ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΥΠΑΡΞΗ ΛΥΣΕΩΝ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ ΕΙΔΙΚΩΝ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΕΞΕΛΙΚΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΚΥΡΙΑΚΗΣ Γ. ΒΑΣΙΛΑΚΟΠΟΥΛΟΥ
Πτυχιούχου Μαθηματικού ΕΚΠΑ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ:
ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΚΡΑΒΒΑΡΙΤΗΣ
Ομ. Καθηγητής ΕΜΠ

ΑΘΗΝΑ, Οκτώβριος 2016

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΥΠΑΡΞΗ ΛΥΣΕΩΝ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ ΕΙΔΙΚΩΝ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΕΞΕΛΙΚΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΚΥΡΙΑΚΗΣ Γ. ΒΑΣΙΛΑΚΟΠΟΥΛΟΥ
Πτυχιούχου Μαθηματικού ΕΚΠΑ

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

1. Δ. ΚΡΑΒΒΑΡΙΤΗΣ, Ομ. Καθ. ΕΜΠ (Επιβλέπων)
2. Β. Γ. ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ, Καθ. ΕΜΠ
3. Α. ΓΙΑΝΝΑΚΟΠΟΥΛΟΣ, Καθ. ΟΠΑ

ΕΠΤΑΜΕΛΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

1. Δ. ΚΡΑΒΒΑΡΙΤΗΣ, Ομ. Καθ. ΕΜΠ
2. Β. Γ. ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ, Καθ. ΕΜΠ
3. Α. ΓΙΑΝΝΑΚΟΠΟΥΛΟΣ, Καθ. ΟΠΑ
4. Κ. ΚΥΡΙΑΚΗ, Καθ. ΕΜΠ
5. Α. ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΠΟΥΛΟΣ, Καθ. ΕΜΠ
6. Ν. ΓΙΑΝΝΑΚΑΚΗΣ, Επ. Καθ. ΕΜΠ
7. Γ. ΣΜΥΡΛΗΣ, Επ. Καθ. ΕΜΠ

ΑΘΗΝΑ, Οκτώβριος 2016

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω τις βαθύτατες ευχαριστίες μου στον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Δημήτριο Κραββαρίτη, Ομ. Καθ. Ε.Μ.Π., και στους καθηγητές κ. Βασίλειο Παπανικολάου, Καθ. Ε.Μ.Π. και κ. Αθανάσιο Γιαννακόπουλο, Καθ. Ο.Π.Α., που αποτελούν την τριμελή επιτροπή μου. Τους ευχαριστώ για την καθοδήγηση, το αμέριστο ενδιαφέρον και την πολύτιμη βοήθεια που μου προσέφεραν, τόσο για την εκπόνηση της διδακτορικής διατριβής μου, όσο και γενικότερα για τις δραστηριότητές μου στη Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω την κα. Κυριακή Κυριάκη, Καθ. Ε.Μ.Π., τον κ. Αντώνιο Χαραλαμπόπουλο, Καθ. Ε.Μ.Π., τον κ. Νικόλαο Γιαννακάκη, Επ. Καθ. Ε.Μ.Π., και τον κ. Γεώργιο Σμυρλή, Επ. Καθ. Ε.Μ.Π., για την τιμή που μου έκαναν να συμμετάσχουν στην επταμελή εξεταστική επιτροπή για την αξιολόγηση της διδακτορικής διατριβής μου, αλλά και το ενδιαφέρον που έδειχναν για την πρόοδό μου.

Τέλος, ευχαριστώ την οικογένειά μου που με στηρίζει ένθερμα στις επιλογές μου, στις σπουδές μου, και στη ζωή μου.

Περίληψη

Το αντικείμενο αυτής της διδακτορικής διατριβής είναι η ύπαρξη λύσεων ομοιότητας ειδικών μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με εφαρμογές στην εξελικτική θεωρία παιγνίων. Στην παρούσα διδακτορική διατριβή μελετάται μια οικογένεια διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους και μη τοπικούς όρους. Οι εξισώσεις αυτές προέρχονται από την εξελικτική θεωρία παιγνίων και ανήκουν στην κατηγορία των εξισώσεων/μοντέλων αναπαραγόμενης δυναμικής. Η μορφή των εξισώσεων είναι

$$u_t = [Au - (u, Au)]\, u,\ t > 0,$$

όπου ο A είναι ένας γραμμικός διαφορικός μη συμμετρικός και χρονοεξαρτώμενος τελεστής. Ο A είναι πυκνά ορισμένος σε έναν χώρο Hilbert $L_2(S)$, όπου S είναι ένα ανοικτό χωρίο του $\mathbb{R}^d$. Στα συγκεκριμένα μοντέλα το σύνολο S αναπαριστά τον χώρο των καθαρών στρατηγικών.

Στο πρώτο κεφάλαιο αυτής της διδακτορικής διατριβής παρουσιάζεται η γενική μορφή της αναπαραγόμενης δυναμικής στην περίπτωση όπου το σύνολο S είναι πεπερασμένο ή μη. Επιπρόσθετα, στο πρώτο κεφάλαιο αναφέρεται η σύνδεση της Nash ισορροπίας με τα παίγνια αναπαραγόμενης δυναμικής.

Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται η μελέτη της εξίσωσης της αναπαραγόμενης δυναμικής στην περίπτωση που το σύνολο των καθαρών στρατηγικών S είναι το $\mathbb{R}$ και ο τελεστής αμοιβής A είναι ένας μη συμμετρικός και χρονοεξαρτώμενος τελεστής, και είναι ο εξής

$$Au(t,x) := u_{xx} + \alpha t^{\gamma} x u_x,\ t > 0,\ x \in \mathbb{R},$$

όπου $\gamma = -2/3$ ενώ $\alpha > 0$ είναι μία παράμετρος. Τότε, η εξίσωση του αναπαραγόμενου δυναμικού μοντέλου γίνεται

$$u_t = \left[u_{xx} + \alpha t^{\gamma} x u_x - \int_{-\infty}^{\infty} (u u_{xx} + \alpha t^{\gamma} x u u_x)\, dx \right] u,$$

όπου $u = u(t,x)$ με $t > 0$ και $x \in \mathbb{R}$. Η εξίσωση αυτή είναι μία ολοκληροδιαφορική εξίσωση με μη τοπικούς όρους. Αποδεικνύεται ότι η εξίσωση αυτή έχει μία μονοπαραμετρική οικογένεια λύσεων ομοιότητας της μορφής

$$u(t,x) = t^{-\frac{1}{3}} g\left(x t^{-\frac{1}{3}} \right),$$

που όλες προσεγγίζουν τη συνάρτηση Dirac $\delta(x)$ καθώς $t \to 0^+$. Ως συναρτήσεις του x, όλες αυτές οι λύσεις είναι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας στον χώρο $\mathbb{R}$, για κάθε $t > 0$ και μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως χρονοεξελισσόμενες μεικτές στρατηγικές για έναν παίκτη. Επιπλέον, μελετώνται οι ιδιότητες της συνάρτησης g και γενικά η δομή αυτής της μονοπαραμετρικής οικογένειας λύσεων ομοιότητας της εξίσωσης της αναπαραγόμενης δυναμικής.

Στο τρίτο κεφάλαιο αυτής της διδακτορικής διατριβής γίνεται η μελέτη της εξίσωσης της αναπαραγόμενης δυναμικής στην περίπτωση που το σύνολο των καθαρών στρατηγικών S είναι ο Ευκλείδειος d-διάστατος χώρος $\mathbb{R}^d$ με $d \geq 2$, ενώ ο τελεστής αμοιβής A είναι ένας μη συμμετρικός και χρονοεξαρτώμενος τελεστής, και είναι ο εξής

$$Au(t,x) := \Delta u(t,x) + \alpha t^{\gamma} x \cdot \nabla u(t,x), \ t > 0, \ x \in \mathbb{R}^d$$

όπου $\gamma = -\frac{2}{d+2}$, ενώ $\alpha > 0$ είναι μία παράμετρος και οι τελεστές Δ και ∇ δρούν πάνω στη μεταβλητή x. Σ' αυτήν την περίπτωση, η αντίστοιχη εξίσωση του αναπαραγόμενου δυναμικού μοντέλου γίνεται

$$u_t = \left[\Delta u + \alpha t^{\gamma} x \cdot \nabla u - \int_{\mathbb{R}^d} (u \Delta u + \alpha t^{\gamma} u x \cdot \nabla u)\, dx \right] u,$$

όπου $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$.
Η παραπάνω εξίσωση είναι μία ολοκληροδιαφορική εξίσωση με μη τοπικούς όρους. Αποδεικνύεται ότι η εξίσωση έχει μία μονοπαραμετρική οικογένεια λύσεων ομοιότητας της μορφής

$$u(t,x) = t^{-\frac{d}{d+2}} g_d\left(r t^{-\frac{1}{d+2}} \right), \text{ όπου } r := |x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2},$$

που όλες προσεγγίζουν τη συνάρτηση Dirac $\delta(x)$ καθώς $t \to 0^+$. Ως συναρτήσεις του x, όλες αυτές οι λύσεις είναι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας στον χώρο $\mathbb{R}^d$, για κάθε $t > 0$ και μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως χρονοεξελισσόμενες μεικτές στρατηγικές για έναν παίκτη. Στο τρίτο κεφάλαιο αποδεικνύονται επιπλέον οι ιδιότητες της συνάρτησης g_d και γενικά η δομή αυτής της μονοπαραμετρικής οικογένειας λύσεων ομοιότητας της εξίσωσης του αναπαραγόμενου δυναμικού μοντέλου.

Abstract

The topic of this doctoral dissertation is the existence of self-similar solutions for special nonlinear differential equations with applications in evolutionary game theory. We consider a nonlinear differential equation containing a non-local term. These equations come from evolutionary game theory and belong to the category of equations/models of replicators dynamics.

The form of these equations is

$$u_t = [Au - (u, Au)]\, u,\ t > 0,$$

where A is a linear differential nonsymmetric and time-dependent operator. The operator A is dense defined in Hilbert space $L_2(S)$, where S is an open set of $\mathbb{R}^d$. In these models S represents the set of pure strategies.

In the first chapter we present the general form of the replicator dynamic equation where the set S of pure strategies is finite or continuum. Also, we refer to the connection between the Nash equilibrium and the games of the replicators dynamics.

In the second chapter we consider the replicator dynamic equation when the set $S = \mathbb{R}$ and the payoff operator A is the linear differential nonsymmetric and time-dependent operator

$$Au(t, x) := u_{xx} + \alpha t^{\gamma} x u_x,\ t > 0,\ x \in \mathbb{R},$$

where $\gamma = -2/3$ and $\alpha > 0$ is a parameter. Then, the replicator dynamic

equation becomes

$$u_t = \left[u_{xx} + \alpha t^{\gamma} x u_x - \int_{-\infty}^{\infty} (u u_{xx} + \alpha t^{\gamma} x u u_x)\, dx \right] u,$$

where $u = u(t,x)$ with $t > 0$ and $x \in \mathbb{R}$. This equation is an integrodifferential equation containing a nonlocal term. We prove that the above equation possesses an one-parameter familly of self-similar solutions, namely solutions u of the form

$$u(t,x) = t^{-\frac{1}{3}} g\left(x t^{-\frac{1}{3}} \right),$$

where all solutions approach Dirac delta function $\delta(x)$ as $t \to 0^+$. Viewed as function of x, all those solutions are probability densities on $\mathbb{R}$, for each $t > 0$ and can serve as time-evolving mixed strategies of a player. Also, we prove the properties of the function g and generally we consider the construction of this one-parameter familly of self-similar solutions for the above replicator dynamic model.

Finally, in the third chapter of this doctoral dissertation we consider the replicator dynamic equation when the set $S = \mathbb{R}^d$ with $d \geq 2$, and the payoff operator A is the linear differential nonsymmetric and time-dependent operator

$$Au(t,x) := \Delta u(t,x) + \alpha t^{\gamma} x \cdot \nabla u(t,x),\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d,$$

where $\gamma = -\frac{2}{d+2}$, $\alpha > 0$ is a parameter, while the operators Δ and ∇ are acting on the x variable. In this case, the corresponding replicator dynamic problem takes the form

$$u_t = \left[\Delta u + \alpha t^{\gamma} x \cdot \nabla u - \int_{\mathbb{R}^d} (u \Delta u + \alpha t^{\gamma} u x \cdot \nabla u)\, dx \right] u,$$

where $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$. This equation is an integrodifferential equation containing a nonlocal term. We prove that the above equation possesses an one-parameter familly of self-similar solutions, namely solutions u of the form

$$u(t,x) = t^{-\frac{d}{d+2}} g_d \left(r t^{-\frac{1}{d+2}} \right),\ \text{where } r := |x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2},$$

where all solutions approach Dirac delta function $\delta(x)$ as $t \to 0^+$. Viewed as function of x, all those solutions are probability densities on $\mathbb{R}^d$, for each $t > 0$ and can serve as time-evolving mixed strategies of a player. Furthermore, we prove the properties of the function g_d and generally we consider the construction of this one-parameter familly of self-similar solutions for the above replicator dynamic model.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Το αντικείμενο αυτής της διδακτορικής διατριβής είναι η ύπαρξη λύσεων ομοιότητας ειδικών μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με εφαρμογές στην εξελικτική θεωρία παιγνίων.

Στην παρούσα διδακτορική διατριβή μελετάται μια οικογένεια διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους και μη τοπικούς όρους. Οι εξισώσεις αυτές προέρχονται από την εξελικτική θεωρία παιγνίων και ανήκουν στην κατηγορία των εξισώσεων/μοντέλων αναπαραγόμενης δυναμικής (replicators dynamics).

Η μορφή των εξισώσεων είναι

$$u_t = [Au - (u, Au)]\, u, \ t > 0, \tag{1}$$

όπου ο A είναι ένας γραμμικός διαφορικός μη συμμετρικός και χρονοεξαρτώμενος τελεστής. Ο A είναι πυκνά ορισμένος σε έναν χώρο Hilbert $L_2(S)$, όπου S είναι ένα ανοικτό χωρίο του $\mathbb{R}^d$. Στα συγκεκριμένα μοντέλα το σύνολο S αναπαριστά τον χώρο των καθαρών στρατηγικών (pure strategies).

Τα μοντέλα της αναπαραγόμενης δυναμικής (replicators dynamics) εμφανίζονται συχνά στην εξελικτική θεωρία παιγνίων και έχουν σημαντικές εφαρμογές στις οικονομικές επιστήμες, στην πληθυσμιακή βιολογία όπως και σε άλλες επιστήμες [3, 4, 10, 11].

Η εξελικτική θεωρία παιγνίων σχετίζεται με ολόκληρους πληθυσμούς παικτών, που είναι όλοι προγραμματισμένοι να χρησιμοποιήσουν κάποια στρατηγική (ή τύπο συμπεριφοράς). Τα παίγνια αναπαραγόμενης δυναμικής αποτελούν σημαντικό μέρος της σύγχρονης θεωρίας παιγνίων, η οποία προσπαθεί να εξηγήσει, πως ένας πληθυσμός από παίκτες ανανεώνουν τις στρατηγικές τους κατά

τη διάρκεια του παιγνίου, ώστε να επιτευχθεί η στρατηγική επιτυχίας. Οι αμοιβές εξαρτώνται από τις ενέργειες των συμπαικτών και επομένως εξαρτώνται από τις συχνότητες των στρατηγικών που προκύπτουν μέσα στον πληθυσμό. Δεδομένου ότι οι αμοιβές εξαρτώνται από τις συχνότητες με τις οποίες οι διάφορες στρατηγικές προκύπτουν και εφ' όσον αυτές οι συχνότητες αλλάζουν σύμφωνα με τις αμοιβές, αυτό μας οδηγεί σ' έναν βρόχο ανάδρασης, η δυναμική του οποίου θα καθορίσει τη συμπεριφορά του παιγνίου για μεγάλο χρονικό διάστημα. Το θέμα της αναπαραγόμενης θεωρίας παιγνίων είναι ακριβώς η δυναμική αυτού του αναδραστικού βρόχου. Η αναδραστική δυναμική έχει ισχυρή εξάρτηση από τη δομή του πληθυσμού, από το παίγνιο και από τον τρόπο με τον οποίο οι στρατηγικές εξαπλώνονται.

Στο πρώτο κεφάλαιο αυτής της διδακτορικής διατριβής παρουσιάζεται η γενική μορφή της αναπαραγόμενης δυναμικής στην περίπτωση της πεπερασμένης διάστασης, δηλαδή στην περίπτωση όπου το σύνολο S των καθαρών στρατηγικών (pure strategies) είναι πεπερασμένο. Έστω $S = \{1, 2, ..., m\}$ το σύνολο των καθαρών στρατηγικών (ή επιλογών) και $A = (a_{ij})$ ο πίνακας αμοιβής (payoff matrix), ο οποίος είναι ένας $m \times m$ πίνακας και το στοιχείο a_{ij} είναι η αμοιβή του παίκτη που χρησιμοποιεί την καθαρή στρατηγική i ενάντια στον παίκτη που χρησιμοποιεί την καθαρή στρατηγική j με $i, j \in S$. Το διάνυσμα

$$u = (u_1(t), ..., u_m(t))^T,$$

είναι μία κατανομή πιθανότητας στο σύνολο των καθαρών στρατηγικών S, το οποίο αντιπροσωπεύει μία μεικτή στρατηγική (mixed strategy) ως κυρτός συνδυασμός των καθαρών στρατηγικών. Οπότε ισχύουν

$$u_j(t) \geq 0, \quad \text{για κάθε } j = 1, ..., m \tag{2}$$

και

$$\sum_{j=1}^{m} u_j(t) = 1. \tag{3}$$

Το διάνυσμα u δηλώνει τη μεικτή στρατηγική ενός μέλους του πληθυσμού, δηλαδή τη στρατηγική ενός παίκτη, ενάντια στους υπόλοιπους παίκτες του πληθυσμού. Η εξάρτηση του u από τον χρόνο t επιτρέπει στον παίκτη να ανανεώνει τη στρατηγική του με στόχο την αύξηση της αμοιβής του.
Η τυπική εξίσωση της αναπαραγόμενης δυναμικής [3] είναι

$$u_i'(t) = \left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} u_j(t) - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} u_i(t) u_j(t) \right) u_i(t), \tag{4}$$

για κάθε $i = 1, 2, ..., m$, η οποία μπορεί να γραφεί και ως εξής

$$u_t = [Au - (u, Au)]\, u, \tag{5}$$

όπου το (u, Au) είναι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων u και Au, με u_t δηλώνεται η παράγωγος της u ως προς τη μεταβλητή του χρόνου t και το $(Au)u$ είναι το διάνυσμα του οποίου η j-οστή συνιστώσα είναι το γινόμενο

των j-οστών συνιστωσών των διανυσμάτων (Au) και u (δηλαδή είναι το κατά σημείο γινόμενο των δύο διανυσμάτων). Η ποσότητα

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} u_j(t) - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} u_i(t) u_j(t), \text{ για κάθε } i = 1, 2, ..., m,$$

που εμφανίζεται στην (4) είναι η διαφορά του μέσου όρου της αμοιβής του πληθυσμού από την αμοιβή του παίκτη που χρησιμοποιεί την καθαρή στρατηγική $i \in S$. Συνεπώς, η διαφορά αυτή είναι ένα μέτρο επιτυχίας της καθαρής στρατηγικής i με $i \in S$. Το μοντέλο της εξίσωσης (4) υποθέτει ότι η λογαριθμική παράγωγος της $u_i(t)$, δηλαδή η παράγωγος της σύνθεσης της $u_i(t)$ με τη λογαριθμική συνάρτηση, είναι ίση με τη διαφορά της αμοιβής του παίκτη που χρησιμοποιεί την καθαρή στρατηγική i από τον μέσο όρο της αμοιβής του πληθυσμού. Οπότε, οι παίκτες ανανεώνουν τις στρατηγικές τους ανάλογα με το μέτρο επιτυχίας της καθαρής στρατηγικής i. Αυτό το μοντέλο αναπαραγόμενης δυναμικής το εισήγαγαν στην εργασία τους [11] οι P. D. Taylor, L. B. Jonker το 1978.

Επιπρόσθετα, στο πρώτο κεφάλαιο αναφέρεται η σύνδεση της Nash ισορροπίας με τα παίγνια αναπαραγόμενης δυναμικής. Σε περίπτωση που το παίγνιο έχει n παίκτες και με S_i συμβολίσουμε το σύνολο των καθαρών στρατηγικών του i παίκτη με $i \in \{1, 2, ..., n\}$, τότε το $S = S_1 \times S_2 \times ... \times S_n$ είναι το σύνολο όλων των στρατηγικών επιλογών. Θεωρούμε $f = (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x))$ με $x \in S$ τη συνάρτηση αμοιβής για τη στρατηγική επιλογή $x \in S$. Έστω x_i η στρατηγική του i παίκτη και x_{-i} η στρατηγική επιλογή όλων των άλλων παικτών εκτός του i παίκτη. Όταν κάθε παίκτης $i \in \{1, 2, ..., n\}$ επιλέγει την x_i στρατηγική καταλήγοντας στη στρατηγική επιλογή $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, τότε ο παίκτης i επιτυγχάνει πληρωμή $f_i(x)$. Η αμοιβή εξαρτάται από τη στρατηγική επιλογή x, δηλαδή από τη στρατηγική που έχει επιλέξει ο παίκτης i, καθώς και από τις στρατηγικές όλων των άλλων παικτών. Μία στρατηγική επιλογή $x^* \in S$ είναι μία Nash ισορροπία εάν καμία μονομερής απόκλιση στη στρατηγική από οποιοδήποτε παίκτη είναι κερδοφόρα για αυτόν τον παίκτη, δηλαδή

$$f_i(x_i^*, x_{-i}^*) \geq f_i(x_i, x_{-i}^*), \text{ για κάθε } x_i \in S_i, \text{ για κάθε } i \in \{1, 2, ..., n\}. \quad (6)$$

Όταν η παραπάνω ανισότητα (6) ισχύει αυστηρά για όλους τους παίκτες και για όλες τις εφικτές εναλλακτικές στρατηγικές, τότε η ισορροπία χαρακτηρίζεται ως μία αυστηρή Nash ισορροπία. Αντίθετα, εάν για κάποιον παίκτη ισχύει η ισότητα μεταξύ x_i^* και κάποιας άλλης στρατηγικής στο σύνολο S, τότε η ισορροπία χαρακτηρίζεται ως ασθενής Nash ισορροπία.

Ο Nash απέδειξε ότι, εάν επιτρέψουμε μεικτές στρατηγικές, τότε κάθε παίγνιο αναπαραγόμενης δυναμικής με πεπερασμένο πλήθος παικτών στο οποίο κάθε παίκτης μπορεί να επιλέξει από πεπερασμένο πλήθος στρατηγικών έχει τουλάχιστον μία Nash ισορροπία.

Στη συνέχεια του πρώτου κεφαλαίου παρουσιάζεται η γενίκευση αυτού του εξελικτικού μοντέλου για μη πεπερασμένο σύνολο καθαρών στρατηγικών S, η οποία έχει μελετηθεί [1, 3, 7, 8] σε συνδυασμό με κάποιες οικονομικές και βιολογικές εφαρμογές. Σ' αυτά τα μοντέλα έχει υποτεθεί πως το σύνολο των

καθαρών στρατηγικών S είναι ένα τυχαίο Borel σύνολο $S \subset \mathbb{R}^n$ και οι καθαρές στρατηγικές των παικτών ταυτίζονται με τα στοιχεία $x \in S$. Στην περίπτωση ενός συμμετρικού παιγνίου με δύο παίκτες, η συνάρτηση αμοιβής (payoff), που είναι το συνεχές ανάλογο του πίνακα αμοιβής A (payoff matrix), είναι μία Borel μετρήσιμη συνάρτηση $f : S \times S \to \mathbb{R}$, όπου $f(x, y)$ είναι η αμοιβή (payoff) για τον πρώτο παίκτη όταν υιοθετεί την x καθαρή στρατηγική καθώς ο δεύτερος παίκτης ακολουθεί την y καθαρή στρατηγική. Στις εργασίες [1, 7], η συνάρτηση f είναι φραγμένη. Η μεικτή στρατηγική περιγράφεται από ένα μέτρο πιθανότητας P στον μετρήσιμο χώρο $(S, \mathcal{B})$, όπου $\mathcal{B}$ είναι η σ-άλγεβρα των Borel υποσυνόλων του S. Ακολουθώντας την εργασία [7], η μέση αμοιβή του P ενάντια στην Q δίνεται από τη διγραμμική μορφή

$$E(P, Q) = \int_S \int_S f(x, y) Q(dy) P(dx).$$

Η επιτυχία της καθαρής στρατηγικής x ενάντια στην Q στρατηγική δίνεται από τη διαφορά

$$\sigma(x, Q) = E(\delta_x, Q) - E(Q, Q),$$

όπου δ_x είναι το μέτρο Dirac στην καθαρή στρατηγική x.
Η γενίκευση της εξίσωσης (4) της αναπαραγόμενης δυναμικής στην άπειρη διάσταση είναι η διαφορική εξίσωση στον χώρο των μέτρων

$$\frac{dQ_t(B)}{dt} = \int_B \sigma(x, Q_t) Q_t(dx), \quad \text{για κάθε } B \in \mathcal{B}, \tag{7}$$

(εδώ ο δείκτης t δηλώνει τη χρονοεξάρτηση της Q). Στην περίπτωση που η f είναι φραγμένη, η καλή τοποθέτηση της συγκεκριμένης εξίσωσης καθώς και τα θέματα ευστάθειας και ορισμένα οικονομικά παραδείγματα έχουν μελετηθεί [7, 8].

Η εξίσωση (7) είναι μία πολύ γενική εξίσωση απ' την οποία κάποιος δεν μπορεί να εξάγει περισσότερα, όπως τη μορφή των λύσεων και τις ιδιότητές τους. Έχοντας ως στόχο να συγκεκριμενοποιηθεί το μοντέλο που περιγράφεται από την εξίσωση (7), η εργασία [5] και οι μετέπειτα εργασίες [9, 14, 15] επικεντρώθηκαν σε μέτρα Q_t τα οποία είναι απολύτως συνεχή ως προς το μέτρο Lebesgue με πυκνότητα $u(t, x)$. Τότε, η εξίσωση της αναπαραγόμενης δυναμικής με βάση την πυκνότητα u γράφεται

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \left[\int_S f(x, y) u(t, y) dy - \int_S \int_S f(z, y) u(t, y) u(t, z) dy dz \right] u(t, x). \tag{8}$$

Η εξίσωση (8) είναι μια ολοκληροδιαφορική εξίσωση με μη τοπικούς όρους. Ο πυρήνας $f(x, y)$ ορίζει έναν γραμμικό τελεστή A, δηλαδή

$$Au(t, x) := \int_S f(x, y) u(t, y) dy.$$

Ο τελεστής A είναι ο τελεστής αμοιβής (payoff). Στις εργασίες [5, 9], ο A επιλέχθηκε να είναι ένας συγκεκριμένος διαφορικός τελεστής, άρα μη φραγμένος,

και αργότερα στις εργασίες [14, 15] επιλέχθηκε να είναι και χρονοεξαρτώμενος. Υποθέτοντας πως ο τελεστής A είναι κάποιος διαφορικός τελεστής, η εξίσωση της αναπαραγόμενης δυναμικής γίνεται

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = [Au(t,x) - (u, Au)]\, u(t,x), \tag{9}$$

όπου $(\cdot\,,\cdot)$ είναι ένα κατάλληλο εσωτερικό γινόμενο.
Ειδικότερα, η εργασία [5] εστίασε στη μελέτη της περίπτωσης όπου το σύνολο των καθαρών στρατηγικών S είναι ο χώρος $\mathbb{R}$ και ο τελεστής αμοιβής A είναι ο διαφορικός τελεστής

$$A = \frac{d^2}{dx^2}.$$

Τότε, η εξίσωση (9) της αναπαραγόμενης δυναμικής γράφεται

$$u_t = [u_{xx} - (u, u_{xx})]\, u,\ \ t > 0 \tag{10}$$

όπου με u_t συμβολίζεται η μερική παράγωγος της u ως προς τον χρόνο t και το $(\cdot\,,\cdot)$ δηλώνει το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στον χώρο Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων πραγματικών συναρτήσεων που ορίζονται στον χώρο $\mathbb{R}$, δηλαδή

$$(u, v) := \int_{-\infty}^{\infty} u(x)v(x)dx.$$

Η εξίσωση (10) είναι μία μη γραμμική παραβολική μερική διαφορική εξίσωση με μη τοπικούς όρους. Για την αρχική συνθήκη, δηλαδή την $u(0,x)$ υποθέτουμε, ότι είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ως προς x, επομένως

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(0,x)dx = 1 \tag{11}$$

και

$$u(0,x) \geq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Στην εργασία [5] αποδείχθηκε ότι για κάθε $\beta \in (0,\infty)$ υπάρχει μία λύση ομοιότητας

$$u(t,x) = t^{-\frac{1}{3}} g\left(xt^{-\frac{1}{3}}\right) \tag{13}$$

της εξίσωσης (10) που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες (11) και (12). Η συνάρτηση g, που παρουσιάζεται στην (13), είναι θετική στο $\mathbb{R}$, ικανοποιεί την ολοκληρωτική συνθήκη

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(s)ds = 1,$$

και επαληθεύει την εξίσωση

$$g(s)g''(s) + \frac{1}{3}sg'(s) + \frac{1}{3}g(s) + K[g]g(s) = 0,$$

όπου

$$K[g] := \int_{-\infty}^{\infty} g'(s)^2 ds = \beta.$$

Στη συνέχεια, στην εργασία [9] έγινε μελέτη της περίπτωσης όπου το σύνολο των καθαρών στρατηγικών S είναι ο χώρος $\mathbb{R}^d$ με $d \geq 2$ και ο τελεστής αμοιβής A είναι ο Λαπλασιανός τελεστής Δ. Τότε, η εξίσωση (9) της αναπαραγόμενης δυναμικής γίνεται

$$u_t = [\Delta u - (u, \Delta u)]\, u, \;\; t > 0 \tag{14}$$

όπου με u_t συμβολίζεται η μερική παράγωγος της u ως προς τον χρόνο t και το $(\cdot\,,\cdot)$ δηλώνει το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στον χώρο Hilbert $L^2(\mathbb{R}^d)$ των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων που ορίζονται στον χώρο $\mathbb{R}^d$ με $d \geq 2$, δηλαδή

$$(u, v) := \int_{\mathbb{R}^d} u(x)v(x)dx.$$

Για την αρχική συνθήκη, δηλαδή την $u(0, x)$ υποθέτουμε, ότι είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ως προς x, άρα

$$\int_{\mathbb{R}^d} u(0, x)dx = 1 \tag{15}$$

και

$$u(0, x) \geq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^d. \tag{16}$$

Στην εργασία [9] αποδείχθηκε ότι για κάθε $\beta \in (0, \infty)$ υπάρχει μία λύση ομοιότητας

$$u(t, x) = t^{-\frac{d}{d+2}} g_d \left(r t^{-\frac{1}{d+2}} \right), \tag{17}$$

με

$$r := |x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2},$$

της εξίσωσης (14) που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες (15) και (16). Η συνάρτηση g_d, που παρουσιάζεται στην (17), είναι θετική στο $(0, \infty)$, ικανοποιεί την ολοκληρωτική συνθήκη

$$\sigma_d \int_0^\infty g_d(s) s^{d-1} ds = 1,$$

και επαληθεύει την εξίσωση

$$g_d(s) g_d''(s) + \frac{d-1}{s} g_d(s) g_d'(s) + \frac{s}{d+2} g_d'(s) + \frac{d}{d+2} g_d(s) + K_d[g_d] g_d(s) = 0,$$

όπου

$$K_d[g_d] := \sigma_d \int_0^\infty g_d'(s)^2 s^{d-1} ds = \beta.$$

Οι εργασίες [5] και [9] επικεντρώθηκαν στο ειδικό πρόβλημα της ύπαρξης καθώς και της δομής μιας μονοπαραμετρικής οικογένειας λύσεων ομοιότητας για τις εξισώσεις (10) και (14), αντίστοιχα. Ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό αυτών των λύσεων είναι ότι όλες είναι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας στον χώρο $\mathbb{R}^d$, για κάθε $t > 0$ και προσεγγίζουν τη συνάρτηση Dirac $\delta(x)$ καθώς $t \to 0^+$.

Για το γενικό πρόβλημα ύπαρξης λύσεων σχετικά με την εξίσωση (14), αξίζει να τονίσουμε, ότι, εάν θεωρήσουμε την εξίσωση (14) σε ένα φραγμένο χωρίο S του $\mathbb{R}^d$ με τις Dirichlet συνοριακές συνθήκες και μία αρχική συνθήκη $u(0,x)$ που είναι πυκνότητα πιθανότητας και δεν μηδενίζεται εντός του S, έχει πρόσφατα αποδειχθεί [12, 13], ότι η $u(t,x)$ υπάρχει για κάθε $t > 0$ και προσεγγίζει, καθώς $t \to \infty$, τη λύση ισορροπίας, που είναι, επίσης, μία συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σημειώνουμε ότι υπάρχει ακριβώς μία τέτοια λύση ισορροπίας). Βέβαια, στην περίπτωση που το σύνολο των καθαρών στρατηγικών S είναι ολόκληρος ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^d$ τέτοιες λύσεις ισορροπίας δεν υπάρχουν. Αυτός είναι ένας λόγος που επιβεβαιώνει πως οι λύσεις ομοιότητας είναι σημαντικές.

Και στις δύο αυτές περιπτώσεις παρατηρούμε, ότι οι τελεστές $A = \frac{d^2}{dx^2}$ και $A = \Delta$ είναι συμμετρικοί τελεστές ως προς το εσωτερικό γινόμενο $(\cdot\,,\cdot)$ του χώρου Hilbert $L^2(\mathbb{R}^d)$ με $d \geq 1$ και ανεξάρτητοι από τον χρόνο t. Στις εργασίες [14, 15] μελετήθηκε η εξίσωση της αναπαραγόμενης δυναμικής χρησιμοποιώντας ως τελεστές αμοιβής A δύο μη συμμετρικούς ως προς το εσωτερικό γινόμενο $(\cdot\,,\cdot)$ στον χώρο Hilbert $L^2(\mathbb{R}^d)$ με $d \geq 1$ και χρονοεξαρτώμενους τελεστές.

Στο δεύτερο κεφάλαιο αυτής της διδακτορικής διατριβής γίνεται η μελέτη της εξίσωσης της αναπαραγόμενης δυναμικής (9) στην περίπτωση που το σύνολο των καθαρών στρατηγικών S είναι ο χώρος $\mathbb{R}$ χρησιμοποιώντας ως τελεστή αμοιβής A έναν μη συμμετρικό και χρονοεξαρτώμενο τελεστή, που είναι ο εξής

$$Au(t,x) := \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + \alpha t^\gamma x \frac{\partial u(t,x)}{\partial x},\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \tag{18}$$

όπου γ είναι μία πραγματική σταθερά (συγκεκριμένα $\gamma = -2/3$), ενώ

$$\alpha > 0,$$

είναι μία θετική παράμετρος. Τότε, με χρήση του τελεστή A που δίνεται από την (18), η εξίσωση του αναπαραγόμενου δυναμικού μοντέλου (9) γίνεται

$$u_t = \left[u_{xx} + \alpha t^\gamma x u_x - \int_{-\infty}^{\infty} (u u_{xx} + \alpha t^\gamma x u u_x)\, dx \right] u, \tag{19}$$

όπου $u = u(t,x)$ με $t > 0$ και $x \in \mathbb{R}$. Η εξίσωση (19) είναι μία ολοκληροδιαφορική εξίσωση με μη τοπικούς όρους.
Για την αρχική συνθήκη, δηλαδή την $u(0,x)$ υποθέτουμε, ότι είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ως προς x, επομένως

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(0,x) dx = 1 \tag{20}$$

και

$$u(0,x) \geq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \tag{21}$$

Στη συνέχεια του δεύτερου κεφαλαίου αποδεικνύεται ότι η εξίσωση (19) έχει μία μονοπαραμετρική οικογένεια λύσεων ομοιότητας που όλες προσεγγίζουν τη συνάρτηση Dirac $\delta(x)$ καθώς $t \to 0^+$. Ως συναρτήσεις του x, όλες αυτές οι λύσεις είναι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας στον χώρο $\mathbb{R}$, για

κάθε $t > 0$. Ειδικότερα, στο δεύτερο κεφάλαιο αποδεικνύεται ότι για κάθε $\beta \in (0, \infty)$ υπάρχει μία λύση ομοιότητας

$$u(t,x) = t^{-\frac{1}{3}} g\left(xt^{-\frac{1}{3}}\right), \tag{22}$$

της εξίσωσης (19) που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες (20) και (21). Η συνάρτηση g, που παρουσιάζεται στην (22), ικανοποιεί την ολοκληρωτική συνθήκη

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(s)ds = 1,$$

είναι αυστηρά θετική στο $\mathbb{R}$, δηλαδή

$$g(s) > 0, \text{ για κάθε } s \in \mathbb{R},$$

και επαληθεύει την εξίσωση

$$g(s)g''(s) + \alpha s g(s)g'(s) + K[g]g(s) + \frac{\alpha}{2}\Lambda[g]g(s) + \frac{1}{3}g(s) + \frac{1}{3}sg'(s) = 0,$$

με

$$K[g] := \int_{-\infty}^{\infty} g'(s)^2 ds,$$

και

$$\Lambda[g] := \int_{-\infty}^{\infty} g(s)^2 ds,$$

όπου

$$K[g] + \frac{\alpha}{2}\Lambda[g] = \beta.$$

Επιπρόσθετα, στο δεύτερο κεφάλαιο μελετώνται οι ιδιότητες της συνάρτησης g και γενικά η δομή αυτής της μονοπαραμετρικής οικογένειας λύσεων ομοιότητας της εξίσωσης (19).

Στο τρίτο κεφάλαιο αυτής της διδακτορικής διατριβής γίνεται η μελέτη της εξίσωσης της αναπαραγόμενης δυναμικής (9) στην περίπτωση που το σύνολο των καθαρών στρατηγικών S είναι ο Ευκλείδειος d-διάστατος χώρος $\mathbb{R}^d$ με $d \geq 2$, ενώ ο τελεστής αμοιβής A είναι της μορφής

$$Au(t,x) := \Delta u(t,x) + \alpha t^{\gamma} x \cdot \nabla u(t,x), \ t > 0, \ x \in \mathbb{R}^d \tag{23}$$

όπου γ είναι μία πραγματική σταθερά (συγκεκριμένα $\gamma = -\frac{2}{d+2}$), ενώ

$$\alpha > 0$$

είναι μία θετική παράμετρος και οι τελεστές Δ και ∇ δρούν πάνω στη μεταβλητή x. Σ' αυτήν την περίπτωση, η αντίστοιχη εξίσωση του αναπαραγόμενου δυναμικού μοντέλου (9) γίνεται

$$u_t = \left[\Delta u + \alpha t^{\gamma} x \cdot \nabla u - \int_{\mathbb{R}^d} (u\Delta u + \alpha t^{\gamma} u x \cdot \nabla u)\, dx\right] u, \tag{24}$$

όπου $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$.
Η εξίσωση (24) είναι μία ολοκληροδιαφορική εξίσωση με μη τοπικούς όρους.
Για την αρχική συνθήκη, δηλαδή την $u(0,x)$ υποθέτουμε, ότι

$$\int_{\mathbb{R}^d} u(0,x)dx = 1 \tag{25}$$

και

$$u(0,x) \geq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^d. \tag{26}$$

Επιπρόσθετα, στο τρίτο κεφάλαιο αποδεικνύεται ότι η εξίσωση (24) έχει μία μονοπαραμετρική οικογένεια λύσεων ομοιότητας που όλες προσεγγίζουν τη συνάρτηση Dirac $\delta(x)$ καθώς $t \to 0^+$. Ως συναρτήσεις του x, όλες αυτές οι λύσεις είναι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας στον χώρο $\mathbb{R}^d$, για κάθε $t > 0$. Ειδικότερα, στο τρίτο κεφάλαιο αποδεικνύεται ότι για κάθε $\beta \in (0,\infty)$ υπάρχει μία λύση ομοιότητας

$$u(t,x) = t^{-\frac{d}{d+2}} g_d\left(rt^{-\frac{1}{d+2}}\right), \tag{27}$$

όπου

$$r := |x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2},$$

της εξίσωσης (24) που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες (25) και (26). Η συνάρτηση g_d, που παρουσιάζεται στην (27), ικανοποιεί την ολοκληρωτική συνθήκη

$$\sigma_d \int_0^\infty g_d(s)s^{d-1}ds = 1,$$

είναι αυστηρά θετική στο $(0,+\infty)$, δηλαδή

$$g_d(s) > 0, \text{ για κάθε } s \in (0,+\infty),$$

και επαληθεύει την εξίσωση

$$g_d(s)g_d''(s) + \left(\frac{d-1}{s} + \alpha s\right) g_d(s)g_d'(s) + \frac{s}{d+2}g_d'(s) + \frac{d}{d+2}g_d(s)$$
$$+K_d[g_d]g_d(s) + \frac{d\alpha}{2}\Lambda_d[g_d]g_d(s) = 0,$$

με

$$K_d[g_d] := \sigma_d \int_0^\infty g_d'(s)^2 s^{d-1}ds$$

και

$$\Lambda_d[g_d] := \sigma_d \int_0^\infty g_d(s)^2 s^{d-1}ds,$$

όπου

$$K_d[g_d] + \frac{d\alpha}{2}\Lambda_d[g_d] = \beta.$$

Στο τρίτο κεφάλαιο αποδεικνύονται επιπλέον οι ιδιότητες της συνάρτησης g_d και γενικά η δομή αυτής της μονοπαραμετρικής οικογένειας λύσεων ομοιότητας της εξίσωσης (24).

Κεφάλαιο 1

Μοντέλο Αναπαραγόμενης Δυναμικής

1.1 Εξελικτική Θεωρία Παιγνίων- Μοντέλο Αναπαραγόμενης Δυναμικής

Τα αναπαραγόμενα (ανατροφοδοτούμενα) δυναμικά μοντέλα (replicators dynamics) εμφανίζονται συχνά στην εξελικτική θεωρία παιγνίων. Έχουν σημαντικές εφαρμογές στις οικονομικές επιστήμες, στην πληθυσμιακή βιολογία όπως και σε άλλες επιστήμες [3, 4, 10, 11]. Η εξελικτική θεωρία παιγνίων που προέκυψε με βάση τον πληθυσμό έχει πολλές εφαρμογές και σε μη βιολογικούς τομείς όπως η οικονομία ή η θεωρία μάθησης και παρουσιάζει έναν σημαντικό εμπλουτισμό της κλασικής θεωρίας παιγνίων, η οποία επικεντρώνεται στην ιδέα ενός ορθολογικού ατόμου. Η αντικατάσταση της τυπικής σκέψης από την πληθυσμιακή σκέψη είναι μία μεγάλη εννοιολογική επανάσταση που συνέβη στη θεωρία παιγνίων αλλά και σε άλλους επιστημονικούς τομείς όπως η βιολογία. Μάλιστα, σύμφωνα με τον περίφημο βιολόγο Ernst Mayr, αυτή η αντικατάσταση ήταν η μεγαλύτερη εννοιολογική επανάσταση που πραγματοποιήθηκε στη βιολογία.

Η έρευνα που πραγματοποιήθηκε από τους Josef Hofbauer και Karl Sigmund [3] εστιάζεται στον μαθηματικό πυρήνα της εξελικτικής θεωρίας παιγνίων και επικεντρώνεται στην αιτιοκρατική εξελικτική δυναμική παιγνίου, μιας δυναμικής που περιγράφει, πως οι συχνότητες των στρατηγικών μέσα σ' έναν πληθυσμό αλλάζουν με τον χρόνο, σύμφωνα με τη στρατηγική επιτυχίας. Αυτό απαιτούσε κάποιες τροποποιήσεις στη βασική εννοιολογική προσέγγιση της

θεωρίας παιγνίων.

Με τον κίνδυνο της υπεραπλούστευσης θα μπορούσαμε να πούμε, πως η κλασική θεωρία παιγνίων ασχολείται με ένα ορθολογικό άτομο ή παίκτη, που συμμετέχει σε μια δεδομένη αλληλεπίδραση ή σε ένα παίγνιο μαζί με άλλα άτομα ή παίκτες και πρέπει να επιλέξει ανάμεσα σε διάφορες προοπτικές ή στρατηγικές έχοντας ως σκοπό τη μεγιστοποίηση της αμοιβής του, η οποία εξαρτάται από τις στρατηγικές των άλλων παικτών, οι οποίοι, με τη σειρά τους, στοχεύουν στη μεγιστοποίηση της δικής τους αμοιβής.

Αντίθετα, η εξελικτική θεωρία παιγνίων σχετίζεται με ολόκληρους πληθυσμούς παικτών, που είναι όλοι προγραμματισμένοι να χρησιμοποιήσουν κάποια στρατηγική (ή τύπο συμπεριφοράς). Τα παίγνια αναπαραγόμενης δυναμικής αποτελούν σημαντικό μέρος της σύγχρονης θεωρίας παιγνίων, η οποία προσπαθεί να εξηγήσει, πως ένας πληθυσμός από παίκτες ανανεώνουν τις στρατηγικές τους κατά τη διάρκεια του παιγνίου, ώστε να επιτευχθεί η στρατηγική επιτυχίας. Οι στρατηγικές με υψηλή αμοιβή, σύμφωνα με τους Hofbauer και Sigmund [3], θα εξαπλωθούν μέσα στον πληθυσμό μέσω της εκμάθησης, μέσω της μίμησης ή μέσω της κληρονομιάς της στρατηγικής. Οι αμοιβές εξαρτώνται από τις ενέργειες των συμπαικτών και επομένως εξαρτώνται από τις συχνότητες των στρατηγικών που προκύπτουν μέσα στον πληθυσμό.

Δεδομένου ότι οι αμοιβές εξαρτώνται από τις συχνότητες με τις οποίες οι διάφορες στρατηγικές προκύπτουν και εφ' όσον αυτές οι συχνότητες αλλάζουν σύμφωνα με τις οφειλές, αυτό μας οδηγεί σ' έναν βρόχο ανάδρασης, η δυναμική του οποίου θα καθορίσει τη συμπεριφορά του παιγνίου για μεγάλο χρονικό διάστημα. Το θέμα της αναπαραγόμενης θεωρίας παιγνίων είναι ακριβώς η δυναμική αυτού του αναδραστικού βρόχου. Η αναδραστική δυναμική έχει ισχυρή εξάρτηση από τη δομή του πληθυσμού, από το παίγνιο και από τον τρόπο με τον οποίο οι στρατηγικές εξαπλώνονται. Επομένως, υπάρχουν πολλά παίγνια δυναμικής που μπορεί να είναι διακριτά ή συνεχή, στοχαστικά ή αιτιοκρατικά.

Ένα ιδιαίτερα δημοφιλές δυναμικό μοντέλο ανανέωσης είναι το αναπαραγόμενο δυναμικό σχήμα (replicator dynamics). Σύμφωνα με αυτό το σχήμα, ο πληθυσμός ανανεώνει τη στρατηγική του ρυθμίζοντας τον λογαριθμικό ρυθμό μεταβολής της κατανομής των στρατηγικών κατ' αναλογία με τη διαφορά ανάμεσα στην πραγματική αμοιβή για μία δεδομένη στρατηγική και τη μέση αμοιβή [11]. Αυτή η στρατηγική ανανέωσης του σχήματος οδηγεί σε ένα δυναμικό σύστημα, η δυναμική του οποίου έχει πολύ ενδιαφέρουσες ιδιότητες και εφαρμογές [3].

1.2 Η Εξίσωση της Αναπαραγόμενης Δυναμικής

Ο πιο απλός τύπος παιγνίου έχει μόνο δύο παίκτες, τον I και τον II, και ο κάθε παίκτης έχει πεπερασμένο σύνολο επιλογών ή καθαρών στρατηγικών, Strat(I) και Strat(II), αντίστοιχα (η ακόμα πιο απλή περίπτωση παιγνίου είναι με έναν μόνο παίκτη και ανάγεται σε πρόβλημα βελτιστοποίησης). Συμβολίζουμε με α_{ij} και με β_{ij} τις αμοιβές για τους παίκτες I και II αντίστοιχα, όταν ο παίκτης I χρησιμοποιεί την καθαρή στρατηγική $i \in Strat(I)$ και ο παίκτης II

χρησιμοποιεί την καθαρή στρατηγική $j \in Strat(II)$. Συνεπώς, οι αμοιβές των παικτών I και II δίνονται από δύο $n \times m$ πίνακες A και B, όπου n και m είναι οι πληθάριθμοι των συνόλων των καθαρών στρατηγικών Strat(I) και Strat(II) των παικτών I και II, αντίστοιχα. Μπορούμε, επίσης, να περιγράψουμε την αμοιβή και των δύο παικτών με έναν $n \times m$ πίνακα ζευγών, του οποίου το στοιχείο που βρίσκεται στην i-οστή γραμμή και στην j-οστή στήλη είναι το ζεύγος $(\alpha_{ij}, \beta_{ij})$, όπου $i = 1, 2, ..., n$ και $j = 1, 2, ..., m$.

Η μεικτή στρατηγική του παίκτη I συνίσταται στη χρήση της καθαρής στρατηγικής $i \in Strat(I)$ με πιθανότητα u_i και δηλώνεται από το διάνυσμα (στήλη) u με $u = (u_1, u_2, ..., u_n)^T$, όπου $u_i \geq 0$ για κάθε $i = 1, 2, ..., n$ και $u_1 + u_2 + ... + u_n = 1$. Συμβολίζουμε το σύνολο όλων αυτών των μεικτών στρατηγικών του παίκτη I με Δ_n. Το σύνολο Δ_n αποτελεί ένα simplex του $\mathbb{R}^n$ και παράγεται από τα διανύσματα e_i της κανονικής μοναδιαίας βάσης του $\mathbb{R}^n$. Τα διανύσματα e_i μπορούν να ταυτιστούν με τα στοιχεία του αρχικού συνόλου των καθαρών στρατηγικών $Strat(I)$.

Με παρόμοιο τρόπο, μία μεικτή στρατηγική του παίκτη II δηλώνεται από το διάνυσμα (στήλη) $w = (w_1, w_2, ..., w_m)^T$ με $w_j \geq 0$ για κάθε $j = 1, 2, ..., m$ και $w_1 + w_2 + ... + w_m = 1$, όπου w_j είναι η πιθανότητα χρήσης της καθαρής στρατηγικής j με $j = 1, 2, ...m$. Συμβολίζουμε με Δ_m το σύνολο των μεικτών στρατηγικών για τον παίκτη II, όπου το σύνολο Δ_m είναι ένα simplex του $\mathbb{R}^m$ που παράγεται από τα διανύσματα f_j της κανονικής μοναδιαίας βάσης του $\mathbb{R}^m$. Τα διανύσματα f_j μπορούν να ταυτιστούν με τα στοιχεία του αρχικού συνόλου των καθαρών στρατηγικών $Strat(II)$.

Εάν ο παίκτης I χρησιμοποιεί την καθαρή στρατηγική e_i και ο παίκτης II χρησιμοποιεί τη μεικτή στρατηγική $w \in \Delta_m$, τότε ο πρώτος έχει ως αναμενόμενη αμοιβή (για την ακρίβεια, η αναμενόμενη τιμή της e_i στρατηγικής) είναι

$$(Aw)_i = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} w_j. \tag{1.1}$$

Εάν ο παίκτης I χρησιμοποιεί τη μεικτή στρατηγική $u \in \Delta_n$ και ο παίκτης II χρησιμοποιεί τη μεικτή στρατηγική $w \in \Delta_m$, τότε ο πρώτος έχει ως αναμενόμενη αμοιβή

$$u^T Aw = \sum_{i=1}^{n} u_i (Aw)_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} u_i w_j, \tag{1.2}$$

ενώ ο δεύτερος έχει ως αναμενόμενη αμοιβή

$$u^T Bw = \sum_{i=1}^{n} u_i (Bw)_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \beta_{ij} u_i w_j. \tag{1.3}$$

Ένα παίγνιο λέγεται συμμετρικό, όταν οι αμοιβές για τη χρήση μιας συγκεκριμένης στρατηγικής εξαρτώνται μόνο από τις άλλες στρατηγικές που χρησιμοποιούνται και όχι από τα άτομα που χρησιμοποιούν τη στρατηγική αυτή. Ουσιαστικά, όταν οι ταυτότητες των παικτών μπορούν να αλλαχθούν χωρίς να αλλάξει η αμοιβή της στρατηγικής, τότε το παίγνιο είναι συμμετρικό. Στα συμμετρικά παίγνια τα σύνολα των καθαρών στρατηγικών των παικτών ταυτίζονται,

δηλαδή $Strat(I) = Strat(II)$ και μεταξύ των πινάκων αμοιβής ισχύει $A = B^T$ ενώ οι παίκτες δεν μπορούν να διακριθούν.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε έναν πληθυσμό N ατόμων και κάθε ένα άτομο χρησιμοποιεί κάποια καθαρή στρατηγική από τον χώρο των καθαρών στρατηγικών $S = \{1, 2, ..., n\}$ καθώς αλληλεπιδρά με ένα άλλο άτομο του ίδιου πληθυσμού. Εάν x_i είναι η συχνότητα της καθαρής στρατηγικής i, τότε $N = \sum_{i=1}^{n} x_i$ και $u_i = \frac{x_i}{N}$ είναι η πιθανότητα χρήσης της i καθαρής στρατηγικής με $i \in S$. Σ' αυτήν την περίπτωση, η κατάσταση του πληθυσμού δίνεται από το διάνυσμα $u = (u_1, u_2, ..., u_n)^T \in \Delta_n$ και ουσιαστικά από το διάνυσμα $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε, ότι οι x_i είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις του χρόνου t. Εάν τα άτομα τυχαία συναντώνται και συμμετέχουν σε ένα συμμετρικό παίγνιο με πίνακα αμοιβής A, τότε $(Ax)_i$ είναι η αναμενόμενη αμοιβή του ατόμου που χρησιμοποιεί την i καθαρή στρατηγική και $x^T Ax$ είναι η μέση αμοιβή για τον πληθυσμό με κατάσταση x.

Υποθέτοντας ότι ο ρυθμός ανάπτυξης για κάθε τύπο x_i, δηλαδή η λογαριθμική παράγωγος της x_i, που είναι η παράγωγος της σύνθεσης της x_i με τη λογαριθμική συνάρτηση

$$(\log x_i)' = \frac{x_i'}{x_i}, \tag{1.4}$$

δίνεται από τη διαφορά ανάμεσα στην αμοιβή του τύπου i και τη μέση αμοιβή στον πληθυσμό, οδηγούμαστε στην εξίσωση της αναπαραγόμενης δυναμικής

$$x_i' = \big((Ax)_i - x^T Ax\big)\, x_i, \tag{1.5}$$

για κάθε $i = 1, 2, ..., n$.
Σύμφωνα με τα παραπάνω, η εξίσωση διαμορφώνεται ως εξής

$$x_i'(t) = \left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} x_j(t) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} x_i(t) x_j(t)\right) x_i(t), \tag{1.6}$$

για κάθε $i = 1, 2, ..., n$.
Με όρους πιθανοτήτων, η εξίσωση της αναπαραγόμενης δυναμικής είναι

$$u_i' = \big((Au)_i - u^T Au\big)\, u_i, \tag{1.7}$$

για κάθε $i = 1, 2, ..., n$, η οποία γράφεται και ως εξής

$$u_i'(t) = \left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} u_j(t) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} u_i(t) u_j(t)\right) u_i(t), \tag{1.8}$$

για κάθε $i = 1, 2, ..., n$.

Η εξίσωση της αναπαραγόμενης δυναμικής, η οποία εισήχθη από τους P.D. Taylor και L. Jonker [11] και ονομάστηκε από τους P. Schuster και K. Sigmund [18], περιγράφει μία διαδικασία επιλογής: οι περισσότερο επιτυχημένες στρατηγικές εξαπλώνονται στον πληθυσμό. (Αυτή η διαφορική εξίσωση εμφανίστηκε νωρίτερα σε διάφορους τομείς, όπως στην πληθυσμιακή γενετική και στα χημικά δίκτυα [16, 17].)

1.3 Η Nash Ισορροπία και η Αναπαραγόμενη Δυναμική

Η στρατηγική $x \in \Delta_n$ λέγεται καλύτερη ανταπόδοση (best reply) στη στρατηγική $y \in \Delta_m$ εάν

$$z^T Ay \leq x^T Ay, \text{ για κάθε } z \in \Delta_n. \tag{1.9}$$

Το (συμπαγές, κυρτό και μη κενό) σύνολο όλων των καλύτερων ανταποδόσεων στη στρατηγική y συμβολίζεται ως $BR(y)$ (ομοίως, με $BR(x)$ συμβολίζουμε το σύνολο των καλύτερων ανταποδόσεων στη στρατηγική x).

Το ζεύγος $(x, y) \in \Delta_n \times \Delta_m$ είναι μία Nash ισορροπία (NE) εάν $x \in BR(y)$ και $y \in BR(x)$.

Το ζεύγος $(x, y) \in \Delta_n \times \Delta_m$ είναι μία αυστηρή Nash ισορροπία εάν το $x \in BR(y)$ είναι η μοναδική καλύτερη ανταπόδοση για το y και το $y \in BR(x)$ είναι η μοναδική καλύτερη ανταπόδοση για το x.

Εάν δύο στρατηγικές σχηματίζουν μια Nash ισορροπία (NE), κανένας από τους δύο παίκτες δεν έχει κίνητρο να αποκλίνει μονομερώς. Με αυτήν την έννοια, ένα τέτοιο αποτέλεσμα συνιστά μία συνθήκη ισορροπίας.

Προκειμένου να μεταφερθεί αυτό σ' έναν πληθυσμό, ήταν βολικό να περιοριστούμε στην περίπτωση που οι δύο παίκτες I και II είναι άτομα του πληθυσμού που εναλλάσσονται, δηλαδή να μελετήσουμε μόνο την περίπτωση που οι δύο παίκτες δεν εμφανίζονται σε διαφορετικούς ρόλους, αλλά έχουν την ίδια στρατηγική και τον ίδιο πίνακα αμοιβής. Πιο συγκεκριμένα, πρώτα μελετήθηκαν τα συμμετρικά παίγνια στα οποία ενδιαφέρον έχουν μόνο τα συμμετρικά ζεύγη (x, x). Οπότε, λέμε ότι η στρατηγική $x \in \Delta_n$ είναι μία Nash ισορροπία εάν

$$z^T Ax \leq x^T Ax, \text{ για κάθε } z \in \Delta_n, \tag{1.10}$$

δηλαδή, το x είναι η καλύτερη ανταπόδοση για τον εαυτό του. Η ισορροπία λέγεται αυστηρή, εάν η ισότητα ισχύει μόνο όταν $z = x$.

Σε περίπτωση που το παίγνιο έχει n παίκτες και με S_i συμβολίσουμε το σύνολο των καθαρών στρατηγικών του i παίκτη με $i \in \{1, 2, ..., n\}$, τότε το $S = S_1 \times S_2 \times ... \times S_n$ είναι το σύνολο όλων των στρατηγικών επιλογών. Θεωρούμε $f = (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x))$ με $x \in S$ τη συνάρτηση αμοιβής για τη στρατηγική επιλογή $x \in S$. Έστω x_i η στρατηγική του i παίκτη και x_{-i} η στρατηγική επιλογή όλων των άλλων παικτών εκτός του i παίκτη. Όταν κάθε παίκτης $i \in \{1, 2, ..., n\}$ επιλέγει την x_i στρατηγική καταλήγοντας στη στρατηγική επιλογή $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, τότε ο παίκτης i επιτυγχάνει πληρωμή $f_i(x)$. Η αμοιβή εξαρτάται από τη στρατηγική επιλογή x, δηλαδή για τη στρατηγική που έχει επιλέξει ο παίκτης i καθώς και από τις στρατηγικές όλων των άλλων παικτών. Μία στρατηγική επιλογή $x^* \in S$ είναι μία Nash ισορροπία εάν καμία μονομερής απόκλιση στη στρατηγική από οποιοδήποτε παίκτη είναι κερδοφόρα για αυτόν τον παίκτη, δηλαδή

$$f_i(x_i^*, x_{-i}^*) \geq f_i(x_i, x_{-i}^*), \text{ για κάθε } x_i \in S_i, \text{ για κάθε } i \in \{1, 2, ..., n\}. \tag{1.11}$$

Όταν η παραπάνω ανισότητα (1.11) ισχύει αυστηρά (δηλαδή ισχύει με $>$ αντί για $\geq$) για όλους τους παίκτες και για όλες τις εφικτές εναλλακτικές στρατηγικές,

τότε η ισορροπία χαρακτηρίζεται ως μία αυστηρή Nash ισορροπία. Αντίθετα, εάν για κάποιον παίκτη ισχύει η ισότητα μεταξύ x_i^* και κάποιας άλλης στρατηγικής στο σύνολο S, τότε η ισορροπία χαρακτηρίζεται ως ασθενής Nash ισορροπία. Αποδεικνύεται το παρακάτω Θεώρημα ύπαρξης μιας Nash ισορροπίας σε όρους πληθυσμιακής δυναμικής.

Θεώρημα 1.1 *Κάθε παίγνιο αναπαραγόμενης δυναμικής έχει τουλάχιστον μία Nash ισορροπία.*

Ο Nash απέδειξε ότι, εάν επιτρέψουμε μεικτές στρατηγικές, τότε κάθε παίγνιο με πεπερασμένο πλήθος παικτών στο οποίο κάθε παίκτης μπορεί να επιλέξει από πεπερασμένο πλήθος στρατηγικών έχει τουλάχιστον μία Nash ισορροπία.

1.4 Η Εξίσωση της Αναπαραγόμενης Δυναμικής σε μη Πεπερασμένο Χώρο Στρατηγικής

Η γενίκευση αυτού του εξελικτικού μοντέλου για μη πεπερασμένο σύνολο καθαρών στρατηγικών S έχει μελετηθεί [1, 3, 7, 8] σε συνδυασμό με κάποιες οικονομικές και βιολογικές εφαρμογές.

Σ' αυτά τα μοντέλα έχει υποτεθεί, πως το σύνολο των καθαρών στρατηγικών S είναι ένα τυχαίο Borel σύνολο $S \subset \mathbb{R}^n$ και επομένως, οι καθαρές στρατηγικές των παικτών ταυτίζονται με τα στοιχεία $x \in S$. Στην περίπτωση ενός συμμετρικού παιγνίου με δύο παίκτες, η συνάρτηση αμοιβής, που είναι το συνεχές ανάλογο του πίνακα αμοιβής payoff matrix, είναι μία Borel μετρήσιμη συνάρτηση $f : S \times S \to \mathbb{R}$, όπου $f(x, y)$ είναι η αμοιβή για τον πρώτο παίκτη όταν ακολουθεί την x καθαρή στρατηγική καθώς ο δεύτερος παίκτης υιοθετεί την y καθαρή στρατηγική. Στις εργασίες [1, 7], η συνάρτηση f είναι φραγμένη. Η μεικτή στρατηγική περιγράφεται από ένα μέτρο πιθανότητας P στον μετρήσιμο χώρο $(S, \mathcal{B})$, όπου $\mathcal{B}$ είναι η σ-άλγεβρα των Borel υποσυνόλων του S. Ακολουθώντας την εργασία [7], η μέση αμοιβή του P ενάντια στην Q δίνεται από τη διγραμμική μορφή

$$E(P, Q) = \int_S \int_S f(x, y) Q(dy) P(dx). \tag{1.12}$$

Η επιτυχία της x στρατηγικής ενάντια στην Q στρατηγική δίνεται από τη διαφορά

$$\sigma(x, Q) = E(\delta_x, Q) - E(Q, Q) \tag{1.13}$$

όπου δ_x είναι το μέτρο Dirac στην καθαρή στρατηγική x.
Η γενίκευση της εξίσωσης (1.8) της αναπαραγόμενης δυναμικής σε μη πεπερασμένους χώρους καθαρών στρατηγικών είναι η διαφορική εξίσωση στον χώρο των μέτρων

$$\frac{dQ_t(B)}{dt} = \int_B \sigma(x, Q_t) Q_t(dx), \quad \text{για κάθε } B \in \mathcal{B}, \tag{1.14}$$

όπου ο δείκτης t δηλώνει τη χρονοεξάρτηση της Q. Στην περίπτωση που η f είναι φραγμένη, η καλή τοποθέτηση της συγκεκριμένης εξίσωσης καθώς και

τα θέματα ευστάθειας και ορισμένα οικονομικά παραδείγματα έχουν μελετηθεί [7, 8]. Για παράδειγμα, υπάρχουν καταστάσεις όπου οι (καθαρές) στρατηγικές αντιστοιχούν σε γεωγραφικά σημεία και άρα είναι φυσικό να χρησιμοποιηθεί ένα διάστημα για τον χώρο των στρατηγικών.

Η εξίσωση (1.14) είναι μία πολύ γενική εξίσωση απ' την οποία κάποιος δεν μπορεί να εξάγει περισσότερα, όπως τη μορφή των λύσεων και τις ιδιότητές τους. Έχοντας ως στόχο να συγκεκριμενοποιηθεί το μοντέλο που περιγράφεται από την εξίσωση (1.14), η εργασία [5] και οι μετέπειτα εργασίες [9, 14, 15] επικεντρώθηκαν σε μέτρα Q_t τα οποία είναι απολύτως συνεχή ως προς το μέτρο Lebesgue με πυκνότητα $u(t,x)$. Τότε, η εξίσωση της αναπαραγόμενης δυναμικής με βάση την πυκνότητα u γράφεται

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \left[\int_S f(x,y)u(t,y)dy - \int_S\int_S f(z,y)u(t,y)u(t,z)dydz\right] u(t,x). \tag{1.15}$$

Η εξίσωση (1.15) είναι μια ολοκληροδιαφορική εξίσωση με μη τοπικούς όρους. Ο πυρήνας $f(x,y)$ ορίζει έναν γραμμικό τελεστή A, δηλαδή

$$Au(t,x) := \int_S f(x,y)u(t,y)dy.$$

Ο τελεστής A είναι ο τελεστής αμοιβής (payoff). Στις εργασίες [5, 9], ο A επιλέχθηκε να είναι ένας συγκεκριμένος διαφορικός τελεστής, άρα μη φραγμένος, και αργότερα στις εργασίες [14, 15] επιλέχθηκε να είναι και χρονοεξαρτώμενος. Υποθέτοντας πως ο τελεστής A είναι κάποιος διαφορικός τελεστής, η εξίσωση της αναπαραγόμενης δυναμικής γίνεται

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = [Au(t,x) - (u, Au)]\, u(t,x), \tag{1.16}$$

όπου $(\cdot\,,\cdot)$ είναι ένα κατάλληλο εσωτερικό γινόμενο.
Ειδικότερα, η εργασία [5] εστίασε στη μελέτη της περίπτωσης όπου το σύνολο των καθαρών στρατηγικών S είναι ο χώρος $\mathbb{R}$ και ο τελεστής αμοιβής A είναι ο διαφορικός τελεστής

$$A = \frac{d^2}{dx^2}. \tag{1.17}$$

Τότε, η εξίσωση (1.16) της αναπαραγόμενης δυναμικής γράφεται

$$u_t = [u_{xx} - (u, u_{xx})]\, u, \tag{1.18}$$

όπου με u_t συμβολίζεται η μερική παράγωγος της u ως προς το χρόνο t και το $(\cdot\,,\cdot)$ δηλώνει το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στον χώρο Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων πραγματικών συναρτήσεων που ορίζονται στον χώρο $\mathbb{R}$, δηλαδή

$$(u,v) := \int_{-\infty}^{\infty} u(x)v(x)dx.$$

Η εξίσωση (1.18) είναι μία μη γραμμική παραβολική μερική διαφορική εξίσωση με μη τοπικούς όρους. Για την αρχική συνθήκη, δηλαδή την $u(0,x)$ υποθέτουμε,

ότι είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ως προς x, επομένως

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(0,x)dx = 1 \tag{1.19}$$

και

$$u(0,x) \geq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \tag{1.20}$$

Στην εργασία [5] αποδείχθηκε ότι για κάθε $\beta \in (0,\infty)$ υπάρχει μία λύση ομοιότητας

$$u(t,x) = t^{-\frac{1}{3}} g\left(xt^{-\frac{1}{3}}\right) \tag{1.21}$$

της εξίσωσης (1.18) που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες (1.19) και (1.20). Η συνάρτηση g, που παρουσιάζεται στην (1.21), είναι θετική στο $\mathbb{R}$, ικανοποιεί την ολοκληρωτική συνθήκη

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(s)ds = 1, \tag{1.22}$$

και επαληθεύει την εξίσωση

$$g(s)g''(s) + \frac{1}{3}sg'(s) + \frac{1}{3}g(s) + K[g]g(s) = 0, \tag{1.23}$$

όπου

$$K[g] := \int_{-\infty}^{\infty} g'(s)^2 ds = \beta. \tag{1.24}$$

Στη συνέχεια, στην εργασία [9] έγινε μελέτη της περίπτωσης όπου το σύνολο των καθαρών στρατηγικών S είναι ο χώρος $\mathbb{R}^d$ με $d \geq 2$ και ο τελεστής αμοιβής A είναι ο Λαπλασιανός τελεστής Δ. Τότε, η εξίσωση (1.16) της αναπαραγόμενης δυναμικής γίνεται

$$u_t = [\Delta u - (u, \Delta u)]\, u, \;\; t > 0 \tag{1.25}$$

όπου με u_t συμβολίζεται η μερική παράγωγος της u ως προς το χρόνο t και το $(\cdot\,,\cdot)$ δηλώνει το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στον χώρο Hilbert $L^2(\mathbb{R}^d)$ των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων που ορίζονται στο $\mathbb{R}^d$ με $d \geq 2$, δηλαδή

$$(u,v) := \int_{\mathbb{R}^d} u(x)v(x)dx. \tag{1.26}$$

Για την αρχική συνθήκη, δηλαδή την $u(0,x)$ υποθέτουμε, ότι είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ως προς x, άρα

$$\int_{\mathbb{R}^d} u(0,x)dx = 1 \tag{1.27}$$

και

$$u(0,x) \geq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^d. \tag{1.28}$$

Στην εργασία [9] αποδείχθηκε ότι για κάθε $\beta \in (0,\infty)$ υπάρχει μία λύση ομοιότητας

$$u(t,x) = t^{-\frac{d}{d+2}} g_d\left(rt^{-\frac{1}{d+2}}\right), \tag{1.29}$$

με

$$r := |x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2}, \tag{1.30}$$

της εξίσωσης (1.25) που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες (1.27) και (1.28). Η συνάρτηση g_d, που παρουσιάζεται στην (1.29), είναι θετική στο $(0, \infty)$, ικανοποιεί την ολοκληρωτική συνθήκη

$$\sigma_d \int_0^\infty g_d(s) s^{d-1} ds = 1, \tag{1.31}$$

και επαληθεύει την εξίσωση

$$g_d(s) g_d''(s) + \frac{d-1}{s} g_d(s) g_d'(s) + \frac{s}{d+2} g_d'(s) + \frac{d}{d+2} g_d(s) + K_d[g_d] g_d(s) = 0, \tag{1.32}$$

όπου

$$K_d[g_d] := \sigma_d \int_0^\infty g_d'(s)^2 s^{d-1} ds = \beta. \tag{1.33}$$

Οι εργασίες [5] και [9] επικεντρώθηκαν στο ειδικό πρόβλημα της ύπαρξης καθώς και της δομής μιας μονοπαραμετρικής οικογένειας λύσεων ομοιότητας για τις εξισώσεις (1.18) και (1.25), αντίστοιχα. Ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό αυτών των λύσεων είναι ότι όλες είναι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας στον $\mathbb{R}^d$, για κάθε $t > 0$ και προσεγγίζουν τη συνάρτηση Dirac $\delta(x)$ καθώς $t \to 0^+$.

Για το γενικό πρόβλημα ύπαρξης λύσεων σχετικά με την εξίσωση (1.25) αξίζει να τονίσουμε, ότι, εάν θεωρήσουμε την εξίσωση (1.25) σε ένα φραγμένο χωρίο S του $\mathbb{R}^d$ με τις Dirichlet συνοριακές συνθήκες και μία αρχική συνθήκη $u(0, x)$ που είναι πυκνότητα πιθανότητας και δεν μηδενίζεται εντός του S, έχει πρόσφατα αποδειχθεί [12, 13], ότι η $u(t, x)$ υπάρχει για κάθε $t > 0$ και προσεγγίζει, καθώς $t \to \infty$ τη λύση ισορροπίας που είναι επίσης μία συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σημειώνουμε ότι υπάρχει ακριβώς μία τέτοια λύση ισορροπίας). Βέβαια, στην περίπτωση που το σύνολο των καθαρών στρατηγικών S είναι ολόκληρος ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^d$ τέτοιες λύσεις ισορροπίας δεν υπάρχουν. Αυτός είναι ένας λόγος που επιβεβαιώνει πως οι λύσεις ομοιότητας είναι σημαντικές.

Και στις δύο αυτές περιπτώσεις παρατηρούμε, ότι οι τελεστές $A = \frac{d^2}{dx^2}$ και $A = \Delta$ είναι συμμετρικοί τελεστές ως προς το εσωτερικό γινόμενο $(\cdot\,,\cdot)$ του χώρου Hilbert $L^2(\mathbb{R}^d)$ με $d \geq 1$ και ανεξάρτητοι από τον χρόνο t. Στις εργασίες [14, 15] μελετήθηκε η εξίσωση της αναπαραγόμενης δυναμικής χρησιμοποιώντας ως τελεστές αμοιβής A δύο μη συμμετρικούς ως προς το εσωτερικό γινόμενο $(\cdot\,,\cdot)$ στον χώρο Hilbert $L^2(\mathbb{R}^d)$ με $d \geq 1$ και χρονοεξαρτώμενους τελεστές.

Κεφάλαιο 2

Η Μονοδιάστατη Περίπτωση Αναπαραγόμενης Δυναμικής

2.1 Εισαγωγή

Η αναπαραγόμενη δυναμική έχει μελετηθεί εκτενώς στην περίπτωση όπου το σύνολο των καθαρών στρατηγικών είναι πεπερασμένο ή μη [1, 3, 7, 8] σε συνδυασμό με κάποιες οικονομικές, βιολογικές και άλλες εφαρμογές. Παρ' όλα αυτά, η εξίσωση της αναπαραγόμενης δυναμικής είναι μία πολύ γενική εξίσωση απ' την οποία κάποιος δεν μπορεί να εξάγει περισσότερα, όπως τη μορφή των λύσεων και τις ιδιότητές τους.

Έχοντας ως στόχο να συγκεκριμενοποιηθεί το μοντέλο που περιγράφεται από την εξίσωση της αναπαραγόμενης δυναμικής, η εργασία [5] εστίασε στη μελέτη της περίπτωσης όπου το σύνολο των καθαρών στρατηγικών S είναι ο χώρος $\mathbb{R}$ και ο τελεστής αμοιβής A είναι ο διαφορικός τελεστής $\frac{d^2}{dx^2}$. Τότε, η εξίσωση της αναπαραγόμενης δυναμικής

$$u_t = [Au - (u, Au)]\, u \tag{2.1}$$

διαμορφώνεται ως εξής

$$u_t = [u_{xx} - (u, u_{xx})]\, u, \tag{2.2}$$

όπου $u = u(t, x)$ με $t > 0$ και $x \in \mathbb{R}$ και με u_t συμβολίζεται η μερική παράγωγος της u ως προς το χρόνο t και το $(\cdot\,,\cdot)$ δηλώνει το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στον χώρο Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων πραγματικών

συναρτήσεων που ορίζονται στο $\mathbb{R}$, δηλαδή

$$(u, v) := \int_{-\infty}^{\infty} u(x)v(x)dx.$$

Για την αρχική συνθήκη, δηλαδή την $u(0, x)$ υποθέτουμε, ότι είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ως προς x, επομένως

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(0, x)dx = 1 \tag{2.3}$$

και

$$u(0, x) \geq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

Η εργασία [5] επικεντρώθηκε στο ειδικό πρόβλημα της δομής μιας μονοπαραμετρικής οικογένειας λύσεων ομοιότητας (self-similar solutions) για την εξίσωση (2.2), δηλαδή για λύσεις u της μορφής

$$u(t, x) = t^{-\kappa} g\left(xt^{-\lambda}\right). \tag{2.5}$$

Ειδικότερα, στην εργασία [5] αποδείχθηκε ότι για κάθε $\beta \in (0, \infty)$ υπάρχει μία λύση ομοιότητας

$$u(t, x) = t^{-\frac{1}{3}} g\left(xt^{-\frac{1}{3}}\right), \tag{2.6}$$

της εξίσωσης (2.2) που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες (2.3) και (2.4). Η συνάρτηση g, που παρουσιάζεται στην (2.6), ικανοποιεί την ολοκληρωτική συνθήκη

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(s)ds = 1,$$

είναι θετική στο $\mathbb{R}$, δηλαδή

$$g(s) > 0, \text{ για κάθε } s \in \mathbb{R}$$

και επαληθεύει την εξίσωση

$$g(s)g''(s) + \frac{1}{3}sg'(s) + \frac{1}{3}g(s) + K[g]g(s) = 0,$$

με

$$K[g] := \int_{-\infty}^{\infty} g'(s)^2 ds,$$

και επιπλέον ισχύει

$$K[g] = \beta.$$

Ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό των λύσεων της μορφής (2.6) είναι ότι όλες είναι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας στον $\mathbb{R}$, για κάθε $t > 0$ και προσεγγίζουν τη συνάρτηση Dirac $\delta(x)$ καθώς $t \to 0^+$.

Ο τελεστής $A = \frac{d^2}{dx^2}$ είναι ανεξάρτητος από τον χρόνο t και επιπλέον είναι συμμετρικός ως προς το εσωτερικό γινόμενο $(\cdot\,,\cdot)$ του χώρου Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων πραγματικών συναρτήσεων.

Στο δεύτερο κεφάλαιο μελετάμε την εξίσωση (2.1) του αναπαραγόμενου δυναμικού μοντέλου χρησιμοποιώντας ως τελεστή αμοιβής A έναν χρονοεξαρτώμενο και μη συμμετρικό τελεστή ως προς το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο $(\cdot\,,\cdot)$ του χώρου Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων πραγματικών συναρτήσεων που ορίζονται στο $\mathbb{R}$. Ο τελεστής αυτός είναι ο εξής

$$Au(t,x) = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + \alpha t^\gamma x \frac{\partial u(t,x)}{\partial x},\ t>0,\ x\in\mathbb{R} \tag{2.7}$$

όπου γ είναι μία πραγματική σταθερά (συγκεκριμένα $\gamma=-2/3$), ενώ $\alpha>0$ είναι μία θετική παράμετρος. Τότε, με χρήση του τελεστή A που δίνεται από την (2.7), η εξίσωση (2.1) του αναπαραγόμενου δυναμικού μοντέλου διαμορφώνεται ως εξής

$$u_t = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha t^\gamma x \frac{\partial u}{\partial x} - \int_{-\infty}^{\infty}\left(u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha t^\gamma x u \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx\right] u, \tag{2.8}$$

όπου $u=u(t,x)$ με $t>0$ και $x\in\mathbb{R}$.
Στο δεύτερο κεφάλαιο αποδεικνύεται, ότι η εξίσωση (2.8) έχει μία μονοπαραμετρική οικογένεια λύσεων ομοιότητας της μορφής (2.5) που όλες προσεγγίζουν τη συνάρτηση Dirac $\delta(x)$ καθώς $t\to 0^+$. Ως συναρτήσεις του x, όλες αυτές οι λύσεις είναι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας στον χώρο $\mathbb{R}$, για κάθε $t>0$.

2.2 Το Μονοδιάστατο Πρόβλημα Αναπαραγόμενης Δυναμικής

Θεωρούμε το αναπαραγόμενο δυναμικό μοντέλο (replicator dynamics) που περιγράφεται από την εξίσωση

$$u_t = [Au - (u, Au)]\, u,\ t>0,\ x\in\mathbb{R} \tag{2.9}$$

όπου $u=u(t,x)$ με $t>0$ και $x\in\mathbb{R}$.
Στο μονοδιάστατο πρόβλημα του αναπαραγόμενου δυναμικού μοντέλου που μελετάμε θεωρούμε ότι το σύνολο των καθαρών στρατηγικών S είναι ο χώρος $\mathbb{R}$ και ο τελεστής αμοιβής (payoff) A ορίζεται ως εξής

$$Au(t,x) := \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + \alpha t^\gamma x \frac{\partial u(t,x)}{\partial x},\ t>0,\ x\in\mathbb{R}$$

ή πιο απλά

$$Au := u_{xx} + \alpha t^\gamma x u_x, \tag{2.10}$$

όπου γ είναι μία πραγματική σταθερά (συγκεκριμένα $\gamma=-2/3$), ενώ

$$\alpha > 0, \tag{2.11}$$

είναι μία θετική παράμετρος. Τότε, με χρήση του τελεστή A που δίνεται από την (2.10), η εξίσωση (2.9) του αναπαραγόμενου δυναμικού μοντέλου διαμορφώνεται ως εξής

$$u_t = \left[u_{xx} + \alpha t^\gamma x u_x - \int_{-\infty}^{\infty}(u_{xx} + \alpha t^\gamma x u_x)\, u\, dx\right] u. \tag{2.12}$$

Στο συγκεκριμένο μοντέλο αναπαραγόμενης δυναμικής, ο τελεστής αμοιβής A είναι ένας χρονοεξαρτώμενος και μη συμμετρικός τελεστής ως προς το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο $(\cdot,\cdot)$ του χώρου Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων πραγματικών συναρτήσεων που ορίζονται στο $\mathbb{R}$. Μας ενδιαφέρουν οι λύσεις $u(t,x)$ της εξίσωσης (2.12) που είναι θετικές και το ολοκλήρωμά τους ως προς x πάνω σε ολόκληρο τον χώρο $\mathbb{R}$ είναι 1 για κάθε $t>0$, δηλαδή ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}} u(t,x)dx = 1. \tag{2.13}$$

Αυτές οι λύσεις $u(t,x)$, ως συναρτήσεις του x, είναι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας στον χώρο $\mathbb{R}$ για κάθε $t>0$, μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως χρονο-εξελισσόμενες μεικτές στρατηγικές ενός παίκτη.
Σκοπός του δεύτερου κεφαλαίου είναι να αποδείξουμε την ύπαρξη μιας μονοπαραμετρικής οικογένειας λύσεων ομοιότητας (self-similar solutions) $u(t,x)$ για την εξίσωση (2.12), που είναι της μορφής

$$u(t,x) = t^{-\kappa} g\left(xt^{-\lambda}\right). \tag{2.14}$$

και που όλες προσεγγίζουν τη συνάρτηση Dirac $\delta(x)$ καθώς $t \to 0^+$.
Πρώτα όμως θα μελετήσουμε ένα βοηθητικό πρόβλημα ως προς την ύπαρξη λύσης του και τις ιδιότητες της λύσης αυτής.
Όμως, προκειμένου η εξίσωση (2.9) να είναι όντως ένα αναπαραγόμενο δυναμικό μοντέλο, πρέπει αρχικά να βεβαιωθούμε πως εάν ξεκινήσουμε με μία αρχική συνθήκη, που είναι μία συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, δηλαδή εάν ισχύουν

$$u(0,x) = f(x) \geq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \tag{2.15}$$

και

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1, \tag{2.16}$$

τότε, η λύση $u(t,x)$ θα παραμένει, ως συνάρτηση του x, μία συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για κάθε $t>0$ (για τα x για τα οποία υπάρχει).
Για τον λόγο αυτό, θεωρούμε τη συνάρτηση

$$U(t) := \int_{-\infty}^{\infty} u(t,x)dx, \tag{2.17}$$

οπότε, η παράγωγός της ως προς t είναι

$$U'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_t(t,x)dx. \tag{2.18}$$

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της (2.9) ως προς x προκύπτει,

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_t dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[Au - (u, Au)\right] u dx,$$

συνεπώς, η (2.18), γίνεται

$$\begin{aligned} U'(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} u_t(t,x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [Au - (u, Au)]udx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [(Au)u - (u, Au)u]dx \\ &= (u, Au) - (u, Au) \int_{-\infty}^{\infty} u(t,x)dx \\ &= (u, Au) - (u, Au)U(t). \end{aligned}$$

Τελικά, προκύπτει η εξίσωση

$$U'(t) = (u, Au)[1 - U(t)], \tag{2.19}$$

καθώς έχουμε υποθέσει ότι η εναλλαγή του ολοκληρώματος ως προς x και της παραγώγισης ως προς t είναι επιτρεπτή.
Από τις (2.15), (2.16) έπεται ότι

$$U(0) = \int_{-\infty}^{\infty} u(0,x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Οπότε, από την (2.19) και από το γεγονός ότι $U(0) = 1$ συμπεραίνουμε ότι $U(t) \equiv 1$ και με βάση την (2.17), προκύπτει ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t,x)dx = 1.$$

Άρα, το ολοκλήρωμα της $u(t,x)$, ως προς x, στον χώρο $\mathbb{R}$ είναι 1 για κάθε $t > 0$.

Επίσης, εάν η συνάρτηση $u(t,x)$ είναι μία λύση της (2.9), η οποία υπάρχει για κάθε $t > 0$ και ως συνάρτηση του x είναι ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$ και θετική για μικρά t, τότε, εξαιτίας της μορφής της εξίσωσης (2.9), έχουμε ότι η $u(t,x)$ παραμένει θετική για κάθε $t > 0$. Μπορούμε, επομένως, να συμπεράνουμε πως το σύνολο των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας στον χώρο $\mathbb{R}$ είναι αμετάβλητο κάτω από την επιρροή της (2.9).

2.3 Ειδικές Λύσεις Ομοιότητας

Θεωρούμε την εξίσωση (2.9) της αναπαραγόμενης δυναμικής

$$u_t = [Au - (u, Au)]\, u,$$

όπου $u = u(t,x)$ με $t > 0$ και $x \in \mathbb{R}$ και ο τελεστής A ορίζεται στην (2.10) ως εξής

$$Au = u_{xx} + \alpha t^{\gamma} x u_x,$$

όπου γ είναι μία πραγματική σταθερά, $\alpha > 0$ είναι μία θετική παράμετρος, $x \in \mathbb{R}$ και $t > 0$.
Ας υποθέσουμε ότι η λύση $u(t,x)$ ικανοποιεί τα εξής

$$u(t,\cdot) \in H^1(\mathbb{R}) \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} xu(t,x)^2 = 0. \tag{2.20}$$

Από την (2.10) προκύπτει

$$\begin{aligned}(u, Au) &= \int_{-\infty}^{\infty} (Au)udx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [u_{xx} + \alpha t^\gamma x u_x]udx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [u_{xx}u + \alpha t^\gamma x u_x u]dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}udx + \alpha t^\gamma \int_{-\infty}^{\infty} xu_x udx.\end{aligned}$$

Με παραγοντική ολοκλήρωση και λόγω της (2.20), έχουμε

$$(u, Au) = -\int_{-\infty}^{\infty} u_x^2 dx - \frac{\alpha}{2} t^\gamma \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx, \tag{2.21}$$

οπότε η (2.9), από τις (2.10) και (2.21), καταλήγει στη μορφή

$$u_t = \left[u_{xx} + \alpha t^\gamma x u_x + \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2 dx + \frac{\alpha}{2} t^\gamma \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx\right] u$$

ή

$$u_t = [u_{xx} + \alpha t^\gamma x u_x]\, u + \left[\int_{-\infty}^{\infty} u_x^2 dx + \frac{\alpha}{2} t^\gamma \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx\right] u. \tag{2.22}$$

Αναζητούμε λύσεις ομοιότητας $u(t,x)$ (self-similar solutions), δηλαδή για λύσεις της μορφής

$$u(t,x) = \frac{1}{t^\kappa} g(\frac{x}{t^\lambda})$$

ή πιο απλά

$$u(t,x) = t^{-\kappa} g(xt^{-\lambda}). \tag{2.23}$$

Θεωρούμε τον μετασχηματισμό ομοιότητας

$$s = xt^{-\lambda}\,(\text{οπότε } x = st^\lambda). \tag{2.24}$$

Οπότε, η $u(t,x)$ της (2.23) μπορεί επίσης να γραφτεί ως εξής

$$u(t,x) = t^{-\kappa} g(s). \tag{2.25}$$

Παραγωγίζοντας ως προς x την $u(t,x)$ και χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό (2.24), έχουμε

$$u_x(t,x) = t^{-\kappa} g'(s) t^{-\lambda}$$

ή

$$u_x(t,x) = t^{-(\kappa+\lambda)} g'(s). \tag{2.26}$$

Παραγωγίζοντας ως προς x την $u_x(t,x)$ και χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό (2.24), έχουμε

$$u_{xx}(t,x) = t^{-(\kappa+\lambda)} g''(s) t^{-\lambda}$$

ή

$$u_{xx}(t,x) = t^{-(\kappa+2\lambda)} g''(s). \tag{2.27}$$

Επιπλέον, παραγωγίζοντας ως προς t την $u(t,x)$, έχουμε

$$u_t(t,x) = -\kappa t^{-\kappa-1} g(s) - \lambda t^{-\lambda-1} x t^{-\kappa} g'(s)$$

ή

$$u_t(t,x) = -\kappa t^{-(\kappa+1)} g(s) - \lambda x t^{-\lambda} t^{-(\kappa+1)} g'(s)$$

οπότε, λόγω του μετασχηματισμού (2.24), έπεται ότι

$$u_t(t,x) = -\kappa t^{-(\kappa+1)} g(s) - \lambda s t^{-(\kappa+1)} g'(s)$$

ή

$$u_t(t,x) = -t^{-(\kappa+1)} \left[\kappa g(s) + \lambda s g'(s)\right]. \tag{2.28}$$

Συνεπώς, η (2.21), από τις (2.26) και (2.25), γράφεται ως εξής

$$(u, Au) = -\int_{-\infty}^{+\infty} [t^{-(\kappa+\lambda)} g'(s)]^2 dx - \frac{\alpha}{2} t^{\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} [t^{-\kappa} g(s)]^2 dx$$

και χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $x = st^{\lambda}$ της (2.24), έχουμε

$$(u, Au) = -\int_{-\infty}^{+\infty} [t^{-(\kappa+\lambda)} g'(s)]^2 t^{\lambda} ds - \frac{\alpha}{2} t^{\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} [t^{-\kappa} g(s)]^2 t^{\lambda} ds$$

ή

$$(u, Au) = -t^{-(2\kappa+\lambda)} \int_{-\infty}^{\infty} g'(s)^2 ds - \frac{\alpha}{2} t^{\gamma+\lambda-2\kappa} \int_{-\infty}^{\infty} g(s)^2 ds. \tag{2.29}$$

Θέτοντας

$$K[g] := \int_{-\infty}^{\infty} g'(s)^2 ds \tag{2.30}$$

και

$$\Lambda[g] := \int_{-\infty}^{\infty} g(s)^2 ds, \tag{2.31}$$

η ισότητα (2.29) διαμορφώνεται ως εξής

$$(u, Au) = -t^{-(2\kappa+\lambda)} K[g] - \frac{\alpha}{2} t^{\gamma+\lambda-2\kappa} \Lambda[g]$$

οπότε, από την (2.21) προκύπτει ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_x^2 dx + \frac{\alpha}{2} t^{\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx = t^{-(2\kappa+\lambda)} K[g] + \frac{\alpha}{2} t^{\gamma+\lambda-2\kappa} \Lambda[g]. \tag{2.32}$$

Αντικαθιστώντας τις (2.25), (2.26), (2.27), (2.28), (2.32) στην εξίσωση (2.22), έχουμε

$$\begin{aligned}-t^{-(\kappa+1)}[\kappa g(s)+\lambda s g'(s)] &= \left[t^{-(\kappa+2\lambda)}g''(s)+\alpha t^{\gamma}xt^{-(\kappa+\lambda)}g'(s)\right]t^{-\kappa}g(s)\\ &+\left[t^{-(2\kappa+\lambda)}K[g]+\frac{\alpha}{2}t^{\gamma+\lambda-2\kappa}\Lambda[g]\right]t^{-\kappa}g(s)\end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned}-\kappa g(s)-\lambda s g'(s) &= \left[t^{-(\kappa+2\lambda)}g''(s)+\alpha t^{\gamma}xt^{-(\kappa+\lambda)}g'(s)\right]tg(s)\\ &+\left[t^{-(2\kappa+\lambda)}K[g]+\frac{\alpha}{2}t^{\gamma+\lambda-2\kappa}\Lambda[g]\right]tg(s)\end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned}-\kappa g(s)-\lambda s g'(s) &= \left[t^{1-(\kappa+2\lambda)}g''(s)+\alpha xt^{-\lambda}t^{1+\gamma-\kappa}g'(s)\right]g(s)\\ &+\left[t^{1-(2\kappa+\lambda)}K[g]+\frac{\alpha}{2}t^{1+\gamma+\lambda-2\kappa}\Lambda[g]\right]g(s)\end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό (2.24) καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\begin{aligned}-\kappa g(s)-\lambda s g'(s) =& t^{1-\kappa-2\lambda}g''(s)g(s)+\alpha s t^{1+\gamma-\kappa}g'(s)g(s)\\ &+t^{1-2\kappa-\lambda}K[g]g(s)+\frac{\alpha}{2}t^{1+\gamma+\lambda-2\kappa}\Lambda[g]g(s).\end{aligned} \tag{2.33}$$

Ο μόνος τρόπος για να έχει νόημα η εξίσωση (2.33) είναι να μην περιέχει τη μεταβλητή t, οπότε πρέπει

$$1-\kappa-2\lambda=0,\quad 1+\gamma-\kappa=0,\quad 1-2\kappa-\lambda=0,\quad 1+\gamma+\lambda-2\kappa=0. \tag{2.34}$$

Από τις παραπάνω ισότητες προκύπτει ότι

$$\gamma=-\frac{2}{3},\quad \kappa=\frac{1}{3},\quad \lambda=\frac{1}{3}. \tag{2.35}$$

Η εξίσωση (2.33), από την (2.35), διαμορφώνεται ως εξής

$$-\frac{1}{3}g(s)-\frac{1}{3}sg'(s)=g''(s)g(s)+\alpha sg'(s)g(s)+K[g]g(s)+\frac{\alpha}{2}\Lambda[g]g(s)$$

ή

$$g''(s)g(s)+\alpha sg'(s)g(s)+K[g]g(s)+\frac{\alpha}{2}\Lambda[g]g(s)+\frac{1}{3}g(s)+\frac{1}{3}sg'(s)=0. \tag{2.36}$$

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι, από τις (2.35) και (2.23), έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}u(t,x)dx &= \int_{-\infty}^{\infty}t^{-\kappa}g(xt^{-\lambda})dx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}t^{-1/3}g(xt^{-1/3})dx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}t^{-1/3}g(s)t^{1/3}ds\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}g(s)ds,\end{aligned} \tag{2.37}$$

που είναι ανεξάρτητο της μεταβλητής t.
Οπότε, εάν θεωρήσουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(s)ds = 1, \tag{2.38}$$

από τις (2.37), (2.38) έχουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t,x)dx = 1, \text{για κάθε } t \geq 0.$$

Το Λήμμα 2.1 συγκεντρώνει όλα όσα έχουμε κάνει μέχρι τώρα.

Λήμμα 2.1 *Εάν η συνάρτηση*

$$u(t,x) = t^{-\kappa} g(xt^{-\lambda}) \ \ \mu\epsilon \ t > 0, \ x \in \mathbb{R} \tag{2.39}$$

είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ως προς x και ικανοποιεί την εξίσωση

$$u_t = \left[u_{xx} + \alpha t^{\gamma} x u_x + \int_{-\infty}^{\infty} (u_{xx} + \alpha t^{\gamma} x u_x) u dx \right] u, \tag{2.40}$$

τότε

$$\gamma = -\frac{2}{3}, \quad \kappa = \frac{1}{3}, \quad \lambda = \frac{1}{3}, \tag{2.41}$$

και για τη συνάρτηση g ισχύουν τα εξής

$$g(s) \geq 0, \quad s \in \mathbb{R}, \tag{2.42}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(s)ds = 1, \tag{2.43}$$

και

$$g''(s)g(s) + \alpha s g'(s)g(s) + K[g]g(s) + \frac{\alpha}{2}\Lambda[g]g(s) + \frac{1}{3}g(s) + \frac{1}{3}sg'(s) = 0, \tag{2.44}$$

όπου

$$K[g] = \int_{-\infty}^{\infty} g'(s)^2 ds \tag{2.45}$$

και

$$\Lambda[g] = \int_{-\infty}^{\infty} g(s)^2 ds. \tag{2.46}$$

Αντιστρόφως, εάν ισχύουν οι (2.41)–(2.46), *τότε η συνάρτηση $u(t,x)$, που δίνεται από την* (2.39), *είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ως προς x και ικανοποιεί την εξίσωση* (2.40). ■

Παρατήρηση. Από την (2.10), το γεγονός ότι $\gamma = -2/3$ μας δείχνει ότι μακροπρόθεσμα και καθώς το x θα παραμένει φραγμένο, ο τελεστής $A(t)$ του συγκεκριμένου μοντέλου αναπαραγόμενης δυναμικής προσεγγίζει τον συμμετρικό τελεστή $\partial^2/\partial x^2$.

Το επόμενο βήμα είναι να αποδείξουμε ότι υπάρχει συνάρτηση $g(s)$ που ικανοποιεί τις (2.42), (2.43), (2.44), (2.45) και (2.46).

2.4 Το Βοηθητικό Πρόβλημα

Η εξίσωση (2.44) γράφεται και ως εξής

$$g''(s)g(s) + \alpha s g'(s)g(s) + \left(K[g] + \frac{\alpha}{2}\Lambda[g] + \frac{1}{3}\right) g(s) + \frac{1}{3} s g'(s) = 0,$$

όπου

$$K[g] + \frac{\alpha}{2}\Lambda[g] + \frac{1}{3} > \frac{1}{3},$$

εφ' όσον $\alpha > 0$, $K[g] > 0$ και $\Lambda[g] > 0$.
Επομένως, θεωρούμε την εξίσωση

$$q''(s)q(s) + \alpha s q'(s)q(s) + \mu q(s) + \frac{1}{3} s q'(s) = 0, \tag{2.47}$$

με

$$\mu > \frac{1}{3}.$$

Σκοπός μας είναι να αποδείξουμε την ύπαρξη λύσης $g(s)$ που ικανοποιεί τις εξισώσεις (2.42)–(2.46). Πρώτα, όμως, θα αποδείξουμε, ότι υπάρχει λύση $q(s)$ που ικανοποιεί την (2.47) και θα μελετήσουμε τις ιδιότητες της λύσης αυτής. Οπότε, θα συνεχίσουμε με τη μελέτη του παρακάτω βοηθητικού προβλήματος.
Ας υποθέσουμε ότι έχουμε το εξής πρόβλημα αρχικών τιμών

$$q''(s)q(s) + \alpha s q'(s)q(s) + \mu q(s) + \frac{1}{3} s q'(s) = 0, \ \ s \in \mathbb{R} \tag{2.48}$$

$$q(0) = A > 0, \qquad q'(0) = 0, \tag{2.49}$$

όπου μ είναι μία πραγματική παράμετρος για την οποία ισχύει

$$\mu > \frac{1}{3}. \tag{2.50}$$

Η εξίσωση (2.48) μπορεί να γραφεί και ως εξής

$$q''(s) + \left[\frac{1}{3q(s)} + \alpha\right] s q'(s) + \mu = 0, \tag{2.51}$$

εφ' όσον ισχύει $q(s) \neq 0$.
Επειδή $q(0) = A > 0$, από το Θεώρημα Ύπαρξης και Μοναδικότητας λύσης για τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις [2], αποδεικνύεται ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε το πρόβλημα αρχικών τιμών (2.48)–(2.49) έχει μοναδική λύση $q(s)$ με $s \in (-\delta, \delta)$.
Επιπλέον, από το γεγονός ότι η (2.48) παραμένει αμετάβλητη χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $s \mapsto -s$ και εφ' όσον $q'(0) = 0$, πρέπει να ισχύει

$$q(-s) = q(s), \qquad s \in (-\delta, \delta),$$

δηλαδή η λύση $q(s)$ με $s \in (-\delta, \delta)$ είναι μία άρτια συνάρτηση.

Το Λήμμα 2.2 [5] που ακολουθεί είναι ιδιαίτερα σημαντικό και χρησιμοποιείται στο Λήμμα 2.3 για την απόδειξη της ύπαρξης λύσης του προβλήματος των εξισώσεων (2.48)–(2.49) σε όλο το $\mathbb{R}$ καθώς και στη μελέτη βασικών ιδιοτήτων αυτής της λύσης.

Λήμμα 2.2 *Έστω f μία γνησίως αύξουσα συνάρτηση ορισμένη σ' ένα διάστημα $(0, b)$ για κάποιο $b > 0$, με*

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \infty. \tag{2.52}$$

Τότε, ισχύει

$$\lim_{x \to b^-} \left[x f(x) - \int_0^x f(\xi) d\xi \right] = \infty. \tag{2.53}$$

Απόδειξη. Έστω $\omega \in (0, x) \subset (0, b)$. Εφ' όσον η f είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο $(0, b)$ ισχύει

$$x f(x) \geq \omega \left[f(x) - f(\omega) \right] + \int_0^x f(\xi) d\xi. \tag{2.54}$$

Επομένως, από την (2.54) προκύπτει ότι

$$\liminf_{x \to b^-} \left[x f(x) - \int_0^x f(\xi) d\xi \right] \geq \liminf_{x \to b^-} \omega \left[f(x) - f(\omega) \right] = \infty \tag{2.55}$$

αφού ισχύει η (2.52).
Οπότε, συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{x \to b^-} \left[x f(x) - \int_0^x f(\xi) d\xi \right] = \infty$$

που είναι η (2.53).
Η απόδειξη του Λήμματος 2.2 έχει ολοκληρωθεί. ■

Λήμμα 2.3 *Η λύση $q(s)$ του προβλήματος αρχικών τιμών* (2.48)–(2.49) *υπάρχει για κάθε $s \in \mathbb{R}$ και είναι μία (άρτια), αυστηρά θετική και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση στο $[0, \infty)$.*
Επιπλέον, για τη λύση $q(s)$ ισχύουν

$$\lim_{s \to \infty} q(s) = 0, \tag{2.56}$$

$$\lim_{s \to \infty} q'(s) = 0, \tag{2.57}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} q'(s)^2 ds < \infty, \tag{2.58}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} q(s)^2 ds < \infty, \tag{2.59}$$

και η παρακάτω ισότητα

$$\left(\mu - \frac{1}{3} \right) \int_{-\infty}^{\infty} q(s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} q'(s)^2 ds + \frac{\alpha}{2} \int_{-\infty}^{\infty} q(s)^2 ds. \tag{2.60}$$

Απόδειξη. Εφ' όσον η q είναι μία άρτια συνάρτηση, αρκεί να αποδείξουμε ότι η $q(s)$ υπάρχει για κάθε $s \in [0, \infty)$.
Εάν αυτό δεν ισχύει, τότε θα ισχύει ακριβώς μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

1. υπάρχει $s_1 \in (0, \infty)$ τέτοιος ώστε $q(s_1) = 0$, ενώ $q(s) > 0$ για κάθε $s \in [0, s_1)$ (εξαιτίας του παρονομαστή $q(s)$ που εμφανίζεται στην (2.51)),

2. από γνωστό Θεώρημα της θεωρίας των συνήθων διαφορικών εξισώσεων [2], υπάρχει $b > 0$ τέτοιος ώστε
$$\lim_{s \to b^-} \left[\left| q'(s) \right| + |q(s)| \right] = \infty.$$

Ας αποκλείσουμε πρώτα την περίπτωση 1.
Έστω ότι υπάρχει $s_1 > 0$ τέτοιος ώστε $q(s_1) = 0$, ενώ $q(s) > 0$ για κάθε $s \in [0, s_1)$. Τότε, η $q'(s)$ είναι αρνητική στο $(0, s_1)$.
Εάν αυτό δεν είναι αληθές, τότε πρέπει να υπάρχει $s_2 \in (0, s_1)$ τέτοιο ώστε $q'(s_2) = 0$, ενώ $q'(s) < 0$ για κάθε $s \in (0, s_2)$. Επομένως, ισχύει ότι $q''(s_2) \geq 0$. Όμως, από την (2.51) προκύπτει ότι
$$q''(s_2) = -\mu < 0,$$
που είναι άτοπο.
Άρα, δεν υπάρχει $s_2 \in (0, s_1)$ τέτοιο ώστε $q'(s_2) = 0$ και $q'(s) < 0$ για κάθε $s \in (0, s_2)$. Επομένως, $q'(s) < 0$ για κάθε $s \in (0, s_1)$.

Ολοκληρώνοντας την ισότητα (2.51) από 0 έως $s \in (0, s_1)$ και χρησιμοποιώντας ότι $q'(0) = 0$ και $q(s) > 0$ για κάθε $s \in [0, s_1)$, έχουμε
$$\int_0^s \left[q''(\xi) + \frac{\xi q'(\xi)}{3q(\xi)} + \alpha \xi q'(\xi) + \mu \right] d\xi = 0$$
ή
$$\int_0^s q''(\xi) d\xi + \frac{1}{3} \int_0^s \frac{\xi q'(\xi)}{q(\xi)} d\xi + \alpha \int_0^s \xi q'(\xi) d\xi + \int_0^s \mu d\xi = 0$$
ή
$$q'(s) + \frac{1}{3} \int_0^s \xi \left[\ln q(\xi) \right]' d\xi + \alpha s q(s) - \alpha \int_0^s q(\xi) d\xi + \mu s = 0$$
ή
$$q'(s) + \frac{1}{3} s \ln q(s) - \frac{1}{3} \int_0^s \ln q(\xi) d\xi + \alpha s q(s) - \alpha \int_0^s q(\xi) d\xi + \mu s = 0$$
ή
$$q'(s) = \alpha \int_0^s q(\xi) d\xi - \alpha s q(s) - \mu s + \frac{1}{3} \int_0^s \ln q(\xi) d\xi - \frac{1}{3} s \ln q(s). \tag{2.61}$$
Εφ' όσον $q'(s) < 0$ για $s \in (0, s_1)$, η $q(s)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, s_1)$. Συνεπώς και η συνάρτηση $\ln q(s)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, s_1)$, οπότε η συνάρτηση
$$f(s) := -\frac{1}{3} \ln q(s) \tag{2.62}$$

είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, s_1)$ και

$$\lim_{s\to s_1^-} f(s) = \lim_{s\to s_1^-} -\frac{1}{3}\ln q(s) = -\frac{1}{3}\lim_{s\to s_1^-}\ln q(s) = \infty.$$

Τότε, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.2 για την f, έπεται ότι

$$\lim_{s\to s_1^-}\left(sf(s) - \int_0^s f(\xi)d\xi\right) = \infty,$$

οπότε, από την (2.62) έχουμε

$$\lim_{s\to s_1^-}\left(-\frac{1}{3}s\ln q(s) + \frac{1}{3}\int_0^s \ln q(\xi)d\xi\right) = \infty. \tag{2.63}$$

Επομένως, από τις (2.61) και (2.63) προκύπτει ότι

$$\lim_{s\to s_1^-} q'(s) = \lim_{s\to s_1^-}\left[\alpha\int_0^s q(\xi)d\xi - \alpha s q(s) - \mu s + \frac{1}{3}\int_0^s \ln q(\xi)d\xi - \frac{1}{3}s\ln q(s)\right]$$

ή

$$\lim_{s\to s_1^-} q'(s) = \infty,$$

που είναι αδύνατο, αφού, όπως αποδείξαμε, η q' παραμένει αρνητική στο $(0, s_1)$. Άρα, τέτοιος αριθμός s_1 δεν υπάρχει, δηλαδή η q δεν μηδενίζεται και επομένως, η q' επίσης δεν μηδενίζεται.
Συνεπώς, η περίπτωση 1 δεν ισχύει. Ειδικότερα, για κάθε $s > 0$ για τους οποίους οι $q(s)$ και $q'(s)$ υπάρχουν, ισχύουν

$$q(s) > 0, \;\; q'(s) < 0$$

οπότε, η q είναι γνησίως φθίνουσα και γι' αυτό ισχύει $0 < q(s) < q(0) = A$, για κάθε $s > 0$ για τα οποία η $q(s)$ υπάρχει.
Τώρα, ας υποθέσουμε ότι ισχύει η περίπτωση 2.
Τότε, υπάρχει $b > 0$ τέτοιο ώστε

$$\lim_{s\to b^-}\left[\left|q'(s)\right| + |q(s)|\right] = \infty. \tag{2.64}$$

Από όσα έχουν προηγηθεί, συμπεραίνουμε ότι για να ισχύει η (2.64) πρέπει

$$\lim_{s\to b^-} q'(s) = -\infty,$$

άρα και,

$$\liminf_{s\to b^-} q''(s) = -\infty,$$

που αντιβαίνει στην (2.51).
Οπότε,

$$\lim_{s\to b^-} q'(s) \neq -\infty.$$

Επομένως, τέτοιος θετικός αριθμός $b > 0$ δεν υπάρχει. Συνεπώς, η περίπτωση 2 δεν ισχύει.

Άρα, η λύση q υπάρχει για κάθε $s \in [0, \infty)$ και επειδή η q είναι άρτια, τότε η λύση q υπάρχει και για κάθε $s < 0$. Οπότε, η λύση υπάρχει για κάθε $s \in \mathbb{R}$.

Επιπλέον, η q είναι αυστηρά θετική στο $[0, \infty)$ (με $q(0) = A > 0$) ενώ η q' παραμένει αυστηρά αρνητική στο $(0, \infty)$ (με $q'(0) = 0$). Άρα, η q είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \infty)$. Εφ' όσον η q είναι άρτια, πρέπει, επίσης, να ισχύει $q(s) > 0$ για κάθε $s < 0$. Επομένως, η q είναι θετική για κάθε $s \in \mathbb{R}$.

Από τα παραπάνω έπεται ότι

$$\lim_{s \to \infty} q(s) = L,$$

δηλαδή

$$q(s) = L + o(1), \text{ καθώς } s \to \infty, \tag{2.65}$$

όπου $L \in [0, A)$.
Ας υποθέσουμε ότι $L > 0$. Τότε, από την παραπάνω ισότητα, καθώς $s \to \infty$, έχουμε

$$\ln q(s) = \ln (L + o(1)) = \ln L \, (1 + o(1)) = \ln L + o(1). \tag{2.66}$$

Χρησιμοποιώντας τις (2.65) και (2.66) στην (2.61), καθώς $s \to \infty$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} q'(s) = \alpha \int_0^s [L + o(1)] \, d\xi - \alpha s \, [L + o(1)] \\ - \mu s + \frac{1}{3} \int_0^s [\ln L + o(1)] \, d\xi - \frac{1}{3} s \, [\ln L + o(1)] \, , \end{aligned}$$

ή

$$q'(s) = \alpha s \, [L + o(1)] - \alpha s \, [L + o(1)] - \mu s + \frac{1}{3} s \, [\ln L + o(1)] - \frac{1}{3} s \, [\ln L + o(1)]$$

ή

$$q'(s) = \alpha s L + o(s) - \alpha s L + o(s) - \mu s + \frac{1}{3} s \ln L + o(s) - \frac{1}{3} s \ln L + o(s),$$

οπότε

$$q'(s) = -\mu s + o(s), \text{ καθώς } s \to \infty,$$

που έρχεται σε αντίφαση με την (2.65).
Συνεπώς, $L = 0$, δηλαδή

$$\lim_{s \to \infty} q(s) = 0,$$

που είναι η (2.56).
Συνεχίζοντας, παρατηρούμε ότι,

$$\int_0^\infty q'(s) ds = \lim_{s \to \infty} q(s) - q(0) = -A, \tag{2.67}$$

και επειδή η q' είναι περιττή (και αρνητική), έπεται ότι η $q' \in L_1(\mathbb{R})$.
Υποθέτουμε ότι

$$\liminf_{s \to \infty} q'(s) < 0. \tag{2.68}$$

Τότε, υπάρχει μία ακολουθία $s_n \to \infty$ τέτοια ώστε, η q' παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο s_n, για κάθε n και

$$\lim_{n\to\infty} q'(s_n) = -\epsilon, \text{ για κάποιο } \epsilon > 0. \tag{2.69}$$

Εφ' όσον η $q'(s_n)$ είναι ένα τοπικό ελάχιστο της q', πρέπει να ισχύει $q''(s_n) = 0$, οπότε η (2.51) δίνει

$$\left[\frac{1}{3q(s_n)} + \alpha\right] s_n q'(s_n) = -\mu$$

ή

$$q'(s_n) = -\frac{3\mu q(s_n)}{[1 + 3\alpha q(s_n)]\, s_n},$$

οπότε

$$\lim_{n\to\infty} q'(s_n) = 0,$$

που αντιβαίνει στην (2.69), συνεπώς και στην (2.68).
Επομένως, ισχύει

$$\lim_{s\to\infty} q'(s) = 0,$$

που είναι η (2.57).
Από το παραπάνω όριο και το γεγονός ότι η q' είναι περιττή και ολοκληρώσιμη, συμπεραίνουμε ότι $q' \in L_2(\mathbb{R})$, δηλαδή

$$\int_{-\infty}^{\infty} q'(s)^2 ds < \infty,$$

που είναι η (2.58).
Ολοκληρώνοντας κατά μέλη την (2.48) από 0 έως s για $s > 0$ έχουμε

$$\int_0^s q(\xi)q''(\xi)d\xi + \frac{1}{3}\int_0^s \xi q'(\xi)d\xi + \alpha\int_0^s \xi q(\xi)q'(\xi)d\xi + \mu\int_0^s q(\xi)d\xi = 0$$

και χρησιμοποιώντας ότι $q'(0) = 0$ προκύπτει ότι

$$q(s)q'(s) - \int_0^s q'(\xi)^2 d\xi + \frac{1}{3}sq(s) - \frac{1}{3}\int_0^s q(\xi)d\xi + \frac{\alpha}{2}sq(s)^2 \\ -\frac{\alpha}{2}\int_0^s q(\xi)^2 d\xi + \mu\int_0^s q(\xi)d\xi = 0,$$

ή

$$q(s)q'(s) - \int_0^s q'(\xi)^2 d\xi + \frac{1}{3}sq(s) + \frac{\alpha}{2}sq(s)^2 - \frac{\alpha}{2}\int_0^s q(\xi)^2 d\xi \\ + \left(\mu - \frac{1}{3}\right)\int_0^s q(\xi)d\xi = 0$$

οπότε

$$(\mu - \frac{1}{3})\int_0^s q(\xi)d\xi = \int_0^s q'(\xi)^2 d\xi + \frac{\alpha}{2}\int_0^s q^2(\xi)d\xi - q(s)q'(s) \\ -[\frac{1}{3}sq(s) + \frac{\alpha}{2}sq^2(s)].$$

Εφ' όσον $\alpha > 0$, $s \geq 0$ και $q(s) > 0$, από την παραπάνω ισότητα έχουμε

$$\left(\mu - \frac{1}{3}\right) \int_0^s q(\xi)d\xi \leq \int_0^s q'(\xi)^2 d\xi + \frac{\alpha}{2} \int_0^s q(\xi)^2 d\xi - q(s)q'(s). \tag{2.70}$$

1. Εάν υποθέσουμε ότι

$$\int_0^\infty q(\xi)d\xi = \infty, \tag{2.71}$$

τότε από την (2.70), μέσω των (2.56), (2.57) και (2.58), συμπεραίνουμε ότι

$$\int_0^\infty q(\xi)^2 d\xi = \infty.$$

Θέτοντας

$$M := \int_0^\infty q'(\xi)^2 d\xi < \infty,$$

η ανισότητα (2.70) μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\left(\mu - \frac{1}{3}\right) \int_0^s q(\xi)d\xi \leq M + \frac{\alpha}{2} \int_0^s q(\xi)^2 d\xi - q(s)q'(s).$$

Επιπρόσθετα, $q(\xi) > 0$, για όλα τα $\xi \in (0, \infty)$. Οπότε, από την παραπάνω ανισότητα έχουμε

$$\mu - \frac{1}{3} \leq \frac{M + \frac{\alpha}{2} \int_0^s q(\xi)^2 d\xi - q(s)q'(s)}{\int_0^s q(\xi)d\xi}. \tag{2.72}$$

Από την (2.71), τον κανόνα De L' Hospital και το γεγονός ότι η $q(s)q'(s)$ είναι φραγμένη, προκύπτει ότι

$$\lim_{s\to\infty} \frac{M + \frac{\alpha}{2} \int_0^s q(\xi)^2 d\xi - q(s)q'(s)}{\int_0^s q(\xi)d\xi} \leq \lim_{s\to\infty} \frac{\frac{\alpha}{2} q(s)^2}{q(s)} = \frac{\alpha}{2} \lim_{s\to\infty} q(s) = 0.$$

Αλλά, τότε, από την (2.72) έχουμε $\mu \leq 1/3$, που είναι αδύνατον αφού $\mu > 1/3$.
Κατά συνέπεια,

$$\int_0^\infty q(\xi)d\xi < \infty. \tag{2.73}$$

2. Η συνάρτηση q είναι αυστηρά θετική και γνησίως φθίνουσα στο $(0, \infty)$ με $0 < q(s) < A$, για κάθε $s > 0$.
Εφ' όσον

$$\lim_{s\to\infty} q(s) = 0,$$

υπάρχει $s_0 > 0$ τέτοιος ώστε, $0 < q(s)^2 < q(s)$ για κάθε $s \geq s_0$.
Συνεπώς,

$$\lim_{s\to\infty} q(s)^2 = 0 \qquad \text{και} \qquad 0 < \int_{s_0}^\infty q(s)^2 ds < \int_{s_0}^\infty q(s)ds.$$

Οπότε, από την (2.73) έπεται ότι

$$\int_0^\infty q(s)^2 ds < \infty,$$

και επειδή η q^2 είναι άρτια, τότε

$$\int_{-\infty}^\infty q(s)^2 ds < \infty,$$

που είναι η (2.59).

Από τις (2.58), (2.59) και (2.73) έχουμε

$$\lim_{s\to\infty}\left[\frac{1}{3}sq(s)+\frac{\alpha}{2}sq(s)^2\right] = \int_0^\infty q'(\xi)^2 d\xi + \frac{\alpha}{2}\int_0^\infty q(\xi)^2 d\xi - \left(\mu-\frac{1}{3}\right)\int_0^\infty q(\xi)d\xi < \infty.$$

Επομένως,

$$\lim_{s\to\infty}\left[\frac{1}{3}sq(s)+\frac{\alpha}{2}sq^2(s)\right] = \tilde{L}\in\mathbb{R}. \tag{2.74}$$

Εάν $\tilde{L}\neq 0$, τότε από το παραπάνω όριο της (2.74) προκύπτει ότι η συνάρτηση

$$T(s) := \frac{1}{3}q(s)+\frac{\alpha}{2}q(s)^2$$

είναι ασύμπτωτη της $\tilde{L}/s$, που είναι άτοπο αφού η $T(s)$ είναι ολοκληρώσιμη. Γι' αυτό,

$$\tilde{L} = 0.$$

Τότε,

$$\left(\mu-\frac{1}{3}\right)\int_0^\infty q(s)ds = \int_0^\infty q'(s)^2 ds + \frac{\alpha}{2}\int_0^\infty q(s)^2 ds,$$

από την οποία προκύπτει άμεσα ότι

$$(\mu-\frac{1}{3})\int_{-\infty}^{+\infty} q(s)ds = \int_{-\infty}^{+\infty} q'(s)^2 ds + \frac{\alpha}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} q(s)^2 ds,$$

που είναι η (2.60).

Η απόδειξη του Λήμματος 2.3 έχει ολοκληρωθεί. ■

2.5 Η Δομή των Λύσεων του Βοηθητικού Προβλήματος

Στην προηγούμενη ενότητα μελετήσαμε ένα βοηθητικό πρόβλημα αρχικών τιμών (2.48)–(2.49), που συνδέεται με το αρχικό πρόβλημα της εξίσωσης (2.12) της αναπαραγόμενης δυναμικής με αρχικές συνθήκες (2.15) και (2.16). Για το βοηθητικό πρόβλημα αποδείξαμε την ύπαρξη μοναδικής λύσης $q(s)$ για κάθε $s\in\mathbb{R}$ και κάποιες βασικές ιδιότητες της λύσης αυτής. Σε αυτήν την ενότητα θα μελετήσουμε επιπρόσθετες ιδιότητες της λύσης $q(s)$, συνεπώς και τη δομή των λύσεων του βοηθητικού προβλήματος αρχικών τιμών (2.48)–(2.49) για την εξίσωση (2.12) της αναπαραγόμενης δυναμικής.

Λήμμα 2.4 *Έστω $q(s)$ η μοναδική λύση του προβλήματος αρχικών τιμών* (2.48)–(2.49) *με $q(0) = A > 0$. Τότε*

$$\|q'\|_\infty \leq \mu\sqrt{\frac{3A}{1+3\alpha A}}\,, \tag{2.75}$$

όπου $\|\cdot\|_\infty$ είναι η sup-norm, ως συνήθως.
Επιπλέον,

$$\int_0^\infty q(s)ds \geq \frac{A^{3/2}\sqrt{1+3\alpha A}}{2\sqrt{3}\,\mu}, \tag{2.76}$$

και

$$\int_0^\infty q(s)^2 ds \geq \frac{A^{5/2}\sqrt{1+3\alpha A}}{3\sqrt{3}\,\mu}. \tag{2.77}$$

Απόδειξη. Η συνάρτηση q' είναι περιττή, οπότε

$$\|q'\|_\infty = \sup\left\{|q'(s)| : s \geq 0\right\}.$$

Εφ' όσον $q'(s) < 0$ για κάθε $s \in (0,\infty)$ με

$$q'(0) = 0 = \lim_{s\to\infty} q'(s),$$

έπεται ότι η q' επιτυγχάνει το απόλυτο ελάχιστό της σε κάποιον $s_m \in (0,\infty)$, και έτσι

$$\|q'\|_\infty = \sup\left\{-q'(s) : s \geq 0\right\} = -q'(s_m) = |q'(s_m)|\,.$$

Τότε, $q''(s_m) = 0$, οπότε από την εξίσωση (2.51) έχουμε

$$q'(s_m) = -\frac{\mu}{\left[\frac{1}{3q(s_m)} + \alpha\right] s_m},$$

άρα

$$\|q'\|_\infty = -q'(s_m) = \frac{\mu}{\left[\frac{1}{3q(s_m)} + \alpha\right] s_m}. \tag{2.78}$$

Αλλά η $q(s)$ είναι θετική και γνησίως φθίνουσα στο $[0,\infty)$, ενώ $q(0) = A$ και $s_m \in (0,\infty)$, επομένως

$$0 < q(s_m) < A$$

άρα

$$\alpha < \frac{1}{3A} + \alpha < \frac{1}{3q(s_m)} + \alpha$$

οπότε

$$\frac{\mu}{[\frac{1}{3q(s_m)} + \alpha]s_m} < \frac{\mu}{[\frac{1}{3A} + \alpha]s_m} < \frac{\mu}{\alpha s_m}.$$

Από την παραπάνω ανίσωση και από την (2.78) έχουμε

$$\|q'\|_\infty < \frac{3\mu A}{(1+3\alpha A)s_m} < \frac{\mu}{\alpha s_m}. \tag{2.79}$$

Επίσης, από την (2.51) προκύπτει

$$q''(s) + \mu = -\left[\frac{1}{3q(s)} + \alpha\right] sq'(s) \geq 0, \text{ για κάθε } s \geq 0,$$

ενώ $q'(0) = 0$.
Συνεπώς, ισχύει

$$q'(s) \geq -\mu s, \text{ για κάθε } s \geq 0,$$

και ειδικότερα,

$$\|q'\|_\infty = -q'(s_m) \leq \mu s_m. \tag{2.80}$$

Συνδυάζοντας τις (2.79) και (2.80), καταλήγουμε στο εξής

$$\|q'\|_\infty \leq \min\left\{\frac{3\mu A}{(1+3\alpha A)s_m}\ ,\ \mu s_m\right\}.$$

Αλλά, όποιος και εάν είναι ο θετικός αριθμός s_m, η ποσότητα

$$\min\left\{\frac{3\mu A}{(1+3\alpha A)s_m}\ ,\ \mu s_m\right\}$$

είναι πάντα το πολύ N, όπου

$$N := \mu s^* = \frac{3\mu A}{(1+3\alpha A)s^*},$$

για κάποιον αριθμό $s^* > 0$, καθώς η συνάρτηση $3\mu A(1+3\alpha A)^{-1}s_m^{-1}$ είναι γνησίως φθίνουσα ως προς s_m ενώ η συνάρτηση μs_m είναι γνησίως αύξουσα ως προς s_m. Συνεπώς,

$$s^* = \sqrt{\frac{3A}{1+3\alpha A}} \qquad \text{και} \qquad N = \mu\sqrt{\frac{3A}{1+3\alpha A}}$$

και

$$\|q'\|_\infty \leq N,$$

δηλαδή

$$\|q'\|_\infty \leq \mu\sqrt{\frac{3A}{1+3\alpha A}},$$

που είναι η (2.75).
Επιπλέον, ισχύει

$$\|q'\|_\infty \geq -q'(s), \text{ για κάθε } s \geq 0,$$

οπότε

$$q(s) \geq q(0) - s\|q'\|_\infty = A - s\|q'\|_\infty, \text{ για κάθε } s \geq 0.$$

Τότε, από την (2.75) έχουμε

$$q(s) \geq A - s\mu\sqrt{\frac{3A}{1+3\alpha A}}, \text{ για κάθε } s \geq 0. \tag{2.81}$$

Ειδικότερα, για

$$0 \le s \le \frac{\sqrt{(1+3\alpha A)\,A}}{\mu\sqrt{3}},$$

(εφ' όσον $q(s) > 0$ για κάθε $s \ge 0$), από την (2.81) προκύπτει

$$\begin{aligned}\int_0^\infty q(s)ds \ge& \int_0^{\frac{\sqrt{(1+3\alpha A)A}}{\mu\sqrt{3}}} q(s)ds\\ \ge& \int_0^{\frac{\sqrt{(1+3\alpha A)A}}{\mu\sqrt{3}}} \left(A - s\mu\sqrt{\frac{3A}{1+3\alpha A}}\right) ds\\ =& A\frac{\sqrt{(1+3\alpha A)A}}{\mu\sqrt{3}} - \frac{\mu}{2}\sqrt{\frac{3A}{1+3A\alpha}}\frac{(1+3\alpha A)A}{3\mu^2}\\ =& \frac{A^{3/2}\sqrt{1+3\alpha A}}{2\sqrt{3}\,\mu},\end{aligned}$$

άρα

$$\int_0^\infty q(s)ds \ge \frac{A^{3/2}\sqrt{1+3\alpha A}}{2\sqrt{3}\,\mu}$$

που είναι η (2.76).
Επίσης, από την (2.81) έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^\infty q(s)^2ds \ge& \int_0^{\frac{\sqrt{(1+3\alpha A)A}}{\mu\sqrt{3}}} q(s)^2ds\\ \ge& \int_0^{\frac{\sqrt{(1+3\alpha A)A}}{\mu\sqrt{3}}} \left(A - s\mu\sqrt{\frac{3A}{1+3\alpha A}}\right)^2 ds\\ =& \frac{A^{5/2}\sqrt{1+3\alpha A}}{3\sqrt{3}\,\mu},\end{aligned}$$

οπότε

$$\int_0^\infty q(s)^2ds \ge \frac{A^{5/2}\sqrt{1+3\alpha A}}{3\sqrt{3}\,\mu}$$

που είναι η (2.77).
Η απόδειξη του Λήμματος 2.4 έχει ολοκληρωθεί. ■

Πόρισμα 2.1 *Έστω $q(s)$ η μοναδική λύση του προβλήματος αρχικών τιμών* (2.48)–(2.49) *με $q(0) = A > 0$. Τότε για τη συνάρτηση q ισχύουν τα εξής*

$$\lim_{A\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} q(s)ds = \infty, \tag{2.82}$$

$$\lim_{A\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} q(s)^2ds = \infty, \tag{2.83}$$

$$\lim_{A\to 0^+}\int_{-\infty}^{\infty} q'(s)^2 ds = 0 \tag{2.84}$$

και

$$\lim_{A\to 0^+} q(s) = 0. \tag{2.85}$$

Απόδειξη. Η συνάρτηση $q(s)$ είναι άρτια, οπότε ισχύει

$$\int_{-\infty}^{\infty} q(s)ds = 2\int_{0}^{\infty} q(s)ds,$$

και από την (2.76) έπεται ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} q(s)ds = 2\int_{0}^{\infty} q(s)ds \geq \frac{2A^{3/2}\sqrt{1+3\alpha A}}{2\sqrt{3}\,\mu},$$

επομένως

$$\int_{-\infty}^{\infty} q(s)ds \geq \frac{A^{3/2}\sqrt{1+3\alpha A}}{\sqrt{3}\,\mu}. \tag{2.86}$$

Εφ' όσον

$$\lim_{A\to\infty}\frac{A^{3/2}\sqrt{1+3\alpha A}}{\sqrt{3}\,\mu} = \infty,$$

από την (2.86) συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{A\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} q(s)ds = \infty,$$

που είναι η (2.82).
Η συνάρτηση q είναι άρτια, οπότε και η συνάρτηση q^2 είναι επίσης άρτια. Συνεπώς, ισχύει

$$\int_{-\infty}^{\infty} q(s)^2 ds = 2\int_{0}^{\infty} q(s)^2 ds,$$

και από την (2.77) έπεται ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} q(s)^2 ds = 2\int_{0}^{\infty} q(s)^2 ds \geq \frac{2A^{5/2}\sqrt{1+3\alpha A}}{3\sqrt{3}\,\mu}. \tag{2.87}$$

Εφ' όσον

$$\lim_{A\to+\infty}\frac{2A^{\frac{5}{2}}\sqrt{1+3\alpha A}}{3\sqrt{3}\mu} = +\infty,$$

από την (2.87) έχουμε

$$\lim_{A\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} q(s)^2 ds = \infty,$$

που είναι η (2.83).
Εφ' όσον $q'(s) < 0$, για κάθε $s > 0$, τότε $-q'(s) > 0$, για κάθε $s > 0$.

Επιπλέον, $-q'(s) \leq \|q'\|_\infty$, για κάθε $s \geq 0$ και $q'(s)^2 \geq 0$, για κάθε $s \geq 0$. Επομένως, από τα παραπάνω και την (2.56), προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_0^\infty q'(s)^2 ds &\leq -\|q'\|_\infty \int_0^\infty q'(s) ds \\ &= -\|q'\|_\infty \left(\lim_{s\to\infty} q(s) - q(0)\right) \\ &= -\|q'\|_\infty (-A) = A\|q'\|_\infty \end{aligned}$$

και, συνεπώς, χρησιμοποιώντας την (2.75) έχουμε

$$0 \leq \int_0^\infty q'(s)^2 ds \leq A\mu\sqrt{\frac{3A}{1+3\alpha A}} = \sqrt{\frac{3A^3\mu^2}{1+3\alpha A}}. \tag{2.88}$$

Επειδή η $q'(s)$ είναι περιττή, τότε η $q'(s)^2$ είναι άρτια. Επιπλέον, $q'(s)^2 \geq 0$, για κάθε $s \in \mathbb{R}$ οπότε χρησιμοποιώντας την (2.88) έχουμε

$$0 \leq \int_{-\infty}^\infty q'(s)^2 ds = 2\int_0^\infty q'(s)^2 ds \leq 2\sqrt{\frac{3A^3\mu^2}{1+3\alpha A}}, \tag{2.89}$$

και εφ' όσον

$$\lim_{A\to 0^+} 2\sqrt{\frac{3A^3\mu^2}{1+3\alpha A}} = 0,$$

από την (2.89) έπεται ότι

$$\lim_{A\to 0^+} \int_{-\infty}^\infty q'(s)^2 ds = 0.$$

που είναι η (2.84).
Επιπλέον, για κάθε $s \in \mathbb{R}$ ισχύει $|q'(s)| \leq \|q'\|_\infty$, οπότε από την (2.75) προκύπτει ότι

$$\left|q'(s)\right| \leq \mu\sqrt{\frac{3A}{1+3\alpha A}}, \text{ για κάθε } s \in \mathbb{R}.$$

Εφ' όσον, για κάθε $s \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\begin{aligned} |q(s)| &= \left|\int_0^s q'(\xi)d\xi + q(0)\right| = \left|\int_0^s q'(\xi)d\xi + A\right| \\ &\leq \left|\int_0^s q'(\xi)d\xi\right| + A \leq \int_0^s \left|q'(\xi)\right| d\xi + A \qquad (2.90) \\ &\leq \int_0^s \|q'\|_\infty d\xi + A \leq \|q'\|_\infty \int_0^s 1 d\xi + A \qquad (2.91) \\ &\leq \mu\sqrt{\frac{3A}{1+3\alpha A}} s + A \qquad (2.92) \end{aligned}$$

και $q(s) > 0$ για κάθε $s \in \mathbb{R}$, τότε

$$0 < q(s) \leq \mu\sqrt{\frac{3A}{1+3\alpha A}} s + A.$$

Επειδή

$$\lim_{A\to 0^+}\left(\mu\sqrt{\frac{3A}{1+3\alpha A}}s+A\right)=0,$$

τότε και

$$\lim_{A\to 0^+} q(s)=0.$$

που είναι η (2.85).
Η απόδειξη του Πορίσματος 2.1 έχει ολοκληρωθεί. ■

Λήμμα 2.5 *Έστω $q(s)$ η μοναδική λύση του προβλήματος αρχικών τιμών* (2.48)–(2.49) *με $q(0)=A>0$. Τότε ισχύει*

$$\frac{q(1)e^{3\alpha q(1)}s^{-3\mu}}{\exp\left(3\mu+\frac{3\mu}{s}\sqrt{\frac{3A}{1+3\alpha A}}\right)}<q(s)e^{3\alpha q(s)}\le\frac{Ae^{3A(1+\alpha)}s^{-3\mu}}{\exp\left(3\mu-\frac{3\mu}{s}\sqrt{\frac{3A}{1+3\alpha A}}\right)},\tag{2.93}$$

για κάθε $s\ge 1$.

Απόδειξη. Η συνάρτηση q είναι θετική στο $\mathbb{R}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F(s):=-\frac{1}{3}\int_0^s \ln q(\xi)d\xi,\ \ s\in\mathbb{R}.$$

Εφ' όσον η $q(s)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\infty)$, για $0\le\xi\le 1$ έχουμε

$$q(1)\le q(\xi)\le q(0)=A\tag{2.94}$$

οπότε

$$\ln q(1)\le\ln q(\xi)\le\ln q(0)=\ln A$$

και

$$\int_0^1\ln q(1)d\xi\le\int_0^1\ln q(\xi)d\xi\le\int_0^1\ln Ad\xi$$

ή

$$\ln q(1)\le -3F(1)\le\ln A.\tag{2.95}$$

Επιπλέον, από την (2.94) προκύπτει ότι

$$\int_0^1 q(1)d\xi\le\int_0^1 q(\xi)d\xi\le\int_0^1 Ad\xi$$

και $\alpha>0$ οπότε

$$\alpha q(1)\le\alpha\int_0^1 q(\xi)d\xi\le\alpha A.\tag{2.96}$$

Από την (2.61), έχουμε

$$q'(s)=\alpha\int_0^s q(\xi)d\xi-\alpha sq(s)-\mu s+\frac{1}{3}\int_0^s\ln q(\xi)d\xi-\frac{1}{3}s\ln q(s)$$

ή

$$q'(s) = \alpha \int_0^s q(\xi)d\xi - \alpha s q(s) - \mu s - F(s) + sF'(s), \tag{2.97}$$

άρα

$$sF'(s) - F(s) = q'(s) + \mu s + \alpha s q(s) - \alpha \int_0^s q(\xi)d\xi.$$

Συνεπώς, για $s \neq 0$ έχουμε

$$\frac{sF'(s) - F(s)}{s^2} = \frac{q'(s)}{s^2} + \frac{\mu}{s} + \frac{\alpha q(s)}{s} - \frac{\alpha}{s^2}\int_0^s q(\xi)d\xi$$

ή

$$\left(\frac{F(s)}{s}\right)' = \frac{q'(s)}{s^2} + \frac{\mu}{s} + \alpha\left(\frac{1}{s}\int_0^s q(\xi)d\xi\right)'. \tag{2.98}$$

Ολοκληρώνουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης (2.98) από 1 έως $s \geq 1$ και αυτό έχει ως αποτέλεσμα το εξής

$$\int_1^s \left(\frac{F(\xi)}{\xi}\right)' d\xi = \int_1^s \frac{q'(\xi)}{\xi^2}d\xi + \mu\int_1^s \frac{1}{\xi}d\xi + \alpha\int_1^s \left(\frac{1}{\xi}\int_0^\xi q(w)dw\right)' d\xi.$$

ή

$$\frac{F(s)}{s} - F(1) = \int_1^s \frac{q'(\xi)}{\xi^2}d\xi + \mu \ln s + \alpha\frac{1}{s}\int_0^s q(\xi)d\xi - \alpha\int_0^1 q(\xi)d\xi,$$

ή

$$\int_1^s \frac{q'(\xi)}{\xi^2}d\xi = \frac{F(s)}{s} - F(1) - \mu\ln s - \frac{\alpha}{s}\int_0^s q(\xi)d\xi + \alpha\int_0^1 q(\xi)d\xi. \tag{2.99}$$

Εφ' όσον $q'(s) < 0$, για κάθε $s \in (0, \infty)$ και $1 \leq \xi \leq s$, τότε

$$\begin{aligned} 0 \geq \int_1^s \frac{q'(\xi)}{\xi^2}d\xi &\geq \int_1^s q'(\xi)d\xi \\ &\geq \int_0^\infty q'(\xi)d\xi = \lim_{s\to\infty} q(s) - q(0) = -A, \end{aligned}$$

οπότε

$$0 \geq \int_1^s \frac{q'(\xi)}{\xi^2}d\xi \geq -A,$$

και μέσω της (2.99) έχουμε

$$0 \geq \frac{F(s)}{s} - F(1) - \mu\ln s - \frac{\alpha}{s}\int_0^s q(\xi)d\xi + \alpha\int_0^1 q(\xi)d\xi \geq -A,$$

ή

$$\begin{aligned} F(1) + \mu\ln s + \frac{\alpha}{s}\int_0^s q(\xi)d\xi - \alpha\int_0^1 q(\xi)d\xi &\geq \frac{F(s)}{s} \\ &\geq F(1) + \mu\ln s + \frac{\alpha}{s}\int_0^s q(\xi)d\xi - \alpha\int_0^1 q(\xi)d\xi - A. \end{aligned} \tag{2.100}$$

Επίσης, από την (2.97) προκύπτει ότι

$$F(s) = \alpha \int_0^s q(\xi)d\xi - \alpha s q(s) - \mu s + sF'(s) - q'(s)$$

και για $s \neq 0$ έχουμε

$$\frac{F(s)}{s} = \frac{\alpha}{s}\int_0^s q(\xi)d\xi - \alpha q(s) - \mu + F'(s) - \frac{q'(s)}{s}. \tag{2.101}$$

Επομένως, από την (2.100) σε συνδυασμό με την (2.101) για $s \geq 1$, έπεται ότι

$$\begin{aligned} F(1) + \mu \ln s + \frac{\alpha}{s}\int_0^s q(\xi)d\xi - \alpha \int_0^1 q(\xi)d\xi \\ \geq \frac{\alpha}{s}\int_0^s q(\xi)d\xi - \alpha q(s) - \mu + F'(s) - \frac{q'(s)}{s} \\ \geq F(1) + \mu \ln s + \frac{\alpha}{s}\int_0^s q(\xi)d\xi - \alpha \int_0^1 q(\xi)d\xi - A. \end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned} F(1) + \mu \ln s - \alpha \int_0^1 q(\xi)d\xi \geq F'(s) - \alpha q(s) - \mu - \frac{q'(s)}{s} \\ \geq F(1) + \mu \ln s - \alpha \int_0^1 q(\xi)d\xi - A, \end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned} \frac{q'(s)}{s} + F(1) + \mu \ln s - \alpha \int_0^1 q(\xi)d\xi \geq F'(s) - \alpha q(s) - \mu \\ \geq \frac{q'(s)}{s} + F(1) + \mu \ln s - \alpha \int_0^1 q(\xi)d\xi - A. \end{aligned} \tag{2.102}$$

Επειδή $q'(s) < 0$, για κάθε $s \in (0, +\infty)$, είναι

$$\frac{q'(s)}{s} < 0 < -\frac{q'(s)}{s}, \text{ για κάθε } s > 0.$$

Από την (2.75) και το γεγονός ότι $\|q'\|_\infty \geq -q'(s)$ για κάθε $s \in (0, \infty)$, έχουμε

$$-q'(s) \leq \|q'\|_\infty \leq \mu\sqrt{\frac{3A}{1+3\alpha A}}, \text{ για κάθε } s > 0,$$

οπότε από τα παραπάνω έπεται ότι

$$-\frac{\mu}{s}\sqrt{\frac{3A}{1+3\alpha A}} \leq \frac{q'(s)}{s} < 0 < -\frac{q'(s)}{s} \leq \frac{\mu}{s}\sqrt{\frac{3A}{1+3\alpha A}}. \tag{2.103}$$

Συνεπώς, χρησιμοποιώντας την (2.103) στην (2.102) έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{s}\sqrt{\frac{3A}{1+3\alpha A}} + F(1) + \ln(s^\mu) - \alpha \int_0^1 q(\xi)d\xi > F'(s) - \alpha q(s) - \mu \\ \geq -\frac{\mu}{s}\sqrt{\frac{3A}{1+3\alpha A}} + F(1) + \ln(s^\mu) - \alpha \int_0^1 q(\xi)d\xi - A, \end{aligned}$$

για κάθε $s \geq 1$.
Από τα παραπάνω και την (2.96) προκύπτει

$$\frac{\mu}{s}\sqrt{\frac{3A}{1+3\alpha A}} + F(1) + \ln(s^{\mu}) - \alpha q(1) > F'(s) - \alpha q(s) - \mu$$
$$\geq -\frac{\mu}{s}\sqrt{\frac{3A}{1+3\alpha A}} + F(1) + \ln(s^{\mu}) - \alpha A - A.$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της συνάρτησης $F(s)$, οι παραπάνω ανισότητες μπορούν να γραφούν ως εξής

$$\frac{\mu}{s}\sqrt{\frac{3A}{1+3\alpha A}} + F(1) + \ln(s^{\mu}) - \alpha q(1) > -\frac{1}{3}\ln q(s) - \alpha q(s) - \mu$$
$$\geq -\frac{\mu}{s}\sqrt{\frac{3A}{1+3\alpha A}} + F(1) + \ln(s^{\mu}) - \alpha A - A.$$

ή

$$3\alpha q(1) - 3F(1) - \frac{3\mu}{s}\sqrt{\frac{3A}{1+3\alpha A}} + \ln s^{-3\mu} < \ln q(s) + 3\alpha q(s) + 3\mu$$
$$\leq 3\alpha A + 3A + \frac{3\mu}{s}\sqrt{\frac{3A}{1+3\alpha A}} - 3F(1) + \ln s^{-3\mu}.$$

Από την (2.95), για $s \geq 1$ οι παραπάνω ανισότητες γίνονται

$$3\alpha q(1) + \ln q(1) - \frac{3\mu}{s}\sqrt{\frac{3A}{1+3\alpha A}} + \ln(s^{-3\mu}) - 3\mu < \ln q(s) + 3\alpha q(s)$$
$$\leq 3\alpha A + 3A + \frac{3\mu}{s}\sqrt{\frac{3A}{1+3\alpha A}} + \ln A + \ln(s^{-3\mu}) - 3\mu,$$

οπότε

$$\frac{q(1)}{s^{3\mu}}\exp\left(3\alpha q(1) - \frac{3\mu}{s}\sqrt{\frac{3A}{1+3\alpha A}} - 3\mu\right) < q(s)e^{3\alpha q(s)}$$
$$\leq \frac{A}{s^{3\mu}}\exp\left(3\alpha A + 3A + \frac{3\mu}{s}\sqrt{\frac{3A}{1+3\alpha A}} - 3\mu\right)$$

ή

$$\frac{q(1)e^{3\alpha q(1)}s^{-3\mu}}{\exp\left(3\mu + \frac{3\mu}{s}\sqrt{\frac{3A}{1+3\alpha A}}\right)} < q(s)e^{3\alpha q(s)} \leq \frac{Ae^{3A(1+\alpha)}s^{-3\mu}}{\exp\left(3\mu - \frac{3\mu}{s}\sqrt{\frac{3A}{1+3\alpha A}}\right)}$$

και έτσι αποδείχθηκε η (2.93).
Η απόδειξη του Λήμματος 2.5 έχει ολοκληρωθεί. ■

Πόρισμα 2.2 *Έστω $q(s)$ η μοναδική λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (2.48)–(2.49) με $q(0) = A > 0$. Τότε, ως συνάρτηση του A, η ποσότητα*

$$I(A) := \int_{-\infty}^{\infty} q(s)ds \tag{2.104}$$

είναι συνεχής ως προς A στο $(0, \infty)$.

Απόδειξη. Έστω $q(s, A) := q(s)$ η μοναδική λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (2.48)–(2.49) με $q(0) = A > 0$. Από βασικό Θεώρημα των συνήθων διαφορικών εξισώσεων για τη συνεχή εξάρτηση από τις παραμέτρους συμπεραίνουμε ότι η $q(s, A)$ είναι συνεχής ως προς A για κάθε $A > 0$.

Σταθεροποιώντας τα A_1, A_2 με $0 < A_1 < A_2 < \infty$, η δεύτερη ανισότητα στην (2.93), η μονοτονία της q και η συνθήκη $\mu > 1/3$ οδηγούν στο συμπέρασμα ότι η οικογένεια συναρτήσεων $\{q(\cdot\,, A) : A \in [A_1, A_2]\}$ είναι φραγμένη από την ολοκληρώσιμη συνάρτηση $H(s) = h(|s|)$, $s \in \mathbb{R}$, όπου

$$h(s) := \begin{cases} A_2 e^{3\alpha A_2}, & 0 \le s < 1 \\ \dfrac{A_2 e^{3A_2(1+\alpha)}}{s^{3\mu} \exp\left(3\mu - 3\mu\sqrt{\frac{3A_2}{1+3\alpha A_1}}\right)}, & s \ge 1. \end{cases}$$

Οπότε, από γνωστό Θεώρημα της Ανάλυσης, η $I(A)$ είναι συνεχής ως προς A στο $(0, \infty)$.
Η απόδειξη του Πορίσματος 2.2 έχει ολοκληρωθεί. ■

2.6 Ύπαρξη Μονοπαραμετρικής Οικογένειας Λύσεων Ομοιότητας

Στις προηγούμενες ενότητες μελετήσαμε το βοηθητικό πρόβλημα αρχικών τιμών (2.48)–(2.49), το οποίο συνδέεται με το αρχικό πρόβλημα της εξίσωσης (2.12) της αναπαραγόμενης δυναμικής με αρχικές συνθήκες (2.15)–(2.16), και αποδείξαμε την ύπαρξη μοναδικής λύσης $q(s)$ για κάθε $s \in \mathbb{R}$. Επιπλέον, μελετήσαμε βασικές ιδιότητες και γενικά τη δομή της λύσης $q(s)$ του βοηθητικού προβλήματος. Σ' αυτήν την ενότητα θα αποδείξουμε την ύπαρξη μονοπαραμετρικής οικογένειας λύσεων ομοιότητας της εξίσωσης της αναπαραγόμενης δυναμικής (2.12).

Θεώρημα 2.1 *Έστω η εξίσωση της αναπαραγόμενης δυναμικής*

$$u_t = [Au - (u, Au)]\, u, \tag{2.105}$$

όπου το σύνολο των καθαρών στρατηγικών S είναι ο χώρος $\mathbb{R}$ και ο τελεστής αμοιβής A είναι ο εξής

$$Au = u_{xx} + \alpha t^{\gamma} x u_x, \tag{2.106}$$

όπου $\gamma = -2/3$ και α είναι μία θετική παράμετρος.
Τότε, για κάθε αριθμό $\beta \in (0, \infty)$ υπάρχει μία λύση ομοιότητας

$$u(t, x) = t^{-1/3} g(x t^{-1/3})$$

της εξίσωσης (2.105), όπου η συνάρτηση g ικανοποιεί τα εξής

$$g(s) > 0, \ \text{για κάθε } s \in \mathbb{R}, \tag{2.107}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(s) ds = 1, \tag{2.108}$$

και

$$g''(s)g(s)+\alpha sg'(s)g(s)+K[g]g(s)+\frac{\alpha}{2}\Lambda[g]g(s)+\frac{1}{3}g(s)+\frac{1}{3}sg'(s)=0, \quad (2.109)$$

με

$$K[g] := \int_{-\infty}^{\infty} g'(s)^2 ds, \quad (2.110)$$

$$\Lambda[g] := \int_{-\infty}^{\infty} g(s)^2 ds \quad (2.111)$$

και επιπλέον ισχύει

$$\beta = K[g] + \frac{\alpha}{2}\Lambda[g]. \quad (2.112)$$

Απόδειξη. Δεδομένου του $\beta \in (0,\infty)$, θεωρούμε τη συνάρτηση $q(s)$, όπου $q(s) = q(s,A)$, η οποία είναι η μοναδική λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (2.48)–(2.49) με $\mu = \beta + \frac{1}{3}$. Άρα, ισχύουν τα εξής

$$q''(s)q(s) + \alpha sq'(s)q(s) + \beta q(s) + \frac{1}{3}q(s) + \frac{1}{3}sq'(s) = 0, \ \ s \in \mathbb{R},$$

$$q(0) = A > 0, \qquad q'(0) = 0.$$

και

$$q(s) > 0, \ \text{για κάθε } s \in \mathbb{R}.$$

Θέτουμε

$$Q(A) := \int_{-\infty}^{\infty} q'(s,A)^2 ds + \frac{\alpha}{2}\int_{-\infty}^{\infty} q(s,A)^2 ds. \quad (2.113)$$

Από την (2.60) του Λήμματος 2.3 ισχύει

$$\left(\mu - \frac{1}{3}\right)\int_{-\infty}^{\infty} q(s,A)ds = \int_{-\infty}^{\infty} q'(s,A)^2 ds + \frac{\alpha}{2}\int_{-\infty}^{\infty} q(s,A)^2 ds.$$

Οπότε

$$Q(A) = \left(\mu - \frac{1}{3}\right)\int_{-\infty}^{\infty} q(s,A)ds = \beta\int_{-\infty}^{\infty} q(s,A)ds.$$

Από την (2.104) έχουμε

$$I(A) = \int_{-\infty}^{\infty} q(s,A)ds$$

άρα

$$Q(A) = \beta I(A).$$

Από το Πόρισμα 2.2 συμπεραίνουμε ότι η $Q(A)$ είναι συνεχής στο $(0,\infty)$. Συνεπώς, από την (2.85) έπεται ότι

$$\lim_{A\to 0^+} Q(A) = \lim_{A\to 0^+}\int_{-\infty}^{\infty} q(s,A)ds = \int_{-\infty}^{\infty}\lim_{A\to 0^+} q(s,A)ds = 0,$$

άρα

$$\lim_{A\to 0^+} Q(A) = 0.$$

Επιπλέον, από την (2.82) του Πορίσματος 2.1 έχουμε

$$\lim_{A\to\infty} Q(A) = \infty.$$

Συνεπώς, η συνάρτηση $Q(A)$ λαμβάνει όλες τις τιμές μεταξύ 0 και ∞. Άρα, για τον αριθμό $\beta \in (0,\infty)$ υπάρχει ένα $A = A_\beta$ τέτοιο ώστε

$$Q(A_\beta) = \beta. \tag{2.114}$$

Θέτουμε $g(s) := q(s, A_\beta)$. Τότε, από τις (2.110), (2.111), (2.113) και (2.114), έχουμε

$$\begin{aligned} K[g] + \frac{\alpha}{2}\Lambda[g] =& \int_{-\infty}^{\infty} q'(s,A_\beta)^2 ds + \frac{\alpha}{2}\int_{-\infty}^{\infty} q(s,A_\beta)^2 ds \\ =& Q(A_\beta) = \beta, \end{aligned}$$

οπότε αποδείχθηκε η (2.112).

Επιπλέον, $g(s) = q(s, A_\beta) > 0$, για κάθε $s \in \mathbb{R}$, άρα η g ικανοποιεί την (2.107) και εφ' όσον η $g(s) = q(s, A_\beta)$ ικανοποιεί την (2.48) για $\mu = \beta + \frac{1}{3}$ και $\beta = K[g] + \frac{\alpha}{2}\Lambda[g]$, τότε η g επαληθεύει την (2.109).

Από την ισότητα (2.60) του Λήμματος 2.3 και την (2.114) έπεται ότι

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} g(s)ds &= \int_{-\infty}^{\infty} q(s,A_\beta)ds \\ &= \frac{1}{\beta}\left[\int_{-\infty}^{\infty} q'(s,A_\beta)^2 ds + \frac{\alpha}{2}\int_{-\infty}^{\infty} q(s,A_\beta)^2 ds\right] \\ &= \frac{1}{\beta}Q(A_\beta) = 1, \end{aligned}$$

οπότε η $g(s)$ ικανοποιεί επίσης την (2.108).

Άρα, για κάθε $\beta \in (0,\infty)$, υπάρχει μοναδική λύση $g(s)$ της εξίσωσης

$$g''(s)g(s) + \alpha s g'(s)g(s) + K[g]g(s) + \frac{\alpha}{2}\Lambda[g]g(s) + \frac{1}{3}g(s) + \frac{1}{3}sg'(s) = 0,$$

όπου οι $K[g], \Lambda[g]$ δίνονται από τις (2.110) και (2.111), με $g(s) > 0$ για κάθε $s \in \mathbb{R}$ και $\int_{-\infty}^{\infty} g(s)ds = 1$.

Οπότε, σύμφωνα με το Λήμμα 2.1, υπάρχει μοναδική λύση ομοιότητας

$$u(t,x) = t^{-1/3} g(xt^{-1/3})$$

της εξίσωσης της αναπαραγόμενης δυναμικής (2.105), όπου ο τελεστής αμοιβής A ορίζεται στην (2.106), και η οποία είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ως προς x.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 2.1 έχει ολοκληρωθεί. ■

Οπότε, η δομή των λύσεων του βοηθητικού προβλήματος αρχικών τιμών (2.48)–(2.49) είναι η δομή των λύσεων ομοιότητας της εξίσωσης της αναπαραγόμενης δυναμικής (2.105).

Είναι προφανές, ότι όλες οι λύσεις ομοιότητας $u(t,x)$ είναι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας στον χώρο $\mathbb{R}$. Ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό όλων αυτών των λύσεων είναι ότι προσεγγίζουν τη συνάρτηση Dirac $\delta(x)$ καθώς $t \to 0^+$.

Κεφάλαιο 3

Η πολυδιάστατη Περίπτωση Αναπαραγόμενης Δυναμικής

3.1 Εισαγωγή

Η εργασία [5] έκανε την αρχή και μελέτησε την εξίσωση της αναπαραγόμενης δυναμικής στην περίπτωση που το σύνολο των καθαρών στρατηγικών S είναι ο χώρος $\mathbb{R}$ και ο τελεστής αμοιβής A είναι ο διαφορικός τελεστής $\frac{d^2}{dx^2}$.

Στην ίδια ακριβώς κατεύθυνση κινήθηκε και η εργασία [9] στην οποία έγινε μελέτη της εξίσωσης της αναπαραγόμενης δυναμικής στην περίπτωση που το σύνολο των καθαρών στρατηγικών S είναι ο χώρος $\mathbb{R}^d$ με $d \geq 2$ και ο τελεστής αμοιβής A είναι ο Λαπλασιανός τελεστής Δ. Σ' αυτήν την περίπτωση, η εξίσωση της αναπαραγόμενης δυναμικής

$$u_t = [Au - (u, Au)]\, u$$

διαμορφώνεται ως εξής

$$u_t = [\Delta u - (u, \Delta u)]\, u, \tag{3.1}$$

όπου $u = u(t, x)$ με $t > 0$ και $x \in \mathbb{R}^d$ και με u_t συμβολίζεται η μερική παράγωγος της u ως προς το χρόνο t και το $(\cdot\,,\cdot)$ δηλώνει το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στον χώρο Hilbert $L^2(\mathbb{R}^d)$ των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων που ορίζονται στον χώρο $\mathbb{R}^d$ με $d \geq 2$, δηλαδή

$$(u, v) := \int_{\mathbb{R}^d} u(x)v(x)dx.$$

Για την αρχική συνθήκη, δηλαδή την $u(0,x)$ υποθέτουμε, ότι είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ως προς x, άρα

$$\int_{\mathbb{R}^d} u(0,x)dx = 1 \tag{3.2}$$

και

$$u(0,x) \geq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^d. \tag{3.3}$$

Η εργασία [9] επικεντρώθηκε στο ειδικό πρόβλημα της δομής μιας μονοπαραμετρικής οικογένειας λύσεων ομοιότητας για την εξίσωση (3.1), δηλαδή για λύσεις u της μορφής

$$u(t,x) = t^{-\kappa} g\left(rt^{-\lambda}\right), \tag{3.4}$$

με

$$r := |x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2}, \tag{3.5}$$

όπου $x \in \mathbb{R}^d$.

Ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό των λύσεων της μορφής (3.4) είναι, ότι όλες είναι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας στον $\mathbb{R}^d$, για κάθε $t > 0$ και προσεγγίζουν τη συνάρτηση Dirac $\delta(x)$ καθώς $t \to 0^+$.

Αξίζει να τονίσουμε, ότι, εάν θεωρήσουμε την εξίσωση (3.1) σε ένα φραγμένο χωρίο S του $\mathbb{R}^d$ με τις Dirichlet συνοριακές συνθήκες και μία αρχική συνθήκη $u(0,x)$, που είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και δεν μηδενίζεται εντός του S, έχει πρόσφατα αποδειχθεί [12, 13], ότι η $u(t,x)$ υπάρχει για κάθε $t > 0$ και προσεγγίζει, καθώς $t \to \infty$, τη λύση ισορροπίας που είναι, επίσης, μία συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (παρατηρούμε ότι υπάρχει ακριβώς μία τέτοια λύση ισορροπίας). Βέβαια, στην περίπτωση που το σύνολο των καθαρών στρατηγικών S είναι ολόκληρος ο χώρος $\mathbb{R}^d$, τέτοιες λύσεις ισορροπίας δεν υπάρχουν. Αυτός είναι ένας λόγος που επιβεβαιώνει πως οι λύσεις ομοιότητας είναι σημαντικές.

Ο τελεστής $A = \Delta$ είναι ανεξάρτητος από τον χρόνο και επιπλέον είναι συμμετρικός ως προς το εσωτερικό γινόμενο $(\cdot\,,\cdot)$ του $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Στο τρίτο κεφάλαιο μελετάμε την εξίσωση της αναπαραγόμενης δυναμικής στην περίπτωση που το σύνολο των καθαρών στρατηγικών S είναι ο Ευκλείδειος d-διάστατος χώρος $S = \mathbb{R}^d$ με $d \geq 2$, ενώ ο τελεστής αμοιβής A είναι ένας μη συμμετρικός τελεστής ως προς το εσωτερικό γινόμενο $(\cdot\,,\cdot)$ του $L^2(\mathbb{R}^d)$, ο οποίος εξαρτάται από τον χρόνο t και είναι ο εξής

$$Au(t,x) = \Delta u(t,x) + \alpha t^{\gamma} x \cdot \nabla u(t,x), \tag{3.6}$$

όπου $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ και $\alpha > 0$ είναι μία θετική παράμετρος, γ είναι μία πραγματική σταθερά (συγκεκριμένα $\gamma = -\frac{2}{d+2}$), ενώ οι τελεστές Δ και ∇ δρούν πάνω στη μεταβλητή x.

Σ' αυτήν την περίπτωση, η αντίστοιχη εξίσωση του αναπαραγόμενου δυναμικού προβλήματος παίρνει τη μορφή

$$u_t = \left[\Delta u + \alpha t^{\gamma} x \cdot \nabla u - \int_{\mathbb{R}^d} u(\Delta u + \alpha t^{\gamma} x \cdot \nabla u)\, dx\right] u, \tag{3.7}$$

όπου $t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d$ και

$$\int_{\mathbb{R}^d} u(0,x)dx = 1 \quad \text{και} \quad u(0,x) \geq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^d. \tag{3.8}$$

Μας ενδιαφέρουν, για τη συγκεκριμένη εξίσωση, οι λύσεις ομοιότητας $u(t,x)$ της μορφής $u(t,x) = t^{-\kappa} g_d\left(rt^{-\lambda}\right)$ με $r := |x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$ και $t > 0$, οι οποίες είναι θετικές και το ολοκλήρωμά τους, ως προς x, στον χώρο $\mathbb{R}^d$ είναι 1. Ως συναρτήσεις του x, όλες αυτές οι λύσεις ομοιότητας είναι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας στον $\mathbb{R}^d$, για κάθε $t > 0$. Αυτές οι λύσεις καθώς είναι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας ως προς x, μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως χρονοεξαρτώμενες μεικτές στρατηγικές ενός παίκτη. Θα αποδείξουμε, ότι το συγκεκριμένο μοντέλο αναπαραγόμενης δυναμικής έχει μία μονοπαραμετρική οικογένεια λύσεων ομοιότητας $u(t,x)$, που όλες προσεγγίζουν τη συνάρτηση Dirac $\delta(x)$ καθώς $t \to 0^+$.

3.2 Το Πολυδιάστατο Πρόβλημα Αναπαραγόμενης Δυναμικής

Θεωρούμε το αναπαραγόμενο δυναμικό μοντέλο που περιγράφεται από την εξίσωση

$$u_t = [Au - (u, Au)]\, u, \tag{3.9}$$

όπου $u = u(t,x)$ με $t > 0$ και $x \in \mathbb{R}^d$.
Στο πολυδιάστατο πρόβλημα της αναπαραγόμενης δυναμικής που θα μελετήσουμε θεωρούμε ότι το σύνολο των καθαρών στρατηγικών S είναι ο Ευκλείδειος d-διάστατος χώρος $S = \mathbb{R}^d$ με $d \geq 2$ και ο τελεστής αμοιβής A ορίζεται ως εξής

$$Au(t,x) := \Delta u(t,x) + \alpha t^\gamma x \cdot \nabla u(t,x), \tag{3.10}$$

όπου $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ και

$$\alpha > 0 \tag{3.11}$$

είναι μία θετική παράμετρος, γ είναι μία πραγματική σταθερά (συγκεκριμένα $\gamma = -\frac{2}{d+2}$), ενώ οι τελεστές Δ και ∇ δρούν πάνω στη μεταβλητή x.
Σ' αυτήν την περίπτωση, η αντίστοιχη εξίσωση του αναπαραγόμενου δυναμικού μοντέλου (3.9) παίρνει τη μορφή

$$u_t = \left[\Delta u + \alpha t^\gamma x \cdot \nabla u - \int_{\mathbb{R}^d} u(\Delta u + \alpha t^\gamma x \cdot \nabla u)\, dx\right] u, \tag{3.12}$$

με $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ και

$$\int_{\mathbb{R}^d} u(0,x)dx = 1 \tag{3.13}$$

και

$$u(0,x) \geq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^d. \tag{3.14}$$

Στο συγκεκριμένο μοντέλο ο τελεστής αμοιβής A είναι μη συμμετρικός ως προς το εσωτερικό γινόμενο $(\cdot\,,\cdot)$ του $L^2(\mathbb{R}^d)$ και εξελλίσσεται ως προς το χρόνο t.

Ας παρατηρήσουμε εδώ πως η (3.12), όπως και οι (3.1) και (2.12), μπορούν να θεωρηθούν ως μη γραμμικές (και μη τοπικές) Fokker-Planck εξισώσεις.
Ο σκοπός μας είναι να αποδείξουμε την ύπαρξη μιας μονοπαραμετρικής οικογένειας λύσεων ομοιότητας για την εξίσωση (3.12) με τις αρχικές συνθήκες (3.13), (3.14), δηλαδή να αποδείξουμε την ύπαρξη λύσεων u της μορφής

$$u(t,x) = t^{-\kappa} g_d\left(rt^{-\lambda}\right),$$

με

$$r := |x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2},$$

όπου $x \in \mathbb{R}^d$.

Το μοντέλο αυτό επεκτείνει την περίπτωση του αναπαραγόμενου δυναμικού προβλήματος για $d = 1$ που μελετήθηκε στο Κεφάλαιο 2.

3.3 Ειδικές Λύσεις Ομοιότητας

Θεωρούμε την εξίσωση (3.9) της αναπαραγόμενης δυναμικής

$$u_t = [Au - (u, Au)]\, u,$$

όπου ο τελεστής A ορίζεται στην (3.10) και είναι ο εξής

$$Au(t,x) = \Delta u(t,x) + \alpha t^{\gamma} x \cdot \nabla u(t,x),$$

όπου γ είναι μία πραγματική σταθερά, $\alpha > 0$ είναι μία θετική παράμετρος και $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$.
Αναζητούμε λύσεις $u(t,x)$ της μορφής

$$u(t,x) = t^{-\kappa} g_d\left(rt^{-\lambda}\right), \tag{3.15}$$

όπου $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ και

$$r := |x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2}. \tag{3.16}$$

Θεωρούμε τον μετασχηματισμό ομοιότητας

$$s = rt^{-\lambda} \text{ (οπότε } r = st^{\lambda}). \tag{3.17}$$

Τότε, η συνάρτηση $u(t,x)$ της (3.15) μπορεί επίσης να γραφεί ως εξής

$$u(t,x) = t^{-\kappa} g_d(s) \tag{3.18}$$

(τονίζουμε ότι $0 < s < \infty$).
Παραγωγίζοντας την u ως προς t έχουμε

$$u_t = -\kappa t^{-(\kappa+1)} g_d(s) - \lambda r t^{-\kappa} g_d'(s) t^{-(\lambda+1)}$$

και χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό ομοιότητας (3.17) έπεται ότι

$$u_t = -\kappa t^{-(\kappa+1)} g_d(s) - \lambda t^{-(\kappa+1)} s g_d'(s)$$

ή

$$u_t = -t^{-(\kappa+1)}\left[\kappa g_d(s) + \lambda s g_d'(s)\right]. \tag{3.19}$$

Εφ' όσον η συνάρτηση u είναι ακτινική ως προς x, έχουμε

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{d-1}{r}u_r \tag{3.20}$$

και

$$\nabla u = \frac{u_r}{r}x. \tag{3.21}$$

Παραγωγίζοντας την u ως προς r προκύπτει

$$u_r = t^{-\kappa}g_d'(s)t^{-\lambda}$$

ή

$$u_r = t^{-(\kappa+\lambda)}g_d'(s). \tag{3.22}$$

Παραγωγίζοντας την u_r ως προς r έπεται ότι

$$u_{rr} = t^{-(\kappa+\lambda)}g_d''(s)t^{-\lambda}$$

ή

$$u_{rr} = t^{-(\kappa+2\lambda)}g_d''(s). \tag{3.23}$$

Από τις (3.22) και (3.23), η (3.20) γίνεται

$$\begin{aligned}\Delta u =& t^{-(\kappa+2\lambda)}g_d''(s) + \frac{d-1}{r}t^{-(\kappa+\lambda)}g_d'(s)\\ =& t^{-(\kappa+2\lambda)}[g_d''(s) + \frac{d-1}{r}t^{\lambda}g_d'(s)]\end{aligned}$$

ή

$$\Delta u = t^{-(\kappa+2\lambda)}\left(g_d''(s) + \frac{d-1}{s}g_d'(s)\right). \tag{3.24}$$

Από τον ορισμό (3.10) του τελεστή A προκύπτει

$$\begin{aligned}(u, Au) &= \int_{\mathbb{R}^d} u(Au) = \int_{\mathbb{R}^d} u[\Delta u + \alpha t^{\gamma} x\cdot\nabla u]\\ &= \int_{\mathbb{R}^d} u\Delta u + \int_{\mathbb{R}^d} \alpha u t^{\gamma} x\cdot\nabla u\end{aligned}$$

οπότε

$$(u, Au) = \int_{\mathbb{R}^d} u\Delta u + \alpha t^{\gamma}\int_{\mathbb{R}^d} ux\cdot\nabla u. \tag{3.25}$$

Από την (3.21) έχουμε

$$x\cdot\nabla u = x\cdot\frac{u_r}{r}x = \frac{u_r}{r}x^2 = \frac{u_r}{r}|x|^2 = \frac{u_r}{r}r^2 = ru_r,$$

δηλαδή

$$x\cdot\nabla u = ru_r. \tag{3.26}$$

Συνεπώς, ισχύει

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} ux\cdot\nabla u &= \int_{\mathbb{R}^d} u(ru_r) = \int_{S^{d-1}}\int_0^\infty uru_r r^{d-1}drd\sigma\\ &= \int_{S^{d-1}}\int_0^\infty uu_r r^d drd\sigma = \sigma_d\int_0^\infty uu_r r^d dr, \end{aligned}\tag{3.27}$$

όπου S^{d-1} είναι η μοναδιαία σφαίρα στον χώρο $\mathbb{R}^d$, σ είναι το μέτρο στον χώρο S^{d-1} που προέρχεται από το d-διάστατο μέτρο Lebesgue, ενώ το σ_d είναι το μέτρο του S^{d-1}. Επισημαίνουμε ότι

$$\sigma_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)},\tag{3.28}$$

όπου $\Gamma(\cdot)$ είναι η συνάρτηση Γάμμα.
Συνδυάζοντας την (3.27) μαζί με τις (3.17), (3.18) και (3.22), καταλήγουμε στο εξής

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} ux\cdot\nabla u =&\sigma_d\int_0^\infty uu_r r^d dr\\ =&\sigma_d\int_0^\infty t^{-\kappa}g_d(s)t^{-(\kappa+\lambda)}g_d'(s)(st^\lambda)^d dr\\ =&\sigma_d\int_0^\infty t^{-\kappa}g_d(s)t^{-(\kappa+\lambda)}g_d'(s)s^d t^{\lambda d}t^\lambda ds\\ =&t^{\lambda d-2\kappa}\sigma_d\int_0^\infty g_d(s)g_d'(s)s^d ds. \end{aligned}\tag{3.29}$$

Επιπλέον, υποθέτουμε ότι $\lim_{s\to\infty} g_d(s)^2 s^d = 0$ και με παραγοντική ολοκλήρωση προκύπτει

$$\alpha t^\gamma\int_{\mathbb{R}^d} ux\cdot\nabla u = -\frac{d\alpha}{2}t^{\gamma+\lambda d-2\kappa}\sigma_d\int_0^\infty s^{d-1}g_d(s)^2 ds.\tag{3.30}$$

Χρησιμοποιώντας την πρώτη ταυτότητα του Green, έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^d} u\Delta u = -\int_{\mathbb{R}^d}\nabla u\cdot\nabla u = -\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla u|^2,\tag{3.31}$$

υπό την προϋπόθεση

$$\lim_{R\to\infty}\int_{S^{d-1}(R)} u\frac{\partial u}{\partial\eta} = 0,$$

όπου η $S^{d-1}(R)$ είναι η σφαίρα ακτίνας R στον χώρο $\mathbb{R}^d$ με κέντρο το 0 και η το μοναδιαίο, κάθετο στην επιφάνεια, με φορά εξωτερική της επιφάνειας, κανονικό διάνυσμα.
Με εύκολους υπολογισμούς προκύπτει, ότι για ακτινικές συναρτήσεις, όπως η u, ισχύει

$$|\nabla u|^2 = u_r^2,\tag{3.32}$$

άρα, από τις (3.17), (3.31) και (3.32), προκύπτει ότι

$$\int_{\mathbb{R}^d} u\Delta u = -\int_{\mathbb{R}^d} u_r^2 = -\int_{S^{d-1}}\int_0^\infty u_r^2 r^{d-1} dr d\sigma = -\sigma_d \int_0^\infty r^{d-1} u_r^2 dr$$

ή

$$\int_{\mathbb{R}^d} u\Delta u == -\sigma_d \int_0^\infty (st^\lambda)^{d-1} (t^{-(\kappa+\lambda)} g_d'(s))^2 t^\lambda ds$$

ή

$$\int_{\mathbb{R}^d} u\Delta u = -t^{\lambda d - 2\lambda - 2\kappa} \sigma_d \int_0^\infty s^{d-1} g_d'(s)^2 ds. \tag{3.33}$$

Θέτουμε

$$K_d[g_d] := \sigma_d \int_0^\infty s^{d-1} g_d'(s)^2 ds \tag{3.34}$$

και

$$\Lambda_d[g_d] := \sigma_d \int_0^\infty s^{d-1} g_d(s)^2 ds. \tag{3.35}$$

Οπότε, από τις (3.30), (3.33), (3.34), (3.35), η ισότητα (3.25) γίνεται

$$(u, Au) = -t^{\lambda d - 2\kappa - 2\lambda} K_d[g_d] - \frac{d\alpha}{2} t^{\gamma - 2\kappa + \lambda d} \Lambda_d[g_d]$$

ή

$$(u, Au) = -t^{\lambda d - 2\kappa} \left(t^{-2\lambda} K_d[g_d] + \frac{d\alpha}{2} t^\gamma \Lambda_d[g_d] \right). \tag{3.36}$$

Από την (3.26) ο τελεστής A γράφεται

$$Au = \Delta u + \alpha t^\gamma r u_r$$

και από τις (3.22), (3.24) ο τελεστής A παίρνει την εξής μορφή

$$Au = t^{-(\kappa+2\lambda)} \left(g_d''(s) + \frac{d-1}{s} g_d'(s) \right) + \alpha t^{\gamma-\kappa} s g_d'(s). \tag{3.37}$$

Αντικαθιστώντας τις (3.18), (3.19), (3.36), (3.37) στην εξίσωση (3.9) της αναπαραγόμενης δυναμικής, έχουμε

$$u_t = (Au)u - (u, Au)\, u$$

ή

$$\begin{aligned} -t^{-(\kappa+1)} \left[\kappa g_d(s) + \lambda s g_d'(s) \right] =& t^{-(\kappa+2\lambda)} \left(g_d''(s) + \frac{d-1}{s} g_d'(s) \right) t^{-\kappa} g_d(s) \\ &+ \alpha t^{\gamma-\kappa} s g_d'(s) t^{-\kappa} g_d(s) \\ &+ t^{\lambda d - 2\kappa} \left(t^{-2\lambda} K_d[g_d] + \frac{d\alpha}{2} t^\gamma \Lambda_d[g_d] \right) t^{-\kappa} g_d(s) \end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned}-\kappa g_d(s) - \lambda s g_d'(s) =& t^{1-(\kappa+2\lambda)}\left(g_d''(s) + \frac{d-1}{s} g_d'(s)\right) g_d(s)\\ &+\alpha t^{1+\gamma-\kappa} s g_d'(s) g_d(s)\\ &+t^{1+\lambda d-2\kappa}\left(t^{-2\lambda} K_d[g_d] + \frac{d\alpha}{2} t^{\gamma}\Lambda_d[g_d]\right) g_d(s)\end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned}-\kappa g_d(s) - \lambda s g_d'(s) =& t^{1-\kappa-2\lambda} g_d(s) g_d''(s) + \frac{d-1}{s} t^{1-\kappa-2\lambda} g_d(s) g_d'(s)\\ &+\alpha t^{1+\gamma-\kappa} s g_d(s) g_d'(s) + t^{1-2\kappa-2\lambda+\lambda d} g_d(s) K_d[g_d]\\ &+\frac{d\alpha}{2} t^{1+\gamma+\lambda d-2\kappa} g_d(s)\Lambda_d[g_d]. \qquad (3.38)\end{aligned}$$

Ο μόνος τρόπος για να έχει νόημα η εξίσωση (3.38) είναι να μην περιέχει τη μεταβλητή t. Γι' αυτό απαιτούμε να ισχύουν τα εξής

$1-\kappa-2\lambda = 0, \quad 1+\gamma-\kappa = 0, \quad 1-2\kappa-2\lambda+\lambda d = 0, \quad 1+\gamma+\lambda d-2\kappa = 0.$

Από τις παραπάνω ισότητες προκύπτουν ότι

$$\kappa = \frac{d}{d+2}, \quad \lambda = \frac{1}{d+2}, \quad \gamma = -\frac{2}{d+2}. \qquad (3.39)$$

Η εξίσωση (3.38), από την (3.39), διαμορφώνεται ως εξής

$$\begin{aligned}-\frac{d}{d+2} g_d(s) - \frac{1}{d+2} s g_d'(s) =& g_d(s) g_d''(s) + \frac{d-1}{s} g_d(s) g_d'(s) + \alpha s g_d(s) g_d'(s)\\ &+g_d(s) K_d[g_d] + \frac{d\alpha}{2} g_d(s)\Lambda_d[g_d].\end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned}g_d(s) g_d''(s) +& \frac{d-1}{s} g_d(s) g_d'(s) + \alpha s g_d(s) g_d'(s) + \frac{s}{d+2} g_d'(s)\\ &+g_d(s) K_d[g_d] + \frac{d\alpha}{2} g_d(s)\Lambda_d[g_d] + \frac{d}{d+2} g_d(s) = 0.\end{aligned}$$

Επιπλέον, από την (3.39), η (3.15) γίνεται

$$u(t,x) = t^{-\frac{d}{d+2}} g_d(r t^{-\frac{1}{d+2}}) \qquad (3.40)$$

και ο τελεστής A γράφεται

$$Au = \Delta u + \alpha t^{-\frac{2}{d+2}} x \cdot \nabla u. \qquad (3.41)$$

Από την (3.40), προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)dx =& \int_{S^{d-1}} \int_0^\infty u r^{d-1} dr d\sigma\\ =& \sigma_d \int_0^\infty t^{-\frac{d}{d+2}} g_d(s) (t^{\frac{1}{d+2}} s)^{d-1} t^{\frac{1}{d+2}} ds\\ =& \sigma_d \int_0^\infty s^{d-1} g_d(s) ds,\end{aligned}$$

που είναι ανεξάρτητο του t.
Έτσι, εάν θεωρήσουμε

$$\sigma_d \int_0^\infty s^{d-1} g_d(s) ds = 1,$$

τότε

$$\int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)dx = 1, \text{ για κάθε } t \geq 0$$

και αντίστροφα.
Το Λήμμα 3.1 συνοψίζει όλα όσα έχουμε κάνει μέχρι τώρα.

Λήμμα 3.1 *Έστω $d \in \mathbb{N}$ με $d \geq 2$. Εάν η συνάρτηση*

$$u(t,x) = t^{-\kappa} g_d(rt^{-\lambda}), \tag{3.42}$$

όπου $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ και

$$r = |x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2}, \tag{3.43}$$

είναι μία συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ως προς x και ικανοποιεί την εξίσωση

$$u_t = \left[\Delta u + \alpha t^\gamma x \cdot \nabla u - \int_{\mathbb{R}^d} u(\Delta u + \alpha t^\gamma x \cdot \nabla u)\, dx \right] u, \tag{3.44}$$

τότε

$$\kappa = \frac{d}{d+2}, \quad \lambda = \frac{1}{d+2}, \quad \gamma = -\frac{2}{d+2}, \tag{3.45}$$

και για τη συνάρτηση g_d ισχύουν τα εξής

$$g_d(s) \geq 0, \text{ για κάθε } s > 0, \tag{3.46}$$

$$\sigma_d \int_0^\infty s^{d-1} g_d(s) ds = 1 \tag{3.47}$$

και

$$\begin{aligned} g_d(s) g_d''(s) + \left(\frac{d-1}{s} + \alpha s \right) g_d(s) g_d'(s) + \frac{s}{d+2} g_d'(s) \\ + \frac{d}{d+2} g_d(s) + K_d[g_d] g_d(s) + \frac{d\alpha}{2} \Lambda_d[g_d] g_d(s) = 0, \end{aligned} \tag{3.48}$$

όπου

$$K_d[g_d] = \sigma_d \int_0^\infty s^{d-1} g_d'(s)^2 ds \tag{3.49}$$

και

$$\Lambda_d[g_d] = \sigma_d \int_0^\infty s^{d-1} g_d(s)^2 ds. \tag{3.50}$$

Αντίστροφα, εάν ισχύουν οι (3.45)–(3.50), τότε η συνάρτηση $u(t,x)$ που δίνεται από την (3.42) είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ως προς x και ικανοποιεί την (3.44). ■

Τώρα πρέπει να αποδείξουμε, ότι υπάρχει συνάρτηση $g_d(s)$ που ικανοποιεί τις (3.46)–(3.50). Για να γίνει αυτό, πρέπει πρώτα να μελετήσουμε ένα βοηθητικό πρόβλημα.

3.4 Το Βοηθητικό Πρόβλημα

Η εξίσωση (3.48) γράφεται και ως εξής

$$g_d(s)g_d''(s)+\left(\frac{d-1}{s}+\alpha s\right)g_d(s)g_d'(s)+\frac{s}{d+2}g_d'(s)$$
$$+\left(\frac{d}{d+2}+K_d[g_d]+\frac{d\alpha}{2}\Lambda_d[g_d]\right)g_d(s)=0,$$

όπου

$$\frac{d}{d+2}+K_d[g_d]+\frac{d\alpha}{2}\Lambda_d[g_d]>\frac{d}{d+2},$$

εφ' όσον $\alpha>0$, $K[g]>0$ και $\Lambda[g]>0$.
Θεωρούμε την εξίσωση

$$q(s)q''(s)+\left(\frac{d-1}{s}+\alpha s\right)q(s)q'(s)+\frac{s}{d+2}q'(s)+\mu q(s)=0, \tag{3.51}$$

με $\mu>\frac{d}{d+2}$.

Σκοπός μας είναι να αποδείξουμε την ύπαρξη λύσης $g(s)$ που ικανοποιεί τις εξισώσεις (3.46)–(3.50). Πρώτα, όμως, θα αποδείξουμε την ύπαρξη λύσης $q(s)$ που ικανοποιεί την εξίσωση (3.51) και θα μελετήσουμε τις ιδιότητες της λύσης αυτής. Οπότε, θα συνεχίσουμε με τη μελέτη του παρακάτω βοηθητικού προβλήματος.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε το πρόβλημα

$$q(s)q''(s)+\left(\frac{d-1}{s}+\alpha s\right)q(s)q'(s)+\frac{s}{d+2}q'(s)+\mu q(s)=0,\quad s>0 \tag{3.52}$$

$$q(0)=A>0,\quad q'(0)=0 \tag{3.53}$$

όπου $\alpha>0$ είναι μία θετική παράμετρος, $d\geq 2$ είναι ένας φυσικός αριθμός και μ είναι μία πραγματική παράμετρος για την οποία ισχύει

$$\mu>\frac{d}{d+2}. \tag{3.54}$$

Τονίζουμε ότι οι παραπάνω αρχικές συνθήκες (3.53) θεωρούνται με την έννοια των ορίων καθώς $s\to 0^+$.
Η εξίσωση (3.52) μπορεί να γραφεί και με την εξής μορφή

$$q''(s)+\left(\frac{d-1}{s}+\alpha s\right)q'(s)+\frac{s}{d+2}\frac{q'(s)}{q(s)}+\mu=0,\quad s>0 \tag{3.55}$$

όταν $q(s)\neq 0$.

Με το Λήμμα 3.2, που ακολουθεί, αποδεικνύουμε, ότι υπάρχει $\epsilon>0$ τέτοιο, ώστε το πρόβλημα των εξισώσεων (3.52) – (3.53) έχει μία και μοναδική λύση $q(s)$ με $s\in[0,\epsilon]$.

Λήμμα 3.2 *Υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε το πρόβλημα αρχικών τιμών* (3.52) – (3.53) *έχει μοναδική λύση $q(s)$ με $s \in [0, \epsilon]$.*

Απόδειξη. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (3.55) με s^{d-1} και έχουμε

$$s^{d-1}q''(s) + \left(s^{d-1}\frac{d-1}{s} + \alpha s^d\right)q'(s) + \frac{1}{d+2}s^d\frac{q'(s)}{q(s)} + \mu s^{d-1} = 0.$$

Έπειτα ολοκληρώνουμε από 0 έως $s > 0$ και χρησιμοποιώντας την αρχική συνθήκη $q'(0) = 0$ προκύπτει το ισοδύναμο πρόβλημα

$$s^{d-1}q'(s) + \alpha s^d q(s) - \alpha d\int_0^s \xi^{d-1}q(\xi)d\xi + \frac{1}{d+2}\int_0^s \xi^d\frac{q'(\xi)}{q(\xi)}d\xi + \frac{\mu}{d}s^d = 0, \tag{3.56}$$

$$q(0) = A. \tag{3.57}$$

Θέτουμε $w = q'$ και καταλήγουμε στο εξής σύστημα

$$q(s) = \int_0^s w(\xi)d\xi + A, \tag{3.58}$$

$$w(s) = \frac{\alpha d}{s^{d-1}}\int_0^s \xi^{d-1}q(\xi)d\xi - \frac{1}{(d+2)s^{d-1}}\int_0^s \xi^d\frac{w(\xi)}{q(\xi)}d\xi - \alpha s q(s) - \frac{\mu}{d}s, \tag{3.59}$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα των εξισώσεων (3.52) και (3.53).
Θα αποδείξουμε ότι για κάποιο $\epsilon > 0$, το παραπάνω σύστημα έχει μία μοναδική λύση $(w(s), q(s))$, για $s \in [0, \epsilon]$.
Σταθεροποιούμε ένα $\epsilon > 0$ και θεωρούμε τον γραμμικό χώρο $C[0, \epsilon]$ όλων των πραγματικών συνεχών συναρτήσεων που ορίζονται στο διάστημα $[0, \epsilon]$, ο οποίος είναι ένας Banach χώρος εφοδιασμένος με την supnorm $\|\cdot\|_\infty$. Επιπλέον, ο χώρος $C[0, \epsilon] \times C[0, \epsilon]$ είναι, επίσης, ένας Banach χώρος εφοδιασμένος με τη νόρμα

$$\|(u, v)\| = \|u\|_\infty + \|v\|_\infty. \tag{3.60}$$

Θέτουμε

$$Y_\epsilon = \left\{(q, w) \in C[0, \epsilon] \times C[0, \epsilon] : \|q - A\|_\infty \le \frac{A}{2},\ \|w\|_\infty \le 1\right\}.$$

Τοτε, το Y_ϵ είναι ένα κλειστό υποσύνολο του $C[0, \epsilon] \times C[0, \epsilon]$ και επομένως, είναι ένας πλήρης μετρικός χώρος εφοδιασμένος με τη μετρική που προέρχεται από τη νόρμα (3.60).
Ορίζουμε την απεικόνιση $\Phi_\epsilon : Y_\epsilon \to C[0, \epsilon] \times C[0, \epsilon]$ ως εξής

$$\Phi_\epsilon[q, w](s) := (\chi[q, w](s),\ \psi[q, w](s)).$$

όπου

$$\chi[q, w](s) := \int_0^s w(\xi)d\xi + A$$

και

$$\psi[q,w](s) := \frac{\alpha d}{s^{d-1}}\int_0^s \xi^{d-1}q(\xi)d\xi - \frac{1}{(d+2)s^{d-1}}\int_0^s \xi^d\frac{w(\xi)}{q(\xi)}d\xi - \alpha s q(s) - \frac{\mu}{d}s.$$

Αποδεικνύεται εύκολα παίρνοντας ένα $\epsilon > 0$ αρκετά μικρό, πως η απεικόνιση Φ_ϵ είναι μία συστολή από τον χώρο Y_ϵ στον εαυτό του. Γι' αυτό η απεικόνιση Φ_ϵ έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο που είναι η λύση του συστήματος των εξισώσεων (3.58) – (3.59) στο διάστημα $[0,\epsilon]$.
Άρα, η εξίσωση (3.52) με τις αρχικές συνθήκες (3.53) έχει μοναδική λύση $q(s)$ για κάθε $s \in (0,\epsilon]$.
Η απόδειξη του Λήμματος 3.2 έχει ολοκληρωθεί. ■

Το Λήμμα 3.3 [9], που ακολουθεί, είναι ιδιαίτερα σημαντικό και χρησιμοποιείται στο Λήμμα 3.4 για την απόδειξη της ύπαρξης λύσης του προβλήματος αρχικών τιμών (3.52)–(3.53) στο $[0,\infty)$.

Λήμμα 3.3 *Έστω f μία παραγωγίσιμη συνάρτηση ορισμένη σ' ένα διάστημα $(0,b)$, για κάποιο $b > 0$, για την οποία ισχύουν*

$$f'(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in (0,b) \text{ και } \lim_{x\to b^-} f(x) = \infty.$$

Τότε, για κάθε $d > 0$ ισχύει

$$\lim_{x\to b^-}\left[x^d f(x) - d\int_0^x \xi^{d-1}f(\xi)d\xi\right] = \infty.$$

Απόδειξη. Έστω $\gamma \in (0,b)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F(x) = x^d f(x) - d\int_0^x \xi^{d-1}f(\xi)d\xi - \gamma^d[f(x) - f(\gamma)], \text{ για κάθε } x \in (0,b).$$

Η F είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο διάστημα $(0,b)$ με παράγωγο

$$F'(x) = (x^d - \gamma^d)f'(x), \text{ για κάθε } x \in (0,b)$$

και εφ' όσον $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (0,b)$, η συνάρτηση $F(x)$ παρουσιάζει το ολικό ελάχιστό της για $x = \gamma \in (0,b)$. Επομένως, για κάθε $x \in (0,b)$ ισχύει

$$F(x) \geq F(\gamma) = \gamma^d f(\gamma) - d\int_0^\gamma \xi^{d-1}f(\xi)d\xi = \int_0^\gamma \xi^d f'(\xi)d\xi \geq 0,$$

όπου η τελευταία ισότητα έπεται μέσω παραγοντικής ολοκλήρωσης.
Συνεπώς, προκύπτει ότι

$$x^d f(x) - d\int_0^x \xi^{d-1}f(\xi)d\xi \geq \gamma^d[f(x) - f(\gamma)], \text{ για κάθε } x \in (0,b),$$

και

$$\lim_{s\to b^-}\gamma^d[f(x) - f(\gamma)] = \infty,$$

οπότε

$$\lim_{s\to b^-}\left[x^d f(x) - d\int_0^x \xi^{d-1}f(\xi)d\xi\right] = \infty.$$

Η απόδειξη του Λήμματος 3.3 έχει ολοκληρωθεί. ■

Παρατήρηση. Για $d = 1$, παρατηρούμε ότι, το συμπέρασμα του Λήμματος 3.3 συμπίπτει με το συμπέρασμα του Λήμματος 2.2.

Λήμμα 3.4 *Η λύση $q(s)$ του προβλήματος αρχικών τιμών* (3.52) – (3.53) *υπάρχει για κάθε $s > 0$ και είναι μία αυστηρά θετική και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση στο $(0, +\infty)$.*
Επιπλέον, ισχύουν τα εξής

$$\lim_{s\to\infty} q(s) = 0, \tag{3.61}$$

$$\lim_{s\to\infty} q'(s) = 0, \tag{3.62}$$

$$\int_0^\infty q'(s)^2 ds < \infty, \tag{3.63}$$

$$\int_0^\infty q(s) ds < \infty, \tag{3.64}$$

και

$$\int_0^\infty q(s)^2 ds < \infty. \tag{3.65}$$

Απόδειξη. Έστω ότι το διάστημα $[0, b)$ με $0 < b \leq \infty$ είναι το μέγιστο διάστημα ύπαρξης της λύσης q. Θα αποδείξουμε ότι $b = \infty$.
Ας υποθέσουμε ότι $0 < b < \infty$. Τότε, από γνωστό Θεώρημα της θεωρίας των συνήθων διαφορικών εξισώσεων [2], ισχύει

$$\lim_{s\to b^-} \left[\left|q'(s)\right| + |q(s)|\right] = \infty. \tag{3.66}$$

Ισχυρισμός 1: Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση q είναι θετική σε κάποιο διάστημα $(0, s_1)$ με $0 < s_1 < b$. Τότε, η q' πρέπει να παραμένει αρνητική στο $(0, s_1)$.
Έστω ότι η q' δεν παραμένει αρνητική στο διάστημα $(0, s_1)$.
Θεωρούμε $s_2 = \inf\{s \in [0, s_1) : q'(s) \geq 0\}$. Εάν $s_2 = 0$, τότε $q'(s) > 0$ για κάθε $s \in (0, r)$, για κάποιο $r > 0$. Επομένως η (3.55) δίνει $q''(s) < 0$ για κάθε $s \in (0, r)$. Οπότε, η q' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, r)$ και τότε $q'(s) < q'(0) = 0$ για $s \in (0, r)$, που είναι άτοπο. Γι' αυτό, $s_2 > 0$. Εφ' όσον $q'(s_2) = 0$, από την (3.55) έχουμε $q''(s_2) < 0$. Επιπλέον, $q'(s) < 0$ για κάθε $s \in (0, s_2)$ και τότε $q''(s_2) \geq 0$, που είναι άτοπο. Συνεπώς, η q' παραμένει αρνητική στο $(0, s_1)$.
Ισχυρισμός 2: Η συνάρτηση q είναι θετική και γνησίως φθίνουσα στο $[0, b)$ ενώ η q' είναι αρνητική στο $(0, b)$.
Από τον ισχυρισμό 1 έπεται ότι, αρκεί να αποδείξουμε ότι η q είναι θετική στο $[0, b)$. Υποθέτουμε ότι η q δεν είναι θετική στο $[0, b)$. Έστω $s_1 > 0$ τέτοιο ώστε $q(s_1) = 0$ ενώ $q(s) > 0$, για κάθε $s \in (0, s_1)$. Από τον ισχυρισμό 1 είναι $q'(s) < 0$ για κάθε $s \in (0, s_1)$.
Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (3.55) με s^{d-1}, έχουμε

$$s^{d-1}q''(s) + s^{d-1}\left(\frac{d-1}{s} + \alpha s\right)q'(s) + s^{d-1}\frac{s}{d+2}\frac{q'(s)}{q(s)} + \mu s^{d-1} = 0$$

ή

$$s^{d-1}q''(s) + (d-1)s^{d-2}q'(s) + \alpha s^d q'(s) + \frac{s^d}{d+2}\frac{q'(s)}{q(s)} + \mu s^{d-1} = 0. \quad (3.67)$$

Ολοκληρώνουμε την (3.67) από 0 έως $s \in (0, s_1)$ και χρησιμοποιώντας ότι $q'(0) = 0$ και $q(s) > 0$ για κάθε $s \in (0, s_1)$, προκύπτει ότι

$$\int_0^s \xi^{d-1}q''(\xi)d\xi + (d-1)\int_0^s \xi^{d-2}q'(\xi)d\xi + \alpha\int_0^s \xi^d q'(\xi)d\xi$$
$$+\frac{1}{d+2}\int_0^s \xi^d \frac{q'(\xi)}{q(\xi)}d\xi + \mu\int_0^s \xi^{d-1}d\xi = 0$$

ή

$$s^{d-1}q'(s) - (d-1)\int_0^s \xi^{d-2}q'(\xi)d\xi + (d-1)\int_0^s \xi^{d-2}q'(\xi)d\xi + \alpha s^d q(s)$$
$$-\alpha d\int_0^s \xi^{d-1}q(\xi)d\xi + \frac{1}{d+2}\int_0^s \xi^d\frac{q'(\xi)}{q(\xi)}d\xi + \frac{\mu}{d}s^d = 0$$

ή

$$s^{d-1}q'(s) + \alpha s^d q(s) - \alpha d\int_0^s \xi^{d-1}q(\xi)d\xi$$
$$+\frac{1}{d+2}\int_0^s \xi^d\frac{q'(\xi)}{q(\xi)}d\xi + \frac{\mu}{d}s^d = 0. \quad (3.68)$$

Αφού $q(s) > 0$, για κάθε $s \in (0, s_1)$, τότε ορίζεται η συνάρτηση $\ln q(s)$, για κάθε $s \in (0, s_1)$ και η (3.68) γίνεται

$$s^{d-1}q'(s) + \alpha s^d q(s_) - \alpha d\int_0^s \xi^{d-1}q(\xi)d\xi + \frac{s^d}{d+2}\ln q(s)$$
$$-\frac{d}{d+2}\int_0^s \xi^{d-1}\ln q(\xi)d\xi + \frac{\mu}{d}s^d = 0$$

ή

$$s^{d-1}q'(s) = \alpha d\int_0^s \xi^{d-1}q(\xi)d\xi - \alpha s^d q(s) - \frac{s^d}{d+2}\ln q(s)$$
$$+\frac{d}{d+2}\int_0^s \xi^{d-1}\ln q(\xi)d\xi - \frac{\mu}{d}s^d. \quad (3.69)$$

Παρατηρούμε ότι, καθώς $q(s) > 0$ για κάθε $s \in (0, s_1)$, τότε $q'(s) < 0$ για κάθε $s \in (0, s_1)$ και ορίζεται η συνάρτηση

$$f(s) := -\frac{1}{d+2}\ln q(s), \text{ για κάθε } s \in (0, s_1) \quad (3.70)$$

η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0, s_1)$ με παράγωγο

$$f'(s) := -\frac{1}{d+2}\frac{q'(s)}{q(s)} > 0, \text{ για κάθε } s \in (0, s_1).$$

Επιπλέον,

$$\lim_{s\to s_1^-} f(s) = -\frac{1}{d+2}\lim_{s\to s_1^-} \ln q(s) = \infty.$$

Επομένως, η συνάρτηση f έχει θετική παράγωγο στο $(0, s_1)$ ενώ τείνει στο ∞ καθώς $s \to s_1^-$. Τότε, από το Λήμμα 3.3, έπεται

$$\lim_{s\to s_1^-}\left[s^d f(s) - d\int_0^s \xi^{d-1} f(\xi)d\xi\right] = \infty,$$

οπότε χρησιμοποιώντας την (3.70) ισχύει

$$\lim_{s\to s_1^-}\left[-\frac{s^d}{d+2}\ln q(s) + \frac{d}{d+2}\int_0^s \xi^{d-1}\ln q(\xi)d\xi\right] = \infty. \tag{3.71}$$

Επομένως, από τις (3.69) και (3.71), συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{s\to s_1^-} s^{d-1}q'(s) = \infty,$$

που είναι αδύνατο, εφ' όσον η q' παραμένει αρνητική στο $(0, s_1) \subset (0, b)$.
Κατά συνέπεια, τέτοιος $s_1 > 0$ δεν μπορεί να υπάρξει.

Άρα, $q(s) > 0$ για κάθε $s \in [0, b)$ και $q'(s) < 0$ για κάθε $s \in (0, b)$, από τον ισχυρισμό 1. Επομένως, η q είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, b)$, και άρα $0 < q(s) \le q(0) = A$ για κάθε $s \in [0, b)$.
Συνεπώς,

$$\lim_{s\to b^-} q(s) \neq \infty,$$

οπότε, από την (3.66) συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{s\to b^-} \left|q'(s)\right| = \infty$$

και εφ' όσον $q'(s) < 0$ για κάθε $s > 0$, έχουμε

$$\lim_{s\to b^-} q'(s) = -\infty.$$

Επιπλέον,

$$\lim_{s\to b^-} \inf q''(s) = -\infty$$

που αντιβαίνει στην (3.55).
Κατά συνέπεια, η (3.66) δεν είναι αληθής.

Άρα, $b = \infty$ και η λύση $q(s)$ των (3.52), (3.53) υπάρχει για κάθε $s \ge 0$. Επιπλέον, η q είναι αυστηρά θετική στο $[0, +\infty)$ ενώ η q' είναι αρνητική στο $(0, +\infty)$.

Επομένως, η q είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$, άρα για κάθε $s > 0$ ισχύει $0 < q(s) < q(0) = A$ και έπεται ότι

$$\lim_{s\to\infty} q(s) = L,$$

δηλαδή

$$q(s) = L + o(1), \text{ καθώς } s \to \infty, \tag{3.72}$$

όπου $L \in [0, A)$.
Ας υποθέσουμε ότι $L > 0$. Τότε, από την (3.72) έχουμε ότι, καθώς $s \to \infty$,

$$\ln q(s) = \ln (L + o(1)) = \ln L (1 + o(1)) = \ln L + o(1). \tag{3.73}$$

Χρησιμοποιώντας τις (3.72), (3.73) στην (3.69), καθώς $s \to \infty$, προκύπτει

$$\begin{aligned} s^{d-1} q'(s) =& \alpha d \int_0^s \xi^{d-1} (L + o(1))\, d\xi - \alpha s^d (L + o(1)) \\ & - \frac{s^d}{d+2} (\ln L + o(1)) + \frac{d}{d+2} \int_0^s \xi^{d-1} (\ln L + o(1))\, d\xi - \frac{\mu}{d} s^d \end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned} s^{d-1} q'(s) =& \alpha L s^d + o(s) - \alpha L s^d + o(s) - \frac{1}{d+2} s^d \ln L \\ & + o(s) + \frac{1}{d+2} s^d \ln L + o(s) - \frac{\mu}{d} s^d \end{aligned}$$

απ' το οποίο έπεται ότι

$$s^{d-1} q'(s) = -\frac{\mu}{d} s^d + o(s)$$

δηλαδή,

$$q'(s) = -\frac{\mu}{d} s + o(s), \text{ καθώς } s \to \infty,$$

το οποίο αντιβαίνει στην (3.72).
Συνεπώς, $L = 0$, άρα

$$\lim_{s \to \infty} q(s) = 0,$$

που είναι η (3.61).
Επιπλέον, παρατηρούμε ότι

$$\int_0^\infty q'(s) ds = \lim_{s \to \infty} q(s) - q(0) = -A, \tag{3.74}$$

άρα $q' \in L_1(0, +\infty)$.
Υποθέτουμε ότι

$$\lim_{s \to \infty} \inf q'(s) < 0. \tag{3.75}$$

Τότε, από την (3.61) και την (3.75) συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μία ακολουθία (s_n) τέτοια ώστε $s_n \to \infty$ και η q' παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο s_n για κάθε n και

$$\lim_{n \to \infty} q'(s_n) = -\delta, \text{ για κάποιο } \delta > 0. \tag{3.76}$$

Αλλά, εφ' όσον $q'(s_n)$ είναι ένα τοπικό ελάχιστο της q', πρέπει $q''(s_n) = 0$, άρα η (3.55) δίνει

$$\left(\frac{d-1}{s_n} + \alpha s_n \right) q'(s_n) + \frac{s_n}{d+2} \frac{q'(s_n)}{q(s_n)} + \mu = 0$$

ή

$$\left[\frac{d-1+\alpha s_n^2}{s_n}+\frac{s_n}{(d+2)q(s_n)}\right]q'(s_n)=-\mu.$$

Επομένως,

$$q'(s_n)=\frac{-\mu(d+2)s_nq(s_n)}{(d-1)(d+2)q(s_n)+\alpha(d+2)s_n^2q(s_n)+s_n^2}$$

οπότε,

$$\left|q'(s_n)\right|=\frac{\mu(d+2)s_nq(s_n)}{(d-1)(d+2)q(s_n)+\left[\alpha(d+2)q(s_n)+1\right]s_n^2}. \tag{3.77}$$

Αλλά $\alpha>0,\ d\geq 2, \mu>\frac{d}{d+2}$ και $0<q(s)<A$, για κάθε $s\in(0,+\infty)$, οπότε

$$(d-1)(d+2)q(s_n)+\left[\alpha(d+2)q(s_n)+1\right]s_n^2\geq\left[\alpha(d+2)q(s_n)+1\right]s_n^2$$

άρα

$$\begin{aligned}\frac{\mu(d+2)s_nq(s_n)}{(d-1)(d+2)q(s_n)+\left[\alpha(d+2)q(s_n)+1\right]s_n^2}&\leq\frac{\mu(d+2)q(s_n)}{\left[\alpha(d+2)q(s_n)+1\right]s_n}\\&\leq\frac{\mu(d+2)A}{\left[\alpha(d+2)q(s_n)+1\right]s_n}.\end{aligned}$$

Συνεπώς, από τα παραπάνω και την (3.77), καταλήγουμε στο ότι

$$\left|q'(s_n)\right|\leq\frac{\mu(d+2)A}{\left[\alpha(d+2)q(s_n)+1\right]s_n}.$$

Τότε,

$$\lim_{n\to\infty}q'(s_n)=0$$

που αντιβαίνει στην (3.76).
Επομένως,

$$\lim_{s\to\infty}q'(s)=0,$$

που είναι η (3.62).
Αυτό, μαζί με το γεγονός ότι η q' είναι ολοκληρώσιμη, μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η $q'\in L_2(0,+\infty)$, δηλαδή,

$$\int_0^\infty q'(s)^2ds<\infty,$$

που είναι η (3.63).
Ολοκληρώνοντας κατά μέλη την (3.52) από 1 έως s με $s>1$, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_1^s q(\xi)q''(\xi)d\xi+\int_1^s\left(\frac{d-1}{\xi}+\alpha\xi\right)q(\xi)q'(\xi)d\xi&\\+\frac{1}{d+2}\int_1^s\xi q'(\xi)d\xi+\mu\int_1^s q(\xi)d\xi&=0\end{aligned}$$

ή

$$q(s)q'(s) - q(1)q'(1) - \int_1^s q'(\xi)^2 d\xi + (d-1)\int_1^s \frac{q(\xi)q'(\xi)}{\xi} d\xi$$
$$+\alpha \int_1^s \xi q(\xi)q'(\xi)d\xi + \frac{1}{d+2} sq(s) - \frac{1}{d+2} q(1)$$
$$-\frac{1}{d+2}\int_1^s q(\xi)d\xi + \mu \int_1^s q(\xi)d\xi = 0$$

οπότε,

$$q(s)q'(s) - q(1)q'(1) - \int_1^s q'(\xi)^2 d\xi + \frac{d-1}{2}\frac{q(s)^2}{s} - \frac{(d-1)q(1)^2}{2}$$
$$+\frac{d-1}{2}\int_1^s \frac{q(\xi)^2}{\xi^2} d\xi + \frac{\alpha}{2} sq(s)^2 - \frac{\alpha q(1)^2}{2} - \frac{\alpha}{2}\int_1^s q(\xi)^2 d\xi$$
$$+\frac{s}{d+2} q(s) - \frac{q(1)}{d+2} + \left(\mu - \frac{1}{d+2}\right)\int_1^s q(\xi)d\xi = 0$$

ή

$$\left(\mu - \frac{1}{d+2}\right)\int_1^s q(\xi)d\xi = q(1)q'(1) - q(s)q'(s) + \int_1^s q'(\xi)^2 d\xi + \frac{(d-1)q(1)^2}{2}$$
$$-\frac{d-1}{2}\frac{q(s)^2}{s} - \frac{d-1}{2}\int_1^s \frac{q(\xi)^2}{\xi^2} d\xi + \frac{\alpha q(1)^2}{2}$$
$$-\frac{\alpha}{2} sq(s)^2 + \frac{\alpha}{2}\int_1^s q(\xi)^2 d\xi + \frac{q(1)}{d+2} - \frac{s}{d+2} q(s).$$

Αφού $\alpha > 0$, $d \geq 2$ και $q(s) > 0$, $q'(s) < 0$ για κάθε $s > 0$, από την παραπάνω ισότητα προκύπτει

$$\left(\mu - \frac{1}{d+2}\right)\int_1^s q(\xi)d\xi \leq \int_1^s q'(\xi)^2 d\xi - q(s)q'(s) + \frac{(d-1)q(1)^2}{2}$$
$$+\frac{\alpha q(1)^2}{2} + \frac{\alpha}{2}\int_1^s q(\xi)^2 d\xi + \frac{q(1)}{d+2}.$$

Ειδικότερα,

$$\left(\mu - \frac{1}{d+2}\right)\int_1^s q(\xi)d\xi \leq \int_1^s q'(\xi)^2 d\xi - q(s)q'(s) + \frac{\alpha}{2}\int_1^s q(\xi)^2 d\xi$$
$$+\frac{(d-1)A^2}{2} + \frac{\alpha A^2}{2} + \frac{A}{d+2}, \tag{3.78}$$

εφ' όσον $0 < q(s) < A,\ q'(s) < 0$ για κάθε $s \in (0, +\infty)$.
Εάν υποθέσουμε ότι

$$\int_1^\infty q(\xi)d\xi = \infty, \tag{3.79}$$

τότε, από τις (3.61), (3.62), (3.63) και (3.78), έχουμε

$$\int_1^\infty q(\xi)^2 d\xi = \infty.$$

Θέτουμε

$$M := \int_1^\infty q'(\xi)^2 d\xi + \frac{(d-1)A^2}{2} + \frac{\alpha A^2}{2} + \frac{A}{d+2} < \infty,$$

και χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι $q(\xi) > 0$ για κάθε $\xi > 0$, οπότε από την ανισότητα (3.78) έχουμε

$$(\mu - \frac{1}{d+2}) \int_1^s q(\xi)d\xi \leq M - q(s)q'(s) + \frac{\alpha}{2}\int_1^s q^2(\xi)d\xi$$

άρα

$$\mu - \frac{1}{d+2} \leq \frac{M - q(s)q'(s) + \frac{\alpha}{2}\int_1^s q(\xi)^2 d\xi}{\int_1^s q(\xi)d\xi}. \tag{3.80}$$

Χρησιμοποιώντας την (3.79), τον κανόνα De L' Hospital και το γεγονός ότι η $q(s)q'(s)$ είναι φραγμένη, έχουμε

$$\lim_{s\to\infty} \frac{M - q(s)q'(s) + \frac{\alpha}{2}\int_1^s q(\xi)^2 d\xi}{\int_1^s q(\xi)d\xi} \leq \lim_{s\to\infty} \frac{\frac{\alpha}{2}q(s)^2}{q(s)} = \frac{\alpha}{2}\lim_{s\to\infty} q(s) = 0$$

και με την (3.80) συμπεραίνουμε $\mu - \frac{1}{d+2} \leq 0$, που είναι άτοπο, αφού $\mu > \frac{d}{d+2}$ και $d \geq 2$.
Συνεπώς,

$$\int_1^\infty q(\xi)d\xi < \infty,$$

έτσι η q είναι ολοκληρώσιμη στο $[1, +\infty)$, οπότε η q είναι ολοκληρώσιμη και στο $[0, +\infty)$, δηλαδή,

$$\int_0^\infty q(\xi)d\xi < \infty,$$

που είναι η (3.64).
Η συνάρτηση q είναι αυστηρά θετική και γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$ με $0 < q(s) \leq A$, για κάθε $s \geq 0$. Επειδή

$$\lim_{s\to\infty} q(s) = 0,$$

υπάρχει $s_0 > 0$ τέτοιο ώστε $0 < q^2(s) < q(s)$, για κάθε $s \geq s_0$

$$0 < \int_{s_0}^\infty q(s)^2 ds < \int_{s_0}^\infty q(s)ds.$$

Αλλά $q \in L_1(0, +\infty)$, οπότε

$$\int_0^\infty q(s)^2 ds < \infty,$$

που είναι η (3.65).
Η απόδειξη του Λήμματος 3.4 έχει ολοκληρωθεί. ■

Λήμμα 3.5 *Έστω $q(s)$ η μοναδική λύση του προβλήματος αρχικών τιμών* (3.52) – (3.53). *Τότε, ισχύουν τα εξής*

$$(i) \quad \int_0^\infty s^d q'(s)ds = -d\int_0^\infty s^{d-1}q(s)ds < \infty, \tag{3.81}$$

$$(ii) \quad \lim_{s\to\infty} s^d q(s) = 0, \tag{3.82}$$

$$(iii) \quad \int_0^\infty s^d q'(s)^2 ds < \infty, \tag{3.83}$$

$$(iv) \quad \int_0^\infty s^{d-1}q(s)^2 ds < \infty, \tag{3.84}$$

$$(v) \quad \lim_{s\to\infty}\left[\frac{s^d q(s)}{d+2} + \frac{\alpha}{2}s^d q(s)^2\right] = 0, \tag{3.85}$$

$$(vi) \quad \int_0^\infty \left[\frac{s^d q'(s)}{d+2} + \alpha s^d q'(s)q(s)\right] ds = -\frac{d}{d+2}\int_0^\infty s^{d-1}q(s)ds - \frac{\alpha d}{2}\int_0^\infty s^{d-1}q(s)^2 ds. \tag{3.86}$$

Απόδειξη. Στο Λήμμα 3.4 αποδείχθηκε ότι η συνάρτηση q' είναι αρνητική και

$$\lim_{s\to\infty} q'(s) = 0,$$

οπότε η (iii) έπεται άμεσα από την (i).

Θα χρησιμοποιήσουμε τη μαθηματική επαγωγή για να αποδείξουμε ότι για κάθε $n \in \{1, 2, ...d\}$ ισχύουν τα εξής

$$(i)' \quad \int_0^\infty s^n q'(s)ds = -n\int_0^\infty s^{n-1}q(s)ds < \infty$$

$$(ii)' \quad \lim_{s\to\infty} s^n q(s) = 0$$

$$(iii)' \quad \int_0^\infty s^n q'(s)^2 ds < \infty$$

Από το Λήμμα 3.4 έχουμε

$$\int_0^\infty q(s)ds < \infty \quad \text{και} \quad \lim_{s\to\infty} q(s) = 0,$$

και επιπλέον $q(s) > 0$, για κάθε $s \in [0, +\infty)$ και q είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$. Οπότε συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{s\to\infty} sq(s) = 0, \tag{3.87}$$

δηλαδή η $(ii)'$ ισχύει για $n = 1$. Επομένως,

$$\int_0^\infty sq'(s)ds = \lim_{s\to\infty} sq(s) - \int_0^\infty q(s)ds = -\int_0^\infty q(s)ds < \infty.$$

Άρα και η $(i)'$ ισχύει για $n = 1$ και συνεπώς η $(iii)'$ ισχύει για $n = 1$, δηλαδή,

$$\int_0^\infty sq'(s)^2 ds < \infty.$$

Συνεπώς, για $n = 1$ ισχύουν οι $(i)'$, $(ii)'$ και $(iii)'$.

Σταθεροποιούμε έναν $n \in \{2, 3, ..., d\}$ και υποθέτουμε ότι οι $(i)'$, $(ii)'$ και $(iii)'$ ισχύουν για κάθε $k \in \{1, 2, ..., n-1\}$, δηλαδή για κάθε $k \in \{1, 2, ..., n-1\}$ έχουμε

$$\int_0^\infty s^k q'(s)ds = -k \int_0^\infty s^{k-1} q(s)ds < \infty,$$

$$\lim_{s\to\infty} s^k q(s) = 0,$$

$$\int_0^\infty s^k q'(s)^2 ds < \infty.$$

Ειδικότερα, για $k = n - 1$ ισχύουν

$$(a) \quad \int_0^\infty s^{n-1} q'(s)ds = -(n-1) \int_0^\infty s^{n-2} q(s)ds < \infty, \tag{3.88}$$

$$(b) \quad \lim_{s\to\infty} s^{n-1} q(s) = 0, \tag{3.89}$$

$$(c) \quad \int_0^\infty s^{n-1} q'(s)^2 ds < \infty. \tag{3.90}$$

Θα αποδείξουμε ότι οι $(i)'$, $(ii)'$ και $(iii)'$ ισχύουν και για $k = n$.
Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (3.52) με s^{n-1} και έχουμε

$$s^{n-1} q(s)q''(s) + s^{n-1}\left(\frac{d-1}{s} + \alpha s\right) q(s)q'(s) + \frac{s^n}{d+2} q'(s) + \mu s^{n-1} q(s) = 0.$$

Έπειτα ολοκληρώνουμε από 0 έως $s > 0$ και χρησιμοποιώντας τη συνθήκη $q'(0) = 0$, καταλήγουμε στο εξής

$$\int_0^s \xi^{n-1} q(\xi)q''(\xi)d\xi + (d-1)\int_0^s \xi^{n-2} q(\xi)q'(\xi)d\xi + \alpha \int_0^s \xi^n q(\xi)q'(\xi)d\xi$$
$$+ \frac{1}{d+2}\int_0^s \xi^n q'(\xi)d\xi + \mu \int_0^s \xi^{n-1} q(\xi)d\xi = 0$$

οπότε

$$s^{n-1} q(s)q'(s) - \int_0^s \xi^{n-1} q'(\xi)^2 d\xi - (n-1)\int_0^s \xi^{n-2} q(\xi)q'(\xi)d\xi$$
$$+ (d-1)\int_0^s \xi^{n-2} q(\xi)q'(\xi)d\xi + \alpha \int_0^s \xi^n q(\xi)q'(\xi)d\xi$$
$$+ \frac{1}{d+2}\int_0^s \xi^n q'(\xi)d\xi + \mu \int_0^s \xi^{n-1} q(\xi)d\xi = 0$$

ή

$$s^{n-1} q(s)q'(s) - \int_0^s \xi^{n-1} q'(\xi)^2 d\xi + (d-n)\int_0^s \xi^{n-2} q(\xi)q'(\xi)d\xi$$
$$+ \frac{\alpha}{2} s^n q(s)^2 - \frac{\alpha n}{2}\int_0^s \xi^{n-1} q(\xi)^2 d\xi + \frac{s^n}{d+2} q(s)$$
$$- \frac{n}{d+2}\int_0^s \xi^{n-1} q(\xi)d\xi + \mu \int_0^s \xi^{n-1} q(\xi)d\xi = 0$$

άρα,

$$\left(\mu - \frac{n}{d+2}\right)\int_0^s \xi^{n-1}q(\xi)d\xi = \int_0^s \xi^{n-1}q'(\xi)^2 d\xi - s^{n-1}q(s)q'(s)$$
$$-(d-n)\int_0^s \xi^{n-2}q(\xi)q'(\xi)d\xi - \frac{\alpha}{2}s^n q(s)^2$$
$$+\frac{\alpha n}{2}\int_0^s \xi^{n-1}q(\xi)^2 d\xi - \frac{s^n}{d+2}q(s). \qquad (3.91)$$

Εφ' όσον $q(s) > 0$ για κάθε $s \geq 0$ και $q'(s) < 0$ για κάθε $s > 0$, από την (3.91) έχουμε

$$\left(\mu - \frac{n}{d+2}\right)\int_0^s \xi^{n-1}q(\xi)d\xi \leq \int_0^s \xi^{n-1}q'(\xi)^2 d\xi - s^{n-1}q(s)q'(s)$$
$$-(d-n)\int_0^s \xi^{n-2}q(\xi)q'(\xi)d\xi$$
$$+\frac{\alpha n}{2}\int_0^s \xi^{n-1}q(\xi)^2 d\xi. \qquad (3.92)$$

Από την (3.89) και το γεγονός ότι

$$\lim_{s\to\infty} q'(s) = 0$$

έχουμε

$$\lim_{s\to\infty} s^{n-1}q(s)q'(s) = 0. \qquad (3.93)$$

Εάν $n \geq 3$, η υπόθεσή μας $(i)'$ μπορεί να εφαρμοστεί για $k = n-2$ και χρησιμοποιώντας ότι $q'(s) < 0$, για κάθε $s > 0$ και $q(s) \leq A$, για κάθε $s \geq 0$, έχουμε

$$\int_0^\infty \xi^{n-2}\left|q'(\xi)\right| d\xi = -\int_0^\infty \xi^{n-2}q'(\xi)d\xi < \infty$$

και

$$(d-n)\int_0^\infty \xi^{n-2}q(\xi)\left|q'(\xi)\right| d\xi \leq A(d-n)\int_0^\infty \xi^{n-2}\left|q'(\xi)\right| d\xi < \infty.$$

Οπότε,

$$-(d-n)\int_0^\infty \xi^{n-2}q(\xi)q'(\xi)d\xi \leq -A(d-n)\int_0^\infty \xi^{n-2}q'(\xi)d\xi < \infty. \qquad (3.94)$$

Για $n = 2$, η παραπάνω ανισότητα επίσης ισχύει. Πράγματι, για $s > 0$ έχουμε

$$\int_0^s q(\xi)\left|q'(\xi)\right| d\xi = -\int_0^s q(\xi)q'(\xi)d\xi = -\frac{q(s)^2}{2} + \frac{q(0)^2}{2} = \frac{A^2}{2} - \frac{q(s)^2}{2}$$

και τότε

$$\int_0^\infty q(\xi)\left|q'(\xi)\right| d\xi = \frac{A^2}{2} - \frac{1}{2}\lim_{s\to\infty} q(s)^2 = \frac{A^2}{2} < A^2 = A\int_0^\infty \left|q'(\xi)\right| d\xi < \infty.$$

Άρα, για $n \geq 2$ ισχύει

$$\int_0^\infty \xi^{n-2} q(\xi) q'(\xi) d\xi < \infty.$$

Υποθέτουμε ότι

$$\int_0^\infty \xi^{n-1} q(\xi) d\xi = \infty, \tag{3.95}$$

τότε από τις (3.90), (3.92), (3.93) και (3.94) έπεται ότι

$$\int_0^\infty \xi^{n-1} q(\xi)^2 d\xi = \infty.$$

Θέτουμε

$$T := \int_0^\infty \xi^{n-1} q'(\xi)^2 d\xi - (d-n) \int_0^\infty \xi^{n-2} q(\xi) q'(\xi) d\xi < \infty.$$

Τότε, η ανισότητα (3.92) μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\left(\mu - \frac{n}{d+2}\right) \int_0^s \xi^{n-1} q(\xi) d\xi \leq T - s^{n-1} q(s) q'(s) + \frac{\alpha n}{2} \int_0^s \xi^{n-1} q(\xi)^2 d\xi.$$

Επιπλέον, $\xi^{d-1} q(\xi) > 0$ για κάθε $\xi > 0$ και από την παραπάνω ανισότητα προκύπτει

$$\mu - \frac{n}{d+2} \leq \frac{T - s^{n-1} q(s) q'(s) + \frac{\alpha n}{2} \int_0^s \xi^{n-1} q(\xi)^2 d\xi}{\int_0^s \xi^{n-1} q(\xi) d\xi}. \tag{3.96}$$

Συνεπώς, από την (3.95), τον κανόνα De L' Hospital μαζί με το γεγονός ότι η $s^{n-1} q(s) q'(s)$ είναι φραγμένη, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \lim_{s\to\infty} \frac{T - s^{n-1} q(s) q'(s) + \frac{\alpha n}{2} \int_0^s \xi^{n-1} q(\xi)^2 d\xi}{\int_0^s \xi^{n-1} q(\xi) d\xi} &\leq \lim_{s\to\infty} \frac{\frac{\alpha n}{2} s^{n-1} q(s)^2}{s^{n-1} q(s)} \\ &= \frac{\alpha n}{2} \lim_{s\to\infty} q(s) = 0. \end{aligned}$$

Όμως, τότε, από την (3.96) προκύπτει ότι $\mu - \frac{n}{d+2} \leq 0$, που αντιβαίνει στο γεγονός ότι $\mu > \frac{d}{d+2} \geq \frac{n}{d+2}$.
Συνεπώς,

$$\int_0^\infty \xi^{n-1} q(\xi) d\xi < \infty. \tag{3.97}$$

Εφ' όσον η q είναι γνησίως φθίνουσα και θετική συνάρτηση στο $[0, +\infty)$ και ισχύει

$$\lim_{s\to\infty} q(s) = 0,$$

τότε

$$\int_0^\infty s^{n-1} q(s)^2 ds < \infty. \tag{3.98}$$

Οπότε, από την (3.97), το δεύτερο σκέλος της $(i)'$ ισχύει και για n. Άρα, θα ισχύει και για $n = d$, δηλαδή

$$\int_0^\infty s^{d-1} q(s) ds < \infty.$$

Επιπλέον, από την (3.98) για $n = d$, έπεται ότι

$$\int_0^\infty s^{d-1} q(s)^2 ds < \infty,$$

και αυτό αποδεικνύει την (iv).
Από την (3.91) έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{2} s^n q(s)^2 + \frac{s^n}{d+2} q(s) = &- \left(\mu - \frac{n}{d+2}\right) \int_0^s \xi^{n-1} q(\xi) d\xi \\ &+ \int_0^s \xi^{n-1} q'(\xi)^2 d\xi - s^{n-1} q(s) q'(s) \\ &-(d-n) \int_0^s \xi^{n-2} q(\xi) q'(\xi) d\xi + \frac{\alpha n}{2} \int_0^s \xi^{n-1} q(\xi)^2 d\xi,\end{aligned}$$

και από τις (3.90), (3.93), (3.94), (3.97), (3.98) έπεται ότι

$$\lim_{s\to\infty} \left[\frac{\alpha}{2} s^n q(s)^2 + \frac{s^n}{d+2} q(s)\right] = N \in \mathbb{R}.$$

Εάν υποθέσουμε ότι $N \neq 0$, τότε από το παραπάνω όριο προκύπτει ότι η συνάρτηση $N(s) := \alpha(d+2)s^{n-1}q(s)^2 + 2s^{n-1}q(s)$ είναι ασύμπτωτη της συνάρτησης $P(s)$, όπου $P(s) = 2(d+2)Ns^{-1}$. Αυτό όμως είναι αδύνατον, αφού η $N(s)$ είναι ολοκληρώσιμη. Άρα,

$$\lim_{s\to\infty} \left[\frac{\alpha}{2} s^n q(s)^2 + \frac{s^n}{d+2} q(s)\right] = 0.$$

Εφ' όσον $q(s) > 0$, για κάθε $s \geq 0$ τότε

$$0 \leq \frac{s^n}{d+2} q(s) \leq \frac{\alpha}{2} s^n q(s)^2 + \frac{s^n}{d+2} q(s)$$

και επομένως

$$\lim_{s\to\infty} s^n q(s) = 0$$

και αυτό σημαίνει ότι η $(ii)'$ ισχύει για n.
Συνεπώς, η $(ii)'$ ισχύει για κάθε $n \in \{1, 2, ..., d\}$. Οπότε, από την $(ii)'$ για κάθε $n \in \{1, 2, ..., d\}$ προκύπτει

$$\left|\int_0^\infty s^n q'(s) ds\right| = \left|\lim_{s\to\infty} s^n q(s) - n \int_0^\infty s^{n-1} q(s) ds\right| = \left|-n \int_0^\infty s^{n-1} q(s) ds\right| < \infty.$$

Επομένως, η $(i)'$ ισχύει για κάθε $n \in \{1, 2, ..., d\}$, οπότε και η $(iii)'$ ισχύει για κάθε $n \in \{1, 2, ..., d\}$.
Ειδικότερα, για $n = d$ προκύπτουν τα εξής

$$\int_0^\infty s^d q'(s) ds = -d \int_0^\infty s^{d-1} q(s) ds < \infty,$$

$$\lim_{s\to\infty} s^d q(s) = 0,$$

$$\int_0^\infty s^d q'(s)^2 ds < \infty,$$

$$\int_0^\infty s^{d-1} q(s)^2 ds < \infty$$

και επιπλέον

$$\lim_{s\to\infty}\left[\frac{s^d q(s)}{d+2} + \frac{\alpha}{2} s^d q(s)^2\right] = 0.$$

Οπότε,

$$\int_0^\infty \left[\frac{s^d q'(s)}{d+2} + \alpha s^d q'(s) q(s)\right] ds = \lim_{s\to\infty}\left[\frac{s^d q(s)}{d+2} + \frac{\alpha}{2} s^d q(s)^2\right] - \frac{d}{d+2}\int_0^\infty s^{d-1} q(s) ds - \frac{\alpha d}{2}\int_0^\infty s^{d-1} q(s)^2 ds$$

Συνεπώς,

$$\int_0^\infty \left[\frac{s^d q'(s)}{d+2} + \alpha s^d q'(s) q(s)\right] ds = -\frac{d}{d+2}\int_0^\infty s^{d-1} q(s) ds - \frac{\alpha d}{2}\int_0^\infty s^{d-1} q(s)^2 ds,$$

που είναι η (vi).
Η απόδειξη του Λήμματος 3.5 έχει ολοκληρωθεί. ■

Πόρισμα 3.1 *Έστω $q(s)$ η μοναδική λύση του προβλήματος αρχικών τιμών* (3.52) – (3.53). *Τότε ισχύει*

$$\left(\mu - \frac{d}{d+2}\right)\int_0^\infty s^{d-1} q(s) ds = \int_0^\infty s^{d-1} q'(s)^2 ds + \frac{\alpha d}{2}\int_0^\infty s^{d-1} q(s)^2 ds. \tag{3.99}$$

Απόδειξη. Για $n = d$, από την (3.91) προκύπτει

$$\left(\mu - \frac{d}{d+2}\right)\int_0^s \xi^{d-1} q(\xi) d\xi = \int_0^s \xi^{d-1} q'(\xi)^2 d\xi - s^{d-1} q(s) q'(s) - \frac{\alpha}{2} s^d q(s)^2 + \frac{\alpha d}{2}\int_0^s \xi^{d-1} q(\xi)^2 d\xi - \frac{s^d}{d+2} q(s)$$

και χρησιμοποιώντας την (3.85), έχουμε

$$\left(\mu - \frac{d}{d+2}\right)\int_0^\infty s^{d-1} q(s) ds = \int_0^\infty s^{d-1} q'(s)^2 ds + \frac{\alpha d}{2}\int_0^\infty s^{d-1} q(s)^2 ds,$$

που είναι η (3.99).
Η απόδειξη του Πορίσματος 3.1 έχει ολοκληρωθεί. ■

3.5 Η Δομή των Λύσεων του Βοηθητικού Προβλήματος

Στην προηγούμενη ενότητα, δημιουργήσαμε ένα βοηθητικό πρόβλημα με εξισώσεις (3.52)–(3.53), το οποίο συνδέεται με το αρχικό πρόβλημα της εξίσωσης (3.12) της αναπαραγόμενης δυναμικής με αρχικές συνθήκες (3.13) και (3.14). Για το βοηθητικό πρόβλημα, αποδείξαμε την ύπαρξη λύσης $q(s)$ με $s \in (0, +\infty)$ και κάποιες βασικές ιδιότητες της λύσης. Σε αυτήν την ενότητα θα μελετήσουμε επιπρόσθετες ιδιότητες της λύσης $q(s)$, οπότε θα μελετήσουμε τη δομή των λύσεων του βοηθητικού προβλήματος.

Λήμμα 3.6 *Έστω $q(s)$ η μοναδική λύση του προβλήματος αρχικών τιμών* (3.52) – (3.53). *Τότε*

$$(i) \quad \|q'\|_\infty \leq \mu\sqrt{\frac{(d+2)A}{1+\alpha(d+2)A}}, \text{ όπου } \|\cdot\|_\infty \text{ είναι η sup-norm}, \tag{3.100}$$

$$(ii) \quad \int_0^\infty s^{d-1}q(s)ds \geq \frac{A^{1+\frac{d}{2}}}{\mu^d d(d+1)}\left[\sqrt{\frac{1+\alpha(d+2)A}{d+2}}\right]^d, \tag{3.101}$$

$$(iii) \quad \int_0^\infty s^{d-1}q(s)^2 ds \geq \frac{2A^{2+\frac{d}{2}}}{\mu^d d(d+1)(d+2)}\left[\sqrt{\frac{1+\alpha(d+2)A}{d+2}}\right]^d. \tag{3.102}$$

Απόδειξη. Εφ' όσον η q' είναι αρνητική στο $(0, +\infty)$ με

$$q'(0) = 0 = \lim_{s\to\infty} q'(s)$$

και

$$\|q'\|_\infty = sup\left\{|q'(s)| : s \geq 0\right\} = sup\left\{-q'(s) : s \geq 0\right\},$$

έπεται ότι η q' παρουσιάζει το απόλυτο ελάχιστό της για $s = s_m \in (0, +\infty)$. Συνεπώς,

$$\|q'\|_\infty = |q'(s_m)| = -q'(s_m), \tag{3.103}$$

και ισχύει $q''(s_m) = 0$, οπότε από την (3.55) έχουμε

$$\left(\frac{d-1}{s_m} + \alpha s_m\right) q'(s_m) + \frac{s_m}{(d+2)q(s_m)} q'(s_m) + \mu = 0$$

ή

$$q'(s_m)\left[\frac{d-1}{s_m} + \alpha s_m + \frac{s_m}{(d+2)q(s_m)}\right] = -\mu$$

οπότε

$$q'(s_m) = \frac{-\mu}{\frac{d-1}{s_m} + \left[\alpha + \frac{1}{(d+2)q(s_m)}\right] s_m}. \tag{3.104}$$

Αλλά η q είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$, $q(0) = A$, $s_m \in (0, +\infty)$ και $d \geq 2$, συνεπώς

$$0 < q(s_m) \leq A$$

άρα

$$\alpha < \frac{1}{(d+2)A} + \alpha \leq \frac{1}{(d+2)q(s_m)} + \alpha$$

και τότε

$$\frac{d-1}{s_m} + \alpha s_m < \frac{d-1}{s_m} + \left[\frac{1}{(d+2)A} + \alpha\right] s_m \leq \frac{d-1}{s_m} + \left[\frac{1}{(d+2)q(s_m)} + \alpha\right] s_m.$$

Επιπλέον,

$$\frac{d-1}{s_m} > 0, \quad \left[\frac{1}{(d+2)A} + \alpha\right] s_m > 0 \text{ και } \mu > 0,$$

οπότε

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{(d+2)A} + \alpha\right] s_m <& \frac{d-1}{s_m} + \left[\frac{1}{(d+2)A} + \alpha\right] s_m \\ \leq& \frac{d-1}{s_m} + \left[\frac{1}{(d+2)q(s_m)} + \alpha\right] s_m\end{aligned}$$

άρα

$$\frac{\mu}{\frac{d-1}{s_m} + \left[\frac{1}{(d+2)q(s_m)} + \alpha\right] s_m} \leq \frac{\mu}{\frac{d-1}{s_m} + \left[\frac{1}{(d+2)A} + \alpha\right] s_m} < \frac{\mu}{\left[\frac{1}{(d+2)A} + \alpha\right] s_m}$$

και από την (3.104) συμπεραίνουμε ότι

$$-q'(s_m) = \frac{\mu}{\frac{d-1}{s_m} + \left[\frac{1}{(d+2)A} + \alpha\right] s_m} < \frac{\mu}{\left[\frac{1}{(d+2)A} + \alpha\right] s_m} = \frac{\mu(d+2)A}{[1+\alpha(d+2)A]\, s_m},$$

συνεπώς

$$-q'(s_m) < \frac{\mu(d+2)A}{[1+\alpha(d+2)A]\, s_m}.$$

Από την παραπάνω ανισότητα και την (3.103) προκύπτει

$$\|q'\|_\infty < \frac{\mu(d+2)A}{[1+\alpha(d+2)A]\, s_m}. \tag{3.105}$$

Εφ' όσον $q(s) > 0, q'(s) < 0$, για κάθε $s > 0$, από την (3.55) έχουμε

$$q''(s) + \mu = -\left(\frac{d-1}{s} + \alpha s\right) q'(s) - \frac{s}{d+2}\frac{q'(s)}{q(s)} \geq 0 \text{ για κάθε } s > 0.$$

Συνεπώς ισχύει

$$q''(s) \geq -\mu, \text{ για κάθε } s > 0,$$

οπότε

$$q'(s) \geq -\mu s \text{ για κάθε } s \geq 0.$$

Επομένως,

$$\|q'\|_\infty = -q'(s_m) \leq \mu s_m. \tag{3.106}$$

Συνδυάζοντας τις (3.105), (3.106), έχουμε

$$\left\|q'\right\|_\infty \leq min\left\{\mu s_m,\ \frac{\mu(d+2)A}{[1+\alpha(d+2)A]\,s_m}\right\}.$$

Αλλά, όποιος και είναι ο θετικός αριθμός s_m, η ποσότητα

$$min\left\{\mu s_m,\ \frac{\mu(d+2)A}{[1+\alpha(d+2)A]\,s_m}\right\}$$

είναι το πολύ S, όπου

$$S := \mu s_0 = \frac{\mu(d+2)A}{[1+\alpha(d+2)A]\,s_0},\ \text{για κάποιον αριθμό } s_0 > 0,$$

καθώς η συνάρτηση μs_m είναι γνησίως αύξουσα ως προς s_m ενώ η συνάρτηση $\mu(d+2)A\,[1+\alpha(d+2)A]^{-1}\,{s_m}^{-1}$ είναι γνησίως φθίνουσα ως προς s_m.
Συνεπώς,

$$s_0 = \sqrt{\frac{(d+2)A}{1+\alpha(d+2)A}}\ \text{ και }\ S = \mu\sqrt{\frac{(d+2)A}{1+\alpha(d+2)A}}.$$

Επομένως,

$$\left\|q'\right\|_\infty \leq \mu\sqrt{\frac{(d+2)A}{1+\alpha(d+2)A}},$$

που είναι η (3.100).
Επιπλέον, ισχύει

$$-\left\|q'\right\|_\infty \leq q'(s),\ \text{για κάθε } s \geq 0,$$

άρα

$$q(s) \geq q(0) - \left\|q'\right\|_\infty s,\ \text{για κάθε } s \geq 0.$$

Χρησιμοποιώντας την (3.100) και τη συνθήκη $q(0) = A$, από την παραπάνω ανισότητα έχουμε

$$q(s) \geq A - s\mu\sqrt{\frac{(d+2)A}{1+\alpha(d+2)A}},\ \text{για κάθε } s \geq 0.$$

Ειδικά για $0 \leq s \leq \frac{A}{\mu}\sqrt{\frac{1+\alpha(d+2)A}{A(d+2)}}$, αφού $q(s) > 0$, για κάθε $s \geq 0$, ισχύει

$$\begin{aligned}\int_0^\infty s^{d-1}q(s)ds &\geq \int_0^{\frac{A}{\mu}\sqrt{\frac{1+\alpha(d+2)A}{A(d+2)}}} s^{d-1}q(s)ds\\ &\geq \int_0^{\frac{A}{\mu}\sqrt{\frac{1+\alpha(d+2)A}{A(d+2)}}} s^{d-1}\left[A - s\mu\sqrt{\frac{(d+2)A}{1+\alpha(d+2)A}}\right]ds\\ &= \frac{A^{1+\frac{d}{2}}}{\mu^d d(d+1)}\left[\sqrt{\frac{1+\alpha(d+2)A}{d+2}}\right]^d.\end{aligned}$$

Οπότε,

$$\int_0^\infty s^{d-1}q(s)ds \geq \frac{A^{1+\frac{d}{2}}}{\mu^d d(d+1)}\left[\sqrt{\frac{1+\alpha(d+2)A}{d+2}}\right]^d,$$

που είναι η (3.101).

Επιπλέον, για $0 \leq s \leq \frac{A}{\mu}\sqrt{\frac{1+\alpha(d+2)A}{A(d+2)}}$, ισχύει

$$\begin{aligned}\int_0^\infty s^{d-1}q(s)^2ds &\geq \int_0^{\frac{A}{\mu}\sqrt{\frac{1+\alpha(d+2)A}{A(d+2)}}} s^{d-1}q(s)^2ds\\ &\geq \int_0^{\frac{A}{\mu}\sqrt{\frac{1+\alpha(d+2)A}{A(d+2)}}} s^{d-1}\left[A - s\mu\sqrt{\frac{(d+2)A}{1+\alpha(d+2)A}}\right]^2 ds\\ &= \frac{2A^{2+\frac{d}{2}}}{\mu^d d(d+1)(d+2)}\left[\sqrt{\frac{1+\alpha(d+2)A}{d+2}}\right]^d.\end{aligned}$$

Οπότε,

$$\int_0^\infty s^{d-1}q(s)^2ds \geq \frac{2A^{2+\frac{d}{2}}}{\mu^d d(d+1)(d+2)}\left[\sqrt{\frac{1+\alpha(d+2)A}{d+2}}\right]^d,$$

που είναι η (3.102).

Η απόδειξη του Λήμματος 3.6 έχει ολοκληρωθεί. ■

Λήμμα 3.7 *Έστω $q(s)$ η μοναδική λύση του προβλήματος αρχικών τιμών* (3.52) – (3.53). *Τότε ισχύει*

$$\begin{aligned}\frac{q(1)e^{\alpha(d+2)q(1)}}{s^{\mu(d+2)}e^{\frac{\mu(d+2)}{s}\sqrt{\frac{(d+2)A}{1+\alpha(d+2)A}}}e^{\frac{\mu(d+2)}{d}}} &\leq q(s)e^{\alpha(d+2)q(s)}\\ &\leq \frac{A^d e^{(d+\alpha)(d+2)A}e^{\frac{\mu(d+2)}{s}\sqrt{\frac{(d+2)A}{1+\alpha(d+2)A}}}}{s^{\mu(d+2)}e^{\frac{\mu(d+2)}{d}}},\end{aligned} \tag{3.107}$$

για κάθε $s \geq 1$.

Απόδειξη. Η συνάρτηση q είναι θετική και γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$, οπότε ισχύει $0 < q(s) \leq q(0) = A$, για κάθε $s \geq 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F(s) := -\frac{d}{d+2}\int_0^s \xi^{d-1}\ln q(\xi)d\xi, \qquad s \geq 0. \tag{3.108}$$

Η εξίσωση (3.68), από την (3.108), γίνεται

$$\begin{aligned}s^{d-1}q'(s) + \alpha s^d q(s) - \alpha d\int_0^s \xi^{d-1}q(\xi)d\xi + \frac{s^d}{d+2}\ln q(s)\\ -\frac{d}{d+2}\int_0^s \xi^{d-1}\ln q(\xi)d\xi + \frac{\mu}{d}s^d = 0\end{aligned}$$

ή

$$s^{d-1}q'(s) + \alpha s^d q(s) - \alpha d \int_0^s \xi^{d-1} q(\xi) d\xi - \frac{s}{d} F'(s) + F(s) + \frac{\mu}{d} s^d = 0$$

ή

$$d s^{d-1} q'(s) + \alpha d s^d q(s) - \alpha d^2 \int_0^s \xi^{d-1} q(\xi) d\xi - s F'(s) + d F(s) + \mu s^d = 0$$

ή

$$s F'(s) - d F(s) = d s^{d-1} q'(s) + \alpha d s^d q(s) - \alpha d^2 \int_0^s \xi^{d-1} q(\xi) d\xi + \mu s^d \quad (3.109)$$

οπότε

$$\left(\frac{F(s)}{s^d}\right)' = \frac{d q'(s)}{s^2} + \left(\frac{\alpha d}{s^d} \int_0^s \xi^{d-1} q(\xi) d\xi\right)' + \frac{\mu}{s}. \quad (3.110)$$

Ολοκληρώνοντας την ισότητα (3.110) από 1 έως s, για $s \geq 1$, έχουμε

$$\int_1^s \left(\frac{F(\xi)}{\xi^d}\right)' d\xi = d \int_1^s \frac{q'(\xi)}{\xi^2} d\xi + \alpha d \int_1^s \left(\frac{1}{\xi^d} \int_0^\xi w^{d-1} q(w) dw\right)' d\xi + \mu \int_1^s \frac{1}{\xi} d\xi$$

ή

$$\frac{F(s)}{s^d} - F(1) = d \int_1^s \frac{q'(\xi)}{\xi^2} d\xi + \frac{\alpha d}{s^d} \int_0^s \xi^{d-1} q(\xi) d\xi - \alpha d \int_0^1 \xi^{d-1} q(\xi) d\xi + \mu \ln s$$

ή

$$\frac{F(s)}{s^d} = F(1) + d \int_1^s \frac{q'(\xi)}{\xi^2} d\xi + \frac{\alpha d}{s^d} \int_0^s \xi^{d-1} q(\xi) d\xi$$
$$- \alpha d \int_0^1 \xi^{d-1} q(\xi) d\xi + \mu \ln s. \quad (3.111)$$

Επιπρόσθετα, από την (3.109) έπεται ότι

$$\frac{F'(s)}{d s^{d-1}} - \frac{F(s)}{s^d} = \frac{q'(s)}{s} + \alpha q(s) - \frac{\alpha d}{s^d} \int_0^s \xi^{d-1} q(\xi) d\xi + \frac{\mu}{d}$$

ή

$$-\frac{\ln q(s)}{d+2} - \frac{F(s)}{s^d} = \frac{q'(s)}{s} + \alpha q(s) - \frac{\alpha d}{s^d} \int_0^s \xi^{d-1} q(\xi) d\xi + \frac{\mu}{d}$$

ή

$$\frac{F(s)}{s^d} = -\frac{\ln q(s)}{d+2} - \frac{q'(s)}{s} - \alpha q(s) + \frac{\alpha d}{s^d} \int_0^s \xi^{d-1} q(\xi) d\xi - \frac{\mu}{d}. \quad (3.112)$$

Από την (3.111) και την (3.112), προκύπτει ότι

$$F(1) + d \int_1^s \frac{q'(\xi)}{\xi^2} d\xi + \frac{\alpha d}{s^d} \int_0^s \xi^{d-1} q(\xi) d\xi - \alpha d \int_0^1 \xi^{d-1} q(\xi) d\xi + \mu \ln s$$
$$= -\frac{\ln q(s)}{d+2} - \frac{q'(s)}{s} - \alpha q(s) + \frac{\alpha d}{s^d} \int_0^s \xi^{d-1} q(\xi) d\xi - \frac{\mu}{d}$$

ή

$$d\int_1^s \frac{q'(\xi)}{\xi^2}d\xi = \alpha d\int_0^1 \xi^{d-1}q(\xi)d\xi - F(1) - \mu\ln s - \frac{\ln q(s)}{d+2} - \frac{q'(s)}{s} - \alpha q(s) - \frac{\mu}{d}. \tag{3.113}$$

Εφ' όσον η q είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$, τότε για $0 \le \xi \le 1$ έχουμε

$$q(1) \le q(\xi) \le q(0) = A$$

οπότε

$$\int_0^1 \xi^{d-1}\ln q(1)d\xi \le \int_0^1 \xi^{d-1}\ln q(\xi)d\xi \le \int_0^1 \xi^{d-1}\ln A d\xi \le \int_0^1 \ln A d\xi = \ln A$$

άρα

$$\ln q(1)\int_0^1 \xi^{d-1}d\xi \le -\frac{d+2}{d}F(1) \le \int_0^1 \xi^{d-1}\ln A d\xi \le \ln A,$$

δηλαδή,

$$\ln q(1) \le -(d+2)F(1) \le \ln A^d \tag{3.114}$$

και επιπλέον

$$\int_0^1 q(1)\xi^{d-1}d\xi \le \int_0^1 \xi^{d-1}q(\xi)d\xi \le \int_0^1 A\xi^{d-1}d\xi,$$

δηλαδή,

$$q(1) \le d\int_0^1 \xi^{d-1}q(\xi)d\xi \le A. \tag{3.115}$$

Εφ' όσον $q'(s) \le 0$, για κάθε $s \in [0,+\infty)$ και $-q'(s) \le \|q'\|_\infty$ για κάθε $s \in [0,+\infty)$, από την (3.100) έπεται ότι

$$q'(s) \ge -\|q'\|_\infty \ge -\mu\sqrt{\frac{(d+2)A}{1+\alpha(d+2)A}}, \text{ για κάθε } s \ge 0.$$

Επομένως, για $s > 0$ έχουμε

$$-\frac{\mu}{s}\sqrt{\frac{(d+2)A}{1+\alpha(d+2)A}} \le \frac{q'(s)}{s} < 0 < -\frac{q'(s)}{s} \le \frac{\mu}{s}\sqrt{\frac{(d+2)A}{1+\alpha(d+2)A}}. \tag{3.116}$$

Για $1 \le \xi \le s$ ισχύει

$$0 \ge \frac{q'(\xi)}{\xi^2} \ge \frac{q'(\xi)}{\xi} \ge q'(\xi)$$

άρα,

$$0 \ge \int_1^s \frac{q'(\xi)}{\xi^2}d\xi \ge \int_1^s q'(\xi)d\xi \ge \int_0^{+\infty} q'(\xi)d\xi = \lim_{s\to+\infty} q(s) - q(0) = -A$$

οπότε,

$$0 \geq d\int_1^s \frac{q'(\xi)}{\xi^2}d\xi \geq -Ad. \tag{3.117}$$

Από τις (3.117) και (3.113), καταλήγουμε στο εξής

$$0 \leq -\alpha d\int_0^1 \xi^{d-1}q(\xi)d\xi + F(1) + \mu\ln s + \frac{\ln q(s)}{d+2} + \frac{q'(s)}{s} + \alpha q(s) + \frac{\mu}{d} \leq Ad$$

ή

$$\begin{aligned}\alpha d\int_0^1 \xi^{d-1}q(\xi)d\xi - F(1) - \mu\ln s - \frac{q'(s)}{s} - \frac{\mu}{d}\\ \leq \frac{\ln q(s)}{d+2} + \alpha q(s)\\ \leq Ad + \alpha d\int_0^1 \xi^{d-1}q(\xi)d\xi - F(1) - \mu\ln s - \frac{q'(s)}{s} - \frac{\mu}{d}.\end{aligned}$$

Οπότε, από την παραπάνω ανισότητα σε συνδυασμό με τις (3.114) και (3.115), έχουμε

$$\begin{aligned}\alpha(d+2)d\int_0^1 \xi^{d-1}q(\xi)d\xi - (d+2)F(1) - \mu(d+2)\ln s - (d+2)\frac{q'(s)}{s} - (d+2)\frac{\mu}{d}\\ \leq \ln q(s) + \alpha(d+2)q(s)\\ \leq Ad(d+2) + \alpha(d+2)d\int_0^1 \xi^{d-1}q(\xi)d\xi - (d+2)F(1)\\ - \mu(d+2)\ln s - (d+2)\frac{q'(s)}{s} - (d+2)\frac{\mu}{d}\end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned}\alpha(d+2)q(1) + \ln q(1) + \ln s^{-\mu(d+2)} - (d+2)\frac{q'(s)}{s} - \frac{(d+2)\mu}{d}\\ \leq \ln q(s) + \alpha(d+2)q(s)\\ \leq (d+\alpha)(d+2)A + \ln A^d + \ln s^{-\mu(d+2)} - (d+2)\frac{q'(s)}{s} - \frac{(d+2)\mu}{d},\end{aligned}$$

και από την (3.116) προκύπτει

$$\begin{aligned}\alpha(d+2)q(1) + \ln q(1) + \ln s^{-\mu(d+2)} - \frac{(d+2)\mu}{s}\sqrt{\frac{(d+2)A}{1+\alpha(d+2)A}} - \frac{(d+2)\mu}{d}\\ \leq \ln q(s) + \alpha(d+2)q(s)\\ \leq (d+\alpha)(d+2)A + \ln A^d + \ln s^{-\mu(d+2)}\\ + \frac{(d+2)\mu}{s}\sqrt{\frac{(d+2)A}{1+\alpha(d+2)A}} - \frac{(d+2)\mu}{d}.\end{aligned} \tag{3.118}$$

Από την (3.118) προκύπτει

$$\begin{aligned} e^{\alpha(d+2)q(1)}q(1)s^{-\mu(d+2)}e^{-\frac{(d+2)\mu}{s}\sqrt{\frac{(d+2)A}{1+\alpha(d+2)A}}-\frac{(d+2)\mu}{d}} \\ \leq q(s)e^{\alpha(d+2)q(s)} \\ \leq e^{(d+\alpha)(d+2)A}A^d s^{-\mu(d+2)}e^{\frac{(d+2)\mu}{s}\sqrt{\frac{(d+2)A}{1+\alpha(d+2)A}}-\frac{(d+2)\mu}{d}}. \end{aligned}$$

Συνεπώς, για κάθε $s \geq 1$ ισχύει

$$\begin{aligned} \frac{q(1)e^{\alpha(d+2)q(1)}}{s^{\mu(d+2)}e^{\frac{\mu(d+2)}{s}\sqrt{\frac{(d+2)A}{1+\alpha(d+2)A}}}e^{\frac{\mu(d+2)}{d}}} &\leq q(s)e^{\alpha(d+2)q(s)} \\ &\leq \frac{A^d e^{(d+\alpha)(d+2)A}e^{\frac{\mu(d+2)}{s}\sqrt{\frac{(d+2)A}{1+\alpha(d+2)A}}}}{s^{\mu(d+2)}e^{\frac{\mu(d+2)}{d}}} \end{aligned}$$

και αυτό αποδεικνύει την (3.107).
Η απόδειξη του Λήμματος 3.7 έχει ολοκληρωθεί. ■

Πόρισμα 3.2 *Έστω $q(s)$ η μοναδική λύση του προβλήματος αρχικών τιμών* (3.52) – (3.53). *Τότε ισχύουν τα εξής*

$$(i) \quad \lim_{A\to\infty}\int_0^\infty s^{d-1}q(s)^2 ds = \infty \tag{3.119}$$

$$(ii) \quad \lim_{A\to\infty}\int_0^\infty s^{d-1}q(s) ds = \infty, \tag{3.120}$$

$$(iii) \quad \lim_{A\to 0^+}\int_0^\infty s^{d-1}q(s) ds = 0, \tag{3.121}$$

$$(iv) \quad \lim_{A\to 0^+}\int_0^\infty s^{d-1}q'(s)^2 ds = 0, \tag{3.122}$$

$$(v) \quad \lim_{A\to 0^+}\int_0^\infty s^{d-1}q(s)^2 ds = 0. \tag{3.123}$$

Απόδειξη. Από την (3.102) έχουμε

$$\int_0^\infty s^{d-1}q(s)^2 ds \geq \frac{2A^{2+\frac{d}{2}}}{\mu^d d(d+1)(d+2)}\left[\sqrt{\frac{1+\alpha(d+2)A}{d+2}}\right]^d,$$

και εφ' όσον ισχύει

$$\lim_{A\to\infty}\frac{2A^{2+\frac{d}{2}}}{\mu^d d(d+1)(d+2)}\left[\sqrt{\frac{1+\alpha(d+2)A}{d+2}}\right]^d = \infty,$$

έπεται ότι

$$\lim_{A\to\infty}\int_0^\infty s^{d-1}q(s)^2 ds = \infty$$

και αυτό αποδεικνύει την (3.119).
Επιπλέον, από την (3.101), έχουμε

$$\int_0^\infty s^{d-1}q(s)ds \geq \frac{A^{1+\frac{d}{2}}}{\mu^d d(d+1)}\left[\sqrt{\frac{1+\alpha(d+2)A}{d+2}}\right]^d.$$

Εφ' όσον ισχύει

$$\lim_{A\to\infty}\frac{A^{1+\frac{d}{2}}}{\mu^d d(d+1)}\left[\sqrt{\frac{1+\alpha(d+2)A}{d+2}}\right]^d = \infty$$

προκύπτει ότι

$$\lim_{A\to\infty}\int_0^\infty s^{d-1}q(s)ds = \infty$$

και αυτό αποδεικνύει την (3.120).
Έπειτα, για $0 \leq \xi \leq 1$ έχουμε

$$\int_0^1 \xi^{d-1}q(\xi)d\xi \leq \int_0^1 q(\xi)d\xi \leq \int_0^1 q(0)d\xi = \int_0^1 Ad\xi = A,$$

οπότε

$$\int_0^1 \xi^{d-1}q(\xi)d\xi \leq A. \tag{3.124}$$

Από την (3.107), για $s \geq 1$ ισχύει

$$q(s)e^{\alpha(d+2)q(s)} \leq \frac{A^d e^{(d+\alpha)(d+2)A} e^{\frac{\mu(d+2)}{s}\sqrt{\frac{(d+2)A}{1+\alpha(d+2)A}}}}{s^{\mu(d+2)}e^{\frac{\mu(d+2)}{d}}}$$

και

$$0 < q(s) \leq q(1),$$

αφού η q είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$, άρα

$$0 < \alpha(d+2)q(s) \leq \alpha(d+2)q(1), \text{ για κάθε } s \geq 1.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, για κάθε $s \geq 1$ ισχύει

$$\begin{aligned} q(s) < q(s)e^{\alpha(d+2)q(s)} &\leq \frac{A^d e^{(d+\alpha)(d+2)A} e^{\frac{\mu(d+2)}{s}\sqrt{\frac{(d+2)A}{1+\alpha(d+2)A}}}}{s^{\mu(d+2)}e^{\frac{\mu(d+2)}{d}}} \\ &\leq \frac{A^d e^{(d+\alpha)(d+2)A} e^{\mu(d+2)\sqrt{\frac{(d+2)A}{1+\alpha(d+2)A}}}}{s^{\mu(d+2)}e^{\frac{\mu(d+2)}{d}}}. \end{aligned}$$

Οπότε,

$$\begin{aligned} \int_1^s \xi^{d-1}q(\xi)d\xi &\leq \int_1^s \frac{A^d e^{(d+\alpha)(d+2)A} e^{\mu(d+2)\sqrt{\frac{(d+2)A}{1+\alpha(d+2)A}}}}{\xi^{\mu(d+2)}e^{\frac{\mu(d+2)}{d}}}\xi^{d-1}d\xi \\ &= \frac{A^d e^{(d+\alpha)(d+2)A} e^{\mu(d+2)\sqrt{\frac{(d+2)A}{1+\alpha(d+2)A}}}}{e^{\frac{\mu(d+2)}{d}}}\int_1^s \frac{1}{\xi^{\mu(d+2)-d+1}}d\xi. \end{aligned} \tag{3.125}$$

Εφ' όσον $\mu > \frac{d}{d+2}$, τότε $\mu(d+2) - d + 1 > 1$ και γι' αυτό

$$\int_1^s \frac{1}{\xi^{\mu(d+2)-d+1}} d\xi < \infty.$$

Επίσης,

$$\lim_{A\to 0^+} \frac{A^d e^{(d+\alpha)(d+2)A} e^{\mu(d+2)\sqrt{\frac{(d+2)A}{1+\alpha(d+2)A}}}}{e^{\frac{\mu(d+2)}{d}}} = 0,$$

και τότε από την (3.125) έχουμε

$$\lim_{A\to 0^+} \int_1^s \xi^{d-1} q(\xi) d\xi = 0. \tag{3.126}$$

Συνδυάζοντας τις (3.124), (3.126), προκύπτει ότι

$$\lim_{A\to 0^+} \int_0^\infty s^{d-1} q(s) ds = 0$$

και αυτό αποδεικνύει την (3.121).
Επιπλέον,

$$0 \le \int_0^\infty s^{d-1} q'(s)^2 ds \le \int_0^\infty s^{d-1} q'(s)^2 ds + \frac{\alpha d}{2} \int_0^\infty s^{d-1} q(s)^2 ds,$$

και από την (3.99) ισχύει

$$(\mu - \frac{d}{d+2}) \int_0^{+\infty} s^{d-1} q(s) ds = \int_0^{+\infty} s^{d-1} q'(s)^2 ds + \frac{\alpha d}{2} \int_0^{+\infty} s^{d-1} q(s)^2 ds$$

άρα από τα παραπάνω έπεται ότι

$$0 \le \int_0^\infty s^{d-1} q'(s)^2 ds \le \left(\mu - \frac{d}{d+2}\right) \int_0^\infty s^{d-1} q(s) ds.$$

Από την (3.121) και την παραπάνω ανισότητα, καταλήγουμε στο ότι

$$\lim_{A\to 0^+} \int_0^\infty s^{d-1} q'(s)^2 ds = 0,$$

και αυτό αποδεικνύει την (3.122).
Επιπλέον,

$$0 \le \frac{\alpha d}{2} \int_0^\infty s^{d-1} q(s)^2 ds \le \int_0^\infty s^{d-1} q'(s)^2 ds + \frac{\alpha d}{2} \int_0^\infty s^{d-1} q(s)^2 ds,$$

άρα, από την (3.99) έχουμε

$$0 \le \frac{\alpha d}{2} \int_0^\infty s^{d-1} q(s)^2 ds \le \left(\mu - \frac{d}{d+2}\right) \int_0^\infty s^{d-1} q(s) ds.$$

Από την (3.121) και την παραπάνω ανισότητα, έχουμε

$$\lim_{A\to 0^+} \int_0^\infty s^{d-1} q(s)^2 ds = 0$$

και αυτό αποδεικνύει την (3.123).
Η απόδειξη του Πορίσματος 3.2 έχει ολοκληρωθεί. ■

Πόρισμα 3.3 *Έστω $q(s)$ η μοναδική λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (3.52) – (3.53) και ειδικότερα για την q ισχύει $q(0) = A$. Τότε, ως συνάρτηση του A, η ποσότητα*

$$I(A) = \int_0^\infty s^{d-1} q(s) ds \tag{3.127}$$

είναι συνεχής ως προς A στο $(0, +\infty)$.

Απόδειξη. Έστω ότι η συνάρτηση $q(s) = q(s, A)$ είναι η μοναδική λύση του προβλήματος των εξισώσεων (3.52) – (3.53). Η συνάρτηση $q(s, A)$ είναι συνεχής ως προς A, για $A > 0$. Τότε η συνάρτηση $\bar{q}(s, A) = s^{d-1} q(s, A)$ είναι επίσης συνεχής ως προς A, για $A > 0$.
Για σταθεροποιημένα A_1, A_2 με $0 < A_1 < A_2 < +\infty$, από το Λήμμα 3.7, τη μονοτονία της q και τη συνθήκη $\mu > \frac{d}{d+2}$ έπεται ότι η οικογένεια συναρτήσεων $\{\bar{q}(\cdot, A) : A \in [A_1, A_2]\}$ είναι φραγμένη από την ολοκληρώσιμη συνάρτηση $h(s), s \geq 0$, όπου

$$h(s) = \begin{cases} A_2 e^{\alpha(d+2)A_2}, & 0 \leq s < 1 \\ \frac{A_2 d e^{(d+\alpha)(d+2)A_2}}{s^{(d+2)\mu - d+1}} \exp\left((d+2)\mu \sqrt{\frac{(d+2)A_2}{1+\alpha(d+2)A_1}}\right), & s > 1. \end{cases}$$

Οπότε, από γνωστό θεώρημα της Ανάλυσης, η συνάρτηση $I(A)$ είναι συνεχής ως προς A στο $(0, +\infty)$.
Η απόδειξη του Πορίσματος 3.3 έχει ολοκληρωθεί. ■

3.6 Ύπαρξη Μονοπαραμετρικής Οικογένειας Λύσεων Ομοιότητας

Στις προηγούμενες ενότητες δημιουργήσαμε ένα βοηθητικό πρόβλημα με τις εξισώσεις (3.52)–(3.53), το οποίο συνδέεται με το αρχικό πρόβλημα της εξίσωσης (3.12) της αναπαραγόμενης δυναμικής με αρχικές συνθήκες (3.13) και (3.14) και αποδείξαμε την ύπαρξη μοναδικής λύσης $q(s)$ με $s \in (0, \infty)$. Επιπλέον, μελετήσαμε βασικές ιδιότητες της λύσης $q(s)$ και γενικά τη δομή των λύσεων του βοηθητικού προβλήματος. Σ' αυτήν την ενότητα θα αποδείξουμε την ύπαρξη μονοπαραμετρικής οικογένειας λύσεων ομοιότητας της εξίσωσης της αναπαραγόμενης δυναμικής (3.12).

Θεώρημα 3.1 *Έστω η εξίσωση της αναπαραγόμενης δυναμικής*

$$u_t = [Au - (u, Au)]\, u, \tag{3.128}$$

όπου το σύνολο των καθαρών στρατηγικών S είναι ο Ευκλείδειος d-διάστατος χώρος $\mathbb{R}^d$ με $d \geq 2$ και ο τελεστής αμοιβής A είναι ο εξής

$$Au(t, x) = \Delta u(t, x) + \alpha t^\gamma x \cdot \nabla u(t, x), \ \text{με } t > 0, \ x \in \mathbb{R}^d, \tag{3.129}$$

όπου $\gamma = -\frac{2}{d+2}$ και $a > 0$ είναι μία θετική παράμετρος.
Τότε, για κάθε αριθμό $\beta \in (0, \infty)$ υπάρχει μία λύση ομοιότητας

$$u(t, x) = t^{-\frac{d}{d+2}} g_d(r t^{-\frac{1}{d+2}}) \tag{3.130}$$

της εξίσωσης (3.128), *με*

$$r = |x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2}$$

και η συνάρτηση $g_d(s)$ *ικανοποιεί τα εξής*

$$g_d(s) > 0, \ \textit{για κάθε } s > 0, \tag{3.131}$$

$$\sigma_d \int_0^\infty s^{d-1} g_d(s) ds = 1 \tag{3.132}$$

και

$$g_d(s)g_d''(s) + \left(\frac{d-1}{s} + \alpha s\right) g_d(s)g_d'(s) + \frac{s}{d+2} g_d'(s) + \frac{d}{d+2} g_d(s)$$
$$+ K_d[g_d]g_d(s) + \frac{d\alpha}{2}\Lambda_d[g_d]g_d(s) = 0, \tag{3.133}$$

όπου

$$K_d[g_d] := \sigma_d \int_0^\infty s^{d-1} g_d'(s)^2 ds, \tag{3.134}$$

$$\Lambda_d[g_d] := \sigma_d \int_0^\infty s^{d-1} g(s)^2 ds \tag{3.135}$$

και επιπλέον ισχύει

$$\beta = K_d[g_d] + \frac{\alpha d}{2}\Lambda_d[g_d]. \tag{3.136}$$

Απόδειξη. Δεδομένου του $\beta \in (0, \infty)$, θεωρούμε τη συνάρτηση $q(s) = q(s, A)$ η οποία είναι η μοναδική λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (3.52) – (3.53) με $\mu = \beta + \frac{d}{d+2}$. Άρα ισχύουν

$$q(s)q''(s) + \left(\frac{d-1}{s} + \alpha s\right) q(s)q'(s) + \frac{s}{d+2} q'(s) + \mu q(s) = 0, \ s > 0,$$
$$q(0) = A > 0, \quad q'(0) = 0,$$

Θέτουμε

$$Q(A) := \sigma_d \int_0^\infty s^{d-1} q'(s, A)^2 ds + \frac{\alpha d}{2}\sigma_d \int_0^\infty s^{d-1} q(s, A)^2 ds.$$

Από την (3.99) του Πορίσματος 3.1 ισχύει

$$(\mu - \frac{d}{d+2}) \int_0^{+\infty} s^{d-1} q(s, A) ds = \int_0^{+\infty} s^{d-1} q'(s, A)^2 ds$$
$$+ \frac{\alpha d}{2} \int_0^{+\infty} s^{d-1} q(s, A)^2 ds$$

άρα

$$Q(A) = (\mu - \frac{d}{d+2})\sigma_d \int_0^\infty s^{d-1} q(s, A) ds,$$

οπότε

$$Q(A) = \beta\sigma_d \int_0^\infty s^{d-1} q(s, A) ds.$$

Από την (3.127) έχουμε

$$I(A) = \int_0^{+\infty} s^{d-1} q(s, A) ds$$

επομένως

$$Q(A) = \beta\sigma_d I(A).$$

Από το Πόρισμα 3.3, προκύπτει ότι η $Q(A)$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$.
Επιπλέον, από τις ισότητες (3.120) και (3.121) του Πορίσματος 3.2, έχουμε

$$\lim_{A\to 0^+} Q(A) = 0 \text{ και } \lim_{A\to\infty} Q(A) = \infty.$$

Συνεπώς, η $Q(A)$ λαμβάνει όλες τις τιμές μεταξύ 0 και ∞.
Ειδικότερα, για κάθε αριθμό $\beta \in (0, +\infty)$ υπάρχει ένα $A = A_\beta$ τέτοιο ώστε

$$Q(A_\beta) = \beta.$$

Θέτουμε $g_d(s) := q(s, A_\beta)$. Τότε,

$$\begin{aligned} K_d[g_d] + \frac{\alpha d}{2}\Lambda_d[g_d] =& \sigma_d \int_0^\infty s^{d-1} g_d'(s)^2 ds + \frac{\alpha d}{2}\sigma_d \int_0^\infty s^{d-1} g_d(s)^2 ds \\ =& Q(A_\beta) = \beta, \end{aligned}$$

οπότε η $g_d(s)$ ικανοποιεί την (3.136).
Επιπλέον, $g_d(s) = q(s, A_\beta) > 0$, για κάθε $s \in (0, \infty)$, άρα η g_d ικανοποιεί την (3.131) και εφ' όσον η $g_d(s) = q(s, A_\beta)$ είναι η λύση της (3.52) για $\mu = \beta + \frac{d}{d+2}$ και $\beta = K_d[g_d] + \frac{\alpha d}{2}\Lambda_d[g_d]$, τότε η g_d επαληθεύει την (3.133).
Επιπλέον, από την (3.99) του Πορίσματος 3.1 προκύπτει

$$\begin{aligned} \sigma_d \int_0^\infty s^{d-1} g_d(s) ds =& \sigma_d \int_0^\infty s^{d-1} q(s, A_\beta) ds \\ =& \frac{1}{\beta}\left[\sigma_d \int_0^\infty s^{d-1} q'(s, A_\beta)^2 ds + \frac{\alpha d}{2}\sigma_d \int_0^\infty s^{d-1} q(s, A_\beta)^2 ds\right] \\ =& \frac{1}{\beta} Q(A_\beta) = 1, \end{aligned}$$

και, συνεπώς, η g_d επίσης ικανοποιεί την (3.132).
Άρα, για κάθε $\beta \in (0, \infty)$, υπάρχει μοναδική λύση $g_d(s)$ της εξίσωσης

$$\begin{aligned} g_d(s) g_d''(s) + \left(\frac{d-1}{s} + \alpha s\right) g_d(s) g_d'(s) + \frac{s}{d+2} g_d'(s) + \frac{d}{d+2} g_d(s) \\ + K_d[g_d] g_d(s) + \frac{d\alpha}{2}\Lambda_d[g_d] g_d(s) = 0, \end{aligned}$$

όπου οι $K_d[g_d], \Lambda_d[g_d]$ δίνονται από τις (3.134) και (3.135) με $g_d(s) > 0$ για κάθε $s \in (0, \infty)$ και $\sigma_d \int_0^\infty s^{d-1} g_d(s) ds = 1$.
Οπότε, σύμφωνα με το Λήμμα 3.1, υπάρχει μοναδική λύση ομοιότητας

$$u(t,x) = t^{-\frac{d}{d+2}} g_d(rt^{-\frac{1}{d+2}})$$

της εξίσωσης της αναπαραγόμενης δυναμικής (3.128), που είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ως προς x.
Η απόδειξη του Θεωρήματος 3.1 έχει ολοκληρωθεί. ■

Οπότε, η δομή των λύσεων του βοηθητικού προβλήματος αρχικών τιμών (3.52)–(3.53) είναι η δομή των λύσεων ομοιότητας της εξίσωσης της αναπαραγόμενης δυναμικής (3.128).
Είναι προφανές, ότι όλες οι λύσεις ομοιότητας $u(t,x)$ είναι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας στο $\mathbb{R}$. Ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό όλων αυτών των λύσεων είναι ότι προσεγγίζουν τη συνάρτηση Dirac $\delta(x)$ καθώς $t \to 0^+$.

Βιβλιογραφία

[1] Bomze, I., Dynamical Aspects of Evolutionary Stability, *Monatsh Mathematik* **110** (1990), 189–206.

[2] Coddington, E.A. and Levinson, N., *Theory of Ordinary Differential Equations*, Robert E. Krieger Publishing Company, Malabar, Florida, 1987.

[3] Hofbauer, J. and Sigmund, K., Evolutionary Game Dynamics, *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society* **40**, No. 4 (2003), 479–519.

[4] Imhof, L.A., The Long-Run Behavior of the Stochastic Replicator Dynamics, *Ann. Appl. Probab.* **15**, No. 1B (2005), 1019–1045.

[5] Kravvaritis, D., Papanicolaou, V.G., and Yannacopoulos, A., Similarity Solutions for a Replicator Dynamics Equation, *Indiana Univ. Math. Journal* **57**, No. 4 (2008), 1927–1943.

[6] Kravvaritis, D., Papanicolaou, V.G., Xepapadeas, A., and Yannacopoulos, A., On a Class of Operator Equations arising in Infinite Dimensional Replicators Dynamics, *Nonlinear Analysis* **11**, No. 4, (2010), 2537–2556.

[7] Oechssler, J. and Riedel, F., Evolutionary Dynamics on Infinite Strategy Spaces, *Economic Theory* **17** (2001), 141–162.

[8] Oechssler, J. and Riedel, F., On the Dynamic Foundation of Evolutionary Stability in Continuous Models, *Journal of Economic Theory* **107** (2002), 223–252.

[9] Papanicolaou, V.G. and Smyrlis G., Similarity Solutions for a Multidi-

mensional Replicator Dynamics Equation, *Nonlinear Analysis* **71** (2009), 3185–3196.

[10] Smith, J. Maynard, *Evolution and the Theory of Games*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1982.

[11] Taylor, P.D. and Jonker, L.B., Evolutionary Stable Strategies and Game Dynamics, *Mathematical Biosciences* **40** (1978), 145–156.

[12] Kavallaris, N.I., Lankeit, J., and Winkler, M., On a Degenerate Non-Local Parabolic Problem Describing Infinite Dimensional Replicator Dynamics, 2015, preprint.

[13] Lankeit, J., Equilibration of Unit Mass Solutions to a Degenerate Parabolic Equation with a Nonlocal Gradient Nonlinearity, *Nonlinear Analysis* **135** (2016), 236–248.

[14] Papanicolaou, V.G. and Vasilakopoulou K., Similarity Solutions of a Replicator Dynamics Equation Associated to a Continuoum of Pure Strategies, *Electronic Journal of Differential Equations* **2015**, No. 231, (2015), 1–16.

[15] Papanicolaou, V.G. and Vasilakopoulou K., Similarity Solutions of a Multidimensional Replicator Dynamics Integrodifferential Equation, *Journal of Dynamics and Games* **3**, No. 1, (2016), 51–74.

[16] Hofbauer, J. and Sigmund, K., *The Theory of Evolution and Dynamical Systems*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1988.

[17] Hofbauer, J. and Sigmund, K., *Evolutionary Games and Population Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1988.

[18] Schuster, P. and Sigmund, K., Replicator Dynamics, *J. Theor. Biology* **100** (1983), 533–538.

[19] Brezis, H., *Συναρτησιακή Ανάλυση*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα, 1997.