ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Διπλωματική Εργασία

Εφαρμογή Ιξωδοελαστικών Μοντέλων Στη Στρέψη Κυκλικής Ατράκτου από Χρονο-Εξαρτώμενο Υλικό

Μάριος-Ιωάννης Φωτίου

Επιβλέπουσα: Ε. Κοντού, Καθηγήτρια ΕΜΠ

Αθήνα, 2016

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες ... 3

Περίληψη ... 4

Abstract ... 6

A. Πρόλογος ... 8

1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ... 9
2 ΜΗΧΑΝΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ... 12
2.1 Ελατήριο ... 12
2.2 Αποσβεστήρας ... 13
3 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΙΞΩΔΟΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ ... 14
3.1 Ερπυσμός ... 14
4 ΑΠΛΑ ΙΞΩΔΟΕΛΑΣΤΙΚΑ ΠΡΟΤΥΠΑ ΣΕ ΜΙΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗ ... 15
4.1 Στοιχείο Maxwell ... 15
4.2 Στοιχείο Kelvin ... 16
5 ΠΕΙΡΑΜΑ ΕΡΠΥΣΜΟΥ ... 18
6 ΠΕΙΡΑΜΑ ΧΑΛΑΡΩΣΗΣ ... 19
7 ΜΕΤΡΟ ΈΝΔΟΣΗΣ ΚΑΙ ΜΕΤΡΟ ΧΑΛΑΡΩΣΗΣ ... 20
8 ΣΥΝΘΕΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ... 21
8.1 3-παραμετρικό μοντέλο ... 21
8.2 3-παραμετρικό στερεό ... 23
8.3 3-παραμετρικό υγρό ... 25
8.4 4-παραμετρικό μοντέλο (Burgers) ... 27
9 ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ BOLTZMANN ... 30
10 ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΩΝ ΙΞΩΔΟΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΣΕ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ... 32
11 ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ ΕΡΠΥΣΜΟΥ ΚΑΙ ΧΑΛΑΡΩΣΗΣ ΣΕ ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ ... 37
12 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΓΙΑ ΚΑΜΨΗ & ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΕΡΠΥΣΜΟΥ ΚΑΜΨΗΣ ... 40
13 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΤΡΕΨΗΣ ΣΤΗΝ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ ΚΥΚΛΙΚΗΣ ΑΤΡΑΚΤΟΥ ... 45
14 ΣΤΡΕΨΗ ΡΑΒΔΟΥ ΚΥΚΛΙΚΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ ... 47
15 ΣΤΡΕΨΗ ΚΥΚΛΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ ... 51
16 ΆΤΡΑΚΤΟΙ ΜΕ ΚΛΕΙΣΤΗ ΛΕΠΤΟΤΟΙΧΗ ΔΙΑΤΟΜΗ ... 54
17 ΣΤΡΕΨΗ ΚΛΕΙΣΤΗΣ ΛΕΠΤΟΤΟΙΧΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ ... 57

B. Πειραματική Διαδικασία Προσομοίωσης Αποτελεσμάτων ... 61

1 ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ BREDT ... 61
2 ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑΣ ... 66
3 ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΜΕ ΙΞΩΔΟΕΛΑΣΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ... 68
3.1 Τριπαραμετρικό μοντέλο ... 70
3.2 Τριπαραμετρικό στερεό ... 73
3.3 Τριπαραμετρικό υγρό ... 75
3.4 Τετραπαραμετρικό μοντέλο (Burgers) ... 78
4 ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΤΙΚΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΌΛΩΝ ΤΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ... 81

C. Συμπεράσματα ... 83

D. Βιβλιογραφία ... 84

Ευχαριστίες

Με αφορμή την εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας, θα ήθελα να εκφράσω τις ειλικρινείς μου ευχαριστίες σε όλους εκείνους τους ανθρώπους που συνέβαλαν στην ολοκλήρωση της παρούσης εργασίας αλλά και γενικότερα των σπουδών μου στο ίδρυμα, καθένας με το δικό του ξεχωριστό τρόπο.

Πρωτίστως την επιβλέπουσα καθηγήτριά μου, κα. Ευαγγελία Κοντού, καθηγήτριας του τομέα Μηχανικής του Ε.Μ.Π., για την ανάθεση του θέματος και τη χείρα βοηθείας που απλόχερα μου ενέτεινε σε μία ιδιαίτερα δύσκολη χρονική συγκυρία άγχους και πίεσης, τις πληροφορίες που μου παρείχε σχετικά με το συγκεκριμένο θέμα, την εποπτεία της εργασίας, την καθοδήγησή, την ενθάρρυνση, το χρόνο και τη διάθεση που επέδειξε για την επιτυχή ολοκλήρωσή της.

Επίσης, ευχαριστώ πολύ όλους τους καθηγητές της σχολής μου για τις γνώσεις και τις εμπειρίες που μου προσέφεραν όλα τα χρόνια της φοίτησης μου καθώς επίσης και τους συμφοιτητές μου για τη συνεργασία, τη συνεχή ενθάρρυνση και την ανιδιοτελή προσφορά τους από τα πρώτα εκπαιδευτικά μου βήματα έως σήμερα.

Τέλος, ευχαριστώ πολύ και από καρδιάς την οικογένειά μου και τους στενούς μου φίλους για την αγάπη, τη διαρκή στήριξη και την κάθε είδους βοήθεια, υλική και κυρίως ψυχολογική και συναισθηματική, που μου προσέφεραν και μου προσφέρουν όλα αυτά τα δύσκολα χρόνια.

Περίληψη

Τα περισσότερα υλικά εμφανίζουν εξάρτηση των ιδιοτήτων τους από το χρόνο όταν βρίσκονται κάτω από ορισμένες συνθήκες. Συνεπώς, η εξάρτηση των ιδιοτήτων από το χρόνο είναι μια σημαντική παράμετρος που πρέπει να λαμβάνεται υπόψη στις εφαρμογές. Κατ' εξοχήν υλικά με ιξωδοελαστική συμπεριφορά είναι τα πολυμερικά συστήματα, αλλά ακόμη και τα μέταλλα σε υψηλές θερμοκρασίες. Στην παρούσα εργασία μελετάται το πρόβλημα της στρέψης κυκλικής ατράκτου από κράμα αλουμινίου σε ερπυσμό. Τα πειραματικά δεδομένα ελήφθησαν από τη βιβλιογραφία και στη συνέχεια προσομοιώθηκαν με διάφορα εμπειρικά κι ιξωδοελαστικά μοντέλα.

Αναπτύσσεται η έννοια της γραμμικής ιξωδοελαστικότητας που απαιτεί η μηχανική των υλικών των σύγχρονων κατασκευών σε αντίθεση με παλιά, συμβατικά υλικά. Αρχικά γίνεται ειδική μνεία στα φαινόμενα και στα πειράματα ερπυσμού και χαλάρωσης που σχετίζονται άμεσα με την ιξωδοελαστικότητα. Κατόπιν, έχουμε τα απλά μηχανικά μοντέλα, το ελατήριο και τον αποσβεστήρα, που αποτελούν τη βάση της θεωρίας της ιξωδοελαστικότητας και στη συνέχεια τα απλά στοιχεία που προκύπτουν από τη σειριακή και παράλληλη σύνδεση μεταξύ τους, Maxwell και Kelvin-Voigt αντιστοίχως. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται τα σύνθετα, πολυπαραμετρικά μοντέλα που θα μας απασχολήσουν σε αυτή την εργασία: το τριπαραμετρικό μοντέλο (στοιχείο Maxwell παράλληλα με ελατήριο), το τριπαραμετρικό στερεό, το τριπαραμετρικό υγρό και το τετραπαραμετρικό μοντέλο (Burgers) με τις καταστατικές τους εξισώσεις, τις συναρτήσεις ενδοτικότητας τους στη μονοαξονική καταπόπονηση και στη διάτμηση για $\nu=0.5$. Έπειτα, παρουσιάζεται η μέθοδος εύρεσης της γενικής σχέσης των ολοκληρωμάτων μνήμης και γράφονται οι γνωστές καταστατικές των ιξωδοελαστικών μοντέλων σε ολοκληρωτική μορφή. Γίνεται επίσης αναφορά στην αρχή της αντιστοιχίας στη γραμμική ιξωδοελαστικότητα, που μας βοηθά στην εύρεση των συναρτήσεων ενδοτικότητας για τη διάτμηση. Μετά παρουσιάζονται φαινόμενα ερπυσμού και χαλάρωσης στις διάφορες κατασκευές καθώς επίσης και η κάμψη και η απόκριση ερπυσμού κάμψης των ιξωδοελαστικών λειτουργικά διαβαθμισμένων δοκών-στηλών. Εν συνεχεία, έχουμε την παρουσίαση του μηχανικού προβλήματος της στρέψης στην ελαστικότητα κυκλικής ατράκτου, στρέψης κυκλικής μεταβλητής διατομής και της στρέψης στις λεπτότοιχες διατομές.

Στην πειραματική διαδικασία προσομοίωσης των αποτελεσμάτων, πρώτα έχουμε προσομοίωση της εξίσωσης Bredt, βρίσκουμε τις τιμές των σταθερών της εξίσωσης και σχεδιάζουμε τα διαγράμματα με τα πειραματικά σημεία και τη συνεχή γραμμή της εξίσωσης για κάθε μία από τις τρεις ροπές που πήραμε στα πειράματα που κάναμε.

Τέλος, έχουμε την προσομοίωση σε κάθε ένα από τα ιξωδοελαστικά μοντέλα που εξετάζουμε, ξεκινώντας από την απόδειξη της γενικής σχέσης της γωνίας στροφής ανά μονάδα μήκους και την εφαρμογή της για κάθε μοντέλο ξεχωριστά και καταλήγοντας με τους πίνακες των τιμών των παραμέτρων και τη χάραξη των διαγραμμάτων για κάθε ροπή, των πειραματικών σημείων με τη συνεχή καμπύλη στο κάθε ιξωδοελαστικό μοντέλο.

Ικανοποιητική προσομοίωση διαπιστώθηκε με το τριπαραμετρικό υγρό και το μοντέλο Burgers.

Abstract

Most of the materials display dependence of their properties on time when they are under determinate conditions. Consequently, the dependence of properties on time is a significant parameter, that should be taken into consideration in the implementations. Characteristic materials with viscoelastic behavior are the polymeric systems but also metals in high temperatures. In the current discourse, the problem of torsion creep of circular shaft by aluminium alloy is studied. The experimental data were received from the literature and afterwards they were simulated with several experimental and viscoelastic models. So, the acceptation of linear viscoelasticity, that requires the mechanics of the materials of the contemporary constructions in contrast with conventional materials, is developed.

First, the phenomena and the tests of creep and relaxation, nearly connected with viscoelasticity, are especially mentioned. In continue, we introduce the simple mechanical models, the spring and the dashpot, that are the base of the theory of viscoelasticity and also the simple elements which arise from the ordinal and the parallel connection between them, Maxwell and Kelvin-Voigt respectively. Afterwards, the complicated, multiparametric models we will delve into in this discourse, are featured: the three-parametric model (Maxwell element parallel to spring), the three-parametric solid, the three-parametric liquid and the four-parametric model (Burgers), all accompanied with their constitutional equations, their creep compliances both in uniaxial strain and in shear for ν=0.5. In continue, the method of finding of general equation of integrals of memory is featured, and thus the acknowledged constitutional equations of the viscoelastic models are written in integral form. Additionally, the principle of correspondence in linear viscoelasticity is referred, a procedure that help us find the creep compliances for the shear.

We also cite phenomena of creep and relaxation in several constructions as well as bending and creep buckling response of viscoelastic functionally graded beam-columns. Furthermore, the mechanical problem of torsion in the elasticity of circular shafts, torsion of circular, changeable cross-section and torsion of thin-walled hollow shafts are described.

In the experimental procedure of simulation of the results, we initially have the simulation of Bredt's equation, find the values of constants of the equation, and finally we chart the diagrams with both the experimental points we found and the continuous line of the equation for each one of the three torques we considered in the tests we made.

Finally, the simulation of each one of the viscoelastic models we examine, is exhibited, started from the demonstration of the general relation of the angle of twist per unit length and

it's application on each model individually, and ended up with the tables of the values of these parameters and the charting of the diagrams for each one of the three torques, with both the experimental points and the continuous line for each viscoelastic model.

Adequate simulation is ascertained with the tree-parametric liquid and the four-parametric model.

Α. Πρόλογος

Το αυξανόμενο ενδιαφέρον της μηχανικής των τελευταίων ετών για υλικά που δεν συμπεριφέρονται ελαστικά, σε αντίθεση με τα παραδοσιακά μεταλλικά υλικά, έχει οδηγήσει στην απαίτηση γνώσης των ιξωδοελαστικών στερεών σωμάτων. Τέτοιου τύπου υλικά είναι τα πολυμερή, τα συνθετικά ελαστομερή, τα σύνθετα υλικά, μεταλλικά υλικά που υπόκεινται σε υψηλές θερμοκρασίες, βιοϋλικά κλπ.

Στην πραγματικότητα όλα τα υλικά αποκλίνουν από το νόμο του Hooke για παράδειγμα, εμφανίζοντας τόσο ελαστική όσο και ιξώδη συμπεριφορά. Η καταστατική εξίσωση των ιξωδοελαστικών υλικών που συνδέει την εφαρμοζόμενη τάση με την παραμόρφωση, εξαρτάται από το χρόνο.

Καθώς λοιπόν το μεγαλύτερο μέρος των κατασκευών μας αποτελείται από αυτά τα υλικά και δεδομένου ότι σε ορισμένες περιπτώσεις ακόμη και η μικρότερη ιξωδοελαστική απόκριση μπορεί να έχει σημαντικό αντίκτυπο, κρίνεται επιβεβλημένη η αναλυτική μελέτη της ιξωδοελαστικής συμπεριφοράς των υλικών.

Ιστορικά, η θεωρία της ιξωδοελαστικότητας άρχισε να εξελίσσεται από τον 19ο αιώνα από φυσικούς όπως ο Maxwell, ο Boltzmann και ο Kelvin, οι οποίοι έκαναν πειράματα ερπυσμού με υλικά όπως το γυαλί και διάφορα μέταλλα. Πραγματική ανάπτυξη της θεωρίας, όμως, έγινε στα τέλη του 20^{ού} αιώνα όπου η μελέτη της κατέστη αναγκαία δεδομένου της ευρείας χρήσης συνθετικών πολυμερών στη βιομηχανία. **[1]**

1 Εισαγωγή

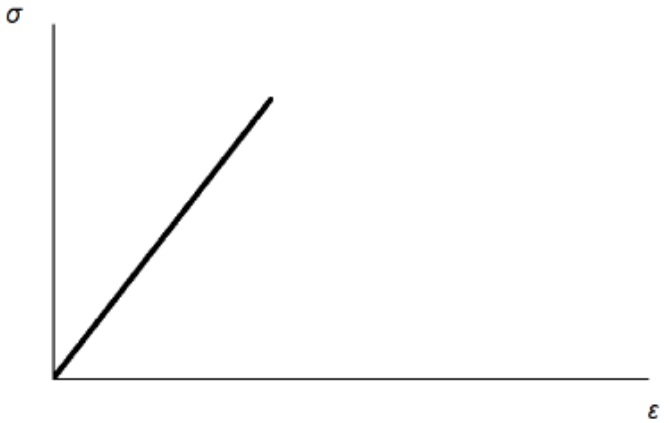
Το απλό πείραμα του εφελκυσμού αποτελεί τον βασικό τρόπο ελέγχου της σχέσης τάσεων-παραμορφώσεων για όλα τα υλικά. Η μεγάλη ποικιλία της μηχανικής συμπεριφοράς των υλικών, λόγω διαφορών στην μικροδομή και λόγω της επίδρασης παραγόντων όπως θερμοκρασία, χρόνος, ρυθμός φόρτισης, καθώς και οι ανάγκες του σχεδιασμού των κατασκευών απο διαφόρους τύπους υλικών, σε συνδυασμό με την αδυναμία περιγραφής όλων με ενιαίο καταστατικό νόμο,

οδηγεί στην ανάγκη δημιουργίας προτύπων, που προσεγγίζουν κατά το δυνατό την πραγματική συμπεριφορά των υλικών.

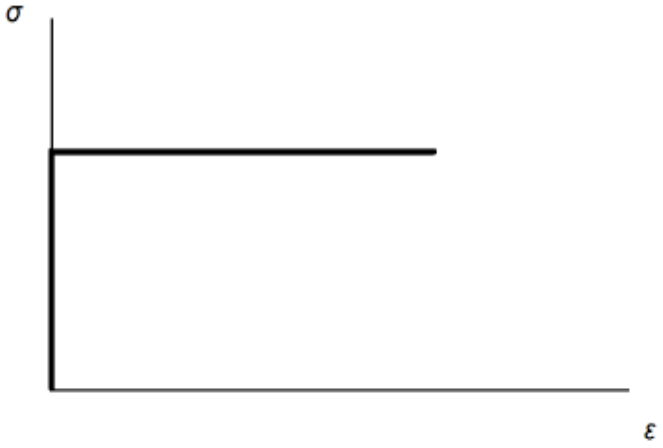
Τα πρότυπα αυτά αντιστοιχούν σε μονοαξονικό πείραμα εφελκυσμού, "μικρού" ρυθμού φόρτισης και σε μέτρια θερμοκρασία.

Τα επόμενα σχήματα παρουσιάζουν διαδοχικά τα εξιδανικευμένα διαγράμματα τάσεων-παραμορφώσεων:

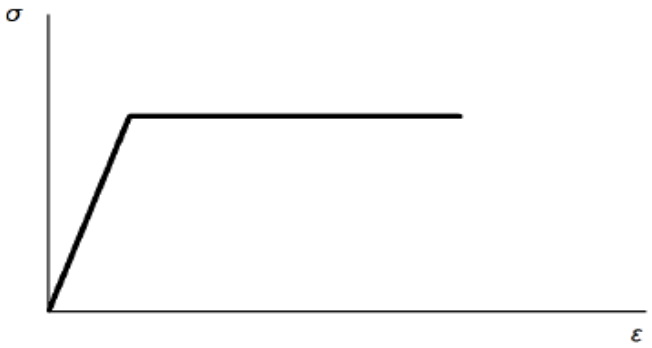
Σχήμα 1.1: Τέλειο στερεό



Σχήμα 1.2: Γραμμικό ελαστικό

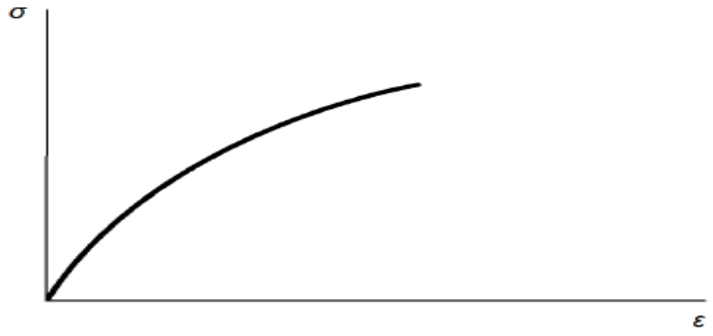


Σχήμα 1.3: Στερεό, τέλειο πλαστικό

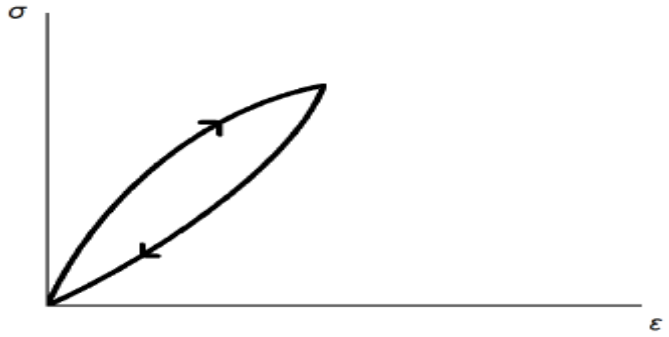


Σχήμα 1.4: Γραμμικό-ελαστικό, τέλειο πλαστικό

Δε χαρακτηρίζονται όμως όλα τα υλικά από αυτό το γραμμικό τμήμα της καμπύλης τάσεων-παραμορφώσεων. Τυπικό παράδειγμα αποτελούν τα ελαστομερή, των οποίων αντίστοιχο διάγραμμα φαίνεται στο σχήμα 1.5. Όταν το ελαστομερές αποφορτίζεται, επιστρέφει στην αρχική του γεωμετρία, ακολουθώντας την αρχική καμπύλη φόρτισης. Στην περίπτωση αυτή τα υλικά συμπεριφέρονται ως τέλεια ελαστικά. Εάν ένα υλικό στην αποφόρτιση επιστρέφει στην αρχική του γεωμετρία ακολουθώντας διαφορετική πορεία (σχ. 1.6) λέγεται ανελαστικό. Στις περιπτώσεις κατά τις οποίες εάν αποφορτίσουμε με μηδενισμό της τάσης υπάρχει παραμένουσα παραμόρφωση, το υλικό συμπεριφέρεται πλαστικά.



Σχήμα 1.5: Ελαστομερή



Σχήμα 1.6: Ανελαστική συμπεριφορά

Στη συνέχεια θα συμπεριληφθούν πιο σύνθετες μορφές μηχανικής συμπεριφοράς πέρα από αυτή της ιδανικής του τέλειου ελαστικού και του τέλειου πλαστικού. Για το λόγο αυτό θα εισάγουμε μηχανικά πρότυπα (μοντέλα), προκειμένου να ταξινομήσουμε τα υλικά με συστηματικό τρόπο. Οι προϋποθέσεις για την ταξινόμηση είναι:

• η απλή μονοδιάστατη φόρτιση με εφελκυστικό φορτίο στον άξονα z ($\sigma_{zz} > 0$, $\varepsilon_{zz} > 0$).

• η φόρτιση δεν είναι κατ' ανάγκη στατική, αλλά μπορεί να μεταβάλλεται χρονικά

• η θερμοκρασία επηρεάζει τις μηχανικές αποκρίσεις

• ο χρόνος αποτελεί οργανικό παράγοντα της συμπεριφοράς τους **[1,2]**

2 Μηχανικά Μοντέλα

Η θεωρητική προσέγγιση της συμπεριφοράς των υλικών απαιτεί να διατυπωθούν οι καταστατικές εξισώσεις που συνδέουν τις τάσεις με τις παραμορφώσεις, ώστε να συνυπολογιστεί και η εξάρτηση της συμπεριφοράς τους από το χρόνο. Παρά την ποικιλία της συμπεριφοράς, τα μοντέλα κατασκευάζονται με τον συνδυασμό δύο απλούστερων μοντέλων που χαρακτηρίζονται ως δομικά, του ελατηρίου και του αποσβεστήρα, τα οποία και θα παρουσιαστούν αναλυτικά και θα προχωρήσουμε στα παράγωγά τους. **[1,2]**

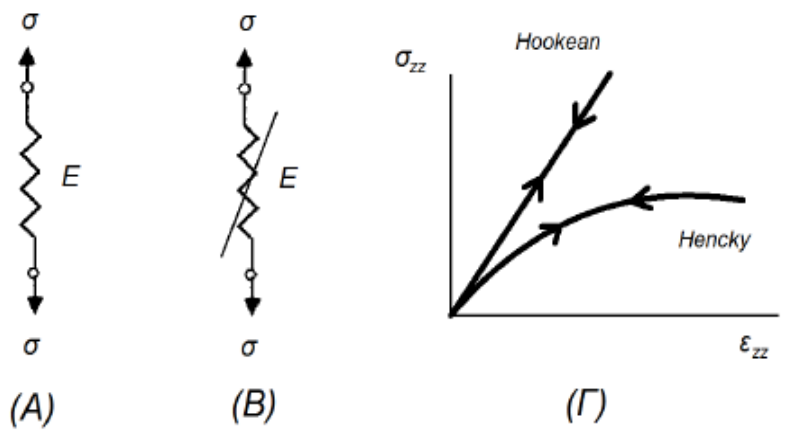
2.1 Ελατήριο

Το μοντέλο του ελατηρίου (σχ.1.7.Α) χρησιμοποιείται για να περιγράψει την ελαστική συμπεριφορά των υλικών. Υλικά που όπως έχει αναφερθεί μετά την αποφόρτιση τους επανέρχονται στην αρχική τους γεωμετρία ακολουθώντας την ίδια καμπύλη. Μαθηματικά εκφράζεται από τη σχέση του νόμου του Hooke:

$$\sigma = E\varepsilon$$

όπου Ε το μέτρο ελαστικότητας.

Εάν από το απλό πείραμα του εφελκυσμού προκύψει ότι το υλικό διέπεται από το νόμο του Hooke: $\sigma = E\varepsilon$, τότε το υλικό είναι γραμμικό ελαστικό, ενώ στην περίπτωση που $\sigma \neq E\varepsilon$, καλείται μη-γραμμικό ελαστικό (βλέπε σχ.1.7.Β) **[1,2]**



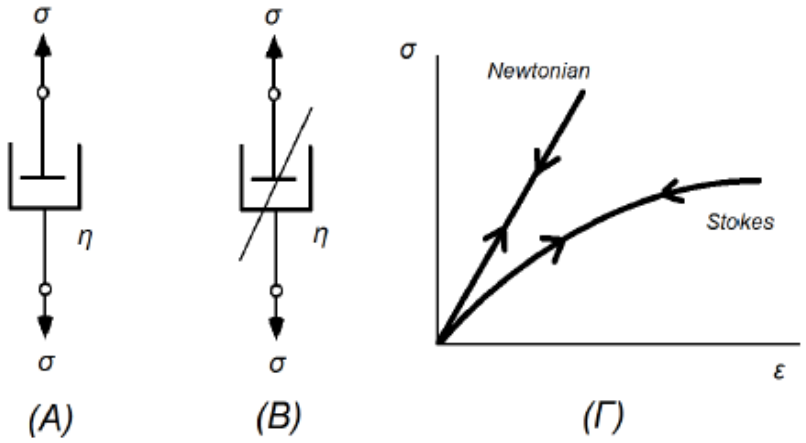
Σχήμα 1.7: Ελαστικά μοντέλα: Α) Γραμμικό ελαστικό Hookean Β) μη- γραμμικό ελαστικό hencky Γ) Διαγράμματα

2.2 Αποσβεστήρας

Όταν κατά τη μονοαξονική φόρτιση εμφανίζεται εξάρτηση του ρυθμού της παραμόρφωσης από την επιβαλλόμενη τάση σύμφωνα με τη σχέση: $\sigma = \eta \dot{\varepsilon}$

το υλικό ονομάζεται ιξώδες και έχει ανάλογη συμπεριφορά με τα υγρά και το γραφικό μοντέλο του φαίνεται στο σχήμα 1.8.Α

Η παραμόρφωση στην περίπτωση αυτή δεν απομακρύνεται ταυτόχρονα με την αφαίρεση του φορτίου, εφόσον είναι συνάρτηση του χρόνου. Σε ιδανικό υλικό όπου ισχύει $\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\eta}$ όπου η είναι ο συντελεστής εφελκυστικού ιξώδους, έχουμε Νευτώνεια ή γραμμική ιξώδη συμπεριφορά. Αντίστοιχα εάν $\dot{\varepsilon} \neq \frac{\sigma}{\eta}$, έχουμε μη-Νευτώνεια ή μη-γραμμική ιξώδη συμπεριφορά (υλικό Stokes) (Βλέπε σχ.1.8.Β). **[1,2]**



Σχήμα 1.8: Ιξώδη μοντέλα: Α) Ιξώδες Newtonian Β)Μη- γραμμικό ιξώδες Stokes Γ) Διαγράμματα

3 Γραμμική Ιξωδοελαστικότητα

3.1 Ερπυσμός

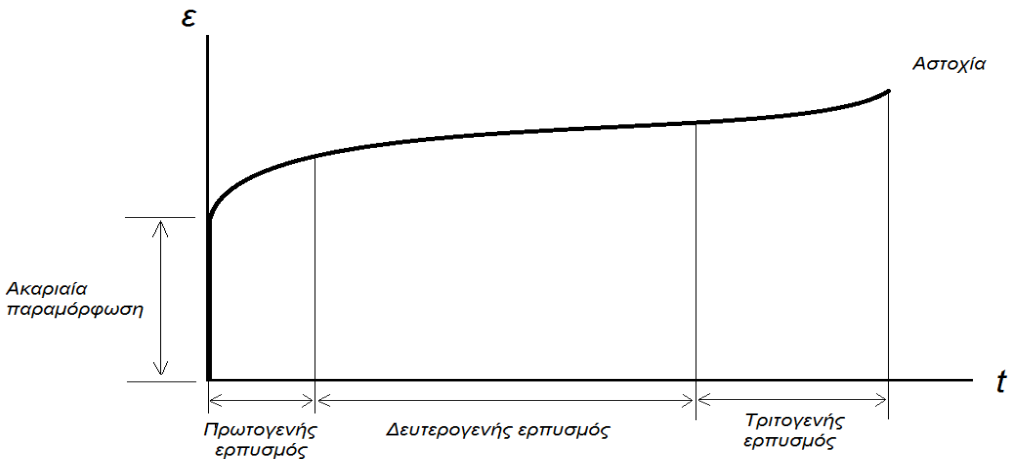
Για την εισαγωγή στη γραμμική ιξωδοελαστικότητα εξετάζεται το απλό πείραμα του ερπυσμού, δηλαδή η μεταβολή της παραμόρφωσης λόγω ερπυσμού, σε συνάρτηση με το χρόνο όπου παρατηρούνται οι χαρακτηριστικές περιοχές του παρακάτω διαγράμματος:

1.Αρχική ελαστική απόκριση. Με την ακαριαία επιβολή φορτίου προκαλείται ακαριαία ελαστική παραμόρφωση ε_e

2. Πρωτογενής ερπυσμός. Είναι η περιοχή που παρατηρείται μία συνεχή μείωση της ταχύτητας παραμόρφωσης

3. Δευτερογενής ερπυσμός. Η ταχύτητα ερπυσμού είναι σχεδόν σταθερή. Η περιοχή αυτή είναι καθοριστικής σημασίας για τη συνολική καμπύλη ερπυσμού

4. Τριτογενής ερπυσμός. Στην περιοχή αυτή η ταχύτητα αυξάνεται μέχρι την αστοχία του υλικού λόγω ερπυσμού. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η συνολική παραμόρφωση είναι: $\varepsilon(t)= \varepsilon_e+ \varepsilon_p+ \varepsilon_c(t)$



Σχήμα 1.9: Καμπύλη ερπυσμού

με ε_p μέρος της ακαριαίας παραμόρφωσης και εκφράζει την πλαστική παραμόρφωση όταν η επιβαλλόμενη τάση υπερβαίνει την τάση διαρροής του υλικού και $\varepsilon_c(t)$ τη συνολική παραμόρφωση λόγω ερπυσμού σε χρόνο t. **[1-4]**

4 Απλά ιξωδοελαστικά πρότυπα σε μία διάσταση

Προηγουμένως έγινε αναφορά στα βασικά μηχανικά μοντέλα του ελατηρίου και του αποσβεστήρα. Για να γίνουν κατανοητά τα ιξωδοελασικά πρότυπα θα πρέπει να συγκρατήσουμε τις καταστατικές εξισώσεις του ελατηρίου και του αποσβεστήρα.

Για το ελατήριο το νόμο του Hooke:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

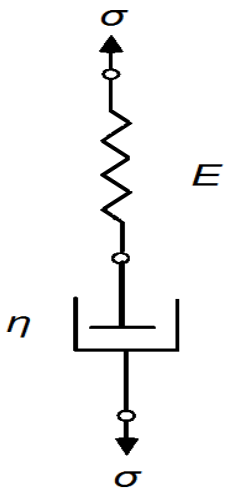
Για τον αποσβεστήρα:

$$\sigma = \eta \dot{\varepsilon}$$

Για την προτυποποίηση της ιξωδοελαστικής συμπεριφοράς και την διατύπωση των σχέσεων μεταξύ τάσεων και παραμορφώσεων, χρησιμοποιούνται συνδυασμοί των παραπάνω προτύπων, που οδηγούν σε συγκεκριμένη ιξωδοελαστική απόκριση. **[1-4]**

4.1 Στοιχείο Maxwell

Το (γραμμικό) στοιχείο Maxwell αποτελείται από τη, σε σειρά, σύνδεση ενός γραμμικού ελατηρίου και ενός ιξώδους απορροφητήρα (Νευτώνειου στοιχείου). Το μηχανικό του μοντέλο φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 1.10.



Σχήμα 1.10: Στοιχείο Maxwell

Η εν σειρά σύνδεση προϋποθέτει ότι:

$$\sigma = \sigma_D = \sigma_s \quad (1.1)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_D + \varepsilon_s \quad (1.2)$$

Με τους δείκτες s και D να σημαίνουν ελατήριο και dashpot αντίστοιχα για τα οποία ισχύει:

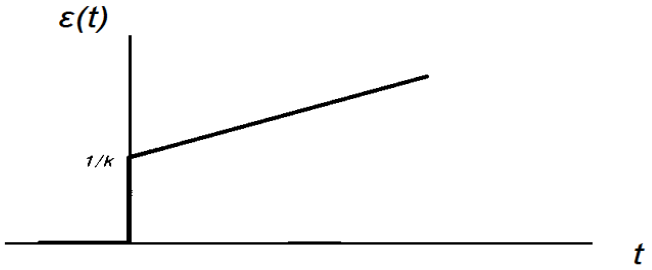
$\sigma_s = \varepsilon_s E$ για το ελατήριο (1.3) και $\dot{\varepsilon}_D = \frac{\sigma_D}{\eta}$ για τον απορροφητήρα (1.4)

Παραγωγίζοντας την (1.2) ως προς το χρόνο έχουμε: $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_s + \dot{\varepsilon}_D$ (1.5)

Όπου και αντικαθιστώντας στην (1.5) την (1.6) προκύπτει η καταστατική εξίσωση για το στοιχείο Maxwell:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}_s}{E} + \frac{\sigma_D}{\eta} \quad (1.6)$$

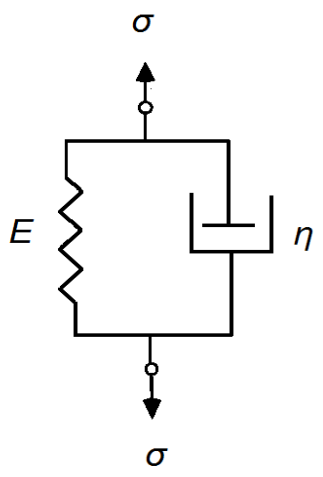
Το διάγραμμα ερπυσμού για το στοιχείο Maxwell δίνεται στο σχήμα 1.11 **[1-4]**



Σχήμα 1.11: Καμπύλη ερπυσμού για το στοιχείο Maxwell

4.2 Στοιχείο Kelvin

Το στοιχείο Kelvin αποτελείται από ένα ελατήριο και από έναν ιξώδη αποσβεστήρα παράλληλα μεταξύ τους συνδεδεμένα. Το μηχανικό του μοντέλο φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 1.12.



Σχήμα 1.12: Στοιχείο Kelvin

Στο μοντέλο του Kelvin η παράλληλη σύνδεση των στοιχείων μας δίνει:

$$\varepsilon = \varepsilon_s = \varepsilon_D \quad (1.7)$$

$$\sigma = \sigma_s + \sigma_D \quad (1.8)$$

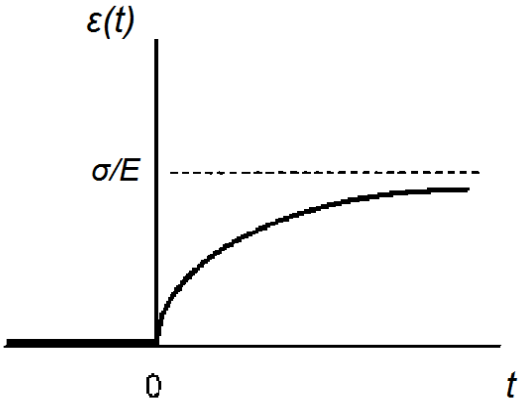
Και από τις εξισώσεις (1.3),(1.4) προκύπτει:

$$\sigma = \varepsilon_s E + \eta \dot{\varepsilon}_D \quad (1.9)$$

απ' όπου προκύπτει και η καταστατική εξίσωση για το στοιχείο Kelvin: $\sigma = \varepsilon E + \eta \dot{\varepsilon} \Rightarrow$

$$\sigma = \varepsilon E + \eta \left(\frac{\dot{\sigma}_s}{E} + \frac{\sigma_D}{\eta}\right) \quad (1.10)$$

Η καμπύλη ερπυσμού του στοιχείου Kelvin δίνεται στο επόμενο διάγραμμα:



Σχήμα 1.13: Καμπύλη ερπυσμού στοιχείου Kelvin

5 Πείραμα Ερπυσμού

Αποτελεί την πλέον διαδεδομένη διαδικασία εφελκυστικής φόρτισης. Περιλαμβάνει την ακαριαία επιβολή τάσης σ_0 την χρονική στιγμή t=0 η οποία μπορεί να γραφτεί σα συνάρτηση του χρόνου με τη βοήθεια της συνάρτησης βήματος u(t) : $\sigma(t)=\sigma_0 u(t)$ (1.11)

Για το στοιχείο Maxwell, αντικαθιστούμε τη σχέση (1.11) στη σχέση (1.5) και γίνεται:

$$\dot{\varepsilon}=\frac{\sigma_0}{E}\left(\frac{du(t)}{dt}\right)+\frac{\sigma_0}{\eta}u(t) \Rightarrow \dot{\varepsilon}=\frac{\sigma_0}{E}\delta(t)+\frac{\sigma_0}{\eta}u(t)$$

(1.12) όπου δ(t) η συνάρτηση δέλτα.

Ολοκληρώνοντας τη σχέση (1.12) με όρια $t = 0^-$ και $\varepsilon(0^-) = 0$ έχουμε:

$$\varepsilon(t)=\sigma_0\left(\frac{1}{E}+\frac{t}{\eta}\right)u(t) \quad (1.13)$$

Από το σχήμα της καμπύλης ερπυσμού για το στοιχείο Maxwell φαίνεται ότι τη χρονική στιγμή t = 0 το στοιχείο συμπεριφέρεται σαν ελαστικό στερεό με παραμόρφωση ίση με σ_0/E και προσεγγίζει τη συμπεριφορά ιξώδους υγρού καθώς $t \to \infty$. Εφαρμόζοντας το πείραμα του ερπυσμού σε ένα στοιχείο Kelvin προκύπτει μια διαφορική, μη-ομογενής γραμμική εξίσωση

$$\dot{\varepsilon}+\frac{E}{\eta}\varepsilon=\frac{\sigma_0}{\eta}u(t)$$

η οποία λύνεται εύκολα εάν γραφεί ως εξής:

$$e^{-(\frac{E}{\eta})t}\left(\frac{d\left(\varepsilon e^{(\frac{E}{\eta})t}\right)}{dt}\right)=\frac{\sigma_0}{\eta}u(t) \Rightarrow d\left(\varepsilon e^{(\frac{E}{\eta})t}\right)=\frac{\sigma_0}{\eta}e^{(\frac{E}{\eta})t}u(t)dt \quad (1.14)$$

αντίστοιχα ολοκληρώνοντας προκύπτει: $\varepsilon(t)=\frac{\sigma_0}{E}\left(1-e^{-(\frac{E}{\eta})t}\right)u(t)$ (1.15)

Στο διάγραμμα καμπύλης ερπυσμού για το στοιχείο Kelvin φαίνεται η σχέση (1.15) για την οποία ισχύει επίσης ε(0) = 0. Επίσης, καθώς $t \to \infty$ η συμπεριφορά του υλικού τείνει να προσομοιάσει τη συμπεριφορά ενός γραμμικού ελαστικού στερεού. Ο λόγος $\frac{\eta}{E}$ της εξίσωσης έχει διαστάσεις χρόνου. Η ποσότητα αυτή θεωρείται σταθερά του υλικού και λέγεται χρόνος καθυστέρησης και θα συμβολίζεται ως t_ε . **[1-4]**

6 Πείραμα Χαλάρωσης

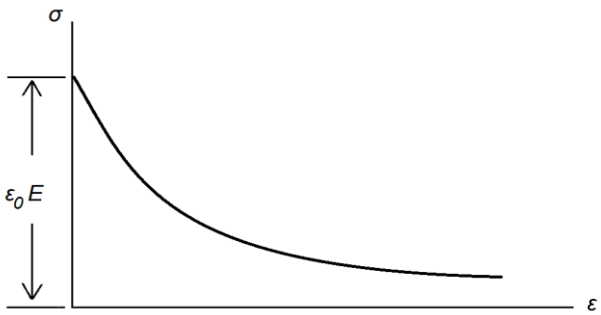
Στη διαδικασία της χαλάρωσης επιβάλλεται ακαριαία μία παραμόρφωση ε_0 τη χρονική στιγμή $t = 0$ η οποία παραμένει σταθερή και μπορεί να γραφεί σαν συνάρτηση του χρόνου ως εξής: $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 u(t)$ (1.16)

Εφαρμόζοντας στο στοιχείο Maxwell και στην καταστατική του εξίσωση (1.6) έχουμε:

$$\varepsilon_0\left(\frac{du(t)}{dt}\right) = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} \Rightarrow \dot{\sigma} = \frac{E}{\eta}\sigma = \varepsilon_0 E\,\delta(t) \Rightarrow d\left(\sigma e^{(\frac{E}{\eta})t}\right) = \varepsilon_0 E e^{(\frac{E}{\eta})t}\,\delta(t)\,dt \Rightarrow$$

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 E e^{-(\frac{E}{\eta})t} u(t) \qquad (1.17)$$

Η εξίσωση απεικονίζεται στο επόμενο διάγραμμα όπου προκύπτει ότι καθώς $t \to \infty$ η τάση από αρχική τιμή $\varepsilon_0 E$ τείνει στο μηδέν. Ο λόγος $\frac{\eta}{E}$ λέγεται χρόνος χαλάρωσης και αποτελεί σταθερά του υλικού.



Σχήμα 1.14: Καμπύλη χαλάρωσης στοιχείου Maxwell

Εφαρμόζοντας αντίστοιχα για το στοιχείο Kelvin προκύπτει: $\sigma = \varepsilon_0(\eta\,\delta(t) + E\,u(t))$ (1.18)

Η αύξηση της παραμόρφωσης κατά ένα βήμα ε_0 οδηγεί σε μία ακαριαία αύξηση της τάσης που περιγράφεται με μία συνάρτηση δέλτα και στη συνέχεια ακολουθείται από μία σταθερή τιμή τάσης. Η ανορθόδοξη συμπεριφορά του στοιχείου Kelvin στο πείραμα χαλάρωσης μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι τα πρότυπα αυτά αποτελούν εξιδανικεύσεις μίας πολύπλοκης συμπεριφοράς και δεν είναι δυνατόν να περιγράψουν την μακροσκοπική συμπεριφορά των πραγματικών υλικών. Για το λόγο αυτό απαιτείται η χρήση πιο συνθετών μοντέλων. **[1-4]**

7 Μέτρο Ένδοσης και Μέτρο Χαλάρωσης

Από τις εξισώσεις (1.13) και (1.15) που αποτελούν λύσεις για το πείραμα του ερπυσμού στα πρότυπα Maxwell και Kelvin παρατηρούμε ότι η εξάρτηση της παραμόρφωσης από το χρόνο μπορεί να εκφραστεί ως: $\varepsilon(t)=\sigma_0 J(t)u(t)$ (1.19) όπου J(t) είναι μια χαρακτηριστική συνάρτηση του υλικού και λέγεται συνάρτηση του μέτρου ένδοσης.

Το μέτρο ένδοσης για τα μοντέλα Maxwell και Kelvin αντίστοιχα είναι:

$$J(t)=\left(\frac{1}{E}+\frac{t}{\eta}\right) \qquad (1.20)$$

$$J(t)=\frac{1}{E}\left(1-\mathrm{e}^{-\left(\frac{E}{\eta}\right)t}\right) \qquad (1.21)$$

Με ανάλογο τρόπο μπορούμε για το πείραμα χαλάρωσης να γράψουμε για τη μεταβολή της τάσης ως προς το χρόνο: $\sigma(t)=\varepsilon_0 Y(t)u(t)$ (1.22) όπου Y (t) ονομάζεται συνάρτηση του μέτρου χαλάρωσης και έχει διαστάσεις μέτρου. Έτσι από την σχέση (1.17) προκύπτει ότι το μέτρο χαλάρωσης για το στοιχείο Maxwell είναι: $Y(t)=E\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{E}{\eta}\right)t}$ (1.23)

Για γραμμικό ελαστικό υλικό όπου η επίδραση του χρόνου είναι μηδενική ισχύουν οι κάτωθι αναλογίες:

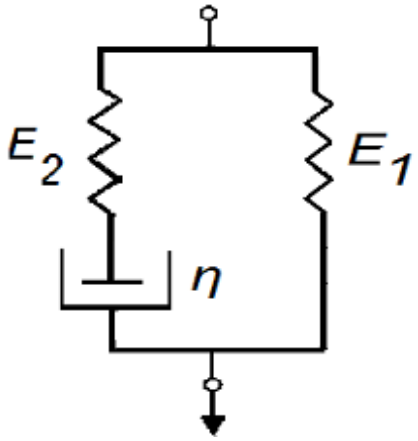
$$J(t)\rightarrow\frac{1}{E},\ Y(t)\rightarrow E \qquad (1.24)$$ όπου Ε το μέτρο ελαστικότητας.

Οι συναρτήσεις μέτρου ένδοσης και χαλάρωσης μπορούν να υπολογιστούν και για πιο σύνθετα μοντέλα από αυτά του Maxwell και Kelvin που προκύπτουν από το συνδυασμό αυτών των δύο στοιχείων, με την ίδια διαδικασία που ακολουθήθηκε παραπάνω. **[1-4]**

8 Σύνθετα μοντέλα

Σε αυτό το σημείο παρουσιάζονται τα πιο γνωστά κι ευρέως χρησιμοποιούμενα σύνθετα μοντέλα ιξωδοελαστικότητας συνοδευόμενα από τις καταστατικές τους εξισώσεις σε διαφορική μορφή καθώς και από τις συναρτήσεις ενδοτικότητάς τους στη μονοαξονική καταπόνηση και στη διάτμηση (με λόγο Poisson ν=0.5):

8.1 3-παραμετρικό μοντέλο



ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ:

1. $\varepsilon = \varepsilon_{s2} + \varepsilon_D \Rightarrow \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_{s2} + \dot{\varepsilon}_D \Rightarrow \dot{\varepsilon} E_2 = \dot{\sigma}_2 + \frac{\sigma_2}{\tau}$ (στοιχείο Maxwell)
2. $\sigma_1 = E_1 \varepsilon \Rightarrow \dot{\sigma}_1 = E_1 \dot{\varepsilon}$ (γραμμικό ελατήριο)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο σχέσεις μαζί με τον όρο $\frac{\varepsilon}{\tau} E_1$ παίρνουμε

$$\dot{\varepsilon}(E_1 + E_2) + \frac{\varepsilon}{\tau} E_1 = \dot{\sigma}_1 + \dot{\sigma}_2 + \frac{\sigma_2}{\tau} + \frac{\sigma_1}{\tau} \Rightarrow \dot{\varepsilon}(E_1 + E_2) + \frac{\varepsilon}{\tau} E_1 = \frac{\sigma}{\tau} + \dot{\sigma} \Rightarrow$$

$$\sigma + \tau \dot{\sigma} = E_1 \varepsilon + \tau (E_1 + E_2) \dot{\varepsilon}$$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΕΝΔΟΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΣΤΗ ΜΟΝΟΑΞΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΠΟΝΗΣΗ:

Με μετασχηματισμό Laplace στην καταστατική εξίσωση και με πράξεις έχουμε

$(1+\tau s)\bar{\sigma}(s)=(E_1+\tau(E_1+E_2)s)\bar{\varepsilon}(s) \Rightarrow \bar{\varepsilon}(s)=\frac{1+\tau s}{E_1+\tau(E_1+E_2)s}\bar{\sigma}(s)$ κι επειδή στον ερπυσμό έχουμε $\sigma(t)=\sigma_0 u(t) \Rightarrow \bar{\sigma}(s)=\frac{\sigma_0}{s}$ είναι:

$$\bar{\varepsilon}(s)=\left(\frac{1}{E_1 s+\tau(E_1+E_2)s^2}+\frac{\tau}{E_1+\tau(E_1+E_2)s}\right)\sigma_0$$

Με αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace από την τελευταία σχέση προκύπτει τελικά:

$$\varepsilon(t)=\left[\frac{1}{E_1}\left(1-e^{-\left(\frac{E_1}{\tau(E_1+E_2)}t\right)}\right)+\frac{1}{E_1+E_2}e^{-\left(\frac{E_1}{\tau(E_1+E_2)}t\right)}\right]\sigma_0 \Rightarrow$$

$$J(t)=\frac{1}{E_1}\left(1-e^{-\left(\frac{E_1}{\tau(E_1+E_2)}t\right)}\right)+\frac{1}{E_1+E_2}e^{-\left(\frac{E_1}{\tau(E_1+E_2)}t\right)}$$

<u>ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΕΝΔΟΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΣΤΗ ΔΙΑΤΜΗΣΗ (ν=0.5)</u>:

$\frac{\bar{Q}^E(s)}{\bar{P}^E(s)} \rightarrow E$ (Αρχή της αντιστοιχίας στην ελαστικότητα)

$\frac{\bar{Q}^G(s)}{\bar{P}^G(s)} \rightarrow 2G$ (Αρχή της αντιστοιχίας στη διάτμηση)

Προκύπτει: $\bar{P}^G(s)=1+\tau s$ και $\bar{Q}^G(s)=\frac{2}{3}[E_1+\tau(E_1+E_2)s]$

Η διαφορική εξίσωση του μοντέλου για διάτμηση: $\sigma_{xy}+\tau\dot{\sigma}_{xy}=\frac{2}{3}E_1\varepsilon_{xy}+\frac{2}{3}\tau(E_1+E_2)\dot{\varepsilon}_{xy}$

Με μετασχηματισμό Laplace σε αυτήν παίρνουμε:

$$\bar{\varepsilon}_{xy}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{E_1 s+\tau(E_1+E_2)s^2}+\frac{\tau}{E_1+\tau(E_1+E_2)s}\right)\sigma_0$$

Με αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace έχουμε:

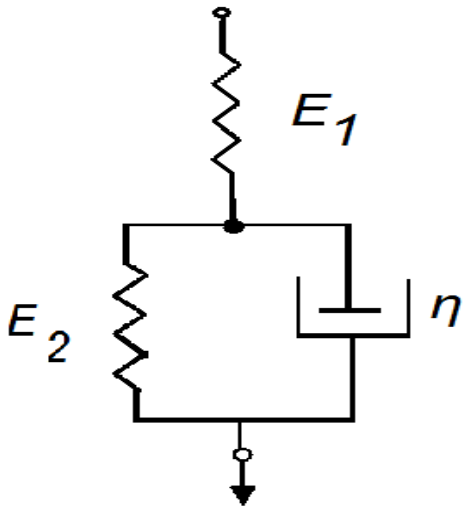
$$\varepsilon_{xy}(t)=\frac{3}{2}[\frac{1}{E_1}(1-e^{-(\frac{E_1}{\tau(E_1+E_2)}t)})+\frac{1}{E_1+E_2}e^{-(\frac{E_1}{\tau(E_1+E_2)}t)}]\sigma_0$$

, οπότε η ζητούμενη συνάρτηση

είναι τελικά:

$$J^G(t)=\frac{3}{2}[\frac{1}{E_1}(1-e^{-(\frac{E_1}{\tau(E_1+E_2)}t)})+\frac{1}{E_1+E_2}e^{-(\frac{E_1}{\tau(E_1+E_2)}t)}]$$

8.2 3-παραμετρικό στερεό



<u>ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ</u>:

1. $\sigma=\sigma_{s1}=\sigma_K$
2. $\varepsilon=\varepsilon_{s1}+\varepsilon_K$
3. $D\varepsilon_{s1}=\frac{D\sigma_{s1}}{E_1}\rightarrow\varepsilon_{s1}=\frac{\sigma_{s1}}{E_1}$ (καταστατική εξίσωση για το ελατήριο)
4. $\sigma_K=\sigma_{s2}+\sigma_D \Rightarrow \sigma_K=\varepsilon_K E_2+\eta D\varepsilon_K \Rightarrow \varepsilon_K=\frac{\sigma_K}{E_2+\eta D}$ (στοιχείο Kelvin)

$$\varepsilon=\varepsilon_{s1}+\varepsilon_K \Rightarrow \varepsilon=\frac{\sigma_{s1}}{E_1}+\frac{\sigma_K}{E_2+\eta D} \Rightarrow \varepsilon=\frac{\sigma}{E_1}+\frac{\sigma}{E_2+\eta D} \Rightarrow$$

$$\sigma+\frac{\eta}{E_1+E_2}\dot{\sigma}=\frac{E_1E_2}{E_1+E_2}\varepsilon+\frac{E_1\eta}{E_1+E_2}\dot{\varepsilon}$$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΕΝΔΟΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΣΤΗ ΜΟΝΟΑΞΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΠΟΝΗΣΗ:

Με μετασχηματισμό Laplace στην καταστατική εξίσωση παίρνουμε:

$$(1+\frac{\eta s}{E_1+E_2})\bar{\sigma}(s)=\frac{E_1(E_2+\eta s)}{E_1+E_2}\bar{\varepsilon}(s)$$ κι επειδή στον ερπυσμό έχουμε $\sigma(t)=\sigma_0 u(t) \Rightarrow$

$$\bar{\sigma}(s)=\frac{\sigma_0}{s}$$

προκύπτει $$\bar{\varepsilon}(s)=(\frac{1}{E_1 s}+\frac{1}{(E_2+\eta s)s})\sigma_0$$

Με αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace στην τελευταία σχέση προκύπτει:

$$\varepsilon(t)=[\frac{1}{E_1}+\frac{1}{E_2}(1-e^{-(\frac{E_2}{\eta})t})]\sigma_0 \Rightarrow J(t)=\frac{1}{E_1}+\frac{1}{E_2}(1-e^{-(\frac{E_2}{\eta})t})$$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΕΝΔΟΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΣΤΗ ΔΙΑΤΜΗΣΗ (ν=0.5):

$$\frac{\bar{Q}^E(s)}{\bar{P}^E(s)}\rightarrow E$$ (Αρχή της αντιστοιχίας στην ελαστικότητα)

$$\frac{\bar{Q}^G(s)}{\bar{P}^G(s)}\rightarrow 2G$$ (Αρχή της αντιστοιχίας στη διάτμηση)

Προκύπτει: $$\bar{P}^G(s)=1+\frac{E_1}{E_2+\eta s}, \quad \bar{Q}^G(s)=\frac{2}{3}E_1$$

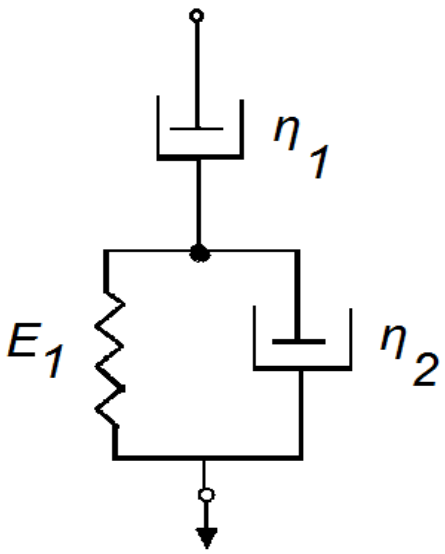
Η διαφορική εξίσωση του μοντέλου για διάτμηση: $$(1+\frac{E_1}{\eta}e^{-(\frac{E_2}{\eta})t})\sigma_{xy}=\frac{2}{3}E_1\varepsilon_{xy}$$

Στον ερπυσμό έχουμε $\sigma(t)=\sigma_0 u(t) \Rightarrow \bar{\sigma}(s)=\frac{\sigma_0}{s}$, οπότε προκύπτει

$$\bar{\varepsilon}_{xy}=\frac{3}{2}\frac{1+\frac{E_1}{E_2+\eta s}}{E_1 s}\sigma_0$$, όπου με αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace παίρνουμε τελικά:

$$\varepsilon_{xy}(t)=\frac{3}{2E_1}(1+\frac{E_1}{E_2}(1-e^{-(\frac{E_2}{\eta})t}))\sigma_0 \Rightarrow J^G(t)=\frac{3}{2E_1}(1+\frac{E_1}{E_2}(1-e^{-(\frac{E_2}{\eta})t}))$$

8.3 3-παραμετρικό υγρό



ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ:

1. $\sigma = \sigma_{D1} = \sigma_K$
2. $\varepsilon = \varepsilon_{D1} + \varepsilon_K$
3. $D\varepsilon_{D1} = \frac{\sigma_{D1}}{\eta_1} \rightarrow \varepsilon_{D1} = \frac{\sigma_{D1}}{\eta D_1}$ (καταστατική εξίσωση για τον αποσβεστήρα)
4. $\sigma_K = \sigma_{s1} + \sigma_{D2} \Rightarrow \varepsilon_K = \frac{\sigma_K}{E_1 + \eta_2 D}$ (στοιχείο Kelvin)

$$\varepsilon = \varepsilon_{D1} + \varepsilon_K \Rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma_{D1}}{\eta D_1} + \frac{\sigma_K}{E_1 + \eta_2 D} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{\eta D_1} + \frac{\sigma}{E_1 + \eta_2 D} \Rightarrow$$

$$\sigma + \frac{\eta_2 + \eta_1}{E_1}\dot{\sigma} = \eta_1 \dot{\varepsilon} + \frac{\eta_1 \eta_2}{E_1}\ddot{\varepsilon}$$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΕΝΔΟΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΣΤΗ ΜΟΝΟΑΞΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΠΟΝΗΣΗ:

Με μετασχηματισμό Laplace στην καταστατική εξίσωση παίρνουμε

$(E_1+(\eta_2+\eta_1)s)\bar{\sigma}(s)=(E_1+\eta_2 s)\eta_1 s\bar{\varepsilon}(s)$ κι επειδή στον ερπυσμό έχουμε $\sigma(t)=\sigma_0 u(t)$

$\Rightarrow \bar{\sigma}(s)=\frac{\sigma_0}{s}$ προκύπτει $\bar{\varepsilon}(s)=(\frac{E_1}{E_1\eta_1 s^2+\eta_1\eta_2 s^3}+\frac{\eta_2+\eta_1}{E_1\eta_1 s+\eta_2\eta_1 s^2})\sigma_0$

Με αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace από την τελευταία σχέση παίρνουμε

$$\varepsilon(t)=[\frac{t}{\eta_1}+\frac{\eta_2}{E_1\eta_1}(e^{-(\frac{E_1}{\eta_2})t}-1)+\frac{\eta_1+\eta_2}{E_1\eta_2}(1-e^{-(\frac{E_1}{\eta_2})t})]\sigma_0 \Rightarrow$$

$$J(t)=\frac{t}{\eta_1}+\frac{\eta_2}{E_1\eta_1}(e^{-(\frac{E_1}{\eta_2})t}-1)+\frac{\eta_1+\eta_2}{E_1\eta_2}(1-e^{-(\frac{E_1}{\eta_2})t})$$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΕΝΔΟΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΣΤΗ ΔΙΑΤΜΗΣΗ (ν=0.5):

$\frac{\bar{Q}^E(s)}{\bar{P}^E(s)}\rightarrow E$ (Αρχή της αντιστοιχίας στην ελαστικότητα)

$\frac{\bar{Q}^G(s)}{\bar{P}^G(s)}\rightarrow 2G$ (Αρχή της αντιστοιχίας στη διάτμηση)

Προκύπτει: $\bar{P}^G(s)=1+\frac{(\eta_1+\eta_2)s}{E_1}$, $\bar{Q}^G(s)=\frac{2}{3}(\eta_1 s+\frac{\eta_1\eta_2}{E_1}s^2)$

Η διαφορική εξίσωση του μοντέλου για διάτμηση: $\sigma_{xy}+\frac{\eta_1+\eta_2}{E_1}\dot{\sigma}_{xy}=\frac{2}{3}\eta_1\dot{\varepsilon}_{xy}+\frac{2}{3}\frac{\eta_1\eta_2}{E_1}\ddot{\varepsilon}_{xy}$

Στον ερπυσμό έχουμε $\sigma(t)=\sigma_0 u(t) \Rightarrow \bar{\sigma}(s)=\frac{\sigma_0}{s}$ οπότε προκύπτει

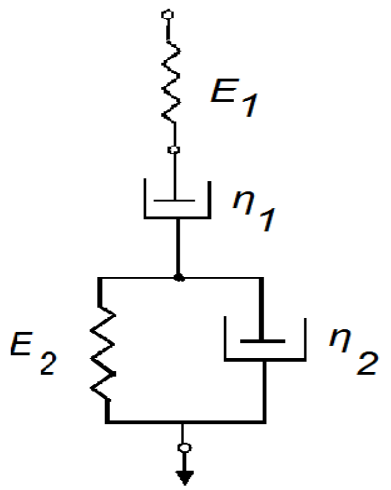
$\bar{\varepsilon}_{xy}=\frac{3E_1+3(\eta_1+\eta_2)s}{2E_1\eta_1 s^2+2\eta_1\eta_2 s^3}\sigma_0$, όπου με αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace παίρνουμε

τελικά: $\varepsilon_{xy}(t)=[\frac{3t}{2\eta_1}+\frac{3\eta_2}{2E_1\eta_1}(e^{-(\frac{E_1}{\eta_2})t}-1)+\frac{3(\eta_1+\eta_2)}{2E_1\eta_1}(1-e^{-(\frac{E_1}{\eta_2})t})]\sigma_0 \Rightarrow$

$$J^G(t)=\frac{3t}{2\eta_1}+\frac{3\eta_2}{2E_1\eta_1}(e^{-(\frac{E_1}{\eta_2})t}-1)+\frac{3(\eta_1+\eta_2)}{2E_1\eta_1}(1-e^{-(\frac{E_1}{\eta_2})t}) \Rightarrow$$

$$J^G(t)=\frac{3t}{2\eta_1}-\frac{3}{2E_1}(e^{-(\frac{E_1}{\eta_2})t}-1)$$

8.4 4-παραμετρικό μοντέλο (Burgers)



ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ:

1. $\sigma=\sigma_M=\sigma_K$
2. $\varepsilon=\varepsilon_M+\varepsilon_K$
3. $D\varepsilon_M=\frac{D\sigma_M}{E_1}+\frac{\sigma_M}{\eta_1}\rightarrow\varepsilon_M=\frac{\sigma_M}{E_1}+\frac{\sigma_M}{\eta D_1}$ (στοιχείο Maxwell)
4. $\sigma_K=\sigma_s+\sigma_\alpha \Rightarrow \varepsilon_K=\frac{\sigma_K}{E_2+\eta_2 D}$ (στοιχείο Kelvin)

$$\varepsilon=\varepsilon_M+\varepsilon_K \Rightarrow \varepsilon=\frac{\sigma_M}{E_1}+\frac{\sigma_M}{\eta D_1}+\frac{\sigma_K}{E_2+\eta_2 D} \Rightarrow \varepsilon=\frac{\sigma}{E_1}+\frac{\sigma}{\eta D_1}+\frac{\sigma}{E_2+\eta_2 D} \Rightarrow$$

$$\sigma+(\frac{\eta_1}{E_1}+\frac{\eta_2}{E_2}+\frac{\eta_1}{E_2})\dot{\sigma}+\frac{\eta_1\eta_2}{E_1E_2}\ddot{\sigma}=\eta_1\dot{\varepsilon}+\frac{\eta_1\eta_2}{E_2}\ddot{\varepsilon}$$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΕΝΔΟΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΣΤΗ ΜΟΝΟΑΞΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΠΟΝΗΣΗ:

Με μετασχηματισμό Laplace στην καταστατική εξίσωση παίρνουμε

$$[1+(\frac{\eta_1}{E_1}+\frac{\eta_2}{E_2}+\frac{\eta_1}{E_2})s+\frac{\eta_1\eta_2}{E_1E_2}s^2]\bar{\sigma}(s)=(\eta_1 s+\frac{\eta_1\eta_2 s^2}{E_2})\bar{\varepsilon}(s)$$

κι επειδή στον ερπυσμό έχουμε

$$\sigma(t)=\sigma_0 u(t) \Rightarrow \bar{\sigma}(s)=\frac{\sigma_0}{s}$$

προκύπτει

$$\bar{\varepsilon}(s)=\frac{(1+(\frac{\eta_1}{E_1}+\frac{\eta_2}{E_2}+\frac{\eta_1}{E_2})s+\frac{\eta_1\eta_2}{E_1E_2}s^2)E_2}{\eta_1E_2s^2+\eta_1\eta_2s^3}\sigma_0$$

Με αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace από την τελευταία σχέση παίρνουμε:

$$\varepsilon(t)=[\frac{t}{\eta_1}+\frac{\eta_2}{\eta_1E_2}(e^{-(\frac{E_2}{\eta_1})t}-1)+(\frac{1}{E_1}+\frac{\eta_2}{\eta_1E_2}+\frac{1}{E_2})(1-e^{-(\frac{E_2}{\eta_2})t})+\frac{1}{E_1}e^{-(\frac{E_2}{\eta_2})t}]\sigma_0 \Rightarrow$$

$$J(t)=\frac{t}{\eta_1}+\frac{\eta_2}{\eta_1E_2}(e^{-(\frac{E_2}{\eta_1})t}-1)+(\frac{1}{E_1}+\frac{\eta_2}{\eta_1E_2}+\frac{1}{E_2})(1-e^{-(\frac{E_2}{\eta_2})t})+\frac{1}{E_1}e^{-(\frac{E_2}{\eta_2})t}$$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΕΝΔΟΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΣΤΗ ΔΙΑΤΜΗΣΗ (ν=0.5):

$$\frac{\bar{Q}^E(s)}{\bar{P}^E(s)}\rightarrow E$$

(Αρχή της αντιστοιχίας στην ελαστικότητα)

$$\frac{\bar{Q}^G(s)}{\bar{P}^G(s)}\rightarrow 2G$$

(Αρχή της αντιστοιχίας στη διάτμηση)

Προκύπτει: $\bar{P}^G(s)=1+(\frac{\eta_1}{E_1}+\frac{\eta_2}{E_2}+\frac{\eta_1}{E_2})s+\frac{\eta_1\eta_2}{E_1E_2}s^2$, $\bar{Q}^G(s)=\frac{2}{3}(\eta_1 s+\frac{\eta_1\eta_2}{E_2}s^2)$

Η διαφορική εξίσωση του μοντέλου για διάτμηση:

$$\sigma_{xy}+(\frac{\eta_1}{E_1}+\frac{\eta_2}{E_2}+\frac{\eta_1}{E_2})\dot{\sigma}_{xy}+\frac{\eta_1\eta_2}{E_1E_2}\ddot{\sigma}_{xy}=\frac{2}{3}\eta_1\dot{\varepsilon}_{xy}+\frac{2}{3}\frac{\eta_1\eta_2}{E_2}\ddot{\varepsilon}_{xy}$$

Στον ερπυσμό έχουμε $\sigma(t)=\sigma_0 u(t) \Rightarrow \bar{\sigma}(s)=\frac{\sigma_0}{s}$ οπότε προκύπτει

$$\bar{\varepsilon}_{xy}=\frac{3}{2}\frac{E_1E_2+(\eta_1E_2+\eta_2E_1+\eta_1\eta_2)s+\eta_1\eta_2s^2}{\eta_1E_1E_2s^2+\eta_1\eta_2E_1s^3}\sigma_0$$

, όπου με αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace παίρνουμε τελικά:

$$\varepsilon_{xy}(t)=[\frac{3t}{2\eta_1}+\frac{3\eta_2}{2\eta_1E_2}(e^{-(\frac{E_2}{\eta_2})t}-1)+\frac{3(\eta_1E_2+\eta_2E_1+\eta_1E_1)}{2\eta_1E_1E_2}(1-e^{-(\frac{E_2}{\eta_2})t})+\frac{3}{2E_1}e^{-(\frac{E_2}{\eta_2})t}]\sigma_0$$

$$\Rightarrow J^G(t)=\frac{3t}{2\eta_1}+\frac{3\eta_2}{\eta_1E_2}(e^{-(\frac{E_2}{\eta_2})t}-1)+\frac{3(\eta_1E_2+\eta_2E_1+\eta_1E_1)}{2\eta_1E_1E_2}(1-e^{-(\frac{E_2}{\eta_2})t})+\frac{3}{2E_1}e^{-(\frac{E_2}{\eta_2})t}$$

9 Ολοκληρώματα Boltzmann

Έστω ότι η εφαρμοζόμενη τάση είναι της μορφής: $\sigma(t)= \sigma_0(u(t)- u(t- t_1))$ (1.25)

όπου περιγράφεται η εφαρμογή μιας σταθερής τάσης σ_0 για t=0 και η αφαίρεση αυτής τη χρονική στιγμή t_1.

Βασιζόμενοι στην αρχή της υπέρθεσης Boltzmann, σύμφωνα με την οποία το αποτέλεσμα που προκύπτει από το συνδυασμό πολλών αιτιών είναι ίσο με το άθροισμα των αποτελεσμάτων που προκύπτει από κάθε ένα από αυτά τα αίτια ξεχωριστά, καταλήγουμε:

$\varepsilon(t)= \sigma_0(J(t)- J(t- t_1))$ (1.26)

Στη γενική περίπτωση λοιπόν όπου εφαρμόζεται μια τυχαία τάση συναρτήσει του χρόνου σ(t) με μηδενική τιμή για t<0, θεωρούμε ότι η τάση για το χρονικό διάστημα από t-τ έως

t-τ+Δτ μπορεί να εκφραστεί από τη σχέση:

$\sigma(t)= \sigma(\tau)(u(t- \tau)- u(t- \tau+ \Delta\tau))$ (1.27) όπου ε(τ) η τιμή τη χρονική στιγμή t=τ.

Επομένως σύμφωνα με τη σχέση (1.26) η μεταβολή της παραμόρφωσης λόγω του παλμού της τάσης που εφαρμόστηκε όπως περιγράφηκε από την (1.27) θα είναι με βάση την αρχή Boltzmann:

$d\varepsilon(t) = \sigma(\tau)(J(t-\tau) - J(t-\tau+\Delta\tau))$ (1.28) κι επειδή ισχύει:

$$\frac{dJ(t-\tau)}{d\tau} = \lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{J(t-\tau+\Delta\tau) - J(t-\tau)}{\Delta\tau}$$

η (1.28) μπορεί να γραφεί ως :

$$d\varepsilon(t) = -\sigma(\tau)\frac{dJ(t-\tau)}{d\tau}d\tau \qquad (1.29)$$

Αποσυνθέτοντας το σύνολο της εφαρμοζόμενης τάσης σ(t) έως τη χρονική στιγμή t, σε στοιχειώδεις βηματικές συναρτήσεις, η συνολική παραμόρφωση τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή θα είναι ίση με το άθροισμα των εκάστοτε στοιχειωδών μεταβολών dε(t). Στην οριακή περίπτωση όπου το Δτ είναι πολύ μικρό το άθροισμα αυτό μετατρέπεται σε ολοκλήρωμα κι επομένως θα είναι:

$$\varepsilon(t)= -\int_0^t \sigma(\tau)\frac{dJ(t-\tau)}{d\tau}d\tau + J(0)\sigma(t) \qquad (1.30)$$

όπου ο όρος J(0)σ(t) προκύπτει από το γεγονός ότι ενώ μετά την αφαίρεση κάθε παλμού τάσης ή σειράς παλμών η τάση είναι μηδενική, στη γενική περίπτωση της εφαρμογής μιας τυχαίας τάσης αυτή δεν είναι μηδέν τη χρονική στιγμή t. Επομένως, η τελική αύξηση της παραμόρφωσης από μηδέν έως σ(t) ισούται με τον παραπάνω όρο καθώς η παραμόρφωση δεν προλαβαίνει να χαλαρώσει. Μετά από την εκτέλεση της παραγοντικής ολοκλήρωσης στη σχέση (1.30) προκύπτει η τελική μορφή για την παραμόρφωση συναρτήσει του χρόνου:

$$\varepsilon(t)=\int_0^t J(t-\tau)\frac{d\sigma(t)}{d\tau}d\tau \qquad (1.31)$$ **[5]**

10 Καταστατικές Εξισώσεις Των Ιξωδοελαστικών Μοντέλων Σε Ολοκληρωτική Μορφή

Με βάση την προηγούμενη σχέση και τις τιμές που προέκυψαν για τα σύνεθτα μοντέλα ιξωδοελαστικότητας, έχουμε:

- <u>3-παραμετρικό μοντέλο</u>

$$\varepsilon(t)=\int_0^t [\frac{1}{E_1}(1-\mathrm{e}^{-[\frac{E_1}{\tau(E_1+E_2)}(t-\tau)]})+\frac{1}{E_1+E_2}\mathrm{e}^{-[\frac{E_1}{\tau(E_1+E_2)}(t-\tau)]}][-(\frac{\sigma(\tau)}{\tau})+\frac{E_1\varepsilon(\tau)}{\tau}+(E_1+E_2)\dot{\varepsilon}(\tau)]d\tau$$

- <u>3-παραμετρικό στερεό</u>

$$\varepsilon(t)=\int_0^t [\frac{1}{E_1}+\frac{1}{E_2}(1-\mathrm{e}^{-\frac{E_2}{\eta}(t-\tau)})][-(\frac{E_1+E_2}{\eta})\sigma(\tau)+\frac{E_1E_2}{\eta}\varepsilon(\tau)+E_1\dot{\varepsilon}(\tau)]d\tau$$

- <u>3-παραμετρικό υγρό</u>

$$\varepsilon(t)=\int_0^t [\frac{t-\tau}{\eta_1}+(\frac{\eta_2}{E_1\eta_1}-\frac{\eta_1+\eta_2}{E_1\eta_2})(\mathrm{e}^{-(\frac{E_1}{\eta_2}(t-\tau))}-1)][-(\frac{E_1}{\eta_2+\eta_1})\sigma(\tau)+\frac{\eta_1E_1}{\eta_2+\eta_1}\dot{\varepsilon}(\tau)+\frac{\eta_1\eta_2}{\eta_1+\eta_2}\ddot{\varepsilon}(\tau)]d\tau$$

- <u>4-παραμετρικό μοντέλο (Burgers)</u>

$$\varepsilon(t)=\frac{1}{\eta_1E_2+\eta_2E_1+\eta_1E_1}\int_0^t [\frac{t-\tau}{\eta_1}+\frac{\eta_2}{\eta_1E_2}(\mathrm{e}^{-\frac{E_2}{\eta_2}(t-\tau)}-1)+(\frac{1}{E_1}+\frac{\eta_2}{\eta_1E_2}+\frac{1}{E_2})(1-\mathrm{e}^{-\frac{E_2}{\eta_2}(t-\tau)})+\frac{1}{E_1}\mathrm{e}^{-\frac{E_2}{\eta_2}(t-\tau)}]$$

$$(-E_1E_2\sigma(\tau)-\eta_1\eta_2\ddot{\sigma}(\tau)+\eta_1E_1E_2\dot{\varepsilon}(\tau)+\eta_1\eta_2E_1)d\tau$$

ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΑΣ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΙΞΩΔΟΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ

Θεωρούμε ένα γραμμικό ιξωδοελαστικό φορέα που δέχεται εξωτερικά φορτία. Ισχύουν καταρχήν οι εξισώσεις ισορροπίας και οι σχέσεις συμβιβασμού των παραμορφώσεων, οι οποίες στη γενική μορφή τους είναι:

$$\sigma_{ij,j} + B_i = 0 \quad (1.32)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1.33)$$

όπου B_i είναι οι μαζικές δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε σημείο του στερεού. Η τρίτη ομάδα εξισώσεων είναι οι καταστατικές εξισώσεις, οι οποίες στην ιξωδοελαστικότητα έχουν τη μορφή:

$$P^k \bar{\sigma} = Q^k \bar{\varepsilon} \quad (1.34\alpha)$$

$$P^G s_{ij} = Q^G e_{ij} \quad (1.34\beta)$$

Όπως είδαμε, οι καταστατικές εξισώσεις των μοντέλων που εξετάσαμε μπορούν να γραφούν με συνοπτικό τρόπο ως εξής: P σ=Q ε.

Οι P, Q είναι γραμμικοί διαφορικοί τελεστές και μπορούν να εκφραστούν με την ακόλουθη γενική μορφή:

$$P = \sum_{j=0}^{m} p_j \frac{\partial^j}{\partial t^j} = \sum_{j=0}^{m} p_j D^j \quad (1.35\alpha)$$

$$Q = \sum_{j=0}^{n} q_j \frac{\partial^j}{\partial t^j} = \sum_{j=0}^{n} q_j D^j \quad (1.35\beta)$$

όπου D^0 σημαίνει παραγώγιση μηδενικής τάξης και τα p και q θεωρούνται καταρχήν σταθερές. Συνήθως θέτουμε $p_0 = 1$ στη σχέση (1.35α) δηλαδή κανονικοποιούμε τη διαφορική εξίσωση διαιρώντας τα μέλη της με το συντελεστή της μηδενικής παραγώγου τάσης.

Οι εκθέτες k, G στις (1.34) δείχνουν το είδος της φόρτισης δηλαδή μεταβολή όγκου και διάτμηση αντίστοιχα.

Για να επιλυθεί το γενικό πρόβλημα της ιξωδοελαστικότητας απαιτούνται επιπλέον οι οριακές συνθήκες:

$$u_i = F_i \quad (1.36\alpha)$$

$$\sigma_{ij} n_i = G_i \quad (1.36\beta)$$

όπου F_i είναι γνωστές μετατοπίσεις σε τμήμα S_1 της επιφάνειας του στερεού και G_i είναι γνωστές σε άλλο τμήμα S_2 της επιφάνειας. Στην περίπτωση όμως του ιξωδοελαστικού σώματος, λόγω της εξάρτησής του από το χρόνο χρειάζονται και αρχικές συνθήκες. Συνήθως γίνεται η παραδοχή ότι τα φορτία εφαρμόζονται τη χρονική στιγμή t=0, σε φορέα ο οποίος αρχικά είναι ελεύθερος τάσεων και παραμορφώσεων. Οπότε τη χρονική στιγμή $t=0^-$ όλες οι μεταβλητές καθώς και οι παράγωγοι αυτών ως προς το χρόνο θα είναι μηδέν, δηλαδή:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} = 0 \quad \text{για } t=0^- \quad (1.37\alpha)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} = 0 \quad \text{για } t=0^- \quad (1.37\beta)$$

$$u_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial t} = 0 \quad \text{για } t=0^- \quad (1.37\gamma)$$

Οι διαφορικές εξισώσεις (1.32), (1.33), (1.34) του προβλήματος αποτελούν ένα σύστημα 15 εξισώσεων με αγνώστους τις τάσεις (6 άγνωστοι), παραμορφώσεις (6 άγνωστοι) και μετατοπίσεις (3 άγνωστοι). Για τη λύση των εξισώσεων αυτών απαιτείται και η ικανοποίηση των οριακών συνθηκών (1.36) και των αρχικών συνθηκών (1.37). Η λύση του συστήματος αυτού συνδέεται στενά με τη λύση αντίστοιχου προβλήματος για ελαστικό συνεχές μέσον που δέχεται την ίδια φόρτιση και ισχύουν γι αυτό οι ίδιες οριακές συνθήκες. Αυτή η σχέση που θα παρουσιαστεί στη συνέχεια είναι γνωστή ως <u>αρχή της αντιστοιχίας στη γραμμική ιξωδοελαστικότητα</u>.

Στη συνέχεια αυτή η σχέση αναπτύσσεται με τη χρήση μετασχηματισμών Laplace. Στο αντίστοιχο ελαστικό πρόβλημα οι σχέσεις (1.34) γράφονται:

$$\bar{\sigma} = 3K\bar{\varepsilon} \quad (1.38\alpha)$$

$$s_{ij} = 2Ge_{ij} \quad (1.38\beta)$$

Στην εφαρμογή μετασχηματισμού Laplace χρησιμοποιούμε ως κάτω όριο ολοκλήρωσης τη χρονική στιγμή $t=0^-$, όπου οι αρχικές συνθήκες είναι ομογενείς. Με μετασχηματισμό Laplace των σχέσεων (1.32), (1.33) παίρνουμε:

$$\bar{\sigma}_{ij,j} + \bar{B}_i = 0 \quad (1.39\alpha)$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i}) \quad (1.39\beta)$$

και οι οριακές συνθήκες (1.36) γίνονται:

$$\bar{u}_i = \bar{F}_i \quad (1.40\alpha)$$

$$\bar{\sigma}_{ij} n_j = \bar{G}_i \quad (1.40\beta)$$

Ενώ οι σχέσεις (1.34) γράφονται:

$$\bar{P}^k \bar{\bar{\sigma}} = \bar{Q}^k \bar{\bar{\varepsilon}} \quad (1.41\alpha)$$

$$\bar{P}^G \bar{s}_{ij} = \bar{Q}^G \bar{e}_{ij} \quad (1.41\beta)$$

Οι καταστατικές σχέσεις της ελαστικότητας (1.37) γίνονται:

$$\bar{\bar{\sigma}} = 3k \bar{\bar{\varepsilon}} \quad (1.42\alpha)$$

$$\bar{s}_{ij} = 2G \bar{e}_{ij} \quad (1.42\beta)$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (1.41) και (1.42) προκύπτει η εξής αντιστοιχία:

$$3k \rightarrow \frac{\bar{Q}^k(s)}{\bar{P}^k(s)} \quad (1.43\alpha)$$

$$2G \rightarrow \frac{\bar{Q}^G(s)}{\bar{P}^G(s)} \quad (1.43\beta)$$

Παρατηρούμε ότι οι ελαστικές σταθερές στο ελαστικό πρόβλημα αντικαθίστανται στο ιξωδοελαστικό πρόβλημα με συναρτήσεις της μεταβλητής s. Δηλαδή ο μετασχηματισμός Laplace της ιξωδοελαστικής λύσης προκύπτει από το μετασχηματισμό Laplace της ελαστικής λύσης χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1.43).

Με ανάλογο τρόπο, εάν οι καταστατικές σχέσεις της ελαστικότητας γραφούν συναρτήσει των ελαστικών σταθερών Ε και ν, προκύπτει η αντιστοιχία:

$$E \rightarrow \frac{\bar{Q}^E(s)}{\bar{P}^E(s)} \quad (1.44\alpha)$$

$$\nu \rightarrow \frac{\bar{Q}^\nu(s)}{\bar{P}^\nu(s)} \quad (1.44\beta)$$

Με γνωστή την ελαστική λύση ενός προβλήματος μπορούμε να φτάσουμε στη λύση του ιξωδοελαστικού προβλήματος ως εξής:

1. παίρνουμε το μετασχηματισμό Laplace της ελαστικής λύσης
2. αντικαθιστούμε στη μετασχηματισμένη λύση τα μεγέθη Ε, ν από τις σχέσεις (1.44). Εναλλακτικά εάν αντί για τις διαφορικές εξισώσεις της ιξωδοελαστικότητας χρησιμοποιήσουμε τις ισοδύναμες ολοκληρωτικές, ισχύουν οι κάτωθι αντιστοιχίες:

$$3k \rightarrow \frac{1}{s\,\bar{J}^k(s)} = s\,\bar{Y}^k(s) \quad (1.45\alpha)$$

$$2G \rightarrow \frac{1}{s\,\bar{J}^G(s)} = s\,\bar{Y}^G(s) \quad (1.45\beta)$$

3. κάνουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace και οδηγούμαστε στην ιξωδοελαστική λύση

Τα σημαντικά πλεονεκτήματα που μας αποφέρει η αρχή της αντιστοιχίας είναι τα εξής:

1. Θεμελιώδη θεωρήματα της γραμμικής ελαστικότητας ισχύουν και στη γραμμική ιξωδοελαστικότητα
2. Μέθοδοι επίλυσης προβλημάτων στην ελαστικότητα μπορούν να χρησιμοποιηθούν και στην ιξωδοελαστικότητα (π.χ. Ενεργειακές μέθοδοι στα υλικά)
3. Οι προσεγγίσεις που γίνονται στην ελαστικότητα ισχύουν και στην ιξωδοελαστικότητα **[1-4]**

11 Φαινόμενα Ερπυσμού και Χαλάρωσης σε Διάφορες Κατασκευές

Η ανάλυση των τάσεων στον ερπυσμό έχει μακρά ιστορία στη μηχανολογία καθοδηγούμενη από τις απαιτήσεις για σχεδιασμό σε υψηλή θερμοκρασία. Τα παραδείγματα στοιχείων μηχανών υψηλής φόρτισης αποτελούν τα ελατήρια κατασκευασμένα από ατσάλι. Τα ατσάλινα ελατήρια είναι τυπικά στοιχεία αποθήκευσης ενέργειας στα πιστόνια των μηχανών, στους συμπλέκτες και στα αυτόματα κιβώτια ταχυτήτων των αυτοκινήτων. Το κωνικού δίσκου ελατήριο, το ελατήριο Belleville, ή η ροδέλα ελατηρίου ή οι ροδέλες Belleville χρησιμοποιούνται τυπικά ως ελατήρια ή για την εφαρμογή μιας αρχικής φόρτισης ή για την ελαστική ποιότητα σε ένα βιδωμένο αρμό ή σε ένα έδρανο. Όσον αφορά στις βασικές ιδιότητες των ροδέλων Belleville, αυτές περιλαμβάνουν υψηλή διάρκεια ζωής στην κόπωση, καλύτερη αξιοποίηση των κενών, χαμηλή τάση ερπυσμού, υψηλή ικανότητα φόρτισης με μικρή εκτροπή του ελατηρίου. Το φυσικό φαινόμενο με τα μεταλλικά ελατήρια είναι ότι σε τάση χαμηλότερη από την τάση λυγισμού του υλικού, λαμβάνει χώρα μια αργή ανελαστική παραμόρφωση. Στο τμήμα του ελατηρίου αυτό ονομάζεται ερπυσμός, όταν ένα ελατήριο κάτω από σταθερή φόρτιση μεγαλώνει το μήκος και χαλάρωση όταν το ελατήριο κάτω από σταθερή θλίψη χάνει το φορτίο του.

Οι ρυθμοί ερπυσμού και χαλάρωσης εξαρτώνται από τη θερμοκρασία, από την τάση στο μέταλλο, από την τάση λυγισμού και το χρόνο. Όσο αυξάνονται θερμοκρασία, τάση και χρόνος, τόσο αυξάνονται και οι ρυθμοί ερπυσμού και χαλάρωσης. Ειδικά η θερμοκρασία και η τάση έχουν τη μεγαλύτερη επίδραση. Η ακριβής περιγραφή του ερπυσμού είναι απαραίτητα σημαντική για τη σωστή διαστασιολόγηση των ελατηρίων.

Τα ελατήρια αποθηκεύουν την ελαστική ενέργεια είτε μέσω μεθόδων κάμψης είτε στρέψης. Αντιστοίχως, στο υλικό επιβάλλεται είτε η μονοαξονική είτε κατάσταση αμιγούς διατμητικής τάσης. Έτσι, η απαραίτητη δουλειά που προαπαιτείται είναι η προέλευση των ακριβών εκφράσεων των τύπων για τη στρέψη και για τον ερπυσμό σε κάμψη για τα ισότροπα υλικά τα οποία υπακούν στους κοινώς αποδεκτούς Norton-Bailey [7], Garofalo[8-9] και Naumenko-Altenbach-Gorash[10] θεμελιώδεις νόμους. Αυτά τα βασικά, θεμελιώδη μοντέλα βασίστηκαν στις βασικές εξισώσεις χρόνου και καταπόνησης σκλήρυνσης για χρόνο-μεταβαλλόμενη τάση. Τα μοντέλα περιγράφουν ικανοποιητικά το στάδιο του δευτερογενούς ερπυσμού από τα μονοαξονικά πειράματα σταθερής τάσης όπου ο ρυθμός του ερπυσμού είναι προσεγγιστικά σταθερός.

Μεταξύ άλλων, το πιο ευρέως διαδεδομένο μοντέλο δευτερογενούς ερπυσμού είναι ο νόμος Norton-Bailey ο οποίος παρέχει ισχυρό νόμο μεταξύ του ρυθμού ερπυσμού και της τάσης. Οι χαρακτηριστικές μαθηματικές ιδιότητες του ισχυρού νόμου επέτρεψαν την ανάπτυξη

αναλυτικών μεθόδων, πολλές από τις οποίες μπορούν να απαντηθούν σε σχεδιαστικούς κώδικες υψηλών θερμοκρασιών. Τα βασικά μοντέλα και μέθοδοι επίλυσης προβλημάτων ερπυσμού καθώς και μία σύνοψη των νόμων ερπυσμού για κοινά μηχανολογικά υλικά παρέχονται στη βιβλιογραφία [11-13]. Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης ερπυσμού εφαρμόζονται σε ένα σημαντικό στην πράξη πρόβλημα της μηχανολογίας, δηλαδή στην προσομοίωση του ερπυσμού και της χαλάρωσης ελικοειδών και δισκοειδών ελατηρίων.

Τα ελικοειδή ελατήρια κατασκευάζονται από σύρμα περιτυλιγμένο στο σχήμα της έλικας και προορίζονται κατά κύριο λόγο για θλιπτικά κι εφελκυστικά φορτία. Η διατομή του σύρματος από το οποίο κατασκευάζεται το ελατήριο μπορεί να είναι κυκλική, τετράγωνη ή ορθογώνια. Τα ελικοειδή θλιπτικά ελατήρια βρίσκουν εφαρμογές στην αντίσταση στις εφαρμοσμένες θλιπτικές δυνάμεις. Μια συνηθισμένη τεχνική για την πρόβλεψη της χαλάρωσης της τάσης για τα θλιπτικά και στρεπτικά ελατήρια αναπτύσσεται στη βιβλιογραφία [14] . Η τεχνική αυτή χρησιμοποιεί δεδομένα αναπτυσσόμενης χαλάρωσης τάσης μονοαξονικού εφελκυσμού για τα σύρματα των ελατηρίων.

Βασιζόμενη σε δεδομένα χαλάρωσης τάσης από πρόκληση φόρτισης, η τεχνική εφαρμόστηκε σε ελατήρια θλίψης, όπου η διατμητική τάση επικρατεί στην πρόβλεψη της χαλάρωσης τάσης. Η καμπύλη έντασης της διατμητικής τάσης κατασκευάζεται βασιζόμενη πρώτα στην καμπύλη έντασης μονοαξονικής φόρτισης. Κατόπιν, αποδεικνύεται η άποψη ότι η χαλάρωση τάσης είναι ένα φαινόμενο στο οποίο μέρος της ελαστικής τάσης υπεύθυνης για την αρχική τάση αντικαθίσταται από τάση ερπυσμού.

Ο στόχος αυτής της αναφοράς είναι η περαιτέρω λεπτομερής εξέταση της συμπεριφοράς απλών δομών με κοινούς νόμους ερπυσμού. Η χαλάρωση των τάσεων για τα θεμελιώδη μοντέλα των Norton-Bailey, Garofalo και Naumenko-Altenbach-Gorash μελετήθηκε για βασικά στοιχεία στη στρέψη και στην κάμψη. Οι δομές που εξετάζονται είναι στοιχειώδεις - μία δοκός στην κάμψη, μία ράβδος στη στρέψη κι ελικοειδή και δισκοειδή ελατήρια-αλλά έχουν εδώ και καιρό χρησιμοποιηθεί για την επίδειξη των βασικών χαρακτηριστικών του μη γραμμικού ερπυσμού.

Ενώ η κάμψη και η στρέψη τακτικά συμβαίνουν σε δομικά στελέχη, τα αποτελέσματα αμέσως καθίστανται εφαρμόσιμα. Η εφαρμογή των λύσεων επιτρέπει την ακριβή αναλυτική περιγραφή του ερπυσμού και της χαλάρωσης σημαντικών πρακτικών προβλημάτων της μηχανολογίας.

Ακολουθώντας τη διαδικασία, εγκαθιδρύουμε κλειστού τύπου λύσεις για τον ερπυσμό και τη χαλάρωση στα ελικοειδή, όλκιμα και δισκοειδή ελατήρια.

Οι κλειστού τύπου λύσεις με κοινά αποδεκτά μοντέλα ερπυσμού επιτρέπουν τη βαθύτερη κατανόηση της αποτελεσματικότητας ενός τέτοιου στοιχειώδους μοντέλου στην τάση και στην παραμόρφωση και των συνεπειών στη σχεδίαση για υψηλές θερμοκρασίες. **[6]**

12 Βιβλιογραφική Ανασκόπηση Για Κάμψη & Απόκριση Ερπυσμού Κάμψης

Η χρήση λειτουργικά διαβαθμισμένων υλικών (FGMs) σε ένα πλατύ εύρος μηχανολογικών εφαρμογών αυξάνεται ταχέως, με πολλούς τομείς αυτής της ιδέας να ερευνώνται σε παγκόσμιο επίπεδο. Στις δομικές εφαρμογές, η ιδέα των FGMs είναι ελκυστική κυρίως λόγω των πλεονεκτημάτων αυτών των δομών έναντι των επιστρωματικών-τύπου Sandwich-δομών, όσον αφορά στην εξάλειψη των προβλημάτων διασύνδεσης και περιορισμού της συγκέντρωσης τάσεων. Πρόσφατα, έχουν αναφερθεί εφαρμογές για αισθητήρες, θώρακες, οδοντιατρικά εμφυτεύματα και περιστρεφόμενα πτερύγια [16-18], κι η ιδέα έχει εξεταστεί προσφάτως ακόμα και για δύσκαμπτα, τσιμεντένια συστήματα πεζοδρομίων [19]. Έχουν επίσης εξερευνηθεί χωρίσματα Sandwich φτιαγμένα από πυρήνες λειτουργικά διαβαθμισμένων υλικών καθώς επίσης και σύνθετα φύλλα και τσιμεντένια σύνθετα με ίνες μεταβλητού λόγου έντασης [20-22].

Πολλές ερευνητικές μελέτες αναφορικά με τις λειτουργικά διαβαθμισμένες δομές (FGSs) διενεργήθηκαν με εστίαση στη δόνηση των δοκών που κάμπτονται, στη συμπεριφορά διαρροής και στη μη-γραμμική συμπεριφορά των πλακών και των περιβλημάτων [17,18, 23-28]. Όμως, η ιξωδοελαστική απόκριση των FGSs, όπως και η ανάπτυξη αναλυτικών μοντέλων για την ανάλυσή τους, δεν έχει μέχρι στιγμής εξερευνηθεί πλήρως. Σε πολλές περιπτώσεις, τα ιξωδοελαστικά υλικά που υφίστανται ερπυσμό σε θερμοκρασίες περιβάλλοντος χρησιμοποιούνται σε μία FGS, όπως πολυμερή και υλικά τσιμέντου. Και σε άλλες περιπτώσεις, οι εφαρμογές γίνονται για δομές εκτεθειμένες σε υψηλές θερμοκρασίες, τα οποία εισάγουν τον ερπυσμό σε πολλά μέταλλα κι άλλα υλικά. Αυτή η εργασία εστιάζει στην ιξωδοελαστική συμπεριφορά ερπυσμού εύκαμπτων δοκών κατασκευασμένων από λειτουργικά διαβαθμισμένα υλικά, συμπεριλαμβανομένων των συνεπειών των γεωμετρικών διαφορικοτήτων, όπου οι επιδράσεις ερπυσμού υλικών που κάμπτονται μπορεί να επικρατήσουν στη δομική απόκριση (δοκοί-στήλες).

Η ιξωδοελαστική συμπεριφορά ερπυσμού των δοκών και δοκών-στηλών φτιαγμένων από FGMs σχετίζεται με κάποια μοναδικά φυσικά φαινόμενα που απορρέουν από την προοδευτική μεταβολή του λόγου έντασης του υλικού και την αντίστοιχη μεταβολή των ιξωδοελαστικών χαρακτηριστικών μέσω του πάχους του μέλους.

Παρόλο που η κλιμακωτή δομή εξαλείφει τις συγκεντρώσεις τάσεων στη διαχωριστική επιφάνεια, που μπορεί να προκαλέσουν συνδεσμικές αστοχίες με την πάροδο του χρόνου στις

επιστρώσεις των δοκών [29-31], ο ερπυσμός μπορεί να προξενήσει παραμορφώσεις και περιστροφές της διατομής όπως επίσης και βαθμιαίες μεταβολές στις δυσκαμψίες λυγισμού και στην κατανομή των τάσεων με το χρόνο [21]. Επιπρόσθετα, εξαιτίας της δυνητικής, πολύ ισχυρής μη-γραμμικότητας στις τυπικές βασικές σχέσεις ερπυσμού (π.χ. ο βασικός νόμος ερπυσμού με διαφορετικές δυνάμεις) [17] που μεταβάλλουν τη μικροδομή από ένα υλικό σε άλλο, οδηγεί σε μεταβολές στις ιξωδοελαστικές ιδιότητες οι οποίες μπορεί να μην ακολουθούν υποχρεωτικά το ίδιο μονοπάτι που ακολουθεί η μεταβολή του λόγου έντασης των υλικών ή οι ελαστικές ιδιότητες (π.χ. το μέτρο ελαστικότητας ή ο λόγος Poisson). Έτσι, η ιξωδοελαστική απόκριση στην κάμψη, των λειτουργικά διαβαθμισμένων δοκών και η δομική τους μοντελοποίηση χρειάζεται να διευκρινιστεί για καλύτερη αξιοποίηση τέτοιων δομών.

Κάτω από φόρτιση αξονικής θλίψης (στηλών ή δοκών-στηλών), η δομική απόκριση μπορεί να κυριαρχηθεί από την κάμψη του στελέχους που γίνεται πιο κρίσιμη όταν το φορτίο είναι σταθερό με το χρόνο. Σε τέτοιες περιπτώσεις, οι παραμορφώσεις που προξενούνται από ερπυσμό, όπως επίσης και η επακόλουθη αύξηση ή μετατροπή των εσωτερικών τάσεων μπορούν να οδηγήσουν σε απώλεια ισορροπίας κάτω από μία συνεχή φόρτιση, η οποία είναι σημαντικά μικρότερη από την ελαστική φόρτιση κάμψης (επονομαζόμενου και ως ερπυσμού κάμψης). Εναλλακτικά, οι παραμορφώσεις ερπυσμού μπορεί να μην οδηγούν αναγκαστικά σε αστοχία κάμψης αλλά μπορεί να αυξάνουν τις εσωτερικές τάσεις και να ελαττώνουν την παραμένουσα τάση του στελέχους, όταν πρόκειται να εφαρμοστούν σε αυτό πρόσθετα φορτία. Η εξάρτηση των καταπονήσεων του ερπυσμού στο επίπεδο των τάσεων, που ποικίλλουν ανάλογα με το χρόνο μαζί με τη δομική ευαισθησία σε γεωμετρικές ατέλειες οι οποίες δεν μπορούν να αποφευχθούν στην πράξη, κάνουν την ακριβή πρόβλεψη της μη-γραμμικής συμπεριφοράς των λειτουργικά διαβαθμισμένων δοκών-στηλών μια απαιτητική και δύσκολη δουλειά.

Κάποιες ερευνητικές μελέτες έχουν εστιάσει στην ιξωδοελαστική συμπεριφορά των FGSs. Οι Paulino και Jin [32,33] και Mukherjee και Paulino [34] έδειξαν ότι η αρχή της αντιστοιχίας ελαστικότητας-ιξωδοελαστικότητας μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση των FGSs. Ωστόσο, αυτή η αρχή βρήκε εφαρμογή μόνο στις απλές δομές με ενιαίο χρόνο χαλάρωσης κι όπου υπάρχει κλειστού τύπου λύση του αντίστοιχου ελαστικού προβλήματος.

Όμως, η εφαρμογή της αντίστοιχης αρχής για υλικά με πολλαπλούς χρόνους χαλάρωσης (απαιτείται να εφαρμοστούν πειραματικά δεδομένα) ή για περιπτώσεις όπου οι κλειστού τύπου λύση του ελαστικού προβλήματος είναι δύσκολο να επιτευχθεί, μπορεί να εμφανίσει προβλήματα. Περαιτέρω όρια της αρχής της ιξωδοελαστικής αντιστοιχίας που περιλαμβάνουν περιορισμούς πάνω στα ιξωδοελαστικά χαρακτηριστικά των υλικών και στις οριακές συνθήκες συζητήθηκαν από τους Jin [35] και Paulino και Jin [32], οι οποίοι

αποκαλύπτουν την ανάγκη για γενική μοντελοποίηση και προσεγγίσεις επίλυσης. Ο Hilton μόνος του [21] και με άλλους [36] μελέτησαν την υλική μοντελοποίηση των ιξωδοελαστικών FGMs συμπεριλαμβανομένης και της ανάπτυξης μιας διαδικασίας βελτιστοποίησης για το σχεδιασμό τους. Ακόμα, χωρίς ακριβή αναφορά στη δομική μοντελοποίηση και στην ανάλυση, ο Pan κι άλλοι [37] χρησιμοποίησαν την προσέγγιση των πεπερασμένων στοιχείων για να διερευνήσουν τη διαρροή και συμπεριφορά θραύσης των ιξωδοελαστικών FGMs, και οι Khan και Muliana [38] μελέτησαν το χαρακτηρισμό των θερμο-ιξωδοελαστικών υλικών των FGMs, όπου η συνεχής μεταβολή των θερμικών και μηχανικών ιδιοτήτων προσεγγίζεται σα συνάθροιση ομογενών επιστρώσεων.

Ο Chen κι άλλοι [39] παρουσίασαν μία τμηματική ανάλυση δοκού φτιαγμένης από ιξωδοελαστικά FGMs. Ακόμα, χωρίς γενίκευση του μοντέλου για διάφορους νόμους ερπυσμού και χωρίς εξέταση της γεωμετρικής μη-γραμμικότητας, ο Hilton [40] διερεύνησε την πιθανότητα αστοχίας των ιξωδοελαστικών λειτουργικά διαβαθμισμένων στηλών κάτω από δυναμική φόρτιση αλλά χωρίς λεπτομερή περιγραφή της μεταβολής των τάσεων και των παραμορφώσεων με το χρόνο κάτω από συνεχή φόρτιση. Άλλες ερευνητικές μελέτες έχουν επικεντρωθεί στην απόκριση ερπυσμού κάμψης των λειτουργικά διαβαθμισμένων περιβλημάτων [41].

Αυτή η εργασία στοχεύει να παράσχει γνώση για την ιξωδοελαστική καμπτική κι ερπυσμού από κάμψη συμπεριφορά των δοκών-στηλών που κατασκευάζονται από FGMs μέσω της ανάπτυξης ενός γενικού θεωρητικού μοντέλου και αριθμητικών εργαλείων για την ιξωδοελαστική τους ανάλυση. Ο χαρακτηρισμός των ιδιοτήτων των υλικών βασίζεται στη βασική υπόθεση ότι η μικροσκοπική κλίμακα μήκους είναι πολύ μεγαλύτερη από τη μοριακή κλίμακα, αλλά ταυτοχρόνως πολύ μικρότερη από το χαρακτηριστικό μήκος του μακροσκοπικού δείγματος [16]. Έτσι, το ετερογενές FGM μπορεί να αντιμετωπιστεί σα συνεχές στη μικροσκοπική κλίμακα, ενώ οι μακροσκοπικές δραστικές ιδιότητες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για κάθε σημείο του υλικού διαμέσου του πάχους, μαζί με την υποτιθέμενη μεταβολή της ομαλότητας στην κατεύθυνση της διαβάθμισης.

Στο μικροσκοπικό επίπεδο ο κλασικός ρόλος του μίγματος που χρησιμοποιείται εδώ είναι η αξιολόγηση των δραστικών ιδιοτήτων των υλικών, ενώ η θεωρία της πλαστικοποίησης υιοθετείται για το μακροσκοπικό επίπεδο. Με αυτή τη λογική το μοντέλο θεωρεί το λειτουργικά διαβαθμισμένο στέλεχος σα σύνθετο μέλος με βαθμιαία διακύμανση του λόγου έντασης των συστατικών του δια μέσου του βάθους. Ο ερπυσμός υπολογίζεται μέσω της αρχής της υπέρθεσης του Boltzmann [42], η οποία αποφέρει ένα γενικευμένο ρεολογικό μοντέλο Maxwell, μετά την επέκταση της συνάρτησης χαλάρωσης σε ακολουθία Dirichlet. Το μοντέλο επεξηγεί τη γεωμετρική μη-γραμμικότητα μέσω των κινηματικών σχέσεων

μεγάλων παραμορφώσεων. Επιπρόσθετα, η εργασία επικεντρώνει στη διαβάθμιση των υλικών μέσω του βάθους του τμήματος μόνο. Στη βιβλιογραφία υπάρχουν κι άλλες παραδοχές για τη μοντελοποίηση και την ανάλυση του ερπυσμού.

Οι δοκιμασίες που σχετίζονται με την ιξωδοελαστική μοντελοποίηση και την ανάλυση των λειτουργικά διαβαθμισμένων δοκών και δοκών-στηλών έχει συζητηθεί, κι έχει αναπτυχθεί ένα γενικό θεωρητικό μοντέλο για τη μη-γραμμική τους ανάλυση. Ένα ρεολογικό ιξωδοελαστικό μοντέλο που βασίζεται σε μία διαφορική μορφή της αρχής του Boltzmann αφού πρώτα είχε υιοθετηθεί η διεύρυνση της συνάρτησης σε ακολουθία Dirichlet. Επιπροσθέτως, εξαιτίας της πιθανής, ισχυρής μη-γραμμικότητας σχετιζόμενης με διάφορα ιξωδοελαστικά χαρακτηριστικά των συστατικών υλικών έχει προταθεί να αξιολογηθούν οι σταθερές του ελατηρίου και του αποσβεστήρα στο ρεολογικό μοντέλο χρησιμοποιώντας τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων σε έναν αριθμό επιλεγμένων σημείων κατά βάθος της δοκού με συνάρτηση παρεμβολής. Οι δυνατότητες του μοντέλου να διαχειρίζεται διάφορα ιξωδοελαστικά υλικά, τη γεωμετρική μη-γραμμικότητα και διάφορα συστήματα φόρτισης έχουν επιδειχθεί μέσω αριθμητικών παραδειγμάτων.

Τα αποτελέσματα της αριθμητικής μελέτης έχουν δείξει ότι η απόκριση ερπυσμού των λειτουργικά διαβαθμισμένων δοκών υπό κάμψη σχετίζεται με τη μετατόπιση του ουδέτερου άξονα, η οποία οδηγεί σε μία σημαντική ανακατανομή των πιέσεων και των τάσεων με το χρόνο. Επίσης οδηγεί σε διαφορετική ενίσχυση ερπυσμού των πιέσεων και των τάσεων με το χρόνο, οι οποίες απαιτούν ιδιαίτερη προσοχή στο σχεδιασμό και στην ανάλυση των λειτουργικά διαβαθμισμένων δοκών.

Επιπλέον, έχει δειχθεί ότι σε αντίθεση με τις δομές που κατασκευάζονται από ομογενή υλικά, η απόκριση ερπυσμού κάμψης των λειτουργικά διαβαθμισμένων δοκών-στηλών μπορεί να εξαρτηθεί αποφασιστικά από την κατεύθυνση της εκκεντρικότητας της θλιπτικής φόρτισης σε σχέση με το στιγμιαίο ουδέτερο άξονα. Έτσι, οι λειτουργικά διαβαθμισμένες δοκοί-στήλες μπορούν να σχεδιαστούν αποτελεσματικά έτσι ώστε να αποφευχθούν αστοχίες ερπυσμού κάμψης όταν είναι γνωστή η εκκεντρικότητα της φόρτισης. Ο λογάριθμος του χρόνου για την πρόκληση αστοχίας ερπυσμού κάμψης έχει βρεθεί σχεδόν διγραμμικά ανάλογος του επιπέδου της εφαρμοζόμενης φόρτισης.

Συμπερασματικά, το αναλυτικό μοντέλο που προτείνεται, τοποθετεί μια θεωρητική πλατφόρμα για την ιξωδοελαστική ανάλυση των λειτουργικά διαβαθμισμένων δοκών-στηλών κι άλλων λειτουργικά διαβαθμισμένων δομών. Επίσης επεξηγεί γνωρίσματα της δομικής συμπεριφοράς και ρίχνει φως στα χαρακτηριστικά ερπυσμού των λειτουργικά διαβαθμισμένων υλικών. Ακόμα, πρέπει να διερευνηθούν περεταίρω όψεις της συμπεριφοράς που περιλαμβάνουν μη-γραμμικότητα του υλικού, θερμοκρασία κι άλλες επιδράσεις οι οποίες

μπορούν να προστεθούν στις ιδέες και στα αποτελέσματα της μοντελοποίησης αυτής της εργασίας. **[15]**

13 Προβλήματα Στρέψης Στην Ελαστικότητα Κυκλικής Ατράκτου

Γενικά για τη στρέψη: Η στρέψη είναι ένα από τα είδη των απλών καταπονήσεων στα οποία καταπονούνται συνήθως ράβδοι, αλλά και δοκοί. Μια ράβδος καταπονείται σε στρέψη, όταν επάνω σε αυτήν επενεργούν ζεύγη δυνάμεων ίσων μέτρων και αντίθετων φορών που τα επίπεδα τους είναι κάθετα στον κεντροβαρικό της άξονα.

Τα ζεύγη των δυνάμεων αυτών προκαλούν σε κάθε διατομή της ράβδου ροπή που ονομάζεται ροπή στρέψης ή και στρεπτική ροπή. Η ροπή στρέψης συμβολίζεται με το καμπύλο διάνυσμα M_t .Θέτοντας τα δάκτυλα του δεξιού χεριού ώστε να δείχνουν κατά τη φορά της, ο αντίχειρας δείχνει κάθετα στο επίπεδο του καμπύλου της διανύσματος. Έτσι προκύπτει το χαρακτηριστικό διάνυσμα της ροπής, το οποίο επειδή έχει τη διεύθυνση του διαμήκους άξονα χ της ράβδου, συμβολίζεται και M_x. Η φορά της M_x συμπίπτει με τη φορά του αντίχειρα του δεξιού χεριού. Αρκεί βέβαια ένας από τους δύο συμβολισμούς. Στην περίπτωση που τα ζεύγη αυτά είναι περισσότερα από ένα, η ροπή στρέψης σε μία διατομή προφανώς με το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών όλων των ζευγών που είναι αριστερά ή δεξιά της διατομής αυτής.

Στη στρεπτική καταπόνηση, η ράβδος τείνει να περιστραφεί περί τον άξονα της. Η ροπή στρέψης M_t προκαλεί στο υλικό της ελαστικής ράβδου μόνον διατμητικές τάσεις με αποτέλεσμα να δημιουργείται μια στροφή μεταξύ των διατομών που ονομάζεται γωνία στροφής.

Η πακτωμένη ράβδος, στην οποία επενεργεί το ζεύγος των δυνάμεων P, καταπονείται σε στρέψη ,από ροπή στρέψης $M_t = P\,d = M_t = P\,a$. Το Δ.Ε.Σ παρέχει το πλεονέκτημα, η στρεπτική ροπή στο αριστερό της άκρο να φαίνεται σαν εξωτερική ροπή. Αν στη ράβδο ασκείται η μια μόνον από τις δύο δυνάμεις P, η αριστερόστροφη ροπή στρέψης $M_{t'}$, θα ήταν $M_{t'} = P\left(\frac{d}{2}\right) = \frac{M_t}{2}$.

Τα δύο προβλήματα που αντιμετωπίζουμε στην καταπόνηση της στέψης είναι τόσο ο προσδιορισμός των διατμητικών τάσεων τ, οι οποίες ονομάζονται ειδικότερα και τάσεις στρέψης, όσο και ο υπολογισμός της γωνίας στροφής των διατομών, που αντιπροσωπεύει την προκαλούμενη παραμόρφωση. Προκειμένου να μελετηθεί και αναλυτικά η καταπόνηση αυτή, γίνονται οι εξής απλοποιητικές παραδοχές:

- Όλες οι διατομές της ράβδου παραμένουν επίπεδες και μετά την παραμόρφωση. Επίσης διατηρούν το σχήμα , το μέγεθος, καθώς και τη μεταξύ τους απόσταση.
- Κάθε διατομή περιστρέφεται σαν απόλυτα στερεός δίσκος, δηλαδή σαν σύνολο,

επομένως οι ακτίνες παραμένουν ευθείες.

- Το υλικό της ράβδου είναι ομογενές και ισότροπο, ώστε οι ιδιότητες του υλικού να είναι ομοιόμορφες σε κάθε σημείο και διεύθυνση.

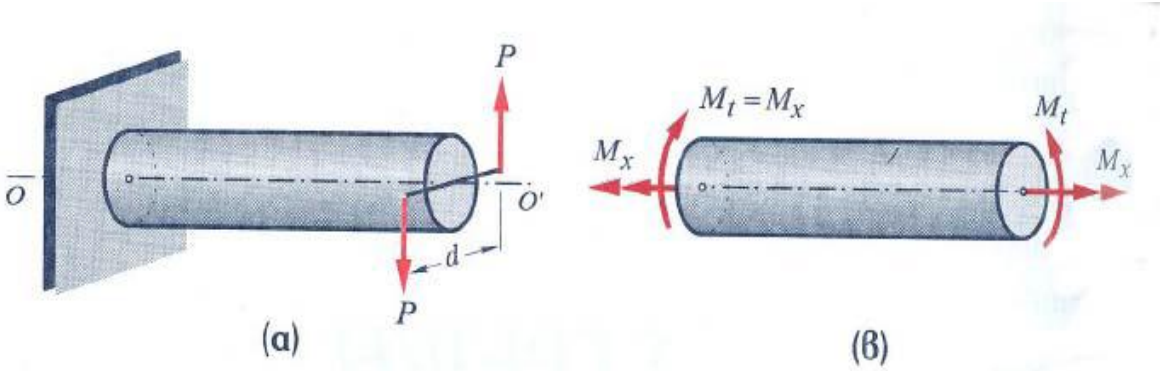
Η διατμητική τάση τ, συνδέεται με τη γωνία διάτμησης γ μέσω του μέτρου διάτμησης G με το νόμο του Hooke: $\tau = G\gamma$, γ σε rad (1.46)

Όπως υπάρχουν διαγράμματα σ-ε, υπάρχουν και αντίστοιχα διαγράμματα τ-γ.

Το μέτρο διάτμησης ή ολίσθησης G, συνδέεται με το E και με το λόγο του Poisson ν με τη σχέση:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad (1.47)$$

Παραδείγματα καταπόνησης σε στρέψη, έχουμε σε άξονες(ατράκτους) μηχανών κοίλους ή μη , όπως επίσης και ολόκληρων κτιρίων σε περίπτωση οριζόντιων σεισμικών δυνάμεων. Η καταπόνηση σε στρέψη παρατηρείται επίσης στην περίπτωση που ευθείες επενέργειας των δυνάμεων δεν διέρχονται από τον κεντροβαρικό άξονα της ράβδου, όπως συμβαίνει σε μία έκκεντρα φορτιζόμενη δοκό. Πολλές φορές επίσης, συνυπάρχει με άλλες καταπονήσεις, όπως με κάμψη, εφελκυσμό. Η καταπόνηση σε στρέψη στη γενική της περίπτωση είναι αρκετά πολύπλοκη. Την εντατική κατάσταση ράβδου τυχαίας διατομής που καταπονείται σε στρέψη την πρώτο μελέτησε ο Saint Venant (1853) **[43]**



(α) Ανάπτυξη στρεπτικής ροπής σε πακτωμένη ράβδο (β) Διάγραμμα ελευθέρου σώματος **[44]**

14 Στρέψη Ράβδου Κυκλικής Διατομής

Η διατμητική τάση τ, καθώς και η παραμόρφωση γ σε ράβδο κυκλικής διατομής τυχαίας ακτίνας r και εξωτερικής R, λόγω στεπτικής M_t ,είναι:

$$\tau = \frac{M_t}{I_p}, \quad \gamma = \frac{\varphi}{l\,r}, \quad 0 \le r \le R$$

όπου I_p είναι η πολική ροπή αδράνειας της κυκλικής διατομής , που αναλόγως είναι :

− Για συμπαγή διατομή ακτίνας R: $I_p = \frac{\pi R^4}{2}$

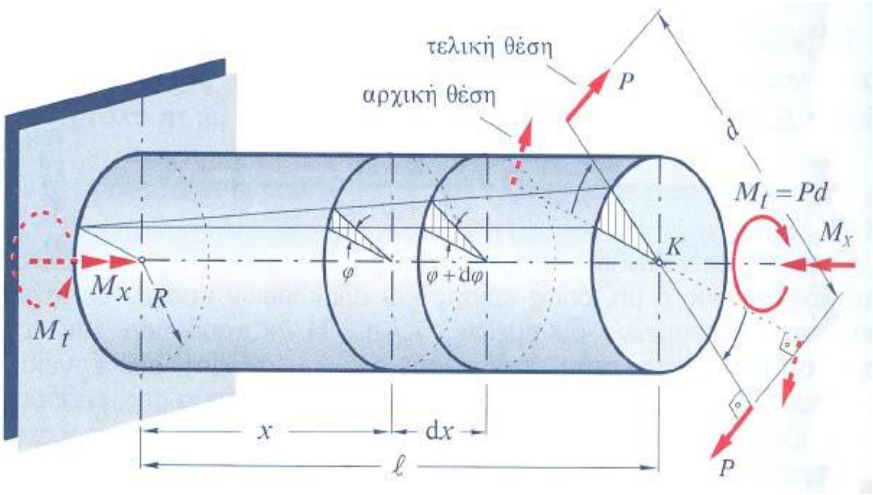
− Για κοίλη, εσωτερικής ακτίνας ρ και εξωτερικής R: $I_p = \frac{\pi (R^4 - \rho^4)}{2}$

− Για λεπτότοιχο σωλήνα πάχους t και μέσης ακτίνας r_m : $I_p \approx 2\pi r3mt$

Το παραμορφωσιακό αποτέλεσμα της στρέψης, είναι η συστροφή των διατομών μεταξύ τους κατά γωνία φ. Έτσι η σχετική γωνία στροφής φ για δυο διαδοχικά σημεία Α,Β που απέχουν l είναι:

$\varphi = \frac{M_t l}{G I_p}$ (φ σε rad) ή $\frac{\varphi_B - \varphi_A}{\chi_B - \chi_A} = \frac{M_t}{G I_p}$

Καλείται ανηγμένη γωνία στροφής θ (σε rad/m): $\theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{\varphi}{l} = \frac{M_t}{G I_p}$



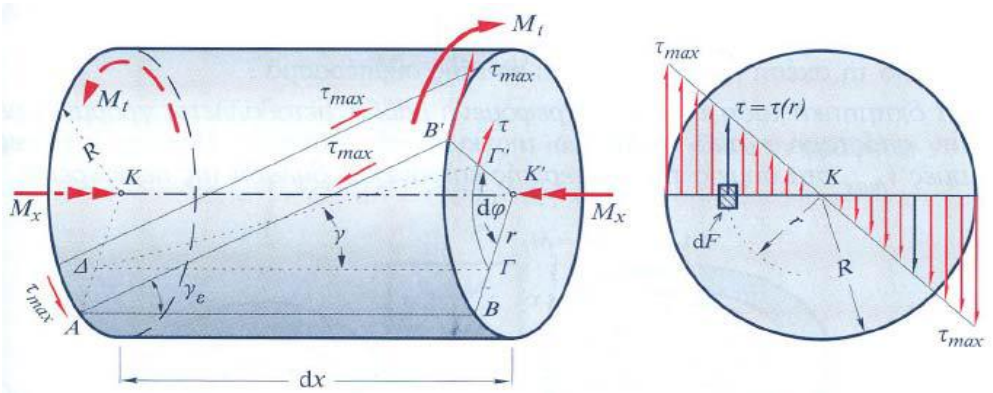
Στρέψη από δεξιόστροφη ροπή ζεύγους **[44]**

Η μέγιστη διατμητική τάση παρατηρείται στη μεγαλύτερη ακτίνα R, δηλαδή στα σημεία της περιφέρειας, και επειδή $W_p = \frac{I_p}{R}$ είναι η πολική ροπή αντίστασης της διατομής με βάση τη σχέση: $\tau_{max} = \frac{M_t}{W_p}$

Για συμπαγή κυκλική διατομή η μέγιστη τιμή της τ_{max} καθώς και η γ_{max} αντικαθιστώντας την

$W_p = \frac{\pi R^3}{2}$ αν D η διάμετρος, είναι: $\tau_{max} = \frac{2M_t}{\pi R^3} = \frac{16 M_t}{\pi D^3}$ για $\gamma_{max} = \frac{\varphi}{l R}$

Η τ στην τυχαία ακτίνα r, συναρτήσει του G και της θ, είναι: $\tau = G\theta r$, (θ σε rad/m) διότι $\gamma = \theta r$



Στρέψη ράβδου κυκλικής διατομής και αναπτυσσόμενες διατμητικές τάσεις **[44]**

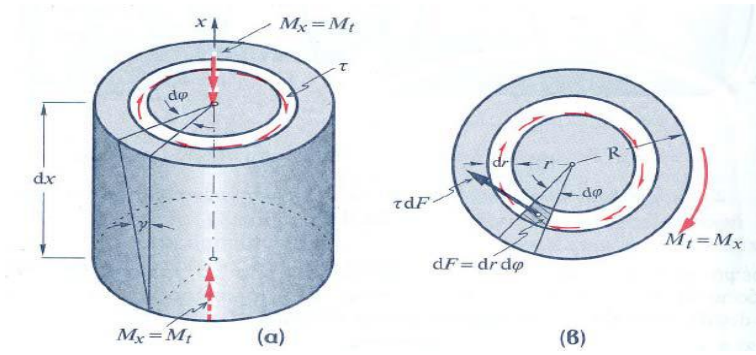
<u>Απόδειξη</u>:

Για στοιχειώδη δίσκο, η γ είναι $arc(\Gamma\Gamma') \approx \gamma(\Gamma\Delta) = \gamma\, dx = r\, d\varphi$ => $\gamma \approx \tan(\gamma) = \frac{r\, d\varphi}{dx} = r\theta$

Η διατμητική δύναμη σε διατομή dA είναι $\tau\, dA$ και η ροπή της ως προς το K είναι $(\tau\, dA) r$

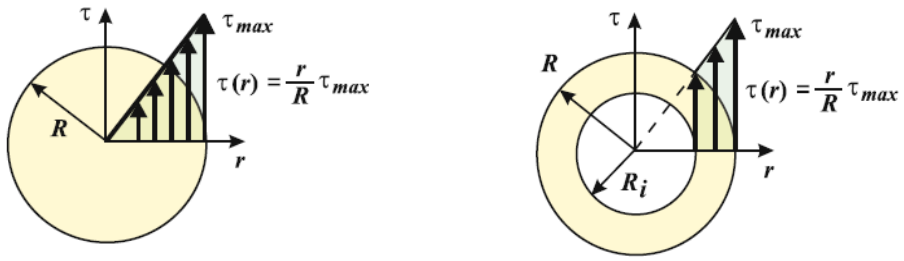
Η συνολική ροπή προκύπτει ολοκληρώνοντας. Από την ισορροπία των ροπών έχουμε:

$$M_t - \int_A (\tau\, dA) r = 0 \quad => \quad M_t = \int_A r(Gr\theta dA) = G\theta \int_A r^2 dA = G\theta I_p$$



Στρέψη σε στοιχειώδη ράβδο κυκλικής διατομής **[44]**

Αν η διατομή είναι κοίλη κυκλική ,η τ_{max} εμφανίζεται και πάλι στην εξωτερική περιφέρεια ακτίνας R ενώ η τ_{min} ($\neq 0$) στην εσωτερική ακτίνας ρ. Η φ_B-φ_A συμβολίζεται και $\varphi_{B/A}$ ή φ_{AB}. Η πάκτωση θεωρείται αμετακίνητη αλλά και άστρεπτη. Για τη γωνία στροφής φ, δεχόμαστε τη σύμβαση που ισχύει και για τις στρεπτικές ροπές ,ότι η θετική ροπή δημιούργει θετική γωνία στροφής, ενώ η αρνητική δημιουργεί αρνητική. Έτσι για δεξιο εξεταζόμενο άκρο η θετική ροπή δημιουργεί αριστερόστροφη γωνία, ενώ η αρνητική δεξιόστροφη. Για να προκύπτουν μεγάλες τιμές της I_p πρέπει η κατανομή της επιφάνειας να είναι όσο γίνεται πλησιέστερα στην περιφέρεια της παρά στο κέντρο της. Για το λόγο αυτό, οι κοίλες διατομές είναι αισθητά οικονομικότερες έναντι των συμπαγών, καθόσον επιτυγχάνουν καλύτερη εκμετάλλευση υλικού. Το G εκφράζει την ποιοτική αντίσταση του υλικού αφού εξαρτάται μόνον από αυτό, η δε I_p την ποσοτική του αντίσταση. Το γινόμενο GI_p εκφράζει τη συνολική αντίσταση της συγκεκριμένης ράβδου. Το γινόμενο $G I_p$ ονομάζεται μέτρο δυστρεψίας, ενώ το $\frac{M_{t'}}{\varphi} = \frac{G I_p}{l}$ (Nm/rad) ονομάζεται δυστρεψία. Το μέτρο δυστρεψίας δηλαδή, είναι η ανηγμένη δυστρεψία μήκους l=1m. Σημειώνουμε ότι ενδιαφέρει το μέτρο της τ, και όχι το πρόσημο της. Διευκρινίζουμε όμως, η ότι για τον υπολογισμό της γωνίας στροφής φ, η M_t αντικαθιστάται στις ανάλογες σχέσεις με το πρόσημο της.



Ακρότατες διατμητικές τάσεις **[45]**

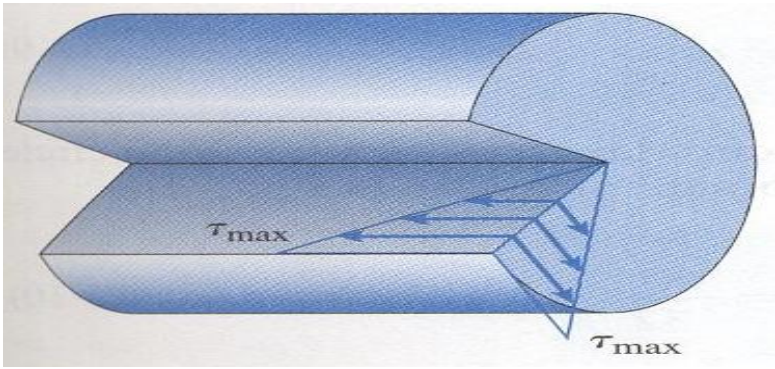
Το αποτέλεσμα της επιβολής στρεπτικής ροπής σε ράβδο κυκλικής διατομής, είναι αφενός η ανάπτυξη διατμηματικών τάσεων τ (με μέγιστη τιμή στα σημεία της περιφέρειας) και αφετέρου η δημιουργία γωνίας στροφής φ μεταξύ των δύο άκρων της, που είναι το παραμορφωσιακό αποτέλεσμα της στρέψης. Ορθές τάσεις δεν αναπτύσσονται στη στρέψη. Η ροή των διατμητικών για διαμήκη τομή, σχεδιάζεται έτσι ώστε να ισχύει ο κανόνας αμοιβαιότητας των διατμητικών τάσεων.

Για να μην αστοχεί μια ράβδος λόγω στρέψης, θα πρέπει η tmax (που εμφανίζεται στην περιφέρεια) να μην υπερβαίνει μια επιτρεπόμενη τιμή $\tau_{\varepsilon\pi}$ (που εξαρτάται από το υλικό της) , δηλαδή: $\tau_{max} \leq \tau_{\varepsilon\pi}$ (συνθήκη αντοχής).Επίσης θα πρέπει και η ανηγμένη γωνία στροφής θ, να μην υπερβαίνει μία επιτρεπόμενη τιμή θεπ δηλαδή: $\theta \leq \theta_{\varepsilon\pi}$ (παραμορφωτική συνθήκη).

Πρέπει δηλαδή να ικανοποιούνται συγχρόνως οι δύο παρακάτω συνθήκες: $\tau = \tau_{\varepsilon\pi}$ και $\theta \leq \tau_{\varepsilon\pi}$ (1.48)

Τιμές των $\tau_{\varepsilon\pi}$ και $\theta_{\varepsilon\pi}$ δίνονται από Πίνακες. Για τον χάλυβα για παράδειγμα η $\theta_{\varepsilon\pi}$ είναι 0.25°/m Ειδικά για την $\tau_{\varepsilon\pi}$ ελλείψει άλλων στοιχείων για όλκιμα υλικά μπορούμε σε πρώτη προσέγγιση να λαμβάνουμε: $\tau_{\varepsilon\pi}$=(0.55 εώς 0.8) $\sigma_{\varepsilon\pi}$ (1.49)

Αν στην (1.48) αντικαταστήσουμε τις $\tau_{\varepsilon\pi}$ και $\theta_{\varepsilon\pi}$ και τις λύσουμε ως προς M_t,προκύπτουν δύο τιμές της, από τις οποίες προφανώς επιλέγουμε τη δυσμενέστερη περίπτωση, δηλαδή τη μικρότερη M_t. Αυτή είναι και η μέγιστη επιτρεπόμενη τιμή της στρεπτικής ροπής που μπορεί με ασφάλεια να φέρει η ράβδος, και που συνεπώς χαρακτηρίζει την φορτοϊκανότητα της σε στρέψη. Αντίστροφα, με γνωστά τα $\tau_{\varepsilon\pi}$, $\theta_{\varepsilon\pi}$ η απαιτούμενη τιμή της διαμέτρου ώστε η ράβδος να φέρει με ασφάλεια την M_t ,ονομάζεται διαστασιολόγηση. **[43]**



Ροή επιμηκών και εγκάρσιων διατμητικών τάσεων στη ράβδο **[45]**

15 Στρέψη Κυκλικής Μεταβλητής Διατομής

<u>Στρέψη σε κατά τμήματα σταθερή κυκλική διατομή:</u>

Όταν ράβδος είναι κατά τμήματα πρισματική (Σχ. α), η $M_{t\Gamma}$ καταπονεί τόσο το τμήμα ΑΒ ή (1), όσο και το ΒΓ ή (2), ενώ η M_{tB} καταπονεί μόνον το (1). Η συνολική γωνία στροφής του άκρου Γ ως προς το (άστρεπτο) Α, είναι:

$$\varphi_{\Gamma/A} = \varphi_{\Gamma} - \varphi_{B} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{M_{t_i} l_i}{G_i I_{p_i}}\right) \quad , \; i=1,2,3,...$$

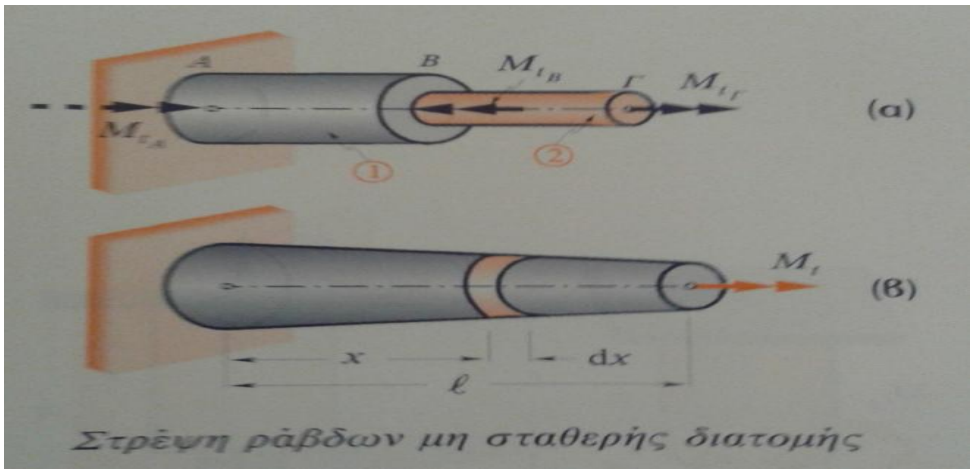
Με τον όρο M_{ti} εννοούμε τη στρεπτική ροπή του i τμήματος, που είναι εν γένει διαφορετική της M_{ti+1}. Οι M_{ti} προσδιορίζονται με τη μέθοδο των τομών. Έτσι, για τομή μεταξύ Β και Γ, εξετάζοντας το δεξιά της τομής όπου δρα η $M_{t\Gamma}$, που επειδή ‘’φαίνεται σαν να εφελκύει’’ θεωρείται θετική. Άρα $M_{t2}=M_{t\Gamma}$. Για τομή μεταξύ Α,Β, εξετάζοντας το δεξιό τμήμα, η $M_{t\Gamma}$ είναι θετική, ενώ η M_{tB} "φαίνεται σαν να θλίβει τη διατομή". Έτσι είναι: $M_{t_1} = M_{t_\Gamma} - M_{t_B}$.

Η αντίδραση M_{tA} υπολογίζεται από την ισορροπία των στρεπτικών ροπών:

$$\sum M_t : M_{t_A} - M_{t_\Gamma} + M_{t_B} = 0$$

Οι μέγιστες τάσεις βέβαια, προκύπτουν διαφορετικές στα (1) και (2) και είναι:

$$\tau_1 = \frac{M_{t_1} R_1}{J_1} \quad , \quad \tau_2 = \frac{M_{t_2} R_2}{J_2}$$ **[43]**



α) αγωγός με κατά τμήματα σταθερή διατομή β) αγωγός με μεταβλητή διατομή

Στρέψη ράβδου μεταβλητής διατομής:

Όταν μεταβάλλεται η διατομή (Σχ. β), μεταβάλλεται και η πολική ροπή αδρανείας της, δηλαδή είναι $I_p(x)$. Σε τυχαία απόσταση x θεωρούμε στοιχειώδη κυκλικό δίσκο μήκος dx και (μεταβλητής) ακτίνας r(x) (που εξαρτάται δηλαδή από την απόσταση x). Αν ασκείται και μεταβλητή ροπή $M_t(x)$, έχουμε:

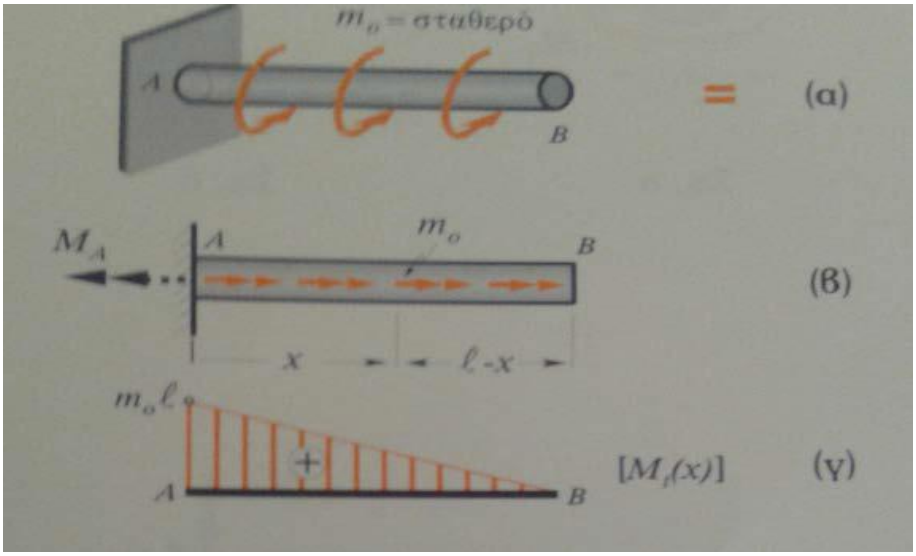
-Η διατμητική τάση, είναι: $\tau(\chi)=\frac{M_t(x)}{I_p(x)}r(x)=\frac{M_t(x)}{W_p(x)}$

Η μέγιστη διατμητική τάση, παρατηρείται εκεί που ο συνδυασμός $\frac{M_t(x)}{W_p(x)}$ δίνει μέγιστη τιμή.

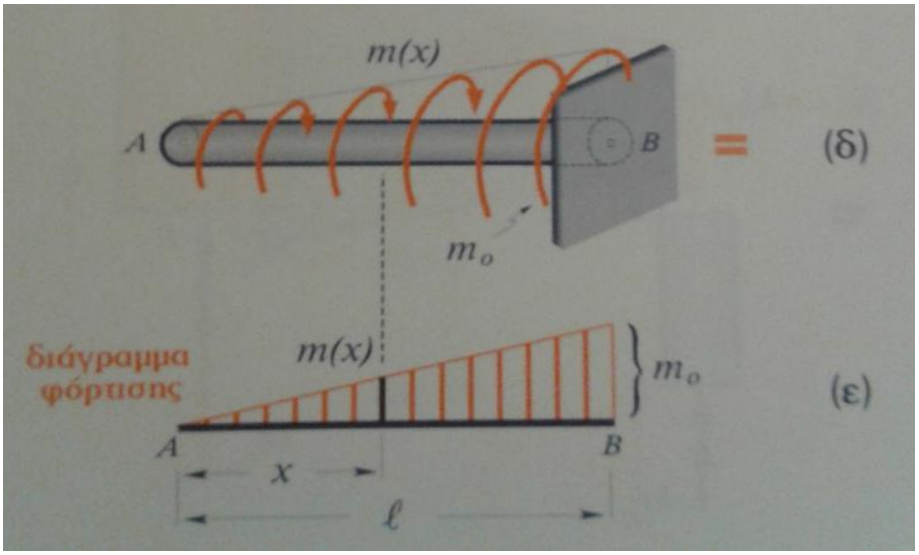
Για $M_t(x)$=σταθερό, αυτό προφανώς προκύπτει στην ελάχιστη ακτίνα, που είναι στο ελεύθερο άκρο του προβόλου (Σχ. β).

-Η στοιχειώδης γωνία στροφής dφ, είναι $d\varphi=\frac{M_t(x)}{G\,I_p(x)}dx$, οπότε σε μήκος l είναι: $\varphi=\int_0^l(\frac{M_t(x)}{G\,I_p(x)})dx$

- Αν προέρχεται από κατανομή στρεπτικών ροπών m(x) σε μήκος x, είναι: $M_t(x)=m(x)\,x$
- Αν η m_0=σταθ. (Σχ. α,β), είναι: $M_t(x)=m_0\,x$ (Σχ. γ).
- Για τριγωνική φόρτιση (Σχ. δ,ε) με μέγιστη τιμή m_0, είναι: $m(x)=(\frac{m_0}{l})\,x$ **[43]**



Ομοιόμορφη φόρτιση: m_0= σταθερό



Τριγωνική φόρτιση: m_0=max

16 Άτρακτοι Με Κλειστή Λεπτότοιχη Διατομή

Έχουμε μάθει ότι για τον προσδιορισμό των τάσεων σε μη κυκλικά στελέχη γενικά απαιτείται η χρήση αναπτυγμένων μαθηματικών μεθόδων. Στην περίπτωση όμως των λεπτότοιχων κοίλων μη κυκλικών αγωγών, μία καλή προσέγγιση της κατανομής των τάσεων μες στον αγωγό μπορεί να επιτευχθεί με έναν απλό υπολογισμό.

Θεωρούμε ένα κοίλο κυλινδρικό στέλεχος ενός μη κυκλικού τμήματος που υποβάλλεται σε στρεπτική φόρτιση. Ενώ το πάχος t του τοιχώματος μπορεί να ποικίλλει μέσα σε μία εγκάρσια τομή εμείς θα θεωρήσουμε ότι αυτό παραμένει μικρό συγκρινόμενο με τις άλλες διαστάσεις του στελέχους. Θα αποσπάσουμε από αυτό το τμήμα AB του τοιχώματος που οριοθετείται από δύο εγκάρσια επίπεδα σε απόσταση Δx μεταξύ τους κι από δύο επιμήκη επίπεδα κάθετα στο τοίχωμα. Από τη στιγμή που το κομμάτι AB βρίσκεται σε ισορροπία, το σύνολο των δυνάμεων που ασκούνται πάνω του κατά μήκος της κατεύθυνσης x πρέπει να είναι μηδέν. Όμως οι μόνες δυνάμεις που εμπλέκονται είναι οι διατμητικές δυνάμεις F_A και F_B που ασκούνται στα άκρα του τμήματος AB.

Έχουμε λοιπόν

$$\Sigma F_x = 0 \; : \; F_A - F_B = 0 \quad (3.45)$$

Τώρα θα εκφράσουμε την F_A ως γινόμενο της επιμήκους διατμητικής τάσης τ_A στη μικρή πλευρά του A και της περιοχής t_A Δx αυτής της πλευράς:

$$F_A = \tau_A (t_A \Delta x) \quad (3.46)$$

Παρατηρούμε ότι ενώ η διατμητική τάση είναι ανεξάρτητη από τη συντενταγμένη x του σημείου που θεωρούμε, μπορεί ωστόσο να διαφέρει κατά πλάτος του τοιχώματος. Η τ_A επομένως αντιπροσωπεύει τη μέση τιμή της τάσης που υπολογίζεται σε όλο το τοίχωμα. Εκφράζοντας ομοίως την F_B κι αντικαθιστώντας τις F_A και F_B στην εξίσωση (3.45) γράφουμε

$$\tau_A (t_A \Delta x) - \tau_B (t_B \Delta x) = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_A t_A = \tau_B t_B \quad (3.47)$$

Από τη στιγμή που τα A και B επιλέχτηκαν αυθαίρετα, η εξίσωση (3.47) εκφράζει ότι το γινόμενο τ t της επιμήκους διατμητικής τάσης τ και του πάχους του τοιχώματος t είναι σταθερό στην έκταση του στελέχους. Ονομάζοντας αυτό το γινόμενο q, έχουμε

$$q = \tau t = const \quad (3.48).$$

Τώρα αποσπούμε ένα μικρό στοιχείο από το τμήμα ΑΒ του τοιχώματος. Απ' τη στιγμή που οι πάνω και κάτω πλευρές του στοιχείου είναι μέλη της ελεύθερης επιφάνειας του κοίλου στελέχους, οι τάσεις σε αυτές τις πλευρές είναι ίσες με μηδέν.

Ισχύει ότι η διατμητική τάση σε κάθε σημείο της εγκάρσιας τομής του κούφιου μέλους είναι παράλληλη προς την επιφάνεια του τοιχώματος και η μέση τιμή της υπολογιζόμενη σε όλο το τοίχωμα ικανοποιεί την εξίσωση (3.48).

Σε αυτό το σημείο μπορεί να παρατηρήσουμε μια αναλογία μεταξύ της κατανομής της διατμητικής τάσης τ στην εγκάρσια τομή του λεπτότοιχου κοίλου άξονα και της κατανομής των ταχυτήτων v στο νερό που ρέει μέσα σε κλειστό κανάλι μονάδας βάθους και μεταβλητού πλάτους. Ενώ η ταχύτητα v του νερού ποικίλλει από σημείο σε σημείο εξαιτίας της μεταβολής στο πλάτος t του καναλιού, ο ρυθμός της ροής $q = v\,t$ παραμένει σταθερός μέσα στο κανάλι όπως η ποσότητα τ t της εξίσωσης (3.48). Εξαιτίας αυτής της αναλογίας, το γινόμενο $q = \tau\,t$ αναφέρεται και ως ροή τάσης του τοιχώματος του κούφιου άξονα.

Τώρα θα εξαγάγουμε μία σχέση μεταξύ της στρεπτικής ροπής M που εφαρμόζεται σε ένα κοίλο στέλεχος και της ροής τάσης q στο τοίχωμα αυτού. Θεωρούμε ένα μικρό στοιχείο του τμήματος του τοιχώματος, μήκους ds.

Η επιφάνεια του στοιχείου είναι $dA = t\,ds$ και το μέγεθος της διατμητικής δύναμης dF που ασκείται στο στοιχείο είναι

$$dF = \tau\,dA = \tau(t\,ds) = (\tau\,t)\,ds = q\,ds \qquad (3.49)$$

Η στοιχειώδης dM_0 αυτής της δύναμης γύρω από ένα αυθαίρετο σημείο O μέσα στην κοιλότητα του στελέχους μπορεί να υπολογιστεί πολλαπλασιάζοντας το dF επί την κατακόρυφη απόσταση p από το σημείο O μέχρι το φορέα της dF. Έχουμε

$$dM_0 = p\,dF = p(q\,ds) = q(p\,ds) \qquad (3.50)$$

Όμως το γινόμενο p ds είναι ίσο με το διπλάσιο του χωρίου dQ του τριγώνου που σχηματίζεται από το ds και τις αποστάσεις των άκρων του στοιχείου από το σημείο O. Έτσι έχουμε

$$dM_0 = q(2\,dQ) \qquad (3.51)$$

Από τη στιγμή που το ολοκλήρωμα γύρω απ' το τμήμα του τοιχώματος στο αριστερό μέλος της εξίσωσης (3.51) αντιπροσωπεύει το άθροισμα όλων των στοιχειωδών διατμητικών

δυνάμεων που ασκούνται πάνω στο τμήμα του τοιχώματος κι απ' τη στιγμή που αυτό το άθροισμα είναι ίσο με τη ροπή που εφαρμόζεται στο κούφιο στέλεχος, έχουμε

$$M = \oint dM_0 = \oint q(2dQ)$$

Η ροή τάσης q είναι σταθερά, άρα γράφουμε

$$M = 2\,q\,Q \quad (3.52)$$

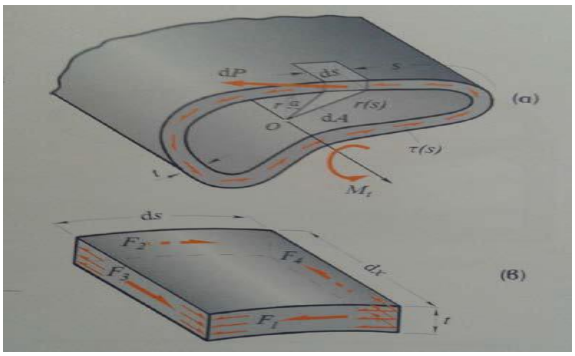
όπου Q είναι η περιοχή που εσωκλείεται από τη μέση γραμμή της διατομής του τοιχώματος. Η διατμητική τάση σε κάθε δεδομένο σημείο του τοιχώματος μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει της ροπής M εάν αντικαταστήσουμε το q από την εξίσωση (3.48) στην (3.52) κι επιλύσουμε ως προς τ στην προκύπτουσα εξίσωση. Έχουμε λοιπόν

$$\tau = \frac{M}{2tQ} \quad (3.53)$$

όπου t είναι το πάχος του τοιχώματος στο σημείο που θεωρήσαμε και Q όπως ορίστηκε προηγουμένως. Υπενθυμίζουμε ότι η τ αντιπροσωπεύει τη μέση τιμή της διατμητικής τάσης σε όλη την έκταση του τοιχώματος. Όμως, στις ελαστικές παραμορφώσεις η κατανομή των τάσεων στο τοίχωμα μπορεί να θεωρηθεί ενιαία και η εξίσωση (3.53) θα αποφέρει την πραγματική τιμή της διατμητικής τάσης σε κάθε σημείο του τοιχώματος. Η γωνία στροφής ενός λεπτότοιχου κούφιου άξονα μπορεί να βρεθεί χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της ενέργειας. Θεωρώντας ελαστική παραμόρφωση, θα δειχθεί ότι η γωνία στροφής ενός λεπτότοιχου άξονα μήκους L και μέτρου δυσκαμψίας G είναι

$$\varphi = \frac{ML}{4Q^2G} \oint \left(\frac{ds}{t}\right) \quad (3.54)$$

όπου το ολοκλήρωμα υπολογίζεται σε όλο το μήκος της μέσης γραμμής της διατομής του τοιχώματος. **[46]**



Χαρακτηριστικά λεπτότοιχης διατομής και τμήματος αυτής **[43]**

17 Στρέψη Κλειστής Λεπτότοιχης Διατομής

- Εισαγωγή

Πειράματα στρέψης λεπτότοιχων αγωγών παρέχουν πλήθος πλεονεκτημάτων σχετικών με τους ελέγχους ελαστικότητας για τον καθορισμό των ιδιοτήτων του ερπυσμού. Το πιο σημαντικό απ' όλα είναι ότι η μέτρηση της καταπόνησης στα πειράματα της στρέψης δεν επηρεάζεται ουσιαστικά από τις θερμικές διαστολές και συστολές οι οποίες συνοδεύουν ήσσονες θερμοκρασιακές διακυμάνσεις. Επίσης, αν το πάχος του τοιχώματος είναι μικρό συγκρινόμενο με τη διάμετρο αυτού, η διατμητική τάση πάνω στο τμήμα μπορεί να θεωρηθεί ενιαία και για σταθερή στρεπτική ροπή, αυτή η τάση παραμένει σταθερή παντού καθόλη τη διάρκεια του πειράματος. Ένα τελευταίο πλεονέκτημα για συγκεκριμένους ερευνητικούς στόχους είναι πως είναι συγκριτικά εύκολο να αντιστρέψεις την κατεύθυνση της τάσης.

Παρ' όλα αυτά τα πλεονεκτήματα, τα περισσότερα πειράματα ερπυσμού διεξάγονται με φόρτιση. Απ' την άλλη πλευρά, όλα τα δομικά μέλη υποβάλλονται σε πολυαξονικές συνθήκες τάσεων. Είναι απαραίτητο, λοιπόν, να συσχετίζουμε τη συμπεριφορά του ερπυσμού υπό συνθήκες πολυαξονικών τάσεων με τη μονοαξονική συμπεριφορά ερπυσμού η οποία συναντάται συνήθως στο εργαστήριο. Ο σκοπός αυτής της παρουσίασης είναι να βρεθεί ένας τρόπος υπολογισμού της στρεπτικής συμπεριφοράς του ερπυσμού των μη κυκλικών αγωγών από τις ιδιότητες του ελαστικού ερπυσμού των υλικών των αγωγών.

Τα πρώτα καταγεγραμμένα πειράματα ερπυσμού στρέψης κούφιων αγωγών πραγματοποιήθηκαν απ' τον Bailey [48,49] το 1929. Άλλοι πρωτοπόροι στον τομέα της έρευνας ήταν οι Everett [50,51] και Lea [52]. Ο A. E. Johnson [53-57] έχει κάνει πιθανώς την περισσότερη δουλειά σε αυτό το πεδίο από οποιονδήποτε άλλο και μάλιστα με την εξαίρεση μιας σχετικής έρευνας [58]. Ο Johnson ήταν ο μόνος ερευνητής στην ιστορία που ασχολήθηκε με μελέτες ερπυσμού στρέψης μεταξύ του 1940 και 1960. Πρόσφατα όμως έχει αναπτυχθεί ένα διεθνές αυξανόμενο ενδιαφέρον πάνω στο αντικείμενο όπως αποδεικνύεται κι απ' την εμφάνιση 6 εργασιών [59-64] τα τελευταία 3 χρόνια. Αυτό μπορεί να αποδοθεί, εν μέρει τουλάχιστον, σε αναμενόμενα προβλήματα παραμόρφωσης λόγω ερπυσμού στα πτερύγια υπερηχητικών αεροσκαφών.

Τα σωληνοειδή δείγματα που χρησιμοποιήθηκαν στις παραπάνω έρευνες ήταν σε κάθε περίπτωση κυκλικά. Αυτή η έρευνα πιστεύεται ότι ήταν η πρώτη μελέτη ερπυσμού στρέψης σε μη κυκλικούς αγωγούς.

Τα περισσότερα απ' τα πειράματα ερπυσμού στρέψης που αναφέρονται στη βιβλιογραφία, παρουσιάστηκαν σε μικρού μεγέθους δείγματα ελέγχων με διαμέτρους περίπου μισής ίντσας και υπολογισμένα μήκη περίπου 2 ιντσών. Στην πραγματικότητα, μέχρι πρόσφατα [64] δεν

είχαν αναφερθεί στοιχεία ερπυσμού στρέψης σε σωληνοειδή δείγματα μακρύτερα από 8 ίντσες ή μεγαλύτερα από 1.6 ίντσες σε διάμετρο. **[47]**

Η θεωρία της ελαστικής στρέψης σε λεπτότοιχους αγωγούς, όπως αναπτύχθηκε απ' τον Bredt **[65]** το 1896 αντιπροσωπεύει μια προσέγγιση στη γενική θεωρία ελαστικής στρέψης του Saint-Venant. Η ανάλυση του Bredt βασίστηκε σε δεδομένες παραδοχές σχετικά με τη φύση της κατανομής των τάσεων και κατέληξε σε δύο γνωστές εξισώσεις. Η πρώτη εξ αυτών που δίνει την κατανομή των τάσεων είναι

$$\tau = \frac{M}{2\mathrm{Qh}} \quad (1)$$ όπου:

- τ η διατμητική τάση

- M η στρεπτική ροπή

- Q το χωρίο που εσωκλείεται από τη μέση γραμμή του πάχους της καμπύλης C της εγκάρσιας διατομής του αγωγού

-h το πάχος του τοιχώματος

Αυτή η εξίσωση προέρχεται αποκλειστικά από μελέτες ισορροπίας και γι αυτό το λόγο θεωρείται ότι εφαρμόζεται σε συνθήκες ερπυσμού καθώς επίσης και σε ελαστικές συνθήκες. Η δεύτερη εξίσωση του Bredt, που δίνει τη γωνία στροφής του αγωγού ισχύει μόνο στα ελαστικά υλικά. Όμως η γενικευμένη μορφή της δεύτερης εξίσωσης του Bredt εφαρμόζεται σε υλικό που να ακολουθεί οποιαδήποτε θεμελιώδη εξίσωση. Αυτή η γενική μορφή της δεύτερης εξίσωσης του Bredt είναι η εξής

$$\theta = \frac{\gamma_m P}{2\mathrm{Q}} \quad (2)$$

όπου: -θ η γωνία στροφής ανά μονάδα μήκους

-γ_m μέση διατμητική φόρτιση

-P η περίμετρος της καμπύλης C

Είναι απαραίτητο να βάζουμε τη σωστή έκφραση για το γ_m σε αυτή την εξίσωση ώστε να καταστεί εφαρμόσιμη στη συμπεριφορά συγκεκριμένων υλικών κάτω από εξέταση.

Στην παρούσα περίπτωση, ας υποθέσουμε ότι η συμπεριφορά ελαστικού ερπυσμού του υλικού του αγωγού μπορεί να εκφραστεί από τον κοινό τύπο:

$\varepsilon = k\,\sigma^m t^n$ (3)

όπου: -ε η παραμόρφωση του ελαστικού ερπυσμού

-σ η μονοαξονική εφελκυστική τάση

-t ο χρόνος

-k, m και n είναι σταθερές εξαρτώμενες μόνο απ' το υλικό και τη θερμοκρασία

Η εξίσωση αυτή εφαρμόζεται μόνο για σταθερή τάση και σταθερές θερμοκρασιακές συνθήκες. Εάν εφαρμοστεί η θεωρία της οκταεδρικής διατμητικής τάσης του πολυαξονικού ερπυσμού, μπορεί αυτό να αποδειχτεί για υλικό που υπακούει στη σχέση (3), τα χαρακτηριστικά του ερπυσμού διάτμησης δίνονται από τη σχέση

$\gamma = \sqrt{3}k\,(\sqrt{3}\,\tau)^m t^n$ (4) όπου:

- γ η παραμόρφωση του ερπυσμού διάτμησης

- k, m και n είναι οι σταθερές εφελκυστικού ερπυσμού όπως ορίστηκαν από τη σχέση (3) Αντικαθιστώντας την εξίσωση (1) στην εξίσωση (4) προκύπτει:

$$\gamma = \sqrt{3}k\,(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{M}{Qh})^m t^n$$

Στην περίπτωση της στρέψης ενός λεπτότοιχου αγωγού, μια μέση τιμή για την παραμόρφωση του ερπυσμού διάτμησης μπορεί να βρεθεί εκτελώντας ολοκλήρωση αυτής της έκφρασης πάνω στο μήκος της καμπύλης C. Αυτή είναι

$$\gamma_m = \int_c(\frac{\gamma\,ds}{P}) = \sqrt{3}\frac{k}{P}\,(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{M}{Q})^m t^n \int_c(\frac{ds}{h^m}) \quad (5)$$

όπου: ds στοιχειώδες τόξο μήκους της καμπύλης C

Η εξίσωση (5) μπορεί τώρα να υπεισέλθει στην εξίσωση (2) για να δώσει τη γωνία στροφής

$$\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{k}{Q}\,(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{M}{Q})^m t^n \int_c(\frac{ds}{h^m}) \quad (6)$$

Αυτή αντιπροσωπεύει την αντίστοιχη για τον ερπυσμό της δεύτερης εξίσωσης του Bredt. Αν ο αγωγός του ζητήματος έχει ενιαίο πάχος τοιχώματος h, η εξίσωση (6) απλοποιείται ως εξής:

$$\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{P}{Q}\,k(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{M}{Qh})^m t^n \quad (7)$$

Για κυλινδρικό σωλήνα με μέση ακτίνα r_m αυτή η εξίσωση μπορεί να γραφεί ως:

$$\theta = \sqrt{3}\frac{k}{r_m}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{M}{Qh}\right)^m t^n \qquad (8)$$

Ενώ η εξίσωση (7) είναι προσέγγιση απ' την άποψη ότι προέρχεται από τις παραδοχές του Bredt σχετικά με τη φύση της κατανομής των τάσεων, η εξίσωση (8) είναι ακριβής απ' την άποψη ότι ταυτίζεται με τη λύση η οποία δεν απαιτεί αυτές τις παραδοχές. [47]

- Πειραματική διαδικασία

Ένα πρόγραμμα ελέγχου σχεδιάστηκε για να εκτιμηθεί η εφαρμοσιμότητα της εξίσωσης (7)

για διάφορα σχήματα λεπτότοιχων αγωγών. Πειράματα τάσης του ερπυσμού των υλικών των

αγωγών πραγματοποιήθηκαν για να καθορίσουμε τις σταθερές k,l και m και πειράματα στρέψης ερπυσμού των αγωγών εκτελέστηκαν για να εξαχθούν πειραματικά δεδομένα για τη σύγκριση με την εξίσωση (7). [47]

-Δείγματα

Σχεδιασμένο, συνεχές κράμα αλουμινίου 2024-T3 ειδικά για αγωγούς αποκτάται για χρήση σα δείγμα ελέγχου. Αυτό το κράμα επιλέχτηκε εξαιτίας της δεδομένης υπακοής του στην οκταδερική θεωρία των διατμητικών τάσεων [66-67] και λόγω της δυνατότητας εφαρμογής του σε σκελετούς αεροπλάνων. Τέσσερις αγωγοί για κάθε ένα από τα τέσσερα διαφορετικά σχήματα αποκτήθηκαν: κυκλικό, τετράγωνο με στρογγυλεμένες γωνίες με δύο (διαφορετικά) πάχη και ορθογώνιο με στρογγυλεμένες γωνίες.

Η διάμετρος των κυκλικών αγωγών, οι πλευρές των τετράγωνων αγωγών και η μεγαλύτερη πλευρά των ορθογώνιων αγωγών ήταν ονομαστικά 3 ίντσες και τα μήκη των σωλήνων ήταν από 7 πόδια. Για κάθε αγωγό ξεχωριστά, οι αποκλίσεις στις εξωτερικές διαστάσεις και στα πάχη δεν υπερέβαιναν τις 0.01 και 0.004 ίντσες αντίστοιχα. **[47]**

Τα γεωμετρικά στοιχεία της δακτυλιοειδούς ατράκτου που χρησιμοποιείται στο πείραμα είναι τα εξής:

- ✓ $r_m \cong 37.5mm$
- ✓ $h = 2.1\,mm = 0.083\text{in}$
- ✓ $Q = \pi R_m^2 = 0.004417\,m^2$
- ✓ $R_1 = 38.1\,mm$
- ✓ $R_2 = 37.05\,mm$
- ✓ $I_0 = \frac{\pi R_1^4}{2} - \frac{\pi R_2^4}{2} = 0.35 \cdot 10^{-6} m^4$

Β. Πειραματική Διαδικασία Προσομοίωσης Αποτελεσμάτων

1 Προσομοίωση της εξίσωσης Bredt

-Έλεγχοι στρέψης ερπυσμού

Δώδεκα πειράματα στρέψης ερπυσμού πραγματοποιήθηκαν στους 400°F, τρία για κάθε ένα από τα τέσσερα σχήματα αγωγών που είδαμε παραπάνω. Κάθε δείγμα αγωγού ήταν μήκους 7 ποδιών και τοποθετήθηκε έτσι ώστε να μπαίνει συμμετρικά μέσα σε ένα πειραματικό κλίβανο 6 ποδιών.

Οι μετρήσεις της συστροφής μεταβιβάστηκαν σε ένα μέτρο 3 ποδιών στο κέντρο.Το σύστημα μέτρησης της στροφής περιλαμβάνει σφάλματα που δεν υπερβαίνουν το 1% κι επαναλήφθηκαν ξεχωριστές μετρήσεις ακριβέστερες από $3 \cdot 10^{-6}$ακτίνια ανά ίντσα.

Οι θερμοκρασίες ήταν σταθερές εντός 1 ^{o}F μέσα σε κάθε πείραμα και ενιαίες μέσα στο μέτρο εντός 3 ^{o}F. Ο παρακάτω πίνακας απαριθμεί τις προδιαγραφές των δειγμάτων, τις ροπές και τα επίπεδα των τάσεων υπολογισμένα από την εξίσωση (1) για κάθε πείραμα. Τα πειραματικά δεδομένα του ερπυσμού παρουσιάζονται στα διαγράμματα της γωνίας στροφής ως προς το χρόνο. Επίσης δίδονται στα διαγράμματα θεωρητικές καμπύλες ερπυσμού στρέψης υπολογισμένες με την εξίσωση (7).

Για τους κυκλικούς και τους ορθογώνιους αγωγούς η συνάφεια μεταξύ θεωρίας και πειράματος είναι ικανοποιητική για τις χαμηλότερες τιμές τάσεων. Στα υψηλότερα επίπεδα τάσεων η θεωρία προβλέπει σημαντικά μικρότερο ερπυσμό απ' ότι παρατηρείται στα πειράματα.

Για τους τετράγωνους αγωγούς τοιχώματος 0.083 ιντσών η θεωρία προβλέπει μικρότερο ερπυσμό σε όλα τα επίπεδα των τάσεων απ' ότι πραγματικά, ενώ για τους τετράγωνους αγωγούς τοιχώματος 0.109 ιντσών η θεωρία προβλέπει σημαντικά περισσότερο ερπυσμό σε όλα τα επίπεδα τάσεων απ' ότι στην πραγματικότητα. Παρόλο που η σχέση θεωρίας και πειράματος είναι λογικά σύμφωνη για κάθε σχήμα αγωγού, καμία γενική σχέση δεν έιναι προφανής από όλα τα δεδομένα που συλλέχθηκαν.

Οι αποκλίσεις μεταξύ υπολογιστικών και πειραματικών αποτελεσμάτων εκτιμήθηκαν αναφορικά με την τάση. Με άλλα λόγια, για κάθε πείραμα η τάση θα έφερνε την υπολογιζόμενη καμπύλη σε μία κατά προσέγγιση σύμπτωση με τα πειραματικά στοιχεία που υπολογίστηκαν. Η διαφορά μεταξύ αυτής της τιμής και της θεωρητικής τάσης εκπεφρασμένης σε ποσοστό επί % δίνεται στον πίνακα σα "σφάλμα τάσης". **[47]**

Specimen No	Torque	Shear stress	Stress error
	in*lb	lb/in^2	Percent

Κυκλικοί αγωγοί

1	9,93	8,94	2
2	11,8	10,6	-25
3	10,9	9,82	-23

Τετράγωνοι αγωγοί τοιχώματος 0.083 ιντσών

4	11,8	8,08	-15
5	13,8	9,38	-18
6	15,6	10,7	-12

Τετράγωνοι αγωγοί τοιχώματος 0.109 ιντσών

7	16,6	8,92	31
8	18,5	9,94	30
9	14,7	7,9	23

Ορθογώνιοι αγωγοί

10	11,8	11,8	-13
11	9,35	9,35	0
12	12,8	12,8	-23

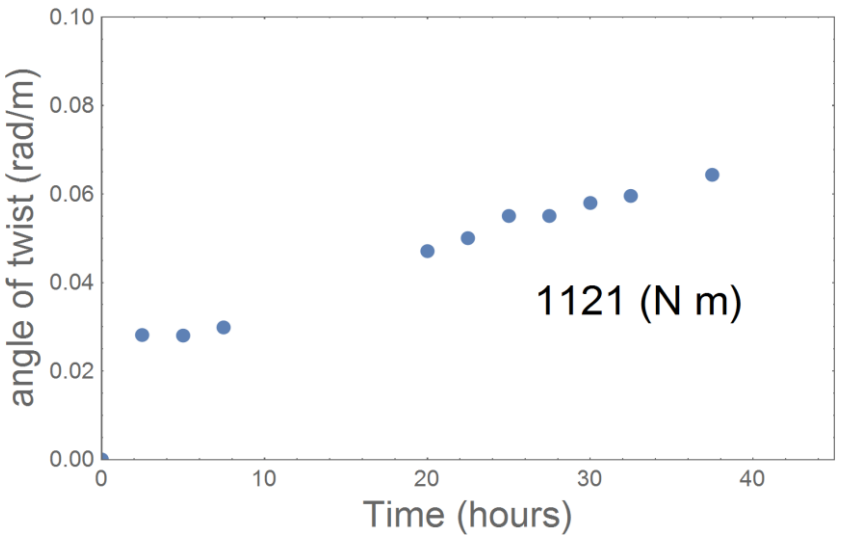
Τα πειραματικά αποτελέσματα ερπυσμού για το σωλήνα κυκλικής διατομής με βάση τη σχέση (8)

τα προσαρμόσαμε με τη μέθοδο μη-γραμμικής προσαρμογής του λογισμικού Mathematica. Οι συντελεστές k, m και n της εν λόγω εξίσωσης παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα για κάθε ροπή ξεχωριστά:

M (N*m)	k	m	n
1121	0.00022	0.0049	0.5
1231	0.0003	0.0049	0.5
1335	0.00034	0.0049	0.5

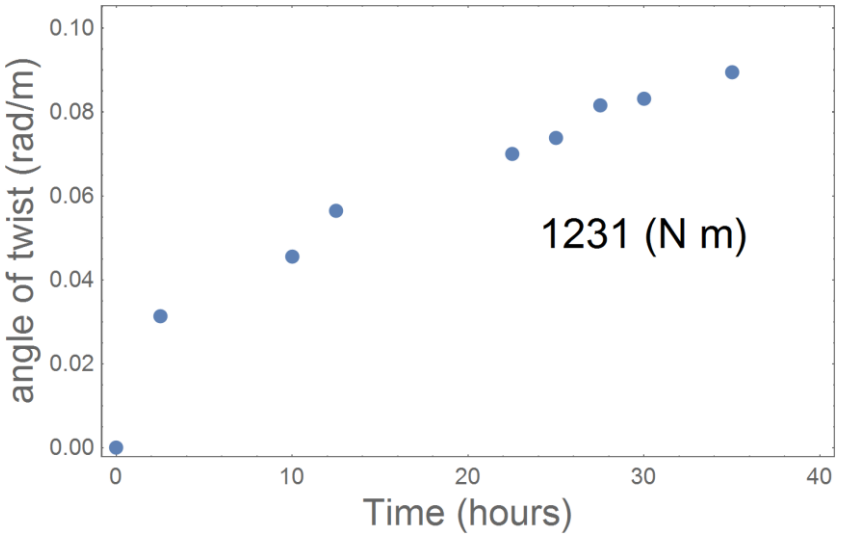
Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα διαγράμματα ανηγμένης γωνίας στροφής ως προς το χρόνο με τα σημεία που προέκυψαν από τα πειράματα για καθεμία από τις τρεις ροπές:

- M=1121 Nm



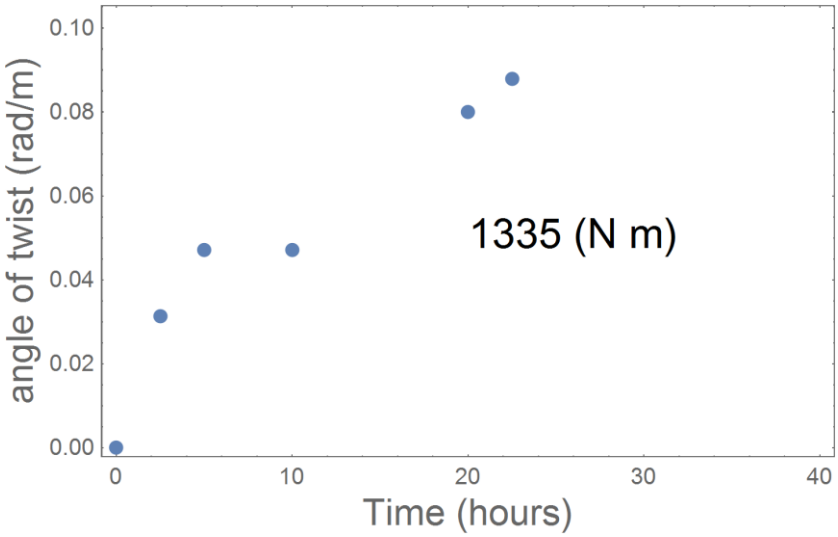
Σχήμα 1: Πειραματικά σημεία ανηγμένης γωνίας στροφής ως προς χρόνο για M=1121 Nm

- M=1231 Nm



Σχήμα 2: Πειραματικά σημεία ανηγμένης γωνίας στροφής ως προς χρόνο για M=1231 Nm

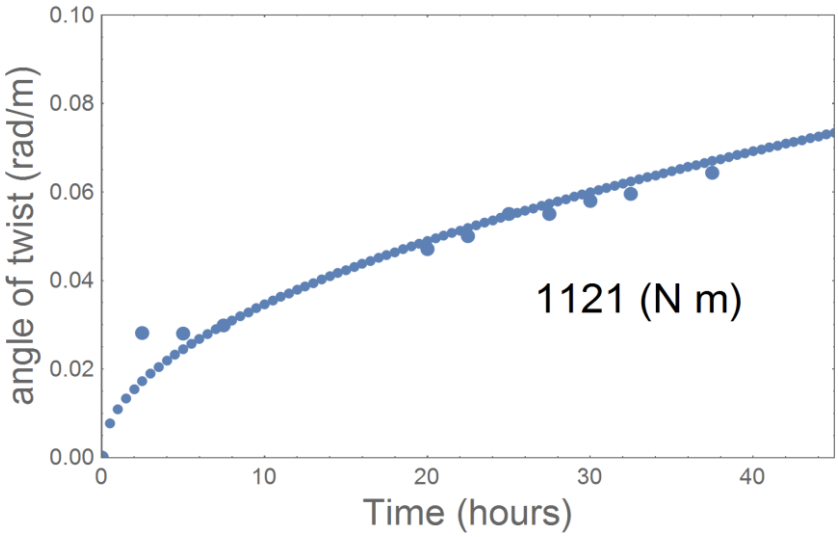
- M=1335 Nm



Σχήμα 3: Πειραματικά σημεία ανηγμένης γωνίας στροφής ως προς χρόνο για M=1335 Nm

Στη συνέχεια, μαζί με τα πειραματικά αυτά σημεία για την κάθε ροπή, χαράσσεται η αντίστοιχη καμπύλη που αντιπροσωπεύει την προσομοίωση της εξίσωσης (8) του Bredt:

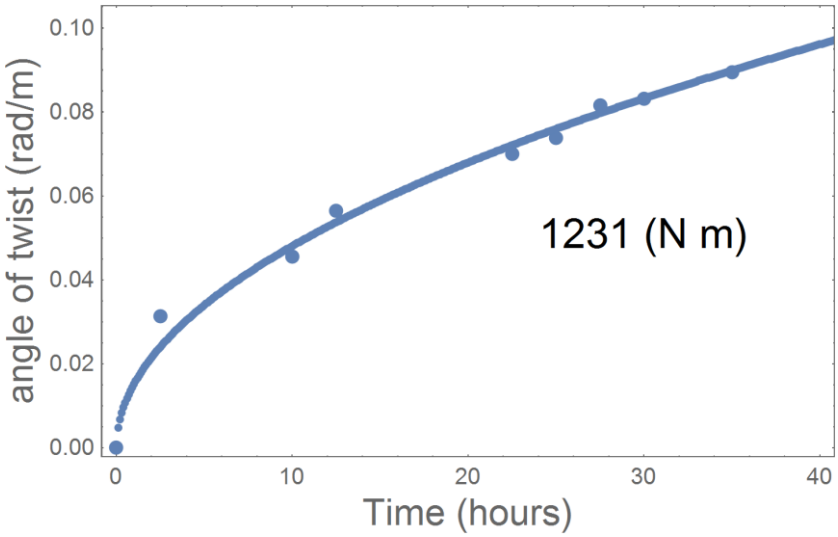
- M=1121 Nm



Σχήμα 1.1: Διάγραμμα ανηγμένης γωνίας στροφής ως προς χρόνο για M=1121 Nm

α) σημεία: πείραμα β) συνεχής γραμμή: προσομοίωση της εξίσωσης (8) του Bredt

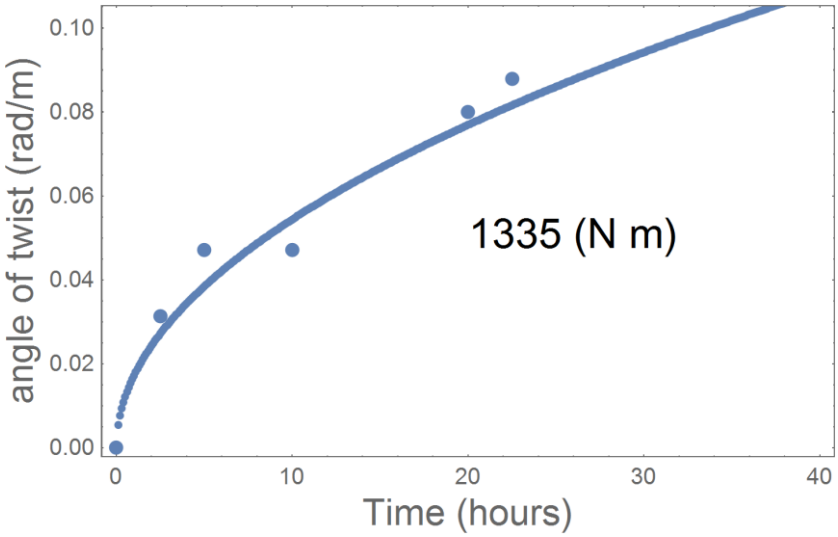
- M=1231 Nm



Σχήμα 1.2: Διάγραμμα ανηγμένης γωνίας στροφής ως προς χρόνο για M=1231 Nm

α) σημεία: πείραμα β) συνεχής γραμμή: προσομοίωση της εξίσωσης (8) του Bredt

- M=1335 Nm

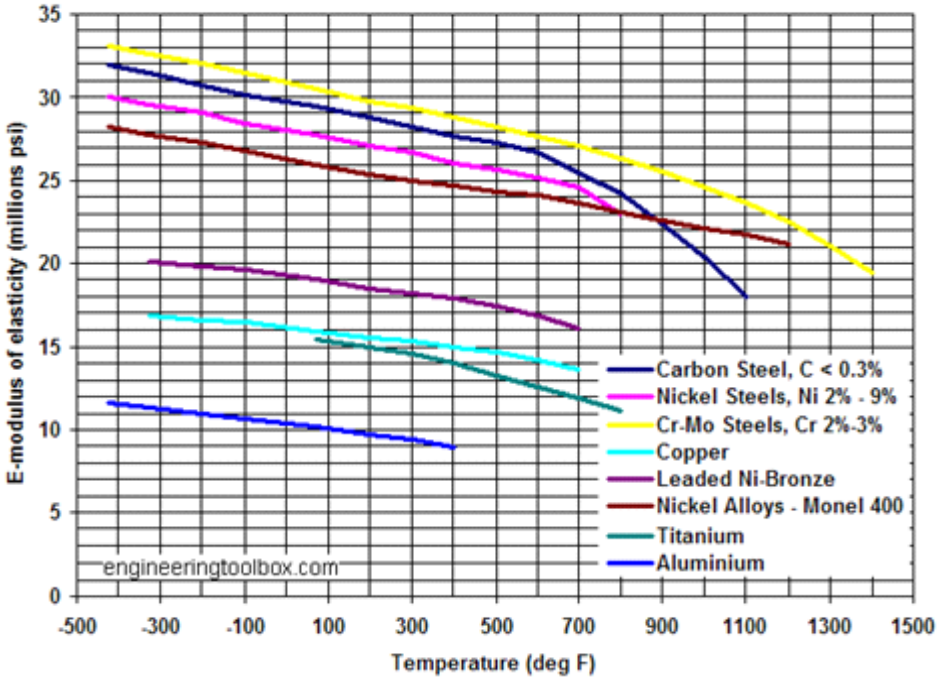


Σχήμα 1.3: Διάγραμμα ανηγμένης γωνίας στροφής ως προς χρόνο για M=1335 Nm

α) σημεία: πείραμα β) συνεχής γραμμή: προσομοίωση της εξίσωσης (8) του Bredt

2 Μεταβολή Μέτρου Ελαστικότητας Συναρτήσει Της Θερμοκρασίας

Παρουσιάζει ιδιαίτερο πειραματικό ενδιαφέρον η μεταβολή του μέτρου ελαστικότητας συναρτήσει της θερμοκρασίας για διάφορα μέταλλα κατασκευής των υλικών. Στο ακόλουθο διάγραμμα παρουσιάζεται η μεταβολή του μέτρου ελαστικότητας οκτώ διαφορετικών μετάλλων συναρτήσει της θερμοκρασίας. Όπως είναι αναμενόμενο, αυξανομένης της θερμοκρασίας το μέτρο ελαστικότητας σε κάθε υλικό μειώνεται, αφού μειώνεται η τάση λυγισμού. Τα μέτρα ελαστικότητας στο διάγραμμα μετρούνται σε εκατομμύρια psi όπου 1 psi=6894.8 Pa και οι θερμοκρασίες σε F όπου ^{o}F=9(^{o}C)/5 +32



- *1 psi (lb/in^2) = 1 psi (lb/in^2) = 144 psf (lb/ft^2) = 6,894.8 Pa (N/m^2) = 6.895x10^{-3} N/mm^2*
- *T(^{o}C) = 5/9[T(^{o}F) - 32]*

Τα πειραματικά δεδομένα που επεξεργαστήκαμε αναφέρονται σε κράμα αλουμινίου στους 400°F. Από το παραπάνω διάγραμμα πηγαίνοντας στην μπλε καμπύλη του αλουμινίου και για 400°F βλέπουμε ότι αντιστοιχεί σε μέτρο ελαστικότητας περίπου:

E=9*10^6 psi=6.2053*10^{10} Pa=62.053 GPa.

Ακόμα βλέπουμε ότι σε σχέση με τα υπόλοιπα κράματα, το κράμα αλουμινίου κυμαίνεται σε σημαντικά μικρότερες τιμές μέτρων ελαστικότητας κατά τη θερμοκρασιακή του διακύμανση.

Τέλος παρατίθεται πίνακας με τιμές του μέτρου ελαστικότητας διαφόρων κραμάτων συναρτήσει της θερμοκρασίας σε ^{o}C και σε ^{o}F:

Young's Modulus of Elasticity - E - (10^6 psi)															
Metal	Temperature (^{o}C)														
	-200	-129	-73	21	93	149	204	260	316	371	427	482	538	593	649
	Temperature (^{o}F)														
	-325	-200	-100	70	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200
Cast iron															
Gray cast iron				13.4	13.2	12.9	12.6	12.2	11.7	11.0	10.2				
Steel															
Carbon steel C <= 0.3%	31.4	30.8	30.2	29.5	28.8	28.3	27.7	27.3	26.7	25.5	24.2	22.4	20.4	18.0	
Carbon steel C => 0.3%	31.2	30.6	30.0	29.3	28.6	28.1	27.5	27.1	26.5	25.3	24.0	22.2	20.2	17.9	15.4
Carbon-molybdenum steels	31.1	30.5	29.9	29.2	28.5	28.0	27.4	27.0	26.4	25.3	23.9	22.2	20.1	17.8	15.3
Nickel steels Ni 2% - 9%	29.6	29.1	28.5	27.8	27.1	26.7	26.1	25.7	25.2	24.6	23.0				
Cr-Mo steels Cr 1/2% - 2%	31.6	31.0	30.4	29.7	29.0	28.5	27.9	27.5	26.9	26.3	25.5	24.8	23.9	23.0	21.8
Cr-Mo steels Cr 2 1/4% - 3%	32.6	32.0	31.4	30.6	29.8	29.4	28.8	28.3	27.7	27.1	26.3	25.6	24.6	23.7	22.5
Cr-Mo steels Cr 5% - 9%	32.9	32.3	31.7	30.9	30.1	29.7	29.0	28.6	28.0	27.3	26.1	24.7	22.7	20.4	18.2
Chromium steels Cr 12%, 17%, 27%	31.2	30.7	30.1	29.2	28.5	27.9	27.3	26.7	26.1	25.6	24.7	23.2	21.5	19.1	16.6
Austenitic steels (TP304,	30.3	29.7	29.1	28.3	27.6	27.0	26.5	25.8	25.3	24.8	24.1	23.5	22.8	22.1	21.2
Comp. and leaded-Sn bronze (C83600, C92200)	14.8	14.6	14.4	14.0	13.7	13.4	13.2	12.9	12.5	12.0					
Naval brass Si & Al bronze (C46400, C65500, C95200, C95400)	15.9	15.6	15.4	15.0	14.6	14.4	14.1	13.8	13.4	12.8					
Copper (C11000)	16.9	16.6	16.5	16.0	15.6	15.4	15.0	14.7	14.2	13.7					
Copper red brass Al-bronze (C10200, C12000, C12200, C12500, C14200, C23000, C61400)	18.0	17.7	17.5	17.0	16.6	16.3	16.0	15.6	15.1	14.5					
Nickel and Nickel Alloys															
Monel 400 (N04400)	27.8	27.3	26.8	26.0	25.4	25.0	24.7	24.3	24.1	23.7	23.1	22.6	22.1	21.7	21.2
Titanium															
Unalloyed titanium grades 1, 2, 3 and 7				15.5	15.0	14.6	14.0	13.3	12.6	11.9	11.2				
Aluminum and aluminum alloys															
Grades 443, 1060, 1100, 3003, 3004, 6063	11.1	10.8	10.5	10.0	9.6	9.2	8.7								

- *1 psi (lb/in^2) = 6,894.8 N/m^2 (Pa)*
- *T(^{o}C) = 5/9[T(^{o}F) - 32]*

3 Προσομοίωση με ιξωδοελαστικά μοντέλα

- Γραμμικοί ιξωδοελαστικοί κυλινδρικοί άτρακτοι

Η παραμόρφωση των κυλινδρικών ατράκτων δίνεται από τη σχέση: $\varepsilon_{x\theta}=\frac{1}{2}\gamma_{x\theta}=\frac{1}{2}r\frac{d\varphi}{dx}$ (2.1)

Η καταστατική εξίσωση της στρέψης στους ατράκτους είναι: $P^G\tau_{x\theta}=Q^G\varepsilon_{x\theta}$ (2.2)

Η αναπτυσσόμενη στρεπτική ροπή είναι: $M_t=\int_R \tau_{x\theta} r\, dA$ όπου $dA=r\,dr\,d\theta$ (2.3)

Εφαρμόζω τους τελεστές P^G, Q^G στην καταστατική εξίσωση κι επειδή η άτρακτος βρίσκεται σε ισορροπία έχουμε την παρακάτω σχέση που ισχύει για την ιξωδοελαστικότητα:

$$P^G M_t=\int_R P^G\tau_{x\theta} r\, dA=\int_R Q^G\varepsilon_{x\theta} r\, dA \quad =>$$

$$P^G M_t=\int_R Q^G(\frac{1}{2}r\frac{d\varphi}{dx})r dA=\frac{1}{2}Q^G\frac{d\varphi}{dx}\int_R r^2 dA \quad => \quad P^G M_t=\frac{I_0}{2}Q^G\frac{d\varphi}{dx}=\frac{I_0}{2}Q^G\alpha \qquad (2.4)$$

όπου $\alpha=\frac{d\varphi}{dx}=\frac{M_t(x)}{G I_0}$ ο ρυθμός της στροφής, απ' όπου προκύπτει για την ελαστικότητα:

$$M_t(x)=G\frac{d\varphi}{dx}I_0$$

Συγκρίνοντας ελαστική με ιξωδοελαστική συμπεριφορά μέσω των δύο προηγούμενων σχέσεων προκύπτει ο νόμος της αντιστοιχίας: $\frac{Q^G}{P^G}\rightarrow 2G$

Η ροπή μπορεί να παρασταθεί συναρτήσει του χρόνου με τη σχέση $M_t(x,t)=M_0 u(t)$, οπότε εκφράζουμε το ρυθμό της στροφής σε μορφή ολοκληρώματος Boltzmann:

$$\alpha(x,t)=\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}=\frac{2}{I_0}\int_0^t J^G(t-t')\frac{\partial M_0(x,t')}{\partial t'}dt' \Rightarrow$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{2M_0}{I_0}\int_0^t J^G(t-t')\delta(t')dt=\frac{2M_0}{I_0}J^G(t)u(t) \qquad (2.5)$$

όπου για ομοιόμορφη ροπή M_t το $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ είναι συνάρτηση μόνο του χρόνου

Από τις σχέσεις (2.1) και (2.4) προκύπτει η ελαστική λύση:

$$P^G M_t=\frac{I_0}{2}Q^G\left(\frac{2\varepsilon_{x\theta}}{r}\right)=\frac{I_0}{r}Q^G\varepsilon_{x\theta}=\frac{I_0}{r}P^G\tau_{x\theta} \Rightarrow P^G\left(M_t-\frac{I_0\tau_{x\theta}}{r}\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tau_{x\theta}=\frac{M_t r}{I_0} \qquad (2.6)$$

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace στη σχέση (2.5) και στη σχέση $\tau_{x\theta}(x,r,t)=\frac{M_t(x,t)r}{I_0}$ έχουμε:

$$\frac{\partial\bar{\varphi}(x,s)}{\partial x}=\frac{2}{I_0}\bar{J}^G(s)s\,\bar{M}(x,s) \qquad (2.7\alpha)$$

$$\bar{\tau}_{x\theta}(x,r,s)=\frac{\bar{\tau}(x,s)r}{I_0} \qquad (2.7\beta)$$

Συγκρίνοντας τις εξισώσεις (2.7) με τις αντίστοιχες για την ελαστικότητα προκύπτει η παρακάτω αντιστοιχία $\frac{1}{2G}\rightarrow s\,\bar{J}^G(s)$

- <u>Εφαρμογή για στοιχείο Maxwell</u>

Για το στοιχείο Maxwell έχουμε $J^G(t)=\frac{1}{2G}+\frac{t}{\zeta}$

Άρα από το ρυθμό της στροφής έχουμε διαδοχικά:

$$\frac{d\varphi}{dx}=\frac{2M_t}{I_0}J^G(t)u(t) \Rightarrow \frac{d\varphi}{dx}=\frac{2M_t}{I_0}\left(\frac{1}{2G}+\frac{t}{\zeta}\right)u(t) \Rightarrow$$

$$\varphi(x,t)=\frac{2M_t x}{I_0}\left(\frac{1}{2G}+\frac{t}{\zeta}\right)u(t)+f(t) \qquad (2.8)$$

Επειδή για φ=0 έχουμε και x=0 προκύπτει απ' τη (2.8) $f(t)=0$, οπότε η γενική μορφή της εξίσωσης της γωνίας είναι:

$$\varphi(x,t)=\frac{2M_t x}{I_0}\left(\frac{1}{2G}+\frac{t}{\zeta}\right)u(t) \qquad (2.9)$$ όπου

- για $t=0$ έχουμε $\varphi(x,0)=\frac{M_t x}{G I_0}$ (ελαστική συμπεριφορά)
- για $t\to\infty$ έχουμε $\varphi_{x,t}\to\infty$

Κάνουμε την προσαρμογή με την εντολή NonlinearModelfit του λογισμικού Mathematica και υπολογίζουμε τις παραμέτρους του κάθε μοντέλου. Η προσαρμογή γίνεται και για τα τέσσερα ιξωδοελαστικά μοντέλα με βάση την εξίσωση του ρυθμού στροφής.

3.1 Τριπαραμετρικό μοντέλο

Από το βιβλίο των Shames-Cozzarelli για ερπυσμό σε στρέψη **[2]**, η γωνία στροφής ανά μονάδα μήκους αποδεικνύεται ότι δίνεται από τη σχέση $\frac{d\varphi}{dt}=\frac{2M_t}{I_0}J^G(t)u(t)$, όπου είναι:

-M_t η σταθερή στρεπτική ροπή που ασκείται

-I_0 η πολική ροπή αδράνειας της διατομής του δοκιμίου

-$J^G(t)$ η συνάρτηση ενδοτικότητας του μοντέλου

Εφαρμόζοντας στη σχέση τη γνωστή συνάρτηση ενδοτικότητας του μοντέλου, γράφεται τελικά:

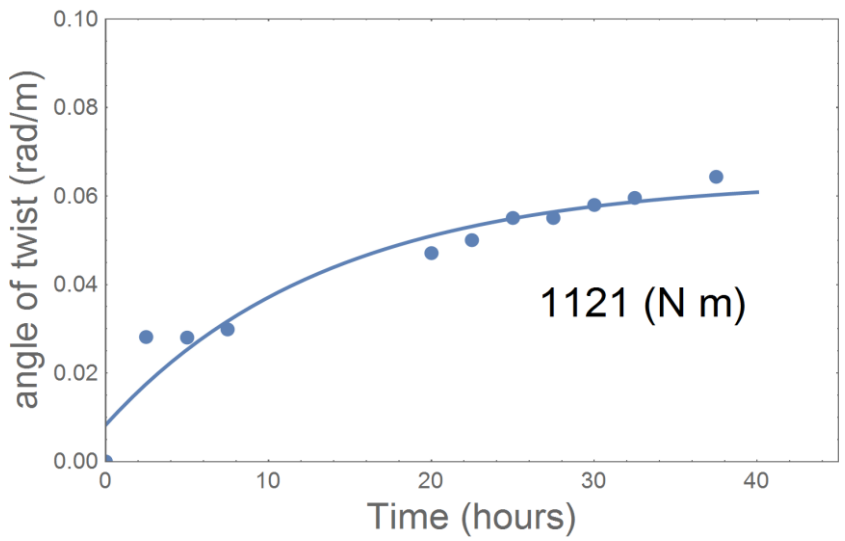
$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{2M_t}{I_0}\frac{3}{2}\left[\frac{1}{E_1}\left(1-e^{-\left(\frac{E_1}{\tau(E_1+E_2)}t\right)}\right)+\frac{1}{E_1+E_2}e^{-\left(\frac{E_1}{\tau(E_1+E_2)}t\right)}\right]u(t) \qquad (2.10)$$

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται για κάθε πείραμα οι τιμές E_1, E_2, η και τ του τριπαραμετρικού μοντέλου:

M_t (N*m)	E_1 (*10^{11}N/m^2)	E_2 (*10^{11}N/m^2)	η(*10^{12}Pa^2*hr)	τ=η/E_2(Pa*hr)
1121	1,5	9,82	1,76	1,8
1231	1,085	12,33	1,65	1,346
1335	1,19	16,94	1,22	0,72

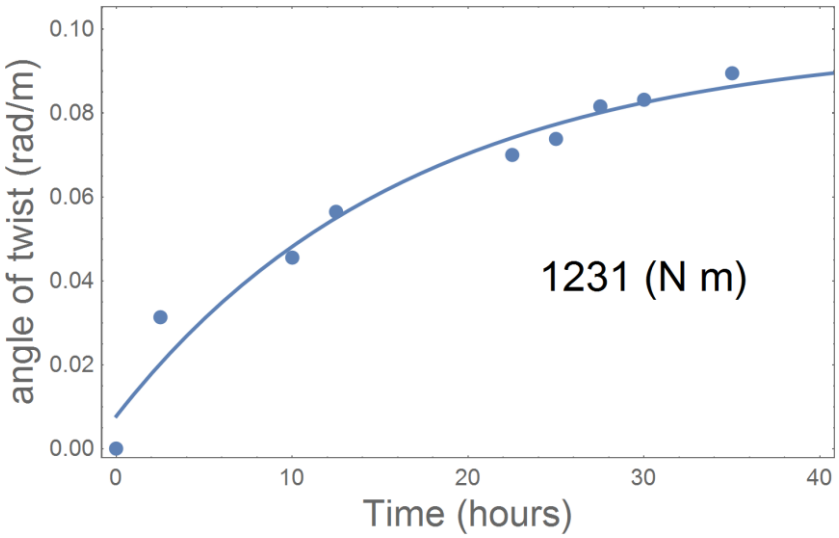
Παρακάτω παρουσιάζονται τα διαγράμματα της ανηγμένης γωνίας στροφής ως προς το χρόνο για κάθε πείραμα με δεδομένη ροπή:

- M=1121 Nm



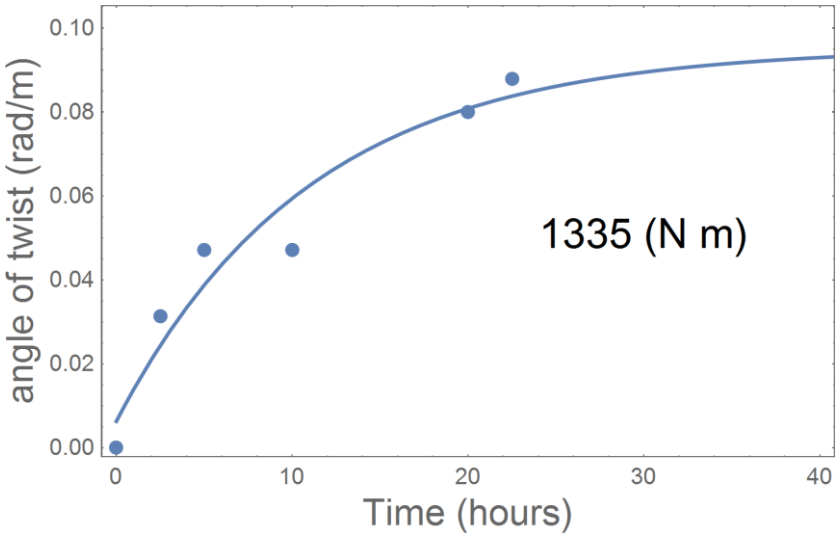
Σχήμα 2.1.1: Διάγραμμα ανηγμένης γωνίας στροφής ως προς χρόνο για M=1121Nm στο τριπαραμετρικό μοντέλο α) σημεία: πείραμα β) συνεχής γραμμή: τριπαραμετρικό μοντέλο

- M=1231 Nm



Σχήμα 2.1.2: Διάγραμμα ανηγμένης γωνίας στροφής ως προς χρόνο για M=1231Nm στο τριπαραμετρικό μοντέλο α) σημεία: πείραμα β) συνεχής γραμμή: τριπαραμετρικό μοντέλο

- M=1335 Nm



Σχήμα 2.1.3: Διάγραμμα ανηγμένης γωνίας στροφής ως προς χρόνο για M=1335 Nm στο τριπαραμετρικό μοντέλο α) σημεία: πείραμα β) συνεχής γραμμή: τριπαραμετρικό μοντέλο

3.2 Τριπαραμετρικό στερεό

Από το βιβλίο των Shames-Cozzarelli για ερπυσμό σε στρέψη **[2]**, η γωνία στροφής ανά μονάδα μήκους αποδεικνύεται ότι δίνεται από τη σχέση $\frac{d\varphi}{dt}=\frac{2M_t}{I_0}J^G(t)u(t)$, όπου είναι:

-M_t η σταθερή στρεπτική ροπή που ασκείται

-I_0 η πολική ροπή αδράνειας της διατομής του δοκιμίου

-$J^G(t)$ η συνάρτηση ενδοτικότητας του μοντέλου

Εφαρμόζοντας στη σχέση τη γνωστή συνάρτηση ενδοτικότητας του μοντέλου, γράφεται τελικά:

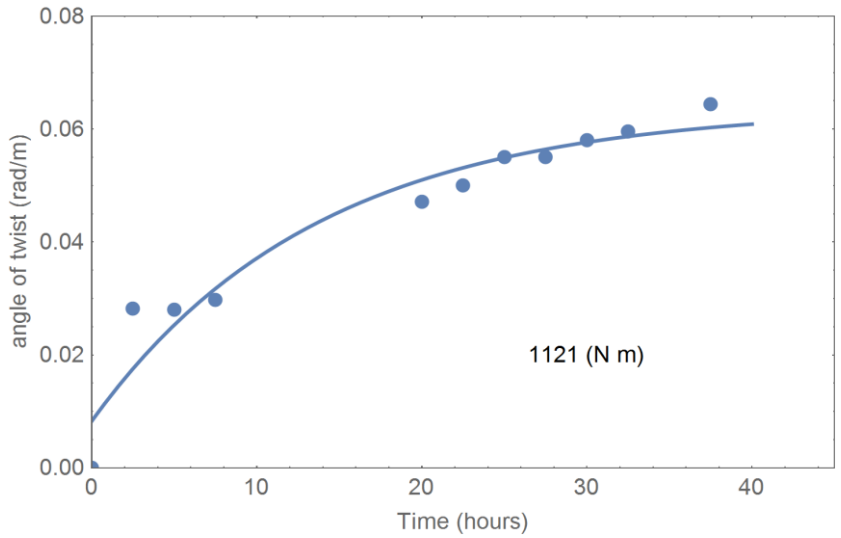
$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{2M_t}{I_0}\frac{3}{2E_1}[1+\frac{E_1}{E_2}(1-e^{-(\frac{E_2}{\eta})t})]u(t) \quad (2.11)$$

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται για κάθε πείραμα οι τιμές E_1, E_2, η και τ του τριπαραμετρικού στερεού:

M_t (N*m)	E_1 (*10^{11}N/m^2)	E_2 (*10^{11}N/m^2)	η(*10^{11} Pa^2*hr)	τ=η/E_2(Pa*hr)
1121	5,79	0,86	11,74	13,65
1231	13,54	1,18	0,07	0,06
1335	18,16	1,28	14,09	11

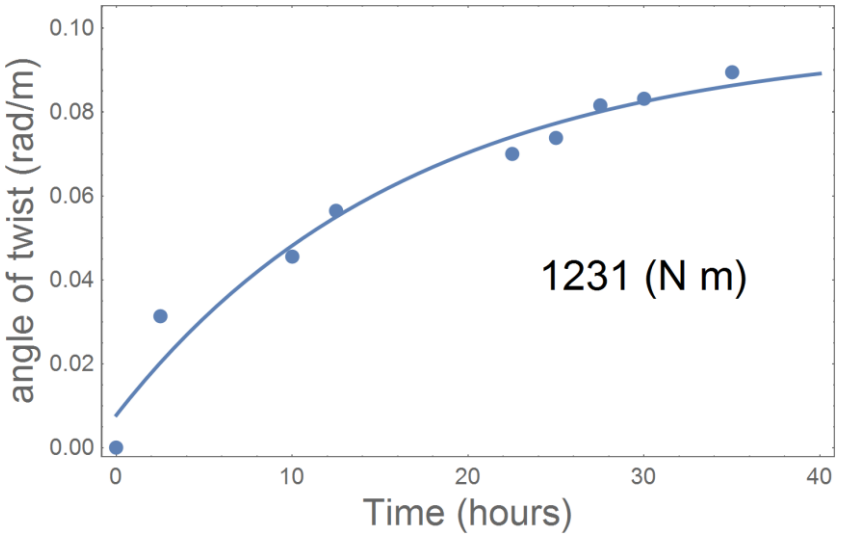
Παρακάτω παρουσιάζονται τα διαγράμματα της ανηγμένης γωνίας στροφής ως προς το χρόνο για κάθε πείραμα με δεδομένη ροπή:

- M=1121 Nm



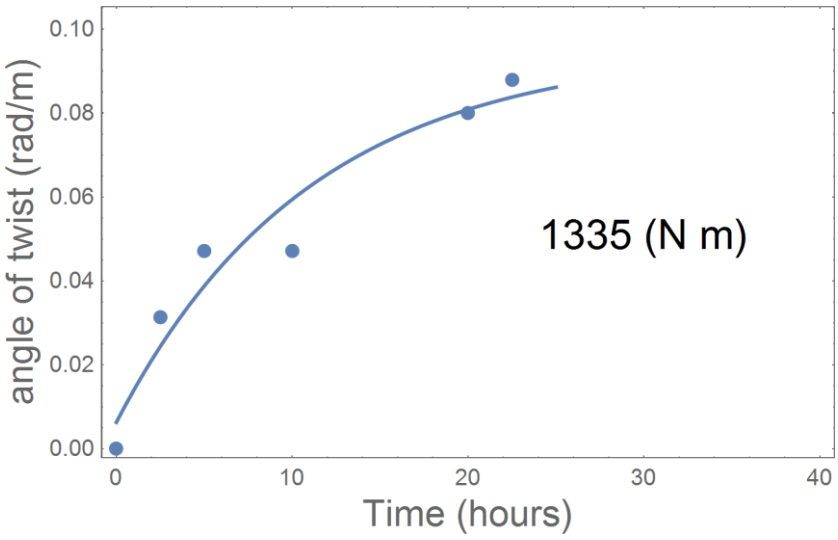
Σχήμα 2.2.1: Διάγραμμα ανηγμένης γωνίας στροφής ως προς χρόνο για M=1121Nm στο τριπαραμετρικό στερεό α) σημεία: πείραμα β) συνεχής γραμμή: τριπαραμετρικό στερεό

- M=1231 Nm



Σχήμα 2.2.2: Διάγραμμα ανηγμένης γωνίας στροφής ως προς χρόνο για M=1231Nm στο τριπαραμετρικό στερεό α) σημεία: πείραμα β) συνεχής γραμμή: τριπαραμετρικό στερεό

- M=1335 Nm



Σχήμα 2.2.3: Διάγραμμα ανηγμένης γωνίας στροφής ως προς χρόνο για M=1335 Nm στο τριπαραμετρικό στερεό α) σημεία: πείραμα β) συνεχής γραμμή: τριπαραμετρικό στερεό

3.3 Τριπαραμετρικό υγρό

Από το βιβλίο των Shames-Cozzarelli για ερπυσμό σε στρέψη **[2]** , η γωνία στροφής ανά μονάδα μήκους αποδεικνύεται ότι δίνεται από τη σχέση $\frac{d\varphi}{dt}=\frac{2M_t}{I_0}J^G(t)u(t)$, όπου είναι:

-M_t η σταθερή στρεπτική ροπή που ασκείται

-I_0 η πολική ροπή αδράνειας της διατομής του δοκιμίου

-$J^G(t)$ η συνάρτηση ενδοτικότητας του μοντέλου

Εφαρμόζοντας στη σχέση τη γνωστή συνάρτηση ενδοτικότητας του μοντέλου, γράφεται τελικά:

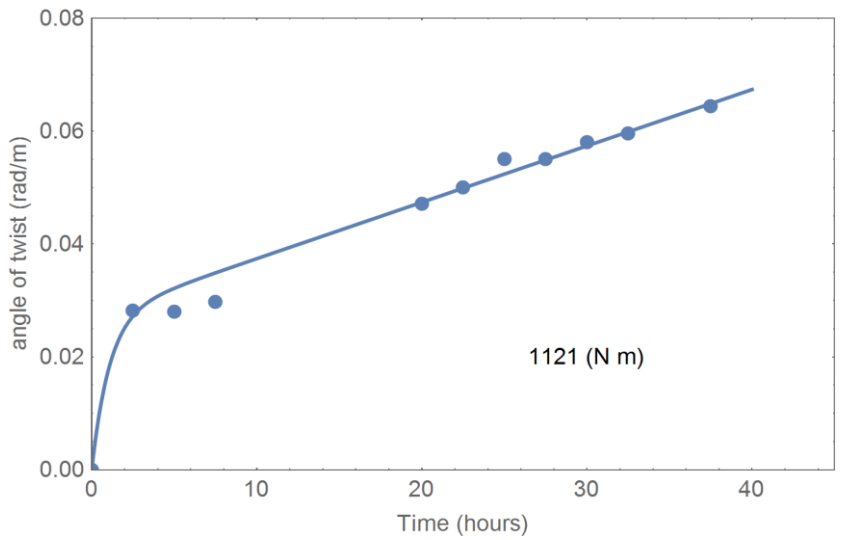
$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{2M_t}{I_0}[\frac{3t}{2\eta_1}-\frac{3}{2E_1}(e^{-(\frac{E_1}{\eta_2})t}-1)]u(t) \quad (2.12)$$

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται για κάθε πείραμα οι τιμές E_1, η_1, η_2 και τ του τριπαραμετρικού υγρού:

M_t (N*m)	E_1 (*10^{11} N/m^2)	η_1(*$10^{12}$$Pa^2$*hr)	η_2(*$10^{11}$$Pa^2$*hr)	$\tau=\eta_2/E_1$(Pa*hr)
1121	3,5	9,61	3,75	1,07
1231	3,29	6,25	2,43	0,74
1335	4	4,44	4	1

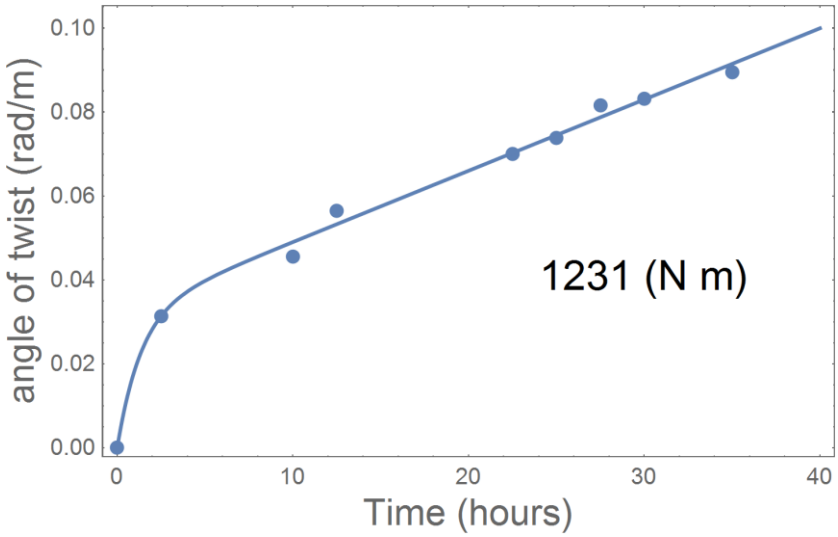
Παρακάτω παρουσιάζονται τα διαγράμματα της ανηγμένης γωνίας στροφής ως προς το χρόνο για κάθε πείραμα με δεδομένη ροπή:

- M=1121 Nm



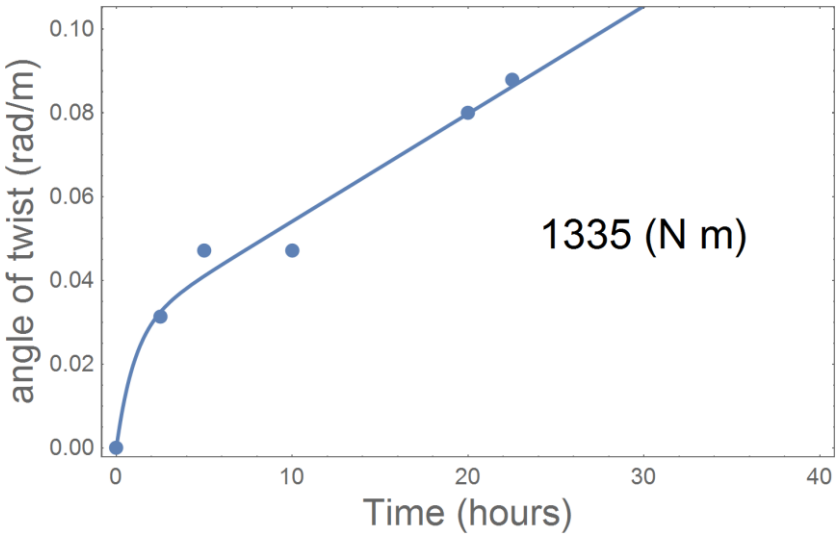
Σχήμα 2.3.1: Διάγραμμα ανηγμένης γωνίας στροφής ως προς χρόνο για M=1121Nm στο τριπαραμετρικό υγρό α) σημεία: πείραμα β) συνεχής γραμμή: τριπαραμετρικό υγρό

- M=1231 Nm



Σχήμα 2.3.2: Διάγραμμα ανηγμένης γωνίας στροφής ως προς χρόνο για M=1231Nm στο τριπαραμετρικό υγρό α) σημεία: πείραμα β) συνεχής γραμμή: τριπαραμετρικό υγρό

- M=1335 Nm



Σχήμα 2.3.3: Διάγραμμα ανηγμένης γωνίας στροφής ως προς χρόνο για M=1335 Nm στο τριπαραμετρικό υγρό α) σημεία: πείραμα β) συνεχής γραμμή: τριπαραμετρικό υγρό

3.4 Τετραπαραμετρικό μοντέλο (Burgers)

Από το βιβλίο των Shames-Cozzarelli για ερπυσμό σε στρέψη **[2]**, η γωνία στροφής ανά μονάδα μήκους αποδεικνύεται ότι δίνεται από τη σχέση $\frac{d\varphi}{dt}=\frac{2M_t}{I_0}J^G(t)u(t)$, όπου είναι:

-M_t η σταθερή στρεπτική ροπή που ασκείται

-I_0 η πολική ροπή αδράνειας της διατομής του δοκιμίου

-$J^G(t)$ η συνάρτηση ενδοτικότητας του μοντέλου

Εφαρμόζοντας στη σχέση τη γνωστή συνάρτηση ενδοτικότητας του μοντέλου, γράφεται τελικά:

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{2M_t}{I_0}\left[\frac{3t}{2\eta_1}+\frac{3\eta_2}{\eta_1 E_2}\left(e^{-(\frac{E_2}{\eta_2})t}-1\right)+\frac{3(\eta_1 E_2+\eta_2 E_1+\eta_1 E_1)}{2\eta_1 E_1 E_2}\left(1-e^{-(\frac{E_2}{\eta_2})t}\right)+\frac{3}{2E_1}e^{-(\frac{E_2}{\eta_2})t}\right]u(t)$$

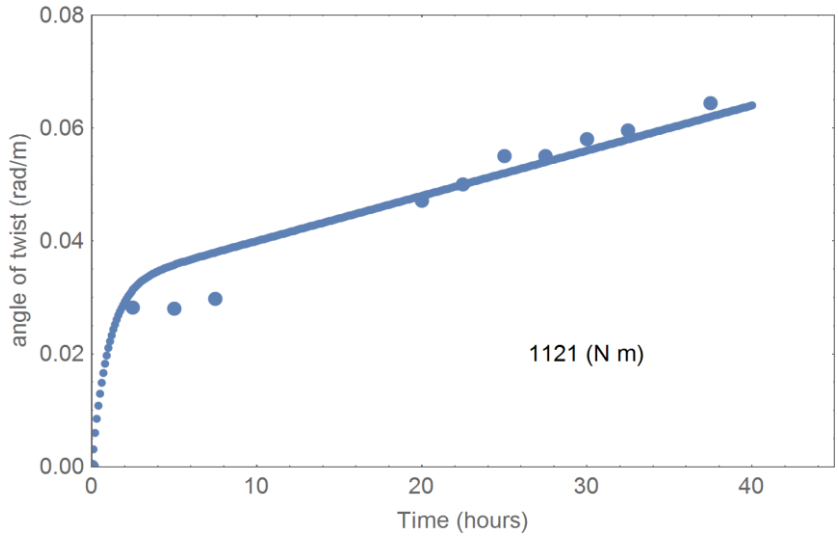
(2.13)

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται για κάθε πείραμα οι τιμές E_1, E_2, η_1, η_2 και τ του τετραπαραμετρικού μοντέλου:

M_t (N*m)	E_1 (N/m^2)	η_1(*10^{12}Pa^2*hr)	E_2 (*10^{11} N/m^2)	η_2(*10^{11} Pa^2*hr)	$\tau=\eta_2/E_2$(Pa*hr)
1121	3*10^{15}	12	3	3	1
1231	2,21*10^{15}	6,25	3,3	3,23	0,98
1335	6*10^{18}	4,44	4	4,08	1,02

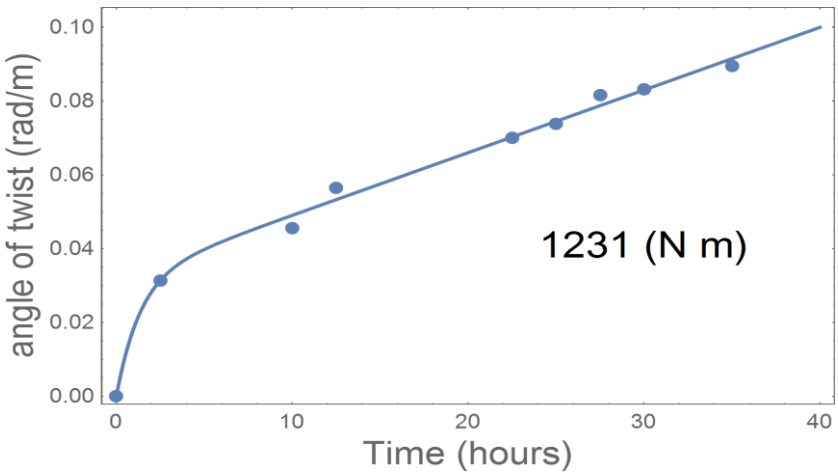
Παρακάτω παρουσιάζονται τα διαγράμματα της ανηγμένης γωνίας στροφής ως προς το χρόνο για κάθε πείραμα με δεδομένη ροπή:

- M=1121 Nm



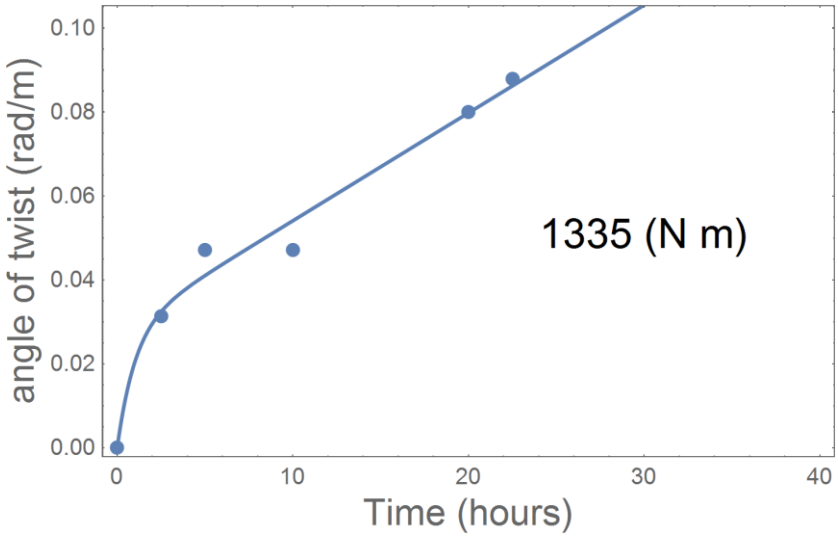
Σχήμα 2.4.1: Διάγραμμα ανηγμένης γωνίας στροφής ως προς χρόνο για M=1121Nm στο τετραπαραμετρικό μοντέλο α) σημεία: πείραμα β) συνεχής γραμμή: τετραπαραμετρικό μοντέλο

- M=1231 Nm



Σχήμα 2.4.2: Διάγραμμα ανηγμένης γωνίας στροφής ως προς χρόνο για M=1231Nm στο τετραπαραμετρικό μοντέλο α) σημεία: πείραμα β) συνεχής γραμμή: τετραπαραμετρικό μοντέλο

- M=1335Nm



Σχήμα 2.4.3: Διάγραμμα ανηγμένης γωνίας στροφής ως προς χρόνο για M=1335 Nm στο τετραπαραμετρικό μοντέλο α) σημεία: πείραμα β) συνεχής γραμμή: τετραπαραμετρικό μοντέλο

4 Συγκεντρωτικός Πινάκας Παραμέτρων Όλων Των Μοντέλων

Σε αυτό το σημείο παρουσιάζεται ο συγκεντρωτικός πίνακας με τις παραμέτρους όλων των μοντέλων που παρουσιάστηκαν στην εργασία:

ΤΡΙΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ	E_1(*10^{11}N/m^2)	E_2 (*10^{11}N/m^2)	η(*$10^{12}$$Pa^2$*hr)	τ=η/E_2(Pa*hr)
M_t=1121 Nm	1,5	9,82	1,76	1,8
M_t=1231 Nm	1,085	12,33	1,65	1,346
M_t=1335 Nm	1,19	16,94	1,22	0,72
ΤΡΙΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΟ ΣΤΕΡΕΟ	E_1(*10^{11}N/m^2)	E_2 (*10^{11}N/m^2)	η(*10^{11} Pa^2*hr)	τ=η/E_2(Pa*hr)
M_t=1121 Nm	5,79	0,86	11,74	13,65
M_t=1231 Nm	13,54	1,18	0,07	0,06
M_t=1335 Nm	18,16	1,28	14,09	11
ΤΡΙΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΟ ΥΓΡΟ	E_1(*10^{11} N/m^2)	η_1(*$10^{12}$$Pa^2$*hr)	η_2(*$10^{11}$$Pa^2$*hr)	τ=η_2/E_1(Pa*hr)
M_t=1121 Nm	3,5	9,61	3,75	1,07
M_t=1231 Nm	3,29	6,25	2,43	0,74
M_t=1335 Nm	4	4,44	4	1

ΤΕΤΡΑΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ	E_1(N/m^2)	η_1(*$10^{12}$$Pa^2$*hr)	E_2(*10^{11}N/m^2)	η_2(*$10^{11}$$Pa^2$*hr)	τ=η_2/E_2(Pa*hr)
M_t=1121 Nm	3*10^{15}	12	3	3	1
M_t=1231 Nm	2,21*10^{15}	6,25	3,3	3,23	0,98
M_t=1335 Nm	6*10^{18}	4,44	4	4,08	1,02

Παρατηρείται καλή προσαρμογή στην πειραματική προσομοίωση του νόμου του Bredt:

$$\theta = \sqrt{3}\frac{k}{r_m}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{M}{Qh}\right)^m t^n$$

- Στο τριπαραμετρικό μοντέλο δεν έχουμε ιδιαίτερα ικανοποιητική ποιότητα fitting.
- Στο τριπαραμετρικό στερεό ομοίως, δεν έχουμε πολύ ικανοποιητική ποιότητα fitting, δεν περιγράφονται καλά οι λεπτομέρειες στα άκρα.
- Στο τριπαραμετρικό υγρό έχουμε πολύ καλή ποιότητα fitting.
- Στο τετραπαραμετρικό μοντέλο έχουμε πολύ καλή ποιότητα fitting στις δύο υψηλές ροπές, στη χαμηλή όμως όχι το ίδιο καλή.

C. Συμπεράσματα

Στην εργασία αυτή αναλύθηκαν τα πειραματικά αποτελέσματα ερπυσμού κυκλικής ατράκτου (δακτυλιοειδούς διατομής) σε στρέψη για τρεις διαφορετικές τιμές στρεπτικής ροπής. Η άτρακτος είναι κατασκευασμένη από κράμα αλουμινίου και τα πειράματα έγιναν στη θερμοκρασία των 400°F. Η πειραματική διαδικασία αναφέρεται στην εργασία του Leonard Mordfin.

Η προσομοίωση των αποτελεσμάτων έγινε με την αντίστοιχη ημιεμπειρική εξίσωση του Bredt καθώς και με τέσσερα διαφορετικά ιξωδοελαστικά μοντέλα, το τριπαραμετρικό, το τριπαραμετρικό στερεό, το τριπαραμετρικό υγρό και το τετραπαραμετρικό (Burgers).

Με βάση την αρχή της αντιστοιχίας που ισχύει στη γραμμική ιξωδοελαστικότητα, οι καταστατικές εξισώσεις των μοντέλων μετατράπηκαν για την καταπόνηση της διάτμησης που ισχύει στη στρέψη. Η επιπλέον συνθήκη που απαιτείται είναι η υπόθεση ότι ο λόγος Poisson είναι ίσος με 0.5.

Η προσομοίωση έγινε με το λογισμικό Mathematica και διαπιστώθηκε ότι η καλύτερη προσαρμογή προκύπτει με το τριπαραμετρικό υγρό και το τετραπαραμετρικό μοντέλο.

Από τις τιμές των παραμέτρων που υπολογίστηκαν προκύπτει ότι ο χρόνος χαλάρωσης $\tau=\eta/E$ σε όλα τα μοντέλα και τις εξεταζόμενες στρέψης είναι κατά μέσο όρο σταθερός και ίσος με τη μονάδα. Οι τιμές των μέτρων ελαστικότητας των μοντέλων σε μεμονωμένες περιπτώσεις είναι παρόμοιες με τις τιμές του πίνακα των μέτρων ελαστικότητας ως προς τη θερμοκρασία.

<u>Η πρόταση που μπορεί να γίνει για περαιτέρω έρευνα</u> πάνω στα ευρήματα της εργασίας είναι η παραμετρική ανάλυση ως προς τις μελετώμενες τιμές των ροπών στρέψης, δηλαδή εξάρτηση των παραμέτρων των μοντέλων με τη ροπή στρέψης, ώστε να ελεγχθεί αν υπάρχει δυνατότητα πρόβλεψης.

D. Βιβλιογραφία

1. Κοντού, Ε. & Σπαθής, Γ. (2001). Ανελαστική Συμπεριφορά των υλικών. Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνίο.

2. Irving H. Shames and Francis A. Cozzarelli, Elastic and Inelastic Stress Analysis, Prentice Hall International Inc., 1992

3. Viscoelasticity, Wilhelm Flugge, Blaisdell Publishing Company, London, 1967

4. Theory of Viscoelasticity, R.M. Christensen, Academic Press, London, 1971

5. Κατσουρίνης Στυλιανός, Θεωρητική μελέτη των θεμελιωδών ιξωδοελαστικών συναρτήσεων και της αλληλομετατροπής τους, Δ.Π.Μ.Σ. " Εφαρμοσμένη Μηχανική", Μεταπτυχιακή Εργασία

6. V. Kobelev, Relaxation and Creep in Twist and Flexure, Multidiscipline Modeling in Materials and Structures, No.2, 2014

7. Odquist F.K.G, Hult J. (1962) Kriechfestigkeit metallischer Werkstoffe, Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg

8. Garofalo F.: (1963) An empirical relation defining the stress dependence of minimum creep rate in metals. Trans. Metall. Soc. AIME 227, 351-356

9. Abu-Haiba, M.S., Fatemi A., Zoroufi, M. (2002) Creep deformation and monotonic stress-strain behavior of Haynes alloy 556 at elevated temperatures, J. Mat. Sci., 37, p. 2899-2907

10. Naumenko, K., Altenbach, H., Gorash, Y. (2009) Creep analysis with a stress range dependent constitutive model. Arch. Appl. Mech. 79, 619–630

11. Kassner M.,(2008) Fundamentals of Creep in Metals and Alloys, 2nd Edition, Elsevier

12. Naumenko, K., Altenbach, H.: Modelling of Creep for Structural Analysis. Springer, Berlin (2007)

13. Yao, H.-T., Xuan F.-Z., Wang Z., Tu S.-T. (2007) A review of creep analysis and design under multi-axial stress states, Nuclear Engineering and Design, 237, 1969–1986

14. Chang D. J. (1995) Prediction of Stress Relaxation for Compression and Torsion Springs, TR-96(8565)-l , The Aerospace Corporation Technology Operations, El Segundo, CA 90245-4691

15. Ehab Hamed, Composite structures, Bending and creep buckling response of viscoelastic functionally graded beam-columns, Centre for Infrastructure Engineering and Safety, School of Civil and Environmental Engineering, The University of New South Wales, UNSW Sydney, NSW 2052, Australia, 8 May 2012

16. Miyamoto Y, Kaysser WA, Rabin BH, Kawasaki A, Ford RG. Functionally graded materials: design, processing and application. London: Kluwer Academic Publishes; 1999

17. Shen HS. Functionally graded materials: nonlinear analysis of plates and shells. New York: CRC Press; 2009

18. Birman V, Byrd LW. Vibration of damaged cantilevered beams manufactured from functionally graded materials. AIAA J 2007;45(11):2747–57

19. Roesler J, Paulino G, Gaedicke C, Bordelon A, Park K. Fracture behavior of functionally graded materials for rigid pavements. Transport Res Record: J Transport Res Board 2007;2037:40–9.

20. Venkataraman S, Sankar BV. Elasticity solution for stresses in a sandwich beam with functionally graded core. AIAA J 2003;41(12):2501–5.

21. Hilton HH. Optimum linear and nonlinear viscoelastic designer functionally graded materials – characterization and analysis. Compos Part A: Appl Sci Manuf 2005;36(10):1329–34.

22. Shen B, Hubler M, Paulino GH, Struble LJ. Functionally-graded fiber-reinforced cement composites: processing, microstructure, and properties. Cem Concr Compos 2008;30(8):663–73

23. Librescu L, Oh SY, Song O. Spinning thin-walled beams made of functionally graded materials: modeling, vibration and instability. Eur J Mech A/Solids 2004;23(3):499–515

24. Simsek M. Vibration analysis of a functionally graded beam under a moving mass by using different beam theories. Compos Struct 2010;92(4):904–17.

25. Ke LL, Yang J, Kitipornchai S, Xiang Y. Flexural vibration and elastic buckling of a cracked Timoshenko beam made of functionally graded materials. Mech Adv Mater Struct 2009;16(6):488–502

26. Cai H, Bao G. Crack bridging in functionally graded coatings. Int J Solids Struct 1998;35 (7–8):701–17.

27. Emam SA. A static and dynamic analysis of the postbuckling of geometrically imperfect composite beams. Compos Struct 2009;90(2):247–53

28. Ke L-L, Yang J, Kitipornchai S. Postbuckling analysis of edge cracked functionally graded Timoshenko beams under end shortening. Compos Struct 2009;90(2):152–60. 29. Hamed E. Creep response of sandwich beams with a viscoelastic core and composite laminates. In: Kollar L, Czigany T, Karger-Kocsis J, editors. 14th European conference on composite materials, 7–10 June, Budapest, Hungary; 2010 [Cd version]

30. Hamed E, Bradford MA. Creep in concrete beams strengthened with composite materials. Eur J Mech – A/Solids 2010;29(6):951–65.

31. Hamed E, Rabinovitch O. Modeling and dynamics of sandwich beams with a viscoelastic soft core. AIAA J 2009;47(9):2194–211.

32. Paulino GH, Jin ZH. Correspondence principle in viscoelastic functionally graded materials. J Appl Mech 2001;68(1):129–32.

33. Paulino GH, Jin ZH. Viscoelastic functionally graded materials subjected to antiplane shear fracture. J Appl Mech 2001;68(2):284–93

34. Mukherjee S, Paulino GH. The elastic–viscoelastic correspondence principle for functionally graded materials, revisited. J Appl Mech 2003;70(3):359–63

35. Jin ZH. Some notes on the linear viscoelasticity of functionally graded materials. Math Mech Solids 2006;11(2):216–24

36. Hilton HH, Lee DH, El Fouly ARA. Generalized viscoelastic designer functionally graded auxetic materials engineered/tailored for specific task performances. Mech Time-Dependent Mater 2008;12(2):151–78

37. Pan F, Li W, Wang B, Zhang X. Viscoelastic fracture of multiple cracks in functionally graded materials. Comput Methods Appl Mech Eng 2009;198(33– 36):2643–9

38. Khan KA, Muliana AH. A multi-scale model for coupled heat conduction and deformations of viscoelastic functionally graded materials. Composites: Part B 2009;40(6):511–21.

39. Chen J, Xuan F, Wang Z, Tu S-T. Creep behavior of functionally graded material under in-plane bending moment. Key Eng Mater 2007;335–358:449–52.

40. Hilton HH. Tailored designer functionally graded materials for minimizing probabilistic creep buckling failures in linear viscoelastic columns with large deformations and follower loads. In: 47th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC structures, structural dynamics, and materials conference; 1–4 May 2006, Newport, Rhode Island; 2006.

41. Mao YQ, Fu YM, Dai HL. Creep buckling and post-buckling analysis of the laminated piezoelectric viscoelastic functionally graded plates. Eur J Mech – A/Solids 2011;30(4):547–58. 42. Findley WN, Lai JS, Onran K. Creep and relaxation of nonlinear viscoelastic

materials (with an introduction to linear viscoelasticity). Amsterdam: NorthHolland Publishing Company; 1976.

43. Κωνσταντίνος Ι. Γιαννακόπουλος, Πειραματική αντοχή υλικών, Ενότητα: Στρέψη, σ. 5-13, Τμήμα Μηχανολογίας, ΑΕΙ Πειραιά
44. Κώστας Γαλιώτης, Στρέψη, Μηχανική των Υλικών, Τμήμα Χημικών Μηχανικών, 2015
45. Δρ Σ.Π. Φιλόπουλος, Στρέψη, Σχολή Τεχνολογικών Εφαρμογών, Τμήμα Ναυπηγικής,. ΤΕΙ Αθήνας
46. Francis A. Cozzarelli, Mechanics of Materials, p 141-143
47. Leonard Mordfin, Torsion Creep of Circular and Noncircular Tubes, 21 March 1967, Journal of Research of the National Bureau of Standards- C. Engineering and Instrumentation Vol. 71C, No. 3, July-September 1967
48. R. W. Bailey, Creep of steel under simple and compound stresses and the use of high initial temperature in steam power plant, Trans. Tokyo Sectional Meeting, World Power Conf. 3, 1089 (1929)
49. R. W. Bailey, The utilization of creep test data in engineering design, Proc. Inst. Mech. Eng. 131, 131 (1935)
50. F. L. Everett, Strength of materials subjected to shear at high temperatures, Trans. Am. Soc. Mech. Eng. 53, 117 (1931)
51. F. L. Everett and C. L. Clarc, Report on torsion creep tests for comparison with tension creep tests on a carbon-molybdenum steel, Proc. Am. Soc. Testing Materials 39, 215 (1939)
52. F. C. Lea, discussion of [49]. Pronc. Inst. Mech. Eng 131, 334 (1935)
53. H. J. Tapsell and A. E. Johnson, Creep ander combined tension and torsion , part 1, the behavior of a 0.17 percent carbon steel at 455 deg C., Engineering (London) 150, 24 (1940)
54. A. E. Johnson. Behavior of cast steel at elevated temperatures, Engineer (London) 188, 126 (1949)
55. A. E. Johnson, The creep of a nominally isotropic aluminum alloy under combined stress systems at elevated temperatures, Metallurgia (Manchester) 40, 125, (1949)
56. A. E. Johnson, The creep of a nominally isotropic magnesiun alloy at normal and elevated under complex stress systems, Metallurgia (Manchester) 42, 249, (1950)
57. A. E. Johnson, Creep under complex stress systems at elevated temperatures, Proc. Inst. Mech. Eng. 164, 432, (1951)
58. G. Gerard and A. C. Gilbert . A critical strain approach to creep buckling of plates and shells. J. Aero/Space Sci.25, 429 (1958)
59. I. Finnie, An experimental study of multiaxial creep in tubes, Proc. Joint Intern. Conf on Creep, p. 2/21 (Inst. Mech. Eng., London, 1963)

60. J. L. Gubser. O. M. Sidebottom and M. R. Shammamy, Creep torsion of prismatic bars,Proc.Joint Intern. Conf. On Creep, p.2/99 (Inst. Mech. Eng., London, 1963)
61. V. P. Sdobyrev, Creep and durable strength under combined tensile and torsion stress, Enginnering J., No 2, p. 391 (NBS Joint Publ. Research Service, 1963). Translated from Inzhenernyy Zhurnal (Moscow) 3, 413 (1963)
62. S. Taira, R. Koterazawa and R. Mamiya, Creep under the changing combined tension-torsion stress system, Pronc. 7th Jap. Cong. Testing Materials, p. 56 (1964)
63. N. R. Bauld, Jr., and O. M. Sidebottom, Experimental and theoretical evaluation of several creep theories for creep torsion of circular bars. Developments in Theoretical and Applied Mechanics 2, 557 (1965)
64. E. Z. Stowell and R. K. Gregory, Steady-state biaxial creep. Trans. Am. Soc. Mech. Eng. [E] 32, 37 (1965)
65. R. Bredt, Critical observations on elastic torsion (in German), Z. Ver. Deut. Ingenieure 40, 785 (1986)
66. G. I. Taylor and H. Quinney. The plastic distortion of metals, Trans. Roy. Soc. London [A] 230, 323 (1931)
67. W. T. Lankford, J. R. Low and M. Gensamer. The plastic flow of aluminum alloy sheet under combined loads, Trans. Am. Inst. Mining Met. Eng. 171, 574 (1947)