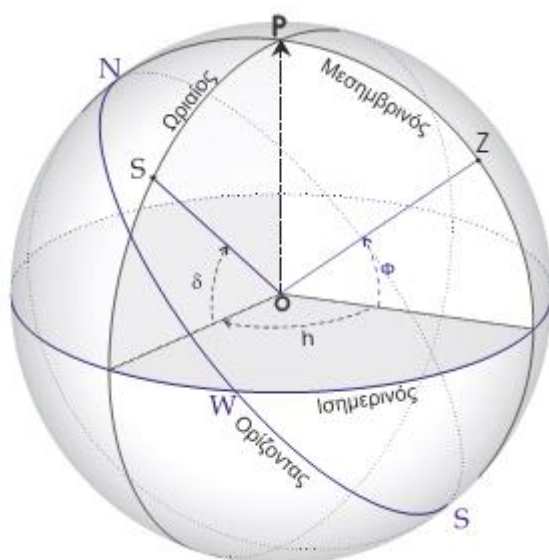
Η οριζοντίωση είναι απαραίτητη προϋπόθεση και εκτελείται πάντα πριν από την διεξαγωγή των μετρήσεων αλλά ο προσανατολισμός μπορεί να επιτευχθεί μόνο μετά από ειδική διαδικασία μετρήσεων και υπολογισμών.

1.2.4.Ισημερινό σύστημα

Για να συνδεθούν το ουρανογραφικό με το οριζόντιο σύστημα αναφοράς, γίνεται χρήση ενός ενδιάμεσου συστήματος. Αυτό είναι το λεγόμενο **Ισημερινό σύστημα** η **σύστημα ωριαίας γωνίας (hour angle system)**. Βασική διεύθυνση αυτού του συστήματος είναι ο άξονας του κόσμου και βασικό επίπεδο αυτό του Ισημερινού, που σημαίνει ότι η γεωμετρία του είναι ίδια με αυτή του ουρανογραφικού. Στο Ισημερινό σύστημα όμως ως αφετηρία μετρήσεων θεωρείται ο ωριαίος κύκλος που διέρχεται από το ζενίθ του τόπου (ο αστρονομικός μεσημβρινός).

Η πρώτη συντεταγμένη του ισημερινού συστήματος ονομάζεται **ωριαία γωνία h** (*hour angle*) και ορίζεται ως η διεδρη γωνία (ή η επίπεδη γωνία επί του ισημερινού) μεταξύ της αφετηρίας (αστρονομικός μεσημβρινός) και του ωριαίου κύκλου της διεύθυνσης παρατήρησης. Η γωνία αυτή μετράται κατά την ανάδρομη φορά σε *ώρες*, από 0h ως 24h.

Η δεύτερη συντεταγμένη είναι η **απόκλιση δ** (όπως στο ουρανογραφικό σύστημα), η οποία είναι ανεξάρτητη τόπου και χρόνου, ενώ η ωριαία γωνία εξαρτάται από τον τόπο και μεταβάλλεται με τον χρόνο.



Σχήμα 1.4:Ισημερινό σύστημα συντεταγμένων

1.2.5 Γήινα συστήματα αναφοράς

Γήινο ή Παγκόσμιο Σύστημα Αναφοράς καλείται κάθε σύστημα αναφοράς που έχει ως κέντρο του το κέντρο μάζας της γης, ως άξονα Z τον μέσο άξονα περιστροφής της, ως άξονα των X την κάθετη στον Z ευθεία που διέρχεται από το κέντρο της γης προς τον μεσημβρινό του Greenwich και τον άξονα Y κάθετο στο επίπεδο XZ . Τα συστήματα αναφοράς της γεωδαισίας είναι όλα εντοπισμένα στο χώρο και συνδέονται, όπως φαίνεται και από τον ορισμό τους, με τις φυσικές διαστάσεις της Γης, είναι δηλαδή προσκολλημένα στη Γη. Συνηθέστερη επιφάνεια αναφοράς είναι το ελλειψοειδές εκ περιστροφής με κέντρο το κέντρο μάζας της Γης και άξονα περιστροφής το μέσο άξονα περιστροφής της Γης. Η θέση ενός σημείου προσδιορίζεται με τρεις συντεταγμένες είτε ορθογώνιες (καρτεσιανές) (x,y,z) είτε ελλειπτικές (γεωδαιτικές) (λ,φ,h) και παραμένει σταθερή στο σύστημα αυτό, καθώς αυτό περιστρέφεται μαζί με τη Γη (είναι, επομένως, μη αδρανειακό).

Το γήινο σύστημα αναφοράς που χρησιμοποιείται σήμερα είναι το **Διεθνές Γήινο Σύστημα Αναφοράς (International Terrestrial Reference System)**, που ορίζεται με κέντρο το κέντρο μάζας της γης, με άξονα των Z να περνάει από το μέσο πόλο της περιόδου 1900 - 1905, που λέγεται *Διεθνής Συμβατική Αφετηρία (CIO - Conventional International Origin)*, με άξονα των X να περνάει από τον μεσημβρινό του Greenwich και άξονα των Y να συμπληρώνει το δεξιόστροφο σύστημα. Υλοποιείται με τις συντεταγμένες ενός μεγάλου αριθμού σταθμών που περιλαμβάνονται στο Διεθνές Γήινο Πλαίσιο Αναφοράς (International Terrestrial Reference Frame). Το ITRF βασίζεται σε μετρήσεις συγκεκριμένης εποχής (π.χ. ITRF 1996, Epoch 1997) και ορίζεται από τις θέσεις και τις ταχύτητες ενός δικτύου επίγειων σταθμών, οι οποίες έχουν προσδιοριστεί με μεγάλη ακρίβεια και παρακολουθούνται συνεχώς με μεθόδους δορυφορικής (GPS, SLR, LLR, DORIS) και διαστημικής (VLBI) γεωδαισίας.

1.3. Φαινόμενη περιστροφή της ουράνιας σφαίρας

Οι κινήσεις των ουρανίων σωμάτων οφείλονται πρωταρχικά στις κινήσεις της Γης. Η καθημερινή πορεία όλων των σωμάτων από ανατολή σε δύση, που ονομάζεται *φαινόμενη περιστροφή του ουρανού*, οφείλεται στην ημερήσια περιστροφή της Γης. Η πορεία της Σελήνης ανάμεσα στα άστρα οφείλεται στην περιφορά της γύρω από την Γη, ενώ η αντίστοιχη πορεία του Ήλιου αντανακλά την ετήσια περιφορά της Γης γύρω από τον Ήλιο.

Μεταφέροντας την εμπειρία αυτή στην περιγραφή των αλλαγών των διαφόρων διευθύνσεων παρατήρησης, όπως αυτές αντιστοιχούν σε σημεία της ουράνιας σφαίρας, αναφερόμαστε στην *φαινόμενη περιστροφή της ουράνιας σφαίρας* και σε διάφορα επιμέρους φαινόμενα, που σχετίζονται με τις αλλαγές αυτές.

Επειδή η φαινόμενη περιστροφή γίνεται γύρω από τον άξονα του κόσμου, κάθε σώμα που έχει σταθερές ουρανογραφικές συντεταγμένες (π.χ. ένα άστρο) φαίνεται να διαγράφει καθημερινά μια τροχιά στην ουράνια σφαίρα, που γίνεται κατά την ανάδρομη φορά και κατά μήκος ενός μικρού κύκλου παράλληλου στον ουράνιο Ισημερινό (κύκλος απόκλισης). Επομένως, η τροχιά αυτή παρουσιάζει, γενικά, μια κλίση ως προς τον ορίζοντα του τόπου παρατήρησης, η οποία αντιστοιχεί στην κλίση του ουρανογραφικού ως προς το οριζόντιο σύστημα του τόπου αυτού. Συνέπεια του

γεγονότος αυτού είναι η συνεχής μεταβολή των οριζόντιων συντεταγμένων ενός άστρου με τον χρόνο. Αντίθετα, οι ισημερινές συντεταγμένες παρουσιάζουν μια κανονικότητα: η απόκλιση παραμένει σταθερή και η ωριαία γωνία μεταβάλλεται ομαλά, σαν γραμμική συνάρτηση του χρόνου.

Συνέπεια του ορισμού του αστρονομικού μεσημβρινού είναι το γεγονός ότι αυτός αποτελεί επίπεδο συμμετρίας για τις τροχιές όλων των άστρων σε ένα τόπο. Επομένως, η άνω μεσουράνηση διχοτομεί, γεωμετρικά και χρονικά, το ημερήσιο τόξο ενός αμφιφανούς άστρου και, αντίστοιχα, η κάτω μεσουράνηση το νυκτερινό τόξο.

1.4. Τρίγωνο θέσης

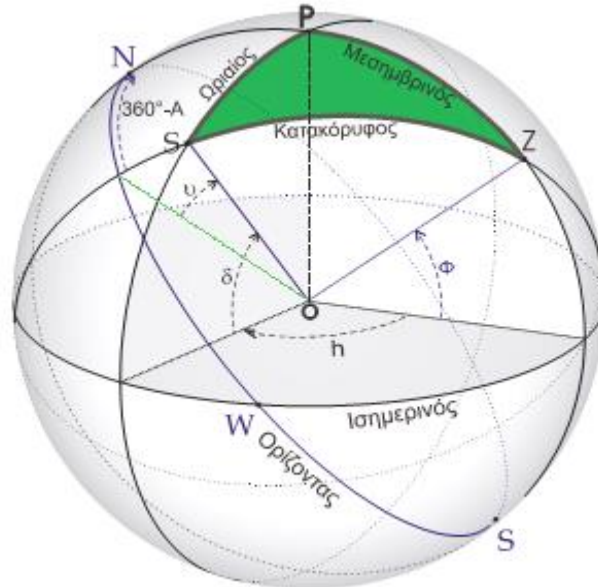
Γνωρίζοντας τις συντεταγμένες σε κάθε σύστημα, είναι απαραίτητο να προσδιοριστούν οι σχέσεις με τις οποίες θα μπορούν να γίνουν οι υπολογισμοί μεταξύ τους. Επειδή όλες οι συντεταγμένες μπορούν να εκφραστούν ως τόξα μέγιστων κύκλων στην ουράνια σφαίρα, οι σχέσεις αυτές προκύπτουν μέσω της σφαιρικής τριγωνομετρίας.

Αναζητώντας ένα τρόπο σύνδεσης των συστημάτων μεταξύ τους, άρα και των συντεταγμένων τους, γίνεται χρήση ενός σφαιρικού τριγώνου στην ουράνια σφαίρα, που ονομάζεται *τρίγωνο θέσης* (*position triangle* or *astronomical triangle*).

Οι κορυφές του τριγώνου θέσης είναι ο *ορατός Πόλος (P)* της ουράνιας σφαίρας (Βόρειος Πόλος για τόπους του βόρειου ημισφαιρίου), το *ζενίθ (Z)* του τόπου παρατήρησης και το *σημείο (S)* της ουράνιας σφαίρας στο οποίο αντιστοιχεί η διεύθυνση παρατήρησης (π.χ. ένα άστρο). Από αυτές, κινούμενη κορυφή είναι μόνο η S.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, οι πλευρές του τριγώνου είναι: το τόξο **ZP** του αστρονομικού μεσημβρινού του τόπου (σταθερό), το τόξο **ZS** του κατακόρυφου κύκλου του άστρου (μεταβλητό) και το τόξο **PS** του ωριαίου κύκλου του άστρου (μεταβλητό). Ανάλογα με τη θέση του άστρου ως προς τον μεσημβρινό του τόπου, το τρίγωνο θέσης μπορεί να χαρακτηρίζεται ως ανατολικό ή δυτικό.

Από τον ορισμό των συστημάτων αναφοράς, εύκολα συμπεραίνει κανείς ότι, για τα κύρια στοιχεία του τριγώνου θέσης προκύπτει για τις πλευρές: $ZP = 90^\circ - \Phi$, $ZS = 90^\circ - \nu = z$, $PS = 90^\circ - \delta$. Για τις γωνίες του τριγώνου προκύπτει: (P)=h (δυτικό τρίγωνο θέσης) ή (P)= 24h-h (για ανατολικό τρίγωνο θέσης), (Z)=A (για ανατολικό τρίγωνο θέσης) ή (Z)= 360° - A (για δυτικό τρίγωνο θέσης). Η γωνία (S) ονομάζεται *παραλλακτική γωνία p* (*parallactic angle*).



Σχήμα 1.4: Τρίγωνο θέσης

Με τη συσχέτιση των στοιχείων του τριγώνου με συντεταγμένες, μέσω της σφαιρικής τριγωνομετρίας προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\sin z \cdot \sin A = -\cos \delta \cdot \sin h \quad (1.1\alpha)$$

$$\cos z = \sin \delta \cdot \sin \Phi + \cos \delta \cdot \cos \Phi \cdot \cos h \quad (1.1\beta)$$

$$\sin z \cdot \cos A = \sin \delta \cdot \cos \Phi - \cos \delta \cdot \sin \Phi \cdot \cos h \quad (1.1\gamma)$$

$$\sin \delta = \cos z \cdot \sin \Phi + \sin z \cdot \cos \Phi \cdot \cos A \quad (1.1\delta)$$

$$\cos \delta \cdot \cos h = \cos z \cdot \cos \Phi - \sin z \cdot \sin \Phi \cdot \cos A \quad (1.1\epsilon)$$

1.5. Συστήματα χρόνου

1.5.1. Κλίμακες ανομοιόμορφου χρόνου

Με τον όρο αυτό, νοούνται οι κλίμακες χρόνου που δεν έχουν σταθερό μέτρο. Αυτό συμβαίνει διότι εκφράζουν την περιστροφή της Γης, η οποία δεν γίνεται ομαλά, αλλά μεταβάλλεται λόγω φυσικών αιτιών. Παρακάτω παρουσιάζονται οι δύο βασικές κλίμακες χρόνου, ο αστρικός (περιστροφή ως προς τα άστρα) και ο παγκόσμιος (περιστροφή ως προς τον Ήλιο).

1.5.1.1. Αστρικός χρόνος

Ο Αστρικός Χρόνος είναι μια άμεση μέτρηση της ημερήσιας περιστροφής της Γης. Ίσες γωνίες στροφής ισοδυναμούν με ίσα διαστήματα Αστρικού Χρόνου, έτσι ώστε ο Αστρικός Χρόνος να αντανακλά την πραγματική περιστροφή της Γης.

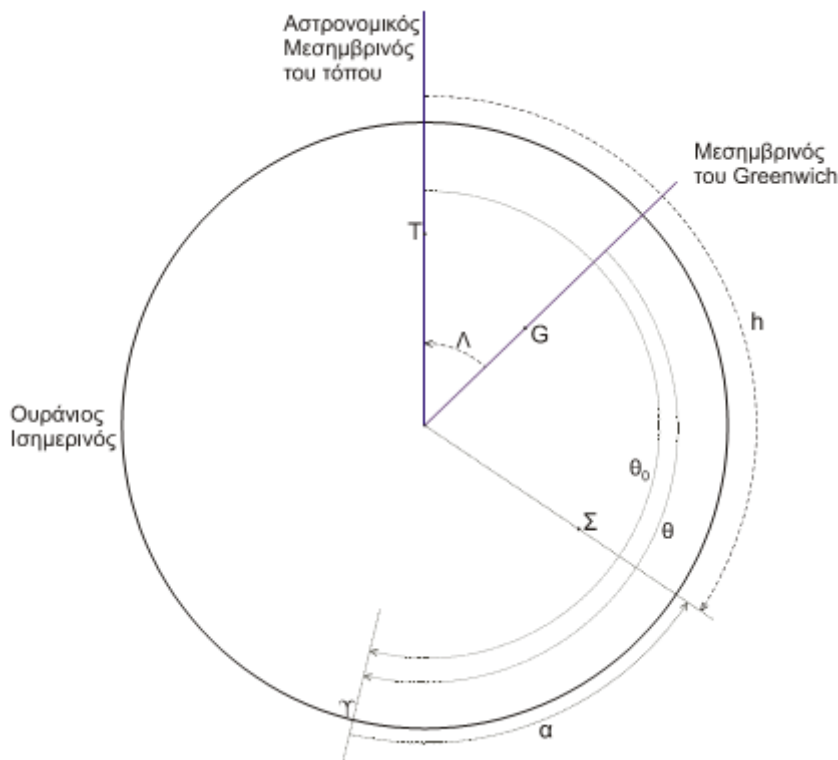
Ο τοπικός αστρικός χρόνος θ_0 (*Local Sidereal Time LST*) ισούται κάθε στιγμή με την ωριαία γωνία του σημείου γ (δηλαδή την γωνία μεταξύ του αστρονομικού μεσημβρινού και του ωριαίου κύκλου του γ). Αν ο μεσημβρινός του τόπου είναι ο πρώτος μεσημβρινός (Greenwich), τότε ο χρόνος που προκύπτει λέγεται *αστρικός χρόνος Greenwich* θ (*Greenwich Sidereal Time GST*).

Η βασική μονάδα μέτρησης του αστρικού χρόνου είναι η *μέση αστρική ημέρα* (*Mean Sidereal Day*), που είναι το χρονικό διάστημα που χρειάζεται για να αυξηθεί η τιμή του μέσου αστρικού χρόνου Greenwich κατά 24h. Η αστρική ημέρα χωρίζεται σε 24 αστρικές ώρες, κάθε ώρα σε 60 λεπτά και κάθε λεπτό σε 60 δευτερόλεπτα.

Από τον ορισμό της ορθής αναφοράς ενός άστρου προκύπτει πως, όταν ένα άστρο περνά από τον μεσημβρινό (άνω μεσουράνηση), εκείνη τη στιγμή η ωριαία γωνία του h είναι όση η ορθή αναφορά α του άστρου. Επομένως, ο προσδιορισμός του τοπικού αστρικού χρόνου μπορεί να γίνει μέσω μεσημβρινών διαβάσεων άστρων με γνωστή ορθή αναφορά.

Γενικότερα, όταν στο Greenwich η ωριαία γωνία του άστρου είναι h_G , την ίδια στιγμή στον τόπο T η ωριαία γωνία του άστρου είναι $h = h_G + \Lambda$ (από τον ορισμό του Λ). Αν, αντί ενός άστρου, αναφερθούμε στο σημείο γ , προκύπτει πως ο τοπικός αστρικός χρόνος θ_0 είναι ίσος με $\theta + \Lambda$ όπου θ αστρικός χρόνος Greenwich. Επίσης, για οποιοδήποτε τόπο, ένα άστρο έχει ωριαία γωνία $h = \theta_0 - \alpha$. Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω, προκύπτει η γενική σχέση:

$$h = \theta + \Lambda - \alpha \quad (1.2)$$



Σχήμα 1.5: Προβολή στο επίπεδο του ουρανού Ισημερινού [Κορακίτης P., 2008]

1.5.1.2. Παγκόσμιος χρόνος

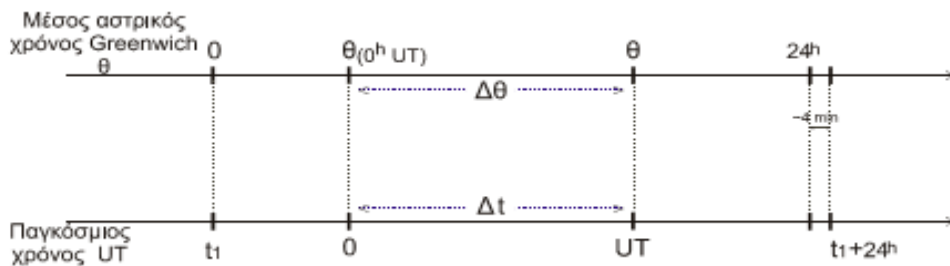
Λόγω της αναγκαιότητας ύπαρξης ενός συστήματος χρόνου που να συμβαδίζει με την εναλλαγή ημέρας και νύχτας (καθημερινή κίνηση Ήλιου), καθιερώθηκε ο **Παγκόσμιος Χρόνος (Universal Time)**, που βασίστηκε στη μέση κίνηση του Ήλιου.

Μονάδα μέτρησης του Παγκόσμιου Χρόνου είναι η **μέση ηλιακή ημέρα (mean solar day)**, που χωρίζεται σε 24 ηλιακές ώρες, κάθε ώρα σε 60 ηλιακά λεπτά και κάθε λεπτό σε 60 ηλιακά δευτερόλεπτα. Με άλλα λόγια, η μέση ηλιακή ημέρα (που έχει 86400 ηλιακά δευτερόλεπτα) είναι το χρονικό διάστημα ανάμεσα σε δύο διαδοχικές στιγμές 0h UT1.

Σε αντίθεση με τον Αστρικό Χρόνο, που βασίστηκε στην κίνηση της Γης ως προς τα άστρα, ο Παγκόσμιος Χρόνος βασίστηκε στην κίνηση της Γης ως προς το μέσο Ήλιο. Λόγω της κίνησης του Μέσου Ήλιου πάνω στην εκλειπτική, η μέση αστρική και η μέση ηλιακή ημέρα διαφέρουν χρονικά, καθώς μια επιπλέον μικρή στροφή της Γης (περίπου 1 μοίρα) απαιτείται για να ολοκληρωθεί η μέση ηλιακή ημέρα. Εκφράζοντας τα μήκη της μέσης αστρικής και της μέσης ηλιακής ημέρας σε αστρικά δευτερόλεπτα (86400 η μέση αστρική και 86636.5553679051 η μέση ηλιακή), προκύπτει ο λόγος:

$$f = 86636.5553679051 / 86400 = 1.00273790935075$$

Η μετατροπή των ενδείξεων των δύο κλιμάκων χρόνου γίνεται εύκολα, με την βοήθεια του λόγου f των μονάδων μέτρησης και της αντιστοιχίας σε κάποια γνωστή χρονική στιγμή, όπως είναι η στιγμή 0h UT κάθε μέρας.



Σχήμα 1.6: Συσχέτιση μέσου αστρικού χρόνου Greenwich και Παγκόσμιου χρόνου

Όπως φαίνεται και στο παραπάνω διάγραμμα, η χρονική στιγμή UT Παγκόσμιου Χρόνου και η αντίστοιχη στιγμή θ μέσου αστρικού χρόνου Greenwich συνδέονται με την σχέση:

$$\theta = \theta_{0h\ UT} + UT \cdot f \quad (1.3)$$

Με την σχέση αυτή μπορεί να γίνει μετατροπή Παγκόσμιου Χρόνου σε αστρικό και αντίστροφα.

1.5.2.Κλίμακες ομοιόμορφου χρόνου

Με τον όρο αυτό, νοούνται οι κλίμακες χρόνου που έχουν σταθερό μέτρο (ανεξαρτησία από την περιστροφή της Γης). Ως μονάδα των κλιμάκων χρόνου σταθερού μέτρου χρησιμοποιείται το δευτερόλεπτο του συστήματος SI (ορισμός μέσω χρονομέτρησης ατομικού φαινομένου). Από τη στιγμή που ο ορισμός αναφέρεται σε ένα παρατηρήσιμο φαινόμενο, μπορεί να εφαρμοστεί σε κάθε σύστημα αναφοράς.

1.5.2.1.Ατομικός χρόνος

Ο Διεθνής **Ατομικός Χρόνος** (**Temps Atomique International**) είναι μια πρακτική κλίμακα χρόνου που βασίζεται στον ορισμό του δευτερολέπτου SI. Εκπληρώνει τις απαιτήσεις σε ακρίβεια, μακροπρόθεσμη σταθερότητα και αξιοπιστία. Το δευτερόλεπτο SI και ο TAI χρησιμοποιούνται ως βάση για παρεμβολή και πρόβλεψη σε άλλες κλίμακες χρόνου.

Ο TAI είναι μία κλίμακα χρόνου που έχει ως μονάδα της το δευτερόλεπτο SI στο γεωειδές. Ο TAI προκύπτει από την ανάγνωση πολλών ατομικών χρονομέτρων, κατανεμημένων σε όλη τη Γη, μέσω μιας συγκεκριμένης στατιστικής διαδικασίας, αφού αφαιρεθούν οι συστηματικές διαφορές αναμεσά τους (συντονισμένη κλίμακα).

Ο χρόνος TAI μπορεί να επεκταθεί σε οποιοδήποτε σταθερό ή κινούμενο σημείο κοντά στο γεωειδές εφαρμόζοντας τις διορθώσεις της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας (διορθώσεις για τις διαφορές στο βαρυτικό δυναμικό, για την ταχύτητα και για την περιστροφή της Γης).

1.5.2.2.Συντονισμένος παγκόσμιος χρόνος

Ο **Συντονισμένος Παγκόσμιος Χρόνος** (**Universal Time Coordinated**), προκύπτει μέσω του TAI. Πιο συγκεκριμένα, ο χρόνος UTC πρέπει να πληροί τις ακόλουθες προϋποθέσεις :

$$|TAI - UTC| = n \text{ sec} , \text{ όπου } n \text{ ακέραιος αριθμός και } |UT1 - UTC| \leq 0.9 \text{ sec}$$

Ο χρόνος UTC υπολογίζεται από τον Ατομικό Χρόνο TAI μέσω της σχέσης :
 $UTC = TAI - (10 + \text{εμβόλιμα δευτερόλεπτα})$

Εξαιτίας της αιώνιας επιβράδυνσης της περιστροφής της Γης, η κλίμακα UTC συντηρείται με την εισαγωγή ενός ακέραιου *εμβόλιμου δευτερολέπτου (leap second)* όποτε απαιτείται.

Ο Συντονισμένος Παγκόσμιος Χρόνος UTC συμβαδίζει με τον παραδοσιακό ηλιακό χρόνο στον μεσημβρινό του Greenwich. Για να διατηρηθεί αυτή η συμφωνία και σε άλλα μέρη, η Γη έχει χωριστεί σε 24 ζώνες, με πλάτος 15° γεωγραφικού μήκους η κάθε μια, και σε κάθε ζώνη ισχύει ο **Πολιτικός Χρόνος** ή **Χρόνος ζώνης (Zone Time)** που διαφέρει από τον UTC ένα ακέραιο αριθμό ωρών. Για παράδειγμα, η Ελλάδα έχει Χρόνο Ζώνης UTC+ 2h , ενώ η θερινή ώρα Ελλάδας είναι UTC+ 3h.

1.6. Διαταραχές κινήσεων της Γης

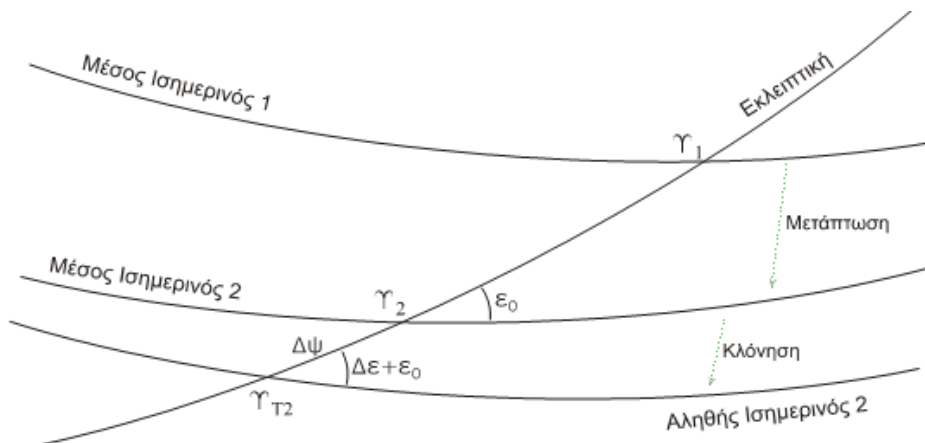
1.6.1. Μετάπτωση και κλόνηση

Οι διαταραχές της διεύθυνσης του άξονα περιστροφής της Γης στον χώρο είναι η *μετάπτωση* (*precession*) και η *κλόνηση* (*nutation*). Η γνώση των φαινομένων αυτών είναι θεμελιώδους σημασίας γιατί ο άξονας περιστροφής της Γης αποτελεί την βασική διεύθυνση του ουρανογραφικού και του αστρονομικού συστήματος.

Η μετάπτωση και η κλόνηση οφείλονται σε συνδυασμό ελκτικών δυνάμεων από τον Ήλιο και τη Σελήνη, οι οποίες προκαλούν ροπές κάθετες στην στροφορμή της Γης. Η γήινη κλόνηση είναι πολύπλοκη, λόγω του συνδυασμού δυνάμεων που ασκούνται, λόγω του σχήματος της Γης που δεν είναι απόλυτα συμμετρικό, λόγω της εσωτερικής δομής της Γης και λόγω της ύπαρξης του ρευστού πυρήνα.

Το πεπλατυσμένο σχήμα της Γης και η κλίση του άξονα περιστροφής της ως προς το επίπεδο της εκλειπτικής δημιουργούν τις συνθήκες ώστε οι ελκτικές δυνάμεις του Ήλιου και της Σελήνης να προκαλούν την εμφάνιση μιας ροπής στη Γη που τείνει να στρέψει τον άξονά της ώστε να γίνει κάθετος στο επίπεδο της τροχιάς. Επειδή όμως η Γη περιστρέφεται, το αποτέλεσμα αυτής της ροπής είναι μετατόπιση του άξονα περιστροφής της Γης στο χώρο έτσι ώστε να διαγράφει μια κωνική επιφάνεια γύρω από τον άξονα της εκλειπτικής, όπως θα έκανε ο άξονας μιας σβούρας. Η κίνηση αυτή είναι πολύ αργή, με μια περίοδο περίπου 25800 ετών. Η κίνηση αυτή μπορεί να αναλυθεί σε δυο διαφορετικά φαινόμενα. Το πρώτο είναι μια ομαλή κυκλική κίνηση του μέσου άξονα περιστροφής γύρω από τον άξονα της εκλειπτικής (*μετάπτωση*) και το δεύτερο μια ταλάντωση του αληθούς άξονα γύρω από το μέσο άξονα (*κλόνηση*). Η ταλάντωση αυτή είναι σύνθεση πολλών αρμονικών όρων, από τους οποίους ο κυριότερος έχει πλάτος 9.2 δευτερόλεπτα τόξου και περίοδο 18.6 χρόνια.

Επειδή το ουρανογραφικό σύστημα βασίζεται στην διεύθυνση του άξονα περιστροφής της Γης, είναι φανερό ότι επηρεάζεται από την μετάπτωση και την κλόνηση. Ειδικότερα, η κίνηση του Ισημερινού προκαλεί μια σύνθετη στροφή του συστήματος και μια μετακίνηση του σημείου γ . Το σταθερό μέρος της κίνησης, που οφείλεται στην μετάπτωση, προσδιορίζει το **μέσο ισημερινό σημείο γ** , που είναι η τομή του μέσου ισημερινού και της εκλειπτικής και μετακινείται περίπου 50.3 δευτερόλεπτα τόξου τον χρόνο κατά την ανάδρομη φορά. Όταν προστεθεί και το περιοδικό μέρος της κίνησης, που οφείλεται στην κλόνηση, προσδιορίζεται το **αληθινό ισημερινό σημείο γ_T** , που είναι η τομή του αληθούς ισημερινού και της εκλειπτικής. Η διαφορά ανάμεσα στα σημεία γ και γ_T , εκφρασμένη σε μονάδες χρόνου, λέγεται *εξίσωση των ισημεριών* (*Equation of the equinox Eq.E*). Κατά συνέπεια, διακρίνουμε **μέσο** (*mean*) και **αληθή** (*true*) αστρικό χρόνο, ανάλογα με το σημείο γ που αναφερόμαστε.



Σχήμα 1.7:Μετάπτωση, κλόνιση και μεταβολή αστρικού χρόνου

Αντίστοιχα, οι ουρανογραφικές συντεταγμένες διακρίνονται σε **μέσες συντεταγμένες**, αν αναφέρονται σ' ένα σύστημα που επηρεάζεται μόνο από την μετάπτωση, και σε **αληθείς συντεταγμένες**, αν αναφέρονται σε σύστημα που επηρεάζεται και από την κλόνιση.

1.6.2.Κίνηση πόλου

Η κίνηση του πόλου (polar motion) είναι η ψευδοπεριοδική μετατόπιση της διεύθυνσης του στιγμιαίου άξονα περιστροφής της Γης (αληθούς ουράνιου πόλου) ως προς ένα σημείο αναφοράς σταθερό στο στερεό φλοιό της Γης, το οποίο συνήθως επιλέγεται να είναι κοντά στη μέση θέση του αληθούς πόλου. Στο σημείο αυτό, το οποίο ονομάζεται Συμβατικός Πόλος, αναφέρονται οι απόλυτες γεωδαιτικές και αστρονομικές συντεταγμένες, οπότε αυτές επηρεάζονται από το φαινόμενο της κίνησης του πόλου. Η κίνηση αυτή οφείλεται στις επιδράσεις των δυνάμεων που ασκούνται από τη Σελήνη και τον Ήλιο και γεωφυσικές διαδικασίες που λαμβάνουν χώρα στην ατμόσφαιρα, στους ωκεανούς και στο εσωτερικό της Γης. Σύμφωνα με το μοντέλο των Euler-Chandler, ο άξονας περιστροφής της Γης κινείται αφ' ενός σχεδόν κυκλικά πραγματοποιώντας ελεύθερη ταλάντωση με περίοδο 1.2 χρόνια και αφ' ετέρου ελλειπτικά με μία εξαναγκασμένη ετήσια κίνηση.

Η κίνηση του Πόλου παρακολουθείται από την Διεθνή Υπηρεσία για την Περιστροφή της Γης (IERS), η οποία συντάσσει ειδικό δελτίο που περιέχει τις συντεταγμένες X_p , Y_p του Πόλου καθημερινά, καθώς και πρόβλεψη για το επόμενο διάστημα (συνήθως 30 ή 90 ημερών). Οι συντεταγμένες αυτές αναφέρονται σε ένα δεξιόστροφο σύστημα αναφοράς με κέντρο τη Διεθνή Συμβατική Αφετηρία, που ορίζεται ως η μέση θέση του πόλου περιστροφής κατά την περίοδο 1900-1905. Ο άξονας x του συστήματος έχει τη διεύθυνση του μεσημβρινού του Greenwich και ο άξονας y σχηματίζει γωνία 90° προς τα ανατολικά του άξονα x . Οι συντεταγμένες X_p , Y_p ανήκουν στις παραμέτρους προσανατολισμού της Γης.

Οι αστρονομικές συντεταγμένες Λ και Φ , όπως προσδιορίζονται από τις αστρονομικές παρατηρήσεις αναφέρονται στον αληθή (στιγμιαίο) πόλο της ημερομηνίας. Για να χρησιμοποιηθούν σε γεωδαιτικές εφαρμογές πρέπει να αναχθούν στο Συμβατικό Πόλο (CIO) του γήινου συστήματος. Η αναγωγή αυτή γίνεται από τις σχέσεις:

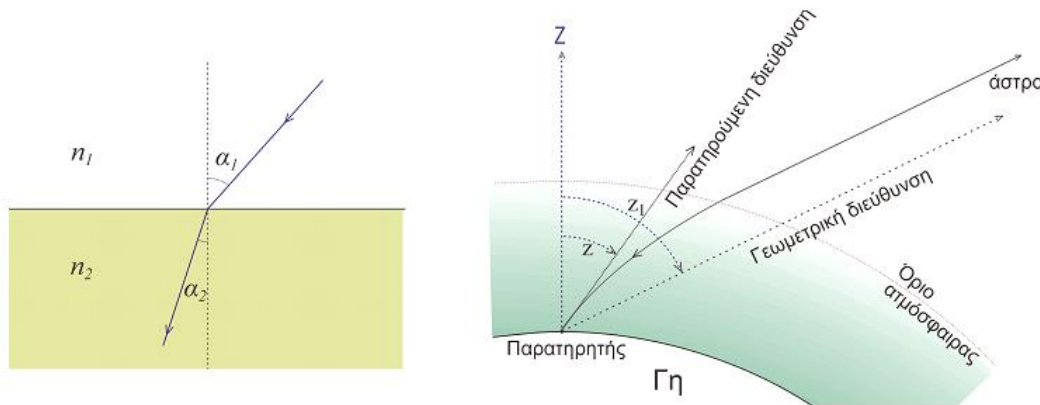
$$\Phi_{CIO} = \Phi - (Xp \cdot \cos\Lambda - Yp \cdot \sin\Lambda) \quad (1.4\alpha)$$

$$\Lambda_{CIO} = \Lambda - (Xp \cdot \sin\Lambda + Yp \cdot \cos\Lambda) \cdot \tan\Phi \quad (1.4\beta)$$

1.7. Αστρονομική διάθλαση

Ανάμεσα σ' ένα άστρο και έναν παρατηρητή στην επιφάνεια της Γης παρεμβάλλεται η ατμόσφαιρα, στην οποία το φως κινείται με ελαφρά μικρότερη ταχύτητα απ' ότι στο κενό. Γι' αυτό, η πορεία μιας φωτεινής ακτίνας από το άστρο προς τον παρατηρητή δεν παραμένει ευθύγραμμη. Η ατμόσφαιρα της Γης, όμως, δεν είναι ομογενές μέσο σ' όλη την έκτασή της: η πυκνότητά της μεταβάλλεται και, επιπλέον, επηρεάζεται από τις συνθήκες πίεσης και θερμοκρασίας. Συνεπώς, ο (τοπικός) δείκτης διάθλασης και το μέγεθος της εκτροπής της φωτεινής ακτίνας δεν μπορεί να υπολογιστεί με ακρίβεια.

Παρ' όλα αυτά, ένας προσεγγιστικός υπολογισμός της εκτροπής είναι δυνατόν να γίνει, με βάση το νόμο του Schnell, τα γενικά χαρακτηριστικά της ατμόσφαιρας (ατμοσφαιρικά μοντέλα) και τις τοπικές συνθήκες, στην θέση του παρατηρητή. Τα κύρια χαρακτηριστικά που αξιοποιούνται είναι: η σφαιρική συμμετρία και η συνεχής ελάττωση της πυκνότητας (επομένως και του δείκτη διάθλασης) με το υψόμετρο. Αποτέλεσμα αυτών είναι η βαθμιαία καμπύλωση της φωτεινής ακτίνας, με τα κοίλα προς τα κάτω, όσο αυτή πλησιάζει τον παρατηρητή στην επιφάνεια της Γης.



Σχήμα 1.8: Αστρονομική διάθλαση στην παρατήρηση άστρου

Η ζενίθια απόσταση z_1 , στην οποία θα έβλεπε ο παρατηρητής το άστρο αν δεν υπήρχε η ατμόσφαιρα (γεωμετρική θέση του άστρου) είναι μεγαλύτερη από αυτήν που παρατηρεί στην πραγματικότητα (γωνία z), η οποία προσδιορίζεται από την εφαπτομένη στην πορεία της φωτεινής ακτίνας στο σημείο που βρίσκεται ο παρατηρητής. Η διαφορά:

$$R = z - z_1 \quad (1.5)$$

των δύο γωνιών ονομάζεται *αστρονομική διάθλαση (astronomical refraction)* και είναι η γωνία που πρέπει να προστεθεί στην παρατηρούμενη τιμή της ζενίθιας απόστασης για να προκύψει η πραγματική (γεωμετρική) τιμή της.

Για κανονικές ατμοσφαιρικές συνθήκες ($p = 1013.25\text{mbar}$ και $\theta = 0^\circ \text{ C}$), για μονοχρωματικό κίτρινο φως ($\lambda = 0.58 \mu\text{m}$, στην περιοχή της μέγιστης ευαισθησίας του ανθρώπινου ματιού) και για ζενίθιες αποστάσεις μέχρι 70° , η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$R_0 = 60'' \cdot 28 \tan z - 0'' \cdot 0669 \tan^3 z \quad (1.6)$$

Η σχέση αυτή δίνει την κανονική αστρονομική διάθλαση. Η πραγματική διάθλαση μπορεί να υπολογιστεί, με την βοήθεια του νόμου των τελείων αερίων, από την σχέση:

$$R = R_0 \cdot \left(\frac{p}{1013.25} \right) \cdot \left(\frac{273}{(273 + \theta)} \right) \quad (1.7)$$

όπου R_0 είναι η κανονική διάθλαση, p η ατμοσφαιρική πίεση στο σημείο παρατήρησης (εκφρασμένη σε mbar) και θ η θερμοκρασία στο ίδιο σημείο (εκφρασμένη σε βαθμούς Κελσίου).

2. ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΚΩΝ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

2.1. Ανεξάρτητος προσδιορισμός συντεταγμένων

Οι παρακάτω μέθοδοι αναφέρονται στον προσδιορισμό των αστρονομικών συντεταγμένων του τόπου παρατήρησης, ξεχωριστά για κάθε συντεταγμένη. Με αυτό τον τρόπο ο υπολογισμός τους είναι ανεξάρτητος και η λύσεις τους δεν αλληλοεπηρεάζονται. Πρέπει να σημειωθεί ότι ο ανεξάρτητος προσδιορισμός συντεταγμένων αφορά κυρίως τη διαδικασία επεξεργασίας των μετρήσεων, χωρίς αυτό να συνεπάγεται και διαχωρισμό των μετρήσεων (διαφοροποίηση ως προς τη διαδικασία επεξεργασίας αλλά με την ίδια σειρά μετρήσεων). Συνέπεια των παραπάνω, είναι το γεγονός ότι οι μέθοδοι αυτοί επιτυγχάνουν προσδιορισμό συντεταγμένων μεγάλης ακρίβειας.

2.1.1. Προσδιορισμός αστρονομικού πλάτους

Το αστρονομικό πλάτος τόπου υπολογίζεται από το τρίγωνο θέσης με γνωστά τρία στοιχεία του. Η βασική σχέση που χρησιμοποιείται είναι η:

$$\cos z = \sin \delta \cdot \sin \Phi + \cos \delta \cdot \cos \Phi \cdot \cos h \quad (2.1)$$

Η σχέση αυτή συνδέει το ζητούμενο αστρονομικό πλάτος με τρία στοιχεία του τριγώνου θέσης, την απόκλιση δ (γνωστή), τη ζενίθια απόσταση z (μετρούμενη) και την ωριαία γωνία (υπολογιζόμενη μέσω μέτρησης του χρόνου). Από την διερεύνηση της μετάδοσης των σφαλμάτων προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\delta \Phi_z = \left(\frac{-1}{\cos A} \right) \cdot \delta z \quad (2.2)$$

$$\delta \Phi_h = -\cos \Phi \cdot \tan A \cdot \delta h \quad (2.3)$$

Από την αναζήτηση των ευνοϊκότερων συνθηκών παρατήρησης (όταν οι επιδράσεις των σφαλμάτων ελαχιστοποιούνται), προκύπτει ότι η παρατήρηση του άστρου πρέπει να γίνεται όταν αυτό διέρχεται από τον μεσημβρινό του τόπου ή κοντά σε αυτόν. Επί πλέον, την στιγμή της μεσημβρινής διάβασης, το τρίγωνο θέσης εκφυλίζεται σε μια τριάδα τόξων του μεσημβρινού που σχετίζονται μεταξύ τους με απλές αλγεβρικές σχέσεις, στις οποίες δεν υπεισέρχεται η ωριαία γωνία.

Στη περίπτωση της παρατήρησης μεσημβρινών διαβάσεων άστρων, είναι:

$\Phi = \delta - z$, για την περίπτωση άνω μεσουράνησης βόρεια του ζενίθ.

$\Phi = \delta + z$, για την περίπτωση άνω μεσουράνησης νότια του ζενίθ.

Οι σχέσεις αυτές συνεπάγονται ότι $\delta \Phi = \pm \delta z$ (δ χωρίς σφάλμα). Επειδή το μεγαλύτερο μέρος ενός πιθανού σφάλματος δz οφείλεται στην διόρθωση για την αστρονομική διάθλαση, η επίδρασή του μπορεί να εξαλειφθεί αν παρατηρηθεί ένα

ζευγάρι άστρων, που να μεσουρανούν εκατέρωθεν του ζενίθ στην ίδια απόσταση και με μικρή διαφορά χρόνου (ώστε να είναι ίδια η διόρθωση της διάθλασης).

Άμεση εφαρμογή των αρχών αυτών γίνεται κατά τον προσδιορισμό πλάτους με την μέθοδο Sterneck (η πιο συνηθισμένη μέθοδος). Στην μέθοδο αυτή παρατηρούνται πολλά ζεύγη άστρων (48 ως 72 άστρα κάθε νύκτα), χωρισμένα σε ομάδες (συνήθως έξι), έτσι ώστε να υπάρχει έλεγχος και διόρθωση των συστηματικών σφαλμάτων του οργάνου. Κάθε ζευγάρι άστρων (βόρειο N και νότιο S) δίνει μια τιμή για το πλάτος, από την σχέση:

$$\Phi = \left(\frac{\delta_N + \delta_S}{2}\right) + \left(\frac{z_S - z_N}{2}\right) \quad (2.4)$$

Οι σύγχρονοι γεωδαιτικοί σταθμοί (total stations), που έχουν δυνατότητα για αυτόματη ψηφιακή ανάγνωση και καταγραφή των γωνιών, επιτρέπουν τη λήψη μεγάλου πλήθους παρατηρήσεων κάθε άστρου γύρω από τη μεσημβρινή του διάβαση. Η ζενίθια γωνία τη στιγμή της διάβασης μπορεί να υπολογιστεί με προσαρμογή πολυωνύμου άρτιου βαθμού στα μετρημένα ζεύγη τιμών (ΟΓ, z). Με τον τρόπο αυτό μειώνονται δραστικά τα τυχαία σφάλματα της παρατήρησης κάθε μεσουράνησης.

2.1.2. Προσδιορισμός αστρονομικού μήκους

Ο προσδιορισμός του μήκους ισοδυναμεί με τον προσδιορισμό του τοπικού αστρικού χρόνου θ_o και την συσχέτισή του με τον αστρικό χρόνο Greenwich θ την ίδια στιγμή:

$$\Lambda = \theta_o - \theta \quad (2.5)$$

Ο αστρικός χρόνος Greenwich θ υπολογίζεται, συνήθως, από τον Συντονισμένο Παγκόσμιο Χρόνο την στιγμή της παρατήρησης, ο οποίος μπορεί να προκύψει με ακρίβεια από τις ενδείξεις ενός συγχρονισμένου χρονομέτρου. Απομένει λοιπόν ο προσδιορισμός του τοπικού αστρικού χρόνου θ_o , που γίνεται από την ωριαία γωνία h ενός άστρου με γνωστή ορθή αναφορά α , με την βοήθεια της σχέσης: $\theta_o = \alpha + h$.

Η ωριαία γωνία υπολογίζεται από το τρίγωνο θέσης του άστρου, στο οποίο είναι γνωστά τα στοιχεία: πλάτος Φ , απόκλιση δ και είτε η ζενίθια απόσταση z είτε το αζιμούθιο A . Συνήθως μετράται η ζενίθια απόσταση και τότε η ωριαία γωνία δίνεται από την σχέση:

$$h = \arccos\left(\frac{\cos z - \sin \delta \cdot \sin \Phi}{\cos \delta \cdot \cos \Phi}\right) \quad (2.6)$$

Για τον προσδιορισμό των ευνοϊκότερων συνθηκών παρατήρησης πρέπει να εξεταστούν οι επιδράσεις των σφαλμάτων, που στην περίπτωση αυτή προέρχονται

από τα σφάλματα δz και $\delta\Phi$. Για τον υπολογισμό τους, σχηματίζουμε τα μερικά διαφορικά της παραπάνω σχέσης και, μετά από κάποιες αντικαταστάσεις, προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\delta h_{\Phi} = \frac{-\delta\Phi}{(\tan A \cdot \cos\Phi)} \quad (2.7)$$

$$\delta h_z = \frac{-\delta z}{(\sin A \cdot \cos\Phi)} \quad (2.8)$$

Από τις σχέσεις αυτές βγαίνει το συμπέρασμα ότι η επίδραση των σφαλμάτων γίνεται ελάχιστη όταν $A = 90^\circ$ ή $A = 270^\circ$ (πρωτεύοντας κατακόρυφος κύκλος). Επομένως, ο προσδιορισμός του μήκους (μέσω ωριαίας γωνίας) με μέτρηση της ζενίθιας απόστασης πρέπει να γίνεται σε ζεύγη άστρων, ανατολικά και δυτικά του μεσημβρινού, την στιγμή της διάβασής τους από τον πρωτεύοντα κατακόρυφο κύκλο.

Για μεγαλύτερη ακρίβεια (προσδιορισμός πρώτης τάξεως), τότε ο προσδιορισμός του τοπικού αστρικού χρόνου γίνεται με χρονομέτρηση των μεσημβρινών διαβάσεων των άστρων, οπότε ισχύει $h = 0h$ ή $h = 12h$ (εξ ορισμού) και, φυσικά, $\delta h = 0$.

Στην περίπτωση αυτή, το κύριο συστηματικό σφάλμα είναι το σφάλμα προσανατολισμού δA του θεοδόλιχου στον μεσημβρινό. Αυτό έχει σαν συνέπεια την λανθασμένη εκτίμηση του τοπικού αστρικού χρόνου και μάλιστα με μη γραμμικό τρόπο.

Η κλασική μέθοδος υπολογισμού του αστρονομικού μήκους είναι η μέθοδος Mayer. Στο πλαίσιο αυτής της μεθόδου, γίνονται παρατηρήσεις (χρονομετρήσεις) της άνω μεσημβρινής διάβασης άστρων, βόρεια και νότια του ζενίθ, βασισμένες σε έναν προσεγγιστικό προσανατολισμό του θεοδόλιχου στον μεσημβρινό. Θεωρώντας το λάθος προσανατολισμού δA θετικό αν το μηδέν των αναγνώσεων του θεοδόλιχου βρίσκεται ανατολικά του αστρονομικού Βορρά, τότε η χρονομέτρηση των διαβάσεων γίνεται νωρίτερα (για βόρεια μεσουράνηση) ή αργότερα (για νότια μεσουράνηση) από την πραγματική χρονική στιγμή (εκείνη δηλαδή που αντιστοιχεί στην αληθινή θέση του μεσημβρινού του τόπου).

Υπολογίζοντας, επομένως, μια τιμή $\Lambda_i = \alpha_i - \theta_i$ για το μήκος από κάθε μεσουράνηση, θα υπάρχει συστηματική αλλά μεταβλητή επίδραση του σφάλματος $\delta\theta_i$, όπως περιγράφηκε παραπάνω. Η καλύτερη εκτίμηση για το μήκος Λ , όπως και για το σφάλμα προσανατολισμού δA , δίνεται από συνόρθωση των εξισώσεων παρατήρησης:

$$\Lambda_i = \alpha_i - \theta_i = \Lambda + A_i \cdot \delta A \quad (2.9)$$

Οι εξισώσεις αυτές έχουν τη μορφή εξίσωσης ευθείας. Σ' ένα διάγραμμα (A_i, Λ_i) τα σημεία που εκφράζουν τις μετρήσεις βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία, η κλίση της

οποίας δίνει το σφάλμα προσανατολισμού δA . Η τομή της ευθείας αυτής με τον άξονα των Λ (δηλαδή όταν $A_i = 0$) δίνει την καλύτερη εκτίμηση του μήκους A .

Η ύπαρξη συστηματικού σφάλματος στην εκτίμηση του αστρικού χρόνου Greenwich θ της μεσουράνησης κάθε άστρου, που μπορεί να προέλθει από σφάλμα του χρονομέτρου, προκαλεί ένα ισόποσο σφάλμα στην τιμή του αστρονομικού μήκους που δεν είναι δυνατόν να απαλειφθεί.

Οι σύγχρονοι ψηφιακοί γεωδαιτικοί σταθμοί επιτρέπουν τη λήψη μεγάλου πλήθους παρατηρήσεων κάθε άστρου γύρω από την μεσημβρινή του διάβαση. Με καταγραφή και του χρόνου κάθε παρατήρησης (συνήθως σε UTC), η χρονική στιγμή της μεσουράνησης μπορεί να υπολογιστεί με προσαρμογή πολυωνύμου στα ζεύγη τιμών (ΟΓ, χρόνος). Με τον τρόπο αυτό μειώνονται δραστικά τα τυχαία σφάλματα της χρονομέτρησης κάθε μεσουράνησης.

2.2. Ταυτόχρονος προσδιορισμός αστρονομικών συντεταγμένων

Αντίθετα με τις μεθόδους ανεξάρτητου προσδιορισμού αστρονομικών συντεταγμένων, με τις παρακάτω μεθόδους υπολογίζονται οι συντεταγμένες ταυτόχρονα. Αυτό σημαίνει τη χρήση των ίδιων μετρήσεων και διαδικασίας επεξεργασίας και επίλυσης. Πλεονέκτημα των μεθόδων αυτών είναι η εξοικονόμηση χρόνου στη διαδικασία των μετρήσεων και επεξεργασίας τους [Mueller, 1977]. Ωστόσο, οι μέθοδοι αυτοί επιτυγχάνουν προσδιορισμό συντεταγμένων δεύτερης τάξεως και σε ορισμένες περιπτώσεις πρώτης τάξεως.

2.2.1. Προσδιορισμός με μετρήσεις οριζοντίων γωνιών

Η μέθοδος αυτή ταυτόχρονου προσδιορισμού μήκους και πλάτους βασίζεται στην κίνηση των άστρων κατά την οριζόντια διεύθυνση. Από τη στιγμή που οι γεωδαιτικοί σταθμοί παρέχουν περισσότερη ακρίβεια στη μέτρηση οριζόντιων γωνιών παρά στις κατακόρυφες και εφόσον η διάθλαση δεν επηρεάζει τις μετρήσεις, η μέθοδος αυτή είναι ενδιαφέρουσα [Αθανασοπούλου, 2013].

Από τη σχέση προσδιορισμού του αζιμουθίου ενός άστρου:

$$\tan A = \frac{-\cos \delta \cdot \sinh}{\sin \delta \cdot \cos \Phi - \cos \delta \cdot \sin \Phi \cdot \cosh} \quad (2.10)$$

όπου $h = \theta + \Lambda - \alpha$, μπορεί να προκύψουν οι εξισώσεις των σφαλμάτων δA_Φ και δA_h , δηλαδή ως προς το πλάτος και των ωριαία γωνία αντίστοιχα, καθώς οι ουρανογραφικές συντεταγμένες των άστρων θεωρούνται χωρίς σφάλμα και δεν επηρεάζουν την ακρίβεια υπολογισμού του αζιμουθίου A .

Από τον υπολογισμό των σφαλμάτων (σε ωριαία γωνία και αστρονομικό πλάτος):

$$\delta A_h = \cos \Phi \cdot (\tan \Phi - \cot z \cdot \cos A) \cdot \delta h \quad (2.11\alpha)$$

$$\delta A_\Phi = \sin A \cdot \cot z \cdot \delta \Phi \quad (2.11\beta)$$

Θεωρώντας ότι το σφάλμα δh προέρχεται από σφάλμα $\delta \Lambda$ στη προσεγγιστική τιμή του μήκους Λ , καταλήγουμε στην:

$$\delta A = \sin A_o \cdot \cot z_o \cdot \delta \Phi + (\tan \Phi_o - \cos A_o \cdot \cot z_o) \cdot \delta \Lambda \cdot \cos \Phi_o \quad (2.12)$$

όπου : $\delta \Phi = \Phi - \Phi_o$, $\delta \Lambda = \Lambda - \Lambda_o$, $\delta A = A - A_o$.

Στις παραπάνω σχέσεις τα Φ_o, Λ_o είναι οι προσεγγιστικές τιμές του πλάτους και του μήκους του τόπου παρατήρησης, A είναι το παρατηρούμενο αζιμουθίο του κάθε άστρου, A_o και z_o οι προσεγγιστικές τιμές του αζιμουθίου και της ζενίθιας απόστασης αντίστοιχα όπως υπολογίζονται από τις εξισώσεις της σφαιρικής τριγωνομετρίας στο τρίγωνο θέσης για $\Phi = \Phi_o$ και $\Lambda = \Lambda_o$:

$$h_{oi} = \theta_i + \Lambda_o - \alpha_i \quad (2.13)$$

$$A_{oi} = \arctan\left(\frac{-\sinh \delta_i}{\cos \Phi_o \cdot \tan \delta_i - \sin \Phi_o \cdot \cosh \delta_i}\right) \quad (2.14)$$

$$z_{oi} = \arcsin\left(\frac{-\cos \delta_i \cdot \sinh \delta_i}{\sin A_{oi}}\right) \quad (2.15)$$

Οι ουρανογραφικές συντεταγμένες α, δ για κάθε άστρο είναι γνωστές, ενώ υπεισέρχεται ένα σφάλμα προσανατολισμού στη σχέση του αζιμουθίου κάθε άστρου $\delta \alpha = A - (\text{οριζόντια γωνία άστρου})$. Η τελική μορφή της σχέσης είναι επομένως:

$$\delta A = \sin A_o \cdot \cot z_o \cdot \delta \Phi + (\tan \Phi_o - \cos A_o \cdot \cot z_o) \cdot \delta \Lambda \cdot \cos \Phi_o + \delta \alpha \quad (2.16)$$

Η σχέση αυτή αποτελεί την εξίσωση παρατήρησης για την συνόρθωση των μετρήσεων, που είναι οριζόντιες γωνίες και χρονικές στιγμές των παρατηρήσεων, και για τον υπολογισμό των αγνώστων $\delta \Phi, \delta \Lambda (= \delta h)$ και $\delta \alpha$.

2.2.2. Προσδιορισμός με μετρήσεις ζενίθιων αποστάσεων

Η μέθοδος αυτή αφορά τον ταυτόχρονο προσδιορισμό των αστρονομικών συντεταγμένων με παρατηρήσεις των άστρων στην κατακόρυφη διεύθυνση. Για το λόγο αυτό αποκαλείται και μέθοδος των ευθειών ύψους.

Η ακρίβεια των μετρήσεων είναι μεγαλύτερη με τη χρήση σύγχρονων γεωδαιτικών οργάνων (πολλαπλές σκοπεύσεις) στην υλοποίηση της μεθόδου. Ωστόσο, το μεγάλο πρόβλημα της μεθόδου είναι ο επηρεασμός των μετρήσεων ζενίθιας γωνίας από την αστρονομική διάθλαση και το συστηματικό σφάλμα που υπεισέρχεται σε αυτές. Στην

προσπάθεια βελτίωσης της ακρίβειας του αποτελέσματος, η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται με παραλλαγές.

Από τις σχέσεις του τριγώνου θέσης, η σχέση που συνδέει τα ζητούμενα μεγέθη (Φ, Λ) με τις συντεταγμένες του άστρου (α, δ -γνωστά και χωρίς σφάλμα), και τα μετρούμενα μεγέθη (ζενίθια γωνία z διορθωμένη από διάθλαση και αστρικός χρόνος θ) είναι:

$$\cos z = \sin \delta \cdot \sin \Phi + \cos \delta \cdot \cos \Phi \cdot \cos(\theta + \Lambda - \alpha) \quad (2.17)$$

Αν οι προσεγγιστικές αστρονομικές συντεταγμένες είναι Φ_o, Λ_o , τότε ισχύει:

$$\Phi = \Phi_o + \Delta\Phi \quad (2.18)$$

$$\Lambda = \Lambda_o + \Delta\Lambda \quad (2.19)$$

Θεωρούνται γνωστές οι σχέσεις από το τρίγωνο θέσης:

$$\sin z \cdot \sin A = -\cos \delta \cdot \sinh \quad (2.20)$$

$$\sin z \cdot \cos A = \sin \delta \cdot \cos \Phi - \cos \delta \cdot \cosh \cdot \sin \Phi \quad (2.21)$$

Με γραμμικοποίηση της σχέσης (2.17) (ανάπτυγμα Taylor με αφαίρεση των όρων δεύτερης ή μεγαλύτερης τάξης) και αντικατάσταση σε αυτή των σχέσεων (2.18), (2.19):

$$\cos z = \cos z_o + \Delta\Phi \cdot \sin z_o \cdot \cos A_o + \Delta\Lambda \cdot \cos \Phi_o \cdot \sin z_o \cdot \sin A_o \quad (2.22)$$

όπου τα z_o, A_o υπολογίζονται από τις σχέσεις (2.20), (2.21) και $h = \theta + \Lambda_o - \alpha$.

Επειδή η ποσότητα $\Delta z = z_o - z$ είναι μικρή, ισχύει:

$$\cos z = \cos(z_o - \Delta z) \cong \cos z_o + \Delta z \cdot \sin z_o \quad (2.23)$$

Με βάση τις παραπάνω σχέσεις, η τελική μορφή της εξίσωσης (2.22) είναι:

$$F \cdot \Delta\Phi + L \cdot \Delta\Lambda \cdot \cos \Phi_o = \Delta z = z_o - z \quad (2.24)$$

όπου $F = \cos A_o$ και $L = \sin A_o$.

Οι άγνωστοι της εξίσωσης (2.22) είναι οι ποσότητες $\Delta\Phi, \Delta\Lambda$, ενώ το Δz ισούται με τη διαφορά της αναμενόμενης τιμής της ζενίθιας γωνίας κάθε άστρου (θεωρητική και υπολογιζόμενη από το τρίγωνο θέσης) και της μετρημένης ζενίθιας γωνίας του άστρου (πραγματική).

Η (2.24) είναι η εξίσωση παρατήρησης στη συνόρθωση για όλα τα άστρα.

Πρέπει να σημειωθεί ότι μια παραλλαγή της μεθόδου αυτής είναι η πιο διαδεδομένη μέθοδος ταυτόχρονου προσδιορισμού των αστρονομικών συντεταγμένων. Η μέθοδος

αυτή περιορίζει τον παρατηρητή στην παρατήρηση άστρων στο ίδιο ύψος (ίδια ζενίθια γωνία). Πλεονέκτημα αυτής είναι το γεγονός ότι το συστηματικό σφάλμα στη διόρθωση της ζενίθιας γωνίας λόγω αστρονομικής διάθλασης είναι ίδιο για όλα τα άστρα και δεν επηρεάζει τον προσδιορισμό των αστρονομικών συντεταγμένων με αποτέλεσμα τη βελτίωση της ακρίβειας της λύσης.

Η διαδικασία που περιγράφηκε παραπάνω είναι γνωστή ως μέθοδος των ίσων υψών και αποτελεί αντικείμενο της παρούσας εργασίας. Περιγράφεται αναλυτικά παρακάτω.

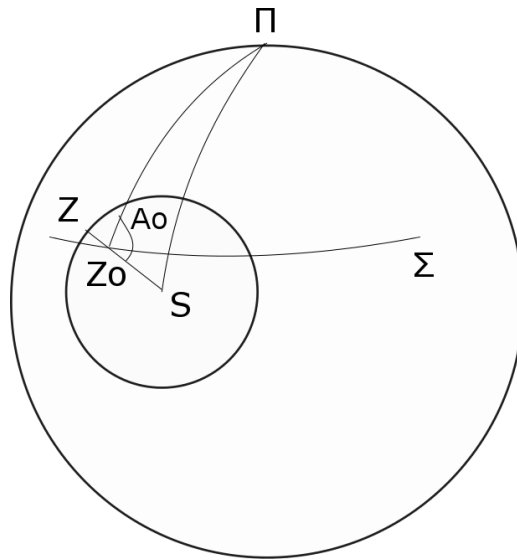
2.2.2.1. Γεωμετρική ερμηνεία ευθειών ύψους-Μέθοδος των ίσων υψών

Για να γίνει καλύτερα κατανοητή η λογική της μεθόδου που ακολουθήθηκε στην παρούσα εργασία, είναι απαραίτητη η μελέτη της γεωμετρικής λύσης του προβλήματος. Αρχικά περιγράφεται η γεωμετρική ερμηνεία της γενικής μεθόδου ταυτόχρονου προσδιορισμού των αστρονομικών συντεταγμένων με μετρήσεις ζενίθιων γωνιών. Στη συνέχεια, με την ίδια διαδικασία, ερμηνεύεται γεωμετρικά η μέθοδος των ίσων υψών και παρατίθενται τα πλεονεκτήματά της σε σχέση με τη γενική μέθοδο.

Από τον ορισμό της ζενίθιας γωνίας, είναι γνωστό ότι αυτή ορίζει ένα γεωμετρικό τόπο του πραγματικού ζενίθ. Πιο συγκεκριμένα, με κέντρο τον παρατηρούμενο αστέρα και ακτίνα ίση με τη μετρούμενη κάθε φορά ζενίθια γωνία, διαγράφεται ένας κύκλος (κύκλος ύψους), με τη θέση του πραγματικού ζενίθ του τόπου παρατήρησης να βρίσκεται επί της περιφέρειας του. Με παρατήρηση δύο άστρων, το ζενίθ προσδιορίζεται από την τομή των κύκλων που διαγράφονται από κάθε άστρο. Στην περίπτωση πολλών άστρων και με την παρουσία σφαλμάτων, οι κύκλοι δεν τέμνονται σε ένα σημείο και εισάγεται το πρόβλημα της εύρεσης της καλύτερης θέσης του ζενίθ.

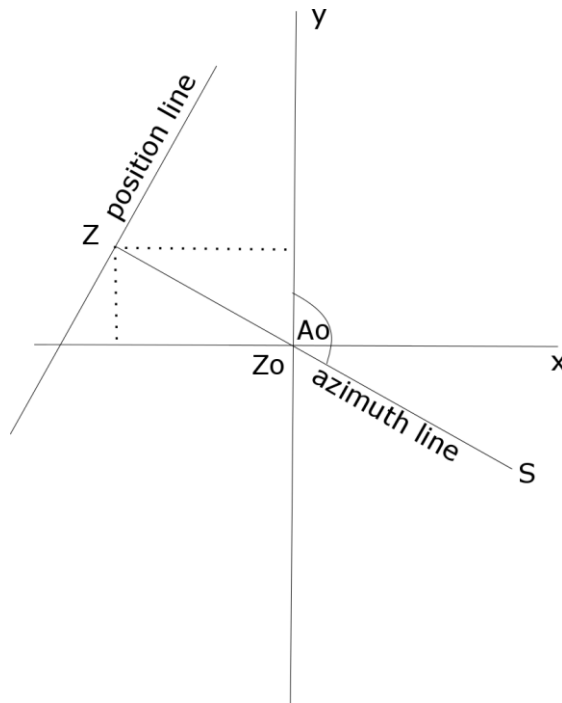
Θεωρούμε σημείο Z_o κοντά στο πραγματικό ζενίθ (Z) του τόπου παρατήρησης, και γίνεται απεικόνιση της επιφάνειας της ουράνιας σφαίρας επί του επιπέδου του εφαπτόμενου σε αυτή στο προσεγγιστικό ζενίθ Z_o (Φ_o, Λ_o). Κάθε παρατηρούμενο άστρο S βρίσκεται τη στιγμή της παρατήρησης του σε αζιμούθιο A και σε απόσταση z_o από το προσεγγιστικό ζενίθ Z_o (υπολογιζόμενη). Αυτό σημαίνει ότι μεταξύ αστρού και πραγματικού ζενίθ Z μετράται ζενίθια απόσταση (γωνία) ίση με $z = z_o + \delta z$. Εάν $z > z_o$, το πραγματικό ζενίθ ως προς το άστρο βρίσκεται εκτός του τόξου $Z_o S$ και προς το μέρος του Z_o .

Γραφικά, η περιφέρεια του κύκλου ύψους με κέντρο κάθε άστρο στην περιοχή του Z , παριστάνεται με μια ευθεία εφαπτόμενη σε αυτόν στο Z , που είναι κάθετη στην $Z_o Z$ (ευθεία ύψους κάθετη στην ευθεία που ορίζει το αζιμούθιο της διεύθυνσης του αστρού). Ο μεσημβρινός $Z_o \Pi$ (Π ο βόρειος πόλος της ουράνιας σφαίρας), παριστάνεται με την εφαπτόμενη του $Z_o \gamma$ στο Z_o και ο παράλληλος $Z_o \Sigma$ με την εφαπτόμενη του $Z_o \chi$.



Σχήμα 2.1: Γεωμετρική ερμηνεία μεθόδου ίσων υψών

Υποθέτοντας ότι η παραπάνω διαδικασία αναφέρεται σε μια μικρή περιοχή της σφαίρας (κοντά στο Z_0), γίνεται η παραδοχή ότι διατηρούνται οι γωνίες και τα μήκη στη μετάβαση από τη σφαίρα στο επίπεδο.



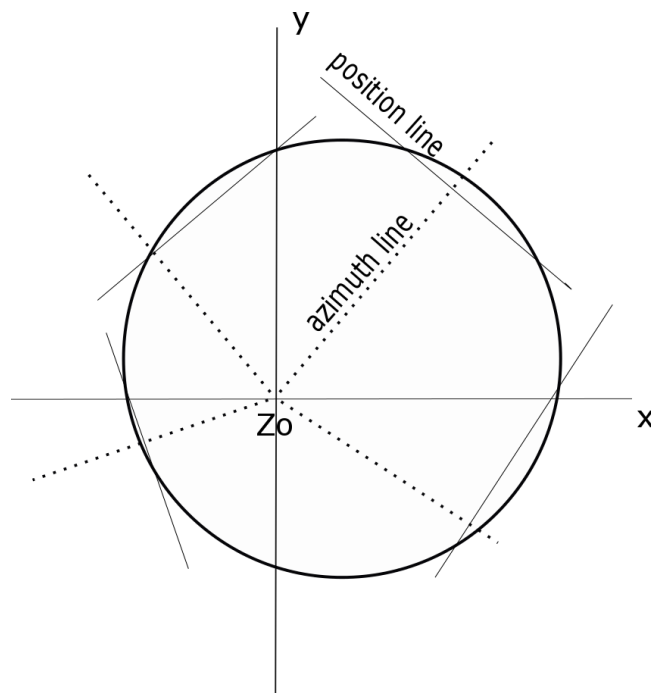
Σχήμα 2.2: Ευθείες αζιμουθίου και θέσης

Σε μια σφαίρα με ακτίνα τη μονάδα, τα μεγέθη επί μεσημβρινού (Z_0y) και παραλλήλου (Z_0x) είναι ίσα με $\Delta\Phi$ και $\delta\Lambda \cdot \cos\Phi_0$ (η ακτίνα του παράλληλου

κύκλου είναι $\cos\Phi_o$). Αυτό συμβαίνει διότι, η αρχή των αξόνων του συστήματος που ορίζεται είναι το Z_o , οπότε οι αποστάσεις ZZ_i (όπου Z_i το πραγματικό ζενίθ που ορίζεται από το εκάστοτε άστρο στην περιφέρεια του κύκλου ύψους του) ισούνται με $\Delta z = z - z_o$.

Αν έχουν γίνει παρατηρήσεις σε δύο άστρα, κατασκευάζονται οι ευθείες ύψους για κάθε ένα από αυτά και το πραγματικό αζιμουθιο ορίζεται από την τομή των ευθειών αυτών ($\Delta\Phi$ και $\delta\Lambda \cdot \cos\Phi_o$). Στην πράξη ωστόσο, γίνεται παρατήρηση περισσότερων άστρων, ώστε με την κατασκευή των ευθειών ύψους τους να φανερωθεί ενδεχόμενο σφάλμα. Στην περίπτωση αυτή, οι ευθείες δεν είναι απόλυτα συγκλίνουσες και το στίγμα (πραγματικό ζενίθ) του σταθμού παρατήρησης προκύπτει από το κέντρο του κύκλου που εφάπτεται καλύτερα στις περισσότερες ευθείες ύψους. Η ακτίνα του κύκλου αυτού αντιπροσωπεύει την πιθανότερη τιμή του δz .

Στο σχήμα (2.3) φαίνονται τα παραπάνω σε παράδειγμα, δηλαδή οι ευθείες ύψους (position lines) και οι ευθείες αζιμουθίου (azimuth lines) που είναι κάθετες στις ευθείες ύψους. Επιπλέον, το στίγμα της θέσης του παρατηρητή βρίσκεται στο κέντρο του κύκλου που εφάπτεται βέλτιστα στο σύνολο των ευθειών ύψους και απέχει απόσταση δz από το Z_o (με συντεταγμένες 0,0). Περιγράφοντας τη θέση του Z με άλλο τρόπο, αυτό απέχει απόσταση $\delta\Lambda \cdot \cos\Phi_o$ από το μεσημβρινό $Z_o\gamma$ και απόσταση $\Delta\Phi$ από τον παράλληλο $Z_o\Sigma$.



Σχήμα 2.3: Εύρεση του ζενίθ με τη μέθοδο ίσων υψών

Από τα παραπάνω, είναι εμφανές ότι τυχόν συστηματικό σφάλμα στη ζενίθια γωνία λόγω προσεγγιστικής διόρθωσής της (επίδραση αστρονομικής διάθλασης), επιφέρει μία μετατόπιση στις ευθείες ύψους.

Η διόρθωση λόγω διάθλασης εξαρτάται άμεσα από τις ατμοσφαιρικές συνθήκες τη στιγμή παρατήρησης (τοπική θερμοκρασία και πίεση) καθώς και από την ίδια τη μέτρηση της ζενίθιας γωνίας (μέγεθος του z). Αυτό σημαίνει ότι με παρατηρήσεις σε σύντομο χρονικό διάστημα για όλα τα άστρα, μπορεί να θεωρηθεί ότι οι ατμοσφαιρικές συνθήκες είναι κοινές για όλα τα άστρα. Ωστόσο, η γενική μέθοδος ταυτόχρονου προσδιορισμού των συντεταγμένων με μετρήσεις ζενίθιας γωνίας δεν εξασφαλίζει ότι όλα τα άστρα παρατηρούνται στο ίδιο ύψος (ίδια ζενίθια γωνία). Για το λόγο αυτό το συστηματικό σφάλμα που υπεισέρχεται στη ζενίθια γωνία είναι διαφορετικό για κάθε άστρο. Στην περίπτωση αυτή, η μετατόπιση των ευθειών ύψους είναι διαφορετική για κάθε άστρο και το υπολογισμένο ζενίθ μετατοπίζεται περιορίζοντας την ακρίβεια της λύσης.

Το παραπάνω πρόβλημα απαλείφεται σε μεγάλο βαθμό με την παρατήρηση όλων των άστρων στο ίδιο ύψος (ζενίθια γωνία). Με τη μέθοδο αυτή, οι ευθείες ύψους σε όλα τα άστρα απέχουν εξίσου από το Z_0 , ενώ ταυτόχρονα το συστηματικό σφάλμα στη ζενίθια γωνία είναι επίσης ίδιο για όλα τα άστρα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα το σφάλμα αυτό να μην επηρεάζει τη λύση, αφού οι παραπάνω συνθήκες εξασφαλίζουν συνδυαστικά την ίση μετατόπιση των ευθειών ύψους και την ισαποχή τους από το προσεγγιστικό ζενίθ Z_0 (οπότε το κέντρο του κύκλου δεν μετατοπίζεται και η λύση δεν επηρεάζεται). Η εφαρμογή των παραπάνω γίνεται με τη μέθοδο των ίσων υψών, με την οποία είναι δυνατό να επιτευχθεί μεγαλύτερη ακρίβεια στις αστρονομικές συντεταγμένες.

3.ΘΕΩΡΙΑ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΣΥΝΟΡΘΩΣΕΩΝ

3.1.Εισαγωγή

Οι βασικοί στόχοι της θεωρίας σφαλμάτων και συνορθώσεων είναι η εκτίμηση των καλύτερων τιμών των μεγεθών που προσδιορίζονται άμεσα ή έμμεσα από μετρήσεις, καθώς και η εκτίμηση της ποιότητας των μετρήσεων αυτών και των μεγεθών που προσδιορίζονται άμεσα ή έμμεσα από αυτές.

Ένα μέγεθος x που προσδιορίζεται από μετρήσεις μπορεί να θεωρηθεί σαν τυχαία μεταβλητή. Το αποτέλεσμα κάθε μέτρησης x_i ονομάζεται και ενδεχόμενη τιμή του μεγέθους και θεωρείται σαν τυχαίο γεγονός.

Το σύνολο των ενδεχόμενων τιμών ενός μεγέθους αποτελεί πληθυσμό. Έτσι, στις περιπτώσεις μεγεθών, που προσδιορίζονται από μετρήσεις, αν οι μετρήσεις αυτές έτειναν στο άπειρο θα έκαναν τον πληθυσμό. Στην πράξη, όμως, ο αριθμός των μετρήσεων είναι περιορισμένος, οπότε τα αποτελέσματα μιας σειράς μετρήσεων θεωρούνται σαν ένα δείγμα του πληθυσμού.

Από συνδυασμό πειραμάτων και θεωρίας, προσδιορίζονται συναρτήσεις που περιγράφουν τις κατανομές των πιθανοτήτων εμφάνισης των διαφόρων τιμών μιας τυχαίας μεταβλητής, εκφράζονται δηλαδή ως συναρτήσεις της τυχαίας μεταβλητής στην οποία αναφέρονται και για να οριστούν πλήρως θα πρέπει ορισμένες παράμετροι είτε να θεωρηθούν γνωστές είτε να προσδιοριστούν από μετρήσεις (στατιστικά μεγέθη).

Οι συναρτήσεις πιθανότητας μπορούν να χαρακτηριστούν είτε συνεχείς είτε ασυνεχείς και είναι δύο ειδών: οι συναρτήσεις κατανομής και οι συναρτήσεις πυκνοτήτων. Από αυτές, οι μεν εκφράζουν την πιθανότητα η μεταβλητή να πάρει τιμές μικρότερες ή ίσες μιας τιμής x_i και οι δε εκφράζουν την πιθανότητα εμφάνισης της ενδεχόμενης τιμής x_i .

Η πιο διαδεδομένη κατανομή πιθανοτήτων, που αποτελεί το στατιστικό μοντέλο για τις μετρήσεις, είναι η κανονική κατανομή.

Κάθε μέτρηση αποτελεί μία εκτίμηση του μετρημένου μεγέθους και οι τιμές που παίρνει το μέγεθος ονομάζονται ενδεχόμενες τιμές. Για τα μεγέθη που προσδιορίζονται από μετρήσεις, οι αληθινές του τιμές είναι άγνωστες, καθώς ο προσδιορισμός τους από τις μετρήσεις περιέχει μικρά ή μεγάλα σφάλματα.

Για τη εκτίμηση των καλύτερων τιμών των μεγεθών γίνονται περισσότερες μετρήσεις από τις απαραίτητες, με συνέπεια να απαιτείται μια διαδικασία ώστε να δοθεί σε κάθε μετρούμενο μέγεθος μια και μοναδική τιμή αξιοποιώντας όμως όλες τις διαθέσιμες μετρήσεις. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται συνόρθωση.

Αν είναι n ο αριθμός των μετρήσεων και m ο αριθμός των άγνωστων ανεξάρτητων καθοριστικών παραμέτρων, που απαιτείται να υπολογιστούν από τα στοιχεία που μετρήθηκαν, η διαφορά $n-m$ ονομάζεται βαθμός ελευθερίας r .

Η μέθοδος που έχει καθιερωθεί για τις συνορθώσεις είναι η μέθοδος των Ελαχίστων Τετραγώνων (Μ.Ε.Τ).

3.1.1. Πηγές και είδη σφαλμάτων

Τα σφάλματα στις μετρήσεις κατατάσσονται σε τρεις κατηγορίες:

-Τα χονδροειδή, που οφείλονται σε απροσεξία του παρατηρητή και εντοπίζονται με επανάληψη της μέτρησης.

-Τα συστηματικά, που παρουσιάζουν σταθερότητα ή περιοδικότητα σε μέγεθος και πρόσημο. Μπορούν να εκφραστούν σε μεγάλο βαθμό με κάποια μαθηματική σχέση. Τα συστηματικά σφάλματα οφείλονται σε ατέλειες οργάνων, καιρικές συνθήκες, λανθασμένη επιλογή μοντέλου κ.α. Τα σφάλματα αυτά μπορούν να αποφευχθούν, αν ακολουθείται η σωστή διαδικασία μετρήσεων και γίνονται οι απαραίτητες αναγωγές με ρεαλιστικά μοντέλα. Σε κάθε περίπτωση, παραμένει ένα μικρό ποσοστό συστηματικών σφαλμάτων που μπορεί να εντοπιστεί μετά τη συνόρθωση.

-Τα τυχαία, που έχουν τυχαίο χαρακτήρα και μαζί με ένα μικρό ποσοστό των συστηματικών σφαλμάτων αντιμετωπίζονται με τα μοντέλα της Στατιστικής. Σαν τυχαίο σφάλμα ορίζεται η διαφορά: $v_i = l_i - \mu$, όπου μ είναι η αληθής τιμή του μετρούμενου μεγέθους (άγνωστη αλλά μπορεί να υπολογιστεί από σειρά πολλών μετρήσεων). Με τα τυχαία σφάλματα ασχολείται κυρίως η Θεωρία Σφαλμάτων.

Ακρίβεια (ή εσωτερική ακρίβεια) είναι έννοια που αναφέρεται στο πόσο πλησιάζουν μεταξύ τους οι μετρήσεις. Εξαρτάται από την ευαισθησία του οργάνου και την ικανότητα του παρατηρητή. Η ακρίβεια είναι δυνατό να εκτιμηθεί από σειρά μετρήσεων.

Ορθότητα (ή εξωτερική ακρίβεια) είναι έννοια που αναφέρεται στο πόσο πλησιάζουν οι μετρήσεις την αληθινή τιμή. Η ορθότητα δεν είναι δυνατόν να εκτιμηθεί από σειρά μετρήσεων ενός μεγέθους.

Ο συνδυασμός ορθότητας και ακρίβειας ονομάζεται αξιοπιστία.

3.1.2. Αρχή της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων

Αν με l συμβολιστεί η συνορθωμένη τιμή ενός μεγέθους που έχει μετρηθεί και με l_i η κάθε μέτρηση, τότε το φαινόμενο σφάλμα της μέτρησης είναι:

$$l_i - l = v_i \text{ ή υπόλοιπο}$$

Αν έχουν γίνει n μετρήσεις του ίδιου μεγέθους (ίδιο σύστημα όργανο-παρατηρητής-συνθήκες), τότε η καλλίτερη τιμή του μεγέθους, σύμφωνα με την αρχή της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων, ικανοποιεί τη σχέση:

$$\sum v_i^2 = [vv] = v^T v = \min$$

Το ίδιο ισχύει και στην περίπτωση που μετρώνται n μεγέθη ενός συναρτησιακού μοντέλου, ώστε να υπολογιστούν οι ανεξάρτητες παράμετροι του μοντέλου μέσω συνόρθωσης.

Αν οι μετρήσεις των μεγεθών δεν έχουν γίνει με το ίδιο σύστημα, ή είναι διαφορετικής ακρίβειας, τότε η αρχή της Μ.Ε.Τ. εκφράζεται σαν:

$$\sum P_i v_i^2 = [Pvv] = v^T P v = \min$$

όπου P_i τα βάρη των μετρήσεων.

3.2. Χαρακτηριστικές παράμετροι πληθυσμού

3.2.1. Κανονική κατανομή

Για μια οποιαδήποτε κατανομή, η συνάρτηση κατανομής της εκφράζει την πιθανότητα να πάρει τιμές μικρότερες ή ίσες μιας τιμής. Η σχέση που την ορίζει είναι:

$$F(x_i) = P(x \leq x_i)$$

Η συνάρτηση πυκνοτήτων είναι εκείνη που για μη συνεχή δεδομένα δίνει την πιθανότητα

$$P(x = x_i)$$

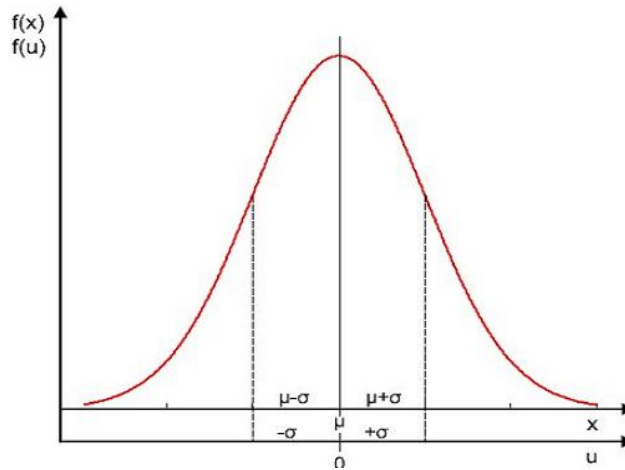
δηλαδή την πιθανότητα εμφάνισης της ενδεχόμενης τιμής x_i . Για συνεχή μεγέθη είναι πάντα $P(x) = 0$.

Η πιο διαδεδομένη κατανομή πιθανοτήτων, που αποτελεί το στατιστικό μοντέλο για τις μετρήσεις, είναι η κανονική κατανομή.

Η συνάρτηση πυκνοτήτων της κανονικής κατανομής είναι:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (3.1)$$

όπου μ είναι η ακριβής τιμή της τυχαίας μεταβλητής και σ το τυπικό σφάλμα των μετρήσεων.



Σχήμα 3.1: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας κανονικής κατανομής

Η συνάρτηση κατανομής της είναι:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \quad (3.2)$$

Όπως φαίνεται, η συνάρτηση $f(x)$ είναι συμμετρική ως προς την ακριβή τιμή μ , ενώ τα σημεία καμπής της βρίσκονται στις θέσεις $x=\mu-\sigma$ και $x=\mu+\sigma$.

Συνήθως χρησιμοποιείται αντί της τυχαίας μεταβλητής x , η τυποποιημένη μεταβλητή $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$. Στην περίπτωση αυτή, η τυποποιημένη συνάρτηση κατανομής είναι:

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (3.3)$$

Ενώ η $f(z)$ προκύπτει από την $f(x)$ για $\mu=0$ και $\sigma=1$:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \quad (3.4)$$

Οι τιμές των $f(z)$ και $F(z)$ πινακοποιούνται, ενώ ισχύουν και οι σχέσεις:

$$\begin{aligned} f(-z) &= f(z) \\ F(-z) &= 1 - F(z) \\ P(-z_i < z < z_i) &= 2F(z_i) - 1 \end{aligned} \quad (3.5)$$

3.2.2. Μέτρα ακρίβειας μετρήσεων-Διαστήματα εμπιστοσύνης

Με την παραδοχή ότι οι μετρήσεις ακολουθούν την κανονική κατανομή, η συνάρτηση πυκνοτήτων τους είναι η:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \text{ για } \mu=0$$

Στη μορφή αυτή, η συνάρτηση πυκνοτήτων είναι η συνάρτηση πυκνοτήτων των τυχαίων σφαλμάτων v_i .

Από τα προηγούμενα, προκύπτει ότι όσο πιο πεπλατυσμένη είναι η συνάρτηση πυκνοτήτων των μετρήσεων (ή των τυχαίων σφαλμάτων), τόσο μικρότερη είναι η ακρίβεια των μετρήσεων. Μέτρο λοιπόν της ακρίβειας των μετρήσεων είναι το τυπικό σφάλμα σ , που είναι αντίστροφα ανάλογο της ακρίβειας (μεγάλο τυπικό σφάλμα σημαίνει μικρή ακρίβεια μετρήσεων).

Με χρήση της τυποποιημένης μεταβλητής z και τον πίνακα της κατανομής:

$$P(\mu-\sigma < x < \mu+\sigma) = P(-1 < z < 1) = 0.6826 = 68\%$$

Αυτό σημαίνει ότι η διαφορά $x-\mu$ θα κυμαίνεται από $-\sigma$ έως $+\sigma$ με πιθανότητα 68% (ή ότι αν η x είναι η εκτίμηση που έχουμε κάνει, τότε η ακριβής τιμή θα βρίσκεται στο διάστημα $x-\sigma$ έως $x+\sigma$ με την ίδια πιθανότητα).

Σαν μέτρα ακριβείας χρησιμοποιούνται και διαστήματα πολλαπλάσια του τυπικού σφάλματος, με αντίστοιχες πιθανότητες:

$$P(\mu-2\sigma < x < \mu+2\sigma) = P(-2 < z < 2) = 95.4\%$$

$$P(\mu-3\sigma < x < \mu+3\sigma) = P(-3 < z < 3) = 99.7\%$$

Έτσι, συνήθως παρουσιάζεται το πρόβλημα της εύρεσης του διαστήματος μέσα στο οποίο αναμένεται να βρίσκεται η διαφορά $x-\mu$ με ορισμένη πιθανότητα P . Η πιθανότητα ονομάζεται επίπεδο εμπιστοσύνης ενώ το διάστημα που συνδέεται με αυτή διάστημα εμπιστοσύνης. Το επίπεδο εμπιστοσύνης συνήθως συμβολίζεται με $p=1-\alpha$, όπου α η πιθανότητα να βρίσκεται η $x-\mu$ εκτός του διαστήματος εμπιστοσύνης.

3.3. Άμεσες παρατηρήσεις μιας μεταβλητής

Το πρόβλημα των άμεσων παρατηρήσεων μιας μεταβλητής (μία άγνωστη ανεξάρτητη παράμετρος), αφορά στον προσδιορισμό της καλλίτερης τιμής ενός μεγέθους, το οποίο έχει μετρηθεί n φορές.

Εάν οι μετρήσεις έχουν ίση ακρίβεια (συνήθως επειδή γίνονται με το ίδιο σύστημα όργανο-παρατηρητής-συνθήκες), τότε αυτές ονομάζονται ισοβαρείς. Σε αντίθετη περίπτωση, οι μετρήσεις ονομάζονται ανισοβαρείς.

3.3.1. Ισοβαρείς παρατηρήσεις

Στην περίπτωση των ισοβαρών παρατηρήσεων, οι μετρήσεις $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$ θεωρούνται ως ένα δείγμα από πληθυσμό με τυπικό σφάλμα σ και ακριβή τιμή m . Από το δείγμα υπολογίζεται η καλλίτερη εκτίμηση \bar{X} της ακριβούς τιμής m και οι εκτιμήσεις των τυπικών σφαλμάτων μιας μέτρησης και της καλλίτερης τιμής $\sigma_{\bar{X}}$.

Η καλλίτερη τιμή ενός μεγέθους από n μετρήσεις προκύπτει από τη σχέση:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \quad (3.6)$$

Η μέση τιμή αποτελεί την καλλίτερη εκτίμηση της ακριβούς τιμής.

Πιθανό σφάλμα, ονομάζεται η διαφορά:

$$v_i = l - l_i$$

ενώ υπόλοιπο της μέτρησης είναι η διαφορά:

$$l_i - l = v_i$$

Κάθε υπόλοιπο αποτελεί μια εκτίμηση του τυπικού σφάλματος των μετρήσεων. Το τυπικό σφάλμα της καλλίτερης τιμής δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (3.7)$$

Από μια σειρά μετρήσεων (πεπερασμένο δείγμα), είναι αδύνατος ο υπολογισμός του τυπικού σφάλματος σ , επειδή δεν είναι γνωστή η ακριβής τιμή του μεγέθους. Για το λόγο αυτό, υπολογίζεται η καλλίτερη εκτίμηση του σ , που ονομάζεται τυπική απόκλιση.

Πολλές φορές, δίνεται πριν τη συνόρθωση μια τιμή για το τυπικό σφάλμα, που ονομάζεται *a priori* σφάλμα (τυπικό σφάλμα πληθυσμού). Η εκτίμηση του τυπικού σφάλματος σ από τις μετρήσεις ονομάζεται *a posteriori* τυπικό σφάλμα.

Για n μετρήσεις ενός μεγέθους προκύπτουν n υπόλοιπα v_i . Τότε, ως καλλίτερη εκτίμηση της μεταβλητότητας θεωρείται η

$$\sigma^2 = \frac{[vv]}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n (l_i - \bar{X})^2}{n-1} \quad (3.8)$$

3.3.2.Ανισοβαρείς παρατηρήσεις

Αν οι μετρήσεις ενός μεγέθους δεν είναι ίσης ακριβείας (διαφορετικό σύστημα όργανο-παρατηρητής-συνθήκες), τότε δεν αποτελούν δείγμα του ίδιου πληθυσμού. Στην περίπτωση αυτή, οι μετρήσεις ονομάζονται ανισοβαρείς. Για να αναφερθούν στον ίδιο πληθυσμό οι μετρήσεις, γίνεται χρήση βαρών.

Ως βάρος μιας μέτρησης μπορεί να θεωρηθεί ένας αριθμός που εκφράζει πόσο περισσότερο θα πρέπει να συμβάλλει μια μέτρηση στο τελικό αποτέλεσμα σε σχέση με μια άλλη.

Αν σε μια σειρά n παρατηρήσεων, χωριστούν οι μετρήσεις σε ομάδες με αριθμούς παρατηρήσεων n_i , τότε η μέση τιμή από κάθε ομάδα προκύπτει από τη σχέση:

$$\bar{X}_i = \frac{\sum_{i=1}^{n_i} (l_i)}{n_i} \quad (3.9)$$

Τότε, η εκτίμηση της καλλίτερης τιμής από το σύνολο των μετρήσεων προκύπτει ως εξής:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n (n_i l_i)}{\sum_{i=1}^n n_i} \quad (3.10)$$

Αντικαθιστώντας τους αριθμούς n_i με τους P_i , για τους οποίους ισχύει ότι:

$$\frac{P_i}{n_i} = c \quad (3.11)$$

Τελικά:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n (P_i l_i)}{\sum_{i=1}^n P_i} \quad (3.12)$$

όπου P_i είναι τα βάρη (αριθμοί ανάλογοι του αριθμού των παρατηρήσεων).

Αν οι μετρήσεις κάθε ομάδας είναι ίσης ακρίβειας, τότε προκύπτει ότι για δύο ομάδες Α,Β (με n_a , n_b και P_a , P_b) ισχύει:

$$\frac{P_a}{P_b} = \frac{\sigma_{\bar{X}b}^2}{\sigma_{\bar{X}a}^2} \quad (3.13)$$

Γενικά, τα βάρη ορίζονται ως αριθμοί αντιστρόφως ανάλογοι των μεταβλητοτήτων των μετρήσεων και δίνονται από τη σχέση:

$$P_i = \frac{c}{\sigma_i^2} \quad (3.14)$$

όπου το c είναι αυθαίρετα επιλεγμένη ποσότητα.

Μονάδα βάρους ονομάζεται η πραγματική ή φανταστική παρατήρηση με βάρος 1, ενώ μεταβλητότητα της μονάδας βάρους, η μεταβλητότητα της παρατήρησης αυτής. Οπότε, τελικά το βάρος ορίζεται από τη σχέση:

$$P_i = \frac{\sigma_o^2}{\sigma_i^2} \quad (3.15)$$

Με βάση τα παραπάνω, το τυπικό σφάλμα της καλύτερης τιμής είναι:

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (P_i \sigma_{li})^2}{\sum_{i=1}^n P_i^2} \quad (3.16)$$

και επειδή $\sigma_{li}^2 = \frac{\sigma_o^2}{P_i}$, προκύπτει τελικά:

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_o}{\sqrt{[P]}} \quad (3.17)$$

Το τυπικό σφάλμα των υπολοίπων είναι:

$$\sigma_{vi} = \pm \sqrt{\sigma_{li}^2 - \sigma_{\bar{X}}^2} \quad (3.18)$$

Μετά τον υπολογισμό της καλλίτερης τιμής, γίνεται σύγκριση των μετρήσεων με την καλλίτερη τιμή για να υπολογιστεί η *aposteriori* μεταβλητότητα της μονάδας βάρους σ_o^2 . Στη συνέχεια, μπορούν να υπολογιστούν οι *aposteriori* μεταβλητότητες των μετρήσεων σ_i^2 και της καλλίτερης τιμής $\sigma_{\bar{X}}^2$.

Με πολλαπλασιασμό των n υπολοίπων $v_i = x - l_i$ με τις ρίζες των αντίστοιχων βαρών P_i , οι n ποσότητες $v_i^2 P_i$ είναι ισοβαρείς εκτιμήσεις της μεταβλητότητας της μονάδας βάρους. Η καλλίτερη εκτίμηση της μεταβλητότητας αυτής είναι:

$$\sigma_o^2 = \frac{[P_{vv}]}{n-1} \quad (3.19)$$

$$\sigma_o = \pm \sqrt{\frac{[P_{vv}]}{n-1}} \quad (3.20)$$

Αν οι αpriori μεταβλητότητες των μετρήσεων σ_i^2 που χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό των βαρών ανταποκρίνονται στην πραγματικότητα, ο λόγος $\frac{\sigma_o^2}{\sigma_o^2}$ θα πρέπει να προκύψει κοντά στη μονάδα. Στις περιπτώσεις μικρότερων ή μεγαλύτερων μεταβλητοτήτων από τις πραγματικές, ο λόγος αυτός προκύπτει μεγαλύτερος ή μικρότερος της μονάδας αντίστοιχα (εκτός αν υπεισέρχονται συστηματικά σφάλματα, οπότε οι αpriori μεταβλητότητες είναι ρεαλιστικές, αλλά ο λόγος είναι πολύ μεγάλος).

Με τον υπολογισμό της αposteriori μεταβλητότητας της μονάδας βάρους, υπολογίζονται και τα παρακάτω σφάλματα:

$$\sigma_{li} = \frac{\sigma_o}{\sqrt{P_i}}$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_o^2}{\sqrt{[P]}} = \pm \sqrt{\frac{[P_{vv}]}{[P](n-1)}} \quad (3.21)$$

$$\sigma_{vi} = \pm \sqrt{(\sigma_{li}^2 - \sigma_{\bar{x}}^2)}$$

3.4. Πολυδιάστατα μεγέθη

Η παρούσα ενότητα αναφέρεται στις περιπτώσεις που μια σειρά μετρήσεων εκφράζεται με δύο στοχαστικές μεταβλητές. Τότε οι επαναλαμβανόμενες μετρήσεις δημιουργούν ένα δισδιάστατο διάνυσμα τυχαίων μεταβλητών, που χαρακτηρίζεται από δισδιάστατες συναρτήσεις κατανομής και πυκνοτήτων.

3.4.1. Χαρακτηριστικές παράμετροι

Αν ληφθεί μια σειρά n μετρήσεων (δείγμα πληθυσμού), τότε η εκτίμηση της ακριβούς τιμής του διανύσματος x θα είναι η:

$$x = [x_1, x_2, \dots, x_m]$$

Για το παραπάνω δείγμα, η εκτίμηση της μεταβλητότητας είναι:

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{n-1} [v_i v_i] = \frac{1}{n-1} (x_i x_i - n \bar{x}_i \bar{x}_i) \quad (3.22)$$

Είναι ακόμη χρήσιμα κάποια μεγέθη που να εκφράζουν τη συσχέτιση ανά δύο των τυχαίων μεταβλητών x_1, x_2, \dots, x_m , δηλαδή το πόσο εξαρτάται η τιμή μιας μεταβλητής x_i από την τιμή μιας άλλης μεταβλητής x_j . Τα μεγέθη αυτά ονομάζονται συμμεταβλητότητες και συμβολίζονται με σ_{ij} . Αυτό σημαίνει ότι για στατιστικά ανεξάρτητα μεγέθη, ισχύει $\sigma_{ij}=0$. Για ένα δείγμα n μετρήσεων:

$$\sigma_{ij}^2 = \frac{1}{n-1} [v_i v_j] = \frac{1}{n-1} (x_i x_j - n \bar{x}_i \bar{x}_j) \quad (3.23)$$

Η συμμεταβλητότητα μπορεί να είναι αρνητική, μηδενική, ή θετική και ισχύει πάντα ότι:

$$\sigma_{ij} \leq \sigma_i \sigma_j$$

Ο βαθμός εξάρτησης δύο μεταβλητών x_i, x_j εκφράζεται με τον συντελεστή συσχέτισης και ορίζεται μέσω της σχέσης:

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{(\sigma_i \sigma_j)}, \text{ όπου } -1 \leq \rho_{ij} \leq 1.$$

3.4.2. Χαρακτηριστικοί πίνακες

Οι στατιστικές ιδιότητες ενός διάνυσματος x , m τυχαίων μεταβλητών χαρακτηρίζονται από ένα τετραγωνικό πίνακα διαστάσεων $m \times m$ που ονομάζεται πίνακας μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας και συμβολίζεται με V_x . Ο πίνακας αυτός έχει την παρακάτω διάταξη:

$$V_x = \begin{matrix} & \begin{matrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1m} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \sigma_{21} \\ \vdots \\ \sigma_{m1} \end{matrix} & \begin{matrix} \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m2} & \cdots & \sigma_m^2 \end{matrix} \end{matrix}$$

Ο πίνακας αυτός είναι συμμετρικός, διότι $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Στην κύρια διαγώνιο τοποθετούνται οι μεταβλητότητες των x_1, x_2, \dots, x_m με τη σειρά που έχουν στο διάνυσμα x , ενώ στις υπόλοιπες θέσεις τοποθετούνται οι συμμεταβλητότητες των ζευγών των μεταβλητών πάλι με την ίδια σειρά.

Με χρήση των παραπάνω, προκύπτουν οι πίνακες συντελεστών βάρους και βαρών ως εξής:

$$Q_x = \frac{1}{\sigma_o^2} V_x$$

$$P_x = Q_x^{-1} = \sigma_o^2 V_x^{-1}$$

3.4.3.Νόμος μετάδοσης μεταβλητοτήτων

Όταν έχει εκτιμηθεί ο πίνακας μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

V_x ενός διανύσματος x , ενώ ζητείται ο πίνακας V_y ενός διανύσματος y με συνιστώσες y_1, y_2, \dots, y_n που συνδέονται με τις συνιστώσες x_1, x_2, \dots, x_n με κάποιες συναρτήσεις, τότε χρησιμοποιείται ο νόμος μετάδοσης μεταβλητοτήτων.

Εάν ισχύουν οι σχέσεις:

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_m) = l_1 + v_1$$

$$y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_m) = l_2 + v_2$$

$$y_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_m) = l_n + v_n$$

Τότε ισχύει $V_y = AV_x A^T$.

Για τον υπολογισμό του $V_y = AV_x A^T$, πρέπει οι συναρτήσεις $f_i(x_1, x_2, \dots, x_m)$ να είναι γραμμικές.

3.4.3.1.Περίπτωση γραμμικών σχέσεων

Οι σχέσεις έχουν τη μορφή:

$$\sigma_{\delta x} = \sigma_{x - x_0} = \sigma_x$$

ή σε μορφή πινάκων: $y = a + Ax$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

$$y_{nx1} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \alpha_{nx1} = \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ \vdots \\ a_{n0} \end{bmatrix} \quad x_{mx1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

Με βάση τα παραπάνω, όταν οι σχέσεις είναι γραμμικές, τότε ο νόμος μετάδοσης εκφράζεται ως:

$$V_y = AV_x A^T \quad (3.24)$$

3.4.3.2. Περίπτωση μή γραμμικών σχέσεων

Για την εφαρμογή του νόμου μετάδοσης μεταβλητοτήτων όταν οι συναρτήσεις $f_i(x_1, x_2, \dots, x_m)$ είναι μή γραμμικές ως προς x_1, x_2, \dots, x_m απαιτείται πρώτα η γραμμικοποίηση τους.

Για την κατανόηση της διαδικασίας γραμμικοποίησης, θεωρείται αρχικά ένα μέγεθος y που συνδέεται με ένα άλλο μέγεθος x με μια συνάρτηση $f(x)$. Η $f(x)$ αναπτύσσεται κατά Taylor σε κάποια θέση x_0 μέσα στο εύρος τιμών του x παραλείποντας τους όρους που περιέχουν δυνάμεις του $\delta x = x - x_0$ μεγαλύτερες της μονάδας. Έτσι προκύπτει η σχέση:

$$y = f(x) = y_0 + \frac{df(x_0)}{dx_0} \delta x \quad (3.25)$$

όπου $y_0 = f(x_0)$ και $\frac{df(x_0)}{dx_0}$ θεωρούνται χωρίς σφάλμα και $\sigma_{\delta x} = \sigma_{x - x_0} = \sigma_x$. Η

σχέση αυτή είναι γραμμική ως προς δx και εκφράζει τη εξίσωση εφαπτομένης της καμπύλης $f(x)$ στη θέση x_0 . Αυτό σημαίνει αντικατάσταση της καμπύλης $f(x)$ με ευθεία για μικρό διάστημα στη θέση x_0 . Από τη μορφή των εξισώσεων, φαίνεται ότι δεν είναι απαραίτητος ο υπολογισμός του y_0 . Οπότε το σύστημα των εξισώσεων γίνεται:

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_{1o} + \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \delta x_2 + \dots + \frac{\partial y_1}{\partial x_m} \delta x_m \\
y_2 &= y_{2o} + \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \delta x_2 + \dots + \frac{\partial y_2}{\partial x_m} \delta x_m \\
&\dots \\
y_n &= y_{no} + \frac{\partial y_n}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial y_n}{\partial x_2} \delta x_2 + \dots + \frac{\partial y_n}{\partial x_m} \delta x_m
\end{aligned} \tag{3.26}$$

σε κάποια θέση .

Αν πινακοποιηθούν οι παραπάνω σχέσεις:

$$y = y_o + J_{yxo} \delta x \tag{3.27}$$

Όπου ο πίνακας J_{yxo} αποτελείται από τους συντελεστές των δx_i .

Οπότε, ο νόμος μετάδοσης μεταβλητοτήτων για την περίπτωση μή γραμμικών σχέσεων εκφράζεται με τη σχέση:

$$V_y = J_{yxo} V_x J_{yxo}^T \tag{3.28}$$

Για γραμμικές σχέσεις, ισχύει $J_{yxo} = A$.

3.5.Συνορθώσεις

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, όταν οι μετρήσεις είναι περισσότερες από τις απαραίτητες για τον προσδιορισμό των αγνώστων ανεξάρτητων καθοριστικών παραμέτρων του μοντέλου, γίνεται συνόρθωση.

Η βασική μέθοδος για τη συνόρθωση των μετρήσεων όταν οι παράμετροι είναι παραπάνω από μία, είναι η μέθοδος των εμμέσων παρατηρήσεων. Η μέθοδος αυτή αναφέρεται συχνά και ως μέθοδος μεταβολής των συντεταγμένων, δίνοντας ως λύση τις καλλίτερες τιμές των ανεξάρτητων καθοριστικών παραμέτρων του μοντέλου.

Οι σχέσεις που συνδέουν παραμέτρους με μετρήσεις καθώς και οι σχέσεις που συνδέουν μετρήσεις μεταξύ τους, ονομάζονται εξισώσεις συνθήκης (συναρτησιακό μοντέλο). Ο πίνακας μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας αποτελεί το στατιστικό μοντέλο.

Για την εφαρμογή οποιασδήποτε εκ των μεθόδων συνόρθωσης, απαραίτητα στοιχεία είναι οι μετρήσεις $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$, καθώς και ο πίνακας V_l (πίνακας μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας των μετρήσεων).

3.5.1. Μέθοδος των εμμέσων παρατηρήσεων

Είναι η συνήθης μέθοδος συνόρθωσης. Πλεονέκτημα της αποτελεί το γεγονός ότι εφαρμόζεται για τον προσδιορισμό παραμέτρων που δεν μετρώνται άμεσα.

Τα κύρια χαρακτηριστικά της είναι:

-Σχηματίζονται εξισώσεις συνθήκης που συνδέουν τα επιθυμητά αποτελέσματα με τις μετρήσεις (γραμμικά). Οι εξισώσεις αυτές ονομάζονται εξισώσεις παρατήρησης.

-Ο αριθμός των εξισώσεων παρατήρησης ισούται με τον αριθμό n των παρατηρήσεων (κάθε εξίσωση περιέχει το αποτέλεσμα μίας μόνο παρατήρησης).

-Το σύστημα των κανονικών εξισώσεων έχει m εξισώσεις με m αγνώστους, όπου m είναι ο αριθμός των ανεξάρτητων παραμέτρων.

Το σύστημα των εξισώσεων παρατήρησης είναι της μορφής:

$$Ax = \delta l + v \quad (3.29)$$

Όπου ο πίνακας A περιέχει τους συντελεστές των αγνώστων (πίνακας σχεδιασμού), ενώ ο πίνακας x περιέχει τους αγνώστους,

Ο πίνακας l χαρακτηρίζεται από τον πίνακα μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας V_l ή τον πίνακα βαρών $P = \sigma_0^2 V_l^{-1}$. Για το διάνυσμα $\delta l = l - a$ (a σταθερό) ισχύει: $V_l = V_{\delta l}$.

Γενικά, το σύστημα των εξισώσεων περιέχει n εξισώσεις και $n+m$ άγνωστα μεγέθη (παράμετροι και σφάλματα-υπόλοιπα των μετρήσεων). Η λύση είναι εκείνη που ικανοποιεί τις δεσμεύσεις που υπαγορεύονται από τη ΜΕΤ.

3.5.1.1. Εκτίμηση μεγεθών

Είναι γνωστή η σχέση: $Ax - \delta l = v$.

Οπότε:

$$S^2 = v^T P v = (Ax - \delta l)^T P (Ax - \delta l) = (x^T A^T - \delta l^T) P (Ax - \delta l) = x^T A^T P A x - x^T A^T P \delta l - \delta l^T P A x + \delta l^T P \delta l$$

Θα πρέπει $\frac{\partial S^2}{\partial \hat{x}} = 0$, άρα

$$\frac{\partial S^2}{\partial x} = x^T A^T P A + x^T A^T P A - \delta l^T P A - \delta l^T P A = 0, \text{ οπότε } A^T P A x = A^T P \delta l.$$

Αν θέσουμε $N = A^T P A$ και $u = A^T P \delta l$, τότε:

$Nx = u$ (κανονικό σύστημα m εξισώσεων και m αγνώστων).

Για $N \neq 0$, είναι: $\hat{x} = N^{-1}u = (A^T PA)^{-1} A^T P \delta l$.

Για ισοβαρείς μετρήσεις:

$$\hat{x} = N^{-1}u = (A^T A)^{-1} A^T \delta l \quad (3.30)$$

Για τον υπολογισμό των βαρών ισχύει η σχέση: $P_{li} = \frac{\sigma_o^2}{\sigma_{li}^2}$, με το σ_o^2 να είναι

αυθαίρετα επιλεγμένο.

3.5.1.2. Εκτίμηση μεγεθών πριν τη συνόρθωση

Από τη σχέση $x = N^{-1}u = (A^T PA)^{-1} A^T P \delta l$ και με γνωστό το $V_l = V_{\delta l}$, μέσω του νόμου μετάδοσης σφαλμάτων:

$$V_x = (A^T PA)^{-1} A^T P V_l P A (A^T PA)^{-1}$$

Και επειδή $V_l = \sigma_o^2 P^{-1}$:

$$V_x = \sigma_o^2 (A^T PA)^{-1} A^T P P^{-1} P A (A^T PA)^{-1} = \sigma_o^2 (A^T PA)^{-1}$$

τελικά $V_x = \sigma_o^2 N^{-1}$.

Με βάση την παραπάνω σχέση:

$$V_x = \sigma_o^2 (A^T PA)^{-1} A^T P P^{-1} P A (A^T PA)^{-1} = \sigma_o^2 (A^T PA)^{-1}$$

Για τα σφάλματα των υπολοίπων, ισχύει:

Με εφαρμογή του νόμου μετάδοσης σφαλμάτων και μέσω της σχέσης $V_l = V_{\delta l} = \sigma_o^2 P^{-1}$:

$$v_v = \sigma_o^2 [A(A^T PA)^{-1} A^T P - I] P^{-1} [P A (A^T PA)^{-1} A^T - I] = \sigma_o^2 [A(A^T PA)^{-1} A^T P P^{-1} P A (A^T PA)^{-1} A^T - P^{-1} P A (A^T PA)^{-1} A^T A^T - A(A^T PA)^{-1} A^T P P^{-1} + P^{-1}]$$

οπότε

$$V_v = \sigma_o^2 [P^{-1} - A(A^T PA)^{-1} A^T] = \sigma_o^2 P^{-1} - \sigma_o^2 A N^{-1} A^T$$

δηλαδή $V_v = V_l - V_i$.

3.5.1.3. Εκτίμηση μεγεθών μετά τη συνόρθωση

Ο υπολογισμός του a posteriori τυπικού σφάλματος της μονάδας βάρους επιτρέπει να φανεί η αξιοπιστία της λύσης και οι εκτιμήσεις των αβεβαιοτήτων όλων των

στοιχείων μετά τη συνόρθωση. Η εκτίμηση της a posteriori μεταβλητότητας της μονάδας βάρους δίνεται από της σχέση:

$$\sigma_o^2 = \frac{v^T P v}{n - m} \quad (3.31)$$

Το διάνυσμα των υπολοίπων προκύπτει από την αντικατάσταση στις εξισώσεις του διανύσματος της λύσης x στις εξισώσεις παρατήρησης:

$$v = Ax - \delta l$$

Από τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων και με τη βοήθεια της παραπάνω σχέσης:

$$S^2 = v^T P v = (x^T A^T - \delta l^T) P (Ax - \delta l) = x^T A^T P A x - x^T A^T P \delta l - \delta l^T P A x + \delta l^T P \delta l = x^T A^T P A x - 2x^T A^T P \delta l + \delta l^T P \delta l$$

και επειδή $A^T P A x = A^T P \delta l$, τελικά:

$$S^2 = x^T N x - 2x^T N x + \delta l^T P \delta l = \delta l^T P \delta l - x^T N x, \text{ άρα}$$

$$\sigma_o^2 = \frac{v^T P v}{r} = \frac{(\delta l^T P \delta l - x^T N x)}{r}$$

Εάν οι εκτιμήσεις των τυπικών σφαλμάτων των μετρήσεων που έχουν χρησιμοποιηθεί για τα βάρη είναι ρεαλιστικές και δεν υπάρχουν άλλα σφάλματα

(χονδροειδή, συστηματικά) στις μετρήσεις, ο λόγος $\frac{\sigma_o^2}{\sigma_o^2}$ θα πρέπει να είναι κοντά στη

μονάδα. Τότε η λύση είναι αξιόπιστη (η αξιοπιστία ελέγχεται μέσω test της κατανομής χ^2 ή Fisher).

Εάν ο λόγος αυτός απέχει από τα επιτρεπτά όρια, τότε αυτό σημαίνει ότι οι αρχικές εκτιμήσεις των σφαλμάτων δεν είναι ρεαλιστικές ή υπάρχουν άλλα σφάλματα στις μετρήσεις. Στις περιπτώσεις αυτές, γίνεται αναθεώρηση της λύσης ή υπολογισμός των πινάκων μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας μετά τη συνόρθωση χρησιμοποιώντας την a posteriori μεταβλητότητα σ_o^2 της μονάδας βάρους. Τότε , ισχύουν οι σχέσεις:

$$V_l = \sigma_o^2 P^{-1} = \left(\frac{\sigma_o^2}{\sigma_o^2} \right) V_l$$

$$\sigma_{li}^2 = \frac{\sigma_o^2}{P_i} = \left(\frac{\sigma_o^2}{\sigma_o^2} \right) \sigma_{li}$$

$$V_x = \sigma_o^2 N^{-1} \quad (3.32)$$

$$V_l = \sigma_o^2 AN^{-1}A^T$$

$$V_v = \sigma_o^2 P^{-1} - \sigma_o^2 AN^{-1}A^T = V_l - V_l$$

3.5.2. Περίπτωση μή γραμμικών σχέσεων

Εάν οι σχέσεις που συνδέουν τα μετρημένα μεγέθη με τις ανεξάρτητες καθοριστικές παραμέτρους (εξισώσεις παρατήρησης), δεν είναι γραμμικές, τότε είναι αναγκαία η γραμμικοποίησή τους. Η γραμμικοποίηση των εξισώσεων γίνεται με την ανάπτυξή τους σε σειρές κατά Taylor.

Αν ισχύουν οι σχέσεις:

$$Y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_m) = l_1 + v_1$$

$$Y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_m) = l_2 + v_2$$

$$Y_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_m) = l_n + v_n$$

Αναπτύσσονται σε σειρά κατά Taylor σε κάποια θέση παίρνοντας τη μορφή:

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_m) + \frac{\partial f_i(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f_i(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\partial x_2} \delta x_2 + \dots + \frac{\partial f_i(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\partial x_m} \delta x_m = l_i + v_i.$$

Οι σχέσεις αυτές είναι γραμμικές ως προς $\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_m$, όπου $\delta x_i = x_i - x_i$. Σε μορφή πινάκων: $A \delta x = \delta l + v$, όπου $A = J_{yx}$ και $\delta l = l - l_o$.

Οι τιμές x_1, x_2, \dots, x_m προκύπτουν από πρόχειρο υπολογισμό και ονομάζονται προσωρινές ή προσεγγιστικές τιμές, ενώ τα μεγέθη $f_i(x_1, x_2, \dots, x_m)$ που υπολογίζονται από αυτές ονομάζονται υπολογισμένες τιμές.

Το αποτέλεσμα της λύσης είναι το διάνυσμα δx (διόρθωση προσεγγιστικών τιμών), ενώ το τελικό αποτέλεσμα προκύπτει από τη σχέση:

$$X = x + \delta x$$

Όταν τα δx είναι μεγάλα, η διαδικασία επαναλαμβάνεται με εκ νέου υπολογισμό των δx χρησιμοποιώντας ως προσωρινές τιμές τα αποτελέσματα x_i, \hat{x}_i της προηγούμενης λύσης.

Τέλος, από τα παραπάνω ισχύει: $V_x = V_{\delta x}$.

3.6. Στατιστικοί έλεγχοι-Έλεγχοι υποθέσεων

Κάθε συνόρθωση έχει ως αποτέλεσμα ένα διάνυσμα με τις εκτιμήσεις των τιμών των ανεξάρτητων καθοριστικών παραμέτρων του μοντέλου ή των στοιχείων που μετρήθηκαν, καθώς και των αντίστοιχων πινάκων μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας.

Οι αρχικές παραδοχές, που είναι απαραίτητες για τη συνόρθωση (στατιστικό, μαθηματικό μοντέλο), πρέπει να ελεγχθούν ώστε να γίνει αποδεκτή η λύση ή όχι. Ο έλεγχος αυτός ονομάζεται στατιστικό τεστ.

Οι αρχικές παραδοχές απαρτίζουν τη μηδενική υπόθεση, που συμβολίζεται με H_0 . Ο έλεγχος της μηδενικής υπόθεσης γίνεται με βάση κάποιο στατιστικό μέγεθος, που υπολογίζεται από το υπάρχον δείγμα. Αν το στατιστικό αυτό μέγεθος (στατιστικό μέγεθος ελέγχου) βρίσκεται στο διάστημα εμπιστοσύνης που συνδέεται με ένα ορισμένο επίπεδο εμπιστοσύνης, γίνεται απόδεκτη η H_0 (οπότε και η λύση). Η αρχική υπόθεση ελέγχεται σε σχέση με μία εναλλακτική υπόθεση H_1 .

Αν, σύμφωνα με την αρχική υπόθεση, ένα στατιστικό μέγεθος d πρέπει να είναι ίσο με d_0 , θα είναι:

$$H_0 \rightarrow d = d_0$$

Οι εναλλακτικές υποθέσεις:

$$H_0 \rightarrow d \neq d_0 \text{ αμφίπλευρος έλεγχος}$$

$$H_0 \rightarrow d > d_0 \text{ ή } d < d_0 \text{ μονόπλευροι έλεγχοι}$$

Στόχος του στατιστικού τεστ είναι να αποφευχθούν λανθασμένες αποφάσεις, όσον αφορά την αποδοχή της λύσης με βάση το αν είναι σωστή η υπόθεση H_0 . Για το λόγο αυτό, εκλέγονται συνήθως μεγάλα επίπεδα εμπιστοσύνης, ώστε να αποφευχθεί η εκλογή λάθος απόφασης για την αποδοχή ή όχι της λύσης (μικρές πιθανότητες λάθους).

3.6.1. Τεστ χ^2 -Διαστήματα εμπιστοσύνης

Η μεταβλητότητα μιας παρατήρησης από μια σειρά μετρήσεων αποτελεί εκτίμηση της μεταβλητότητας του πληθυσμού από τον οποίο προέρχεται. Έτσι για διάφορα επίπεδα εμπιστοσύνης μπορούν να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία αναμένεται να βρίσκεται η μεταβλητότητα του πληθυσμού.

Με τη χρήση βαρών αναγόμεστε σε φανταστικές παρατηρήσεις του ίδιου πληθυσμού με μεταβλητότητα ίση με την σ^2 μεταβλητότητα της μονάδας βάρους.

Έτσι, αν η εκτίμηση της μεταβλητότητας (a posteriori μεταβλητότητα της μονάδας βάρους) που γίνεται από μια συνόρθωση, βρίσκεται μέσα στο διάστημα που συνδέεται με ένα προκαθορισμένο επίπεδο εμπιστοσύνης, σημαίνει πως η αρχική μας υπόθεση H_0 που αφορά στο στατιστικό και μαθηματικό μοντέλο ήταν σωστή και ότι δεν έγιναν χονδροειδή σφάλματα (λάθη) στις μετρήσεις, αν όχι θα πρέπει να ερευνηθεί η αιτία της ασυμφωνίας και να βελτιωθεί το μοντέλο ή να απορριφθούν ορισμένες μετρήσεις.

Η μεταβλητότητα είναι στατιστικό μέγεθος, αλλά δεν ακολουθεί την κανονική κατανομή. Για την εύρεση των διαστημάτων εμπιστοσύνης της, χρησιμοποιείται η κατανομή χ^2 .

Το χαρακτηριστικό μέγεθος $r \frac{\sigma_o^2}{\sigma^2}$ θεωρείται ότι ακολουθεί την κατανομή χ^2 με

βαθμό ελευθερίας r και ανάλογα με την εναλλακτική υπόθεση H_1 , υπολογίζεται το διάστημα μέσα στο οποίο αναμένεται να βρίσκεται με ορισμένη πιθανότητα για να ισχύει η H_0 .

Σύμφωνα με τα παραπάνω, ο αμφίπλευρος έλεγχος ορίζεται ως εξής:

$$H_0 \rightarrow \frac{\sigma_o^2}{\sigma^2} = 1$$

$$H_1 \rightarrow \frac{\sigma_o^2}{\sigma^2} \neq 1$$

Για επίπεδο εμπιστοσύνης $p=1-\alpha$, η H_0 γίνεται αποδεκτή, εφ'όσον:

$$P(\chi_{p_1, r}^2 \leq \frac{r\sigma_o^2}{\sigma^2} \leq \chi_{p_2, r}^2) = p_2 - p_1 = p = 1 - \alpha \quad (3.33)$$

Οριακές τιμές της χ^2 για πιθανότητες p_1, p_2 , έτσι ώστε $p_1 = 1 - p_2$ θεωρούνται οι:

$$P_2 = 1 - \frac{\alpha}{2} \text{ και } P_1 = \frac{\alpha}{2}.$$

Οπότε, με στοιχείο εισόδου το βαθμό ελευθερίας r και τις p_1, p_2 , προκύπτουν οι τιμές $\chi_{p_1, r}^2, \chi_{p_2, r}^2$. Οπότε για επίπεδο εμπιστοσύνης p , γίνεται αποδεκτή η υπόθεση H_0 , εφ'όσον:

$$\frac{\sigma_o^2 \chi_{p_1, r}^2}{r} \leq \sigma_o^2 \leq \frac{\sigma_o^2 \chi_{p_2, r}^2}{r} \text{ ή}$$

$$\frac{r\sigma_o^2}{\chi_{p2,r}^2} \leq \sigma_o^2 \leq \frac{r\sigma_o^2}{\chi_{p1,r}^2} \quad (3.34)$$

3.7.Εφαρμογή στη μέθοδο ίσων υψών

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, η εξίσωση που συνδέει τα ζητούμενα μεγέθη με τις μετρήσεις στη μέθοδο των ίσων υψών, είναι:

$$F \cdot \Delta\Phi + L \cdot \Delta\Lambda \cdot \cos\Phi_o = \Delta z = z_o - z$$

όπου $F = \cos A_o$ και $L = \sin A_o$.

Στην μέθοδο αυτή, η ζενίθια γωνία z θεωρείται σταθερή και χωρίς σφάλμα σε όλη την υπολογιστική διαδικασία, οριζόμενη στην αρχή.

Τα ζητούμενα μεγέθη είναι τα $\Delta\Phi$, $\Delta\Lambda$ (διορθώσεις στις προσεγγιστικές αστρονομικές συντεταγμένες) που προκύπτουν από τα t_o (χρόνος τη στιγμή διάβασης από την επιθυμητή ζενίθια γωνία z), z_o , A_o (από το τρίγωνο θέσης).

Η εξίσωση $F \cdot \Delta\Phi + L \cdot \Delta\Lambda \cdot \cos\Phi_o = \Delta z = z_o - z$ αποτελεί την μορφή των εξισώσεων παρατήρησης για την τελική συνόρθωση υπολογισμού των ζητούμενων μεγεθών.

Ως πίνακας A (σχεδιασμού), ορίζεται ο πίνακας με στήλες $\cos A_o$, $\sin A_o$, που είναι οι συντελεστές των αγνώστων ($\Delta\Phi$, $\Delta\Lambda \cos\Phi_o$), που σημαίνει ότι έχει διαστάσεις $n \times 2$, όπου n είναι ο αριθμός των παρατηρούμενων άστρων. Ο πίνακας A δηλαδή έχει την παρακάτω μορφή:

$A =$

$$\begin{array}{cc} \cos(A_{o1}) & \sin(A_{o1}) \\ \cos A_{o2} & \sin A_{o2} \\ \cos A_{o3} & \sin A_{o3} \\ \vdots & \vdots \\ \cos(A_{on}) & \sin(A_{on}) \end{array}$$

Το δεξιό μέλος της εξίσωσης παρατήρησης αποτελεί τον πίνακα μετρήσεων l , που περιέχει τη διαφορά της υπολογισμένης από το τρίγωνο θέσης ζενίθιας γωνίας με βάση τις μετρήσεις από τη θεωρητική αρχικά ορισμένη. Έτσι, η μορφή του πίνακα l είναι:

$$l = \begin{bmatrix} z_1 - z \\ z_2 - z \\ z_3 - z \\ \vdots \\ \vdots \\ z_n - z \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας βαρών για τη συνόρθωση κατασκευάζεται με χρήση του αυθαίρετα επιλεγμένου a priori σφάλματος και του σφάλματος των l , που προκύπτει από το σφάλμα του χρόνου παρατήρησης στη δεδομένη ζενίθια γωνία. Είναι δηλαδή:

$$G_i = \frac{\sigma_{0i}^2}{\sigma_{\Delta z_i}^2} \quad (3.35)$$

Από τους παραπάνω πίνακες προκύπτουν οι κανονικές εξισώσεις που έχουν την παρακάτω μορφή:

$$[G_i F_i^2] \Delta \Phi + [G_i F_i L_i] \Delta \Lambda \cos \Phi_0 - [G_i \Delta z_i F_i] = 0 \quad (3.36)$$

$$[G_i F_i L_i] \Delta \Phi + [G_i L_i^2] \Delta \Lambda \cos \Phi_0 - [G_i \Delta z_i L_i] = 0 \quad (3.37)$$

όπου $G_i = \frac{\sigma_{0i}^2}{\sigma_{\Delta z_i}^2}$, $F_i = \cos A_0$, $L_i = \sin A_0$, σύμφωνα με τα παραπάνω.

Παρουσιάζει ενδιαφέρον να ελεγχθούν οι συνθήκες, για τις οποίες οι παραπάνω σχέσεις των κανονικών εξισώσεων απλοποιούνται, μέσω του μηδενισμού κάποιων εκ των συντελεστών που υπεισέρχονται. Για να γίνει αυτό, είναι απαραίτητη η μελέτη των σφαλμάτων που επηρεάζουν τις μετρήσεις.

Τα σφάλματα που επιδρούν στο Δz , είναι:

-Το συστηματικό σφάλμα dz που αφορά τη διάθλαση και προέρχεται από την αδυναμία του μοντέλου διόρθωσης της αστρονομικής διάθλασης να αναπαραστήσει πλήρως τη δομή της ατμόσφαιρας (διαφορετικές συνθήκες πίεσης και θερμοκρασίας σε διαφορετικά στρώματα της ατμόσφαιρας).

-Το σφάλμα dT στο χρόνο που οφείλεται στην προσωπική εξίσωση, δηλαδή στην καθυστέρηση του παρατηρητή στη λήψη κάθε μέτρησης.

Έτσι το συνολικό συστηματικό σφάλμα είναι:

$$d\Delta z = dz_o - dz = -dT \cos \Phi_o \sin(A_o) - dz \quad (3.38)$$

Εάν γίνει επιλογή άστρων προς παρατήρηση, που να αποτελούν τετράδες σε χαρακτηριστικά αζιμούθια A_i , $180^\circ - A_i$, $180^\circ + A_i$, $360^\circ - A_i$, τότε για τους συντελεστές των σχέσεων (3.36), (3.37), ισχύει:

$$[G_i F_i L_i] = 0 \quad (3.39)$$

$$[G_i F_i] = [G_i L_i] = 0 \quad (3.40)$$

Τότε οι λύσεις που προκύπτουν από τις κανονικές εξισώσεις είναι:

$$\Delta \Phi = \frac{[G_i \Delta z_i F_i]}{[G_i F_i^2]} \quad (3.41)$$

$$\Delta \Lambda \cos \Phi_o = \frac{[G_i \Delta z_i L_i]}{[G_i L_i^2]} \quad (3.42)$$

Διαφορίζοντας την παραπάνω σχέση ως προς το Δz_i και αντικαθιστώντας τις σχέσεις (3.39), (3.40), προκύπτει:

$$d\Delta \Phi = \frac{[G_i d\Delta z_i F_i]}{[G_i F_i^2]} = 0 \quad (3.43)$$

$$d\Delta \Lambda \cos \Phi_o = \frac{[G_i d\Delta z_i L_i]}{[G_i L_i^2]} = -dT \cos \Phi_o \quad (3.44)$$

Σύμφωνα με τις σχέσεις (3.43), (3.44), φαίνεται ότι εάν τα άστρα παρατηρηθούν με βάση τους παραπάνω περιορισμούς, τότε τα συστηματικά σφάλματα στη ζενίθια γωνία δε θα επηρεάσουν τον προσδιορισμό των αστρονομικών συντεταγμένων, ενώ το συστηματικό σφάλμα στο χρόνο θα επηρεάσει μόνο τον προσδιορισμό του αστρονομικού μήκους.

Πρέπει να τονιστεί, ότι οι παραπάνω συνθήκες για τις οποίες μηδενίζονται τα συστηματικά σφάλματα, αναπαριστούν εξιδανικευμένες καταστάσεις, οι οποίες είναι αδύνατο να επιτευχθούν στην πραγματικότητα. Στόχος λοιπόν των παραπάνω δεν είναι η απαλειφή των συστηματικών σφαλμάτων, η οποία είναι αδύνατη, αλλά η ελαχιστοποίηση και απομόνωσή τους. Ο συνδυασμός της μεθόδου ίσων υψών (ίδια διόρθωση για τη διάθλαση) και της παρατήρησης άστρων σε τετράδες με συμμετρικά αζιμούθια από $0-360^\circ$ (ελαχιστοποίηση επίδρασης συστηματικών σφαλμάτων στα υπολογιζόμενα μεγέθη), είναι ο τρόπος επίτευξης του στόχου αυτού.

Η μη ύπαρξη τέτοιων εξιδανικευμένων καταστάσεων στις πραγματικές μετρήσεις είναι και προϋπόθεση εφαρμογής της μεθόδου ίσων υψών. Κι αυτό γιατί ο ταυτόχρονος προσδιορισμός των αστρονομικών συντεταγμένων είναι αδύνατος στην περίπτωση αυτή, αφού ο μηδενισμός των συντελεστών δημιουργεί δύο εξισώσεις με ένα άγνωστο ($\Delta\Phi, \Delta\Lambda\cos\Phi_0$) στην κάθε μία. Οδηγείται δηλαδή η διαδικασία σε ανεξάρτητο προσδιορισμό των συντεταγμένων, για την οποία υπάρχουν άλλες πιο αποδοτικές μέθοδοι.

3.8.Ευστάθεια γραμμικών συστημάτων

Στο σημείο αυτό αξίζει να γίνει αναφορά στο κριτήριο ευστάθειας των γραμμικών συστημάτων [Ψαρράκος Π., 2012], μιας και αυτό αποτέλεσε το κριτήριο επιλογής της βέλτιστης γεωμετρικής λύσης για τη θέση των άστρων στη συγκεκριμένη μεθοδολογία.

Έστω ένας $n \times n$ αντιστρέψιμος πίνακας A με παραγοντοποίηση SVD

$$A = U\Sigma V^T = U \text{diag } s_1, s_2, \dots, s_n \quad V^T = \sum s_i u_i v_i^T$$

Τότε $U \text{diag } s_1, s_2, \dots, s_n \quad V^T \quad V \text{diag } \{s_1^{-1}, s_2^{-1}, \dots, s_n^{-1}\} = I_n$,

δηλαδή

$$A^{-1} = V \text{diag } \frac{1}{s_1}, \frac{1}{s_2}, \dots, \frac{1}{s_n} U$$

άρα και $\|A^{-1}\| = \frac{1}{s_n}$.

Συνεπώς, το σύστημα $Ax = \beta$ έχει λύση

$$x = A^{-1} \beta = \sum \left(\frac{u_i^T \beta}{s_i} \right) v_i$$

Η γραφή αυτή δείχνει ότι μικρές διαταραχές του A ή του β μπορούν να προκαλέσουν σχετικά μεγάλες διαταραχές στη λύση x , αν η ιδιάζουσα τιμή s_n είναι μικρή, δηλαδή αν ο A είναι "κοντά" σε μη αντιστρέψιμο πίνακα.

Για να μελετήσουμε την ευστάθεια του συστήματος $Ax = \beta$ θεωρούμε το διαταραγμένο και παραμετρικοποιημένο σύστημα

$$A + \varepsilon F \quad x \varepsilon = \beta + \varepsilon f, \quad x(0) = x$$

με $F \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και $f \in \mathbb{C}^n$ και ε μια πραγματική μεταβλητή. Αφού ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, υπάρχει περιοχή του 0 , όπου ορίζεται η συνεχής διανυσματική συνάρτηση

$$x(\varepsilon) = (A + \varepsilon F)^{-1} (\beta + \varepsilon f)$$

Επιπλέον, παραγωγίζοντας κατά μέλη τη σχέση καταλήγουμε στη διανυσματική παράγωγο

$$x'(0) = A^{-1} f - Fx$$

και το ανάπτυγμα Taylor πρώτης τάξης της $x(\varepsilon)$

$$x(\varepsilon) = x + \varepsilon x'(0) + O(\varepsilon^2) = x + \varepsilon A^{-1} f - Fx + O(\varepsilon^2)$$

Επομένως,

$$\frac{\|x(\varepsilon) - x\|_2}{\|x\|_2} \leq \varepsilon (\|A^{-1}\|_2 (\frac{\|f\|_2}{\|x\|_2} + \|F\|_2)) + O(\varepsilon^2)$$

Στο σημείο αυτό, πρέπει να ορίσουμε το βαθμό (δείκτη) κατάστασης (για τη δεύτερη νόρμα) του πίνακα A ,

$$\kappa_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{s_1(A)}{s_n(A)} \geq 1$$

δεχόμενοι κατά σύμβαση ότι $\kappa_2(A) = \infty$ όταν ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $\|\beta\|_2 \leq \|A\|_2 \|x\|_2$ βλέπουμε ότι

$$\frac{\|x(\varepsilon) - x\|_2}{\|x\|_2} \leq \kappa_2(A) (\varepsilon \frac{\|F\|_2}{\|A\|_2} + \varepsilon \frac{\|f\|_2}{\|\beta\|_2}) + O(\varepsilon^2)$$

όπου

$\varepsilon \frac{\|F\|_2}{\|A\|_2}$ και $\varepsilon \frac{\|f\|_2}{\|\beta\|_2}$ είναι τα σχετικά σφάλματα στον πίνακα A και στο διάνυσμα

β . Δηλαδή, το σχετικό σφάλμα της λύσης x μπορεί να γίνει ίσο με $\kappa_2(A)$ φορές το συνολικό σχετικό σφάλμα των A και β . Αυτό σημαίνει ότι ο βαθμός κατάστασης $\kappa_2(A)$ ποσοτικοποιεί την ευαισθησία του συστήματος $Ax = \beta$. Οι πίνακες με σχετικά μικρό βαθμό κατάστασης ονομάζονται πίνακες καλής κατάστασης (well-conditioned). Από τα παραπάνω προκύπτει ότι ο βαθμός κατάστασης του πίνακα A δίνεται από το λόγο της μέγιστης προς την ελάχιστη ιδιάζουσα τιμή του πίνακα,

δηλαδή από τον λόγο της μέγιστης προς την ελάχιστη ιδιοτιμή αν ο πίνακας είναι πραγματικός, συμμετρικός και θετικά ορισμένος, όπως συμβαίνει στην περίπτωση του πίνακα N .

Μέρος Β

4.ΒΑΣΙΚΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΤΙΚΑ ΕΡΓΑΛΕΙΑ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ

4.1.Εισαγωγή

Αντικείμενο του παρόντος κεφαλαίου είναι η ανάλυση των υπολογιστικών σταδίων επεξεργασίας (μέσω προγραμματιστικών εργαλείων), τα οποία δημιουργήθηκαν και χρησιμοποιήθηκαν στην εργασία.

Αυτά χωρίζονται σε ορισμένα βασικά στάδια που απαιτούν διαφορετικούς υπολογισμούς το καθένα. Κάθε στάδιο αποτελεί και ένα ξεχωριστό προγραμματιστικό τμήμα επεξεργασίας των δεδομένων. Παρακάτω, παρουσιάζεται η ακολουθούμενη από το κάθε τμήμα μεθοδολογία, η χρησιμότητα του κάθε τμήματος, καθώς και η σειρά με την οποία εκτελούνται τα στάδια.

Η σειρά εκτέλεσης καθώς και το ποια προγραμματιστικά εργαλεία χρησιμοποιούνται, εξαρτάται από τον σκοπό της εκάστοτε εργασίας. Στην παρούσα εργασία, συνδυασμός των τμημάτων κώδικα εκτελείται για δύο χωριστές διαδικασίες:

-Το σχεδιασμό των παρατηρήσεων. Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούνται τμήματα κώδικα με σκοπό την εύρεση των κατάλληλων συνθηκών για τις παρατηρήσεις πεδίου. Στόχος του είναι ο προσδιορισμός των καταλληλότερων συνθηκών με βάση το μαθηματικό και φυσικό μοντέλο, οι οποίες θα εφαρμοστούν όσο το δυνατόν πιο πιστά στη διαδικασία των μετρήσεων, με βασικό κριτήριο την ελαχιστοποίηση των σφαλμάτων. Για να επιτευχθεί αυτό απαιτείται πειραματισμός και σύγκριση θεωρητικών αποτελεσμάτων. Είναι προφανές ότι το βήμα αυτό προηγείται όλων των άλλων.

-Την επεξεργασία των μετρήσεων πεδίου. Στην περίπτωση αυτή, τα προγραμματιστικά εργαλεία επεξεργάζονται τις μετρήσεις πεδίου, με σκοπό τον προσδιορισμό των ζητούμενων μεγεθών, που είναι οι διορθώσεις στις αστρονομικές συντεταγμένες του τόπου ($\Delta\Phi$, $\Delta\Lambda\cos\Phi_0$).

Παρακάτω παρουσιάζονται τα βασικά τμήματα κώδικα που δημιουργήθηκαν, η λειτουργία που επιτελεί το καθένα, η μέθοδος που ακολουθείται συνοπτικά σε καθένα. Η ίδια διαδικασία γίνεται για το σχεδιασμό παρατηρήσεων, καθώς και για την επεξεργασία μετρήσεων πεδίου.

Όλα τα τμήματα κώδικα έγιναν σε γλώσσα Matlab και παρατίθενται στο τέλος της εργασίας.

4.2.Λειτουργία βασικών τμημάτων κώδικα

4.2.1.Επιλογή άστρων

Το στάδιο επιλογής άστρων, είναι βασικό στη διαδικασία των μετρήσεων. Οι δοκιμές σχετικά με τις βέλτιστες συνθήκες μέτρησης μπορούν να γίνουν και με «φανταστικά» άστρα, ωστόσο στο πρακτικό τμήμα των μετρήσεων, είναι το πιο σημαντικό στάδιο.

Με τον όρο επιλογή άστρων, εννοείται η διαδικασία αναζήτησης των άστρων που θα χρησιμοποιηθούν στις μετρήσεις πεδίου. Η διαδικασία αυτή περιλαμβάνει όλα τα στοιχεία και κριτήρια επιλογής τους, με βάση τις αρχικές υποθέσεις.

Η επιλογή άστρων είναι το πιο χρονοβόρο κομμάτι όσον αφορά τον υπολογιστικό φόρτο, αφού απαιτείται να συγκριθούν τα στοιχεία των κατηγοριοποιημένων γνωστών άστρων στον κατάλογο Tycho2, με τα επιθυμητά στοιχεία. Με τον τρόπο αυτό, στόχος είναι να εφαρμοστεί όσο το δυνατόν πιο αποτελεσματικά η μέθοδος των ίσων υψών, καθώς και να προσδιοριστούν οι συνθήκες που απαιτούνται για να ελαχιστοποιηθούν τα συστηματικά σφάλματα και η επίδρασή τους στο αποτέλεσμα.

Έτσι λοιπόν, το τμήμα αυτό δέχεται από το χρήστη κάποια αρχικά δεδομένα και υπολογίζει κάποια διαστήματα μέσα στα οποία πρέπει να κυμαίνονται οι συντεταγμένες των πραγματικών άστρων (οριζόντιες, ουρανογραφικές, ισημερινές) για τη χρονική στιγμή παρατήρησης. Στη συνέχεια, διαβάζει τα στοιχεία για κάθε άστρο χωριστά από τον κατάλογο Tycho2 και προσδιορίζει τις συντεταγμένες τους (αρχικά τις ουρανογραφικές). Γίνεται έλεγχος αν οι συντεταγμένες των άστρων βρίσκονται μέσα στα υπολογισμένα όρια, ώστε να γίνουν αποδεκτά για τις μετρήσεις. Από τις ουρανογραφικές συντεταγμένες υπολογίζονται οι οριζόντιες συντεταγμένες, η ωριαία γωνία τη στιγμή διέλευσης του άστρου και το επιθυμητό αζιμούθιο και ζενίθια γωνία. Είναι προφανές ότι σημαντικό κριτήριο επιλογής των άστρων είναι και το μέγεθος (λαμπρότητα) του άστρου.

Πιο συγκεκριμένα, το τμήμα κώδικα με όνομα "Epilogh_astrown.m", λειτουργεί ως εξής:

-Δέχεται τις τιμές των αστρονομικών συντεταγμένων Φ, Λ του τόπου (προσεγγιστικές) από το αρχείο 'Astr_coord.txt' σε μοίρες.

-Δέχεται από το αρχείο 'Z_A1_diarkeia UTCEN_dd VMAG.txt' τη ζενίθια γωνία παρατήρησης όλων των άστρων (δεν έχει σφάλμα) και τον πίνακα A1 που περιέχει έναν αριθμό από χαρακτηριστικά αζιμούθια (τόσα όσες και οι τετράδες των άστρων που θα παρατηρηθούν). Ο πίνακας A1 περιέχει σε μία στήλη όλα τα αζιμούθια και κάθε γραμμή του ορίζει την «ομάδα» αζιμουθίου (δηλαδή το ουράνιο παράθυρο). Ακόμα το αρχείο περιέχει την επιθυμητή διάρκεια που θα διαρκέσουν όλες οι παρατηρήσεις, την χρονική στιγμή έναρξης παρατηρήσεων, το εύρος απόκλισης εντός του οποίου θα παρατηρούνται τα άστρα καθώς και το ελάχιστο φαινόμενο μέγεθος του άστρου (λαμπρότητα), με τη σειρά που περιγράφηκαν.

-Υπολογίζει από τα χαρακτηριστικά αζιμούθια του πίνακα τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά αζιμούθια των προς παρατήρηση άστρων, από τις σχέσεις: $A_i, 180^\circ - A_i, 180^\circ + A_i, 360^\circ - A_i$, όπου A_i το αζιμούθιο του πίνακα. Έτσι, αν ο πίνακας περιέχει π.χ. 3 χαρακτηριστικά αζιμούθια, αυτό σημαίνει ότι θα παρατηρηθούν 12 άστρα.

-Δέχεται μέσω του αρχείου 'Tycho2_astro.txt' τον κατάλογο των γνωστών άστρων με όλα τα στοιχεία που είναι απαραίτητα. Τα στοιχεία αυτά είναι ο κωδικός του άστρου, η ορθή αναφορά, η απόκλιση (δεκαδικές μοίρες), η ίδια κίνηση του άστρου κατά ορθή αναφορά και απόκλιση (σε χιλιοστά δευτερολέπτου τόξου το χρόνο), το μέγεθος (λαμπρότητα) καθώς και η παράλλαξη (σε χιλιοστά δευτερολέπτου τόξου).

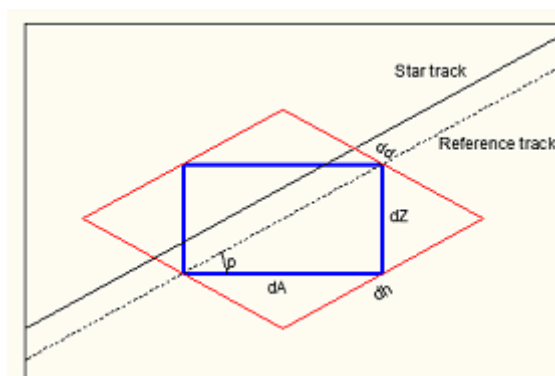
-Για τη χρονική στιγμή έναρξης παρατήρησης (UTCEN-t), υπολογίζονται οι νέες ουρανογραφικές συντεταγμένες για όλα τα άστρα του Tycho2 (RA,DEC), διορθωμένες από την ίδια κίνηση κατά ορθή αναφορά και απόκλιση (PMRA, PMDEC), καθώς και από την επίδραση της μετάπτωσης και της κλόνησης. Οι νέες συντεταγμένες αντικαθιστούν στον αντίστοιχο πίνακα τις προηγούμενες συντεταγμένες.

$$a_p M = RA + PMRA * t \quad (4.1\alpha)$$

$$d_p M = DEC + PMDEC * t \quad (4.1\beta)$$

-Το επόμενο βήμα είναι ο προσδιορισμός των διαστάσεων του «ουράνιου παραθύρου» του άστρου. Το «ουράνιο παράθυρο» ορίζεται ως η περιοχή, εντός της οποίας «επιτρέπεται» να βρίσκεται το παρατηρούμενο άστρο. Είναι δηλαδή αυτό που καθορίζει ποια άστρα είναι κατάλληλα προς παρατήρηση, δηλαδή αυτά που η τροχιά τους τέμνει το ουράνιο παράθυρο εντός της διάρκειας παρατήρησης, στην ορισμένη αυστηρά ζενίθια γωνία, για ένα συγκεκριμένο εύρος ωριαίας γωνίας, ορθής αναφοράς και απόκλισης (δεδομένο), άρα και εντός εύρους αζιμουθίου.

Είναι εμφανές, ότι ο αριθμός των ουράνιων παραθύρων είναι ίσος με τον αριθμό των προς παρατήρηση άστρων.



Σχήμα 4.1: Ουράνιο παράθυρο

-Ακολουθεί ο έλεγχος για κάθε ουράνιο παράθυρο όλων των άστρων του Tycho2, ώστε να αποφασιστεί ποια από αυτά ικανοποιούν τις συνθήκες, αν διέρχονται δηλαδή από την ορισμένη ζενίθια γωνία εντός του ουράνιου παραθύρου του άστρου μέσα στο

χρονικό όριο που καθορίστηκε αρχικά. Για να γίνει αυτό γίνεται έλεγχος κάθε άστρου με την παρακάτω σειρά κριτηρίων, οδηγώντας σε επιπλέον υπολογισμούς μεγεθών:

- Ελέγχεται αν βρίσκεται μέσα στο εύρος ορθής αναφοράς του παραθύρου.
- Ελέγχεται αν βρίσκεται μέσα στο εύρος απόκλισης του παραθύρου.
- Ελέγχεται αν η λαμπρότητα του είναι μεγαλύτερη ή ίση από την επιθυμητή (μεγαλύτερη λαμπρότητα σημαίνει μικρότερο μέγεθος).

Οι σχέσεις που χρησιμοποιούνται είναι:

$$a_1 = GAST + \Lambda - h \quad (4.2\alpha)$$

$$a_2 = a_1 + \text{diarkeia} * f \quad (4.2\beta)$$

$$a_1 \leq RA \leq a_2 \quad (4.2\gamma)$$

$$d - dd \leq DEC \leq d + dd \quad (4.2\delta)$$

Όπου *diarkeia*=διάρκεια παρατηρήσεων, *dd*=εύρος παραθύρου κατά απόκλιση, *GAST*=αληθής αστρικός χρόνος Greenwich και *RA*, *DEC* οι συντεταγμένες του κάθε άστρου. Οι δύο πρώτες σχέσεις ορίζουν τα όρια του παραθύρου κατά ορθή αναφορά, ενώ οι επόμενες σχέσεις ορίζουν τους ελέγχους για να γίνει αποδεκτό ένα άστρο.

-Αν οι παραπάνω έλεγχοι ικανοποιούνται, τότε το άστρο εισέρχεται ως στοιχείο στον πίνακα KATASTRA (κατάλληλα άστρα). Οι στήλες της γραμμής του άστρου συμπληρώνονται με την ομάδα (στήλη 1), τον κωδικό του άστρου από τον πίνακα Tycho2 (στήλες 2, 3).

-Για ένα άστρο που βρίσκεται στον πίνακα KATASTRA, προσδιορίζονται από τις σχέσεις του τριγώνου θέσης η ωριαία γωνία του, ο χρόνος UTC και το αζιμούθιο του τη στιγμή που αυτό διέρχεται από την καθορισμένη ζενίθια γωνία. Τότε, η γραμμή που αφορά το συγκεκριμένο άστρο στον πίνακα KATASTRA συμπληρώνεται ανά στήλη με τα εξής μεγέθη: *RA*-ορθή αναφορά (στήλη 4), *d*-απόκλιση (στήλη 5), *VMAG*-λαμπρότητα (στήλη 6), *chronos*-χρόνος UTC (στήλη 7), *h_tel*-ωριαία γωνία άστρου τη χρονική στιγμή UTC *chronos* (στήλη 8), *A_tel*-αζιμούθιο άστρου τη χρονική στιγμή UTC *chronos* (στήλη 9).

Οι σχέσεις που χρησιμοποιούνται είναι:

$$\cos h = \frac{\cos z - \sin(DEC) \cdot \sin\Phi}{\cos(DEC) \cdot \cos\Phi} \quad (4.3\alpha)$$

$$h = \arccos \cos h \quad (4.3\beta)$$

$$\cos A = \frac{\sin(DEC) \cdot \cos\Phi - \cos(DEC) \cdot \sin\Phi \cdot \cosh}{\sin z} \quad (4.3\gamma)$$

$$A = \arccos(\cos A) \quad (4.3\delta)$$

-Τα άστρα στον παραπάνω πίνακα δεν είναι όλα αποδεκτά για παρατήρηση, αφού πρέπει επίσης ένα άστρο να βρίσκεται εντός του εύρους αζιμουθίου του παραθύρου του. Πρέπει δηλαδή η διαφορά χαρακτηριστικού αζιμουθίου και υπολογισμένου

αζιμουθίου να μην ξεπερνά σε απόλυτη τιμή ένα συγκεκριμένο εύρος. Έτσι, μόνο τα άστρα που ικανοποιούν το παραπάνω κριτήριο είναι κατάλληλα για παρατήρηση. Αυτά τοποθετούνται στον πίνακα TELASTRA, που είναι ο τελικός πίνακας-αρχείο που θα χρησιμοποιηθεί. Ο τρόπος γραφής των στοιχείων των άστρων σε αυτόν τον πίνακα είναι ίδιος με αυτόν του πίνακα KATASTRA.

-Συμφωνα με τα παραπάνω, ο πίνακας TELASTRA, περιέχει τελικά όλα τα άστρα που ικανοποιούν τα επιθυμητά κριτήρια, με τα στοιχεία τους τη στιγμή διέλευσης του άστρου από την ορισμένη ζενίθια γωνία. Η λίστα αυτή των άστρων χρησιμοποιεί ως ταυτότητα την πρώτη στήλη του πίνακα, που φανερώνει το χαρακτηριστικό αζιμούθιο, άρα και το ουράνιο παράθυρο στο χαρακτηριστικό αζιμούθιο, όπως δίνονται τα δεδομένα στον πίνακα Α (αζιμούθια).

4.2.2. Προσομοίωση τροχιάς

Με τον όρο προσομοίωση τροχιάς άστρου νοείται ο προσδιορισμός των οριζόντιων συντεταγμένων (ζενίθια γωνία, αζιμούθιο) ενός άστρου για συγκεκριμένη χρονική στιγμή (σε χρόνο UTC). Συνήθως ορίζεται η διάρκεια σε χρόνο UTC που ενδιαφέρει, δημιουργώντας έτσι ένα σύνολο χρονικών στιγμών-οριζόντιων συντεταγμένων του άστρου. Στις δοκιμές το βήμα χρόνου ορίστηκε σε 5s χρόνου UTC.

Το τμήμα κώδικα που επιτελεί τα παραπάνω δίνεται με το όνομα «`prosomoiwh_troxias1.m`», το οποίο:

-Δέχεται τις τιμές των αστρονομικών συντεταγμένων Φ, Λ του τόπου από το αρχείο '`Astr_coord.txt`' σε μοίρες.

-Δέχεται τις ουρανογραφικές συντεταγμένες του άστρου δ, α (σε μοίρες και ώρες αντίστοιχα), καθώς και τις επιθυμητές ώρες αρχής και τέλους παρατήρησής του στην κλίμακα UTC (σε ώρες) από το αρχείο '`declination_rightascension_utc1_utc2.txt`'.

-Υπολογίζει, με βήμα χρόνου UTC 5s, την ωριαία γωνία του άστρου κάθε στιγμή και τις οριζόντιες συντεταγμένες του άστρου τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Οι σχέσεις που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των A, z είναι οι:

$$\sin z \cdot \sin A = -\cos \delta \cdot \sin h \quad (4.4\alpha)$$

$$\cos z = \sin \delta \cdot \sin \Phi + \cos \delta \cdot \cos \Phi \cdot \cosh \quad (4.4\beta)$$

$$\sin z \cdot \cos A = \sin \delta \cdot \cos \Phi - \cos \delta \cdot \sin \Phi \cdot \cosh \quad (4.4\gamma)$$

Για τον υπολογισμό της ωριαίας γωνίας, γίνεται χρήση της σχέσης:

$$h = \theta + \Lambda - \alpha \quad (4.5)$$

Ακόμα χρησιμοποιούνται οι πίνακες '`finals.daily`' (περιέχει τη διαφορά UT1-UTC) και ο πίνακας προσδιορισμού του αστρικού χρόνου Greenwich για UT1=0h.

Πρέπει να σημειωθεί ότι το τμήμα αυτό χρησιμοποιείται για να προσομοιωθούν οι μετρήσεις σε ένα άστρο. Ωστόσο, επειδή γίνεται υπολογισμός των ζητούμενων στοιχείων από το τρίγωνο θέσης, οι «υποθετικές» αυτές μετρήσεις δεν έχουν σφάλμα, οπότε δεν μπορούν να είναι αντιπροσωπευτικές της πραγματικότητας. Για το λόγο αυτό εισάγονται συνειδητά σφάλματα στις «υποθετικές» αυτές μετρήσεις.

Η προσομοίωση τροχιάς αναφέρεται μόνο στο στάδιο του σχεδιασμού παρατηρήσεων, εκεί δηλαδή που δεν διατίθενται πραγματικές μετρήσεις.

4.2.3. Διόρθωση λόγω διάθλασης

Το στάδιο αυτό αφορά τη διόρθωση των ζενίθιων γωνιών που μετρήθηκαν από την επίδραση της αστρονομικής διάθλασης. Η διόρθωση αυτή είναι σημαντική και ποικίλει από μέτρηση σε μέτρηση. Για κάθε μέτρηση στο άστρο, υπολογίζεται και προστίθεται επίδραση της από την κάθε μετρηση ως εξής:

$$R_0 = 60'' \cdot 28 \cdot \tan z - 0'' \cdot 0669 \cdot \tan^3 z \quad (4.6\alpha)$$

$$R = R_0 \cdot \left(\frac{P}{1013.25} \right) \cdot \left(\frac{273}{273 + \theta} \right) \quad (4.6\beta)$$

$$z' = z + R \quad (4.6\gamma)$$

Το αρχείο (συνάρτηση) που εκτελεί τα παραπάνω ονομάζεται 'Diorthwsh_diathlash.m'.

Σε αυτό:

-Γίνεται εισαγωγή δεδομένων (μετρήσεις ζενίθιων γωνιών) από αρχείο και με εισαγωγή των συνθηκών πίεσης και θερμοκρασίας υπολογίζονται τα απαραίτητα μεγέθη (R_0, R).

-Προσδιορίζεται η διόρθωση λόγω διάθλασης και προστίθεται σε κάθε μέτρηση, τοποθετώντας αυτόματα τις νέες διορθωμένες μετρήσεις ζενίθιας γωνίας στο αρχείο δεδομένων.

4.2.4. Αντίστροφη διόρθωση λόγω διάθλασης

Το στάδιο αυτό αποτελεί την αντίστροφη διαδικασία της προηγούμενης, με ζητούμενο την εξαγωγή της υποθετικής μέτρησης της ζενίθιας γωνίας από τη θεωρητική υπολογισμένη με τις σχέσεις του σφαιρικού τριγώνου.

Οι εξισώσεις είναι ίδιες με πριν, με μόνη διαφορά ότι ο άγνωστος είναι το z για κάθε μέτρηση. Λόγω των τριγωνομετρικών συναρτήσεων εντός της γενικής σχέσης υπολογισμού της διάθλασης, πρέπει να γίνει επίλυση της εξίσωσης ως προς το z με κάποια μέθοδο Αριθμητικής Ανάλυσης.

Επιλέχθηκε η επίλυση να γίνει με τη μέθοδο της Διχοτόμησης.

Έτσι, το αρχείο (συνάρτηση) 'Antistrofh_diathlash.m', λειτουργεί ως εξής:

-Δέχεται τις τιμές της ζενίθιας γωνίας τις προερχόμενες από το στάδιο της προσωμοίωσης τροχιάς άστρου.

-Γίνεται ορισμός της ανοχής-κριτηρίου παύσης της διαδικασίας διχοτόμησης, καθορίζονται οι άνω και κάτω τιμές του διαστήματος προς διχοτόμηση. Όσο η διαφορά της προηγούμενης από την επόμενη τιμή άνω-κάτω είναι μεγαλύτερη από την ανοχή, η διαδικασία επαναλαμβάνεται με διχοτόμηση του διαστήματος και νέο ορισμό των ορίων, έτσι ώστε για τις τιμές $f(\text{άνω})$, $f(\text{κάτω})$, να ισχύει:

$$f_{\text{άνω}} \cdot f_{\text{κάτω}} < 0 \quad (4.7)$$

Ο μέσος όρος $\frac{(\text{άνω} + \text{κάτω})}{2}$ μετά το πέρας της διαδικασίας είναι το ζητούμενο z για κάθε μέτρηση.

-Οι νεές διορθωμένες τιμές τοποθετούνται στο αρχείο δεδομένων.

Το στάδιο αντίστροφης διόρθωσης των μετρήσεων ζενίθιων γωνιών από την αστρονομική διάθλαση αφορά μόνο το σχεδιασμό των προσομοιωμένων παρατηρήσεων, αφού σε αυτό ζητούνται οι υποθετικές μετρήσεις από τις θεωρητικά σωστές.

4.2.5. Προσαρμογή πολυωνύμου

Το στάδιο αυτό αναφέρεται στην προσαρμογή πολυωνύμου στα ζεύγη χρόνος-ζενίθια γωνία, στην επεξεργασία των μετρήσεων (προσομοιωμένων ή πραγματικών).

Στόχος της διαδικασίας είναι ο ακριβής προσδιορισμός της χρονικής στιγμής για την οποία η ζενίθια γωνία του άστρου είναι η επιθυμητή, που στη μέθοδο των ίσων υψών είναι ρητά καθορισμένη από την αρχή. Αυτό είναι απαραίτητο, αφού με τη χρήση των σύγχρονων οργάνων μέτρησης, υπάρχει δυνατότητα λήψης πολλαπλών μετρήσεων για κάθε άστρο τις χρονικές στιγμές πριν και μετά τη διέλευση του άστρου από το επιθυμητό ύψος. Έτσι, η χρονική στιγμή ενδιαφέροντος προκύπτει με την προσαρμογή ενός πολυωνύμου στα ζεύγη χρόνος-ζενίθια γωνία, με ζητούμενο τη χρονική στιγμή που η ζενίθια γωνία του άστρου είναι η επιθυμητή.

Ο βαθμός του πολυωνύμου που θα προσαρμοστεί στις μετρήσεις προέκυψε μέσα από διερεύνηση, με κριτήριο την ελαχιστοποίηση των σφαλμάτων των συντελεστών του πολυωνύμου, που είναι τα ζητούμενα μεγέθη της προσαρμογής. Αυτά χρησιμοποιούνται στη συνέχεια για να υπολογιστούν άλλα μεγέθη απαραίτητα για το επόμενο στάδιο επεξεργασίας. Στα πλαίσια της εργασίας, έγινε χρήση πολυωνύμου 3^{ου} βαθμού για την προσαρμογή στα ζεύγη μετρήσεων χρόνος-ζενίθια γωνία.

Πιο συγκεκριμένα, το αρχείο με όνομα 'prosarmogh_polywnymou_n.m' εκτελεί τις παρακάτω λειτουργίες:

-Δέχεται τις τιμές των αστρονομικών συντεταγμένων Φ, Λ του τόπου (προσεγγιστικές) από το αρχείο 'Astr_coord.txt' σε μοίρες.

-Δέχεται τις ουρανογραφικές συντεταγμένες του άστρου δ, α (σε μοίρες και ώρες αντίστοιχα), καθώς και τις επιθυμητές ώρες αρχής και τέλους παρατήρησής του στην κλίμακα UTC (σε ώρες) από το αρχείο 'declination_rightascension_utc1_utc2.txt'.

-Δέχεται από το αρχείο 'starn_plhthosastrwn_vathmospol.txt' τον αριθμό του άστρου (σειρά άστρου σε σχέση με τα υπόλοιπα), το πλήθος όλων των άστρων, καθώς και το βαθμό του πολωνύμου.

-Δέχεται τις τιμές χρόνος-αζιμούθιο-ζενίθια γωνία από το αρχείο 'utc_azimouthio_zenithia_diathlash.txt', οι οποίες είτε προέρχονται από το στάδιο της προσομοίωσης τροχιάς άστρου, είτε από πραγματικές μετρήσεις.

-Μέσω συνόρθωσης υπολογίζονται οι συντελεστές του πολωνύμου που προκύπτει, καθώς και τα σφάλματά τους. Από τους συντελεστές του πολωνύμου υπολογίζονται το t_o (χρόνος UTC για την επιθυμητή ζενίθια γωνία του άστρου σε ώρες), ενώ από την αντίστοιχη ωριαία γωνία σε ώρες προσδιορίζονται τα Z_o, A_o (σε μοίρες), που είναι οι οριζόντιες συντεταγμένες του άστρου τη στιγμή t_o . Επίσης υπολογίζονται τα σφάλματα σ_{t_o} (σφάλμα προσδιορισμού του χρόνου t_o σε ώρες), καθώς και το σ_{z_o} (σφάλμα Z_o σε μοίρες), που είναι απαραίτητο στο στάδιο της συνόρθωσης όλων των άστρων γιατί προσδιορίζει το βάρος της παρατήρησης κάθε άστρου.

-Μετά το πέρας των παραπάνω υπολογισμών, γίνεται έλεγχος των υπολοίπων των αρχικών μετρήσεων. Αν το υπόλοιπο μιας μέτρησης ξεπερνά το όριο της τυπικής απόκλισης, που προκύπτει από τα υπόλοιπα όλων των μετρήσεων στο άστρο, τότε η συγκεκριμένη μέτρηση απορρίπτεται. Αφού απορριφθούν οι «κακές» μετρήσεις, γίνεται εκ νέου προσαρμογή πολωνύμου στις νέες μετρήσεις, με τον υπολογισμό όλων των μεγεθών όπως παραπάνω.

-Το τμήμα κώδικα προσαρμογής πολωνύμου λειτουργεί ξεχωριστά για κάθε άστρο, που σημαίνει ότι πρέπει να εκτελεστεί τόσες φορές όσες είναι και ο αριθμός των άστρων που παρατηρήθηκαν και συμμετέχουν στην τελική συνόρθωση. Όταν γίνει αυτό, εξάγεται το αρχείο 'Ao_zo_szo.txt', με τα A_o, Z_o, σ_{z_o} για κάθε άστρο σε διαφορετική γραμμή. Αυτό σημαίνει ότι στο αρχείο υπάρχουν τόσες γραμμές όσες και τα άστρα.

Σημαντικές σχέσεις που χρησιμοποιούνται στους υπολογισμούς σε αυτό το τμήμα είναι:

$$h = \theta + \Lambda - \alpha \quad (4.8\alpha)$$

$$\cos z_o = \sin \delta \cdot \sin \Phi + \cos \delta \cdot \cos \Phi \cdot \cosh \quad (4.8\beta)$$

$$z_o = \arccos(\cos z_o) \quad (4.8\gamma)$$

$$\tan A = \frac{-\cos \delta \cdot \sinh}{\sin \delta \cdot \cos \Phi - \cos \delta \cdot \cosh \cdot \sin \Phi} \quad (4.8\delta)$$

$$A = \arctan(\tan A) \quad (4.8\epsilon)$$

$$\sigma_{to} = z' \cdot V_x \cdot z \quad (4.8\zeta)$$

όπου V_x είναι ο πίνακας μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας των συντελεστών του πολυωνύμου και $z = [1 \cdot z \cdot z^2 \cdot z^3]$ (πίνακας συντελεστών σφαλμάτων).

$$\sigma_{zo} = \cos \Phi \cdot \sin A_o \cdot \sigma_{to} \quad (4.8\eta)$$

4.2.6.Συνόρθωση όλων των άστρων

Η συνόρθωση των άστρων είναι το τελευταίο στάδιο στην επεξεργασία των μετρήσεων. Τα στοιχεία που υπολογίστηκαν για κάθε άστρο χωριστά, εισάγονται στους πίνακες της συνόρθωσης και από αυτά υπολογίζονται τα $\Delta\Phi$, $\Delta\Lambda \cos \Phi_o$.

Σε αυτό το στάδιο, γίνεται επίσης έλεγχος για τη σταθερότητα του κανονικού πίνακα N, κριτήριο το οποίο είναι βασικό όσον αφορά την ποιότητα του αποτελέσματος. Για το λόγο αυτό, στις διερευνήσεις και τις προσομοιώσεις έγινε έλεγχος του λόγου των ιδιοτιμών του πίνακα.

Έτσι, το αρχείο με όνομα 'Synorthwsh_astrwn.m' λειτουργεί ως εξής:

-Δέχεται τις τιμές των αστρονομικών συντεταγμένων Φ, Λ του τόπου (προσεγγιστικές) από το αρχείο 'Astr_coord.txt' σε μοίρες.

-Δέχεται τις τιμές αζιμουθίου, ζενίθιας γωνίας και σφάλματος ζενίθιας γωνίας από το αρχείο 'Ao_zo_szo.txt' (σε μοίρες).

-Κατασκευάζονται οι πίνακες A (πίνακας σχεδιασμού με τις τιμές A_o), I (πίνακας μετρήσεων με τις τιμές Z_o και την καθορισμένη τιμή z) και P (πίνακας βαρών με χρήση των τιμών σ_{zo} και το αυθαίρετα επιλεγμένο a priori σφάλμα σ_o). Οι πίνακες συμπληρώνονται όπως περιγράφηκε στο κεφάλαιο 3.

-Υπολογίζονται οι άγνωστοι ($\Delta\Phi$, $\Delta\Lambda \cos \Phi_o$), τα σφάλματά τους, καθώς και οι τελικές τιμές Φ , Λ .

-Γίνεται έλεγχος του λόγου ιδιοτιμών του κανονικού πίνακα N.

-Γίνεται αμφίπλευρος έλεγχος με το test χ^2 , για να ελεγχθούν οι αρχικές υποθέσεις και να γίνει ή όχι αποδεκτό το αποτέλεσμα.

Οι σχέσεις που χρησιμοποιούνται δίνονται στο κεφάλαιο 3.

5. ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ

Ο σχεδιασμός των αστρονομικών παρατηρήσεων αποτελεί σημαντικό κομμάτι της διαδικασίας των μετρήσεων και επηρεάζει το χρόνο, την ακρίβεια και την αποτελεσματικότητά τους. Περιλαμβάνει, κυρίως, την επιλογή των κατάλληλων άστρων προς σκόπευση για τη συγκεκριμένη ημέρα και ώρα παρατήρησης ώστε να επιτευχθεί ο ταυτόχρονος προσδιορισμός του αστρονομικού μήκους και πλάτους του σημείου παρατήρησης, που αποτελεί σκοπό της παρούσας εργασίας.

5.1. Αρχικές παράμετροι

Σύμφωνα με τη μεθοδολογία επιλογής άστρων και το αντίστοιχο τμήμα κώδικα της προηγούμενης ενότητας, έγινε προσπάθεια εύρεσης κάποιων αρχικών παραμέτρων που υπεισέρχονται στη διαδικασία. Αυτό έγινε με στόχο να μειωθεί ο υπολογιστικός φόρτος και το πλήθος των δοκιμών σχετικά με τα μεγέθη που εισέρχονται ως δεδομένα στη διαδικασία αναζήτησης των άστρων.

Οι βασικές παράμετροι αυτές είναι:

-Η ζενίθια γωνία παρατήρησης όλων των άστρων, που θεωρείται χωρίς σφάλμα, ενώ έχει βασικό ρόλο στις διαδικασίες του σχεδιασμού των μετρήσεων και της διαδικασίας μετρήσεων. Αποφασίστηκε να ελεγχθούν οι περιπτώσεις $z=20^\circ, 30^\circ$.

-Η ομάδα αζιμουθίων που θα χρησιμοποιηθούν στη διαδικασία παρατηρήσεων. Η ομάδα ορίζεται από τρία αζιμούθια (A_i σε μοίρες), από τα οποία προκύπτουν συνολικά 12 τιμές αζιμουθίων, μέσω των σχέσεων A_i , $180^\circ - A_i$, $180^\circ + A_i$, $360^\circ - A_i$ για κάθε άστρο. Έτσι εξασφαλίζεται μία καλή συμμετρία και παρατηρούνται άστρα στο εύρος αζιμουθίων $0-360^\circ$. Έγινε διερεύνηση σε 6 ομάδες αζιμουθίων ($^\circ$):

- 15,45,75
- 30,45,60
- 25,40,55
- 10,30,50
- 45,60,75
- 20,45,70

-Η διάρκεια της παρατήρησης του συνόλου των άστρων. Η παράμετρος αυτή έχει σημασία, διότι ορίζει για τον παρατηρητή το πλήθος των άστρων που είναι διαθέσιμα προς παρατήρηση στη συγκεκριμένη ζενίθια γωνία, στο συγκεκριμένο αζιμούθιο, για τη συγκεκριμένη ημερομηνία και ώρα. Είναι προφανές ότι όσο μεγαλύτερη η διάρκεια, τόσο περισσότερα τα διαθέσιμα άστρα. Ωστόσο μία διάρκεια πολλών ωρών είναι πιθανό να δυσκολέψει τη διαδικασία, επειδή ο καθορισμός του προγράμματος

παρατήρησης είναι επίπονη διαδικασία όταν αυξάνεται πολύ το πλήθος των άστρων. Στην περίπτωση μας έγινε μία διερεύνηση στις 4, 5, 6 ώρες διάρκειας παρατήρησης.

-Η ώρα έναρξης παρατήρησης των άστρων είναι επίσης βασική παράμετρος άμεσα συνδεδεμένη με τη διάρκεια της διαδικασίας. Γενικά είναι απαραίτητο να οριστεί ως έναρξη μία ώρα για την οποία σε συνδυασμό με τη διάρκεια των παρατηρήσεων να πληρούνται τα κριτήρια ορατότητας και διαθεσιμότητας άστρων. Επίσης, η κόπωση του παρατηρητή είναι ένα σημαντικό στοιχείο που πρέπει να ληφθεί υπόψη, δημιουργώντας την ανάγκη συντόμευσης του προγράμματος παρατήρησης. Οι χρόνοι UTC που χρησιμοποιήθηκαν στις δοκιμές είναι οι 19:00h, 20:00h, 21:00h (τοπικός χρόνος +3h).

-Η παράμετρος dd (εύρος ουράνιου παραθύρου κατά απόκλιση) είναι απαραίτητο να οριστεί, καθώς είναι βασικό στοιχείο για την οριοθέτηση του παραθύρου και για τη διερεύνηση ως προς το αν το άστρο διέρχεται από αυτό (έλεγχος). Η παράμετρος αυτή δεν πρέπει να είναι πολύ μεγάλη, για να μην συμπεριληφθεί μεγάλο πλήθος άστρων, η πλειοψηφία εκ των οποίων βρίσκεται σε αζιμούθια που διαφέρουν σημαντικά από τα επιθυμητά. Στις δοκιμές χρησιμοποιήθηκαν τιμές 5° , 10° , 15° , 20° , 25° .

-Το ελάχιστο φαινόμενο μέγεθος των άστρων που γίνονται δεκτά προς παρατήρηση έχει παρόμοια συνεισφορά με τη διάρκεια παρατήρησης στην τελική λίστα των άστρων. Κι αυτό γιατί είναι απαραίτητο να εξασφαλίζεται η ικανή ορατότητα του άστρου από το ανθρώπινο μάτι (εξαρτάται από το φαινόμενο μέγεθος του), καθώς και ένα ικανό πλήθος άστρων προς επιλογή (αύξηση του αριθμού τους με «αύξηση» του μεγέθους τους, που σημαίνει μικρότερη λαμπρότητα). Δοκιμές πραγματοποιήθηκαν για μεγέθη στο εύρος 4-5,5.

Είναι δεδομένο ότι όλες οι παραπάνω επιλογές πρέπει να ικανοποιούν δύο βασικές προϋποθέσεις: ότι ο αριθμός των άστρων συνολικά είναι ικανοποιητικός και ότι η λίστα περιλαμβάνει άστρα που ανήκουν σε όλες τις διευθύνσεις αζιμουθίων από τις 12 κάθε ομάδας. Έτσι, είναι λογικό πολλές δοκιμές να απορρίπτονται κατευθείαν αν δεν συνοδεύονται από αυτές τις προϋποθέσεις.

Πρέπει να σημειωθεί ότι οι παραπάνω παράμετροι δεν επηρεάζονται μόνο από τον παρατηρητή και τη μέθοδο, αλλά και από τη μορφή του ουρανού και τη χρονική στιγμή της παρατήρησης. Αυτό φανερώνει ότι μία πλήρης λίστα άστρων μπορεί να μην είναι πλήρης σε κάποια άλλη ημερομηνία, καθώς η μορφή του ουρανού μεταβαляется στη διάρκεια του χρόνου.

Οι παραπάνω παράμετροι αφορούν αποφάσεις που πρέπει να ληφθούν στην διαδικασία της παρατήρησης. Στο στάδιο του σχεδιασμού αυτής δεν είναι δεσμευτική η χρήση των ίδιων στοιχείων, αφού συμπεράσματα για τη διαδικασία μπορούν να προκύψουν ανεξάρτητα από τις τιμές των παραμέτρων. Είναι δηλαδή λογική η χρήση «φανταστικών» άστρων, ωστόσο επιλέχθηκαν πραγματικά άστρα και στο σχεδιασμό,

για να υπάρχει σύνδεση της επεξεργασίας με την πραγματικότητα και τις συνθήκες αυτής.

5.2. Αρχική επιλογή παραμέτρων

Μετα από δοκιμές και εναλλαγές των παραμέτρων, προέκυψαν κάποιες βέλτιστες παράμετροι. Ελήφθησαν υπόψη οι περιορισμοί κάθε μίας εξ'αυτών στην εύρεση άστρων. Επιπροσθέτως, δόθηκε μεγάλη σημασία στην εύρεση άστρων από όλες τις κατηγορίες αζιμουθίων, σε όσο το δυνατόν μεγαλύτερη κατανομή.

Παρακάτω παρουσιάζεται μία σειρά από δοκιμές. Ανάλογα με τις διαφορετικές παραμέτρους που δίνονται ως δεδομένα, εξετάζεται το πλήθος των άστρων που είναι κατάλληλα προς παρατήρηση, με μέγιστο, ελάχιστο και μέσο όρο (Μ.Ο) πλήθους άστρων ανά αζιμουθιακή κατηγορία, για τις 14 Ιουνίου 2016:

dd (°)	z (°)	A(°)	Αρ. Άστρων	Μέγιστο	Ελάχιστο	Μ.Ο.
5	20	15,45,75	105	13	4	9
		30,45,60	91	18	2	10
		25,40,55	77	14	1	8
		10,30,50	75	12	3	8
		45,60,75	121	18	3	11
		20,45,70	110	18	3	11
5	30	15,45,75	111	19	4	12
		30,45,60	81	13	2	8
		25,40,55	79	13	4	9
		10,30,50	68	14	2	8
		45,60,75	127	19	5	12
		20,45,70	94	14	4	9
10	20	15,45,75	176	29	5	17
		30,45,60	91	18	2	10
		25,40,55	77	14	1	8
		10,30,50	83	17	3	10
		45,60,75	121	18	3	11
		20,45,70	147	26	3	15
10	30	15,45,75	186	31	4	18
		30,45,60	99	21	2	12
		25,40,55	91	20	4	12
		10,30,50	92	15	2	9
		45,60,75	158	22	7	15
		20,45,70	171	29	5	17
15	20	15,45,75	176	29	5	17
		30,45,60	91	18	2	10
		25,40,55	77	14	1	8
		10,30,50	83	17	3	10
		45,60,75	121	18	3	11

		20,45,70	147	25	3	14
15	30	15,45,75	224	41	4	23
		30,45,60	99	21	2	12
		25,40,55	91	20	4	12
		10,30,50	92	15	2	9
		45,60,75	158	22	7	15
		20,45,70	187	37	5	21

Πίνακας 5.1: Πλήθος κατάλληλων άστρων ανά συνδυασμό για τις 14 Ιουνίου 2016

Από τα στοιχεία του παραπάνω πίνακα, αποφασίστηκε να επιλεγεί η τριάδα των χαρακτηριστικών αζιμουθίων από την ομάδα με χαρακτηριστικά $dd=10^\circ$, $z=20^\circ$.

Αυτή η επιλογή έγινε ώστε το ουράνιο παράθυρο να μην είναι πολύ ευρύ, ώστε να μην υπάρχουν μεγάλες αποκλίσεις από το χαρακτηριστικό αζιμούθιο για $z=20^\circ$. Ακόμα, για να είναι εύκολη η εξαγωγή προγράμματος παρατήρησης, θεωρείται σκόπιμο να μην υπάρχουν πολλά άστρα ανά κατηγορία (που μπορεί να επικαλύπτονται χρονικά), αλλά ούτε πολύ λίγα, ώστε να υπάρχουν εναλλακτικά σενάρια.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, επιλέχθηκαν τελικά οι ακόλουθες παράμετροι:

- $z=20^\circ$

- $A_i=30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$

-Ωρα έναρξης: 19:00h UTC

- $dd=10^\circ$

- $V_{mag} \leq 5.1$ (ελάχιστο φαινόμενο μέγεθος)

Οι επιλογές ικανοποιούν τους περιορισμούς και τις απαιτήσεις που αναφέρθηκαν. Ωστόσο, πρέπει να γίνει και έλεγχος μέσω της επεξεργασίας των άστρων που προκύπτουν σε κάθε περίπτωση.

Ο έλεγχος αυτός γίνεται για κάθε ομάδα αζιμουθίων. Βασικό κριτήριο για την ποιότητα της τελικής λύσης είναι η ευστάθεια του κανονικού πίνακα N. Οπότε γίνεται τελικά έλεγχος στο λόγο ιδιοτιμών του πίνακα N για κάθε ομάδα αζιμουθίων.

Στα πλαίσια της εργασίας έγιναν δύο έλεγχοι ιδιοτιμών, οι οποίοι παρουσιάζονται παρακάτω.

5.3. Αναζήτηση βέλτιστης κατανομής άστρων

Τα δεδομένα αυτής της διαδικασίας είναι:

-Ημερομηνία: 14 Ιουνίου 2016

-Ωρα έναρξης:19:00h UTC

-Διάρκεια παρατηρήσεων:5 h

-z=20°

-Φ=37,9735000°/37,97488889°

-Λ=23,77927778°/23,77788889°

-dd=10°

-Vmag<=5.1

Για κάθε ομάδα αζιμουθίων έγινε επιλογή 12 άστρων που να βρίσκονται σε αζιμούθιο όσο πιο κοντά γίνεται στο κάθε χαρακτηριστικό αζιμούθιο. Στη συνέχεια προσομοιώθηκαν οι τροχιές των άστρων αυτών, θεωρώντας ότι υπάρχει ένα τυχαίο σφάλμα στην ζενίθια γωνία και η οποία, τροποποιήθηκε για την επίδραση της διάθλασης. Έπειτα προσαρμόστηκε πολυώνυμο τρίτου βαθμού στα ζεύγη χρόνος-ζενίθια γωνία για κάθε άστρο για να προκύψει η εξίσωση παρατήρησης κάθε άστρου. Το σύνολο των άστρων συνορθώθηκε και προέκυψαν οι ιδιοτιμές και ο λόγος τους (μέγιστη προς ελάχιστη ιδιοτιμή κανονικού πίνακα συνόρθωσης). Παρακάτω παρουσιάζονται τα αποτελέσματα ανά ομάδα αζιμουθίων:

ΟΜΑΔΕΣ ΑΖΙΜΟΥΘΙΟΥ (°)	ΛΟΓΟΣ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ
15,45,75	8,0770
30,45,60	1,4305
25,40,55	1,9795
10,30,50	9,5369
45,60,75	2,1606
20,45,70	2,9673

Πίνακας 5.2:Λόγοι ιδιοτιμών ανά ομάδα αζιμουθίου (σφάλμα z:2'')

ΟΜΑΔΕΣ ΑΖΙΜΟΥΘΙΟΥ (°)	ΛΟΓΟΣ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ
15,45,75	8,3536
30,45,60	1,4353
25,40,55	1,9397
10,30,50	9,2943
45,60,75	2,1380
20,45,70	2,7162

Πίνακας 5.3:Λόγοι ιδιοτιμών ανά ομάδα αζιμουθίου (σφάλμα z:6'')

Από τα αποτελέσματα των πινάκων για σφάλμα ζενίθιας γωνίας ίσο με 2'' και 6'', είναι εμφανές ότι δεν μεταβάλεται σημαντικά ο λόγος των ιδιοτιμών. Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχουν μεγάλες διαφορές ως προς την ευστάθεια του κανονικού πίνακα.

Από τα παραπάνω αποτελέσματα, είναι εμφανές ότι το σενάριο 30°, 45°, 60° είναι το καλύτερο με κριτήριο την ευστάθεια του κανονικού πίνακα. Οπότε αποτελεί την καλύτερη γεωμετρία αζιμουθίων για την ελαχιστοποίηση των αριθμητικών σφαλμάτων.

Στα παραπάνω δεδομένα χρησιμοποιήθηκαν στην επεξεργασία κάθε άστρου δύο τιμές για τις αστρονομικές συντεταγμένες του τόπου. Η πρώτη τιμή αφορά μόνο το τμήμα της προσωμοίωσης τροχιάς, ενώ η δεύτερη τον υπολογισμό της εξίσωσης παρατήρησης μετά την προσαρμογή του πολυωνύμου 3^{ου} βαθμού σε κάθε τροχιά. Σκοπός αυτού είναι να ελεγχθούν ταυτόχρονα με τις ιδιοτιμές και τα αποτελέσματα της λύσης και τα σφάλματα αυτών. Αυτά ωστόσο θα παρουσιαστούν αναλυτικά στο κεφάλαιο των προσωμοιώσεων.

5.4.Επιλογή των άστρων

Για την επιλογή των άστρων, αναπτύχθηκε το πρόγραμμα ‘Epilogh_astrwn.m’, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως στο περιβάλλον του Matlab (Παράρτημα). Αυτό, συνοπτικά, επιλέγει άστρα από τον κατάλογο Tycho2 [Høg et.al.,2002] με βάση τον τόπο και τον χρόνο της παρατήρησης και παραμέτρους που ορίζονται από τον χρήστη, σχετικά με το επιθυμητό ύψος παρατήρησης, τις κατάλληλες οριζόντιες γωνίες σκόπευσης με βάση το μοντέλο παρατήρησης, το εύρος σκόπευσης των ζενιθίων και οριζόντιων γωνιών, το μέγεθος των άστρων και άλλα που θα αναλυθούν παρακάτω.

Παρακάτω παρουσιάζεται ένα απόσπασμα από τον πίνακα άστρων που εξάγεται από το πρόγραμμα:

ομαδα	κωδικος	κωδικος	ΟΡΘΗ ΑΝΑΦΟΡΑ(ΜΟΙΡΕΣ)	ΑΠΟΚΛΙΣΗ(ΜΟΙΡΕΣ)	ΜΕΓΕΘΟΣ	ΥΤΣ(ΩΡΕΣ)	ΩΡΙΑΙΑ ΓΩΝΙΑ(ΩΡΕΣ)	ΑΖΙΜΟΥΘΙΟ(ΜΟΙΡΕΣ)	ΧΑΡ.ΑΖΙΜΟΥΘΙΟ(ΜΟΙΡΕΣ)
1	3870	1962	239,5428454	54,70646458	4,987	19,73893951	22,92338802	28,02476875	30
1	3920	1971	289,3708191	53,40143793	3,884	22,89562823	22,76684703	33,57602534	30
2	1498	1787	235,5688789	19,62097023	4,513	19,94043053	23,39036133	154,0435285	150
2	1502	1782	237,9947022	20,93202311	4,914	19,90433571	23,19244622	145,0363584	150
2	1579	1852	272,3637508	20,82069597	4,319	22,20385777	23,20698877	145,7153863	150
2	1591	1918	281,5909803	20,56537507	4,243	22,85188895	23,24164403	147,3213149	150
2	1609	2082	293,8245976	19,81224588	4,974	23,78028352	23,35700376	152,5570774	150
3	1466	1082	207,620064	21,18499653	5,075	19,52738462	0,839439847	216,4637401	210
3	1498	1787	235,5688789	19,62097023	4,513	21,15638161	0,60963867	205,9564715	210
3	1502	1782	237,9947022	20,93202311	4,914	21,51503716	0,807553783	214,9636416	210
3	1579	1852	272,3637508	20,82069597	4,319	23,78555346	0,793011232	214,2846137	210
4	3850	1384	201,4654337	54,9044123	4,007	19,3267918	1,048606983	332,8896057	330
4	3851	1506	205,3351409	54,60070462	4,828	19,626388	1,091042258	331,4959948	330
4	3870	1962	239,5428454	54,70646458	4,987	21,88628933	1,076611978	331,9752313	330
5	3502	2258	249,7965973	48,89950579	5,07	19,94665825	22,44809152	49,42911528	45
5	3523	1685	267,365029	50,78033072	5,022	21,21730203	22,5509824	43,20500407	45
5	3552	2018	283,4079576	50,73156636	5,011	22,28079585	22,54785686	43,37188256	45

Εικόνα 5.1: Απόσπασμα πίνακα TELASTRA εξόδου αρχείου ‘Epilogh_astrwn’

Τελικά, σύμφωνα με τους παραπάνω ελέγχους και διερευνήσεις, εισήχθησαν στο πρόγραμμα τα παρακάτω δεδομένα για την εύρεση των άστρων που θα χρησιμοποιηθούν τόσο στις προσωμοιώσεις όσο και στη νυχτερινή παρατήρηση:

- Προσεγγιστικές τιμές του αστρονομικού μήκους και πλάτους του τόπου $\Phi_0=37,97488889^\circ$, $\Lambda_0=23,77788889^\circ$.
- Ο παγκόσμιος συντονισμένος χρόνος UTC=19:00h της έναρξης της παρατήρησης.
- Η ομάδα αζιμουθίων (3 τιμές), από την οποία προκύπτουν οι 12 διευθύνσεις σε όλο το εύρος $0-360^\circ$ μοίρες, η οποία είναι η ομάδα 30° , 45° , 60° .
- Το επιθυμητό ύψος παρατήρησης ($Z=20^\circ$).
- Το εύρος της απόκλισης των άστρων $dd=10^\circ$, που ορίζει και το εύρος της αναζήτησης.
- Η διάρκεια παρατήρησης και άρα αναζήτησης των διαθέσιμων άστρων ίση με 5h.
- Ο κατάλογος των άστρων Tycho2.
- Οι παράμετροι του μοντέλου κλόνησης της Γης από το αρχείο nutation80.txt.

Η χρήση των παραπάνω παραμέτρων έγινε τόσο στην αναζήτηση άστρων στο στάδιο των προσομοιώσεων, όσο και στο στάδιο της αναζήτησης άστρων για τη νυχτερινή παρατήρηση και υλοποίηση της μεθόδου.

Επιπλέον, για την κατάρτιση του τελικού προγράμματος παρατήρησης πρέπει να λαμβάνονται υπόψη τα εξής:

- Είναι καλύτερο να επιλέγονται άστρα με μέγεθος μεταξύ 4 και 7. Στην αντίθετη περίπτωση, είτε τα άστρα είναι μεγάλα και η σκόπευση τους παύει να είναι σημειακή, είτε είναι πολύ αμυδρά και είναι δύσκολο να παρατηρηθούν.
- Δεν επιλέγονται διπλά άστρα γιατί είναι ασαφής η σκόπευση τους.
- Το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ της παρατήρησης δύο διαδοχικών άστρων δεν πρέπει να είναι μικρότερο από 10 λεπτά, περίπου, ώστε να υπάρχει χρόνος για την αναγνώριση και την πλήρη παρατήρηση κάθε άστρου.
- Επιλέγονται άστρα που πληρούν με το βέλτιστο τρόπο το κριτήριο των δώδεκα συμμετρικών θέσεων εκατέρωθεν του αστρονομικού μεσημβρινού, ώστε να εξασφαλίζονται οι καλύτερες προϋποθέσεις για το σωστό και ακριβή προσδιορισμό του αστρονομικού μήκους και πλάτους του τόπου. Δηλαδή, το αναμενόμενο πραγματικό αζιμούθιο του άστρου, όπως υπολογίζεται, δεν πρέπει να διαφέρει κατά πολύ από το ονομαστικό αζιμούθιο της ομάδας στην οποία ανήκει. Με τον τρόπο αυτό εξασφαλίζεται η συμμετρία με τα υπόλοιπα, εφόσον υπάρχουν κατάλληλα άστρα και υφίσταται η δυνατότητα επιλογής για κάθε ομάδα.

· Είναι καλό το πρόγραμμα της παρατήρησης να μην ξεπερνά τις τρεις με τέσσερις ώρες ώστε να μην είναι επίπονο και χρονοβόρο για τον παρατηρητή αλλά και να επικρατούν όμοιες συνθήκες πίεσης και θερμοκρασίας στον τόπο, κατά τη διάρκεια των παρατηρήσεων.

· Ενδείκνυται να καταγράφονται εναλλακτικές λύσεις για την παρατήρηση άστρων με παρεμφερή χαρακτηριστικά, σε περίπτωση που δεν κυλήσει ομαλά η παρατήρηση με βάση το αρχικό πρόγραμμα.

Παρουσιάζεται παρακάτω ο πίνακας με τα άστρα που χρησιμοποιήθηκαν ως πρόγραμμα παρατήρησης. Παρά το γεγονός ότι οι παράμετροι είναι ίδιες, τα 12 άστρα του προγράμματος παρατήρησης και των προσομοιώσεων δεν ταυτίζονται, διότι τα κριτήρια επιλογής των άστρων δεν είναι ίδια. Στις προσομοιώσεις το ενδιαφέρον εστιάζεται σε άστρα με αζιμούθια όσο το δυνατόν κοντά στο χαρακτηριστικό αζιμούθιο. Στην εξαγωγή του προγράμματος παρατήρησης, εισάγεται ως μεταβλητή και ο χρόνος παρατήρησης (στιγμή διέλευσης του άστρου από το επιθυμητό αζιμούθιο και ζενίθια γωνία), επειδή πρέπει να απορριφθούν επιλογές άστρων με χρονικά διαστήματα παρατήρησης που είναι επικαλυπτόμενα.

(μοίρες)	#	ομαδα	ΓΕΝΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΣΤΡΟΥ			When z=20	UTC start			-	UTC end		
			TYC	mag	Az (μοίρες)	h	m	s	h	m	s		
240	1	11	1995	2586	5,00	244,2362954786	19	0	24	-	19	8	48
60	2	9	3491	1859	4,69	58,4516097366	19	10	43	-	19	19	7
120	3	10	2037	1827	4,69	121,1589378596	19	20	52	-	19	29	16
330	4	4	3851	1506	4,83	331,4959947504	19	33	23	-	19	41	47
150	5	2	1498	1787	4,51	154,0435284665	19	52	14	-	20	0	38
315	6	8	3478	1332	4,10	320,289857677	20	34	53	-	20	43	17
45	7	5	3523	1685	5,02	43,2050040662	21	8	50	-	21	17	14
210	8	3	1502	1782	4,91	214,9636415736	21	26	42	-	21	35	6
225	9	7	2035	1749	4,83	224,8024968806	21	49	48	-	21	58	12
135	10	6	1580	2158	3,98	140,2058904543	22	15	59	-	22	24	23
300	11	12	3491	1859	4,69	301,5483902634	22	28	38	-	22	37	2
30	12	1	3920	1971	3,88	33,5760253352	22	49	32	-	22	57	56

Εικόνα 5.2: Πρόγραμμα παρατήρησης για τις 14 Ιουνίου 2016

6. ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΕΙΣ

6.1. Εισαγωγή

Με τον όρο προσομοιώσεις νοείται η διαδικασία δημιουργίας και επεξεργασίας πλασματικών μετρήσεων άστρων με στόχο την προσομοίωση, στο μέγιστο βαθμό, των συνθηκών που υπάρχουν στην υλοποίηση της μεθόδου με πραγματικές παρατηρήσεις. Τα άστρα αυτά μπορεί να έχουν πραγματικές συντεταγμένες (από πρόγραμμα επιλογής άστρων), ή «φανταστικές» συντεταγμένες.

Οι προσομοιώσεις είναι μέρος της διαδικασίας επιλογής των βασικών παραμέτρων και συνθηκών που είναι επιθυμητές κατά τη διαδικασία της παρατήρησης των άστρων, ώστε τα αποτελέσματα να έχουν την απαιτούμενη ακρίβεια.

Στο πλαίσιο τους πραγματοποιούνται δοκιμαστικές επιλύσεις-επεξεργασίες του προβλήματος, με είσοδο σφαλμάτων σε κάποια βασικά μεγέθη. Αυτό γίνεται ώστε να προσομοιωθούν σε μεγάλο βαθμό οι πραγματικές παρατηρήσεις και τα σφάλματα που υπεισέρχονται σε αυτές λόγω διαφόρων παραγόντων. Στόχος των προσομοιώσεων είναι η κατανόηση τη συμπεριφοράς της μεθόδου και του μαθηματικού μοντέλου στις μεταβολές των μεταβλητών. Έτσι, με την προσθήκη σφαλμάτων γνωστού μεγέθους στα αρχικά δεδομένα, μπορούν να εξαχθούν συμπεράσματα από τα αποτελέσματα.

Παρακάτω παρουσιάζονται οι δοκιμαστικές επιλύσεις- προσομοιώσεις που πραγματοποιήθηκαν.

6.2. Είσοδος σφαλμάτων

Η είσοδος των σφαλμάτων έγινε με το τμήμα κώδικα 'prosthiki_sfalma.m' (Παράρτημα), στο οποίο γίνεται η «μόλυνση» του επιθυμητού μεγέθους με ένα σφάλμα της επιλογής του χρήστη.

Τα μεγέθη που μπορούν να υποστούν την παραπάνω διεργασία είναι τα τρία μεγέθη που καταγράφονται στις μετρήσεις, δηλαδή η χρονική στιγμή παρατήρησης, το αζιμούθιο του άστρου τη χρονική αυτή στιγμή, καθώς και η ζενίθια γωνία του άστρου τη στιγμή αυτή.

Επιλέχθηκε να μην γίνει είσοδος σφάλματος στο αζιμούθιο του άστρου, επειδή χρησιμοποιείται μόνο για την εύρεση του άστρου και είναι το μέγεθος που επιτρέπεται να κυμαίνεται σε κάποιο εύρος (εύρος λίγων μοιρών σε σχέση με το χαρακτηριστικό αζιμούθιο αναζήτησης).

Ο χρόνος παρατήρησης του άστρου είναι ένα μέγεθος που έχει μεγάλη σημασία στην μέθοδο των ίσων υψών, οπότε έχει μεγάλη σημασία να εξεταστεί το πως επηρεάζεται από σφάλματα, τυχαία ή συστηματικά, όπως παρουσιάστηκαν σε προηγούμενη ενότητα. Τυχαία σφάλματα στο χρόνο παρατήρησης επηρεάζουν σημαντικά το αποτέλεσμα. Συστηματικά σφάλματα στο χρόνο παρατήρησης (που προέρχονται

κυρίως από την προσωπική εξίσωση του παρατηρητή) επίσης επηρεάζουν το αποτέλεσμα και επηρεάζουν ισόποσα το αστρονομικό μήκος.

Η ζενίθια γωνία του άστρου είναι το κυριότερο μέγεθος που επηρεάζει τις μετρήσεις και την επεξεργασία, και η ποσότητα που περιορίζει τις επιλογές στην υλοποίηση της μεθόδου.

Στη μέθοδο ίσων υψών, η χρονική στιγμή (χρόνος UTC παρατήρησης του άστρου) θεωρείται συνάρτηση της μετρούμενης ζενίθιας γωνίας, δηλαδή:

$$t = f(z)$$

όπου $f(z)$ είναι ένα πολυώνυμο 3^{ου} βαθμού. Με βάση τα στοιχεία που προκύπτουν από την προσαρμογή του πολυωνύμου αυτού στα ζεύγη (t,z) προκύπτουν όλα τα απαραίτητα μεγέθη για τη συνόρθωση του συνόλου των 12 άστρων ($t_0, A_0, z_0, \sigma_{t_0}, \sigma_{z_0}$ ανά άστρο). Από τα μεγέθη αυτά, τα A_0, z_0, σ_{z_0} συμμετέχουν άμεσα στη συνόρθωση άστρων, ενώ τα t_0 , στο χρησιμοποιούνται στον υπολογισμό αυτών.

Επειδή οι μετρήσεις για κάθε άστρο περιλαμβάνουν τόσο χρονικές στιγμές UTC όσο και ζενίθιες γωνίες, επιλέχθηκε να εισαχθούν σφάλματα μόνο σε ένα εκ των μεγεθών αυτών, ορίζοντας έτσι το ένα ως ανεξάρτητη μεταβλητή και ένα ως εξαρτημένη μεταβλητή. Οπότε, στις προσομοιώσεις τελικά προστέθηκε σφάλμα στη ζενίθια γωνία.

Ακόμα, πρέπει να σημειωθεί ότι στις προσομοιώσεις τα σφάλματα που υπεισέρχονται στις μετρήσεις ζενίθιας γωνίας είναι μόνο τυχαία.

Σε επόμενη ενότητα φαίνονται τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων με τυχαίο σφάλμα 2'' και 6'' στις ζενίθιες γωνίες που προσομοιώθηκαν για κάθε άστρο.

6.2.1.Κώδικας εισόδου τυχαίων σφαλμάτων

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, η είσοδος των σφαλμάτων έγινε με το τμήμα κώδικα 'prosthiki_sfalma.m' (Παράρτημα). Η διαδικασία που αυτό επιτελεί αφορά αποκλειστικά τα τυχαία σφάλματα (δηλαδή αυτά που ακολουθούν την κανονική κατανομή) και επηρεάζουν σε διαφορετικό βαθμό την κάθε μέτρηση.

Πιο συγκεκριμένα, το τμήμα-συνάρτηση 'prosthiki_sfalma.m' λειτουργεί ως εξής:

-Δέχεται τις τιμές mean, sdev που αποτελούν τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση που θα χαρακτηρίζουν την κανονική κατανομή των σφαλμάτων. Με την εντολή rand παράγεται μία σειρά από τιμές x, y τυχαίων αριθμών στο διάστημα (0,1) και από αυτές μια σειρά σφαλμάτων ομοιόμορφα κατανεμημένων (rn). Οι τιμές αυτές μετασχηματίζονται σε τιμές κανονικά κατανεμημένες (nor) μέσω των σχέσεων:

$$rn = \sqrt{-2 \cdot \log x} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot y)$$
$$nor = mean + rn \cdot sdev$$

Με αυτό τον τρόπο οι τιμές του επιθυμητού μεγέθους επηρεάζονται με σφάλματα τυχαίου χαρακτήρα εάν $mean = 0$, ή και συστηματικού χαρακτήρα εάν $mean \neq 0$. Όπως προαναφέρθηκε, δεν έγινε εισαγωγή συστηματικών σφαλμάτων, οπότε $mean = 0$.

-Γίνεται πρόσθεση του παραγόμενου από την παραπάνω διαδικασία σφάλματος σε μία τιμή του μεγέθους και η διαδικασία συνεχίζεται μέχρις ότου να έχει προστεθεί μια τιμή τυχαίου σφάλματος σε όλες τις τιμές- μετρήσεις του μεγέθους.

-Οι νέες τιμές είναι αυτές που χρησιμοποιούνται για τους υπόλοιπους υπολογισμούς.

6.3. Διαδικασία επεξεργασίας

Η διαδικασία επεξεργασίας για να γίνουν οι προσομοιώσεις είναι συνοπτικά η εξής:

-Προσομοίωση τροχιάς άστρου. Με τη διαδικασία αυτή γίνεται η προσομοίωση της υποθετικής τροχιάς του κάθε άστρου. Τα απαραίτητα στοιχεία υπολογίζονται μέσω του τριγώνου θέσης για σταθερό βήμα χρόνου μεταξύ χρονικών στιγμών που διαφέρουν κατά 4 περίπου λεπτά από τη στιγμή διέλευσης του άστρου από $z=20^\circ$ (εκατέρωθεν της στιγμής αυτής, δηλαδή συνολική παρατήρηση περίπου 8 λεπτά). Η στιγμή αυτή είναι γνωστή από το πρόγραμμα επιλογής άστρων. Γίνεται δηλαδή όπως προαναφέρθηκε σε προηγούμενη ενότητα χρήση πραγματικών άστρων.

-Προσθήκη τυχαίου σφάλματος στη ζενίθια γωνία. Μετά το πέρας της προσομοίωσης τροχιάς του άστρου, εισάγονται σφάλματα στη ζενίθια γωνία, κανονικά κατανομημένα. Αυτό γίνεται για κάθε μία μέτρηση z κάθε άστρου. Το σφάλμα αυτό έχει μέγεθος λίγα δευτερόλεπτα μοίρας ($2''$ και $6''$).

-Διόρθωση λόγω αντίστροφης διάθλασης. Σε αυτό το στάδιο γίνεται μία μετάβαση από τις τιμές ζενίθιας γωνίας που προκύπτουν από την προσομοίωση τροχιάς, στις αντίστοιχες «μετρημένες» τιμές ζενίθιας γωνίας. Με αυτόν τον τρόπο γίνεται αντικατάσταση των «υποθετικών» τιμών z (υπολογισμένες από το τρίγωνο θέσης) με μετρήσεις z επηρεασμένες από την αστρονομική διάθλαση. Έτσι οι νέες z αντιπροσωπεύουν καλύτερα τις πραγματικές μετρήσεις ζενίθιας γωνίας που θα παρατηρούνταν στην πραγματικότητα.

Τα τελικά ζεύγη τιμών (ζενίθια γωνία, χρόνος), που προκύπτουν, αντιστοιχούν σε μια ρεαλιστική προσομοίωση πραγματικών μετρήσεων κάθε άστρου.

Στη συνέχεια, η επεξεργασία των προσομοιωμένων μετρήσεων ακολουθεί την ίδια διαδικασία με τις πραγματικές μετρήσεις:

-Διόρθωση λόγω διάθλασης, που έχει στόχο την κανονική διόρθωση από αστρονομική διάθλαση των μετρήσεων z . Στη διαδικασία αυτή γίνεται μετάβαση από την «μετρημένη» στη «γεωμετρικά σωστή» τιμή ζενίθιας γωνίας.

-Προσαρμογή πολυωνύμου στα ζεύγη μετρήσεων (UTC, z) για κάθε άστρο. Στα μεγέθη του χρόνου και της ζενίθιας γωνίας προσαρμόζεται η καλύτερη δυνατή καμπύλη- πολυώνυμο 3^{ου} βαθμού. Από την προσαρμογή γίνεται προσδιορισμός της τιμής t_0 (χρονική στιγμή που το άστρο διήλθε από $z=20^\circ$) και από αυτό υπολογίζονται τα μεγέθη z_0 , A_0 , σz_0 , με τη βοήθεια των σχέσεων του τριγώνου θέσης και με αρχικές τιμές των αστρονομικών συντεταγμένων Φ και Λ .

-Συνόρθωση όλων των άστρων. Τα μεγέθη z_0 , A_0 , σz_0 χρησιμοποιούνται στη συνόρθωση του συνόλου των άστρων και γίνεται υπολογισμός των $\Delta\Phi$, $\Delta\Lambda$, $\sigma\Delta\Phi$, $\sigma\Delta\Lambda$, που είναι οι άγνωστοι της μεθόδου.

Τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων παρουσιάζονται παρακάτω.

6.4.Δοκιμές

6.4.1.Δεδομένα προσομοιώσεων

Όσον αφορά τις προσομοιώσεις, αυτές πραγματοποιήθηκαν με τις παραμέτρους και τα στοιχεία που προέκυψαν από τις δοκιμές της προηγούμενης ενότητας, με τα άστρα που αναζητήθηκαν μέσα από τον κατάλογο Tycho2 (πραγματικά άστρα).

Τα άστρα που χρησιμοποιήθηκαν αναζητήθηκαν από τον πίνακα Tycho2 με το τμήμα κώδικα 'Epiogh_astrown.m', όπως αναλύθηκε στο κεφάλαιο 4. Οι βασικές παράμετροι εισόδου στο πρόγραμμα είναι οι ίδιες με τις αντίστοιχες που χρησιμοποιήθηκαν για το πρόγραμμα παρατήρησης για τις 14 Ιουνίου 2016. Αυτές είναι:

-Ημερομηνία:14 Ιουνίου 2016

-Ωρα έναρξης:19:00h UTC

-Διάρκεια παρατηρήσεων:5 h

- $z=20^\circ$ -

- $\Phi=(37^\circ 58' 24.6'' / 29.6'')$

- $\Lambda=(23^\circ 46' 45.4'' / 40.4'')$

- $dd=10^\circ$

- $V_{mag}\leq 5.1$

Στα Φ , Λ οι τιμές που χρησιμοποιήθηκαν είναι δύο. Η πρώτη αφορά το στάδιο της προσομοίωσης της τροχιάς του άστρου και η δεύτερη αφορά τη συνόρθωση των άστρων.

Επιπλέον, για τη διόρθωση της ζενίθιας γωνίας από την αστρονομική διάθλαση, οι τιμές θερμοκρασίας και πίεσης είναι ενιαίες για όλα τα σενάρια. Αυτές είναι οι τυπικές τιμές $\theta=24^{\circ}\text{C}$, $p=995,2\text{ mbar}$.

Τα 12 άστρα, που χρησιμοποιήθηκαν για κάθε μία από τις ομάδες αζιμουθίων που εξετάστηκαν (συντεταγμένες διορθωμένες από μετάπτωση και κλόνιση), είναι τα εξής:

- Ομάδα αζιμουθίων: $15^{\circ}, 45^{\circ}, 75^{\circ}$

ΑΡΙΘΜΟΣ	ΚΩΔΙΚΟΣ (TYCHO 2)	ΟΡΘΗ ΑΝΑΦΟΡΑ ($^{\circ}$)	ΑΠΟΚΛΙΣΗ ($^{\circ}$)
1	3913 2269	278,21461236	57,06101022
2	1587 2067	281,93525954	18,20317381
3	1587 2067	281,93525954	18,20317381
4	3910 1710	268,45265089	56,87307979
5	3564 3157	294,22095860	50,26174121
6	2035 1749	240,74863113	22,76239284
7	2035 1749	240,74863113	22,76239284
8	3466 1270	203,77673937	48,93414313
9	3156 2223	305,70455353	40,31156992
10	2685 1920	307,51623409	30,42568745
11	2532 2226	195,26155021	30,69816930
12	3047 1258	225,63834972	40,32881794

Πίνακας 6.1: Άστρα στις προσομοιώσεις για το σενάριο 15,45,75

- Ομάδα αζιμουθίων: $30^{\circ}, 45^{\circ}, 60^{\circ}$

ΑΡΙΘΜΟΣ	ΚΩΔΙΚΟΣ (TYCHO 2)	ΟΡΘΗ ΑΝΑΦΟΡΑ ($^{\circ}$)	ΑΠΟΚΛΙΣΗ ($^{\circ}$)
1	3870 1962	239,54284538	54,70646458
2	1609 2082	293,82459761	19,81224588
3	1502 1782	237,99470221	20,93202311
4	3851 1506	205,33514089	54,60070462
5	3564 3157	294,22095860	50,26174121
6	2035 1749	240,74863113	22,76239284
7	2035 1749	240,74863113	22,76239284
8	3466 1270	203,77673937	48,93414313
9	3491 1859	240,82528691	45,99438724
10	2036 1674	235,85608675	26,24698101
11	2036 1674	235,85608675	26,24698101
12	3491 1859	240,82528691	45,99438724

Πίνακας 6.2: Άστρα στις προσομοιώσεις για το σενάριο 30,45,60

- Ομάδα αζιμουθίων: 25°,40°,55°

ΑΡΙΘΜΟΣ	ΚΩΔΙΚΟΣ (TYCHO 2)	ΟΡΘΗ ΑΝΑΦΟΡΑ (°)	ΑΠΟΚΛΙΣΗ (°)
1	3870 1962	239,54284538	54,70646458
2	1498 1787	235,56887892	19,62097023
3	1498 1787	235,56887892	19,62097023
4	3850 1384	201,46543366	54,90441230
5	3555 2112	292,53027196	51,76740467
6	1580 2158	276,09822556	21,78069500
7	1466 1082	207,62006398	21,18499653
8	3478 1332	216,43505535	51,77746409
9	3545 3041	285,47584870	46,96102989
10	2065 1930	258,92509705	24,82347023
11	2010 1245	212,78431695	25,01651877
12	3492 1909	245,05660319	46,27757336

Πίνακας 6.3: Άστρα στις προσομοιώσεις για το σενάριο 25,40,55

- Ομάδα αζιμουθίων: 10°,30°,50°

ΑΡΙΘΜΟΣ	ΚΩΔΙΚΟΣ (TYCHO 2)	ΟΡΘΗ ΑΝΑΦΟΡΑ (°)	ΑΠΟΚΛΙΣΗ (°)
1	3913 2269	278,21461236	57,06101022
2	1587 2067	281,93525954	18,20317381
3	1587 2067	281,93525954	18,20317381
4	3910 1710	268,45265089	56,87307979
5	3870 1962	239,54284538	54,70646458
6	1609 2082	293,82459761	19,81224588
7	1498 1787	235,56887892	19,62097023
8	3851 1506	205,33514089	54,60070462
9	3502 2258	249,79659725	48,89950579
10	2154 4100	301,89810726	23,66438749
11	2024 1355	227,00336247	24,80841634
12	3502 2258	249,79659725	48,89950579

Πίνακας 6.4: Άστρα στις προσομοιώσεις για το σενάριο 10,30,50

- Ομάδα αζιμουθίων: 45°,60°,75°

ΑΡΙΘΜΟΣ	ΚΩΔΙΚΟΣ (TYCHO 2)	ΟΡΘΗ ΑΝΑΦΟΡΑ (°)	ΑΠΟΚΛΙΣΗ (°)
1	3564 3157	294,22095860	50,26174121
2	2035 1749	240,74863113	22,76239284
3	2035 1749	240,74863113	22,76239284

4	3466 1270	203,77673937	48,93414313
5	3491 1859	240,82528691	45,99438724
6	2036 1674	235,85608675	26,24698101
7	2036 1674	235,85608675	26,24698101
8	3491 1859	240,82528691	45,99438724
9	3156 2223	305,70455353	40,31156992
10	2685 1920	307,51623409	30,42568745
11	2532 2226	195,26155021	30,6981693
12	3047 1258	225,63834972	40,32881794

Πίνακας 6.5: Άστρα στις προσομοιώσεις για το σενάριο 45,60,75

- Ομάδα αζιμουθίων: 20°,45°,70°

ΑΡΙΘΜΟΣ	ΚΩΔΙΚΟΣ (TYCHO 2)	ΟΡΘΗ ΑΝΑΦΟΡΑ (°)	ΑΠΟΚΛΙΣΗ (°)
1	3882 2597	251,40061839	56,75561913
2	1498 1787	235,56887892	19,62097023
3	1498 1787	235,56887892	19,62097023
4	3882 2597	251,40061839	56,75561913
5	3564 3157	294,22095860	50,26174121
6	2035 1749	240,74863113	22,76239284
7	2035 1749	240,74863113	22,76239284
8	3466 1270	203,77673937	48,93414313
9	3066 2214	247,29362869	41,84894355
10	2102 2772	269,59947857	29,24960405
11	2032 1605	232,12426026	29,05236125
12	3066 2214	247,29362869	41,84894355

Πίνακας 6.6: Άστρα στις προσομοιώσεις για το σενάριο 20,45,70

6.4.2.Αποτελέσματα προσομοιώσεων

Τα αποτελέσματα που ακολουθούν εξάγονται από τη συνόρθωση των 12 άστρων ανά αζιμουθιακή ομάδα. Για κάθε μία από αυτές δίνονται τα μεγέθη A_0 , z_0 , s_{z_0} , τα οποία είναι τα δεδομένα της συνόρθωσης, καθώς και το αργιοσι σφάλμα της μονάδας βάρους s_0 . Στη συνέχεια, με βάση τα δεδομένα αυτά υπολογίζονται τα ζητούμενα μεγέθη της μεθόδου, δηλαδή τα $\Delta\Phi$, $\Delta\Lambda$, $\sigma\Delta\Phi$, $\sigma\Delta\Lambda$, τα υπόλοιπα της συνόρθωσης και το a posteriori σφάλμα της μονάδας βάρους. Προσδιορίζονται ακόμα οι λόγοι ιδιοτιμών του κανονικού πίνακα κάθε συνόρθωσης, με στόχο την εξέταση της ευστάθειας του πίνακα. Τέλος, γίνεται αμφίπλευρος στατιστικός έλεγχος (τεστ χ^2) για έλεγχο των υποθέσεων και του μοντέλου που χρησιμοποιήθηκε.

Τα αποτελέσματα για κάθε σενάριο κατανομής αζιμουθίων διαχωρίζονται ανάλογα με το μέγεθος του τυχαίου σφάλματος στη ζενίθια γωνία (2'' και 6'').

6.4.2.1. Σφάλμα στη ζενίθια γωνία: 2''

- Ομάδα αζιμουθίων: 15°, 45°, 75°

Ο επόμενος πίνακας περιλαμβάνει τα τρία μεγέθη που είναι απαραίτητα ως δεδομένα για τη συνόρθωση των 12 άστρων του συγκεκριμένου σεναρίου:

ΑΡΙΘΜΟΣ	ΚΩΔΙΚΟΣ (TYCHO2)	A_o (°)	Z_o (°)	σ_{zo} (')
1	3913 2269	14,47259303	19,99883083	0,5792
2	1587 2067	170,34819756	20,00176272	0,3608
3	1587 2067	189,64681108	20,00152292	0,3571
4	3910 1710	344,08114946	19,99840943	0,5964
5	3564 3157	44,96276894	19,99991699	1,4956
6	2035 1749	135,19015365	20,00189729	1,5467
7	2035 1749	224,80366784	20,00030225	1,4812
8	3466 1270	310,68431957	19,99835168	1,5348
9	3156 2223	75,22947478	20,00066216	1,9928
10	2685 1920	105,43978137	20,00155898	2,0301
11	2532 2226	255,45762888	19,99929128	2,0892
12	3047 1258	284,82080701	19,99859714	1,9819

Πίνακας 6.7: A_o , z_o , σ_{zo} για το σενάριο 15,45,75 (σφάλμα z : 2'')

Όσον αφορά τον πίνακα βαρών, αυτά προκύπτουν από το λόγο $\frac{\sigma_o^2}{\sigma_{zo}^2}$ (όπου σ_o

είναι το a priori σφάλμα της μονάδας βάρους που επιλέγεται αυθαίρετα, ενώ το σ_{zo} όπως προέκυψε από τους υπολογισμούς για κάθε άστρο).

Στην παραπάνω περίπτωση χρησιμοποιήθηκε $\sigma_o = 2''$.

$\Delta I = \text{ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ (}^\circ\text{)}$	$\Delta I = \text{ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ (}'\text{'})$
-0,00116917	-4,21
0,00176272	6,35
0,00152292	5,48
-0,00159057	-5,73
-0,00008301	-0,30
0,00189729	6,83
0,00030225	1,09
-0,00164832	-5,93
0,00066216	2,38
0,00155898	5,61
-0,00070872	-2,55
-0,00140286	-5,05

Πίνακας 6.8: Πίνακας μετρήσεων για το σενάριο 15,45,75 (σφάλμα z : 2'')

Ο παραπάνω πίνακας δίνει τις διαφορές $Z_0 - z$ (με $z=20^\circ$ και Z_0 όπως προκύπτει από την επίλυση τριγώνου θέσης) για κάθε άστρο.

Μετά τη συνόρθωση των άστρων εξάγονται τα παρακάτω αποτελέσματα για τις αστρονομικές συντεταγμένες:

$\Delta\Phi$ (")	$\Delta\Lambda$ (")
-5,74	3,63

Πίνακας 6.9: Αποτελέσματα $\Delta\Phi, \Delta\Lambda$ για το σενάριο 15,45,75 (σφάλμα $z: 2''$)

Τα σφάλματα των παραπάνω μεγεθών είναι:

$\sigma_{\Delta\Phi}$ (")	$\sigma_{\Delta\Lambda}$ (")
0,15	0,54

Πίνακας 6.10: Αποτελέσματα $\sigma_{\Delta\Phi}, \sigma_{\Delta\Lambda}$ για το σενάριο 15,45,75 (σφάλμα $z: 2''$)

Έτσι οι τελικές συντεταγμένες του βάθρου είναι:

$\Phi = \text{ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΚΟ ΠΛΑΤΟΣ}$	$\Lambda = \text{ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΚΟ ΜΗΚΟΣ}$
$37^\circ 58' 23,86'' \pm 0,15''$	$23^\circ 46' 44,03'' \pm 0,54''$

Πίνακας 6.11: Τελικές συντεταγμένες Φ, Λ για το σενάριο 15,45,75 (σφάλμα $z: 2''$)

Τα υπόλοιπα που προκύπτουν από τη συνόρθωση είναι:

ΥΠΟΛΟΙΠΑ ($^\circ$)	ΥΠΟΛΟΙΠΑ (")
-0,000122	-0,438
-0,000023	-0,083
-0,000121	-0,436
-0,000218	-0,784
-0,000332	-1,197
-0,000057	-0,205
0,000118	0,426
-0,000154	-0,555
-0,000094	-0,340
-0,000164	-0,590
0,000134	0,481
0,000022	0,077

Πίνακας 6.12: Υπόλοιπα συνόρθωσης για το σενάριο 15,45,75 (σφάλμα $z: 2''$)

Το a posteriori σφάλμα της μονάδας βάρους είναι:

$$\sigma_o = 1,40''$$

Ο λόγος ιδιοτιμών (κριτήριο ευστάθειας κανονικού πίνακα συνόρθωσης) όπως περιγράφηκε σε προηγούμενη ενότητα είναι:

$$\text{Λόγος Ιδιοτιμών} = 8,077$$

Αμφίπλευρος έλεγχος

Για επίπεδο εμπιστοσύνης 95% και βαθμό ελευθερίας $r=12-2=10$, από το τεστ χ^2 προκύπτει:

$$p_1=0,025 \text{ και } p_2=0,975, \text{ οπότε}$$

$$\chi_{p_1,r}^2=3.25 \text{ και } \chi_{p_2,r}^2=20.48$$

$$\sigma_o = 2''$$

$$\sigma_o = 1,4''$$

Οπότε, προκύπτει:

$$\rightarrow \frac{\sigma_o}{\sigma_o} = 0,7 \rightarrow r \cdot \left(\frac{\sigma_o^2}{\sigma_o^2}\right) = 4,883$$

Θα πρέπει να ισχύει:

$$3,25 \leq 4,883 \leq 20,48$$

Η σχέση αυτή είναι αληθής, οπότε οι αρχικές υποθέσεις επαληθεύονται.

- Υπόλοιπες ομάδες αζιμουθίων

Ο επόμενοι πίνακες περιλαμβάνουν τα τρία μεγέθη που είναι απαραίτητα ως δεδομένα για τη συνόρθωση των 12 άστρων για κάθε ένα από τα υπόλοιπα σενάρια:

ΑΡΙΘΜΟΣ	ΚΩΔΙΚΟΣ (TYCHO2)	A_o (°)	Z_o (°)	σ_{z_o} (")
1	3870 1962	28,0219793	19,99920322	1,0801
2	1609 2082	152,54419546	20,00184492	1,0109
3	1502 1782	214,96705775	20,00064568	1,2852
4	3851 1506	331,50214717	19,99820338	1,0465
5	3564 3157	44,96276894	19,99991699	1,4956
6	2035 1749	135,190935	20,00169556	1,5215
7	2035 1749	224,80366784	20,00030225	1,4812
8	3466 1270	310,68425374	19,99840107	1,6235
9	3491 1859	58,45183686	20,00029463	1,725
10	2036 1674	120,28168153	20,00160558	1,78
11	2036 1674	239,71401032	19,99988804	1,8188
12	3491 1859	301,54966891	19,99834157	1,8392

Πίνακας 6.13: A_o, z_o, σ_{z_o} για το σενάριο 30,45,60 (σφάλμα $z: 2''$)

ΑΡΙΘΜΟΣ	ΚΩΔΙΚΟΣ (TYCHO2)	A_o (°)	Z_o (°)	σ_{z_o} (")
1	3870 1962	28,02231755	19,99929983	0,9701
2	1498 1787	154,03091048	20,00169934	0,977
3	1498 1787	205,96191195	20,00073257	0,912
4	3850 1384	332,89658232	19,99809101	1,0357
5	3555 2112	39,74576715	19,99976098	1,3711
6	1580 2158	140,19789133	20,00177082	1,417
7	1466 1082	216,46646764	20,00054214	1,3401
8	3478 1332	320,29419345	19,99792229	1,3132
9	3545 3041	55,50683911	20,00018882	1,7936
10	2065 1930	125,97255606	20,00151328	1,7289
11	2010 1245	234,82116681	19,99992449	1,7268
12	3492 1909	302,40786341	19,9982745	1,7842

Πίνακας 6.14: A_o, z_o, σ_{z_o} για το σενάριο 25,40,55 (σφάλμα $z: 2''$)

ΑΡΙΘΜΟΣ	ΚΩΔΙΚΟΣ (TYCHO2)	A_o (°)	Z_o (°)	σ_{z_o} (")
1	3913 2269	14,47259303	19,99883083	0,5792
2	1587 2067	170,34819756	20,00176272	0,3608
3	1587 2067	189,64681108	20,00152292	0,3571
4	3910 1710	344,08114946	19,99840943	0,5964
5	3870 1962	28,02196422	19,99919891	1,0768
6	1609 2082	152,54419546	20,00184492	1,0109
7	1498 1787	205,96338421	20,00093084	0,9673
8	3851 1506	331,50214717	19,99820338	1,0465
9	3502 2258	49,42919475	20,00005999	1,6101
10	2154 4100	130,98040496	20,00167474	1,6294
11	2024 1355	233,96036507	20,00001673	1,6986
12	3502 2258	310,57300245	19,99840174	1,6262

Πίνακας 6.15: A_o, z_o, σ_{z_o} για το σενάριο 10,30,50 (σφάλμα $z: 2''$)

ΑΡΙΘΜΟΣ	ΚΩΔΙΚΟΣ (TYCHO2)	A_o (°)	Z_o (°)	σ_{zo} (")
1	3564 3157	44,96249435	19,99975021	1,4564
2	2035 1749	135,19016258	20,00189499	1,4868
3	2035 1749	224,80328656	20,00020383	1,5115
4	3466 1270	310,68449223	19,99822213	1,5655
5	3491 1859	58,45162658	20,00002184	1,9307
6	2036 1674	120,28125938	20,0017739	1,8493
7	2036 1674	239,71369665	19,999763	1,8981
8	3491 1859	301,54962492	19,99839862	1,9212
9	3156 2223	75,22949685	20,00039587	1,9869
10	2685 1920	105,43987664	20,00149824	2,0982
11	2532 2226	255,45733521	19,99909797	2,0656
12	3047 1258	284,82080773	19,99860604	2,0438

Πίνακας 6.16: A_o , z_o , σ_{zo} για το σενάριο 45,60,75 (σφάλμα z : 2")

ΑΡΙΘΜΟΣ	ΚΩΔΙΚΟΣ (TYCHO2)	A_o (°)	Z_o (°)	σ_{zo} (°)
1	3882 2597	16,77009437	19,99891069	0,6123
2	1498 1787	154,03165489	20,00159906	0,916
3	1498 1787	205,96198179	20,00074197	0,9221
4	3882 2597	343,23356168	19,99834062	0,6003
5	3564 3157	44,96261658	19,99982445	1,4886
6	2035 1749	135,19005201	20,00192354	1,4769
7	2035 1749	224,80357566	20,00027845	1,4936
8	3466 1270	310,6845148	19,99820519	1,5273
9	3066 2214	70,73344447	20,000608	1,9588
10	2102 2772	109,40630591	20,0014456	2,1922
11	2032 1605	249,91114964	19,9994055	2,0626
12	3066 2214	289,2668405	19,9984733	2,1167

Πίνακας 6.17: A_o , z_o , σ_{zo} για το σενάριο 20,45,70 (σφάλμα z : 2")

Οι μετρήσεις (") σε κάθε σενάριο φαίνονται συγκεντρωτικά στον παρακάτω πίνακα:

ΟΜΑΔΑ ΑΖΙΜΟΥΘΙΩΝ	30,45,60	25,40,55	10,30,50	45,60,75	20,45,70
1ο Άστρο	-2,868	-2,521	-4,209	-0,899	-3,922
2ο Άστρο	6,642	6,118	6,346	6,822	5,757
3ο Άστρο	2,324	2,637	5,483	0,734	2,671
4ο Άστρο	-6,468	-6,872	-5,726	-6,400	-5,974
5ο Άστρο	-0,299	-0,860	-2,884	0,079	-0,632
6ο Άστρο	6,104	6,375	6,642	6,386	6,925
7ο Άστρο	1,088	1,952	3,351	-0,853	1,002
8ο Άστρο	-5,756	-7,480	-6,468	-5,765	-6,461
9ο Άστρο	1,061	0,680	0,216	1,425	2,189
10ο Άστρο	5,780	5,448	6,029	5,394	5,204

11ο Άστρο	-0,403	-0,272	0,060	-3,247	-2,140
12ο Άστρο	-5,970	-6,212	-5,754	-5,018	-5,496

Πίνακας 6.18: Πίνακας μετρήσεων για τα υπόλοιπα σενάρια (σφάλμα $z:2''$)

Μετά τη συνόρθωση των άστρων εξάγονται τα παρακάτω αποτελέσματα για τις αστρονομικές συντεταγμένες για κάθε σενάριο:

ΟΜΑΔΑ ΑΖΙΜΟΥΘΙΩΝ	30,45,60	25,40,55	10,30,50	45,60,75	20,45,70
ΔΦ(")	-5,20	-5,11	-5,70	-5,34	-5,06
ΔΛ (")	3,83	4,22	3,42	3,94	3,91

Πίνακας 6.19: Αποτελέσματα ΔΦ, ΔΛ για τα υπόλοιπα σενάρια (σφάλμα $z:2''$)

Τα σφάλματα των παραπάνω μεγεθών για κάθε σενάριο είναι:

ΟΜΑΔΑ ΑΖΙΜΟΥΘΙΩΝ	30,45,60	25,40,55	10,30,50	45,60,75	20,45,70
Σφάλμα ΔΦ(")	0,13	0,15	0,14	0,23	0,09
Σφάλμα ΔΛ(")	0,19	0,27	0,56	0,20	0,20

Πίνακας 6.20: Αποτελέσματα σΔΦ, σΔΛ για τα υπόλοιπα σενάρια (σφάλμα $z:2''$)

Έτσι οι τελικές συντεταγμένες του βάθρου σύμφωνα με τους πίνακες για κάθε σενάριο είναι:

ΑΖΙΜΟΥΘΙΑ	30,45,60	25,40,55	10,30,50	45,60,75	20,45,70
Φ	37° 58' 24,40''	37° 58' 24,49''	37° 58' 23,90''	37° 58' 24,26''	37° 58' 24,54''
Λ	23° 46' 44,23''	23° 46' 44,62''	23° 46' 43,82''	23° 46' 44,34''	23° 46' 44,31''

Πίνακας 6.21: Τελικές συντεταγμένες Φ, Λ ανά σενάριο (σφάλμα $z:2''$)

Τα υπόλοιπα (') που προκύπτουν από τη συνόρθωση για κάθε σενάριο είναι:

ΟΜΑΔΑ ΑΖΙΜΟΥΘΙΩΝ	30,45,60	25,40,55	10,30,50	45,60,75	20,45,70
1ο Άστρο	0,078	-0,009	-0,451	-0,094	0,204
2ο Άστρο	-0,263	0,327	-0,158	-0,251	0,507
3ο Άστρο	-0,259	0,112	-0,441	0,277	0,167
4ο Άστρο	0,072	0,398	-0,689	-0,074	-0,001
5ο Άστρο	-0,673	-0,372	-0,537	0,488	-0,185
6ο Άστρο	0,283	0,255	-0,011	-0,285	-0,576
7ο Άστρο	-0,098	-0,349	0,272	0,141	-0,168

8ο Άστρο	-0,537	0,850	-0,169	-0,392	0,195
9ο Άστρο	-0,517	-0,096	-1,322	1,027	-0,166
10ο Άστρο	0,148	0,972	0,288	-0,169	0,168
11ο Άστρο	-0,282	-0,233	0,525	0,770	0,205
12ο Άστρο	-0,013	-0,092	-0,548	-0,162	0,133

Πίνακας 6.22: Υπόλοιπα συνόρθωσης ανά σενάριο (σφάλμα $z:2''$)

Το a posteriori σφάλμα της μονάδας βάρους είναι:

ΟΜΑΔΑ ΑΖΙΜΟΥΘΙΩΝ	30,45,60	25,40,55	10,30,50	45,60,75	20,45,70
σ_o	0,486	0,695	1,403	0,499	0,519

Πίνακας 6.23: A posteriori σφάλμα συνόρθωσης ανά σενάριο (σφάλμα $z:2''$)

Ο λόγος ιδιοτιμών (κριτήριο ευστάθειας κανονικού πίνακα συνόρθωσης) όπως περιγράφηκε σε προηγούμενη ενότητα ανά σενάριο είναι:

ΟΜΑΔΑ ΑΖΙΜΟΥΘΙΩΝ	30,45,60	25,40,55	10,30,50	45,60,75	20,45,70
Λόγος ιδιοτιμών	1,4305	1,9795	9,5369	2,1606	2,9673

Πίνακας 6.24: Λόγος ιδιοτιμών ανά σενάριο (σφάλμα $z:2''$)

Αμφίπλευρος έλεγχος

Για επίπεδο εμπιστοσύνης 95% και βαθμό ελευθερίας $r=12-2=10$, από το τεστ χ^2 προκύπτει για κάθε σενάριο:

ΟΜΑΔΑ ΑΖΙΜΟΥΘΙΩΝ	30,45,60	25,40,55	10,30,50	45,60,75	20,45,70
σ_o	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00
σ_o	0,486	0,695	1,403	0,499	0,519
$r \cdot \left(\frac{\sigma_o^2}{\sigma_o^2}\right)$	0,590	1,207	4,924	0,623	0,674

Πίνακας 6.25: Στοιχεία αμφίπλευρου ελέγχου ανά σενάριο (σφάλμα $z:2''$)

Θα πρέπει να ισχύει:

$$3,25 \leq r \cdot \left(\frac{\sigma_o^2}{\sigma_o^2}\right) \leq 20,48$$

Οπότε τελικά:

ΟΜΑΔΑ ΑΖΙΜΟΥΘΙΩΝ	Τεστ για Δ.Ε. 95%
30,45,60	δεν περνάει
25,40,55	δεν περνάει
10,30,50	περνάει
45,60,75	δεν περνάει
20,45,70	δεν περνάει

Πίνακας 6.26: Αποτελέσματα στατιστικού ελέγχου ανά σενάριο (σφάλμα $\alpha: 2''$)

6.4.2.2. Σφάλμα στη ζενίθια γωνία: $6''$

- Ομάδα αζιμουθίων: $15^\circ, 45^\circ, 75^\circ$

Ο επόμενος πίνακας περιλαμβάνει τα τρία μεγέθη που είναι απαραίτητα ως δεδομένα για τη συνόρθωση των 12 άστρων του συγκεκριμένου σεναρίου:

ΑΡΙΘΜΟΣ	ΚΩΔΙΚΟΣ (TYCHO2)	A_o ($^\circ$)	Z_o ($^\circ$)	σ_{z_o} ($''$)
1	3913 2269	14,47398738	19,99901621	0,5027
2	1587 2067	170,35185498	20,00158699	0,369
3	1587 2067	189,64017471	20,00120429	0,3627
4	3910 1710	344,08460041	19,99790111	0,6087
5	3564 3157	44,96321217	20,0001862	1,4748
6	2035 1749	135,19128931	20,00160408	1,5596
7	2035 1749	224,80490481	20,00062155	1,4955
8	3466 1270	310,68519722	19,99769318	1,7224
9	3156 2223	75,22947181	20,00069803	2,1433
10	2685 1920	105,44003058	20,00140011	1,9784
11	2532 2226	255,45793398	19,99949212	2,0155
12	3047 1258	284,82078152	19,99828004	2,1476

Πίνακας 6.27: A_o, z_o, σ_{z_o} για το σενάριο $15, 45, 75$ (σφάλμα $\alpha: 6''$)

Όσον αφορά τον πίνακα βαρών, αυτά προκύπτουν από το λόγο $\frac{\sigma_o^2}{\sigma_{zo}^2}$ (όπου σ_o είναι το αριστι σφάλμα της μονάδας βάρους που επιλέγεται αυθαίρετα, ενώ το σ_{zo} όπως προέκυψε από τους υπολογισμούς για κάθε άστρο).

$\Delta I = \text{ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ (}^\circ\text{)}$	$\Delta I = \text{ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ (}'')$
-0,00098	-3,54
0,001587	5,71
0,001204	4,34
-0,0021	-7,56
0,000186	0,67
0,001604	5,77
0,000622	2,24
-0,00231	-8,30
0,000698	2,51
0,0014	5,04
-0,00051	-1,83
-0,00172	-6,19

Πίνακας 6.28: Πίνακας μετρήσεων για το σενάριο 15,45,75 (σφάλμα z:6'')

Ο παραπάνω πίνακας δίνει τις διαφορές $Z_o - z$ (με $z=20^\circ$ και Z_o όπως προκύπτει από την επίλυση τριγώνου θέσης) για κάθε άστρο.

Μετά τη συνόρθωση των άστρων εξάγονται τα παρακάτω αποτελέσματα για τις αστρονομικές συντεταγμένες:

$\Delta\Phi (}'')$	$\Delta\Lambda (}'')$
-5,24	4,75

Πίνακας 6.29: Αποτελέσματα $\Delta\Phi, \Delta\Lambda$ για το σενάριο 15,45,75 (σφάλμα z:6'')

Τα σφάλματα των παραπάνω μεγεθών είναι:

$\sigma_{\Delta\Phi (}'')$	$\sigma_{\Delta\Lambda (}'')$
0,21	0,75

Πίνακας 6.30: Αποτελέσματα $\sigma_{\Delta\Phi}, \sigma_{\Delta\Lambda}$ για το σενάριο 15,45,75 (σφάλμα z:6'')

Έτσι οι τελικές συντεταγμένες του βάθρου σύμφωνα με τους πίνακες είναι:

Φ =ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΚΟ ΠΛΑΤΟΣ	Λ =ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΚΟ ΜΗΚΟΣ
37° 58' 24,36'' ±0,21''	23° 46' 45,15'' ±0,75''

Πίνακας 6.31: Τελικές συντεταγμένες Φ, Λ για το σενάριο 15,45,75 (σφάλμα $z: 6''$)

Το a posteriori σφάλμα της μονάδας βάρους είναι:

$$\sigma_o = 5,72''$$

Τα υπόλοιπα που προκύπτουν από τη συνόρθωση είναι:

ΥΠΟΛΟΙΠΑ (°)	ΥΠΟΛΟΙΠΑ (")
-0,0000960	-0,346
0,0000693	0,249
0,00000996	0,036
0,000337183	1,214
-0,000283944	-1,022
0,00035847	1,290
-0,000518385	-1,866
0,000357402	1,287
0,000206524	0,743
0,000259125	0,933
-0,00040362	-1,453
0,0000722	0,260

Πίνακας 6.32: Υπόλοιπα συνόρθωσης για το σενάριο 15,45,75 (σφάλμα $z: 6''$)

Ο λόγος ιδιοτιμών (κριτήριο ευστάθειας κανονικού πίνακα συνόρθωσης) όπως περιγράφηκε σε προηγούμενη ενότητα είναι:

$$\text{Λόγος Ιδιοτιμών} = 8,3536$$

Αμφίπλευρος έλεγχος

Για επίπεδο εμπιστοσύνης 95% και βαθμό ελευθερίας $r=12-2=10$, από το τεστ χ^2 προκύπτει:

$p_1=0,025$ και $p_2=0,975$, οπότε

$$\chi_{p_1,r}^2=3.25 \text{ και } \chi_{p_2,r}^2=20.48$$

$$\sigma_o=6''$$

$$\sigma_o=5,72''$$

Οπότε, προκύπτει:

$$\rightarrow \frac{\sigma_o}{\sigma_o} = 0,953 \rightarrow r \cdot \left(\frac{\sigma_o^2}{\sigma_o^2}\right) = 9,073$$

Θα πρέπει να ισχύει:

$$3,25 \leq 9,073 \leq 20,48$$

Η σχέση αυτή είναι αληθής, οπότε οι αρχικές υποθέσεις επαληθεύονται.

- Υπόλοιπες ομάδες αζιμουθίων

Ο επόμενοι πίνακες περιλαμβάνουν τα τρία μεγέθη που είναι απαραίτητα ως δεδομένα για τη συνόρθωση των 12 άστρων για κάθε ένα από τα υπόλοιπα σενάρια:

ΑΡΙΘΜΟΣ	ΚΩΔΙΚΟΣ (TYCHO2)	A_o (°)	Z_o (°)	σ_{z_o} (")
1	3870 1962	28,0219793	19,99920322	1,0801
2	1609 2082	152,54419546	20,00184492	1,0109
3	1502 1782	214,96705775	20,00064568	1,2852
4	3851 1506	331,50214717	19,99820338	1,0465
5	3564 3157	44,96276894	19,99991699	1,4956
6	2035 1749	135,190935	20,00169556	1,5215
7	2035 1749	224,80366784	20,00030225	1,4812
8	3466 1270	310,68425374	19,99840107	1,6235
9	3491 1859	58,45183686	20,00029463	1,725
10	2036 1674	120,28168153	20,00160558	1,78
11	2036 1674	239,71401032	19,99988804	1,8188
12	3491 1859	301,54966891	19,99834157	1,8392

Πίνακας 6.33: A_o , z_o , σ_{z_o} για το σενάριο 30,45,60 (σφάλμα z : 6")

ΑΡΙΘΜΟΣ	ΚΩΔΙΚΟΣ (TYCHO2)	A_o (°)	Z_o (°)	σ_{zo} (")
1	3870 1962	28,02231755	19,99929983	0,9701
2	1498 1787	154,03091048	20,00169934	0,977
3	1498 1787	205,96191195	20,00073257	0,912
4	3850 1384	332,89658232	19,99809101	1,0357
5	3555 2112	39,74576715	19,99976098	1,3711
6	1580 2158	140,19789133	20,00177082	1,417
7	1466 1082	216,46646764	20,00054214	1,3401
8	3478 1332	320,29419345	19,99792229	1,3132
9	3545 3041	55,50683911	20,00018882	1,7936
10	2065 1930	125,97255606	20,00151328	1,7289
11	2010 1245	234,82116681	19,99992449	1,7268
12	3492 1909	302,40786341	19,9982745	1,7842

Πίνακας 6.34: A_o , z_o , σ_{zo} για το σενάριο 25,40,55 (σφάλμα z : 6")

ΑΡΙΘΜΟΣ	ΚΩΔΙΚΟΣ (TYCHO2)	A_o (°)	Z_o (°)	σ_{zo} (")
1	3913 2269	14,47259303	19,99883083	0,5792
2	1587 2067	170,34819756	20,00176272	0,3608
3	1587 2067	189,64681108	20,00152292	0,3571
4	3910 1710	344,08114946	19,99840943	0,5964
5	3870 1962	28,02196422	19,99919891	1,0768
6	1609 2082	152,54419546	20,00184492	1,0109
7	1498 1787	205,96338421	20,00093084	0,9673
8	3851 1506	331,50214717	19,99820338	1,0465
9	3502 2258	49,42919475	20,00005999	1,6101
10	2154 4100	130,98040496	20,00167474	1,6294
11	2024 1355	233,96036507	20,00001673	1,6986
12	3502 2258	310,57300245	19,99840174	1,6262

Πίνακας 6.35: A_o , z_o , σ_{zo} για το σενάριο 10,30,50 (σφάλμα z : 6")

ΑΡΙΘΜΟΣ	ΚΩΔΙΚΟΣ (TYCHO2)	A_o (°)	Z_o (°)	σ_{zo} (")
1	3564 3157	44,96249435	19,99975021	1,4564
2	2035 1749	135,19016258	20,00189499	1,4868
3	2035 1749	224,80328656	20,00020383	1,5115
4	3466 1270	310,68449223	19,99822213	1,5655
5	3491 1859	58,45162658	20,00002184	1,9307
6	2036 1674	120,28125938	20,0017739	1,8493
7	2036 1674	239,71369665	19,999763	1,8981
8	3491 1859	301,54962492	19,99839862	1,9212
9	3156 2223	75,22949685	20,00039587	1,9869
10	2685 1920	105,43987664	20,00149824	2,0982
11	2532 2226	255,45733521	19,99909797	2,0656
12	3047 1258	284,82080773	19,99860604	2,0438

Πίνακας 6.36: A_o , z_o , σ_{zo} για το σενάριο 45,60,75 (σφάλμα z : 6")

ΑΡΙΘΜΟΣ	ΚΩΔΙΚΟΣ (TYCHO2)	A_o (°)	Z_o (°)	σ_{z_o} (°)
1	3882 2597	16,77009437	19,99891069	0,6123
2	1498 1787	154,03165489	20,00159906	0,916
3	1498 1787	205,96198179	20,00074197	0,9221
4	3882 2597	343,23356168	19,99834062	0,6003
5	3564 3157	44,96261658	19,99982445	1,4886
6	2035 1749	135,19005201	20,00192354	1,4769
7	2035 1749	224,80357566	20,00027845	1,4936
8	3466 1270	310,6845148	19,99820519	1,5273
9	3066 2214	70,73344447	20,000608	1,9588
10	2102 2772	109,40630591	20,0014456	2,1922
11	2032 1605	249,91114964	19,9994055	2,0626
12	3066 2214	289,2668405	19,9984733	2,1167

Πίνακας 6.37: A_o , z_o , σ_{z_o} για το σενάριο 20,45,70 (σφάλμα z : 6'')

Οι μετρήσεις (') σε κάθε σενάριο φαίνονται συγκεντρωτικά στον παρακάτω πίνακα:

ΟΜΑΔΑ ΑΖΙΜΟΥΘΙΩΝ	30,45,60	25,40,55	10,30,50	45,60,75	20,45,70
1ο Άστρο	-3,576	-2,445	-3,635	-2,390	-5,484
2ο Άστρο	7,342	7,590	5,838	5,974	6,274
3ο Άστρο	2,157	3,183	4,225	0,496	5,277
4ο Άστρο	-6,893	-6,425	-7,252	-6,118	-5,569
5ο Άστρο	0,524	-1,039	-1,209	2,435	-1,174
6ο Άστρο	5,610	7,246	5,860	6,654	3,919
7ο Άστρο	1,675	2,197	3,766	-1,529	3,367
8ο Άστρο	-4,788	-7,197	-9,444	-5,790	-2,968
9ο Άστρο	1,682	-0,043	0,516	2,141	0,741
10ο Άστρο	5,298	6,106	4,200	4,648	2,484
11ο Άστρο	0,533	-0,881	-0,066	-3,980	1,691
12ο Άστρο	-5,973	-4,839	-6,869	-3,916	-3,086

Πίνακας 6.38: Πίνακας μετρήσεων για τα υπόλοιπα σενάρια (σφάλμα z : 6'')

Μετά τη συνόρθωση των άστρων εξάγονται τα παρακάτω αποτελέσματα για τις αστρονομικές συντεταγμένες για κάθε σενάριο:

ΟΜΑΔΑ ΑΖΙΜΟΥΘΙΩΝ	30,45,60	25,40,55	10,30,50	45,60,75	20,45,70
$\Delta\Phi$ (")	-5,45	-5,48	-5,26	-4,86	-5,71
$\Delta\lambda$ (")	3,71	4,24	5,08	3,98	0,98

Πίνακας 6.39: Αποτελέσματα $\Delta\Phi$, $\Delta\lambda$ για τα υπόλοιπα σενάρια (σφάλμα z : 6'')

Τα σφάλματα των παραπάνω μεγεθών για κάθε σενάριο είναι:

ΟΜΑΔΑ ΑΖΙΜΟΥΘΙΩΝ	30,45,60	25,40,55	10,30,50	45,60,75	20,45,70
Σφάλμα ΔΦ(")	0,36	0,22	0,26	0,52	0,28
Σφάλμα ΔΛ(")	0,54	0,39	1,01	0,45	0,58

Πίνακας 6.40: Αποτελέσματα σΔΦ,σΔΛ για τα υπόλοιπα σενάρια (σφάλμα z:6'')

Έτσι οι τελικές συντεταγμένες του βάθρου σύμφωνα με τους πίνακες για κάθε σενάριο είναι:

ΟΜΑΔΑ ΑΖΙΜΟΥΘΙΩΝ	30,45,60	25,40,55	10,30,50	45,60,75	20,45,70
Φ	37° 58' 24,15''	37° 58' 24,12''	37° 58' 24,34''	37° 58' 24,74''	37° 58' 23,89''
Λ	23° 46' 44,11''	23° 46' 44,64''	23° 46' 45,48''	23° 46' 44,38''	23° 46' 41,38''

Πίνακας 6.41: Τελικές συντεταγμένες Φ,Λ ανά σενάριο (σφάλμα z:6'')

Το a posteriori σφάλμα της μονάδας βάρους είναι:

ΟΜΑΔΑ ΑΖΙΜΟΥΘΙΩΝ	30,45,60	25,40,55	10,30,50	45,60,75	20,45,70
σ_o	4,14	3,02	7,66	3,49	4,39

Πίνακας 6.42: A posteriori σφάλμα συνόρθωσης ανά σενάριο (σφάλμα z:6'')

Τα υπόλοιπα (') που προκύπτουν από τη συνόρθωση για κάθε σενάριο είναι:

ΟΜΑΔΑ ΑΖΙΜΟΥΘΙΩΝ	30,45,60	25,40,55	10,30,50	45,60,75	20,45,70
1ο Άστρο	0,513	-0,396	-0,185	1,767	0,296
2ο Άστρο	-0,798	-0,810	0,196	0,277	-0,706
3ο Άστρο	0,177	-0,117	0,107	0,144	-0,570
4ο Άστρο	0,335	-0,381	0,803	-0,067	-0,186
5ο Άστρο	-1,753	-0,459	-1,043	-1,583	-2,175
6ο Άστρο	0,870	-0,324	1,149	-0,767	0,828
7ο Άστρο	-0,428	-0,314	-1,265	0,540	-0,005
8ο Άστρο	-1,578	0,275	2,398	-0,143	-1,502
9ο Άστρο	-1,366	0,437	-0,073	0,471	-1,699
10ο Άστρο	0,654	0,542	3,085	0,482	0,342

11ο Άστρο	-0,994	0,569	-0,951	1,346	-0,652
12ο Άστρο	-0,041	-1,676	-0,411	-1,175	0,272

Πίνακας 6.43: Υπόλοιπα συνόρθωσης ανά σενάριο (σφάλμα 6'')

Ο λόγος ιδιοτιμών (κριτήριο ευστάθειας κανονικού πίνακα συνόρθωσης) όπως περιγράφηκε σε προηγούμενη ενότητα ανά σενάριο είναι:

ΟΜΑΔΑ ΑΖΙΜΟΥΘΙΩΝ	30,45,60	25,40,55	10,30,50	45,60,75	20,45,70
Λόγος ιδιοτιμών	1,4353	1,9397	9,2943	2,1380	2,7162

Πίνακας 6.44: Λόγος ιδιοτιμών ανά σενάριο (σφάλμα z: 6'')

Αμφίπλευρος έλεγχος

Για επίπεδο εμπιστοσύνης 95% και βαθμό ελευθερίας $r=12-2=10$, από το τεστ χ^2 προκύπτει για κάθε σενάριο:

ΟΜΑΔΑ ΑΖΙΜΟΥΘΙΩΝ	30,45,60	25,40,55	10,30,50	45,60,75	20,45,70
σ_o	6,00	6,00	6,00	6,00	6,00
σ_o	4,14	3,02	7,66	3,49	4,39
$r \cdot \left(\frac{\sigma_o^2}{\sigma_o^2}\right)$	4,752	2,539	16,309	3,392	5,345

Πίνακας 6.45: Στοιχεία αμφίπλευρου ελέγχου ανά σενάριο (σφάλμα z: 6'')

Θα πρέπει να ισχύει:

$$3,25 \leq r \cdot \left(\frac{\sigma_o^2}{\sigma_o^2}\right) \leq 20,48$$

Οπότε τελικά:

ΟΜΑΔΑ ΑΖΙΜΟΥΘΙΩΝ	Τεστ για Δ.Ε. 95%
30,45,60	περνάει
25,40,55	δεν περνάει

10,30,50	περναι
45,60,75	περναι
20,45,70	περναι

Πίνακας 6.46: Αποτελέσματα στατιστικού ελέγχου ανά σενάριο (σφάλμα $z: 6''$)

6.5. Συμπεράσματα

Από τα δύο τεστ των προσομοιώσεων ($dz=2'', dz=6''$), για διαφορά στις αστρονομικές συντεταγμένες, προσομοίωσης τροχιάς άστρου και συνόρθωσης, ίση με $-5''$ για το Φ και $+5''$ για το Λ , προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

-Η ανίχνευση της μεταβολής των συντεταγμένων είναι εμφανής με το πέρας της συνόρθωσης. Πιο εμφανής είναι η μεταβολή στο Φ (σταθερά μεταξύ $5-6''$). Στο Λ , οι μεταβολές ποικίλουν από $3,5-5''$.

-Το σφάλμα του $\Delta\Phi$ είναι μικρότερο του $0,5''$ και στις δύο περιπτώσεις σφάλματος ζενίθιας γωνίας. Αντίθετα, το $\Delta\Lambda$ έχει σφάλμα που κυμαίνεται μεταξύ $0,2-1''$.

-Από τα παραπάνω εξάγεται ότι τα μεγέθη που αφορούν το Λ έχουν μεγαλύτερη ευαισθησία σε μεταβολή του μεγέθους τους με τη μεταβολή του dz . Το σφάλμα αυτό μπορεί να μεταφραστεί σε σφάλμα σκόπευσης του άστρου.

-Για σφάλμα $dz=2''$, οι στατιστικοί έλεγχοι σε όλα σχεδόν τα σενάρια δεν ικανοποιούνται, δημιουργώντας συντελεστές μικρότερους από τα όρια που ορίζει το διάστημα εμπιστοσύνης 95%. Αντίθετα, για $dz=6''$, οι στατιστικοί έλεγχοι ικανοποιούνται εκτός από ένα σενάριο. Κανένας συντελεστής ωστόσο δεν ξεπερνά το ανώτερο όριο, αλλά είναι μικρότεροι από τα κατώτατο όριο. Αυτό φανερώνει ότι το

μοντέλο υπολογισμού του σ_{zo} υποεκτιμά το μέγεθός του, οδηγώντας σε λόγους $\frac{\sigma_o}{\sigma_o}$

μικρότερους της μονάδας.

-Με ενδελεχή έλεγχο των υπολοίπων, προκύπτει ότι μεγαλύτερα υπόλοιπα παρατηρούνται σε άστρα με αζιμούθιο 30-40 στις περισσότερες περιπτώσεις. Αυτό σημαίνει ότι αφαιρώντας αυτά τα άστρα ή χρησιμοποιώντας εναλλακτικό συνδυασμό αζιμουθίων μπορεί να βελτιωθεί η ακρίβεια της λύσης.

7.ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

7.1.Εξοπλισμός

Στην παρούσα εργασία, οι αστρογεωδαιτικές μετρήσεις έγιναν με τον ολοκληρωμένο γεωδαιτικό σταθμό TDM 5000, ο οποίος ανήκει στην κατηγορία σταθμών υψηλής ακριβείας και με το δέκτη GPS 4000DL.

Τα κύρια χαρακτηριστικά του σταθμού είναι:

- Έχει απόδοση στη μέτρηση γωνιών 0.1cc και ακρίβεια 0.5 cc.
- Επιτρέπει την ψηφιακή μέτρηση και καταγραφή γωνιών, μηκών και χρόνου καθώς και την αμφίδρομη επικοινωνία με Η/Υ μέσω κατάλληλου λογισμικού.
- Διαθέτει ενσωματωμένο ψηφιακό χρονόμετρο με απόδοση 0.001 sec, με τη βοήθεια του οποίου είναι δυνατή η καταγραφή του χρόνου που αντιστοιχεί στη στιγμή της παρατήρησης.
- Οι κοχλίες του είναι ατέρμονες χωρίς πάκτωση οριζόντιου και κατακόρυφου δίσκου και είναι ενσωματωμένοι σε ανεξάρτητο πηδάλιο ώστε να μπορούν να λειτουργούν σε οποιαδήποτε θέση.
- Διαθέτει ειδικό πλήκτρο πάνω στο πηδάλιο με το οποίο ενεργοποιείται η εντολή καταγραφής των μετρήσεων.
- Το τηλεσκόπιό του διαθέτει μεγέθυνση x42 καθώς και ρυθμιζόμενο φωτισμό που επιτρέπει παρατήρηση και κατά τη διάρκεια της νύχτας.
- Υπάρχει η δυνατότητα προσθήκης αγκωνοειδούς πρίσματος, το οποίο εξυπηρετεί τη σκόπευση σε μικρές ζενίθιες αποστάσεις.

Τα παραπάνω τεχνικά χαρακτηριστικά του σταθμού επιτρέπουν τη χρήση του σε αστρονομικές παρατηρήσεις, καθώς διευκολύνουν τις κινήσεις του παρατηρητή στη διάρκεια των μετρήσεων και καθιστούν ευέλικτη τη χρήση του σταθμού. Επιπλέον, αποφεύγονται συστηματικά σφάλματα, κυρίως στην καταγραφή του χρόνου και η χρήση του πλήκτρου καταγραφής καθιστά δυνατή τη γρήγορη και ακριβή καταγραφή των γωνιών. Η ακρίβεια που παρέχει ο σταθμός τόσο στην μέτρηση γωνιών όσο και στην μέτρηση του χρόνου είναι απαραίτητη και κατάλληλη για τον προσδιορισμό αστρονομικών συντεταγμένων με ακρίβεια 1^{ης} τάξης.

7.2.Επικοινωνία γεωδαιτικού σταθμού και δέκτη του συστήματος GPS

Ο ταυτόχρονος και ακριβής προσδιορισμός των αστρονομικών συντεταγμένων Φ , Λ απαιτεί την επικοινωνία του γεωδαιτικού σταθμού με τον δέκτη του συστήματος GPS, έτσι ώστε να γίνει ανταλλαγή δεδομένων ή διαβίβαση εκτέλεσης εντολών λογισμικού.

Η επικοινωνία αυτή επιτυγχάνεται μέσω της δυνατότητας που έχει ο δέκτης 4000DL για έξοδο του σήματος χρόνου UTC με ακρίβεια 5×10^{-6} sec καθώς και της ύπαρξης εσωτερικού χρονομέτρου στο σταθμό TDM5000 με τη βοήθεια κατάλληλης συνδεσμολογίας και του λογισμικού AstroGeo [Λάμπρου Ε., 2003].

Το πρόγραμμα οδηγεί το γεωδαιτικό σταθμό στην εκτέλεση των ακόλουθων λειτουργιών. Αρχικά, με την είσοδο του χρήστη, ζητείται ο ορισμός του αρχείου καταγραφής των δεδομένων. Όταν αυτό οριστεί, το λογισμικό προχωρά στη δήλωση των μεταβλητών που πρόκειται να χρησιμοποιηθούν και φτάνει σε μια επαναληπτική διαδικασία όπου κάθε φορά που ενεργοποιείται το πλήκτρο καταγραφής των δεδομένων, ο σταθμός καταγράφει στο ορισμένο αρχείο, τον αύξοντα αριθμό της καταγραφής, τις αναγνώσεις οριζόντιας και κατακόρυφης γωνίας και το χρόνο μέτρησης από το εσωτερικό χρονόμετρο του σε msec. Στο επόμενο ακέραιο δευτερόλεπτο χρόνου UTC, όταν δηλαδή ο σταθμός δεχτεί τον σχετικό παλμό από τον δέκτη GPS, καταγράφει όλη την πληροφορία που έρχεται από αυτόν, δηλαδή τον χρόνο UTC, την ημερομηνία, τον αριθμό των δορυφόρων που λαμβάνει ο δέκτης, την ποιότητα της λύσης και τον χρόνο αναφοράς σε msec από το εσωτερικό χρονόμετρο του σταθμού, που αντιστοιχεί σε αυτό το ακέραιο δευτερόλεπτο.

Σημειώνεται, σε αυτό το σημείο, ότι για να είναι αξιόπιστη η καταγραφή του χρόνου UTC πρέπει ο δέκτης να λαμβάνει σήμα από τέσσερις τουλάχιστον δορυφόρους.

7.3. Διαδικασία μετρήσεων

Για τη διενέργεια των μετρήσεων ο γεωδαιτικός σταθμός τοποθετείται στο σημείο παρατήρησης και αφού αποκατασταθούν οι συνθήκες λειτουργίας του και τοποθετηθεί το ειδικό για αστρονομικές παρατηρήσεις αγκωνοειδές πρίσμα στο προσοφθάλμιο του τηλεσκοπίου του, συνδέεται με τον δέκτη του συστήματος GPS. Αρχικά, τίθεται σε λειτουργία ο δέκτης του συστήματος GPS και ύστερα από την αυτοβαθμονόμησή του και τη λήψη του σήματος από τους δορυφόρους συνδέεται με τον γεωδαιτικό σταθμό, ο οποίος πρέπει να είναι απενεργοποιημένος. Ο σταθμός ενεργοποιείται αυτόματα όταν αναγνωρίζει τη σύνδεση του με τον δέκτη. Αμέσως μετά γίνεται η επιλογή του προγράμματος AstroGeo, ορίζεται το αρχείο καταγραφής των μετρήσεων και ο αύξων αριθμός της πρώτης παρατήρησης.

7.3.1. Προσανατολισμός γεωδαιτικού σταθμού

Ο προσανατολισμός του γεωδαιτικού σταθμού γίνεται με τη βοήθεια του Πολικού αστέρα, που βρίσκεται κοντά στη θέση του Βόρειου Ουράνιου Πόλου, είναι εύκολα αναγνωρίσιμος στον ουρανό, αφού το μέγεθός του είναι $m=2$ και κινείται αρκετά αργά, ώστε έτσι διευκολύνεται η σκόπευση του. Η σκόπευση αυτή γίνεται τη στιγμή που είναι γνωστό το αζιμούθιό του στη θέση αυτή. Τότε τίθεται στον οριζόντιο δίσκο του οργάνου η ανάγνωση μηδέν, στρέφεται σε γωνία τόση όση είναι το αζιμούθιο του πολικού αλλά με αντίθετο πρόσημο και εισάγεται πάλι η ανάγνωση μηδέν στον οριζόντιο δίσκο. Έτσι το όργανο είναι προσανατολισμένο στον μεσημβρινό του τόπου με μια αβεβαιότητα μικρότερη από $\pm 20''$, η οποία είναι αρκετή για τη διαδικασία της αναγνώρισης και παρατήρησης των άστρων.

7.3.2. Αναγνώριση άστρων

Ο γεωδαιτικός σταθμός είναι τοποθετημένος στο σημείο παρατήρησης και προσανατολισμένος στο βορρά, δηλαδή η ένδειξη $0g$ αντιστοιχεί στο βορρά και η ένδειξη $200g$ στο νότο. Στην εφαρμογή στη μέθοδο των ίσων υψών, ο κατακόρυφος δίσκος στρέφεται σε ζενίθια γωνία κοντά στην προαποφασισμένη τιμή της, που προκύπτει από το σχεδιασμό της παρατήρησης (στην περίπτωση αυτή είναι $z=20^\circ$).

Σύμφωνα με το πρόγραμμα παρατήρησης, λίγο πριν το χρόνο UTC, που έχει υπολογιστεί ότι πρέπει να ξεκινήσει η παρατήρηση του πρώτου άστρου, το όργανο στρέφεται έτσι ώστε η ένδειξη της οριζόντιας γωνίας του να αντιστοιχεί στο προβλεπόμενο αξιμούθιο του άστρου αυτού. Όταν βρεθεί η θέση αυτή, τότε στρέφεται μόνο ο κατακόρυφος δίσκος του οργάνου με τους κοχλίες μικροκίνησης, ώστε η ένδειξη της κατακόρυφης γωνίας να αντιστοιχεί στην προβλεπόμενη ζενίθια απόσταση του πρώτου άστρου. Στο σημείο αυτό, αν το όργανο έχει προσανατολιστεί στη σωστή θέση, τότε το ζητούμενο άστρο βρίσκεται στο οπτικό πεδίο του γεωδαιτικού σταθμού και όταν το άστρο φτάσει στο σταυρόνημα του τηλεσκοπίου, πρέπει να ξεκινήσει η παρατήρηση του.

Αν κατά την αναγνώριση ενός άστρου, στο οπτικό πεδίο του σταθμού εμφανίζονται και άλλα άστρα ίδιου μεγέθους, τότε υπάρχει πιθανότητα λανθασμένης σκόπευσης. Τότε, ο παρατηρητής πρέπει να κρίνει ποιο από αυτά πλησιάζει το σταυρόνημα, το οποίο έχει τοποθετηθεί, με βάση την προηγούμενη διαδικασία, στη ζητούμενη θέση έναρξης της παρατήρησης του άστρου.

7.3.3. Παρατηρήσεις άστρων

Εφόσον, έχει γίνει η σωστή αναγνώριση του άστρου, όπως προαναφέρθηκε, τότε ξεκινά η παρατήρησή του, ακολουθώντας την κίνηση του με τους μικροκινήτριους κοχλίες. Κάθε φορά που ο παρατηρητής κρίνει (αξιολογεί) ότι το παρατηρούμενο άστρο βρίσκεται στο κέντρο του σταυρονήματος του τηλεσκοπίου, ενεργοποιεί το πλήκτρο καταγραφής (trigger key), το οποίο βρίσκεται στο πηδάλιο του. Έτσι, ενεργοποιείται η διαδικασία μέτρησης-καταγραφής χωρίς όμως να διακόπτεται η οπτική παρακολούθησή του.

Κάθε άστρο πρέπει να παρατηρείται για περίπου 8-10 min κατά μέσο όρο, οι μετρήσεις του πρέπει να γίνονται με σταθερό ρυθμό και να έχουν ένα πλήθος ίσο ή και μεγαλύτερο του 80. Αυτό βοηθά στην καλύτερη κατανομή των θέσεων του άστρου, στη σωστή και ρεαλιστική απόδοση της κίνησής του, η οποία οδηγεί σε ικανοποιητική προσαρμογή καμπύλης στα ζεύγη των μετρήσεων. Για κάθε παρατήρηση καταγράφεται στο αρχείο των μετρήσεων, ο αύξων αριθμός της, η οριζόντια και κατακόρυφη γωνία και οι δύο καταγραφές χρόνου, σε χιλιοστά του δευτερολέπτου, από το εσωτερικό χρονόμετρο του γεωδαιτικού σταθμού.

Επισημαίνεται ότι, αν διακοπεί η παρατήρηση ενός άστρου νωρίτερα από το χρονικό διάστημα που απαιτείται (8-10 min), ακόμα και αν έχουν γίνει αρκετές σκοπεύσεις, ενδέχεται το άστρο να μην έχει σκοπευθεί στη ζητούμενη θέση ή και μετά από αυτή, γεγονός που καθιστά αβέβαιη την προσαρμογή της τροχιάς του και τη ζητούμενη επίλυση. Γίνεται με αυτό φανερό ότι είναι απαραίτητη η αυστηρή τήρηση των προδιαγραφών της διαδικασίας παρατήρησης για να οδηγηθεί η μεθοδολογία σε ορθά αποτελέσματα.

Γενικά, η νυχτερινή παρατήρηση άστρων, είναι ιδιαίτερη επίπονη διαδικασία και απαιτεί την πλήρη ηρεμία, προσοχή και αυτοσυγκέντρωση του παρατηρητή, για την επίτευξη ορθών και επιτυχών μετρήσεων. Είναι σαφές ότι δε μπορεί να συγκριθεί η παρατήρηση ενός άστρου (κινούμενος στόχος) με την κλασσική εργασία ενός παρατηρητή σε επίγειες τοπογραφικές εργασίες στη διάρκεια της μέρας [Λάμπρου Ε., 2003].

7.3.4. Καταγραφή θερμοκρασίας και πίεσης

Σημαντικό τμήμα του εξοπλισμού αποτελεί και ειδική συσκευή μέτρησης των ατμοσφαιρικών συνθηκών (πίεση, θερμοκρασία). Στη μέθοδο ίσων υψών αυτά τα μεγέθη αποκτούν ιδιαίτερη σημασία, καθώς ορίζουν το μέγεθος της αστρονομικής διάθλασης με την οποία διορθώνονται οι μετρήσεις ζενίθιας γωνίας.

Η συσκευή καταγραφής των μετρήσεων αυτών έχει ακρίβεια $\pm 0,1^\circ \text{C}$ και $\pm 0,1 \text{ mbar}$. Οι μεταβολές αναμένονται μικρές μεταξύ των άστρων λόγω της μικρής χρονικά απόστασης μεταξύ των σκοπεύσεων ανά άστρο, οπότε η συγκεκριμένη ακρίβεια καταγραφής είναι κατάλληλη.

Μετά το πέρας των παρατηρήσεων σε ένα άστρο, γίνεται η καταγραφή των στοιχείων αυτών. Έτσι, στο τέλος της διαδικασίας παρατηρήσεων, έχει γίνει καταγραφή 12 ζευγών θερμοκρασίας-πίεσης.

7.4. Διορθώσεις του χρόνου παρατήρησης

Μετά την ολοκλήρωση των μετρήσεων πρέπει να ακολουθήσει απαραίτητα η κατάλληλη επεξεργασία των καταγεγραμμένων χρόνων UTC, προκειμένου να υπολογιστούν και να διορθωθούν τα συστηματικά σφάλματα καταγραφής του χρόνου της κάθε παρατήρησης, ώστε να γίνουν σωστά οι περαιτέρω υπολογισμοί. Παρακάτω, αναλύονται οι επιμέρους διορθώσεις στο χρόνο μέτρησης, καθώς και η διαδικασία με την οποία υπολογίζονται [Λάμπρου *Ε.*, 2003].

7.4.1. Διόρθωση λόγω σφάλματος χρονομέτρου του γεωδαιτικού σταθμού

Ο γεωδαιτικός σταθμός διαθέτει ένα χρονόμετρο χαλαζία το οποίο παρουσιάζει σφάλματα, που οφείλονται στην κατασκευή και στην ποιότητα του. Αυτά είναι το σφάλμα εκτροπής του χρονομέτρου (offset), το σφάλμα ολίσθησης (drift) και το σφάλμα γήρανσης (aging).

Κατά την καταγραφή των μετρήσεων, κάθε φορά καταγράφεται η αντιστοιχία του εκάστοτε ακέραιου δευτερολέπτου χρόνου UTC με τον εσωτερικό χρόνο του χρονομέτρου του γεωδαιτικού σταθμού (RefTime). Σε δύο διαδοχικές μετρήσεις, η διαφορά ΔT_{UTC} των αντίστοιχων χρόνων UTC εκφρασμένη σε msec, πρέπει να είναι ίση με την αντίστοιχη διαφορά $\Delta T_{Γ.Σ}$ χρόνου σε msec όπως έχει καταγραφεί από το χρονόμετρο του γεωδαιτικού σταθμού. Δηλαδή:

$$\Delta T_{UTC} = UTC_{t1} - UTC_{t2} \cdot 1000 = n \cdot 1000 \quad (6.1)$$

$$\Delta T_{Γ.Σ} = \text{Re } ftime_1 - \text{Re } ftime_2 \quad (6.2)$$

όπου n ο αριθμός των ακέραιων δευτερολέπτων χρόνου UTC μεταξύ δύο διαδοχικών μετρήσεων.

Αν $\Delta T_{UTC} \neq \Delta T_{Γ.Σ}$ τότε η διαφορά $DT = \Delta T_{UTC} - \Delta T_{Γ.Σ}$ ορίζεται ως το σφάλμα του εσωτερικού χρονομέτρου του γεωδαιτικού σταθμού στο χρονικό διάστημα των n ακέραιων δευτερολέπτων. Έτσι, για τον γεωδαιτικό σταθμό ως σφάλμα μέτρησης του χρόνου ανά δευτερόλεπτο, ορίζεται το πηλίκο:

$$k = \frac{DT}{n} \quad (6.3)$$

Τα msec του χρόνου που αντιστοιχούν σε κάθε μέτρηση και προκύπτουν ως η διαφορά $Re\ ftime - Meastime$ πρέπει να διορθώνονται με την ποσότητα:

$$t_1 = k \cdot Re\ ftime - Meastime / 1000 \quad (6.4)$$

Με κατάλληλο πρόγραμμα, υπολογίζονται οι διαδοχικές διαφορές χρόνου UTC, μεταξύ των μετρήσεων, για όλες τις παρατηρήσεις και αντίστοιχα οι ίδιες διαφορές της καταγραφής του χρόνου αναφοράς του γεωδαιτικού σταθμού. Γίνεται η αναγωγή του σφάλματος στο χρόνο για κάθε δευτερόλεπτο (k) και υπολογίζεται η μέση τιμή και η τυπική του απόκλιση.

Η τυπική απόκλιση της διόρθωσης αυτής πρέπει να είναι μικρότερη από 1 msec [Λάμπρου Ε., 2003]. Σε διαφορετική περίπτωση, θεωρείται ότι το χρονόμετρο του σταθμού έχει κάποια αστάθεια και δεν μετράται σωστά ο χρόνος ή ότι ο παρεχόμενος χρόνος UTC από το δέκτη του συστήματος GPS δεν είναι ο σωστός λόγω ασταθούς λύσης (λιγότεροι από 4 δορυφόροι).

Η διόρθωση αυτή είναι διαφορετική για κάθε γεωδαιτικό σταθμό, μπορεί να μεταβάλλεται με την πάροδο του χρόνου και πρέπει οπωσδήποτε να προσδιορίζεται και να διορθώνονται οι μετρούμενοι χρόνοι. Είναι προσθετική (+) αν το εσωτερικό χρονόμετρο του οργάνου καθυστερεί και αφαιρετική (-) αν προηγείται στη μέτρηση του χρόνου.

7.4.2. Διόρθωση λόγω καθυστέρησης στο χρόνο εκτέλεσης της καταγραφής

Έτσι ορίζεται η καθυστέρηση (t_2) με την οποία το όργανο καταγράφει τα στοιχεία της μέτρησης από τη στιγμή που θα λάβει την εντολή. Ο χρόνος της κάθε μέτρησης προκύπτει ως η διαφορά του χρόνου μέτρησης (Meastime) και του χρόνου αναφοράς (Reftime). Η εντολή καταγραφής των δύο αυτών χρόνων αναγνωρίζεται από τον γεωδαιτικό σταθμό μέσα από τον ίδιο κώδικα. Έτσι, η διόρθωση t_2 , αν υπάρχει, είναι συστηματική και εξαλείφεται αφού τελικά ο χρόνος παρατήρησης είναι:

$$t = (Meastime + t_2) - (Re\ ftime + t_2) = Meastime - Re\ ftime \quad (6.5)$$

7.4.3. Διόρθωση λόγω καθυστέρησης αντίδρασης του παρατηρητή

Έτσι ορίζεται η διόρθωση στο χρόνο παρατήρησης που είναι ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ της χρονικής στιγμής t_0 που ο παρατηρητής βλέπει τον αστέρα στο κέντρο του σταυρονήματος έως τη στιγμή που θα πατήσει το πλήκτρο καταγραφής στο όργανο, ώστε να καταγραφούν οι τιμές των γωνιών και του χρόνου (Meastime).

Αυτή η διόρθωση t_3 είναι σχεδόν συστηματική, πάντοτε αφαιρετική, προσωπική για κάθε παρατηρητή (προσωπική εξίσωση του παρατηρητή) και μπορεί να υπολογιστεί

πειραματικά. Ορίζεται ως η διαφορά $t_3 = \text{Meastime} - t_0$ και πρέπει να διορθωθούν όλες οι καταγραφές χρόνου από αυτή.

Ο πειραματικός υπολογισμός της καθυστέρησης αντίδρασης του παρατηρητή γίνεται εργαστηριακά ή και στο ύπαιθρο, πριν την έναρξη των παρατηρήσεων και ακολουθείται η εξής διαδικασία:

Ο δέκτης του συστήματος GPS συνδέεται με τον γεωδαιτικό σταθμό και με ένα ειδικό κύκλωμα, το οποίο δέχεται τον παλμό που εκπέμπει κάθε ακέραιο δευτερόλεπτο ο δέκτης, τη χρονική αυτή στιγμή, ανάβει μια λυχνία (LED), η οποία είναι επίσης συνδεδεμένη στο κύκλωμα αυτό.

Ο παρατηρητής παρακολουθεί μέσα από το τηλεσκόπιο του γεωδαιτικού σταθμού τη λυχνία κάθε φορά που ανάβει και δίνει την εντολή στο σταθμό για την καταγραφή της μέτρησης. Η διαφορά του χρόνου μέτρησης (Meastime), που καταγράφεται κάθε φορά, από το ακέραιο δευτερόλεπτο στο οποίο άναψε η λυχνία (t λυχνίας), είναι η διόρθωση λόγω καθυστέρησης αντίδρασης του παρατηρητή. Η διόρθωση αυτή είναι της τάξης των 0.300 sec και είναι διαφορετική για κάθε παρατηρητή.

Είναι φανερό ότι το μέγεθος της διόρθωσης αυτής είναι σημαντικό και επηρεάζει καθοριστικά την τιμή του μετρούμενου χρόνου, γι' αυτό και πρέπει να προσδιορίζεται για κάθε παρατηρητή που συμμετέχει στην πραγματοποίηση αστρονομικών παρατηρήσεων. Συνήθως, η διόρθωση για το σφάλμα χρόνου του παρατηρητή, όπως προκύπτει από τον εργαστηριακό έλεγχο, είναι της τάξης του 250 , με σφάλμα 100 msec.

7.5.Επεξεργασία μετρήσεων

Όπως αναφέρθηκε και στις προσομοιωμένες παρατηρήσεις, η επεξεργασία των n μετρήσεων κάθε άστρου αποβλέπει στον προσδιορισμό της τιμής της χρονικής στιγμής παρατήρησής του, τη στιγμή που διήλθε από την ζενίθια απόσταση των 20° , η οποία έχει οριστεί ως η ανεξάρτητη μεταβλητή στην προτεινόμενη μεθοδολογία ταυτόχρονου προσδιορισμού του αστρονομικού πλάτους Φ και μήκους Λ .

Τα στοιχεία εισόδου του προγράμματος της προσαρμογής περιλαμβάνονται σε αρχεία. Σε αυτά, εμφανίζονται σε κάθε γραμμή, με τη σειρά, ο αύξων αριθμός της μέτρησης, ο χρόνος UTC σε δευτερόλεπτα, η οριζόντια γωνία σε grad και η ζενίθια απόσταση σε grad, όπως έχουν καταγραφεί στον γεωδαιτικό σταθμό.

Οι υπολογισμοί γίνονται με τον ίδιο τρόπο όπως στις προσομοιωμένες παρατηρήσεις. Επισημαίνεται ότι οι γωνίες μετρώνται από το όργανο με την ίδια ακρίβεια, τόσο οι οριζόντιες όσο και οι κατακόρυφες, για κάθε σκόπευση. Επομένως, οι παρατηρήσεις θεωρούνται ισοβαρείς οπότε ο πίνακας βαρών P είναι μοναδιαίος. Η λύση προκύπτει από την επίλυση ενός κανονικού συστήματος τεσσάρων εξισώσεων για τους τέσσερις άγνωστους συντελεστές της κάθε προσαρμογής, σύμφωνα με τη μέθοδο των εμμέσων παρατηρήσεων.

Μετά τον υπολογισμό των υπολοίπων $v_i = A \cdot x_i - l_i$ για τους χρόνους UTC γίνεται έλεγχος και απόρριψη των άστοχων παρατηρήσεων με κριτήριο, αν το υπόλοιπο v_i

της παρατήρησης βρίσκεται εκτός του διαστήματος $[-\hat{\sigma}_{v_i}, +\hat{\sigma}_{v_i}]$ αντίστοιχα. Έτσι, μετά τον αποκλεισμό των άστοχων παρατηρήσεων, γίνεται εκ νέου υπολογισμός των αγνώστων X_i για το πολυώνυμο.

Η a posteriori αβεβαιότητα κάθε προσαρμογής υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{vv}{n-m}} \quad (6.6)$$

όπου n ο αριθμός των μετρήσεων που απομένουν για κάθε άστρο και $m=4$, οι τέσσερις άγνωστοι συντελεστές κάθε πολυώνυμου.

Στο τελικό στάδιο υπολογίζεται από το πολυώνυμο 3^{00} βαθμού ο χρόνος UTC κατά τη διάβαση του άστρου από τον κύκλο των 20° , ενώ στη συνέχεια υπολογίζονται το αζιμούθιο και η ζενίθια γωνία του άστρου από το τρίγωνο θέσης, με βάση τις προσεγγιστικές συντεταγμένες (Φ, Λ) του σταθμού. Το σφάλμα προσδιορισμού της ζενίθιας γωνίας προκύπτει από το a posteriori σφάλμα προσαρμογής (σφάλμα χρόνου, σχέση 6.6) με εφαρμογή του νόμου μετάδοσης σφαλμάτων στις σχέσεις του τριγώνου θέσης.

Οι σκοπεύσεις που γίνονται για κάθε άστρο είναι της τάξης των 70-100 και μετά τον αποκλεισμό των άστοχων παρατηρήσεων απομένουν περίπου τα δύο τρίτα εξ' αυτών. Επομένως, με τη συγκεκριμένη μεθοδολογία προσδιορισμού του χρόνου UTC σε συγκεκριμένο ύψος παρατήρησης, μειώνονται δραστικά τα τυχαία σφάλματα της παρατήρησης. Επίσης, ελαχιστοποιούνται τα σφάλματα που οφείλονται στην αβεβαιότητα της διχοτόμησης ή σκόπευσης του κέντρου του άστρου και εξαρτώνται από τον τρόπο αντίληψης του παρατηρητή και τη διακριτική ικανότητα του ματιού του.

Στη συνέχεια συνορθώνεται το σύνολο των 12 άστρων και υπολογίζονται τα $\Delta\Phi$, $\Delta\Lambda \cos\Phi$, τα σφάλματά τους, το a posteriori σφάλμα της μονάδας βάρους, ο λόγος ιδιοτιμών και γίνεται αμφίπλευρος στατιστικός έλεγχος για να ελεγχθούν οι αρχικές υποθέσεις. Τα παραπάνω μεγέθη υπολογίζονται με τη διαδικασία που περιγράφεται στο κεφάλαιο 3.

8. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΚΩΝ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ

8.1. Εισαγωγή

Για την εφαρμογή της μεθόδου ίσων υψών πραγματοποιήθηκαν δύο σειρές παρατηρήσεων. Οι σειρές αυτές αναφέρονται σε ένα σημείο, που είναι το ανατολικό βάθρο στην ταράτσα του κτιρίου Λαμπαδαρίου στην Πολυτεχνειούπολη Ζωγράφου. Η πρώτη σειρά μετρήσεων πραγματοποιήθηκε στις 31 Μαΐου 2016, ενώ η δεύτερη πραγματοποιήθηκε στις 14 Ιουνίου 2016.

Για το σημείο αυτό υπάρχουν διαθέσιμες συντεταγμένες στο κρατικό σύστημα αναφοράς ΕΓΣΑ 87 και στο παγκόσμιο σύστημα ITRF 89.

Ο προγραμματισμός των παρατηρήσεων έγινε με τη βοήθεια του τμήματος κώδικα 'EpiLogh_astrown.m', με τον τρόπο που περιγράφηκε παραπάνω. Για τα στοιχεία των άστρων προς σκόπευση, χρησιμοποιήθηκε ο κατάλογος Tycho2. Τα άστρα που επιλέχθηκαν, καταγράφηκαν με τα στοιχεία τους σε πίνακα, ο οποίος αποτελεί το σημαντικότερο εργαλείο της διαδικασίας των μετρήσεων.

Ο πίνακας-πρόγραμμα νυχτερινής παρατήρησης περιλαμβάνει 12 άστρα (όπως αναφέρθηκε στα προηγούμενα). Ακόμα, επιλέχθηκαν και ορισμένα εναλλακτικά άστρα, σε περίπτωση αστοχίας ή προβλημάτων. Το χρονικό διάστημα παρατήρησης επιλέχθηκε να είναι 6 ώρες (χρονικό εύρος αναζήτησης άστρων).

Η προετοιμασία του συστήματος (όργανο-GPS) και η συνδεσμολογία του διαρκεί περίπου 10 min και η εύρεση και σκόπευση του Πολικού αστέρα για τον προσανατολισμό του γεωδαιτικού σταθμού διαρκεί γύρω στα 2 min.

Ας σημειωθεί ότι η ύπαρξη των φώτων της πόλης, τα οποία δημιουργούσαν ένα διάχυτο φωτισμό στο ουρανό, είχε ως αποτέλεσμα να δυσχεραίνεται η σκόπευση των αστερών και να επηρεάζεται η συγκέντρωση του παρατηρητή και η ακρίβεια των αποτελεσμάτων. Ωστόσο, το πρόβλημα αυτό ξεπεράστηκε σε μεγάλο βαθμό λόγω της παρατήρησης των άστρων σε μεγάλο ύψος (20° ζενίθια γωνία= 70° ύψος).

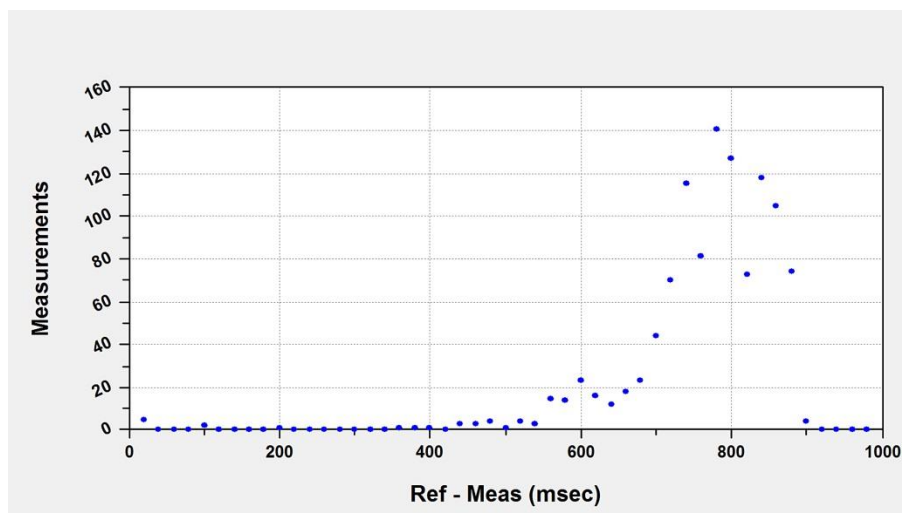
Επιπλέον, στην πρώτη σειρά παρατηρήσεων, που πραγματοποιήθηκε στις 31 Μαΐου 2016, τα αποτελέσματα παρουσίασαν μεγάλη απόκλιση από τα αναμενόμενα, που έκριναν αναγκαία τη διεξαγωγή δεύτερης παρατήρησης (14 Ιουνίου).

Η πρώτη σειρά παρατηρήσεων επηρεάστηκε σημαντικά από την απειρία του παρατηρητή, με αποτέλεσμα να βελτιώνεται η ακρίβεια σκόπευσης των άστρων με το πέρασ του χρόνου.

Η δεύτερη σειρά παρατηρήσεων είχε καλύτερα αποτελέσματα, παρά το γεγονός ότι επικρατούσαν νεφώσεις που δυσχέραιναν την παρατήρηση ενός άστρου. Το άστρο αυτό αντικαταστάθηκε από ένα εναλλακτικό, ώστε να ολοκληρωθεί επιτυχώς η διαδικασία.

8.2.Μετρήσεις χρόνου

Μετά από την προκαταρκτική εξέταση των μετρήσεων, έγινε εμφανές ότι μία δυσλειτουργία του οργάνου επηρέασε τις μετρήσεις χρόνου UTC κάθε παρατήρησης. Το σφάλμα αυτό, που κυμαίνεται από 0-1sec ανά μέτρηση, δεν είναι δυνατόν να διορθωθεί, διότι δεν είναι σταθερό ούτε συστηματικό.



Σχήμα 8.1: Ιστογράμμο καταγραφής χρόνου παρατήρησης(διαφορά από επόμενο ακέραιο sec UTC)

Στο παραπάνω σχήμα φαίνεται το μέγεθος του σφάλματος στις μετρήσεις χρόνου. Όλες οι διαφορές συγκεντρώνονται στο τμήμα 600-900 msec, ενώ θα έπρεπε να κατανέμονται σε όλο το εύρος του οριζόντιου άξονα.

Το πρόβλημα αυτό έχει ως συνέπεια να μην μπορούν να εξαχθούν συμπεράσματα σχετικά με το αντικείμενο της εργασίας από την νυχτερινή παρατήρηση, η οποία όμως βοήθησε στην εξοικείωση του παρατηρητή με τη μέθοδο.

Για το λόγο αυτό, η εξαγωγή των συμπερασμάτων έγινε κυρίως μέσω των προσομοιώσεων (θεωρητική επίλυση με συνθήκες που προσομοιάζουν τις πραγματικές).

Ακόμα, τα σφάλματα που υπεισέρχονται στις μετρήσεις και σχετίζονται με το χρόνο (προσωπική εξίσωση-καθυστέρηση παρατηρητή, σφάλμα χρονομέτρου γεωδαιτικού σταθμού, καθυστέρηση στο χρόνο εκτέλεσης καταγραφής), δεν ελήφθησαν υπόψη. Παρά τον αρχικό σχεδιασμό, στην προκειμένη περίπτωση δεν υπήρχε χρησιμότητα, αφού ως σφάλματα έχουν μικρότερες τιμές από το σφάλμα καταγραφής του χρόνου που αναφέρθηκε.

Τέλος, επειδή τα σφάλματα χρόνου επηρεάζουν καθοριστικά τον προσδιορισμό του αστρονομικού μήκους, χωρίς κανένα τρόπο περιορισμού τους, τα αποτελέσματα που προέκυψαν έχουν επηρεαστεί από αυτά.

8.3.Σειρά μετρήσεων:31 Μαΐου

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται τα βασικά στοιχεία των άστρων που παρατηρήθηκαν:

ΑΡΙΘΜΟΣ	ΚΩΔΙΚΟΣ (TYCHO2)	ΟΡΘΗ ΑΝΑΦΟΡΑ (h)	ΑΠΟΚΛΙΣΗ (°)
1	TYC 3452 2140	11,7817408	47,692123
2	TYC 1990 3784	12,5945136	22,541175
3	TYC 1991 1901	12,4634772	26,73731
4	TYC 2024 1355	15,1339631	24,808524
5	TYC 1466 1082	13,8416599	21,185465
6	TYC 3870 1962	15,9701728	54,706809
7	TYC 2035 1749	16,0503371	22,761975
8	TYC 3478 1332	14,4295234	51,779332
9	TYC 3510 1876	17,6659433	45,99938
10	TYC 3523 1685	17,8249187	50,778698
11	TYC 3870 1962	15,9701728	54,706849
12	TYC 1579 1852	18,1579856	20,819295

Πίνακας 8.1:Συντεταγμένες παρατηρούμενων άστρων:14 Ιουνίου 2016

Τα στοιχεία με τα παραπάνω άστρα επιλέχθηκαν από το τμήμα κώδικα 'Eriplgh_astrown.m' με χρήση των παραμέτρων που αποφασίστηκαν στο κεφάλαιο 5.

Για κάθε άστρο πραγματοποιήθηκε ενά πλήθος μετρήσεων μεταξύ 60-100, ανάλογα με τη λαμπρότητά του, περιορισμούς που οφείλονταν στην ατμόσφαιρα (ορατότητα, νεφώσεις) καθώς και την κόπωση του παρατηρητή. Παρακάτω φαίνεται το πλήθος μετρήσεων ανά άστρο:

ΑΡΙΘΜΟΣ	ΚΩΔΙΚΟΣ (TYCHO2)	ΠΛΗΘΟΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ
1	TYC 3452 2140	72
2	TYC 1990 3784	73
3	TYC 1991 1901	79
4	TYC 2024 1355	67
5	TYC 1466 1082	91
6	TYC 3870 1962	66
7	TYC 2035 1749	61
8	TYC 3478 1332	58
9	TYC 3510 1876	61
10	TYC 3523 1685	59
11	TYC 3870 1962	53
12	TYC 1579 1852	89

Πίνακας 8.2:Πλήθος παρατηρήσεων ανά άστρο

Τα άστρα με πολλές παρατηρήσεις παρατηρήθηκαν μετά από κάποιο διάλειμα, όταν ο παρατηρητής ήταν περισσότερο ξεκούραστος. Επιπλέον, οι μετρήσεις αυξάνονται προς το τέλος του προγράμματος παρατήρησης, όταν και η εξοικείωση του παρατηρητή με τη μέθοδο και τη διαδικασία ήταν καλύτερη.

Παράλληλα με τις σκοπεύσεις και λήψεις μετρήσεων στο κάθε άστρο, έγιναν και καταγραφές των συνθηκών πίεσης και θερμοκρασίας κατά τη διάρκεια των μετρήσεων. Τα μεγέθη αυτά είναι απαραίτητα στη διαδικασία διόρθωσης των μετρήσεων ζενίθιας γωνίας από την επίδραση της αστρονομικής διάθλασης.

Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τα στοιχεία αυτά ανά παρατηρούμενο άστρο:

ΑΡΙΘΜΟΣ	ΚΩΔΙΚΟΣ (TYCHO2)	ΠΙΕΣΗ (mbar)	ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑ (° C)
1	TYC 3452 2140	995,1	24,5
2	TYC 1990 3784	995,0	24,3
3	TYC 1991 1901	995,0	24,3
4	TYC 2024 1355	995,2	24,1
5	TYC 1466 1082	995,2	23,8
6	TYC 3870 1962	995,4	23,9
7	TYC 2035 1749	995,5	24,0
8	TYC 3478 1332	995,2	24,9
9	TYC 3510 1876	995,3	24,7
10	TYC 3523 1685	995,5	23,4
11	TYC 3870 1962	995,0	22,9
12	TYC 1579 1852	995,0	22,3

Πίνακας 8.3: Πίεση και θερμοκρασία ανά άστρο

Πριν εξαχθούν τα αποτελέσματα των προσαρμογών και τα παράγωγα τους μεγέθη, έγινε επιλογή των καλύτερων μετρήσεων για κάθε άστρο. Κριτήριο για την επιλογή των άστρων είναι η διαφορά υπολογιζόμενου από το πολυώνυμο χρόνου UTC και μετρημένου χρόνου UTC να μην είναι μεγαλύτερη από 1 σ (όπως αυτό προκύπτει από τα υπόλοιπα όλων των μετρήσεων).

Μετά από τη διαδικασία αυτή, οι μετρήσεις που ικανοποιούν το παραπάνω κριτήριο για κάθε άστρο είναι:

ΑΡΙΘΜΟΣ	ΚΩΔΙΚΟΣ (TYCHO2)	ΠΛΗΘΟΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ
1	TYC 3452 2140	51
2	TYC 1990 3784	54
3	TYC 1991 1901	57
4	TYC 2024 1355	59
5	TYC 1466 1082	64
6	TYC 3870 1962	56
7	TYC 2035 1749	51
8	TYC 3478 1332	49
9	TYC 3510 1876	51
10	TYC 3523 1685	42
11	TYC 3870 1962	37
12	TYC 1579 1852	76

Πίνακας 8.4: Πλήθος άστρων με τα μικρότερα υπόλοιπα ανά άστρο

Μετά την προσαρμογή του πολυωνύμου 3^{ου} βαθμού στα ζεύγη (t,z), υπολογίζονται τα απαραίτητα μεγέθη για κάθε άστρο. Αυτά είναι ο χρόνος UTC για z=20° (t_o) κάθε άστρου, η αντίστοιχη ζενίθια γωνία όπως υπολογίζεται από το τρίγωνο θέσης καθώς και το αζιμούθιο του άστρου (Z_o, A_o) και τα σφάλματα σ_{to} και σ_{zo} των παραπάνω μεγεθών. Στους υπολογισμούς αυτούς χρησιμοποιήθηκαν ως αρχικές, προσεγγιστικές συντεταγμένες του σταθμού οι τιμές $\Phi=37^\circ 58' 30''$ και $\Lambda=23^\circ 46' 40''$.

Για καθε ένα από τα 12 άστρα, τα μεγέθη αυτά αναγράφονται στον παρακάτω πίνακα:

ΑΡΙΘΜΟΣ	ΚΩΔΙΚΟΣ (TYCHO2)	t_o (h)	A_o (°)	Z_o (°)
1	TYC 3452 2140	19,153638	306,725685	20,026664
2	TYC 1990 3784	19,353405	223,826817	20,027503
3	TYC 1991 1901	19,544860	241,648283	20,028207
4	TYC 2024 1355	19,716987	126,028836	20,003658
5	TYC 1466 1082	19,447202	216,538769	20,014519
6	TYC 3870 1962	20,655816	28,046947	20,006650
7	TYC 2035 1749	20,803586	135,208282	19,997876
8	TYC 3478 1332	21,570345	320,276610	20,009392
9	TYC 3510 1876	21,772809	58,436046	19,999000
10	TYC 3523 1685	22,135248	43,209643	19,999267
11	TYC 3870 1962	22,804091	331,980371	19,998894
12	TYC 1579 1852	22,121890	145,726346	19,999692

Πίνακας 8.5: Υπολογιζόμενα μεγέθη από την προσαρμογή πολυωνύμου ανά άστρο

Τα σφάλματα των παραπάνω υπολογιζόμενων μεγεθών είναι:

ΑΡΙΘΜΟΣ	ΚΩΔΙΚΟΣ (TYCHO2)	σ_{to} (h)	σ_{to} (sec)	σ_{zo} (°)	σ_{zo} (')
1	TYC 3452 2140	0,00006264	0,2255	0,00059444	2,14
2	TYC 1990 3784	0,00005694	0,2050	0,00046667	1,68
3	TYC 1991 1901	0,00005456	0,1964	0,00056667	2,04
4	TYC 2024 1355	0,00005833	0,2100	0,00055833	2,01
5	TYC 1466 1082	0,00005875	0,2115	0,00041389	1,49
6	TYC 3870 1962	0,00006633	0,2388	0,00036944	1,33
7	TYC 2035 1749	0,00005903	0,2125	0,00049167	1,77
8	TYC 3478 1332	0,00006300	0,2268	0,00047500	1,71
9	TYC 3510 1876	0,00006328	0,2278	0,00063889	2,30
10	TYC 3523 1685	0,00007989	0,2876	0,00064722	2,33
11	TYC 3870 1962	0,00007292	0,2625	0,00040556	1,46
12	TYC 1579 1852	0,00004814	0,1733	0,00031944	1,15

Πίνακας 8.6: Σφάλματα t_o, z_o μετά τη προσαρμογή πολυωνύμου ανά άστρο

Όσον αφορά τον πίνακα βαρών, αυτά προκύπτουν από το λόγο $\frac{\sigma_o^2}{\sigma_{zo}^2}$ (όπου σ_o

είναι το αργισιό σφάλμα της μονάδας βάρους που επιλέγεται αυθαίρετα, ενώ το σ_{zo} όπως προέκυψε από τους υπολογισμούς για κάθε άστρο).

Στην παραπάνω περίπτωση χρησιμοποιήθηκε $\sigma_o=10''$.

$\Delta l = \text{ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ (}^\circ\text{)}$	$\Delta l = \text{ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ (}'')$
0,02666444	95,99
0,02750306	99,01
0,02820667	101,54
0,00365778	13,17
0,01451861	52,27
0,00665028	23,94
-0,00212389	-7,65
0,00939139	33,81
-0,00100000	-3,60
-0,00073278	-2,64
-0,00110611	-3,98
-0,00030778	-1,11

Πίνακας 8.7: Στοιχεία πίνακα μετρήσεων για τη συνόρθωση των 12 άστρων

Ο παραπάνω πίνακας δίνει τις διαφορές $Z_o - z$ (με $z = 20^\circ$ και Z_o όπως προκύπτει από την επίλυση τριγώνου θέσης) για κάθε άστρο.

Μετά τη συνόρθωση των άστρων εξάγονται τα παρακάτω αποτελέσματα για τις αστρονομικές συντεταγμένες:

$\Delta\Phi (}'')$	$\Delta\Lambda (}'')$
-12,91	-55,87

Πίνακας 8.8: $\Delta\Phi$, $\Delta\Lambda$ ως αποτελέσματα της συνόρθωσης των 12 άστρων

Τα σφάλματα των παραπάνω μεγεθών είναι:

$\sigma_{\Delta\Phi (}'')$	$\sigma_{\Delta\Lambda (}'')$
1,00	1,50

Πίνακας 8.9: Σφάλματα $\Delta\Phi$, $\Delta\Lambda$ από τη συνόρθωση των 12 άστρων

Έτσι οι τελικές συντεταγμένες του βάθρου σύμφωνα με τους πίνακες είναι:

$\Phi = \text{ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΚΟ ΠΛΑΤΟΣ}$	$\Lambda = \text{ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΚΟ ΜΗΚΟΣ}$
$37^\circ 58' 17,09'' \pm 1,00''$	$23^\circ 45' 44,13'' \pm 1,50''$

Πίνακας 8.10: Τελικές συντεταγμένες Φ , Λ

Τα υπόλοιπα που προκύπτουν από τη συνόρθωση είναι:

ΥΠΟΛΟΙΠΑ (°)	ΥΠΟΛΟΙΠΑ (′′)
-0,01900333	-68,41
-0,01644417	-59,20
-0,01573722	-56,65
-0,01144222	-41,19
-0,00435389	-15,67
-0,01556750	-56,04
-0,00395028	-14,22
-0,00433111	-15,59
-0,01130111	-40,68
-0,01025694	-36,93
0,00368750	13,28
-0,00361833	-13,03

Πίνακας 8.11: Υπόλοιπα ανά άστρο μετά τη συνόρθωση

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι το a posteriori σφάλμα της μονάδας βάρους είναι:

$$\sigma_o = 250,48''$$

Αμφίπλευρος έλεγχος

Για επίπεδο εμπιστοσύνης 95% και βαθμό ελευθερίας $r=12-2=10$, από το τεστ χ^2 προκύπτει:

$$p_1=0,025 \text{ και } p_2=0,975, \text{ οπότε}$$

$$\chi_{p_1,r}^2=3.25 \text{ και } \chi_{p_2,r}^2=20.48$$

$$\sigma_o=10''$$

$$\sigma_o=250,48''$$

Οπότε, προκύπτει:

$$\rightarrow \frac{\sigma_o}{\sigma_o} = 25,048 \rightarrow r \cdot \left(\frac{\sigma_o^2}{\sigma_o^2}\right) = 6273,936$$

Θα πρέπει να ισχύει:

$$3,25 \leq 6273,936 \leq 20,48$$

Η σχέση αυτή δεν είναι αληθής, οπότε οι αρχικές υποθέσεις δεν επαληθεύονται.

8.4.Σειρά μετρήσεων:14 Ιουνίου

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται τα βασικά στοιχεία των άστρων που παρατηρήθηκαν:

ΑΡΙΘΜΟΣ	ΚΩΔΙΚΟΣ (TYCHO2)	ΟΡΘΗ ΑΝΑΦΟΡΑ (h)	ΑΠΟΚΛΙΣΗ (°)
1	TYC 1995 2586	12,8749600	27,454743
2	TYC 3491 1859	16,0555606	45,995658
3	TYC 2037 1827	15,8383475	26,022248
4	TYC 3851 1506	13,6893960	54,604102
5	TYC 1498 1787	15,7050049	19,621455
6	TYC 3478 1332	14,4294568	51,780276
7	TYC 3523 1685	17,8249641	53,399634
8	TYC 1502 1782	15,8667377	20,932515
9	TYC 2035 1749	16,0503446	22,762897
10	TYC 1580 2158	18,4070070	21,780186
11	TYC 3491 1859	16,0555603	45,995712
12	TYC 3920 1971	19,2919983	50,780068

Πίνακας 8.12:Συντεταγμένες παρατηρούμενων άστρων:14 Ιουνίου 2016

Τα στοιχεία με τα παραπάνω άστρα επιλέχθηκαν από το τμήμα κώδικα 'Epiogh_astrown.m' με χρήση των παραμέτρων που αποφασίστηκαν στο κεφάλαιο 5.

Για κάθε άστρο πραγματοποιήθηκε ενά πλήθος μετρήσεων μεταξύ 60-100, ανάλογα με τη λαμπρότητά του, περιορισμούς που οφείλονταν στην ατμόσφαιρα (ορατότητα, νεφώσεις) καθώς και την κόπωση του παρατηρητή. Παρακάτω φαίνεται το πλήθος μετρήσεων ανά άστρο:

ΑΡΙΘΜΟΣ	ΚΩΔΙΚΟΣ (TYCHO2)	ΠΛΗΘΟΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ
1	TYC 1995 2586	74
2	TYC 3491 1859	61
3	TYC 2037 1827	74
4	TYC 3851 1506	76
5	TYC 1498 1787	87
6	TYC 3478 1332	99
7	TYC 3523 1685	80
8	TYC 1502 1782	90
9	TYC 2035 1749	74
10	TYC 1580 2158	85
11	TYC 3491 1859	80
12	TYC 3920 1971	88

Πίνακας 8.13:Πλήθος παρατηρήσεων ανά άστρο

Τα άστρα με πολλές παρατηρήσεις παρατηρήθηκαν μετά από κάποιο διάλειμα, όταν ο παρατηρητής ήταν περισσότερο ξεκούραστος. Επιπλέον, οι μετρήσεις αυξάνονται προς το τέλος του προγράμματος παρατήρησης, όταν και η εξοικείωση του παρατηρητή με τη μέθοδο και τη διαδικασία ήταν καλύτερη.

Παράλληλα με τις σκοπεύσεις και λήψεις μετρήσεων στο κάθε άστρο, έγιναν και καταγραφές των συνθηκών πίεσης και θερμοκρασίας κατά τη διάρκεια των μετρήσεων. Τα μεγέθη αυτά είναι απαραίτητα στη διαδικασία διόρθωσης των μετρήσεων ζενίθιας γωνίας από την επίδραση της αστρονομικής διάθλασης.

Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τα στοιχεία αυτά ανά παρατηρούμενο άστρο:

ΑΡΙΘΜΟΣ	ΚΩΔΙΚΟΣ (TYCHO2)	ΠΙΕΣΗ (mbar)	ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑ (° C)
1	TYC 1995 2586	985,7	23,0
2	TYC 3491 1859	985,8	22,9
3	TYC 2037 1827	985,9	22,8
4	TYC 3851 1506	986,0	22,8
5	TYC 1498 1787	986,2	22,7
6	TYC 3478 1332	986,6	22,2
7	TYC 3523 1685	986,8	21,6
8	TYC 1502 1782	986,9	21,1
9	TYC 2035 1749	986,9	20,8
10	TYC 1580 2158	987,0	20,6
11	TYC 3491 1859	987,1	20,3
12	TYC 3920 1971	987,2	20,2

Πίνακας 8.14: Πίεση και θερμοκρασία ανά άστρο

Πριν εξαχθούν τα αποτελέσματα των προσαρμογών και τα παράγωγα τους μεγέθη, έγινε επιλογή των καλύτερων μετρήσεων για κάθε άστρο. Κριτήριο για την επιλογή των άστρων είναι η διαφορά υπολογιζόμενου από το πολυώνυμο χρόνου UTC και μετρημένου χρόνου UTC να μην είναι μεγαλύτερη από 1 σ (όπως αυτό προκύπτει από τα υπόλοιπα όλων των μετρήσεων).

Μετά από τη διαδικασία αυτή, οι μετρήσεις που ικανοποιούν το παραπάνω κριτήριο για κάθε άστρο είναι:

ΑΡΙΘΜΟΣ	ΚΩΔΙΚΟΣ (TYCHO2)	ΠΛΗΘΟΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ
1	TYC 1995 2586	59
2	TYC 3491 1859	46
3	TYC 2037 1827	51
4	TYC 3851 1506	55
5	TYC 1498 1787	62
6	TYC 3478 1332	70
7	TYC 3523 1685	61
8	TYC 1502 1782	66
9	TYC 2035 1749	53
10	TYC 1580 2158	63
11	TYC 3491 1859	58

12	TYC 3920 1971	62
----	---------------	----

Πίνακας 8.15: Πλήθος άστρων με τα μικρότερα υπόλοιπα ανά άστρο

Μετά την προσαρμογή του πολωνύμου 3^{ου} βαθμού στα ζεύγη (t,z), υπολογίζονται τα απαραίτητα μεγέθη για κάθε άστρο. Αυτά είναι ο χρόνος UTC για z=20° (t_o) κάθε άστρου, η αντίστοιχη ζενίθια γωνία όπως υπολογίζεται από το τρίγωνο θέσης καθώς και το αζιμούθιο του άστρου (Z_o, A_o) και τα σφάλματα σ_{t_o} και σ_{z_o} των παραπάνω μεγεθών. Στους υπολογισμούς αυτούς χρησιμοποιήθηκαν ως αρχικές, προσεγγιστικές συντεταγμένες του σταθμού οι τιμές $\Phi=37^\circ 58' 30''$ και $\Lambda=23^\circ 46' 40''$.

Για καθε ένα από τα 12 άστρα, τα μεγέθη αυτά αναγράφονται στον παρακάτω πίνακα:

ΑΡΙΘΜΟΣ	ΚΩΔΙΚΟΣ (TYCHO2)	t_o (h)	A_o (°)	Z_o (°)
1	TYC 1995 2586	19,077393	244,254019	20,005268
2	TYC 3491 1859	19,250137	58,440756	19,990520
3	TYC 2037 1827	19,418749	121,176229	19,992383
4	TYC 3851 1506	19,626589	331,505135	20,001658
5	TYC 1498 1787	19,941739	154,079236	19,994794
6	TYC 3478 1332	20,651955	320,292951	20,003179
7	TYC 3523 1685	21,218577	43,195861	19,994179
8	TYC 1502 1782	21,515909	214,981853	20,003005
9	TYC 2035 1749	21,900884	224,815945	20,002975
10	TYC 1580 2158	22,337699	140,234353	19,994439
11	TYC 3491 1859	22,548049	301,548217	20,005026
12	TYC 3920 1971	22,896670	33,571482	19,995536

Πίνακας 8.16: Υπολογιζόμενα μεγέθη από την προσαρμογή πολωνύμου ανά άστρο

Τα σφάλματα των παραπάνω υπολογιζόμενων μεγεθών είναι:

ΑΡΙΘΜΟΣ	ΚΩΔΙΚΟΣ (TYCHO2)	σ_{t_o} (h)	σ_{t_o} (sec)	σ_{z_o} (°)	σ_{z_o} (')
1	TYC 1995 2586	0,000057250	0,21	0,000609667	2,19
2	TYC 3491 1859	0,000066333	0,24	0,000668222	2,41
3	TYC 2037 1827	0,000061000	0,22	0,000617139	2,22
4	TYC 3851 1506	0,000065917	0,24	0,000371861	1,34
5	TYC 1498 1787	0,000058833	0,21	0,000304083	1,09
6	TYC 3478 1332	0,000049333	0,18	0,000372583	1,34
7	TYC 3523 1685	0,000052250	0,19	0,000422944	1,52
8	TYC 1502 1782	0,000055028	0,20	0,000372972	1,34
9	TYC 2035 1749	0,000058806	0,21	0,000490111	1,76
10	TYC 1580 2158	0,000050139	0,18	0,000379139	1,36
11	TYC 3491 1859	0,000055833	0,20	0,000562694	2,03
12	TYC 3920 1971	0,000053056	0,19	0,000346861	1,25

Πίνακας 8.17: Σφάλματα t_o, z_o μετά τη προσαρμογή πολωνύμου ανά άστρο

Όσον αφορά τον πίνακα βαρών, αυτά προκύπτουν από το λόγο $\frac{\sigma_o^2}{\sigma_{zo}^2}$ (όπου σ_o είναι το αργιστί σφάλμα της μονάδας βάρους που επιλέγεται αυθαίρετα, ενώ το σ_{zo} όπως προέκυψε από τους υπολογισμούς για κάθε άστρο).

Στην παραπάνω περίπτωση χρησιμοποιήθηκε $\sigma_o=10''$.

$\Delta l = \text{ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ (}^\circ\text{)}$	$\Delta l = \text{ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ (}'')$
0,00526778	18,96
-0,00948056	-34,13
-0,00761694	-27,42
0,00165778	5,97
-0,00520639	-18,74
0,00317917	11,45
-0,00582139	-20,96
0,00300528	10,82
0,00297500	10,71
-0,00556139	-20,02
0,00502583	18,09
-0,00446389	-16,07

Πίνακας 8.18: Στοιχεία πίνακα μετρήσεων για τη συνόρθωση των 12 άστρων

Ο παραπάνω πίνακας δίνει τις διαφορές $Z_o - z$ (με $z=20^\circ$ και Z_o όπως προκύπτει από την επίλυση τριγώνου θέσης) για κάθε άστρο.

Μετά τη συνόρθωση των άστρων εξάγονται τα παρακάτω αποτελέσματα για τις αστρονομικές συντεταγμένες:

$\Delta\Phi (}'')$	$\Delta\Lambda (}'')$
0,84	-32,76

Πίνακας 8.19: $\Delta\Phi, \Delta\Lambda$ ως αποτελέσματα της συνόρθωσης των 12 άστρων

Είναι λοιπόν εμφανές, ότι το αστρονομικό μήκος επηρεάζεται σε πολύ μεγάλο βαθμό από τα σφάλματα χρόνου. Η προσθετική επίδραση των σφαλμάτων στην καταγραφή του χρόνου δημιουργεί μία μεταβολή του αστρονομικού μήκους πολύ μεγάλη. Κι αυτό γιατί όπως διατυπώθηκε προηγουμένως, τα σφάλματα στο χρόνο επηρεάζουν πλήρως και σε όλο το μέγεθός τους το αστρονομικό μήκος.

Τα τυπικά σφάλματα των παραπάνω μεγεθών είναι:

$\sigma_{\Delta\Phi}$ (")	$\sigma_{\Delta\Lambda}$ (")
0,36	0,56

Πίνακας 8.20: Σφάλματα $\Delta\Phi, \Delta\Lambda$ από τη συνόρθωση των 12 άστρων

Έτσι οι τελικές συντεταγμένες του βάθρου σύμφωνα με τους πίνακες είναι:

Φ =ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΚΟ ΠΛΑΤΟΣ	Λ =ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΚΟ ΜΗΚΟΣ
37° 58' 30,84'' ± 0,36''	23° 46' 07,24'' ± 0,56''

Πίνακας 8.21: Τελικές συντεταγμένες Φ, Λ

Τα υπόλοιπα που προκύπτουν από τη συνόρθωση είναι:

ΥΠΟΛΟΙΠΑ (°)	ΥΠΟΛΟΙΠΑ (")
0,00109194	3,93
0,00349000	12,56
0,00136000	4,90
0,00196806	7,09
0,00186222	6,70
0,00158194	5,70
0,00108083	3,89
0,00091694	3,30
0,00191611	6,90
0,00079500	2,86
0,00120806	4,35
0,00069083	2,49

Πίνακας 8.22: Υπόλοιπα ανά άστρο μετά τη συνόρθωση

Από αυτά προκύπτει ότι το a posteriori σφάλμα της μονάδας βάρους είναι:

$$\sigma_o = 39,97''$$

Αμφίπλευρος έλεγχος

Για επίπεδο εμπιστοσύνης 95% και βαθμό ελευθερίας $r=12-2=10$, από το τεστ χ^2 προκύπτει:

$p_1=0,025$ και $p_2=0,975$, οπότε

$$\chi_{p_1,r}^2=3.25 \text{ και } \chi_{p_2,r}^2=20.48$$

$$\sigma_o=10''$$

$$\sigma_o=39,97''$$

Οπότε, προκύπτει:

$$\rightarrow \frac{\sigma_o}{\sigma_o} = 3,997 \rightarrow r \cdot \left(\frac{\sigma_o^2}{\sigma_o^2}\right) = 159,720$$

Θα πρέπει να ισχύει:

$$3,25 \leq 159,720 \leq 20,48$$

Η σχέση αυτή δεν είναι αληθής, οπότε οι αρχικές υποθέσεις δεν επαληθεύονται.

Τέλος, παρατίθεται πίνακας που περιλαμβάνει τις τιμές του αστρονομικού πλάτους Φ και μήκους Λ σε γειτονικό βάθρο, όπως έχουν προκύψει από προηγούμενες εργασίες.

	Φ	Λ	Πηγή
2002	37° 58' 29".655 ±0.010"	23° 46' 39".543 ±0.018"	Λάμπρου Ε.
2002	37° 58' 29".669 ±0.018"	23° 46' 39".544 ±0.015"	Λάμπρου Ε.
2006	37° 58' 29".651 ±0.006"	23° 46' 39".554 ±0.004"	Τζουμάκα Β.
2006	37° 58' 29".657 ±0.010"	23° 46' 39".553 ±0.011"	Τζουμάκα Β.
2006	37° 58' 29".650 ±0.009"	23° 46' 39".556 ±0.014"	Λάμπρου Ε.
2006	37° 58' 29".190 ±0.066"	-	Νότος Χ.
2009	37° 58' 29".510 ±0.064"	-	Πάνου Γ.
2009	37° 58' 29".455 ±0.158"	-	Πάνου Γ.
2010	37° 58' 29".663 ±0.020"	23° 46' 39".560 ±0.025"	Λάμπρου Ε.
2011	37° 58' 29".683 ±0.030"	-	Αλεξανδράκης Ε.

Πίνακας 8.23: Τιμές Φ , Λ από εργασίες τη χρονική περίοδο 2002-2011

Οι παλαιότερες τιμές των Φ , Λ (από το 2002 έως και το 2011) έχουν προκύψει από ανεξάρτητο προσδιορισμό και παρατηρήσεις μεσημβρινών διαβάσεων, εξαιρώντας την τιμή του Φ από το 2006 [Νότος Χ.] που προέκυψε από παρατηρήσεις στη θέση της μέγιστης αποχής. Παρατηρείται ότι παρουσιάζονται διαφορές στις τιμές του Φ , Λ

που προέκυψαν από τον ταυτόχρονο προσδιορισμό. Οι διαφορές για το Φ είναι εντός του σφάλματος της τιμής που προσδιορίστηκε. Αντίθετα για το Λ , η ασυμφωνία είναι πολύ μεγάλη. Η απόκλιση οφείλεται στα σφάλματα καταγραφής χρόνου λόγω των προβλημάτων στον εξοπλισμό, όπως αναφέρθηκε ήδη.

9. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

9.1. Γενικά συμπεράσματα

Η μέθοδος του ταυτόχρονου προσδιορισμού του αστρονομικού μήκους και πλάτους, που εξετάστηκε σε αυτή την εργασία αποτελεί μια σύγχρονη, γρήγορη και ευέλικτη μεθοδολογία αστρονομικών παρατηρήσεων, η οποία με τη βοήθεια της σύγχρονης τεχνολογίας, μπορεί να γίνει αρκετά αυτοματοποιημένη και αξιόπιστη.

Συγκεκριμένα, με την επικοινωνία γεωδαιτικού σταθμού υψηλής ακρίβειας και ενός δέκτη GPS και την κατάλληλη επεξεργασία των μετρήσεων μέσω των προγραμμάτων που συντάχθηκαν, είναι δυνατός ο προσδιορισμός των αστρονομικών συντεταγμένων Φ και Λ του σημείου παρατήρησης με ικανοποιητική ακρίβεια. Τα πλεονεκτήματα που παρουσιάζει η μέθοδος έναντι άλλων είναι τα εξής:

1. Ο ταυτόχρονος προσδιορισμός των αστρονομικών συντεταγμένων Φ , Λ πραγματοποιείται χρησιμοποιώντας τις ίδιες σκοπεύσεις προς τους ίδιους αστέρες και με κοινή επεξεργασία των μετρήσεων και σύστημα επίλυσης των αγνώστων. Γίνεται έτσι εξοικονόμηση χρόνου παρατήρησης και επεξεργασίας.
2. Η επιλογή των άστρων, που είναι κατάλληλα προς παρατήρηση, είναι μια σύντομη διαδικασία στην οποία ο παρατηρητής έχει τη δυνατότητα να επιλέξει τα άστρα που θα παρατηρήσει μέσα από μια σύντομη λίστα καθώς και να δημιουργήσει εναλλακτικά προγράμματα παρατήρησης. Ο χρόνος που χρειάζεται για τον προγραμματισμό είναι λίγες ώρες και ο σχεδιασμός του προγράμματος παρατήρησης μπορεί να γίνει την ίδια μέρα, λίγο πριν ξεκινήσουν οι μετρήσεις.
3. Ο χρόνος εγκατάστασης και προετοιμασίας του συστήματος στο σημείο παρατήρησης είναι της τάξης των 10 min και η διαδικασία των μετρήσεων είναι δυνατόν να ολοκληρωθεί μέσα σε 4 με 5 ώρες. Η διάρκεια αυτή περιλαμβάνει τόσο τη σκόπευση των άστρων (10 min περίπου ανά άστρο), καθώς και διαλείμματα μεταξύ των άστρων για ξεκούραση του παρατηρητή.
4. Ο μεγάλος αριθμός των παρατηρήσεων, που πραγματοποιούνται για κάθε άστρο δίνει τη δυνατότητα ελαχιστοποίησης των τυχαίων σφαλμάτων προσδιορισμού των αγνώστων, εφόσον με την επεξεργασία των παρατηρήσεων με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων είναι δυνατόν να ελεγχθούν οι μετρήσεις μια προς μια και να εξαιρεθούν οι χειρότερες.
5. Στον ταυτόχρονο προσδιορισμό των αστρονομικών συντεταγμένων με τη μέτρηση κατακορύφων γωνιών, σημαντικό πρόβλημα είναι ο επηρεασμός των μετρήσεων ζενίθιας γωνίας από την αστρονομική διάθλαση. Η μέθοδος ίσων υψών ελαχιστοποιεί αυτό το σφάλμα, με τη μέτρηση όλων των άστρων στο ίδιο ύψος. Είναι απαραίτητες οι μετρήσεις πίεσης και θερμοκρασίας σε τακτά χρονικά διαστήματα ωστόσο, καθώς η κατάσταση της ατμόσφαιρας επηρεάζει το μέγεθος της διάθλασης.

9.2. Η γεωμετρία των παρατηρήσεων και επιλογή των άστρων

Η γεωμετρία των παρατηρούμενων άστρων διαπιστώνεται ότι αποτελεί καθοριστικό παράγοντα για την ακρίβεια προσδιορισμού των αστρονομικών συντεταγμένων και αποτελεί ένα θέμα προς εξέταση, στο οποίο δεν μπορεί να δοθεί μονοσήμαντη απάντηση. Όπως ήταν γνωστό εκ των προτέρων από τις ανεξάρτητες μεθόδους, για τον προσδιορισμό του πλάτους Φ χωρίς την χρήση χρόνου παρατήρησης οι ευνοϊκότερες συνθήκες παρατήρησης των άστρων είναι τη στιγμή της μεσημβρινής διάβασης, καθώς στην περίπτωση αυτή, το σημαντικότερο σφάλμα που προέρχεται από τη διάθλαση, αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του ζενίθ και μπορεί να απαλειφθεί με παρατηρήσεις ζευγών αστερών που να μεσουρανούν συμμετρικά ως προς το ζενίθ, δηλαδή όταν $A=0^\circ$ ή $A=180^\circ$. Όταν ο προσδιορισμός του πλάτους Φ γίνεται μέσω της ωριαίας γωνίας (με μέτρηση του χρόνου) οι ευνοϊκότερες θέσεις είναι οι θέσεις μέγιστης αποχής, στις οποίες, όμως, δεν μπορεί να προσδιοριστεί το μήκος Λ .

Αντίστοιχα, ο προσδιορισμός του μήκους ευνοείται όταν γίνονται παρατηρήσεις σε ζεύγη άστρων, ανατολικά και δυτικά του μεσημβρινού, τη στιγμή της διάβασής τους από τον πρωτεύοντα κατακόρυφο κύκλο, επειδή το πρόσημο των σφαλμάτων που οφείλονται στο δz και $\delta \Phi$ αλλάζει εκατέρωθεν του μεσημβρινού.

Για την επιλογή των άστρων, βασικό κριτήριο είναι ο δείκτης κατάστασης του πίνακα N του κανονικού συστήματος να είναι κοντά στη μονάδα, οδηγώντας έτσι σε ευσταθές σύστημα. Η χρήση του σεναρίου αζιμουθίων 30° , 45° , 60° είναι η καταλληλότερη όσον αφορά την ευστάθεια του κανονικού πίνακα, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι τα άλλα σενάρια είναι απαγορευτικά.

Το γεγονός ότι οι μετρήσεις περιέχουν σφάλμα χρόνου που δεν μπορεί να διορθωθεί, καθιστά αδύνατη την εξαγωγή συμπεράσματος για τον προσδιορισμό του Λ . Το $\Delta \Lambda$ είναι πολύ μεγάλο, φανερώνοντας έτσι την συνολική επίδραση του σφάλματος χρόνου στον υπολογισμό του Λ . Όσον αφορά το Φ , η τιμή του είναι λογική. Παρόλα αυτά, οι αβεβαιότητες των αγνώστων είναι μεγάλες σε σχέση με τις μεθόδους ανεξάρτητου προσδιορισμού του Φ και Λ , όταν στην επίλυση συμμετέχουν και τα δώδεκα άστρα. Η αφαίρεση άστρων είναι πιθανό να οδηγούσε σε λύση μεγαλύτερης ακρίβειας.

9.3. Προτάσεις

Προτείνεται η παρατήρηση λιγότερων άστρων, αντί για δώδεκα, συμμετρικών ως προς το μεσημβρινό, με αποφυγή των προβληματικών αζιμουθίων. Με αυτό τον τρόπο θα ελεγχθεί αν είναι τα αζιμούθια των άστρων έχουν συγκεκριμένη επίδραση στην ακρίβεια του αποτελέσματος, ανεξάρτητα από τον έλεγχο για την ευστάθεια του συστήματος.

Σε συνάρτηση με το προηγούμενο, προτείνεται να γίνουν παρατηρήσεις άστρων με διαφορετική συμμετρία από αυτή που τελικά επιλέχθηκε (30° , 45° , 60°) και να επανεξεταστεί το κριτήριο ευστάθειας του πίνακα N του κανονικού συστήματος

χρησιμοποιώντας διαφορετικό σενάριο αζιμουθίων. Προτείνεται το σενάριο 25°, 40°, 55°, που έχει το μικρότερο λόγο ιδιοτιμών μετά το σενάριο που επιλέχθηκε.

Επιπλέον, θα μπορούσε να γίνει εργαστηριακός έλεγχος του σφάλματος σκόπευσης του παρατηρητή, εκτός από τον αντίστοιχο έλεγχο του χρόνου καθυστέρησης, με την τροποποίηση της ήδη υπάρχουσας διάταξης για τον έλεγχο της αντίδρασης του παρατηρητή. Αυτό θα μπορούσε να βοηθήσει στην καλύτερη εκτίμηση του αργιστί σφάλματος της μονάδας βάρους και επομένως, σε περισσότερο ρεαλιστική εκτίμηση της ακρίβειας της μεθόδου.

Βιβλιογραφία

1. Κορακίτης Ρ., *Σημειώσεις Γεωδαιτικής Αστρονομίας*, ΕΜΠ, ΣΑΤΜ, Αθήνα 2008.
2. Αθανασοπούλου Ε., *Ταυτόχρονος προσδιορισμός αστρονομικών συντεταγμένων με μέτρηση οριζοντίων γωνιών*, Διπλωματική Εργασία, ΕΜΠ, ΣΑΤΜ, Αθήνα 2013.
3. Λάμπρου Ε., *Ανάπτυξη Μεθοδολογίας Αστρογεωδαιτικών Προσδιορισμών με ψηφιακά γεωδαιτικά όργανα*, Διδακτορική Διατριβή, ΕΜΠ, ΣΑΤΜ, Αθήνα 2003.
4. Mueller I., *Spherical Astronomy as applied to Geodesy*, Ohio, 1968.
5. Αγάτζα-Μπαλοδήμου Α.Μ., *Θεωρία Σφαλμάτων και Συνορθώσεις I*, ΕΜΠ, ΣΑΤΜ, Αθήνα 2007.
6. Αγάτζα-Μπαλοδήμου Α.Μ., *Θεωρία Σφαλμάτων και Συνορθώσεις II*, ΕΜΠ, ΣΑΤΜ, Αθήνα 2009.
7. Ψαρράκος Π., *Θέματα Ανάλυσης Πινάκων*, ΕΜΠ, ΣΕΜΦΕ, Αθήνα 2012.
8. Hog E., Fabricius C., Makarov V. V., Urban S., Corbin T., Wycoff G., Bastian U., Schwekendiek P., Wicenec A., *The Tycho-2 catalogue of the 2.5 million brightest stars*, *Astronomy & Astrophysics*, v.355, pp. L27-L30, 2002.
9. Γεωργίου Γ., Ξενοφώντος Χ., *Εισαγωγή στη Matlab*, Πανεπιστήμιο Κύπρου, Λευκωσία, 2007.
10. Πάνου Γ., *Προσδιορισμός Αστρονομικού Πλάτους με Αυτοβαθμονόμηση*, Διπλωματική Εργασία, ΕΜΠ, ΣΑΤΜ, Αθήνα 2009.
11. Κακολύρης Δ., *Ανάπτυξη λογισμικού βέλτιστης επιλογής ζεύγων αστερών για παρατηρήσεις μεσημβρινών διαβάσεων*, Διπλωματική Εργασία, ΕΜΠ, ΣΑΤΜ, Αθήνα 2006.
12. Καλλιανού Φ., *Συστήματα και πλαίσια αναφοράς στη Γεωδαιτική Αστρονομία- Οι διεθνείς συμβάσεις*, Διπλωματική Εργασία, ΕΜΠ, ΣΑΤΜ, Αθήνα 2006.
13. Κιουστελίδης Ι.: *Αριθμητική Ανάλυση*, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα 2004.

Περιεχόμενα πινάκων

Πίνακας 5.1: Πλήθος κατάλληλων άστρων ανά συνδυασμό για τις 14 Ιουνίου 2016.....	71
Πίνακας 5.2: Λόγοι ιδιοτιμών ανά ομάδα αξιμουθίου (σφάλμα z:2').....	72
Πίνακας 5.3: Λόγοι ιδιοτιμών ανά ομάδα αξιμουθίου (σφάλμα z:6').....	72
Πίνακας 6.1: Άστρα στις προσομοιώσεις για το σενάριο 15,45,75.....	81
Πίνακας 6.2: Άστρα στις προσομοιώσεις για το σενάριο 30,45,60.....	81
Πίνακας 6.3: Άστρα στις προσομοιώσεις για το σενάριο 25,40,55.....	82
Πίνακας 6.4: Άστρα στις προσομοιώσεις για το σενάριο 10,30,50.....	82
Πίνακας 6.5: Άστρα στις προσομοιώσεις για το σενάριο 45,60,75.....	82
Πίνακας 6.6: Άστρα στις προσομοιώσεις για το σενάριο 20,45,70.....	83
Πίνακας 6.7: Αο, zo, σοzο για το σενάριο 15,45,75 (σφάλμα z:2'').....	84
Πίνακας 6.8: Πίνακας μετρήσεων για το σενάριο 15,45,75 (σφάλμα z:2'').....	84
Πίνακας 6.9: Αποτελέσματα ΔΦ, ΔΛ για το σενάριο 15,45,75 (σφάλμα z:2'').....	85
Πίνακας 6.10: Αποτελέσματα σΔΦ, σΔΛ για το σενάριο 15,45,75 (σφάλμα z:2'').....	85
Πίνακας 6.11: Τελικές συντεταγμένες Φ, Λ για το σενάριο 15,45,75 (σφάλμα z:2'').....	85
Πίνακας 6.12: Υπόλοιπα συνόρθωσης για το σενάριο 15,45,75 (σφάλμα z:2'').....	85
Πίνακας 6.13: Αο, zo, σοzο για το σενάριο 30,45,60 (σφάλμα z:2'').....	87
Πίνακας 6.14: Αο, zo, σοzο για το σενάριο 25,40,55 (σφάλμα z:2'').....	87
Πίνακας 6.15: Αο, zo, σοzο για το σενάριο 10,30,50 (σφάλμα z:2'').....	87
Πίνακας 6.16: Αο, zo, σοzο για το σενάριο 45,60,75 (σφάλμα z:2'').....	88
Πίνακας 6.17: Αο, zo, σοzο για το σενάριο 20,45,70 (σφάλμα z:2'').....	88
Πίνακας 6.18: Πίνακας μετρήσεων για τα υπόλοιπα σενάρια (σφάλμα z:2'').....	88
Πίνακας 6.19: Αποτελέσματα ΔΦ, ΔΛ για τα υπόλοιπα σενάρια (σφάλμα z:2'').....	89
Πίνακας 6.20: Αποτελέσματα σΔΦ, σΔΛ για τα υπόλοιπα σενάρια (σφάλμα z:2'').....	89
Πίνακας 6.21: Τελικές συντεταγμένες Φ, Λ ανά σενάριο (σφάλμα z:2'').....	89
Πίνακας 6.22: Υπόλοιπα συνόρθωσης ανά σενάριο (σφάλμα z:2'').....	89
Πίνακας 6.23: Α posteriori σφάλμα συνόρθωσης ανά σενάριο (σφάλμα z:2'').....	90
Πίνακας 6.24: Λόγος ιδιοτιμών ανά σενάριο (σφάλμα z:2'').....	90
Πίνακας 6.25: Στοιχεία αμφίπλευρου ελέγχου ανά σενάριο (σφάλμα z:2'').....	90
Πίνακας 6.26: Αποτελέσματα στατιστικού ελέγχου ανά σενάριο (σφάλμα z:2'').....	91
Πίνακας 6.27: Αο, zo, σοzο για το σενάριο 15,45,75 (σφάλμα z:6'').....	91
Πίνακας 6.28: Πίνακας μετρήσεων για το σενάριο 15,45,75 (σφάλμα z:6'').....	92
Πίνακας 6.29: Αποτελέσματα ΔΦ, ΔΛ για το σενάριο 15,45,75 (σφάλμα z:6'').....	92
Πίνακας 6.30: Αποτελέσματα σΔΦ, σΔΛ για το σενάριο 15,45,75 (σφάλμα z:6'').....	92
Πίνακας 6.31: Τελικές συντεταγμένες Φ, Λ για το σενάριο 15,45,75 (σφάλμα z:6'').....	93
Πίνακας 6.32: Υπόλοιπα συνόρθωσης για το σενάριο 15,45,75 (σφάλμα z:6'').....	93
Πίνακας 6.33: Αο, zo, σοzο για το σενάριο 30,45,60 (σφάλμα z:6'').....	94
Πίνακας 6.34: Αο, zo, σοzο για το σενάριο 25,40,55 (σφάλμα z:6'').....	95
Πίνακας 6.35: Αο, zo, σοzο για το σενάριο 10,30,50 (σφάλμα z:6'').....	95
Πίνακας 6.36: Αο, zo, σοzο για το σενάριο 45,60,75 (σφάλμα z:6'').....	95
Πίνακας 6.37: Αο, zo, σοzο για το σενάριο 20,45,70 (σφάλμα z:6'').....	96
Πίνακας 6.38: Πίνακας μετρήσεων για τα υπόλοιπα σενάρια (σφάλμα z:6'').....	96
Πίνακας 6.39: Αποτελέσματα ΔΦ, ΔΛ για τα υπόλοιπα σενάρια (σφάλμα z:6'').....	96
Πίνακας 6.40: Αποτελέσματα σΔΦ, σΔΛ για τα υπόλοιπα σενάρια (σφάλμα z:6'').....	97
Πίνακας 6.41: Τελικές συντεταγμένες Φ, Λ ανά σενάριο (σφάλμα z:6'').....	97
Πίνακας 6.42: Α posteriori σφάλμα συνόρθωσης ανά σενάριο (σφάλμα z:6'').....	97
Πίνακας 6.43: Υπόλοιπα συνόρθωσης ανά σενάριο (σφάλμα z:6'').....	97
Πίνακας 6.44: Λόγος ιδιοτιμών ανά σενάριο (σφάλμα z:6'').....	98
Πίνακας 6.45: Στοιχεία αμφίπλευρου ελέγχου ανά σενάριο (σφάλμα z:6'').....	98
Πίνακας 6.46: Αποτελέσματα στατιστικού ελέγχου ανά σενάριο (σφάλμα z:6'').....	98
Πίνακας 8.1: Συντεταγμένες παρατηρούμενων άστρων: 14 Ιουνίου 2016.....	111
Πίνακας 8.2: Πλήθος παρατηρήσεων ανά άστρο.....	111
Πίνακας 8.3: Πίεση και θερμοκρασία ανά άστρο.....	112
Πίνακας 8.4: Πλήθος άστρων με τα μικρότερα υπόλοιπα ανά άστρο.....	112
Πίνακας 8.5: Υπολογιζόμενα μεγέθη από την προσαρμογή πολυωνύμου ανά άστρο.....	113
Πίνακας 8.6: Σφάλματα to, zo μετά τη προσαρμογή πολυωνύμου ανά άστρο.....	113
Πίνακας 8.7: Στοιχεία πίνακα μετρήσεων για τη συνόρθωση των 12 άστρων.....	114
Πίνακας 8.8: ΔΦ, ΔΛ ως αποτελέσματα της συνόρθωσης των 12 άστρων.....	114
Πίνακας 8.9: Σφάλματα ΔΦ, ΔΛ από τη συνόρθωση των 12 άστρων.....	114

Πίνακας 8.10: Τελικές συντεταγμένες Φ, Λ	114
Πίνακας 8.11: Υπόλοιπα ανά άστρο μετά τη συνόρθωση.....	115
Πίνακας 8.12: Συντεταγμένες παρατηρούμενων άστρων: 31 Μαΐου 2016.....	116
Πίνακας 8.13: Πλήθος παρατηρήσεων ανά άστρο.....	116
Πίνακας 8.14: Πίεση και θερμοκρασία ανά άστρο.....	117
Πίνακας 8.15: Πλήθος άστρων με τα μικρότερα υπόλοιπα ανά άστρο.....	117
Πίνακας 8.16: Υπολογιζόμενα μεγέθη από την προσαρμογή πολυωνύμου ανά άστρο.....	118
Πίνακας 8.17: Σφάλματα 1ο, 2ο μετά τη προσαρμογή πολυωνύμου ανά άστρο.....	118
Πίνακας 8.18: Στοιχεία πίνακα μετρήσεων για τη συνόρθωση των 12 άστρων.....	119
Πίνακας 8.19: $\Delta\Phi, \Delta\Lambda$ ως αποτελέσματα της συνόρθωσης των 12 άστρων.....	119
Πίνακας 8.20: Σφάλματα $\Delta\Phi, \Delta\Lambda$ από τη συνόρθωση των 12 άστρων.....	120
Πίνακας 8.21: Τελικές συντεταγμένες Φ, Λ	120
Πίνακας 8.22: Υπόλοιπα ανά άστρο μετά τη συνόρθωση	120
Πίνακας 8.23: Τιμές Φ, Λ από εργασίες τη χρονική περίοδο 2002-2011.....	121

Περιεχόμενα σχημάτων

Σχήμα 1.1: Ουρανογραφικό σύστημα συντεταγμένων.....	5
Σχήμα 1.2: Αστρονομικό σύστημα συντεταγμένων.....	6
Σχήμα 1.3: Οριζόντιο σύστημα συντεταγμένων.....	7
Σχήμα 1.4: Ισημερινό σύστημα συντεταγμένων.....	8
Σχήμα 1.5: Τρίγωνο θέσης.....	11
Σχήμα 1.6: Προβολή στο επίπεδο του ουρανού Ισημερινού.....	12
Σχήμα 1.7: Συσχέτιση μεσου αστρικού χρόνου Greenwich και Παγκόσμιου χρόνου.....	13
Σχήμα 1.8: Μετάπτωση, κλόνηση και μεταβολή αστρικού χρόνου.....	16
Σχήμα 1.9: Αστρονομική διάθλαση στην παρατήρηση άστρου.....	17
Σχήμα 2.1: Γεωμετρική ερμηνεία μεθόδου ίσων υψών.....	27
Σχήμα 2.2: Ευθείες αζιμουθίου και θέσης.....	27
Σχήμα 2.3: Εύρεση του ζηνίθ με τη μέθοδο ίσων υψών.....	28
Σχήμα 3.1: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας κανονικής κατανομής.....	34
Σχήμα 4.1: Ουράνιο παράθυρο.....	59
Σχήμα 8.1: Ιστόγραμμα καταγραφής χρόνου παρατήρησης (διαφορά από επόμενο ακέραιο sec UTC).110	

Περιεχόμενα εικόνων

Εικόνα 5.1: Απόσπασμα πίνακα TELASTRA εξόδου αρχείου 'Epilogh_astrwn'.....	73
Εικόνα 5.2: Πρόγραμμα παρατήρησης για τις 14 Ιουνίου 2016.....	75

Παράρτημα

Κώδικες Matlab

Επιλογή άστρων

```
%EPILOGH TWN ASTRWN PROS PARATHRHSH

%Arxikopoihsh vasikwn megethwn
format long
Astr_syn=importdata('Astr_coord.txt');
F=Astr_syn(1,1);
L=Astr_syn(2,1);
f=1.00273790935075;

EPILOGH=importdata('Z_A1_diarkeia_UTCEN_dd_VMAG.txt');
Z=EPILOGH(1,1);
A1=[EPILOGH(2,1);EPILOGH(3,1);EPILOGH(4,1)];
diarkeia=EPILOGH(5,1);
UTC_EN=EPILOGH(6,1);
dd=EPILOGH(7,1);
VMAGN=EPILOGH(8,1);
leng=length(A1);
A=zeros(4*leng,1);
len=length(A);

j=1;
for i=1:4:len
    A(i,1)=A1(j,1);
    A(i+1,1)=180-A1(j,1);
    A(i+2,1)=180+A1(j,1);
    A(i+3,1)=360-A1(j,1);
    j=j+1;
end

TYCHO=importdata('Tycho2_astro.txt');
Nutation=importdata('nutaton80.txt');
megethos=length(TYCHO);
for i=1:1:megethos
    KWDIKOS1(i,1)=TYCHO(i,1);
    KWDIKOS2(i,1)=TYCHO(i,2);
    RA(i,1)=TYCHO(i,3); %Se dekadikes moires
    DEC(i,1)=TYCHO(i,4); %Se dekadikes moires
    PMRA(i,1)=TYCHO(i,5); %Se mas/etos
    PMDEC(i,1)=TYCHO(i,6); %Se mas/etos
    VMAG(i,1)=TYCHO(i,7);
    PAR(i,1)=TYCHO(i,8); %Se mas
end

KWDIKOS=[KWDIKOS1,KWDIKOS2];
Fr=F*pi()/180;
Zr=Z*pi()/180;

%GIA TO KATHE ASTRO
%Ypologismos ishmerinwn syntetagmenwn kai klishs gia to astro me
stoixeia
%A,Z pou endiaferoun
t=Julian_Day(UTC_EN);
```



```

for m=1:1:megethos

    a_PM=RA(m,1)+PMRA(m,1)*t/(3.6*(10^6));
    d_PM=DEC(m,1)+PMDEC(m,1)*t/(3.6*(10^6));

    Syntetagmenes=MET_KL(t,Nutation,a_PM,d_PM);
    RA(m,1)=Syntetagmenes(1,1);
    DEC(m,1)=Syntetagmenes(2,1);
end

plhthos=1;
grammh=1;
for b=1:1:len

    Ao=A(b,1); %moires
    Ishm=Ishmerines(Fr,Zr,Ao); %d:moires,h:moires
    d=Ishm(1,1); %moires
    h=Ishm(2,1); %moires

    GAST=UTC_se_alhthi_astriko(UTC_EN); %wres
    a1=GAST+L/15-(h/15); %wres

    if a1>=24
        a1=a1-24;
    elseif a1<=0
        a1=a1+24;
    end

    a2=a1+(diarkeia*f); %wres

    if a2>=24
        a2=a2-24;
    elseif a2<=0
        a2=a2+24;
    end

    a1=a1*15; %moires
    a2=a2*15; %moires

    diaf=oriothethsh(d,h);
    DIAFORAAZ(b,1)=diaf;

    for m=1:1:megethos
        ra=RA(m,1); %moires
        da=DEC(m,1); %moires
        if (ra>=0) & (ra<=a2) & (ra>=a1) %moires
            if (da>=d-dd/2) & (da<=d+dd/2) %moires
                if VMAG(m,1)<=VMAGN; %xwris monades
                    row=plhthos;
                    KASTASTRA(row,1)=b; %Prwth sthlh h
                end
            end
        end
    end

    omada

    synh=(cos(Zr)-
sin(da*pi()/180)*sin(Fr))/(cos(da*pi()/180)*cos(Fr));
    if abs(synh)<=1

```

```

h_tel=acosd(synh); %moires
if (Ao>=0) & (Ao<=180)
    %Anatoliko trigwno theshs
    if (h_tel>0) & (h_tel<=180)
        h_tel=360-h_tel; %moires
    end
elseif (Ao>180) & (Ao<=360)
    % Dutiko trigwno theshs
    if (h_tel>180) & (h_tel<360)
        h_tel=360-h_tel; %moires
    end
end
xronos=UTC_apo_a(ra,h_tel,L);

number=(sin(da*pi()/180)*cos(Fr)-
cos(da*pi()/180)*sin(Fr))*cos(h_tel*pi()/180)/sin(Zr);
if abs(number)<=1
    A_tel=acosd(number);
    if (h_tel>0) & (h_tel<=180)
        if (A_tel>0) & (A_tel<=180)
            A_tel=360-A_tel;
        end
    elseif (h_tel>180) & (h_tel<=360)
        if (A_tel>180) & (A_tel<=360)
            A_tel=360-A_tel;
        end
    end
end

KATASTRA(row,2)=KWDIKOS1(m,1);
KATASTRA(row,3)=KWDIKOS2(m,1);
KATASTRA(row,4)=RA(m,1);
KATASTRA(row,5)=DEC(m,1);
KATASTRA(row,6)=VMAG(m,1);
KATASTRA(row,7)=xronos;
KATASTRA(row,8)=h_tel/15;
KATASTRA(row,9)=A_tel;
KATASTRA(row,10)=Ao;
KATASTRA(row,11)=diaf;

plhthos=plhthos+1;

if abs((A_tel-Ao))<=((EPILOGH(3,1)-
EPILOGH(2,1))/2)

TELASTRA(grammh,1)=KATASTRA(row,1);
TELASTRA(grammh,2)=KATASTRA(row,2);
TELASTRA(grammh,3)=KATASTRA(row,3);
TELASTRA(grammh,4)=KATASTRA(row,4);
TELASTRA(grammh,5)=KATASTRA(row,5);
TELASTRA(grammh,6)=KATASTRA(row,6);
TELASTRA(grammh,7)=KATASTRA(row,7);
TELASTRA(grammh,8)=KATASTRA(row,8);
TELASTRA(grammh,9)=KATASTRA(row,9);
TELASTRA(grammh,10)=KATASTRA(row,10);
TELASTRA(grammh,11)=KATASTRA(row,11);

grammh=grammh+1;

```

```

end
end
end
end
end
end
end
outfile=fopen('astra_pros_parathrhsh.txt','w');
fprintf(outfile,'%f %2.4d %2.4d %2.12f %2.12f %2.4f %2.12f
%2.12f %2.12f %2.12f %2.12f \n',(KATASTRA)');
fclose(outfile);

outfile=fopen('astra_me_filtro.txt','w');
fprintf(outfile,'%f %2.4d %2.4d %2.12f %2.12f %2.4f %2.12f
%2.12f %2.12f %2.12f %2.12f \n',TELASTRA');
fclose(outfile);

```

Προσομοίωση τροχιάς άστρου

```

%Prosomoiwsh troxias ypothetikou astrou me euresh tw n
%horizontiwn
%syntetagmenwn tou gia kathe 5s wriaias gwnias.Gnwstes oi
ouranografikes
%syntetagmenes tou astrou se moires kai dekadikes wres(d,a),oi
%proseggistikes syn/nes tou topou kai oi dyo xronikes stigmes arxhs
%kai telous parathrhshs tou se dekadikes wres

format long g
%Arxikes times

Astr_syn=importdata('Astr_coord.txt');
F=Astr_syn(1,1);
L=Astr_syn(2,1);

%Eisagwgh dedomenwn apo arxeio

Synt_astrwn=importdata('declination_rightascension_utc1_utc2.txt');

d=Synt_astrwn(1,1);
dr=d*pi()/180;
a=Synt_astrwn(2,1);
Fr=F*pi()/180;

UTC1=Synt_astrwn(3,1);
UTC2=Synt_astrwn(4,1);

%Ypologismos azimouthiou kai zenithias gwnias gia kathe 5s xronou utc

vhma=(5/3600);
i=1;
for utc=UTC1:vhma:UTC2

    GAST=UTC_se_alhthi_astriko(utc);

```

```

%Ypologismos wriaias gwnias apo to utc

wriaia=(GAST*15+L-a);
if wriaia>360
    h=wriaia-360;
elseif wriaia<0
    h=wriaia+360;
else
    h=wriaia;
end
h=h*pi()/180;

%Ypologismos azimouthiou

A=0;
nomin=-cos(dr)*sin(h);
denom=sin(dr)*cos(Fr)-cos(dr)*sin(Fr)*cos(h);
if ((denom==0) && (nomin>=0))
    A=90;
elseif ((denom==0) && (nomin<0))
    A=270;
else
    A=atand(nomin/denom);
    if (denom<0)
        A=A+180;
    end
    if (A<0)
        A=A+360;
    end
end

x=sin(dr)*sin(Fr)+cos(dr)*cos(Fr)*cos(h);
z=acosd(x);

%Eisagwgh se pinaka

B(i,1)=utc;
B(i,2)=A;
B(i,3)=z;
i=i+1;

end

%Emfanish apotelesmatwn

disp(B);

%Exagwgh apotelesmatwn se arxeio txt.

outf=fopen('utc_azimouthio_zenithia.txt','w');
fprintf(outf,'%1.12f %1.12f %1.12f\n',B');
fclose(outf);

mean=0;
std=6;          %%%%se deuthera moiras

```

```

sdev=(std/3600);

DEDOMENAS=prosthikh_sfalma (mean,sdev);

outf=fopen('utc_azimouthio_zenithia_sfalma.txt','w');
fprintf(outf,'%1.12f %1.12f %1.12f\n',DEDOMENAS');
fclose(outf);

```

Αντίστροφη διόρθωση λόγω διάθλασης-Εφαρμογή μεθόδου διχοτόμησης

```

function[Y]=Antistrofh_diathlash()
% Dexetai to arxeio h pinaka me tis prosomoiwmenes times olwn twn
megethwn.
% Apomonwnontai oi metrhcseis twn zenithiwn gwniwn.
% Dinontai oi times pieshs(mbar) kai thermokrasias(vathmoi Kelsiou).
% Ypologizontai oi diorthwseis pou prepei na efarmostoun, wste na
% prostethei h epidrash ths astronomikhs diathlahs.
% Oi nees times grafontai se neo arxeio.

format long
X=importdata('utc_azimouthio_zenithia_sfalma.txt');
for i=1:1:length(X(:,1))
    w=X(i,3)*pi()/180;

% Methodos dixotomhshs gia euresh ths 'metrhmenhs' zenithias gwnias

    e=0.00000000000001;
    top=w;
    bottom=w-0.05*pi()/180;
    d=top-bottom;
    while (d>e)
        f1=fz(top,w);
        m=(top+bottom)/2;
        f=fz(m,w);
        if f*f1>0
            top=m;
        else
            bottom=m;
        end
        d=top-bottom;
    end
    n=(top+bottom)/2;
    Zd=n*180/pi();
    Y(i,1)=X(i,1);
    Y(i,2)=X(i,2);
    Y(i,3)=Zd;
end

outf=fopen('utc_azimouthio_zenithia_diathlash.txt','w');
fprintf(outf,'%1.12f %1.12f %1.12f\n',Y');
fclose(outf);
end

```

Διόρθωση λόγω διάθλασης

```
%Dexetai to arxeio h pinaka me tis metrhmenes times olwn tw  
megethwn.  
%Apomonwnontai oi metrhseis twn zenithiwn gwniwn.  
%Dinontai oi times pieshs(mbar) kai thermokrasias(vathmoi Kelsiou).  
%Ypologizontai oi diorthwseis pou prepei na efarmostoun se kathe  
metrhsh, wste na  
%apallaxthoun apo thn epirroh ths astronomikhs diathlahs.  
Ypologizontai kai topothetountai oi swstes  
%times ston arxiko pinaka.  
  
format long  
X=importdata('utc_azimouthio_zenithia_diathlash.txt');  
p=995.2; %mbar  
t=24; %se vathmous kelsiou  
len=length(X(:,1));  
for i=1:1:len  
  
    w=X(i,3)*pi()/180;  
  
    Ro=60.28.*tan(w)-0.0669.*tan(w)^3;  
    R=Ro*(p/1013.25)*(273/(273+t));  
    Zd=w*180/pi()+R/3600;  
    F(i,1)=X(i,1);  
    F(i,2)=X(i,2);  
    F(i,3)=Zd;  
end  
  
outf=fopen('utc_azimouthio_zenithia_diathlash.txt','w');  
fprintf(outf,'%1.12f %1.12f %1.12f\n',F');  
fclose(outf);
```

Προσαρμογή πολυωνύμου στα ζεύγη (UTC,z)

```
%Prosomoiwsh polywnymou n vathmou sta zeugh zenithia  
%gwnia-xronos(z,t). Dexetai tis times apo to arxeio  
%'wriaia_azimouthio_zenithia' kai ypologizontai oi syntelestes tou  
%polywnymou kai tw n sfalmatwn tous. Apo auta, ypologizontai gia thn  
typikh  
%timh tou z to to, to h kai to zo(trigwno theshs), ta sfalmata tou  
%to(sfalma tou h) kai to sfalma zo(sfalma Dz).  
  
format long  
POLYWNYMO=importdata('starn_plhthosastrwn_vathmospol.txt');  
  
starn=POLYWNYMO(1,1); %seira  
astrou/Symlhrwsh  
plhthos_star=POLYWNYMO(2,1); %plhthos  
astrwn/Symlhrwsh  
n=POLYWNYMO(3,1); %vathmos  
polywnymou/Symlhrwsh  
  
Astr_syn=importdata('Astr_coord.txt');  
F=Astr_syn(1,1);  
L=Astr_syn(2,1);
```

```

%Eisodos se pinaka tw'n dedomenwn(d:moires,a,utc1,utc2:dekadikes
wres/Symlhrwsh sto txt. arxeio

Synt_astrown=importdata('declination_rightascension_utc1_utc2.txt');

d=Synt_astrown(1,1); %Apomonwsh ths apoklishs
dr=d*pi()/180; %Apoklish se rad
a=Synt_astrown(2,1); %Apomonwsh ths orthis anaforas
Fr=F*pi()/180; %Astronomiko platos se rad

star1=importdata('utc_azimouthio_zenithia_diathlash.txt');
lens=length(star1(:,1));
ASX=zeros(lens,n+1);
l=zeros(lens,1);

for i=1:lens %afairesh prwths metrhshs
    star(i,1)=star1(i,1)-(star1(1,1));
    star(i,3)=star1(i,3)-(star1(1,3));
end

%Pinakes sxediasmou kai metrhsewn

for i=1:lens
    for j=1:(n+1)
        ASX(i,j)=(star(i,3))^(n-j+1);
        l(i)=(star(i,1));
    end
end

%Ypologismos syntelestwn
N=ASX'*ASX;
Nant=cholesky_inversion(N);
w=ASX'*l;
x=Nant*w;
%Ypologismos ttyp=to gia ztyp
z=20; %Typikh timh zenithias
ztyp=z-star1(1,3); %Metatroph se z xwris
th prwth metrhsh
S=0;
for k=1:(n+1)
    S=S+x(k)*ztyp^(n-k+1);
end
t=S; %Xronos utc se h xwris to akeraio meros
to=t+star1(1,1); %Xronos utc se wres

%to=to-delay/3600; % delay = personal delay in seconds
%Metatroph to se ho:wriaia gwnia
GAST=UTC_se_alhthi_astriko(to);
h=GAST*15+L-a;
if h>360
    ho=h-360;
elseif h<0
    ho=h+360;
else
    ho=h;
end
ho=ho*pi()/180;

```

```

%Ypologismos zo
y=(sin(dr)*sin(Fr)+cos(dr)*cos(Fr)*cos(ho));
zo=acosd(y);

%Ypologismos Ao
nom=-cos(dr)*sin(ho);
denom=sin(dr)*cos(Fr)-cos(dr)*cos(ho)*sin(Fr);
A=atand(abs(nom/denom));
if (nom>0) && (denom>0)
    Ao=A;
elseif (nom>0) && (denom<0)
    Ao=180-A;
elseif (nom<0) && (denom<0)
    Ao=A+180;
else
    Ao=360-A;
end

Y=['Gia typikh timh zenithias z=',num2str(z), ' moires,', 'o xronos
utc einai t= ',num2str(to), ' wres,', 'h zenithia gwnia apo to trigwno
theshs einai ',num2str(zo), ' moires kai to azimuthio apo to trigwno
theshs einai ',num2str(Ao), ' moires'];
disp(Y);

%Ypologismos sfalmatwn syntelestwn

u=ASX*x-1;
Si=0;
for i=1:lens
    Vi=u(i,1)^2;
    Si=Si+Vi;
end
so2=Si/(lens-(n+1)); %a posteriori
Vx=so2*Nant;

%Ypologismos sfalmatwn to(dhlahd ho) kai zo(dhlahd Dz)
Z=[1;ztyp;ztyp^2;ztyp^3];
P=Vx*Z;
%P=0;
%for m=1:(n+1)
% P=P+((ztyp^(n-m+1))^2)*(Vx(m,m));
%end
sto2=Z'*P;
sto=sqrt(sto2);
sz=-cos(Fr)*sin(Ao*pi()/180)*sto*15;
szo=abs(sz);

%Elegxos gia ta sfalmata ypoloipwn
tp=zeros(lens,1);
for q=1:lens
    S=0;
    for k=1:(n+1)
        S=S+x(k,1)*star(q,3)^(n-k+1);
    end
    ti=S;
    tp(q,1)=ti+star1(1,1);
end

%Ypoloipa kai eisodos se pinaka

```



```

for v=1:1:lens
    UT(v,1)=tp(v,1)-star1(v,1);
end

%Ypologismos typikhs apoklishs
Athroisma=0;
for x=1:1:lens
    Athroisma=Athroisma+(UT(x,1))^2;
end
stv=sqrt(Athroisma/(lens-(n+1)));

%Elegxos an ta ypoloipa vriskontai sto diasthma 3s
starfix=zeros(lens,4);
for g=1:1:lens
    starfix(g,1)=star1(g,1);
    starfix(g,2)=star1(g,2);
    starfix(g,3)=star1(g,3);
    if abs(UT(g,1))>(stv)
        flag=1; %EIDOPOIHSH AN YPARXEI ESTW KAI MIA KAKH METRHSH
        starfix(g,4)=1;
    else
        starfix(g,4)=0;
    end
end

%Diagrafh twn kakwn metrhsewn-me endeixh 1

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%ALLAGH APO FOR SE
WHILE

nu=1;
while nu<=lens
    if starfix(nu,4)==1
        starfix(nu,:)=[];
        lens=lens-1;
    else
        nu=nu+1;
    end
end

%Diagrafh ths teleutaias sthlhs-me endeixh 0
starfix(:,4)=[];

%EK NEOU PROSARMOGH POLYWNIMOU ME XRHSH MONO TWN METRHSEWN POU
PERASAN APO
%TON PARAPANW ELEGXO-DHLADH ME XRHSH TOU PINAKA starfix-MONO STHN
PERIPTWSH
%POY YPARXOUN KAKES METRHSEIS

if flag==1

    Astr_syn=importdata('Astr_coord.txt');
    F=Astr_syn(1,1);

```

```

Synt_astrown=importdata('declination_rightascension_utc1_utc2.txt');

d=Synt_astrown(1,1); %Apomonwsh ths apoklishs
dr=d*pi()/180; %Apoklish se rad
a=Synt_astrown(2,1); %Apomonwsh ths orthis
anaforas
Fr=F*pi()/180; %Astronomiko platos se rad
lens=length(starfix(:,1));
ASX=zeros(lens,n+1);
l=zeros(lens,1);

for i=1:lens %afairesh prwths metrhshs
    star(i,1)=starfix(i,1)-(starfix(1,1));
    star(i,3)=starfix(i,3)-(starfix(1,3));
end

%Pinakes sxediasmou kai metrhsewn

for i=1:lens
    for j=1:lens
        ASX(i,j)=(star(i,3))^(n-j+1);
        l(i)=(star(i,1));
    end
end

%Ypologismos syntelestwn
N=ASX'*ASX;
Nant=cholesky_inversion(N);
w=ASX'*1;
x=Nant*w;

%Ypologismos ttyp=to gia ztyp
z=20; %Typikh timh zenithias
ztyp=z-starfix(1,3);
S=0;
for k=1:lens
    S=S+x(k,1)*ztyp^(n-k+1);
end
t=S;
to=t+starfix(1,1); %Xronos utc se wres

%Metatroph to se ho:wriaia gwnia
GAST=UTC_se_alhthi_astriko(to);
h=(GAST)*15+L-a;
if h>360
    ho=h-360;
elseif h<0
    ho=h+360;
else
    ho=h;
end
ho=ho*pi()/180;

%Ypologismos zo
y=(sin(dr)*sin(Fr)+cos(dr)*cos(Fr)*cos(ho));
zo=acosd(y);

%Ypologismos Ao

```

```

nom=-cos(dr)*sin(ho);
denom=sin(dr)*cos(Fr)-cos(dr)*cos(ho)*sin(Fr);
A=atand(abs(nom/denom));
if (nom>0) && (denom>0)
    Ao=A;
elseif (nom>0) && (denom<0)
    Ao=180-A;
elseif (nom<0) && (denom<0)
    Ao=A+180;
else
    Ao=360-A;
end

Y=['Gia typikh timh zenithias z=',num2str(z), ' moires','o
xronos utc einai t= ',num2str(to),' wres','h zenithia gwnia apo to
trigwno theshs einai ',num2str(zo),' moires kai to azimuthio apo to
trigwno theshs einai ',num2str(Ao),' moires'];
disp(Y);

%Ypologismos sfalmatwn syntelestwn

u=ASX*x-1;
Si=0;
for i=1:lens
    Vi=u(i,1)^2;
    Si=Si+Vi;
end
so2=Si/(lens-(n+1));           %a posteriori
Vx=so2*Nant;

%Ypologismos sfalmatwn to(dhlahd ho) kai zo(dhlahd Dz)
%Z=[1;ztyp;ztyp^2;ztyp^3];
Z=[ztyp^3;ztyp^2;ztyp; 1];
P=Vx*Z;
%P=0;
%P=P+((ztyp^(n-m+1))^2)*(Vx(m,m));
%end
sto2=Z'*P;
sto=sqrt(sto2);
sz=-cos(Fr)*sin(Ao*pi()/180)*sto*15;
szo=abs(sz);
end

%Meta thn ektelesh autou tou tmhmatos gia kathe astro,gemizei o
parakatw
%pinakas.To tmhma auto ekteleitai toses fores oses einai to plthos
tw
%astrwn(plthos_star) kai ta stoixeia symplhrwnontai se diaforetikh
thesh
%tou pinaka gia kathe astro(starn,orismos tou prin thn ektelesh gia
kathe
%astro)

STOIXEIA(starn,1)=Ao;
STOIXEIA(starn,2)=zo;
STOIXEIA(starn,3)=szo;

```

```

%Exodos tw'n aparaithtwn stoxeiwn gia th synorthwsh olwn tw'n astrwn
mazi
%mono otan exei ektelestei h prosarmogh gia ola ta astra.

if starn==(plhthos_star)
    outfile=fopen('Ao_zo_szo.txt','w');
    fprintf(outfile,'%2.12f %2.12f %2.12f\n',STOIXEIA');
    fclose(outfile);
end

```

Συνόρθωση άστρων

```

%Dexetai to arxeio me ta dedomena(Ao,zo,szo) apo to tmhma
%prosarmoghs polywnymou.
%Kataskeuazei tous pinakes gia th
synorthwsh(sxediasmou,varwn,metrhsewn).
%Kanei elegxo eustatheias tou kanonikou pinaka me idiotimes.
%Lynei to systhma kai ypologizei tous agnwstous kai ta sfalmata tous.

```

```

format long
Astr_syn=importdata('Astr_coord.txt');
F=Astr_syn(1,1);
L=Astr_syn(2,1);
Fr=F*pi()/180;

```

```

DED=importdata('154575_dz=6.txt');
lens_DED=length(DED);

```

```

%Pinakas sxediasmou synorthwshs olwn tw'n astrwn

```

```

ASXED=zeros(lens_DED,2);
for i=1:lens_DED
    ASXED(i,1)=cos(DED(i,1)*pi()/180);
    ASXED(i,2)=sin(DED(i,1)*pi()/180);
end

```

```

%Pinakas varwn ana astro
so=6/3600; %a priori authaireto sfalma se moires
so2=so^2;
VARH=zeros(lens_DED,lens_DED);
for j=1:lens_DED
    szo=DED(j,3);
    VARH(j,j)=so2/((szo/3600)^2); %katharos arithmos
end

```

```

%Pinakas metrhsewn
ztyp=20; %se moires
METR=zeros(lens_DED,1);
for k=1:lens_DED
    METR(k,1)=DED(k,2)-ztyp; %moires
end

```

```

%YPOLOGISMOI SYNORTHWSHS
%Kanonikos pinakas

```

```

N=(ASXED)'*VARH;

```

```

N=N*ASXED;

%Elegxos idiotimwn

EIG=Idiotimes(N);
logos_eig=max(EIG)/min(EIG);

%Ypoloipoi ypologismoi

Nrev=cholesky_inversion(N);
x=Nrev*ASXED'; %moires
x=x*VARH;
x=x*METR;
DF=x(1,1); %moires
DL=x(2,1); %moires

%Sfalmata agnwstwn

U=ASXED*x-METR;
Q=U'*VARH*U;
So2=Q/(lens_DED-2);
Vx=So2*Nrev;

sDF=sqrt(Vx(1,1)); %moires
sDLcosF=sqrt(Vx(2,2));
sDL=(sDLcosF/cos(Fr)); %moires

%Elegxos ths synorthwshs-Test x2-Amfipleuros elegxos

a=0.05;
p=1-a; %epipedo empistosynhs
p2=1-a/2;
p1=a/2;

r=lens_DED-2; %vathmos eleutherias
Xp1=3.25;
Xp2=20.48;
aristera=(so2*(Xp1))/r;
dexia=(so2*(Xp2))/r;

if (aristera<=So2)&&(dexia>=So2)
    an=['pernaei ton elegxo'];
    disp(an);
end

```

Αντιστροφή πίνακα με τη μέθοδο Cholesky

```

function [antN] = cholesky_inversion(N)
% Antistrofh pinaka me th methodo cholesky
n=length(N);
% PINAKAS G
G = zeros(n,n);
for i = 1:1:n
    G(i,i) = sqrt(N(i,i) - G(:,i)'*G(:,i));
    for j = (i+1):1:n
        G(i,j) = (N(i,j) - G(:,i)'*G(:,j))/G(i,i);
    end
end

```

```

    end
end
% PINAKAS D
D = zeros(n,n);
for i = 1:1:n
    D(i,i) = 1/G(i,i);
    for j = (i+1):1:n
        D(i,j) = -(D(i,:)*G(:,j))/G(j,j);
    end
end
% PINAKAS B=antN
antN = zeros(n,n);
for i = 1:1:n
    antN(i,i) = D(i,:)*D(i,:)';
    for j = (i+1):1:n
        antN(i,j) = D(i,:)*D(j,:)';
        antN(j,i) = antN(i,j);
    end
end
end
end

```

Υπολογισμός Ιουλιανής ημέρας

```

%Ypologismos Ioulianhs hmeras

function [JD]=Julian_Day(UTC)
Y=2016; %Arithmos etous parathrhshs
M=5; %Arithmos mhna
D=17; %Arithmos hmeras

format long

J2000=2451545;
TT=UTC+(35+32.184)/3600;
D=D+TT/24;
if (M==1)
    M=M+12;
    Y=Y-1;
elseif (M==2)
    M=M+12;
    Y=Y-1;
end
A=fix(Y/100);
B=2-A+fix(A/4);
F1=fix(365.25*(Y+4716));
F2=fix(30.6001*(M+1));
F3=D+B-1524.5;
JDo=F1+F2+F3;
JD=(JDo-J2000)/365.25;
end

```

Προσθήκη τυχαίου σφάλματος στις μετρήσεις του z

```

function [DEDOMENAS]=prosthikh_sfalma(mean,sdev)

DEDOMENA=importdata('utc_azimouthio_zenithia.txt');
meg=length(DEDOMENA);

```

```

for i=1:1:meg
    UTC(i,1)=DEDOMENA(i,1);
    A(i,1)=DEDOMENA(i,2);
    Z(i,1)=DEDOMENA(i,3);
end

for j=1:1:meg
    x=rand;
    y=rand;
    rn=sqrt(-2*log(x))*cos(2*pi()*y);
    nor=mean+rn*sdev;
    NORZ(j,1)=nor;
end

for m=1:1:meg
    Z(m,1)=Z(m,1)+NORZ(m,1);
end

for k=1:1:meg
    DEDOMENAS(k,1)=UTC(k,1);
    DEDOMENAS(k,2)=A(k,1);
    DEDOMENAS(k,3)=Z(k,1);
end
end

```

Μετατροπή χρόνου UTC σε αληθή αστρικό

```

function[GAST]=UTC_se_alhthi_astriko(UTC)
%Dexetai th xronikh stigmh parathrhshs enos astrou se klimaka UTC
%(se dekadikes wres) kai ypologizei ton antistoixo alhthi astriko
xrono.
%O ypologismos exartatai apo thn hmera kai to etos parathrhshs, pou
%diaforopoiei kathe fora to θ(0hUTC), th diafora UT1-UTC apo to
%finals.daily kai thn exiswsh tou earinou ishmerinou shmeiou.

format long

%arxikes times % Mporoun na diavazontai apo Pinakes (digital form)
f=1.00273790935075;
DEDOMENA=importdata('diafora_ut1_utc1_diafora_ut1_utc2_GMST_UT10_01_e
qe1_eqe2_GAST1_GAST2.txt');

diafora_ut1_utc1=DEDOMENA(1,1);
diafora_UT1_UTC1=diafora_ut1_utc1/3600;
diafora_ut1_utc2=DEDOMENA(2,1);
diafora_UT1_UTC2=diafora_ut1_utc2/3600;
GMST_UT10_01=DEDOMENA(3,1);
eqe1=DEDOMENA(4,1);
EQE1=eqe1/3600;
eqe2=DEDOMENA(5,1);
EQE2=eqe2/3600;

%Ypologismoι
UT1=UTC+diafora_UT1_UTC1+(diafora_UT1_UTC2-diafora_UT1_UTC1)*UTC/24;
%ypologismos UT1(pagkosmiou xronou)
gmst=GMST_UT10_01+UT1*f;
%ypologismos GMST(mesou astrikou xronou)

```

```

if gmst>24                                %Afairesh akeraiwn kyklwn an einai
GMST>24h
    GMST=gmst-24;
else
    GMST=gmst;
end
GAST=GMST+(EQE1+(EQE2-EQE1)*UT1/24);      %Ypologismos
GAST(alhthous astrikou xronou)
end

```

Μετατροπή ορθής αναφοράς σε χρόνο UTC

```

function[UTC]=UTC_apo_a(a_tel,h_tel,L)

f=1.00273790935075;
DEDOMENA=importdata('diafora_ut1_utc1_diafora_ut1_utc2_GMST_UT10_01_e
qe1_eqe2_GAST1_GAST2.txt');

diafora_ut1_utc1=DEDOMENA(1,1);
diafora_UT1.UTC1=diafora_ut1_utc1/3600;
diafora_ut1_utc2=DEDOMENA(2,1);
diafora_UT1.UTC2=diafora_ut1_utc2/3600;
GMST_UT10_01=DEDOMENA(3,1);
eqe1=DEDOMENA(4,1);
EQE1=eqe1/3600;
eqe2=DEDOMENA(5,1);
EQE2=eqe2/3600;
GAST1=DEDOMENA(6,1);
GAST2=DEDOMENA(7,1);

GAST=h_tel/15-L/15+a_tel/15;
if GAST>=24
    GAST=GAST-24;
elseif GAST<0
    GAST=GAST+24;
end

GAST2=GAST2+24;
if (GAST<GAST1)
    GAST=GAST+24;
end

%Mesos astrikos apo alhthi astriko me paremvolh mesw tou alhthous
astrikou

GMST=GAST-(EQE1+((EQE2-EQE1)*(GAST-GAST1)/(GAST2-GAST1)));

if GMST>24
    GMST=GMST-24;
elseif GMST<0
    GMST=GMST+24;
end

T1=GMST-GMST_UT10_01;
if T1>24
    T1=T1-24;

```



```

elseif T1<0
    T1=T1+24;
end

%Pagkosmios xronos UT1

UT1=T1/f;

%UTC

UTC=UT1-(diafora_UT1_UTC1+(diafora_UT1_UTC2-
diafora_UT1_UTC1))*UT1/24;

if UTC>24
    UTC=UTC-24;
elseif UTC<0
    UTC=UTC+24;
end
end

```

Διόρθωση ουρανογραφικών συν/νων άστρων από την επίδραση μετάπτωσης-κλόνησης

```

%ANAGWGH GIA METAPTWSH-KLONHSH

function [Syntetagmenes]=MET_KL(t,nutation,a_PM,d_PM)

t=t/100;

zeta=(2.5976176+2306.0809506*t+0.3019015*(t^2)+0.0179663*(t^3)-
0.0000327*(t^4)-0.0000002*(t^5));
theta=(2004.1917476*t-0.4269353*(t^2)-0.0418251*(t^3)-
0.0000601*(t^4)-0.0000001*(t^5));
zhta=(-
2.5976176+2306.0803226*t+1.0947790*(t^2)+0.0182273*(t^3)+0.0000470*(t
^4)-0.0000003*(t^5));
zeta=(zeta/3600)*pi()/180;
theta=(theta/3600)*pi()/180;
zhta=(zhta/3600)*pi()/180;

P1=[cos(zeta)  -sin(zeta)  0; sin(zeta)  cos(zeta)  0; 0
1];

P2=[cos(theta)  0  -sin(theta); 0  1  0; sin(theta)  0
cos(theta)];

P3=[cos(zhta)  -sin(zhta)  0; sin(zhta)  cos(zhta)  0; 0
1];

P=(P3*P2)*P1;

```

```

e0=23.4392911111111110-(46.815/3600)*t-
(0.00059/3600)*(t^2)+(0.001813/3600)*(t^3);
c1=(1325*360+198.8673980555556)*t;
c1=mod(c1,360);
l=(134.9629813888889+c1+(31.310/3600)*(t^2)+(0.064/3600)*(t^3));
if l>360
    l=l-360;
elseif l<0
    l=l+360;
end

c2=(99*360+359.0503400000000)*t;
c2=mod(c2,360);
l1=357.5277233333333+c2-(0.577/3600)*(t^2)-(0.012/3600)*(t^3);
if l1>360
    l1=l1-360;
elseif l1<0
    l1=l1+360;
end

c3=(1342*360+82.01753805555555)*t;
c3=mod(c3,360);
F=93.27191027777778+c3-(13.257/3600)*(t^2)+(0.011/3600)*(t^3);
if F>360
    F=F-360;
elseif F<0
    F=F+360;
end

c4=(1236*360+307.1114800000000)*t;
c4=mod(c4,360);
D=297.8503630555556+c4-(6.891/3600)*(t^2)+(0.019/3600)*(t^3);
if D>360
    D=D-360;
elseif D<0
    D=D+360;
end

c5=(5*360+134.1362608333333)*t;
c5=mod(c5,360);
W=125.0445222-c5+7.455*(t^2)/3600+0.008*(t^3)/3600;
if W>360
    W=W-360;
elseif W<0
    W=W+360;
end

dy=0;
de=0;

```

```

for i=1:63

gon=1*nutation(i,3)+l1*nutation(i,2)+F*nutation(i,4)+D*nutation(i,1)+
W*nutation(i,5);

dy=dy+(nututation(i,6)/(10^4*3600)+nututation(i,7)*t/(10^4*3600))*sind(gon);

de=de+(nututation(i,8)/(10^4*3600)+nututation(i,9)*t/(10^4*3600))*cosd(gon);
end

e=e0+de;
N1=[1      0      0; 0      cosd(e)  -sind(e); 0      sind(e)
cosd(e)];
N2=[cosd(dy) -sind(dy) 0; sind(dy)  cosd(dy)  0; 0      0
1];
N3=[1      0      0; 0      cosd(e0)  sind(e0); 0      -sind(e0)
cosd(e0)];

N=(N1*N2)*N3;

R=N*P;

x=cosd(a_PM)*cosd(d_PM);
y=sind(a_PM)*cosd(d_PM);
z=sind(d_PM);
X=[x; y; z];
X_new=R*X;
a_nea=atand(X_new(2)/X_new(1));
if (X_new(2))>0&(X_new(1))>0
    a_nea=a_nea;
elseif (X_new(2))>0&(X_new(1))<0
    a_nea=a_nea+180;
elseif (X_new(2))<0&(X_new(1))<0
    a_nea=a_nea+180;
else
    a_nea=a_nea+360;
end
d_nea=asind(X_new(3));

Syntetagmenes(1,1)=a_nea;
Syntetagmenes(2,1)=d_nea;
end

```

Συνάρτηση υπολογισμού ιδιοτιμών

```

function [EIGEN]=Idiotimes(N)

EIGEN=eig(N);

```

```
end
```

Υπολογισμός τιμής συνάρτησης στα όρια του διαστήματος—Μέθοδος διχοτόμησης

```
function [fm]=fz (m1,w)
format long
p=995.2; %Se mbar
T=24; %Se vathmous Kelsiou
faa=(60.28*tan(w)-0.0669*(tan(w))^3)*pi()/(180*3600);
fa=((p/1013.25)*(273/(273+T)))*faa;
fm=m1-w+fa;
end
```

