



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

Θερμομηχανική Συμπεριφορά Προηγμένων Υλικών

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Αντώνιου Μ. Νικολαράκη
Πολιτικού Μηχανικού Ε.Μ.Π.

Επιβλέπων:

Ευστάθιος Ε. Θεοτόκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Δεκέμβριος 2016



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

Θερμομηχανική Συμπεριφορά Προηγμένων Υλικών

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Αντώνιου Μ. Νικολαράκη
Πολιτικού Μηχανικού Ε.Μ.Π.

Τριμελής Συμβουλευτική Επιτροπή:

1. Ε. Ε. Θεοτόκογλου, Καθ. ΕΜΠ
(Επιβλέπων)
2. Ε. Κοντού-Δρούγκα, Καθ. ΕΜΠ
3. Αι. Σιδερίδης, Αναπλ. Καθ. ΕΜΠ

Επταμελής Εξεταστική Επιτροπή:

1. Ε. Ε. Θεοτόκογλου, Καθ. ΕΜΠ
(Επιβλέπων)
2. Ε. Κοντού-Δρούγκα, Καθ. ΕΜΠ
3. Αι. Σιδερίδης, Αναπλ. Καθ. ΕΜΠ
4. Χ. Γ. Γεωργιάδης, Καθ. ΕΜΠ
5. Κ. Σιέττος, Αναπλ. Καθ. ΕΜΠ
6. Δ. Ευταξιώπουλος, Επίκ. Καθ. ΕΜΠ
7. Α. Ζήσης, Επίκ. Καθ. ΕΜΠ

Αθήνα, Δεκέμβριος 2016

Η εκπόνηση της διατριβής στηρίχθηκε οικονομικά από το πρόγραμμα "Υποτροφίες Αριστείας I.K.Y. Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Ελλάδα - Πρόγραμμα Siemens".

Copyright ©Αντώνιος Μ. Νικολαράκης, 2016
Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ' ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Η έγκριση της διδακτορικής διατριβής υπό της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου δεν υποδηλοί αποδοχή των γνώμων του συγγραφέως.

Θερμομηχανική Συμπεριφορά Προηγμένων Υλικών

Διδακτορική Διατριβή του Αντώνιου Μ. Νικολαράκη,
Πολιτικού Μηχανικού Ε.Μ.Π., MSc

Επιβλέπων Καθηγητής

Ευστάθιος Ε. Θεοτόκογλου, Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Μέλη Συμβουλευτικής Επιτροπής

Ευαγγελία Κοντού-Δρούγκα, Καθηγήτρια Ε.Μ.Π.

Αιμίλιος Σιδερίδης, Αναπλ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Μέλη Εξεταστικής Επιτροπής

Χαράλαμπος Γ. Γεωργιάδης, Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Κωνσταντίνος Σιέττος, Αναπλ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Δημήτριος Ευταξιώπουλος, Επίκ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθανάσιος Ζήσης, Επίκ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Στη μνήμη του αδερφού μου Μπάμπη

Ευχαριστίες

Η παρούσα διδακτορική διατριβή εκπονήθηκε στον Τομέα Μηχανικής της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, κατά το χρονικό διάστημα από το Μάρτιο του 2013 έως το Δεκέμβριο του 2016, υπό την επίβλεψη του Καθηγητή Ευστάθιου Ε. Θεοτόκογλου.

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον Καθηγητή Ευστάθιο Ε. Θεοτόκογλου, για τις πολύτιμες συμβουλές του και την υπομονή που έδειξε κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της διατριβής, καθώς και για τη βοήθειά του στη διόρθωσή της. Επίσης, ευχαριστίες οφείλω στην Καθηγήτρια Ευαγγελία Κοντού-Δρούγκα και στον Αναπλ. Καθηγητή Αιμίλιο Σιδερίδη για τη συμβολή τους στην παρούσα εργασία ως μέλη της συμβουλευτικής επιτροπής. Τέλος, θα ήθελα ακόμη να ευχαριστήσω το Δρ. Θεοδόσιο Κ. Παπαθανασίου, ο οποίος με βοήθησε να ξεκινήσω την πορεία μου στο χώρο της έρευνας.

Η εκπόνηση της διατριβής στηρίχθηκε οικονομικά από το πρόγραμμα "Υποτροφίες Αριστείας Ι.Κ.Υ. Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Ελλάδα - Πρόγραμμα Siemens".

Αντώνιος Μ. Νικολαράκης

Αθήνα, Δεκέμβριος 2016

Σε πολλές κατασκευές όπου τα δομικά μέλη υποβάλλονται σε έντονες θερμομηχανικές καταπονήσεις, απαιτείται η χρήση σύνθετων υλικών. Ωστόσο, η ασυνέχεια των θερμομηχανικών ιδιοτήτων που υπάρχει στη διεπιφάνεια μεταξύ των διαφορετικών υλικών ενός συμβατικού σύνθετου υλικού συχνά οδηγεί σε τοπική συγκέντρωση τάσεων. Μία πιθανή λύση στο ανωτέρω πρόβλημα είναι η χρήση υλικών διαβαθμισμένων ιδιοτήτων (functionally graded materials – FGMs), τα οποία είναι προηγμένα υλικά που χαρακτηρίζονται από τη μεταβολή των ιδιοτήτων τους με συνεχή τρόπο. Τα FGMs βρίσκουν εφαρμογή σε συνθήκες απότομων θερμοκρασιακών μεταβολών, όπου παρεμβάλλονται ως ενδιάμεση στρώση σε ένα σύνθετο υλικό κεραμικού/μετάλλου.

Αντικείμενο της παρούσας διατριβής είναι η αριθμητική μελέτη των μεταβατικών πεδίων της μετατόπισης, της θερμοκρασίας και της τάσης που αναπτύσσονται σε μία λωρίδα διαβαθμισμένων ιδιοτήτων, η οποία υποβάλλεται σε συνθήκες θερμικού σοκ (thermal shock conditions).

Στη γενική περίπτωση η λωρίδα αποτελείται από τρεις στρώσεις: η ανώτερη και η κατώτερη στρώση αποτελούνται από κεραμικό και μεταλλικό υλικό αντίστοιχα, ενώ ανάμεσά τους παρεμβάλλεται μία ενδιάμεση στρώση από προηγμένο υλικό διαβαθμισμένων ιδιοτήτων. Σε αυτή τη λωρίδα, η στρώση του κεραμικού υλικού και η FGM στρώση αποτελούν την επικάλυψη θερμικής προστασίας (TBC) της στρώσης του μεταλλικού υλικού. Αρχικά, η ανάλυση γίνεται στα πλαίσια της θεωρίας της γενικευμένης θερμοελαστικότητας, ενώ στη συνέχεια χρησιμοποιείται η κλασική συζευγμένη θερμοελαστικότητα με θερμοκρασιακά-εξαρτώμενες ιδιότητες υλικών. Για την υπολογιστική μελέτη του προβλήματος αναπτύχθηκε κώδικας πεπερασμένων στοιχείων σε περιβάλλον Matlab.

Η διδακτορική διατριβή αποτελείται από έξι κεφάλαια, τα οποία παρουσιάζονται συνοπτικά στη συνέχεια.

Κεφάλαιο 1

Στο πρώτο κεφάλαιο της διατριβής γίνεται συνοπτική παρουσίαση των χαρακτηριστικών των υλικών διαβαθμισμένων ιδιοτήτων (FGMs), με έμφαση στην μαθηματική τους προσομοίωση και την εκτίμηση των μακροσκοπικών τους ιδιοτήτων. Αναφορά γίνεται ακόμη στις μεθόδους κατασκευής των FGMs και την εφαρμογή τους στις επικαλύψεις θερμικής προστασίας (thermal barrier coatings – TBCs).

Κεφάλαιο 2

Το δεύτερο κεφάλαιο της διατριβής αφορά στη θεωρία τόσο της κλασικής όσο και της γενικευμένης θερμοελαστικότητας. Ειδικότερα, γίνεται συνοπτική παρουσίαση της κλασικής συζευγμένης θερμοελαστικότητας και των γενικευμένων θεωριών θερμοελαστικότητας Lord-Shulman, Green-Lindsay και Green-Naghdi. Η ενοποιημένη θεωρία γενικευμένης θερμοελαστικότητας των Bagri και Eslami, η οποία ενσωματώνει τις παραπάνω θεωρίες ως ειδικές περιπτώσεις, παρουσιάζεται στη συνέχεια. Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με μία συζήτηση για το πεδίο εφαρμογής της γενικευμένης θερμοελαστικότητας.

Κεφάλαιο 3

Στο τρίτο κεφάλαιο της διατριβής γίνεται περιγραφή της αριθμητικής διαδικασίας για την επίλυση του μονοδιάστατου δυναμικού προβλήματος μίας λωρίδας διαβαθμισμένων ιδιοτήτων, η οποία υποβάλλεται σε ομοιόμορφη θερμομηχανική καταπόνηση στις ελεύθερες επιφάνειές της. Για την ανάλυση χρησιμοποιείται το σύστημα διαφορικών εξισώσεων της

ενοποιημένης θεωρίας γενικευμένης θερμοελαστικότητας των Bagri και Eslami, για το οποίο εξάγεται η μεταβολική του διατύπωση σε κανονικοποιημένη μορφή. Η χωρική διακριτοποίηση του προβλήματος βασίζεται στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, ενώ η χρονική ολοκλήρωση γίνεται με τη μέθοδο Newmark. Επιπλέον, περιγράφεται ο κώδικας πεπερασμένων στοιχείων που αναπτύχθηκε σε περιβάλλον Matlab στα πλαίσια της παρούσας διατριβής και γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων του με γνωστές αναλυτικές λύσεις που υπάρχουν στη βιβλιογραφία.

Κεφάλαιο 4

Το τέταρτο κεφάλαιο της διατριβής αφορά σε συγκεκριμένες εφαρμογές θερμικού σοκ, στα πλαίσια διαφορετικών θεωριών γενικευμένης θερμοελαστικότητας. Αρχικά παρουσιάζονται τα βασικά χαρακτηριστικά κάθε θεωρίας. Στη συνέχεια μελετώνται τα μεταβατικά πεδία της μετατόπισης, της θερμοκρασίας και της τάσης σε FGM στρώση από κεραμικό/μεταλλικό υλικό, όπου οι ιδιότητες του υλικού μεταβάλλονται με συνεχή τρόπο από τις ιδιότητες του κεραμικού στις ιδιότητες του μετάλλου. Κατά τη μελέτη της θερμομηχανικής συμπεριφοράς της FGM στρώσης εξετάζονται διαφορετικοί συνδυασμοί υλικών. Μελετάται επίσης η επίδραση της κατανομής των ιδιοτήτων του υλικού στην FGM στρώση, των συνοριακών συνθηκών, και του χρόνου χαλάρωσης της γενικευμένης θεωρίας θερμοελαστικότητας Lord-Shulman. Επιπλέον, γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων της κλασικής συζευγμένης θερμοελαστικότητας και των γενικευμένων θεωριών θερμοελαστικότητας Lord-Shulman και Green-Lindsay.

Κεφάλαιο 5

Στο πέμπτο κεφάλαιο της διατριβής εξετάζεται η θερμομηχανική συμπεριφορά μίας λωρίδας από κεραμικό/μεταλλικό FGM υλικό που υποβάλλεται σε έντονες θερμομηχανικές καταπονήσεις, όπου λαμβάνεται υπόψη η επίδραση της θερμοκρασίας στις ιδιότητες των υλικών (temperature-dependent properties). Η ανάλυση του παραπάνω μη γραμμικού προβλήματος γίνεται στα πλαίσια της κλασικής συζευγμένης θερμοελαστικότητας. Όπως αποδεικνύεται στο παράρτημα Α της διδακτορικής διατριβής, οι εξισώσεις της γραμμικής θεωρίας της θερμοελαστικότητας μπορούν κατά προσέγγιση να χρησιμοποιηθούν και στην περίπτωση αυθαίρετων θερμοκρασιακών μεταβολών, ακόμη και όταν οι ιδιότητες των υλικών θεωρούνται ως θερμοκρασιακά-εξαρτώμενες. Έπειτα από την περιγραφή της γενίκευσης του κώδικα πεπερασμένων στοιχείων για την αντιμετώπιση του μη γραμμικού προβλήματος, παρουσιάζονται συγκεκριμένες εφαρμογές. Αρχικά μελετάται η επίδραση της θερμοκρασιακής εξάρτησης των ιδιοτήτων στη θερμομηχανική συμπεριφορά της FGM λωρίδας. Στη συνέχεια γίνεται μία παραμετρική ανάλυση για την εύρεση της βέλτιστης σύνθεσης της FGM λωρίδας και ειδικότερα του TBC (δηλαδή των δύο ανώτερων στρώσεων), η οποία ελαχιστοποιεί την τάση που αναπτύσσεται στην περιοχή του TBC που βρίσκεται κοντά στην ανώτερη επιφάνεια της μεταλλικής στρώσης, ενώ παράλληλα διατηρεί τη μέγιστη θερμοκρασία που αναπτύσσεται στο μεταλλικό υλικό σε χαμηλά επίπεδα.

Κεφάλαιο 6

Στο έκτο κεφάλαιο της διατριβής αναφέρονται τα κύρια συμπεράσματα από τις αναλύσεις που παρουσιάστηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια. Επίσης, προτείνονται θέματα για μελλοντική έρευνα.

Οι καινοτομίες της παρούσας διδακτορικής διατριβής είναι οι ακόλουθες:

- Αριθμητική μελέτη του δυναμικού μονοδιάστατου προβλήματος FGM λωρίδας τριών στρώσεων υπό ομοιόμορφη θερμομηχανική καταπόνηση στις ελεύθερες επιφάνειές της, στα πλαίσια της κλασικής συζευγμένης θερμοελαστικότητας και διαφόρων θεωριών γενικευμένης θερμοελαστικότητας, με χρήση κώδικα πεπερασμένων στοιχείων που κατασκευάστηκε σε περιβάλλον Matlab.
- Γενίκευση της παραπάνω αριθμητικής μελέτης για την περίπτωση που λαμβάνεται υπόψη η επίδραση της θερμοκρασίας στις ιδιότητες των υλικών, στα πλαίσια της κλασικής συζευγμένης θερμοελαστικότητας.
- Απόδειξη ότι οι σχέσεις της γραμμικής θεωρίας της θερμοελαστικότητας μπορούν να χρησιμοποιηθούν προσεγγιστικά και για την περίπτωση πεπερασμένων θερμοκρασιακών μεταβολών, ακόμη και όταν οι ιδιότητες των υλικών θεωρηθούν ως συναρτήσεις της θερμοκρασίας
- Πρόταση για τη βέλτιστη κατανομή των υλικών σε μία λωρίδα διαβαθμισμένων ιδιοτήτων από κεραμικό/μεταλλικό υλικό, η οποία υποβάλλεται σε συνθήκες θερμικού σοκ

Επιπλέον, από τα αποτελέσματα αυτής της ερευνητικής εργασίας προέκυψαν οι δημοσιεύσεις που εμφανίζονται παρακάτω [1-9]. Ειδικότερα, ορισμένα αποτελέσματα που αφορούν τη γενικευμένη θερμοελαστικότητα και σχετικές εφαρμογές, τα οποία εμφανίζονται στα κεφάλαια 3 και 4 της παρούσης διδακτορικής διατριβής, έχουν δημοσιευτεί στο [2]. Ακόμη, ορισμένα αποτελέσματα που αφορούν ειδικά τη γενικευμένη θεωρία Lord-Shulman και σχετικές εφαρμογές, τα οποία εμφανίζονται επίσης στα κεφάλαια 3 και 4 της παρούσης διδακτορικής διατριβής, έχουν υποβληθεί για δημοσίευση στο [3].

Δημοσιεύσεις σε διεθνή επιστημονικά περιοδικά με κριτές

- [1] Antonios M. Nikolarakis and Efstathios E. Theotokoglou, Numerical Analysis of Transient Stress Field of a Functionally Graded Nickel-Zirconia Profile under Thermal Loading, *Journal of Thermal Stresses*, vol. 38, pp. 1087-1105, 2015.
- [2] Antonios M. Nikolarakis and Efstathios E. Theotokoglou, Thermal Shock Problem of a Three-Layered Functionally Graded Zirconia/Titanium Alloy Strip Based on a Unified Generalized Thermoelasticity Theory, *Journal of Thermal Stresses* (δημοσιεύτηκε στο διαδίκτυο στις 22 Νοεμβρίου 2016, DOI:10.1080/01495739.2016.1237860)
- [3] Antonios M. Nikolarakis and Efstathios E. Theotokoglou, Transient Analysis of a Functionally Graded Ceramic/Metal Layer Considering the Lord-Shulman Theory (έχει υποβληθεί για δημοσίευση στο περιοδικό *Archive of Applied Mechanics* από τις 23 Ιουλίου 2016 και βρίσκεται σε διαδικασία κρίσης)

Δημοσιεύσεις σε πρακτικά διεθνών συνεδρίων

- [4] A. M. Nikolarakis, E. E. Theotokoglou and T. K. Papathanasiou, Finite Element Analysis of a Functionally Graded Nickel-Zirconia Profile under Thermal Loading, Semi-Planery Lecture, *10th HSTAM International Congress on Mechanics*, Chania, Crete, Greece, 25-27 May, 2013
- [5] T. K. Papathanasiou, A. M. Nikolarakis and A. Savaidis, Finite Element Schemes for Functionally Graded Half-Spaces subjected to Thermal Shock on the Boundary, *10th HSTAM International Congress on Mechanics*, Chania, Crete, Greece, 25-27 May, 2013

- [6] T. K. Papathanasiou, A. M. Nikolarakis, A. Savaidis and K. Kalkanis, Finite Element Schemes for Combined Thermal and Pressure Shock Loading of Functionally Graded Configurations, *3rd International Conference of Engineering Against Failure (ICEAF III)*, Kos, Greece, 26-28 June, 2013
- [7] A. M. Nikolarakis, T. K. Papathanasiou and A. Savaidis, Fully Coupled Thermoelastic Analysis of a Functionally Graded Half-Space subjected to Thermal Shock on the Boundary, *3rd International Conference of Engineering Against Failure (ICEAF III)*, Kos, Greece, 26-28 June, 2013
- [8] Antonios M. Nikolarakis and Efstathios E. Theotokoglou, Transient Stresses of a Functionally Graded Profile with Temperature-Dependent Materials under Thermal Shock, *8th GRACM International Congress on Computational Mechanics*, Volos, 12 July – 15 July 2015
- [9] Antonios M. Nikolarakis and Efstathios E. Theotokoglou, Transient Thermal and Stress Waves of a Functionally Graded Layer under a Unified Generalized Thermoelasticity Theory, *11th HSTAM International Congress on Mechanics*, Athens, 27 May – 30 May 2016

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Πρόλογος	i
Περίληψη	ix
Abstract	xi
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1	1
Υλικά Διαβαθμισμένων Ιδιοτήτων (FGMs)	
1.1 Εισαγωγή	1
1.1.1 Ορισμός και ιστορικά στοιχεία	1
1.1.2 Μέθοδοι κατασκευής	2
1.1.3 Εφαρμογή στις επικαλύψεις θερμικής προστασίας (TBCs)	2
1.2 Εκτίμηση μακροσκοπικών ιδιοτήτων	4
1.2.1 Μαθηματική προσομοίωση	4
1.2.2 Μικρομηχανικά μοντέλα	5
1.3 Βιβλιογραφία	6
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2	9
Κλασική Συζευγμένη και Γενικευμένη Θερμοελαστικότητα	
2.1 Εισαγωγή	9
2.2 Κλασική συζευγμένη θερμοελαστικότητα	10
2.3 Θεωρίες γενικευμένης θερμοελαστικότητας	14
2.3.1 Θεωρία Lord-Shulman	14
2.3.2 Θεωρία Green-Lindsay	15
2.3.3 Θεωρία Green-Naghdi	17
2.4 Μία ενοποιημένη θεωρία γενικευμένης θερμοελαστικότητας	21
2.5 Πεδίο εφαρμογής της γενικευμένης θερμοελαστικότητας	23
2.6 Βιβλιογραφία	24

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3	27
Υπολογιστική Διαδικασία Επίλυσης Μονοδιάστατου Προβλήματος Γενικευμένης Θερμοελαστικότητας	
3.1 Εισαγωγή	27
3.2 Κανονικοποιημένη μορφή των βασικών εξισώσεων	28
3.3 Μεθοδολογία αριθμητικής ανάλυσης	32
3.3.1 Μητρική εξίσωση των πεπερασμένων στοιχείων και χρονική ολοκλήρωση	32
3.3.2 Αρχικές και συνοριακές συνθήκες	37
3.3.3 Κώδικας πεπερασμένων στοιχείων	38
3.4 Έλεγχος της σύγκλισης του κώδικα πεπερασμένων στοιχείων	40
3.5 Βιβλιογραφία	44
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4	47
Μεταβατικά Πεδία Μετατόπισης, Θερμοκρασίας και Τάσης σε Λωρίδα Διαβαθμισμένων Ιδιοτήτων υπό Συνθήκες Θερμικού Σοκ	
4.1 Εισαγωγή	47
4.2 Θερμοελαστικά κύματα σε ομοιογενή λωρίδα υπό συνθήκες θερμικού σοκ	50
4.3 FGM στρώση από κεραμικό/μεταλλικό υλικό σε συνθήκες θερμικού σοκ, στα πλαίσια της θεωρίας Lord-Shulman	57
4.4 Διερεύνηση ως προς την επίδραση του χρόνου χαλάρωσης της θεωρίας Lord-Shulman στη θερμομηχανική συμπεριφορά μιας FGM στρώσης	66
4.5 Σύνθετη λωρίδα από κεραμικό/μεταλλικό υλικό με ενδιάμεση FGM στρώση σε συνθήκες θερμικού σοκ, στα πλαίσια της θεωρίας Green-Lindsay	71
4.6 Σύνθετη λωρίδα ZrO_2 /FGM/Ti-6Al-4V σε συνθήκες θερμικού σοκ τύπου αναβαθμίδας, στα πλαίσια της κλασικής συζευγμένης θερμοελαστικότητας και των γενικευμένων θεωριών Lord-Shulman και Green-Lindsay	76
4.7 Συμπεράσματα	85
4.8 Βιβλιογραφία	86

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5	89
Θερμοελαστική Ανάλυση Λωρίδας Διαβαθμισμένων και Θερμοκρασιακά-Εξαρτώμενων Ιδιοτήτων	
5.1 Εισαγωγή	89
5.2 Γενίκευση του κώδικα πεπερασμένων στοιχείων για θερμοκρασιακά-εξαρτώμενες ιδιότητες	91
5.3 Επίδραση της θερμοκρασιακής εξάρτησης των ιδιοτήτων στη θερμομηχανική συμπεριφορά μίας σύνθετης λωρίδας σε συνθήκες θερμικού σοκ	96
5.4 Επίδραση της θερμοκρασιακής εξάρτησης των ιδιοτήτων στη θερμομηχανική συμπεριφορά μίας FGM στρώσης σε συνθήκες θερμικού σοκ τύπου αναβαθμίδας	100
5.5 Μελέτη της θερμομηχανικής συμπεριφοράς σύνθετης λωρίδας ZrO ₂ /Ti-6Al-4V με ενδιάμεση FGM στρώση σταθερού πάχους, υπό συνθήκες θερμικού σοκ	107
5.6 Συγκριτική μελέτη της θερμομηχανικής συμπεριφοράς σύνθετων λωρίδων τριών στρώσεων ZrO ₂ /FGM/Ti-6Al-4V με κοινή θερμική αντίσταση, υπό συνθήκες θερμικού σοκ	115
5.7 Μελέτη του ανακλώμενου τασικού κύματος στην άνω επιφάνεια της μεταλλικής στρώσης σε σύνθετη λωρίδα τριών στρώσεων ZrO ₂ /FGM/Ti-6Al-4V υπό συνθήκες θερμικού σοκ	123
5.8 Συμπεράσματα	129
5.9 Βιβλιογραφία	131
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6	133
Γενικά Συμπεράσματα και Προτάσεις για Μελλοντική Έρευνα	
6.1 Γενικά συμπεράσματα	133
6.2 Προτάσεις για μελλοντική έρευνα	134
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α	135
Κλασική Συζευγμένη Θερμοελαστικότητα με Πεπερασμένες Θερμοκρασιακές Μεταβολές	
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β	139
Κατανομή Τελικής Θερμοκρασίας σε μία Λωρίδα Διαβαθμισμένων Ιδιοτήτων υπό Συνθήκες Θερμικού Σοκ	

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σε πολλές κατασκευές όπου τα δομικά μέλη υποβάλλονται σε έντονες θερμομηχανικές καταπονήσεις, απαιτείται η χρήση σύνθετων υλικών. Ωστόσο, η ασυνέχεια των θερμομηχανικών ιδιοτήτων που υπάρχει στη διεπιφάνεια μεταξύ των διαφορετικών υλικών ενός συμβατικού σύνθετου υλικού συχνά οδηγεί σε τοπική συγκέντρωση τάσεων. Μία πιθανή λύση στο ανωτέρω πρόβλημα είναι η χρήση υλικών διαβαθμισμένων ιδιοτήτων (functionally graded materials – FGMs), τα οποία είναι προηγμένα υλικά που χαρακτηρίζονται από τη μεταβολή των ιδιοτήτων τους με συνεχή τρόπο.

Αντικείμενο της παρούσας διατριβής είναι η αριθμητική μελέτη των μεταβατικών πεδίων της μετατόπισης, της θερμοκρασίας και της τάσης που αναπτύσσονται σε μία λωρίδα διαβαθμισμένων ιδιοτήτων, η οποία υποβάλλεται σε συνθήκες θερμικού σοκ (thermal shock conditions). Στη γενική περίπτωση η λωρίδα αποτελείται από τρεις στρώσεις: η ανώτερη και η κατώτερη στρώση αποτελούνται από κεραμικό και μεταλλικό υλικό αντίστοιχα, ενώ ανάμεσά τους παρεμβάλλεται μία ενδιάμεση στρώση από προηγμένο υλικό διαβαθμισμένων ιδιοτήτων. Σε αυτή τη λωρίδα, η στρώση του κεραμικού υλικού και η FGM στρώση αποτελούν την επικάλυψη θερμικής προστασίας (TBC) της στρώσης του μεταλλικού υλικού.

Αρχικά, η ανάλυση γίνεται στα πλαίσια της ενοποιημένης θεωρίας γενικευμένης θερμοελαστικότητας των Bagri και Eslami, ενώ στη συνέχεια χρησιμοποιείται η κλασική συζευγμένη θερμοελαστικότητα με θερμοκρασιακά-εξαρτώμενες ιδιότητες υλικών (temperature-dependent properties). Σε περιπτώσεις απότομων θερμοκρασιακών μεταβολών, τα αποτελέσματα της γενικευμένης θερμοελαστικότητας ενδέχεται να είναι σημαντικά. Επιπλέον, σε συνθήκες μεγάλων θερμοκρασιακών μεταβολών ο συνυπολογισμός της επίδρασης της θερμοκρασίας στις ιδιότητες των υλικών οδηγεί σε πιο ρεαλιστικές αναλύσεις.

Για την υπολογιστική ανάλυση των εφαρμογών αναπτύχθηκε κώδικας πεπερασμένων στοιχείων σε περιβάλλον Matlab, όπου για τη χρονική ολοκλήρωση χρησιμοποιείται η μέθοδος Newmark. Τα αποτελέσματα του κώδικα ελέγχθηκαν με βάση αναλυτικές λύσεις που υπάρχουν διαθέσιμες στη βιβλιογραφία. Επίσης, η εκτίμηση των μακροσκοπικών ιδιοτήτων στην FGM στρώση βασίζεται στο μοντέλο Voigt, όπου για το κατ' όγκο ποσοστό του μεταλλικού υλικού εξετάζονται η σιγμοειδής κατανομή (sigmoid law) και η κατανομή εκθετικού νόμου (power law) με παράμετρο p . Στόχος των εφαρμογών που παρουσιάζονται είναι καταρχήν η εύρεση της βέλτιστης κατανομής του ποσοστού των υλικών μέσα στο TBC, η οποία ελαχιστοποιεί τις αναπτυσσόμενες τάσεις κοντά στις διεπιφάνειες ανάμεσα στις στρώσεις, εξασφαλίζοντας παράλληλα την απαιτούμενη θερμική προστασία που προσφέρεται στην κατώτερη στρώση του μεταλλικού υλικού.

ABSTRACT

In many structures where the components are subjected to severe thermomechanical conditions, the use of composite materials is required. However, the abrupt change of the properties that occurs at the interface between the different materials in conventional composite materials, often leads to local concentrations of stress. A possible solution to the aforementioned problem is the use of functionally graded materials (FGMs), which are advanced materials with gradual transition of their properties.

The subject of the current dissertation is the numerical analysis of the transient fields of displacement, temperature and stress inside a ceramic/metal FGM strip which is subjected to thermal shock conditions. In general, the strip consists of three layers: the upper layer is a ceramic layer, the lower layer is a metallic layer, and between them there is an intermediate ceramic/metal FGM layer. In this strip, the ceramic and the FGM layer form the thermal barrier coating (TBC) of the metallic layer.

Initially, the analysis is done in the context of the unified generalized thermoelasticity theory proposed by Bagri and Eslami. Subsequently, the classical coupled thermoelasticity theory is used, where the thermomechanical properties of the materials are assumed to be temperature-dependent. Under thermal shock conditions, the results of the generalized thermoelasticity theory could be important. On the other hand, in the case of large temperature changes the assumption of the temperature-dependency of the properties leads to more realistic analyses.

A Matlab finite element code was developed for the computational analysis of the applications, where the Newmark method is used for the time integration. The code is verified through the analytical results available in the literature. Furthermore, the estimation of the properties inside the FGM layer is based on the Voigt model, where the distribution of the volume fraction of the metal material is assumed to follow either the sigmoid law function or the power law function, in terms of a parameter p . The purpose of the presented applications is mainly the optimization of the distribution of the materials inside the TBC, which minimizes the stress applied at the area close to the interfaces between the layers and additionally offers the required thermal protection to the lower metallic layer.

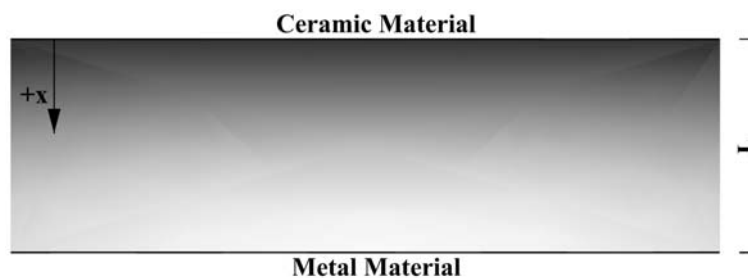
Υλικά Διαβαθμισμένων Ιδιοτήτων (FGMs)

1.1. Εισαγωγή

1.1.1. Ορισμός και ιστορικά στοιχεία

Στις περισσότερες κατασκευές τα δομικά μέλη καταπονούνται με φορτίσεις που δημιουργούν διαφορετικά εντατικά μεγέθη σε κάθε σημείο τους. Από την άλλη πλευρά, η απότομη μεταβολή των ιδιοτήτων ενός συμβατικού σύνθετου υλικού που υπάρχει στις διεπιφάνειες ανάμεσα στα διαφορετικά υλικά που το αποτελούν, συχνά οδηγεί σε τοπική συγκέντρωση τάσεων [1]. Οι παραπάνω παρατηρήσεις οδήγησαν στην έρευνα που πραγματοποιείται τις τελευταίες δεκαετίες πάνω σε μία ειδική κατηγορία προηγμένων υλικών, τα οποία ονομάζονται υλικά διαβαθμισμένων ιδιοτήτων (functionally graded materials - FGMs) [1-6].

Τα FGMs είναι προηγμένα υλικά που χαρακτηρίζονται από τη χωρική μεταβολή της μικροδομής και της σύνθεσής τους με συνεχή και ομαλό τρόπο, με άμεση συνέπεια την αντίστοιχη συνεχή μεταβολή των ιδιοτήτων τους [1-6]. Στην απλούστερη εκδοχή του FGM, η χωρική μεταβολή λαμβάνει χώρα ανάμεσα σε δύο διακεκριμένα υλικά κατά την έννοια της μίας διάστασης. Ειδικότερα, η πλέον συνηθισμένη εφαρμογή του FGM αφορά τη βαθμιαία μεταβολή από ένα κεραμικό υλικό (ceramic material) σε ένα μεταλλικό υλικό (metal material), όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 1.1. [2].



Σχήμα 1.1. Κεραμικό/Μεταλλικό FGM

Διαβαθμισμένες κατασκευές απαντώνται συχνά στη φύση (βιολογικός ιστός, ανθρώπινο οστό, κορμός δέντρου κλπ.) και η ιδέα για την κατασκευή διαβαθμισμένων υλικών εμφανίστηκε στις αρχές της δεκαετίας του 1970 [2]. Ωστόσο, η ουσιαστική έρευνα για το σχεδιασμό και την κατασκευή των FGMs ξεκίνησε στα μέσα της δεκαετίας του 1980 από επιστήμονες της μηχανικής των υλικών στην Ιαπωνία, ως πρόταση για την κατασκευή προηγμένων πυρίμαχων υλικών [3]. Τα τελευταία 20 χρόνια ιδιαίτερα, υπάρχει έντονη ερευνητική δραστηριότητα για θέματα σχετικά με την κατασκευή, το σχεδιασμό, την προσομοίωση, τους τρόπους αστοχίων και ειδικότερα τη θερμομηχανική συμπεριφορά δομικών στοιχείων που αποτελούνται από FGMs [4-6].

1.1.2. Μέθοδοι κατασκευής

Η διαδικασία για την κατασκευή ενός FGM μπορεί συνήθως να διαχωριστεί σε δύο φάσεις: η πρώτη φάση αφορά στη δημιουργία μίας χωρικά ανομοιογενούς δομής (gradation process), ενώ η δεύτερη φάση αφορά στο μετασχηματισμό της δομής αυτής σε ένα ενιαίο υλικό (consolidation process) [7].

Οι κατασκευαστικές μέθοδοι για την πρώτη φάση δύναται να ταξινομηθούν στις εποικοδομητικές μεθόδους (constructive processes) και στις μεθόδους που βασίζονται σε φαινόμενα μεταφοράς (transport-based processes) [1,6]. Στις εποικοδομητικές μεθόδους το FGM κατασκευάζεται στο χώρο ανά επίπεδο, όπου σε κάθε επίπεδο η κατανομή των συστατικών υλικών διαφοροποιείται. Στη δεύτερη κατηγορία μεθόδων η κατασκευή του FGM βασίζεται σε φυσικά φαινόμενα μεταφοράς, όπως είναι η ροή ρευστού, η διάχυση μορίων και η μεταφορά θερμότητας. Στη συνέχεια παρουσιάζονται επιγραμματικά ορισμένες από τις πιο σημαντικές μεθόδους κατασκευής των FGMs [1,2,6,7].

Η μεταλλουργία κονιών (powder metallurgy) ανήκει στις εποικοδομητικές μεθόδους κατασκευής FGM και υλοποιείται σε τέσσερα στάδια: προετοιμασία των κονιών, ανάμιξη των κονιών ανάλογα με την επιδιωκόμενη χωρική κατανομή, στοίβαγμα και γόμωση των αναμιγμένων κονιών (forming), και τέλος συμπίεση και σχηματισμός της στερεάς μάζας (sintering) [6]. Καθώς το υλικό που χρησιμοποιείται για το σχηματισμό της στερεάς μάζας είναι διασκορπισμένο σε πολύ μικρά τμήματα σωματιδίων κονιάς, οι συνθήκες για την κατασκευή της επιδιωκόμενης χωρικής κατανομής της σύνθεσης του FGM είναι σχεδόν ιδανικές [7].

Μία ακόμη εποικοδομητική μέθοδος κατασκευής FGM είναι η διαδικασία της εναπόθεσης ατμού (vapor deposition process). Υπάρχουν διάφοροι τύποι εναπόθεσης ατμού, όπως είναι η φυσική εναπόθεση ατμού (physical vapor deposition - PVD) και η χημική εναπόθεση ατμού (chemical vapor deposition - CVD) [1,6]. Στη μέθοδο αυτή, τα υλικά που χρησιμοποιούνται βρίσκονται σε αέρια φάση και συμπιέζονται είτε με φυσικές είτε με χημικές διαδικασίες για να μετασχηματιστούν σε στερεό σώμα. Η μέθοδος εναπόθεσης ατμού χρησιμοποιείται για το σχηματισμό επικαλύψεων για τη θερμική, τη μηχανική, την ηλεκτρική ή τη διαβρωτική προστασία του υποστρώματος [1,6].

Η μέθοδος της φυγοκεντρικής χύτευσης (centrifugal casting) είναι χαρακτηριστική εκπρόσωπος των μεθόδων κατασκευής FGM που βασίζονται σε φαινόμενα μεταφοράς. Στη μέθοδο αυτή λιωμένο μέταλλο χύνεται μέσα σε περιστρεφόμενο καλούπι, με αποτέλεσμα το μεταλλικό τήγμα να συγκεντρώνεται στην περιφέρεια. Παράλληλα, στερεά σωματίδια ενός πυρίμαχου υλικού (π.χ. κεραμικού) διασκορπίζονται στο τήγμα, καθώς αυτό στερεοποιείται. Η μέθοδος της φυγοκεντρικής χύτευσης χρησιμοποιείται αποκλειστικά για την κατασκευή κυλινδρικών τμημάτων [6].

1.1.3. Εφαρμογή στις επικαλύψεις θερμικής προστασίας (TBCs)

Οι εφαρμογές των FGMs εκτείνονται σε όλες σχεδόν τις περιοχές της επιστήμης των υλικών [2,4,6]. Το ενδιαφέρον για τα FGMs πηγάζει από τα ανώτερα χαρακτηριστικά τους σε σχέση με τα παραδοσιακά σύνθετα υλικά, καθώς η κατανομή των ιδιοτήτων των FGMs δύναται να προσαρμοστεί στις ανάγκες της κάθε εφαρμογής. Αρχικά η εφαρμογή των FGMs περιοριζόταν στην αεροναυπηγική, ωστόσο τις τελευταίες δεκαετίες η χρήση τους έχει επεκταθεί και σε άλλα πεδία, όπως είναι η βιοιατρική, η οπτοηλεκτρονική, η αυτοκινητοβιομηχανία, η ενέργεια κ.α. [6].

Τα FGMs είναι κατάλληλα για τη λειτουργία τους σε ακραίες συνθήκες. Χαρακτηριστική εφαρμογή είναι οι επικαλύψεις θερμικής προστασίας (thermal barrier coatings - TBCs), οι οποίες τυπικά αποτελούνται από κεραμικά υλικά και χρησιμοποιούνται για την προστασία

μεταλλικών τμημάτων σε μηχανές αεροσκαφών από έντονες θερμομηχανικές καταπονήσεις [4]. Ένας από τους κύριους μηχανισμούς αστοχίας των TBCs είναι η αποδόμηση (spallation) του κεραμικού υλικού κοντά στη διεπιφάνεια με το μεταλλικό υλικό, λόγω των διαφορετικών θερμομηχανικών ιδιοτήτων των δύο υλικών [8,9]. Η ασυνέχεια στις ιδιότητες που υπάρχει στη διεπιφάνεια, σε συνδυασμό με τις έντονες θερμοκρασιακές μεταβολές οδηγούν στη συγκέντρωση τάσεων και τη δημιουργία ρωγμών στη θέση αυτή. Η επαναλαμβανόμενη εφαρμογή των θερμικών φορτίων προκαλεί τη διάδοση και επέκταση των ρωγμών, προκαλώντας εν τέλει την αποδόμηση του κεραμικού υλικού ή τον αποχωρισμό (delamination) του από το μεταλλικό υλικό [9].

Μία μέθοδος ενίσχυσης των TBCs έναντι του παραπάνω τρόπου αστοχίας είναι η παρεμβολή μίας FGM στρώσης ανάμεσα στο κεραμικό και το μεταλλικό υλικό, δημιουργώντας έτσι μία σύνθετη δομή με ομαλή μεταβολή των θερμομηχανικών ιδιοτήτων της [8,9]. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η αντικατάσταση των συμβατικών TBCs με FGM-TBCs που έχουν παρόμοια θερμική αντίσταση (thermal resistance) [9]. Η θερμική αντίσταση είναι ένα μέτρο εκτίμησης της θερμικής προστασίας που προσφέρει το TBC στο μεταλλικό υπόστρωμα. Για μία στρώση πάχους L από ομοιογενές υλικό, η θερμική αντίσταση \bar{R} ανά μονάδα επιφανείας δίνεται από την ακόλουθη σχέση [9]:

$$\bar{R} = \frac{L}{k} \quad (1.1.1)$$

όπου k είναι η θερμική αγωγιμότητα του υλικού.

Γενικεύοντας την εξίσωση (1.1.1), η θερμική αντίσταση μίας FGM στρώσης πάχους L , όπου η θερμική αγωγιμότητα του FGM ορίζεται ως $k = k(x)$, $0 \leq x \leq L$, θα δίνεται από την εξής σχέση:

$$\bar{R} = \int_0^L \frac{1}{k(x)} dx \quad (1.1.2)$$

Επομένως, από τις σχέσεις (1.1.1)-(1.1.2) προκύπτει ότι το απαιτούμενο πάχος L_{fg} μίας FGM στρώσης, το οποίο εξασφαλίζει ίση θερμική αντίσταση με μία στρώση από κεραμικό υλικό πάχους L_c και με θερμική αγωγιμότητα k_c , δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$L_{fg} = \frac{L_c}{k_c \int_0^1 \frac{1}{k_{fg}(\omega)} d\omega} \quad (1.1.3)$$

όπου $k_{fg} = k_{fg}(x)$, $0 \leq x \leq L$, είναι η κατανομή της θερμικής αγωγιμότητας στην FGM στρώση και $\omega = x/L_{fg}$.

Για την εκτίμηση της αντίστασής τους έναντι θραύσης, τα TBCs (και ειδικότερα τα FGM-TBCs) υποβάλλονται σε πειραματικές δοκιμασίες θερμικού σοκ (thermal shock tests) [9,10]. Η παρούσα διδακτορική διατριβή αφορά στην αριθμητική προσομοίωση της θερμομηχανικής συμπεριφοράς ενός κεραμικού/μεταλλικού FGM (βλ. Σχήμα 1.1), το οποίο υποβάλλεται σε συνθήκες θερμικού σοκ (thermal shock conditions). Η κατασκευή του FGM μπορεί να θεωρηθεί ως αποτέλεσμα της μεταβολής της αναλογίας των δύο υλικών κατά την έννοια του πάχους του.

1.2. Εκτίμηση μακροσκοπικών ιδιοτήτων

1.2.1. Μαθηματική προσομοίωση

Τα FGMs χαρακτηρίζονται από την χωρική ανομοιογένεια της μικροδομής τους. Μία λεπτομερής περιγραφή της πραγματικής κατανομής της σύνθεσης και της μικροδομής τους δεν είναι συνήθως διαθέσιμη. Ωστόσο, για την αποτελεσματική μελέτη τους είναι χρήσιμο να προσομοιωθούν ως συνεχή μέσα, οι ιδιότητες των οποίων μεταβάλλονται με ομαλό τρόπο ως προς τις χωρικές συντεταγμένες [5].

Για ένα κεραμικό/μεταλλικό FGM πάχους L (βλ. Σχήμα 1.1), μία μακροσκοπική ιδιότητα του υλικού στη θέση x εκτιμάται συνήθως με βάση το μοντέλο Voigt (Voigt model) [11], το οποίο ουσιαστικά είναι ένας γραμμικός κανόνας ανάμιξης (linear rule of mixture) [2]:

$$P(x) = P_c V_c(x) + P_m V_m(x), \quad 0 \leq x \leq L \quad (1.2.1)$$

όπου $P = P(x)$ είναι η εκτιμώμενη μακροσκοπική ιδιότητα, P_c και P_m είναι οι ιδιότητες του κεραμικού και του μεταλλικού υλικού αντίστοιχα, ενώ $V_c = V_c(x)$ και $V_m = V_m(x)$ είναι τα κατ' όγκο ποσοστά (volume fractions) του κεραμικού και του μεταλλικού υλικού αντίστοιχα ως συναρτήσεις της χωρικής συντεταγμένης x , όπου $0 \leq x \leq L$.

Καθώς $V_c(x) + V_m(x) = 1$, η σχέση (1.2.1) γράφεται ως εξής:

$$P(x) = P_c + (P_m - P_c) V_m(x), \quad 0 \leq x \leq L \quad (1.2.2)$$

Η θέση $x = 0$ αντιστοιχεί στην άνω επιφάνεια του FGM, όπου $V_m(0) = 0$ και $P(0) = P_c$ καθώς στην άνω επιφάνεια το υλικό είναι αμιγώς κεραμικό. Αντίστοιχα στη θέση $x = L$, η οποία αντιστοιχεί στην κάτω επιφάνεια του FGM, είναι $V_m(L) = 1$ και $P(L) = P_m$ καθώς στην κάτω επιφάνεια το υλικό είναι αμιγώς μεταλλικό.

Για την εκτίμηση των μακροσκοπικών ιδιοτήτων ενός FGM από τη σχέση (1.2.2) είναι απαραίτητος ο προσδιορισμός της κατανομής του κατ' όγκο ποσοστού του μεταλλικού υλικού, V_m . Στη βιβλιογραφία υπάρχουν τρεις βασικές κατανομές για το V_m : η εκθετική κατανομή (exponential law), η κατανομή εκθετικού νόμου (power law) και η σιγμοειδής κατανομή (sigmoid law) [5,6]. Σύμφωνα με την εκθετική κατανομή, η οποία χρησιμοποιείται κυρίως σε προβλήματα μηχανικής των θραύσεων (fracture mechanics) [1], η κατανομή μίας μακροσκοπικής ιδιότητας P του FGM προκύπτει από την ακόλουθη σχέση [5,6]:

$$P(x) = P_c \exp \left[\ln \left(\frac{P_m}{P_c} \right) \frac{x}{L} \right], \quad 0 \leq x \leq L \quad (1.2.3)$$

Στην κατανομή εκθετικού νόμου, που είναι η πιο συνηθισμένη κατανομή στη βιβλιογραφία σε προβλήματα ανάλυσης τάσεων, το κατ' όγκο ποσοστό του μεταλλικού υλικού V_m δίνεται από την εξής σχέση [5,6]:

$$V_m(x) = \left(\frac{x}{L} \right)^p, \quad 0 \leq x \leq L \quad (1.2.4)$$

όπου p είναι μία θετική παράμετρος*.

Η αντικατάσταση της σχέσης (1.2.4) στην εξίσωση (1.2.2) δίνει την ακόλουθη σχέση:

$$P(x) = P_c + (P_m - P_c) \left(\frac{x}{L} \right)^p, \quad 0 \leq x \leq L \quad (1.2.5)$$

Η σιγμοειδής κατανομή αποτελεί συνδυασμό δύο κατανομών εκθετικού νόμου και εισήχθη από τους Chi και Chung [12]. Στη σιγμοειδή κατανομή το κατ' όγκο ποσοστό του μεταλλικού υλικού V_m εκφράζεται ως εξής [6]:

$$V_m(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{2x}{L} \right)^p, & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ 1 - \frac{1}{2} \left(2 - \frac{2x}{L} \right)^p, & \frac{L}{2} < x \leq L \end{cases} \quad (1.2.6)$$

Από την αντικατάσταση της σχέσης (1.2.6) στη σχέση (1.2.2) προκύπτει η εξής σχέση:

$$P(x) = \begin{cases} P_c + \frac{P_m - P_c}{2} \left(\frac{2x}{L} \right)^p, & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ P_m + \frac{P_c - P_m}{2} \left(2 - \frac{2x}{L} \right)^p, & \frac{L}{2} < x \leq L \end{cases} \quad (1.2.7)$$

Στην παρούσα διατριβή, οι μακροσκοπικές ιδιότητες του FGM υπολογίζονται με βάση είτε την κατανομή εκθετικού νόμου είτε τη σιγμοειδή κατανομή, δηλαδή με βάση τις σχέσεις (1.2.5) ή (1.2.7) αντίστοιχα. Οι σχέσεις αυτές προκύπτουν από το μοντέλο Voigt, το οποίο άλλωστε χρησιμοποιείται στις περισσότερες αναλύσεις των κατασκευών από FGMs καθώς διακρίνεται για την απλότητα και το μικρό υπολογιστικό κόστος του, ενώ παράλληλα μπορεί να θεωρηθεί ότι δίνει ένα άνω όριο για τις εκτιμώμενες ιδιότητες [6].

Ωστόσο, για την εκτίμηση των μακροσκοπικών ιδιοτήτων ενός FGM έχουν προταθεί αρκετές μέθοδοι ομογενοποίησης (homogenization), οι οποίες βασίζονται σε μικρομηχανικά μοντέλα [5,6]. Στην παράγραφο 1.2.2 αναφέρονται οι πιο σημαντικές από αυτές.

1.2.2. Μικρομηχανικά μοντέλα

Τα μικρομηχανικά μοντέλα θεμελιώνονται στην έννοια του αντιπροσωπευτικού στοιχείου όγκου (representative volume element), το οποίο θεωρείται ότι εμπεριέχει τη μικροδομή του σύνθετου υλικού [2]. Υπάρχουν κυρίως δύο μέθοδοι που βασίζονται σε μικρομηχανικά μοντέλα και χρησιμοποιούνται για την ανάλυση των FGMs: η αυτοσυνεπής μέθοδος (self-consistent method) [13] και η μέθοδος Mori-Tanaka (Mori-Tanaka method) [14].

Η αυτοσυνεπής μέθοδος βασίζεται στην ελαστική ανάλυση ενός συνεχούς μέσου με ιδιότητες που θεωρείται ότι είναι οι ζητούμενες μακροσκοπικές ιδιότητες του FGM, και στο οποίο υπάρχει ενσωματωμένο ένα έγκλεισμα (inclusion) ελλειπτικής μορφής [5]. Στην

* για $p = 1$ η κατανομή είναι γραμμική

αυτοσυνεπή μέθοδο δε γίνεται διάκριση ανάμεσα στο συστατικό υλικό που έχει το μεγαλύτερο κατ' όγκο ποσοστό και επομένως έχει το ρόλο της μήτρας (matrix), και στο άλλο συστατικό υλικό που έχει το ρόλο της ενίσχυσης (reinforcement) [5]. Για το λόγο αυτό είναι κατάλληλη για την εκτίμηση των μακροσκοπικών ιδιοτήτων ενός κεραμικού/μεταλλικού FGM, όπου ο ρόλος της μήτρας εναλλάσσεται από το κεραμικό στο μεταλλικό υλικό ανάλογα με τη θέση. Ωστόσο η χρήση της μεθόδου για την ανάλυση ενός FGM είναι περιορισμένη, καθώς ο προσδιορισμός των μακροσκοπικών ιδιοτήτων απαιτεί την επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων [15].

Η μέθοδος Mori-Tanaka βασίζεται στην ελαστική ανάλυση ενός συνεχούς μέσου που λογίζεται ως μήτρα, μέσα στο οποίο υπάρχει ενσωματωμένο ένα σωματίδιο (particle) σφαιρικής μορφής [5]. Στο μοντέλο αυτό η μήτρα έχει τις ιδιότητες του συστατικού υλικού με το μεγαλύτερο κατ' όγκο ποσοστό, ενώ το σωματίδιο έχει τις ιδιότητες του άλλου συστατικού υλικού. Συνεπώς, η μέθοδος Mori-Tanaka εφαρμόζεται σε περιοχές όπου είναι σαφής η διάκριση ανάμεσα στο συστατικό υλικό που έχει το ρόλο της μήτρας και στο συστατικό υλικό που θεωρείται ως ενίσχυση.

1.3. Βιβλιογραφία

- [1] Suresh, S., Mortensen, A., *Fundamentals of Functionally Graded Materials*, IOM Communications Ltd, London, UK, 1998.
- [2] Miyamoto, Y., Kaysser, W. A., Rabin, B. H., Kawasaki, A., Ford, R. G., *Functionally Graded Materials: Design, Processing and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands, 1999.
- [3] Koizumi, M., FGM activities in Japan, *Composites Part B*, Vol.28, pp.1-4, 1997.
- [4] Birman, V. and Byrd, L. W., Modeling and analysis of functionally graded materials and structures, *Appl. Mech. Rev.*, Vol.60, pp.195-216, 2007.
- [5] Jha, D. K., Kant, T. and Singh, R. K., A critical review of recent research on functionally graded plates, *Compos. Struct.*, Vol.96, pp.833-849, 2013.
- [6] Gupta, A. and Talha, M., Recent development in modeling and analysis of functionally graded materials and structures, *Prog. Aerosp. Sci.*, Vol.79, pp.1-14, 2015.
- [7] Kieback, B., Neubrand, A. and Riedel, H., Processing techniques for functionally graded materials, *Mater. Sci. Eng. A*, Vol.362, pp.81-105, 2003.
- [8] Lee, W. Y., Stinton, D. P., Berndt, C. C., Erdogan, F., Lee, Y.-D. and Mutasim, Z., Concept of functionally graded materials for advanced thermal barrier coating applications, *J. Am. Ceram. Soc.*, Vol.79, No.12, pp.3003-3012, 1996.
- [9] Kokini, C., DeJonge, J., Rangaraj, S. and Beardsley, B., Thermal shock of functionally graded thermal barrier coatings with similar thermal resistance, *Surf. Coat. Tech.*, Vol.154, pp.223-231, 2002.
- [10] Rangaraj, S. and Kokini, K., Estimating the fracture resistance of functionally graded thermal barrier coatings from thermal shock tests, *Surf. Coat. Tech.*, Vol.173, pp.201-212, 2003.
- [11] Voigt, W., Uber die beziehungzwischen den beiden elastizitätskonstanten isotroper körper, *Wied. Ann.*, Vol.38, pp.573-587, 1889.
- [12] Chi, S. H. and Chung, Y. L., Cracking in sigmoid functionally graded coating, *J. Mech.*, Vol.18, pp.41-52, 2002.
- [13] Hill, R., A self-consistent mechanics of composite materials, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.13, pp.213-222, 1965.
- [14] Mori, T. and Tanaka, K., Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions, *Acta Metall.*, Vol.2, pp.1571-1574, 1973.

- [15] Shariyat, M., Nonlinear transient stress and wave propagation analyses of the FGM thick cylinders, employing a unified generalized thermoelasticity theory, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol.65, pp.24-37, 2012.

Κλασική Συζευγμένη και Γενικευμένη Θερμοελαστικότητα

2.1. Εισαγωγή

Η θερμοελαστικότητα είναι ο κλάδος της μηχανικής του συνεχούς μέσου που ενοποιεί τις θεωρίες της ελαστικότητας και της μεταφοράς θερμότητας, όταν υπάρχει αλληλεπίδραση ανάμεσα στα πεδία της παραμόρφωσης και της θερμοκρασίας. Αντικείμενό της είναι ο προσδιορισμός των πεδίων αυτών σε ένα σώμα που υποβάλλεται σε θερμομηχανική καταπόνηση.

Στην κλασική ασύζευκτη θερμοελαστικότητα (uncoupled thermoelasticity) το πεδίο της θερμοκρασίας προσδιορίζεται ανεξάρτητα από το πεδίο των παραμορφώσεων, καθώς η εξίσωση της μεταφοράς θερμότητας δεν περιέχει ελαστικούς όρους [1]. Στα πλαίσια της θεωρίας αυτής, οι διαφορικές εξισώσεις της θερμότητας και της ελαστικότητας λύνονται διαδοχικά και ανεξάρτητα. Ωστόσο, από την παρατήρηση των φυσικών φαινομένων φαίνεται πως οι ελαστικές παραμορφώσεις σε ένα σώμα προκαλούν θερμοκρασιακές μεταβολές, γεγονός το οποίο η ασύζευκτη θερμοελαστικότητα δεν προβλέπει.

Ήδη από το 1837, ο Duhamel πρότεινε ένα σύστημα συζευγμένων διαφορικών εξισώσεων που ξεπερνούσε το παραπάνω παράδοξο [2]. Παρ' όλα αυτά, η θεωρία της κλασικής συζευγμένης θερμοελαστικότητας (coupled thermoelasticity theory) θεμελιώθηκε από το Biot μόλις το 1956 [3], δημιουργώντας πρόσφορο έδαφος για εκτεταμένη έρευνα στην περιοχή τις τελευταίες δεκαετίες.

Στην κλασική συζευγμένη θερμοελαστικότητα, οι μικτές διαφορικές εξισώσεις της ελαστικότητας και της μεταφοράς θερμότητας είναι υπερβολικού-παραβολικού τύπου. Ο παραβολικός χαρακτήρας της εξίσωσης της μεταφοράς θερμότητας στην κλασική θερμοελαστικότητα (ασύζευκτη ή συζευγμένη) φανερώνει την "άπειρη" ταχύτητα διάδοσης των θερμοελαστικών διαταραχών σε ένα σώμα, που έρχεται σε αντίθεση με παρατηρήσεις και πειράματα. Τις τελευταίες πέντε δεκαετίες, το δεύτερο αυτό φυσικό παράδοξο οδήγησε στη μόρφωση τροποποιημένων μαθηματικών μοντέλων που προβλέπουν πεπερασμένες ταχύτητες διάδοσης για τις θερμοελαστικές διαταραχές, ακολουθώντας την πρόταση των Maxwell [4] και Cattaneo [5]. Οι θεωρίες που προτείνουν τα τροποποιημένα αυτά μαθηματικά μοντέλα ονομάζονται θεωρίες γενικευμένης θερμοελαστικότητας (generalized thermoelasticity theories) [6], οι οποίες αντιμετωπίζουν τη διάδοση θερμότητας ως ένα κυματικό φαινόμενο (second sound effect), παρά ως ένα φαινόμενο διάχυσης (diffusion).

Η πρώτη θεωρία γενικευμένης θερμοελαστικότητας διατυπώθηκε από τους Lord και Shulman το 1967 [7]. Η θεωρία Lord-Shulman (Lord-Shulman theory) τροποποιεί το νόμο του Fourier της μετάδοσης θερμότητας με αγωγή εισάγοντας την έννοια του χρόνου χαλάρωσης (relaxation time). Το 1971, οι Green και Lindsay χρησιμοποίησαν δύο χρόνους χαλάρωσης τροποποιώντας τις καταστατικές σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων και την έκφραση της εντροπίας αντίστοιχα, διαμορφώνοντας έτσι τη θεωρία Green-Lindsay (Green-Lindsay theory) [8]. Τέλος, το 1993 οι Green και Naghdi πρότειναν τρία νέα μοντέλα γενικευμένης θερμοελαστικότητας [9]. Στη θεωρία Green-Naghdi τύπου II (Green-Naghdi theory type II) παρουσιάζεται μία νέα υπόθεση στη θερμοελαστικότητα, σύμφωνα με την οποία κατά τη ροή θερμότητας δεν υπάρχει απόσβεση ενέργειας.

Τα φαινόμενα που σχετίζονται με τη διάδοση της θερμότητας με πεπερασμένη ταχύτητα έχουν παρατηρηθεί πειραματικά σε χαμηλές θερμοκρασίες και σε απότομες μεταβολές της θερμοκρασίας, ιδιαίτερα κατά τα πρώτα στάδια σε εφαρμογές θερμικού σοκ (thermal shock applications) [6]. Σε γενικές γραμμές, τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τις θεωρίες γενικευμένης θερμοελαστικότητας έχουν μικρές αποκλίσεις από τα αντίστοιχα αποτελέσματα της κλασικής θερμοελαστικότητας. Επιπλέον, οι αποκλίσεις αυτές έχουν μικρή χρονική διάρκεια [6].

Στις επόμενες παραγράφους παρουσιάζονται με συνοπτικό τρόπο η θεωρία της κλασικής συζευγμένης θερμοελαστικότητας [1,6,10] και οι θεωρίες γενικευμένης θερμοελαστικότητας που προαναφέρθηκαν [6]. Στη συνέχεια παρουσιάζεται μία ενοποιημένη θεωρία γενικευμένης θερμοελαστικότητας, η οποία ενσωματώνει όλες τις προηγούμενες θεωρίες [6,11]. Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με μία συζήτηση σχετικά με το πεδίο εφαρμογής των θεωριών γενικευμένης θερμοελαστικότητας.

2.2. Κλασική συζευγμένη θερμοελαστικότητα

Έστω ένα θερμοελαστικό σώμα, το οποίο υποβάλλεται σε θερμομηχανικές καταπονήσεις. Στην αρχική κατάσταση (κατάσταση αναφοράς) το σώμα θεωρείται ότι είναι απαραμόρφωτο, ελεύθερο από τάσεις και σε ομοιόμορφη θερμοκρασία ίση με T_0 .

Η εξαγωγή των διαφορικών εξισώσεων της κλασικής συζευγμένης θερμοελαστικότητας [1,6,10] βασίζεται στην υπόθεση πως οι μετακινήσεις και οι παραμορφώσεις είναι σχετικά μικρές, συγκρινόμενες με τις αρχικές διαστάσεις του σώματος. Η υπόθεση των μικρών μετατοπίσεων και παραμορφώσεων ικανοποιείται στις εφαρμογές της παρούσας διατριβής, οι οποίες δεν αφορούν π.χ. προβλήματα λυγισμού.

Επιλέγεται ένα ορθογώνιο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων X_i ($i=1,2,3$), ενώ η μεταβλητή του χρόνου συμβολίζεται με t . Για λόγους απλότητας, η μερική παραγωγή μιας τυχαίας συνάρτησης f ως προς κάποια χωρική συντεταγμένη X_i συμβολίζεται με κόμμα, δηλαδή $\partial f / \partial X_i \equiv f_{,i}$. Αντίστοιχα η μερική παραγωγή ως προς το χρόνο συμβολίζεται με υπερκείμενη τελεία, δηλαδή $\partial f / \partial t \equiv \dot{f}$. Ακόμη, στη διατύπωση των εξισώσεων χρησιμοποιείται η σύμβαση αθροίσεως (summation convention).

Αρχικά, ορίζεται η μεταβολή της θερμοκρασίας θ ως εξής:

$$\theta = T - T_0 \quad (2.2.1)$$

όπου T είναι η απόλυτη θερμοκρασία (σε βαθμούς Kelvin).

Με την υπόθεση των μικρών μετατοπίσεων και παραμορφώσεων ο τανυστής των απειροστών τροπών ε_{ij} δίνεται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.2.2)$$

όπου u_i είναι το διάνυσμα της μετατόπισης.

Οι αρχές διατήρησης της μάζας, της ορμής και της στροφορμής οδηγούν αντίστοιχα στις εξισώσεις της συνέχειας, της κίνησης και της συμμετρίας του τανυστή των τάσεων:

$$\dot{\rho} + (\rho v_i)_{,i} = 0 \quad (2.2.3)$$

$$\sigma_{ji,j} + x_i = \rho \dot{v}_i, \quad i=1,2,3 \quad (2.2.4)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad i, j=1,2,3 \quad (2.2.5)$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα, v_i είναι το διάνυσμα της ταχύτητας, σ_{ij} είναι ο τανυστής των τάσεων και x_i είναι το διάνυσμα των κατ' όγκο καθολικών δυνάμεων.

Ο 1ος θερμοδυναμικός νόμος, που εκφράζει την αρχή διατήρησης της ενέργειας, διατυπώνεται ως εξής:

$$\dot{I} + \dot{K} = L + \dot{Q} + Z \quad (2.2.6)$$

όπου I είναι η εσωτερική ενέργεια, K είναι η κινητική ενέργεια, L είναι η ισχύς των εξωτερικών δυνάμεων, Q είναι η εισαγόμενη θερμική ενέργεια και Z είναι η ισχύς των θερμικών πηγών.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.2.3)-(2.2.5), από τη σχέση (2.2.6) προκύπτει ότι:

$$\dot{i} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - q_{i,i} + z \quad (2.2.7)$$

όπου i είναι η κατ' όγκο εσωτερική ενέργεια, q_i είναι το διάνυσμα της ροής θερμότητας και z είναι η κατ' όγκο ισχύς των θερμικών πηγών.

Οι βασικές εξισώσεις της θερμοελαστικότητας συμπληρώνονται με το 2ο θερμοδυναμικό νόμο, ο οποίος απαγορεύει την αρνητική παραγωγή εντροπίας ενός συστήματος και εκφράζεται από την ανισότητα του Clausius:

$$T\dot{s} - z + q_{i,i} - \left(\frac{q_i}{T}\right)T_{,i} \geq 0 \quad (2.2.8)$$

όπου s είναι η κατ' όγκο εντροπία.

Για την διατύπωση των καταστατικών σχέσεων του υλικού εισάγεται η συνάρτηση της κατ' όγκο ελεύθερης ενέργειας του Helmholtz f :

$$f \equiv i - Ts \quad (2.2.9)$$

και γίνεται η παραδοχή ότι οι καταστατικές συναρτήσεις f , s , q_i και σ_{ij} είναι συναρτήσεις των καταστατικών μεταβλητών ε_{ij} , T και $T_{,i}$.

Καθώς $f = f(\varepsilon_{ij}, T, T_{,i})$, έπεται ότι:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial f}{\partial T_{,i}} \dot{T}_{,i} \quad (2.2.10)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.2.7), (2.2.9) και (2.2.10), η ανισότητα (2.2.8) γράφεται ως εξής:

$$\left(\sigma_{ij} - \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) \dot{\varepsilon}_{ij} - \left(s + \frac{\partial f}{\partial T} \right) \dot{T} - \frac{\partial f}{\partial T_i} \dot{T}_i - \left(\frac{q_i}{T} \right) T_i \geq 0 \quad (2.2.11)$$

Καθώς η σχέση (2.2.11) ισχύει για αυθαίρετες τιμές των $\dot{\varepsilon}_{ij}$, \dot{T} και \dot{T}_i , προκύπτουν οι εξής σχέσεις:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.2.12)$$

$$s = -\frac{\partial f}{\partial T} \quad (2.2.13)$$

$$\frac{\partial f}{\partial T_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.2.14)$$

$$q_{i,i} = -T\dot{s} + z \quad (2.2.15)$$

$$q_i = q_i(\varepsilon_{ij}, T, T_i) \quad (2.2.16)$$

$$q_i T_i \leq 0 \quad (2.2.17)$$

όπου οι σχέσεις (2.2.12), (2.2.13) και (2.2.16) είναι οι γενικές καταστατικές σχέσεις για την τάση, την εντροπία και τη θερμική ροή αντίστοιχα, ενώ η σχέση (2.2.15) αποτελεί την εξίσωση ενέργειας.

Στο σημείο αυτό εισάγεται η έννοια της ειδικής θερμοχωρητικότητας (specific heat capacity) του σώματος c υπό σταθερό όγκο ($d\varepsilon_{ij} = 0$). Από τον ορισμό της ειδικής θερμοχωρητικότητας και το 2ο θερμοδυναμικό νόμο προκύπτει ότι:

$$c = \frac{T}{\rho} \frac{\partial s}{\partial T} = -\frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 f}{\partial T^2} \quad (2.2.18)$$

όπου η δεύτερη ισότητα έπεται από τη σχέση (2.2.13).

Η γραμμική θεωρία της θερμοελαστικότητας προκύπτει από την υπόθεση ότι οι καταστατικές μεταβλητές είναι πολύ μικρές, έτσι ώστε οι όροι δεύτερης ή υψηλότερης τάξης να θεωρούνται αμελητέοι. Συγκεκριμένα, στη γραμμική θεωρία της θερμοελαστικότητας γίνονται οι υποθέσεις των μικρών παραμορφώσεων ($|\varepsilon_{ij}| \ll 1$) και των μικρών μεταβολών της θερμοκρασίας ($|\theta/T_0| \ll 1$). Στο σημείο αυτό υπενθυμίζεται ότι η υπόθεση των μικρών παραμορφώσεων έχει χρησιμοποιηθεί από την αρχή της παραγράφου αυτής.

Από την υπόθεση $T \simeq T_0$ προκύπτει ότι η εξίσωση ενέργειας (2.2.15) γίνεται:

$$q_{i,i} = -T_0 \dot{s} + z \quad (2.2.19)$$

Από τα αναπτύγματα Taylor της ελεύθερης ενέργειας Helmholtz f και της θερμικής ροής q_i γύρω από το σημείο ($\varepsilon_{ij} = 0, T = T_0$) που αντιστοιχεί στην κατάσταση αναφοράς, τη σχέση (2.2.18) και τις υποθέσεις της γραμμικής θεωρίας, προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις:

$$f = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - \beta_{ij} \varepsilon_{ij} \theta - \frac{1}{2} \frac{\rho c}{T_0} \theta^2 \quad (2.2.20)$$

$$q_i = -k_{ij} \theta_{,j}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.2.21)$$

όπου C_{ijkl} είναι ο τανυστής των ελαστικών σταθερών, β_{ij} είναι ο τανυστής των θερμικών σταθερών και k_{ij} είναι ο τανυστής των σταθερών της θερμικής αγωγιμότητας. Η σχέση (2.2.21) είναι ο νόμος του Fourier για τη μετάδοση θερμότητας με αγωγή, ενώ το αρνητικό πρόσημο στη σχέση αυτή είναι συνέπεια του 2ου θερμοδυναμικού νόμου.

Για τον τανυστή των ελαστικών σταθερών C_{ijkl} , τον τανυστή των θερμικών σταθερών β_{ij} και τον τανυστή των σταθερών της θερμικής αγωγιμότητας k_{ij} ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις συμμετρίας:

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3 \quad (2.2.22)$$

$$\beta_{ij} = \beta_{ji}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.2.23)$$

$$k_{ij} = k_{ji}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.2.24)$$

Από τις σχέσεις (2.2.20)-(2.2.21) και τις γενικές κατασταστικές σχέσεις (2.2.12)-(2.2.13) έπονται οι εξής καταστατικές σχέσεις για τη γραμμική θεωρία της θερμοελαστικότητας:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \beta_{ij} \theta, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.2.25)$$

$$s = \frac{\rho c}{T_0} \theta + \beta_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (2.2.26)$$

Η εξίσωση κίνησης (2.2.4), λόγω των σχέσεων (2.2.2), (2.2.25) και $v_i = \dot{u}_i$, $i = 1, 2, 3$, λαμβάνει την παρακάτω μορφή:

$$\left[\frac{1}{2} C_{ijkl} (u_{i,j} + u_{j,i}) - \beta_{ij} \theta \right]_{,j} + x_i = \rho \ddot{u}_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.2.27)$$

Η εξίσωση ενέργειας (2.2.19), λόγω των σχέσεων (2.2.1), (2.2.21) και (2.2.26), γίνεται:

$$(k_{ij} \theta_{,j})_{,i} + z = \rho c \dot{\theta} + T_0 \beta_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \quad (2.2.28)$$

Οι εξισώσεις (2.2.27)-(2.2.28), συμπληρωμένες από τις εξισώσεις (2.2.22)-(2.2.24), αποτελούν το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων της κλασικής συζευγμένης θερμοελαστικότητας. Εάν αγνοηθεί ο όρος σύζευξης $T_0 \beta_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}$ στην εξίσωση (2.2.28), τότε η εξίσωση ενέργειας καθίσταται ανεξάρτητη του παραμορφωσιακού πεδίου και προκύπτουν οι εξισώσεις της κλασικής ασύζευκτης θερμοελαστικότητας, ως ειδική περίπτωση της συζευγμένης θερμοελαστικότητας.

Στην περίπτωση ισότροπων υλικών οι τανυστές των σταθερών έχουν την ακόλουθη μορφή:

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad i, j, k, l = 1, 2, 3 \quad (2.2.29)$$

$$\beta_{ij} = \beta \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.2.30)$$

$$k_{ij} = k \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.2.31)$$

όπου λ, μ είναι οι σταθερές του Lamé, β είναι η θερμική σταθερά, k είναι η θερμική αγωγιμότητα και δ_{ij} είναι το σύμβολο του Kronecker. Για ισότροπο υλικό οι καταστατικές σχέσεις (2.2.21) και (2.2.25) γράφονται ως εξής:

$$q_i = -k \theta_{,i}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.2.32)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} - \beta \delta_{ij} \theta, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.2.33)$$

Τέλος, το σύστημα των εξισώσεων για την κλασική συζευγμένη θερμοελαστικότητα για ισότροπο υλικό είναι το εξής:

$$\left[\lambda \delta_{ij} u_{k,k} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) - \beta \delta_{ij} \theta \right]_{,j} + x_i = \rho \ddot{u}_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.2.34)$$

$$(k \theta_{,i})_{,i} + z = \rho c \dot{\theta} + \beta T_0 \dot{u}_{i,i} \quad (2.2.35)$$

2.3. Θεωρίες γενικευμένης θερμοελαστικότητας

Η διαφορική εξίσωση της θερμότητας (2.2.28) είναι παραβολικού τύπου, το οποίο σημαίνει πως η θεωρία της κλασικής συζευγμένης θερμοελαστικότητας προβλέπει ότι οι θερμοελαστικές διαταραχές διαδίδονται μέσα σε ένα ελαστικό σώμα ακαριαία. Για την άρση του παραδόξου αυτού τις τελευταίες δεκαετίες θεμελιώθηκαν νέες θεωρίες, οι οποίες αναφέρονται ως θεωρίες γενικευμένης θερμοελαστικότητας. Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζονται οι σημαντικότερες από τις θεωρίες αυτές [6].

2.3.1. Θεωρία Lord-Shulman

Οι Lord και Shulman παρουσίασαν την πρώτη γενικευμένη θεωρία το 1967 [7]. Η θεωρία Lord-Shulman βασίζεται στην τροποποίηση του νόμου του Fourier μέσω της εισαγωγής της έννοιας του χρόνου χαλάρωσης. Συγκεκριμένα, στη θεωρία Lord-Shulman η εξίσωση (2.2.21) (νόμος του Fourier) λαμβάνει την ακόλουθη γενικότερη μορφή:

$$q_i + \tau_{ij} \dot{q}_j = -k_{ij} T_{,j}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.3.1)$$

όπου τ_{ij} είναι ο τανυστής σταθερών του υλικού που σχετίζεται με τη θεωρία Lord-Shulman. Οι εξισώσεις (2.2.27), (2.2.19) και (2.3.1), συμπληρωμένες από τις εξισώσεις (2.2.22)-(2.2.24), αποτελούν το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων της θεωρίας Lord-Shulman.

Για ισότροπο υλικό η σχέση (2.3.1) λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$q_i + t_0 \dot{q}_i = -kT_{,i}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.3.2)$$

όπου t_0 είναι ο χρόνος χαλάρωσης της θεωρίας Lord-Shulman και εκφράζει το χρόνο που απαιτείται για να σταθεροποιηθεί η ροή θερμότητας σε ένα μέσο που ξαφνικά υποβάλλεται σε κλίση θερμοκρασίας (temperature gradient).

Λόγω της εξίσωσης (2.2.19) και με την παραδοχή $\partial t_0 / \partial X_i \simeq 0$ ($i = 1, 2, 3$), η σχέση (2.3.2) γίνεται:

$$(k\theta_{,i})_{,i} = \left(1 + t_0 \frac{\partial}{\partial t}\right) (\rho c \dot{\theta} + T_0 \beta_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - z) \quad (2.3.3)$$

Οι εξισώσεις (2.2.34) και (2.3.3) αποτελούν το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων της θεωρίας Lord-Shulman για ισότροπο υλικό. Η διαφορική εξίσωση (2.3.3) για $t_0 > 0$ είναι υπερβολικού τύπου, συνεπώς η θεωρία Lord-Shulman προβλέπει πεπερασμένες ταχύτητες διάδοσης για τις θερμοελαστικές διαταραχές. Για $t_0 = 0$ προκύπτουν οι εξισώσεις της κλασικής συζευγμένης θερμοελαστικότητας.

Για τις τιμές του χρόνου χαλάρωσης, έρευνες δείχνουν ότι ο χρόνος χαλάρωσης κυμαίνεται από $t_0 = 10^{-10}$ sec για αέρια έως $t_0 = 10^{-14}$ sec για μέταλλα [13,14]. Ειδικά για το αλουμίνιο, μελέτες από το Vedavarz [15] δείχνουν ότι για το χρόνο χαλάρωσης ισχύει 10^{-14} sec $\leq t_0 \leq 10^{-11}$ sec σε θερμοκρασίες δωματίου και $t_0 \leq 10^{-14}$ sec σε υψηλότερες θερμοκρασίες. Για τέτοια υλικά λοιπόν η θεωρία Lord-Shulman έχει σημασία σε περιπτώσεις που το υπό εξέταση σώμα υποβάλλεται σε συνθήκες απότομων θερμοκρασιακών μεταβολών (thermal shock conditions).

2.3.2. Θεωρία Green-Lindsay

Το 1972, οι Green και Lindsay εισήγαγαν δύο διαφορετικούς χρόνους χαλάρωσης στις καταστατικές σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων και στην έκφραση της εντροπίας αντίστοιχα, θεμελιώνοντας μία νέα γενικευμένη θεωρία [8]. Στη θεωρία Green-Lindsay η ανισότητα (2.2.8) (ανισότητα του Clausius) αντικαθίσταται από την εξής πιο γενική ανισότητα:

$$\tilde{T}\dot{s} - z + q_{i,i} - \left(\frac{q_i}{\tilde{T}}\right)\tilde{T}_{,i} \geq 0 \quad (2.3.4)$$

όπου \tilde{T} είναι μία βαθμωτή καταστατική συνάρτηση που λαμβάνει θετικές τιμές και καλείται θερμοδυναμική θερμοκρασία. Η γενική μορφή της \tilde{T} είναι:

$$\tilde{T} = \tilde{T}(T, \dot{T}) \quad (2.3.5)$$

Στη συνέχεια εισάγεται μία συνάρτηση ενέργειας $\tilde{f} = \tilde{f}(T, \dot{T}, T_{,i}, \varepsilon_{ij})$ που ορίζεται ως εξής:

$$\tilde{f} \equiv i - \tilde{T}s \quad (2.3.6)$$

Για $\tilde{T} = T$ αφ' ενός η ανισότητα (2.3.4) ταυτίζεται με την ανισότητα του Clausius, αφ' ετέρου η συνάρτηση ενέργειας \tilde{f} υποβιβάζεται στην ελεύθερη ενέργεια του Helmholtz f . Ακολουθώντας διαδικασίες ανάλογες με την περίπτωση της κλασικής συζευγμένης θερμοελαστικότητας, οι Green και Lindsay κατέληξαν στις ακόλουθες γενικεύσεις των σχέσεων (2.2.12)-(2.2.17) [8]:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.3.7)$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{T}} + s \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{T}} = 0 \quad (2.3.8)$$

$$\frac{q_i}{\tilde{T}} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{T}} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial T_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.3.9)$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{T}} + s \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{T}} \right) \dot{\tilde{T}} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial T_i} \dot{T}_i + \dot{s} \tilde{T} + q_{i,i} - z = 0 \quad (2.3.10)$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{T}} + s \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{T}} \right) \dot{\tilde{T}} + \frac{q_i}{\tilde{T}} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial T} T_i \leq 0 \quad (2.3.11)$$

όπου οι σχέσεις (2.3.7), (2.3.8) και (2.3.9) αποτελούν τις καταστατικές σχέσεις για την τάση, την εντροπία και τη θερμική ροή αντίστοιχα, ενώ η σχέση (2.3.10) αποτελεί την εξίσωση ενέργειας.

Η γραμμικοποίηση της θεωρίας Green-Lindsay γίνεται μέσω του αναπτύγματος Taylor των συναρτήσεων \tilde{T} και \tilde{f} γύρω από το σημείο που αντιστοιχεί στην κατάσταση αναφοράς, με την επιπλέον υπόθεση ότι $\tilde{T}(T, 0) = T$ και με δεδομένη τη σχέση (2.2.1):

$$\tilde{T} = (T_0 + \theta) + t_1 (\dot{\theta} + a_1 \theta \dot{\theta} + a_2 \dot{\theta}^2) \quad (2.3.12)$$

$$\tilde{f} = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - \beta_{ij} \varepsilon_{ij} (\theta + t_1 \dot{\theta}) - \frac{t_1}{T_0} \left\{ \left[\rho c \left(\theta + \frac{1}{2} t_2 \dot{\theta} \right) - C_i \theta_{,i} \right] \dot{\theta} - \frac{1}{2} k_{ij} \theta_{,i} \theta_{,j} \right\} \quad (2.3.13)$$

όπου a_1 , a_2 , t_1 , t_2 και C_i είναι νέες σταθερές υλικού που σχετίζονται με τη θεωρία Green-Lindsay. Ειδικά οι παράμετροι t_1 και t_2 είναι οι προαναφερόμενοι χρόνοι χαλάρωσης.

Στη συνέχεια οι εξισώσεις (2.3.12)-(2.3.13) αντικαθίστανται στις σχέσεις (2.3.7)-(2.3.11) και προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \beta_{ij} (\theta + t_1 \dot{\theta}), \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.3.14)$$

$$s = \frac{\rho c}{T_0} (\theta + t_2 \dot{\theta}) - \frac{C_i}{T_0} \theta_{,i} + \beta_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (2.3.15)$$

$$q_i = - (C_i \dot{\theta} + k_{ij} \theta_{,j}), \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.3.16)$$

$$q_{i,i} = -T_0 \dot{s} + z \quad (2.3.17)$$

$$\rho c (t_1 - t_2) y_0^2 + 2C_i y_0 y_i + k_{ij} y_i y_j \geq 0 \quad (2.3.18)$$

όπου y_0 , y_1 , y_2 και y_3 είναι αυθαίρετες πραγματικές σταθερές.

Λόγω της σχέσης (2.3.14), η εξίσωση κίνησης (2.2.4) γίνεται:

$$\left[\frac{1}{2} C_{ijkl} (u_{i,j} + u_{j,i}) - \beta_{ij} (\theta + t_1 \dot{\theta}) \right]_{,j} + x_i = \rho \ddot{u}_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.3.19)$$

Ακόμη, λόγω των σχέσεων (2.3.15)-(2.3.16), η εξίσωση ενέργειας (2.3.17) γίνεται:

$$(k_{ij} \theta_{,j})_{,i} + z = \rho c (\dot{\theta} + t_2 \ddot{\theta}) - 2C_i \dot{\theta}_{,i} + T_0 \beta_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \quad (2.3.20)$$

Οι εξισώσεις (2.3.19)-(2.3.20), συμπληρωμένες από τις εξισώσεις (2.2.22)-(2.2.24), αποτελούν το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων της θεωρίας Green-Lindsay. Για ισότροπο υλικό ισχύει $C_i = 0$ και οι διαφορικές εξισώσεις (2.3.19)-(2.3.20) έχουν την εξής μορφή:

$$\left[\lambda \delta_{ij} u_{k,k} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) - \beta \delta_{ij} (\theta + t_1 \dot{\theta}) \right]_{,j} + x_i = \rho \ddot{u}_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.3.21)$$

$$(k \theta_{,i})_{,i} + z = \rho c (\dot{\theta} + t_2 \ddot{\theta}) + \beta T_0 \dot{u}_{i,i} \quad (2.3.22)$$

Από την ανισότητα (2.3.18) προκύπτει ότι [13]:

$$t_1 \geq t_2 \quad (2.3.23)$$

Η διαφορική εξίσωση (2.3.22) για $t_2 > 0$ είναι υπερβολικού τύπου, συνεπώς και η θεωρία Green-Lindsay διορθώνει το φυσικό παράδοξο "άπειρης" ταχύτητας διάδοσης της θερμικών σημάτων. Παρατηρείται ακόμη ότι για $t_1 = t_2 = 0$ προκύπτουν οι εξισώσεις της κλασικής συζευγμένης θερμοελαστικότητας.

2.3.3. Θεωρία Green-Naghdi

Οι Green και Naghdi παρουσίασαν το 1993 μία νέα θεωρία γενικευμένης θερμοελαστικότητας [9]. Η βάση της μελέτης τους ήταν μία νέα θεώρηση στη γενικευμένη θερμοελαστικότητα, η οποία ονομάζεται *θερμοελαστικότητα χωρίς απόσβεση ενέργειας* (thermoelasticity without energy dissipation). Η γενική ιδέα της θεώρησης είναι πως η ροή θερμότητας γίνεται χωρίς απόσβεση ενέργειας.

Τα κύρια χαρακτηριστικά της θεωρίας Green-Naghdi είχαν ήδη αναπτυχθεί σε μία προηγούμενη εργασία τους [16], όπου χρησιμοποιούσαν μία γενική έκφραση ισορροπίας της εντροπίας. Η θεωρία Green-Naghdi περιλαμβάνει τρεις τύπους εκφράσεων των καταστατικών συναρτήσεων. Ο τύπος I, έπειτα από τη γραμμικοποίηση της θεωρίας οδηγεί στις εξισώσεις της κλασικής συζευγμένης θερμοελαστικότητας, ενώ οι τύποι II και III παράγουν γενικευμένα μοντέλα. Ιδιαίτερα, ο τύπος II της θεωρίας Green-Naghdi οδηγεί σε γενικευμένη

θεωρία χωρίς απόσβεση ενέργειας. Στη συνέχεια της παραγράφου αναφέρονται τα κύρια σημεία της θεωρίας Green-Naghdi και ειδικότερα του τύπου II [6].

Έστω λοιπόν ένα θερμοελαστικό σώμα, αρχικά απαραμόρφωτο, ελεύθερο από τάσεις και σε ομοιόμορφη θερμοκρασία T_0 , που υποβάλλεται σε θερμομηχανική φόρτιση. Με X_i ($i=1,2,3$) συμβολίζεται το σύστημα συντεταγμένων που αναφέρεται στην αρχική, απαραμόρφωτη κατάσταση και με \tilde{X}_i ($i=1,2,3$) το σύστημα συντεταγμένων που αναφέρεται στην τελική, παραμορφωμένη κατάσταση. Εισάγονται ακόμη οι εξής μεταβλητές: η θερμική μετατόπιση $\tilde{\theta}$, η κλίση της θερμικής μετατόπισης Y_i , η θερμοκρασία T , η εμπειρική θερμοκρασία θ , ο τανυστής κλίσης της παραμόρφωσης F_{ij} , η κατ' όγκο εντροπία s , ο κατ' όγκο εσωτερικός ρυθμός παραγωγής εντροπίας ξ , ο κατ' όγκο εξωτερικός ρυθμός παραγωγής εντροπίας ζ , το διάνυσμα ροής εντροπίας p_i , το διάνυσμα ροής θερμότητας q_i , η ταχύτητα v_i και ο τανυστής κλίσης της ταχύτητας L_{ij} , για τις οποίες ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\tilde{\theta} = \tilde{\theta}(X_i, t) \quad (2.3.24)$$

$$Y_i = \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial X_i} \quad (2.3.25)$$

$$F_{ij} = \frac{\partial \tilde{X}_i}{\partial X_j} \quad (2.3.26)$$

$$L_{ij} = v_{i,j} \quad (2.3.27)$$

$$\dot{Y}_i = F_{ij} \theta_{,j} \quad (2.3.28)$$

$$\theta = (\dot{\tilde{\theta}}) \quad (2.3.29)$$

$$q_i = T p_i \quad (2.3.30)$$

όπου σημειώνεται ότι στην γενική περίπτωση των πεπερασμένων μετατοπίσεων, το κόμμα υποδηλώνει μερική παραγωγή ως προς τις χωρικές συντεταγμένες στην παραμορφωμένη κατάσταση \tilde{X}_i , και η υπερκείμενη τελεία υποδηλώνει την υλική χρονική παράγωγο.

Η εξίσωση που εκφράζει την ισορροπία της εντροπίας είναι η εξής:

$$\dot{s} = \xi + \zeta - p_{i,i} \quad (2.3.31)$$

Από την εξίσωση συνέχειας (2.2.3), την εξίσωση κίνησης (2.2.4), τη σχέση (2.3.29) και αγνοώντας τις καθολικές δυνάμεις ($x_i = 0$) και την εξωτερική παραγωγή εντροπίας ($\zeta = 0$), εξάγεται η εξίσωση ενέργειας:

$$\sigma_{ij} L_{ij} - p_i T_{,i} - (\dot{f} + s \dot{T}) - T \xi = 0 \quad (2.3.32)$$

όπου σ_{ij} είναι ο τανυστής των τάσεων και f είναι η κατ' όγκο ελεύθερη ενέργεια του Helmholtz.

Στο σημείο αυτό πρέπει να οριστούν οι καταστατικές συναρτήσεις και οι εκφράσεις τους. Στη θεωρία Green-Naghdi προτείνονται τρεις διαφορετικοί τύποι καταστατικών σχέσεων,

οδηγώντας στη δημιουργία ισάριθμων διαφορετικών μοντέλων. Το σημαντικότερο από αυτά είναι το μοντέλο II, το οποίο και αναπτύσσεται στη συνέχεια.

Ορίζονται οι καταστατικές συναρτήσεις f , T , σ_{ij} , p_i , s και ξ ως συναρτήσεις των καταστατικών μεταβλητών θ , Y_i και F_{ij} . Τότε η σχέση (2.3.32), λόγω και της σχέσης (2.3.28), γίνεται:

$$\begin{aligned} T\xi + \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} + s \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \dot{\theta} + \left[\left(\frac{\partial f}{\partial Y_j} + s \frac{\partial T}{\partial Y_j} \right) F_{ji} + p_i \frac{\partial T}{\partial \theta} \right] \theta_{,i} + \\ + \left[-\sigma_{ij} + \left(\frac{\partial f}{\partial F_{ik}} + s \frac{\partial T}{\partial F_{ik}} \right) F_{kj} \right] L_{ij} + \left(p_j \frac{\partial T}{\partial Y_i} \right) Y_{i,j} + \left(p_k \frac{\partial T}{\partial F_{ij}} \right) F_{ij,k} = 0 \end{aligned} \quad (2.3.33)$$

Καθώς η εξίσωση (2.3.33) ισχύει για κάθε δυνατή διαδικασία, συνάγεται ότι οι συντελεστές της πρέπει να είναι εκ ταυτότητας μηδέν, δηλαδή:

$$\xi = 0 \quad (2.3.34)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} + s \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \quad (2.3.35)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial Y_j} + s \frac{\partial T}{\partial Y_j} \right) F_{ji} + p_i \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \quad (2.3.36)$$

$$-\sigma_{ij} + \left(\frac{\partial f}{\partial F_{ik}} + s \frac{\partial T}{\partial F_{ik}} \right) F_{kj} = 0 \quad (2.3.37)$$

$$\frac{\partial T}{\partial Y_i} = 0 \quad (2.3.38)$$

$$\frac{\partial T}{\partial F_{ij}} = 0 \quad (2.3.39)$$

Από τις σχέσεις (2.3.38)-(2.3.39) έπεται ότι $T = T(\theta)$. Επομένως, υπάρχει η δυνατότητα να ταυτιστεί η εμπειρική θερμοκρασία θ με τη μεταβολή θερμοκρασίας, όπως η τελευταία έχει οριστεί από τη σχέση (2.2.1). Είναι τώρα άμεσο ότι $\frac{\partial T}{\partial \theta} = 1$ και από τις σχέσεις (2.3.35)-(2.3.37) προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις:

$$s = -\frac{\partial f}{\partial \theta} \quad (2.3.40)$$

$$p_i = -F_{ji} \frac{\partial f}{\partial Y_j} \quad (2.3.41)$$

$$\sigma_{ij} = F_{kj} \frac{\partial f}{\partial F_{ik}} \quad (2.3.42)$$

Οι σχέσεις (2.2.1), (2.3.34) και (2.3.40)-(2.3.42) αποτελούν το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων της γενικής θεωρίας Green-Naghdi τύπου II. Ειδικότερα, η σχέση (2.3.34) δηλώνει πως η εσωτερική παραγωγή εντροπίας είναι μηδέν. Από φυσική άποψη, το γεγονός αυτό σημαίνει πως δεν υπάρχει απόσβεση ενέργειας.

Η γραμμική θεωρία Green-Naghdi τύπου II βασίζεται στις υποθέσεις ότι οι μετατοπίσεις u_i , η θερμοκρασιακή μεταβολή θ , η θερμική μετατόπιση $\tilde{\theta}$, όπως και χωρικές και χρονικές τους παράγωγοι, είναι μικρές. Συγκεκριμένα για ισότροπο υλικό, θεωρείται η ακόλουθη μορφή της κατ' όγκο ελεύθερης ενέργειας του Helmholtz f :

$$f = \frac{1}{2} \lambda \varepsilon_{ii}^2 + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ji} - \frac{1}{2} \frac{\rho c}{T_0} \theta^2 - \beta \theta \varepsilon_{ii} + \frac{1}{2} \frac{\kappa^*}{T_0} Y_i Y_i \quad (2.3.43)$$

όπου λ, μ είναι οι σταθερές του Lamé, ε_{ij} είναι ο τανυστής των απειροστών τροπών, ρ είναι η πυκνότητα, c είναι η ειδική θερμοχωρητικότητα, β είναι η θερμική σταθερά και κ^* είναι μία νέα σταθερά υλικού σχετιζόμενη με τη θεωρία Green-Naghdi.

Από τις εξισώσεις (2.3.30), (2.3.40)-(2.3.42), (2.3.43) και την υπόθεση ότι $T \simeq T_0$, προκύπτουν οι ακόλουθες εκφράσεις:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} - \beta \delta_{ij} \theta, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.3.44)$$

$$s = \frac{\rho c}{T_0} \theta + \beta \varepsilon_{ii} \quad (2.3.45)$$

$$p_i = -\frac{\kappa^*}{T_0} Y_i \quad (2.3.46)$$

$$q_i = -\kappa^* Y_i \quad (2.3.47)$$

όπου δ_{ij} είναι το δέλτα του Kronecker.

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (2.3.28), (2.3.34) και (2.3.44)-(2.3.47) στην εξίσωση της κίνησης (2.2.4) και την εξίσωση (2.3.31) προκύπτει το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων της γραμμικής θεωρίας Green-Naghdi τύπου II για ισότροπο υλικό:

$$\left[\lambda \delta_{ij} u_{k,k} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) - \beta \delta_{ij} \theta \right]_{,j} + x_i = \rho \ddot{u}_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.3.48)$$

$$\left(\kappa^* \theta_{,i} \right)_{,i} + T_0 \zeta = \rho c \dot{\theta} + \beta T_0 \ddot{u}_{i,i} \quad (2.3.49)$$

Για $\kappa^* > 0$ το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (2.3.48)-(2.3.49) είναι υπερβολικού τύπου, συνεπώς η θεωρία Green-Naghdi τύπου II πράγματι ανήκει στις θεωρίες γενικευμένης θερμοελαστικότητας, καθώς προβλέπει θερμικά σήματα πεπερασμένης ταχύτητας.

2.4. Μία ενοποιημένη θεωρία γενικευμένης θερμοελαστικότητας

Στην προηγούμενη παράγραφο παρουσιάστηκαν τρεις διαφορετικές θεωρίες γενικευμένης θερμοελαστικότητας: η θεωρία Lord-Shulman, η θεωρία Green-Lindsay και η θεωρία Green-Naghdi. Το 1981 ο Ignaczak πρότεινε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων, το οποίο συνδυάζει τις εξισώσεις των θεωριών Lord-Shulman και Green-Lindsay σε ενιαία μορφή [17].

Γενικεύοντας την πρόταση του Ignaczak, οι Bagri και Eslami πρότειναν ένα νέο σύστημα διαφορικών εξισώσεων που ενοποιεί τις εξισώσεις των γενικευμένων θεωριών Lord-Shulman, Green-Lindsay και Green-Naghdi [11,12]. Η ενοποιημένη θεωρία των Bagri και Eslami παρουσιάζεται στη συνέχεια της παραγράφου [6,11,12].

Οι εξισώσεις που διαμορφώνουν τις τρεις γενικευμένες θεωρίες για γραμμικό θερμοελαστικό υλικό σε ενοποιημένη μορφή, είναι οι ακόλουθες:

$$\theta = T - T_0 \quad (2.4.1)$$

$$\sigma_{ji,j} + x_i = \rho \dot{v}_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.4.2)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.4.3)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \beta_{ij} (\theta + t_1 \dot{\theta}), \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.4.4)$$

$$q_{i,i} = -T_0 \dot{s} + z \quad (2.4.5)$$

$$s = \frac{\rho c}{T_0} (\theta + t_2 \dot{\theta}) - \frac{C_i}{T_0} \theta_{,i} + \beta_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (2.4.6)$$

$$\eta q_i + \eta \tau_{ij} \dot{q}_j + t_3 \dot{q}_i = -\eta k_{ij} \theta_{,j} - t_3 (\gamma k_{ij} \dot{\theta}_{,j} + \kappa_{ij}^* \theta_{,j}) - C_i \dot{\theta} \quad (2.4.7)^*$$

όπου T_0 είναι η αρχική θερμοκρασία στην κατάσταση αναφοράς, T είναι η απόλυτη θερμοκρασία, θ είναι η μεταβολή της θερμοκρασίας, σ_{ij} είναι ο τανυστής των τάσεων, v_i είναι το διάνυσμα της ταχύτητας, x_i είναι το διάνυσμα των κατ' όγκο καθολικών δυνάμεων, ε_{ij} είναι ο τανυστής των απειροστών τροπών, u_i είναι το διάνυσμα της μετατόπισης, C_{ijkl} είναι ο τανυστής των ελαστικών σταθερών, β_{ij} είναι ο τανυστής των θερμικών σταθερών, q_i είναι το διάνυσμα της ροής θερμότητας, s είναι η κατ' όγκο εντροπία, z είναι η κατ' όγκο ισχύς των θερμικών πηγών, ρ είναι η πυκνότητα, c είναι η ειδική θερμοχωρητικότητα υπό σταθερό όγκο, k_{ij} είναι ο τανυστής των σταθερών της θερμικής αγωγιμότητας, τ_{ij} είναι ο τανυστής σταθερών του υλικού που σχετίζεται με τη θεωρία Lord-Shulman, t_1 , t_2 και C_i είναι οι σταθερές του υλικού που σχετίζονται με τη θεωρία Green-Lindsay, κ_{ij}^* είναι ο τανυστής σταθερών του υλικού που σχετίζεται με τη θεωρία Green-Naghdi, ενώ οι η , γ και t_3 είναι παράμετροι που έχουν εισαχθεί για την ενοποίηση των εξισώσεων των τριών γενικευμένων θεωριών. Υπενθυμίζεται ότι στην παρουσίαση των εξισώσεων χρησιμοποιείται η σύμβαση αθροίσεως, ενώ η μερική παραγωγή ως προς κάποια χωρική συντεταγμένη συμβολίζεται με κόμμα και η μερική παραγωγή ως προς το χρόνο συμβολίζεται με

* η παράμετρος ενοποίησης γ δεν υπάρχει στη θεωρία που πρότειναν οι Bagri και Eslami [9,10]· εισάγεται εδώ για λόγους ευκολίας στον προγραμματισμό της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων (βλ. κεφάλαιο 3)

υπερκείμενη τελεία. Σημειώνεται ακόμη ότι οι παράμετροι η και γ είναι αδιάστατοι, ενώ η παράμετρος t_3 έχει μονάδες χρόνου.

Η αντικατάσταση των σχέσεων (2.4.3)-(2.4.4) στην εξίσωση κίνησης (2.4.2) οδηγεί στην εξής σχέση:

$$\left[\frac{1}{2} C_{ijkl} (u_{k,l} + u_{l,k}) - \beta_{ij} (\theta + t_1 \dot{\theta}) \right]_{,j} + x_i = \rho \dot{v}_i, \quad i=1,2,3 \quad (2.4.8)$$

όπου έχει χρησιμοποιηθεί και η συμμετρία του τανυστή σ_{ij} .

Οι εξισώσεις (2.4.5)-(2.4.8) αποτελούν το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων της ενοποιημένης θεωρίας γενικευμένης θερμοελαστικότητας των Bagri και Eslami, η οποία περιλαμβάνει την κλασική συζευγμένη θερμοελαστικότητα και τις τρεις γενικευμένες θεωρίες θερμοελαστικότητας που έχουν αναφερθεί ως ειδικές περιπτώσεις. Πράγματι, για $\tau_{ij} = 0$ ($i, j=1,2,3$), $C_i = 0$ ($i=1,2,3$), $t_1 = t_2 = t_3 = 0$ και $\eta = 1$ οι εξισώσεις (2.4.5)-(2.4.8) δίνουν τις εξισώσεις της κλασικής συζευγμένης θερμοελαστικότητας. Επιπλέον, οι εξισώσεις της θεωρίας Lord-Shulman προκύπτουν για $C_i = 0$ ($i=1,2,3$), $t_1 = t_2 = t_3 = 0$, $\eta = 1$ και $\tau_{ii} > 0$ για ένα τουλάχιστον $i \in \{1,2,3\}$, οι εξισώσεις της θεωρίας Green-Lindsay προκύπτουν για $\tau_{ij} = 0$ ($i, j=1,2,3$), $t_3 = 0$, $\eta = 1$ και $t_1 \geq t_2 > 0$, ενώ οι εξισώσεις της θεωρίας Green-Naghdi τύπου III προκύπτουν για $\tau_{ij} = 0$ ($i, j=1,2,3$), $C_i = 0$ ($i=1,2,3$), $\eta = t_1 = t_2 = 0$, $\gamma = t_3 = 1$, και $\kappa_{ii}^* > 0$ για ένα τουλάχιστον $i \in \{1,2,3\}$. Αν στις εξισώσεις της θεωρίας Green-Naghdi τύπου III τεθεί $\kappa_{ij}^* = 0$ ($i, j=1,2,3$) προκύπτουν οι εξισώσεις της θεωρίας Green-Naghdi τύπου I, ενώ αν αντίστοιχα τεθεί $\gamma = 0$ προκύπτουν οι εξισώσεις της θεωρίας Green-Naghdi τύπου II.

Στην περίπτωση ισότροπου υλικού, οι εξισώσεις (2.4.4) και (2.4.6)-(2.4.8) γίνονται:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} u_{k,k} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) - \beta \delta_{ij} (\theta + t_1 \dot{\theta}), \quad i, j=1,2,3 \quad (2.4.9)$$

$$s = \frac{\rho c}{T_0} (\theta + t_2 \dot{\theta}) + \beta u_{i,i} \quad (2.4.10)$$

$$\eta q_i + \eta t_0 \dot{q}_i + t_3 \dot{q}_i = -\eta k \theta_{,i} - t_3 (\gamma k \dot{\theta}_{,i} + \kappa^* \theta_{,i}) \quad (2.4.11)$$

$$\left[\lambda \delta_{ij} u_{k,k} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) - \beta \delta_{ij} (\theta + t_1 \dot{\theta}) \right]_{,j} + x_i = \rho \ddot{u}_i, \quad i=1,2,3 \quad (2.4.12)$$

όπου λ, μ είναι οι σταθερές του Lamé, β είναι η θερμική σταθερά, k είναι η θερμική αγωγιμότητα, t_0 είναι ο χρόνος χαλάρωσης της θεωρίας Lord-Shulman και κ^* είναι η σταθερά του υλικού που σχετίζεται με τη θεωρία Green-Naghdi.

Η δράση του τελεστή απόκλισης (divergence operator) στην εξίσωση (2.4.11) οδηγεί στην εξής σχέση:

$$\eta q_{i,i} + (\eta t_0 + t_3) \dot{q}_{i,i} = - \left[(\eta k + \kappa^*) \theta_{,i} + t_3 \gamma k \dot{\theta}_{,i} \right]_{,i} \quad (2.4.13)$$

όπου έχει επιπλέον υποθεθεί ότι η κλίση του χρόνου χαλάρωσης t_0 είναι αμελητέα, δηλαδή $|\partial t_0 / \partial X_i| \ll 1$ ($i=1,2,3$) [18]. Αντικαθιστώντας τη σχέση (2.4.5) στην εξίσωση (2.4.13), προκύπτει ότι:

$$\eta(-T_0\dot{s} + z) + (\eta t_0 + t_3)(-T_0\ddot{s} + \dot{z}) = -\left[(\eta k + \kappa^*) \theta_{,i} + t_3 \gamma k \dot{\theta}_{,i} \right]_{,i} \quad (2.4.14)$$

Οι εξισώσεις (2.4.10), (2.4.12) και (2.4.14) αποτελούν το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων της ενοποιημένης θεωρίας γενικευμένης θερμοελαστικότητας των Bagri και Eslami, για την περίπτωση ισότροπου υλικού.

2.5. Πεδίο εφαρμογής της γενικευμένης θερμοελαστικότητας

Η κλασική θεωρία θερμοελαστικότητας προβλέπει "άπειρη" ταχύτητα διάδοσης για τις θερμοελαστικές διαταραχές. Εκτός από αυτό το φυσικό παράδοξο της άπειρης ταχύτητας διάδοσης, η κλασική θερμοελαστικότητα δεν περιγράφει σωστά τη θερμομηχανική συμπεριφορά ενός στερεού μέσου που υποβάλλεται σε απότομη επιβολή θερμομηχανικού φορτίου ή που βρίσκεται σε πολύ χαμηλές θερμοκρασίες [6,19]. Σε τέτοιες περιπτώσεις έχουν εφαρμογή οι γενικευμένες θεωρίες θερμοελαστικότητας, που προβλέπουν διάδοση των θερμοελαστικών διαταραχών με πεπερασμένη ταχύτητα (second sound effect). Αν και ο χρόνος σύγκλισης των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από τις γενικευμένες θεωρίες θερμοελαστικότητας προς τα αποτελέσματα της κλασικής θερμοελαστικότητας είναι μικρός, μπορεί να γίνει σημαντικός σε περιπτώσεις απότομης επιβολής φορτίου, όπως είναι οι συνθήκες θερμικού σοκ [6].

Η ιδέα της κυματικού τύπου διάδοσης της θερμότητας πρωτοεμφανίστηκε στην εργασία του Maxwell [4]. Το ερευνητικό ενδιαφέρον προς αυτήν την κατεύθυνση ανανεώθηκε από τα πειράματα του Peshkov [20], ο οποίος ανίχνευσε το φαινόμενο "second sound" στο υγρό ήλιο. Βασισμένος στα πειράματα αυτά, ο Chester [21] επιχειρηματολογεί πως το φαινόμενο "second sound" πρέπει να υπάρχει σε όλα τα στερεά μέσα. Η θεωρητική αντιμετώπιση του φαινομένου αυτού έγινε αρχικά με την εισαγωγή ενός χρόνου χαλάρωσης στον κλασικό νόμο μεταφοράς θερμότητας του Fourier [4,7,21]. Ο χρόνος χαλάρωσης t_0 της θεωρίας Lord-Shulman μπορεί να ερμηνευτεί ως ο χρόνος που απαιτείται για να σταθεροποιηθεί η ροή θερμότητας σε ένα μέσο που ξαφνικά υποβάλλεται σε κλίση θερμοκρασίας [6,19].

Το μέγεθος του χρόνου χαλάρωσης των υλικών δεν είναι γενικά γνωστό. Ο Chester [21] εκτίμησε την τιμή του χρόνου χαλάρωσης t_0 ενός υλικού από τις μακροσκοπικές ιδιότητές του, η οποία σε μία πρώτη προσέγγιση μπορεί να δοθεί από την παρακάτω εξίσωση [22]:

$$t_0 = \frac{3k}{c_E^2 \rho c} \quad (2.5.1)$$

όπου k είναι η θερμική αγωγιμότητα, ρ είναι η πυκνότητα, c είναι η ειδική θερμοχωρητικότητα υπό σταθερό όγκο και c_E είναι η ταχύτητα διάδοσης του ελαστικού κύματος στο υλικό.

Σημειώνεται πως στην παρούσα διδακτορική διατριβή δεν υιοθετείται η παραπάνω προσέγγιση, καθώς οδηγεί στην εκτίμηση της ταχύτητας του θερμικού κύματος ως σταθερό υποπολλαπλάσιο της ταχύτητας του ελαστικού κύματος. Επιπλέον, από τη χρήση της σχέσης

(2.5.1) προκύπτει ότι ο χρόνος χαλάρωσης ενός κεραμικού υλικού είναι μικρότερος από τον αντίστοιχο χρόνο χαλάρωσης ενός μεταλλικού υλικού, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με τις τιμές που χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές στη βιβλιογραφία [6,11].

Ενδεικτικά, η τάξη μεγέθους για το μέσο χρόνο χαλάρωσης ενός στερεού υλικού σε θερμοκρασία δωματίου είναι $t_0 = 10^{-13}$ sec [7, 13-15]. Σε υψηλότερες θερμοκρασίες η τιμή του χρόνου χαλάρωσης γίνεται ακόμη μικρότερη [7,15]. Από την παραπάνω συζήτηση, έπεται ότι η μελέτη της θερμομηχανικής συμπεριφοράς ενός στερεού μέσου που υποβάλλεται σε συνθήκες θερμικού σοκ πρέπει να γίνει στα πλαίσια της γενικευμένης θερμοελαστικότητας. Ωστόσο, σε υψηλές θερμοκρασίες ο χρόνος χαλάρωσης του υλικού γίνεται αμελητέος και συνεπώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί η θεωρία της κλασικής συζευγμένης θερμοελαστικότητας.

2.6. Βιβλιογραφία

- [1] Nowacki, W., *Thermoelasticity*, 2nd Edition, PWN - Polish Scientific Publishers, Warsaw, Poland, 1986.
- [2] Duhamel, J.-M.-C., Second mémoire, sur les phenomenes thermo-mechaniques, *J. de L'École Polytechnique*, Vol.15, No.25, pp.1-57, 1837.
- [3] Biot, M., Thermoelasticity and irreversible thermodynamics, *J. Appl. Phys.*, Vol.27, pp.240-253, 1956.
- [4] Maxwell, J. C., On the dynamical theory of gases, *Phil. Trans. Royal Soc. New York*, Vol.157, pp.49-88, 1867.
- [5] Cattaneo, M. C., Sulla conduzione del calore, *Atti Semin. Mat. Fis. della Univ. Modena*, Vol.3, p.3, 1948.
- [6] Hetnarski, R. B., Eslami, M. R., *Thermal Stresses - Advanced Theory and Applications*, Springer Science+Business Media, Dordrecht, Netherlands, 2009.
- [7] Lord, H. and Shulman, Y., Generalized dynamic theory of thermoelasticity, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.15, pp.299-309, 1967.
- [8] Green, A. E. and Lindsay, K. A., Thermoelasticity, *J. Elasticity*, Vol.2, pp.1-7, 1971.
- [9] Green, A. E. and Naghdi, P. M., Thermoelasticity without energy dissipation, *J. Elasticity*, Vol.31, pp.189-208, 1993.
- [10] Fung, Y. C., Tong, P., *Classical and Computational Solid Mechanics*, World Scientific Publishing, Singapore, 2001.
- [11] Bagri, A. and Eslami, M. R., A unified generalized thermoelasticity formulation; application to thick functionally graded cylinders, *J. Therm. Stresses*, Vol.30, No.9 and 10, pp.911-930, 2007.
- [12] Bagri, A. and Eslami, M. R., A unified generalized thermoelasticity; solution for cylinders and spheres, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol.49, pp.1325-1335, 2007.
- [13] Chandrasekharaiah, D. S., Thermoelasticity with second sound: A review, *Appl. Mech. Rev.*, Vol.39, No.3, pp.355-376, 1986.
- [14] Chandrasekharaiah, D. S., Hyperbolic thermoelasticity: A review of recent literature, *Appl. Mech. Rev.*, Vol.51, No.12, Part 1, pp.705-729, 1998.
- [15] Vedavarz, A., Kumar, S. and Moallemi, M. K., Significance on non-Fourier heat waves in microscale conduction, *ASME, DSCD, DSC.*, Vol.32, pp.109-122, 1991.
- [16] Green, A. E. and Naghdi, P. M., A re-examination of the basic postulate of thermomechanics, *Proc. Royal Soc. New York A*, Vol.432, pp.171-194, 1991.
- [17] Ignaczak, J., Linear dynamic thermoelasticity: A survey, *Shock Vib. Dig.*, Vol.13, No.9, pp.3-8, 1981.

- [18] Shariyat, M., Nonlinear transient stress and wave propagation analyses of the FGM thick cylinders, employing a unified generalized thermoelasticity theory, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol.65, pp.24-37, 2012.
- [19] Ignaczak, J., Ostoja-Starzewski, M., *Thermoelasticity with Finite Wave Speeds*, Oxford University Press Inc., New York, USA, 2010.
- [20] Peshkov, V., Second sound in Helium II, *J. Phys. U.S.S.R.*, Vol.8, pp.131-138, 1944.
- [21] Chester, M., Second sound in solids, *Phys. Rev.*, Vol.131, No.5, pp.2013-2015, 1963.
- [22] Lifshitz, R. and Roukes, M. L., Thermoelastic damping in micro- and nanomechanical systems, *Phys. Rev. B*, Vol.61, pp.5600-5609, 2000.

Υπολογιστική Διαδικασία Επίλυσης Μονοδιάστατου Προβλήματος Γενικευμένης Θερμοελαστικότητας

3.1. Εισαγωγή

Στη συνέχεια της διδακτορικής διατριβής εξετάζεται το πρόβλημα της θερμομηχανικής συμπεριφοράς μίας λωρίδας από υλικό διαβαθμισμένων ιδιοτήτων (FGM strip). Όπως αναφέρεται στο κεφάλαιο 1, τα FGMs είναι προηγμένα υλικά με συνεχώς μεταβαλλόμενες ιδιότητες, τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως ενδιάμεση στρώση σε επικαλύψεις θερμικής προστασίας (TBCs) [1]. Γίνεται συνεπώς αντιληπτό ότι η μελέτη της θερμομηχανικής συμπεριφοράς των προηγμένων αυτών υλικών σε συνθήκες θερμικού σοκ είναι σημαντική. Για τη μελέτη αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί η ενοποιημένη θεωρία γενικευμένης θερμοελαστικότητας των Bagri και Eslami που παρουσιάστηκε στην παράγραφο 2.4 [2].

Οι πιο σημαντικές θεωρίες γενικευμένης θερμοελαστικότητας είναι η θεωρία Lord-Shulman [3], η θεωρία Green-Lindsay [4] και η θεωρία Green-Naghdi τύπου II [5], οι οποίες περιγράφονται στο κεφάλαιο 2. Τα μαθηματικά ζητήματα των προβλημάτων που σχετίζονται με τις θεωρίες Lord-Shulman και Green-Lindsay, όπως θεωρήματα ύπαρξης και μοναδικότητας των λύσεων (existence and uniqueness theorems) και θεωρήματα πεδίου επιρροής των λύσεων (domain of influence theorems), αναπτύσσονται στο [6]. Ο Chandrasekharaiah [7] απέδειξε τη μοναδικότητα της λύσης στη θεωρία Green-Naghdi τύπου II, όταν οι εξισώσεις διατυπώνονται με όρους τάσης και ροής θερμότητας. Επιπλέον, ο Chandrasekharaiah [8] μελέτησε το μονοδιάστατο πρόβλημα ενός ομοιογενούς, ισότροπου θερμοελαστικού ημίχωρου σε συνθήκες θερμικού σοκ στην ελεύθερη επιφάνειά του, στα πλαίσια της θεωρίας Green-Naghdi, και κατέληξε στις αναλυτικές εκφράσεις για τα μεταβατικά πεδία της μετατόπισης, της θερμοκρασίας και της τάσης. Ο ίδιος συγγραφέας σε άλλη εργασία του [9] παρουσίασε τις πλήρεις λύσεις για τις εξισώσεις πεδίου της ίδιας θεωρίας Green-Naghdi τύπου II.

Εκτός από ειδικές περιπτώσεις, τα δυναμικά προβλήματα γενικευμένης θερμοελαστικότητας δε δύναται να επιλυθούν αναλυτικά. Στις επόμενες παραγράφους του κεφαλαίου παρουσιάζεται η αριθμητική διαδικασία για τον προσδιορισμό των μεταβατικών πεδίων (transient fields) της μετατόπισης, της θερμοκρασίας και της τάσης που αναπτύσσονται σε μία ανομοιογενή λωρίδα υπό ομοιόμορφη θερμομηχανική καταπόνηση στις ελεύθερες επιφάνειές της, στα πλαίσια της ενοποιημένης θεωρίας γενικευμένης θερμοελαστικότητας των Bagri και Eslami. Η λωρίδα έχει πεπερασμένο πάχος, ενώ οι άλλες δύο διαστάσεις της θεωρούνται "άπειρες". Εάν οι θερμομηχανικές συνοριακές συνθήκες στην άνω και κάτω επιφάνειά της είναι ομοιόμορφες, τότε το υπό μελέτη πρόβλημα γίνεται μονοδιάστατο.

Για την μεθοδολογία της ανάλυσης του κεφαλαίου αυτού, χρήσιμη είναι η εργασία του Shariyat [10]. Ο Shariyat ασχολήθηκε με το πρόβλημα του προσδιορισμού των μεταβατικών πεδίων θερμοκρασίας και τάσης που αναπτύσσονται σε έναν κύλινδρο με παχύ τοίχωμα υπό ομοιόμορφη θερμομηχανική φόρτιση στην εξωτερική και την εσωτερική του επιφάνεια, στα πλαίσια της ενοποιημένης θεωρίας γενικευμένης θερμοελαστικότητας των Bagri και Eslami. Το υλικό του κυλίνδρου ήταν κεραμικό/μεταλλικό FGM, ισότροπο και θερμοελαστικό. Για την μαθηματική προσομοίωση του FGM, ο Shariyat χρησιμοποίησε το μοντέλο Voigt [11]

και τη μέθοδο Mori-Tanaka [12]. Επιπλέον, θεώρησε πως το κατ' όγκο ποσοστό του μεταλλικού υλικού ακολουθεί την κατανομή εκθετικού νόμου (power law) [13] κατά τη διεύθυνση της ακτίνας του κυλίνδρου, ενώ έλαβε υπόψη του και την επίδραση της θερμοκρασίας στις θερμομηχανικές ιδιότητες των υλικών (temperature-dependent properties). Για την επίλυση του προβλήματος χρησιμοποίησε την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων (finite element method) [14] για τη χωρική διακριτοποίηση, σε συνδυασμό με το μετασχηματισμό Laplace (Laplace transform) ως προς τη χρονική παράμετρο. Ο Shariyat, ενώ χρησιμοποίησε γραμμικές συναρτήσεις σχήματος τύπου Lagrange (Lagrange linear shape functions) για την παρεμβολή της θερμοκρασίας στα πεπερασμένα στοιχεία, για την παρεμβολή της μετατόπισης χρησιμοποίησε κυβικές συναρτήσεις σχήματος τύπου Hermite (Hermite cubic shape functions) [14]. Η παρεμβολή της μετατόπισης με συναρτήσεις σχήματος τύπου Hermite, αν και οδηγεί στην ταχύτερη σύγκλιση της μεθόδου, προϋποθέτει τη συνέχεια της κλίσης της μετατόπισης, δηλαδή τη συνέχεια της παραμόρφωσης. Για την FGM λωρίδα που μελέτησε ο Shariyat, όπου η κατανομή των ιδιοτήτων των υλικών είναι συνεχής συνάρτηση, η συνέχεια της παραμόρφωσης συνεπάγεται τη συνέχεια της τάσης. Για τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, ο Shariyat εφάρμοσε την αριθμητική μέθοδο των Honig και Hirdes [15].

Στο σημείο αυτό πρέπει να γίνουν δύο παρατηρήσεις σχετικά με την εργασία του Shariyat. Η πρώτη παρατήρηση αφορά στη χρήση του μετασχηματισμού Laplace ως προς την παράμετρο του χρόνου, ώστε να μετατραπεί το αρχικό σύστημα των μερικών διαφορικών εξισώσεων σε σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Ωστόσο, καθώς ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace γίνεται αριθμητικά, προκύπτουν ζητήματα ευστάθειας στη λύση σε εφαρμογές θερμικού σοκ [16]. Η δεύτερη παρατήρηση σχετίζεται με τη χρήση συναρτήσεων σχήματος τύπου Hermite για την παρεμβολή της μετατόπισης. Στη γενική περίπτωση, το πρόβλημα που εξετάζεται στην παρούσα διατριβή αφορά λωρίδα τριών στρώσεων (κεραμικό υλικό/FGM/μεταλλικό υλικό) και συνεπώς οι συναρτήσεις που εκφράζουν την κατανομή των θερμομηχανικών ιδιοτήτων δεν είναι κατ' ανάγκη συνεχείς (π.χ. στην περίπτωση σύνθετου υλικού χωρίς ενδιάμεση FGM στρώση). Έπεται ότι η κλίση της μετατόπισης δεν είναι απαραίτητα συνεχής και κατ' επέκταση η χρήση συναρτήσεων σχήματος τύπου Hermite για την παρεμβολή της μετατόπισης κρίνεται ακατάλληλη.

Η ανάλυση του παρόντος κεφαλαίου βασίζεται στις εξής αριθμητικές μεθόδους: στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων [14] που χρησιμοποιείται για τη χωρική διακριτοποίηση του προβλήματος, και στη μέθοδο Newmark (Newmark method) [14] που χρησιμοποιείται για τη χρονική ολοκλήρωση. Για την παρεμβολή της θερμοκρασίας και της μετατόπισης στα πεπερασμένα στοιχεία χρησιμοποιούνται γραμμικές συναρτήσεις σχήματος τύπου Lagrange. Για την υπολογιστική προσομοίωση του προβλήματος κατασκευάζεται κώδικας πεπερασμένων στοιχείων σε περιβάλλον Matlab (Matlab finite element code) [17]. Τέλος, για τον έλεγχο του κώδικα τα αριθμητικά αποτελέσματα συγκρίνονται με τις ακριβείς αναλυτικές εκφράσεις για τα μεταβατικά πεδία της μετατόπισης, της θερμοκρασίας και της τάσης που υπάρχουν στην εργασία του Chandrasekharaiah [8]. Σημειώνεται ότι στο παρόν κεφάλαιο θεωρείται ότι οι ιδιότητες των υλικών δεν επηρεάζονται από τη θερμοκρασία (temperature-independent properties).

3.2. Κανονικοποιημένη μορφή των βασικών εξισώσεων

Έστω μία ανομοιογενής λωρίδα συνολικού πάχους L (βλ. Σχήμα 3.1), από γραμμικό θερμοελαστικό και ισότροπο υλικό, η οποία υποβάλλεται σε ομοιόμορφη θερμομηχανική καταπόνηση στις ελεύθερες επιφάνειές της. Οι άλλες διαστάσεις της λωρίδας θεωρούνται πολύ μεγαλύτερες από το πάχος της, ενώ παράλληλα οι ιδιότητες του υλικού της λωρίδας

μεταβάλλονται μόνο κατά τη διεύθυνση του πάχους της x , όπου $0 \leq x \leq L$. Αρχικά, η λωρίδα είναι απαραμόρφωτη, ελεύθερη από τάσεις και έχει παντού ομοιόμορφη θερμοκρασία T_0 .



Σχήμα 3.1. Λωρίδα από ανομοιογενές, ισότροπο υλικό

Στην παράγραφο 2.4 παρουσιάστηκε μία ενοποιημένη θεωρία γενικευμένης θερμοελαστικότητας που προτάθηκε από τους Bagri και Eslami [2,18,19], η οποία ενσωματώνει τις γενικευμένες θεωρίες Lord-Shulman [3], Green-Lindsay [4] και Green-Naghdi [5]. Ειδικά για γραμμικό θερμοελαστικό και ισότροπο υλικό, οι βασικές εξισώσεις της ενοποιημένης θεωρίας είναι οι σχέσεις (2.4.10), (2.4.12) και (2.4.14), που ξαναγράφονται εδώ συγκεντρωμένα:

$$\left[\lambda \delta_{ij} u_{k,k} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) - \beta \delta_{ij} (\theta + t_1 \dot{\theta}) \right]_{,j} + x_i = \rho \ddot{u}_i, \quad i=1,2,3 \quad (3.2.1)$$

$$\eta (-T_0 \dot{s} + z) + (\eta t_0 + t_3) (-T_0 \ddot{s} + \dot{z}) = - \left[(\eta k + \kappa^*) \theta_{,i} + t_3 \gamma k \dot{\theta}_{,i} \right]_{,i} \quad (3.2.2)$$

$$T_0 s = \rho c (\theta + t_2 \dot{\theta}) + T_0 \beta u_{i,i} \quad (3.2.3)$$

Για λόγους ευκολίας, στο παρόν κεφάλαιο οι άξονες του καρτεσιανού ορθογώνιου συστήματος συμβολίζονται με x, y, z (αντί X_1, X_2, X_3). Από τη γεωμετρία της λωρίδας και της φόρτισης έπεται ότι πρόκειται για μονοδιάστατο πρόβλημα, δηλαδή $u_y = u_z = 0$, $u_x = u_x(x, t)$ και $\theta = \theta(x, t)$. Επιπλέον δεν υπάρχουν καθολικές δυνάμεις ή θερμικές πηγές. Για το δεδομένο πρόβλημα της ανομοιογενούς λωρίδας υπό θερμομηχανική καταπόνηση στα άκρα της, οι σχέσεις (3.2.1) - (3.2.3) λαμβάνουν την ακόλουθη μορφή:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} - \beta (\theta + t_1 \dot{\theta}) \right] = \rho \ddot{u} \quad (3.2.4)$$

$$-\eta T_0 \dot{s} - (\eta t_0 + t_3) T_0 \ddot{s} = - \frac{\partial}{\partial x} \left[(\eta k + t_3 \kappa^*) \frac{\partial \theta}{\partial x} + t_3 \gamma k \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \right] \quad (3.2.5)$$

$$T_0 s = \rho c (\theta + t_2 \dot{\theta}) + T_0 \beta \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.2.6)$$

όπου έχουν παραλειφθεί οι εξισώσεις κίνησης στις διευθύνσεις y και z , ενώ $u := u_x$ είναι η μετακίνηση κατά τη διεύθυνση του άξονα x .

Στη συνέχεια παραγωγίζεται η σχέση (3.2.6), θεωρώντας ότι η χρονική μεταβολή του χρόνου χαλάρωσης της θεωρίας Green-Lindsay t_2 είναι αμελητέα, δηλαδή ότι $|\partial t_2 / \partial t| \ll 1$ [10]:

$$T_0 \dot{s} = \frac{\partial(\rho c)}{\partial t} (\theta + t_2 \dot{\theta}) + \rho c (\dot{\theta} + t_2 \ddot{\theta}) + T_0 \left(\dot{\beta} \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \right) \quad (3.2.7)$$

Παραγωγίζοντας εκ νέου τη σχέση (3.2.7) προκύπτει η εξής σχέση:

$$T_0 \ddot{s} = \frac{\partial^2(\rho c)}{\partial t^2} (\theta + t_2 \dot{\theta}) + 2 \frac{\partial(\rho c)}{\partial t} (\dot{\theta} + t_2 \ddot{\theta}) + \rho c (\ddot{\theta} + t_2 \ddot{\ddot{\theta}}) + T_0 \left(\ddot{\beta} \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \dot{\beta} \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + \beta \frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} \right) \quad (3.2.8)$$

Με την παρατήρηση ότι $(\eta t_0 + t_3) t_2 = 0$, η αντικατάσταση των σχέσεων (3.2.7)-(3.2.8) στη σχέση (3.2.5) οδηγεί στην ακόλουθη εξίσωση:

$$\begin{aligned} & -\eta \left[\frac{\partial(\rho c)}{\partial t} (\theta + t_2 \dot{\theta}) + \rho c (\dot{\theta} + t_2 \ddot{\theta}) + T_0 \dot{\beta} \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \right] + \\ & -(\eta t_0 + t_3) \left[\frac{\partial^2(\rho c)}{\partial t^2} \theta + 2 \frac{\partial(\rho c)}{\partial t} \dot{\theta} + \rho c \ddot{\theta} + T_0 \left(\ddot{\beta} \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \dot{\beta} \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + \beta \frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} \right) \right] = \\ & = -\frac{\partial}{\partial x} \left[(\eta k + t_3 \kappa^*) \frac{\partial \theta}{\partial x} + t_3 \gamma k \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Εάν υποθεθεί επιπλέον ότι οι θερμομηχανικές ιδιότητες της λωρίδας είναι ανεξάρτητες της θερμοκρασίας T , τότε η χρονική παράγωγος των σταθερών του υλικού μηδενίζεται και η εξίσωση (3.2.9) λαμβάνει την εξής απλοποιημένη μορφή:

$$\begin{aligned} & -\eta \left[\rho c (\dot{\theta} + t_2 \ddot{\theta}) + T_0 \beta \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \right] - (\eta t_0 + t_3) \left(\rho c \ddot{\theta} + T_0 \beta \frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} \right) = \\ & = -\frac{\partial}{\partial x} \left[(\eta k + t_3 \kappa^*) \frac{\partial \theta}{\partial x} + t_3 \gamma k \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

Οι σχέσεις (3.2.4) και (3.2.10) διαμορφώνουν το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων για το πρόβλημα της ανομοιογενούς λωρίδας υπό ομοιόμορφη θερμομηχανική φόρτιση στα άκρα της, στα πλαίσια της ενοποιημένης θεωρίας γενικευμένης θερμοελαστικότητας των Bagri και Eslami. Για την κανονικοποίηση των σχέσεων (3.2.4) και (3.2.10) εισάγονται οι εξής αδιαστατοποιημένες παράμετροι [2]:

$$\underline{x} = \frac{x}{l}, \quad \underline{t} = \frac{vt}{l}, \quad \underline{\theta} = \frac{T - T_0}{T_0}, \quad \underline{u} = \frac{(\lambda_m + 2\mu_m)u}{l\beta_m T_0}, \quad \underline{\sigma}_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{\beta_m T_0} \quad (3.2.11)$$

$$\underline{t}_0 = \frac{vt_0}{l}, \quad \underline{t}_1 = \frac{vt_1}{l}, \quad \underline{t}_2 = \frac{vt_2}{l}, \quad \underline{t}_3 = \frac{vt_3}{l} \quad (3.2.12)$$

$$\underline{c}_E = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho v^2} \right)^{1/2}, \quad \underline{c}_K = \left(\frac{k}{\rho c l v} \right)^{1/2}, \quad \underline{c}_T = \left(\frac{\kappa^*}{\rho c v^2} \right)^{1/2}, \quad \xi = \frac{\beta^2 T_0}{\rho c (\lambda + 2\mu)} \quad (3.2.13)$$

όπου l είναι ένα χαρακτηριστικό μήκος, v είναι μία χαρακτηριστική ταχύτητα, σ_{xx} είναι η ορθή τάση στη διεύθυνση του άξονα x , \underline{c}_E είναι η κανονικοποιημένη ταχύτητα του ελαστικού διαμήκους κύματος, \underline{c}_T και \underline{c}_K είναι αντίστοιχα η κανονικοποιημένη ταχύτητα του θερμικού κύματος και ο κανονικοποιημένος συντελεστής απόσβεσης για τη θεωρία Green-Naghdi, $\underline{c}_K / (t_0 + t_2)^{1/2}$ είναι η κανονικοποιημένη ταχύτητα του θερμικού κύματος για τις θεωρίες Lord-Shulman και Green-Lindsay, ξ είναι ένας αδιάστατος όρος σύζευξης, ενώ ο δείκτης m υποδηλώνει την αναφορά στις θερμομηχανικές σταθερές του μεταλλικού υλικού, δηλαδή του υλικού της κατώτερης στρώσης. Από τις σχέσεις (3.2.11) προκύπτουν άμεσα τα εξής:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{v}{l} \frac{\partial}{\partial \underline{t}}, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{v^2}{l^2} \frac{\partial^2}{\partial \underline{t}^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial \underline{x}}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{l^2} \frac{\partial^2}{\partial \underline{x}^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} = \frac{v}{l^2} \frac{\partial^2}{\partial \underline{x} \partial \underline{t}} \quad (3.2.14)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.2.11)-(3.2.14) προκύπτει η κανονικοποιημένη μορφή των εξισώσεων (3.2.4) και (3.2.10):

$$\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \left[\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda_m + 2\mu_m} \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{x}} - \frac{\beta}{\beta_m} (\underline{\theta} + t_1 \underline{\dot{\theta}}) \right] = \frac{1}{\underline{c}_{Em}^2} \frac{\rho}{\rho_m} \underline{\ddot{u}} \quad (3.2.15)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{\eta}{\underline{c}_{Km}^2} \frac{\rho c}{\rho_m c_m} \left(\underline{\dot{\theta}} + t_2 \underline{\ddot{\theta}} + \xi_m \frac{\rho_m c_m}{\rho c} \frac{\beta}{\beta_m} \frac{\partial \underline{\dot{u}}}{\partial \underline{x}} \right) - \frac{\eta t_0 + t_3}{\underline{c}_{Km}^2} \frac{\rho c}{\rho_m c_m} \left(\underline{\ddot{\theta}} + \xi_m \frac{\rho_m c_m}{\rho c} \frac{\beta}{\beta_m} \frac{\partial \underline{\ddot{u}}}{\partial \underline{x}} \right) = \\ & = - \frac{1}{k_m} \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \left[\left(\eta + \frac{t_3 \kappa^* l}{k v} \right) k \frac{\partial \underline{\theta}}{\partial \underline{x}} + \gamma t_3 k \frac{\partial \underline{\dot{\theta}}}{\partial \underline{x}} \right] \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

όπου \underline{c}_{Em} είναι η κανονικοποιημένη ταχύτητα του ελαστικού διαμήκους κύματος στο μεταλλικό υλικό, \underline{c}_{Km} είναι ο κανονικοποιημένος συντελεστής απόσβεσης στο μεταλλικό υλικό για τη θεωρία Green-Naghdi, ενώ -για λόγους απλότητας- με υπερκείμενη τελεία συμβολίζεται πλέον η μερική παραγωγή ως προς τον αδιαστατοποιημένο χρόνο \underline{t} .

Οι εξισώσεις (3.2.15)-(3.2.16) αποτελούν το σύστημα των κανονικοποιημένων διαφορικών εξισώσεων για το μονοδιάστατο πρόβλημα της λωρίδας από ανομοιογενές, ισότροπο υλικό, στα πλαίσια της ενοποιημένης θεωρίας γενικευμένης θερμοελαστικότητας των Bagri και Eslami. Η τάση σ_{xx} και η ροή θερμότητας q_x δίνονται αντίστοιχα από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\sigma_{xx} = \beta_m T_0 \underline{\sigma}_{xx} = \beta_m T_0 \left[\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda_m + 2\mu_m} \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{x}} - \frac{\beta}{\beta_m} (\underline{\theta} + t_1 \underline{\dot{\theta}}) \right] \quad (3.2.17)$$

$$q_x = \frac{k_m T_0}{l} \underline{q}_x = \frac{k_m T_0}{l} \left\{ -\frac{1}{k_m} \left[\left(\eta + \frac{t_3 \kappa^* l}{k\nu} \right) k \frac{\partial \theta}{\partial x} + \gamma t_3 k \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \right] \right\} \quad (3.2.18)$$

όπου $\underline{\sigma}_{xx}$ είναι η κανονικοποιημένη τάση και \underline{q}_x είναι η κανονικοποιημένη ροή θερμότητας.

Ακόμη, από την εξίσωση (2.4.9) προκύπτει ότι οι υπόλοιπες συνιστώσες του τανυστή της τάσης σ_{ij} δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \beta_m T_0 \underline{\sigma}_{yy} = \beta_m T_0 \underline{\sigma}_{zz} = \beta_m T_0 \left[\frac{\lambda}{\lambda_m + 2\mu_m} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\beta}{\beta_m} (\theta + t_1 \dot{\theta}) \right] \quad (3.2.19)$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0 \quad (3.2.20)$$

όπου $\underline{\sigma}_{yy}$ και $\underline{\sigma}_{zz}$ είναι οι κανονικοποιημένες τάσεις σ_{yy} και σ_{zz} αντίστοιχα. Απαλείφοντας τον όρο $\partial u / \partial x$ από τις σχέσεις (3.2.17) και (3.2.19) προκύπτει:

$$\underline{\sigma}_{yy} = \underline{\sigma}_{zz} = \frac{1}{\lambda + 2\mu} \left[\lambda \underline{\sigma}_{xx} - 2\mu \frac{\beta}{\beta_m} (\theta + t_1 \dot{\theta}) \right] \quad (3.2.21)$$

Επίσης, από τις εξισώσεις (2.2.2) και (2.4.9) έπεται ότι οι συνιστώσες του τανυστή των απειροστών τροπών ε_{ij} δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\lambda + 2\mu} \left[\sigma_{xx} + \beta (\theta + t_1 \dot{\theta}) \right] \quad (3.2.22)$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0 \quad (3.2.23)$$

Τέλος, η κανονικοποιημένη απειροστή τροπή $\underline{\varepsilon}_{xx}$ υπολογίζεται από την παρακάτω σχέση:

$$\underline{\varepsilon}_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\lambda_m + 2\mu_m}{\lambda + 2\mu} \left[\underline{\sigma}_{xx} + \frac{\beta}{\beta_m} (\theta + t_1 \dot{\theta}) \right] \quad (3.2.24)$$

3.3. Μεθοδολογία αριθμητικής ανάλυσης

3.3.1. Μητρική εξίσωση των πεπερασμένων στοιχείων και χρονική ολοκλήρωση

Οι εξισώσεις (3.2.15)-(3.2.16) μαζί με τις αρχικές και τις συνοριακές συνθήκες ορίζουν ένα πρόβλημα αρχικών-συνοριακών συνθηκών (initial-boundary value problem - IBVP). Για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος εφαρμόζεται η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων [14]. Αρχικά, διακριτοποιείται το διάστημα $[0, L]$ σε N_{el} πεπερασμένα στοιχεία. Η μεταβολική διατύπωση του προβλήματος σε κάθε πεπερασμένο στοιχείο αποτελείται από τις εξής σχέσεις:

$$\int_{x_1}^{x_2} w_1 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda_m + 2\mu_m} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\beta}{\beta_m} (\theta + t_1 \dot{\theta}) \right] dx = \frac{1}{\epsilon_{Em}^2 \rho_m} \int_{x_1}^{x_2} w_1 \rho \ddot{u} dx \quad (3.3.1)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{\eta}{\epsilon_{Km}^2} \int_{x_1}^{x_2} w_2 \left[\frac{\rho c}{\rho_m c_m} (\dot{\theta} + t_2 \ddot{\theta}) + \xi_m \frac{\beta}{\beta_m} \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \right] dx + \\ & - \frac{1}{\epsilon_{Km}^2} \int_{x_1}^{x_2} w_2 (\eta t_0 + t_3) \left(\frac{\rho c}{\rho_m c_m} \ddot{\theta} + \xi_m \frac{\beta}{\beta_m} \frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} \right) dx = \\ & = - \frac{1}{k_m} \int_{x_1}^{x_2} w_2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\eta + \frac{t_3 \kappa^* l}{kv} \right) k \frac{\partial \theta}{\partial x} + \gamma t_3 k \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \right] dx \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

όπου x_1, x_2 είναι τα κανονικοποιημένα άκρα του πεπερασμένου στοιχείου, $w_1, w_2 \in H^1$ είναι οι συναρτήσεις βάρους και H^1 είναι ο χώρος Sobolev (Sobolev space) [14]. Έπειτα από λίγες πράξεις και κατάλληλες παραγοντικές ολοκληρώσεις οι εξισώσεις (3.3.1)-(3.3.2) λαμβάνουν την εξής μορφή:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\epsilon_{Em}^2 \rho_m} \int_{x_1}^{x_2} w_1 \rho \ddot{u} dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial w_1}{\partial x} \left[\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda_m + 2\mu_m} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\beta}{\beta_m} (\theta + t_1 \dot{\theta}) \right] dx = \\ & = w_1 \left[\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda_m + 2\mu_m} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\beta}{\beta_m} (\theta + t_1 \dot{\theta}) \right] \Big|_{x_1}^{x_2} \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{\epsilon_{Km}^2 \rho_m c_m} \int_{x_1}^{x_2} w_2 [\eta (t_0 + t_2) + t_3] \rho c \ddot{\theta} dx - \frac{\xi_m}{\epsilon_{Km}^2 \beta_m} \int_{x_1}^{x_2} w_2 (\eta t_0 + t_3) \beta \frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} dx + \\ & - \frac{\eta}{\epsilon_{Km}^2 \rho_m c_m} \int_{x_1}^{x_2} w_2 \rho c \dot{\theta} dx + \frac{\eta \xi_m}{\epsilon_{Km}^2 \beta_m} \int_{x_1}^{x_2} w_2 \beta \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} dx + \\ & - \frac{1}{k_m} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial w_2}{\partial x} \left[\left(\eta + \frac{t_3 \kappa^* l}{kv} \right) k \frac{\partial \theta}{\partial x} + \gamma t_3 k \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \right] dx = -w_2 \frac{1}{k_m} \left[\left(\eta + \frac{t_3 \kappa^* l}{kv} \right) k \frac{\partial \theta}{\partial x} + \gamma t_3 k \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \right] \Big|_{x_1}^{x_2} \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

όπου στην εξίσωση (3.3.3) ο συνοριακός όρος $\left[\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda_m + 2\mu_m} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\beta}{\beta_m} (\theta + t_1 \dot{\theta}) \right] \Big|_{x_1}^{x_2}$ εκφράζει την κανονικοποιημένη τάση σ_{xx} που ασκείται στα άκρα του πεπερασμένου στοιχείου, ενώ αντίστοιχα στην εξίσωση (3.3.4) ο συνοριακός όρος $-\frac{1}{k_m} \left[\left(\eta + \frac{t_3 \kappa^* l}{kv} \right) k \frac{\partial \theta}{\partial x} + \gamma t_3 k \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \right] \Big|_{x_1}^{x_2}$ εκφράζει την κανονικοποιημένη ροή θερμότητας q_x που διέρχεται από τα άκρα του πεπερασμένου στοιχείου.

Για τη μεταφορά του διαστήματος ολοκλήρωσης από το διάστημα $[x_1, x_2]$ στο διάστημα $[0, 1]$, εισάγεται η αδιάστατη μεταβλητή ϖ :

$$\varpi = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (3.3.5)$$

Σε κάθε πεπερασμένο στοιχείο, οι κανονικοποιημένες μεταβλητές της μετατόπισης \underline{u} και της μεταβολής της θερμοκρασίας $\underline{\theta}$ εκφράζονται από τις ακόλουθες προσεγγιστικές σχέσεις:

$$\underline{u} = \mathbf{N} \cdot \underline{\mathbf{u}}, \quad \underline{\theta} = \mathbf{N} \cdot \underline{\boldsymbol{\theta}} \quad (3.3.6)$$

όπου $\underline{\mathbf{u}}^T = [u_1(t) \quad u_2(t)]$ και $\underline{\boldsymbol{\theta}}^T = [\theta_1(t) \quad \theta_2(t)]$ είναι τα διανύσματα της μετατόπισης και της μεταβολής της θερμοκρασίας στους κόμβους του πεπερασμένου στοιχείου, ενώ $\mathbf{N} = [N_1(\varpi) \quad N_2(\varpi)]$ είναι το διάνυσμα των γραμμικών συναρτήσεων σχήματος τύπου Lagrange που δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$N_1(\varpi) = 1 - \varpi, \quad N_2(\varpi) = \varpi \quad (3.3.7)$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο Galerkin [14], ως συναρτήσεις βάρους w_i , $i=1,2$, χρησιμοποιούνται οι συναρτήσεις σχήματος N_i , $i=1,2$. Επομένως, έπειτα από την αντικατάσταση των σχέσεων (3.3.5)-(3.3.7) στις σχέσεις (3.3.3)-(3.3.4) και την ομαδοποίηση των εξαρτημένων μεταβλητών $\ddot{\underline{u}}$, $\ddot{\underline{\theta}}$, $\dot{\underline{u}}$, $\dot{\underline{\theta}}$, \underline{u} και $\underline{\theta}$, προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις για κάθε πεπερασμένο στοιχείο:

$$\begin{aligned} & \frac{\tilde{h}}{\xi_{Em}^2 \rho_m} \int_0^1 \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\varpi \cdot \ddot{\underline{\mathbf{u}}} - \frac{1}{\beta_m} \int_0^1 t_1 \beta (\mathbf{N}')^T \mathbf{N} d\varpi \cdot \dot{\underline{\boldsymbol{\theta}}} + \\ & + \frac{1}{\tilde{h}(\lambda_m + 2\mu_m)} \int_0^1 (\lambda + 2\mu) (\mathbf{N}')^T \mathbf{N}' d\varpi \cdot \underline{\mathbf{u}} - \frac{1}{\beta_m} \int_0^1 \beta (\mathbf{N}')^T \mathbf{N} d\varpi \cdot \underline{\boldsymbol{\theta}} = \underline{\boldsymbol{\sigma}} \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\xi_m}{\xi_{Km}^2 \beta_m} \int_0^1 (\eta t_0 + t_3) \beta \mathbf{N}^T \mathbf{N}' d\varpi \cdot \ddot{\underline{\mathbf{u}}} + \frac{\tilde{h}}{\xi_{Km}^2 \rho_m c_m} \int_0^1 [\eta(t_0 + t_2) + t_3] \rho c \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\varpi \cdot \ddot{\underline{\boldsymbol{\theta}}} + \\ & + \frac{\eta \xi_m}{\xi_{Km}^2 \beta_m} \int_0^1 \beta \mathbf{N}^T \mathbf{N}' d\varpi \cdot \dot{\underline{\mathbf{u}}} + \left[\frac{\eta \tilde{h}}{\xi_{Km}^2 \rho_m c_m} \int_0^1 \rho c \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\varpi + \frac{\gamma t_3}{\tilde{h} k_m} \int_0^1 k (\mathbf{N}')^T \mathbf{N}' d\varpi \right] \cdot \dot{\underline{\boldsymbol{\theta}}} + \\ & + \frac{1}{\tilde{h} k_m} \int_0^1 \left(\eta + \frac{t_3 \kappa^* l}{k v} \right) k (\mathbf{N}')^T \mathbf{N}' d\varpi \cdot \underline{\boldsymbol{\theta}} = \underline{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

όπου \tilde{h} είναι το κανονικοποιημένο μήκος του πεπερασμένου στοιχείου, $\mathbf{N}' = \partial \mathbf{N} / \partial \varpi$, ενώ $\underline{\boldsymbol{\sigma}}^T = [\sigma_1(t) \quad \sigma_2(t)]$ και $\underline{\mathbf{q}}^T = [q_1(t) \quad q_2(t)]$ είναι τα διανύσματα της κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} και της κανονικοποιημένης ροής θερμότητας q_x στους κόμβους του πεπερασμένου

στοιχείου. Οι εξισώσεις (3.3.8)-(3.3.9) μπορούν να γραφούν στην ακόλουθη μητρική μορφή:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} \quad (3.3.10)$$

όπου τα στοιχεία του μητρώου μάζας \mathbf{M} , του μητρώου απόσβεσης \mathbf{C} και του μητρώου ελαστικότητας \mathbf{K} δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{11} &= \frac{\underline{h}}{\underline{c}_{Em}^2 \rho_m} \int_0^1 \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\varpi \\ \mathbf{M}_{12} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{21} &= \frac{\underline{\xi}_m}{\underline{c}_{Km}^2 \beta_m} \int_0^1 (\eta t_0 + t_3) \beta \mathbf{N}^T \mathbf{N}' d\varpi \\ \mathbf{M}_{22} &= \frac{\underline{h}}{\underline{c}_{Km}^2 \rho_m c_m} \int_0^1 [\eta(t_0 + t_2) + t_3] \rho c \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\varpi \\ \mathbf{C}_{11} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{12} &= -\frac{1}{\beta_m} \int_0^1 t_3 \beta (\mathbf{N}')^T \mathbf{N} d\varpi \\ \mathbf{C}_{21} &= \frac{\eta \underline{\xi}_m}{\underline{c}_{Km}^2 \beta_m} \int_0^1 \beta \mathbf{N}^T \mathbf{N}' d\varpi \\ \mathbf{C}_{22} &= \frac{\eta \underline{h}}{\underline{c}_{Km}^2 \rho_m c_m} \int_0^1 \rho c \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\varpi + \frac{\gamma t_3}{\underline{h} k_m} \int_0^1 k (\mathbf{N}')^T \mathbf{N}' d\varpi \\ \mathbf{K}_{11} &= \frac{1}{\underline{h} (\lambda_m + 2\mu_m)} \int_0^1 (\lambda + 2\mu) (\mathbf{N}')^T \mathbf{N}' d\varpi \\ \mathbf{K}_{12} &= -\frac{1}{\beta_m} \int_0^1 \beta (\mathbf{N}')^T \mathbf{N} d\varpi \\ \mathbf{K}_{21} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{22} &= \frac{1}{\underline{h} k_m} \int_0^1 \left(\eta + \frac{t_3 k^* l}{kv} \right) k (\mathbf{N}')^T \mathbf{N}' d\varpi \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

Τα ολοκληρώματα που εμφανίζονται στη σχέση (3.3.11) υπολογίζονται αριθμητικά με τη μέθοδο Gauss [14]:

$$\int_0^1 G(\varpi) d\varpi = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} G\left(\frac{\varpi+1}{2}\right) d\varpi = \int_{-1}^1 g(\varpi) d\varpi = \sum_{i=1}^{m_G} g(\xi_i) W_i \quad (3.3.12)$$

όπου $G(\varpi)$ είναι μία δεδομένη ολοκληρώσιμη συνάρτηση, m_G είναι το πλήθος των σημείων ολοκλήρωσης, ξ_i είναι τα σημεία ολοκλήρωσης Gauss και W_i είναι τα αντίστοιχα βάρη

ολοκλήρωσης. Στους υπολογισμούς της παρούσας εργασίας χρησιμοποιούνται $m_G = 4$ σημεία ολοκλήρωσης.

Η σχέση (3.3.10) αποτελεί τη μητρική εξίσωση για κάθε πεπερασμένο στοιχείο. Συναθροίζοντας όλες αυτές τις μητρικές εξισώσεις και προσθέτοντας τους συνοριακούς όρους, διαμορφώνεται η καθολική μητρική εξίσωση:

$$\tilde{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{\Lambda}} + \tilde{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{\Lambda}} + \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{\Lambda} = \tilde{\mathbf{F}} \quad (3.3.13)$$

όπου $\tilde{\mathbf{M}}$ είναι το καθολικό μητρώο μάζας, $\tilde{\mathbf{C}}$ είναι το καθολικό μητρώο απόσβεσης, $\tilde{\mathbf{K}}$ είναι το καθολικό μητρώο ελαστικότητας, $\tilde{\mathbf{F}}$ είναι το καθολικό διάνυσμα φόρτισης -το οποίο περιέχει μόνο συνοριακούς όρους- και $\mathbf{\Lambda}$ είναι το διάνυσμα των κανονικοποιημένων μετατοπίσεων και μεταβολών της θερμοκρασίας στους κόμβους του δικτύου των πεπερασμένων στοιχείων τη χρονική στιγμή t .

Για τη χρονική ολοκλήρωση της εξίσωσης (3.3.13) χρησιμοποιείται η μέθοδος Newmark [14]. Θεωρούνται οι ακόλουθες αρχικές συνθήκες:

$$\mathbf{\Lambda}(0) = \mathbf{d}_0, \quad \dot{\mathbf{\Lambda}}(0) = \mathbf{v}_0 \quad (3.3.14)$$

Η εφαρμογή της μεθόδου Newmark εκφράζεται από τις εξής σχέσεις [14]:

$$\mathbf{a}_0 = \tilde{\mathbf{M}}^{-1} (\tilde{\mathbf{F}}_0 - \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{v}_0 - \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{d}_0) \quad (3.3.15)$$

$$\mathbf{d}_{n+1}^0 = \mathbf{d}_n + \Delta t \mathbf{v}_n + \frac{\Delta t^2}{2} (1 - 2\beta_N) \mathbf{a}_n, \quad n = 0, 1, \dots, M_t - 1 \quad (3.3.16)$$

$$\mathbf{v}_{n+1}^0 = \mathbf{v}_n + (1 - \gamma_N) \Delta t \mathbf{a}_n, \quad n = 0, 1, \dots, M_t - 1 \quad (3.3.17)$$

$$\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{d}_{n+1}^0 + \beta_N \Delta t^2 \mathbf{a}_{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots, M_t - 1 \quad (3.3.18)$$

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_{n+1}^0 + \gamma_N \Delta t \mathbf{a}_{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots, M_t - 1 \quad (3.3.19)$$

$$\mathbf{a}_{n+1} = (\tilde{\mathbf{M}} + \gamma_N \Delta t \tilde{\mathbf{C}} + \beta_N \Delta t^2 \tilde{\mathbf{K}})^{-1} (\tilde{\mathbf{F}}_{n+1} - \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{v}_{n+1} - \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{d}_{n+1}), \quad n = 0, 1, \dots, M_t - 1 \quad (3.3.20)$$

όπου Δt είναι το χρονικό βήμα, M_t είναι το πλήθος των χρονικών βημάτων, $\tilde{\mathbf{F}}_n$ είναι το καθολικό διάνυσμα φόρτισης στη χρονική στιγμή $t_n = n\Delta t$, $\mathbf{d}_n = \mathbf{\Lambda}(t_n)$, $\mathbf{v}_n = \dot{\mathbf{\Lambda}}(t_n)$ και $\mathbf{a}_n = \ddot{\mathbf{\Lambda}}(t_n)$ είναι το διάνυσμα των αγνώστων, η χρονική του παράγωγος και η δεύτερη χρονική του παράγωγος, αντίστοιχα, στη χρονική στιγμή $t_n = n\Delta t$, \mathbf{d}_n^0 και \mathbf{v}_n^0 είναι ενδιάμεσα βοηθητικά διανύσματα, ενώ β_N και γ_N είναι οι παράμετροι της μεθόδου Newmark.

Η μέθοδος Newmark είναι ευσταθής άνευ συνθήκης (unconditionally stable) εάν ισχύουν οι ακόλουθες ανισότητες [14]:

$$2\beta_N \geq \gamma_N \geq \frac{1}{2} \quad (3.3.21)$$

Για τις εφαρμογές της διατριβής επιλέγονται οι τιμές $\gamma_N = \frac{2}{3}$ και $\beta_N = \frac{1}{4} \left(\gamma_N + \frac{1}{2} \right)^2$, οι οποίες ικανοποιούν τις ανισότητες (3.3.21) και παράλληλα εξασφαλίζουν καλή σύγκλιση. Επιπλέον, η κανονικοποιημένη τάση σ_{xx} σε κάθε κόμβο του δικτύου των πεπερασμένων στοιχείων και για κάθε χρονική στιγμή υπολογίζεται από τη σχέση (3.3.8).

Η παραπάνω αριθμητική διαδικασία οδηγεί στον προσδιορισμό των κανονικοποιημένων επικόμβιων μετατοπίσεων \underline{u} , μεταβολών θερμοκρασίας $\underline{\theta}$ και τάσεων σ_{xx} , σε κάθε χρονική στιγμή. Τέλος, τα πεδία της μετατόπισης u , της μεταβολής της θερμοκρασίας θ και της τάσης σ_{xx} προσδιορίζονται από τις σχέσεις (2.2.1) και (3.2.11).

3.3.2. Αρχικές και συνοριακές συνθήκες

Ο προσδιορισμός των πεδίων της μετατόπισης και της θερμοκρασίας για ένα δεδομένο πρόβλημα αρχικών-συνοριακών συνθηκών προκύπτει από την επίλυση της σχέσης (3.3.13), η οποία συμπληρώνεται από τις αρχικές και τις συνοριακές συνθήκες.

Στις εφαρμογές της παρούσας διατριβής η λωρίδα θεωρείται αρχικά πως είναι απαραμόρφωτη, ελεύθερη από τάσεις και έχει παντού ομοιόμορφη θερμοκρασία T_0 . Συνεπώς, οι αρχικές συνθήκες εκφράζονται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$u(x,0) = 0, \quad \dot{u}(x,0) = 0, \quad \theta(x,0) = 0, \quad \dot{\theta}(x,0) = 0, \quad \text{όπου } 0 \leq x \leq L \quad (3.3.22)$$

Για την κάθε εξαρτημένη μεταβλητή, υπάρχουν τρεις βασικοί τύποι συνοριακών συνθηκών για το πρόβλημα που εξετάζουμε. Η πρώτη κατηγορία (Dirichlet boundary conditions) αφορά στην περίπτωση που η μετατόπιση u (αντίστοιχα, η θερμοκρασία θ) θεωρείται δεδομένη στο σύνορο, ενώ η δεύτερη κατηγορία (Neumann boundary conditions) αφορά στην περίπτωση που η τάση σ_{xx} (αντίστοιχα, η ροή θερμότητας q_x) θεωρείται δεδομένη στο σύνορο. Η τρίτη κατηγορία (Robin boundary conditions) αφορά στην περίπτωση που στο σύνορο είναι γνωστή μία πεπλεγμένη συνάρτηση της μετατόπισης με την τάση (αντίστοιχα, της θερμοκρασίας με τη ροή θερμότητας).

Οι συνοριακές συνθήκες ενσωματώνονται στην εξίσωση (3.3.13). Συγκεκριμένα, οι συνοριακές συνθήκες τύπου Neumann τροποποιούν το καθολικό διάνυσμα φόρτισης $\tilde{\mathbf{F}}$, όπως προκύπτει από τις σχέσεις (3.3.8)-(3.3.9). Στη συνέχεια εξετάζονται οι συνοριακές συνθήκες τύπου Robin για την περίπτωση της μεταβολής της θερμοκρασίας θ , οι οποίες περιλαμβάνουν τις συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet ως ειδική περίπτωση.

Στην περίπτωση μεταφοράς θερμότητας από τον περιβάλλοντα αέρα στην άνω επιφάνεια της λωρίδας με συναγωγή (convection), η ροή θερμότητας q_x προς το εσωτερικό της λωρίδας δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$q_x(0,t) = -h_v [T(0,t) - T_\infty(t)], \quad t > 0 \quad (3.3.23)$$

όπου h_v είναι ο συντελεστής συναγωγής και $T_\infty(t)$ είναι η δεδομένη θερμοκρασία του περιβάλλοντα αέρα. Εάν $h_v \rightarrow \infty$, τότε έπεται ότι $T(0,t) = T_\infty(t)$ που αντιστοιχεί σε

συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet. Από τις σχέσεις (2.2.1), (3.2.11) και (3.2.18) προκύπτει ότι η κανονικοποιημένη μορφή της σχέσης (3.3.23) είναι η ακόλουθη:

$$q_x(0, \underline{t}) = -\frac{h_v l}{k_m} [\underline{\theta}(0, \underline{t}) - \underline{\theta}_\infty(\underline{t})], \quad \underline{t} > 0 \quad (3.3.24)$$

όπου $\underline{\theta}_\infty(\underline{t})$ είναι η κανονικοποιημένη θερμοκρασία του περιβάλλοντα αέρα. Όπως προκύπτει από τη σχέση (3.3.24), οι συνοριακές συνθήκες τύπου Robin τροποποιούν το καθολικό διάνυσμα φόρτισης $\tilde{\mathbf{F}}$ και το καθολικό μητρώο ελαστικότητας $\tilde{\mathbf{K}}$.

3.3.3. Κώδικας πεπερασμένων στοιχείων

Για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος αρχικών-συνοριακών συνθηκών που εξετάζεται, κατασκευάζεται κώδικας πεπερασμένων στοιχείων σε περιβάλλον Matlab [17]. Στο Σχήμα 3.2 φαίνεται η περιγραφή της ροής του κώδικα πεπερασμένων στοιχείων.

Αρχικά προσδιορίζονται τα δεδομένα του προβλήματος. Έπειτα εισάγονται οι παράμετροι για τον ορισμό της θεωρίας θερμοελαστικότητας που επιλέγονται για την ανάλυση, ενώ επιπλέον επιλέγονται τα χαρακτηριστικά μεγέθη l και ν . Σημειώνεται ότι στη θεωρία Green-Naghdi και για δεδομένη κανονικοποιημένη ταχύτητα του θερμικού κύματος ξ_T σε ένα υλικό, η σταθερά κ^* του υλικού προσδιορίζεται από τις σχέσεις (3.2.13). Ακόμη, προσδιορίζεται η κατανομή του κατ' όγκο ποσοστού του μεταλλικού υλικού, V_m , μέσα στην FGM στρώση για τον υπολογισμό των μακροσκοπικών ιδιοτήτων. Στη συνέχεια υπολογίζονται οι κανονικοποιημένες μεταβλητές και επιλέγεται το πλήθος των πεπερασμένων στοιχείων N_{el} που χρησιμοποιούνται για την ανάλυση. Επίσης, επιλέγεται ο αριθμός των χρονικών βημάτων M_t και ορίζονται οι παράμετροι της μεθόδου Newmark για τη χρονική ολοκλήρωση.

Έπειτα από την εισαγωγή των δεδομένων του προβλήματος και των παραμέτρων της ανάλυσης, ξεκινά η υπολογιστική διαδικασία. Αρχικά δημιουργείται το δίκτυο των πεπερασμένων στοιχείων και υπολογίζονται τα τοπικά μητρώα \mathbf{M} , \mathbf{C} και \mathbf{K} για κάθε πεπερασμένο στοιχείο, από τις εξισώσεις (3.3.11). Όπως έχει ήδη αναφερθεί, ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων γίνεται αριθμητικά με τη μέθοδο Gauss, όπως αυτή εκφράζεται από την εξίσωση (3.3.12). Ειδικά για τα πεπερασμένα στοιχεία που βρίσκονται στην FGM στρώση, οι θερμομηχανικές ιδιότητες υπολογίζονται σε κάθε σημείο ολοκλήρωσης Gauss, σύμφωνα με το μοντέλο Voigt [11] (βλ. εξίσωση (1.2.2)). Στη συνέχεια διαμορφώνονται τα καθολικά μητρώα $\tilde{\mathbf{M}}$, $\tilde{\mathbf{C}}$ και $\tilde{\mathbf{K}}$, από τη συνάθροιση των τοπικών μητρώων όλων των πεπερασμένων στοιχείων. Ακολουθεί η ενσωμάτωση των συνοριακών συνθηκών με τον υπολογισμό του καθολικού διανύσματος φόρτισης $\tilde{\mathbf{F}}$ και -ενδεχομένως- την κατάλληλη τροποποίηση του καθολικού μητρώου $\tilde{\mathbf{K}}$.

Η συνάθροιση των τοπικών μητρώων πραγματοποιείται μέσω των μητρώων ID, IEN και LM [14]. Το μητρώο ID (destination array) καθορίζει σε κάθε κόμβο του δικτύου πεπερασμένων στοιχείων τους καθολικούς βαθμούς ελευθερίας που περιέχει. Το μητρώο IEN (element nodes array) καθορίζει σε κάθε πεπερασμένο στοιχείο τους κόμβους που το ορίζουν. Το μητρώο LM (location matrix), που μπορεί να προκύψει από τα μητρώα ID και IEN, καθορίζει σε κάθε πεπερασμένο στοιχείο τους καθολικούς βαθμούς ελευθερίας που περιέχει.

Περιγραφή ροής του κώδικα πεπερασμένων στοιχείων

- Δεδομένα προβλήματος
 - Προσδιορισμός θερμομηχανικών ιδιοτήτων κεραμικού και μεταλλικού υλικού
 - Προσδιορισμός πάχους κάθε στρώσης
 - Εισαγωγή αρχικών και συνοριακών συνθηκών

- Παράμετροι ανάλυσης/προσομοίωσης
 - Καθορισμός των παραμέτρων η , γ , t_0 , t_1 , t_2 , t_3 , και κ^* της ενοποιημένης θεωρίας
 - Επιλογή χαρακτηριστικού μήκους l και χαρακτηριστικής ταχύτητας ν
 - Προσδιορισμός της κατανομής του κατ' όγκο ποσοστού του μεταλλικού υλικού V_m στην FGM στρώση
 - Υπολογισμός κανονικοποιημένων μεταβλητών
 - Επιλογή πλήθους πεπερασμένων στοιχείων και χρονικών βημάτων
 - Καθορισμός των παραμέτρων β_N και γ_N της μεθόδου Newmark

- Ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων
 - Μόρφωση δικτύου πεπερασμένων στοιχείων
 - Μόρφωση των μητρώων ID, IEN και LM
 - Υπολογισμός των τοπικών μητρώων \mathbf{M} , \mathbf{C} και \mathbf{K} για κάθε πεπερασμένο στοιχείο
 - Υπολογισμός των καθολικών μητρώων $\tilde{\mathbf{M}}$, $\tilde{\mathbf{C}}$ και $\tilde{\mathbf{K}}$ από τη συνάθροιση των τοπικών μητρώων
 - Προσθήκη συνοριακών όρων στα καθολικά μητρώα

- Χρονική ολοκλήρωση
 - Εφαρμογή της μεθόδου Newmark και υπολογισμός των διανυσμάτων d_n , v_n , και a_n σε κάθε χρονική στιγμή t_n
 - Υπολογισμός της κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} σε κάθε χρονική στιγμή t_n

- Επεξεργασία αποτελεσμάτων
 - Υπολογισμός της κανονικοποιημένης τάσης σ_{yy} και της κανονικοποιημένης απειροστής τροπής ε_{xx} σε κάθε κόμβο του δικτύου πεπερασμένων στοιχείων και σε κάθε χρονική στιγμή t_n , από τις αντίστοιχες κανονικοποιημένες μεταβλητές και την κανονικοποιημένη τάση σ_{xx}
 - Υπολογισμός της μετατόπισης u , της θερμοκρασίας T και της τάσης σ_{xx} σε κάθε κόμβο του δικτύου πεπερασμένων στοιχείων και σε κάθε χρονική στιγμή t_n , από τις αντίστοιχες κανονικοποιημένες μεταβλητές
 - Σχεδιασμός διαγραμμάτων

Σχήμα 3.2. Περιγραφή ροής του κώδικα πεπερασμένων στοιχείων

Έπειτα από την ανάλυση των πεπερασμένων στοιχείων γίνεται η χρονική ολοκλήρωση της σχέσης (3.3.13). Η χρονική ολοκλήρωση υλοποιείται μέσω της εφαρμογής της μεθόδου Newmark, δηλαδή συγκεκριμένα την εκτέλεση των υπολογισμών (3.3.16)-(3.3.20) διαδοχικά για κάθε χρονική στιγμή t_n . Παράλληλα, σε κάθε χρονική στιγμή t_n υπολογίζεται και το διάνυσμα της κανονικοποιημένης τάσης $\underline{\sigma}$, σύμφωνα με τη σχέση (3.3.8). Αφού έχουν πλέον υπολογιστεί οι κανονικοποιημένες μεταβλητές \underline{u} και $\underline{\theta}$, υπολογίζονται η κανονικοποιημένη τάση $\sigma_{yy} = \sigma_{yy}(x_i, t_n)$ και η κανονικοποιημένη απειροστή τροπή $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}(x_i, t_n)$ από τις εξισώσεις (3.2.21) και (3.2.24) αντίστοιχα. Ο κώδικας ολοκληρώνεται με τον υπολογισμό των της μετακίνησης $u = u(x_i, t_n)$, της θερμοκρασίας $T = T(x_i, t_n)$ και της τάσης $\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(x_i, t_n)$, σε κάθε κόμβο του δικτύου πεπερασμένων στοιχείων με συντεταγμένη x_i , $i = 0, 1, 2, \dots, N_{el}$, και σε κάθε χρονική στιγμή t_n , $n = 0, 1, 2, \dots, M_t$, από τις σχέσεις (2.2.1) και (3.2.11) αντίστοιχα, καθώς και τη σχεδίαση των ζητούμενων διαγραμμάτων.

3.4. Έλεγχος της σύγκλισης του κώδικα πεπερασμένων στοιχείων

Στη γενική περίπτωση, ο κώδικας πεπερασμένων στοιχείων που περιγράφεται στην παράγραφο 3.3.3 είναι δομημένος για την προσομοίωση λωρίδας τριών στρώσεων από ισότροπο θερμοελαστικό υλικό (βλ. Σχήμα 3.3). Η ανώτερη στρώση της λωρίδας αποτελείται από κεραμικό υλικό και έχει πάχος L_c , ενώ η κατώτερη στρώση αποτελείται από μεταλλικό και έχει πάχος L_m . Η ενδιάμεση στρώση της λωρίδας, πάχους L_{fg} , αποτελείται από κεραμικό/μεταλλικό FGM υλικό.



Σχήμα 3.3. Λωρίδα τριών στρώσεων (κεραμικό υλικό/FGM/μεταλλικό υλικό)

Ο έλεγχος του κώδικα γίνεται βάση του μονοδιάστατου προβλήματος ενός ομοιογενούς, ισότροπου θερμοελαστικού ημίσφαιρου που υπόκειται σε συνθήκες θερμοκινετικού σοκ στο ελεύθερο σύνορό του, στα πλαίσια της γενικευμένης θεωρίας Green-Naghdi τύπου II. Οι ακριβείς αναλυτικές εκφράσεις για τα μεταβατικά πεδία της μετατόπισης, της θερμοκρασίας και της τάσης που αναπτύσσονται στον ημίσφαιρο υπάρχουν διαθέσιμες στην εργασία του Chandrasekharaiah [8].

Ο Chandrasekharaiah μελέτησε το παραπάνω πρόβλημα με γενικότερες συνοριακές συνθήκες. Συγκεκριμένα, η κανονικοποιημένη μορφή του προβλήματος αρχικών-συνοριακών συνθηκών που αντιμετώπισε ο Chandrasekharaiah εκφράζεται από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial \underline{x}^2} - \frac{\partial \underline{\theta}}{\partial \underline{x}} = \frac{1}{\underline{\zeta}_E^2} \underline{\ddot{u}} \\ -\left(\underline{\ddot{\theta}} + \xi \frac{\partial \underline{\ddot{u}}}{\partial \underline{x}} \right) = -\underline{\zeta}_T^2 \frac{\partial^2 \underline{\theta}}{\partial \underline{x}^2} \end{array} \right\}, \quad \begin{array}{l} 0 < \underline{x} < \infty \\ 0 < \underline{t} < \infty \end{array} \quad (3.4.1)$$

με αρχικές-συνοριακές συνθήκες:

$$\begin{array}{l} \underline{u}(\underline{x}, 0) = 0, \quad \underline{\dot{u}}(\underline{x}, 0) = 0, \quad \underline{\theta}(\underline{x}, 0) = 0, \quad \underline{\dot{\theta}}(\underline{x}, 0) = 0, \quad 0 \leq \underline{x} < \infty \\ \underline{\theta}(0, \underline{t}) = \Theta(\underline{t}), \quad \underline{\sigma}_{xx}(0, \underline{t}) = \Sigma(\underline{t}), \quad 0 < \underline{t} < \infty \end{array} \quad (3.4.2)$$

όπου $\Theta(\underline{t})$ και $\Sigma(\underline{t})$ είναι δεδομένες συναρτήσεις.

Για την επίλυσή του προβλήματος (3.4.1)-(3.4.2), ο Chandrasekharaiah χρησιμοποίησε τη μέθοδο μετασχηματισμού Laplace ως προς την παράμετρο του χρόνου και κατέληξε στις αναλυτικές εκφράσεις για τη μετατόπιση $\underline{u}(\underline{x}, \underline{t})$, τη θερμοκρασία $\underline{\theta}(\underline{x}, \underline{t})$ και την τάση $\underline{\sigma}_{xx}(\underline{x}, \underline{t})$ [8]:

$$\underline{u}(\underline{x}, \underline{t}) = V_1 \left(\int_0^{\tau_1} f_1(t) dt \right) H(\tau_1) - V_2 \left(\int_0^{\tau_2} f_2(t) dt \right) H(\tau_2) \quad (3.4.3)$$

$$\underline{\theta}(\underline{x}, \underline{t}) = \left(\frac{V_1^2}{\underline{\zeta}_E^2} - 1 \right) f_1(\tau_1) H(\tau_1) + \left(1 - \frac{V_2^2}{\underline{\zeta}_E^2} \right) f_2(\tau_2) H(\tau_2) \quad (3.4.4)$$

$$\underline{\sigma}_{xx}(\underline{x}, \underline{t}) = \frac{1}{\underline{\zeta}_E^2} \left[-V_1^2 f_1(\tau_1) H(\tau_1) + V_2^2 f_2(\tau_2) H(\tau_2) \right] \quad (3.4.5)$$

όπου H είναι η συνάρτηση Heaviside [14] και επιπλέον:

$$V_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\underline{\zeta}_T^2 + (1 + \xi) \underline{\zeta}_E^2 + (-1)^{i+1} \Delta \right]^{1/2}, \quad i = 1, 2 \quad (3.4.6)$$

$$\Delta = \left\{ \left[\underline{\zeta}_T^2 - (1 + \xi) \underline{\zeta}_E^2 \right]^2 + 4 \xi \underline{\zeta}_E^2 \underline{\zeta}_T^2 \right\}^{1/2} \quad (3.4.7)$$

$$f_i(\underline{t}) = \frac{1}{V_1^2 - V_2^2} \left[V_{3-i}^2 \Theta(\underline{t}) + (V_{3-i}^2 - \underline{\zeta}_E^2) \Sigma(\underline{t}) \right], \quad i = 1, 2 \quad (3.4.8)$$

$$\tau_i = \underline{t} - \frac{\underline{x}}{V_i}, \quad i = 1, 2 \quad (3.4.9)$$

Για την ειδική περίπτωση του θερμικού σοκ ισχύει $\Theta(\underline{t}) = 1$ και $\Sigma(\underline{t}) = 0$, οπότε η εξίσωση (3.4.8) απλοποιείται ως εξής:

$$f_i(\underline{t}) = \frac{V_{3-i}^2}{V_1^2 - V_2^2}, \quad i = 1, 2 \quad (3.4.10)$$

Συνεπώς, στην περίπτωση του θερμικού σοκ οι αναλυτικές εκφράσεις (3.4.3)-(3.4.5) λαμβάνουν την ακόλουθη μορφή:

$$\underline{u}(x, \underline{t}) = \frac{V_1 V_2}{V_1^2 - V_2^2} [V_2 \tau_1 H(\tau_1) - V_1 \tau_2 H(\tau_2)] \quad (3.4.11)$$

$$\underline{\theta}(x, \underline{t}) = \frac{1}{V_1^2 - V_2^2} \left[\left(\frac{V_1^2}{\underline{c}_E^2} - 1 \right) V_2^2 H(\tau_1) + \left(1 - \frac{V_2^2}{\underline{c}_E^2} \right) V_1^2 H(\tau_2) \right] \quad (3.4.12)$$

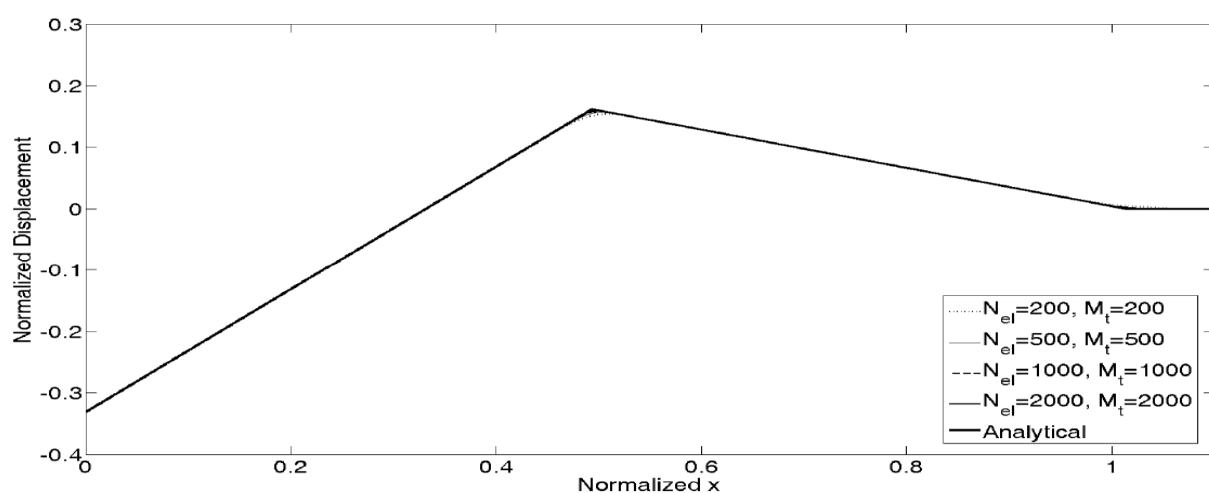
$$\underline{\sigma}_{xx}(x, \underline{t}) = \frac{V_1^2 V_2^2}{\underline{c}_E^2 (V_1^2 - V_2^2)} [H(\tau_2) - H(\tau_1)] \quad (3.4.13)$$

όπου βέβαια ισχύουν επιπλέον οι σχέσεις (3.4.6), (3.4.7) και (3.4.9).

Για την παραγωγή των αριθμητικών αποτελεσμάτων του κώδικα πεπερασμένων στοιχείων, ορίζεται καταρχάς $t_0 = t_1 = t_2 = \eta = \gamma = 0$ και $t_3 = 1$ για να χρησιμοποιηθεί η θεωρία Green-Naghdi τύπου II. Επίσης, ορίζεται $L_c = L_{fg} = 0$ για τα πάχη της στρώσης του κεραμικού υλικού και του FGM αντίστοιχα, ώστε να προκύψει ομοιογενής λωρίδα από μεταλλικό υλικό. Τέλος, θεωρείται πως το μεταλλικό υλικό του ομοιογενούς ημίχωρου έχει τις κανονικοποιημένες παραμέτρους $\underline{c}_E = 1$, $\underline{c}_T = 0.5$ και $\xi = 0.02$. Σημειώνεται ότι η τιμή της νέας σταθεράς υλικού κ^* της θεωρίας Green-Naghdi υπολογίζεται από τις σχέσεις (3.2.13).

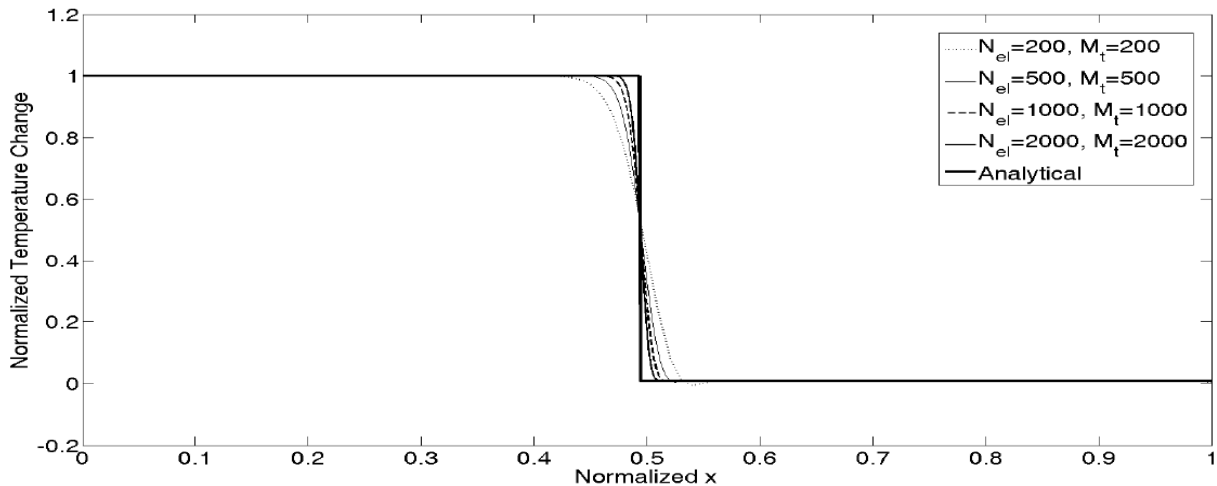
Στα Σχήματα 3.4-3.6 απεικονίζονται οι κατανομές της μετατόπισης, της μεταβολής της θερμοκρασίας και της τάσης αντίστοιχα, για τη χρονική στιγμή $\underline{t} = 1$. Από τα σχήματα αυτά γίνεται φανερό πως τα αριθμητικά αποτελέσματα του κώδικα συγκλίνουν προς τα αναλυτικά αποτελέσματα του Chandrasekharaiah, καθώς ο αριθμός των πεπερασμένων στοιχείων N_{el} και ο αριθμός των χρονικών βημάτων M_t αυξάνονται.

Συγκεκριμένα, στο Σχήμα 3.4 απεικονίζεται η κατανομή της κανονικοποιημένης μετατόπισης $\underline{u} = \underline{u}(x, 1)$, $0 \leq x \leq 1.1$. Καθώς η λύση για τη μετατόπιση είναι ομαλή, η αριθμητική λύση είναι πολύ κοντά στην ακριβή αναλυτική λύση, ακόμα και για μικρό αριθμό πεπερασμένων στοιχείων και χρονικών βημάτων.



Σχήμα 3.4. Κατανομή της κανονικοποιημένης μετατόπισης \underline{u} τη χρονική στιγμή $\underline{t} = 1$

Στο Σχήμα 3.5 απεικονίζεται η κατανομή της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας $\theta = \theta(x,1)$, $0 \leq x \leq 1$. Όπως προκύπτει από το σχήμα, η ακαριαία θερμική μεταβολή στην ελεύθερη επιφάνεια διαδίδεται στον ημίχωρο ως κυματική διαταραχή με ταχύτητα περίπου* $c_T = 0.5$. Επιπλέον, το θερμικό κύμα διαδίδεται χωρίς απόσβεση, γεγονός που χαρακτηρίζει τη γενικευμένη θεωρία Green-Naghdi τύπου II. Η αριθμητική λύση παρουσιάζει μικρή απόκλιση από την αναλυτική λύση, ακόμη και όταν ο αριθμός των πεπερασμένων στοιχείων και των χρονικών βημάτων αυξηθεί αρκετά, γεγονός που οφείλεται στην ύπαρξη ασυνέχειας στην αναλυτική λύση.

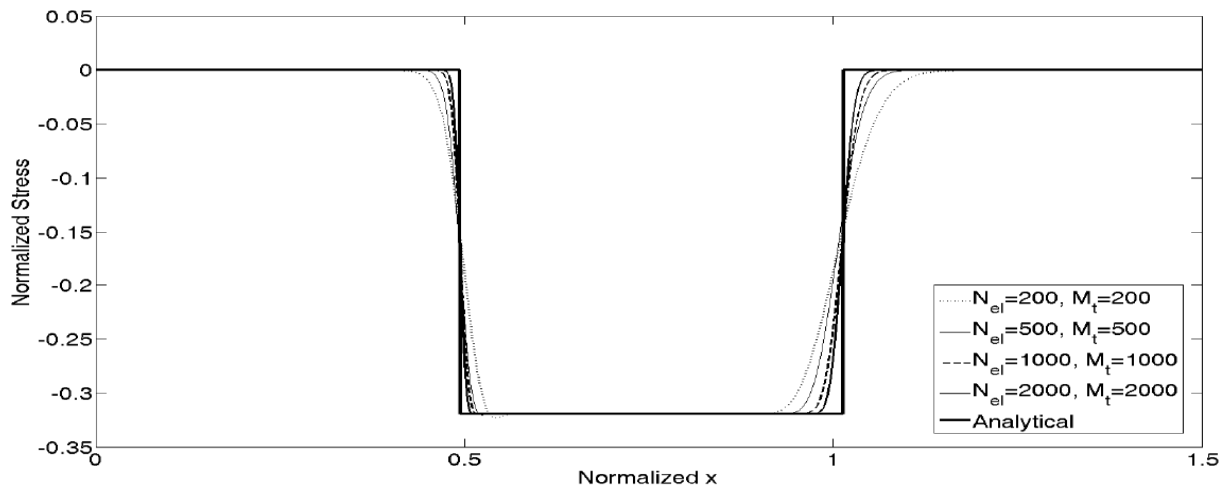


Σχήμα 3.5. Κατανομή της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας θ τη χρονική στιγμή $t = 1$

Τέλος, το Σχήμα 3.6 απεικονίζει την κατανομή της κανονικοποιημένης τάσης $\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(x,1)$, $0 \leq x \leq 1.5$. Παρατηρείται ότι το τασικό κύμα παρουσιάζει δύο μέτωπα. Όπως προκύπτει από τις εξισώσεις (3.4.6), (3.4.9) και (3.4.13), η ταχύτητα του αριστερού μετώπου είναι $V_2 = 0.4935$ και του δεξιού μετώπου είναι $V_1 = 1.0131$. Όπως στην περίπτωση της μεταβολής της θερμοκρασίας, η αριθμητική λύση παρουσιάζει μία μικρή απόκλιση από την αναλυτική λύση, λόγω της ασυνέχειας στην αναλυτική λύση.

Από την παραπάνω σύγκριση των αριθμητικών αποτελεσμάτων του κώδικα με τα αναλυτικά αποτελέσματα του Chandrasekharaiah, συμπεραίνεται πως η αριθμητική λύση συγκλίνει προς την αναλυτική λύση καθώς αυξάνεται ο αριθμός των πεπερασμένων στοιχείων και των χρονικών βημάτων. Σημειώνεται πως για τις παραπάνω αναλύσεις χρησιμοποιήθηκαν συνολικό κανονικοποιημένο πάχος λωρίδας $L = 2$ και συνολικός κανονικοποιημένος χρόνος επίλυσης $t_{tot} = 2$. Για αυτά τα δεδομένα, από τα Σχήματα 3.4-3.6 προκύπτει ότι η χρήση $N_{ei} = 2000$ πεπερασμένων στοιχείων και $M_t = 2000$ χρονικών βημάτων εξασφαλίζει καλή ακρίβεια στα αριθμητικά αποτελέσματα. Επίσης, παρατηρείται ότι περαιτέρω αύξηση του πλήθους των πεπερασμένων στοιχείων και των χρονικών βημάτων προσφέρει μικρή βελτίωση στα αριθμητικά αποτελέσματα, με δυσανάλογο υπολογιστικό κόστος.

* η απόκλιση στην ταχύτητα οφείλεται στον όρο σύζευξης ξ



Σχήμα 3.6. Κατανομή της κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} τη χρονική στιγμή $t = 1$

3.5. Βιβλιογραφία

- [1] Lee, W. Y., Stinton, D. P., Berndt, C. C., Erdogan, F., Lee, Y.-D. and Mutasim, Z., Concept of functionally graded materials for advanced thermal barrier coating applications, *J. Am. Ceram. Soc.*, Vol.79, No.12, pp.3003-3012, 1996.
- [2] Hetnarski, R. B., Eslami, M. R., *Thermal Stresses - Advanced Theory and Applications*, Springer Science+Business Media, Dordrecht, Netherlands, 2009.
- [3] Lord, H. and Shulman, Y., Generalized dynamic theory of thermoelasticity, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.15, pp.299-309, 1967.
- [4] Green, A. E. and Lindsay, K. A., Thermoelasticity, *J. Elasticity*, Vol.2, pp.1-7, 1971.
- [5] Green, A. E. and Naghdi, P. M., Thermoelasticity without energy dissipation, *J. Elasticity*, Vol.31, pp.189-208, 1993.
- [6] Ignaczak, J., Ostoja-Starzewski, M., *Thermoelasticity with Finite Wave Speeds*, Oxford University Press Inc., New York, USA, 2010.
- [7] Chandrasekharaiah, D. S., A uniqueness theorem in the theory of thermoelasticity without energy dissipation, *J. Therm. Stresses*, Vol.19, pp.267-272, 1996.
- [8] Chandrasekharaiah, D. S., One-dimensional wave propagation in the linear theory of thermoelasticity without energy dissipation, *J. Therm. Stresses*, Vol.19, pp.695-710, 1996.
- [9] Chandrasekharaiah, D. S., Complete solutions in the theory of thermoelasticity without energy dissipation, *Mech. Res. Commun.*, Vol.24, pp.625-630, 1997.
- [10] Shariyat, M., Nonlinear transient stress and wave propagation analyses of the FGM thick cylinders, employing a unified generalized thermoelasticity theory, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol.65, pp.24-37, 2012.
- [11] Voigt, W., Über die beziehungzwischen den beiden elastizitätskonstanten isotroper körper, *Wied. Ann.*, Vol.38, pp.573-587, 1889.
- [12] Mori, T. and Tanaka, K., Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions, *Acta Metall.*, Vol.2, pp.1571-1574, 1973.
- [13] Gupta, A. and Talha, M., Recent development in modeling and analysis of functionally graded materials and structures, *Prog. Aerosp. Sci.*, Vol.79, pp.1-14, 2015.
- [14] Hughes, T. J. R., *The Finite Element Method. Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Prentice Hall, Inc., New Jersey, USA, 1987.

- [15] Honig, G. and Hirdes, U., A method for the numerical inversion of Laplace transforms, *J. Comput. Appl. Math.*, Vol.10, pp.113–132, 1984.
- [16] Tian, X., Shen Y., Chen, C. and He, T., A direct finite element method study of generalized thermoelastic problems, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.43, pp.2050-2063, 2006.
- [17] Van Loan, C. F., Daisy Fan, K.-Y., *Insight Through Computing*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, USA, 2010.
- [18] Bagri, A. and Eslami, M. R., A unified generalized thermoelasticity formulation; application to thick functionally graded cylinders, *J. Therm. Stresses*, Vol.30, No 9 and 10, pp.911-930, 2007.
- [19] Bagri, A. and Eslami, M. R., A unified generalized thermoelasticity; solution for cylinders and spheres, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol.49, pp.1325-1335, 2007.

Μεταβατικά Πεδία Μετατόπισης, Θερμοκρασίας και Τάσης σε Λωρίδα Διαβαθμισμένων Ιδιοτήτων υπό Συνθήκες Θερμικού Σοκ

4.1. Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο εξετάζεται η θερμομηχανική συμπεριφορά λωρίδας από υλικό διαβαθμισμένων ιδιοτήτων (FGM) σε συγκεκριμένες εφαρμογές θερμικού σοκ, στα πλαίσια διαφόρων θεωριών γενικευμένης θερμοελαστικότητας. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιείται ο κώδικας πεπερασμένων στοιχείων που περιγράφεται στο κεφάλαιο 3 για τον αριθμητικό υπολογισμό των μεταβατικών πεδίων (transient fields) της μετατόπισης, της θερμοκρασίας και της τάσης που αναπτύσσονται στη λωρίδα.

Στη βιβλιογραφία υπάρχουν δημοσιεύσεις για προβλήματα θερμικών τάσεων σε FGMs, στις οποίες χρησιμοποιούνται θεωρίες της γενικευμένης θερμοελαστικότητας [1]. Τα προβλήματα αυτά αφορούν διάφορα δομικά στοιχεία, όπως δίσκους [2,3], κυλίνδρους [4-7] και σφαίρες [8,9].

Οι δημοσιεύσεις που αφορούν εφαρμογές της γενικευμένης θερμοελαστικότητας σε λωρίδες ή σχετικούς δομικούς σχηματισμούς είναι πιο περιορισμένες. Οι Sherief και Dhaliwal [10] αντιμετώπισαν αναλυτικά το πρόβλημα ενός ομοιογενούς, ισότροπου και θερμοελαστικού ημίχωρου* υπό ομοιόμορφο θερμικό σοκ (thermal shock) στην ελεύθερη επιφάνειά του, στα πλαίσια της γενικευμένης θεωρίας Lord-Shulman [11]. Η αναλυτική τους μέθοδος βασιζόταν στη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace, ενώ ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace γινόταν προσεγγιστικά [12]. Ο Sherief [13] χρησιμοποίησε μία παρόμοια ημι-αναλυτική μέθοδο για το ίδιο πρόβλημα ομοιόμορφου θερμικού σοκ σε ημίχωρο ή λωρίδα πεπερασμένου πάχους, στα πλαίσια της γενικευμένης θεωρίας Green-Lindsay [14]. Η ημι-αναλυτική μέθοδος που χρησιμοποίησε ο Sherief βασιζόταν επίσης στη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace, ενώ ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace γινόταν με την αριθμητική μέθοδο των Honig και Hirdes [15]. Ο Chandrasekharaiah [16] μελέτησε το πρόβλημα ενός ομοιογενούς, ισότροπου και θερμοελαστικού ημίχωρου υπό ομοιόμορφο θερμομηχανικό σοκ (thermomechanical shock) στην ελεύθερη επιφάνειά του, στα πλαίσια της γενικευμένης θεωρίας Green-Naghdi [17]. Ο όρος θερμομηχανικό σοκ αφορά στην ακαριαία επιβολή θερμοκρασιακής μεταβολής και τάσης ή παραμόρφωσης. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace, ο Chandrasekharaiah κατέληξε στις ακριβείς αναλυτικές εκφράσεις των μεταβατικών πεδίων της θερμοκρασίας και της τάσης. Οι Taheri, Fariborz και Eslami [18] μελέτησαν το ίδιο πρόβλημα για λωρίδα πεπερασμένου πάχους, κάνοντας πάλι χρήση του μετασχηματισμού Laplace, όπου ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace βασιζόταν στην αριθμητική μέθοδο του Durbin [19].

Οι Bagri, Taheri, Eslami και Fariborz [20] μελέτησαν το πρόβλημα μίας λωρίδας από ομοιογενές, ισότροπο και θερμοελαστικό υλικό υπό ομοιόμορφη θερμομηχανική καταπόνηση στις ελεύθερες επιφάνειές της, στα πλαίσια διαφορετικών θεωριών γενικευμένης θερμοελαστικότητας. Για την επίλυση του προβλήματος εφάρμοσαν μετασχηματισμό Laplace στις βασικές εξισώσεις, ώστε να προκύψει μία συνήθης διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές. Για τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace χρησιμοποίησαν την αριθμητική

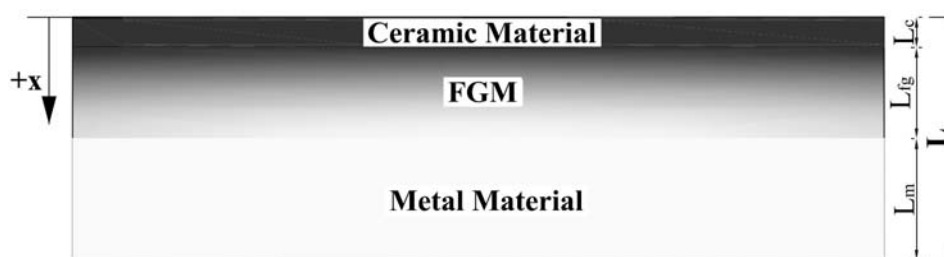
* ο ημίχωρος μπορεί να θεωρηθεί ως λωρίδα με άπειρο πάχος

μέθοδο των Honig και Hirdes [15]. Οι Bagri, Eslami και Samsam-Shariat [21] αντιμετώπισαν το ίδιο πρόβλημα για την περίπτωση που το υλικό της λωρίδας είναι ανομοιογενές κατά την διεύθυνση του πάχους της, στα πλαίσια της γενικευμένης θεωρίας Lord-Shulman. Συγκεκριμένα, θεώρησαν μία κεραμική/μεταλλική FGM λωρίδα, όπου η μεταβολή των θερμομηχανικών ιδιοτήτων του υλικού ακολουθεί κατανομή εκθετικού νόμου (power law) [22]. Για την ανάλυση του προβλήματος χρησιμοποίησαν πάλι μετασχηματισμό Laplace στις βασικές εξισώσεις. Ωστόσο, η επίλυση των συνήθων διαφορικών εξισώσεων που προκύπτουν έγινε με την αριθμητική μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων (finite element method) [23]. Το τελευταίο βήμα ήταν ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace, που έγινε αριθμητικά με τη μέθοδο των Honig και Hirdes [15].

Οι Youssef και El-Bary [24] ασχολήθηκαν με το πρόβλημα μίας συμμετρικής σύνθετης λωρίδας τριών στρώσεων υπό συνθήκες θερμικού σοκ, στα πλαίσια της θεωρίας Lord-Shulman. Κάθε στρώση αποτελούνταν από ομοιογενές, ισότροπο και θερμοελαστικό υλικό, όπου το υλικό της ανώτερης και της κατώτερης στρώσης ήταν κοινό. Επιπλέον, θεώρησαν ότι η θερμική αγωγιμότητα των υλικών εξαρτάται από τη θερμοκρασία. Για την επίλυση του προβλήματος χρησιμοποίησαν το μετασχηματισμό Laplace ως προς την παράμετρο του χρόνου και βρήκαν τις αναλυτικές εκφράσεις στο μετασχηματισμένο σύστημα συντεταγμένων. Για τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace χρησιμοποίησαν την αριθμητική μέθοδο των Honig και Hirdes. Οι Hosseini Zad, Komeili, Eslami και Fariborz [25] ασχολήθηκαν με το πρόβλημα μίας λωρίδας δύο στρώσεων που καταπονείται με ομοιόμορφη θερμομηχανική καταπόνηση στις ελεύθερες επιφάνειές της, στα πλαίσια διαφορετικών θεωριών γενικευμένης θερμοελαστικότητας. Κάθε στρώση αποτελούνταν από ομοιογενές, ισότροπο και θερμοελαστικό υλικό. Για τη μελέτη του προβλήματος χρησιμοποίησαν τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.

Από την παραπάνω περιγραφή προκύπτει ότι σε εργασίες που αφορούν εφαρμογές της γενικευμένης θερμοελαστικότητας γίνεται συχνά χρήση του μετασχηματισμού Laplace ως προς την παράμετρο του χρόνου. Ωστόσο, ειδικά για την περίπτωση των FGMs που η αναλυτική λύση δεν είναι δυνατή, ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace βασίζεται σε αριθμητικές μεθόδους [15,19], στις οποίες υπάρχουν προβλήματα αριθμητικής ευστάθειας σε συνθήκες θερμικού σοκ [26]. Επιπλέον, οι εργασίες που ασχολούνται με FGMs αφορούν συνήθως προβλήματα με μία FGM στρώση όπου η κατανομή του κατ' όγκο ποσοστού των υλικών είναι εκθετικού νόμου (power law) [1-9,21.]

Στη συνέχεια του κεφαλαίου γίνεται αριθμητική μελέτη των μεταβατικών πεδίων μετατόπισης, θερμοκρασίας και τάσης που αναπτύσσονται σε μία λωρίδα από ισότροπο θερμοελαστικό υλικό, η οποία υποβάλλεται σε ομοιόμορφη θερμομηχανική καταπόνηση στις ελεύθερες επιφάνειές της. Η μελέτη γίνεται στα πλαίσια της ενοποιημένης θεωρίας γενικευμένης θερμοελαστικότητας των Bagri και Eslami [7,27]. Στη γενική περίπτωση, οι εφαρμογές που εξετάζονται αφορούν λωρίδα τριών στρώσεων (βλ. Σχήμα 4.1) από γραμμικό θερμοελαστικό και ισότροπο υλικό, η οποία υποβάλλεται σε ομοιόμορφη θερμομηχανική καταπόνηση στις ελεύθερες επιφάνειές της.



Σχήμα 4.1. Λωρίδα τριών στρώσεων (κεραμικό υλικό/FGM/μεταλλικό υλικό)

Η ανώτερη στρώση της λωρίδας αποτελείται από κεραμικό υλικό και έχει πάχος L_c , ενώ η κατώτερη στρώση αποτελείται από μεταλλικό υλικό και έχει πάχος L_m . Η ενδιάμεση στρώση της λωρίδας, πάχους L_{fg} , αποτελείται από κεραμικό/μεταλλικό FGM υλικό. Οι θερμομηχανικές ιδιότητες της FGM στρώσης μεταβάλλονται με ομαλό τρόπο από τις ιδιότητες του κεραμικού υλικού της ανώτερης στρώσης, προς τις ιδιότητες του μεταλλικού υλικού της κατώτερης στρώσης. Η μεταβολή αυτή γίνεται κατά τη διεύθυνση του πάχους της λωρίδας x , $0 \leq x \leq L$, όπου $L = L_c + L_{fg} + L_m$ είναι το συνολικό πάχος της λωρίδας.

Για την εκτίμηση των μακροσκοπικών ιδιοτήτων της FGM στρώσης χρησιμοποιείται το μοντέλο Voigt [28], όπου για την κατανομή του κατ' όγκο ποσοστού του μεταλλικού υλικού χρησιμοποιείται η σιγμοειδής κατανομή (sigmoid law) [22]. Το μοντέλο Voigt επιλέχθηκε λόγω της απλότητας και του μικρού υπολογιστικού κόστους του. Άλλωστε, το γεγονός ότι στην FGM στρώση το κατ' όγκο ποσοστό του μεταλλικού υλικού μεταβάλλεται από την τιμή 0 στην τιμή 1, σημαίνει πως ο ρόλος του μεταλλικού υλικού επίσης μεταβάλλεται από το ρόλο του υλικού ενίσχυσης στο ρόλο του υλικού της μήτρας. Με άλλα λόγια, στην FGM στρώση δεν υπάρχει σαφής διάκριση στους ρόλους των συστατικών της υλικών (κεραμικό και μεταλλικό), το οποίο συνεπάγεται πως η μέθοδος Mori-Tanaka [29] ίσως δεν είναι κατάλληλη για την εκτίμηση των μακροσκοπικών ιδιοτήτων.

Πριν την παρουσίαση των εφαρμογών, πρέπει να γίνει μία διευκρίνιση. Οι γενικευμένες θεωρίες θερμοελαστικότητας προβλέπουν πεπερασμένη ταχύτητα για τη διάδοση του θερμικού κύματος, το μέτρο της οποίας εξαρτάται από νέες ιδιότητες υλικών που εισάγουν οι θεωρίες αυτές. Ωστόσο, καθώς δεν υπάρχουν δεδομένα για τις τιμές των νέων αυτών ιδιοτήτων σε συγκεκριμένα υλικά, στην παρούσα διδακτορική διατριβή χρησιμοποιούνται οι τιμές που έχουν υποθέσει οι Bagri και Eslami σε διάφορες εργασίες τους [3,7,9,21]. Οι Bagri και Eslami επιχειρηματολογούν ότι τα κεραμικά υλικά λειτουργούν ως θερμική ασπίδα για το μεταλλικό υπόστρωμα και συνεπώς το θερμικό κύμα διαδίδεται με χαμηλότερη ταχύτητα σε ένα κεραμικό υλικό, σε σχέση με ένα μεταλλικό υλικό [3]. Κατά συνέπεια, στα πλαίσια της θεωρίας Lord-Shulman υποθέτουν ότι ο χρόνος χαλάρωσης t_0 έχει μεγαλύτερη τιμή στο κεραμικό υλικό, ώστε η κανονικοποιημένη ταχύτητα του θερμικού κύματος που είναι ίση με $c_K / (t_0)^{1/2}$ να λαμβάνει χαμηλότερες τιμές σε σχέση με το μεταλλικό υλικό. Συγκεκριμένα, για τους χρόνους χαλάρωσης του κεραμικού και του μεταλλικού υλικού υποθέτουν τις κανονικοποιημένες τιμές $t_{0c} = 1.5625$ και $t_{0m} = 0.64$ αντίστοιχα [3]. Επιπλέον, καθώς η κανονικοποιημένη ταχύτητα του θερμικού κύματος στα πλαίσια της θεωρίας Green-Lindsay είναι ίση με $c_K / (t_2)^{1/2}$, για τους χρόνους χαλάρωσης του κεραμικού και του μεταλλικού υλικού υποθέτουν τις κανονικοποιημένες τιμές $t_{2c} = t_{2c} = 1.5625$ και $t_{2m} = t_{2m} = 0.64$ αντίστοιχα [9].

Σε συνέχεια της διευκρίνισης, στη θεωρία Green-Naghdi η κανονικοποιημένη ταχύτητα διάδοσης του θερμικού κύματος είναι ίση προς c_T και εξαρτάται από τη νέα ιδιότητα υλικού κ^* (βλ. σχέσεις (3.2.13)). Για λόγους σύγκρισης των τριών γενικευμένων θεωριών, οι τιμές της νέας παραμέτρου κ^* για το κεραμικό και το μεταλλικό υλικό μπορούν να θεωρηθούν έτσι ώστε οι ταχύτητες του θερμικού κύματος στα δύο υλικά που προβλέπουν οι τρεις θεωρίες να είναι κοινές. Με άλλα λόγια, μπορεί να υποθεθεί ότι:

$$c_{Tc} = \frac{c_{Kc}}{(t_{0c})^{1/2}}, \quad c_{Tm} = \frac{c_{Km}}{(t_{0m})^{1/2}} \quad (4.1.1)$$

Συνεπώς, από τις εξισώσεις (3.2.12), (3.2.13) και (4.1.1) έπεται ότι η νέα παράμετρος υλικού κ^* που εισάγει η θεωρία Green-Naghdi, μπορεί να υπολογιστεί για τα δύο υλικά από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\kappa_c^* = \frac{k_c}{t_{0c}} = \frac{k_c \nu}{t_{0c} l}, \quad \kappa_m^* = \frac{k_m}{t_{0m}} = \frac{k_m \nu}{t_{0m} l} \quad (4.1.2)$$

όπου υπενθυμίζεται ότι οι δείκτες c και m αναφέρονται στο κεραμικό και το μεταλλικό υλικό αντίστοιχα.

Σε όλες τις εφαρμογές που ακολουθούν, θεωρείται ότι αρχικά η λωρίδα βρίσκεται σε ηρεμία, έχει παντού ομοιόμορφη θερμοκρασία T_0 και είναι ελεύθερη από παραμένουσες τάσεις και παραμορφώσεις.

4.2. Θερμοελαστικά κύματα σε ομοιογενή λωρίδα υπό συνθήκες θερμικού σοκ

Στην παράγραφο αυτή εξετάζονται τα πεδία μετατόπισης, θερμοκρασίας και τάσης που αναπτύσσονται σε μία ομοιογενή λωρίδα υπό θερμικό σοκ στην άνω επιφάνειά της, στα πλαίσια των διαφόρων θεωριών θερμοελαστικότητας που περιγράφονται στο κεφάλαιο 2. Στόχος της παρούσας εφαρμογής είναι η παρουσίαση των κύριων χαρακτηριστικών των θεωριών αυτών και ειδικότερα των γενικευμένων θεωριών θερμοελαστικότητας, όπως και των διαφορών μεταξύ τους. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις (3.2.15)-(3.2.16) της ενοποιημένης θεωρίας γενικευμένης θερμοελαστικότητας των Bagri και Eslami, όπως αυτές απλοποιούνται για την ειδική περίπτωση ομοιογενούς λωρίδας. Η κάτω επιφάνεια της λωρίδας θεωρείται ακίνητη και θερμικά μονωμένη. Η κανονικοποιημένη μορφή του προβλήματος αρχικών-συνοριακών συνθηκών περιγράφεται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \left[\frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{x}} - (\underline{\theta} + t_1 \underline{\dot{\theta}}) \right] = \frac{1}{\underline{c}_E} \ddot{\underline{u}} \\ -\frac{\eta}{\underline{c}_K^2} \left(\underline{\dot{\theta}} + t_2 \ddot{\underline{\theta}} + \xi \frac{\partial \underline{\dot{u}}}{\partial \underline{x}} \right) - \frac{\eta t_0 + t_3}{\underline{c}_K^2} \left(\ddot{\underline{\theta}} + \xi \frac{\partial \underline{\dot{u}}}{\partial \underline{x}} \right) = -\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \left[\left(\eta + \frac{t_3 \kappa^* l}{k\nu} \right) \frac{\partial \underline{\theta}}{\partial \underline{x}} + \gamma t_3 \frac{\partial \underline{\dot{\theta}}}{\partial \underline{x}} \right] \end{array} \right\}, \quad (4.2.1)$$

$$0 < \underline{x} < \underline{L}$$

$$0 < \underline{t} < \infty$$

με αρχικές-συνοριακές συνθήκες:

$$\begin{array}{l} \underline{u}(x, 0) = 0, \quad \underline{\dot{u}}(x, 0) = 0, \quad \underline{\theta}(x, 0) = 0, \quad \underline{\dot{\theta}}(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \underline{L} \\ \underline{\theta}(0, \underline{t}) = 1, \quad \underline{\sigma}_{xx}(0, \underline{t}) = 0, \quad \underline{q}_x(\underline{L}, \underline{t}) = 0, \quad \underline{u}(\underline{L}, \underline{t}) = 0, \quad 0 < \underline{t} < \infty \end{array} \quad (4.2.2)$$

όπου $\underline{L} = L/l$ είναι το κανονικοποιημένο πάχος της λωρίδας. Εάν στις εξισώσεις (4.2.1) τεθούν $t_0 = t_1 = t_2 = t_3 = 0$ και $\eta = \gamma = 1$, προκύπτει η θεωρία της κλασικής συζευγμένης

θερμοελαστικότητας (θεωρία CT). Ομοίως, εάν τεθούν $t_1 = t_2 = t_3 = 0$, $t_0 > 0$ και $\eta = \gamma = 1$ προκύπτει η θεωρία Lord-Shulman (θεωρία LS). Για τη θεωρία Green-Lindsay (θεωρία GL) αρκεί να τεθούν $t_0 = t_3 = 0$, $t_1 \geq t_2 > 0$ και $\eta = \gamma = 1$. Τέλος, εάν τεθούν $t_0 = t_1 = t_2 = \eta = \gamma = 0$ και $t_3 = 1$ προκύπτει η θεωρία Green-Naghdi τύπου II (θεωρία GN-II).

Θεωρείται συνολικό κανονικοποιημένο πάχος της λωρίδας $\underline{L} = 1$ με κανονικοποιημένες παραμέτρους για το υλικό $\underline{c}_E = 1.00$, $\underline{c}_K = 1.00$, $\underline{c}_T = 1.25$ και $\xi = 0.01$. Για το χρόνο χαλάρωσης της θεωρίας LS χρησιμοποιείται η κανονικοποιημένη τιμή $\underline{t}_0 = 0.64$, ενώ για τους χρόνους χαλάρωσης της θεωρίας GL χρησιμοποιούνται οι κανονικοποιημένες τιμές $\underline{t}_1 = \underline{t}_2 = 0.64$. Για την υπολογιστική προσομοίωση αρκεί να τεθούν $\underline{L}_c = \underline{L}_{fg} = 0$ και $\underline{L}_m = 1$ για τα κανονικοποιημένα πάχη κάθε στρώσης. Για τις αναλύσεις της παραγράφου αυτής χρησιμοποιούνται $N_{el} = 2000$ πεπερασμένα στοιχεία και $M_t = 2500$ χρονικά βήματα, για συνολικό κανονικοποιημένο χρόνο ανάλυσης $\underline{t}_{tot} = 1.25$.

Αρχικά εξετάζεται η θεωρία CT. Στα Σχήματα 4.2-4.4 παρουσιάζονται η κατανομή της μετατόπισης \underline{u} , η κατανομή της μεταβολής της θερμοκρασίας $\underline{\theta}$ και η κατανομή της τάσης $\underline{\sigma}_{xx}$, αντίστοιχα, για τις χρονικές στιγμές $\underline{t} = 0.25$, $\underline{t} = 0.50$ και $\underline{t} = 1.05$. Από τα Σχήματα 4.2 και 4.3, παρατηρείται καταρχήν ότι τα διαγράμματα είναι σύμφωνα με τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος. Από το Σχήμα 4.3 επιβεβαιώνεται και αριθμητικά ότι στην κλασική θερμοελαστικότητα η διάδοση της θερμότητας αντιμετωπίζεται ως ένα φαινόμενο διάχυσης, καθώς η μεταβολή της θερμοκρασίας σε όλα τα σημεία αυξάνεται σταδιακά μέχρι να γίνει ίση με τη μονάδα. Από την άλλη πλευρά, η ταχύτητα διάδοσης του τασικού κύματος είναι ίση με $\underline{c}_E = 1.00$, όπως επιβεβαιώνεται και από τα Σχήματα 4.2 και 4.4. Για παράδειγμα, τη χρονική στιγμή $\underline{t} = 0.50$ το ελαστικό κύμα βρίσκεται στη θέση $\underline{x} = 0.5$. Τέλος, παρατηρείται ότι το τασικό κύμα είναι αρχικά θλιπτικό. Τη χρονική στιγμή $\underline{t} = 1.05$ το τασικό κύμα έχει μόλις ανακλαστεί στην κάτω επιφάνεια της λωρίδας (θέση $\underline{x} = 1.0$) και διαδίδεται προς την αντίθετη κατεύθυνση (βλ. Σχήμα 4.4). Λόγω της ακλόνητης στήριξης στη θέση $\underline{x} = 1.0$, μετά την ανάκλαση το τασικό κύμα γίνεται εν μέρη εφελκυστικό.

Στις γενικευμένες θεωρίες το τασικό κύμα αποτελείται από δύο μέτωπα, τα οποία σχετίζονται με το θερμικό και με το ελαστικό κύμα. Στα Σχήματα 4.5-4.7 απεικονίζονται η κατανομή της μετατόπισης \underline{u} , η κατανομή της μεταβολής της θερμοκρασίας $\underline{\theta}$ και η κατανομή της τάσης $\underline{\sigma}_{xx}$, αντίστοιχα, για τις χρονικές στιγμές $\underline{t} = 0.25$, $\underline{t} = 0.50$ και $\underline{t} = 1.05$, στα πλαίσια της θεωρίας LS. Όπως επιβεβαιώνεται από το Σχήμα 4.6, το θερμικό κύμα διαδίδεται με ταχύτητα $\underline{c}_K / (\underline{t}_0)^{1/2} = 1.25$. Παρατηρώντας προσεκτικά το Σχήμα 4.6, διαπιστώνεται ότι στο θερμικό κύμα υπάρχουν δύο ασυνέχειες, εκ των οποίων η πρώτη σχετίζεται με την αλληλεπίδρασή του με το πιο αργό ελαστικό κύμα. Για παράδειγμα, τη χρονική στιγμή $\underline{t} = 0.50$ το θερμικό κύμα παρουσιάζει ασυνέχεια στις θέσεις $\underline{x} = 0.5$ και $\underline{x} = 0.625$. Τη χρονική στιγμή $\underline{t} = 1.05$ το θερμικό κύμα έχει μόλις ανακλαστεί στην κάτω επιφάνεια της λωρίδας. Λόγω της συνοριακής συνθήκης στη θέση $\underline{x} = 1.0$ (θερμική μόνωση), το θερμικό κύμα διπλασιάζεται κατά την ανάκλαση. Επισημαίνεται ακόμη το φαινόμενο της απόσβεσης της θερμικής ενέργειας καθώς το θερμικό κύμα κινείται στη λωρίδα, το οποίο διακρίνεται καθαρά στο Σχήμα 4.6. Όπως φαίνεται από το Σχήμα 4.7, το ελαστικό κύμα διαδίδεται με ταχύτητα $\underline{c}_E = 1.00$, έτσι τα δύο μέτωπα του τασικού κύματος σταδιακά απομακρύνονται το ένα από το άλλο. Τη χρονική στιγμή $\underline{t} = 1.05$ και τα δύο μέτωπα του τασικού κύματος έχουν ανακλαστεί στην κάτω επιφάνεια της λωρίδας. Το τασικό κύμα είναι

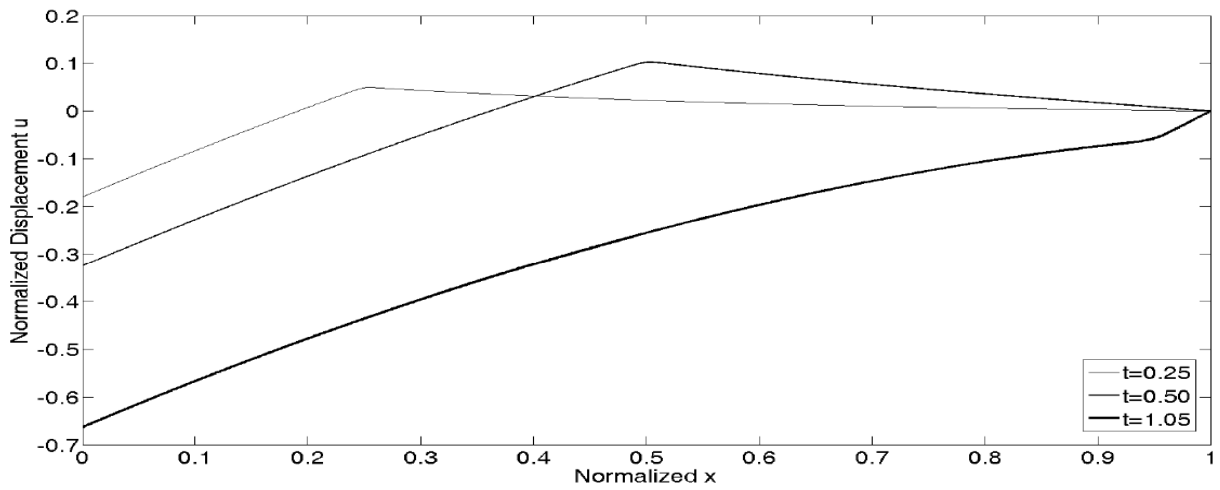
θλιπτικό και διατηρεί το πρόσημό του μετά την ανάκλαση, λόγω των συνοριακών συνθηκών στη θέση $x=1.0$.

Τα διαγράμματα για τη θεωρία GL απεικονίζονται στα Σχήματα 4.8-4.10. Στο Σχήμα 4.8 απεικονίζεται η κατανομή της μετατόπισης u για τις χρονικές στιγμές $t=0.25$, $t=0.50$ και $t=1.05$. Παρατηρείται ότι το πεδίο της μετατόπισης είναι ασυνεχές, φαινόμενο που παραβιάζει την υπόθεση συνέχειας [30] (όπως αναφέρει και ο Chandrasekharaiah [16]). Η ταχύτητα του ελαστικού κύματος είναι $c_E=1.00$, ενώ το δεύτερο μέτωπο που φαίνεται στην κατανομή της μετατόπισης οφείλεται στην αλληλεπίδραση του ελαστικού κύματος με το ταχύτερο θερμικό κύμα. Στο Σχήμα 4.9 φαίνεται η κατανομή της μεταβολής της θερμοκρασίας θ για τις ίδιες χρονικές στιγμές, όπου διακρίνεται η απόσβεση του θερμικού κύματος. Η ταχύτητα διάδοσης του θερμικού κύματος είναι $c_K/(t_2)^{1/2}=1.25$. Από τη σύγκριση των Σχημάτων 4.6 και 4.9, διαπιστώνεται ότι τα πεδία της θερμοκρασίας που προβλέπουν οι θεωρίες LS και GL σχεδόν ταυτίζονται [1]. Επιπλέον, το Σχήμα 4.10 απεικονίζει την κατανομή της τάσης σ_{xx} για τις ίδιες χρονικές στιγμές. Το τασικό κύμα αποτελείται από δύο μέτωπα, ένα εφελκυστικό και ένα θλιπτικό. Τη χρονική στιγμή $t=1.05$ το τασικό κύμα έχει ανακλαστεί στην κάτω επιφάνεια, χωρίς να αλλάξει πρόσημο. Παρατηρείται ότι το μέγεθος του τασικού κύματος φθίνει σχετικά γρήγορα. Γενικά, η θεωρία GL προβλέπει μεγαλύτερες τάσεις από τις άλλες γενικευμένες θεωρίες [1], όπως άλλωστε φαίνεται από τη σύγκριση των Σχημάτων 4.7, 4.10 και 4.13.

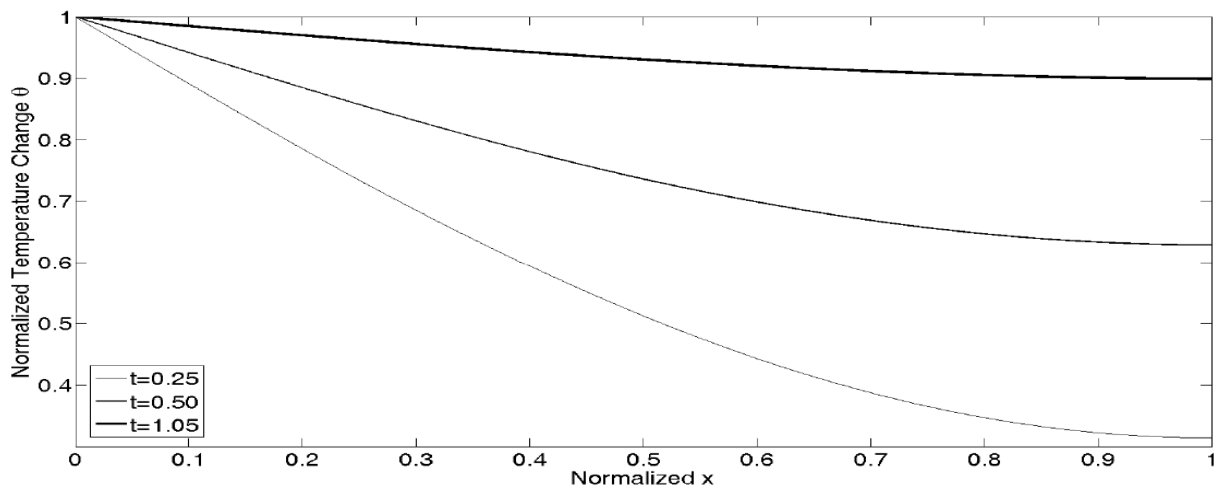
Στα Σχήματα 4.11-4.13 απεικονίζονται η κατανομή της μετατόπισης u , η κατανομή της μεταβολής της θερμοκρασίας θ και η κατανομή της τάσης σ_{xx} , αντίστοιχα, για τις χρονικές στιγμές $t=0.25$, $t=0.50$ και $t=1.05$, στα πλαίσια της θεωρίας GN-II. Όπως δείχνει το Σχήμα 4.12, δεν υπάρχει απόσβεση ενέργειας κατά τη διάδοση του θερμικού κύματος, χαρακτηριστικό που διαφοροποιεί τη θεωρία GN-II από τις άλλες γενικευμένες θεωρίες. Η ταχύτητα διάδοσης του θερμικού κύματος στη λωρίδα είναι $c_T=1.25$. Επίσης, λόγω της θερμικής μόνωσης στη θέση $x=1.0$, το μέγεθος του θερμικού κύματος διπλασιάζεται μετά την ανάκλασή του στην κάτω επιφάνεια της λωρίδας ($t=1.05$). Από τη σύγκριση των Σχημάτων 4.5 και 4.11 προκύπτει ότι οι θεωρίες LS και GN-II προβλέπουν παρόμοιες κατανομές για τη μετατόπιση. Στο Σχήμα 4.13 απεικονίζεται η κατανομή της τάσης σ_{xx} για τις ίδιες χρονικές στιγμές. Το τασικό κύμα αποτελείται από δύο μέτωπα, τα οποία σχετίζονται με το θερμικό και το ελαστικό κύμα αντίστοιχα. Η παρατήρηση αυτή επιβεβαιώνεται από τις εξισώσεις (3.4.6), (3.4.7), (3.4.9) και (3.4.13). Η ταχύτητα διάδοσης του ελαστικού κύματος είναι $c_E=1.00$ και τη χρονική στιγμή $t=1.05$ το τασικό κύμα έχει μόλις ανακλαστεί στην κάτω επιφάνεια. Από τη σύγκριση των Σχημάτων 4.7 και 4.13, διαπιστώνεται ότι τα πεδία της τάσης για τις θεωρίες LS και GN-II είναι παρόμοια. Η θεωρία GN-II, καθώς δεν προβλέπει απόσβεση ενέργειας στην εξίσωση θερμότητας, μπορεί να θεωρηθεί ως κατάλληλη για την ανάλυση μόνο των αρχικών σταδίων σε εφαρμογές θερμικού σοκ, δηλαδή για πολύ μικρό χρονικό διάστημα [4].

Τα ποιοτικά συμπεράσματα που αναφέρονται στην παραπάνω συζήτηση για τις γενικευμένες θεωρίες LS, GL και GN-II είναι σύμφωνα με τα συμπεράσματα που αναφέρονται στο [20]*.

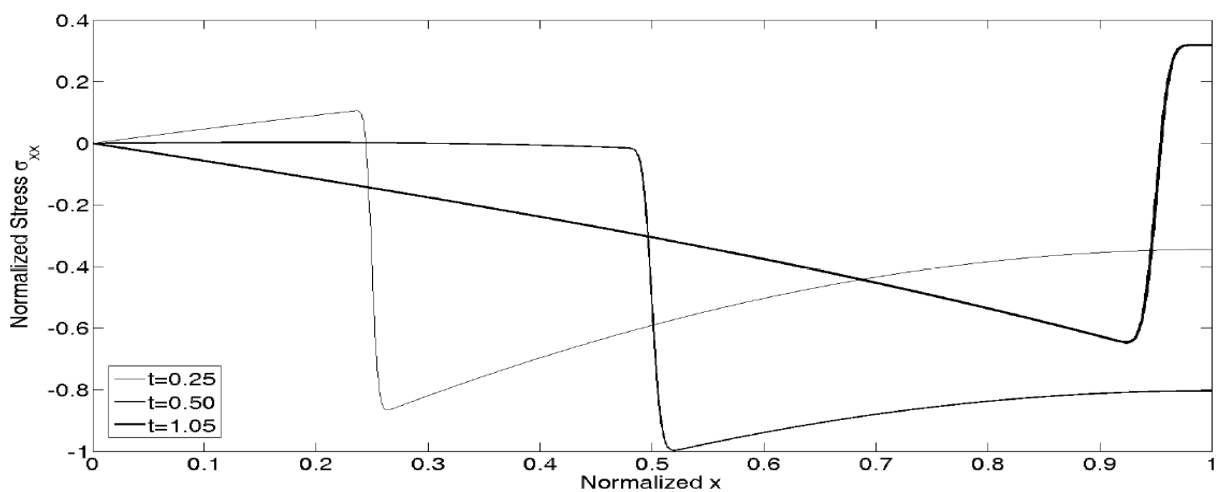
* οι συγγραφείς στο [20] έχουν θεωρήσει κανονικοποιημένο χρόνο χαλάρωσης $t_0=1.00$



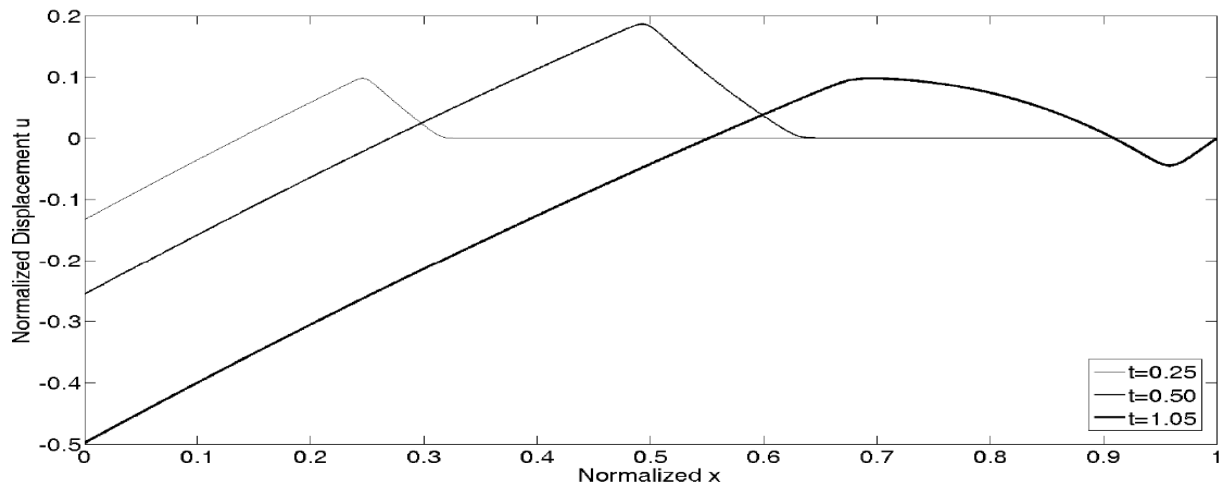
Σχήμα 4.2. Κατανομή της κανονικοποιημένης μετατόπισης u για διάφορες κανονικοποιημένες χρονικές στιγμές, στα πλαίσια της θεωρίας CT



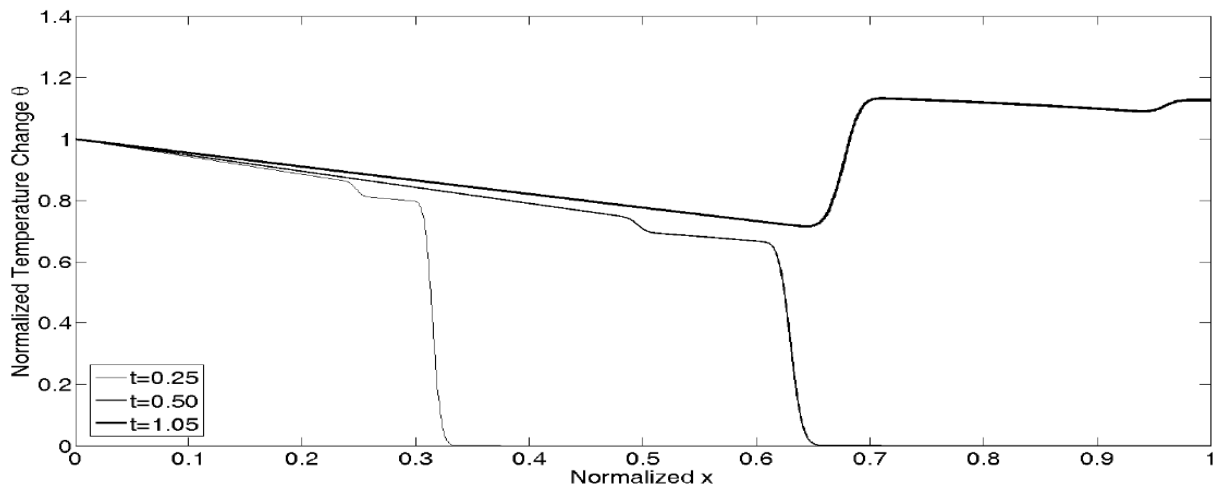
Σχήμα 4.3. Κατανομή της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας θ για διάφορες κανονικοποιημένες χρονικές στιγμές, στα πλαίσια της θεωρίας CT



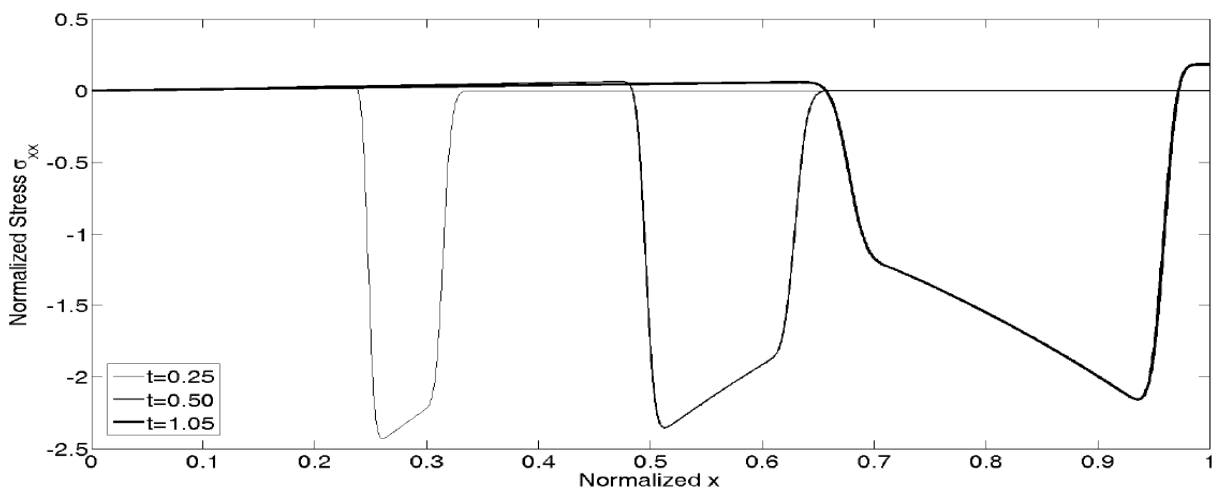
Σχήμα 4.4. Κατανομή της κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} για διάφορες κανονικοποιημένες χρονικές στιγμές, στα πλαίσια της θεωρίας CT



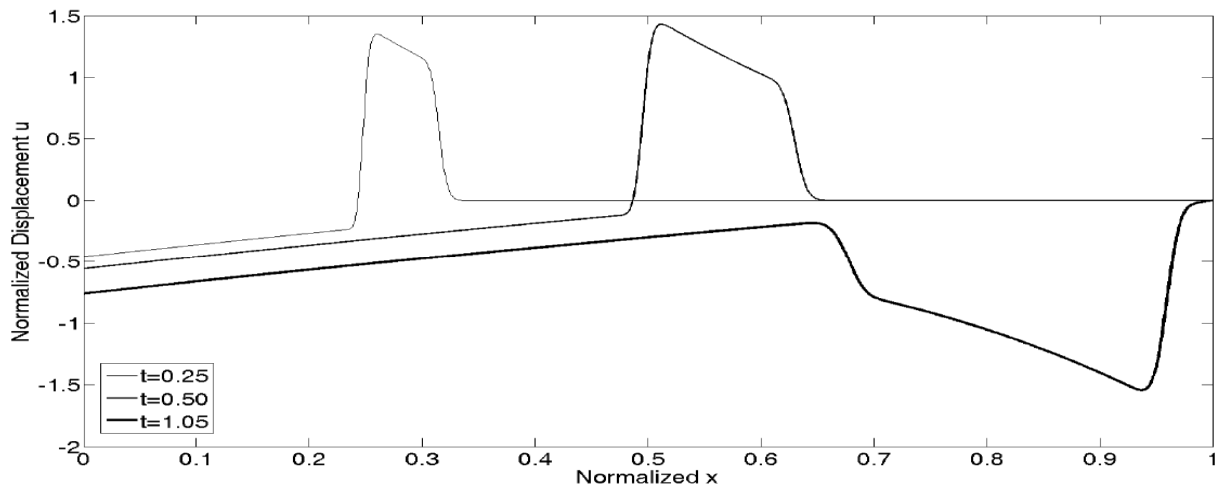
Σχήμα 4.5. Κατανομή της κανονικοποιημένης μετατόπισης u για διάφορες κανονικοποιημένες χρονικές στιγμές, στα πλαίσια της θεωρίας LS



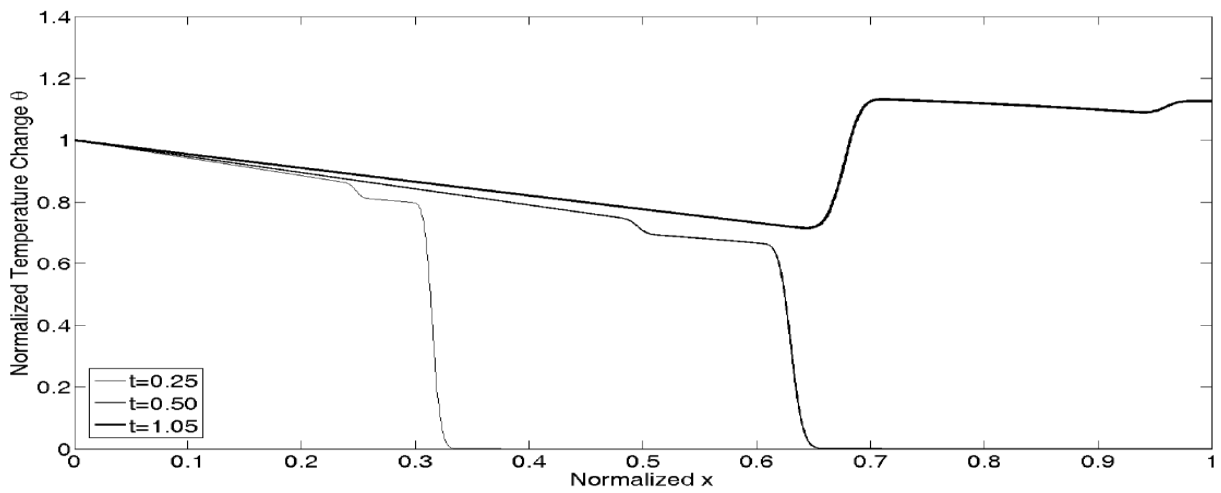
Σχήμα 4.6. Κατανομή της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας θ για διάφορες κανονικοποιημένες χρονικές στιγμές, στα πλαίσια της θεωρίας LS



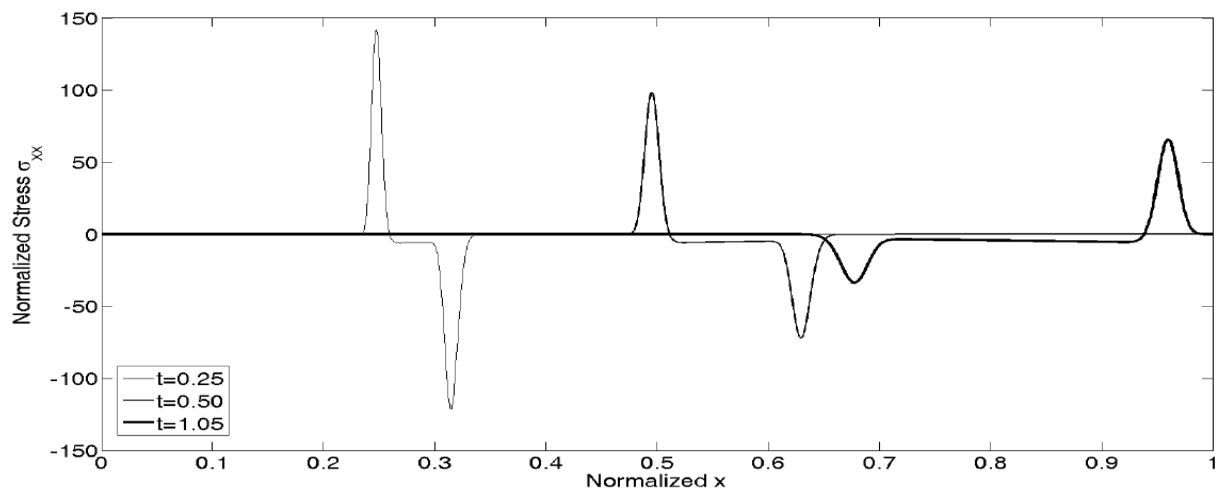
Σχήμα 4.7. Κατανομή της κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} για διάφορες κανονικοποιημένες χρονικές στιγμές, στα πλαίσια της θεωρίας LS



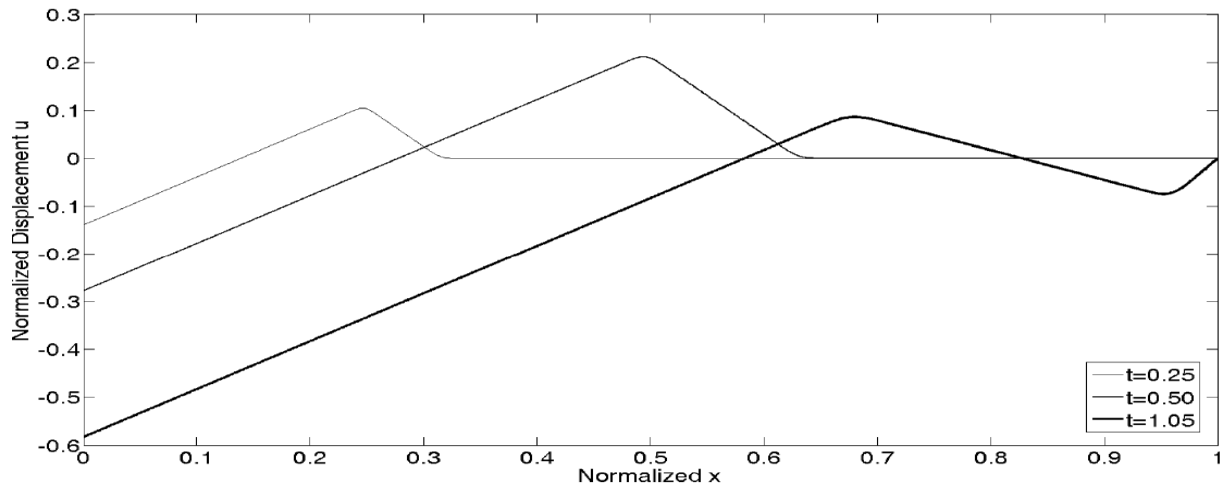
Σχήμα 4.8. Κατανομή της κανονικοποιημένης μετατόπισης u για διάφορες κανονικοποιημένες χρονικές στιγμές, στα πλαίσια της θεωρίας GL



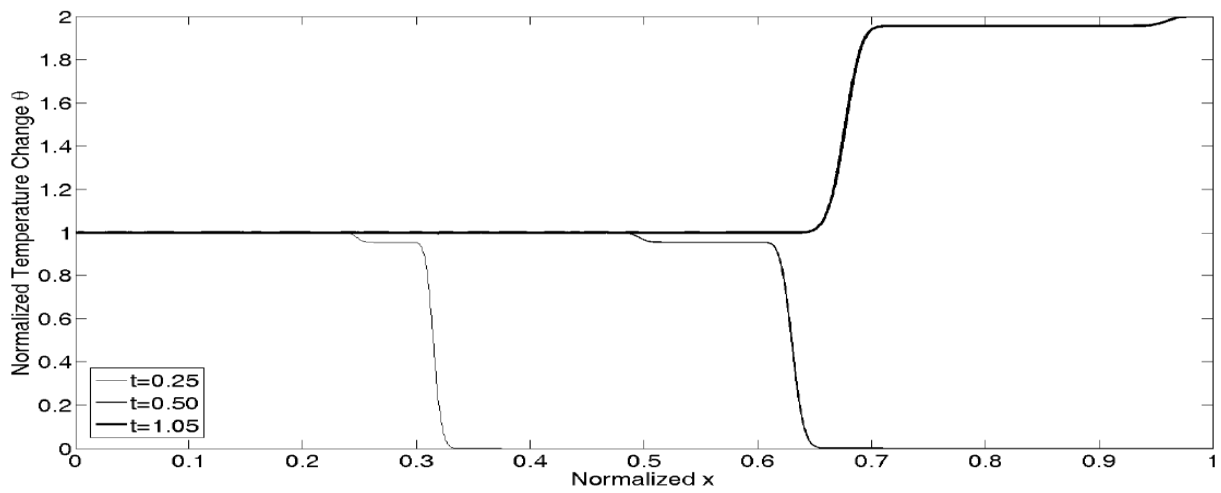
Σχήμα 4.9. Κατανομή της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας θ για διάφορες κανονικοποιημένες χρονικές στιγμές, στα πλαίσια της θεωρίας GL



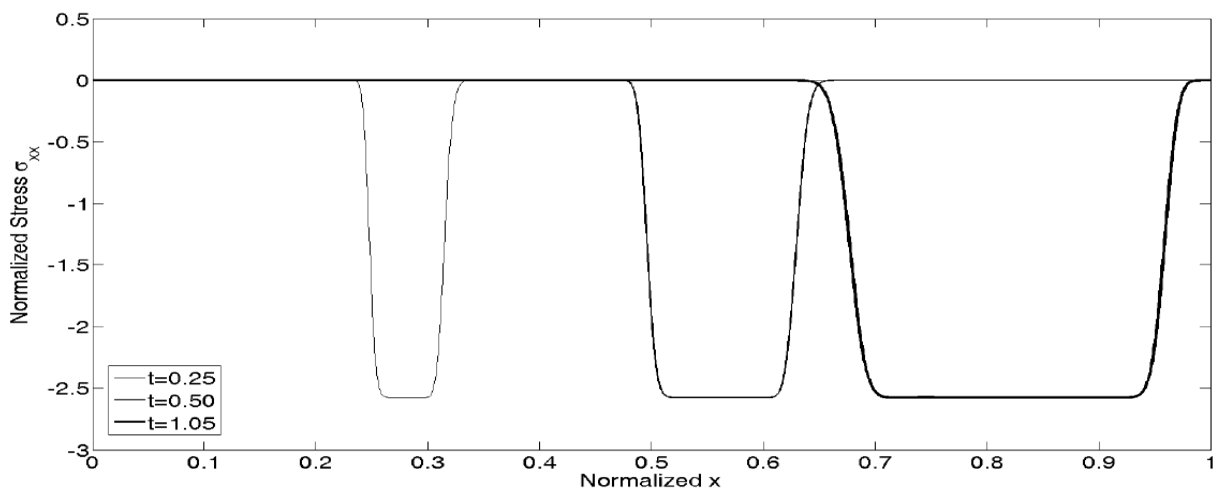
Σχήμα 4.10. Κατανομή της κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} για διάφορες κανονικοποιημένες χρονικές στιγμές, στα πλαίσια της θεωρίας GL



Σχήμα 4.11. Κατανομή της κανονικοποιημένης μετατόπισης u για διάφορες κανονικοποιημένες χρονικές στιγμές, στα πλαίσια της θεωρίας GN-II



Σχήμα 4.12. Κατανομή της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας θ για διάφορες κανονικοποιημένες χρονικές στιγμές, στα πλαίσια της θεωρίας GN-II



Σχήμα 4.13. Κατανομή της κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} για διάφορες κανονικοποιημένες χρονικές στιγμές, στα πλαίσια της θεωρίας GN-II

4.3. FGM στρώση από κεραμικό/μεταλλικό υλικό σε συνθήκες θερμικού σοκ, στα πλαίσια της θεωρίας Lord-Shulman

Στην παράγραφο αυτή εξετάζονται τα πεδία μετατόπισης, θερμοκρασίας και τάσης που αναπτύσσονται σε μία FGM στρώση που υποβάλλεται σε συνθήκες θερμικού σοκ στην άνω επιφάνειά της, στα πλαίσια της θεωρίας LS. Η άνω επιφάνεια της στρώσης θεωρείται ελεύθερη, ενώ η κάτω επιφάνειά της είναι ακίνητη και διατηρείται σε σταθερή θερμοκρασία. Η FGM στρώση αποτελείται από κεραμικό/μεταλλικό υλικό και η κατανομή των θερμομηχανικών ιδιοτήτων μέσα στη στρώση είναι σιγμοειδής με παράμετρο p . Η παρούσα εφαρμογή ολοκληρώνεται με μία παραμετρική ανάλυση για την επιλογή της βέλτιστης τιμής της παραμέτρου p , όπου ως κριτήριο βελτιστοποίησης χρησιμοποιείται η ελαχιστοποίηση της μέγιστης (εφελκυστικής) τάσης που ασκείται στο μέσο της στρώσης για το χρονικό διάστημα που εξετάζεται.

Για την εξαγωγή των εξισώσεων της θεωρίας LS, στις εξισώσεις (3.2.15)-(3.2.16) τίθενται $t_1 = t_2 = t_3 = 0$ και $\eta = \gamma = 1$. Η κανονικοποιημένη μορφή του προβλήματος αρχικών-συννοριακών συνθηκών περιγράφεται από τις εξής εξισώσεις:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda_m + 2\mu_m} \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{x}} - \frac{\beta}{\beta_m} \underline{\theta} \right) = \frac{1}{\epsilon_{Em}^2} \frac{\rho}{\rho_m} \ddot{\underline{u}} \\ - \frac{1}{\epsilon_{Km}^2} \frac{\rho c}{\rho_m c_m} \left(\dot{\underline{\theta}} + \xi_m \frac{\rho_m c_m}{\rho c} \frac{\beta}{\beta_m} \frac{\partial \dot{\underline{u}}}{\partial \underline{x}} \right) - \frac{t_0}{\epsilon_{Km}^2} \frac{\rho c}{\rho_m c_m} \left(\ddot{\underline{\theta}} + \xi_m \frac{\rho_m c_m}{\rho c} \frac{\beta}{\beta_m} \frac{\partial \ddot{\underline{u}}}{\partial \underline{x}} \right) \\ = - \frac{1}{k_m} \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \left(k \frac{\partial \underline{\theta}}{\partial \underline{x}} \right) \end{array} \right. \quad (4.3.1)$$

$$\begin{array}{l} 0 < \underline{x} < \underline{L} \\ 0 < \underline{t} < \infty \end{array}$$

με αρχικές-συννοριακές συνθήκες:

$$\begin{array}{l} \underline{u}(\underline{x}, 0) = 0, \quad \dot{\underline{u}}(\underline{x}, 0) = 0, \quad \underline{\theta}(\underline{x}, 0) = 0, \quad \dot{\underline{\theta}}(\underline{x}, 0) = 0, \quad 0 \leq \underline{x} \leq \underline{L} \\ \underline{\theta}(0, \underline{t}) = 1, \quad \sigma_{xx}(0, \underline{t}) = 0, \quad \underline{\theta}(\underline{L}, \underline{t}) = 0, \quad \underline{u}(\underline{L}, \underline{t}) = 0, \quad 0 < \underline{t} < \infty \end{array} \quad (4.3.2)$$

Η αρχική ομοιόμορφη θερμοκρασία της στρώσης είναι $T_0 = 300K$ και το συνολικό κανονικοποιημένο πάχος της είναι $\underline{L} = \underline{L}_{fg} = 1$ ($\underline{L}_c = \underline{L}_m = 0$). Στη θέση $\underline{x} = 0$ το υλικό έχει τις ιδιότητες του κεραμικού υλικού, ενώ στη θέση $\underline{x} = 1$ το υλικό έχει τις ιδιότητες του μεταλλικού υλικού. Στην παρούσα μελέτη εξετάζονται τρεις συνδυασμοί υλικών κεραμικού/μεταλλικού:

1. ζirkονία/κράμα τιτανίου (zirconia/titanium alloy - $ZrO_2/Ti-6Al-4V$),
2. νιτρίδιο του πυριτίου/ανοξειδωτος χάλυβας (silicon nitride/stainless steel - $Si_3NO_4/SUS304$), και
3. αλουμίνα/νικέλιο (alumina/nickel - Al_2O_3/Ni).

Οι θερμομηχανικές ιδιότητες των υλικών κάθε συνδυασμού για $T = 300K$ αναφέρονται στον Πίνακα 4.1 [31,32], τον Πίνακα 4.2 [31,32] και τον Πίνακα 4.3 [33], αντίστοιχα. Καθώς στους Πίνακες 4.1-4.3 δίνονται οι τιμές του μέτρου ελαστικότητας E , του συντελεστή Poisson ν και του συντελεστή θερμικής διαστολής a , σημειώνεται πως οι σταθερές του Lamé λ, μ και η θερμική σταθερά β προκύπτουν από τις ακόλουθες σχέσεις [1]:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (4.3.3)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.3.4)$$

$$\beta = \frac{\alpha E}{1-2\nu} \quad (4.3.5)$$

	Ζιρκονία (ZrO ₂)	Κράμα Τιτανίου (Ti-6Al-4V)
Μέτρο ελαστικότητας E [Pa]	1.6808e11	1.0569e11
Συντελεστής Poisson ν []	0.2980	0.2981
Συντελεστής θερμικής διαστολής a [1/K]	8.2060e-6	9.2713e-6
Θερμική αγωγιμότητα k [J/mKs]	1.7752	6.2666
Πυκνότητα ρ [kg/m ³]	5700	4429
Ειδική θερμοχωρητικότητα c [J/kgK]	529.2732	586.4607

Πίνακας 4.1. Θερμομηχανικές ιδιότητες των υλικών ZrO₂ και Ti-6Al-4V για $T = 300K$ [31,32]

	Νιτρίδιο του Πυριτίου (Si ₃ NO ₄)	Ανοξειδωτος Χάλυβας (SUS304)
Μέτρο ελαστικότητας E [Pa]	3.2227e11	2.0779e11
Συντελεστής Poisson ν []	0.2400	0.3178
Συντελεστής θερμικής διαστολής a [1/K]	7.4746e-6	15.321e-6
Θερμική αγωγιμότητα k [J/mKs]	10.1203	12.1429
Πυκνότητα ρ [kg/m ³]	2370	8166
Ειδική θερμοχωρητικότητα c [J/kgK]	736.3928	390.3507

Πίνακας 4.2. Θερμομηχανικές ιδιότητες των υλικών Si₃NO₄ και SUS304 για $T = 300K$ [31,32]

	Αλουμίνα (Al ₂ O ₃)	Νικέλιο (Ni)
Μέτρο ελαστικότητας E [Pa]	3.93e11	1.995e11
Συντελεστής Poisson ν []	0.25	0.30
Συντελεστής θερμικής διαστολής a [1/K]	8.8e-6	13.3e-6
Θερμική αγωγιμότητα k [J/mKs]	30.1	90.7
Πυκνότητα ρ [kg/m ³]	3970	8900
Ειδική θερμοχωρητικότητα c [J/kgK]	775	444

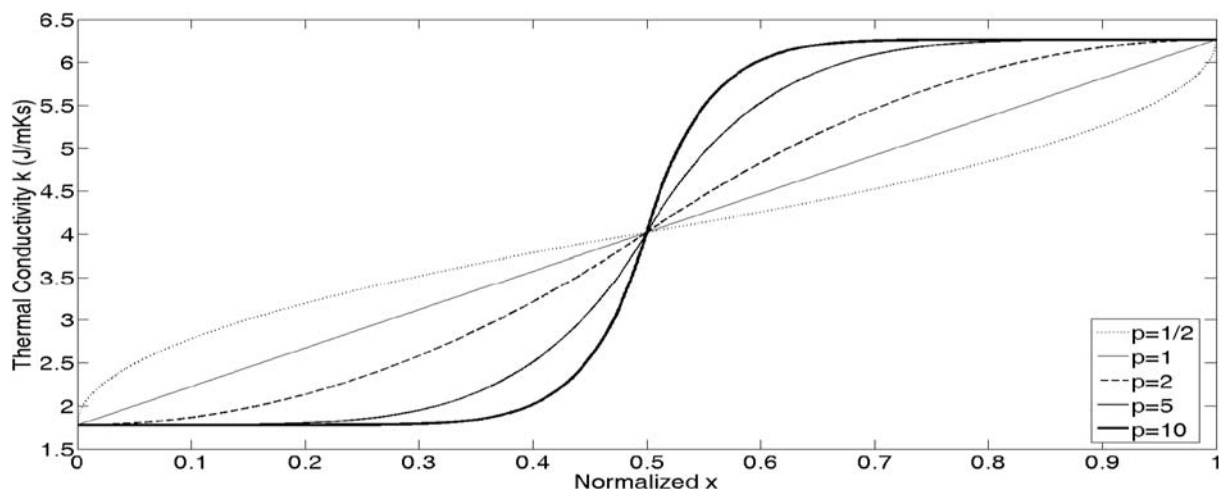
Πίνακας 4.3. Θερμομηχανικές ιδιότητες των υλικών Al₂O₃ και Ni για $T = 300K$ [33]

Η κατανομή του κατ' όγκο ποσοστού του μεταλλικού υλικού V_m μέσα στην FGM στρώση θεωρείται ότι ακολουθεί τη σιγμοειδή κατανομή (sigmoid law). Από την εξίσωση (1.2.7) προκύπτει ότι η κατανομή μίας ιδιότητας $P = P(x)$ δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$P(\underline{x}) = \begin{cases} P_c + \frac{P_m - P_c}{2} (2\underline{x})^p, & 0 \leq \underline{x} \leq \frac{1}{2} \\ P_m + \frac{P_c - P_m}{2} (2 - 2\underline{x})^p, & \frac{1}{2} < \underline{x} \leq 1 \end{cases} \quad (4.3.6)$$

όπου P_c και P_m είναι οι ιδιότητες του κεραμικού και του μεταλλικού υλικού αντίστοιχα, ενώ p είναι η παράμετρος της σιγμοειδούς κατανομής. Ως παράδειγμα, η κατανομή της θερμικής αγωγιμότητας k στην FGM στρώση $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ για διάφορες τιμές της παραμέτρου p φαίνεται στο Σχήμα 4.14.

Η σιγμοειδής κατανομή έχει δύο βασικά χαρακτηριστικά: για κάθε τιμή της παραμέτρου p ισχύει ότι $V_m = 0.5$ στο μέσο της FGM στρώσης (θέση $\underline{x} = 0.5$) και επιπλέον $\int_0^1 V_m d\underline{x} = 0.5$, δηλαδή η FGM στρώση περιέχει ίση ποσότητα κεραμικού και μεταλλικού υλικού. Παρατηρείται ακόμη ότι καθώς $p \rightarrow 0^+$ η FGM στρώση τείνει να γίνει μία ομοιογενής λωρίδα με ιδιότητες ίσες προς το μέσο όρο των ιδιοτήτων του κεραμικού και του μεταλλικού υλικού, ενώ καθώς $p \rightarrow \infty$ η FGM στρώση τείνει να γίνει μία σύνθετη λωρίδα δύο στρώσεων από κεραμικό και μεταλλικό υλικό αντίστοιχα. Με άλλα λόγια, καθώς αυξάνεται η τιμή του p η ποσότητα του κεραμικού υλικού τείνει να συγκεντρωθεί στην περιοχή $0 \leq \underline{x} \leq 0.5$.



Σχήμα 4.14. Κατανομή της θερμικής αγωγιμότητας k στην FGM στρώση $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ για διάφορες τιμές της παραμέτρου p της σιγμοειδούς κατανομής

Σημειώνεται ακόμη ότι το χαρακτηριστικό μήκος l και η χαρακτηριστική ταχύτητα ν επιλέγονται έτσι ώστε οι κανονικοποιημένες παράμετροι ξ_{Em} και ξ_{Km} να γίνονται ίσες με τη μονάδα, δηλαδή:

$$l = \frac{k_m}{c_m [\rho_m (\lambda_m + 2\mu_m)]^{1/2}} \quad (4.3.7)$$

$$v = \left(\frac{\lambda_m + 2\mu_m}{\rho_m} \right)^{1/2} \quad (4.3.8)$$

Για τις αναλύσεις χρησιμοποιούνται $N_{el} = 2000$ πεπερασμένα στοιχεία και $M_t = 12000$ χρονικά βήματα, για συνολικό κανονικοποιημένο χρόνο $t_{tot} = 6.00$. Αρχικά εξετάζονται τα πεδία της μετακίνησης \underline{u} , της μεταβολής της θερμοκρασίας $\underline{\theta}$ και της τάσης $\underline{\sigma}_{xx}$ που αναπτύσσονται στην FGM στρώση. Για το σκοπό αυτό επιλέγεται ο συνδυασμός υλικών ZrO₂/Ti-6Al-4V. Από τις σχέσεις (4.3.7)-(4.3.8) και τις τιμές του Πίνακα 4.1 για το Ti-6Al-4V προκύπτει ότι $l = 4.27 \cdot 10^{-10} m$ και $v = 5.65 \cdot 10^3 m/s$. Οι κανονικοποιημένες παράμετροι για τη ZrO₂ είναι $\zeta_{Ec} = 1.11$, $\zeta_{Kc} = 0.49$ και $\xi_c = 0.005$, ενώ για το Ti-6Al-4V είναι $\zeta_{Em} = 1.00$, $\zeta_{Km} = 1.00$ και $\xi_m = 0.005$. Για το χρόνο χαλάρωσης της θεωρίας LS χρησιμοποιούνται οι κανονικοποιημένες τιμές $t_{0c} = 1.5625$ και $t_{0m} = 0.64$. Από τις σχέσεις (3.2.12) έπεται ότι για τους χρόνους χαλάρωσης της ZrO₂ και του Ti-6Al-4V, έχουν επιλεγεί οι τιμές $t_{0c} = 1.18 \cdot 10^{-13} s$ και $t_{0m} = 4.83 \cdot 10^{-14} s$ αντίστοιχα.

Στα Σχήματα 4.15-4.17 απεικονίζονται η κατανομή της κανονικοποιημένης μετατόπισης \underline{u} , η κατανομή της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας $\underline{\theta}$ και η κατανομή της κανονικοποιημένης τάσης $\underline{\sigma}_{xx}$, αντίστοιχα, για τις χρονικές στιγμές $\underline{t} = 0.26$, $\underline{t} = 0.52$, $\underline{t} = 0.78$, $\underline{t} = 1.04$, $\underline{t} = 1.30$ και $\underline{t} = 1.56$. Η ταχύτητα διάδοσης του ελαστικού κύματος είναι $\zeta_{Ec} = 1.11$ στη ZrO₂ και $\zeta_{Em} = 1.00$ στο Ti-6Al-4V. Λόγω των παραπλήσιων ταχυτήτων, η ταχύτητα διάδοσης του ελαστικού κύματος δε μεταβάλλεται ιδιαίτερα καθώς αυτό κινείται στην FGM στρώση (βλ. Σχήμα 4.17). Αντίθετα, από το Σχήμα 4.16 προκύπτει ότι η ταχύτητα του θερμικού κύματος αυξάνεται καθώς αυτό διαδίδεται μέσα στην FGM στρώση. Αυτό οφείλεται στην αύξηση του ποσοστού του Ti-6Al-4V μέσα στην FGM στρώση, στο οποίο η ταχύτητα διάδοσης του θερμικού κύματος είναι $\zeta_{Km}/(t_{0m})^{1/2} = 1.25$, δηλαδή μεγαλύτερη από την αντίστοιχη ταχύτητα στη ZrO₂ που είναι $\zeta_{Kc}/(t_{0c})^{1/2} = 0.40$. Σημειώνεται ότι τη χρονική στιγμή $\underline{t} = 1.56$ το θερμικό κύμα έχει ανακλαστεί στην κάτω επιφάνεια της στρώσης. Στο Σχήμα 4.17 απεικονίζεται η διάδοση του τασικού κύματος στην FGM στρώση, το οποίο αρχικά είναι θλιπτικό και αποτελείται από δύο μέτωπα. Τα αργό τασικό μέτωπο σχετίζεται με το θερμικό κύμα, το οποίο στη ZrO₂ έχει μικρότερη ταχύτητα διάδοσης σε σχέση με το ελαστικό κύμα. Καθώς το τασικό κύμα κινείται μέσα στην FGM στρώση, η ταχύτητα διάδοσης του αργού τασικού μετώπου αυξάνεται λόγω της συσχέτισής του με το θερμικό κύμα. Παρατηρείται ακόμα ότι το μέγεθος του τασικού κύματος αυξάνεται για μεγαλύτερα \underline{x} , γεγονός που σχετίζεται με την αύξηση του κατ' όγκο ποσοστού του Ti-6Al-4V.

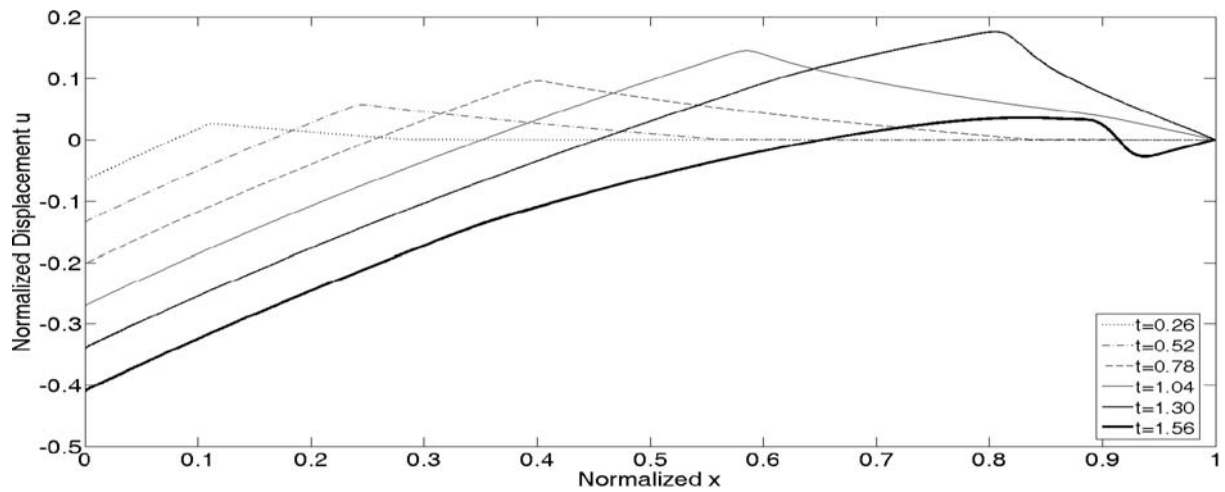
Στη συνέχεια εξετάζεται η επίδραση της παραμέτρου p . Στα Σχήματα 4.18-4.20 παρουσιάζονται η κατανομή της κανονικοποιημένης μετατόπισης \underline{u} , η κατανομή της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας $\underline{\theta}$ και η κατανομή της κανονικοποιημένης τάσης $\underline{\sigma}_{xx}$, αντίστοιχα, τη χρονική στιγμή $\underline{t} = 0.75$, για τιμές της παραμέτρου $p = 1/10$, $p = 1/2$, $p = 1$, $p = 2$ και $p = 10$. Από το Σχήμα 4.19 προκύπτει ότι τις πρώτες χρονικές στιγμές το θερμικό κύμα διαδίδεται ταχύτερα για μικρότερες τιμές του p . Αυτό οφείλεται

στην αύξηση του ποσοστού του Ti-6Al-4V στην περιοχή $0.0 \leq x \leq 0.5$. Από την άλλη πλευρά, η ταχύτητα διάδοσης του ελαστικού κύματος δεν εξαρτάται ιδιαίτερα από την τιμή της παραμέτρου p , διότι το ελαστικό κύμα διαδίδεται περίπου με την ίδια ταχύτητα στη ZrO₂ και το Ti-6Al-4V. Αυτό επιβεβαιώνεται και από το Σχήμα 4.18, όπου η δεύτερη αλλαγή κλίσης στην κατανομή της μετακίνησης u συμβαίνει περίπου στη θέση $x = 0.8$ για όλες τις τιμές του p . Σημειώνεται ότι η πρώτη αλλαγή κλίσης στην κατανομή της μετακίνησης οφείλεται στην αλληλεπίδραση με το θερμικό κύμα. Οι παραπάνω παρατηρήσεις επιβεβαιώνονται και από την κατανομή της τάσης σ_{xx} στο Σχήμα 4.20. Το ταχύτερο μέτωπο της τάσης έχει την ίδια ταχύτητα διάδοσης για όλες τις τιμές του p , καθώς σχετίζεται με το ελαστικό κύμα. Αντίθετα, η ταχύτητα διάδοσης του πιο αργού τασικού μετώπου αυξάνεται για μικρότερες τιμές του p λόγω της συσχέτισής του με το θερμικό κύμα. Επίσης, από το Σχήμα 4.20 επιβεβαιώνεται ότι για μεγαλύτερα x το μέγεθος της τάσης αυξάνεται.

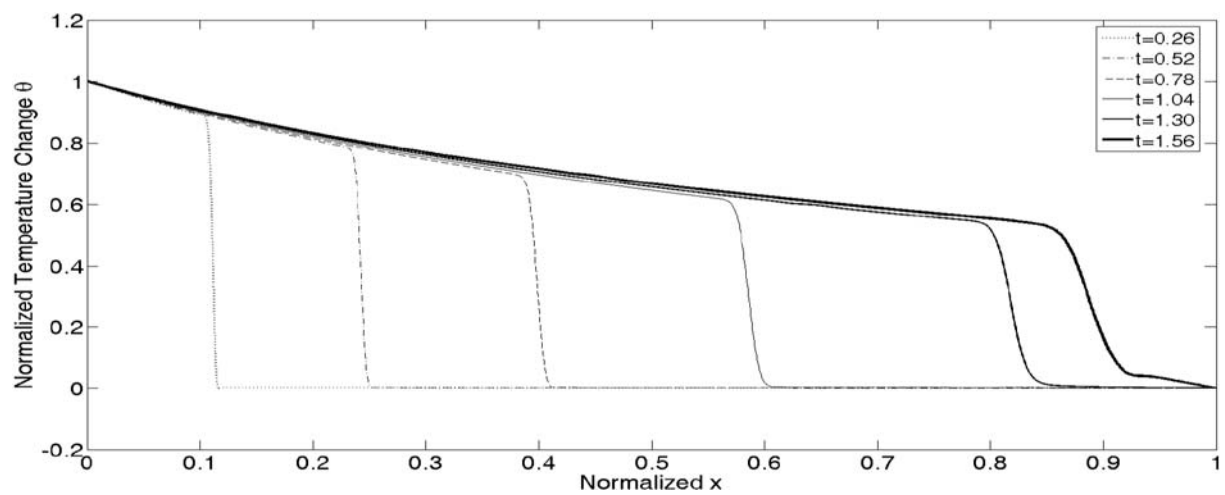
Στα Σχήματα 4.21-4.23 απεικονίζονται η χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης μετατόπισης u , η χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας θ και η χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} , αντίστοιχα, στη θέση $x = 0.5$, για $p = 1/10$, $p = 1$ και $p = 10$. Από τα Σχήματα 4.21 και 4.22 φαίνεται πως για μικρότερες τιμές του p οι θερμοελαστικές διαταραχές διαδίδονται ταχύτερα στη στρώση. Με άλλα λόγια, καθώς η FGM στρώση τείνει να γίνει ομοιογενής λωρίδα, η ταχύτητα διάδοσης του θερμικού κύματος αυξάνεται.

Επίσης, στο Σχήμα 4.22 διακρίνεται η απόσβεση του θερμικού κύματος και παρατηρείται πως η θερμοκρασία στο μέσο της στρώσης γρήγορα τείνει προς την τελική της σταθερή τιμή. Η τελική θερμοκρασία στο μέσο της στρώσης μειώνεται για μεγαλύτερες τιμές του p , φαινόμενο που οφείλεται στην αύξηση του ποσοστού της ZrO₂ στην περιοχή $0.0 \leq x \leq 0.5$. Συγκεκριμένα, η αύξηση του ποσοστού της ZrO₂ στην περιοχή $0.0 \leq x \leq 0.5$ οδηγεί στη μείωση της θερμικής αγωγιμότητας $k(x)$ στην περιοχή αυτή, καθώς η ZrO₂ έχει χαμηλότερη θερμική αγωγιμότητα από το Ti-6Al-4V. Τούτο συνεπάγεται την αύξηση της κλίσης της θερμοκρασίας στην περιοχή αυτή και επομένως τη μείωση της τελικής θερμοκρασίας στο μέσο της στρώσης λόγω των θερμικών συννοριακών συνθηκών. Παράλληλα, παρατηρείται ότι για μεγαλύτερες τιμές του p μειώνεται και η μέγιστη θερμοκρασία στο μέσο της στρώσης, η οποία αναπτύσσεται κατά τις πρώτες δύο διελεύσεις του θερμικού κύματος από τη θέση αυτή. Αυτό συνδέεται με τη μείωση της ταχύτητας του θερμικού κύματος στην περιοχή $0.0 \leq x \leq 0.5$, λόγω της αύξησης του ποσοστού της ZrO₂ στην περιοχή αυτή. Από την άλλη πλευρά, από το Σχήμα 4.21 συμπεραίνεται περαιτέρω ότι η αύξηση της τιμής του p οδηγεί στη μείωση και της μετατόπισης στο μέσο της στρώσης. Σε γενικές γραμμές, το γεγονός αυτό σχετίζεται με τη μείωση της θερμοκρασίας (βλ. σχέση (3.2.22)). Διαπιστώνεται επομένως πως καθώς η FGM στρώση τείνει να γίνει σύνθετη λωρίδα δύο στρώσεων, η μετακίνηση και η θερμοκρασία στο μέσο της στρώσης μειώνονται, ενώ από τη συζήτηση της προηγούμενης παραγράφου έπεται ότι επιπλέον μειώνεται και η ταχύτητα διάδοσης των θερμοελαστικών διαταραχών.

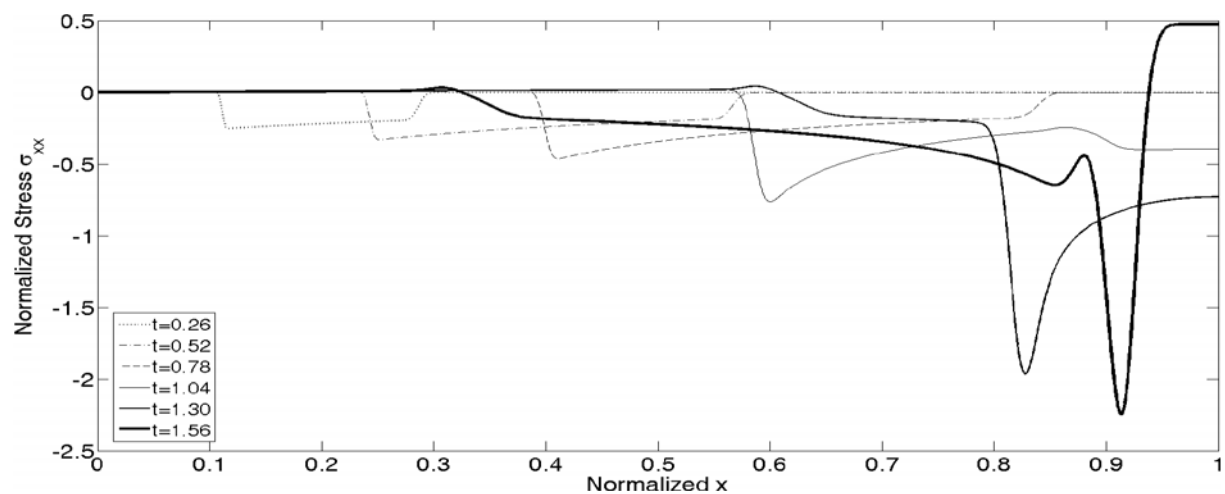
Τέλος, από το Σχήμα 4.23 προκύπτει ότι η επιλογή $p = 1$ οδηγεί σε σημαντική μείωση των τάσεων, σε σχέση με τις επιλογές $p = 1/10$ ή $p = 10$. Η παρατήρηση αυτή είναι κρίσιμη, καθώς η ελαχιστοποίηση της τάσης στο μέσο της στρώσης δύναται να αποτελέσει κριτήριο σχεδιασμού ως προς τη βέλτιστη κατανομή των θερμομηχανικών ιδιοτήτων στη στρώση.



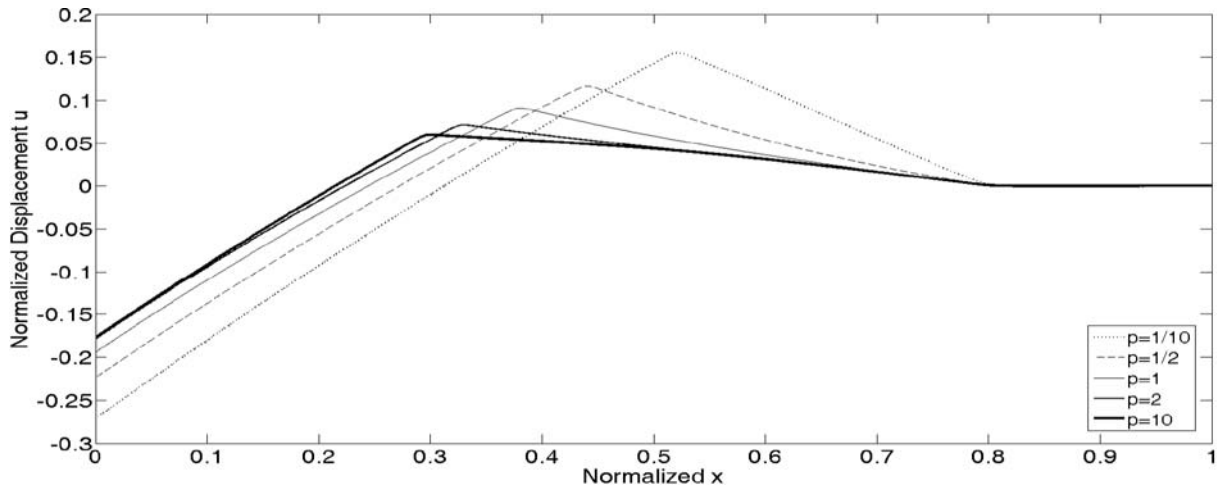
Σχήμα 4.15. Κατανομή της κανονικοποιημένης μετατόπισης u στην FGM στρώση $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ για $p = 1$, για διάφορες χρονικές στιγμές



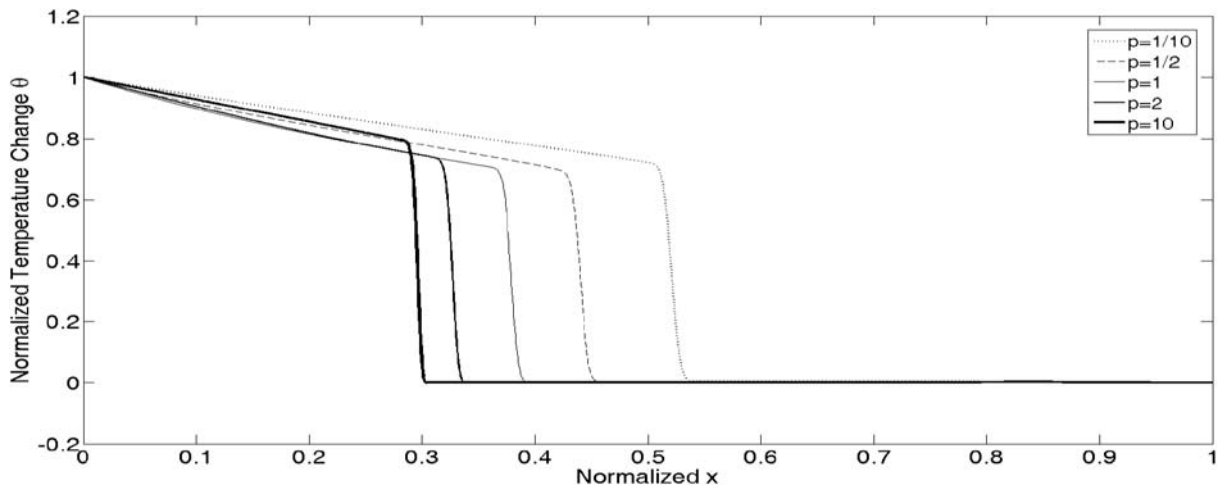
Σχήμα 4.16. Κατανομή της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας θ στην FGM στρώση $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ για $p = 1$, για διάφορες χρονικές στιγμές



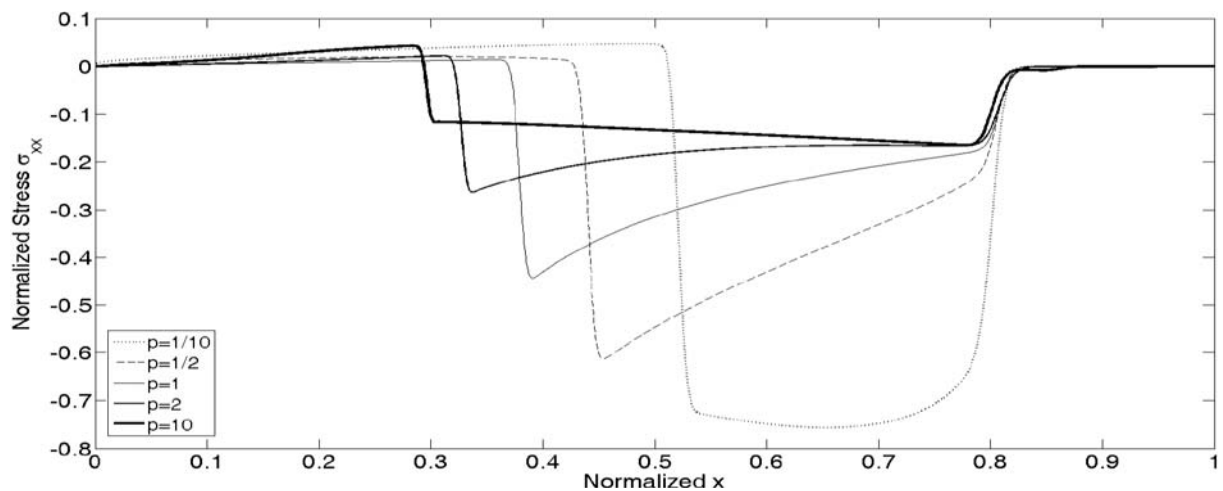
Σχήμα 4.17. Κατανομή της κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} στην FGM στρώση $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ για $p = 1$, για διάφορες χρονικές στιγμές



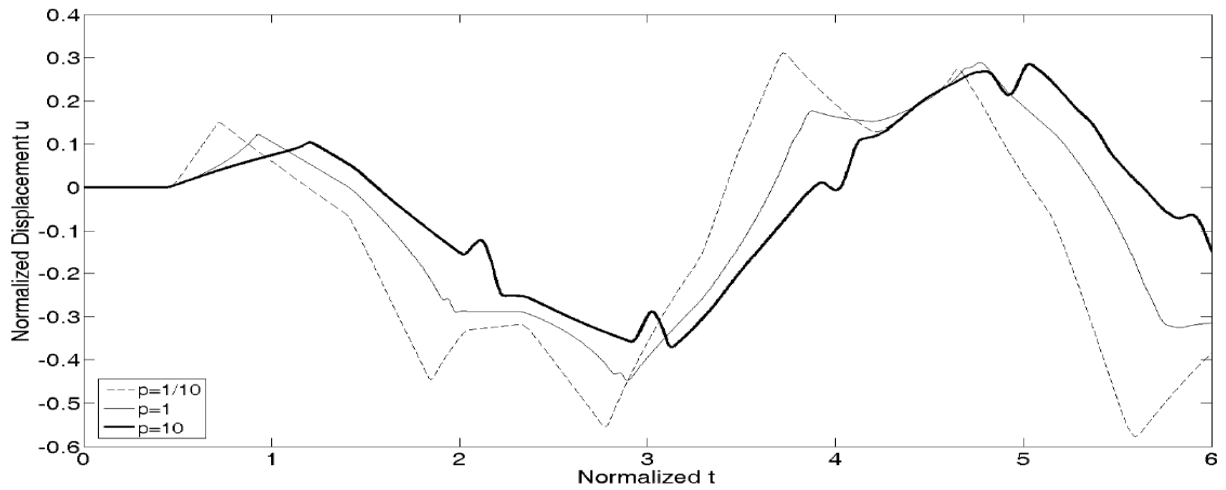
Σχήμα 4.18. Κατανομή της κανονικοποιημένης μετατόπισης u στην FGM στρώση $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ τη χρονική στιγμή $t = 0.75$, για διάφορες τιμές της παραμέτρου p



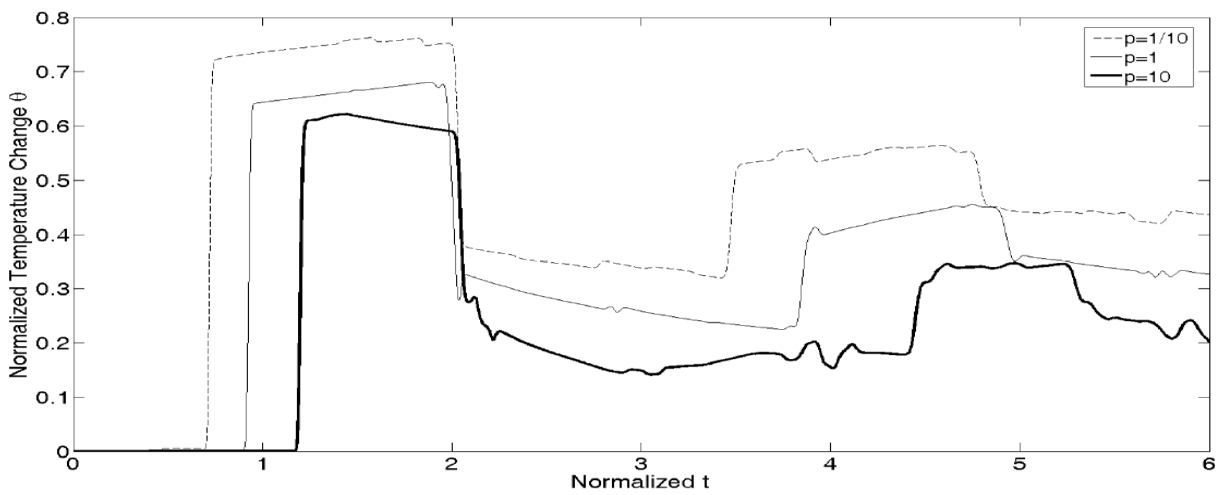
Σχήμα 4.19. Κατανομή της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας θ στην FGM στρώση $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ τη χρονική στιγμή $t = 0.75$, για διάφορες τιμές της παραμέτρου p



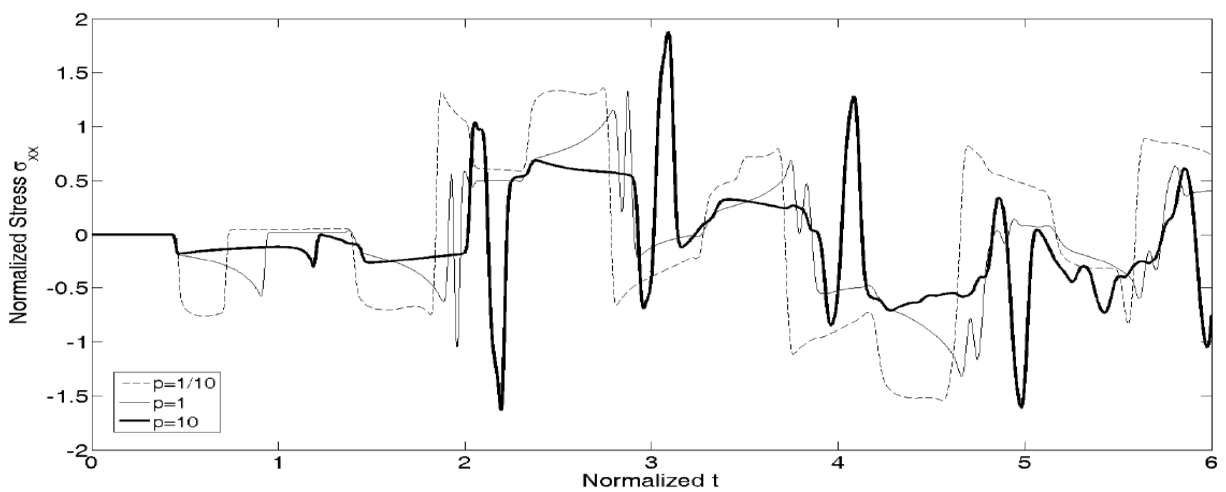
Σχήμα 4.20. Κατανομή της κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} στην FGM στρώση $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ τη χρονική στιγμή $t = 0.75$, για διάφορες τιμές της παραμέτρου p



Σχήμα 4.21. Χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης μετατόπισης u στη θέση $x=0.5$ της FGM στρώσης $ZrO_2/Ti-6Al-4V$, για διάφορες τιμές της παραμέτρου p



Σχήμα 4.22. Χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας θ στη θέση $x=0.5$ της FGM στρώσης $ZrO_2/Ti-6Al-4V$, για διάφορες τιμές της παραμέτρου p



Σχήμα 4.23. Χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} στη θέση $x=0.5$ της FGM στρώσης $ZrO_2/Ti-6Al-4V$, για διάφορες τιμές της παραμέτρου p

Στη συνέχεια της εφαρμογής εξετάζονται οι μέγιστες τιμές της θερμοκρασίας και της τάσης στο μέσο της FGM στρώσης, για διάφορες τιμές της παραμέτρου p . Η ελαχιστοποίηση της μέγιστης τάσης στο μέσο της στρώσης για το χρονικό διάστημα που εξετάζεται μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως κριτήριο επιλογής της βέλτιστης τιμής για την παράμετρο p . Άλλωστε, λόγω του φαινομένου της απόσβεσης η διακύμανση της τάσης σε μεταγενέστερες χρονικές στιγμές είναι μικρότερη. Για το σκοπό της παραμετρικής ανάλυσης και την εξαγωγή γενικότερων συμπερασμάτων χρησιμοποιούνται τρεις διαφορετικοί συνδυασμοί υλικών κεραμικού/μεταλλικού, όπως έχει ήδη αναφερθεί. Αρχικά αναφέρονται οι παράμετροι των δύο συνδυασμών υλικών που δεν έχουν παρουσιαστεί έως τώρα. Οι κανονικοποιημένες ταχύτητες διάδοσης του ελαστικού και του θερμικού κύματος στα υλικά των τριών συνδυασμών αναφέρονται στον Πίνακα 4.4.

Από τις τιμές του Πίνακα 4.2 για το SUS304 προκύπτει ότι τα χαρακτηριστικά μεγέθη για το συνδυασμό υλικών $\text{Si}_3\text{NO}_4/\text{SUS304}$ είναι $l = 6.34 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ και $\nu = 6.01 \cdot 10^3 \text{ m/s}$ (βλ. σχέσεις (4.3.7)-(4.3.8)). Οι κανονικοποιημένες παράμετροι για το Si_3NO_4 είναι $\zeta_{Ec} = 2.11$, $\zeta_{Kc} = 1.23$ και $\xi_c = 0.010$, ενώ για το SUS304 είναι $\zeta_{Em} = 1.00$, $\zeta_{Km} = 1.00$ και $\xi_m = 0.024$. Για το χρόνο χαλάρωσης της θεωρίας LS χρησιμοποιούνται οι κανονικοποιημένες τιμές $t_{0c} = 1.5625$ και $t_{0m} = 0.64$. Από τις σχέσεις (3.2.12) έπεται ότι για τους χρόνους χαλάρωσης του Si_3NO_4 και του SUS304, έχουν επιλεγεί οι τιμές $t_{0c} = 1.65 \cdot 10^{-13} \text{ s}$ και $t_{0m} = 6.75 \cdot 10^{-14} \text{ s}$ αντίστοιχα.

Ο τρίτος συνδυασμός υλικών είναι ο $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{Ni}$. Από τις τιμές του Πίνακα 4.3 για το Ni προκύπτει ότι στην FGM στρώση $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{Ni}$ τα χαρακτηριστικά μεγέθη είναι $l = 4.18 \cdot 10^{-9} \text{ m}$ και $\nu = 5.49 \cdot 10^3 \text{ m/s}$. Οι κανονικοποιημένες παράμετροι για το Al_2O_3 είναι $\zeta_{Ec} = 1.98$, $\zeta_{Kc} = 0.65$ και $\xi_c = 0.010$, και για το Ni είναι $\zeta_{Em} = 1.00$, $\zeta_{Km} = 1.00$ και $\xi_m = 0.012$. Όπως στις προηγούμενες περιπτώσεις, για το χρόνο χαλάρωσης της θεωρίας LS χρησιμοποιούνται οι κανονικοποιημένες τιμές $t_{0c} = 1.5625$ και $t_{0m} = 0.64$, που αντιστοιχούν στους χρόνους χαλάρωσης $t_{0c} = 1.19 \cdot 10^{-12} \text{ s}$ και $t_{0m} = 4.87 \cdot 10^{-13} \text{ s}$ για το κεραμικό και το μεταλλικό υλικό αντίστοιχα.

	$\text{ZrO}_2/\text{Ti-6Al-4V}$		$\text{Si}_3\text{NO}_4/\text{SUS304}$		$\text{Al}_2\text{O}_3/\text{Ni}$	
	ZrO_2	Ti-6Al-4V	Si_3NO_4	SUS304	Al_2O_3	Ni
ζ_E	1.11	1.00	2.11	1.00	1.98	1.00
$\zeta_K/(t_0)^{1/2}$	0.40	1.25	0.99	1.25	0.52	1.25

Πίνακας 4.4. Κανονικοποιημένες ταχύτητες διάδοσης του ελαστικού και του θερμικού κύματος στα υλικά των τριών συνδυασμών

Στον Πίνακα 4.5 φαίνονται οι μέγιστες τιμές της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας θ και της κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} στο μέσο της στρώσης, για το χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq 6$, για τους τρεις συνδυασμούς υλικών και για τις τιμές της παραμέτρου $p = 1/20$, $p = 1/10$, $p = 1/5$, $p = 1/2$, $p = 1$, $p = 2$, $p = 5$, $p = 10$ και $p = 20$. Καταρχάς, λόγω της απόσβεσης της θερμικής ενέργειας αναμένεται πως οι μέγιστες τιμές για τη θερμοκρασία και την τάση στη θέση $x = 0.5$ θα παρατηρούνται κατά τις πρώτες διελεύσεις του θερμικού κύματος από τη θέση αυτή, το οποίο επιβεβαιώνεται από τα Σχήματα 4.22 και 4.23.

Από τις τιμές του Πίνακα 4.5 προκύπτουν δύο βασικά συμπεράσματα. Το πρώτο συμπέρασμα αφορά την τιμή της μέγιστης θερμοκρασίας που παρατηρείται στο μέσο της FGM στρώσης, η οποία μειώνεται καθώς το p αυξάνεται. Όπως έχει συζητηθεί παραπάνω, αυτό σχετίζεται με την αύξηση το ποσοστού του κεραμικού υλικού στην περιοχή $0.0 \leq x \leq 0.5$. Εξαιρέση αποτελεί ο συνδυασμός $\text{Si}_3\text{NO}_4/\text{SUS304}$, όπου φαίνεται πως η μέγιστη θερμοκρασία στη θέση $x = 0.5$ δεν επηρεάζεται από την τιμή της παραμέτρου p . Αυτό μπορεί να εξηγηθεί από το γεγονός ότι οι ταχύτητες διάδοσης του θερμικού κύματος στο Si_3NO_4 και στο SUS304 έχουν μικρή διαφορά (βλ. Πίνακα 4.4), στοιχείο που άλλωστε δείχνει ότι στην περίπτωση αυτή το κεραμικό υλικό δεν προσφέρει ιδιαίτερη θερμική προστασία στο μεταλλικό υπόστρωμα. Το δεύτερο συμπέρασμα αφορά τη μέγιστη εφελκυστική τάση που αναπτύσσεται στο μέσο της FGM στρώσης, η οποία ελαχιστοποιείται για $p = 1$ και στους τρεις συνδυασμούς υλικών. Αυτό το σημαντικό συμπέρασμα υποδηλώνει πως, στα πλαίσια της θεωρίας Lord-Shulman και για τις συγκεκριμένες συνοριακές συνθήκες της παρούσας εφαρμογής, από όλες τις σιγμοειδείς κατανομές που εξετάστηκαν σε FGM στρώση σταθερού πάχους, η γραμμική κατανομή είναι εκείνη που ελαχιστοποιεί το μέγεθος του τασικού κύματος. Ωστόσο, υπογραμμίζεται πως το συμπέρασμα αυτό ισχύει για τις συγκεκριμένες τιμές που έχουν επιλεγεί για τους χρόνους χαλάρωσης των υλικών και δε γενικεύεται.

	$\text{ZrO}_2/\text{Ti-6Al-4V}$		$\text{Si}_3\text{NO}_4/\text{SUS304}$		$\text{Al}_2\text{O}_3/\text{Ni}$	
	$\max \theta$	$\max \sigma_{xx}$	$\max \theta$	$\max \sigma_{xx}$	$\max \theta$	$\max \sigma_{xx}$
$p = 1/20$	0.77	1.39	0.83	1.00	0.78	1.28
$p = 1/10$	0.76	1.36	0.83	0.96	0.77	1.24
$p = 1/5$	0.75	1.57	0.83	1.05	0.76	1.19
$p = 1/2$	0.72	1.62	0.83	1.08	0.73	1.10
$p = 1$	0.68	1.33	0.83	0.75	0.69	0.92
$p = 2$	0.64	2.28	0.83	1.25	0.64	1.39
$p = 5$	0.62	2.18	0.81	1.56	0.63	1.68
$p = 10$	0.62	1.88	0.83	1.47	0.63	1.53
$p = 20$	0.62	1.66	0.84	1.35	0.64	1.38

Πίνακας 4.5. Μέγιστες τιμές της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας θ και της κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} στη θέση $x = 0.5$ το χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq 6$, για κάθε συνδυασμό υλικών και για διάφορες τιμές της παραμέτρου p

4.4. Διερεύνηση ως προς την επίδραση του χρόνου χαλάρωσης της θεωρίας Lord-Shulman στη θερμομηχανική συμπεριφορά μιας FGM στρώσης

Όπως έχει αναφερθεί στην παράγραφο 2.5, το μέγεθος του χρόνου χαλάρωσης t_0 των υλικών που εισάγει η θεωρία LS, δεν είναι γνωστό. Στην παράγραφο αυτή εξετάζεται η επίδραση του χρόνου χαλάρωσης της θεωρίας LS στη θερμομηχανική συμπεριφορά μιας FGM στρώσης από κεραμικό/μεταλλικό υλικό, η οποία υποβάλλεται σε συνθήκες θερμικού σοκ στην άνω επιφάνειά της. Συγκεκριμένα, εξετάζεται το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών συνθηκών της παραγράφου 4.3 στα πλαίσια της θεωρίας LS, για διαφορετικές τιμές των χρόνων χαλάρωσης t_{0c} και t_{0m} του κεραμικού και του μεταλλικού υλικού αντίστοιχα, όπου ο λόγος t_{0c}/t_{0m} διατηρείται σταθερός.

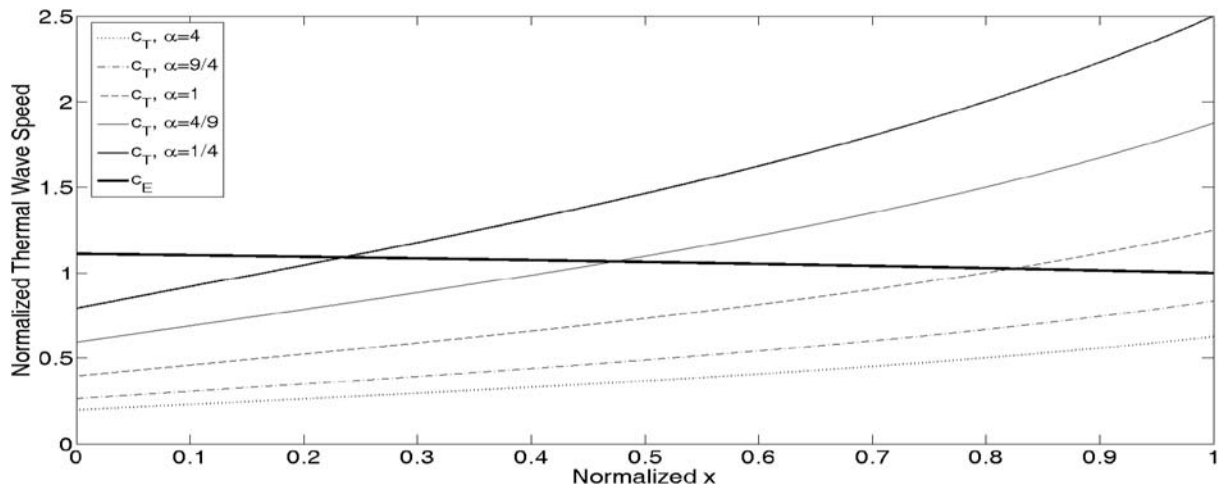
Έστω λοιπόν το κανονικοποιημένο πρόβλημα αρχικών-συνοριακών συνθηκών που περιγράφουν οι εξισώσεις (4.3.1)-(4.3.2). Η αρχική ομοιόμορφη θερμοκρασία της στρώσης είναι $T_0 = 300K$ και το συνολικό κανονικοποιημένο πάχος της είναι $\underline{L} = 1$, με $\underline{L}_{fg} = 1$ και $\underline{L}_c = \underline{L}_m = 0$. Ως κεραμικό υλικό χρησιμοποιείται η ZrO_2 και ως μεταλλικό υλικό το Ti-6Al-4V. Οι θερμομηχανικές ιδιότητες των υλικών αυτών $T = 300K$ φαίνονται στον Πίνακα 4.1 [31,32], όπου ο προσδιορισμός των σταθερών του Lamé λ, μ και της θερμικής σταθεράς β γίνεται από τις εξισώσεις (4.3.3)-(4.3.5). Η κατανομή του κατ' όγκο ποσοστού του μεταλλικού υλικού V_m μέσα στην FGM λωρίδα $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ θεωρείται ότι ακολουθεί τη γραμμική κατανομή, σύμφωνα με την οποία η κατανομή μίας ιδιότητας $P = P(x)$ υπολογίζεται από τη σχέση (4.3.6) για $p = 1$. Σημειώνεται ακόμη ότι το χαρακτηριστικό μήκος l και η χαρακτηριστική ταχύτητα ν υπολογίζονται από τις εξισώσεις (4.3.7)-(4.3.8).

Από τις τιμές του Πίνακα 4.1 για το Ti-6Al-4V προκύπτει ότι $l = 4.27 \cdot 10^{-10} m$ και $\nu = 5.65 \cdot 10^3 m/s$. Οι κανονικοποιημένες παράμετροι για τη ZrO_2 είναι $\underline{\zeta}_{Ec} = 1.11$, $\underline{\zeta}_{Kc} = 0.49$ και $\underline{\xi}_c = 0.005$, ενώ για το Ti-6Al-4V οι κανονικοποιημένες παράμετροι είναι $\underline{\zeta}_{Em} = 1.00$, $\underline{\zeta}_{Km} = 1.00$ και $\underline{\xi}_m = 0.005$. Για τους χρόνους χαλάρωσης της θεωρίας LS θεωρούνται οι κανονικοποιημένες τιμές $\underline{t}_{0c} = 1.5625 \cdot a$ και $\underline{t}_{0m} = 0.64 \cdot a$, όπου a είναι μία αδιάστατη παράμετρος. Οι τιμές που εξετάζονται για την παράμετρο a , οι χρόνοι χαλάρωσης καθώς και οι αντίστοιχες κανονικοποιημένες ταχύτητες του θερμικού κύματος στα δύο υλικά φαίνονται στον Πίνακα 4.6.

		$a = 1/4$	$a = 4/9$	$a = 1$	$a = 9/4$	$a = 4$
ZrO ₂	t_{0c} (s)	$2.95 \cdot 10^{-14}$	$5.24 \cdot 10^{-14}$	$1.18 \cdot 10^{-13}$	$2.65 \cdot 10^{-13}$	$4.72 \cdot 10^{-13}$
	\underline{t}_{0c}	0.3906	0.6944	1.5625	3.5156	6.25
	$\underline{\zeta}_{Kc} / (\underline{t}_{0c})^{1/2}$	0.79	0.59	0.40	0.26	0.20
Ti-6Al-4V	t_{0m} (s)	$1.21 \cdot 10^{-14}$	$2.15 \cdot 10^{-14}$	$4.83 \cdot 10^{-14}$	$1.09 \cdot 10^{-13}$	$1.93 \cdot 10^{-13}$
	\underline{t}_{0m}	0.16	0.2844	0.64	1.44	2.56
	$\underline{\zeta}_{Km} / (\underline{t}_{0m})^{1/2}$	2.50	1.88	1.25	0.83	0.63

Πίνακας 4.6. Τιμές για τους χρόνους χαλάρωσης της θεωρίας LS και τις αντίστοιχες ταχύτητες του θερμικού κύματος στη ZrO_2 και το Ti-6Al-4V

Στο Σχήμα 4.24 παρουσιάζονται οι κατανομές των ταχυτήτων του ελαστικού κύματος $\underline{\zeta}_E$ και του θερμικού κύματος $\underline{\zeta}_K / (\underline{t}_0)^{1/2}$ στην FGM στρώση για $a = 1/4$, $a = 4/9$, $a = 1$, $a = 9/4$ και $a = 4$, όταν θεωρείται γραμμική κατανομή των ιδιοτήτων. Παρατηρείται καταρχήν ότι οι κατανομές των ταχυτήτων του ελαστικού και του θερμικού κύματος δεν ακολουθούν τη γραμμική κατανομή, όπως ισχύει για τις θερμομηχανικές ιδιότητες. Αυτό είναι αναμενόμενο από τις σχέσεις (3.2.13). Επιπλέον, για μικρότερες τιμές της παραμέτρου a η ταχύτητα του θερμικού κύματος αυξάνεται, καθώς οι χρόνοι χαλάρωσης των υλικών μειώνονται. Από το Σχήμα 4.24 φαίνεται ακόμη ότι για $a = 1/4$, $a = 4/9$ και $a = 1$ η κατανομή των ταχυτήτων του θερμικού και του ελαστικού κύματος τέμνονται, γεγονός που υποδηλώνει την πολυπλοκότητα του φαινομένου της διάδοσης των θερμοελαστικών διαταραχών.

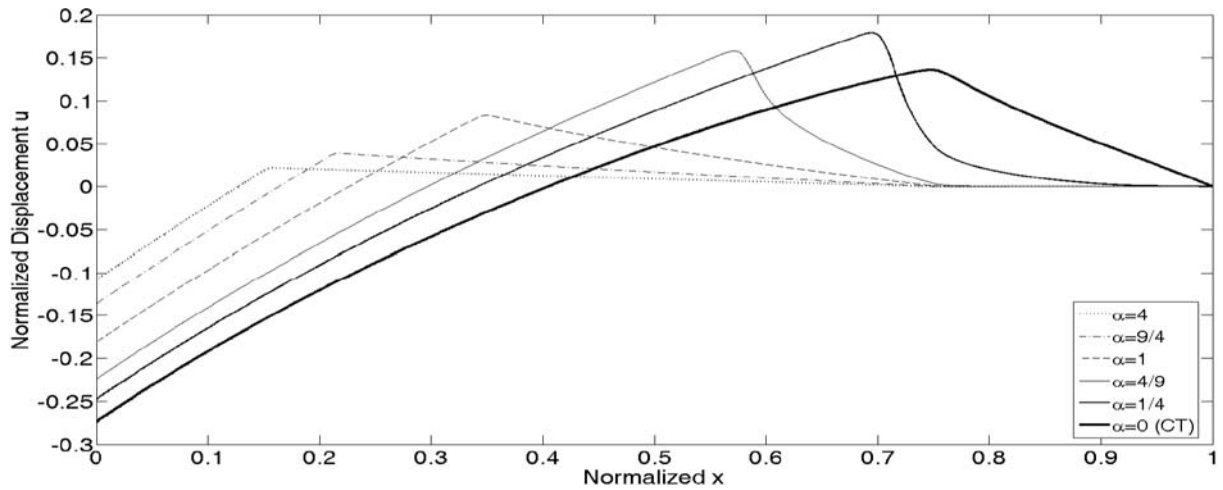


Σχήμα 4.24. Κατανομή των ταχυτήτων του ελαστικού και του θερμικού κύματος στην FGM στρώση για διάφορες τιμές της παραμέτρου a

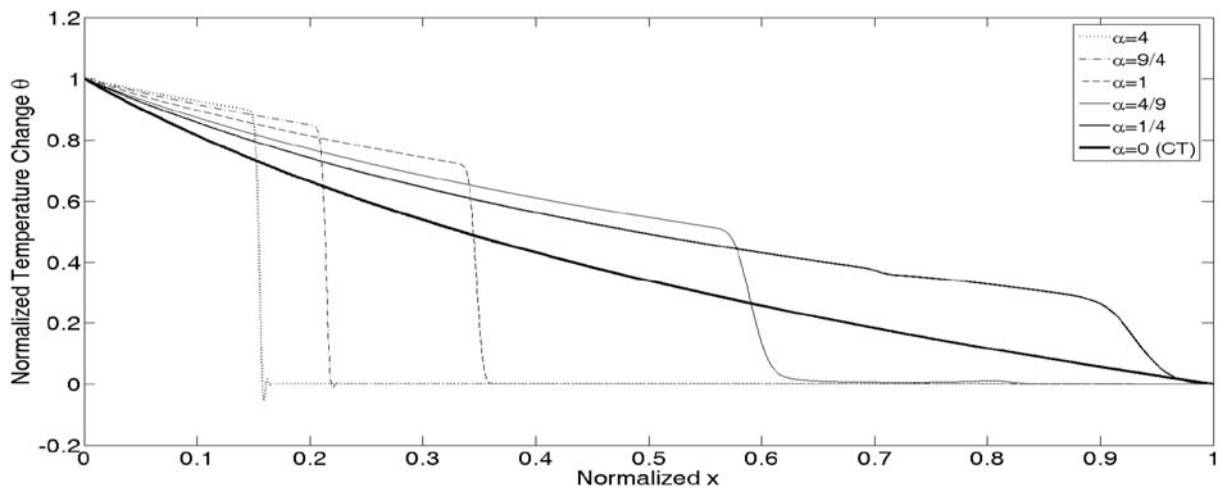
Στη συνέχεια της παραγράφου εξετάζονται τα πεδία της μετακίνησης u , της μεταβολής της θερμοκρασίας θ και της τάσης σ_{xx} που αναπτύσσονται στην FGM στρώση $ZrO_2/Ti-6Al-4V$, στα πλαίσια της θεωρίας LS. Για τις αναλύσεις χρησιμοποιούνται $N_{el} = 2000$ πεπερασμένα στοιχεία και $M_t = 12000$ χρονικά βήματα, για συνολικό κανονικοποιημένο χρόνο $t_{tot} = 6.00$.

Στα Σχήματα 4.25-4.27 φαίνονται η κατανομή της κανονικοποιημένης μετατόπισης u , η κατανομή της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας θ και η κατανομή της κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} , αντίστοιχα, τη χρονική στιγμή $t = 0.70$, για $a = 0$, $a = 1/4$, $a = 4/9$, $a = 1$, $a = 9/4$ και $a = 4$. Όταν $a = 0$ τα αποτελέσματα αντιστοιχούν στη θεωρία CT, καθώς οι χρόνοι χαλάρωσης των υλικών μηδενίζονται. Στο Σχήμα 4.26 φαίνεται η αύξηση της ταχύτητας διάδοσης του θερμικού κύματος για μικρότερες τιμές της παραμέτρου a , όπως είναι αναμενόμενο (για $a = 0$ δεν υπάρχει θερμικό κύμα). Στο Σχήμα 4.28 διακρίνεται η επίδραση του χρόνου χαλάρωσης στο μέγεθος του τασικού κύματος, καθώς η τάση είναι μικρότερη στα πλαίσια της θεωρίας CT ($a = 0$).

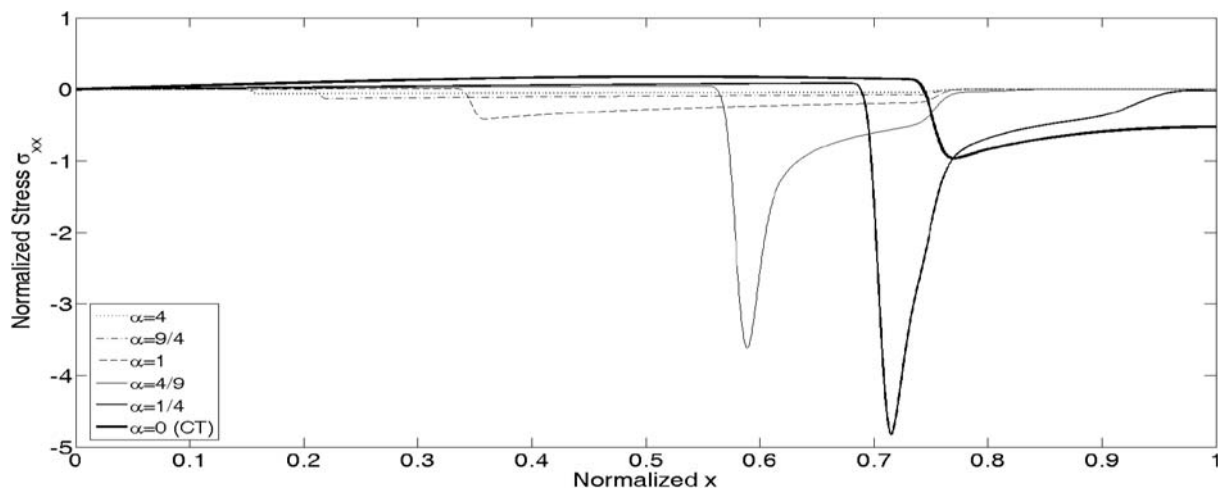
Στα Σχήματα 4.28-4.30 απεικονίζονται η χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης μετατόπισης u , η χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας θ και η χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} , αντίστοιχα, στη θέση $x = 0.5$, για $a = 0$, $a = 1$ και $a = 4$. Στο Σχήμα 4.29 φαίνεται η αύξηση της ταχύτητας του θερμικού κύματος για μικρότερες τιμές του a , ενώ για $a = 0$ (θεωρία CT) η ταχύτητα γίνεται άπειρη. Επίσης παρατηρείται το φαινόμενο της απόσβεσης της θερμικής ενέργειας, καθώς τα αποτελέσματα της θεωρίας LS συγκλίνουν γρήγορα προς τα αποτελέσματα της θεωρίας CT. Η απόσβεση είναι πιο έντονη για μικρότερες τιμές του a (μικρότεροι χρόνοι χαλάρωσης). Διαπιστώνεται ακόμη ότι για μεγαλύτερες τιμές του a η μέγιστη θερμοκρασία αυξάνεται. Από το Σχήμα 4.28 συμπεραίνεται επιπλέον ότι για μεγαλύτερες τιμές του a οι μετατοπίσεις αυξάνονται, το οποίο συνδέεται με την αύξηση της θερμοκρασίας. Επίσης, στο Σχήμα 4.30 διακρίνεται η επίδραση των χρόνων χαλάρωσης στο μέγεθος της τάσης. Για $a = 1/4$ το θερμικό κύμα αποσβέννεται γρήγορα, με συνέπεια το τασικό κύμα να εμφανίζει τις μέγιστες τιμές του τις ίδιες χρονικές στιγμές με τη θεωρία CT ($a = 0$).



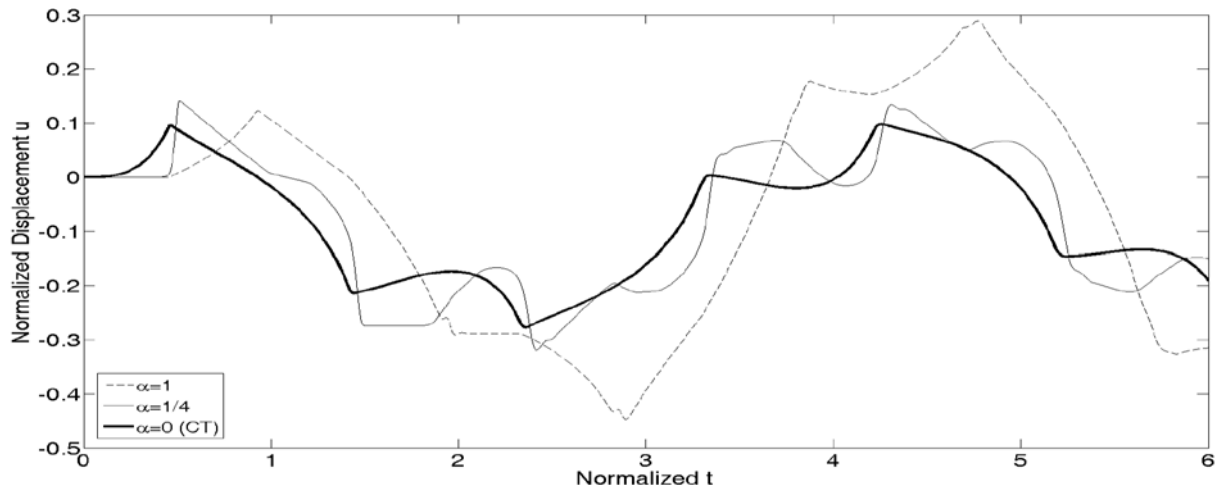
Σχήμα 4.25. Κατανομή της κανονικοποιημένης μετατόπισης u τη χρονική στιγμή $t = 0.70$, για διάφορες τιμές της παραμέτρου a



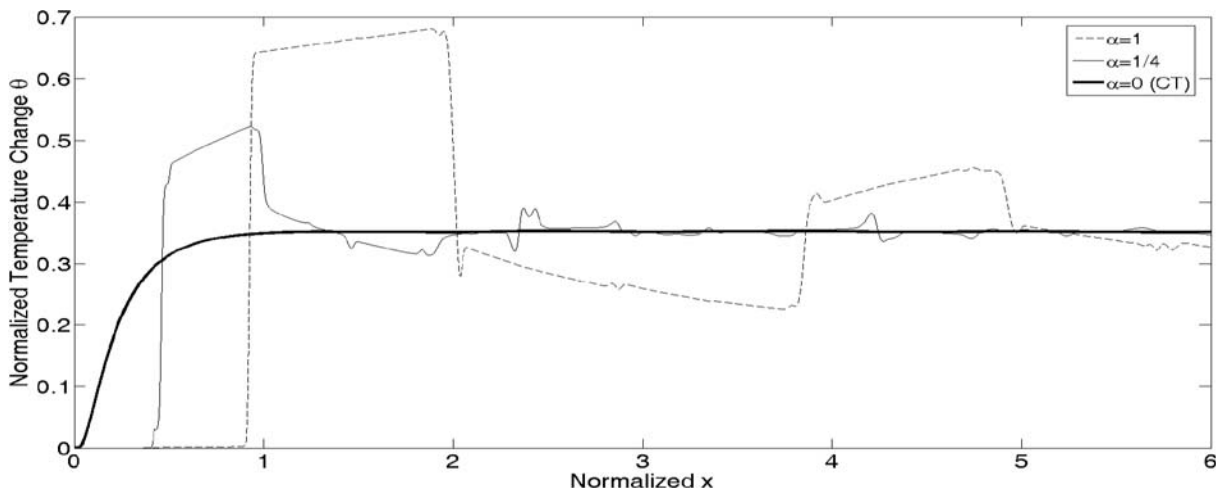
Σχήμα 4.26. Κατανομή της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας θ τη χρονική στιγμή $t = 0.70$, για διάφορες τιμές της παραμέτρου a



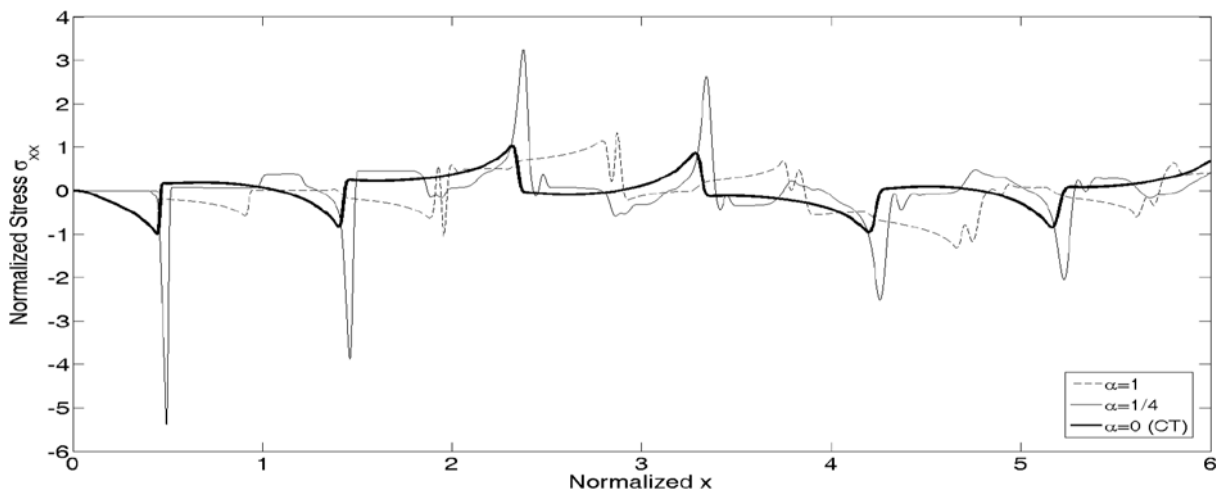
Σχήμα 4.27. Κατανομή της κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} τη χρονική στιγμή $t = 0.70$, για διάφορες τιμές της παραμέτρου a



Σχήμα 4.28. Χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης μετατόπισης u στη θέση $x = 0.5$ για διάφορες τιμές της παραμέτρου a



Σχήμα 4.29. Χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας θ στη θέση $x = 0.5$ για διάφορες τιμές της παραμέτρου a



Σχήμα 4.30. Χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} στη θέση $x = 0.5$ για διάφορες τιμές της παραμέτρου a

Στον Πίνακα 4.7 εμφανίζονται οι μέγιστες τιμές της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας θ και της κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} στο μέσο της FGM στρώσης για $a = 0$, $a = 1/4$, $a = 4/9$, $a = 1$, $a = 9/4$ και $a = 4$.

Από τα αποτελέσματα των αναλύσεων που απεικονίζονται στον Πίνακα 4.7 προκύπτει πως η μέγιστη θερμοκρασία στο μέσο της FGM στρώσης αυξάνεται για μεγαλύτερες τιμές της παραμέτρου a . Αυτό οφείλεται στη μείωση της ταχύτητας του θερμικού κύματος, η οποία έχει ως αποτέλεσμα την εξασθένηση του φαινομένου της απόσβεσης της θερμικής ενέργειας. Όπως φαίνεται από το Σχήμα 4.29, η μέγιστη θερμοκρασία στο μέσο της FGM στρώσης εμφανίζεται μετά την πρώτη ανάκλαση του θερμικού κύματος στην κάτω επιφάνεια της στρώσης. Λόγω της απόσβεσης, το εύρος της διακύμανσης της θερμοκρασίας σε μεταγενέστερες χρονικές στιγμές μειώνεται. Από τον Πίνακα 4.7 έπεται επιπλέον ότι η επίδραση του χρόνου χαλάρωσης των υλικών στο μέγεθος της τάσης είναι σημαντική. Για παράδειγμα, για $a = 1/4$ η μέγιστη τάση τριπλασιάζεται σε σχέση με τα αποτελέσματα της θεωρίας CT. Αυτό δείχνει πως τα αποτελέσματα των γενικευμένων θεωριών δεν μπορούν να αγνοηθούν, έστω και αν συγκλίνουν γρήγορα προς τα αποτελέσματα της κλασικής θερμοελαστικότητας.

α	0	1/4	4/9	1	9/4	4
$\max \theta$	0.35	0.52	0.59	0.68	0.76	0.80
$\max \sigma_{xx}$	1.03	3.25	2.92	1.33	1.45	1.06

Πίνακας 4.7. Μέγιστες τιμές της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας θ και της κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} στη θέση $x = 0.5$, για διάφορες τιμές της παραμέτρου a

4.5. Σύνθετη λωρίδα από κεραμικό/μεταλλικό υλικό με ενδιάμεση FGM στρώση σε συνθήκες θερμικού σοκ, στα πλαίσια της θεωρίας Green-Lindsay

Στην παράγραφο αυτή εξετάζεται η θερμομηχανική συμπεριφορά μίας λωρίδας τριών στρώσεων που καταπονείται με απότομη ροή θερμότητας στην άνω επιφάνειά της, στα πλαίσια της θεωρίας GL. Η άνω στρώση αποτελείται από κεραμικό υλικό, η κατώτερη αποτελείται από μεταλλικό υλικό, ενώ ενδιάμεσά τους παρεμβάλλεται μία FGM στρώση. Η κατανομή των θερμομηχανικών ιδιοτήτων μέσα στην FGM στρώση είναι σιγμοειδής με παράμετρο p . Επιπλέον, εξετάζεται η επίδραση της παραμέτρου p .

Για την εξαγωγή των εξισώσεων της θεωρίας GL, στις εξισώσεις (3.2.15)-(3.2.16) τίθενται $t_0 = t_3 = 0$ και $\eta = \gamma = 1$. Η κανονικοποιημένη μορφή του προβλήματος αρχικών-συνοριακών συνθηκών περιγράφεται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left[\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda_m + 2\mu_m} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} - \frac{\beta}{\beta_m} (\tilde{\theta} + t_1 \dot{\tilde{\theta}}) \right] = \frac{1}{\epsilon_{Em}^2} \frac{\rho}{\rho_m} \ddot{\tilde{u}} \\ - \frac{1}{\epsilon_{Km}^2} \frac{\rho c}{\rho_m c_m} \left(\dot{\tilde{\theta}} + t_2 \ddot{\tilde{\theta}} + \xi_m \frac{\rho_m c_m}{\rho c} \frac{\beta}{\beta_m} \frac{\partial \dot{\tilde{u}}}{\partial \tilde{x}} \right) = - \frac{1}{k_m} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left(k \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{x}} \right) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 0 < \tilde{x} < \tilde{L} \\ 0 < \tilde{t} < \infty \end{array} \quad (4.5.1)$$

με αρχικές-συνοριακές συνθήκες:

$$\begin{aligned} \underline{u}(\underline{x}, 0) = 0, \quad \underline{\dot{u}}(\underline{x}, 0) = 0, \quad \underline{\theta}(\underline{x}, 0) = 0, \quad \underline{\dot{\theta}}(\underline{x}, 0) = 0, \quad 0 \leq \underline{x} \leq \underline{L} \\ \underline{q}_x(0, \underline{t}) = 1, \quad \underline{\sigma}_{xx}(0, \underline{t}) = 0, \quad \underline{q}_x(\underline{L}, \underline{t}) = -\frac{h_v l}{k_m} \underline{\theta}(\underline{L}, \underline{t}), \quad \underline{u}(\underline{L}, \underline{t}) = 0, \quad 0 < \underline{t} < \infty \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

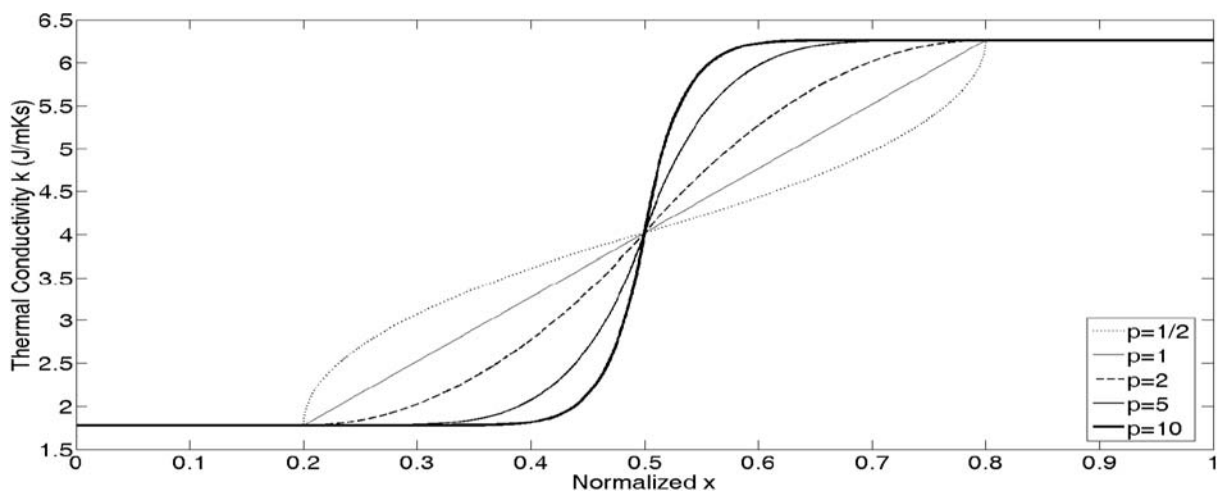
όπου $\underline{h}_v = h_v l / k_m = 10$ είναι ο κανονικοποιημένος συντελεστής συναγωγής.

Η λωρίδα αρχικά βρίσκεται σε ομοιόμορφη θερμοκρασία $T_0 = 300K$, ενώ το συνολικό κανονικοποιημένο πάχος της είναι $\underline{L} = 1$. Τα κανονικοποιημένα πάχη της κεραμικής και της μεταλλικής στρώσης είναι $\underline{L}_c = \underline{L}_m = 0.2$, ενώ η FGM στρώση έχει κανονικοποιημένο πάχος $\underline{L}_{fg} = 0.6$. Στην παρούσα μελέτη ως κεραμικό υλικό χρησιμοποιείται η ζirkονία (ZrO_2) και ως μεταλλικό υλικό το κράμα τιτανίου (Ti-6Al-4V). Οι θερμομηχανικές ιδιότητες των δύο υλικών για $T = 300K$ αναφέρονται στον Πίνακα 4.1 [31,32]. Υπενθυμίζεται ότι οι σταθερές του Lamé λ, μ και η θερμική σταθερά β προκύπτουν από τις σχέσεις (4.3.3)-(4.3.5).

Για μία μακροσκοπική ιδιότητα $P = P(x)$, από την εξίσωση (1.2.7) προκύπτει ότι η κατανομή της ιδιότητας P στη λωρίδα υπολογίζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$P(\underline{x}) = \left\{ \begin{array}{ll} P_c + \frac{P_m - P_c}{2} \left(2 \frac{\underline{x} - \underline{L}_c}{\underline{L}_{fg}} \right)^p, & \underline{L}_c \leq \underline{x} \leq \underline{L}_c + \frac{\underline{L}_{fg}}{2} \\ P_m + \frac{P_c - P_m}{2} \left(2 - 2 \frac{\underline{x} - \underline{L}_c}{\underline{L}_{fg}} \right)^p, & \underline{L}_c + \frac{\underline{L}_{fg}}{2} < \underline{x} \leq \underline{L}_c + \underline{L}_{fg} \end{array} \right\} \quad (4.5.3)$$

όπου P_c και P_m είναι οι ιδιότητες του κεραμικού και του μεταλλικού υλικού αντίστοιχα, ενώ p είναι η παράμετρος της σιγμοειδούς κατανομής. Η κατανομή της θερμικής αγωγιμότητας k στη λωρίδα $ZrO_2/FGM/Ti-6Al-4V$ για διάφορες τιμές της παραμέτρου p φαίνεται στο Σχήμα 4.31.



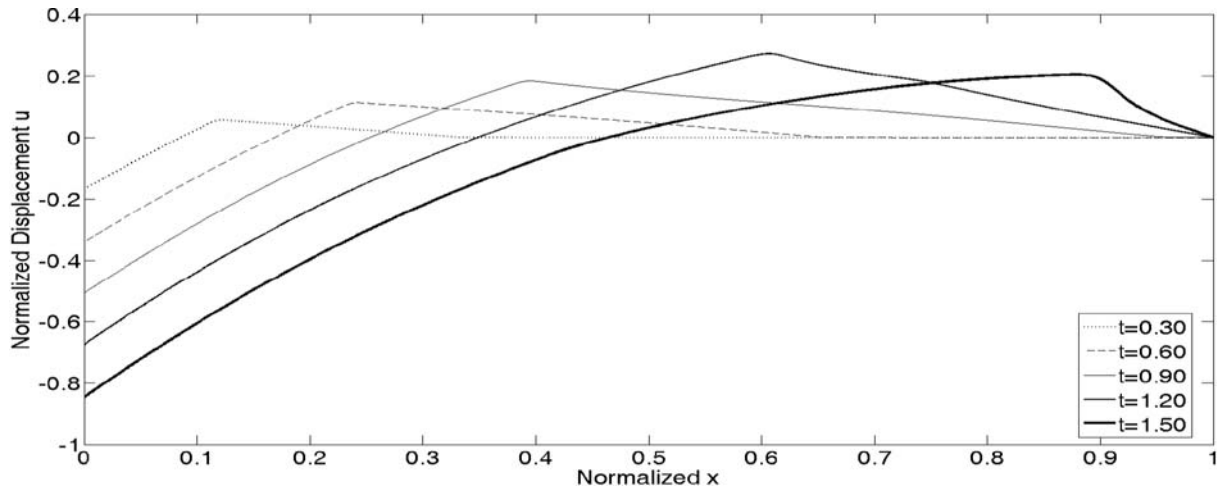
Σχήμα 4.31. Κατανομή της θερμικής αγωγιμότητας k στη λωρίδα $ZrO_2/FGM/Ti-6Al-4V$ για διάφορες τιμές της παραμέτρου p της σιγμοειδούς κατανομής

Τα χαρακτηριστικά μεγέθη l και ν υπολογίζονται από τις σχέσεις (4.3.7)-(4.3.8), δηλαδή $l = 4.27 \cdot 10^{-10} m$ και $\nu = 5.65 \cdot 10^3 m/s$. Οι κανονικοποιημένες παράμετροι για τη ZrO_2 είναι $\zeta_{Ec} = 1.11$, $\zeta_{Kc} = 0.49$ και $\xi_c = 0.005$, ενώ για το Ti-6Al-4V είναι $\zeta_{Em} = 1.00$, $\zeta_{Km} = 1.00$ και $\xi_m = 0.005$. Για τους χρόνους χαλάρωσης της θεωρίας GL χρησιμοποιούνται οι κανονικοποιημένες τιμές $\underline{t}_{1c} = \underline{t}_{2c} = 1.5625$ και $\underline{t}_{1m} = \underline{t}_{2m} = 0.64$. Από τις σχέσεις (3.2.12) έπεται ότι για τους χρόνους χαλάρωσης της ZrO_2 και του Ti-6Al-4V έχουν επιλεγεί οι τιμές $t_{1c} = t_{2c} = 1.18 \cdot 10^{-13} s$ και $t_{1m} = t_{2m} = 4.83 \cdot 10^{-14} s$ αντίστοιχα. Για τις αναλύσεις χρησιμοποιούνται $N_{el} = 2000$ πεπερασμένα στοιχεία και $M_t = 12000$ χρονικά βήματα, για συνολικό κανονικοποιημένο χρόνο $\underline{t}_{tot} = 6.00$.

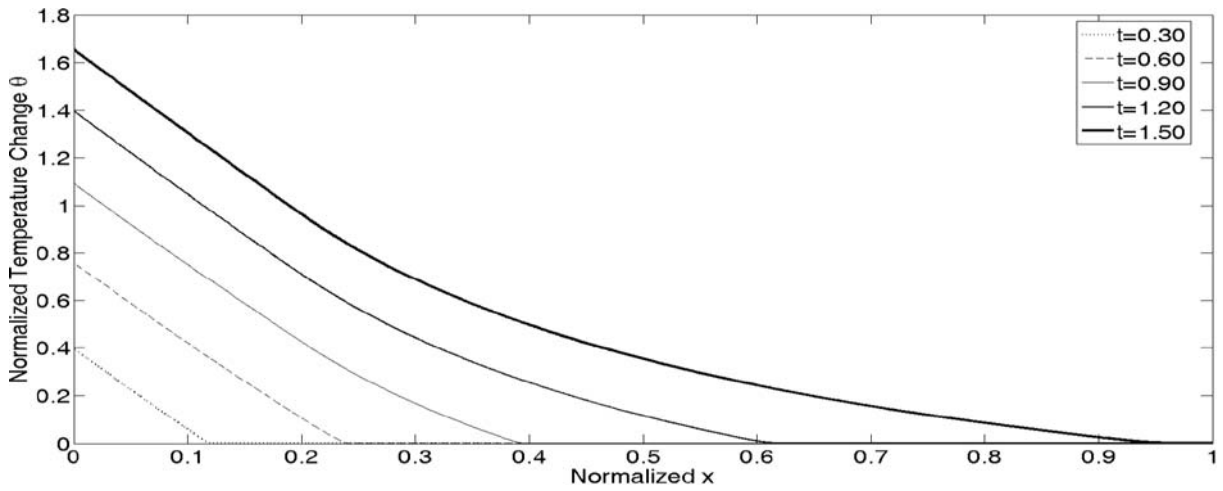
Στα Σχήματα 4.32-4.34 απεικονίζονται η κατανομή της κανονικοποιημένης μετατόπισης \underline{u} , η κατανομή της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας $\underline{\theta}$ και η κατανομή της κανονικοποιημένης τάσης $\underline{\sigma}_{xx}$, αντίστοιχα, για τις χρονικές στιγμές $\underline{t} = 0.30$, $\underline{t} = 0.60$, $\underline{t} = 0.90$, $\underline{t} = 1.20$ και $\underline{t} = 1.50$. Η ταχύτητα διάδοσης του ελαστικού κύματος είναι $\zeta_{Ec} = 1.11$ στη ZrO_2 και $\zeta_{Em} = 1.00$ στο Ti-6Al-4V. Από την άλλη μεριά, το θερμικό κύμα διαδίδεται με ταχύτητα $\zeta_{Kc}/(\underline{t}_{2c})^{1/2} = 0.40$ στη ZrO_2 και $\zeta_{Km}/(\underline{t}_{2m})^{1/2} = 1.25$ στο Ti-6Al-4V. Από τα Σχήματα 4.32-4.33 έπεται ότι οι κατανομές της μετατόπισης και της θερμοκρασίας στη λωρίδα είναι πιο ομαλές όταν η θερμική συνοριακή συνθήκη στην άνω επιφάνεια αφορά την απότομη επιβολή ροής θερμότητας (Neumann thermal boundary condition), σε σχέση με την απότομη μεταβολή θερμοκρασίας (Dirichlet thermal boundary condition, βλ. Σχήματα 4.8-4.9). Η παρατήρηση αυτή επιβεβαιώνεται και από το Σχήμα 4.34, όπου το μέγεθος του τασικού κύματος είναι μειωμένο σε σχέση με μέγεθος του τασικού κύματος στο Σχήμα 4.10. Επιπλέον, όπως είναι αναμενόμενο η επιβολή δεδομένης ροής θερμότητας στο σύνορο συνεπάγεται την επιβολή δεδομένης κλίσης θερμοκρασίας στη θέση αυτή. Η κλίση της θερμοκρασίας σχετίζεται με τη θερμική αγωγιμότητα και συνεπώς διατηρείται σταθερή στη στρώση του κεραμικού υλικού (δηλαδή για $0.0 \leq \underline{x} \leq 0.2$), ενώ μειώνεται στην FGM στρώση λόγω της αύξησης της θερμικής αγωγιμότητας.

Στη συνέχεια εξετάζεται η επίδραση της παραμέτρου p . Στα Σχήματα 4.35-4.37 παρουσιάζονται η χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης μετατόπισης \underline{u} , η χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας $\underline{\theta}$ και η χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης τάσης $\underline{\sigma}_{xx}$, αντίστοιχα, στη θέση $\underline{x} = 0.5$ για $p = 1/10$, $p = 1$ και $p = 10$. Από το Σχήμα 4.36 προκύπτει ότι για μεγαλύτερες τιμές του p η θερμοκρασία στη θέση $\underline{x} = 0.5$ μειώνεται. Όπως έχει συζητηθεί στην παράγραφο 4.3, αυτό οφείλεται στη μείωση της θερμικής αγωγιμότητας $k(x)$ στην περιοχή $0.0 \leq \underline{x} \leq 0.5$ λόγω της αύξησης του ποσοστού της ZrO_2 . Επιπλέον, από το Σχήμα 4.37 φαίνεται ότι για μεγαλύτερες τιμές του p μειώνεται και η τάση στο μέσο της λωρίδας.

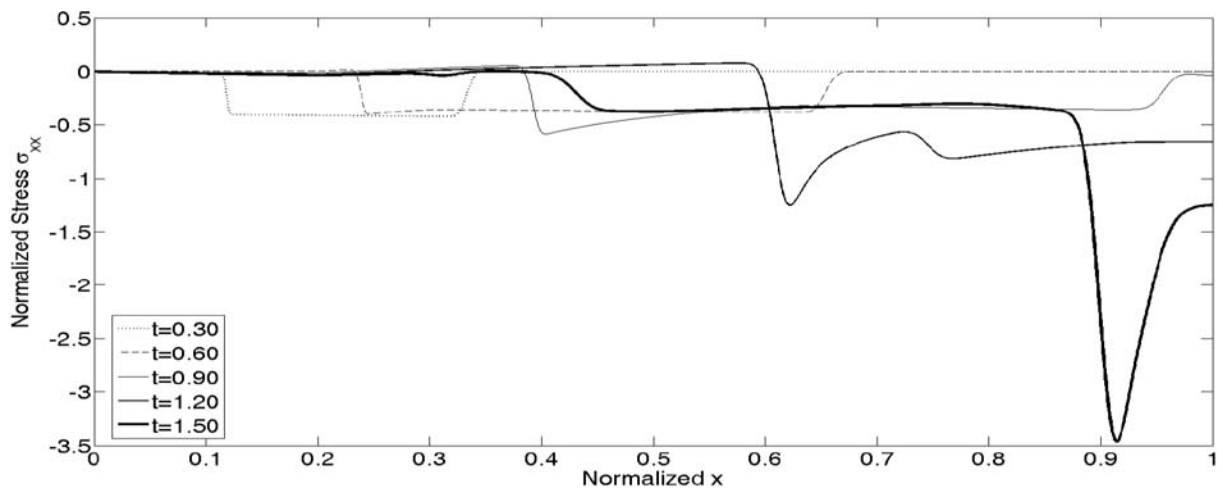
Στον Πίνακα 4.8 αναφέρονται οι μέγιστες τιμές της κανονικοποιημένης μετατόπισης \underline{u} , της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας $\underline{\theta}$ και της κανονικοποιημένης τάσης $\underline{\sigma}_{xx}$ στο μέσο της στρώσης, για το χρονικό διάστημα $0 \leq \underline{t} \leq 6$, για τις τιμές της παραμέτρου $p = 1/20$, $p = 1/10$, $p = 1/5$, $p = 1/2$, $p = 1$, $p = 2$, $p = 5$, $p = 10$ και $p = 20$. Από τις τιμές του Πίνακα 4.8 συμπεραίνεται καταρχάς ότι η μέγιστη θερμοκρασία στο μέσο της λωρίδας μειώνεται καθώς το p αυξάνεται, λόγω της αύξησης το ποσοστού της ZrO_2 στην περιοχή $0.0 \leq \underline{x} \leq 0.5$. Το συμπέρασμα αυτό είναι σύμφωνο με τα αποτελέσματα της παραγράφου 4.3.



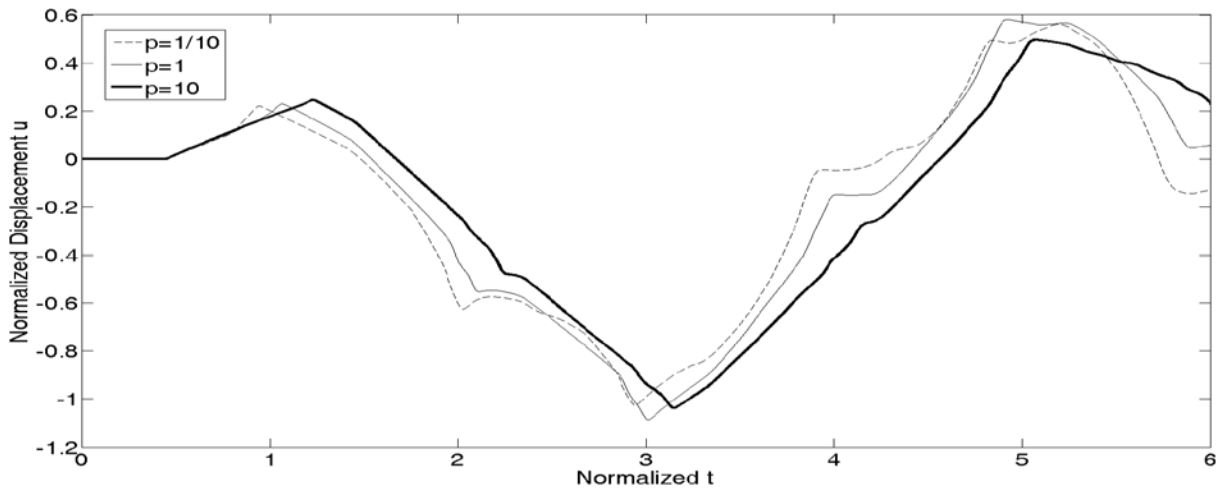
Σχήμα 4.32. Κατανομή της κανονικοποιημένης μετατόπισης u στη λωρίδα $ZrO_2/FGM/Ti-6Al-4V$ για $p=1$, για διάφορες χρονικές στιγμές



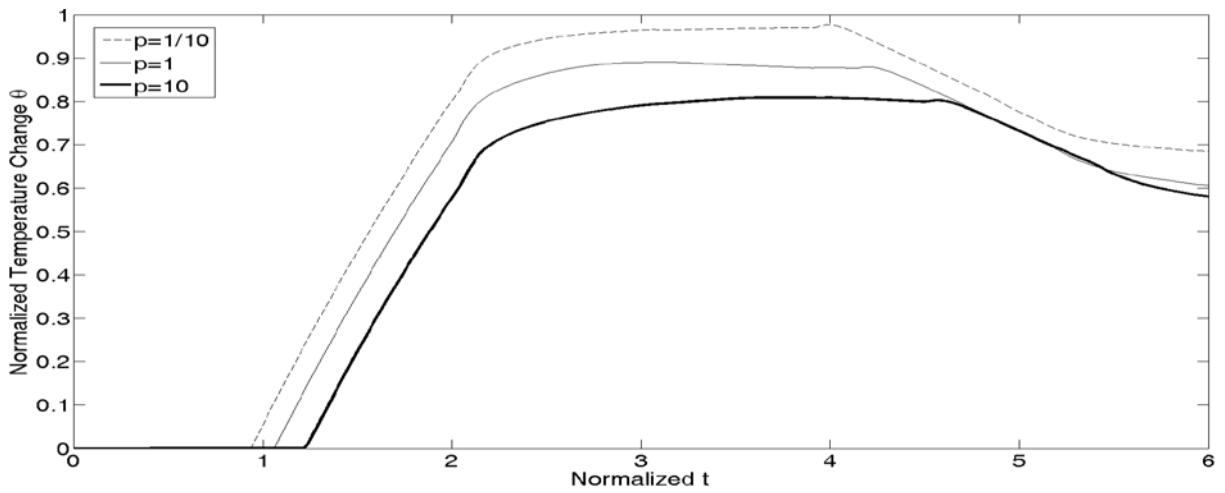
Σχήμα 4.33. Κατανομή της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας θ στη λωρίδα $ZrO_2/FGM/Ti-6Al-4V$ για $p=1$, για διάφορες χρονικές στιγμές



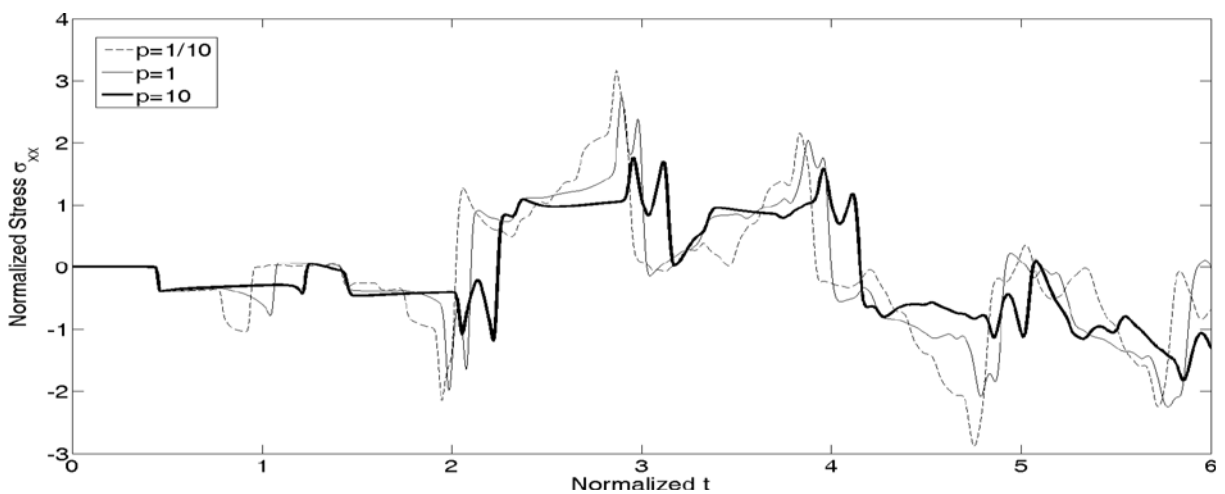
Σχήμα 4.34. Κατανομή της κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} στη λωρίδα $ZrO_2/FGM/Ti-6Al-4V$ για $p=1$, για διάφορες χρονικές στιγμές



Σχήμα 4.35. Χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης μετατόπισης u στη θέση $x=0.5$ της λωρίδας $ZrO_2/FGM/Ti-6Al-4V$, για διάφορες τιμές της παραμέτρου p



Σχήμα 4.36. Χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας θ στη θέση $x=0.5$ της λωρίδας $ZrO_2/FGM/Ti-6Al-4V$, για διάφορες τιμές της παραμέτρου p



Σχήμα 4.37. Χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} στη θέση $x=0.5$ της λωρίδας $ZrO_2/FGM/Ti-6Al-4V$, για διάφορες τιμές της παραμέτρου p

Το δεύτερο συμπέρασμα αφορά τη μέγιστη εφελκυστική τάση που αναπτύσσεται στο μέσο της λωρίδας, η οποία ελαχιστοποιείται για μεγάλες τιμές του p , δηλαδή καθώς η λωρίδα τείνει να γίνει σύνθετη λωρίδα $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ (δύο στρώσεων). Το αποτέλεσμα αυτό δε συμφωνεί με τα συμπεράσματα της παραγράφου 4.3, γεγονός που οφείλεται στις διαφορετικές συνοριακές συνθήκες που εξετάζονται στην παρούσα παράγραφο καθώς και στη διαφορετική γενικευμένη θεωρία που χρησιμοποιείται.

	ZrO ₂ /Ti-6Al-4V		
	max $ \underline{u} $	max $\underline{\theta}$	max $\underline{\sigma}_{xx}$
$p = 1/20$	0.99	0.99	3.07
$p = 1/10$	1.02	0.98	3.17
$p = 1/5$	1.06	0.96	3.26
$p = 1/2$	1.09	0.92	3.13
$p = 1$	1.09	0.89	2.74
$p = 2$	1.07	0.86	2.30
$p = 5$	1.05	0.82	1.92
$p = 10$	1.04	0.81	1.76
$p = 20$	1.03	0.80	1.68

Πίνακας 4.8. Μέγιστες τιμές της κανονικοποιημένης μετατόπισης \underline{u} , της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας $\underline{\theta}$ και της κανονικοποιημένης τάσης $\underline{\sigma}_{xx}$ στη θέση $\underline{x} = 0.5$ το χρονικό διάστημα $0 \leq \underline{t} \leq 6$, για διάφορες τιμές της παραμέτρου p

4.6. Σύνθετη λωρίδα $ZrO_2/FGM/Ti-6Al-4V$ σε συνθήκες θερμικού σοκ τύπου αναβαθμίδας, στα πλαίσια της κλασικής συζευγμένης θερμοελαστικότητας και των γενικευμένων θεωριών Lord-Shulman και Green-Lindsay

Στην παρούσα παράγραφο εξετάζεται η θερμομηχανική συμπεριφορά μίας $ZrO_2/FGM/Ti-6Al-4V$ λωρίδας που υποβάλλεται σε συνθήκες απότομης μεταβολής της θερμοκρασίας της ανώτερης επιφάνειάς της. Η μελέτη γίνεται στα πλαίσια των θεωριών CT, LS και GL. Επίσης, γίνεται διερεύνηση της επίδρασης του χρονικού διαστήματος μέσα στο οποίο λαμβάνει χώρα η μεταβολή της θερμοκρασίας της ανώτερης επιφάνειας της λωρίδας. Για την εξαγωγή των ενοποιημένων εξισώσεων των θεωριών CT, LS και GL, στις εξισώσεις (3.2.15)-(3.2.16) τίθενται $\underline{t}_3 = 0$ και $\eta = \gamma = 1$. Η κανονικοποιημένη μορφή του προβλήματος αρχικών-συνοριακών συνθηκών περιγράφεται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \left[\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda_m + 2\mu_m} \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{x}} - \frac{\beta}{\beta_m} (\underline{\theta} + \underline{t}_1 \dot{\underline{\theta}}) \right] = \frac{1}{\underline{c}_{Em}^2} \frac{\rho}{\rho_m} \ddot{\underline{u}} \\ - \frac{1}{\underline{c}_{Km}^2} \frac{\rho c}{\rho_m c_m} \left(\dot{\underline{\theta}} + \underline{t}_2 \ddot{\underline{\theta}} + \xi_m \frac{\rho_m c_m}{\rho c} \frac{\beta}{\beta_m} \frac{\partial \dot{\underline{u}}}{\partial \underline{x}} \right) + \\ - \frac{\underline{t}_0}{\underline{c}_{Km}^2} \frac{\rho c}{\rho_m c_m} \left(\ddot{\underline{\theta}} + \xi_m \frac{\rho_m c_m}{\rho c} \frac{\beta}{\beta_m} \frac{\partial \ddot{\underline{u}}}{\partial \underline{x}} \right) = - \frac{1}{k_m} \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \left(k \frac{\partial \underline{\theta}}{\partial \underline{x}} \right) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 0 < \underline{x} < \underline{L} \\ 0 < \underline{t} < \infty \end{array} \quad (4.6.1)$$

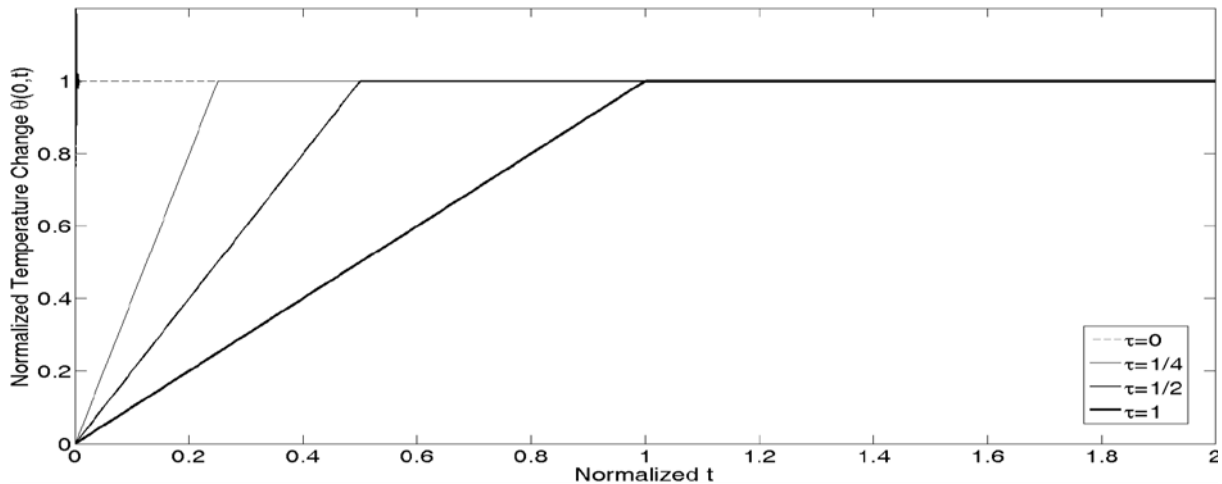
με αρχικές-συνοριακές συνθήκες:

$$\begin{aligned} \underline{u}(\underline{x}, 0) = 0, \quad \dot{\underline{u}}(\underline{x}, 0) = 0, \quad \underline{\theta}(\underline{x}, 0) = 0, \quad \dot{\underline{\theta}}(\underline{x}, 0) = 0, \quad 0 \leq \underline{x} \leq \underline{L} \\ \underline{\theta}(0, \underline{t}) = \begin{cases} \underline{t}/\tau, & 0 \leq \underline{t} \leq \tau \\ 1, & \underline{t} > \tau \end{cases}, \quad \underline{\sigma}_{xx}(0, \underline{t}) = 0, \quad \underline{\theta}(\underline{L}, \underline{t}) = 0, \quad \underline{u}(\underline{L}, \underline{t}) = 0, \quad 0 < \underline{t} < \infty \end{aligned} \quad (4.6.2)$$

όπου $\tau \geq 0$ είναι μία κανονικοποιημένη χρονική παράμετρος.

Η λωρίδα αρχικά βρίσκεται σε ομοιόμορφη θερμοκρασία $T_0 = 300K$, ενώ το συνολικό κανονικοποιημένο πάχος της είναι $\underline{L} = 1$. Τα κανονικοποιημένα πάχη κάθε στρώσης είναι $\underline{L}_c = 0.2 / \underline{L}_{fg} = 0.6 / \underline{L}_m = 0.2$. Οι θερμομηχανικές ιδιότητες της ZrO_2 και του Ti-6Al-4V για $T = 300K$ αναφέρονται στον Πίνακα 4.1, ενώ οι σταθερές του Lamé λ, μ και η θερμική σταθερά β προκύπτουν από τις σχέσεις (4.3.3)-(4.3.5). Επιπλέον, οι κανονικοποιημένες παράμετροι για τη ZrO_2 είναι $\underline{c}_{Ec} = 1.11$, $\underline{c}_{Kc} = 0.49$ και $\underline{\xi}_c = 0.005$, ενώ για το Ti-6Al-4V οι κανονικοποιημένες παράμετροι είναι $\underline{c}_{Em} = 1.00$, $\underline{c}_{Km} = 1.00$ και $\underline{\xi}_m = 0.005$. Για τους χρόνους χαλάρωσης των θεωριών LS και GL θεωρούνται οι κανονικοποιημένες τιμές $\underline{t}_{0c} = \underline{t}_{1c} = \underline{t}_{2c} = 1.5625$ και $\underline{t}_{0m} = \underline{t}_{1m} = \underline{t}_{2m} = 0.64$. Επιπλέον, η κατανομή του κατ' όγκο ποσοστού του μεταλλικού υλικού V_m μέσα στην FGM στρώση θεωρείται ότι ακολουθεί τη σιγμοειδή κατανομή με παράμετρο $p = 2$, σύμφωνα με την οποία η κατανομή μίας ιδιότητας $P = P(x)$ υπολογίζεται από τη σχέση (4.5.3) με $p = 2$.

Στο Σχήμα 4.38 παρουσιάζεται η χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας $\underline{\theta}$ στη θέση $\underline{x} = 0$ για $\tau = 0$, $\tau = 1/4$, $\tau = 1/2$ και $\tau = 1$. Σημειώνεται ότι για $\tau = 0$ η μοναδιαία μεταβολή της θερμοκρασίας στην ανώτερη επιφάνεια γίνεται ακαριαία.



Σχήμα 4.38. Χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας $\underline{\theta}$ στη θέση $\underline{x} = 0$ για διάφορες τιμές της χρονικής παραμέτρου τ

Στη συνέχεια της παραγράφου εξετάζονται τα πεδία της μετακίνησης \underline{u} , της μεταβολής της θερμοκρασίας $\underline{\theta}$ και της τάσης $\underline{\sigma}_{xx}$ που αναπτύσσονται στη λωρίδα $ZrO_2/FGM/Ti-6Al-4V$ για διαφορετικές τιμές της χρονικής παραμέτρου τ . Για τις αναλύσεις χρησιμοποιούνται

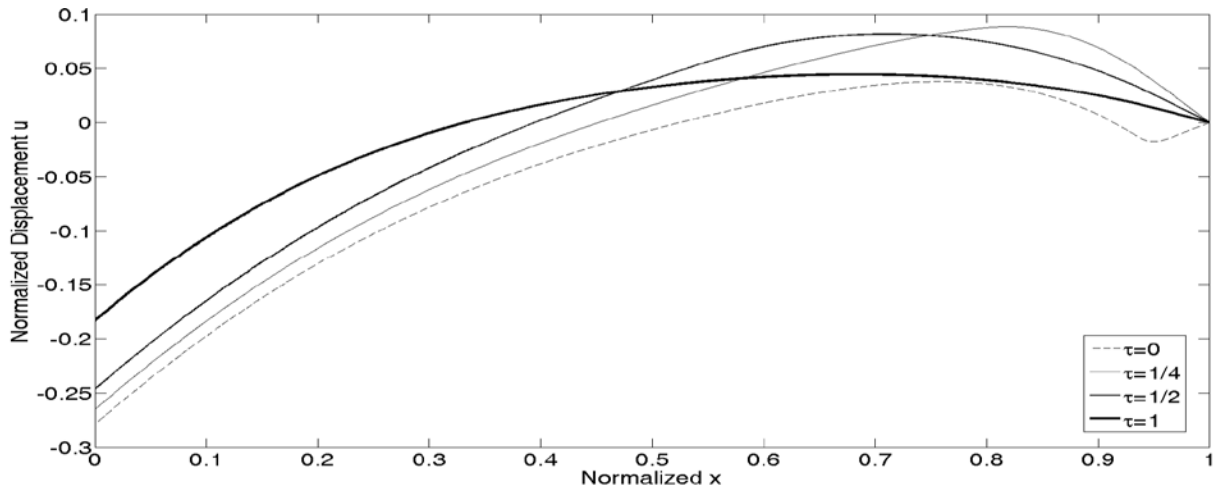
$N_{el} = 2000$ πεπερασμένα στοιχεία και $M_t = 12000$ χρονικά βήματα, για συνολικό κανονικοποιημένο χρόνο $t_{tot} = 6.00$.

Στα Σχήματα 4.39-4.41 φαίνονται η κατανομή της κανονικοποιημένης μετατόπισης \underline{u} , η κατανομή της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας $\underline{\theta}$ και η κατανομή της κανονικοποιημένης τάσης $\underline{\sigma}_{xx}$, αντίστοιχα, τη χρονική στιγμή $\underline{t} = 1.00$ στα πλαίσια της θεωρίας CT, για $\tau = 0$, $\tau = 1/4$, $\tau = 1/2$ και $\tau = 1$. Παρατηρείται ότι για μικρότερες τιμές του τ η απόλυτη τιμή της μετατόπισης, η θερμοκρασία και η μέγιστη εφελκυστική τάση μειώνονται. Αυτό είναι αναμενόμενο διότι η μείωση της παραμέτρου τ αντιστοιχεί σε περισσότερο απότομη μεταβολή της θερμοκρασίας στην ανώτερη επιφάνεια της λωρίδας. Οι αντίστοιχες κατανομές για τις γενικευμένες θεωρίες LS και GL απεικονίζονται στα Σχήματα 4.42-4.44 και 4.45-4.47, όπου προκύπτουν ανάλογα συμπεράσματα. Το μέγεθος του τασικού κύματος αυξάνεται πολύ για $\tau = 0$, γεγονός που διακρίνεται καθαρά ειδικά στα πλαίσια της θεωρίας GL (βλ. Σχήμα 4.47). Επιπλέον, στο Σχήμα 4.45 φαίνεται η ασυνέχεια στο πεδίο της μετατόπισης που προβλέπει η θεωρία GL για $\tau = 0$, ενώ από τη σύγκριση των Σχημάτων 4.43 και 4.46 επιβεβαιώνεται πως οι θεωρίες LS και GL προβλέπουν σχεδόν ταυτόσημες κατανομές για τη θερμοκρασία.

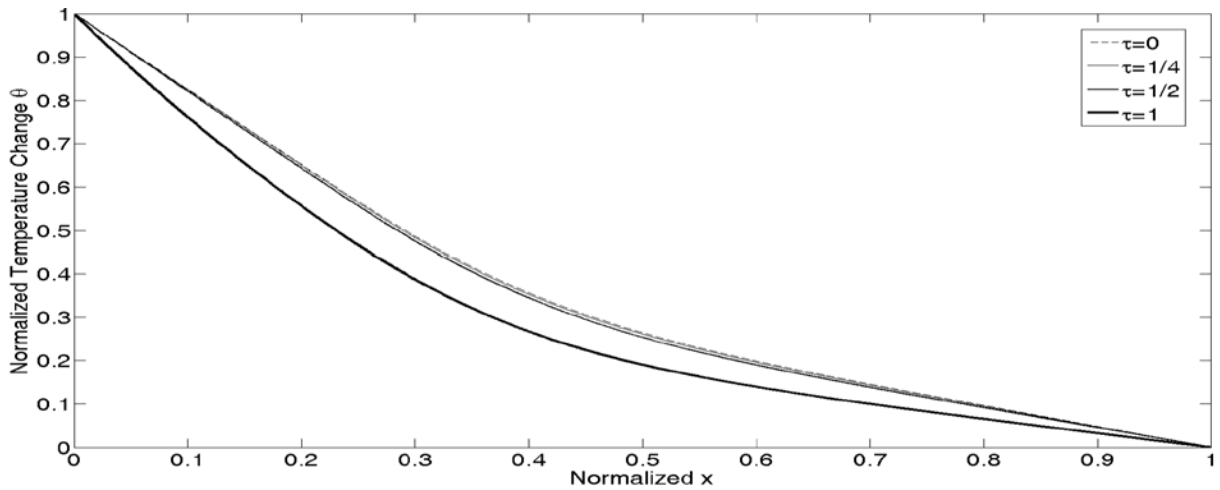
Στα Σχήματα 4.48-4.50 παρουσιάζονται η χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης μετατόπισης \underline{u} , η χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας $\underline{\theta}$ και η χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης τάσης $\underline{\sigma}_{xx}$, αντίστοιχα, στη θέση $\underline{x} = 0.5$ για $\tau = 0$, $\tau = 1/2$ και $\tau = 1$ στα πλαίσια της θεωρίας CT. Τα αντίστοιχα αποτελέσματα για τις θεωρίες LS και GL παρουσιάζονται στα Σχήματα 4.51-4.53 και 4.54-4.56. Από τα Σχήματα αυτά είναι επίσης φανερό πως η μετατόπιση και η τάση αυξάνονται για μικρές τιμές του τ , ειδικά για $\tau \rightarrow 0$. Η παρατήρηση αυτή αποτυπώνεται και στα αποτελέσματα του Πίνακα 4.9, όπου εμφανίζονται οι μέγιστες τιμές της κανονικοποιημένης μετατόπισης \underline{u} , της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας $\underline{\theta}$ και της κανονικοποιημένης τάσης $\underline{\sigma}_{xx}$ στο μέσο της FGM στρώσης για $\tau = 0$, $\tau = 1/4$, $\tau = 1/2$, $\tau = 1$, $\tau = 2$ και $\tau = 4$, στα πλαίσια των θεωριών CT, LS και GL. Από τον Πίνακα 4.9 προκύπτει ακόμη ότι η μέγιστη θερμοκρασία και η τάση που προβλέπουν οι γενικευμένες θεωρίες σε συνθήκες θερμικού σοκ είναι σημαντικά μεγαλύτερες σε σχέση με τα αποτελέσματα της κλασικής συζευγμένης θερμοελαστικότητας, ιδιαίτερα καθώς $\tau \rightarrow 0$.

τ		0	1/4	1/2	1	2	4
CT	$\max \underline{u} $	0.25	0.23	0.22	0.19	0.16	0.08
	$\max \underline{\theta}$	0.27	0.27	0.27	0.27	0.27	0.27
	$\max \underline{\sigma}_{xx}$	0.90	0.57	0.42	0.29	0.21	0.06
LS	$\max \underline{u} $	0.38	0.35	0.35	0.32	0.24	0.11
	$\max \underline{\theta}$	0.62	0.62	0.62	0.58	0.39	0.33
	$\max \underline{\sigma}_{xx}$	2.22	0.66	0.63	0.53	0.33	0.11
GL	$\max \underline{u} $	1.87	0.69	0.66	0.57	0.47	0.19
	$\max \underline{\theta}$	0.63	0.62	0.62	0.58	0.39	0.33
	$\max \underline{\sigma}_{xx}$	68.47	9.57	4.93	1.86	1.16	0.49

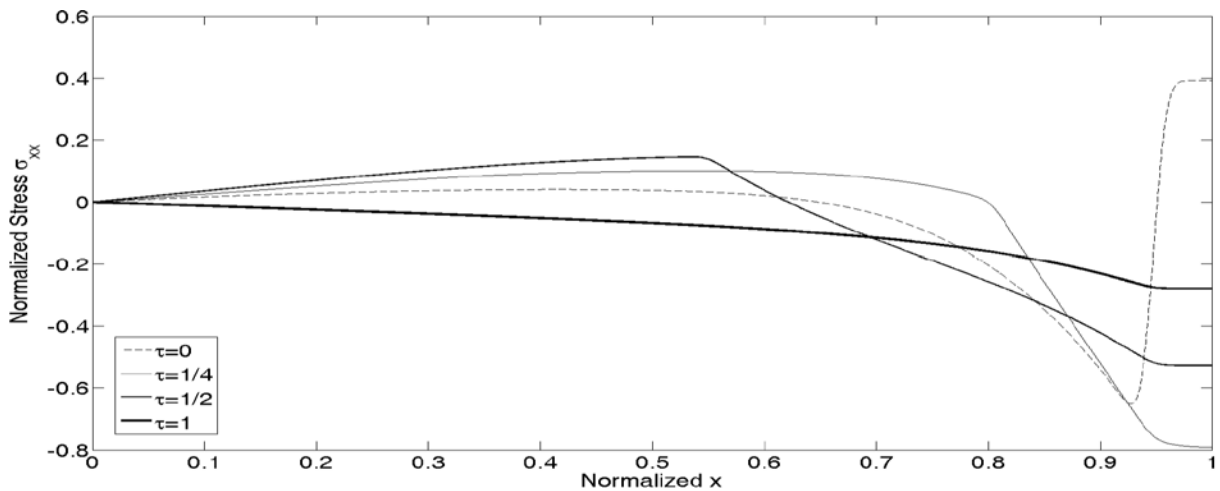
Πίνακας 4.9. Μέγιστες τιμές της κανονικοποιημένης μετατόπισης \underline{u} , της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας $\underline{\theta}$ και της κανονικοποιημένης τάσης $\underline{\sigma}_{xx}$ στη θέση $\underline{x} = 0.5$ στα πλαίσια των θεωριών CT, LS και GL, για διάφορες τιμές του κανονικοποιημένου χρονικού διαστήματος τ



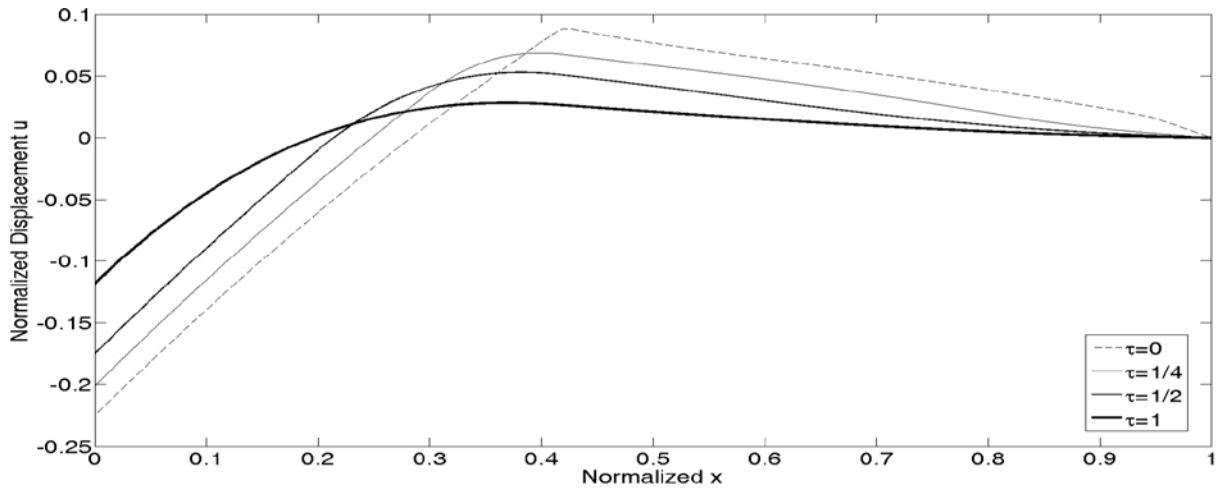
Σχήμα 4.39. Κατανομή της κανονικοποιημένης μετατόπισης u τη χρονική στιγμή $t=1.00$ στα πλαίσια της θεωρίας CT, για διάφορες τιμές της χρονικής παραμέτρου τ



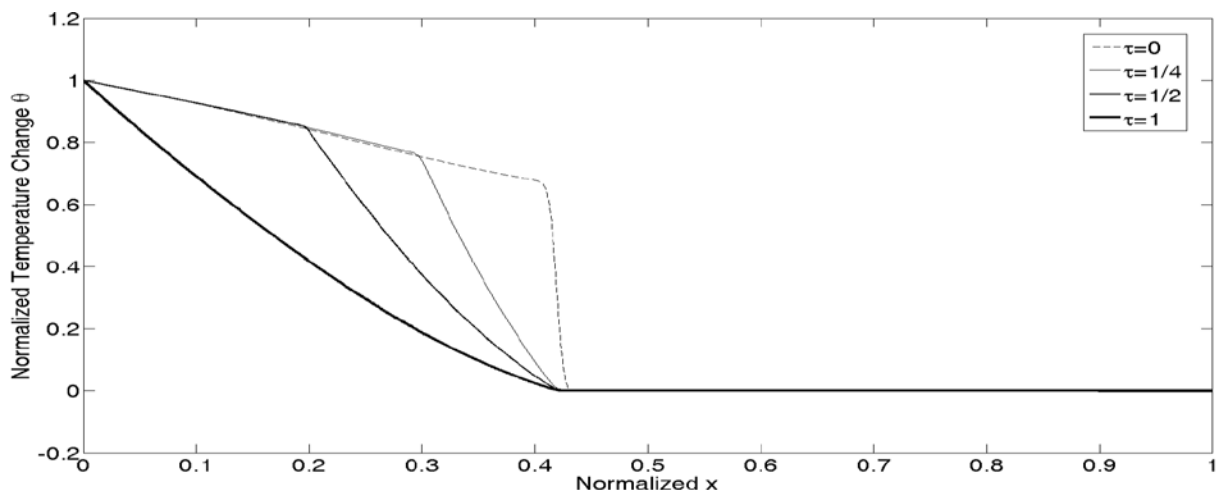
Σχήμα 4.40. Κατανομή της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας θ τη χρονική στιγμή $t=1.00$ στα πλαίσια της θεωρίας CT, για διάφορες τιμές της χρονικής παραμέτρου τ



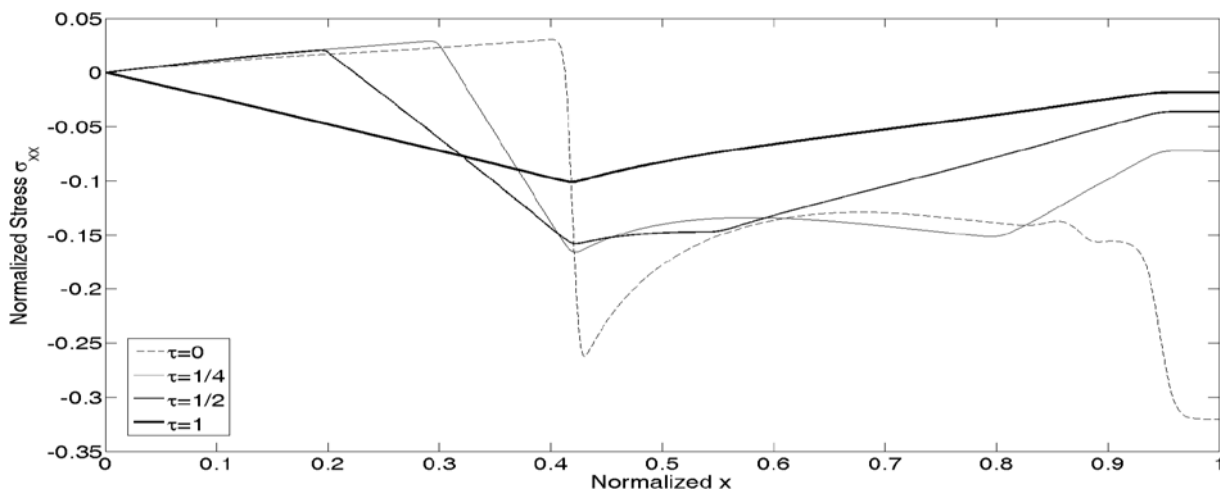
Σχήμα 4.41. Κατανομή της κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} τη χρονική στιγμή $t=1.00$ στα πλαίσια της θεωρίας CT, για διάφορες τιμές της χρονικής παραμέτρου τ



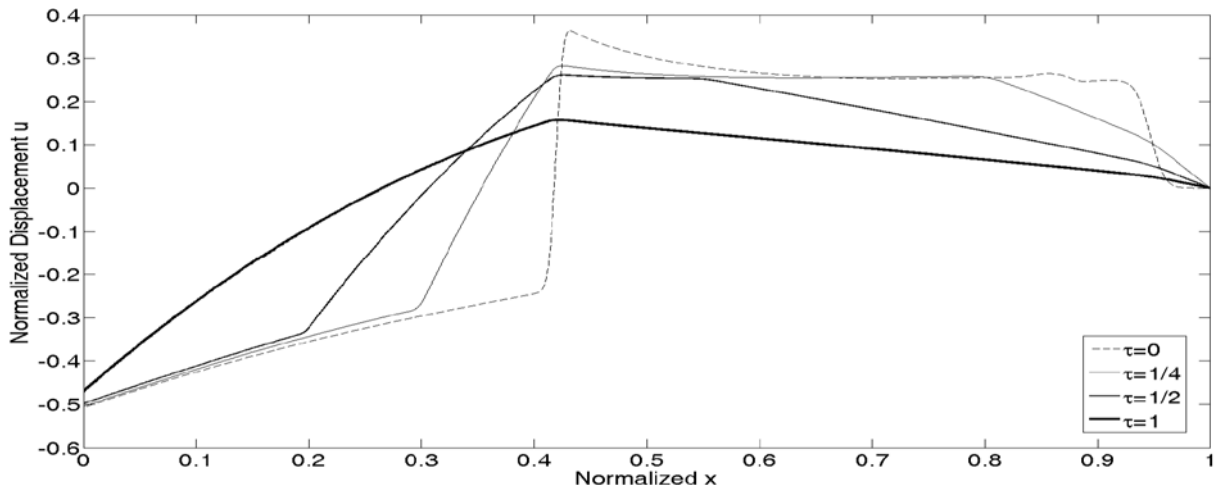
Σχήμα 4.42. Κατανομή της κανονικοποιημένης μετατόπισης u τη χρονική στιγμή $t=1.00$ στα πλαίσια της θεωρίας LS, για διάφορες τιμές της χρονικής παραμέτρου τ



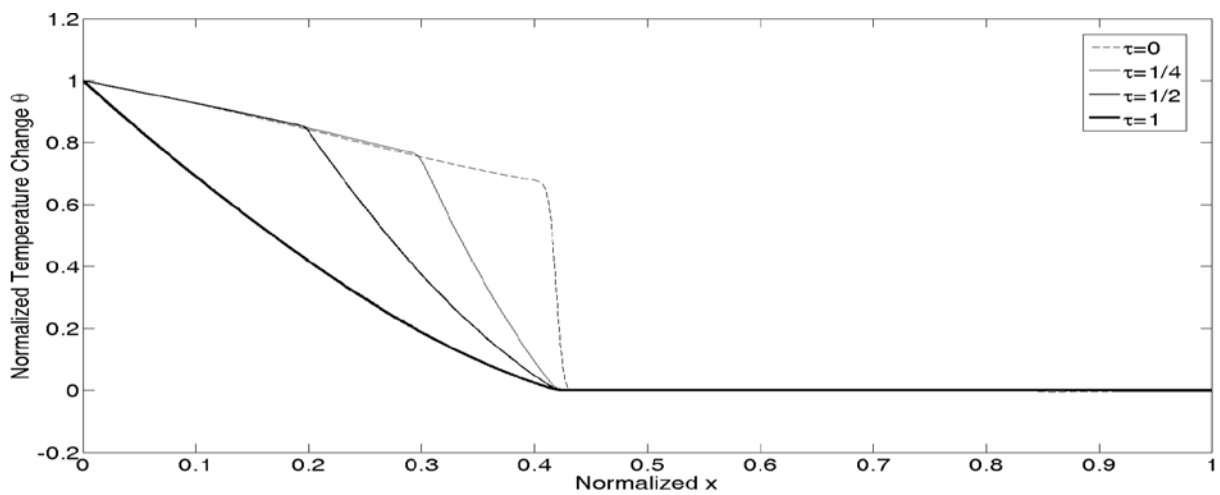
Σχήμα 4.43. Κατανομή της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας θ τη χρονική στιγμή $t=1.00$ στα πλαίσια της θεωρίας LS, για διάφορες τιμές της χρονικής παραμέτρου τ



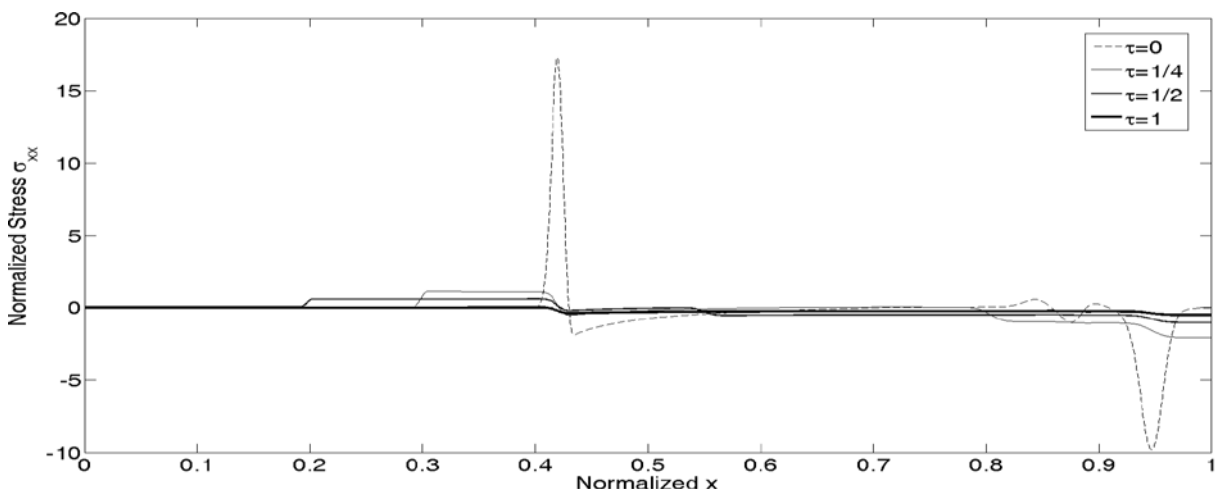
Σχήμα 4.44. Κατανομή της κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} τη χρονική στιγμή $t=1.00$ στα πλαίσια της θεωρίας LS, για διάφορες τιμές της χρονικής παραμέτρου τ



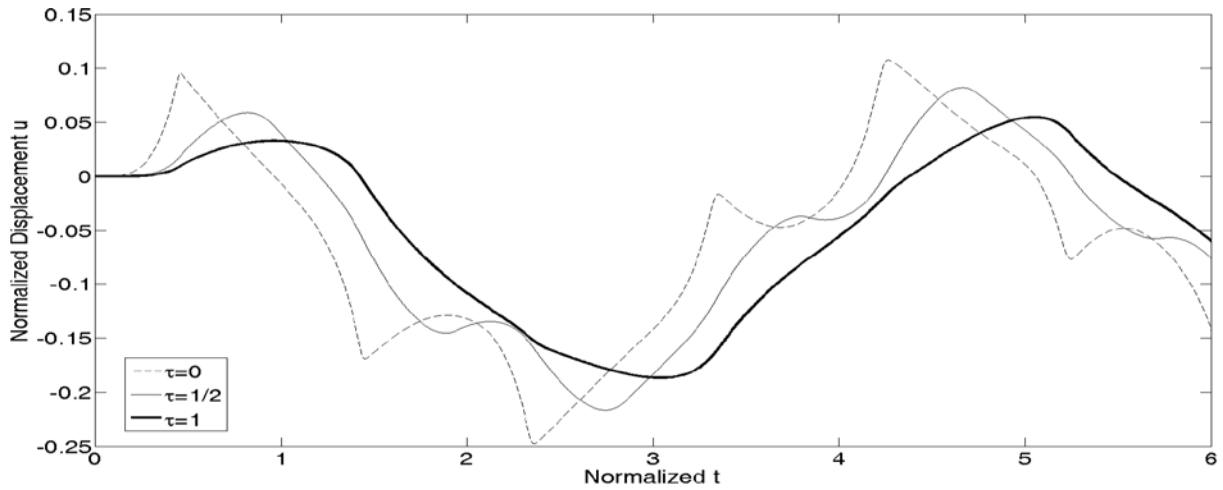
Σχήμα 4.45. Κατανομή της κανονικοποιημένης μετατόπισης u τη χρονική στιγμή $t = 1.00$ στα πλαίσια της θεωρίας GL, για διάφορες τιμές της χρονικής παραμέτρου τ



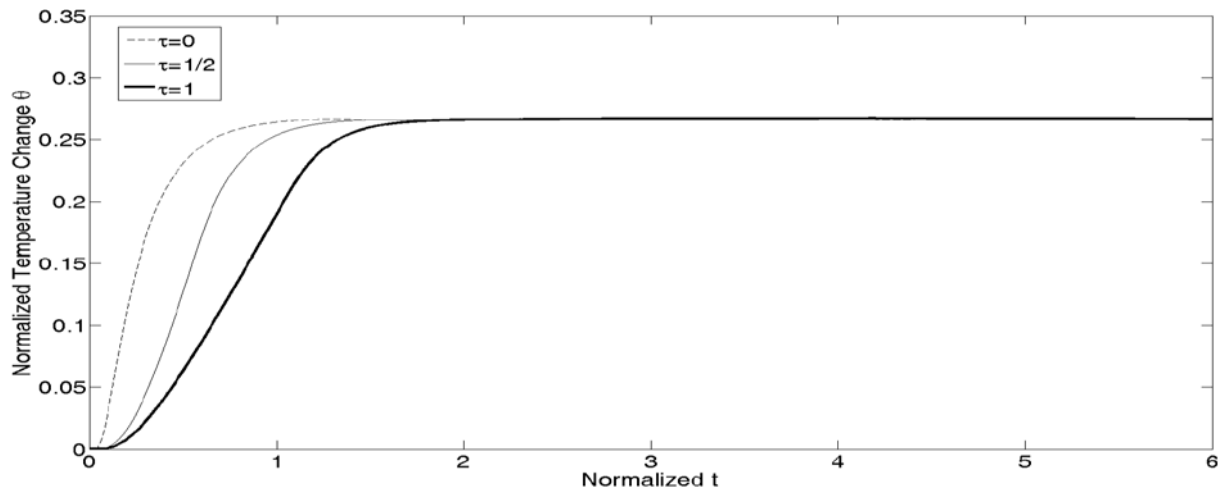
Σχήμα 4.46. Κατανομή της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας θ τη χρονική στιγμή $t = 1.00$ στα πλαίσια της θεωρίας GL, για διάφορες τιμές της χρονικής παραμέτρου τ



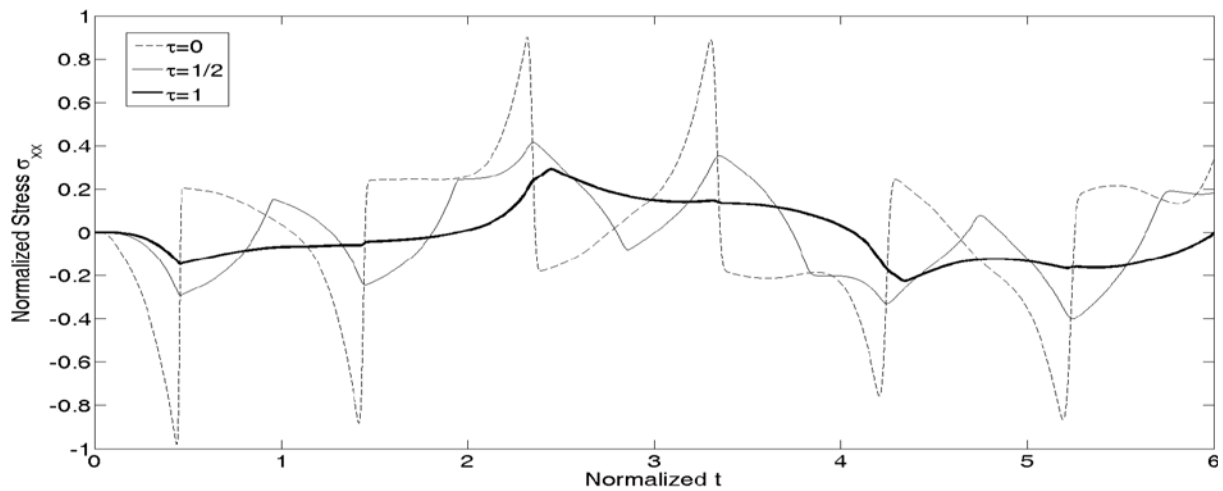
Σχήμα 4.47. Κατανομή της κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} τη χρονική στιγμή $t = 1.00$ στα πλαίσια της θεωρίας GL, για διάφορες τιμές της χρονικής παραμέτρου τ



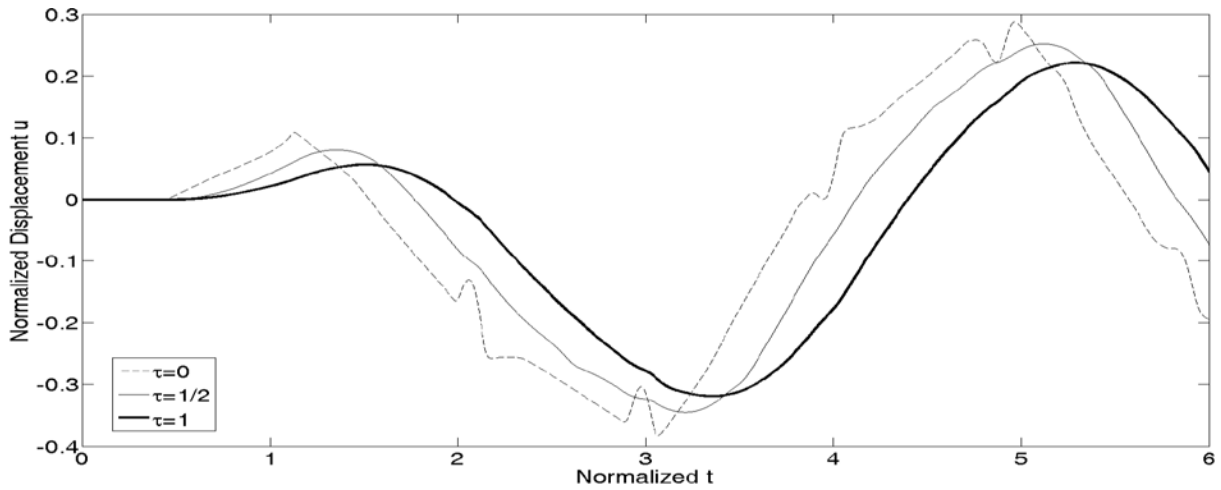
Σχήμα 4.48. Χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης μετατόπισης u στη θέση $\bar{x}=0.5$ για διάφορες τιμές της χρονικής παραμέτρου τ , στα πλαίσια της θεωρίας CT



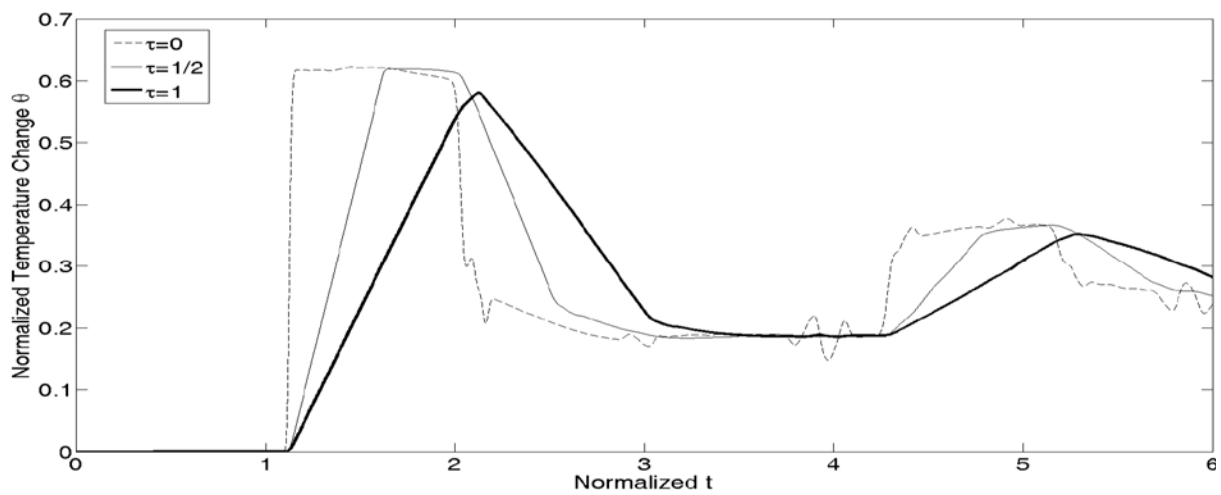
Σχήμα 4.49. Χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας θ στη θέση $\bar{x}=0.5$ για διάφορες τιμές της χρονικής παραμέτρου τ , στα πλαίσια της θεωρίας CT



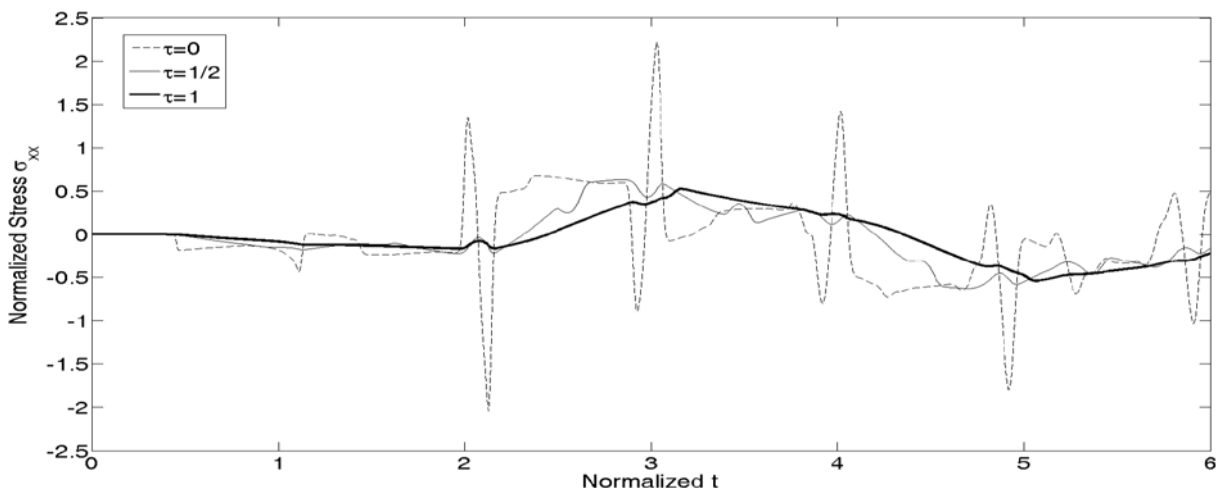
Σχήμα 4.50. Χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} στη θέση $\bar{x}=0.5$ για διάφορες τιμές της χρονικής παραμέτρου τ , στα πλαίσια της θεωρίας CT



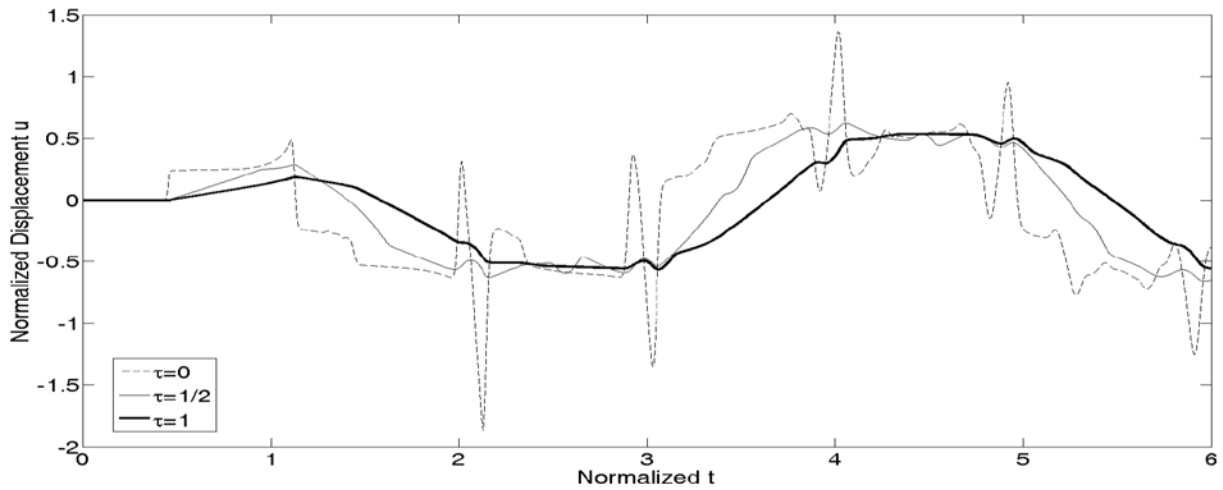
Σχήμα 4.51. Χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης μετατόπισης u στη θέση $x = 0.5$ για διάφορες τιμές της χρονικής παραμέτρου τ , στα πλαίσια της θεωρίας LS



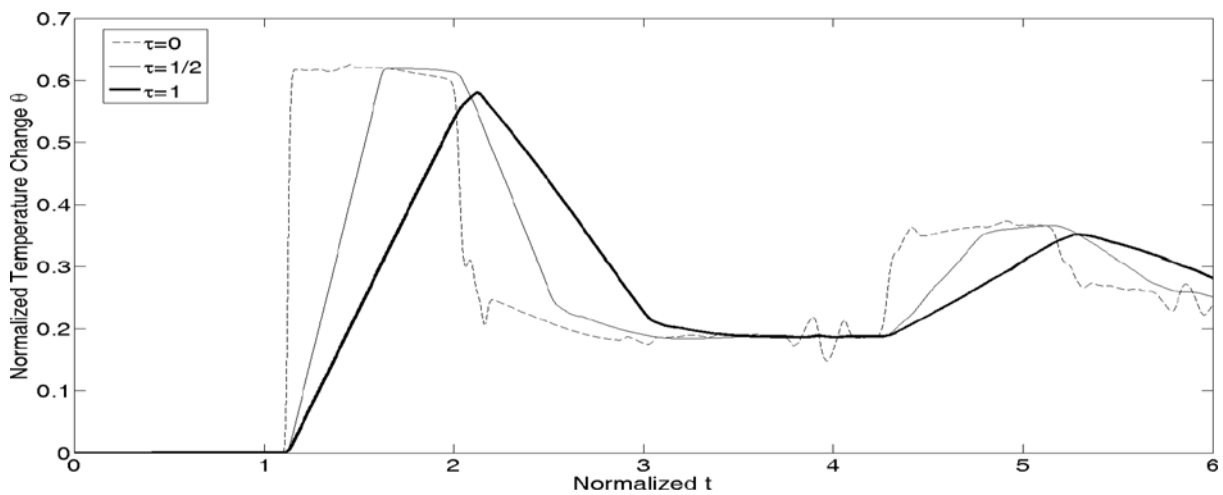
Σχήμα 4.52. Χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας θ στη θέση $x = 0.5$ για διάφορες τιμές της χρονικής παραμέτρου τ , στα πλαίσια της θεωρίας LS



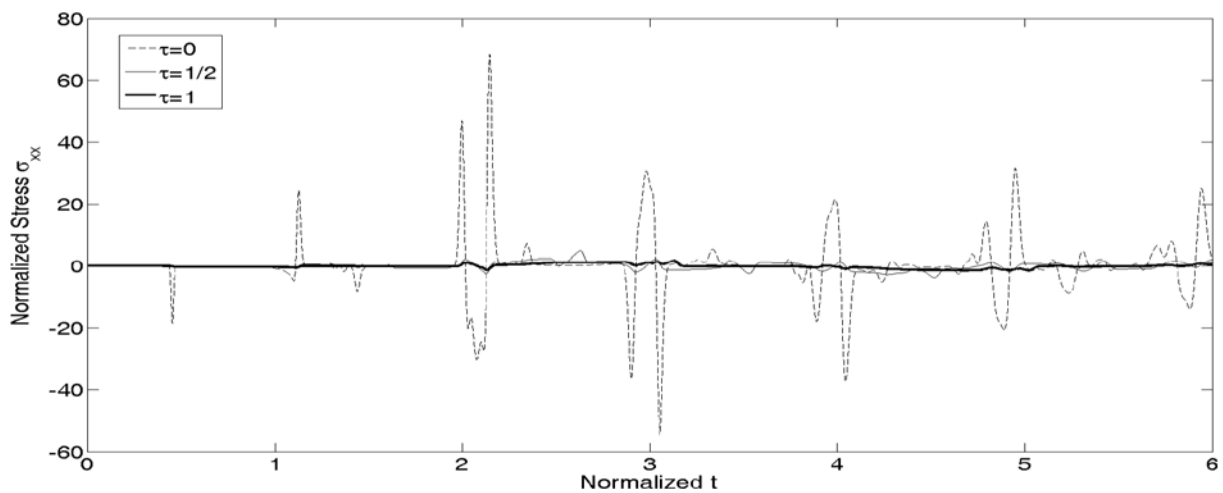
Σχήμα 4.53. Χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} στη θέση $x = 0.5$ για διάφορες τιμές της χρονικής παραμέτρου τ , στα πλαίσια της θεωρίας LS



Σχήμα 4.54. Χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης μετατόπισης u στη θέση $x = 0.5$ για διάφορες τιμές της χρονικής παραμέτρου τ , στα πλαίσια της θεωρίας GL



Σχήμα 4.55. Χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας θ στη θέση $x = 0.5$ για διάφορες τιμές της χρονικής παραμέτρου τ , στα πλαίσια της θεωρίας GL



Σχήμα 4.56. Χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} στη θέση $x = 0.5$ για διάφορες τιμές της χρονικής παραμέτρου τ , στα πλαίσια της θεωρίας GL

4.7. Συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο μελετήθηκαν τα μεταβατικά πεδία μετατόπισης, θερμοκρασίας και τάσης που αναπτύσσονται σε μία FGM λωρίδα από κεραμικό/μεταλλικό υλικό υπό συνθήκες θερμικού σοκ στην άνω επιφάνειά της, στα πλαίσια της ενοποιημένης θεωρίας γενικευμένης θερμοελαστικότητας των Bagri και Eslami. Σε όλες τις εφαρμογές του κεφαλαίου, η κατανομή των θερμομηχανικών ιδιοτήτων μέσα στην FGM στρώση θεωρήθηκε ότι είναι σιγμοειδής με παράμετρο $p > 0$. Το χαρακτηριστικό της σιγμοειδούς κατανομής είναι ότι οι συνολικές ποσότητες του κεραμικού και του μεταλλικού υλικού στην FGM στρώση είναι ίσες μεταξύ τους, ανεξάρτητα από την τιμή της παραμέτρου p .

Η ενοποιημένη θεωρία των Bagri και Eslami εμπεριέχει τις θεωρίες γενικευμένης θερμοελαστικότητας Lord-Shulman, Green-Lindsay και Green-Naghdi τύπου II, καθώς και την κλασική συζευγμένη θερμοελαστικότητα, ως ειδικές περιπτώσεις. Αρχικά, τα χαρακτηριστικά των θεωριών αυτών παρουσιάστηκαν μέσα από τη μελέτη της θερμομηχανικής συμπεριφοράς μίας ομοιογενούς λωρίδας που υποβάλλεται σε απότομη αύξηση της θερμοκρασίας στην άνω επιφάνειά της. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης έδειξαν ότι οι θεωρίες Lord-Shulman και Green-Lindsay προβλέπουν παρόμοια πεδία θερμοκρασίας, ενώ επιπλέον η θεωρία Green-Lindsay προβλέπει μεγαλύτερες τάσεις από τις άλλες γενικευμένες θεωρίες. Επίσης, καθώς η θεωρία Green-Naghdi τύπου II δεν προβλέπει απόσβεση ενέργειας και είναι κατάλληλη μόνο για πολύ μικρό χρονικό διάστημα, δε χρησιμοποιήθηκε στις επόμενες εφαρμογές.

Η επόμενη εφαρμογή αφορούσε μία κεραμική/μεταλλική FGM στρώση σε συνθήκες απότομης αύξησης της θερμοκρασίας στην άνω επιφάνειά της, στα πλαίσια της θεωρίας Lord-Shulman. Εξετάστηκαν τρεις διαφορετικοί συνδυασμοί υλικών, όπου για κάθε συνδυασμό έγινε μία παραμετρική ανάλυση για την επιλογή της τιμής της παραμέτρου p που οδηγεί στην ελαχιστοποίηση της αναπτυσσόμενης εφελκυστικής τάσης. Οι τιμές που εξετάστηκαν για την παράμετρο p κυμάνθηκαν από $p=1/20$ έως $p=20$. Η ανάλυση έδειξε ότι η τάση ελαχιστοποιείται για $p=1$ και στους τρεις συνδυασμούς υλικών.

Στη συνέχεια εξετάστηκε το ίδιο πρόβλημα για διαφορετικές τιμές των χρόνων χαλάρωσης t_{0c} και t_{0m} του κεραμικού και του μεταλλικού υλικού, όπου ο λόγος t_{0c}/t_{0m} ήταν σταθερός. Στην οριακή περίπτωση που οι χρόνοι χαλάρωσης των υλικών θεωρηθούν μηδενικοί, τότε προκύπτει η κλασική συζευγμένη θερμοελαστικότητα. Τα αποτελέσματα των αναλύσεων έδειξαν ότι η επίδραση του χρόνου χαλάρωσης των υλικών στο μέγεθος της τάσης είναι σημαντική. Επομένως, αν και τα αποτελέσματα των γενικευμένων θεωριών συγκλίνουν γρήγορα προς τα αποτελέσματα της κλασικής θερμοελαστικότητας, εντούτοις δεν μπορούν να αγνοηθούν.

Η θεωρία Green-Lindsay χρησιμοποιήθηκε για την ανάλυση μίας $ZrO_2/FGM/Ti-6Al-4V$ λωρίδας τριών στρώσεων που υποβάλλεται σε απότομη ροή θερμότητας στην άνω επιφάνειά της. Η ανάλυση αφορούσε και πάλι την επίδραση της παραμέτρου p της σιγμοειδούς κατανομής των ιδιοτήτων στην FGM στρώση στη θερμομηχανική συμπεριφορά της λωρίδας. Στην περίπτωση αυτή τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η εφελκυστική τάση ελαχιστοποιείται για μεγάλες τιμές του p , δηλαδή καθώς η λωρίδα τείνει να γίνει σύνθετη λωρίδα $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ (δύο στρώσεων).

Στην τελευταία εφαρμογή μελετήθηκε η θερμομηχανική συμπεριφορά μίας $ZrO_2/FGM/Ti-6Al-4V$ λωρίδας τριών στρώσεων που υποβάλλεται σε συνθήκες απότομης μεταβολής της θερμοκρασίας της ανώτερης επιφάνειάς της. Συγκεκριμένα, διερευνήθηκε η επίδραση του χρονικού διαστήματος τ μέσα στο οποίο λαμβάνει χώρα η μεταβολή της θερμοκρασίας της ανώτερης επιφάνειας της λωρίδας, στα πλαίσια των γενικευμένων θεωριών Lord-Shulman και

Green-Lindsay, καθώς και στα πλαίσια της κλασικής συζευγμένης θερμοελαστικότητας. Η ανάλυση έδειξε ότι η τάση αυξάνεται σημαντικά για μικρές τιμές του τ , ειδικά για $\tau \rightarrow 0$. Επιπλέον, οι θεωρίες γενικευμένης θερμοελαστικότητας προβλέπουν σημαντικά μεγαλύτερες τάσεις από την κλασική συζευγμένη θερμοελαστικότητα, ιδιαίτερα καθώς $\tau \rightarrow 0$.

Οι παραπάνω εφαρμογές αποδεικνύουν ότι σε συνθήκες απότομης μεταβολής της θερμοκρασίας, τα αποτελέσματα της γενικευμένης θερμοελαστικότητας διαφέρουν σημαντικά από τα αποτελέσματα της κλασικής θερμοελαστικότητας. Η διαφορά αυτή γίνεται πιο έντονη καθώς το χρονικό διάστημα μέσα στο οποίο λαμβάνει χώρα η μεταβολή της θερμοκρασίας γίνεται μικρότερο και συγκρίσιμο με τον χρόνο χαλάρωσης των υλικών t_0 της θεωρίας Lord-Shulman. Ωστόσο, η παραμετρική ανάλυση της θερμομηχανικής συμπεριφοράς μίας FGM λωρίδας ως προς την παράμετρο p της κατανομής των ιδιοτήτων δεν μπορεί να γίνει στα πλαίσια της γενικευμένης θερμοελαστικότητας, για δύο βασικούς λόγους. Ο πρώτος λόγος είναι ότι τα ποιοτικά συμπεράσματα που προκύπτουν από τα αποτελέσματα των διαφόρων θεωριών γενικευμένης θερμοελαστικότητας δεν είναι απαραίτητως σύμφωνα μεταξύ τους. Ο δεύτερος και σημαντικότερος λόγος είναι ότι δεν υπάρχουν δεδομένα για τις τιμές των νέων ιδιοτήτων που εισάγουν οι γενικευμένες θεωρίες σε συγκεκριμένα υλικά, ενώ παράλληλα οι αναλύσεις έδειξαν ότι οι αναπτυσσόμενες τάσεις επηρεάζονται σημαντικά από τις ιδιότητες αυτές.

Στο επόμενο κεφάλαιο τα προβλήματα αυτά παρακάμπτονται, καθώς οι αναλύσεις γίνονται στα πλαίσια της κλασικής συζευγμένης θερμοελαστικότητας. Επιπρόσθετα, συνυπολογίζεται η εξάρτηση των ιδιοτήτων των υλικών από τη θερμοκρασία, γεγονός το οποίο καθιστά τις αναλύσεις πιο ρεαλιστικές για την περίπτωση μεγάλων θερμοκρασιακών μεταβολών.

4.8. Βιβλιογραφία

- [1] Hetnarski, R. B., Eslami, M. R., *Thermal Stresses - Advanced Theory and Applications*, Springer Science+Business Media, Dordrecht, Netherlands, 2009.
- [2] Kothari, S. and Mukhopadhyay, S., Study of a problem of functionally graded hollow disk under different thermoelasticity theories—An analysis of phase-lag effects, *Comp. Math. Appl.*, Vol.66, pp.1306-1321, 2013.
- [3] Bagri, A. and Eslami, M. R., Generalized coupled thermoelasticity of functionally graded annular disk considering the Lord-Shulman theory, *Compos. Struct.*, Vol.83, pp.168-179, 2008.
- [4] Shariyat, M., Nonlinear transient stress and wave propagation analyses of the FGM thick cylinders, employing a unified generalized thermoelasticity theory, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol.65, pp.24-37, 2012.
- [5] Darabseh, T., Yilmaz, N. and Bataineh, M., Transient thermoelasticity analysis of functionally graded thick hollow cylinder based on Green-Lindsay model, *Int. J. Mech. Mater. Des.*, Vol.8, pp.247-255, 2012.
- [6] Hosseini, S. M., Coupled thermoelasticity and second sound in finite length functionally graded thick hollow cylinders, *Mater. Design*, Vol.30, pp.2011-2023, 2009.
- [7] Bagri, A. and Eslami, M. R., A unified generalized thermoelasticity formulation; application to thick functionally graded cylinders, *J. Therm. Stresses*, Vol.30, No 9 and 10, pp.911-930, 2007.

- [8] Ghosh, M. K. and Kanoria, M., Analysis of thermoelastic response in a functionally graded spherically isotropic hollow sphere based on Green-Lindsay theory, *Acta Mech.*, Vol.207, pp.51-67, 2009.
- [9] Bagri, A. and Eslami, M. R., Analysis of thermoelastic waves in functionally graded hollow spheres based on the Green-Lindsay theory, *J. Therm. Stresses*, Vol.30, No 12, pp.1175-1193, 2007.
- [10] Sherief, H. H. and Dhaliwal, R. S., Generalized one-dimensional thermal-shock problem for small times, *J. Therm. Stresses*, Vol.4, pp.407-420, 1981.
- [11] Lord, H. and Shulman, Y., Generalized dynamic theory of thermoelasticity, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.15, pp.299-309, 1967.
- [12] Hetnarski, R. B., Coupled one-dimensional thermal shock problem for small times, *Archivum Mechaniki Stosowanej*, Vol.13, pp.295-306, 1961.
- [13] Sherief, H. H., State space approach to thermoelasticity with two relaxation times, *Int. J. Eng. Sci.*, Vol.31, No.8, pp.1177-1189, 1993.
- [14] Green, A. E. and Lindsay, K. A., Thermoelasticity, *J. Elasticity*, Vol.2, pp.1-7, 1971.
- [15] Honig, G. and Hirdes, U., A method for the numerical inversion of Laplace transforms, *J. Comput. Appl. Math.*, Vol.10, pp.113-132, 1984.
- [16] Chandrasekharaiah, D. S., One-dimensional wave propagation in the linear theory of thermoelasticity without energy dissipation, *J. Therm. Stresses*, Vol.19, pp.695-710, 1996.
- [17] Green, A. E. and Naghdi, P. M., Thermoelasticity without energy dissipation, *J. Elasticity*, Vol.31, pp.189-208, 1993.
- [18] Taheri, H., Fariborz, S. and Eslami, M. R., Thermoelasticity solution of a layer using the Green-Naghdi model, *J. Therm. Stresses*, Vol.27, No.8, pp.691-704, 2004.
- [19] Durbin, F., Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method, *Comput. J.*, Vol.17, pp.371-376, 1974.
- [20] Bagri, A., Taheri, H., Eslami, M. R. and Fariborz, S., Generalized coupled thermoelasticity of a layer, *J. Therm. Stresses*, Vol.29, No.4., pp.359-370, 2006.
- [21] Bagri, A., Eslami, M. R. and Samsam-Shariat, B., Generalized coupled thermoelasticity of functionally graded layers, *ASME Conference, ESDA2006*, Torino, Italy, July 4-7, 2006.
- [22] Gupta, A. and Talha, M., Recent development in modeling and analysis of functionally graded materials and structures, *Prog. Aerosp. Sci.*, Vol.79, pp.1-14, 2015.
- [23] Hughes, T. J. R., *The Finite Element Method. Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Prentice Hall, Inc., New Jersey, USA, 1987.
- [24] Youssef, H. M. and El-Bary, A. A., Thermal shock problem of a generalized thermoelastic layered composite material with variable thermal conductivity, *Math. Probl. Eng.*, Vol.2006, pp.1-14, 2006.
- [25] Hosseini Zad, S. K., Komeili, A., Eslami, M. R. and Fariborz, S., Classical and generalized coupled thermoelasticity analysis in one-dimensional layered media, *Arch. Appl. Mech.*, Vol.82, pp.267-282, 2012.
- [26] Tian, X., Shen Y., Chen, C. and He, T., A direct finite element method study of generalized thermoelastic problems, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.43, pp.2050-2063, 2006.
- [27] Bagri, A. and Eslami, M. R., A unified generalized thermoelasticity; solution for cylinders and spheres, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol.49, pp.1325-1335, 2007.
- [28] Voigt, W., Über die beziehungzwischen den beiden elastizitätskonstanten isotroper körper, *Wied. Ann.*, Vol.38, pp.573-587, 1889.
- [29] Mori, T. and Tanaka, K., Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions, *Acta Metall.*, Vol.2, pp.1571-1574, 1973.

- [30] Malvern, L. E., *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, USA, 1969.
- [31] Shariyat, M., Dynamic thermal buckling of suddenly heated temperature-dependent FGM cylindrical shells, under combined axial compression and external pressure, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.45, pp.2598-2612, 2008.
- [32] Shen, H.-S. and Wang, H., Nonlinear bending of FGM cylindrical panels resting on elastic foundations in thermal environments, *Eur. J. Mech. A-Solids*, Vol.49, pp.49-59, 2015.
- [33] Na, K.-S. and Kim, J.-H., Three-dimensional thermomechanical buckling analysis for functionally graded composite plates, *Compos. Struct.*, Vol.73, pp.413-422, 2006.

Θερμοελαστική Ανάλυση Λωρίδας Διαβαθμισμένων και Θερμοκρασιακά-Εξαρτώμενων Ιδιοτήτων

5.1. Εισαγωγή

Τα προηγούμενα κεφάλαια της διδακτορικής διατριβής αφορούν στη μελέτη της θερμομηχανικής συμπεριφοράς μίας λωρίδας από κεραμικό/μεταλλικό FGM υλικό σε συνθήκες θερμικού σοκ, στα πλαίσια διαφόρων θεωριών γενικευμένης θερμοελαστικότητας. Στη μελέτη αυτή οι θερμομηχανικές ιδιότητες των υλικών θεωρήθηκαν σταθερές, δηλαδή ανεξάρτητες της θερμοκρασίας (temperature-independent properties). Ωστόσο, σε συνθήκες έντονων θερμοκρασιακών μεταβολών η επίδραση της θερμοκρασίας στις ιδιότητες των υλικών είναι σημαντική και συχνά δεν μπορεί να αγνοηθεί [1-6].

Στο παρόν κεφάλαιο εξετάζεται η συμπεριφορά μίας λωρίδας από κεραμικό/μεταλλικό FGM υλικό που υποβάλλεται σε έντονες θερμομηχανικές καταπονήσεις, όπου οι ιδιότητες των υλικών εξαρτώνται από τη θερμοκρασία (temperature-dependent properties). Η ανάλυση της θερμομηχανικής συμπεριφοράς της λωρίδας γίνεται στο πλαίσιο της κλασικής συζευγμένης θερμοελαστικότητας, καθώς στη βιβλιογραφία δεν υπάρχουν διαθέσιμες οι εκφράσεις των νέων παραμέτρων υλικού που εισάγουν οι θεωρίες γενικευμένης θερμοελαστικότητας ως συναρτήσεις της θερμοκρασίας. Επιπλέον, όπως έχει ήδη αναφερθεί στην παράγραφο 2.5, σε υψηλές θερμοκρασίες ο χρόνος χαλάρωσης (της θεωρίας Lord-Shulman) των υλικών γίνεται ακόμη μικρότερος [7]. Κατά συνέπεια, στην περίπτωση που λαμβάνεται υπόψη η επίδραση της θερμοκρασίας στις ιδιότητες των υλικών, τα αποτελέσματα των γενικευμένων θεωριών θερμοελαστικότητας συγκλίνουν ακόμη πιο γρήγορα στα αποτελέσματα της κλασικής συζευγμένης θερμοελαστικότητας.

Η μαθηματική ανάλυση του παραπάνω προβλήματος είναι πολύπλοκη, καθώς οι διαφορικές εξισώσεις που το περιγράφουν είναι μη γραμμικές. Για το λόγο αυτό, ο αριθμός των δημοσιεύσεων που σχετίζονται με τη θερμοελαστική ανάλυση δομικών σχηματισμών από FGMs με θερμοκρασιακά-εξαρτώμενες ιδιότητες είναι μικρός. Οι Obata και Noda [8] ασχολήθηκαν με το στατικό πρόβλημα προσδιορισμού των θερμικών τάσεων σε μία FGM πλάκα. Για την επίλυση του προβλήματος προσομοίωσαν την FGM πλάκα ως μία σύνθετη πλάκα πολλών στρώσεων (multi-layered plate), όπου σε κάθε στρώση οι ιδιότητες του υλικού θεωρούνταν σταθερές. Οι Tanigawa, Matsumoto και Akai [9] αντιμετώπισαν το αντίστοιχο δυναμικό πρόβλημα χρησιμοποιώντας την ίδια προσομοίωση. Οι Wang, Mai και Zhang [10] μελέτησαν τα μεταβατικά πεδία θερμοκρασίας και θερμικών τάσεων σε FGMs, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων για τη χωρική διακριτοποίηση του προβλήματος και τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών για τη χρονική ολοκλήρωση. Ο Shariyat [11] χρησιμοποίησε την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων σε συνδυασμό με το μετασχηματισμό Laplace, για την ανάλυση του αντίστοιχου δυναμικού προβλήματος σε FGM κύλινδρο. Σημειώνεται ότι στις παραπάνω δημοσιεύσεις [8-11] οι αναλύσεις γίνονται στο πλαίσιο της κλασικής ασύζευκτης θερμοελαστικότητας.

Σε συνθήκες υψηλών θερμοκρασιών οι θερμομηχανικές ιδιότητες των υλικών μπορούν να εκφραστούν ως πολυωνυμικές συναρτήσεις τρίτου βαθμού της απόλυτης θερμοκρασίας T [12]. Συνεπώς, μία ιδιότητα $P(T)$ ενός υλικού υπολογίζεται από την εξής σχέση:

$$P(T) = P_0 (1 + P_1 T + P_2 T^2 + P_3 T^3) \quad (5.1.1)$$

όπου P_0, P_1, P_2, P_3 είναι σταθερές του υλικού.

Στις εφαρμογές του παρόντος κεφαλαίου ως κεραμικό υλικό χρησιμοποιείται η ZrO_2 και ως μεταλλικό υλικό το $Ti-6Al-4V$. Οι ιδιότητες των υλικών αυτών συναρτήσει της απόλυτης θερμοκρασίας T δίνονται στους Πίνακες 5.1-5.2 [13,14], ενώ τα αντίστοιχα γραφήματα για $300 \leq T \leq 1000$ φαίνονται στο Σχήμα 5.1. Όπως προκύπτει από το Σχήμα 5.1, η επίδραση της θερμοκρασίας στο λόγο του Poisson ν και στην πυκνότητα ρ είναι αμελητέα, συνεπώς οι ιδιότητες αυτές μπορούν να θεωρηθούν ως ανεξάρτητες της θερμοκρασίας. Επιπλέον, η διαφορά του συντελεστή θερμικής διαστολής α , της θερμικής αγωγιμότητας k και της ειδικής θερμοχωρητικότητας c των δύο υλικών αυξάνεται σε υψηλές θερμοκρασίες. Τέλος, παρατηρείται ότι το μέτρο ελαστικότητας των υλικών μειώνεται καθώς η θερμοκρασία αυξάνεται, γεγονός που οδηγεί και στη μείωση των αναπτυσσόμενων τάσεων [4].

Από τις παραπάνω παρατηρήσεις έπεται ότι οι ιδιότητες μίας λωρίδας από κεραμικό/μεταλλικό FGM υλικό δεν είναι εν γένει ανεξάρτητες της θερμοκρασίας. Με βάση τις διαφορικές εξισώσεις της κλασικής συζευγμένης θερμοελαστικότητας για θερμοκρασιακά-εξαρτώμενες ιδιότητες, ο κώδικας πεπερασμένων στοιχείων που παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 3 τροποποιείται κατάλληλα και χρησιμοποιείται και για τις εφαρμογές του παρόντος κεφαλαίου.

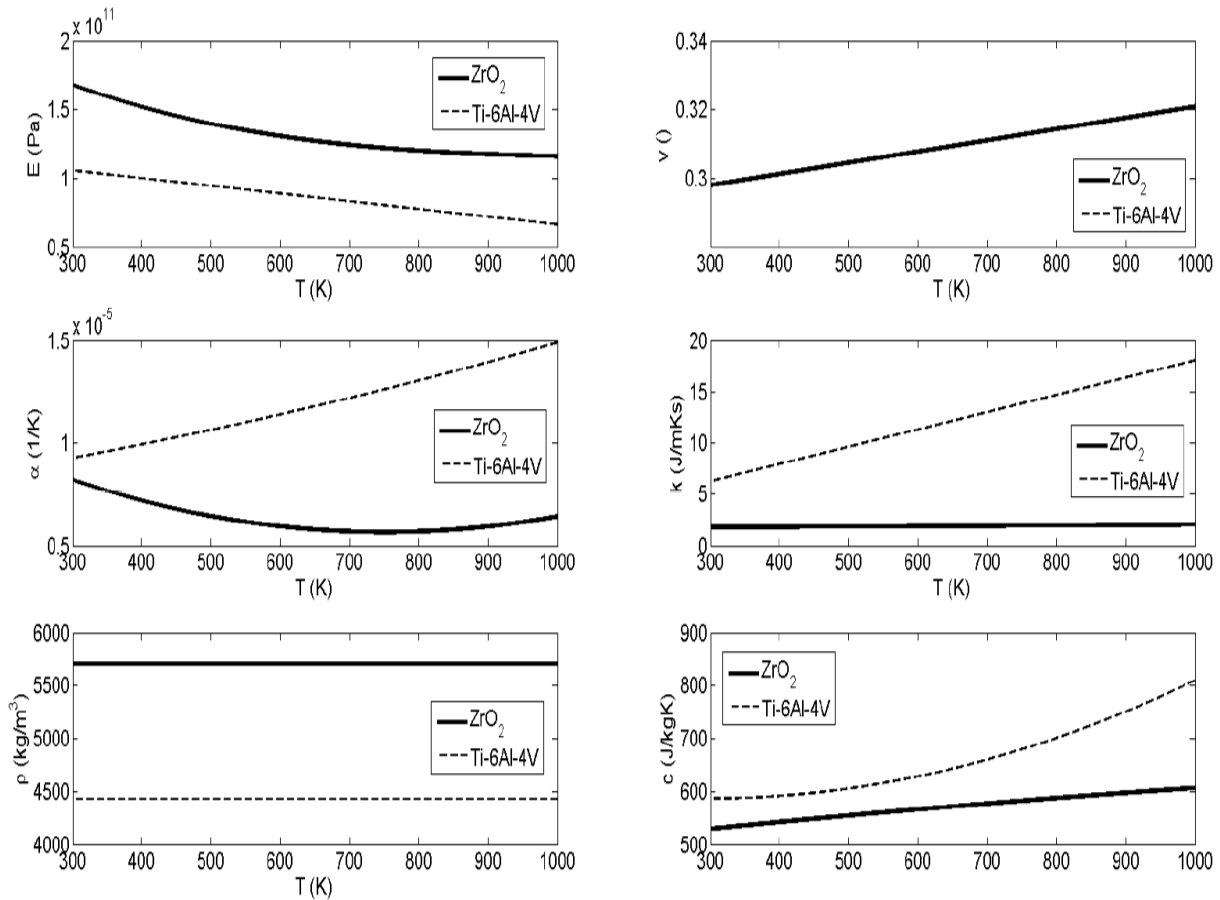
Τέλος, σημειώνεται ότι για τις αναλύσεις του παρόντος κεφαλαίου (αλλά και της διδακτορικής διατριβής γενικότερα) χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις της γραμμικής θερμοελαστικότητας, οι οποίες βασίζονται στις υποθέσεις των μικρών παραμορφώσεων και των μικρών θερμοκρασιακών μεταβολών. Σε συνθήκες έντονων θερμομηχανικών καταπονήσεων όμως, η υπόθεση των μικρών μεταβολών της θερμοκρασίας δεν είναι ορθή. Ωστόσο, στο παράρτημα Α της παρούσας διδακτορικής διατριβής αποδεικνύεται ότι η χρήση των εξισώσεων της γραμμικής θερμοελαστικότητας είναι επιτρεπτή και για την περίπτωση μεγάλων θερμοκρασιακών μεταβολών. Συγκεκριμένα, εξάγονται οι εξισώσεις της κλασικής συζευγμένης θερμοελαστικότητας για αυθαίρετες μεταβολές της θερμοκρασίας, οι οποίες θεμελιώνονται μόνο στην υπόθεση των μικρών παραμορφώσεων. Για την περίπτωση που οι ιδιότητες των υλικών θεωρούνται ανεξάρτητες της θερμοκρασίας, αποδεικνύεται ότι οι εξισώσεις της γραμμικής θεωρίας της θερμοελαστικότητας μπορούν προσεγγιστικά να χρησιμοποιηθούν και για την περίπτωση μεγάλων θερμοκρασιακών μεταβολών. Επιπλέον, αποδεικνύεται ότι και για θερμοκρασιακά-εξαρτώμενες ιδιότητες οι εξισώσεις της κλασικής συζευγμένης θερμοελαστικότητας με πεπερασμένες θερμοκρασιακές μεταβολές μπορούν κατά προσέγγιση να προκύψουν από την αντίστοιχη γραμμική θεωρία, όπου πλέον οι ιδιότητες του υλικού είναι συναρτήσεις της θερμοκρασίας.

	Zirkonία (ZrO_2)
Μέτρο ελαστικότητας E [Pa]	$244.26596 \cdot 10^9 \cdot (1 - 1.3707 \cdot 10^{-3} T + 1.21393 \cdot 10^{-6} T^2 - 3.681378 \cdot 10^{-10} T^3)$
Συντελεστής Poisson ν []	$0.2882 \cdot (1 + 1.13345 \cdot 10^{-4} T)$
Συντελεστής θερμικής διαστολής α [1/K]	$12.7657 \cdot 10^{-6} \cdot (1 - 0.00149 \cdot T + 1.0 \cdot 10^{-6} T^2 - 0.6775 \cdot 10^{-11} T^3)$
Θερμική αγωγιμότητα k [J/mKs]	$1.7 \cdot (1 + 0.0001276 \cdot T + 6.648 \cdot 10^{-8} T^2)$
Πυκνότητα ρ [kg/m ³]	5700
Ειδική θερμοχωρητικότητα c [J/kgK]	$487.34279 \cdot (1 + 3.04908 \cdot 10^{-4} T - 6.037232 \cdot 10^{-8} T^2)$

Πίνακας 5.1. Θερμομηχανικές ιδιότητες της ZrO_2 συναρτήσει της απόλυτης θερμοκρασίας T (K) [13,14]

Κράμα Τιτανίου (Ti-6Al-4V)	
Μέτρο ελαστικότητας E [Pa]	$122.55676 \cdot 10^9 \cdot (1 - 4.58635 \cdot 10^{-4} T)$
Συντελεστής Poisson ν []	$0.28838235 \cdot (1 + 1.12136 \cdot 10^{-4} T)$
Συντελεστής θερμικής διαστολής a [1/K]	$7.57876 \cdot 10^{-6} \cdot (1 + 0.00065 \cdot T + 0.31467 \cdot 10^{-6} T^2)$
Θερμική αγωγιμότητα k [J/mKs]	$1.20947 \cdot (1 + 0.0139375 \cdot T)$
Πυκνότητα ρ [kg/m ³]	4429
Ειδική θερμοχωρητικότητα c [J/kgK]	$625.29692 \cdot (1 - 4.2238757 \cdot 10^{-4} T + 7.1786536 \cdot 10^{-7} T^2)$

Πίνακας 5.2. Θερμομηχανικές ιδιότητες του Ti-6Al-4V συναρτήσει της απόλυτης θερμοκρασίας T (K) [13,14]



Σχήμα 5.1. Θερμομηχανικές ιδιότητες της ZrO_2 και του Ti-6Al-4V συναρτήσει της απόλυτης θερμοκρασίας T

5.2. Γενίκευση του κώδικα πεπερασμένων στοιχείων για θερμοκρασιακά-εξαρτώμενες ιδιότητες

Στην περίπτωση που οι ιδιότητες του υλικού θεωρούνται θερμοκρασιακά-εξαρτώμενες, οι διαφορικές εξισώσεις της κλασικής συζευγμένης θερμοελαστικότητας (2.2.27)-(2.2.28) γενικεύονται ως εξής:

$$\left[\frac{1}{2} C_{ijkl}(T) (u_{i,j} + u_{j,i}) - \beta_{ij}(T) \theta \right]_{,j} + x_i = \rho(T) \ddot{u}_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.2.1)$$

$$\left[k_{ij}(T)\theta_{,j} \right]_{,i} + z = \rho(T)c(T)\dot{\theta} + T_0\beta_{,j}(T)\dot{\epsilon}_{ij} \quad (5.2.2)$$

όπου $C_{ijkl}(T)$, $\beta_{ij}(T)$, $\rho(T)$, $k_{ij}(T)$ και $c(T)$ είναι οι θερμοκρασιακά-εξαρτώμενες ιδιότητες του υλικού.

Επισημαίνεται ότι οι εξισώσεις (5.2.1)-(5.2.2) βασίζονται στη γραμμική θεωρία της θερμοελαστικότητας, η οποία ισχύει για μικρές μεταβολές της θερμοκρασίας. Ωστόσο, οι εξισώσεις (5.2.1)-(5.2.2) ισχύουν κατά προσέγγιση και για την περίπτωση αυθαίρετων μεταβολών της θερμοκρασίας (βλ. παράρτημα Α) και κατά συνέπεια χρησιμοποιούνται για τις αναλύσεις του παρόντος κεφαλαίου.

Για ισότροπο υλικό οι διαφορικές εξισώσεις (5.2.1)-(5.2.2) λαμβάνουν την ακόλουθη μορφή:

$$\left[\lambda(T)\delta_{ij}u_{k,k} + \mu(T)(u_{i,j} + u_{j,i}) - \beta(T)\delta_{ij}\theta \right]_{,j} + x_i = \rho(T)\ddot{u}_i, \quad i=1,2,3 \quad (5.2.3)$$

$$\left[k(T)\theta_{,i} \right]_{,i} + z = \rho(T)c(T)\dot{\theta} + T_0\beta(T)\dot{u}_{i,i} \quad (5.2.4)$$

όπου $\lambda(T)$, $\mu(T)$, $\beta(T)$, $\rho(T)$, $k(T)$ και $c(T)$ είναι οι θερμοκρασιακά-εξαρτώμενες ιδιότητες του υλικού.

Επιπλέον, για το υπό μελέτη μονοδιάστατο πρόβλημα της FGM λωρίδας οι σχέσεις (5.2.3)-(5.2.4) απλοποιούνται ως εξής:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[\lambda(T) + 2\mu(T) \right] \frac{\partial u}{\partial x} - \beta(T)\theta \right\} = \rho(T)\ddot{u} \quad (5.2.5)$$

$$- \left[\rho(T)c(T)\dot{\theta} + T_0\beta(T)\frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \right] = - \frac{\partial}{\partial x} \left[k(T)\frac{\partial \theta}{\partial x} \right] \quad (5.2.6)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.2.11), (3.2.13) και (3.2.14) προκύπτει η κανονικοποιημένη μορφή των εξισώσεων (5.2.5)-(5.2.6):

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left[\frac{\lambda(T) + 2\mu(T)}{\lambda_m + 2\mu_m} \frac{\partial u}{\partial \tilde{x}} - \frac{\beta(T)}{\beta_m} \theta \right] = \frac{1}{\epsilon_{Em}^2} \frac{\rho(T)}{\rho_m} \ddot{u} \quad (5.2.7)$$

$$- \frac{1}{\epsilon_{Km}^2} \left[\frac{\rho(T)c(T)}{\rho_m c_m} \dot{\theta} + \xi_m \frac{\beta(T)}{\beta_m} \frac{\partial \dot{u}}{\partial \tilde{x}} \right] = - \frac{1}{k_m} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left[k(T) \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{x}} \right] \quad (5.2.8)$$

όπου πλέον ο δείκτης m αναφέρεται στις ιδιότητες του μεταλλικού υλικού στη θερμοκρασία αναφοράς T_0^* .

Οι κανονικοποιημένες εξισώσεις (5.2.7)-(5.2.8) αποτελούν το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων για το μονοδιάστατο πρόβλημα της λωρίδας από ανομοιογενές, ισότροπο υλικό με θερμοκρασιακά-εξαρτώμενες ιδιότητες, στα πλαίσια της κλασικής συζευγμένης

* δηλαδή $\lambda_m = \lambda_m(T_0)$, $k_m = k_m(T_0)$, $\epsilon_{Em} = \epsilon_{Em}(T_0)$ κλπ.

θερμοελαστικότητα. Οι εξισώσεις αυτές μπορούν να προκύψουν από τις εξισώσεις (3.2.15)-(3.2.16) για $t_0 = t_1 = t_2 = t_3 = 0$ και $\eta = 1$, θεωρώντας παράλληλα ότι οι ιδιότητες του υλικού είναι συναρτήσεις της θερμοκρασίας. Η τάση σ_{xx} και η ροή θερμότητας q_x δίνονται αντίστοιχα από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\sigma_{xx} = \beta_m T_0 \underline{\sigma}_{xx} = \beta_m T_0 \left[\frac{\lambda(T) + 2\mu(T)}{\lambda_m + 2\mu_m} \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{x}} - \frac{\beta(T)}{\beta_m} \underline{\theta} \right] \quad (5.2.9)$$

$$q_x = \frac{k_m T_0}{l} \underline{q}_x = \frac{k_m T_0}{l} \left[-\frac{k(T)}{k_m} \frac{\partial \underline{\theta}}{\partial \underline{x}} \right] \quad (5.2.10)$$

Από τις εξισώσεις (3.2.19)-(3.2.21) έπεται ότι οι υπόλοιπες συνιστώσες του τανυστή της τάσης σ_{ij} δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \beta_m T_0 \underline{\sigma}_{yy} = \beta_m T_0 \left[\frac{\lambda(T)}{\lambda_m + 2\mu_m} \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{x}} - \frac{\beta(T)}{\beta_m} \underline{\theta} \right] = \quad (5.2.11)$$

$$= \frac{\beta_m T_0}{\lambda(T) + 2\mu(T)} \left[\lambda(T) \underline{\sigma}_{xx} - 2\mu(T) \frac{\beta(T)}{\beta_m} \underline{\theta} \right]$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0 \quad (5.2.12)$$

Εφαρμόζοντας την αριθμητική διαδικασία της παραγράφου 3.3 στις εξισώσεις (5.2.7)-(5.2.8) προκύπτει η εξής μητρική εξίσωση για κάθε πεπερασμένο στοιχείο:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11}(T) & \mathbf{M}_{12}(T) \\ \mathbf{M}_{21}(T) & \mathbf{M}_{22}(T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\underline{u}} \\ \ddot{\underline{\theta}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11}(T) & \mathbf{C}_{12}(T) \\ \mathbf{C}_{21}(T) & \mathbf{C}_{22}(T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\underline{u}} \\ \dot{\underline{\theta}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}(T) & \mathbf{K}_{12}(T) \\ \mathbf{K}_{21}(T) & \mathbf{K}_{22}(T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\sigma} \\ \underline{q} \end{bmatrix} \quad (5.2.13)$$

όπου τα στοιχεία του μητρώου μάζας $\mathbf{M}(T)$, του μητρώου απόσβεσης $\mathbf{C}(T)$ και του μητρώου ελαστικότητας $\mathbf{K}(T)$ δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{11}(T) &= \frac{\hbar}{\xi_{Em}^2 \rho_m} \int_0^1 \rho(T) \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\omega & \mathbf{C}_{21}(T) &= \frac{\xi_m}{\xi_{Km}^2 \beta_m} \int_0^1 \beta(T) \mathbf{N}^T \mathbf{N}' d\omega \\ \mathbf{M}_{12}(T) &= \mathbf{0} & \mathbf{C}_{22}(T) &= \frac{\hbar}{\xi_{Km}^2 \rho_m c_m} \int_0^1 \rho(T) c(T) \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\omega \\ \mathbf{M}_{21}(T) &= \mathbf{0} & \mathbf{K}_{11}(T) &= \frac{1}{\hbar (\lambda_m + 2\mu_m)} \int_0^1 [\lambda(T) + 2\mu(T)] (\mathbf{N}')^T \mathbf{N}' d\omega \\ \mathbf{M}_{22}(T) &= \mathbf{0} & \mathbf{K}_{12}(T) &= -\frac{1}{\beta_m} \int_0^1 \beta(T) (\mathbf{N}')^T \mathbf{N} d\omega \\ \mathbf{C}_{11}(T) &= \mathbf{0} & \mathbf{K}_{21}(T) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{12}(T) &= \mathbf{0} & \mathbf{K}_{22}(T) &= \frac{1}{\hbar k_m} \int_0^1 k(T) (\mathbf{N}')^T \mathbf{N}' d\omega \end{aligned} \quad (5.2.14)$$

Η καθολική μητρική εξίσωση είναι μη γραμμική και έχει την παρακάτω μορφή:

$$\tilde{\mathbf{M}}(T)\ddot{\mathbf{\Lambda}} + \tilde{\mathbf{C}}(T)\dot{\mathbf{\Lambda}} + \tilde{\mathbf{K}}(T)\mathbf{\Lambda} = \tilde{\mathbf{F}} \quad (5.2.15)$$

Η εξίσωση (5.2.9) αποτελεί γενίκευση της γραμμικής καθολικής μητρικής εξίσωσης (3.3.13). Η χρονική ολοκλήρωση της εξίσωσης (5.2.9) μπορεί και πάλι να γίνει με χρήση της μεθόδου Newmark [15]. Ωστόσο, τα μητρώα $\tilde{\mathbf{M}}(T)$, $\tilde{\mathbf{C}}(T)$ και $\tilde{\mathbf{K}}(T)$ πρέπει να υπολογίζονται εκ νέου σε κάθε χρονικό βήμα, λόγω της εξάρτησής τους από τη θερμοκρασία. Επομένως, η εφαρμογή της μεθόδου Newmark για τη χρονική ολοκλήρωση της μη γραμμικής εξίσωσης (5.2.9) συνοψίζεται στις ακόλουθες σχέσεις:

$$\mathbf{\Lambda}(0) = \mathbf{d}_0, \quad \dot{\mathbf{\Lambda}}(0) = \mathbf{v}_0 \quad (5.2.16)$$

$$\mathbf{a}_0 = \tilde{\mathbf{M}}_n^{-1} (\tilde{\mathbf{F}}_0 - \tilde{\mathbf{C}}_n \mathbf{v}_0 - \tilde{\mathbf{K}}_n \mathbf{d}_0) \quad (5.2.17)$$

$$\mathbf{d}_{n+1}^0 = \mathbf{d}_n + \Delta t \mathbf{v}_n + \frac{\Delta t^2}{2} (1 - 2\beta_N) \mathbf{a}_n, \quad n = 0, 1, \dots, M_t - 1 \quad (5.2.18)$$

$$\mathbf{v}_{n+1}^0 = \mathbf{v}_n + (1 - \gamma_N) \Delta t \mathbf{a}_n, \quad n = 0, 1, \dots, M_t - 1 \quad (5.2.19)$$

$$\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{d}_{n+1}^0 + \beta_N \Delta t^2 \mathbf{a}_{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots, M_t - 1 \quad (5.2.20)$$

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_{n+1}^0 + \gamma_N \Delta t \mathbf{a}_{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots, M_t - 1 \quad (5.2.21)$$

$$\mathbf{a}_{n+1} = \left(\tilde{\mathbf{M}}_n + \gamma_N \Delta t \tilde{\mathbf{C}}_n + \beta_N \Delta t^2 \tilde{\mathbf{K}}_n \right)^{-1} \left(\tilde{\mathbf{F}}_{n+1} - \tilde{\mathbf{C}}_n \mathbf{v}_{n+1} - \tilde{\mathbf{K}}_n \mathbf{d}_{n+1} \right), \quad n = 0, 1, \dots, M_t - 1 \quad (5.2.22)$$

όπου $\tilde{\mathbf{M}}_n$, $\tilde{\mathbf{C}}_n$ και $\tilde{\mathbf{K}}_n$ είναι τα καθολικά μητρώα τη χρονική στιγμή $t_n = n\Delta t$. Οι σχέσεις (5.2.16)-(5.2.22) γενικεύουν τις αντίστοιχες σχέσεις (3.3.14)-(3.3.20) για το γραμμικό πρόβλημα.

Για τις παραμέτρους β_N και γ_N της μεθόδου Newmark επιλέγονται πάλι οι τιμές $\gamma_N = \frac{2}{3}$

και $\beta_N = \frac{1}{4} \left(\gamma_N + \frac{1}{2} \right)^2$, οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση (3.3.21) και παράλληλα εξασφαλίζουν καλή σύγκλιση. Με βάση την παραπάνω ανάλυση, ο κώδικας πεπερασμένων στοιχείων για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος τροποποιείται ώστε να περιλαμβάνει και την περίπτωση των θερμοκρασιακά-εξαρτώμενων ιδιοτήτων υλικού. Η ροή του γενικευμένου κώδικα πεπερασμένων στοιχείων φαίνεται στο Σχήμα 5.2.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, στις αναλύσεις που ακολουθούν χρησιμοποιούνται η ZrO_2 ως κεραμικό υλικό και το Ti-6Al-4V ως μεταλλικό υλικό. Τα χαρακτηριστικά μεγέθη l και ν που χρησιμοποιούνται για την κανονικοποίηση των προβλημάτων υπολογίζονται από τις σχέσεις (4.3.7)-(4.3.8) για $T = 300\text{K}$, δηλαδή $l = 4.27 \cdot 10^{-10} \text{m}$ και $\nu = 5.65 \cdot 10^3 \text{m/s}$. Οι κανονικοποιημένες παράμετροι για τη ZrO_2 είναι $\zeta_{Ec} = 1.11$, $\zeta_{Kc} = 0.49$ και $\xi_c = 0.005$, ενώ για το Ti-6Al-4V είναι $\zeta_{Em} = 1.00$, $\zeta_{Km} = 1.00$ και $\xi_m = 0.005$.

Περιγραφή ροής του κώδικα πεπερασμένων στοιχείων

- Δεδομένα προβλήματος
 - Προσδιορισμός θερμομηχανικών ιδιοτήτων κεραμικού και μεταλλικού υλικού
 - Προσδιορισμός πάχους κάθε στρώσης
 - Εισαγωγή αρχικών και συνοριακών συνθηκών

 - Παράμετροι ανάλυσης/προσομοίωσης
 - Καθορισμός των παραμέτρων η , γ , t_0 , t_1 , t_2 , t_3 , και κ^* της ενοποιημένης θεωρίας
 - Επιλογή χαρακτηριστικού μήκους l και χαρακτηριστικής ταχύτητας ν
 - Προσδιορισμός της κατανομής του κατ' όγκο ποσοστού του μεταλλικού υλικού V_m στην FGM στρώση
 - Επιλογή θερμοκά-ανεξάρτητων ή θερμοκά-εξαρτώμενων ιδιοτήτων υλικού
 - Υπολογισμός κανονικοποιημένων μεταβλητών
 - Επιλογή πλήθους πεπερασμένων στοιχείων και χρονικών βημάτων
 - Καθορισμός των παραμέτρων β_N και γ_N της μεθόδου Newmark

 - Ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων
 - Μόρφωση δικτύου πεπερασμένων στοιχείων
 - Μόρφωση των μητρώων ID, IEN και LM
 - Υπολογισμός των τοπικών μητρώων \mathbf{M} , \mathbf{C} και \mathbf{K} για κάθε πεπερασμένο στοιχείο
 - Υπολογισμός των καθολικών μητρώων $\tilde{\mathbf{M}}$, $\tilde{\mathbf{C}}$ και $\tilde{\mathbf{K}}$ από τη συνάθροιση των τοπικών μητρώων
 - Προσθήκη συνοριακών όρων στα καθολικά μητρώα

 - Χρονική ολοκλήρωση
 - Εφαρμογή της μεθόδου Newmark και υπολογισμός των διανυσμάτων d_n , v_n , και a_n σε κάθε χρονική στιγμή t_n (για θερμοκά-εξαρτώμενες ιδιότητες απαιτείται υπολογισμός σε κάθε χρονική στιγμή t_n των τοπικών μητρώων \mathbf{M}_n , \mathbf{C}_n και \mathbf{K}_n για κάθε πεπερασμένο στοιχείο, συνάθροισή τους και υπολογισμός εκ νέου των καθολικών μητρώων $\tilde{\mathbf{M}}_n$, $\tilde{\mathbf{C}}_n$ και $\tilde{\mathbf{K}}_n$)
 - Υπολογισμός της κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} σε κάθε χρονική στιγμή t_n

 - Επεξεργασία αποτελεσμάτων
 - Υπολογισμός των κανονικοποιημένων τάσεων σ_{yy} , σ_{VM} και της κανονικοποιημένης απειροστής τροπής ε_{xx} σε κάθε κόμβο του δικτύου πεπερασμένων στοιχείων και σε κάθε χρονική στιγμή t_n , από τις αντίστοιχες κανονικοποιημένες μεταβλητές και την κανονικοποιημένη τάση σ_{xx}
 - Υπολογισμός της μετατόπισης u , της θερμοκρασίας T και της τάσης σ_{xx} σε κάθε κόμβο του δικτύου πεπερασμένων στοιχείων και σε κάθε χρονική στιγμή t_n , από τις αντίστοιχες κανονικοποιημένες μεταβλητές
 - Σχεδιασμός διαγραμμάτων
-

Σχήμα 5.2. Περιγραφή ροής του γενικευμένου κώδικα πεπερασμένων στοιχείων

5.3. Επίδραση της θερμοκρασιακής εξάρτησης των ιδιοτήτων στη θερμομηχανική συμπεριφορά μίας σύνθετης λωρίδας σε συνθήκες θερμικού σοκ

Σε αυτήν την παράγραφο εξετάζεται η επίδραση της θερμοκρασιακής εξάρτησης των ιδιοτήτων των υλικών στη θερμομηχανική συμπεριφορά μίας σύνθετης λωρίδας δύο στρώσεων που υποβάλλεται σε απότομη μεταβολή της θερμοκρασίας στην άνω επιφάνειά της. Η ανώτερη στρώση της λωρίδας αποτελείται από κεραμικό υλικό και η κατώτερη στρώση από μεταλλικό υλικό.

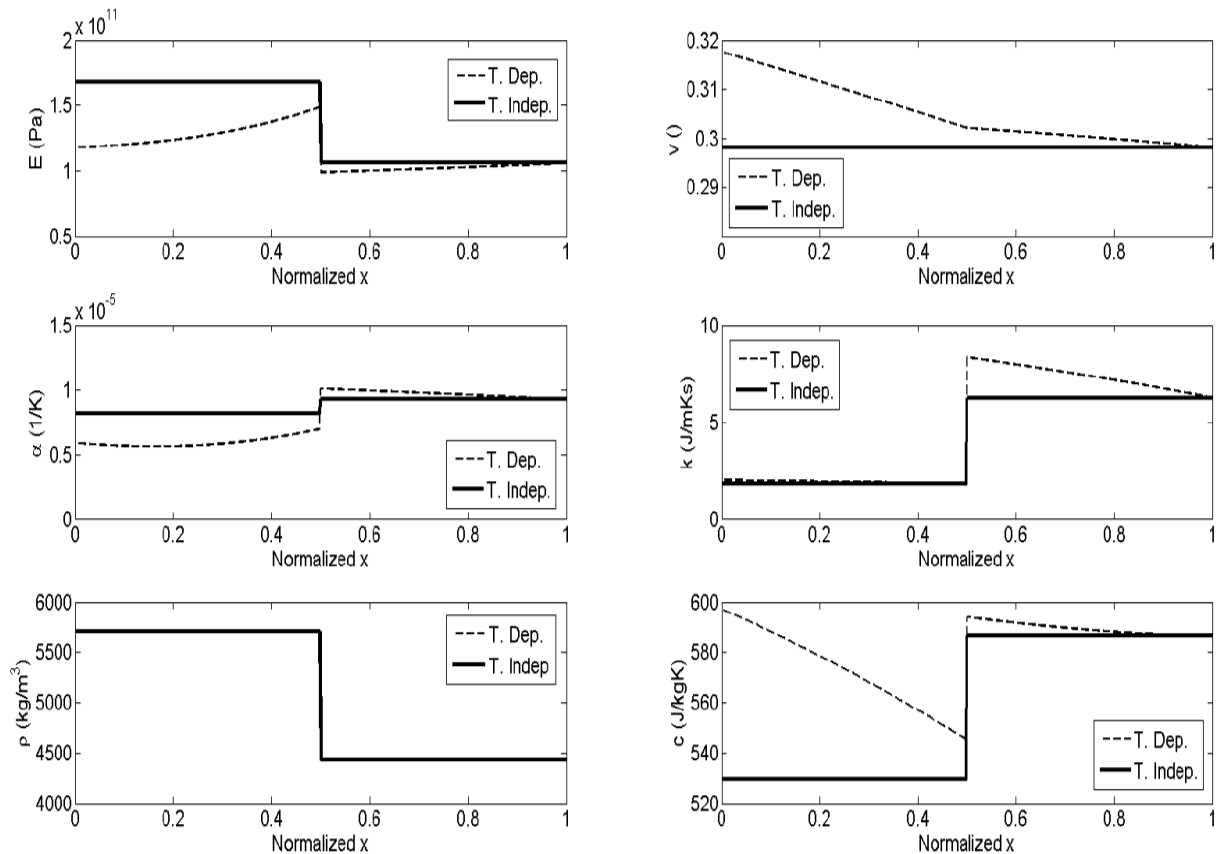
Η λωρίδα αρχικά βρίσκεται σε ομοιόμορφη θερμοκρασία $T_0 = 300K$ και τη χρονική στιγμή $t = 0$ η θερμοκρασία της άνω επιφάνειάς της αυξάνεται απότομα στους $900K$. Οι κανονικοποιημένες εξισώσεις που περιγράφουν το πρόβλημα είναι οι (5.2.7)-(5.2.8) με αρχικές-συνοριακές συνθήκες:

$$\begin{aligned} \underline{u}(x, 0) = 0, \quad \underline{\dot{u}}(x, 0) = 0, \quad \underline{\theta}(x, 0) = 0, \quad \underline{\dot{\theta}}(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq L \\ \underline{\theta}(0, \underline{t}) = 2, \quad \underline{\sigma}_{xx}(0, \underline{t}) = 0, \quad \underline{\theta}(L, \underline{t}) = 0, \quad \underline{u}(L, \underline{t}) = 0, \quad 0 < \underline{t} < \infty \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

Το συνολικό κανονικοποιημένο πάχος της λωρίδας είναι $\underline{L} = 1$, ενώ τα κανονικοποιημένα πάχη κάθε στρώσης είναι $\underline{L}_c = 0.5$ και $\underline{L}_m = 0.5$ για τη ZrO_2 και το $Ti-6Al-4V$ αντίστοιχα. Οι θερμομηχανικές ιδιότητες των δύο υλικών ως συναρτήσεις της θερμοκρασίας T αναφέρονται στους Πίνακες 5.1-5.2 [13,14]. Στην περίπτωση που οι ιδιότητες των υλικών θεωρούνται ανεξάρτητες της θερμοκρασίας, τότε λαμβάνονται οι τιμές που προκύπτουν από τους Πίνακες 5.1-5.2 για $T = 300K^*$. Οι σταθερές του Lamé λ, μ και η θερμική σταθερά β προκύπτουν από τις σχέσεις (4.3.3)-(4.3.5). Για τις αναλύσεις χρησιμοποιούνται $N_{el} = 1000$ πεπερασμένα στοιχεία και $M_t = 4000$ χρονικά βήματα, για συνολικό κανονικοποιημένο χρόνο $\underline{t}_{tot} = 4.00$.

Στο Σχήμα 5.3 φαίνονται οι κατανομές των θερμομηχανικών ιδιοτήτων στη λωρίδα την κανονικοποιημένη χρονική στιγμή $\underline{t} = 4.00$ για τις περιπτώσεις των θερμοκρασιακά-εξαρτώμενων (temperature-dependent - T. Dep.) και των θερμοκρασιακά-ανεξάρτητων (temperature-independent - T. Indep.) ιδιοτήτων. Όπως είναι αναμενόμενο, οι ιδιότητες έχουν σταθερή τιμή σε κάθε στρώση όταν θεωρούνται ανεξάρτητες της θερμοκρασίας. Ωστόσο αυτό δεν ισχύει για την περίπτωση των θερμοκρασιακά-εξαρτώμενων ιδιοτήτων λόγω της ανομοιόμορφης κατανομής της θερμοκρασίας κατά τη χρονική στιγμή $\underline{t} = 4.00$. Από το Σχήμα 5.3 προκύπτει ότι η παραδοχή της θερμοκρασιακής εξάρτησης των ιδιοτήτων έχει δύο σημαντικές συνέπειες: η πρώτη συνέπεια αφορά στη μείωση του μέτρου ελαστικότητας και των δύο υλικών, ενώ η δεύτερη αφορά στην αύξηση της διαφοράς ανάμεσα στις θερμικές αγωγιμότητες του κεραμικού και του μεταλλικού υλικού. Συγκεκριμένα η θερμική αγωγιμότητα του $Ti-6Al-4V$ αυξάνεται με την αύξηση της θερμοκρασίας, ενώ αντίθετα η θερμική αγωγιμότητα της ZrO_2 δεν μεταβάλλεται ιδιαίτερα. Οι δύο αυτές συνέπειες είναι οι κύριες αιτίες για τη διαφοροποίηση της θερμομηχανικής συμπεριφοράς της λωρίδας στην περίπτωση των θερμοκρασιακά-εξαρτώμενων ιδιοτήτων, όπως φαίνεται και στις αναλύσεις παρακάτω.

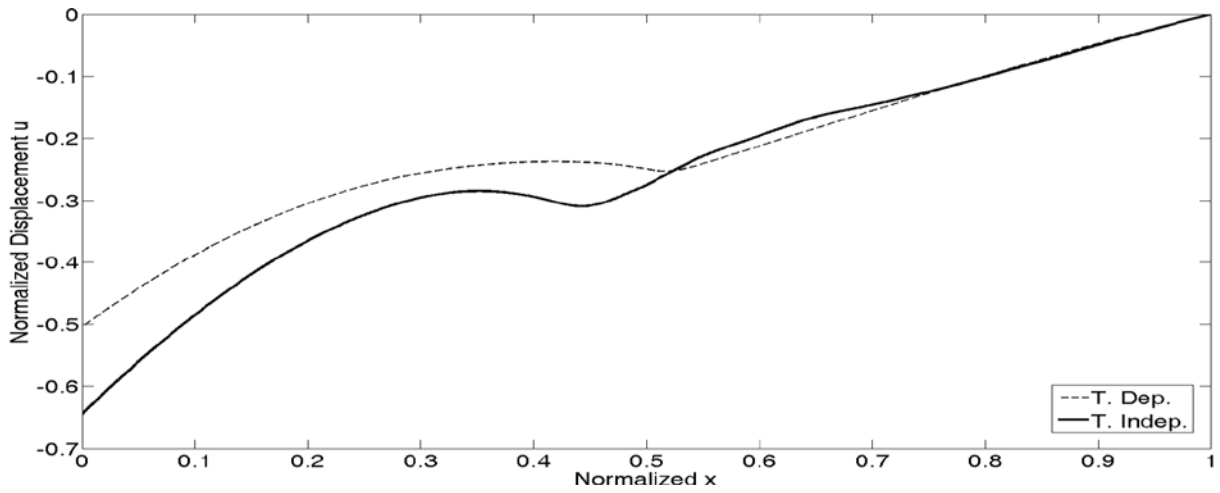
* οι τιμές αυτές απεικονίζονται στον Πίνακα 4.1



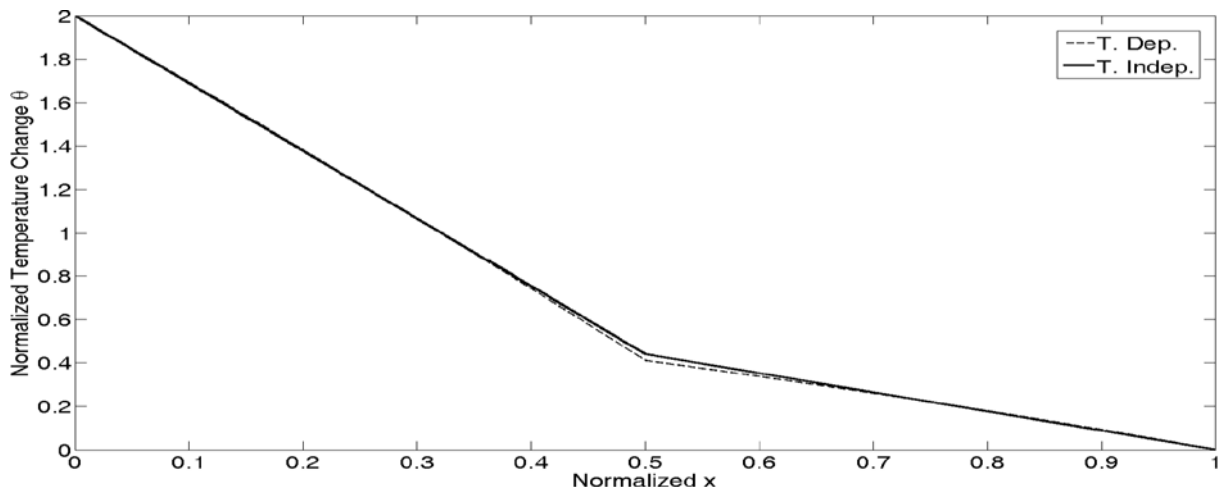
Σχήμα 5.3. Κατανομή των θερμομηχανικών ιδιοτήτων στη λωρίδα τη χρονική στιγμή $t = 4.00$, για τις περιπτώσεις που οι ιδιότητες των υλικών θεωρούνται θερμοκρασιακά-εξαρτώμενες και θερμοκρασιακά-ανεξάρτητες

Στα Σχήματα 5.4-5.6 απεικονίζονται η κατανομή της κανονικοποιημένης μετατόπισης u , η κατανομή της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας θ και η κατανομή της κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} , αντίστοιχα, κατά τη χρονική στιγμή $t = 1.50$ για τις περιπτώσεις των θερμοκρασιακά-εξαρτώμενων και των θερμοκρασιακά-ανεξάρτητων ιδιοτήτων. Αντίστοιχα, στα Σχήματα 5.7-5.9 παρουσιάζονται η χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης μετατόπισης u , η χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας θ και η χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} στη θέση $x = 0.5$. Από τα Σχήματα 5.5 και 5.8 προκύπτει ότι η θερμοκρασία στη λωρίδα είναι μειωμένη για θερμοκρασιακά-εξαρτώμενες ιδιότητες. Αυτό οφείλεται κυρίως στο γεγονός ότι η θερμική αγωγιμότητα του Ti-6Al-4V αυξάνεται σε υψηλές θερμοκρασίες, ενώ αντίθετα η θερμική αγωγιμότητα της ZrO₂ παραμένει περίπου σταθερή (βλ. Σχήματα 5.1 και 5.3). Δηλαδή, συνολικά σε υψηλές θερμοκρασίες η διαφορά ανάμεσα στις θερμικές αγωγιμότητες των δύο υλικών αυξάνεται, οδηγώντας έτσι σε μεγαλύτερη πτώση της θερμοκρασίας μέσα στη στρώση της ZrO₂. Επιπλέον, από τα Σχήματα 5.6 και 5.9 συμπεραίνεται ότι η τάση μειώνεται σημαντικά για θερμοκρασιακά-εξαρτώμενες ιδιότητες. Αυτό οφείλεται στη μείωση του μέτρου ελαστικότητας των δύο υλικών σε υψηλές θερμοκρασίες (βλ. Σχήματα 5.1 και 5.3).

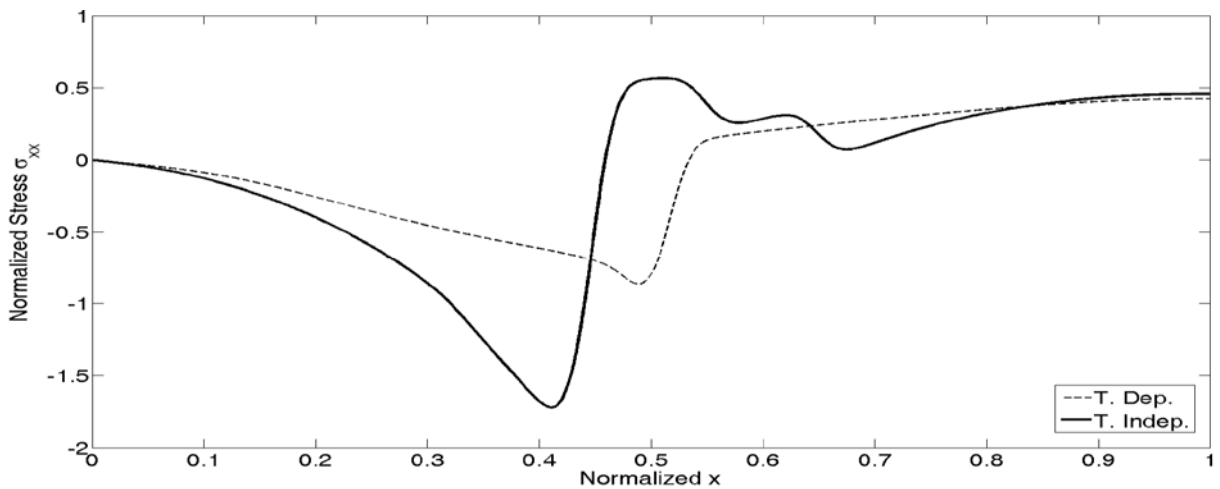
Το βασικό συμπέρασμα από τις παραπάνω παρατηρήσεις είναι πως η υπόθεση ότι οι ιδιότητες των υλικών είναι ανεξάρτητες της θερμοκρασίας είναι γενικά υπέρ της ασφαλείας και οδηγεί σε συντηρητικά αποτελέσματα. Ωστόσο, σε μεγάλες θερμοκρασιακές μεταβολές ο συνυπολογισμός της επίδρασης της θερμοκρασίας στις ιδιότητες των υλικών οδηγεί σε πιο ακριβή και ρεαλιστικά αποτελέσματα.



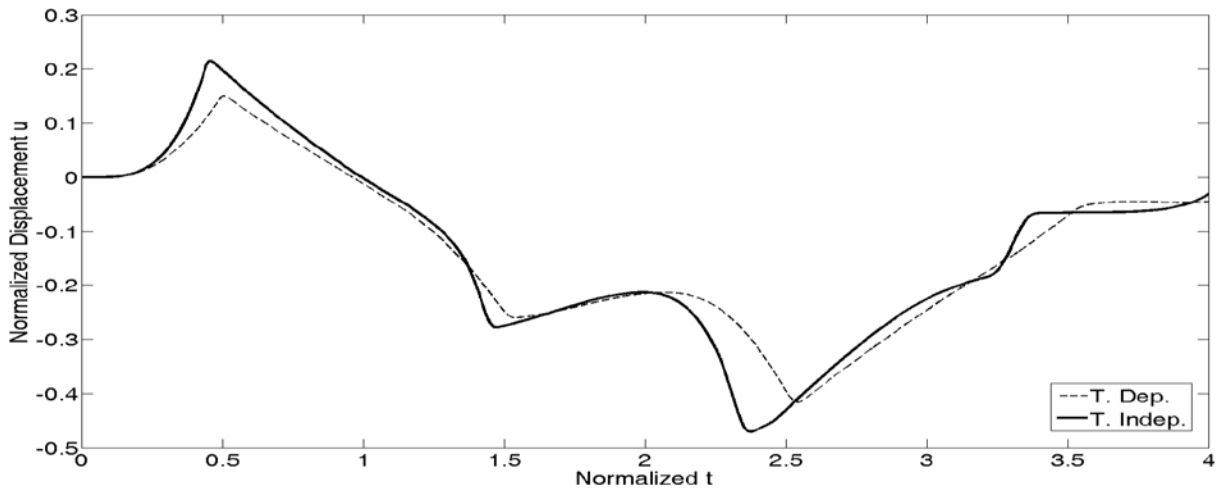
Σχήμα 5.4. Κατανομή της κανονικοποιημένης μετατόπισης u στη λωρίδα τη χρονική στιγμή $t = 1.50$, για θερμοκρασιακά-εξαρτώμενες και θερμοκρασιακά-ανεξάρτητες ιδιότητες



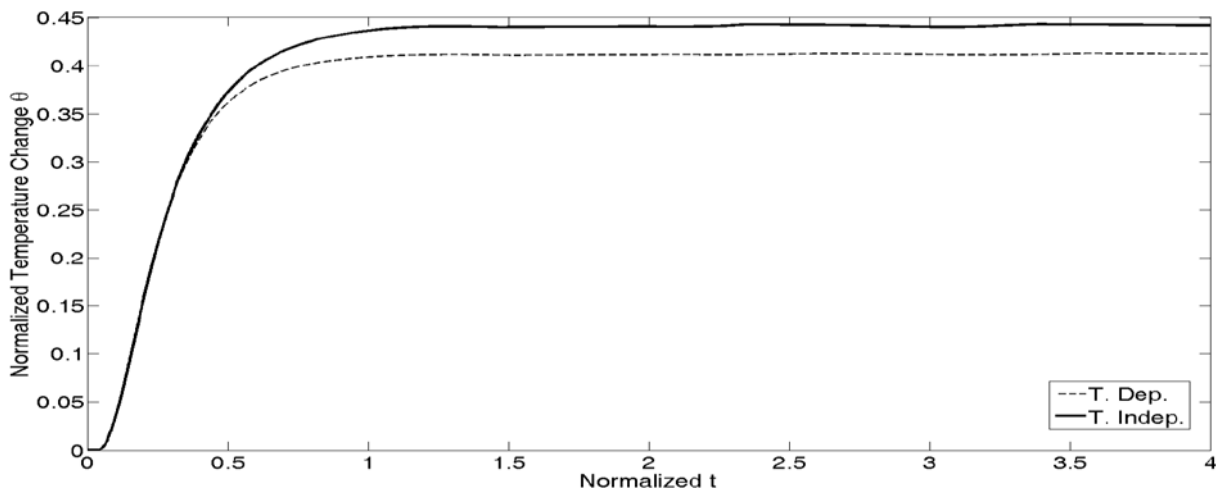
Σχήμα 5.5. Κατανομή της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας θ στη λωρίδα τη χρονική στιγμή $t = 1.50$, για θερμοκρασιακά-εξαρτώμενες και θερμοκρασιακά-ανεξάρτητες ιδιότητες



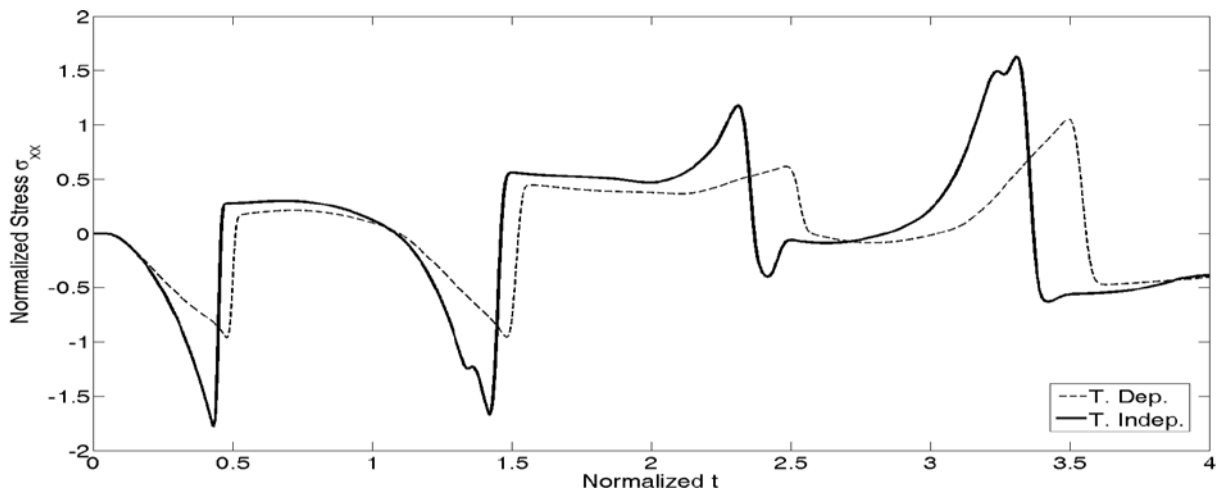
Σχήμα 5.6. Κατανομή της κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} στη λωρίδα τη χρονική στιγμή $t = 1.50$, για θερμοκρασιακά-εξαρτώμενες και θερμοκρασιακά-ανεξάρτητες ιδιότητες



Σχήμα 5.7. Χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης μετατόπισης u στη θέση $x=0.5$ της λωρίδας, για θερμοκρασιακά-εξαρτώμενες και θερμοκρασιακά-ανεξάρτητες ιδιότητες



Σχήμα 5.8. Χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας θ στη θέση $x=0.5$ της λωρίδας, για θερμοκρασιακά-εξαρτώμενες και θερμοκρασιακά-ανεξάρτητες ιδιότητες



Σχήμα 5.9. Χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} στη θέση $x=0.5$ της λωρίδας, για θερμοκρασιακά-εξαρτώμενες και θερμοκρασιακά-ανεξάρτητες ιδιότητες

5.4. Επίδραση της θερμοκρασιακής εξάρτησης των ιδιοτήτων στη θερμομηχανική συμπεριφορά μίας FGM στρώσης σε συνθήκες θερμικού σοκ τύπου αναβαθμίδας

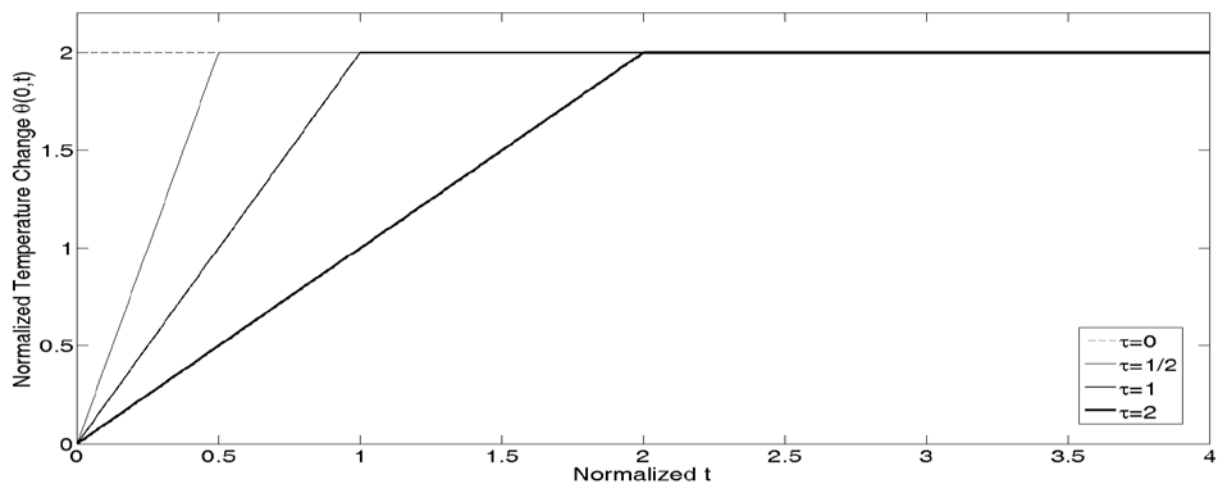
Στην παράγραφο 5.3 παρουσιάστηκαν τα μεταβατικά πεδία μετατόπισης, θερμοκρασίας και τάσης που αναπτύσσονται σε μία σύνθετη λωρίδα δύο στρώσεων, η οποία υποβάλλεται σε ακαριαία μεταβολή της θερμοκρασίας στην άνω επιφάνειά της. Εξετάστηκαν οι περιπτώσεις υλικών με θερμοκρασιακά-εξαρτώμενες και θερμοκρασιακά-ανεξάρτητες ιδιότητες, όπου παρατηρήθηκε πως η τάση μειώνεται σημαντικά για θερμοκρασιακά-εξαρτώμενες ιδιότητες.

Στην παρούσα παράγραφο εξετάζεται η επίδραση της θερμοκρασιακής εξάρτησης των ιδιοτήτων των υλικών στη θερμομηχανική συμπεριφορά μίας $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ FGM στρώσης από κεραμικό/μεταλλικό υλικό, στην οποία η θερμοκρασία της ανώτερης επιφάνειάς της μεταβάλλεται βαθμιαία μέχρι μία τελική θερμοκρασία. Συγκεκριμένα, η λωρίδα αρχικά βρίσκεται σε ομοιόμορφη θερμοκρασία $T_0 = 300K$ και τη χρονική στιγμή $t = 0$ η θερμοκρασία της άνω επιφάνειάς της αυξάνεται γραμμικά μέχρι τους $900K$. Η κανονικοποιημένη μορφή του προβλήματος περιγράφεται από τις εξισώσεις (5.2.7)-(5.2.8) με αρχικές-συνοριακές συνθήκες:

$$\begin{aligned} \underline{u}(x,0) = 0, \quad \underline{\dot{u}}(x,0) = 0, \quad \underline{\theta}(x,0) = 0, \quad \underline{\dot{\theta}}(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq L \\ \underline{\theta}(0,\underline{t}) = \begin{cases} 2\frac{\underline{t}}{\tau}, & 0 \leq \underline{t} \leq \tau \\ 2, & \underline{t} > \tau \end{cases}, \quad \underline{\sigma}_{xx}(0,\underline{t}) = 0, \quad \underline{\theta}(L,\underline{t}) = 0, \quad \underline{u}(L,\underline{t}) = 0, \quad 0 < \underline{t} < \infty \end{aligned} \quad (5.4.1)$$

όπου $\tau \geq 0$ είναι μία κανονικοποιημένη χρονική παράμετρος.

Στο Σχήμα 5.10 παρουσιάζεται η χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας $\underline{\theta}$ στη θέση $x=0$ για $\tau=0$, $\tau=1/4$, $\tau=1/2$ και $\tau=1$. Η περίπτωση $\tau=0$ αντιστοιχεί σε ακαριαία μεταβολή της θερμοκρασίας στην ανώτερη επιφάνεια.



Σχήμα 5.10. Χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας $\underline{\theta}$ στη θέση $x=0$ για διάφορες τιμές της χρονικής παραμέτρου τ

Το συνολικό κανονικοποιημένο πάχος της FGM στρώσης είναι $\underline{L} = 1$. Οι θερμομηχανικές ιδιότητες των δύο υλικών ως συναρτήσεις της θερμοκρασίας T αναφέρονται στους Πίνακες 5.1-5.2 [13,14]. Στην περίπτωση που οι ιδιότητες των υλικών θεωρούνται ανεξάρτητες της θερμοκρασίας, τότε λαμβάνονται οι τιμές που προκύπτουν από τους Πίνακες 5.1-5.2 για $T = 300K^*$. Οι σταθερές του Lamé λ, μ και η θερμική σταθερά β προκύπτουν από τις σχέσεις (4.3.3)-(4.3.5).

Η κατανομή του κατ' όγκο ποσοστού του μεταλλικού υλικού V_m μέσα στην FGM στρώση θεωρείται γραμμική, δηλαδή η κατανομή μίας ιδιότητας $P = P(x, T)$ σε κάποια χρονική στιγμή \underline{t} δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$P(x, T) = P_c(T) + [P_m(T) - P_c(T)]x \quad (5.4.2)$$

όπου T είναι η απόλυτη θερμοκρασία στη θέση x τη δεδομένη χρονική στιγμή \underline{t} , ενώ $P_c(T)$ και $P_m(T)$ είναι οι ιδιότητες του κεραμικού και του μεταλλικού υλικού αντίστοιχα στη θερμοκρασία T .

Από την εξίσωση (5.4.2) συνάγεται ότι η κατανομή των ιδιοτήτων μέσα στην FGM στρώση είναι γραμμική μόνο στις περιπτώσεις που είτε αυτές θεωρούνται θερμοκρασιακά-ανεξάρτητες είτε η θερμοκρασία στη στρώση είναι ομοιόμορφη. Στο Σχήμα 5.11 απεικονίζονται οι κατανομές των θερμομηχανικών ιδιοτήτων στην FGM στρώση την κανονικοποιημένη χρονική στιγμή $\underline{t} = 4.00$ για τις περιπτώσεις των θερμοκρασιακά-εξαρτώμενων (temperature-dependent - T. Dep.) και των θερμοκρασιακά-ανεξάρτητων (temperature-independent - T. Indep.) ιδιοτήτων. Όπως προαναφέρθηκε, οι κατανομές αυτές είναι γραμμικές μόνο στην περίπτωση των θερμοκρασιακά-ανεξάρτητων ιδιοτήτων, καθώς η θερμοκρασία τη χρονική στιγμή $\underline{t} = 4.00$ είναι προφανώς ανομοιόμορφη μέσα στη στρώση. Σημειώνεται ότι στην περίπτωση των θερμοκρασιακά-εξαρτώμενων ιδιοτήτων εμφανίζονται οι κατανομές των ιδιοτήτων μόνο για $\tau = 0$, αφού από τα αποτελέσματα των αναλύσεων που παρουσιάζονται στη συνέχεια της παραγράφου (και ειδικότερα στον Πίνακα 5.3) προκύπτει ότι η τελική κατανομή της θερμοκρασίας στην FGM στρώση δεν επηρεάζεται ιδιαίτερα από τη χρονική παράμετρο τ . Το Σχήμα 5.11 βρίσκεται σε συμφωνία με τις παρατηρήσεις που διατυπώθηκαν στις παραγράφους 5.1 και 5.3: η παραδοχή της θερμοκρασιακής εξάρτησης των ιδιοτήτων των υλικών της FGM στρώσης συνεπάγεται αφ' ενός μεν μείωση του μέτρου ελαστικότητας E και του συντελεστή θερμικής διαστολής α , αφ' ετέρου δε αύξηση του συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας k και της ειδικής θερμοχωρητικότητας c .

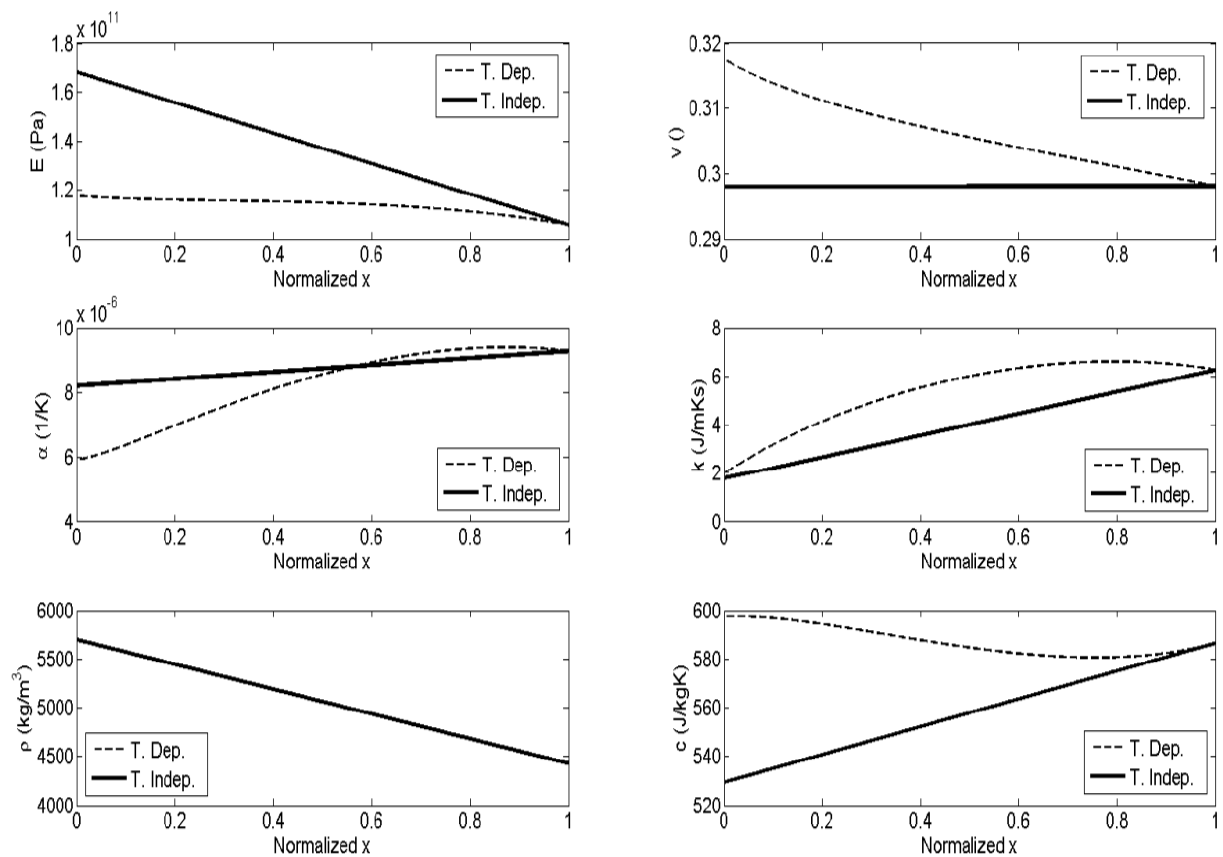
Στη συνέχεια της παραγράφου εξετάζονται τα πεδία της μετακίνησης u , της μεταβολής της θερμοκρασίας θ και της τάσης σ_{xx} που αναπτύσσονται στην FGM στρώση για τις περιπτώσεις των θερμοκρασιακά-εξαρτώμενων και των θερμοκρασιακά-ανεξάρτητων ιδιοτήτων, όπως και για διαφορετικές τιμές της χρονικής παραμέτρου τ . Για τις αναλύσεις χρησιμοποιούνται $N_{el} = 1000$ πεπερασμένα στοιχεία και $M_t = 4000$ χρονικά βήματα, για συνολικό κανονικοποιημένο χρόνο $\underline{t}_{tot} = 4.00$.

Στα Σχήματα 5.12-5.14 απεικονίζονται η κατανομή της κανονικοποιημένης μετατόπισης u , η κατανομή της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας θ και η κατανομή της κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} , αντίστοιχα, κατά τη χρονική στιγμή $\underline{t} = 1.50$ για τις

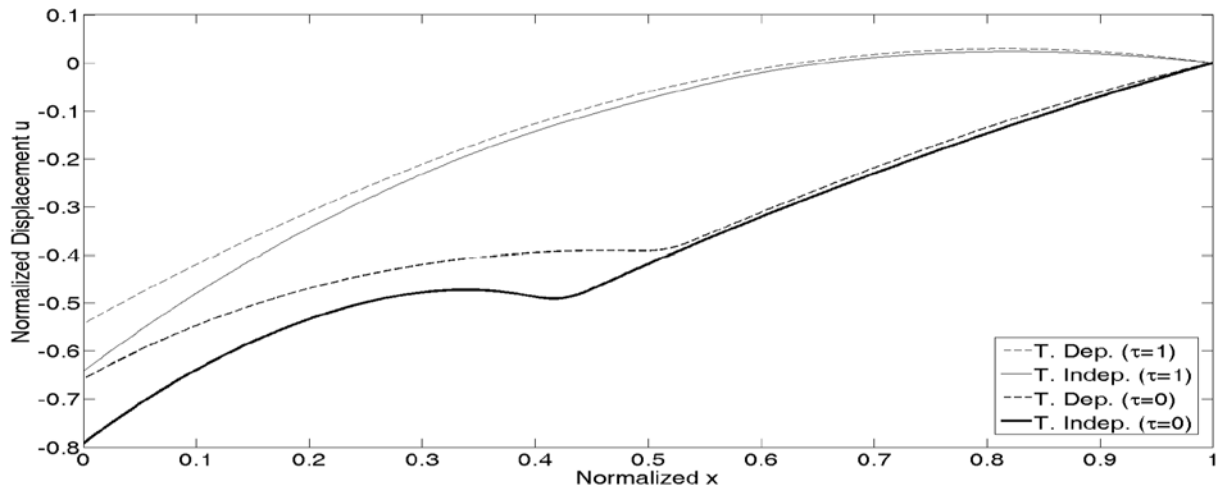
* οι τιμές αυτές απεικονίζονται στον Πίνακα 4.1

περιπτώσεις των θερμοκρασιακά-εξαρτώμενων και των θερμοκρασιακά-ανεξάρτητων ιδιοτήτων, και για $\tau=0$ ή $\tau=1$. Από το Σχήμα 5.12 προκύπτει ότι οι υπολογιζόμενες μετατοπίσεις είναι μικρότερες όταν συνυπολογίζεται η επίδραση της θερμοκρασίας στις ιδιότητες, το οποίο σχετίζεται με τη μείωση του συντελεστή θερμικής διαστολής α . Το γεγονός αυτό είναι πιο αισθητό όταν η μεταβολή της θερμοκρασίας γίνεται ακαριαία ($\tau=0$). Από την άλλη πλευρά, η κατανομή της θερμοκρασίας δεν επηρεάζεται ιδιαίτερα από τη χρονική παράμετρο τ (βλ. Σχήμα 5.13). Επίσης, για θερμοκρασιακά-εξαρτώμενες ιδιότητες η θερμοκρασία στην FGM στρώση εμφανίζεται ελαφρώς αυξημένη. Τούτο οφείλεται κυρίως στην αύξηση της θερμικής αγωγιμότητας k στην FGM στρώση λόγω της αύξησης της θερμοκρασίας. Τέλος, από το Σχήμα 5.14 προκύπτει ότι οι τάσεις αυξάνονται πολύ καθώς η χρονική παράμετρος τ μειώνεται. Επιπλέον, η υπόθεση της θερμοκρασιακής ανεξαρτησίας των ιδιοτήτων των υλικών οδηγεί σε αυξημένες εφελκυστικές τάσεις, κυρίως λόγω του αυξημένου μέτρου ελαστικότητας E στην αρχική θερμοκρασία $T_0 = 300K$. Αυτό διακρίνεται πιο ξεκάθαρα για $\tau=0$, αφού στην περίπτωση αυτή οι τάσεις είναι γενικώς μεγαλύτερες.

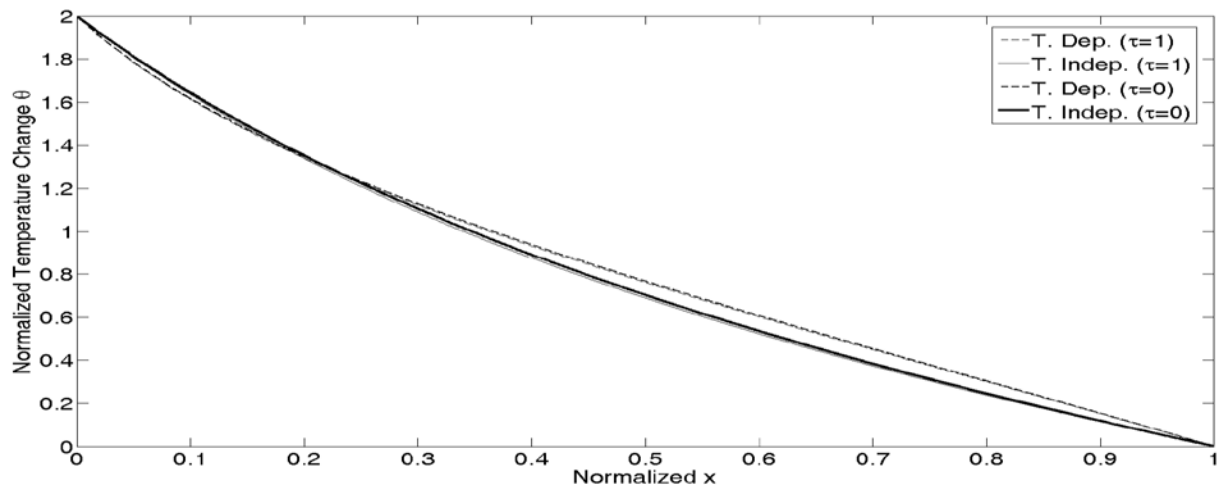
Οι παραπάνω παρατηρήσεις επιβεβαιώνονται και στα Σχήματα 5.15-5.17, όπου παρουσιάζονται η χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης μετατόπισης u , η χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας θ και η χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} στη θέση $x=0.5$, όταν η τιμή της χρονικής παραμέτρου είναι $\tau=0$. Τα αντίστοιχα διαγράμματα για $\tau=1$ και $\tau=2$ εμφανίζονται στα Σχήματα 5.18-5.20 και 5.21-5.23, όπου τα εξαγόμενα συμπεράσματα είναι ανάλογα.



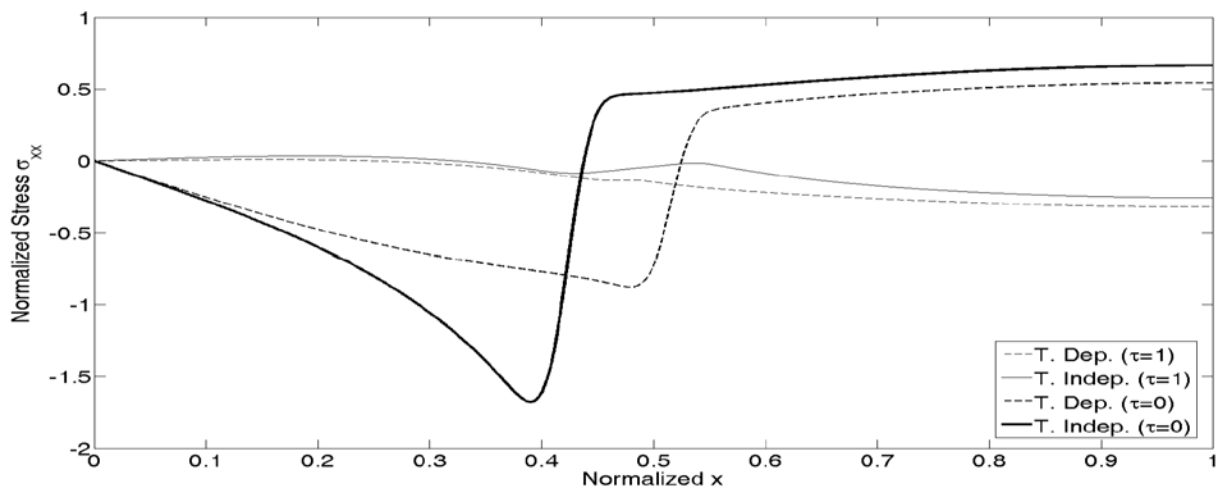
Σχήμα 5.11. Κατανομή των θερμομηχανικών ιδιοτήτων στην FGM στρώση τη χρονική στιγμή $t = 4.00$, για τις περιπτώσεις που οι ιδιότητες των υλικών θεωρούνται θερμοκρασιακά-εξαρτώμενες και θερμοκρασιακά-ανεξάρτητες ($\tau=0$)



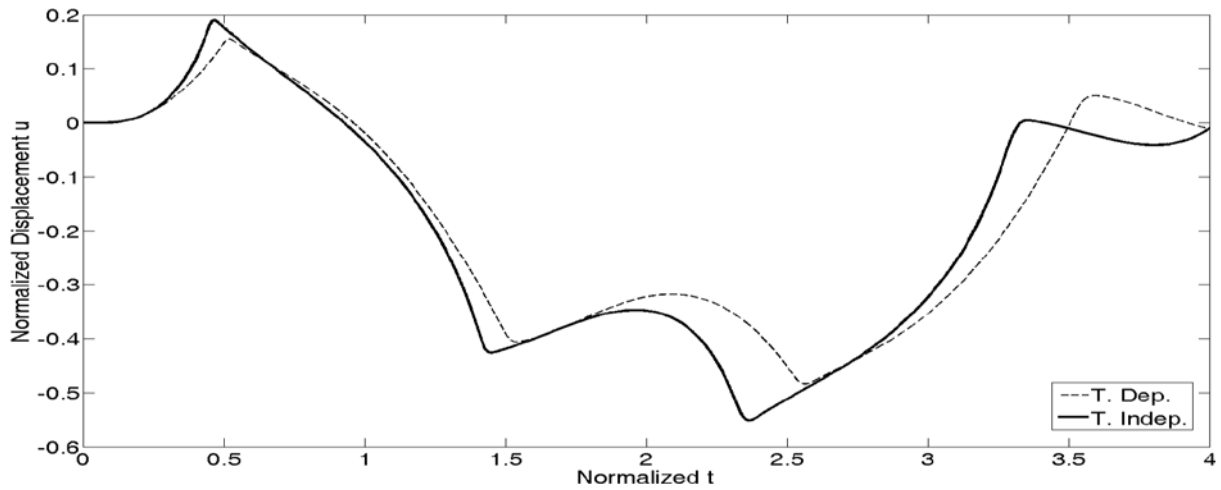
Σχήμα 5.12. Κατανομή της κανονικοποιημένης μετατόπισης u στην FGM στρώση τη χρονική στιγμή $t = 1.50$, για θερμοκρασιακά-εξαρτώμενες και θερμοκρασιακά-ανεξάρτητες ιδιότητες ($\tau = 0$ ή $\tau = 1$)



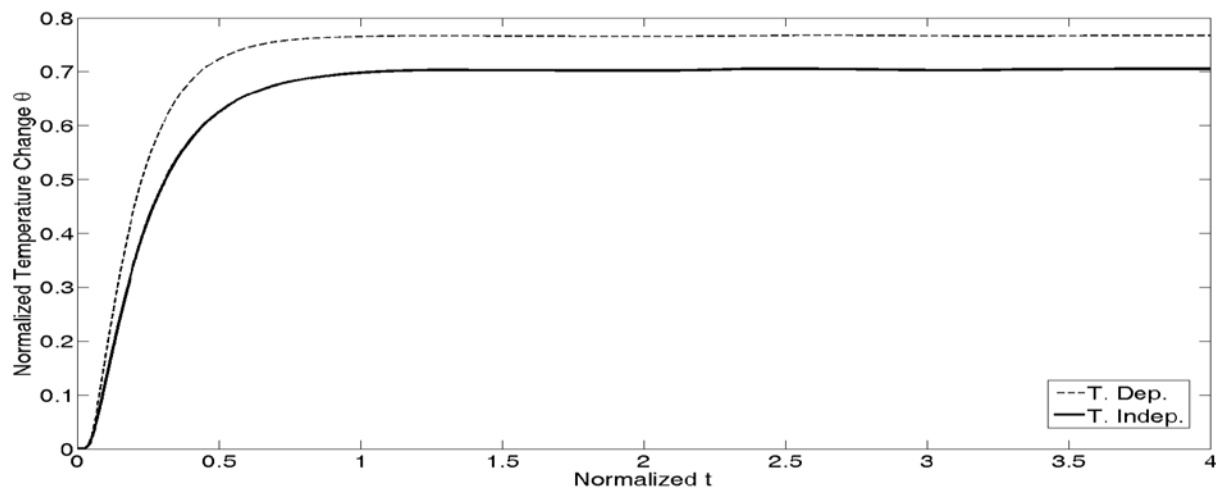
Σχήμα 5.13. Κατανομή της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας θ στην FGM στρώση τη χρονική στιγμή $t = 1.50$, για θερμοκρασιακά-εξαρτώμενες και θερμοκρασιακά-ανεξάρτητες ιδιότητες ($\tau = 0$ ή $\tau = 1$)



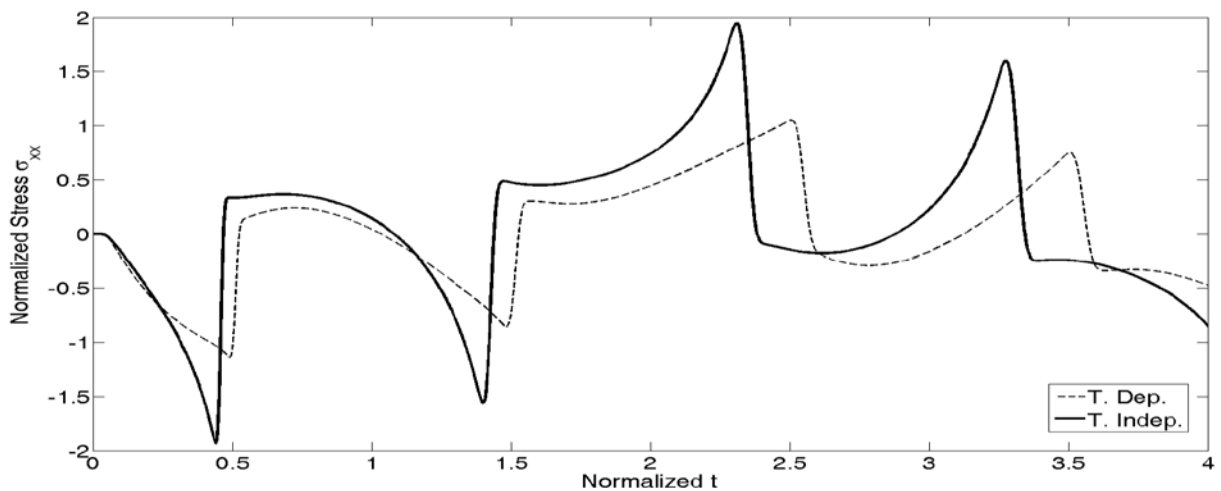
Σχήμα 5.14. Κατανομή της κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} στην FGM στρώση τη χρονική στιγμή $t = 1.50$, για θερμοκρασιακά-εξαρτώμενες και θερμοκρασιακά-ανεξάρτητες ιδιότητες ($\tau = 0$ ή $\tau = 1$)



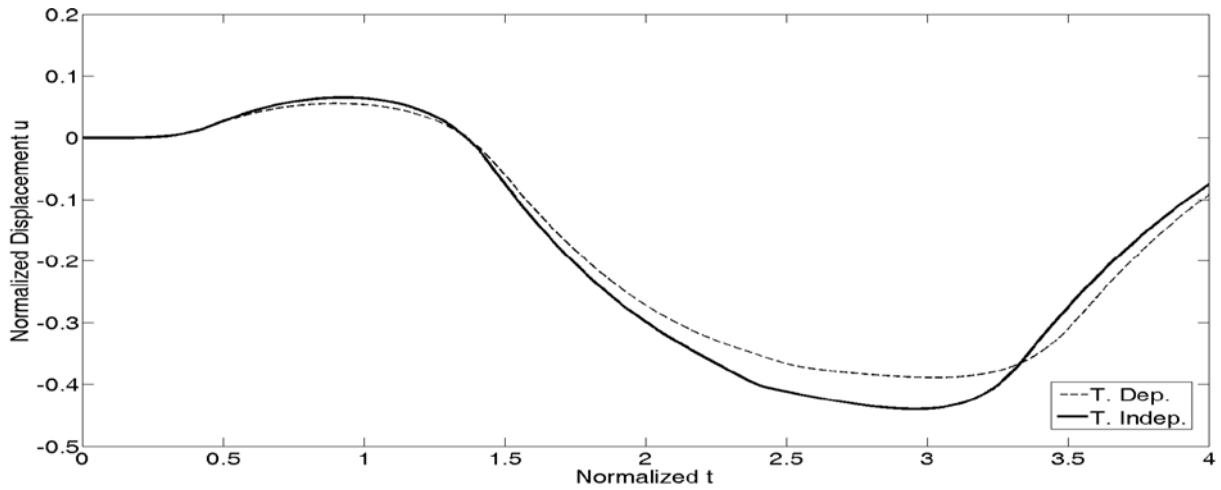
Σχήμα 5.15. Χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης μετατόπισης u στη θέση $x = 0.5$ της FGM στρώσης όταν $\tau = 0$, για θερμοκρασιακά-εξαρτώμενες και θερμοκρασιακά-ανεξάρτητες ιδιότητες



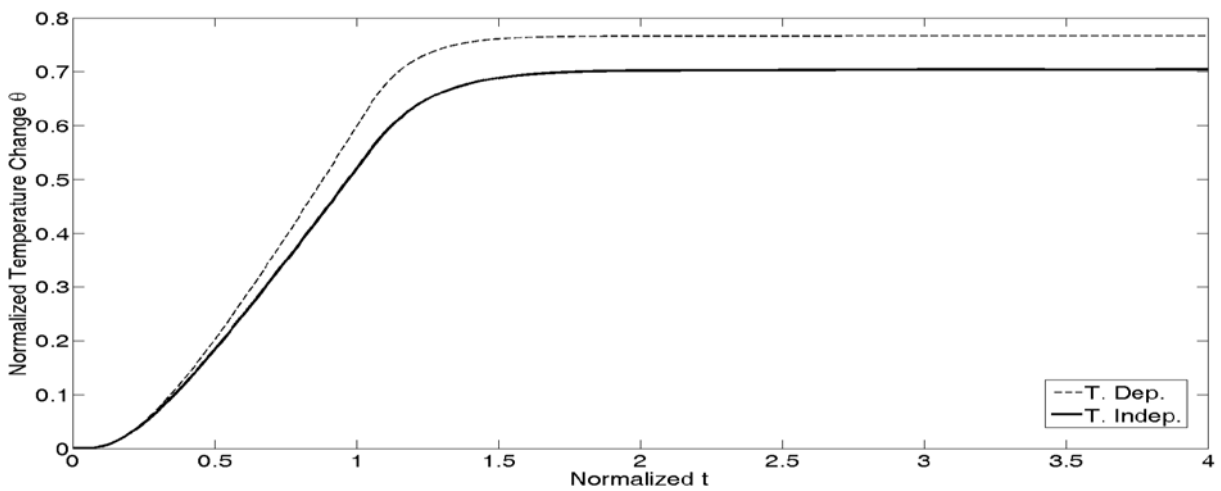
Σχήμα 5.16. Χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας θ στη θέση $x = 0.5$ της FGM στρώσης όταν $\tau = 0$, για θερμοκρασιακά-εξαρτώμενες και θερμοκρασιακά-ανεξάρτητες ιδιότητες



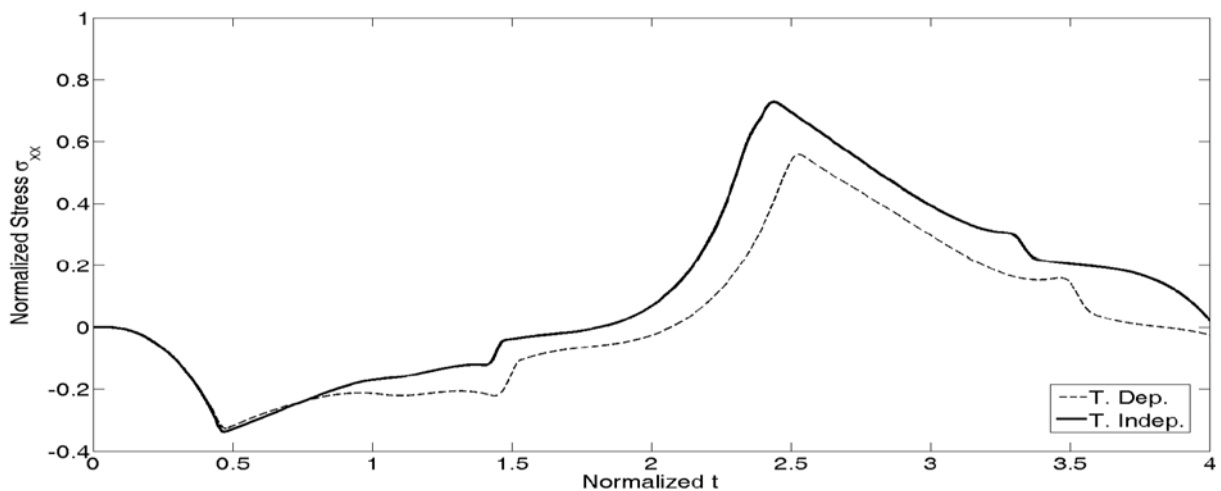
Σχήμα 5.17. Χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} στη θέση $x = 0.5$ της FGM στρώσης όταν $\tau = 0$, για θερμοκρασιακά-εξαρτώμενες και θερμοκρασιακά-ανεξάρτητες ιδιότητες



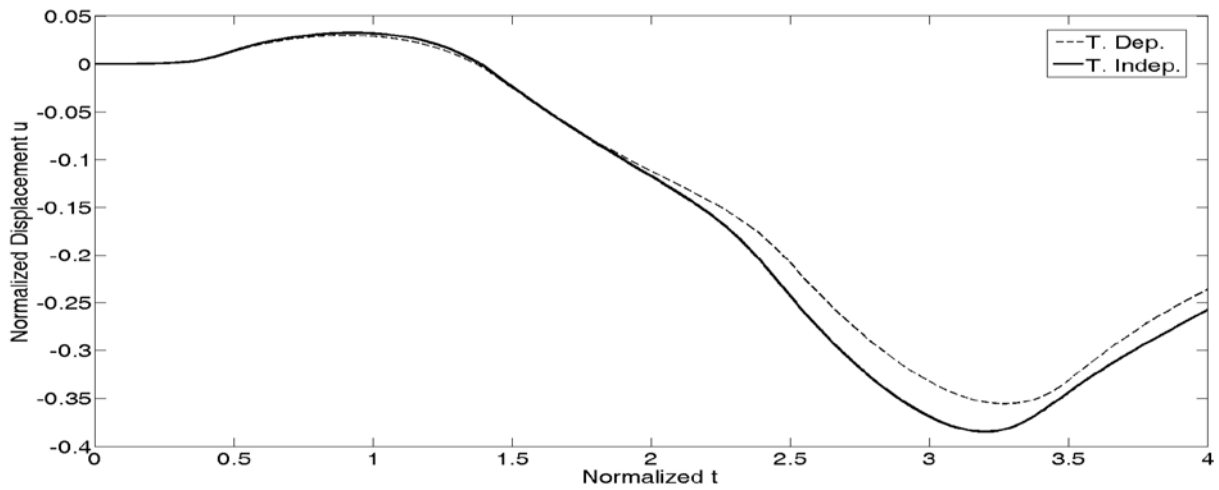
Σχήμα 5.18. Χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης μετατόπισης u στη θέση $x = 0.5$ της FGM στρώσης όταν $\tau = 1$, για θερμοκρασιακά-εξαρτώμενες και θερμοκρασιακά-ανεξάρτητες ιδιότητες



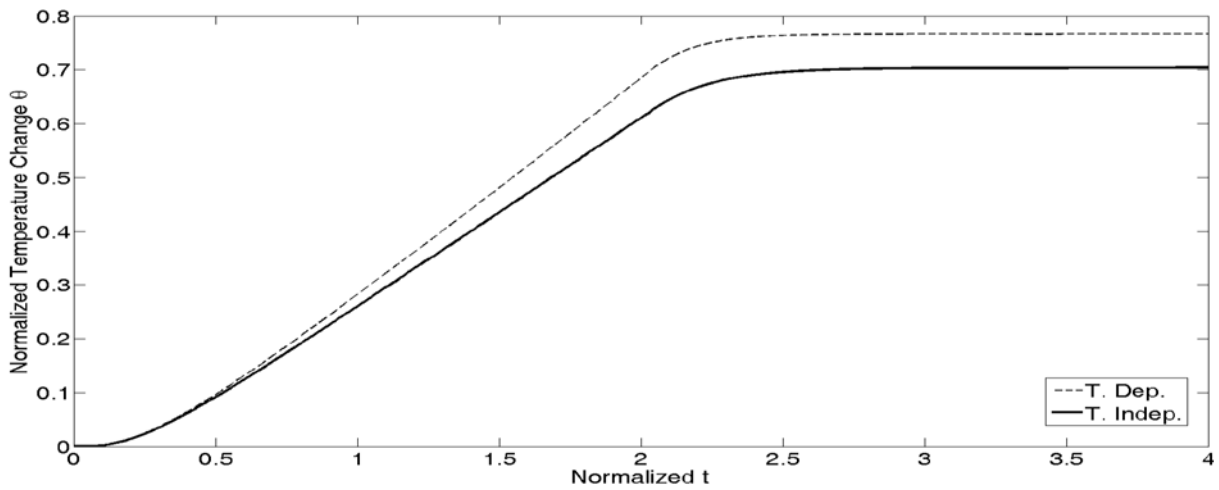
Σχήμα 5.19. Χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας θ στη θέση $x = 0.5$ της FGM στρώσης όταν $\tau = 1$, για θερμοκρασιακά-εξαρτώμενες και θερμοκρασιακά-ανεξάρτητες ιδιότητες



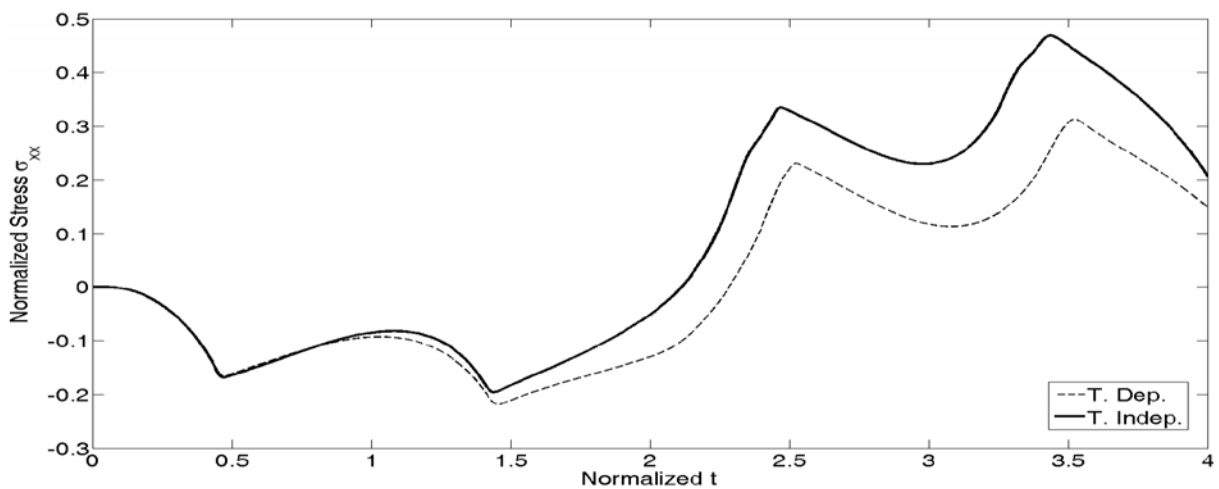
Σχήμα 5.20. Χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} στη θέση $x = 0.5$ της FGM στρώσης όταν $\tau = 1$, για θερμοκρασιακά-εξαρτώμενες και θερμοκρασιακά-ανεξάρτητες ιδιότητες



Σχήμα 5.21. Χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης μετατόπισης u στη θέση $x = 0.5$ της FGM στρώσης όταν $\tau = 2$, για θερμοκρασιακά-εξαρτώμενες και θερμοκρασιακά-ανεξάρτητες ιδιότητες



Σχήμα 5.22. Χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας θ στη θέση $x = 0.5$ της FGM στρώσης όταν $\tau = 2$, για θερμοκρασιακά-εξαρτώμενες και θερμοκρασιακά-ανεξάρτητες ιδιότητες



Σχήμα 5.23. Χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} στη θέση $x = 0.5$ της FGM στρώσης όταν $\tau = 2$, για θερμοκρασιακά-εξαρτώμενες και θερμοκρασιακά-ανεξάρτητες ιδιότητες

Στον Πίνακα 4.9 εμφανίζονται οι μέγιστες τιμές της κανονικοποιημένης μετατόπισης u , της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας θ και της κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} στο μέσο της FGM στρώσης για $\tau = 0, \tau = 1/4, \tau = 1/2, \tau = 1, \tau = 2$ και $\tau = 4$, για τις περιπτώσεις των θερμοκρασιακά-εξαρτώμενων και των θερμοκρασιακά-ανεξάρτητων ιδιοτήτων. Από τα αποτελέσματα του Πίνακα 4.9 προκύπτει καταρχάς ότι οι μετατοπίσεις και οι τάσεις αυξάνονται αισθητά καθώς $\tau \rightarrow 0$, ενώ αντίθετα η κατανομή της θερμοκρασίας δεν εξαρτάται από τη χρονική παράμετρο τ . Από την άλλη μεριά, οι προβλεπόμενες μετατοπίσεις και εφελκυστικές τάσεις αυξάνονται όταν αγνοείται η επίδραση της θερμοκρασίας στις ιδιότητες των υλικών, ενώ αντίθετα η προβλεπόμενη θερμοκρασία είναι ελαφρώς μειωμένη. Δηλαδή, επιβεβαιώνεται και εδώ ότι η υπόθεση της θερμοκρασιακής ανεξαρτησίας των ιδιοτήτων οδηγεί σε συντηρητικά αποτελέσματα, ως προς τις αναπτυσσόμενες μετακινήσεις και εφελκυστικές τάσεις.

		τ	0	1/4	1/2	1	2	4
Temperature Dependent Properties	$\max u $		0.48	0.46	0.43	0.39	0.36	0.17
	$\max \theta$		0.77	0.77	0.77	0.77	0.77	0.73
	$\max \sigma_{xx}$		1.05	0.95	0.81	0.56	0.31	0.06
Temperature Independent Properties	$\max u $		0.55	0.53	0.50	0.44	0.38	0.19
	$\max \theta$		0.71	0.71	0.71	0.70	0.70	0.66
	$\max \sigma_{xx}$		1.95	1.40	1.06	0.73	0.47	0.14

Πίνακας 5.3. Μέγιστες τιμές της κανονικοποιημένης μετατόπισης u , της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας θ και της κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} στη θέση $x = 0.5$ για το χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq 4$, για θερμοκρασιακά-εξαρτώμενες και θερμοκρασιακά-ανεξάρτητες ιδιότητες, και για διάφορες τιμές του κανονικοποιημένου χρονικού διαστήματος τ

5.5. Μελέτη της θερμομηχανικής συμπεριφοράς σύνθετης λωρίδας $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ με ενδιάμεση FGM στρώση σταθερού πάχους, υπό συνθήκες θερμικού σοκ

Όπως έχει συζητηθεί στο κεφάλαιο 1, σε μία FGM λωρίδα τριών στρώσεων από κεραμικό/μεταλλικό υλικό, οι δύο ανώτερες στρώσεις (από κεραμικό και FGM υλικό, αντίστοιχα) αποτελούν την επικάλυψη θερμικής προστασίας (TBC) της κατώτερης στρώσης από μεταλλικό υλικό. Σε ένα συμβατικό TBC η αστοχία συμβαίνει συχνά κοντά στη διεπιφάνεια ανάμεσα στην κεραμική και τη μεταλλική στρώση, και προς την πλευρά του κεραμικού υλικού [16,17]. Συνεπώς ο ρόλος της FGM στρώσης σε ένα FGM-TBC είναι η μείωση των αναπτυσσόμενων τάσεων κοντά στην άνω επιφάνεια της μεταλλικής στρώσης, χωρίς παράλληλα να ελαττώνεται η παρεχόμενη θερμική προστασία από το κεραμικό υλικό.

Στην παρούσα παράγραφο εξετάζεται μία $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ FGM λωρίδα τριών στρώσεων (βλ. Σχήμα 4.1), στην οποία επιβάλλεται ακαριαία μεταβολή της θερμοκρασίας στην άνω επιφάνειά της. Η λωρίδα αρχικά βρίσκεται σε ομοιόμορφη θερμοκρασία $T_0 = 300K$ και τη χρονική στιγμή $t = 0$ η θερμοκρασία της άνω επιφάνειάς της αυξάνεται απότομα στους $900K$. Στην κάτω επιφάνεια της λωρίδας θεωρείται ότι γίνεται μεταφορά θερμότητας με συναγωγή από τον περιβάλλοντα αέρα, ο οποίος παραμένει σε θερμοκρασία $T_0 = 300K$. Εξετάζονται διάφορες κατανομές για το κατ' όγκο ποσοστό του $Ti-6Al-4V$ στην FGM

στρώση, με κριτήριο βελτιστοποίησης την ελαχιστοποίηση της τάσης στην άνω επιφάνεια της στρώσης του Ti-6Al-4V. Οι θερμομηχανικές ιδιότητες των υλικών θεωρούνται θερμοκρασιακά-εξαρτώμενες και αναφέρονται στους Πίνακες 5.1-5.2, όπου οι σταθερές του Lamé λ, μ και η θερμική σταθερά β προκύπτουν από τις σχέσεις (4.3.3)-(4.3.5).

Οι αρχικές-συνοριακές συνθήκες του προβλήματος είναι οι εξής:

$$\begin{aligned} \underline{u}(\underline{x}, 0) = 0, \quad \underline{\dot{u}}(\underline{x}, 0) = 0, \quad \underline{\theta}(\underline{x}, 0) = 0, \quad \underline{\dot{\theta}}(\underline{x}, 0) = 0, \quad 0 \leq \underline{x} \leq \underline{L} \\ \underline{\theta}(0, \underline{t}) = 2, \quad \underline{\sigma}_{xx}(0, \underline{t}) = 0, \quad \underline{q}_x(\underline{L}, \underline{t}) = -\frac{h_v l}{k_m} \underline{\theta}(\underline{L}, \underline{t}), \quad \underline{u}(\underline{L}, \underline{t}) = 0, \quad 0 < \underline{t} < \infty \end{aligned} \quad (5.5.1)$$

όπου $h_v = h_v l / k_m = 1$ είναι ο κανονικοποιημένος συντελεστής συναγωγής.

Όπως έχει συζητηθεί στην παράγραφο 3.3.2, οι θερμοκρασιακές συνοριακές συνθήκες που επιβάλλονται στην κάτω επιφάνεια της λωρίδας είναι τύπου Robin. Στο παράρτημα Β αποδεικνύεται ότι για τις δεδομένες θερμοκρασιακές συνοριακές συνθήκες του προβλήματος που εξετάζονται, η τελική θερμοκρασία της κάτω επιφάνειας της λωρίδας εξαρτάται από την κατανομή της θερμικής αγωγιμότητας k στη λωρίδα. Επομένως, οι δεδομένες θερμοκρασιακές συνοριακές συνθήκες επελέγησαν ώστε να αναδειχθεί πιο καθαρά η επίδραση της FGM στρώσης στη θερμική προστασία της στρώσης του Ti-6Al-4V.

Το συνολικό κανονικοποιημένο πάχος της λωρίδας ZrO₂/FGM/Ti-6Al-4V είναι $\underline{L} = 1$, ενώ τα κανονικοποιημένα πάχη κάθε στρώσης είναι $\underline{L}_c = 0.2 / \underline{L}_{fg} = 0.6 / \underline{L}_m = 0.2$. Για τις αναλύσεις χρησιμοποιούνται $N_{el} = 1000$ πεπερασμένα στοιχεία και $M_t = 4000$ χρονικά βήματα, για συνολικό κανονικοποιημένο χρόνο $t_{tot} = 4.00$.

Οι κατανομές που εξετάζονται για το κατ' όγκο ποσοστό του Ti-6Al-4V στην FGM στρώση είναι η κατανομή εκθετικού νόμου (power law) και η σιγμοειδής κατανομή (sigmoid law), με παράμετρο p [18]. Σύμφωνα με την εξίσωση (1.2.5), στην κατανομή εκθετικού νόμου η κατανομή μίας ιδιότητας $P = P(\underline{x}, T)$ στην FGM στρώση σε κάποια χρονική στιγμή \underline{t} υπολογίζεται από την ακόλουθη σχέση:

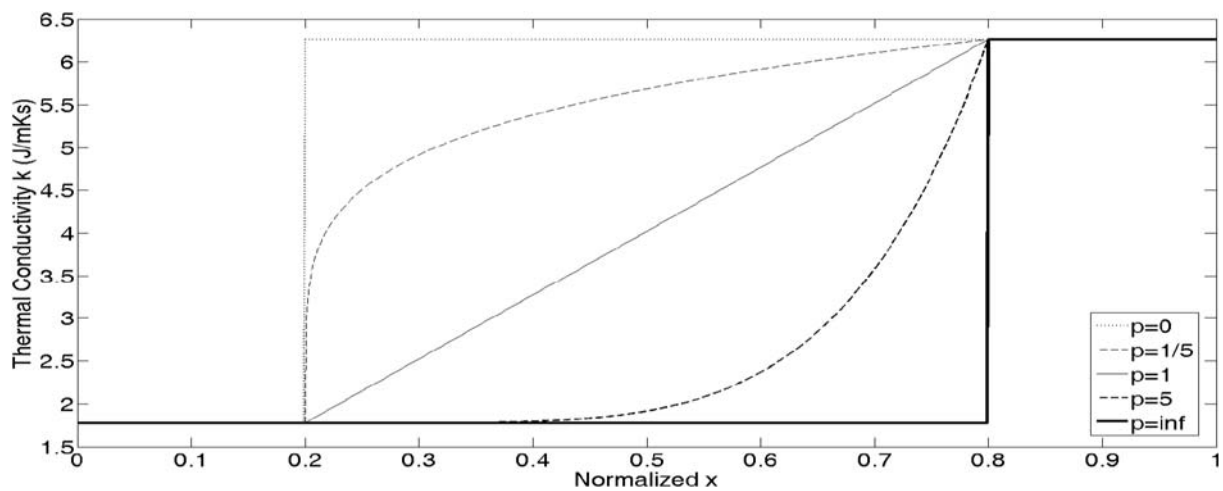
$$P(\underline{x}, T) = P_c(T) + [P_m(T) - P_c(T)] \left(\frac{\underline{x} - \underline{L}_c}{\underline{L}_{fg}} \right)^p, \quad \underline{L}_c \leq \underline{x} \leq \underline{L}_c + \underline{L}_{fg} \quad (5.5.2)$$

όπου T είναι η απόλυτη θερμοκρασία στη θέση \underline{x} τη δεδομένη χρονική στιγμή \underline{t} , ενώ $P_c(T)$ και $P_m(T)$ είναι οι ιδιότητες του κεραμικού και του μεταλλικού υλικού αντίστοιχα στη θερμοκρασία T .

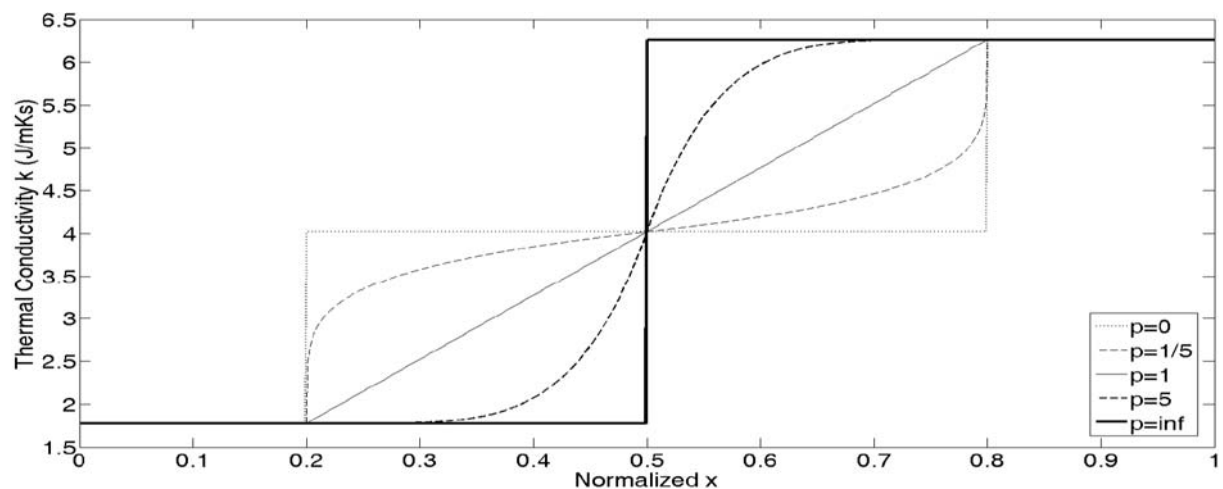
Αντίστοιχα για τη σιγμοειδή κατανομή, η κατανομή μίας ιδιότητας $P = P(\underline{x}, T)$ στην FGM στρώση τη χρονική στιγμή \underline{t} υπολογίζεται σύμφωνα με την εξίσωση (1.2.7), δηλαδή:

$$P(\underline{x}, T) = \left\{ \begin{array}{l} P_c(T) + \frac{P_m(T) - P_c(T)}{2} \left(2 \frac{\underline{x} - \underline{L}_c}{\underline{L}_{fg}} \right)^p, \quad \underline{L}_c \leq \underline{x} \leq \underline{L}_c + \frac{\underline{L}_{fg}}{2} \\ P_m(T) + \frac{P_c(T) - P_m(T)}{2} \left(2 - 2 \frac{\underline{x} - \underline{L}_c}{\underline{L}_{fg}} \right)^p, \quad \underline{L}_c + \frac{\underline{L}_{fg}}{2} < \underline{x} \leq \underline{L}_c + \underline{L}_{fg} \end{array} \right\} \quad (5.5.3)$$

Η κατανομή της θερμικής αγωγιμότητας k σε θερμοκρασία $T = 300K$ στη λωρίδα για την κατανομή εκθετικού νόμου και για τη σιγμοειδή κατανομή φαίνεται στα Σχήματα 5.24 και 5.25 αντίστοιχα (για διάφορες τιμές της παραμέτρου p). Στην κατανομή εκθετικού νόμου, καθώς $p \rightarrow 0^+$ η FGM στρώση τείνει να γίνει μία ομοιογενής μεταλλική στρώση, ενώ καθώς $p \rightarrow \infty$ η FGM στρώση τείνει να γίνει μία ομοιογενής κεραμική στρώση. Από την άλλη πλευρά, στη σιγμοειδή κατανομή καθώς $p \rightarrow 0^+$ η FGM στρώση τείνει να γίνει μία ομοιογενής στρώση με ιδιότητες ίσες προς το μέσο όρο των ιδιοτήτων του κεραμικού και του μεταλλικού υλικού, ενώ καθώς $p \rightarrow \infty$ η FGM στρώση τείνει να γίνει μία σύνθετη λωρίδα δύο ισοπαχών στρώσεων από κεραμικό και μεταλλικό υλικό αντίστοιχα. Το χαρακτηριστικό της σιγμοειδούς κατανομής είναι πως για κάθε τιμή της παραμέτρου p η συνολική ποσότητα του κεραμικού και του μεταλλικού υλικού στην FGM στρώση είναι ίσες. Αντίθετα, στην κατανομή εκθετικού νόμου αυτό ισχύει μόνο για $p=1$, αφού για $p > 1$ η FGM στρώση περιέχει περισσότερο κεραμικό υλικό και για $p < 1$ περιέχει περισσότερο μεταλλικό υλικό.



Σχήμα 5.24. Κατανομή της θερμικής αγωγιμότητας k στη λωρίδα, σε θερμοκρασία $T = 300K$ και για διάφορες τιμές της παραμέτρου p της κατανομής εκθετικού νόμου (power law)



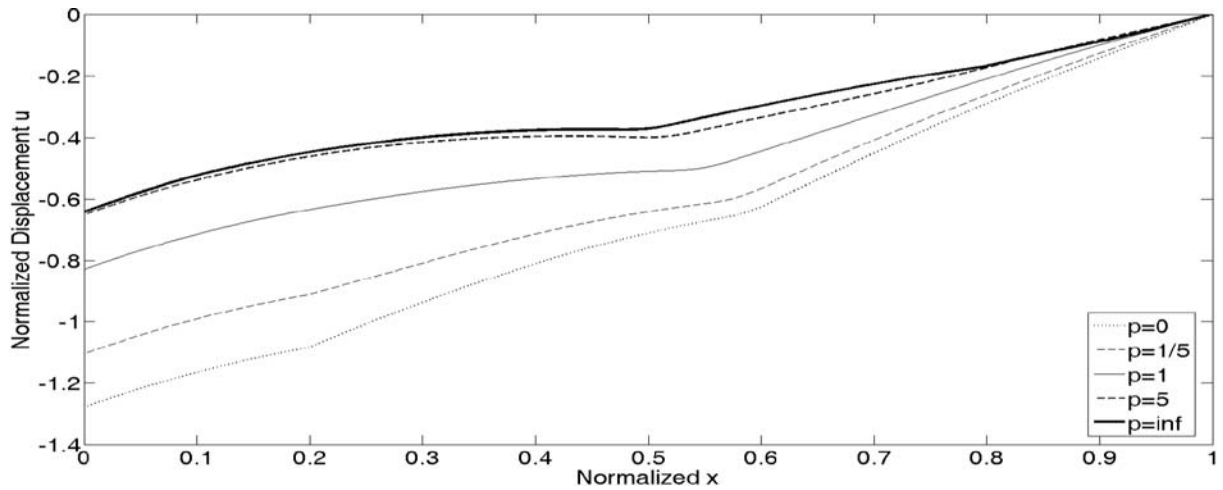
Σχήμα 5.25. Κατανομή της θερμικής αγωγιμότητας k στη λωρίδα, σε θερμοκρασία $T = 300K$ και για διάφορες τιμές της παραμέτρου p της σιγμοειδούς κατανομής (sigmoid law)

Στα Σχήματα 5.26-5.28 απεικονίζονται η κατανομή της κανονικοποιημένης μετατόπισης u , η κατανομή της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας θ και η κατανομή της κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} , αντίστοιχα, κατά τη χρονική στιγμή $t = 1.50$ για διάφορες τιμές της παραμέτρου p της κατανομής εκθετικού νόμου. Από το Σχήμα 5.26 φαίνεται ότι οι μετατοπίσεις μειώνονται καθώς η τιμή της παραμέτρου p αυξάνεται. Επιπλέον, στο Σχήμα 5.27 διακρίνεται καθαρά πως η παράμετρος p επηρεάζει σημαντικά την κατανομή της θερμοκρασίας στη λωρίδα. Τα αντίστοιχα διαγράμματα για τη σιγμοειδή κατανομή φαίνονται στα Σχήματα 5.29-5.31, όπου ισχύουν ανάλογες παρατηρήσεις ως προς την επίδραση της παραμέτρου p στις μετατοπίσεις και στην κατανομή της θερμοκρασίας. Λόγω της συμμετρίας της κατανομής ωστόσο, η επίδραση αυτή είναι λιγότερο έντονη.

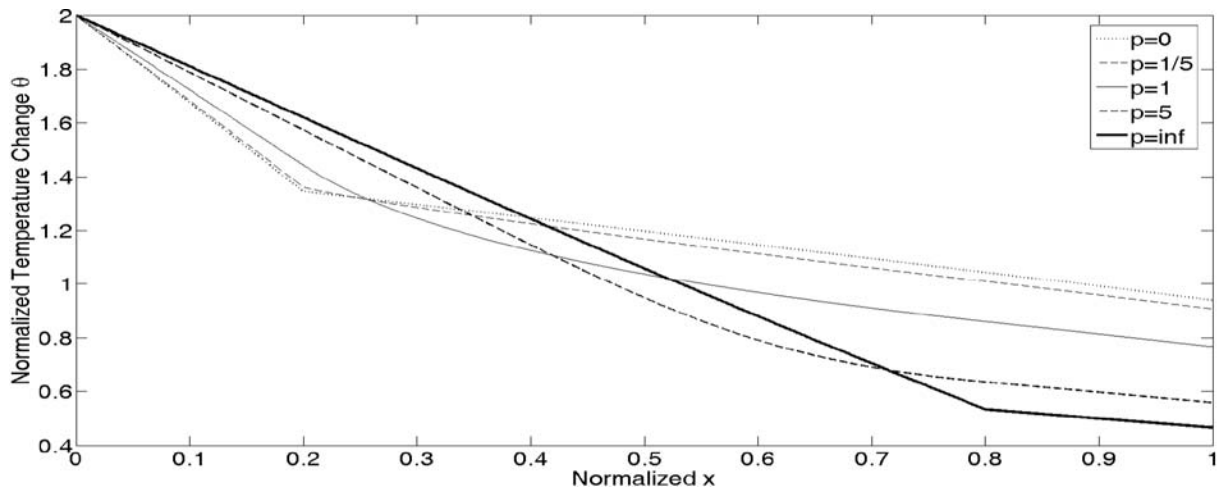
Στη συνέχεια εξετάζονται η χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης μετατόπισης u , η χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας θ και η χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} στη θέση $x = 0.8$, η οποία αντιστοιχεί στην άνω επιφάνεια του Ti-6Al-4V. Στα Σχήματα 5.32-5.34 εμφανίζονται τα διαγράμματα αυτά για την περίπτωση της κατανομής εκθετικού νόμου και για διάφορες τιμές του p , ενώ τα αντίστοιχα διαγράμματα για τη σιγμοειδή κατανομή εμφανίζονται στα Σχήματα 5.35-5.37. Τα συμπεράσματα για τα δύο είδη κατανομών είναι κοινά: η αύξηση της τιμής της παραμέτρου p οδηγεί σε μείωση των αναπτυσσόμενων μετατοπίσεων και εφελκυστικών τάσεων στην άνω επιφάνεια της μεταλλικής στρώσης, όπως επίσης και σε μείωση της θερμοκρασίας στη θέση αυτή.

Τα συγκεντρωτικά αποτελέσματα για τις μέγιστες τιμές της κανονικοποιημένης μετατόπισης u , της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας θ και της κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} στη θέση $x = 0.8$ για τις διάφορες κατανομές εμφανίζονται στον Πίνακα 5.4. Τα αποτελέσματα του Πίνακα 5.4 επιβεβαιώνουν τις παραπάνω παρατηρήσεις, δηλαδή ότι η αύξηση της τιμής p οδηγεί σε ευνοϊκά αποτελέσματα, ειδικά για την κατανομή εκθετικού νόμου. Στο σημείο αυτό υπενθυμίζεται ότι στην οριακή περίπτωση $p = \infty$, η οποία εμφανίζεται ως η βέλτιστη επιλογή και για τα δύο είδη κατανομών, ουσιαστικά δεν υπάρχει ενδιάμεση FGM στρώση. Ωστόσο, η αύξηση του p αντιστοιχεί στην αύξηση του ποσοστού του κεραμικού υλικού στην FGM στρώση για την περίπτωση της κατανομής εκθετικού νόμου, ενώ για τη σιγμοειδή κατανομή αντιστοιχεί στην τοποθέτηση περισσότερου κεραμικού υλικού στην αρχή της FGM στρώσης. Σε κάθε περίπτωση, καθώς το p λαμβάνει μεγαλύτερες τιμές η θερμική προστασία που προσφέρει το TBC στο μεταλλικό υλικό ενισχύεται, όπως φαίνεται άλλωστε και από τα Σχήματα 5.33 και 5.36. Με άλλα λόγια, η αντικατάσταση ενός τμήματος της κεραμικής στρώσης με μία FGM στρώση ίσου πάχους συνεπάγεται φυσιολογικά τη μείωση της θερμικής προστασίας που παρέχει το TBC. Επομένως, είναι μάλλον αναμενόμενο ότι σε συνθήκες θερμικού σοκ, η μείωση της παρεχόμενης θερμικής προστασίας από το TBC στο Ti-6Al-4V θα έχει δυσμενείς συνέπειες για τη μεταβολή της θερμοκρασίας και τα συνεπαγόμενα εντατικά μεγέθη.

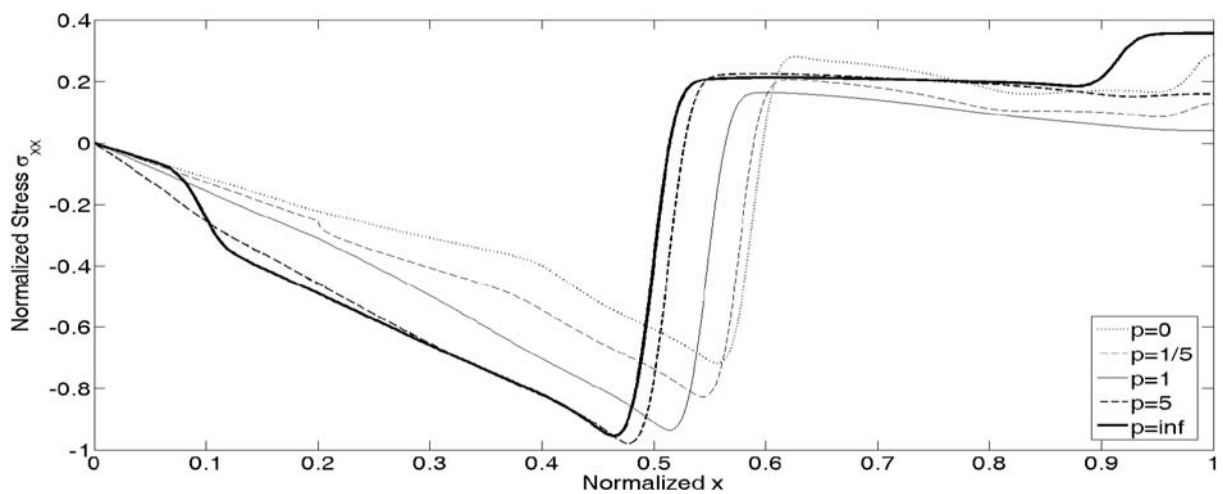
Όπως όμως έχει αναφερθεί παραπάνω, η τοποθέτηση της FGM στρώσης έχει ως στόχο τη μείωση των αναπτυσσόμενων τάσεων χωρίς να μεταβάλλει τη συνολική θερμική προστασία που παρέχει το TBC. Είναι σαφές ότι τούτο δεν επιτυγχάνεται στην εφαρμογή που εξετάστηκε στην παράγραφο αυτή, κυρίως διότι το πάχος της FGM στρώσης θεωρήθηκε σταθερό. Το πρόβλημα αυτό συζητείται και επιλύεται στην επόμενη παράγραφο, όπου πλέον διατηρείται σταθερή η θερμική προστασία που προσφέρει η FGM στρώση, ενώ το πάχος της θεωρείται μεταβλητό.



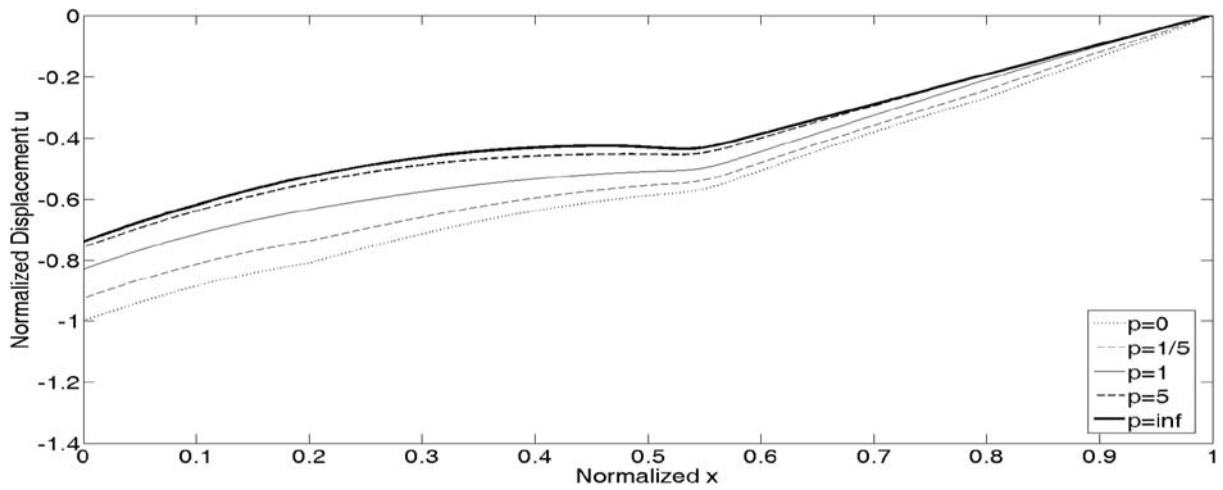
Σχήμα 5.26. Κατανομή της κανονικοποιημένης μετατόπισης u στη λωρίδα τη χρονική στιγμή $t = 1.50$ για διάφορες τιμές της παραμέτρου p της κατανομής εκθετικού νόμου (power law)



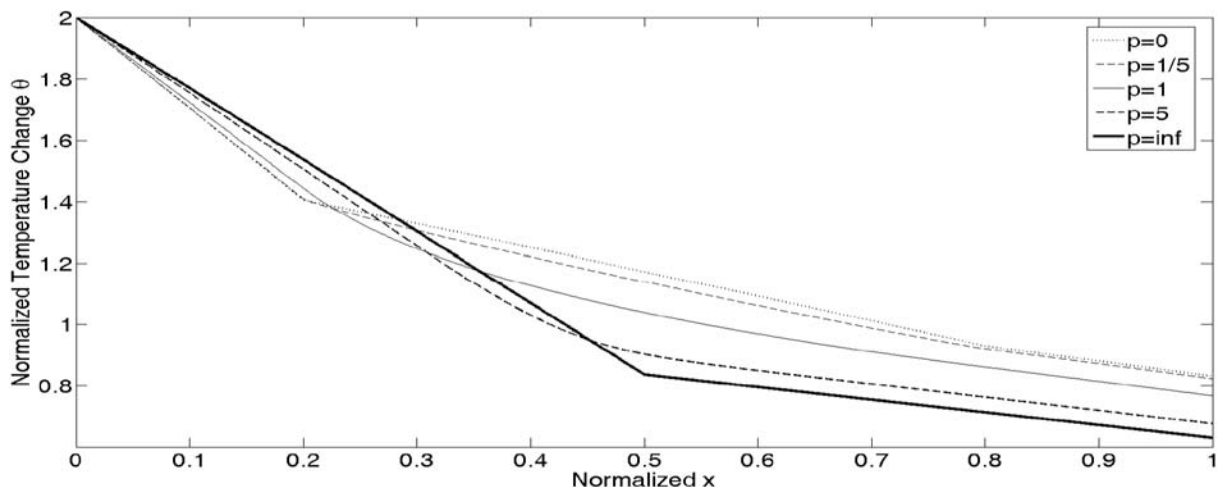
Σχήμα 5.27. Κατανομή της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας θ στη λωρίδα τη χρονική στιγμή $t = 1.50$ για διάφορες τιμές της παραμέτρου p της κατανομής εκθετικού νόμου (power law)



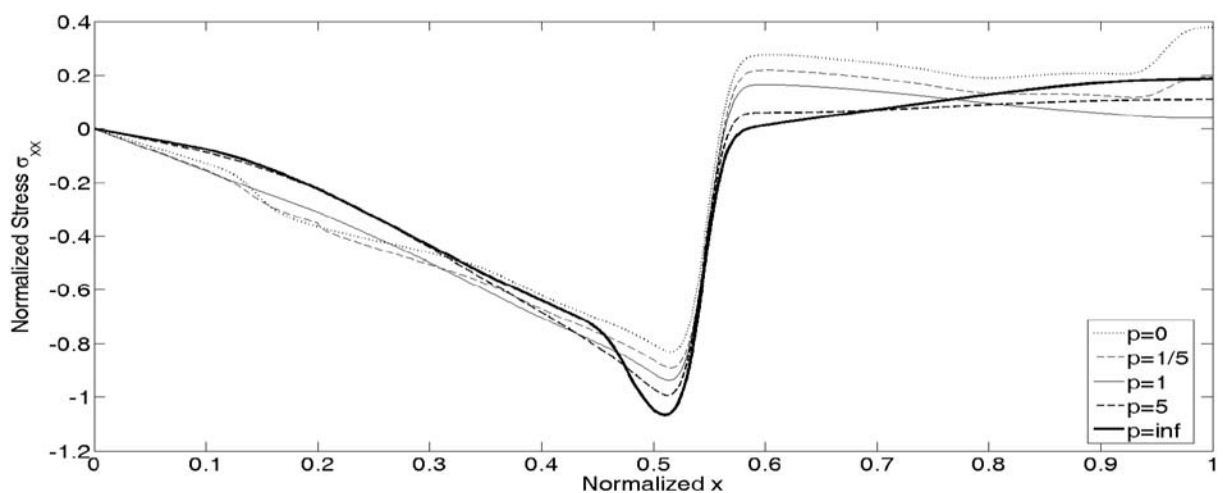
Σχήμα 5.28. Κατανομή της κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} στη λωρίδα τη χρονική στιγμή $t = 1.50$ για διάφορες τιμές της παραμέτρου p της κατανομής εκθετικού νόμου (power law)



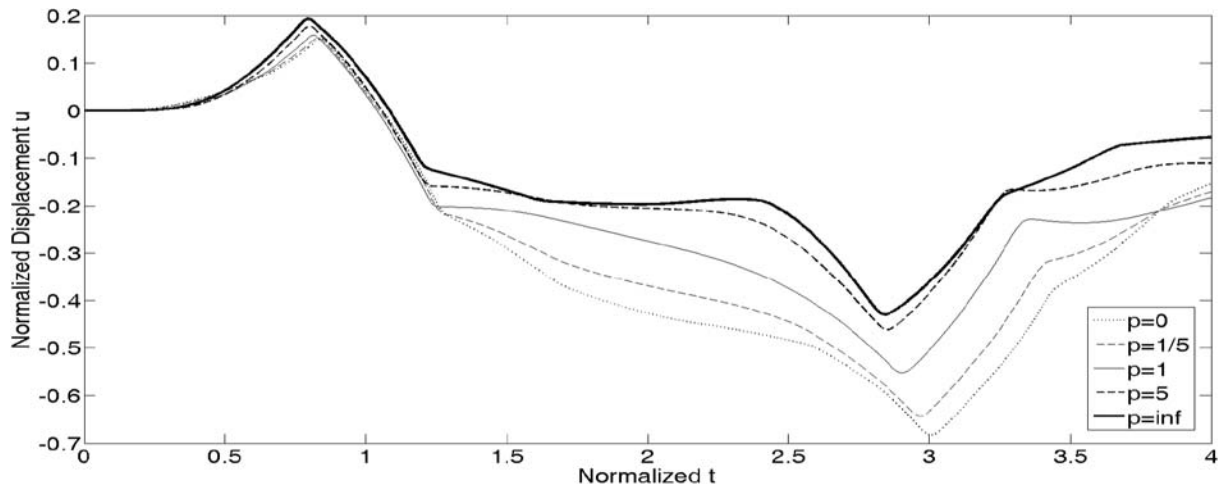
Σχήμα 5.29. Κατανομή της κανονικοποιημένης μετατόπισης u στη λωρίδα τη χρονική στιγμή $t = 1.50$ για διάφορες τιμές της παραμέτρου p της σιγμοειδούς κατανομής (sigmoid law)



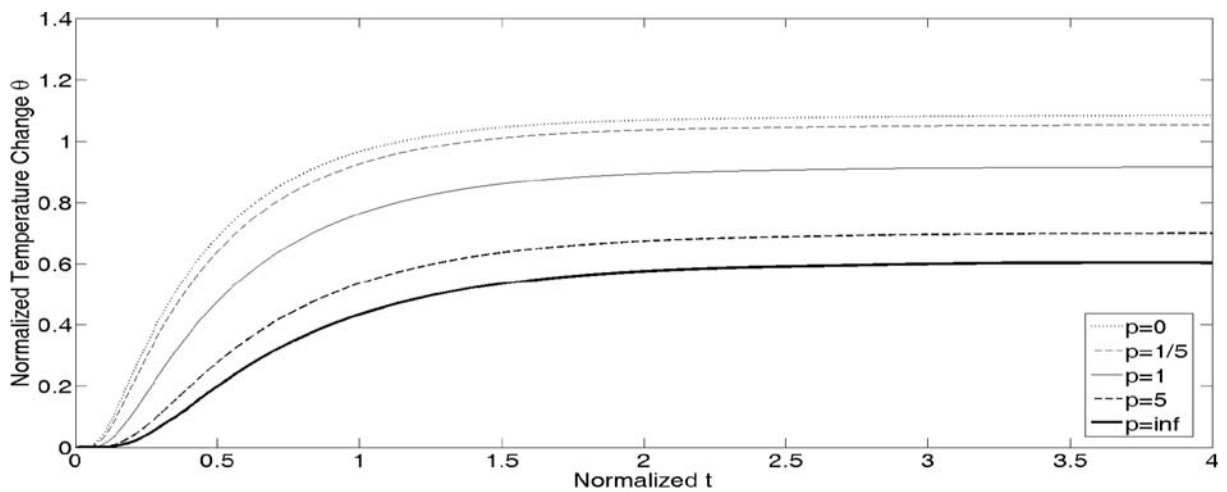
Σχήμα 5.30. Κατανομή της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας θ στη λωρίδα τη χρονική στιγμή $t = 1.50$ για διάφορες τιμές της παραμέτρου p της σιγμοειδούς κατανομής (sigmoid law)



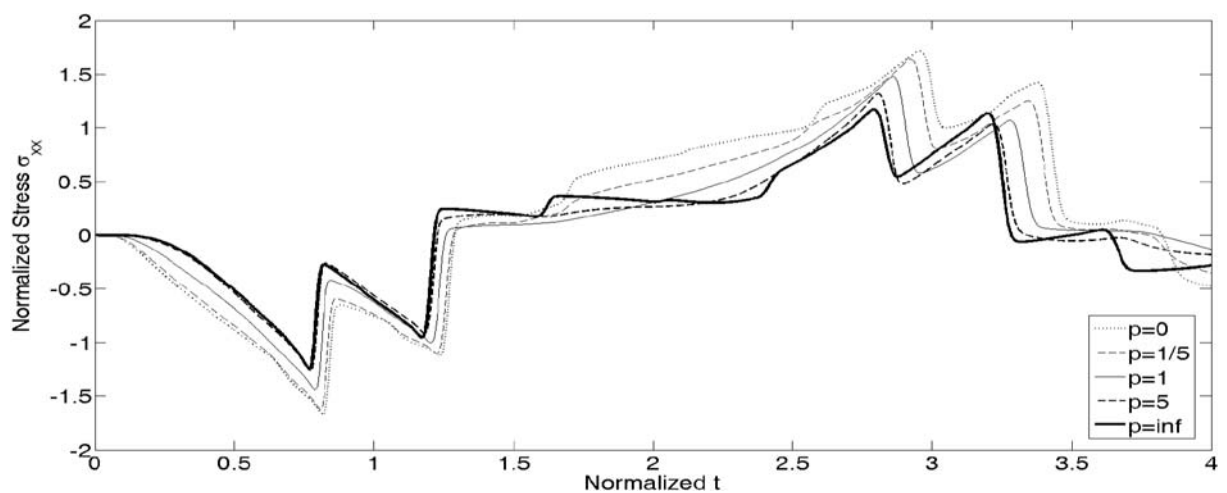
Σχήμα 5.31. Κατανομή της κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} στη λωρίδα τη χρονική στιγμή $t = 1.50$ για διάφορες τιμές της παραμέτρου p της σιγμοειδούς κατανομής (sigmoid law)



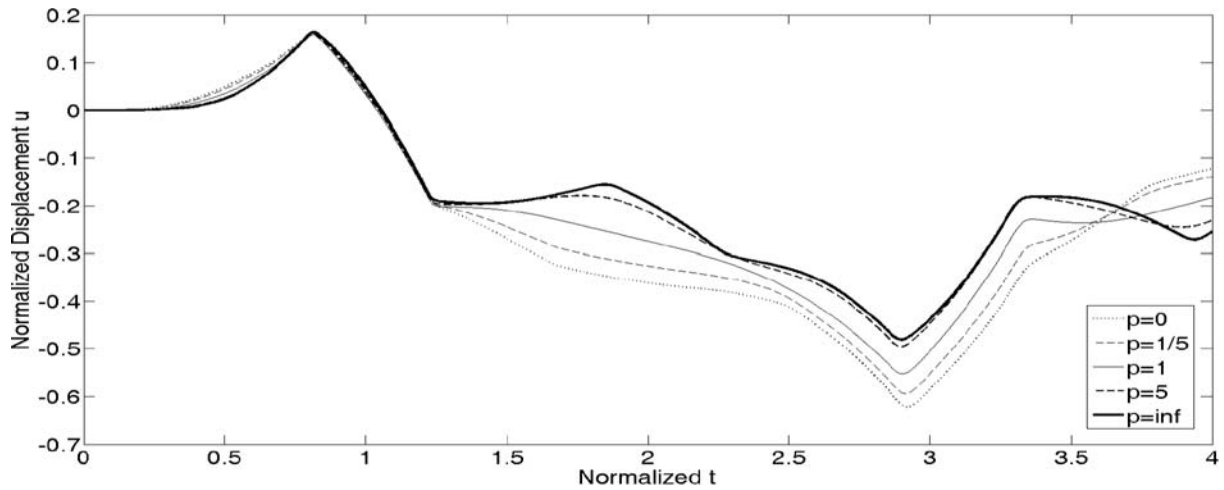
Σχήμα 5.32. Χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης μετατόπισης u στη θέση $x=0.8$ της λωρίδας, για διάφορες τιμές της παραμέτρου p της κατανομής εκθετικού νόμου (power law)



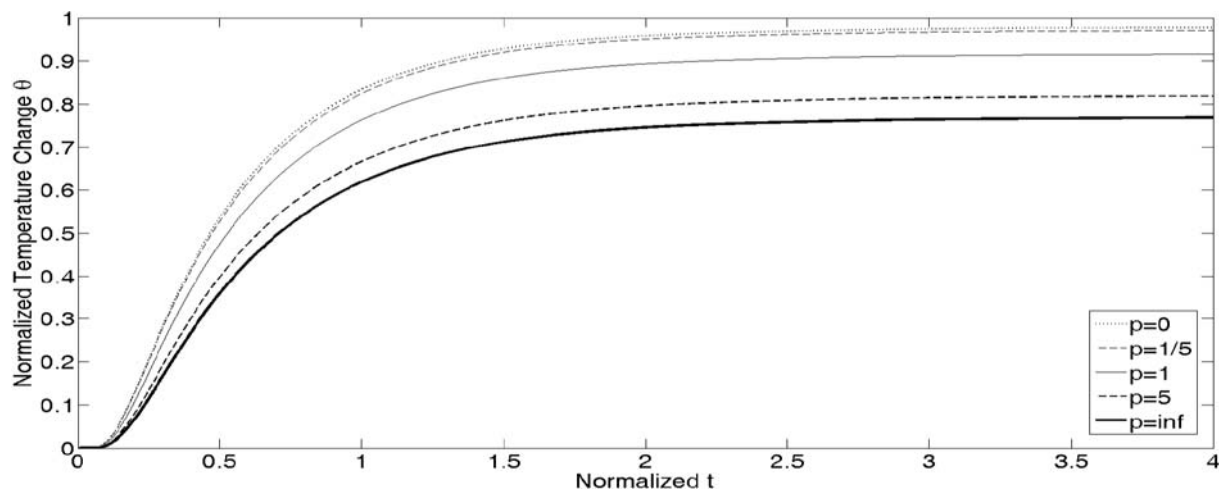
Σχήμα 5.33. Χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας θ στη θέση $x=0.8$ της λωρίδας, για διάφορες τιμές της παραμέτρου p της κατανομής εκθετικού νόμου (power law)



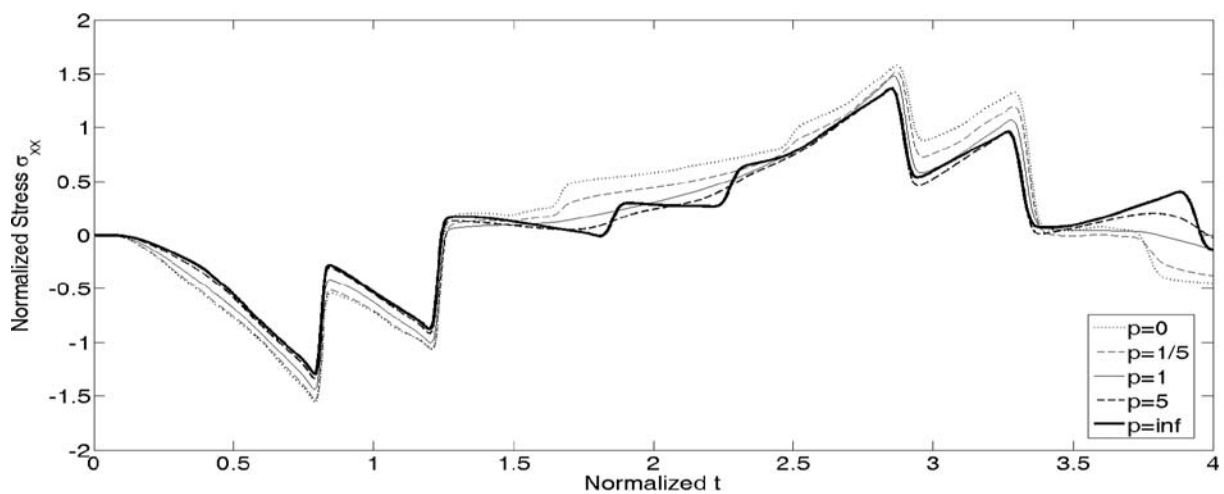
Σχήμα 5.34. Χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} στη θέση $x=0.8$ της λωρίδας, για διάφορες τιμές της παραμέτρου p της κατανομής εκθετικού νόμου (power law)



Σχήμα 5.35. Χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης μετατόπισης u στη θέση $x=0.8$ της λωρίδας, για διάφορες τιμές της παραμέτρου p της σιγμοειδούς κατανομής (sigmoid law)



Σχήμα 5.36. Χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας θ στη θέση $x=0.8$ της λωρίδας, για διάφορες τιμές της παραμέτρου p της σιγμοειδούς κατανομής (sigmoid law)



Σχήμα 5.37. Χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} στη θέση $x=0.8$ της λωρίδας, για διάφορες τιμές της παραμέτρου p της σιγμοειδούς κατανομής (sigmoid law)

	$p = 0$	$p = \frac{1}{10}$	$p = \frac{1}{5}$	$p = \frac{1}{2}$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 5$	$p = 10$	$p = \infty$
					$\max u $				
Power Law	0.68	0.66	0.64	0.60	0.55	0.50	0.46	0.45	0.43
Sigmoid Law	0.62	0.60	0.59	0.57	0.55	0.53	0.50	0.48	0.48
					$\max \theta$				
Power Law	1.08	1.07	1.05	1.00	0.92	0.81	0.70	0.65	0.60
Sigmoid Law	0.98	0.98	0.97	0.95	0.92	0.87	0.82	0.80	0.77
					$\max \sigma_{xx}$				
Power Law	1.71	1.68	1.64	1.56	1.48	1.39	1.32	1.28	1.17
Sigmoid Law	1.58	1.54	1.52	1.51	1.48	1.43	1.37	1.35	1.36

Πίνακας 5.4. Μέγιστες τιμές της κανονικοποιημένης μετατόπισης u , της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας θ και της κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} στη θέση $x = 0.8$ για το χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq 4$, για διαφορετικές κατανομές ιδιοτήτων στην FGM στρώση

5.6. Συγκριτική μελέτη της θερμομηχανικής συμπεριφοράς σύνθετων λωρίδων τριών στρώσεων $ZrO_2/FGM/Ti-6Al-4V$ με κοινή θερμική αντίσταση, υπό συνθήκες θερμικού σοκ

Οι αναλύσεις που έχουν παρουσιαστεί έως τώρα αφορούν τη θερμομηχανική συμπεριφορά μίας FGM λωρίδας από κεραμικό/μεταλλικό υλικό, όπου το πάχος της FGM στρώσης θεωρείται σταθερό. Ωστόσο, η θερμική προστασία που παρέχει μία FGM στρώση δεδομένου πάχους στο μεταλλικό υπόστρωμα εξαρτάται από την κατανομή των θερμομηχανικών ιδιοτήτων μέσα στην FGM στρώση. Στην παρούσα παράγραφο γίνεται μία συγκριτική μελέτη της θερμομηχανικής συμπεριφοράς FGM λωρίδων υπό συνθήκες θερμικού σοκ, στις οποίες οι επικαλύψεις θερμικής προστασίας (TBCs) έχουν παρόμοια θερμική αντίσταση (thermal resistance) [17].

Η θερμική αντίσταση αποτελεί ένα μέτρο εκτίμησης της θερμικής προστασίας που προσφέρει το TBC στην κατώτερη μεταλλική στρώση. Σύμφωνα με την εξίσωση (1.1.1), η θερμική αντίσταση \bar{R}_0 μίας κεραμικής στρώσης πάχους L_0 ενός συμβατικού TBC ισούται με:

$$\bar{R}_0 = \frac{L_0}{k_c} \quad (5.6.1)$$

όπου k_c είναι η θερμική αγωγιμότητα του κεραμικού υλικού.

Επίσης, σύμφωνα με τις εξισώσεις (1.1.1)-(1.1.2) η συνολική θερμική αντίσταση \bar{R} μίας κεραμικής στρώσης πάχους L_c και μίας κεραμικής/μεταλλικής FGM στρώσης πάχους L_{fg} σε ένα FGM-TBC ισούται με:

$$\bar{R} = \frac{L_c}{k_c} + \int_0^{L_{fg}} \frac{1}{k_{fg}(x)} dx \quad (5.6.2)$$

όπου $k_{fg} = k_{fg}(x)$, $0 \leq x \leq L_{fg}$, είναι η κατανομή της θερμικής αγωγιμότητας στην FGM στρώση.

Από τις σχέσεις (5.6.1)-(5.6.2) προκύπτει ότι το πάχος της FGM στρώσης στο FGM-TBC που εξασφαλίζει ίση θερμική αντίσταση με το συμβατικό TBC είναι ίσο με:

$$L_{fg} = \frac{L_0 - L_c}{k_c \int_0^1 \frac{1}{k_{fg}(\omega)} d\omega} \quad (5.6.3)$$

όπου $\omega = x/L_{fg}$ και ο όρος $\int_0^1 \frac{1}{k_{fg}(\omega)} d\omega$ εκφράζει τη θερμική αντίσταση μίας FGM στρώσης μοναδιαίου πάχους.

Εάν επιπλέον υποθεθεί ότι το συνολικό πάχος $L_1 = L_c + L_{fg}$ της κεραμικής και της FGM στρώσης στο FGM-TBC είναι δεδομένο, τότε η σχέση (5.6.3) γίνεται:

$$L_{fg} = \frac{L_1 - L_0}{1 - k_c \int_0^1 \frac{1}{k_{fg}(\omega)} d\omega} \quad (5.6.4)$$

Στη σχέση (5.6.4) είναι σαφές ότι $L_1 - L_0 > 0 \Leftrightarrow L_1 > L_0$, καθώς το συνολικό πάχος του FGM-TBC είναι μεγαλύτερο από το πάχος ενός συμβατικού TBC ίσης θερμικής αντίστασης.

Επιπλέον $1 - k_c \int_0^1 \frac{1}{k_{fg}(\omega)} d\omega > 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{1}{k_c} d\omega > \int_0^1 \frac{1}{k_{fg}(\omega)} d\omega$, καθώς $k_c < k_{fg}(\omega) \forall \omega \in (0,1]$.

Στη συνέχεια της παραγράφου μελετώνται τα μεταβατικά πεδία μετατόπισης, θερμοκρασίας και τάσης σε μία $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ FGM λωρίδα τριών στρώσεων διαφόρων συνθέσεων, στην οποία επιβάλλονται συνθήκες θερμικού σοκ στην άνω επιφάνειά της. Για το κατ' όγκο ποσοστό του μεταλλικού υλικού στην FGM στρώση εξετάζονται η κατανομή εκθετικού νόμου (power law) και η σιγμοειδής κατανομή (sigmoid law), με παράμετρο p [18]. Σε κάθε περίπτωση, η θερμική αντίσταση της επικάλυψης θερμικής προστασίας της FGM λωρίδας διατηρείται σταθερή και ίση προς τη θερμική αντίσταση μίας κεραμικής στρώσης κανονικοποιημένου πάχους $L_0 = 0.65$. Οι θερμομηχανικές ιδιότητες των υλικών θεωρούνται θερμοκρασιακά-εξαρτώμενες και αναφέρονται στους Πίνακες 5.1-5.2, όπου οι σταθερές του Lamé λ, μ και η θερμική σταθερά β προκύπτουν από τις σχέσεις (4.3.3)-(4.3.5). Σημειώνεται ότι για τον υπολογισμό της θερμικής αντίστασης κάθε στρώσης λαμβάνονται υπόψη οι τιμές των θερμικών αγωγιμοτήτων των υλικών για θερμοκρασία $T = 300K$. Για τις αναλύσεις χρησιμοποιούνται $N_{el} = 1000$ πεπερασμένα στοιχεία και $M_t = 4000$ χρονικά βήματα, για συνολικό κανονικοποιημένο χρόνο $t_{tot} = 4.00$.

Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος είναι ίδιες με τις συνοριακές συνθήκες της εφαρμογής της παραγράφου 5.5. Η λωρίδα αρχικά βρίσκεται σε ομοιόμορφη θερμοκρασία $T_0 = 300K$ και τη χρονική στιγμή $t = 0$ η θερμοκρασία της άνω επιφάνειάς της αυξάνεται απότομα στους $900K$. Οι κανονικοποιημένες εξισώσεις που περιγράφουν το πρόβλημα είναι οι (5.2.7)-(5.2.8) με αρχικές-συνοριακές συνθήκες τις σχέσεις (5.5.1).

Το συνολικό κανονικοποιημένο πάχος της λωρίδας είναι $\underline{L} = 1.00$, ενώ το κανονικοποιημένο πάχος της μεταλλικής στρώσης είναι $\underline{L}_m = 0.20$. Το κανονικοποιημένο πάχος \underline{L}_{fg} της FGM στρώσης υπολογίζεται από τη σχέση (5.6.4)*, όπου $\underline{L}_1 = \underline{L}_c + \underline{L}_{fg} = \underline{L} - \underline{L}_m = 0.80$. Το κανονικοποιημένο πάχος της κεραμικής στρώσης είναι προφανώς $\underline{L}_c = \underline{L}_1 - \underline{L}_{fg} = 0.80 - \underline{L}_{fg}$. Για λόγους εποπτείας, στον Πίνακα 5.5 παρουσιάζονται τα ισοδύναμα πάχη μίας $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ FGM στρώσης που εξασφαλίζουν ίση θερμική αντίσταση προς μία στρώση ZrO_2 μοναδιαίου πάχους, τα οποία σύμφωνα με τη σχέση (1.1.3) δίνονται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$\underline{L}_{fg} = \frac{1}{k_c \int_0^1 \frac{1}{k_{fg}(\omega)} d\omega} \quad (5.6.5)$$

Στον Πίνακα 5.5. εξετάζονται διάφορες κατανομές για το κατ' όγκο ποσοστό του μεταλλικού υλικού στην FGM στρώση. Στην κατανομή εκθετικού νόμου, η κατανομή μίας ιδιότητας στην FGM στρώση υπολογίζεται σύμφωνα με την εξίσωση (5.5.2). Αντίστοιχα για τη σιγμοειδή κατανομή, η κατανομή μίας ιδιότητας στην FGM στρώση υπολογίζεται σύμφωνα με την εξίσωση (5.5.3).

	$p=0$	$p=\frac{1}{10}$	$p=\frac{1}{5}$	$p=\frac{1}{2}$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$	$p=10$
Power Law	3.53	3.29	3.07	2.54	2.01	1.58	1.40	1.30	1.25	1.12
Sigmoid Law	2.27	2.26	2.24	2.15	2.01	1.86	1.77	1.71	1.66	1.57

Πίνακας 5.5. Ισοδύναμο πάχος $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ FGM στρώσης που εξασφαλίζει ίση θερμική αντίσταση με μία ομοιογενή στρώση ZrO_2 μοναδιαίου πάχους, για διάφορες κατανομές των μακροσκοπικών ιδιοτήτων

Στη συνέχεια, στον Πίνακα 5.6 εμφανίζονται τα κανονικοποιημένα πάχη \underline{L}_{fg} της FGM στρώσης για τις διάφορες κατανομές των ιδιοτήτων που εξετάζονται, τα οποία υπολογίζονται σύμφωνα με την εξίσωση (5.6.4) (όπως έχει ήδη αναφερθεί).

	$p=0$	$p=\frac{1}{10}$	$p=\frac{1}{5}$	$p=\frac{1}{2}$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$	$p=10$
Power Law	0.209	0.215	0.222	0.248	0.299	0.411	0.527	0.642	0.761	1.359
Sigmoid Law	0.269	0.269	0.271	0.281	0.299	0.325	0.345	0.362	0.376	0.412

Πίνακας 5.6. Κανονικοποιημένο πάχος της FGM στρώσης για διάφορες κατανομές των μακροσκοπικών ιδιοτήτων

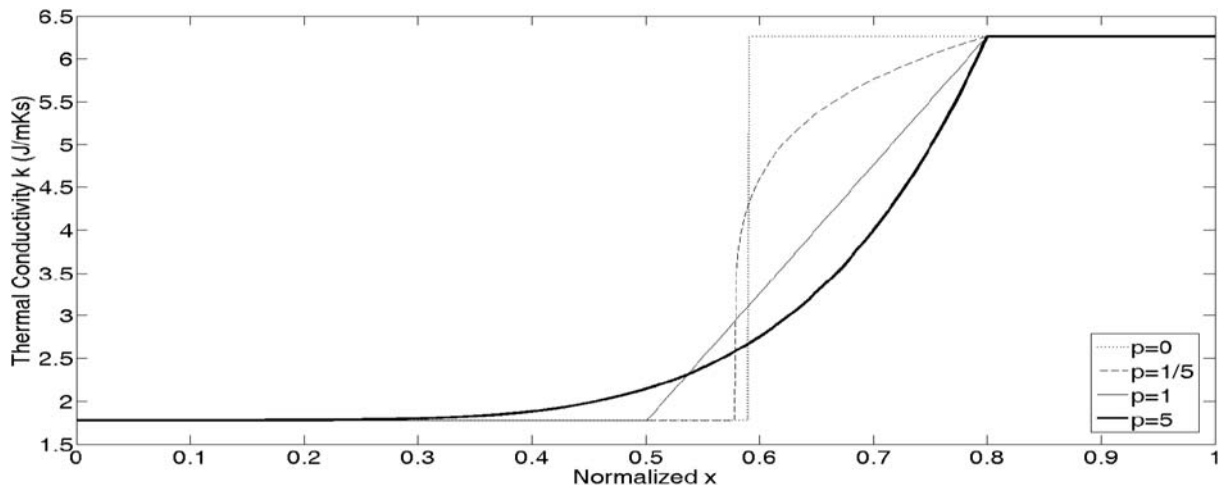
* εκπεφρασμένη σε κανονικοποιημένα πάχη στρώσεων

Με βάση τα αποτελέσματα του Πίνακα 5.6, η σύνθεση της FGM λωρίδας για κάθε κατανομή των μακροσκοπικών ιδιοτήτων απεικονίζεται στον Πίνακα 5.7. Για την κατανομή εκθετικού νόμου η επιλογή $p = 10$ δεν είναι δυνατή, αφού από τη σχέση (5.6.4) προκύπτει ότι $\underline{L}_{fg} = 1.359 > 0.800 = \underline{L}_1$, δηλαδή ισοδύναμα ότι το πάχος της κεραμικής στρώσης είναι $\underline{L}_c = \underline{L}_1 - \underline{L}_{fg} < 0$.

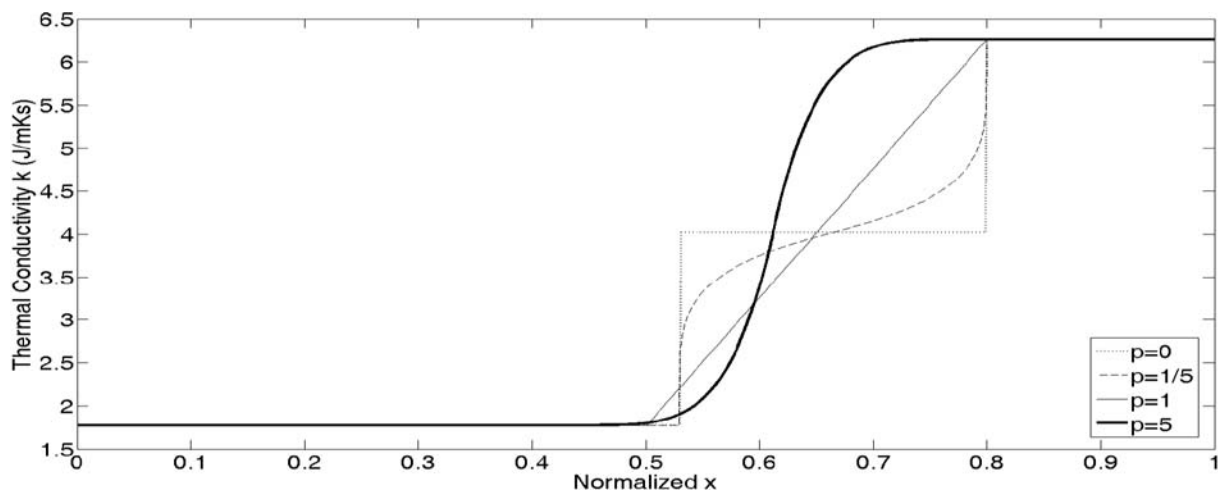
	Power Law	Sigmoid Law
$p = 0$	$\underline{L}_c = 0.591 / \underline{L}_{fg} = 0.209 / \underline{L}_m = 0.200$	$\underline{L}_c = 0.531 / \underline{L}_{fg} = 0.269 / \underline{L}_m = 0.200$
$p = \frac{1}{10}$	$\underline{L}_c = 0.585 / \underline{L}_{fg} = 0.215 / \underline{L}_m = 0.200$	$\underline{L}_c = 0.531 / \underline{L}_{fg} = 0.269 / \underline{L}_m = 0.200$
$p = \frac{1}{5}$	$\underline{L}_c = 0.578 / \underline{L}_{fg} = 0.222 / \underline{L}_m = 0.200$	$\underline{L}_c = 0.529 / \underline{L}_{fg} = 0.271 / \underline{L}_m = 0.200$
$p = \frac{1}{2}$	$\underline{L}_c = 0.552 / \underline{L}_{fg} = 0.248 / \underline{L}_m = 0.200$	$\underline{L}_c = 0.519 / \underline{L}_{fg} = 0.281 / \underline{L}_m = 0.200$
$p = 1$	$\underline{L}_c = 0.501 / \underline{L}_{fg} = 0.299 / \underline{L}_m = 0.200$	$\underline{L}_c = 0.501 / \underline{L}_{fg} = 0.299 / \underline{L}_m = 0.200$
$p = 2$	$\underline{L}_c = 0.389 / \underline{L}_{fg} = 0.411 / \underline{L}_m = 0.200$	$\underline{L}_c = 0.475 / \underline{L}_{fg} = 0.325 / \underline{L}_m = 0.200$
$p = 3$	$\underline{L}_c = 0.273 / \underline{L}_{fg} = 0.527 / \underline{L}_m = 0.200$	$\underline{L}_c = 0.455 / \underline{L}_{fg} = 0.345 / \underline{L}_m = 0.200$
$p = 4$	$\underline{L}_c = 0.158 / \underline{L}_{fg} = 0.642 / \underline{L}_m = 0.200$	$\underline{L}_c = 0.438 / \underline{L}_{fg} = 0.362 / \underline{L}_m = 0.200$
$p = 5$	$\underline{L}_c = 0.039 / \underline{L}_{fg} = 0.761 / \underline{L}_m = 0.200$	$\underline{L}_c = 0.424 / \underline{L}_{fg} = 0.376 / \underline{L}_m = 0.200$
$p = 10$	-	$\underline{L}_c = 0.388 / \underline{L}_{fg} = 0.412 / \underline{L}_m = 0.200$

Πίνακας 5.7. Κανονικοποιημένα πάχη των στρώσεων στην FGM λωρίδα για διάφορες κατανομές των μακροσκοπικών ιδιοτήτων

Στο Σχήμα 5.38 φαίνεται η αρχική κατανομή της θερμικής αγωγιμότητας k στη λωρίδα (δηλαδή για ομοιόμορφη θερμοκρασία $T_0 = 300K$) για διάφορες συνθέσεις των στρώσεων της λωρίδας, όπου η κατανομή του κατ' όγκο ποσοστού του μεταλλικού υλικού στην FGM στρώση είναι εκθετικού νόμου. Το αντίστοιχο γράφημα για την περίπτωση της σιγμοειδούς κατανομής απεικονίζεται στο Σχήμα 5.39. Από τα σχήματα αυτά επιβεβαιώνεται ότι το πάχος της FGM στρώσης μεταβάλλεται σε κάθε κατανομή, ούτως ώστε η συνολική θερμική αντίσταση των δύο ανωτέρων στρώσεων να διατηρείται σταθερή. Παράλληλα, το συνολικό πάχος των δύο ανωτέρων στρώσεων διατηρείται σταθερό. Επομένως, καθώς σε κάθε κατανομή η αύξηση της τιμής της παραμέτρου p συνεπάγεται την αύξηση της θερμικής αντίστασης της FGM στρώσης δεδομένου πάχους, έπεται ότι το απαιτούμενο πάχος της κεραμικής στρώσης μειώνεται καθώς το p αυξάνεται. Ισοδύναμα, για μικρότερες τιμές του p το πάχος της FGM στρώσης μειώνεται. Η μεταβολή του πάχους των στρώσεων είναι πιο έντονη στην κατανομή εκθετικού νόμου. Υπενθυμίζεται ότι η περίπτωση $p = 0$ για την κατανομή εκθετικού νόμου αντιστοιχεί σε μία σύνθετη λωρίδα $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ χωρίς ενδιάμεση FGM στρώση, ενώ για τη σιγμοειδή κατανομή αντιστοιχεί σε μία σύνθετη λωρίδα $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ με την παρεμβολή μίας ομοιογενούς στρώσης.



Σχήμα 5.38. Κατανομή της θερμικής αγωγιμότητας k στη λωρίδα, σε θερμοκρασία $T = 300K$ και για διάφορες τιμές της παραμέτρου p της κατανομής εκθετικού νόμου (power law)



Σχήμα 5.39. Κατανομή της θερμικής αγωγιμότητας k στη λωρίδα, σε θερμοκρασία $T = 300K$ και για διάφορες τιμές της παραμέτρου p της σιγμοειδούς κατανομής (sigmoid law)

Στα Σχήματα 5.40-5.42 παρουσιάζονται η κατανομή της κανονικοποιημένης μετατόπισης u , η κατανομή της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας θ και η κατανομή της κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} , αντίστοιχα, κατά τη χρονική στιγμή $t = 1.50$ για διάφορες τιμές της παραμέτρου p της κατανομής εκθετικού νόμου. Είναι φανερό ότι διατηρώντας σταθερή τη θερμική αντίσταση του TBC, η επίδραση της παραμέτρου p στη θερμομηχανική συμπεριφορά της λωρίδας είναι περιορισμένη. Η παρατήρηση αυτή ισχύει και για τα Σχήματα 5.43-5.45, στα οποία απεικονίζεται η χρονική εξέλιξη των αντίστοιχων μεγεθών στην άνω επιφάνεια του Ti-6Al-4V ($x = 0.8$). Τα αντίστοιχα διαγράμματα για τη σιγμοειδή κατανομή είναι παρόμοια και παραλείπονται.

Τα συγκεντρωτικά αποτελέσματα για τις μέγιστες τιμές της κανονικοποιημένης μετατόπισης u , της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας θ και της κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} στη θέση $x = 0.8$ για τις διάφορες κατανομές εμφανίζονται στον Πίνακα 5.8. Το βασικό συμπέρασμα είναι πως η συνολική θερμική αντίσταση των ανωτέρων δύο στρώσεων είναι καθοριστικός παράγοντας τόσο για τη μέγιστη θερμοκρασία

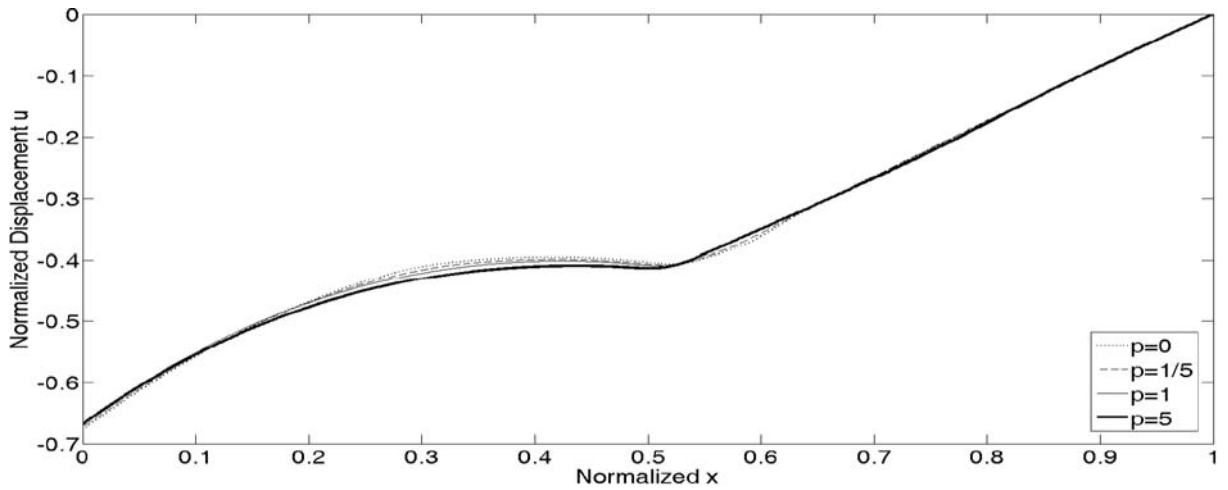
που αναπτύσσεται στην ανώτερη επιφάνεια της στρώσης του μεταλλικού υλικού, όσο και για τη μέγιστη μετατόπιση και τη μέγιστη εφελκυστική τάση στη θέση αυτή.

Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στο παράρτημα Β, επιβεβαιώνουν ότι για τις δεδομένες θερμοκρασιακές συνοριακές συνθήκες η κατανομή της τελικής θερμοκρασίας στη λωρίδα καθορίζεται από τη συνολική θερμική αντίσταση της λωρίδας. Είναι επομένως αναμενόμενο ότι διατηρώντας τη θερμική αντίσταση του TBC σταθερή, η μέγιστη θερμοκρασία της ανώτερης επιφάνειας του Ti-6Al-4V θα παραμένει περίπου σταθερή για κάθε κατανομή που εξετάζεται. Επιπρόσθετα, η μικρή απόκλιση που παρουσιάζεται στη μέγιστη θερμοκρασία στη θέση $x = 0.8$ για τις διάφορες κατανομές πιθανότατα οφείλεται στο γεγονός ότι η θερμική αντίσταση έχει υπολογιστεί στη θερμοκρασία $T = 300K$. Δηλαδή, εάν η θερμική αντίσταση της κάθε στρώσης είχε υπολογιστεί για μία μέση τελική θερμοκρασία (π.χ. για $T = 600K$), ενδεχομένως η απόκλιση της μέγιστης θερμοκρασίας στη θέση $x = 0.8$ για τις διάφορες κατανομές να ήταν ακόμη μικρότερη.

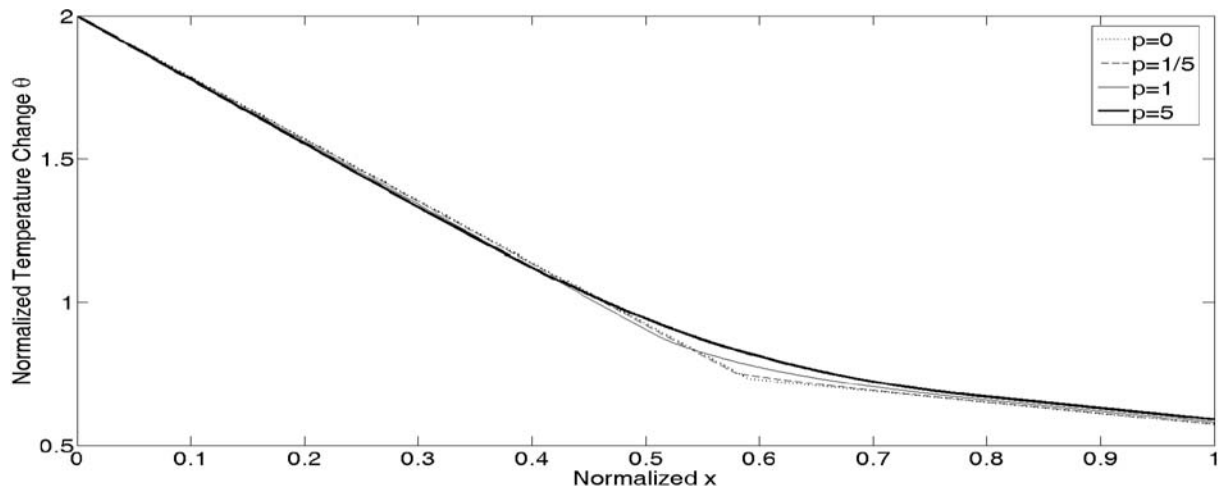
Εκτός όμως από τη διατήρηση της μέγιστης θερμοκρασίας στη θέση $x = 0.8$ στα ίδια επίπεδα για κάθε κατανομή που εξετάζεται, από τα αποτελέσματα του Πίνακα 5.8 προκύπτει ότι η μέγιστη μετακίνηση και η μέγιστη εφελκυστική τάση που αναπτύσσονται στη θέση $x = 0.8$ επίσης παραμένουν σχεδόν αμετάβλητες για κάθε κατανομή. Το γεγονός αυτό υποδεικνύει ότι η θερμομηχανική συμπεριφορά της λωρίδας, τουλάχιστον όσον αφορά την περιοχή κοντά στην άνω επιφάνεια του μεταλλικού υλικού, καθορίζεται εν γένει από τη θερμική αντίσταση του TBC, δηλαδή των ανωτέρων δύο στρώσεων. Με άλλα λόγια, η αντικατάσταση τμήματος της κεραμικής στρώσης από μία FGM στρώση ίσης θερμικής αντίστασης δε μεταβάλλει το μέγεθος του θερμοελαστικού κύματος που διέρχεται στη στρώση του μεταλλικού υλικού, ανεξαρτήτως από την κατανομή των ιδιοτήτων μέσα στην FGM στρώση. Για την επιλογή της καταλληλότερης κατανομής, στην επόμενη παράγραφο διερευνάται το μέγεθος του τασικού κύματος που ανακλάται στην ανώτερη επιφάνεια του μετάλλου.

	$p = 0$	$p = \frac{1}{10}$	$p = \frac{1}{5}$	$p = \frac{1}{2}$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$	$p = 5$	$p = 10$
	$\max u $									
Power Law	0.47	0.47	0.47	0.47	0.47	0.47	0.47	0.47	0.47	-
Sigmoid Law	0.48	0.48	0.47	0.47	0.47	0.47	0.47	0.47	0.47	0.46
	$\max \theta$									
Power Law	0.71	0.71	0.71	0.72	0.72	0.73	0.73	0.73	0.73	-
Sigmoid Law	0.72	0.72	0.72	0.72	0.72	0.72	0.72	0.72	0.72	0.72
	$\max \sigma_{xx}$									
Power Law	1.33	1.34	1.34	1.33	1.34	1.34	1.34	1.34	1.34	-
Sigmoid Law	1.32	1.31	1.31	1.32	1.34	1.34	1.34	1.33	1.33	1.31

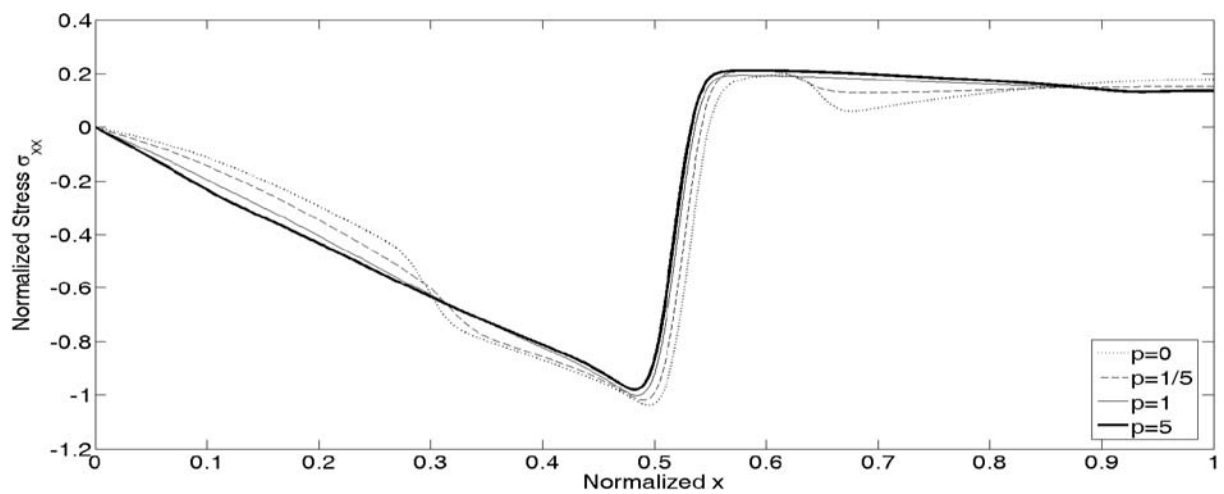
Πίνακας 5.8. Μέγιστες τιμές της κανονικοποιημένης μετατόπισης u , της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας θ και της κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} στη θέση $x = 0.8$ για το χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq 4$, για διαφορετικές κατανομές ιδιοτήτων στην FGM στρώση



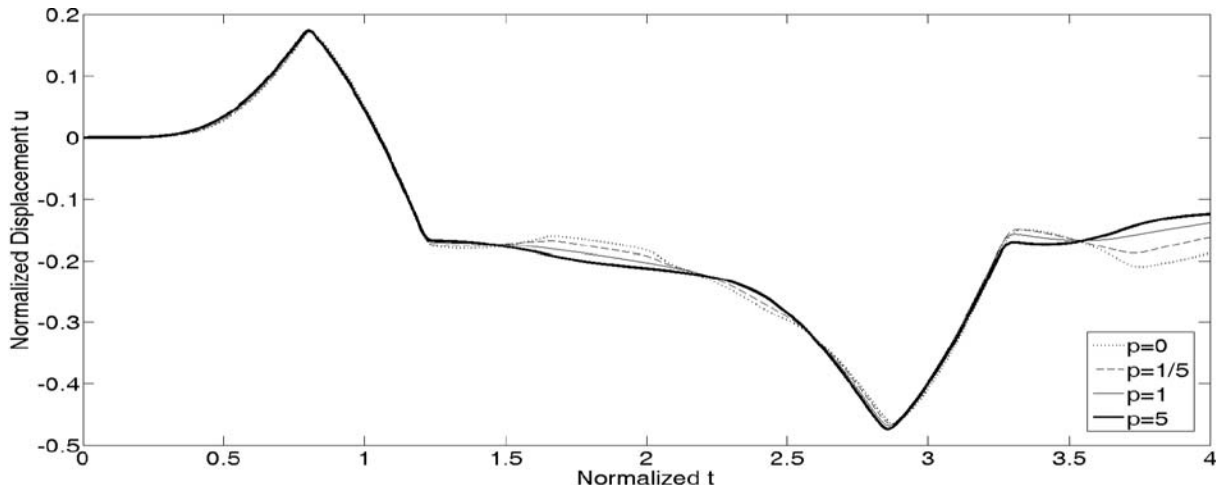
Σχήμα 5.40. Κατανομή της κανονικοποιημένης μετατόπισης u στη λωρίδα τη χρονική στιγμή $t = 1.50$ για διάφορες τιμές της παραμέτρου p της κατανομής εκθετικού νόμου (power law)



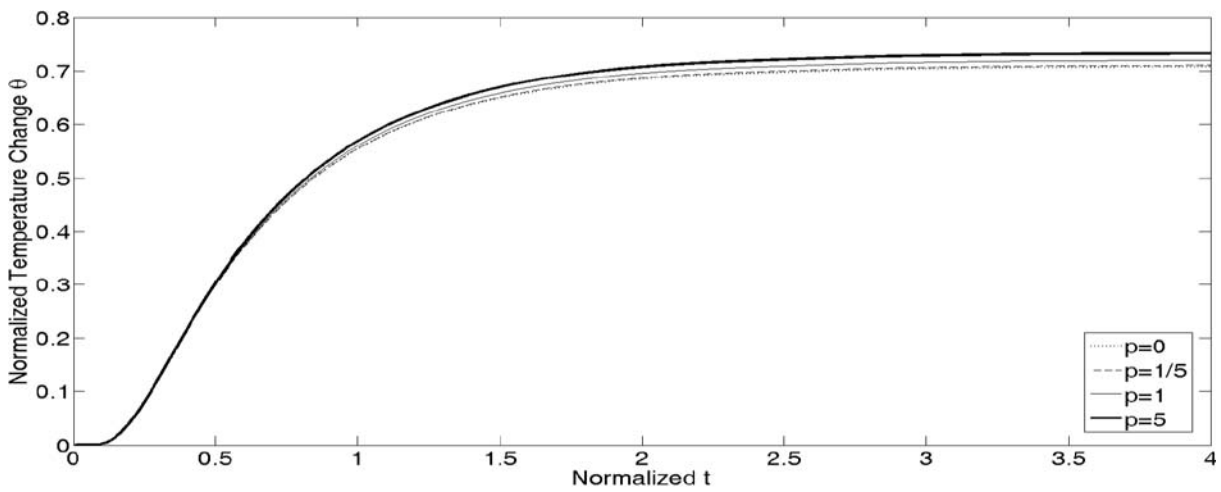
Σχήμα 5.41. Κατανομή της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας θ στη λωρίδα τη χρονική στιγμή $t = 1.50$ για διάφορες τιμές της παραμέτρου p της κατανομής εκθετικού νόμου (power law)



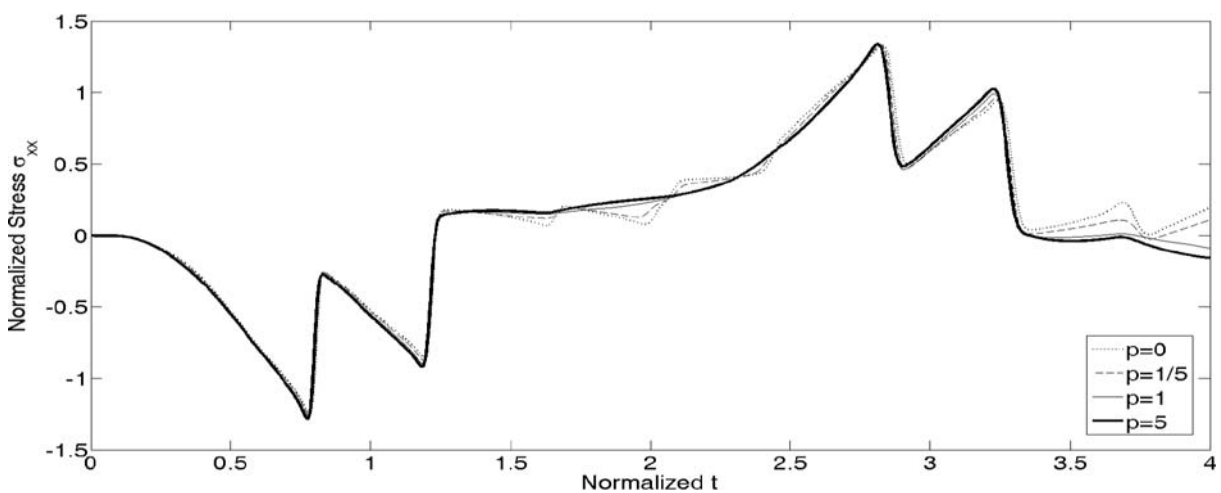
Σχήμα 5.42. Κατανομή της κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} στη λωρίδα τη χρονική στιγμή $t = 1.50$ για διάφορες τιμές της παραμέτρου p της κατανομής εκθετικού νόμου (power law)



Σχήμα 5.43. Χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης μετατόπισης u στη θέση $x=0.8$ της λωρίδας, για διάφορες τιμές της παραμέτρου p της κατανομής εκθετικού νόμου (power law)



Σχήμα 5.44. Χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης μεταβολής της θερμοκρασίας θ στη θέση $x=0.8$ της λωρίδας, για διάφορες τιμές της παραμέτρου p της κατανομής εκθετικού νόμου (power law)



Σχήμα 5.45. Χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} στη θέση $x=0.8$ της λωρίδας, για διάφορες τιμές της παραμέτρου p της κατανομής εκθετικού νόμου (power law)

5.7. Μελέτη του ανακλώμενου τασικού κύματος στην άνω επιφάνεια της μεταλλικής στρώσης σε σύνθετη λωρίδα τριών στρώσεων $ZrO_2/FGM/Ti-6Al-4V$ υπό συνθήκες θερμικού σοκ

Στην παράγραφο 5.6 μελετήθηκε η θερμομηχανική συμπεριφορά μίας $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ FGM λωρίδας σε συνθήκες θερμικού σοκ, όπου εξετάστηκαν διάφορες κατανομές των ιδιοτήτων στην FGM στρώση. Η μελέτη των μεταβατικών πεδίων της μετατόπισης, της θερμοκρασίας και της τάσης στη λωρίδα έδειξε ότι η θερμική αντίσταση του TBC (δηλαδή των δύο ανώτερων στρώσεων) είναι ο παράγοντας που καθορίζει το μέγεθος της μέγιστης θερμοκρασίας και της μέγιστης εφελκυστικής τάσης που αναπτύσσονται στην άνω επιφάνεια της στρώσης του μεταλλικού υλικού.

Σε ένα συμβατικό TBC, τμήμα του τασικού κύματος που διέρχεται από την διεπιφάνεια ανάμεσα στο κεραμικό και το μεταλλικό υλικό, ανακλάται και διαδίδεται στην κεραμική στρώση προς την αντίθετη κατεύθυνση. Όπως φαίνεται από τις αναλύσεις στη συνέχεια της παραγράφου, το μέγεθος του ανακλώμενου τασικού κύματος είναι σημαντικά μικρότερο από το μέγεθος του τασικού κύματος που διαπερνά τη διεπιφάνεια και διαδίδεται στη στρώση του μεταλλικού υλικού. Για το λόγο αυτό, το ανακλώμενο τασικό κύμα δεν επηρεάζει τη μέγιστη εφελκυστική τάση που αναπτύσσεται στη διεπιφάνεια και κατά συνέπεια δεν έχει ληφθεί υπόψη στις προηγούμενες εφαρμογές του κεφαλαίου 5. Ωστόσο, όταν η άνω επιφάνεια της λωρίδας υποβάλλεται σε απότομη αύξηση θερμοκρασίας δημιουργείται ένα θλιπτικό τασικό κύμα, το οποίο ανακλώμενο στη διεπιφάνεια μετατρέπεται σε εφελκυστικό. Στη συνέχεια, το τασικό κύμα διαδίδεται στην κεραμική στρώση προς την αντίθετη κατεύθυνση και ανακλάται εκ νέου στην ανώτερη επιφάνεια της λωρίδας. Συνεπώς, η ένταση του ανακλώμενου τασικού κύματος δύναται να γίνει σημαντική για την αστοχία του κεραμικού υλικού λόγω κόπωσης. Αυτό ισχύει ειδικότερα όταν το πάχος της στρώσης του μεταλλικού υλικού είναι πολλαπλάσιο της στρώσης του κεραμικού υλικού, με αποτέλεσμα το πλήθος των παρατηρούμενων ανακλάσεων του τασικού κύματος στη διεπιφάνεια να είναι πολύ μεγαλύτερο από το πλήθος των διελεύσεων του κύριου εφελκυστικού τασικού κύματος, το οποίο ανακλάται στην κάτω επιφάνεια της λωρίδας.

Στην παρούσα παράγραφο εξετάζεται εκ νέου η εφαρμογή της παραγράφου 5.5, όπου η μελέτη αφορά το μεταβατικό πεδίο της τάσης στην περιοχή της επικάλυψης θερμικής προστασίας. Συγκεκριμένα, γίνεται διερεύνηση του μεγέθους του ανακλώμενου τασικού κύματος για τις διάφορες κατανομές των ιδιοτήτων των υλικών στην FGM στρώση. Για το σκοπό αυτό, στην παρούσα παράγραφο το πάχος της στρώσης του $Ti-6Al-4V$ θεωρείται μεγαλύτερο.

Έστω λοιπόν μία $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ FGM λωρίδα τριών στρώσεων διαφόρων συνθέσεων, η οποία υποβάλλεται σε συνθήκες θερμικού σοκ στην άνω επιφάνειά της. Η λωρίδα αρχικά βρίσκεται σε ομοιόμορφη θερμοκρασία $T_0 = 300K$ και τη χρονική στιγμή $t = 0$ η θερμοκρασία της άνω επιφάνειάς της αυξάνεται απότομα στους $900K$. Οι θερμομηχανικές ιδιότητες των υλικών θεωρούνται θερμοκρασιακά-εξαρτώμενες και αναφέρονται στους Πίνακες 5.1-5.2, όπου οι σταθερές του Lamé λ, μ και η θερμική σταθερά β προκύπτουν από τις σχέσεις (4.3.3)-(4.3.5). Οι κανονικοποιημένες εξισώσεις που περιγράφουν το πρόβλημα είναι οι (5.2.7)-(5.2.8) με αρχικές-συνοριακές συνθήκες τις σχέσεις (5.5.1).

Το συνολικό κανονικοποιημένο πάχος της λωρίδας είναι $\underline{L} = 4.00$, ενώ το κανονικοποιημένο πάχος της μεταλλικής στρώσης είναι $\underline{L}_m = 3.20$. Το κανονικοποιημένο πάχος του TBC είναι $\underline{L}_1 = \underline{L}_c + \underline{L}_{fg} = \underline{L} - \underline{L}_m = 0.80$. Για το κατ' όγκο ποσοστό του μεταλλικού υλικού στην FGM στρώση εξετάζονται η κατανομή εκθετικού νόμου (power law) και η

σιγμοειδής κατανομή (sigmoid law), με παράμετρο p . Οι συνθέσεις της λωρίδας που εξετάζονται εμφανίζονται στον Πίνακα 5.9, όπου σε κάθε σύνθεση το συνολικό πάχος και η θερμική αντίσταση του TBC παραμένουν σταθερά. Ο Πίνακας 5.9 ουσιαστικά προκύπτει από τα αποτελέσματα του Πίνακα 5.7, με μόνη διαφορά ότι το πάχος της μεταλλικής στρώσης μεταβάλλεται από $\underline{L}_m = 0.20$ σε $\underline{L}_m = 3.20$.

Για τις αναλύσεις χρησιμοποιούνται $N_{el,1} = 1000$ πεπερασμένα στοιχεία για την περιοχή του TBC ($0 \leq \underline{x} \leq 0.8$) και $N_{el,2} = 500$ πεπερασμένα στοιχεία για τη στρώση του μεταλλικού υλικού ($0.8 \leq \underline{x} \leq 4$). Επίσης, χρησιμοποιούνται $M_t = 2000$ χρονικά βήματα, για συνολικό κανονικοποιημένο χρόνο $\underline{t}_{tot} = 2.00$. Ο χρόνος αυτός είναι αρκετός ώστε το ανακλώμενο τασικό κύμα να ανακλαστεί πάλι στη θέση $\underline{x} = 0$ και να επιστρέψει εκ νέου στη θέση $\underline{x} = 0.8$. Στη συνέχεια, το μεγαλύτερο τμήμα του ανακλώμενου τασικού κύματος διέρχεται στη στρώση του μετάλλου, συνεπώς το μέγεθος της δεύτερης ανάκλασης του τασικού κύματος είναι πολύ μικρό και δε μελετάται.

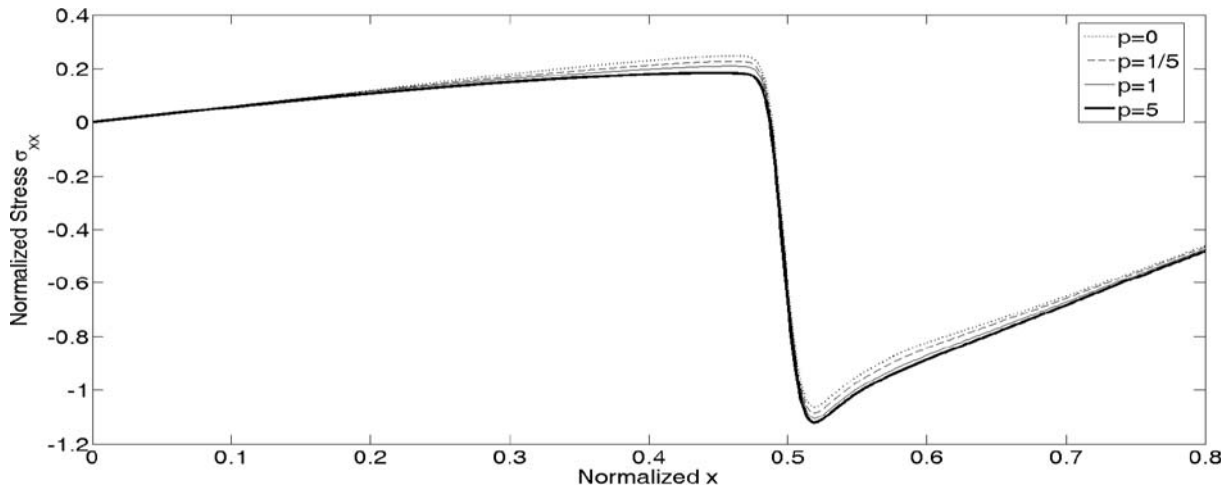
	Power Law	Sigmoid Law
$p = 0$	$\underline{L}_c = 0.591 / \underline{L}_{fg} = 0.209 / \underline{L}_m = 3.200$	$\underline{L}_c = 0.531 / \underline{L}_{fg} = 0.269 / \underline{L}_m = 3.200$
$p = \frac{1}{10}$	$\underline{L}_c = 0.585 / \underline{L}_{fg} = 0.215 / \underline{L}_m = 3.200$	$\underline{L}_c = 0.531 / \underline{L}_{fg} = 0.269 / \underline{L}_m = 3.200$
$p = \frac{1}{5}$	$\underline{L}_c = 0.578 / \underline{L}_{fg} = 0.222 / \underline{L}_m = 3.200$	$\underline{L}_c = 0.529 / \underline{L}_{fg} = 0.271 / \underline{L}_m = 3.200$
$p = \frac{1}{2}$	$\underline{L}_c = 0.552 / \underline{L}_{fg} = 0.248 / \underline{L}_m = 3.200$	$\underline{L}_c = 0.519 / \underline{L}_{fg} = 0.281 / \underline{L}_m = 3.200$
$p = 1$	$\underline{L}_c = 0.501 / \underline{L}_{fg} = 0.299 / \underline{L}_m = 3.200$	$\underline{L}_c = 0.501 / \underline{L}_{fg} = 0.299 / \underline{L}_m = 3.200$
$p = 2$	$\underline{L}_c = 0.389 / \underline{L}_{fg} = 0.411 / \underline{L}_m = 3.200$	$\underline{L}_c = 0.475 / \underline{L}_{fg} = 0.325 / \underline{L}_m = 3.200$
$p = 3$	$\underline{L}_c = 0.273 / \underline{L}_{fg} = 0.527 / \underline{L}_m = 3.200$	$\underline{L}_c = 0.455 / \underline{L}_{fg} = 0.345 / \underline{L}_m = 3.200$
$p = 4$	$\underline{L}_c = 0.158 / \underline{L}_{fg} = 0.642 / \underline{L}_m = 3.200$	$\underline{L}_c = 0.438 / \underline{L}_{fg} = 0.362 / \underline{L}_m = 3.200$
$p = 5$	$\underline{L}_c = 0.039 / \underline{L}_{fg} = 0.761 / \underline{L}_m = 3.200$	$\underline{L}_c = 0.424 / \underline{L}_{fg} = 0.376 / \underline{L}_m = 3.200$
$p = 10$	-	$\underline{L}_c = 0.388 / \underline{L}_{fg} = 0.412 / \underline{L}_m = 3.200$

Πίνακας 5.9. Κανονικοποιημένα πάχη των στρώσεων στην FGM λωρίδα για διάφορες κατανομές των μακροσκοπικών ιδιοτήτων

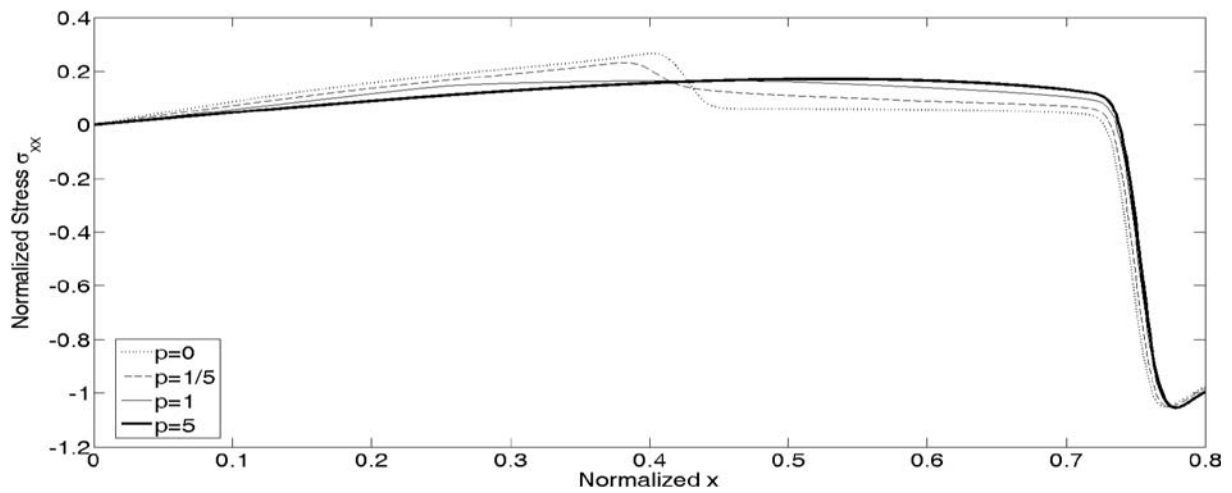
Στα Σχήματα 5.46-5.48 εμφανίζεται η κατανομή της κανονικοποιημένης τάσης $\underline{\sigma}_{xx}$ στην επικάλυψη θερμικής προστασίας ($0 \leq \underline{x} \leq 0.8$) για διάφορες τιμές της παραμέτρου p της κατανομής εκθετικού νόμου, κατά τις χρονικές στιγμές $\underline{t} = 0.50$, $\underline{t} = 0.75$ και $\underline{t} = 1.50$ αντιστοίχα. Τη χρονική στιγμή $\underline{t} = 0.50$ διακρίνεται το αρχικό τασικό κύμα, το οποίο είναι κυρίως θλιπτικό (Σχήμα 5.46). Τη χρονική στιγμή $\underline{t} = 0.75$ (Σχήμα 5.47) το κυρίως τασικό κύμα έχει φτάσει κοντά στην άνω επιφάνεια της στρώσης του μετάλλου ($\underline{x} = 0.8$), ενώ

περίπου στη θέση $\underline{x} = 0.45$ παρατηρείται μία διαταραχή στο τασικό κύμα. Η διαταραχή αυτή είναι το τμήμα του τασικού κύματος που έχει ανακλαστεί στη διεπιφάνεια ανάμεσα στη στρώση του κεραμικού υλικού και στην FGM στρώση, και το οποίο διαδίδεται πλέον προς την άνω επιφάνεια της λωρίδας. Η θέση της διεπιφάνειας αυτής είναι $\underline{x} = \underline{L}_c$ και διαφέρει ανάλογα με την τιμή του p , όπως φαίνεται από τις τιμές του Πίνακα 5.9. Το ανακλώμενο τασικό κύμα είναι εφελκυστικό και το μέγεθός του είναι μεγαλύτερο για μικρότερες τιμές του p . Αυτό οφείλεται στο γεγονός πως για μικρότερες τιμές της παραμέτρου p , η FGM στρώση τείνει να γίνει μία στρώση μετάλλου, συνεπώς η μεταβολή των ιδιοτήτων από την κεραμική στρώση στην FGM στρώση γίνεται πιο έντονη. Τη χρονική στιγμή $\underline{t} = 1.50$ (Σχήμα 5.48) το ανακλώμενο τασικό κύμα διακρίνεται πιο καθαρά, καθώς το κύριο τασικό κύμα διαδίδεται πλέον στη στρώση του μετάλλου ($0.8 \leq \underline{x} \leq 4$). Ουσιαστικά, το ανακλώμενο τασικό κύμα είναι το αποτέλεσμα της ανάκλασης του τασικού κύματος στις δύο διεπιφάνειες, δηλαδή στις διεπιφάνειες ZrO_2/FGM και $FGM/Ti-6Al-4V$. Όπως έχει αναφερθεί, η θέση της πρώτης διεπιφάνειας κυμαίνεται ανάλογα με την τιμή του p , ενώ η θέση της δεύτερης διεπιφάνειας είναι σταθερή και ίση με $\underline{x} = \underline{L}_c + \underline{L}_{fg} = 0.8$. Από το Σχήμα 5.48 προκύπτει ότι το μέγεθος του τασικού κύματος είναι μεγαλύτερο για μικρές τιμές του p . Υπενθυμίζεται ότι η περίπτωση $p = 0$ αντιστοιχεί σε σύνθετη λωρίδα $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ χωρίς ενδιάμεση FGM στρώση, όπου η ανάκλαση του τασικού κύματος είναι πιο έντονη. Τα αντίστοιχα γραφήματα για την περίπτωση της σιγμοειδούς κατανομής παρουσιάζονται στα Σχήματα 5.49-5.51. Λόγω της συμμετρίας της σιγμοειδούς κατανομής, τα συμπεράσματα ανάλογα με την τιμή της παραμέτρου p είναι περισσότερο δυσδιάκριτα.

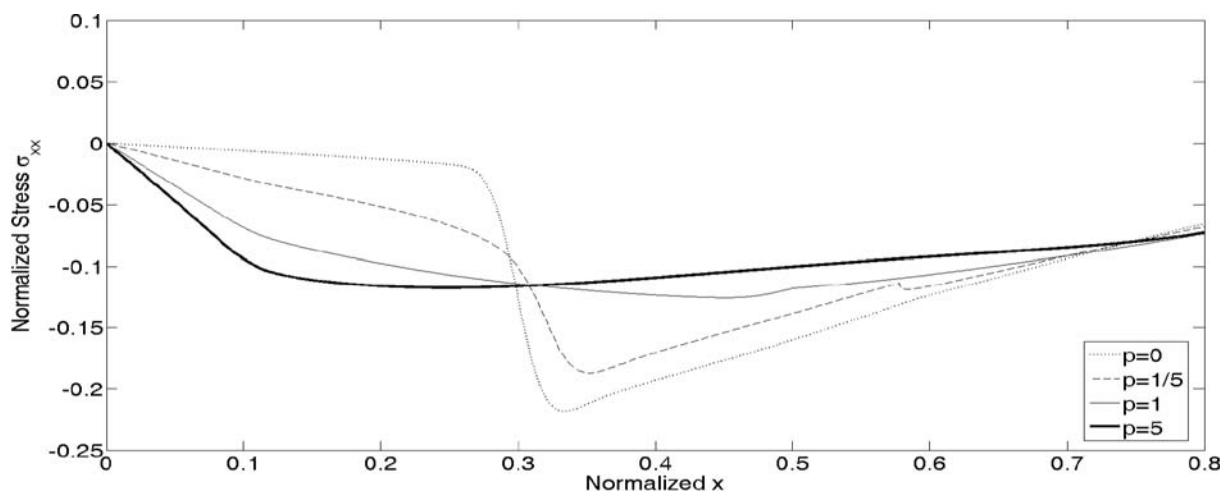
Με δεδομένο ότι η θέση της πρώτης διεπιφάνειας διαφέρει ανάλογα με την τιμή του p , στον Πίνακα 5.10 εμφανίζεται η τιμή και η θέση της μέγιστης κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} στην περιοχή $(\underline{L}_c/2, 0.800)$, δηλαδή από το μέσο της κεραμικής στρώσης έως την άνω επιφάνεια της μεταλλικής στρώσης. Η περιοχή αυτή περιλαμβάνει τις δύο διεπιφάνειες προς την πλευρά της κεραμικής στρώσης, ενώ η περιοχή $(0, \underline{L}_c/2)$ δεν εξετάζεται για να αποφευχθεί η επίδραση της συνοριακής συνθήκης στη θέση $\underline{x} = 0$ κατά τις πρώτες χρονικές στιγμές. Από τον Πίνακα 5.10 προκύπτει ότι η μέγιστη εφελκυστική τάση λόγω ανάκλασης ελαχιστοποιείται στην κατανομή εκθετικού νόμου για $p = 5$, δηλαδή όταν η μετάβαση από την κεραμική στην FGM στρώση γίνεται όσο το δυνατόν πιο ομαλά. Συγκεκριμένα, στην κατανομή εκθετικού νόμου η μέγιστη τάση μειώνεται για μεγαλύτερες τιμές του p , ενώ στη σιγμοειδή κατανομή η μέγιστη τάση ελαχιστοποιείται για $p = 1$ (γραμμική κατανομή). Σημειώνεται επίσης ότι η εφελκυστική τάση μεγιστοποιείται στην κατανομή εκθετικού νόμου με $p = 0$, δηλαδή όταν απουσιάζει η FGM στρώση. Επιπλέον, στα Σχήματα 5.52-5.53 εμφανίζεται η κατανομή του μέτρου ελαστικότητας στην περιοχή $0 \leq \underline{x} \leq 1$ για τις διάφορες κατανομές που εξετάζονται, καθώς και η θέση εμφάνισης της μέγιστης εφελκυστικής τάσης λόγω ανάκλασης (βλ. Πίνακα 5.10). Από τα Σχήματα αυτά συνάγεται ότι η θέση της μέγιστης τάσης εντοπίζεται λίγο πριν τη διεπιφάνεια ZrO_2/FGM όταν $p \leq 1$, ενώ για $p > 1$ η μέγιστη τάση παρατηρείται ανάμεσα στη διεπιφάνεια ZrO_2/FGM και στο μέσο της FGM στρώσης. Σημειώνεται ότι για $p \leq 1$ η μεταβολή των ιδιοτήτων που λαμβάνει χώρα στη διεπιφάνεια ZrO_2/FGM είναι σχετικά απότομη, ενώ αυτό δεν ισχύει για $p > 1$. Σε κάθε περίπτωση η μέγιστη τάση παρατηρείται σε θέσεις με υψηλό ποσοστό κεραμικού υλικού. Εν κατακλείδι, η κατανομή που ελαχιστοποιεί το μέγεθος του ανακλώμενου τασικού κύματος είναι η κατανομή εκθετικού νόμου με $p > 1$, όπου η FGM στρώση αρχικά περιέχει μεγάλο ποσοστό κεραμικού υλικού και στη συνέχεια το ποσοστό του μεταλλικού υλικού αυξάνεται απότομα.



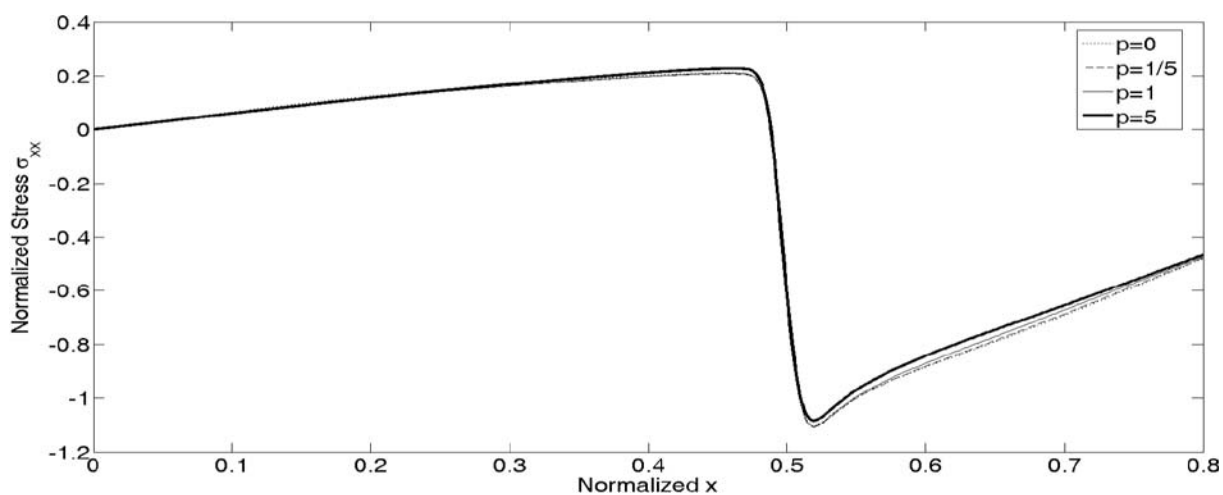
Σχήμα 5.46. Κατανομή της κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} στην επικάλυψη θερμικής προστασίας τη χρονική στιγμή $t = 0.50$ για διάφορες τιμές της παραμέτρου p της κατανομής εκθετικού νόμου (power law)



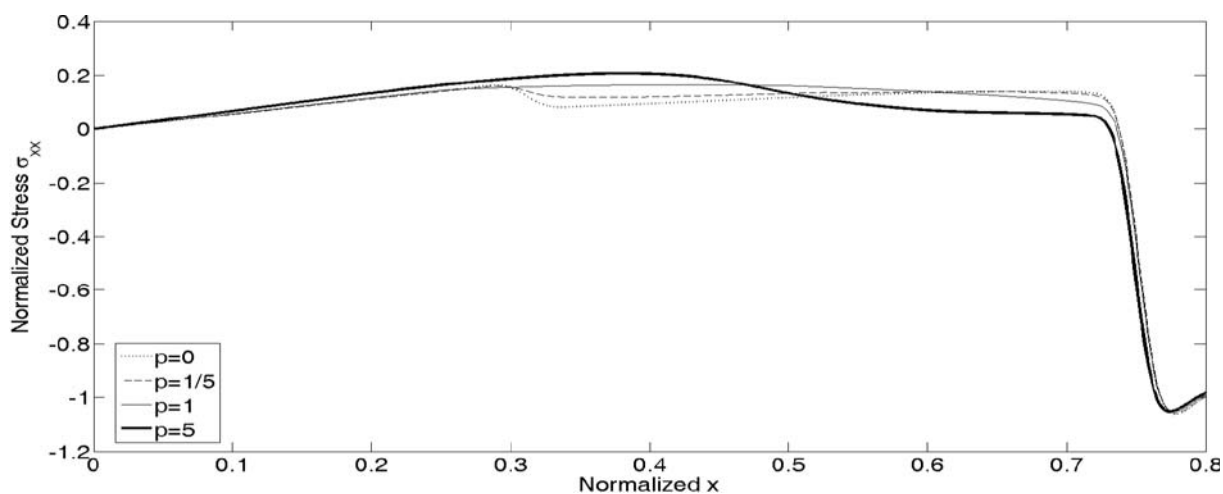
Σχήμα 5.47. Κατανομή της κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} στην επικάλυψη θερμικής προστασίας τη χρονική στιγμή $t = 0.75$ για διάφορες τιμές της παραμέτρου p της κατανομής εκθετικού νόμου (power law)



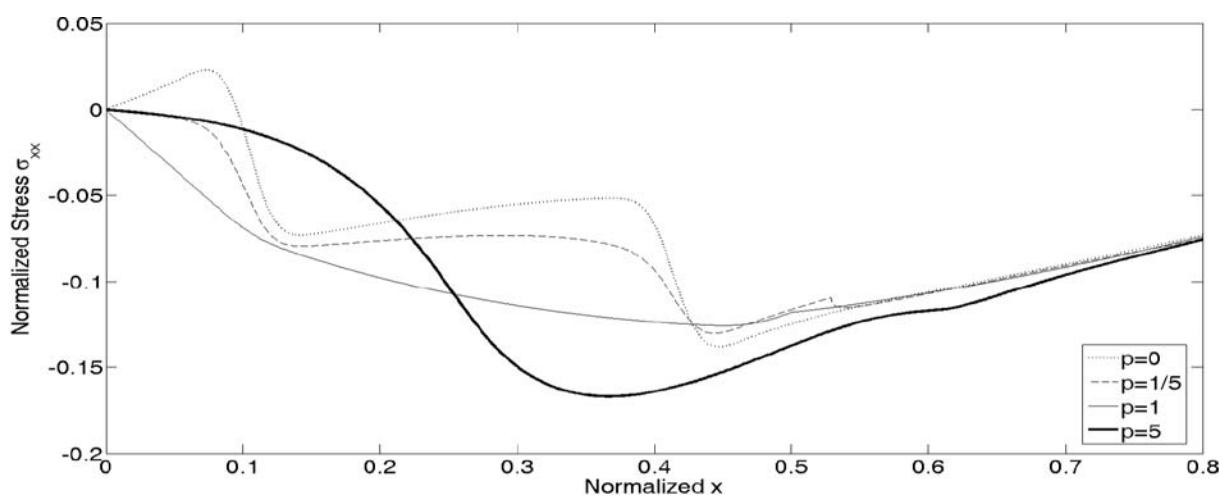
Σχήμα 5.48. Κατανομή της κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} στην επικάλυψη θερμικής προστασίας τη χρονική στιγμή $t = 1.50$ για διάφορες τιμές της παραμέτρου p της κατανομής εκθετικού νόμου (power law)



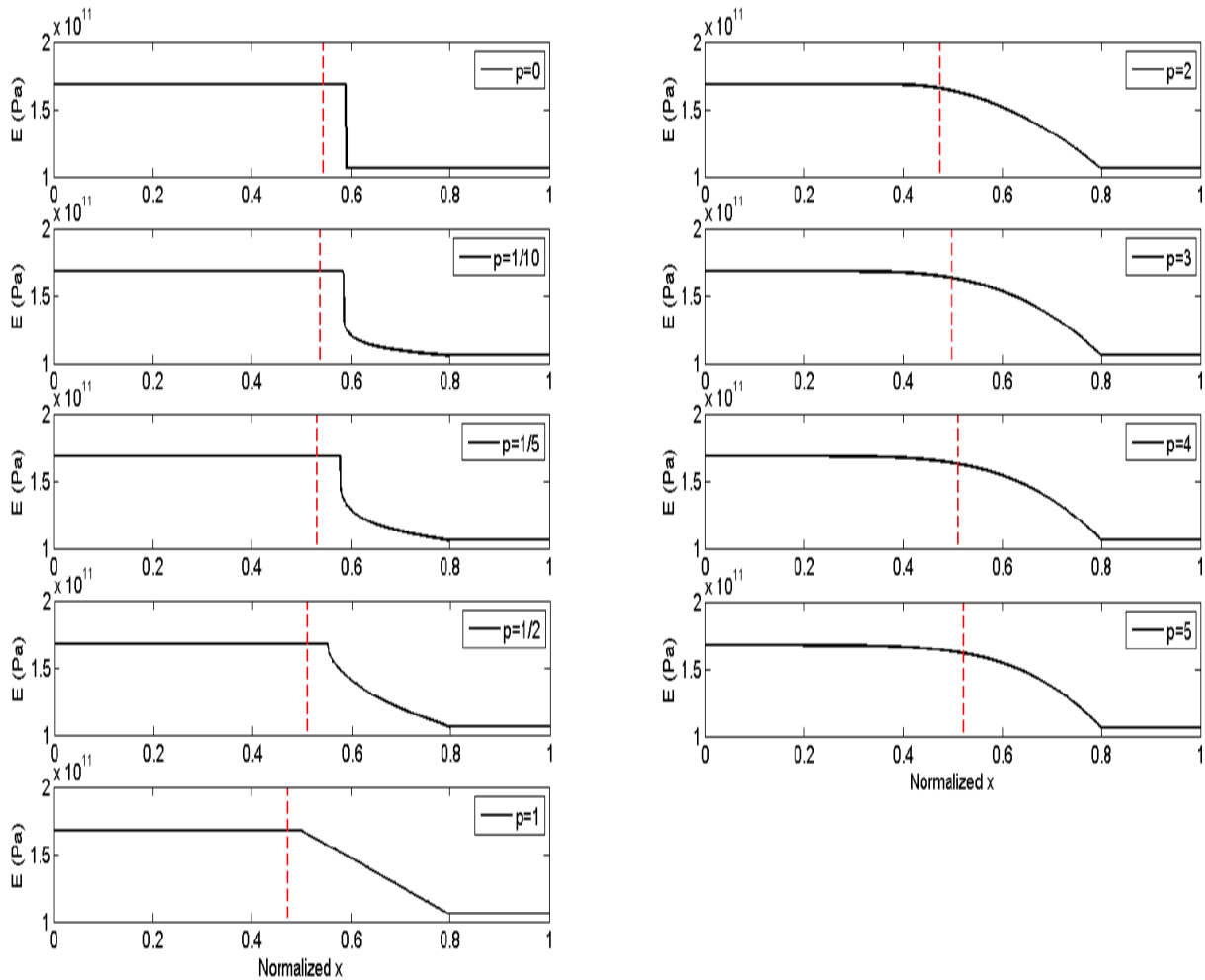
Σχήμα 5.49. Κατανομή της κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} στην επικάλυψη θερμικής προστασίας τη χρονική στιγμή $t = 0.50$ για διάφορες τιμές της παραμέτρου p της σιγμοειδούς κατανομής (sigmoid law)



Σχήμα 5.50. Κατανομή της κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} στην επικάλυψη θερμικής προστασίας τη χρονική στιγμή $t = 0.75$ για διάφορες τιμές της παραμέτρου p της σιγμοειδούς κατανομής (sigmoid law)



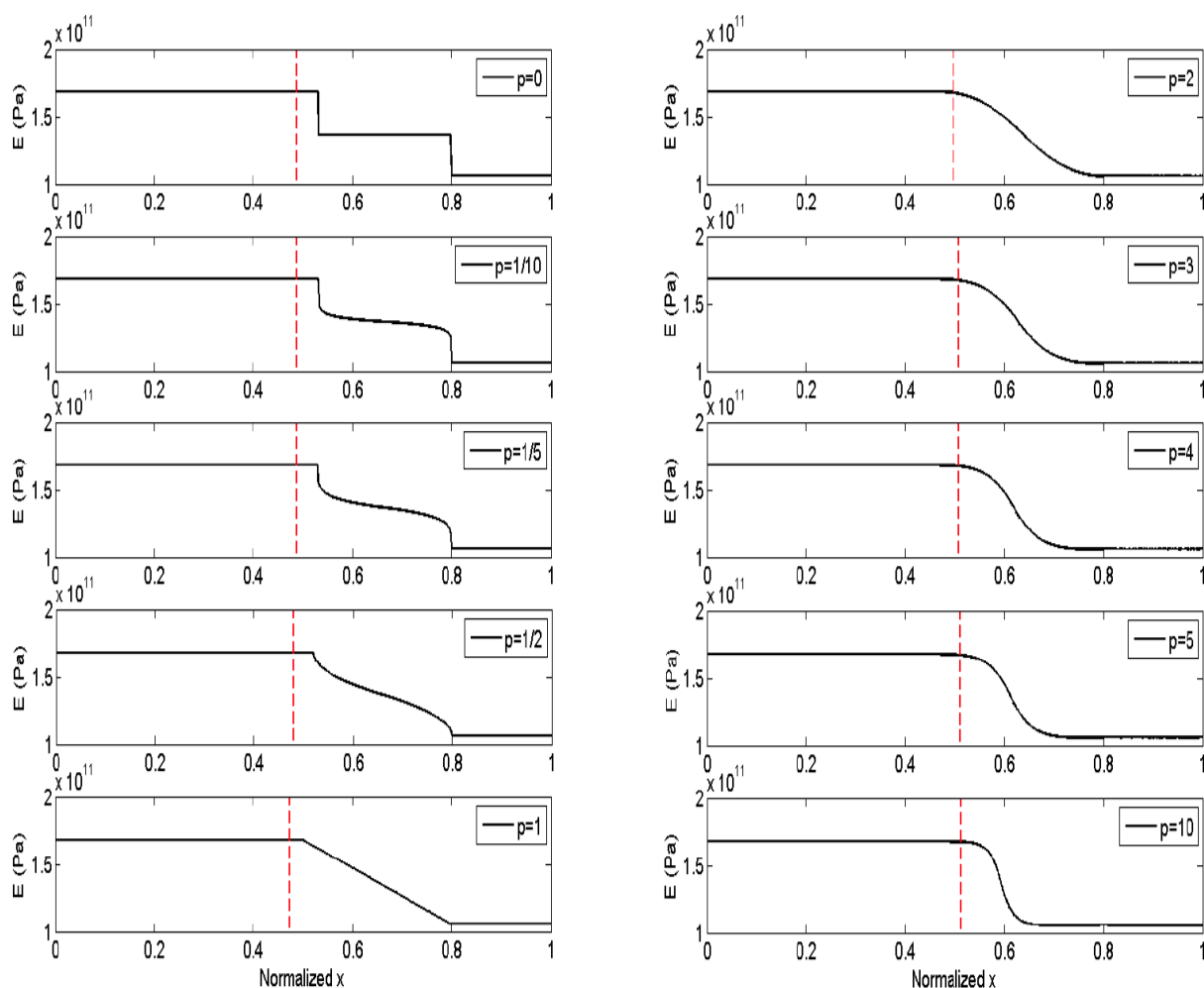
Σχήμα 5.51. Κατανομή της κανονικοποιημένης τάσης σ_{xx} στην επικάλυψη θερμικής προστασίας τη χρονική στιγμή $t = 1.50$ για διάφορες τιμές της παραμέτρου p της σιγμοειδούς κατανομής (sigmoid law)



Σχήμα 5.52. Κατανομή του μέτρου ελαστικότητας E στην περιοχή $0 \leq x \leq 1$ σε θερμοκρασία $T = 300K$ και θέση εμφάνισης της μέγιστης τάσης στην περιοχή $L_c/2 \leq x \leq 0.8$, για διάφορες τιμές της παραμέτρου p της κατανομής εκθετικού νόμου (power law)

	$p = 0$	$p = \frac{1}{10}$	$p = \frac{1}{5}$	$p = \frac{1}{2}$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$	$p = 5$	$p = 10$
	$\max \sigma_{xx}$									
Power Law	0.301	0.283	0.272	0.247	0.219	0.198	0.193	0.191	0.190	-
Sigmoid Law	0.228	0.226	0.224	0.222	0.219	0.227	0.237	0.245	0.250	0.265
	$x_{\max \sigma}$									
Power Law	0.544	0.538	0.532	0.512	0.472	0.475	0.499	0.512	0.523	-
Sigmoid Law	0.488	0.489	0.488	0.481	0.472	0.498	0.508	0.509	0.511	0.514
	Ceram.	Ceram.	Ceram.	Ceram.	Ceram.	FGM	FGM	FGM	FGM	FGM

Πίνακας 5.10. Μέγιστη κανονικοποιημένη τάση σ_{xx} στην περιοχή $(L_c/2, 0.800)$ για το χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq 2$ και θέση εμφάνισής της $x_{\max \sigma}$, για διαφορετικές κατανομές ιδιοτήτων στην FGM στρώση



Σχήμα 5.53. Κατανομή του μέτρου ελαστικότητας E στην περιοχή $0 \leq x \leq 1$ σε θερμοκρασία $T = 300K$ και θέση εμφάνισης της μέγιστης τάσης στην περιοχή $L_c/2 \leq x \leq 0.8$, για διάφορες τιμές της παραμέτρου p της σιγμοειδούς κατανομής (sigmoid law)

5.8. Συμπεράσματα

Στο παρόν κεφάλαιο εξετάστηκε η θερμομηχανική συμπεριφορά μίας FGM λωρίδας από κεραμικό/μεταλλικό υλικό που υποβάλλεται σε συνθήκες θερμικού σοκ στην άνω επιφάνειά της. Η ανάλυση έγινε στα πλαίσια της κλασικής συζευγμένης θερμοελαστικότητας, όπου επιπλέον οι ιδιότητες των υλικών θεωρήθηκαν ως θερμοκρασιακά-εξαρτώμενες. Ως κεραμικό υλικό χρησιμοποιήθηκε η ζirkονία (ZrO_2) και ως μεταλλικό υλικό ένα κράμα τιτανίου (Ti-6Al-4V). Για την κατανομή των θερμομηχανικών ιδιοτήτων μέσα στην FGM στρώση εξετάστηκαν η κατανομή εκθετικού νόμου και η σιγμοειδής κατανομή, με παράμετρο $p \geq 0$.

Αρχικά μελετήθηκε η επίδραση της θερμοκρασιακής εξάρτησης των ιδιοτήτων των υλικών στη θερμομηχανική συμπεριφορά μίας σύνθετης λωρίδας από κεραμικό και μεταλλικό υλικό, η οποία καταπονείται με ακαριαία αύξηση της θερμοκρασίας της άνω επιφάνειάς της. Το υπό εξέταση πρόβλημα μελετήθηκε για τις περιπτώσεις που οι ιδιότητες των υλικών θεωρούνται είτε ως θερμοκρασιακά-ανεξάρτητες είτε ως θερμοκρασιακά-εξαρτώμενες. Τα αποτελέσματα των αναλύσεων έδειξαν καταρχάς ότι η κατανομή της θερμοκρασίας στη λωρίδα διαφοροποιείται όταν λαμβάνεται υπόψη η επίδραση της θερμοκρασίας στις θερμομηχανικές ιδιότητες (ιδιαίτερα στη θερμική αγωγιμότητα). Επιπρόσθετα, για θερμοκρασιακά-

εξαρτώμενες ιδιότητες οι αναπτυσσόμενες τάσεις εμφανίζονται μειωμένες, κυρίως λόγω της μείωσης του μέτρου ελαστικότητας των υλικών σε υψηλές θερμοκρασίες. Συμπερασματικά, η υπόθεση ότι οι ιδιότητες των υλικών είναι ανεξάρτητες της θερμοκρασίας γενικά οδηγεί σε συντηρητικά αποτελέσματα. Ωστόσο, σε μεγάλες θερμοκρασιακές μεταβολές είναι ορθότερο να συμπεριληφθεί η εξάρτηση των ιδιοτήτων από τη θερμοκρασία. Οι παραπάνω παρατηρήσεις επιβεβαιώθηκαν στην επόμενη εφαρμογή, όπου μελετήθηκε το ίδιο πρόβλημα για μία κεραμική/μεταλλική FGM στρώση.

Στη συνέχεια του κεφαλαίου μελετήθηκε η θερμομηχανική συμπεριφορά μίας κεραμικής/μεταλλικής FGM λωρίδας τριών στρώσεων, όπου οι ιδιότητες των υλικών θεωρήθηκαν θερμοκρασιακά-εξαρτώμενες. Στη λωρίδα αυτή, οι δύο ανώτερες στρώσεις (κεραμική και FGM στρώση) αποτελούν την επικάλυψη θερμικής προστασίας (TBC) της κατώτερης μεταλλικής στρώσης. Στα συμβατικά TBCs η αστοχία συχνά λαμβάνει χώρα κοντά στη διεπιφάνεια ανάμεσα στην κεραμική και τη μεταλλική στρώση, και προς τη μεριά του κεραμικού υλικού. Σκοπός των αναλύσεων ήταν η εύρεση της βέλτιστης σύνθεσης του FGM-TBC, η οποία ελαχιστοποιεί τη μέγιστη τάση που αναπτύσσεται στην διεπιφάνεια ανάμεσα στο TBC και στο μεταλλικό υλικό όταν η άνω επιφάνεια της κεραμικής στρώσης υποβάλλεται σε συνθήκες θερμικού σοκ.

Αρχικά θεωρήθηκε πως η FGM στρώση έχει δεδομένο πάχος και εξετάστηκαν διάφορες κατανομές των ιδιοτήτων σε αυτήν, μεταβάλλοντας την παράμετρο p για την κατανομή εκθετικού νόμου και τη σιγμοειδή κατανομή. Τα αποτελέσματα έδειξαν πως η αύξηση της τιμής του p οδηγεί σε μείωση τόσο της μέγιστης θερμοκρασίας στην άνω επιφάνεια του μετάλλου όσο και της μέγιστης τάσης που αναπτύσσεται στη θέση αυτή. Τούτο ήταν περισσότερο έντονο για κατανομή εκθετικού νόμου. Με άλλα λόγια, η ανάλυση έδειξε ότι η βέλτιστη κατανομή είναι η κατανομή εκθετικού νόμου με $p \rightarrow \infty$, η οποία αντιστοιχεί σε σύνθετη λωρίδα δύο στρώσεων, χωρίς την παρεμβολή ενδιάμεσης FGM στρώσης. Ωστόσο, στην κατανομή εκθετικού νόμου η αύξηση της παραμέτρου p συνεπάγεται την αύξηση του ποσοστού του κεραμικού υλικού στην FGM στρώση, δηλαδή την αύξηση της θερμικής προστασίας που προσφέρει το TBC στο μεταλλικό υλικό. Συνεπώς, η αντικατάσταση μίας στρώσης κεραμικού υλικού με μία FGM στρώση ίσου πάχους δεν κρίνεται σκόπιμη και τα αποτελέσματα μπορούν να θεωρηθούν ως αναμενόμενα.

Στην επόμενη εφαρμογή μελετήθηκε το ίδιο πρόβλημα, όπου όμως το πάχος της FGM στρώσης θεωρήθηκε μεταβλητό. Εισήχθη η έννοια της θερμικής αντίστασης του TBC, η οποία αποτελεί ένα μέτρο εκτίμησης της θερμικής προστασίας που προσφέρει το TBC στη στρώση του μεταλλικού υλικού. Έπειτα από τον υπολογισμό της θερμικής αντίστασης της FGM στρώσης για κάθε εξεταζόμενη κατανομή των ιδιοτήτων, εκτιμήθηκαν οι διάφορες συνθέσεις του FGM-TBC έτσι ώστε το συνολικό πάχος και η συνολική θερμική αντίσταση του TBC να διατηρούνται σταθερά. Από τα αποτελέσματα των αναλύσεων προέκυψε ότι η συνολική θερμική αντίσταση των δύο ανωτέρων στρώσεων είναι καθοριστικός παράγοντας τόσο για τη μέγιστη θερμοκρασία όσο και για τη μέγιστη εφελκυστική τάση που αναπτύσσονται στην ανώτερη επιφάνεια του μετάλλου. Δηλαδή, η αντικατάσταση τμήματος της κεραμικής στρώσης από μία FGM στρώση ίσης θερμικής αντίστασης δε μεταβάλλει το μέγεθος του θερμοελαστικού κύματος που διέρχεται στη στρώση του μεταλλικού υλικού, ανεξαρτήτως από την κατανομή των ιδιοτήτων μέσα στην FGM στρώση.

Για την επιλογή της καταλληλότερης κατανομής, στην τελευταία εφαρμογή εξετάστηκε το μέγεθος του τασικού κύματος που ανακλάται στην ανώτερη επιφάνεια του μετάλλου. Μολονότι το μέγεθος του ανακλώμενου τασικού κύματος είναι μικρότερο από το μέγεθος του τασικού κύματος που συνεχίζει και διαδίδεται στη στρώση του μεταλλικού υλικού, μπορεί να γίνει σημαντικό όταν το πάχος της μεταλλικής στρώσης είναι πολλαπλάσιο του πάχους του TBC και να προκαλέσει εφελκυστικές ρωγμές στο κεραμικό υλικό λόγω κόπωσης. Στα FGM-TBC υπάρχουν δύο διεπιφάνειες, που εντοπίζονται στην άνω και στην κάτω επιφάνεια της

FGM στρώσης. Καθώς η θέση της πρώτης διεπιφάνειας διαφέρει ανάλογα με την τιμή του p , στην εφαρμογή εξετάστηκε η μέγιστη τάση που εμφανίζεται στην περιοχή του TBC που εμπεριέχει τις δύο διεπιφάνειες. Τα αποτελέσματα έδειξαν πως η μέγιστη εφελκυστική τάση λόγω ανάκλασης ελαχιστοποιείται στην κατανομή εκθετικού νόμου με $p > 1$, όπου στην FGM στρώση το ποσοστό του κεραμικού υλικού μειώνεται αρχικά με χαμηλό ρυθμό, ενώ στο τέλος το ποσοστό του μεταλλικού υλικού αυξάνεται απότομα.

5.9. Βιβλιογραφία

- [1] Fuchiyama, T. and Noda, N., Analysis of thermal stress in a plate of functionally gradient material, *JSAE Rev.*, Vol.16, pp.263-268, 1995.
- [2] Ching, H. K. and Chen, J. K., Thermal stress analysis of functionally graded composites with temperature-dependent material properties, *J. Mech. Mater. Struct.*, Vol.2, No.4, pp.633-653, 2007.
- [3] Argeso, H. and Eraslan, A. N., On the use of temperature-dependent physical properties in thermomechanical calculations for solid and hollow cylinders, *Int. J. Therm. Sci.*, Vol.47, pp.136-146, 2008.
- [4] Han, J.-C. and Wang, B.-L., Thermal shock resistance of ceramics with temperature-dependent material properties at elevated temperature, *Acta Mater.*, Vol.59, pp.1373-1382, 2011.
- [5] Kulchytsky-Zhyhailo, R., Matysiak, S. J. and Perkowski, D. M., On axisymmetrical problem of layer with temperature dependent properties, *Mech. Res. Commun.*, Vol.50, pp.71-76, 2013.
- [6] Arefi, M., Nonlinear thermal analysis of a hollow functionally graded cylinder with temperature-variable material properties, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, Vol.56, No.2, pp.267-273, 2015.
- [7] Vedavarz, A., Kumar, S. and Moallemi, M. K., Significance on non-Fourier heat waves in microscale conduction, *ASME, DSCD, DSC.*, Vol.32, pp.109-122, 1991.
- [8] Obata, Y. and Noda, N., Optimum material design for functionally gradient material plate, *Arch. Appl. Mech.*, Vol.66, pp.581-589, 1996.
- [9] Tanigawa, Y., Matsumoto, M. and Akai, T., Optimization of material composition to minimize thermal stresses in nonhomogeneous plate subjected to unsteady heat supply, *JSME Int. J., Ser. A*, Vol.40, No.1, pp.84-93, 1997.
- [10] Wang, B.-L., Mai, Y.-W. and Zhang, X.-H., Thermal shock resistance of functionally graded materials, *Acta Mater.*, Vol.52, pp.4961-4972, 2004.
- [11] Shariyat, M., A nonlinear Hermitian transfinite element method for transient behavior analysis of hollow functionally graded cylinders with temperature-dependent materials under thermo-mechanical loads, *Int. J. Pres. Ves. Pip.*, Vol.86, pp.280-289, 2009.
- [12] Touloukian, Y. S., *Thermophysical Properties of High Temperature Solid Materials*, Macmillan, New York, USA, 1967.
- [13] Shariyat, M., Dynamic thermal buckling of suddenly heated temperature-dependent FGM cylindrical shells, under combined axial compression and external pressure, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.45, pp.2598-2612, 2008.
- [14] Shen, H.-S. and Wang, H., Nonlinear bending of FGM cylindrical panels resting on elastic foundations in thermal environments, *Eur. J. Mech. A-Solids*, Vol.49, pp.49-59, 2015.
- [15] Hughes, T. J. R., *The Finite Element Method. Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Prentice Hall, Inc., New Jersey, USA, 1987.

- [16] Lee, W. Y., Stinton, D. P., Berndt, C. C., Erdogan, F., Lee, Y.-D. and Mutasim, Z., Concept of functionally graded materials for advanced thermal barrier coating applications, *J. Am. Ceram. Soc.*, Vol.79, No.12, pp.3003-3012, 1996.
- [17] Kokini, C., DeJonge, J., Rangaraj, S. and Beardsley, B., Thermal shock of functionally graded thermal barrier coatings with similar thermal resistance, *Surf. Coat. Tech.*, Vol.154, pp.223-231, 2002.
- [18] Gupta, A. and Talha, M., Recent development in modeling and analysis of functionally graded materials and structures, *Prog. Aerosp. Sci.*, Vol.79, pp.1-14, 2015.

Γενικά Συμπεράσματα και Προτάσεις για Μελλοντική Έρευνα

6.1. Γενικά συμπεράσματα

Αντικείμενο της παρούσας διδακτορικής διατριβής ήταν η αριθμητική μελέτη των θερμοελαστικών κυμάτων που διαδίδονται σε μία κεραμική/μεταλλική FGM λωρίδα τριών στρώσεων κατά την έννοια του πάχους της, όταν αυτή υποβάλλεται σε συνθήκες θερμικού σοκ. Για την εκτίμηση των μακροσκοπικών ιδιοτήτων στην FGM στρώση χρησιμοποιήθηκε το μοντέλο Voigt.

Αρχικά, η μελέτη έγινε στα πλαίσια της ενοποιημένης θεωρίας γενικευμένης θερμοελαστικότητας των Bagri και Eslami, η οποία εμπεριέχει ως ειδικές περιπτώσεις τις γενικευμένες θεωρίες των Lord-Shulman, Green-Lindsay και Green-Naghdi, καθώς και την κλασική συζευγμένη θερμοελαστικότητα. Σε γενικές γραμμές, τα αποτελέσματα της γενικευμένης θερμοελαστικότητας συγκλίνουν γρήγορα στα αποτελέσματα της κλασικής θερμοελαστικότητας, ωστόσο η απόκλιση αυτή μπορεί να γίνει σημαντική σε περιπτώσεις απότομης μεταβολής της θερμοκρασίας. Για τον υπολογισμό των μεταβατικών πεδίων της μετατόπισης, της θερμοκρασίας και της τάσης κατασκευάστηκε κώδικας πεπερασμένων στοιχείων σε περιβάλλον Matlab, όπου η χρονική ολοκλήρωση βασίστηκε στη μέθοδο Newmark. Τα αποτελέσματα του κώδικα ελέγχθηκαν με βάση γνωστές αναλυτικές λύσεις που υπάρχουν διαθέσιμες στη βιβλιογραφία.

Στις εφαρμογές που εξετάστηκαν, η κατανομή του κατ' όγκο ποσοστού του μεταλλικού υλικού μέσα στην FGM στρώση θεωρήθηκε ότι είναι σιγμοειδής με παράμετρο $p > 0$. Σε αντίθεση με την κατανομή εκθετικού νόμου που χρησιμοποιείται κυρίως στη βιβλιογραφία, στη σιγμοειδή κατανομή οι συνολικές ποσότητες του κεραμικού και του μεταλλικού υλικού στην FGM στρώση είναι ίσες μεταξύ τους, ανεξάρτητα από την τιμή της παραμέτρου p . Από τα αποτελέσματα των αναλύσεων αποδείχθηκε καταρχάς ότι σε συνθήκες απότομης μεταβολής της θερμοκρασίας τα αποτελέσματα της γενικευμένης θερμοελαστικότητας διαφέρουν σημαντικά από τα αποτελέσματα της κλασικής θερμοελαστικότητας. Ωστόσο, αποδείχθηκε ακόμη ότι η παραμετρική διερεύνηση για την εύρεση της κατανομής των υλικών στην FGM στρώση που οδηγεί στην ελαχιστοποίηση των αναπτυσσόμενων τάσεων δεν είναι εφικτό να γίνει στα πλαίσια της γενικευμένης θερμοελαστικότητας. Ο κύριος λόγος είναι πως οι τιμές των νέων ιδιοτήτων υλικού που εισάγουν οι γενικευμένες θεωρίες δεν είναι γνωστές για συγκεκριμένα υλικά, ενώ οι αναλύσεις έδειξαν ότι οι αναπτυσσόμενες τάσεις επηρεάζονται σημαντικά από τις ιδιότητες αυτές.

Για την άρση του προβλήματος αυτού, στη συνέχεια της διδακτορικής διατριβής οι εφαρμογές έγιναν στα πλαίσια της κλασικής συζευγμένης θερμοελαστικότητας, όπου επιπλέον λήφθηκε υπόψη η επίδραση της θερμοκρασίας στις ιδιότητες των υλικών. Άλλωστε, επισημαίνεται ότι σε υψηλές θερμοκρασίες τα αποτελέσματα της γενικευμένης θερμοελαστικότητας συγκλίνουν ταχύτερα προς τα αποτελέσματα της κλασικής θερμοελαστικότητας. Στο παράρτημα Α της παρούσας διδακτορικής διατριβής αποδεικνύεται ότι οι εξισώσεις της γραμμικής θερμοελαστικότητας μπορούν προσεγγιστικά να χρησιμοποιηθούν και στην περίπτωση αυθαίρετων θερμοκρασιακών μεταβολών, ακόμη και αν οι ιδιότητες των υλικών είναι συναρτήσεις της θερμοκρασίας. Για την υλοποίηση των επόμενων εφαρμογών, ο κώδικας πεπερασμένων στοιχείων γενικεύτηκε ώστε να αντιμετωπίζει και την περίπτωση θερμοκρασιακά-εξαρτώμενων ιδιοτήτων.

Οι αρχικές αναλύσεις έδειξαν ότι η υπόθεση πως οι ιδιότητες των υλικών είναι ανεξάρτητες της θερμοκρασίας γενικά οδηγεί σε συντηρητικά αποτελέσματα. Έπειτα, οι ιδιότητες των υλικών θεωρήθηκαν ως θερμοκρασιακά-εξαρτώμενες για την εξαγωγή πιο ρεαλιστικών συμπερασμάτων, ενώ για την κατανομή του κατ' όγκο ποσοστού του μεταλλικού υλικού μέσα στην FGM στρώση εξετάστηκαν η κατανομή εκθετικού νόμου και η σιγμοειδής κατανομή, με παράμετρο $p \geq 0$. Η μελέτη των θερμοελαστικών κυμάτων σε μία FGM λωρίδα από κεραμικό/μεταλλικό υλικό που καταπονείται με θερμικό σοκ έδειξε ότι η συνολική θερμική αντίσταση της κεραμικής και της FGM στρώσης, οι οποίες αποτελούν την επικάλυψη θερμικής προστασίας του μετάλλου, είναι ο παράγοντας που καθορίζει τη μέγιστη αναπτυσσόμενη θερμοκρασία και τη μέγιστη τάση στην άνω επιφάνεια του μετάλλου. Αυτό ισχύει ανεξάρτητα από την κατανομή των ιδιοτήτων στην FGM στρώση. Στην τελευταία εφαρμογή εξετάστηκε το μέγεθος του ανακλώμενου τασικού κύματος στην άνω επιφάνεια του μετάλλου. Αποδείχθηκε ότι η μέγιστη εφελκυστική τάση λόγω ανάκλασης ελαχιστοποιείται στην κατανομή εκθετικού νόμου με $p > 1$. Στην κατανομή αυτή το ποσοστό του κεραμικού υλικού στην FGM στρώση αρχικά μειώνεται με χαμηλό ρυθμό, ενώ στο τέλος το ποσοστό του μεταλλικού υλικού αυξάνεται απότομα.

Συμπερασματικά, η παραπάνω υπολογιστική μελέτη απέδειξε ότι σε συνθήκες θερμικού σοκ, σε ένα συμβατικό TBC η στρώση του κεραμικού υλικού μπορεί να αντικατασταθεί από μία κεραμική/μεταλλική FGM στρώση ίσης θερμικής αντίστασης, στην οποία το ποσοστό του κεραμικού υλικού αρχικά διατηρείται υψηλό, ενώ το ποσοστό του μεταλλικού υλικού αυξάνεται απότομα στο τέλος.

6.2. Προτάσεις για μελλοντική έρευνα

Στο πρόβλημα που εξετάστηκε στην παρούσα διδακτορική διατριβή οι διαστάσεις της λωρίδας θεωρήθηκαν "άπειρες" σε σχέση με το πάχος της, ώστε η μελέτη να γίνει στη μία διάσταση. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το αντίστοιχο επίπεδο πρόβλημα, όπου η λωρίδα βρίσκεται σε συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης. Από τις αναλύσεις που παρουσιάστηκαν στη διατριβή, είναι σαφές ότι για τη διερεύνηση ως προς την εύρεση της βέλτιστης κατανομής στην FGM στρώση μπορεί να χρησιμοποιηθεί η κλασική θερμοελαστικότητα. Επιπλέον, καθώς ο όρος σύζευξης είναι σχετικά μικρός, για τη μείωση της υπολογιστικής πολυπλοκότητας του επίπεδου προβλήματος η μελέτη μπορεί να γίνει στα πλαίσια της ασύζευκτης θερμοελαστικότητας. Ωστόσο, κρίνεται σκόπιμο να ληφθεί υπόψη η επίδραση της θερμοκρασίας στις ιδιότητες των υλικών.

Συνεπώς, η μελέτη του αντίστοιχου προβλήματος σε συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης, στα πλαίσια της κλασικής ασύζευκτης θερμοελαστικότητας με θερμοκρασιακά-εξαρτώμενες ιδιότητες είναι ένα ενδιαφέρον θέμα για μελλοντική έρευνα. Επιπλέον, για την εκτίμηση των μακροσκοπικών ιδιοτήτων στην FGM στρώση μπορούν να χρησιμοποιηθούν εναλλακτικές μέθοδοι, όπως είναι η μέθοδος Mori-Tanaka. Τέλος, χρήσιμο είναι να εξεταστεί και η περίπτωση συνύπαρξης μηχανικής φόρτισης.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Κλασική Συζευγμένη Θερμοελαστικότητα με Πεπερασμένες Θερμοκρασιακές Μεταβολές

Στο παρόν παράρτημα εξάγονται οι διαφορικές εξισώσεις της κλασικής συζευγμένης θερμοελαστικότητας για πεπερασμένες μεταβολές της θερμοκρασίας, σύμφωνα με την εργασία του Boussaa [1,2]. Η εργασία του Boussaa θεμελιώνεται στη θεωρία θερμοελαστικότητας μικρών παραμορφώσεων του Kovalenko [3], η οποία περιλαμβάνει και την περίπτωση μεγάλων θερμοκρασιακών μεταβολών. Με άλλα λόγια, τα αποτελέσματα της εργασίας του Boussaa βασίζονται μόνο στην υπόθεση των μικρών παραμορφώσεων ($|\varepsilon_{ij}| \ll 1$), ενώ ισχύουν για αυθαίρετες μεταβολές της θερμοκρασίας.

Καθώς $|\varepsilon_{ij}| \ll 1$, από το ανάπτυγμα Taylor της ελεύθερης ενέργειας Helmholtz f ως προς ε_{ij} γύρω από το σημείο ($\varepsilon_{ij} = 0, T$) προκύπτει η ακόλουθη σχέση [1]:

$$f(\varepsilon_{ij}, T) = \frac{1}{2} C_{ijkl}(T) \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - \left(\int_{T_0}^T \beta_{ij}(\tau) d\tau \right) \varepsilon_{ij} - \int_{T_0}^T \left(\int_{T_0}^{\xi} \frac{\rho(\tau) c(\tau)}{\tau} d\tau \right) d\xi - s_0 T \quad (\text{A.1})$$

όπου $C_{ijkl}(T)$, $\beta_{ij}(T)$, $\rho(T)$ και $c(T)$ είναι οι θερμοκρασιακά-εξαρτώμενες ιδιότητες του υλικού, ενώ s_0 είναι η εντροπία στην κατάσταση αναφοράς.

Από τις γενικές κατασταστικές σχέσεις (2.2.12)-(2.2.13) και την εξίσωση (A.1) προκύπτουν οι εξής καταστατικές σχέσεις [1]:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(T) \varepsilon_{kl} - \int_{T_0}^T \beta_{ij}(\tau) d\tau, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (\text{A.2})$$

$$s = -\frac{1}{2} \frac{\partial C_{ijkl}(T)}{\partial T} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \beta_{ij}(T) \varepsilon_{ij} + \int_{T_0}^T \frac{\rho(\tau) c(\tau)}{\tau} d\tau + s_0 \quad (\text{A.3})$$

Οι κατασταστικές σχέσεις (A.2)-(A.3) αποτελούν γενίκευση των σχέσεων (2.2.25)-(2.2.26) της γραμμικής θεωρίας της θερμοελαστικότητας.

Η εξίσωση κίνησης (2.2.4), λόγω των σχέσεων (2.2.2), (A.2) και $v_i = \dot{u}_i$, $i = 1, 2, 3$, λαμβάνει την εξής μορφή:

$$\left[C_{ijkl}(T) \varepsilon_{kl} - \int_{T_0}^T \beta_{ij}(\tau) d\tau \right]_{,j} + x_i = \rho(T) \ddot{u}_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.4})$$

Η εξίσωση ενέργειας (2.2.15), λόγω των σχέσεων (2.2.1), (2.2.21) και (A.3), γίνεται:

$$\left[k_{ij}(T) \theta_{,j} \right]_{,i} + z = T \frac{\partial}{\partial t} \left[-\frac{1}{2} \frac{\partial C_{ijkl}(T)}{\partial T} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \beta_{ij}(T) \varepsilon_{ij} + \int_{T_0}^T \frac{\rho(\tau) c(\tau)}{\tau} d\tau \right] \quad (\text{A.5})$$

Οι διαφορικές εξισώσεις (A.4)-(A.5) γενικεύουν τις εξισώσεις (2.2.27)-(2.2.28) της γραμμικής θεωρίας της κλασικής συζευγμένης θερμοελαστικότητας για αυθαίρετες μεταβολές της θερμοκρασίας. Στην περίπτωση που οι ιδιότητες του υλικού θεωρηθούν ανεξάρτητες της θερμοκρασίας, οι εξισώσεις (A.4)-(A.5) απλοποιούνται ως ακολούθως:

$$(C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \beta_{ij} \theta)_{,j} + x_i = \rho \ddot{u}_i, \quad i=1,2,3 \quad (\text{A.6})$$

$$(k_{ij} \theta_{,j})_{,i} + z = T \beta_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \rho c \dot{\theta} \quad (\text{A.7})$$

Συγκρίνοντας τις εξισώσεις (A.6)-(A.7) με τις εξισώσεις (2.2.27)-(2.2.28) της γραμμικής συζευγμένης θερμοελαστικότητας έπεται ότι η μόνη διαφορά εντοπίζεται στον όρο σύζευξης $T \beta_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}$, ο οποίος μάλιστα είναι συνήθως μικρός και στην κλασική ασύζευκτη θερμοελαστικότητα παραλείπεται. Προκύπτει λοιπόν το σημαντικό συμπέρασμα ότι εάν οι ιδιότητες των υλικών θεωρηθούν ως ανεξάρτητες της θερμοκρασίας, οι εξισώσεις της γραμμικής θερμοελαστικότητας μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για μεγάλες θερμοκρασιακές μεταβολές. Επιπρόσθετα, ακόμη και στην περίπτωση των θερμοκρασιακά-εξαρτώμενων ιδιοτήτων οι εξισώσεις (A.4)-(A.5) μπορούν προσεγγιστικά να απλοποιηθούν αρκετά, όπως αποδεικνύεται στη συνέχεια.

Σε συνθήκες υψηλών θερμοκρασιών οι θερμομηχανικές ιδιότητες των υλικών μπορούν να εκφραστούν ως πολυωνυμικές συναρτήσεις τρίτου βαθμού της απόλυτης θερμοκρασίας T [4]. Συνεπώς, μία ιδιότητα $P(T)$ ενός υλικού υπολογίζεται από την εξής σχέση:

$$P(T) = P_0 (1 + P_1 T + P_2 T^2 + P_3 T^3) \quad (\text{A.8})$$

όπου P_0, P_1, P_2, P_3 είναι σταθερές του υλικού. Για τα υλικά που εξετάζονται στην παρούσα διδακτορική διατριβή ισχύει ότι (βλ. Πίνακες 5.1-5.2):

$$1 \gg P_1 \gg P_2 \gg P_3 \quad (\text{A.9})$$

Παραγωγίζοντας τη σχέση (A.8) ως προς το χρόνο, προκύπτει ότι:

$$\dot{P}(T) = \frac{dP(T)}{dT} \dot{T} = P_0 (P_1 + 2P_2 T + 3P_3 T^2) \dot{T} \quad (\text{A.10})$$

Λόγω των ανισοτήτων (A.9), από τη σχέση (A.10) έπεται ότι:

$$\dot{P}(T) \ll P(T) \dot{T} \quad (\text{A.11})$$

Καθώς $|\varepsilon_{ij}| \ll 1$ και επιπλέον ο όρος $\partial C_{ijkl}(T)/\partial T$ είναι μικρός λόγω των σχέσεων (A.9), έπεται ότι ο πρώτος όρος στο δεξί σκέλος της εξίσωσης (A.3) είναι αμελητέος, δηλαδή:

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial C_{ijkl}(T)}{\partial T} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \simeq 0 \quad (\text{A.12})$$

Ακόμα, από τη σχέση (A.11) έπεται ότι:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\beta_{ij}(T) \varepsilon_{ij}] \simeq \beta_{ij}(T) \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} = \beta_{ij}(T) \dot{\varepsilon}_{ij} \quad (\text{A.13})$$

Επίσης, διαδοχικά ισχύουν:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{T_0}^T \frac{\rho(\tau) c(\tau)}{\tau} d\tau \right] = \frac{d}{dT} \left[\int_{T_0}^T \frac{\rho(\tau) c(\tau)}{\tau} d\tau \right] \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\rho(T) c(T)}{T} \dot{\theta} \quad (\text{A.14})$$

Τέλος, ορίζεται ο τανυστής των διατεμνουσών θερμικών σταθερών $\hat{\beta}_{ij}$ ως εξής [5]:

$$\hat{\beta}_{ij}(T) = \frac{1}{T - T_0} \int_{T_0}^T \beta_{ij}(\tau) d\tau, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (\text{A.15})$$

Λόγω των σχέσεων (A.12)-(A.15) οι εξισώσεις (A.4)-(A.5) γίνονται:

$$\left[C_{ijkl}(T) \varepsilon_{kl} - \hat{\beta}_{ij}(T) \theta \right]_{,j} + x_i = \rho(T) \ddot{u}_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.16})$$

$$\left[k_{ij}(T) \theta_{,j} \right]_{,i} + z = \rho(T) c(T) \dot{\theta} + T \beta_{ij}(T) \dot{\varepsilon}_{ij} \quad (\text{A.17})$$

Οι διαφορικές εξισώσεις (A.16)-(A.17) ισχύουν για αυθαίρετες μεταβολές θερμοκρασίας και για θερμοκρασιακά-εξαρτώμενες ιδιότητες. Εάν θεωρηθεί αφ' ενός ότι οι θερμικές σταθερές των υλικών που προκύπτουν από τους Πίνακες 5.1-5.2 αναφέρονται στις διατέμνουσες θερμικές σταθερές $\hat{\beta}$, και αφ' ετέρου ότι για το μικρό όρο σύζευξης ισχύει $T \beta_{ij}(T) \dot{\varepsilon}_{ij} \simeq T_0 \hat{\beta}_{ij}(T) \dot{\varepsilon}_{ij}$, τότε οι εξισώσεις (A.16)-(A.17) ταυτίζονται με τις εξισώσεις (5.2.1)-(5.2.2).

Βιβλιογραφία

- [1] Boussaa, D., Effective thermoelastic properties of composites with temperature-dependent constituents, *Mech. Mater.*, Vol.43, pp.397-407, 2011.
- [2] Boussaa, D., On thermodynamic potentials in thermoelasticity under small strain and finite thermal perturbation assumptions, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.51, pp.26-34, 2014.
- [3] Kovalenko, A. D., *Osnovy termouprugosti*, Naukova Dumka, Kiev, 1970.

- [4] Touloukian, Y. S., *Thermophysical Properties of High Temperature Solid Materials*, Macmillan, New York, USA, 1967.
- [5] Teng, C., Wenbin, Y. and Cheng, M. Y., Variational asymptotic homogenization of temperature-dependent heterogeneous materials under finite temperature changes, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.49, pp.2439-2449, 2012.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

Κατανομή Τελικής Θερμοκρασίας σε μία Λωρίδα Διαβαθμισμένων Ιδιοτήτων υπό Συνθήκες Θερμικού Σοκ

Σε αυτό το παράρτημα εξετάζεται η κατανομή της τελικής θερμοκρασίας σε μία FGM λωρίδα που καταπονείται με τις θερμοκρασιακές συνοριακές συνθήκες που περιγράφονται στις παραγράφους 5.5 και 5.6. Σκοπός είναι να δειχθεί η επίδραση της κατανομής της θερμικής αγωγιμότητας k στη λωρίδα πάνω στην κατανομή της τελικής θερμοκρασίας, και ειδικότερα στη θερμοκρασία της κάτω επιφάνειας. Η μελέτη γίνεται στα πλαίσια της κλασικής θερμοελαστικότητας [1].

Έστω λοιπόν μία FGM λωρίδα πάχους L . Το πρόβλημα της μεταφοράς θερμότητας στη λωρίδα περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση (5.2.6), η οποία παραλείποντας το (μικρό)

όρο σύζευξης $T_0\beta(T)\frac{\partial i}{\partial x}$ γράφεται ως εξής:

$$-\left[\rho(x,T)c(x,T)\dot{\theta}+\right] = -\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x,T)\frac{\partial\theta}{\partial x}\right] \quad (\text{B.1})$$

όπου στη γενική περίπτωση οι ιδιότητες του υλικού θεωρούνται θερμοκρασιακά-εξαρτώμενες.

Στην τελική κατάσταση θα ισχύει $\dot{\theta} = 0$, συνεπώς η σχέση (B.1) γίνεται:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x,T)\frac{\partial\theta}{\partial x}\right] = 0 \quad (\text{B.2})$$

Οι θερμοκρασιακές συνοριακές συνθήκες που εξετάζονται στις παραγράφους 5.5 και 5.6 είναι οι ακόλουθες:

$$\theta(0) = \theta_0, \quad q_x(L) = -h_v[\theta(L) - \theta_\infty] \quad (\text{B.3})$$

όπου $\theta_\infty = T_\infty - T_0$ είναι η διαφορά της θερμοκρασίας του περιβάλλοντος αέρα από την αρχική ομοιόμορφη θερμοκρασία της λωρίδας.

Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (B.2) είναι η εξής:

$$\theta(x) = a_1 \int_0^x \frac{1}{k(\omega,T)} d\omega + a_2 \quad (\text{B.4})$$

όπου a_1, a_2 είναι σταθερές.

Λόγω των συνοριακών συνθηκών (B.3) και της σχέσης (2.2.32), η γενική λύση (B.4) λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$\theta(x) = -h_v [\theta(L) - \theta_\infty] \int_0^x \frac{1}{k(\omega, T)} d\omega + \theta_0 \quad (\text{B.5})$$

Θέτοντας $x = L$ στη σχέση (B.5) προκύπτει μία εξίσωση με άγνωστη τη $\theta(L)$, η λύση της οποίας είναι:

$$\theta(L) = \theta_\infty + \frac{1}{1 + h_v \bar{R}} (\theta_0 - \theta_\infty) \quad (\text{B.6})$$

όπου $\bar{R} = \int_0^L \frac{1}{k(x, T)} dx$ είναι η θερμική αντίσταση της FGM λωρίδας (βλ. σχέση (1.1.2)).

Από την εξίσωση (B.6) συνάγεται ότι για δεδομένο συντελεστή συναγωγής h_v , η τελική θερμοκρασία στην κάτω επιφάνεια της λωρίδας εξαρτάται αποκλειστικά από τη θερμική αντίσταση της λωρίδας. Ειδικότερα, καθώς η θερμική αντίσταση της λωρίδας αυξάνεται, η τελική θερμοκρασία στην κάτω επιφάνεια της λωρίδας μεταβάλλεται από τη θερμοκρασία της άνω επιφάνειας προς τη θερμοκρασία του περιβάλλοντος αέρα, καθώς ισχύουν ότι $\lim_{\bar{R} \rightarrow 0} \theta(L) = \theta_0$ και $\lim_{\bar{R} \rightarrow \infty} \theta(L) = \theta_\infty$.

Βιβλιογραφία

- [1] Hetnarski, R. B., Eslami, M. R., *Thermal Stresses - Advanced Theory and Applications*, Springer Science+Business Media, Dordrecht, Netherlands, 2009.