

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ



ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΡΙΣΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΜΑΡΙΑΣ ΚΟΝΤΗ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Ι. ΤΣΙΝΙΑΣ

ΑΘΗΝΑ 2016

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα	i
1 Συστήματα Ελέγχου	1
1.1 Ορισμοί και βασικές ιδιότητες	1
1.2 Ελεγχιμότητα Γραμμικών Συστημάτων	4
1.3 Παρατηρησιμότητα Γραμμικών Συστημάτων	4
1.4 Ασυμπτωτική Ευστάθεια Αυτόνομων Διαφορικών Εξισώσεων	5
2 Η Αρχή Μεγίστου του Pontryagin	9
2.1 Η Αρχή Μεγίστου του Pontryagin	9
2.2 Απόδειξη της Αρχής Μεγίστου για $U = \mathbb{R}^m$	11
2.3 Απόδειξη της Αρχής Μεγίστου για $U \subset \mathbb{R}^m$	15
3 Γραμμικά Συστήματα και η Εξίσωση Riccati	23
3.1 Γραμμικά Συστήματα με Τετραγωνικό Κόστος	23
3.2 Η Εξίσωση Riccati	26
4 Το Πρόβλημα του Ρυθμιστή Απείρου Χρόνου	33
4.1 Το Θεμελιώδες Θεώρημα	33
4.2 Εφαρμογή σε Βιολογικό Μοντέλο	39
4.2.1 Εξαγωγή του Μοντέλου	39
4.2.2 Έλεγχος του Διαβήτη	40

Ευχαριστίες

Με αυτή την διπλωματική εργασία, ένα από τα ωραιότερα ταξίδια της ζωής μου φτάνει στο τέλος του και όπως αποδείχτηκε, ο Καβάφης είχε δίκιο. Σημασία δεν έχει ο προορισμός αλλά το ταξίδι, γιατί σε αυτό το ταξίδι γνώρισα ανθρώπους που με άλλαξαν και με διαμόρφωσαν ως μέλλουσα επιστήμονα αλλά κυρίως ως άνθρωπο και τους ευχαριστώ γι' αυτό.

Πρώτα απ' όλους θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Ιωάννη Τσινιά για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε αναθέτοντας μου αυτή την εργασία και για την αμέριστη βοήθεια που είχα καθ' όλη την διάρκεια της ενασχόλησής μου με το πεδίο του Βέλτιστου Ελέγχου. Από τα πρώτα κιόλας μαθήματα στην σχολή με έκανε να ενδιαφερθώ και να θελήσω να εμβαθύνω την γνώση μου στο πεδίο αυτό.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τα υπόλοιπα μέλη της εξεταστικής επιτροπής, την κ. Κυριακή Κυριάκη και τον κ. Δρόσο Γκιντίδη. Ήταν πραγματικά τιμή μου που τους γνώρισα και που μου έμαθαν τόσα πολλά πράγματα. Δεν γίνεται να μην αναφερθώ στην υποστήριξη που είχα όλα αυτά τα χρόνια από την κ. Κυριάκη την οποία θα μπορούσα να χαρακτηρίσω ως "Ακαδημαϊκή Μητέρα" μου! Με βοήθησε σε δύσκολες στιγμές και χάρηκε με τις χαρές μου. Θα την ευγνωμονώ για πάντα.

Στην σχολή πέρα από αξιόλογους καθηγητές γνώρισα και αξιόλογους συνοδοιπόρους! Συμφοιτητές με τους οποίους μοιραστήκαμε τις ανησυχίες μας, τις χαρές μας, τα όνειρά μας. Γι' αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα δύο ξεχωριστούς ανθρώπους για τους οποίους αισθάνομαι τυχερή που τους γνώρισα, την Μαριάννα και τον Δημήτρη. Σας ευχαριστώ πολύ!

Κράτησα για το τέλος τους πιο σημαντικούς ανθρώπους της ζωής μου, τον αδερφό μου και τους γονείς μου. Η οικογένειά μου ήταν το πολυτιμότερο στήριγμα που είχα όλα αυτά τα χρόνια. Η στεναχώρια μου ήταν στεναχώρια τους και η χαρά μου ήταν χαρά τους. Ίσως και παραπάνω απ' ότι θα έπρεπε αλλά αυτό πάντα μου έδειχνε το πόσο με νοιάζουν! Ότι έχω καταφέρει μέχρι τώρα είναι και δικό τους έργο και δεν θα είχε πραγματοποιηθεί χωρίς την αγάπη τους και την πολύτιμη βοήθεια τους και γι' αυτό τους ευχαριστώ πολύ!

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική μελετάμε προβλήματα άριστου ελέγχου για γραμμικά συστήματα με τετραγωνικά κόστη. Πιο συγκεκριμένα, στο πρώτο Κεφάλαιο αναφέρουμε όλες τις απαραίτητες έννοιες που θα μας χρειαστούν καθώς και απαραίτητα θεωρήματα όπως το Θεώρημα Ευστάθειας του Lyapunov και το Θεώρημα La Salle. Στο δεύτερο Κεφάλαιο διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε διεξοδικά την Αρχή Μεγίστου του Pontryagin για φραγμένο αποδεκτό χώρο ελέγχων αλλά και για μη φραγμένο. Στο τρίτο Κεφάλαιο διατυπώνουμε το πρόβλημα του ρυθμιστή και χρησιμοποιώντας την Αρχή Μεγίστου δίνουμε ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την επιλυσιμότητά του. Επίσης μέσα από σειρά αποδείξεων ορίζουμε την διαφορική εξίσωση Riccati η οποία θα αποτελέσει την βάση για την μελέτη γραμμικών συστημάτων με τετραγωνικό κόστος. Στο τέταρτο και τελευταίο κεφάλαιο ασχολούμαστε με το πρόβλημα του ρυθμιστή απείρου χρόνου και εφαρμόζουμε την θεωρία σε βιολογικό μοντέλο το οποίο αφορά τον έλεγχο της γλυκόζης στο αίμα σε διαβητικούς ασθενείς.

Λέξεις κλειδιά: πρόβλημα άριστου ελέγχου, τετραγωνικά κόστη, θεώρημα Lyapunov, θεώρημα La Salle, αρχή μεγίστου του Pontryagin, εξίσωση Riccati, ρυθμιστής απείρου χρόνου, γλυκόζη, διαβήτης

Abstract

In this thesis we study optimal control problems for linear systems with quadratic regulators. Specifically, in the first Chapter we introduce necessary definitions and theorems such as, Lyapunov's Stability Theorem and La Salle Theorem. In the second Chapter we present Pontryagin's Maximum Principle Theorem and we give the proof for both bounded and undounded controls. In the third Chapter we introduce the regulator problem and by using Pontryagin's maximum principle theorem we present necessary and sufficient conditions in order to be solved. Also, through a series of proofs we define Riccati's differential equation. In the fourth and last Chapter we deal with the infinite horizon problem. We apply this theory in order to study biological models that describe the control of blood glucose for diabetics.

Key words: optimal control problem, quadratic regulator, Lyapunov's theorem, La Salle theorem, Pontryagin's maximum principle theorem, Riccati equation, infinite horizon problem, glucose, diabetes

Κεφάλαιο 1

Συστήματα Ελέγχου

1.1 Ορισμοί και βασικές ιδιότητες

Τα συστήματα που τα δυναμικά τους είναι ανεξάρτητα του χρόνου ονομάζονται **αυτόνομα συστήματα** και είναι της μορφής:

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (x, u) \in X \times U \quad (1.1)$$

όπου ο χώρος X είναι διανυσματικός χώρος ο οποίος καλείται **χώρος καταστάσεων** του συστήματος (1.1), U είναι ένα υποσύνολο του \mathbb{R}^m και η $f(\cdot, \cdot) \in C^1$.

Ορισμός 1.1.1. Η συνάρτηση $u(\cdot)$ ονομάζεται **είσοδος** ή **έλεγχος**. Ονομάζουμε **αποδεκτό χώρο εισόδων** ή **ελέγχων** του συστήματος (1.1) όλες τις μετρήσιμες και ουσιαστικά τοπικά φραγμένες απεικονίσεις u με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ και πεδίο τιμών το σύνολο \mathbb{R}^m ή ένα υποσύνολο του \mathbb{R}^m , έτσι ώστε για κάθε ζευγάρι αρχικών συνθηκών t_0, x_0 να εξασφαλίζεται η ύπαρξη της λύσης $x(\cdot) = x(\cdot, x_0, u)$ του συστήματος (1.1), τουλάχιστον για t κοντά στο t_0 .

Στην παρούσα διπλωματική θα ασχοληθούμε με αυτόνομα συστήματα τα οποία είναι γραμμικά με χώρο καταστάσεων $X = \mathbb{R}^n$ και χώρο εισόδων $U = \mathbb{R}^m$. Συνεπώς θα είναι της μορφής

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n \times m} \quad (1.2)$$

Η λύση του παραπάνω γραμμικού διαφορικού συστήματος $x(t) = x(t, x_0, u)$ ορίζεται για κάθε t και γράφεται:

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds \quad (1.3)$$

όπου

$$e^{At} = I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + A^n \frac{t^n}{n!} + \dots \quad (1.4)$$

ο εκθετικός πίνακας.

Ιδιότητες του εκθετικού πίνακα:

- i) $e^{A0} = I$, όπου I είναι ο μοναδιαίος πίνακας.
- ii) $e^{At}e^{A\tau} = e^{A(t+\tau)}$
- iii) $e^{-At} = (e^{At})^{-1}$
- iv) $\|e^{At}\| \leq Me^{\|A\|t}$, $\forall \|\cdot\|$, $M \geq 1$
- v) $Ae^{At} = e^{At}A$
- vi) $(e^{At})' = e^{At}A$ όπου A' είναι ο ανάστροφος του A
- vii) $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$

Στην συνέχεια δίνουμε τους ορισμούς του προσιτού συνόλου ώστε να μπορέσουμε να εισάγουμε στην επόμενη ενότητα τις έννοιες της ελεγχιμότητας και της παρατηρησιμότητας, έννοιες οι οποίες είναι αναγκαίες για την μελέτη των συστημάτων ελέγχου.

Ορισμός 1.1.2. Καλούμε **προσιτό σύνολο** $A(t, x_0)$ του σημείου $x_0 \in \mathbb{R}^n$, χρόνου $t > 0$, το σύνολο των σημείων x (σύνολο καταστάσεων) που μπορεί να φτάσει το σύστημα (1.1) σε χρόνο t , εκκινώντας από το x_0 σε χρόνο $t = 0$ με κάποιον αποδεκτό έλεγχο $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$:

$$A(t, x_0) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \exists u \in L^\infty([0, t], \mathbb{R}^m) \text{ με } x = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds \right\} \quad (1.5)$$

Στην περίπτωση όπου ο έλεγχος παίρνει τιμές σε ένα υποσύνολο U του \mathbb{R}^m τότε το προσιτό σύνολο είναι:

$$M(t, x_0) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \exists u \in L^\infty([0, t], U) \text{ με } x = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds \right\} \quad (1.6)$$

και ισχύει προφανώς $M(t, x_0) \subseteq A(t, x_0)$.

Πρόταση 1.1.1. Έστω το προσιτό σύνολο $A(t, x_0)$. Τότε ισχύουν:

- i) Το $A(t, 0)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του \mathbb{R}^n
- ii) Το $A(t, x_0)$ είναι γραμμική πολλαπλότητα του \mathbb{R}^n :

$$A(t, x_0) = e^{At}x_0 + A(t, 0) \quad (1.7)$$

Απόδειξη:

i) Για να δείξω ότι το προσιτό σύνολο $A(t, 0)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του \mathbb{R}^n πρέπει να δείξω ότι $A(t, 0) \subseteq \mathbb{R}^n$, το οποίο προφανώς και ισχύει, και ότι για οποιαδήποτε δύο στοιχεία x_1, x_2 του $A(t, 0)$, ο γραμμικός τους συνδυασμός ανήκει στο $A(t, 0)$ δηλαδή $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι: $\lambda x_1 + \mu x_2 \in A(t, 0)$. Ισοδύναμα θα δείξουμε ότι $x_1 + x_2 \in A(t, 0)$ και $\lambda x_1 \in A(t, 0)$.

◆ Ισχύει ότι:

$$\left. \begin{aligned} x_1 \in A(t, 0) &\Leftrightarrow \exists u_1 \in L^\infty([0, t], \mathbb{R}^m) \text{ με } x_1 = \int_0^t e^{A(t-s)} B u_1(s) ds \\ x_2 \in A(t, 0) &\Leftrightarrow \exists u_2 \in L^\infty([0, t], \mathbb{R}^m) \text{ με } x_2 = \int_0^t e^{A(t-s)} B u_2(s) ds \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \int_0^t e^{A(t-s)} B u_1(s) ds + \int_0^t e^{A(t-s)} B u_2(s) ds \Leftrightarrow \\ x_1 + x_2 &= \int_0^t e^{A(t-s)} B (u_1(s) + u_2(s)) ds \in A(t, 0) \end{aligned}$$

αφού $(u_1(s) + u_2(s)) \in L^\infty([0, t], \mathbb{R}^m)$.

◆ Τώρα θα δείξουμε ότι $\lambda x_1 \in A(t, 0)$:

$$\lambda x_1 = \lambda \int_0^t e^{A(t-s)} B u_1(s) ds = \int_0^t e^{A(t-s)} B (\lambda u_1(s)) ds \in A(t, 0)$$

αφού $(\lambda u_1(s)) \in L^\infty([0, t], \mathbb{R}^m)$.

Συνεπώς ο χώρος $A(t, 0)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του \mathbb{R}^n .

ii) Πολύ εύκολα βλέπουμε ότι ισχύει η σχέση (1.7):

$$\left. \begin{aligned} A(t, x_0) = x \in \mathbb{R}^n &: \exists u \in L^\infty([0, t], \mathbb{R}^m) \text{ με } x = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} B u(s) ds \\ A(t, 0) = x \in \mathbb{R}^n &: \exists u \in L^\infty([0, t], \mathbb{R}^m) \text{ με } x = \int_0^t e^{A(t-s)} B u(s) ds \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow$$

$$A(t, x_0) = e^{At} x_0 + A(t, 0)$$

□

Παρατήρηση 1.1.2. Το προσιτό σύνολο $A(t, 0)$ είναι μη κενό σύνολο αφού το ελάχιστο σύνολο που μπορεί να υφίσταται, είναι ο μηδενικός υποχώρος αφού για $u \equiv 0$, ισχύει ότι $A(t, 0) \equiv \mathbb{O}$

1.2 Ελεγχιμότητα Γραμμικών Συστημάτων

Σε αυτή την ενότητα δίνουμε τον ορισμό της ελεγχιμότητας ενός συστήματος καθώς και ικανές συνθήκες που την συνοδεύουν. Η έννοια του ελέγξιμου συστήματος αποτελεί βάση για την μελέτη της ελαχιστοποίησης συναρτησοειδών που θα συναντήσουμε στα επόμενα κεφάλαια και είναι υψίστης σημασίας. Ανάλογη βαρύτητα έχει και ο ορισμός της παρατηρησιμότητας που θα μελετήσουμε στην επόμενη ενότητα.

Ορισμός 1.2.1. Δοθέντων ενός σημείου $x_0 \in \mathbb{R}^n$ και ενός υποδιαστήματος $I \subset (0, +\infty)$, λέμε ότι το σύστημα (1.1) είναι **ελέγξιμο από το x_0** στο εν λόγω διάστημα I , όταν για κάθε $t \in I$ το προσιτό σύνολο $A(t, x_0)$ έχει μη κενό εσωτερικό ως προς την τοπολογία του χώρου καταστάσεων \mathbb{R}^n .

Ορισμός 1.2.2. Ένα σύστημα λέμε ότι είναι **ελέγξιμο**, όταν είναι ελέγξιμο από κάθε σημείο $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Το επόμενο θεώρημα συνδέει την τοπολογική δομή των προσιτών συνόλων με την αλγεβρική δομή του συστήματος (1.2).

Θεώρημα 1.2.1 (Kalman). Για κάθε $t > 0$ ισχύει:

$$A(t, 0) = \text{im} [B, AB, \dots, A^{n-1}B] \quad (1.8)$$

και συνεπώς με βάση την πρόταση (1.1.1):

$$A(t, x_0) = e^{At}x_0 + \text{im} [B, AB, \dots, A^{n-1}B]. \quad (1.9)$$

Πόρισμα 1.2.2. Στην περίπτωση που οι έλεγχοι δεν υπόκεινται σε περιορισμούς, οι κάτωθι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

- i) Το σύστημα $\dot{x} = Ax + Bu$ είναι ελέγξιμο
- ii) $A(t, x_0) = \mathbb{R}^n$, για κάθε $t > 0$ και $x_0 \in \mathbb{R}^n$
- iii) $\text{rank} [B, AB, \dots, A^{n-1}B] = n$. (controllability rank condition)

1.3 Παρατηρησιμότητα Γραμμικών Συστημάτων

Θεωρούμε γραμμικά συστήματα με γραμμική έξοδο:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, & (x, u) &\in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \\ y &= Cx, & y &\in \mathbb{R}^k \end{aligned} \quad (1.10)$$

Η έξοδος $y = Cx$ εκφράζει το γεγονός ότι για τον παρατηρητή ενός συστήματος, δεν είναι εν γένει εφικτή η μέτρηση όλου του διανύσματος κατάστασης $x(\cdot)$. Μόνο ένα μέρος ή συνδυασμός των συνιστωσών του διανύσματος είναι διαθέσιμο και αυτό ακριβώς ονομάζεται **έξοδος**.

Ορισμός 1.3.1. Το σύστημα (1.10) λέγεται **παρατηρήσιμο** αν η συνθήκη:

$$y(t, x_1, u) = y(t, x_2, u), \quad \forall t > 0$$

συνεπάγεται:

$$x_1 = x_2$$

όπου $y(t, x, u) := Cx(t, x, u)$.

Πρόταση 1.3.1. Έστω το γραμμικό σύστημα με την γραμμική έξοδο, (1.10). Τότε οι επόμενοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

i) Το σύστημα (1.10) είναι παρατηρήσιμο

ii) Το ζευγάρι (C, A) δηλαδή, το σύστημα:

$$\dot{x} = Ax, \quad \text{με έξοδο } y = Cx \quad (1.11)$$

είναι παρατηρήσιμο

iii) Ισχύει

$$y(t, x_0) = Cx(t, x_0) = 0, \quad t \geq 0 \Leftrightarrow x_0 = 0 \quad (1.12)$$

iv) Ικανοποιείται η **συνθήκη βαθμού παρατηρησιμότητας**:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n \quad (1.13)$$

1.4 Ασυμπτωτική Ευστάθεια Αυτόνομων Διαφορικών Εξισώσεων

Όταν μελετάμε ένα αυτόνομο σύστημα διαφορικών εξισώσεων δεν ενδιαφερόμαστε μόνο για το αν θα έχει λύση αλλά κυρίως για το αν θα είναι ευσταθής. Διαισθητικά, ο όρος ευστάθεια αφορά την συμπεριφορά του συστήματος όταν διαταράζουμε ελαφρώς τις αρχικές συνθήκες. Πιο συγκεκριμένα μία λύση είναι ευσταθής όταν μικρές διαταραχές στο σύστημα οδηγούν σε μικρές διαταραχές της λύσης. Οι επόμενοι ορισμοί θα μας βοηθήσουν να εδραιώσουμε τις συνθήκες τις οποίες χρειαζόμαστε για να διατυπώσουμε το Θεώρημα La Salle· ένα θεώρημα το οποίο μας δίνει ικανή συνθήκη για την ολική ασυμπτωτική ευστάθεια του μηδενός.

Ορισμός 1.4.1. Έστω ένα καλώς ορισμένο αυτόνομο σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (1.14)$$

με δυναμικό $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ κλάσεως C^1 . Το σημείο $x^* \in \mathbb{R}^n$ ονομάζεται **σημείο ισορροπίας**, αν ισχύει

$$f(x^*) = 0, \quad \forall t \leq 0. \quad (1.15)$$

Αν επιπλέον ισχύει ότι $x^* = x_0$ όπου x_0 η αρχική συνθήκη, τότε η λύση του (1.14) που ξεκινά από το x_0 παραμένει σταθερή $\forall t \geq 0$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $x^* = 0$.

Ορισμός 1.4.2. Το $0 \in \mathbb{R}^n$ ονομάζεται **ευσταθές** αν για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $\delta = \delta(\epsilon)$ τέτοιο, ώστε:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |x_0| < \delta \Rightarrow \sup_{t \geq 0} (|x(t, x_0)|) < \epsilon. \quad (1.16)$$

Αν επιπλέον ισχύει:

$$x(t, x_0) \rightarrow 0 \quad \text{καθώς} \quad t \rightarrow \infty \quad (1.17)$$

για κάθε x_0 σε μια γειτονιά του $0 \in \mathbb{R}^n$ τότε ονομάζεται **ασυμπτωτικά ευσταθές**. Αν η (1.17) ισχύει για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^n$, τότε λέμε ότι το $0 \in \mathbb{R}^n$ είναι **ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές**.

Όπως προαναφέραμε, όλοι αυτοί οι ορισμοί αποτελούν το αναγκαίο υπόβαθρο το οποίο χρειαζόμαστε ώστε να διατυπώσουμε δύο πολύ σημαντικά θεωρήματα: το θεώρημα ευστάθειας κατά Lyapunov και το θεώρημα La Salle.

Θεώρημα 1.4.1 (Lyapunov). Αν υπάρχει συνάρτηση $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ κλάσεως C^1 έτσι ώστε να ισχύει:

$$V(x) > 0 \quad (1.18)$$

και

$$\dot{V}(x) := \nabla V(x)f(x) < 0 \quad (1.19)$$

για κάθε $x \neq 0$ κοντά στο $0 \in \mathbb{R}^n$, τότε το $0 \in \mathbb{R}^n$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Αν οι συνθήκες (1.18) και (1.19) ισχύουν για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και επιπλέον ισχύει

$$V(x) \rightarrow \infty \quad \text{καθώς} \quad |x| \rightarrow \infty \quad (1.20)$$

τότε το $0 \in \mathbb{R}^n$ είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές. Στην περίπτωση που υπάρχει συνάρτηση $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ η οποία είναι C^1 , ικανοποιεί την σχέση (1.18) και την ακόλουθη:

$$\dot{V}(x) \leq 0, \quad \forall x \text{ κοντά στο μηδέν} \quad (1.21)$$

τότε το $0 \in \mathbb{R}^n$ είναι ευσταθές.

1.4. ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΑΥΤΟΝΟΜΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Ορισμός 1.4.3. Κάθε συνάρτηση $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ κλάσεως C^1 η οποία είναι θετικά ορισμένη (δηλαδή ισχύει η σχέση (1.18) και της οποίας η ολική παράγωγος είναι αρνητικά ημιορισμένη (δηλαδή ισχύει η σχέση (1.21)), ονομάζεται συνήθως συνάρτηση Lyapunov. Αν η ολική παράγωγός της είναι αρνητικά ορισμένη (1.19) τότε ονομάζεται αυστηρή συνάρτηση Lyapunov.

Θεώρημα 1.4.2 (La Salle). Έστω το σύστημα:

$$\dot{x} = f(x) \quad \mu\epsilon f(0) = 0 \text{ και } x \in \mathbb{R}^n \quad (1.22)$$

και μια απεικόνιση $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ η οποία είναι θετικά ορισμένη (1.18) για κάθε μη μηδενικό $x \in \mathbb{R}^n$, έχει συνεχείς πρώτες παραγώγους και η ολική της παράγωγος είναι αρνητικά ημιορισμένη (1.21). Αν επίσης ισχύει η συνεπαγωγή:

$$V(x(t, x_0)) = 0, \quad \forall t \in I \Rightarrow x_0 = 0 \quad (1.23)$$

όπου $I = [0, T)$, $T > 0$, τότε το $0 \in \mathbb{R}^n$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές για το σύστημα (1.22). Αν επιπλέον η V ικανοποιεί την σχέση (1.20) τότε το $0 \in \mathbb{R}^n$ είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

Από τα Θεωρήματα 1.4.1, 1.4.2 προκύπτουν για τα γραμμικά συστήματα κάποια σημαντικά αποτελέσματα.

Θεώρημα 1.4.3. Για το γραμμικό σύστημα:

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (1.24)$$

όπου $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ σταθερός πίνακας, οι επόμενοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

- i) Το $0 \in \mathbb{R}^n$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές για το σύστημα $\dot{x} = Ax$.
- ii) Το $0 \in \mathbb{R}^n$ είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.
- iii) Ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι Hurwitz, δηλαδή τα πραγματικά μέρη όλων των ιδιοτιμών του είναι γνησίως αρνητικά.
- iv) Το $0 \in \mathbb{R}^n$ είναι εκθετικά ευσταθές, δηλαδή υπάρχουν σταθερές $K, \sigma > 0$ έτσι ώστε κάθε λύση $x(t, x_0)$ του συστήματος να ικανοποιεί:

$$|x(t, x_0)| \leq K \exp(-\sigma t) |x_0| \quad (1.25)$$

Συγκεκριμένα, το σ ικανοποιεί: $0 < \sigma < \min |\operatorname{Re} \sigma_i|, i = 1, \dots, n$ όπου σ_i είναι οι ιδιοτιμές του A .

v) Για κάθε πίνακα $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ συμμετρικό και αρνητικά ορισμένο, υπάρχει πίνακας $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ συμμετρικός και θετικά ορισμένος ώστε να ισχύει:

$$PA + A'P = Q \quad (1.26)$$

vi) Υπάρχει πίνακας $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ συμμετρικός και αρνητικά ορισμένος και υπάρχει πίνακας $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ συμμετρικός και θετικά ορισμένος ώστε να ισχύει:

$$PA + A'P = 0 \quad (1.27)$$

vii) Υπάρχει πίνακας $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ συμμετρικός και θετικά ορισμένος και πίνακας $C \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ώστε να ισχύει:

$$PA + A'P = -Q = -CC' \quad (1.28)$$

και επιπλέον:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n \quad (1.29)$$

Με αυτό το θεώρημα συνδέσαμε στην ουσία για τα γραμμικά συστήματα, όλες τις έννοιες που συναντήσαμε μέχρι τώρα, δηλαδή την ελεγχσιμότητα, την παρατηρησιμότητα και την ευστάθεια. Στα επόμενα κεφάλαια και ιδιαίτερα στο τέταρτο κεφάλαιο θα αποτελέσουν απαραίτητες συνθήκες για την ελαχιστοποίηση συναρτησοειδών.

Κεφάλαιο 2

Η Αρχή Μεγίστου του Pontryagin

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναφερθούμε στις αναγκαίες συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί ένας έλεγχος ώστε να είναι βέλτιστος. Οι συνθήκες αυτές συνιστούν την *Αρχή μεγίστου του Pontryagin*.

2.1 Η Αρχή Μεγίστου του Pontryagin

Όπως στο πρώτο κεφάλαιο, θεωρούμε το σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (x, u) \in X \times U \quad (2.1)$$

Το θεμελιώδες πρόβλημα έγκειται στην εύρεση ελέγχου ο οποίος ελαχιστοποιεί ένα συναρτησοειδές $J(u)$. Πιο συγκεκριμένα:

“Εστω δύο σημεία x_0 και x_1 του χώρου φάσεων. Μεταξύ όλων των αποδεκτών ελέγχων $u = u(t)$ που μας μεταφέρουν το σημείο του χώρου από την θέση x_0 στην θέση x_1 , να βρεθεί αυτός έτσι ώστε το συναρτησοειδές

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t)) dt \quad (2.2)$$

να παίρνει την ελάχιστη τιμή.” Η $x(t)$ είναι η λύση του συστήματος (2.1) με αρχική συνθήκη $x(t_0) = x_0$ ως προς τον έλεγχο $u(t)$ και t_1 είναι η χρονική στιγμή όπου η λύση περνά από την θέση $x(t_1)$.

Πριν προχωρήσουμε στην διατύπωση της Αρχής Μεγίστου του Pontryagin ορίζουμε την χαμιλτονιανή συνάρτηση. Επίσης όπως θα δούμε στην συνέχεια, παραθέτουμε δύο μορφές της Αρχής Μεγίστου, για την περίπτωση που ο χώρος αποδεκτών ελέγχων U είναι το σύνολο \mathbb{R}^m και για την περίπτωση που ο χώρος U είναι συμπαγές υποσύνολο του \mathbb{R}^m .

Ορισμός 2.1.1. *Hamiltonian του συστήματος:* $H(\eta, x, u) = -f_0 + \eta' f$ με $(\eta, x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$

Θεώρημα 2.1.1 (Pontryagin's Maximum Principle). Έστω ότι $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι ο άριστος έλεγχος και έστω $x(t) = x(t, x_0, u)$ με $x(0) = x_0$ η αντίστοιχη άριστη τροχιά. Τότε αν για το σύστημα (2.1) και την συνάρτηση κόστους:

$$J(u) = g(x(T)) + \int_0^T f_0(x(t), u(t)) dt \quad (2.3)$$

θεωρήσουμε τις εξισώσεις:

$$\dot{x} = (H_\eta)'(\eta(t), x(t), n(t)) = f(x(t), u(t)) \quad (2.4)$$

$$\dot{\eta}(t) = -(H_x)'(\eta(t), x(t), u(t)) = (f_0)'_x(x(t), u(t)) - (f)'_x(x(t), u(t))\eta(t) \quad (2.5)$$

με $x(0) = x_0$ δοθέν, $\eta(T) = -(g_x(x(T)))'$ και την αντίστοιχη τριάδα $(\eta(t), x(t), u(t))$, $t \in [0, T]$ τότε υποχρεωτικά ισχύει:

$$H_u(\eta(t), x(t), u(t)) = 0, \forall t \in [0, T]. \quad (2.6)$$

Στην συνέχεια ακολουθεί η γενίκευση της Αρχής Μεγίστου.

Θεώρημα 2.1.2 (Pontryagin's Maximum Principle Theorem).

Έστω ότι $u : [0, T] \rightarrow U \subset \mathbb{R}^m$ με U συμπαγές, είναι ο άριστος έλεγχος και έστω $x(t) = x(t, x_0, u)$ με $x(0) = x_0$ η αντίστοιχη άριστη τροχιά. Τότε αν για το σύστημα (2.1) και την συνάρτηση κόστους

$$J(u) = g(x(T)) + \int_0^T f_0(x(t), u(t)) dt \quad (2.7)$$

θεωρήσουμε τις εξισώσεις:

$$\dot{x} = (H_\eta)'(\eta(t), x(t), n(t)) = f(x(t), u(t)) \quad (2.8)$$

$$\dot{\eta}(t) = -(H_x)'(\eta(t), x(t), u(t)) = (f_0)'_x(x(t), u(t)) - (f)'_x(x(t), u(t))\eta(t) \quad (2.9)$$

με $x(0) = x_0$ δοθέν, $\eta(T) = -(g_x(x(T)))'$ και την αντίστοιχη τριάδα $(\eta(t), x(t), u(t))$, $t \in [0, T]$ τότε υποχρεωτικά ισχύει:

$$H(\eta(t), x(t), u(t)) = \max_{\nu \in U} H(\eta(t), x(t), \nu), \quad u(t) \neq \nu \quad (2.10)$$

Στις επόμενες δύο ενότητες παραθέτουμε την απόδειξη του θεωρήματος και για τις δύο περιπτώσεις, δηλαδή για μη φραγμένο αποδεκτό χώρο εισόδων και για φραγμένο.

2.2 Απόδειξη της Αρχής Μεγίστου για $U = \mathbb{R}^m$

Και στις δύο περιπτώσεις που παίρνουμε για τον αποδεκτό χώρο ελέγχων, η απόδειξη αποτελείται από μία σειρά λημμάτων και ισχυρισμών. Για την ευκολία των πράξεων θα χρησιμοποιήσουμε τον εξής συμβολισμό:

$$A(t) = f_x(x(t), u(t)) \quad (2.11)$$

$$B(t) = f_u(x(t), u(t)) \quad (2.12)$$

$$Q(t) = (f_0)_x(x(t), u(t)) \quad (2.13)$$

$$R(t) = (f_0)_u(x(t), u(t)) \quad (2.14)$$

$$F = g_x(x(T)) \quad (2.15)$$

Λήμμα 2.2.1. Έστω $x(t, x_0, u)$ μια τροχιά του συστήματος (2.1) στο διάστημα $[0, T]$ κι έστω η μεταβολή $\delta u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$. Έστω επίσης ο έλεγχος $u_\varepsilon = u(t) + \varepsilon \delta u$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Τότε:

α) Ο έλεγχος u_ε συγκλίνει ομαλά στον έλεγχο u καθώς $\varepsilon \rightarrow 0$ στο διάστημα $[0, T]$.

β) Η τροχιά $x_\varepsilon(\cdot) = x(\cdot, x_0, u_\varepsilon)$ συγκλίνει ομαλά στην τροχιά $x(\cdot) = x(\cdot, x_0, u)$ καθώς $\varepsilon \rightarrow 0$ στο διάστημα $[0, T]$.

Λήμμα 2.2.2. Η μεταβολή του κόστους $\delta J(u) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J(u_\varepsilon) - J(u)}{\varepsilon}$ υπάρχει και είναι:

$$\delta J = g_x(x(T))\delta x(T) + \int_0^T [(f_0)_x \delta x(t) + (f_0)_u \delta u(t)] dt \quad (2.16)$$

ή ισοδύναμα με τον συμβολισμό που έχουμε ορίσει:

$$\delta J = F\delta x(T) + \int_0^T [Q(t)\delta x(t) + R(t)\delta u(t)] dt. \quad (2.17)$$

Απόδειξη:

$$\left. \begin{aligned} J(u) &= g(x(T)) + \int_0^T f_0(x(t), u(t)) dt \\ J(u_\varepsilon) &= g(x_\varepsilon(T)) + \int_0^T f_0(x_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)) dt \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$J(u_\varepsilon) - J(u) = g(x_\varepsilon(T)) - g(x(T)) + \int_0^T f_0(x_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)) dt - \int_0^T f_0(x(t), u(t)) dt$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής έχουμε:

$$\begin{aligned} J(u_\varepsilon) - J(u) &= g_x(x(T) + \theta_1(x_\varepsilon(T) - x(T)))(x_\varepsilon(T) - x(T)) \\ &+ \int_0^T [(f_0)_x(x(t), u(t)) + \theta_2(x_\varepsilon(t) - x(t))(u_\varepsilon(t) - u(t))](x_\varepsilon(t) - x(t))dt \\ &+ \int_0^T [(f_0)_u(x(t), u(t)) + \theta_3(x_\varepsilon(t) - x(t))(u_\varepsilon(t) - u(t))]\varepsilon du(t)dt \end{aligned}$$

όπου $\theta_i = \theta_i(\varepsilon)$, $i = 1, 2, 3$, με $|\theta_i| \leq 1$.

Διαιρώντας με ε έχουμε:

$$\frac{J(u_\varepsilon) - J(u)}{\varepsilon} = g_x(\cdot) \frac{x_\varepsilon(T) - x(T)}{\varepsilon} + \int_0^T (f_0)_x(\cdot) \frac{x_\varepsilon(t) - x(t)}{\varepsilon} dt + \int_0^T (f_0)_u(\cdot) du(t)$$

Συνεπώς για $\varepsilon \rightarrow 0$ η μεταβολή είναι:

$$\delta J(u) = g_x(x(T)) + \int_0^T [(f_0)_x(x(t), u(t))\delta x(t) + (f_0)_u(x(t), u(t))\delta u(t)] dt \quad (2.18)$$

□

Λήμμα 2.2.3. Για το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων $\dot{x} = f(x, u)$ και για την μεταβολή της τροχιάς:

$$\delta x(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x_\varepsilon(t) - x(t)}{\varepsilon} \quad (2.19)$$

ισχύει

$$\widehat{\delta x} = A\delta x + B\delta u, \quad \forall t \in [0, T] \text{ και για } \delta x(0) = x_0. \quad (2.20)$$

Απόδειξη: Θα δείξουμε πρώτα ότι συμβαίνει το εξής:

$$\forall \varepsilon \text{ κοντά στο μηδέν και } \forall t \in [0, T] \text{ ισχύει ότι } \exists M > 0 : |x_\varepsilon(t) - x(t)| \leq \varepsilon M$$

Για τις τροχιές $x(t)$ και $x_\varepsilon(t)$ ισχύει:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s), u(s))ds \quad (2.21)$$

$$x_\varepsilon(t) = x_0 + \int_0^t f(x_\varepsilon(s), u_\varepsilon(s))ds \quad (2.22)$$

Αφαιρούμε κατά μέλη και στην συνέχεια διαιρούμε με ε :

$$\begin{aligned} \frac{x_\varepsilon(t) - x(t)}{\varepsilon} &= \int_0^t \frac{f(x_\varepsilon, u_\varepsilon) - f(x, u)}{\varepsilon} ds \Leftrightarrow \\ \frac{x_\varepsilon(t) - x(t)}{\varepsilon} &= \int_0^t \left[\frac{f(x_\varepsilon, u_\varepsilon) - f(x, u_\varepsilon)}{\varepsilon} + \frac{f(x, u_\varepsilon) - f(x, u)}{\varepsilon} \right] ds \end{aligned} \quad (2.23)$$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής για καθέναν από τους δύο όρους στο ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned} \blacklozenge \quad f(x_\varepsilon, u_\varepsilon) - f(x, u_\varepsilon) &= \begin{bmatrix} f_1(x_\varepsilon, u_\varepsilon) - f_1(x, u_\varepsilon) \\ \vdots \\ f_n(x_\varepsilon, u_\varepsilon) - f_n(x, u_\varepsilon) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\ A_\varepsilon &= \begin{bmatrix} \nabla f_1(x + \theta_1(\varepsilon)(x_\varepsilon - x), u_\varepsilon) \\ \vdots \\ \nabla f_n(x + \theta_n(\varepsilon)(x_\varepsilon - x), u_\varepsilon) \end{bmatrix} (x_\varepsilon - x) \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \blacklozenge \quad f(x, u_\varepsilon) - f(x, u) &= \begin{bmatrix} f_1(x, u_\varepsilon) - f_1(x, u) \\ \vdots \\ f_n(x, u_\varepsilon) - f_n(x, u) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\ B_\varepsilon &= \begin{bmatrix} \nabla f_1(x, u + \theta'_1(\varepsilon)(u_\varepsilon - u)) \\ \vdots \\ \nabla f_n(x, u + \theta'_n(\varepsilon)(u_\varepsilon - u)) \end{bmatrix} \varepsilon \delta u \end{aligned} \quad (2.25)$$

Συνεπώς όταν το $\varepsilon \rightarrow 0$, τότε ισχύει ότι $A_\varepsilon \rightarrow A$ και $B_\varepsilon \rightarrow B$ όπου $A = (f(x, u))_x$ και $B = (f(x, u))_u$. Αντικαθιστώντας τις παραπάνω εξισώσεις στην σχέση (2.24) λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} \frac{x_\varepsilon(t) - x(t)}{\varepsilon} &= \int_0^t \left(A_\varepsilon \frac{x_\varepsilon(s) - x(s)}{\varepsilon} + B_\varepsilon \frac{u_\varepsilon(s) - u(s)}{\varepsilon} \right) ds \\ &= \int_0^t \left(A_\varepsilon \frac{x_\varepsilon(s) - x(s)}{\varepsilon} + B_\varepsilon \delta u \right) ds \end{aligned} \quad (2.26)$$

Επειδή $\forall \varepsilon > 0$ κοντά στο μηδέν υπάρχει θετικός αριθμός $L : |A_\varepsilon(s)| + |B_\varepsilon(s)| \leq L$ η παραπάνω σχέση γράφεται ως εξής:

$$\left| \frac{x_\varepsilon(t) - x(t)}{\varepsilon} \right| \leq L \int_0^t \left| \frac{x_\varepsilon(s) - x(s)}{\varepsilon} \right| ds + L \int_0^t |\delta u| ds$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Gronwall-Bellman έχουμε ότι:

$$\left| \frac{x_\varepsilon(t) - x(t)}{\varepsilon} \right| \leq G \exp(Lt) \Rightarrow \quad (2.27)$$

$$\left| \frac{x_\varepsilon(t) - x(t)}{\varepsilon} \right| \leq G \exp(LT) \quad (2.28)$$

όπου $G = L \int_0^t |\delta u| ds$. Κατά συνέπεια ισχύει το ζητούμενο, δηλαδή:

$$|x_\varepsilon(t) - x(t)| \leq \varepsilon [G \exp(Lt)], \quad \forall t \in [0, T] \quad (2.29)$$

Χρησιμοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα θα προχωρήσουμε στην απόδειξη του λήμματος. Θεωρούμε την γραμμική διαφορική εξίσωση:

$$\dot{\omega} = A(t)\omega + B(t)\delta u, \quad \text{με αρχική συνθήκη } \omega(0) = 0. \quad (2.30)$$

Θεωρούμε πάλι την διαφορά $\frac{x_\varepsilon(t) - x(t)}{\varepsilon}$ και ορίζουμε $\xi_\varepsilon(t) = \frac{x_\varepsilon(t) - x(t)}{\varepsilon} - \omega(t)$. Θα δείξουμε ότι $\xi_\varepsilon(t) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$. Λόγω της εξίσωσης (2.26), έχουμε:

$$\begin{aligned} \xi_\varepsilon(t) &= \frac{x_\varepsilon(t) - x(t)}{\varepsilon} - \omega(t) \\ &= \int_0^t \left(A_\varepsilon \frac{x_\varepsilon(s) - x(s)}{\varepsilon} - A\omega(s) + (B_\varepsilon - B)\delta u \right) ds \\ &= \int_0^t \left((A_\varepsilon - A) \frac{x_\varepsilon(s) - x(s)}{\varepsilon} + A \frac{x_\varepsilon(s) - x(s)}{\varepsilon} - A\omega(s) \right) ds + \int_0^t (B_\varepsilon - B)\delta u ds \\ &= \int_0^t \left((A_\varepsilon - A) \frac{x_\varepsilon(s) - x(s)}{\varepsilon} + A\xi_\varepsilon(s) \right) ds + \int_0^t (B_\varepsilon - B)\delta u ds \\ |\xi_\varepsilon(t)| &\leq \int_0^t \left(|A_\varepsilon - A| \left| \frac{x_\varepsilon(s) - x(s)}{\varepsilon} \right| + |A| |\xi_\varepsilon(s)| \right) ds + \int_0^t |B_\varepsilon - B| |\delta u| ds \end{aligned}$$

Μπορώ να αντικαταστήσω το t με το T στον πρώτο και τρίτο όρο της ανισότητας διατηρώντας την αφού είναι σταθερές και λόγω της σχέσης (2.27) έχουμε ότι:

$$|\xi_\varepsilon(t)| \leq \int_0^T (G \exp(LT) |A_\varepsilon - A| + |B_\varepsilon - B| |\delta u|) ds + \int_0^t |A| |\xi_\varepsilon(s)| ds$$

Επειδή $\forall t \in [0, T]$ το $|A|$ θα είναι φραγμένο, δηλαδή θα υπάρχει θετικός αριθμός k τέτοιος, ώστε $|A(\cdot)| \leq k$ και κάνοντας χρήση της ανισότητας Gronwall-Bellman έχουμε:

$$|\xi_\varepsilon(t)| \leq C_\varepsilon \exp(kt), \quad \forall t \in [0, T].$$

Καθώς $\varepsilon \rightarrow 0$, $C_\varepsilon \rightarrow 0$ και κατά συνέπεια:

$$\left. \begin{aligned} \xi_\varepsilon(t) \rightarrow 0 \Rightarrow \omega(t) &= \frac{x_\varepsilon(t) - x(t)}{\varepsilon} \\ \dot{\omega} &= A(t)\omega + B(t)\delta u \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{\delta x} = A\delta x + B\delta u, \quad \forall t \in [0, T] \quad (2.31)$$

□

Απόδειξη: (Αρχή Μεγίστου του Pontryagin)

$$\begin{aligned} \widehat{\eta' \delta x} &= \dot{\eta'} \delta x + \eta' \dot{\delta x} \\ &= (Q - \eta' A) \delta x + \eta' (A \delta x + B \delta u) \\ &= Q \delta x - \eta' A \delta x + \eta' A \delta x + \eta' B \delta u \\ &= Q \delta x + \eta' B \delta u \end{aligned} \quad (2.32)$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση στο διάστημα $[0, T]$ έχουμε:

$$\eta'(T)\delta x(T) = \int_0^T (Q\delta x + \eta' B \delta u) dt \quad (2.33)$$

Όμως έχουμε υποθέσει ότι ο έλεγχος u ελαχιστοποιεί το κόστος συνεπώς $J(u_\varepsilon) \geq J(u)$ και κατά συνέπεια $\delta J(u) = 0$. Συνεπώς η μεταβολή του κόστους που δίνεται από την εξίσωση (2.21) μας δίνει την σχέση:

$$F\delta x(T) + \int_0^T (Q\delta x + R\delta u) dt = 0 \quad (2.34)$$

Από τις εξισώσεις (2.33), (2.34) και λαμβάνοντας υπόψιν ότι $\eta(T) = -(g_x(x(T)))'$ ή σύμφωνα με τον συμβολισμό που έχουμε θεωρήσει, $\eta'(T) = -F$, ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} -F\delta x(T) &= -F\delta x(T) + \int_0^T (Q\delta x + \eta' B \delta u) dt - \int_0^T (Q\delta x + R\delta u) dt \Leftrightarrow \\ &\int_0^T (\eta' B - R) \delta u dt = 0 \Leftrightarrow \\ &-R + \eta' B = 0 \Leftrightarrow \end{aligned} \quad (2.35)$$

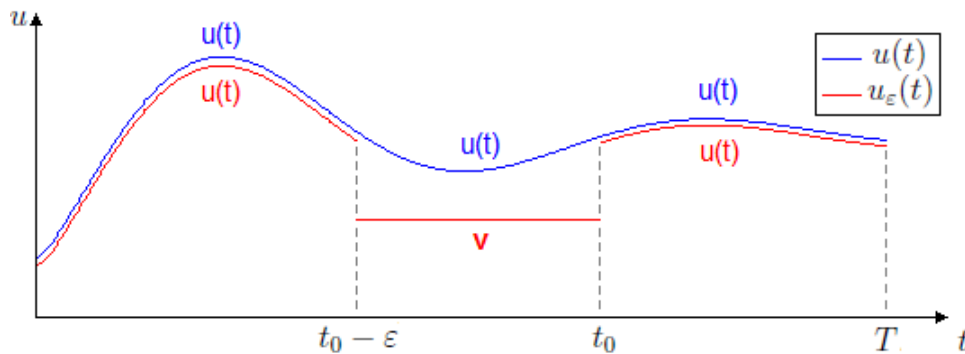
$$H_u(\eta(t), x(t), u(t)) = 0 \quad (2.36)$$

□

2.3 Απόδειξη της Αρχής Μεγίστου για $U \subset \mathbb{R}^m$

Θα αποδείξουμε την Αρχή μεγίστου για χώρο ελέγχων $U \subset \mathbb{R}^m$ ο οποίος είναι συμπαγής. Όπως και στην προηγούμενη ενότητα θα αποδείξουμε κάποια απαραίτητα λήμματα για την απόδειξη.

Λήμμα 2.3.1. Έστω ο έλεγχος $u(t) \in U$. Ορίζω τον έλεγχο $u_\varepsilon(t)$ για $t_0 \in (0, T]$ και για $\varepsilon > 0 : t_0 - \varepsilon > 0$ ως εξής:



$$u_\varepsilon(t) = \begin{cases} u(t), & t \in [0, t_0 - \varepsilon] \\ \nu, & t \in (t_0 - \varepsilon, t_0] \\ u(t), & t \in (t_0, T] \end{cases} \quad (2.37)$$

Έστω επίσης οι τροχιές $x(t) = x(t, x_0, u)$ και x_ε έτσι ώστε $x_\varepsilon(t) = x_\varepsilon(t, x_0, u_\varepsilon)$ με $0 \leq t \leq T$. Τότε:

α) Ο έλεγχος $u_\varepsilon(t)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στον έλεγχο $u(t)$ στο $[0, T]$ για $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

β) Η τροχιά $x_\varepsilon(t)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην τροχιά $x(t)$ στο $[0, T]$ για $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

Λήμμα 2.3.2. Η μεταβολή του κόστους $\delta J(u) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J(u_\varepsilon) - J(u)}{\varepsilon}$ υπάρχει και είναι:

$$\delta J = F \delta x(T) + f_0(x(t_0), \nu) - f_0(x(t_0), u(t_0)) + \int_{t_0}^T Q(s) \delta x(s) ds \quad (2.38)$$

όπου $F = g_x(x(T))$ και $Q(t) = (f_0)_x(x(t), u(t))$.

Λήμμα 2.3.3. Για το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων $\dot{x} = f(x, u)$ και για την μεταβολή της τροχιάς $\delta x(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x_\varepsilon(t) - x(t)}{\varepsilon}$ με $t \in [0, T]$, ισχύει:

$$\widehat{\delta x(t)} = A(t) \delta x(t), \quad t \in (t_0, T] \quad (2.39)$$

όπου $A(t) = f_x(x(t), u(t))$ και $\delta x(t_0) = f(x(t_0), \nu) - f(x(t_0), u(t_0))$.

Απόδειξη: Πρώτα θα υπολογίσουμε την μεταβολή της τροχιάς για τις περιπτώσεις όπου $t \in [0, t_0)$, $t = t_0$ και $t \in (t_0, T]$.

◆ Έστω $t \in [0, t_0)$. Τότε $\exists \varepsilon > 0 : t_0 - \varepsilon > t$. Επειδή $u_\varepsilon(s) = u(s) \forall s \in [0, t]$ τότε υποχρεωτικά θα ισχύει ότι $x_\varepsilon(s) = x(s, x_0, u_\varepsilon) = x(s, x_0, u) = x(s)$ άρα:

$$\delta x(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x_\varepsilon(t) - x(t)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{0}{\varepsilon} = 0 \quad (2.40)$$

◆ Έστω $t = t_0$. Τότε:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_0^{t_0} f(x(s), u(s)) ds \Leftrightarrow \\ x(t) &= \int_0^{t_0 - \varepsilon} f(x(s), u(s)) ds + \int_{t_0 - \varepsilon}^{t_0} f(x(s), u(s)) ds \end{aligned} \quad (2.41)$$

και

$$\begin{aligned}
 x_\varepsilon(t) &= x_0 + \int_0^{t_0} f(x_\varepsilon(s), u_\varepsilon(s)) ds \Leftrightarrow \\
 x_\varepsilon(t) &= \int_0^{t_0-\varepsilon} f(x_\varepsilon(s), u_\varepsilon(s)) ds + \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0} f(x_\varepsilon(s), u_\varepsilon(s)) ds \Leftrightarrow \\
 x_\varepsilon(t) &= \int_0^{t_0-\varepsilon} f(x(s), u(s)) ds + \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0} f(x_\varepsilon(s), \nu) ds
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη και διαιρώντας με ε έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \frac{x_\varepsilon(t) - x(t)}{\varepsilon} &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0} [f(x_\varepsilon, \nu) - f(x, u)] ds \Leftrightarrow \\
 \frac{x_\varepsilon(t) - x(t)}{\varepsilon} &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0} [f(x_\varepsilon, \nu) - f(x, \nu)] ds + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0} [f(x, \nu) - f(x, u)] ds
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα του δεύτερου μέλους της παραπάνω εξίσωσης έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0} [f(x_\varepsilon, \nu) - f(x, \nu)] ds \right| &\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0} |f(x_\varepsilon, \nu) - f(x, \nu)| ds \\
 &\leq \frac{1}{\varepsilon} \sup_{t_0-\varepsilon \leq s \leq t_0} |f(x_\varepsilon(s), \nu) - f(x(s), \nu)| \\
 &\leq \sup_{0 \leq s \leq t_0} |f(x_\varepsilon(s), \nu) - f(x(s), \nu)| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

λόγω ομαλής σύγκλισης της $f(x_\varepsilon(\cdot), \nu)$ στην $f(x(\cdot), \nu)$ στο διάστημα $[0, t_0]$ δηλαδή λόγω της ομαλής σύγκλισης της $x_\varepsilon(\cdot) \rightarrow x(\cdot)$ και της συνέχειας της συνάρτησης f .

Για τον δεύτερο όρο της (2.43) εξίσωσης στο δεύτερο μέλος έχουμε και “Lebesgue”:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0} [f(x, \nu) - f(x, u)] ds &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0} [f(x, \nu) - f(x, u)] ds \Big|_{\varepsilon=0} \\
 &= -\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^{t_0-\varepsilon} [f(x, \nu) - f(x, u)] ds \Big|_{\varepsilon=0} \\
 &= 1 \cdot f(x(t_0), \nu) - f(x(t_0), u(t_0)) \\
 &= f(x(t_0), \nu) - f(x(t_0), u(t_0))
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

Άρα από τις (2.44), (2.45), το όριο της (2.43) για $\varepsilon \rightarrow 0$ μας δίνει:

$$\delta x(t_0) = f(x(t_0), \nu) - f(x(t_0), u(t_0)) \tag{2.46}$$

◆ Έστω $t > t_0$. Τότε ισχύει:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(x(s), u(s)) ds \quad (2.47)$$

και

$$\begin{aligned} x_\varepsilon(t) &= x_\varepsilon(t_0) + \int_{t_0}^t f(x_\varepsilon(s), u_\varepsilon(s)) ds \\ &= x_\varepsilon(t_0) + \int_{t_0}^t f(x_\varepsilon(s), u(s)) ds \end{aligned} \quad (2.48)$$

Θα δείξουμε ότι $\exists L > 0 : \frac{1}{\varepsilon} |x_\varepsilon(t) - x(t)| \leq L, \quad \forall t \in (t_0, T]$ και $\forall \varepsilon > 0$ κοντά στο μηδέν. Αφαιρούμε κατά μέλη τις εξισώσεις (2.47), (2.48) και παίρνουμε την απόλυτη τιμή:

$$|x_\varepsilon(t) - x(t)| \leq \int_{t_0}^t [|f(x_\varepsilon, u) - f(x, u)| + |x_\varepsilon(t_0) - x(t_0)|] ds \quad (2.49)$$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής, προκύπτει:

$$\begin{aligned} f(x_\varepsilon, u) - f(x, u) &= \begin{bmatrix} f_1(x_\varepsilon, u) - f_1(x, u) \\ \vdots \\ f_n(x_\varepsilon, u) - f_n(x, u) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\ &= \begin{bmatrix} \nabla f_1(x + \theta_1(\varepsilon)(x_\varepsilon - x), u) \\ \vdots \\ \nabla f_n(x + \theta_n(\varepsilon)(x_\varepsilon - x), u) \end{bmatrix} (x_\varepsilon - x) \end{aligned} \quad (2.50)$$

όπου $|\theta_i(\varepsilon)| \leq 1, i = 1, \dots, n$ και είναι πίνακας που εξαρτάται από τα t και ε , επομένως για $\varepsilon \rightarrow 0^+$ και λόγω της ομαλής σύγκλισης $u_\varepsilon \rightarrow u, x_\varepsilon \rightarrow x$ στο διάστημα $[0, T]$, θα ισχύει:

$$A_\varepsilon(t) \rightarrow A(t) = f_x(x(t), u(t)) = \begin{bmatrix} \nabla f_1(x(t), u(t)) \\ \vdots \\ \nabla f_n(x(t), u(t)) \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

Λόγω της εξίσωσης (2.50), η (2.49), αφού διαιρέσουμε με $\varepsilon > 0$, διαμορφώνεται ως εξής:

$$\frac{|x_\varepsilon(t) - x(t)|}{\varepsilon} \leq \int_{t_0}^t |A_\varepsilon(s)| \frac{|x_\varepsilon(s) - x(s)|}{\varepsilon} ds + \frac{|x_\varepsilon(t_0) - x(t_0)|}{\varepsilon} \quad (2.52)$$

Εφόσον $A_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} A$ τότε $\exists M > 0 : A_\varepsilon(s) \leq M$ δηλαδή η $A_\varepsilon(s)$ είναι φραγμένη. Για

$C_\varepsilon = \frac{|x_\varepsilon(t_0) - x(t_0)|}{\varepsilon}$ έχουμε:

$$\frac{|x_\varepsilon(t) - x(t)|}{\varepsilon} \leq \int_{t_0}^t M \frac{|x_\varepsilon(s) - x(s)|}{\varepsilon} ds + C_\varepsilon \quad (2.53)$$

και εφαρμόζοντας την ανισότητα Gronwall-Bellman βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} \frac{|x_\varepsilon(t) - x(t)|}{\varepsilon} &\leq C_\varepsilon \exp(M(t - t_0)) \\ &\leq C_\varepsilon \cdot \Xi, \quad \forall t \in (t_0, T] \end{aligned} \quad (2.54)$$

όπου $\exp(M(t - t_0)) \leq \Xi$.

$$\text{Εφόσον } C_\varepsilon = \frac{|x_\varepsilon(t_0) - x(t_0)|}{\varepsilon}, \text{ τότε } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|x_\varepsilon(t_0) - x(t_0)|}{\varepsilon} = |\delta x(t_0)|$$

Άρα η C_ε συγκλίνει για $\varepsilon \rightarrow 0^+$ και κατά συνέπεια είναι φραγμένη. Αυτό σημαίνει ότι $\exists C \geq C_\varepsilon$ και εν τέλει η σχέση (2.54) θα είναι:

$$\frac{|x_\varepsilon(t) - x(t)|}{\varepsilon} \leq C \cdot \Xi = L, \quad \forall \varepsilon > 0 \text{ κοντά στο μηδέν και } \forall t \in (t_0, T]. \quad (2.55)$$

Πλέον έχοντας προσδιορίσει την μεταβολή της τροχιάς για τις διάφορες τιμές του χρόνου, θα δείξουμε ότι $\widehat{\delta x(t)} = A(t)\delta x(t)$, $t \in (t_0, T]$ με $\delta x(t_0) = f(x(t_0), \nu) - f(x(t_0), u(t_0))$. Θεωρούμε την γραμμική διαφορική εξίσωση:

$$\dot{\omega} = A(t)\omega, \quad \omega(t_0) = \delta x(t_0) \quad (2.56)$$

και

$$\omega(t) = \omega(t_0) + \int_{t_0}^t A(s)\omega(s)ds. \quad (2.57)$$

Επικαλούμαστε τις σχέσεις (2.47) και (2.48) και αφού τις αφαιρέσουμε κατά μέλη, διαιρούμε με $\varepsilon > 0$:

$$\frac{x_\varepsilon(t) - x(t)}{\varepsilon} = \frac{x_\varepsilon(t_0) - x(t_0)}{\varepsilon} + \int_{t_0}^t \frac{f(x_\varepsilon, u) - f(x, u)}{\varepsilon} ds \quad (2.58)$$

Ομοίως αφαιρούμε κατά μέλη τις εξισώσεις (2.57) και (2.58) και παίρνοντας την απόλυτη τιμή έχουμε:

$$\begin{aligned} \left| \omega(t) - \frac{x_\varepsilon(t) - x(t)}{\varepsilon} \right| &\leq \left| \omega(t_0) - \frac{x_\varepsilon(t_0) - x(t_0)}{\varepsilon} \right| + \\ &+ \left| \int_{t_0}^t A(s)\omega(s)ds + \int_{t_0}^t \frac{f(x_\varepsilon, u) - f(x, u)}{\varepsilon} ds \right| \end{aligned} \quad (2.59)$$

Για λόγους συντομίας θεωρώ:

$$r_\varepsilon(t) = \left| \omega(t) - \frac{x_\varepsilon(t) - x(t)}{\varepsilon} \right| \quad (2.60)$$

$$r_\varepsilon(t_0) = \left| \omega(t_0) - \frac{x_\varepsilon(t_0) - x(t_0)}{\varepsilon} \right| \quad (2.61)$$

Η σχέση (2.59) διαμορφώνεται ως:

$$\begin{aligned}
r_\varepsilon(t) &\leq r_\varepsilon(t_0) + \int_{t_0}^t \left| A_\varepsilon \frac{x_\varepsilon - x}{\varepsilon} - A \frac{x_\varepsilon - x}{\varepsilon} + A \frac{x_\varepsilon - x}{\varepsilon} - A\omega \right| ds \\
&\leq r_\varepsilon(t_0) + \int_{t_0}^t \left\{ |A_\varepsilon - A| \left| \frac{x_\varepsilon - x}{\varepsilon} \right| + |A| \left| \frac{x_\varepsilon(s) - x(s)}{\varepsilon} - \omega(s) \right| \right\} ds \\
&\stackrel{(2.55)}{\leq} r_\varepsilon(t_0) + \int_{t_0}^t |A_\varepsilon - A| L ds + \int_{t_0}^t |A| r_\varepsilon(s) ds \\
&\leq r_\varepsilon(t_0) + \int_{t_0}^T |A_\varepsilon - A| L ds + \int_{t_0}^T |A| r_\varepsilon(s) ds
\end{aligned} \tag{2.62}$$

Παρατηρούμε ότι οι δύο πρώτοι όροι στο δεύτερο μέλος της ανισότητας είναι σταθεροί και επειδή $|A| = \sup_{t_0 \leq t \leq T} |A(t)|$ τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα Gronwall-Bellman:

$$r_\varepsilon(t) \leq \left[r_\varepsilon(t_0) + \int_{t_0}^T |A_\varepsilon - A| L ds \right] \exp(M(T - t_0)) \tag{2.63}$$

Έχουμε δείξει ότι $A_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} A$ άρα $A_\varepsilon - A \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0$. Επίσης $r_\varepsilon(t_0) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0$ αφού $\left(\omega(t_0) - \frac{x_\varepsilon(t_0) - x(t_0)}{\varepsilon} \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\delta x(t_0) - \delta x(t_0)) = 0$ άρα $r_\varepsilon(t) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0$ ομαλά στο $(t_0, T]$ άρα $\frac{x_\varepsilon(t) - x(t)}{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \omega(t)$ και διαπιστώνουμε ότι εν τέλει ισχύει το ζητούμενο, δηλαδή $\widehat{\delta x}(t) = A(t)\delta x(t)$, $t \in (t_0, T]$. □

Απόδειξη: (Αρχή Μεγίστου του Pontryagin)

$$\begin{aligned}
\widehat{\eta' \delta x} &= \dot{\eta'} \delta x + \eta' \dot{\delta x} \\
&= (Q - \eta' A) \delta x + \eta' A \delta x \\
&= Q \delta x, \quad t \in [0, T]
\end{aligned} \tag{2.64}$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω εξίσωση στο διάστημα $[0, T]$ έχουμε:

$$\eta'(T)\delta x(T) - \eta'(t_0)\delta x(t_0) = \int_{t_0}^T Q(t)\delta x(t)dt \Leftrightarrow \tag{2.65}$$

$$-F\delta x(T) - \eta'(t_0)\delta x(t_0) = \int_{t_0}^T Q(t)\delta x(t)dt \tag{2.66}$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα (2.3.3), η εξίσωση (2.66) διαμορφώνεται ως εξής:

$$-F\delta x(T) - \eta'(t_0)[f(x(t_0), \nu) - f(x(t_0), u(t_0))] = \int_{t_0}^T Q(t)\delta x(t)dt \tag{2.67}$$

Λύνω ως προς $\eta'(T)\delta x(T)$ την εξίσωση (2.65) και την αντικαθιστώ στην (2.38):

$$\begin{aligned}
 \delta J &= -\eta'(t_0)\delta x(t_0) + f_0(x(t_0), \nu) - f_0(x(t_0), u(t_0)) \\
 &= -\eta'(t_0)[f(x(t_0), \nu) - f(x(t_0), u(t_0))] + f_0(x(t_0), \nu) - f_0(x(t_0), u(t_0)) \\
 &= -f_0(x(t_0), u(t_0)) + \eta'(t_0)f(x(t_0), u(t_0)) - [-f_0(x(t_0), \nu) + \eta'(t_0)f(x(t_0), \nu)] \\
 &= H(\eta(t_0), x(t_0), u(t_0)) - H(\eta(t_0), x(t_0), \nu) \tag{2.68}
 \end{aligned}$$

Ο έλεγχος u είναι άριστος συνεπώς για κάθε $\epsilon > 0$ αρκούντως μικρό θα ισχύει ότι $J(u_\epsilon) \geq J(u)$ και επειδή από το Λήμμα (2.3.2), η μεταβολή του κόστους υπάρχει, θα ισχύει ότι $\delta J \geq 0$, δηλαδή:

$$H(\eta(t_0), x(t_0), u(t_0)) \geq H(\eta(t_0), x(t_0), \nu), \quad \forall \nu \in U \tag{2.69}$$

□

Κεφάλαιο 3

Γραμμικά Συστήματα και η Εξίσωση Riccati

3.1 Γραμμικά Συστήματα με Τετραγωνικό Κόστος

Έστω το γραμμικό σύστημα:

$$\dot{x} = f(x, u) = Ax + Bu, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m. \quad (3.1)$$

και έστω μια αρχική κατάσταση $x_0 \in \mathbb{R}^n$ και δοθείσα χρονική στιγμή $T > 0$. Υποθέτουμε ότι το αποδεκτό σύνολο ελέγχων U είναι ο χώρος $L^2([0, T]; \mathbb{R}^m)$, δηλαδή απαρτίζεται από όλες τις τετραγωνικά ολοκληρώσιμες απεικονίσεις $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$. Αναζητάμε έναν έλεγχο $u \in U$ που να καθιστά το τετραγωνικό κόστος:

$$J(u) = x'(T)Fx(T) + \int_0^T [x'(t)Qx(t) + u'(t)Ru(t)]dt \quad (3.2)$$

ελάχιστο. Οι πίνακες F, Q, R είναι συμμετρικοί και θα υποθέτουμε στην συνέχεια ότι οι F, Q είναι θετικά ημιορισμένοι και ο R είναι θετικά ορισμένος. Τότε προφανώς, ο R είναι αντιστρέψιμος πίνακας. Οι ιδιότητες αυτές των πινάκων αποτελούν ικανές συνθήκες για την επίλυση του προβλήματος ελαχιστοποίησης του τετραγωνικού κόστους (3.2). Πρώτα θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε το θεώρημα το οποίο μας εφοδιάζει με αναγκαίες συνθήκες για την επίλυση του προβλήματος.

Θεώρημα 3.1.1 (Αναγκαίες Συνθήκες). *Αν $u(\cdot) \in U$ είναι ένας άριστος έλεγχος και $x(\cdot)$ η αντίστοιχη άριστη τροχιά του συστήματος (3.1) με αρχική συνθήκη $x_0 \in \mathbb{R}^n$ τότε η άριστη τροχιά ικανοποιεί το σύστημα:*

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B' \\ -Q & -A' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \eta \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

για κάθε $t \in [0, T]$ με συνοριακές συνθήκες:

$$x(0) = x_0, \quad \eta(T) = Fx(T) \quad (3.4)$$

και ο άριστος έλεγχος ικανοποιεί την εξίσωση:

$$u = -R^{-1}B'\eta. \quad (3.5)$$

Απόδειξη: Αν θεωρήσουμε τον άριστο έλεγχο $u \in U$, τότε για το παραπάνω γραμμικό σύστημα (3.1) και το τετραγωνικό κόστος (3.2) ικανοποιούνται οι συνθήκες της Αρχής Μεγίστου (2.1.1). Εφαρμόζουμε την Αρχή Μεγίστου υπολογίζοντας πρώτα την χαμιλτονιανή του συστήματος:

$$H = -f_0 + \eta'f = -xQx - u'Ru + \eta'(Ax + Bu) \quad (3.6)$$

Το σύστημα που προκύπτει από το Θεώρημα με τις σχέσεις (2.4) και (2.5), είναι:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= H'_\eta = Ax + Bu \\ \dot{\eta} &= -H'_x = 2Qx - A'\eta \end{aligned} \quad (3.7)$$

με $x(0)$ δοθέν και συνοριακή συνθήκη $\eta(T) = -(g_x(x(T)))' = -2Fx(T)$. Τότε θα ισχύει:

$$H_u = -2u'R + \eta'B = 0, \quad \forall t \in [0, T] \quad (3.8)$$

Όμως όπως υποθέσαμε, ο R είναι αντιστρέψιμος πίνακας άρα για τον άριστο έλεγχο u ισχύει:

$$u(t) = \frac{1}{2}R^{-1}B'\eta(t) \quad (3.9)$$

Αντικαθιστούμε στο σύστημα (3.7) και διαμορφώνεται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \frac{1}{2}BR^{-1}B' \\ 2Q & -A' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \eta \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

με $x(0)$ δοθέν και $\eta(T) = -2Fx(T)$. Μετασχηματίζουμε το σύστημα θεωρώντας $\eta = -\frac{\eta}{2}$ και έχουμε το νέο σύστημα:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B' \\ -Q & -A' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \eta \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

με την νέα συνοριακή συνθήκη $\eta(T) = Fx(T)$ και

$$u = -R^{-1}B'\eta. \quad (3.12)$$

□

Άρα δείξαμε ότι αν έχουμε έναν άριστο έλεγχο u τότε αναγκαστικά θα έχει την μορφή $u = -R^{-1}B'\eta$. Προσοχή! Αυτό δεν σημαίνει ότι κάθε έλεγχος που έχει αυτή την μορφή, θα είναι και άριστος. Συνεπώς αποτελεί αναγκαία συνθήκη και όχι ικανή. Στην συνέχεια διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε το Θεώρημα που μας δίνει ικανές συνθήκες επίλυσης του προβλήματος ελαχιστοποίησης του τετραγωνικού κόστους (3.2). Επίσης πρέπει να σημειώσουμε ότι δεν γνωρίζουμε αν το σύστημα (3.11) έχει πάντα λύση. Αυτό το ερώτημα θα απαντηθεί πιο μετά στην δεύτερη ενότητα.

Θεώρημα 3.1.2 (Ικανές Συνθήκες). Έστω το σύστημα (3.3) και το τετραγωνικό κόστος (3.2). Αν οι πίνακες F, Q είναι θετικά ημιορισμένοι και ο πίνακας R είναι θετικά ορισμένος, δηλαδή ισχύει:

$$F \geq 0, Q \geq 0 \quad (3.13)$$

και

$$R > 0 \quad (3.14)$$

τότε η λύση $x(\cdot)$ του συστήματος (3.3), ελαχιστοποιεί το κόστος (3.2).

Απόδειξη: Για το σύστημα (3.1) θεωρούμε τον άριστο έλεγχο u και τον έλεγχο:

$$u_\varepsilon = u + \varepsilon \delta u \quad (3.15)$$

Επίσης γνωρίζουμε ότι η άριστη τροχιά του συστήματος που αντιστοιχεί στον άριστο έλεγχο u είναι:

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds \quad (3.16)$$

Όμοια ισχύει:

$$\begin{aligned} \dot{x}_\varepsilon &= Ax_\varepsilon + Bu_\varepsilon \Rightarrow x_\varepsilon(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu_\varepsilon(s)ds \\ x_\varepsilon(t) &= e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds + \int_0^t e^{A(t-s)}\delta u(s)ds \\ x_\varepsilon(t) &= x(t) + \varepsilon p(t) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Τότε η μεταβολή της τροχιάς θα είναι:

$$\delta x(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x_\varepsilon(t) - x(t)}{\varepsilon} = p(t) \quad (3.18)$$

Άρα προκύπτει ότι η μεταβολή $\delta x(t)$ είναι ανεξάρτητη του ε . Το κόστος $\phi(\varepsilon)$ που αντιστοιχεί στον έλεγχο u_ε είναι:

$$\phi(\varepsilon) = J(\varepsilon) = x'_\varepsilon(T)Fx_\varepsilon(T) + \int_0^T (u'_\varepsilon Ru_\varepsilon + x'_\varepsilon Qx_\varepsilon)dt \quad (3.19)$$

Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι αυτή η συνάρτηση ως προς ε έχει ελάχιστο για $\varepsilon = 0$ δηλαδή ότι $\phi(0) = J(u)$ είναι το άριστο κόστος. Αρχικά θα δείξουμε ότι όντως αποτελεί ακρότατο του κόστους:

$$\begin{aligned} \phi^{(1)}(0) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\phi(\varepsilon) - \phi(0)}{\varepsilon} \frac{\phi(0) \leq \phi(\varepsilon)}{\phi(0) = J(u)} \\ \phi^{(1)}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Άρα όντως το μηδέν είναι σημείο ακροτάτου. Πρέπει όμως να δείξουμε ότι είναι σημείο ελαχίστου και όχι σημείο μεγίστου.

$$\phi^{(1)}(\varepsilon) = 2p'(T)Fx_\varepsilon(T) + 2 \int_0^T ((\delta u)' Ru_\varepsilon + p' Qx_\varepsilon) \Rightarrow \quad (3.21)$$

$$\phi^{(2)}(\varepsilon) = 2p'(T)Fp(T) + 2 \int_0^T ((\delta u)' R\delta u + p' Qp) \quad (3.22)$$

Όμως έχουμε υποθέσει ότι οι πίνακες P, Q είναι θετικά ημιορισμένοι και ο πίνακας R είναι θετικά ορισμένος, δηλαδή ισχύουν οι σχέσεις (3.13) και (3.14), άρα ισχύει:

$$\phi^{(2)}(\varepsilon) > 0, \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R} \quad (3.23)$$

Άρα όντως το κόστος ελαχιστοποιείται για τον άριστο έλεγχο που θεωρήσαμε. □

3.2 Η Εξίσωση Riccati

Σε αυτή την ενότητα θα απαντήσουμε στο ερώτημα που τέθηκε και αφορά την ύπαρξη λύσης για το σύστημα (3.3). Θα δείξουμε ότι αναγκαίες και ικανές συνθήκες που ορίσαμε εξασφαλίζουν την λύση του συστήματος. Θεωρούμε έναν χρονικά μεταβαλλόμενο πίνακα $P = P(t)$ ο οποίος συνδέει τις λύσεις του συστήματος (3.3):

$$\eta(t) = P(t)x(t) \quad (3.24)$$

και παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο έχουμε:

$$\dot{\eta} = \dot{P}x + P\dot{x} \quad (3.25)$$

Εξισώνοντας στην συνέχεια την δεύτερη διαφορική του συστήματος με την παραπάνω σχέση (3.25) λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= \dot{P}x + P\dot{x} \stackrel{(3.3)}{\iff} \\ -Qx - A'x &= \dot{P}x + P(Ax - BR^{-1}B'Px) \iff \\ \dot{P}x &= -Qx - A'Px - PAx + PBR^{-1}B'Px \iff \\ \dot{P} &= -PA - A'P + PBR^{-1}B'P - Q \end{aligned} \quad (3.26)$$

και για την συνοριακή συνθήκη ισχύει:

$$\begin{aligned} P(T)x(T) &= Fx(T) \iff \\ P(T) &= F \end{aligned} \quad (3.27)$$

Καταλήξαμε σε μία μη γραμμική διαφορική εξίσωση πινάκων ως προς P η οποία ονομάζεται **εξίσωση Riccati**. Στην συνέχεια θα αποδείξουμε δύο σημαντικές ιδιότητες που ικανοποιεί ο πίνακας P .

Λήμμα 3.2.1. *Ο πίνακας P είναι συμμετρικός πίνακας για $t \in (t_{max}, T]$ όπου $(t_{max}, T]$ είναι το μέγιστο προς τα αριστερά διάστημα ύπαρξης της λύσης $P = P(t)$ της διαφορικής εξίσωσης (3.26) με αρχική συνθήκη την (3.27), δηλαδή $P(T) = F$*

Απόδειξη: Παίρνουμε τον ανάστροφο και στα δύο μέλη της εξίσωσης (3.26):

$$\begin{aligned} \dot{P}' &= -P'A - A'P' + P'BR^{-1}B'P' - Q' \stackrel{Q=Q'}{\iff} \\ \dot{P}' &= -P'A - A'P' + P'BR^{-1}B'P' - Q \end{aligned} \quad (3.28)$$

όπως επίσης και για την συνοριακή συνθήκη:

$$P'(T) = F' \stackrel{F=F'}{\iff} P'(T) = F \quad (3.29)$$

Άρα από την σχέση (3.28), προκύπτει ότι ο $P'(\cdot)$ ικανοποιεί την ίδια εξίσωση Riccati με αυτή την σχέσης (3.26) και μάλιστα με την ίδια συνθήκη. Συνεπώς από το μονοσήμαντο των λύσεων θα πρέπει να ισχύει $P(t) = P'(t)$ για $t \in (t_{max}, T]$. □

Λήμμα 3.2.2. *Ο άριστος έλεγχος*

$$u_{opt} = -R^{-1}B'Px \quad (3.30)$$

ικανοποιεί την ιδιότητα:

$$\min_u \int_t^T (x'Qx + u'Ru)ds + x'(T)Fx(T) = x'_{opt}P(t)x_{opt}, \quad \forall t \in (t_{max}, T] \quad (3.31)$$

όπου $x(\cdot) = x(\cdot, x_0, u)$ και $x_{opt}(\cdot) = x(\cdot, x_0, u_{opt})$.

Απόδειξη: Θέτουμε:

$$u = u_{opt} + V = -R^{-1}B'Px + V \quad (3.32)$$

Συνεπώς για την μεταβολή του κόστους $J(\tilde{u})$ θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \tilde{J} &= \int_t^T (x'Qx + u'Ru)ds + x'(T)Fx(T) \stackrel{3.32}{=} \stackrel{3.26}{=} \\ &= \int_t^T \{-x'\dot{P}x - x'P[(A - BR^{-1}B'P)x + BV] - x'[(A - BR^{-1}B'P)x + BV]'Px\}ds \\ &\quad + \int_t^T V'RVds + x'(T)Fx(T) \end{aligned} \quad (3.33)$$

Όμως από το σύστημα (3.3) για $u = u_{opt} + V = -R^{-1}B'Px + V$ θα ισχύει:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \stackrel{3.32}{=} \\ \dot{x} &= (A - BR^{-1}B'P)x + BV \end{aligned} \quad (3.34)$$

Αντικαθιστώντας αυτή την σχέση στην (3.33) προκύπτει:

$$\begin{aligned} \tilde{J} &= \int_t^T (-x'Px - x'P\dot{x} - \dot{x}'Px)ds + \int_t^T V'RVds + x'(T)Fx(T) \\ &= - \int_t^T \frac{d}{dt}(x'Px)ds + \int_t^T V'RVds + x'(T)Fx(T) \\ &= -x'(T)P(T)x(T) + x'(t)P(t)x(t) + x'(T)Fx(T) + \int_t^T V'RVds \\ &\stackrel{P(T)=F}{=} x'(t)P(t)x(t) + \int_t^T V'RVds \\ &\geq x'(t)P(t)x(t), \quad \forall u = u_{opt} + V \end{aligned} \quad (3.35)$$

Ειδικά θέτοντας $u = u_{opt}$, από την (3.33) θα έχουμε:

$$J(u_{opt}) = x'_{opt}(t)P(t)x_{opt}(t) \quad (3.36)$$

και συνδυάζοντας τις σχέσεις (3.35) και (3.36) προκύπτει το ζητούμενο:

$$\min_u \int_t^T (x'Qx + u'Ru)ds + x'(T)Fx(T) = x'_{opt}P(t)x_{opt}, \quad \forall t \in (t_{max}, T]$$

□

Μέχρι στιγμής έχουμε μελετήσει τον πίνακα P για χρόνο που ανήκει στο διάστημα $(t_{max}, T]$. Όμως εμείς θέλουμε να ισχύει για $t \in [0, T]$. Το επόμενο Θεώρημα το καθιστά δυνατό.

Θεώρημα 3.2.3. Έστω η διαφορική εξίσωση πινάκων:

$$\dot{P} = f(P) \quad (3.37)$$

και έστω η λύση $P(\cdot)$ με $P(T) = F$ η οποία ορίζεται στο διάστημα $I = (t_{max}, T]$. Αν ισχύει $|P(t)| \leq M, \quad \forall t \in I$, τότε:

i) Υπάρχει το όριο $\lim_{t \rightarrow t_{max}^+} P(t)$

ii) η λύση $P(\cdot)$ μπορεί να επεκταθεί αριστερότερα του t_{max} στο μηδέν.

Απόδειξη: Έστω

$$L := \max\{|f(P)|, \quad \text{όπου } |P(t)| \leq M, \quad \forall t \in I\} \quad (3.38)$$

Αφού $t_n \rightarrow t_{max}^+$, από κριτήριο Cauchy συνεπάγεται:

$$\forall \epsilon > 0, \quad |t_n - t_m| \leq \frac{\epsilon}{L}, \quad \forall n, m \gg 0 \quad (3.39)$$

Για την ολοκληρωτική μορφή της $\dot{P}(t)$ ισχύει:

$$P(t) = P(T) + \int_T^t f(P(s)) ds \quad (3.40)$$

Θέτοντας στην τελευταία εξίσωση $t = t_n$ και $t = t_m$ έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} P(t_n) &= F + \int_T^{t_n} f(P(s)) ds \\ P(t_m) &= F + \int_T^{t_m} f(P(s)) ds \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(t_n) - P(t_m) = \int_{t_m}^{t_n} f(P(s)) ds \quad (3.41)$$

όπου χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε $t_n > t_m$:

$$\begin{aligned} |P(t_n) - P(t_m)| &\leq \int_{t_m}^{t_n} |f(P(s))| ds \\ &\stackrel{(3.38)}{\leq} (t_n - t_m)L \\ &\stackrel{(3.39)}{\leq} \epsilon, \quad \forall n, m \gg 0 \end{aligned} \quad (3.42)$$

Άρα από Cauchy βλέπουμε ότι υπάρχει το όριο

$$\lim_{t \rightarrow t_{max}^+} P(t) = \Xi, \quad (3.43)$$

με t_n ακολουθία. Εφόσον βρήκαμε το όριο για το διάστημα $I = (t_{max}, T]$, θα εφαρμόσω τα ίδια για το καινούριο διάστημα $[t'_{max}, t_{max}]$. Έστω $\bar{P}(t)$ η λύση της ίδιας διαφορικής αλλά με αρχική συνθήκη $\bar{P}(t_{max}) = \Xi$ για $t \in [t'_{max}, t_{max}]$. Τότε:

$$P(t) = \begin{cases} P(t), & t_{max} \leq t \leq T, \quad P(T) = F, \quad \text{για το προηγούμενο } P \\ \bar{P}(t), & t'_{max} \leq t \leq t_{max}, \quad \bar{P}(t'_{max}) = \Xi \end{cases} \quad (3.44)$$

Θα δείξουμε στην συνέχεια ότι:

i) $t_{max} = 0$

ii) $P(t) \geq 0, \forall t \in [0, T]$

Επικαλούμαστε το Λήμμα (3.2.2) που αποδείξαμε ότι ισχύει:

$$x'(t)P(t)x(t) \leq \int_t^T (x'Qx + u'Ru)ds + x'(T)Fx(T) \quad (3.45)$$

με $x(t)$ είναι η άριστη τροχιά που αντιστοιχεί στον άριστο έλεγχο u_{opt} . Παίρνουμε ένα αυθαίρετο διάνυσμα $z \in \mathbb{R}$ και θεωρούμε το σύστημα:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad \text{όπου } u = u_{opt}, \quad x(t) = z \quad \text{με } x(0) = \tilde{x}_0 \neq x_0 \quad (3.46)$$

Τότε αντικαθιστώντας στην σχέση (3.45) προκύπτει:

$$z'P(t)z \leq \int_t^T (x'Qx + u'Ru)ds + x'(T)Fx(T), \quad t \in (t_{max}, T] \quad (3.47)$$

και επειδή η ανισότητα ισχύει για κάθε έλεγχο u , θα ισχύει επίσης:

$$z'P(t)z = \int_t^T (x'Qx + u'Ru)ds + x'(T)Fx(T), \quad t \in (t_{max}, T], \quad \text{για } u = u_{opt} \quad (3.48)$$

Από τις υποθέσεις (3.13), (3.14) δηλαδή, ότι οι πίνακες Q, R είναι θετικά ημιορισμένοι και ο πίνακας R είναι θετικά ορισμένος, θα ισχύει για την εξίσωση (3.48):

$$z'P(t)z \geq 0, \quad \forall z \in \mathbb{R}^n \quad (3.49)$$

κατά συνέπεια ο πίνακας $P(t)$ είναι θετικά ημιορισμένος δηλαδή ισχύει ότι $P(t) \geq 0, t \in (t_{max}, T]$. Θέτοντας $u = 0$ στην ανισότητα (3.47) έχουμε:

$$z'P(t)z \leq \int_t^T x'Qxds + x'(T)Fx(T) \quad (3.50)$$

όπου η παραπάνω τροχιά $x(\cdot)$ αντιστοιχεί στην τροχιά με είσοδο $u = 0$ δηλαδή ικανοποιεί το σύστημα $\dot{x} = Ax$ στο διάστημα $(t_{max}, T]$ με $x(T) = z$ Επειδή ο χρόνος ανήκει σε αυτό το διάστημα η λύση αυτή γράφεται ως εξής:

$$x(s) = e^{A(s-T)}x(t), \quad t \leq s \leq T \quad (3.51)$$

και με πράξεις καταλήγουμε:

$$\begin{aligned}
|x(s)| &\leq M_1|x(t)| \Rightarrow \\
|x(s)| &\leq M_1|z| \Rightarrow \\
|x'(s)Qx(s)| &\leq M_2|x(t)|^2 \Rightarrow \\
|x'(s)Qx(s)| &\leq M_2|z|^2 \Rightarrow \\
\left| \int_t^T x'(s)Qx(s)ds \right| &\leq M_3|z|^2 \Rightarrow \\
|x'(T)Fx(T)| &\leq M_4|z|^2
\end{aligned} \tag{3.52}$$

για κατάλληλες θετικές σταθερές M_i , $i = 1, 2, 3, 4$. Από τα παραπάνω σε συνδυασμό με την ανισότητα (3.47) προκύπτει:

$$\begin{aligned}
z'P(t)z &\leq M|z|^2, \quad \forall z \Rightarrow \\
\sup_{z \neq 0} \frac{zP'(t)z}{|z|^2} &\leq M
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Επειδή για κάθε ιδιοτιμή λ του πίνακα P ισχύει $|\lambda| \leq M$ και γνωρίζοντας πλέον ότι $P \geq 0$ θα ισχύει $|\lambda| = \lambda$ άρα:

$$0 \leq \sup_{z \neq 0} \frac{zP'(t)z}{|z|^2} \leq M \tag{3.54}$$

Κατά συνέπεια θα ισχύει:

$$|P(t)| = \lambda_{max} = \sup_{z \neq 0} \frac{zP'(t)z}{|z|^2} \leq M, \quad \forall t \in (t_{max}, T] \tag{3.55}$$

δηλαδή $|P(t)| \leq M$, $\forall t \in (t_{max}, T]$ άρα μπορεί πράγματι να επεκταθεί αριστερότερα του t_{max} , άρα $t_{max} = 0$ και ο πίνακας $P(t)$ ορίζεται σε όλο το $[0, T]$.

□

Πλέον μπορούμε να απαντήσουμε στο γιατί το σύστημα

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B' \\ -Q & -A' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \eta \end{bmatrix} \tag{3.56}$$

με την νέα συνοριακή συνθήκη $\eta(T) = Fx(T)$ και τον άριστο έλεγχο:

$$u = -R^{-1}B'\eta \tag{3.57}$$

$$= -R^{-1}B'Px \tag{3.58}$$

έχει λύση. Αποδείξαμε ότι ο πίνακας $P(\cdot)$ ορίζεται παντού στο $[0, T]$ άρα η λύση $x(\cdot)$ με αρχική συνθήκη $x(0) = x_0$ ορίζεται επίσης παντού στο $[0, T]$. Τέλος λαμβάνοντας υπόψιν την σχέση $\eta = Px$ (3.24) και την Riccati, προκύπτει η διαφορική εξίσωση:

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= -Qx - A'\eta \\ &= -(Q + A'P)x\end{aligned}\tag{3.59}$$

και αφού η $x(\cdot)$ ορίζεται παντού στο $[0, T]$, τότε προφανώς η $\eta(\cdot)$ θα ορίζεται και αυτή στο $[0, T]$.

Κεφάλαιο 4

Το Πρόβλημα του Ρυθμιστή Απείρου Χρόνου

4.1 Το Θεμελιώδες Θεώρημα

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μελετήσαμε γραμμικά συστήματα της μορφής:

$$\dot{x} = f(x, u) = Ax + Bu, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m. \quad (4.1)$$

και την ύπαρξη ελέγχου $u \in U$ ώστε να καθιστά το τετραγωνικό κόστος:

$$J(u) = x'(T)Fx(T) + \int_0^T [x'(t)Qx(t) + u'(t)Ru(t)]dt \quad (4.2)$$

ελάχιστο. Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε κόστη τα οποία είναι τετραγωνικά αλλά ορίζονται για άπειρο χρόνο. Είναι δηλαδή της μορφής:

$$J(u) = \int_0^\infty (x'(t)Qx(t) + u'(t)Ru(t))dt \quad (4.3)$$

Στο 3ο Κεφάλαιο δώσαμε αναγκαίες και ικανές συνθήκες ώστε ένας έλεγχος $u \in U$ να καθιστά το κόστος (4.2) ελάχιστο. Εφαρμόζοντας την Αρχή Μεγίστου διαπιστώσαμε πως ένας άριστος έλεγχος u με την αντίστοιχη άριστη τροχιά x θα πρέπει να ικανοποιούν το σύστημα:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B' \\ -Q & -A' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \eta \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

με συνοριακή συνθήκη $\eta(T) = Fx(T)$ και ο άριστος έλεγχος θα ικανοποιεί:

$$u = -R^{-1}B'\eta. \quad (4.5)$$

Αυτές ήταν οι αναγκαίες συνθήκες. Οι ικανές συνθήκες που χρειαζόμαστε ώστε κάθε έλεγχος της μορφής (4.5) να είναι άριστος προκύπτουν από τις ανισότητες (3.13), (3.14)

δηλαδή πρέπει οι πίνακες Q, F να είναι συμμετρικοί και θετικά ημιορισμένοι πίνακες και ο πίνακας R να είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας. Επίσης δείξαμε ότι υπάρχει πίνακας P που συνδέει την λύση $x(\cdot)$ με την $\eta(\cdot)$ μέσω της εξίσωσης $\eta = Px$ και με την βοήθεια της διαφορικής εξίσωσης Riccati που προέκυψε δείξαμε ότι το σύστημα έχει παντα λύση. Ο λόγος που υπενθυμίσαμε αυτές τις συνθήκες είναι για να κάνουμε ένα παραλληλισμό με το επόμενο θεώρημα που αφορά την ελαχιστοποίηση του τετραγωνικού κόστους απείρου χρόνου (4.3).

Θεώρημα 4.1.1. Έστω το σύστημα (4.1) και το τετραγωνικό κόστος (4.3). Αν ισχύουν ότι:

- i) το ζευγάρι πίνακων (A, B) είναι ελέγξιμο
- ii) ο πίνακας R είναι θετικά ορισμένος
- iii) ο πίνακας Q είναι θετικά ημιορισμένος και επιπλέον υπάρχει πίνακας $C \in \mathbb{R}^{n \times r}$ με $Q = C'C$, έτσι ώστε το ζευγάρι (C, A) είναι παρατηρήσιμο,

τότε για το πρόβλημα του ρυθμιστή απείρου χρόνου, υπάρχει μοναδική λύση που δίνεται από τον χρονικά αναλλοίωτο έλεγχο:

$$u^* = -R^{-1}B'Px \quad (4.6)$$

όπου $x^* = x(t, x_0, u^*)$ η αντίστοιχη τροχιά του συστήματος:

$$\dot{x} = (A - BR^{-1}B'P)x \quad (4.7)$$

με αρχική συνθήκη $x(0) = x_0 \neq 0$ και P ένας $n \times n$ σταθερός, θετικά ορισμένος πίνακας ο οποίος είναι η λύση της αλγεβρικής εξίσωσης Riccati:

$$PA + A'P - PBR^{-1}B'P + Q = 0 \quad (4.8)$$

Επίσης ισχύουν επιπλέον ότι:

- i) ο πίνακας $A - BR^{-1}B'P$ είναι πίνακας Hurwitz
- ii) ο παραπάνω έλεγχος καθιστά το κόστος ελάχιστο με $J(u^*) = x_0'Px_0$.
- iii) ο πίνακας P που εξάγεται από την εξίσωση Riccati είναι μοναδικός.

Απόδειξη: Για το δοθέν $x_0 \in \mathbb{R}^n$ θεωρούμε την οικογένεια εισόδων και τροχιών:

$$u := u_T(t) \quad (4.9)$$

$$x := x_T(t, x_0, u_T) \quad (4.10)$$

για $t \in [0, T]$ που αριστοποιούν το κόστος J_T για το πρόβλημα του ρυθμιστή πεπερασμένου χρόνου T για το σύστημα (4.1), δηλαδή $J_T(u_T) = \min_u J_T(u)$ όπου:

$$J_T(u) := \int_0^T (x'Qx + u'Ru)ds, \quad \text{για } T > 0 \quad (4.11)$$

Όμως στο προηγούμενο κεφάλαιο δείξαμε ότι ισχύει η σχέση (3.58) και για την οικογένεια που έχουμε θεωρήσει, θα είναι:

$$u_T(t) = -R^{-1}B'P_T(t)x_T(t) \quad (4.12)$$

στο διάστημα $[0, T]$ και ο πίνακας P_T ικανοποιεί την εξίσωση Riccati στο ίδιο διάστημα:

$$\dot{P} = -PA - A'P + PBR^{-1}B'P - Q \quad (4.13)$$

με συνοριακή συνθήκη $P_T(T) = 0$. Στην ουσία θεωρήσαμε τις απαραίτητες σχέσεις με βάση πεπερασμένο χρόνο τον οποίο θα επεκτείνουμε στο άπειρο. Η πρώτη ιδιότητα που πρέπει να ικανοποιεί ο πίνακας P είναι ότι πρέπει να είναι σταθερός ως προς τον χρόνο έτσι να υπάρχει το όριο $\lim_{T \rightarrow \infty} P_T(t)$ και να είναι:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P_T(t) = P, \quad \forall t \geq 0 \quad (4.14)$$

Επειδή ισχύει:

$$P_T(t) = P_{T-t}(0), \quad (4.15)$$

αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει πίνακας $P > 0$ ώστε να ισχύει:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P_T(0) = P \quad (4.16)$$

Προκειμένου να αποδείξουμε αυτή τη σχέση, θα δείξουμε ότι η συνάρτηση $T \rightarrow x_0'P_T(0)x_0$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη. Τότε το όριο θα υπάρχει. Από το Λήμμα 3.22 και την σχέση (3.31), έχουμε:

$$\begin{aligned} x_0'P_T(0)x_0 &= \int_0^T (x_T'Qx_T + u_T'Ru_T)ds \\ &= \int_0^r (x_T'Qx_T + u_T'Ru_T)ds + \int_r^T (x_T'Qx_T + u_T'Ru_T)ds \\ &\geq \int_0^r (x_T'Qx_T + u_T'Ru_T)ds \\ &\geq \min \int_0^r (x'Qx + u'Ru)ds \\ &= \int_0^r (x_r'Qx_r + u_r'Ru_r)ds \\ &= x_0'P_s(0)x_0, \quad r \leq T \end{aligned} \quad (4.17)$$

Αφού το σύστημα είναι ελέγξιμο τότε υπάρχει έλεγχος $\bar{u} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ με:

$$x(1, x_0, \bar{u}) = 0. \quad (4.18)$$

Αν ορίσουμε:

$$\hat{u} := \begin{cases} \bar{u}(t), & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases} \quad (4.19)$$

τότε από το Λήμμα 3.2.2 και τις δύο παραπάνω σχέσεις προκύπτει:

$$x'_0 P_T(0) x_0 \leq \int_0^T (\hat{x}' Q \hat{x} + \hat{u}' R \hat{u}) ds = \int_0^1 (\bar{x}' Q \bar{x} + \bar{u}' R \bar{u}) ds = M, \quad M \text{ σταθερά} \quad (4.20)$$

με $\bar{x} := x(t, x_0, \bar{u}), ; 0 \leq t \leq 1$. Άρα το όριο υπάρχει και εξασφαλίζεται η ύπαρξη του πίνακα P ώστε να ισχύει η σχέση (4.16).

Στην συνέχεια θα δείξουμε ότι ο πίνακας P είναι θετικά ορισμένος. Ισχύει, βεβαίως, $P \geq 0$. Αυτό προκύπτει από την (4.16) και το γεγονός ότι για κάθε $T > 0$ ο πίνακας $P_T(0)$ είναι θετικά ημιορισμένος.

Για την οικογένεια των ελέγχων και των τροχιών που έχουμε ορίσει θα ισχύει:

$$\dot{x}_T = (A - BR^{-1}B'P_T(t))x_T \quad (4.21)$$

με αρχική συνθήκη $x_T(0) = x_0$ για $0 \leq t \leq T$ και από τις σχέσεις (4.12) και (4.14) θα ισχύει για κάθε t :

$$u_T(t) \rightarrow u^*(t) = -R^{-1}B'Px(t) \quad (4.22)$$

$$x_T(t) \rightarrow x^*(t), \quad \text{καθώς } T \rightarrow \infty \quad (4.23)$$

όπου η $x^*(\cdot)$ ικανοποιεί την σχέση:

$$\dot{x} = (A - BR^{-1}B'P)x, \quad t \geq 0 \quad (4.24)$$

με αρχική συνθήκη $x(0) = x_0$ και ο πίνακας P ικανοποιεί την αλγεβρική εξίσωση Riccati. Θα αποδείξουμε ότι $P > 0$ με απαγωγή εις άτοπο. Έστω ότι ισχύει $x'_0 P x_0 = 0$ για κάποιο $x_0 \neq 0$ και επομένως παίρνοντας υπόψιν την (4.16) θα ισχύει:

$$0 = x'_0 P x_0 = \lim_{T \rightarrow \infty} x'_0 P_T(0) x_0 = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T (x'_T Q x_T + u'_T R u_T) ds \quad (4.25)$$

Επειδή $R > 0$ και $Q \geq 0$ και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.22) και (4.23), θα προκύψει:

$$u(t) = 0 \quad (4.26)$$

και

$$x'(t)Qx(t) = 0, \quad \forall t \geq 0 \quad (4.27)$$

όπου $x(\cdot)$ είναι η τροχιά του συστήματος (4.1) με μηδενική είσοδο $u(\cdot) = 0$, δηλαδή του συστήματος

$$\dot{x} = Ax \quad (4.28)$$

με σημείο αφετηρίας το x_0 . Όμως από την υπόθεση (iii) του θεωρήματος, έχουμε ότι $Q = C'C$ και το ζευγάρι (C, A) είναι παρατηρήσιμο άρα από την (4.27) έχουμε:

$$\begin{aligned} x'(t)C'Cx(t) = 0 &\Leftrightarrow \\ Cx(t) = 0 &\Leftrightarrow \\ x(\cdot) = 0 & \end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο γιατί έχουμε υποθέσει ότι $x_0 \neq 0$. Συνεπώς ο πίνακας P είναι θετικά ορισμένος δηλαδή ισχύει $P > 0$.

Συνεχίζουμε την απόδειξη δείχνοντας ότι ο πίνακας $A - BR^{-1}B'P$ είναι Hurwitz. Χρησιμοποιώντας κατάλληλα την αλγεβρική εξίσωση Riccati λαμβάνουμε:

$$P(A - BR^{-1}B'P) + (A - BR^{-1}B'P)'P = -Q - PBR^{-1}B'O \leq 0 \quad (4.29)$$

δηλαδή είναι αρνητικά ημιορισμένος γιατί $Q \geq 0$ και $R^{-1} > 0$. Επειδή $P > 0$ η συνάρτηση $V(x)$ που ορίζεται ως:

$$V(x) := \frac{1}{2}x'Px \quad (4.30)$$

είναι θετικά ορισμένη. Χρησιμοποιώντας την σχέση (4.29), υπολογίζουμε την χρονική παράγωγο κατά μήκος των λύσεων της (4.24):

$$\dot{V}(x) = -x'Qx - x'PBR^{-1}B'Px \leq 0 \quad (4.31)$$

Παίρνουμε μία τροχιά $x(t) = x(t, x_0)$ του συστήματος (4.24) με $\dot{V}(x(t, x_0)) = 0$, $\forall t \in [0, \delta]$ με $\delta > 0$. Τότε $x'(t)Qx(t) = 0$, ή ισοδύναμα $Cx(t) = 0$ και $B'Px(t) = 0$, επομένως $u = 0$. Άρα η τροχιά $x(t, x_0)$ είναι λύση της $\dot{x} = Ax$ και όμοια με πριν καταλήγουμε πως $x_0 = 0$. Συνεπώς λόγω του Θεωρήματος La Salle 1.4.2, το $0 \in \mathbb{R}^n$ είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο για το σύστημα (4.24) και με βάση το Θεώρημα 1.4.3 ο πίνακας $A - BR^{-1}B'P$ είναι Hurwitz.

Προφανώς θα πρέπει να δείξουμε ότι ο έλεγχος $u^* = -R^{-1}B'Px$ καθιστά το κόστος (4.3) ελάχιστο με $J(u^*) = x_0'Px_0$. Θέτοντας $u^* = -R^{-1}B'Px^*$ στο $J(\cdot)$ και χρησιμο-

ποιώντας την σχέση (4.29) θα ισχύει:

$$\begin{aligned}
J(u^*) &= \int_0^\infty x^{*'}(s)(PBR^{-1}B'P + Q)x^*(s)ds \\
&= \int_0^\infty x^{*'}(s) [P(A - BR^{-1}B'P) + (A - BR^{-1}B'P)'P] x^*(s)ds \\
&= x_0'Px_0 - \lim_{t \rightarrow \infty} x'(t)Px(t) \\
&= x_0'Px_0
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Έστω έλεγχος $v \neq u^*$ τέτοιος, ώστε $J(v) < J(u^*)$. Τότε:

$$\begin{aligned}
x_0'Px_0 &= J(u^*) \\
&> \int_0^T (x'Qx + v'Rv)ds \\
&\geq x_0'P_T(0)x_0
\end{aligned} \tag{4.33}$$

από όπου προκύπτει $x_0'Px_0 > \lim_{T \rightarrow \infty} x_0'P_T(0)x_0 = x_0'Px_0$ το οποίο είναι άτοπο. Καταλήγουμε πως πράγματι $J(u^*) = \min J(u)$.

Τέλος θα δείξουμε ότι ο πίνακας P είναι μοναδικός με απαγωγή εις άτοπο. Έστω \bar{P} μία δεύτερη λύση της αλγεβρικής εξίσωσης Riccati. Επειδή έχουμε δείξει ότι ο P θα είναι σταθερός, τότε και ο \bar{P} θα είναι σταθερός και όμοια με τον P θα ικανοποιεί και αυτός την διαφορική εξίσωση Riccati. Με βάση τα όσα είδαμε στο 4ο Κεφάλαιο, θα πρέπει ο έλεγχος $\bar{u} = -R^{-1}\bar{P}x$ για κάθε x_0 και για κάθε $T > 0$ να ελαχιστοποιεί το κόστος:

$$J_T(u) = x'(T)Px(T) + \int_0^T (x'Qx + u'Ru)ds \tag{4.34}$$

και άρα $x_0'\bar{P}x_0 = J_T(\bar{u}) \leq J_T(u^*) = J_T(u^* = -R^{-1}B'Px)$. Ο \bar{P} ικανοποιεί την (4.29) και επειδή $\bar{P} > 0$, όπως προηγουμένως θα ισχύει

$$\bar{x}(T) \rightarrow 0, \quad \text{καθώς } T \rightarrow +\infty \tag{4.35}$$

όπου $\bar{x}(\cdot)$ είναι η λύση του συστήματος:

$$\dot{x} = (A - BR^{-1}\bar{P})x \tag{4.36}$$

με $\bar{x}(0) = x_0$. Έχουμε επομένως:

$$\bar{x}_0'\bar{P}\bar{x}_0 = \lim_{T \rightarrow \infty} J_T(\bar{u}) = \int_0^\infty (\bar{x}'Q\bar{x} + \bar{u}'R\bar{u})ds \leq \lim_{T \rightarrow \infty} J_T(u^*) = J(u^*) = x_0'Px_0 \tag{4.37}$$

αφού το $x_0'Px_0$ είναι η ελάχιστη τιμή του $J(u)$. Η προηγούμενη ισότητα ισχύει για κάθε x_0 , άρα λόγω συμμετρίας των \bar{P}, P προκύπτει πως $\bar{P} = P$.

□

4.2 Εφαρμογή σε Βιολογικό Μοντέλο

4.2.1 Εξαγωγή του Μοντέλου

Πολλά προβλήματα στην βιολογία μπορούν να μοντελοποιηθούν κατάλληλα ώστε η συμπεριφορά των μοντέλων, δηλαδή των συστημάτων που τα περιγράφουν, να μπορεί να βελτιστοποιηθεί. Ένα τέτοιο πρόβλημα αποτελεί ο έλεγχος της γλυκόζης στο αίμα.

Το μοντέλο ανίχνευσης του διαβήτη βασίζεται στα στοιχεία παρακάτω. Οι πιο πολλοί ιστοί στο σώμα μας μπορούν να χρησιμοποιούν λίπη και πρωτεΐνες για να παράγουν ενέργεια όταν η γλυκόζη δεν επαρκεί. Όμως η γλυκόζη είναι το μοναδικό σάκχαρο που σε επαρκείς και συγκεκριμένες ποσότητες μπορεί να εφοδιάσει τον εγκέφαλο, τον αμφιβληστροειδή χιτώνα και το βλαστικό επιθήλιο με την απαιτούμενη ενέργεια που χρειάζονται για να λειτουργούν φυσιολογικά. Πολύ υψηλά επίπεδα γλυκόζης μπορούν να οδηγήσουν σε παθολογικές παθήσεις όπως κυτταρική αφυδάτωση. Γι' αυτό το λόγο η συγκέντρωση της γλυκόζης στο αίμα πρέπει να διατηρείται μέσα σε συγκεκριμένα όρια για την φυσιολογική λειτουργία του οργανισμού.

Το σύστημα ρύθμισης της γλυκόζης στο αίμα είναι αρκετά πολύπλοκο. Εμείς θα παρουσιάσουμε ένα απλούστερο σύστημα το οποίο δεν υπολογίζει όλους τους παράγοντες που επηρεάζουν τα επίπεδα γλυκόζης, όπως για παράδειγμα τη διατροφή και τη σωματική άσκηση. Το σύστημα αυτό έχει την μορφή:

$$\dot{G} = F_1(G, H) + I(t) \quad (4.38)$$

$$\dot{H} = F_2(G, H) \quad (4.39)$$

όπου G είναι η συγκέντρωση της γλυκόζης στο αίμα, H είναι η καθαρή συγκέντρωση ορμονών όπως η ινσουλίνη και $I(t)$ είναι ο ρυθμός με τον οποίο αυξάνεται από εξωτερικούς παράγοντες, η γλυκόζη. Έστω ότι G_0 και H_0 είναι οι σταθερές τιμές που έχουν φτάσει οι συγκεντρώσεις της γλυκόζης και των ορμονών όταν ένας ασθενής έχει πρόβλημα. Αφού πλέον οι τιμές G και H δεν θα αλλάξουν, θα ισχύει $\dot{G} = 0$ και $\dot{H} = 0$ το οποίο θα σημαίνει ότι $F_1(G_0, H_0) = 0$ και $F_2(G_0, H_0) = 0$. Θεωρώντας μόνο μικρές αποκλίσεις από τις τιμές ισορροπίας G_0 και H_0 , επειδή το μοντέλο κατασκευάστηκε ώστε να ανιχνεύει τον προδιαβήτη και τον ήπιο διαβήτη, έχουμε:

$$g = G - G_0 \quad (4.40)$$

$$h = H - H_0 \quad (4.41)$$

Ξαναγράφουμε το σύστημα (4.38),(4.39) χρησιμοποιώντας τις παραπάνω εξισώσεις:

$$\dot{g} = F_1(G_0 + g, H_0 + h) + I(t) \quad (4.42)$$

$$\dot{h} = F_2(G_0 + g, H_0 + h) \quad (4.43)$$

Παίρνουμε το ανάπτυγμα Taylor για την F_1 και F_2 γύρω από το G_0 και το H_0 και έχουμε:

$$F_1(G_0 + g, H_0 + h) = F_1(G_0, H_0) + \frac{\partial F_1(G_0, H_0)}{\partial G}g + \frac{\partial F_1(G_0, H_0)}{\partial H}h + e_1 \quad (4.44)$$

$$F_2(G_0 + g, H_0 + h) = F_2(G_0, H_0) + \frac{\partial F_2(G_0, H_0)}{\partial G}g + \frac{\partial F_2(G_0, H_0)}{\partial H}h + e_2 \quad (4.45)$$

Εφόσον είπαμε ότι τα G και H αποκλίνουν ελάχιστα από τις τιμές G_0 και H_0 , οι όροι e_1, e_2 μπορούν να αγνοηθούν. Έτσι το σύστημα (4.42),(4.43) διαμορφώνεται ως εξής:

$$\dot{g} = \frac{\partial F_1(G_0, H_0)}{\partial G}g + \frac{\partial F_1(G_0, H_0)}{\partial H}h + I(t) \quad (4.46)$$

$$\dot{h} = \frac{\partial F_2(G_0, H_0)}{\partial G}g + \frac{\partial F_2(G_0, H_0)}{\partial H}h \quad (4.47)$$

Επειδή οι συναρτήσεις F_1 και F_2 είναι άγνωστες, δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε θεωρητικά τις μερικές παραγώγους που εμφανίζονται στο σύστημα. Παρόλα αυτά, μπορούμε να προσδιορίζουμε τα πρόσημά τους από τις ιδιότητες συστήματος ρύθμισης της γλυκόζης.

Αν $g > 0$ και $h = 0$, τότε η συγκέντρωση γλυκόζης στο αίμα θα μειωθεί λόγω της δέσμευσής της από τους ιστούς και της αποθήκευσής της από το συκώτι ως γλυκογόνο. Έτσι θα ισχύει $\dot{g} < 0$ το οποίο υποδηλώνει από την σχέση (4.46), ότι η μερική παράγωγος της F_1 ως προς G θα είναι αρνητική. Όμοια η μερική παράγωγος της F_1 ως προς H θα είναι αρνητική αφού μια θετική τιμή για την h τείνει επίσης να μειώσει την συγκέντρωση της γλυκόζης.

Αν η τιμή της μεταβλητής g είναι θετική τότε οι ενδοκρινείς αδένες εκκρίνουν εκείνες τις ορμόνες που τείνουν να αυξήσουν την μεταβλητή H και έτσι θα ισχύει $\dot{h} > 0$. Από την σχέση (4.47), η μερική παράγωγος της F_2 ως προς G θα είναι θετική και η μερικής παράγωγός της ως προς H θα είναι αρνητική αφού η συγκέντρωση των ορμονών στο αίμα θα μειωθεί εξαιτίας της αποβολής τους.

Για τους λόγους που αναφέραμε, η τελική μορφή που λαμβάνει το σύστημα (4.46),(4.47) είναι:

$$\dot{g} = -ag - bh + I(t) \quad (4.48)$$

$$\dot{h} = -ch + dg \quad (4.49)$$

όπου a, b, c, d είναι θετικές σταθερές.

4.2.2 Έλεγχος του Διαβήτη

Σε αυτή την ενότητα θα εφαρμόσουμε την θεωρία που έχουμε μάθει μέχρι τώρα για τα γραμμικά συστήματα με τετραγωνικό κόστος που ορίζεται για άπειρο χρόνο. Το σύστημα (4.48),(4.49) που περιγράφει την αλληλεπίδραση των συγκεντρώσεων της γλυκόζης στο αίμα και της ινσουλίνης, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον έλεγχο της γλυκόζης στους

ανθρώπους που πάσχουν από διαβήτη. Για να είναι εφαρμόσιμο στην περίπτωση του διαβήτη, το σύστημα γίνεται για $g = x_1$, $h = x_2$:

$$\dot{x}_1 = -ax_1 - bx_2, \quad x_1(0) = x_{10} \quad (4.50)$$

$$\dot{x}_2 = -cx_2 + u, \quad x_2(0) = 0 \quad (4.51)$$

όπου u είναι η μεταβλητή του ελέγχου. Παρατηρούμε διαφορές με το σύστημα (4.48),(4.49) καθώς η συνάρτηση $I(t)$ είναι ίση με μηδέν αφού δεν έχουμε είσοδο γλυκόζης και η μεταβλητή d είναι επίσης ίση με μηδέν λόγω της φύσης του διαβήτη.

Υποθέτουμε ότι ο έλεγχος u δρα από $t = 0$ και για άπειρο χρόνο. Έστω επίσης l σταθερά που αντιπροσωπεύει το επιθυμητό επίπεδο γλυκόζης στον διαβήτη. Τότε $x_1(t) - l$ είναι η διαφορά μεταξύ του επιπέδου της γλυκόζης στον χρόνο t και απείρου. Τότε η απόδοση, η οποία είναι τετραγωνική, θα είναι:

$$J = \int_0^{\infty} [(x_1 - l)^2 + \beta u^2] dt \quad (4.52)$$

όπου $r > 0$ είναι ένας βαθμωτός συντελεστής βάρυμσης. Η διαφορά μεταξύ του επιπέδου της γλυκόζης στον χρόνο t και άπειρο, θα πρέπει να ελαχιστοποιείται, λαμβάνοντας υπόψιν τον έλεγχο u .

Το σύστημα (4.50),(4.51) είναι γραμμικό και η συνάρτηση απόδοσης J μοιάζει με την γενική συνάρτηση τετραγωνικού κόστους (4.3) αλλά δεν είναι ίδια καθώς η συνάρτηση απόδοσης στην περίπτωσή μας είναι τετραγωνική ως προς το $x_1 - l$ και το u ενώ η (4.3) είναι τετραγωνική ως προς x και u . Η θεωρία που αποδείξαμε στο πρώτη ενότητα του κεφαλαίου ισχύει με κάποιες διαφορές. Στο 3ο Κεφάλαιο καταλήξαμε στην διαφορική εξίσωση Riccati όταν εφαρμόζοντας την Αρχή Μεγίστου στο γραμμικό σύστημα:

$$\dot{x} = Ax + Bx, \quad x(0) = x_0 \quad (4.53)$$

με συνάρτηση κόστους την:

$$J(u) = x'(T)Fx(T) + \int_0^T [x'(t)Qx(t) + u'(t)Ru(t)] dt \quad (4.54)$$

καταλήξαμε στο γραμμικό σύστημα:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B' \\ -Q & -A' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \eta \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

και στην συνέχεια θεωρήσαμε την σχέση $\eta(t) = P(t)x(t)$ καταλήγοντας έτσι στην εξίσωση Riccati. Στην περίπτωση όπου το κόστος είναι τετραγωνικό όχι ως προς x αλλά ως προς $x - l$ θα θεωρήσουμε διάνυσμα $e = x - l$ και θα έχουμε για το ίδιο γραμμικό σύστημα (4.53), διαφορετική συνάρτηση κόστους που θα ορίζεται:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^b [e'(t)Qe(t) + u'(t)Ru(t)] dt \quad (4.56)$$

όπου οι πίνακες Q , R είναι κατά τα γνωστά συμμετρικοί πίνακες με τον Q να είναι θετικά ημιορισμένος και τον R να είναι θετικά ορισμένος.

Πραγματοποιώντας τα ίδια βήματα όπως στην περίπτωση της (4.54), βρίσκουμε την χαμιλτονινή του συστήματος:

$$H = \frac{1}{2}e'Qe + \frac{1}{2}u'Ru + \eta Ax + \eta' Bu \quad (4.57)$$

και το νέο σύστημα είναι:

$$\dot{x} = Ax - BR^{-1}B'\eta \quad (4.58)$$

$$\dot{\eta} = -Qx - A\eta + Ql \quad (4.59)$$

με $\eta(T) = 0$ και $x(0) = x_0$. Για τον άριστο έλεγχο θα ισχύει η ίδια σχέση (3.5), δηλαδή:

$$u = -R^{-1}B'\eta \quad (4.60)$$

Όμως τώρα, αντί να θεωρήσουμε πίνακα $P(t)$ ώστε να ισχύει $\eta(t) = P(t)x(t)$, θεωρούμε:

$$\eta(t) = P(t)x(t) + \mu(t) \quad (4.61)$$

όπου $\mu(t)$ είναι διάνυσμα που πρέπει να προσδιορίσουμε όπως και τον πίνακα $P(t)$. Αντικαθιστώντας την εξίσωση (4.61) στις εξισώσεις (4.58), (4.59), έχουμε αντίστοιχα:

$$\dot{x} = Ax - BR^{-1}B'Px - BR^{-1}B'\mu \quad (4.62)$$

$$\dot{\mu} + \dot{P}x + P\dot{x} = -Qx - A'Px - A'\mu + Ql \quad (4.63)$$

Πολλαπλασιάζοντας την (4.62) με P και αφαιρώντας την από την (4.63), προκύπτει:

$$\dot{\mu} + \dot{P}x = -PAx + PBR^{-1}B'Px + PBR^{-1}B' - Qx - A'Px - A'\mu + Ql \quad (4.64)$$

Αυτή η εξίσωση θα ισχύει για κάθε τροχιά x και απλοποιείται στην σχέση:

$$\dot{\mu} = (PBR^{-1}B' - A')\mu + Ql \quad (4.65)$$

αν επιλεγεί ο P έτσι ώστε να ισχύει:

$$\dot{P} = -PA - A'P + PBR^{-1}B'P - Q \quad (4.66)$$

δηλαδή να ικανοποιεί την γνωστή διαφορική εξίσωση Riccati με όλες τις ιδιότητες τις οποίες έχουμε αποδείξει στο Κεφάλαιο 4. Η συνοριακή συνθήκη $\eta(T) = 0$ ικανοποιείται διαλέγοντας

$$P(T) = 0 \quad \mu(T) = 0 \quad (4.67)$$

από την εξίσωση (4.61). Πλέον μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα ελέγχου ολοκληρώνοντας προς τα πίσω τις σχέσεις (4.65) και (4.66) με τις συνθήκες που ορίσαμε ακριβώς

πιο πάνω. Ο έλεγχος που τον είχαμε ορίσει με την εξίσωση (4.60), χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.61), γίνεται:

$$u(t) = K(t)x(t) + \nu(t) \quad (4.68)$$

όπου:

$$K(t) = -R^{-1}B'P \quad (4.69)$$

$$\nu(t) = -R^{-1}B'\mu \quad (4.70)$$

Άρα μπορούμε να υπολογίσουμε τον έλεγχο σε οποιαδήποτε στιγμή, από την κατάσταση x αφού ο πίνακας $K(t)$ και το διάνυσμα ν είναι γνωστά. Αυτό αποτελεί ανάδραση για τον έλεγχο. Αντικαθιστώντας την σχέση (4.68) στην (4.53) προκύπτει:

$$\dot{x} = (A + BK)x + B\nu, \quad x(0) = x_0 \quad (4.71)$$

Στην περίπτωση που οι πίνακες A, B, Q, R είναι σταθεροί και ο χρόνος $T \rightarrow \infty$ τότε θα έχουμε την αλγεβρική εξίσωση Riccati:

$$PA + A'P - PBR^{-1}B'P + Q = 0 \quad (4.72)$$

Προκύπτει από την σχέση 4.65 ότι μπορούμε να θεωρήσουμε $\mu(t) = \mu_0$ σταθερό έτσι, ώστε:

$$(A' - PBR^{-1}B')\mu_0 = Ql \quad (4.73)$$

Από αυτή την εξίσωση μπορούμε να βρούμε το μ_0 εφόσον ο πίνακας $A' - PBR^{-1}B'$ είναι αντιστρέψιμος. Για την ακρίβεια μόνο ο πίνακας Q χρειάζεται να είναι σταθερός ώστε να το μ να είναι σταθερό.

Το πρόβλημα ρύθμισης της γλυκόζης στο αίμα στον διαβήτη.

Μετά από αυτά τα αποτελέσματα επιστρέφουμε στο μοντέλο για τον έλεγχο της γλυκόζης του αίματος για τους διαβητικούς για να τα εφαρμόσουμε στην πράξη. Οι πίνακες A, B, x είναι:

$$A = \begin{bmatrix} -a & -b \\ 0 & -c \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

Από την συνάρτηση απόδοσης έχουμε:

$$Q = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e = [x_1 - l_0], \quad R = 2\beta, \quad T = \infty \quad (4.75)$$

και υποθέτουμε ότι ο πίνακας P είναι στην μορφή:

$$P = \begin{bmatrix} q & p \\ p & r \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

τον οποίο θα τον υπολογίσουμε από την αλγεβρική εξίσωση Riccati (4.72). Αντικαθιστώντας σε αυτή την εξίσωση τον πίνακα P έχουμε:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} q & p \\ p & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a & -b \\ 0 & -c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a & 0 \\ -b & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q & p \\ p & r \end{bmatrix} \\ - \begin{bmatrix} q & p \\ p & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{2\beta} [0 \ 1] \begin{bmatrix} q & p \\ p & r \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.77)$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με το μη γραμμικό σύστημα:

$$2aK_0 + K_1^2 - \beta^{-1} = 0 \quad (4.78)$$

$$bK_0 + K_1(K_2 + a + c) = 0 \quad (4.79)$$

$$K_2^2 + 2cK_2 + 2bK_1 = 0 \quad (4.80)$$

όπου

$$K_0 = \frac{q}{2r}, \quad K_1 = \frac{p}{2r}, \quad K_2 = \frac{r}{2\beta}$$

Απαλείφοντας το K_0 από τις δύο πρώτες εξισώσεις, προκύπτει:

$$bK_1^2 - 2a(a+c)K_1 - 2aK_1K_2 - \frac{b}{\beta} = 0 \quad (4.81)$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση για το K_1 από την σχέση (4.80) στην (4.81) μας δίνει:

$$[K_2^2 + 2(a+c)K_2]^2 + 4ac[K_2^2 + 2(a+c)K_2] - \frac{4b^2}{\beta} = 0 \quad (4.82)$$

που στην ουσία είναι δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς το περιεχόμενο ανάμεσα στις αγκύλες. Έτσι βρίσκουμε:

$$K_2 = -(a+c) \pm \left[a^2 + c^2 \pm 2(a^2c^2 + \frac{b^2}{\beta})^{1/2} \right]^{1/2} \quad (4.83)$$

Ο πίνακας P είναι θετικά ορισμένος άρα θα ισχύει $q > 0$ και $qr - p^2 > 0$. Αυτές οι ανισότητες υποδηλώνουν ότι $r > 0$ και κατά συνέπεια $K_2 > 0$. Άρα από την εξίσωση (4.83) θα έχουμε:

$$K_2 = -(a+c) + \left[a^2 + c^2 + 2(a^2c^2 + \frac{b^2}{\beta})^{1/2} \right]^{1/2} \quad (4.84)$$

Αφού υπολογίσαμε το K_2 εύκολα βρίσκουμε το K_1 από την εξίσωση (4.80) και θα είναι:

$$K_1 = \frac{-(K_2^2 + 2cK_2)}{2b} \quad (4.85)$$

και επειδή $K_2 > 0$ θα ισχύει $K_1 < 0$. Η σταθερά K_0 υπολογίζεται από την εξίσωση (4.78) και έχουμε για τα στοιχεία του πίνακα P ότι είναι:

$$q = 2\beta K_0, \quad p = 2\beta K_1, \quad r = 2\beta K_2. \quad (4.86)$$

Το διάνυσμα η ικανοποιεί την σχέση (4.61) όπου το διάνυσμα μ υπολογίζεται από την σχέση (4.65):

$$(A' - PBR^{-1}B')\mu = Q(l, 0)' \quad (4.87)$$

Αυτή η σχέση μπορεί να λυθεί προς μ και προκύπτει:

$$\mu = \frac{2l}{\xi} \begin{bmatrix} K_2 + c \\ -b \end{bmatrix} \quad (4.88)$$

όπου

$$\xi = bK_1 - aK_2 - ac = -\left(a^2c^2 + \frac{b^2}{\beta}\right)^{1/2} \quad (4.89)$$

Από την έκφραση (4.68) για τον έλεγχο u , έχουμε:

$$u = -R^{-1}B'(Px + \mu) = -K_1x_1 - K_2x_2 + K \quad (4.90)$$

όπου

$$K = \frac{bl}{\beta\xi} \quad (4.91)$$

και $K < 0$ αφού $\xi < 0$. Χρησιμοποιώντας την σχέση ανάδρασης (4.90) μπορούμε να απαλείψουμε το u από την διαφορική εξίσωση (4.51) και θα έχουμε πλέον το σύστημα:

$$\dot{x}_1 = -ax_1 - bx_2, \quad x_1(0) = x_{10} \quad (4.92)$$

$$\dot{x}_2 = -K_1x_1 - (c + K_2)x_2 + K, \quad x_2(0) = 0 \quad (4.93)$$

Απαλείφοντας το x_2 από το σύστημα, προκύπτει η διαφορική δεύτερης τάξης:

$$\ddot{x}_1 + (K_2 + a + c)\dot{x}_1 - \xi x_1 = -bK \quad (4.94)$$

με αρχικές συνθήκες $x_1(0) = x_{10}$ και $\dot{x}_1(0) = -ax_{10}$. Μια μερική λύση της μη ομογενούς διαφορικής είναι:

$$\zeta = \frac{bx}{\xi} = \frac{l}{1 + \beta(ac/b)^2} \quad (4.95)$$

Οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης της ομογενούς διαφορικής που αντιστοιχεί στην (4.94) είναι:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{2} \left[-(K_2 + a + c) \pm \sqrt{(K_2 + a + c)^2 + 4\xi} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[-(K_2 + a + c) \pm \sqrt{a^2 + c^2 + 2\xi} \right] \end{aligned}$$

Υποθέτοντας ότι $\beta(a^2 - c^2)^2 < 4b^2$, διαπιστώνουμε ότι ισχύει $a^2 + c^2 + 2\xi < 0$. Έτσι, οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης μπορούν να γραφούν στην μορφή:

$$\lambda = \alpha \pm \omega i \quad (4.96)$$

όπου

$$\alpha = \frac{1}{2}(K_2 + a + c), \quad \omega = \frac{1}{2}(|a^2 + c^2 + 2\xi|)^{1/2} \quad (4.97)$$

Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (4.94) είναι:

$$x_1 = e^{-\alpha t}(A \cos \omega t + B \sin \omega t) + \zeta \quad (4.98)$$

Προσδιορίζοντας τις σταθερές A , B από τις αρχικές συνθήκες, έχουμε για την κατάσταση x_1 :

$$x_1 = e^{-\alpha t} \left\{ (x_{10} - \zeta) \cos \omega t + \frac{1}{\omega} [\alpha(x_{10} - \zeta) - \alpha x_{10}] \sin \omega t \right\} + \zeta \quad (4.99)$$

Η κατάσταση x_2 μπορεί να προσδιοριστεί από την διαφορική εξίσωση (4.50). Υπενθυμίζοντας ότι $K_2 > 0$, θα ισχύει ότι $\alpha > 0$. Έτσι η συγκέντρωση της γλυκόζης x_1 συμπεριφέρεται σαν αποσβένουσα ημιτονοειδής συνάρτηση και συγκλίνει το επίπεδο ζ .

Βιβλιογραφία

- [1] Ι. Τσινιάς. Άριστος Έλεγχος, Σημειώσεις για το μάθημα "Μαθηματικός Βέλτιστος Έλεγχος". ΣΕΜΦΕ, ΕΜΠ.
- [2] M. Athans and P. L. Falb, *Optimal Control: An Introduction to the Theory and its Applications*, McGraw-Hill, NJ, 2006.
- [3] L. S. Pontryagin, *Mathematical Theory of Optimal Processes*, CRC Press, 1987.
- [4] T. Glad and L. Ljung, *Control Theory: Multivariate and Nonlinear Methods*, CRC Press, 2000.
- [5] M. M. Eisen, *Mathematical Methods and Models in the Biological Sciences: Non-linear and Multidimensional Theory*, Prentice Hall, 1988.
- [6] E. Ackerman and L. C. Gatewood, *Mathematical Models in the Health Sciences: A Computer Aided Approach*, University of Minnesota Press, MN, 1979.