

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών
Επιστημών

Τομέας Μαθηματικών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία για την απόκτηση του

Δ. Μ. Δ. Ε. στις «Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες»

στην κατεύθυνση «Μαθηματική Ανάλυση»

με τίτλο:

ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΙΝΑΚΩΝ
ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΟΥΡΩΝ ΚΑΙ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ
ΚΙΝΔΥΝΩΝ

Μακρή Α. Χριστίνα - Γεωργία, Διπλωματούχος Μαθηματικός

Επιβλέπων Καθηγητής: κ. Παναγιώτης Ψαρράκος, Καθηγητής Ε. Μ. Π.

ΑΘΗΝΑ 2016



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΙΝΑΚΩΝ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΟΥΡΩΝ ΚΑΙ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΚΙΝΔΥΝΩΝ

Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία

της

ΧΡΙΣΤΙΝΑΣ – ΓΕΩΡΓΙΑΣ Α. ΜΑΚΡΗ

Διπλωματούχου Μαθηματικού

Τριμελής Επιτροπή:

Χ. Κουκουβίνος

Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Π. Ψαρράκος

Καθηγητής Ε.Μ.Π. (Επιβλέπων)

Γ. Ψαρράκος

Επικ. Καθηγητής Παν. Πειραιώς

Αθήνα, Ιούλιος 2016

Πίνακας Περιεχομένων

Περίληψη	4
Ευχαριστίες	6
Κεφάλαιο 1: Μαρκοβιανές Αλυσίδες και Ουρές Αναμονής	8
1.1 Ουρές Αναμονής: M/M/1	8
1.2 Η M/M/1 Αλυσίδα σε τυχαίο περιβάλλον	11
Κεφάλαιο 2: Ουρές αναμονής «Τύπου Φάσης» (Phase – Type)	15
2.1 Εισαγωγή.....	15
2.2 Η ουρά αναμονής M/PH/1.....	16
Κεφάλαιο 3: Απορροφητικές Μαρκοβιανές Αλυσίδες	20
3.1 Εισαγωγή.....	20
3.2 Παράδειγμα	22
Κεφάλαιο 4: Phase – Type Κατανομές (Κατανομές τύπου φάσεων)	23
4.1 Εισαγωγή στις Phase – Type Κατανομές.....	23
4.2 Παράδειγμα	25
4.3 Διακριτές Phase – Type κατανομές	26
4.4 Συνεχείς Phase – Type Κατανομές.....	28
4.5 Παράδειγμα: Προσέγγιση της κατανομής Weibull μέσω μιας PHD κατανομής.....	30
!Πρώρο Τέλος Τύπου	
4.7 Παράδειγμα: Η ουρά αναμονής PH/M/1	32
4.8 Παράδειγμα: Χρόνος ζωής Εξοπλισμού	34
Κεφάλαιο 5: Εισαγωγή στους Μη Αρνητικούς Πίνακες	36
Κεφάλαιο 6: Διαδικασίες Γεννήσεως – Θανάτου (Birth – and – Death Processes)	42
6.1 Διαδικασίες Γεννήσεως – Θανάτου Διακριτού Χρόνου: Discrete Time Birth – and – Death Processes	42
6.2 Διαδικασίες Γεννήσεως – Θανάτου συνεχούς χρόνου: Continuous Time Birth – and – Death Processes	49
Κεφάλαιο 7: Οι βασικές Μη Γραμμικές Εξισώσεις	50
Κεφάλαιο 8: Μοντέλο της θεωρίας κινδύνου	53

8.1 Εισαγωγή: Αλυσίδες υπό περιορισμό (Processes Under a Taboo): Τερματιζόμενες αλυσίδες	53
8.2 Μοντέλο της θεωρίας κινδύνου των Bara Kim, Hwa- Sung Kim, Jeongsim Kim με τίτλο: “A risk model with paying dividends and random environment”	55
8.3 Παρουσίαση του μοντέλου	57
8.4 Κατασκευή QBD δομής για το μοντέλο	62
• Το ενιαίο γράφημα	64
• Το διακεκομμένο γράφημα	64
8.5 Πιθανότητα χρεοκοπίας – ελλειμματική κατανομή στη χρεοκοπία	68
8.6 Αριθμητικά Παραδείγματα στο μοντέλο των Kim, Kim και Kim	77
8.6.1 Παράδειγμα.....	77
8.6.2 Παράδειγμα.....	78
8.6.3 Παράδειγμα.....	79
Βιβλιογραφία – Πηγές.....	84

Περίληψη

Μία από τις σημαντικότερες καινοτομίες του 20ου αιώνα είναι η Διαχείριση Κινδύνου (Risk Management), καθώς μέχρι το 1950, το ζητούμενο για μία εταιρία ή έναν ιδιώτη ήταν η επιστροφή του κεφαλαίου σε περίπτωση επένδυσης.

Το 1952, ο Harry Markowitz παρουσιάζει για πρώτη φορά τη Θεωρία Χαρτοφυλακίου, σύμφωνα με την οποία η αναμενόμενη απόδοση μιας επένδυσης καθορίζεται από ένα διάγραμμα κινδύνου – επιστροφών, όπου ο κίνδυνος υπολογίζεται με τη χρήση τυπικών κατανομών. Από το τέλος της δεκαετίας του 1970, οι μέθοδοι της Διαχείρισης Κινδύνου στα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα εξελίσσονται ταχύτατα.

Οι παράγοντες που οδήγησαν στην εξέλιξη και στην προώθηση της Θεωρίας μέτρησης Κινδύνου είναι οι εξής:

- Οι ανάγκες που προέκυψαν λόγω του συνεχούς εξελισσόμενου χρηματοοικονομικού περιβάλλοντος.
- Οι πιέσεις των εποπτικών εθνικών αρχών εξαιτίας της οικονομικής αστάθειας εκείνης της εποχής.

Στην παρούσα Διπλωματική Εργασία θα συζητήσουμε το μαθηματικό υπόβαθρο βασικών κατανομών στις οποίες στηρίζεται η μέτρηση της Θεωρίας Κινδύνου.

Στο **Κεφάλαιο 1** παρουσιάζεται μία Εισαγωγή στις Μαρκοβιανές Αλυσίδες και στις Ουρές Αναμονής $M/M/1$ σε ορισμένο και σε τυχαίο περιβάλλον.

Το Κεφάλαιο 1 διαδέχεται το **Κεφάλαιο 2**, στο οποίο οι Ουρές Αναμονής «Τύπου Φάσης» (Phase Type) εισάγονται προκειμένου να γίνει κατανοητή η έννοια της ουράς αναμονής $M/PH/1$, μέσω του αντίστοιχου παραδείγματος.

Οι Απορροφητικές Μαρκοβιανές Αλυσίδες του **Κεφαλαίου 3** μας οδηγούν στα πολύ σημαντικά παραδείγματα του **Κεφαλαίου 4**, όπως στην Προσέγγιση της κατανομής Weibull μέσω της PH κατανομής, μία διεργασία που βοηθά στον προσδιορισμό των ανεμολογικών χαρακτηριστικών στις περιοχές της εύκρατης ζώνης και για 100 μέτρα από το έδαφος.

Το **Κεφάλαιο 5** είναι αφιερωμένο στο μαθηματικό υπόβαθρο των Μη Αρνητικών Πινάκων, οι οποίοι χρησιμοποιούνται εκτενώς στην Θεωρία Κινδύνου και στον προσδιορισμό της συμπεριφοράς των μοντέλων που μας ενδιαφέρουν και που μελετούμε. Ομοίως, το

Κεφάλαιο 6 μας εισάγει στις Διαδικασίες Γενήσεως – Θανάτου Διακριτού και Συνεχούς Χρόνου, έννοιες που θα συναντήσουμε εκτενώς τόσο στο Κεφάλαιο 7, στις βασικές Μη Γραμμικές Εξισώσεις, όσο και στο τελευταίο Κεφάλαιο, στο μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου που παρουσιάζουμε στην παρούσα Διπλωματική Εργασία.

Το μοντέλο **του Κεφαλαίου 8**, αυτό που ουσιαστικά θέλουμε να μελετήσουμε στο πλαίσιο της Θεωρίας Κινδύνου, συμπεριλαμβάνει την αποπληρωμή των μερισμάτων σε μετόχους κεφαλαίου, όπου τα μεγέθη των αποζημιώσεων ακολουθούν διακριτή κατανομή στην εκάστοτε περίπτωση. Η μελέτη μας ολοκληρώνεται μέσω της κατασκευής μιας QBD δομής για το μοντέλο, η οποία αποδίδεται μέσω ενιαίου και διακεκομμένου γραφήματος, μέσω του προσδιορισμού της πιθανότητας χρεοκοπίας με τη βοήθεια της ελλειμματικής της κατανομής και, τέλος, μέσω των αριθμητικών μας παραδειγμάτων.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα θερμά να ευχαριστήσω τον Καθηγητή μου κ. Παναγιώτη Ψαρράκο, Καθηγητή του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου και Επιβλέποντά μου, ο οποίος με καθοδήγησε και συμβούλευσε για την εκπόνηση της Διπλωματικής μου Εργασίας.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω την οικογένειά μου, συγκεκριμένα την μητέρα μου, Δέσποινα Μακρή, που με θέρμη – αλλά και ανεξάντλητη υπομονή – με στήριξε στην προσπάθεια αυτή καθ' όλη την διάρκειά της.

Ευχαριστώ θερμά τον συμπλέοντα μαθηματικό και συνοδοιπόρο μου, Κυριάκο Καστριώτη, που, με την επιμονή του, κατάφερε να με πείσει πως όλα είναι πραγματοποιήσιμα - και εάν δεν είναι, τότε είναι πεπερασμένη η αντίληψή μας για το τι είναι πραγματοποιήσιμο.

Μακρή Χριστίνα – Γεωργία, 2016

**Στον Μπαμπά και Μαθηματικό
Ανδρέα...**

Τα καθαρά Μαθηματικά είναι το καλύτερο παιχνίδι του κόσμου. Σε καθηλώνει πιο πολύ από το Σκάκι, έχει μεγαλύτερο Ρίσκο από το Πόκερ και διαρκεί περισσότερο από τη Μονόπολη. Και είναι δωρεάν, μπορείς να το παίζεις παντού - ο Αρχιμήδης το έπαιζε στη μπανιέρα του.

Richard J. Trudeau

Κεφάλαιο 1: Μαρκοβιανές Αλυσίδες και Ουρές Αναμονής¹

Σκοπός του παρόντος κεφαλαίου είναι η παράθεση – όπως θα δούμε παρακάτω – ορισμένων παραδειγμάτων της quasi – birth – and – death διαδικασίας, την οποία από εδώ και στο εξής θα αποκαλούμε απλώς QBD. Τέτοιου είδους παραδείγματα παρέχουν στον αναγνώστη την διευκόλυνση της αντίληψης ενός εύρους εφαρμογών των QBD's.

1.1 Ουρές Αναμονής: M/M/1

Ξεκινώντας από τα βασικά, μία birth – and – death διαδικασία (ή επί το ελληνικότερον: διαδικασία «γεννήσεως θανάτου», ορολογία όμως όχι και τόσο δόκιμη) στους μη αρνητικούς ακεραίους είναι ουσιαστικά μία Μαρκοβιανή διαδικασία/ αλυσίδα, στην οποία επιτρέπονται οι μεταβάσεις από την κατάσταση n στην αμέσως επόμενη $n + 1$ ή στην αμέσως προηγούμενη $n - 1$ για κάθε $n \geq 1$.

Ένα απλό παράδειγμα μιας ομογενούς birth – and – death διαδικασίας είναι η M/M/1 ουρά αναμονής.

Στην ουρά αναμονής M/M/1, υπάρχει μόνο ένας εξυπηρετητής – ρόλος του οποίου είναι η εξυπηρέτηση των πελατών – στον οποίο ο χώρος αναμονής είναι άπειρος: όσοι πελάτες θέλουν να εξυπηρετηθούν μπορούν να αναμένουν στον χώρο αναμονής και να έρχονται συνεχώς όλο και περισσότεροι ανεξαρτήτως ρυθμού εξυπηρέτησης και είτε να εξυπηρετούνται άμεσα είτε όχι, με σειρά προτεραιότητας αφίξεως. Οι δε διάρκειες εξυπηρέτησής τους είναι τυχαίες μεταβλητές, ανεξάρτητες μεταξύ τους, και ακολουθούν όλες την ίδια κατανομή, είναι δηλαδή ισόνομες.

¹ **Πινακοεκθετικές κατανομές και κατανομές τύπου φάσεων στη θεωρία ανανέωσης και τη θεωρία κινδύνου, Matrix Exponential and phase type distributions in renewal and risk theory»,** Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία της Ελένης Α. Βαταμίδου, Επιβλέπων: Γεώργιος Τσακλίδης Αν. Καθ. Α.Π.Θ., Θεσσαλονίκη, Ιούνιος 2010. **Link:** <http://invenio.lib.auth.gr/record/122858?ln=el>

Ο ρυθμός άφιξης των πελατών στη μονάδα του χρόνου ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda > 0$ και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \text{ για } x = 0, 1, 2, \dots$$

Ο χρόνος εξυπηρέτησης ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο $\mu > 0$, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x) = \mu e^{-\mu x}$, για $x \geq 0$.

Συνοπτικά, μπορούμε να παρουσιάσουμε την παραπάνω παράγραφο με το εξής διάγραμμα:



Εικόνα 1 : Διαγραμματική απεικόνιση της ουράς αναμονής M/M/1, όπου ο ρυθμός αφίξεως των πελατών στο σύστημα είναι λ και ο ρυθμός εξυπηρέτησης είναι μ .

Δηλώνουμε ως $N(t)$ το πλήθος των πελατών που είναι παρόντες στο σύστημα, τη χρονική στιγμή t , οι οποίοι είτε αναμένουν να εξυπηρετηθούν είτε εξυπηρετούνται τη δεδομένη χρονική στιγμή. Η αλυσίδα που περιγράφεται από το σύνολο:

$$\{N(t), t \geq 0\}$$

είναι μια αλυσίδα Μαρκοβιανή, συνεχούς χρόνου, ορισμένη στο διάστημα $\{0, 1, 2, \dots\}$.

Όπως αναφέραμε και πριν, οι πιθανές μετακινήσεις μέσα στη Μαρκοβιανή αλυσίδα προκύπτουν μέσω του εξής πίνακα:

Από τη θέση	Στην θέση	Με ρυθμό	
n	$n - 1$	μ	$\forall n \geq 1$
n	$n + 1$	λ	$\forall n \geq 0$

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι την χρονική στιγμή t το πλήθος των ατόμων που αναμένουν στο σύστημα ή εξυπηρετούνται είναι ακριβώς n . Επομένως: $N(t) = n$.

Τότε, η πιθανότητα στην αμέσως επόμενη χρονική $t + h$, $h > 0$ το προαναφερθέν πλήθος να είναι $n + 1$, δηλαδή $N(t + h) = n + 1$, εξαιτίας ουσιαστικά μίας επιπλέον άφιξης στο χρονικό διάστημα μεταξύ t και $t + h$, είναι $\lambda h + o(h)$. Εάν $n \geq 1$, τότε ο εξυπηρετητής χαρακτηρίζεται ως «απασχολημένος» τη χρονική στιγμή t και η πιθανότητα ολοκλήρωσης μίας εξυπηρέτησης είναι ίση με $\mu h + o(h)$.

Ένας άλλος τρόπος παρουσίασης των παραπάνω αποτελεσμάτων, στο πλαίσιο της Ανάλυσης Πινάκων, είναι ο λεγόμενος πίνακας **πιθανοτήτων μετάβασης ή πίνακας ρυθμών μετάβασης**, ο οποίος έχει ως τιμές τις πιθανότητες μετάβασης q_{ij} από μία θέση i σε μία θέση j , για $i \neq j$ με $q_{ii} = -\sum_{j \neq i} q_{ij}$. Σύμφωνα με την τελευταία ισότητα, η διαγώνιος ενός πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης απαρτίζεται από πιθανότητες αντίθετες με το άθροισμα των πιθανοτήτων μετάβασης q_{ij} . Το μέτρο μίας πιθανότητας που ανήκει σε αυτήν τη διαγώνιο, $|q_{ii}|$, αποτελεί την παράμετρο της εκθετικής κατανομής που ακολουθείται κατά τη διάρκεια του χρόνου στη θέση i .

Ο παραπάνω πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης ονομάζεται Q και είναι της παρακάτω μορφής:

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & \cdot & \cdot & \dots \\ \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & \cdot & \dots \\ \cdot & \mu & -(\lambda + \mu) & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \mu & -(\lambda + \mu) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Μία πολύ σημαντική ιδιότητα του πίνακα Q είναι πως είναι τριδιαγώνιος: τα στοιχεία της άνω κυρίας διαγωνίου είναι ίσα μεταξύ τους, ενώ το ίδιο ισχύει και για τα στοιχεία κάτω της κυρίας διαγωνίου. Η πιθανότητα $q_{00} = -\lambda$ δηλώνει πως η θέση 0 είναι στάσιμη: είναι η μοναδική θέση από την οποία δεν γίνεται να μετακινηθούμε προς τα αριστερά.²

² Στην περίπτωση που δεν δηλωθεί εξαρχής κάτι διαφορετικό, υποθέτουμε πως η πορεία μας στην Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι θετικώς ορισμένη προς τα δεξιά, με την έννοια της χρονικής μεταβολής.

1.2 Η M/M/1 Αλυσίδα σε τυχαίο περιβάλλον

Ένα απλό παράδειγμα μιας quasi – birth – to – death αλυσίδας είναι η γνωστή μας πλέον M/M/1 Μαρκοβιανή Αλυσίδα. Το εν λόγω σύστημα συμπεριφέρεται όπως η M/M/1 ουρά αναμονής, με τη μόνη διαφορά πως η άφιξη και η εξυπηρέτηση διαφέρουν κατά το πέρασμα του χρόνου, επομένως αποτελούν και από μόνες τους διακριτές διαδικασίες (αλυσίδες)

Σε συνδυασμό με τις αλυσίδες αφίξεων και εξυπηρέτησης, προστίθεται και μία αλυσίδα «περιβαλλοντικών διαδικασιών»³ (environmental processes), η $\{E(t), t \geq 0\}$, ορισμένη σε πεπερασμένο διάστημα $\{1, 2, \dots, m\}$ με συνεχείς πιθανότητες μετάβασης: $s_{ij}, 1 \leq i \neq j \leq m$. Το περιβάλλον – αποκομμένο από την ανθρώπινη παρέμβαση – επηρεάζει τις διαδικασίες άφιξης και εξυπηρέτησης ως ακολούθως:

Έστω ότι στο χρόνο t έχουμε ότι $E(t) = j$. Τότε, για την θέση j , οι παράμετροι είναι συγκεκριμένες και διαφορετικές από μία άλλη θέση i :

- ο ρυθμός άφιξης στη θέση j ισούται με λ_j και
- ο ρυθμός εξυπηρέτησης στη θέση j είναι ίσος με μ_j ,

δεδομένου ότι ο εξυπηρετητής είναι απασχολημένος τη χρονική στιγμή t .

Επομένως, το σύστημα μετατρέπεται σε μία διδιάστατη Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου, της μορφής $\{(N(t), E(t)), t \geq 0\}$ με πεδίο ορισμού το $\{(n, i), n \geq 0, 1 \leq i \leq m\}$ όπου $N(t)$ είναι το πλήθος των παρόντων στο σύστημα πελατών προς εξυπηρέτηση και $E(t)$ η κατάσταση στην οποία βρίσκεται το σύστημα την χρονική στιγμή t .

³ Environmental Process: Διαδικασίες, γεγονότα, «κύκλοι» που προκύπτουν με φυσικό τρόπο στο περιβάλλον, χωρίς την ανθρώπινη παρέμβαση. Η εισαγωγή της συγκεκριμένης έννοιας εξυπηρετεί την επίδραση των προαναφερθέντων «πράξεων» για όλες τις αλυσίδες που πραγματοποιούνται σε ένα «φυσικό» περιβάλλον – με την έννοια της έλλειψης της ανθρώπινης παρέμβασης.

Αλλαγές στην κατάσταση του συστήματος πραγματοποιούνται όταν το περιβάλλον αλλάζει, όταν ένας νέος πελάτης καταφθάνει στο σύστημα ή όταν μία εξυπηρέτηση ολοκληρώνεται. Οι πιθανές μεταβάσεις με τους αντίστοιχους ρυθμούς τους, δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Από	Σε	Με ρυθμό	
(n, i)	$(n - 1, i)$	μ_j	$\forall n \geq 1$
(n, i)	(n, j)	s_{ij}	$\forall n \geq 0, i \neq j$
(n, i)	$(n + 1, i)$	μ_i	$\forall n \geq 0$

Με σκοπό την εισαγωγή των παραπάνω τιμών στον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης Q του συστήματος, είναι απαραίτητο να ορίσουμε μία γραμμική διάταξη των διδιάστατων καταστάσεων.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θα χρησιμοποιήσουμε την λεξικογραφική διάταξη, δηλαδή έχουμε τελικά το εξής διατεταγμένο σύνολο:

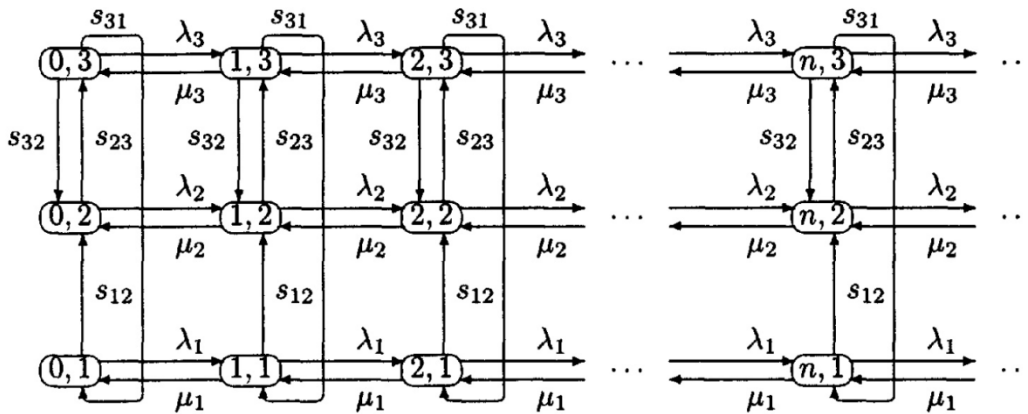
$$\{(0,1), (0,2), \dots, (0, m), (1,1), (1,2), \dots, (1, m), (2,1), (2,2), \dots, (2, m), \dots, (n, 1), (n, 2), \dots, (n, m), \dots\}$$

όπου, επί της ουσίας, διατάσσουμε πρώτα τις καταστάσεις του συστήματος με πλήθος πελατών 0, έπειτα τις καταστάσεις με 1 πελάτη, κλπ.

Θα καλούμε από εδώ και στο εξής «επίπεδο», το επίπεδο όλων των καταστάσεων που αφορούν σε ένα σταθερό πλήθος πελατών στο σύστημα.

Στην **Εικόνα 2**⁴ παρατηρούμε πως τα επίπεδα – όπως ορίστηκαν πιο πάνω – είναι υπό μορφή στηλών, ενώ οι γραμμές στο ίδιο διάγραμμα αντιπροσωπεύουν τις ποικίλες θέσεις στις οποίες ενδεχομένως να βρεθούμε. Η λεξικογραφική διάταξη έγκειται στην αρίθμηση των καταστάσεων ανά επίπεδο.

⁴ Πηγή εικόνας: Latouche, Ramaswami, *Introduction to Matrix Analytic Methods in Stochastic Modeling*, 1987.



Εικόνα 2

Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης⁵ είναι ο εξής:

$$Q = \begin{matrix} & (0,1) & (0,2) & (0,3) & (1,1) & (1,2) & (1,3) & (2,1) & (2,2) & (2,3) & \dots \\ \begin{matrix} (0,1) \\ (0,2) \\ (0,3) \\ (1,1) \\ (1,2) \\ (1,3) \\ (2,1) \\ (2,2) \\ (2,3) \\ \vdots \end{matrix} & \begin{bmatrix} q_1^0 & s_{12} & \cdot & \lambda_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ \cdot & q_2^0 & s_{23} & \cdot & \lambda_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ s_{31} & s_{32} & q_3^0 & \cdot & \cdot & \lambda_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ \mu_1 & \cdot & \cdot & q_1^* & s_{12} & \cdot & \lambda_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ \cdot & \mu_2 & \cdot & \cdot & q_2^* & s_{23} & \cdot & \lambda_2 & \cdot & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \mu_3 & s_{31} & s_{32} & q_3^* & \cdot & \cdot & \lambda_3 & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \mu_1 & \cdot & \cdot & q_1^* & s_{12} & \cdot & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mu_2 & \cdot & \cdot & q_2^* & s_{23} & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mu_3 & s_{31} & s_{32} & q_3^* & \cdot & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Εικόνα 3

όπου $q_1^0 = -s_{12} - \lambda_1$, $q_2^0 = -s_{23} - \lambda_2$, $q_3^0 = -s_{31} - s_{32} - \lambda_3$, $q_1^* = -\mu_1 - s_{12} - \lambda_1$, $q_2^* = -\mu_2 - s_{23} - \lambda_2$ και $q_3^* = -\mu_3 - s_{31} - \lambda_3$. Επισημαίνουμε εδώ πως τα διαγώνια στοιχεία $-s_{12}, -s_{23}, -s_{31}, -s_{32}$ είναι οι πιθανότητες που προκύπτουν από την Μαρκοβιανή αλυσίδα περιβάλλοντος, την $\{E(t), t \geq 0\}$.

Και εδώ, η σημαντικότερη ιδιότητα του πίνακα Q είναι πως έχει blocks και ταυτόχρονα είναι τριδιαγώνιος. Για τυχαίες τιμές του μεγέθους του m καθώς και του πίνακα πιθανοτήτων

⁵ Πηγή εικόνας: Latouche, Ramaswami, *Introduction to Matrix Analytic Methods in Stochastic Modeling*, 1987

μετάβασης S της $\{E(t), t \geq 0\}$, ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης Q της Μαρκοβιανής Αλυσίδας M/M/1 σε τυχαίο περιβάλλον δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

$$Q = \begin{bmatrix} S - \Lambda & \Lambda & 0 & 0 & \dots \\ M & S - \Lambda - M & \Lambda & 0 & \dots \\ 0 & M & S - \Lambda - M & \Lambda & \dots \\ 0 & 0 & M & S - \Lambda - M & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

όπου S , Λ και M είναι $m \times m$ πίνακες, που ουσιαστικά εκφράζουν το πλήθος των πιθανών επιπέδων της περιβαλλοντικής αλυσίδας, και πιο συγκεκριμένα:

- S είναι ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης της περιβαλλοντικής Μαρκοβιανής Αλυσίδας και
- Λ, M είναι διαγώνιοι πίνακες με $\Lambda_{ii} = \lambda_i$ και $M_{ii} = \mu_i$ για $1 \leq i \leq m$.

Παρατηρούμε δε την ομοιότητα των πινάκων πιθανοτήτων μετάβασης Q στην περίπτωση της μονοδιάστατης M/M/1 και σε αυτήν την περίπτωση, όπου σημαντικό ρόλο έχει η Μαρκοβιανή αλυσίδα του περιβάλλοντος: ο πίνακας Q , στην δεύτερη περίπτωση, είναι block – τριδιαγώνιος αυτήν την φορά, με τα blocks άνω και κάτω της κυρίας διαγωνίου να είναι ίσα μεταξύ τους (κατά αντιστοιχία), και τα blocks της κυρίας διαγωνίου – με εξαίρεση το 1^ο επάνω αριστερά block – να είναι ίδια.

Κεφάλαιο 2: Ουρές αναμονής «Τύπου Φάσης» (Phase – Type)⁶

2.1 Εισαγωγή

Οι phase – type ουρές αναμονής αποτελούν μία γενίκευση των M/M/1, όπου ο χρόνος εξυπηρέτησης και εισόδου στο σύστημα ακολουθούν κατανομές που δεν είναι απαραίτητα εκθετικές. Μάλιστα, θεωρούμε από εδώ και στο εξής πως αυτές οι κατανομές θα είναι τύπου φάσης, προκειμένου να μη βλάπτουμε τη γενικότητα. Εδώ αναφερόμαστε συγκεκριμένα σε δύο παραδείγματα.

Υποθέτουμε πως οι τρόποι εξυπηρέτησης συνιστούν έναν αριθμό διαδικασιών, οι οποίες αριθμούνται από το 1 έως το m .

Κάθε μία από αυτές τις διαδικασίες, ας πούμε η i , έχει μία τυχαία διάρκεια που ακολουθεί εκθετική κατανομή, με αντίστοιχη παράμετρο ν_i . Όταν αυτή η διαδικασία ολοκληρώνεται, τότε προχωρούμε στην επόμενη διαδικασία j με πιθανότητα μετάβασης p_{ij} , μέχρι τελικά να ολοκληρωθεί η εξυπηρέτηση.

Συνεπώς, δύο τρόποι εξυπηρέτησης πλέον διαφέρουν ως προς τις ενδιάμεσες διαδικασίες που ακολουθούνται, καθώς και ως προς τη διάρκεια των διαδικασιών αυτών. Η ολική διάρκεια εξυπηρέτησης, από την αρχή έως το τέλος της, ονομάζεται «τύπου φάσης» ή “phase – type”. Οι ενδιάμεσες διαδικασίες ονομάζονται **φάσεις**.

⁶ “*Quasi – Birth – and - Death Processes*”, Peter Taylor, Department of Mathematics and Statistics, University of Melbourne:

<http://www.cs.cmu.edu/~osogami/thesis/html/node69.html>

2.2 Η ουρά αναμονής M/PH/1

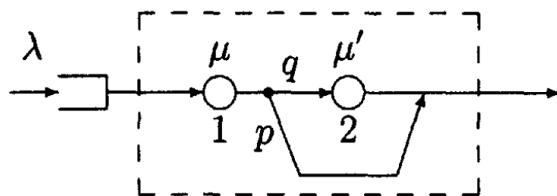
Στο πρώτο μας παράδειγμα, υποθέτουμε πως στην εξυπηρέτηση υπάρχουν δύο φάσεις (ή διαφορετικά πως υπάρχουν δύο φάσεις εξυπηρέτησης).

Η πρώτη φάση εξυπηρέτησης ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο μ . Όταν ολοκληρωθεί, το έργο που έχει παραχθεί μέχρι εκείνη τη στιγμή υπόκειται σε έλεγχο.

Με πιθανότητα p , το έργο αυτό θεωρείται ικανοποιητικό και ο πελάτης αποχωρεί.

Με πιθανότητα όμως $q = 1 - p$, ο πελάτης χρειάζεται επιπλέον εξυπηρέτηση και ακολουθεί η δεύτερη φάση εξυπηρέτησης, η οποία και εκείνη ακολουθεί εκθετική κατανομή με διαφορετική παράμετρο μ' . Στο τέλος αυτής της φάσης εξυπηρέτησης, ο πελάτης αποχωρεί, είτε μείνει ικανοποιημένος από πλευράς εξυπηρέτησης, είτε όχι, δηλαδή αυτόματα, χωρίς επιπλέον έλεγχο.

Εάν επιπλέον υποθέσουμε πως οι πελάτες καταφθάνουν στο σύστημα σύμφωνα με την κατανομή Poisson με παράμετρο λ , τότε έχουμε ένα ολοκληρωμένο παράδειγμα της ουράς αναμονής M/PH/1.



⁷ Το διπλανό σχήμα αναπαριστά την παραπάνω ουρά αναμονής. Όταν η εξυπηρέτηση ενός πελάτη ξεκινά ο πελάτης εισέρχεται στον κόμβο 1, ο οποίος αντιπροσωπεύει την 1^η φάση εξυπηρέτησης. Εάν ο πελάτης

εξυπηρετηθεί επιτυχώς, τότε με πιθανότητα μετάβασης p , εξέρχεται του συστήματος, χωρίς να χρειαστεί ο κόμβος 2. Ο κόμβος 2 αντιπροσωπεύει την 2^η φάση εξυπηρέτησης, στην οποία εισέρχεται ο πελάτης που χρειάζεται πλέον εξυπηρέτηση από εκείνη του πρώτου κόμβου. Από τον 2^ο κόμβο, ο πελάτης εξέρχεται αυτόματα, χωρίς να ερωτάται εάν χρειάζεται παραπάνω εξυπηρέτηση.

Σύμφωνα με την προαναφερθείσα περιγραφή, πλέον η ουρά αναμονής μπορεί να αναπαρασταθεί σαν μία Μαρκοβιανή διαδικασία συνεχούς χρόνου, ορισμένη στο διάστημα $l(0) \cup l(1) \cup l(2) \cup \dots$, όπου $l(0) = \{0\}$ και $l(n) = \{(n, 1), (n, 2)\}$ για κάθε $n \geq 1$.

⁷ Πηγή εικόνας: Latouche, Ramaswami, *Introduction to Matrix Analytic Methods in Stochastic Modeling*, 1987

Η κατάσταση 0 αντιπροσωπεύει ένα άδειο σύστημα και για $n \geq 1$, η κατάσταση (n, j) προϋποθέτει ότι υπάρχουν n πελάτες στην ουρά εξυπηρέτησης, $n - 1$ από τους οποίους βρίσκονται στον χώρο αναμονής και ο πελάτης που εξυπηρετείται βρίσκεται στον κόμβο j .

Αλλαγή στην κατάσταση πραγματοποιείται όταν υπάρχει νέα άφιξη, όταν μία εξυπηρέτηση ολοκληρώνεται ή όταν ένας πελάτης απλώς μετακινείται από τον κόμβο 1 στον 2.

Οι δυνατές μεταβάσεις, μαζί με τις αντίστοιχες πιθανότητες τους, δίνονται από τον παρακάτω πίνακα:

Από	Σε	Με ρυθμό	
0	(1,1)	λ	
(1,1)	0	μp	$\forall n \geq 1$
($n, 1$)	($n, 2$)	μq	$\forall n \geq 2$
($n, 1$)	($n - 1, 1$)	μp	
(1,2)	0	μ'	
($n, 2$)	($n - 1, 1$)	μ'	$\forall n \geq 2$
(n, j)	($n + 1, j$)	λ	$\forall n \geq 1, j = 1, 2$

Κάποια σχόλια στο σημείο αυτό είναι τα ακόλουθα:

- Η Μαρκοβιανή διαδικασία μας οδηγεί στο να αφήνουμε τη θέση 0 με ένα σταθερό ρυθμό λ μόλις ένας νέος πελάτης εισέλθει στο σύστημα.
- Ο νέος πελάτης άμεσα ξεκινά όμως να εξυπηρετείται στον κόμβο 1.
- Όταν η Μαρκοβιανή διαδικασία μας οδηγεί στην κατάσταση $(n, 2)$, για κάποιο $n \geq 1$, το τέλος της εξυπηρέτησης πραγματοποιείται και αυτό με ρυθμό μ' και εάν $n \geq 2$, ένας νέος πελάτης εισέρχεται στον κόμβο 1 και ξεκινά η εξυπηρέτησή του.
- Όταν η Μαρκοβιανή διαδικασία επιτάσσει την παρουσία νέου πελάτη στην κατάσταση $(n, 1)$ για κάποιο $n \geq 1$, ο προηγούμενος πελάτης που ήδη εξυπηρετείται σε αυτήν την κατάσταση αναγκαστικά πηγαίνει στον κόμβο 2 με πιθανότητα q ή με πιθανότητα p εγκαταλείπει το σύστημα.

Εάν κατατάξουμε τις καταστάσεις με βάση το επίπεδο – και αυτό στην προκειμένη περίπτωση προσδιορίζεται με βάση το πλήθος των πελατών – και, μέσα στα επίπεδα αυτά, δώσουμε ένα όνομα – ετικέτα σε κάθε κόμβο διαδικασίας της εξυπηρέτησης, καταλήγουμε στον παρακάτω πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης Q :

$$Q = \begin{array}{c} 0 \\ (1,1) \\ (1,2) \\ (2,1) \\ (2,2) \\ (3,1) \\ (3,2) \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} 0 \quad (1,1) \quad (1,2) \quad (2,1) \quad (2,2) \quad (3,1) \quad (3,2) \quad \dots \\ \left[\begin{array}{c|ccc|ccc|c} -\lambda & \lambda & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ \mu p & q_1^* & \mu q & \lambda & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ \mu' & \cdot & q_2^* & \cdot & \lambda & \cdot & \cdot & \dots \\ \hline \cdot & \mu p & \cdot & q_1^* & \mu q & \lambda & \cdot & \dots \\ \cdot & \mu' & \cdot & \cdot & q_2^* & \cdot & \lambda & \dots \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \mu p & \cdot & q_1^* & \mu q & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \mu' & \cdot & \cdot & q_2^* & \dots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \right] \end{array}$$

όπου $q_1^* = -\lambda - \mu$ και $q_2^* = -\lambda - \mu'$. Ο πίνακας Q τότε γράφεται στην παρακάτω μορφή:

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \tau & 0 & 0 & \dots \\ \mathbf{t} & T - \lambda I & \lambda I & 0 & \dots \\ 0 & \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\tau} & T - \lambda I & \lambda I & \dots \\ 0 & 0 & \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\tau} & T - \lambda I & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

όπου:

$$\boldsymbol{\tau} = [1 \quad 0],$$

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \mu p \\ \mu' \end{bmatrix},$$

$$T = \begin{bmatrix} -\mu & \mu q \\ 0 & -\mu' \end{bmatrix}$$

και

$\mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\tau}$ είναι το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων στη θέση ij που έχει την μορφή:

$$(\mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\tau})_{ij} = t_i \tau_j \text{ για } 1 \leq i, j \leq m.$$

Ο πίνακας I είναι ο γνωστός σε όλους μας μοναδιαίος πίνακας.

Παρατηρούμε και πάλι τις γνωστές ομοιότητες με όσους πίνακες έχουμε συναντήσει μέχρι στιγμής, με την εξής όμως σημαντική διαφορά: ενώ στους άλλους πίνακες πιθανοτήτων

μετάβασης όλα τα blocks τους είχαν τις ίδιες διαστάσεις, στον πίνακα Q που συναντούμε εδώ, τα τρία blocks $-λ, λτ$ και t έχουν διαστάσεις διαφορετικές από τα άλλα blocks. Αυτό οφείλεται στο γεγονός πως στο στάσιμο επίπεδο $l(0)$ εμπεριέχονται λιγότερες καταστάσεις από πιο εσωτερικά στο σύστημα εξυπηρέτησης επίπεδα $l(n)$ με $n \geq 1$.

Πλέον έχουμε περιγράψει όλες τις βασικές έννοιες μιας QBD διαδικασίας. Πριν προχωρήσουμε στα παραδείγματα, θα δώσουμε τον γενικευμένο ορισμό της QBD διαδικασίας στην περίπτωση συνεχούς χρόνου.

2.2.1 Ορισμός:

Μία ομογενής QBD Μαρκοβιανή αλυσίδα σε συνεχή χρόνο είναι μία διαδικασία με τις ακόλουθες ιδιότητες:

- i) Έχει έναν διδιάστατο χώρο καταστάσεων της μορφής $\cup_{n \geq 0} l(n)$, όπου $l(0) = \{(0,1), (0,2), \dots, (0, m')\}$ και $l(n) = \{(n, 1), (n, 2), \dots, (n, m)\}$ για κάθε $n \geq 1$. Υπάρχει περίπτωση να έχουμε επίσης άπειρα σε μέγεθος m, m' . Το υποσύνολο των καταστάσεων της μορφής $l(n)$ καλείται επίπεδο n .
- ii) Μόνο οι μεταβιβάσεις από διαδοχικές καταστάσεις επιτρέπονται. Δηλαδή, δεν επιτρέπεται η μεταβίβαση από την κατάσταση (n, i) στην (n', j) εάν $|n' - n| \geq 2$.
- iii) Για $n \geq 1$, η πιθανότητα μετάβασης μεταξύ δύο καταστάσεων στο ίδιο επίπεδο $l(n)$ ή μεταξύ δύο καταστάσεων σε άλλο επίπεδο, $l(n + 1)$, δεν εξαρτάται από το n . Συγκεκριμένα, εάν πρόκειται να υπολογίσουμε την πιθανότητα μετάβασης από την κατάσταση (n, i) στην (n', j) , αυτή δεν εξαρτάται από τα n, n' , αλλά μόνο από την μεταξύ τους διαφορά.

Τέλος, ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης Q έχει την ακόλουθη μορφή:

$$Q = \begin{bmatrix} B_1 & B_0 & 0 & 0 & \dots \\ B_2 & A_1 & A_0 & 0 & \dots \\ 0 & A_2 & A_1 & A_0 & \dots \\ 0 & 0 & A_2 & A_1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

όπου A_0, A_1, A_2 είναι πίνακες διάστασης m , ο B_1 είναι πίνακας διάστασης m' , ο B_2 είναι τετραγωνικός πίνακας διάστασης $m \times m'$ και ο B_0 επίσης τετραγωνικός πίνακας $m' \times m$.

Κεφάλαιο 3: Απορροφητικές Μαρκοβιανές Αλυσίδες ⁸

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο θα αναφερθούμε σε Μαρκοβιανές αλυσίδες με απορροφητικές καταστάσεις καθώς και στις κατανομές τύπου φάσεων.

3.1 Εισαγωγή

3.1.1 Ορισμός

Οι καταστάσεις i και j λέμε πως επικοινωνούν μεταξύ τους εάν η i είναι προσβάσιμη από την j και αντιστρόφως.

3.1.2 Ορισμός

Έστω C ένα υποσύνολο του συνόλου καταστάσεων S , το οποίο αποτελείται αποκλειστικά από καταστάσεις που επικοινωνούν μεταξύ τους.

Το σύνολο $C \subseteq S$ καλείται κλειστό εάν $P(i, j) = 0$ για κάθε $i \in C$ και για κάθε $j \notin C$.

Εάν το σύνολο C αποτελείται μόνο από μία κατάσταση, δηλαδή αποτελείται μόνο από την κατάσταση i , τότε η τελευταία καλείται απορροφητική κατάσταση.

Προφανώς, εάν η i είναι μια απορροφητική κατάσταση, θα ισχύει ότι $P(i, i) = 1$, δηλαδή η αλυσίδα δεν πρόκειται να αφήσει την απορροφητική κατάσταση εφόσον έχει εισαχθεί σε αυτήν.

3.1.3 Ορισμός

Μία κατάσταση $i \in S$ καλείται **μεταβατική ή παροδική** εάν η πιθανότητα να επιστρέψει η αλυσίδα σε αυτήν για πρώτη φορά είναι μικρότερη του 1.

Η κατάσταση $i \in S$ καλείται **έμμονη ή επαναληπτική** εάν η πιθανότητα να επιστρέψει η αλυσίδα σε αυτήν για πρώτη φορά είναι ίση με 1.

Η κατάσταση $i \in S$ καλείται **μηδενική** εάν ο μέσος χρόνος επαναφοράς της αλυσίδας σε αυτήν είναι πεπερασμένος – δηλαδή εάν αυτός ο χρόνος υπάρχει.

⁸ «Πινακοεκθετικές κατανομές και κατανομές τύπου φάσεων στη θεωρία ανανέωσης και τη θεωρία κινδύνου, *Matrix Exponential and phase type distributions in renewal and risk theory*», Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία της Ελένης Α. Βαταμίδου, Επιβλέπων: Γεώργιος Τσακλίδης Αν. Καθ. Α.Π.Θ., Θεσσαλονίκη, Ιούνιος 2010. [Link: http://invenio.lib.auth.gr/record/122858?ln=e1](http://invenio.lib.auth.gr/record/122858?ln=e1)

Όλες οι καταστάσεις σε ένα κλειστό σύστημα με επικοινωνούσες καταστάσεις είναι έμμονες. Μάλιστα, κάθε κατάσταση στο σύνολο καταστάσεων S μπορεί να διαμεριστεί σε επιμέρους υποσύνολα $C_i \subset S$, $i = 1, 2, \dots, N$ και οι υπόλοιπες καταστάσεις μπορούν να «συλληχθούν» σε ένα άλλο σύνολο, το $\mathcal{P} = S \setminus \{ \cup_{i=1}^N C_i \}$.

Εάν το σύνολο \mathcal{P} είναι μη κενό, τότε περιλαμβάνει και καταστάσεις i τέτοιες, οι οποίες δεν μπορούν – σε γενικές γραμμές - να εισαχθούν σε κάποιο από τα κλειστά σύνολα C_i , όπου οι καταστάσεις επικοινωνούν μεταξύ τους, όμως υπάρχει μία πολύ μικρή, μη-μηδενική πιθανότητα να διέλθει τελικά μία κατάσταση i σε κάποιο από αυτά τα υποσύνολα, κάτι που υπονοεί πως και το σύνολο \mathcal{P} αποτελείται από μεταβατικές καταστάσεις.

Εάν κάθε κατάσταση i μίας Μαρκοβιανής αλυσίδας είναι είτε απορροφητική είτε μεταβατική, τότε η Μαρκοβιανή αλυσίδα καλείται απορροφητική.

Θεωρούμε πλέον ένα πεπερασμένο σύνολο καταστάσεων S μίας απορροφητικής μαρκοβιανής αλυσίδας συνεχούς χρόνου της μορφής $\{X(t)\}_{t \geq 0}^{\infty}$, το οποίο περιλαμβάνει τις μεταβατικές καταστάσεις $S_T = \{1, 2, \dots, n\}$ καθώς και την μοναδική απορροφητική κατάσταση $n + 1$. Διατάσσουμε τις καταστάσεις της αλυσίδας με τέτοιον τρόπο ώστε οι n μεταβατικές καταστάσεις να εμφανίζονται πρώτες, ενώ ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης Q γράφεται πλέον ως εξής:

$$Q = \left[\begin{array}{c|c} \overbrace{\mathbf{D}_0}^n & \overbrace{\mathbf{d}_1}^1 \\ \hline \mathbf{0} & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \left. \vphantom{\begin{array}{c|c} \mathbf{D}_0 & \mathbf{d}_1 \\ \hline \mathbf{0} & 0 \end{array}} \right\} n \\ \left. \vphantom{\begin{array}{c|c} \mathbf{D}_0 & \mathbf{d}_1 \\ \hline \mathbf{0} & 0 \end{array}} \right\} 1 \end{array} .$$

Εικόνα 4

Συλλέγοντας όλες τις μεταβατικές καταστάσεις, έχουμε τον $n \times n$ πίνακα \mathbf{D}_0 , ο οποίος περιγράφει μόνο τις μεταβάσεις μεταξύ των μεταβατικών καταστάσεων.

Το $n \times 1$ διάνυσμα \mathbf{d}_1 περιλαμβάνει τις απευθείας μεταβάσεις από μεταβατικές καταστάσεις στην απορροφητική.

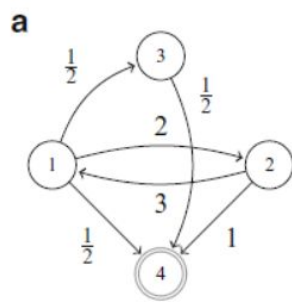
Το διάνυσμα – γραμμή $\mathbf{0}$ αποτελείται αποκλειστικά από μηδενικά, αφού δεν γίνεται να υπάρξει μετάβαση από την απορροφητική κατάσταση σε κάποια από τις μεταβατικές.

Το τελευταίο στοιχείο του πίνακα Q είναι το 0. Αυτό το στοιχείο προσδιορίζει την πιθανότητα μετάβασης έξω από την απορροφητική κατάσταση.

Ας υποθέσουμε πως η αλυσίδα με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης τον Q της Εικόνας 4 είναι απορροφητική. Η κατάσταση 4 είναι απορροφητική, επομένως οι πιθανότητες μετάβασης στις υπόλοιπες θέσεις είναι ίσες με το 0. Τότε έχουμε τους πίνακες D_0 , d_1 και 0 , οι οποίοι αποτελούν τους γεννήτορες του πίνακα Q .

Εάν υποθέσουμε πως όλες οι καταστάσεις είναι μεταβατικές, τότε ο πίνακας D_0 είναι αντιστρέψιμος. Η τιμή του ανάστροφου πίνακα $(-D_0)^{-1}(i, j)$ εκφράζει τον μέσο χρόνο παραμονής στην κατάσταση j - πριν την απορρόφηση - δεδομένου ότι η προηγούμενη κατάσταση στην οποία βρισκόταν η αλυσίδα ήταν η θέση i .

3.2 Παράδειγμα



b

$$Q = \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Εικόνα 5

Στην διπλανή εικόνα παρουσιάζεται μία αλυσίδα CTMC με απορροφητική την θέση 4. Επομένως, ο D_0 είναι 3×3 και ο d_1 3×1 . Στην εικόνα a έχουμε το διάγραμμα των

πιθανοτήτων μετάβασης μεταξύ των καταστάσεων ενώ ο πίνακας Q της εικόνας b είναι ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης της απορροφητικής αλυσίδας που μελετούμε.

Κεφάλαιο 4: Phase – Type Κατανομές (Κατανομές τύπου φάσεων)

4.1 Εισαγωγή στις Phase – Type Κατανομές

Πλέον, μπορούμε να δώσουμε τον εξής ορισμό για τις κατανομές τύπου φάσης:

4.1.1 Ορισμός

Μία κατανομή τύπου φάσης περιγράφει την κατανομή μίας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X , ορισμένης στο $[0, +\infty)$ η οποία αναπαριστά το χρόνο που μεσολαβεί για την εισαγωγή σε μία απορροφητική κατάσταση από ένα σύνολο μεταβατικών καταστάσεων S_T , το οποίο ανήκει σε απορροφητική Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου $\{X_T\}_{t \geq 0}^\infty$.

Ισχύει πλέον ότι το πεπερασμένης διάστασης σύνολο καταστάσεων S ισούται με:

$$S = S_T \cup S_A = \{1, 2, \dots, n\} \cup \{n+1\},$$

δηλαδή αποτελείται από το σύνολο των μεταβατικών καταστάσεων $S_T = \{1, 2, \dots, n\}$, οι οποίες καλούνται φάσεις, και από τις απορροφητικές καταστάσεις $S_A = \{n+1\}$.

Η CTMC (Continuous Time Markov Chain) $\{X_t\}_{t \geq 0}^\infty$ μαρκοβιανή αλυσίδα έχει μοναδικό διάνυσμα πιθανοτήτων, το $[\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}(n+1)]$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης τον \mathbf{Q} :

$$\mathbf{Q} = \left[\begin{array}{c|c} \overbrace{\mathbf{D}_0}^n & \overbrace{\mathbf{d}_1}^1 \\ \hline \mathbf{0} & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \left. \vphantom{\begin{array}{c|c} \mathbf{D}_0 & \mathbf{d}_1 \end{array}} \right\} n \\ \left. \vphantom{\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & 0 \end{array}} \right\} 1 \end{array}$$

Το διάνυσμα $\boldsymbol{\pi}$ έχει διάσταση n και είναι διάνυσμα γραμμής και το $\boldsymbol{\pi}(n+1)$ είναι η πιθανότητα για την απορροφητική κατάσταση $n+1$.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να σημειώσουμε πως: $\mathbf{D}_0 \mathbf{1} + \mathbf{d}_1 = \mathbf{0}$, όπου το $\mathbf{1}$ είναι ο πίνακας – στήλη που αποτελείται μόνο από n μοναδιαία στοιχεία και το $\mathbf{0}$ είναι το διάνυσμα στήλη που αποτελείται από n μηδενικά στοιχεία. Η τελευταία σχέση μπορεί να γραφεί προφανώς ως εξής: $\mathbf{d}_1 = -\mathbf{D}_0 \mathbf{1}$.

Συγκεκριμένα, για τον πίνακα \mathbf{D}_0 ισχύουν τα παρακάτω:

$$\mathbf{D}_0(i, i) \leq 0, \mathbf{D}_0(i, j) \geq 0, \text{ για } i \neq j,$$

και, κατά συνέπεια, ισχύουν τα εξής για τον πίνακα \mathbf{d}_1 :

$$\mathbf{d}_1(i) \geq 0 \text{ και } \sum_{j \in S_T} \mathbf{D}_0(i, j) \leq 0.$$

Η μαρκοβιανή αλυσίδα ξεκινά από μία κατάσταση μέσα από τον χώρο $S = S_T \cup S_A$.

Το διάνυσμα $\boldsymbol{\pi} = [\pi(1), \dots, \pi(n)]$ περιγράφει τις πιθανότητες που αφορούν στις μεταβάσεις της αλυσίδας μεταξύ των μεταβατικών καταστάσεων, ενώ, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, η πιθανότητα $\pi(n+1)$ περιγράφει μία απευθείας εισχώρηση της μαρκοβιανής αλυσίδας στην απορροφητική κατάσταση και γι αυτό καλείται *πιθανότητα απορρόφησης*.

Προφανώς, ισχύει ότι $\boldsymbol{\pi}\mathbf{1} + \pi(n+1) = 1$.

Στις περισσότερες περιπτώσεις θεωρούμε πως $\pi(n+1) = 0$, δηλαδή θεωρούμε πως δεν υπάρχει εισχώρηση της μαρκοβιανής αλυσίδας στην απορροφητική κατάσταση $n+1$. Τότε, $\boldsymbol{\pi}\mathbf{1} = 1$ και άρα η X είναι αυστηρά θετικώς ορισμένη.

Αφού η μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_t\}_{t \geq 0}^\infty$ είναι CTMC, ο χρονος παραμονής σε κάθε φάση i , $1 \leq i \leq n$ ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = -\mathbf{D}_0(i, i)$, όπου:

$$\mathbf{D}_0(i, i) = -\left(\sum_{i \neq j} \mathbf{D}_0(i, j) + \mathbf{d}_1(i)\right).$$

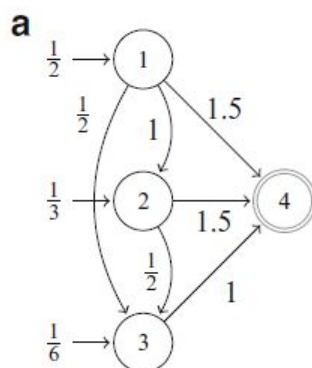
Το διάνυσμα – στήλη \mathbf{d}_1 αναπαριστά τις πιθανότητες εξόδου, δηλαδή το στοιχείο $\mathbf{d}_1(i)$ μας δίνει την πιθανότητα, ενώ βρίσκεται η αλυσίδα στην μεταβατική κατάσταση i , να την εγκαταλείψει και να εγκαταλείψει εξολοκλήρου και το σύνολο των μεταβατικών καταστάσεων S_T με σκοπό την εισαγωγή της στην απορροφητική κατάσταση $n+1$.

4.2 Παράδειγμα

Έστω η τύπου φάσης μαρκοβιανή αλυσίδα που περιγράφεται από τον υποπίνακα \mathbf{D}_0 , όπως περιγράφεται παρακάτω, στο σύστημα που παρουσιάζεται στην εικόνα **b**:

$$\mathbf{b} \quad \mathbf{D}_0 = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0.5 \\ 0 & -2 & 0.5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.5 \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$\pi = \left[\frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{6} \right]$$

όπου παρατηρούμε πως όλες οι καταστάσεις είναι μεταβατικές, αφού $\pi(i) \neq 0$, για κάθε μεταβατική κατάσταση i . Ακόμη, από οποιαδήποτε κατάσταση i , μπορεί η αλυσίδα να εξαχθεί και να εισαχθεί στην απορροφητική κατάσταση 4, όπως φαίνεται στο ακόλουθο διάγραμμα:



4.3 Διακριτές Phase – Type κατανομές

4.3.1 Ορισμός

Μια κατανομή στο $\{1, 2, \dots\}$ είναι *διακριτή κατανομή τύπου φάσεων* με αναπαράσταση $PH_d(\mathbf{r}, T)$ δεδομένου ότι ο χρόνος απορρόφησης πραγματοποιείται στην κατάσταση, ακολουθώντας μία Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου. Ο πίνακας μετάβασης είναι ο $P = (p_{ij})$ και το διάνυσμα πιθανοτήτων εξόδου είναι το $\mathbf{p} = (\tau_0, \mathbf{r})$. Τότε, ο πίνακας P είναι υποστοχαστικός και το διάνυσμα των πιθανοτήτων εξόδου γράφεται στην εξής μορφή: $\mathbf{p} = \mathbf{1} - P\mathbf{1}$.

Τέλος, ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης είναι της μορφής: $P = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{t} & T \end{bmatrix}$.

Η αναπαράσταση που περιγράφει την διακριτή κατανομή τύπου φάσης είναι της μορφής (\mathbf{a}, T) .

Κατανομή της διακριτής κατανομής τύπου φάσης

Θεωρούμε τις πιθανότητες μετάβασης μεταξύ μεταβατικών καταστάσεων, έπειτα από n μετακινήσεις της Μαρκοβιανής Αλυσίδας. Οι πιθανότητες αυτές είναι της μορφής: $\Pr(X_n = i) = p_i^{(n)}$ και συνθέτουν το m – διάστατο διάνυσμα:

$$\mathbf{p}^{(n)} = (p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \dots, p_m^{(n)}) = \mathbf{p}^{(n-1)}T = \mathbf{a}T^n.$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας προκύπτει ως ακολούθως:

$$f(x) = \sum_{i=1}^m p_i^{(x-1)}T_i^0 = \mathbf{p}^{(x-1)}\mathbf{T}^0 = \mathbf{a}T^{x-1}\mathbf{T}^0, \quad x > 0.$$

4.4 Συνεχείς Phase – Type Κατανομές

Σε αυτήν την ενότητα θα παραθέσουμε τις βασικές αναλυτικές ιδιότητες των κατανομών τύπου φάσεων. Εν πρώτοις, ορίζουμε τον εκθετικό πίνακα $e^{\mathbf{Q}}$:

$$e^{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} e^{D_0} & \mathbf{1} - e^{D_0} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} .$$

Η συνάρτηση της κατανομής τύπου φάσεων μίας τυχαίας μεταβλητής με αναπαράσταση την (π, \mathbf{D}_0) δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$F(x) = 1 - \pi e^{D_0 x} \mathbf{1}, \text{ για } x \geq 0 \text{ με } \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} . e^{\mathbf{Q}} = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \mathbf{Q}^k$$

Επομένως, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της συνεχούς κατανομής τύπου φάσης είναι η εξής:

$$f(x) = \pi e^{D_0 x} \mathbf{d}_1, \text{ για } x \geq 0 .$$

Ας υποθέσουμε πως μία τυχαία μεταβλητή X έχει την παραπάνω Μαρκοβιανή αλυσίδα με γεννήτορα πίνακα τον \mathbf{Q} , όπως ορίστηκε και παραπάνω, δηλαδή τον:

$$\mathbf{Q} = \left[\begin{array}{c|c} \overbrace{\mathbf{D}_0}^n & \overbrace{\mathbf{d}_1}^1 \\ \hline \mathbf{0} & 0 \end{array} \right] \begin{matrix} \left. \vphantom{\begin{array}{c|c} \mathbf{D}_0 & \mathbf{d}_1 \end{array}} \right\} n \\ \left. \vphantom{\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & 0 \end{array}} \right\} 1 \end{matrix} .$$

Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης περιγράφεται από τη σχέση:

$P_t(i, j) = Pr(X(t) = j | X(0) = i) =$ πιθανότητα στη χρονική στιγμή t να βρεθούμε στην φάση j ενώ αρχικά ήμασταν στην i .

Οι πιθανότητες αυτές δίνονται από τη σχέση: $\mathbf{P}_t = e^{\mathbf{Q}t}$, όπου:

$$\mathbf{Q} = \left[\begin{array}{c|c} \overbrace{\mathbf{D}_0}^n & \overbrace{\mathbf{d}_1}^1 \\ \hline \mathbf{0} & 0 \end{array} \right] \begin{matrix} \left. \vphantom{\begin{array}{c|c} \mathbf{D}_0 & \mathbf{d}_1 \end{array}} \right\} n \\ \left. \vphantom{\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & 0 \end{array}} \right\} 1 \end{matrix} \quad \text{και} \quad e^{\mathbf{Q}t} = \begin{pmatrix} e^{D_0 t} & \mathbf{1} - e^{D_0 t} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} .$$

Για την κατανομή της μεταβλητής t που αφορά στο χρόνο που μεσολαβεί μέχρι την απορρόφηση έχουμε ότι:

$$F(t) = \Pr(X(t) = n + 1) = \sum_{1 \leq i \leq n+1} \Pr(X(0) = i) \Pr(X(t) = n + 1 | X(0) = i) = \sum_{1 \leq i \leq n+1} \pi(i) P_t(i, n + 1) = \pi \mathbf{1} - e^{D_0 t} \mathbf{1} = 1 - \pi e^{D_0 t} \mathbf{1}.$$

$$\text{Επομένως: } f(t) = F'(t) = -\pi \frac{d}{dt} P_t \mathbf{1} = -\pi e^{D_0 t} D_0 \mathbf{1} = -\pi e^{D_0 t} \mathbf{d}_1 = -D_0 \mathbf{1}.$$

Ο αναμενόμενος συνολικός χρόνος αναμονής που καταναλώνεται στην φάση j πριν την απορρόφηση, δεδομένου ότι η αρχική φάση στην οποία βρίσκεται η μαρκοβιανή αλυσίδα είναι η i , ισούται με $-D_0^{-1}(i, j)$.

Η i -οστή ροπή μίας κατανομής τύπου φάσης δίνεται από τον πίνακα $M = -D_0^{-1}$:

$$\mu_i = E(X^i) = i! \pi M^i \mathbf{1}.$$

Τότε, η παράμετρος της κατανομής ορίζεται ως εξής:

$$\lambda = \frac{1}{E(X)} = \frac{1}{\pi M \mathbf{1}}.$$

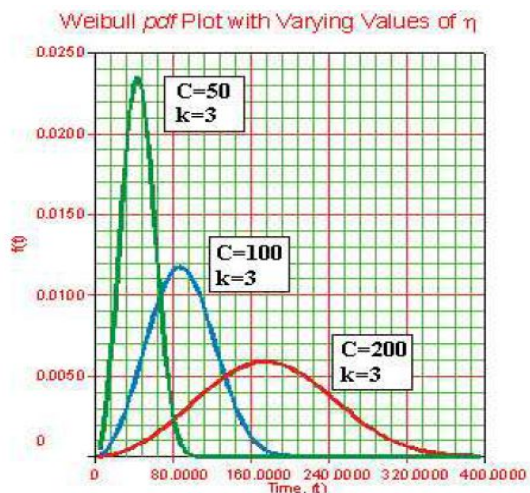
Ο συντελεστής μεταβλητότητας ορίζεται ως εξής:

$$C^2 = \frac{E(X^2)}{(E(X))^2} - 1 = \frac{2\pi(M)^2 \mathbf{1}}{(\pi M \mathbf{1})^2} - 1.$$

Οι συνεχείς κατανομές τύπου φάσεων είναι πυκνές στην κλάση των κατανομών του $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Αυτό σημαίνει πως οποιαδήποτε αυστηρά θετική κατανομή, δηλαδή ορισμένη στο $(0, +\infty)$, μπορεί να προσεγγισθεί επαρκώς από μία PHD κατανομή.

4.5 Παράδειγμα: Προσέγγιση της κατανομής Weibull μέσω μιας PHD κατανομής¹⁰

Η κατανομή Weibull περιγράφει ικανοποιητικά τα ανεμολογικά χαρακτηριστικά στις περιοχές της εύκρατης ζώνης και για 100 μέτρα από το έδαφος.



Εκφράζει μάλιστα την πιθανότητα η ταχύτητα του ανέμου V να βρίσκεται στην περιοχή $(V - \frac{dV}{2}, V + \frac{dV}{2})$:

$$P(V) = \left(\frac{k}{C}\right) \cdot \left(\frac{V}{C}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{V}{C}\right)^k}.$$

Οι παράμετροι C και k χαρακτηρίζουν την κατανομή πιθανότητας ανέμου.

Η παράμετρος C ονομάζεται παράμετρος μεγέθους (shape parameter) και καθορίζει τη θέση της καμπύλης σε σχέση με τον οριζόντιο άξονα.

Η παράμετρος k ονομάζεται παράμετρος μορφής ή κλίση (scalar parameter) και καθορίζει την διασπορά των τιμών.

Παρατηρούμε λοιπόν πως η κατανομή Weibull εφαρμόζεται ευρέως στους παραπάνω τομείς και αξίζει μελέτης μέσω της προσέγγισής της από μία PH κατανομή. Στην παρούσα εργασία, θα παρουσιάσουμε αυτήν την προσέγγιση μέσω της μεθόδου των ροπών, ουσιαστικά μιας μεθόδου που είναι κατανομή τύπου φάσεων και μάλιστα τεσσάρων φάσεων (ροπές μέχρι 4^{ης} τάξης).

¹⁰ Από την διπλωματική εργασία με θέμα: «Ανανεώσιμες Πηγές Ενέργειας, Αιολική Ενέργεια», Εργαστήριο Αιολικής Ενέργειας, ΤΕΙ Κρήτης, Δημήτρης Αλ. Κατσαπρακάκης

4.6 Λίγα λόγια για τη μέθοδο των ροπών

Τυπικά, η μέθοδος των ροπών επικεντρώνεται στις τρεις πρώτες ροπές που περιγράφουν τα δεδομένα που ακολουθούν την κατανομή που προσπαθούμε να προσεγγίσουμε. Η 1^η ροπή (ροπή 1^{ης} τάξης) αφορά στον μέσο, η 2^η (ροπή 2ας τάξης) στην διακύμανση και η 3^η (ροπή 3^{ης} τάξης) στην ασυμμετρία (skewness). Ορισμένες φορές, οι τρεις ροπές δεν αρκούν για την προσέγγιση μιας κατανομής και γι αυτόν τον λόγο υπολογίζουμε και την 4^η ροπή (ροπή 4^{ης} τάξης), η οποία αφορά στην κύρτωση της κατανομής. Η τελευταία ωστόσο είναι πιο σπάνιο να χρησιμεύσει, καθώς αφορά ουσιαστικά στο πόσο αιχμηρό είναι το μέγιστο του γραφήματος της κατανομής που μελετούμε¹¹. Όλες οι ροπές προκύπτουν από διαδοχικές παραγωγίσεις της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της εκάστοτε κατανομής που θέλουμε να προσεγγίσουμε.

Γενικότερα, η συνάρτηση πυκνότητας – πιθανότητας της κατανομής Weibull έχει τη μορφή:

$$w(t) = a\beta^{-\alpha}t^{a-1}e^{-\left(\frac{t}{\beta}\right)^\alpha}.$$

Συνεπώς έχουμε – ύστερα από πράξεις:

$$\text{Ροπή 1^{ης} τάξης – Μέσος: } \mu = \beta \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)$$

$$\text{Ροπή 2^{ης} τάξης – Διακύμανση: } \sigma^2 = \beta^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \mu^2 \right]$$

$$\text{Ροπή 3^{ης} τάξης – Ασυμμετρία: } \mu_3 = \frac{\beta^3 \Gamma\left(1 + \frac{3}{\alpha}\right) - 3\mu\sigma^2 - \mu^3}{\sigma^3}$$

$$\text{Ροπή 4^{ης} τάξης – Κύρτωση: } \mu_4 = \frac{-6\Gamma^4\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) + 12\Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \cdot \Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - 3\Gamma^2\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - 4\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \cdot \Gamma\left(1 + \frac{3}{\alpha}\right) + \Gamma\left(1 + \frac{4}{\alpha}\right)}{\left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\right]^2}$$

όπου $\Gamma(t)$ είναι η Γάμμα κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-y} y^{t-1} dy, \quad t > 0.$$

Για $\alpha = 1$, προκύπτει η εκθετική κατανομή με μέση τιμή $\mu = \beta$. Οι παραπάνω ροπές αποδεικνύεται πως αντιπροσωπεύουν επαρκώς την προσέγγιση των παραμέτρων της Weibull κατανομής, σε αντίθεση με άλλες μεθόδους, όπως η αρχή των ελαχίστων τετραγώνων.

¹¹ Μια κατανομή με μεγάλη κύρτωση έχει ένα «αιχμηρότερο» “peak” και πιο φαρδιές «ουρές», ενώ το αντίθετο συμβαίνει στην περίπτωση της μικρής κύρτωσης, δηλαδή έχουμε ένα γράφημα με πιο «στρογγυλεμένο» “peak” και πιο λεπτές «ουρές».

4.7 Παράδειγμα: Η ουρά αναμονής PH/M/1

Στο δεύτερό μας παράδειγμα για την ουρά αναμονής PH, θα χρησιμοποιήσουμε την κατανομή Erlang.

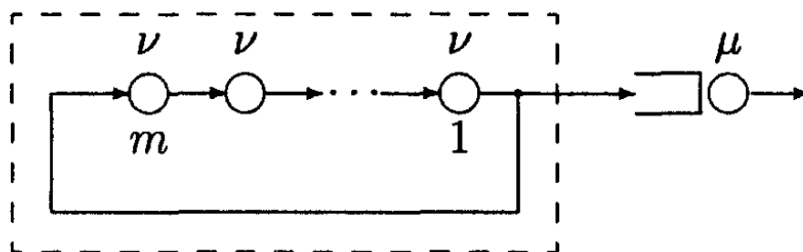
Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μίας μεταβλητής που ακολουθεί κατανομή Erlang με θετικές παραμέτρους m, ν είναι η εξής:

$$f_{m,\nu}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{(m-1)!} \nu^m x^{m-1} e^{-\nu x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Υποθέτουμε πως έχουμε έναν μοναδικό εξυπηρετητή, στον οποίο οι αφίξεις πραγματοποιούνται σύμφωνα με τη νέα διαδικασία και οι χρόνοι εξυπηρέτησης ακολουθούν εκθετική κατανομή. Τα μεσοδιαστήματα μεταξύ των αφίξεων ακολουθούν τη συνάρτηση πιθανότητας $F_{m,\nu}(\cdot)$. Αυτό είναι ένα παράδειγμα της ουράς PH/M/1 για την οποία οι ενδιάμεσες αφίξεις που πραγματοποιούνται στα μεσοδιαστήματα, ακολουθούν Erlang κατανομή.

Είναι επίσης γνωστό ότι το άθροισμα m ανεξάρτητων κατανομών, που ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο ν , ακολουθεί κατανομή Erlang (m, ν).

Εάν ακολουθήσουμε τη μέθοδο των φάσεων, θα βρούμε πως η συγκεκριμένη PH/M/1 ουρά αναμονής μπορεί να παρασταθεί ως εξής:



Ο ρυθμός εξυπηρέτησης είναι μ και οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν κατανομές Erlang $F_{m,\nu}(\cdot)$. Επικεντρωνόμαστε στο πεδίο μεταξύ των διακεκομμένων ευθυγράμμων τμημάτων: ένας πελάτης, ο οποίος βρίσκεται εκεί προκειμένου να εξυπηρετηθεί, περιφέρεται κυκλικά ανάμεσα στους κόμβους του πεδίου και κάθε φορά, η άφιξη σε έναν από αυτούς, διαρκεί ένα «ενδιάμεσο χρονικό διάστημα» που αντιπροσωπεύεται από μία μεταβλητή που

ακολουθεί εκθετική κατανομή. Μόλις ο πελάτης αναχωρήσει από τον κόμβο 1 και γυρίσει στον κόμβο m , ένας νέος πελάτης εισέρχεται στο σύστημα.

Σύμφωνα με την παραπάνω περιγραφή, η ουρά αναμονής μπορεί να αναπαρασταθεί ως μία διδιάστατη Μαρκοβιανή διαδικασία της μορφής $\{(N(t), \varphi(t)), t \geq 0\}$ στο πεδίο ορισμού καταστάσεων $\cup_{n \geq 0} l(n)$, όπου $l(n) = \{(n, 1), (n, 2), \dots, (n, m)\}$ για κάθε $n \geq 0$, όπου $N(t)$ και $\varphi(t)$ αναπαριστούν το πλήθος των πελατών στο σύστημα και την θέση του εξυπηρετούμενου στον χρόνο t αντίστοιχα. Οι πιθανές μεταβάσεις στο σύστημα αυτό παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα:

Από	Σε	Με ρυθμό	
(n, j)	$(n - 1, j)$	μ	$\forall n \geq 1$
(n, j)	$(n, j - 1)$	ν	$\forall n \geq 0, j \geq 2$
$(n, 1)$	$(n + 1, m)$	ν	$\forall n \geq 0$

$$Q = \begin{bmatrix} q^\circ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \nu & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ \nu & q^\circ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ \cdot & \nu & q^\circ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ \mu & \cdot & \cdot & q^* & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \nu & \dots \\ \cdot & \mu & \cdot & \nu & q^* & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \mu & \cdot & \nu & q^* & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \mu & \cdot & \cdot & q^* & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mu & \cdot & \nu & q^* & \cdot & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mu & \cdot & \nu & q^* & \cdot & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας Q είναι ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης για το σύστημα που μελετούμε.

Ισχύει ότι $q^0 = -\nu$ και $q^* = -\nu - \mu$.

Γενικά, έχουμε ότι:

$$Q = \begin{bmatrix} S & \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\sigma} & 0 & 0 & \dots \\ \mu I & S - \mu I & \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\sigma} & 0 & \dots \\ 0 & \mu I & S - \mu I & \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\sigma} & \dots \\ 0 & 0 & \mu I & S - \mu I & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

όπου τα διανύσματα \mathbf{s} και $\boldsymbol{\sigma}$, όπως και ο πίνακας S είναι διάστασης m ορίζονται ως ακολούθως:

$$\boldsymbol{\sigma} = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1]$$

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \nu \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} -\nu & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \nu & -\nu & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \nu & -\nu & \dots & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & -\nu & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \nu & -\nu \end{bmatrix}$$

4.8 Παράδειγμα: Χρόνος ζωής Εξοπλισμού

Ας υποθέσουμε έναν εξοπλισμό ο οποίος παρουσιάζει τριών ειδών πιθανές αποτυχίες. Όταν ο εξοπλισμός αυτός είναι καινούριος, ο χρόνος που απαιτείται για να επέλθει η αποτυχία ακολουθεί εκθετική κατανομή, με μέση τιμή τις 100 ώρες και η αποτυχία έχει τρεις μορφές, με πιθανότητα 0.5, 0.4 και 0.1 αντίστοιχα. Τα πρώτα δύο είδη αποτυχίας επιδέχονται λύση (nonfatal) αλλά το τελευταίο είναι καθοριστικό και δεν επιδέχεται επιδιόρθωση (fatal).

Χαρακτηρίζουμε το πρώτο είδος αποτυχίας ως αποτυχία Τύπου 1. Η Τύπου 1, όταν επιδιορθώνεται ο εξοπλισμός, τον αφήνει στην αρχική του κατάσταση, δηλαδή τον επιστρέφει ως καινούριο.

Το δεύτερο είδος αποτυχίας, το οποίο ονομάζουμε αποτυχία Τύπου 2, όταν ο εξοπλισμός δεχθεί επιδιόρθωση, μειώνεται η μέση τιμή ζωής του μέχρι την επόμενη αποτυχία από 100

σε 50 ώρες και διαφοροποιούνται οι πιθανότητες αποτυχίας του μηχανισμού σε 0.75, 0.2 και 0.05 για την αποτυχία τύπου 1, 2, 3 αντίστοιχα. Η αποτυχία Τύπου 3 είναι προφανώς το τρίτο είδος αποτυχίας.

Ο χρόνος ζωής του εξοπλισμού είναι μία τυχαία μεταβλητή τύπου φάσης (PH) με αναπαράσταση υπό μορφή πινάκων:

$$\tau = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0],$$

$$T = \begin{bmatrix} -0.01 & 0.005 & 0.004 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0.015 & 0.004 & -0.02 \end{bmatrix}.$$

Στην κατάσταση 1, ο εξοπλισμός είναι καινούριος. Στην 4^η κατάσταση, ο εξοπλισμός λειτουργεί μετά από επιδιόρθωση αποτυχίας τύπου 2 και στις καταστάσεις 2 και 3 μετά από επιδιορθώσεις αποτυχίας τύπου 1 και 2 αντίστοιχα.

Σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις, παρατηρούμε πως οι πίνακες Q είναι **μη αρνητικοί**.

Κεφάλαιο 5: Εισαγωγή στους Μη Αρνητικούς Πίνακες¹²

Έστω $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Αν $A \geq 0$, δηλαδή $a_{ij} \geq 0, \forall i, j$, τότε λέμε ότι ο A είναι μη αρνητικός και αν $A > 0$, δηλαδή $a_{ij} > 0, \forall i, j$, λέμε ότι ο A είναι θετικός πίνακας. Στην πράξη, πιο συχνά έχουμε να κάνουμε με μη αρνητικούς πίνακες παρά με θετικούς.

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ με φάσμα $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(\lambda - I_n A) = 0\}$. Η φασματική ακτίνα του A ορίζεται ως: $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$.

Για τα επόμενα, απαραίτητη είναι η σχέση: $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|_2^{1/k} = \rho(A)$.

Ένα από τα πιο σημαντικά Λήμματα που αφορούν τους μη Αρνητικούς Πίνακες είναι το παρακάτω:

5.1 Λήμμα:

Αν οι γραμμές ενός τετραγωνικού πίνακα $A \geq 0$ έχουν σταθερό άθροισμα ξ , τότε:

$$\rho(A) = \|A\|_\infty = \xi.$$

Αν οι στήλες του πίνακα A έχουν σταθερό άθροισμα ξ , τότε:

$$\rho(A) = \|A\|_1 = \xi.$$

Απόδειξη:

Γνωρίζουμε πως $\rho(A) \leq \|A\|$, για κάθε νόρμα πίνακα.

Αν όμως το άθροισμα των γραμμών είναι σταθερό, τότε αυτό είναι ίσο με $\|A\|_\infty$.

Άρα, για το σταθερό διάνυσμα $x = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T$, ισχύει ότι $Ax = \|A\|_\infty x$.

Δηλαδή, η νόρμα $\|A\|_\infty$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα A με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το x και $\rho(A) = \|A\|_\infty$. Ομοίως εργαζόμαστε και για τις στήλες, εφαρμόζοντας τα πιο πάνω για τον πίνακα A^T .

¹² «Θέματα Ανάλυσης Πινάκων», Παναγιώτης Ι. Ψαρράκος, Καθηγητής Ε.Μ.Π., <http://www.math.ntua.gr/~ppsarr/>

5.2 Θεώρημα Perron:

Έστω $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ με $A > 0$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

- i) $\rho(A) > 0$.
- ii) Η φασματική ακτίνα $\rho(A)$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα A .
- iii) Υπάρχει θετικό διάνυσμα x με $Ax = \rho(A)x$.
- iv) Η $\rho(A)$ είναι απλή ιδιοτιμή του πίνακα A .
- v) Για κάθε ιδιοτιμή $\lambda \neq \rho(A)$ του A , ισχύει $|\lambda| < \rho(A)$, δηλαδή η $\rho(A)$ είναι η μοναδική ιδιοτιμή μέγιστου μέτρου.¹³
- vi) $\lim_{k \rightarrow \infty} (\rho(A)^{-1}A)^k = L$, όπου $L = xy^T$, $Ax = \rho(A)x$, $A^T y = \rho(A)y$, $x, y > 0$ και $x^T y = 1$.

Το Θεώρημα Perron είναι από τα πιο σημαντικά στη θεωρία των μη αρνητικών πινάκων και οι εφαρμογές του το καθιστούν σημείο αναφοράς για πολλά από τα αποτελέσματα που ακολουθούν.

Παρακάτω, θα αναφερθούμε και στην έννοια του **μη υποβιβάσιμου (irreducible)** πίνακα.

5.3 Ορισμοί:

- i. Ένας τετραγωνικός πίνακας λέγεται **πίνακας μετάθεσης** αν έχει ακριβώς ένα στοιχείο σε κάθε στήλη και κάθε γραμμή ίσο με 1 και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του είναι μηδενικά.
- ii. Ένας πίνακας $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n \geq 2$ καλείται **υποβιβάσιμος (reducible)** εάν υπάρχει πίνακας μετάθεσης P και φυσικός αριθμός $r \leq n$, τέτοιοι ώστε

$$P^T A P = P \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix} P^T,$$

όπου $B \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $C \in \mathbb{R}^{r \times (n-r)}$, $D \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$ και $0 \in \mathbb{R}^{(n-r) \times n}$.

- iii. Ένας πίνακας $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ καλείται **μη υποβιβάσιμος (irreducible)** αν δεν είναι υποβιβάσιμος.

¹³ Εδώ το λ δεν έχει σχέση με την πιθανότητα της προς τα εμπρός μετάβασης της quasi – birth – and – death διαδικασίας.

5.4 Παρατηρήσεις

1. Οι υποπίνακες B, C, D δεν είναι απαραίτητο να έχουν όλα τα στοιχεία τους μη μηδενικά.
2. Αν $|A| > 0$, τότε ο A είναι μη υποβιβάζσιμος.
3. Αν ο A είναι υποβιβάζσιμος, θα πρέπει να έχει τουλάχιστον $v - 1$ μηδενικά στοιχεία.
4. Είναι προφανές ότι ένας πίνακας είναι μη υποβιβάζσιμος αν και μόνο αν ο ανάστροφός του είναι μη υποβιβάζσιμος.

5.5 Θεώρημα

Ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{v \times v}$ είναι μη υποβιβάζσιμος αν και μόνο αν ο πίνακας $(I_v + |A|)^{v-1}$ είναι θετικός.

Απόδειξη:

Θα δείξουμε ότι ο πίνακας A είναι υποβιβάζσιμος αν και μόνο αν ο $(I_v + |A|)^{v-1}$ δεν είναι θετικός, δηλαδή έχει τουλάχιστον ένα μη μηδενικό στοιχείο.

Υποθέτουμε ότι ο A είναι υποβιβάζσιμος. Από τον ορισμό, για κάποιο πίνακα μετάθεσης $P \in \mathbb{R}^{v \times v}$ θα έχουμε ότι:

$$P^T A P = P \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix} P^T = P^T \hat{A} P,$$

όπου $B \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $C \in \mathbb{R}^{r \times (v-r)}$, $D \in \mathbb{R}^{(v-r) \times (v-r)}$ και $0 \in \mathbb{R}^{(v-r) \times v}$.

Παρατηρούμε ότι $|A| = P|\hat{A}|P^T$, αφού ο πίνακας P μεταθέτει απλώς τις γραμμές και τις στήλες.

Παρατηρούμε επίσης ότι οι πίνακες $|\hat{A}|^2, |\hat{A}|^3, |\hat{A}|^4, \dots, |\hat{A}|^{v-1}$ έχουν όλοι τον ίδιο υποπίνακα $0 \in \mathbb{R}^{(v-r) \times v}$, όπως και ο \hat{A} .

Άρα,

$$(I_v + |A|)^{v-1} = (I_v + P|\hat{A}|P^T)^{v-1}.$$

Επίσης είναι: $P(I_v + |\hat{A}|)P^T = P P^T + P|\hat{A}|P^T = I_v + |A|$, P τετραγωνικός.

$$\begin{aligned} (I_v + |A|)^{v-1} &= [P(I_v + |\hat{A}|)P^T]^{v-1} = (I_v + P|\hat{A}|P^T)^{v-1} = (P(I_v + |A|)P^T)^{v-1} = \\ &= P(I_v + |A|)^{v-1}P^T = P \left(I_v + \binom{v-1}{1} |\hat{A}| + \binom{v-2}{2} |\hat{A}|^2 + \dots + \binom{v-1}{v-1} |\hat{A}|^{v-1} \right) P^T, \end{aligned}$$

όπου όλοι οι όροι στην τελευταία παράσταση έχουν τον ίδιο υποπίνακα $0 \in \mathbb{R}^{(v-r) \times v}$.

Από τη σχέση όμως

$$P(I_v + |\hat{A}|)P^T = I_v + |A|$$

προκύπτει ότι ο πίνακας $I_v + |A|$ είναι υποβιβάζσιμος. Άτοπο, καθώς δε μπορεί να έχει όλα του τα στοιχεία μη μηδενικά¹⁴.

Το αντίστροφο αποδεικνύεται με τη βοήθεια της θεωρίας γραφημάτων και για το λόγο αυτό παραλείπεται. ■

5.6 Θεώρημα:

Έστω $A \in \mathbb{R}^{v \times v}$ ένας θετικός πίνακας. Τότε η φασματική ακτίνα $\rho(A)$ είναι ιδιοτιμή αλγεβρικής πολλαπλότητας 1, δηλαδή είναι απλή ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης του A .

5.7 Πρόρισμα:

Έστω $A \in \mathbb{R}^{v \times v}$ ένας μη αρνητικός πίνακας με $A^k > 0$ για κάποιο $k \geq 1$. Τότε, η φασματική ακτίνα $\rho(A)$ είναι απλή ιδιοτιμή του A .

Απόδειξη:

Αν οι $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_v$ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A , τότε οι $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_v^k$ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A^k . επομένως, αν η $\rho(A)$ είναι πολλαπλή ιδιοτιμή του A , τότε η $\rho(A^k) = [\rho(A)]^k$ είναι πολλαπλή ιδιοτιμή του πίνακα A^k . Άτοπο, καθώς ισχύει το παραπάνω Θεώρημα.

5.8 Θεώρημα:

Εάν $A \in \mathbb{R}^{v \times v}$ ένας μη αρνητικός πίνακας, τότε η φασματική ακτίνα $\rho(A)$ είναι ιδιοτιμή του A και υπάρχει αντίστοιχο μη αρνητικό ιδιοδιάνυσμα $0 \neq x \in \mathbb{R}^v$ τέτοιο ώστε $Ax = \rho(A)x$.

Απόδειξη:

Για κάθε $\varepsilon > 0$, ορίζουμε τον πίνακα $A(\varepsilon) = [a_{ij} + \varepsilon]$, ο οποίος αποτελεί διαταραχή του αρχικού πίνακα A . Συμβολίζουμε με $x(\varepsilon)$ το διάνυσμα Perron του $A(\varepsilon)$, άρα $x(\varepsilon) > 0$ και $\|x(\varepsilon)\|_1 = 1$.

¹⁴ Σύμφωνα με την Παρατήρηση 3 πιο πάνω, πρέπει να έχει τουλάχιστον $v - 1$ μη μηδενικά στοιχεία, κάτι που δε σημαίνει πως όλα του τα στοιχεία είναι μη μηδενικά.

Εάν θεωρήσουμε το σύνολο $\{x(\varepsilon) : \varepsilon > 0\}$, τότε αυτό περιέχεται στο συμπαγές σύνολο

$$\{x \in \mathbb{C}^n : \|x\|_1 \leq 1\}$$

και άρα θα υπάρχει σύμφωνα με τον ορισμό της συμπίεσης μία μονότονα φθίνουσα ακολουθία ε_k θετικών όρων, $k = 1, 2, 3, \dots$ της οποίας το όριο είναι το 0 και τέτοια ώστε το όριο $x = \lim x(\varepsilon_k)$ να υπάρχει.

Αφού επίσης $x(\varepsilon_k) > 0$, για κάθε k , έχουμε ότι $x \geq 0$.

Αλλά και $x \neq 0$, διότι $\|x\|_1 = \lim \|x(\varepsilon_k)\|_1 = 1$.

Από γνωστό Θεώρημα, έχουμε ότι $\rho(A) \geq \rho(A(\varepsilon_1)) \geq \rho(A(\varepsilon_2)) \geq \dots$, για κάθε $k = 1, 2, 3, \dots$

Άρα, η ακολουθία $\rho(A(\varepsilon_k))$, $k = 1, 2, 3, \dots$ είναι μονότονα φθίνουσα.

Έτσι, το όριο $\rho = \lim[\rho(A(\varepsilon_k))]$, υπάρχει και είναι μεγαλύτερο ή ίσο της $\rho(A)$.

Όμως:

$$Ax = \lim(A(\varepsilon_k)x(\varepsilon_k)) = \lim(\rho(A(\varepsilon_k))x(\varepsilon_k)) = \lim \rho(A(\varepsilon_k)) \lim x(\varepsilon_k) = \rho x$$

κι επειδή $x \neq 0$, συμπεραίνουμε ότι ο ρ είναι ιδιοτιμή του πίνακα A . Τότε όμως $\rho \leq \rho(A)$ και άρα $\rho = \rho(A)$.

5.9 Θεώρημα:

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ένας μη αρνητικός, μη υποβιβασίμος πίνακας. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

- i) $\rho(A) > 0$
- ii) Η $\rho(A)$ είναι ιδιοτιμή του A .
- iii) Υπάρχει θετικό διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $Ax = \rho(A)x$.
- iv) Η $\rho(A)$ είναι απλή ιδιοτιμή του A .

Απόδειξη:

- i) Εάν $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ένας μη αρνητικός πίνακας και $\sum_{j=1}^n a_{ij} > 0$, για κάθε $i = 1, 2, 3, \dots, n$, τότε $\rho(A) > 0$.
- ii) Υπάρχει ένα μη αρνητικό διάνυσμα $x \neq 0$, τέτοιο ώστε $Ax = \rho(A)x$.

Όμως, τότε

$$(I_n + |A|)^{n-1}x = (I_n + \rho(A))^{n-1}x,$$

δηλαδή ο πίνακας $(I_n + |A|)^{n-1}$ είναι θετικός.

Άρα και το διάνυσμα $(I_n + |A|)^{n-1}x$ είναι επίσης θετικό.

Συνεπώς το διάνυσμα $q = (I_n + |A|)^{n-1}(I_n + \rho(A))^{n-1}x$ είναι θετικό.

Για την απόδειξη του iv) παραθέτουμε το παρακάτω Λήμμα:

5. 10 Λήμμα:

Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, όχι κατά ανάγκη διακεκριμένες. Τότε οι

$$\lambda_1 + 1, \lambda_2 + 1, \dots, \lambda_n + 1$$

είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα $I_n + A$.

Αλλά $I_n + A \geq 0$ και $(I_n + A)^{n-1} > 0$ και άρα η $1 + \rho(A)$ θα πρέπει να είναι απλή ιδιοτιμή του $I_n + A$.

Συνεχίζοντας την απόδειξη του iv), εάν η φασματική ακτίνα $\rho(A)$ είναι πολλαπλή ιδιοτιμή του A , τότε η:

$$1 + \rho(A) = \rho(I_n + A) \text{ είναι πολλαπλή ιδιοτιμή του } I_n + A .$$

Όμως ο πίνακας $I_n + A$ είναι μη αρνητικός και ισχύει ότι και $(I_n + A)^{n-1} > 0$, άρα η $1 + \rho(A)$ είναι απλή ιδιοτιμή του $I_n + A$. ■

5. 11 Παρατηρήσεις:

- i) Το παραπάνω θεώρημα εξασφαλίζει ότι ο ιδιόχωρος ενός μη αρνητικού και μη υποβιβάσιμου πίνακα που αντιστοιχεί στη ρίζα Perron, είναι μονοδιάστατος.
- ii) Για έναν μη αρνητικό, μη υποβιβάσιμο πίνακα, το μοναδικό θετικό ιδιοδιάνυσμα του οποίου τα στοιχεία έχουν άθροισμα ίσο με 1 καλείται *διάνυσμα Perron* του πίνακα.
- iii) Γνωρίζουμε ότι ένας πίνακας A είναι μη υποβιβάσιμος αν και μόνο αν ο A^T είναι μη υποβιβάσιμος. Επομένως, κάθε μη αρνητικός, μη υποβιβάσιμος πίνακας έχει ένα θετικό αριστερό ιδιοδιάνυσμα.

Κεφάλαιο 6: Διαδικασίες Γεννήσεως – Θανάτου (Birth – and – Death Processes)

6.1 Διαδικασίες Γεννήσεως – Θανάτου Διακριτού Χρόνου: Discrete Time Birth – and – Death Processes

Μία διαδικασία γεννήσεως – θανάτου διακριτού χρόνου είναι ουσιαστικά μία Μαρκοβιανή αλυσίδα στο χώρο των μη αρνητικών ακεραίων αριθμών:

$$\{X_k: k \geq 0\}$$

αναπαριστά έναν τυχαίο περίπατο με ένα «φράγμα» στη μηδενική κατάσταση, ενώ μπορούμε να μεταβούμε μόνο πάνω ή κάτω από οποιαδήποτε κατάσταση και εάν βρισκόμαστε μέσα στην αλυσίδα.

Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης είναι της παρακάτω μορφής:

$$P = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & 0 & 0 & \dots \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & 0 & \dots \\ 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ 0 & 0 & a_{32} & a_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Προφανώς, ο ανωτέρω πίνακας είναι μη υποβιβάσιμος εάν και μόνο εάν $a_{i,i+1} > 0$ και $a_{i,i-1} > 0$ για κάθε i .

Τότε, γνωρίζουμε πως υπάρχει η πιθανότητα $\pi_n = \lim_{k \rightarrow \infty} P[X_k = n]$ για $n \geq 0$ και μάλιστα είναι ανεξάρτητη της εκάστοτε κατάστασης στην οποία βρισκόμαστε.

Ισχύει ότι:

$$\pi_n = \begin{cases} 0, & \text{εάν βρισκόμαστε σε στάσιμη κατάσταση} \\ > 0, & \text{για κάθε } n \text{ όπου η Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι θετικά ορισμένη} \end{cases}.$$

Στην δεύτερη περίπτωση, το διάνυσμα πιθανοτήτων $\boldsymbol{\pi}$ που προκύπτει ορίζει την **σταθερή** συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας. Είναι δε η μοναδική λύση του γραμμικού συστήματος $\boldsymbol{\pi}P = \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}\mathbf{1} = 1$.

6.1.1 Θεώρημα:

Έστω μία Μαρκοβιανή Αλυσίδα με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης P όπως ορίστηκε παραπάνω, ο οποίος είναι μη υποβιβάζσιμος και απεριοδικός. Οι πιθανότητες που αποτελούν στοιχεία αυτού του πίνακα, ικανοποιούν την εξίσωση:

$$\pi_n = \pi_{n-1}R_n \text{ για κάθε } n \geq 1,$$

όπου R_n είναι ο αναμενόμενος αριθμός επισκέψεων στην κατάσταση n μεταξύ δύο επιτυχών επισκέψεων στην κατάσταση $n - 1$.

Η Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι θετικά ορισμένη εάν και μόνο εάν η σειρά $\sum_{k \geq 1} R_1 R_2 \cdots R_k$ συγκλίνει, όπου ισχύει ότι:

$$\pi_0 = \left(1 + \sum_{k \geq 1} R_1 R_2 \cdots R_k \right)^{-1}.$$

Μέχρι στιγμής έχουμε μιλήσει για την στάσιμη κατανομή.

Υποθέτουμε πως το όριο $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = h(\infty)$ υπάρχει.

Θα θεωρήσουμε την n κατάσταση, η οποία είναι μεν δυναμική, αλλά στην προκειμένη περίπτωση παρουσιάζεται ως σταθεροποιημένη. Τότε, ισχύει το εξής:

$$R_n = \frac{G(\infty)}{1 - F(\infty)},$$

όπου:

- $G(\infty) = a_{n-1,n}$ είναι η πιθανότητα, εάν ξεκινήσουμε από τη θέση $n - 1$, να επισκεφθούμε τη θέση n , πριν να επιστρέψουμε ξανά στη θέση $n - 1$.
- $F(\infty)$ είναι η πιθανότητα να επιστρέψουμε στη θέση n , πριν να επισκεφθούμε τη θέση $n - 1$, ξεκινώντας από τη θέση n . Θέτουμε μάλιστα ως:

$$F(\infty) = U_n = \sum_{k \geq 1} nP_{nn}(k).$$

Τότε θα έχουμε ότι $R_n = a_{n-1,n}(1 - U_n)^{-1}$.

Ας υποθέσουμε τώρα τις περιπτώσεις όπου η αλυσίδα επιστρέφει στη θέση n , ξεκινώντας πάλι από τη θέση n , αγνοώντας όλες τις χαμηλότερου επιπέδου θέσεις.

Τότε, η αλυσίδα είτε εισέρχεται στη θέση n άμεσα, με το πρώτο πέρασμα, είτε εισέρχεται στη θέση $n + 1$ στο πρώτο της ήδη βήμα. Κατ' αυτόν τον τρόπο κάνει το πρώτο της πέρασμα από τη θέση $n + 1$ στη θέση n .

Τότε μπορούμε να γράψουμε τον κάτωθι ισχυρισμό:

$$U_n = a_{n,n} + a_{n,n+1}G_{n+1}.$$

Η πιθανότητα G_{n+1} εκφράζει την μετάβαση της Μαρκοβιανής αλυσίδας από τη θέση $n + 1$ στην n σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα. Η πιθανότητα G_1 εκφράζει την μετάβαση της αλυσίδας από τη θέση 2 στη θέση 1 σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα.

Επομένως, προκειμένου να μελετήσουμε τις πιθανότητες R_n , οδηγούμαστε στην μελέτη στη μελέτη των πιθανοτήτων G_n .

6.1.2 Λήμμα

Η καλώς ορισμένη Μαρκοβιανή αλυσίδα, με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης τον:

$$P = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & 0 & 0 & \dots \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & 0 & \dots \\ 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ 0 & 0 & a_{32} & a_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

είναι μη υποβιβάσιμη εάν και μόνο εάν $G_1 = 1$, δηλαδή είναι βέβαιη η μετάβαση από τη θέση 2 στη θέση 1 σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα.

6.1.3 Θεώρημα:

Η Μαρκοβιανή Αλυσίδα με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης P , ως ανωτέρω, είναι μη καλώς ορισμένη εάν και μόνο εάν $R_n = \frac{a_{n-1,n}}{a_{n,n-1}}$ για όλα τα $n \geq 1$. Είναι δε θετικά ορισμένη εάν και μόνο εάν

$$\sum_{k \geq 1} \frac{a_{0,1} \cdots a_{k-1,k}}{a_{0,0} \cdots a_{k,k-1}} < \infty.$$

Σε αυτήν την περίπτωση, μπορούμε να συμπεράνουμε πως $\pi_0 = \left(1 + \sum_{k \geq 1} \frac{a_{0,1} \cdots a_{k-1,k}}{a_{0,0} \cdots a_{k,k-1}}\right)^{-1}$

και $\pi_n = \pi_0 \frac{a_{0,1} \cdots a_{n-1,n}}{a_{0,0} \cdots a_{n,n-1}}$, για κάθε $n \geq 1$.

6.1.4 Θεώρημα:

Έστω μία μη υποβιβάσιμη, απεριοδική Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης τον:

$$P = \begin{bmatrix} b_0 & a_0 & 0 & 0 & \dots \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots \\ 0 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots \\ 0 & 0 & a_2 & a_1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

και έστω το διάνυσμα $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \dots)$ το οποίο δηλώνει τις πεπερασμένες πιθανότητες του πίνακα P .

Τότε, ισχύει ότι $\pi_n = \pi_{n-1}R$, για κάθε $n \geq 1$, όπου R είναι ο αναμενόμενος αριθμός επισκέψεων στη θέση n μεταξύ δύο επίσης επισκέψεων στη θέση $n - 1$. Ο αριθμός R είναι ανεξάρτητος της θέσης n .

Συγκεκριμένα, εάν η αλυσίδα είναι θετικά ορισμένη, η στάσιμη κατανομή δίνεται από την γεωμετρική πυκνότητα – πιθανότητα $\pi_n = (1 - R)R^n$, με $R = \frac{a_0}{a_2}$.

Απόδειξη

Προκειμένου να προχωρήσουμε στην απόδειξη του θεωρήματος, προχωρούμε στην διατύπωση του παρακάτω συστήματος:

$$-\pi_0 b_0 + \pi_1 a_2 = 0,$$

$$\pi_{n-1} a_0 - \pi_n a_1 + \pi_{n+1} a_2 = 0, \text{ για } n \geq 2,$$

$$\sum_{i \geq 0} \pi_i = 1,$$

στο οποίο προβαίνουμε στις συνήθεις γραμμικές πράξεις.

Ας πάρουμε ένα n , φιξαρισμένο όπως και πριν.

Ταυτόχρονα, αντικαθιστούμε τις καταστάσεις $\{0, 1, \dots, n\}$ από μία απορροφητική κατάσταση A και αυτό σημαίνει πρακτικά ότι η μετάβαση από την κατάσταση $n + 1$ στην n αντικαθίσταται από την μετάβαση από την κατάσταση $n + 1$ στην απορροφητική A . Διατηρούμε όλα τα υπόλοιπα αναλλοίωτα.

Η νέα Μαρκοβιανή αλυσίδα που σχηματίζεται έχει νέο πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης, ο οποίος χωρίζεται σε blocks, τον:

$$P = \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \hline a_2 & & & & \\ 0 & & \tilde{P}_n & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \end{array} \right] ,$$

με πίνακα:

$$\tilde{P}_n = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots \\ 0 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots \\ 0 & 0 & a_2 & a_1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} .$$

Η πιθανότητα G_{n+1} είναι ίση με την πιθανότητα τελικά να μπορεί να γίνει απορρόφηση στην νέα Μαρκοβιανή αλυσίδα, ξεκινώντας όμως από μία μη απορροφητική κατάσταση. Αυτό είναι σαφώς ανεξάρτητο από την κατάσταση n , καθώς ο ίδιος ο πίνακας \tilde{P}_n δεν εξαρτάται από την n .

Συνεπώς, δικαιούμαστε να γράφουμε από εδώ και στο εξής ότι $G_n \equiv G$.

Ομοίως, επειδή και $R_n = a_0(1 - U_n)^{-1} = a_0(1 - a_1 - a_0G_{n+1})^{-1} = a_0(1 - a_1 - a_0G)^{-1}$, θα έχουμε ότι και η πιθανότητα R_n είναι ανεξάρτητη της κατάστασης n , άρα μπορούμε να προβούμε στον συμβολισμό $R_n \equiv R$, για κάθε n .

Όμως, για την καλώς ορισμένη αλυσίδα, έχουμε δει πως $G_n \equiv G \equiv 1$, δηλαδή $R_n \equiv R \equiv \frac{\alpha_0}{\alpha_2}$. Τα υπόλοιπα είναι προφανή, εξαιτίας του προηγούμενου θεωρήματος.

6.1.5 Θεώρημα

Η Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης τον

$$P = \begin{bmatrix} b_0 & a_0 & 0 & 0 & \dots \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots \\ 0 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots \\ 0 & 0 & a_2 & a_1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

είναι καλώς ορισμένη εάν και μόνο εάν $a_0 \leq a_2$. Είναι, δε, θετικά ορισμένη εάν και μόνο εάν $a_0 < a_2$.

Η πιθανότητα $G_n \equiv G$ ενός πρώτου περάσματος από την κατάσταση n στην $n - 1$ είναι ο ελάχιστος μη αρνητικός αριθμός που αποτελεί λύση της εξίσωσης:

$$G = a_2 + a_1 G + a_0 G^2.$$

Απόδειξη

Υποθέτουμε πως ο όρος γ_n δηλώνει την πιθανότητα του ενδεχομένου η Μαρκοβιανή αλυσίδα, ξεκινώντας από την κατάσταση n , τελικά επισκέπτεται την 0.

Ακόμη, ορίζουμε το διάνυσμα – στήλη: $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots)^t$ με $\gamma_0 = 1$.

Σημειώνουμε σε αυτό το σημείο πως ο i -οστός όρος της σειράς $\boldsymbol{\gamma} = \sum_{i \geq 0} \tilde{P}_1^i \mathbf{a}$, όπου $\mathbf{a} = (a_2, 0, 0, \dots)^t$, εκφράζει την πιθανότητα η πρώτη επίσκεψη στο 0 να συμβεί τη χρονική στιγμή $i + 1$.

Ισχυρισμός:

Το διάνυσμα $\boldsymbol{\gamma}$ είναι ο ελάχιστος μη αρνητικός αριθμός που αποτελεί λύση της εξίσωσης

$$\boldsymbol{\gamma} = \tilde{P}_1 \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{a}$$

Απόδειξη του Ισχυρισμού:

Έστω πως υπάρχει άλλη μία διανυσματική λύση, μη αρνητική, \mathbf{z} . Επομένως, αντικαθιστώντας στο δεξί μέλος της παραπάνω εξίσωσης με $\tilde{P}_1 \mathbf{z} + \mathbf{a}$ θα έχουμε ότι:

$$\mathbf{z} = \sum_{k \geq i \geq 0} \tilde{P}_1^i \mathbf{a} + \tilde{P}_1^{k+1} \mathbf{z} \geq \sum_{k \geq i \geq 0} \tilde{P}_1^i \mathbf{a}.$$

Η τελευταία σχέση ισχύει για κάθε $k \geq 0$ έτσι ώστε $\mathbf{z} \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{k \geq i \geq 0} \tilde{P}_1^i \mathbf{a} = \boldsymbol{\gamma}$.

Από τη στιγμή που το πρώτο πέρασμα από την κατάσταση n στην κατάσταση $n - 1$ έχει πιθανότητα $\gamma_n = G_n \gamma_{n-1} = G \gamma_{n-1}$, αυτό σημαίνει πως για $n \geq 1$, επαγωγικά, προκύπτει πως: $\gamma_n = G^n$.

Άρα, για $\gamma = \gamma_n = G^n$, $n \geq 1$, έχουμε ότι: $\gamma_n = \tilde{P}_1 \gamma_n + \alpha \Rightarrow G^n = \tilde{P}_1 G^n + \alpha, n \geq 1$.

Συνεπώς, για $n = 1$, διαπιστώνουμε πως η G είναι η ελάχιστη λύση της σχέσης $\gamma = \sum_{i \geq 0} \tilde{P}_1^i \alpha$.

Οι λύσεις που έχει η παραπάνω σχέση είναι δύο: η μονάδα και ο λόγος $\frac{\alpha_2}{\alpha_0}$.

Εάν $\frac{\alpha_2}{\alpha_0} \geq 1$, τότε η $G = 1$, καθώς είναι η ελάχιστη εκ των δύο λύσεων όπως αποδείξαμε πριν, και συνεπώς η αλυσίδα είναι καλώς ορισμένη.

Από γνωστό θεώρημα, μία ομογενής *birth - to - death* αλυσίδα είναι θετικά ορισμένη εάν και μόνο εάν $\frac{\alpha_2}{\alpha_0} > 1$. Η τελευταία παρατήρηση ολοκληρώνει και την απόδειξη. ■

6.2 Διαδικασίες Γεννήσεως – Θανάτου συνεχούς χρόνου: Continuous Time Birth – and – Death Processes

Μία διαδικασία γεννήσεως – θανάτου συνεχούς χρόνου είναι ουσιαστικά μία Μαρκοβιανή αλυσίδα στο χώρο των μη αρνητικών ακεραίων αριθμών, οι οποίοι εκφράζουν χρόνο:

$$\{X(t): t \geq 0\}.$$

Η συγκεκριμένη Μαρκοβιανή αλυσίδα έχει τριδιαγώνιο πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης Q :

$$Q = \begin{bmatrix} q_{00} & q_{01} & 0 & 0 & \dots \\ q_{10} & q_{11} & q_{12} & 0 & \dots \\ 0 & q_{21} & q_{22} & q_{23} & \dots \\ 0 & 0 & q_{32} & q_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

όπου:

- $q_{ij} > 0$ για $i, j \geq 0, j = i - 1$ ή $j = i + 1$,
- $q_{ii} < 0$,
- το άθροισμα κατά στήλες είναι ίσο με 0.

Μία απαραίτητη προϋπόθεση είναι ότι η Μαρκοβιανή αλυσίδα **δεν** πραγματοποιεί απείρως πολλές μεταβάσεις σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα. Για παράδειγμα, αυτή η προϋπόθεση χρησιμεύει απόλυτα στην τελευταία επίσκεψη σε κάποια κατάσταση, δεδομένου ενός τυχαίου χρόνου.

Για να την διασφαλίσουμε αυτήν την προϋπόθεση, οφείλουμε να διασφαλίσουμε ένα από τα εξής:

- $\sup_i (-q_{i,i}) \leq \lambda$, για πεπερασμένο λ ,
- $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{-1}{q_{n,n}} \right) < \infty$.

Με τα παραπάνω, η οριακές πιθανότητες $\pi_n = \lim_{t \rightarrow \infty} P[X(t) = n]$ υπάρχουν πάντοτε, ανεξαρτήτως της εκάστοτε θέσης στην οποία βρίσκεται η Μαρκοβιανή αλυσίδα.

Κεφάλαιο 7: Οι βασικές Μη Γραμμικές Εξισώσεις

Στην προηγούμενη μελέτη των αλυσίδων γεννήσεως – θανάτου, συνήθως αναφερόμασταν στην πιθανότητα G_n ως καθοδική μετάβαση από την κατάσταση n στην κατάσταση $n - 1$. Γενικά, θα ορίσουμε την εξής πιθανότητα:

$$g_n(k) = {}_{n-1}P_{n,n-1}(k) \text{ για } k \geq 1,$$

η οποία εκφράζει την $1^{\text{η}}$ επίσκεψη της αλυσίδας στη θέση $n - 1$ την χρονική στιγμή k , ενώ είχε ξεκινήσει από τη θέση n τη χρονική στιγμή 0 .

Παρομοίως, ορίζουμε την πιθανότητα, ξεκινώντας από τη θέση $n - 1$, η αλυσίδα να είναι στη θέση n τη χρονική στιγμή k και να μην έχει ακόμα επανέλθει στη θέση $n - 1$, ως εξής:

$$r_n(k) = {}_{n-1}P_{n-1,n}(k), \text{ για } k \geq 1.$$

Τέλος, έχουμε την πιθανότητα της επιστροφής στην κατάσταση n τη χρονική στιγμή k για πρώτη φορά, ξεκινώντας πάλι από τη n , αλλά αυτή τη φορά αποφεύγοντας κάποια επίσκεψη στην κατάσταση $n - 1$:

$$u_n(k) = {}_{n-1}P_{n,n}(k), \text{ για } k \geq 1.$$

Κατ' επέκταση, οι συναρτήσεις πυκνότητας που προκύπτουν είναι οι εξής:

$$G_n(z) = \sum_{k \geq 1} z^k g_n(k),$$

$$R_n(z) = \sum_{k \geq 1} z^k r_n(k),$$

$$U_n(z) = \sum_{k \geq 1} z^k u_n(k).$$

Μάλιστα, παρατηρούμε ότι $G_n = G_n(1)$, $R_n = R_n(1)$ και $U_n = U_n(1)$.

7.1 Θεώρημα:

Ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις (1), (2) και (3) κατά αντιστοιχία:

$$U_n(z) = za_{n,n} + za_{n,n+1}G_{n+1}(z) = za_{n,n} + R_{n+1}(z)za_{n+1,n}$$

$$G_n(z) = (1 - U_n(z))^{-1}za_{n,n-1}$$

και

$$R_n(z) = za_{n-1,n}(1 - U_n(z))^{-1}$$

για κάθε $|z| < 1$.

Ερμηνεία των παραπάνω σχέσεων:

Έχουμε από πριν την ακολουθία πιθανοτήτων $\{u_n(k), k \geq 1\}$ και τη συνάρτηση πυκνότητας που παράγει, την $U_n(z)$. Δηλαδή, ακολουθεί το εξής σενάριο η αλυσίδα μας:

Ξεκινώντας από την κατάσταση n , επιστρέφει εκεί με δύο δυνατούς τρόπους, αποφεύγοντας πάντα την κατάσταση $n - 1$:

- Είτε παραμένει στην ίδια κατάσταση n σε κάθε επόμενη μετάβαση, ένα ενδεχόμενο με πιθανότητα την $a_{n,n}$, επομένως προκύπτει ο πρώτος προσθετός της σχέσης (1): $za_{n,n}$.
- Είτε προχωράει προς την κατάσταση $n + 1$ με την πρώτη μετάβαση, ενδεχόμενο με πιθανότητα $a_{n,n+1}$ και μετά από τυχαίο χρονικό διάστημα επανέρχεται στη θέση n , ενδεχόμενο που ακολουθεί τη συνάρτηση πυκνότητας $G_{n+1}(z)$, με αποτέλεσμα να προκύψει και ο δεύτερος προσθετός της σχέσης (1): $za_{n,n+1}G_{n+1}(z)$.

Η σχέση (2) προκύπτει με παρόμοιο τρόπο, δεδομένου ότι εκφράζει το τελευταίο βήμα της επιστροφής της αλυσίδας στην κατάσταση n αντί να εκφράζει το 1^ο βήμα μετά την αναχώρηση από την κατάσταση n .

Σύμφωνα με την ακολουθία πιθανοτήτων $\{g_n(k), k \geq 1\}$, ορίζουμε το ενδεχόμενο που περιγράφεται από τη σχέση (2) ως το πλήθος των φορών που η αλυσίδα επιστρέφει στη θέση n , με συνάρτηση πυκνότητας την $U_n(z)$, πριν τελικά μεταβεί με πιθανότητα $a_{n,n-1}$ στην κατάσταση $n - 1$.

Με τον παραπάνω συλλογισμό, καταλήγουμε στη σχέση (2) ως εξής:

$$G_n(z) = za_{n,n-1} + U_n(z)za_{n,n-1} + [U_n(z)]^2za_{n,n-1} + \dots = za_{n,n-1}(1 + U_n(z) + [U_n(z)]^2 + \dots) = (1 - U_n(z))^{-1}za_{n,n-1},$$

$$\text{διότι } |U_n(z)| \leq U_n(1) < 1.$$

Για την σχέση (3), μπορούμε να παρατηρήσουμε τα εξής:

- Προκειμένου η αλυσίδα να βρεθεί σε τυχαία χρονική στιγμή στη θέση n , έχοντας ξεκινήσει από τη θέση $n - 1$, την οποία όμως αποφεύγει συνεχώς στα επόμενα βήματα, είναι απαραίτητο η πρώτη μετάβαση να πραγματοποιηθεί από τη θέση $n - 1$ στη θέση n . Με αυτόν τον τρόπο προκύπτει ο πρώτος παράγοντας της σχέσης (3), ο $za_{n-1,n}$.
- Σε επόμενη φάση του ενδεχομένου, η αλυσίδα συνεχώς επισκέπτεται τη θέση n , με ορισμένες από τις φορές αυτές να χαρακτηρίζονται από την αποφυγή του περάσματος από τη θέση $n - 1$. Κάθε τέτοια επίσκεψη ακολουθεί την συνάρτηση πυκνότητας $U_n(z)$, όπως ορίστηκε παραπάνω, και με τον ίδιο ακριβώς τρόπο αποδεικνύεται η σχέση (3).

7.2 Πρόταση

Για την ομογενή μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης, τον

$$P = \begin{bmatrix} b_0 & a_0 & 0 & 0 & \dots \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots \\ 0 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots \\ 0 & 0 & a_2 & a_1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

οι συναρτήσεις πυκνότητας:

$$U_n(z), G_n(z), R_n(z)$$

είναι όλες ανεξάρτητες της κατάστασης n στην οποία βρίσκεται η αλυσίδα και ισχύει:

$$U(z) = za_1 + za_0G(z) = za_1 + R(z)za_2,$$

$$G(z) = (1 - U(z))^{-1}za_2,$$

$$R(z) = za_0(1 - U(z))^{-1}.$$

Δηλαδή, κάθε μία από τις παραπάνω συναρτήσεις ορίζει τις άλλες δύο.

Κεφάλαιο 8: Μοντέλο της Θεωρίας κινδύνου

8.1 Εισαγωγή: Αλυσίδες υπό περιορισμό (Processes Under a Taboo): Τερματιζόμενες αλυσίδες

Σε εφαρμογές των συζητήσεων σε οικονομικά μοντέλα τα οποία αφορούν π.χ. σε επιχειρήσεις, σαφώς οι μαρκοβιανές αλυσίδες που ακολουθούνται υπόκεινται σε κάποιους περιορισμούς.

Ένας πολύ σημαντικός περιορισμός, ο βασικότερος ίσως για την μελέτη ενός τέτοιου οικονομικού μοντέλου στο πλαίσιο του Risk Management, είναι **η χρονική στιγμή στην οποία τερματίζεται μία διαδικασία** ή όπως θα δούμε παρακάτω, **η χρονική στιγμή στην οποία πραγματοποιείται ένα συγκεκριμένο ενδεχόμενο, όπως για παράδειγμα το πρώτο πέρασμα από μια κατάσταση.**

Η λέξη κλειδί εδώ είναι η λέξη *taboo* ή αλλιώς *περιορισμός*¹⁵.

Σε προηγούμενη ενότητα μιλήσαμε για αυτόν τον περιορισμό και τον ορίσαμε ως *χρόνο απορρόφησης* τ.

Θεωρούμε πλέον μία απεριοδική, μη υποβιβάσιμη Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου $\{X_n: n \geq 0\}$ σε έναν αριθμήσιμο χώρο καταστάσεων S με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης P .

8.1.1 Ορισμός

Ορίζουμε ως π το οριακό διάνυσμα πιθανοτήτων, όπου $\pi > 0$, δηλαδή είναι θετικά ορισμένο, όταν και η Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι θετικά ορισμένη.

8.1.2 Ορισμός

Έστω $T \subset S$ ένα υποσύνολο καταστάσεων, το οποίο είναι το σύνολο taboo, δηλαδή το σύνολο καταστάσεων στο οποίο ισχύουν κάποιοι περιορισμοί βάσει των οποίων μελετάται η συμπεριφορά του συστήματος στην «προσπάθειά» του να αποφύγει τις καταστάσεις T , όπως για παράδειγμα η χρεωκοπία.

¹⁵ Στην ελληνική βιβλιογραφία, ο όρος “taboo” αναφέρεται και ως «απαγόρευση».

Ορίζουμε ως χρόνο απορρόφησης του συστήματος τη χρονική στιγμή όπου το σύστημα βρίσκεται στον χώρο των καταστάσεων taboo T :

$$\tau = \inf\{n \geq 1: X_n \in T\} > 0.$$

Ένας από τους σκοπούς της εισαγωγής αυτής είναι η γενίκευση της σχέσης

$$\pi_n = \pi_{n-1}R_n \text{ για κάθε } n \geq 1,$$

που είδαμε σε προηγούμενο θεώρημα, σε μία νέα σχέση, της μορφής:

$$\pi_D = \pi_T R^* \text{ για κάθε } n \geq 1,$$

όπου D είναι ένα υποσύνολο καταστάσεων ξένο ως προς το T και R^* ένας πίνακας με στοιχεία από αναμενόμενες τιμές, τις οποίες θα προσδιορίσουμε αργότερα.

Το διάνυσμα πιθανοτήτων π_D αναφέρεται στο σύνολο D και το π_T στο σύνολο taboo T .

8.2 Μοντέλο της θεωρίας κινδύνου των Bara Kim, Hwa- Sung Kim, Jeongsim Kim με τίτλο: “A risk model with paying dividends and random environment”

Το συγκεκριμένο μοντέλο συμπεριλαμβάνει την αποπληρωμή των μερισμάτων σε μετόχους κεφαλαίου, όπου τα μεγέθη των αποζημιώσεων ακολουθούν διακριτή κατανομή στην εκάστοτε περίπτωση.

Η Μαρκοβιανή διαδικασία ωστόσο, στην οποία υπόκεινται τα τελευταία εξαιτίας των διαφορετικών περιβαλλοντικών συνθηκών που επικρατούν κάθε φορά, οδηγεί σε αρκετές διαφορές μεταξύ τους. Για την ακρίβεια, η πιθανότητα αποπληρωμής του επόμενου μετόχου επηρεάζεται από την τρέχουσα κατάσταση της Μαρκοβιανής αλυσίδας.

Για την καλύτερη κατανόηση του μοντέλου, οι Kim, Kim και Kim παραθέτουν μοντέλα της θεωρίας χρεοκοπίας προσομοιωμένα στο δικό τους μοντέλο, όπου χρειάζεται, συνδυασμένα με την ελλειμματική κατανομή στη χρεοκοπία, με τη βοήθεια της QBD δομής, τη διαδικασία της οποίας και αναλύουν. Αποδίδοντας αριθμητικά παραδείγματα, ολοκληρώνουν το άρθρο τους.

Το αντικείμενο της θεωρίας κινδύνου στο θέμα της αποπληρωμής μερισμάτων σε μετόχους απέκτησε μεγαλύτερο κοινό ύστερα από την εργασία του De Finetti το 1957 και μελετήθηκε από πολλούς ερευνητές, βλ. Albrecher and Kainhofer (2002), Hojgaard (2002), Frostig (2005a) and Li and Lu (2006).

Ειδικότερα, οι Frostig, Li και Lu εργάστηκαν στο μοντέλο της θεωρίας κινδύνου σε Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου, στο οποίο οι μέτοχοι πληρώνονταν με συνεχή τρόπο, όταν το αποθεματικό υπερέβαινε ένα σταθερό, δεδομένο φράγμα. Η Frostig προσδιόρισε τον αναμενόμενο χρόνο που θα υπάρξει χρεοκοπία καθώς και τις συνολικές πληρωμές των μερισμάτων πριν την εμφάνιση της χρεοκοπίας, όπου το μέγεθος των αποζημιώσεων αυξάνεται ραγδαία με εκθετικό ρυθμό.

Σε άλλο άρθρο, οι Tan και Yang (2006) πρότειναν ένα μοντέλο της θεωρίας κινδύνου, σε διακριτό χρόνο αυτή τη φορά, το οποίο ακολουθεί σύνθετη Διωνυμική Κατανομή, όπου οι αποπληρωμές των μερισμάτων γίνονταν με τυχαίο τρόπο. Και σε αυτήν την περίπτωση, σκοπός είναι η πληρωμή να πραγματοποιείται πριν την εμφάνιση χρεοκοπίας και γι' αυτόν ακριβώς το λόγο προσέγγισαν την πιθανότητα χρεοκοπίας και, ανάμεσα σε άλλες

ασυμπτωτικές προσεγγίσεις, την σ.π.π. πριν τη χρονική περίοδο όπου θα συνέβαινε η χρεοκοπία.

Στο άρθρο των Kim, Kim και Kim θεωρούμε ένα μοντέλο της θεωρίας κινδύνου, το οποίο πραγματοποιείται σε διακριτό χρόνο:

- Οι μέτοχοι πληρώνονται σύμφωνα με τα μερίσματά τους και
- Το μέγεθος των αποζημιώσεων ακολουθεί διακριτή κατανομή σε κάθε περίπτωση, όμως οι περιπτώσεις των μεγεθών διαφέρουν μεταξύ τους, σύμφωνα με τη Μαρκοβιανή αλυσίδα την οποία ακολουθούν.

Η μέθοδος της αποπληρωμής των μερισμάτων που ακολουθείται είναι ουσιαστικά η εξής:

Από τη στιγμή που το αποθεματικό και η σ.π.π. που ακολουθεί, για την τρέχουσα χρονική στιγμή ξεπερνά κάποιο όριο που έχουμε θέσει, το μερίσμα που αντιστοιχεί στην επόμενη χρονική στιγμή θα πληρωθεί με βάση την πιθανότητα της τρέχουσας κατάστασης στην οποία βρισκόμαστε, σύμφωνα με την Μαρκοβιανή διαδικασία.

Το μοντέλο των Kim, Kim και Kim σχετίζεται αρκετά με εκείνο των Tan και Yang (2006), καθώς πρόκειται για διακριτά μοντέλα και αποπληρωμή μερισμάτων σύμφωνα με αυτά. Ωστόσο, η υπόθεση που θέτουν οι Kim, Kim και Kim για την αποπληρωμή των μερισμάτων είναι περισσότερο γενική από των Tan και Yang:

Το μοντέλο των Kim, Kim και Kim υπαγορεύει πως η πιθανότητα αποπληρωμής επηρεάζεται από περιβαλλοντικές διαδικασίες που «τρέχουν» ταυτόχρονα, ενώ των Tan και Yang υπαγορεύει πως η ίδια πιθανότητα εξαρτάται από εξωγενείς σε σχέση με το μοντέλο παράγοντες. Ταυτόχρονα, τα μεγέθη των αποζημιώσεων ακολουθούν διακριτή κατανομή, αλλά διαφέρουν μεταξύ τους αναλόγως των περιβαλλοντικών διαταραχών, εν αντιθέσει της μελέτης των Tan and Yang όπου θεωρούνται ανεξάρτητες τ.μ. που ακολουθούν την ίδια κατανομή.

Οι προαναφερθείσες διαφορές παρουσιάζονται συνοπτικά στον παρακάτω πίνακα:

	Kim, Kim and Kim (2007)	Tan and Yang (2006)
Πιθανότητα αποζημίωσης	Περιβαλλοντικές διαδικασίες (Μαρκοβιανή διαδικασία) μέσα στο ίδιο το μοντέλο.	Εξωγενείς από το μοντέλο παράγοντες.
Μεγέθη αποζημιώσεων	Ακολουθούν διακριτή κατανομή, αλλά διαφέρουν μεταξύ τους αναλόγως των περιβαλλοντικών διαταραχών (Μαρκοβιανής διαδικασίας).	Ανεξάρτητες τ.μ. που ακολουθούν την ίδια κατανομή.

Στην εργασία των Kim, Kim and Kim, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της υπολογιστικής μεθόδου για την προσέγγιση της πιθανότητας χρεοκοπίας και της κατανομής που ακολουθεί, καθώς και της κατανομής που ακολουθούν τα μεγέθη των αποζημιώσεων.

Στη συνέχεια, με τη χρήση αυτών των κατανομών διατυπώνεται η QBD δομή στο μοντέλο με σκοπό την όσο το δυνατόν περισσότερο ακριβή προσέγγιση της πιθανότητας χρεοκοπίας καθώς και της κατανομής της χρεοκοπίας.

8.3 Παρουσίαση του μοντέλου

Θεωρούμε ένα διακριτό μοντέλο διαχείρισης κινδύνου διακριτού χρόνου, όπου μερίσματα μετοχών αποπληρώνονται στους μετόχους.

Θέτουμε ως u το *αρχικό αποθεματικό*, όπου $u \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, δηλαδή ο u είναι μη αρνητικός ακέραιος αριθμός. Το u συμβολίζει το αρχικό αποθεματικό $U(0)$, όπου $U(t)$ είναι το αποθεματικό τη χρονική στιγμή t .

Έστω ότι το μικρότερο μέγεθος αποδοχής που μπορεί να ληφθεί κάθε χρονική στιγμή είναι ίσο με τη μονάδα και $U =$ αρχικό αποθεματικό, δηλαδή το αποθεματικό τη χρονική στιγμή $t=0$.

Ακόμη, έστω $X_t, t = 1, 2, 3, \dots$ τα μεγέθη των αποζημιώσεων που αντιστοιχούν σε κάθε χρονική στιγμή t , τα οποία είναι θετικές ακέραιες τυχαίες μεταβλητές.

Εάν σε κάποια χρονική στιγμή t το μέγεθος των αποζημιώσεων είναι μηδενικό, τότε θέτουμε $X_t = 0$.

Θεωρούμε ως

$$\eta_t, t = 1, 2, 3, \dots$$

τα μερίσματα που πληρώνονται στους μετόχους τη χρονική στιγμή t . Εάν δεν πληρωθεί κάποιο μέρισμα, τότε προφανώς: $\eta_t = 0$.

Το $U(t)$ καλείται *αποθεματικό ή πλεονάσμα* τη χρονική στιγμή t , ενώ το $U(0) = u$ καλείται *αρχικό αποθεματικό*.

Η συνάρτηση του πλεονάσματος ορίζεται ως ακολούθως:

$$U(t) = u + t - \sum_{k=1}^t X_k - \sum_{k=1}^t \eta_k,$$

$$U(t) = 0.$$

Πράγματι, σύμφωνα με τον ορισμό της στοχαστικής ανέλιξης του πλεονάσματος

$\{U(t): t \geq 0\}$, η τελευταία ορίζεται για κάθε $t \geq 0$ από τη σχέση:

$$U(t) = u + P(t) - S(t),$$

όπου u είναι το αρχικό αποθεματικό, $P(t) = t$ είναι το συνολικό ασφάλιστρο στο διάστημα $[0, t]$ και $S(t) = \sum_{k=1}^t X_k + \sum_{k=1}^t \eta_k$ η σύνθετη ανέλιξη για τις συνολικές αποζημιώσεις στο $[0, t]$.

Για να περιγράψουμε τη στοχαστική συμπεριφορά των αποζημιώσεων, $\{X_t, t \geq 1\}$, και των μερισμάτων, $\{\eta_t, t \geq 1\}$, θα πρέπει να εισάγουμε τη Μαρκοβιανή αλυσίδα που διέπει το μοντέλο, η οποία ορίζεται στο σύνολο $\{1, 2, 3, \dots, m\}$, με πιθανότητες μετάβασης από την κατάσταση i στην κατάσταση j , $p_{ij}, i, j \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$, οι οποίες είναι οι εξής:

$$p_{ij} = \mathbb{P}(J(t+1) = j | J(t) = i).$$

Η παραπάνω ισότητα δηλώνει πως, σύμφωνα με μια Μαρκοβιανή διαδικασία, η τρέχουσα κατάσταση και μόνο ορίζει την επόμενη της και όχι κάποια από τις προηγούμενες (π.χ. της χρονικής στιγμής $t - 1$).

Ορίζουμε ακόμη ως P τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης, του οποίου η (i, j) - μεταβλητή είναι ίση με την πιθανότητα μετάβασης p_{ij} .

Όταν τη χρονική στιγμή $(t - 1)$ βρισκόμαστε στην κατάσταση i , δηλαδή:

$$J(t - 1) = i,$$

τότε το μέγεθος των αποζημιώσεων που αντιστοιχεί στην επόμενη χρονική στιγμή t ακολουθεί την κατανομή με σ.π.π.: έστω $f_k^{(i)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Για παράδειγμα, η παραπάνω σ.π.π. μπορεί να έχει τη γενική μορφή, χ.β.γ. :

$$f_k^{(i)} = \mathbb{P}(X_t = k | J(t - 1) = i).$$

Πριν την πλήρη περιγραφή της μεταβλητής η_t , θα εισάγουμε μία νέα μεταβλητή, η οποία θα εκφράζει το εν δυνάμει μέρισμα, έστω $\tilde{\eta}_t$, το οποίο πληρώνεται στον μέτοχο εάν και μόνο εάν το αποθεματικό $U(t - 1)$ τη χρονική στιγμή $t - 1$ είναι μεγαλύτερο ή ίσο από μία ποσότητα x .

Έτσι, εάν τη χρονική στιγμή $(t - 1)$, εάν δηλαδή βρισκόμαστε στην κατάσταση i και ισχύει ότι

$$J(t - 1) = i,$$

τότε, για τη χρονική στιγμή t , το εν δυνάμει μέρισμα $\tilde{\eta}_t$ ακολουθεί κατανομή Bernoulli.

Εάν $q^{(i)}$ είναι η πιθανότητα αποπληρωμής του δυνητικού μερίσματος δεδομένου ότι βρισκόμαστε στην κατάσταση i , τότε:

$$q^{(i)} = \mathbb{P}(\tilde{\eta}_t = 1 | J(t - 1) = i)$$

και

$$1 - q^{(i)} = \mathbb{P}(\tilde{\eta}_t = 0 | J(t - 1) = i)$$

είναι η πιθανότητα της μη αποπληρωμής του δυνητικού μερίσματος δεδομένου ότι βρισκόμαστε στην κατάσταση i .

Θεωρούμε επίσης ότι οι μεταβλητές $X_t, \eta_t, \{J(0), \dots, J(t - 1), X_1, \dots, X_{t-1}, \tilde{\eta}_1, \dots, \tilde{\eta}_{t-1}\}$ είναι ανεξάρτητες, δεδομένου ότι είμαστε στην κατάσταση $J(t - 1)$. Το ίδιο ισχύει και για

την $J(t)$, η οποία είναι ανεξάρτητη των $\{J(0), \dots, J(t-1), X_1, \dots, X_t, \tilde{\eta}_1, \dots, \tilde{\eta}_t\}$, δεδομένης της κατάστασης $J(t-1)$.

Συνοπτικά, ισχύει ότι:

$$\eta_t = \tilde{\eta}_t \cdot \mathbf{1}_{[U(t-1) \geq x]}.$$

Επομένως το μέρισμα αποπληρώνεται αν και μόνο αν ισχύει ότι $U(t-1) \geq x$.

Ο χρόνος της χρεοκοπίας τ , ορίζεται ως εκείνη τη χρονική στιγμή όπου το αποθεματικό γίνεται αρνητικό. Είναι μία ελαττωματική τυχαία μεταβλητή, διότι μπορεί με θετική πιθανότητα να πάρει την τιμή άπειρο, δηλαδή:

$$P(\tau < \infty) < 1 \text{ ή } P(\tau = \infty) > 0.$$

Είναι προφανές ότι η κατανομή του χρόνου χρεοκοπίας τ εξαρτάται από την τιμή του αρχικού αποθεματικού u .

Στο μοντέλο που μελετούμε, ο χρόνος χρεοκοπίας (χρόνος απορρόφησης) ορίζεται ως:

$$\tau = \inf\{t \geq 1: U(t) \leq 0\}.$$

Η διαδικασία αποπληρωμής θα σταματήσει από τη στιγμή που το αποθεματικό γίνει αρνητικό.

Η κατανομή του χρόνου χρεοκοπίας εξαρτάται από το αρχικό αποθεματικό:

$$\varphi_{u,i}(k) = \mathbb{P}(|U(\tau)| = k \mid U(0) = u, J(0) = i, \tau < \infty),$$

υποθέτοντας ότι X_t είναι το ύψος των αποζημιώσεων τη χρονική στιγμή t , οι οποίες αποδίδονται στην κατάσταση $i = J(t-1)$.

Η μεταβλητή X_t ακολουθεί **διακριτή κατανομή τύπου φάσεων** με αναπαράσταση:

$(a^{(i)}, T^{(i)})$, ως εξής:

$$f_k^{(i)} = \begin{cases} 1 - \sum_{j=1}^{r^{(i)}} a_j^{(i)}, & k = 0 \\ a^{(i)} (T^{(i)})^{k-1} T_0^i, & k \geq 1 \end{cases}.$$

Στην προκειμένη περίπτωση έχουμε την κατανομή τύπου φάσης με αναπαράσταση $(\mathbf{a}^{(i)}, T^{(i)})$.

Ας υποθέσουμε τη Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{Y^{(i)}(t): t = 0, 1, \dots\}$ με διακριτό σύνολο-δείκτη $\{y_0^{(i)}, y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \dots, y_r^{(i)}\}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0}^T \\ T_0^{(i)} & T^{(i)} \end{bmatrix},$$

όπου: $T_0^{(i)} = \mathbf{1} - T^{(i)}\mathbf{1}$.

Ορίζουμε τις εξής πιθανότητες:

- $\mathbb{P}(Y^{(i)}(0) = y_k^{(i)}) = a_k^{(i)}, k = 1, 2, 3, \dots, r^{(i)},$
- $\mathbb{P}(Y^{(i)}(0) = y_0^{(i)}) = 1 - \sum_{k=1}^{r^{(i)}} a_k^{(i)}.$

Άρα, η αναπαράσταση

$$(\mathbf{a}_0^{(i)}, \mathbf{a}^{(i)}) = (a_0^{(i)}, a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, a_3^{(i)}, \dots, a_{r^{(i)}}^{(i)})$$

αποτελεί την αρχική κατανομή της μεταβλητής $Y^{(i)}(\cdot)$, όπου $a_0^{(i)} + \mathbf{a}^{(i)}\mathbf{1} = \mathbf{1}$.

Η συνάρτηση πιθανότητας τη χρονική στιγμή απορρόφησης στην κατάσταση $y_0^{(i)}$ είναι μία κατανομή τύπου φάσης με αναπαράσταση $(\mathbf{a}^{(i)}, T^{(i)})$.

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι όπως είπαμε παραπάνω η εξής:

$$f_k^{(i)} = \begin{cases} \mathbb{P}(Y^{(i)}(t) = 0) = 1 - \sum_{k=1}^{r^{(i)}} a_k^{(i)} \\ \mathbb{P}(Y^{(i)}(t) = k) = \mathbf{a}^{(i)}(T^{(i)})^{k-1}T_0^i \end{cases}$$

Σημείωση: Κάθε i κατανομή μπορεί να προσεγγισθεί από μία από μια κατανομή τύπου φάσης.

Παρατηρούμε πως το σύνολο

$$\{(U(t \wedge \tau), J(t \wedge \tau)) : t = 0, 1, \dots\}^{16}$$

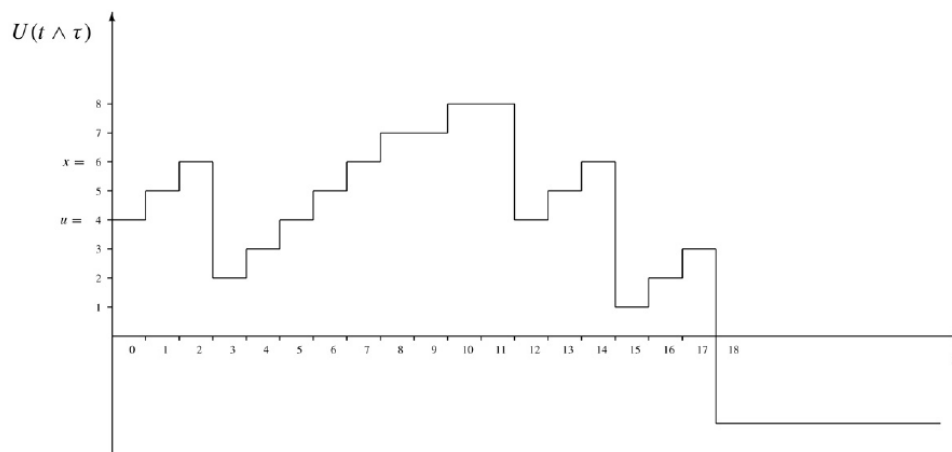
είναι μία Μαρκοβιανή Αλυσίδα Διακριτού Χρόνου (Discrete Time Markov Process – DTMP) με σύνολο - δείκτη το διάστημα $\mathbb{Z} \times \{1, 2, \dots, m\}$.

Θυμόμαστε ακόμα τον ορισμό του τ : $\tau = \inf\{t \geq 1 : U(t) \leq 0\}$

Μία υπολογιστική μέθοδος για τον προσδιορισμό της πιθανότητας κατά την οποία συμβαίνει χρεοκοπία αλλά και για τον προσδιορισμό της κατανομής της είναι η χρήση των κατανομών τύπου φάσης – για τις οποίες μιλήσαμε πιο πριν – οι οποίες αφορούν στις αποζημιώσεις.

8.4 Κατασκευή QBD δομής για το μοντέλο

Στα επόμενα, εξηγήσουμε την εξαγωγή της QBD δομής του μοντέλου χρησιμοποιώντας ένα απλό μονοπάτι (σκάλα).



Η Εικόνα 6 μας δείχνει ένα μονοπάτι που ακολουθεί η το αποθεματικό όταν το αρχικό αποθεματικό είναι ίσο με 4, δηλαδή $u = 4$, και η αρχική αποδοχή είναι ίση με 6, δηλαδή $x = 6$.

¹⁶ $t \wedge \tau := \min\{t, \tau : t = 0, 1, 2, \dots\}$

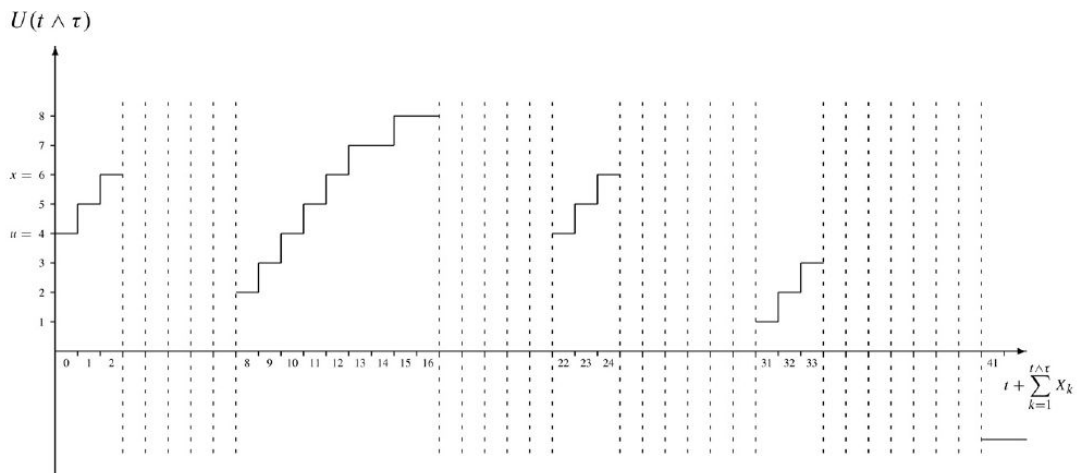
Οι αποζημιώσεις $X_1, X_2, X_3, \dots, X_{18}$ και τα μερίσματα $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_{18}$ τα οποία χρησιμοποιούνται για την κατασκευή του γραφήματος στην **Εικόνα 6** παρατίθενται στον πίνακα (Table 1) παρακάτω:

Table 1
The claim sizes and the dividends used for the sample path in Fig. 1

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$X(t)$	0	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0	0	6	0	0	7
η_t	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0

Μετά τον πίνακα των δεδομένων, παρουσιάζουμε το συνδυαστικό γράφημα (Εικόνα 7):

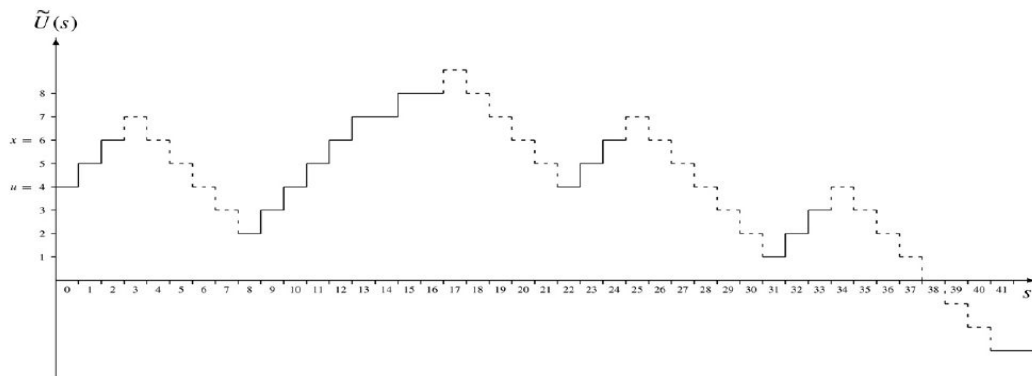
$$\left(t + \sum_{k=1}^{t \wedge \tau} X_k, U(t \wedge \tau) \right)$$



Εικόνα 7

Συνδυάζοντας τα γραφήματα στα [Εικόνα 6](#) και [Εικόνα 7](#) εξάγουμε το γράφημα:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$X(t)$	0	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0	0	6	0	0	7
η_t	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0



Εικόνα 8

Ας υποθέσουμε τώρα πως $\{\tilde{U}_s: s = 0, 1, 2, \dots\}$ είναι το μονοπάτι που ακολουθεί το αποθεματικό στην [Εικόνα 8](#).

Παρατηρούμε πως το γράφημα του πλεονάσματος $\tilde{U}(\cdot)$ αποτελείται από δύο ουσιαστικά γραφήματα:

- *Το ενιαίο γράφημα*

Ισχύει πως $s = t + \sum_{k=1}^{t \wedge \tau} X_k$ για κάποιο t , εάν και μόνο εάν το ζεύγος (s, \tilde{U}_s) ανήκει στο ενιαίο γράφημα.

- *Το διακεκομμένο γράφημα*

Προκύπτει από την προς τα επάνω μετάβαση εξαιτίας των θετικών αποζημιώσεων που παρουσιάζονται στην [Εικόνα 6](#).

Δεδομένου ότι οι αποζημιώσεις ακολουθούν κατανομή τύπου φάσης, το μήκος της διακεκομμένης γραμμής (σκάλας) σχετίζεται με μία Μαρκοβιανή Αλυσίδα:

$$\{Y^{(i)}(n): n = 0, 1, 2, \dots\}$$

με σύνολο - δείκτη:

$$\{y_0^{(i)}, y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \dots, y_{r^{(i)}}^{(i)}\}$$

μοναδικό διάνυσμα πιθανότητας:

$$\left(0, \left(1 - \alpha_0^{(i)}\right)^{-1} \alpha^{(i)}\right)$$

και πίνακα μετάβασης πιθανοτήτων τον:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{T}_0^{(i)} & \mathbf{T}^{(i)} \end{bmatrix}$$

Υποθέτοντας πως το ζεύγος

$$(s, \tilde{U}_s)$$

είναι το k -οστό βήμα της διακεκομμένης σκάλας του γραφήματος, ορίζουμε το εξής:

$$\tilde{J}(s) = Y^{(i)}(k - 1)$$

δηλαδή η κατάσταση στην οποία βρισκόμαστε την χρονική στιγμή s είναι η $Y^{(i)}(k - 1)$.

Συνοπτικά, έχουμε μία νέα αλυσίδα καταστάσεων:

$$\{\tilde{J}(s) : s = 0, 1, 2, \dots\}$$

η οποία ορίζεται ως εξής:

$$\tilde{J}(s) = \begin{cases} J(t \wedge \tau), & \text{εάν το ζεύγος } (s, \tilde{U}_s) \text{ ανήκει στο ενιαίο γράφημα} \\ Y^{(i)}(k - 1), & \text{εάν το ζεύγος } (s, \tilde{U}_s) \text{ ανήκει στο διακεκομμένο γράφημα,} \\ & \text{στο } k\text{-οστό βήμα του.} \end{cases}$$

$\text{και βρισκόμαστε στην κατάσταση } s = t + \sum_{k=1}^{t \wedge \tau} X_k$

Παρατηρούμε πως έχουμε την εξής Μαρκοβιανή Αλυσίδα:

$$\{(\tilde{U}_s, \tilde{J}(s)) : s = 0, 1, 3, \dots\}$$

με σύνολο – δείκτη τον χώρο $\mathbb{Z} \times E$, όπου:

$$E = \{1, 2, \dots, m\} \cup \{y_j^{(i)} : i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, r^{(i)}\}$$

Ορίζουμε επίσης ως νέο χρόνο απορρόφησης:

$$\tilde{\tau} = \inf\{s \geq 1 : \tilde{U}_s \leq 0\}$$

Τότε, το σύνολο:

$$\{(\tilde{U}(s \wedge \tilde{\tau}), \tilde{J}(s \wedge \tilde{\tau})) : s = 0, 1, 3, \dots\}$$

αποτελεί την QBD διαδικασία του μοντέλου με σύνολο – δείκτη:

$$\{0, 1, 2, \dots\} \times E$$

Ταξινομούμε επίσης τα στοιχεία του E ως εξής:

$$1 < 2 < \dots < m < y_1^{(1)} < y_2^{(1)} < \dots < y_{r^{(1)}}^{(1)} < y_1^{(2)} < y_2^{(2)} < \dots < y_{r^{(2)}}^{(2)} < y_1^{(m)} < y_2^{(m)} < \dots < y_{r^{(m)}}^{(m)}$$

Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης της διαδικασίας QBD δίνεται στην παρακάτω εικόνα:

$$\tilde{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & x-1 & x & x+1 & x+2 & \dots \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ x-1 \\ x \\ x+1 \\ x+2 \\ \vdots \end{matrix} & \begin{bmatrix} I & O & & & & & & & & \\ B & O & A & & & & & & & \\ & B & O & A & & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & & & B & O & A & & & \\ & & & & & B & QA & (I-Q)A & & \\ & & & & & & B & QA & (I-Q)A & \\ & & & & & & & B & QA & \\ & & & & & & & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \end{matrix},$$

Εικόνα 9

όπου:

$$A = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_m \\ O & O & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & \cdots & O \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} O & O & O & \cdots & O \\ T_0^{(1)} P^{(1)} & T^{(1)} & O & \cdots & O \\ T_0^{(2)} P^{(2)} & O & T^{(2)} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_0^{(m)} P^{(m)} & O & O & \cdots & T^{(m)} \end{bmatrix},$$

- $A_0 = \text{diag}(a_0^{(1)}, \dots, a_0^{(m)}) P$
- $A_i \in \mathbb{R}^{m \times r^{(i)}}$, $i = 1, 2, \dots, m$, πίνακες στους οποίους η i -οστή γραμμή είναι της μορφής $(\alpha_1^{(i)}, \dots, \alpha_{r^{(i)}}^{(i)})$ και όλα τα άλλα στοιχεία είναι ίσα με το 0.

Ακόμη: $Q = \text{diag}(q^{(1)}, \dots, q^{(m)}, 0, \dots, 0)$ και $P^{(i)}$ είναι η i -οστή γραμμή του P .

8.5 Πιθανότητα χρεοκοπίας – ελλειμματική κατανομή στη χρεοκοπία

Σε αυτήν την ενότητα προχωρούμε σε πιο εξειδικευμένες εκφράσεις για την πιθανότητα χρεοκοπίας και για την ελλειμματική της κατανομή, αναλύοντας την διαδικασία QBD $\{(\tilde{U}_s, \tilde{J}(s)) : s = 0, 1, 2, \dots\}$.

Για $n = 0, 1, 2, \dots$ έχουμε την ακολουθία χρόνων απορρόφησης

$$\tilde{\tau}_n = \inf\{s \geq 1 : \tilde{U}_s = n\}.$$

Σημειώνουμε πως:

$$\tilde{\tau}_0 = \inf\{s \geq 1 : \tilde{U}_s = 0\} := \tilde{\tau}.$$

Ορίζουμε ως την πρώτη πιθανότητα μετάβασης την:

$$g_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}(\tilde{\tau}_{n-1} < \infty, \tilde{J}(\tilde{\tau}_{n-1}) = j \mid \tilde{U}(0) = n, \tilde{J}(0) = i)$$

Συνεπώς, για $n = 0, 1, 2, \dots$, μπορούμε να ορίσουμε τον πίνακα $G_n = (g_{ij}^{(n)})_{i,j \in E}$.

Ο πίνακας G_n είναι ανεξάρτητος από το n για $n \geq x$, άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και τον συμβολισμό G , χωρίς να υπάρχει πρόβλημα σύγχυσης.

Είναι γνωστό¹⁷ πως ο G προκύπτει ως η μικρότερη μη αρνητική λύση της παρακάτω εξίσωσης με στοιχεία πίνακες:

$$G = B + QAG + (I - Q)AG^2.$$

Για την επίλυση της παραπάνω εξίσωσης έχουν κατασκευαστεί πολλοί αλγόριθμοι προκειμένου να επιλυθεί. Για παράδειγμα, η αναδρομική λύση $\{G^{(k)} : k = 0, 1, 2, \dots\}$ ορίζεται ως εξής:

$$G^{(0)} = 0,$$

$$G^{(k+1)} = (I - QA)^{-1} (B + (I - Q)A(G^{(k)})^2), k = 0, 1, 2, \dots$$

¹⁷ Latouche & Ramaswami (1999) και Neuts (1981, 1989)

Η παραπάνω λύση αυξάνεται μονότονα καθώς το $k \rightarrow \infty$ και συγκλίνει στον ελάχιστο μη αρνητικό πίνακα G , που είναι και ο ζητούμενος.

Για $n = 0, 1, 2, \dots, x - 1$ έχουμε ότι $G_n = B + AG_{n+1}G_n$.

Συνεπώς, ο $G_n, n = 0, 1, 2, \dots, x - 1$ υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$G_n = (I - AG_{n+1})^{-1}B$$

Σημειώνουμε πως, για $i, j \in E$, η πιθανότητα $\mathbb{P}(\tilde{\tau}_{n-1} < \infty, \tilde{j}(\tilde{\tau}_{n-1}) = j \mid \tilde{U}(0) = u, \tilde{j}(0) = i)$ υπολογίζεται από την (i, j) – οστό στοιχείο του γινομένου $G_u G_{u-1} \dots G_1$.

Έστω τώρα η εξίσωση:

$$\pi(u, i) = \begin{cases} \mathbf{1}_i^T G^{u-x+1} G_{x-1} G_{x-2} \dots G_1, & \text{εάν } u \geq x \\ \mathbf{1}_i^T G_u G_{u-1} \dots G_1, & \text{εάν } u < x \end{cases} \quad (\text{II})$$

Από εδώ και στο εξής, ισχύει πως το σύμβολο $\mathbf{1}_i$ ορίζει διάνυσμα στήλη κατάλληλης διάστασης, του οποίου η i – στη θέση περιλαμβάνει το στοιχείο 1 και τα υπόλοιπα στοιχεία είναι ίσα με το 0.

Ειδικά για την εξίσωση $\pi(u, i)$, το διάνυσμα $\mathbf{1}_i$ έχει διάσταση ίση με $m + \sum_{j=1}^m r^{(j)}$.

Είμαστε πλέον έτοιμοι να παρουσιάσουμε τις εκφράσεις για την πιθανότητα χρεοκοπίας, αλλά και για την ελλειμματική κατανομή κατά τη χρεοκοπία.

Στο ακόλουθο θεώρημα παρουσιάζεται η δεσμευμένη πιθανότητα για τη χρεοκοπία.

8.5.1 Θεώρημα:

Η πιθανότητα $\psi_{u,i}$ δίνεται από τη σχέση $\psi_{u,i} = \pi(u,i)\mathbf{1}$ και εκφράζει τη δεσμευμένη πιθανότητα της χρεοκοπίας.

Απόδειξη:

Ισχύει ότι

$$\{\tilde{\tau} < \infty\} = \{\tau < \infty\}$$

και

$$(\tilde{U}(0) = u, \tilde{J}(0) = i) = (U(0) = u, J(0) = i).$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} \psi_{u,i} &= \mathbb{P}(\tau < \infty | U(0) = u, J(0) = i) = \mathbb{P}(\tilde{\tau} < \infty | \tilde{U}(0) = u, \tilde{J}(0) = i) = \\ &= \sum_{j \in E} \mathbb{P}(\tilde{\tau} < \infty, \tilde{J}(\tilde{\tau}) = j | \tilde{U}(0) = u, \tilde{J}(0) = i) = \pi(u, i)\mathbf{1}. \end{aligned}$$

Εάν η αλυσίδα καταστάσεων $\{J(t): t = 0, 1, 2, \dots\}$ είναι μη υποβιβάσιμη (δεν έχουμε προς τα πίσω μεταβάσεις), τότε ακολουθεί μοναδική κατανομή $\mathbf{v} \equiv (v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(m)})$, η οποία προσδιορίζεται μέσω της μοναδικής λύσης του συστήματος $\mathbf{v}P = \mathbf{v}$ και $\mathbf{v}\mathbf{1} = \mathbf{1}$.

Έστω $\boldsymbol{\mu}$ το διάνυσμα στήλη m διάστασης, του οποίου το i -οστό στοιχείο είναι το $\mu^{(i)} \equiv \mathbb{E}[X_t | J(t-1) = i] = \mathbf{a}^{(i)}(I - T^{(i)})^{-1}\mathbf{1}$.

Τότε,

$\mathbf{v}\boldsymbol{\mu}$ = το μέσο μέγεθος αποζημιώσεων το οποίο αντιστοιχεί στη μονάδα του χρόνου, υπό την αλυσίδα καταστάσεων $\{J(t): t = 0, 1, 2, \dots\}$.

Εάν q οριστεί ως το διάνυσμα στήλη του οποίου το i -στο στοιχείο γράφεται ως $q^{(i)}$, τότε,

$\mathbf{v}q$ = το μέσο μέρισμα στη μονάδα του χρόνου, υπό την αλυσίδα καταστάσεων $\{J(t): t = 0, 1, 2, \dots\}$.

Υπόθεση:

Στα προηγούμενα, η μονάδα χρόνου είναι ίση με το 1, επομένως μπορούμε να συμπεράνουμε πως $\psi_{u,i} = 1$ για κάθε $u \geq 1$ και για κάθε $i = 1, \dots, m$ εάν και μόνο εάν $\nu(\mu + q) \geq 1$.

Στο επόμενο θεώρημα αποδεικνύουμε την ισχύ της παραπάνω υπόθεσης.

8.5.2 Θεώρημα:

Έστω πως η αλυσίδα καταστάσεων $\{J(t): t = 0, 1, 2, \dots\}$ είναι μη υποβιβάσιμη. Ισχύουν τα εξής:

- i) Αν $\nu(\mu + q) \geq 1$, τότε $\psi_{u,i} = 1$ για κάθε $u \geq 1$ και για κάθε $i = 1, \dots, m$.
- ii) Αν $\nu(\mu + q) < 1$, τότε $\lim_{u \rightarrow \infty} \psi_{u,i} = 0$ για κάθε $i = 1, \dots, m$.

Απόδειξη:

Αφού η αλυσίδα καταστάσεων $\{J(t): t = 0, 1, 2, \dots\}$ είναι μη υποβιβάσιμη, αυτό μπορεί να φανεί στον στοχαστικό πίνακα $A + B$, όπου:

$$A = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & \dots & A_m \\ O & O & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & \dots & O \end{bmatrix}$$

και

$$B = \begin{bmatrix} O & O & O & \dots & O \\ T_0^{(1)} P^{(1)} & T^{(1)} & O & \dots & O \\ T_0^{(2)} P^{(2)} & O & T^{(2)} & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_0^{(m)} P^{(m)} & O & O & \dots & T^{(m)} \end{bmatrix} .$$

Ο πίνακας $A + B$ έχει ένα μοναδικό μη υποβιβάσιμο κλειστό υποσύνολο.

Σημειώνουμε δε, πως εάν η κατανομή τύπου φάσης με αναπαράσταση $(\alpha^{(i)}, T^{(i)})$ είναι επίσης μη υποβιβάσιμη για κάθε $i = 1, \dots, m$, τότε και ο πίνακας $A + B$ είναι μη υποβιβάσιμος.

Επομένως, ο στοχαστικός πίνακας $A + B$ έχει μοναδικό διάνυσμα πιθανοτήτων $\tilde{\nu}$, το οποίο προκύπτει ως μοναδική λύση του συστήματος:

$$\tilde{\nu}(A + B) = \tilde{\nu} \text{ και } \tilde{\nu}\mathbf{1} = 1.$$

Αποδεικνύεται πως:

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{1+\nu\mu} \left(\nu, \nu^{(1)}\alpha^{(1)}(I - T^{(1)})^{-1}, \dots, \nu^{(m)}\alpha^{(m)}(I - T^{(m)})^{-1} \right).$$

Με μία μικρή παραλλαγή σε γνωστό θεώρημα¹⁸ δίνει τα εξής συμπεράσματα:

- i) Εάν $\tilde{\nu}((I - Q)A - BI)\mathbf{1} \leq 0$, τότε ο πίνακας G είναι στοχαστικός
- ii) Εάν $\tilde{\nu}((I - Q)A - BI)\mathbf{1} > 0$ τότε η μέγιστη ιδιοτιμή του πίνακα G είναι αυστηρά μικρότερη της μονάδας.

Ακόμη, έχουμε μετά από πράξεις:

$$\tilde{\nu}((I - Q)A - BI)\mathbf{1} = \frac{1-\nu(\mu+q)}{1+\nu\mu} \quad (\text{II})$$

Εάν ισχύει ότι $\nu(\mu + q) \geq 1$, τότε ο πίνακας G είναι στοχαστικός, για κάθε $n = x - 1, x - 2, \dots, 1$.

Από το Θεώρημα 1 που αποδείχθηκε πιο πάνω, σε συνδυασμό με την σχέση (II), έχουμε την απόδειξη του i).

Εάν τώρα ισχύει ότι $\nu(\mu + q) < 1$, τότε η μέγιστη ιδιοτιμή του πίνακα G είναι αυστηρά μικρότερο της μονάδας, το οποίο επίσης μαζί με το Θεώρημα 1 και την σχέση (II) ολοκληρώνει και την απόδειξη του ii).

¹⁸ Neuts, 1989

Το επόμενο θεώρημα παρουσιάζει την υπό συνθήκη αναμενόμενη χρονική στιγμή κατά την οποία συμβαίνει η χρεοκοπία.

8.5.3 Θεώρημα:

Έστω πως η αλυσίδα καταστάσεων $\{J(t): t = 0, 1, 2, \dots\}$ είναι μη υποβιβάσιμη. Ισχύουν τα εξής:

$$i) \quad \text{Εάν } \mathbf{v}(\boldsymbol{\mu} + \mathbf{q}) > 1, \text{ τότε } \mathbb{E}[\tau \mid U(0) = u, J(0) = i] = \frac{1}{2} \mathbf{1}_i^T \sum_{k=1}^u G_u \dots G_{k+1} \boldsymbol{\beta}_k - \frac{u}{2}$$

όπου

$$\boldsymbol{\beta}_k = \begin{cases} [I - G + \mathbf{1}g][I - (A + b) + (\mathbf{1} - 2(I - Q)A\mathbf{1})g]^{-1}\mathbf{1}, & \text{εάν } k \geq u \\ \mathbf{1} + (I - AG_{k+1})^{-1}A(\mathbf{1} + \boldsymbol{\beta}_{k+1}), & \text{εάν } k < u \end{cases}$$

όπου \mathbf{g} είναι διάνυσμα πιθανοτήτων του G .

$$ii) \quad \text{Εάν } \mathbf{v}(\boldsymbol{\mu} + \mathbf{q}) \leq 1, \text{ τότε } \mathbb{E}[\tau \mid U(0) = u, J(0) = i] = \infty.$$

Απόδειξη:

Έστω ότι $\mathbf{v}(\boldsymbol{\mu} + \mathbf{q}) < 1$. Τότε, σύμφωνα με το Θεώρημα 2 που διατυπώσαμε παραπάνω, πράγματι είναι: $\mathbb{E}[\tau \mid U(0) = u, J(0) = i] = \infty$.

Έστω ότι $\mathbf{v}(\boldsymbol{\mu} + \mathbf{q}) \geq 1$. Τότε, από τις ιδιότητες του $\tilde{U}(\cdot)$, έχουμε την εξής σχέση:

$$\tilde{\tau} = 2\tau + u.$$

Η τελευταία σχέση οδηγεί στην ισότητα:

$$\boxed{\mathbb{E}[\tau \mid U(0) = u, J(0) = i] = \frac{1}{2} \mathbb{E}[\tilde{\tau} \mid \tilde{U}(0) = u, \tilde{J}(0) = i] - \frac{u}{2}} \quad (*)$$

Εάν $\mathbf{v}(\boldsymbol{\mu} + \mathbf{q}) = 1$, τότε μια μικρή πάλι παραλλαγή σε γνωστό θεώρημα¹⁹, υπαγορεύει την ύπαρξη i στο μη υποβιβάσιμο κλειστό σύνολο πινάκων του στοχαστικού πίνακα G , τέτοιο ώστε:

$$\boxed{\mathbb{E}[\tilde{\tau}_{n-1} \mid \tilde{U}(0) = n, \tilde{J}(0) = i] = \infty}$$
 για κάθε $n \geq u$, όπου το $\tilde{\tau}_{n-1}$ ορίζεται από τη σχέση:

$$\tilde{\tau}_n = \inf\{s \geq 1 : \tilde{U}_s = n\}$$

¹⁹ Neuts. 1989

Επομένως, $\mathbb{E}[\tilde{\tau} \mid \tilde{U}(0) = u, \tilde{J}(0) = i] = \infty$ για όλα τα μεγάλα u και για κάθε $i = 1, 2, 3, \dots, m$.

Τέλος, ας υποθέσουμε πως $\mathbf{v}(\boldsymbol{\mu} + \mathbf{q}) > 1$.

Έστω ακόμη ο $m \times m$ πίνακας $G_n^*(z)$, $|z| \leq 1$, του οποίου το στοιχείο (i, j) είναι ίσο με $\mathbb{E}[z^{\tilde{\tau}^{n-1}} \mathbf{1}_{\{\tilde{J}(\tilde{\tau}_{n-1})=j\}} \mid \tilde{U}(0) = n, \tilde{J}(0) = i]$. Από τις ιδιότητες του $\tilde{U}(\cdot)$ ισχύει ότι $\mathbb{E}[z^{\tilde{\tau}} \mid \tilde{U}(0) = n, \tilde{J}(0) = i] = \mathbf{1}_i^T G_u^*(z) G_{u-1}^*(z) \dots G_1^*(z) \mathbf{1}$.

Παραγωγίζοντας ως προς z και θέτοντας $z \rightarrow 1$, έχουμε:

$$\mathbb{E}[\tilde{\tau} \mid \tilde{U}(0) = n, \tilde{J}(0)] = \mathbf{1}_i^T \sum_{k=1}^u G_u \dots G_{k+1} \mathcal{G}_k \mathbf{1} \quad (1)$$

όπου

$$\mathcal{G}_k = \lim_{z \rightarrow 1^-} \frac{d}{dz} G_k^*(z)$$

Από τον Neuts (1989), γνωρίζουμε ότι:

$$\mathcal{G}_k \mathbf{1} = [I - G + \mathbf{1}\mathbf{g}][I - (A + B) + (\mathbf{1} - 2(I - Q)A\mathbf{1})\mathbf{g}]^{-1} \mathbf{1}, \quad k \geq u \quad (2)$$

Από τη σχέση:

$$G_k^*(z) = z(B + AG_{k+1}^*(z)G_k^*(z))$$

έχουμε ότι:

$$\mathcal{G}_k \mathbf{1} = \mathbf{1} + (I - AG_{k+1})^{-1} A(\mathbf{1} + \mathcal{G}_{k+1} \mathbf{1}), \quad k = u - 1, \dots, 1 \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1), (2), (3), έχουμε ότι:

$$\mathbb{E}[\tilde{\tau} \mid \tilde{U}(0) = n, \tilde{J}(0)] = \mathbf{1}_i^T \sum_{k=1}^u G_u \dots G_{k+1} \boldsymbol{\beta}_k \quad (4)$$

όπου $\boldsymbol{\beta}_k = \mathcal{G}_k \mathbf{1}$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (4) στην (*), έχουμε το ζητούμενο.

Το επόμενο θεώρημα δίνει μια έκφραση για την δεσμευμένη ελλειμματική κατανομή της χρεοκοπίας. Θυμόμαστε πως $\mathbf{1}(n) = \mathbf{1}$ και $\mathbf{0}(n) = \mathbf{0}$, όταν τα διανύσματα έχουν μήκος n .

8.5.4 Θεώρημα:

Οι δεσμευμένες ελλειμματικές πιθανότητες $\varphi_{u,k}(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ είναι ως ακολούθως:

$$\varphi_{u,i}(0) = (\psi_{u,i})^{-1} \pi(u, i) \begin{bmatrix} \mathbf{1}^{(m)} \\ \mathbf{0}(\sum_{j=1}^m r^{(j)}) \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$\varphi_{u,i}(k) = (\psi_{u,i})^{-1} \pi(u, i) \begin{bmatrix} \mathbf{0}^{(m)} \\ (T^{(1)})^{k-1} T_0^{(1)} \\ \vdots \\ (T^{(m)})^{k-1} T_0^{(m)} \end{bmatrix}, \quad k \geq 1 \quad (6)$$

Απόδειξη:

Για την (5):

Εάν $\tilde{j}(\tilde{\tau}) \in \{1, 2, \dots, m\}$, τότε $U(\tau) = 0$.

Εάν $\tilde{j}(\tilde{\tau}) \in \{y_j^{(i')}: i' = 1, \dots, m, j = 1, \dots, r^{(i')}\}$, τότε $U(\tau) < 0$.

Επομένως:

$$\begin{aligned} \varphi_{u,i}(0) &= \mathbb{P}(U(\tau) = 0 \mid U(0) = u, J(0) = i, \tau < \infty) \\ &= (\psi_{u,i})^{-1} \mathbb{P}(\tau < \infty, U(\tau) = 0 \mid U(0) = u, J(0) = i) \\ &= (\psi_{u,i})^{-1} \sum_{j=1}^m \mathbb{P}(\tilde{\tau} < \infty, \tilde{j}(\tilde{\tau}) = j \mid \tilde{U}(0) = u, \tilde{j}(0) = i) \\ &= (\psi_{u,i})^{-1} \pi(u, i) \begin{bmatrix} \mathbf{1}^{(m)} \\ \mathbf{0} \left(\sum_{j=1}^m r^{(j)} \right) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Για την (6):

$$\begin{aligned}
 \varphi_{u,i}(k) &= \mathbb{P}(|U(\tau)| = k \mid U(0) = u, J(0) = i, \tau < \infty) \\
 &= (\psi_{u,i})^{-1} \mathbb{P}(\tau < \infty, |U(\tau)| = k \mid U(0) = u, J(0) = i) \\
 &= (\psi_{u,i})^{-1} \sum_{i'=1}^m \sum_{j=1}^{r(i')} \left\{ \mathbb{P}(\tilde{\tau} < \infty, \tilde{J}(\tilde{\tau}) = y_j^{(i')} \mid \tilde{U}(0) = u, \tilde{J}(0) = i) \times \right. \\
 &\quad \left. \times \mathbb{P}(\tau < \infty, |U(\tau)| = k \mid \tilde{\tau} < \infty, \tilde{J}(\tilde{\tau}) = y_j^{(i')}) \right\}
 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε πως, δεδομένου ότι $\tilde{\tau} < \infty$ και $\tilde{J}(\tilde{\tau}) = y_j^{(i')}$, το αποθεματικό $|U(\tau)|$ ακολουθεί κατανομή τύπου φάσης με αναπαράσταση την $(\mathbf{1}_j^T, T^{(i')})$.

Επομένως, για $k \geq 1$, είναι:

$$\mathbb{P}(\tau < \infty, |U(\tau)| = k \mid \tilde{\tau} < \infty, \tilde{J}(\tilde{\tau}) = y_j^{(i')}) = \mathbf{1}_j^T (T^{(i')})^{k-1} T_0^{(i')}$$

Συνεπώς:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{u,i}(k) &= (\psi_{u,i})^{-1} \sum_{i'=1}^m \sum_{j=1}^{r(i')} \left\{ \mathbb{P}(\tilde{\tau} < \infty, \tilde{J}(\tilde{\tau}) = y_j^{(i')} \mid \tilde{U}(0) = u, \tilde{J}(0) = i) \mathbf{1}_j^T (T^{(i')})^{k-1} T_0^{(i')} \right\} = \\
 &(\psi_{u,i})^{-1} \pi(u, i) \begin{bmatrix} \mathbf{0}(m) \\ (T^{(1)})^{k-1} T_0^{(1)} \\ \vdots \\ (T^{(m)})^{k-1} T_0^{(m)} \end{bmatrix}. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, η δεσμευμένη μέση τιμή του ελλείμματος κατά τη στιγμή τη χρεοκοπίας ορίζεται ως εξής:

$$\mathbb{E}[|U(\tau)| \mid U(0) = u, J(0) = i, \tau < \infty] = (\psi_{u,i})^{-1} \pi(u, i) \begin{bmatrix} \mathbf{0}(m) \\ (1 - T^{(1)})^{-1} \mathbf{1} \\ \vdots \\ (1 - T^{(m)})^{-1} \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

8.6 Αριθμητικά Παραδείγματα στο μοντέλο των Kim, Kim και Kim

Σε αυτήν την ενότητα παραθέτουμε 3 παραδείγματα, όπου θεωρούμε μία αλυσίδα της μορφής:

$\{J(t): t = 0, 1, 2, \dots\}$ με σύνολο δείκτη το $\{1, 2\}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης P :

$$P = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix}$$

για τέτοιο $p: 0 \leq p \leq 1$.

Όταν $J(t-1) = 1$ (αντ. $J(t-1) = 2$), η πιθανότητα η χρηματική αποδοχή να λάβει χώρα τη στιγμή t είναι ίση με 0.01 (0.03 αντίστοιχα).

8.6.1 Παράδειγμα

Έστω πως $q^{(1)} = q^{(2)} = 0.5$. Δεδομένου ότι $J(t-1) = 1$ (αντ. $J(t-1) = 2$) και οι αποζημιώσεις δίνονται τη χρονική στιγμή t , το μέγεθος των αποζημιώσεων ακολουθεί διακριτή ομοιόμορφη κατανομή στο σύνολο: $\{1, 2, \dots, 9\}$ (αντ. $\{1, 2, \dots, 29\}$).

Σημειώνουμε πως οι αναμενόμενες αποζημιώσεις δίνονται από τη σχέση:

$$\mathbb{E}[X_t | X_t > 0, J(t-1) = i] = \begin{cases} 5, & \text{αν } i = 1 \\ 15, & \text{αν } i = 2 \end{cases}.$$

Οι συναρτήσεις πυκνοτήτων των δεσμευμένων πιθανοτήτων για τα ύψη των αποζημιώσεων δίνονται από τις σχέσεις:

$$f_k^{(1)} = \begin{cases} 0.99, & \text{εάν } k = 0 \\ 0.01 \times \frac{1}{9}, & \text{εάν } k = 1, 2, \dots, 9 \end{cases},$$

$$f_k^{(2)} = \begin{cases} 0.97, & \text{εάν } k = 0 \\ 0.03 \times \frac{1}{29}, & \text{εάν } k = 1, 2, \dots, 29 \end{cases}.$$

Η αναπαράσταση τύπου φάσης $(\mathbf{a}^{(1)}, T^{(1)})$ για την δεσμευμένη κατανομή του ύψους των αποζημιώσεων δίνεται ως ακολούθως:

$$\alpha_i^{(1)} = 0.01 \times \frac{1}{9}, 1 \leq i \leq 9,$$

$$T_{ij}^{(1)} = \begin{cases} 1, & 2 \leq j = i + 1 \leq 9 \\ 0, & 1 \leq i, j \leq 9 \text{ και } j \neq i + 1 \end{cases}$$

Η αναπαράσταση τύπου φάσης $(\mathbf{a}^{(2)}, T^{(2)})$ για την δεσμευμένη κατανομή του ύψους των αποζημιώσεων δίνεται ως ακολούθως:

$$\alpha_i^{(2)} = 0.03 \times \frac{1}{29}, 1 \leq i \leq 29,$$

$$T_{ij}^{(2)} = \begin{cases} 1, & 2 \leq j = i + 1 \leq 29 \\ 0, & 1 \leq i, j \leq 29 \text{ και } j \neq i + 1 \end{cases}.$$

8.6.2 Παράδειγμα

Έστω πως $q^{(1)} = q^{(2)} = 0.5$.

Δεδομένου ότι $J(t-1) = 1$ (αντ. $J(t-1) = 2$) και οι αποζημιώσεις δίνονται τη χρονική στιγμή t , το μέγεθος των αποζημιώσεων ακολουθεί γεωμετρική κατανομή στο σύνολο: $\{1, 2, \dots\}$ με μέσο το 5 (αντ. 15).

Οι συναρτήσεις πυκνοτήτων των δεσμευμένων πιθανοτήτων για τα ύψη των αποζημιώσεων δίνονται από τις σχέσεις:

$$f_k^{(1)} = \begin{cases} 0.99, & \text{εάν } k = 0 \\ 0.01 \times \frac{1}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}, & \text{εάν } k = 1, 2, \dots \end{cases},$$

$$f_k^{(2)} = \begin{cases} 0.97, & \text{εάν } k = 0 \\ 0.03 \times \frac{1}{5} \times \left(\frac{14}{15}\right)^{k-1}, & \text{εάν } k = 1, 2, \dots \end{cases}.$$

Η αναπαράσταση τύπου φάσης $(\mathbf{a}^{(1)}, T^{(1)})$ για την δεσμευμένη κατανομή του ύψους των αποζημιώσεων είναι η εξής: $\mathbf{a}^{(1)} = 0.01, T^{(1)} = \frac{4}{5}$.

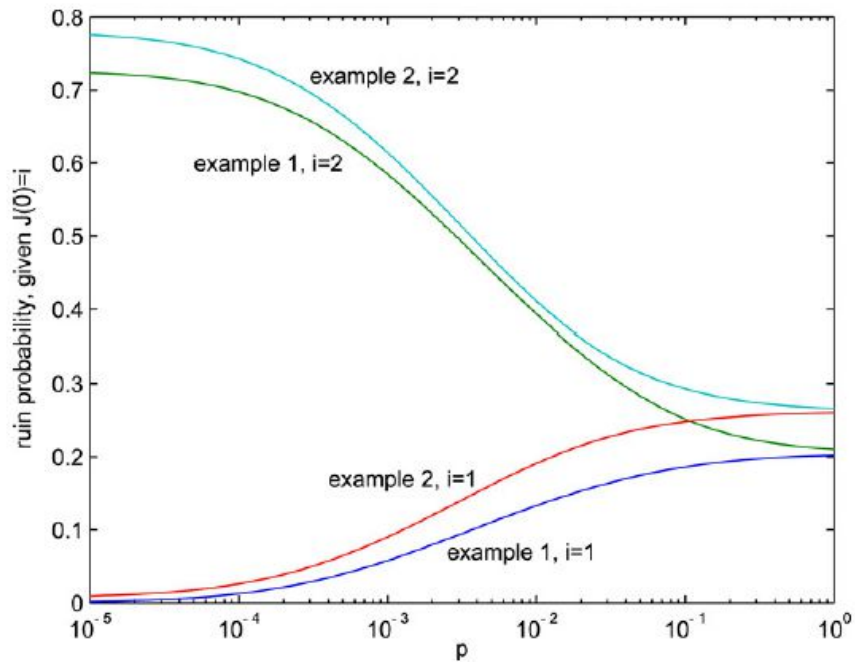
Η αναπαράσταση τύπου φάσης $(\mathbf{a}^{(2)}, T^{(2)})$ για την δεσμευμένη κατανομή του ύψους των αποζημιώσεων δίνεται ως ακολούθως:

$$\mathbf{a}^{(2)} = 0.03$$

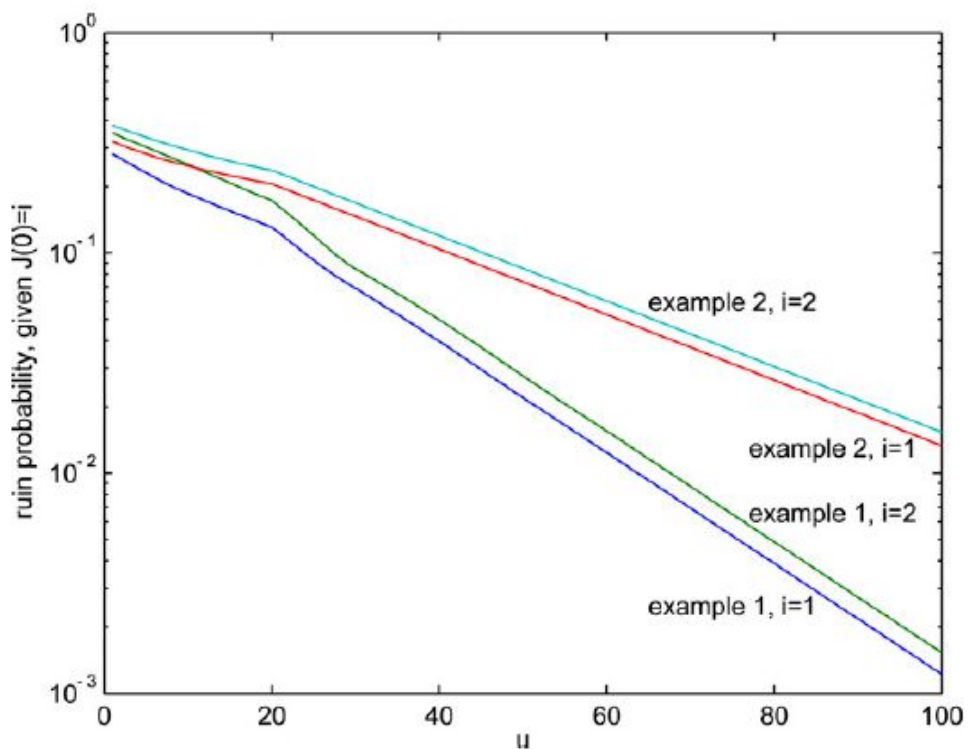
$$T^{(2)} = \frac{14}{15}$$

8.6.3 Παράδειγμα

Έστω ότι $q^{(2)} = 1 - q^{(1)}$ και έστω επίσης ότι ακολουθούμε το μοντέλο του παραδείγματος 2.



Εικόνα 10



Εικόνα 11

Στις Εικόνες 10 έως 14 παρουσιάζονται οι πιθανότητες χρεοκοπίας, τα μέσα ελλείμματα κατά τη χρεοκοπία καθώς και οι κατανομές που ακολουθεί το έλλειμμα κατά τη στιγμή της εκάστοτε χρεοκοπίας.

Πιο συγκεκριμένα:

Η **Εικόνα 10** δείχνει τις πιθανότητες χρεοκοπίας για τα Παραδείγματα 8.6.1 και 8.6.2, όπου $x = 20$ και $u = 10$, σε σχέση με την πιθανότητα p .

Για μικρές τιμές της πιθανότητας p , το γεγονός ότι βρισκόμαστε στην κατάσταση $J(0) = i$ επηρεάζει κατά μοναδικό τρόπο την πιθανότητα χρεοκοπίας.

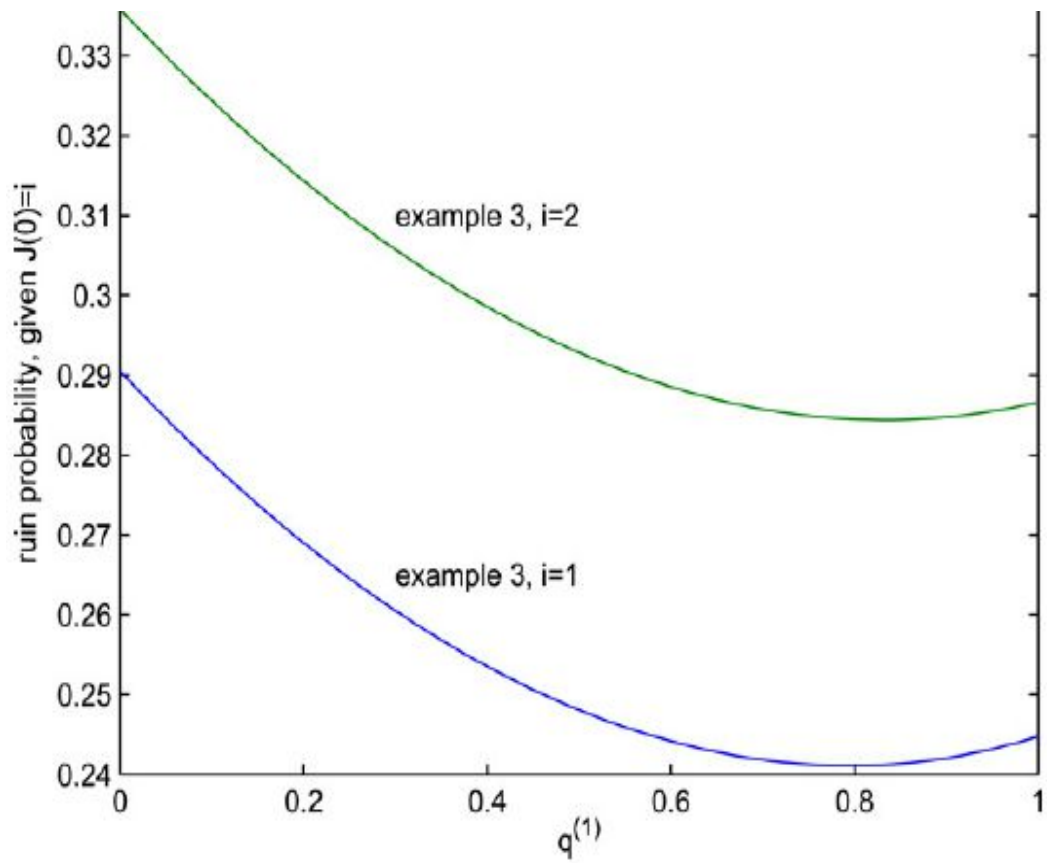
Από τη στιγμή που η πιθανότητα αποδοχής χρημάτων και το αναμενόμενο μέγεθος της αποδοχής αυτής είναι μεγαλύτερα στην κατάσταση $i = 2$ σε σχέση με την κατάσταση $i = 1$, τότε και στα δύο Παραδείγματα οι πιθανότητες χρεοκοπίας στην κατάσταση $i = 2$ είναι μεγαλύτερες από εκείνες στην κατάσταση $i = 1$.

Σε αντίθεση με την περίπτωση μικρής τιμής για την πιθανότητα p , η επιρροή της αρχικής κατάστασης στην πιθανότητα χρεοκοπίας γίνεται περισσότερο αδύναμη όσο μεγαλώνει η τιμή της p .

Κατά συνέπεια, η διαφορά μεταξύ των καταστάσεων 1, 2 και στα δύο παραδείγματα, μικραίνει όσο η πιθανότητα p αυξάνεται.

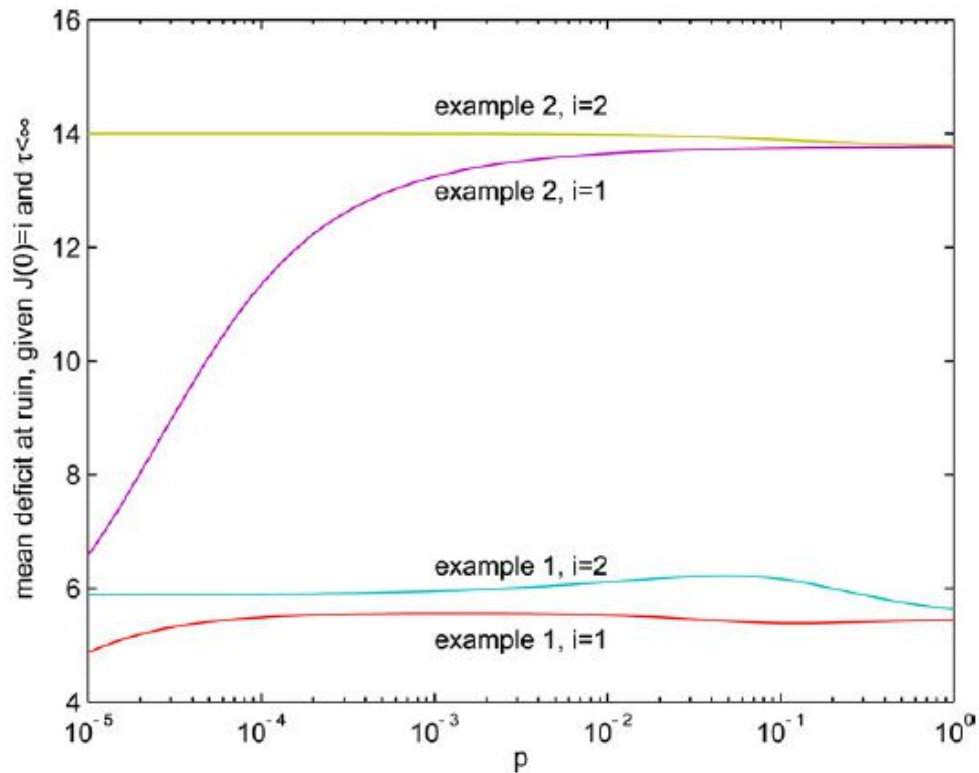
Στην Εικόνα 11 παρουσιάζονται οι πιθανότητες χρεοκοπίας των παραδειγμάτων 8.6.1, 8.6.2 σε σχέση με το αρχικό αποθεματικό u . Βλέπουμε, κάτι το οποίο είναι και αναμενόμενο, ότι και στα δύο παραδείγματα, όσο το αρχικό αποθεματικό αυξάνεται, τόσο μειώνονται οι πιθανότητες να φτάσουμε στις πιθανότητες χρεοκοπίας.

Ειδικότερα, οι πιθανότητες χρεοκοπίας του παραδείγματος 8.6.2 μειώνονται με ταχύτερο ρυθμό σε σχέση με τις πιθανότητες χρεοκοπίας του παραδείγματος 8.6.1, καθώς ακολουθούν γεωμετρική κατανομή, της οποίας η απόκλιση είναι σαφώς μεγαλύτερη της διακριτής ομοιόμορφης κατανομής.



Εικόνα 12

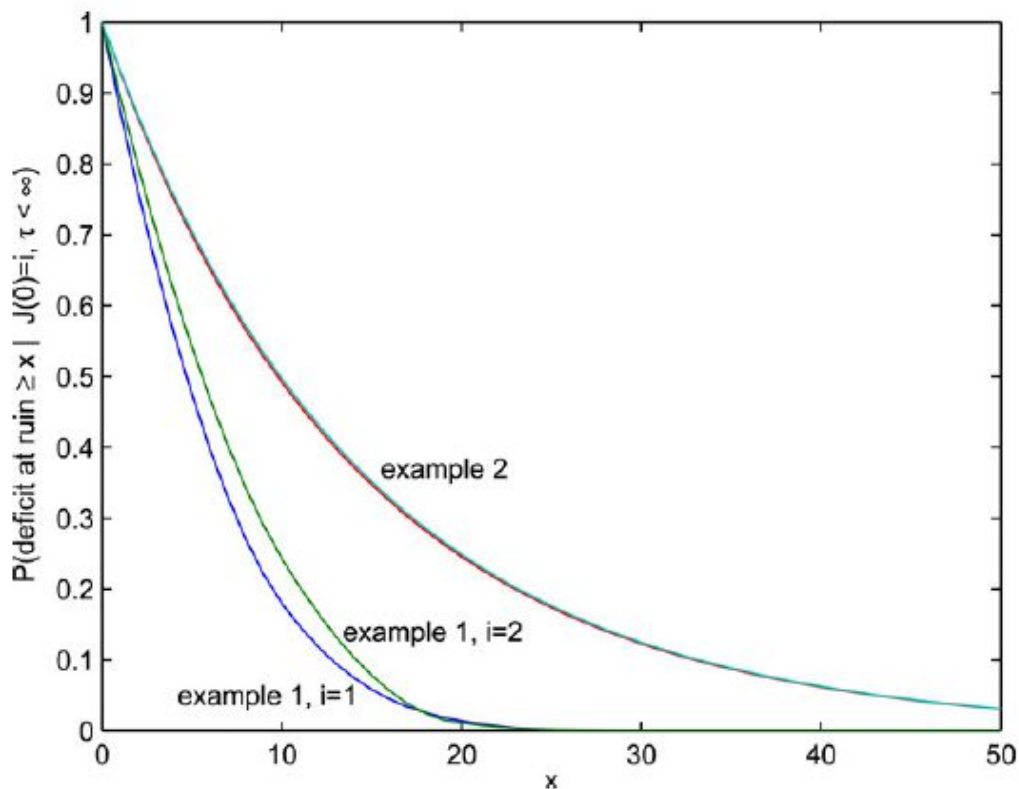
Στην Εικόνα 12 παρουσιάζεται η επιρροή της πιθανότητας p στο αναμενόμενο έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία για τα Παραδείγματα 1 και 2, όπου $x = 20$ και $u = 10$.



Εικόνα 13

Η επιρροή του πλεονάσματος u στο αναμενόμενο έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία για τα Παραδείγματα 8.6.1 και 8.6.2 με $x = 20$ παρουσιάζεται στην [Εικόνα 13](#).

Παρατηρούμε πως τα αναμενόμενα ελλείμματα του παραδείγματος 8.6.2 είναι μεγαλύτερα σε σχέση με του παραδείγματος 8.6.1 και αυτό οφείλεται στο γεγονός και πάλι ότι η απόκλιση στη γεωμετρική κατανομή είναι μεγαλύτερη από εκείνη της διακριτής ομοιόμορφης κατανομής.



Εικόνα 14

Τέλος, στην [Εικόνα 14](#) παρουσιάζονται οι ελλειμματικές κατανομές κατά τη χρεοκοπία για τα Παραδείγματα 8.6.1 και 8.6.2, όπου $x = 20$ και $u = 10$ με βάση το φράγμα του x .

Στην περίπτωση του Παραδείγματος 8.6.1, το μέγεθος των αποζημιώσεων είναι φραγμένο από τις 29 χρηματικές μονάδες, επομένως η ελλειμματική κατανομή είναι φραγμένη από το νούμερο 28. Αυτό φαίνεται καθαρά στο αποτέλεσμα της Εικόνας 9. Παρατηρούμε επίσης πως και για τις 2 καταστάσεις του Παραδείγματος 8.6.2, οι καμπύλες των κατανομών σχεδόν ταυτίζονται.

Βιβλιογραφία – Πηγές

- «**Θέματα Ανάλυσης Πινάκων**», Παναγιώτης Ι. Ψαρράκος, Καθηγητής Ε.Μ.Π., <http://www.math.ntua.gr/~ppsarr/>
- “**A risk model with paying dividends and random environment**”, Bara Kim, Hwa – Sung Kim, Jeongsim Kim, 2007, Insurance: Mathematics and Economics 42 (2008) 717–726
- “**Quasi – Birth – and - Death Processes**”, Peter Taylor, Department of Mathematics and Statistics, University of Melbourne: <http://www.cs.cmu.edu/~osogami/thesis/html/node69.html>
- **Πινακοεκθετικές κατανομές και κατανομές τύπου φάσεων στη θεωρία ανανέωσης και τη θεωρία κινδύνου, Matrix Exponential and phase type distributions in renewal and risk theory**», Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία της Ελένης Α. Βαταμίδου, Επιβλέπων: Γεώργιος Τσακλίδης Av. Καθ. Α.Π.Θ., Θεσσαλονίκη, Ιούνιος 2010. **Link:** <http://invenio.lib.auth.gr/record/122858?ln=en>
- “**A Closed-Form Solution for Mapping General Distributions to Minimal PH Distributions**”, Chapter: “Computer Performance Evaluation. Modelling Techniques and Tools”, Volume 2794 of the series “Lecture Notes in Computer Science”, pp 200-217, Takayuki Osogami, Mor Harchol-Balter.
- “**Note on the Markovian Arrival Process for 04141 Stochastic Processes**”, Bo Friis Nielsen, November 1998.
- “**On The Approximation of Arbitrary Distributions by Phase-Type Distributions**”, Salah E. Elmaghraby, North Carolina State University, Raleigh NC, 27695-7906, USA, Rachid Benmansour, Institut Supérieur de Mécanique de Paris, France, Abdelhakim Artiba, Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, France, Hamid Allaoui, Université d’Artois, Bethune, France.
- “**Structured Stochastic Matrices of M/G/1 Type and Their Applications**”, Marcel Dekker, Neuts, M.F., 1989.
- “**The compound binomial model with randomized decisions on paying dividends**”, Tan, J., Yang, X., 2006. Insurance: Mathematics and Economics 39, 1–18.
- “**On the distribution of dividend payments in a Sparre Andersen model with generalized Erlang(n) interclaim times**”, Albrecher, H., Claramunt, M., Marmol, M., 2005. Insurance: Mathematics and Economics 37, 324–334.

- ***“The expected time to ruin in a risk process with constant barrier via martingales “***, Frostig, E., 2005a. Insurance: Mathematics and Economics 37, 216–228.
- ***“On the expected time to ruin and the expected dividends when dividends are paid while the surplus is above a constant barrier”*** Frostig, E., 2005b. Journal of Applied Probability 42, 595–607.
- ***“Introduction to Matrix Analytic Methods in Stochastic Modeling. American Statistical Association and the Society for Industrial and Applied Mathematics”***, Latouche, G., Ramaswami, V., 1999.
- ***“The maximum surplus before ruin in an Erlang(n) risk process and related problems”***, Li, S., Dickson, D.C.M., 2006. Insurance: Mathematics and Economics 38, 529–539.
- ***“Some optimal dividend problems in a Markov-modulated risk model”***, Li, S., Lu, Y., 2006. University of Melbourne.
- ***“The compound binomial model with randomized decisions on paying dividends”***, Tan, J., Yang, X., 2006. Insurance: Mathematics and Economics 39, 1–18.