

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας Ρευστών
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής
& Βελτιστοποίησης

Η Συνεχής Συζυγής Μέθοδος στον Έλεγχο Ροής με Δέσμες
Ρευστού στο OpenFOAM – Εφαρμογή σε Πρόβλημα
Μεταφοράς Θερμότητας

Διπλωματική Εργασία

Κατσαρός Ιωάννης – Κίμων

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2016

Ευχαριστίες

Με τη διπλωματική αυτή εργασία κλείνει ένας από τους πιο σημαντικούς κύκλους της έως τώρα ζωής μου, αυτός της φοίτησής μου στο Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, στη Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών. Το γεγονός αυτό μου προκαλεί το συναίσθημα της χαράς και της ολοκλήρωσης, αφού έχω επιτύχει τον μεγαλύτερο στόχο των τελευταίων πέντε ετών της ζωής μου, αλλά παράλληλα δημιουργείται μέσα μου το αίσθημα της νοσταλγίας και της συγκίνησης, καθώς σηματοδοτείται το τέλος μιας εποχής για εμένα.

Στο σημείο αυτό, θα ήθελα να ευχαριστήσω όσους ανθρώπους συνέβαλαν, με τον δικό του τρόπο ο καθένας, στην επιτυχή και ομαλή ολοκλήρωση, γενικότερα των σπουδών μου, και ειδικότερα της συγκεκριμένης διπλωματικής εργασίας.

Δεν θα μπορούσα να μην ξεκινήσω λέγοντας ένα μεγάλο ευχαριστώ στην οικογένειά μου, και πιο συγκεκριμένα στους γονείς μου Χρήστο και Ιουλία και στην αδερφή μου Μαριάννα. Η διπλωματική αυτή εργασία στέκεται απλά η αφορμή για να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου για την στήριξη και την καθοδήγηση που μου προσέφεραν, όχι μόνο κατά την διάρκεια των σπουδών μου, αλλά στη συνολική πορεία μου έως τώρα.

Το δεύτερο μεγάλο ευχαριστώ πηγαίνει στον καθηγητή, κ. Κυριάκο Γιαννάκογλου, για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε αναθέτοντάς μου την εκπόνηση της συγκεκριμένης διπλωματικής εργασίας, αλλά και για τη συνεχή βοήθεια και καθοδήγηση που μου προσέφερε όποτε τον χρειάστηκα. Χωρίς την διαρκή υποστήριξη του θα ήταν αδύνατη η ολοκλήρωση αυτής της εργασίας.

Ειδικές ευχαριστίες θέλω επίσης να εκφράσω σε δύο μέλη της ομάδας της ΜΠΥΡ&Β. Αρχικά, στον υποψήφιο διδάκτορα Χρήστο Βεζύρη, για την ουσιαστική συμβολή του στην ολοκλήρωση της εργασίας αυτής και για τη βοήθεια που μου προσέφερε όποτε τον χρειάστηκα, αλλά και στον Δρ. Ευάγγελο Παπουτσή-Κιαχαγιά, ο οποίος έχοντας εξαιρετικές γνώσεις πάνω στο αντικείμενό του, δεν δίστασε ποτέ να μου αφιερώσει τον χρόνο του για να με βοηθήσει και να μου μεταφέρει κάποιες από αυτές.

Τέλος, ευχαριστώ τους κοντινούς μου φίλους, εντός και εκτός της Σχολής των Μηχανολόγων Μηχανικών, οι οποίοι, ο καθένας με τον τρόπο του, μετέτρεψαν την τελευταία πενταετία της ζωής μου σε μία όμορφη εμπειρία.

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΘΕΡΜΙΚΩΝ ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΩΝ
ΜΟΝΑΔΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΡΕΥΣΤΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ
& ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

**Η Συνεχής Συζυγής Μέθοδος στον Έλεγχο Ροής με Δέσμες
Ρευστού στο OpenFOAM – Εφαρμογή σε Πρόβλημα
Μεταφοράς Θερμότητας**

Διπλωματική Εργασία

Κατσαρός Ιωάννης – Κίμων

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2016

Περίληψη

Σκοπός της διπλωματικής αυτής εργασίας είναι ο προγραμματισμός και η εφαρμογή της συνεχούς συζυγούς μεθόδου (continuous adjoint method) για τον βέλτιστο έλεγχο ροής μέσω δεσμών ρευστού (jets) σε συγκεκριμένη διάταξη, με κριτήριο τη μέγιστη μεταφορά θερμότητας μέσω κινούμενου τοιχώματος.

Η προς μελέτη διάταξη είναι κοιλότητα τετραγωνικής μορφής με κινούμενο άνω τοίχωμα (lid-driven cavity) η οποία περικλείει ρευστό συγκεκριμένων ιδιοτήτων. Στο χωρίο δημιουργείται μεταφορά θερμότητας λόγω της θερμοκρασιακής διαφοράς των δύο οριζόντιων τοιχωμάτων. Με σκοπό τη μεγιστοποίηση της ροής θερμότητας μέσω του άνω κινούμενου τοιχώματος εφαρμόζεται έλεγχος μέσω χρονικά μη-μεταβαλλόμενων δεσμών του ίδιου ρευστού, οι οποίες δημιουργούν μια δευτερεύουσα ροή εσωτερικά της κοιλότητας. Οι δέσμες εισέρχονται ή εξέρχονται από οπές στα δύο κατακόρυφα τοιχώματα του χωρίου.

Οι θέσεις εισόδου και εξόδου των δεσμών αποτελούν τις μεταβλητές σχεδιασμού του προβλήματος.

Αυτό που αποτέλεσε την ουσιαστική πρόκληση και στο οποίο εφαρμόστηκε μια πρωτότυπη αντιμετώπιση σε αυτή την εργασία, ήταν ο τρόπος με τον οποίο μοντελοποιήθηκαν οι θέσεις των δεσμών στα τοιχώματα, ώστε να μπορούν αυτές να αλλάζουν αυτόματα σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης, μετακινώντας στην ουσία τις δύο δέσμες κατακόρυφα. Ο τρόπος που επιλέχθηκε και προγραμματίστηκε είναι ικανός να αντιμετωπίσει οποιοδήποτε συναφές πρόβλημα όπου στα όρια υπάρχει απότομη μεταβολή της οριακής συνθήκης, η οποία ως μη-διαφορίσιμη καθιστά θεωρητικά αδύνατη την υλοποίηση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου.

Ο προγραμματισμός και η υλοποίηση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου πραγματοποιήθηκε στο ανοικτό λογισμικό OpenFOAM. Για να γίνει αυτό, αρχικά πραγματοποιήθηκε η μαθηματική διατύπωση της, όπως αυτή αντιστοιχεί στο συγκεκριμένο πρόβλημα. Πιο συγκεκριμένα, αφού ορίστηκαν και μοντελοποιήθηκαν κατάλληλα οι οριακές συνθήκες του ευθέως προβλήματος, αναπτύχθηκε η μέθοδος με αποτέλεσμα την εξαγωγή των συζυγών πεδιακών εξισώσεων, των συζυγών οριακών συνθηκών και των παραγώγων ευαισθησίας. Οι τελευταίες χρησιμοποιήθηκαν σε βρόχο βελτιστοποίησης βασισμένο στη μέθοδο της απότομης καθόδου με σκοπό την ανανέωση των μεταβλητών σχεδιασμού σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης.

Προγραμματίστηκε το λογισμικό, με σκοπό την επίλυση των πρωτεύουσών και των συζυγών εξισώσεων ροής, τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας και την ανανέωση των μεταβλητών σχεδιασμού, έως ότου επιτευχθεί σύγκλιση. Επίσης προγραμματίστηκε ο τρόπος επιβολής των οριακών συνθηκών του προβλήματος καθώς αυτές δεν υπήρχαν στην επιθυμητή μορφή στο περιβάλλον OpenFOAM.

Πριν την τελική χρήση του αλγορίθμου, πραγματοποιήθηκε μια σειρά χρήσιμων διερευνήσεων ώστε να βεβαιωθεί η λειτουργικότητα και η ακρίβεια της μεθόδου. Συγκεκριμένα, έγινε παραμετρική μελέτη της αντικειμενικής συνάρτησης συναρτήσει των δύο μεταβλητών σχεδιασμού, ενός συντελεστή που υπεισέρχεται στην επιβολή των οριακών συνθηκών καθώς και της κατεύθυνσης των δεσμών. Εκτός αυτών, ελέγχθηκε και το ενεργειακό ισοζύγιο της διάταξης.

Τέλος, εκτελέστηκε ο αλγόριθμος και εντοπίστηκε η βέλτιστη λύση του προβλήματος.

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF MECHANICAL ENGINEERING
FLUIDS DEPARTMENT
LABORATORY OF THERMAL TURBOMACHINES
PARALLEL CFD & OPTIMIZATION UNIT

**The Continuous Adjoint Method on Flow Control with Fluid
Jets in OpenFOAM – Application in a Heat Transfer
Problem**

Diploma Thesis

by

Ioannis – Kimon Katsaros

Supervisor: Kyriakos C. Giannakoglou, Professor NTUA

Athens, September 2016

Abstract

The aim of this diploma thesis is the programming and the application of the continuous adjoint method for the design-optimization of an optimal flow control system based on steady jets, in a cavity, aiming at the maximization of the heat transfer from its sliding wall.

The analyzed configuration is a rectangular lid-driven cavity, enclosing fluid of specific properties. Inside the cavity, heat transfer is the result of the temperature difference between the two horizontal walls. In order to maximize the heat flux through the upper sliding wall, flow control through steady jets of

the same fluid is used; this creates a secondary flow into the cavity and affects heat transfer. The jets are going in and out through holes on the two vertical walls. The jets' inlet's and outlet's positions comprise the design variables.

The substantial challenge, for which an innovative solution is proposed in this thesis, was the way in which the jets' positions along the walls are modelled, so they could be changed in each optimization loop automatically, by changing their location in the vertical direction. A similar technique can be used in any problem in which there is an abrupt change in the type of boundary conditions which theoretically makes the development of the adjoint method impossible.

The mathematical analysis was initially developed, for this particular problem and objective function. More specifically, after defining and modelling the boundary conditions of the primal problem, the field adjoint equations, the adjoint boundary conditions and the sensitivity derivatives were derived. The latter were used in the optimization workflow based on the steepest descent method in order to update the design variables in each optimization loop.

The algorithm was programmed in the OpenFOAM environment, where the primal and adjoint equations were solved, the sensitivity derivatives were computed and the design variables were updated, until convergence was reached.

Before the final execution of the algorithm, a series of useful investigations were conducted, for the functionality and accuracy of the method to be assessed. In specific, parametric studies related to the two design variables and to a parameter used to impose the boundary conditions were conducted. Besides, the energy balance of the problem was verified.

Finally, the programmed method was executed and the optimal solution to the problem was obtained.

Ακρωνύμια

ΕΜΠ	Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
ΕΘΣ	Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών
ΜΠΥΡ&Β	Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης
ΥΡΔ	Υπολογιστική Ρευστοδυναμική
ΜΔΕ	Μερική /-ές Διαφορική /-ές Εξίσωση /-εις

NTUA	National Technical University of Athens
CFD	Computational Fluid Dynamics
PCopt	Parallel CFD & Optimization Unit

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
1.1	Μέθοδοι Βελτιστοποίησης	2
1.2	Η Συζυγής Μέθοδος	3
1.3	Το OpenFOAM	5
1.4	Στόχος και Δομή της Εργασίας	6
2	Πρόβλημα Ροής - Πρωτεύον Πρόβλημα	9
2.1	Οι Εξισώσεις Ροής	9
2.2	Διακριτοποίηση και Επίλυση των Εξισώσεων Ροής	10
2.3	Γεωμετρία και Σταθερές του Προβλήματος	21
2.4	Οριακές Συνθήκες	24
3	Η Συνεχής Συζυγής Μέθοδος	31
3.1	Ορισμός της Αντικειμενικής Συνάρτησης και των Μεταβλητών Σχεδιασμού	31
3.2	Οι Συζυγείς Μεταβλητές	32
3.3	Παραγωγή των Εξισώσεων Ροής	35
3.4	Οι Συζυγείς Εξισώσεις της	44
3.5	Οι συζυγείς οριακές συνθήκες	46
3.5.1	Συζυγείς οριακές συνθήκες στο S_{mw}	48
3.5.2	Συζυγείς οριακές συνθήκες στο S_{tw}	49
3.5.3	Συζυγείς οριακές συνθήκες στο S_{Lw}	50
3.5.4	Συζυγείς οριακές συνθήκες στο S_{RW}	56
3.6	Τελική Έκφραση των Παραγώγων Ευαισθησίας	59

4	Υπολογιστική Επίλυση του Ευθέως Προβλήματος	61
4.1	Έλεγχος Ενεργειακού Ισοζυγίου	67
5	Βελτιστοποίηση	71
5.1	Η Μέθοδος της Απότομης Καθόδου	71
5.2	Ο Αλγόριθμος Βελτιστοποίησης	72
5.3	Αποτελέσματα	75
6	Ανακεφαλαίωση-Συμπεράσματα	85
A'	Υπολογισμός για Τυρβώδη Ροή	89
A.1	Θεωρητικό Υπόβαθρο των Μοντέλων Τύρβης	90
A.2	Οριακές Συνθήκες για τα Μεγέθη της Τύρβης	91
A.3	Αποτελέσματα	94
B'	Υπολογισμός Αντικειμενικής Συνάρτησης σε Κοιλότητα με Χρήση Γενέτη Στροβιλότητας για Ενίσχυση της Μεταφοράς Θερμότητας	95
	Βιβλιογραφία	100

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Από τις απαρχές της επιστήμης του μηχανικού μέχρι και σήμερα, το πεδίο της μεταφοράς θερμότητας αποτελεί καθοριστικής σημασίας κομμάτι στην ανάπτυξη νέων και στη βελτίωση των ήδη υπάρχουσών τεχνολογιών. Το πεδίο εφαρμογής του έχει πολύ μεγάλο εύρος: από κινητήρες, εναλλάκτες θερμότητας και ατμοπαραγωγούς εργοστασίων παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας μέχρι ηλεκτρονικούς υπολογιστές και, γενικότερα, μέρη ηλεκτρονικών συσκευών. Για αυτόν το λόγο, υπάρχει ανάγκη για την πρόβλεψη του τρόπου και της διαδικασίας με την οποία μεταφέρεται η θερμότητα σε ένα σύστημα και, εν τέλει, η βελτιστοποίηση αυτών των συστημάτων. Η μεγιστοποίηση της μεταφερόμενης θερμότητας οδηγεί σε καλύτερους βαθμούς απόδοσης θερμικών μηχανών, μειώνοντας έτσι το κόστος λειτουργίας τους καθώς και στην αποτελεσματικότερη ψύξη, όπου αυτό είναι επιθυμητό.

Ένας αποτελεσματικός και ευρέως χρησιμοποιούμενος τρόπος ενίσχυσης των φαινομένων μεταφοράς θερμότητας είναι με χρήση δεσμών ρευστού (jets). Η μέθοδος βρίσκει πολυάριθμες χρήσεις στην βιομηχανία, όπως για παράδειγμα στην ψύξη των πτερυγίου ενός στροβίλου, καθώς και στους εναλλάκτες θερμότητας. Οι δύο βασικές υποκατηγορίες της μεθόδου είναι η ελεγχόμενη έγχυση δεσμών ρευστού (blowing jets) και ο συνδυασμός ελεγχόμενης περιόδικης έγχυσης και ελεγχόμενης αναρρόφησης δεσμών ρευστού (suction jets). Στην τελευταία περίπτωση, όταν η συνολική εισερχόμενη ή εξερχόμενη μάζα ρευστού από τη δέσμη ανά περίοδο είναι μηδέν, ονομάζονται σύνθετες δέσμες (synthetic jets). Οι μέθοδοι αυτές χρησιμοποιούνται τόσο στο πεδίο της μεταφοράς θερμότητας [14,15,27], όσο και αλλού [11,12,25,26] όπως για παράδειγμα για τον έλεγχο του οριακού στρώματος σε στερεό σώμα (πχ αεροτομή) και την ελαχιστοποίηση των απωλειών πίεσης. Στην εργασία αυτή θα μελετηθεί η μετάδοση θερμότητας σε τετραγωνική κοιλότητα η οποία περικλείει ρευστό και το άνω τοίχωμά της κινείται με εφαπτομενική ταχύτητα ως προς αυτό, δημιουργώντας έτσι κυκλοφορία ρευστού στο χωρίο. Το απλό αυτό πρόβλημα χρησιμοποιείται ευρέως στον τομέα της ΥΡΔ με σκοπό την πιστοποίηση νέων κωδίκων και μεθόδων επίλυσης. Η βασική τροποποίηση στην εργασία αυτή είναι η χρήση δεσμών ρευστού με σκοπό τον έλεγχο και την υποβοήθηση της μεταφοράς θερμότητας στο σύστημα. Το χωρίο έχει δύο οπές, εκ των οποίων από την πρώτη θα εγχύεται η δέσμη και από τη δεύτερη θα

αναρροφάται, έτσι ώστε η μάζα ρευστού που περικλείει το χωρίο να παραμένει αμετάβλητη. Η προσομοίωση της ροής γίνεται μέσω του ανοιχτού λογισμικού OpenFOAM [6,7,8,9], και για τη βελτιστοποίηση χρησιμοποιείται κώδικας βασισμένος στη συνεχή συζυγή μέθοδο.

1.1 Μέθοδοι Βελτιστοποίησης

Οι μέθοδοι βελτιστοποίησης χωρίζονται σε δύο βασικές κατηγορίες [1]. Στις στοχαστικές μεθόδους βελτιστοποίησης (stochastic optimization methods) και στις αιτιοκρατικές μεθόδους βελτιστοποίησης (deterministic optimization methods). Εκτός αυτών, υπάρχουν μέθοδοι οι οποίες χρησιμοποιούν στοιχεία και από τις δύο ανωτέρω κατηγορίες και οι οποίες ονομάζονται υβριδικές (hybrid).

Στις στοχαστικές μεθόδους ανήκουν όλες οι μέθοδοι εκείνες οι οποίες χρησιμοποιούν στοιχεία τυχαίας ή στρατηγικά τυχαίας αναζήτησης της βέλτιστης λύσης. Οι στοχαστικοί αλγόριθμοι είναι εύκολα προσαρμόσιμοι σε διαφορετικά προβλήματα και έχουν μικρή ευαισθησία στην αρχικοποίηση των μεταβλητών σχεδιασμού, για τις οποίες ζητείται η βέλτιστη λύση. Εκτός αυτού, έχουν τη δυνατότητα να επιλύουν προβλήματα πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης, υπολογίζοντας το κατά Pareto μέτωπο μη-κυριαρχούμενων λύσεων. Μεγάλο τους μειονέκτημα είναι το υψηλό υπολογιστικό κόστος τους, το οποίο είναι ανάλογο των μεταβλητών σχεδιασμού του εκάστοτε προβλήματος.

Στους στοχαστικούς αλγορίθμους, η στρατηγική αναζήτησης του διανύσματος των μεταβλητών σχεδιασμού μιμείται συνήθως τεχνικές από τη φύση. Για παράδειγμα, οι πιο δημοφιλείς αλγόριθμοι αυτής της κατηγορίας, οι εξελικτικοί αλγόριθμοι (evolutionary algorithms, EA) [1] βασίζονται στη θεωρία εξέλιξης των ειδών, όπως αυτή διατυπώθηκε από τον Δαρβίνο περί το 1960.

Στην κατηγορία των αιτιοκρατικών μεθόδων ανήκουν οι μέθοδοι εκείνες οι οποίες χρησιμοποιούν τη γενικευμένη έννοια της παραγώγου της αντικειμενικής συνάρτησης, προκειμένου να εντοπίσουν τη βέλτιστη λύση. Τα μειονεκτήματα αυτών των μεθόδων είναι ότι απαιτούν περισσότερο χρόνο στη διαμόρφωσή

τους η οποία πρέπει να γίνει για κάθε διαφορετικό πρόβλημα ξεχωριστά και από την αρχή, καθώς και το ότι είναι πιθανό να εντοπισθεί τοπικό αντί για ολικό ακρότατο μιας συνάρτησης, συνήθως ανάλογα με την αρχικοποίηση των μεταβλητών σχεδιασμού. Ωστόσο, το μεγάλο πλεονέκτημά τους είναι το μικρότερο υπολογιστικό κόστος σε σχέση με τις στοχαστικές μεθόδους.

Οι αιτιοκρατικές μέθοδοι χωρίζονται με βάση τον τρόπο υπολογισμού της παραγώγου της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού. Οι πιο βασικές από αυτές είναι οι εξής [1]:

- Ευθεία διαφόριση (Direct Differentiation)
- Πεπερασμένες διαφορές (Finite Differences)
- Μέθοδος των μιγαδικών μεταβλητών (Complex Variable Methods)
- Μέθοδος της αυτόματης διαφόρισης (Automated Differentiation)
- Συζυγής μέθοδος (Adjoint Method)

Από τις ανωτέρω μεθόδους, αυτή με το χαμηλότερο υπολογιστικό κόστος είναι η συζυγής μέθοδος, η οποία χρησιμοποιείται και στην εργασία αυτή. Αυτό έγκειται στο ότι ο χρόνος υπολογισμού σε αυτήν τη μέθοδο είναι ανεξάρτητος του αριθμού των μεταβλητών σχεδιασμού.

1.2 Η Συζυγής Μέθοδος

Η συζυγής μέθοδος, όπως αναφέρθηκε, είναι ένα μαθηματικό εργαλείο που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της παραγώγου μιας συνάρτησης, συνήθως σε προβλήματα αριθμητικής βελτιστοποίησης (Numerical Optimization). Πρωτοεμφανίστηκε στη θεωρία ελέγχου, όπου και χρησιμοποιούνταν ως μέθοδος βελτιστοποίησης [16], αλλά πλέον βρίσκει μεγάλη εφαρμογή σε προβλήματα αεροδυναμικής βελτιστοποίησης, καθώς και στη γεωφυσική, τη σεισμική τομογραφία (Seismic Tomography) [17,18] και αλλού. Πιο

συγκεκριμένα, η συζυγής μέθοδος υπολογίζει τις παραγώγους ευαισθησίας (sensitivity derivatives) της αντικειμενικής συνάρτησης ή συνάρτησης κόστους, ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού (design variables). Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας μια μέθοδο αιτιοκρατικής βελτιστοποίησης, όπως για παράδειγμα τη μέθοδο της απότομης καθόδου (steepest descent method) [1], ανανεώνονται επαναληπτικά οι τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού με σκοπό την ελαχιστοποίηση (ή τη μεγιστοποίηση) της αντικειμενικής συνάρτησης.

Το μεγάλο πλεονέκτημα της συζυγούς μεθόδου έναντι άλλων μεθόδων υπολογισμού της παραγώγου είναι, όπως αναφέρθηκε και πιο πριν, το πολύ μικρό υπολογιστικό κόστος της, το οποίο είναι ανεξάρτητο του αριθμού των μεταβλητών σχεδιασμού. Ο χρόνος υπολογισμού ανά κύκλο βελτιστοποίησης είναι περίπου 2 φορές ο χρόνος που απαιτείται για την επίλυση των εξισώσεων του πρωτεύοντος προβλήματος, καθώς σε αυτόν προστίθεται και ο χρόνος επίλυσης των συζυγών εξισώσεων, ο οποίος είναι περίπου ο ίδιος. Εκτός αυτού, οι συζυγείς εξισώσεις είναι παρόμοιας μορφής με αυτές του ευθέως προβλήματος, συνεπώς η επίλυσή τους μπορεί να επιτευχθεί με όμοια διαδικασία με ορισμένες τροποποιήσεις. Από την άλλη, μειονέκτημα της μεθόδου είναι η ανάγκη επαναδιατύπωσης των συζυγών εξισώσεων και των συζυγών οριακών συνθηκών καθώς και ο μερικός επαναπρογραμματισμός των συζυγών εξισώσεων κάθε φορά που αλλάζει η αντικειμενική συνάρτηση.

Μία από τις πιο τυπικές εφαρμογές της μεθόδου σε προβλήματα αεροδυναμικής βελτιστοποίησης είναι η εύρεση της βέλτιστης θέσης των σημείων ελέγχου της καμπύλης μιας αεροτομής, η οποία έχει παραμετροποιηθεί με πολυώνυμα Bezier-Bernstein. Συνήθως, σε αυτήν την περίπτωση, η αντικειμενική συνάρτηση είναι μια μέση χρονική τιμή της οπισθέλκουσας η οποία ασκείται στην αεροτομή, και σκοπός είναι η ελαχιστοποίησής της.

Η συζυγής μέθοδος χωρίζεται σε δύο κατηγορίες: τη διακριτή συζυγή μέθοδο (discrete adjoint method) [19, 20, 21] και τη συνεχή συζυγή μέθοδο (continuous adjoint method) [13, 22, 23, 24]. Στη διακριτή μέθοδο πρώτα γραμμικοποιούνται και διακριτοποιούνται οι εξισώσεις ροής και η αντικειμενική συνάρτηση και, στη συνέχεια, παράγονται οι συζυγείς εξισώσεις σε μητρική μορφή, οι οποίες επιλύονται αριθμητικά χωρίς περαιτέρω ανάλυση. Αντίθετα, στη συνεχή μέθοδο αρχικά διατυπώνονται οι συζυγείς εξισώσεις της ροής στη μορφή μερικών διαφορικών εξισώσεων, προτού γίνει η διακριτοποίηση. Έπειτα, παράγεται η επαυξημένη αντικειμενική συνάρτηση, προσθέτοντας στην αντικειμενική συνάρτηση τις εξισώσεις ροής πολλαπλασιασμένες με τις συζυγείς μεταβλητές. Τέλος, με χρήση του θεωρήματος της απόκλισης Green-Gauss εξάγονται οι συζυγείς εξισώσεις στη μορφή ΜΔΕ, οι συζυγείς οριακές συνθήκες και οι

εκφράσεις των παραγώγων ευαισθησίας. Ακολουθεί η διακριτοποίηση των συζυγών εξισώσεων της ροής προκειμένου να λυθούν αριθμητικά.

Η ανάπτυξη και η εφαρμογή συζυγών τεχνικών αποτελεί βασική ερευνητική δραστηριότητα της Μονάδας Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης του Εργαστηρίου Θερμικών Στροβιλομηχανών (ΜΠΥΡ&Β/ΕΘΣ) του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου. Σημειώνεται πως, αρχικά, στην διατύπωση των συζυγών εξισώσεων σε προβλήματα τυρβώδους ροής χρησιμοποιούνταν η παραδοχή της “παγωμένης τύρβης” (frozen turbulence) σύμφωνα με την οποία οι μεταβλητές του μοντέλου τύρβης δεν αντιλαμβάνονται αλλαγές τιμής στις μεταβλητές σχεδιασμού. Έρευνα που γίνεται στη ΜΠΥΡ&Β/ΕΘΣ τα τελευταία χρόνια οδήγησε στην επιπλέον διατύπωση των συζυγών εξισώσεων του μοντέλου τύρβης [34,35,36]. Επισημαίνεται ότι τα μελετούμενα προβλήματα αφορούν μόνο στρωτή ροή επειδή ακριβώς δεν ήταν επιθυμητό να εμπλακεί οτιδήποτε αφορά μοντέλα τύρβης και τις συζυγείς μεθόδους στην εργασία αυτή. Εφαρμογές των μεθόδων αυτών περιλαμβάνουν κυρίως την ανάλυση και τον σχεδιασμό στροβιλομηχανών και σε μεγαλύτερη έκταση προβλήματα εξωτερικής αεροδυναμικής με σκοπό τη βελτιστοποίηση μορφής (shape optimization) [2,13], βελτιστοποίηση τοπολογίας (topology optimization) [13] καθώς και τον στιβαρό σχεδιασμό (robust design) [13].

1.3 Το OpenFOAM

Το OpenFOAM είναι ένα ελεύθερο λογισμικό ανοικτού κώδικα που χρησιμοποιείται για την επίλυση προβλημάτων κυρίως στην περιοχή της ΥΡΔ, αλλά μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για μια πληθώρα προβλημάτων, όπως προβλήματα καύσης, ηλεκτρομαγνητισμού, μεταφοράς θερμότητας, ανάλυσης μηχανολογικών κατασκευών καθώς και σε προβλήματα στο πεδίο των οικονομικών.

Όλο το λογισμικό είναι γραμμένο σε γλώσσα προγραμματισμού C++ και αυτό που κάνει πρωταρχικά είναι να δημιουργεί εκτελέσιμα αρχεία, γνωστά ως εφαρμογές (applications). Οι εφαρμογές αυτές χωρίζονται σε δύο κατηγορίες. Στους επιλύτες (solvers), οι οποίοι είναι σχεδιασμένοι ο καθένας για την επίλυση ενός συγκεκριμένου προβλήματος και σε διάφορα εργαλεία (utilities) τα οποία εκτελούν διεργασίες όπως η γένεση του πλέγματος και ο έλεγχός του, ο μετασχηματισμός δεδομένων για χρησιμοποίηση τους από άλλα πακέτα λογισμικών και η επεξεργασία των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από την επίλυση του προβλήματος.

Το μεγάλο πλεονέκτημα του OpenFOAM είναι ότι ο χρήστης μπορεί να δημιουργήσει νέους επιλύτες και εργαλεία ή ακόμη και να τροποποιήσει τα ήδη υπάρχοντα με σκοπό να τα προσαρμόσει στις ανάγκες του. Για να το κάνει αυτό όμως, είναι απαραίτητες οι γνώσεις της φυσικής του προβλήματος που επιθυμεί να λύσει και η κατανόηση των μεθόδων επίλυσης καθώς και των προγραμματιστικών τεχνικών που θα κληθεί να εφαρμόσει.

1.4 Στόχος και Δομή της Εργασίας

Στόχος της διπλωματικής αυτής εργασίας είναι η εφαρμογή της συνεχούς συζυγούς μεθόδου σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης μεταφοράς θερμότητας διδιάστατης ροής με εφαρμογή δεσμών ρευστού (jets). Η συνεχής συζυγής μέθοδος θα χρησιμοποιηθεί για τη διατύπωση των συζυγών πεδιακών εξισώσεων καθώς και των αντίστοιχων οριακών συνθηκών και την εξαγωγή της τελικής μορφής των παραγώγων ευαισθησίας. Με συνδυασμό αυτής της μεθόδου και της μεθόδου απότομης καθόδου υπολογίζονται οι βέλτιστες τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού.

Η εργασία αυτή, αποτελεί, στην ουσία, συνέχεια της διπλωματικής εργασίας του Σ. Α. Σάββα [5]. Στην εργασία εκείνη είχε γίνει ανάλυση και βελτιστοποίηση της ίδιας κοιλότητας, χωρίς χρήση δεσμών, έχοντας ως μεταβλητή σχεδιασμού το διάνυσμα της ταχύτητας του άνω κινούμενου τοιχώματος. Το σημείο που διαφοροποιεί την εργασία αυτή είναι η χρήση των δεσμών ρευστού στα κάθετα τοιχώματα του χωρίου με σκοπό την ενίσχυση της μεταφοράς θερμότητας. Όπως αναφέρθηκε και πριν, αποτέλεσε πρόκληση η μοντελοποίηση της θέσης των δεσμών, ώστε αυτές να μπορούν να αλλάζουν, μετακινώντας έτσι τις δέσμες κατακόρυφα. Για το λόγο αυτό, χρησιμοποιήθηκε μια μαθηματική συνάρτηση, η σιγμοειδής συνάρτηση, σύμφωνα με την οποία μοντελοποιήθηκαν οι οριακές συνθήκες στα δύο κάθετα τοιχώματα της κοιλότητας, όπως θα εξηγηθεί καλύτερα και στα επιμέρους κεφάλαια.

Η δομή της εργασίας έχει ως εξής:

- Στο κεφάλαιο 2 παρουσιάζονται οι εξισώσεις ροής καθώς και ο αλγόριθμος επίλυσής του. Επίσης ορίζονται τα αριθμητικά στοιχεία της γεωμετρίας του προβλήματος και των ιδιοτήτων της ροής καθώς και οι οριακές συνθήκες του ευθέος προβλήματος.
- Στο κεφάλαιο 3 γίνεται η ανάπτυξη της μαθηματικής διατύπωσης της συνεχούς συζυγούς μεθόδου. Πιο συγκεκριμένα ορίζεται η αντικειμενική συνάρτηση και οι μεταβλητές σχεδιασμού, διατυπώνονται οι συζυγείς εξισώσεις της ροής και οι συζυγείς οριακές συνθήκες, και εκφράζεται η τελική σχέση των παραγώγων ευαισθησίας.
- Στο κεφάλαιο 4 παρουσιάζονται και συγκρίνονται τα αποτελέσματα ορισμένων δειγματοληπτικών υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης για διαφορετικές τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού καθώς και για διαφορετικές τιμές της μέσης ταχύτητας και θερμοκρασίας, αλλά και της κατεύθυνσης της δέσμης εισόδου του ρευστού.
- Στο κεφάλαιο 5 διατυπώνεται η διαδικασία και ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης και παρουσιάζονται τα αποτελέσματά του.
- Στο κεφάλαιο 6 γίνεται μια ανακεφαλαίωση της διπλωματικής εργασίας και παρουσιάζονται τα συμπεράσματα τα οποία προέκυψαν μέσα από αυτή.

Κεφάλαιο 2

Πρόβλημα Ροής - Πρωτεύον Πρόβλημα

2.1 Οι Εξισώσεις Ροής

Οι εξισώσεις που διέπουν τη ροή, οι οποίες επιλύονται αριθμητικά είναι οι εξισώσεις Navier-Stokes (2.1, 2.2) για μόνιμη, στρωτή ροή ασυμπίεστου ρευστού, συμπεριλαμβανομένης της εξίσωσης ενέργειας (2.3).

$$R^p = -\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2.1)$$

$$R_i^v = v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1,2,3 \quad (2.2)$$

$$R^T = c_p v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} - c_p \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{v}{Pr} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = 0 \quad (2.3)$$

Η εξίσωση 2.1 ονομάζεται εξίσωση συνέχειας, η 2.2 εξίσωση της ορμής και η 2.3 όπως προαναφέρθηκε είναι η εξίσωση της ενέργειας. Σημειώνεται ότι οι επαναλαμβανόμενοι δείκτες υποδηλώνουν άθροιση, σύμφωνα με τη σύμβαση του Einstein.

- u_i : οι καρτεσιανές συνιστώσες της ταχύτητας
- p : η στατική πίεση
- T : η θερμοκρασία
- v : η κινηματική συνεκτικότητα
- c_p : η ειδική θερμοχωρητικότητα
- Pr : ο αριθμός Prandtl

Το φαινόμενο λαμβάνει χώρα σε σχετικά χαμηλές ταχύτητες (0.05 – 0.1 m/s) οπότε μπορεί να γίνει η θεώρηση ότι η ροή είναι ασυμπίεστη, δηλαδή η τιμή της

πυκνότητας του ρευστού παραμένει αμετάβλητη, τόσο χωρικά όσο και χρονικά, μιας και η ροή είναι μόνιμη.

Τέλος, η θεώρηση ότι η ροή είναι στρωτή υποστηρίζεται από τον υπολογισμό του αριθμού Reynolds, ο οποίος δίδεται για ροή που προκαλείται από το άνω κινούμενο τοίχωμα χωρίου, από την εξίσωση

$$Re = \frac{u l}{\nu} \quad (2.4)$$

όπου

- Re : ο αριθμός Reynolds
- l : το μήκος του άνω τοιχώματος του χωρίου
- u : η μέση ταχύτητα της ροής στην αντίστοιχη περιοχή
- ν : η κινηματική συνεκτικότητα του ρευστού

Σύμφωνα με τα αριθμητικά στοιχεία που δίνονται στο κεφάλαιο 2.4, στο οποίο γίνεται και ο υπολογισμός του αριθμού Reynolds, η ροή θεωρείται στρωτή. Έτσι, δικαιολογείται τελικά η διατύπωση των εξισώσεων Navier-Stokes στην μορφή που παίρνουν για μόνιμη στρωτή ροή ασυμπίεστου ρευστού.

2.2 Διακριτοποίηση και Επίλυση των Εξισώσεων Ροής

Η επίλυση των καταστατικών εξισώσεων ροής γίνεται με την βοήθεια του λογισμικού OpenFOAM, μέσω επιλύτη ο οποίος παρέχεται σε μορφή εκτελέσιμου αρχείου, καθώς και σε μορφή ανοιχτού κώδικα. Η μέθοδος που χρησιμοποιεί το λογισμικό είναι η Μέθοδος των Πεπερασμένων Όγκων (Finite Volume Method). Αρχικά, πρέπει να χωριστεί το χωρίο σε καθορισμένο αριθμό όγκων ελέγχου (κελιά), κάτι που επιτυγχάνεται με τη γένεση του πλέγματος μέσω πλεγματοποιητή που παρέχει το OpenFOAM. Μέσω της ολοκλήρωσης των εξισώσεων που διέπουν τη ροή σε καθέναν από τους όγκους ελέγχου, η επίλυση των συνεχών μερικών διαφορικών εξισώσεων ανάγεται στην επίλυση ενός συνόλου αλγεβρικών εξισώσεων που προκύπτουν από τη διακριτοποίηση. Με τη μέθοδο αυτή υπολογίζονται οι τιμές των μεταβλητών ροής, οι οποίες στο

συγκεκριμένο πρόβλημα είναι οι τρεις συνιστώσες της ταχύτητας, η στατική πίεση και η θερμοκρασία, όχι σε ολόκληρο το χωρίο αλλά σε συγκεκριμένα διακριτά σημεία του. Το λογισμικό OpenFOAM υπολογίζει και αποθηκεύει αυτές τις τιμές στα κέντρα των όγκων ελέγχου, εκτός από τα όρια του πλέγματος, στα οποία οι οριακές συνθήκες ορίζονται ανεξάρτητα. Αξίζει να σημειωθεί ότι το συγκεκριμένο λογισμικό υποστηρίζει την επίλυση τόσο σε δομημένα πλέγματα, όσο και σε μη-δομημένα πλέγματα αποτελούμενα από κελιά με οποιοδήποτε αριθμό πλευρών, κυρτών ή μη.

Οι καταστατικές εξισώσεις της ροής δεν περιλαμβάνουν κάποια ρητή έκφραση για τον υπολογισμό της πίεσης, πράγμα που απαιτεί ειδική διαχείριση. Ο αλγόριθμος SIMPLE (Semi Implicit Method for Pressure-Linked Equations), ο οποίος χρησιμοποιήθηκε στο πλαίσιο της διπλωματικής αυτής εργασίας, δημιουργεί μια ρητή εξίσωση για τον υπολογισμό της πίεσης, διακριτοποιώντας μερικώς την εξίσωση της ορμής (εξίσωση 2.2) και αντικαθιστώντας την στην εξίσωση της συνέχειας (εξίσωση 2.1). Παρακάτω, ακολουθεί αναλυτικότερα η συγκεκριμένη διαδικασία όπως έχει αναλυθεί στο [2].

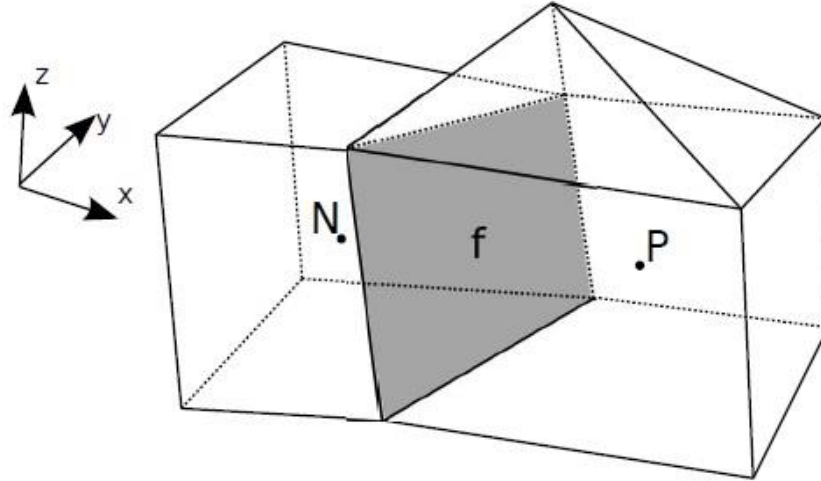
Η εξίσωση της ορμής (εξίσωση 2.2) γράφεται σε μια ημι-διακριτοποιημένη μορφή ως

$$a_P u_{P,i} = \sum_{N=1}^{NB(P)} a_N u_{N,i} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + b_i \quad (2.5)$$

όπου P είναι το κέντρο του κελιού στο οποίο διακριτοποιείται η εξίσωση της ορμής και NB(P) είναι τα γειτονικά κελιά του (σχήμα 2.1). Το διάνυσμα b_i αναφέρεται αποκλειστικά σε όρους πηγής οι οποίοι πιθανόν να υπάρχουν στην εξίσωση της ορμής. Οι συντελεστές a_P και a_N προκύπτουν από την διακριτοποίηση των όρων μεταφοράς (convection term) και διάχυσης (diffusion term) στην εξίσωση ορμής.

$$u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} : \text{ όρος μεταφοράς}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] : \text{ όρος διάχυσης}$$



Σχήμα 2.1: Κελί του πλέγματος, με κέντρο το σημείο P και γειτονικό του κελί με κέντρο το σημείο N. Τα 2 κελιά μοιράζονται μία κοινή πλευρά, την f, λεγόμενη ως διεπιφάνεια (interface). Από εργασία [2].

Η επαναληπτική επίλυση της εξίσωσης 2.5, χρησιμοποιώντας σε αυτήν το πεδίο της πίεσης p^* το οποίο είχαμε βρει μέσω της προηγούμενης επανάληψης, δίνει ένα πεδίο ταχυτήτων u_i^* , το οποίο δεν ικανοποιεί την εξίσωση συνέχειας (2.1). Επιπλέον, από την στιγμή που η εξίσωση της ορμής χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό του πεδίου της ταχύτητας, δεν υπάρχει κάποια εξίσωση μέσω της οποίας θα μπορούσε να ανανεωθεί το πεδίο της πίεσης. Για αυτόν τον λόγο, με σκοπό να προκύψει μια εξίσωση για τον υπολογισμό του πεδίου της πίεσης και τη διόρθωση του πεδίου της ταχύτητας ώστε να ικανοποιεί την εξίσωση συνέχειας, σχεδιάστηκε ο αλγόριθμος SIMPLE [2], ο οποίος ακολουθεί τα παρακάτω βήματα.

Έστω ότι τα πεδία της ταχύτητας και της πίεσης που ικανοποιούν τις εξισώσεις συνέχειας και ορμής, συμβολίζονται με u_i και p . Όπως αναφέρθηκε, το u_i^* αναφέρεται στις συνιστώσες της ταχύτητας που προέκυψαν από την επαναληπτική επίλυση της εξίσωσης της ορμής, βασισμένη στο πεδίο της πίεσης p^* το οποίο προέκυψε από την προηγούμενη επανάληψη του αλγορίθμου. Έτσι, οι ημι-διακριτοποιημένες εξισώσεις ορμής γράφονται ως

$$a_P u_{P,i} = \sum_{N=1}^{NB(P)} a_N u_{N,i} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + b_i \quad (2.6)$$

$$a_p v_{p,i}^* = \sum_{N=1}^{NB(P)} a_N v_{N,i}^* - \frac{\partial p^*}{\partial x_i} + b_i^* \quad (2.7)$$

Από την επίλυση που έχει ήδη γίνει, της εξίσωσης 2.7 στην τελευταία επαν-άληψη του αλγορίθμου, μια πρόβλεψη του πεδίου της ταχύτητας δίνεται από

$$v_{p,j}^* = \hat{v}_{p,j} - \frac{1}{a_p} \frac{\partial p^*}{\partial x_j} \quad (2.8)$$

όπου

$$\hat{v}_{p,j} = \frac{1}{a_p} H_{p,j}(v^*) \quad (2.9)$$

$$H_{p,j}(v^*) = \sum_{N=1}^{NB(P)} a_N v_{N,j}^* + b_j^* \quad (2.10)$$

Έστω ότι τα v'_i και p' είναι η διόρθωση της ταχύτητας και της πίεσης αντίστοιχα, που πρέπει να προστεθεί στα v_i^* και p^* ώστε να ικανοποιείται η εξίσωση της συνέχειας,

$$v_i = v_i^* + v'_i \quad (2.11)$$

$$p = p^* + p' \quad (2.12)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη την εξίσωση 2.7 από την εξίσωση 2.8, και κάνοντας την υπόθεση πως οι συντελεστές διακριτοποίησης (a_p, a_N) και οι όροι της πηγής είναι ίδιοι στις εξισώσεις 2.7 και 2.8, προκύπτει η ακόλουθη σχέση

$$a_p v'_{p,i} = \sum_{N=1}^{NB(P)} a_N v'_{N,i} - \frac{\partial p'}{\partial x_i} \quad (2.13)$$

Ακολουθως, κάνοντας την υπόθεση ότι ο πρώτος όρος της διόρθωσης του πεδίου ταχυτήτων της εξίσωσης 2.13 είναι αμελητέος σε σχέση με την παράγωγο της διόρθωσης πίεσης, η εξίσωση 2.13 παίρνει την απλοποιημένη μορφή

$$v'_{p,i} = -\frac{1}{a_p} \frac{\partial p'}{\partial x_i} \quad (2.14)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση (2.11), η εξίσωση της συνέχειας (2.1) γράφεται ως

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v'_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial v_j^*}{\partial x_j} \quad (2.15)$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση 2.14 στην 2.15, προκύπτει

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{a_p} \frac{\partial p'}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial u_j^*}{\partial x_j} \quad (2.16)$$

Η εξίσωση 2.16 μπορεί να αναλυθεί περαιτέρω, λαμβάνοντας υπόψη την 2.8,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{a_p} \frac{\partial p'}{\partial x_j} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\widehat{v}_{p,j} - \frac{1}{a_p} \frac{\partial p^*}{\partial x_j} \right) \Rightarrow \\ \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{a_p} \frac{\partial p'}{\partial x_j} \right) &= \frac{\partial \widehat{v}_{p,j}}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Η ολοκλήρωση της εξίσωσης 2.17 σε ένα κελί P με nb(P) πλευρές, δίνει

$$\sum_{f=1}^{nb(P)} \widehat{v}_{f,j} S_{f,j} = \sum_{f=1}^{nb(P)} \frac{1}{\alpha_f} \left(\frac{\partial p}{\partial x_j} S_j \right)_f \quad (2.18)$$

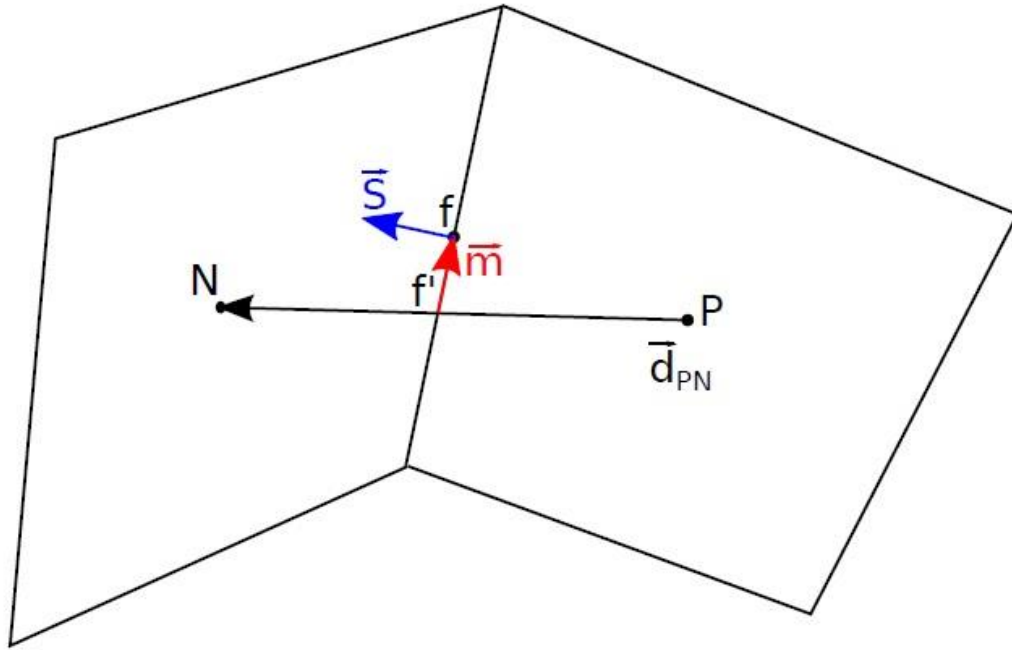
Στην εξίσωση 2.18 το $S_{f,j}$ συμβολίζει τις συνιστώσες του κάθετου στην κάθε πλευρά διανύσματος, το μέτρο του οποίου είναι ίσο με το εμβαδόν της πλευράς. Η ευθεία γραμμή πάνω από τα σύμβολα υποδεικνύει ότι η τιμή της μεταβλητής στη διεπιφάνεια f, έχει προκύψει από γραμμική παρεμβολή, χρησιμοποιώντας τις τιμές που υπολογίστηκαν στα γειτονικά κελιά P και N. Για μία ανεξάρτητη μεταβλητή φ , η γραμμική παρεμβολή γράφεται ως

$$\varphi_f = \omega_P \varphi_P + (1 - \omega_P) \varphi_N + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right|_{f'} m_j \quad (2.19)$$

όπου

$$\omega_P = \frac{d_2}{d_1 + d_2}, \quad d_1 = \overrightarrow{Pf} \cdot \overrightarrow{S_f}, \quad d_2 = \overrightarrow{fN} \cdot \overrightarrow{S_f}, \quad \vec{m} = \overrightarrow{f'f} \quad (2.20)$$

Τα σύμβολα στις εξισώσεις 2.19 και 2.20 επεξηγούνται στο σχήμα 2.2. Για χάρην απλότητας γίνεται η υπόθεση πως το διάνυσμα \vec{m} είναι αμελητέου μήκους σχετικά με το διάνυσμα που συνδέει τα σημεία P και N. Αυτό είναι λογικό για κελιά μικρής σχετικά ασυμμετρίας. Για αυτόν τον λόγο, απαλείφεται και ο τελευταίος όρος της εξίσωσης 2.19, οποίος ονομάζεται όρος διόρθωσης στρεβλότητας.



Σχήμα 2. 2: Γραμμική παρεμβολή της τιμής μιας μεταβλητής στην διεπιφάνεια, βασισμένη στις τιμές των γειτονικών κελιών. Το σημείο f είναι το κέντρο της πλευράς, ενώ το σημείο f' είναι το σημείο τομής της πλευράς με το διάνυσμα \vec{d}_{PN} το οποίο ενώνει τα κέντρα των 2 γειτονικών κελιών. Το διάνυσμα \vec{m} ενώνει τα σημεία f' και f . Ο λόγος $|\vec{m}|/|\vec{d}_{PN}|$ εκφράζει τη στρεβλότητα της επιφάνειας (face skewness). Από εργασία [2].

Με την αριθμητική επίλυση της εξίσωσης 2.18 , παράγεται το νέο πεδίο της πίεσης. Έπειτα διορθώνεται το πεδίο των ταχυτήτων, το οποίο έχει υπολογιστεί στα κέντρα των κελιών, σύμφωνα με το νέο πεδίο της πίεσης, ως

$$\begin{aligned}
 u_{P,i} &= u_{P,i}^* + u_{P,i}' \Rightarrow \\
 u_{P,i} &= \hat{u}_{P,i} - \frac{1}{a_P} \frac{\partial p^*}{\partial x_i} - \frac{1}{a_P} \frac{\partial p'}{\partial x_i} \Rightarrow \\
 u_{P,i} &= \hat{u}_{P,i} - \frac{1}{a_P} \frac{\partial p}{\partial x_i} \tag{2.21}
 \end{aligned}$$

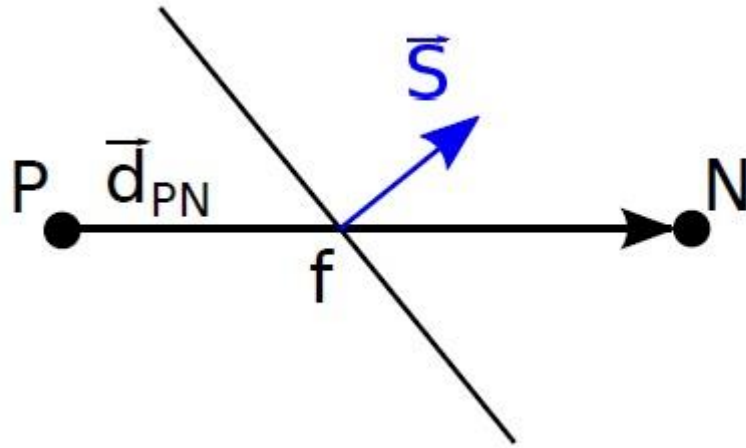
Τελικώς, ανανεώνονται οι παροχές όγκου στις πλευρές των κελιών του πλέγματος

$$m_f = u_{f,j} S_{f,j} = \hat{v}_{f,j} S_{f,j} - \frac{1}{\alpha_f} \left(\frac{\partial p}{\partial x_j} S_j \right)_f \quad (2.22)$$

όπου κάθετη συνιστώσα της παραγώγου της πίεσης σε κάθε επιφάνεια υπολογίζεται σύμφωνα με τη σχέση

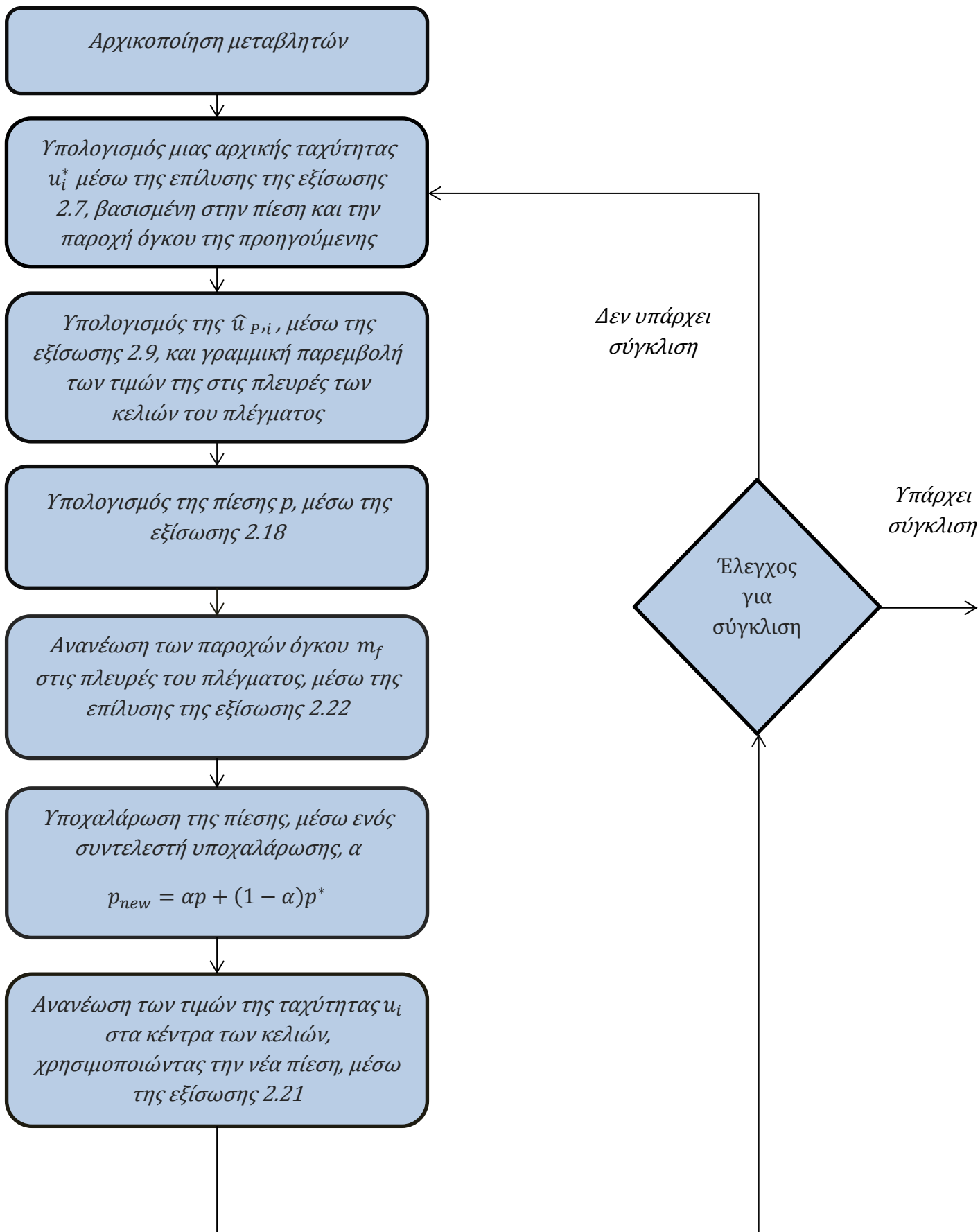
$$\left(\frac{\partial p}{\partial x_j} S_j \right)_f = (p_N - p_P) \frac{n_{f,k} S_{f,k}}{n_{f,m} d_{PN,m}} + \left. \frac{\partial p}{\partial x_j} \right|_f \left(S_{f,j} - \frac{n_{f,k} S_{f,k}}{n_{f,m} d_{PN,m}} d_{PN,j} \right) \quad (2.23)$$

Το \vec{n} είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα, κάθετο στη διεπιφάνεια, ενώ τα υπόλοιπα σύμβολα επεξηγούνται στο σχήμα 2.3.



Σχήμα 2.3: Κάθε πλευρά του εσωτερικού πλέγματος ανήκει σε 2 κελιά. Σαν κελί “ιδιοκτήτης” (“owner”) της πλευράς ορίζεται αυτό με τον μικρότερο αριθμό κελιού, ενώ το άλλο κελί ορίζεται ως “γειτονικό” (“neighbour”). Το κάθετο στη διεπιφάνεια διάνυσμα \vec{S} έχει κατεύθυνση από το κελί που μελετάται (P) προς το γειτονικό (N). Από εργασία [2].

Στο σχήμα 2.4 συνοψίζονται τα βήματα που εκτελεί ο αλγόριθμος SIMPLE.



Σχήμα 2.4: Ο αλγόριθμος SIMPLE, ο οποίος χρησιμοποιείται για την επίλυση των πρωτεύουσών εξισώσεων ροής

Εφόσον υπάρχει σύγκλιση, ο αλγόριθμος τερματίζει και επόμενο βήμα είναι να λυθεί η εξίσωση ενέργειας (εξίσωση 2.3) η οποία λύνεται ανεξάρτητα από τις εξισώσεις συνέχειας και ορμής, εφόσον σε αυτές δεν εμφανίζεται πουθενά η μεταβλητή της θερμοκρασίας, T . Ως αποτέλεσμα της επίλυσης του συστήματος των τριών εξισώσεων, παράγονται το πεδίο της πίεσης, των τριών συνιστωσών της ταχύτητας, και της θερμοκρασίας σε όλα τα κέντρα των κελιών του πλέγματος ή τα κέντρα βάρους των κελιών.

Για να γίνει η επίλυση, είναι αναγκαίο να έχει γίνει πρώτα η διακριτοποίηση των εξισώσεων της ροής. Το OpenFOAM προσφέρει το πλεονέκτημα ότι διαθέτει μια πληθώρα σχημάτων βελτιστοποίησης, από τα οποία καλείται να διαλέξει ο χρήστης το σχήμα για καθέναν από τους όρους. Δεν υπάρχει ανάγκη προγραμματισμού του σχήματος διακριτοποίησης, ούτε και επέμβασης στον κώδικα.

Στον πίνακα 2.1 παρουσιάζονται τα σχήματα διακριτοποίησης που χρησιμοποιούνται για κάθε όρο

	Σχήμα Διακριτοποίησης	Τάξη Ακρίβειας
Όρος μεταφοράς	Gauss upwind	1 ^{ης} τάξης
Όρος διάχυσης	Gauss linear	2 ^{ης} τάξης

Πίνακας 2.1: Παρουσίαση των σχημάτων διακριτοποίησης που χρησιμοποιούνται, για τον όρο της μεταφοράς και τον όρο της διάχυσης, στο λογισμικό OpenFOAM.

Πιο αναλυτικά [28], ο όρος μεταφοράς ολοκληρώνεται στον κάθε όγκο ελέγχου, και μετασχηματίζεται σύμφωνα με το θεώρημα απόκλισης Green-Gauss ως

$$\int_{\Omega} \nabla (u\varphi) d\Omega = \int_S (u\varphi) d\vec{S} = \sum_f \vec{S}_f u_f \varphi_f = \sum_f F \varphi_f \quad (2.24)$$

Η τιμή του φ_f υπολογίζεται σύμφωνα με το σχήμα upwind (ανάντι διαφόρισης), ακρίβειας πρώτης τάξης ως

$$\varphi_f = \begin{cases} \varphi_P & \text{για } F \geq 0 \\ \varphi_N & \text{για } F \leq 0 \end{cases} \quad (2.25)$$

Τα σύμβολα P και N της εξίσωσης 2.25 είναι οι αντίστοιχα κόμβοι όπως επεξηγούνται στο σχήμα 2.1.

Ο όρος διάχυσης αντίστοιχα, ολοκληρώνεται σε κάθε όγκου ελέγχου, και διακριτοποιείται, έπειτα από χρήση του θεωρήματος απόκλισης Green-Gauss, ως

$$\int_{\Omega} \nabla(\Gamma \nabla \varphi) d\Omega = \int_S (\Gamma \nabla \varphi) d\vec{S} = \sum_f \vec{S}_f \Gamma_f (\nabla \varphi)_f \quad (2.26)$$

Ο όρος $\vec{S}_f (\nabla \varphi)_f$ της εξίσωσης 2.26, σε ορθογωνικά πλέγματα υπολογίζεται ως

$$\vec{S}_f (\nabla \varphi)_f = |\vec{S}_f| \frac{\varphi_N - \varphi_P}{|\vec{d}_{PN}|} \quad (2.27)$$

Το διάνυσμα \vec{d}_{PN} , της εξίσωσης 2.29 είναι όπως ορίστηκε στο σχήμα 2.3.

Στο OpenFOAM, ο χρήστης καλείται να διαλέξει κάθε επιλύτη που θα χρησιμοποιηθεί για την επίλυση της κάθε διακριτοποιημένης εξίσωσης. Ο αλγόριθμος λύνει και υπολογίζει απεμπλεγμένα (segregated) την κάθε μεταβλητή, για αυτό χρειάζεται να ορισθεί ένας επιλύτης για κάθε μία ροϊκή μεταβλητή. Πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι η μικρότερη απαίτηση σε υπολογιστική μνήμη και η ευκολία στον προγραμματισμό του επιλύτη. Στον αντίποδα, μια τέτοια μέθοδος έχει μεγαλύτερο υπολογιστικό κόστος σε σχέση με την πεπλεγμένη επίλυση του συστήματος. Στον πίνακα 2.2 παρουσιάζονται αναλυτικότερα οι επιλύτες που χρησιμοποιήθηκαν [6].

Μεταβλητή	Επιλύτης	Περιγραφή
p	GAMG (Geometric-Algebraic Multigrid solver)	Γενικευμένος Πολυπλεγματικός Αλγόριθμος
u_i	smoothSolver	Χρησιμοποιεί τη μέθοδο Gauss-Seidel
T	BICCG	Χρησιμοποιεί τη μέθοδο των δισυζυγών κλίσεων

Σχήμα 2.2: Οι επιλύτες που χρησιμοποιούνται για την επίλυση των διακριτοποιημένων εξισώσεων της κάθε μεταβλητής.

Επίσης, είναι σύνηθες να ορίζονται και κάποια κριτήρια σύγκλισης για τον κάθε επιλύτη, τα οποία όταν ικανοποιηθούν τερματίζουν την επαναληπτική διαδικασία του συγκεκριμένου επιλύτη. Τα κριτήρια αυτά βασίζονται στον

υπολογισμό του υπολοίπου (residual) της κάθε εξίσωσης, το οποίο ανανεώνεται σε κάθε επανάληψη. Συγκεκριμένα, ο επιλύτης σταματά, όταν ικανοποιηθεί τουλάχιστον ένα από τα ακόλουθα κριτήρια

- Το υπόλοιπο γίνει μικρότερο από το κατώτερο όριο σφάλματος του επιλύτη (solver tolerance)
- Το υπόλοιπο γίνει μικρότερο από το κατώτερο σχετικό όριο σφάλματος του επιλύτη (solver relative tolerance)
- Ο αριθμός των επαναλήψεων υπερβεί τον μέγιστο αριθμό επαναλήψεων

Όποιο κριτήριο από τα ανωτέρω και αν ικανοποιηθεί, ο επιλύτης θεωρείται ότι έχει συγκλίνει, και η λύση είναι ακριβής.

Τέλος ορίζονται οι συντελεστές υποχαλάρωσης για κάθε μεταβλητή. Η υποχαλάρωση είναι μία τεχνική που βελτιώνει την ευστάθεια μιας υπολογιστικής διαδικασίας, περιορίζοντας τον βαθμό στον οποίο αλλάζει μια μεταβλητή από μια επανάληψη στην επόμενη. Το εύρος στο οποίο κυμαίνεται αυτός ο συντελεστής είναι

$$0 < \alpha \leq 1$$

Όσο πιο μικρές τιμές παίρνει ο συντελεστής υποχαλάρωσης, τόσο πιο ευσταθής γίνεται η επίλυση, αλλά ταυτόχρονα τόσο περισσότερο καθυστερεί να συγκλίνει η λύση. Ο χρήστης, καλείται να κάνει την κατάλληλη επιλογή για το πρόβλημα. Στον πίνακα 2.3 συνοψίζονται οι τιμές των μεγεθών που αναφέρθηκαν στις δύο τελευταίες παραγράφους. Μέγιστος αριθμός επαναλήψεων δεν έχει ορισθεί στο παρόν πρόβλημα.

Μεταβλητή	Κατώτερο σφάλμα	Κατώτερο σχετικό σφάλμα	Συντελεστής υποχαλάρωσης
p	10^{-6}	0.1	0.4
u_i	10^{-8}	0.1	0.7
T	10^{-12}	0.1	0.4

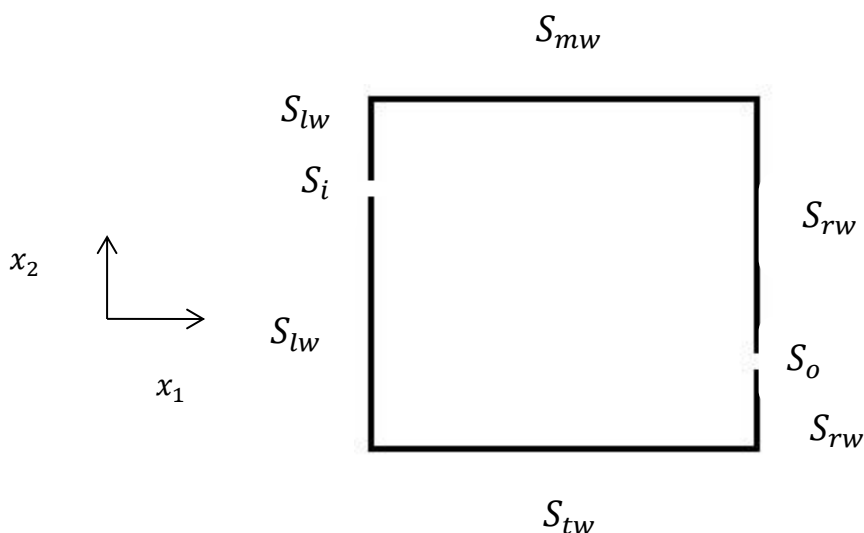
Πίνακας 2.3: Τιμές του κατώτερου σφάλματος, κατώτερου σχετικού σφάλματος και συντελεστή υποχαλάρωσης για τους επιλύτες της κάθε μεταβλητής.

2.3 Γεωμετρία και Σταθερές του Προβλήματος

Το πρόβλημα θα αντιμετωπιστεί ως διδιάστατο, όμως η γεωμετρία της κοιλότητας επεκτείνεται και στις τρεις διαστάσεις, όπως σε κάθε φυσικό πρόβλημα. Χωρίς αυτό, θα ήταν αδύνατο να οριστούν θεμελιώδη μεγέθη της ροής. Αυτό που πρακτικά γίνεται είναι να θεωρηθεί η ροή ως 2D, δηλαδή να μην επιλυθούν οι εξισώσεις ροής στην τρίτη διάσταση, αυτή του βάθους. Συνεπώς, η κοιλότητα είναι σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου και οι οπές, στην ουσία, είναι σχισμές (slots) οι οποίες εκτείνονται σε όλο το βάθος του εκάστοτε τοιχώματος. Θα ορισθούν δηλαδή, τα μεγέθη της κοιλότητας και στις τρεις χωρικές διαστάσεις.

Η κοιλότητα, είναι λοιπόν, μορφής ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, εσωτερικά της οποίας περικλείεται ρευστό συγκεκριμένων ιδιοτήτων. Το άνω τοίχωμα της κοιλότητας κινείται με ταχύτητα σταθερού μέτρου και κατεύθυνσης εφαπτομενικής ως προς αυτό, δημιουργώντας έτσι μια κυκλοφορία ρευστού εσωτερικά του χωρίου. Η θερμοκρασία του διατηρείται σταθερή. Το κάτω τοίχωμα της κοιλότητας, παραμένει σταθερό ενώ και σε αυτό ορίζεται σταθερή θερμοκρασία, διαφορετικής τιμής από αυτή του άνω τοιχώματος, έτσι ώστε να δημιουργείται ροή θερμότητας εσωτερικά της κοιλότητας. Τα δύο πλαϊνά τοιχώματα της κοιλότητας είναι αδιαβατικά και δεν επιτρέπουν την ροή θερμότητας δια μέσου τους. Το στοιχείο που διαφοροποιεί την παρούσα εργασία σε σχέση με άλλες [5] που έχουν περατωθεί στο παρελθόν, είναι ότι σε κάθε πλαϊνό τοίχωμα προστίθεται από μία σχισμή σταθερού ύψους με σκοπό να δημιουργηθεί μια δευτερεύουσα ροή στην κοιλότητα, μέσω δεσμών ρευστού (jets). Η κάθε σχισμή είναι και αυτή ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Πιο συγκεκριμένα, από τη μία σχισμή εγχύεται ρευστό, ιδίων ιδιοτήτων με αυτό που βρίσκεται ήδη εντός του χωρίου, ενώ η δεύτερη σχισμή αποτελεί έξοδο για τη δέσμη που εισήλθε στην κοιλότητα, με σκοπό η μάζα ρευστού που περικλείεται κάθε στιγμή στο χωρίο να παραμένει σταθερή. Η θερμοκρασία της δέσμης του ρευστού που εισέρχεται στην κοιλότητα παραμένει σταθερή, όπως και η ταχύτητά του. Αναμένεται ότι, εισάγοντας τη δέσμη στο χωρίο θα ενισχυθεί η μετάδοση θερμότητας μέσα στην κοιλότητα.

Στο σχήμα 2.5 απεικονίζεται η γεωμετρία του προς μελέτη προβλήματος, στις δύο διαστάσεις και οι επιφάνειες από τις οποίες αποτελείται καθώς και το σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποιείται.



Σχήμα 2.5: Η γεωμετρία της κοιλότητας του προβλήματος, και οι περικλείουσες επιφάνειες με το όνομά τους. Αυτές είναι οι S_{mw} (moving wall), S_{tw} (thermal wall), S_{lw} (left wall), S_{rw} (right wall), S_i (inlet) και S_o (outlet). Ισχύει η σχέση $S_{cavity} = S_{mw} \cup S_{rw} \cup S_{lw} \cup S_{tw} \cup S_i \cup S_o$.

Το μήκος της κάθε επιφάνειας που πλαισιώνει το χωρίο είναι ίσο με

$$l = 0.1 \text{ m}$$

Η κάθε σχισμή είναι σταθερού ύψους, με τιμή

$$d = 0.005 \text{ m}$$

ενώ η θέση στην οποία αυτή βρίσκεται δεν έχει γνωστή τιμή καθώς αποτελεί μεταβλητή σχεδιασμού του προβλήματος, όπως θα αναλυθεί στο κεφάλαιο 3.

Η ανάγκη ορισμού του προβλήματος σε τρεις διαστάσεις έγκειται και στο γεγονός ότι το OpenFOAM λύνει μόνο 3Δ προβλήματα. Αυτό που κάνει ο αλγόριθμος είναι να λύνει την ροή ως 3Δ, κρατώντας σταθερές τις τιμές των μεταβλητών της ροής κατά μήκος της τρίτης διάστασης, έτσι ώστε αυτές να μεταβάλλονται μόνο κατά τις δύο διαστάσεις. Για να γίνει αυτό, πρέπει να ορισθούν και οι συνιστώσες της γεωμετρίας του χωρίου στην τρίτη διάσταση. Στο παρόν πρόβλημα δίνεται το βάθος της κοιλότητας ίσο με

$$l_d = 0.05 \text{ m}$$

Έτσι, η κοιλότητα αποτελεί ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με διαστάσεις

$$0.1 \text{ m} \times 0.1 \text{ m} \times 0.05 \text{ m}$$

Στον πίνακα 2.4 παρουσιάζονται οι φυσικές ιδιότητες του ρευστού, οι οποίες παραμένουν σταθερές καθ'όλη την ανάλυση.

Πυκνότητα $\rho \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)$	1
Κινηματική συνεκτικότητα $\nu \left(\frac{\text{m}^2}{\text{s}}\right)$	1.511×10^{-5}
Ειδική θερμοχωρητικότητα $c_p \left(\frac{\text{J}}{\text{kg K}}\right)$	1004.5
Αριθμός Prandtl Pr	0.7

Πίνακας 2.4 : Θερμοφυσικές ιδιότητες του περικλειόμενου ρευστού καθώς και της δέσμης ρευστού που εγχύεται στην κοιλότητα

Να σημειωθεί εδώ, ότι το OpenFOAM υπολογίζει την πίεση διαιρεμένη με την πυκνότητα του ρευστού και όχι την απόλυτη τιμή της, αν και στη συγκεκριμένη περίπτωση αυτές οι δύο ταυτίζονται, εξαιτίας της μοναδιαίας τιμής της πυκνότητας. Εκτός αυτού, σε κλειστά συστήματα ροής ασυμπίεστου ρευστού, όπως στο παρόν πρόβλημα, η πίεση είναι σχετική. Οι απόλυτες τιμές του πεδίου της πίεσης δεν είναι πολύ χρήσιμες, σε αντίθεση με τις διαφορές πιέσεων. Για αυτόν τον λόγο, οι υπολογιζόμενες πιέσεις έχουν λυθεί λαμβάνοντας υπόψη μία πίεση αναφοράς που επικρατεί εξωτερικά της κοιλότητας. Στο παρόν πρόβλημα η πίεση αυτή έχει οριστεί ίση με 0.

Για την επίλυση της ροής εντός της κοιλότητας, είναι απαραίτητη η δημιουργία κατάλληλου πλέγματος. Το OpenFOAM παρέχει έτοιμους πλεγματοποιητές σε μορφή εκτελέσιμων αρχείων, για την γένεση δομημένων ή μη πλεγμάτων. Εδώ, το-σχετικά απλό-πλέγμα δημιουργήθηκε με χρήση του εκτελέσιμου blockMesh. Το πλέγμα αποτελείται συνολικά από 10.000 κελιά,

δηλαδή από 100 ισαπέχοντα κελιά κατά τον άξονα x_1 , 100 ισαπέχοντα κελιά κατά τον άξονα x_2 και 1 κελί που εκτείνεται στο βάθος της κοιλότητας.

Επισημαίνεται ότι, το συγκεκριμένο πλέγμα παραμένει αμετάβλητο κατά τη διάρκεια της διαδικασίας της βελτιστοποίησης.

2.4 Οριακές Συνθήκες

Σε αυτή την ενότητα θα ορισθούν οι οριακές συνθήκες του προβλήματος.

Όπως αναφέρθηκε και στην ενότητα 2.3, το άνω τοίχωμα της κοιλότητας είναι κινούμενο. Πιο συγκεκριμένα, η ταχύτητά του έχει συνιστώσα μόνο κατά τον x άξονα και η τιμή της είναι 0.1 m/s . Στα τοιχώματα ισχύει η συνθήκη μη εισχώρησης του ρευστού, οπότε η ταχύτητα της ροής στο άνω τοίχωμα S_{mw} ταυτίζεται με αυτή του τοιχώματος (συνθήκη Dirichlet). Η θερμοκρασία στο άνω τοίχωμα διατηρείται σταθερή, και ίση με 300 K . Για την πίεση εφαρμόζεται συνθήκη μηδενικής κάθετης παραγωγού (μηδενική συνθήκη Neumann). Στο κάτω τοίχωμα S_{tw} το διάνυσμα της ταχύτητας είναι μηδενικό λόγω της συνθήκης μη-ολίσθησης. Η θερμοκρασία σε εκείνο το σημείο διατηρείται σταθερή και ίση με 700 K . Για την πίεση, ισχύει και εδώ συνθήκη μηδενικής κάθετης παραγωγού. Στα πλαϊνά τοιχώματα S_{lw} , S_{rw} ισχύει και εκεί συνθήκη μηδενικής ταχύτητας (Dirichlet) και μηδενικής παραγωγού πίεσης. Όπως έχει αναφερθεί, τα τοιχώματα αυτά είναι αδιαβατικά, οπότε ορίζεται μηδενική συνθήκη κάθετης παραγωγού για την θερμοκρασία. Για την είσοδο S_i , ορίζεται για την ταχύτητα, συνθήκη Dirichlet, με μοναδική μη-μηδενική συνιστώσα αυτή στον x άξονα, με τιμή 0.05 m/s . Η θερμοκρασία στην είσοδο είναι σταθερή, και η τιμή αυτής είναι 400 K . Για την πίεση ορίζεται μηδενική συνθήκη Dirichlet. Για την έξοδο S_o ορίζεται συνθήκη Dirichlet για την ταχύτητα όπως ακριβώς και για την είσοδο, δηλαδή με τιμή 0.05 m/s , έτσι ώστε να διασφαλιστεί η αρχή διατήρησης της μάζας στο εσωτερικό της κοιλότητας. Για την πίεση, επιβάλλεται συνθήκη Neumann μηδενικής τιμής. Για τη θερμοκρασία

εξόδου, καθώς αυτή είναι αδύνατο να είναι γνωστή εκ των προτέρων, επιβάλλεται και εδώ μηδενική συνθήκη Neumann.

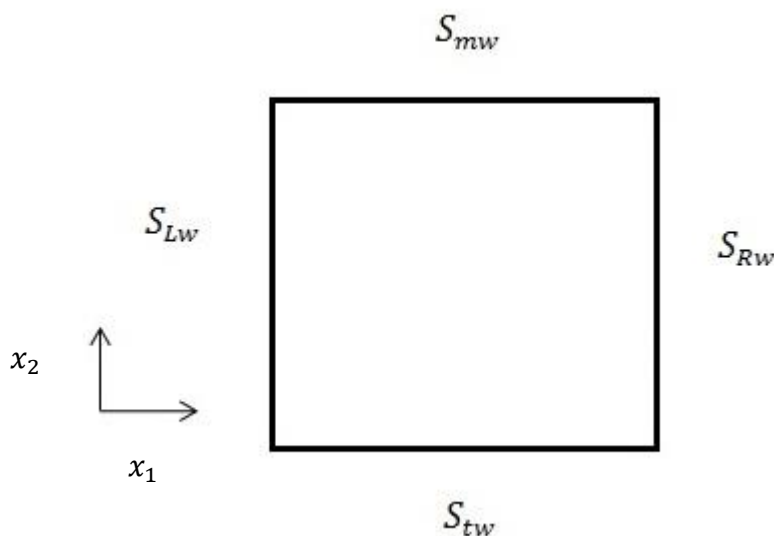
Σύμφωνα με τις συγκεκριμένες τιμές των οριακών συνθηκών, τις τιμές των φυσικών μεγεθών του ρευστού και τη συγκεκριμένη γεωμετρία, υπολογίζεται ο αριθμός Reynolds της ροής, όπως αυτός ορίστηκε στην εξίσωση 2.4.

Με βάση αυτό, προκύπτει

$$Re = 661.81$$

Σύμφωνα με τις εργασίες [37,38], ο αριθμός αυτός είναι μέσα στο εύρος των αριθμών Reynolds για στρωτή ροή, σε τετραγωνική κοιλότητα με άνω κινούμενο τοίχωμα. Οπότε μπορεί να γίνει η υπόθεση πως ροή ορθώς μελετάται ως στρωτή.

Για την επίλυση του πρωτεύοντος προβλήματος θα ήταν αρκετός ο ορισμός των οριακών συνθηκών όπως έγινε παραπάνω. Με αυτόν τον τρόπο όμως, δημιουργούνται στα δύο κατακόρυφα τοιχώματα κατανομές ταχυτήτων, πιέσεων και θερμοκρασιών, οι οποίες δεν είναι συνεχείς. Αυτό αποτελεί εμπόδιο στην διαχείριση του συζυγούς προβλήματος και, πιο συγκεκριμένα στον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας καθώς οι παράγωγοι που καλείται να υπολογίσει ο αλγόριθμος λαμβάνουν τιμές που αριθμητικά τείνουν στο άπειρο. Για να λυθεί αυτό το πρόβλημα, θα μοντελοποιηθούν οι οριακές συνθήκες στα δύο κατακόρυφα τοιχώματα σύμφωνα με μία συνεχή συνάρτηση. Αρχικά, θα οριστεί η επιφάνεια του αριστερού τοιχώματος του χωρίου, S_{lw} και η επιφάνεια της εισόδου, S_i σαν μία κοινή επιφάνεια, S_{Lw} , και αντίστοιχα, το δεξί τοίχωμα του χωρίου, S_{rw} και η επιφάνεια εξόδου της δέσμης, S_{rw} , σαν μία κοινή επιφάνεια, S_{RW} . Το νέο χωρίο με τις περικλείουσες επιφάνειες, όπως αυτό θα ορίζεται πλέον, φαίνεται καλύτερα στο σχήμα 2.6.

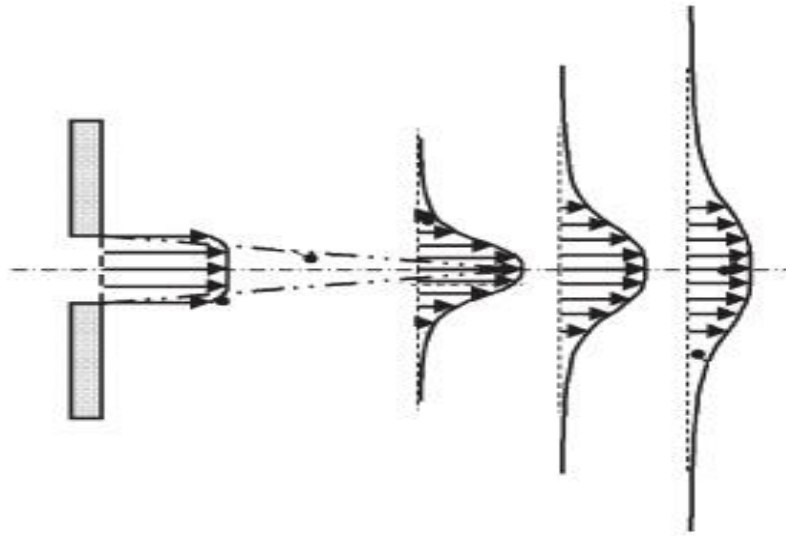


Σχήμα 2.6: Η γεωμετρία της κοιλότητας του προβλήματος, και οι περικλείουσες επιφάνειες, όπως αυτές μοντελοποιούνται, για την επίλυση της ροής. Ισχύει η σχέση $S_{cavity} = S_{mw} \cup S_{Rw} \cup S_{Lw} \cup S_{tw}$.

Έτσι, σε κάθε μία από τις δύο επιφάνειες S_{Lw}, S_{Rw} , επιβάλλεται μία μοναδική συνθήκη για κάθε μεταβλητή ροής. Για την επιλογή της συνάρτησης, η οποία θα χρησιμοποιηθεί στην επιβολή των οριακών συνθηκών, λαμβάνονται υπόψη δύο βασικά σημεία. Αρχικά, αυτή πρέπει να είναι συνεχής, για τον λόγο που εξηγήθηκε παραπάνω και, επίσης, πρέπει να μοντελοποιεί τις οριακές συνθήκες με τρόπο όσο πιο κοντινό γίνεται στην πραγματικότητα, ώστε να ελαχιστοποιηθεί το σφάλμα.

Λαμβάνοντας υπόψη στοιχεία της θεωρίας της μηχανικής των ρευστών [3], η ταχύτητα της δέσμης που εξέρχεται από την οπή, η οποία μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελεί την έξοδο ενός ακροφυσίου, δεν μπορεί να έχει ενιαία τιμή. Αυτό γιατί στα σημεία στα οποία η ροή βρίσκεται σε επαφή με τα τοιχώματα της οπής, η ταχύτητα της δέσμης μηδενίζεται σύμφωνα με τη συνθήκη της μη-ολίσθησης, δημιουργώντας ένα οριακό στρώμα εγκάρσια της ροής. Έτσι, δημιουργείται μια κατανομή ταχύτητας συγκεκριμένης-συνήθως παραβολικής-μορφής, η οποία εξαρτάται από τη γεωμετρία της οπής, και κατ'επέκταση, του ακροφυσίου. Το ίδιο μπορεί να θεωρηθεί ότι ισχύει και για την κατανομή της θερμοκρασίας, λόγω απωλειών θερμότητας, κυρίως στα σημεία κοντά στο τοίχωμα του ακροφυσίου.

Σύμφωνα με πειραματικές μελέτες [14] όσο απομακρύνεται από την οπή, και καθώς αναμιγνύεται με την πρωτεύουσα ροή, η κατανομή της ταχύτητας της δέσμης αποκτά μεγαλύτερο πλάτος ενώ αντίθετα το μέτρο της ταχύτητας μειώνεται, όπως απεικονίζεται και στο σχήμα 2.7.



Σχήμα 2.7: Το οριακό στρώμα που σχηματίζεται κατά την είσοδο της δέσμης στο χωρίο μέσω της οπής, και πως αυτό μεταβάλλεται με την απόσταση από την είσοδο. Από εργασία [14].

Σύμφωνα με τα ανωτέρω, η συνάρτηση που, τελικά, επιλέχθηκε για τη μοντελοποίηση των οριακών συνθηκών της ταχύτητας των δύο κατακόρυφων τοιχωμάτων είναι η σιγμοειδής συνάρτησης (sigmoid function) ή στην πιο γενική μορφή της, η λογιστική συνάρτηση (logistic function). Στη γενική της μορφή και για το σύστημα αξόνων του σχήματος 2.8 αυτή γράφεται ως

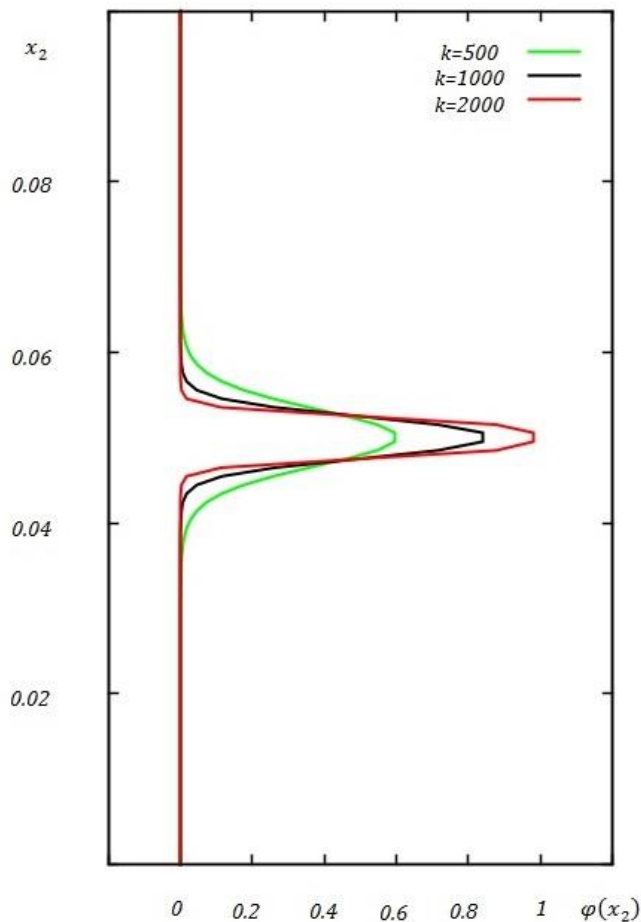
$$f(x_2) = \frac{1}{1 + e^{-k(x-x_{2,0})}}$$

Με L ορίζεται η μέγιστη τιμή της μεταβλητής η οποία μοντελοποιείται κάθε φορά, το k είναι ένας συντελεστής ανάλογος της κλίσης της συνάρτησης, ενώ το $x_{2,0}$ είναι το σημείο του x_2 άξονα στο οποίο η συνάρτηση λαμβάνει τη μέση τιμή της. Η κατανομή της ταχύτητας και της θερμοκρασίας στην είσοδο είναι συμμετρική ως προς το κέντρο της οπής. Συνεπώς, η μοντελοποίησή τους γίνεται με τη χρήση δύο συμμετρικών ως προς το κέντρο της οπής λογιστικών συναρτήσεων. Λαμβάνοντας υπόψη πως το ύψος της οπής κατά τον x_2 άξονα είναι 0.005 m η τελική συνάρτηση γράφεται ως

$$\varphi(x_2) = \frac{1}{1 + e^{-k(x_2 - (x_{2,m} - 0.0025))}} \left(1 - \frac{1}{1 + e^{-k(x_2 - (x_{2,m} + 0.0025))}} \right) \quad (2.28)$$

εισάγοντας, με αυτόν τον τρόπο, μεταβλητή σχεδιασμού, το κέντρο της δέσμης, $x_{2,m}$.

Ο συντελεστής k εκφράζει την κλίση της συνάρτησης. Στο σχήμα 2.8 παρουσιάζεται η μορφή της συνάρτησης φ για τρεις διαφορετικές τιμές του συντελεστή k , σε κοινό διάγραμμα, ώστε να επισημανθεί η διαφορά μεταξύ τους. Και στις τρεις περιπτώσεις, η τιμή της $x_{2,m}$ είναι ίση με 0.05 m .



Σχήμα 2.8: Η συνάρτηση φ στην μορφή που αυτή παίρνει για τιμές του συντελεστή k ίσες με 500, 1000 και 2000 και, $x_{2,m} = 0.05 \text{ m}$.

Αυτό που παρατηρείται από το σχήμα 2.8 είναι πως η κλίση της συνάρτησης φ αυξάνεται, αυξάνοντας τον συντελεστή k , όπως ήταν λογικό, αλλά και ότι η μέγιστη τιμή της φ αποκλίνει περισσότερο από τη μονάδα, όσο μειώνεται ο k , κάτι που δεν είναι επιθυμητό. Οπότε, για ελάχιστο σφάλμα, το k πρέπει να μεγιστοποιείται.

Η τελική τιμή του συντελεστή k επιλέγεται στο κεφάλαιο 4, σύμφωνα με τις δοκιμές που παρουσιάζονται εκεί.

Όπως αναφέρθηκε, με την βοήθεια της συνάρτησης φ , θα επιβληθούν οι οριακές συνθήκες στις δύο κατακόρυφες επιφάνειες του χωρίου S_{LW} και S_{RW} , όπως αυτές ορίστηκαν στο σχήμα 2.6, έτσι ώστε να μοντελοποιείται κατάλληλα και το αδιαβατικό τοίχωμα, αλλά και η δέσμη.

Πιο συγκεκριμένα, οι οριακές συνθήκες που ισχύουν για την κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας, την πίεση και τη θερμοκρασία στην αριστερή κάθετη επιφάνεια S_{LW} περιγράφονται από τις εξισώσεις

$$(v_j n_j - 0)(1 - \varphi) + (v_j n_j + v_{jet})\varphi = 0 \quad (2.29)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x_j} n_j - 0 \right) (1 - \varphi) + (p - 0)\varphi = 0 \quad (2.30)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x_j} n_j - 0 \right) (1 - \varphi) + (T - T_{jet})\varphi = 0 \quad (2.31)$$

όπου v_{jet}, T_{jet} είναι το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας και η μέγιστη θερμοκρασία της δέσμης εισόδου αντίστοιχα, και n_j το μοναδιαίο κάθετο στην επιφάνεια διάνυσμα με κατεύθυνση εξωτερικά του χωρίου. Οι οριακές συνθήκες της πίεσης και της θερμοκρασίας είναι τύπου Robin. Επισημαίνεται πως όπως φαίνεται και από την εξίσωση 2.31, μόνο η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας $v_j n_j$ λαμβάνει μη-μηδενική τιμή, οι υπόλοιπες συνιστώσες v_2, v_3 είναι μηδενικές σε όλη την έκταση του ορίου. Συνεπώς, διατυπώνεται ακόμη μία οριακή συνθήκη

$$v_i = 0 \quad , i = 2,3 \quad (2.32)$$

Για τη δεξιά κάθετη επιφάνεια της κοιλότητας S_{RW} , οι οριακές συνθήκες περιγράφονται από τις εξισώσεις

$$(v_j n_j - 0)(1 - \varphi) + (v_j n_j - v_{jet})\varphi = 0 \quad (2.33)$$

$$v_i = 0 \quad , i = 2,3 \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_j} n_j = 0 \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_j} n_j = 0 \quad (2.36)$$

Και σε αυτήν την περίπτωση, μόνο η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας, $v_j n_j$ λαμβάνει μη-μηδενική τιμή.

Συνοπτικά, στον πίνακα 2.4 παρουσιάζονται οι οριακές συνθήκες που επιβάλλονται στις τέσσερις πλευρές της κοιλότητας.

Όριο	$v_i \left(\frac{m}{s}\right)$	$p \left(\frac{N}{m^2}\right)$	$T \text{ (K)}$
S_{mw}	(0,1,0,0)	$\frac{\partial p}{\partial n} = 0$	300
S_{tw}	(0,0,0)	$\frac{\partial p}{\partial n} = 0$	700
S_{LW}	$\begin{cases} (v_j n_j - 0)(1 - \varphi) + (v_j n_j + v_{jet})\varphi = 0 \\ 0 \quad , i = 2,3 \end{cases}$	$\begin{cases} \left(\frac{\partial p}{\partial n} - 0\right)(1 - \varphi) \\ + (p - 0)\varphi \\ = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \left(\frac{\partial T}{\partial n} - 0\right)(1 - \varphi) \\ + (T - T_{jet})\varphi \\ = 0 \end{cases}$
S_{RW}	$\begin{cases} (v_j n_j - 0)(1 - \varphi) + (v_j n_j - v_{jet})\varphi = 0 \\ 0 \quad , i = 2,3 \end{cases}$	$\frac{\partial p}{\partial n} = 0$	$\frac{\partial T}{\partial n} = 0$

Πίνακας 2.4: Οι οριακές συνθήκες του πρωτεύοντος προβλήματος, όπως αυτές διατυπώνονται στις τέσσερις περικλείουσες επιφάνειες της κοιλότητας $S_{mw}, S_{tw}, S_{LW}, S_{RW}$

Κεφάλαιο 3

Η συνεχής συζυγής μέθοδος

3.1 Ορισμός της Αντικειμενικής Συνάρτησης και των Μεταβλητών Σχεδιασμού

Όπως προαναφέρθηκε, το παρόν είναι ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης. Συνεπώς, πρέπει να ορισθεί για αυτό, μια συνάρτηση-στόχος, ώστε να αναζητηθεί ο βέλτιστος σχεδιασμός του προβλήματος, με βάση την ελαχιστοποίηση ή μεγιστοποίησή της. Ορίζεται, ως αντικειμενική συνάρτηση (objective function), η ροή θερμότητας η οποία περνά δια μέσου του άνω κινούμενου τοιχώματος της ροής και αποβάλλεται από το σύστημα. Στόχος είναι η μεγιστοποίηση αυτής της συνάρτησης. Η μαθηματική της διατύπωση είναι ως εξής

$$F = \int_{S_{mw}} \rho \frac{c_p}{Pr} v \frac{\partial T}{\partial x_i} n_i dS \quad (3.1)$$

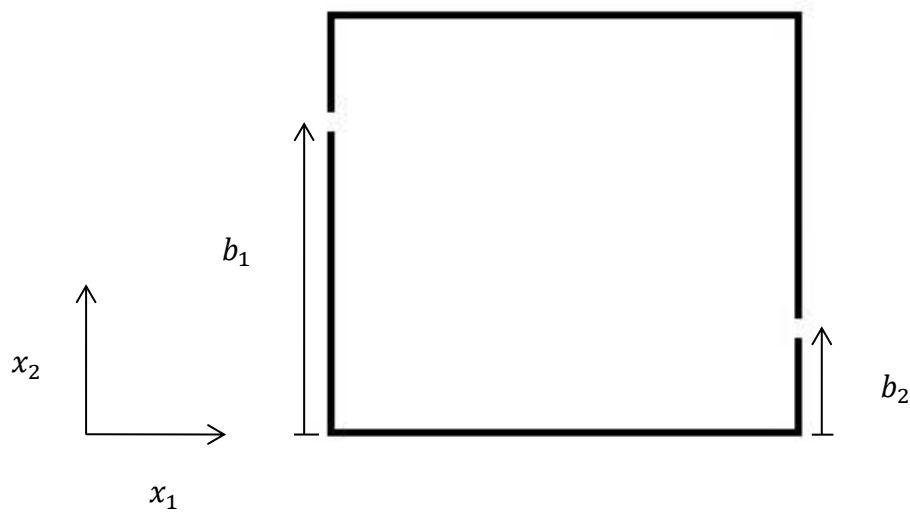
όπου n_i είναι οι καρτεσιανές συνιστώσες του μοναδιαίου κάθετου διανύσματος στην επιφάνεια, με κατεύθυνση προς το εξωτερικό του χωρίου. Σύμφωνα με τον ορισμό του συστήματος των αξόνων, το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια S_{mw} είναι

$$n_i = (0,1,0) \quad (3.2)$$

Με βάση αυτό, η αντικειμενική συνάρτηση ξαναγράφεται

$$F = \int_{S_{mw}} \rho \frac{c_p}{Pr} v \frac{\partial T}{\partial x_2} dS \quad (3.3)$$

Ως μεταβλητές σχεδιασμού b_1 και b_2 ορίζονται οι κάθετες αποστάσεις των κέντρων της κάθε οπής, από το κάτω όριο του χωρίου, όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.1.



Σχήμα 3.1: Ορισμός των δύο μεταβλητών σχεδιασμού του προβλήματος, ως οι αντίστοιχες κάθετες αποστάσεις των κέντρων των δύο οπών, από το κάτω όριο του χωρίου, για την περίπτωση ελέγχου ροής με δύο δέσμες.

Συνεπώς, είναι δυνατό να γραφτεί η συνάρτηση φ η οποία διατυπώθηκε στο κεφάλαιο 2, αυτή τη φορά ως συνάρτηση του διανύσματος των μεταβλητών σχεδιασμού, οι οποίες ταυτίζονται με την παράμετρο $x_{2,m}$ η οποία εμφανίζεται στις δύο σιγμοειδείς συναρτήσεις.

$$\varphi(x_2, b_n) = \frac{1}{1 + e^{-k(x_2 - (b_n - 0.0025))}} \left(1 - \frac{1}{1 + e^{-k(x_2 - (b_n + 0.0025))}} \right) \quad (3.4)$$

3.2 Οι Συζυγείς Μεταβλητές

Σκοπός της συνεχούς συζυγούς μεθόδου, είναι ο οικονομικός σε χρόνο υπολογισμός των παραγώγων ευαισθησίας $\frac{\delta F}{\delta b_n}$, οι οποίες εκφράζουν την μεταβολή που υφίσταται η αντικειμενική συνάρτηση, εξαιτίας της μεταβολής των μεταβλητών σχεδιασμού b_n . Η αντικειμενική συνάρτηση, στη γενική της μορφή, διατυπώνεται ως

$$F = F(\vec{U}, \vec{b}) \quad (3.5)$$

όπου \vec{U} είναι το διάνυσμα των μεταβλητών ροής του πρωτεύοντος προβλήματος, και \vec{b} το διάνυσμα των μεταβλητών σχεδιασμού. Η εξίσωση 3.5 εκφράζει την εξάρτηση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης, αφενός από τις τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού, αφετέρου από το πεδίο ροής. Το πεδίο ροής όμως, εξαρτάται με τη σειρά του από το διάνυσμα των μεταβλητών σχεδιασμού, συνεπώς η εξίσωση 3.5 ξαναγράφεται ως

$$F = F(\vec{U}(\vec{b}), \vec{b}) \quad (3.6)$$

Τα \vec{U} , \vec{b} λαμβάνονται ως διανύσματα στήλης.

Στη συνεχή συζυγή μέθοδο, απαιτείται η διατύπωση της επαυξημένης αντικειμενικής συνάρτησης (augmented objective function), η οποία ορίζεται ως

$$F_{aug} = F + \int_{\Omega} \Psi_l R_l^U d\Omega \quad (3.7)$$

όπου με Ω συμβολίζεται το χωρίο της ροής, με Ψ_l , το διάνυσμα των συζυγών μεταβλητών, και με R_l^U τα υπόλοιπα (residuals) των πρωτεύουσών εξισώσεων κατάστασης που διέπουν τη ροή.

Συγκεκριμένα, στο πρόβλημα αυτό, ορίζονται

$$\Psi_l = [u_i \quad q \quad T^a] \quad (3.8)$$

$$R_l^U = [R^p \quad R_i^v \quad R^T] \quad (3.9)$$

όπου u_i είναι η συζυγείς συνιστώσες της ταχύτητας, q , η συζυγής πίεση, και T^a είναι η συζυγής θερμοκρασίας. Με R^p συμβολίζεται η εξίσωση της συνέχειας, R_i^v η εξίσωση της ορμής, και R^T , η εξίσωση της ενέργειας του πρωτεύοντος προβλήματος, όπως αυτές ορίστηκαν στο κεφάλαιο 2. Αναλύοντας το χωρικό ολοκλήρωμα στις συνιστώσες του, η εξίσωση της επαυξημένης αντικειμενικής συνάρτησης, γράφεται

$$F_{aug} = F + \int_{\Omega} q R^p d\Omega + \int_{\Omega} u_i R_i^v d\Omega + \int_{\Omega} T^a R^T d\Omega \quad (3.10)$$

Τονίζεται εδώ, ότι εφόσον τα υπόλοιπα των συναρτήσεων της ροής R_l^U πρέπει πάντα να είναι μηδενικά, η επαυξημένη αντικειμενική συνάρτηση ταυτίζεται με την αντικειμενική συνάρτηση.

$$F_{aug} \equiv F \quad (3.11)$$

Από αυτό προκύπτει ότι και οι αντίστοιχες παράγωγοί τους ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού είναι ίδιες

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_n} = \frac{\delta F}{\delta b_n} \quad (3.12)$$

Αρκεί λοιπόν να υπολογιστεί η παράγωγος $\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_n}$.

Διαφορίζοντας την εξίσωση 3.10 και με χρήση του θεωρήματος Leibniz, προκύπτει η σχέση

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_n} &= \frac{\delta F}{\delta b_n} + \frac{\delta}{\delta b_n} \int_{\Omega} q R^p d\Omega + \frac{\delta}{\delta b_n} \int_{\Omega} u_i R_i^u d\Omega + \frac{\delta}{\delta b_n} \int_{\Omega} T^a R^T d\Omega \\ &= \frac{\delta F}{\delta b_n} + \int_{\Omega} \frac{\delta q}{\delta b_n} R^p d\Omega + \int_{\Omega} q \frac{\delta R^p}{\delta b_n} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\delta u_i}{\delta b_n} R_i^u d\Omega + \int_{\Omega} u_i \frac{\delta R_i^u}{\delta b_n} d\Omega \\ &\quad + \int_{\Omega} \frac{\delta T^a}{\delta b_n} R^T d\Omega + \int_{\Omega} T^a \frac{\delta R^T}{\delta b_n} d\Omega + \int_{\Omega} (q R^p + u_i R_i^u + T^a R^T) \frac{\delta(d\Omega)}{\delta b_n} \end{aligned}$$

Οι όροι R^p , R_i^u , R^T είναι μηδενικοί, οπότε τα ολοκληρώματα που περιέχουν αυτούς τους όρους μηδενίζονται, και η έκφραση της παραγώγου γίνεται

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_n} &= \frac{\delta F}{\delta b_n} + \int_{\Omega} q \frac{\delta R^p}{\delta b_n} d\Omega + \int_{\Omega} u_i \frac{\delta R_i^u}{\delta b_n} d\Omega + \int_{\Omega} T^a \frac{\delta R^T}{\delta b_n} d\Omega \\ &\quad + \int_{\Omega} (q R^p + u_i R_i^u + T^a R^T) \frac{\delta(d\Omega)}{\delta b_n} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Η σχέση μεταξύ της ολικής παραγώγου $\frac{\delta}{\delta b_n}$ και της μερικής παραγώγου $\frac{\partial}{\partial b_n}$ οποιασδήποτε ποσότητας Φ είναι

$$\frac{\delta \Phi}{\delta b_n} = \frac{\partial \Phi}{\partial b_n} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_{\kappa}} \frac{\delta x_{\kappa}}{\delta b_n} \quad (3.14)$$

Για τη διαφόριση του στοιχειώδη όγκου ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, έχει αποδειχθεί στην εργασία [10] η σχέση

$$\frac{\delta(d\Omega)}{\delta b_n} = \frac{\partial}{\partial x_{\kappa}} \left(\frac{\delta x_{\kappa}}{\delta b_n} \right) d\Omega \quad (3.15)$$

Η εξίσωση 3.13 ξαναγράφεται, σύμφωνα με την εξίσωση 3.14, ως

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_n} = & \frac{\delta F}{\delta b_n} + \int_{\Omega} q \frac{\delta R^p}{\delta b_n} d\Omega + \int_{\Omega} u_i \frac{\delta R_i^v}{\delta b_n} d\Omega + \int_{\Omega} T^a \frac{\delta R^T}{\delta b_n} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} (qR^p + u_i R_i^v + T^a R^T) \frac{\partial}{\partial x_{\kappa}} \left(\frac{\delta x_{\kappa}}{\delta b_n} \right) d\Omega \end{aligned} \quad (3.16)$$

Ο όρος $\frac{\delta x_{\kappa}}{\delta b_n}$ εκφράζει την ολική παράγωγο του πλέγματος ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού. Όπως αναφέρθηκε στο κεφάλαιο 2, το χωρίο της ροής, και άρα και το πλέγμα, παραμένει αμετάβλητο, είναι δηλαδή ανεξάρτητο των μεταβλητών σχεδιασμού. Μηδενίζοντας τον όρο αυτόν, βλέπουμε ότι σύμφωνα με την εξίσωση 3.14, η ολική και η μερική παράγωγος ενός τυχαίου μεγέθους, ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, ταυτίζονται

$$\frac{\delta \Phi}{\delta b_n} \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial b_n} \quad (3.17)$$

Σύμφωνα με τη σχέση 3.17 και μηδενίζοντας τον όρο $\frac{\delta x_{\kappa}}{\delta b_n}$, όπου αυτός υπάρχει, η εξίσωση 3.16, ξαναγράφεται ως

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_n} = \frac{\partial F}{\partial b_n} + \int_{\Omega} q \frac{\partial R^p}{\partial b_n} d\Omega + \int_{\Omega} u_i \frac{\partial R_i^v}{\partial b_n} d\Omega + \int_{\Omega} T^a \frac{\partial R^T}{\partial b_n} d\Omega \quad (3.18)$$

3.3 Παραγωγή των Εξισώσεων Ροής

Για τον υπολογισμό της παραγώγου της επαυξημένης αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, είναι απαραίτητη η διαφόριση

των εξισώσεων της ροής, όπως φαίνεται στην εξίσωση 3.16. Παρακάτω θα γίνει η ανάλυση των όρων που περιέχει η εξίσωση αυτή.

Διαφορίζοντας την εξίσωση της συνέχειας, ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, προκύπτει

$$\frac{\partial R^p}{\partial b_n} = \frac{\partial}{\partial b_n} \left(-\frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) \quad (3.19)$$

Η μερική παράγωγος $\frac{\partial}{\partial b_n}$ είναι ανεξάρτητη οποιασδήποτε χωρικής μετατόπισης, οπότε είναι επιτρεπτή η εναλλαγή της σειράς παραγωγίσισης ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού και ως προς τις χωρικές συντεταγμένες. Αυτό, για μία μεταβλητή Φ , εκφράζεται μέσω της σχέσης

$$\frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial b_n} \right) \quad (3.20)$$

Σύμφωνα με τη σχέση 3.20, η εξίσωση 3.19, ξαναγράφεται ως

$$\frac{\partial R^p}{\partial b_n} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\frac{\partial v_j}{\partial b_n} \right) \quad (3.21)$$

Συνεπώς, το ολοκλήρωμα $\int_{\Omega} q \frac{\partial R^p}{\partial b_n} d\Omega$, γράφεται ως

$$\int_{\Omega} q \frac{\partial R^p}{\partial b_n} d\Omega = - \int_{\Omega} q \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_j}{\partial b_n} \right) d\Omega$$

Εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση, ο όρος γίνεται

$$\int_{\Omega} q \frac{\partial R^p}{\partial b_n} d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(q \frac{\partial v_j}{\partial b_n} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial q}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial b_n} d\Omega$$

Εφαρμόζοντας τώρα το θεώρημα του Green, το ολοκλήρωμα $-\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(q \frac{\partial v_j}{\partial b_n} \right) d\Omega$ μετατρέπεται από χωρικό σε επιφανειακό,

$$\int_{\Omega} q \frac{\partial R^p}{\partial b_n} d\Omega = - \int_S q \frac{\partial v_j}{\partial b_n} n_j dS + \int_{\Omega} \frac{\partial q}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial b_n} d\Omega \quad (3.22)$$

Διαφορίζοντας την εξίσωση της ορμής, ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, προκύπτει

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_i^v}{\partial b_n} &= \frac{\partial}{\partial b_n} \left(v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial b_n} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(v \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right) \right] + \frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right) \\ &= \frac{\partial v_j}{\partial b_n} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_n} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v \frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial p}{\partial b_n} \right) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Με βάση τη σχέση 3.23, το ολοκλήρωμα $\int_{\Omega} u_i \frac{\partial R_i^v}{\partial b_n} d\Omega$, γράφεται ως

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_i \frac{\partial R_i^v}{\partial b_n} d\Omega &= \int_{\Omega} u_i \frac{\partial v_j}{\partial b_n} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Omega} u_i v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_n} \right) d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega} u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v \frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] d\Omega \\ &\quad + \int_{\Omega} u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial p}{\partial b_n} \right) d\Omega \end{aligned} \quad (3.24)$$

Κάθε όρος της εξίσωσης 3.24 θα αναπτυχθεί ξεχωριστά :

Ο όρος $\int_{\Omega} u_i v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_n} \right) d\Omega$, με χρήση παραγοντικής ολοκλήρωσης, αναπτύσσεται ως

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_i v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_n} \right) d\Omega &= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial b_n} \right) d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i v_j) \frac{\partial v_i}{\partial b_n} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial b_n} \right) d\Omega - \int_{\Omega} v_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial b_n} d\Omega - \int_{\Omega} u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial b_n} d\Omega \end{aligned} \quad (3.25)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση της συνέχειας $R^p = -\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0$, ο τελευταίος όρος της εξίσωσης 3.25 μηδενίζεται. Επιπροσθέτως, κάνοντας χρήση του θεωρήματος Green, και μετασχηματίζοντας το χωρικό ολοκλήρωμα $\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial b_n} \right) d\Omega$ σε επιφανειακό, η εξίσωση 3.25 γράφεται ως

$$\int_{\Omega} u_i v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_n} \right) d\Omega = \int_S u_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial b_n} n_j dS - \int_{\Omega} v_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial b_n} d\Omega \quad (3.26)$$

Ο όρος $-\int_{\Omega} u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v \frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] d\Omega$ της εξίσωσης 3.24, κάνοντας χρήση παραγοντικής ολοκλήρωσης, αναπτύσσεται ως

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v \frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] d\Omega = \\ & - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[u_i v \frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left[v \frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] d\Omega \\ & = - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[u_i v \left[\frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] \right] d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left[v \left[\frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] \right] d\Omega \end{aligned}$$

Κάνοντας χρήση του θεωρήματος Green, προκύπτει

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v \frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] d\Omega & = - \int_S u_i v \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_n} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial b_n} \right) \right] n_j dS \\ & + \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left[v \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_n} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial b_n} \right) \right] \right] d\Omega \end{aligned} \quad (3.27)$$

Ο όρος $\int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left[v \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_n} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial b_n} \right) \right] \right] d\Omega$, της εξίσωσης 3.27 χρήζει περαιτέρω ανάλυσης

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left[v \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_n} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial b_n} \right) \right] \right] d\Omega \\
&= \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_n} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial b_n} \right) d\Omega \\
&= \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_n} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} v \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_n} \right) d\Omega
\end{aligned}$$

Κάνοντας παραγοντική ολοκλήρωση, προκύπτει

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left[v \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_n} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial b_n} \right) \right] \right] d\Omega &= \int_{\Omega} v \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial b_n} \right) d\Omega \\
&\quad - \int_{\Omega} v \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \frac{\partial v_i}{\partial b_n} d\Omega + \int_{\Omega} v \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial b_n} \right) d\Omega - \int_{\Omega} v \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial b_n} d\Omega
\end{aligned}$$

Κάνοντας χρήση του θεωρήματος Green, προκύπτει

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left[v \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_n} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial b_n} \right) \right] \right] d\Omega &= \int_S v \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial b_n} n_j dS - \int_{\Omega} v \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \frac{\partial v_i}{\partial b_n} d\Omega \\
&\quad + \int_S v \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial b_n} n_j dS - \int_{\Omega} v \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial b_n} d\Omega \\
&= \int_S v \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial b_n} n_j dS - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \frac{\partial v_i}{\partial b_n} d\Omega \quad (3.28)
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση 3.28 στην εξίσωση 3.27, και αλλάζοντας τη σειρά παραγωγίσης ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού και ως προς τις χωρικές συντεταγμένες, η τελευταία ξαναγράφεται ως

$$\begin{aligned}
- \int_{\Omega} u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v \frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] d\Omega &= - \int_S u_i v \left[\frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] n_j dS \\
&\quad + \int_S v \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial b_n} n_j dS \\
&\quad - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \frac{\partial v_i}{\partial b_n} d\Omega \quad (3.29)
\end{aligned}$$

Ο όρος $\int_{\Omega} u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial p}{\partial b_n} \right) d\Omega$, της εξίσωσης 3.24, κάνοντας χρήση παραγοντικής ολοκλήρωσης, αναπτύσσεται ως

$$\int_{\Omega} u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial p}{\partial b_n} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(u_i \frac{\partial p}{\partial b_n} \right) d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial b_n} d\Omega$$

Κάνοντας χρήση του θεωρήματος Green, προκύπτει

$$\int_{\Omega} u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial p}{\partial b_n} \right) d\Omega = \int_S u_i \frac{\partial p}{\partial b_n} n_i dS - \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial b_n} d\Omega \quad (3.30)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις 3.26, 3.29, 3.30 στην εξίσωση 3.24, η τελευταία ξαναγράφεται ως

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_i \frac{\partial R_i^v}{\partial b_n} d\Omega &= \int_{\Omega} u_i \frac{\partial v_j}{\partial b_n} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega + \int_S u_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial b_n} n_j dS - \int_{\Omega} v_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial b_n} d\Omega \\ &\quad - \int_S u_i v \left[\frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] n_j dS \\ &\quad + \int_S v \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial b_n} n_j dS - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \frac{\partial v_i}{\partial b_n} d\Omega \\ &\quad + \int_S u_i \frac{\partial p}{\partial b_n} n_i dS - \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial b_n} d\Omega \end{aligned} \quad (3.31)$$

Διαφορίζοντας την εξίσωση της ενέργειας ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, προκύπτει

$$\begin{aligned} \frac{\partial R^T}{\partial b_n} &= \frac{\partial}{\partial b_n} \left[c_p v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right] - \frac{\partial}{\partial b_n} \left[c_p \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{v}{Pr} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \right] \\ &= c_p \frac{\partial v_j}{\partial b_n} \frac{\partial T}{\partial x_j} + c_p v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T}{\partial b_n} \right) - \frac{c_p}{Pr} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T}{\partial b_n} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.32)$$

Σύμφωνα με τη σχέση 3.32, το ολοκλήρωμα $\int_{\Omega} T^a \frac{\partial R^T}{\partial b_n} d\Omega$, της εξίσωσης 3.18 αναλύεται ως

$$\int_{\Omega} T^a \frac{\partial R^T}{\partial b_n} d\Omega = \int_{\Omega} c_p T^a \frac{\partial v_j}{\partial b_n} \frac{\partial T}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Omega} c_p T^a v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T}{\partial b_n} \right) d\Omega - \int_{\Omega} \frac{c_p}{Pr} T^a \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T}{\partial b_n} \right) \right] d\Omega \quad (3.33)$$

Οι δύο τελευταίοι όροι της εξίσωσης 3.33, θα αναλυθούν περαιτέρω. Ο όρος $\int_{\Omega} c_p T^a v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T}{\partial b_n} \right) d\Omega$, κάνοντας χρήση παραγοντικής ολοκλήρωσης, ξαναγράφεται ως

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} c_p T^a v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T}{\partial b_n} \right) d\Omega &= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[c_p T^a v_j \frac{\partial T}{\partial b_n} \right] d\Omega - \int_{\Omega} c_p \frac{\partial}{\partial x_j} (T^a v_j) \frac{\partial T}{\partial b_n} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[c_p T^a v_j \frac{\partial T}{\partial b_n} \right] d\Omega - \int_{\Omega} c_p v_j \frac{\partial T^a}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial b_n} d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega} c_p T^a \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial b_n} d\Omega \end{aligned} \quad (3.34)$$

Ο όρος $\frac{\partial v_j}{\partial x_j}$, του τελευταίου ολοκληρώματος μηδενίζεται εξαιτίας της εξίσωσης της συνέχειας. Επίσης, κάνοντας χρήση του θεωρήματος Green, η εξίσωση 3.34 ξαναγράφεται ως

$$\int_{\Omega} c_p T^a v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T}{\partial b_n} \right) d\Omega = \int_S c_p T^a v_j \frac{\partial T}{\partial b_n} n_j dS - \int_{\Omega} c_p v_j \frac{\partial T^a}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial b_n} d\Omega \quad (3.35)$$

Ο όρος $-\int_{\Omega} \frac{c_p}{Pr} T^a \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T}{\partial b_n} \right) \right]$ της εξίσωσης 3.33, ξαναγράφεται, εκτελώντας παραγοντική ολοκλήρωση

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \frac{c_p}{Pr} T^a \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T}{\partial b_n} \right) \right] &= - \int_{\Omega} \frac{c_p}{Pr} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v T^a \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T}{\partial b_n} \right) \right] d\Omega \\ &\quad + \int_{\Omega} \frac{c_p}{Pr} \frac{\partial T^a}{\partial x_j} v \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T}{\partial b_n} \right) d\Omega \end{aligned}$$

Κάνοντας χρήση του θεωρήματος Green, και μετασχηματίζοντας το χωρικό ολοκλήρωμα $-\int_{\Omega} \frac{c_p}{Pr} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v T^a \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T}{\partial b_n} \right) \right] d\Omega$ σε επιφανειακό, προκύπτει

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} \frac{c_p}{Pr} T^a \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T}{\partial b_n} \right) \right] &= -\int_S \frac{c_p}{Pr} v T^a \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T}{\partial b_n} \right) n_j dS \\ &+ \int_{\Omega} \frac{c_p}{Pr} \frac{\partial T^a}{\partial x_j} v \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T}{\partial b_n} \right) d\Omega \end{aligned}$$

Κάνοντας ξανά χρήση παραγοντικής ολοκλήρωσης, ο όρος

$-\int_{\Omega} \frac{c_p}{Pr} T^a \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T}{\partial b_n} \right) \right]$, γράφεται ως

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} \frac{c_p}{Pr} T^a \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T}{\partial b_n} \right) \right] &= -\int_S \frac{c_p}{Pr} v T^a \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T}{\partial b_n} \right) n_j dS \\ &+ \int_{\Omega} \frac{c_p}{Pr} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial T^a}{\partial x_j} v \frac{\partial T}{\partial b_n} \right] d\Omega \\ &- \int_{\Omega} \frac{c_p}{Pr} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T^a}{\partial x_j} \right) v \frac{\partial T}{\partial b_n} d\Omega \end{aligned}$$

Τέλος, σύμφωνα με το θεώρημα Green, και το μετασχηματισμό του ολοκληρώματος $\int_{\Omega} \frac{c_p}{Pr} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial T^a}{\partial x_j} v \frac{\partial T}{\partial b_n} \right] d\Omega$, από χωρικό σε επιφανειακό, ο εν λόγω όρος παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} \frac{c_p}{Pr} T^a \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T}{\partial b_n} \right) \right] &= -\int_S \frac{c_p}{Pr} v T^a \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T}{\partial b_n} \right) n_j dS \\ &+ \int_S \frac{c_p}{Pr} v \frac{\partial T^a}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial b_n} n_j dS \\ &- \int_{\Omega} \frac{c_p}{Pr} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(v \frac{\partial T^a}{\partial x_j} \right) \frac{\partial T}{\partial b_n} d\Omega \quad (3.36) \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις 3.35 και 3.36, στην εξίσωση 3.33, η τελευταία γράφεται ως

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} T^a \frac{\partial R^T}{\partial b_n} d\Omega &= \int_{\Omega} c_p T^a \frac{\partial v_j}{\partial b_n} \frac{\partial T}{\partial x_j} d\Omega + \int_S c_p T^a v_j \frac{\partial T}{\partial b_n} n_j dS - \int_{\Omega} c_p v_j \frac{\partial T^a}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial b_n} d\Omega \\
&- \int_S \frac{c_p}{Pr} v T^a \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T}{\partial b_n} \right) n_j dS + \int_S \frac{c_p}{Pr} v \frac{\partial T^a}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial b_n} n_j dS \\
&- \int_{\Omega} \frac{c_p}{Pr} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(v \frac{\partial T^a}{\partial x_j} \right) \frac{\partial T}{\partial b_n} d\Omega
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις 3.22, 3.31, 3.37 στην εξίσωση 3.18, η έκφραση της παραγώγου της επαυξημένης αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_n} &= \frac{\partial F}{\partial b_n} - \int_S q \frac{\partial v_j}{\partial b_n} n_j dS + \int_{\Omega} \frac{\partial q}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial b_n} d\Omega + \int_{\Omega} u_i \frac{\partial v_j}{\partial b_n} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega \\
&+ \int_S u_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial b_n} n_j dS - \int_{\Omega} v_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial b_n} d\Omega \\
&- \int_S u_i v \left[\frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] n_j dS \\
&+ \int_S v \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial b_n} n_j dS - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \frac{\partial v_i}{\partial b_n} d\Omega \\
&+ \int_S u_i \frac{\partial p}{\partial b_n} n_i dS - \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial b_n} d\Omega + \int_{\Omega} c_p T^a \frac{\partial v_j}{\partial b_n} \frac{\partial T}{\partial x_j} d\Omega \\
&+ \int_S c_p T^a v_j \frac{\partial T}{\partial b_n} n_j dS - \int_{\Omega} c_p v_j \frac{\partial T^a}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial b_n} d\Omega \\
&- \int_S \frac{c_p}{Pr} v T^a \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T}{\partial b_n} \right) n_j dS + \int_S \frac{c_p}{Pr} v \frac{\partial T^a}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial b_n} n_j dS \\
&- \int_{\Omega} \frac{c_p}{Pr} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(v \frac{\partial T^a}{\partial x_j} \right) \frac{\partial T}{\partial b_n} d\Omega
\end{aligned}$$

Τέλος, συγχωνεύονται τα χωρικά και τα επιφανειακά ολοκληρώματα που περιέχουν τον ίδιο όρο παραγώγου μεταβλητής της ροής ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού $(\frac{\partial v_i}{\partial b_n}, \frac{\partial p}{\partial b_n}, \frac{\partial T}{\partial b_n})$.

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_n} &= \frac{\partial F}{\partial b_n} + \int_S \left[-qn_i + u_i v_j n_j + v \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j \right] \frac{\partial v_i}{\partial b_n} dS \\
&\quad - \int_S u_i v \frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j dS + \int_S u_i \frac{\partial p}{\partial b_n} n_i dS \\
&\quad + \int_S \left(c_p T^a v_j n_j + \frac{c_p}{Pr} v \frac{\partial T^a}{\partial x_j} n_j \right) \frac{\partial T}{\partial b_n} dS \\
&\quad - \int_S \frac{c_p}{Pr} T^a \frac{\partial}{\partial x_j} \left(v \frac{\partial T}{\partial b_n} \right) n_j dS + \int_\Omega \left(-\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) \frac{\partial p}{\partial b_n} d\Omega \\
&\quad + \int_\Omega \left(\frac{\partial q}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - v_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + c_p T^a \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial b_n} d\Omega \\
&\quad + \int_\Omega \left[-c_p v_j \frac{\partial T^a}{\partial x_j} - \frac{c_p}{Pr} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(v \frac{\partial T^a}{\partial x_j} \right) \right] \frac{\partial T}{\partial b_n} d\Omega \tag{3.38}
\end{aligned}$$

3.4 Οι Συζυγείς Εξισώσεις

Στην εξίσωση 3.38 της παραγώγου της επαυξημένης αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, εμφανίζονται χωρικά ολοκληρώματα που περιέχουν τις παραγώγους των μεταβλητών κατάστασης $\frac{\partial v_i}{\partial b_n}, \frac{\partial p}{\partial b_n}, \frac{\partial T}{\partial b_n}$. Οι παράγωγοι αυτές θα μπορούσαν να υπολογισθούν με τη μέθοδο της ευθείας διαφόρισης ή με αυτή των πεπερασμένων διαφορών. Αυτό είναι κάτι το οποίο έχει πολύ υψηλό υπολογιστικό κόστος, το οποίο είναι ευθέως ανάλογο του αριθμού των μεταβλητών σχεδιασμού. Προκειμένου να αποφευχθεί αυτός ο υπολογισμός, απαλείφονται τα αντίστοιχα χωρικά ολοκληρώματα, θέτοντας

τους όρους που αυτά περιέχουν ίσους με μηδέν. Έτσι προκύπτουν οι λεγόμενες πεδιακές συζυγείς εξισώσεις (adjoint field equations),

$$R^q = -\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.39)$$

$$R_i^u = \frac{\partial q}{\partial x_i} + u_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - v_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + c_p T^a \frac{\partial T}{\partial x_i} = 0 \quad (3.40)$$

$$R^{T^a} = -c_p v_j \frac{\partial T^a}{\partial x_j} - \frac{c_p}{Pr} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(v \frac{\partial T^a}{\partial x_j} \right) = 0 \quad (3.41)$$

Η εξίσωση 3.39 ονομάζεται συζυγής εξίσωση διατήρησης της παροχής, η εξίσωση 3.40 εξίσωση συζυγούς ταχύτητας και η εξίσωση 3.41 είναι η εξίσωση συζυγούς θερμοκρασίας της ροής.

Οι εξισώσεις αυτές έχουν παρόμοια μορφή με τις εξισώσεις ροής του πρωτεύοντος προβλήματος. Για την επίλυσή τους θα χρησιμοποιηθεί αλγόριθμος παρόμοιας μορφής με τον SIMPLE που χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση των πρωτεύουσών εξισώσεων, με κάποιες μικρές τροποποιήσεις [2]. Το υπολογιστικό κόστος επίλυσης των συζυγών εξισώσεων, είναι περίπου το ίδιο, με αυτό της επίλυσης του πρωτεύοντος προβλήματος. Συνεπώς, το συνολικό υπολογιστικό κόστος ανά κύκλο βελτιστοποίησης ενός προβλήματος βελτιστοποίησης με N μεταβλητές σχεδιασμού, είναι ανεξάρτητο του πλήθους των μεταβλητών σχεδιασμού, και ίσο με δύο περίπου φορές το υπολογιστικό κόστος για την επίλυση των εξισώσεων ροής του πρωτεύοντος προβλήματος.

Εδώ γίνεται αντιληπτό το μεγάλο πλεονέκτημα της συζυγούς μεθόδου έναντι άλλων μεθόδων υπολογισμού της παραγωγού ευαισθησίας. Το κέρδος, χρησιμοποιώντας αυτήν τη μέθοδο, γίνεται μεγαλύτερο όσο μεγαλώνει ο αριθμός N των μεταβλητών σχεδιασμού.

Έχοντας μηδενίσει τα χωρικά ολοκληρώματα της σχέσης 3.38 σύμφωνα με τις εξισώσεις 3.39, 3.40, 3.41, η παράγωγος της επαυξημένης αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού $\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_n}$, παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_n} &= \frac{\partial F}{\partial b_n} + \int_S \left[-qn_i + u_i v_j n_j + v \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j \right] \frac{\partial v_i}{\partial b_n} dS \\
&\quad - \int_S u_i v \frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j dS + \int_S u_i \frac{\partial p}{\partial b_n} n_i dS \\
&\quad + \int_S \left(c_p T^a v_j n_j + \frac{c_p}{Pr} v \frac{\partial T^a}{\partial x_j} n_j \right) \frac{\partial T}{\partial b_n} dS \\
&\quad - \int_S \frac{c_p}{Pr} T^a \frac{\partial}{\partial x_j} \left(v \frac{\partial T}{\partial b_n} \right) n_j dS \tag{3.42}
\end{aligned}$$

3.5 Οι Συζυγείς Οριακές Συνθήκες

Προκειμένου να γραφτεί η εξίσωση 3.42 στην ολοκληρωμένη μορφή της, και να διατυπωθεί η τελική έκφραση της παραγώγου ευαισθησίας, αλλά και να ορισθούν οι συζυγείς οριακές συνθήκες, είναι απαραίτητη η διαφόριση της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού.

Όπως έχει εκφραστεί στη σχέση 3.1, η αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος έχει τη μορφή

$$F = \int_{S_{mw}} \rho \frac{c_p}{Pr} v \frac{\partial T}{\partial x_i} n_i dS$$

Παραγωγίζοντας την εξίσωση 3.1 ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, προκύπτει

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial b_n} &= \frac{\partial}{\partial b_n} \int_{S_{mw}} \rho \frac{c_p}{Pr} v \frac{\partial T}{\partial x_i} n_i dS \\
&= \int_{S_{mw}} \rho \frac{c_p}{Pr} v \frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \right) n_i dS
\end{aligned}$$

$$= \int_{S_{mw}} \rho \frac{c_p}{Pr} v \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial T}{\partial b_n} \right) n_i dS \quad (3.43)$$

Ενσωματώνοντας την εξίσωση 3.43, στη σχέση 3.42, η τελευταία παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_n} = & \int_{S_{mw}} \rho \frac{c_p}{Pr} v \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial T}{\partial b_n} \right) n_i dS \\ & + \underbrace{\int_S \left[-qn_i + u_i v_j n_j + v \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j \right] \frac{\partial v_i}{\partial b_n} dS}_{I_1} \\ & - \underbrace{\int_S u_i v \frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j dS}_{I_2} + \underbrace{\int_S u_i \frac{\partial p}{\partial b_n} n_i dS}_{I_3} \\ & + \underbrace{\int_S \left(c_p T^a v_j n_j + \frac{c_p}{Pr} v \frac{\partial T^a}{\partial x_j} n_j \right) \frac{\partial T}{\partial b_n} dS}_{I_4} \\ & - \underbrace{\int_S \frac{c_p}{Pr} v T^a \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T}{\partial b_n} \right) n_j dS}_{I_5} \end{aligned} \quad (3.44)$$

Το όριο S αναλύεται στα τέσσερα επιμέρους όρια του χωρίου, όπως αναλύθηκε στο κεφάλαιο 2, το οποίο εκφράζεται από τη σχέση $S = S_{mw} \cup S_{RW} \cup S_{LW} \cup S_{tw}$.

Σύμφωνα με αυτό, κάθε ολοκλήρωμα της σχέσης 3.44, το οποίο υπολογίζεται στο όριο S , (I_1, I_2, I_3, I_4, I_5), αναλύεται σε τέσσερα επιμέρους ολοκληρώματα, το καθένα από τα οποία υπολογίζεται σε ένα από τα όρια S_{mw} , S_{RW} , S_{LW} , S_{tw} .

Αναλύοντας το κάθε όριο ξεχωριστά, προκύπτουν οι αντίστοιχες συζυγείς οριακές συνθήκες στο καθένα και η τελική έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας.

3.5.1 Συζυγείς Οριακές Συνθήκες στο S_{mw}

Στο άνω κινούμενο τοίχωμα του χωρίου, έχει ορισθεί Dirichlet οριακή συνθήκη για την ταχύτητα, η οποία είναι ίση με την ταχύτητα κίνησης του τοιχώματος αυτού. Αυτό σημαίνει πως οι συνιστώσες της ταχύτητας u_i είναι ανεξάρτητες από τις τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού, συνεπώς η αντίστοιχη παράγωγος $\frac{\partial u_i}{\partial b_n}$ είναι ίση με μηδέν. Αυτό συνεπάγεται ότι στο όριο S_{mw} ισχύει

$$I_1 = 0$$

Για τη θερμοκρασία, έχει επίσης ορισθεί οριακή συνθήκη Dirichlet, κάτι που σημαίνει ότι και η παράγωγος $\frac{\partial T}{\partial b_n}$ είναι επίσης μηδενική. Σύμφωνα με αυτό, σε αυτό το όριο ισχύει

$$I_4 = 0$$

Το προερχόμενο από την αντικειμενική συνάρτηση ολοκλήρωμα $\int_{S_{mw}} \rho \frac{c_p}{Pr} v \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial T}{\partial b_n} \right) n_i dS$ συγχωνεύεται με το I_5 , δημιουργώντας τον όρο

$$\int_{S_{mw}} (\rho - T^a) \frac{c_p}{Pr} v \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial T}{\partial b_n} \right) n_i dS$$

Για να απαλειφθεί ο όρος αυτός, προκειμένου να αποφευχθεί ο υπολογισμός του $\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial T}{\partial b_n} \right)$, επιβάλλεται η παρακάτω οριακή συνθήκη για τη συζυγή θερμοκρασία

$$T^a = \rho \quad (3.45)$$

Για να μηδενιστούν οι όροι I_2 και I_3 της εξίσωσης 3.44, αρκεί να επιβληθεί οριακή συνθήκη για τις συζυγείς συνιστώσες της ταχύτητας

$$u_i = 0 \quad (3.46)$$

οπότε

$$I_2 = I_3 = 0$$

Τέλος, για τη συζυγή πίεση, επιβάλλεται μηδενική συνθήκη Neumann

$$\frac{\partial q}{\partial n} = 0 \quad (3.47)$$

Συνεπώς, στο όριο S_{mw} όλα τα επιφανειακά ολοκληρώματα της σχέσης 3.44 μηδενίζονται.

3.5.2 Συζυγείς Οριακές Συνθήκες στο S_{tw}

Στο κάτω θερμαινόμενο τοίχωμα έχει επιβληθεί για την ταχύτητα Dirichlet οριακή συνθήκη με μηδενική τιμή, λόγω της συνθήκης μη-εισχώρησης, έτσι όπως και στο όριο S_{mw} , και εδώ ισχύει

$$I_1 = 0$$

Για τη θερμοκρασία, έχει ορισθεί επίσης οριακή συνθήκη τύπου Dirichlet αφού εκεί η στατική θερμοκρασία είναι σταθερή και γνωστή. Συνεπώς, η παράγωγος $\frac{\partial T}{\partial b_n}$ μηδενίζεται, απαλείφοντας τον όρο

$$I_4 = 0$$

Προκειμένου να αποφευχθεί ο υπολογισμός του όρου I_5 , ορίζεται οριακή συνθήκη τύπου Dirichlet μηδενικής τιμής για τη συζυγή θερμοκρασία,

$$T^a = 0 \quad (3.48)$$

Συνεπώς ισχύει και εδώ

$$I_5 = 0$$

Για τις συνιστώσες της συζυγούς ταχύτητας και την συζυγή πίεση επιβάλλονται οι ίδιες συνθήκες όπως και στο όριο S_{mw}

$$u_i = 0 \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial q}{\partial n} = 0 \quad (3.50)$$

Με τις συγκεκριμένες οριακές συνθήκες, και στο όριο S_{tw} , όλοι οι όροι της εξίσωσης 3.44 μηδενίζονται.

Συνοπτικά, ισχύει ό,τι και στο S_{mw} μόνο που εδώ η συζυγής θερμοκρασία είναι $T^a = 0$ αντί για $T^a = \rho$, επειδή σε αυτό το όριο δεν ορίζεται η αντικειμενική συνάρτηση.

3.5.3 Συζυγείς Οριακές Συνθήκες στο S_{Lw}

Όπως έχει προαναφερθεί, η αριστερή πλευρά του χωρίου ορίζεται ως μία ενιαία επιφάνεια, αποτελούμενη ουσιαστικά από το μέρος το οποίο αποτελεί το αδιαβατικό τοίχωμα και από την είσοδο της δέσμης ρευστού.

Ορίζοντας για τις συζυγείς συνιστώσες της ταχύτητας οριακή συνθήκη Dirichlet μηδενικής τιμής σε όλο το τοίχωμα S_{Lw} , μηδενίζονται τελείως οι όροι I_2 και I_3 της εξίσωσης 3.44

$$u_i = 0 \quad (3.51)$$

με

$$I_2 = I_3 = 0$$

Επίσης, απαλείφεται ο όρος $u_i v_j n_j$ του ολοκληρώματος I_1

$$u_i v_j n_j = 0 \quad (3.52)$$

Έτσι, ενώ στο στερεό τοίχωμα ο όρος αυτός είναι μηδενικός λόγω της μηδενικής κάθετης ταχύτητας της ροής, τώρα μηδενίζεται και στη θέση της εισόδου της δέσμης στην οποία υπάρχει μη-μηδενική κάθετη ταχύτητα αλλά έχει πλέον επιβληθεί μηδενική συζυγής ταχύτητα.

Για την ανάλυση των εναπομεινάντων όρων I_1, I_4 και I_5 θα παραγωγιστούν ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού οι εκφράσεις των οριακών συνθηκών για την ταχύτητα και τη θερμοκρασία, όπως αυτές διατυπώθηκαν στο κεφάλαιο 2 στις σχέσεις 2.29, 2.30, 2.31 και 2.32.

Διαφορίζοντας την οριακή συνθήκη της κάθετης ταχύτητας προκύπτει

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_j}{\partial b_n} n_j (1 - \varphi) - v_j n_j \frac{\partial \varphi}{\partial b_n} + \frac{\partial v_j}{\partial b_n} n_j \varphi + (v_j n_j + v_{jet}) \frac{\partial \varphi}{\partial b_n} = 0 \Rightarrow \\ \frac{\partial v_j}{\partial b_n} n_j = -v_{jet} \frac{\partial \varphi}{\partial b_n} \end{aligned} \quad (3.53)$$

Οι υπόλοιπες, πλην της κάθετης, συνιστώσες της ταχύτητας είναι μηδενικές σε ολόκληρη την έκταση του ορίου και δεν έχουν εξάρτηση από τις μεταβλητές σχεδιασμού, οπότε και η παράγωγος $\frac{\partial v_{2,3}}{\partial b_n}$ μηδενίζεται

$$\frac{\partial v_{2,3}}{\partial b_n} = 0 \quad (3.54)$$

Συνεπώς, ο όρος $\frac{\partial v_1}{\partial b_n}$ γράφεται ως

$$\frac{\partial v_1}{\partial b_n} = -\frac{\partial v_j}{\partial b_n} n_j \Rightarrow$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial b_n} = v_{jet} \frac{\partial \varphi}{\partial b_n} \quad (3.55)$$

Αυτό ισχύει επειδή στο όριο S_{Lw} το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα n_j με κατεύθυνση εξωτερικά του χωρίου ορίζεται ως

$$n_j = [-1, 0, 0]^T$$

Διαφορίζοντας την οριακή συνθήκη της θερμοκρασίας προκύπτει

$$\frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} \right) n_j (1 - \varphi) - \frac{\partial T}{\partial x_j} n_j \frac{\partial \varphi}{\partial b_n} + \frac{\partial T}{\partial b_n} \varphi + (T - T_{jet}) \frac{\partial \varphi}{\partial b_n} = 0 \quad (3.56)$$

Όπως αναμένεται, υπάρχουν σημεία στην επιφάνεια που η συνάρτηση φ μηδενίζεται και σημεία στα οποία παίρνει τιμή ίση με τη μονάδα μηδενίζοντας έτσι τον όρο $(1 - \varphi)$. Πρακτικά δεν λαμβάνει ποτέ αυτές τις τιμές, αλλά τις πλησιάζει επαρκώς, κάτι που δημιουργεί πρόβλημα στους υπολογισμούς. Συνεπώς θα χωριστούν δύο υποκατηγορίες για την ανάλυση, σύμφωνα με την τιμή της συνάρτησης φ .

- Για $\varphi < 0.001$

Σε αυτήν την περίπτωση ο όρος $(1 - \varphi)$ είναι σίγουρα μεγαλύτερος του μηδενός, οπότε μπορεί να γίνει διαίρεση με αυτό τον όρο. Τότε, η εξίσωση 3.56 παίρνει τη μορφή

$$\frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} \right) n_j = \left[\frac{\partial T}{\partial x_j} n_j \frac{\partial \varphi}{\partial b_n} - \frac{\partial T}{\partial b_n} \varphi - (T - T_{jet}) \frac{\partial \varphi}{\partial b_n} \right] \frac{1}{1 - \varphi} \quad (3.57)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις 3.55, 3.57 στην έκφραση της παραγώγου της επαυξημένης αντικειμενικής συνάρτησης της εξίσωσης 3.44, προκύπτει

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_n} &= \int_{S_{Lw}} \left[-qn_i + v \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j \right] v_{jet} \frac{\partial \varphi}{\partial b_n} dS \\
&\quad + \int_{S_{Lw}} \left(c_p T^a v_j n_j + \frac{c_p}{Pr} v \frac{\partial T^a}{\partial x_j} n_j \right) \frac{\partial T}{\partial b_n} dS \\
&\quad - \int_{S_{Lw}} \frac{c_p}{Pr} v T^a \left[\frac{\partial T}{\partial x_j} n_j \frac{\partial \varphi}{\partial b_n} - \frac{\partial T}{\partial b_n} \varphi - (T - T_{jet}) \frac{\partial \varphi}{\partial b_n} \right] \frac{1}{1 - \varphi} ds \Rightarrow \\
\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_n} &= \int_{S_{Lw}} \left(c_p T^a v_j n_j + \frac{c_p}{Pr} v \frac{\partial T^a}{\partial x_j} n_j + \frac{c_p}{Pr} v T^a \frac{\varphi}{1 - \varphi} \right) \frac{\partial T}{\partial b_n} dS \\
&\quad + \int_{S_{Lw}} \left[-qn_1 v_{jet} + v \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) n_j v_{jet} - \right. \\
&\quad \left. \frac{c_p}{Pr} v T^a \frac{1}{1 - \varphi} \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} n_j - T + T_{jet} \right) \right] \frac{\partial \varphi}{\partial b_n} dS \quad (3.58)
\end{aligned}$$

Για να αποφευχθεί ο υπολογισμός του υπολογιστικά ακριβούς όρου $\frac{\partial T}{\partial b_n}$, μηδενίζεται η έκφραση που περιέχεται στο αντίστοιχο ολοκλήρωμα. Έτσι η οριακή συνθήκη της συζυγούς θερμοκρασίας παίρνει τη μορφή

$$\left(v_j n_j + \frac{v}{Pr} \frac{\varphi}{1 - \varphi} \right) T^a + \frac{v}{Pr} \frac{\partial T^a}{\partial x_j} n_j = 0 \quad (3.59)$$

Η συνθήκη αυτή είναι τύπου Robin. Ο εναπομείνας όρος αποτελεί την παράγωγο ευαισθησίας σε εκείνο το τμήμα της επιφάνειας.

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_n} = \int_{S_{Lw}} \left[-qn_1 v_{jet} + v \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) n_j v_{jet} - \frac{c_p}{Pr} v T^a \frac{1}{1-\varphi} \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} n_j - T + T_{jet} \right) \right] \frac{\partial \varphi}{\partial b_n} dS \quad (3.60)$$

- Για $\varphi > 0.001$

Σε αυτήν την περίπτωση η τιμή της συνάρτησης φ είναι σίγουρα μεγαλύτερη του μηδενός, οπότε μπορεί να γίνει διαίρεση με αυτόν τον όρο και η εξίσωση 3.56 παίρνει τη μορφή

$$\frac{\partial T}{\partial b_n} = \frac{1}{\varphi} \left[\frac{\partial T}{\partial x_j} n_j \frac{\partial \varphi}{\partial b_n} - \frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} \right) n_j (1-\varphi) - (T - T_{jet}) \frac{\partial \varphi}{\partial b_n} \right] \quad (3.61)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις 3.55, 3.59 στην έκφραση της παραγώγου της επαυξημένης αντικειμενικής συνάρτησης της εξίσωσης 3.44, προκύπτει

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_n} &= \int_{S_{Lw}} \left[-q + v \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) n_j \right] v_{jet} \frac{\partial \varphi}{\partial b_n} dS \\ &+ \int_{S_{Lw}} \left(c_p T^a v_j n_j + \frac{c_p}{Pr} v \frac{\partial T^a}{\partial x_j} n_j \right) \frac{1}{\varphi} \left[\frac{\partial T}{\partial x_j} n_j \frac{\partial \varphi}{\partial b_n} - \frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} \right) n_j (1-\varphi) - (T - T_{jet}) \frac{\partial \varphi}{\partial b_n} \right] \\ &- \int_{S_{Lw}} \frac{c_p}{Pr} v T^a \frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} \right) n_j dS \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_n} &= \int_{S_{Lw}} \left[- \left(c_p T^a v_j n_j + \frac{c_p}{Pr} v \frac{\partial T^a}{\partial x_j} n_j \right) \frac{1-\varphi}{\varphi} \right. \\ &\quad \left. - \frac{c_p}{Pr} v T^a \right] \frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} \right) n_j dS \\ &+ \int_{S_{Lw}} \left[-qn_1 v_{jet} + v \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) n_j v_{jet} + \right. \end{aligned}$$

$$\left(c_p T^a v_j n_j + \frac{c_p}{Pr} v \frac{\partial T^a}{\partial x_j} n_j \right) \frac{1}{\varphi} \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} n_j - T + T_{jet} \right) \left] \frac{\partial \varphi}{\partial b_n} dS \quad (3.62)$$

Αυτή τη φορά, η οριακή συνθήκη της συζυγούς θερμοκρασίας παίρνει τη μορφή

$$\left(v_j n_j \frac{1 - \varphi}{\varphi} + \frac{v}{Pr} \right) T^a + \frac{v}{Pr} \frac{1 - \varphi}{\varphi} \frac{\partial T^a}{\partial x_j} n_j = 0 \quad (3.63)$$

ενώ η παράγωγος ευαισθησίας είναι

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_n} = \int_{S_{Lw}} \left[-q n_1 v_{jet} + v \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) n_j v_{jet} + \right. \\ \left. \left(c_p T^a v_j n_j + \frac{c_p}{Pr} v \frac{\partial T^a}{\partial x_j} n_j \right) \frac{1}{\varphi} \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} n_j - T + T_{jet} \right) \right] \frac{\partial \varphi}{\partial b_n} dS \quad (3.64) \end{aligned}$$

Συνολικά, η οριακή συνθήκη της θερμοκρασίας η οποία επιβάλλεται στην αριστερή κάθετη επιφάνεια S_{Lw} λαμβάνει τη μορφή

$$\mathbf{BC}_{Lw} = \begin{cases} \left(c_p v_j n_j + \frac{c_p}{Pr} v \frac{\varphi}{1 - \varphi} \right) T^a + \frac{c_p}{Pr} v \frac{\partial T^a}{\partial x_j} n_j = 0 & , \varphi < 0.001 \\ \left(c_p v_j n_j \frac{1 - \varphi}{\varphi} + \frac{c_p}{Pr} v \right) T^a + \frac{c_p}{Pr} v \frac{1 - \varphi}{\varphi} \frac{\partial T^a}{\partial x_j} n_j = 0 & , \varphi > 0.001 \end{cases} \quad (3.65)$$

ενώ η παράγωγος της επαυξημένης αντικειμενικής συνάρτησης

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_n} = & \int_{S_{Lw}|\varphi < 0.001} \left[-qn_1 v_{jet} + v \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) n_j v_{jet} - \frac{c_p}{Pr} v T^a \frac{1}{1-\varphi} \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} n_j - T \right. \right. \\
& \left. \left. + T_{jet} \right) \right] \frac{\partial \varphi}{\partial b_n} dS + \\
& \int_{S_{Lw}|\varphi > 0.001} \left[-qn_1 v_{jet} + v \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) n_j v_{jet} + \right. \\
& \left. \left(c_p T^a v_j n_j + \frac{c_p}{Pr} v \frac{\partial T^a}{\partial x_j} n_j \right) \frac{1}{\varphi} \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} n_j - T + T_{jet} \right) \right] \frac{\partial \varphi}{\partial b_n} dS \quad (3.66)
\end{aligned}$$

3.5.4 Συζυγείς Οριακές Συνθήκες στο S_{Rw}

Όπως έγινε και στο S_{Lw} , έτσι και εδώ θα ορισθούν οι οριακές συνθήκες με βάση τα ίδια κριτήρια.

Επιβάλλοντας μηδενική συνθήκη Dirichlet για τη συζυγή ταχύτητα, απαλείφονται τα ολοκληρώματα I_2 και I_3 της εξίσωσης 3.44

$$u_i = 0 \quad (3.67)$$

με

$$I_2 = I_3 = 0$$

Επίσης, απαλείφεται ο όρος $u_i v_j n_j$ του ολοκληρώματος I_1

$$u_i v_j n_j = 0 \quad (3.68)$$

Για τη συζυγή πίεση, ορίζεται και εδώ μηδενική συνθήκη τύπου Neumann

$$\frac{\partial q}{\partial n} = 0 \quad (3.69)$$

Εδώ έχει επιβληθεί για την πρωτεύουσα θερμοκρασία μηδενική συνθήκη Neumann σε όλη την έκταση του ορίου, οπότε ο όρος $\frac{\partial T}{\partial x_j} n_j$ και κατ' επέκταση και ο όρος $\frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} \right) n_j$ μηδενίζεται. Αυτό οδηγεί στον μηδενισμό του όρου I_5 της εξίσωσης 3.44

$$I_5 = 0$$

Παραγωγίζοντας την οριακή συνθήκη της πρωτεύουσας ταχύτητας προκύπτει

$$\frac{\partial v_j}{\partial b_n} n_j = v_{jet} \frac{\partial \varphi}{\partial b_n} \quad (3.70)$$

Όπως και στο όριο S_{LW} , έτσι και εδώ οι συνιστώσες $\frac{\partial v_{2,3}}{\partial b_n}$ μηδενίζονται και έτσι ο όρος $\frac{\partial v_1}{\partial b_n}$ γράφεται ως

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial b_n} &= \frac{\partial v_j}{\partial b_n} n_j \Rightarrow \\ \frac{\partial v_1}{\partial b_n} &= v_{jet} \frac{\partial \varphi}{\partial b_n} \end{aligned} \quad (3.71)$$

Εδώ, σε αντίθεση με το όριο S_{LW} , το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα n_j ορίζεται ως

$$n_j = [1,0,0]^T$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση 3.71 στην εξίσωση 3.44 προκύπτει

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_n} &= \int_{S_{RW}} \left[-qn_1 + v \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) n_j \right] v_{jet} \frac{\partial \varphi}{\partial b_n} dS \\ &+ \int_{S_{RW}} \left(c_p T^a v_j n_j + \frac{c_p}{Pr} v \frac{\partial T^a}{\partial x_j} n_j \right) \frac{\partial T}{\partial b_n} dS \end{aligned} \quad (3.72)$$

Όπως και στην επιφάνεια S_{Lw} , έτσι και εδώ, ο υπολογισμός του υπολογιστικά ακριβούς όρου $\frac{\partial T}{\partial b_n}$ αποφεύγεται, ορίζοντας ως οριακή συνθήκη της συζυγούς θερμοκρασίας την έκφραση

$$T^a u_j n_j + \frac{v}{Pr} \frac{\partial T^a}{\partial x_j} n_j = 0 \quad (3.73)$$

Παρόμοια, η παράγωγος της επαυξημένης αντικειμενικής συνάρτησης παίρνει τη μορφή

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_n} = \int_{S_{Rw}} \left[-qn_1 + v \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) n_j \right] v_{jet} \frac{\partial \varphi}{\partial b_n} dS \quad (3.74)$$

Οι οριακές συνθήκες του συζυγούς προβλήματος, παρουσιάζονται συνοπτικά στον πίνακα 3.1.

Όριο	u_i	T^a	q
S_{mw}	<i>zero Dirichlet</i>	<i>Dirichlet</i>	<i>zero Neumann</i>
S_{tw}	<i>zero Dirichlet</i>	<i>zero Dirichlet</i>	<i>zero Neumann</i>
S_{Lw}	<i>zero Dirichlet</i>	<i>zero Robin (εξ. 3.65)</i>	<i>zero Neumann</i>
S_{Rw}	<i>zero Dirichlet</i>	<i>zero Robin (εξ 3.73)</i>	<i>zero Neumann</i>

Πίνακας 3. 1: Οι οριακές συνθήκες του συζυγούς προβλήματος.

3.6 Τελική Έκφραση των Παραγώγων Ευαισθησίας

Μετά την απαλοιφή των όρων των συζυγών εξισώσεων ροής και των συζυγών οριακών συνθηκών, η τελική έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta F}{\delta b_n} = & \int_{S_{Lw}|\varphi>0.001} \left[-qn_1v_{jet} + v \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) n_j v_{jet} + \right. \\
 & \left. \left(c_p T^a v_j n_j + \frac{c_p}{Pr} v \frac{\partial T^a}{\partial x_j} n_j \right) \frac{1}{\varphi} \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} n_j - T + T_{jet} \right) \right] \frac{\partial \varphi}{\partial b_n} dS \\
 & + \int_{S_{Lw}|\varphi<0.001} \left[-qn_1v_{jet} + v \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) n_j v_{jet} - \right. \\
 & \left. \frac{c_p}{Pr} v T^a n_j \frac{1}{1-\varphi} \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} n_j - T + T_{jet} \right) \right] \frac{\partial \varphi}{\partial b_n} dS \\
 & + \int_{S_{Rw}} \left[-qn_1 + v \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) n_j \right] v_{jet} \frac{\partial \varphi}{\partial b_n} dS \quad (3.75)
 \end{aligned}$$

όπου με $S_{Lw}|\varphi > 0.001$ και $S_{Lw}|\varphi < 0.001$ συμβολίζονται τα τμήματα εκείνα της επιφάνειας S_{Lw} στα οποία ισχύει η αντίστοιχη ανισότητα που αναγράφεται.

Για να υπολογιστούν οι παράγωγοι ευαισθησίας πρέπει να διατυπωθεί η αναλυτική έκφραση της παραγώγου $\frac{\partial \varphi}{\partial b_n}$. Υπενθυμίζεται ότι η συνάρτηση φ είναι της μορφής

$$\varphi(x_2, b_n) = \frac{1}{1 + e^{-k(x_2 - (b_n - 0.0025))}} \left(1 - \frac{1}{1 + e^{-k(x_2 - (b_n + 0.0025))}} \right)$$

Παραγωγίζοντας την έκφραση αυτή ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού b_n προκύπτει

$$\frac{\partial \varphi}{\partial b_n} = \frac{-ke^{-k(x_2-(b_n-0.0025))}}{(1+e^{-2000(x_2-(b_n-0.0025))})^2} \left(1 - \frac{1}{1+e^{-k(x_2-(b_n+0.0025))}}\right) + \frac{ke^{-k(x_2-(b_n+0.0025))}}{(1+e^{-k(x_2-(b_n+0.0025))})^2} \frac{1}{1+e^{-k(x_2-(b_n-0.0025))}} \quad (3.76)$$

Υπενθυμίζεται ότι ως μεταβλητές σχεδιασμού b_n έχουν οριστεί οι κάθετες αποστάσεις των κέντρων των δύο οπών από το κάτω στερεό τοίχωμα του χωρίου. Επειδή υπάρχουν 2 μεταβλητές σχεδιασμού λοιπόν, στην ουσία ορίζονται και 2 διαφορετικές συναρτήσεις φ , η καθεμία συναρτήσει της αντίστοιχης μεταβλητής σχεδιασμού b_1 ή b_2 , και η οποία εφαρμόζεται στο αντίστοιχο όριο S_{LW}, S_{RW} στο οποίο ορίζεται και η μεταβλητή σχεδιασμού.

Με βάση αυτό, στο όριο S_{LW} οι όροι $\frac{\partial v_i}{\partial b_2}$ και $\frac{\partial T}{\partial b_2}$ μηδενίζονται καθώς η μεταβολή της μεταβλητής b_2 δεν επηρεάζει τις μεταβλητές ροής στο όριο αυτό. Το ίδιο ισχύει και για τους όρους $\frac{\partial v_i}{\partial b_1}$ και $\frac{\partial T}{\partial b_1}$, οι οποίοι μηδενίζονται στο όριο S_{RW} .

Συνεπώς, η κάθε παράγωγος ευαισθησίας γράφεται ως

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta b_1} = & \int_{S_{LW}|\varphi>0.001} \left[-qn_1v_{jet} + v \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) n_j v_{jet} + \right. \\ & \left. \left(c_p T^a v_j n_j + \frac{c_p}{Pr} v \frac{\partial T^a}{\partial x_j} n_j \right) \frac{1}{\varphi} \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} n_j - T + T_{jet} \right) \right] \frac{\partial \varphi}{\partial b_1} dS \\ & + \int_{S_{LW}|\varphi<0.001} \left[-qn_1v_{jet} + v \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) n_j v_{jet} - \right. \\ & \left. \frac{c_p}{Pr} v T^a \frac{1}{1-\varphi} \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} n_j - T + T_{jet} \right) \right] \frac{\partial \varphi}{\partial b_1} dS \quad (3.77) \end{aligned}$$

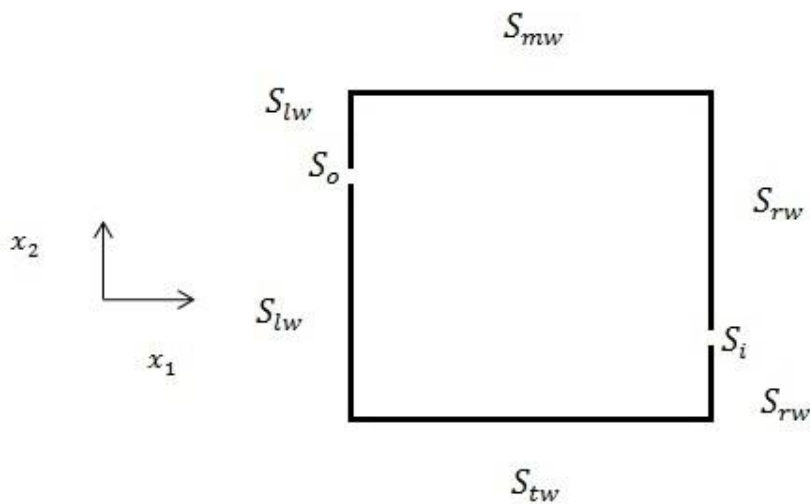
$$\frac{\delta F}{\delta b_2} = \int_{S_{RW}} \left[-qn_1 + v \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) n_j \right] v_{jet} \frac{\partial \varphi}{\partial b_2} dS \quad (3.78)$$

Κεφάλαιο 4

Υπολογιστική Επίλυση του Ευθέως Προβλήματος

Στο κεφάλαιο αυτό θα γίνουν ορισμένοι υπολογισμοί της αντικειμενικής συνάρτησης για διαφορετικές τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού αλλά και συντελεστών της σιγμοειδούς συνάρτησης και του υπολογιστικού πλέγματος. Αυτά τα αποτελέσματα βοηθούν αρχικά να αποκτηθεί μια γενική (παραμετρική) ιδέα για την συμπεριφορά της ροής συναρτήσεων των μεταβλητών σχεδιασμού, αλλά λειτουργούν και ως σημεία αναφοράς για την μετέπειτα βελτιστοποίηση, όσον αφορά το τμήμα της επαλήθευσης των αποτελεσμάτων. Επίσης, με αυτό τον τρόπο θα εκτιμηθεί το σφάλμα που υπεισέρχεται στους υπολογισμούς μέσω της μοντελοποίησης των πρωτεύουσών οριακών συνθηκών με την σιγμοειδή συνάρτηση φ , όπως αναλύθηκε στο κεφάλαιο 2.

Αρχικά, για διάφορες τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού b_n , συγκρίνονται τα αποτελέσματα για ροή δέσμης ομόρροπη και αντίρροπη ως προς την ταχύτητα του άνω τοιχώματος. Για την περίπτωση που η δέσμη και η ταχύτητα του άνω τοιχώματος είναι ομόρροπες, αρκεί ο ορισμός των επιφανειών της κοιλότητας όπως έχει γίνει στο κεφάλαιο 2. Στην περίπτωση όπου η δέσμη έχει αντίθετη κατεύθυνση με από την ταχύτητα του άνω τοιχώματος, πρέπει να οριστούν διαφορετικά οι επιφάνειες, έτσι ώστε η είσοδος S_i να βρίσκεται στη δεξιά επιφάνεια S_{Rw} , ενώ η έξοδος S_o να βρίσκεται στην αριστερή επιφάνεια S_{Lw} . Η περίπτωση αυτή παρουσιάζεται στο σχήμα 4.1.



Σχήμα 4.1: Ο ορισμός της εισόδου (S_i) και της εξόδου (S_o) της δέσμης για την περίπτωση στην οποία η ταχύτητα εισόδου της είναι αντίρροπη με την ταχύτητα του άνω κινούμενου τοιχώματος

Για αυτές τις δύο περιπτώσεις, υπολογίζεται, μέσω του αλγορίθμου που αναλύθηκε στο κεφάλαιο 2, η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, όπως αυτή ορίστηκε στο κεφάλαιο 3, για διάφορες τιμές των μεταβλητών κατάστασης.

Η αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος υπολογίστηκε για εννέα διαφορετικά ζεύγη τιμών των μεταβλητών σχεδιασμού. Υπενθυμίζεται ότι ως μεταβλητές σχεδιασμού ορίζονται οι κάθετες αποστάσεις του κάτω ορίου της κοιλότητας από το κέντρο της εισόδου της δέσμης και από το κέντρο της εξόδου της αντίστοιχα.

Ως αντικειμενική συνάρτηση έχει οριστεί η ροή θερμότητας διαμέσου του άνω κινούμενου τοιχώματος της κοιλότητας, η οποία υπολογίστηκε σύμφωνα με την σχέση

$$F = \int_{S_{mw}} \rho \frac{c_p}{Pr} v \frac{\partial T}{\partial x_i} n_i dS$$

Στις δύο αυτές περιπτώσεις δεν χρησιμοποιήθηκε η συνάρτηση φ για τη μοντελοποίηση των οριακών συνθηκών, αλλά αυτές ορίστηκαν ξεχωριστά σε κάθε τμήμα των δύο κάθετων τοιχωμάτων της κοιλότητας.

Τα αντίστοιχα αποτελέσματα αναγράφονται στους πίνακες 4.1 και 4.2.

A/A	b_1 (m)	b_2 (m)	F (W)
1	0.075	0.075	2.5194
2	0.075	0.05	2.7285
3	0.075	0.025	2.8259
4	0.05	0.075	2.6280
5	0.05	0.05	2.6734
6	0.05	0.025	2.8044
7	0.025	0.075	2.4300
8	0.025	0.05	2.4283
9	0.025	0.025	2.8392

Πίνακας 4.1: Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για διαφορετικές τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού, οι οποίες πάρθηκαν δειγματοληπτικά, για την περίπτωση όπου η ταχύτητα της δέσμης είναι ομόρροπη της ταχύτητας του άνω κινούμενου τοιχώματος.

A/A	b_1 (m)	b_2 (m)	F (W)
1	0.075	0.075	1.1893
2	0.075	0.05	0.9848
3	0.075	0.025	1.1320
4	0.05	0.075	1.2381
5	0.05	0.05	0.9136
6	0.05	0.025	1.0041
7	0.025	0.075	1.4034
8	0.025	0.05	1.0599
9	0.025	0.025	1.0919

Πίνακας 4.2: Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, για διαφορετικές τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού, οι οποίες πάρθηκαν δειγματοληπτικά, για την περίπτωση όπου η ταχύτητα της δέσμης είναι αντίρροπη της ταχύτητας του άνω κινούμενου τοιχώματος.

Παρατηρείται, πως όλες οι τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης για την περίπτωση των αντίρροπων ταχυτήτων είναι μικρότερες από τις αντίστοιχες για την περίπτωση των ομόρροπων ταχυτήτων δέσμης και άνω τοιχώματος. Επίσης, ακόμα και η μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του πίνακα 4.2 είναι μικρότερη από την ελάχιστη τιμή των τιμών πίνακα 4.1. Σύμφωνα με αυτό, μπορεί να γίνει η ασφαλής υπόθεση, πως η αντικειμενική συνάρτηση μεγιστοποιείται στην πρώτη περίπτωση, αυτή δηλαδή των ομόρροπων

ταχυτήτων. Συνεπώς, η μέθοδος της βελτιστοποίησης θα εφαρμοστεί για αυτήν την περίπτωση των κατευθύνσεων των ταχυτήτων.

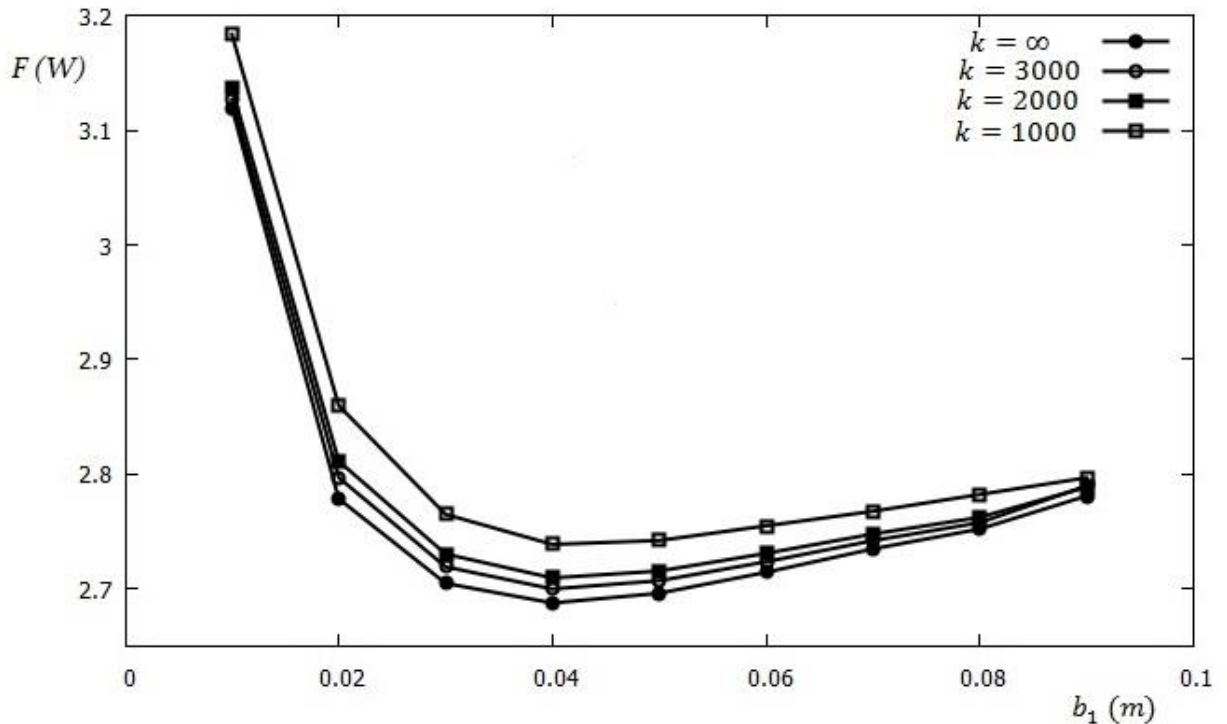
Έπειτα θα γίνει παραμετρική διερεύνηση ως προς την μεταβλητή σχεδιασμού b_1 κρατώντας σταθερή την b_2 . Επίσης θα μελετηθεί η επίδραση του συντελεστή k της συνάρτησης φ που ορίστηκε στο κεφάλαιο 2 ως προς την αντικειμενική συνάρτηση.

Πιο συγκεκριμένα, θα υπολογιστεί η αντικειμενική συνάρτηση F για σταθερή τιμή της μεταβλητής σχεδιασμού b_2 και ίση με $b_2 = 0.05 \text{ m}$ για τέσσερις περιπτώσεις του συντελεστή k . Λαμβάνεται και η περίπτωση όπου $k = \infty$, όπου πρακτικά η συνάρτηση φ λαμβάνει την μορφή βηματικής συνάρτησης μοντελοποιώντας με απόλυτη ακρίβεια το αδιαβατικό τοίχωμα και τις δύο οπές. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον πίνακα 4.3.

$b_1 \text{ (m)}$	$F \text{ (W)}$ [$k = \infty$]	$F \text{ (W)}$ [$k = 3000$]	$F \text{ (W)}$ [$k = 2000$]	$F \text{ (W)}$ [$k = 1000$]
0.01	3.1194	3.1266	3.1363	3.1835
0.02	2.7787	2.7971	2.8115	2.8599
0.03	2.7050	2.7194	2.7305	2.7651
0.04	2.6878	2.7001	2.7097	2.7389
0.05	2.6964	2.7073	2.7157	2.7423
0.06	2.7146	2.7238	2.7311	2.7551
0.07	2.7350	2.7422	2.7480	2.7678
0.08	2.7523	2.7579	2.7625	2.7712
0.09	2.7811	2.7899	2.7889	2.7970

Πίνακας 4.3: Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για εννέα διαφορετικές τιμές της μεταβλητής b_1 , κρατώντας την b_2 σταθερή και ίση με 0.05 m , και για τέσσερις περιπτώσεις της μεταβλητής k η οποία εμφανίζεται στην συνάρτηση φ .

Τα αποτελέσματα του πίνακα 4.3 παρουσιάζονται σε κοινό διάγραμμα, στο σχήμα 4.2



Σχήμα 4. 2: Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για εννέα διαφορετικές τιμές της μεταβλητής b_1 κρατώντας την b_2 σταθερή και ίση με 0.05 m , και για τέσσερις περιπτώσεις της μεταβλητής k η οποία εμφανίζεται στην συνάρτηση φ .

Αυτό που παρατηρείται είναι πως όσο μικραίνει ο συντελεστής k τόσο αυξάνεται το σφάλμα που υπεισέρχεται στον υπολογισμό της F . Πιο συγκεκριμένα, για $k = 3000$ το σφάλμα κυμαίνεται στο εύρος $0.23\% - 0.657\%$, για $k = 2000$ κυμαίνεται στο $0.279\% - 0.808\%$, ενώ για $k = 1000$ στο $0.56\% - 2.01\%$. Συνεπώς η καλύτερη λύση θα ήταν να επιλεγεί πολύ υψηλός συντελεστής k . Μία παράμετρος όμως που πρέπει να ληφθεί υπόψη είναι πως οι παράγωγοι ευαισθησίας αυξάνονται αναλογικά του k , κάτι που είναι ανεπιθύμητο. Οπότε επιλέγεται μια ενδιάμεση τιμή, και συγκεκριμένα η $k = 2000$ η οποία έχει γνωστό εύρος σφάλματος.

Το δεύτερο συμπέρασμα που εξάγεται από το σχήμα 4.2 είναι πως η αντικειμενική συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο τμήμα για b_1 από 0.03 m έως 0.05 m . Συνεπώς η F μεγιστοποιείται κοντά στο μικρότερο επιτρεπτό όριο της b_1 , όπως φαίνεται και στο σχήμα.

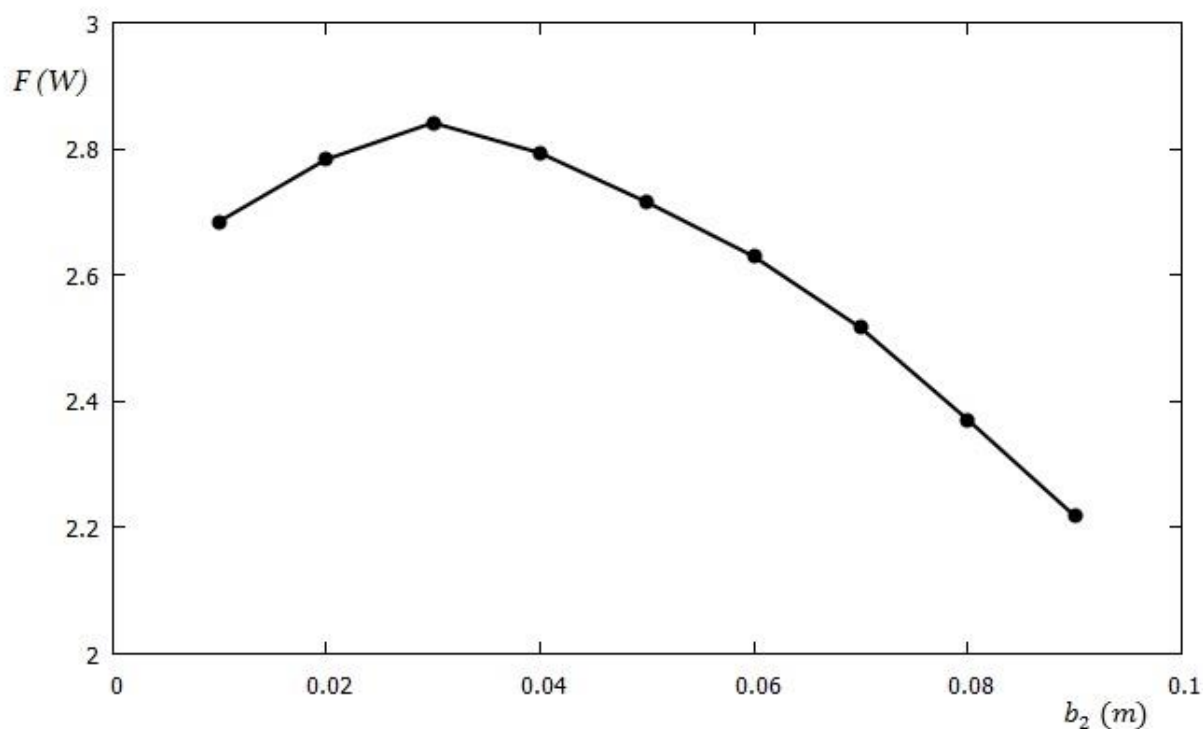
Επιπλέον, θα γίνει διερεύνηση ως προς τη μεταβλητή σχεδιασμού b_2 , υπολογίζοντας την αντικειμενική συνάρτηση κρατώντας τη μεταβλητή b_1

σταθερή αυτή τη φορά και ίση με $b_1 = 0.05 \text{ m}$. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον πίνακα 4.4.

$b_2 \text{ (m)}$	$F \text{ (W)}$ [$k = 2000$]
0.01	2.6850
0.02	2.7833
0.03	2.8393
0.04	2.7936
0.05	2.7157
0.06	2.6298
0.07	2.5167
0.08	2.3712
0.09	2.2187

Πίνακας 4.4: Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για εννέα διαφορετικές τιμές της μεταβλητής b_2 , κρατώντας την b_1 σταθερή και ίση με 0.05 m , για την τιμή της μεταβλητής k ίση με 2000 .

Οι τιμές του πίνακα 4.4 παρουσιάζονται σε διάγραμμα, στο σχήμα 4.3



Σχήμα 4.3: Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για εννέα διαφορετικές τιμές της μεταβλητής b_2 κρατώντας την b_1 σταθερή και ίση με 0.05 m .

Από το σχήμα 4.3 παρατηρείται ότι η συνάρτηση F παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο τμήμα για b_2 από 0.02 m έως 0.04 m . Στο τμήμα αυτό αναμένεται να μηδενίζεται και η παράγωγος $\frac{\delta F}{\delta b_2}$.

4.1 Έλεγχος Ενεργειακού Ισοζυγίου

Κρίνεται χρήσιμο (αν και ικανοποιούνται οι μερικές διαφορικές εξισώσεις και μάλιστα αυτή της ενέργειας) να ελεγχθεί το ενεργειακό ισοζύγιο του προβλήματος σε κάθε μέτρηση που έγινε. Ως ενεργειακό ισοζύγιο, εννοείται η ισότητα που υποστηρίζει ότι το ποσό της θερμικής ισχύος που προσφέρεται στο χωρίο κάθε χρονική στιγμή είναι ίσο με το ποσό της θερμικής ισχύος που απάγεται από αυτό. Το ισοζύγιο αυτό εκφράζεται από την σχέση 4.1.

$$\dot{Q}_{in} = \dot{Q}_{out} \quad (4.1)$$

Η θερμότητα ή θερμική ισχύς που προσδίδεται στο σύστημα \dot{Q}_{in} ισούται με τη θερμότητα που προσφέρεται στο χωρίο μέσω του κάτω σταθερού τοιχώματος S_{tw} στη μονάδα του χρόνου, συν τη θερμική ισχύ της δέσμης που εισέρχεται μέσω του ορίου S_i . Αυτό εκφράζεται μέσω της σχέσης

$$\dot{Q}_{in} = \dot{Q}_{tw} + \dot{Q}_{in,jet} \quad (4.2)$$

Αντίστοιχα, η θερμότητα που απάγεται από το σύστημα ορίζεται ως το άθροισμα της θερμότητας που απάγεται από το άνω κινούμενο τοίχωμα του χωρίου

S_{mw} στη μονάδα του χρόνου και τη θερμική ισχύ της δέσμης η οποία εξέρχεται από το χωρίο μέσω του ορίου S_o . Αυτό εκφράζεται από τη σχέση

$$\dot{Q}_{out} = \dot{Q}_{mw} + \dot{Q}_{out,jet} \quad (4.3)$$

Οι συντελεστές της σχέσης 4.2 υπολογίζονται σύμφωνα με τις σχέσεις 4.4 και 4.5.

$$\dot{Q}_{tw} = \int_{S_{tw}} \rho \frac{c_p}{Pr} v \frac{\partial T}{\partial x_i} n_i dS \quad (4.4)$$

$$\dot{Q}_{in,jet} = \int_{S_{LW}} c_p \rho v_i T n_i dS \quad (4.5)$$

Αντίστοιχα, οι συντελεστές της σχέσης 4.3 υπολογίζονται σύμφωνα με τις σχέσεις 4.7 και 4.8.

$$\dot{Q}_{mw} = \int_{S_{mw}} \rho \frac{c_p}{Pr} v \frac{\partial T}{\partial x_i} n_i dS \quad (4.6)$$

$$\dot{Q}_{out,jet} = \int_{S_{Rw}} c_p \rho v_i T n_i dS \quad (4.7)$$

Παρατηρείται ότι η έκφραση της εξίσωσης 4.6 είναι η αντικειμενική συνάρτηση F του προβλήματος.

Για τον υπολογισμό αυτών των μεγεθών, προγραμματίστηκε κώδικας στο περιβάλλον OpenFOAM.

Η εξίσωση 4.1 επαναδιατυπώνεται ως εξής

$$\dot{Q}_{tw} + \dot{Q}_{in,jet} = \dot{Q}_{mw} + \dot{Q}_{out,jet} \quad (4.8)$$

Τα ανωτέρω μεγέθη υπολογίστηκαν για όλες τις μετρήσεις που έγιναν στους πίνακες 4.4 και 4.5 για τιμή του συντελεστή $k = 2000$ προκειμένου να ελεγχθεί αν ισχύει το ενεργειακό ισοζύγιο, και παρουσιάζονται στον πίνακα 4.5

A/A	b_1 (m)	b_2 (m)	\dot{Q}_{mw} (W)	\dot{Q}_{tw} (W)	$\dot{Q}_{in,jet}$ (W)	$\dot{Q}_{out,jet}$ (W)
1	0.01	0.05	3.1363	2.4816	5.0560	4.3707
2	0.02	0.05	2.8115	2.1256	5.0616	4.3355
3	0.03	0.05	2.7305	2.0564	5.0451	4.3443
4	0.04	0.05	2.7097	2.0544	5.0495	4.3618
5	0.05	0.05	2.7157	2.0808	5.0395	4.3814
6	0.06	0.05	2.7311	2.1176	5.0381	4.4018
7	0.07	0.05	2.7480	2.1539	5.0359	4.4203
8	0.08	0.05	2.7625	2.1802	5.0337	4.4310
9	0.09	0.05	2.7889	2.2101	5.0304	4.4321
10	0.05	0.01	2.6850	2.9670	5.0403	5.2969
11	0.05	0.02	2.7833	2.4001	5.0415	4.6322
12	0.05	0.03	2.8393	2.3156	5.0416	4.4899
13	0.05	0.04	2.7936	2.2236	5.0405	4.4455
14	0.05	0.06	2.6298	1.9272	5.0384	4.3126
15	0.05	0.07	2.5167	1.7333	5.0369	4.2314
16	0.05	0.08	2.3712	1.5014	5.0348	4.1447
17	0.05	0.09	2.2187	1.2516	5.0328	4.0473

Πίνακας 4.5: Οι τιμές των μεγεθών που εμπλέκονται στο ενεργειακό ισοζύγιο της εξίσωσης 4.8, για διάφορες τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού οι οποίες έχουν παρθεί δειγματοληπτικά.

Τέλος, στον πίνακα 4.6 παρουσιάζονται τα αθροίσματα $\dot{Q}_{tw} + \dot{Q}_{in,jet}$ και $\dot{Q}_{mw} + \dot{Q}_{out,jet}$ της εξίσωσης 4.8

A/A	b_1 (m)	b_2 (m)	$\dot{Q}_{tw} + \dot{Q}_{in,jet}$ (W)	$\dot{Q}_{mw} + \dot{Q}_{out,jet}$ (W)
1	0.01	0.05	7.5070	7.5376
2	0.02	0.05	7.1470	7.1872
3	0.03	0.05	7.0748	7.1015
4	0.04	0.05	7.0715	7.1039
5	0.05	0.05	7.0971	7.2139
6	0.06	0.05	7.1329	7.1507
7	0.07	0.05	7.1683	7.1898
8	0.08	0.05	7.1935	7.2139
9	0.09	0.05	7.2210	7.2405
10	0.05	0.01	7.9819	8.0073
11	0.05	0.02	7.4155	7.4416
12	0.05	0.03	7.3292	7.3572
13	0.05	0.04	7.2391	7.2641
14	0.05	0.06	6.9424	6.9656
15	0.05	0.07	6.7481	6.7702
16	0.05	0.08	6.5159	6.5362
17	0.05	0.09	6.2660	6.2844

Πίνακας 4. 6: Οι όροι που παρουσιάζονται στην εξίσωση 4.8, για διάφορες τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού, οι οποίες έχουν παρθεί δειγματοληπτικά.

Παρατηρείται πως τα δύο αθροίσματα του πίνακα 4.9 έχουν πολύ μικρές αποκλίσεις μεταξύ τους. Συγκεκριμένα, η μεγαλύτερα διαφορά που παρατηρείται για τις ίδιες τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού είναι της τάξης του 1.6%, ενώ η μικρότερη διαφορά είναι 0.4%. Τα σφάλματα αυτά είναι πολύ μικρά και μπορούν να αποδοθούν στην προσέγγιση που χρησιμοποιήθηκε μέσω της συνάρτησης φ καθώς και στην αριθμητική μέθοδο υπολογισμού των ολοκληρωμάτων τα οποία συνιστούν τις ανωτέρω ποσότητες.

Κεφάλαιο 5

Βελτιστοποίηση

Στο παρόν κεφάλαιο εφαρμόζεται η μέθοδος βελτιστοποίησης με σκοπό την εύρεση της βέλτιστης λύσης των μεταβλητών σχεδιασμού που αντιστοιχούν στο ακρότατο της αντικειμενικής συνάρτησης. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, ο σκοπός είναι να γίνει χρήση των παραγώγων ευαισθησίας στη μορφή στην οποία κατέληξε η συνεχής συζυγής μέθοδος όπως αναλύθηκε στο κεφάλαιο 3, έτσι ώστε να ανανεώνεται η τιμή των μεταβλητών σχεδιασμού για κάθε κύκλο βελτιστοποίησης. Αυτό υλοποιείται με τη μέθοδο της απότομης καθόδου (steepest descent method).

5.1 Η Μέθοδος της Απότομης Καθόδου

Η μέθοδος της απότομης καθόδου είναι μια μαθηματική μέθοδος εύρεσης της βέλτιστης λύσης ενός προβλήματος. Ανήκει στην βασική κατηγορία μεθόδων ανίχνευσης που ονομάζεται ανίχνευση κατά γραμμή (line search methods) [1]. Ουσιαστικά, μέσω επαναληπτικών βημάτων τα οποία είναι ανάλογα του αντίθετου της παραγώγου ευαισθησίας, καταλήγει στο τοπικό ελάχιστο μιας συνάρτησης. Εάν ο σκοπός είναι να ανιχνευθεί το τοπικό μέγιστο τότε τα επαναληπτικά βήματα είναι ανάλογα της αλγεβρικής τιμής της παραγώγου ευαισθησίας και η μέθοδος ονομάζεται μέθοδος απότομης ανόδου (steepest ascent method). Πιο αναλυτικά, η μέθοδος προσεγγίζει την λύση της επόμενης επανάληψης \vec{x}^{n+1} προσθέτοντας στην τρέχουσα λύση \vec{x}^n μία κατεύθυνση ανίχνευσης \vec{p}^n πολλαπλασιασμένη με έναν συντελεστή η . Αυτή η διαδικασία εκφράζεται μέσω της σχέσης

$$\vec{x}^{n+1} = \vec{x}^n + \eta \vec{p}^n \quad (5.1)$$

Το η είναι ένα βαθμωτό μέγεθος που εκφράζει το βήμα με το οποίο γίνεται αυτή η προσέγγιση. Όσο αυξάνεται αυτή η ποσότητα, τόσο μειώνεται η πιθανότητα να συγκλίνει το πρόβλημα, αλλά παράλληλα αυξάνεται η ταχύτητα σύγκλισης, αν αυτή επιτευχθεί. Όπως φαίνεται και από τους δείκτες της σχέσης 5.1, το διάνυσμα \vec{p}^n βασίζεται στην τρέχουσα επανάληψη της μεθόδου.

Ως κατεύθυνση ανίχνευσης, ορίζεται το διάνυσμα της κλίσης της συνάρτησης $F(\vec{x}^n)$. Επειδή το πρόβλημα είναι ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης της αντικειμενικής συνάρτησης δεν αλλάζει το πρόσημο της παραγώγου αυτής, όπως φαίνεται και στη σχέση

$$\vec{x}^{n+1} = \vec{x}^n + \eta \nabla F(\vec{x}^n) \quad (5.2)$$

Αν ως λύση του προβλήματος θεωρηθούν οι τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού, τότε η μέθοδος της απότομης καθόδου παίρνει την τελική της μορφή

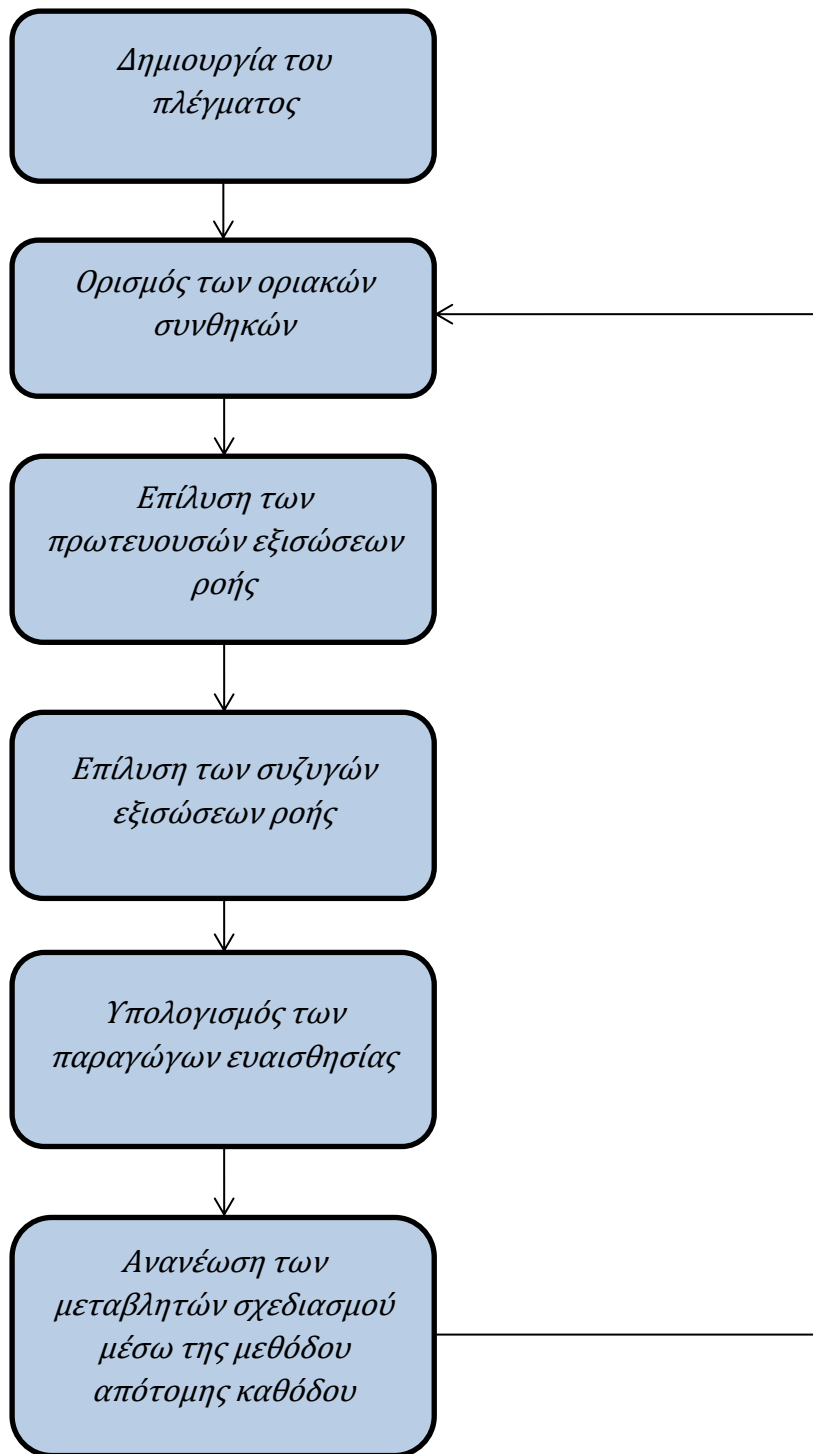
$$b^{n+1} = b^n + \eta \left(\frac{\delta F}{\delta b} \right)^n \quad (5.3)$$

5.2 Ο Αλγόριθμος Βελτιστοποίησης

Για να επιτευχθεί η βέλτιστη λύση του προβλήματος κωδικοποιείται σε περιβάλλον OpenFOAM ένας υπολογιστικός αλγόριθμος. Αρχικά δημιουργείται το πλέγμα του χωρίου. Για αυτό χρησιμοποιήθηκε ο πλεγματοποιητής blockMesh ο οποίος υπάρχει στο λογισμικό OpenFOAM σε μορφή εκτελέσιμου αρχείου. Για την γένεση του πλέγματος, χρειάζεται να διαβαστούν από ένα αρχείο όλα τα χαρακτηριστικά που ορίζουν τις λεπτομέρειες του τελικού πλέγματος. Τονίζεται εδώ πως το πλέγμα δημιουργείται μία φορά και έπειτα δεν αλλάζει ποτέ κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου. Αυτό έχει εξηγηθεί γιατί ισχύει

στο κεφάλαιο 2 εκτενέστερα. Στη συνέχεια, αρχικοποιούνται οι μεταβλητές σχεδιασμού, με σκοπό να χρησιμοποιηθούν στον πρώτο κύκλο βελτιστοποίησης. Έπειτα ορίζονται οι οριακές συνθήκες τόσο του πρωτεύοντος, όσο και του συζυγούς προβλήματος. Οι οριακές συνθήκες του πρωτεύοντος είναι αυτές που αλλάζουν κατά τη διάρκεια της βελτιστοποίησης όπως έχει εξηγηθεί, οπότε αυτές εξαρτώνται από τις εκάστοτε τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού. Στη συνέχεια, επιλύονται οι πρωτεύουσες εξισώσεις ροής, και πιο συγκεκριμένα η εξίσωση της ορμής, η εξίσωση της συνέχειας και η εξίσωση της ενέργειας. Ο τρόπος επίλυσης αυτών των εξισώσεων έχει αναλυθεί στο κεφάλαιο 2. Έπειτα επιλύονται οι συζυγείς εξισώσεις της ροής, δηλαδή η εξίσωση της συζυγούς πίεσης, η εξίσωση της συζυγούς ταχύτητας και η εξίσωση της συζυγούς θερμοκρασίας. Έχοντας πλέον τις τιμές όλων των μεταβλητών της ροής, πρωτευουσών και συζυγών, στα κέντρα όλων των κελιών του πλέγματος, υπολογίζονται οι παράγωγοι ευαισθησίας όπως αυτές προέκυψαν μέσω της συνεχούς συζυγούς μεθόδου. Οι τελικές εκφράσεις των παραγώγων αυτών παρουσιάζονται στο κεφάλαιο 3. Τέλος, ανανεώνονται οι μεταβλητές σχεδιασμού με τη μέθοδο της απότομης καθόδου (απότομης ανόδου για το συγκεκριμένο πρόβλημα). Στην επόμενη επανάληψη του αλγορίθμου, αλλάζουν οι οριακές συνθήκες του πρωτεύοντος προβλήματος. Γενικά οι οριακές συνθήκες στο OpenFOAM ορίζονται μέσα σε συγκεκριμένα αρχεία που δέχεται ως είσοδο ο εκάστοτε επιλύτης. Για να αλλάζουν οι οριακές συνθήκες λοιπόν, προγραμματίστηκαν στον κώδικα της βελτιστοποίησης εντολές που αλλάζουν τα αρχεία των οριακών συνθηκών σύμφωνα με τις τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού. Ο αλγόριθμος αυτός εκτελείται για συγκεκριμένο αριθμό επαναλήψεων και έπειτα εξετάζεται ως προς την σύγκλιση της λύσης του.

Ο αλγόριθμος αναπαρίσταται στο σχήμα 5.1.



Σχήμα 5. 1: Ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης, ο οποίος χρησιμοποιείται για την εύρεση των βέλτιστων τιμών των μεταβλητών σχεδιασμού.

5.3 Αποτελέσματα

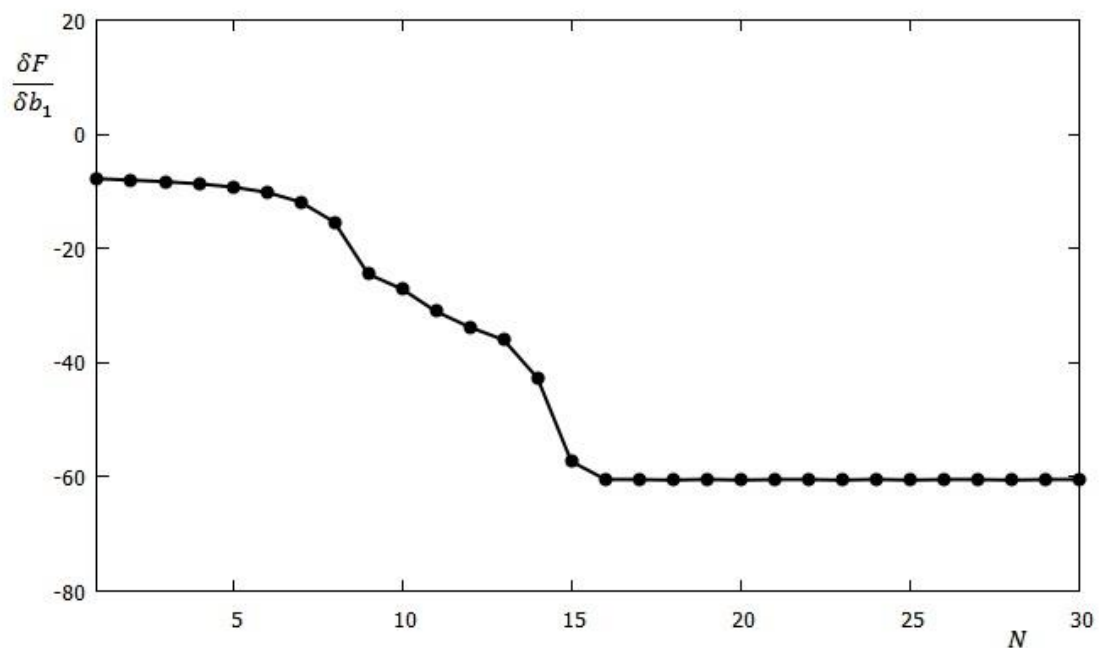
Το βήμα η της εξίσωσης 5.3 επιλέχθηκε βάσει δοκιμών που έγιναν, έτσι ώστε η μεταβολή των μεταβλητών σχεδιασμού να μην ξεπερνά ένα ανώτατο όριο. Πιο συγκεκριμένα επιλέχθηκε διαφορετικό η για την ανανέωση της κάθε μεταβλητής σχεδιασμού, με τιμή $\eta = 10^{-3}$ για την μεταβλητή b_1 και $\eta = 3 \times 10^{-3}$ για την μεταβλητή b_2 . Ο αλγόριθμος εκτελέστηκε αρχικά τέσσερις φορές, για 30 κύκλους βελτιστοποίησης, κάθε φορά κρατώντας σταθερή τη μία μεταβλητή και βελτιστοποιώντας το πρόβλημα ως προς την άλλη. Πιο συγκεκριμένα, για κάθε μεταβλητή σχεδιασμού εκτελέστηκαν δύο δοκιμές, η κάθε μία για διαφορετική αρχικοποίησή της.

Η πρώτη δοκιμή εκτελέστηκε για $b_1 = 0.03 \text{ m}$.

Η βέλτιστη λύση που εντοπίστηκε είναι η

$$b_1 = 0.0025 \text{ m}$$

Στη συνέχεια, παρουσιάζεται το διάγραμμα της παραγώγου ευαισθησίας $\frac{\delta F}{\delta b_1}$ συναρτήσει των κύκλων βελτιστοποίησης.



Σχήμα 5.2: Η τιμή της παραγώγου ευαισθησίας $\frac{\delta F}{\delta b_1}$, όπως αυτή υπολογίστηκε για καθέναν από τους 30 κύκλους βελτιστοποίησης, για αρχικοποίηση της $b_1 = 0.03 m$.

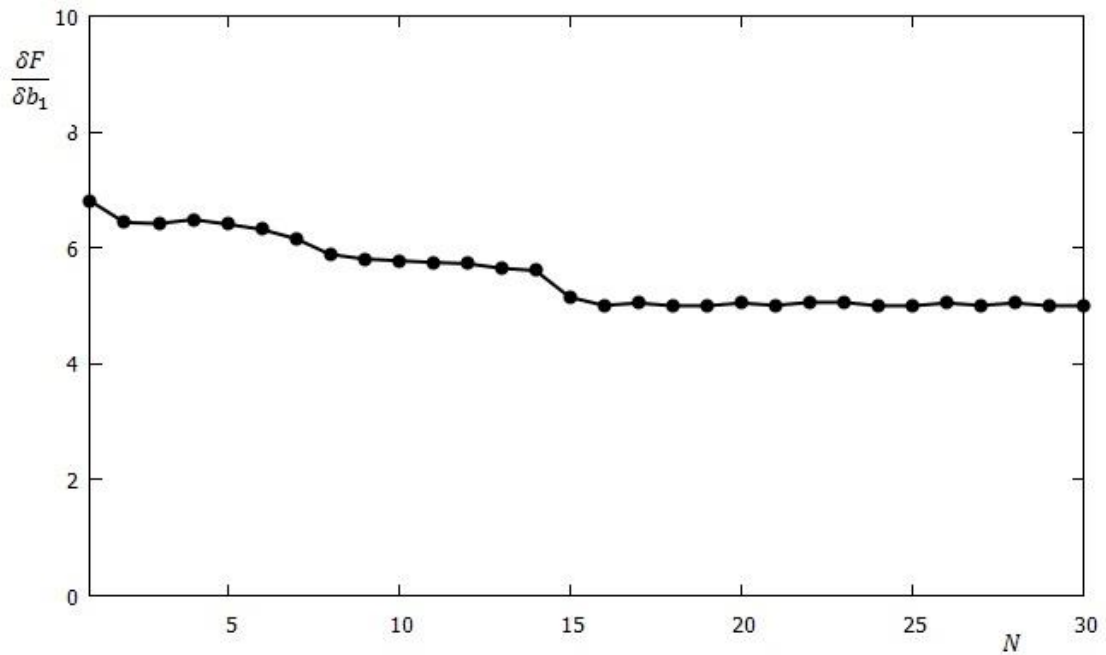
Η δεύτερη δοκιμή για τη μεταβλητή b_1 έγινε για αρχικοποίησή της ίση με $b_1 = 0.05 m$.

Αυτή τη φορά, ως βέλτιστη λύση εντοπίστηκε η

$$b_1 = 0.0975 m$$

Αυτό είναι τοπικό μέγιστο και όχι ολικό, όπως μπορούμε να δούμε και στο σχήμα 4.3 του κεφαλαίου 4. Είναι αναμενόμενη η διαφορά μεταξύ των αποτελεσμάτων των δύο δοκιμών καθώς όπως όλες οι αιτιοκρατικές μέθοδοι, έτσι και αυτή, μπορεί να εγκλωβιστεί σε τοπικό ακρότατο αντί για ολικό, ανάλογα του σημείου εκκίνησής της.

Στο σχήμα 5.3 παρουσιάζεται το διάγραμμα της παραγώγου ευαισθησίας $\frac{\delta F}{\delta b_1}$ συναρτήσει των κύκλων βελτιστοποίησης.



Σχήμα 5.3: Η τιμή της παραγώγου ευαισθησίας $\frac{\delta F}{\delta b_1}$, όπως αυτή υπολογίστηκε για καθέναν από τους 30 κύκλους βελτιστοποίησης, για αρχικοποίηση της $b_1 = 0.05 \text{ m}$.

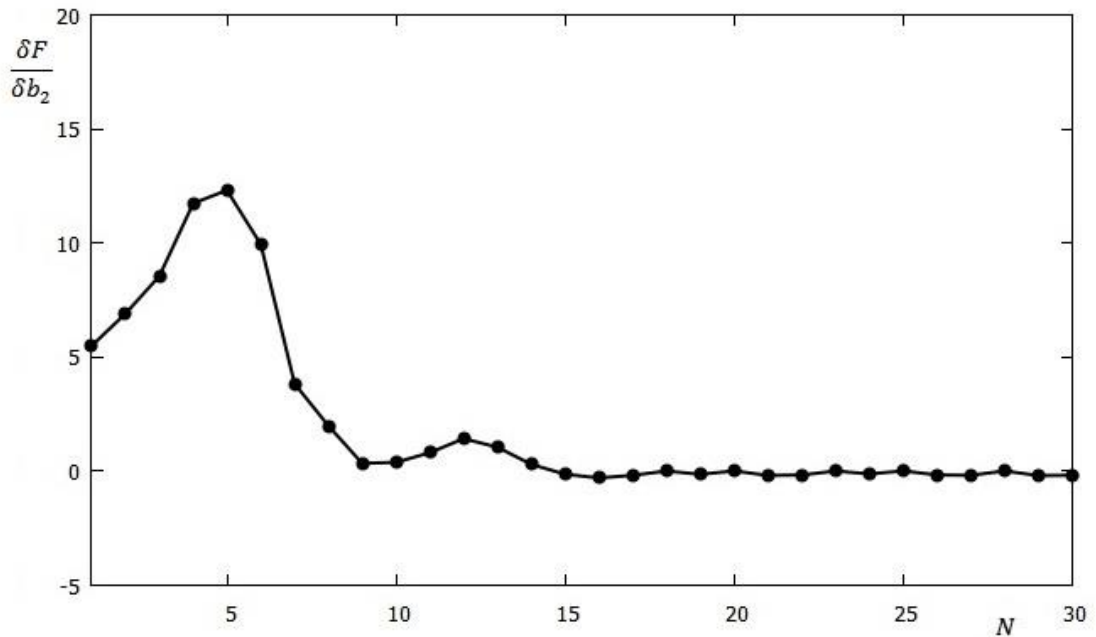
Στη συνέχεια, εκτελέστηκε ο αλγόριθμος βελτιστοποιώντας το πρόβλημα ως προς τη μεταβλητή b_2 .

Η πρώτη δοκιμή έγινε για αρχικοποίησή της ίση με $b_2 = 0.01 \text{ m}$.

Η βέλτιστη λύση που βρέθηκε είναι η

$$b_2 = 0.03007 \text{ m}$$

Στο σχήμα 5.4 παρουσιάζεται το διάγραμμα της παραγώγου ευαισθησίας $\frac{\delta F}{\delta b_2}$ συναρτήσει των κύκλων βελτιστοποίησης.



Σχήμα 5.4: Η τιμή της παραγώγου ευαισθησίας $\frac{\delta F}{\delta b_2}$, όπως αυτή υπολογίστηκε για καθέναν από τους 30 κύκλους βελτιστοποίησης, για αρχικοποίηση της $b_2 = 0.01 \text{ m}$.

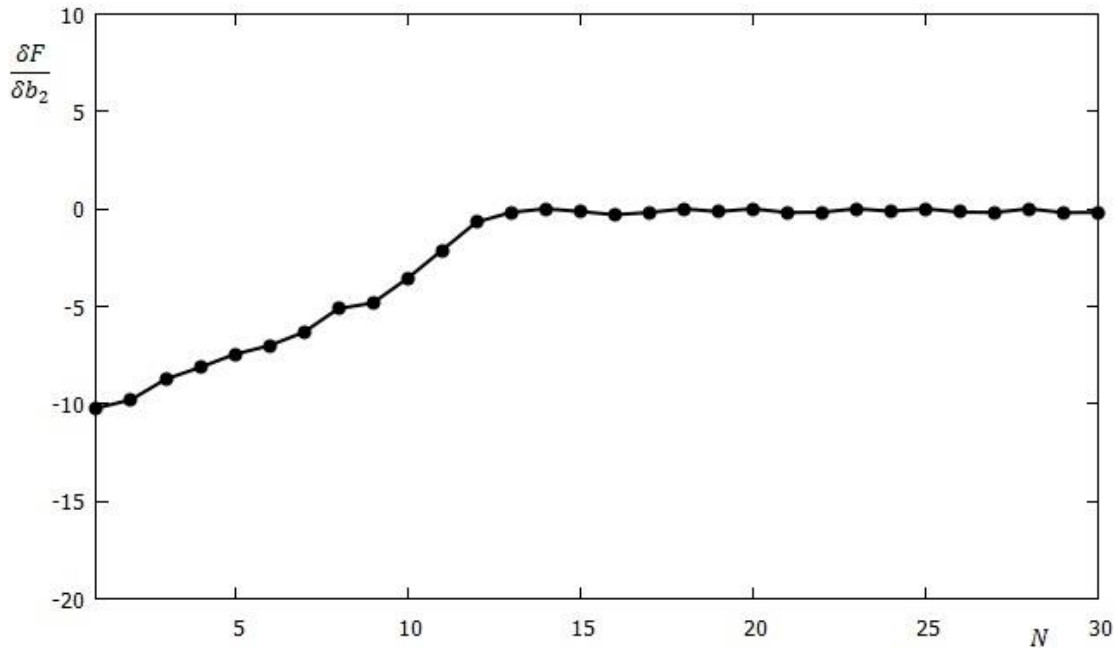
Τέλος, εκτελέστηκε ο αλγόριθμος με αρχική τιμή $b_2 = 0.09 \text{ m}$.

Εδώ, η βέλτιστη λύση είναι η

$$b_2 = 0.03007 \text{ m}$$

η οποία είναι η ίδια με τη βέλτιστη λύση για την πρώτη δοκιμή του αλγορίθμου ως προς τη μεταβλητή b_2 .

Στο σχήμα 5.5 παρουσιάζεται το διάγραμμα της παραγώγου ευαισθησίας $\frac{\delta F}{\delta b_2}$ συναρτήσει των κύκλων βελτιστοποίησης.



Σχήμα 5.5: Η τιμή της παραγώγου ευαισθησίας $\frac{\delta F}{\delta b_2}$, όπως αυτή υπολογίστηκε για καθέναν από τους 30 κύκλους βελτιστοποίησης, για αρχικοποίηση της $b_2 = 0.09 \text{ m}$.

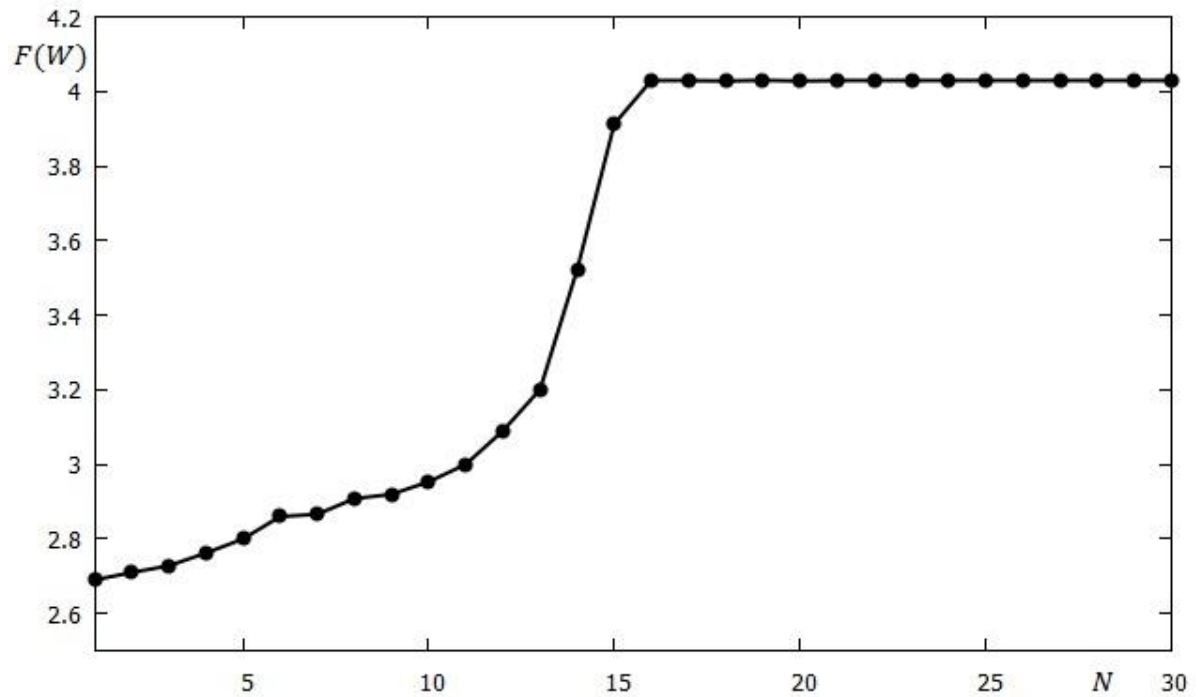
Τέλος εκτελέστηκε ο αλγόριθμος για ταυτόχρονη βελτιστοποίηση ως προς και τις δύο μεταβλητές σχεδιασμού. Η αρχικοποίησή τους σε αυτή την περίπτωση έγινε για $b_1 = 0.03 \text{ m}$ και $b_2 = 0.01 \text{ m}$. Η βέλτιστη λύση η οποία εντοπίστηκε είναι η

$$b_1 = 0.0025 \text{ m}$$

$$b_2 = 0.0272 \text{ m}$$

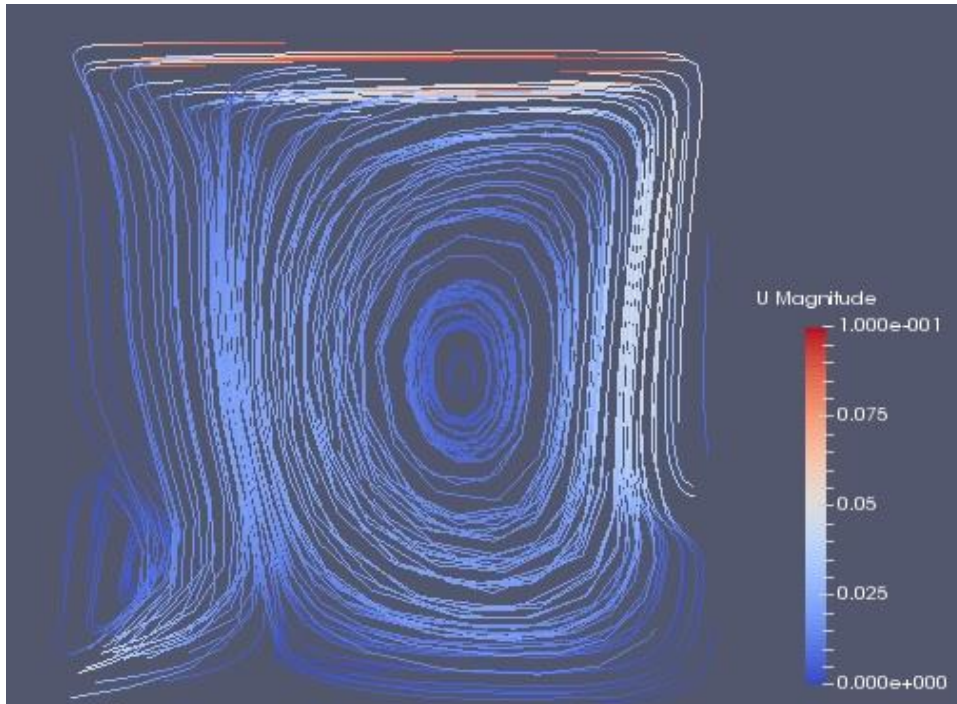
Παρατηρείται πως η βέλτιστη λύση για τη μεταβλητή b_1 είναι η ίδια με αυτήν που εντοπίστηκε όταν έγινε βελτιστοποίηση ως προς την b_1 κρατώντας σταθερή την b_2 . Αντίθετα, για τη μεταβλητή b_2 η βέλτιστη λύση δεν είναι ακριβώς η ίδια, αλλά είναι πολύ κοντά στην αντίστοιχη λύση που βρέθηκε κρατώντας την b_1 σταθερή.

Στο σχήμα 5.6 παρουσιάζεται η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για κάθε έναν από τους 30 κύκλους βελτιστοποίησης.



Σχήμα 5. 6: Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης F , όπως αυτή υπολογίστηκε για καθέναν από τους 30 κύκλους βελτιστοποίησης για ταυτόχρονη βελτιστοποίηση ως προς και τις δύο μεταβλητές σχεδιασμού.

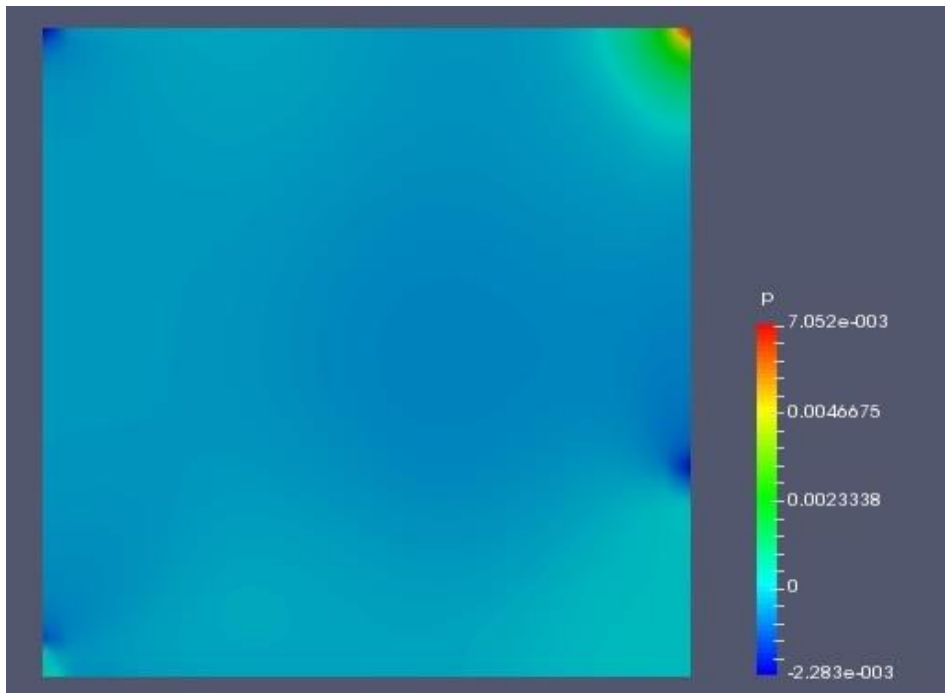
Για τη βέλτιστη λύση, παρουσιάζονται στο σχήμα 5.7 οι γραμμές ροής όπως αυτές αναπτύσσονται στο εσωτερικό της κοιλότητας.



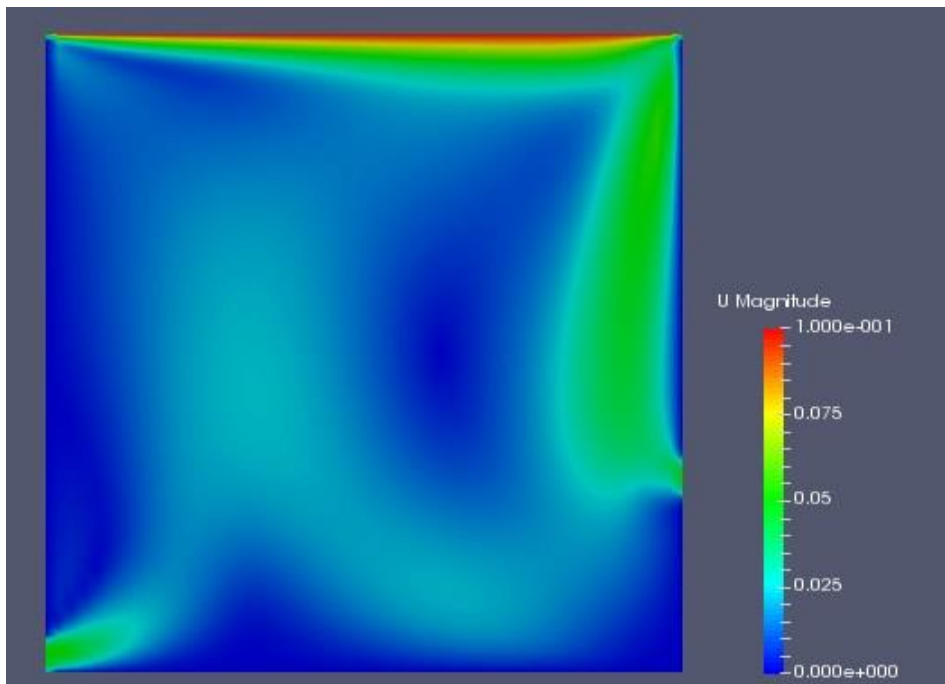
Σχήμα 5.7: Οι γραμμές ροής στο εσωτερικό της κοιλότητας, όπως αυτές αναπτύσσονται για τις βέλτιστες τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού $b_1 = 0.0025 \text{ m}$ και $b_2 = 0.0272 \text{ m}$.

Από το σχήμα αυτό εξάγονται κάποια ενδιαφέροντα συμπεράσματα. Αρχικά, παρατηρείται πως στο χωρίο δημιουργείται ένας κύριος στρόβιλος ρευστού ο οποίος καταλαμβάνει μεγάλο μέρος της κοιλότητας και η δημιουργία του οφείλεται στην κίνηση του άνω τοιχώματος. Επίσης, είναι εμφανές πως η δέσμη η οποία εισέρχεται από το αριστερό τοίχωμα του χωρίου, ερχόμενη σε επαφή με τον στρόβιλο αυτό, λαμβάνει μια ώθηση και μετακινείται σχεδόν κατακόρυφα με κατεύθυνση προς το άνω κινούμενο τοίχωμα. Συνεπώς, είναι λογικό πως όσο πιο χαμηλά εισέρχεται η δέσμη, τόσο περισσότερη θερμότητα απάγει από το κάτω θερμό τοίχωμα του χωρίου και τελικά την προσδίδει στο άνω κινούμενο τοίχωμα αυξάνοντας έτσι την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης F . Για τη δέσμη εξόδου, η βέλτιστη λύση είναι σε σχετικά χαμηλό σημείο ώστε αυτή να προλάβει να αποβάλει τη θερμότητά της, αλλά δεν είναι απαραίτητο να εξέρχεται από το χαμηλότερο σημείο του χωρίου, όπως φαίνεται και στο σχήμα.

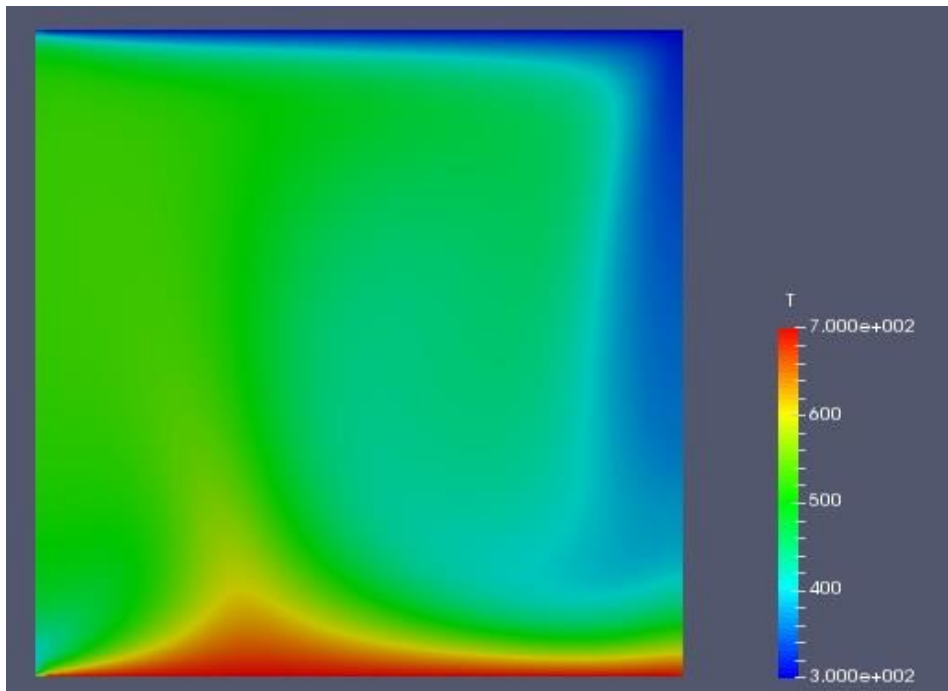
Επίσης, για τη βέλτιστη λύση παρουσιάζονται στα σχήματα 5.8, 5.9, 5.10, 5.11, 5.12 και 5.13 τα πεδία της πίεσης, του μέτρου της ταχύτητας, της θερμοκρασίας, της συζυγούς πίεσης, του μέτρου της συζυγούς ταχύτητας και της συζυγούς θερμοκρασίας αντίστοιχα.



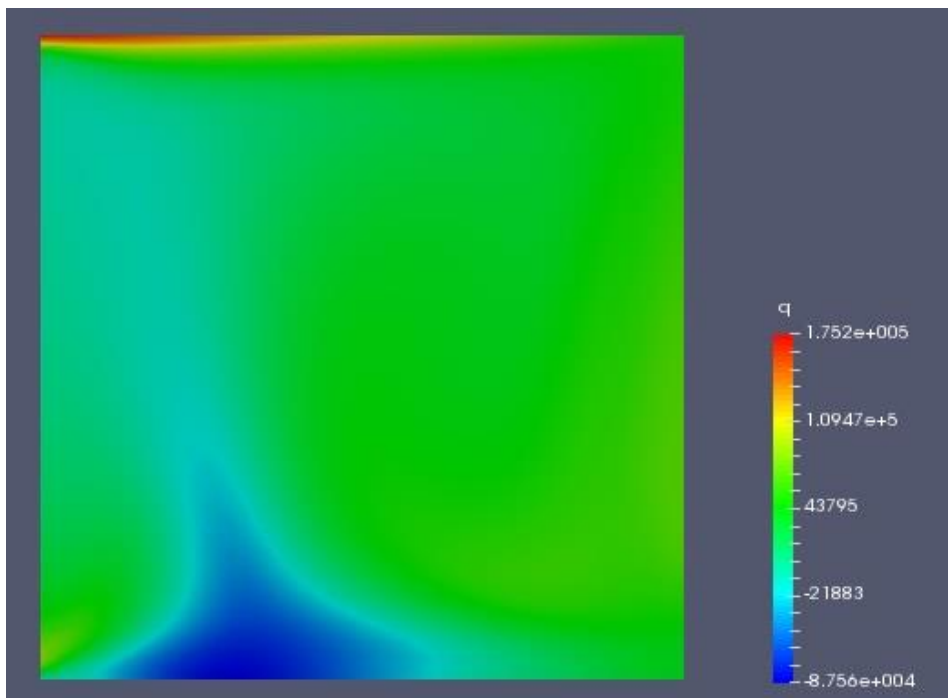
Σχήμα 5.8: Το πεδίο της πίεσης για τις βέλτιστες τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού $b_1 = 0.0025 \text{ m}$ και $b_2 = 0.0272 \text{ m}$.



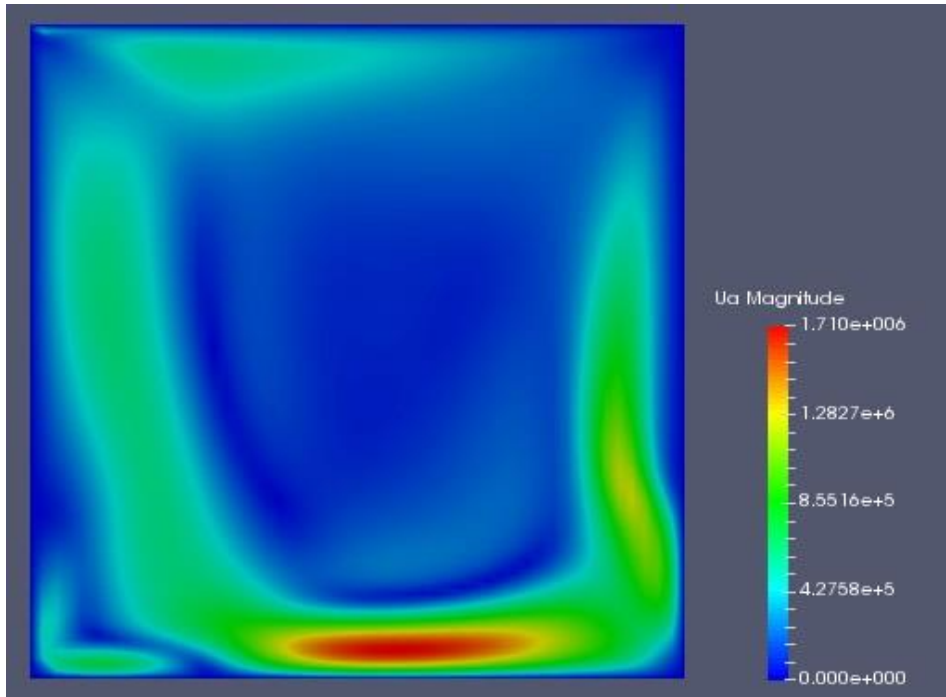
Σχήμα 5.9: Το πεδίο του μέτρου της ταχύτητας για τις βέλτιστες τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού $b_1 = 0.0025 \text{ m}$ και $b_2 = 0.0272 \text{ m}$.



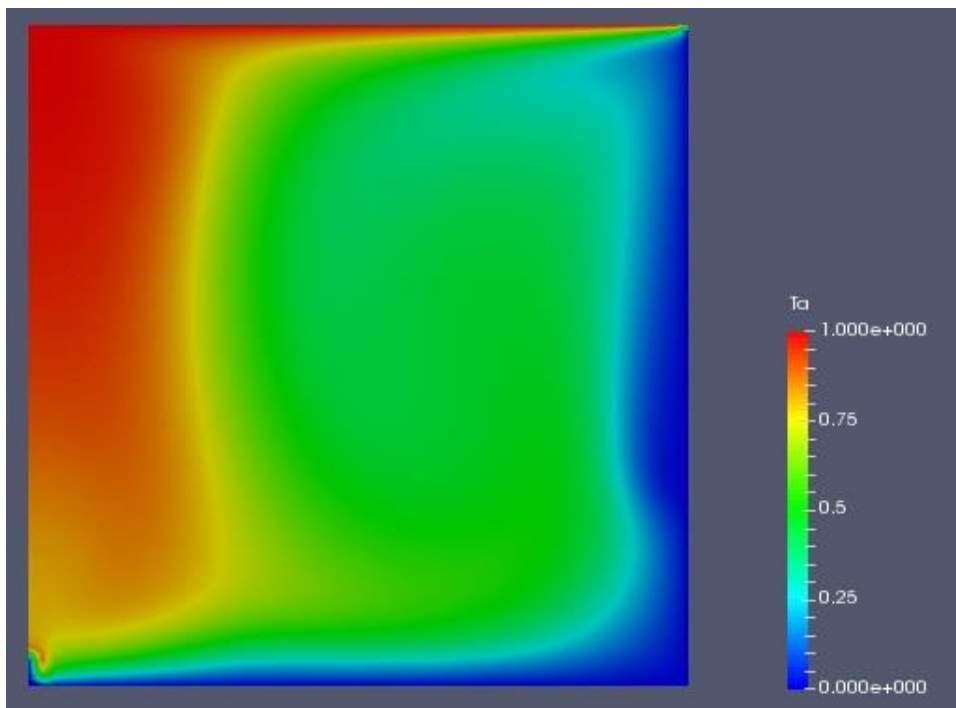
Σχήμα 5.10: Το πεδίο της θερμοκρασίας για τις βέλτιστες τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού $b_1 = 0.0025 \text{ m}$ και $b_2 = 0.0272 \text{ m}$.



Σχήμα 5.11: Το πεδίο της συζυγούς πίεσης για τις βέλτιστες τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού $b_1 = 0.0025 \text{ m}$ και $b_2 = 0.0272 \text{ m}$.



Σχήμα 5.12: Το πεδίο του μέτρου της συζυγούς ταχύτητας για τις βέλτιστες τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού $b_1 = 0.0025 \text{ m}$ και $b_2 = 0.0272 \text{ m}$.



Σχήμα 5.13: Το πεδίο της συζυγούς θερμοκρασίας για τις βέλτιστες τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού $b_1 = 0.0025 \text{ m}$ και $b_2 = 0.0272 \text{ m}$.

Κεφάλαιο 6

Ανακεφαλαίωση – Συμπεράσματα

Στη διπλωματική αυτή εργασία αναπτύχθηκε μέθοδος βελτιστοποίησης βασισμένη στη συνεχή συζυγή μέθοδο και εφαρμόστηκε σε πρόβλημα μεταφοράς θερμότητας με χαρακτηριστικό την ύπαρξη ασυνέχειας στις οριακές συνθήκες, κάτι που θεωρητικά καθιστά αδύνατη την υλοποίηση της συζυγούς μεθόδου. Η διάταξη στην οποία εφαρμόστηκε η μέθοδος είναι μια παραλλαγή του κλασικού προβλήματος τετραγωνικής κοιλότητας που περικλείει ρευστό, της οποίας το άνω τοίχωμα είναι κινούμενο με ταχύτητα εφαπτομενική σε αυτό. Το συγκεκριμένο πρόβλημα χρησιμοποιείται ευρέως στον τομέα της Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής λόγω της απλότητάς του, με σκοπό την πιστοποίηση ενός πιθανού νέου κώδικα ή μιας νέας μεθόδου επίλυσης. Οι τροποποιήσεις που πραγματοποιήθηκαν στο κλασικό πρόβλημα είναι δύο. Αρχικά η εισαγωγή και η επίλυση της ενεργειακής εξίσωσης με σκοπό την εύρεση του πεδίου θερμοκρασίας της κοιλότητας. Η δεύτερη αλλαγή που πραγματοποιήθηκε ήταν η δημιουργία μίας οπής σε κάθε πλευρικό τοίχωμα του χωρίου, με σκοπό την εισαγωγή και την εξαγωγή μιας δέσμης ρευστού από την κοιλότητα που είχε ως στόχο την ενίσχυση του φαινομένου της μεταφοράς θερμότητας από το κάτω προς το άνω τοίχωμα της κοιλότητας. Ως μεταβλητές σχεδιασμού ορίστηκαν οι κατακόρυφες αποστάσεις του κέντρου καθεμιάς από τις δύο οπές, μετρούμενες από το όριο του κάτω τοιχώματος του τετραγωνικού χωρίου. Ως αντικειμενική συνάρτηση προς μεγιστοποίηση ορίστηκε η ροή θερμότητας το οποίο περνά διαμέσου του άνω κινούμενου τοιχώματος της κοιλότητας και τελικά απάγεται από το σύστημα. Αναλυτικότερα, η συμβολή του γράφοντος συνοψίζεται στα παρακάτω βήματα.

- Γένεση του υπολογιστικού πλέγματος. Η διαδικασία αυτή έγινε μέσω του BlockMesh, ενός εργαλείου το οποίο είναι ενσωματωμένο στο λογισμικό OpenFOAM και προσφέρεται σε μορφή εκτελέσιμου αρχείου. Σε αυτό το σημείο ορίστηκαν και οι οριακές συνθήκες του πρωτεύοντος προβλήματος, καθώς και ιδιότητες του περικλειόμενου ρευστού.
- Ανάπτυξη κώδικα στο περιβάλλον OpenFOAM για την επιβολή των οριακών συνθηκών του ευθέως αλλά, και αργότερα, του συζυγούς

προβλήματος. Οι οριακές συνθήκες που χρησιμοποιήθηκαν για την επίλυση του προβλήματος είναι σχετικά πιο σύνθετες από αυτές οι οποίες παρέχονται από το OpenFOAM, όπως αναλύθηκε και στο κεφάλαιο 2. Για αυτό το λόγο προγραμματίστηκε κώδικας σε γλώσσα C++ ώστε να είναι δυνατή η εφαρμογή αυτών των οριακών συνθηκών.

- Επίλυση των εξισώσεων ροής του προβλήματος. Για την επίλυση χρησιμοποιήθηκε αλγόριθμος ο οποίος αναπτύχθηκε από τη ΜΠΥΡ&B/ΕΘΣ σε περιβάλλον OpenFOAM. Ο αλγόριθμος αυτός βασίζεται στον αλγόριθμο SIMPLE που παρέχεται από το OpenFOAM, με τη βασική διαφορά να είναι η εισαγωγή μιας ακόμη εξίσωσης προς επίλυση, της ενεργειακής εξίσωσης.
- Μαθηματική ανάπτυξη της συνεχούς συζυγούς μεθόδου. Πιο συγκεκριμένα, με βάση την αντικειμενική συνάρτηση προς βελτιστοποίηση, σχηματίστηκαν οι συζυγείς πεδιακές εξισώσεις της ροής καθώς και οι συζυγείς οριακές συνθήκες. Τέλος διατυπώθηκαν οι τελικές εκφράσεις των δύο παραγώγων ευαισθησίας.
- Επίλυση των συζυγών εξισώσεων. Για την επίλυσή τους χρησιμοποιήθηκε κώδικας ο οποίος αναπτύχθηκε από την ΜΠΥΡ&B/ΕΘΣ σε περιβάλλον OpenFOAM, και ο οποίος βασίζεται στον αλγόριθμο SIMPLE.
- Υπολογισμός της αντικειμενικής συνάρτησης καθώς και των παραγώγων ευαισθησίας του προβλήματος, σύμφωνα με κώδικα που αναπτύχθηκε σε περιβάλλον OpenFOAM. Έπειτα υπολογίστηκε η αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος για διάφορες τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού αλλά και άλλων παραμέτρων. Αυτό έγινε για την παραμετρική ανάλυση της συμπεριφοράς της αντικειμενικής συνάρτησης αλλά και για πιστοποίηση των τελικών αποτελεσμάτων του αλγόριθμου βελτιστοποίησης.
- Ανάπτυξη κώδικα σε περιβάλλον OpenFOAM ο οποίος υλοποιεί τον αλγόριθμο βελτιστοποίησης όπως αυτός περιγράφηκε στο κεφάλαιο 5. Με βάση αυτόν τον κώδικα, ο οποίος χρησιμοποιεί ως μέθοδο ανανέωσης

μεταβλητών κατάστασης τη μέθοδο της απότομης καθόδου, επιτυγχάνεται η εύρεση της βέλτιστης λύσης του προβλήματος.

Στη συνέχεια συνοψίζονται ορισμένα συμπεράσματα στα οποία κατέληξε η εργασία αυτή.

Αρχικά, αποδείχθηκε ότι η χρησιμοποίηση μια σιγμοειδούς συνάρτησης για τη μοντελοποίηση των θέσεων των δεσμών του ρευστού σε ένα πρόβλημα, ή γενικότερα για τη μοντελοποίηση οριακών συνθηκών οι οποίες αλλάζουν απότομα, είναι μια τεχνική η οποία εισάγει να μεν ένα μικρό-και υπολογισμο-σφάλμα στη μέθοδο, αλλά παράλληλα δημιουργεί ένα πρόβλημα το οποίο είναι διαχειρίσιμο από τη συζυγή μέθοδο.

Επίσης, φάνηκε πως η συνεχής συζυγής μέθοδος σε συνεργασία με την μέθοδο της απότομης καθόδου μπορούν να δώσουν πολύ ακριβή αποτελέσματα σε μια διαδικασία βελτιστοποίησης. Είναι πιθανό όμως, όπως στο παρόν πρόβλημα να αναζητείται το ολικό μέγιστο μιας συνάρτησης, ενώ αυτή παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. Σε αυτή την περίπτωση υπάρχουν δύο διαφορετικές λύσεις του αλγορίθμου, ανάλογα την τιμή εκκίνησης της διαδικασίας. Θέλει προσοχή λοιπόν η αρχικοποίηση των μεταβλητών σχεδιασμού, έτσι ώστε να εντοπιστεί η πραγματικά βέλτιστη λύση.

Επιπροσθέτως, αποδείχτηκε η ευελιξία που έχει το λογισμικό OpenFOAM και το πώς μπορεί αυτό να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση και τον υπολογισμό ποσοτήτων στον τομέα της μηχανικής των ρευστών καθώς και δυνατότητα προσαρμογής του στις ανάγκες του κάθε προβλήματος.

Τέλος, είναι γνωστό το χαμηλό υπολογιστικό κόστος της συζυγούς μεθόδου έναντι άλλων μεθόδων υπολογισμού των παραγώγων ευαισθησίας, και το πώς αυτό το κέρδος αυξάνεται αναλογικά με τον αριθμό των μεταβλητών σχεδιασμού. Παρά τη φαινομενική απλότητα του παρόντος προβλήματος ροής και τον περιορισμένο αριθμό των δύο μεταβλητών σχεδιασμού, μπορεί να υποστηριχτεί η άποψη ότι η μέθοδος ήταν αρκετά γρήγορη. Πιο συγκεκριμένα κάθε κύκλος του αλγορίθμου βελτιστοποίησης διήρκεσε λιγότερο από 300 sec ακόμα και αν η υλοποίησή του έγινε σε έναν πολύ απλό επεξεργαστή προσωπικού υπολογιστή.

Τέλος, παρατίθενται προτάσεις για μελλοντική εξέλιξη της παρούσας εργασίας. Αρχικά στο κάτω τοίχωμα της ροής θα μπορούσε να επιβληθεί οριακή συνθήκη σταθερής ροής θερμότητας αντί για σταθερή θερμοκρασία προσομοιάζοντας έτσι καλύτερα προβλήματα με πρακτική εφαρμογή στην βιομηχανία. Επίσης μπορεί να εφαρμοστεί βελτιστοποίηση της ροής θερμότητας από το άνω κινούμενο τοίχωμα χωρίς τη χρήση δεσμών ρευστού, αλλά με κατάλληλη τροποποίηση της γεωμετρίας της κοιλότητας κάνοντας στην ουσία βελτιστοποίηση μορφής (shape optimization). Ένας τρόπος με τον οποίο θα μπορούσε να γίνει αυτό είναι με τη χρήση ενός γενέτη στροβιλότητας (vortex generator) απλής μορφής, ή και περισσότερων, στα τοιχώματα της κοιλότητας [Παράρτημα Β']. Τέλος, σε μελλοντική εργασία θα μπορούσε να γίνει χρήση δεσμών ρευστού για βελτιστοποίηση της μεταφοράς θερμότητας σε γεωμετρίες πιο πρακτικής φύσεως, όπως για παράδειγμα σε πτερύγιο στροβίλου.

Παράρτημα Α'

Υπολογισμός για Τυρβώδη Ροή

Όπως αναλύθηκε στο κεφάλαιο 2, η ροή εσωτερικά της κοιλότητας έχει θεωρηθεί στρωτή. Προς υπεράσπιση αυτού του ισχυρισμού υπολογίστηκε ο αριθμός Reynolds της ροής που δημιουργείται από το άνω-κινούμενο τοίχωμα του χωρίου. Τα απαραίτητα στοιχεία λήφθηκαν από τη βιβλιογραφία, στην οποία όμως δεν εντοπίστηκε καμία περίπτωση ροής σε κοιλότητα με χρήση δεσμών ρευστού. Συνεπώς, ο ισχυρισμός ότι η ροή είναι στρωτή έγινε με βάση βιβλιογραφικά στοιχεία για κοιλότητα στην οποία η ροή δημιουργείται αποκλειστικά από το άνω-κινούμενο τοίχωμά της. Είναι πιθανό λοιπόν, η ροή στην περίπτωση που εξετάστηκε στην εργασία αυτή, να αποκτά τυρβώδη χαρακτηριστικά εξαιτίας των δύο δεσμών. Για παράδειγμα, η τύρβη μπορεί να δημιουργηθεί από την ανάμιξη δύο ρευστών τα οποία έχουν διαφορετικά χαρακτηριστικά, όπως για παράδειγμα διαφορετικά πεδία ταχυτήτων [29, 30], όπως συμβαίνει και στο παρόν πρόβλημα. Αυτή η διαδικασία ονομάζεται τυρβώδης διάχυση. Κατά τη διάρκεια αυτής της διαδικασίας ρευστά διαφορετικής ορμής έρχονται σε επαφή μεταξύ τους, με αποτέλεσμα την απότομη μείωση των κλίσεων των ταχυτήτων τους λόγω της συνεκτικότητας. Ως αποτέλεσμα μέρος της κινητικής ενέργειας της ροής μετατρέπεται σε εσωτερική ενέργεια του ρευστού, κάτι που συχνά αναφέρεται ως "καταστροφή" της κινητικής ενέργειας.

Κρίνεται λοιπόν χρήσιμο, να διερευνηθεί η συμπεριφορά του προβλήματος, λαμβάνοντας υπόψη κάποιο τυρβώδες μοντέλο, έτσι ώστε να εντοπιστούν σφάλματα του στρωτού μοντέλου ροής, αν αυτά υπάρχουν. Αυτό που θα γίνει στο κεφάλαιο αυτό, είναι να επαναυπολογιστεί η αντικειμενική συνάρτηση για τη βέλτιστη λύση του προβλήματος, όπως αυτή προέκυψε στο κεφάλαιο 5. Συγκεκριμένα, θα χρησιμοποιηθούν δύο μοντέλα τύρβης, το μοντέλο των Spalart – Allmaras και το μοντέλο $k - \epsilon$ [24, 31, 32, 33, 34].

Δεν θα επαναληφθεί ολόκληρη η διαδικασία, διατυπώνοντας τη συνεχή συζυγή μέθοδο για τυρβώδη ροή καθώς αυτό ξεφεύγει από το πλαίσιο της εργασίας αυτής.

A.1 Θεωρητικό Υπόβαθρο των Μοντέλων Τύρβης

Όπως έχει αναφερθεί, η τύρβη χαρακτηρίζεται από τυχαίες διαταραχές του πεδίου της ροής προς όλες τις κατευθύνσεις. Αυτό καθιστά την επίλυση των εξισώσεων ροής πολύ ακριβή, καθώς προϋποθέτει την επίλυση όλων των διαταραχών της ροής με ιδιαίτερα μικρό χρονικό βήμα ώστε να υπολογιστούν ακόμα και οι πιο γρήγορες μεταβολές. Για αυτό το λόγο, έχουν αναπτυχθεί πολλές μέθοδοι για τη μοντελοποίηση της τύρβης σε μακροσκοπικό επίπεδο, έτσι ώστε το κόστος υπολογισμού της τυρβώδους ροής να μπορεί να υποστηριχθεί. Με την παραδοχή της τυρβώδους ροής οι πρωτεύουσες εξισώσεις ροής που παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 2 μετασχηματίζονται ως εξής

$$R^p = -\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (A.1)$$

$$R_i^v = u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v + v_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0 \quad (A.2)$$

$$R^T = c_p u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} - c_p \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{(v + v_t)}{Pr} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right] = 0 \quad (A.3)$$

$$i = 1,2,(3)$$

Αυτό που αλλάζει σε σχέση με τις εξισώσεις για στρωτή ροή είναι ότι πλέον προστίθεται στον όρο της κινηματικής συνεκτικότητας ο όρος v_t που ονομάζεται τυρβώδης κινηματική συνεκτικότητα. Ο όρος αυτός είναι μεταβαλλόμενος μέσα στο όριο της ροής και τα διάφορα μοντέλα τύρβης που χρησιμοποιούνται έχουν ως σκοπό τον υπολογισμό του πεδίου του. Η μοντελοποίηση της ροής θα έγινε με βάση τις μεσοσταθμισμένες κατά Reynolds εξισώσεις Navier-Stokes (Reynolds-Averaged Navier-Stokes equations ή RANS). Στις RANS, κάθε μεταβλητή ροής αναλύεται στη μέση χρονικά τιμή της και τη χρονική διακύμανση αυτής. Για μια μεταβλητή φ αυτό γράφεται σύμφωνα με την εξίσωση A.4

$$\varphi(x, t) = \bar{\varphi}(x) + \varphi'(x, t) \quad (A.4)$$

A.2 Οι Οριακές Συνθήκες για τα Μεγέθη της Τύρβης

Όπως γίνεται και για τις μεταβλητές της ροής, έτσι και για τις μεταβλητές των εξισώσεων των μοντέλων τύρβης ο επιλύτης υπολογίζει μια τιμή για καθεμία από αυτές σε κάθε κελί του πλέγματος. Για να γίνει αυτό δυνατό πρέπει να οριστούν οριακές συνθήκες για αυτές τις μεταβλητές σε κάθε όριο του πλέγματος.

Για το μοντέλο Spallart - Allmaras [24,31,34] πρέπει να δοθούν οριακές συνθήκες για την μεταβλητή $\tilde{\nu}$, μέσω της οποίας υπολογίζεται το ν_t από τη σχέση A.5

$$\nu_t = f_{\nu 1} \tilde{\nu} \quad (A.5)$$

όπου

$$f_{\nu 1} = \frac{X^3}{X^3 + C_{\nu 1}^3} \quad (A.6)$$

$$X = \frac{\tilde{\nu}}{\nu} \quad (A.7)$$

και $C_{\nu 1}$ μια σταθερά καθορισμένη από τους δημιουργούς του μοντέλου.

Για τα στερεά τοιχώματα, η μεταβλητή μηδενίζεται

$$\tilde{\nu} = 0 \quad (A.8)$$

Για τα όρια στα οποία υπάρχει ροή ρευστού, δηλαδή για την είσοδο και την έξοδο της δέσμης και για το άνω κινούμενο τοίχωμα η τιμή της μπορεί να κυμαίνεται εντός ενός ορίου.

Η μεταβλητή $f_{\nu 1}$ σύμφωνα με την εξίσωση A.6 και για λόγο τυρβώδους κινηματικής συνεκτικότητας $X = 10$ ο οποίος είναι λογικός για προβλήματα εσωτερικής ροής [30], παίρνει την τιμή

$$f_{\nu 1} = 0.73 \quad (A.9)$$

Σημειώνεται ότι η σταθερά $C_{\nu 1}$ που χρησιμοποιήθηκε στον υπολογισμό της σχέσης A.6 ισούται με 7.1.

Η τυρβώδης κινηματική συνεκτικότητα ν_t μηδενίζεται στα όρια που υπάρχει στερεό τοίχωμα και παίρνει την τιμή $\nu_t = 1.511 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ στα όρια που υπάρχει ροή, λόγω του λόγου ν_t/ν που ορίστηκε ίσος με 10.

Συνεπώς, η μεταβλητή $\tilde{\nu}$, και σύμφωνα με την εξίσωση A.7, στα όρια που υπάρχει ροή παίρνει την τιμή

$$\tilde{\nu} = 2.06 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s} \quad (\text{A.10})$$

Για το μοντέλο $k - \varepsilon$ [32, 33] πρέπει να οριστούν οι μεταβλητές k και ε , μέσω των οποίων υπολογίζεται το ν_t , σύμφωνα με τη σχέση

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (\text{A.11})$$

όπου ο όρος C_μ θεωρείται σταθερά ίση με

$$C_\mu = 0.09 \quad (\text{A.12})$$

Το k υπολογίζεται από τη σχέση

$$k = \frac{3}{2} (\nu I)^2 \quad (\text{A.13})$$

όπου I είναι η ένταση της τύρβης και ν είναι η μέση ταχύτητα της ροής. Για την ένταση της τύρβης έχει μετρηθεί πειραματικά ότι για εσωτερικές ροές μπορεί να κυμαίνεται μεταξύ 0.1% – 10%. Στο παρόν πρόβλημα θα θεωρηθεί ίση με 1% στα όρια στα οποία υπάρχει ροή. Η μέση ταχύτητα της ροής είναι διαφορετική στην είσοδο της δέσμης και στο άνω κινούμενο τοίχωμα. Έτσι, σύμφωνα με τις τιμές της ταχύτητας εκεί υπολογίζεται ότι το k στο άνω κινούμενο τοίχωμα παίρνει την τιμή

$$k = 0.015 \text{ J/kg} \quad (\text{A.14})$$

ενώ στην είσοδο της δέσμης λαμβάνει την τιμή

$$k = 0.00375 \text{ J/kg} \quad (\text{A.15})$$

Στην έξοδο της δέσμης επιβάλλεται μηδενική συνθήκη Neumann για το k .

Το ε υπολογίζεται από τη σχέση

$$\varepsilon = C_\mu \frac{k^2}{\nu} \left(\frac{\nu_t}{\nu} \right)^{-1} \quad (\text{A.16})$$

όπου ο λόγος τυρβώδους κινηματικής συνεκτικότητας είναι 10 όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως.

Συνεπώς, στο άνω κινούμενο τοίχωμα το ε παίρνει την τιμή

$$\varepsilon = 0.1340 \text{ J/(kg s)} \quad (\text{A.17})$$

ενώ στην είσοδο της δέσμης είναι

$$\varepsilon = 0.00837 \text{ J}/(\text{kg s}) \quad (\text{A.18})$$

Στην έξοδο της δέσμης επιβάλλεται μηδενική συνθήκη Neumann για το ε .

Στα όρια που υπάρχει στερεό τοίχωμα, για τις μεταβλητές k, ε χρησιμοποιούνται οι συναρτήσεις τοίχου (wall functions) που παρέχονται από το λογισμικό OpenFOAM. Συγκεκριμένα, για το k επιβάλλεται μηδενική συνθήκη Neumann κοντά στο τοίχωμα ενώ για το ε , υπολογίζεται μέσω της συνάρτησης τοίχου η τιμή του στα τοιχώματα, και στη συνέχεια εισάγεται στις εξισώσεις τύρβης ως περιορισμός.

Για το $\tilde{\nu}$, όπως αναφέρθηκε και πριν, επιβάλλεται μηδενική συνθήκη Dirichlet στα τοιχώματα, ενώ για την κινηματική συνεκτικότητα ν_t επιβάλλεται μια συνεχής κατανομή στα τοιχώματα του χωρίου βασισμένο στην ταχύτητα όπως προτάθηκε από τον Spalding.

Οι οριακές συνθήκες για τα μεγέθη που χρησιμοποιούνται στα δύο τυρβώδη μοντέλα που θα εφαρμοστούν στο πρόβλημα φαίνονται συνοπτικά στον πίνακα A.1.

Όριο	$\nu_t \left(\frac{\text{m}^2}{\text{s}}\right)$	$\tilde{\nu} \left(\frac{\text{m}^2}{\text{s}}\right)$	$k \left(\frac{\text{J}}{\text{kg}}\right)$	$\varepsilon \left(\frac{\text{J}}{\text{kg s}}\right)$	
S_{mw}	1.511×10^{-4}	2.06×10^{-4}	0.015	0.0134	
S_{tw}	Συνάρτηση τοίχου για το ν_t	0	$\frac{\partial k}{\partial n} = 0$	Συνάρτηση τοίχου για το ε	
S_{Lw}	S_{lw}	Συνάρτηση τοίχου για το ν_t	0	$\frac{\partial k}{\partial n} = 0$	Συνάρτηση τοίχου για το ε
	S_i	1.511×10^{-4}	2.06×10^{-4}	0.00375	0.000237
S_{Rw}	S_{rw}	Συνάρτηση τοίχου για το ν_t	0	$\frac{\partial k}{\partial n} = 0$	Συνάρτηση τοίχου για το ε
	S_o	1.511×10^{-4}	2.06×10^{-4}	$\frac{\partial k}{\partial n} = 0$	$\frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = 0$

Πίνακας 6.1: Οι οριακές συνθήκες για τις μεταβλητές τύρβης που χρησιμοποιούνται στα μοντέλα των Spallart – Allmaras και k – ε .

A.3 Αποτελέσματα

Για τις τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού που βρέθηκαν ως βέλτιστες στο κεφάλαιο 5, θα υπολογιστεί η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης αλλά, αυτή τη φορά, λαμβάνοντας υπόψη ότι η ροή είναι τυρβώδης στο εσωτερικό του χωρίου. Οι τιμές αυτές των μεταβλητών σχεδιασμού είναι $b_1 = 0.0025 \text{ m}$ και $b_2 = 0.03007 \text{ m}$. Ο υπολογισμός της αντικειμενικής συνάρτησης έγινε για τα δύο μοντέλα της τύρβης που αναλύθηκαν προηγουμένως (Spallart - Allmaras, $k - \epsilon$). Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον πίνακα 6.2, μαζί με την τιμή που είχε υπολογιστεί για στρωτή ροή.

Μοντέλο τύρβης	$F (W)$
Στρωτή ροή	4.034
Spallart - Allmaras	4.0932
$k - \epsilon$	4.0876

Πίνακας 6.2: Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για τα τρία μοντέλα τύρβης που χρησιμοποιήθηκαν, καθώς και αυτή για στρωτή ροή. Οι τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού είναι σταθερές και ίσες με $b_1 = 0.0025 \text{ m}$, $b_2 = 0.03007 \text{ m}$.

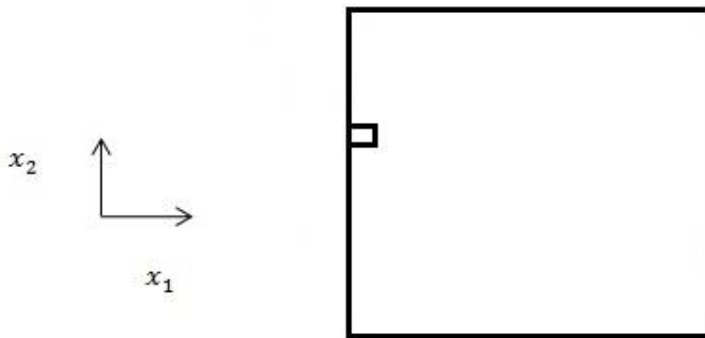
Οι δύο αποκλίσεις, σε σχέση με τη στρωτή ροή, είναι της τάξης του 1.44% και 1.31%.

Παράρτημα Β'

Υπολογισμός Αντικειμενικής Συνάρτησης σε Κοιλότητα με Χρήση Γενέτη Στροβιλότητας για Ενίσχυση της Μεταφοράς Θερμότητας

Όπως αναφέρθηκε στο κεφάλαιο 7, μια πρόταση για μελλοντική μελέτη και εξέλιξη της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η χρήση ενός γενέτη στροβιλότητας (vortex generator) απλής μορφής, ή και περισσότερων, στα τοιχώματα της κοιλότητας. Ως γενέτης στροβιλότητας αναφέρεται ένα αντικείμενο, ορθογωνικής γεωμετρίας σε αυτή την περίπτωση, με σταθερά τοιχώματα, το οποίο προσαρτάται σε κάποιο από τα σταθερά τοιχώματα της κοιλότητας. Ο γενέτης συνεισφέρει στη μεγιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης αυξάνοντας την επίδραση της διάχυσης της θερμότητας μέσα στο χωρίο. Επίσης, αυξάνεται η τύρβη της ροής, κάτι που έχει θετικά αποτελέσματα στη μετάδοση της θερμότητας.

Στο παράρτημα αυτό, θα γίνει υπολογισμός της αντικειμενικής συνάρτησης στην τετραγωνική κοιλότητα η οποία αναλύθηκε σε αυτήν τη διπλωματική εργασία, χωρίς χρήση δεσμών ρευστού αυτήν τη φορά, αλλά έχοντας τοποθετήσει στο αριστερό τοίχωμα του χωρίου έναν γενέτη στροβιλότητας, όπως φαίνεται στο σχήμα Β.1



Σχήμα B. 1: Ο γενέτης στροβιλότητας της ροής, όπως φαίνεται στο αριστερό τοίχωμα της κοιλότητας

Στον υπολογισμό, ο γενέτης στροβιλότητας έχει μήκος 0.005 m (κατά τον x_1 άξονα) και ύψος 0.003 m (κατά τον x_2 άξονα). Η κάθετη απόσταση στην οποία έχει τοποθετηθεί το κέντρο του μετρούμενη από το κάτω τοίχωμα του χωρίου είναι 0.06 m .

Τα τοιχώματα του γενέτη μοντελοποιούνται όπως και τα 2 πλαϊνά τοιχώματα της κοιλότητας όσον αφορά τις οριακές συνθήκες.

Η αντικειμενική συνάρτηση που υπολογίστηκε είναι η ίδια με αυτή που είχε οριστεί στο κεφάλαιο 3, δηλαδή το ρεύμα θερμότητας που περνά από το άνω κινούμενο τοίχωμα της κοιλότητας, ενώ όλες οι υπόλοιπες οριακές συνθήκες είναι οι ίδιες.

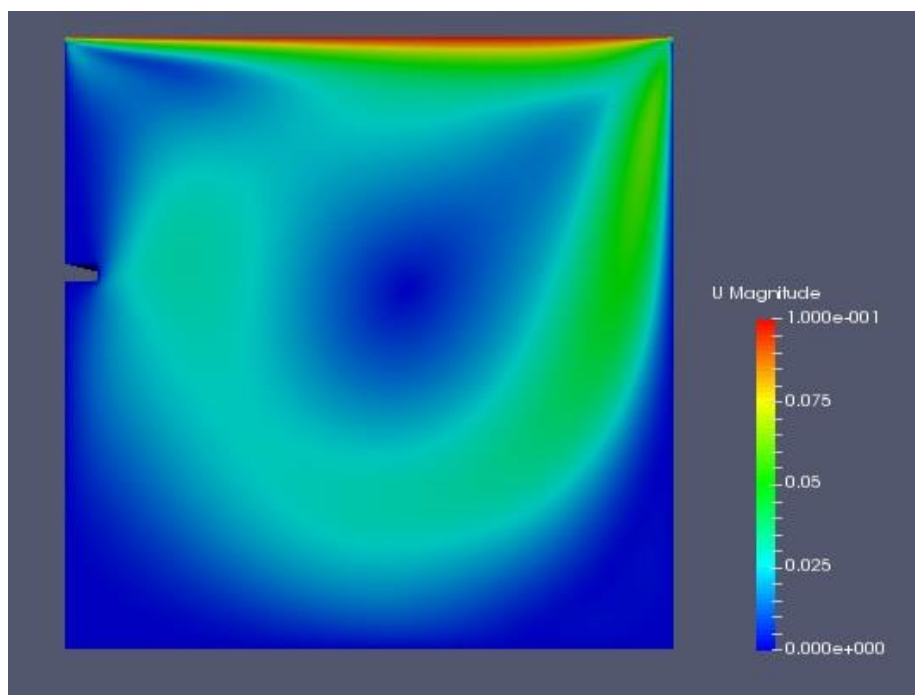
Στον πίνακα B.1 αναγράφονται οι τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης όπως αυτή υπολογίστηκε στις περιπτώσεις με τον γενέτη στροβιλότητας αλλά και χωρίς αυτόν, ώστε να μπορέσει να γίνει σύγκριση των 2 τιμών.

	$F (W)$
<i>Χωρίς χρήση γενέτη στροβιλότητας</i>	2.2693
<i>Με χρήση γενέτη στροβιλότητας</i>	2.3131

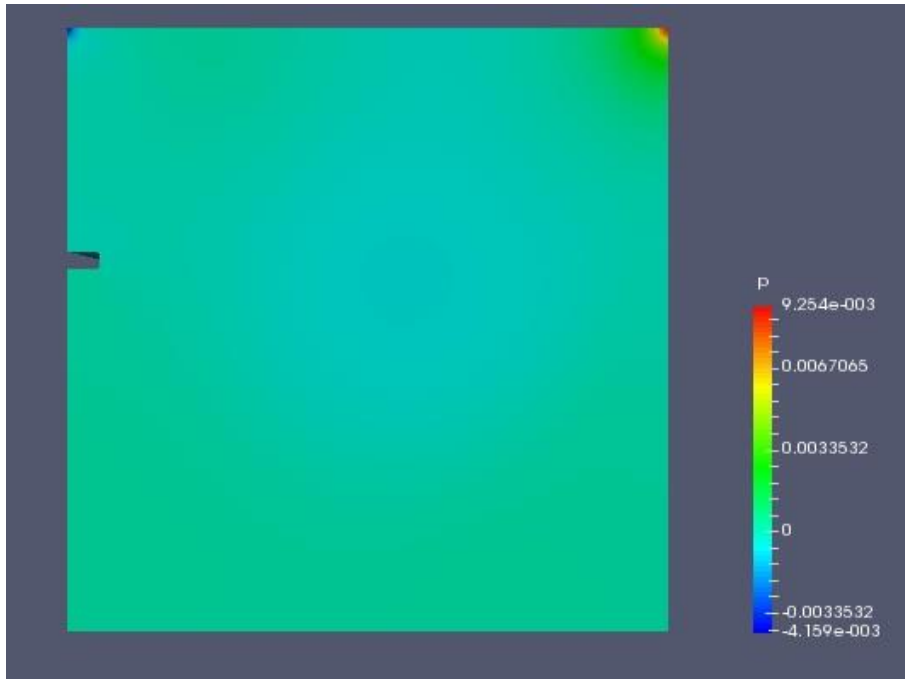
Πίνακας B.1: Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για την περίπτωση με χρήση γενέτη στροβιλότητας στο αριστερό τοίχωμα της κοιλότητας και για την περίπτωση χωρίς τη χρήση αυτού.

Αυτό που παρατηρείται είναι ότι η χρήση του γενέτη επιφέρει μια αύξηση στην αντικειμενική συνάρτηση. Πιο συγκεκριμένα, ανάμεσα στις δύο περιπτώσεις υπάρχει βελτίωση της τάξης του 1.9 %.

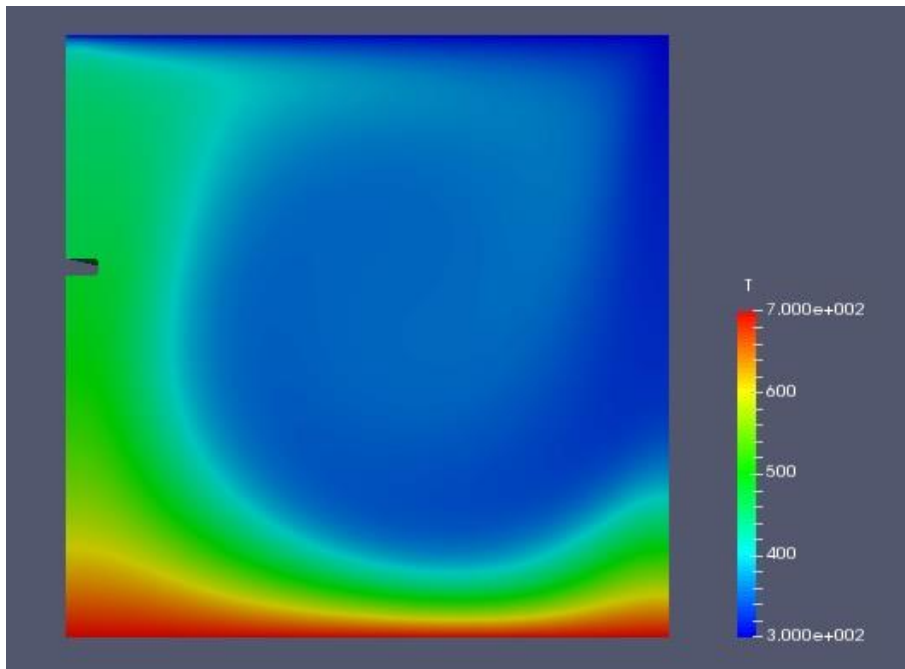
Στα σχήματα B.2, B.3, B.4 παρουσιάζονται τα πεδία του μέτρου της ταχύτητας, της πίεσης και της θερμοκρασίας για αυτήν την περίπτωση.



Σχήμα B.2: Το πεδίο του μέτρου της ταχύτητας στο εσωτερικό της κοιλότητας για την περίπτωση που υπάρχει γενέτης στροβιλότητας στο αριστερό τοίχωμά της.



Σχήμα B.3: Το πεδίο πίεσης στο εσωτερικό της κοιλότητας για την περίπτωση που υπάρχει γενέτης στροβιλότητας στο αριστερό τοίχωμά της.



Σχήμα B.4: Το πεδίο θερμοκρασίας στο εσωτερικό της κοιλότητας για την περίπτωση που υπάρχει γενέτης στροβιλότητας στο αριστερό τοίχωμά της.

Σε μια μελλοντική μελέτη θα μπορούσε να γίνει βελτιστοποίηση με χρήση ενός ή και περισσότερων γενετών στροβιλότητας σε όλα τα στερεά τοιχώματα της κοιλότητας. Οι μεταβλητές σχεδιασμού μπορούν να είναι οι θέσεις στις οποίες τοποθετούνται οι γενέτες αυτοί πάνω στα τοιχώματα ή ακόμα και το σχήμα που αυτοί θα έχουν.

Βιβλιογραφία

- [1] Κ. Χ. Γιαννάκογλου. Μέθοδοι Βελτιστοποίησης στην Αεροδυναμική, Αθήνα 2006.
- [2] Ε. Μ. Παπουτσής-Κιαχαγιάς. Συζυγείς Μέθοδοι για Τυρβώδεις Ροές, με Εφαρμογή στη Βελτιστοποίηση Μορφής ή Τοπολογίας και στο Στιβαρό Σχεδιασμό. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών Ε.Μ.Π., Αθήνα 2013.
- [3] Σ. Γ. Τσαγγάρης. Μηχανική των Ρευστών, Αθήνα 2013.
- [4] Γ. Χ. Μπεργελές. Υπολογιστική Ρευστομηχανική, Αθήνα 2012.
- [5] Σ. Α. Σάββα. Η Συνεχής Συζυγής Μέθοδος στο OpenFOAM σε Εφαρμογές Βελτιστοποίησης για Προβλήματα Μεταφοράς Θερμότητας. Μεταπτυχιακή Διπλωματική εργασία, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών Ε.Μ.Π., Αθήνα 2016.
- [6] OpenFOAM, The Open Source CFD Toolbox, User Guide, Version 3.0.1, 13th December 2015.
- [7] <http://www.foam.sourceforge.net/docs/cpp/>.
- [8] OpenFOAM, The Open Source CFD Toolbox, Programmer's Guide, Version 3.0.1, 13th December 2015.
- [9] Tommaso Lucchini. OpenFOAM programming tutorial, Department of Energy, Politecnico di Milano 2008.
- [10] Δ. Παπαδημητρίου. Συζυγείς (Adjoint) διατυπώσεις για την ανάλυση-σχεδίαση πτερυγώσεων στροβιλομηχανών και τη βέλτιστη προσαρμογή πλέγματος με a posteriori εκτίμηση σφάλματος. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα 2007.
- [11] Michael Amitay, Douglas R. Smith, Valdis Kibens, David E. Parekh, Ari Glezer. Aerodynamic Flow Control over an Unconventional Airfoil Using Synthetic Jet Actuators, AIAA JOURNAL, Vol. 39, No. 3, March 2001.
- [12] Ge-Cheng Zha, Bruce F. Carroll, Craig D. Paxton, Clark A. Conley, Adam Wells. High Performance Airfoil Using Co-Flow Jet Flow, AIAA Paper 2005 – 1260.

- [13] E. M. Papoutsis-Kiachagias, K. C. Giannakoglou. Continuous Adjoint Methods for Turbulent Flows, Applied to Shape and Topology Optimization: Industrial Applications, Archives of Computational Methods in Engineering DOI:10.1007/s11831-014-9141-9, 2014.
- [14] N. Zuckerman and N.Lior. Jet Impingement Heat Transfer: Physics, Correlations, and Numerical Modeling, Advances in Heat Transfer Vol. 39.
- [15] Holger Martin. Heat and Mass Transfer between Impinging Gas Jets and Solid Surfaces, Advances in Heat Transfer Vol. 13.
- [16] P. Sarma, K. Aziz, L. J. Durlofsky. Implementation of Adjoint Solution for Optimal Control of Smart Wells, 2005 SPE Reservoir Simulation Symposium, Houston, Texas U.S.A.
- [17] Jeroen Tromp, Carl Tape, Qinya Liu. Seismic tomography, adjoint methods, time reversal and banana-doughnut kernels, DOI:10.1111/j.1365-246X.2004.02453.x.
- [18] Qinya Liu and Jeroen Tromp. Finite-Frequency Kernels Based on Adjoint Methods, DOI: 10.1785/0120060041.
- [19] J. Brezillon and R.Dwight. Discrete adjoint of the Navier-Stokes equations for aerodynamic shape optimization. In Evolutionary and Deterministic Methods For Design, EUROGEN, Munich 2005.
- [20] D. Mavriplis. Multigrid solution of the discrete adjoint for optimization problems on unstructured meshes. AIAA Journal, 44(1): 42-50, 2006.
- [21] D. Mavriplis. Discrete adjoint-based approach for optimization problems on three dimensional unstructured meshes. AIAA Journal, 45(4): 740-752, 2007.
- [22] D. I. Papadimitriou and K. C. Giannakoglou. The continuous Direct-Adjoint approach for second order sensitivities in viscous aerodynamic inverse design problems. Computers and Fluids, 38: 1528-1538, 2009.
- [23] D. I. Papadimitriou and K. C. Giannakoglou. A continuous adjoint method with objective function derivatives based on boundary integrals for inviscid and viscous flows. Computers and Fluids, 36: 325-341, 2007.

- [24] A. S. Zymaris, D. I. Papadimitriou, and K. C. Giannakoglou. Continuous adjoint approach to the Spalart-Allmaras turbulence model, for incompressible flows. *Computers and Fluids*, 38: 1528-1538, 2009.
- [25] Π. Κουλλαπής. Η συνεχής συζυγής μέθοδος για τον έλεγχο ροής με δέσμες ρευστού – Εφαρμογή σε τριδιάστατη περιστρεφόμενη πτερύγωση συμπίεστη, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών Ε.Μ.Π., Αθήνα 2013.
- [26] Γ. Δημητρακόπουλος. Η συνεχής συζυγής μέθοδος για το βέλτιστο έλεγχο ροής με δέσμες ρευστού – Εφαρμογές εσωτερικής και εξωτερικής αεροδυναμικής, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών Ε.Μ.Π., Αθήνα 2012.
- [27] Ενίσχυση της μεταφοράς θερμότητας από τοιχώματα με χρήση δεσμών συνεχούς έγχυσης ρευστού – Υπολογιστική ανάλυση και παραμετρικές διερευνήσεις, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών Ε.Μ.Π., Αθήνα 2011.
- [28] Μ. Χρυσολούρης. Βελτιστοποίηση Μορφής σε Προβλήματα Συζευγμένης Μετάδοσης Θερμότητας μέσω της Συνεχούς Συζυγούς Μεθόδου – Προγραμματισμός σε OpenFOAM και Εφαρμογές, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών Ε.Μ.Π., Αθήνα 2015.
- [29] P. J. W. Roberts and D. R. Webster. *TurbulentDiffusion*. The Georgia Institute of Technology.
- [30] M. Manga. Dynamics of drops in cavity flows: Aggregation of high viscosity ratio drops. Department of Geology and Geophysics, University of California, 1996.
- [31] P. Spalart and S. Allmaras: A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows. AIAA Paper 1992 – 439, 30th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, Nevada, USA, January 1992.
- [32] T. Shih, W. W. Liou, A. Shabbir, Z. Yang, and J. Zhu: A New k-ε Eddy Viscosity Model for High Reynolds Number Turbulent Flows. *Computer and Fluids*, 24(3): 227 – 238, March 1995.
- [33] F. Menter: Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications. *AIAA Journal*, 32(8): 1598 – 1605, 1994.
- [34] A. S. Zymaris, D. I. Papadimitriou and K.C. Giannakoglou: Continuous adjoint approach to the Spalart-Allmaras turbulence model, for incompressible flows. *Computers and Fluids*, 38: 1528 – 1538, 2009.

- [35] Α. Ζυμάρης: Συζυγείς μέθοδοι για το σχεδιασμό μορφών με βέλτιστη αεροδυναμική συμπεριφορά σε στρωτές και τυρβώδεις ροές. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, ΕΜΠ, Αθήνα 2010.
- [36] D. I. Papadimitriou, A. S. Zymaris and K. C. Giannakoglou: Adjoint wall functions: A new concept for use in aerodynamic shape optimization. *Journal of Computational Physics*, 229(13): 5228 – 5245, 2010.
- [37] Hakop J. Nagapetyan, Timothy J. Wray and Ramesh K. Agarwal: Computation of Turbulent Flow in a Lid-Driven 2D Cavity and a 3D Box Using a Number of Turbulence Models. Washington University in St. Louis, St. Louis, MO 63130.
- [38] J. R. Koseff and R. L. Street: The Lid-Driven Cavity Flow: A Synthesis of Qualitative and Quantitative Observations. 390/Vol. 106, December 1984.