ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Λύσεις μελανών οπών συζευγμένων με βαθμωτά πεδία
Μελανές οπές Brans-Dicke

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
ΤΟΥ
ΧΡΙΣΤΌΦΟΡΟΥ ΒΛΆΧΟΥ

Επιβλέπων: Ελευθέριος Παπαντώνοπουλος
Καθηγητής ΕΜΠ

ΑΘΗΝΑ, ΟΚΤΏΒΡΙΟΣ 2016

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Λύσεις μελανών οπών συζευγμένων με βαθμωτά πεδία
Μελανές οπές Brans-Dicke

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
ΤΟΥ
ΧΡΙΣΤΌΦΟΡΟΥ ΒΛΆΧΟΥ

Επιβλέπων: Ελευθέριος Παπαντώνοπουλος
Καθηγητής ΕΜΠ

ΑΘΗΝΑ, ΟΚΤΏΒΡΙΟΣ 2016

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή στις 10 Οκτωβρίου 2015.

....	....	....
Ε. Παπαντωνόπουλος Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Γ. Κουτσούμπας Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Ν. Ήργες Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

....
Βλάχος Χριστόφορος
Φυσικός Εφαρμογών Ε.Μ.Π.

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία γίνεται μελέτη διάφορων ακριβών λύσεων των εξ.Einstein για μελανές οπές. Ξεκινάμε από τις βασικές αρχές της Ειδικής Σχετικότητας και εν συνεχεία παρουσιάζουμε το πως η προσπάθεια γενίκευσης αυτών των αρχών οδηγεί σε μία θεωρία βαρύτητας. Περιγράφοντας ως ένα βαθμό, τα μαθηματικά εργαλεία και τις φυσικές έννοιες, που χρειάζονται για τη μελέτη της φυσικής σε καμπυλωμένο χωροχρόνο, καταλήγουμε στις εξισώσεις πεδίου της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας.

Έπειτα γίνεται αναλυτική απόδειξη των λύσεων Schwarzschild και Reissner-Nördstrom και περιγράφονται τα βασικά συμπεράσματα και γενικά χαρακτηριστικά τους(αιτιακές σχέσεις, συμπεριφορά κώνων φωτός, εύρεση χωροχρονικών ανωμαλιών).

Στη συνέχεια αποδεικνύονται οι πεδιακές εξισώσεις για τη δράση της βαρύτητας(Einstein-Hilbert), παρουσία κοσμολογικής σταθεράς, μαζί με βαθμωτό πεδίο (δράση MTZ) και εξετάζεται η παραβίαση της υπόθεσης εξάλειψης ιχνών(no-hair conjecture).

Τέλος γίνεται μία σύντομη περιγραφή της αρχής του Mach και εξετάζονται λύσεις στο κενό, φορτισμένων και αφόρτιστων μαύρων τρυπών μιας τροποποιημένης βαρυτικής θεωρίας(Brans-Dicke Theory) η οποία είναι απόλυτα συμβατή με αυτή την φιλοσοφική αρχή.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Όπως είναι γνωστό, υπάρχουν τέσσερις τρόποι για να αλληλεπιδράσουν μεταξύ τους τα σωματίδια της ύλης. Ίσως ο πιο καθολικός από αυτούς τους τρόπους, να είναι η βαρυτική αλληλεπίδραση, αφού το μόνο προαπαιτούμενο είναι η ύπαρξη μάζας[1], ένα χαρακτηριστικό το οποίο έχουν όλα τα υλικά σωματίδια. Ένα σώμα μπορεί να μην έχει ηλεκτρικό φορτίο αλλά σίγουρα έχει μάζα.

Ο πρώτος που επιχείρησε να διατυπώσει μία θεωρία για την βαρύτητα ήταν σαφώς ο Νεύτωνας ο οποίος την περιέγραφε σαν μία ''δράση από απόσταση'' μεταξύ των σωμάτων, σύμφωνα με τον γνωστό νόμο της παγκόσμιας έλξης. Θεώρησε δηλαδή, πως η δύναμη της βαρύτητας δρούσε ακαριαία ανάμεσα στα σώματα.

Αρκετά χρόνια αργότερα το 1905, ο A.Einstein με τη διατύπωση της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας, έδειξε πως τίποτα δεν δρα ακαριαία. Όλα περιορίζονται από την ταχύτητα του φωτός. Το φως είναι η ταχύτερη διάδοση πληροφορίας που μπορεί να υπάρξει ανάμεσα σε δύο σήμεια του σύμπαντος[2]. Επομένως η θεώρηση του Νεύτωνα για την ακαριαία δράση δεν μπορεί να είναι σωστή μιάς και η Ειδική Σχετικότητα είχε αποδείξεί την ορθότητά της. Δεν είναι πως ο νόμος της παγκόσμιας έλξης είναι απολύτως λάθος, αφού εξηγεί αρκετά φυσικά φαινόμενα, αλλά αποτελεί προσέγγιση μιας περισσότερο θεμελιώδους θεωρίας. Μια ειδική περίπτωσή της.

Το 1915 ο Einstein κατέληξε σε μια σχετικιστική θεωρία βαρύτητας, η οποία οδήγησε σε μία ριζική νοητική επανάσταση η που άλλαξε για πάντα τον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβανόμαστε τις έννοιες της βαρύτητας, του χώρου και του χρόνου. Ο Einstein εστίασε στο γεγονός πως ΟΛΑ τα σώματα πέφτουν με την *ίδια επιτάχυνση* σε ένα βαρυτικό πεδίο. Οπότε σκέφτηκε ότι, αφού διαφορετικά μεταξύ τους σώματα, πεφτούν με τον ίδιο ρυθμό, ίσως η βαρύτητα να είναι ένα χαρακτηριστικό του χωροχρόνου[3] του ίδιου. Κατέληξε στο ότι η μάζα καμπυλώνει τον χώρο-χρόνο γύρω της και οι τροχιές που ακολουθούν τα σώματα είναι

[1]Και λόγω της $E = mc^2$ και μόνο η ύπαρξη ενέργειας, δίχως μάζα, αρκεί [1]
[2]Χωροχρονικά σημεία πάντα
[3]η έννοια του χωροχρόνου είχε ξεκινήσει ήδη από την ειδική σχετικότητα

ευθείες διαδρομές[4] σ'αυτόν τον *καμπυλωμένο* χωροχρόνο [1]. Σύμφωνα με το Νεύτωνα, ο Ήλιος ασκεί βαρυτική δύναμη στη Γη και η Γη κινείται γύρω του ως αποτέλεσμα αυτής της δύναμης. Σύμφωνα με τον Einstein, η μάζα του Ήλιου καμπυλώνει το χωροχρόνο και η Γη κινείται σε μια ευθεία σ'αυτόν τον καμπυλωμένο χωροχρόνο. Από εκεί λοιπόν που περιγράφαμε την βαρύτητα καθαρά μέσω της έννοιας της δύναμης, ξεκινήσαμε να την συλλαμβάνουμε σα συνέπεια των γεωμετρικών ιδιοτήτων του χώρου. Καταλαβαίνουμε λοιπόν το πόσο θεμελιωδώς, άλλαξε τον τρόπο σκέψης των επιστημόνων η *Γενική Θεωρία της Σχετικότητας*(Γ.Θ.Σ.).

Αν και δεν έγινε αποδεκτή αρχικά από τους επιστήμονες, εξηγώντας φαινόμενα όπως οι μαύρες τρύπες, τα πάλσαρς, η μεγάλη έκρηξη και συμβάλοντας ακόμη και στην ανάπτυξη τεχνολογικών εφαρμογών όπως το G.P.S., πλέον είναι αναπόσπαστο κομμάτι της συγχρονής φυσικής.

[4] Οι λεγόμενες και *γεωδαιτικές*

Κεφάλαιο 2

Ειδική Σχετικότητα

2.1 Ο δρόμος προς τη Σχετικότητα

Κάθε γεγονός συμβαίνει στο χώρο και τον χρόνο. Για να προσδιορίσουμε τη ''*θέση*'' αυτού του γεγονότος χρειαζόμαστε δύο πληροφορίες. Το πού έγινε(χωρική θέση) και το πότε έγινε(χρονική θέση). Από τη στιγμή που αντιλαμβανόμαστε τρείς διαστάσεις στο χώρο, η πληροφορία για τη συνολική ''*θέση*''του γεγονότος δίνεται από μία τετράδα αριθμών (ct, x, y, z)[1]. Η τετράδα αυτή, δηλώνει την *χωροχρονική θέση* του γεγονότος ως προς έναν παρατηρητή, ένα σύστημα αναφοράς$\{\hat{e}_i\}$. Ονομάζεται τετράνυσμα και είναι το ανάλογο του διανύσματος του ευκλείδιου χώρου που όμως ανήκει στον τετραδιάστατο επίπεδο χωροχρόνο. Ως προς άλλο σύστημα αναφοράς η τετράδα αυτή θα αποτελούνταν από διαφορετικούς αριθμούς. Διάφοροι τρόποι να την συμβολίσουμε είναι

$$x^\mu = (ct, x, y, z) = \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) = \left(x^0, \vec{x}\right) = ct\hat{e}_t + x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z \tag{2.1}$$

Ο πρώτος που διατύπωσε μία αρχή σχετικότητας ήταν ο Γαλιλαίος, ο οποίος είπε πως για δύο συστήματα αναφοράς(παρατηρητές) που κινούνται σχετικά το ένα ως προς το άλλο, με *σταθερή*[2] ταχύτητα u, ο μετασχηματισμός που συνδέει τις συντεταγμένες τους είναι ο ακόλουθος

$$\begin{aligned} x' &= x - ut \qquad (2.2)\\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \qquad (2.3) \end{aligned}$$

Ο παραπάνω μετασχηματισμός όμως έχει ένα πρόβλημα. Αν υποθέσουμε ότι μετράμε τις συνιστώσες της ταχύτητας ενός σωματιδίου ως προς το ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς

[1] Η χρονική συντεταγμένη t πολλαπλασιάζεται με c γιατί από τη στιγμή που θα θεωρήσουμε την τετράδα αυτή ως διάνυσμα κάποιου χώρου, θα πρέπει όλες οι συνιστώσες να έχουν ίδιες μονάδες

[2] Γιατί μόνο τότε είναι αδρανειακά συστήματα αναφοράς

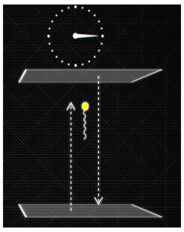
(u_x, u_y, u_z) και (u'_x, u'_y, u'_z) ως προς το άλλο σύστημα αναφοράς τότε από τις (2.2) έχουμε

$$u'_x = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - u = u_x - u \tag{2.4}$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι γνωστό ως κανόνας πρόσθεσης ταχυτήτων του Newton. Αυτός ο κανόνας όμως συνεπάγεται ότι ακόμα και το φως θα ταξιδεύει με διαφορετικές ταχύτητες στα διάφορα αδρανειακά συστήματα κάτι το οποίο έρχεται σε αντίθεση με τις εξισώσεις του Maxwell, οι οποίες δείχνουν ότι το φως κινείται *σταθερά με c*. Με άλλα λόγια, οι εξισώσεις του Maxwell δεν παίρνουν την ίδια μορφή σε διαφορετικά αδρανειακά συστήματα. Επομένως, είτε οι εξισώσεις του Maxwell ισχύουν μόνο στο σύστημα αναφοράς για το οποίο η ταχύτητα του φωτός είναι c, είτε ο μετασχηματισμός του Γαλιλαίου είναι λάθος. Ποιό να είναι όμως αυτό το προνομοιακό σύστημα; Εκείνη την εποχή πίστευαν πως υπάρχει ένα μέσο σε ολόκληρο το σύμπαν, ως προς το οποίο διαδίδεται το φως με c, ο *αιθέρας*. Οπότε, αν υπήρχε όντως ο αιθέρας, σε οποιοδήποτε άλλο αδρανειακό σύστημα που κινείται ως προς αυτόν η ταχύτητα του φωτός θα έπρεπε να δίνεται από την (2.4). Οι Mickelson και Morley, το 1887, εξέτασαν την ύπαρξη του αιθέρα, μετρώντας την ταχύτητα του φωτός σε διάφορα αδρανειάκα συστήματα αλλά δεν βρήκαν κάποια διαφορά. Οπότε ο μετασχηματισμός του Γαλιλαίου έπρεπε να τροποποιηθεί.

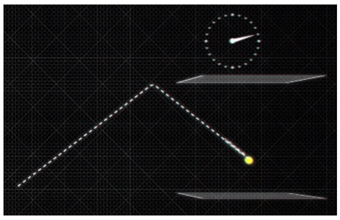
2.2 Αξιώματα-Μετασχηματισμός Lorentz

Η επιτυχής τροποποίηση ήρθε το 1905 από τον Einstein και ονομάστηκε *Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας*(Ε.Θ.Σ.). Ο Einstein εκανέ τις εξής δύο παραδοχές:



- Όλοι οι νόμοι της φυσικής είναι ίδιοι για κάθε αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Αυτό σημαίνει ότι, πανομοιότυπα πειράματα που διεξάγονται σε διαφορετικά αδρανειακά συστήματα αναφοράς παράγουν πανομοιότυπα αποτελέσματα.
- Η ταχύτητα του φωτός είναι ίδια σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς.

Οι δυο παραπάνω προτάσεις αποτελούν τα *αξιώματα* της ειδικής σχετικότητας. Η ιδέα ότι η ταχύτητα του φωτός είναι ίδια σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς, οδηγεί εν τέλει σε μια ριζική αναθεώρηση. Ο χρόνος **δεν** είναι απόλυτος. Με αυτό εννοούμε ότι δύο ρολόγια που κινούνται το ένα ως προς το άλλο, χτυπούν με διαφορετικούς ρυθμούς. Δεν σημαίνει ότι άμα ένας παρατηρητής Α ξεκινήσει να τρέχει ως προς έναν παρατηρητή Β, θα μείνει νεότερος. Ο Α συνεχίζει να είναι ακίνητος ως προς το δικό του (βιολογικό αν θέλετε) ρολόι και έτσι νιώθει πως ο χρόνος κυλάει κανονικά. Απλά ο Β αντιλαμβάνεται πως περνάει πιο αργά ο χρόνος για τον Α. Και αντίστοιχα ο Α αντιλαμβάνεται πως περνάει πιο αργά ο χρόνος για τον Β, αφού τον βλέπει να ''φεύγει'' προς την αντίθετη κατεύθυνση. Το όλο θέμα είναι απλά μια **ασυμφωνία** *των μετρήσεων που κάνει ο ένας ως προς τον άλλον*.Κανένας από τους δύο δεν γερνάει πιο αργά.



Ας φανταστούμε ένα ρολόι το οποίο λειτουργεί με ένα φωτόνιο ανάμεσα σε δύο καθρέφτες. Ο κάθε χτύπος του ρολογιου αντιστοιχεί σε μια διαδρομή ''πάνω-κάτω'' του φωτονίου. Άρα ο κάθε χτύπος αντιστοιχεί σε ένα χρονικό διάστημα $\Delta t = \frac{2L}{c}$ όπου L είναι η απόσταση ανάμεσα στους καθρέφτες. Ας θεωρήσουμε τώρα, πάλι το ίδιο ρολόι το οποίο όμως βρίσκεται σε σχετική κίνηση ως προς εμάς. Από τη δικιά μας οπτική, το φωτόνιο τώρα έχει να διανύσει μια απόσταση $2\left[\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 + L^2\right]^{\frac{1}{2}}$ η οποία είναι προφανώς μεγαλύτερη από $2L$ που έκανε στην προηγούμενη περίπτωση. Δηλάδη αντιλαμβανόμαστε ότι το κινούμενο ως προς εμάς ρολόι χτυπάει πιο αργά. Αλλά είναι μόνο θέμα αντίληψης. Αν κινούμασταν και εμείς μαζί με το ρολόι θα το βλέπαμε σαν είναι ακίνητο και θα λέγαμε ότι το φωτόνιο πήγαινει ''πάνω-κάτω'' όπως στην πρώτη περίπτωση. Με τέτοια νοητικά πειράματα ο Einstein έδειξε πως η ροή του χρόνου είναι κάτι υποκειμενικό και κάθε παρατηρητής την μετράει διαφορετικά.

Επίσης μια άλλη ασυμφωνία που προκύπτει από το γεγονός ότι η ταχήτυτα του φωτός είναι σταθερή ως προς όλους τους αδρανειακούς παρατηρητές, είναι το φαινόμενο της συστολής του μήκους. Αν είχαμε μία ράβδο ακίνητη μπροστά μας και μετρούσαμε το μήκος της ως L, τότε στην περίπτωση που η ράβδος κουνιόταν ως προς εμάς θα αντιλαμβανόμασταν το μήκος της μειωμένο κατά ένα παράγοντα γ(παράγοντας *Lorentz*).

Ο Einstein κατάλαβε πως οι εξισώσεις που συνδέουν τις συντεταγμένες ανάμεσα στα διάφορα συστήματα είναι οι μετασχηματισμοί του Lorentz. Μας λένε ότι αν ένας παρατηρητής ο οποίος κρατάει ένα ρολόι μετρήσει ένα χρονικό διάστημα Δt, τότε ένας δεύτερος παρατηρητής που κινείται με v_x ως προς τον πρώτο, θα βλέπει το ρολόι του πρώτου να έχει μετρήσει χρονικό διάστημα $\Delta t'$. Με αντίστοιχο τρόπο συνδέουν και την ασυμφωνία των μετρήσεων ως προς το χώρο (το μήκος της ράβδου).

Οι εξισώσεις του Lorentz είναι

$$\begin{aligned}
\Delta x' &= \gamma\left(\Delta x - v_x \Delta t\right) \\
\Delta y' &= \Delta y \\
\Delta z' &= \Delta z \\
c\Delta t' &= \gamma\left(\Delta t - \frac{v_x}{c^2}\Delta x\right)
\end{aligned}$$

Όπου $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \geq 1$ ο παράγοντας Lorentz που αναφέραμε προηγουμένως.

Χρησιμοποιώντας συμβολισμό πινάκων θα γράφαμε

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma ct - \gamma\beta x \\ \gamma x - \gamma\beta ct \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \tag{2.5}$$

$$\Delta x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} \, \Delta x^{\nu} \tag{2.6}$$

Όπου $\beta \equiv \frac{v}{c} = \frac{v_x}{c}$. Οι εξισώσεις που εκφράζουν τα δυο φαινόμενα που περιγράψαμε παραπάνω (ασυμφωνία ρολογιών και ασυμφωνία ως προς το μήκος της ραβδου) βγαίνουν από τους μετασχηματισμούς του Lorentz και είναι

$$L' = L\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{L}{\gamma} \tag{2.7}$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \Delta t \tag{2.8}$$

Τα δύο αυτά σχετικιστικά φαινόμενα ονομάζονται συστολή του μήκους και διαστολή του χρόνου.

Μια ακόμη ιδιότητα των μετασχηματισμών του Lorentz είναι ότι διατηρούν αναλλοίωτη την ποσότητα

$$ds^2 = -(cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{2.9}$$

η οποία είναι το *στοιχείο μήκους του επίπεδου*[3] *χωροχρόνου*. Όπως παρατηρούμε, περιέχει το χωρικό κομμάτι που είναι απλά το Ευκλείδιο στοιχείο μήκους και ένα χρονικό. Η χωροχρονική απόσταση μεταξύ δυο σημείων είναι *σταθερή ανεξάρτητα από το σύστημα αναφοράς*. Αυτό είναι το χωροχρονικό ανάλογο του να λέγαμε πως δύο σήμεια στο επίπεδο απέχουν ίδια απόσταση είτε εκφράσουμε το χώρο σε Καρτεσιανές είτε σε πολικές συντεταγμένες. Απλά πλέον η γεωμετρία μας εμπλέκει και τον χρόνο σαν διάσταση. Οπότε έχουμε *απαίτηση, ο μετασχηματισμός που θα επιλέξουμε να διατηρεί* **αναλλοίωτο** *το στοιχειώδες μήκος*. Γράφοντας την εξίσωση (2.9) σε συμβολισμό τετρανυσμάτων έχουμε

$$ds^2 = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \equiv g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \tag{2.10}$$

Όπου

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

[3] Ο οποίος είναι γνωστός ως χώρος Minkowski

Για ένα διαφορετικό σύστημα αναφοράς $x^{\mu'} = (ct', x', y', z')$ ϑα γράφαμε [4]

$$ds^2 = g_{\rho'\sigma'} dx^{\rho'} dx^{\sigma'} \tag{2.12}$$

Επομένως για να είναι αναλλοίωτο το ds^2 πρέπει

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\rho'\sigma'} dx^{\rho'} dx^{\sigma'} \rightarrow g_{\mu\nu} \cancel{d}x^\mu \cancel{d}x^\nu = g_{\rho'\sigma'} \Lambda^{\rho'}_{\mu} \cancel{d}x^\mu \, \Lambda^{\sigma'}_{\nu} \cancel{d}x^\nu \rightarrow \\ g_{\mu\nu} = \Lambda^{\rho'}_{\mu} g_{\rho'\sigma'} \Lambda^{\sigma'}_{\nu} \rightarrow g = \Lambda^{\mathsf{T}} g \Lambda \end{aligned} \tag{2.13}$$

Οι πίνακες που ικανοποιούν την παραπάνω ιδιότητα λέγονται **μετασχηματισμοί Lorentz** και το σύνολο όλων αυτών των πινάκων λέγεται *ομάδα Lorentz* [5]. Οι μετασχηματισμοί αυτοί μπορεί να είναι είτε απλές στροφές στο χώρο

$$\Lambda^{\mu'}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

Είτε ''χωροχρονικές στροφές'' όπως στην σχέση (2.5) για την οποία μπορεί να αποδειχϑεί ότι

$$\Lambda^{\mu'}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\phi & -\sinh\phi & 0 & 0 \\ -\sinh\phi & \cosh\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

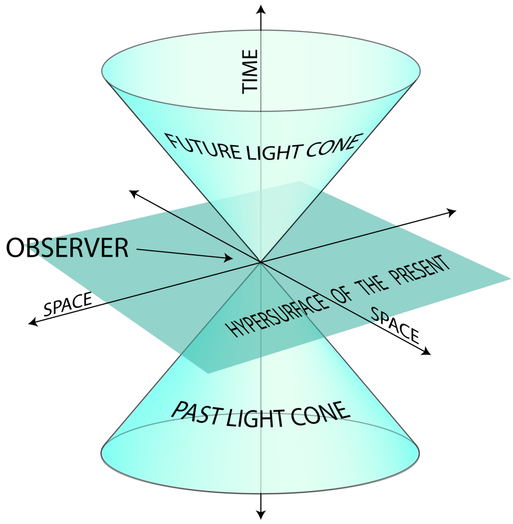
Η τελευταια κατηγορία των μετασχηματισμών Lorentz είναι γνώστη και ως **προωϑήσεις Lorentz**.

Το αρνητικό πρόσημο στον πρώτο όρο της (2.9) συνεπάγεται ότι η χωροχρονική απόσταση μπορεί να είναι και αρνητική. Κατηγοροιοποιούμε τα σημεία με βάση το πρόσημο[5] του ds^2 σε :

1. $ds^2 > 0$ χωροειδώς χωρισμένα,
2. $ds^2 < 0$ χρονοειδώς χωρισμένα,
3. $ds^2 = 0$ φωτοειδώς χωρισμένα.

[4] η διαφορά των συστημάτων φαίνεται στην ύπαρξη των τόνων και όχι στην επιλογή διαφορετικών γραμμάτων. Θα μπορούσαμε να γράψουμε $ds^2 = g_{\mu'\nu'} dx^{\mu'} dx^{\nu'}$

[5] Έχουμε χρησιμοποήσει τη σύμβαση (-,+,+,+). Για ανάποδη σύμβαση ϑα κάναμε και ανάποδη κατηγοριοποίση.



Τα φωτοειδός χωρισμένα βλέπουμε ότι απέχουν μηδενική απόσταση. Αυτό σημαίνει ότι, η χωρική απόσταση των δύο σημείων είναι τέτοια, ώστε για να μεταφερθούμε από το ένα στο άλλο σε χρόνο dt θα πρέπει να ταξιδέψουμε με την ταχύτητα του φωτός. Για τα χωροειδώς χωρισμένα θα πρέπει να πάμε ακόμη πιο γρήγορα, ενώ την κοσμική διαδρομή ανάμεσα δε δύο χρονοειδώς χωρισμένα σημεία θα μπορούσε να την καλύψει οποιοδήποτε σώμα με μη μηδενική μάζα ηρεμίας.

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που είναι φωτοειδώς χωρισμένα, από ένα σημείο P ονομάζεται ***κώνος φωτός*** του σημείου P. Τα φωτόνια κινούνται στα όρια του κώνου και κάθε άλλο σωματίδιο ύλης θα έπρεπε αναγκαστικά να επιλέξει μια θέση στο εσωτερικό του. Έτσι ο κώνος φωτός καθορίζει τις ***αιτιακές σχέσεις*** των γεγονότων και των διάφορων σημείων στο χωροχρόνο. Οποιοδήποτε φαινόμενο ή γεγονός δεν μπορεί να έχει προκληθεί από ένα άλλο το οποίο βρίσκεται έξω από τον παρελθοντικό του κώνο φωτός και αντίστοιχα δεν μπορεί να προκαλέσει κανένα από τα γεγονότα που βρίσκονται έξω από τον μελλοντικό του κώνο φωτός.

Κεφάλαιο 3

Γενική Σχετικότητα

3.1 Συστήματα Αναφοράς - Αρχή της Ισοδυναμίας

Στην ειδική σχετικότητα έγινε η απαίτηση πως φυσική είναι ίδια σε όλα τα *αδρανειακά* συστήματα αναφοράς. Αλλά τι το ξεχωριστό έχουν αυτά τα συστήματα; Γιατί οι νόμοι της φύσης να εξαρτόνται από το σύστημα αναφοράς του παρατηρητή τους, και να μην είναι καθολικά ίδιοι για όλους; Τα αδρανειακά συστήματα έχουν παρόμοιο ρόλο με την ιδέα του απόλυτου χρόνου του Νεύτωνα. Υποδηλωνουν ότι υπάρχει ένα προτιμητέο σύστημα για να επιλέξουμε. Ο Einstein ήθελε να επεκτήνει την ειδική σχετικότητα έτσι ώστε να συμπεριλάβει μέσα στην θεωρία και τα μη-αδρανειακά συστήματα και αυτό τον οδήγησε σε μία θεωρία για την βαρύτητα.

Ας σκεφτούμε δύο περιπτώσεις όπου έχουμε ένα σώμα μάζας m μέσα σε ένα διαστημόπλοιο. Στην πρώτη περίπτωση το διαστημόπλοιο είναι ακίνητο στην επιφάνεια της γης. Η μόνη δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι το βάρος του λόγω του βαρυτικού πεδίου της γης.

$$F \equiv w = mg \tag{3.1}$$

Στη δεύτερη περίπτωση, το διαστημόπλοιο βρίσκεται στο διάστημα μακριά από κάθε είδους βαρυτικό πεδίο που μπορεί να προκληθεί από κάποιον πλανήτη ή άλλου είδους αντικείμενο, αλλά επιταχύνεται με $a = g = 9,80\frac{m}{s^2}$. Στο σώμα m θα δράσει πάλι μία δύναμη

$$F = ma = mg = w \tag{3.2}$$

λόγω της επιτάχυνσης του διαστημοπλοίου. Επομένως η μάζα m που είναι ακίνητη στο διαστημόπλοιο, υπό την παρουσία βαρυτικού πεδίου, νιώθει την ίδια δύναμη με την μάζα που βρίσκεται σε ένα επιταχυνόμενο διαστημόπλοιο, χωρίς όμως την παρουσία βαρύτητας. Άρα υπάρχει κάποια συσχέτιση μεταξύ των επιταχυνόμενων συστημάτων αναφοράς και της βαρύτητας. Μπορούμε να δημιουργήσουμε ή να εξαλείψουμε την επίδραση της βαρύτητας διαλέγοντας ένα κατάλληλα επιταχυνόμενο σύστημα συντεταγμένων. Με βάση διάφορα, νοητικά ή όχι, πειράματα όπως το παραπάνω μπορεί κανείς να συμπεράνει πως *ένα επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς είναι ισοδύναμο, με ένα αδρανειακό σύστημα στο οποίο υπάρχει βαρυτικό* *πεδίο.* Η τελευταία πρόταση είναι γνωστή και ως **Αρχή της Ισοδυναμίας**. Μέσα από αυτή την αρχή ο Einstein οδηγήθηκε από τη μελέτη των μη αδρανειακών συστημάτων σε μία θεωρία βαρύτητας.

3.2 Τανυστές κ' Πολλαπλότητες

Για να μπορέσουμε να περιγράψουμε την έννοια του καμπυλωμένου χώρου χρειαζόμαστε ένα μαθηματικό εργαλείο που ονομάζεται πολλαπλότητα. Χωρίς να την ορίσουμε αυστηρά, αναφέρουμε πως μια $n-$ διάστατη πολλαπλότητα, έστω M, είναι ένας χώρος $n-$ διαστάσεων για κάθε σημείο του οποίου μπορούμε να ορίσουμε μια $n-$άδα πραγματικών αριθμών $x^1, x^2, \ldots, x^n$ που θα έχουν το ρόλο των συντεταγμένων, δηλαδή να υπάρχουν απεικονίσεις από την πολλαπλότητα στον $\mathbb{R}^n$. Η πολλαπλότητα δεν καλύπτεται από ένα σύστημα συντεταγμένων απαραίτητα αλλά ούτε και υπάρχει κάποιο προτιμητέο σύστημα. Στη πράξη έχουμε μία συλλογή συστημάτων που *εφάπτονται* το καθένα σε κάποιο σημείο της πολλαπλότητας και καλύπτουν μία περιοχή της. Στις περιοχές όπου υπάρχει αλληλεπικάλυψη από τα συστήματα, μπορούμε τις συντεταγμένες ενός σημείου ως προς το ένα σύστημα, x^μ με $\mu = 1 \ldots n$, να τις εκφράσουμε συναρτήσει των συντεταγμένων του ως προς το άλλο σύστημα $x^{\mu'}$ με εξισώσεις της μορφής

$$x^{\mu'} = x^{\mu'}(x^1, x^2, \ldots, x^n) \tag{3.3}$$

αλλά και τις αντίστροφές τους

$$x^{\mu} = x^{\mu}(x^{1'}, x^{2'}, \ldots, x^{n'}) \tag{3.4}$$

Τα διανύσματα στη Γ.Θ.Σ.(αυτών των εφαπτόμενων συστημάτων) ορίζονται γενικά ως $\mathbf{x} = x^\mu e_\mu$, όπου x^μ είναι οι συνιστώσες του διανύσματος και e_μ τα διανύσματα βάσης του συστήματος που έχουμε επιλέξει[1]. Τα διανύσματα αυτά ονομάζονται *ανταλλοίωτα* και οι συνιστώσες τους μετασχηματίζονται ως [4] [5]

$$x^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu}\, x^\nu = \Lambda^{\mu'}_{\nu} x^\nu \tag{3.5}$$

Όπου συμβολίζουμε με $\Lambda^{\mu'}_{\nu}$ ένα μετασχηματισμό της ομάδας Lorentz γιατί πρέπει να διατηρεί τα χωροχρόνικά μήκη. Οπότε πρέπει το συνολικό διάνυσμα να μείνει αναλλοίωτο. Για να ισχύει αυτό θα πρέπει να ισχύει ότι

$$\mathbf{x} = x^{\mu'} e_{\mu'} = x^\nu e_\nu = \Lambda^{\nu}_{\mu'} x^{\mu'} e_\nu \tag{3.6}$$

για κάθε τιμή των $x^{\mu'}$. Επομένως τα διανύσματα βάσης μετασχηματίζονται ως

$$e_{\mu'} = \Lambda^{\nu}_{\mu'} e_\nu$$

[1]Χρησιμοποιείται η σύμβαση άθροισης Einstein

δηλαδή αντίστροφα από τις συνιστώσες[2].

Ένα άλλο είδος διανυσμάτων είναι τα *συναλλοίωτα* διανύσματα που γράφονται $\mathsf{x} = x_\mu e^\mu$. Οι δείκτες είναι ανάποδα γιατί τα διανύσματα αυτά ανήκουν σε ένα διαφορετικό διανυσματικό χώρο (για τον οποίο έχουμε επιλέξει ως βάση την $\{e^\mu\}$) ο οποίος ονομάζεται *δυϊκός χώρος* και η βάση του σχετίζεται με αυτήν του αρχικού χώρου μέσω της σχέσης $e_\mu e^\nu = \delta^\nu_\mu$. Αυτά μετασχηματίζονται ως

$$x_{\mu'} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}}\, x_\nu = \Lambda^\nu_{\mu'} x_\nu \tag{3.7}$$

δηλαδή αντίστροφα από τα ανταλλοίωτα. Το εσωτερικό γινόμενο ενός συναλοίωτου και ενός ανταλλοίωτου διανύσματος θα δώσει ένα πραγματικό αριθμό λόγω του ιδιοτήτων ανάμεσα στον αρχικό διανυσματικό χώρο και τον δυϊκό του. Άρα αν συμβολίσουμε τον αρχικό μας χώρο ως V και το δυϊκό του ως V^* τότε μπορούμε να ερμηνεύσουμε το συναλλοίωτο διάνυσμα ως μία απεικόνιση από τον δυϊκό χώρο στους πραγματικούς δηλαδή

$$x_\mu \in V \Longleftrightarrow x_\mu\, : V^* \to \mathbb{R}$$

Για ένα τυχαίο $X \in V$ το οποίο δρα σε ένα στοιχείο $Y \in V^*$ μπορούμε να γράψουμε

$$X(Y) = X^\mu e_\mu Y_\nu e^\nu = X^\mu Y_\nu e_\mu e^\nu = X^\mu Y_\nu \delta^\nu_\mu = X^\mu Y_\mu \in \mathbb{R}$$

Αντίστοιχα, το ανταλλοίωτο το ερμηνεύουμε ως απεικόνιση από τον αρχικό χώρο στους πραγματικούς

$$x^\mu \in V^* \Longleftrightarrow x^\mu\, : V \to \mathbb{R}$$

Όπου

$$Y(X) = Y_\nu e^\nu X^\mu e_\mu = \ldots = X^\mu Y_\mu \in \mathbb{R}$$

και το εσωτερικό γινόμενο, έστω στον V, ως απεικόνιση που δέχεται σαν όρισμα δύο στοιχεία από τον V και τα απεικονίζει στο $\mathbb{R}$ [1]

$$(\cdot,\cdot)\, : V \times V \to \mathbb{R}$$

Αυτές οι τρεις μαθηματικές οντότητες ανήκουν σε μία πιο γενική κατηγορία γεωμετρικών αντικειμένων, τους τανυστές και λέμε ότι είναι αντίστοιχα, τανύστες τάξης (1,0), (0,1), και (0,2). Γενικότερα ένας τανυστής τάξης-(n,m) είναι μια γραμμική απεικόνιση

$$T : \underbrace{V^*{\times}V^*{\times}\ldots{\times}V^*}_{n} \times \underbrace{V{\times}V \ldots {\times}V}_{m} \to \mathbb{R} \tag{3.8}$$

Οπότε η τάξη του τανυστή καθορίζεται από το πόσα στοιχεία παίρνει ως είσοδο από τον κάθε χώρο.

---

[2] $\Lambda^\nu_{\mu'} = \left(\Lambda^{\mu'}_\nu\right)^{-1}$. Η λογική είναι ότι, έστω πως μετασχηματίζουμε την βάση με το $\Lambda^\nu_{\mu'}$, αλλά οι συνιστώσες δεν αλλάζουν οπότε το διάνυσμα ''ακολουθεί'' τη μετασχηματισμένη βάση και δεν μένει αναλλοίωτο. Επομένως πρέπει να δράσει ένας αντίστροφος μετασχηματισμός στις συνιστώσες έτσι ώστε το συνολικό διάνυσμα να ''γυρίσει πίσω'' και μείνει εν τέλει αναλλοίωτο.

3.3 Μετρική

Η εξίσωση (2.9) μπορεί να γραφτεί σε πιο γενική μορφή ως

$$
\begin{aligned}
ds^2 = dx^\mu dx_\mu &\equiv \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\
&= \begin{pmatrix} cdt & dx & dy & dz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cdt \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \qquad (3.9) \\
&= -\left(cdt\right)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

Όπου $g_{\mu\nu}$ είναι η μετρική του εκάστοτε χωροχρόνου και στη συγκεκριμένη περίπτωση

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (3.11)$$

Η μετρική γενικά είναι ένας πίνακας εσωτερικού γινομένου του χώρου μας και δείχνει τις σχέσεις μεταξύ των διανυσμάτων βάσης και ορίζει την έννοια του μέτρου στον διανυσματικό μας χώρο. Ουσιατικά χαρακτηρίζει τη στοιχειώδη απόσταση μεταξύ δύο σημείων. Η απλότητά της εδώ ωφείλεται στο γεγονός ότι έχουμε θεωρήσει επίπεδο χωροχρόνο. Είναι διαγώνια επειδή η βάση του χώρου είναι ορθογώνια.

Από τη σχέση(3.9) βλέπουμε πως η μετρική επηρεάζει την έκφραση της στοιχειώδους απόστασης μεταξύ των σημείων. Στον τρισδιάστατο Ευκλείδιο χώρο η απόσταση δυο σημείων δίνεται από

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \qquad (3.12)$$

Αν ονομάσουμε τις καρτεσιανές συντεταγμένες ως $x = x^1$,$y = x^2$ και $z = x^3$ τότε η παραπάνω σχέση γίνεται

$$ds^2 = \left(dx^1\right)^2 + \left(dx^2\right)^2 + \left(dx^3\right)^2 \qquad (3.13)$$

Στις N διαστάσεις θα είχαμε καρτεσιανές συντεταγμένες x^i με $i = 1, 2, \dots, N$. Σε κάποιο άλλο σύστημα αναφοράς, του οποίου οι συντεταγμένες συνδέονται με του αρχικού με μία σχέση της μορφής $x^{\mu'} = x^{\mu'}(x^1, x^2, \dots, x^N)$, η απόσταση προφανώς δεν θα αλλάξει αλλά θα περιγράφεται από μία διαφορετική σχέση. Η στοιχειώδης απόσταση dx^μ θα μεταβληθεί ως

$$dx^\mu = \sum_\alpha \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\alpha'}} dx^{\alpha'} \qquad (3.14)$$

οπότε το στοιχειώδες μήκος παραπάνω, στο νέο σύστημα θα πάρει μια πιο σύνθετη μορφή με όρους της μορφής $(dx^{i'})^2$ αλλά και $dx^{i'} dx^{j'}$.

Άρα η πιο γενική γραφή του στοιχειώδους μήκους θα είναι

$$ds^2 = g_{\mu'\nu'} dx^{\mu'} dx^{\nu'} = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \qquad (3.15)$$

Αντικαθιστώντας στην τελευταία σχέση τα dx^μ καταλήγουμε στο ότι

$$g_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\nu'}} g_{\alpha\beta} \tag{3.16}$$

Επειδή το $g_{\mu\nu}$ μετασχηματίζεται με αυτό τον τρόπο καταλαβαίνουμε πως είναι ένας συναλλοίωτος τανυστής δευτέρας τάξης.

Γενικά θέλουμε η ορίζουσα της μετρικής να είναι διάφορη του μηδενός[3] έτσι ώστε να υπάρχει και η αντίστροφη μετρική $g^{\mu\nu}$. Η σχέση που συνδέει τις συνιστώσες τους είναι

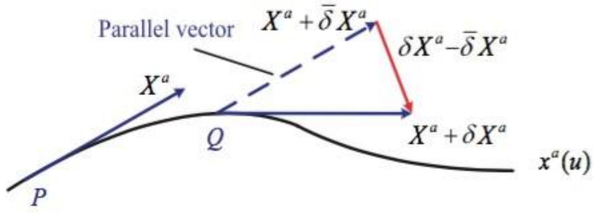
$$g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} = g^{\lambda\mu} g_{\lambda\sigma} = \delta^\mu_\sigma \tag{3.17}$$

Άλλη μια σημαντική ιδιότητα της μετρικής είναι ότι μας βοηθάει να απεικονίσουμε τα συναλλοίωτα διανύσματα σε ανταλλοίωτα και το αντίστροφο

$$g(\cdot, X) = g_{\mu\nu} X^\mu = X_\nu \tag{3.18}$$
$$g(Y, \cdot) = g^{\mu\nu} Y_\mu = Y^\nu \tag{3.19}$$

3.4 Συναλλοίωτη Παράγωγος

Ο τρόπος να ορίσουμε ένα διανυσματικό πεδίο είναι να αντιστοιχίσουμε σε κάθε σημείο του χώρου ένα διάνυσμα. Αντίστοιχα αν ορίσουμε ένα τανυστή σε κάθε σημείο θα έχουμε ορίσει ένα τανυστικό πεδίο. Γενικά η παραγώγηση ενός τανυστικού πεδίου δεν δίνει ένα νέο τανυστικό πεδίο και αυτό είναι πρόβλημα. Χρειάζεται να ορίσουμε μια ''νέα'' παράγωγο η οποία όταν εφαρμόζεται σε τανυστές να δίνει τανυστές. Ένας ακόμη λόγος που χρειαζόμαστε ένα νέο ορισμό της παραγώγου είναι πως πλέον ασχολούμαστε με καμπυλωμένους χώρους. Στον επίπεδο χώρο η παράγωγος μας δείχνει πως τείνει να μεταβληθεί το διάνυσμα από τό ένα σημείο στο άλλο. Σε ένα καμπύλο χώρο πρέπει η παράγωγος να έχει και την πληροφορία της αλλαγής του ίδιου του χώρου λόγω της καμπύλωσής του, πέρα από την αλλαγή του διανύσματος από μόνο του.



Ας θεωρήσουμε ένα συναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο X^α κατά μήκος της καμπύλης $x^\alpha(u)$ πάνω στην πολλαπλότητα, στο σημείο P όπου το u είναι ελεύθερη παράμετρος της καμπύλης.

[3] $g \equiv \det(g_{\mu\nu}) \neq 0$

Υπάρχει ένα επιπλέον διάνυσμα $X^\alpha(x^\alpha + \delta x^\alpha)$ ορισμένο στο σημείο $x^\alpha + \delta x^\alpha$(σημείο Q). Με βάση τα παραπάνω έχουμε

$$X^\alpha(x + \delta x) = X^\alpha(x) + \delta X^\alpha \tag{3.20}$$

Θα ορίσουμε την συναλλοίωτη παράγωγο μέσα από δύο βήματα [13]

- Κάνουμε παράλληλη μεταφορά του αρχικού διανύσματος X^α από το σημείο P στο σημείο στο τελικό σημείο Q και λαμβάνουμε το διάνυσμα $X^\alpha + \bar{\delta} X^\alpha$. Αυτή η μεταφορά είναι που κρύβει την πληροφορία για την καμπύλωση του χώρου.
- Βρίσκουμε τη διαφορά μεταξύ του μετατοπισμένου διανύσματος και του τελικού η οποία είναι
$$[X^\alpha + \delta X^\alpha] - \left[X^\alpha + \bar{\delta} X^\alpha\right] \tag{3.21}$$

Ορίζουμε τώρα την συναλλοίωτη παράγωγο μέσω του ορίου

$$\nabla_c X^\alpha = \lim_{\delta x^c \to 0} \frac{1}{\delta x^c} \left[\delta X^\alpha(x) - \bar{\delta} X^\alpha(x)\right] \tag{3.22}$$

Διαισθητικά λοιπόν, η συναλλοίωτη παράγωγος ενός τανυστή προς μια συγκεκριμένη κατεύθυνση, *μετράει το πόσο έχει αλλάξει ο τανυστής σε σχέση με αυτό που θα ήταν, αν του είχαμε κάνει παράλληλη μετατόπιση* [5]. Μπορεί να αποδειχθεί ότι η μεταβολή ενός συναλλοίωτου διανύσματος κατά την παράλληλη μεταφορά είναι

$$\bar{\delta} X^\alpha(x) = -\Gamma^\alpha_{bc}(x) X^b(x) \delta x^c \tag{3.23}$$

Όπου τα Γ^α_{bc} ονομάζονται *σύμβολα Christoffel* και ορίζονται μέσω της μετρικής

$$\Gamma^\alpha_{bc} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} \left(g_{\lambda b,c} + g_{\lambda c,b} - g_{bc,\lambda}\right) \tag{3.24}$$

Η σχέση (3.22) θα γίνει τώρα

$$\nabla_c X^\alpha = \lim_{\delta x^c \to 0} \frac{1}{\delta x^c} \left[\frac{\partial X^\alpha(x)}{\partial x^c} \delta x^c + \Gamma^\alpha_{bc}(x) X^b(x) \delta x^c\right] \tag{3.25}$$

Οπότε η συναλλοίωτη παράγωγος ισούται με

$$\nabla_c X^\alpha = \partial_c X^\alpha + \Gamma^\alpha_{bc} X^b \tag{3.26}$$

Ο πρώτος όρος ωφείλεται στην μεταβολή του του διανυσματικού πεδίου από το x^α στο $x^\alpha + \delta x^\alpha$, και ο δεύτερος όρος στην μεταβολή των διανυσμάτων βάσης Ενδεικτικά αναφέρουμε πως η συναλλοίωτη παράγωγος ενός συναλλοίωτου διανύσματος είναι

$$\nabla_c X_\alpha = \partial_c X_\alpha - \Gamma^b_{\alpha c} X^b \tag{3.27}$$

και η παράγωγος ενός βαθμωτού πεδίου ισούται με κλασσική παράγωγό του

$$\nabla_c \phi = \partial_c \phi \tag{3.28}$$

αυτό γιατί τα βαθμωτά πεδία δεν επηρεάζονται από την καμπυλότητα του χώρου, επειδή δεν έχουν διανυσματικό χαρακτήρα.

Στην γενικότερη περίπτωση όπου παραγωγίζουμε ένα τανυστή ανώτερης τάξης με συναλλοίωτους και ανταλλοίωτους δείκτες, για κάθε άνω δείκτη προστίθεται και ένας όρος και για κάθε κάτω δείκτη αφαιρείται όπως φαίνεται παρακάτω

$$\nabla_c T^{a\dots}_{b\dots} = \partial_c T^{a\dots}_{b\dots} + \Gamma^a_{dc} T^{d\dots}_{b\dots} + \dots - \Gamma^d_{bc} T^{a\dots}_{d\dots} - \dots \tag{3.29}$$

3.5 Καμπυλότητα

Στην προηγούμενη ενότητα είδαμε πως η παράλληλη μεταφορά ενός διανύσματος σε ένα καμπύλο χώρο προκαλεί μία μεταβολή στο διάνυσμα ανάλογη των συμβόλων Christoffel[4]. Μπορεί να δειχθεί πως η παράλληλη μεταφορά του διανύσματος κατά μήκος μιας κλειστής καμπύλης θα το μεταβάλλει κατά μια ποσότητα ανάλογη ενός τανυστή τετάρτης τάξης, του *τανυστή Riemann* [5]. Ο τανυστής Riemann αποτελεί θεμελιώδες μέγεθος της γεωμετρίας Riemann επειδή καθορίζει με μοναδικό τρόπο την καμπυλότητα ενός χώρου. Όταν ο τανυστής αυτός είναι μηδέν σημαίνει πως ο χώρος είναι επίπεδος [5]. Ορίζεται από τον μεταθέτη

$$R^\alpha_{bcd} X^b \equiv \left(\nabla_c \nabla_d - \nabla_d \nabla_c\right) X^\alpha \tag{3.30}$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις για την συναλλοίωτη παραγώγηση έχουμε

$$\begin{aligned}
\left(\nabla_c \nabla_d - \nabla_d \nabla_c\right) X^\alpha =& \nabla_c \left(\partial_d X^\alpha + \Gamma^\alpha_{db} X^b\right) - \nabla_d \left(\partial_c X^\alpha + \Gamma^\alpha_{cb} X^b\right) \\
=& \partial_c \left(\partial_d X^\alpha + \Gamma^\alpha_{db} X^b\right) - \Gamma \left(\partial_e X^\alpha + \Gamma^\alpha_{eb} X^b\right) + \Gamma^\alpha_{ce} \left(\partial_d X^e + \Gamma^e_{db} X^b\right) \\
& - \partial_d \left(\partial_c X^\alpha + \Gamma^\alpha_{cb} X^b\right) + \Gamma^e_{dc} \left(\partial_e X^\alpha + \Gamma^\alpha_{eb} X^b\right) - \Gamma^\alpha_{de} \left(\partial_c X^e + \Gamma^e_{cb} X^b\right) \\
=& \partial_c \partial_d X^\alpha + \Gamma^\alpha_{db} \partial_c X^b + \partial_c \Gamma^\alpha_{db} X^b - \Gamma^e_{cd} \partial_e X^\alpha - \Gamma^e_{cd} \Gamma^\alpha_{eb} X^b \\
& + \Gamma^\alpha_{ce} \partial_d X^e + \Gamma^\alpha_{ce} \Gamma^e_{db} X^b - \partial_d \partial_c X^\alpha - \Gamma^\alpha_{cb} \partial_d X^b - \partial_d \Gamma^\alpha_{cb} X^b \\
& + \Gamma^e_{dc} \partial_e X^\alpha + \Gamma^e_{dc} \Gamma^\alpha_{eb} X^b - \Gamma^\alpha_{de} \partial_c X^e - \Gamma^\alpha_{de} \Gamma^e_{cb} X^b
\end{aligned}$$

Αλλάζουμε τους βουβούς δείκτες από e σε b στον έκτο και τον δέκατοτρίτο όρο και χρησιμοποιώντας την συμμετρία των συμβόλων Christoffel[6] ως προς τους κάτω δείκτες, λαμβάνουμε τον τανυστή Riemann συναρτήσει των συμβόλων Christoffel.

$$R^\alpha_{bcd} = \partial_c \Gamma^\alpha_{bd} - \partial_d \Gamma^\alpha_{bc} + \Gamma^e_{bd} \Gamma^\alpha_{ec} - \Gamma^e_{bc} \Gamma^\alpha_{ed} \tag{3.31}$$

[4] Σχέση (3.23)

[5] Και αν μιλάμε για χωροχρόνο, είναι Minkowski

[6] Το αντισυμμετρικό μέρος των συμβόλων Christoffel, έστω $T^a_{bc} = \Gamma^a_{bc} - \Gamma^a_{cb}$ ονομάζεται τανυστής στρέψης(**torsion tensor**). Στα πλαίσια της εργασίας μένουμε σε χώρους για τους οποίους ισχύει ότι $\Gamma^a_{bc} = \Gamma^a_{cb}$.

Μέσα από τον τανυστή καμπυλότητας βγαίνουν δυο ακόμα σημαντικά μεγέθη για την γενική σχετικότητα, ο τανυστής *Ricci*, οπού είναι και αυτό ένα μέγεθος που περιγράφει την καμπυλότητα του χώρου, και το *Ricci scalar.*

$$R_{ab} = R^c_{acb} = g^{cd} R_{dacb} \qquad \textit{τανυστής Ricci} \tag{3.32}$$

$$R = g^{ab} R_{ab} \qquad \textit{Ricci scalar} \tag{3.33}$$

Αυτοί οι δύο τανυστές χρησιμοποιούνται για να οριστεί ο *τανυστής Einstein*

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R \tag{3.34}$$

3.6 Εξίσωση Einstein

Οι εξισώσεις της Γ.Θ.Σ. συνδέουν την καμπύλοτητα του χωροχρόνου με την κατανομή της ύλης ή ενέργειας. Για την μαθηματική διατύπωση της καμπυλότητας ήταν απαραίτητη η επέκταση της Ευκλείδιας γεωμετρίας σε Riemann-ια και ο ορισμός του τανυστή καμπυλότητας του Riemann. Για την πλήρη διατύπωση της θεωρίας γίνεται η εισαγωγή του τανυστή *ορμής-ενέργειας* οποίος είναι ένας τρόπος έκφρασης της κατανομής της υλο-ενέργειας. Τον συμβολίζουμε με $T_{\mu\nu}$. Τα βαρυτικά πεδία περιγράφονται μέσα απ'την γεωμετρία και κατά συνέπεια τη μετρική και τα μη-βαρυτικά πεδία από τον $T_{\mu\nu}$.

Αν δεν υπάρχει μάζα ή ενέργεια στο χώρο τριγύρω τότε θα είναι επίπεδος και θα μηδενίζεται ο τανυστής Riemann το οποίο με τη σειρά του σημαίνει ότι

$$R_{dacb} = 0 \rightarrow g^{cd} R_{dacb} = 0 \rightarrow R^c_{acb} = 0 \rightarrow R_{ab} = 0 \xrightarrow{\cdot g^{ab}} R = 0 \tag{3.35}$$

Άρα θα μηδενίζεται ολόκληρος ο τανυστής Einstein

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = 0 \tag{3.36}$$

Για παρουσία μάζας θα έχουμε $R_{dacb} \neq 0$ οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι

$$R_{ab} = X_{ab} \quad \text{και} \tag{3.37}$$

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = T_{ab} \tag{3.38}$$

Από την ταυτότητα Bianchi όμως, πρέπει να ισχύει ότι

$$\nabla_b \left(R^{ab} - \frac{1}{2} g^{ab} R \right) = 0 \rightarrow \nabla_b T^{ab} = 0 \tag{3.39}$$

Η εξίσωση (3.39) πρέπει να ισχύει *για κάθε τανυστή που προέρχεται από την παρουσία μάζας* διαφορετικά σημαίνει πως είναι λάθος η εξίσωση (3.38). Οι εξισώσεις Einstein γράφονται εν τέλει ως

$$G_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab} \tag{3.40}$$

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab} \tag{3.41}$$

Το αριστερό κομμάτι περιγράφει την καμπυλότητα και το δεξιά την παρουσία ύλης ή ενέργειας στο χώρο. Ο όρος $8\pi T_{ab}$ δίνει την πυκνότητα και την ρόη της ενέργειας και της ορμής που οφείλεται σε οτιδήποτε άλλο εκτός της βαρύτητας, δηλαδή στην παρουσία ύλης, μάζας, Η/Μ πεδίων κλπ. Οι συνιστώσες T^{a0} δίνουν την πυκνότητα και οι T^{ai} $(i = 1, 2, 3)$ την ροή.

Κεφάλαιο 4

Λύσεις εξισώσεων Einstein

4.1 Λύση Schwarzschild

Ψάχνουμε τη μετρική του χωροχρόνου , έξω από ένα στατικό, σφαιρικά συμμετρικό σώμα , ακτίνας R και μάζας M . Η μετρική θα καθορίσει το στοιχείο μήκους του χώρου και από εκεί, την γεωμετρία του. Ο *Karl Schwarzschild* ήταν ο πρώτος που βρήκε αυτή τη λύση για τις εξ.Einstein.

Η μετρική του επίπεδου χωροχρόνου σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι

$$ds^2 = \sum_\mu \sum_\nu g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \tag{4.1}$$

$$ds^2 = \begin{pmatrix} dt & dr & d\theta & d\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dt \\ dr \\ d\theta \\ d\phi \end{pmatrix}$$

Στον καμπυλωμένο χωροχρόνο ,η μετρική θα είναι διαφορετική και η γενικευμένη μορφή του στοιχείου μήκους θα είναι

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = U dt^2 - V dr^2 - W r^2 d\theta^2 - X r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \tag{4.2}$$

Ιδιότητες που πρέπει να ικανοποιεί η λύση :

- **Σφαιρική συμμετρία:** Όλοι οι συντελεστές U,V,W,X πρέπει να είναι ανεξάρτητοι από τα θ και ϕ. Επίσης, τα W και X πρέπει να είναι ίσα , έτσι ώστε να μην μπορούμε να ξεχωρίσουμε τις δυο γωνίες μεταξύ τους. Μπορούμε να θέσουμε και τα δύο ίσα με τη μονάδα , χωρίς βλάβη της γενικότητας.
- **Στατικότητα:** Όλοι οι συντελεστές U,V,W,X πρέπει να είναι ανεξάρτητοι του χρόνου και επομένως θα ισχύει ότι $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t} = 0, \forall \mu, \nu$

- **Κενό:** Αφού ψάχνουμε την καμπύλωση , έξω από το σώμα , σημαίνει πως βρισκόμαστε στο κενό , όπου δεν υπάρχει μάζα/ενέργεια άρα ο τανυστής ενέργειας-όρμης θα είναι μηδενικός δηλαδή $T_{\mu\nu} = 0, \forall \mu, \nu$

Με βάση τις παραπάνω ιδιότητες, το στοιχείο μήκους θα πάρει την γενική μορφή:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} = U(r)dt^2 - V(r)dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2 \tag{4.3}$$

Οπότε, οι συνιστώσες της μετρικής τώρα, είναι:

$$g_{00} = U(r)\, ,\, g_{11} = -V(r)\, ,\, g_{22} = -r^2\, ,\, g_{33} = -r^2\sin^2\theta$$

και η εξίσωση του *Einstein* θα γίνει :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} = 0 \tag{4.4}$$

Σε αυτό το σημείο, ξέρουμε την γενική μορφή που πρέπει να έχει το στοιχείο μήκους, δηλάδη η γεωμετρία του χωροχρόνου . Με βάση αυτή την γενική μορφή και τις παραδοχές που έγιναν στην αρχή , θα υπολογίσουμε πρώτα , τα σύμβολα Christoffel , στη συνέχεια τις συνιστώσες του τανυστή Ricci ($R_{\mu\nu}$) , μέσα από αυτόν το Ricci scalar (R) και τότε θα είμαστε σε θέση να λύσουμε την εξίσωση Einstein και να βρούμε την μορφή των $U(r), V(r)$. Τότε το στοιχείο μήκους θα έχει καθοριστεί πλήρως.

Σύμβολα Christoffel

Η εξίσωση των συμβόλων Christoffel συναρτήσει της μετρικής είναι:

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}\left(g_{\lambda\nu,\sigma} + g_{\lambda\sigma,\nu} - g_{\nu\sigma,\lambda}\right) \tag{4.5}$$

όπου χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $g_{\mu\lambda,\sigma} \equiv \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\sigma}}$

1. Για $\mu = 0$ έχουμε:

$$\Gamma^{0}_{\nu\sigma} = \frac{1}{2}g^{0\lambda}\left(g_{\lambda\nu,\sigma} + g_{\lambda\sigma,\nu} - g_{\nu\sigma,\lambda}\right) \overset{\lambda=0}{\equiv} \frac{1}{2}g^{00}\left(g_{0\nu,\sigma} + g_{0\sigma,\nu} - g_{\nu\sigma,0}\right) \tag{4.6}$$

   Στην εξίσωση (4.6) το λ θα είναι μηδέν για κάθε τιμή των ν και σ , επειδή στην μετρική μας , όλοι οι μή-διαγώνιοι όροι είναι μηδενικοί.

   - $\Gamma^{0}_{00} = \frac{1}{2}g^{00}\left(g_{00,0} + g_{00,0} - g_{00,0}\right) = 0$, επειδή λόγω στατικότητας κάθε χρονική παράγωγος είναι μηδέν.
   - $\Gamma^{0}_{0i} = \frac{1}{2}g^{00}\left(g_{00,i} + g_{0i,0} - g_{0i,0}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2}g^{00}g_{00,1} = \frac{1}{2U(r)}\frac{\partial U(r)}{\partial r} & \text{για } i = 1 \\ \frac{1}{2}g^{00}g_{00,2} = 0 & \text{για } i = 2 \\ \frac{1}{2}g^{00}g_{00,3} = 0 & \text{για } i = 3 \end{cases}$

   Οπότε $\Gamma^{0}_{0i} = \Gamma^{0}_{01} = \Gamma^{0}_{10} = \frac{1}{2U(r)}\frac{\partial U(r)}{\partial r}, \quad i = 1$

- $\Gamma^0_{ij} = \frac{1}{2} g^{00} \left(g_{0i,j} + g_{0j,i} - g_{ij,0} \right) = \frac{1}{2} g^{00} \left(g_{0i,j} + g_{0j,i} \right) = 0$

  Αφού για $i, j = 1, 2, 3$,όλα τα g_{0i}, g_{0j} είναι εκτός διαγωνίου , άρα μηδενικά. Επομένως , για $i, j = 1, 2, 3 : \Gamma^0_{ij} = 0$

2. Για $\mu = 1$ έχουμε:

$$\Gamma^1_{\nu\sigma} = \frac{1}{2} g^{1\lambda} \left(g_{\lambda\nu,\sigma} + g_{\lambda\sigma,\nu} - g_{\nu\sigma,\lambda} \right) \overset{\lambda=1}{=} \frac{1}{2} g^{11} \left(g_{1\nu,\sigma} + g_{1\sigma,\nu} - g_{\nu\sigma,1} \right) \tag{4.7}$$

Όπου το $\lambda = 1$ αυτή τη φορά , για τον ίδιο λόγο με προηγουμένως.

- $\Gamma^1_{00} = \frac{1}{2} g^{11} \left(g_{10,0} + g_{10,0} - g_{00,1} \right) = -\frac{1}{2} g^{11} g_{00,1} = -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{V(r)} \right) \partial_r U(r) = \frac{1}{2V(r)} \partial_r U(r)$

- $\Gamma^1_{0i} = \frac{1}{2} g^{11} \left(g_{10,i} + g_{1i,0} - g_{0i,1} \right) = \frac{1}{2} g^{11} g_{1i,0} = \frac{1}{2} g^{11} g_{11,0} =$
  $\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{U(r)} \right) \partial_t \left(-U(r) \right) = 0$

- $\Gamma^1_{ij(i \neq j)} = \frac{1}{2} g^{11} \left(g_{1i,j} + g_{1j,i} - g_{ij,1} \right)$

  $-\Gamma^1_{12} = \frac{1}{2} g^{11} \left(g_{11,2} + g_{12,1} - g_{12,1} \right) = \frac{1}{2} g^{11} g_{11,2} = 0$

  $-\Gamma^1_{13} = \frac{1}{2} g^{11} \left(g_{11,3} + g_{13,1} - g_{13,1} \right) = \frac{1}{2} g^{11} g_{11,3} = 0$

  $-\Gamma^1_{23} = \frac{1}{2} g^{11} \left(g_{12,3} + g_{13,2} - g_{23,1} \right) = 0$

- $\Gamma^1_{ij(i=j)} = \frac{1}{2} g^{11} \left(g_{1i,j} + g_{1j,i} - g_{ij,1} \right)$

  $-\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2} g^{11} \left(g_{11,1} + g_{11,1} - g_{11,1} \right) = \frac{1}{2} g^{11} g_{11,1} = -\frac{1}{2V(r)} \partial_r \left(-V(r) \right) = \frac{1}{2V(r)} \partial_r V(r)$

  $-\Gamma^1_{22} = \frac{1}{2} g^{11} \left(g_{12,2} + g_{12,2} - g_{22,1} \right) = -\frac{1}{2} g^{11} g_{22,1} = \frac{1}{2V(r)} \partial_r \left(-r^2 \right) = -\frac{r}{V(r)}$

  $-\Gamma^1_{33} = \frac{1}{2} g^{11} \left(g_{13,3} + g_{13,3} - g_{33,1} \right) = -\frac{1}{2} g^{11} g_{33,1} = \frac{1}{2V(r)} \partial_r \left(-r^2 \sin^2 \theta \right) = -\frac{r \sin^2 \theta}{V(r)}$

3. Για $\mu = 2$ έχουμε:

$$\Gamma^2_{\nu\sigma} = \frac{1}{2} g^{2\lambda} \left(g_{\lambda\nu,\sigma} + g_{\lambda\sigma,\nu} - g_{\nu\sigma,\lambda} \right) \overset{\lambda=2}{=} \frac{1}{2} g^{22} \left(g_{2\nu,\sigma} + g_{2\sigma,\nu} - g_{\nu\sigma,2} \right) \tag{4.8}$$

- $\Gamma^2_{00} = \frac{1}{2} g^{22} \left(g_{20,0} + g_{20,0} - g_{00,2} \right) = -\frac{1}{2} g^{22} g_{00,2} = \frac{1}{2V(r)} \partial_\theta U(r) = 0$

- $\Gamma^2_{0i} = \frac{1}{2} g^{22} \left(g_{20,i} + g_{2i,0} - g_{0i,2} \right) = \frac{1}{2} g^{22} g_{2i,0} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2} \right) \partial_t \left(-r^2 \right) = 0$

- $\Gamma^2_{ij(i \neq j)} = \frac{1}{2} g^{22} \left(g_{2i,j} + g_{2j,i} - g_{ij,2} \right)$

- $\Gamma^2_{12} = \frac{1}{2}g^{22}\left(g_{21,2} + g_{22,1} - g_{12,2}\right) = \frac{1}{2}g^{22}g_{22,1} = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{r^2}\right)\partial_r\left(-r^2\right) = \frac{1}{r}$

- $\Gamma^2_{13} = \frac{1}{2}g^{22}\left(g_{21,3} + g_{23,1} - g_{13,2}\right) = 0$

- $\Gamma^2_{23} = \frac{1}{2}g^{22}\left(g_{22,3} + g_{23,2} - g_{23,2}\right) = \frac{1}{2}g^{22}g_{22,3} = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{r^2}\right)\partial_\phi\left(-r^2\right) = 0$

- $\Gamma^2_{ij(i=j)} = \frac{1}{2}g^{22}\left(g_{2i,i} + g_{2i,i} - g_{ii,2}\right)$

- $\Gamma^2_{11} = \frac{1}{2}g^{22}\left(g_{21,1} + g_{21,1} - g_{11,2}\right) = \frac{1}{2}g^{22}\left(g_{11,2}\right) = 0$

- $\Gamma^2_{22} = \frac{1}{2}g^{22}\left(g_{22,2} + g_{22,2} - g_{22,2}\right) = 0$

- $\Gamma^2_{33} = \frac{1}{2}g^{22}\left(g_{23,3} + g_{23,3} - g_{33,2}\right) = -\frac{1}{2}g^{22}g_{33,2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{r^2}\right)\partial_\theta\left(-r^2\sin^2\theta\right) = -\sin\theta\cos\theta$

4. Για $\mu = 3$ έχουμε:

$$\Gamma^3_{\nu\sigma} = \frac{1}{2}g^{3\lambda}\left(g_{\lambda\nu,\sigma} + g_{\lambda\sigma,\nu} - g_{\nu\sigma,\lambda}\right) \overset{\lambda=3}{=} \frac{1}{2}g^{33}\left(g_{3\nu,\sigma} + g_{3\sigma,\nu} - g_{\nu\sigma,3}\right) \tag{4.9}$$

- $\Gamma^3_{00} = \frac{1}{2}g^{33}\left(g_{30,0} + g_{30,0} - g_{00,3}\right) = -\frac{1}{2}g^{33}g_{00,3} = -\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{r^2\sin^2\theta}\right)\frac{\partial U(r)}{\partial\phi} = 0$

- $\Gamma^3_{0i} = \frac{1}{2}g^{33}\left(g_{30,i} + g_{3i,0} - g_{0i,3}\right) = -\frac{1}{2}g^{33}g_{0i,3} = -\frac{1}{2}g^{33}g_{00,3} = 0$

- $\Gamma^3_{ij(i\neq j)} = \frac{1}{2}g^{33}\left(g_{3i,j} + g_{3j,i} - g_{ij,3}\right) = \frac{1}{2}g^{33}\left(g_{3i,j} + g_{3j,i}\right)$

- $\Gamma^3_{12} = \frac{1}{2}g^{33}\left(g_{31,2} + g_{32,1} - g_{12,3}\right) = 0$

- $\Gamma^3_{13} = \frac{1}{2}g^{33}\left(g_{31,3} + g_{33,1} - g_{13,3}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\right)\partial_r\left(-r^2\sin^2\theta\right) = \frac{1}{r}$

- $\Gamma^3_{23} = \frac{1}{2}g^{33}\left(g_{32,3} + g_{33,2} - g_{23,3}\right) = \frac{1}{2}g^{33}g_{33,2} = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{r^2\sin^2\theta}\right)\partial_\theta\left(-r^2\sin^2\theta\right)$
  $= \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

- $\Gamma^3_{ij(i=j)} = \frac{1}{2}g^{33}\left(g_{3i,i} + g_{3i,i} - g_{ii,3}\right)$

- $\Gamma^3_{11} = \frac{1}{2}g^{33}\left(g_{31,1} + g_{31,1} - g_{11,3}\right) = 0$

- $\Gamma^3_{22} = \frac{1}{2}g^{33}\left(g_{32,2} + g_{32,2} - g_{22,3}\right) = 0$

$$-\Gamma^3_{33} = \frac{1}{2}g^{33}\left(g_{33,3}+g_{33,3}-g_{33,3}\right) = \frac{1}{2}g^{33}g_{33,3} = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{r^2\sin^2\theta}\right)\partial_\phi\left(\frac{-1}{r^2\sin^2\theta}\right)$$
$$= 0$$

Σύνοψη αποτελεσμάτων , συμβόλων Christoffel :

$\Gamma^0_{\nu\sigma}$: $\quad \Gamma^0_{01} = \Gamma^0_{10} = \frac{1}{2U(r)}\frac{\partial U(r)}{\partial r}$

$\Gamma^1_{\nu\sigma}$: $\quad \Gamma^1_{00} = \frac{1}{2V(r)}\partial_r U(r) \quad \Gamma^1_{11} = \frac{1}{2V(r)}\partial_r V(r) \quad \Gamma^1_{22} = -\frac{r}{V(r)} \quad \Gamma^1_{33} = -\frac{r\sin^2\theta}{V(r)}$

$\Gamma^2_{\nu\sigma}$: $\quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r} \quad \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta$

$\Gamma^3_{\nu\sigma}$: $\quad \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r} \quad \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta$

Τανυστής Ricci

Τώρα που υπολογίσαμε όλα τα σύμβολα Christoffel ,μπορούμε να βρούμε τις συνιστώσες του τανυστή Ricci .

Καμπυλότητα Riemann: $\quad R^\beta_{\nu\rho\sigma} \;=\; \Gamma^\beta_{\nu\sigma,\rho} - \Gamma^\beta_{\nu\rho,\sigma} + \Gamma^\alpha_{\nu\sigma}\Gamma^\beta_{\alpha\rho} - \Gamma^\alpha_{\nu\rho}\Gamma^\beta_{\alpha\sigma}$

Τανυστής Ricci: $\quad R_{\mu\nu} \;\equiv\; R^\beta_{\mu\beta\nu} = -R^\beta_{\mu\nu\beta} = -\left\{\Gamma^\beta_{\mu\nu,\beta} - \Gamma^\beta_{\mu\beta,\nu} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Gamma^\beta_{\alpha\beta} - \Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\alpha\nu}\right\}$

Παρακάτω , υπολογίζουμε τα $R^\beta_{\mu\nu\beta}$ και όχι τα $R^\beta_{\mu\beta\nu}$ όπως θα έπρεπε κανονικά. Δηλαδή, όλα τα $R_{\mu\nu}$ που υπολογίζουμε είναι με αντίθετα τα πρόσημα απ' ότι θα έπρεπε, αλλά στην ***συγκεκριμένη*** περίπτωση ***δεν*** μας πειράζει. Επειδή η εξίσωση *einstein* είναι $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0$, υπολογίζοντας τα $-R_{\mu\nu}$ θα βρούμε και το Ricci scalar με αντίθετο πρόσημο, όποτε όλη η εξίσωση θα γίνει $-R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0$ που προφανώς δεν μας πειράζει .

Πάμε να βρούμε πρώτα τα μή διαγώνια στοιχεία

1. $R_{\mu\nu} \;\forall\; \mu \neq \nu$:

- $$R_{\mu\nu} = \Gamma^\beta_{\mu\nu,\beta} - \Gamma^\beta_{\mu\beta,\nu} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Gamma^\beta_{\alpha\beta} - \Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\alpha\nu}$$

$$\begin{aligned} =&\Gamma^0_{\mu\nu,0} - \Gamma^0_{\mu0,\nu} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Gamma^0_{\alpha0} - \Gamma^\alpha_{\mu0}\Gamma^0_{\alpha\nu} + \\ &\Gamma^1_{\mu\nu,1} - \Gamma^1_{\mu1,\nu} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Gamma^1_{\alpha1} - \Gamma^\alpha_{\mu1}\Gamma^1_{\alpha\nu} + \\ &\Gamma^2_{\mu\nu,2} - \Gamma^2_{\mu2,\nu} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Gamma^2_{\alpha2} - \Gamma^\alpha_{\mu2}\Gamma^2_{\alpha\nu} + \\ &\Gamma^3_{\mu\nu,3} - \Gamma^3_{\mu3,\nu} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Gamma^3_{\alpha3} - \Gamma^\alpha_{\mu3}\Gamma^3_{\alpha\nu} \end{aligned}$$

$\underline{\mu = 0\,,\, \nu = i = 1,2,3:}$

$$\begin{aligned}
\bullet\ R_{0i} =& \Gamma^{\beta}_{0i,\beta} - \Gamma^{\beta}_{0\beta,i} + \Gamma^{\alpha}_{0i}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\alpha}_{0\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha i} \\
\\
=& \Gamma^{0}_{0i,0} - \Gamma^{0}_{00,i} + \Gamma^{\alpha}_{0i}\Gamma^{0}_{\alpha 0} - \Gamma^{\alpha}_{00}\Gamma^{0}_{\alpha i} + \\
& \Gamma^{1}_{0i,1} - \Gamma^{1}_{01,i} + \Gamma^{\alpha}_{0i}\Gamma^{1}_{\alpha 1} - \Gamma^{\alpha}_{01}\Gamma^{1}_{\alpha i} + \\
& \Gamma^{2}_{0i,2} - \Gamma^{2}_{02,i} + \Gamma^{\alpha}_{0i}\Gamma^{2}_{\alpha 2} - \Gamma^{\alpha}_{02}\Gamma^{2}_{\alpha i} + \\
& \Gamma^{3}_{0i,3} - \Gamma^{3}_{03,i} + \Gamma^{\alpha}_{0i}\Gamma^{3}_{\alpha 3} - \Gamma^{\alpha}_{03}\Gamma^{3}_{\alpha i} \\
\\
=& 0 - 0 + 0 - \Gamma^{\alpha}_{00}\Gamma^{0}_{\alpha i} + \\
& 0 - 0 + 0 - 0 + \\
& 0 - 0 + 0 - 0 + \\
& 0 - 0 + 0 - 0 \\
=& 0
\end{aligned}$$

$\underline{i \neq j\,,\, i,j = 1,2,3:}$

$$\begin{aligned}
\bullet\ R_{ij} =& \Gamma^{\beta}_{ij,\beta} - \Gamma^{\beta}_{i\beta,j} + \Gamma^{\alpha}_{ij}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\alpha}_{i\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha j} \\
\\
=& \Gamma^{0}_{ij,0} - \Gamma^{0}_{i0,j} + \Gamma^{\alpha}_{ij}\Gamma^{0}_{\alpha 0} - \Gamma^{\alpha}_{i0}\Gamma^{0}_{\alpha j} + \\
& \Gamma^{1}_{ij,1} - \Gamma^{1}_{i1,j} + \Gamma^{\alpha}_{ij}\Gamma^{1}_{\alpha 1} - \Gamma^{\alpha}_{i1}\Gamma^{1}_{\alpha j} + \\
& \Gamma^{2}_{ij,2} - \Gamma^{2}_{i2,j} + \Gamma^{\alpha}_{ij}\Gamma^{2}_{\alpha 2} - \Gamma^{\alpha}_{i2}\Gamma^{2}_{\alpha j} + \\
& \Gamma^{3}_{ij,3} - \Gamma^{3}_{i3,j} + \Gamma^{\alpha}_{ij}\Gamma^{3}_{\alpha 3} - \Gamma^{\alpha}_{i3}\Gamma^{3}_{\alpha j} \\
\\
=& 0 - 0 + 0 - 0 + \\
& 0 - 0 + 0 - 0 + \\
& \Gamma^{2}_{12,2} - 0 + 0 - 0 + \\
& 0 - 0 + \Gamma^{\alpha}_{ij}\Gamma^{3}_{\alpha 3} - \Gamma^{\alpha}_{i3}\Gamma^{3}_{\alpha j} \\
=& \sum_{\alpha} \Gamma^{\alpha}_{ij}\Gamma^{3}_{\alpha 3} - \Gamma^{\alpha}_{i3}\Gamma^{3}_{\alpha j} \\
=& \Gamma^{2}_{ij}\Gamma^{3}_{23} - \Gamma^{3}_{i3}\Gamma^{3}_{3j}
\end{aligned}$$

Τα παραπάνω Christoffel υπάρχουν μόνο για $i = 1, j = 2$ ή $i = 2, j = 1$. Ο τανυστής Ricci όμως, είναι συμμετρικός , επομένως , όποιο ζεύγος τιμών και να διαλέξουμε , θα δώσει ίδιο αποτέλεσμα.

$$R_{12} = \Gamma^{3}_{13}\Gamma^{3}_{32} - \Gamma^{2}_{12}\Gamma^{3}_{23} = \frac{1}{r}\frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{1}{r}\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = 0 = R_{21}$$

Οπότε $R_{ij(i\neq j)} = 0 \quad \forall \quad i,j = 1,2,3$

2. $R_{\mu\nu} \;\; \forall \;\; \mu = \nu :$

$\underline{\mu = \nu = 0 :}$

$$\bullet\; R_{00} = \Gamma^{\beta}_{00,\beta} - \Gamma^{\beta}_{0\beta,0} + \Gamma^{\alpha}_{00}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\alpha}_{0\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha 0}$$

$$\begin{aligned}
=&\Gamma^{0}_{00,0} - \Gamma^{0}_{00,0} + \Gamma^{\alpha}_{00}\Gamma^{0}_{\alpha 0} - \Gamma^{\alpha}_{00}\Gamma^{0}_{\alpha 0} + \\
&\Gamma^{1}_{00,1} - \Gamma^{1}_{01,0} + \Gamma^{\alpha}_{00}\Gamma^{1}_{\alpha 1} - \Gamma^{\alpha}_{01}\Gamma^{1}_{\alpha 0} + \\
&\Gamma^{2}_{00,2} - \Gamma^{2}_{02,0} + \Gamma^{\alpha}_{00}\Gamma^{2}_{\alpha 2} - \Gamma^{\alpha}_{02}\Gamma^{2}_{\alpha 0} + \\
&\Gamma^{3}_{00,3} - \Gamma^{3}_{03,0} + \Gamma^{\alpha}_{00}\Gamma^{3}_{\alpha 3} - \Gamma^{\alpha}_{03}\Gamma^{3}_{\alpha 0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
=&0 + \Gamma^{1}_{00,1} - \Gamma^{\alpha}_{01}\Gamma^{1}_{\alpha 0} + \Gamma^{\alpha}_{00}\Gamma^{1}_{\alpha 1} + \\
&0 - 0 + \Gamma^{\alpha}_{00}\Gamma^{2}_{\alpha 2} - 0 + \\
&0 - 0 + \Gamma^{\alpha}_{00}\Gamma^{3}_{\alpha 3} - 0 \\
=&\Gamma^{1}_{00,1} - \Gamma^{0}_{01}\Gamma^{1}_{00} + \Gamma^{1}_{00}\Gamma^{1}_{11} + \Gamma^{1}_{00}\Gamma^{2}_{12} + \Gamma^{1}_{00}\Gamma^{3}_{13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
=&\partial_r\left(\frac{1}{2V(r)}\partial_r U(r)\right) - \left(\frac{1}{2U}\partial_r U\right)\left(\frac{1}{2V}\partial_r U\right) + \left(\frac{1}{2V}\partial_r U\right)\left(\frac{1}{2V}\partial_r V\right) \\
&+ \left(\frac{1}{2V}\partial_r U\right)\frac{1}{r} + \left(\frac{1}{2V}\partial_r U\right)\frac{1}{r} \\
=&\frac{U''}{2V} - \frac{U'V'}{2V^2} - \frac{U'}{2V}\left(\frac{U'}{2U} + \frac{V'}{2V}\right) + \frac{U'}{rV} = \frac{U''}{2V} - \frac{U'V'}{2V^2} - \frac{(U')^2}{4UV} + \frac{U'V'}{4V^2} + \frac{U'}{rV}
\end{aligned}$$

Άρα $\quad R_{00} = \frac{U''}{2V} - \frac{U'V'}{2V^2} - \frac{(U')^2}{4UV} + \frac{U'V'}{4V^2} + \frac{U'}{rV}$ όπου $U' = \partial_r U$

$\underline{\mu = \nu = 1 :}$

$$\bullet\; R_{11} = \Gamma^{\beta}_{11,\beta} - \Gamma^{\beta}_{1\beta,1} + \Gamma^{\alpha}_{11}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\alpha}_{1\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha 1}$$

$$\begin{aligned}
=&\Gamma^{0}_{11,0} - \Gamma^{0}_{10,1} + \Gamma^{\alpha}_{11}\Gamma^{0}_{\alpha 0} - \Gamma^{\alpha}_{10}\Gamma^{0}_{\alpha 1} + \\
&\Gamma^{1}_{11,1} - \Gamma^{1}_{11,1} + \Gamma^{\alpha}_{11}\Gamma^{1}_{\alpha 1} - \Gamma^{\alpha}_{11}\Gamma^{1}_{\alpha 1} + \\
&\Gamma^{2}_{11,2} - \Gamma^{2}_{12,1} + \Gamma^{\alpha}_{11}\Gamma^{2}_{\alpha 2} - \Gamma^{\alpha}_{12}\Gamma^{2}_{\alpha 1} + \\
&\Gamma^{3}_{11,3} - \Gamma^{3}_{13,1} + \Gamma^{\alpha}_{11}\Gamma^{3}_{\alpha 3} - \Gamma^{\alpha}_{13}\Gamma^{3}_{\alpha 1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
=&0-\Gamma^{0}_{10,1}+\Gamma^{\alpha}_{11}\Gamma^{0}_{\alpha 0}-\Gamma^{\alpha}_{10}\Gamma^{0}_{\alpha 1}+\\
&0-\Gamma^{2}_{12,1}+\Gamma^{\alpha}_{11}\Gamma^{2}_{\alpha 2}-\Gamma^{\alpha}_{12}\Gamma^{2}_{\alpha 1}+\\
&0-\Gamma^{3}_{13,1}+\Gamma^{\alpha}_{11}\Gamma^{3}_{13}-\Gamma^{\alpha}_{13}\Gamma^{3}_{\alpha 1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=&-\partial_r\left(\frac{1}{2U}\partial_r U\right)-\left(\frac{1}{2U}\partial_r U\right)^2+\left(\frac{1}{2V}\partial_r V\right)\left(\frac{1}{2U}\partial_r U\right)-\partial_r\left(\frac{1}{r}\right)\\
&-\left(\frac{1}{r}\right)^2+\left(\frac{1}{2V}\partial_r V\right)\frac{1}{r}-\partial_r\left(\frac{1}{r}\right)-\left(\frac{1}{r}\right)^2+\left(\frac{1}{2V}\partial_r V\right)\frac{1}{r}\\
=&-\frac{U''}{2U}+\frac{(U')^2}{4U^2}+\frac{U'V'}{4UV}+\frac{V'}{rV}
\end{aligned}
$$

Όποτε $R_{11}=-\frac{U''}{2U}+\frac{(U')^2}{4U^2}+\frac{U'V'}{4UV}+\frac{V'}{rV}$

$\underline{\mu=\nu=2:}$

- $R_{22}=\Gamma^{\beta}_{22,\beta}-\Gamma^{\beta}_{2\beta,2}+\Gamma^{\alpha}_{22}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}-\Gamma^{\alpha}_{2\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha 2}$

$$
\begin{aligned}
=&\Gamma^{0}_{22,0}-\Gamma^{0}_{20,2}+\Gamma^{\alpha}_{22}\Gamma^{0}_{\alpha 0}-\Gamma^{\alpha}_{20}\Gamma^{0}_{\alpha 2}+\\
&\Gamma^{1}_{22,1}-\Gamma^{1}_{21,2}+\Gamma^{\alpha}_{22}\Gamma^{1}_{\alpha 1}-\Gamma^{\alpha}_{21}\Gamma^{1}_{\alpha 2}+\\
&\Gamma^{2}_{22,2}-\Gamma^{2}_{22,2}+\Gamma^{\alpha}_{22}\Gamma^{2}_{\alpha 2}-\Gamma^{\alpha}_{22}\Gamma^{2}_{\alpha 2}+\\
&\Gamma^{3}_{22,3}-\Gamma^{3}_{23,2}+\Gamma^{\alpha}_{22}\Gamma^{3}_{\alpha 3}-\Gamma^{\alpha}_{23}\Gamma^{3}_{\alpha 2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=&0-0+\Gamma^{\alpha}_{22}\Gamma^{0}_{\alpha 0}-0+\\
&\Gamma^{1}_{22,1}-0+\Gamma^{\alpha}_{22}\Gamma^{1}_{\alpha 1}-\Gamma^{\alpha}_{21}\Gamma^{1}_{\alpha 2}+\\
&0-0+\Gamma^{\alpha}_{22}\Gamma^{2}_{\alpha 2}-\Gamma^{\alpha}_{22}\Gamma^{2}_{\alpha 2}+\\
&0-\Gamma^{3}_{23,2}+\Gamma^{\alpha}_{22}\Gamma^{3}_{\alpha 3}-\Gamma^{\alpha}_{23}\Gamma^{3}_{\alpha 2}\\
=&0-0+\Gamma^{1}_{22}\Gamma^{0}_{10}-0\\
&\Gamma^{1}_{22,1}-0+\Gamma^{1}_{22}\Gamma^{1}_{11}-\Gamma^{2}_{21}\Gamma^{1}_{22}+\\
&0-0+\Gamma^{1}_{22}\Gamma^{2}_{12}-\Gamma^{1}_{22}\Gamma^{2}_{12}+\\
&0-\Gamma^{3}_{23,2}+\Gamma^{1}_{22}\Gamma^{3}_{13}-\Gamma^{3}_{23}\Gamma^{3}_{32}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \Gamma^1_{22}\Gamma^0_{10} + \Gamma^1_{22,1} - \Gamma^2_{21}\Gamma^1_{22} + \Gamma^1_{22}\Gamma^1_{11} - \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{12} + \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{12} - \Gamma^3_{23,2} - \Gamma^3_{23}\Gamma^3_{32} + \Gamma^1_{22}\Gamma^3_{13} \\
&= \left(\frac{-r}{V}\right)\left(\frac{U'}{2V}\right) + \partial_r\left(\frac{-r}{V}\right) - \left(\frac{-r}{V}\right)\frac{1}{r} + \left(\frac{-r}{V}\right)\left(\frac{V'}{2V}\right) - \left(\frac{-r}{V}\right)\frac{1}{r} + \left(\frac{-r}{V}\right)\frac{1}{r} \\
&\quad - \partial_\theta\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) - \left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 + \left(\frac{V'}{2V}\right)\frac{1}{r} \\
&= -\frac{rU'}{2UV} - \frac{1}{V} + \frac{rV'}{2V^2} + 1
\end{aligned}
$$

Άρα βρήκαμε ότι $R_{22} = -\frac{rU'}{2UV} - \frac{1}{V} + \frac{rV'}{2V^2} + 1$

$\underline{\mu = \nu = 3:}$

- $R_{33} = \Gamma^\beta_{33,\beta} - \Gamma^\beta_{3\beta,3} + \Gamma^\alpha_{33}\Gamma^\beta_{\alpha\beta} - \Gamma^\alpha_{3\beta}\Gamma^\beta_{\alpha 3}$

$$
\begin{aligned}
=&\Gamma^0_{33,0} - \Gamma^0_{30,3} + \Gamma^\alpha_{33}\Gamma^0_{\alpha 0} - \Gamma^\alpha_{30}\Gamma^0_{\alpha 3} + \\
&\Gamma^1_{33,1} - \Gamma^1_{31,3} + \Gamma^\alpha_{33}\Gamma^1_{\alpha 1} - \Gamma^\alpha_{31}\Gamma^1_{\alpha 3} + \\
&\Gamma^2_{33,2} - \Gamma^2_{32,3} + \Gamma^\alpha_{33}\Gamma^2_{\alpha 2} - \Gamma^\alpha_{32}\Gamma^2_{\alpha 3} + \\
&\Gamma^3_{33,3} - \Gamma^3_{33,3} + \Gamma^\alpha_{33}\Gamma^3_{\alpha 3} - \Gamma^\alpha_{33}\Gamma^3_{\alpha 3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=&0 - 0 + \Gamma^\alpha_{33}\Gamma^0_{\alpha 0} - 0 + \\
&\Gamma^1_{33,1} - 0 + \Gamma^\alpha_{33}\Gamma^1_{\alpha 1} - \Gamma^\alpha_{31}\Gamma^1_{\alpha 3} + \\
&\Gamma^2_{33,2} - 0 + \Gamma^\alpha_{33}\Gamma^3_{\alpha 3} - \Gamma^\alpha_{32}\Gamma^2_{\alpha 3} \\
=&0 - 0 + \Gamma^1_{33}\Gamma^0_{10} - 0 + \\
&\Gamma^1_{33,1} - 0 + \Gamma^1_{33}\Gamma^1_{11} - \Gamma^3_{31}\Gamma^1_{33} + \\
&\Gamma^2_{33,2} - 0 + \Gamma^1_{33}\Gamma^3_{13} - \Gamma^3_{32}\Gamma^2_{33}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \Gamma^1_{33}\Gamma^0_{10} + \Gamma^1_{33,1} - \Gamma^3_{31}\Gamma^1_{33} + \Gamma^1_{33}\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{33,2} - \Gamma^3_{32}\Gamma^2_{33} + \Gamma^1_{33}\Gamma^3_{13} \\
&= \left(\frac{r\sin^2\theta}{V}\right)\left(\frac{U'}{2U}\right) + \partial_r\left(\frac{-r\sin^2\theta}{V}\right) - \frac{1}{r}\left(\frac{-r\sin^2\theta}{V}\right) + \left(\frac{-r\sin^2\theta}{V}\right)\left(\frac{V'}{2V}\right) \\
&\quad + \partial_\theta\left(-\sin\theta\cos\theta\right) + \left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)\left(-\sin\theta\cos\theta\right) + \left(\frac{-r\sin^2\theta}{V}\right)\frac{1}{r} \\
&= \left\{-\frac{rU'}{2UV} - \frac{1}{V} + \frac{rV'}{2V^2} + 1\right\}\sin^2\theta
\end{aligned}
$$

Δηλαδή , $R_{33} = \left\{-\frac{rU'}{2UV} - \frac{1}{V} + \frac{rV'}{2V^2} + 1\right\}\sin^2\theta = R_{22}\sin^2\theta$

Σύνοψη αποτελεσμάτων , τανυστή Ricci :

$$R_{00} = \frac{U''}{2V} - \frac{U'V'}{2V^2} - \frac{(U')^2}{4UV} + \frac{U'V'}{4V^2} + \frac{U'}{rV}$$
$$R_{11} = -\frac{U''}{2U} + \frac{(U')^2}{4U^2} + \frac{U'V'}{4UV} + \frac{V'}{rV}$$
$$R_{22} = -\frac{rU'}{2UV} - \frac{1}{V} + \frac{rV'}{2V^2} + 1$$
$$R_{33} = \left\{-\frac{rU'}{2UV} - \frac{1}{V} + \frac{rV'}{2V^2} + 1\right\}\sin^2\theta = R_{22}\sin^2\theta$$

Ricci Scalar

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = R^{\mu}_{\mu} = R^{\nu}_{\nu} \tag{4.10}$$

Αθροίζουμε στα μ και ν

$$\begin{aligned}
R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} =& g^{00}R_{00} + g^{01}R_{01} + g^{02}R_{02} + \ldots + g^{10}R_{10} + g^{11}R_{11} + \ldots + g^{32}R_{32} + g^{33}R_{33} \\
=& g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33} \\
=& \frac{1}{U}\left(\frac{U''}{2V} - \frac{U'V'}{2V^2} - \frac{(U')^2}{4UV} + \frac{U'V'}{4V^2} + \frac{U'}{rV}\right) - \frac{1}{V}\left(-\frac{U''}{2U} + \frac{(U')^2}{4U^2} + \frac{U'V'}{4UV} + \frac{V'}{rV}\right) \\
& - \frac{1}{r^2}\left(-\frac{rU'}{2UV} - \frac{1}{V} + \frac{rV'}{2V^2} + 1\right) - \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(-\frac{rU'}{2UV} - \frac{1}{V} + \frac{rV'}{2V^2} + 1\right)\sin^2\theta \\
=& \frac{U''}{2UV} - \frac{U'V'}{4UV^2} - \frac{(U')^2}{4U^2V} + \frac{U'}{rUV} + \frac{U''}{2UV} - \frac{(U')^2}{4U^2V} - \frac{U'V'}{4UV^2} - \frac{V'}{rV^2} + \frac{U'}{2rUV} \\
& - \frac{V'}{2rV^2} + \frac{1}{r^2V} - \frac{1}{r^2} + \frac{U'}{2rUV} - \frac{V'}{2rV^2} + \frac{1}{r^2V} - \frac{1}{r^2}
\end{aligned}$$

$$R = \frac{U''}{UV} - \frac{U'V'}{2UV^2} - \frac{(U')^2}{2U^2V} + \frac{2U'}{rUV} - \frac{2V'}{rV^2} - \frac{2}{r^2}\left(1 - \frac{1}{V}\right)$$

Τώρα , είμαστε σε θέση να λύσουμε την εξίσωση *Einstein*, η οποία , όπως αναφέραμε και στην αρχή , στο κενό γράφεται:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0$$

Θα λύσουμε την εξίσωση μόνο για $\mu = \nu = 0, 1, 2, 3$, αφού για $\mu \neq \nu$ τότε $g_{\mu\nu} = 0$, επομένως και $R_{\mu\nu} = 0$.

$\underline{\mu = \nu = 0 :}$

- $R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R = 0 \Longrightarrow$

$$
\begin{aligned}
& -\frac{U''}{2V} + \frac{U'V'}{2V^2} + \frac{(U')^2}{4UV} - \frac{U'V'}{4V^2} - \frac{U'}{rV} \\
& -\frac{U}{2}\left[-\frac{U''}{UV} + \frac{U'V'}{2UV^2} + \frac{(U')^2}{2U^2V} - \frac{2U'}{rUV} + \frac{2V'}{rV^2} + \frac{2}{r^2}\left(1 - \frac{1}{V}\right)\right] = 0 \Longrightarrow \\
& -\frac{U}{r^2V} + \frac{U}{r^2} + \frac{V'U}{rV^2} = 0 \Longrightarrow U\left(\frac{-1}{r^2V} + \frac{1}{r^2} + \frac{V'}{rV^2}\right) = 0 \Longrightarrow -\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{V} - 1\right) + \frac{V'}{rV^2} = 0 \Longrightarrow
\end{aligned}
$$

$$
\frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{1}{V}\right) + \frac{V'}{rV^2} = 0 \tag{4.11}
$$

$\underline{\mu = \nu = 1 :}$

- $R_{11} - \frac{1}{2} g_{11} R = 0 \Longrightarrow$

$$
\begin{aligned}
& \frac{U''}{2U} - \frac{(U')^2}{4U^2} - \frac{U'V'}{4UV} - \frac{V'}{rV} \\
& +\frac{V}{2}\left[-\frac{U''}{UV} + \frac{U'V'}{2UV^2} + \frac{(U')^2}{2U^2V} - \frac{2U'}{rUV} + \frac{2V'}{rV^2} + \frac{2}{r^2}\left(1 - \frac{1}{V}\right)\right] = 0 \Longrightarrow
\end{aligned}
$$

$$
-\frac{U'}{rUV} + \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{1}{V}\right) = 0 \tag{4.12}
$$

$\underline{\mu = \nu = 2 :}$

- $R_{22} - \frac{1}{2} g_{22} R = 0 \Longrightarrow$

$$
\begin{aligned}
& \frac{rU'}{2UV} + \frac{1}{V} - \frac{rV'}{2V^2} - 1 \\
& +\frac{r^2}{2}\left[-\frac{U''}{UV} + \frac{U'V'}{2UV^2} + \frac{(U')^2}{2U^2V} - \frac{2U'}{rUV} + \frac{2V'}{rV^2} + \frac{2}{r^2}\left(1 - \frac{1}{V}\right)\right] = 0 \Longrightarrow
\end{aligned}
$$

$$
-\frac{U'}{U} + \frac{V'}{V} - \frac{rU''}{U} + \frac{rU'V'}{2UV} + \frac{r(U')^2}{2U^2} = 0 \tag{4.13}
$$

$\underline{\mu = \nu = 3 :}$

- $R_{33} - \frac{1}{2} g_{33} R = 0 \Longrightarrow R_{22} + \frac{r^2}{2} R = 0$

Η τελευταία εξίσωση εξαρτάται από την (4.13).Λύνουμε πρώτα την εξίσωση (4.11), που είναι μία διαφορική του $V(r)$ πρώτου βαθμού ως προς το r και έχουμε:

$$\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{1}{V}\right)+\frac{V'}{rV^2}=0\longrightarrow\frac{1}{r}\left[\frac{V'}{V^2}+\frac{1}{r}\left(\frac{V-1}{V}\right)\right]=0\longrightarrow$$
$$\frac{1}{rV}\left[\frac{V'}{V}+\frac{1}{r}(V-1)\right]=0\longrightarrow\frac{V'}{V}=-\frac{1}{r}(V-1)\longrightarrow\frac{V'}{V(1-V)}=-\frac{1}{r}\longrightarrow$$
$$\frac{1}{V(V-1)}\frac{dV}{dr}=-\frac{1}{r}\longrightarrow\quad\frac{dV}{-V+V^2}=-\frac{dr}{r}\tag{4.14}$$

Και χρησιμοποιόντας την ιδιότητα $\int\frac{dx}{ax+bx^2}=-\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+bx}{x}\right)$

$$\ln\left(\frac{-1+V}{V}\right)=-\ln r+C\longrightarrow\ln\left(\frac{V-1}{V}\right)=\ln\frac{1}{r}+C\longrightarrow\frac{V-1}{V}=\frac{1}{r}e^C\overset{e^C=\hat{C}}{\longrightarrow}$$
$$\frac{V-1}{V}=\frac{\hat{C}}{r}\longrightarrow\frac{1}{V}=1-\frac{\hat{C}}{r}\longrightarrow V(r)=\frac{1}{1-\frac{\hat{C}}{r}}\tag{4.15}$$

Και τώρα αντικαθιστούμε το , γνωστό πλέον $V(r)$, στην εξίσωση (4.12)

$$-\frac{U'}{rUV}+\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{1}{V}\right)=0\longrightarrow-\frac{U'}{Ur}\left(\frac{\hat{C}}{r}\right)+\frac{1}{r^2}\left(1-1+\frac{\hat{C}}{r}\right)=0\longrightarrow$$
$$-\frac{U'}{rU}\left(\frac{r-\hat{C}}{r}\right)+\frac{\hat{C}}{r^3}=0\longrightarrow\frac{1}{r^2}\left[-\frac{U'}{U}(r-\hat{C})+\frac{\hat{C}}{r}\right]=0\longrightarrow-\frac{U'}{U}(r-\hat{C})+\frac{\hat{C}}{r}=0\longrightarrow$$
$$\frac{U'}{U}=\frac{\hat{C}}{r(r-\hat{C})}\longrightarrow\frac{1}{U}\frac{dU}{dr}=\frac{\hat{C}}{r^2-r\hat{C}}\longrightarrow\int\frac{dU}{U}=\int\frac{\hat{C}dr}{-r\hat{C}+r^2}\longrightarrow$$
$$\ln U=\hat{C}\left[\frac{1}{\hat{C}}\ln\left(\frac{-\hat{C}+r}{r}\right)\right]\longrightarrow U=\frac{-\hat{C}+r}{r}\longrightarrow U(r)=1-\frac{\hat{C}}{r}\tag{4.16}$$

Αφού βρήκαμε τα $U(r)$ και $V(r)$, τα αντικαθιστούμε στην μετρική μας και το νέο στοιχείο μήκους θα είναι:

$$ds^2=g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}\tag{4.17}$$
$$=U(r)dt^2-V(r)dr^2-r^2d\theta^2-r^2\sin^2\theta d\phi^2\tag{4.18}$$

$$ds^2=\left(1-\frac{\hat{C}}{r}\right)dt^2-\left(\frac{1}{1-\frac{\hat{C}}{r}}\right)dr^2-r^2d\theta^2-r^2\sin^2\theta d\phi^2\tag{4.19}$$

Σε αυτό το σημείο πρέπει να προσδιορίσουμε την σταθερά $\hat{C}$ συναρτήσει κάποιας φυσικής ποσότητας. Αυτό μπορεί να γίνει από τις οριακές συνθήκες. Στην συγκεκριμένη περίπτωση για $r\to\infty$ θα πρέπει η λύση να ανάγεται στην Νευτώνεια η οποία λεέι ότι

$$g_{00}=1+\frac{2\Phi}{c^2}\tag{4.20}$$

Όπου $\Phi = -\frac{GM}{r}$ είναι το Νευτώνειο δυναμικό για την περίπτωση της σφαιρικής συμμετρίας. Επομένως θα πρέπει να ισχύει ότι

$$1 - \frac{\hat{C}}{r} = 1 + \frac{2\Phi}{c^2} \to 1 - \frac{\hat{C}}{r} = 1 - \frac{2GM}{rc^2}$$

Η παραπάνω σχέση ικανοποιείται για

$$\hat{C} = \frac{2GM}{c^2} \tag{4.21}$$

Και η τελική μορφή του του στοιχείου μήκους θα είναι

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 - \left(\frac{1}{1 - \frac{2GM}{rc^2}}\right) dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \tag{4.22}$$

Αυτή η λύση ονομάζεται ***μετρική Schwarschild***. Ο αντίστοιχος πίνακας της μετρικής είναι

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{4.23}$$

Η ποσότητα $\frac{2GM}{rc^2}$ δείχνει τον βαθμό απόκλισης της γεωμετρίας από αυτή του Minkowski. Για τον Ήλιο όπου $M_{\odot} \approx 2 \times 10^{33} gr$ και $R_{\odot} = 696 \times 10^3 km$ έχουμε $\frac{2GM}{rc^2} \approx 4 \times 10^-6$, άρα οι σχετικιστικές διορθώσεις είναι μικρές ακόμη και γύρω από την επιφάνεια του Ήλιου. Για σώματα όπως οι αστέρες νετρονίων οι διορθώσεις αυτές είναι της τάξης του $\sim 0.3 - 0.5$. Γενικά όταν ο λόγος $\frac{2GM}{rc^2} \approx 1$ τότε οι σχετικιστικές διορθώσεις γίνονται σημαντικές.

Η παραπάνω μετρική περιγράφει τη γεωμετρία του χωροχρόνου στο κενό για κάθε σφαιρική βαρυτική πηγή. Δε χρειάζεται απαραίτητα να ειναι στατική. Θα μπορούσε να αναφέρεται και σε ένα αστέρι που καταρρέει συμμετρικά. Το γεγονός ότι η μετρική Schwarschild είναι η μοναδική, σφαιρικά συμμετρική, λύση των εξισώσεων Einstein στο κενό είναι γνωστό ως ***θεώρημα Birkhoff***.

Επίσης παρατηρούμε πως για $M \to 0$ ο χώρος γίνεται Minkowski. Όσο πιο μικρή μάζα τόσο πιο μικρή καμπύλωση. Άλλη μια περίπτωση που η μετρική γίνεται Minkowski είναι όταν $r \to \infty$. Χώροι με αυτή την ιδιότητα ονομάζονται *ασυμπτωτικά επίπεδοι*.

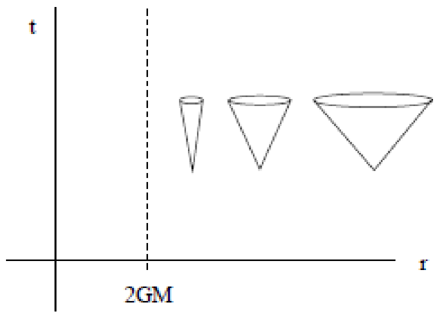
Το σημαντικό στην εξίσωση (4.22) είναι να δούμε τι συμβαίνει για $r = 0$ και $r = 2GM$ όπου απειρίζονται οι συντελεστές του χρονικού και ακτινικού όρου. Ένας τρόπος για να εξετάσουμε την γεωμετρία είναι μέσω των αιτιακών σχέσεων των σημείων όπως αυτές καθορίζονται από τους κώνους φωτός. Για να δούμε πως συμπεριφέρεται ένας κώνος φωτός, συναρτήσει της απόστασης από την μάζα M, και για μια συγκεκριμένη γωνία[1], θέτουμε

[1] Έτσι κι αλλιώς λόγω σφαιρικής συμμετρίας, η καμπυλότητα και μορφή των κώνων φωτός δεν θα εξαρτάται από τις γωνίες.

$ds^2 = 0$ και θεωρούμε τα θ και ϕ σταθερές. Έτσι έχουμε

$$ds^2 = 0 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 \longrightarrow \frac{dt}{dr} = \pm \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1}$$

Η τελευταία σχέση δείχνει την κλήση των κώνων στο επίπεδο (t, r). Για μεγάλα r έχουμε $\frac{dt}{dr} = \pm 1$, ενώ για $r \to 2GM$ η κλίση γίνεται $\frac{dt}{dr} \to \pm\infty$ και οι κώνοι ''στενεύουν'' όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα.[2] Δηλαδή μια ακτίνα φωτός τείνει ασυμπτωτικά προς το



$r = 2GM$ αλλά δείχνει να μη φτάνει ποτέ εκεί. Όπως θα δούμε παρακάτω αυτή είναι μια λάθος ερμηνεία η οποία οφείλεται στο σύστημα αναφοράς που έχουμε επιλέξει. Επειδή οι συντελεστές της μετρικής εξαρτώνται από το σύστημα συντεταγμένων που επιλέγουμε, είναι πιθανό να μπορούμε να αποφύγουμε τους απειρισμούς απλά αλλάζοντας σύστημα αναφοράς όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Για $r < 2GM$ τα πρόσημα του χρονικού και ακτινικού όρου στην εξίσωση (4.22) αλλάζουν και μαζί τους και η σημασία των συντεταγμένων. Η t συντεταγμένη γίνεται χωροειδής και η r χρονοειδής. Λόγω αυτού ο κώνος φωτός θα υποστεί μια αναστροφή κατά κάποιο τρόπο, όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα, και όλα τα σωματίδια σε αυτή τη περιοχή θα κινηθούν προς το $r = 0$. Προκειμένου να ξεπεραστεί η περίεργη συμπεριφορά του κώνου, θα μπρούσαμε να αλλάξουμε την συντεταγμένη του χρόνου έτσι ώστε να ''ακολουθεί τις φωτοειδείς γεωδαιτικές''. Για τις φωτοειδείς γεωδαιτικές ισχύει ότι

$$ds^2 = 0 \to dt^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-2} dr^2 \tag{4.24}$$

Θέτουμε

$$d\tilde{r}^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-2} dr^2 \tag{4.25}$$

Έτσι ώστε οι φωτοειδής να υπακούν την απλή σχέση

$$dt^2 = d\tilde{r}^2 \to \frac{dt}{d\tilde{r}} = \pm 1$$

[2]Για $r = 2GM$ οι κώνοι έχουν στενέψει τόσο που πρακτικά έχουν γίνει γραμμές, δηλαδή οι γενέτειρες των κώνων (ευθείες για τις οποίες ισχύει $ds^2 = 0$, καθορίζουν τα όρια του κώνου) έχουν ταυτιστεί και επομένως οποιοδήποτε φωτεινό σήμα δεν μπορεί να διαφύγει αλλά μένει στάσιμο στην επιφάνεια $r = 2GM$. Άρα μπορούμε να θεωρήσουμε την σφαιρική επιφάνεια $r = 2GM$ ως μια φωτοειδή επιφάνεια.

. Λύνοντας την παραπάνω σχέση και απαιτώντας τα $\tilde{r}$ και r να είναι ανάλογα βρίσκουμε

$$\tilde{r} = r + \frac{2GM}{c^2} \ln \left| \frac{rc^2}{2GM} - 1 \right| \tag{4.26}$$

Από τα προηγούμενα βλέπουμε ότι για τις φωτοειδείς γεωδαιτικές που εξέρχονται θα ισχύει

$$dt^2 = d\tilde{r}^2 \rightarrow t = \tilde{r} + c \rightarrow t - \tilde{r} = c_1 \tag{4.27}$$

και για τις εισερχόμενες

$$dt^2 = d\tilde{r}^2 \rightarrow t = -\tilde{r} + c \rightarrow t + \tilde{r} = c_2 \tag{4.28}$$

όπου c_1, c_2 σταθερές. Θέτουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} u &= t - \tilde{r} \\ v &= t + \tilde{r} \end{aligned}$$

Οι συντεταγμένες ***Eddington-Finkelstein*** συνδέονται με τις σφαιρικές μέσω των σχέσεων

$$\begin{aligned} &\tilde{r} = r + \frac{2GM}{c^2} \ln \left| \frac{rc^2}{2GM} - 1 \right| \\ &t = \tilde{t}, \quad \theta = \tilde{\theta}, \quad \phi = \tilde{\phi} \\ &u = t - \tilde{r}, \quad v = t + \tilde{r} \end{aligned} \tag{4.29}$$

Έτσι έχουμε

$$\frac{d\tilde{r}}{dr} = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} \tag{4.30}$$

και

$$du = dt - d\tilde{r} \rightarrow dt = d\tilde{r} + du = \frac{dr}{\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)} + du \tag{4.31}$$

και η μετρική παίρνει την μορφή

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) du^2 - 2du dr + r^2 d\Omega^2 \tag{4.32}$$

Ξάνα χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.30) έχουμε

$$dv = dt + d\tilde{r} \rightarrow dt = dv - \frac{dr}{\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)} \tag{4.33}$$

επομένως σε αυτές τις συντεταγμένες η μετρική γράφεται

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) dv^2 + 2dv dr + r^2 d\Omega^2 \tag{4.34}$$

Ουσιαστικά οι δύο παραπάνω μετρικές είναι ορισμένες αντίστοιχα στις περιοχές $0 < r < 2GM$ και $r > 2GM$ λόγω του ορισμού του $\tilde{r}$. Μπορούμε όμως να βρούμε μια κοινή μορφή της σε όλο το χώρο. Ξεκινάμε από τη σχέση

$$v = \tilde{r} + t \to t = v - \tilde{r} \to dt^2 - d\tilde{r}^2 = dv^2 - 2dvd\tilde{r} = dv^2 - 2dvd\tilde{r}\frac{dr}{dr} \to$$

$$dt^2 - d\tilde{r}^2 = dv^2 - 2dvdr\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} \to$$

$$-\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)\left(dt^2 - d\tilde{r}^2\right) = -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)dv^2 + 2dvdr \tag{4.35}$$

Αντίστοιχα τώρα παίρνουμε την εξίσωση

$$u = t - \tilde{r} \to dt^2 - d\tilde{r}^2 = du^2 + 2dud\tilde{r} \to dt^2 - d\tilde{r}^2 = du^2 + 2dudr\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} \to$$

$$-\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)\left(dt^2 - d\tilde{r}^2\right) = -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)du^2 - 2dudr \tag{4.36}$$

Από τις σχέσεις (4.36) και (4.35) η μετρική Schwarzschild μπορεί να γραφεί και για τις δύο περιοχές $r < 2M$ και $r > 2M$ ως

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2 \tag{4.37}$$

Βλέπουμε ότι αν και $g_{vv} = 0$ για $r = 2GM$ δεν υπάρχει ανωμαλία στο σύστημα συντεταγμένων επειδή $\det(g_{\mu\nu}) = -r^4 \sin^2\theta \neq 0$ [3] στο $r = 2GM$ και γιάυτό περιμένουμε οι κώνοι φωτός να μεταβάλλονται ομαλά.

Για τις φωτοειδείς γεωδαιτικές έχουμε την εξίσωση

$$ds^2 = 0 \Longrightarrow -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)dv^2 + 2dvdr = 0 \tag{4.38}$$

η οποία έχει τις δύο λύσεις

$$dv = 0 \to v = \text{constant} \tag{4.39}$$

$$\frac{dv}{dr} = 2\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} \tag{4.40}$$

Η πρώτη αναφέρεται σε φωτεινές ακτίνες κινούμενες ακτινικά προς το κέντρο [1], αφού καθώς το t αυξάνει το r θα μειώνεται έτσι ώστε το v να μένει σταθερό. Η δεύτερη εξίσωση μπορεί να γραφεί ως

$$dv = 2\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr \to dv = 2d\tilde{r} \to v = 2\tilde{r} + c \to \tag{4.41}$$

$$v - 2\left(r + \frac{2GM}{c^2}\ln\left|\frac{rc^2}{2GM} - 1\right|\right) = \text{constant} \tag{4.42}$$

[3] Και στο προηγούμενο σύστημα συνταγμένων η ορίζουσα είναι $-r^4\sin^2\theta$ αλλά ορίζεται παντού εκτός από το $r = 2GM$

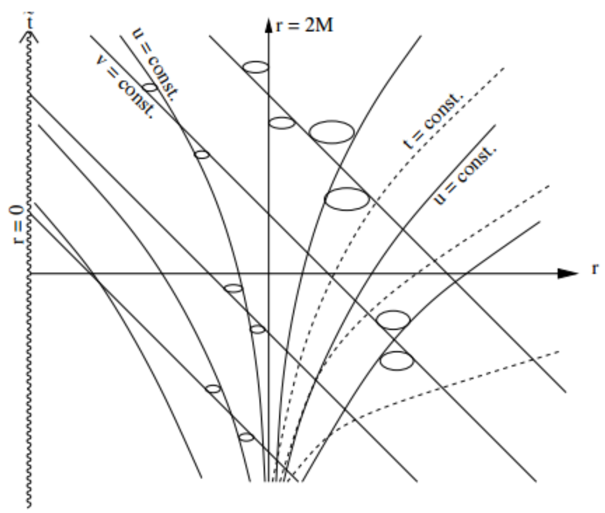
Το αποτέλεσμα είναι μια εξίσωση καμπύλης πάνω στην οποία κινούνται οι φωτεινές ακτίνες. Για μεγάλα r η σχέση (4.41) γίνεται

$$v - \tilde{r} = \tilde{r} + c \rightarrow t = \tilde{r} + c \rightarrow t \approx r + c \tag{4.43}$$

οπότε οι φωτεινές ακτίνες μακρία της μελανής οπής θα κινούνται ακτινικά προς τα έξω. Αντίστοιχα για $r < 2GM$ το r ελλατώνεται με αύξηση του v, άρα και του t.

Μια ακόμα λύση της (4.38) είναι η καμπύλη $r = 2GM$. Είναι στατική λύση και περιγράφει ακτίνες παγιδευμένες στην επιφάνεια $r = 2GM$.

Οπότε, παρόλο που οι κώνοι φωτός δε στενεύουν όπως πριν, δείχνουν να γέρνουν προς το κέντρο της μαύρης τρύπας καθώς το r μειώνεται έτσι ώστε για $r < 2GM$ όλα τα μελλοντικά γεγονότα είναι στην κατεύθυνση όπου το r μειώνεται. Δηλαδή ότιδήποτε περάσει την επιφάνεια $r = 2GM$ δεν μπορεί να την ξαναδιασχύσει και να βγεί έξω. Είναι αναγκασμένο να κινηθεί προς το $r = 0$. Ένας απομακρυσμένος παρατηρητής δεν θα δει ένα αντικείμενο να πέφτει μέσα στην οπή αλλά αντίθετα, η εικόνα του αντικειμένου θα ''παγώσει'' στον ορίζοντα των γεγονότων και θα σβήσει σταδιακά. Όλα αυτά φτιάχνουν το παρακάτω διάγραμμα



Παρόλα αυτά παρατηρούμε πως για $r = 0$ το πρόβλημα παραμένει, οπότε έχουμε ένα λόγο παραπάνω να πιστεύουμε πως υπάρχει χωροχρονική ανωμαλία(*singularity*) στο $r = 0$. Θα μπορούσαμε να ψάχνουμε συστήματα συντεταγμένων μέχρι να βρούμε ένα που θα μας αίρει την ανωμαλία(αν υπάρχει) αλλά υπάρχει πιο γρήγορος τρόπος να μάθουμε τι συμβαίνει.

Αν υπάρχει όντως ανωμαλία στο $r = 0$ τότε η καμπυλότητα θα πρέπει να απειρίζεται εκεί. Αλλά η καμπυλότητα μετράται μέσω του *τανυστή* Riemann και εδώ υπάρχει ένα πρόβλημα. Αναφέραμε παραπάνω ότι οι συντελεστές της μετρικής εξαρτόνται από το σύστημα αναφοράς που έχουμε επιλέξει και αυτό ισχύει για τις συνιστώσες οποιουδήποτε τανυστή. Οπότε είναι δύσκολο να καταλάβουμε πότε απειρίζονται χωρίς να φταίει το σύστημα αναφοράς. Αλλά μπορούμε μέσω του τανυστή καμπυλότητας να φτιάξουμε βαθμωτές ποσότητες οι οποίες είναι ανεξάρτητες των συντεταγμένων και έτσι να έχει νόημα να δούμε το αν απειρίζονται ή όχι. Η πιο απλή τέτοια ποσότητα είναι το Ricci scalar $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$. Μποπούμε προφανώς να φτιάξουμε και άλλες βαθμωτές ποσότητες από τανυστές ανώτερης τάξης όπως $R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma}$. Αν κάποια από αυτές τις ποσότητες(όχι απαραίτητα όλες τους) τείνει στο άπειρο καθώς προσσεγγίζουμε ένα σημείο, τότε θα θεωρούμε αυτό το σημείο ως χωροχρονική ανωμαλία λόγω της άπειρης καμπυλότητας. Στην συγκεκριμένη περίπτωση υπολογίζουμε

$$R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{12G^2M^2}{r^6} \tag{4.44}$$

και το αποτέλεσμα αυτό είναι αρκετό για να πειστούμε ότι όντως στο σημείο $r = 0$ έχουμε singularity ενώ παράλληλα επαληθεύει και το ότι για $r = 2GM$ δεν έχουμε.

Ένα άλλο γνωστό σύστημα συντεταγμένων είναι οι **Kruskal-Szekerz** (U, V, θ, ϕ) οι οποίες συνδέονται με τις αρχικές από τους μετασχηματισμούς

$$V = e^{v/4M}\ ,\ U = -e^{u/4M} \tag{4.45}$$

όπου θέσαμε $c = G = 1$. Τα v και u ορίζονται οπως στις (4.29) . Το στοιχείο μήκους (4.22) σε αυτό το σύστημα γράφεται

$$ds^2 = -\frac{32M^3}{r}e^{-r/2M}dUdV + r^2d\Omega \tag{4.46}$$

το οποίο για $r = 2M$ δεν παρουσιάζει απειρισμούς που είναι ακόμη μια απόδειξη πως η αρχική ανωμαλία ωφειλόταν στην επιλογή του συστήματος αναφοράς.

4.2 Λύση Reissner-Nördstrom

Όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο αναζητούμε τη γεωμετρία του χωροχρόνου, έξω από ένα μη περιστρεφόμενο, σφαιρικά συμμετρικό σώμα, ακτίνας R, μάζας M και συνολικού ηλεκτρικού φορτίου Q . Για τον επίπεδο χωροχρόνο, η μετρική σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι

$$ds^2 = \sum_\mu\sum_\nu g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \equiv g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2 \tag{4.47}$$

Όπως είδαμε και με τη μετρική Schwarzschild , λόγω σφαιρικής συμμετρίας, η γενική μορφή της μετρικής σε καμπυλωμένο χωροχρόνο είναι:

$$ds^2 = -e^{2a(r,t)}dt^2 + e^{2b(r,t)}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2 \tag{4.48}$$

Η μόνη διαφορά είναι ότι χρησιμοποιήσαμε τα εκθετικά , για την γενική μορφή των συντελεστών που θέλουμε να προσδοιορίσουμε[4].

[4]Χρησιμοποιήθηκαν τα $U(r,t)$ και $V(r,t)$.Παρ' όλα αυτά , θα μπορούσαμε να λύσουμε την εξίσωση και με χρήση εκθετικών.

Όπως και προηγουμένως, πρέπει να λύσουμε την εξίσωση του *Einstein* :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{4.49}$$

Όμως τώρα , λόγω της παρουσίας του φορτίου, θα χρησιμοποιήσουμε τον τανυστή ορμής-ενέργειας του ηλεκτρομαγνητισμού

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\rho} F_{\nu}^{\rho} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \tag{4.50}$$

Μπορεί να μην υπάρχει ύλη, αλλά υπάρχει ενέργεια , στη περιοχή γύρο από τη μαύρη τρύπα , για την οποία λύνουμε την εξίσωση. Το $F_{\mu\nu}$ είναι ο τανυστής έντασης του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου και δίνεται από τον, γνωστό, τύπο:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{4.51}$$

Τα πεδία , συνδέονται με τις συνιστώσες του τανυστή μέσω των παρακάτω σχέσεων:

$$E_i = cF_{0i} \quad , \quad B_i = \partial_j A_k - \partial_k A_j \tag{4.52}$$

Ακολουθόντας την ίδια νοοτροπία με την μετρική Schwarzschild , για να λύσουμε την εξίσωση *Einstein* , πρέπει να βρούμε τα σύμβολα Christoffel και μέσω αυτών τα $R_{\mu\nu}$ και R. Στη συνέχεια , να υπολογίσουμε τον τανυστή $T_{\mu\nu}$ με τη βοήθεια του $F_{\mu\nu}$.

Σύμβολα Christoffel

Η εξίσωση των συμβόλων Christoffel συναρτήσει της μετρικής είναι:

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \left(g_{\lambda\nu,\sigma} + g_{\lambda\sigma,\nu} - g_{\nu\sigma,\lambda} \right) \tag{4.53}$$

όπου χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $\quad g_{\mu\lambda,\sigma} \equiv \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\sigma}$

1. Για $\mu = 0$ έχουμε:

$$\Gamma^{0}_{\nu\sigma} = \frac{1}{2} g^{0\lambda} \left(g_{\lambda\nu,\sigma} + g_{\lambda\sigma,\nu} - g_{\nu\sigma,\lambda} \right) \stackrel{\lambda=0}{=} \frac{1}{2} g^{00} \left(g_{0\nu,\sigma} + g_{0\sigma,\nu} - g_{\nu\sigma,0} \right) \tag{4.54}$$

- $\Gamma^0_{00} = \frac{1}{2} g^{00} \left(g_{00,0} + g_{00,0} - g_{00,0} \right) = \frac{1}{2} g^{00} g_{00,0} = \frac{1}{2} \frac{-1}{e^{2a(r,t)}} \frac{d}{dt} \left(-e^{2a(r,t)} \right)$
  $= \frac{da(r,t)}{dt}$
- $\Gamma^0_{0i} = \frac{1}{2} g^{00} \left(g_{00,i} + g_{0i,0} - g_{0i,0} \right) = \frac{1}{2} g^{00} g_{00,i}$, $i = 1, 2, 3$

  $-\Gamma^0_{01} = \frac{1}{2} g^{00} g_{00,1} = \frac{1}{2} \frac{-1}{e^{2a}} \frac{d}{dr} \left(-e^{2a} \right) = \frac{da(r,t)}{dr}$
  $-\Gamma^0_{02} = \frac{1}{2} g^{00} g_{00,2} = 0$
  $-\Gamma^0_{03} = \frac{1}{2} g^{00} g_{00,3} = 0$

Θυμίζουμε πως τα Γ^a_{bc} είναι συμμετρικά ως προς τους κάτω δείκτες , οπότε τώρα , έχουμε υπολογίσει και τα $\Gamma^0_{10}, \Gamma^0_{20}, \Gamma^0_{30}$

- $\Gamma^0_{ij} = \frac{1}{2}g^{00}\left(g_{0i,j} + g_{0j,i} - g_{ij,0}\right)\ ,\ i,j = 1,2,3$

$-\Gamma^0_{11} = \frac{1}{2}g^{00}\left(g_{01,1} + g_{01,1} - g_{11,0}\right) = -\frac{1}{2}g^{00}g_{11,0} = -\frac{1}{2}\frac{-1}{e^{2a}}\frac{d}{dt}\left(e^{2b(r,t)}\right)$
$= e^{2(b-a)}\frac{db(r,t)}{dt}$
$-\Gamma^0_{12} = \frac{1}{2}g^{00}\left(g_{01,2} + g_{02,1} - g_{12,0}\right) = 0$
$-\Gamma^0_{13} = \frac{1}{2}g^{00}\left(g_{01,3} + g_{03,1} - g_{13,0}\right) = 0$
$-\Gamma^0_{21} = \Gamma^0_{12}$
$-\Gamma^0_{22} = \frac{1}{2}g^{00}\left(g_{02,2} + g_{02,2} - g_{22,0}\right) = -\frac{1}{2}g^{00}g_{22,0} = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{e^{2a}}\right)\left(-\frac{d(r^2)}{dt}\right) = 0$
$-\Gamma^0_{23} = \frac{1}{2}g^{00}\left(g_{02,3} + g_{03,2} - g_{23,0}\right) = 0$
$-\Gamma^0_{31} = \frac{1}{2}g^{00}\left(g_{03,1} + g_{01,3} - g_{31,0}\right) = 0$
$-\Gamma^0_{32} = \Gamma^0_{23}$
$-\Gamma^0_{33} = \frac{1}{2}g^{00}\left(g_{03,3} + g_{03,3} - g_{33,0}\right) = -\frac{1}{2}g^{00}g_{33,0} = 0$

2. Για $\mu = 1$ έχουμε:

$$\Gamma^1_{\nu\sigma} = \frac{1}{2}g^{1\lambda}\left(g_{\lambda\nu,\sigma} + g_{\lambda\sigma,\nu} - g_{\nu\sigma,\lambda}\right) \overset{\lambda=1}{=} \frac{1}{2}g^{11}\left(g_{1\nu,\sigma} + g_{1\sigma,\nu} - g_{\nu\sigma,1}\right) \tag{4.55}$$

- $\Gamma^1_{00} = \frac{1}{2}g^{11}\left(g_{10,0} + g_{10,0} - g_{00,1}\right) = -\frac{1}{2}g^{11}g_{00,1} = -\frac{1}{2}\frac{1}{e^{2b}}\frac{d}{dr}\left(-e^{2a}\right) = e^{2(a-b)}\frac{da(r,t)}{dr}$
- $\Gamma^1_{0i} = \frac{1}{2}g^{11}\left(g_{10,i} + g_{1i,0} - g_{0i,1}\right) = \frac{1}{2}g^{11}g_{1i,0}$

$-\Gamma^1_{01} = \frac{1}{2}g^{11}\left(g_{10,1} + g_{11,0} - g_{01,1}\right) = \frac{1}{2}g^{11}g_{11,0} = \frac{1}{2}\frac{1}{e^{2b}}\frac{d}{dt}\left(e^{2b}\right) = \frac{db(r,t)}{dt}$
$-\Gamma^1_{02} = \frac{1}{2}g^{11}\left(g_{10,2} + g_{12,0} - g_{02,1}\right) = 0$
$-\Gamma^1_{03} = \frac{1}{2}g^{11}\left(g_{10,3} + g_{13,0} - g_{03,1}\right) = 0$

- $\Gamma^1_{ij} = \frac{1}{2}g^{11}\left(g_{1i,j} + g_{1j,i} - g_{ij,1}\right)\ ,\ i,j = 1,2,3$

$-\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}g^{11}\left(g_{11,1} + g_{11,1} - g_{11,1}\right) = \frac{1}{2}g^{11}g_{11,1} = \frac{1}{2}\frac{1}{e^{2b}}\frac{d}{dr}\left(e^{2b}\right) = \frac{db(r,t)}{dr}$
$-\Gamma^1_{12} = \frac{1}{2}g^{11}\left(g_{11,2} + g_{12,1} - g_{12,1}\right) = \frac{1}{2}g^{11}g_{11,2} = 0$
$-\Gamma^1_{13} = \frac{1}{2}g^{11}\left(g_{11,3} + g_{13,1} - g_{13,1}\right) = \frac{1}{2}g^{11}g_{11,3} = 0$
$-\Gamma^1_{21} = \Gamma^1_{12}$
$-\Gamma^1_{22} = \frac{1}{2}g^{11}\left(g_{12,2} + g_{12,2} - g_{22,1}\right) = -\frac{1}{2}g^{11}g_{22,1} = -\frac{1}{2}\frac{1}{e^{2b}}\frac{d}{dr}\left(r^2\right) = -\frac{r}{e^{2b}}$
$-\Gamma^1_{23} = \frac{1}{2}g^{11}\left(g_{12,3} + g_{13,2} - g_{23,1}\right) = 0$
$-\Gamma^1_{31} = \Gamma^1_{13}$
$-\Gamma^1_{32} = \Gamma^1_{23}$

$-\Gamma^1_{33} = \frac{1}{2}g^{11}\left(g_{13,3} + g_{13,3} - g_{33,1}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{e^{2b}}\frac{d}{dr}\left(r^2\sin^2\theta\right)$
$= -\frac{r\sin^2\theta}{e^{2b}}$

3. Για $\mu = 2$ έχουμε:

$$\Gamma^2_{\nu\sigma} = \frac{1}{2}g^{2\lambda}\left(g_{\lambda\nu,\sigma} + g_{\lambda\sigma,\nu} - g_{\nu\sigma,\lambda}\right) \overset{\lambda=2}{=} \frac{1}{2}g^{22}\left(g_{2\nu,\sigma} + g_{2\sigma,\nu} - g_{\nu\sigma,2}\right) \tag{4.56}$$

- $\Gamma^2_{00} = \frac{1}{2}g^{22}\left(g_{20,0} + g_{20,0} - g_{00,2}\right) = -\frac{1}{2}g^{22}g_{00,2} = -\frac{1}{2r^2}\frac{d}{d\theta}\left(e^{2a(r,t)}\right) = 0$
- $\Gamma^2_{0i} = \frac{1}{2}g^{22}\left(g_{20,i} + g_{2i,0} - g_{0i,2}\right)$

$-\Gamma^2_{01} = \frac{1}{2}g^{22}\left(g_{20,1} + g_{21,0} - g_{01,2}\right) = 0$
$-\Gamma^2_{02} = \frac{1}{2}g^{22}\left(g_{20,2} + g_{22,0} - g_{02,2}\right) = \frac{1}{2}g^{22}g_{22,0} = \frac{1}{2r^2}\frac{dr^2}{dt} = 0$
$-\Gamma^2_{03} = \frac{1}{2}g^{22}\left(g_{20,3} + g_{23,0} - g_{03,2}\right) = 0$

- $\Gamma^2_{ij} = \frac{1}{2}g^{22}\left(g_{2i,j} + g_{2j,i} - g_{ij,2}\right)\ ,\ i,j = 1,2,3$

$-\Gamma^2_{11} = \frac{1}{2}g^{22}\left(g_{21,1} + g_{21,1} - g_{11,2}\right) = -\frac{1}{2}g^{22}g_{11,2} = 0$
$-\Gamma^2_{12} = \frac{1}{2}g^{22}\left(g_{21,2} + g_{22,1} - g_{12,2}\right) = \frac{1}{2}g^{22}g_{22,1} = \frac{1}{r^2}\frac{d(r^2)}{dr} = \frac{1}{r}$
$-\Gamma^2_{13} = \frac{1}{2}g^{22}\left(g_{21,3} + g_{23,1} - g_{13,2}\right) = 0$
$-\Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} = \frac{1}{r}$
$-\Gamma^2_{22} = \frac{1}{2}g^{22}\left(g_{22,2} + g_{22,2} - g_{22,2}\right) = \frac{1}{2}g^{22}g_{22,2} = 0$
$-\Gamma^2_{23} = \frac{1}{2}g^{22}\left(g_{22,3} + g_{23,2} - g_{23,2}\right) = \frac{1}{2}g^{22}g_{22,3} = 0$
$-\Gamma^2_{31} = \Gamma^2_{13}$
$-\Gamma^2_{32} = \Gamma^2_{23}$
$-\Gamma^2_{33} = \frac{1}{2}g^{22}\left(g_{23,3} + g_{23,3} - g_{33,2}\right) = \frac{1}{2r^2}\partial_\theta\left(r^2\sin^2\theta\right) = -\sin\theta\cos\theta$

4. Για $\mu = 3$ έχουμε:

$$\Gamma^3_{\nu\sigma} = \frac{1}{2}g^{3\lambda}\left(g_{\lambda\nu,\sigma} + g_{\lambda\sigma,\nu} - g_{\nu\sigma,\lambda}\right) \overset{\lambda=3}{=} \frac{1}{2}g^{33}\left(g_{3\nu,\sigma} + g_{3\sigma,\nu} - g_{\nu\sigma,3}\right) \tag{4.57}$$

- $\Gamma^3_{00} = \frac{1}{2}g^{33}\left(g_{30,0} + g_{30,0} - g_{00,3}\right) = 0$
- $\Gamma^3_{0i} = \frac{1}{2}g^{33}\left(g_{30,i} + g_{3i,0} - g_{0i,3}\right)$

$-\Gamma^3_{01} = \frac{1}{2}g^{33}\left(g_{30,1} + g_{31,0} - g_{01,3}\right) = 0$
$-\Gamma^3_{02} = \frac{1}{2}g^{33}\left(g_{30,2} + g_{32,0} - g_{02,3}\right) = 0$
$-\Gamma^3_{03} = \frac{1}{2}g^{33}\left(g_{30,3} + g_{33,0} - g_{03,3}\right) = \frac{1}{2}g^{33}g_{33,0} = 0$

- $\Gamma^3_{ij} = \frac{1}{2} g^{33} \left(g_{3i,j} + g_{3j,i} - g_{ij,3} \right) \ , \ i,j = 1,2,3$

  $-\Gamma^3_{11} = \frac{1}{2} g^{33} \left(g_{31,1} + g_{31,1} - g_{11,3} \right) = \frac{1}{2} g^{33} g_{11,3} = 0$
  $-\Gamma^3_{12} = \frac{1}{2} g^{33} \left(g_{31,2} + g_{32,1} - g_{12,3} \right) = 0$
  $-\Gamma^3_{13} = \frac{1}{2} g^{33} \left(g_{31,3} + g_{33,1} - g_{13,3} \right) = \frac{1}{2} g^{33} g_{33,1} = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \partial_r \left(r^2 \sin^2\theta \right)$
  $= \frac{1}{r}$
  $-\Gamma^3_{21} = \Gamma^3_{12}$
  $-\Gamma^3_{22} = \frac{1}{2} g^{33} \left(g_{32,2} + g_{32,2} - g_{22,3} \right) = -\frac{1}{2} g^{33} g_{22,3} = 0$
  $-\Gamma^3_{23} = \frac{1}{2} g^{33} \left(g_{32,3} + g_{33,2} - g_{23,3} \right) = \frac{1}{2} g^{33} g_{33,2} = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \partial_\theta \left(r^2 \sin^2\theta \right)$
  $= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \cot\theta$
  $-\Gamma^3_{31} = \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}$
  $-\Gamma^3_{32} = \Gamma^3_{23} = \cot\theta$
  $-\Gamma^3_{33} = \frac{1}{2} g^{33} g_{33,3} = 0$

Σύνοψη αποτελεσμάτων, συμβόλων Christoffel:

$\Gamma^0_{\nu\sigma}: \quad \Gamma^0_{00} = \partial_t a(r,t) \quad \Gamma^0_{01} = \Gamma^0_{10} = \partial_r a(r,t) \quad \Gamma^0_{11} = e^{2(b-a)} \partial_t b(r,t)$

$\Gamma^1_{\nu\sigma}: \quad \Gamma^1_{00} = e^{2(a-b)} \partial_r a(r,t) \quad \Gamma^1_{01} = \partial_t b(r,t) \quad \Gamma^1_{11} = \partial_r b(r,t) \quad \Gamma^1_{22} = -r e^{-2b}$

$\Gamma^1_{33} = -r e^{-2b} \sin^2\theta$

$\Gamma^2_{\nu\sigma}: \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r} \quad \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta$

$\Gamma^3_{\nu\sigma}: \quad \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r} \quad \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \cot\theta$

Τανυστής Ricci

Καμπυλότητα Riemann: $R^\beta_{\nu\rho\sigma} \quad = \quad \Gamma^\beta_{\nu\sigma,\rho} - \Gamma^\beta_{\nu\rho,\sigma} + \Gamma^\alpha_{\nu\sigma}\Gamma^\beta_{\alpha\rho} - \Gamma^\alpha_{\nu\rho}\Gamma^\beta_{\alpha\sigma}$

Τανυστής Ricci: $R_{\mu\nu} \quad \equiv \quad R^\beta_{\mu\beta\nu} = \Gamma^\beta_{\mu\nu,\beta} - \Gamma^\beta_{\mu\beta,\nu} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Gamma^\beta_{\alpha\beta} - \Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\alpha\nu}$

$R_{\mu\nu} \quad \forall \quad \mu \neq \nu :$

$$\bullet\ R_{\mu\nu} = \Gamma^{\beta}_{\mu\nu,\beta} - \Gamma^{\beta}_{\mu\beta,\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu}$$

$$\begin{aligned} =&\Gamma^{0}_{\mu\nu,0} - \Gamma^{0}_{\mu0,\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{0}_{\alpha0} - \Gamma^{\alpha}_{\mu0}\Gamma^{0}_{\alpha\nu} + \\ &\Gamma^{1}_{\mu\nu,1} - \Gamma^{1}_{\mu1,\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{1}_{\alpha1} - \Gamma^{\alpha}_{\mu1}\Gamma^{1}_{\alpha\nu} + \\ &\Gamma^{2}_{\mu\nu,2} - \Gamma^{2}_{\mu2,\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{2}_{\alpha2} - \Gamma^{\alpha}_{\mu2}\Gamma^{2}_{\alpha\nu} + \\ &\Gamma^{3}_{\mu\nu,3} - \Gamma^{3}_{\mu3,\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{3}_{\alpha3} - \Gamma^{\alpha}_{\mu3}\Gamma^{3}_{\alpha\nu} \end{aligned}$$

$\underline{\mu = 0, \nu = i = 1, 2, 3}$

$$\bullet\ R_{0i} = \Gamma^{\beta}_{0i,\beta} - \Gamma^{\beta}_{0\beta,i} + \Gamma^{\alpha}_{0i}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\alpha}_{0\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha i}$$

$$\begin{aligned} =&\Gamma^{0}_{0i,0} - \Gamma^{0}_{00,i} + \Gamma^{\alpha}_{0i}\Gamma^{0}_{\alpha0} - \Gamma^{\alpha}_{00}\Gamma^{0}_{\alpha i} + \\ &\Gamma^{1}_{0i,1} - \Gamma^{1}_{01,i} + \Gamma^{\alpha}_{0i}\Gamma^{1}_{\alpha1} - \Gamma^{\alpha}_{01}\Gamma^{1}_{\alpha i} + \\ &\Gamma^{2}_{0i,2} - \Gamma^{2}_{02,i} + \Gamma^{\alpha}_{0i}\Gamma^{2}_{\alpha2} - \Gamma^{\alpha}_{02}\Gamma^{2}_{\alpha i} + \\ &\Gamma^{3}_{0i,3} - \Gamma^{3}_{03,i} + \Gamma^{\alpha}_{0i}\Gamma^{3}_{\alpha3} - \Gamma^{\alpha}_{03}\Gamma^{3}_{\alpha i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} =&\Gamma^{0}_{0i,0} - \Gamma^{0}_{00,i} + \Gamma^{\alpha}_{0i}\Gamma^{0}_{\alpha0} - \Gamma^{\alpha}_{00}\Gamma^{0}_{\alpha i} \\ &\Gamma^{1}_{0i,1} - \Gamma^{1}_{01,i} + \Gamma^{\alpha}_{0i}\Gamma^{1}_{\alpha1} - \Gamma^{\alpha}_{01}\Gamma^{1}_{\alpha i} \\ &\Gamma^{\alpha}_{0i}\Gamma^{3}_{\alpha3} + \Gamma^{\alpha}_{0i}\Gamma^{3}_{\alpha3} \end{aligned}$$

$i = 1$

$$\bullet\ R_{01} = \Gamma^{\beta}_{01,\beta} - \Gamma^{\beta}_{0\beta,1} + \Gamma^{\alpha}_{01}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\alpha}_{0\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha1}$$

$$\begin{aligned} =&\Gamma^{0}_{01,0} - \Gamma^{0}_{00,1} + \Gamma^{\alpha}_{01}\Gamma^{0}_{\alpha0} - \Gamma^{\alpha}_{00}\Gamma^{0}_{\alpha1} + \\ &\Gamma^{1}_{01,1} - \Gamma^{1}_{01,1} + \Gamma^{\alpha}_{01}\Gamma^{1}_{\alpha1} - \Gamma^{\alpha}_{01}\Gamma^{1}_{\alpha1} + \\ &\Gamma^{2}_{01,2} - \Gamma^{2}_{02,1} + \Gamma^{\alpha}_{01}\Gamma^{2}_{\alpha2} - \Gamma^{\alpha}_{02}\Gamma^{2}_{\alpha1} + \\ &\Gamma^{3}_{01,3} - \Gamma^{3}_{03,1} + \Gamma^{\alpha}_{01}\Gamma^{3}_{\alpha3} - \Gamma^{\alpha}_{03}\Gamma^{3}_{\alpha1} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
=&\Gamma^0_{01,0}-\Gamma^0_{00,1}+\Gamma^\alpha_{01}\Gamma^0_{\alpha 0}-\Gamma^\alpha_{00}\Gamma^0_{\alpha 1}\\
&\Gamma^1_{01,1}-\Gamma^1_{01,1}+\Gamma^\alpha_{01}\Gamma^1_{\alpha 1}-\Gamma^\alpha_{01}\Gamma^1_{\alpha 1}\\
&\Gamma^\alpha_{01}\Gamma^3_{\alpha 3}+\Gamma^\alpha_{01}\Gamma^3_{\alpha 3}\\
=&\Gamma^0_{01,0}-\Gamma^0_{00,1}+(\Gamma^0_{01}\Gamma^0_{00}+\Gamma^1_{01}\Gamma^0_{10})-(\Gamma^0_{00}\Gamma^0_{01}+\Gamma^1_{00}\Gamma^0_{11})+\\
&\Gamma^1_{01,1}-\Gamma^1_{01,1}+(\Gamma^0_{01}\Gamma^1_{01}+\Gamma^1_{01}\Gamma^1_{11})-(\Gamma^0_{01}\Gamma^1_{01}+\Gamma^1_{01}\Gamma^1_{11})+\\
&\Gamma^1_{01}\Gamma^2_{12}+\Gamma^1_{01}\Gamma^3_{13}\\
=&\Gamma^1_{01,0}-\Gamma^0_{00,1}+\Gamma^1_{01}\Gamma^0_{10}-\Gamma^1_{00}\Gamma^0_{11}+\Gamma^1_{01}\Gamma^2_{12}+\Gamma^1_{01}\Gamma^3_{13}\\
=&\partial_t\partial_r a-\partial_r\partial_t a+\partial_t b\partial_r a-e^{2(a-b)}\partial_r a e^{2(b-a)}\partial_t b+\partial_t b\frac{1}{r}+\partial_t b\frac{1}{r}\\
=&\frac{2}{r}\partial_t b(r,t)
\end{aligned}
$$

$R_{01}=\frac{2}{r}\partial_t b(r,t)$

$i=2$

- $$
\begin{aligned}
R_{02}=&\Gamma^\beta_{02,\beta}-\Gamma^\beta_{0\beta,2}+\Gamma^\alpha_{02}\Gamma^\beta_{\alpha\beta}-\Gamma^\alpha_{0\beta}\Gamma^\beta_{\alpha 2}\\
\\
=&\Gamma^0_{02,0}-\Gamma^0_{00,2}+\Gamma^\alpha_{02}\Gamma^0_{\alpha 0}-\Gamma^\alpha_{00}\Gamma^0_{\alpha 2}+\\
&\Gamma^1_{02,1}-\Gamma^1_{01,2}+\Gamma^\alpha_{02}\Gamma^1_{\alpha 1}-\Gamma^\alpha_{01}\Gamma^1_{\alpha 2}+\\
&\Gamma^2_{02,2}-\Gamma^2_{02,2}+\Gamma^\alpha_{02}\Gamma^2_{\alpha 2}-\Gamma^\alpha_{02}\Gamma^2_{\alpha 2}+\\
&\Gamma^3_{02,3}-\Gamma^3_{03,2}+\Gamma^\alpha_{02}\Gamma^3_{\alpha 3}-\Gamma^\alpha_{03}\Gamma^3_{\alpha 2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=&\Gamma^0_{02,0}-\Gamma^0_{00,2}+\Gamma^\alpha_{02}\Gamma^0_{\alpha 0}-\Gamma^\alpha_{00}\Gamma^0_{\alpha 2}\\
&\Gamma^1_{02,1}-\Gamma^1_{01,2}+\Gamma^\alpha_{02}\Gamma^1_{\alpha 1}-\Gamma^\alpha_{01}\Gamma^1_{\alpha 2}\\
&\Gamma^\alpha_{02}\Gamma^3_{\alpha 3}+\Gamma^\alpha_{02}\Gamma^3_{\alpha 3}\\
=&\Gamma^0_{02,0}-\Gamma^0_{00,2}+(\Gamma^0_{02}\Gamma^0_{00}+\Gamma^1_{02}\Gamma^0_{10})-(\Gamma^0_{00}\Gamma^0_{02}+\Gamma^1_{00}\Gamma^0_{12})\\
&\Gamma^1_{02,1}-\Gamma^1_{01,2}+(\Gamma^0_{02}\Gamma^1_{01}+\Gamma^1_{02}\Gamma^1_{11})-(\Gamma^1_{01}\Gamma^1_{02}+\Gamma^1_{01}\Gamma^1_{12})+\\
&\Gamma^1_{02}\Gamma^2_{12}+\Gamma^1_{02}\Gamma^3_{13}=0
\end{aligned}
$$

$i = 3$

- $$R_{03} = \Gamma^{\beta}_{03,\beta} - \Gamma^{\beta}_{0\beta,3} + \Gamma^{\alpha}_{03}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\alpha}_{0\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha 3}$$

$$\begin{aligned}
=&\Gamma^{0}_{03,0} - \Gamma^{0}_{00,3} + \Gamma^{\alpha}_{03}\Gamma^{0}_{\alpha 0} - \Gamma^{\alpha}_{00}\Gamma^{0}_{\alpha 3} + \\
&\Gamma^{1}_{03,1} - \Gamma^{1}_{01,3} + \Gamma^{\alpha}_{03}\Gamma^{1}_{\alpha 1} - \Gamma^{\alpha}_{01}\Gamma^{1}_{\alpha 3} + \\
&\Gamma^{2}_{03,2} - \Gamma^{2}_{02,3} + \Gamma^{\alpha}_{03}\Gamma^{2}_{\alpha 2} - \Gamma^{\alpha}_{02}\Gamma^{2}_{\alpha 3} + \\
&\Gamma^{3}_{03,3} - \Gamma^{3}_{03,3} + \Gamma^{\alpha}_{03}\Gamma^{3}_{\alpha 3} - \Gamma^{\alpha}_{03}\Gamma^{3}_{\alpha 3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
=&\Gamma^{0}_{03,0} - \Gamma^{0}_{00,3} + \Gamma^{\alpha}_{03}\Gamma^{0}_{\alpha 0} - \Gamma^{\alpha}_{00}\Gamma^{0}_{\alpha 3} \\
&\Gamma^{1}_{03,1} - \Gamma^{1}_{01,3} + \Gamma^{\alpha}_{03}\Gamma^{1}_{\alpha 1} - \Gamma^{\alpha}_{01}\Gamma^{1}_{\alpha 3} \\
&\Gamma^{\alpha}_{03}\Gamma^{3}_{\alpha 3} + \Gamma^{\alpha}_{03}\Gamma^{3}_{\alpha 3} \\
=&\Gamma^{0}_{03,0} - \Gamma^{0}_{00,3} + (\Gamma^{0}_{03}\Gamma^{0}_{00} + \Gamma^{1}_{03}\Gamma^{0}_{10}) - (\Gamma^{0}_{00}\Gamma^{0}_{03} + \Gamma^{1}_{00}\Gamma^{0}_{13}) + \\
&\Gamma^{1}_{03,1} - \Gamma^{1}_{01,3} + (\Gamma^{0}_{03}\Gamma^{1}_{01} + \Gamma^{1}_{03}\Gamma^{1}_{11}) - (\Gamma^{0}_{01}\Gamma^{1}_{03} + \Gamma^{1}_{01}\Gamma^{1}_{13}) + \\
&\Gamma^{1}_{03}\Gamma^{3}_{13} + \Gamma^{1}_{03}\Gamma^{2}_{12} = 0
\end{aligned}$$

$\underline{\mu = 1, \nu = i = 2, 3}$:

Το ν παίρνει αυτές τις τιμές , αφενός επειδή τώρα εξετάζουμε την περίπτωση όπου $\mu \neq \nu$ και αφετέρου , γιατί ο τανυστής Ricci είναι συμμετρικός, οπότε $R_{10} = R_{01}$.

$i = 2$

- $$R_{12} = \Gamma^{\beta}_{12,\beta} - \Gamma^{\beta}_{1\beta,2} + \Gamma^{\alpha}_{12}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\alpha}_{1\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha 2}$$

$$\begin{aligned}
=&\Gamma^{0}_{12,0} - \Gamma^{0}_{10,2} + \Gamma^{\alpha}_{12}\Gamma^{0}_{\alpha 0} - \Gamma^{\alpha}_{10}\Gamma^{0}_{\alpha 2} + \\
&\Gamma^{1}_{12,1} - \Gamma^{1}_{11,2} + \Gamma^{\alpha}_{12}\Gamma^{1}_{\alpha 1} - \Gamma^{\alpha}_{11}\Gamma^{1}_{\alpha 2} + \\
&\Gamma^{2}_{12,2} - \Gamma^{2}_{12,2} + \Gamma^{\alpha}_{12}\Gamma^{2}_{\alpha 2} - \Gamma^{\alpha}_{12}\Gamma^{2}_{\alpha 2} + \\
&\Gamma^{3}_{12,3} - \Gamma^{3}_{13,2} + \Gamma^{\alpha}_{12}\Gamma^{3}_{\alpha 3} - \Gamma^{\alpha}_{13}\Gamma^{3}_{\alpha 2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=0 - 0 + \Gamma^{\alpha}_{12}\Gamma^{0}_{\alpha 0} - 0+\\
&\quad 0 - 0 + \Gamma^{\alpha}_{12}\Gamma^{1}_{\alpha 1} - \Gamma^{\alpha}_{11}\Gamma^{1}_{\alpha 2}+\\
&\quad 0 - 0 + 0 - 0+\\
&\quad 0 - 0 + \Gamma^{\alpha}_{12}\Gamma^{3}_{\alpha 3} - \Gamma^{\alpha}_{13}\Gamma^{3}_{\alpha 2}\\
&=0 - 0 + 0 - 0+\\
&\quad 0 - 0 + 0 - 0+\\
&\quad 0 - 0 + 0 - 0+\\
&\quad 0 - 0 + (\Gamma^{2}_{12}\Gamma^{3}_{23}) - (\Gamma^{3}_{13}\Gamma^{3}_{23})\\
&=\frac{\cot\theta}{r} - \frac{\cot\theta}{r} = 0
\end{aligned}
$$

$i = 3$

- $$R_{13} = \Gamma^{\beta}_{13,\beta} - \Gamma^{\beta}_{1\beta,3} + \Gamma^{\alpha}_{13}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\alpha}_{1\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha 3}$$

$$
\begin{aligned}
&=\Gamma^{0}_{13,0} - \Gamma^{0}_{10,3} + \Gamma^{\alpha}_{13}\Gamma^{0}_{\alpha 0} - \Gamma^{\alpha}_{10}\Gamma^{0}_{\alpha 3}+\\
&\quad \Gamma^{1}_{13,1} - \Gamma^{1}_{11,3} + \Gamma^{\alpha}_{13}\Gamma^{1}_{\alpha 1} - \Gamma^{\alpha}_{11}\Gamma^{1}_{\alpha 3}+\\
&\quad \Gamma^{2}_{13,2} - \Gamma^{2}_{12,3} + \Gamma^{\alpha}_{13}\Gamma^{2}_{\alpha 2} - \Gamma^{\alpha}_{12}\Gamma^{2}_{\alpha 3}+\\
&\quad \Gamma^{3}_{13,3} - \Gamma^{3}_{13,3} + \Gamma^{\alpha}_{13}\Gamma^{3}_{\alpha 3} - \Gamma^{\alpha}_{13}\Gamma^{3}_{\alpha 3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=0 - 0 + 0 - 0+\\
&\quad 0 - 0 + 0 - 0+\\
&\quad 0 - 0 + 0 - 0+\\
&\quad 0 - 0 + 0 - 0 = 0
\end{aligned}
$$

$\underline{\mu = 2, \nu = i = 3}$:

- $$R_{23} = \Gamma^{\beta}_{23,\beta} - \Gamma^{\beta}_{2\beta,3} + \Gamma^{\alpha}_{23}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\alpha}_{2\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha 3}$$

$$
\begin{aligned}
&=\Gamma^{0}_{23,0} - \Gamma^{0}_{20,3} + \Gamma^{\alpha}_{23}\Gamma^{0}_{\alpha 0} - \Gamma^{\alpha}_{20}\Gamma^{0}_{\alpha 3}+\\
&\quad \Gamma^{1}_{23,1} - \Gamma^{1}_{21,3} + \Gamma^{\alpha}_{23}\Gamma^{1}_{\alpha 1} - \Gamma^{\alpha}_{21}\Gamma^{1}_{\alpha 3}+\\
&\quad \Gamma^{2}_{23,2} - \Gamma^{2}_{22,3} + \Gamma^{\alpha}_{23}\Gamma^{2}_{\alpha 2} - \Gamma^{\alpha}_{22}\Gamma^{2}_{\alpha 3}+\\
&\quad \Gamma^{3}_{23,3} - \Gamma^{3}_{23,3} + \Gamma^{\alpha}_{23}\Gamma^{3}_{\alpha 3} - \Gamma^{\alpha}_{23}\Gamma^{3}_{\alpha 3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=0 - 0 + 0 - 0+\\
&\quad 0 - 0 + 0 - 0+\\
&\quad 0 - 0 + 0 - 0+\\
&\quad 0 - 0 + 0 - 0 = 0
\end{aligned}
$$

$i = 3$

$$R_{31} = R_{13} = 0 \ , \ R_{32} = R_{23} = 0$$

$R_{\mu\nu} \quad \forall \quad \mu = \nu :$

$$\bullet \ R_{ii} = \Gamma^{\beta}_{ii,\beta} - \Gamma^{\beta}_{i\beta,i} + \Gamma^{\alpha}_{ii}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\alpha}_{i\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha i}$$

$$\begin{aligned} =&\Gamma^{0}_{ii,0} - \Gamma^{0}_{i0,i} + \Gamma^{\alpha}_{ii}\Gamma^{0}_{\alpha 0} - \Gamma^{\alpha}_{i0}\Gamma^{0}_{\alpha i} + \\ &\Gamma^{1}_{ii,1} - \Gamma^{1}_{i1,i} + \Gamma^{\alpha}_{ii}\Gamma^{1}_{\alpha 1} - \Gamma^{\alpha}_{i1}\Gamma^{1}_{\alpha i} + \\ &\Gamma^{2}_{ii,2} - \Gamma^{2}_{i2,i} + \Gamma^{\alpha}_{ii}\Gamma^{2}_{\alpha 2} - \Gamma^{\alpha}_{i2}\Gamma^{2}_{\alpha i} + \\ &\Gamma^{3}_{ii,3} - \Gamma^{3}_{i3,i} + \Gamma^{\alpha}_{ii}\Gamma^{3}_{\alpha 3} - \Gamma^{\alpha}_{i3}\Gamma^{3}_{\alpha i} \end{aligned}$$

$i = 0$

$$\bullet \ R_{00} = \Gamma^{\beta}_{00,\beta} - \Gamma^{\beta}_{0\beta,0} + \Gamma^{\alpha}_{00}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\alpha}_{0\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha 0}$$

$$\begin{aligned} =&\Gamma^{0}_{00,0} - \Gamma^{0}_{00,0} + \Gamma^{\alpha}_{00}\Gamma^{0}_{\alpha 0} - \Gamma^{\alpha}_{00}\Gamma^{0}_{\alpha 0} + \\ &\Gamma^{1}_{00,1} - \Gamma^{1}_{01,0} + \Gamma^{\alpha}_{00}\Gamma^{1}_{\alpha 1} - \Gamma^{\alpha}_{01}\Gamma^{1}_{\alpha 0} + \\ &\Gamma^{2}_{00,2} - \Gamma^{2}_{02,0} + \Gamma^{\alpha}_{00}\Gamma^{2}_{\alpha 2} - \Gamma^{\alpha}_{02}\Gamma^{2}_{\alpha 0} + \\ &\Gamma^{3}_{00,3} - \Gamma^{3}_{03,0} + \Gamma^{\alpha}_{00}\Gamma^{3}_{\alpha 3} - \Gamma^{\alpha}_{03}\Gamma^{3}_{\alpha 0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} =&\Gamma^{1}_{00,1} - \Gamma^{1}_{01,0} + (\Gamma^{0}_{00}\Gamma^{1}_{01} + \Gamma^{1}_{00}\Gamma^{1}_{11}) - (\Gamma^{0}_{01}\Gamma^{1}_{00} + \Gamma^{1}_{01}\Gamma^{1}_{10}) + \\ &0 - 0 + \Gamma^{1}_{00}\Gamma^{2}_{12} - 0 + \\ &0 - 0 + \Gamma^{1}_{00}\Gamma^{3}_{13} - 0 \\ =&\partial_r \left[e^{2(a-b)} \partial_r a \right] - \partial_t^2 b + \partial_t b \, \partial_t a + \partial_r b \, e^{2(a-b)} \partial_r a - e^{2(a-b)} \left(\partial_r a \right)^2 - \left(\partial_t b \right)^2 + 2 \frac{\partial_r a}{r} e^{2(a-b)} \\ =&e^{2(a-b)} \left[\left(\partial_r a \right)^2 + \left(\partial_r a \right)^2 \partial_r a \, \partial_r b + \frac{\partial_r a}{r} + \frac{\partial_r a}{r} \right] - \partial_t^2 b - \left(\partial_t b \right)^2 + \partial_t b \partial_t a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{00} =&e^{2(a-b)} \left[\left(\partial_r a \right)^2 + \left(\partial_r a \right)^2 - \partial_r a \, \partial_r b + \frac{\partial_r a}{r} + \frac{\partial_r a}{r} \right] - \partial_t^2 b - \left(\partial_t b \right)^2 \\ &+ \partial_t b \partial_t a \end{aligned}$$

$i = 1$

- $$\begin{aligned} R_{11} =& \Gamma^{\beta}_{11,\beta} - \Gamma^{\beta}_{1\beta,1} + \Gamma^{\alpha}_{11}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\alpha}_{1\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha 1} \\ \\ =& \Gamma^{0}_{11,0} - \Gamma^{0}_{10,1} + \Gamma^{\alpha}_{11}\Gamma^{0}_{\alpha 0} - \Gamma^{\alpha}_{10}\Gamma^{0}_{\alpha 1} + \\ & \Gamma^{1}_{11,1} - \Gamma^{1}_{11,1} + \Gamma^{\alpha}_{11}\Gamma^{1}_{\alpha 1} - \Gamma^{\alpha}_{11}\Gamma^{1}_{\alpha 1} + \\ & \Gamma^{2}_{11,2} - \Gamma^{2}_{12,1} + \Gamma^{\alpha}_{11}\Gamma^{2}_{\alpha 2} - \Gamma^{\alpha}_{12}\Gamma^{2}_{\alpha 1} + \\ & \Gamma^{3}_{11,3} - \Gamma^{3}_{13,1} + \Gamma^{\alpha}_{11}\Gamma^{3}_{\alpha 3} - \Gamma^{\alpha}_{13}\Gamma^{3}_{\alpha 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} =& \Gamma^{0}_{11,0} - \Gamma^{0}_{01,1} + \Gamma^{\alpha}_{11}\Gamma^{0}_{\alpha 0} - \Gamma^{\alpha}_{10}\Gamma^{0}_{\alpha 1} + \\ & 0 - \Gamma^{2}_{12,1} + \Gamma^{\alpha}_{11}\Gamma^{2}_{\alpha 2} - \Gamma^{\alpha}_{12}\Gamma^{2}_{\alpha 1} + \\ & 0 - \Gamma^{3}_{13,1} + \Gamma^{\alpha}_{11}\Gamma^{3}_{\alpha 3} - \Gamma^{\alpha}_{13}\Gamma^{3}_{\alpha 1} \\ =& \Gamma^{0}_{11,0} - \Gamma^{0}_{01,1} + (\Gamma^{0}_{11}\Gamma^{0}_{00} + \Gamma^{1}_{11}\Gamma^{0}_{10}) - (\Gamma^{0}_{10}\Gamma^{0}_{01} + \Gamma^{1}_{10}\Gamma^{0}_{11}) + \\ & 0 - \Gamma^{2}_{12,1} + \Gamma^{1}_{11}\Gamma^{2}_{12} - \Gamma^{2}_{12}\Gamma^{2}_{21} + \\ & 0 - \Gamma^{3}_{13,1} + \Gamma^{1}_{11}\Gamma^{3}_{13} - \Gamma^{3}_{13}\Gamma^{3}_{31} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} =& \partial_t \left[e^{2(b-a)} \partial_t b \right] - \partial_r^2 a + \partial_t a \, e^{2(b-a)} \, \partial_t b + \partial_r a \, \partial_r b - \left[(\partial_r a)^2 - e^{2(b-a)} \, (\partial_t b)^2 \right] \\ & - \partial_r \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{\partial_r b}{r} - \left(\frac{1}{r} \right)^2 - \partial_r \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{\partial_r b}{r} - \left(\frac{1}{r} \right)^2 \\ =& e^{2(b-a)} \partial_r^2 b + e^{2(b-a)} 2 \, (\partial_t b)^2 - e^{2(b-a)} 2 (\partial_t a)(\partial_t b) - \partial_r^2 a + e^{2(b-a)} (\partial_t a)(\partial_t b) + \\ & \partial_r a \partial_r b - (\partial_r a)^2 - e^{2(b-a)} (\partial_t b)^2 + \frac{2}{r^2} - \frac{2}{r^2} + \frac{2}{r} \partial_r b \\ =& e^{2(b-a)} \left[\partial_t^2 b + (\partial_t b)^2 - \partial_t a \partial_t b \right] - \left[\partial_r^2 a + (\partial_r a)^2 - \partial_r a \partial_r b - \frac{2}{r} \partial_r b \right] \end{aligned}$$

$$R_{11} = e^{2(b-a)} \left[\partial_t^2 b + (\partial_t b)^2 - \partial_t a \partial_t b \right] - \left[\partial_r^2 a + (\partial_r a)^2 - \partial_r a \partial_r b - \tfrac{2}{r} \partial_r b \right]$$

$i = 2$

- $$\begin{aligned} R_{22} =& \Gamma^{\beta}_{22,\beta} - \Gamma^{\beta}_{2\beta,2} + \Gamma^{\alpha}_{22}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\alpha}_{2\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha 2} \\ \\ =& \Gamma^{0}_{22,0} - \Gamma^{0}_{20,2} + \Gamma^{\alpha}_{22}\Gamma^{0}_{\alpha 0} - \Gamma^{\alpha}_{20}\Gamma^{0}_{\alpha 2} + \\ & \Gamma^{1}_{22,1} - \Gamma^{1}_{21,2} + \Gamma^{\alpha}_{22}\Gamma^{1}_{\alpha 1} - \Gamma^{\alpha}_{21}\Gamma^{1}_{\alpha 2} + \\ & \Gamma^{2}_{22,2} - \Gamma^{2}_{22,2} + \Gamma^{\alpha}_{22}\Gamma^{2}_{\alpha 2} - \Gamma^{\alpha}_{22}\Gamma^{2}_{\alpha 2} + \\ & \Gamma^{3}_{22,3} - \Gamma^{3}_{23,2} + \Gamma^{\alpha}_{22}\Gamma^{3}_{\alpha 3} - \Gamma^{\alpha}_{23}\Gamma^{3}_{\alpha 2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
=&0 - 0 + \Gamma^{\alpha}_{22}\Gamma^{0}_{\alpha 0} - 0 + \\
&\Gamma^{1}_{22,1} - 0 + \Gamma^{\alpha}_{22}\Gamma^{1}_{\alpha 1} - \Gamma^{\alpha}_{21}\Gamma^{1}_{\alpha 2} + \\
&0 - \Gamma^{3}_{23,2} + \Gamma^{\alpha}_{22}\Gamma^{3}_{\alpha 3} - \Gamma^{\alpha}_{23}\Gamma^{3}_{\alpha 2} \\
=&(\Gamma^{1}_{22}\Gamma^{0}_{10}) + \Gamma^{1}_{22,1} + (\Gamma^{1}_{22}\Gamma^{1}_{11}) - (\Gamma^{2}_{21}\Gamma^{1}_{22}) - \Gamma^{3}_{23,2} + (\Gamma^{1}_{22}\Gamma^{3}_{13}) - (\Gamma^{3}_{23}\Gamma^{3}_{32}) \\
=&(\partial_r a)\left(-re^{-2b}\right) + \partial_r\left(-re^{-2b}\right) + (\partial_r b)\left(-re^{-2b}\right) - \left(-re^{-2b}\right)\left(\frac{1}{r}\right) - \partial_\theta \cot\theta + \\
&\frac{1}{r}\left(-re^{-2b}\right) - (\cot\theta)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=&-re^{-2b}\partial_r a + re^{-2b}\partial_r b - e^{-2b} - \partial_\theta\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) - \cot^2\theta \\
=&e^{-2b}\left[r\left(\partial_r b - \partial_r a\right) - 1\right] - \left(\frac{-\sin^2\theta - \cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right) - \left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 \\
=&e^{-2b}\left[r\left(\partial_r b - \partial_r a\right) - 1\right] + \frac{1 - \cos^2\theta}{\sin^2\theta} \\
=&e^{-2b}\left[r\left(\partial_r b - \partial_r a\right) - 1\right] + 1
\end{aligned}
$$

$$
R_{22} = e^{-2b}\left[r\left(\partial_r b - \partial_r a\right) - 1\right] + 1
$$

$i = 3$

- $R_{33} = \Gamma^{\beta}_{33,\beta} - \Gamma^{\beta}_{3\beta,3} + \Gamma^{\alpha}_{33}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\alpha}_{3\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha 3}$

$$
\begin{aligned}
=&\Gamma^{0}_{33,0} - \Gamma^{0}_{30,3} + \Gamma^{\alpha}_{33}\Gamma^{0}_{\alpha 0} - \Gamma^{\alpha}_{30}\Gamma^{0}_{\alpha 3} + \\
&\Gamma^{1}_{33,1} - \Gamma^{1}_{31,3} + \Gamma^{\alpha}_{33}\Gamma^{1}_{\alpha 1} - \Gamma^{\alpha}_{31}\Gamma^{1}_{\alpha 3} + \\
&\Gamma^{2}_{33,2} - \Gamma^{2}_{32,3} + \Gamma^{\alpha}_{33}\Gamma^{2}_{\alpha 2} - \Gamma^{\alpha}_{32}\Gamma^{2}_{\alpha 3} + \\
&\Gamma^{3}_{33,3} - \Gamma^{3}_{33,3} + \Gamma^{\alpha}_{33}\Gamma^{3}_{\alpha 3} - \Gamma^{\alpha}_{33}\Gamma^{3}_{\alpha 3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=&0 - 0 + \Gamma^{\alpha}_{33}\Gamma^{0}_{\alpha 0} - 0 + \\
&\Gamma^{1}_{33,1} - 0 + \Gamma^{\alpha}_{33}\Gamma^{1}_{\alpha 1} - \Gamma^{\alpha}_{31}\Gamma^{1}_{\alpha 3} + \\
&\Gamma^{2}_{33,2} - 0 + \Gamma^{\alpha}_{33}\Gamma^{2}_{\alpha 2} - \Gamma^{\alpha}_{32}\Gamma^{2}_{\alpha 3} \\
=&\Gamma^{1}_{33}\Gamma^{0}_{10} + \Gamma^{1}_{33,1} + \Gamma^{1}_{33}\Gamma^{1}_{11} - \Gamma^{3}_{31}\Gamma^{1}_{33} + \Gamma^{2}_{33,2} + \Gamma^{1}_{33}\Gamma^{2}_{12} - \Gamma^{3}_{32}\Gamma^{2}_{33} \\
=&-re^{-2b}\sin^2\theta(\partial_r a) + \partial_r\left(-re^{-2b}\sin^2\theta\right) - re^{-2b}\sin^2\theta(\partial_r b) + re^{-2b}\sin^2\theta\left(\frac{1}{r}\right) \\
&\partial_\theta\left(-\sin\theta\cos\theta\right) + \frac{1}{r}(-re^{-2b}\sin^2\theta) - (-\sin\theta\cos\theta)\cot\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=&-re^{-2b}\sin^2\theta\,(\partial_r a+\partial_r b)-e^{-2b}\sin^2\theta+2re^{-2b}\sin^2\theta(\partial_r b)+\\
&\sin^2\theta-\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\\
=&e^{-2b}\left[r\left(\partial_r b-\partial_r a\right)-1\right]\sin^2\theta+(1-\cos^2\theta)=\left\{e^{-2b}\left[r\left(\partial_r b-\partial_r a\right)-1\right]+1\right\}\sin^2\theta\\
=&R_{22}\sin^2\theta
\end{aligned}
$$

$$
R_{33}=R_{22}\sin^2\theta
$$

Σύνοψη αποτελεσμάτων, τανυστή Ricci:

$$
\begin{aligned}
&R_{01}=R_{10}=\tfrac{2}{r}\partial_r b\\
&R_{00}=e^{2(a-b)}\left[(\partial_r a)^2+(\partial_r a)^2\,\partial_r a\,\partial_r b+\tfrac{\partial_r a}{r}+\tfrac{\partial_r a}{r}\right]-\partial_t^2 b-(\partial_t b)^2+\partial_t b\partial_t a\\
&R_{11}=e^{2(b-a)}\left[\partial_t^2 b+(\partial_t b)^2-\partial_t a\partial_t b\right]-\left[\partial_r^2 a+(\partial_r a)^2-\partial_r a\partial_r b-\tfrac{2}{r}\partial_r b\right]\\
&R_{22}=e^{-2b}\left[r\left(\partial_r b-\partial_r a\right)-1\right]+1\\
&R_{33}=\left\{e^{-2b}\left[r\left(\partial_r b-\partial_r a\right)-1\right]+1\right\}\sin^2\theta=R_{22}\sin^2\theta
\end{aligned}
$$

Σάυτό το σημείο είμαστε έτοιμοι να υπολογίσουμε το Ricci scalar. Παρ'όλα αυτά, μπορούμε να δείξουμε πως είναι ίσο με μηδέν , χωρίς να κάνουμε όλους τους υπολογισμούς ¨χειροκίνητα¨, χρησιμοποιώντας δηλαδή τα $R_{\mu\nu}$.
Ξεκινάμε από την εξίσωση *Einstein*

$$
\begin{aligned}
&R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=8\pi GT_{\mu\nu}\xrightarrow{\cdot g^{\mu\nu}}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}R=8\pi Gg^{\mu\nu}T_{\mu\nu}\longrightarrow\\
&R-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}R=8\pi Gg^{\mu\nu}\left(F_{\mu\rho}F^{\rho}_{\nu}-\frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\right)\longrightarrow\\
&R-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}R=8\pi G\left(F_{\mu\rho}F^{\mu\rho}-\frac{1}{4}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\right)\longrightarrow\\
&R\left(1-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}\right)=F_{\mu\rho}F^{\mu\rho}-F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\longrightarrow\\
&R\left(1-\frac{4}{2}\right)=F_{\mu\rho}F^{\mu\rho}-F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\longrightarrow-R=0\longrightarrow R=0
\end{aligned}
$$

Άρα και η εξίσωση *Einstein* θα γίνει:

$$
R_{\mu\nu}=8\pi GT_{\mu\nu} \tag{4.58}
$$

Αυτό που μένει τώρα, είναι να υπολογίσουμε τις συνιστώσες $T_{\mu\nu}$. Για να γίνει όμως αυτό, πρέπει πρώτα να βρούμε μία γενική μορφή για το $F_{\mu\nu}$. Όπως αναφέραμε και στην αρχή, τα πεδία συνδέονται με το $F_{\mu\nu}$ μέσω των εξισώσεων (6). Επειδή ψάχνουμε σφαιρικά συμμετρικές λύσεις, θα πρέπει τα παιδία μας να είναι ακτινικά, δηλαδή
$E_t = E_\theta = E_\phi = 0$ και $E_1 \equiv E_r = F_{tr} \equiv F_{01} = f(r,t) \neq 0$. Η γενική μορφή του $F_{\mu\nu}$ θα είναι:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & f(r,t) & 0 & 0 \\ -f(r,t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.59}$$

Τανυστής ορμής-ενέργειας

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\rho}F_\nu^\rho - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} = F_{\mu\rho}g^{\kappa\rho}F_{\nu\kappa} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}g^{\alpha\rho}F_{\alpha\beta}g^{\beta\sigma} \tag{4.60}$$

Όπου , μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$\begin{aligned} F^{\rho\sigma} =& g^{\alpha\rho}F_{\alpha\beta}g^{\beta\sigma} = \left(g^{0\rho}F_{0\beta} + g^{1\rho}F_{1\beta} + g^{2\rho}F_{2\beta} + g^{3\rho}F_{3\beta}\right)g^{\beta\sigma} \\ =& g^{0\rho}F_{00}g^{0\sigma} + g^{0\rho}F_{10}g^{1\sigma} + g^{0\rho}F_{20}g^{2\sigma} + g^{0\rho}F_{30}g^{3\sigma} + \\ & g^{1\rho}F_{01}g^{0\sigma} + g^{1\rho}F_{11}g^{1\sigma} + g^{1\rho}F_{12}g^{2\sigma} + g^{1\rho}F_{13}g^{3\sigma} + \\ & g^{2\rho}F_{02}g^{0\sigma} + g^{2\rho}F_{21}g^{1\sigma} + g^{2\rho}F_{22}g^{2\sigma} + g^{2\rho}F_{32}g^{3\sigma} + \\ & g^{3\rho}F_{03}g^{0\sigma} + g^{3\rho}F_{31}g^{1\sigma} + g^{3\rho}F_{32}g^{2\sigma} + g^{3\rho}F_{33}g^{3\sigma} \\ =& F_{01}\left(g^{0\rho}g^{1\sigma} - g^{1\rho}g^{0\sigma}\right) \end{aligned} \tag{4.61}$$

$\mu = \nu = 0:$

$$
\begin{aligned}
T_{00} =& F_{0\rho} g^{\kappa\rho} F_{0\kappa} - \frac{1}{4} g_{00} F_{\rho\sigma} F_{01} \left(g^{0\rho} g^{1\sigma} - g^{1\rho} g^{0\sigma} \right) \\
=& \left(F_{00} g^{\kappa 0} F_{0\kappa} + F_{01} g^{\kappa 1} F_{0\kappa} + F_{02} g^{\kappa 2} F_{0\kappa} + F_{03} g^{\kappa 3} F_{0\kappa} \right) - \\
& \frac{1}{4} g_{00} F_{01} \{ F_{0\sigma} \left(g^{00} g^{1\sigma} - g^{10} g^{0\sigma} \right) + F_{1\sigma} \left(g^{01} g^{1\sigma} - g^{11} g^{0\sigma} \right) + \\
& F_{2\sigma} \left(g^{02} g^{1\sigma} - g^{12} g^{0\sigma} \right) + F_{3\sigma} \left(g^{03} g^{1\sigma} - g^{13} g^{0\sigma} \right) \} \\
=& F_{01} g^{\kappa 1} F_{0\kappa} - \frac{1}{4} g_{00} F_{01} \left(F_{0\sigma} g^{00} g^{1\sigma} - F_{1\sigma} g^{11} g^{0\sigma} \right) \\
=& F_{01} g^{11} F_{01} - \frac{1}{4} g_{00} F_{01} \left(F_{01} g^{00} g^{11} - F_{10} g^{11} g^{00} \right) \\
=& g^{11} \left(F_{01} \right)^2 - \frac{1}{4} g_{00} \left(F_{01} \right)^2 g^{00} g^{11} - \frac{1}{4} g_{00} \left(F_{01} \right)^2 g^{11} g^{00} = \frac{1}{2} g^{11} \left(F_{01} \right)^2 \\
=& \frac{f^(r,t)}{2} e^{-2b(r,t)}
\end{aligned}
$$

$\mu = 0, \nu = 1:$

$$
\begin{aligned}
T_{01} =& F_{0\rho} g^{\kappa\rho} F_{1\kappa} - \frac{1}{4} g_{01} F_{\rho\sigma} F_{01} \left(g^{0\rho} g^{1\sigma} - g^{1\rho} g^{0\sigma} \right) = F_{0\rho} g^{\kappa\rho} F_{1\kappa} \\
=& F_{01} g^{\kappa 1} F_{1\kappa} = F_{01} \left(g^{01} F_{10} + g^{11} F_{11} + g^{21} F_{12} + g^{31} F_{13} \right) = 0
\end{aligned}
$$

$\mu = \nu = 1:$

$$
\begin{aligned}
T_{11} =& F_{1\rho} g^{\kappa\rho} F_{1\kappa} - \frac{1}{4} g_{11} F_{\rho\sigma} F_{01} \left(g^{0\rho} g^{1\sigma} - g^{1\rho} g^{0\sigma} \right) \\
=& F_{1\rho} g^{\kappa\rho} F_{1\kappa} - \frac{1}{4} g_{11} F_{01} \left(F_{\rho\sigma} g^{0\rho} g^{1\sigma} - F_{\rho\sigma} g^{1\rho} g^{0\sigma} \right) \\
=& F_{10} g^{00} F_{10} - \frac{1}{4} g_{11} F_{01} \left(F_{01} g^{00} g^{11} - F_{01} g^{11} g^{00} \right) \\
=& g^{00} \left(F_{10} \right)^2 - \frac{2}{4} g_{11} \left(F_{01} \right)^2 g^{00} g^{11} = \frac{1}{2} g^{00} \left(F_{01} \right)^2 = - \frac{f^2(r,t)}{2} e^{-2a(r,t)}
\end{aligned}
$$

$\mu = \nu = 2:$

$$
\begin{aligned}
T_{22} =& F_{2\rho} g^{\kappa\rho} F_{2\kappa} - \frac{1}{4} g_{22} F_{\rho\sigma} F_{01} \left(g^{0\rho} g^{1\sigma} - g^{1\rho} g^{0\sigma} \right) = - \frac{1}{4} g_{22} F_{\rho\sigma} F_{01} \left(g^{0\rho} g^{1\sigma} - g^{1\rho} g^{0\sigma} \right) \\
=& - \frac{1}{4} g_{22} F_{01} \left[F_{01} \left(g^{00} g^{11} - g^{10} g^{01} \right) + F_{10} \left(g^{01} g^{10} - g^{11} g^{00} \right) \right] \\
=& - \frac{1}{2} g_{22} (F_{01})^2 g^{00} g^{11} = \frac{f^2(r,t) r^2}{2} e^{-2(a+b)}
\end{aligned}
$$

$\mu = \nu = 3:$

$$\begin{aligned}
T_{33} =& F_{3\rho} g^{\kappa\rho} F_{3\kappa} - \frac{1}{4} g_{33} F_{\rho\sigma} F_{01} \left(g^{0\rho} g^{1\sigma} - g^{1\rho} g^{0\sigma} \right) = -\frac{1}{4} g_{33} F_{\rho\sigma} F_{01} \left(g^{0\rho} g^{1\sigma} - g^{1\rho} g^{0\sigma} \right) \\
=& -\frac{1}{4} g_{33} F_{01} \left[F_{01} \left(g^{00} g^{11} - g^{10} g^{01} \right) + F_{10} \left(g^{01} g^{10} - g^{11} g^{00} \right) \right] = -\frac{1}{2} g_{33} (F_{01})^2 g^{00} g^{11} \\
=& \left[\frac{f^2(r,t) r^2}{2} e^{-2(a+b)} \right] \sin^2\theta = T_{22} \sin^2\theta
\end{aligned}$$

Σύνοψη αποτελεσμάτων, τανυστή ορμής-ενέργειας:

$T_{00} = \frac{f(r,t)}{2} e^{-2b(r,t)}$

$T_{01} = 0$

$T_{11} = -\frac{f^2(r,t)}{2} e^{-2a(r,t)}$

$T_{22} = \frac{f^2(r,t) r^2}{2} e^{-2(a+b)}$

$T_{33} = \left[\frac{f^2(r,t) r^2}{2} e^{-2(a+b)} \right] \sin^2\theta = T_{22} \sin^2\theta$

Αντικαθιστούμε αυτά που βρήκαμε και λύνουμε την εξίσωση *Einstein* για τις διάφορες, μη μηδενικές συνιστώσες.

$\mu = 0, \nu = 1:$

$$R_{01} = 8\pi G T_{01} \longrightarrow R_{01} = 0 \longrightarrow \frac{2}{r} \partial_t b(r,t) = 0 \longrightarrow b(r,t) = b(r)$$

$\mu = \nu = 1:$

$$R_{11} = 8\pi G T_{11} \xrightarrow{\cdot e^{2a}} R_{11} e^{2a} = 8\pi G T_{11} e^{2a} \tag{4.62}$$

$\mu = \nu = 0:$

$$R_{00} = 8\pi G T_{00} \xrightarrow{\cdot e^{2b}} R_{00} e^{2b} = 8\pi G T_{00} e^{2b} \tag{4.63}$$

(4.64)

Προσθέτουμε τις εξισώσεις (4.63) και (4.62) .

$$e^{2a}R_{11}+e^{2b}R_{00}=8\pi G\left(e^{2a}T_{11}+e^{2b}T_{00}\right)\longrightarrow e^{2a}R_{11}+e^{2b}R_{00}=-\frac{f^2(r,t)}{2}+\frac{f^2(r,t)}{2}=0$$

$$e^{2a}R_{11}+e^{2b}R_{00}=$$

$$e^{2a}\left\{e^{2(b-a)}\left[\partial_t^2 b+(\partial_t b)^2-\partial_t a\partial_t b\right]-\left[\partial_r^2 a+(\partial_r a)^2-\partial_r a\partial_r b-\frac{2}{r}\partial_r b\right]\right\}+$$

$$e^{2b}\left\{e^{2(a-b)}\left[\partial_r^2 a+(\partial_r a)^2-\partial_r a\,\partial_r b+\frac{\partial_r a}{r}+\frac{\partial_r a}{r}\right]-\partial_t^2 b-(\partial_t b)^2+\partial_t b\partial_t a\right\}\overset{\partial_t b=0}{\longrightarrow}$$

$$-e^{2a}\left[\partial_r^2 a+(\partial_r a)^2-\partial_r a\partial_r b-\frac{2}{r}\partial_r b\right]+e^{2a}\left[\partial_r^2 a+(\partial_r a)^2-\partial_r a\partial_r b+\frac{2}{r}\partial_r a\right]=0\longrightarrow$$

$$e^{2a}\frac{2}{r}\left(\partial_r b+\partial_r a\right)=0\longrightarrow\partial_r\left(a+b\right)=0\longrightarrow\ a(r,t)+b(r)=K\qquad\text{(σταθερά)}$$

Τώρα, μπορούμε να πάμε στην εξίσωση (4.48) και να επαναπροσδιορίσουμε το dt σε $e^K dt = e^{(a+b)}dt$, οπότε για να μείνει το στοιχειώδες μήκος, αναλλοίωτο πρέπει

$$\begin{aligned}e^{2a}e^{2(a+b)}dt^2=e^{2a}dt^2\longrightarrow e^{2(a+b)}=1\longrightarrow a+b=0\longrightarrow a(r,t)=-b(r)\\ \longrightarrow a(r,t)=a(r)=-b(r)\end{aligned}\tag{4.65}$$

Αφού συσχετίσαμε τα a και b , το μόνο που χρειαζόμαστε, είναι να βρούμε και μία ακριβή μορφή του $f(r,t)$. Αυτό θα γίνει, χρησιμοποιώντας τις *εξισώσεις Maxwell* οι οποίες σε συναλλοίωτη μορφή, γράφονται:

$$g^{\mu\nu}\nabla_\mu F_{\nu\sigma}=0\tag{4.66}$$

$$\nabla_{[\mu}F_{\nu\sigma]}=0\tag{4.67}$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση (4.66), $\sigma=r\equiv 1$

$$g^{\mu\nu}\nabla_\mu F_{\nu 1}=0\longrightarrow g^{0\nu}\nabla_0 F_{\nu 1}+g^{1\nu}\nabla_1 F_{\nu 1}+g^{2\nu}\nabla_2 F_{\nu 1}+g^{3\nu}\nabla_3 F_{\nu 1}=0\longrightarrow$$

$$g^{00}\nabla_0 F_{01}=0\longrightarrow g^{00}\left(\partial_0 F_{01}-\Gamma^\alpha_{00}F_{\alpha 1}-\Gamma^\alpha_{01}F_{0\,\alpha}\right)=0\longrightarrow\partial_0 F_{01}-\Gamma^0_{00}F_{01}-\Gamma^1_{01}F_{01}=0$$

$$\begin{aligned}\partial_0 F_{01}-F_{01}\left(\Gamma^0_{00}+\Gamma^1_{01}\right)=0\longrightarrow\partial_t f(r,t)-f(r,t)\left(\partial_t b+\partial_t a\right)=0\longrightarrow\\ \partial_f(r,t)=0\longrightarrow f(r,t)=f(r)\longrightarrow F_{01}=f(r)\end{aligned}$$

Προκειμένου να βρούμε την ακριβή μορφή του, $f(r)$ πλέον, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ξανά την εξίσωση (4.65) σε συνδυασμό με μία ιδιότητα για αντισυμμετρικούς τανυστές (τάξης 2) η οποία μας λέει ότι:

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu}=\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\mu\left(\sqrt{|g|}F^{\mu\nu}\right)\tag{4.68}$$

Πάμε λοιπόν στην εξίσωση (4.66)

$$g^{\mu\nu}\nabla_\mu F_{\nu\sigma}=0\longrightarrow\nabla_\mu\left(g^{\mu\nu}F_{\nu\sigma}\right)-F_{\nu\sigma}\nabla_\mu g^{\mu\nu}=0\longrightarrow\nabla_\mu\left(g^{\mu\nu}F_{\nu\sigma}\right)=0\longrightarrow\nabla_\mu\left(F^{\mu}_{\sigma}\right)=0\longrightarrow$$

$$\nabla_\mu\left(g_{\sigma\nu}F^{\mu\nu}\right)\longrightarrow g_{\sigma\nu}\nabla_\mu F^{\mu\nu}+F^{\mu\nu}\nabla_\mu g_{\sigma\nu}=0\longrightarrow g_{\sigma\nu}\nabla_\mu F^{\mu\nu}=0\stackrel{(4.68)}{\longrightarrow}$$

$$g_{\sigma\nu}\left[\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\mu\left(\sqrt{|g|}F^{\mu\nu}\right)\right]=0$$

Για $\sigma=0$ έχουμε:

$$g_{0\nu}\left[\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\mu\left(\sqrt{|g|}F^{\mu\nu}\right)\right]=0\stackrel{\nu=0}{\longrightarrow}g_{00}\left[\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\mu\left(\sqrt{|g|}F^{\mu0}\right)\right]=0\stackrel{\mu=1}{\longrightarrow}$$

$$g_{00}\left[\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_1\left(\sqrt{|g|}F^{10}\right)\right]=0\longrightarrow\frac{1}{r^2\sin\theta}\,\partial_r\left(r^2\sin\theta F^{10}\right)=0\longrightarrow$$

$$\frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2F^{10}\right)=0\longrightarrow\partial_r(r^2F^{10})=0\stackrel{(4.61)}{\longrightarrow}\partial_r\left(r^2g^{00}g^{11}F_{10}\right)=0\stackrel{(4.65)}{\longrightarrow}\partial_r\left(r^2f(r)\right)=0\longrightarrow$$

$$f(r)=\frac{constant}{r^2}$$

Όπου , απ΄το θεώρημα του Gauss βρίσκουμε πως η σταθερά αυτή, ισούται με $\frac{Q}{\sqrt{4\pi}}$,όπου Q το συνολικό φορτίο της μαύρης τρύπας. Άρα,

$$f(r)=\frac{Q}{r^2\sqrt{4\pi}}\tag{4.69}$$

Ξέροντας την ακριβή μορφή του $f(r)$, είμαστε έτοιμοι πλέον να βρούμε τα $a(r)$ και $b(r)$. Λύνουμε την εξίσωση *Einstein* για $\mu=\nu=2$.

$$R_{22}=8\pi GT_{22}\longrightarrow$$

$$e^{-2b}\left[r\left(\partial_r b-\partial_r a\right)-1\right]+1=8\pi G\,\frac{f^2(r,t)r^2}{2}\,e^{-2(a+b)}\longrightarrow\partial_r\left(re^{2a}\right)=1-G\frac{Q^2}{r^2}\longrightarrow$$

$$re^{2a}=r+\frac{GQ^2}{r^2}+C\longrightarrow e^{2a(r)}=1+\frac{C}{r}+\frac{GQ^2}{r^2}$$

Για μηδενικό φορτίο, η λύση μας πρέπει να ταυτίζεται με την Schwarzschild, επομένως για τη σταθερά C πρέπει να ισχύει $C=-2GM$. Έτσι, καταλήγουμε στην τελική μορφή την μετρικής μας

$$ds^2=-\,\Upsilon dt^2+\Upsilon^{-1}dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\phi^2\tag{4.70}$$

$$=-\,\Upsilon dt^2+\Upsilon^{-1}dr^2+r^2d\Omega^2\tag{4.71}$$

$$\Upsilon(r)=1-\frac{2GM}{r}+\frac{GQ^2}{r^2}\tag{4.72}$$

Επομένως

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{GQ^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{GQ^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^{2}\text{[5]} \tag{4.74}$$

όπου M η μάζα της μαύρης τρύπας και Q το συνολικό της φορτίο. Στην πραγματικότητα μια ηλεκτρικά φορτισμένη μαύρη τρύπα θα εξουδετερωνόταν πολύ γρήγορα λόγω των αλληλεπιδράσεων με τα τριγύρω σωματιδία.

Ο επιπλέον όρος στο $\Upsilon(r)$ περιπλέκει λίγο τα πράγματα. Μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι στο κέντρο της τρύπας $r = 0$ έχουμε όντως ανωμαλία από τον υπολογισμό

$$R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{48M^2r^2 - 96MQ^2r + 56Q^2}{r^8}$$

όπως κάναμε και στην Schwarzschild. Η αντίστοιχη περίπτωση με την $r = 2GM$ για την Schwarzschild θα είναι αυτή που θα μηδενίζει το $g_{00} = \Upsilon(r)$ και προκύπτει για

$$r_\pm = GM \pm \sqrt{G^2M^2 - GQ^2} = GM \pm \sqrt{G\left(GM^2 - Q^2\right)} \tag{4.75}$$

Οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης εξαρτώνται από τις τιμές των G, M^2 και Q^2. Μελετάμε κάθε περίπτωση ξεχωριστά.

$GM^2 < Q^2$: Σε αυτή τη περίπτωση, το $\Upsilon(r)$ παραμένει πάντα θετικό και η μετρική δεν παρουσιάζει ιδιομορφία ως προς τις συντεταγμένες (t, r, θ, ϕ) μέχρι να φτάσουμε στο $r = 0$. Οι συντεταγμένες r παραμένουν χώροειδείς και οι συντεταγμένες t χρονοειδείς, αφού *δεν* αλλάζουν τα πρόσημα των g_{00} και g_{11}. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μόνο η ανωμαλία στο $r = 0$ και δεν καλύπτεται από κάποιον ορίζοντα γεγονότων. Αυτές τις ονομάζουμε ***γυμνές ανωμαλίες***(*n*aked singularities). Αφού δεν υπάρχει ορίζοντας γεγονότων, ένας παρατηρητής μπορεί να φτάσει μέχρι το $r = 0$ και να γυρίσει πίσω. Δηλαδή δεν υπάρχει αυτό το όριο που υπήρχε στην Schwarzschild πέρα από το οποίο η πληροφορία χάνεται. Αν όμως αναλύσει κανείς τις γεωδαισιακές θα δει ότι οι χρονοειδείς δεν φτάνουν την ανωμαλία, αντίθετα πλησιάζουν μέχρι ενός σημείου και μετά απομακρύνονται[6].

Γενικά δεν περιμένουμε να παρατηρήσουμε μια μαύρη τρύπα που προήλθε από βαρυτική κατάρρευση και για την οποία ισχύει ότι $GM^2 < Q^2$. Αυτή η συνθήκη υποδηλώνει πως η συνολική ενέργεια της τρύπας είναι μικρότερη από την ενέργεια που θα είχε λόγω της συνεισφοράς μόνο από το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο [5]. Δηλαδή σαν να λέει πως η συνεισφορά της μάζας στην ενέργεια είναι αρνητική. Οπότε θεωρούμε πως η συγκεκριμένη λύση δεν έχει φυσικό νόημα. Τέτοιου είδους λύσεις αποκλείονται και

---

[5]Σε αυτή την έκφραση έχουμε υπονοήσει ότι $c = 1$. Η πλήρης μορφή της μετρικής είναι

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2} + \frac{GQ^2}{r^2c^4}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} + \frac{GQ^2}{r^2c^4}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{4.74}$$

[6]Μόνο οι φωτοειδείς γεωδαιτικές φτάνουν στο $r = 0$.

από την ``***cosmic censorship conjecture***'' η οποία σε γενικές γραμμές, δηλώνει ότι

δεν μπορεί να δημιουργηθεί χωροχρονική ανωμαλία από βαρυτική κατάρρευση χωρίς να καλύπτεται από ορίζοντα γεγονότων

$GM^2 > Q^2$: Αυτή η περίπτωση είναι περισσότερο ρεαλιστική λύση μιας και η ενέργεια του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου είναι λιγότερη από τη συνολική ενέργεια της τρύπας. Εδώ οι συντελεστές της μετρικής (4.73) είναι θετικοί για μεγάλα και μικρά r αλλά γίνονται αρνητικοί στο διάστημα ανάμεσα στις τιμές $r_\pm = GM \pm \sqrt{G^2M^2 - GQ^2} = GM \pm \sqrt{G\,(GM^2 - Q^2)}$. Ξέροντας ότι μηδενίζονται για r_+ και r_- καταλαβαίνουμε ότι υπάρχουν ανωμαλίες στα σημεία αυτά, είτε πραγματικές χωροχρονικές ανωμαλίες είτε ανωμαλίες λόγω του συστήματος συντεταγμένων που χρησιμοποιούμε. Με μια αλλαγή στις συντεταγμένες όπως κάναμε στην περίπτωση της Schwarzschild μπορούμε να δούμε ότι απαλείφονται οι ανωμαλίες και για τις δυο τιμές του r, οπότε οφείλονταν στην επιλογή του συστήματος αναφοράς.

Η ανωμαλία στο $r = 0$ είναι μια χρονοειδής γραμμή και όχι χωροειδής όπως στην περίπτωση της Schwarzschild. Καθώς ένας παρατηρητής κινείται από μακριά προς το κέντρο της μαύρης τρύπας, η επιφάνεια $r = r_+$ παίζει τον ίδιο ρόλο που έπαιζε η τιμή $r = 2GM$ για την Schwarzschild. Η ακτινική, χωρική συντεταγμένη γίνεται χρονική και η χρονική ακτινική. Ο κώνος φωτός αντιστρέφεται και ο παρατηρητής κινείται αναγκαστικά προς το r_-. Αυτή η αναγκαστική πτώση σταματάει όταν φτάσει στο r_- γιατί τα πρόσημα στη μετρική ξαναλλάζουν και η συντεταγμένη r γίνεται πάλι χώρικη και η t χρονική. Για τη ακρίβεια, ο παρατηρητής μπορεί να επιλέξει αν θα κινειθεί προς το $r = 0$ ή αν θα πάει πίσω προς το r_+ περνώντας μέσα από την επιφάνεια $r = r_-$. Στη δεύτερη περίπτωση, καθώς περνάει από το $r = r_-$ κινούμενος προς τα έξω, το r θα ξαναγίνει χρονοειδής συντεταγμένη αλλά με *αντίθετη* κατεύθυνση. Δηλαδή ο παρατηρητής κινείται, αναγκαστικά πάλι, στην κατεύθυνση όπου το r αυξάνεται μέχρι να φτάσει στο r_+ και εν τέλει να βγει εξωτερικά της τρύπας.

Αλλάζοντας σύστημα αναφοράς και θέτοντας

$$k_\pm = \frac{r_\pm - r_\mp}{2r_\pm^2} \ , \ d\tilde{r} = \frac{dr}{\Upsilon(r)} \tag{4.76}$$

μπορούμε να αλλάξουμε τις (t, r, θ, ϕ) σε $(U^\pm, V^\pm, \theta, phi)$ οι οποίες ορίζονται ως

$$U^\pm = -e^{-k_\pm(t-\tilde{r})} \ , \ V^\pm = e^{k_\pm(t+\tilde{r})} \tag{4.77}$$

και το στοιχείο μήκους (4.73) παίρνει τη μορφή

$$ds^2 = -\frac{r_+r_-e^{-2k_+r}}{r^2k_+^2}\left(\frac{r_-}{r-r_-}\right)^{\frac{k_+}{k_-}-1} dU^+dV^+ + r^2d\Omega^2 \quad (r > r_-) \tag{4.78}$$

$$ds^2 = -\frac{r_+r_-e^{-2k_-r}}{r^2k_-^2}\left(\frac{r_+}{r_+-r}\right)^{\frac{k_-}{k_+}-1} dU^-dV^- + r^2d\Omega^2 \quad (r \le r_-) \tag{4.79}$$

$GM^2 = Q^2$: Αυτή η περίπτωση είναι γνωστή ως ακραία Reissner-Nordstrom λύση(*extreme* Reissner-Nordstrom solution) και την μελετούν συχνά όσοι ασχολούνται με κβαντική βαρύτητα και το παράδοξο της απώλειας πληροφορίας(information lost paradox). Ο όρος $\Upsilon(r) = 1 - \frac{2GM}{r} + \frac{GQ^2}{r^2}$ μηδενίζεται μόνο για $r = GM$. Αυτό δείχνει πως η επιφάνεια $r = GM$ είναι ορίζοντας γεγονότων αλλά η συντεταγμένη r δεν γίνεται σε καμία περιοχή χρονική όπως στις προηγούμενες περιπτώσεις. Οι δύο ορίζοντες που είχαμε στην προηγούμενη περίπτωση, συγκλίνουν στο $r = GM$ καθώς $GM^2 \to Q^2$.

Κεφάλαιο 5

Μελανές οπές συζευγμένες με βαθμωτά πεδία

5.1 Λύση MTZ

Ξεκινάμε από την δράση MTZ η οποία περιγράφει μια τροποποιημένη 4-διάστατη βαρύτητα με αρνητική κοσμολογική σταθερά Λ. Η τροποποίηση γίνεται με την εισαγωγή ενός βαθμωτού πεδίου.

$$I[g_{\mu\nu}, \phi, \partial_\mu \phi] = \int \mathrm{d}^4 x \sqrt{-g} \left[\frac{R - 2\Lambda}{16\pi G} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right] \tag{5.1}$$

Όπου

$$V(\phi) = -\frac{3}{4\pi G \ell^2} \sinh^2 \sqrt{\frac{4\pi G}{3}} \, \phi \, , \quad \Lambda = -3\ell^2 \, , \quad g \equiv \det(g_{\mu\nu}) \tag{5.2}$$

με ℓ να είναι η ακτίνα του χώρου Anti-de Sitter(AdS). Οι πρώτοι δύο όροι είναι η δράση *Einstein-Hilbert*, που δίνει την κλασσική θεωρία βαρύτητας, την Γενική Σχετικότητα, ενώ οι δύο τελευταίοι είναι ο κινητικός και ο δυναμικός όρος της δράσης *Klein-Gordon*, μιας και το πεδίο μας είναι βαθμωτό. Οι παράγωγοι δεν είναι συναλλοίωτες επειδή για τα βαθμωτά πεδία ταυτίζονται με τις κανονικές. Επίσης, παρατηρούμε πως δεν υπάρχει άμμεση σύζευξη του βαθμωτού πεδίου με την καμπυλότητα, αλλά μόνο έμμεση, μέσω του πεδίου της μετρικής. Επομένως, η δράση που επιλέξαμε, είναι της μορφής:

$$I[g_{\mu\nu}, \phi, \partial_\mu \phi] = I_{E-H}[g_{\mu\nu}] + I_{K-G}[g_{\mu\nu}, \phi, \partial_\mu \phi]$$

Για μικρές μεταβολές του βαθμωτού πεδίου ($\phi \to \phi + \delta\phi$), οι μεταβολές στη συνολική δράση θα είναι:

$$\phi \to \phi + \delta\phi \Longrightarrow \delta I[g_{\mu\nu}, \phi, \partial_\mu \phi] = I_{gravity} + \delta I_{K-G}$$

Όπου

$$\delta I_{K-G} = \int \mathrm{d}^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial_\mu(\delta\phi)}\delta(\partial_\mu \phi)\right] = \ldots =$$
$$= \int \mathrm{d}^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial(\partial_\mu \phi)}\right)\right]\delta\phi$$

Για να είναι στάσιμη η δράση, πρέπει η μεταβολή να γίνει μηδέν και ο μόνός τρόπος είναι να ικανοποιούνται οι εξισώσεις $Euler - Lagrange$[1] για το πεδίο ϕ, επομένως:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial(\partial_\mu \phi)}\right) = 0 \longrightarrow \sqrt{-g}\left(-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\phi} + \partial_\mu \partial^\mu \phi\right) = 0$$

$$g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi - \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\phi} = 0 \longrightarrow \Box\phi - \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\phi} = 0 \tag{5.5}$$

Όπου η τελευταία σχέση είναι προφανώς η εξίσωση Klein-Gordon στο πλαίσιο της γενικής σχετικότητας, δηλαδή σε καμπυλομένο χωροχρόνο. Οπότε, για μικρές μεταβολές ως προς το πεδίο ϕ βρήκαμε τις εξισώσεις κίνησής του. Να σημειώσουμε εδώ, πως για να βγάλουμε τις εξισώσεις $Euler - Lagrange$ και να ισχύει η παραπάνω ανάλυση ,πρέπει να θεωρήσουμε πως οι μεταβολές του πεδίου , μηδενίζονται στο σύνορο, ή φθίνουν ασυμπτωτικά προς το άπειρο, αν ολοκληρώνουμε σ΄όλο τον χώρο.

Θα ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία και για την μετρική. Κάνοντας μικρές μεταβολές ως προς το $g_{\mu\nu}$ θα βρούμε τις εξισώσεις κίνησής του, που θα είναι οι εξ.$Einstein$. Παρατηρείστε επίσης, πως στην μεταβολή της δράσης για το βαθμωτό πεδίο (δI_{matter}), για να μπορέσουμε να βγάλουμε τις εξισώσεις $Euler - Lagrange$, έπρεπε να βγάλουμε στο ολοκλήρωμα, ένα κοινό παράγοντα $\delta\phi$. Με την ίδια λογική, τώρα θα προσπαθήσουμε να βγάλουμε κοινό παραγοντά το $\delta g^{\mu\nu}$.

Οπότε για $g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ έχουμε:

$$g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} \Longrightarrow \delta I[g_{\mu\nu}, \phi, \partial_\mu\phi] = \delta I_{gravity} + \delta I_{matter}$$

[1] Η εξαγωγή των εξισώσεων γίνεται χρησιμοποιόντας το παρακάτω

Θεώρημα 1 *(Fundamental Lemma of Calculus). Αν*

$$\int_{x_1}^{x_2} \phi(x)n(x)dx = 0 \tag{5.3}$$

όπου $\phi(x)$ συνεχής και $n(x)$ 2-φορές παραγωγίσιμη και επιπλέον $n(x_1) = n(x_2) = 0$ (μηδενισμός στα όρια) τότε

$$\phi(x) = 0 \text{ στο } [x_1, x_2] \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned}\delta I =& \int \mathrm{d}^4x \Big\{ \frac{1}{16\pi G} \left[\delta\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\right) - 2\Lambda\delta\left(\sqrt{-g}\right)\right] - \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\delta\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\right) - V\left(\phi\right)\delta\left(\sqrt{-g}\right) \Big\} \\ =& \int \mathrm{d}^4x \Big\{ \frac{1}{16\pi G} \left[\delta\left(\sqrt{-g}\right)g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + \sqrt{-g}\delta\left(g^{\mu\nu}\right)R_{\mu\nu} + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\left(R_{\mu\nu}\right) - 2\Lambda\delta\left(\sqrt{-g}\right)\right] \\ &- \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\left[\delta\left(\sqrt{-g}\right)g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}\delta\left(g^{\mu\nu}\right)\right] - V\left(\phi\right)\delta\left(\sqrt{-g}\right) \Big\} \end{aligned} \tag{5.6}$$

Θα εκφράσουμε τα $\delta R_{\mu\nu}$ και $\delta\sqrt{-g}$ συναρτήσει του $\delta g^{\mu\nu}$.

$$\begin{aligned}\delta\left(R_{\mu\nu}\right) =& \delta\left(R^{\beta}_{\mu\beta\nu}\right) \\ =& \partial_\beta\left(\delta\Gamma^\beta_{\mu\nu}\right) - \partial_\nu\left(\delta\Gamma^\beta_{\mu\beta}\right) + \left(\delta\Gamma^\beta_{\beta\lambda}\right)\Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \\ & \Gamma^\beta_{\beta\lambda}\left(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right) - \left(\delta\Gamma^\beta_{\nu\lambda}\right)\Gamma^\lambda_{\mu\beta} - \Gamma^\beta_{\nu\lambda}\left(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\beta}\right)\end{aligned}$$

Γράφουμε τον πρώτο,τέταρτο,πέμπτο και έκτο όρο μαζί στην αρχή και στο τέλος προσθαφαιρούμε τον όρο $\Gamma^\beta_{\nu\lambda}\left(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\beta}\right)$ και έχουμε:

$$\begin{aligned}=& \partial_\beta\left(\delta\Gamma^\beta_{\mu\nu}\right) + \Gamma^\beta_{\beta\lambda}\left(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right) - \left(\delta\Gamma^\beta_{\nu\lambda}\right)\Gamma^\lambda_{\mu\beta} - \Gamma^\beta_{\nu\lambda}\left(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\beta}\right) \\ &- \partial_\nu\left(\delta\Gamma^\beta_{\mu\beta}\right) + \left(\delta\Gamma^\beta_{\beta\lambda}\right)\Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \Gamma^\beta_{\nu\lambda}\left(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\beta}\right) - \Gamma^\beta_{\nu\lambda}\left(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\beta}\right)\end{aligned}$$

Εναλλάσω μεταξύ τους, τα β και λ στον τέταρτο και τον τελευταιο όρο.

$$\begin{aligned}=& \left(\partial_\beta\delta\Gamma^\beta_{\mu\nu} + \Gamma^\beta_{\beta\lambda}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \delta\Gamma^\beta_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\beta} - \Gamma^\lambda_{\nu\beta}\delta\Gamma^\beta_{\mu\lambda}\right) \\ &- \left(\partial_\nu\delta\Gamma^\beta_{\mu\beta} - \delta\Gamma^\beta_{\beta\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\beta_{\nu\lambda}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\beta} + \Gamma^\lambda_{\nu\beta}\delta\Gamma^\beta_{\mu\lambda}\right) \\ =& \nabla_\beta\delta\Gamma^\beta_{\mu\nu} - \nabla_\nu\delta\Gamma^\beta_{\mu\beta}\end{aligned}$$

Όπου χρησιμοποιήσαμε την σχέση

$$\nabla_\nu\Gamma^\beta_{\mu\beta} = \partial_\nu\Gamma^\beta_{\mu\beta} + \Gamma^\lambda_{\nu\beta}\Gamma^\beta_{\mu\lambda} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^\beta_{\lambda\beta} - \Gamma^\beta_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\beta}$$

Επομένως, δείξαμε ότι

$$\delta\left(R_{\mu\nu}\right) = \delta\left(R^\beta_{\mu\beta\nu}\right) = \nabla_\beta\delta\Gamma^\beta_{\mu\nu} - \nabla_\nu\delta\Gamma^\beta_{\mu\beta} \tag{5.7}$$

Αντικαθιστούμε αυτό που βρήκαμε στην σχέση (5.6), της οποίας ο τρίτος όρος, γίνεται:

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\left(R_{\mu\nu}\right) =& \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\left[\nabla_\beta\delta\Gamma^\beta_{\mu\nu} - \nabla_\nu\delta\Gamma^\beta_{\mu\beta}\right] = \sqrt{-g}\left[g^{\mu\nu}\nabla_\beta\delta\Gamma^\beta_{\mu\nu} - g^{\mu\nu}\nabla_\nu\delta\Gamma^\beta_{\mu\beta}\right] \\ =& \sqrt{-g}\left[\nabla_\beta\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\beta_{\mu\nu}\right) - \nabla_\nu\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\beta_{\mu\beta}\right) - \delta\Gamma^\beta_{\mu\nu}\nabla_\beta g^{\mu\nu} + \delta\Gamma^\beta_{\mu\beta}\nabla_\nu g^{\mu\nu}\right] \\ =& \sqrt{-g}\left[\nabla_\beta\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\beta_{\mu\nu}\right) - \nabla_\nu\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\beta_{\mu\beta}\right)\right]\end{aligned}$$

Εναλλάσουμε τα ν και β στον τελευταίο όρο

$$
\begin{aligned}
&=\sqrt{-g}\left[\nabla_\beta\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\beta_{\mu\nu}\right)-\nabla_\beta\left(g^{\mu\beta}\delta\Gamma^\nu_{\mu\nu}\right)\right]\\
&=\sqrt{-g}\nabla_\beta\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\beta_{\mu\nu}-g^{\mu\beta}\delta\Gamma^\nu_{\mu\nu}\right)
\end{aligned}
$$

Αν θυμηθούμε τώρα, πως αυτός ο όρος ολοκληρώνεται σε έναν τετρα-όγκο, η παρουσία του ∇_β μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα του *Stokes* για διανυσματικά πεδία και να περάσουμε το ολοκλήρωμα στο σύνορο. Όμως, στο σύνορο όλες οι μεταβολές μηδενίζονται, δηλαδή:

$$
\delta\Gamma^\beta_{\mu\nu}\to 0 \Longrightarrow \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\left(R_{\mu\nu}\right)=0 \tag{5.8}
$$

Άρα ο τρίτος όρος στην εξίσωση (5.6) μηδενίζεται. Πάμε τώρα να εκφράσουμε το $\delta\left(\sqrt{-g}\right)$ συναρτήσει του $g^{\mu\nu}$. Μπορούμε να γράψουμε τη μετρική σαν ανάπτυγμα συμπαραγόντων (*cofactors*).

$$
\det g_{\mu\nu}\equiv g=g_{\mu 1}C_{\mu 1}+\ldots+g_{\mu\nu}C_{\mu\nu} \tag{5.9}
$$

Όπου ο συμπαράγοντας του στοιχείου $g_{\mu\nu}$ ορίζεται ως

$$
C_{\mu\nu}=(-1)^{\mu+\nu}M_{\mu\nu} \tag{5.10}
$$

Και το $M_{\mu\nu}$ είναι η ορίζουσα του $g_{\mu\nu}$ αν αφαιρέσω την μ-γραμμή και την ν-στήλη(ελλάσον ορίζουσα, *minor*). Από τις δύο παραπάνω σχέσεις μπορούμε να γράψουμε

$$
g=\sum_\nu g_{\mu\nu}C_{\mu\nu}=\sum_\nu g_{\mu\nu}M_{\mu\nu}\left(-1\right)^{\mu+\nu} \tag{5.11}
$$

Στην παραπάνω σχέση, μπορεί να έχουμε άθροιση, όμως για κάθε ν ξεχωριστά ισχύει ότι:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}}=(-1)^{\mu+\nu}M_{\mu\nu}\longrightarrow\partial g=(-1)^{\mu+\nu}M_{\mu\nu}\partial g_{\mu\nu}\longrightarrow\frac{1}{\partial g}=\frac{1}{(-1)^{\mu+\nu}M_{\mu\nu}}\partial g^{\mu\nu}\\
&\partial g^{\mu\nu}=\frac{1}{\partial g}(-1)^{\mu+\nu}M_{\mu\nu}\longrightarrow g^{\mu\nu}=\frac{1}{g}(-1)^{\mu+\nu}M_{\mu\nu}=\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}}\longrightarrow\\
&\boldsymbol{\delta g}=gg^{\mu\nu}\boldsymbol{\delta g_{\mu\nu}}
\end{aligned} \tag{5.12}
$$

Και τώρα θα συνδέσουμε μεταξύ τους τα $\delta g_{\mu\nu}$ και $\delta g^{\mu\nu}$. Ξεκινάμε από την γνωστή σχέση:

$$
\begin{aligned}
g_{\mu\sigma}g^{\sigma\nu}=\delta^\nu_\mu &\longrightarrow\delta\left(g_{\mu\sigma}g^{\sigma\nu}\right)=\delta\left(\delta^\nu_\mu\right)\longrightarrow\delta g_{\mu\sigma}\,g^{\sigma\nu}+g_{\mu\sigma}\,\delta g^{\nu\sigma}=0\\
&\xrightarrow{\cdot g_{\nu\alpha}}\delta g_{\mu\sigma}\,g^{\sigma\nu}g_{\nu\alpha}+g_{\mu\sigma}\,g_{\nu\alpha}\delta g^{\nu\sigma}=0\longrightarrow\delta g_{\mu\alpha}=-g_{\mu\sigma}g_{\nu\alpha}\delta g^{\sigma\nu}\\
&\longrightarrow\boldsymbol{\delta g_{\mu\nu}}=-g_{\mu\sigma}g_{\nu\alpha}\boldsymbol{\delta g^{\sigma\alpha}}
\end{aligned} \tag{5.13}
$$

Από τις σχέσεις (5.12) και (5.13) έχουμε:

$$
\begin{aligned}
\delta g=-gg^{\mu\nu}g_{\mu\sigma}g_{\nu\sigma}\delta g^{\sigma\alpha}&\longrightarrow\delta g=-g\delta^\nu_\sigma g_{\nu\alpha}\delta g^{\sigma\alpha}\longrightarrow\\
\delta g=-gg_{\nu\alpha}\delta g^{\nu\alpha}&\longrightarrow\boldsymbol{\delta g}=-gg_{\mu\nu}\boldsymbol{\delta g^{\mu\nu}}
\end{aligned} \tag{5.14}
$$

Επομένως τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε $\delta\left(\sqrt{-g}\right)$

$$
\begin{aligned}
\delta\left(\sqrt{-g}\right) &= \frac{-1}{2\sqrt{-g}}\delta g \xrightarrow{(5.14)} \delta\left(\sqrt{-g}\right) = \frac{-1}{2\sqrt{-g}} g g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{-g}}{-g}\right) g g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}
\end{aligned}
$$

$$
\boldsymbol{\delta}\left(\sqrt{-\boldsymbol{g}}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\boldsymbol{\delta g^{\mu\nu}} \tag{5.15}
$$

Πέρα από το $\delta g^{\mu\nu}$ θέλαμε και το $\sqrt{-g}$ για να μπορεί να βγεί και αυτό κοινός παράγοντας έτσι ώστε να είναι βαθμωτή ποσότητα ολόκληρη η Λαγκρανζιανή μας. Όταν κάνουμε μεταβολές ως προς την μετρική, το στοιχειώδες κομμάτι όγκου που ολοκληρώνουμε, επηρεάζεται από αυτές τις μεταβολές [2]. Οπότε, το $\sqrt{-g}$ κάνει την Λαγκρανζιανή μας βαθμωτή ποσότητα άρα και ανεξάρτητη από το στοιχειώδη όγκο. Στην ουσία την μετατρέπουμε σε Λαγκρανζιανή πυκνότητα. Σάυτό το σημείο, μπορούμε να πάμε και να αντικαταστήσουμε ότι βρήκαμε στην εξίσωση (5.6), δηλαδή τις σχέσεις (5.15) και (5.13).

$$
\begin{aligned}
\delta I = \int \mathrm{d}^4x \Big\{ &\frac{1}{16\pi G}\left[\delta\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\right) - 2\Lambda\delta\left(\sqrt{-g}\right)\right] \\
&-\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\delta\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\right) - V(\phi)\,\delta\left(\sqrt{-g}\right)\Big\}
\end{aligned}
\tag{5.16}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \mathrm{d}^4x \Big\{ \frac{1}{16\pi G}\left[\delta\left(\sqrt{-g}\right)g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + \sqrt{-g}\delta\left(g^{\mu\nu}\right)R_{\mu\nu} + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\left(R_{\mu\nu}\right) - 2\Lambda\delta\left(\sqrt{-g}\right)\right] \\
&\quad -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\left[\delta\left(\sqrt{-g}\right)g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}\delta\left(g^{\mu\nu}\right)\right] - V(\phi)\,\delta\left(\sqrt{-g}\right)\Big\} \\
&= \int \mathrm{d}^4x \Bigg\{ \frac{1}{16\pi G}\left[-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + \sqrt{-g}R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}\Lambda\right] \\
&\quad -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\left[-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\right] + \frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}V(\phi)\Bigg\} \\
&= \int \mathrm{d}^4x \Bigg\{ \frac{\sqrt{-g}}{16\pi G}\left(-\frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}\right) \\
&\quad +\frac{1}{4}\sqrt{-g}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\sqrt{-g}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi\delta g^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}V(\phi)\Bigg\}
\end{aligned}
$$

Βγάζουμε από έξω το $\delta g^{\alpha\beta}$

$$\delta I = \int \mathrm{d}^4 x \sqrt{-g} \Bigg\{ \frac{1}{16\pi G}\left(-\frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta}\right)$$

$$+ \frac{1}{4}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi g_{\alpha\beta}g^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi + \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}V\left(\phi\right)\Bigg\}\delta g^{\alpha\beta}$$

Για να ισούται το πραπάνω ολοκλήρωμα με μηδέν, πρέπει η παράσταση μέσα στις αγκύλες να μηδενίζεται, σύμφωνα με το θεώρημα που χρησιμοποιήσαμε και προηγουμένως. Αυτές είναι και οι εξισώσεις κίνησης που ψάχναμε.

$$\frac{1}{16\pi G}\left(-\frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta}\right) + \frac{1}{4}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi g_{\alpha\beta}g^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi + \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}V\left(\phi\right) = 0 \rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} = 16\pi G\left(-\frac{1}{4}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi g_{\alpha\beta}g^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}V\left(\phi\right)\right) \rightarrow$$

$$G_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} = 8\pi G\left(-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + \partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi - g_{\alpha\beta}V\left(\phi\right)\right)$$

$$G_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} = 8\pi G T_{\alpha\beta} \tag{5.17}$$

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\alpha\beta}V\left(\phi\right) \tag{5.18}$$

Οπότε όλες μαζί, οι εξισώσεις κίνησης, της μετρικής και του βαθμωτού πεδίου, για την συγκεκριμένη δράση είναι:

$$G_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} = 8\pi G T_{\alpha\beta} \tag{5.19}$$

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\alpha\beta}V\left(\phi\right) \tag{5.20}$$

$$g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi - \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\phi} = 0 \tag{5.21}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις ικανοποιούνται από την στατική λύση

$$ds^2 = \frac{r\left(r+2G\mu\right)}{\left(r+G\mu\right)^2}\left[-\left(\frac{r^2}{\ell^2} - \left(1+\frac{G\mu}{r}\right)^2\right)dt^2 + \left(\frac{r^2}{\ell^2} - \left(1+\frac{G\mu}{r}\right)^2\right)^{-1}dr^2 + r^2 d\sigma^2\right] \tag{5.22}$$

με τοπολογία $\mathbb{R}^2 \times \Sigma$, όπου το Σ είναι μια δισδιάστατη πολλαπλότητα με αρνητική σταθερή καμπυλότητα και $d\sigma^2$ είναι η μετρική της. Το βαθμωτό πεδίο δίνεται από τη σχέση

$$\phi = \sqrt{\frac{3}{4\pi G}}\tanh^{-1}\frac{G\mu}{r+G\mu} \tag{5.23}$$

Με

$$\mu = \frac{4\pi M}{\sigma}$$

όπου M είναι η μάζα της μαύρης τρύπας και σ το εμβαδόν της πολλαπλότητας Σ. Η σχέση (5.23) συνδέει το βαθμωτό πεδίο με το μ που είναι παράμετρος που καθορίζει τη λύση μας. Επομένως καταλαβαίνουμε ότι και το πεδίο ϕ επηρεάζει τη λύση μας, έστω και δευτερογενώς. Η ύπαρξη μιας επιπλέον παραμέτρου (στην περίπτωσή μας η ϕ) η οποία επηρεάζει την γεωμετρία έρχεται σε αντίθεση με την ***υπόθεση εξάλειψης ιχνών****(no-hair conjecture)* η οποία δηλώνει ότι

όλες οι στάσιμες, ασυμπτωτικά επίπεδες, τετραδιάστατες λύσεις μελανών οπών που είναι λύσεις των εξ.Einstein στο κενό ή με ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, χαρακτηρίζονται από τη μάζα, το φορτίο(ηλεκτρικό ή μαγνητικό) και την στροφορμή.

Σύμφωνα λοιπόν με την παραπάνω υπόθεση, η κατάσταση μιας μελανής οπής χαρακτηρίζεται μόνο από τρεις ποσότητες: μάζα, φορτίο και στροφορμή. Οι ποσότητες αυτές είναι διατηρήσιμα μεγέθη που μπορούν να μετρηθούν στο άπειρο μέσα από το νόμο του Gauss . Η λογική πίσω από αύτη την υπόθεση είναι πως μεγάλο μέρος της πληροφορίας χάνεται από τη στιγμή που σχηματίζεται μια μελανή οπή. Μπορεί προηγουμένως να ήταν ένα άστρο το οποίο χαρακτηριζόταν από πολλές παραμέτρους αλλά κατά τη διάρκεια της κατάρρεύσης θα έχουμε και απώλεια πληροφορίας οπότε όταν ισορροπίσσει το σύστημα σε μαύρη τρύπα θα περιγράφεται μόνο από ένα μικρό αριθμό παραμέτρων. Αντίστοιχα όταν ένα σώμα περάσει τον ορίζοντα γεγονότων η μόνη διαφορά μεταξύ αρχικής και τελικής κατάστασης θα είναι διαφορά στη μάζα, τη στροφορμή και το φορτίο.

Στις περιπτώσεις Schwarzschild και Reissner-Nördstrom η υπόθεση αυτή ικανοποιούταν. Οι μόνες παράμετροι στις λύσεις ήταν η μάζα M και το φορτίο Q. Στροφορμή δεν ύπηρχε γιατί είχαμε θεωρήσει στατικές λύσεις εξαρχής.

Κεφάλαιο 6

Μελανές όπές Brans-Dicke

6.1 Αρχή του Mach

Ένα από τα αναπάντητα ερωτήματα, που απασχολεί μέχρι και σήμερα την επιστημονική και φιλοσοφική κοινότητα είναι το ποιά είναι η ακριβής φύση του χωροχρόνου. Μπορεί σαν ερώτηση να δείχνει ότι ανήκει στο πλαίσιο της φιλοσοφίας καθαρά, αλλά η απάντησή της έχει καθοριστικό ρόλο για τις φυσικές επιστήμες. Από την εποχή του Καρτέσιου και του Νεύτωνα μέχρι τώρα έχουν επικρατήσει δύο κύριες απόψεις.

Η πρώτη, αναγνωρίζει το χωροχρόνο σαν μία αυθαίρετη, ανεξάρτητη οντότητα, η οποία έχει ενδογενείς ιδιότητες και υπάρχει ανεξάρτητα από τα φυσικά της περιεχόμενα. Με λίγα λόγια θεωρεί έναν απόλυτο χώρο και έναν απόλυτο χρόνο.

Η δεύτερη, υποστηρίζει ότι ο χωρος και ο χρόνος είναι συστήματα σχέσεων μεταξύ υλικών σωμάτων και υλικών συμβάντων άρα δε γίνεται να υπάρχουν χωρίς αυτά. Δηλαδή ότι χωροχρόνος και ύλη είναι άρρηκτα συνδεδεμένα μεταξύ τους και αποκτούν τις ιδιότητές τους το ένα μέσα από το άλλο. Θερμός υποστηρικτής αυτής της αυτής της θέσης ήταν ο φυσικός και φιλόσοφος *Ernst Mach* ο οποίος άσκησε κριτική στη προσέγγιση του Νεύτωνα περί χώρου και χρόνου. Πίστευε ότι *οι γεωμετρικές και αδρανειακές ιδιότητες ενός χώρου δεν έχουν κανένα νόημα αν ο χώρος είναι άδειος.* Χάνουν την πρακτική και επιστημονική τους αξία. Θεωρούσε ότι *καθορίζονται μόνο όταν στο χώρο υπάρχει και ύλη και πως η κίνηση ενός σώματος έχει νόημα μόνο σε σχέση με κάποιο άλλο.* Η παραπάνω φιλοσοφική αντίληψη έμεινε γνωστή σαν ***αρχή του Mach.*** Ήθελε να δείξει ότι οι αδρανειακές δυνάμεις που εμφανίζονται σε ένα σώμα έχουν την ρίζα τους στην κατανομή της μάζας στο υπόλοιπο σύμπαν γύρο από αυτό και όχι στη σχετική του κίνηση ως προς κάποιον απόλυτο χώρο.

Ας φανταστούμε ότι έχουμε ένα σώμα μάζας m το οποίο βρίσκεται μόνο του μέσα στο σύμπαν. Αν δεν του ασκήται καμία εξωτερική δύναμη τότε ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα μας λέει ότι

$$m\vec{a} = 0 \tag{6.1}$$

Σύμφωνα με το Νεύτωνα, η παραπάνω εξίσωση υπονοεί ότι $\vec{a} = 0$ δηλαδή ότι το σώμα κινείται ομαλά, με σταθερή ταχύτητα. Όμως για τον Mach η παραπάνω πρόταση δεν έχει κανένα νόημα γιατί δεν έχουμε θεωρήσει κάποιο σύστημα αναφοράς ως προς το οποίο μετράμε την ταχύτητα και ο χώρος ο ίδιος δεν θεωρείται τέτοιο σύστημα. Επομένως υπό αυτό το πρίσμα η εξίσωση $\vec{a} = 0$ δεν έχει καμία φυσική σημασία και η ταχύτητα ή η επιτάχυνση είναι ακαθόριστα μεγέθη. Άρα με βάση την εξίσωση (6.1) έχουμε ότι

$$m = 0 \tag{6.2}$$

Δηλαδή ότι η αδράνεια ενός σώματος δεν είναι ενδογενής ιδιότητα που την έχει από μόνο του αλλά εξαρτάται από την αν υπάρχει κι άλλη μάζα μέσα στο σύμπαν, με τέτοιο τρόπο όπου αν δεν υπάρχει επιπλέον μάζα, η αδράνεια του σώματος μηδενίζεται.

Οι ιδέες τουMach επηρέασαν και ίσως να ενέπνευσαν τον Einstein στο να βρει μια θεωρία σχετικότητας, αλλά παρόλα αυτά η Γ.Θ.Σ. δεν είναι συμβατή εξ'όλοκλήρου με την αρχή του Mach. Οι γεωμετρικές ιδιότητες του χωροχρόνου επηρεάζονται από την κατανομή της μάζας, αλλά δεν καθορίζονται πλήρως και μοναδικά από αυτήν.

6.2 Η αρχή του Mach στις Brans-Dicke θεωρίες

Οι Brans και Dicke το 1961 δημοσίευσαν ένα άρθρο στο οποίο πρότειναν μια νέα θεωρία βαρύτητας η οποία ήταν συμβατή με την αρχη του Mach. Ουσιαστικά θέλανε να φτιάξουν μια κατάλληλη *θεωρία πεδίου* με αρχικές και συνοριακές συνθήκες έτσι ώστε η γεωμετρία του χωροχρόνου να καθορίζεται μοναδικά από την κατανομή της μάζας. Χρησιμοποιώντας διαστατικά επιχειρήματα και με δεδομένο ότι η αρχή του Mach είναι σωστή, έχει αποδείχθει ότι η σχέση που συνδέει τη σταθερά της παγκόσμιας έλξης με την κατανομή της μάζας σε ένα ομοιόμορφα διαστελλόμενο σύμπαν είναι

$$\frac{GM}{Rc^2} \propto 1 \tag{6.3}$$

όπου M είναι η πεπερασμένη μάζα του όρατου(αιτιακά συνδέσιμου) σύμπαντος γύρο από το εν λόγο σημείο και R η ακτίνα του. Θεωρώντας ότι $M = \sum_i m_i$ όπου m_i το στοιχειώδες κομμάτι μάζας που απέχει απόσταση r_i από το σημείο που εξετάζουμε, η προηγούμενη σχέση παίρνει τη μορφή

$$\frac{1}{G} \propto \sum_i \left(\frac{m_i}{r_i c^2}\right) \tag{6.4}$$

και παραμετρίζοντας τη μάζα με ένα βαθμωτό πεδίο ϕ παίρνουμε

$$\frac{1}{G} \propto \sum_i \left(\frac{m_i}{r_i c^2}\right) \propto \phi \tag{6.5}$$

Επομένως η σταθερά της παγκόσμιας έλξης G πλέον δεν είναι σταθερά αλλά μία βαθμωτή συνάρτηση $G(\phi)$ η οποία παίρνει μια συγκεκριμένη αριθμητική τιμή για κάθε σημείο του χώρου και εξαρτάται από την κατανόμη της μάζας στο αιτιακά συνδέσιμο, με το εξεταζόμενο σημείο, σύμπαν.

6.3 Brans-Dicke μελανές οπές στο κενό

6.3.1 Αφόρτιστες μελανές οπές

Ξεκινάμε από τη δράση των Brans-Dicke στις $D(\geq 4)$ διαστάσεις

$$I = \frac{1}{16\pi}\int \mathrm{d^D}x\sqrt{-g}\left[\phi R - \frac{\omega}{\phi}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi\right] \tag{6.6}$$

Θεωρούμε πως στην περιγραφή της βαρύτητας συνεισφέρει και το πεδίο ϕ εκτός της μετρικής. Η καμπυλότητα R είναι και αυτή κομμάτι της βαρύτητας αφού είναι συνάρτηση των παραγώγων της μετρικής. Κάνοντας μεταβολές ως τη μετρική και το βαθμωτό πεδίο δίνει τις εξισώσεις κίνησης

$$\begin{aligned} \phi G_{\mu\nu} \equiv \phi\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right) = \frac{\omega}{\phi}\left[\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left(\nabla\phi\right)^2\right] \\ + \nabla_\mu\nabla_\nu\phi\,, \end{aligned} \tag{6.7}$$

$$\nabla^2\phi = 0 \tag{6.8}$$

Οι δεύτερες παράγωγοι του βαθμωτού πεδίου κάνουν την επίλυση τω εξισώσεων αρκετά δύσκολη και γι'αυτό θα εφαρμόσουμε ένα σύμμορφο μετασχηματισμό (conformal transformation):

$$g_{\mu\nu} = \Omega^2\bar{g}_{\mu\nu}, \tag{6.9}$$

Όπου

$$\Omega^{-(d+1)} = \phi\,, \quad \bar{\phi} = \sqrt{2\alpha}\int\frac{\mathrm{d}\phi}{\phi} = \sqrt{2\alpha}\ln\phi\,, \quad a = \frac{d+2}{d+1} + \omega \tag{6.10}$$

ο οποίος μας οδηγεί στο σύστημα Einstein[1] όπου η δράση πλέον γράφεται

$$\bar{I} = \frac{1}{16\pi}\int \mathrm{d^D}x\sqrt{-\bar{g}}\left[\bar{R} - \frac{1}{2}\left(\bar{\nabla}\bar{\phi}\right)^2\right] \tag{6.11}$$

Τα $\bar{R}$ και $\bar{\nabla}$ είναι η βαθμωτή καμπυλότητα και η συναλλοίωτη παράγωγος, ως προς την νέα μετρική $\bar{g}_{\mu\nu}$. Θεωρώντας απειροστές μεταβολές στη 'νέα' δράση (6.11), παίρνουμε τις εξισώσεις κίνησης

$$\bar{G}_{\mu\nu} \equiv \bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}\bar{R} = \frac{1}{2}\bar{\nabla}_\mu\bar{\phi}\bar{\nabla}_\nu\bar{\phi} - \frac{1}{4}\bar{g}_{\mu\nu}\left(\bar{\nabla}\bar{\phi}\right)^2, \tag{6.12}$$

$$\bar{\nabla}^2\bar{\phi} = 0 \tag{6.13}$$

[1]Ουσιαστικά, μέσω του σύμμορφου μετασχηματισμού, πήγαμε σε ένα νέο, μαθηματικά ισοδύναμο σύστημα αναφοράς το οποίο αποκαλούμε σύστημα Einstein, επειδή οι εξισώσεις κίνησης της νέας μετρικής $g_{\bar{\mu\nu}}$ έχουν την ίδια μορφή με τις εξ.Einstein της Γ.Θ.Σ. όπως φαίνεται και στη σχέση (6.12)

Αυτό συμβαίνει επειδή στο νέο σύστημα απαλείψαμε την σύζευξη βαθμωτού πεδίου και καμπυλότητας.

Συγκρίνοντας τις νέες με τις παλίες εξισώσεις κίνησης, και υποθέτοντας πως τα $(\bar{g}_{\mu\nu}, \bar{\phi}, \bar{F}_{\mu\nu})$ είναι λύσεις των νέων, τότε τα

$$(g_{\mu\nu}, \phi) = \left(e^{-\frac{2}{(d+1)\sqrt{2\alpha}}\bar{\phi}} \bar{g}_{\mu\nu}, e^{\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\bar{\phi}}, \right) \tag{6.14}$$

θα είναι λύσεις των αρχικών. Οι εξισώσεις (6.12),(6.13) έχουν λύση

$$d\bar{s}^2 = -e^{-f}dt^2 + e^{-h}\left(dr^2 + r^2 d\Omega^2_{d+1}\right) \,, \tag{6.15}$$

$$\bar{\phi} = \left[\frac{2\,(d+1)}{d}(1-\gamma^2)\right]^{1/2} \ln \frac{r^d - r_o^d}{r^d + r_o^d} \tag{6.16}$$

Όπου

$$e^f = \left[\frac{r^d - r_o^d}{r^d + r_o^d}\right]^{2\gamma} \,, \tag{6.17}$$

$$e^{-h} = \left[1 - \frac{r_o^{2d}}{r^{2d}}\right]\left[\frac{r^d - r_o^d}{r^d + r_o^d}\right]^{-2\gamma/d} \,, \tag{6.18}$$

με γ και r_o σταθερές ολοκλήρωσης. Παρατηρούμε ότι

- Για $r \to \infty$ τότε $f \to 0, h \to 0$ και $\bar{\phi} \to 0$. Επομένως, η μετρική (6.15) περιγράφει ασυμπτωτικά επίπεδο χωροχρόνο.
- Από το τύπο (6.16) συμπεραίνουμε ότι $0 \leq \gamma^2 \leq 1$. Για $\gamma = -1$ η λύση είναι μία D-διάστατη λύση Schwarzschild με αρνητική μάζα, η οποία περιγράφει μία 'γυμνή' ανωμαλία(*naked singularity*) του χωροχρόνου, δηλαδή δεν καλύπτεται από κάποιον ορίζοντα γεγονότων.
- Για να έχει φυσικό νόημα η λύση μας, πρέπει $\gamma \in [0,1]$. Στην ειδική περίπτωση όπου $\gamma = 1$ το βαθμωτό πεδίο μηδενίζεται. Η σχέση (6.15) περιγράφει μία D-διάστατη γεωμετρία Schwarzschild με μάζα $M = 2r_o^d$
- Σε άλλες περιπτώσεις, η (6.15) περιγράφει χωροχρόνο με γυμνή ανωμαλία όπου το ιδιάζον σημείο είναι το $r = r_o$. Για να το δούμε αυτό λεπτομερώς, υπολογίζουμε τη βαθμωτή καμπυλότητα (*Ricci scalar*) αυτής της μετρικής.

$$\bar{R} = \frac{4d(d+1)r_o^{2d}(1-\gamma^2)r^{2(d+1)}}{(r^d + r_o^d)^{2(d+1+\gamma)/d}(r^d - r_o^d)^{2(d+1-\gamma)/d}} \tag{6.19}$$

Από την παραπάνω σχέση, καταλαβαίνουμε πως για $\gamma \neq 1$, ο χωροχρόνος (6.15) έχει μία γυμνή, βαθμωτή ανωμαλία για $r = r_o$ η οποία δεν μπορεί να απαλειφθεί κάνοντας μετασχηματισμούς συντεταγμένων.

Επομένως, στην συγκεκριμένη θεωρία, στις ($D \geq 4$) όπου είναι μια ***θεωρία Einstein με ένα ελάχιστα συζευγμένο, άμαζο, βαθμωτό πεδίο η μοναδική λύση είναι η D-διάστατη λύση Schwarzschild.***

Δουλεύουμε τώρα αντίστροφα, και γνωρίζοντας τις λύσεις στο σύστημα Eisntein θα εξετάσουμε τα χαρακτηριστικά των λύσεων στο αρχικό Brans-Dicke σύστημα. Από τις εξισώσεις (6.14) βρίσκει κανείς ότι

$$ds^2 = \Omega^2 d\bar{s}^2 \quad = \quad \phi^{-\frac{2}{(d+1)}} d\bar{s}^2 = \left(\frac{r^d + r_o^d}{r^d - r_o^d} \right)^{\frac{2}{d+1} \left[\frac{(d+1)(1-\gamma^2)}{ad} \right]^{1/2}} d\bar{s}^2 \ , \tag{6.20}$$

$$\phi \quad = \quad \left(\frac{r^d - r_o^d}{r^d + r_o^d} \right)^{\left[\frac{(d+1)(1-\gamma^2)}{ad} \right]^{1/2}} \ , \tag{6.21}$$

Όπου το $d\bar{s}^2$ δίνεται από την (6.15).

- Για $r \to \infty$ έχουμε $\Omega^2 \to 1$ επομένως $ds^2 \to d\bar{s}^2$ όπου δείξαμε προηγουμένως ότι στο άπειρο ο χώρος γίνεται Minkowski. Άρα και εδώ έχουμε ασυμπτωτικά επίπεδη συμπεριφορά.

- Μπορεί κανείς να βρει ότι για $r = r_o$ έχουμε πάλι ανώμαλο σημείο υπολογίζοντας την βαθμωτή καμπυλότητα για τη νέα μετρική η οποία δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} R \quad &= \quad \Omega^{-2}\bar{R} - 2(d+2)\Omega^{-3}\bar{g}^{\mu\nu}\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\Omega \\ &- \quad (d+2)(d-1)\Omega^{-4}\bar{g}^{\mu\nu}\bar{\nabla}_\mu\Omega\bar{\nabla}_\nu\Omega \ . \end{aligned} \tag{6.22}$$

- Για $\gamma = 1$ υπολογίζουμε ότι $ds^2 = d\bar{s}^2$ και $\phi = 1$ επομένως η λύση είναι πάλι μια D-διάστατη λύση Schwarzschild με ένα σταθερό βαθμωτό πεδίο. Εδώ η αρχική μας Brans-Dicke θεωρία καταλήγει στην κλασσική Einstein θεωρία.

- Από την σχέση (6.16) και επειδή $r_o \geq 0$ βλέπουμε πως $\bar{\phi} \leq 0$ άρα από τη σχέση (6.14)

$$\phi = e^{\frac{1}{\sqrt{2a}}\bar{\phi}} \in (0, 1] \tag{6.23}$$

Επειδή όμως η δράση (6.11)και οι αντίστοιχες εξισώσεις κίνησης είναι αναλλοίωτα κάτω από μετασχηματισμούς $\bar{\phi} \to -\bar{\phi}$ δηλαδή $\bar{I}(\phi) = \bar{I}(-\phi)$, η σχέση που συνδέει τα ϕ με τα $\bar{\phi}$ θα συνδέει και τα ϕ με τα $-\phi$ δηλαδή θα ισχύει ότι

$$\phi = e^{-\frac{1}{\sqrt{2a}}\bar{\phi}} \in [1, \infty) \tag{6.24}$$

άρα υπάρχει ακόμη μια λύση στο Brans-Dicke σύστημα όπου

$$ds^2 \quad = \quad \left(\frac{r_d - r_o^d}{r^d + r_o^d} \right)^{\frac{2}{d+1} \left[\frac{(d+1)(1-\gamma^2)}{ad} \right]^{1/2}} d\bar{s}^2 \ , \tag{6.25}$$

$$\phi \quad = \quad \left(\frac{r_d + r_o^d}{r^d - r_o^d} \right)^{\left[\frac{(d+1)(1-\gamma^2)}{ad} \right]^{1/2}} \ , \tag{6.26}$$

Ο χωροχρόνος (6.25) είναι πάλι ασυμπτωτικά επίπεδος και το σημείο $r = r_o$ περιγράφει χωροχρονική ανωμαλία εκτός από την περίπτωση όπου $\gamma = 1$. Για $\gamma = 1$ έχουμε $\phi = 1$ και η μετρική καταλήγει σε D-διάστατη λύση Schwarzschild με σταθερό βαθμωτό πεδίο.

Άρα, στις ($D \geq 4$) διαστάσεις ***η θεωρία Brans-Dicke στο κενό δίνει μία D-διάστατη λύση Schwarzschild με σταθερό βαθμωτό πεδίο.***

6.4 Φορτισμένες μελανές οπές

Η δράση Brans - Dicke - Maxwell στις D διαστάσεις δίνεται από την σχέση

$$I = \frac{1}{16\pi}\int \mathrm{d}^{\mathrm{D}}x\sqrt{-g}\left[\phi R - \frac{\omega}{\phi}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right] \tag{6.27}$$

Σάυτό το σύστημα αναφοράς (Jordan ή Brans-Dicke) τα σωματίδια έχουν σταθερή μάζα ηρεμίας και κινούνται κατά μήκος των γεοδαισιακών γραμμών. Αυτό συμβαίνει, επειδή τα πεδία που αφορούν τα σωματίδια ύλης, έχουν σύζευξη με την βαρύτητα μόνο μέσω της μετρικής $\sqrt{-g}$, και όχι με το βαθμωτό πεδίο ϕ. Στην συγκεκριμένη δράση το ρόλο του πεδίου ύλης τον έχει το $F^{\mu\nu}$ που γνωρίζουμε από τον ηλεκτρομαγνητισμό. Όπως βλέπουμε, υπάρχει μόνο κινητικός όρος.

Θεωρώντας μικρές μεταβολές ως προς την μετρική ή το πεδίο ϕ, βρίσκονται οι εξισώσεις κίνησής τους, οι οποίες είναι:

$$\phi G_{\mu\nu} \equiv \phi\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right) = \frac{\omega}{\phi}\left[\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left(\nabla\phi\right)^2\right] \tag{6.28}$$

$$+\,2\left(F_\mu^\lambda F_{\nu\lambda} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F^2\right) + \nabla_\mu\nabla_\nu\phi - g_{\mu\nu}\nabla^2\phi \tag{6.29}$$

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0 \tag{6.30}$$

$$\nabla^2\phi = -\frac{d-1}{2\left[(d+1)\,\omega + (d+2)\right]}F^2 \tag{6.31}$$

Όπου $d = D - 3$. Η επίλυση τω παραπάνω εξισώσεων δεν είναι εύκολη, λόγω της ύπαρξης των δευτέρων παραγώγων του βαθμωτού πεδίου. Η δυσκολία μπορεί να αποφευχθεί όπως και προηγουμένως, κάνοντας σύμμορφο μετασχηματισμό :

$$g_{\mu\nu} = \Omega^2\bar{g}_{\mu\nu}, \tag{6.32}$$

Όπου

$$\Omega^{-(d+1)} = \phi\,, \quad \bar{\phi} = \sqrt{2\alpha}\int\frac{\mathrm{d}\phi}{\phi} = \sqrt{2\alpha}\ln\phi\,, \quad a = \frac{d+2}{d+1} + \omega \tag{6.33}$$

Ο μετασχηματισμός αυτός, οδηγεί σε ένα νέο, σύμμορφο σύστημα αναφοράς , στο οποίο η παλία μας θεωρία Brans - Dicke - Maxwell (6.27) έχει αλλάξει σε Einstein - Maxwell θεωρία, με ένα ασθενώς συζευγμένο βαθμωτό πεδίο $\bar{\phi}$.

$$\bar{I} = \frac{1}{16\pi}\int \mathrm{d}^{\mathrm{D}}x\sqrt{-\bar{g}}\left[\bar{R} - \frac{1}{2}\left(\bar{\nabla}\bar{\phi}\right)^2 - e^{-b\bar{\phi}}\bar{F}^2\right] \tag{6.34}$$

Όπου

$$b = \frac{d-1}{d+1}\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}, \tag{6.35}$$

Σάυτό το σημείο μπορούμε να δούμε ότι:

- Η σχέσεις (6.33) συνεπάγονται ότι $\alpha > 0$ ($\omega > -\frac{d+2}{d+1}$) και έτσι το $\bar{\phi}$ μηδενίζεται σε μία χωροειδώς άπειρη απόσταση.
- Η δράση μένει αναλλοίωτη υπό τον σύμμορφο μετασχηματισμό
- Η θεωρία (6.27) είναι μαθηματικώς ισοδύναμη με την θεωρία (6.34). Στο νέο σύστημα αναφοράς(Eistein frame) τα σωματίδια έχουν μεταβητές μάζες, ως προς τον χωροχρόνο και επίσης δεν κινούνται πλέον πάνω στις γεωδεσιακές γραμμές.
- Υπάρχει σύζευξη μεταξύ των $\bar{F}^{\mu\nu}$ και $\bar{\phi}$. Λόγω αυτού, μπορούμε να θεωρήσουμε το πεδίο Maxwell $F^{\mu\nu}$ σαν πηγή του βαθμωτού ϕ. Παρατηρείται ακόμη , πως για τετραδιάστατο χωροχρόνο($D = 4$) τότε $b = 0$ οπότε υπάρχει αποσύζευξη των δύο πεδίων και στο νέο συμμορφο σύστήμα. Στο παλίο σύστημα(BD) δεν υπήρχε έτσι κι αλλιώς. Οπότε, αφού οι δύο θεωρίες είναι ισοδύναμες και για $D = 4$ έχουμε μία ειδική περίπτωση της θεωρίας Einstein - Maxwell, είναι λογικό να υποθέσουμε πως για $D = 4$ θα λάβουμε μία εξίσου ειδική περίπτωση για την θεωρία Brans - Dicke - Maxwell.

Θεωρώντας απειροστές μεταβολές στη 'νέα' δράση (6.34), παίρνουμε τις εξισώσεις κίνησης

$$\begin{aligned}\bar{G}_{\mu\nu} &\equiv \bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}\bar{R}\\ &= \frac{1}{2}\bar{\nabla}_\mu\bar{\phi}\bar{\nabla}_\nu\bar{\phi} - \frac{1}{4}\bar{g}_{\mu\nu}\left(\bar{\nabla}\bar{\phi}\right)^2 + 2e^{-b\bar{\phi}}\left(\bar{F}_\mu^\lambda\bar{F}_{\nu\lambda} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}\bar{F}^2\right), \end{aligned}\tag{6.36}$$

$$\bar{\nabla}^2\bar{\phi} = -be^{-b\bar{\phi}}\bar{F}^2\,, \tag{6.37}$$

$$\bar{\nabla}_\mu\left(e^{-b\bar{\phi}}\bar{F}^{\mu\nu}\right) = 0\,. \tag{6.38}$$

Συγκρίνοντας τις νέες με τις παλίες εξισώσεις κίνησης, και υποθέτοντας πως τα $(\bar{g}_{\mu\nu}, \bar{\phi}, \bar{F}_{\mu\nu})$ είναι λύσεις των νέων, τότε τα

$$(g_{\mu\nu}, \phi, F_{\mu\nu}) = \left(e^{-\frac{2}{(d+1)\sqrt{2\alpha}}\bar{\phi}}\bar{g}_{\mu\nu}, e^{\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\bar{\phi}}, \bar{F}_{\mu\nu}\right) \tag{6.39}$$

θα είναι λύσεις των αρχικών εξισώσεων. Οι λύσεις των (6.36)-(6.38) είναι

$$\begin{aligned} d\bar{s}^2 &= -A^2dt^2 + B^2dr^2 + C^2 d\Omega_{d+1}^2 \ , &(6.40)\\ e^{b\bar{\phi}} &= \left[1 - \left(\frac{r_-}{r}\right)^d\right]^{\alpha d} \ , &(6.41)\\ \bar{F}_{tr} &= \frac{Q}{r^{d+1}} \ , &(6.42) \end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned} A^2(r) &= \left[1 - \left(\frac{r_+}{r}\right)^d\right]\left[1 - \left(\frac{r_-}{r}\right)^d\right]^{1-\alpha d}, \\ B^2(r) &= \left[1 - \left(\frac{r_+}{r}\right)^d\right]^{-1}\left[1 - \left(\frac{r_-}{r}\right)^d\right]^{\alpha - 1} \\ C^2(r) &= r^2\left[1 - \left(\frac{r_-}{r}\right)^d\right]^{\alpha}, \\ \alpha &= \frac{2b^2(d+1)}{d(2d + b^2(d+1))} \ . \end{aligned} \tag{6.43}$$

όπου Q, r_+ και r_- είναι σταθερές ολοκλήρωσης. Από το νόμο του Gauss για το φορτίο έχουμε

$$q = \frac{1}{4\pi}\int_{r\to\infty} \bar{F}_{tr}\sqrt{-\bar{g}}d^{d+1}x = \frac{V_{d+1}}{4\pi}Q \ , \tag{6.44}$$

όπου V_{d+1} είναι ο όγκος της d+1-διάστατης σφαίρας. Η σταθερά Q συνδέεται με τα r_+ και r_- με τη σχέση

$$Q^2 = \frac{\alpha d^3(r_+r_-)^d}{2b^2} \ . \tag{6.45}$$

Παρατηρούμε ότι:

- Το βαθμωτό πεδίο είναι παντού πεπερασμένο εκτός από το $r = 0$
- Για $\alpha = 0$ η λύση γίνεται μια D-διάστατη λύση Reissner-Nordström, όποτε μπορούμε να ερμηνεύσουμε τα r_+ και r_- ως τους δύο ορίζοντες.
- Για $\alpha \neq 0$ το r_- συμπεριφέτε σαν χωροχρονική ανωμαλία όπως φαίνεται από την βαθμωτή καμπυλότητα

$$\begin{aligned} \bar{R} &= \frac{\alpha^2 d^4 r_-^{2d}}{2b^2 r^{2d+2}}\left[1 - \left(\frac{r_+}{r}\right)^d\right]\left[1 - \left(\frac{r_-}{r}\right)^d\right]^{-(\alpha+1)} \\ &- \frac{4Q^2}{r^{2d+2}}\left[1 - \left(\frac{r_-}{r}\right)^d\right]^{-\alpha}, \end{aligned} \tag{6.46}$$

  η οποία απειρίζεται εκτός αν $\alpha = 0$.

Από τις (6.39) βρίσκουμε την λύση της ηλεκτρικά φορτισμένης μαύρης τρύπας για την θεωρία Brans-Dicke-Maxwell.

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= \Omega^2 d\bar{s}^2 = \left[1-\left(\frac{r_-}{r}\right)^d\right]^{-2\alpha d/(d-1)} d\bar{s}^2 \ , && (6.47)\\
\phi &= e^{\frac{1}{\sqrt{2a}}\bar{\phi}} = \left[1-\left(\frac{r_-}{r}\right)^d\right]^{\alpha d(d+1)/(d-1)} \ , && (6.48)\\
F_{tr} &= \bar{F}_{tr} = \frac{Q}{r^{d+1}} \ , && (6.49)
\end{aligned}
$$

όπου ξανά το $d\bar{s}^2$ δίνεται από τη σχέση (6.15).

- Η λύση περιγράφει ασυμπτωτικά επίπεδο χωροχρόνο
- Το βαθμωτό πεδίο μηδενίζεται στο $r = r_-$ και $\phi \to 1$ για $r \to \infty$
- Για $D = 4$ έχουμε $b = 0$ από την (6.35) και εν συνεχεία $\alpha = 0$ από την (6.43) οπότε το βαθμωτό πεδίο στο σύστημα Einstein μηδενίζεται($\phi = 0$) και έτσι από τις (6.48) έχουμε ένα σταθερό πεδίο $\phi = 1$.
- Στις παραπάνω διαστάσεις όπου $b \neq 0$ βλέπουμε απο τη σχέση (6.31) πως το βαθμωτό πεδίο δεν είναι τετριμμένο και το πεδίο Maxwell λειτουργεί ως πηγή του.

  Από τη στιγμή που και το πεδίο Maxwell επιτρέπεται από το θεώρημα εξάλειψης ιχνών συμπεραίνουμε ότι ***το πεδίο Maxwell λειτουργεί ως πηγή για το βαθμωτό και υποστηρίζει την ύπαρξη μη τετριμμένων βαθμωτών πεδίων .***

Κεφάλαιο 7

Βιβλιογραφία

[1] J. B. Hartle, *"An introduction to Einstein's general relativity,"* San Francisco, USA: Addison-Wesley (2003) 582 p

[2] R. M. Wald, *"General Relativity",* Chicago, Usa: Univ. Pr. (1984) 491p doi:10.7208/chicago/9780226870373.001.0001

[3] J. V. Narlikar, *"An Introduction to Cosmology," 3rd Edition*, Cambridge University Press (2002)

[4] R. d'Inverno, *"Introducing Einstein's relativity,"* Oxford, UK: Clarendon (1992) 383 p

[5] S. M. Carroll, *"Spacetime and geometry: An introduction to general relativity,"* San Francisco, USA: Addison-Wesley (2004) 513 p

[6] C. Brans and R. H. Dicke, *"Mach's principle and a relativistic theory of gravitation,"* Phys. Rev. **124** (1961) 925. doi:10.1103/PhysRev.124.925

[7] O. C. Stoica, *"Analytic Reissner-Nordstrom Singularity,"* Phys. Scripta **85** (2012) 055004 doi:10.1088/0031-8949/85/05/055004 [arXiv:1111.4332 [gr-qc]].

[8] D. Lehmkuhl, *"Mass–Energy–Momentum: Only there Because of Spacetime?,"* British Journal for the Philosophy of Science **62** (2011) p.453-88

[9] T.Kolyvaris, *"Μελέτη μελανών οπών συζευγμένων με βαθμωτά πεδία"* (Greek) [*"Study of Black Hole solutions coupled with Scalar fields,"*] Ph.D Thesis, NTU Athens, September 2013.

[10] R. Torretti, *" The philosophy of physics,"* Cambridge University Press, 1999.

[11] H. Lichtenegger and B. Mashhoon, *"Mach's principle,"* physics/0407078 [physics.hist-ph].

[12] T. Clifton, P. G. Ferreira, A. Padilla and C. Skordis, *"Modified Gravity and Cosmology,"* Phys. Rept. **513** (2012) 1 doi:10.1016/j.physrep.2012.01.001 [arXiv:1106.2476 [astro-ph.CO]].

[13] C. Kaeonikhom, *"Variational Principle Approach to General Relativity,"* B.S. Thesis, Naresuan University, March 2006.

[14] C. Martinez, R. Troncoso and J. Zanelli, *"Exact black hole solution with a minimally coupled scalar field,"* Phys. Rev. D **70** (2004) 084035 doi:10.1103/PhysRevD.70.084035 [hep-th/0406111].

[15] R. G. Cai and Y. S. Myung, *"Black holes in the Brans-Dicke-Maxwell theory,"* Phys. Rev. D **56** (1997) 3466 doi:10.1103/PhysRevD.56.3466 [gr-qc/9702037].

[16] P. A. M. Dirac, *"General theory of relativity,"* Princeton University Press, 1996.

[17] B. C. Xanthopoulos and T. Zannias, *"Einstein Gravity Coupled to a Massless Scalar Field in Arbitrary Space-time Dimensions,"* Phys. Rev. D **40** (1989) 2564. doi:10.1103/PhysRevD.40.2564

[18] C. J. Gao and S. N. Zhang, *"Black holes in Brans-Dicke theory with a cosmological constant,"* gr-qc/0604083.