



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

National Technical University of Athens

Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών

School of Mechanical Engineering

Τομέας Θερμότητας

Section of Thermal Engineering

Θερμοδυναμική συμπεριφορά Θερμαντλίας Vuilleumier Ελευθέρων Εμβόλων

Διπλωματική Εργασία

Διαμαντής Κωνσταντίνος

Επιβλέπων:

Ρογδάκης Εμμανουήλ, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2016

Θερμοδυναμική συμπεριφορά Θερμαντλίας Vuilleumier Ελευθέρων Εμβόλων

Διπλωματική Εργασία

Διαμαντής Κωνσταντίνος

Επιβλέπων:

Ρογδάκης Εμμανουήλ, Καθηγητής ΕΜΠ

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική γίνεται θερμοδυναμική ανάλυση μιας μηχανής Vuilleumier ελευθέρων εμβόλων. Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται εισαγωγή στον κύκλο του Vuilleumier και η εφαρμογή του σε μία μηχανή ελευθέρων εμβόλων. Στο δεύτερο κεφάλαιο συνεχίζουμε με την μαθηματική ανάλυση της μηχανής Vuilleumier ελευθέρων εμβόλων, διατυπώνοντας τις κινηματικές εξισώσεις των κινούμενων μελών και ελέγχοντας ως προς την ευστάθεια. Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα κατασκευαστικά χαρακτηριστικά της μηχανής του Thomas. Τέλος στο τέταρτο κεφάλαιο γίνεται ανάλυση των πειραματικών αποτελεσμάτων της μηχανής του Thomas και σύγκριση με το γραμμικό μοντέλο υπολογισμού.

Ευχαριστίες

Για την εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον καθηγητή κ. Ρογδάκη. Πάντοτε διαθέσιμος και με ιδιαίτερη υπομονή απαντούσε σε οποιαδήποτε απορία μου, καθοδηγώντας με παράλληλα στον σωστό δρόμο, προκειμένου να αποπερατωθεί αυτή η εργασία.

Ύστερα θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου και τους φίλους μου που ήταν παρόντες καθόλη τη διάρκεια των σπουδών μου. Θα ήταν άδικο εάν από τους παραπάνω δεν ξεχώριζα τον πατέρα μου, ο οποίος με τις γνώσεις του με διαφώτισε σε πληθώρα προβλημάτων, επιστημονικού περιεχομένου, που συνάντησα κατά την διάρκεια των σπουδών μου. Τον ευχαριστώ ιδιαίτερα γι' αυτό.

Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή-Ο κύκλος του Vuilleumier.....	7
1.1 Ο ιδανικός κύκλος	7
1.1.2 Ο πραγματικός κύκλος	10
1.2 Ιστορικά	11
1.3 Ο κύκλος του Vuilleumier σε μία μηχανή ελευθέρων εμβόλων.....	13
2. Μοντελοποίηση Vuilleumier ελευθέρων εμβόλων	18
2.1 Κινηματική του μη αποσβενόμενου συστήματος.....	19
2.1.1 Γενική λύση του διαφορικού συστήματος.....	20
2.1.2 Περιορισμοί στο μη αποσβενόμενο σύστημα.....	24
2.2 Ένα γραμμικό μοντέλο για τον υπολογισμό του αποσβενημένου συστήματος.....	28
2.2.1 Εξισώσεις κίνησης.....	28
2.2.2 Οι σταθερές απόσβεσης.....	33
2.2.3 Παραγωγή των εξισώσεων που περιγράφουν το σύστημα.....	35
2.3 Μελέτη ως προς την ευστάθεια.....	41
3. Σχεδιασμός και κατασκευή της πειραματικής μηχανής	45
3.1 Βασικά χαρακτηριστικά κατασκευής	45
3.2 Ερμηνεία της πειραματικής μηχανής.....	53
3.3 Αποτελέσματα γραμμικού μοντέλου	55
3.3.1 Οι δυνάμεις ισορροπίας.....	57
3.3.2 Η περίπτωση συντονισμού.....	58
3.3.3 Απλοποίηση των εξισώσεων του συστήματος.....	61
4. Πειραματική ανάλυση.....	64
4.1 Κατασκευή της πειραματικής διάταξης	64
4.1.1.Επισκόπηση σφαλμάτων.....	65
4.2 Σχολιασμός των πειραματικών αποτελεσμάτων.....	66
4.2.1 Οι εσωτερικοί παράμετροι.....	66
4.2.2 Οι εξωτερικοί παράμετροι.....	82
4.2.3 Σύνοψη των αποτελεσμάτων.....	100
4.3 Γενικές παρατηρήσεις σχετικά με την λειτουργία της δοκιμαστικής μηχανής.....	102

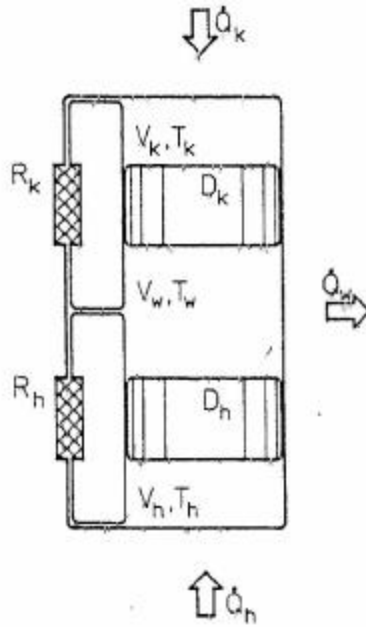
5. Συμπεράσματα	103
6. Βιβλιογραφία.....	104
7. Ονοματολογία	105
Παράρτημα Α: Αλγόριθμος υπολογισμού των πλατών ταλάντωσης με βάση το γραμμικό μοντέλο.....	108
Παράρτημα Β: Αναπαράγωγή των εξισώσεων κίνησης με την μέθοδο Langrange	110
Παράρτημα Γ: Βαθμός απόδοσης Carnot	112
Παράρτημα Δ: Πειραματικά αποτελέσματα	113
Παράρτημα Ε: Ευστάθεια μηχανής του Thomas	116

1. Εισαγωγή-Ο κύκλος του Vuilleumier

Ενώ όπως θα δούμε παρακάτω ο κύκλος Vuilleumier είναι γνωστός εδώ και 100 χρόνια περίπου, μόλις τις τελευταίες δεκαετίες έκανε την εμφάνισή του σαν αντικείμενο έρευνας. Ο λόγος ήταν οι αυξημένες εκπομπές CO₂ και η επιθυμία περιορισμού αυτών των εκπομπών για λόγους προστασίας του περιβάλλοντος. Ιδιαίτερα «επιβλαβής» τομέας για το περιβάλλον μπορεί να χαρακτηριστεί αυτός της θέρμανσης, καθώς εκεί συναντάται η μεγαλύτερη ενεργειακή σπατάλη. Έτσι άρχισε να εξετάζεται η πιθανότητα εφαρμογής του κύκλου Vuilleumier σε θερμικές αντλίες ή ακόμη και σε κλιματιστικές συσκευές. Η εφαρμογή του κύκλου Vuilleumier σε μια θερμική αντλία επιτρέπει την κατασκευή θερμικά οδηγούμενων αντλιών θερμότητας ως ολοκληρωμένες μονάδες, αντικαθιστώντας την πολύπλοκη σειριακή σύνδεση της αντλίας θερμότητας με την συνεργαζόμενη θερμική μηχανή. Και εξίσου σημαντικό είναι ότι οι μηχανές Vuilleumier χρησιμοποιούν συνήθως σαν αέριο εργασίας το Ήλιο, αποφεύγοντας έτσι τα περιβαλλοντικά προβλήματα που σχετίζονται με τις σύνηθες αντλίες θερμότητας.

1.1 Ο ιδανικός κύκλος

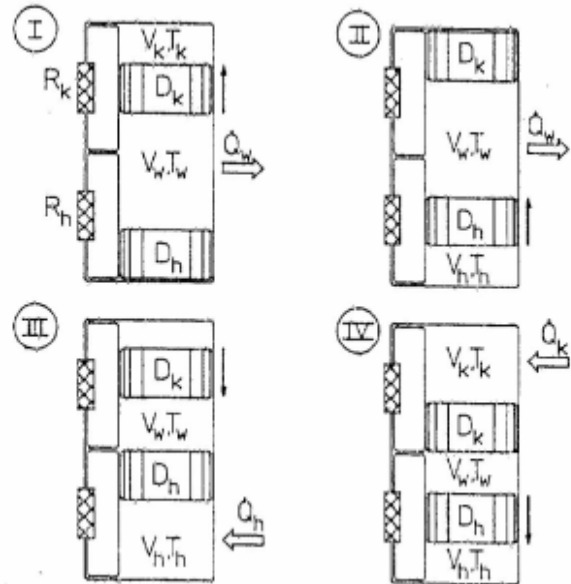
Ο ιδανικός κύκλος του Vuilleumier μπορεί να πραγματοποιηθεί σε μια μηχανή σαν κι αυτήν που φαίνεται στην Εικόνα 1.1. Ο κύκλος διεξάγεται ανάμεσα σε τρία χαρακτηριστικά επίπεδα θερμοκρασίας, χαμηλό (ψυχρό), μεσαίο (ζεστό) και υψηλό (θερμό). Το αέριο εργασίας, μέσω των δύο εκτοπιστών Dk και Dh, κινείται περιοδικά σε τρεις κυλινδρικούς χώρους V_k, V_w και V_h, οι οποίοι έχουν θερμοκρασία T_k, T_w και T_h αντίστοιχα. Κατά την κίνηση αυτή το αέριο ρέει μέσω δύο αναγεννητών R_k και R_h, οι οποίοι χρησιμεύουν σαν αποθήκες θερμότητας, ψύχοντας ή θερμαίνοντας το αέριο στα κατάλληλα επίπεδα θερμοκρασίας (π.χ αν το αέριο κινείται από V_h προς V_w μέσω του R_h, αυτό ψύχεται, ενώ θερμαίνεται κατά την αντίστροφη κίνηση). Η πίεση είναι τοπικά σταθερή, ώστε στην ιδανική περίπτωση που δεν υπήρχαν τριβές, δεν θα απαιτούνταν μηχανική ενέργεια για την κίνηση των εκτοπιστών.



$\dot{Q}_k, \dot{Q}_w, \dot{Q}_h$: Ροή θερμότητας V_k, V_w, V_h : Κυλινδρικοί θαλάμοι
Εικόνα 1.1: D_k, D_h : Εκτοπιστές R_k, R_h : Αναγενητές
 T_k, T_w, T_h : Ψυχρή, ζεστή, θερμή θερμοκρασία

Για την αναπαράσταση της λειτουργίας του κύκλου, χωρίζεται η διαδικασία σε τέσσερις φάσεις (βλ. Εικόνα 1.2), κατά τις οποίες για λόγους κατανόησης θα κινείται μόνο ένα έμβολο κατά τα διάφορα στάδια.

- **1^η φάση :** Ο κρύος εκτοπιστής D_k κινείται προς τα πάνω, ενώ ο θερμός εκτοπιστής D_h βρίσκεται στο κάτω νεκρό σημείο σε ηρεμία. Κατά την κίνηση του ψυχρού εμβόλου ρέει το αέριο από τον κρύο κυλινδρικό θάλαμο προς το ζεστό κυλινδρικό θάλαμο (ενδιάμεσος), λαμβάνοντας αποθηκευμένη θερμότητα από τον αναγεννητή. Η πίεση αυξάνεται λόγω αύξησης της θερμοκρασίας. Η προκύπτουσα θερμότητα, λόγω συμπίεσης, διαχέεται ως επί το πλείστον στο ζεστό κυλινδρικό χώρο, αφού στην παρούσα φάση το αέριο βρίσκεται κυρίως σε αυτόν τον χώρο.
- **2^η φάση:** Ο ψυχρός εκτοπιστής παραμένει στο άνω νεκρό σημείο και ο θερμός εκτοπιστής αρχίζει να κινείται προς τα πάνω. Η μέση θερμοκρασία αυξάνεται και κατ' αυτόν τον τρόπο οδηγούμαστε έτσι και στην περαιτέρω αύξηση της πίεσης. Η θερμότητα από την συμπίεση θα αποδοθεί και πάλι στον ζεστό κυλινδρικό χώρο.
- **3^η φάση:** Αρχίζει πλέον η εκτόνωση του αερίου στην αρχική πίεση. Ο ψυχρός εκτοπιστής κινείται προς τα κάτω. Έτσι το αέριο οδηγείται πάλι στον ψυχρό θάλαμο, περνώντας από τον ψυχρό αναγεννητή, επιστρέφοντας την θερμότητα που έλαβε κατά την πρώτη φάση, με αποτέλεσμα να ψύχεται και να μειώνεται η πίεση του. Η περαιτέρω θερμότητα εκτόνωσης αποδίδεται στον θερμό θάλαμο.
- **4^η φάση:** Ο θερμός εκτοπιστής κινείται πάλι προς το κάτω νεκρό σημείο. Το αέριο βρίσκεται κατά κύριο λόγο πλέον στον ψυχρό θάλαμο, με αποτέλεσμα το μεγαλύτερο ποσό θερμότητας που χάνεται (στους αναγεννητές) από την προαναφερθείσα κίνηση του θερμού εκτοπιστή, να αναπληρώνεται στον ψυχρό θάλαμο.



Εικόνα 1.2: Ο κύκλος Vuilleumier.

Η παραπάνω απλοϊκή παρουσίαση αναδεικνύει δύο σημαντικές ιδιότητες του κύκλου Vuilleumier. Πρώτον είναι ότι η πίεση διακυμαίνεται περιοδικά γύρω από την μέση τιμή της, η οποία αυξάνεται ή μειώνεται αποκλειστικά από την αλλαγή της θερμοκρασίας του

αερίου, συνεπώς θερμικά. Δεύτερον ο κύκλος είναι σε θέση να απορροφά θερμότητα από χαμηλό και υψηλό επίπεδο θερμοκρασίας και να την αποδίδει σε ένα μεσαίο.

1.1.2 Ο πραγματικός κύκλος

Κατά την μελέτη του πραγματικού κύκλου Vuilleumier πρέπει να ληφθούν υπ' όψιν διάφορες απώλειες στους αναγεννητές, στην θερμική αγωγιμότητα και στην μεταφορά θερμότητας.

Οι απώλειες στους αναγεννητές εμφανίζονται λόγω της πεπερασμένης αποθηκευτική τους ικανότητας και κατά την συναλλαγή θερμότητας με το αέριο, η διαφορά θερμοκρασίας δεν είναι πάντα η επιθυμητή, με αποτέλεσμα το αέριο να μην ψύχεται ή θερμαίνεται στην θερμοκρασία του γειτονικού θαλάμου. Η προκύπτουσα διαφορά θερμοκρασίας πρέπει να αντισταθμιστεί με επιπλέον ανταλλαγή θερμότητας με το περιβάλλον. Επιπλέον απώλειες ανταλλαγής θερμότητας έχουμε στα τοιχώματα του περιβλήματος και στον εκτοπιστή. Αυτές οι απώλειες ενισχύονται από το γνωστό «ShuttleVerlust», το οποίο προκαλείται από την παλινδρομική κίνηση του εκτοπιστή κατά μήκος του τοιχώματος του κυλίνδρου στην περιοχή του εκτοπιστή.

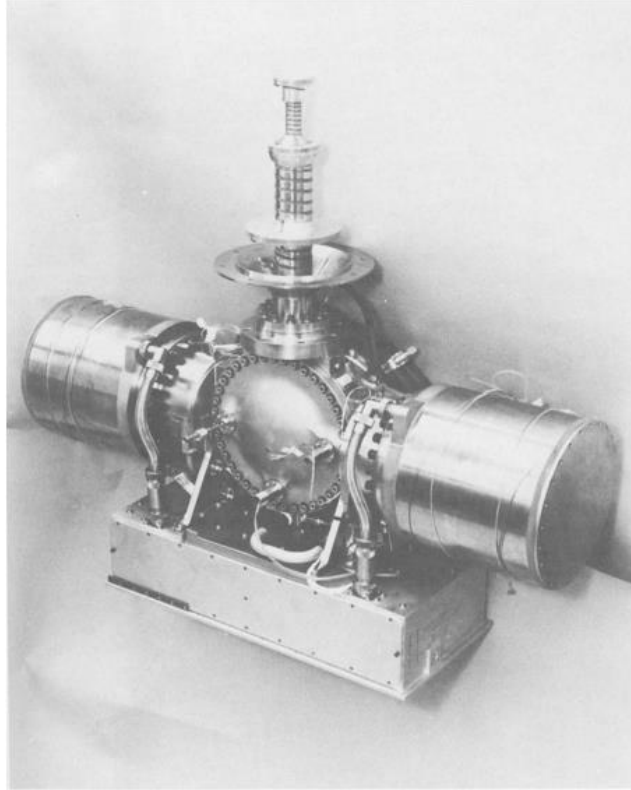
Επειδή οι επιφάνειες ανταλλαγής θερμότητας δεν είναι αρκετά μεγάλες, σε μια πραγματική μηχανή Vuilleumier χρειάζονται επιπλέον εναλλάκτες θερμότητας. Κατά αυτόν τον τρόπο μπορεί να μειωθούν οι απώλειες ανταλλαγής. Ο εσωτερικός όγκος του εναλλάκτη θερμότητας, όπως και του αναγεννητή, είναι χρονικά αμετάβλητος. Ο λεγόμενος «νεκρός όγκος» οδηγεί σε μία απόσβεση της ταλάντωσης της πίεσης, με αποτέλεσμα να μειώνεται η ισχύς. Με την μετατόπιση της ανταλλαγής θερμότητας από του θαλάμους των κυλίνδρων στους εναλλάκτες θερμότητας, η αλλαγή της φάσης προσεγγίζεται ορθότερα με αδιαβατική παρά με ισόθερμη. Αυτό δημιουργεί τις λεγόμενες «αδιαβατικές απώλειες». Αυτές προκαλούνται από την διακύμανση της πίεσης, σε ένα μη ισοθερμικό κυλινδρικό θάλαμο, προκαλώντας διακυμάνσεις στην θερμοκρασία του τοιχώματος. Με την είσοδο του αερίου στους κυλινδρικούς θαλάμους προκαλείται μία μη αντιστρεπτή ανταλλαγή θερμότητας με τα τοιχώματα.

Μηχανικές απώλειες προκαλούνται από την τριβή κατά την κίνηση των εκτοπιστών και από απώλειες πίεσης της ροής, δημιουργώντας έτσι σε μια πραγματική μηχανή Vuilleumier την ανάγκη για παροχή περισσότερης μηχανικής ισχύος. Ένας κατάλληλος σχεδιασμός του βάρου εμβόλου θα επέτρεπε μέσα από την διαδικασία την παραγωγή της απαιτούμενης μηχανικής ισχύος. Από τα βάρη εμβόλων, τα οποία είναι ούτως ή άλλως αναγκαία για τον έλεγχο του εκτοπιστή, θα μεταβάλλονταν περιοδικά όγκος του αερίου, ώστε να παράγεται έργο. Ωστόσο η εξέργεια που παράγεται μέσω αυτής της διαδικασίας μειώνει τον συντελεστή απόδοσης.

Περαιτέρω απώλειες συμβαίνουν λόγω των ρευμάτων διαρροής μεταξύ εμβόλου και κυλινδρικών τοιχωμάτων. Εκτός από τις απώλειες στραγγαλισμού, οι διακυμάνσεις της πίεσης μειώνονται με την αύξηση των νεκρών όγκων.

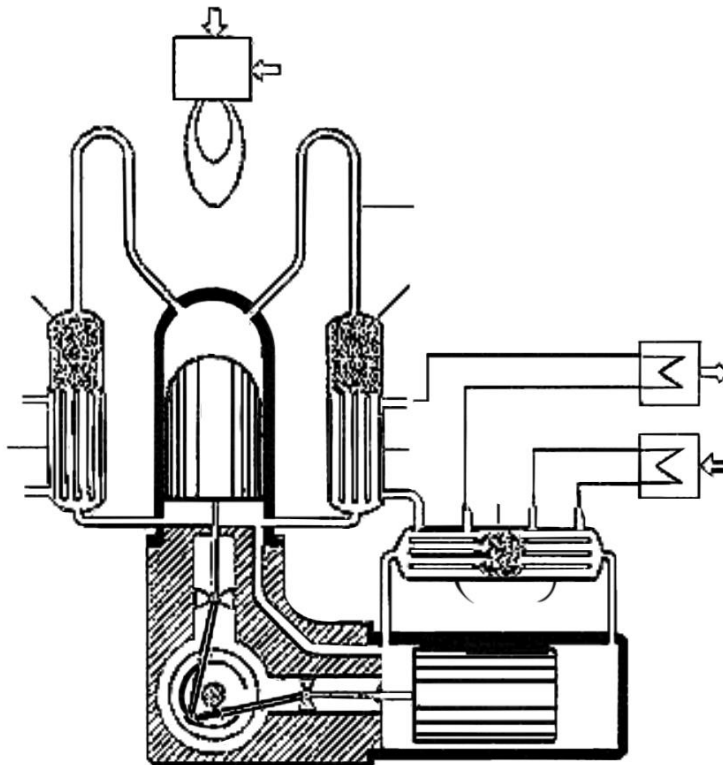
1.2 Ιστορικά

Ο κύκλος του Vuilleumier πρωτοεμφανίστηκε το 1918 όταν ο R.Vuilleumier έκανε αίτηση για δίπλωμα ευρεσιτεχνίας. Ωστόσο η εφεύρεση του δεν έγινε περαιτέρω γνωστή, άγνωστο είναι ακόμη αν ο ίδιος ο εφευρέτης κατάφερε να φτιάξει μία μηχανή. Την επανεμφάνιση του κάνει ο κύκλος Vuilleumier την δεκαετία του '60 στις Ηνωμένες Πολιτείες, από τις εταιρείες Phillips και Hughes Aircraft. Για λογαριασμό της NASA και της αεροπορίας των ΗΠΑ κατασκευάστηκαν ψυκτικές μηχανές Vuilleumier, μόλις λίγων Watt ψυκτικής ικανότητας σε θερμοκρασίες κάτω των 100 K, για την ψύξη αισθητήρων υπερύθρων. Μόλις στις αρχές του '80 εξετάζεται η πρόταση εφαρμογής του κύκλου Vuilleumier για οικιακό κλιματισμό και θέρμανση. Πειραματικές και πρότυπες μηχανές αναπτύχθηκαν από την εταιρεία Phillips στην Ολλανδία, το Τεχνικό Πανεπιστήμιο Μονάχου, την εταιρεία Sanyo στην Ιαπωνία και το Πανεπιστήμιο του Dortmund.



Εικόνα 1.3: Ψυκτική μηχανή Vuilleumier (Hughes Aircraft Co., Los Angeles).

Οι τελευταίες μηχανές Vuilleumier μοιάζουν αρκετά ως προς τις αρχές σχεδιασμού και προορίζονται όλες σαν θερμικές αντλίες κλιματισμού και θέρμανσης οικιακών χώρων. Οι θερμική τους ικανότητα κυμαίνεται μεταξύ 4.0 και 20 kW με βαθμούς αποδόσεων από 1.3 έως 1.7. Η θερμοκρασία του θερμαντήρα τους, η οποία περιορίζεται καθαρά μόνο από τα διαθέσιμα υλικά, παίρνει τιμές από 500 έως και 700 C. Οι θερμοκρασίες απόρριψης και πρόσληψης θερμότητας ποικίλουν ανάλογα με την χρήση τις μηχανές, και οι τιμές αντίστοιχα είναι από 25 έως 55 C και -15 έως 10 C. Σαν αέριο εργασίας χρησιμοποιείται αποκλειστικά το Ήλιο, μιας και είναι φιλικό προς το περιβάλλον, είναι άφλεκτο και έχει φθίνες ιδιότητες μεταφοράς. Η βέλτιστη διαφορά φάσης μεταξύ των εκτοπιστών είναι 90^0 και γι αυτό οι κύλινδροι, σε όλες τις μηχανές, τοποθετούνταν σε διάταξη V 90^0 στο στροφαλοθάλαμο. Οι εκτοπιστές ήταν συνδεδεμένοι με έναν ηλεκτρικό κινητήρα, ο οποίος όμως ήταν απαραίτητος μόνο για την εκκίνηση και για την ρύθμιση της ταχύτητας, καθώς η κινητήρια ισχύς παράγεται κυρίως από την αλλαγή του όγκου του αέριου εργασίας μέσα στους θαλάμους.

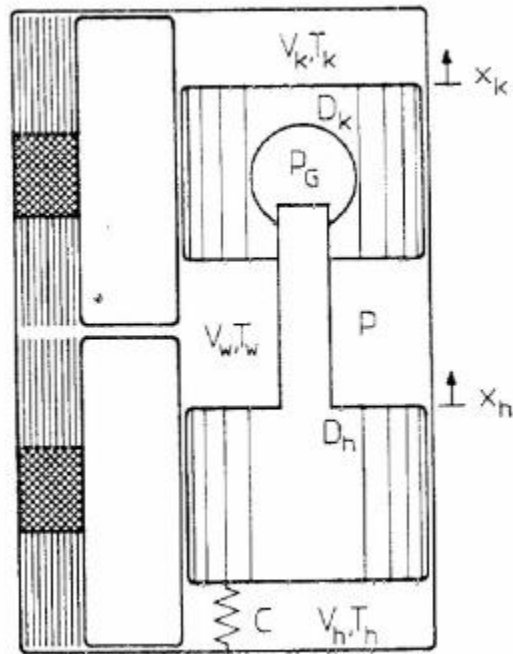


Εικόνα 1.4: Θερμική αντλία Vuilleumier (Πανεπιστήμιο Dortmund).

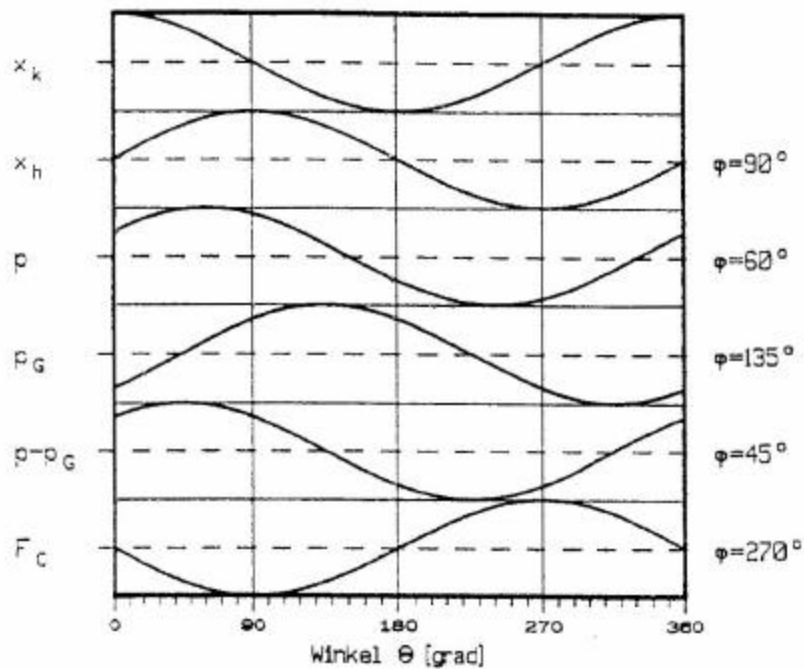
1.3 Ο κύκλος του Vuilleumier σε μία μηχανή ελευθέρων εμβόλων.

Ωστόσο αντικείμενο μελέτης στην παρούσα διπλωματική θα είναι η εφαρμογή του κύκλου Vuilleumier σε μία μηχανή ελευθέρων εμβόλων. Σε αυτές τις μηχανές τα έμβολα δεν είναι οδηγούμενα από κάποιον κινητήριο μηχανισμό, αλλά καθαρά από τις πιέσεις εξ αερίων που ασκούνται σε αυτά. Αρχικά θα παρουσιαστούν οι δυνάμεις αυτές που ασκούνται στους εκτοπιστές, οι οποίες πρέπει να είναι σε απόλυτη ισορροπία προκειμένου το σύστημα να είναι ικανό για ταλάντωση.

Στην εικόνα 1.5 παρουσιάζεται μία μηχανή Vuilleumier ελευθέρων εμβόλων. Στην εικόνα μπορούμε να δούμε του δύο εκτοπιστές D_k και D_h , καθώς και το βάκτρο εκτοπιστή, τα οποία απαιτούνται για την παροχή μηχανικού έργου στον κύκλο. Στο βάκτρο του θερμού εκτοπιστή ασκείται μία δύναμη από τον εσωτερικό όγκο του ψυχρού εκτοπιστή, ο οποίος (όγκος) γι' αυτό τον λόγο θα αναφέρεται σαν αέριο ελατήριο με πίεση p_G και όγκο V_G . Ο θερμός εκτοπιστής συνδέεται με το περίβλημα της μηχανής μέσω του ελατηρίου C , το οποίο όπως θα δούμε στην συνέχεια είναι αναγκαίο για την λειτουργία της. Οι τρεις κυλινδρικοί χώροι είναι ίδιοι με αυτούς που παρουσιάστηκαν στην αρχή το κεφαλαίου και συνδέονται μεταξύ τους μέσω των εναλλακτών θερμότητας και τους αναγεννητές.



Εικόνα 1.5: Μηχανή Vuilleumier ελευθέρων εμβόλων.



Εικόνα 1.6: Αναπαράσταση των δυνάμεων ελατηρίου, πιέσεων και θέση εκτοπιστών.

Η κίνηση των εκτοπιστών θα εξηγηθεί με αναφορά στην πίεση και την δύναμη του ελατηρίου όπως φαίνονται στην εικόνα 1.6, ενώ στην παρούσα φάση θα αμεληθούν οι δυνάμεις απόσβεσης. Πρέπει και πάλι να σημειωθεί, ότι η πίεση p στους θαλάμους της μηχανής μεταβάλλεται μόνο μέσω θερμικής συμπίεσης, ενώ η πίεση p_G του αέριου ελατηρίου μεταβάλλεται μέσω μηχανικής συμπίεσης και εκτόνωσης. Όταν οι εκτοπιστές βρίσκονται στις θέσεις ισορροπίας τους, αυτό σημαίνει ότι το άθροισμα των δυνάμεων πρέπει να είναι μηδέν και έτσι $p-p_G=0$ καθώς και το ελατήριο να είναι χαλαρό.

Καθώς κινείται το ελατήριο προς τα πάνω (εικόνα 1.6, $\theta=0^\circ$), το αέριο εργασίας του ψυχρού θαλάμου μετατοπίζεται προς τον ζεστό θάλαμο και μέσω της θερμικής συμπίεσης αυξάνεται η συνολική πίεση. Η πίεση του αέριου ελατηρίου μειώνεται λόγω της εκτόνωσης και έτσι προκύπτει συνολικά μία διαφορά πίεσης $p-p_G$, η οποία τείνει να μετακινήσει τον ψυχρό εκτοπιστή προς τα κάτω και τον θερμό προς τα πάνω.

Παρατηρώντας τις κινήσεις των εκτοπιστών κατά το πρώτο τέταρτο της περιόδου ($\theta=0..90^\circ$) μπορούμε να δούμε ότι η πίεση στο αέριο ελατήριο αυξάνεται, επειδή οι εκτοπιστές κινούνται ο ένας προς τον άλλον. Η πίεση στον χώρο εργασίας επίσης αυξάνεται. Αυτό οφείλεται γενικά στο γεγονός ότι η διαφορά θερμοκρασίας μεταξύ ζεστού-θερμού θαλάμου είναι κατά πολύ μεγαλύτερη αυτής του ψυχρού-ζεστού. Έτσι η θερμική συμπίεση που προκύπτει από την μεταφορά του ρευστού από τον ζεστό στον θερμό θάλαμο, είναι μεγαλύτερη της θερμικής εκτόνωσης που προκύπτει από τον ζεστό στον ψυχρό. Έτσι η πίεση στον χώρο εργασίας παρουσιάζει μέγιστο για $\theta=60^\circ$ και

γενικότερα η ακριβή της θέση καθορίζεται από τις θερμοκρασίες στους κυλινδρικού θαλάμους. Η διαφορά πίεσης $p-p_G$ από την άλλη εμφανίζεται για $\theta=45^\circ$. Αυτή η γωνία προκύπτει υπό την παραδοχή ότι το πλάτος πίεσης στο χώρο εργασίας είναι τέσσερις φορές μεγαλύτερο αυτό του αέριου ελατηρίου. Για $\theta=90^\circ$ η διαφορά της πίεσης συνεχίζει να είναι θετική, ωθώντας τον ψυχρό εκτοπιστή προς τα κάτω, ωστόσο στο ψυχρό έμβολο ασκείται και η δύναμη του ελατηρίου C η οποία είναι αντίρροπη της δύναμης της πίεσης με αποτέλεσμα ο εκτοπιστής να έχει φτάσει το άνω νεκρό σημείο και να ξεκινάει μία πορεία προς τα κάτω.

Στο επόμενο τέταρτο της περιόδου ($\theta=90^\circ..180^\circ$) κινούνται οι δύο εκτοπιστές προς τα κάτω. Για $\theta=135^\circ$ η απόστασή τους ελαχιστοποιείται με αποτέλεσμα να μεγιστοποιείται η πίεση στο αέριο ελατήριο. Η πίεση στον χώρο εργασίας μειώνεται, καθώς η καθοδική κίνηση των εκτοπιστών προκαλεί μία θερμική εκτόνωση. Η διαφορά πίεσης $p-p_G$ επίσης μειώνεται μέχρι το σημείο $\theta=135^\circ$ που θα μηδενιστεί και από κει και πέρα θα αυξάνεται με διαφορετικό πρόσημο. Έτσι οι δυνάμεις που ασκούνται στον ψυχρό εκτοπιστή θα τον επιβραδύνουν έως ότου φτάσει το κάτω νεκρό σημείο για $\theta=180^\circ$. Ο εκτοπιστής από την άλλη επιταχύνεται προς τα κάτω.

Κατά το δεύτερο ήμισυ της περιόδου ($\theta=180^\circ..360^\circ$) επαναλαμβάνονται οι ίδιες με αντεστραμμένο πρόσημο, έτσι μία περιγραφή του συστήματος θα ήταν περιττή, αντ' αυτού φρόνιμο θα ήταν να παρουσιαστούν οι αποσβέσεις στο σύστημα. Απαραίτητη προϋπόθεση για την ταλάντωση του συστήματος είναι ισορροπία μεταξύ των δυνάμεων αδράνειας, δυνάμεων απόσβεσης και εξωτερικών δυνάμεων για κάθε εκτοπιστή, οι οποίες δίνονται υπό την μορφή πίεσης και δυνάμεις ελατηρίων.

Στην περίπτωση του ψυχρού εκτοπιστή υπάρχει μόνο μία δύναμη η οποία προκαλείται από την διαφορά πίεσης $p-p_G$. Η δύναμη αυτή θα αναλυθεί σε δύο συνιστώσες με αντίστοιχο μέγιστο $\theta=0^\circ$ και $\theta=90^\circ$. Η « 0° » συνιστώσα βρίσκεται σε ισορροπία με την δύναμη αδράνειας, η οποία είναι μέγιστη για $\theta=0^\circ$. Η « 90° » συνιστώσα στηρίζει τον εκτοπιστή κατά την αντίθετη κίνηση, έναντι στην δύναμη απόσβεσης, η οποία είναι μέγιστη για $\theta=90^\circ$.

Στην περίπτωση του θερμού εκτοπιστή θα αναλύσουμε την δύναμη της διαφοράς πίεσης κατά τον ίδιο τρόπο όπως και στον ψυχρό εκτοπιστή. Είναι αναγκαίο να διασφαλιστεί ότι μόνο μία θετική διαφορά πιέσεων μπορεί να κινήσει ανοδικά τον θερμό εκτοπιστή (βλ. Εικόνα 1.6). Πέραν αυτής της δύναμης, εδώ δρα και η δύναμη του ελατηρίου F_c . Για $\theta=0^\circ$ αυτή η δύναμη ισούται με μηδέν και έτσι μένει η συνιστώσα « 0° » της δύναμης της διαφοράς της πίεσης. Αυτή η συνιστώσα βρίσκεται σε ισορροπία με την δύναμη απόσβεσης, η οποία λόγω της ανοδικής πορείας του εκτοπιστής είναι μέγιστη για $\theta=0^\circ$ και έχει κατεύθυνση προς τα κάτω. Για $\theta=90^\circ$ πρέπει να εξισορροπηθεί η δύναμη αδράνειας. Η « 90° » συνιστώσα δεν είναι σε αυτή την φάση διαθέσιμη, καθώς στηρίζει την ανοδική πορεία του εκτοπιστή. Η δύναμη του ελατηρίου F_c όμως, η οποία έχει

κατεύθυνση προς τα κάτω καλείται να κάνει αυτή την δουλειά. Εδώ γίνεται προφανές ότι ο θερμός εκτοπιστής δεν είναι ικανός από μόνος του για ταλάντωση, σε αντίθεση με τον ψυχρό εκτοπιστή και γι' αυτό απαιτείται το επιπλέον ελατήριο C. Επίσης μπορούμε να καταλάβουμε ότι δύναμη του ελατηρίου πρέπει να είναι μεγαλύτερη από την συνιστώσα « 90° ».

Μέσω αυτής της ποιοτικής ανάλυσης, μπορούμε να δούμε ότι μία μηχανή Vuilleumier ελευθέρων εμβόλων αποτελεί ένα σύστημα ικανό για ταλάντωση. Έτσι είναι εφικτό να τεθούν σε ισορροπία οι δυνάμεις που ασκούνται στα έμβολα, προκειμένου να έχουμε μία ευσταθή ταλάντωση. Στο επόμενο κεφάλαιο γίνεται η μαθηματική ανάλυση της μηχανής.

2. Μοντελοποίηση Vuilleumier ελευθέρων εμβόλων

Η δυσκολία στην μαθηματική περιγραφή μιας FPM, είναι ότι η κινηματική συχνότητα, το πλάτος εκτοπισμού και η γωνία φάσης δεν είναι σταθερά εξ αρχής. Γι αυτό πρέπει να υπολογιστούν σε συνδυασμό με τον θερμοδυναμικό κύκλο. Η σύζευξη του θερμοδυναμικού κύκλου και των κινηματικών μεγεθών σε μια FPM επιτυγχάνεται μέσω της πίεσεως μέσα στον εργαζόμενο χώρο. Μέσω αυτής (πίεσης) μπορούμε να εξάγουμε από την μία την θερμότητα συμπίεσης και εκτόνωσης μέσα στον κύκλο και από την άλλη τις δυνάμεις διέγερσης για το ταλαντευόμενο σύστημα. Έτσι αν διαμορφώσουμε μία εξίσωση για την πίεση, η οποία θα εξαρτάται μόνο από τα κινηματικά μεγέθη, θα μπορούμε να «απαλλάξουμε» την διαδικασία υπολογισμού από κινηματικά μεγέθη. Μία τέτοια εξίσωση, που θα μπορεί να επιλυθεί ακριβώς για την πίεση, μπορεί να συνεπαχθεί από το ισοθερμικό μοντέλο. Τέτοια μοντέλα (ισοθερμικά) βασίζονται σε ισόθερμες μεταβολές μέσα στους εργαζόμενους χώρους. Το μοντέλο έχει τις εξής προϋθέσεις:

- Ισόθερμες μεταβολές στους κυλινδρικούς χώρους.
- Ιδανικό αέριο εργασίας.
- Σταθερή μάζα αερίου στον χώρο.
- Τοπικά σταθερή πίεση.
- Ιδανικοί εναλλάκτες θερμότητας και αναγεννητές.
- Σταθερή συχνότητα.
- Παράβλεψη των κινηματικών και ενεργειακών αλλαγών του εργαζομένου μέσου.

Έτσι από την εξίσωση :

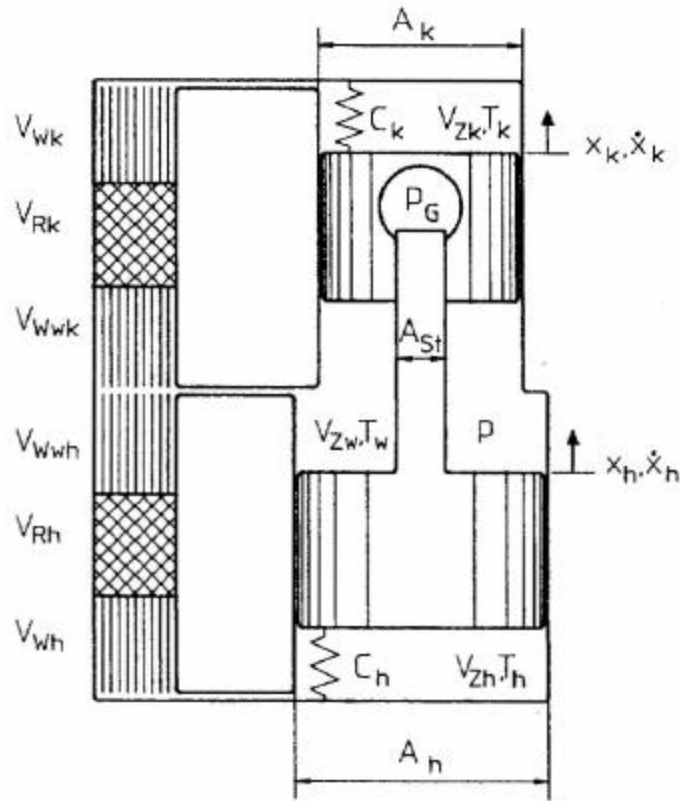
$$P = \frac{m_{gas} R}{\sum V_i / T_i} \quad (2.1)$$

μόνος άγνωστος είναι ο όγκος των κυλινδρικών θαλάμων. Αυτοί από την άλλη εξαρτώνται μόνο από τα κινηματικά μεγέθη του συστήματος, το οποίο μας δίνει την δυνατότητα να μην ασχοληθούμε ιδιαίτερα με τα θερμοδυναμικά μεγέθη του συστήματος.

Στις επομένως ενότητες θα μελετηθεί, για αρχή, η κινηματική του συστήματος χωρίς αποσβέσεις, απλοποίηση ιδιαίτερα βολική για την διερεύνηση των αρχών ταλάντωσης του συστήματος. Κλείνοντας θα αναλύσουμε το σύστημα του αποσβεννημένου συστήματος με την βοήθεια ενός γραμμικού μοντέλου.

2.1 Κινηματική του μη αποσβενόμενου συστήματος.

Για την καλύτερη κατανόηση των παρακάτω μαθηματικών εξισώσεων παρατίθεται το μονογραμμικό σχήμα μιας Vuillemier. Σε αντίθεση με το προηγούμενο κεφάλαιο οι διατομές των δύο εκτοπιστών διαφέρουν. Κατά αυτό τον τρόπο μπορεί οι διαδρομές των εκτοπιστών να επικαλύπτονται εν μέρη, γεγονός που οδηγεί στην αύξηση των νεκρών όγκων, ωστόσο αυτή η διαμόρφωση απεικονίζει τη γενική περίπτωση. Επιπλέον ο ψυχρός εκτοπιστής συνδέεται με το περίβλημα της μηχανής μέσω ενός ελατηρίου. Έτσι η γενική περίπτωση περιέχει και τα τρία θεωρητικά ελατήρια μεταξύ των εκτοπιστών και του περιβλήματος. Ανεξάρτητα αν το περίβλημα συνδέεται με ένα ελατήριο σε ένα σταθερό πλαίσιο αναφοράς ή αν το ίδιο είναι σταθερό, όπως θα θεωρηθεί στην επομένη ενότητα, προκύπτει ένα σχετικό σύστημα μεταξύ περιβλήματος και εκτοπιστών με δύο βαθμούς ελευθερίας. Έτσι για δομικούς λόγους μόνο δύο εκ των τριών ελατήρια είναι απαραίτητα για το σύστημα. Ωστόσο στους υπολογισμούς μας θα ληφθούν υπ' όψιν και τα τρία ελατήρια, προκειμένου να αναδείξουμε ποιά είναι απαραίτητα για το σύστημα και ποιά προαιρετικά. Είναι αδιάφορο, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.1, τα ελατήρια είναι μηχανικά ή αέρια, δεδομένου ότι και τα δύο θα αντιμετωπίζονται σαν γραμμικά στοιχεία χωρίς απώλειες.



Σχήμα 2.1: Γενική περίπτωση μηχανής Vuilleumier.

2.1.1 Γενική λύση του διαφορικού συστήματος.

Αμελώντας τις δυνάμεις απόσβεσης, παραμένουν οι δυνάμεις αδράνειας, πίεσης εξ αερίων και ελατηρίων, οι οποίες βρίσκονται σε ισορροπία μεταξύ τους. Έτσι προκύπτουν οι κινηματικές εξισώσεις των εμβόλων (με βάση το σχήμα 2.1):

$$m_k \ddot{x} = A_{St} (p_G - p) - C_k x_k \quad (2.2a)$$

$$m_h \ddot{x} = A_{St} (p - p_G) - C_h x_h \quad (2.2b)$$

Στις εξισώσεις δεν εμφανίζονται οι δυνάμεις βάρους, καθώς ισορροπούνται από την προέκταση των ελατηρίων.

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις κατευθύνσεις x_k και x_h με βάση το σχήμα 2.1, μπορεί η πίεση p πίεση p_G του αέριου ελατηρίου να εκφραστούν ως συναρτήσεις των θέσεων των εκτοπιστών. Έτσι η εξίσωση 4.1 του ισοθερμοκρασιακού μοντέλου παίρνει πλέον την μορφή:

$$p = \frac{m_{gas} R}{c_1 + c_2 x_k + c_3 x_h} \quad (2.3)$$

$$\mu \varepsilon \quad c_1 = \frac{\overline{V_{Zk}} + V_{Wk}}{T_k} + \frac{V_{Rk}}{T_{Rk}} + \frac{V_{Wwk} \overline{V_{Zw}} + V_{Wwh}}{T_w} + \frac{V_{Rh}}{T_{Rh}} + \frac{V_{Wh} + \overline{V_{Zh}}}{T_h} \quad (2.3a)$$

$$c_2 = \frac{A_k - A_{St}}{T_w} - \frac{A_k}{T_k} \quad (2.3b)$$

$$c_3 = \frac{A_h}{T_h} - \frac{A_h - A_{St}}{T_w} \quad (2.3c)$$

Επίσης θα θεωρήσουμε ότι η μεταβολή θερμοκρασίας στους αναγεννητές είναι γραμμική, οπότε παράδειγμα για τον θερμό αναγεννητή θα έχουμε:

σε θέση x του αναγεννητή η θερμοκρασία θα δίνεται: $T_x = T_w + \frac{x}{L}(T_h - T_w)$, όπου L το συνολικό μήκος του αναγεννητή. Για στοιχειώδη όγκο η καταστατική εξίσωση δίνεται:

$$dm = \frac{p}{R} \frac{dV}{T_x}, dV = A dx \Rightarrow dm = \frac{p}{R} A \frac{dx}{T_w + \frac{x}{L}(T_h - T_w)}. \text{ Ολοκληρώνοντας για τον συνολικό}$$

όγκο του εναλλάκτη:

$$\int_0^{m_{Rh}} dm = \frac{p}{R} A \frac{L}{T_h - T_w} \int_0^L \frac{d\left(T_w + \frac{x}{L}(T_h - T_w)\right)}{T_w + \frac{x}{L}(T_h - T_w)} \Rightarrow m_{Rh} = \frac{p}{R} \ln\left(T_w + \frac{x}{L}(T_h - T_w)\right)_0^L$$

$$\Rightarrow m_{Rh} = \frac{p}{R} \frac{V_{Rh}}{(T_h - T_w)} \cdot \ln\left(\frac{T_h}{T_w}\right)$$

Οπότε προκύπτει για θερμό αναγεννητή και ψυχρό αντίστοιχα:

$$T_{Rh} = \frac{T_h - T_w}{\ln(T_h / T_w)} \quad \text{και} \quad T_{Rk} = \frac{T_w - T_k}{\ln(T_w / T_k)} \quad (2.4a,b)$$

Η μεταβολή της κατάστασης στο αέριο ελατήριο είναι αδιαβατική και η αντίστοιχη πίεση δίνεται :

$$p_G = \bar{p} \left[1 + \frac{A_{St}}{V_G} (x_k - x_h) \right]^{-\gamma} \quad (2.5)$$

Οι εξισώσεις για την πίεση p και p_G μέσω γραμμικοποίησης, από τις παραπάνω εξισώσεις, γράφονται :

$$p(x_k, x_h) = p(x_k = 0, x_h = 0) + (x_k - 0) p_{x_k}(0, 0) + (x_h - 0) p_{x_h}(0, 0) \Rightarrow$$

$$p(x_k, x_h) = \frac{m_{gas} R}{c_1} + x_k \frac{-m_{gas} R c_2}{c_1^2} + x_h \frac{-m_{gas} R c_3}{c_1^2}$$

$$p_G(x_k, x_h) = p_G(0, 0) + (x_k - 0) p_{G,x_k}(0, 0) + (x_h - 0) p_{G,x_h}(0, 0) \Rightarrow$$

$$p_G(x_k, x_h) = \bar{p} + x_k \left(-\bar{p} \gamma \frac{A_{St}}{V_G} \right) + x_h \left(-\bar{p} \gamma \frac{A_{St}}{V_G} \right)$$

Και τελικά:

$$p = \bar{p} \left(1 - \frac{c_2}{c_1} x_k - \frac{c_3}{c_1} x_h \right) \quad (2.6), \quad \mu\epsilon \quad \bar{p} = \frac{m_{gas} R}{c_1} \quad (2.6a)$$

$$p_G = \bar{p} - (C_G / A_{St}) x_k + (C_G / A_{St}) x_h \quad (2.7)$$

$$\mu\epsilon \quad C_G : C_G = \bar{p} \gamma A_{St}^2 / \bar{V}_G \quad \text{και} \quad \bar{p}_G = \bar{p} \quad (2.7a,b)$$

Έτσι προκύπτουν οι δευτέρου βαθμού διαφορικές εξισώσεις κίνησης:

$$\ddot{x}_k = -\frac{C_G + C_k + C_k^*}{m_k} x_k + \frac{C_G - C_h^*}{m_k} x_h \quad (2.8a)$$

$$\ddot{x}_h = \frac{C_G + C_k^*}{m_h} x_k - \frac{C_G + C_h - C_h^*}{m_h} x_h \quad (2.8b)$$

$$\text{με } C_k^* = -A_{St} \bar{p} c_2 / c_1 \quad C_h^* = -A_{St} \bar{p} c_3 / c_1 \quad (2.8c,d)$$

Μπορούμε να καταλάβουμε ότι πέρα από τα τρία ελατήρια C_G , C_h και C_k υπάρχει ένα ακόμα αέριο ελατήριο, το οποίο δημιουργείται από την πίεση του αερίου στον χώρο εργασίας. Η επίδραση αυτού του ελατηρίου ενισχύεται επιπλέον από την θερμική συμπίεση και εκτόνωση και μπορεί να αναλυθεί σε όρους, τους C_k^* και C_h^* . Ο όρος C_k^* εκφράζει το φαινόμενο του αερίου ελατηρίου (όχι του C_G), το οποίο προκύπτει από την κίνηση του ψυχρού εκτοπιστή, και ο όρος C_h^* αντίστοιχα για την κίνηση του θερμού εκτοπιστή. Μιας και οι σταθερές c_2 και c_3 είναι αρνητικές, οι C_k^* και C_h^* ορίζονται αντίστοιχα με αρνητικό πρόσημο, προκειμένου να προκύψουν θετικές σταθερές ελατηρίων.

Με την βοήθεια της πρώτης παραγώγου μπορεί το διαφορικό μας σύστημα να περιγράφει από ένα σύστημα πρώτης τάξης, του οποίου οι λύσεις καθορίζονται από τις ιδιοτιμές του. Στο σύστημα μας υπάρχουν τέσσερις ιδιοτιμές της μορφής:

$$\lambda_{1-4} = \pm \sqrt{-a \pm \sqrt{b}} \quad (2.9)$$

$$\text{με } a = \frac{C_G + C_k + C_k^*}{m_k} + \frac{C_G + C_h - C_h^*}{m_h} \quad (2.9a)$$

$$b = \frac{1}{4} \left[\frac{C_G + C_k + C_k^*}{m_k} + \frac{C_G + C_h - C_h^*}{m_h} \right]^2 - \frac{(C_G + C_k + C_k^*)(C_G + C_h - C_h^*) - (C_G + C_k^*)(C_G - C_h^*)}{m_k m_h} \quad (2.9b)$$

Αν μία ιδιοτιμή είναι μιγαδική, τότε μαζί με την συζυγή της αποτελούν ένα ζεύγος ιδιοτιμών, με το μιγαδικό μέρος να καθορίζει την συχνότητα ταλάντωσης του συστήματος και το πρόσημο του πραγματικού μέρους εάν το πλάτος ταλάντωσης μειώνεται ή αυξάνεται εκθετικά. Απαραίτητη προϋπόθεση για την δυνατότητα ταλάντωσης του συστήματος είναι η ύπαρξη ενός τουλάχιστον ζεύγους μιγαδικών ιδιοτιμών με θετικό πραγματικό μέρος, διότι μόνο έτσι θα μπορεί το αποσβενόμενο σύστημα να ταλαντεύεται με σταθερό πλάτος.

Η εξίσωση 2.9 μας δείχνει ότι μπορούμε να έχουμε μιγαδικές ιδιοτιμές αν το $b < 0$. Στην συγκεκριμένη περίπτωση είναι όλες οι ιδιοτιμές μιγαδικές, με το ζεύγος συζυγών (λ_1, λ_2)

να έχουν θετικό πρόσημο στο πραγματικό μέρος και το άλλο (λ_3, λ_4) αρνητικό. Έτσι προκύπτει σύστημα με συχνότητα ταλάντωσης β .

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta \quad \lambda_3 = -\alpha + i\beta \quad \lambda_4 = -\alpha - i\beta \quad (2.10a-d)$$

$$\mu\epsilon \quad \alpha = \sqrt{(-a + \sqrt{a^2 - b})/2} \quad (2.10e)$$

$$\beta = \sqrt{(a + \sqrt{a^2 - b})/2} \quad (2.10f)$$

Έτσι προκύπτει ότι το υπό εξέταση σύστημα της Viulleumier ελευθέρων εμβόλων, είναι ικανό για μια σταθερή ταλάντωση. Ο περιορισμός που περιγράφει την δυνατότητα ταλάντωσης είναι ο εξής:

$$\frac{1}{4} \left[\frac{C_G + C_k + C_k^*}{m_k} + \frac{C_G + C_h - C_h^*}{m_h} \right]^2 - \frac{(C_G + C_k + C_k^*)(C_G + C_h - C_h^*) - (C_G + C_k^*)(C_G - C_h^*)}{m_k m_h} < 0 \quad (2.11)$$

2.1.2 Περιορισμοί στο μη αποσβενόμενο σύστημα.

Ορίζοντας την σχέση μεταξύ των μαζών των εμβόλων :

$$\mu = m_k / m_h \quad (2.12)$$

ο περιορισμός (2.11) παίρνει την μορφή:

$$f(\mu) = \mu^2 - 2\mu \frac{(C_G + C_k + C_k^*)(C_G + C_h - C_h^*) - 2(C_G + C_k^*)(C_G - C_h^*)}{(C_G + C_h - C_h^*)^2} + \left[\frac{C_G + C_k + C_k^*}{C_G + C_h - C_h^*} \right]^2 \quad (2.13)$$

$$\mu\epsilon \quad f(\mu) < 0 \quad (2.13a)$$

Η $f(\mu)$ είναι μία παραβολική συνάρτηση, η οποία λόγω του προσήμου της δεύτερης παραγώγου παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. Για να πληρείται ο περιορισμός 2.13 πρέπει η $f(\mu)$ να έχει πραγματικές ρίζες, εκ των οποίων μια να είναι θετική, καθώς μόνο έτσι έχουμε φυσική σημασία, μιας και μιλάμε για μάζες. Με βάση αυτό το σκεπτικό προκύπτει ο εξής περιορισμός:

$$\left[1 + \frac{C_h}{C_G - C_h^*}\right] \left[1 + \frac{C_k}{C_G + C_k^*}\right] < 1 \quad (2.14)$$

Μιας και όλες οι σταθερές των ελατηρίων είναι θετικές η παραπάνω σχέση ισχύει μόνο για :

$$C_h^* > C_G \quad (2.15a)$$

Με ανασχηματισμό της 2.14 οδηγούμαστε στον περιορισμό, απ' τον οποίο μπορούμε να εξάγουμε την μέγιστη τιμή της C_h^* .

$$C_h^* < C_G(1 + C_h / C_k) + C_h(1 + C_k^* / C_k) \quad (2.15b)$$

Μπορούμε να δείξουμε αργότερα ότι τα σημεία μηδενισμού σε κάθε περίπτωση, είναι θετικά. Αυτό μαρτυρά ότι η μεταβολή της πίεσης που προκαλείται από την κίνηση του θερμού εκτοπιστή, είναι μεγαλύτερη από την μεταβολή της πίεσης του αέριου ελατηρίου, εξ' ου και η δυνατότητα ταλάντωσης (περ.2.15α). Έαν πληρείται η προϋπόθεση αυτή, μέσω (2.14) ή (2.15b), μπορούμε να καθορίσουμε τις σταθερές των ελατηρίων.

Η απόφαση, για το ποιό από τα τρία ελατήρια θα μείνει ενδεχομένως εκτός, θα παρθεί μέσω της 2.14. Γι αυτό το σκοπό θα μελετηθούν τρεις πιθανές περιπτώσεις ξεχωριστά.

Περίπτωση I: Ελατήριο στο θερμό έμβολο και αέριο ελατήριο.

Σε αυτή την περίπτωση η σταθερά C_k είναι μηδέν και από την 2.14 προκύπτει:

$$\left(1 + \frac{C_h}{C_G - C_h^*}\right) < 1 \quad (2.16)$$

Η παραπάνω ισχύει μόνο για $C_G < C_h^*$, όπως και στην 2.15a. Το σύστημα έχει την δυνατότητα ταλάντωσης χωρίς ελατήριο στον ψυχρό εκτοπιστή. Δεν ισχύει κανένας άλλος περιορισμό για το C_h^* σε αυτή την περίπτωση.

Περίπτωση II: Ελατήριο στο ψυχρό έμβολο και αέριο ελατήριο.

Σε αυτή την περίπτωση η σταθερά C_h είναι μηδέν και από 2.14:

$$\left(1 + \frac{C_k}{C_G + C_k^*}\right) < 1 \quad (2.17)$$

Μιας και όλοι οι όροι είναι θετικοί ,δεν μπορεί να εκπληρωθεί ο παραπάνω περιορισμός,άρα είναι απαραίτητο το ελατήριο στον θερμό εκτοπιστή για την ταλάντωση του συστήματος.

Περίπτωση III:Ελατήριο στον θερμό και ψυχρό εκτοπιστή.

Εδώ τίθεται η σταθερά του αέριου ελατηρίου, G_G ,μηδέν και από (2.14):

$$\left[1 - \frac{C_h}{C_h^*}\right] \left[1 + \frac{C_k}{C_k^*}\right] < 1 \quad (2.18)$$

Το σύστημα έχει την δυνατότητα ταλάντωσης και η (2.18) μπορεί αναλογικά με την (2.14) να καθορίσουν τις σταθερές των ελατηρίων.

Κατά συνέπειά προκύπτουν τρεις κανόνες για την τοποθέτηση των ελατηρίων σε μια Vuileumier ελευθέρων εμβόλων:

- Οι εκτοπιστές συνδέονται με το περίβλημα μέσω ελατηρίων.
- Ο θερμός εκτοπιστής προσκολλάται με ελατήριο στο περίβλημα και ο ψυχρός εκτοπιστής στον θερμό, μέσω ενός δεύτερου ελατηρίου.
- Τα τρία θεωρητικά ελατήρια μεταξύ των εμβόλων και του περιβλήματος είναι, χωρίς εξαίρεση, διαθέσιμα.

Παράλληλα με την εξέταση της δυνατότητας ταλάντωσης του συστήματος,είναι εφικτός και ο υπολογισμός της συχνότητας ταλάντωσης, για τα φανταστικά μέρη των ιδιοτιμών (2.10f). Θέτοντας τις βοηθητικές τιμές a και b με βάση όπως ορίστηκαν από τις εξισώσεις 2.9a,b , προκύπτει η συχνότητα ταλάντωσης $\omega_0 = \beta$:

$$\omega_0 = \frac{C_G + C_k + C_k^*}{4m_k} + \frac{C_G + C_h - C_h^*}{4m_h} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(C_G + C_k + C_k^*)(C_G + C_h - C_h^*) - (C_G + C_k^*)(C_G - C_h^*)}{m_k m_h}} \quad (2.19)$$

Θεωρώντας ότι οι σταθερές των ελατηρίων μεταξύ των εκτοπιστών και του περιβλήματος(C_k και C_h),είναι μεγαλύτερες από την σταθερά του αέριου ελατηρίου, ισχύει η παρακάτω απλοποίηση:

$$(C_G + C_k + C_k^*)(C_G + C_h - C_h^*) - (C_G + C_k^*)(C_G - C_h^*) \approx (C_G + C_k + C_k^*)(C_G + C_h - C_h^*) \quad (2.20)$$

Ορίζοντας τις ιδιοσυχνότητες των εκτοπιστών ως τον λόγο των συνολικών σταθερών ελατηρίων, που δρουν στον καθένα, διά την μάζα:

$$\omega_k = \sqrt{\frac{C_G + C_k + C_k^*}{m_k}} \quad \omega_h = \sqrt{\frac{C_G + C_h - C_h^*}{m_h}} \quad (2.21a,b)$$

προκύπτει τελικά η συχνότητα του μη αποσβενόμενου συστήματος, ως το μέσο των δύο παραπάνω ιδιοσυχνοτήτων:

$$\omega_0 = \frac{\omega_k + \omega_h}{2} \quad (2.22)$$

Μιας και η συχνότητα έχει φυσική σημασία μόνο για πραγματικές τιμές, προκύπτει ένας επιπλέον περιορισμός για τη C_h^* μέσω της εξίσωσης 2.21b:

$$C_G + C_h > C_h^* \quad (2.23)$$

Έτσι το ταλαντευόμενο σύστημα είναι ανεξάρτητο από το ελατήριο που θα συνδεθεί στο ψυχρό έμβολο, μιας και οι περιορισμοί για ταλάντωση είναι οι (2.15a) και οι (2.23).

Συνοψίζοντας, τα αποτελέσματα που μπορούμε να εξάγουμε από την μελέτη του ταλαντευόμενου, μη αποσβενόμενου συστήματος, είναι τα εξής:

- Η μηχανή Vuillemier ελευθέρων εμβολών στην συγκεκριμένη περίπτωση αποτελεί ένα ταλαντευόμενο σύστημα.
- Το ταλαντευόμενο σύστημα έχει ακριβώς μια συχνότητα ταλάντωσης, η οποία προσεγγιστικά δίνεται ως το μέσο των ιδιοσυχνοτήτων των δύο εκτοπιστών, και αναμένεται μια σταθερή κατάσταση λειτουργίας.
- Από τα τρία θεωρητικά ελατήρια, αναγκαίο είναι εκείνο που συνδέει το θερμό έμβολο με το περίβλημα, ενώ ένα από τα άλλα δύο μπορεί να παραληφθεί.
- Η μεταβολή της πίεσης που προκαλείται από την κίνηση το θερμού εμβόλου, πρέπει να υπερβαίνει την αντίστοιχη μεταβολή που προκαλείται στο αέριο ελατήριο.
- Η σταθερά ελατηρίου C_h^* πρέπει σε οποιαδήποτε περίπτωση να είναι μικρότερη από τον όρο $C_G + C_h$. Αυτός ο περιορισμός (2.23) μαζί με τον περιορισμό 2.15a θέτουν τις βάσεις για μία ταλάντωση του αποσβενημένου συστήματος.

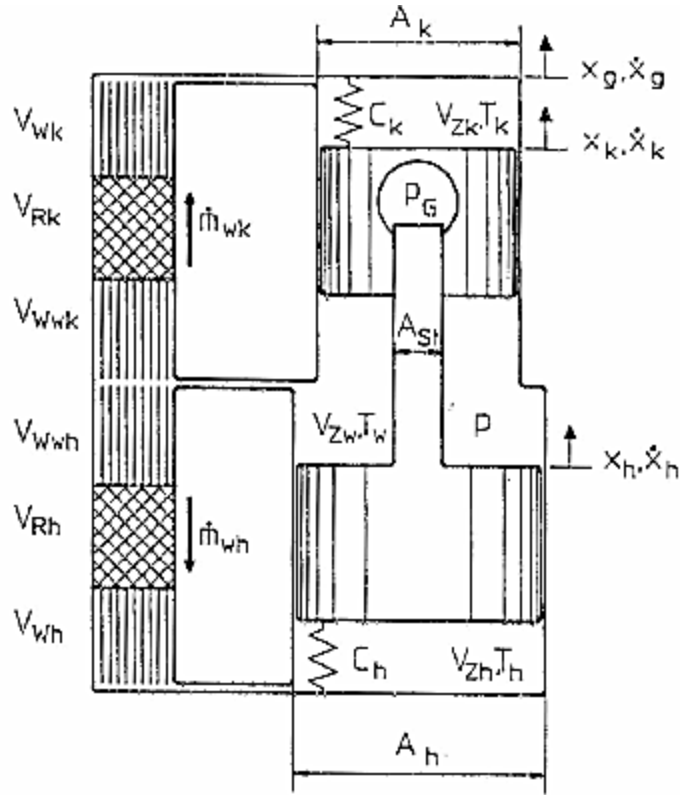
2.2 Ένα γραμμικό μοντέλο για τον υπολογισμό του αποσβεννημένου συστήματος.

Ενώ αρκεί η μελέτη που κάναμε στο ιδανικό σύστημα, ως προς την δυνατότητα ταλάντωσης του, για τον υπολογισμό όμως της σταθερής λειτουργίας του συστήματος, πρέπει να λειφθούν υπόψιν και οι απώλειες. Μια Vuilleumier ελευθέρων εμβόλων έχει απώλειες πίεσεως στους αναγεννητές και εναλλάκτες και υπάρχει η τριβή ολίσθησης. Σε σύγκριση όμως με μια Stirling FPM δεν υπάρχει περαιτέρω απώλεια από την μείωση της μηχανικής απόδοσης. Για την καλή και σταθερή λειτουργία της μηχανής, πρέπει οι δυνάμεις τριβής στα έμβολα να τείνουν στο μηδέν. Για αυτό το λόγο οι απώλειες πίεσης που προκαλούνται λόγω της τριβής των εκτοπιστών θα θεωρηθούν ελάχιστες και θα αμεληθούν.

Ο υπολογισμός θα ξεκινήσει από το γραμμικό σύστημα ταλάντωσης, όπως και στην τελευταία παράγραφο. Τα μαθηματικά που θα χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό των γραμμικών συστημάτων έχουν γενική εφαρμογή και η μεταφορά των περιγραφικών διαφορικών εξισώσεων στο μιγαδικό επίπεδο, θα γίνει με μετασχηματισμό Laplace.

2.2.1 Εξισώσεις κίνησης.

Στο σχήμα 2.2 παρουσιάζεται η ρύθμιση της μηχανής Vuilleumier ελευθέρων εμβόλων, που θα χρησιμεύσει ως βάση για την ακόλουθη ανάλυση. Οι εκτοπιστές διαφέρουν ως προς τις διατομές, όπως και στο προηγούμενο σχήμα και υπάρχουν και τα τρία ελατήρια προκειμένου να γίνει διερεύνηση της γενικής περίπτωσης. Τα ελατήρια γι' αυτό τον σκοπό θα αντιμετωπίζονται ως γραμμικά στοιχεία δίχως απώλειες, ώστε στους υπολογισμούς να μην παίζει ιδιαίτερο ρόλο η φύση του ελατηρίου (μηχανικό ή ελατήριο). Οι δυνάμεις πίεσης από το αέριο εργασίας θα υπολογιστούν με βάση το ισοθερμοκρασιακό μοντέλο, δηλαδή τοπικά σταθερά πίεση. Από την κίνηση των εκτοπιστών, προκαλείται ροή μάζας στους αναγεννητές και εναλλάκτες. Γνωρίζοντας ότι στους εναλλάκτες και αναγεννήτες έχουμε απώλεια πίεσης, μέσω της ροής μάζας μπορούμε να υπολογίσουμε τις διαφορές πιέσεων στους θαλάμους και έν τέλει τις δυνάμεις απόσβεσης.



Σχήμα 2.2: Η μηχανή Vuilleumier στην γενική μορφή με κινούμενο περιβλήμα.

Για τις κινηματικές εξισώσεις του αποσβενημένου συστήματος θα ληφθούν υπόψιν οι δυνάμεις αδράνειας, απόσβεσης, ελατηρίων και αερίων, καθώς θα λάβουμε υπόψιν και την κίνηση του περιβλήματος. Έτσι στο σημείο ισοροπίας οι εξισώσεις διαμορφώνονται ως εξής:

$$m_k \ddot{x}_k = -D_{kk} \dot{x}_k - D_{kh} \dot{x}_h - D_{kg} \dot{x}_g + A_{St} (p_G - p) + C_k (x_g - x_k) \quad (2.24a)$$

$$m_h \ddot{x}_h = -D_{hh} \dot{x}_h - D_{hk} \dot{x}_k - D_{hg} \dot{x}_g + A_{St} (p - p_G) + C_h (x_g - x_h) \quad (2.24b)$$

Πλέον στον υπολογισμό της πίεσης θα ληφθεί υπόψιν και η κίνηση του περιβλήματος x_g . Ο τύπος της πίεσης μπορεί να δοθεί από τον ίδιο τύπο όπως στην εξίσωση 2.7, με έναν επιπλέον όρο που θα υπολογίζει και την κίνηση του περιβλήματος. Θα ακολουθήσει η ίδια μέθοδο γραμμικοποίησης στο σημείο ισοροπίας και έτσι τελικά θα έχουμε:

$$p = \bar{p} \left(1 - \frac{c_2}{c_1} x_k - \frac{c_3}{c_1} x_h - \frac{c_4}{c_1} x_g \right) \quad (2.25)$$

με c_1, c_2, c_3 όπως ορίστηκαν πριν (2.3a-c) και \bar{p} (2.6a) και :

$$c_4 = A_k \left[\frac{1}{T_k} - \frac{1}{T_w} \right] + A_h \left[\frac{1}{T_w} - \frac{1}{T_h} \right] \quad (2.25a)$$

Η c_4 σε αντίθεση με τις c_2 και c_3 είναι θετική, διότι όταν το περιβλήμα κινείται προς την θετική κατεύθυνση, η πίεση μειώνεται λόγω θερμικής εκτόνωσης. Η επίδραση της κίνησης του περιβλήματος στο αέριο ελατήριο δίνεται ως:

$$C_g^* = A_{St} \bar{p} c_4 / c_1 \quad (2.26)$$

Η λύση του διαφορικού συστήματος επιτυγχάνεται με ευκολία μέσω μετασχηματισμών Laplace. Οι περαιτέρω μαθηματικοί σχηματισμοί θα ακολουθήσουν παρακάτω στο παράδειγμα του ψυχρού εκτοπιστή και έτσι μέσω των εφαρμογών Laplace και της γραμμικοποιημένης πίεσης, η εξίσωση 2.24a γίνεται:

$$\begin{aligned} [m_k s^2 + D_{kk} s + C_G + C_k + C_k^*] x_k + [D_{kh} s - C_G - C_h^*] x_h + \\ [D_{kg} s - C_k - C_g^*] x_g = (a_0 + s b_0)_k \end{aligned} \quad (2.27)$$

Ο όρος $(a_0 + s b_0)_k$ προκύπτει από τον μετασχηματισμό Laplace και εκφράζει την αρχική συνθήκη του ταλαντευόμενου συστήματος. Έχει ήδη αναφερθεί ότι, όταν δεν λαμβάνονται υπόψιν δυνάμεις τριβής, η παραμικρή διέγερση μπορεί να θέσει το σύστημα σε ταλάντωση και γι' αυτόν τον λόγο όλοι οι όροι που περιγράφουν τις αρχικές συνθήκες μπορούν να παραλειφθούν. Η κίνησης του περιβλήματος δεν θα περιγραφεί απο εξίσωση της μορφής (2.24), αλλά απο το εξωτερικό ισοζύγιο των δυνάμεων:

$$m_g \ddot{x}_g + m_k \ddot{x}_k + m_h \ddot{x}_h = 0 \quad (2.28)$$

Οι δυνάμεις στο σημείο έδρασης της μηχανής αμελούνται. Η εμπειρία με τις μηχανές ελευθέρων εμβόλων έχει δείξει ότι αρκούν χαμηλές δυνάμεις ελατηρίου για την κίνηση του περιβλήματος και οι αναγκαίες δυνάμεις απόσβεσης είναι εξίσου χαμηλές. Μέσω των μετασχηματισμών Laplace και επιλύοντας ως προς x_g προκύπτει :

$$x_g = -m_k / m_g x_k - m_h / m_g x_h \quad (2.29)$$

και η παραπάνω σε συνδυασμό με την (4.27) :

$$[m_k s^2 + (D_{kk} - D_{kg} \frac{m_k}{m_g})s + C_G + C_k (1 + \frac{m_k}{m_g}) + C_k^* + C_g^* \frac{m_k}{m_g}]x_k + \left[\left(D_{kh} - D_{kg} \frac{m_h}{m_g} \right) s - C_G + C_k \frac{m_h}{m_g} + C_h^* + C_g^* \frac{m_h}{m_g} \right] x_h = 0 \quad (2.30)$$

Στις μηχανές ελευθέρων εμβόλων η μάζα του περιβλήματος είναι πολλή μεγαλύτερη της μάζας των εκτοπιστών και γι' αυτό τον λόγο η επίδρασή της στους όρους απόσβεσης στην παραπάνω εξίσωση θα αμεληθεί, μιας και η τάξη μεγέθους των σταθερών απόσβεσης πρέπει να ναι ίδια. Οι σταθερές των ελατηρίων πρέπει να είναι επίσης ίδιας τάξης μεγέθους. Με βάση αυτές τις υποθέσεις προκύπτει η παρακάτω απλοποιημένη σχέση:

$$\left[m_k s^2 + D_{kk} s + C_G + C_k + C_k^* \right] x_k + \left[D_{kh} s - C_G + C_k \frac{m_h}{m_g} + C_h^* + C_g^* \frac{m_h}{m_g} \right] x_h = 0 \quad (2.31)$$

Η ιδιοσυχνότητα του ψυχρού εμβόλου ω_k ορίζεται ως:

$$\omega_k = \sqrt{K_{kk} / m_k} \quad (2.32)$$

$$\mu\epsilon \quad K_{kk} = C_G + C_k + C_k^* \quad (2.32a)$$

η ποιότητα του συστήματος Q_k , η οποία είναι ο λόγος της αποθηκευμένης ενέργειας ως προς την διαχεόμενη ενεργεία, δίνεται ως εξής:

$$Q_k = \frac{m_k \omega_k}{2\pi D_{kk}} \quad (2.33)$$

η σταθερά του ελατηρίου K_{kh} , η οποία περιγράφει την επίδραση της κίνησης του θερμού εκτοπιστή στον ψυχρό, μέσω της αλλαγής της πίεσης και των ελατηρίων:

$$K_{kh} = -C_G + C_k \frac{m_h}{m_g} + C_h^* + C_g^* \frac{m_h}{m_g} \quad (2.34)$$

και ο μιγαδικός $T_k(s)$ που εξαρτάται από τον s :

$$T_k(s) = m_k \left[s^2 + \frac{\omega_k}{2\pi Q_k} s + \omega_k^2 \right] \quad (2.35)$$

μας δίνουν την τελική μορφή της εξίσωσης κίνησης του ψυχρού εμβόλου:

$$T_k(s)x_k + (D_{kh}s + K_{kh})x_h = 0 \quad (2.36)$$

Με την ίδια λογική θα προκύψει και η εξίσωση κίνησης του θερμού εμβόλου:

$$T_h(s)x_h + (D_{hk}s + K_{hk})x_k = 0 \quad (2.37)$$

$$T_h(s) = m_h \left[s^2 + \frac{\omega_h}{2\pi Q_h} s + \omega_h^2 \right] \quad (2.38)$$

$$K_{hk} = -C_G - C_k^* \quad (2.39)$$

$$\omega_h = \sqrt{K_{hh} / m_h} \quad (2.40)$$

$$K_{kk} = C_G + C_h \left(1 + \frac{m_h}{m_g} \right) - C_h^* - C_g^* \frac{m_h}{m_g} \quad (2.41)$$

$$Q_h = \frac{m_h \omega_h}{2\pi D_{hh}} \quad (2.42)$$

Οι δύο σταθερές ελατηρίων K_{kk} και K_{hh} , πρέπει να είναι θετικές για να προκύπτουν πραγματικές τιμές για τις ιδιοσυχνότητες των εμβόλων. Ενώ αυτή η προϋπόθεση ισχύει για την K_{kk} σε κάθε περίπτωση, για την K_{hh} από την άλλη και σε συνδυασμό με την (2.41) έχουμε τον εξής περιορισμό:

$$C_h^* < C_G + C_h \left(1 + \frac{m_h}{m_g} \right) - C_g^* \frac{m_h}{m_g} \quad (2.43)$$

Αν αμελήσουμε την επίδραση της κίνησης του περιβλήματος σε αυτή την ανισότητα, επανερχόμαστε στον περιορισμό (2.23) της προηγούμενης παραγράφου. Η σταθερά K_{hk} είναι σε κάθε περίπτωση αρνητική, ενώ λαμβάνοντας υπόψιν τον περιορισμό (2.15a), η σταθερά K_{kh} παίρνει θετικό πρόσημο.

2.2.2 Οι σταθερές απόσβεσης

Στα πλαίσια του γραμμικού μοντέλου υπολογισμού λαμβάνονται υπ' όψιν μόνο οι δυνάμεις απόσβεσης από την πτώση πίεσης στη ροή. Γι' αυτό το λόγο οι εξισώσεις κίνησης θα διαμορφωθούν αντίστοιχα:

$$m_k \ddot{x}_k = A_k (p_w - p_k) + A_{St} (p_G - p_w) + C_k (x_g - x_k) \quad (2.44a)$$

$$m_h \ddot{x}_h = A_h (p_h - p_w) + A_{St} (p_w - p_G) + C_h (x_g - x_h) \quad (2.44b)$$

Σύμφωνα με την προαναφερθείσα υπόθεση, ότι οι απώλειες πίεσης σε σύγκριση με το πλάτος πίεσης, στο αέριο ελατήριο και στον χώρο εργασίας, είναι μικρές, μπορεί η πίεση στο θερμό χώρο εργασίας p_w να αντικατασταθεί από την μέση πίεση p . Οι όροι $(p_w - p_k)$ και $(p_h - p_w)$ εκφράζουν τις απώλειες πίεσης στους αναγεννητές και εναλλάκτες και πρέπει να εκφραστούν σαν γραμμικές εξισώσεις της κίνησης των εκτοπιστών και του περιβλήματος, κάτι που θα γίνει παραδειγματικά για το ψυχρό μέρος της μηχανής.

Γι' αυτό τον σκοπό η ροή της μάζας \dot{m}_{wk} μπορεί να καθορισθεί μόνο από τις αλλαγές στον κρύο κυλινδρικό χώρο, με την βοήθεια των νόμο των ιδανικών αερίων:

$$\dot{m}_{wk} = \frac{d}{dt} \left[\frac{pV_k}{RT_k} \right] \quad (2.45)$$

Θέτοντας την πίεση και τον όγκο συναρτήσει της θέσης των εκτοπιστών και περιβλήματος προκύπτει η εξίσωση και γραμμικοποιώντας τους όρους στο σημείο $x_k = x_h = x_g = \dot{x}_k = \dot{x}_h = \dot{x}_g = 0$, προκύπτει τελικά ο εξής τύπος:

$$\dot{m}_{wk} = \frac{\bar{p}}{RT_k} \left[- \left(A_k + \bar{V}_{Zk} \frac{c_2}{c_1} \right) \dot{x}_k - \bar{V}_{Zk} \frac{c_3}{c_1} \dot{x}_h + \left(A_k - \bar{V}_{Zk} \frac{c_4}{c_1} \right) \dot{x}_g \right] \quad (2.46)$$

Η παραπάνω εξίσωση μας δείχνει ότι η ροή της μάζας εξαρτάται τόσο από τα μηχανικά, όσο και από τα θερμικά (εκτόνωση, συμπίεση) μεγέθη. Γι' αυτό η ροή στο κρύο μέρος της μηχανής εξαρτάται και από την κίνηση του θερμού εκτοπιστή.

Οι απώλειες πίεσης στους αναγεννητές και εναλλάκτες, μπορούν να υπολογιστούν μέσω της ροής του όγκου. Σε συνδυασμό με την πυκνότητα του αερίου και την παραπάνω εξίσωση προκύπτουν οι εξής εξισώσεις:

$$\Delta p_{lam} = f_{lam} \dot{V} \quad (2.47a)$$

$$\Delta p_{turb} = f_{turb} \dot{V}^2 \quad (2.47b)$$

Όπου f_{lam} και f_{turb} συντελεστές απώλειας πίεσης, εξαρτημένοι από την ταχύτητα της ροής. Σε περίπτωση τυρβώδους ροής, που παρατηρείται κατά κύριο λόγο στους εναλλάκτες, πρέπει οι απώλειες να ξαναγραμμικοποιηθούν:

$$\int_0^{\pi/2} f_{turb} \dot{V}^3 d\omega t = \int_0^{\pi/2} f_{lin} \dot{V}^2 d\omega t \quad (2.48)$$

Με τον γραμμικοποιημένο συντελεστή απώλειας πίεσης να υπολογίζεται:

$$f_{lin} = \frac{8}{3\pi} \hat{V} f_{turb} \quad (2.49)$$

Ο όγκος του ρευστού εξαρτάται από την μάζα του, η οποία μπορεί να υπολογισθεί από την εξίσωση (2.46). Κατά την πρώτη προσέγγιση προκύπτει μόνο ένα μικρό σφάλμα, αν αγνοήσουμε την κίνηση του περιβλήματος και την θερμική συμπίεση:

$$\hat{m}_{wk} \approx \frac{P}{RT_k} A_k \omega_0 \hat{x}_k \quad (2.50)$$

Με ω_0 την συχνότητα ταλάντωσης του συστήματος. Με την προσθήκη των μεμονωμένων απωλειών πίεσης στους εναλλάκτες και αναγεννητές οδηγούμαστε τελικά στην ολική διαφορά πίεσης, μεταξύ ζεστού και ψυχρού κυλίνδρου, σαν γραμμική εξίσωση της ταχύτητας του περιβλήματος και των εκτοπιστών:

$$p_w - p_k = f_{wk,ges} \left[- \left(A_k + \bar{V}_{Zk} \frac{c_2}{c_1} \right) \dot{x}_k - \bar{V}_{Zk} \frac{c_3}{c_1} \dot{x}_h + \left(A_k - \bar{V}_{Zk} \frac{c_4}{c_1} \right) \dot{x}_g \right] \quad (2.51)$$

$$\text{με } f_{wk,ges} = \frac{8}{3\pi} f_{Wwk} \left[\frac{T_w}{T_k} \right]^2 A_k \omega_0 \hat{x}_k + f_{Rk} \frac{T_{Rk}}{T_k} + \frac{8}{3\pi} f_{Wk} A_k \omega_0 \hat{x}_k \quad (2.51a)$$

Η διαφορά πίεσης τοποθετήθηκε ,στην αρχή της ενότητας στην εξίσωση κίνησης του κρού εκτοπιστή (εξ.(2.44a)). Έτσι με σύγκριση συντελεστών μεταξύ της (2.44a) και της (2.24a), μπορούμε κατ' αυτόν τον τρόπο να υπολογίσουμε τις σταθερές απόσβεσης του ψυχρού εκτοπιστή:

$$D_{kk} = A_k f_{wk,ges} \left(A_k + \bar{V}_{Zk} \frac{c_2}{c_1} \right) \quad (2.52a)$$

$$D_{kh} = A_k f_{wk,ges} \bar{V}_{Zk} \frac{c_3}{c_1} \quad (2.52b)$$

$$D_{kg} = -A_k f_{wk,ges} \left(A_k - \bar{V}_{Zk} \frac{c_4}{c_1} \right) \quad (2.52c)$$

Κατά τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε τις αντίστοιχες σταθερές για τον θερμό εκτοπιστή:

$$D_{hh} = A_h f_{wh,ges} \left(A_h - \bar{V}_{Zh} \frac{c_3}{c_1} \right) \quad (2.53a)$$

$$D_{hk} = -A_h f_{wh,ges} \bar{V}_{Zh} \frac{c_2}{c_1} \quad (2.53b)$$

$$D_{hg} = -A_h f_{wh,ges} \left(A_h + \bar{V}_{Zh} \frac{c_4}{c_1} \right) \quad (2.53c)$$

Τα πρόσημα των σταθερών απόσβεσης και ελατηρίων έχουν ως εξής:

$$K_{kk} > 0 \quad D_{kk} > 0 \quad (2.54a,b)$$

$$K_{hh} > 0 \quad D_{hh} > 0 \quad (2.54c,d)$$

$$K_{kh} > 0 \quad D_{kh} < 0 \quad (2.54e,f)$$

$$K_{hk} < 0 \quad D_{hk} > 0 \quad (2.54g,h)$$

2.2.3 Παραγωγή των εξισώσεων που περιγράφουν το σύστημα

Το υπό εξέταση ταλαντευόμενο σύστημα περιγράφεται απο τις εξισώσεις κίνησης (2.36) και (2.37). Αποτελούν ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων που με αντίστροφο

μετασχηματισμό δίνουν την συνάρτηση διαδρομής των δυο εκτοπιστών , $x_k(t)$ και $x_h(t)$.Υπό την προϋπόθεση ότι οι συναρτήσεις αυτές έχουν ημιτονοειδή μορφή και διαφέρουν μόνο σε πλάτος και φάση, αλλά όχι και σε συχνότητα ταλάντωσης, το σύστημα αποκτά γραμμικές, ανεξάρτητες λύσεις. Έτσι προκύπτει ότι η ορίζουσα πρέπει να είναι ίση με μηδέν, κάτι που διατυπώνεται στην παρακάτω εξίσωση:

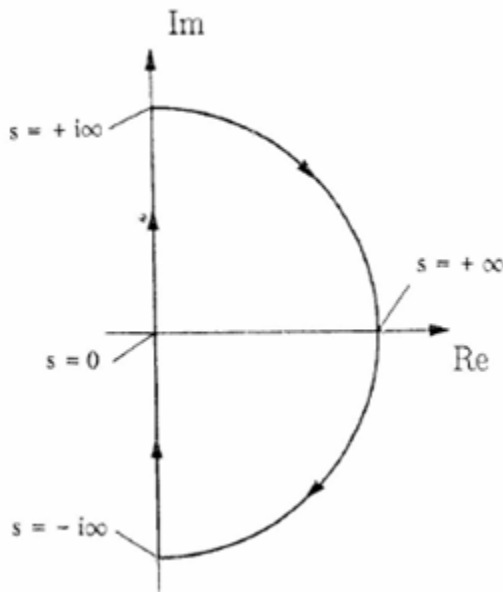
$$\frac{T_k(s)T_h(s)}{(s + K_{kh} / D_{kh})(s + K_{hk} / D_{hk})} - D_{kh}D_{hk} = 0 \quad (2.55)$$

Για περαιτέρω ανάλυση θα ήταν χρήσιμο να ορίσουμε τις δύο παρακάτω εξισώσεις:

$$F(s) = \frac{T_k(s)T_h(s)}{(s + K_{kh} / D_{kh})(s + K_{hk} / D_{hk})} - D_{kh}D_{hk} \quad (2.56a)$$

$$f(s) = \frac{T_k(s)T_h(s)}{(s + K_{kh} / D_{kh})(s + K_{hk} / D_{hk})} \quad (2.56b)$$

Ακριβώς όπως και στο μη ασποβενούμενο σύστημα, υπάρχει η δυνατότητα ταλάντωσης μέσω δύο μιγαδικών, συζυγών λύσεων με θετικό πραγματικό μέρος. Θα κάνουμε ένα σχήμα για το (s) για να δείξουμε τα σημεία μηδενισμού της εξίσωσης (2.55). Το σχήμα θα είναι της παρακάτω μορφής:



Εικόνα 2.3: Διάγραμμα της s.

Θα πρέπει να βρούμε μηδενιστές και τους πόλους του συστήματος, για τους οποίους ισχύουν τα εξής:

- Για κάθε μηδενιστή ,ο οποίος βρίσκεται στο “σχήμα-s”, η f(s) κάνει μια περιστροφή προς την κατεύθυνση της s, δηλαδή ωρολογιακά, γύρω από το σημείο $D_{kh}D_{hk}$.
- Για κάθε πόλο αντίστοιχα η f(s) κάνει μια περιστροφή αντιωρολογιακά γύρω απο το σημείο $D_{kh}D_{hk}$.

Ο αριθμός των μηδενιστών του συστήματος καθορίζεται:

$$N = U + P \quad (2.57)$$

Όπου N: αριθμός μηδενιστών της εξίσωσης (2.55), με θετικό πρόσημο.

U: αριθμός ωρολογιακών περιστροφών της f(s) γύρω από το σημείο $D_{kh}D_{hk}$.

P: αριθμός των πόλων (από (2.55)), με θετικό πρόσημο.

Αμέσως μπορούμε να δούμε ότι το σύστημα έχει δύο πόλους:

$$s_{p1} = -K_{kh} / D_{kh} \quad s_{p2} = -K_{hk} / D_{hk} \quad (2.58a,b)$$

Και με την βοήθεια της (2.54) μπορούμε να δούμε ότι και οι δύο είναι πραγματικοί και θετικοί, άρα P=2.

Για ευκολότερη ανάλυση θα ήταν καλύτερα να γράψουμε την f(s) συναρτήσει των πόλων και των μηδενιστών:

$$f(s) = \frac{(s - s_{n1})(s - s_{n2})(s - s_{n3})(s - s_{n4})}{(s - s_{p1})(s - s_{p2})} \quad (2.59)$$

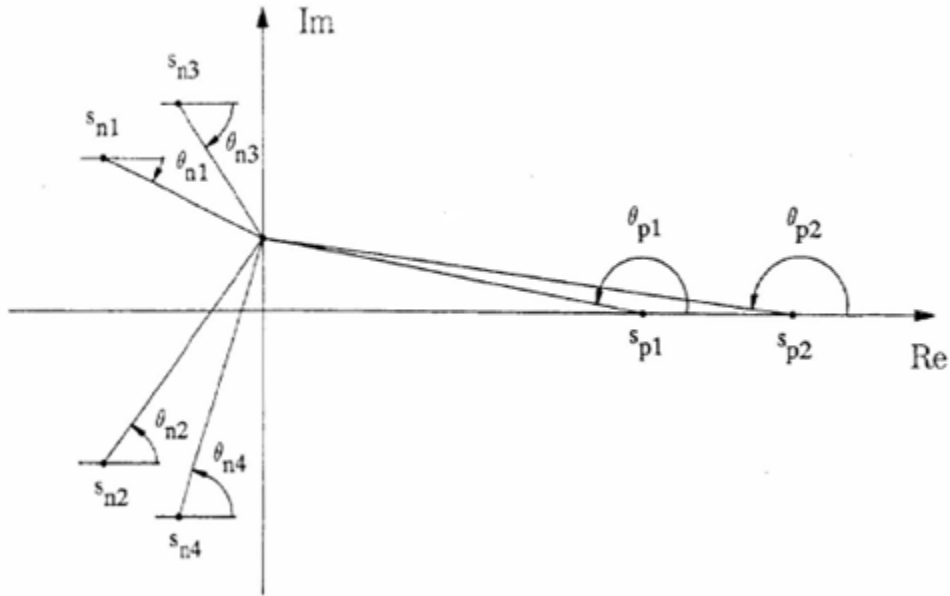
και οι τέσσερις μηδενιστές να είναι ίσοι με:

$$s_{n1/2} = \omega_k \left[-\frac{1}{4\pi Q_k} \pm i \sqrt{1 - \frac{1}{(4\pi Q_k)^2}} \right] \quad (2.60a)$$

$$s_{n3/4} = \omega_h \left[-\frac{1}{4\pi Q_h} \pm i \sqrt{1 - \frac{1}{(4\pi Q_h)^2}} \right] \quad (2.60b)$$

Υπό την παραδοχή ότι οι όροι $4\pi Q_h$ και $4\pi Q_k$ είναι μεγαλύτεροι του 1, οι μηδενιστές θα είναι μιγαδικοί με αρνητικό πραγματικό μέρος. Στην συνέχεια θα υπολογιστούν οι γωνίες αναχώρησης/αποχώρησης από πόλους και μηδενιστές:

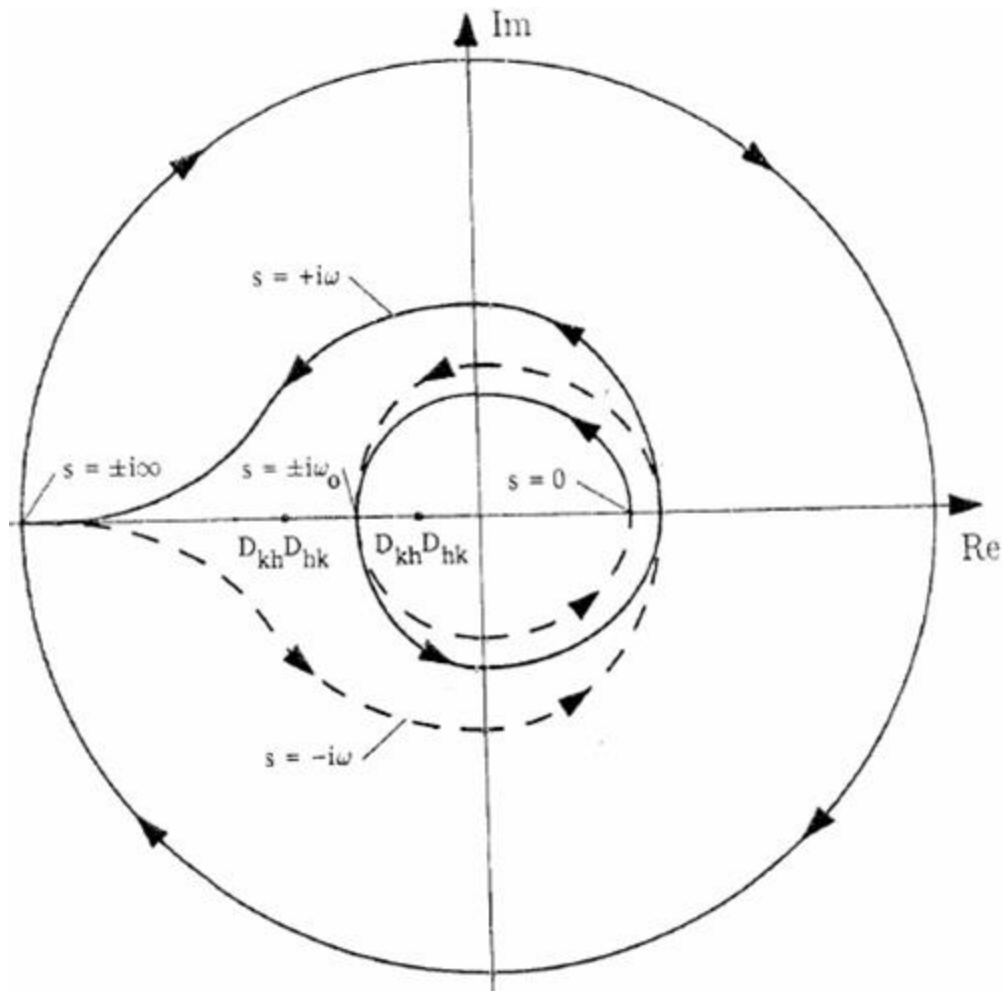
$$\begin{aligned} \arg(f(s)) &= \sum_i \arg(s - s_{ni}) - \sum_j \arg(s - s_{pj}) \\ &= \theta_{n1} + \theta_{n2} + \theta_{n3} + \theta_{n4} - \theta_{p1} - \theta_{p2} \end{aligned} \quad (2.61a,b)$$



Εικόνα 2.4: Η θέση των πόλων και των μηδενιστών στο μιγαδικό επίπεδο.

Παρατίθεται το σχήμα (2.4), ώστε να γίνει ευκολότερα κατανοητό το πως μεταβάλλονται οι κλίσεις των πόλων και μηδενιστών συναρτήσει του s .

Ξεκινώντας το s από την αρχή των αξόνων, τότε θα ισχύει $\theta_{n1} = -\theta_{n2}, \theta_{n3} = -\theta_{n4}, \theta_{p1} = \theta_{p2} = \pi$ και η $f(s)$ εν τέλει θα έχει κλίση ίση με -2π . Καθώς το s “τρέχει” στο θετικό μέρος του φανταστικού άξονα, οι γωνίες από πόλους και μηδενιστές αυξάνουν έως ότου πάρουν όλες την τιμή $\pi/2$, για $s = i\infty$. Έτσι η κλίση της $f(s)$ γίνεται π . Η μορφή της $f(s)$ φαίνεται στο σχήμα 4.5, με το s να “τρέχει” αντιωρολογιακά διαγράφοντας μιάνιση περιστροφή γύρω από την αρχή των αξόνων. Στο επόμενο βήμα το s διαγράφει ένα ημικύκλιο με άπειρη ακτίνα από το $-\infty$ έως το $+\infty$. Έτσι οι κλίσεις των πόλων και μηδενιστών λαμβάνουν την τιμή $-\pi/2$ και η $f(s)$ παίρνει συνολική κλίση $-\pi$. Στο τέλος η s “τρέχει” κατά μήκος του αρνητικού φανταστικού άξονα μέχρι το αρχικό σημείο. Το σχήμα της $f(s)$ φαίνεται στην εικόνα 2.5.



Εικόνα 2.5: Το διάγραμμα της $f(s)$.

Μέσω της γραφικής παράστασης είναι γνωστό ότι το σημείο $D_{kh}D_{hk}$ βρίσκεται πάνω στον αρνητικό πραγματικό άξονα. Η $f(s)$ τέμνει τον παραπάνω άξονα για $s = \pm i\omega_0$. Θα πρέπει να εξετάσουμε τις δύο περιπτώσεις που το σημείο $D_{kh}D_{hk}$ βρίσκεται αριστερά ή δεξιά του σημείου τομής της $f(s)$ με τον άξονα.

Περίπτωση 1^η:
$$D_{kh}D_{hk} > f(\pm i\omega_0) \quad (2.62a)$$

Σε αυτή την περίπτωση η $f(s)$ διαγράφει τρεις περιστροφές γύρω από το σημείο $D_{kh}D_{hk}$ και έτσι το U να παίρνει την τιμή 2, οπότε το N να ισούται με μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχουν μηδενιστές στο δεξί ημιεπίπεδο, με άλλα λόγια, δεν υπάρχει και ταλάντωση.

Περίπτωση 2^η:

$$D_{kh}D_{hk} < f(\pm i\omega_0) \quad (2.62b)$$

Η $f(s)$ διαγράφει μία περιστροφή γύρω από το $D_{kh}D_{hk}$ και έτσι το U παίρνει την τιμή μηδέν. Το N θα ισούται με δύο, άρα έχουμε δύο μηδενιστές στο δεξί ημιεπίπεδο. Στην συνέχεια θα δείξουμε ότι πρόκειται για ένα ζεύγος συζυγών μιγαδικών, οι οποίοι θα περιγράψουν μια συγκεκριμένη κατάσταση ταλάντωσης.

Όσο για την σταθερότητα του συστήματος είναι κάτι που θα αναλυθεί στην επόμενη παράγραφο και όχι σε αυτή την φάση.

Παρατηρώντας την θέση των μηδενιστών στο μιγαδικό επίπεδο και όπως συμπεράναμε ήδη από την ανάλυση του μη αποσβενόμενου συστήματος, οι συζυγείς μιγαδικοί μηδενιστές με θετικό πραγματικό μέρος οδηγούν σε ένα συνεχώς αυξανόμενο πλάτος ταλάντωσης, ενώ αυτοί με αρνητικό πραγματικό μέρος σε αποσβενούμενο πλάτος. Οπότε η περίπτωση της σταθερής ταλάντωσης, δηλαδή με σταθερό πλάτος, προέρχεται από καθαρά φανταστικούς μηδενιστές, οι οποίοι καθορίζουν και την συχνότητα του συστήματος ω_0 . Βάζοντας στη εξίσωση (2.55) $s = i\omega_0$, προκύπτει πλέον μία μιγαδική εξίσωση, που μπορεί να χωριστεί σε πραγματικό και φανταστικό μέρος. Το φανταστικό μέρος της εξίσωσης μας δίνει την συχνότητα του συστήματος, ενώ από το πραγματικό της μέρος προκύπτει μία δεύτερη εξίσωση η οποία θα βοηθήσει για τον υπολογισμό μιας άλλης παραμέτρου, για παράδειγμα την μάζα του ενός εκτοπιστή.

$$\omega_0^2 = \frac{-2\pi(K_{kh}D_{hk} + K_{hk}D_{kh}) / (m_k m_h) + \omega_k \omega_h (\omega_k / Q_h + \omega_h / Q_k)}{\omega_k / Q_k + \omega_h / Q_h} \quad (2.63)$$

$$m_k m_h = \frac{D_{kk}D_{hh} - D_{kh}D_{hk} + (K_{kh}K_{hk} - K_{kk}K_{hh}) / \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega_k^2 - \omega_h^2} \quad (2.64)$$

Θα θέσουμε τις εξισώσεις κινήσεις σε μιγαδική μορφή:

$$x_k^C = \hat{x}_k \exp(i(\omega_0 t + \varphi)) \quad (2.65a)$$

$$x_h^C = \hat{x}_h \exp(i\omega_0 t) \quad (2.65b)$$

Επειδή η κίνηση των εκτοπιστών, υπό προϋποθέσεις, είναι ημιτονοειδής και έχουν και οι δύο συχνότητα ω_0 , γι' αυτό και οι εξισώσεις κίνησης είναι γραμμικά εξαρτημένες μεταξύ τους και αυτό ισχύει τους μετασχηματισμούς Laplace. Από τη εξ. (4.36) και για $s = i\omega_0$ η διαφορική εξίσωση κίνησης του ψυχρού εμβόλου γίνεται :

$$T_k(i\omega_0)\hat{x}_k \exp(i\varphi) + (i\omega_0 D_{kh} + K_{kh})\hat{x}_h = 0 \quad (2.66)$$

Με το πλάτος και την γωνία φάσης να υπολογίζονται:

$$\left| \frac{\hat{x}_k}{\hat{x}_h} \right| = \sqrt{\frac{\omega_0^2 D_{kh}^2 + K_{kh}^2}{m_k^2 \left[(\omega_k^2 - \omega_0^2)^2 + (\omega_k \omega_0 / (2\pi Q_k))^2 \right]}} \quad (2.67)$$

$$\tan \varphi = \frac{\omega_0 \omega_k K_{kh} / (2\pi Q_k) - \omega_0 D_{kh} (\omega_k^2 - \omega_0^2)}{-K_{kh} (\omega_k^2 - \omega_0^2) - \omega_0^2 \omega_k D_{kh} / (2\pi Q_k)} \quad (2.68)$$

Λόγω της γραμμικής εξάρτησης δεν μπορούν να υπολογισθούν άμεσα τα πλάτη ταλάντωσης. Υπάρχει όμως η δυνατότητα να υπολογιστούν με την βοήθεια της εξ.(2.64), με μία επαναληπτική διαδικασία.

2.3 Μελέτη ως προς την ευστάθεια

Αν είναι δυνατή η γραμμικοποίηση όλων των δυνάμεων που εμφανίζονται σε ένα ταλαντευόμενο σύστημα, τότε είναι εφικτή η μελέτη και ο υπολογισμός του συστήματος, κατά τον τρόπο που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα. Ωστόσο για την αξιολόγηση της ευστάθειας δεν αρκεί απλά η μελέτη του γραμμικού συστήματος, καθώς η ευστάθεια επηρεάζεται από μη γραμμικούς εξωτερικούς παράγοντες.

Για το σκοπό αυτό θα μελετήσουμε την ισορροπία μεταξύ του παραγόμενου μηχανικού έργου και της διαχεόμενης ενέργειας. Το παραγόμενο έργο μπορεί να προσδιοριστεί μέσω της μεταβολής του όγκου εργασίας:

$$W_{prod} = -\hat{p}\hat{V}_{ges}\pi \sin \varphi \quad (2.69)$$

Η ‘φ’ εκφράζει την διαφορά φάσης μεταξύ της πίεσης της ταλάντωσης και την μεταβολή του όγκου. Εάν θεωρήσουμε ότι η πίεση ταλάντωσης, όπως και η μεταβολή του όγκου, εξαρτώνται γραμμικά από την θέση των εκτοπιστών προκύπτει η εξίσωση και επίσης τα δύο πλάτη των εκτοπιστών διαφέρουν μόνο κατά έναν σταθερό παράγοντα, μπορεί έτσι το παραγόμενο έργο να γραφεί συναρτήσει ενώς εκ των δύο πλάτων.

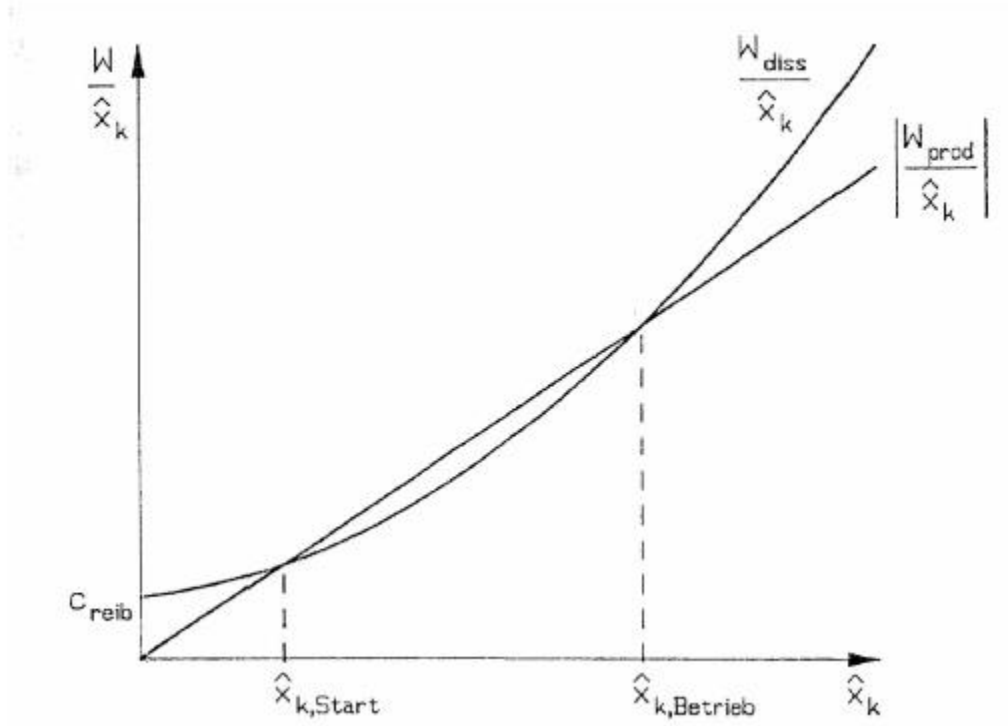
$$W_{prod} = a_{prod}\hat{x}_k^2 \quad (2.70)$$

Η επίδραση άλλων μεγεθών, όπως η γωνία φάσης κτλ., δεν έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον σε αυτή την φάση και γι’ αυτό συνοψίζονται στον παράγοντα a_{prod} . Απώλειες στην διάχυση προκύπτουν ως αποτέλεσμα στρωτών και τυρβωδών απωλειών πίεσης, αλλά και από την δύναμη τριβής, η οποία θα ληφθεί υπόψιν σε αυτό το κομμάτι. Η δύναμη τριβής θα θεωρείται ανεξάρτητη από την ταχύτητα του εκτοπιστή. Με τις ανώτερες προϋποθέσεις και υποθέτοντας ότι η κίνηση των εκτοπιστών είναι ημιτονοειδής, η διαχεόμενη ενέργεια μπορεί επίσης να υπολογισθεί συναρτήσει του πλάτους του ψυχρού εκτοπιστή.

$$W_{diss} = c_{reib}\hat{x}_k + c_{lam}\hat{x}_k^2 + c_{turb}\hat{x}_k^3 \quad (2.71)$$

Δημιουργώντας το διάγραμμα του παραγόμενου έργου και της διαχεόμενης ενέργειας ως προς το πλάτος του ψυχρού εκτοπιστή, παρατηρούμε ότι υπάρχουν δύο σημεία τομής, τα οποία θεωρούνται δυνατές καταστάσεις ταλάντωσης. Το πρώτο σημείο (μικρό πλάτος) υπολογίστηκε λαμβάνοντας υπόψιν και την επίδραση της τριβής. Ωστόσο το δεύτερο σημείο τομής περιγράφει την κατάσταση ταλάντωσης που αναφέρεται και στις προηγούμενες ενότητες, και από το διάγραμμα φαίνεται ότι αυτή η κατάσταση είναι σταθερή. Για παράδειγμα εάν το πλάτος είναι μεγαλύτερο από την τιμή x_k , η διαχεόμενη ενέργεια λόγω τυρβωδών απωλειών θα αυξηθεί και θα ξεπεράσει το παραγόμενο έργο, κάτι που οδηγεί σε μείωση του πλάτους. Εάν από την άλλη το πλάτος είναι μικρότερο από την στατική περίπτωση, το έργο που παράγεται είναι μεγαλύτερο από την διαχεόμενη ενέργεια με αποτέλεσμα το πλάτος να αυξάνεται. Η κατάσταση ταλάντωσης του πρώτου σημείου τομής δεν εκφράζει από την άλλη μία σταθερή λειτουργία και μπορεί να χαρακτηριστεί ως σημείο λειτουργίας. Όσο πλάτος είναι μικρότερο από αυτή την τιμή, η διαχεόμενη ενέργεια είναι μεγαλύτερη από το παραγόμενο έργο, έτσι η τιμή του πλάτους μειώνεται και τείνει πάλι προς το μηδέν. Εάν το πλάτος είναι μεγαλύτερο το παραγόμενο έργο είναι μεγαλύτερο από την διαχεόμενη ενέργεια με αποτέλεσμα το πλάτος να αυξάνει μέχρι το δεύτερο σημείο τομής.

Με την βοήθεια του διαγράμματος ευστάθειας και τις εξισώσεις της παραγόμενης και διαχεόμενης ενέργειας, μπορούμε να συμπεράνουμε τα εξής για το ταλαντευόμενο σύστημα:



Εικόνα 2.6: Το διάγραμμα ευστάθειας.

- Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, μιά κατάσταση σταθερής ταλάντωσης επιτυγχάνεται απλά με την παρουσία των τυρβωδών απωλειών πίεσης. Γι' αυτό τον λόγο, πρέπει κατά τον σχεδιασμό μιας μηχανής Vuilleumier ελευθέρων εμβόλων να μεριμνάται ώστε η ροή στους εναλλάκτες θερμότητας να είναι τυρβώδη. Όσο μεγαλύτερος είναι ο συντελεστής τυρβωδών απωλειών στην διαχεόμενη ενέργεια, τόσο μικρότερη είναι η ταλάντωση της πίεσης γύρω από το σημείο λειτουργίας. Γι' αυτό τον λόγο η εξάρτηση του σημείου λειτουργίας είναι μικρή από εξωτερικές παραμέτρους. Γενικά τα πλάτη μειώνονται με την αύξηση της διαχεόμενης ενέργειας, κάτι που πρέπει να αντισταθμιστεί από την αυξημένη παραγωγή μηχανικού έργου.
- Εξισώνοντας τις δύο εξισώσεις ενέργειας προκύπτει:

$$a_{prod,min} = c_{lam} + 2\sqrt{c_{reib} c_{turb}} \quad (2.72)$$

Σε αυτή την περίπτωση οι δύο καμπύλες της εικόνας 2.6 εφάπτονται και τα σημεία έναρξης και λειτουργίας συμπίπτουν. Αυτή η κατάσταση δεν ευσταθείς, έτσι ο παράγοντας a_{prod} πρέπει να είναι σε κάθε περίπτωση μεγαλύτερος του $a_{\text{prod,min}}$. Με τη αύξηση του παράγοντα απομακρύνονται και τα σημεία έναρξης και λειτουργίας. Με αυτό τον τρόπο επιτρέπονται μεγαλύτερες διακυμάνσεις των πλατών ταλάντωσης, χωρίς να έχουμε πτώση κάτω από την τιμή έναρξης και έτσι να οδηγούμαστε στον μηδενισμό.

- Η διαχεόμενη ενέργεια από την τριβή πρέπει να είναι όσο το δυνατόν μικρότερη σε κάθε περίπτωση, δεδομένου ότι το πλάτος εκκίνησης αυξάνει με την αύξηση της τριβής. Αυτή η εξάρτηση στην πράξη δείχνει ότι ένα ελεύθερο έμβολο σε μία μηχανή Vuilleumier ελευθέρων εμβόλων δεν είναι ικανό για αυτό-εκκίνηση και ότι η διαδικασία εκκίνησης μπορεί να μόνο με την μέγιστη δυνατή εξάλειψη της τριβής ολίσθησης.

3. Σχεδιασμός και κατασκευή της πειραματικής μηχανής

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται μερικές αρχικές τιμές προκειμένου να γίνει η ανάλυση της δοκιμαστικής μηχανής.

Εργαζόμενο αέριο	Ήλιο
Μέση πίεση	20 bar
Θερμοκρασία θερμαντήρα	500 °C
Θερμοκρασία θερμού κύκλου	20 °C
Θερμοκρασία ψυχρού κύκλου	0 °C
Οπή κυλίνδρου	66 mm
Απαιτούμενα κινηματικά μεγέθη	
Διαδρομή εμβόλου	30 mm(για το καθένα)
Συχνότητα	10 Hz
Γωνία φάσης	90°
Αναμενόμενη θερμική απόδοση	
Ψύξη	200W
Βαθμός απόδοσης	0,70

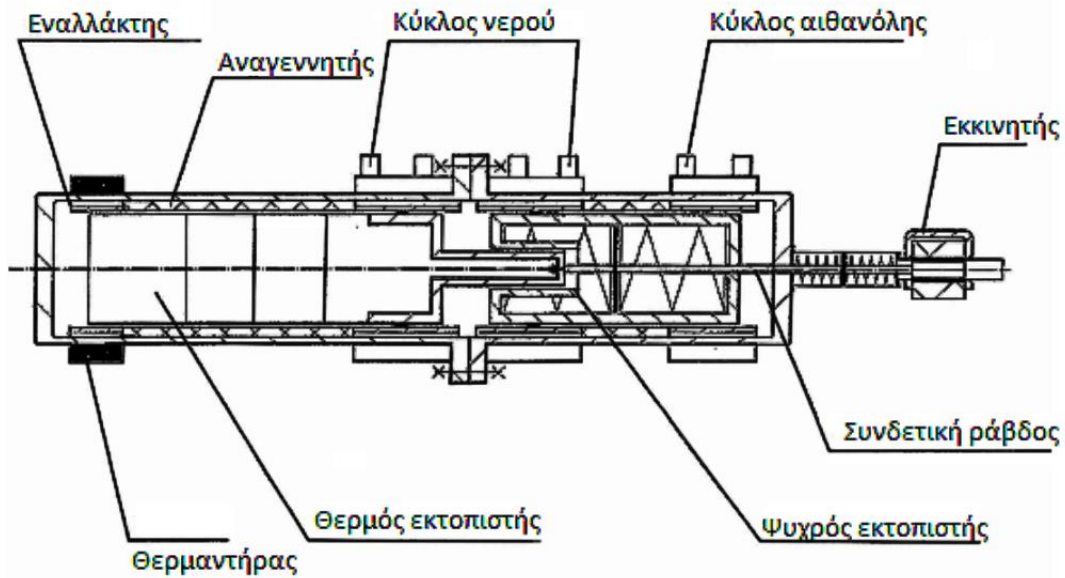
Πίνακας 3.1: Αρχικές τιμές για την ανάλυση της μηχανής.

Παρατηρώντας τις παραπάνω τιμές θα διαπιστώσουμε ότι η πίεση και ο βαθμός απόδοσης είναι χαμηλότερος από άλλες Vuilleumier-μηχανές. Αυτό συμβαίνει επειδή ο σκοπός για αρχή είναι η υλοποίηση μια μηχανής Vuilleumier ελευθέρων εμβόλων και η μελέτη της λειτουργίας της. Η βελτιστοποίηση της παραγόμενης ενέργειας και του βαθμού απόδοσης παίζει δευτερεύοντα ρόλο στην παρούσα φάση.

3.1 Βασικά χαρακτηριστικά κατασκευής

Στην εικόνα 3.1 παρουσιάζεται σε τομή το μονογραμμικό σχέδιο της μηχανής. Στη μέση του περιβλήματος της μηχανής στεγανοποιούνται δύο κύλινδροι. Η απορρόφηση και εκπομπή θερμότητας γίνεται μέσω ηλεκτρικής θέρμανσης στο ζεστό, μέσω ενός κυκλώματος νερού στο θερμό και μέσω ενός κυκλώματος αιθανόλης στο ψυχρό μέρος της μηχανής. Σε κάθε κύλινδρο υπάρχει ένα σύστημα εναλλάκτη-αναγεννητή-εναλλάκτη και η εσωτερική επιφάνεια του θερμού εναλλάκτη αποτελεί την επιφάνεια κύλισης των

εκτοπιστών. Το αέριο ελατήριο μεταξύ των δύο εκτοπιστών υποστηρίζεται με μηχανικό ελατήριο το οποίο είναι συνδεδεμένο με τον ψυχρό εκτοπιστή. Το ελατήριο μεταξύ του θερμού εκτοπιστή και περιβλήματος τοποθετείται εξωτερικά του κυλίνδρου από την ψυχρή πλευρά της μηχανής. Η μηχανική σύνδεση γίνεται μέσω μιας λεπτής ράβδου που διαπερνά τον κρύο κύλινδρο και εκτοπιστή και στο πέρας της στερεώνεται ένας πυρήνας σιδήρου. Έτσι μέσω ενός εξωτερικού πηνίου καθίσταται δυνατή η εκκίνηση της μηχανής.



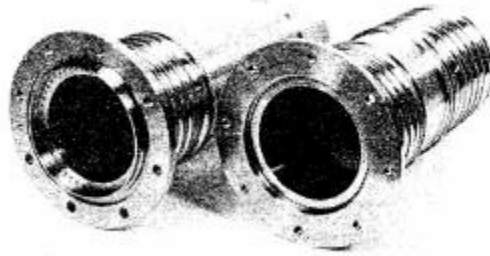
Εικόνα 3.1: Μονογραμμικό σχέδιο της μηχανής σε τομή.

Παρακάτω θα αναλυθούν περαιτέρω ένα-ένα τα σημαντικότερα κατασκευαστικά μέλη της μηχανής:

- Οι κύλινδροι

Οι κύλινδροι παρουσιάζονται στην εικόνα 3.2. Οι κύλινδροι είναι κατασκευασμένοι από ανοξείδωτο χάλυβα (1.4571) προκειμένου να αποφευχθεί η διάβρωση στην περιοχή του κύκλου του νερού. Σε σύγκριση με τους φερριτικούς χάλυβες, μειώνονται οι απώλειες θερμικής αγωγιμότητας στην περιοχή των αναγεννητών. Η θερμότητα στο θερμό μέρος της μηχανής προσδίδεται μέσω εξωτερικής, ηλεκτρικής θέρμανσης. Στο ζεστό και στο ψυχρό μέρος η ανταλλαγή θερμότητας πραγματοποιείται επίσης στο εξωτερικό των κυλίνδρων μέσω των κυκλωμάτων (νερού και αιθανόλης). Η πρόσθετη διαφορά

θερμοκρασίας, λίγων μόνο βαθμών, προκύπτει λόγω της χαμηλής πίεσης, αλλά και λόγω της χαμηλής θερμικής απόδοσης και των λεπτών τοιχωμάτων. Κατ' αυτό τον τρόπο λειτουργίας έχουμε το πλεονέκτημα μιας απλής κατασκευής, διότι δεν εμφανίζονται προβλήματα στεγανοποίησης μεταξύ των μέσων των κυκλωμάτων και του αερίου εργασίας. Το μέσα ρέουν μέσω ενός σπυροειδούς καναλιού γύρω από τους κυλίνδρους, προκειμένου να επιτυγχάνεται μεγάλη διαφορά θερμοκρασίας μεταξύ εισόδου και εξόδου και έτσι η επίλυση του προβλήματος να γίνεται με λογικό κόπο και χαμηλό σφάλμα.



Εικόνα 3.2: Επισκόπηση των κυλίνδρων.

Για να έχουμε μία γενική εικόνα για το μέγεθος της μηχανής θα αναφερθούν χαρακτηριστικά τα παρακάτω γεωμετρικά μεγέθη: Το μήκος των κυλίνδρων είναι 195mm (ψυχρός) και 240mm (θερμός) και η εξωτερική διάμετρος της φλάντζας 120mm. Μαζί με το περίβλημα και τον εκκινητή προκύπτει συνολικά μήκος 663mm. Η μηχανή, συμπεριλαμβανομένου και της εξωτερικής θέρμανσης, ζυγίζει περίπου 16 kg.

Προκειμένου να αποφευχθεί η επιπλέον δύναμη τριβής λόγω του βάρους του εκτοπιστή, η μηχανή τοποθετείται κάθετα σε μία εργαστηριακή σκαλωσιά, η οποία λειτουργεί και ως σύστημα αναφοράς. Σε αυτή την περίπτωση οι δυνάμεις που δημιουργούνται από την απόκλιση του βάρους των εκτοπιστών από την θέση ισορροπίας, εξισορροπούνται από τις δυνάμεις προέντασης των ελατηρίων. Η επίδραση του περιβλήματος κατά την κίνηση του ταλαντευόμενου συστήματος παρουσιάζεται στην αύξηση του πλάτους της πίεσης και κατά συνέπεια στην αυξημένη πυκνότητα ισχύος που μπορεί να επιτευχθεί επιτρέποντας κάποια σχετική κίνηση του περιβλήματος. Ωστόσο, προκειμένου να μελετηθεί αυτό το φαινόμενο με μεγαλύτερη λεπτομέρεια, είναι απαραίτητος ο προσδιορισμός της θέσης του περιβλήματος με το σύστημα αναφοράς, κάτι το οποίο δεν προβλέπεται στη μηχανή δοκιμής. Για το λόγο αυτό, η αναστολή της μηχανής πραγματοποιείται μέσω μίας, σχεδόν, άκαμπτης σύνδεσης. Έτσι το εύρος της κίνησης

του περιβλήματος διατηρείται στο ελάχιστο, συνεπώς επιρροή του στο σύστημα ταλάντωσης είναι αμελητέα.

- Οι εναλλάκτες θερμότητας

Στην μηχανή υπάρχουν τέσσερις εναλλάκτες θερμότητας. Έχουν δακτυλιοειδή μορφή με διαμήκεις αυλακώσεις στην εξωτερική τους πλευρά, οι οποίες εξυπηρετούν σαν κανάλια ροής για το αέριο (εικόνα 3.3). Η θερμική επαφή με το τοίχωμα του κυλίνδρου εξασφαλίζεται μέσω συναρμογή σύσφιξης. Για να αποφευχθεί κατά την λειτουργία μία πιθανή χαλάρωση ή αύξηση της πίεσης από θερμική διαστολή, οι εναλλάκτες, όπως και οι κύλινδροι, κατασκευάζονται από ανοξείδωτο χάλυβα (1.4571). Η χρήση υλικού καλύτερης θερμικής αγωγιμότητας, όπως ο ορείχαλκος, μόλις που φέρνει βελτίωση στους εναλλάκτες, διότι ούτως ή άλλως φορτώνονται ελάχιστα λόγω της χαμηλής θερμικής απόδοσης.

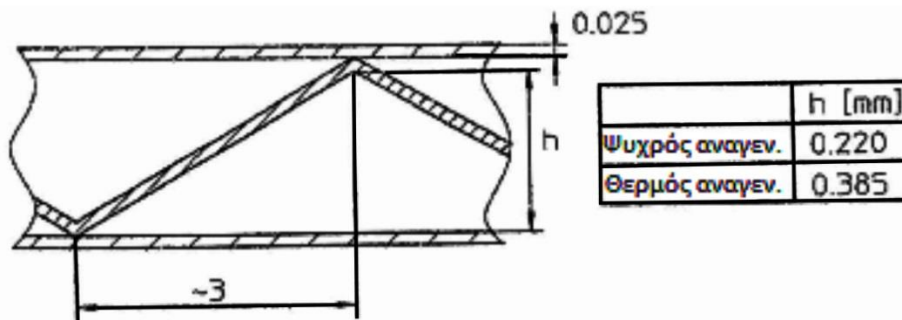


Εικόνα 3.3: Επισκόπηση των εναλλακτών θερμότητας.

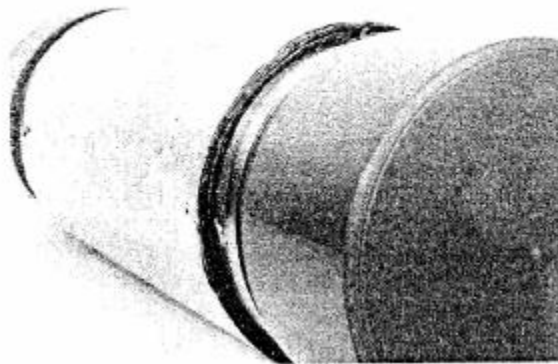
- Οι αναγεννητές

Οι αναγεννητές έχουν σχεδιαστεί ως Folienregeneratoren. Αποτελούνται από 25 μm λεπτές μεταλλικές λωρίδες φύλλου ανοξείδωτου χάλυβα (1.4301), οι οποίες τυλίγονται γύρω από ένα φορέα δακτυλοειδούς σχήματος. Για να αποφευχθεί οι μεμονωμένες στρώσεις να κείνται απευθείας η μία στην άλλη, και έτσι να εμποδίζεται η ροή, κάθε δεύτερη στρώση διπλώνεται αμοιβαία σε διαστήματα περίπου 3 mm έτσι ώστε να σχηματίζονται τριγωνικά κανάλια ροής (βλέπε Εικ. 3.4a και 3.4b). Τέτοιοι αναγεννητές έχουν απλούστερη και φθηνότερη κατασκευή σε σύγκριση με Drahtnetzregeneratoren και έχουν καθορισμένους διαύλους ροής που επιτρέπουν έναν ευκολότερο υπολογισμό. Η αυξημένη θερμική αγωγιμότητα στην κατεύθυνση της ροής, πρέπει να αντισταθμιστεί με την αύξηση του μήκους του αναγεννητή και ταυτόχρονη μείωση του εμβαδού διατομής. Οι αυξημένες απώλειες πίεσης που θα εμφανισθούν είναι μέχρι ενός βαθμού

ανεκτές, καθώς λόγω των ευθύγραμμων διαύλων ροής η συνολική πτώση πίεσης είναι σχετικά μικρή.



Εικόνα 3.4α: Απλοποιημένη τομή της μήτρας του αναγεννητή.

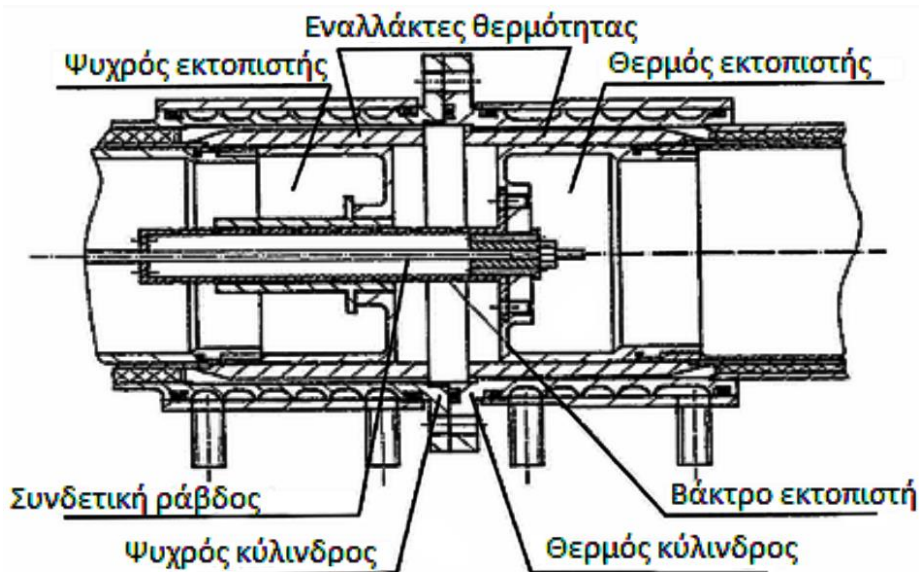


Εικόνα 3.4β: Θερμός αναγεννητής.

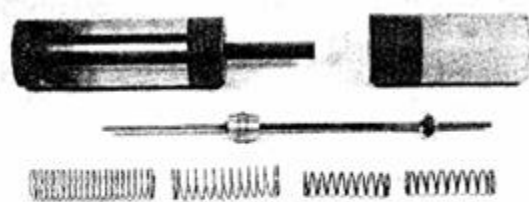
Οι θερμικές απώλειες με θερμική αγωγιμότητα στην πειραματική μηχανή είναι σχετικά μεγάλες, λόγω του μικρού μεγέθους κατασκευής και της χαμηλής πίεσης, το πάχος του τοιχώματος των θερμικά αγωγίμων εξαρτημάτων στον τομέα των αναγεννητών, δεν καθορίζεται από το μηχανικό φορτίο, αλλά από τις ανάγκες σχεδιασμού της κατασκευής, όπως επαρκή ακαμψία και σταθερότητα διαστάσεων. Ωστόσο, για να μειωθούν οι θερμικές απώλειες αγωγιμότητας όσο το δυνατόν περισσότερο, ο ψυχρός φορέας του αναγεννητή και το κυλινδρικό τμήμα του ψυχρού εκτοπιστή κατασκευάζονται από πολυοξυμεθυλένιο (POM). Αυτό το υλικό αντέχει επαρκώς τις καταπονήσεις ακόμη και σε χαμηλές θερμοκρασίες, μπορεί εύκολα να επεξεργασθεί μηχανικά και με ειδική προεπεξεργασία μπορεί να κολληθεί με μέταλλα.

-Οι εκτοπιστές

Οι εκτοπιστές πρέπει να είναι όσο το δυνατόν γίνεται ελαφρύτεροι προκειμένου να αποφευχθούν περιττά υψηλές δυνάμεις επιτάχυνσης και θα πρέπει κατά μήκος του εμβόλου να προσδίδουν χαμηλή θερμότητα. Για το λόγο αυτό, οι τομείς των ζεστών και ψυχρών θερμοκρασιών, κατασκευάζονται από αλουμίνιο και πολυοξυμεθυλένιο και τα πάχη των τοιχωμάτων τους είναι όσο το δυνατόν λεπτότερα. Οι δύο εκτοπιστές κινούνται, όπως ήδη αναφέρθηκε, στο εσωτερικό του θερμού εναλλάκτη. Επιπλέον, το βάκτρο εμβόλου είναι σταθερά συνδεδεμένο, με τον θερμό εκτοπιστή, και διαπερνάει τον ψυχρό και η συνδετική ράβδος έχει «οδηγούς» στην κεφαλή του ψυχρού εμβόλου και στον ψυχρό κύλινδρο. Οι οδηγοί θα πρέπει να δημιουργούν όσο το δυνατό λιγότερο τριβή, καθώς επίσης η ήδη υπάρχουσα διαφορά πίεσης μεταξύ του χώρου εργασίας και του αέριου ελατηρίου να φτάνει το πολύ τα 2 bar. Η εμπειρία με τις Vuilleumier ελευθέρων εμβόλων μας έχει δείξει, ότι η λειτουργία χωρίς τριβές πρέπει να είναι υψηλής προτεραιότητας. Η εικόνα 3.5 δείχνει τον δομικό σχεδιασμό των κορόνων των εμβόλων και το βάκτρο του εμβόλου. Το μέσο κενό μεταξύ της κορόνας του εμβόλου και της επιφανείας τους είναι από 0.02mm έως 0.03mm και στην καθοδήγηση του βάκτρου του εμβόλου περίπου 0.01mm. Για να μειωθεί η διαρροή σε αυτά τα κενά, οι κεφαλές και τα βάκτρα περιέχουν αυλακώσεις στην περιφερειακή κατεύθυνση (βλ. Εικόνα 3.5). Προκαλούν μία πρόσθετη απώλεια πίεσης μέσω της ασυνεχούς διαπλάτυνσης της διατομής της ροής, έτσι ώστε ένα μέρος της ενέργειας να σκεδάζεται. Οι δύο εκτοπιστές φαίνονται στο Σχήμα 3.6.



Εικόνα 3.5: Δομικός σχεδιασμός κεφαλής εκτοπιστών και βάκτρων.



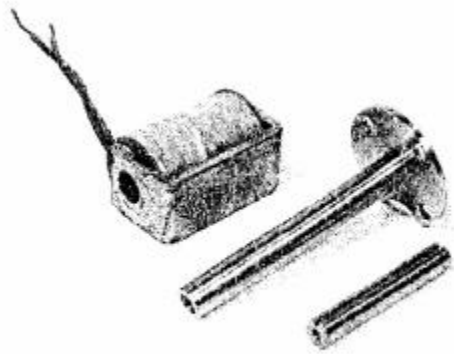
Εικόνα 3.6: Εκτοπιστές, ζεύγη ελατηρίων και συνδετική ράβδος.

- Τα ελατήρια και ο μηχανισμός εκκίνησης.

Σε μηχανές Stirling ελευθέρων εμβόλων χρησιμοποιούνται κατά κύριο λόγο, με εξαίρεση μερικές μικρότερες πειραματικές μηχανές, ελατήρια αερίου. Σε αντίθεση με τα μηχανικά ελατήρια, τα ελατήρια έχουν το πλεονέκτημα ότι έχουν σχεδόν απεριόριστη διάρκεια ζωής και δεν ασκούν πλευρικές δυνάμεις στους εκτοπιστές. Επιπλέον η συναρμολόγηση μιας μηχανής με αέρια ελατήρια, ιδιαίτερα σε άκαμπτα ελατήρια, γίνεται χωρίς κανένα πρόβλημα, καθώς δεν απαιτείται προένταση. Παρ' όλα αυτά υπάρχουν και μερικά μειονεκτήματα στην χρήση αέριων ελατηρίων. Δεν παρέχεται σταθερή κεντρική θέση για το έμβολο, καθώς αυτή εξαρτάται από την πίεση που υπάρχει στο αέριο ελατήριο, μέγεθος που μπορεί να μεταβληθεί κατά την λειτουργία από τις διακυμάνσεις της θερμοκρασίας και από τις διαρροές ρευμάτων. Επιπλέον τα έμβολα δεν στηρίζονται στην κεντρική θέση, καθώς δεν υπάρχει στατική στεγανοποίηση, με αποτέλεσμα, λόγω της βαρύτητας, να κινούνται προς το κάτω νεκρό σημείο και έτσι να περιπλέκεται η εκκίνηση. Ωστόσο το μεγαλύτερο μειονέκτημα σε σύγκριση με τα μηχανικά ελατήρια είναι οι μη γραμμικές και υστέρησης απώλειες που προκύπτουν από την αδιαβατική συμπίεση.

Στην πειραματική μηχανή τοποθετούνται μηχανικά ελατήρια μιας και είναι απλά στην κατασκευή τους και εξασφαλίζουν σταθερά σημεία ισορροπίας για τα έμβολα. Λόγω των ποικίλων θλίψεων και εφελκυσμών, χρησιμοποιείται ζεύγος ελατηρίων. Τα ελατήρια προεντάσσονται αντίρροπα, ώστε να χρησιμοποιηθούν καθαρά σαν ελατήρια πίεσης. Η εικόνα 3.1 δείχνει πως η επίδραση του αερίου ελατηρίου μεταξύ των δύο εμβόλων, στην πειραματική μηχανή, δεν μπορεί να αποφευχθεί πλήρως. Μέσω μιας συνδετικής οπής ο εσωτερικό όγκος των εμβόλων είναι αποτελεσματικός για το αέριο ελατήριο, έτσι ώστε το επιπλέον ζεύγος μηχανικών ελατηρίων, που είναι διατεταγμένο στον κρύο εκτοπιστή, να λαμβάνει το μεγαλύτερο κομμάτι των δυνάμεων ελατηρίου. Το ζεύγος ελατηρίων

μεταξύ του θερμού εκτοπιστή και του περιβλήματος δεν τοποθετείται στο θερμό μέρος της μηχανής, λόγω των υψηλών θερμοκρασιών. Δεδομένου ότι η ενσωμάτωση στο θερμό μέρος, από κατασκευαστικής σκοπιάς, δεν θα είχε ιδιαίτερο νόημα, γι' αυτό βρίσκεται σε ένα ξεχωριστό περίβλημα, στο εξωτερικό άκρο του ψυχρού κυλίνδρου. Ο σχεδιασμός κατ' αυτόν τον τρόπο παρέχει την δυνατότητα να τοποθετήσουμε σε αυτό το σημείο τον μηχανισμό εκκίνησης, κάτι το οποίο θα ήταν ιδιαίτερα προβληματικό σε άλλη θέση, διότι η πρόσβαση των εμβόλων εντός των κυλίνδρων είναι εξαιρετικά δύσκολη. Σαν μηχανισμός εκκίνησης λειτουργεί ένας ηλεκτρομαγνήτης, του οποίου το πηνίο φέρεται εξωτερικά του περιβλήματος. Ο πυρήνας σιδήρου συνδέεται μέσω της συνδετικής ράβδου με τον θερμό εκτοπιστή. Στο σχήμα 3.7 φαίνεται το πηνίο, το περίβλημα της μίζας και ο πυρήνας σιδήρου. Ο ενακτήριος μηχανισμός είναι μόλις λίγα χιλιοστά, αλλά επαρκής για την εκκίνηση της μηχανής.



Εικόνα 3.7: Επισκόπηση του ενακτήριου μηχανισμού.

3.2 Ερμηνεία της πειραματικής μηχανής

Η ερμηνεία της μηχανής διεξήχθη σε δύο στάδια. Μετά από μία προμελέτη χρησιμοποιώντας το γραμμικό μοντέλο υπολογισμού, έγινε ακολούθως η λεπτομερή μελέτη με τη χρήση της διαφορικής μεθόδου υπολογισμού κατά Kuhl.

Κατά την ανάλυση μιας μηχανής ελευθέρων εμβόλων, απαιτείται βαθιά κατανόηση της απώλειας πίεσης της ροής, καθώς μακροπρόθεσμα έχει σοβαρό αντίκτυπο στην απόσβεση του ταλαντευόμενου συστήματος και στα κινηματικά του μεγέθη. Αυτό ισχύει ιδιαίτερα στις Vuilleumier, καθώς η απόσβεση εδώ εξαρτάται αποκλειστικά από την απώλεια πίεσης στην ροή. Συνεπώς είναι σκόπιμο να ελέγξουμε τις απώλειες πίεσης πειραματικά. Τέτοιες μελέτες έχουν διεξαχθεί στην πειραματική μηχανή, κατά τις οποίες, μετά από την εγκατάσταση των αναγεννητών και εναλλακτών, διαχύθηκε σε μια πλευρά των κυλίνδρων πεπιεσμένος αέρας. Οι μετρούμενες απώλειες πίεσης στη συνέχεια χωρίστηκαν σε στρωτές και τυρβώδεις. Διαπιστώθηκε ότι το τυρβώδες μέρος, λόγω πρόσθετων απωλειών, για παράδειγμα εκτροπή της ροής, ήταν σημαντικά μεγαλύτερο, απ' αυτό που θα προέκυπτε μόνο από την ροή στους εναλλάκτες θερμότητας. Αυτή η επίδραση λήφθηκε υπ' όψιν στην ανάλυση, προσθέτοντας έναν περαιτέρω συντελεστή απώλειας, ο οποίος προέκυψε πειραματικά. Το στρωτό κομμάτι ήταν μικρότερο από το θεωρητικό, τόσο στον ψυχρό όσο και στον θερμό κύλινδρο. Μιας και η απώλεια πίεσης του στρωτού μέρους, προέρχεται καθαρά από την ροή στους αναγεννητές, πρέπει αυτοί να έχουν προτιμώμενα κανάλια ροής. Η υπόθεση αυτή λόγω κατασκευής είναι ρεαλιστική, καθώς δεν αποκλείεται η μεταβολή των επιμέρους υψών των κυλίνδρων, κατά την εγκατάσταση των αναγεννητών σε αυτούς. Στον πίνακα 3.2 συνοψίζονται τα σημαντικότερα μεγέθη για την ανάλυση της μηχανής.

Πίνακας 3.2: Δεδομένα σχεδιασμού πειραματικής μηχανής.

	Θερό	Ζεστό/Θερό	Ζεστό/Ψυχρό	Ψυχρό
Κύλινδροι				
Συνολικός όγκος (cm ³)	37.9	30.7		36.4
Εναλλάκτες				
Μήκος (mm)	30	60	57	60
Πλάτος καναλιού (mm)	2.5	2.0	2.0	2.0
Βάθος καναλιού (mm)	1.5	1.3	1.3	1.2
Αριθμός καναλιών	60	51	80	72
Αναγεννητές				
Μήκος (mm)		130	50	
Πάχος δίπλωσης (mm)		0.025	0.025	
Πορώδες		0.885	0.815	
Εκτοπιστές/Ελατήρια				
Διάκενο εμβόλου (mm)		0.5	0.5	
Διάμετρος βάρκτρου (mm)			17	
Διάμετρος συνδετικής ράβδου (mm)			6.35	
Μάζα εκτοπιστών (kg)		0.736	0.335	
Μάζα περιβλήματος (kg)			15	
Εσωτερική διαμ. Εκτοπιστών (cm ³)			950	
Σταθερά ελατηρίου (θερό) (N/m)			4603	
Σταθερά συνδετικού ελατηρίου (N/m)			194	

Κατά τον σχεδιασμό των εναλλακτών θερμότητας και των αναγεννητών έπρεπε να βελτιστοποιηθεί η ικανότητα ψύξης και ο βαθμός απόδοσης υπό τις δεδομένες οριακές συνθήκες, και για το λόγο αυτό τα μεγέθη που επηρεάζουν άμεσα το σύστημα ταλάντωσης, όπως μάζα εκτοπιστών και σταθερές ελατηρίων επιλέχθηκαν ώστε να επιτευχθούν τα κινηματικά μεγέθη του Πίνακα 3.1 . Στον Πίνακα 3.3 παρουσιάζονται αποτελέσματα κινηματικών και θερμικών μεγεθών, που προέκυψαν από το διαφορικό μοντέλο υπολογισμού. Μια τελική συζήτηση που συγκρίνει τα πειραματικά αποτελέσματα με αυτά εδώ γίνεται στο παρακάτω κεφάλαιο.

Συχνότητα	9.09 Hz
Γωνία φάσης	97.5
Διαδρομή ψυχρού εκτοπιστή	31.8 mm
Διαδρομή θερμού εκτοπιστή	33.4 mm
Λόγος πλατών	0.953
Ψύξη	229.2 W
Βαθμός απόδοσης	0.586

Πίνακας 3.3: Αποτελέσματα του διαφορικού μοντέλου.

3.3 Αποτελέσματα γραμμικού μοντέλου

Οι Πίνακες 3.1 και 3.2 περιέχουν όλα τα δεδομένα που απαιτούνται για τον υπολογισμό της πειραματικής μηχανής με το γραμμικό μοντέλο. Μία ανάλυση ευαισθησίας δείχνει ότι τα πλάτη των εκτοπιστών και η αναλογία των πλατών, εξαρτώνται κατά πολύ από την εκτίμηση της θερμοκρασίας των αερίων και των συντελεστών απώλειας πίεσης. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα, για παράδειγμα, το πλάτος του ψυχρού εκτοπιστή να αποκλίνει κατά 4% όταν η θερμοκρασία στο θερμό μέρος μεταβληθεί κατά 5° C. Για το λόγο αυτό, είναι προτέρημα ο προσδιορισμός της θερμοκρασίας και των συντελεστών απώλειας πίεσης σε πραγματικές συνθήκες. Οι μέσες θερμοκρασίες αερίου διαφέρουν από τις δοσμένες, στον Πίνακα 3.1, εξωτερικές θερμοκρασίες,(μέσω βαθμό συγκέντρωσης), στους εναλλάκτες θερμότητας, οι οποίες υπολογίζονται μέσω απλών υπολογισμών μεταφοράς θερμότητας ή με την βοήθεια μιας μεθόδου διαφορικού υπολογισμού. Οι συντελεστές απώλειας πίεσης από την άλλη, μπορούν πραγματικά μόνο μέσω

πειραματικών αποτελεσμάτων να καθοριστούν. Αρχικές τιμές για τον υπολογισμό της πειραματικής μηχανής μέσω του γραμμικού μοντέλου, βρίσκονται στο παράρτημα Ε.

Στον παρακάτω Πίνακα (3.4) συνοψίζονται τα αποτελέσματα του υπολογισμού. Ο πίνακας πέρα από τα αποτελέσματα της συχνότητας, γωνίας φάσης και πλάτος εκτοπιστών, περιέχει επίσης τις τιμές των σταθερών ελατηρίων και απόσβεσης, τις ιδιοσυχνότητες των δύο εκτοπιστών, καθώς και τους συντελεστές δυναμικής ενίσχυσης του ιδιοσυστήματος.

Συχνότητας	10.08 Hz
Γωνία φάσης	91.6
Πλάτος ψυχρού εκτοπιστή	11.4 mm
Πλάτος θερμού εκτοπιστή	12.4 mm
Αναλογία πλατών	0.917
Σταθερές ελατηρίων (N/m)	
Kkk=1672	Kkh=1825
	Khk=-
Khh=3004	1672
Σταθερές απόσβεσης (Ns/m)	
	Dkh=-
Dkk=31.3	3.93
Dhh=24.2	Dhk=1.62
Ιδιοσυχνότητες(1/s) και συντ. Δυναμικής ενίσχυσης	
$\omega_k=70.65$	$\omega_h=63.88$ ($\omega_0=63.35$)
Qk=0.120	Qh=0.309

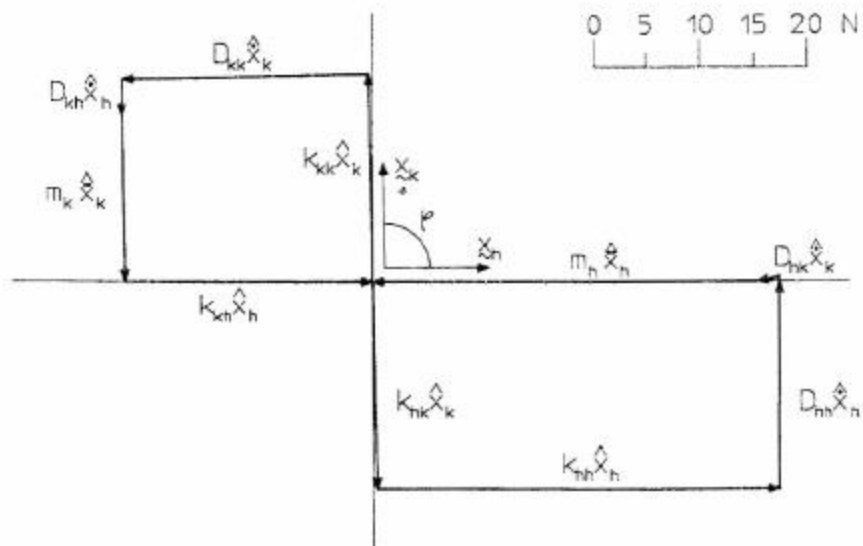
Πίνακας 3.4: Αποτελέσματα γραμμικού μοντέλου(από Πίνακες 3.1 και 3.2)

Εύκολα διαπιστώνεται ότι τα κινηματικά μεγέθη, σε σύγκριση με το διαφορικό μοντέλο, μπορούν να εκτιμηθούν με μία καλή προσέγγιση. Ωστόσο, μια τελική συζήτηση για την αξιοπιστία των αποτελεσμάτων αυτών μπορεί να γίνει μόνο σε σύγκριση με τα πειραματικά αποτελέσματα. Αντ' αυτού, θα πρέπει με βάση τα διαθέσιμα δεδομένα, να διερευνηθούν οι δυνάμεις ισορροπίας για τους δύο εκτοπιστές, η περίπτωση συντονισμού και να παρουσιαστούν προσεγγίσεις για το περιγραφικό σύστημα των τεσσάρων εξισώσεων.

3.3.1 Οι δυνάμεις ισορροπίας

Έχει ήδη αναφερθεί αρκετές φορές ότι πρέπει να ικανοποιείται, σε σταθερή κατάσταση, για κάθε εκτοπιστή, η ισορροπία των δυνάμεων ελατηρίων, απόσβεσης και αδράνειας. Σε ένα ταλαντευόμενο σύστημα οι δυνάμεις αυτές είναι μεταβλητές ως προς το χρόνο, γι' αυτό παρουσιάζονται σε ένα διάγραμμα φορέα. Με τον τρόπο αυτό, μπορεί να πραγματοποιηθεί μια εξισορρόπηση των ατομικών δυνάμεων με την προσθήκη ενός φορέα. Ένα τέτοιο διάγραμμα δίνει επίσης μια ιδέα για το μέγεθος των διαφόρων δυνάμεων και αναγνωρίζεται αμέσως εάν η δύναμη εφαρμόζεται ομοιόμορφα.

Στο Σχήμα 3.8 απεικονίζεται το διάγραμμα δύναμης, για τους δύο εκτοπιστές, που δημιουργήθηκε από τα δεδομένα του Πίνακα 3.4. Η κατεύθυνση της μετατόπισης των εκτοπιστών χαρακτηρίζεται από τους φορείς x_k και x_h με την μεταβολή της γωνίας φάσης φ . Τα διανύσματα ταχύτητας και επιτάχυνσης προηγούνται των \tilde{x}_k και \tilde{x}_h 90° και 180° αντίστοιχα. Το γράφημα δείχνει ότι οι δυνάμεις ελατηρίων, απόσβεσης και αδράνειας που προκαλούνται από την ίδια την κίνηση, αντισταθμίζονται από την επίδραση της κίνησης του άλλου εκτοπιστή. Αυτή η αντίδραση ουσιαστικά λαμβάνει χώρα κατά των δυνάμεων ελατηρίου, οι οποίες χαρακτηρίζονται από τις μικτές σταθερές ελατηρίων K_{kh} και K_{hk} . Η επίδραση των μεικτών δυνάμεων απόσβεσης είναι σχετικά μικρή. Από το γράφημα μπορεί να εξηγηθεί αρκετά καθαρά από τι επιπτώσεις επιτυγχάνεται η ταλάντωση του συστήματος. Επιπλέον μπορεί να χρησιμοποιηθεί προκειμένου να διασαφηνιστούν τα αποτελέσματα που θα επιφέρουν αλλαγές διαφόρων παραμέτρων.



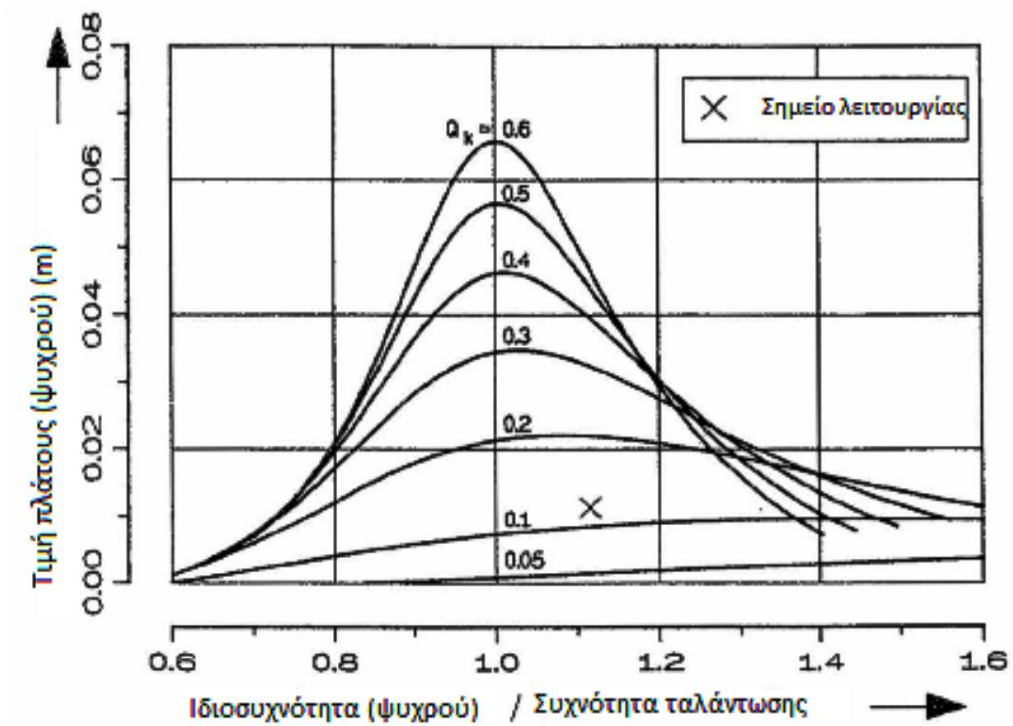
Εικόνα 3.8: Διάγραμμα δυνάμεων.

3.3.2 Η περίπτωση συντονισμού

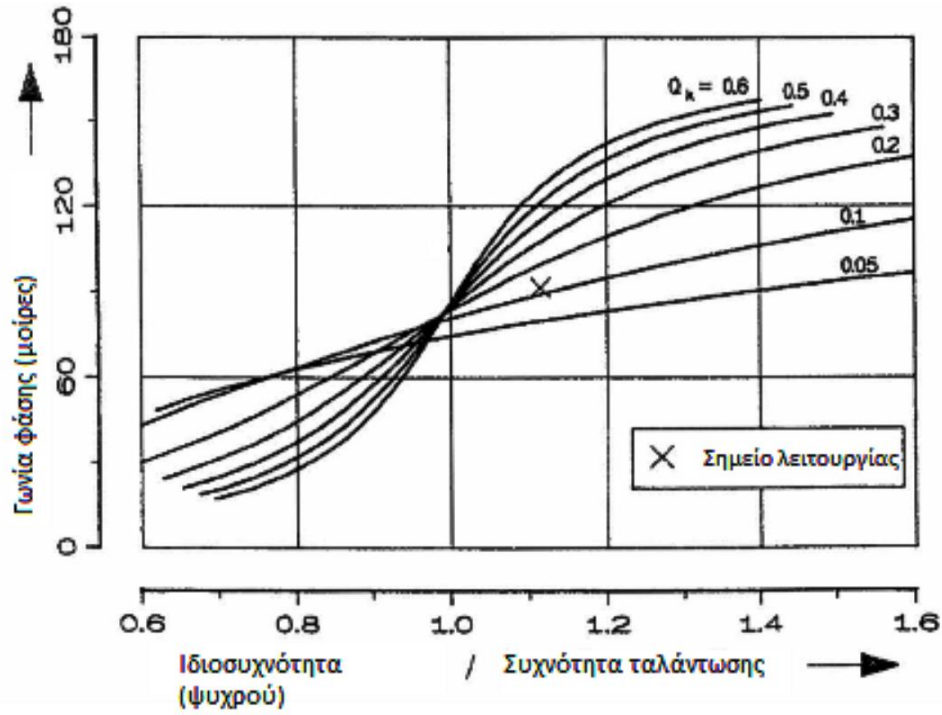
Για κάθε ταλαντευόμενο σύστημα η περίπτωση συντονισμού πρέπει να εξετάζεται ξεχωριστά, προκειμένου να αποφευχθεί η λεγόμενη «καταστροφή συντονισμού». Για το σκοπό αυτό πρέπει να εξασφαλιστεί ότι η απόσβεση, σε περίπτωση συντονισμού, είναι πολύ μεγάλη ή ότι οι ιδιοσυχνότητες των ταλαντευμένων στοιχείων είναι εκτός το εύρος της συχνότητας συντονισμού, έτσι ώστε να μην μπορεί καν να επιτευχθεί. Αυτή η μέθοδος εφαρμόζεται κυρίως για να αποφευχθεί ο συντονισμός του περιβλήματος. Εδώ η σταθερά του ελατηρίου επιλέγεται είτε πολύ μεγάλη, η οποία ισοδυναμεί με μία άκαμπτη σύσφιξη, είτε με την χρήση πολύ αδύναμου ελατηρίου για την αναστολή της στέγασης. Κατά την κίνηση των εκτοπιστών, ο συντονισμός δεν μπορεί να αποκλειστεί εκ των προτέρων, επειδή η συχνότητα ταλάντωσης εξαρτάται άμεσα από τις ιδιοσυχνότητες των εκτοπιστών. Στο μη αποσβενόμενο σύστημα, η συχνότητα ταλάντωσης λαμβάνεται ως το μέσο των ιδιοσυχνοτήτων των εκτοπιστών, έτσι ώστε ο συντονισμός να είναι δυνατός μόνο όταν είναι ίδιες οι ιδιοσυχνότητες. Με απόσβεση η συχνότητα ταλάντωσης, ωστόσο, μετατοπίζεται προς την κατεύθυνση μία εκ των δύο ιδιοσυχνοτήτων, έτσι ώστε σε κάθε περίπτωση είναι δυνατόν και ο Πίνακας 3.4 δείχνει ότι ο συντονισμός, στην δοκιμαστική μηχανή, για τον θερμό εκτοπιστή σχεδόν έχει επιτευχθεί.

Η επίδραση του συντονισμού στο σύστημα ταλάντωσης εξετάζεται σε γενικές γραμμές με αναφορά ένα διάγραμμα της τιμής πλάτους ή της γωνίας φάσης επί τον λόγο της ιδιοσυχνότητας ως προς την συχνότητα του συστήματος. Σαν παράμετρο για την περιγραφή της απόσβεσης χρησιμοποιείται ο συντελεστής δυναμικής ενίσχυσης Q . Με

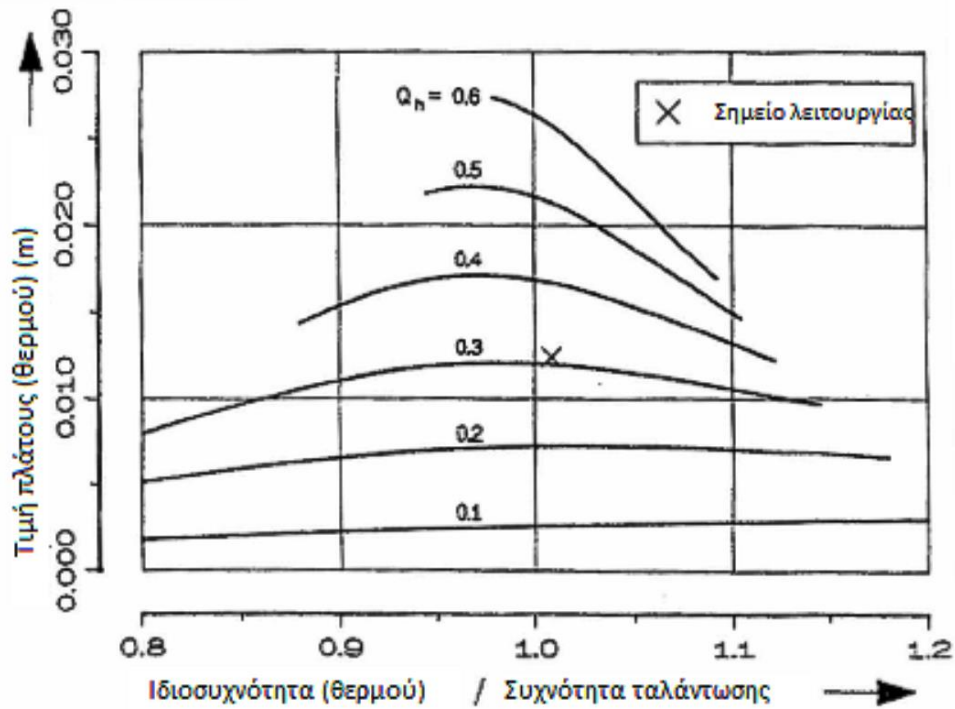
βάση το γραμμικό μοντέλο δημιουργήθηκαν τέτοιου είδους διαγράμματα μεταβάλλοντας την μάζα ή τους συντελεστές απώλειας πίεσης για τους δύο εκτοπιστές στην δοκιμαστική μηχανή (βλ. Εικόνα 3-9.-3.12).



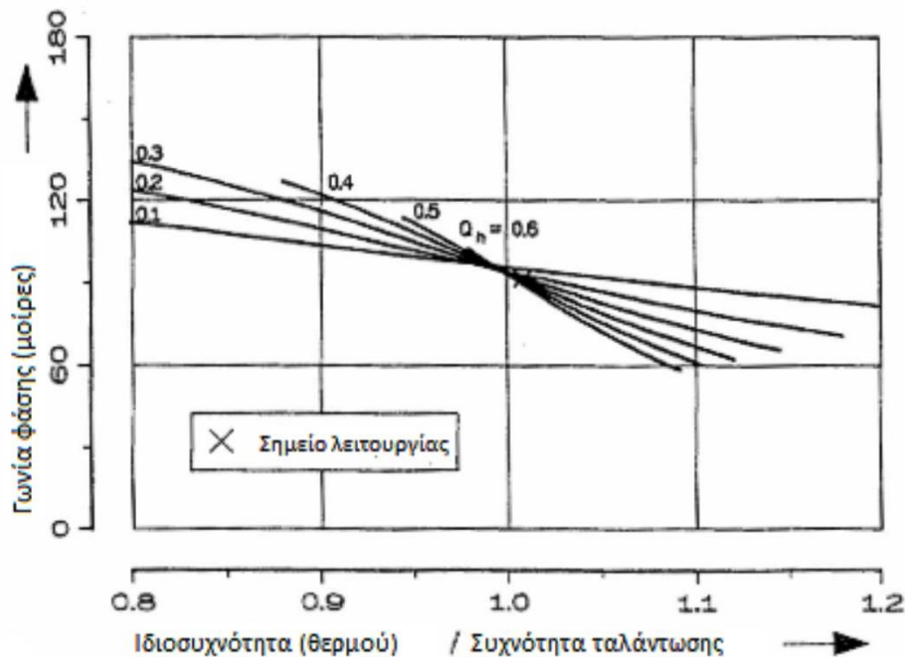
Εικόνα 3.9: Διάγραμμα συντονισμού για τον ψυχρό εκτοπιστή (τιμή πλάτους).



Εικόνα 3.10: Διάγραμμα συντονισμού για τον ψυχρό εκτοπιστή (γωνία φάσης).



Εικόνα 3.11: Διάγραμμα συντονισμού για τον θερμό εκτοπιστή (τιμή πλάτους).



Εικόνα 3.12: Διάγραμμα συντονισμού για τον θερμό εκτοπιστή (γωνία φάσης).

Τα διαγράμματα δείχνουν το στάδιο συντονισμού για τις τιμές του πλάτους και την αυξανόμενη κλίση της συνάρτησης της γωνίας φάσης στο σημείο συντονισμού με φθίνουσα απόσβεση και υψηλότερες τιμές για τον συντελεστή δυναμικής ενίσχυσης Q . Επομένως μία μηχανή, σε κατάσταση συντονισμού, με συνολικά χαμηλή απόσβεση και με επακόλουθο τα ισχυρά μεταβαλλόμενα πλάτη των εκτοπιστών και γωνίας φάσης, είναι δύσκολο να ελεγχθεί. Παρατηρώντας το σημείο λειτουργίας της πειραματική μηχανής, το οποίο με την βοήθεια του Πίνακα 3.4 μπορεί εύκολα να μεταφερθεί στα διαγράμματα, φαίνεται ότι οι δύο εκτοπιστές έχουν ισχυρή απόσβεση και έτσι η επίτευξη του σημείου συντονισμού δεν έχει καμία ιδιαίτερη επίπτωση στο ταλαντευόμενο σύστημα. Επιπλέον αναφέρεται ότι ανάλογα με τις αλλαγές σε διάφορες παραμέτρους που σχετίζονται με την διακύμανση της συχνότητας ταλάντωσης του συστήματος, η ιδιοσυχνότητα του ψυχρού εκτοπιστή μπορεί να βρίσκεται μεταξύ 0.95 έως 1.3 ενώ αντίστοιχα του θερμού 0.9 έως 1.1 .

3.3.3 Απλοποίηση των εξισώσεων του συστήματος

Με την βοήθεια των προκυπτουσών τιμών από τον Πίνακα 3.4, οι εξισώσεις που περιγράφουν το σύστημα μπορούν να απλοποιηθούν με τη σύγκριση μεγέθους. Σε αυτό το σημείο είναι απαραίτητο να τονίσουμε ότι οι απλοποιήσεις ισχύουν μόνο για την

συγκεκριμένη πειραματική μηχανή, καθώς δεν υπάρχει η δυνατότητα σύγκρισης με άλλες μηχανές.

Ο πίνακας 3.4 δείχνει ότι οι μικτές σταθερές απόσβεσης είναι μικρότερες από τις D_{kk} και D_{hh} κατά μία τάξη μεγέθους. Αυτή η διαφορά εξηγείται εύκολα, γιατί οι μικτές σταθερές απόσβεσης περιγράφουν μόνο την απώλεια πίεσης που προκαλείται στους εναλλάκτες από την θερμική συμπίεση, εκτοπίζοντας αέριο στους εναλλάκτες θερμότητας. Αυτή η ροή μάζας, λόγω της μηχανικής εκτόπισης, είναι σαφώς μικρότερη από την ίδια την κίνηση που περιγράφεται από D_{hh} και D_{kk} . Αμελώντας τους όρους που περιέχουν τους μικτούς συντελεστές απόσβεσης, η εξίσωση της συχνότητας ταλάντωσης (4.63), μπορεί να γραφεί προσεγγιστικά :

$$\tilde{\omega}_0^2 = \frac{\omega_k^2 + \omega_h^2 \frac{D_{kk} m_h}{D_{hh} m_k}}{1 + \frac{D_{kk} m_h}{D_{hh} m_k}} \quad (3.1)$$

Κατά συνέπεια προκύπτει ότι η συχνότητα ταλάντωσης είναι το μέσο της τετραγωνικής ρίζας των δύο ιδιοσυχνοτήτων, με τον συντελεστή στάθμισης $\frac{D_{kk} m_h}{D_{hh} m_k}$. Λαμβάνοντας υπόψιν τις τιμές των ιδιοσυχνοτήτων και της συχνότητας από τον Πίνακα 3.4, διαπιστώνουμε ότι η συχνότητα ω_0 βρίσκεται υπό των δύο ιδιοσυχνοτήτων. Το αποτέλεσμα αυτό προκαλείται από τους μικτούς συντελεστές απόσβεσης και ελατηρίων, κάτι το οποίο αμελείται στην προσεγγιστική εξίσωση. Η εξίσωση (4.64) που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό μιας περαιτέρω παραμέτρου, μπορεί να απλοποιηθεί ως εξής :

$$\left[-\frac{\omega_0^2 D_{kk} D_{hh}}{K_{kh} K_{hk}} \right] \cong 1 \quad (3.2)$$

Λόγω της γραμμικής εξάρτησης των συντελεστών απόσβεσης από τα πλάτη των εκτοπιστών, η εξίσωση αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την μελέτη των πλατών για τις παραλλαγές των παραμέτρων.

Με παρόμοιο τρόπο προκύπτουν προσεγγιστικές εξισώσεις για τον λόγο των πλατών των εκτοπιστών και για την γωνία φάσης :

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_k \\ \hat{x}_h \end{bmatrix} \cong \frac{K_{kh}}{\omega_0 D_{kk}} \quad (3.3)$$

$$\tan \tilde{\varphi} = \omega_0 \frac{\frac{D_{hh} + D_{kk}}{m_h} + \frac{D_{kk}}{m_k}}{\omega_h^2 - \omega_k^2} \quad (3.4)$$

Η προσεγγιστική εξίσωση της γωνίας φάσης, δείχνει ότι αυτή είναι 90^0 όταν οι ιδιοσυχνότητες των δύο εκτοπιστών είναι ίσες. Η γωνία φάσης είναι μεγαλύτερη από 90^0 όταν η ιδιοσυχνότητα του ψυχρού εκτοπιστή είναι μεγαλύτερη από εκείνη του θερμού. Σε αντίθετη περίπτωση, η γωνία φάσης είναι μικρότερη από 90^0 . Στον Πίνακα 3.5 παρατίθενται τα αποτελέσματα των προσεγγιστικών εξισώσεων, σε σύγκριση με αυτά του Πίνακα 3.4. Εύκολα παρατηρείται ότι οι προσεγγίσεις και οι απλουστεύσεις προκαλούν μόνο μικρές αποκλίσεις. Έτσι οι προσεγγιστικές εξισώσεις (3.1-3.4) αποτελούν ένα χρήσιμο εργαλείο, που προβλέπει την επιρροή διαφόρων παραμέτρων στο ταλαντευόμενο σύστημα. Επιπλέον οι κινηματικές μεταβλητές, στα αρχικά στάδια του σχεδιασμού, μπορούν να εκτιμηθούν εύκολα με την βοήθεια τους(προσεγγιστικές εξισώσεις).

	Προσεγγιστική λύση	Γραμμικό μοντέλο
Συχνότητα(Hz)	10.46	10.08
Γωνία φάσης(μοίρες)	96.3	91.6
Λόγος πλατών	0.887	0.917
$\left[-\frac{\omega_0^2 D_{kk} D_{hh}}{K_{kh} K_{hk}} \right]$	1	0.996

Πίνακας 3.5: Σύγκριση αποτελεσμάτων προσεγγιστικής λύσης με αυτών του Πίνακα 3.4.

4. Πειραματική ανάλυση

Στα πλαίσια της πειραματικής μελέτης της μηχανής, διεξάχθηκαν εκτεταμένες δοκιμές προκειμένου να αποκτηθεί μια πλήρη εικόνα για την επίδοση μιας μηχανής Vuilleumier ελευθέρων εμβόλων. Πέρα από την μελέτη της μηχανής για διάφορες τιμές θερμοκρασίας και πίεσης, η μηχανή μελετήθηκε και για πληθώρα τιμών παραμέτρων που επηρεάζουν άμεσα το σύστημα ταλάντωσης, όπως σταθερές ακαμψίας και μάζες εκτοπιστών. Πριν από την αξιολόγηση και τον σχολιασμό των αποτελεσμάτων θα παρουσιασθεί η πειραματική διάταξη και θα ακολουθήσει μία σύντομη εξέταση του σφάλματος.

4.1 Κατασκευή της πειραματικής διάταξης

Η θερμοκρασία του θερμού και ψυχρού κυκλώματος επιτυγχάνεται με την βοήθεια ενός θερμοστάτη και ενός κρυοστάτη αντίστοιχα. Τα δύο όργανα που χρησιμοποιούνται στην λειτουργία θέρμανσης και ψύξης, μπορούν κάλλιστα να χρησιμοποιηθούν τόσο για την προθέρμανση όσο και για την ρύθμιση της κυκλοφορίας της θερμοκρασίας. Οι εναλλάκτες θερμότητας τοποθετούνται με τέτοιο τρόπο πάνω στον κύλινδρο, ώστε να επαρκεί η συσκευή εσωτερικής αντλίας για την προώθηση των κυκλωμάτων. Η ηλεκτρική θερμάστρα αποτελείται από οχτώ φυσίγγια με συνολική απόδοση 1 kW. Τα φυσίγγια τοποθετούνται σε ένα μπλοκ θέρμανσης, το οποίο συστέλλεται πάνω στον κύλινδρο. Εδώ κατανέμονται έξι φυσίγγια ομοιόμορφα πάνω στην περιφέρεια. Τα υπόλοιπα δύο τοποθετούνται στην βάση του κυλίνδρου έτσι ώστε ένα μέρος της θερμότητας να προσδίδεται απευθείας στον θερμό χώρο του κυλίνδρου. Το μπλοκ θέρμανσης κατασκευάζεται και αυτό από ανοξείδωτο χάλυβα, όπως και ο κύλινδρος. Ο χάλυβας αυτός παρέχει μία σταθερή θερμική αγωγιμότητα στην σύνδεση με τον συρρικνωτή, η οποία στην δοκιμαστική μηχανή εκτίθεται σε ισχυρά θερμικά φορτία, από την συχνή ψύξη και θέρμανση. Η χαμηλή θερμική αγωγιμότητα του χάλυβα μπορεί να αντισταθμιστεί από μία ομοιόμορφη κατανομή των φυσιγγίων θέρμανσης. Η διαφορά θερμοκρασίας μεταξύ της επιφάνειας των φυσιγγίων και του τοιχώματος του κυλίνδρου είναι κατά μέσο όρο περίπου 30°C. Για τον έλεγχο της θερμοκρασίας του τοιχώματος του κυλίνδρου εγκαθίσταται ένας έλεγχος-2-σημείων. Κατά την διάρκεια όμως των δοκιμών, η θερμοκρασία ρυθμίζεται χειροκίνητα, επειδή η ηλεκτρική ενέργεια μπορεί να προσδιοριστεί απ' ευθείας με τη βοήθεια ενός μετρητή ισχύος.

4.1.1.Επισκόπηση σφαλμάτων.

Για τον μετατροπέα δίνεται από τον κατασκευαστή ένα σφάλμα της τάξης $\pm 0.5\%$. Λόγω της περιορισμένης ανάλυσης του παλμογράφου δημιουργείται ένα περαιτέρω σφάλμα, το οποίο είναι περίπου της ίδιας τάξης με το παραπάνω και έτσι το μήκος κίνησης των εκτοπιστών μπορεί να δοθεί με ακρίβεια ± 0.4 mm. Το σφάλμα για τον προσδιορισμό της πίεσης, είναι επίσης άθροισμα των σφαλμάτων του μετατροπέα DMS, το οποίο είναι της τάξης $\pm 0.1\%$ (500psi), και το σφάλμα ανάλυσης του παλμογράφου. Έτσι προκύπτει ένα συνολικό σφάλμα ± 0.065 bar για την μέση πίεση και ένα σφάλμα ± 0.13 bar για τις διάφορες πιέσεις γύρω από την μέση πίεση. Η συχνότητα μπορεί να προσδιοριστεί με μεγάλη ακρίβεια χρησιμοποιώντας απευθείας τον παλμογράφο. Επιπλέον η σύνδεση με την μέση συχνότητα των εμβόλων και την ταλάντωση της πίεσης, οδηγεί τελικά σε ένα μειωμένο απόλυτο σφάλμα της τάξης ± 0.006 Hz. Από την άλλη ο προσδιορισμός της γωνίας φάσης των δύο εμβόλων συνδέεται με μεγάλο σφάλμα, περίπου ± 1.50 , καθώς είναι μέγεθος το οποίο δεν μπορεί να μετρηθεί άμεσα. Η γωνία φάσης προσδιορίζεται από τις χρονικές στιγμές που τα έμβολα περνάνε από το σημείο ισορροπίας τους. Το σφάλμα είναι τόσο μεγάλο, διότι το ψυχρό έμβολο δεν έχει σταθερό σημείο ισορροπίας, καθώς η σταθερά ακαμψίας του είναι πάρα πολύ μικρή.

Το σφάλμα στην ψυχρή και θερμή ροή θερμότητας θα υπολογιστεί από τον νόμο του Gauss για την διάδοση σφαλμάτων από τον εξής τύπο :

$$\dot{Q} = c_p \rho \dot{V} \Delta T \quad (4.1)$$

Επειδή στα κυκλοφοριακά μέσα πρόκειται για καθαρές ουσίες, μπορούν να αγνοηθούν οι ανακρίβειες στα δεδομένα υλικά. Η ροή όγκου μετριέται μέσω ενός ροόμετρου αιρούμενων σωματιδίων, του οποίου το σφάλμα είναι της τάξης του 1.5%. Ο προσδιορισμός της διαφοράς θερμοκρασίας πραγματοποιείται με ένα βαθμονομημένο θερμόμετρο αντίστασης pt-100 με απόλυτο σφάλμα $\pm 0.1^\circ\text{C}$. Στην μέγιστη θερμική ισχύ των 650W, προκύπτει ένα σφάλμα κατά την πρόσδοση θερμότητας στο θερμό μέρος, της τάξης των ± 18 W. Το ψυχρό ρεύμα θερμότητας μπορεί να προσδιοριστεί με ακρίβεια ± 9.5 W. Αυτό οδηγεί για την μέγιστη ικανότητα ψύξης 75W, σε ένα σχετικό σφάλμα της τάξης 12,7%. Η αιτία του υψηλού σφάλματος είναι η σχετικά υψηλή ταχύτητα ροής στο ψυχρό κύκλωμα, προκειμένου να επιτευχθεί αποδεκτός συντελεστής μεταφοράς θερμότητας γύρω από τον κύλινδρο. Για τον λόγο αυτό η διαφορά θερμοκρασίας μεταξύ εισόδου και εξόδου είναι 0.8°C , προκαλώντας από μόνο του αυτό ένα σφάλμα της τάξης του 12.5%. Η ισχύς της θέρμανσης μπορεί να προσδιοριστεί με μεγάλη σχετικά ακρίβεια, καθώς προσδίδεται ηλεκτρικά. Έτσι με ισχύ 600W το απόλυτο σφάλμα μέτρησης είναι ± 11 W. Λόγω των απωλειών μόνωσης, οι οποίες μπορούν να εκτιμηθούν μόνο προσεγγιστικά, η αξιολόγηση της συνολικής ενεργειακής ισορροπίας δεν βελτιώνει την

ακρίβεια της μέτρησης. Για τον συντελεστή απόδοσης το σχετικό σφάλμα είναι της τάξης του 12.8% και ορίζεται ως εξής:

$$e = \frac{\dot{Q}_k}{P_{el}} \quad (4.2)$$

Οι θερμοκρασίες στο θερμό μέρος της μηχανής μετρείται με θερμοστοιχεία NiCr-Ni, τα οποία έχουν ένα σφάλμα $\pm 4^\circ\text{C}$.

4.2 Σχολιασμός των πειραματικών αποτελεσμάτων.

Η αξιολόγηση των πειραματικών αποτελεσμάτων εκτελείται σε δύο μέρη. Πρώτα θα εξεταστεί η επιρροή των μαζών των εκτοπιστών, της σταθεράς των ελατηρίων και της διατομής της ράβδου του εμβόλου. Αυτά τα μεγέθη δεν μπορούν να μεταβληθούν κατά την λειτουργία της μηχανής και για το λόγο αυτό θα αναφέρονται ως εσωτερικές παραμέτρους. Στην συνέχεια θα εξετασθεί η επιρροή των εξωτερικών παραμέτρων στην απόδοση της μηχανής. Οι εξωτερικοί παράμετροι είναι οι θερμοκρασίες στους διάφορους κυλινδρικούς θαλάμους (θερμό, ζεστό, ψυχρό) και η μέση πίεση.

4.2.1 Οι εσωτερικοί παράμετροι.

Από το γεγονός ότι η εσωτερική παράμετρος δεν μπορεί να αλλάξει κατά τη διάρκεια της λειτουργίας, προκύπτει ότι πρέπει να είναι τέτοιες εξ αρχής, ώστε να συντονίζεται το σύστημα ταλάντωσης με τις επιθυμητές κινηματικές μεταβλητές. Γι' αυτό το λόγο σε αυτό το κεφάλαιο θα σχολιασθούν μόνο τα κινηματικά αποτελέσματα της συχνότητας, γωνίας φάσης, πλάτος εκτοπιστών και λόγος πλατών. Παρ' όλα αυτά παρουσιάζονται όλα τα μεγέθη στο Παράρτημα Δ. Ύστερα από την παρουσίαση και σχολιασμό των πειραματικών αποτελεσμάτων, ακολουθεί μία σύγκριση με τα αποτελέσματα του γραμμικού μοντέλου προκειμένου να αξιολογηθεί η ακρίβεια του και η αποδεικτική του αξία. Τα παρακάτω πειράματα που διεξάχθηκαν είχαν μία μέση θερμοκρασία 0°C στο ψυχρό κύκλωμα και μία μέση πίεση 20 bar. Η θερμοκρασία του θερμαντήρα υπηρέτησε σαν μία περαιτέρω παράμετρο, στην οποία αποδόθηκαν οι τιμές 460,500 και 500°C . Προκειμένου να αποφευχθεί, ειδικά σε υψηλές θερμοκρασίες του θερμαντήρα, η μετατόπιση του κυλινδρικού ορόφου, σε όλες τις δοκιμές η θερμοκρασία του ζεστού κυκλώματος δεν αποκλίνει τους 40°C , που ήταν και μία από τις προϋποθέσεις σχεδιασμού. Εκτός από το συνδετικό ελατήριο που έχει σταθερά 380 N/m, οι υπόλοιπες παράμετροι δεν θα μεταβληθούν και θα λάβουν τις τιμές όπως αυτές του Πίνακα 5.2.

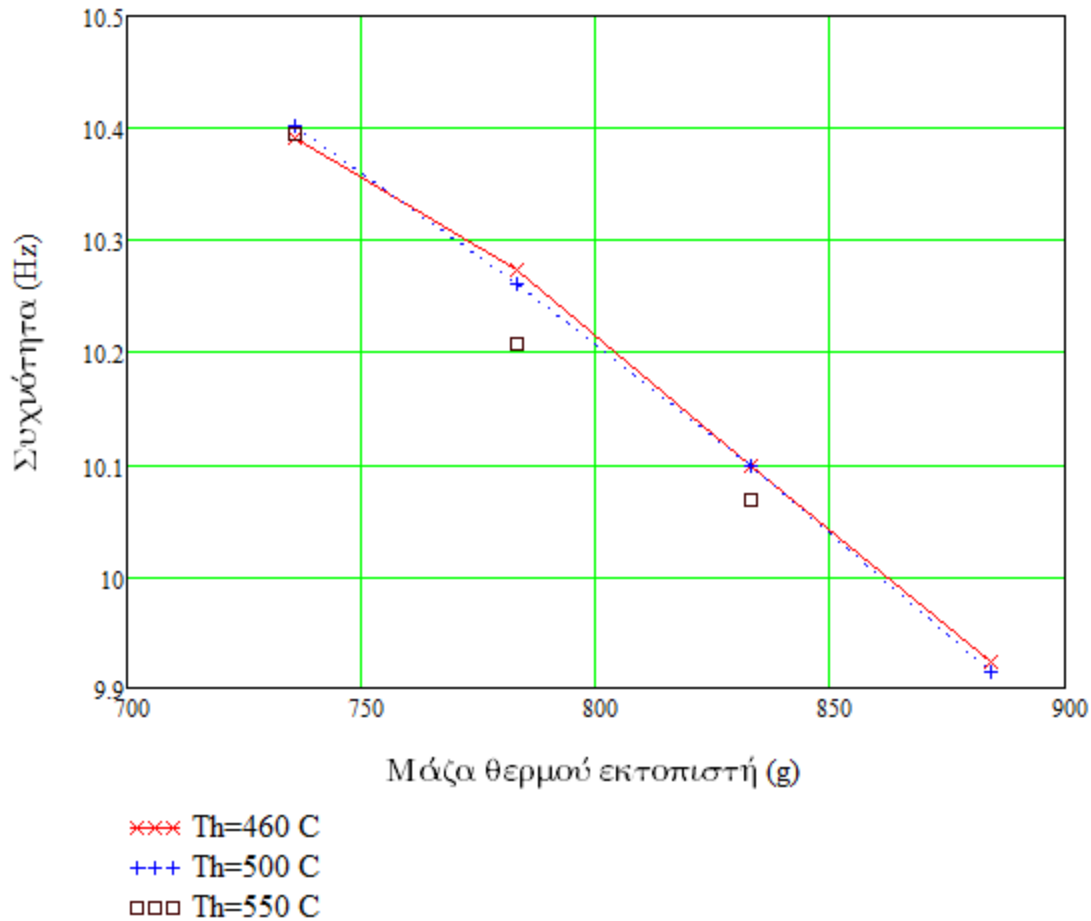
4.2.1.1 Οι μάζες των εκτοπιστών

Στις δοκιμές που παρουσιάζονται παρακάτω οι κύριες μάζες των εκτοπιστών είναι 335g για τον ψυχρό και 736g για τον θερμό, τιμές που ταυτίζονται με το κατώτερο όριο σχεδιασμού. Με βάση αυτές τις τιμές, οι μάζες αυξάνουν κάθε φορά κατά 50g, έως 150g πρόσθετης μάζας. Οι τροποποιημένες θέσεις ισορροπίας που προκύπτουν από το πρόσθετο βάρος, εξισορροπούνται με προένταση των ελατηρίων. Τα αποτελέσματα των δοκιμών αυτών αναφέρονται στο Παράρτημα Δ.

Η επιρροή των μαζών των εκτοπιστών στην συχνότητα ταλάντωσης φαίνεται στην προσεγγιστική εξίσωση (3.1) του προηγούμενου κεφαλαίου. Για το σκοπό αυτό μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι εξισώσεις ορισμού (2.32) και (2.40) των ιδιοσυχνοτήτων και έτσι προκύπτει:

$$\tilde{\omega}_o^2 = \frac{K_{kk} + K_{hh} \frac{D_{kk}}{D_{hh}}}{m_k + m_h \frac{D_{kk}}{D_{hh}}} \quad (4.3)$$

Η ιδιοσυχνότητα είναι αντιστρόφως ανάλογη της μάζας των εκτοπιστών. Εάν οι σταθερές απόσβεσης D_{kk} και D_{hh} είναι της ίδια τάξης, το αποτέλεσμα θα είναι ανεξάρτητο από το ποιος εκτοπιστής εφοδιάστηκε με μια πρόσθετη μάζα. Τα πειραματικά αποτελέσματα έδειξαν ότι η ιδιοσυχνότητα του συστήματος μειώνεται σχεδόν ομοιόμορφα με την αύξηση της μάζας των εκτοπιστών. Γι' αυτό το λόγο στο διάγραμμα 4.2 απεικονίζεται η ιδιοσυχνότητα μόνο συναρτήσει της μάζας του θερμού εκτοπιστή. Επίσης απ' αυτό το διάγραμμα μπορούμε να δούμε ότι η ιδιοσυχνότητα εξαρτάται σε ελάχιστο βαθμό από τη θερμοκρασία του θερμαντήρα.

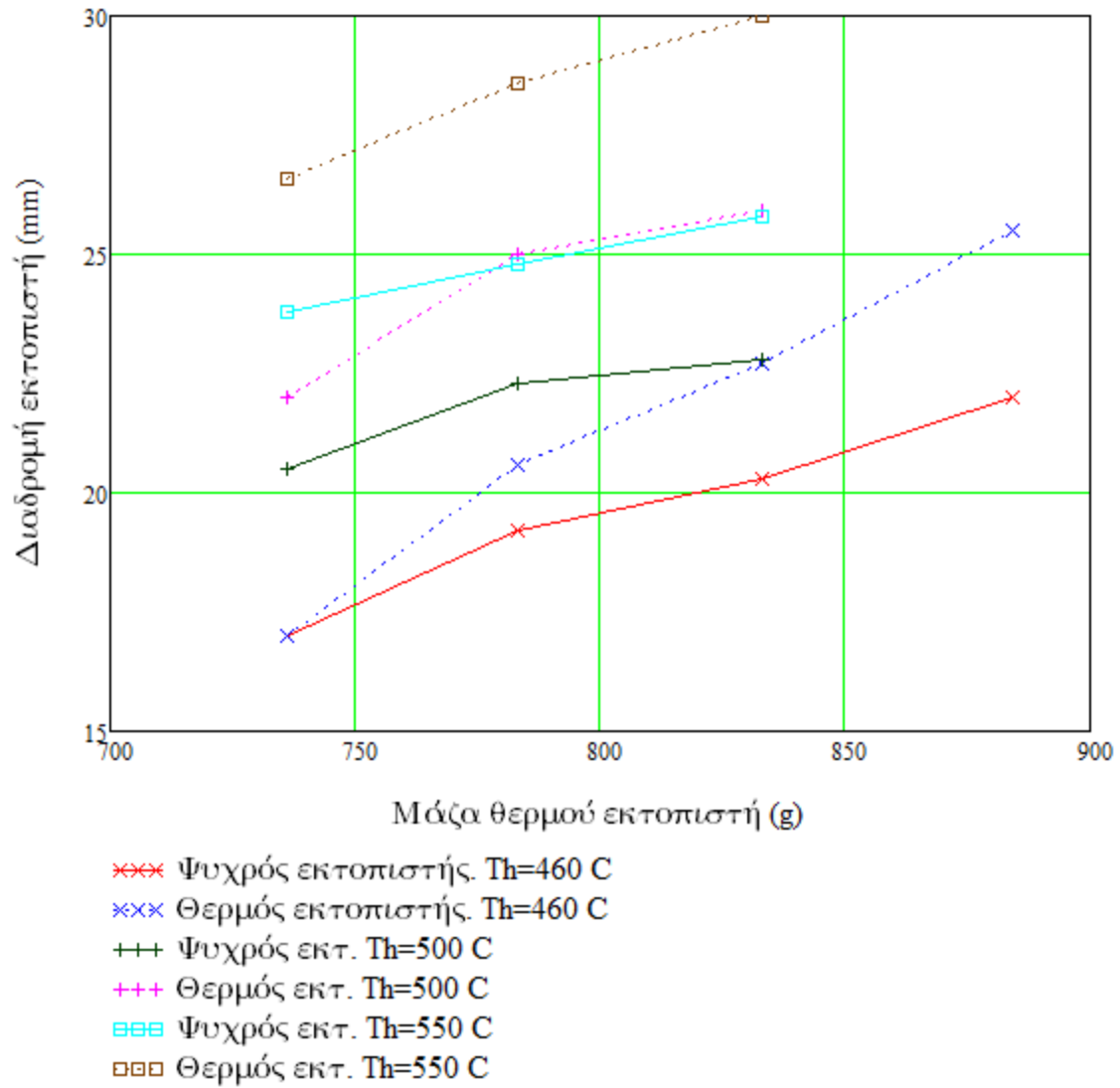


Εικόνα 4.2: Συχνότητα ταλάντωσης ως προς την μάζα του θερμού εκτοπιστή.

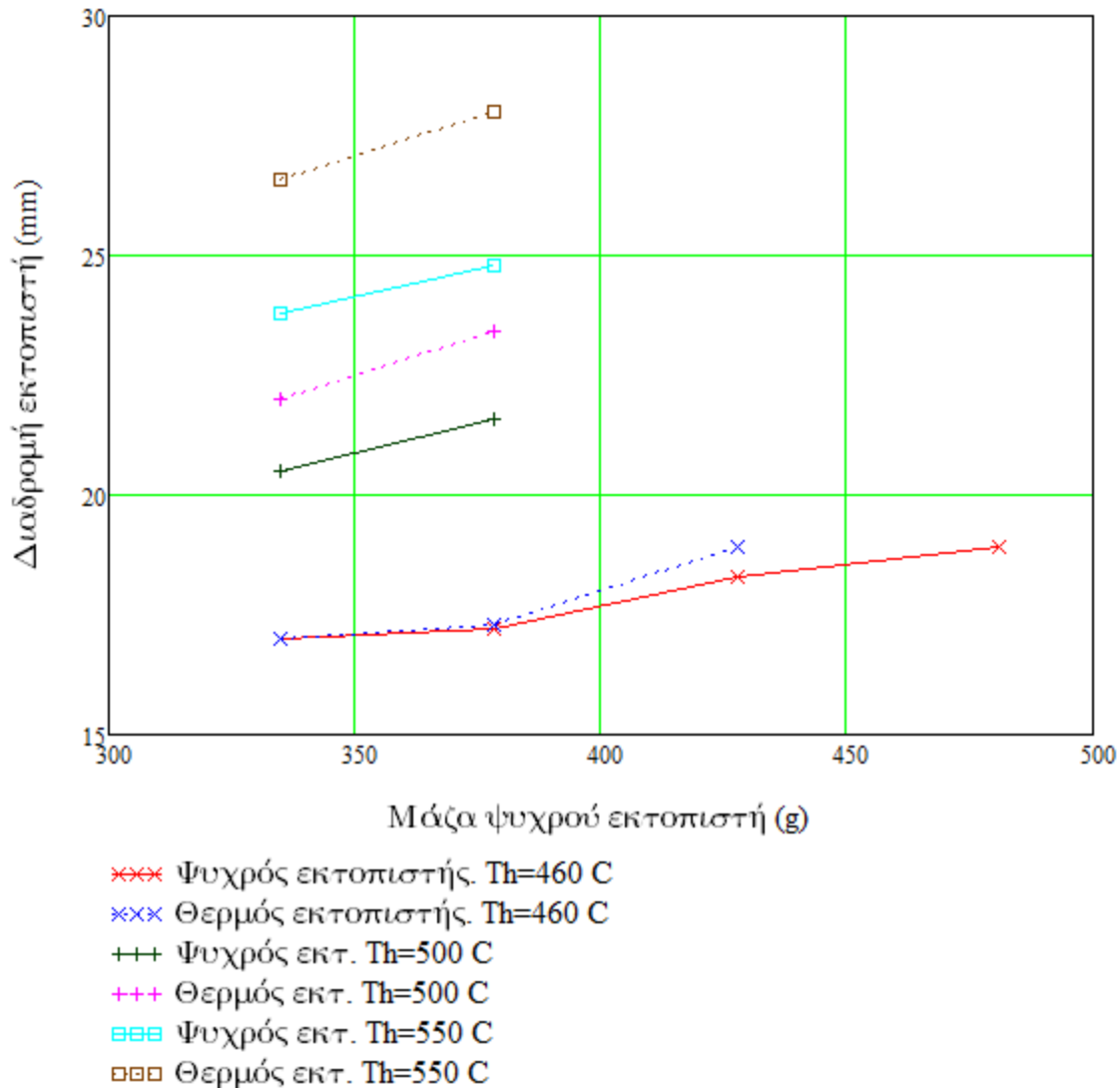
Η σχέση μεταξύ της μάζας και το μήκος της διαδρομής των εκτοπιστών φαίνεται στην κατά προσέγγιση εξίσωση (5.2), και για λόγους σαφήνειας θα παρουσιασθεί πάλι:

$$\left[-\frac{\omega_0^2 D_{kk} D_{hh}}{K_{kh} K_{hk}} \right] \approx 1 \quad (4.4)$$

Όπως προαναφέρθηκε η συχνότητα ταλάντωσης μειώνεται με την αύξηση της μάζας των εκτοπιστών, ενώ οι μικτές σταθερές των ελατηρίων παραμένουν σταθερές, επειδή παραμελείται η κίνηση του περιβλήματος. Λόγω της γραμμικής σχέσης μεταξύ των σταθερών απόσβεσης και το πλάτος των εκτοπιστών (βλ. Κεφ. 4.2.3), όπως προκύπτει από την ανωτέρω εξίσωση, τα πλάτη των εκτοπιστών αυξάνονται με την αύξηση των μαζών τους. Αυτό φαίνεται καθαρά στα διαγράμματα 4.3 και 4.4 που ακολουθούν.



Εικόνα 4.3: Διαδρομή εκτοπιστών ως προς την μάζα του θερμού εκτοπιστή.



Εικόνα 4.4: Διαδρομή εκτοπιστών ως προς την μάζα του ψυχρού εκτοπιστή.

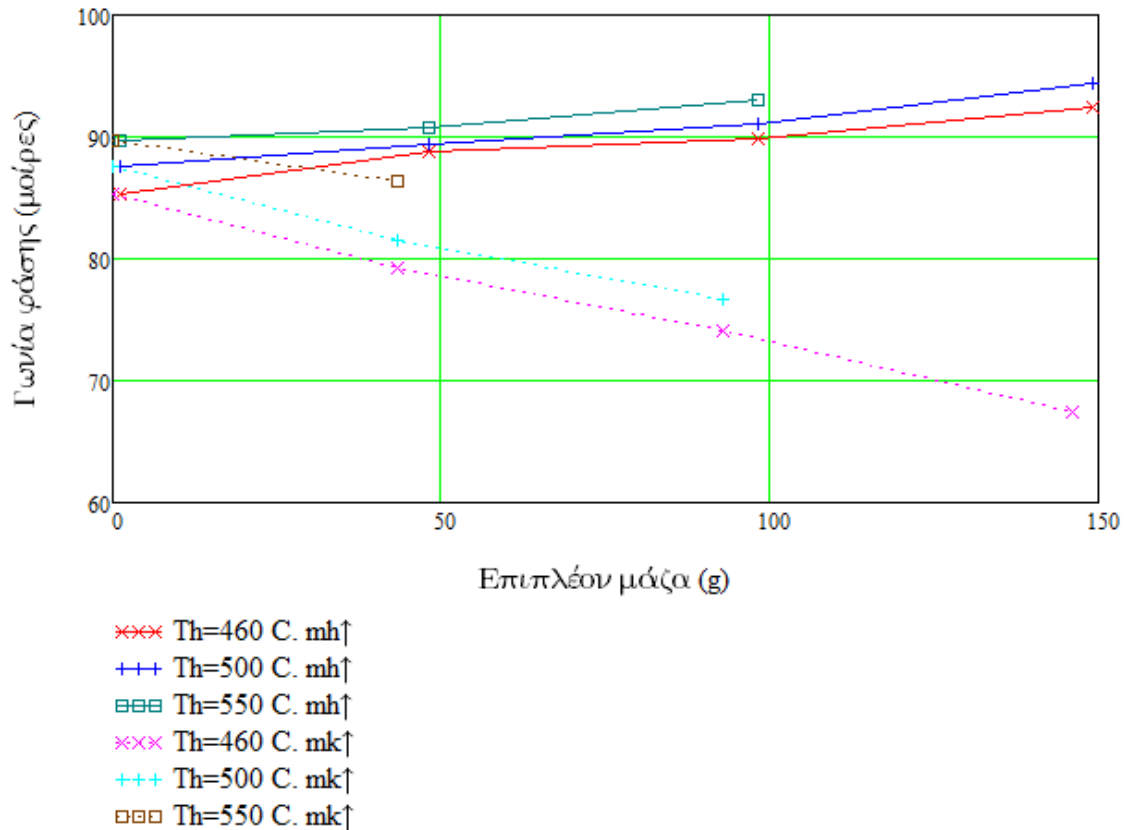
Η αύξηση της μετατόπισης των εκτοπιστών με την αύξηση της θερμοκρασίας μπορεί να εξηγηθεί από το υψηλότερο εύρος πίεσης και της σχετικά αυξημένης παραγωγής μηχανικής ενέργειας. Αναφερόμενοι στα διαγράμματα μπορεί να φανεί ότι η διαδρομή του θερμού εκτοπιστή αυξάνει περισσότερο απ'την διαδρομή του ψυχρού εκτοπιστή, τόσο με την αύξηση της μάζας όσο και με την αύξηση της θερμοκρασίας. Απ' αυτό μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι τυρβώδεις απώλειες πίεσης είναι μεγαλύτερες στο ψυχρό μέρος της μηχανής απ' ότι στο θερμό. Με αυτό το συμπέρασμα, χρησιμοποιώντας την απλοποιημένη εξίσωση για το λόγο των πλατών 3.3 και εξαλείφοντας την επίδραση της συχνότητας μέσω της εξίσωσης 4.4 οδηγούμαστε τελικά στην εξής σχέση:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_k \\ \hat{x}_h \end{bmatrix} \approx \sqrt{-\frac{K_{kh} D_{hh}}{K_{hk} D_{kk}}} \quad (4.5)$$

Υποθέτοντας ότι η σταθερά του ελατηρίου παραμένει αμετάβλητη, προκύπτει ότι η αναλογία των πλατών μειώνεται όταν η σταθερά απόσβεσης D_{kk} αυξάνει περισσότερο από την D_{hh} . Αυτή η διαπίστωση επιβεβαιώνει την παραπάνω υπόθεση, διότι η σταθερά απόσβεση της κίνησης των εκτοπιστών προκαλείται αποκλειστικά από την τυρβώδη απώλεια πίεσης.

Στο σχήμα 4.5 προσδιορίζεται πειραματικά η γωνία φάσης συναρτήσει της πρόσθετης μάζας. Παρατηρείται ότι η γωνία φάσης αυξάνει με την αύξηση της μάζας του θερμού εκτοπιστή ενώ μειώνεται με την αύξηση της μάζας του ψυχρού εκτοπιστή. Αυτή η συμπεριφορά μπορεί να εξηγηθεί με τη χρήση της προσεγγιστικής εξίσωσης 3.4 η οποία γι' αυτό το σκοπό διαμορφώνεται συναρτήσει των μαζών των εκτοπιστών ως εξής:

$$\tan \tilde{\varphi} = \omega_0 \frac{D_{hh} + D_{kk} \frac{m_h}{m_k}}{K_{hh} - K_{kk} \frac{m_h}{m_k}} \quad (4.6)$$



Εικόνα 4.5: Γωνία φάσης ως προς την επιπλέον μάζα.

4.2.1.2. Οι σταθερές ελατηρίων

Για τη σταθερά ελατηρίου μεταξύ περιβλήματος και θερμού εκτοπιστή παρέχονται τέσσερα διαφορετικά ζεύγη ελατηρίων με τιμές 3528,4021,4223 και 4603 N/m. Το πρόσθετο μηχανικό ελατήριο μεταξύ των δύο εκτοπιστών (συνδετικό ελατήριο) παίρνει τιμές 194,240,249,380 N/m. Τα σημεία ισορροπίας των εκτοπιστών μετατοπίζονται κάθε φορά, αλλά διορθώνονται κάθε φορά με την σωστή προένταση των ελατηρίων. Λόγω του ασθενούς συνδετικού ελατηρίου, το οποίο πρέπει να απορροφήσει το βάρος του ψυχρού εκτοπιστή προέκυψαν εδώ διορθώσεις έως και 17 mm, κάτι το οποίο πρέπει να εξεταστεί επιπλέον κατά την επιλογή των ελατηρίων. Για να αποφευχθούν ελατήρια μεγάλου μήκους, τα οποία αντίστοιχα καταλαμβάνουν μεγάλο χώρο και έχουν χαμηλή πλευρική σταθερότητα, χρησιμοποιήθηκε ζεύγος ελατηρίων με διαφορετικό μήκος και ακαμψία. Η δημιουργία λοιπόν μιας συγκεκριμένης τιμής ακαμψίας βρίσκεται υπό περιορισμούς, επειδή αποτελεί άθροισμα δύο επιμέρους σταθερών.

Προκειμένου οι σταθερές των μηχανικών ελατηρίων να ταξινομηθούν και να αξιολογηθούν καλύτερα, πρέπει να εξεταστούν συναρτήσει του αέριου ελατηρίου. Για τον σκοπό αυτό, όλες οι σταθερές συνοψίζονται στον Πίνακα 4.1 . Να σημειωθεί ότι η σταθερά C_G , σύμφωνα με την εξίσωση (2.7a), αναφέρεται μόνο στην επίδραση του αέριου ελατηρίου μεταξύ των δύο εκτοπιστών, ενώ η σταθερά του συνδυαστικού ελατηρίου αναφέρεται ως C_V . Οι σταθερές του αέριου ελατηρίου C_k^*, C_h^*, C_g^* διαμορφώνονται συναρτήσει του όγκου εργασίας και υπολογίζονται για θερμοκρασίες 500,20,0° C από τις εξισώσεις (2.8 c,d) και (2.26).

Πίνακας 4.1: Σταθερές των μηχανικών ελατηρίων και των αέριων ελατηρίων της δοκιμαστικής μηχανής(σε (N/m), για $T_h=500$ °C, $T_w=20$ °C, $T_k=0$ °C)

C_G	C_V	C_h	C_h^*	C_k	C_k^*	C_g^*
181	194	4603	2043	0	1298	3341

Σε αυτό το σημείο αξιολογούνται οι σχέσεις που δίνουν του συνολικούς συντελεστές ακαμψίας συναρτήσει των επιμέρους, προκειμένου να σχολιαστούν ευκολότερα τα αποτελέσματα. Σε αυτή την περίπτωση ισχύει η προϋπόθεση ότι η σταθερά C_k τείνει στο μηδέν και ότι η μάζα των εκτοπιστών είναι κατά πολύ μικρότερη αυτής του περιβλήματος ώστε σε πρώτη φάση να αμελείται η επίδραση της κίνησης του στο αέριο ελατήριο.

$$K_{kk} = C_G + C_V + C_k^* \quad (4.7a)$$

$$K_{hh} = C_G + C_V + C_h - C_h^* \quad (4.7b)$$

$$K_{kh} = -C_G - C_V + C_h^* \quad (4.7c)$$

$$K_{hk} = -C_G - C_V - C_k^* \quad (4.7d)$$

Οι πειραματικές τιμές της συχνότητας ταλάντωσης παρουσιάζουν αυξάνουν ανάλογα με τις σταθερές των ελατηρίων. Αυτή η συμπεριφορά γίνεται εύκολα αντιληπτή από την θεωρία και δεδομένου ότι η εξάρτηση από την θερμοκρασία θέρμανσης είναι σχεδόν μηδαμινή, το διάγραμμα συχνότητα ταλάντωσης-σταθερές ελατηρίων μπορεί να παραλειφθεί. Από την Εξίσωση (4.7) παρατηρούμε ότι αύξηση των C_V και C_h οδηγεί σε αύξηση των ολικών σταθερών K_{kk} και K_{hh} , οι οποίες με την σειρά τους οδηγούν σε αύξηση της συχνότητας ταλάντωσης ω_0 (Εξ. 4.3). Επιπλέον υπάρχει πολύ μεγαλύτερη

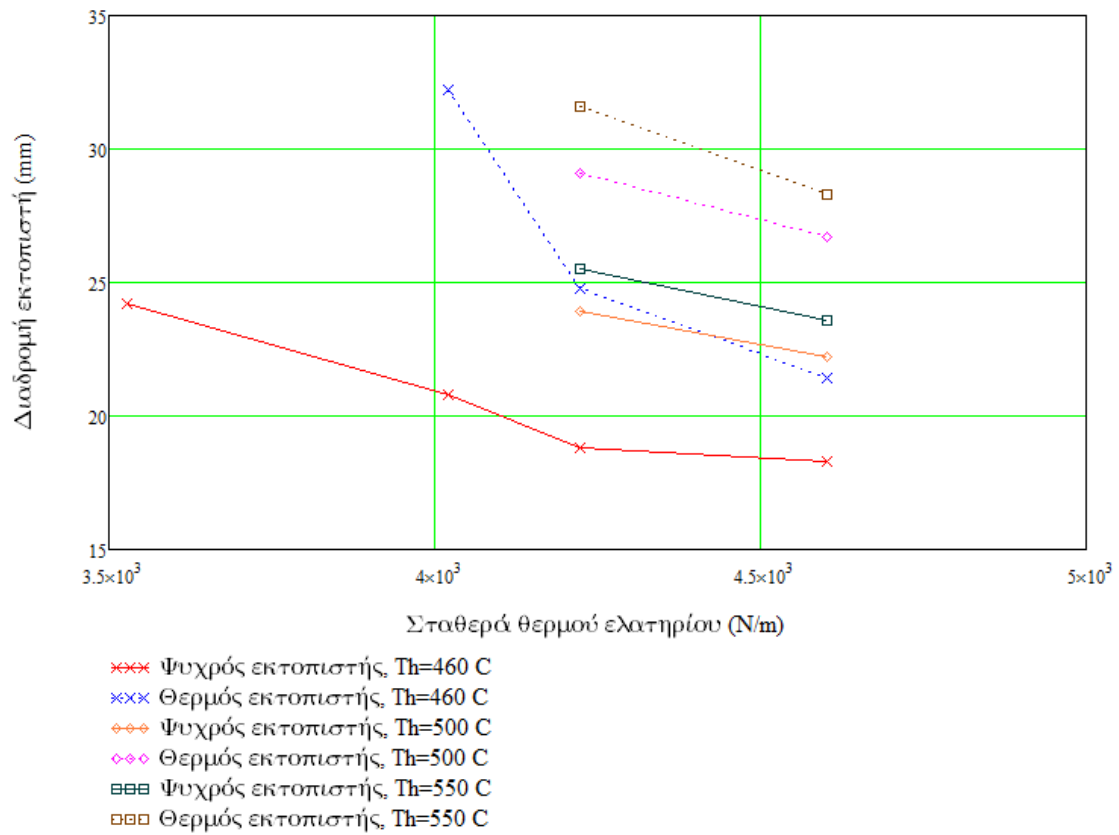
ποικιλία στις τιμές της σταθεράς του συνδετικού ελατηρίου(C_v) σε σύγκριση με εκείνες του θερμού. Αν και συνυπολογίζεται (η C_v) στις ολικές σταθερές K_{kk} και K_{hh} , η επίδραση της στην συχνότητα είναι ελάχιστη. Για $C_v=194$ N/m η συχνότητα μετρήθηκε 10.25 Hz ενώ για 380 N/m 10.45 Hz. Αντίθετα η μεταβολή της σταθεράς του θερμού ελατηρίου οδηγούν σε μία αύξηση της συχνότητας από 9.5 Hz ($C_h=3528$ N/m) σε 10.4 Hz ($C_h=4603$ Hz). Η αιτία αυτής της συμπεριφοράς είναι εμφανή κατά την παρατήρηση των τιμών των σταθερών ελατηρίων στον Πίνακα 4.1. Το θερμό ελατήριο είναι καθοριστικό για το σύστημα λόγω της υψηλής ακαμψίας του, ενώ το συνδετικό ελατήριο μαζί με το αέριο ελατήριο αποτελούν τα πιο αδύναμα ελατήρια.

Γνωρίζοντας την εξάρτηση συχνότητας και πλατών μπορούμε να προβλέψουμε θεωρητικά την συμπεριφορά αυτών. Δεδομένου ότι οι μικτές σταθερές ελατηρίων δεν εξαρτώνται από το θερμό ελατήριο, προκύπτει από την Εξίσωση (4.4) ότι οι σταθερές απόσβεσης και τα πλάτη ταλάντωσης μειώνονται με την αύξηση της ακαμψίας του θερμού ελατηρίου. Τα πειραματικά αποτελέσματα που απεικονίζονται στο Σχήμα 4.6 επιβεβαιώνουν τα άνωθεν. Στο Σχήμα 4.7 απεικονίζεται η διαδρομή του εμβόλου ως προς την σταθερά του συνδετικού ελατηρίου. Εδώ παρατηρείται ότι για θερμοκρασία θερμοαντήρα 460°C παρατηρείται μέγιστη διαδρομή εμβόλου. Λόγω της καμπυλότητας των καμπυλών φαίνεται να υπάρχει ένα μέγιστο, το οποίο όμως για μικρότερες σταθερές ακαμψίας μετατοπίζεται. Για την εξήγηση αυτού του φαινομένου πρέπει να ελεγχθεί ο όρος $-K_{kh}K_{hk}$, ο οποίος δεν είναι πλέον σταθερός. Με την εισαγωγή των ατομικών σταθερών ελατηρίων στην Εξίσωση (4.7) έχει ως αποτέλεσμα την ακόλουθη τετραγωνική εξίσωση:

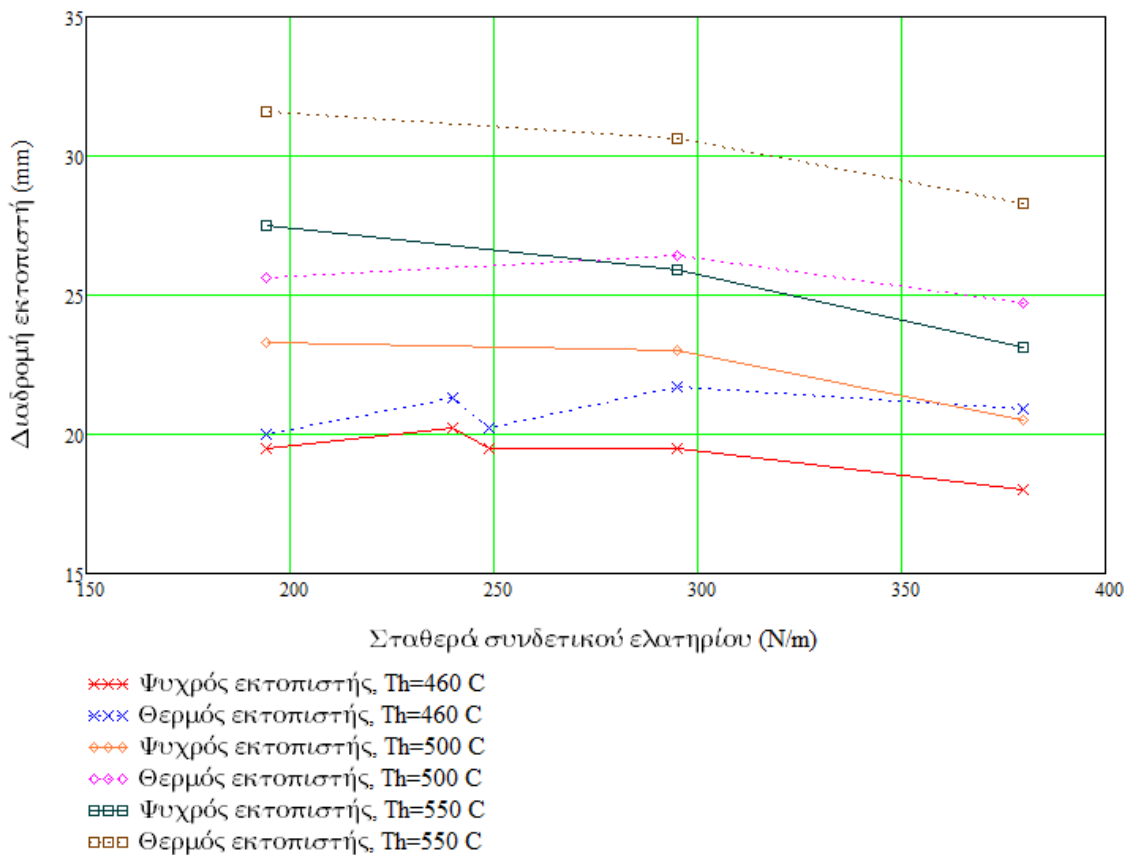
$$-K_{kh}K_{hk} = -C_v^2 - C_v(2C_G + C_k^* - C_h^*) - C_G(C_G + C_k^* - C_h^*) + C_k^*C_h^* \quad (4.8)$$

η οποία εμφανίζει ένα μέγιστο σε σχέση με την σταθερά ελατηρίου C_v στο σημείο $C_{v,max}$:

$$C_{v,max} = \frac{1}{2}(C_h^* - C_k^*) - C_G \quad (4.8a)$$



Εικόνα 4.6: Διαδρομή των εκτοπιστών ως προς την σταθερά του θερμού ελατηρίου.



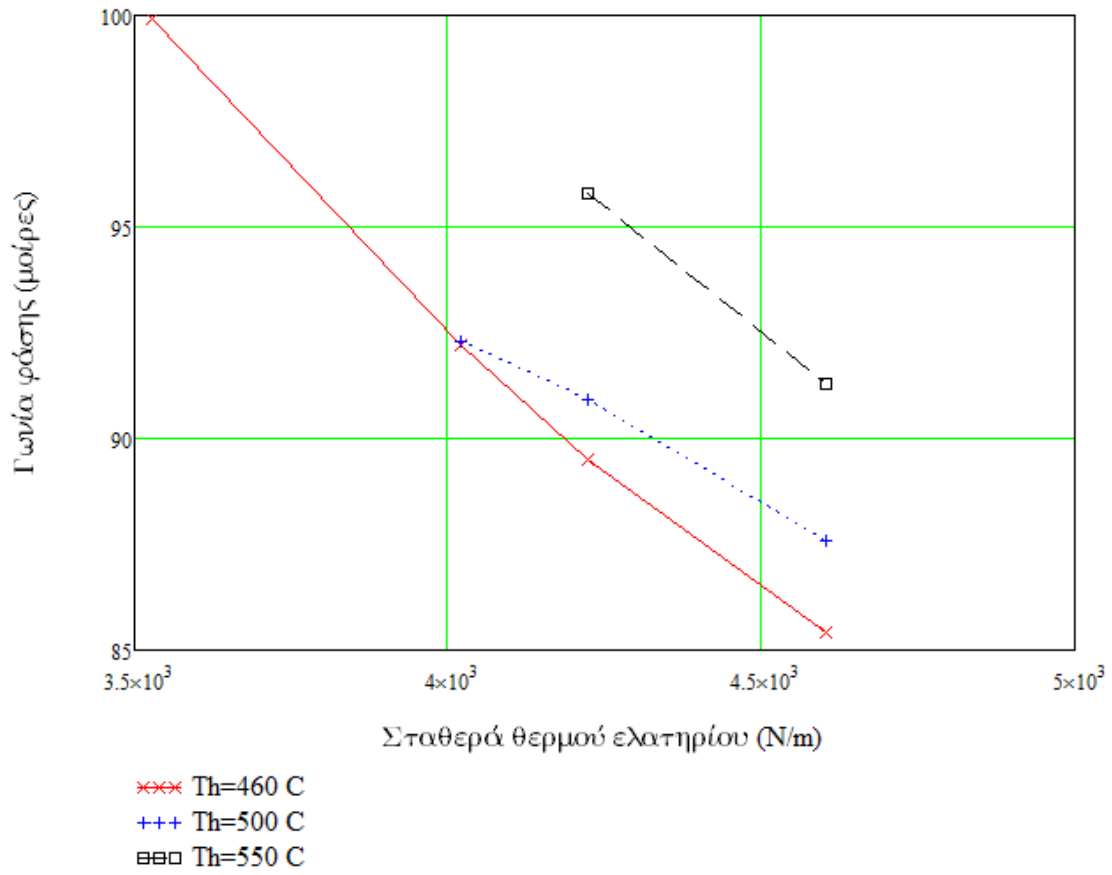
Εικόνα 4.7: Διαδρομή εκτοπιστών ως προς την σταθερά του συνδετικού ελατηρίου.

Έτσι προκύπτει από την Εξ. (4.4) ότι ο όρος $D_{kk}D_{hh}$ και η διαδρομή των εμβόλων παρουσιάζουν εξίσου ένα μέγιστο συναρτήσει της σταθεράς ελατηρίου C_V . Το σημείο που εμφανίζεται το μέγιστο μετατοπίζεται για μικρότερες τιμές από το $C_{V,max}$ καθώς η συνάρτηση ω_0^2 είναι μία γραμμική συνάρτηση του C_V με θετική κλίση. Για την επιβεβαίωση αυτής της θεωρίας και ως τιμή αναφοράς για την κατά προσέγγιση τιμή της $C_{V,max}$ μπορούν να χρησιμεύσουν τα αποτελέσματα της άνωθεν εξίσωσης και τα δεδομένα του Πίνακα 4.1, τα οποία εν τέλει δίνουν την τιμή 191.5 N/m. Ένας ακριβέστερος υπολογισμός αυτής της τιμής δεν θα είχε εδώ και πολύ νόημα, δεδομένου ότι οι ανακρίβειες που οφείλονται στις στρογγυλοποιήσεις και απλουστεύσεις είναι πολύ μεγάλες.

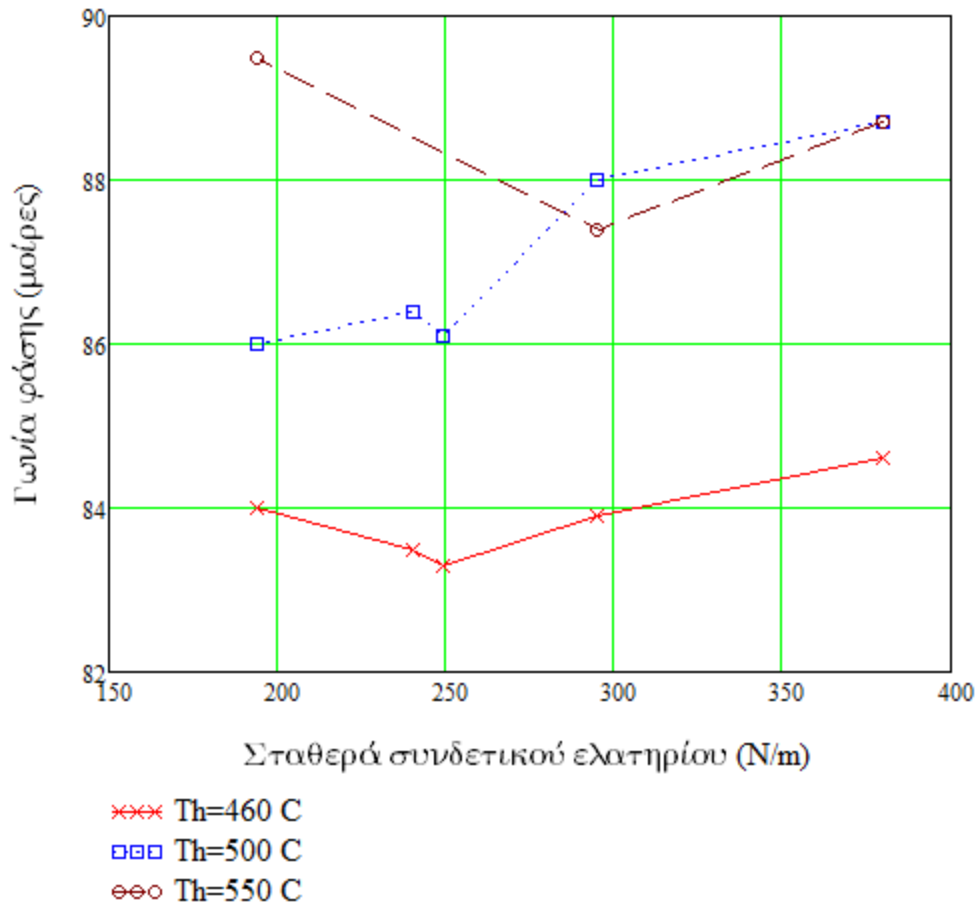
Οι εικόνες 4.6 και 4.7 απεικονίζουν επίσης την επίδραση της σταθεράς του ελατηρίου στον λόγο των διαδρομών των ελατηρίων. Μπορεί να φανεί ότι ο λόγος των διαδρομών μειώνεται με την μείωση της σταθεράς του θερμού ελατηρίου, ενώ αυξάνει με μειούμενη σταθερά συνδετικού ελατηρίου. Αυτή η συμπεριφορά μπορεί να εξηγηθεί με την χρήση της κατά προσέγγιση Εξίσωσης (4.5) για τον λόγο των πλατών. Στην τελευταία ενότητα αποδείχθηκε ότι η σταθερά απόσβεσης D_{kk} αυξάνει ισχυρότερα από την σταθερά D_{hh} με την αύξηση του λόγου των διαδρομών. Δεδομένου ότι οι μικτές σταθερές δεν εξαρτώνται

από την σταθερά C_h , προκύπτει από την Εξίσωση (4.5) ότι ο λόγος πλατών μειώνεται με την μείωση της σταθεράς του θερμού ελατηρίου. Κατά την εξέταση του συνδετικού ελατηρίου πρέπει να ληφθεί υπ' όψιν η επιρροή του στις μικτές σταθερές ελατηρίων. Με την αύξηση της C_v η K_{kh} αυξάνεται ενώ η K_{hk} μειώνεται. Αυτή η επιρροή αντισταθμίζει την αύξηση της σταθεράς απόσβεσης D_{kk} στην εξίσωση (4.5). έτσι ώστε ο λόγος πλατών να αυξάνεται παρά την μείωση της σταθεράς του συνδετικού ελατηρίου.

Στο επόμενο διάγραμμα (Σχήμα 4.8) χαράσσονται τα αποτελέσματα των μετρήσεων της γωνίας φάσης ως προς την σταθερά ελατηρίου C_h . Παρατηρούμε ότι η γωνία φάσης μειώνεται με την αύξηση της τιμής C_h . Αυτή η συμπεριφορά μπορεί εύκολα να ερμηνευθεί από την προσεγγιστική εξίσωση για την γωνία φάσης 4.6. Αυξάνοντας την C_h αυξάνει και η συνολική σταθερά του θερμού εκτοπιστή K_{hh} με αποτέλεσμα να μειώνεται η γωνία φάσης. Η σταθερά του συνδετικού ελατηρίου υπάρχει τόσο στην K_{kk} όσο και στην K_{hh} και η επιρροή της έχει οριστεί στην εξίσωση (4.6) στο παρονομαστή με τον όρο $(1-m_h/m_k)$. Στην πειραματική μηχανή η μάζα του θερμού εκτοπιστή είναι μεγαλύτερη από εκείνη του ψυχρού εκτοπιστή και έτσι η γωνία φάσης θα έπρεπε να αυξάνει για μεγαλύτερη σταθερά του συνδετικού ελατηρίου. Ωστόσο η επίδραση της C_v στις σταθερές ελατηρίων K_{kk} και K_{hh} , έτσι ώστε η μεταβολή της συχνότητας και των σταθερών απόσβεσης στην εξίσωση (4.6) να μπορούν να αμεληθούν. Αυτή η υπόθεση επιβεβαιώνεται από τα αποτελέσματα της μέτρησης (βλ. Σχήμα 4.9). Παρά το γεγονός ότι μπορεί να παρατηρηθεί μία μικρή αύξηση της γωνίας φάσης για 500°C , οι τιμές είναι εντός του εύρους σφάλματος $\pm 1.50^\circ$. Οπότε μπορεί κάποιος να πει ότι η αλλαγή της γωνίας φάσης στην διακύμανση της σταθεράς του συνδετικού ελατηρίου, είναι σχετικά μικρή.



Εικόνα 4.8: Γωνία φάσης ως προς την σταθερά θερμού ελατηρίου.



Εικόνα 4.9: Γωνία φάσης ως προς την σταθερά συνδετικού ελατηρίου.

4.2.1.3 Η διατομή του βάρου εμβόλου.

Για τις δοκιμές τέθηκαν στην διάθεση μας δύο βάρια εμβόλων με διαμέτρους 17 και 18 mm. Κατά την εφαρμογή της μεγαλύτερης διατομής, οι διαδρομές εμβόλων ήταν ήδη αρκετά μεγάλες σε μόλις θερμοκρασία 460° C και έτσι υπήρχε ο κίνδυνος σε μεγαλύτερες θερμοκρασίες τα έμβολα να «έβρισκαν» τα τοιχώματα των κυλίνδρων. Γι' αυτό τον λόγο αυτές οι δοκιμές δεν πραγματοποιήθηκαν. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα μόνο δύο σημεία μέτρησης προκειμένου να διερευνηθεί η επίδραση της διατομής του βάρου εμβόλου στο σύστημα ταλάντωσης. Ωστόσο οι αλλαγές στις μεταβλητές είναι πέρα από τα όρια του σφάλματος έτσι ώστε να είναι δυνατή μια συζήτηση και μια σύγκριση με τη θεωρία. Για τον σκοπό αυτό τα αποτελέσματα μετρήσεων συνοψίζονται στον Πίνακα 4.2.

	$d_{st}=17 \text{ mm}$	$d_{st}=18 \text{ mm}$
Συχνότητα (Hz)	10.39	10.65
Γωνία Φάσης	85.3	93.8
Διαδρομή ψυχρού εμβόλου(mm)	17.0	22.2
Διαδρομή θερμού εμβόλου(mm)	17.0	27.5
Λόγος διαδρομής	1.0	0.807

Πίνακας 4.2: Μεταβολή των κινηματικών μεγεθών συναρτήσει των διατομών της μπιέλας (για $T_h=460^\circ\text{C}$, $T_w=40^\circ\text{C}$, $T_k=0^\circ\text{C}$).

Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η συχνότητα ταλάντωσης αυξάνεται με ένα μεγαλύτερο βάκτρο. Για να εξηγηθεί αυτή η συμπεριφορά, πρέπει να παρατηρηθεί η σταθερά του αέριου ελατηρίου, η οποία αυξάνει ανάλογα με το βάκτρο. Η επιρροή(σταθερά αερίου ελατηρίου) στις συνολικές σταθερές ελατηρίων δίνεται στην εξίσωση (4.7). Μπορεί να φανεί ότι η συνολική σταθερά K_{hh} μειώνεται με αύξηση της διατομής του βάκτρου, ενώ η K_{kk} αυξάνεται, αφού όλες οι σταθερές ελατηρίων είναι θετικά ορισμένες. Ωστόσο προκύπτει ότι με την βοήθεια της προσεγγιστικής εξίσωσης (4.3) δεν έχουμε καμία ένδειξη για την συχνότητα. Εξαρτάται αντ' αυτού από το μέγεθος των επιμέρους σταθερών ελατηρίων και σταθερές απόσβεσης, για το εάν η συχνότητα αυξάνεται ή μειώνεται με την αύξηση της διατομής του βάκτρου.

Η επίδραση από την άλλη στην διαδρομή των εμβόλων είναι πιο σαφής καθώς με την αύξηση της διατομής του βάκτρου αυξάνουν και οι σταθερές K_{hk} και K_{kh} . Γι' αυτό τον λόγο το προϊόν των σταθερών απόσβεσης $D_{kk}D_{hh}$ της εξίσωσης (4.4) αυξάνεται και έτσι προκύπτει ότι η διαδρομή των εμβόλων αυξάνει ανεξάρτητα από την συμπεριφορά την συχνότητας. Η αύξηση τη διαδρομής των εμβόλων μπορεί να εξηγηθεί σαφώς και με διαφορετικό τρόπο. Με ένα μεγαλύτερο βάκτρο αυξάνεται το πλάτος της αλλαγής του συνολικού όγκου της διαδικασίας με αποτέλεσμα να παράγεται περισσότερο μηχανικό έργο και έτσι να καθίστανται εφικτές μεγαλύτερες διαδρομές εμβόλων.

Κατά την εξέταση της προσεγγιστικής εξίσωσης για τον λόγο των πλατών (4.5), η επίδραση της διατομής του βάκτρου ξεχωρίζει στις μικτές σταθερές ελατηρίων. Επομένως η μεγαλύτερη αύξηση της σταθεράς απόσβεσης D_{kk} έναντι της D_{hh} προκαλεί μείωση του λόγου των πλατών για μεγαλύτερες διατομές βάκτρου. Αυτή η συμπεριφορά επιβεβαιώνεται και από τα αποτελέσματα της μέτρησης.

Η πειραματικά προσδιορισμένη αύξηση της γωνίας φάσης μπορεί να κατανοηθεί με βάση την προσεγγιστική εξίσωση (4.6). Εδώ έρχονται οι σταθερές K_{hh} και K_{kk} σε μία διαφορά, ώστε η επιρροή της διατομής του βάκτρου να είναι μοναδική. Παραμελώντας

τις διαφορές στην συχνότητα, προκύπτει μία εξίσωση για την $\tan\varphi$, η οποία αυξάνει στον παρονομαστή ενώ μειώνεται γραμμικά στον παρονομαστή. Έτσι προκύπτει ότι η γωνία φάσης με την αύξηση της διατομής του βάρου αυξάνεται μονότονα.

4.2.1.4 Σύγκριση των πειραματικών αποτελεσμάτων με το γραμμικό μοντέλο υπολογισμού.

Έχοντας σχολιάσει τα μέχρι τώρα αποτελέσματα στην θα γίνει μελετηθεί η ποιοτική επιρροή των εσωτερικών παραμέτρων στο ταλαντευόμενο σύστημα και θα συγκριθεί με τις προβλέψεις του γραμμικού μοντέλου. Γι' αυτό τον σκοπό δημιουργήθηκε ο Πίνακας 4.3. Όπως μπορούμε να δούμε υπάρχουν τέσσερα σημεία όπου διαφέρουν οι πειραματικές μετρήσεις με τα αποτελέσματα του γραμμικού μοντέλου.

	ω_0 πειρ./γρ αμμ.	φ πειρ./γρ αμμ.	X_k πειρ./γραμμ.	X_h πειρ./γραμμ.	X_k/X_h πειρ./γραμμ.
$m_h \uparrow$ (736-886 g)	↓ ↓	↑ ↑	↑ ↑	↑ ↑	↓ ↓
$m_k \uparrow$ (335-485 g)	↓ ↓	↓ ↓	↑ ↑	↑ ↑	↓ ↓
$C_h \uparrow$ (3528-4603N/m)	↑ ↑	↓ ↓	↓ ↓	↓ ↓	↑ ↑
$C_v \uparrow$ (194-380N/m)	↑ ↑	↑ ↑	↓ ↓	↓ ↓	↓ ↓
$A_{St} \uparrow$ (2.27-2.54 cm ²)	↑ ↓	↑ ↑	↑ ↑	↑ ↑	↓ ↓

Πίνακας 4.3: Ποιοτική επίδραση των εσωτερικών παραμέτρων στα κινηματικά μεγέθη (για $T_h=500^\circ\text{C}$, $T_w=40^\circ\text{C}$, $T_k=0^\circ\text{C}$.)

Έτσι η επίδραση της διατομής του βάρου στην συχνότητα ταλάντωσης δεν αποδίδεται σωστά από το γραμμικό μοντέλο υπολογισμού. Οι δυσκολίες στον καθορισμό της εξάρτησης της συχνότητας ταλάντωσης από την διατομή του βάρου διασαφηνίστηκαν στην τελευταία ενότητα. Επιπλέον παρατηρείται μία ελάχιστη τιμή στον λόγο των πλατών για τις διάφορες μάζες των εκτοπιστών. Η ελάχιστη τιμή εντοπίζεται για περίπου 460 gr , αλλά τα αποτελέσματα δείχνουν μία σταθερή πτώση του λόγου των πλατών με αύξηση της μάζας του ψυχρού εκτοπιστή. Επίσης η πειραματικά μέγιστη τιμή της διαδρομή εμβόλου, η οποία εμφανίζεται για τις διάφορες τιμές ακαμψίας του συνδετικού ελατηρίου και για θερμοκρασία 460°C , δεν μπορεί να αναπαραχθεί από το υπολογιστικό μοντέλο. Εδώ οι ίδιες προσεγγίσεις και απλοποιήσεις, στις οποίες όμως βασίζεται το γραμμικό μοντέλο, αποτρέπουν αναλυτικές προβλέψεις. Συνολικά ωστόσο υπολογίζεται σωστά από το γραμμικό μοντέλο η ποιοτική εξάρτηση των κινηματικών μεγεθών από τις

εσωτερικές παραμέτρους. Κατά την εφαρμογή του διαφορικού μοντέλου όλα τα αποτελέσματα αποδίδονται σωστά.

Στο πίνακα 4.4 που ακολουθεί παρουσιάζονται οι απόλυτες τιμές των κινηματικών μεγεθών. Οι οριακές συνθήκες για τις πειραματικές τιμές αντιστοιχούν στις συνθήκες σχεδιασμού, δηλαδή θερμοκρασία θερμοαντήρα 500°C και κύκλους θερμοκρασίας 20°C και 0°C . Τα αποτελέσματα του υπολογισμού μπορούν να αλειφθούν απευθείας από τον πίνακα 5.4. Όπως μπορούμε να δούμε η διαφορά μεταξύ μετρούμενης και υπολογισμένης συχνότητας είναι ελάχιστη. Ήταν κάτι το αναμενόμενο καθώς η συχνότητα εξαρτάται ουσιαστικά από τις ιδιοσυχνότητες των μαζών των εκτοπιστών και τις σταθερές ακαμψίας των ελατηρίων, οι οποίες μπορούν να υπολογιστούν με σχετικά μεγάλη ακρίβεια. Οι μεγαλύτερες αποκλίσεις εμφανίζονται στις διαδρομές των εμβόλων, το οποίο είναι επίσης κατανοητό, διότι λόγω των γραμμικοποιημένων εξισώσεων πίεσης και απώλειας πίεσης οι δυνάμεις του αερίου και δυνάμεις απόσβεσης μπορούν να υπολογιστούν μόνο κατά προσέγγιση.

Τελικά μπορούμε να κρατήσουμε ότι το γραμμικό μοντέλο αναπαράγει με επαρκή ακρίβεια τόσο τις ποιοτικές επιδράσεις των μεμονωμένων παραμέτρων όσο και τις απόλυτες τιμές των κινηματικών μεγεθών. Πρέπει να υπενθυμίσουμε ότι το συγκεκριμένο μοντέλο παρέχει κλειστής μορφής λύσεις για τη συχνότητα, τον λόγο πλατών και τη γωνία φάσης και ως εκ τούτου καθίσταται δυνατόν ο υπολογισμός των κινηματικών μεγεθών, μιας πειραματικής μηχανής ελευθέρων εμβόλων, άκοπα σε σύγκριση με το διαφορικό μοντέλο. Για τον λόγο αυτό αποτελεί ένα πολύ καλό εργαλείο για τα αρχικά στάδια σχεδιασμού μιας τέτοιας μηχανής.

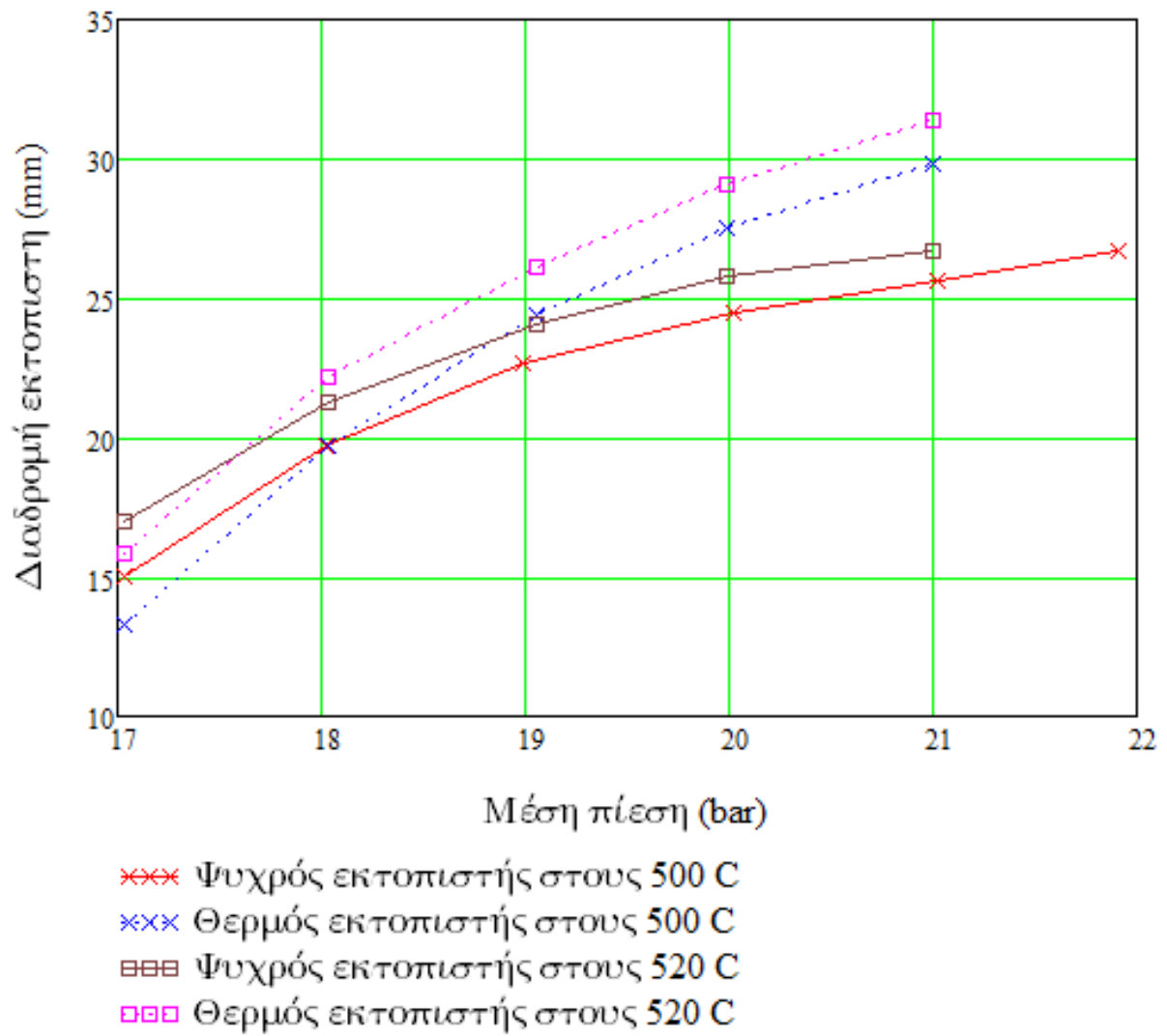
4.2.2 Οι εξωτερικοί παράμετροι.

Στη ακόλουθη ενότητα θα διερευνηθεί η απόδοση της μηχανής συναρτήσει των εξωτερικών παραμέτρων- πίεση, θερμοκρασία θέρμανσης, θερμοού και ψυχρού κύκλου. Γι' αυτό το σκοπό πέρα από την επίδραση των παραμέτρων στο ταλαντευόμενο σύστημα, θα σχολιασθούν και τα θερμικά μεγέθη καθώς και ο βαθμός απόδοσης, δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση στα θερμικά μεγέθη. Η ρύθμιση των εσωτερικών παραμέτρων αντιστοιχεί στα δεδομένα σχεδιασμού του Πίνακα 5.2. Όλα τα πειράματα έγιναν για θερμοκρασίες θερμοαντήρα 500°C και 520°C ενώ τα υπόλοιπα μεγέθη παρέμειναν σταθερά με την μέση πίεση να είναι 20 bar, η θερμοκρασία του θερμοού κύκλου 40°C και του ψυχρού 0°C .

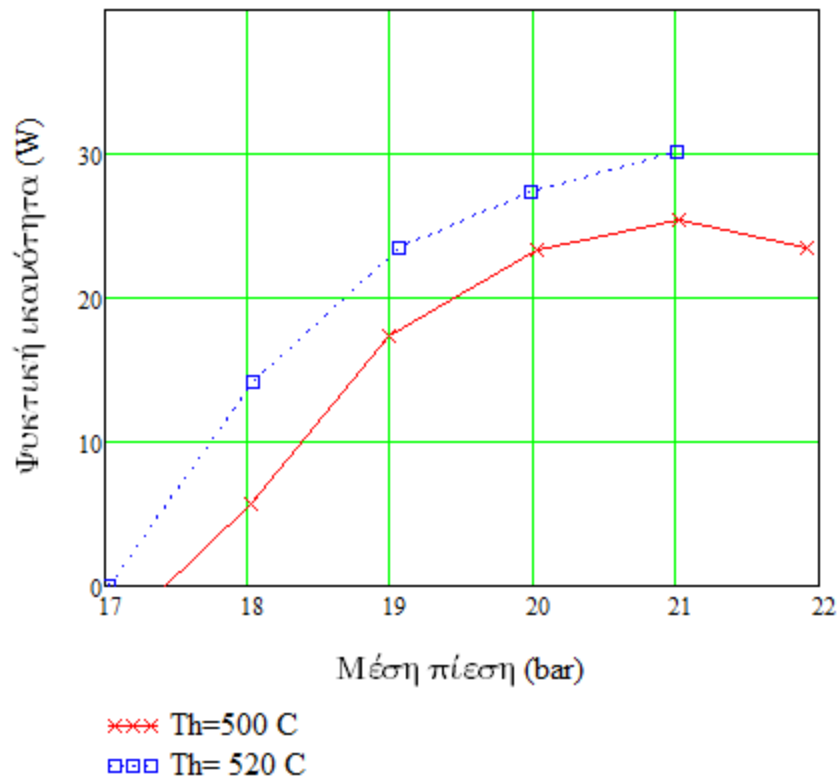
4.2.2.1 Η πίεση

Η πίεση παίρνει τιμές 17-22 bar με βήμα 1 bar. Μία αλλαγή στην πίεση δρα κατά τον ίδιο τρόπο όπως η αλλαγή της διαμέτρου του βάρικου του εμβόλου. Απ' αυτό προκύπτει ότι η συχνότητα ταλάντωσης, η διαδρομή των εμβόλων και η γωνία φάσης αυξάνουν με την αύξηση της πίεσης, ενώ ο λόγος των πλάτων μειώνεται. Η συμπεριφορά της συχνότητας μπορεί να εξηγηθεί θεωρητικά από τις προσεγγιστικές εξισώσεις όπως στην ενότητα 4.2.1.3. Κατά την παρατήρηση των αποτελεσμάτων των δοκιμών παρατηρούμε ότι η αύξηση της διαδρομής των εμβόλων μειώνεται με την αύξηση της πίεσης (Εικόνα 4.10). Η αίτια γι' αυτή την συμπεριφορά είναι η εξάρτηση της πυκνότητας του αερίου από την πίεση. Μέσω αυτής της εξάρτησης αυξάνονται οι τυρβώδεις απώλειες με την αύξηση της πίεσης και η αύξηση των διαδρομών των εμβόλων είναι λιγότερη απ' ό,τι θα ήταν κανονικά λόγω της αυξημένης παραγωγής μηχανικού έργου.

Εξετάζοντας την σχέση μεταξύ ικανότητα ψύξης και κινηματικών μεγεθών, μπορεί να φανεί ότι η διαδρομή των εμβόλων παίζει τον σημαντικότερο ρόλο. Μία αύξηση της διαδρομής των εμβόλων προκαλεί έναν αυξημένο όγκο παλμού οδηγώντας σε αύξηση της ανταλλασσόμενης θερμότητας, η οποία είναι ανάλογη του όγκου του παλμού αν αμελήσουμε κάποιες δευτερεύοντες απώλειες. Την ίδια στιγμή μειώνεται ο νεκρός όγκος, κάτι που οδηγεί σε περαιτέρω αύξηση της ανταλλασσόμενης θερμότητας λόγω της αυξημένης διακύμανσης της πίεσης. Η ικανότητα ψύξης είναι επίσης ανάλογη της συχνότητας ταλάντωσης. Τα αποτελέσματα όμως της προηγούμενης ενότητας ξεκαθάρισαν ότι η συχνότητα ταλάντωσης μεταβάλλεται ελάχιστα και έτσι η επιδράση της στην ψυκτική ικανότητα αμελείται σε σύγκριση με την διαδρομή των εμβόλων. Το ίδιο ισχύει και με την γωνία φάσης, όσο βρίσκεται μεταξύ 80-100°, κάτι το οποίο συμβαίνει σε όλες τις δοκιμές μας. Η επιρροή της συμπεριφοράς των διαδρομών στις πειραματικές προσδιορισμένες τιμές δεν έχει ιδιαίτερη σημασία, επειδή η πυκνότητα ισχύος έχει μία μέγιστη τιμή όπως έχει αποδειχθεί από τον Thomas, Kuhl και Schulz.

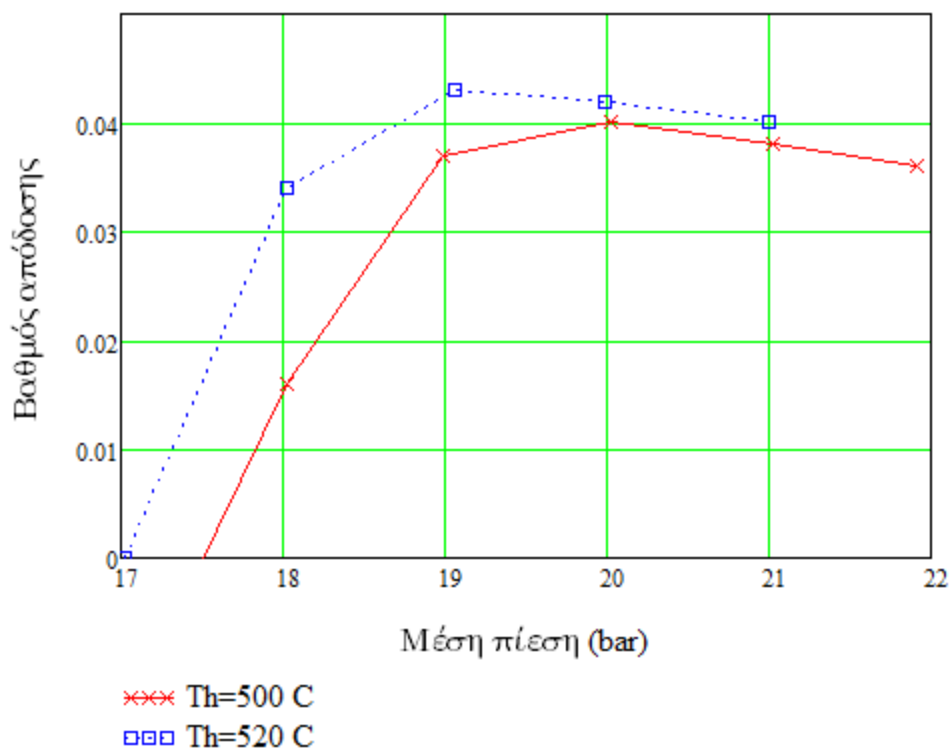


Εικόνα 4.10: Η διαδρομή των εκτοπιστών ως προς την μέση πίεση.



Εικόνα 4.11: Η ψυκτική ικανότητα ως προς την μέση πίεση.

Η άμεση σχέση μεταξύ της διαδρομής των εμβόλων και της ψυκτικής ικανότητας επιβεβαιώνεται και πειραματικά, όπως δείχνει μία σύγκριση μεταξύ των σχημάτων 4.10 και 4.11. Για θερμοκρασία θέρμανσης 500°C η ψυκτική ικανότητα εμφανίζει ένα μέγιστο για περίπου 21 bar. Αυτή η συμπεριφορά πρέπει να εξηγηθεί, γιατί πέρα από την εν λόγω εξάρτηση της ψυκτικής ικανότητας από την διαδρομή των εμβόλων προκύπτουν και αυξημένες απώλειες στους αναγεννητές, λόγω της αύξησης της πίεσης που οδηγεί σε μεγαλύτερη πυκνότητα του αέριου εργασίας. Για τον ίδιο λόγο μειώνεται και ο βαθμός απόδοσης για μεγαλύτερες πιέσεις (Σχήμα 4.12). Έχει ήδη διαπιστωθεί σε αυτό το σημείο, ότι οι απώλειες στους αναγεννητές είναι υπερβολικά υψηλές στην δοκιμαστική μηχανή και μεταξύ άλλων οι μετρούμενες τιμές ψυκτικής ικανότητας και βαθμού απόδοσης είναι σημαντικά χαμηλότερες απ' αυτές που υπολογίζονται. Μια εκτενέστερη συζήτηση αυτών των απωλειών γίνεται στην ενότητα 4.2.2.4.



Εικόνα 4.12: Ο βαθμός απόδοσης ως προς την μέση πίεση.

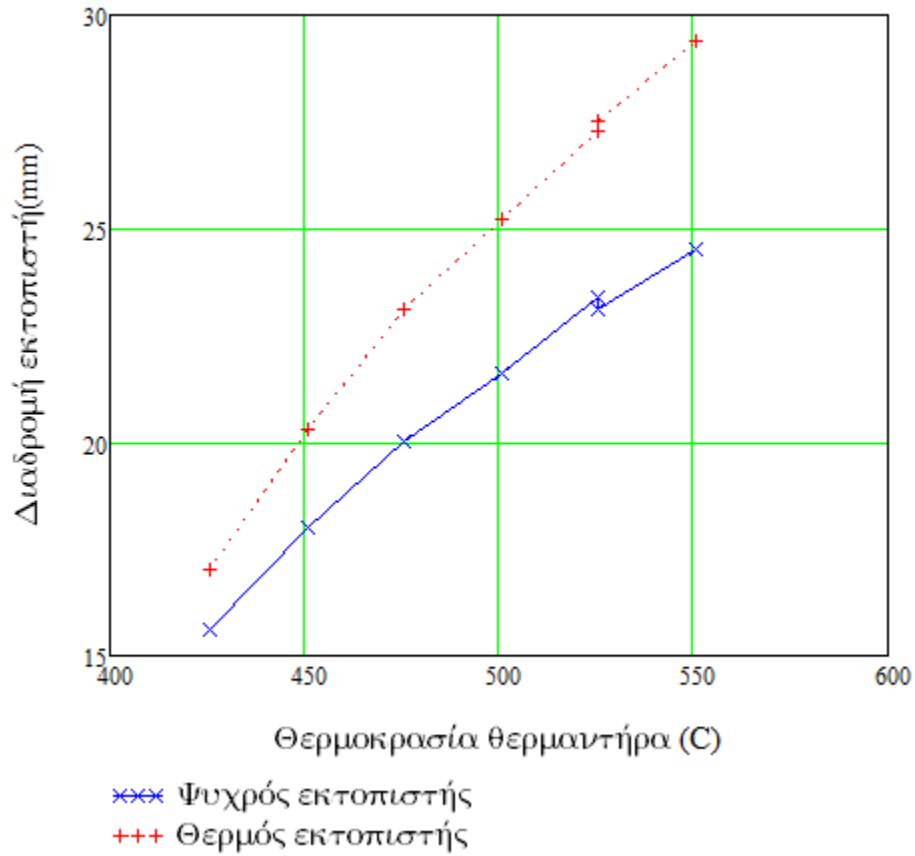
Με βάση τα αποτελέσματα των δοκιμών συμπεραίνουμε ότι δεν ενδείκνυται η εφαρμογή της πίεσης για την ρύθμιση της ψυκτικής ικανότητας, διότι πέρα από την δύσκολη τεχνική εφαρμογή, η σχέση μεταξύ τους είναι μη-γραμμική.

4.2.2.2 Η θερμοκρασία θέρμανσης.

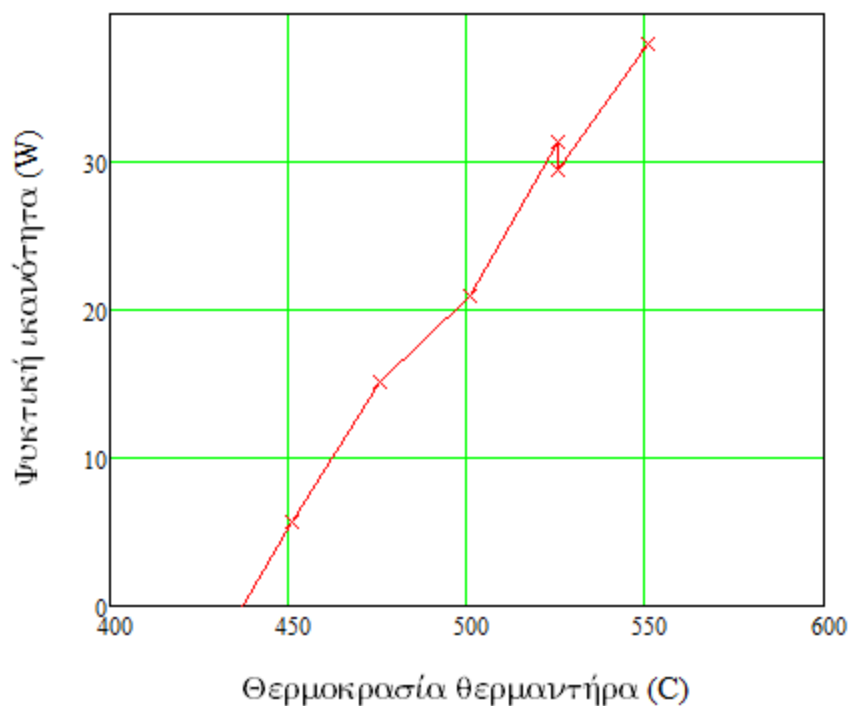
Η θερμοκρασία θέρμανσης για τις δοκιμές κυμάνθηκε μεταξύ 425 και 550°C.

Μέσω της αύξησης του θερμαντήρα αυξάνεται η θερμική συμπίεση και έτσι και το πλάτος της πίεσης. Σαν αποτέλεσμα των άνωθεν έχουμε αύξηση του μηχανικού έργου και της διαδρομής των εμβόλων (σχήμα 4.13). Παρατηρώντας την κατά προσέγγιση εξίσωση 4.4 καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα, γιατί με αύξηση της θερμοκρασίας του θερμαντήρα αυξάνεται η σταθερά ελατηρίου C_h^* και έτσι μειώνεται η K_{kh} . Οι δοκιμές δείχνουν επιπλέον ότι η συχνότητα αυξάνεται ελάχιστα με την αύξηση της θερμοκρασίας (0.1 Hz στο συγκεκριμένο εύρος τιμών), ενώ ο λόγος των πλατών μειώνεται και η γωνία

φάσης μειώνεται. Ωστόσο αυτό το φαινόμενο δεν μπορεί να αναπαραχθεί με την βοήθεια των απλοποιημένων εξισώσεων, διότι η επιρροή της θερμοκρασίας του θερμαντήρα στο ταλαντευόμενο σύστημα, μέσω της σταθεράς C_h^* είναι συνολικά χαμηλή.

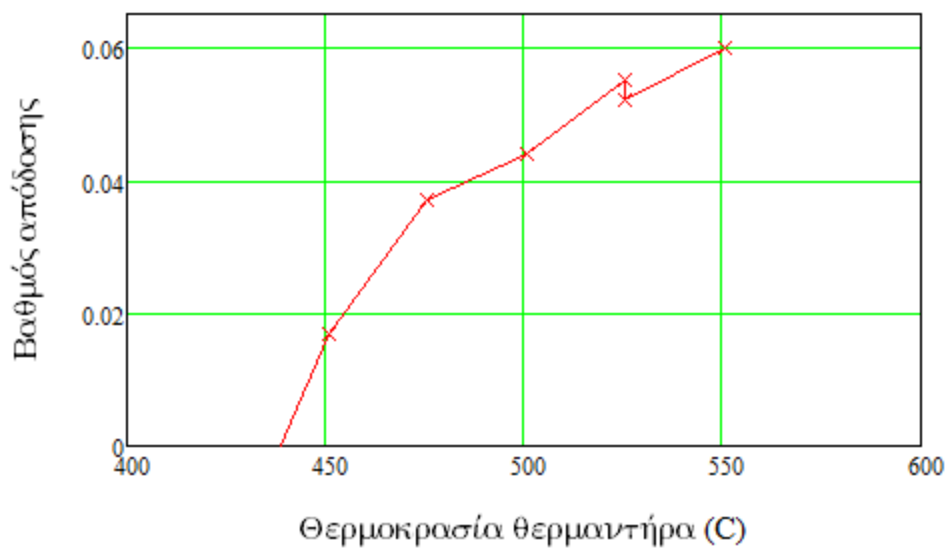


Εικόνα 4.13: Η διαδρομή των εκτοπιστών ως προς την θερμοκρασία θερμαντήρα.

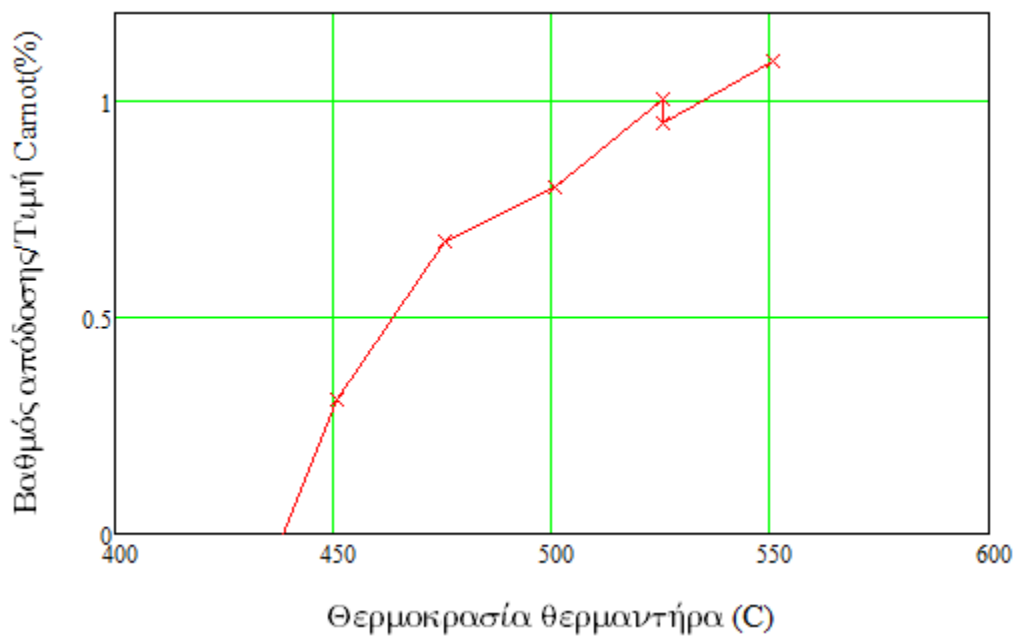


Εικόνα 4.14: Η ψυκτική ικανότητα ως προς την θερμοκρασία του θερμαντήρα.

Η ψυκτική ικανότητα αυξάνει γραμμικά με την αύξηση της θερμοκρασίας λόγω της σχέσης της με το μήκος των διαδρομών των εμβόλων, όπως παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα. Οι εικόνες 4.15 και 4.16 ότι ο βαθμός απόδοσης και ο λόγος βαθμού απόδοσης και τιμής Carnot επίσης αυξάνουν με την αύξηση της θερμοκρασίας του θερμαντήρα. Αυτό ήταν απροσδόκητο, διότι στις μηχανικά κινούμενες μηχανές μπορεί ο βαθμός απόδοσης να αυξάνεται ελάχιστα με την αύξηση της θερμοκρασίας του θερμαντήρα, ωστόσο ο λόγος βαθμού απόδοσης/τιμή Carnot μειώνεται. Αυτό μπορεί να εξηγηθεί μέσω της ισχυρής εξάρτησης της ψυκτικής ικανότητας από την θερμοκρασία του θερμαντήρα λόγω του μήκους των διαδρομών των εμβόλων. Γι' αυτόν τον λόγο η θερμοκρασία του θερμαντήρα πρέπει να ρυθμιστεί σε τέτοιο σημείο ώστε να επιτυγχάνονται οι διαδρομές εμβόλων σχεδιασμού, διαφορετικά δεν μειώνεται σημαντικά μόνον η ψυκτική ικανότητα αλλά και ο βαθμός απόδοσης της μηχανής. Αυτό το αποτέλεσμα προκαλεί σε μια μηχανή Vuilleumier ελευθέρων εμβόλων να έχει δυσμενές συνθήκες μερικού φορτίου, με την προϋπόθεση ότι ελέγχεται από την θερμοκρασία του θερμαντήρα. Αυτό είναι ένα γενικό μειονέκτημα των μηχανών ελευθέρων εμβόλων έναντι των μηχανικά κινούμενων μηχανών, των οποίων η απόδοση ρυθμίζεται από την ταχύτητα περιστροφής.



Εικόνα 4.15: Ο βαθμός απόδοσης ως προς την θερμοκρασία του θερμαντήρα.

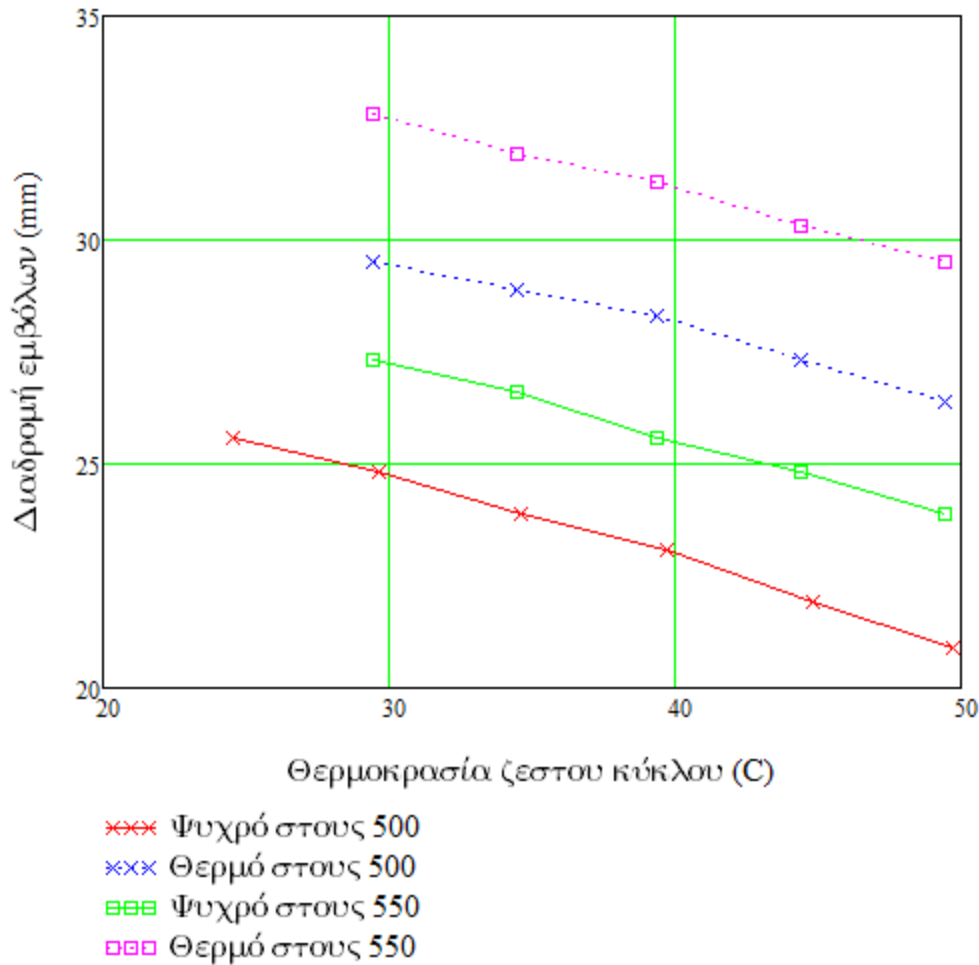


Εικόνα 4.16: Βαθμός απόδοσης/τιμή Carnot ως προς την θερμοκρασία θερμαντήρα.

4.2.2.3 Οι θερμοκρασίες των κύκλων.

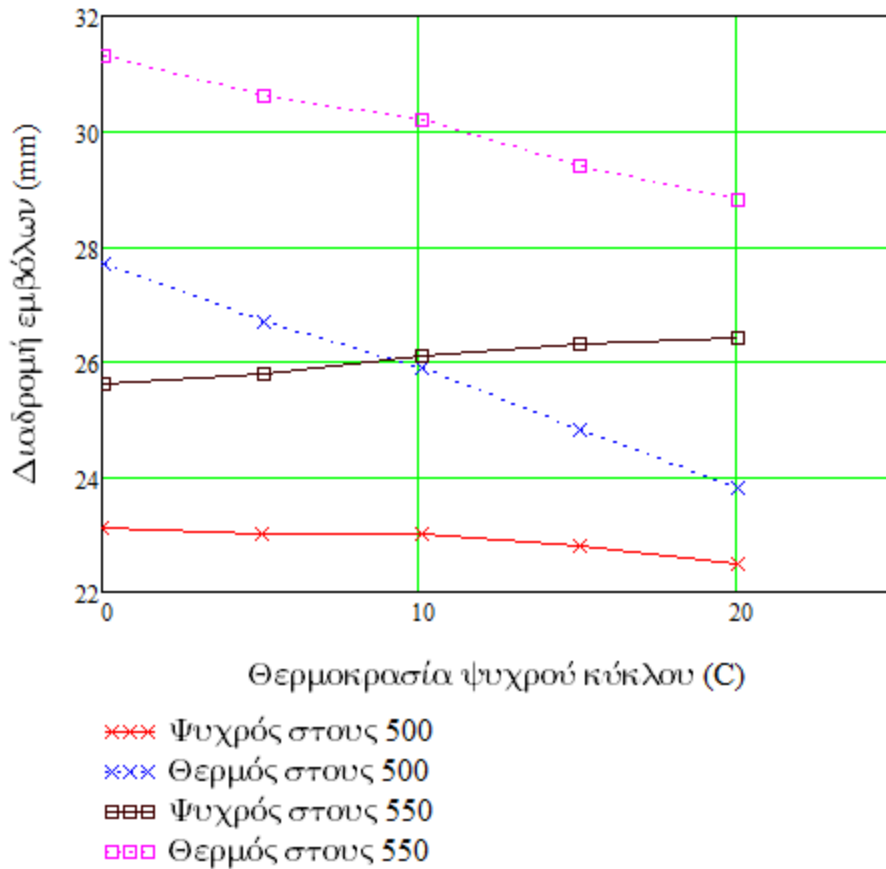
Στην ψύξη και στον κλιματισμό η συζήτηση επικεντρώνεται περισσότερο στην διαφορά μεταξύ των θερμοκρασιών ψυχρού και ζεστού κύκλου και εξετάζονται λιγότερο αυτά τα επίπεδα θερμοκρασιών μεμονωμένα, καθώς δεν έχει ιδιαίτερο νόημα. Κατά την διάρκεια των δοκιμών η θερμοκρασία του ζεστού κύκλου παίρνει τιμές μεταξύ 20-50°C ενώ η θερμοκρασία του ψυχρού κύκλου παραμένει σταθερή στους 0°C. Επιπλέον διεξάχθηκε μία σειρά δοκιμών όπου η θερμοκρασία του ψυχρού κύκλου κυμαίνονταν μεταξύ 0-20°C και η θερμοκρασία του ζεστού κύκλου παρέμενε σταθερή στους 40°C.

Η επίδραση της θερμοκρασίας των κύκλων στο ταλαντευόμενο σύστημα έχει ως εξής: η αύξηση της θερμοκρασίας του ζεστού κύκλου οδηγεί σε μία αύξηση της θερμικής συμπίεσης στο ψυχρό μέρος της μηχανής, ενώ μειώνεται η θερμική συμπίεση στο θερμό μέρος. Κατά αυτόν τον τρόπο αυξάνονται οι δύο σταθερές ελατηρίων K_{kk} και K_{hh} και η συχνότητα ταλάντωσης ω_0 (Εξ. 4.3 και 4.7). Με την αύξηση της ζεστής θερμοκρασίας μειώνεται η διαδρομή των εμβόλων, όπως και ο λόγος τους (Σχήμα 4.17). Η συμπεριφορά αυτή αιτιολογείται με την εξερεύνηση των μικτών σταθερών των ελατηρίων K_{kh} και K_{hk} . Με την αύξηση της ζεστής θερμοκρασίας ο όρος από K_{kh} μειώνεται, ενώ ο $-K_{hk}$ αυξάνεται με αποτέλεσμα το προϊόν του όρου $-K_{kh}K_{hk}$ να παραμένει σταθερό. Η διαδρομή των εμβόλων μειώνεται και η συχνότητα αυξάνεται (Εξ. (4.4)). Παρόλο που ο λόγος των αποσβέσεων D_{kk}/D_{hh} μειώνεται, αντισταθμίζεται από την μείωση του K_{kh} και την ταυτόχρονη αύξηση του $-K_{hk}$ και έτσι η αναλογία πλατών όπως φαίνεται στην εξίσωση (4.5) μειώνεται με την αύξηση της ζεστής θερμοκρασίας. Η συμπεριφορά της γωνίας φάσης δεν μπορεί να προβλεφθεί με σαφήνεια από την εξίσωση (4.6), δεδομένου ότι οι επιμέρους επιδράσεις είναι αντίθετες. Τα πειραματικά αποτελέσματα δείχνουν μία μικρή αύξηση της γωνίας φάσης σε υψηλές ζεστές θερμοκρασίες.



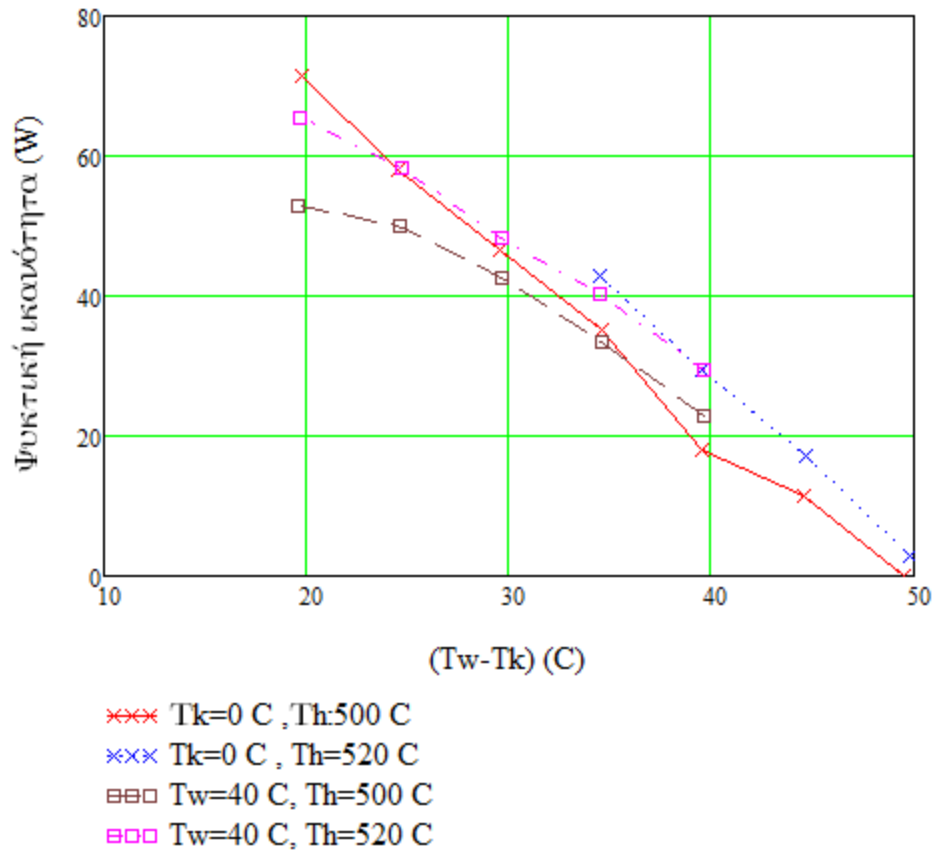
Εικόνα 4.17: Διαδρομή των εκτοπιστών ως προς την θερμοκρασία του ζεστού κύκλου.

Η αύξηση της θερμοκρασίας του ψυχρού κύκλου οδηγεί σε μικρότερο εύρος πίεσης, επειδή μειώνεται η θερμική συμπίεση στο ψυχρό μέρος της μηχανής. Η σχετική μείωση του παραγόμενου μηχανικού έργου οδηγεί και στην μείωση των διαδρομών των εμβόλων. Αυτή η συμπεριφορά επαληθεύεται από τα πειραματικά αποτελέσματα, κατά τα οποία η διαδρομή του ψυχρού εμβόλου μειώνεται ελάχιστα και εξαρτάται κατά κύριο λόγο από τη θερμοκρασία θέρμανσης (Σχήμα 18). Κατά τις δοκιμές μπορεί να διαπιστωθεί μία μικρή αύξηση της διαδρομής του ψυχρού εμβόλου για θερμοκρασία θέρμανσης 550°C. Το φαινόμενο αυτό προκαλείται από την μειωμένη σταθερά του αερίου ελατηρίου C_k^* , η οποία οδηγεί σε αύξηση του λόγου των πλατών. Ως εκ τούτου, με την αύξηση της ψυχρής θερμοκρασίας μειώνεται η σταθερά ελατηρίου K_{kk} καθώς και η συχνότητα ταλάντωσης, όπως και η γωνία φάσης.



Εικόνα 4.18: Η διαδρομή των εμβόλων ως προς την θερμοκρασία του ψυχρού κύκλου.

Το Σχήμα 4.19 δείχνει την επίδραση της διαφοράς θερμοκρασίας στην ψυκτική ικανότητα. Με την αύξηση της διαφοράς της θερμοκρασίας μειώνεται η ψυκτική ικανότητα. Αυτό το φαινόμενο εξηγείται μέσω των αυξημένων απωλειών στην θερμική αγωγιμότητα και αναγεννήστε. Επίσης πρέπει να ληφθεί υπ' όψων και η εξάρτηση από την διαδρομή των εμβόλων. Εδώ μπορούμε να δούμε ότι με αύξηση της ζεστής θερμοκρασίας, μειώνονται οι διαδρομές των εμβόλων και έτσι ενισχύεται η επαγόμενη από πτώση ψυκτική ικανότητα. Όμως το αντίθετο προκαλείται με την μείωση της ψυχρής θερμοκρασίας, διότι λόγω της αύξησης των απωλειών στους αναγεννητές και στην θερμική αγωγιμότητα ακολουθεί αύξηση των διαδρομών των εμβόλων.

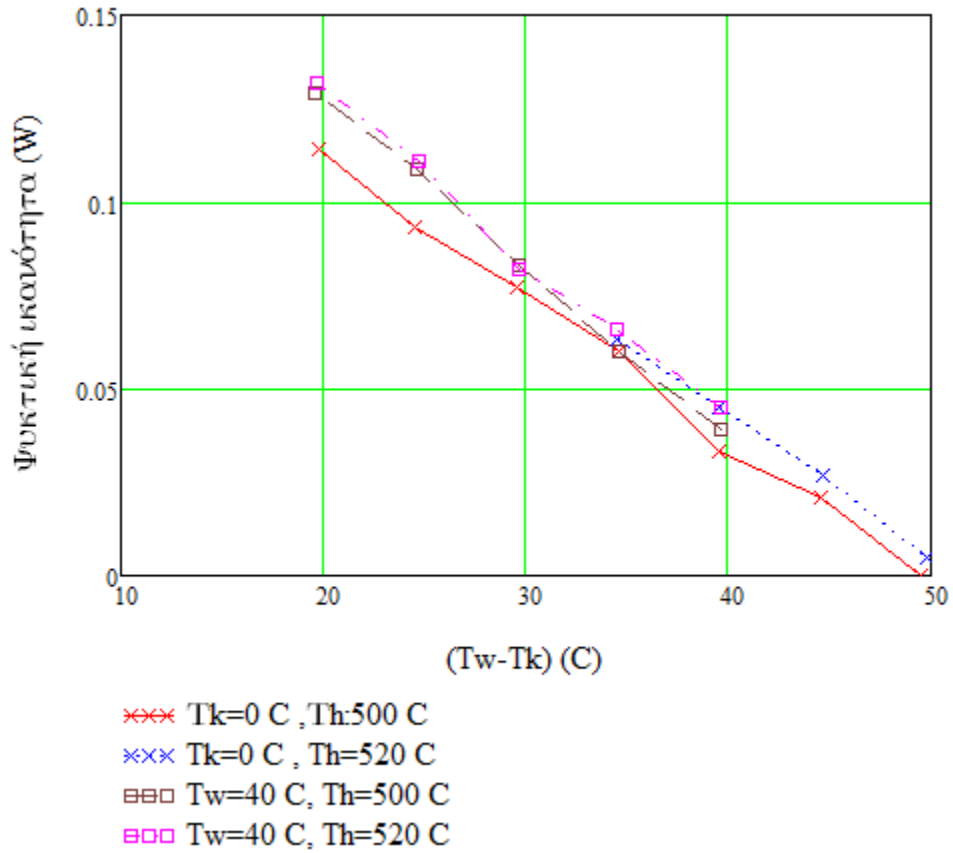


Εικόνα 4.19: Η ψυκτική ικανότητα ως προς την διαφορά θερμοκρασία ζεστού- ψυχρού κύκλου.

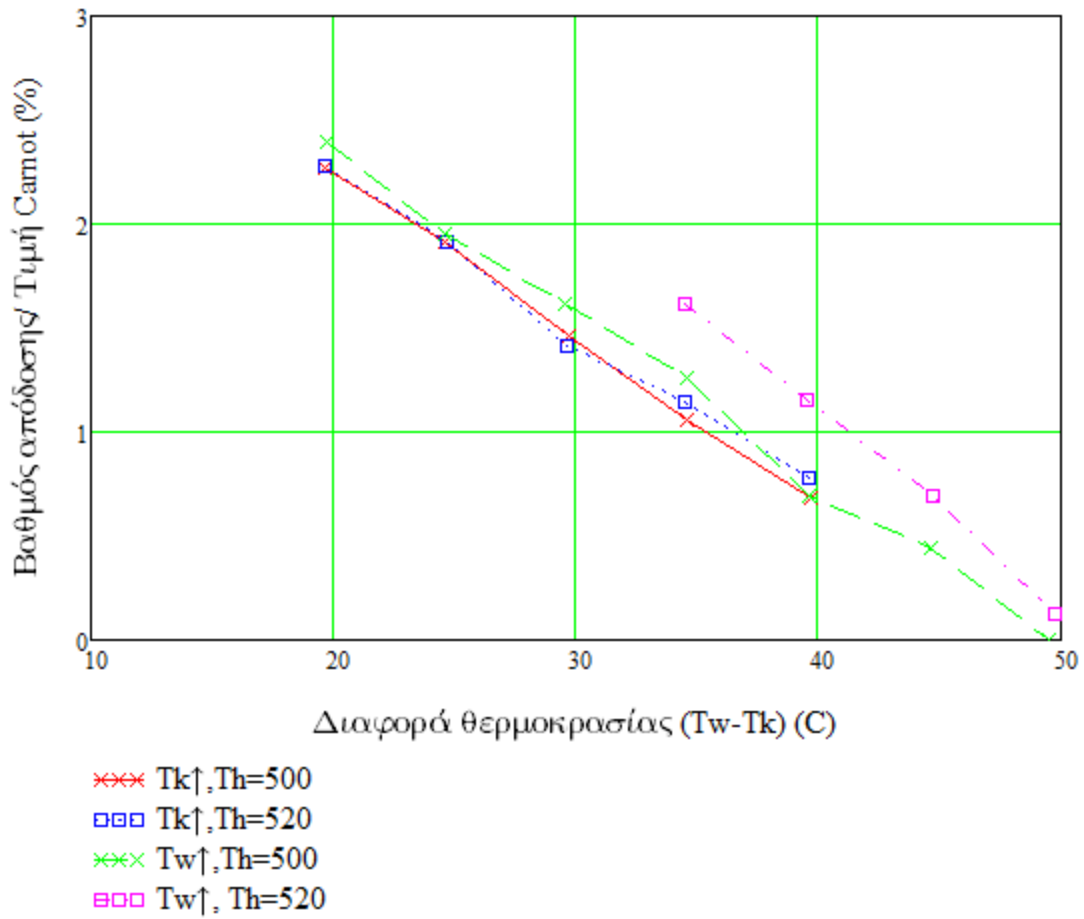
Η εικόνα 4.19 επιβεβαιώνει αυτό το φαινόμενο και επίσης μπορούμε να διακρίνουμε η αύξηση ή μείωση της ψυκτικής ικανότητας είναι ηπιότερη συναρτήσε της θερμοκρασίας του ψυχρού κύκλου. Το φαινόμενο αυτό αναπαράγεται κακώς από τα πειραματικά αποτελέσματα, λόγω των μεγάλων απωλειών στους αναγεννητές. Έτσι δεν είναι ξεκάθαρο αν όντως σε μια μηχανή ελευθέρων εμβόλων η ψυκτική ικανότητα εξαρτάται ελάχιστα από την θερμοκρασία του ψυχρού κύκλου.

Στα Σχήματα 4.20 και 4.21 παρουσιάζεται ο βαθμός απόδοσης και η τιμή Carnot συναρτήσε της διαφοράς θερμοκρασίας. Η αρνητική κλίση στο Σχήμα 4.20 προκαλείται λόγω των αυξημένων απωλειών στην θερμική αγωγιμότητα και στους αναγεννητές (όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως). Ο βαθμός απόδοσης συναρτήσε της θερμοκρασίας του ζεστού κύκλου είναι γενικά μικρότερος, διότι σε αυτή την περίπτωση η θερμοκρασία του ψυχρού κύκλου είναι σταθερή στους 0°C, κάτι το οποίο οδηγεί σε αυξημένες απώλειες μόνωσης. Η καμπύλη της τιμή Carnot παρουσιάζει ένα μέγιστο για διαφορά θερμοκρασίας περίπου 25°C . Αυτό το μέγιστο θεωρητικά ήταν αναμενόμενο, αλλά λόγω των υψηλών απωλειών στους αναγεννητές μεταφέρθηκε σε χαμηλότερη θερμοκρασιακή διαφορά. Παρ' όλα αυτά τα αποτελέσματα αυτά καταδεικνύουν την καταλληλότητα της

διαδικασίας Vuilleumier στην ψύξη και τον κλιματισμό, που σε αντίθεση με τον κύκλο Stirling, η τιμή Carnot και ο βαθμός απόδοσης παρουσιάζουν μέγιστες τιμές για διαφορά θερμοκρασίας 100-150°C.



Εικόνα 4.20: Ο βαθμός απόδοσης ως προς την διαφορά θερμοκρασίας ζεστού-ψυχρού κύκλου.



Εικόνα 4.21: Βαθμός απόδοσης/Τιμή Carnot ως προς την διαφορά θερμοκρασίας ($T_w - T_k$).

4.2.2.4 Σύγκριση των πειραματικών αποτελεσμάτων με το γραμμικό και διαφορικό μοντέλο.

Στον Πίνακα 4.5 καταγράφονται οι πειραματικές και οι υπολογισμένες (με το γραμμικό μοντέλο) ποιοτικές επιρροές των εξωτερικών παραμέτρων στα κινηματικά μεγέθη. Εδώ υπάρχουν συνολικά τρεις αποκλίσεις μεταξύ των μετρούμενων και των υπολογισμένων μεγεθών. Η λανθασμένη αναπαραγωγή της εξάρτησης της συχνότητας ταλάντωσης από την πίεση ήταν αναμενόμενη, καθώς η επιρροή της διατομής του βάρου εμβόλου σε αυτό το μέγεθος δεν μπόρεσε να υπολογιστεί σωστά. Οι δύο εναπομείναντες αποκλίσεις στον Πίνακα 4.5 δεν πρέπει να υπερεκτιμηθούν, καθώς οι αλλαγές στα κινηματικά μεγέθη, τόσο πειραματικά όσο και υπολογιστικά, είναι χαμηλές. Η διερεύνηση των ποιοτικών εξαρτήσεων με την βοήθεια του διαφορικού μοντέλου, δεν επιφέρει καμία βελτίωση καθώς καταλήγει στα ίδια αποτελέσματα με το γραμμικό μοντέλο. Γνωρίζοντας τα παραπάνω μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η χρήση του γραμμικού μοντέλου για τον υπολογισμό των κινηματικών μεγεθών είναι επαρκής για μία μηχανή Vuilleumier ελευθέρων εμβόλων, εφόσον όμως μας ενδιαφέρουν μόνο οι ποιοτικές επιρροές.

	ω_0 πειρ./γραμμ.	φ πειρ./γραμμ.	x_k πειρ./γραμμ.	x_h πειρ./γραμμ.	x_k/x_h πειρ./γραμμ.
p ↑ (17-22 bar)	↑ ↓	↑ ↑	↑ ↑	↑ ↑	↓ ↓
T _h ↑ (673-798K)	↑ ↓	↑ ↑	↑ ↑	↑ ↑	↓ ↓
T _w ↑ (318-348K)	↑ ↑	↑ ↑	↓ ↓	↓ ↓	↓ ↓
T _k ↑ (253-273K)	↓ ↓	↓ ↓	↓ ↑	↓ ↓	↑ ↑

Πίνακας 4.5: Ποιοτική επίδραση των εξωτερικών παραμέτρων στα κινηματικά μεγέθη.

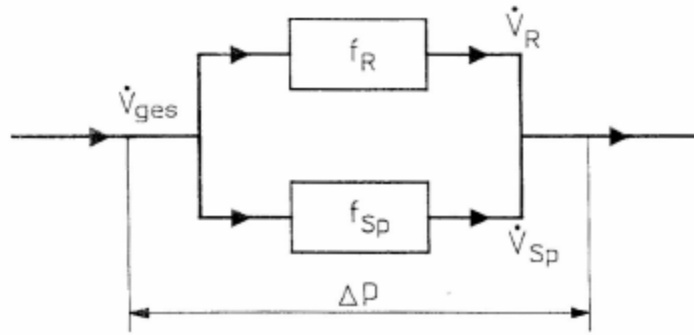
Ο Πίνακας 4.6 δείχνει τις απόλυτες τιμές των κινηματικών μεγεθών καθώς και την ψυκτική ικανότητα και τον βαθμό απόδοσης, όπως προέκυψαν πειραματικά και με την βοήθεια του διαφορικού μοντέλου υπολογισμού. Οι διαφορές στην γωνία φάσης, συχνότητα και στα θερμικά μεγέθη- ψυκτική ικανότητα και βαθμού απόδοσης είναι σχετικά μεγάλες. Ιδιαίτερα η μεγάλη απόκλιση στην συχνότητα αποτελεί ιδιαίτερη έκπληξη καθώς αυτή καθορίζεται από την μάζα των εκτοπιστών και τις σταθερές των ελατηρίων. Έτσι το γραμμικό μοντέλο βρίσκεται σε καλή συμφωνία με την πειραματικά υπολογισμένη συχνότητα. Επιπλέον πρέπει να σημειωθεί ότι αρχικά το διαφορικό μοντέλο του Kuhl αναπτύχθηκε για ελεγχόμενες μηχανές, όπου υπάρχει μία καλή

συμφωνία με τα πειραματικά δεδομένα. Μία άλλη διαδικασία υπολογισμού ανεπτυγμένη από τον Schwendig, οδηγεί σε παρόμοια αποτελέσματα. Έτσι μπορούμε με βεβαιότητα να πούμε ότι το θέμα υπολογισμού γενικά επιδέχεται βελτίωση. Στο πλαίσιο μπορούμε να δούμε την απόκλιση στην γωνία φάσης, μέγεθος όμως που μετριέται με μεγάλο σφάλμα. Οι αποκλίσεις στα θερμικά μεγέθη, από την άλλη, οφείλονται κατά κύριο λόγο στις αυξημένες απώλειες στους αναγεννητές, οι οποίες δεν λήφθηκαν υπ' όψιν κατά τον υπολογισμό και θα αναλυθούν περαιτέρω παρακάτω.

	Πειραματικά αποτελέσματα	Διαφορική μέθοδος
Συχνότητα (Hz)	10,02	9,09
Γωνία φάσης (μοίρες)	84,1	97,5
Διαδρομή ψυχρού εκ. (mm)	28	31,8
Διαδρομή θερμού εκ. (mm)	29,4	33,4
Αναλογία πλατών	0,952	0,953
Ψυκτική απόδοση (W)	71,3	225,7
Βαθμός απόδοσης (-)	0,114	0,479

Πίνακας 4.6: Σύγκριση των πειραματικών αποτελεσμάτων με την διαφορική μέθοδο (για $T_h=500\text{oC}$, $T_w=20\text{oC}$, $T_k=0\text{oC}$).

Στο κεφάλαιο 3.2, λόγω του ότι οι πειραματικές απώλειες πίεσης προκρίπτουν μικρότερες από τις θεωρητικά υπολογισμένες, εξήχθη το συμπέρασμα ότι οι αναγεννητές διαθέτουν προτιμώμενα κανάλια ροής. Λόγω της κατασκευής και της συναρμολόγησης των αναγεννητών είναι πολύ πιθανόν ένα τέτοιο κανάλι ροής είναι υπό την μορφή ενός δακτυλιοειδούς διάκενου και βρίσκεται μεταξύ του τοιχώματος του κυλίνδρου και την μήτρα του αναγεννητή. Ο αναγεννητής επομένως μπορεί να χωριστεί σε δύο τμήματα-την μήτρα του και το εξωτερικό δακτυλιοειδές διάκενο. Το αντίστοιχο ύψος χάσμα μπορεί να υπολογιστεί επαναληπτικά χρησιμοποιώντας τον πειραματικά προσδιοριζόμενο συντελεστή απώλειας πίεσης. Για τον σκοπό αυτό προβάλλεται ένα μοντέλο ροής με δύο παράλληλες αντιστάσεις, οι οποίες χαρακτηρίζουν τα δύο μέρη του αναγεννητή (Εικόνα 4.22).



Εικόνα 4.22: Απλοποιημένο μοντέλο ροής για τους αναγεννητές.

Ο συντελεστής απώλειας πίεσης της συνολικής διάταξης αποτελείται στην ακόλουθη εξίσωση από τους δύο ατομικούς παράγοντες, και θα πρέπει να προσαρμόζεται με την πειραματική τιμή.

$$f_{ges} = \frac{f_R}{1 + \frac{f_R}{f_{Sp}}} = f_{exp} \quad (4.9)$$

Οι παράγοντες απώλειας πίεσης f_R και f_{Sp} μπορούν να υπολογιστούν υποθέτοντας ένα μέσο σταθερά τοπικό ύψος χάσματος στον αναγεννητή και για την στρωτή ροή έχει ως εξής:

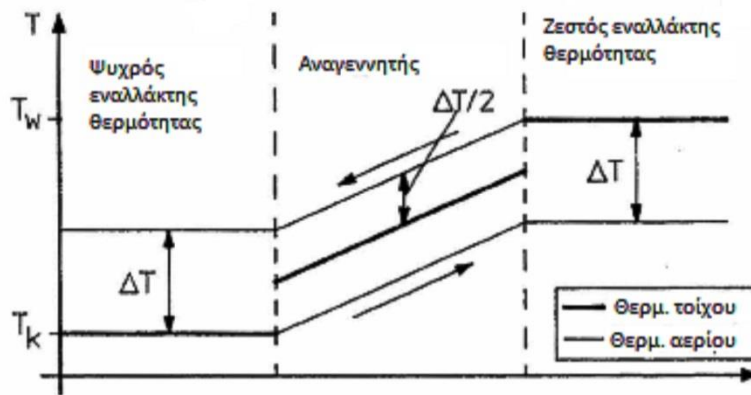
$$f = \frac{32\eta l \varphi}{d_{hydr}^2 A_q} \quad (4.10)$$

Ο συντελεστής φ μπορεί να τεθεί ίσος με 1.5, ως επακόλουθο της σύγκρισης του ύψους με το πλάτος του διάκενου, και το ιξώδες θα καθοριστεί από την λογαριθμική βάση της μέσης θερμοκρασία στον αναγεννητή. Ο Πίνακας 4.7 δείχνει τα, κατά αυτόν το τρόπο καθορισμένα, μέσα ύψη διάκενου της μήτρας του αναγεννητή και τα ύψη του εξωτερικά δακτυλιοειδές διάκενου, για τους δύο αναγεννητές της μηχανής. Παρατίθεται επιπλέον το μέσο ύψος διάκενου του ιδανικού εναλλάκτη. Μπορούμε να δούμε ότι τα ύψη των διάκενων των αναγεννητών μας είναι μικρότερα απ' αυτά των ιδανικών και ότι υπάρχει ένα εξωτερικό δακτυλιοειδές διάκενο το οποίο είναι περίπου 3 φορές μεγαλύτερο. Γι' αυτόν τον λόγο 55% της μάζας ρέει από την ψυχρή μήτρα του αναγεννητή ενώ το 34% από την θερμή. Το υπόλοιπο διέρχεται στην μήτρα μέσω του δακτυλιοειδούς διάκενου. Παρά το γεγονός ότι το δακτυλιοειδές διάκενο έχει μία συγκεκριμένη επίδραση στον αναγεννητή, ωστόσο η επιφάνεια ανταλλαγής είναι πολύ μικρή αναλογικά με το ρυθμό ροής μάζας, με αποτέλεσμα την συνολική αύξηση των απωλειών στον αναγεννητή.

	Ψυχρός αναγεννητής	Θερμός αναγεννητής
Μέσο ύψος διάκενου στην μήτρα	101	155
Υψος δακτυλιοειδес διάκενου	300	439
Μέσο ύψος διάκενου στην μήτρα σε ιδανικό αναγεννητή	110	192

Πίνακας 4.7: Υπολογισμένο ύψος διάκενου (μm).

Αυτό το φαινόμενο μπορεί να εξεταστεί με περισσότερες λεπτομέρειες με την βοήθεια ενός απλού μοντέλου αναγεννητών. Για τον σκοπό θεωρείται ότι θερμοκρασίες τοίχου και αερίου είναι γραμμικές συναρτήσεις του μήκους των αναγεννητών. Υποτίθεται επιπλέον ότι η διαφορά θερμοκρασίας του αερίου και των τοιχωμάτων είναι σταθερή και ότι κατά την διάρκεια ψύξης ή θέρμανσης είναι ίσες. Το σχήμα 4.23 απεικονίζει αυτό το εξιδανικευμένο προφίλ θερμοκρασίας χρησιμοποιώντας το παράδειγμα του ψυχρού αναγεννητή.



Εικόνα 4.23: Αναπαράσταση της ιδανική ροής της θερμοκρασίας στο παράδειγμα του ψυχρού αναγεννητή.

Κατά αυτόν τον τρόπο προκύπτει η διαφορά θερμοκρασίας ΔT :

$$\Delta T = \frac{T_w - T_k}{NTU / 2 + 1} \quad (4.11)$$

με τον αριθμό μονάδων μετάδοσης NTU:

$$NTU = \frac{\alpha A}{\dot{m} c_p} \quad (4.12)$$

Για τον υπολογισμό της τιμής NTU πρέπει να καθοριστούν οι συντελεστές μεταφοράς θερμότητας στην μήτρα του αναγεννητή και στο δακτυλιοειδές διάκενο. Οι απαραίτητες πληροφορίες για το ρυθμό και προφίλ της ροής είναι διαθέσιμες, και έτσι ο αριθμός Nussel μπορεί να προσδιορίσει τα κανάλια ροής από γνωστές συσχετίσεις. Γνωρίζοντας την διαφορά θερμοκρασίας τόσο στην μήτρα του αναγεννητή όσο και στο δακτυλιοειδές διάκενο μπορούμε να υπολογίσουμε την θερμοκρασία εξόδου του αερίου, υπο την παραδοχή της ιδανικής μίξης των δύο ρευμάτων σε μία μέση θερμοκρασία εξόδου. Αυτή η θερμοκρασία δίνεται εξετάζοντας τον ιδανικό αναγεννητή και το αποτέλεσμα είναι η μειωμένη επιφάνεια ανταλλαγής. Επομένως προκύπτει ότι η επιφάνεια ανταλλαγής του ψυχρού αναγεννητή πρέπει να μειωθεί κατά 87% ώστε να προκύπτει το ίδιο αποτέλεσμα σε παράλληλη ροή μέσω της μήτρας και του δακτυλιοειδούς διακένου. Για τον θερμό αναγεννητή η επιφάνεια πρέπει να μειωθεί στο 87.5 %. Τα αποτελέσματα αυτά, πρέπει να σημειωθεί, ότι παρέχουν μια γενική εικόνα μόνο, λόγω των απλών μοντέλων των αναγεννητών, και δεν μπορούν σε καμία περίπτωση να θεωρηθούν ακριβή. Παρ' όλα αυτά δείχνουν ότι στους αναγεννητές της δοκιμαστικής μηχανής προκύπτουν αυξημένες απώλειες λόγω της ανομοιομορφίας της ροής, όπως ήδη υποθέσαμε στην συζήτηση των πειραματικών αποτελεσμάτων. Στον Πίνακα 4.8 καταγράφονται τα αποτελέσματα του υπολογισμού της μηχανής με την βοήθεια του διαφορικού μοντέλου, λαμβάνοντας υπόψιν τις μειωμένες επιφάνειες ανταλλαγής στους αναγεννητές. Παρατηρούμε ότι τα θερμικά μεγέθη βρίσκονται σε καλή συμφωνία με τα πειραματικά αποτελέσματα, παρ' όλα αυτά δεν πρέπει να επισκιάζεται η προαναφερθείσα ανακρίβεια των υπολογισμένων τιμών. Ωστόσο τα κινηματικά μεγέθη επιδεινώθηκαν σε σχέση με τον Πίνακα 4.6. Παρατηρούμε μεγάλη απόκλιση στην συχνότητα. Αυτό δείχνει ότι η αναφορά στις αλλαγές των συνθηκών ροής στους αναγεννητές σχετικά με την μείωση των επιφανειών ανταλλαγής είναι πράγματι επαρκής για τον υπολογισμό των θερμικών μεταβλητών με επαρκή ακρίβεια. Η επίδραση όμως επί των κινηματικών μεγεθών δεν έχει αναπαραχθεί ακόμη σε ικανοποιητική μορφή, αν και η απώλεια πίεσης εξακολουθεί να ρυθμίζεται με την αύξηση της τιμής για το πάχος του φιλμ.

4.2.3 Σύνοψη των αποτελεσμάτων.

Η πειραματική μελέτη της μηχανής οδήγησε σε έναν σημαντικό αριθμό αποτελεσμάτων και ευρημάτων, τα οποία συνοψίζονται εν συντομία παρακάτω:

- Η επίδραση των διάφορων παραμέτρων επί τον λόγο των πλατών καθορίζεται από τις σταθερές απόσβεσης D_{kk} και D_{hh} . Στην δοκιμαστική μηχανή, η τυρβώδεις απώλειες πίεσης είναι μεγαλύτερες στο ψυχρό μέρος απ' ότι στο θερμό μέρος της μηχανής. Για τον λόγο αυτό ο όρος D_{hh}/D_{kk} μειώνεται με την αύξηση των διαδρομών των εμβόλων. Αν και οι μικτές σταθερές K_{kh} και K_{hk} δεν επηρεάζονται με τον ίδιο τρόπο, η επίδραση αυτή

προκαλεί μείωση του λόγου των πλατών. Ωστόσο, η δήλωση αυτή δεν είναι καθολικά έγκυρη και δεν μπορεί να μετρηθεί με ευκολία σε άλλες μηχανές Vuilleumier ελευθέρων εμβόλων. Πράγματι, εάν το ποσοστό της τυρβώδεις απώλειας πίεσης επί της συνολικής πτώση πίεσης είναι μεγαλύτερη στο θερμό μέρος τη μηχανής, τότε αναμένεται η αντίθετη συμπεριφορά.

- Η ψυκτική ικανότητα μιας μηχανής Vuilleumier ελευθέρων εμβόλων καθορίζεται σε πρώτη βάση από το μήκος της διαδρομής των εμβόλων. Η επίδραση της συχνότητας από την άλλη είναι σχεδόν μηδαμινή, μιας και είναι σχεδόν σταθερή. Η εξάρτηση από την γωνία φάσης και από τον λόγο των πλατών είναι ήδη χαμηλή, διότι αυτές οι ποσότητες βρίσκονται σε ένα εύρος τιμών όπου η πυκνότητα ισχύος μεγιστοποιείται.

-Η διαδρομή των εμβόλων δεν αυξάνεται ανάλογα με την πίεση' η κλίση μειώνεται με την αύξηση της πίεσης. Η αιτία αυτής της συμπεριφοράς πρέπει να ερευνηθεί στην ταυτόχρονη αύξηση της πυκνότητας του αερίου, το οποίο προκαλεί μια δυσανάλογη αύξηση των τυρβωδών απωλειών πίεσης. Έτσι η εξάρτηση της ψυκτικής ικανότητας και της πίεσης είναι εξαιρετικά μη γραμμική και γι' αυτό τον λόγο η πίεση φαίνεται ακατάλληλη για την ρύθμιση της ψυκτικής ισχύος.

- Το μήκος διαδρομής των εμβόλων αυξάνει σχεδόν γραμμικά με την θερμοκρασία του θερμαντήρα. Για τον λόγο αυτό με την μείωση της θερμοκρασίας του θερμαντήρα δεν μειώνεται μόνο η ψυκτική ισχύς, αλλά και ο συντελεστής απόδοσης.

-Μία πτώση της θερμοκρασίας στο ψυχρό μέρος της μηχανής, ως αποτέλεσμα της μεγαλύτερης διαφοράς θερμοκρασίας, οδηγεί σε μία αύξηση απωλειών στην θερμική αγωγιμότητα και στους εναλλάκτες στο ζεστό μέρος της μηχανής. Η κατά αυτόν τον τρόπο μειωμένη ψυκτική ικανότητα, αντισταθμίζεται εν μέρει από την ταυτόχρονη αύξηση της συχνότητας και της διαδρομής των εμβόλων. Αυτό επιτρέπει την απορρόφηση θερμότητας σε ένα μεγάλο εύρος θερμοκρασιών, χωρίς να επηρεάζεται μακροχρόνια η απόδοση. Εδώ η μηχανή Vuilleumier ελευθέρων εμβόλων εμφανίζει ένα σημαντικό πλεονέκτημα σε σχέση με τις οδηγούμενες μηχανές και ιδίως σε σχέση με τις μηχανές συμπίεσης.

-Σε μία μηχανή Vuilleumier ελευθέρων εμβόλων σε αντίθεση με τις μηχανές Stirling η τιμή Carnot μεγιστοποιείται για βαθμό απόδοσης και διαφορά θερμοκρασίας $T_w - T_k$ που είναι κατάλληλα για χρήση στον κλιματισμό και στην ψύξη.

4.3 Γενικές παρατηρήσεις σχετικά με την λειτουργία της δοκιμαστικής μηχανής.

Η πειραματική μηχανή χαρακτηρίζεται από μία ομαλότατη και αθόρυβη λειτουργία. Με την σταθερή σύσφιξη της μηχανής, η κίνηση του περιβλήματος είναι σχεδόν ανεπαίσθητη, όπως ανεπαίσθητες είναι και οι δονήσεις που μεταδίδονται στο εργαστηριακό πλαίσιο. Όπως αναφέρθηκε και στην αρχή αυτής της εργασίας, οι μηχανές ελευθέρων εμβόλων εδώ έχουν γενικό πλεονέκτημα έναντι αυτών με οδηγούμενα έμβολα ή μηχανές με γρανάζια.

Έχει επίσης επιβεβαιωθεί ότι σε μία προσεκτικά σχεδιασμένη μηχανή στην οποία οι δυνάμεις τριβής ελαχιστοποιούνται, δεν παρουσιάζει κανένα πρόβλημα ως προς την έναρξη. Το πλάτος έναρξης στην δοκιμαστική μηχανή είναι περίπου 3 mm και είναι ικανό να θέσει σε λειτουργία την μηχανή για θερμοκρασία θερμοαντήρα 380°C και πίεση 19 bar.

Έχει επίσης δειχθεί ότι οι αυξημένες δυνάμεις τριβής δεν χειροτερεύουν μόνο την έναρξη, αλλά και την γενική απόδοση της μηχανής.

Λόγω της χαμηλής σταθεράς ακαμψίας του συνδετικού ελατηρίου μπορεί να εκτιμηθεί άμεσα η επίδραση της τριβής στο ψυχρό έμβολο στην δοκιμαστική μηχανή. Η δύναμη της τριβής εδώ είναι περίπου 0.5 N, ενώ στον θερμό εκτοπιστή η δύναμη τριβής είναι μεγαλύτερη της τάξης 1-2 N.

Τέλος θα πρέπει να σημειωθεί ότι η ρύθμιση του μήκους της διαδρομής του εμβόλου χρησιμοποιώντας την θερμοκρασία του θερμοαντήρα, είναι εφικτή χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία. Παρόλα αυτά πρέπει να προσεχθεί ιδιαίτερα η τιμή της θερμοκρασίας θέρμανσης, καθώς μία απόκλιση μόλις λίγων βαθμών μπορεί να οδηγήσει μέχρι και 1 mm διαφορετικό μήκος διαδρομής. Επιπλέον έχει βρεθεί ότι, η αύξηση του νεκρού όγκου, ανοίγοντας την βαλβίδα στην γραμμή παροχής αερίου, είναι ο πιο αποτελεσματικός τρόπος για την ταχεία μείωση της διαδρομής του εμβόλου.

5. Συμπεράσματα

Στην παρούσα διπλωματική επικεντρωθήκαμε στην κινηματική ανάλυση των μηχανών Vuilleumier ελευθέρων εμβόλων και ύστερα εξετάστηκε η μηχανή του Thomas από κατασκευαστική σκοπιά καθώς και ως προς την λειτουργία της. Τα συμπεράσματα που μπορούν να εξαχθούν από τα παραπάνω είναι τα εξής:

- Τα κινούμενα μέλη της μηχανής δεν μεταβάλλουν τα θερμοδυναμικά χαρακτηριστικά του αέριου εργασίας, άμεσα τουλάχιστον. Υπαίτιοι για την θερμική εκτόνωση ή συμπίεση του αερίου εργασίας είναι οι αναγεννητές και μόνο.
- Κύριο λόγο και στις απώλειες έχουν οι αναγεννητές, μαζί με τους εναλλάκτες θερμότητας, καθώς σε μηχανές ελευθέρων εμβόλων οι απώλειες λόγω τριβής είναι αν όχι μηδαμινές, τότε ελάχιστες.
- Ο αριθμός των απαιτούμενων ελατηρίων, για την όρθη λειτουργία της μηχανής, είναι δύο, με αναγκαίο μόνο εκείνο στον θερμό εκτοπίστη. Αυτό είναι υψίστης σημασίας καθώς δίνει μία σημαντική κατεύθυνση για τον σχεδιασμό της μηχανής.
- Το γραμμικό μοντέλο είναι μία ιδιαίτερη γρήγορη μέθοδος προκειμένου να προβλεφθούν τα κινηματικά μεγέθη με επαρκή ακρίβεια, όπως είδαμε στην σύγκριση με τα πειραματικά, ωστόσο υπάρχει σοβαρή απόκλιση ως προς την απόδοση της μηχανής.
- Εάν γίνει λεπτομερής ανάλυση της ροής στους αναγεννητές και εναλλάκτες θερμότητα, εγχείρημα αρκετά απαιτήτικο, θα μπορούσε να προβλεφθεί η απόδοση της μηχανής με μεγαλύτερη ακρίβεια.

6. Βιβλιογραφία

1. ΚΑΝΑΡΑΧΟΣ Α., ΑΝΤΩΝΙΑΔΗΣ Ι., “ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΜΗΧΑΝΩΝ”, ΠΑΠΑΣΩΤΗΡΙΟΥ, ΑΘΗΝΑ 1998.
2. Κουρεμένος Δ., “ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗ Ι”, ΕΜΠ, Αθήνα 1991.
3. Σταυρακάκης Ν., “Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις”, Παπασωτηρίου, 1997.
4. Thomas, B. (1992) “Entwicklung und experimentelle Untersuchung einer Freikolben-Vuilleumier-Wärmepumpe”, Verlag Shaker, Aachen 1992.
5. Rogdakis E. D., Bormpilas N. A. and Koniakos I. K., “A thermodynamic study for the optimization of stable operation of free piston Stirling engines”, Energy Conversion and Management, July 2003.
6. Urieli I. and Berchowitz D., “Stirling Cycle Engine Analysis”, Adam Hilger Ltd., Bristol, 1984.
7. Beale, W.T., “The Free Piston Stirling Engine: 20 Years of Development”, Proc. 18th IECEC, Orlando, S.689-693, 1983
8. Berchowitz D., “Stirling Cycle Design and optimization”, Athens, Ohio, August 1986.
9. Redlich R. and Berchowitz D., “Linear dynamics of free piston Stirling Engines”, Inst. Mech, Eng., Vol 199, Nr.A3, S.203-213, 1985
10. Μπορμπιλας Ν., Εισαγωγή στο Mathcad με εφαρμογές στις θετικές επιστήμες, ΕΜΠ, Αθήνα 2005.
11. Walker G., “Cryocoolers”, Plenum Press, New York, 1983.
12. Kühl, H.D., Richter, N., Schulz, S., “Der Vuilleumier-Prozeß als Wärmepumpe”, gwf Gas/Erdgas 127, Nr.5, S.2D5 -210, 1986.

7. Ονοματολογία

a	Σταθερές από Εξ. (4.9)
a_0	Αρχικές συνθήκες από Εξ. (4.27)
A	Επιφάνεια
A_q	Επιφάνεια διατομής
b	Σταθερές από Εξ. (4.9)
b_0	Αρχικές συνθήκες από Εξ. (4.27)
c_1, c_2, c_3, c_4	Σταθερές από Εξ. (4.3) και (4.25)
c_p	Ειδική θερμοχωρητικότητα
C	Σταθερές ελατηρίων
d	Διάμετρος
d_{hydr}	Υδραυλική διάμετρος
D	Σταθερές απόσβεσης
f	Συντελεστές απώλειας πίεσης
$f(x), F(x)$	Συναρτήσεις του x
i	Φανταστική μονάδα
K	Σταθερές ελατηρίων
l	μήκος
m	Μάζα
m_{gas}	Μάζα αερίου
m'	Παροχή μάζας
NTU	Αριθμός μονάδων μεταφοράς
p	Πίεση
Δp	Διαφορά πίεσης
P_{el}	Ηλεκτρική ισχύς
Q	Ποιότητα του ταλαντούμενου συστήματος
Q'	Θερμότητα
R	Σταθερά ελατηρίου
s	Μιγαδική τιμή
s_n	Μιγαδικός μηδενιστής
s_p	Μιγαδικός πόλος
t	Χρόνος
T	Θερμοκρασία
$T(s)$	Μιγαδική συνάρτηση από Εξ. (4.35) και (4.38)
ΔT	Διαφορά θερμοκρασίας
V	Όγκος
V'	Παροχή όγκου
W	Μηχανικό έργο

x	Απόσταση,θέση
x'	Ταχύτητα
x''	Επιτάχυνση
α	Πραγματικό μέρος
α	Συντελεστής μεταφοράς θερμότητας
β	Φανταστικό μέρος
γ	Αδιαβατικός εκθέτης
ε	Βαθμός απόδοσης
η	Δυναμικό ιξώδες
θ	γωνία
λ	Ιδιοτιμή
μ	Αναλογία μάζας
ρ	Πυκνότητα
Σ	Άθροισμα
φ	γωνία φάσης
φ	Συντελεστής (Εξ. 6.10)
ω	Συχνότητα
ω0	Συχνότητα ταλάντωσης

Δείκτες

Betrieb	Σημείο λειτουργίας
diss	Σκεδαζόμενη
exp	Πειραματικό
g	Περίβλημα
G	Αέριο ελατήριο
h	Θερμό
i,j	Δείκτης καταμέτρησης
k	Ψυχρό
lam	Στρωτό
lin	Γραμμικό
max	Μέγιστο
min	Ελάχιστο
prod	Παραγόμενο
reib	Τριβή
R	Αναγεννητής
Sp	Διάκενο
St	Βάκτρο εμβόλου
Start	Σημείο εκκίνησης
turb	Τυρβώδης
V	Ελατήριο σύνδεσης
w	Ζεστό
W	Εναλλάκτης θερμότητας

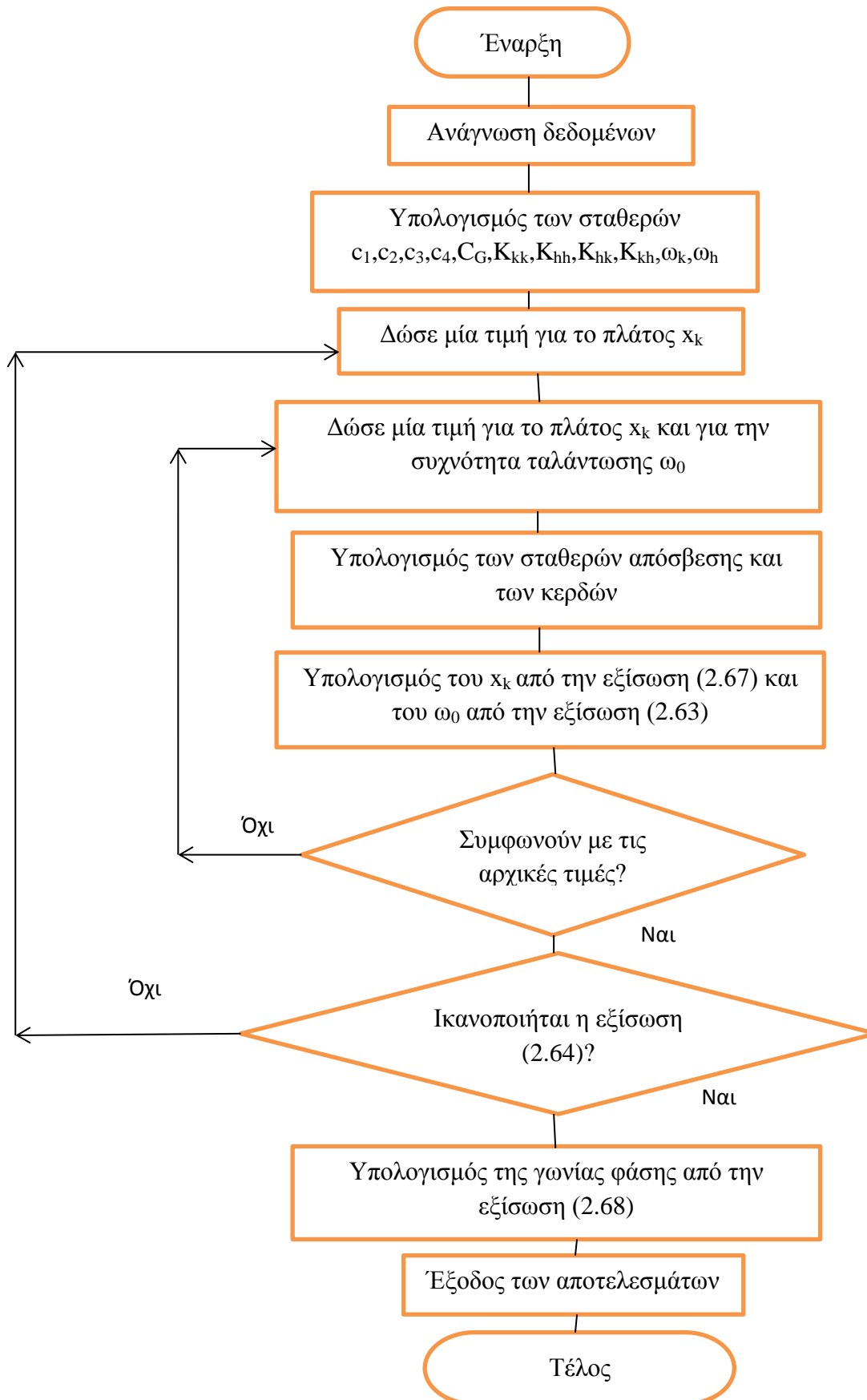
Z Θάλαμος Κυλίνδρου

Εκθέτες

- Μέση τιμή
- * Μέσω της διεργασίας σχηματιζόμενος όγκος ελατηρίου αέρα
- ~ Μετασχηματισμένη τιμή Laplace
- ^ Τιμή πλάτους
- C Μιγαδικός
- ≈ Προσεγγιστική τιμή

Παράρτημα Α: Αλγόριθμος υπολογισμού των πλατών ταλάντωσης με βάση το γραμμικό μοντέλο.

Παρακάτω παρουσιάζεται ο αλγόριθμος που επιτρέπει τον υπολογισμό των πλατών ταλάντωσης με βάση το γραμμικό μοντέλο(Εικ.Α.1). Όπως μπορούμε να δούμε ο αλγόριθμος περιέχει δύο βρόγχους. Στο εσωτερικό βρόγχο υπολογίζονται οι τιμές του πλάτους x_k και της συχνότητας ταλάντωσης του συστήματος ω_0 , υποθέτοντας ένα x_h , με την βοήθεια των εξισώσεων 2.63 και 2.67. Αυτή η εκδοχή είναι απαραίτητη καθώς οι σταθερές απόσβεσης εξαρτώνται από το x_k και ω_0 και επίσης υπάρχουν και στις εξισώσεις 2.63 και 2.67. Στον εξωτερικό βρόγχο υπολογίζεται η τιμή του x_h με βάση την εξίσωση 2.64. Γνωρίζοντας των όγκο των κυλίνδρων, πρέπει αν προσέξουμε τις τιμές των x_k και x_h , ώστε ο όγκος εμβολισμού να μην είναι μεγαλύτερος των όγκων των κυλίνδρων.



Εικόνα Α.1: Υπολογισμός των πλατών ταλάντωσης με την βοήθεια του γραμμικού μοντέλου.

Παράρτημα Β: Αναπαράγωγή των εξισώσεων κίνησης με την μέθοδο Lagrange

Ένας άλλος τρόπος εύρεσης των κινηματικών εξισώσεων είναι με την μέθοδο Lagrange. Κάνοντας όλες τις υποθέσεις για πιέσεις, απώλειες κτλ. οι κινηματικές εξισώσεις των εκτοπιστών και του περιβλήματος θα δίδονται από την παρακάτω εξίσωση:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} - F_{t,k} = F_{c,k} \quad (1)$$

με $q_k = x_k, x_h, x_g$.

Η συνάρτηση Lagrange είναι $L = T - U$, όπου T η κινητική ενέργεια του συστήματος και U η δυναμική ενέργεια. Αντίστοιχα οι άλλοι όροι της εξίσωσης (1) είναι οι :

$$\frac{\partial W}{\partial q_k} = F_{t,k} \quad (2)$$

Όπου αυτός ο όρος αντιπροσωπεύει τις εξωτερικές δυνάμεις. Εδώ εξωτερικές δυνάμεις θα αναφέρονται οι δυνάμεις που ασκεί το αέριο εργασίας στους εκτοπιστές και περίβλημα λόγω της πίεσης. Τέλος μένει ο όρος $F_{c,k}$, οποίος αντιπροσωπεύει τις δυνάμεις απόσβεσης, οι οποίες εδώ πέρα θα είναι μηδενικές, καθώς οποιαδήποτε απόσβεση στο σύστημά μας γίνεται λόγω της πτώσης πίεσης στους αναγεννητές.

Έτσι αναπαράγοντας τους παραπάνω όρους για το σύστημά μας θα έχουμε:

$$T = \frac{1}{2} (m_k x_k^2 + m_h x_h^2 + m_g^2) \quad (3)$$

$$U = \frac{1}{2} C_k (x_g - x_k)^2 + \frac{1}{2} C_h (x_g - x_h)^2 \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
W = & -p_k x_k A_k + p_w (A_k - A_{st}) x_k - p_w (A_h - A_{st}) x_h - p_G A_{st} x_h + \\
& + p_G A_{st} x_k + p_k A_k x_g - p_h A_h x_g + p_h A_h x_h
\end{aligned} \tag{5}$$

Εφόσον έχουμε όλους τους όρους τις εξισώσεις (1) μπορούμε να βρούμε τις κινηματικές εξισώσεις. Για τον ψυγρό εκτοπιστή, θέτοντας όπου $q_k = x_k$, η εξίσωση (1) γίνεται :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_k} - F_{t,k} = F_{c,k} \tag{6}$$

Κάνοντας αντικατάσταση των όρων η (6) γίνεται :

$$\frac{d}{dt} (m_k \dot{x}_k) - C_k (x_g - x_k) (-1) = -p_k A_k + p_w (A_k - A_{st}) + p_G A_{st} \tag{7}$$

Και τελικά από την εκτέλεση των πράξεων και αναδιάταξη των όρων :

$$m_k \ddot{x}_k = A_k (p_w - p_k) + A_{st} (p_G - p_w) + C_k (x_k - x_g) \tag{8}$$

Αντιστοίχα με τον ίδιο τρόπο θα προκύψουν και οι εξισώσεις κίνησης του θερμού εκτοπιστή και του περιβλήματος.

$$m_h \ddot{x}_h = A_h (p_h - p_w) + A_{st} (p_w - p_G) + C_h (x_g - x_h) \tag{9}$$

$$m_g \ddot{x}_g = p_k A_k - p_h A_h + C_k (x_k - x_g) + C_h (x_h - x_g) \tag{10}$$

Ενώ οι εξισώσεις κίνησης των εκτοπιστών ταυτίζονται με αυτές του δευτέρου κεφαλαίου (2.44 a,b), εξίσωση του περιβλήματος διαφέρει.

Παράρτημα Γ: Βαθμός απόδοσης Carnot

Στο κεφάλαιο 4 είδαμε σε μερικά διαγράμματα να γίνεται σύγκριση του βαθμού απόδοσης της πειραματική μηχανής ως προς την τιμή Carnot. Η τιμή Carnot στην ουσία είναι ο μέγιστος βαθμός απόδοσης που θα μπορούσε να έχει η μηχανή. Η μηχανή Vuilleumier ελευθέρων εμβόλων χαρακτηρίζεται ως ο συνδυασμός ενός θερμοκινητήρα και μιας θερμικής αντλίας. Έτσι ο βαθμός απόδοσης Carnot θα δίνεται ως τον λόγο της ψυκτικής ισχύς προς την κατανάλωση στον θερμοκινητήρα:

$$COP_C = \frac{T_k \Delta s_{\Theta/A}}{T_h \Delta s_{\Theta/K}} \quad (11)$$

Ιδανικά δεν έχουμε απώλειες και έτσι το έργο του θερμοκινητήρα ισούται με το έργο της θερμαντλίας:

$$W_{\Theta/K} = |W_{\Theta/A}|$$

Και έτσι:

$$(T_h - T_w) \Delta s_{\Theta/K} = (T_w - T_k) \Delta s_{\Theta/A} \quad (12)$$

Οπότε βρίσκοντας τον λόγο των Δs από την (2) και αντικαθιστοντάς τον τελικά στην (1), η τιμή Carnot θα δίνεται :

$$COP_C = \frac{T_k}{T_h} \frac{T_h - T_w}{T_w - T_k} \quad (13)$$

Παράρτημα Δ: Πειραματικά αποτελέσματα

Παρακάτω παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των πειραματών της μηχανής του Thomas. Τα αποτελέσματα αυτά παρουσιάστηκαν ήδη στο κεφάλαιο 4 υπό την μορφή διαγραμμάτων, ενώ εδώ θα παρουσιαστούν υπό την μορφή πινάκων, προκειμένου να είναι εμφανείς οι ακριβείς τιμές των παραμέτρων.

Μεταβολή της θερμοκρασίας του ψυχρού κύκλου Tk												
Th(βαθμ. C)	Tw(βαθμ. C)	Tk(βαθμ. C)	Μέση πίεση (bar)	Πλάτος πίεσης (bar)	Συχνότητα (Hz)	Γωνία φάσης (μs)	Διαδρομή ψυχρού (mm)	Διαδρομή θερμού (mm)	κx/χh	Q ψύξης (W)	P el (W)	ε(-)
500,3	39,67	0	20,02	1,55	10,249	86,7	24,7	27,5	0,898	22,8	585	3,9
500,3	39,63	5,08	20,02	1,5	10,152	84,8	24,5	26,6	0,924	33,5	562	6
500,7	39,72	10,03	20,02	1,44	10,05	82,9	24,4	25,3	0,963	42,5	510	8,3
500,8	39,64	15,06	20,02	1,39	9,927	80,7	24,2	23,9	1,013	49,9	460	10,9
500,6	39,64	20,03	20,02	1,28	9,788	78,9	23,8	21,7	1,094	53	412	12,9
520,4	39,66	0,06	20,02	1,66	10,285	88,6	25,8	29,4	0,878	29,5	650	4,5
520,8	39,54	5,05	20,02	1,66	10,17	85,3	26,1	28,8	0,908	40,4	610	6,6
520,4	39,65	10	20,02	1,55	10,043	85	25,9	27,5	0,943	48,4	590	8,2
520,1	39,73	15,05	20,02	1,55	9,973	81,9	25,9	26,3	0,988	58,4	525	11,1
520,9	39,66	20	20,02	1,44	9,846	80,5	25,5	24,5	1,038	65,5	495	13,2

Μεταβολή της θερμοκρασίας του ζεστού κύκλου Tw												
Th(βαθμ. C)	Tw(βαθμ. C)	Tk(βαθμ. C)	Μέση πίεση (bar)	Πλάτος πίεσης (bar)	Συχνότητα (Hz)	Γωνία φάσης (μs)	Διαδρομή ψυχρού (mm)	Διαδρομή θερμού (mm)	κx/χh	Q ψύξης (W)	P el (W)	ε(-)
500,4	24,57	0,04	20,02	1,72	9,963	83,9	25,6	29,5	0,8681	65,7	610	10,8
500,5	29,63	0,06	20,02	1,66	10,033	85,6	24,8	28,9	0,8591	55,4	585	9,5
500,3	34,61	0,06	20,02	1,61	10,077	86	23,9	28,3	0,845	42,8	565	7,6
500,4	39,74	0,05	20,02	1,55	10,135	86,5	23,1	27,3	0,846	30,4	548	5,6
500,6	44,83	0,05	20,02	1,5	10,18	87,2	21,9	26,4	0,828	17,1	525	3,3
500,5	49,7	0,09	20,02	1,39	10,229	88,1	20,9	25,3	0,827	6,7	500	1,3
550,6	29,45	0,05	20,02	1,94	10,02	86,2	27,3	32,8	0,833	72,6	735	9,9
550,8	34,47	0,05	20,02	1,89	10,067	87	26,6	31,9	0,833	59,2	720	8,2
550,6	39,39	0,04	20,02	1,78	10,125	87,8	25,6	31,3	0,82	44,9	688	6,5
550,5	44,39	0,1	20,02	1,78	10,18	88,2	24,8	30,3	0,82	32,5	668	4,9
550,2	49,41	0,06	20,02	1,72	10,232	89,2	23,9	29,5	0,809	19,1	648	2,9

Μεταβολή της θερμοκρασίας θερμοαντλία Th												
Th(βαθμ. C)	Tw(βαθμ. C)	Tk(βαθμ. C)	Μέση πίεση (bar)	Πλάτος πίεσης (bar)	Συχνότητα (Hz)	Γωνία φάσης (μs)	Διαδρομή ψυχρού (mm)	Διαδρομή θερμού (mm)	κx/χh	Q ψύξης (W)	P el (W)	ε(-)
425,8	40,16	0,06	20,02	0,94	10	78,3	15,6	17	0,917	-4,7	270	-1,8
450,8	39,9	0,06	19,99	1,14	10,023	81,3	18	20,3	0,885	5,7	340	1,7
475,7	39,96	0,08	20,02	1,28	10,07	83,7	20	23,1	0,865	15,2	410	3,7
500,8	39,8	0,07	20,02	1,44	10,057	85,1	21,6	25,2	0,857	20,9	480	4,4
525,6	39,53	0,08	20,02	1,55	10,067	85,9	23,4	27,3	0,857	31,4	568	5,5
525,3	39,69	0,11	20,02	1,55	10,084	86	23,1	27,5	0,841	29,5	568	5,2
550,5	39,53	0,05	20,02	1,72	10,084	88,6	24,5	29,4	0,835	38	632	6

Μεταβολή της πίεσης p												
Th(βαθμ. C)	Tw(βαθμ. C)	Tk(βαθμ. C)	Μέση πίεση (bar)	Πλάτος πίεσης (bar)	Συχνότητα (Hz)	Γωνία φάσης (μs)	Διαδρομή ψυχρού (mm)	Διαδρομή θερμού (mm)	κx/χh	Q ψύξης (W)	P el (W)	ε(-)
500,6	39,88	0,08	17,03	0,77	10,057	75	15	13,3	1,129	-3,8	260	-1,5
500,6	39,98	0,07	18,02	1,11	10,135	79,8	19,7	19,7	1	5,7	355	1,6
500,3	39,79	0,05	18,99	1,36	10,19	82,5	22,7	24,4	0,929	17,4	465	3,7
500,7	39,66	0,07	20,02	1,55	10,253	85,6	24,5	27,5	0,892	23,4	585	4
500,6	39,51	0,07	21,02	1,67	10,292	87,6	25,6	29,8	0,859	25,4	670	3,8
500,7	39,33	0,05	21,91	1,84	10,342	90,5	26,7	31,4	0,849	23,5	755	3,6
520,2	39,86	0,06	17,03	0,88	10,06	77,5	17	15,8	1,079	0	308	0
520,6	39,7	0,07	18,03	1,22	10,156	81,9	21,3	22,2	0,958	14,1	410	3,4
520,5	39,69	0,05	19,06	1,5	10,211	84,5	24,1	26,1	0,922	23,5	550	4,3
520,2	39,62	0,06	19,99	1,64	10,256	86,8	25,8	29,1	0,887	27,3	650	4,2
520,3	39,36	0,07	21	1,81	10,291	89,3	26,7	31,4	0,851	30,1	745	4

Μεταβολή της Tw-Tk (σταθερή Tw=40 C)												
Th(βαθμ. C)	Tw(βαθμ. C)	Tk(βαθμ. C)	Μέση πίεση (bar)	Πλάτος πίεσης (bar)	Συχνότητα (Hz)	Γωνία φάσης (μs)	Διαδρομή ψυχρού (mm)	Διαδρομή θερμού (mm)	κx/χh	Q ψύξης (W)	P el (W)	ε(-)
500,3	39,67	0	20,02	1,55	10,249	86,7	24,7	27,5	0,898	22,8	585	3,9
500,3	39,63	5,08	20,02	1,5	10,152	84,8	24,5	26,6	0,924	33,5	562	6
500,7	39,72	10,03	20,02	1,44	10,05	82,9	24,4	25,3	0,963	42,5	510	8,3
500,8	39,64	15,06	20,02	1,39	9,927	80,7	24,2	23,9	1,013	49,9	460	10,9
500,6	39,64	20,03	20,02	1,28	9,788	78,9	23,8	21,7	1,094	53	412	12,9
520,4	39,66	0,06	20,02	1,66	10,285	88,6	25,8	29,4	0,878	29,5	650	4,5
520,8	39,54	5,05	20,02	1,66	10,17	85,3	26,1	28,8	0,908	40,4	610	6,6
520,4	39,65	10	20,02	1,55	10,043	85	25,9	27,5	0,943	48,4	590	8,2
520,1	39,73	15,05	20,02	1,55	9,973	81,9	25,9	26,3	0,988	58,4	525	11,1
520,9	39,66	20	20,02	1,44	9,846	80,5	25,5	24,5	1,038	65,5	495	13,2

Μεταβολή της Tw-Tk (σταθερή Tk=0 C)												
Th(βαθμ. C)	Tw(βαθμ. C)	Tk(βαθμ. C)	Μέση πίεση (bar)	Πλάτος πίεσης (bar)	Συχνότητα (Hz)	Γωνία φάσης (μs)	Διαδρομή ψυχρού (mm)	Διαδρομή θερμού (mm)	κx/χh	Q ψύξης (W)	P el (W)	ε(-)
500,7	19,83	0,08	20,02	1,72	10,023	84,1	28	29,4	0,952	71,3	628	11,4
500,5	24,61	0,05	20,02	1,66	10,098	84,3	26,9	29,2	0,92	58	625	9,3
500,5	29,6	0,09	20,02	1,61	10,152	86	26,1	28,4	0,918	46,6	605	7,7
500,7	34,69	0,09	20,02	1,55	10,183	86,5	25,3	27,8	0,91	35,2	585	6
500,5	39,68	0,1	20,02	1,5	10,242	85,9	24,2	26,9	0,901	18,1	555	3,3
500,5	44,67	0,07	20,02	1,44	10,302	86,8	23,1	25,9	0,892	11,4	545	2,1
500,1	49,55	0,06	20,02	1,39	10,345	87,5	22,2	25	0,888	0	520	0
520,9	34,53	0,07	20,02	1,72	10,194	85,6	26,7	30,2	0,886	42,8	678	6,3
520,3	39,59	0,05	20,02	1,66	10,267	87,2	25,9	29,5	0,878	29,5	650	4,5
520,7	44,76	0,07	20,02	1,61	10,316	88	24,7	28,3	0,873	17,1	625	2,7
520,1	49,84	0,05	20,02	1,5	10,377	87,8	23,6	27,2	0,868	2,9	600	0,5

Μεταβολή της σταθεράς του θερμού ελατηρίου Ch													
Ch(N/m)	Th(βαθμ. C)	Tw(βαθμ. C)	Tk(βαθμ. C)	Μέση πίεση (bar)	Πλάτος πίεσης (bar)	Συχνότητα (Hz)	Γωνία φάσης (μιορες)	Διαδρομή ψυχρού (mm)	Διαδρομή θερμού (mm)	κx/χh	Q ψύξης (W)	P el (W)	ε(-)
3528	460,4	39,64	0,07	20,02	1,5	9,506	99,9	24,2	32,2	0,752	23,9	490	4,9
4021	460,7	39,67	0,08	20,02	1,28	10,043	92,2	20,8	24,8	0,836	14,3	458	3,1
4223	460,8	39,99	0,06	20,02	1,17	10,027	89,5	18,8	21,4	0,876	6,7	395	1,7
4603	460,8	39,92	0,03	20,02	1,17	10,399	85,4	18,3	20,6	0,886	6,7	400	1,7
4021	500,8	39,51	0,06	20,02	1,55	10,057	92,3	23,9	29,1	0,823	28,7	610	4,7
4223	500,3	39,77	0,03	20,02	1,44	10,06	90,9	22,2	26,7	0,83	19,2	525	3,7
4603	500,7	39,8	0,04	20,02	1,39	10,402	87,6	20,6	24,2	0,852	16,2	500	3,2
4223	500,8	39,49	-0,04	20,02	1,72	9,836	89,9	26,3	30,6	0,857	75,1	628	12
4223	550,6	39,3	0,04	20,02	1,72	10,043	95,8	25,5	31,6	0,807	37,4	715	5,2
4603	550,2	39,37	0,06	20,02	1,61	10,388	91,3	23,6	28,3	0,834	32,5	648	5

Μεταβολή της σταθεράς του συνδεδετικού ελατηρίου CV													
CV(N/m)	Th(βαθμ. C)	Tw(βαθμ. C)	Tk(βαθμ. C)	Μέση πίεση (bar)	Πλάτος πίεσης (bar)	Συχνότητα (Hz)	Γωνία φάσης (μιορες)	Διαδρομή ψυχρού (mm)	Διαδρομή θερμού (mm)	κx/χh	Q ψύξης (W)	P el (W)	ε(-)
380	460,6	40,08	0,07	20,02	1,17	10,442	84,6	18	20,9	0,858	2,9	405	0,7
295	460,8	40,05	0,02	20,02	1,17	10,359	83,9	19,5	21,7	0,899	6,7	400	1,7
249	460,1	39,77	0,07	20,02	1,17	10,197	83,3	19,5	20,2	0,969	4,7	380	1,2
240	460,8	39,75	0,04	19,99	1,19	10,26	83,5	20,2	21,3	0,949	6,7	418	1,6
194	460,5	39,92	0,06	19,99	1,08	10,145	84	19,5	20	0,977	0	378	0
380	500,8	39,36	0,04	20,02	1,39	10,482	88,7	20,5	24,7	0,829	18,1	515	3,5
295	500,1	39,58	0,01	20,02	1,5	10,399	88	23	26,4	0,87	17	550	3,1
249	500,4	39,75	0,03	20,02	1,44	10,281	86,1	23,3	25,6	0,909	19,9	525	3,8
240	500,7	39,8	0,03	19,99	1,47	10,309	86,4	23,3	25,6	0,909	17,2	528	3,3
194	500,7	39,57	0,06	20,02	1,5	10,249	86	23,9	26,4	0,905	20,8	560	3,7
194	500,4	19,16	0,05	20,02	1,72	10,01	85,4	28,1	29,8	0,942	75,3	630	12
380	550,5	39,63	0,05	20,02	1,61	10,442	88						

736	500,3	39,91	-0,05	20,05	1,25	10,402	87,6	20,5	22	0,929	14,3	445	3,2
783,2	500,3	39,69	0,09	20,02	1,39	10,26	89,4	22,3	25	0,894	20,1	485	4,1
833,2	500,3	39,71	0,07	19,99	1,42	10,098	91,1	22,8	25,9	0,879	21,8	502	4,3
884,1	500,5	39,43	0,08	20,05	1,5	9,914	94,4	24,4	28,9	0,843	27,3	558	4,9
736	549,9	39,93	-0,02	20,02	1,55	10,395	89,7	23,8	26,6	0,894	24,7	595	4,2
783,2	549,8	39,56	0,05	20,02	1,61	10,208	90,8	24,8	28,6	0,869	34,4	610	5,6
833,2	550,4	39,76	0,03	19,99	1,64	10,067	93,1	25,8	30	0,859	39,7	645	6,2

Μεταβολή της μάζας του ψυχρού εκτοπιστή mk.													
mk(g)	Th(βαθμ. C)	Tw(βαθμ. C)	Tk(βαθμ. C)	Μέση πίεση (bar)	Πλάτος πίεσης (bar)	Συχνότητα (Hz)	Γωνία φάσης (μιορες)	Διαδρομή ψυχρού (mm)	Διαδρομή θερμού (mm)	xk/xh	Q ψύξης (W)	P el (W)	ε(-)
335	460,9	39,9	0	20,02	1	10,391	85,3	17	17	1	-1,9	315	-0,6
378,4	460	39,78	0,04	19,99	1,03	10,18	79,2	17,2	17,3	0,991	-0,9	315	-0,3
427,9	460,1	39,85	0,01	20,02	1,17	10,043	74,1	18,3	18,9	0,967	-1,9	359	-0,5
481	460,6	39,92	0,02	20,02	1,22	9,804	67,5	18,9	19,8	0,953	2,9	341	0,8
335	500,3	39,91	-0,05	20,05	1,25	10,402	87,6	20,5	22	0,929	14,3	445	3,2
378,4	500,3	40,26	-0,01	20,02	1,39	10,267	81,5	21,6	23,4	0,92	14,3	470	3
427,9	500,5	39,98	-0,04	20,02	1,44	10,088	76,6	21,9	24,1	0,909	13,3	485	2,7
427,9	520,9	39,9	-0,01	20,02	1,61	10,07	78	23,6	26,4	0,894	25,7	545	4,7
335	549,9	39,93	-0,02	20,02	1,55	10,395	89,7	23,8	26,6	0,894	24,7	595	4,2
378,4	550,5	39,94	-0,01	20,02	1,66	10,286	86,3	24,8	28	0,888	28,5	605	4,7

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ε

ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΜΗΧΑΝΗΣ ΤΟΥ THOMAS

Έχοντας τον αλγόριθμο που πρότεινε ο Thomas για τον υπολογισμό των πλατών ταλάντωσης των εκτοπιστών και τη συχνότητα ταλάντωσης, μπορούμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές απόσβεσης, προκειμένου η λειτουργία της μηχανής να είναι ευσταθής. Η εφαρμογή επίλυσης του αλγορίθμου μπορεί να γίνει με δύο τρόπους: α) γράφοντας κώδικα εντός του Mathcad και β) αποκλειστικά με τις βιβλιοθήκες του προγράμματος και το Mathcad παρέχει την δυνατότητα επίλυσης συστήματος εξισώσεων. Παρακάτω θα παρουσιαστούν και οι δύο τρόποι για τα δεδομένα της μηχανής του Thomas. Να υπενθυμίσουμε ότι το κέλυφος της μηχανής θα θεωρείται ακίνητο.

Δεδομένα:

Μέση πίεση (N/m)

$$p_0 := 20 \cdot 10^5 \quad y := 1.666$$

Μάζες (kg)

$$m_k := 0.335 \quad m_h := 0.736 \quad m_{gw} := 15.$$

Σταθερές ελατηρίων (N/m)

Όγκος αερίου ελατηρίου (m³)

$$C_h := 4603. \quad C_k := 0 \quad C_v := 194 \quad V_g := 950 \cdot 10^{-6}$$

Θερμοκρασίες (K)

$$T_k := 253 \quad T_w := 318 \quad T_h := 748$$

Επιφάνειες (m²)

$$A_{st} := 2.27 \cdot 10^{-4} \quad A_k := 34.21 \cdot 10^{-4} \quad A_h := 34.21 \cdot 10^{-4}$$

Όγκοι κυλίνδρων, εναλλακτών, αναγεννητών (m³)

$$V_{zk} := 87.7 \cdot 10^{-6} \quad V_{zw} := 103.3 \cdot 10^{-6} \quad V_{zh} := 89.2 \cdot 10^{-6}$$

$$V_{rk} := 42.75 \cdot 10^{-6} \quad V_{rh} := 66.35 \cdot 10^{-6}$$

$$V_{wk} := 14.97 \cdot 10^{-6} \quad V_{wwk} := 18.56 \cdot 10^{-6} \quad V_{wwh} := 11.36 \cdot 10^{-6} \quad V_{wh} := 8.35 \cdot 10^{-6}$$

Παράγοντες απώλειας πίεσης στους αναγεννητές

$$f_{rk} := 6.8 \cdot 10^6 \quad f_{rh} := 2.1 \cdot 10^6$$

Παράγοντες απώλειας πίεσης λόγω τύρβης

$$f_{wk} := 9.97 \cdot 10^7 \quad f_{kturb} := 6.62 \cdot 10^8 \quad f_{wwk} := 5.36 \cdot 10^7$$

$$f_{wh} := 8.22 \cdot 10^6 \quad f_{hturb} := 3.69 \cdot 10^8 \quad f_{wwh} := 1.33 \cdot 10^8$$

Θερμοκρασία αναγεννητών (K)

$$Trh := \frac{T_h - T_w}{\ln\left(\frac{T_h}{T_w}\right)} = 502.717 \quad Trk := \frac{T_w - T_k}{\ln\left(\frac{T_w}{T_k}\right)} = 284.262$$

$$c1 := \frac{V_{zk} + V_{wk}}{T_k} + \frac{V_{rk}}{Trk} + \frac{V_{wwk} + V_{zw} + V_{wwh}}{T_w} + \frac{V_{rh}}{Trh} + \frac{V_{wh} + V_{zh}}{T_h}$$

$$c2 := \frac{A_k - A_{st}}{T_w} - \frac{A_k}{T_k} \quad c3 := \frac{A_h}{T_h} - \frac{A_h - A_{st}}{T_w}$$

$$c4 := A_k \cdot \left(\frac{1}{T_k} - \frac{1}{T_w}\right) + A_h \cdot \left(\frac{1}{T_w} - \frac{1}{T_h}\right) \quad Cg := p_0 \cdot A_{st}^2 \cdot \frac{y}{V_g}$$

$$Ckstar := -A_{st} \cdot p_0 \cdot \frac{c2}{c1} \quad Chstar := -A_{st} \cdot p_0 \cdot \frac{c3}{c1} \quad Cgstar := A_{st} \cdot p_0 \cdot \frac{c4}{c1}$$

Σταθερές ακαμψίας

$$Kkk := Cg + Ck + Ckstar \quad Khh := Cg + Ch \cdot \left(1 + \frac{mh}{mg}\right) - Chstar - Cgstar \cdot \frac{mh}{mg}$$

$$Kkh := -Cg - Ckstar \quad Kkh := -Cg + Ck \cdot \frac{mh}{mg} + Chstar + Cgstar \cdot \frac{mh}{mg}$$

Ιδιοσυχνότητες εκτοπιστών

$$\omega_k := \left(\frac{Kkk}{mk}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \omega_h := \left(\frac{Khh}{mh}\right)^{\frac{1}{2}}$$

A) Υπολογισμός με κώδικα:

$$\begin{aligned}
 f(x_h, x_k, \omega_0) := & \left. \begin{aligned}
 & f_{wkges} \leftarrow \frac{8}{3\pi} f_{wwk} \cdot \left(\frac{T_w}{T_k} \right)^2 \cdot A_k \cdot \omega_0 \cdot x_k + f_{rk} \cdot \frac{T_{rk}}{T_k} + \frac{8}{(3\pi)} f_{wk} \cdot A_k \cdot \omega_0 \cdot x_k \\
 & D_{kk} \leftarrow A_k \cdot f_{wkges} \cdot \left(A_k + V_{zk} \cdot \frac{c_2}{c_1} \right) \\
 & D_{kh} \leftarrow A_k \cdot f_{wkges} \cdot V_{zk} \cdot \frac{c_3}{c_1} \\
 & Q_k \leftarrow \frac{m_k \cdot \omega_k}{2 \cdot \pi \cdot D_{kk}} \\
 & f_{whges} \leftarrow \frac{8}{3\pi} f_{wwh} \cdot \left(\frac{T_w}{T_h} \right)^2 \cdot A_h \cdot \omega_0 \cdot x_h + f_{rh} \cdot \frac{T_{rh}}{T_h} + \frac{8}{(3\pi)} f_{wh} \cdot A_h \cdot \omega_0 \cdot x_h \\
 & D_{hh} \leftarrow A_h \cdot f_{whges} \cdot \left(A_h - V_{zh} \cdot \frac{c_3}{c_1} \right) \\
 & D_{hk} \leftarrow -A_h \cdot f_{whges} \cdot V_{zh} \cdot \frac{c_2}{c_1} \\
 & Q_h \leftarrow \frac{m_h \cdot \omega_h}{2 \cdot \pi \cdot D_{hh}} \\
 & \omega_{02} \leftarrow \left[\frac{-2 \cdot \pi \cdot \frac{(K_{kh} \cdot D_{hk} + K_{hk} \cdot D_{kh})}{m_k \cdot m_h} + \omega_k \cdot \omega_h \cdot \left(\frac{\omega_k}{Q_h} + \frac{\omega_h}{Q_k} \right)}{\frac{\omega_k}{Q_k} + \frac{\omega_h}{Q_h}} \right]^{\frac{1}{2}} \\
 & x_{k2} \leftarrow x_h \cdot \left[\frac{\omega_{02}^2 \cdot D_{kh}^2 + K_{kh}^2}{m_k^2 \left[(\omega_k^2 - \omega_{02}^2)^2 + \left[\omega_k \cdot \frac{\omega_{02}}{(2\pi \cdot Q_k)} \right]^2 \right]} \right]^{\frac{1}{2}} \\
 & \text{while } \left| \frac{D_{kk} \cdot D_{hh} - D_{kh} \cdot D_{hk} + \frac{(K_{kh} \cdot K_{hk} - K_{kk} \cdot K_{hh})}{\omega_{02}^2}}{\omega_{02}^2 - \omega_k^2 - \omega_h^2} - m_k \cdot m_h \right| > 0.001 \\
 & \quad \left. \begin{aligned}
 & x_h \leftarrow x_h + 0.00001 \\
 & \text{while } |x_k - x_{k2}| > 0.0001 \\
 & \quad x_k \leftarrow x_{k2} \\
 & \text{while } |\omega_{02} - \omega_0| > 0.0001 \\
 & \quad \omega_0 \leftarrow \omega_{02}
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}
 \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{wkges} &\leftarrow \frac{8}{3\pi} f_{wkw} \cdot \left(\frac{T_w}{T_k}\right)^2 \cdot A_k \cdot \omega_0 \cdot x_k + f_{rk} \cdot \frac{Tr_k}{T_k} + \frac{8}{(3\pi)} f_{wk} \cdot A_k \cdot \omega_0 \cdot x_k \\
D_{kk} &\leftarrow A_k \cdot f_{wkges} \cdot \left(A_k + V_{zk} \cdot \frac{c^2}{c_1}\right) \\
D_{kh} &\leftarrow A_k \cdot f_{wkges} \cdot V_{zk} \cdot \frac{c^3}{c_1} \\
Q_h &\leftarrow \frac{m_k \cdot \omega_k}{2 \cdot \pi \cdot D_{kk}} \\
f_{whges} &\leftarrow \frac{8}{3\pi} f_{whw} \cdot \left(\frac{T_w}{T_h}\right)^2 \cdot A_h \cdot \omega_0 \cdot x_h + f_{rh} \cdot \frac{Tr_h}{T_h} + \frac{8}{(3\pi)} f_{wh} \cdot A_h \cdot \omega_0 \cdot x_h \\
D_{hh} &\leftarrow A_h \cdot f_{whges} \cdot \left(A_h - V_{zh} \cdot \frac{c^3}{c_1}\right) \\
D_{hk} &\leftarrow -A_h \cdot f_{whges} \cdot V_{zh} \cdot \frac{c^2}{c_1} \\
Q_h &\leftarrow \frac{m_h \cdot \omega_h}{2 \cdot \pi \cdot D_{hh}} \\
\omega_{02} &\leftarrow \left[\frac{-2 \cdot \pi \cdot \frac{(K_{kh} \cdot D_{hk} + K_{hk} \cdot D_{kh})}{m_k \cdot m_h} + \omega_k \cdot \omega_h \cdot \left(\frac{\omega_k}{Q_h} + \frac{\omega_h}{Q_k}\right)}{\frac{\omega_k}{Q_k} + \frac{\omega_h}{Q_h}} \right]^{\frac{1}{2}} \\
x_{k2} &\leftarrow x_h \cdot \left[\frac{\omega_{02}^2 \cdot D_{kh}^2 + K_{kh}^2}{m_k^2 \left[(\omega_k^2 - \omega_{02}^2)^2 + \left[\omega_k \cdot \frac{\omega_{02}}{(2\pi \cdot Q_k)} \right]^2 \right]} \right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x_h \\ x_k \\ \omega_0 \end{pmatrix}$$

$$f(-0.1, -0.1, 60) = \begin{pmatrix} -0.078 \\ -0.055 \\ 59.877 \end{pmatrix}$$

Πλάτος θερμού εκτοπιστή $x_h := f(-0.1, -0.1, 60)_0$

Πλάτος ψυχρού εκτοπιστή $x_k := f(-0.1, -0.1, 60)_1$

Συχνότητα ταλάντωσης $\omega_0 := f(-0.1, -0.1, 60)_2$

Ας εξηγήσουμε σύντομα τι γράφουμε στον κώδικα. Αρχικά υποθέτουμε κάποιες αρχικές τιμές για τα ζητούμενα μεγέθη (x_k, x_h, ω_0). Στην συνέχεια αφού υπολογίσουμε τοπικά όλες τις απαραίτητες παραμέτρους (Q, D κ.α) με την εντολή $\blacksquare \leftarrow \blacksquare$, συνεχίζουμε με τον υπολογισμό της τιμής ω_0 από την εξίσωση 2.63 και το υπολογισμό του x_{k2} από την εξίσωση 2.67, με την ίδια εντολή $\blacksquare \leftarrow \blacksquare$. Ύστερα διαμορφώνουμε τον **εξωτερικό βρόγχο**. Αυτό επιτυγχάνεται με την εντολή `while` \blacksquare . Στην

ουσία πάμε στην εξίσωση 2.64 και ζητάμε η απόλυτη τιμή της διαφοράς των δύο όρων να είναι μεγαλύτερη από μία τιμή, συγκεκριμένα 0.001. Όσο ικανοποιείται αυτή η συνθήκη το x_h θα αυξάνεται κατά το βήμα που ορίσαμε, δηλαδή 0.00001. Μπορούμε να καταλάβουμε ότι όταν παραβιαστεί αυτή η συνθήκη, δηλαδή η διαφορά των δύο όρων γίνει μικρότερη του 0.001 σημαίνει ότι βρήκαμε το ζητούμενο x_h . Όσο αφορά τους **εσωτερικούς βρόγχους** ζητάμε οι απόλυτες διαφορές των $x_{k2} - x_k$ και $\omega_0 - \omega_0$ να είναι μεγαλύτερες κάποιας τιμής. Όσο ικανοποιούνται αυτές οι συνθήκες θα ορίζονται εκ νέου τα x_k ως x_{k2} και ω_0 ως ω_0 . Ξαναυπολογίζουμε Q, D κ.α και υπολογίζουμε τα ω_0 και x_{k2} , όπως στην αρχή. Κάνουμε σύγκριση με τα x_k και ω_0 του προηγούμενου βήματος. Ικανοποιούνται οι συνθήκες που ορίσαμε όσο αφορά τις διαφορές των x_k και ω_0 ; Αν ναι παραμένουμε εντός του βρόγχου και υπολογίζουμε εκ νέου τα x_{k2} και ω_0 . Αν όχι, που σημαίνει ότι τα νέα x_k και ω_0 με τα παλιά συγκλίνουν κατά πολύ, πάμε στην συνθήκη του εξωτερικού βρόγχου. Ικανοποιείται η συνθήκη αυτή; Αν ναι αυξάνουμε το x_h κατά το βήμα που ορίσαμε και επαναλαμβάνεται η όλη διαδικασία, αν όχι, έχουμε βρει τα ζητούμενα μεγέθη και εδώ τερματίζει το πρόγραμμά μας.

Υπολογισμός συντελεστών απόσβεσης

$$f_{wkges} := \frac{8}{3\pi} f_{wkw} \cdot \left(\frac{T_w}{T_k} \right)^2 \cdot A_k \cdot \omega_0 \cdot x_k + f_{rk} \cdot \frac{T_{rk}}{T_k} + \frac{8}{(3\pi)} f_{wk} \cdot A_k \cdot \omega_0 \cdot x_k$$

$$D_{kk} := A_k \cdot f_{wkges} \cdot \left(A_k + V_{zk} \cdot \frac{c_2}{c_1} \right) \quad D_{kh} := A_k \cdot f_{wkges} \cdot V_{zk} \cdot \frac{c_3}{c_1} \quad Q_k := \frac{m_k \cdot \omega_k}{2 \cdot \pi \cdot D_{kk}}$$

$$f_{whges} := \frac{8}{3\pi} f_{whw} \cdot \left(\frac{T_w}{T_h} \right)^2 \cdot A_h \cdot \omega_0 \cdot x_h + f_{rh} \cdot \frac{T_{rh}}{T_h} + \frac{8}{(3\pi)} f_{wh} \cdot A_h \cdot \omega_0 \cdot x_h$$

$$D_{hh} := A_h \cdot f_{whges} \cdot \left(A_h - V_{zh} \cdot \frac{c_3}{c_1} \right) \quad D_{hk} := -A_h \cdot f_{whges} \cdot V_{zh} \cdot \frac{c_2}{c_1} \quad Q_h := \frac{m_h \cdot \omega_h}{2 \cdot \pi \cdot D_{hh}}$$

Να υπενθυμίσουμε σε αυτό το σημείο ότι οι εξισώσεις κινήσεις των εκτοπιστών είναι οι εξής:

$$x''_k(t) = \frac{-D_{kk}}{m_k} x'_k(t) - \frac{D_{kh}}{m_k} \cdot x'_h(t) - \frac{K_{kk}}{m_k} x_k(t) - \frac{K_{kh}}{m_k} x_h(t)$$

$$x''_h(t) = \frac{-Dhk}{mh} x'_k(t) - \frac{Dhh}{mh} x'_h(t) - \frac{Khk}{mh} x_k(t) - \frac{Khh}{mh} x_h(t)$$

Επί προκύπτει ένα σύστημα δύο διαφορικών εξισώσεων, το οποίο σε μορφή πινάκων γράφεται:

$$\begin{pmatrix} x'_k(t) \\ x'_h(t) \\ x''_k(t) \\ x''_h(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-Kkk}{mk} & \frac{-Kkh}{mk} & \frac{-Dkk}{mk} & \frac{-Dkh}{mk} \\ \frac{-Khk}{mh} & \frac{-Khh}{mh} & \frac{-Dhk}{mh} & \frac{-Dhh}{mh} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_k(t) \\ x_h(t) \\ x'_k(t) \\ x'_h(t) \end{pmatrix}$$

$$\underline{A} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-Kkk}{mk} & \frac{-Kkh}{mk} & \frac{-Dkk}{mk} & \frac{-Dkh}{mk} \\ \frac{-Khk}{mh} & \frac{-Khh}{mh} & \frac{-Dhk}{mh} & \frac{-Dhh}{mh} \end{pmatrix} \quad \underline{m} := \text{eigenvals}(A) \quad m = \begin{pmatrix} -157.743 \\ -49.647 \\ -0.119 + 60.354i \\ -0.119 - 60.354i \end{pmatrix}$$

Ο υπολογισμός με κώδικα, όπως μπορούμε να δούμε έχει κάποια σοβαρά μειονεκτήματα. Το πρώτο και βασικότερο είναι ότι οι αρχικές τιμές που θα δόσουμε για να ξεκινήσει η επίλυση, πρέπει να είναι κοντά στις πραγματικές λύσεις, αλλιώς δεν επιλύεται το σύστημα. Και δεύτερον όπως βλέπουμε από τις ιδιοτιμές m του πίνακα A , είμαστε μεν κοντά στην ευστάθεια, αλλά δεν έχουμε ευσταθή λειτουργία (πρέπει οι ιδιοτιμές να είναι δύο αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί και δύο φανταστικοί και όχι μιγαδικοί όπως προέκυψαν εδώ).

Από την άλλη όπως θα δούμε, ο υπολογισμός με τις βιβλιοθήκες δεν έχει κανένα από τα δύο μειονεκτήματα.

B) Υπολογισμός με τις βιβλιοθήκες του Mathcad:

Γράφουμε τους συντελεστές απώλειας σαν συναρτήσεις των πλατών των εκτοπιστών και της συχνότητας

$$f_{wkges}(\omega_0, x_k) := \frac{8}{3\pi} f_{wkw} \cdot \left(\frac{T_w}{T_k}\right)^2 \cdot A_k \cdot \omega_0 \cdot x_k + f_{rk} \cdot \frac{T_{rk}}{T_k} + \frac{8}{(3\pi)} f_{wk} \cdot A_k \cdot \omega_0 \cdot x_k$$

$$D_{kk}(x_k, \omega_0) := A_k \cdot f_{wkges}(\omega_0, x_k) \cdot \left(A_k + V_{zk} \cdot \frac{c_2}{c_1}\right)$$

$$D_{kh}(x_k, \omega_0) := A_k \cdot f_{wkges}(\omega_0, x_k) \cdot V_{zk} \cdot \frac{c_3}{c_1}$$

$$Q_k(x_k, \omega_0) := \frac{m_k \cdot \omega_k}{2 \cdot \pi \cdot D_{kk}(x_k, \omega_0)}$$

$$f_{whges}(x_h, \omega_0) := \frac{8}{3\pi} f_{whw} \cdot \left(\frac{T_w}{T_h}\right)^2 \cdot A_h \cdot \omega_0 \cdot x_h + f_{rh} \cdot \frac{T_{rh}}{T_h} + \frac{8}{(3\pi)} f_{wh} \cdot A_h \cdot \omega_0 \cdot x_h$$

$$D_{hh}(x_h, \omega_0) := A_h \cdot f_{whges}(x_h, \omega_0) \cdot \left(A_h - V_{zh} \cdot \frac{c_3}{c_1}\right)$$

$$D_{hk}(x_h, \omega_0) := -A_h \cdot f_{whges}(x_h, \omega_0) \cdot V_{zh} \cdot \frac{c_2}{c_1}$$

$$Q_h(x_h, \omega_0) := \frac{m_h \cdot \omega_h}{2 \cdot \pi \cdot D_{hh}(x_h, \omega_0)}$$

Αρχικές τιμές: $\omega_0 := 60$ $x_k := 0.005$ $x_h := 0.005$

Given

$$\omega_0 = \left[\frac{-2 \cdot \pi \cdot \frac{(K_{kh} \cdot D_{hk}(x_h, \omega_0) + K_{hk} \cdot D_{kh}(x_k, \omega_0))}{m_k \cdot m_h} + \omega_k \cdot \omega_h \cdot \left(\frac{\omega_k}{Q_h(x_h, \omega_0)} + \frac{\omega_h}{Q_k(x_k, \omega_0)}\right)}{\frac{\omega_k}{Q_k(x_k, \omega_0)} + \frac{\omega_h}{Q_h(x_h, \omega_0)}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\left| \frac{x_k}{x_h} \right| = \left[\frac{\omega_0^2 \cdot D_{kh}(x_k, \omega_0)^2 + K_{kh}^2}{m_k^2 \left[(\omega_k^2 - \omega_0^2)^2 + \left[\omega_k \cdot \frac{\omega_0}{(2\pi \cdot Q_k(x_k, \omega_0))} \right]^2 \right]} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$m_k \cdot m_h = \frac{D_{kk}(x_k, \omega_0) \cdot D_{hh}(x_h, \omega_0) - D_{kh}(x_k, \omega_0) \cdot D_{hk}(x_h, \omega_0) + \frac{(K_{kh} \cdot K_{hk} - K_{kk} \cdot K_{hh})}{\omega_0^2}}{\omega_0^2 - \omega_k^2 - \omega_h^2}$$

$$M := \text{Find}(x_h, x_k, \omega_0) = \begin{pmatrix} -0.089 \\ -0.045 \\ 60.369 \end{pmatrix}$$

Πλάτος θερμού εκτοπιστή $\underline{x}_h := M_0$

Πλάτος ψυχρού εκτοπιστή $\underline{x}_k := M_1$

Συχνότητα ταλάντωσης $\underline{\omega}_0 := M_2$

Υπολογίζουμε εκ νέου τους συντελεστές απόσβεσης με τις σωστές τιμές των πλατών και συχνότητας.

$$\underline{fwkges} := \frac{8}{3\pi} f_{wk} \cdot \left(\frac{T_w}{T_k} \right)^2 \cdot A_k \cdot \omega_0 \cdot x_k + f_{rk} \cdot \frac{T_{rk}}{T_k} + \frac{8}{(3\pi)} f_{wk} \cdot A_k \cdot \omega_0 \cdot x_k$$

$$\underline{Dkk} := A_k \cdot \underline{fwkges} \cdot \left(A_k + V_{zk} \cdot \frac{c^2}{c_1} \right)$$

$$\underline{Dkh} := A_k \cdot \underline{fwkges} \cdot V_{zk} \cdot \frac{c^3}{c_1}$$

$$\underline{Qk} := \frac{m_k \cdot \omega_k}{2 \cdot \pi \cdot Dkk}$$

$$\underline{fwhges} := \frac{8}{3\pi} f_{wh} \cdot \left(\frac{T_w}{T_h} \right)^2 \cdot A_h \cdot \omega_0 \cdot x_h + f_{rh} \cdot \frac{T_{rh}}{T_h} + \frac{8}{(3\pi)} f_{wh} \cdot A_h \cdot \omega_0 \cdot x_h$$

$$\underline{Dhh} := A_h \cdot \underline{fwhges} \cdot \left(A_h - V_{zh} \cdot \frac{c^3}{c_1} \right)$$

$$\underline{Dhk} := -A_h \cdot \underline{fwhges} \cdot V_{zh} \cdot \frac{c^2}{c_1}$$

$$\underline{Qh} := \frac{m_h \cdot \omega_h}{2 \cdot \pi \cdot Dhh}$$

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-Kkk}{mk} & \frac{-Kkh}{mk} & \frac{-Dkk}{mk} & \frac{-Dkh}{mk} \\ \frac{-Khk}{mh} & \frac{-Khh}{mh} & \frac{-Dhk}{mh} & \frac{-Dhh}{mh} \end{pmatrix}$$

Αρχικές τιμές: $\underline{Y0} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.011 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ιδιοτιμές: $\underline{m} := \text{eigenvals}(A)$ $m = \begin{pmatrix} -171.219 \\ -45.717 \\ 60.369i \\ -60.369i \end{pmatrix}$

Ιδιοδιανύσματα: $\underline{v} := \text{eigenvecs}(A)$

$X' = A \cdot X$ $\underline{c} := \text{lsolve}(\underline{v}, Y0)$ $\underline{N} := \text{cols}(A)$

$$\underline{S}(t, i) := \sum_{n=0}^{N-1} \left(c_n \cdot v_{i,n} \cdot e^{m_n \cdot t} \right)$$

$$\underline{S}(t, i) := c_0 \cdot v_{i,0} \cdot e^{m_0 \cdot t} + c_1 \cdot v_{i,1} \cdot e^{m_1 \cdot t} + c_2 \cdot v_{i,2} \cdot e^{m_2 \cdot t} + c_3 \cdot v_{i,3} \cdot e^{m_3 \cdot t}$$

$t := 0, 0.001 \dots 1$

$x_k(t) := \text{Re}(S(t, 2))$ $x_k(t) := \text{Re}(S(t, 0))$ $v_h(t) := \text{Re}(S(t, 3))$ $x_h(t) := \text{Re}(S(t, 1))$

