



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΕΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΦΟΡΤΙΩΝ ΣΕ ΙΣΤΙΟΠΛΟΪΚΟ ΥΔΡΟΠΤΕΡΥΓΟ ΚΑΤΑΜΑΡΑΝ ΤΥΠΟΥ AC45

Διπλωματική εργασία

Νικόλαος Π. Δέτσιος

Επιβλέπων: Σπύρος Γ. Βουτσινάς, Καθηγητής Ε.Μ.Π

Αθήνα, 2016

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία γίνεται υπολογιστική προσομοίωση της ροής γύρω από ένα ιστιοπλοϊκό υδροπτέρυγο καταμαράν τύπου AC45 με τη μέθοδο των στοιχείων στροβιλότητας. Τονίζεται ότι η παρούσα εργασία αφορά μόνο το υδροδυναμικό κομμάτι του σκάφους, δηλαδή δεν έγινε προσομοίωση της ροής γύρω από τα πανιά. Αρχικά προσαρμόστηκε η γεωμετρία των μελών του σκάφους (γάστρα, υδροπτερύγιο, πηδάλιο) κατάλληλα ώστε να είναι συμβατή με το υπολογιστικό λογισμικό. Στη συνέχεια, και αφού έγιναν υπολογισμοί των απομονωμένων υδροδυναμικών σωμάτων για να εξακριβωθεί η εν γένει συμπεριφορά τους, ακολούθησαν συνολικοί υπολογισμοί για το σκάφος στους οποίους ήταν διακριτή και η αλληλεπίδραση των σωμάτων μεταξύ τους. Στους συνολικούς υπολογισμούς συμπεριλήφθηκε επίσης προσομοίωση της ελεύθερης επιφάνειας και προσέγγιση του κυματισμού του νερού. Τέλος, έγινε παραμετρική ανάλυση από την οποία προέκυψαν στοιχεία για τη γεωμετρία των υδροδυναμικών σωμάτων και πώς αυτά επηρεάζουν την απόδοσή τους.



**NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF
ATHENS**

SCHOOL OF MECHANICAL ENGINEERING

SECTION OF FLUIDS

LABORATORY OF AERODYNAMICS

NUMERICAL ANALYSIS OF THE FORCES ON A SAILING HYDROFOIL CATAMARAN VESSEL AC45

Diploma Thesis

Nikos P. Detsios

Supervisor: Spyros G. Voutsinas, Professor NTUA

Athens, 2016

Abstract

In the present diploma thesis, takes place the computational simulation of the flow around a sailing hydrofoil catamaran AC45 with the vortex particle method. It has to be mentioned that this thesis examines only the hydrodynamic part of the vessel. That means,that calculations around the sails did not take place. Firstly,the geometry of the parts of the vessel (hull,daggerboard,rudder) was adjusted in order to be compatible with the computational software. Then,and after calculations of the isolated hydrodynamic bodies in order to be observed their general behaviour,overall calculations of the vessel took place where it was also distinguishable the interaction of the parts. The overall calculations concluded also free surface simulation and water waves approximation. In the end,from the parametric analysis were drawn conclusions about the geometry of the hydrodynamic bodies and how this affect their efficiency.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα καταρχήν να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου κ. Σπύρο Βουτσινά για την επίβλεψη και καθοδήγηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας, καθώς και για τη δυνατότητα που μου έδωσε να ασχοληθώ με ένα τόσο ενδιαφέρον θέμα. Επίσης ευχαριστώ τον κ. Βασίλη Ριζιώτη και τον κ. Πέτρο Χασαπογιάννη για τις συμβουλές τους όταν χρειάστηκε. Ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο στη περάτωση της παρούσας εργασίας έπαιξαν τα παιδιά του εργαστηρίου Θεολόγος Ανδρόνικος, Βασίλης Γιαννάτος και Κώστας Διακάκης και θα ήθελα να τους ευχαριστήσω για την προθυμία τους να βοηθήσουν και για την άριστη συνεργασία που αναπτύξαμε.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου και τους φίλους μου για τη στήριξη που μου προσέφεραν όλα αυτά τα χρόνια.

Περιεχόμενα

1.Εισαγωγή.....	3
1.1 Καταμαράν.....	3
1.1.1 Γενικά.....	3
1.1.2 Ιστορικά.....	4
1.1.3 Ανάπτυξη μοντέρνων καταμαράν.....	5
1.2 Υδροπτέρυγα.....	7
1.2.1 Γενικά.....	7
1.2.2 Ιστορικά.....	8
1.3 AC45 και American Cup.....	10
1.3.1 Στόχος της εργασίας.....	13
2.Θεωρητική προσέγγιση.....	14
2.1 Οι πλεγματικές και οι μη πλεγματικές μεθόδοι.....	14
2.2 Οι βασικές αρχές της μη πλεγματικής μεθόδου GENUVP.....	15
2.3 Οι βασικές εξισώσεις της μεθόδου.....	16
2.3.1 Αναλυτική μορφή.....	16
2.3.2 Αριθμητική μορφή.....	24
2.4 Ελεύθερη επιφάνεια και προσομοίωσή της μέσω συνοριακών ολοκληρωμάτων.....	32
2.5 Θεώρηση συμμετρίας.....	35
3.Ανάλυση των γεωμετρικών πλεγμάτων και αλγόριθμοι διαχείρισης.....	36
3.1 Γάστρα(Hull) και Υδροπτέρυγιο(Daggerboard).....	37
3.2 Πηδάλιο(Rudder).....	39
3.3 Ελεύθερη επιφάνεια(Free surface).....	45
3.4 Αλγόριθμοι και αεροτομές πτερυγίων.....	47
4.Αποτελέσματα.....	49
4.1 Συμπεριφορά των απομονωμένων υδροδυναμικών σωμάτων...49	
4.1.1 Υδροπτέρυγιο(Daggerboard).....	49
4.1.2 Πηδάλιο(Rudder).....	51
4.2 Περιπτώσεις συνολικών υπολογισμών.....	52
4.2.1 Μία γάστρα-One hull(simple case).....	52
4.2.2 Μία γάστρα με γωνία ροής 10°-One hull with yaw angle 10°.....	56

4.2.3 Μία γάστρα με προσομοίωση ελεύθερης επιφάνειας (κατανομή διπόλων)-One hull with free surface simulation (dipole distribution).....	59
4.2.4 Δύο γάστρες με προσομοίωση ελεύθερης επιφάνειας (κατανομή διπόλων)/Ολόκληρο σκάφος-Two hulls with free surface simulation(dipole distribution)/Whole vessel	61
4.2.5 Μία γάστρα με συμμετρία ως προς το επίπεδο $z=0$ - One hull with $z=0$ level symmetry.....	65
4.3 Κατανομή φορτίων κατά μήκος της γάστρας(Load distribution along the hull).....	67
4.4 Κατανομές πιέσεων και χρονική σύγκλιση της μεθόδου.....	71
5.Αποτίμηση της εργασίας.....	75
5.1 Συμπεράσματα.....	75
5.2 Προτάσεις για μελλοντική εργασία.....	75
Βιβλιογραφία.....	77
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ.....	78
I. Αλγόριθμος διαχείρισης σειράς κόμβων.....	78
II. Αλγόριθμος μετατροπής πλέγματος.....	78
III. Αλγόριθμος μείωσης κόμβων υδροπτερυγίου(daggerboard).....	79
IV. Αλγόριθμος μείωσης κόμβων πηδαλίου(rudder).....	80

Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή

1.1 Καταμαράν

1.1.1 Γενικά

Το καταμαράν(catamaran) είναι ένα σκάφος που χαρακτηρίζεται από δύο παράλληλες γάστρες ίδιου μήκους. Είναι ένα γεωμετρικά-σταθερό σκάφος,κάτι που απορρέει από το ευρύ ρεύμα του σε σύγκριση με τη μία καρίνα ενός μονόγαστρου ιστιοφόρου. Με την χωρίς έρμα και συγχρόνως ελαφρύτερη κατασκευή τους,τα καταμαράν συχνά παρουσιάζουν μικρότερο "βύθισμα" από ίδιου μεγέθους μονόγαστρα. Οι δύο γάστρες επίσης συνδυασμένες συχνά παρουσιάζουν μικρότερη υδροδυναμική αντίσταση απαιτώντας έτσι μικρότερη προωστική δύναμη από τα πανιά ή τον κινητήρα αντίστοιχα. Τέλος,το ευρύτερο εκπέτασμα του καταμαράν μπορεί να μειώσει την κίνηση που προκαλείται από το κύμα καθώς και την 'πλαγιολίσθηση'.

Γενικά μπορούμε να πούμε ότι τα καταμαράν έχουν δύο ευκρινή πρωτογενή χαρακτηριστικά απόδοσης που τα διακρίνουν από τα μονόγαστρα: χαμηλότερη αντίσταση στη διέλευση μέσω του νερού και μεγαλύτερη σταθερότητα(αρχική αντίσταση στην ανατροπή). Τα καταμαράν ως προς το μέγεθος παρουσιάζονται σε μικρά (ιστιοπλοϊκά ή κωπηλατικά σκάφη)(Εικόνα 1.1) και μεγάλα (πολεμικά και οχηματαγωγά πλοία)(Εικόνα 1.2).



Εικόνα 1.1 Ιστιοπλοϊκό σκάφος τύπου καταμαράν

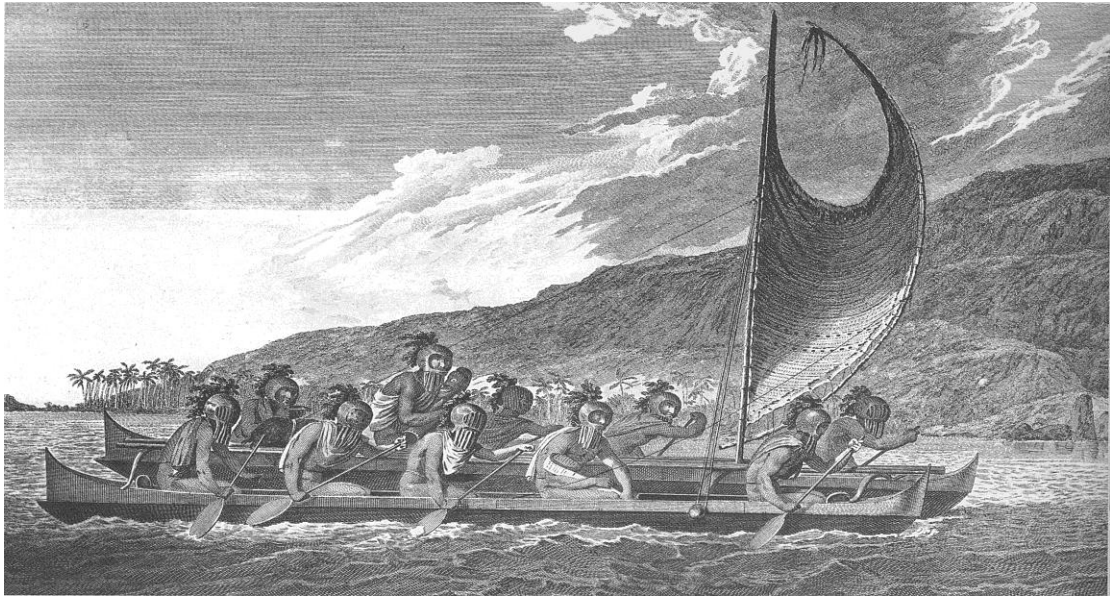


Εικόνα 1.2 Μεγάλα σκάφη τύπου καταμαράν

Η κατασκευή που συνδέει τις δύο γάστρες ενός καταμαράν μπορεί να είναι ένα απλό πλαίσιο με ιμάντες για τη στήριξη του πληρώματος ή μια υπερκατασκευή που ενσωματώνει εκτεταμένη καμπίνα και/ή χώρο φόρτωσης.

1.1.2 Ιστορικά

Τα πρώτα σκάφη τύπου καταμαράν χρονολογούνται το 1500 π.Χ στην Πολυνησία. Μια πολύ απλή κατασκευή με δύο μονόξυλα συνδεδεμένα μεταξύ τους μ'ένα ξύλινο πλαίσιο, συνοδευόμενα μερικές φορές από ένα πανί που επέτρεπε στους θαλασσοπόρους Πολυνήσιους να προσεγγίσουν απομακρυσμένα νησιά του Ειρηνικού ωκεανού (Εικόνα 1.3).



Εικόνα 1.3 Πρώτο καταγεγραμμένο σκάφος τύπου καταμαράν

Ενώ στη Δύση η κατασκευή και χρήση καταμαράν μέχρι το 19ο αιώνα ήταν ένα πολύ σπάνιο φαινόμενο, τα καταμαράν εντοπίζονται σε ευρεία χρήση μόλις από το 5ο αιώνα από το λαό Ταμίλ της Νοτίου Ινδίας. Ο όρος 'καταμαράν' που χρησιμοποιείται ακόμα και σήμερα προέρχεται από τη λέξη των Ταμίλ 'kattumaram' που σημαίνει 'ξύλα δεμένα μαζί'. Τον 17ο αιώνα ο εξερευνητής και κουρσάρος William Dampier συνάντησε ανθρώπους του λαού Ταμίλ κατά τη διάρκεια του πρώτου του περίπλου της Γης. Ήταν ο πρώτος που έγραψε στα Αγγλικά για το πρωτόγνωρο σκάφος που παρατήρησε σε χρήση εκεί.

Τα καταμαράν της Πολυνησίας και της Ν. Ασίας αποτέλεσαν τον προθάλαμο και την έμπνευση των μοντέρνων καταμαράν.

1.1.3 Ανάπτυξη μοντέρνων καταμαράν

Το πρώτο καταγεγραμμένο παράδειγμα δίγαστρου σκάφους στην Ευρώπη σχεδιάστηκε από τον William Petty το 1662 χωρίς όμως ιδιαίτερη αποδοχή.

Θα φτάσουμε στα τέλη του 19ου αιώνα, εκεί όπου ο Αμερικανός Nathanael Herreshoff σχεδίασε ένα δίγατρο ιστιοφόρο (Εικόνα 1.4). Στην πρώτη του ρεγκάτα το 1876, είχε εκπληκτικές επιδόσεις και στην ουσία επικύρωνε τα ευδιάκριτα πλεονεκτήματα απόδοσης του καταμαράν έναντι των συμβατικών μονόγαστρων.



Εικόνα 1.4 Το καταμαράν του Nathanael Herreshoff

Τα αδέρφια Prout, Roland και Francis, πειραματίστηκαν με τα καταμαράν από το 1949 και εντέλει μετέτρεψαν την εταιρεία παραγωγής σκαφών που διατηρούσαν από το 1939, σε εταιρεία παραγωγής καταμαράν το 1954.

Το 1967 στη Καλιφόρνια, ο κατασκευαστής ιστιοσανίδων, Hobie Alter παρήγαγε το 110 κιλών Hobie 14 και δύο χρόνια αργότερα το μεγαλύτερο και ακόμα πιο επιτυχημένο Hobie 16. Χάρη στην ευκολία δρομολόγησης και μαζικής παραγωγής τους, σχηματίστηκε μια ευρέως διαδεδομένη κατηγορία ιστιοφόρων καταμαράν με το όνομα beachcats. Μέχρι και σήμερα έχουν κατασκευαστεί πάνω από 100.000 Hobie 16.



Εικόνα 1.5 Hobie 16

Τέλος, η Αυστραλία έγινε η έδρα κατασκευαστικών εταιρειών μεγάλων μεταφορικών καταμαράν, όπως η Incat (1977) και η Austal (1988).

1.2 Υδροπτέρυγα

1.2.1 Γενικά

Τα υδροπτέρυγια(hydrofoils) είναι ανωστικές επιφάνειες που λειτουργούν,'δρουν' μέσα στο νερό. Τα σκάφη που χρησιμοποιούν τεχνολογία υδροπτερυγίων καλούνται πιο απλά υδροπτέρυγα. Όταν ένα υδροπτέρυγο αποκτά κατάλληλη ταχύτητα,τα υδροπτέρυγια σηκώνουν τη γάστρα του σκάφους πάνω από το νερό,μειώνοντας τη βρεχόμενη επιφάνεια και κατ'επέκταση την αντίσταση,επιτρέποντας μεγαλύτερες ταχύτητες.

Παρόλο τους διαφορετικούς βαθμούς συνεκτικότητας,πυκνότητας και συμπιεστότητας του αέρα με το νερό,τα υδροπτέρυγια σε ένα σκάφος και τα πτερύγια σε ένα αεροσκάφος παράγουν άνωση με πανομοιότυπο τρόπο. Το πτερύγιο κινείται ομαλά διαμέσου του νερού εκτρέποντας τη ροή προς τα κάτω,ενώ αυτή με τη σειρά της σύμφωνα με τον 3ο νόμο του Νεύτωνα ασκεί μια ανωστική δύναμη στο πτερύγιο. Αυτή η 'στροφή' του νερού δημιουργεί υψηλότερη πίεση (υπερπίεση) στην κάτω πλευρά του πτερυγίου και μειωμένη πίεση (υποπίεση) στην πάνω πλευρά. Αυτή η διαφορά πιέσεων,μέσω της εξίσωσης Bernoulli, συνοδεύεται κι από διαφορά ταχυτήτων αφού το παραγόμενο πεδίο ροής έχει μεγαλύτερη μέση ταχύτητα στη μία πλευρά από την άλλη.

Όταν λοιπόν το πτερύγιο χρησιμοποιείται ως ανωστικό στοιχείο σε ένα υδροπτέρυγο,η ανωστική αυτή δύναμη που προκαλείται,'σηκώνει' το σώμα του σκάφους μειώνοντας την αντίσταση και αυξάνοντας την ταχύτητα. Η ανωστική δύναμη τελικά εξισώνεται με το βάρος του σκάφους,φτάνοντας ένα σημείο στο οποίο δεν προσφέρει πια άνωση,αλλά το ισορροπεί. Έτσι οι δυνάμεις αντίστασης δρουν πλέον σε μικρότερο βαθμό στο σώμα του σκάφους και σε μεγαλύτερο βαθμό στη πολύ μικρότερη συγκριτικά επιφάνεια του υδροπτερυγίου, δημιουργώντας αξιοσημείωτη αύξηση της ταχύτητας.

Όμως η χρήση υδροπτερυγίων έχει και ορισμένα μειονεκτήματα που περιορίζουν τη χρήση και τη δημοτικότητά τους σε ταξίδια αναψυχής,μεταφορές επιβατών και εμπορικά πλοία:

- Τα υδροπτέρυγα είναι ευαίσθητα στην επαφή με επιπλέοντα αντικείμενα και θαλάσσια ζώα. Αν χτυπήσει κάτι,το σκάφος μπορεί να χάσει τη στήριξη από τα πτερύγια και να πέσει δημιουργώντας μια επικίνδυνη κατάσταση.
- Από την άλλη τα υδροπτέρυγια χαρακτηρίζονται από αιχμηρές ακμές που μπορούν να φανούν θανάσιμες για θαλάσσια ζώα.
- Τέλος,τα υδροπτέρυγα απαιτούν υψηλό κόστος κατασκευής και συντήρησης ενώ είναι και τεχνικά πολύπλοκα.

1.2.2 Ιστορικά

Ο Ιταλός εφευρέτης Enrico Forlanini άρχισε να εργάζεται πάνω στα υδροπτερύγια και χρησιμοποίησε ένα σύστημα τύπου 'σκάλας' ('ladder' foil system)(Εικόνα 1.6).



Εικόνα 1.6 Το υδροπτέρυγο του Enrico Forlanini

Ένα επιστημονικό άρθρο το Μάρτιο του 1906 από τον Αμερικανό πρωτοπόρο William E. Meacham εξηγούσε τις βασικές αρχές των υδροπτερυγίων. Ο Alexander Graham Bell θεώρησε την εφεύρεση ενός σκάφους που 'πετάει' τεράστιο επίτευγμα και μετά την ανάγνωση του άρθρου άρχισε να σκισάρει τις πρώτες ιδέες αυτού που σήμερα ονομάζουμε υδροπτέρυγο. Μαζί με τον επικεφαλής μηχανικό του Casey Baldwin, ο Bell ξεκίνησε πειράματα με υδροπτερύγια το καλοκαίρι του 1908. Ο Baldwin μελέτησε τη δουλειά του Forlanini και ξεκίνησε να δοκιμάζει μοντέλα με βάση αυτά τα σχέδια. Κατά τη διάρκεια του τουρ του Bell ανά το κόσμο, ο Bell και ο Baldwin συναντήθηκαν με το Forlanini στην Ιταλία και ανέβηκαν στο υδροπτέρυγο σκάφος του κάνοντας ένα γύρο στη λίμνη Maggiore. Ο Baldwin περιέγραψε αυτή την εμπειρία τόσο ομαλή σαν πτήση.

Κατά την επιστροφή τους λοιπόν στο εργαστήριο του Bell, πειραματίστηκαν με μια σειρά από σχέδια, με αποκορύφωμα το HD-4 Bell (Εικόνα 1.8) που ξεχώριζε για τη ραγδαία του επιτάχυνση, καλή αντιμετώπιση στα κύματα, ευκολία καθοδήγησης καθώς και τη σταθερότητά του. Με αυτό το μοντέλο και χρησιμοποιώντας δύο κινητήρες 260kW, ο Bell στις 9 Σεπτεμβρίου 1919 όρισε το ρεκόρ θαλάσσιας ταχύτητας στα 114km/h(62knots).



Εικόνα 1.8 Το υδροπτέρυγο των Bell και Baldwin

1.3 AC45 και American Cup

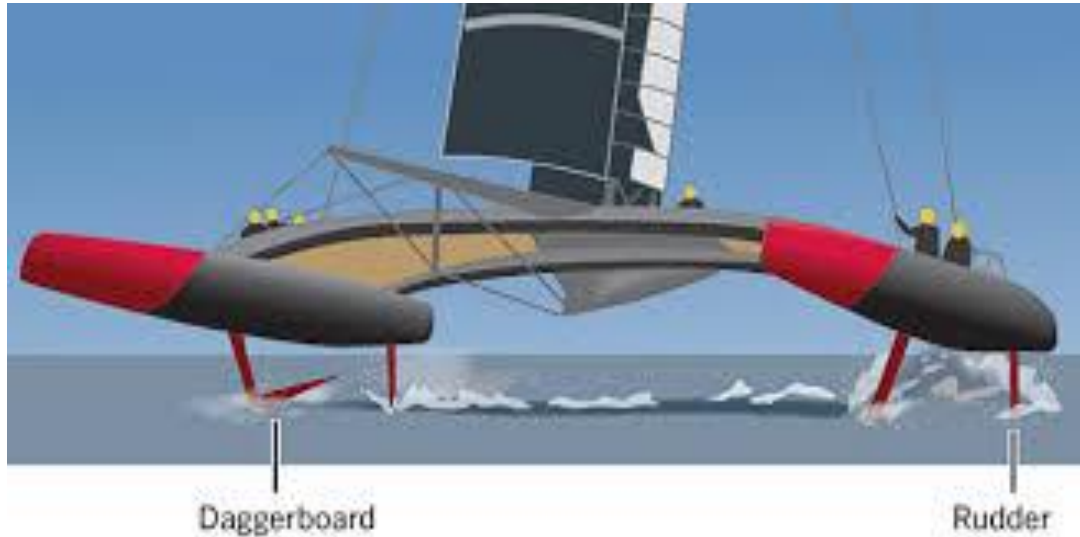
Αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής εργασίας αποτέλεσε ένα ιστιοπλοϊκό υδροπτέρυγο καταμαράν κατηγορίας AC45 (Εικόνα 1.9). Ένα ιστιοπλοϊκό υδροπτέρυγο μπορεί να πιάσει ταχύτητες που ξεπερνούν έως και δύο φορές την ταχύτητα του ανέμου. Το συγκεκριμένο μοντέλο σχεδίασης δημιουργήθηκε από την Oracle Racing αποκλειστικά για τη διεξαγωγή των διοργανώσεων '2013 America's Cup' και '2017 America's Cup'*. Η κατηγορία AC45 εκλήφθηκε ως μια μικρότερη εκδοχή της κατηγορίας AC72 που χρησιμοποιήθηκε στο '2013 America's Cup'. Τροποποιήθηκε το 2015 για να συμπεριλάβει τη δυνατότητα χρησιμοποίησης υδροπτερυγίων(hydrofoiling) για βελτιωμένες επιδόσεις, με τα σκάφη να αγγίζουν ταχύτητες έως και 69 km/h(37 knots).



Εικόνα 1.9 Το υδροπτέρυγο καταμαράν της Oracle Racing

*Το Κύπελλο Αμερικής (**America's Cup**) είναι η διασημότερη ρεγκάτα της ιστιοπλοΐας και το παλαιότερο τρόπαιο στον διεθνή αθλητισμό, καθώς χρονολογείται πριν από την αναβίωση των Θερινών Ολυμπιακών Αγώνων, με διαφορά 45 ετών

Το χαρακτηριστικό αυτών των σκαφών είναι η ύπαρξη των υδροπτερυγίων. Τα υδροπτερύγια (daggerboards) σε συνδυασμό με τα πηδάλια (rudders) λειτουργούν ως ανωστικά σώματα για το σκάφος και του επιτρέπουν να κινείται ουσιαστικά πάνω από το νερό πιάνοντας μεγάλες ταχύτητες (Εικόνα 1.10).



Εικόνα 1.10 Το AC45 σε 'πτήση'

Θα μπορούσαμε να πούμε ότι τα υδροπτερύγια (daggerboards) σ'ένα καταμαράν τύπου AC45 έχουν το ρόλο και τη σημασία που έχουν οι πτέρυγες σ'ένα αεροσκάφος. Το πλήρωμα είναι υπεύθυνο για την αποδοτικότερη χρήση των daggerboards, αφού αυτά δεν έχουν σταθερή θέση, αλλά 'ανεβαίνουν' και 'κατεβαίνουν' (Εικόνα 1.11).



Εικόνα 1.11 Ένα daggerboard 'κατεβασμένο' κι ένα 'ανεβασμένο'

Κάποια βασικά στοιχεία για τα σκάφη AC45:

- Μήκος: 13.45 m (44.1 ft)
- Ρεύμα: 6.90 m (22.6 ft)
- Βάρος: 1290-1320 kg (2840-2910 lb)
- Δύο υδροπτερύγια(daggerboards) από ίνες άνθρακα(ανυψωτής τύπου-L) (Εικόνα 1.12)
- Δύο πηδάλια(rudders) από ίνες άνθρακα (σταθεροποιητής τύπου-T) (Εικόνα 1.13)



Εικόνα 1.12 Υδροπτερύγιο(daggerboard) AC45



Εικόνα 1.13 Πηδάλιο(rudder) AC45

1.3.1 Στόχος της εργασίας

Στόχος της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η προσομοίωση της ροής γύρω από ένα ιστιοπλοϊκό υδροπτέρυγο καταμαράν με χρήση του λογισμικού GENUVP. Οι υπολογισμοί που έγιναν αφορούν μόνο το υδροδυναμικό κομμάτι του σκάφους, αφού δεν έγινε προσομοίωση της ροής γύρω από τα πανιά. Αυτό καθορίζει και τους επιμέρους στόχους της εργασίας.

Το αρχικό εγχείρημα είναι η εισαγωγή της γεωμετρίας του σκάφους σε μορφή που αφενός να είναι συμβατή με το κώδικα GENUVP και αφετέρου να αποτυπώνει με τη μέγιστη δυνατή ακρίβεια το 'πραγματικό' πρόβλημα. Η υπολογιστική δυσκολία έγκειται στον μεγάλο αριθμό επίπεδων στοιχείων (panels) των γεωμετρικών πλεγμάτων, καθώς και στη σχετική ανομοιομορφία τους. Το πρόβλημα γίνεται ακόμα πιο περίπλοκο με την προσπάθεια προσέγγισης της ελεύθερης επιφάνειας του νερού.

Στη συνέχεια, πρέπει να διευκρινιστεί ο ρόλος των υδροδυναμικών σωμάτων και να αιτιολογηθεί η γεωμετρία τους καθώς και η σχετική τους θέση. Ελλείψει πειραματικών αποτελεσμάτων, πρέπει να ελεγχθεί κατά πόσο τα αποτελέσματα που πήραμε ανταποκρίνονται στην πραγματικότητα και σε ποιο βαθμό το λογισμικό που χρησιμοποιήσαμε μπορεί να αποτυπώσει ένα περίπλοκο πρόβλημα όπως είναι η ροή γύρω από σκάφη τέτοιου τύπου ή και να υποστηρίξει ακόμα πιο πολύπλοκους υπολογισμούς που περιλαμβάνουν την επίδραση των πανιών ή ακριβέστερη προσέγγιση της ελεύθερης επιφάνειας.

Κεφάλαιο 2: Θεωρητική προσέγγιση

2.1 Οι πλεγματικές και οι μη πλεγματικές μεθόδους

Για την αντιμετώπιση των προβλημάτων της ρευστομηχανικής έχουν αναπτυχθεί αρκετές μεθοδολογίες. Οι διαφορές τους εστιάζονται στο βαθμό της λεπτομέρειας με την οποία προσεγγίζουν το πρόβλημα και τη λύση του. Έτσι, αν θέλαμε να κάνουμε έναν βασικό διαχωρισμό ανάμεσά τους, τότε θα τις κατηγοριοποιούσαμε στις πλεγματικές και μη πλεγματικές μεθόδους. Στις πλεγματικές το πλέγμα καταλαμβάνει όλο το πεδίο ροής, ενώ στις μη πλεγματικές το πλέγμα περιορίζεται στην κάλυψη της γεωμετρίας του υπό-εξέταση σώματος. Ενώ στις μη πλεγματικές μεθόδους το πεδίο ροής έγκειται στην ικανοποίηση της εξίσωσης 'Laplace', οι πλεγματικές μέθοδοι επιλύουν τις εξισώσεις 'Navier-Stokes', κάτι που αφενός τους επιτρέπει να λαμβάνουν υπόψη τα φαινόμενα συμπιεστότητας και συνεκτικότητας αλλά αφετέρου αυξάνει σε μεγάλο βαθμό το υπολογιστικό κόστος.

Είναι εμφανές ότι οι μη πλεγματικές μεθόδους είναι απλούστερες και λιγότερο απαιτητικές σε υπολογιστική ισχύ, αλλά όπως εξηγήθηκε παραπάνω σε προβλήματα όπου εμφανίζονται έντονα συνεκτικά φαινόμενα (αποκόλληση της ροής) ή φαινόμενα μεγάλης συμπιεστότητας (κύματα κρούσης), συχνά προτιμάται η χρήση πλεγματικών μεθόδων.

2.2 Οι βασικές αρχές της μη πλεγματικής μεθόδου GENUVP

Η μη πλεγματική αριθμητική μέθοδος GENUVP έχει αναπτυχθεί στο εργαστήριο Αεροδυναμικής του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου. Βασίζεται στο διαχωρισμό του πεδίου ταχύτητας σύμφωνα με το θεώρημα διαχωρισμού του Helmholtz. Βασικό χαρακτηριστικό είναι η δυνατότητα παραγωγής ελεύθερου ομόρρου. Η στροβιλότητα του ομόρρου αναπαρίσταται από σημειακές δίνες οι οποίες απελευθερώνονται σε κάθε χρονικό βήμα και στη συνέχεια μετακινούνται κατάντι της ροής με την ταχύτητα του πεδίου ροής.

Η μέθοδος επιλύει τη ροή θεωρώντας τη ασυμπίεστη και μη συνεκτική. Η γεωμετρία αναπαρίσταται με τρισδιάστατο πλέγμα στην επιφάνεια των σωμάτων, πάνω στο οποίο τοποθετούνται κατανομές πηγών και διπόλων. Η ροή αναπαρίσταται μέσω της συνάρτησης δυναμικού και με χρήση των θεωρημάτων Helmholtz και Green. Άγνωστοι του συστήματος είναι οι εντάσεις των ιδιομορφιών, οι οποίες υπολογίζονται από την επίλυση της εξίσωσης Laplace για το δυναμικό της ροής, με συνθήκες Dirichlet ή Neumann. Στην επιφάνεια του σώματος η επίλυση του προβλήματος της ροής γίνεται είτε μέσω της μεθόδου άμεσης διατύπωσης, είτε της διατύπωσης πηγών-διπόλων.

Το αποβαλλόμενο φύλλο στροβιλότητας των ανωστικών σωμάτων παριστάνεται είτε ως λεπτή επιφάνεια που απαρτίζεται από πλέγμα δινοσωλήνων (Vortex Lattice) είτε από σημειακά στοιχεία στροβιλότητας (Vortex Particles). Η μια περίπτωση προσέγγισης είναι αυτή του προδιαγεγραμμένου ομόρρου (prescribed wake), όπου με βάση πειραματικά ή εμπειρικά δεδομένα ο ομόρρος αποτελείται από τμήματα δινοσωλήνων που ακολουθούν μια γεωμετρία με περιορισμένους βαθμούς ελευθερίας. Η άλλη περίπτωση προσέγγισης είναι αυτή του ελεύθερου ομόρρου (free wake). Η γεωμετρία του ομόρρου καθορίζεται από την επίλυση των κινηματικών και δυναμικών εξισώσεων για την ελεύθερη στροβιλότητα. Έτσι αυξάνεται το υπολογιστικό κόστος των υπολογισμών, όμως με τον τρόπο αυτό μπορεί να γίνει καλύτερη αναπαράσταση των περίπλοκων τρισδιάστατων δομών στην περίπτωση μη μόνιμης ροής.

Βασικό πλεονέκτημα της μεθόδου είναι η επίλυση των εξισώσεων πάνω στην πραγματική επιφάνεια των σωμάτων. Η μέθοδος δίνει ικανοποιητική απεικόνιση της ροής γύρω από τρισδιάστατα σώματα και η αριθμητική διαδικασία αποδεικνύεται ότι είναι ευσταθής. Το σημαντικότερο πλεονέκτημα όμως είναι το ελάχιστο υπολογιστικό κόστος που απαιτείται για την επίλυση των προβλημάτων, ιδιαίτερα όταν αυτό συγκριθεί με το υπολογιστικό κόστος που απαιτούν οι πλεγματικές μέθοδοι.

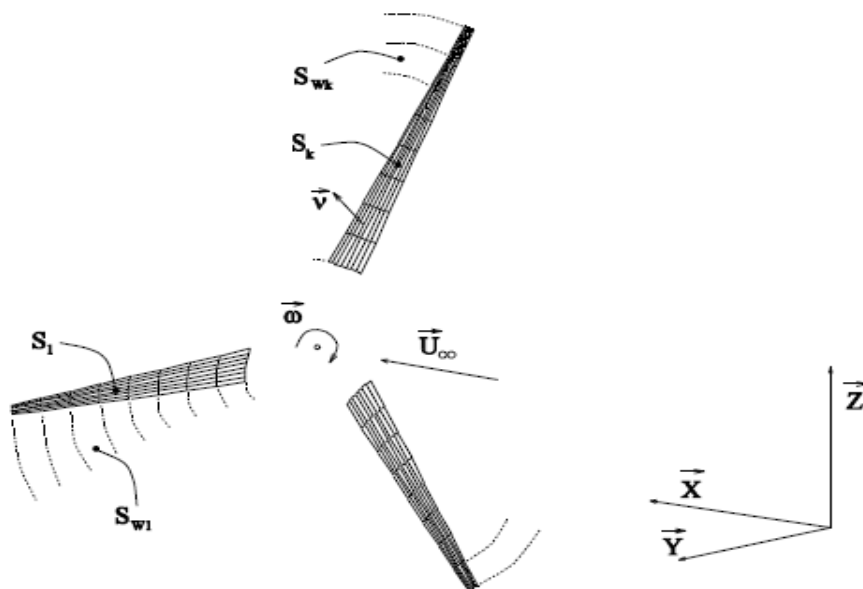
2.3 Οι βασικές εξισώσεις της μεθόδου

2.3.1 Αναλυτική μορφή

Θεωρείται η μη μόνιμη ροή ασυμπίεστου και μη συνεκτικού ρευστού γύρω από συνδυασμό N_B τρισδιάστατων σωμάτων B_k με όρια $S_k, k = 1, N_B$. Κάθε ένα από τα σώματα μπορεί να είναι είτε ανωστικό, είτε μη ανωστικό. Τα ανωστικά σώματα πάντοτε θα παράγουν ομόρρου. Για την περιγραφή της ροής χρησιμοποιείται σταθερό σύστημα συντεταγμένων. Όλες οι ποσότητες της ροής υπολογίζονται και αναφέρονται σε αυτό το σύστημα.

Είναι D το πεδίο ροής, S τα όρια αυτού και \vec{v} το κάθετο διάνυσμα στο όριο και με φορά προς τα έξω (Εικόνα 2.1). Η παρουσία των ανωστικών σωμάτων στο πεδίο ροής έχει σαν αποτέλεσμα τη δημιουργία ομόρρου. Ο ομόρρους κάθε ανωστικού σώματος απελευθερώνεται σε κάθε χρονικό βήμα από τις γραμμές αποβολής στροβιλότητας (emission lines). Η επιφάνεια του ομόρρου αντιμετωπίζεται σαν ενεργό όριο του προβλήματος. Οπότε, εάν $S_{Wk}, k = 1, N_B$ είναι οι επιφάνειες των φύλλων στροβιλότητας από τα N_B σώματα τότε:

$$\partial D \equiv S = \bigcup_{k=1}^{N_B} S_k + \bigcup_{k=1}^{N_B} S_{Wk} \quad (2.1)$$



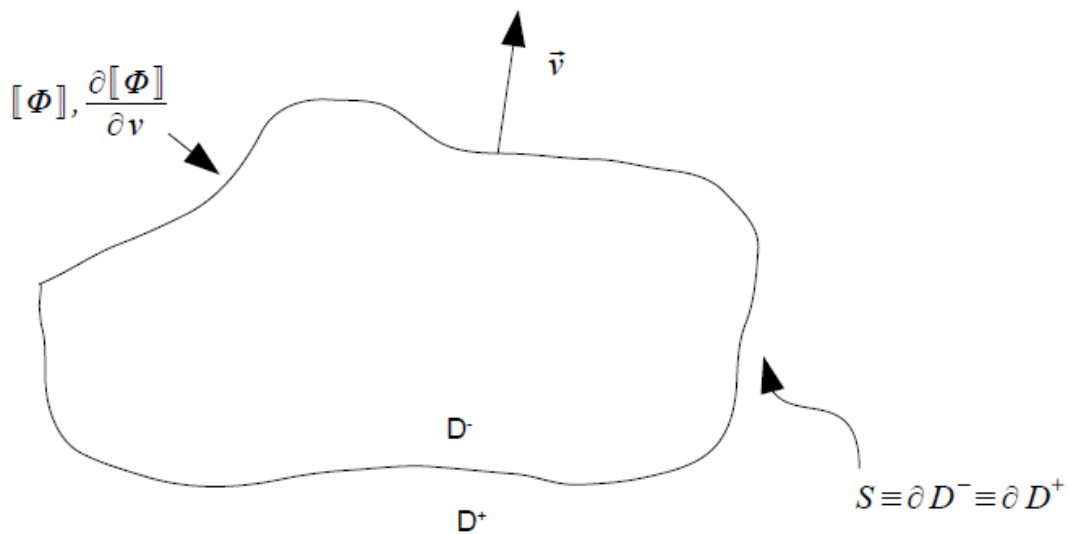
Εικόνα 2.1 Βασικοί γεωμετρικοί ορισμοί

Σύμφωνα με το θεώρημα διαχωρισμού του Helmholtz, το πεδίο ταχύτητας $\vec{u}(\vec{x}; t)$ μπορεί να διαχωριστεί σε ένα στροβιλό κι ένα αστρόβιλο πεδίο ροής:

$$\vec{u}(\vec{x}; t) = \vec{U}_\infty(\vec{x}; t) + \nabla\Phi(\vec{x}; t) + \nabla \times A \quad (2.2)$$

όπου $\vec{U}_\infty(\vec{x}; t)$ η επ' άπειρον ταχύτητα της ατάραχης ροής, $\nabla\Phi(\vec{x}; t)$ η ταχύτητα διαταραχής λόγω του σώματος και $\nabla \times A$ η ταχύτητα που επάγεται από την ελεύθερη στροβιλότητα. Το δυναμικό του πεδίου ταχύτητας μπορεί να αναπαρασταθεί από επιφανειακές κατανομές ιδιομορφιών.

Οι κατανομές αυτές καθορίζουν τόσο το εσωτερικό όσο και το εξωτερικό πρόβλημα Φ^+, Φ^- . Ωστόσο ο υπολογισμός των συναρτήσεων $\partial[\Phi](\vec{x})/\partial\eta$ και $[\Phi](\vec{x})$ σε όλο το χωρίο D είναι απαραίτητος μόνο αν είναι επιθυμητή η λύση και των δύο προβλημάτων.



Εικόνα 2.2 Πεδίο εφαρμογής του θεωρήματος Green

Επειδή όμως η λύση του πηδήματος του δυναμικού και της παραγώγου της κάθετης ταχύτητας δεν είναι μοναδική και ενδιαφέρον έχει η λύση μόνο του εξωτερικού προβλήματος γίνεται σαφές πως αρκεί να επιλέξουμε και να δεσμεύσουμε μία κατάλληλη συνθήκη για το αδιάφορο εσωτερικό πρόβλημα υπολογισμού του Φ^- . Η συνθήκη αυτή πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση Laplace στον χώρο D^- . Γνωρίζοντας ότι η εξίσωση Laplace μπορεί να ικανοποιείται από μία Neumann ή μία Dirichlet συνθήκη είτε από ένα γραμμικό συνδυασμό των παραπάνω, είναι δυνατές οι ακόλουθες διατυπώσεις ανάλογα με τις επιλογές των οριακών συνθηκών για το δυναμικό Φ^- :

Διατύπωση πηγών

Στην περίπτωση αυτή γίνεται επίλυση ενός εσωτερικού προβλήματος Dirichlet για τη συνάρτηση $\Phi^-(\vec{x})$ με οριακή συνθήκη:

$$\Phi^-(\vec{x}) = \Phi^+(\vec{x}) \rightarrow [\Phi](\vec{x}) = 0, \vec{x} \in S \quad (2.3)$$

που έχει ως αποτέλεσμα τον μηδενισμό της κατανομής διπόλων στο σώμα. Έτσι προκύπτει η περιγραφή του δυναμικού σύμφωνα με τη διατύπωση πηγών όπου στην επιφάνεια του σώματος έχουμε κατανομή πηγών έντασης

$$\sigma(\vec{x}) = \left[\left[\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right] \right] (\vec{x}), \vec{x} \in S \quad (2.4)$$

Το δυναμικό από επιφανειακή κατανομή πηγών σε ένα σημείο \vec{x}_0 δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi_\sigma(\vec{x}_0; t) = - \int_S \frac{\sigma(\vec{x}; t)}{4\pi|\vec{x}_0 - \vec{x}|} dS(\vec{x}) \quad (2.5)$$

και η επαγόμενη ταχύτητα $\vec{u}_\sigma(\vec{x}; t)$ από τη σχέση:

$$\vec{u}_\sigma(\vec{x}; t) = \int_S \frac{\sigma(\vec{x}; t) \cdot (\vec{x}_0 - \vec{x})}{4\pi|\vec{x}_0 - \vec{x}|^3} dS(\vec{x}) \quad (2.6)$$

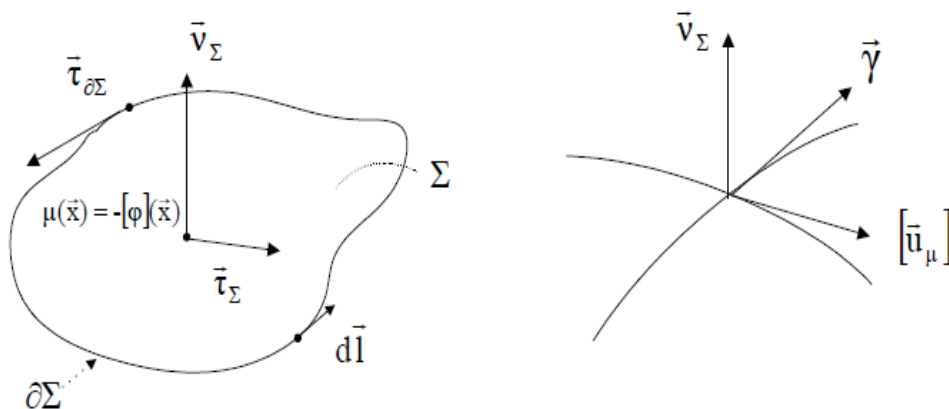
Διατύπωση διπόλων

Στη διατύπωση διπόλων η διανομή καθορίζεται από την επαλήθευση της συνοριακής συνθήκης Neumann:

$$\frac{\partial \phi^-}{\partial \eta}(\vec{x}) = \frac{\partial \phi^+}{\partial \eta}(\vec{x}) \rightarrow \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left[\phi \right] \right] (\vec{x}) = 0, \vec{x} \in S \quad (2.7)$$

που έχει ως αποτέλεσμα τον μηδενισμό της κατανομής πηγών στο σώμα. Έτσι προκύπτει η περιγραφή του δυναμικού σύμφωνα με τη διατύπωση διπόλων όπου στην επιφάνεια του σώματος έχουμε κατανομή διπόλων έντασης

$$\mu(\vec{x}) = - \left[\left[\phi \right] \right] (\vec{x}), \vec{x} \in S \quad (2.8)$$



Εικόνα 2.3 Βασικοί γεωμετρικοί ορισμοί για τις επιφανειακές κατανομές διπόλων

Το δυναμικό από κατανομή διπόλων σε ένα σημείο \vec{x}_0 δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi_\mu(\vec{x}_0; t) = - \int_S \frac{\mu(\vec{x}; t) \cdot \vec{v}(\vec{x}; t) \cdot (\vec{x}_0 - \vec{x})}{4\pi|\vec{x}_0 - \vec{x}|^3} dS(\vec{x}) \quad (2.9)$$

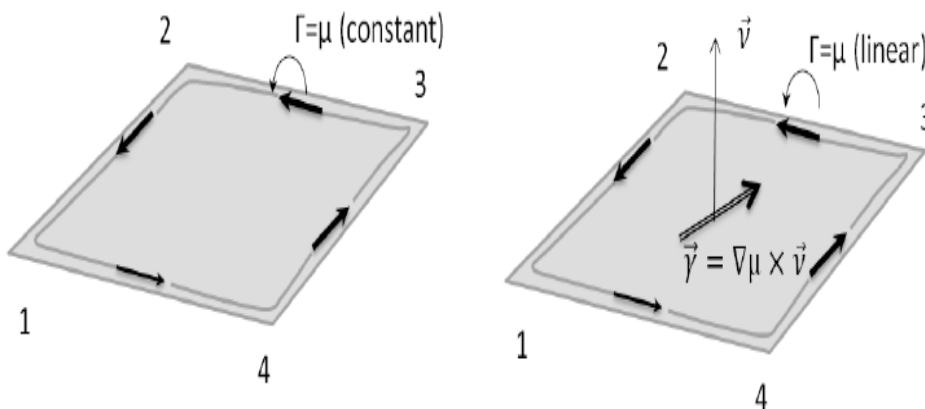
Διαφορίζοντας την παραπάνω εξίσωση προκύπτει η επαγόμενη ταχύτητα $\vec{u}_\mu(\vec{x}; t)$ και εφαρμόζοντας το θεώρημα Stokes έχουμε:

$$\begin{aligned} \vec{u}_\mu(\vec{x}_0; t) &= \nabla\varphi_\mu(\vec{x}_0; t) \\ &= \int_S \frac{\mu\nabla(\vec{x}; t) \times \vec{v}(\vec{x}; t) \times (\vec{x}_0 - \vec{x})}{4\pi|\vec{x}_0 - \vec{x}|^3} dS(\vec{x}) \\ &+ \oint_{\partial S} \mu(\vec{x}; t) \frac{d\vec{l}(\vec{x}; t) \times (\vec{x}_0 - \vec{x})}{4\pi|\vec{x}_0 - \vec{x}|^3} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Όταν το σημείο \vec{x}_0 πλησιάζει την επιφάνεια S η ταχύτητα εμφανίζει ασυνέχεια. Συγκεκριμένα αν $[[\vec{u}_\mu]]$ είναι το άλμα της ταχύτητας στην επιφάνεια S, τότε:

$$\begin{aligned} [[\vec{u}_\mu]](\vec{x}_0; t) \cdot \vec{v}(\vec{x}_0; t) &= 0, \vec{x}_0 \in S \\ \vec{v}(\vec{x}_0; t) \times [[\vec{u}_\mu]](\vec{x}_0; t) &= \nabla_S \mu(\vec{x}_0; t) \times \vec{v}(\vec{x}_0; t) = \vec{\gamma}(\vec{x}_0; t), \vec{x}_0 \in S \end{aligned} \quad (2.11)$$

όπου $\vec{\gamma}(\vec{x}; t)$ είναι η ένταση της επιφανειακής στροβιλότητας και ∇_S ο επιφανειακός διαφορικός τελεστής. Από τις εξισώσεις 2.10 και 2.11 προκύπτει το συμπέρασμα ότι η επιφάνεια πάνω στην οποία βρίσκεται η κατανομή διπόλων, αντιστοιχεί σε ένα φύλλο στροβιλότητας, δηλαδή μια επιφάνεια με εφαπτομενική ασυνέχεια ταχύτητας. Εάν η κατανομή στροβιλότητας είναι σταθερή ή μεταβλητή, προκύπτει διαφορετική αναπαράσταση (Εικόνα 2.4).



Εικόνα 2.4 Σταθερή και γραμμική επιφανειακή κατανομή διπόλων

Για ανωστικά σώματα χωρίς πάχος χρησιμοποιούνται αποκλειστικά κατανομές διπόλων ενώ για μη ανωστικά σώματα με πάχος αποκλειστικά κατανομές πηγών. Τα ανωστικά σώματα είναι απαραίτητο να περιλαμβάνουν κατανομές διπόλων τόσο στην επιφάνεια όσο και στον ομόρρου τους.

Μικτή διατύπωση πηγών-διπόλων

Στη διατύπωση αυτή εισάγονται διανομές πηγών και διπόλων σύμφωνα με τις εξισώσεις:

$$\sigma(\vec{s}) = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right] (\vec{s}) \text{ και } \mu(\vec{s}) = -[\Phi](\vec{s}) \quad (2.12)$$

Για τον καθορισμό των αγνώστων διανομών πηγών και διπόλων χρησιμοποιείται η συνθήκη Neumann (μη εισχώρησης της ταχύτητας στο όριο του σώματος):

$$\frac{\partial}{\partial \eta} [\Phi](\vec{x}) = \frac{\partial \Phi^+}{\partial \eta} - \frac{\partial \Phi^-}{\partial \eta} = \frac{\partial \Phi^+}{\partial \eta}, \vec{x} \in S \quad (2.13)$$

Από τις σχέσεις 2.5 και 2.9 το δυναμικό του πεδίου ταχύτητας ορίζεται ως

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{x}_0; t) = & - \sum_{k=1}^{N_B} \int_{S_k} \frac{\sigma_k(\vec{x}; t)}{4\pi|\vec{x}_0 - \vec{x}|} dS(\vec{x}) \\ & - \sum_{k=1}^{N_B} \left\{ \int_{S_k} \frac{\mu_k(\vec{x}; t) \cdot \vec{v}(\vec{x}; t) \cdot (\vec{x}_0 - \vec{x})}{4\pi|\vec{x}_0 - \vec{x}|^3} dS(\vec{x}) \right. \\ & \left. + \int_{S_{wk}} \frac{\mu_{wk}(\vec{x}; t) \cdot \vec{v}_w(\vec{x}; t) \cdot (\vec{x}_0 - \vec{x})}{4\pi|\vec{x}_0 - \vec{x}|^3} dS_w(\vec{x}) \right\} \quad (2.14) \end{aligned}$$

όπου $\sigma_k(\vec{x}; t)$ η ένταση πηγών του σώματος k, $\mu_k(\vec{x}; t)$ η ένταση διπόλων του σώματος k και $\mu_{wk}(\vec{x}; t)$ η κατανομή διπόλων του φύλλου στροβιλότητας που παράγεται από το ανωστικό σώμα k.

Οι άγνωστες κατανομές $\sigma_k(\vec{x}; t)$, $\mu_k(\vec{x}; t)$, $\mu_{wk}(\vec{x}; t)$ εξαρτώνται από το χρόνο. Επίσης, το φύλλο στροβιλότητας είναι επιφάνεια που μετακινείται ελεύθερα με τη ροή (ελεύθερος ομόρρους). Συνεπώς το πρόβλημα προς επίλυση είναι πρόβλημα ελευθέρων οριακών συνθηκών με αγνώστους τις επιφανειακές κατανομές και τη γεωμετρία των φύλλων στροβιλότητας από τα ανωστικά σώματα S_{wk} .

Για τον προσδιορισμό των αγνώστων του προβλήματος εφαρμόζονται δύο τύποι συνθηκών. Πρώτον, οι κινηματικές συνθήκες που περιλαμβάνουν τη συνθήκη μη εισχώρησης σε όλες τις στερεές επιφάνειες και τις συνθήκες που περιγράφουν τις υλικές μετακινήσεις των φύλλων στροβιλότητας. Δεύτερον, εφαρμόζονται οι δυναμικές συνθήκες όπως η απαίτηση για μηδενικό άλμα πιέσεων διαμέσου των φύλλων στροβιλότητας.

Συμβολίζεται με $\overline{U}_B(\vec{x}; t)$ η κατανομή ταχυτήτων πάνω στα σώματα, η οποία περιλαμβάνει την ταχύτητα των άκαμπτων σωμάτων αλλά και την ταχύτητα λόγω ελαστικής κίνησης. Οι συνθήκες μη εισχώρησης στις στερεές επιφάνειες παίρνουν τη μορφή:

$$\vec{v}(\vec{x}_0; t) \cdot \nabla \varphi(\vec{x}_0; t) = \frac{\partial \varphi}{\partial v}(\vec{x}_0; t) = \vec{v}(\vec{x}_0; t) \cdot (\overline{U}_{Bk} - \overline{U}_\infty - \overline{U}_\omega) \quad ,$$

$$\vec{x}_0 \in S_k, k = 1, N_B \quad (2.15)$$

Για τον υπολογισμό του διαταραγμένου πεδίου ταχύτητας χρησιμοποιείται η εξίσωση 2.10. Η εξίσωση παίρνει μια πιο ευέλικτη μορφή εάν χρησιμοποιηθεί τμηματικά σταθερή προσέγγιση των κατανομών διπόλων, οπότε ο πρώτος όρος στο δεξιό μέλος της εξίσωσης είναι μηδενικός. Ο όρος που απομένει είναι η συνεισφορά γραμμικών κατανομών στροβιλότητας (δινοπετάλων, vortex lattice) ορισμένη στα όρια ∂S του S .

Το φύλλο στροβιλότητας μπορεί να αναπαρασταθεί σαν μια επιφάνεια που σχηματίζεται από την ακολουθία των υλικών γραμμών που ξεκινούν από τη γραμμή αποβολής στροβιλότητας. Προκειμένου να υπάρχει γνώση του χρονικού αποβολής στροβιλότητας, ένα σημείο $\vec{x}_w = \vec{x}_w(\xi^1, \xi^2; t)$ αναγνωρίζεται ως η θέση τη χρονική στιγμή t ενός υλικού σημείου που αποβλήθηκε τη στιγμή ξ^2 στη θέση ξ^1 της γραμμής αποβολής στροβιλότητας. Για παράδειγμα η τρέχουσα θέση της γραμμής αποβολής στροβιλότητας είναι η $\vec{x}_w = \vec{x}_w(\xi^1, t; t)$. Τέλος, οι γραμμές $\xi^1 = ct$ σχηματίζονται από υλικά στοιχεία που έχουν αποβληθεί από την ίδια θέση.

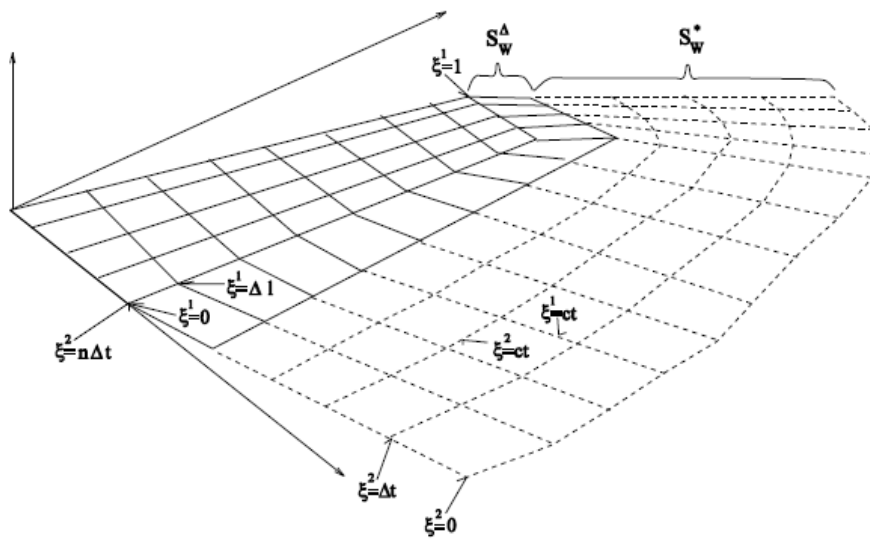
$$\vec{x}_w \in S_W: \vec{x}_w = \vec{x}_w(\xi^1, \xi^2; t), \xi^1 \in [-1, 1], \xi^2 \geq 0 \quad (2.16)$$

Η παραπάνω εξίσωση αποτελεί μια παραμετρική ανάλυση φύλλου στροβιλότητας S_W που έχει αποβληθεί από τη γραμμή αποβολής στροβιλότητας.

Η εξέλιξη του ομόρρου $S_W(t)$ στο χρόνο καθορίζεται από την κινηματική εξίσωση:

$$\frac{d\vec{x}_w(\xi; t)}{dt} = \overline{U}_m(\vec{x}_w, t) = \overline{U}_\infty(\vec{x}_w, t) + \nabla \varphi(\vec{x}_w, t) + \overline{U}_\omega(\vec{x}_w, t), \xi = (\xi^1, \xi^2) \quad (2.17)$$

όπου $\overline{U}_m(\vec{x}_w, t)$ είναι το διάνυσμα της μέσης ταχύτητας στο φύλλο στροβιλότητας και η απαίτηση για μηδενικό άλμα πίεσης στον ομόρρο.



Εικόνα 2.5 Ο ομόρρους ανωστικής επιφάνειας χωρίς πάχος

Εφαρμόζοντας την εξίσωση Bernoulli στις δύο όψεις του ομόρρου S_{wk} και λαμβάνοντας υπ'όψιν ότι $[[p]](\vec{x}_w, t) = 0$:

$$\frac{\partial [[\varphi]]}{\partial t} + \vec{U}_m(\vec{x}_w, t) \cdot [[\vec{u}_\mu]](\vec{x}_w, t) = 0 \quad (2.18)$$

όπου $[[\vec{u}_\mu]](\vec{x}_w, t)$ είναι το πήδημα της ταχύτητας στην επιφάνεια του ομόρρου. Από τις εξισώσεις 2.8 και 2.11 παίρνουμε ότι $\mu_w(\xi, t) = -[[\varphi]](\xi, t)$ και $[[\vec{u}_\mu]](\xi, t) = \nabla_{S_w} \mu_w(\xi, t)$. Εάν η επιφανειακή υλική χρονική παράγωγος είναι $\frac{d_m(\cdot)}{dt} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + (\vec{U}_m \cdot \nabla_{S_w})(\cdot)$ (2.19)

τότε η 2.18 δίνει τη συνθήκη

$$\frac{d_m \mu_w}{dt} = 0 \quad (2.20)$$

που είναι ισοδύναμη του θεωρήματος του Kelvin, αφού προκύπτει ότι η κατανομή διπόλων που ορίζει ένα φύλλο στροβιλότητας διατηρείται υλικά.

Σε συνδυασμό με την παραμετρική αναπαράσταση του φύλλου στροβιλότητας, παίρνουμε τη συνθήκη:

$$\mu_w(\vec{x}_w(\xi^1, \xi^2; t); t) = \mu_w(\vec{x}_w(\xi^1, \xi^2; \xi^2); \xi^2) \quad (2.21)$$

Η παραπάνω εξίσωση υποδηλώνει ότι η ένταση της κατανομής διπόλων που μεταφέρει το υλικό σημείο ξ είναι ίση με την ένταση του ίδιου υλικού σημείου, όταν

αυτό ξεκίνησε από τη γραμμή αποβολής στροβιλότητας του σώματος. Επομένως, η συνθήκη αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να καθοριστεί η ένταση της στροβιλότητας που έχει αποβληθεί από τη γραμμή αποβολής στροβιλότητας σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Στην περίπτωση τμηματικά σταθερής προσέγγισης των κατανομών διπόλων η συνθήκη οδηγεί σε ίσες τιμές των εντάσεων $\mu_k(\cdot, t)$ και $\mu_{Wk}(\cdot, t)$, για δύο σημεία στο σώμα και στον ομόρρου αντίστοιχα, που εφάπτονται στη γραμμή αποβολής στροβιλότητας.

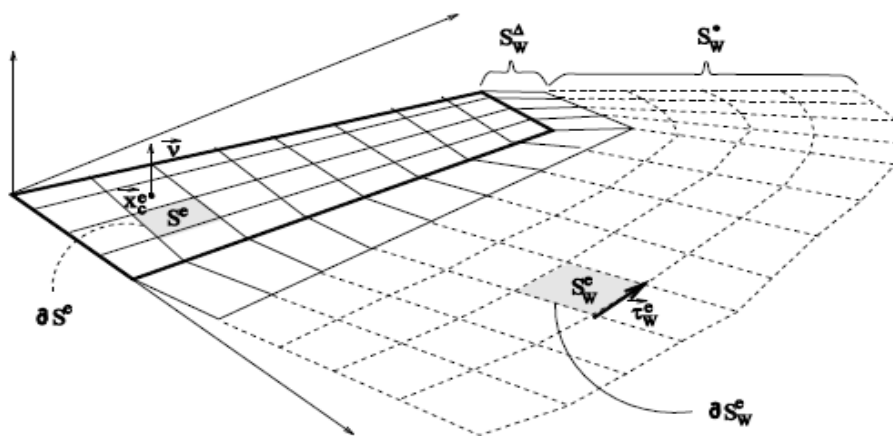
Τόσο τα αποτελέσματα που δίνει η θεωρία, όσο και ενδείξεις από πειραματικές και υπολογιστικές μελέτες προδιαγράφουν ότι σε βάθος χρόνου ένα ελεύθερο φύλλο στροβιλότητας χάνει την ομαλότητά του εξαιτίας του ιδιόμορφου χαρακτήρα των ολοκληρωμάτων που περιλαμβάνονται στον υπολογισμό του $\nabla\varphi(\vec{x}_w, t)$. Για να αντιμετωπιστεί αυτή η δυσκολία, εισάγεται μια γενικοποίηση της στροβιλότητας. Με βάση τις σχέσεις 2.11 το γενικοποιημένο πεδίο στροβιλότητας όσον αφορά ένα φύλλο στροβιλότητας μπορεί να γραφεί ως:

$$\vec{\omega}_{S_w}(\vec{x}, t) = \nabla \times \vec{u}_\mu(\vec{x}, t) =$$

$$\delta_{S_w}(\vec{x} - \vec{x}_{S_w}) [\nabla \mu_w(\vec{x}_{S_w}, t) \times \vec{v}(\vec{x}_{S_w}, t)] \text{ (surface term)}$$

$$+ \delta_{\partial S_w}(\vec{x} - \vec{x}_{\partial S_w}) \vec{\tau}(\vec{x}_{\partial S_w}, t) \mu_w(\vec{x}_{\partial S_w}, t) \text{ (line term)} \quad (2.22)$$

όπου ο πρώτος είναι ο όρος επιφανειών (surface term) και ο δεύτερος ο όρος γραμμών (line term). Με $\delta_{S_w}(\cdot)$ και $\delta_{\partial S_w}(\cdot)$ συμβολίζονται οι επιφανειακές και γραμμικές συναρτήσεις Dirac ορισμένες στο εσωτερικό και το όριο του $S_w(t)$ αντίστοιχα. Τέλος, $\vec{\tau}(\vec{x}_{\partial S_w}, t)$ είναι το μοναδιαίο και εφαπτομενικό διάνυσμα στο $\partial S_w(t)$. Η παραπάνω γενικοποιημένη μορφή είναι ιδιαίτερα σημαντική αφού επιτρέπει την προσέγγιση του ομόρρου με σημειακές στροβιλότητες.



Εικόνα 2.6 Ορισμοί του πλέγματος πάνω στο σώμα και τον ομόρρου

2.3.2 Αριθμητική μορφή

Σε κάθε σώμα S_k και τον ομόρρου του S_{Wk} ορίζεται ένα υπολογιστικό πλέγμα που χωρίζει το σώμα σε έναν αριθμό στοιχείων (panels) $S_k^e, e = 1, E_k$ και τον ομόρρου $S_{Wk}^e, e = 1, E_{Wk}$ με όρια ∂S_k^e και ∂S_{Wk}^e αντίστοιχα (Σχήμα 2.6). Με E_k και E_{Wk} συμβολίζεται ο αριθμός των στοιχείων σε ένα σώμα k και τον ομόρρου του. Τα στερεά σώματα κατατάσσονται σε κατηγορίες ανάλογα με το είδος τους (ανωστικά/μη ανωστικά, με πάχος/λεπτά κ.α.). Ανάλογα με την κατηγορία, τα επιμέρους στοιχεία περιλαμβάνουν τμηματικά σταθερές κατανομές πηγών σ_e , τμηματικά σταθερές, γραμμικές, ειδικά ορισμένες κατανομές διπόλων μ_e ή συνδυασμό των παραπάνω. Αντίστοιχα, τα στοιχεία του ομόρρου των σωμάτων μπορεί να περιλαμβάνουν τμηματικά σταθερές ή γραμμικές κατανομές διπόλων μ_{ew} . Λόγω του μη μόνιμου χαρακτήρα της ροής, οι εντάσεις των πηγών και των διπόλων είναι χρονικά μεταβαλλόμενες.

Η επαγόμενη ταχύτητα σε θέση \vec{x}_0 από μια ανωστική επιφάνεια δίνεται από το άθροισμα των συνεισφορών των δινοπετάλων (vortex lattices) που αντιστοιχούν στα στοιχεία του πλέγματος των S_k και S_{Wk} :

$$\begin{aligned} \vec{u}(\vec{x}_0; t) &= \vec{U}_\infty(\vec{x}_0; t) + \vec{u}_\omega(\vec{x}_0; t) \\ &+ \sum_{e=1}^{E_k} \left\{ \left(\sigma_e(t) + (\nabla \mu_e(t) \times \vec{v}_e(t)) \right) \times \int_{S_e} \frac{(\vec{x}_0 - \vec{x})}{4\pi |\vec{x}_0 - \vec{x}|^3} dS(\vec{x}) \right. \\ &\quad \left. + \oint_{\partial S_e} \mu_e(t) \frac{\vec{dl}(\vec{x}; t) \times (\vec{x}_0 - \vec{x})}{4\pi |\vec{x}_0 - \vec{x}|^3} \right\} \\ &+ \sum_{e=1}^{E_{Wk}} \left\{ (\nabla \mu_{ew}(t) \times \vec{v}_{ew}(t)) \times \int_{S_{ew}} \frac{(\vec{x}_0 - \vec{x})}{4\pi |\vec{x}_0 - \vec{x}|^3} dS(\vec{x}) \right. \\ &\quad \left. + \oint_{\partial S_{ew}} \mu_{ew}(t) \frac{\vec{dl}(\vec{x}; t) \times (\vec{x}_0 - \vec{x})}{4\pi |\vec{x}_0 - \vec{x}|^3} \right\} \quad (2.23) \end{aligned}$$

Η παραπάνω έκφραση της ταχύτητας χρησιμοποιείται στη συνθήκη μη εισχώρησης. Οι όροι $\sigma_e(t), \vec{v}_e(t) = \nabla \mu_e(t) \times \vec{v}_e(t), \vec{v}_{ew}(t) = \nabla \mu_{ew}(t) \times \vec{v}_{ew}(t)$ που εμφανίζονται στους επιφανειακούς όρους για τα στοιχεία των στερεών σωμάτων και του ομόρρου βρίσκονται εκτός του ολοκληρώματος επειδή θεωρούνται τμηματικά σταθεροί. Εάν οι κατανομές διπόλων είναι τμηματικά σταθερές, τότε οι αντίστοιχοι επιφανειακοί όροι είναι μηδενικοί (περίπτωση λεπτής ανωστικής επιφάνειας). Στον 4ο και 6ο όρο της εξίσωσης οι εντάσεις $\mu_e(t)$ και $\mu_{ew}(t)$ παραμένουν στο εσωτερικό των ολοκληρωμάτων. Για γραμμικές κατανομές διπόλων, η ένταση μεταβάλλεται γραμμικά κατά μήκος των ορίων του στοιχείου (panel), οπότε οι εντάσεις πρέπει να βρίσκονται αναγκαστικά εντός του ολοκληρώματος. Για τμηματικά σταθερές

κατανομές διπόλων οι εντάσεις θα μπορούσαν να τοποθετηθούν εκτός αυτού. Τέλος, μπορεί να αναφερθεί ότι στην περίπτωση επίπεδων στοιχείων υπάρχουν αναλυτικές εκφράσεις για οποιαδήποτε πολυωνυμική κατανομή της έντασης.

Η συνθήκη μη εισχώρησης 2.15 επαληθεύεται στα κέντρα \vec{x}_c^e των στοιχείων που διαμορφώνουν τα στερεά όρια S_k και από αυτήν λαμβάνονται οι διακριτές εξισώσεις για τις άγνωστες εντάσεις $\mu_k^e(\cdot; t)$. Οι εντάσεις $\mu_k^e(\cdot; t)$ των διπόλων που βρίσκονται στον ομόρρου υπολογίζονται από την κινηματική συνθήκη 2.21. Για τμηματικά σταθερές κατανομές διπόλων, η εφαρμογή της 2.21 στα στοιχεία του ομόρρου περιορίζει τους άγνωστους βαθμούς ελευθερίας στις εντάσεις που έχουν μόλις δημιουργηθεί από τη γραμμή αποβολής στροβιλότητας. Οι εντάσεις που αντιστοιχούν στα υπόλοιπα στοιχεία του ομόρρου είναι γνωστά από προηγούμενες χρονικές στιγμές, όπως έχει εξηγηθεί παραπάνω.

Για τον υπολογισμό των αγνώστων εντάσεων που έχουν δημιουργηθεί στη γραμμή αποβολής στροβιλότητας την τρέχουσα χρονική στιγμή εφαρμόζεται η συνθήκη Kutta. Η συνθήκη εξασφαλίζει ότι η στροβιλότητα κατά μήκος της γραμμής αποβολής είναι πεπερασμένη. Αυτό σημαίνει ότι για τα στοιχεία που εφάπτονται στη γραμμή αποβολής είναι $\mu_k^e = \mu_{Wk}^e$. Για γραμμικές κατανομές διπόλων η εφαρμογή είναι διαφορετική, αλλά περιλαμβάνει επίσης εφαρμογή της συνθήκης Kutta και του θεωρήματος Kelvin. Το θεώρημα του Kelvin προσδιορίζει τις εντάσεις στον ομόρρου από προηγούμενες χρονικές στιγμές και η συνθήκη Kutta προσδιορίζει τις εντάσεις των στοιχείων που δημιουργούνται την τρέχουσα χρονική στιγμή.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, οι κατανομές των στοιχείων του ομόρρου από προηγούμενες χρονικές στιγμές είναι γνωστές, ενώ άγνωστες είναι οι κατανομές των στοιχείων που δημιουργήθηκαν την τρέχουσα χρονική στιγμή. Σε αυτή τη βάση χρησιμοποιείται διαφορετική προσέγγιση για τα νέα στοιχεία (κοντινός ομόρρους) και για τα στοιχεία που είναι γνωστά από προηγούμενες χρονικές στιγμές (μακρινός ομόρρους). Συγκεκριμένα, η θεώρηση του ομόρρου ως φύλλο στροβιλότητας χρησιμοποιείται μόνο για τα στοιχεία του κοντινού ομόρρου. Μετά την πάροδο του τρέχοντος χρονικού βήματος, για κάθε στοιχείο του κοντινού ομόρρου δημιουργείται μια σημειακή δίνη (vortex particle) στην οποία ενσωματώνεται η ένταση του στοιχείου, και ύστερα αυτή αφήνεται να κινηθεί ελεύθερα στο πεδίο ροής (πρότυπο ελεύθερου ομόρρου). Εάν S_{Wk}^A, S_{Wk}^* είναι το κοντινό και το μακρινό τμήμα αντίστοιχα του ομόρρου για κάθε ανωστικό σώμα k , το δυναμικό του ομόρρου (2ος όρος της εξίσωσης 2.14) μπορεί να διαχωριστεί σε δύο μέρη. Το δυναμικό $\varphi_{Wk}^A(\cdot, t)$ από τα στοιχεία του κοντινού ομόρρου, και το δυναμικό $\varphi_{Wk}^*(\cdot, t)$ από τα στοιχεία του μακρινού ομόρρου όλων των σωμάτων. Το συνολικό δυναμικό είναι το άθροισμα των συνεισφορών

$$\varphi(\vec{x}, t) = \varphi_b(\vec{x}, t) + \varphi_W^A(\vec{x}, t) + \varphi_W^*(\vec{x}, t) \quad (2.24)$$

όπου $\varphi_b(\cdot, t)$ είναι το δυναμικό που επάγεται από τα στερεά σώματα και είναι:

$$\begin{aligned} \varphi_b(\vec{x}, t) &= \sum_{k=1}^{N_B} \varphi_{kb}(\vec{x}; t) & \varphi_W^A(\vec{x}, t) &= \sum_{k=1}^{N_B} \varphi_{Wk}^A(\vec{x}; t) \\ \varphi_W^*(\vec{x}, t) &= \sum_{k=1}^{N_B} \varphi_{Wk}^*(\vec{x}; t) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Από τις εξισώσεις 2.11 και 2.22 φαίνεται πως η ποσότητα $\nabla\varphi_W^*(\cdot, t)$ αντιστοιχεί στο μέρος του πεδίου ταχύτητας που σχετίζεται με την περιστροφή $\vec{u}_\omega(\cdot, t)$:

$$\vec{u}_\omega(\vec{x}_0, t) = \int_{D_\omega(t)} \frac{\vec{\omega}_W(\vec{x}, t) \times (\vec{x}_0 - \vec{x})}{4\pi|\vec{x}_0 - \vec{x}|^3} dD(\vec{x}) \quad (2.26)$$

όπου $D_\omega(t)$ δηλώνει την ελεύθερη στροβιλότητα του πεδίου ροής $\vec{\omega}_W(\cdot, t)$ η οποία δίνεται σε αντιστοιχία με τη σχέση 2.22

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_W(\vec{x}, t) &= \nabla \times \vec{u}_\omega(\vec{x}, t) \\ &= \sum_{e_w=1}^{E_w} \left\{ \delta(\vec{x} - \vec{x}_{e_w}) (\nabla\mu_{e_w}(t) \times \vec{v}_{e_w}(t)) S_{e_w} \right. \\ &\quad \left. + \delta(\vec{x} - \vec{x}_{\partial e_w}) (\mu_{e_w} \vec{dl}_{\partial e_w}) \right\} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Η παραπάνω τροποποίηση επιφέρει αλλαγές στην έκφραση της συνθήκης μη εισχώρησης 2.15 και της επαγόμενης ταχύτητας 2.23. Οποιαδήποτε συνεισφορά στοιχείων του ομόρρου θα πρέπει να περιοριστεί αποκλειστικά στα στοιχεία του κοντινού ομόρρου S_{Wk}^A , ενώ θα πρέπει να συμπεριληφθούν στις εξισώσεις οι παράγοντες $\varphi_W^*(\cdot, t)$ και $\vec{u}_\omega(\cdot, t)$. Έστω ότι $\vec{\Omega}_j(t)$, $\vec{Z}_j(t)$ είναι οι εντάσεις και οι θέσεις των σημειακών δινών αντίστοιχα, και $J(t)$ το σύνολο των δεικτών που αντιστοιχούν στις σημειακές δίνες του πεδίου ροής. Τότε η διακριτή προσέγγιση της ελεύθερης στροβιλότητας $\vec{\omega}_W(\cdot, t)$ με σημειακές δίνες είναι:

$$\vec{\omega}_W(\vec{x}, t) = \sum_{j \in J(t)} \vec{\Omega}_j(t) \zeta_\varepsilon(\vec{x} - \vec{Z}_j(t)) \quad (2.28)$$

όπου $\zeta_\varepsilon(r)$ ορίζεται η συνάρτηση φίλτρου (cut-off function):

$$\zeta_\varepsilon(r_j) = \frac{1}{\varepsilon^3} \exp\left(-\left(\frac{r_j}{\varepsilon}\right)^3\right), \quad r_j = |\vec{x} - \vec{Z}_j(t)| \quad (2.29)$$

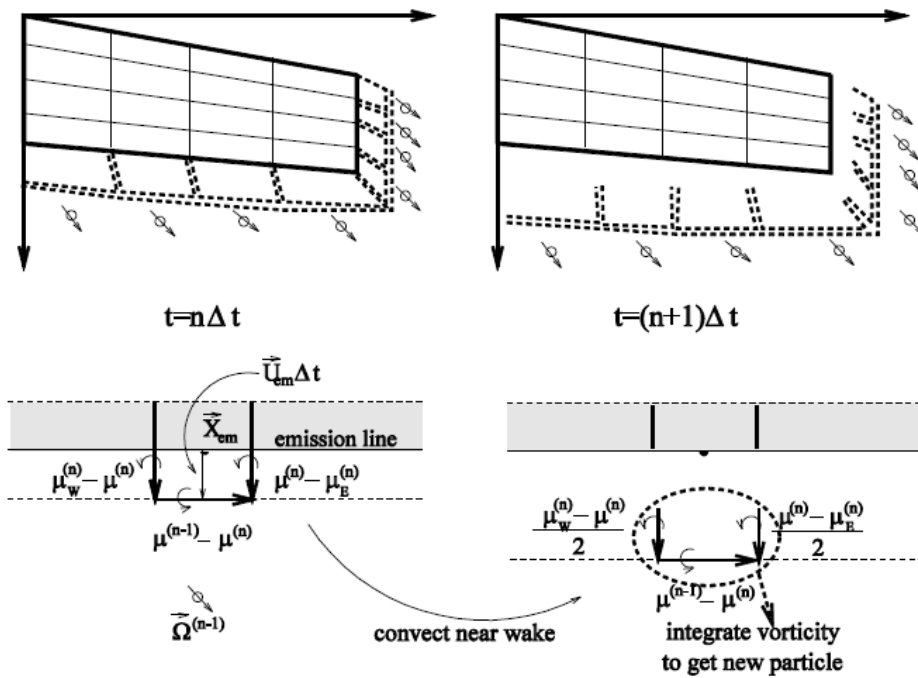
Με χρήση της εξίσωσης 2.28 η περιστροφική συνιστώσα του πεδίου ταχύτητας γράφεται:

$$\vec{u}_\omega(\vec{x}_0, t) = \sum_{j \in J(t)} \frac{\vec{\Omega}_j(t) \times (\vec{x} - \vec{Z}_j(t))}{4\pi|\vec{x} - \vec{Z}_j(t)|^3} \left(1 - \exp\left(-\left(\frac{|\vec{x} - \vec{Z}_j(t)|}{\varepsilon}\right)^3\right)\right) \quad (2.30)$$

Επομένως, δεν απαιτείται ο υπολογισμός της γεωμετρίας του φύλλου στροβιλότητας σε κάθε χρονική στιγμή, αφού ισοδύναμα παρακολουθείται η τροχιά των σημειακών δινών (vortex particles) μέσω των δυναμικών εξισώσεων:

$$\frac{d\vec{Z}_j(t)}{dt} = \vec{u}(\vec{Z}_j; t), j \in J(t) \quad (2.31)$$

$$\frac{d\vec{\Omega}_j(t)}{dt} = (\vec{\Omega}_j(t) \cdot \nabla) \vec{u}(\vec{Z}_j; t) \quad (2.32)$$



Εικόνα 2.7 Το υβριδικό πρότυπο ομόρρου για την περίπτωση λεπτής ανωστικής επιφάνειας

Οι εξισώσεις 2.31, 2.32 αφορούν την εξέλιξη του μακρινού ομόρρου. Το κοντινό τμήμα του ομόρρου απαιτεί διαφορετική αντιμετώπιση καθώς διατηρείται η θεώρηση του φύλλου στροβιλότητας. Αν \vec{U}_{em} είναι η μέση ταχύτητα ενός σημείου της γραμμής αποβολής στροβιλότητας ενός ανωστικού σώματος, η γεωμετρία του τμήματος του κοντινού ομόρρου S_W^A που αντιστοιχεί σε αυτό το σημείο υπολογίζεται από την

$$\vec{X}^A = \vec{X}_{em} + \Delta t \vec{U}_{em} \quad (2.33)$$

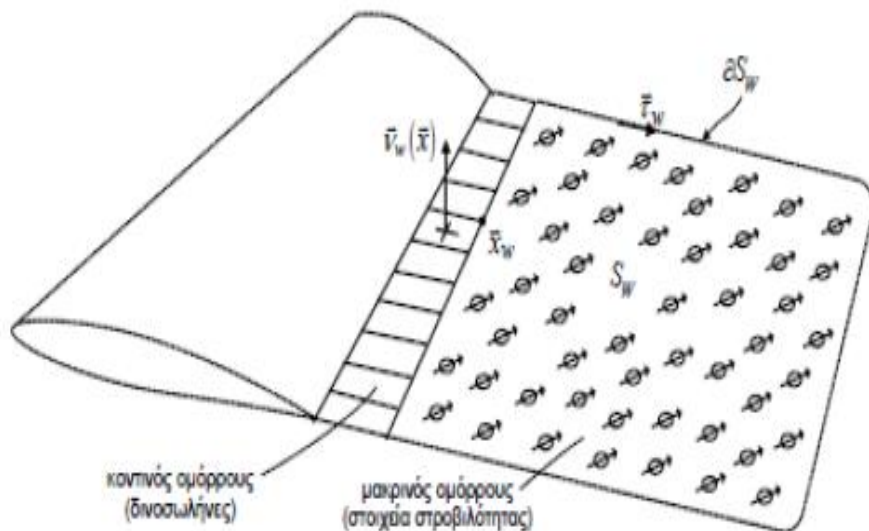
όπου $\vec{X}^{\Delta} - \vec{X}_{em}$ είναι το μήκος του S_{Wk}^{Δ} σε διανυσματική μορφή(Εικόνα 2.7). Οι εντάσεις των κατανομών διπόλων του κοντινού ομόρρου υπολογίζονται από τη συνθήκη 2.20. Οι σημειακές δίνες (vortex particles) δημιουργούνται σε κάθε χρονικό βήμα από ολοκλήρωση της επιφανειακής στροβιλότητας σε κάθε στοιχείο του κοντινού ομόρρου. Κατά τη δημιουργία κάθε σημειακής δίνης, η ένταση $\vec{\Omega}_j(t)$ και η θέση της $\vec{Z}_j(t)$ δίνονται από τις σχέσεις:

$$\vec{\Omega}_j = \int_{S_{Wk}^{\Delta e}} \vec{\omega}_W dS_w \quad (2.34)$$

$$\vec{\Omega}_j \times \vec{Z}_j = \int_{S_{Wk}^{\Delta e}} \vec{\omega}_W \times \vec{x} dS_w \quad (2.35)$$

όπου $S_{Wk}^{\Delta e}, e = 1, E_{Wk}^{\Delta}$ είναι τα στοιχεία που αποτελούν τον κοντινό ομόρρου του ανωστικού σώματος k.

Στη συνέχεια γίνονται κάποιες διευκρινήσεις για την διακριτοποίηση της γεωμετρίας και των εξισώσεων γύρω από σώματα με πάχος. Η επιφάνεια των σωμάτων χωρίζεται σε πλέγμα επίπεδων τετράπλευρων στοιχείων στα οποία τοποθετούνται τμηματικά σταθερές κατανομές πηγών και κατανομές διπόλων με διγραμμική ένταση. Τα σώματα χωρίς πάχος αναπαρίστανται αποκλειστικά από κατανομές διπόλων και τα μη ανωστικά σώματα με πάχος αποκλειστικά από κατανομές πηγών. Σε αυτά τα επίπεδα στοιχεία επαληθεύεται η συνθήκη μη εισχώρησης και στην ακμή εκφυγής γίνεται η εξίσωση των πιέσεων (συνθήκη Kutta). Το φύλλο στροβιλότητας κοντά στο σώμα (κοντινός ομόρρος) αναπαρίσταται με πλέγμα δινοπετάλων (vortex lattice) όπως και η γεωμετρία του ίδιου του σώματος σύμφωνα με τη δυναμική θεώρηση. Ο μακρινός ομόρρος αναπαρίσταται από στοιχεία στροβιλότητας (vortex particles) που ταξιδεύουν ελεύθερα με τη ροή σύμφωνα με τη στροβιλή θεώρηση (Εικόνα 2.8).

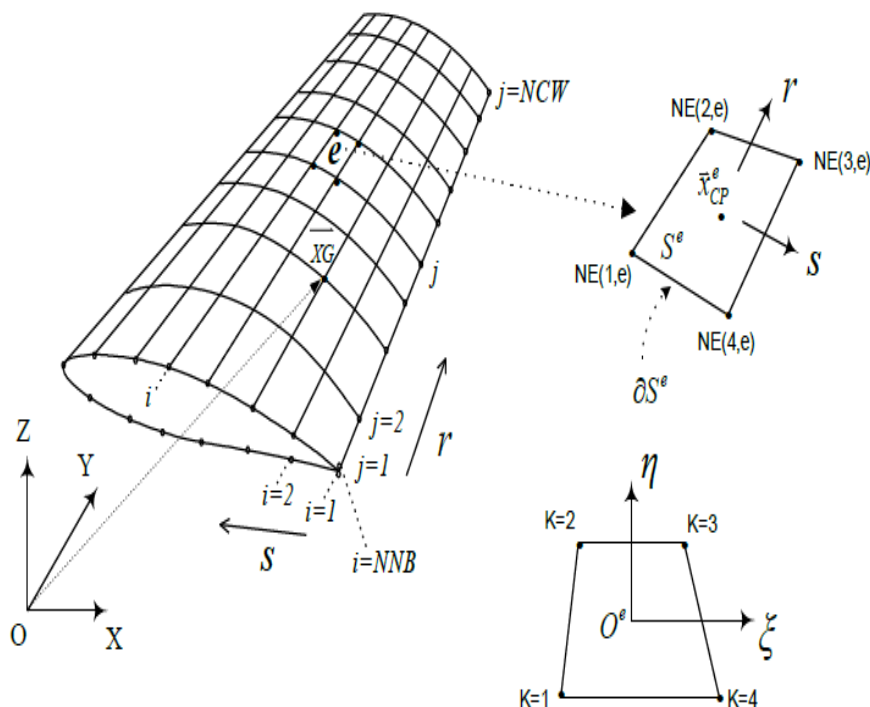


Εικόνα 2.8 Η αναπαράσταση του φύλλου στροβιλότητας

Σε κάθε χρονικό βήμα υπολογίζεται η ένταση της αρχικά αποβαλλόμενης στροβιλότητας από το θεώρημα διατήρησης κυκλοφορίας του Kelvin. Η μεταφορά και παραμόρφωση του φύλλου στροβιλότητας στο χρόνο υπολογίζεται από τις υλικές εξισώσεις του Helmholtz.

Η επιφάνεια κάθε αριθμητικού σώματος διαχωρίζεται σε πολλαπλά επιμέρους επίπεδα στοιχεία. Κάθε φυσικό σώμα μπορεί να αποτελείται από περισσότερα από ένα αριθμητικά σώματα. Η διατύπωση αυτή επιτρέπει τη δημιουργία ιδιόμορφων πλεγμάτων πάνω στα φυσικά σώματα ανάλογα με τις ανάγκες του μελετώμενου προβλήματος.

Το επιφανειακό πλέγμα των σημείων που προσομοιώνουν κάθε αριθμητικό σώμα είναι ορισμένο στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς και περιγράφεται από ένα σύμβολο κόμβων $S(i, j)$, $i = 1, NNB$, $j = 1, NCW$ όπου NNB, NCW είναι ο αριθμός των κόμβων του πλέγματος κατά την s και r διεύθυνσή του αντίστοιχα:



Εικόνα 2.9 Γεωμετρικοί ορισμοί πλέγματος σώματος με πάχος

Θεωρούμε τμηματικά σταθερές κατανομές πηγών για τα στοιχεία του πλέγματος. Επίσης θεωρούμε κατανομή διπόλων τμηματικά σταθερή κατά την r -κατεύθυνση του πλέγματος και γραμμική κατά την s -κατεύθυνση. Η ένταση της κατανομής των διπόλων στο σώμα σε κάθε 'φέτα' του σώματος και σε κάθε στοιχείο της φέτας είναι ανάλογη με το μήκος της πλεγματικής γραμμής μέχρι αυτό το στοιχείο. Συνεπώς $\mu = B \cdot Length$, όπου $Length$ το μήκος της πλεγματικής γραμμής μέχρι αυτό το στοιχείο και τον συντελεστή αναλογίας B να αλλάζει από φέτα σε φέτα. Έτσι στο στοιχείο e τοποθετείται επιφανειακή κατανομή πηγών και διπόλων και σε τυχαίο σημείο $\vec{x}^e(s, r) \in S^e$ υπολογίζονται οι εντάσεις σ^e και μ^e αντίστοιχα:

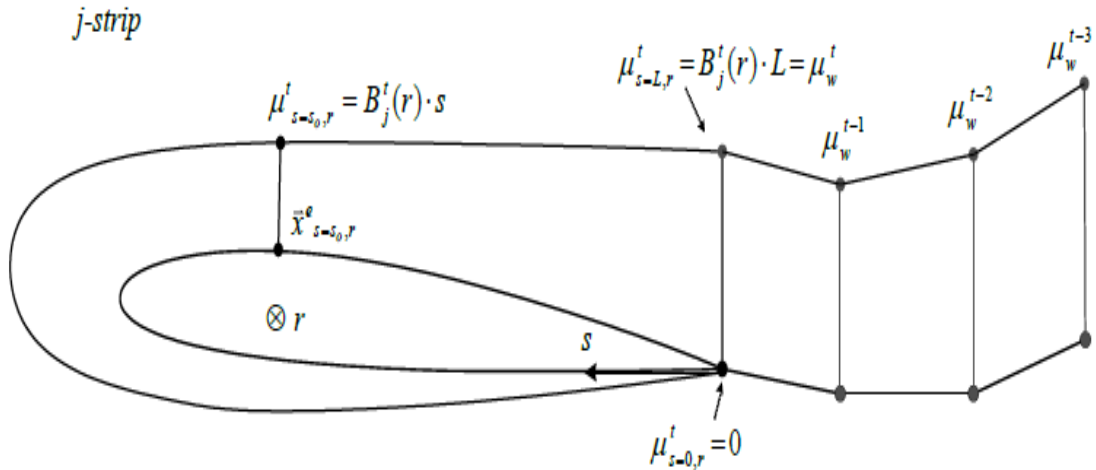
$$\sigma^e(\vec{x}^e) = ct, \quad \vec{x}^e \in S^e \quad (2.36)$$

και

$$\mu^e(\vec{x}^e(s, r)) = B(r) \cdot s, \quad \vec{x}^e \in S^e \quad (2.37)$$

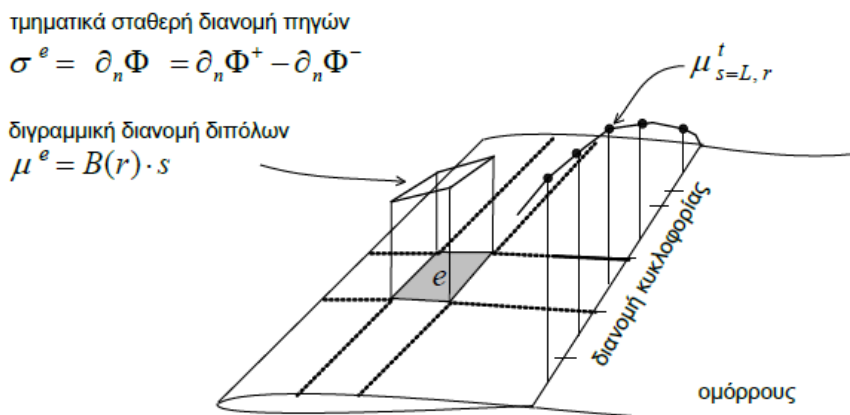
$$B(r) = B_{j=ICIRC(e)} = ct, \quad r_j \leq r \leq r_{j+1}, j = 1, ICIRC(NTE)$$

Η κλίση της διανομής διπόλων $B(r)$ μεταβάλλεται κατά την ακτινική κατεύθυνση ,ενώ έχει σταθερή τιμή $B_{ICIRC(e)} = ct$ κατά την s -κατεύθυνση για όλα τα σημεία ελέγχου \vec{x}_{CP}^e κατά το εύρος μιας ακτινικής 'λωρίδας' με μέση ακτίνα $r(0)$ (Εικόνα 2.10).



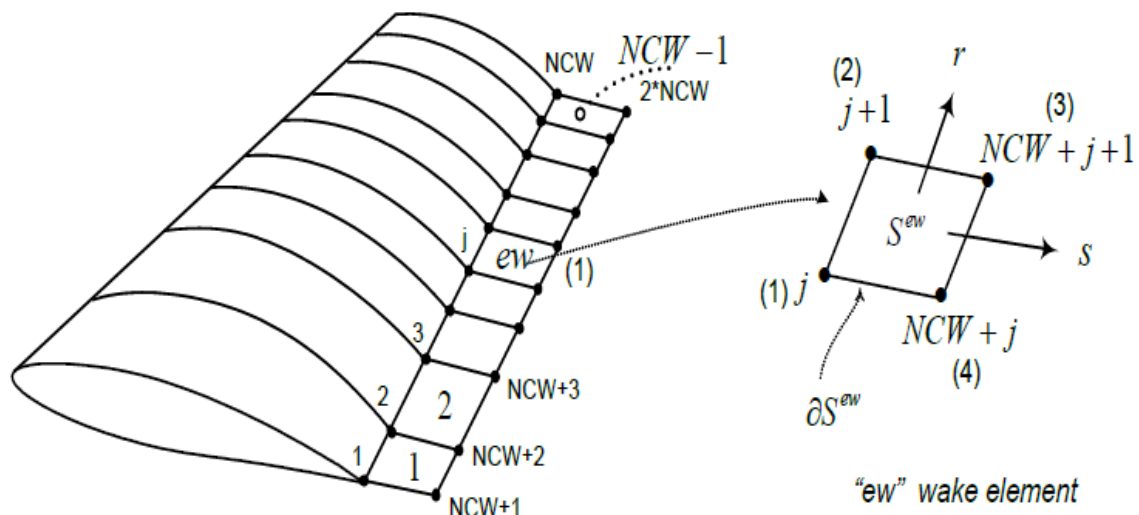
Εικόνα 2.10 Η γραμμική μεταβολή της διανομής διπόλων $\mu(s)$ κατά τη διεύθυνση της χορδής στην ακτινική θέση r (j -strip)

Με τον τρόπο αυτό ο καθορισμός της διανομής διπόλων στο γεωμετρικό πλέγμα ανάγεται σε πρόβλημα υπολογισμού των άγνωστων σταθερών B_j . Επιλέγοντας τμηματικά σταθερή κατανομή για τη διανομή διπόλων στην ακτινική κατεύθυνση προσεγγίζεται αντίστοιχα με τμηματικά σταθερή κατανομή και η κυκλοφορία του σώματος (Εικόνα 2.11).



Εικόνα 2.11 Η διανομή ιδιομορφιών στο σώμα και η κατανομή κυκλοφορίας

Τα στοιχεία του κοντινού ομόρρου των ανωστικών σωμάτων εφάπτονται στη γραμμή αποβολής στροβιλότητας και υπάγονται στη θεώρηση του φύλλου στροβιλότητας. Μια εικόνα της αναπαράστασης του κοντινού ομόρρου πτέρυγας με πάχος φαίνεται στην Εικόνα 2.12. Οι άγνωστοι που συσχετίζονται με τα στοιχεία του κοντινού ομόρρου για την περίπτωση αποβολής στροβιλότητας από την ακμή εκφυγής υπολογίζονται από τη συνθήκη Kutta και το θεώρημα διατήρησης κυκλοφορίας του Kelvin.



Εικόνα 2.12 Διακριτοποίηση του κοντινού ομόρρου για την περίπτωση σώματος με πάχος

Ορίζοντας με τον τρόπο αυτό τις κατανομές των ιδιομορφιών εισάγονται NDFT (Total Number of Degrees of Freedom) βαθμοί ελευθερίας:

$$\begin{aligned} NDFT &= NTE_{\sigma^e} + (NCW - 1)_{\mu^e} \\ &= NTE_{\sigma^e} + (ICIRC(NTE))_{\mu^e} \quad (2.38) \end{aligned}$$

όπου NTE_{σ^e} είναι ο αριθμός των αγνώστων εντάσεων των τμηματικά σταθερών επιφανειακών πηγών στα NTE στοιχεία του γεωμετρικού πλέγματος του σώματος και $(ICIRC(NTE))_{\mu^e} = (NCW - 1)_{\mu^e}$ ο αριθμός των τιμών κλίσεων B_j της κατανομής διπόλων που είναι ίσος με τον αριθμό των ακτινικών θέσεων που ορίζεται στη διακριτοποίηση του σώματος. Αυτό το σύστημα των NDFT αγνώστων είναι πλήρως ορισμένο καθώς μπορούν να οριστούν NTE πλήθος εξισώσεων που να ικανοποιούν την κινηματική συνθήκη μη εισχώρησης και $NCW-1$ εξισώσεις που να ικανοποιούν τη δυναμική συνθήκη Kutta.

Ο καθορισμός του επιφανειακού διαχωρισμού της γεωμετρίας σε επιμέρους στοιχεία είναι ιδιαίτερα σημαντικός για την αριθμητική ευστάθεια των εξισώσεων και την αξιοπιστία των αποτελεσμάτων.

Τέλος, σημαντική είναι και η επιλογή του χρονικού βήματος ώστε τα αποτελέσματα να αποτυπώνουν με ικανοποιητική ακρίβεια τους μηχανισμούς της ροής στις

περιοχές που ενδιαφέρουν(όπως η αναδίπλωση του φύλλου στροβιλότητας κοντά στην ακμή εκφυγής).

2.4 Ελεύθερη επιφάνεια και προσομοίωση μέσω συνοριακών ολοκληρωμάτων

Στη Φυσική, η ελεύθερη επιφάνεια είναι η επιφάνεια ενός ρευστού που υπόκειται σε μηδενική παράλληλη διατμητική τάση, όπως το σύνορο μεταξύ δύο ομογενών ρευστών.

Οι ελεύθερες επιφάνειες συναντώνται παντού. Το πιο απλό παράδειγμα είναι η διεπαφή μεταξύ νερού και αέρα. Παρατηρούμε αυτές τις επιφάνειες ως στάλες βροχής, θαλάσσια κύματα, ένα ποτήρι νερό κλπ. Εμφανίζονται σε ένα πολύ ευρύ φάσμα και περιβάλλουν πολλαπλά φαινόμενα: δέσμες νερού που σπάνε σε σταγόνες, κύματα που καταλήγουν στην ακτή, μίγματα νερού και λαδιού (δεξαμενές πετρελαίων), ρυάκια νερού που σχηματίζονται στο τζάμι και άλλα.



Εικόνα 2.13 Η ελεύθερη επιφάνεια της θάλασσας

Η πολλαπλή χρήση τους καθώς και η 'γοητεία' που χαρακτηρίζει τις επιφάνειες νερού οδήγησε στην ανάπτυξη μαθηματικών μοντέλων που να περιγράφουν τη συμπεριφορά τους. Τον τελευταίο αιώνα, με την έλευση της υψηλής ταχύτητας υπολογιστικής, αναπτύχθηκαν διάφορες αριθμητικές μέθοδοι που να περιγράφουν την κίνηση της ελεύθερης επιφάνειας. Η πρόκληση είναι η συνεχής βελτίωση των

αριθμητικών μεθόδων που εξασφαλίζουν ακριβείς και αξιόπιστους υπολογισμούς της ροής ελεύθερης επιφάνειας.

Υπάρχουν δύο τάξεις ελεύθερης επιφάνειας όπου τα συνοριακά ολοκληρώματα έχουν φυσικό πλεονέκτημα έναντι άλλων μεθόδων. Αυτές που χαρακτηρίζονται από πολύ μεγάλο ή από πολύ μικρό αριθμό Reynolds. Ο αριθμός Reynolds ορίζεται ως ο λόγος των δυνάμεων αδράνειας προς τις δυνάμεις ιξώδους και συνεπώς ποσοτικοποιεί την μεταξύ τους σημαντικότητα για μια συγκεκριμένη κατάσταση ροής. Είναι μικρός όταν τα συνεκτικά φαινόμενα κυριαρχούν (κίνηση μιας σταγόνας) και μεγάλος όταν αυτά είναι αμελητέα όπως στη διάδοση κυμάτων νερού.

Εμείς θα ασχοληθούμε με τη δεύτερη περίπτωση, εκεί όπου οι εξισώσεις της ροής μπορούν να περιοριστούν στην επίλυση της εξίσωσης Laplace. Εδώ, θα χρησιμοποιήσουμε κατανομές διπόλων κατά μήκος της επιφάνειας και η ταχύτητα στην επιφάνεια μπορεί να εκφραστεί πλήρως μέσω συνοριακών ολοκληρωμάτων αυτών των κατανομών. Στην ουσία, μειώνουν τη χωρική διάσταση του προβλήματος κατά μία και για την πρόοδο της επιφάνειας είναι απαραίτητες μόνο πληροφορίες πάνω στην επιφάνεια. Οι κατανομές διπόλων κατά μήκος της επιφάνειας παρέχουν μια τέλεια αναπαράσταση του πεδίου, αφού οι μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς σε όλη την επιφάνεια, που αποτελεί μία από τις ζητούμενες οριακές συνθήκες.

Μαθηματική διατύπωση

Οι εξισώσεις Euler για μη συνεκτική ροή είναι:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (u \cdot \nabla) \rho = 0 \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u = -\frac{1}{\rho} \nabla p + g \quad (2.40)$$

όπου u η ταχύτητα του ρευστού, ρ η πυκνότητα, p η υδροδυναμική πίεση και ρg η βαρυτική δύναμη. Αν θεωρήσουμε και τη ροή ασυμπίεστη:

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (2.41)$$

Οι εξισώσεις 2.39, 2.40 αποτελούν διαφορικές εξισώσεις των ρ και u , ενώ η εξίσωση 2.41 ενεργεί ως περιορισμός που ορίζει το ρ .

Μια άλλη μορφή αυτών των εξισώσεων χρησιμοποιεί τη στροβιλότητα $\omega = \nabla \times u$. Έτσι από την 2.40 παράγεται μια διαφορική εξίσωση της στροβιλότητας:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (u \cdot \nabla) \omega - (\omega \cdot \nabla) u = \nabla p \times \nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) \quad (2.42)$$

Τώρα η ταχύτητα πρέπει να προσδιοριστεί από την εξίσωση 2.41 και τον ορισμό της στροβιλότητας. Μια πρότυπη προσέγγιση είναι η εισαγωγή του διανυσματικού πεδίου A , όπου $u = \nabla \times A$. Αυτή η επιλογή ικανοποιεί αυτόματα την 2.41 και ο ορισμός της στροβιλότητας γίνεται

$$\nabla^2 A = -\omega \quad (2.43)$$

με την απαίτηση $V \cdot A = 0$.

Μια αξία της διατύπωσης στροβιλότητας της εξίσωσης 2.42 είναι ότι εστιάζει στην παραγωγή της στροβιλότητας. Οι όροι στο αριστερό μέλος της εξίσωσης περιγράφουν τη διάχυση και έκταση των γραμμών στροβιλότητας, ενώ οι όροι στο δεξιό μέλος περιγράφουν τη δημιουργία τους. Με την απουσία στερεών διαχωριστικών επιφανειών (solid boundaries), στροβιλότητα παράγεται μόνο από διαφορές πυκνότητας. Για ροές, στις οποίες είναι λογικό να θεωρήσουμε σταθερή πυκνότητα, η στροβιλότητα διατηρείται. Δηλαδή, αν δεν υπάρχει καμία αρχική στροβιλότητα, δεν θα υπάρξει και μετά.

Από την άλλη πλευρά, αν υπάρχει μια διακριτή επιφάνεια που διαχωρίζει δύο περιοχές σταθερών αλλά διαφορετικών πυκνοτήτων, τότε προκαλείται στροβιλότητα στην επιφάνεια αυτή. Δυστυχώς, η παραγωγή στροβιλότητας στη διεπαφή αυτή είναι γενικευμένη και είναι δύσκολο να παραχθεί απευθείας από την εξίσωση 2.42. Αντίθετα, θα ήταν προτιμότερο να ψάξουμε λύσεις σε κάθε περιοχή χωριστά και στη συνέχεια να τις συνδέσουμε με οριακές συνθήκες στην επιφάνεια.

Σε κάθε περιοχή, το πεδίο ταχύτητας πρέπει να είναι αστρόβιλο. Συνεπώς, η ταχύτητα μπορεί να εκφραστεί ως $u = \nabla\Phi$. Έτσι, μετά και από ολοκλήρωση της 2.40, παίρνουμε την εξίσωση Bernoulli στη μορφή:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + \frac{p}{\rho} + gz = C(t) \quad (2.44)$$

όπου z θεωρείται η κάθετη προς τα πάνω συντεταγμένη. Επίσης, η εξίσωση 2.41 γίνεται:

$$\nabla^2\Phi = 0 \quad (2.45)$$

Έτσι λοιπόν χρησιμοποιούμε την εξίσωση Bernoulli για να 'ανανεώσουμε' το δυναμικό της επιφάνειας και έπειτα χρησιμοποιούμε το αποτέλεσμα ως οριακή συνθήκη για την επίλυση της εξίσωσης Laplace 2.45.

2.5 Θεώρηση συμμετρίας

Όταν τα σώματα είναι συμμετρικά ως προς ένα ή δύο επίπεδα συμμετρίας ($x=0$ ή $y=0$), το υπολογιστικό κόστος μπορεί να μειωθεί σημαντικά λύνοντας το μισό ή το ένα τέταρτο του πεδίου.

Στην περίπτωση ενός επιπέδου συμμετρίας λύνονται δύο προβλήματα ενώ στην περίπτωση δύο επιπέδων συμμετρίας λύνονται τέσσερα για την πλήρη λύση του υδροδυναμικού προβλήματος. Αν θεωρηθεί ένα επίπεδο συμμετρίας, λύνονται το συμμετρικό και το αντι-συμμετρικό πρόβλημα. Τα κατοπτρικά δυναμικά στη συμμετρική περίπτωση είναι ίδια, ενώ στην αντι-συμμετρική περίπτωση είναι αντίθετου πρόσημου. Στην περίπτωση δύο επιπέδων συμμετρίας, πρέπει να ληφθούν υπόψη όλοι οι πιθανοί συνδυασμοί: το δυναμικό να είναι συμμετρικό ως προς το επίπεδο $y=0$ και αντισυμμετρικό ως προς το $x=0$, συμμετρικό ως προς το $x=0$ και αντισυμμετρικό ως προς το $y=0$, συμμετρικό ως προς και τα δύο επίπεδα $x=0$ και $y=0$ ή αντισυμμετρικό ως προς και τα δύο επίπεδα $x=0$ και $y=0$.

Αν τα σημεία $P(x,y,z)$, $P_x(x,y,z)$, $P_y(x,y,z)$ και $P_{xy}(x,y,z)$ είναι απεικονίσεις όσον αφορά τα επίπεδα $x=0, y=0$ ή και τα δύο, τότε:

$$P(x, y, z) = P_x(-x, y, z) = P_y(x, -y, z) = P_{xy}(-x, -y, z) \quad (2.46)$$

Το δυναμικό μπορεί να αναλυθεί:

$$\varphi_D(P) = \frac{1}{2} [\varphi_D(P) + \varphi_D(P_x)] + \frac{1}{2} [\varphi_D(P) - \varphi_D(P_x)] \quad (2.47a)$$

$$\varphi_D(P) = \frac{1}{2} [\varphi_D(P) + \varphi_D(P_y)] + \frac{1}{2} [\varphi_D(P) - \varphi_D(P_y)] \quad (2.47b)$$

$$\begin{aligned} \varphi_D(P) = & \frac{1}{4} [\varphi_D(P) - \varphi_D(P_x) - \varphi_D(P_{xy}) + \varphi_D(P_y)] \\ & + \frac{1}{4} [\varphi_D(P) + \varphi_D(P_x) - \varphi_D(P_{xy}) - \varphi_D(P_y)] \\ & + \frac{1}{4} [\varphi_D(P) + \varphi_D(P_x) + \varphi_D(P_{xy}) + \varphi_D(P_y)] \\ & + \frac{1}{4} [\varphi_D(P) - \varphi_D(P_x) + \varphi_D(P_{xy}) - \varphi_D(P_y)] \quad (2.47c) \end{aligned}$$

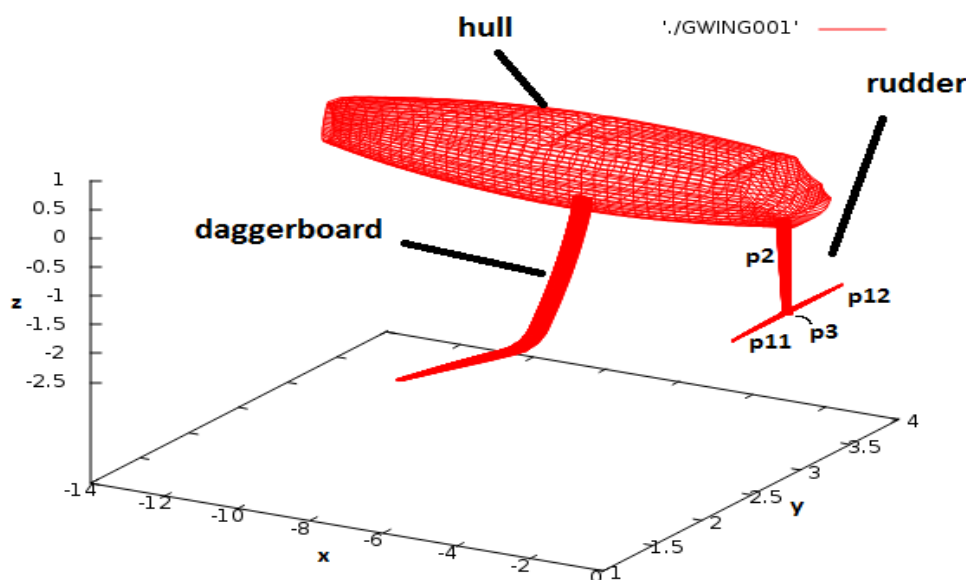
Οι όροι στις αγκύλες $[\cdot]$ αντιστοιχούν στα λυμένα προβλήματα συνοριακών τιμών λαμβάνοντας υπόψη το συμμετρικό ή αντισυμμετρικό δυναμικό όσον αφορά το επίπεδο/α συμμετρίας. Η εξίσωση α εφαρμόζεται όταν το $x=0$ είναι το επίπεδο συμμετρίας, η β όταν είναι το $y=0$, ενώ η γ όταν και τα δύο $x=0, y=0$ είναι επίπεδα συμμετρίας.

Κεφάλαιο 3: Ανάλυση γεωμετρικών πλεγμάτων και αλγόριθμοι διαχείρισης

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται τα γεωμετρικά πλέγματα που χρησιμοποιήθηκαν, καθώς και ορισμένοι κώδικες που αναπτύχθηκαν για την επεξεργασία τους και την τελική υλοποίησή τους.

Οι γεωμετρίες αυτές, πρέπει να έχουν κάποια συγκεκριμένα χαρακτηριστικά. Αρχικά πρέπει να έχουν μορφή επιφανειακού πλέγματος που να είναι συμβατό με το GENUVP. Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι παράγεται μια γεωμετρία σε ένα απλό αρχείο κειμένου όπου δίνονται οι καρτεσιανές συντεταγμένες (x,y,z) των κόμβων που την απαρτίζουν. Προφανώς, η σειρά με την οποία διαβάζει ο κώδικας τους κόμβους που αποτελούν τη γεωμετρία κάθε σώματος δεν είναι τυχαία, αφού κάθε φορά πρέπει να δομείται το εξωτερικό πρόβλημα. Όπως έχει ήδη αναφερθεί κάθε φυσικό σώμα μπορεί να αποτελείται από περισσότερα από ένα αριθμητικά σώματα είτε για λόγους ακρίβειας είτε για λόγους συμβατότητας με τον κώδικα.

Η κύρια προς μελέτη γεωμετρία περιλαμβάνει τη γάστρα του σκάφους μαζί με τα υδροπτερύγια(daggerboards) και τα πηδάλια(rudders) (Εικόνα 3.1).

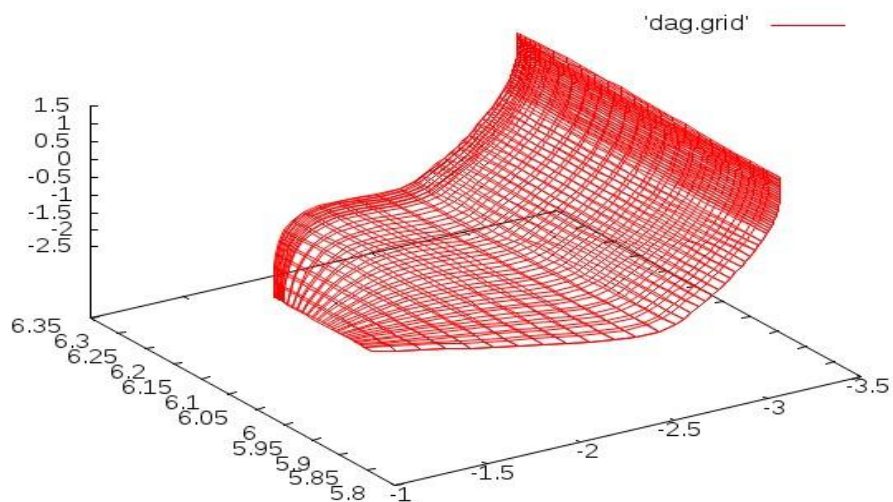


Εικόνα 3.1 Η γεωμετρία του σκάφους(μία γάστρα)

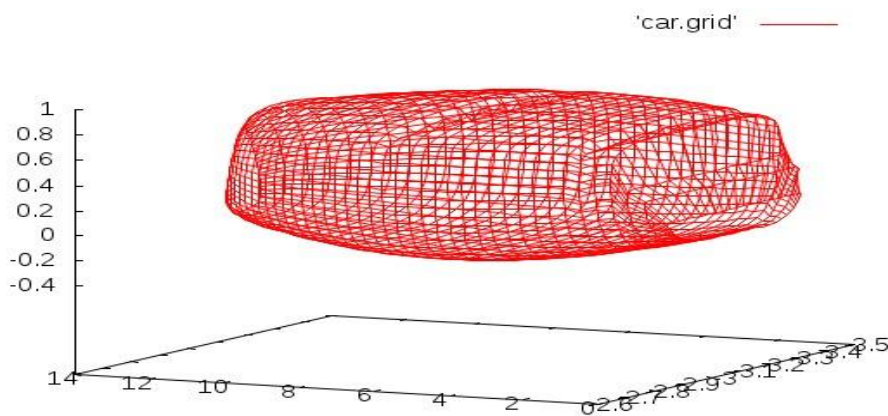
Αργότερα προστέθηκε ως αναπαράσταση ελεύθερης επιφάνειας(free surface) μια επιφανειακή κατανομή διπόλων.

3.1 Γάστρα(hull) και Υδροπτερύγιο(daggerboard)

Το αρχικό πλέγμα που παράχθηκε για τα υδροπτερύγια περιλάμβανε NCW=53 αεροτομές των NNB=49 κόμβων(Εικόνα 3.2),ενώ για τη γάστρα 39 τομές των 50 κόμβων η καθεμία(Εικόνα 3.3):

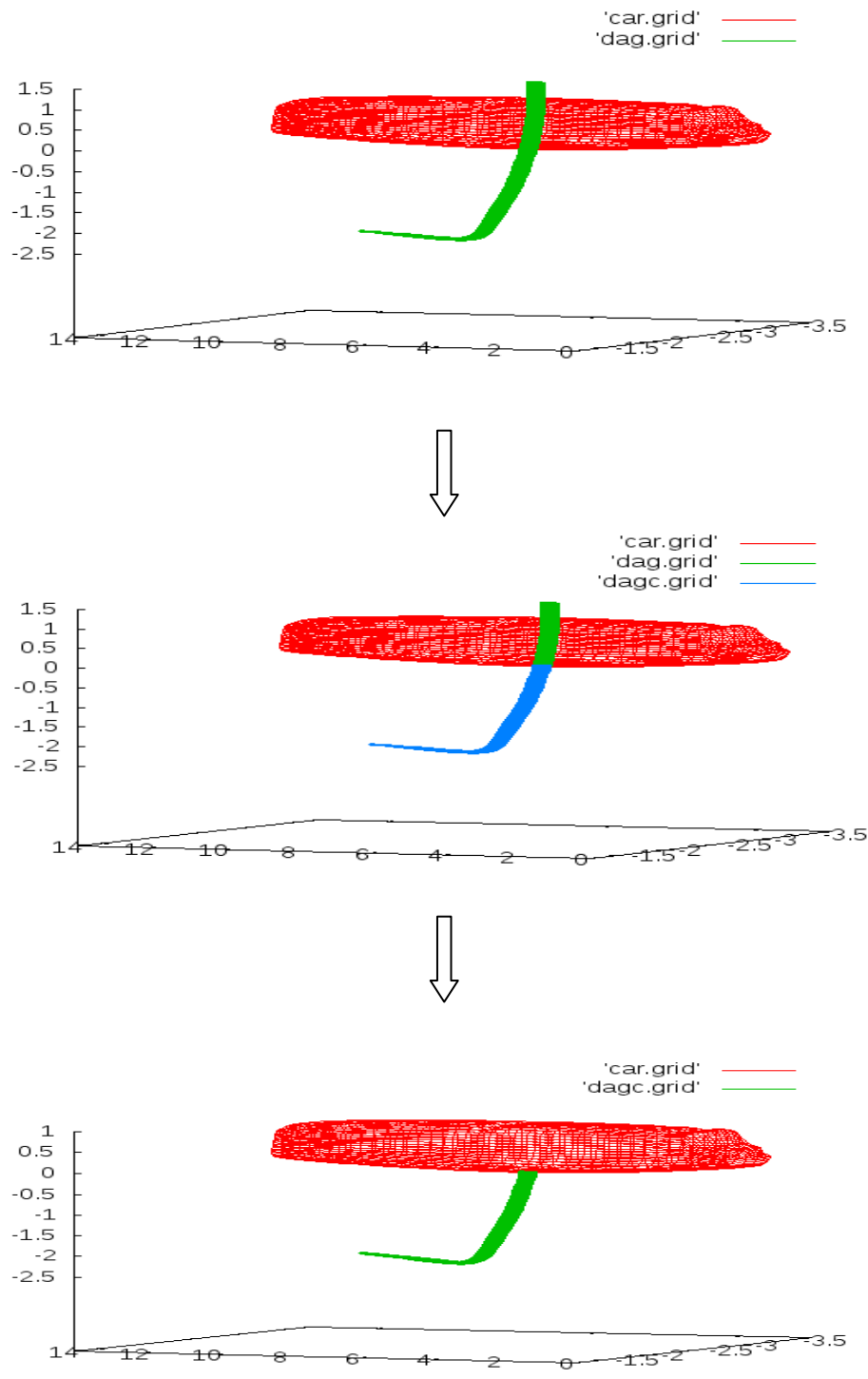


Εικόνα 3.2 Η γεωμετρία του υδροπτερυγίου(daggerboard)



Εικόνα 3.3 Η γεωμετρία της γάστρας(hull)

Το πάνω μέρος του υδροπτερυγίου βρίσκεται μέσα στη γάστρα,δεν έρχεται σε επαφή με τη ροή,οπότε και αφαιρέθηκε:

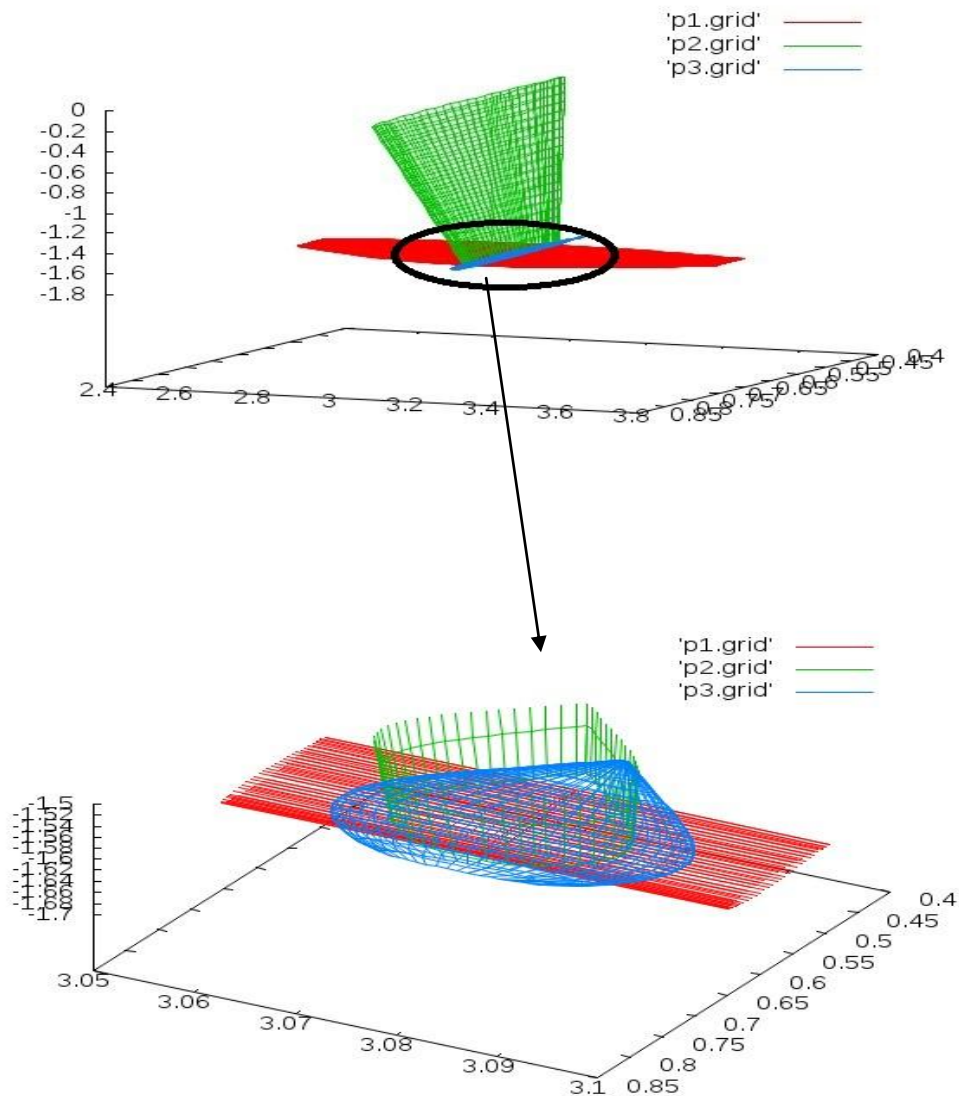


Εικόνα 3.4 Γάστρα,υδροπτερύγιο και σχετική τους θέση

Έτσι, τελικά για το υδροπτερύγιο χρησιμοποιήθηκε μικτή κατανομή πηγών-διπόλων σε ένα πλέγμα $NCW=29 \times NNB=49$ κόμβων ως ανωστικό σώμα με πάχος, ενώ αντίστοιχα για τη γάστρα χρησιμοποιήθηκε αποκλειστικά κατανομή πηγών ως μη ανωστικό σώμα με πάχος.

3.2 Πηδάλιο(rudder)

Το αρχικό πλέγμα που παράχθηκε για το πηδάλιο απαρτιζόταν από τρία αριθμητικά σώματα όπως φαίνεται παρακάτω (Εικόνα 3.5) : ένα οριζόντιο πτερύγιο(p1.grid), ένα κάθετο πτερύγιο(p2.grid) και μια βάση σε σχήμα οβίδας(p3.grid).

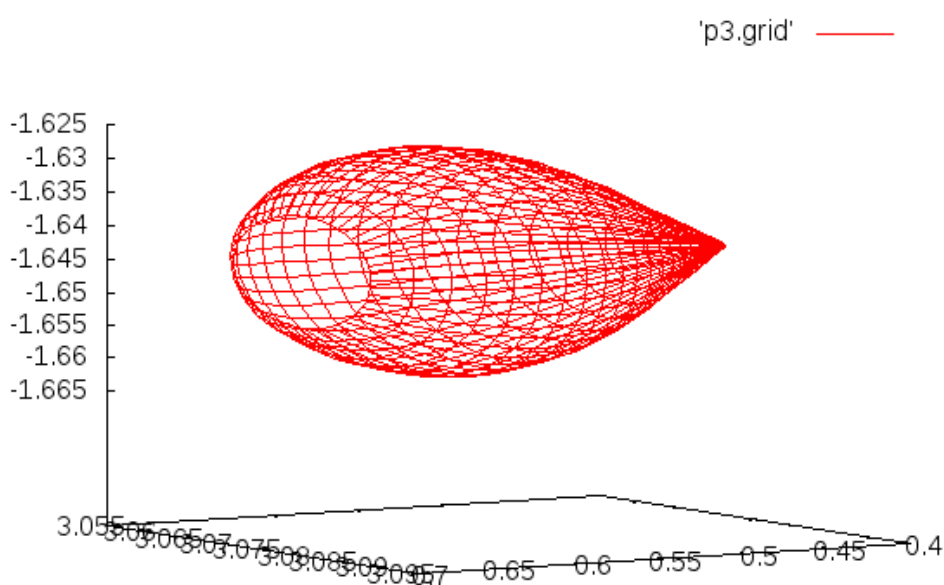


Εικόνα 3.5 Αρχική γεωμετρία πηδαλίου

Παρατηρούμε ότι τα πλέγματα των πτερυγίων διαπερνούν τη βάση,οπότε η υπάρχουσα γεωμετρία δεν είναι σε καμία περίπτωση συμβατή με τον κώδικα και δεν μπορεί να προσφέρει αποτελέσματα. Τα αριθμητικά πλέγματα πρέπει να είναι διακριτά μεταξύ τους,οπότε κινηθήκαμε ως εξής:

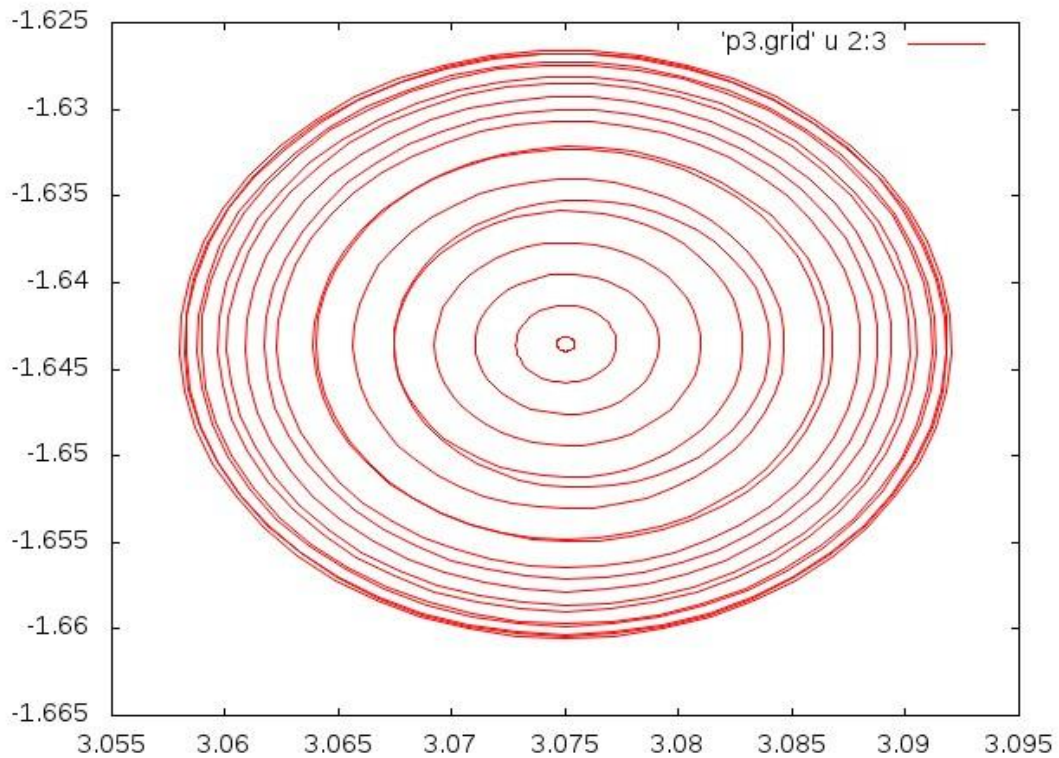
Αρχικά,αφαιρούμε το κομμάτι του οριζόντιου πτερυγίου(r_1) που βρίσκεται μέσα στη βάση,διαχωρίζοντάς το σε δύο αριθμητικά πτερύγια r_{11} και r_{12} που θα προσκολληθούν δεξιά και αριστερά της βάσης. Για να γίνει η προσκόλληση των δύο πλέον οριζόντιων πτερυγίων καθώς και του κάθετου(r_2),πρέπει να βρεθεί η τομή των επιφανειών τους με την επιφάνεια της βάσης. Πρέπει,δηλαδή το γεωμετρικό πλέγμα της βάσης να διαμορφωθεί κατάλληλα για να 'υποδεχτεί' τα τρία πτερύγια.

Το αρχικό πλέγμα της βάσης του πηδαλίου περιλάμβανε 19 τομές των 50 κόμβων, όπως φαίνεται παρακάτω(Εικόνα 3.6):



Εικόνα 3.6 Αρχική γεωμετρία της βάσης του πηδαλίου

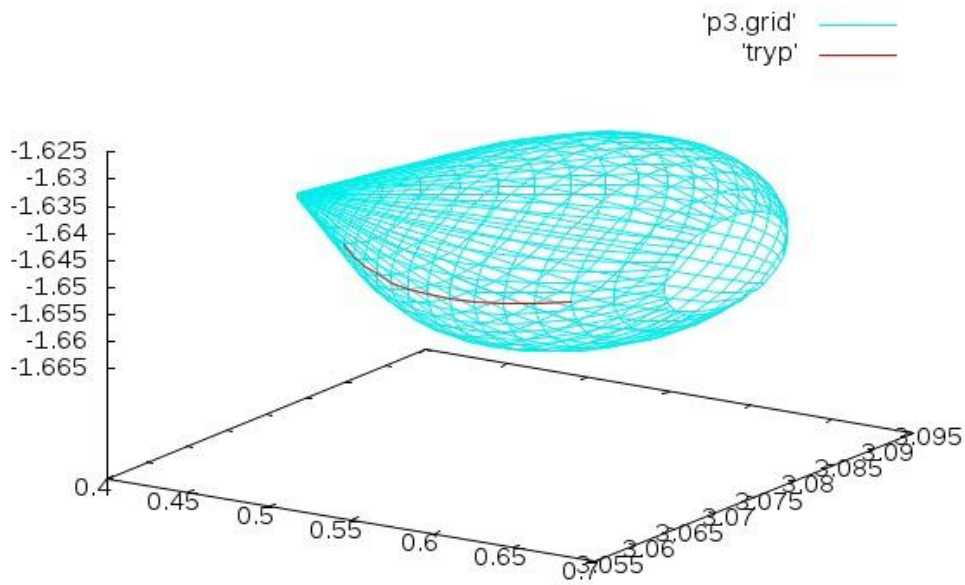
Αν δούμε τη βάση σε πλάγια όψη στο επίπεδο $y-z$ (Εικόνα3.7), παρατηρούμε ότι οι τομές μπορούν να θεωρηθούν κύκλοι. Μπορούμε δηλαδή να πούμε ότι το πλέγμα της βάσης αποτελείται από 19 αλληλάλληλους κύκλους,των οποίων τα κέντρα κινούνται στον άξονα $(x,3.07514,-1.64357)$.



Εικόνα 3.7 Γεωμετρία της βάσης σε πλάγια όψη y-z

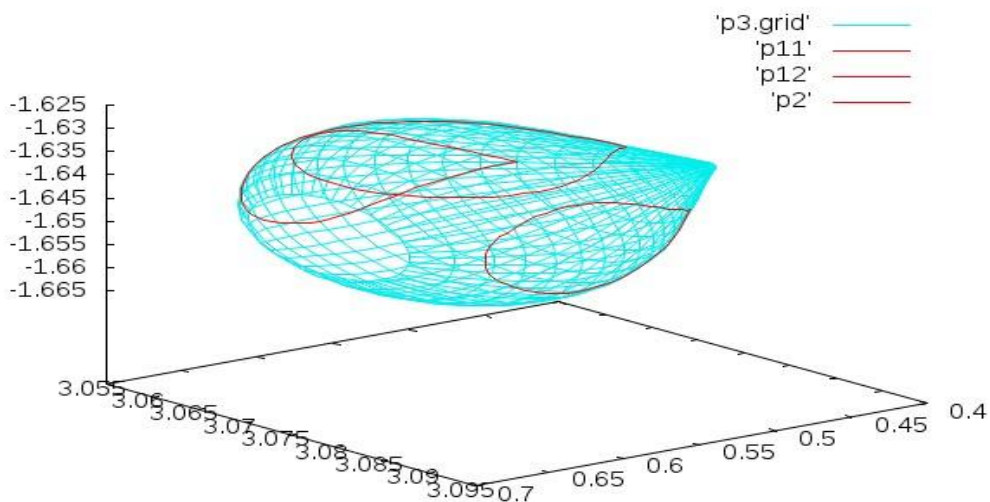
Αν δηλαδή τροποποιήσουμε το πλέγμα της βάσης από 19 τομές των 50 κόμβων σε ένα πλέγμα 50 καμπύλων των 19 κόμβων, η γεωμετρία της βάσης πλέον περιγράφεται από μία στην ουσία καμπύλη 19 σημείων, η οποία περιστρέφεται γύρω από τον άξονα $(x, 3.07514, -1.64357)$ σε 50 διαφορετικές θέσεις. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι μπορούμε να προσεγγίσουμε την επιφάνεια της βάσης σε κάθε θέση μέσω της περιστροφής.

Περιοριζόμαστε λοιπόν στο τμήμα της καμπύλης που αφορά την επικείμενη προσκόλληση του κάθε πτερυγίου (Εικόνα 3.8) και προσεγγίζουμε το τμήμα αυτό με κατάλληλου βαθμού πολυώνυμο.



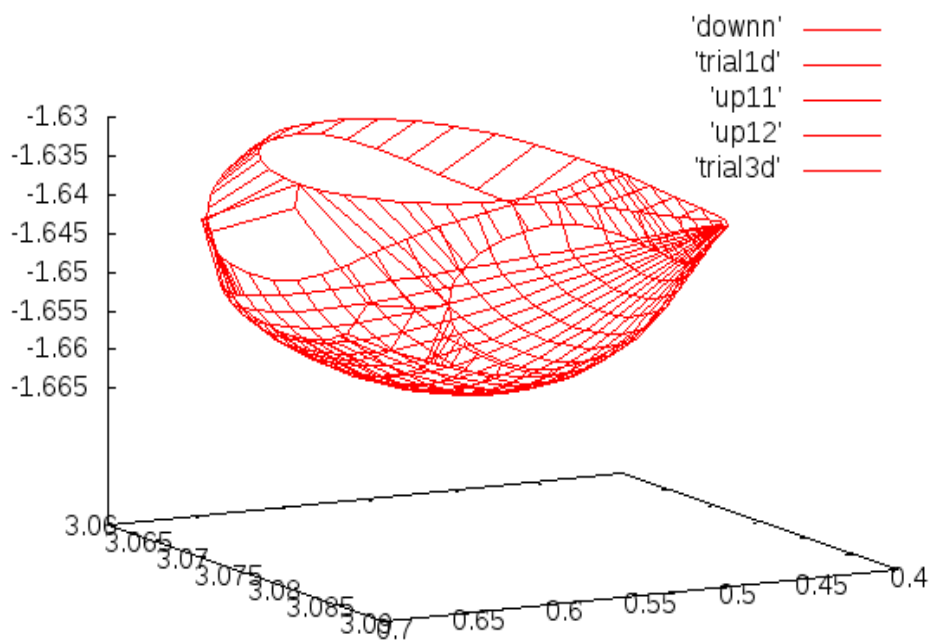
Εικόνα 3.8 Περιστρεφόμενη καμπύλη περιγραφής της βάσης σε μία προς προσκόλληση πτερυγίου θέση

Έτσι, και με τη βοήθεια γραμμικών παρεμβολών αποτυπώνουμε τις προς προσκόλληση αεροτομές των πτερυγίων πάνω στην επιφάνεια της βάσης (Εικόνα 3.9).



Εικόνα 3.9 Προς προσκόλληση αεροτομές των τριών πτερυγίων στη βάση

Αυτό που μένει τώρα για να πάρει η βάση την τελική της μορφή είναι να αφαιρεθούν τα κομμάτια εκείνα που προεξέχουν των απεικονιζόμενων αεροτομών (Εικόνα 3.10):

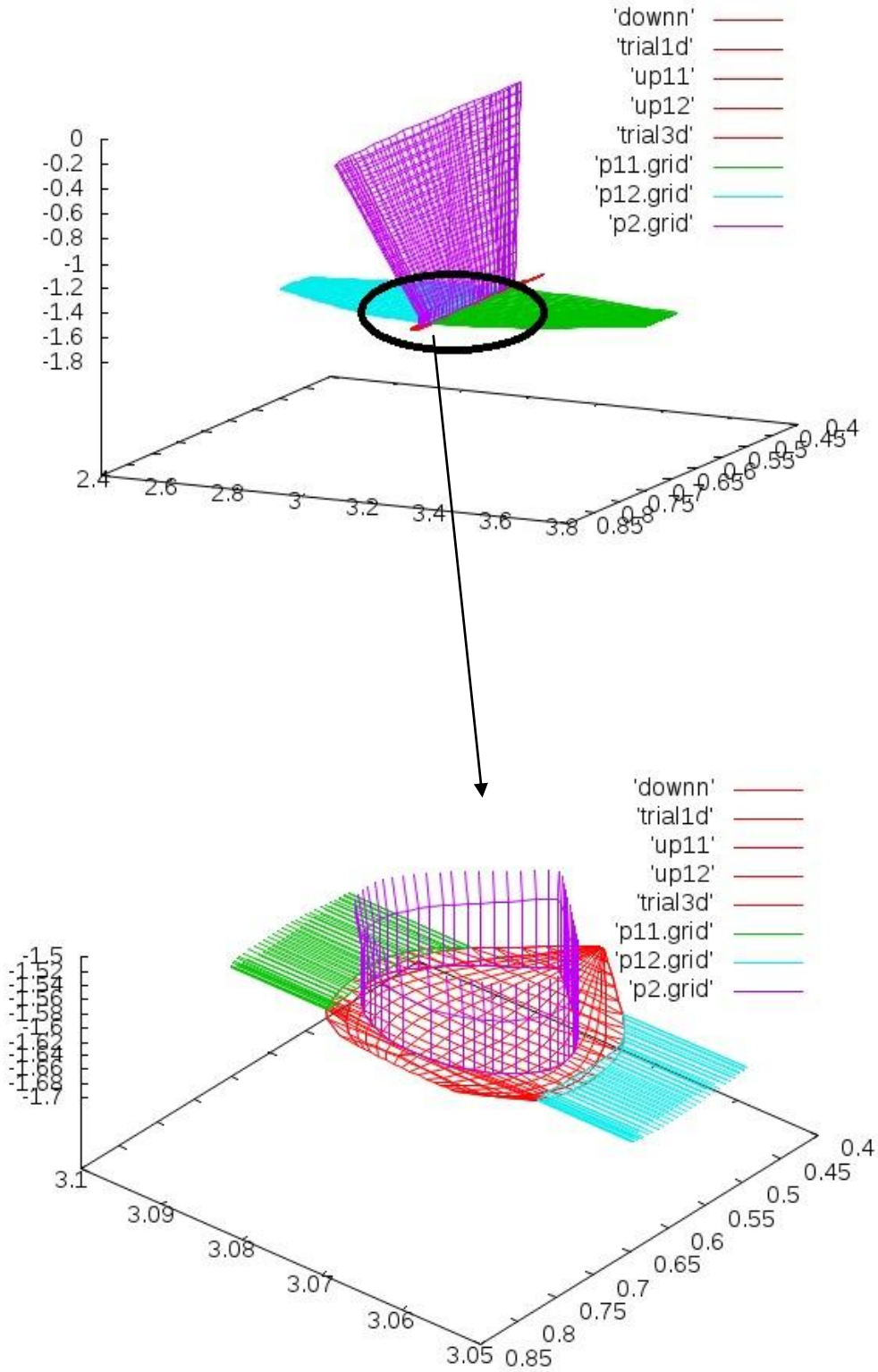


Εικόνα 3.10 Τελική γεωμετρία της βάσης του πηδαλίου

Η βάση άρα πλέον περιγράφεται από πέντε αριθμητικά σώματα. Για τα σώματα τα οποία βρίσκονται γύρω από τις 'τρύπες' χρησιμοποιήθηκαν 23 σημεία αφού τα 19 δεν ήταν αρκετά για να περιγράψουν πλήρως το περίγραμμα των αεροτομών. Έτσι το τελικό γεωμετρικό πλέγμα της βάσης περιλαμβάνει τέσσερα σώματα με $NCW=2 \times NNB=23$ κόμβους (up11, up12, trial1d, trial3d) και ένα σώμα με $NCW=15 \times NNB=19$ κόμβους (downn).

Για τη βάση του πηδαλίου ως μη ανωστικό σώμα με πάχος χρησιμοποιήθηκε αποκλειστικά κατανομή πηγών.

Η τελική μορφή του πηδαλίου φαίνεται παρακάτω(Εικόνα 3.11):

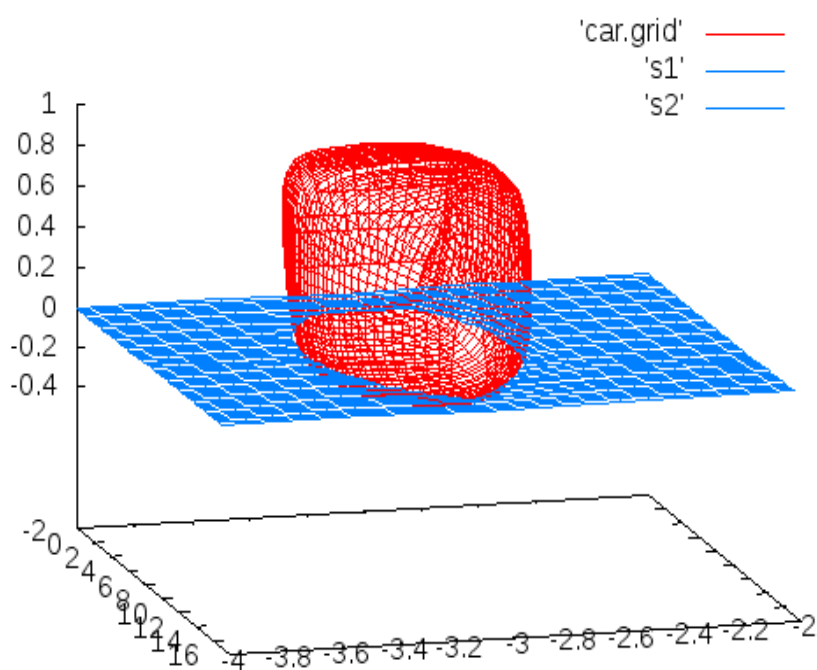


Εικόνα 3.11 Τελική γεωμετρία πηδαλίου

Το γεωμετρικό πλέγμα και των τριών περυγίων (p11.grid,p12.grid, p2.grid) περιλαμβάνει 20 αεροτομές των 57 κόμβων και χρησιμοποιήθηκε μικτή κατανομή πηγών-διπόλων ως ανωστικά σώματα με πάχος.

3.3 Ελεύθερη επιφάνεια(free surface)

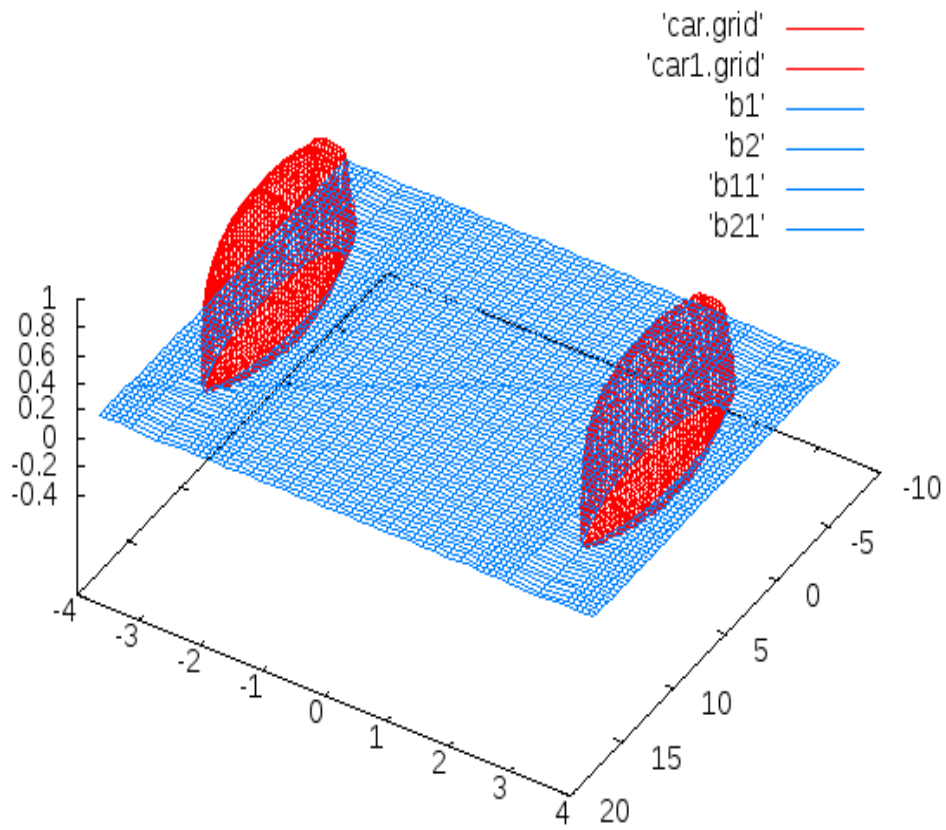
Η ελεύθερη επιφάνεια εισάχθηκε με δύο υποπλέγματα των 7x71 και 8x71 κόμβων στο επίπεδο $z=0$ (Εικόνα 3.12). Χρησιμοποιήθηκαν δύο πλέγματα για να γίνει ακριβής 'περικύκλωση' της γάστρας,πάνω στα οποία έγινε αποκλειστικά κατανομή διπόλων.



Εικόνα 3.12 Προσομοίωση ελεύθερης επιφάνειας για μία γάστρα

Στην περίπτωσή μας λοιπόν, η ελεύθερη επιφάνεια αποτέλεσε μια απαραμόρφωτη στο χρόνο επιφάνεια που καλύπτει ένα διάστημα 18 μέτρων στον άξονα x και ένα διάστημα 2 μέτρων στον άξονα y.

Τώρα στην περίπτωση των υπολογισμών με δύο γάστρες, παράχθηκαν τέσσερα υποπλέγματα στο επίπεδο $z=0$. Δύο των 7x71 και δύο των 18x71 κόμβων όπως φαίνεται παρακάτω (Εικόνα 3.13):



Εικόνα 3.13 Προσομοίωση ελεύθερης επιφάνειας για δύο γάστρες

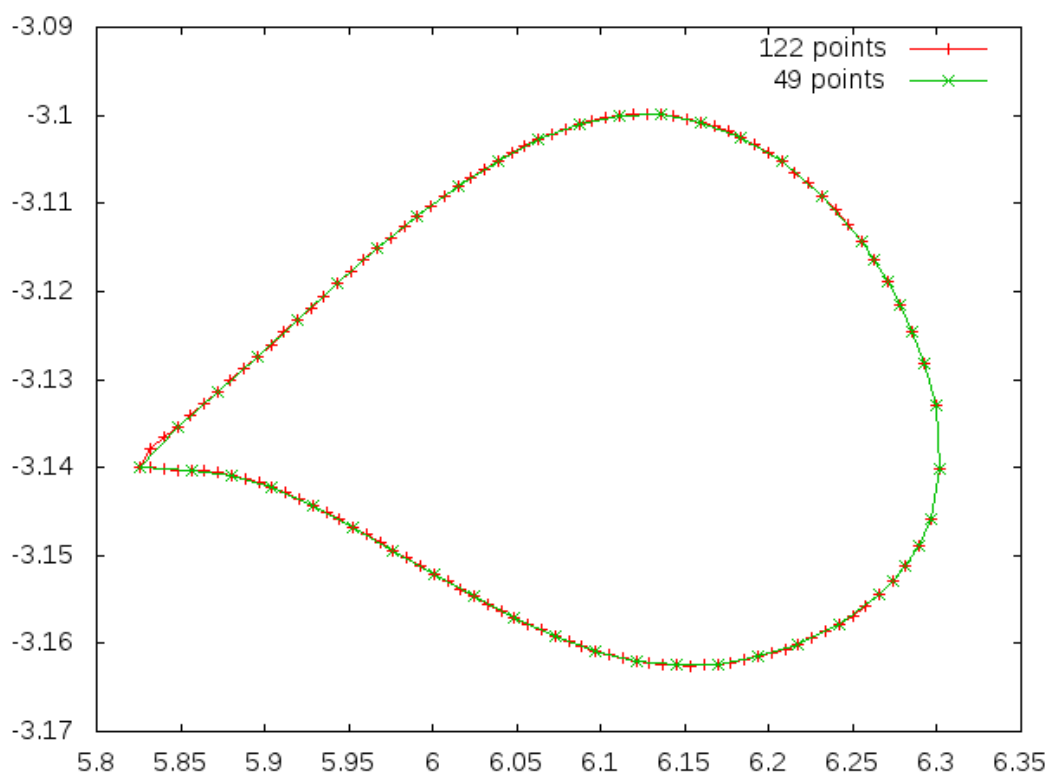
Η ελεύθερη επιφάνεια στην περίπτωση αυτή καταλαμβάνει μια επιφάνεια 24 μέτρων στον άξονα x και 8 μέτρων στον άξονα y.

3.4 Αλγόριθμοι και αεροτομές πτερυγίων

Στο παράρτημα επισυνάπτονται ορισμένοι αλγόριθμοι που είχαν ευρεία χρήση κατά την επεξεργασία των γεωμετρικών πλεγμάτων, αφού όπως αναφέρθηκε και παραπάνω η μορφή των γεωμετρικών πλεγμάτων δεν είναι τυχαία, αλλά πρέπει να είναι συμβατή με το GENUVP

Το αρχικό γεωμετρικό πλέγμα που παράχθηκε για το υδροπτερύγιο περιλάμβανε αεροτομές των 122 κόμβων. Αυτή η περιγραφή εκτιμήθηκε ως 'υπερβολική'. Έτσι για να μειώσουμε το υπολογιστικό κόστος χωρίς να χάσουμε, τουλάχιστον αισθητά, σε ακρίβεια χρησιμοποιήσαμε έναν κώδικα που μειώνει τους κόμβους της κάθε αεροτομής από 122 σε 49.

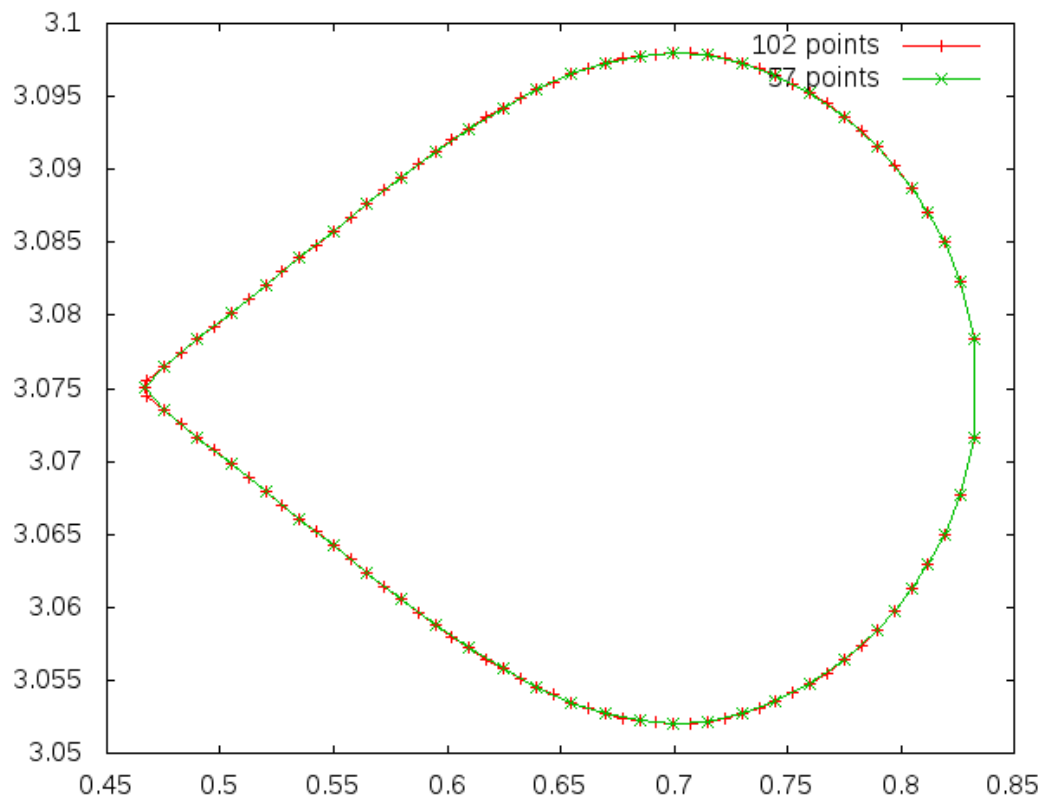
Ακολουθεί και ο τύπος αεροτομής που χρησιμοποιήθηκε για τα υδροπτερύγια:



Εικόνα 3.14 Αεροτομή υδροπτερυγίου(daggerboard)

Όπως και με το υδροπτερύγιο, έτσι και με το πηδάλιο χρησιμοποιήθηκε κώδικας για να μειώσει τον αριθμό των κόμβων κάθε αεροτομής. Χρησιμοποιήθηκε διαφορετικός κώδικας αφενός γιατί το αρχικό πλέγμα περιλάμβανε αεροτομές των 102 κόμβων και όχι των 122, αφετέρου γιατί οι αεροτομές του πηδαλίου είναι διαφορετικού τύπου από αυτές του υδροπτερυγίου. Συγκεκριμένα τα πτερύγια του πηδαλίου αποτελούνται από συμμετρικές αεροτομές:

Ακολουθεί και ο τύπος αεροτομής που χρησιμοποιήθηκε για το πηδάλια:



Εικόνα 3.15 Αεροτομή πηδαλίου(rudder)

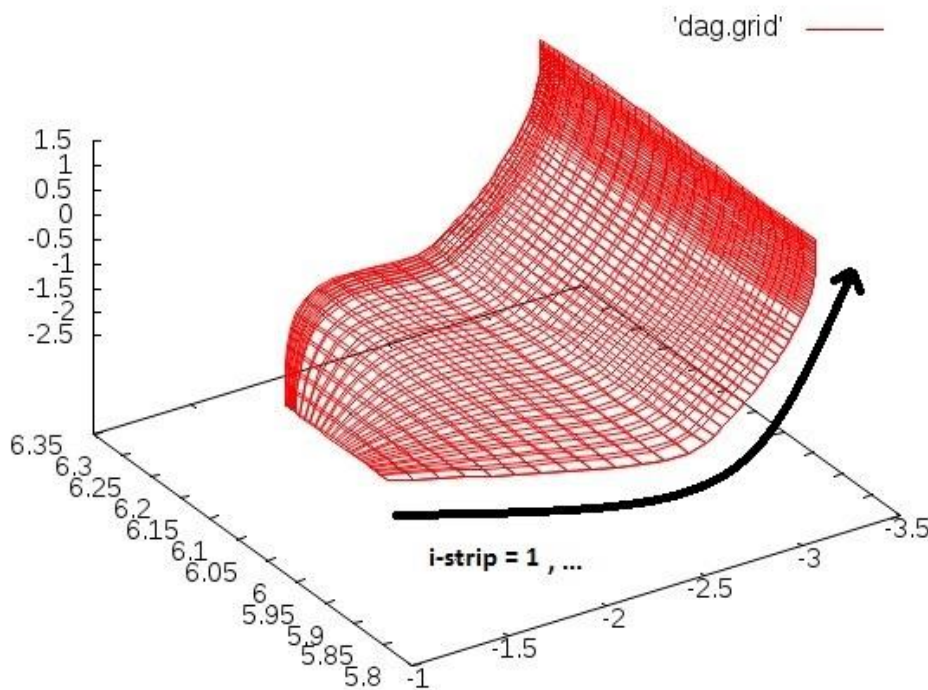
Κεφάλαιο 4: Αποτελέσματα

4.1 Συμπεριφορά των απομονωμένων υδροδυναμικών σωμάτων

Αρχικά έγιναν υπολογισμοί με το υδροπτερύγιο και το πηδάλιο ξεχωριστά. Για τους υπολογισμούς αυτούς χρησιμοποιήθηκε συμμετρία ως προς το επίπεδο $z=0$. Αυτό έγινε γιατί το υδροπτερύγιο και το πηδάλιο στην πάνω πλευρά δεν είναι 'ελεύθερα', αλλά θα ενσωματωθούν αργότερα στη γάστρα. Όλοι οι υπολογισμοί έγιναν για ταχύτητα πλεύσης $U_\infty = 5\text{m/s} = 18\text{km/h} = 9.72\text{ knots}$.

4.1.1 Υδροπτερύγιο(daggerboard)

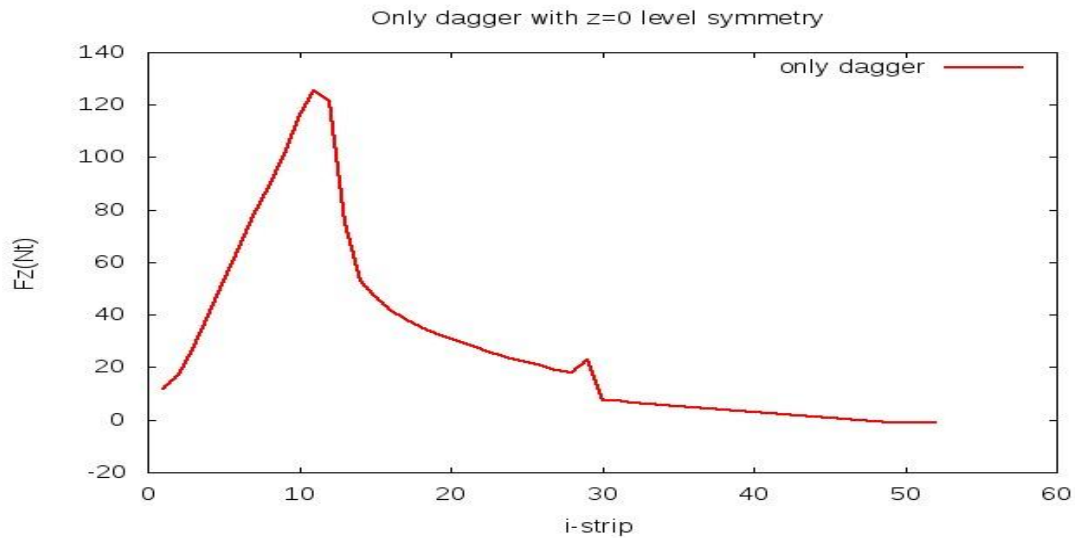
Αρχικά πρέπει να οριστεί η σειρά με την οποία παρουσιάζονται τα strip του υδροπτερυγίου. Όπως φαίνεται παρακάτω τα strip διαβάζονται από κάτω προς τα πάνω με το 1ο strip να αντιστοιχεί στο ακροπτερύγιο.



Εικόνα 4.1 Σειρά των i-strip του υδροπτερυγίου

Ας δούμε λοιπόν τη συμπεριφορά του υδροπτερυγίου σε υπολογισμό με συμμετρική θεώρηση ως προς το επίπεδο $z=0$. Περισσότερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα φορτία στον άξονα z . Πρόκειται για τις δυνάμεις που θα

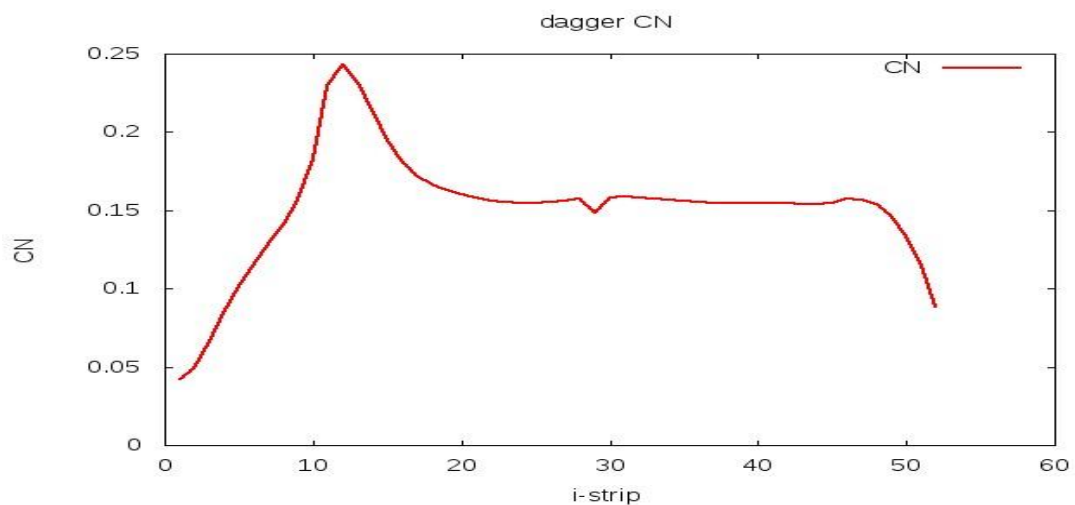
σηκώσουν τη γάστρα έξω από το νερό 'απελευθερώνοντάς' την από την αντίσταση του νερού και προφανώς επιτρέποντας στο σκάφος μεγαλύτερες ταχύτητες.



Εικόνα 4.2 Κατανομή φορτίων στον z-άξονα κατά μήκος του υδροπτερυγίου

Το υδροπτερύγιο φαίνεται λοιπόν να προσφέρει μια ανωστική συνισταμένη δύναμη, της οποίας μάλιστα η κατανομή πάνω στην επιφάνειά του συμβαδίζει με την αναμενόμενη κατανομή. Συγκεκριμένα παρατηρούμε αύξηση της F_z μέχρι το 12ο strip (οριζόντιο τμήμα υδροπτερυγίου/ $\gamma=-2.45$), εκεί δηλαδή που το υδροπτερύγιο παρουσιάζει μια έντονη κλίση, και μείωση αλλά παράλληλα συνεχιζόμενη ανωστική συνεισφορά μέχρι το 29ο strip. Το κομμάτι του υδροπτερυγίου από το 30ο strip δεν μας αφορά, αφού είναι ακριβώς το κομμάτι που θα μπει μέσα στη γάστρα και δεν συμμετέχει στους υπολογισμούς (Εικόνα 3.4).

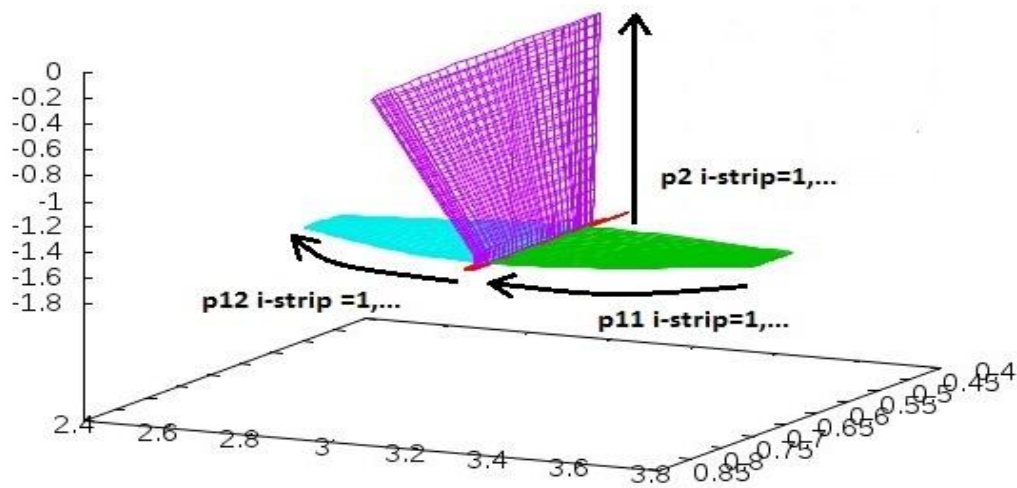
Ακολουθούν και τα αδιάστατα φορτία CN, που όπως αναμενόταν έχουν την ίδια μορφή με το παραπάνω διάγραμμα.



Εικόνα 4.3 Κατανομή αδιάστατων φορτίων CN κατά μήκος του υδροπτερυγίου

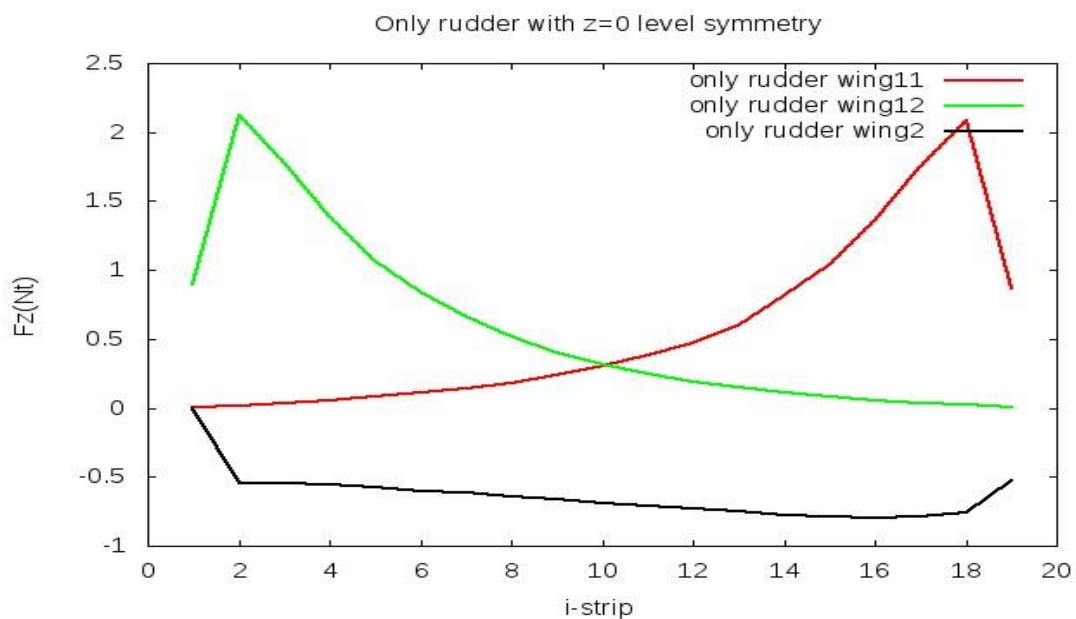
4.1.2 Πηδάλιο(rudder)

Όσον αφορά το πηδάλιο, για τα δύο οριζόντια πτερύγια τα strips του κάθε πτερυγίου παρουσιάζονται από δεξιά προς τ'αριστερά με αποτέλεσμα στο ένα πτερύγιο το 1ο strip να αντιστοιχεί στο ακροπτερύγιο (p11) και στο άλλο στη ρίζα (p12). Η διάταξη των strip του κάθετου πτερυγίου (p2) έχει κατεύθυνση από κάτω προς τα πάνω.



Εικόνα 4.4 Σειρά των i-strip των πτερυγίων του πηδαλίου

Παρακάτω φαίνεται η κατανομή φορτίων στα πτερύγια του πηδαλίου σε υπολογισμό με συμμετρική θεώρηση ως προς το επίπεδο $z=0$:



Εικόνα 4.5 Κατανομή φορτίων στον z-άξονα για τα πτερύγια του πηδαλίου

Όπως φαίνεται και παραπάνω το πηδάλιο μόνο του έχει μηδαμινή έως μηδενική επίδραση στην ανάπτυξη φορτίων, κάτι που ήταν αναμενόμενο αν αναλογιστεί κανείς ότι τα πτερύγια αποτελούνται από συμμετρικές αεροτομές. Αναμενόμενη επίσης είναι η αντίστροφη πορεία των φορτίων στα δύο οριζόντια πτερύγια. Όπως προαναφέρθηκε ο τρόπος με τον οποίο είναι δομημένα τα strip κάθε πτερυγίου κάνουν το 1ο strip του ενός να αντιστοιχεί στο τελευταίο strip του άλλου.

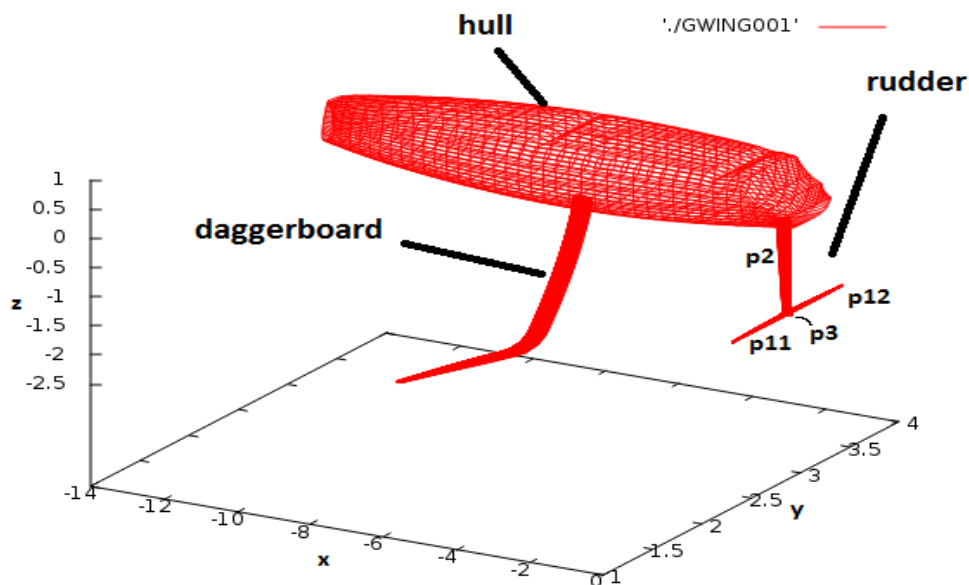
4.2 Περιπτώσεις συνολικών υπολογισμών

Αφού λοιπόν παρατηρήθηκε η εν γένει συμπεριφορά των δύο υδροδυναμικών σωμάτων σε υπολογισμούς που συμμετέχουν το καθένα ξεχωριστά, ξεκίνησαν οι υπολογισμοί με άξονα την πραγματική γεωμετρία του σκάφους. Έχουμε λοιπόν:

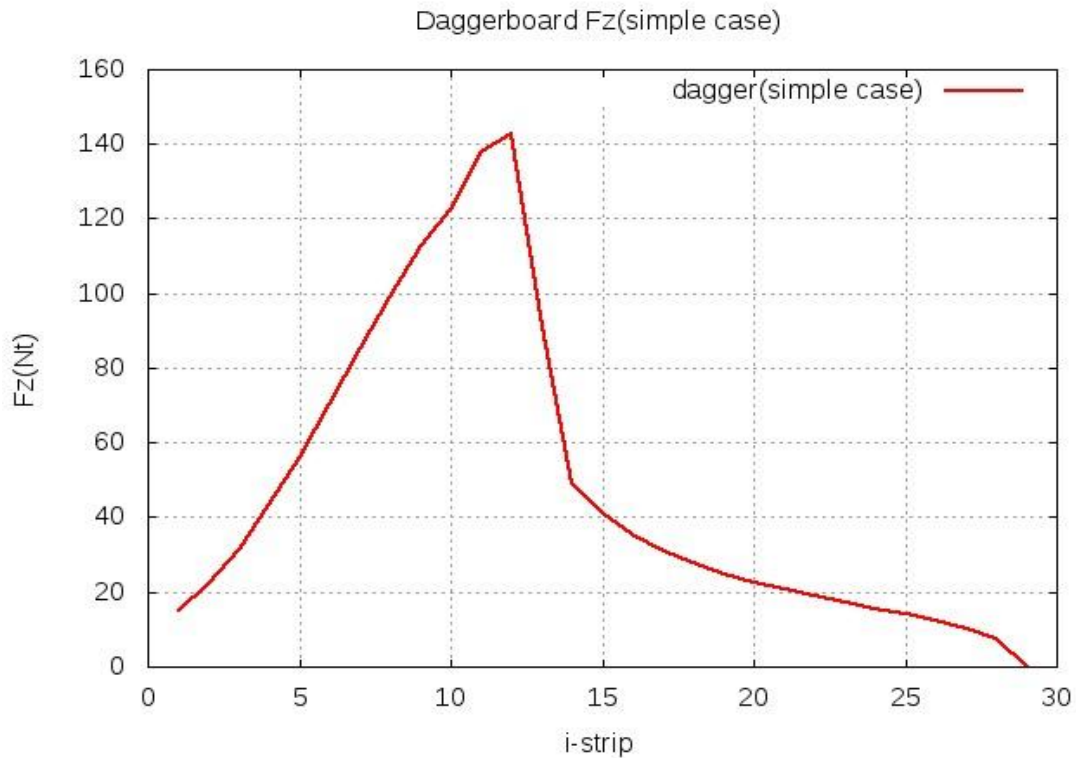
4.2.1 Μία γάστρα-One hull(simple case)

Συνθήκες(Conditions)

	1	2	YES	NO
number of hulls	✓	-	-	-
free surface	-	-	-	✓
yaw angle	-	-	-	✓

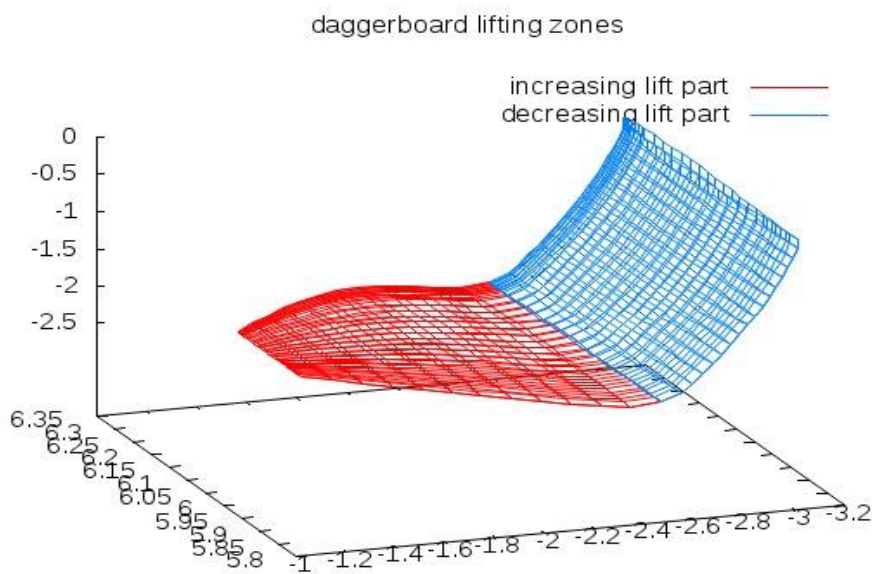


Εικόνα 4.6 Μία γάστρα-One hull(simple case)



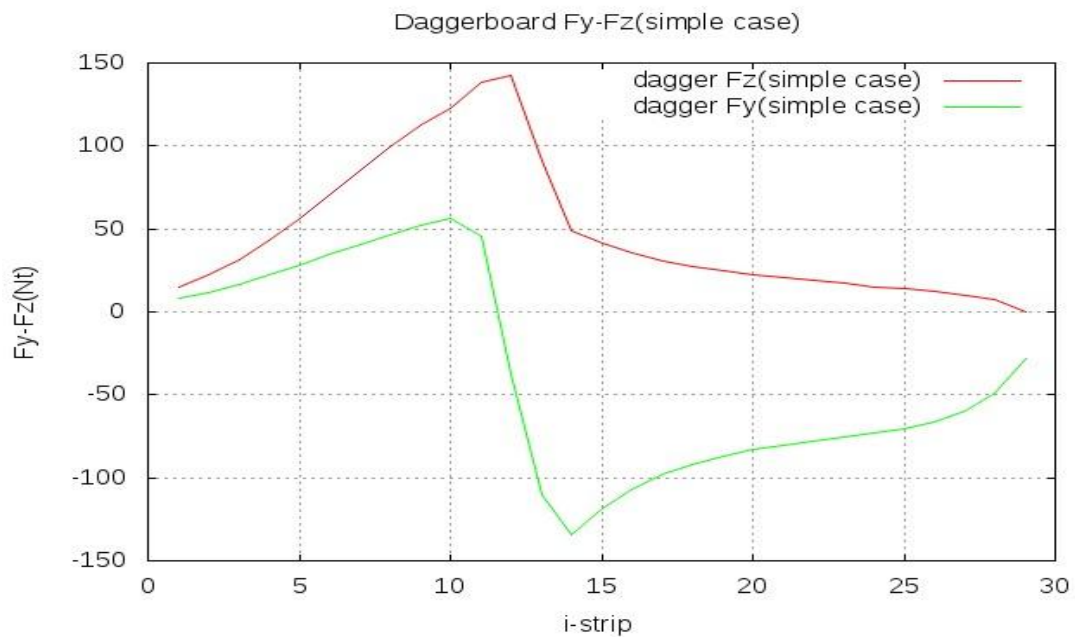
Εικόνα 4.7 Κατανομή φορτίων στον z-άξονα κατά μήκος του υδροπτερυγίου (simple case)

Βλέπουμε λοιπόν ότι το υδροπτερύγιο μπορεί να διαχωριστεί σε δύο επιμέρους τμήματα. Το κυρίως ανωστικό τμήμα (main lifting part), το τμήμα δηλαδή που έχουμε αύξηση της άνωσης και το τμήμα που έχουμε σταδιακή μείωση της άνωσης. Ο διαχωρισμός είναι εμφανής και από τη γεωμετρία του υδροπτερυγίου (Εικόνα 4.7).



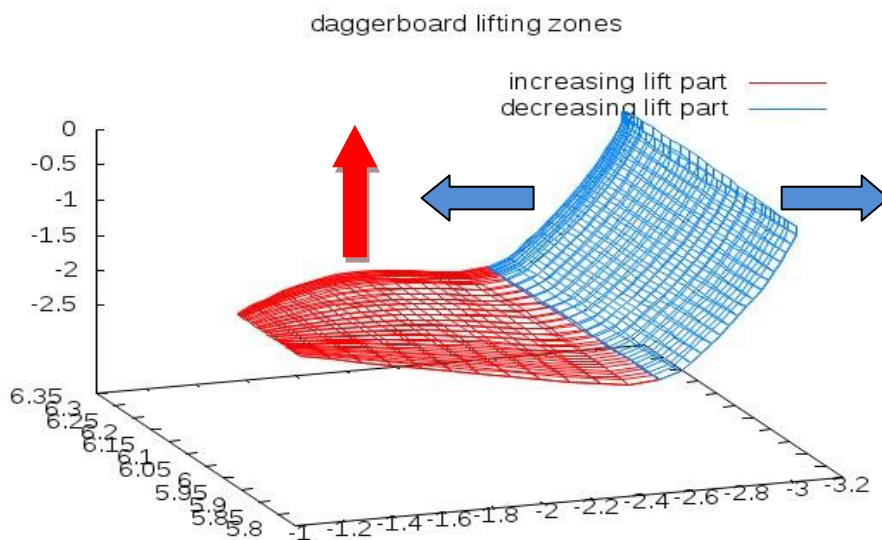
Εικόνα 4.8 Διαχωρισμός υδροπτερυγίου ως προς άνωση

Αν προσθέσουμε στο προηγούμενο διάγραμμα και τις πλευρικές δυνάμεις που αναπτύσσονται κατά μήκος του υδροπτερυγίου:

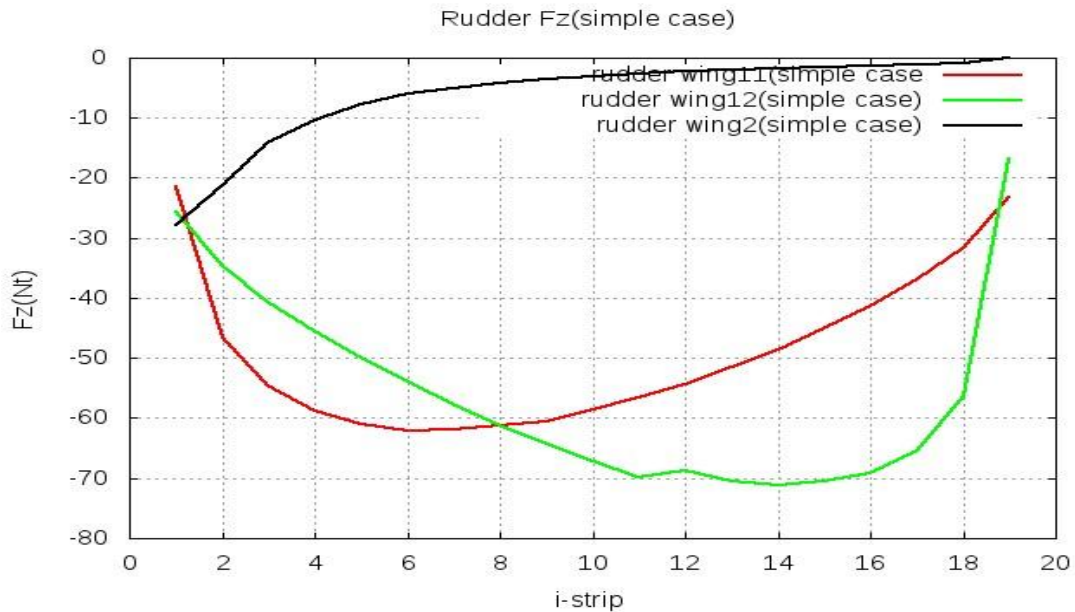


Εικόνα 4.9 Κατανομή φορτίων στον y και z άξονα κατά μήκος του υδροπτερυγίου (simple case)

Βλέπουμε ότι μπορούμε να επεκτείνουμε τον προηγούμενο διαχωρισμό για το υδροπτερύγιο και ως προς την κατεύθυνση των δυνάμεων του κάθε τμήματος. Συγκεκριμένα, βλέπουμε ότι πλευρικές δυνάμεις αρχίζουν να αναπτύσσονται μετά το κυρίως ανωστικό τμήμα.



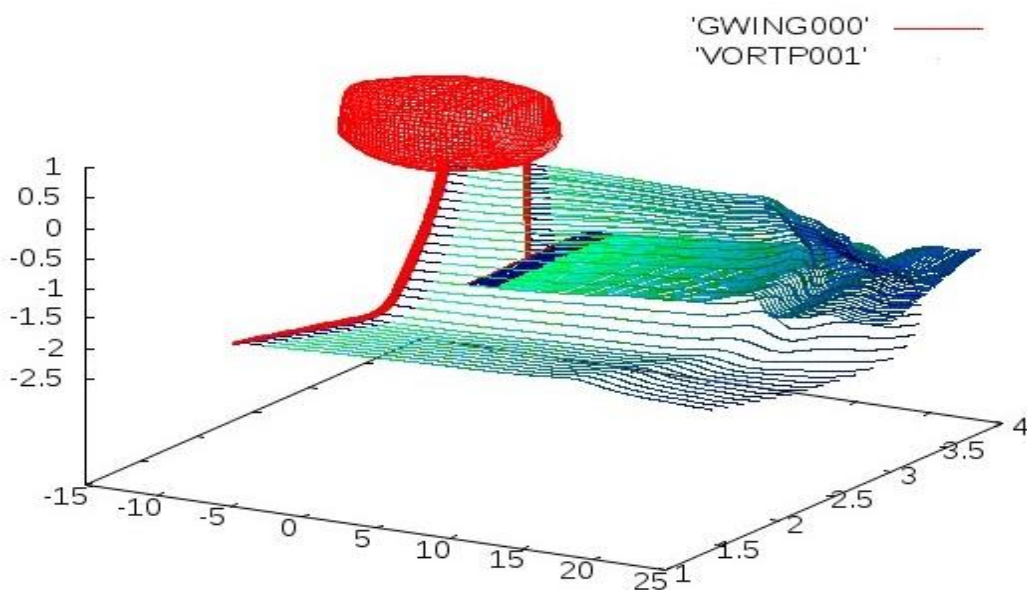
Εικόνα 4.10 Διαχωρισμός υδροπτερυγίου ως προς την κατεύθυνση των δυνάμεων



Εικόνα 4.11 Κατανομή φορτίων στον z-άξονα κατά μήκος του πηδαλίου (simple case)

Τώρα που το πηδάλιο δεν παραλαμβάνει αδιατάρακτη ροή, αλλά 'υποδέχεται' τη ροή του υδροπτερυγίου, η συμπεριφορά των πτερυγίων του είναι διαφορετική. Η ύπαρξη της γάστρας αποκλίνει τη ροή οπότε δημιουργείται αρνητική δύναμη η οποία είναι 'επιθυμητή' ώστε να βυθίζει το πίσω μέρος του σκάφους. Το πηδάλιο είναι υπεύθυνο για την πλοήγηση του σκάφους. Αν χαθεί η επαφή με το νερό, τότε δεν ελέγχεται η ισορροπία του σκάφους στο οριζόντιο επίπεδο.

Ακολουθεί και ο ομόρρους της περίπτωσης:

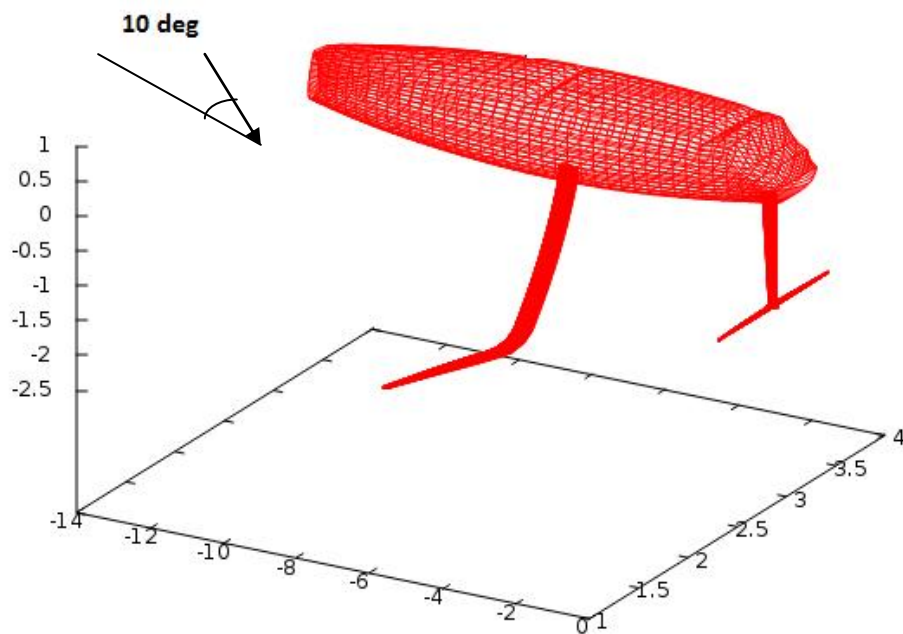


Εικόνα 4.12 Ο ομόρρους για μία γάστρα-Wake of one hull(simple case)

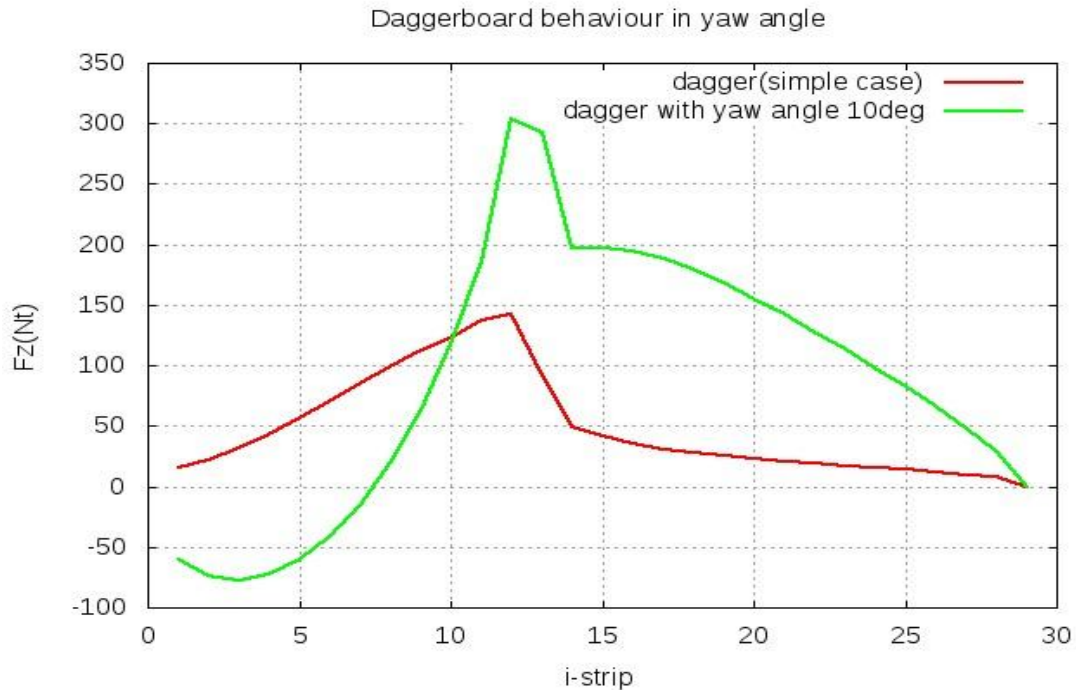
4.2.2 Μία γάστρα με γωνία ροής 10°-One hull with yaw angle 10°

Συνθήκες(Conditions)

	1	2	YES	NO
number of hulls	✓	-	-	-
free surface	-	-	-	✓
yaw angle	-	-	✓	-

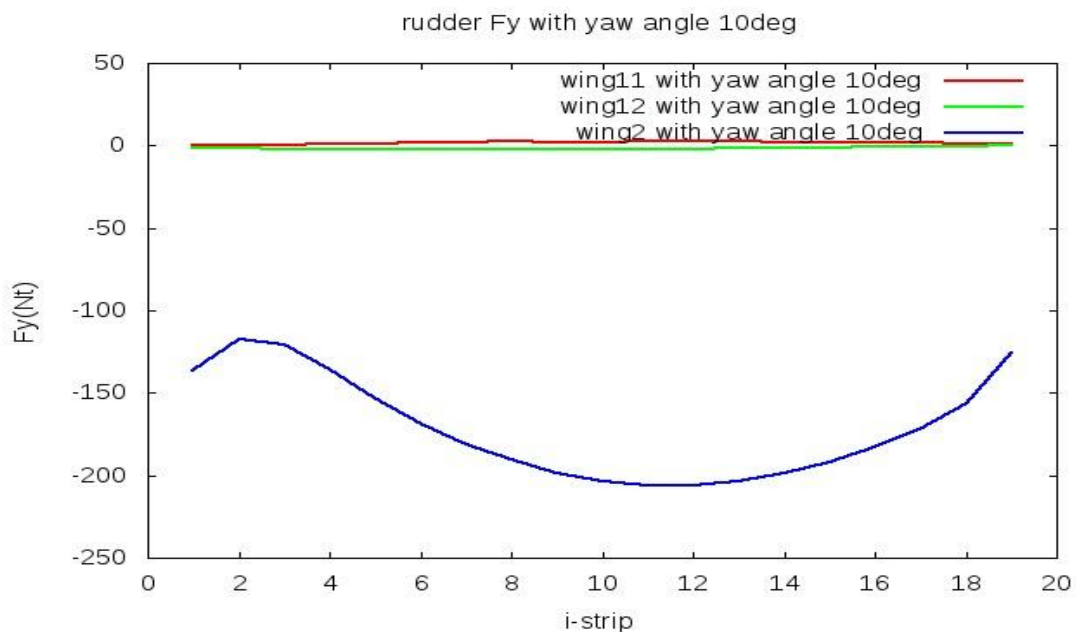


Εικόνα 4.13 Μία γάστρα με γωνία νερού 10°-One hull with yaw angle 10°



Εικόνα 4.14 Κατανομή φορτίων στον z-άξονα κατά μήκος του υδροπτερυγίου (simple case/yaw angle 10°)

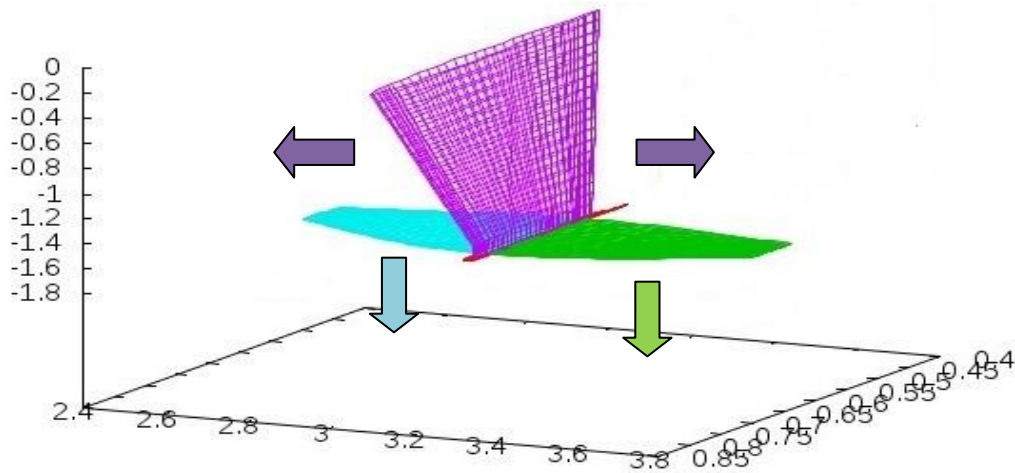
Ως προς την άνωση παρατηρούμε ότι τα πρώτα 7-8 strip του dagger, τα strip δηλαδή κοντά στο ακροπτερύγιο παράγουν μικρή αντίθετη ως προς τη ζητούμενη δύναμη. Αυτό σημαίνει ότι οι τοπικές γωνίες πρόσπτωσης γίνονται αρνητικές. Μετά το 8ο strip αρχίζουν να 'συνεισφέρουν' με μεγαλύτερο μάλιστα ρυθμό από την χωρίς γωνία περίπτωση (simple case).



Εικόνα 4.15 Κατανομή φορτίων στον γ-άξονα κατά μήκος του ηδαλίου (yaw angle 10°)

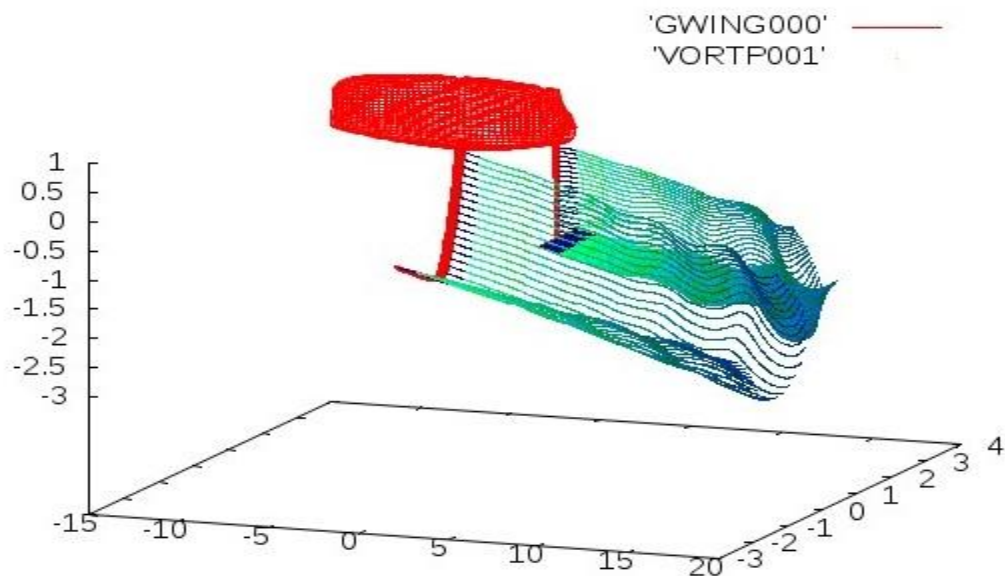
Παρακολουθώντας την ομοιόμορφη κατανομή πλευρικών φορτίων κατά μήκος του κάθετου πτερυγίου του πηδαλίου και συνδυάζοντας το παραπάνω διάγραμμα με το διάγραμμα της Εικόνας 4.11 μπορούμε να προχωρήσουμε σε μια πιο σφαιρική εικόνα ως προς τη λειτουργία του πηδαλίου.

Φαίνεται λοιπόν ότι τα δύο οριζόντια πτερύγια wing11 και wing12 είναι υπεύθυνα για τη βύθιση του πηδαλίου μέσα στο νερό, ενώ το κάθετο πτερύγιο wing2 είναι υπεύθυνο για την πλοήγηση και τον έλεγχο του σκάφους (Εικόνα 4.15).



Εικόνα 4.16 Ανάπτυξη δυνάμεων στα πτερύγια του πηδαλίου

Ακολουθεί ο ομόρρους της περίπτωσης:

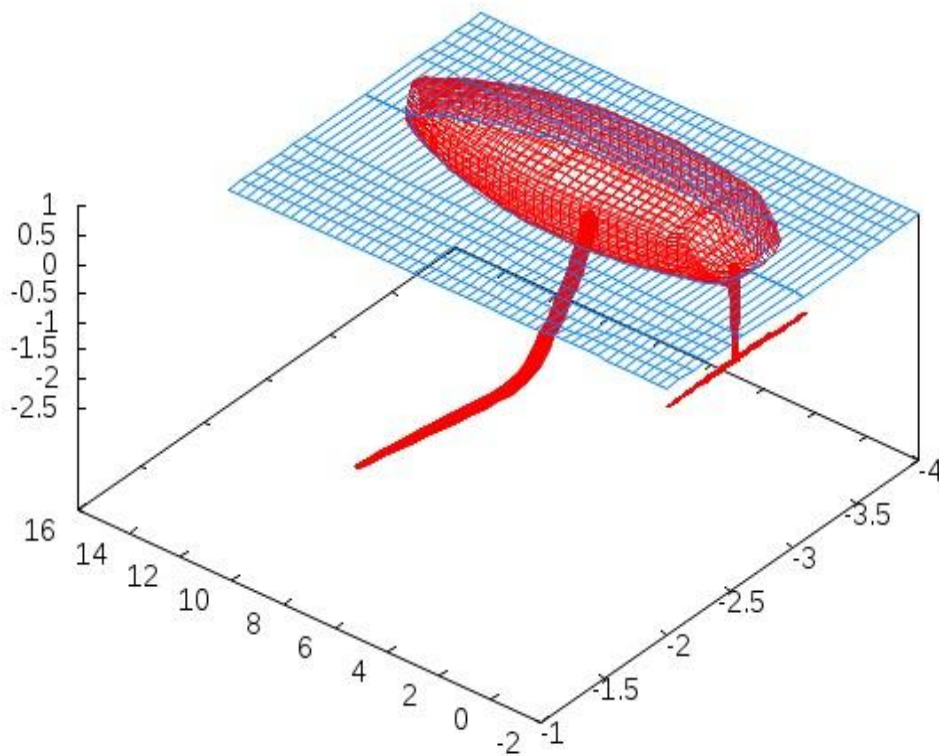


Εικόνα 4.17 Ομόρρους για μία γάστρα με γωνία νερού 10°-Wake of one hull with yaw angle 10°

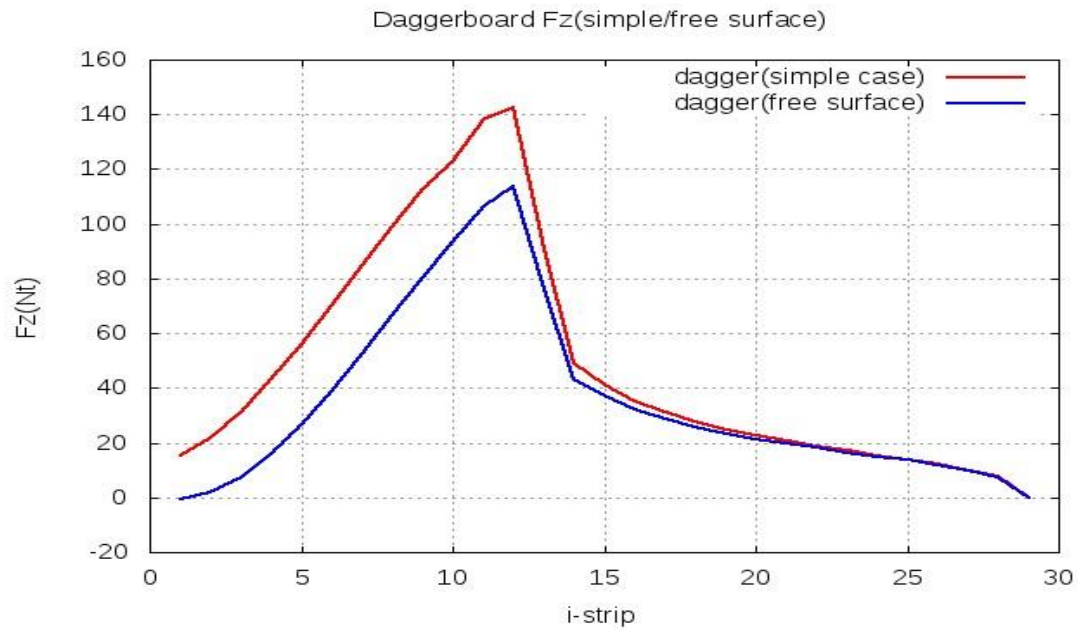
4.2.3 Μία γάστρα με προσομοίωση ελεύθερης επιφάνειας(κατανομή διπόλων)-One hull with free surface simulation(dipole distribution)

Συνθήκες(Conditions)

	1	2	YES	NO
number of hulls	✓	-	-	-
free surface	-	-	✓	-
yaw angle	-	-	-	✓



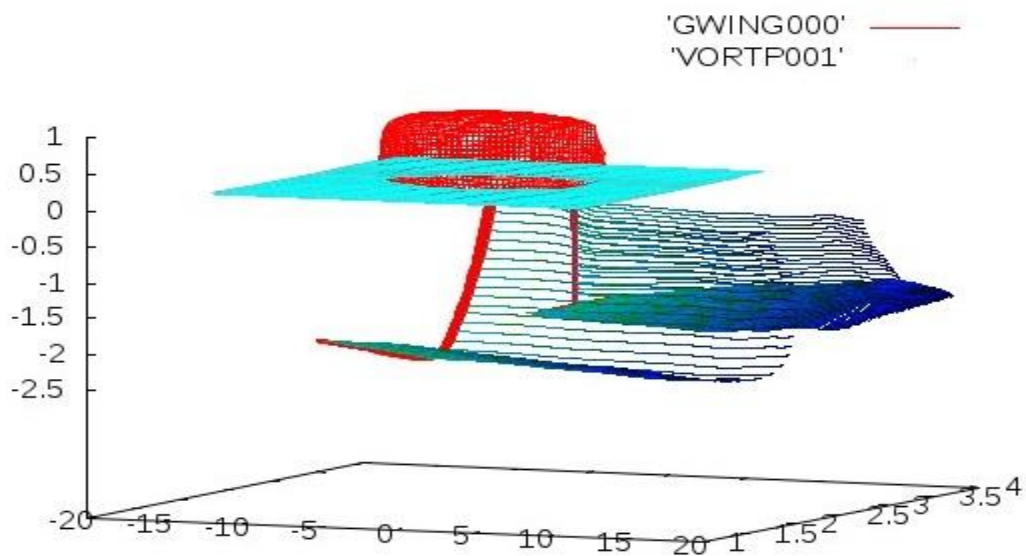
Εικόνα 4.18 Μία γάστρα με προσομοίωση ελεύθερης επιφάνειας(κατανομή διπόλων)-One hull with free surface simulation(dipole distribution)



Εικόνα 4.19 Κατανομή φορτίων στον z-άξονα κατά μήκος του υδροπτερυγίου (simple case/free surface)

Βλέπουμε ότι η κατανομή διπόλων που χρησιμοποιήσαμε για την προσομοίωση της ελεύθερης επιφάνειας δρα μειωτικά για τα ανωστικά φορτία του υδροπτερυγίου. Προφανώς η συμπεριφορά του υδροπτερυγίου δεν αλλάζει. Παραμένει η ίδια απλά με μειωμένα φορτία ως αποτέλεσμα της μείωσης της δυναμικής πίεσης από τη συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας.

Ακολουθεί ο ομόρρους της περίπτωσης:

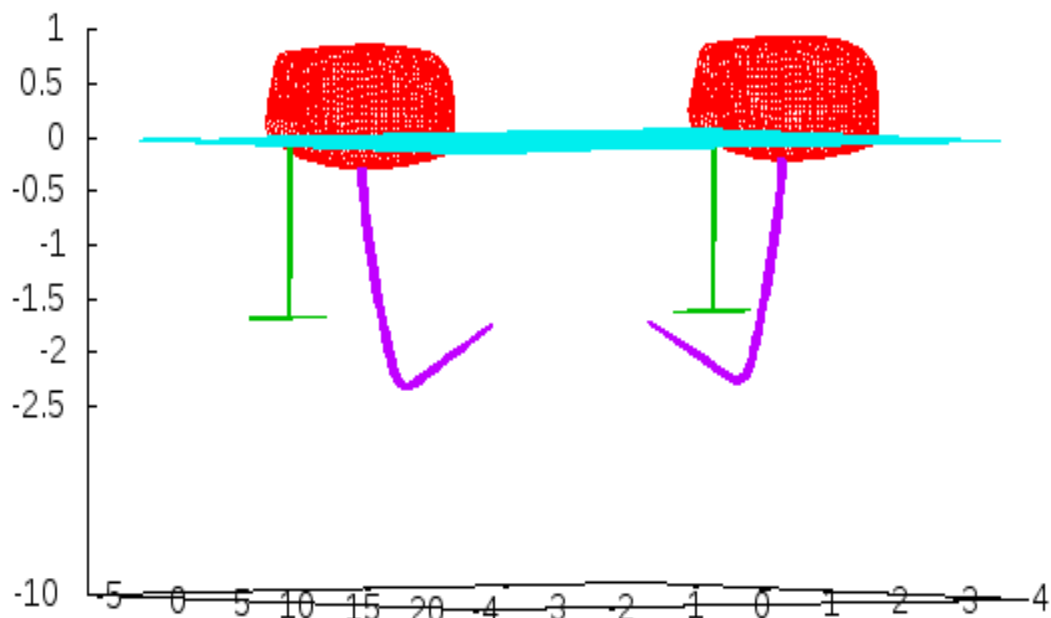


Εικόνα 4.20 Ομόρρους για μία γάστρα με προσομοίωση ελεύθερης επιφάνειας-Wake of one hull with free surface simulation

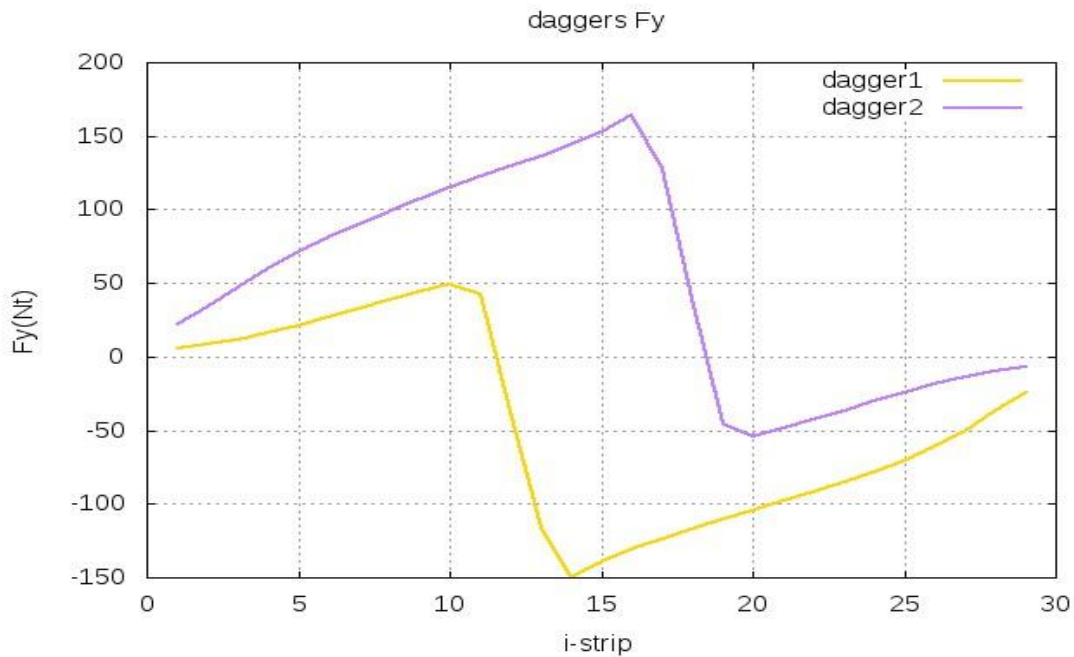
4.2.4 Δύο γάστρες με προσομοίωση ελεύθερης επιφάνειας(κατανομή διπόλων)/Ολόκληρο σκάφος-Two hulls with free surface simulation(dipole distribution)/Whole vessel

Συνθήκες(Conditions)

	1	2	YES	NO
number of hulls	-	✓	-	-
free surface	-	-	✓	-
yaw angle	-	-	-	✓



Εικόνα 4.21 Δύο γάστρες με προσομοίωση ελεύθερης επιφάνειας(κατανομή διπόλων)-Two hulls with free surface simulation(dipole distribution)



Εικόνα 4.22 Κατανομή φορτίων στον γ-άξονα κατά μήκος των δύο υδροπτερυγίων (Double hull)

Στο παραπάνω διάγραμμα βλέπουμε αποτυπωμένη τη γενική ευστάθεια στο οριζόντιο επίπεδο που χαρακτηρίζει ένα καταμαράν γενικά και το AC45 στην προκειμένη περίπτωση.

Η επαλληλία των πλευρικών δυνάμεων των δύο υδροπτερυγίων ισοδυναμεί με μηδενική πλευρική φόρτιση. Άμα θέλουμε την πλευρική 'συνεισφορά' ενός υδροπτερυγίου, πρέπει το άλλο να μη λειτουργεί μέσα στο νερό, κάτι για το οποίο είναι υπεύθυνο το πλήρωμα. Γενικά, όποιο πλευρικό φορτίο αναπτύσσεται από τα υδροπτερύγια έχει στόχο την αντιστάθμιση των πλάγιων δυνάμεων των πανιών για ισορροπία πλοήγησης στο οριζόντιο επίπεδο.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η προσομοίωση της ελεύθερης επιφάνειας έγινε με μια επιφανειακή κατανομή διπόλων γύρω από τις δύο γάστρες στο επίπεδο $z=0$. Η επιφάνεια αυτή παραμένει απαραμόρφωτη στο χρόνο με μηδενικές κάθετες ταχύτητες, προσπαθούμε όμως να προβλέψουμε την ανύψωση του 'κύματος' ως εξής:

Η εξίσωση Bernoulli στη γενικευμένη μορφή:

$$p + \frac{1}{2}\rho U^2 + \rho g z = p_{\infty} + \frac{1}{2}\rho U_{\infty}^2 \quad (4.1)$$

Για απαραμόρφωτη επιφάνεια ο όρος $\rho g z$ δεν έχει νόημα:

$$\frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} = 1 - \left(\frac{U}{U_\infty}\right)^2 = Cp \quad (4.2)$$

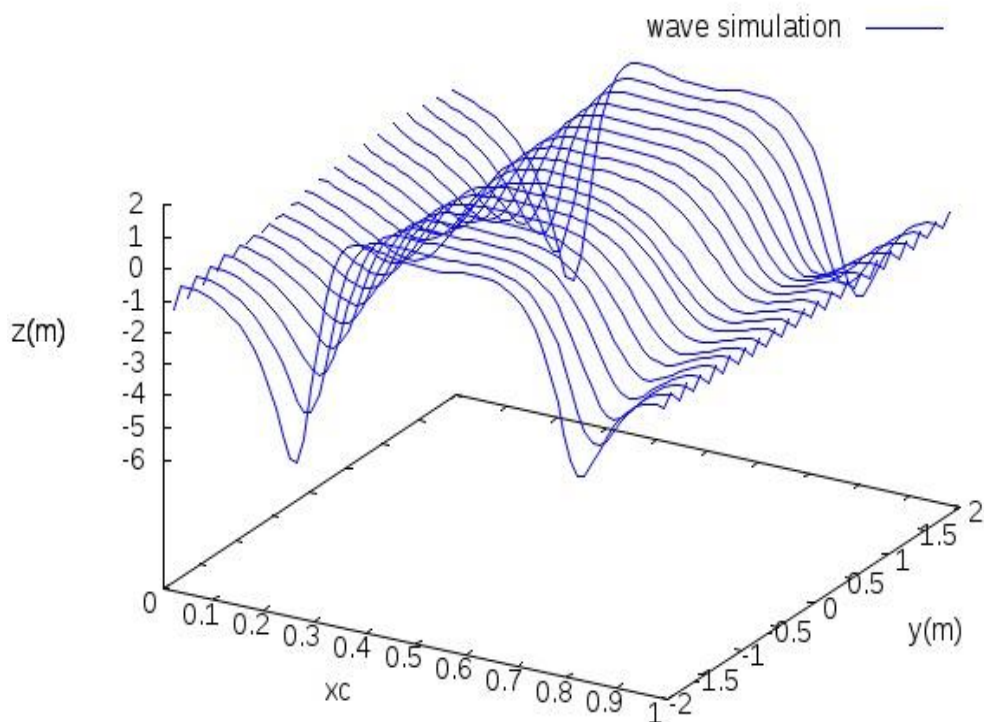
Τώρα για ένα υποθετικό σημείο της επιφάνειας με ύψος z , η 4.1 γράφεται:

$$p' - p_\infty = \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 \left[1 - \left(\frac{U}{U_\infty}\right)^2\right] - \rho g z \quad (4.3)$$

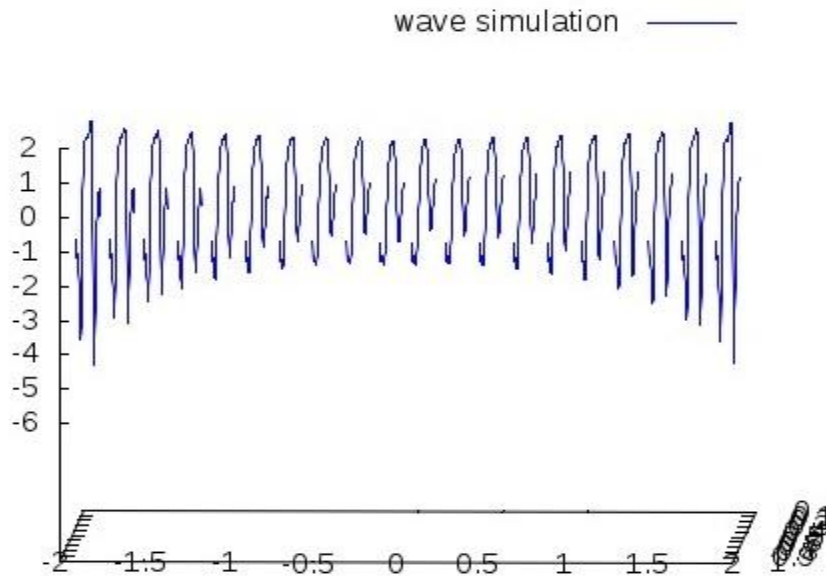
Το αριστερό μέλος της εξίσωσης μηδενίζεται αφού μιλάμε για λεπτή επιφάνεια που δεν υπάρχουν διαφορές πιέσεων και με τη βοήθεια της 4.2 τελικά έχουμε:

$$z = \frac{\frac{1}{2}CpU_\infty^2}{g} \quad (4.4)$$

Παρακάτω φαίνεται η προσομοίωση του 'κύματος' ανάμεσα στις δύο γάστρες:



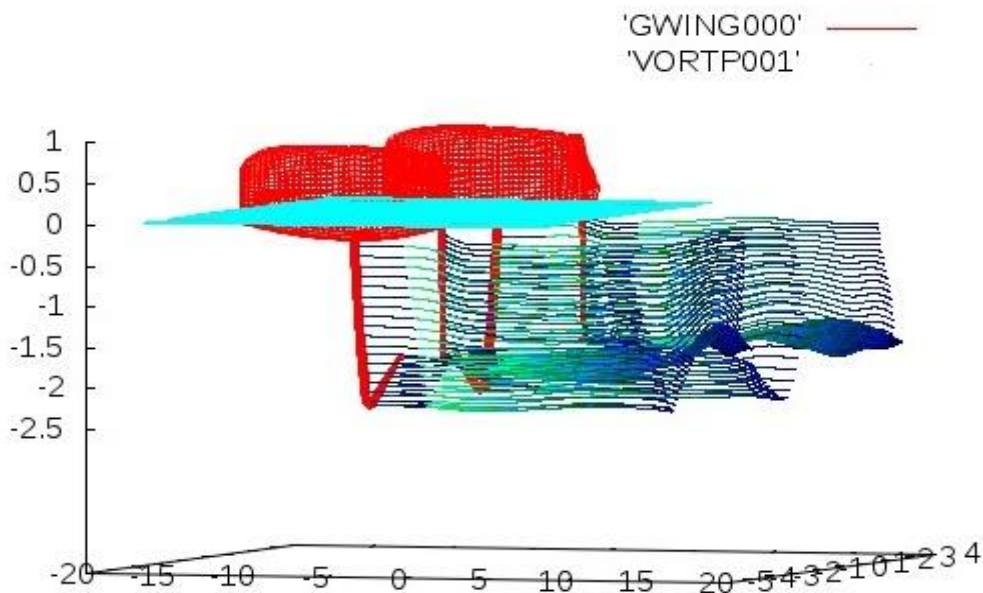
Εικόνα 4.23 Προσομοίωση κύματος ανάμεσα στις δύο γάστρες-Wave simulation among the two hulls



Εικόνα 4.24 Προσομοίωση κύματος ανάμεσα στις δύο γάστρες/Πλάγια όψη-Wave simulation among the two hulls/side view

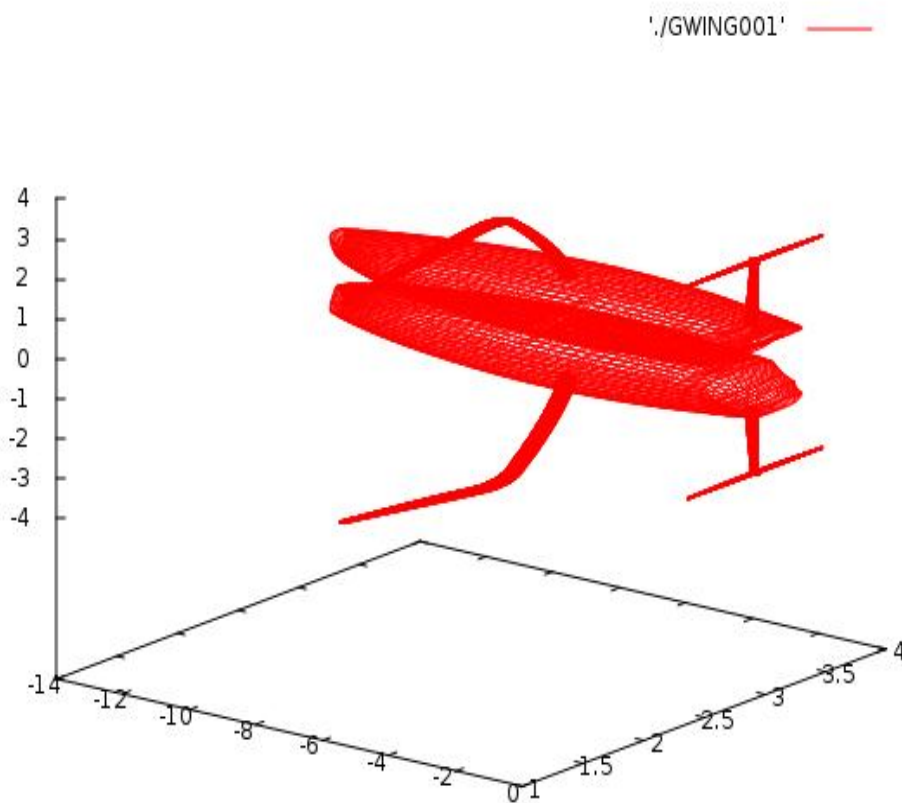
Όπως είναι λογικό, οι κυματισμοί είναι πιο έντονοι στην πλώρη και στην πρύμνη των γαστρών (Εικόνα 4.23), με την έντασή τους να μειώνεται όσο απομακρυνόμαστε από αυτές (Εικόνα 4.24).

Ακολουθεί και ο ομόρρους της περίπτωσης:

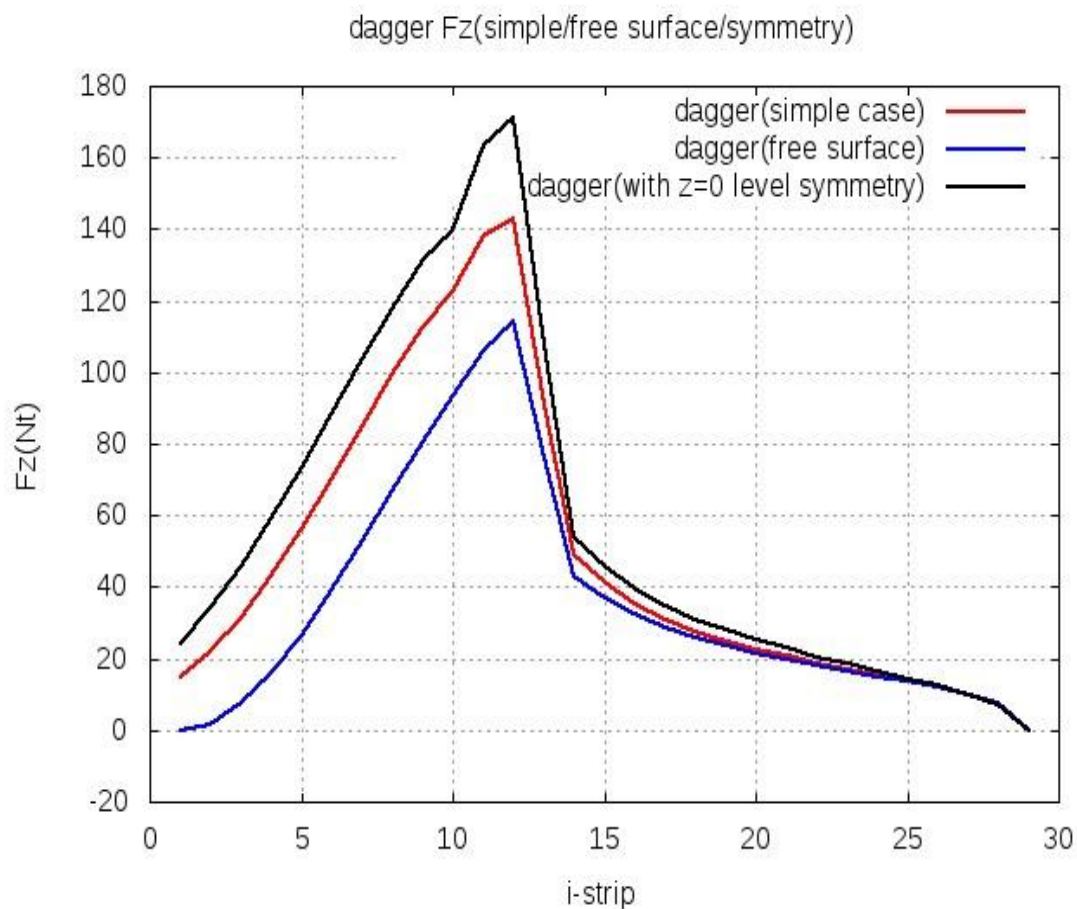


Εικόνα 4.25 Ομόρρους για δύο γάστρες με προσομοίωση ελεύθερης επιφάνειας-Wake of two hulls with free surface simulation

4.2.5 Μία γάστρα με συμμετρία ως προς το επίπεδο $z=0$ -One hull with $z=0$ level symmetry



Εικόνα 4.26 Μία γάστρα με συμμετρία ως προς το $z=0$ επίπεδο-One hull with $z=0$ level symmetry



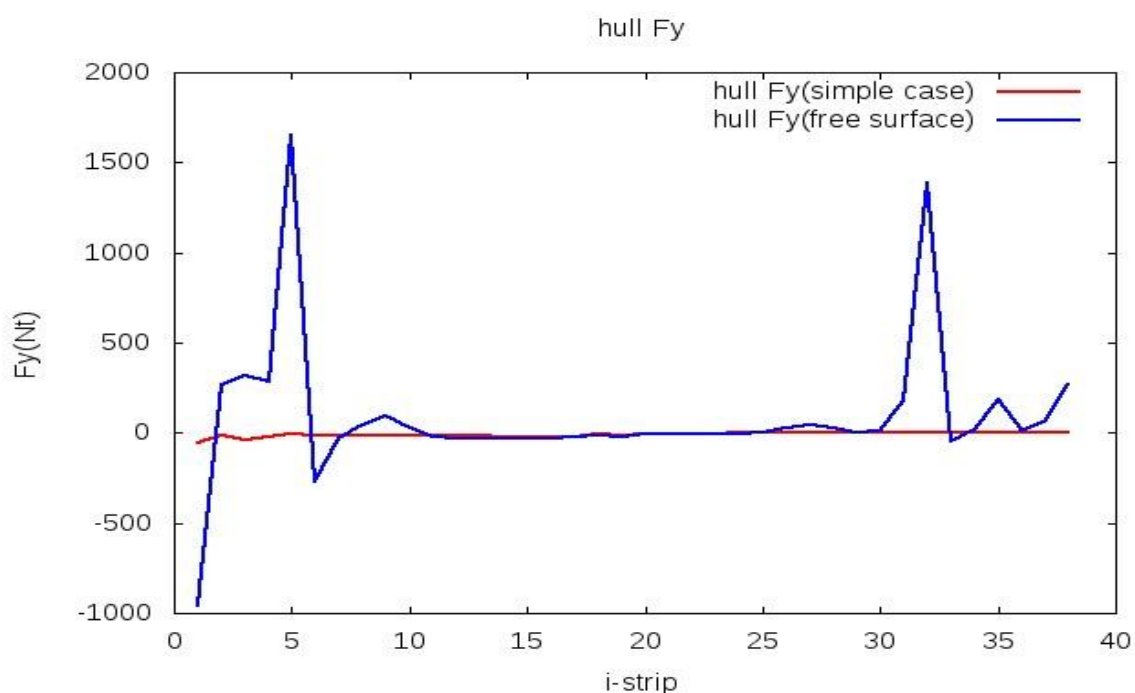
Εικόνα 4.27 Κατανομή φορτίων στον z-άξονα κατά μήκος του υδροπτερυγίου (simple case/free surface/symmetry)

Βλέπουμε ότι η προσθήκη μια στερεής επιφάνειας πάνω από τη γάστρα που δεν επιτρέπει κάθετες ταχύτητες έχει αυξητική δράση στα παραγόμενα από το υδροπτερύγια φορτία, αφού μειώνει την επαγόμενη αντίσταση.

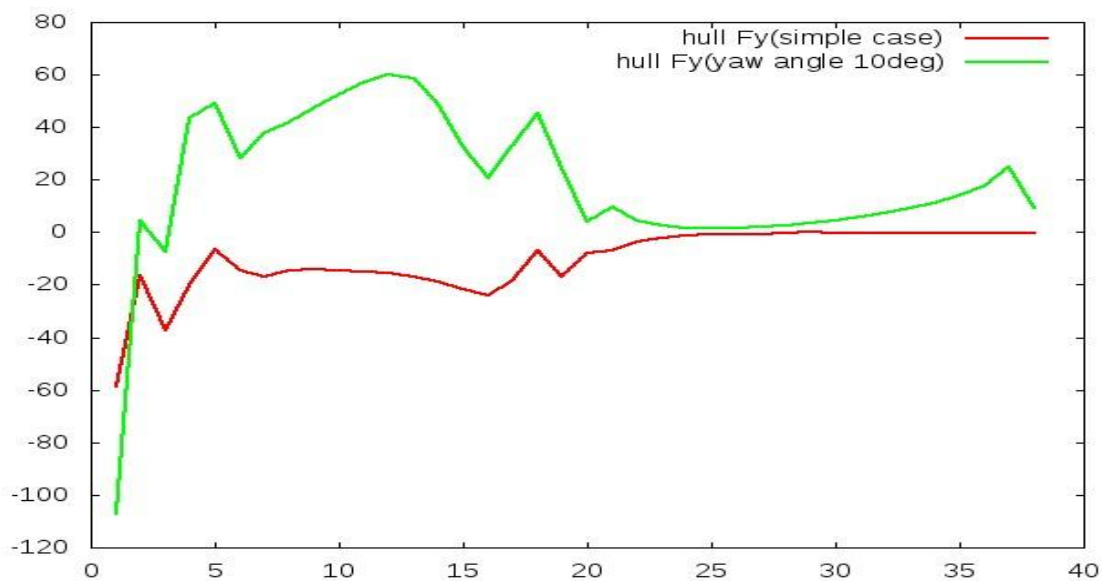
Ο υπολογισμός αυτός δεν έχει προφανώς καμία σχέση με τις πραγματικές συνθήκες. Έγινε γιατί στο παραπάνω διάγραμμα αποτυπώνεται καλά η υπολογιστική επίδραση μιας κατανομής διπόλων (free surface) και μιας κατανομής πηγών (hull symmetry) πάνω από την προς υπολογισμό γάστρα.

4.3 Κατανομή φορτίων κατά μήκος της γάστρας-Load distribution along the hull

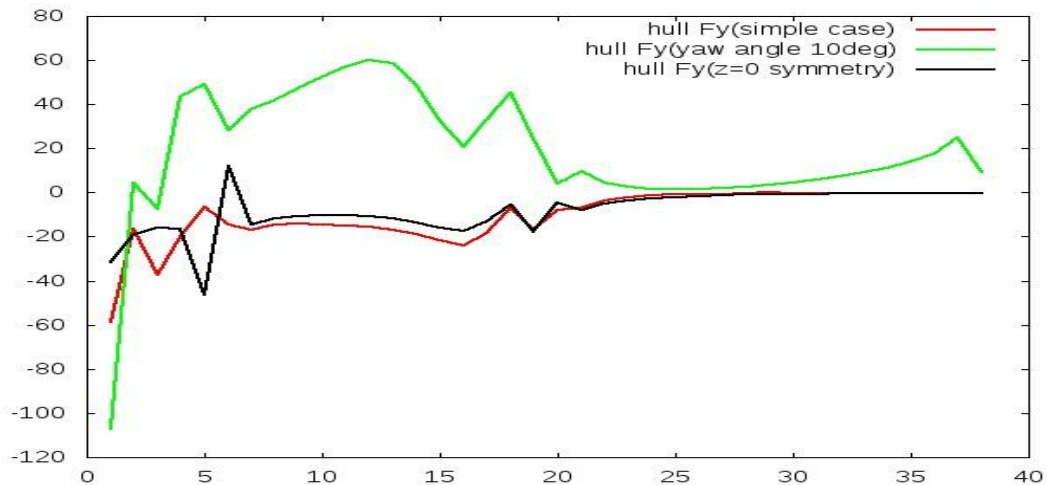
Αφού υπενθυμίσουμε ότι το 1ο strip της γάστρας αντιστοιχεί στην πρύμνη της και το τελευταίο στη πλώρη, μπορούμε να παραθέσουμε τις κατανομές φορτίων κατά μήκος της γάστρας στον γ και z άξονα:



Εικόνα 4.28 Κατανομή φορτίων στον γ -άξονα κατά μήκος της γάστρας(simple case/free surface)



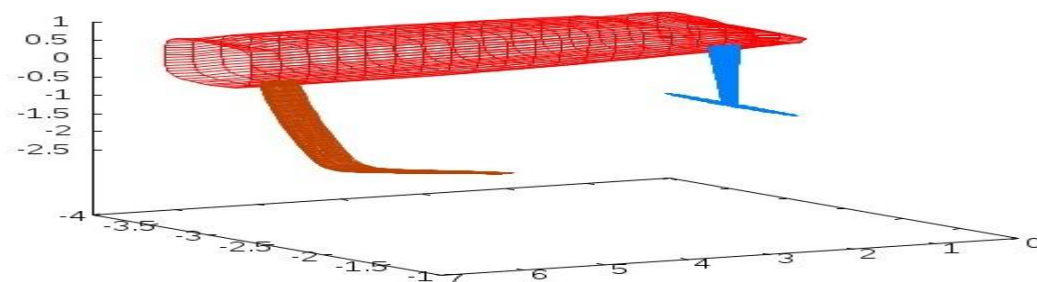
Εικόνα 4.29 Κατανομή φορτίων στον γ -άξονα κατά μήκος της γάστρας(simple case/yaw angle)



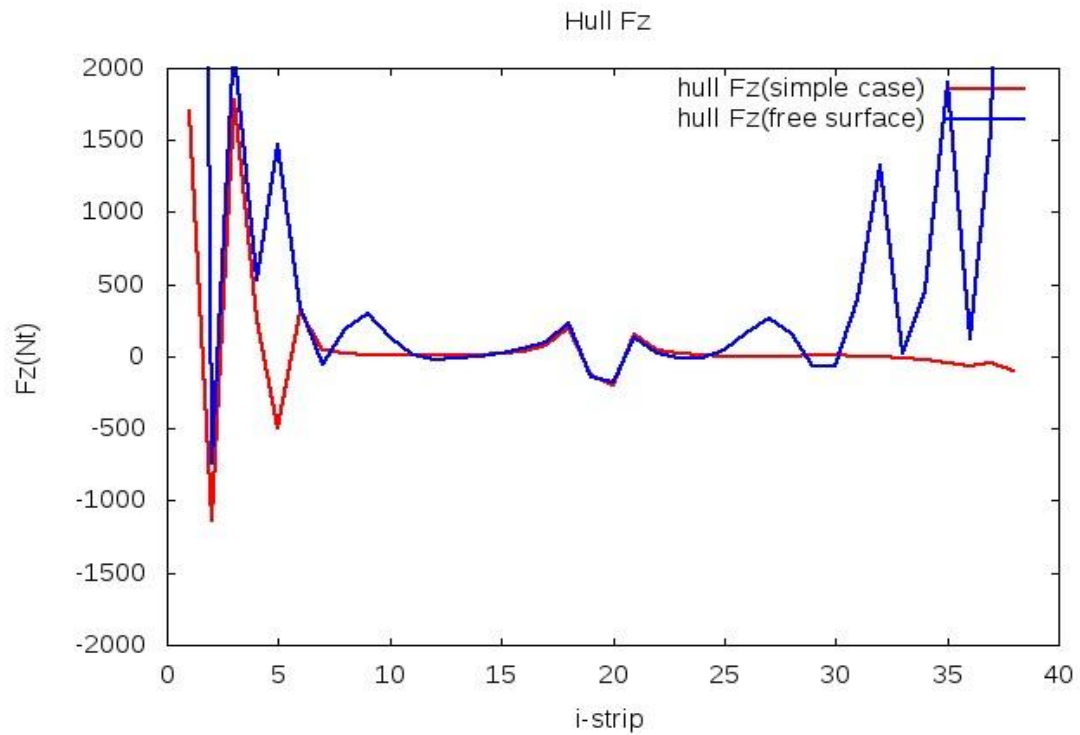
Εικόνα 4.30 Κατανομή φορτίων στον γ-άξονα κατά μήκος της γάστρας (simple case/yaw angle/symmetry)

Καταρχάς παρατηρούμε ότι η εισαγωγή της επιφανειακής κατανομής διπόλων με την οποία προσομοιώσαμε την ελεύθερη επιφάνεια δημιουργεί πολύ μεγάλα φορτία στην αρχή και το τέλος της γάστρας (Εικόνα 4.28). Τα φορτία αυτά ως δύναμη από τη γάστρα προς το νερό δημιουργούν τα κύματα στο μπροστινό μέρος (το νερό ανεβαίνει πάνω στην επιφάνεια του σκάφους). Αντίστοιχη είναι και η περίπτωση στη πρύμνη αν και εκεί το πράγμα περιπλέκεται στην πράξη καθώς η ροή αποκολλάται ενώ ταυτόχρονα και ο κυματισμός που δημιουργείται στη πλώρη φτάνει πίσω.

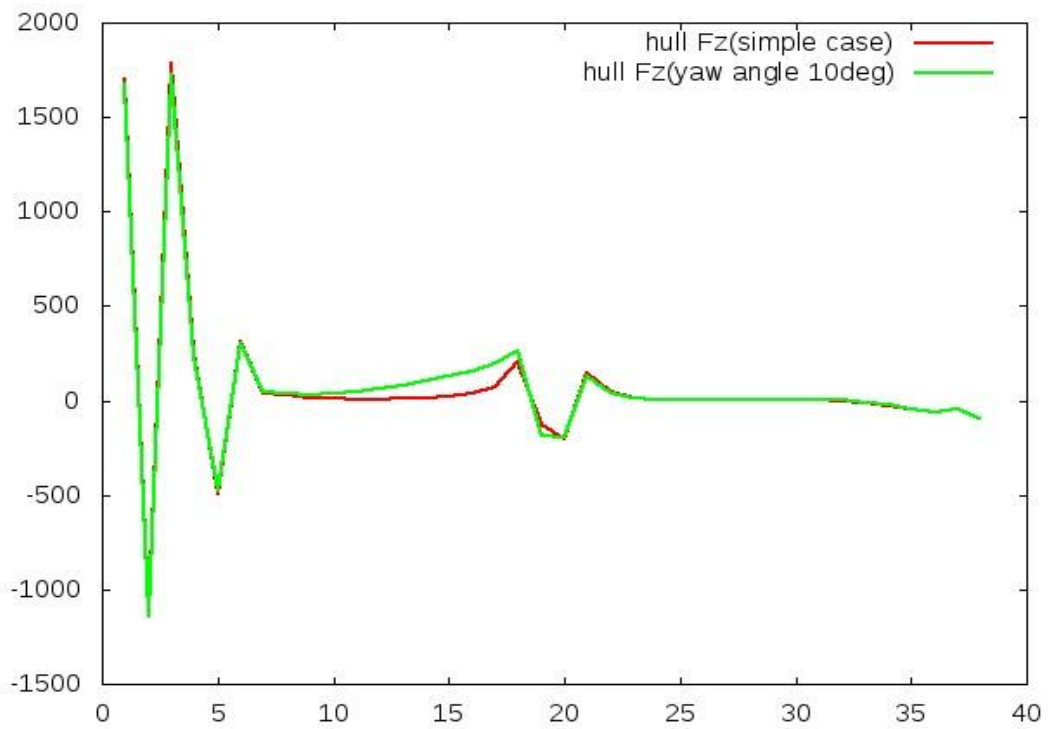
Τώρα, όσον αφορά τις υπόλοιπες περιπτώσεις όπου οι καμπύλες φορτίων είναι 'συγκρίσιμες', βλέπουμε ότι τα πλευρικά φορτία κατά μήκος της γάστρας κινούνται γενικά γύρω από το 0 με έντονα 'τινάγματα' στις περιοχές 0-5 και 15-20 i-strip (Εικόνα 4.29, 4.30). Είναι ακριβώς οι περιοχές 'δράσης' του πηδαλίου και του υδροπτερυγίου αντίστοιχα. Στην περίπτωση της ροής με γωνία βέβαια, είναι εμφανής η ανάπτυξη φορτίων με συγκεκριμένη κατεύθυνση στην περιοχή 0-20 i-strip. Η ζώνη αυτή της γάστρας με την ύπαρξη του πηδαλίου και του υδροπτερυγίου μπορεί να χαρακτηριστεί και ως 'ενεργή περιοχή' της γάστρας (Εικόνα 4.31).



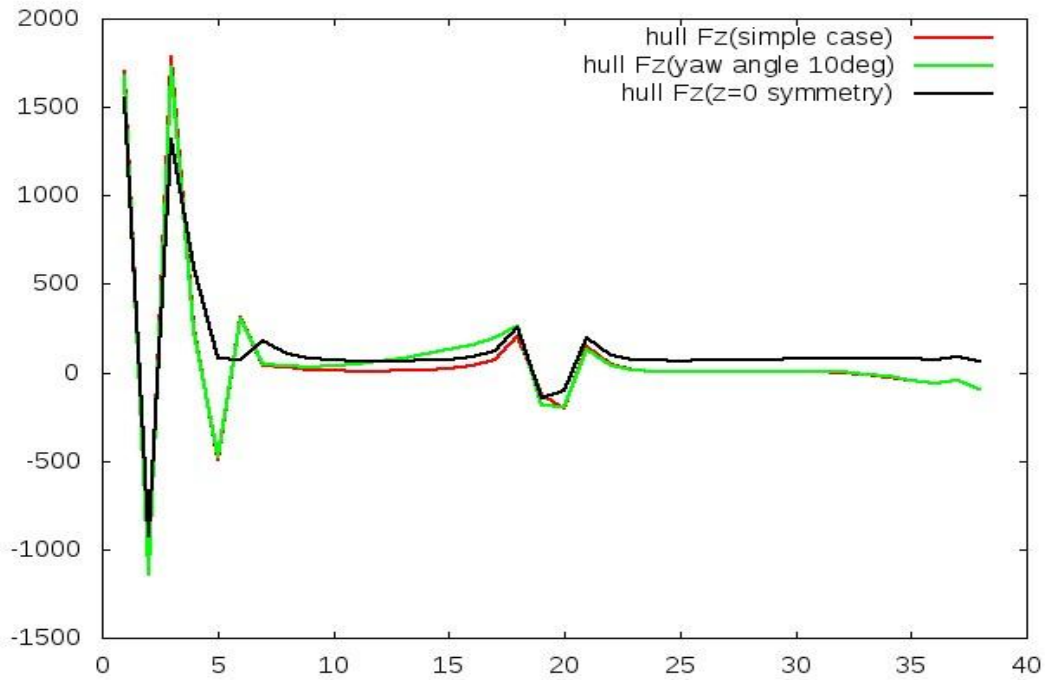
Εικόνα 4.31 Ενεργή περιοχή γάστρας



Εικόνα 4.32 Κατανομή φορτίων στον z-άξονα κατά μήκος της γάστρας(simple case/free surface)



Εικόνα 4.33 Κατανομή φορτίων στον z-άξονα κατά μήκος της γάστρας(simple case/yaw angle)



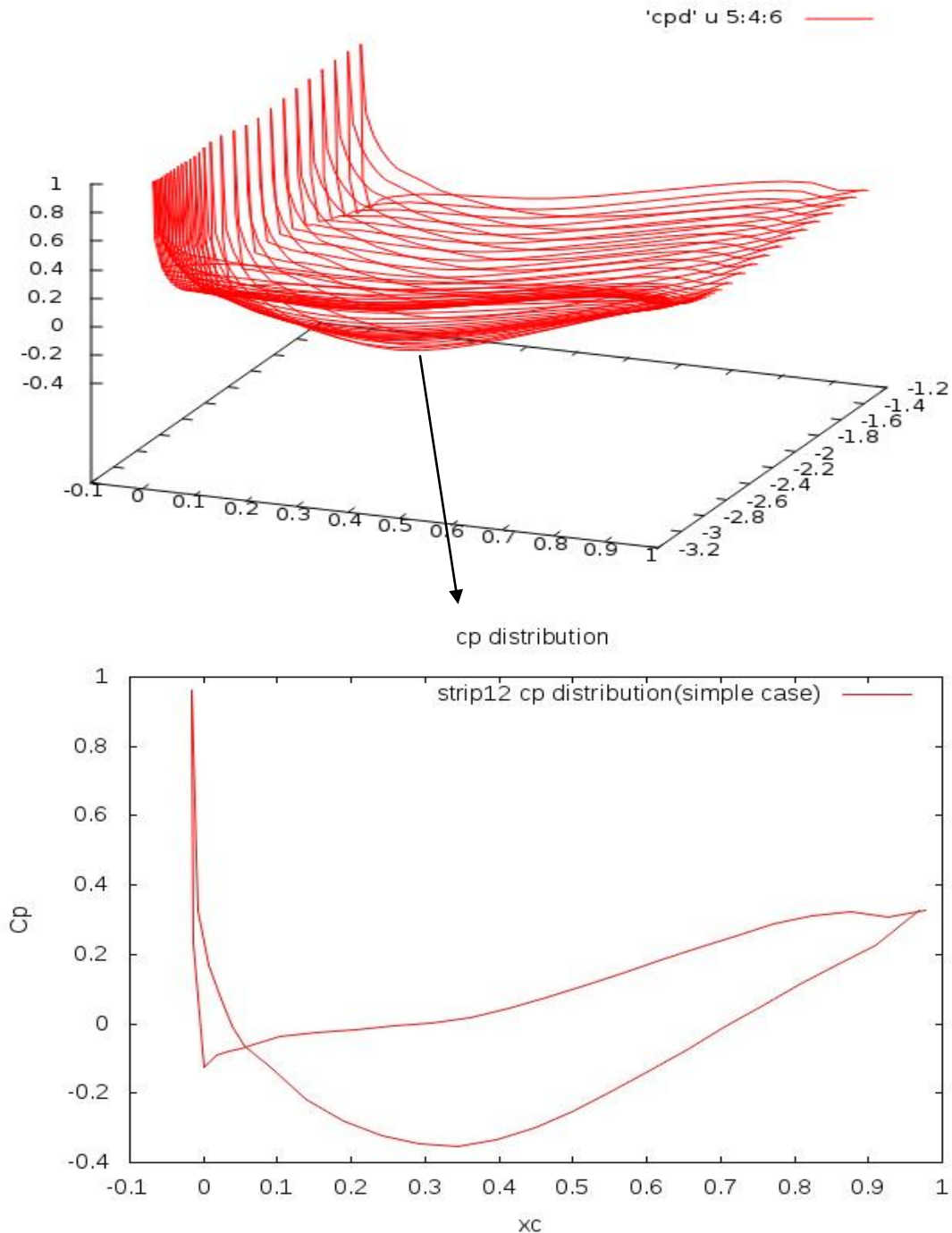
Εικόνα 4.34 Κατανομή φορτίων στον z-άξονα κατά μήκος της γάστρας (simple case/yaw angle/symmetry)

Όσον αφορά τις δυνάμεις στον z άξονα παρατηρούμε πάλι πολύ έντονα φορτία στην αρχή και το τέλος της στην περίπτωση ελεύθερης επιφάνειας(Εικόνα 4.32).Τέτοια φορτία δεν θα δούμε στην πράξη,αφού η ενέργεια μετατρέπεται σε ανύψωση του νερού όπως φάνηκε και στο κεφάλαιο 4.2.4. Στα υπόλοιπα διαγράμματα (Εικόνα 4.33,4.34) γενικά είναι διακριτή η 'ενεργή περιοχή' της γάστρας,ενώ όπως είναι λογικό η αποτύπωση της γωνίας ροής στα φορτία στον z άξονα είναι μηδαμινή.

4.4 Κατανομές πιέσεων και χρονική σύγκλιση της μεθόδου

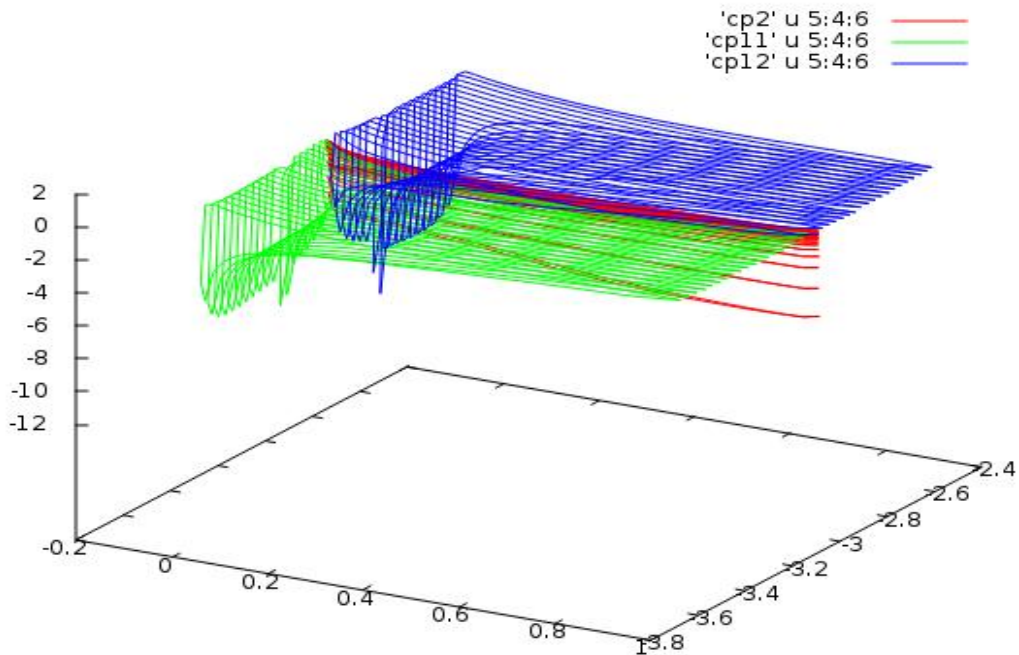
Ακολουθούν ενδεικτικές κατανομές πιέσεων(CP) κατά μήκος του υδροπτερυγίου και του πηδαλίου για την περίπτωση μίας γάστρας(simple case):

Κατανομή πίεσης υδροπτερυγίου-daggerboard CP distribution



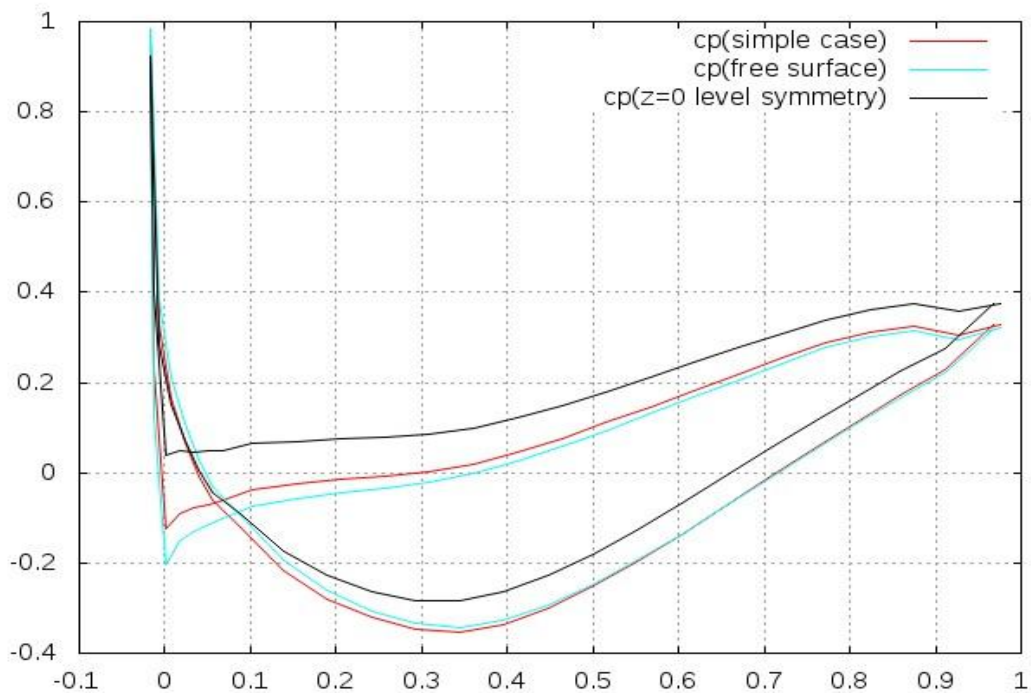
Εικόνα 4.35 Κατανομή πίεσης υδροπτερυγίου-daggerboard CP distribution (simple case)

Κατανομή πίεσης ηδαλίου-rudder CP distribution



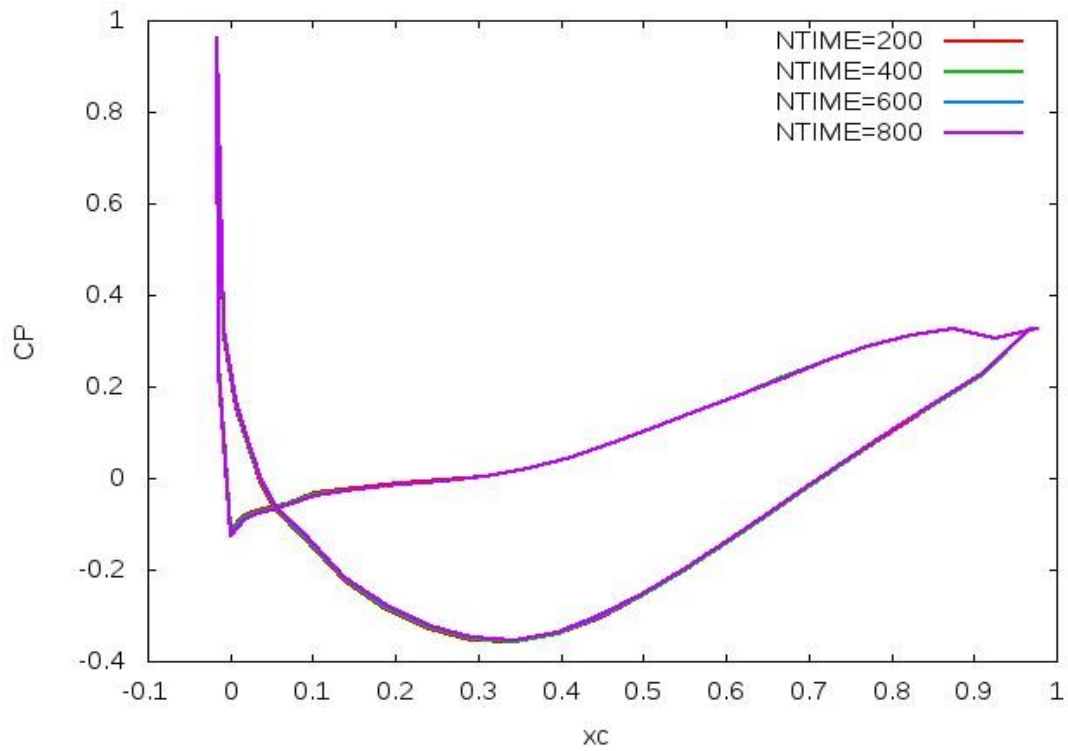
Εικόνα 4.36 Κατανομή πίεσης ηδαλίου-rudder CP distribution (simple case)

Για λόγους πληρότητας ακολουθεί και η συγκριτική κατανομή πιέσεων CP του υδροπτερυγίου που προφανώς αναμένεται να συμβαδίζει με τη σύγκριση φορτίων της κάθε περίπτωσης.

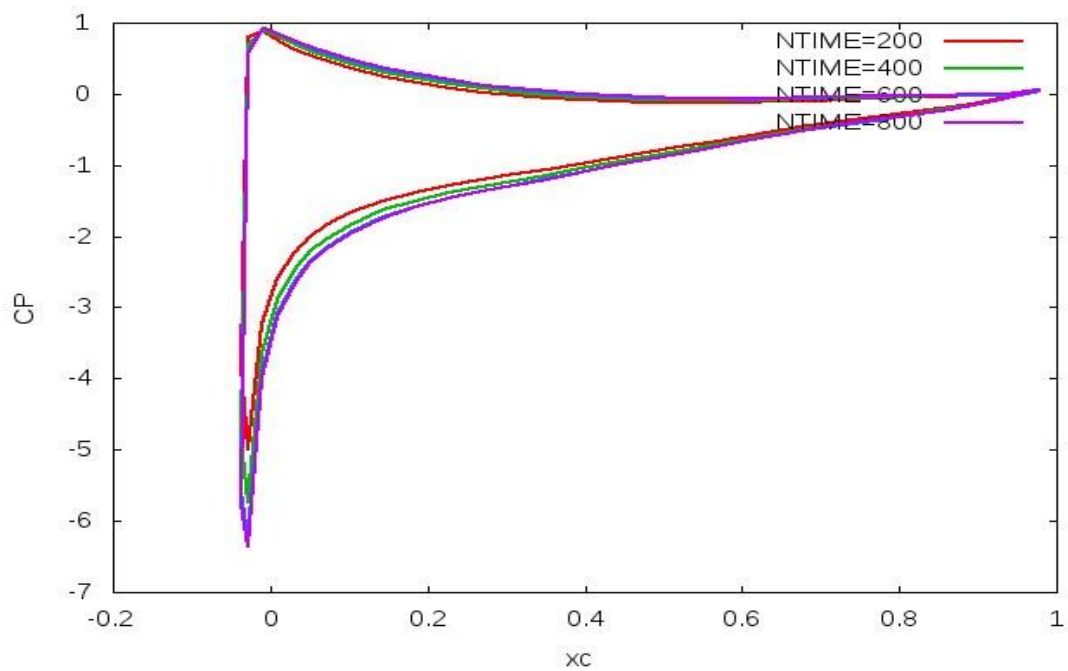


Εικόνα 4.37 Συγκριτική κατανομή πίεσης του υδροπτερυγίου-daggerboard comparative CP distribution(simple case/free surface/symmetry)

Όσον αφορά τη σύγκλιση της μεθόδου παρατίθεται ενδεικτικά η χρονική εξέλιξη των πιέσεων(CP) σε ένα strip του υδροπτερυγίου και ένα strip του πηδαλίου:



Εικόνα 4.38 Χρονική εξέλιξη της κατανομής πιέσεων στο strip μέγιστης υποπίεσης του υδροπτερυγίου



Εικόνα 4.39 Χρονική εξέλιξη της κατανομής πιέσεων σε strip του πηδαλίου

Όπως βλέπουμε, για την κατανομή πιέσεων του υδροπτερυγίου η μέθοδος έχει συγκλίνει από πολύ νωρίς. Ο λόγος που έγιναν 800 χρονικά βήματα είναι η σύγκλιση της μεθόδου για το πηδάλιο, η οποία και επιτυγχάνεται αργότερα από αυτή του υδροπτερυγίου. Η ταχύτητα σύγκλισης της μεθόδου για τα δύο υδροδυναμικά σώματα έχει να κάνει όπως έχει ήδη αναφερθεί με τη σχετική τους θέση. Το υδροπτερύγιο παραλαμβάνει την αδιατάρακτη ροή, ενώ το πηδάλιο υποδέχεται τη 'στροβιλότητα' του υδροπτερυγίου και την απόκλιση της ροής λόγω γάστρας, έτσι είναι λογικό η κατανομή πιέσεων εκεί να συγκλίνει αργότερα.

Κεφάλαιο 5: Αποτίμηση της εργασίας

5.1 Συμπεράσματα

Αυτή η διπλωματική εργασία εστίασε στο υδροδυναμικό κομμάτι ενός ιστιοπλοϊκού υδροπτέρυγος καταμαράν και πέραν των συμπερασμάτων που αναφέρονται στο 4ο κεφάλαιο σχετικά με τη γεωμετρία και την αλληλεπίδραση των υδροδυναμικών σωμάτων προέκυψαν και άλλα επιμέρους συμπεράσματα.

Διαπιστώθηκε ότι ο κώδικας GENUVP μπορεί να 'χειριστεί' αρκετά και ανομοιόμορφα πλέγματα και να δώσει αξιόπιστα ποιοτικά αποτελέσματα. Το είδος και η ακρίβεια των αποτελεσμάτων έχει να κάνει και με την προσέγγιση του προβλήματος. Γενικότερα η πλοήγηση ενός σκάφους τέτοιου τύπου είναι συνάρτηση πολλών παραγόντων που δε μελετήθηκαν στη συγκεκριμένη διπλωματική εργασία. Για παράδειγμα, τα ιστιοπλοϊκά σκάφη εξαιτίας των πανιών παίρνουν κλίση, κάτι που επηρεάζει σημαντικά την απόδοση των υδροδυναμικών σωμάτων.

Όμως μπορούμε να πούμε ότι η προσέγγιση της ροής σύμφωνα με τις παραδοχές που κάναμε ήταν ικανοποιητική και τα αποτελέσματα της παρούσας διπλωματικής μπορούν να χρησιμοποιηθούν σαν προθάλαμος στην καλύτερη προσέγγιση ενός φυσικά και κατ'επέκταση αριθμητικά περίπλοκου προβλήματος.

5.2 Προτάσεις για μελλοντική εργασία

Προσθήκη των πανιών

Προσομοίωση της ροής του αέρα γύρω από τα πανιά του συγκεκριμένου σκάφους. Παραμετροποίηση της σχετικής τους θέσης και ανάλυση της συμπεριφοράς του σκάφους με επίλυση των εξισώσεων κίνησης λαμβάνοντας υπόψιν τις αντιστάσεις λόγω τριβών.

Προσθήκη Ελεύθερης Επιφάνειας

Στην παρούσα διπλωματική όπως έχει ήδη αναφερθεί, έγινε προσομοίωση της ελεύθερης επιφάνειας με μια απαραμόρφωτη στο χρόνο λεπτή επιφάνεια και έγινε 'πρόβλεψη' της παραμόρφωσής της. Η περίπτωση εισαγωγής μιας παραμορφώσιμης επιφάνειας θα αποτελούσε μια καλύτερη προσέγγιση του κύματος του νερού και του προβλήματος γενικότερα.

Περαιτέρω παραμετρική ανάλυση των υδροδυναμικών σωμάτων

Όπως είπαμε τα ιστιοπλοϊκά σκάφη παίρνουν έντονες κλίσεις, κάτι που επηρεάζει τη συμπεριφορά των υδροδυναμικών σωμάτων, αφού έχουμε συνεχή αλλαγή των γωνιών πρόσπτωσης. Το φάσμα των πιθανών σχετικών θέσεων των υδροδυναμικών σωμάτων στο συγκεκριμένο σκάφος είναι πολύ μεγάλο και μπορούν να προκύψουν ενδιαφέροντα αποτελέσματα.

Βιβλιογραφία

- [1] "What is the AC45? Meet the America's Cup World Series foiling catamaran" , Elaine Bunting, yachtingworld.com, retrieved July 22, 2016
- [2] Θεωρητική και Αριθμητική Ανάλυση Τρισδιάστατων Υποηχητικών Ροών Μη Συνεκτικού Ρευστού, Σπύρος Βουτσινάς, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Τομέας Ρευστών ΕΜΠ, Αθήνα 1990
- [3] Ανάλυση Συμπεριφοράς Αξονικού Δρομέα σε Μόνιμες και Μεταβατικές Καταστάσεις Λειτουργίας, Πέτρος Ι. Χασαπογιάννης, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Τομέας Ρευστών ΕΜΠ, Αθήνα 2005
- [4] "Distribution of sources and normal dipoles over a quadrilateral panel", J.N. NEWMAN, Department of Ocean Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, USA, retrieved September 3, 1985
- [6] Boundary integral techniques (BIT) for Free Surface Flows, G. Baker, Department of Mathematics, The Ohio State University, USA, Columbus 12/2009
- [7] "Inside the Fastest Boats in America's Cup History with MIT Meche", by Genevieve Wanucha, August 26, 2013
- [8] "The foiling phenomenon-how sailing boats got up on foils to go ever faster", Matthew Sheahan, yachtingworld.com, retrieved July 20, 2015

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

I.Αλγόριθμος διαχείρισης σειράς κόμβων

Ο παρακάτω αλγόριθμος επιτρέπει την παρουσίαση των κόμβων με την επιθυμητή σειρά ως προς NCW ή/και NNB:

```
program grid_readingway
dimension X(10000),Y(10000),Z(10000)
open(1,file='start_file')
do i=1,NCW*NNB
read(1,*) X(i),Y(i),Z(i)
enddo
open(2,file='asked_file')
write(2,*)
do i=1,NCW
! do i=NCW,1,-1          **An to asked_file apaitei
anapodo diavasma twN NCW sections
do j=1,NNB
! do j=NNB,1,-1          **An to asked_file apaitei
anapodo diavasma twN NNB sections
ij=(i-1)*NNB+j
write(2,*) X(ij),Y(ij),Z(ij)
enddo
write(2,*)
enddo
end
```

II.Αλγόριθμος μετατροπής πλέγματος

Ο παρακάτω αλγόριθμος μετατρέπει ένα πλέγμα NCW x NNB κόμβων σε ένα πλέγμα NNB x NCW κόμβων

```
program grid_turn
Dimension X(10000),Y(10000),Z(10000)
open(1,file='NCWxNNB_file')
do i=1,NCW*NNB
read(1,*) X(i),Y(i),Z(i)
enddo
open(2,file='NNBxNCW_file')
write(2,*)
do i=1,NNB
k=i
do j=1,NCW
write(2,*) X(k),Y(k),Z(k)
k=k+NNB
enddo
write(2,*)
enddo
end
```

III.Αλγόριθμος μείωσης κόμβων υδροπτερυγίου(daggerboard)

```
program dagger_airfoilcut
DIMENSION X(1000),Y(1000),Z(1000),A(1000),B(1000),G(1000)
open(1,file='starting_airfoil') !122 points
do j=1,122
read(1,*) X(j),Y(j),Z(j)
enddo
k=0
l=0
do i=1,49
if (i.eq.1) then
A(i)=X(i)
B(i)=Y(i)
G(i)=Z(i)
elseif (i.ge.2 .and. i.lt.19) then
A(i)=X(2*i+k)
B(i)=Y(2*i+k)
G(i)=Z(2*i+k)
k=k+1
elseif (i.ge.19 .and. i.lt.32) then
A(i)=X(i+36)
B(i)=Y(i+36)
G(i)=Z(i+36)
elseif (i.ge.32 .and. i.lt.49) then
A(i)=X(i+38+l)
B(i)=Y(i+38+l)
G(i)=Z(i+38+l)
l=l+2
else
A(i)=X(122)
B(i)=Y(122)
G(i)=Z(122)
endif
enddo
open(2,file='final_airfoil') !49 points
do i=1,49
write(2,*) A(i),B(i),G(i)
enddo
end
```

IV.Αλγόριθμος μείωσης κόμβων πηδαλίου(rudder)

```
program rudder_airfoilcut
DIMENSION X(1000),Y(1000),Z(1000),A(1000),B(1000),G(1000)
open(1,file='starting_airfoil') !102 points
do j=1,102
read(1,*) X(j),Y(j),Z(j)
enddo
k=1
l=0
do i=1,57
if (i.eq.1) then
A(i)=X(i)
B(i)=Y(i)
G(i)=Z(i)
elseif (i.ge.2 .and. i.lt.24) then
A(i)=X(i+k)
B(i)=Y(i+k)
G(i)=Z(i+k)
k=k+1
elseif (i.ge.24 .and. i.lt.35) then
A(i)=X(i+22)
B(i)=Y(i+22)
G(i)=Z(i+22)
elseif (i.ge.35 .and. i.lt.57) then
A(i)=X(i+23+l)
B(i)=Y(i+23+l)
G(i)=Z(i+23+l)
l=l+1
else
A(i)=X(102)
B(i)=Y(102)
G(i)=Z(102)
endif
enddo
open(2,file='final_airfoil') !57 points
do i=1,57
write(2,*) A(i),B(i),G(i)
enddo
end
```