Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο

Σχολη Εφαρμοσμενων Μαθηματικων Και Φυσικων Επιστημων

Γραμμικη Βελτιστοποιηση Στον $C(\Omega)$ Και Ασφαλιση Χαρτοφυλακιου

Φοιτητής:
Γιώργος Βερναρδάκης

Καθηγητής:
Ιωάννης Πολυράκης

e-mail: george.vernardakis@gmail.com

17 Οκτωβρίου 2016

Περιεχόμενα

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην παρούσα διπλωματική εργασία επιχειρώ να μυήσω τον αναγνώστη σε μία όχι ιδιαιτέρως διαδεδομένη μέθοδο Ασφάλισης Χαρτοφυλακίων. Πιο συγκεκριμένα, αναζητάμε μια ασφάλιση ελαχίστου κόστους τού χαρτοφυλακίου θ στο "πάτωμα" κ και στην τιμή q. Το εν λόγω πρόβλημα ελαχιστοποίησης δεν έχει πάντα λύση και, ακόμα και αν έχει, πολλές φορές είναι αδύνατον να προσδιοριστεί. Ως εκ τούτου, αποτέλεσε αφορμή για τούς ερευνητές ούτως ώστε να αναζητήσουν αλγορίθμους που επιλύουν το πρόβλημα, όπως αυτόν που παρουσιάζεται στην παρούσα εργασία. Στην 1^η ενότητα παρατίθενται τα κατάλληλα εργαλεία και η μαθηματική θεωρία που κρίνονται ως προαπαιτούμενα για τη μέγιστη δυνατή κατανόηση τού προβλήματος, ενώ στην 2^η ενότητα πραγματοποιείται λεπτομερής περιγραφή τού προβλήματος και τού αλγορίθμου που το επιλύει. Εν συνεχεία, στην 3^η ενότητα καθίσταται σαφές το πώς η εν λόγω θεωρία εφαρμόζεται στο πρόβλημα τής Ασφάλισης Χαρτοφυλακίων και τέλος, στην 4^η ενότητα παρουσιάζονται μερικά παραδείγματα που αποσκοπούν στην σύνδεση θεωρίας και πράξης, καθώς και στην (πιο) άμεση μετάδοση ερεθισμάτων στους νέους, επίδοξους ερευνητές. Πρόκειται για μία βιβλιογραφική εργασία, η οποία έχει βασιστεί στο ομώνυμο άρθρο τού επιβλέποντα καθηγητή μου, Ιωάννη Πολυράκη. Αφιερώνω, λοιπόν, μερικές γραμμές για να τον ευχαριστήσω θερμά, όχι μόνο επειδή φρόντισε να μού υπενθυμίσει πόση γοητεία περιέχουν τα Μαθηματικά σε μια περίοδο όπου όλες οι έννοιες στο κεφάλι μου είχαν τεθεί υπό αμφισβήτηση, αλλά και επειδή ανέχτηκε την ανώριμη ασυνέπειά μου και με στήριξε, σαν φίλος. Κλείνοντας, ευχαριστώ την οικογένειά μου και τούς φίλους μου, που ακατάπαυστα επικροτούν οποιαδήποτε προσπάθειά μου, ανεξαρτήτως αποτελέσματος. Συνεπώς, παρόλο που η χρήση τού πρώτου ενικού στο παρόν κείμενο ήταν αναπόφευκτη, πρόκειται για μία συλλογική δουλειά.

Ενότητα 1

Βασικές Έννοιες

1.1 Διατεταγμένοι Χώροι

Εφοδιάζοντας ένα σύνολο X με πράξεις, όπως αυτή τής πρόσθεσης (+) ανάμεσα στα στοιχεία του και τού πολλαπλασιασμού (*) με τα στοιχεία ενός σώματος (όπως το σύνολο των πραγματικών αριθμών ή των μιγαδικών), αποκτούμε αλγεβρική δομή για το σύνολο X. Συνεπώς, μπορούμε να εξετάσουμε διάφορες ιδιότητες για αυτό το σύνολο, όπως, για παράδειγμα, αν είναι διανυσματικός χώρος.

Ορισμός 1.1.1 *Ένα σύνολο X εφοδιασμένο με την πράξη τής πρόσθεσης (+) θα ονομάζεται* ***Πραγματικός Διανυσματικός (ή Γραμμικός) Χώρος*** *όταν ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:*

(i) $(x+y)+z = x+(y+z) \qquad \forall\, x, y, z \in X.$

(ii) $x+y = y+x \qquad \forall\, x, y \in X.$

(iii) Υπάρχει μηδενικό στοιχείο, έστω 0, τέτοιο ώστε $x+0 = 0+x = x$ $\forall\, x \in X.$

(iv) Για κάθε $x \in X$ *υπάρχει αντίθετο στοιχείο, έστω* $-x$*, τέτοιο ώστε* $x+(-x) = (-x)+x = 0.$

(v) $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y \qquad \forall\, x, y \in X$ *και* $\lambda \in \mathbb{R}.$

(vi) $(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x \qquad \forall\, x \in X$ *και* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}.$

(vii) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x \qquad \forall\, x \in X$ *και* $\lambda,\, \mu \in \mathbb{R}$.

(viii) $1x = x1 = x \qquad \forall\, x \in X$.

Ορισμός 1.1.2 *Έστω Y υποσύνολο τού X. Θα λέμε ότι το σύνολο Y είναι **Πραγματικός Διανυσματικός (ή Γραμμικός) υπόχωρος** τού X αν για κάθε $x,\, y \in Y$ ισχύει ότι:*

(i) $x + y \in Y$

(ii) $\lambda x \in Y \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$.

Συνέπεια 1.1.1 *Από τούς παραπάνω ορισμούς προκύπτει άμεσα ότι αν το σύνολο Y είναι διανυσματικός υπόχωρος τού X, τότε η τριάδα $(Y, +, *)$ θα είναι διανυσματικός χώρος με μηδενικό στοιχείο το 0 τού X.*

Έπειτα, εφοδιάζουμε το σύνολο με μία σχέση διάταξης ($\geq$) για να μπορούμε να διατάξουμε και να συγκρίνουμε τα στοιχεία του. Μία σχέση διάταξης μπορεί να είναι ολική, αν μάς δίνει τη δυνατότητα να διατάξουμε όλα τα στοιχεία τού συνόλου ανά δύο ή μερική αν διατάσσονται μόνο συγκεκριμένα ζεύγη στοιχείων. Για παράδειγμα, ο χώρος των πραγματικών αριθμών είναι ένα ολικά διατεταγμένο σύνολο, αφού για κάθε δύο στοιχεία του μπορούμε άμεσα να αποφασίσουμε ποιό είναι μεγαλύτερο και ποιό μικρότερο. Αντιθέτως, ο $\mathbb{R}^2$ είναι ένας μερικά διατεταγμένος χώρος, γεγονός που διαπιστώνεται εύκολα όταν επιχειρήσουμε να συγκρίνουμε το διάνυσμα (0,1) με το (1,0). Το τελευταίο συμπέρασμα ισχύει γενικώς για τον $\mathbb{R}^n$ με $n \in N$.

Ορισμός 1.1.3 *Έστω X διανυσματικός χώρος εφοδιασμένος με μία σχέση μερικής διάταξης '$\geq$', η οποία ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:*

- *Για κάθε $x \in X$ ισχύει ότι $x \geq x$ (ανακλαστική).*
- *Για κάθε $x,\, y \in X$, ισχύει ότι αν $x \geq y$ και $y \geq x$ τότε $x = y$ (αντισυμμετρική).*

- *Για κάθε x, y, $z \in X$, ισχύει ότι αν $x \geq y$ και $y \geq z$ τότε $x \geq z$ (μεταβατική).*

Αν επιπλέον η '$\geq$' είναι συμβατή με την αλγεβρική δομή τού X με την έννοια ότι ικανοποιείται και η ακόλουθη τέταρτη ιδιότητα:

- *Για κάθε x, y, $z \in X$ με $x \geq y$ και $\mu \geq 0$, ισχύει ότι $x + z \geq y + z$ και $\mu x \geq \mu y$.*

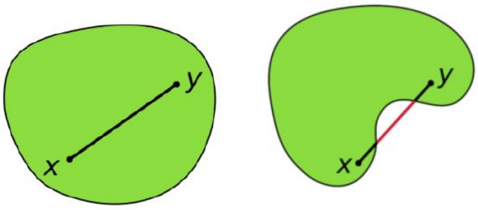
τότε λέμε ότι το ζευγάρι $(X, \geq)$ είναι ένας ***μερικά διατεταγμένος διανυσματικός χώρος****.*

Ορισμός 1.1.4 *Έστω X, Y διανυσματικοί χώροι. Μία απεικόνιση T: $X \to Y$ ονομάζεται* ***γραμμικός τελεστής*** *αν και μόνον αν $T(ax + by) = aT(x) + bT(y)$, για κάθε x, $y \in X$ και a, $b \in \mathbb{R}$.*

Ορίζουμε ως $\mathcal{L}(X,Y)$ τον χώρο όλων των γραμμικών συνεχών τελεστών $T : X \to Y$, ο οποίος είναι διανυσματικός χώρος, αφού για κάθε T, $S \in \mathcal{L}(X,Y)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ αποδεικνύεται εύκολα ότι ο τελεστής $\lambda T + S$ είναι γραμμικός και άρα ανήκει στον $\mathcal{L}(X,Y)$. Παρακάτω θα διαπιστώσουμε ότι ο $\mathcal{L}(X,Y)$ είναι ένας μερικά διατεταγμένος διανυσματικός χώρος.

Ορισμός 1.1.5 *Έστω X διανυσματικός χώρος ως προς το σώμα των πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε ως* ***γραμμικό συναρτησιοειδές (linear functional)*** *κάθε γραμμικό τελεστή $p : X \to \mathbb{R}$. Αν επιπλέον ισχύει ότι $p(x) \geq 0 \ \forall \ x \in X_+$ (αντίστοιχα, $p(x) > 0 \ \forall x \in X_+$, $x \neq 0$), τότε θα λέμε ότι το p είναι ένα* ***θετικό γραμμικό συναρτησιοειδές*** *(αντίστοιχα,* ***αυστηρά θετικό γραμμικό συναρτησιοειδές****).*

Ορισμός 1.1.6 *Έστω X διανυσματικός χώρος και K υποσύνολο τού X. Το K θα ονομάζεται* ***κυρτό*** *αν για κάθε δύο στοιχεία του το ευθύγραμμο τμήμα που τα συνδέει ανήκει ολόκληρο στο K. Δηλαδή, το K θα είναι κυρτό αν για κάθε x, $y \in K$ έπεται ότι $\lambda x + (1 - \lambda)y \in K$, για κάθε $\lambda \in (0, 1)$.*

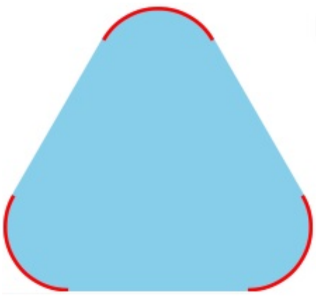


(α′) Κυρτό Σύνολο (β′) Μη Κυρτό Σύνολο

Ορισμός 1.1.7 *Έστω X διανυσματικός χώρος και Y υποσύνολό του. Ορίζουμε ως* ***κυρτή θήκη*** *τού Y το ελάχιστο κυρτό σύνολο $K \subset X$ που περιέχει το Y και το συμβολίζουμε ως $co(Y)$. Προφανώς αν το Y είναι κυρτό υποσύνολο, τότε $co(Y) = Y$.*

Σημείωση: Μερικές φορές θα χρησιμοποιούμε απλώς τον όρο "πολύτοπο" και θα εννοούμε "κυρτό πολύτοπο".

Ορισμός 1.1.8 *Έστω X διανυσματικός χώρος και K κυρτό υποσύνολο τού X. Ένα σημείο τού K θα καλείται* ***ακραίο σημείο (extreme point)*** *αν δεν ανήκει σε κανένα ανοιχτό ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δύο σημεία τού K. Διαισθητικώς, ένα ακραίο σημείο αποτελεί κορυφή για το κυρτό υποσύνολο K.*



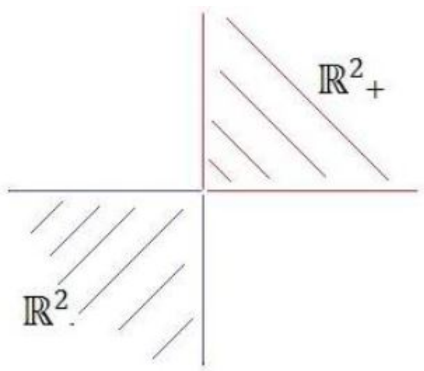
Σχήμα 1.2: Με γαλάζιο χρώμα το κυρτό σύνολο και με κόκκινο χρώμα τα ακραία σημεία του.

Ορισμός 1.1.9 *Έστω P κυρτό υποσύνολο ενός διανυσματικού χώρου X. Θα λέμε ότι το P είναι* ***κώνος*** *αν για κάθε $x \in P$ το $\lambda x \in P$ για κάθε $\lambda \geq 0$. Άμεσα από τον ορισμό έπεται ότι το $0 \in P$. Αν επιπλέον ισχύει ότι $P \cap (-P) = \{0\}$, τότε ο P θα λέγεται* ***οξύς κώνος****.*

Έστω X μερικά διατεταγμένος γραμμικός χώρος και $x, y \in X$. Θα λέμε ότι **το x είναι μεγαλύτερο από το** y αν $x \geq y$ και $x \neq y$. Το σύνολο των σημείων που είναι μεγαλύτερα ή ίσα από το 0 συμβολίζεται με X_+ και καλείται **θετικός κώνος** τού X. Με άλλα λόγια, $X_+ = \{x \in X | x \geq 0\}$ είναι ο θετικός κώνος τού X και εύκολα διαπιστώνεται ότι είναι οξύς.

Αν X είναι διανυσματικός χώρος με νόρμα και για κάθε $x, y \in X$ με $0 \leq x \leq y$ υπάρχει c θετικός πραγματικός τέτοιος ώστε $\|x\| \leq c\|y\|$, τότε ο θετικός οξύς κώνος X_+ ονομάζεται **κανονικός (*normal*)**.

Το πιο γνωστό και άμεσο παράδειγμα είναι ο θετικός κώνος τού $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2_+$, ο οποίος είναι οξύς αφού $\mathbb{R}^2_+ \cap (-\mathbb{R}^2_+) = \{0\}$.



Αντίστροφα τώρα υποθέτουμε ότι $P \subset X$ και P οξύς θετικός κώνος τού X. Τότε, μπορούμε να ορίσουμε μία σχέση μερικής διάταξης $\geq$ στον X ως εξής:

$$x \geq y \Leftrightarrow x - y \in P$$

Παρατηρούμε ότι $P = \{x \in X | x \geq 0\} = X_+$ και εύκολα διαπιστώνουμε ότι η εν λόγω σχέση μερικής διάταξης ικανοποιεί τις 4 ιδιότητες τού ορισμού. Συνεπώς, ο $(X, \geq)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος διατεταγμένος από τον κώνο P. Αν ο P είναι ένας κώνος που δεν είναι οξύς, τότε ορίζει μία σχέση μερικής διάταξης η οποία, όμως, δεν είναι αντισυμμετρική. Γενικώς, αν $P \subset X$ και P κώνος τού X, τότε το σύνολο $P-P$ είναι ο διανυσματικός χώρος που παράγεται από τον P. Ειδικότερα, αν $P-P=X$, τότε λέμε ότι ο κώνος P παράγει τον X.

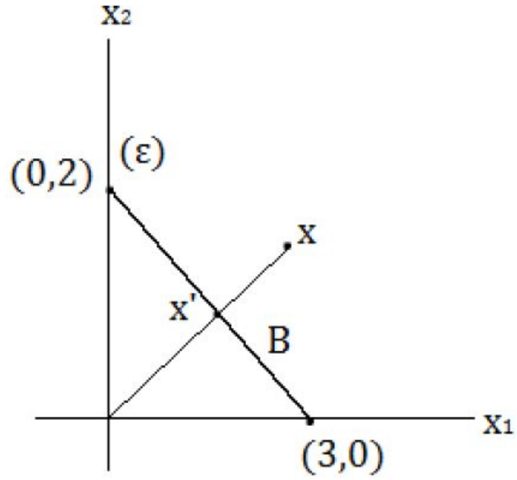
Ορισμός 1.1.10 *Έστω X διανυσματικός χώρος, $D \subset X$ και $w \in D$. Το w καλείται* ***άνω φράγμα*** *τού D αν για κάθε $d \in D$ ισχύει ότι $w \geq d$ (αντίστοιχα, αν $w \leq d$ για κάθε $d \in D$ τότε θα το w θα λέγεται* ***κάτω φράγμα****). Αν τώρα για κάθε άνω φράγμα $z \in X$ τού D ισχύει ότι $z \geq w$, τότε το w καλείται* ***κατώτατο άνω φράγμα (supremum)*** *και συμβολίζεται ως $w = sup(D)$. Αντίστοιχα ορίζεται το* ***ανώτατο κάτω φράγμα (infimum)*** *τού D και συμβολίζεται ως $w = inf(D)$. Επιπλέον, ορίζουμε το supremum και το infimum δύο στοιχείων x, $y \in D$ που συμβολίζονται με $x \vee y$ και $x \wedge y$, αντίστοιχα.*

Ορισμός 1.1.11 *Έστω X διατεταγμένος διανυσματικός χώρος, P κώνος που παράγει τον X με $P \neq \{0\}$ και $B \subset P$ κυρτό σύνολο για το οποίο ισχύει ότι για κάθε $x \in P \backslash \{0\}$ υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός $\lambda_x > 0$, που εξαρτάται από το x, τέτοιος ώστε $\lambda_x x \in B$. Τότε το B ονομάζεται* ***βάση*** *τού κώνου P (simplex).*

Παράδειγμα 1.1 *Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε τον θετικό κώνο τού $\mathbb{R}^2$ με βάση το σύνολο*

$$B = \Big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \Big| \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 1\Big\}.$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}^2$ η τομή τής ευθείας (ϵ) με το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει το 0 με το x είναι το σημείο $x' = \lambda_x x$, με το λ_x να είναι μοναδικό.



1.2 Γραμμικοί Σύνδεσμοι – Υποσύνδεσμοι – Σύνδεσμοι-Υπόχωροι

Ορισμός 1.2.1 ***Γραμμικός Σύνδεσμος (ή χώρος Riesz ή Lattice)*** *ονομάζεται ένας μερικώς διατεταγμένος γραμμικός χώρος X με την ιδιότητα ότι για κάθε ζεύγος x, $y \in X$ υπάρχει το supremum και το infimum του $\{x, y\}$, δηλαδή*

$$x \vee y = w \in X, x \wedge y = z \in X.$$

Ο $\mathbb{R}^k$ για $k \in \mathbb{N}$ είναι γραμμικός σύνδεσμος ως προς τη σημειακή διάταξη. Με τον όρο σημειακή διάταξη εννοούμε ότι για x, $y \in \mathbb{R}^k$ το x είναι μεγαλύτερο από το y αν και μόνον αν $x_i \geq y_i$ για κάθε $i \in \{1, ..., k\}$. Επίσης, για κάθε x, $y \in \mathbb{R}^k$ υπάρχουν w και $z \in \mathbb{R}^k$ τέτοια ώστε $w_i = x_i \vee y_i$ και $z_i = x_i \wedge y_i$ για κάθε $i \in \{1, ..., k\}$. Συνεπώς, ο $\mathbb{R}^k$ είναι γραμμικός σύνδεσμος.

Γενικά κλασικά παραδείγματα γραμμικών συνδέσμων είναι διάφοροι χώροι συναρτήσεων. Με τον όρο χώρος συναρτήσεων εννοούμε έναν διανυσματικό χώρο X που ως στοιχεία περιέχει πραγματικές συναρτήσεις ορισμένες σε κάποιο σύνολο Ω ($f\colon \Omega \to \mathbb{R}$). Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να συγκρίνουμε συναρτήσεις ως προς τη σημειακή διάταξη, σύμφωνα με την οποία $f \leq g \Leftrightarrow f(\omega) \leq g(\omega)$ για κάθε $\omega \in \Omega$. Αφού οι f και g δέχονται τιμές στον $\mathbb{R}$, οι συναρτήσεις $[f \vee g](\omega) := max\{f(\omega), g(\omega)\}$ και $[f \wedge g](\omega) := min\{f(\omega), g(\omega)\}$ υπάρχουν και ανήκουν στον X. Ακολουθούν διάφορα παραδείγματα χώρων συναρτήσεων που είναι γραμμικοί σύνδεσμοι.

- Ο $\mathbb{R}^\Omega$, ως ο χώρος όλων των πραγματικών συναρτήσεων ορισμένες σε ένα σύνολο Ω.

- Ο $C(\Omega)$, ως ο χώρος όλων των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων ορισμένες σε έναν τοπολογικό χώρο Ω.

- Ο ℓ_p με $p \in [1, \infty)$ ως ο χώρος όλων των πραγματικών ακολουθιών $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ με $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\alpha_n^p| < \infty$.

- Ο $\ell_\infty = \Big\{\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}\Big| sup|\alpha_n| < \infty, n \in \mathbb{N}\Big\}$ ως ο χώρος όλων των φραγμένων πραγματικών ακολουθιών.

- Ο c_0 ως ο χώρος όλων των πραγματικών ακολουθιών που συγκλίνουν στο 0 (δηλαδή, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$).

- Ο $L_p(\Omega)$ με $1 \leq p < \infty$ ως ο χώρος όλων των μετρήσιμων συναρτήσεων $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ με $\int_\Omega |f|^p d\mu < \infty$ και $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ χώρος μέτρου.

- Ο $\mathcal{L}(X, Y)$ ως ο χώρος όλων των γραμμικών τελεστών $T\colon X \to Y$ με την εξής διάταξη: αν T, $S \in \mathcal{L}(X, Y)$, τότε $T \geq S$ αν και μόνον αν $T(x) \geq S(x)$ για κάθε $x \in X$.

Ορισμός 1.2.2 *Έστω X γραμμικός σύνδεσμος. Τότε, μπορούμε να ορίσουμε τους παρακάτω τελεστές με πεδίο ορισμού τον X και σύνολο τιμών τον θετικό κώνο X_+:*

- *Θετικό μέρος τού x: $x^+ = x \vee 0$.*

- *Αρνητικό μέρος τού x: $x^- = -x \vee 0$.*

- *Απόλυτη τιμή τού x:* $|x| = x^+ \vee x^-$.

Εκτός από τους διατεταγμένους διανυσματικούς χώρους, παρουσιάζεται ενδιαφέρον και για τους διατεταγμένους διανυσματικούς υποχώρους. Πιο συγκεκριμένα, έστω X διατεταγμένος διανυσματικός χώρος και E ένας υπόχωρος. Μπορούμε να υποθέσουμε πως ο E είναι ένας διατεταγμένος γραμμικός υπόχωρος τού X με την επαγόμενη διάταξη, την οποία συμβολίζουμε με $\geq_E$ και για την οποία ισχύει ότι για κάθε $x,\ y \in E$ $x \geq_E y \Leftrightarrow x \geq y$. Για λόγους απλότητας, θα συμβολίζουμε την $\geq_E$ με $\geq$. Επίσης, ο θετικός κώνος τού E θα είναι ο $E_+ = E \cap X_+$.

Ορισμός 1.2.3 *Κάθε διανυσματικός υπόχωρος E τού X που διατάσσεται από την επαγόμενη διάταξη καλείται* ***διατεταγμένος υπόχωρος*** *τού X.*

Ορισμός 1.2.4 *Έστω X γραμμικός σύνδεσμος και E διατεταγμένος υπόχωρος τού X. Αν για κάθε $x,\ y \in E$ ισχύει ότι $x \vee y \in E$ και $x \wedge y \in E$, τότε ο E θα καλείται* ***γραμμικός υποσύνδεσμος (linear sublattice)*** *τού X.*

Αξίζει να παρατηρήσουμε πως η έννοια τού $sup\{x,y\}$ στον γραμμικό σύνδεσμο X διαφέρει από εκείνη τού $sup\{x,y\}$ σε έναν διατεταγμένο υπόχωρό του, E (αντίστοιχα διαφέρουν και τα $inf\{x,y\}$). Το $sup\{x,y\}$ στον E θα το συμβολίζουμε με $sup_E\{x,y\}$ (αντίστοιχα $inf_E\{x,y\}$) και η διαφορά έγκειτα στο ότι δεν μπορούμε να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη των $sup_E\{x,y\}$ και $inf_E\{x,y\}$.

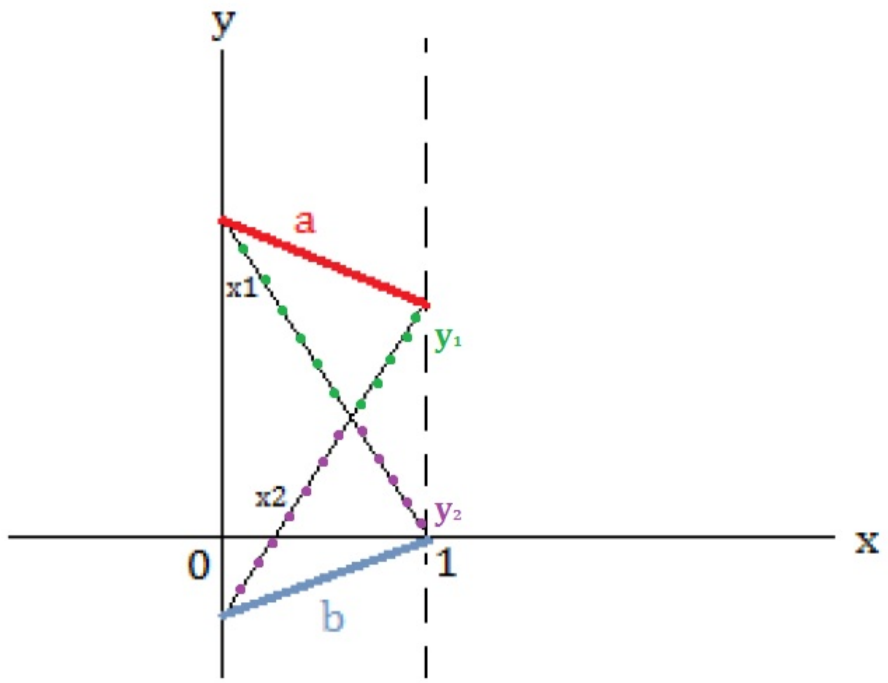
Ορισμός 1.2.5 *Έστω X γραμμικός σύνδεσμος και E υπόχωρος. Αν για κάθε $x,\ y \in E$ υπάρχουν τα $sup_E\{x,y\}$ και $inf_E\{x,y\}$, τότε θα λέμε ότι ο E είναι* ***σύνδεσμος-υπόχωρος (lattice - subspace)****. Επίσης, εύκολα διαπιστώνεται ότι*

$$sup_E\{x,y\} \geq sup\{x,y\} \geq inf\{x,y\} \geq inf_E\{x,y\}.$$

Αξίζει να σημειωθεί πως όταν συμπίπτουν τα sup και inf και δηλαδή ισχύει ότι $sup_E\{x,y\} = sup\{x,y\}$ και $inf_E\{x,y\} = inf\{x,y\}$, τότε ο E θα είναι υποσύνδεσμος τού X. Γενικώς, κάθε υποσύνδεσμος είναι σύνδεσμος-υπόχωρος, καθώς $x \vee y \in E$ και $x \wedge y \in E$, αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα. Το παρακάτω παράδειγμα καθιστά σαφή τα παραπάνω συμπεράσματα.

Παράδειγμα 1.2 *Έστω X ο χώρος όλων των πολυωνύμων πρώτου βαθμού ορισμένα στο [0,1], δηλαδή $X = \{x(t) = \lambda t + \mu \big| \lambda, \mu \in \mathbb{R}, t \in [0,1]\}$. Ο X είναι υπόχωρος τού $C[0,1]$, αφού όλες οι ευθείες είναι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις.*

Όπως φαίνεται στο σχήμα παρακάτω, αν x_1, $x_2 \in X$, τότε $sup_X\{x_1, x_2\} = a(t) \in X$ και $inf_X\{x_1, x_2\} = b(t) \in X$. Συνεπώς, ο X είναι σύνδεσμος-υπόχωρος καθώς υπάρχουν τα sup και inf. Παρόλα αυτά, ο X δεν είναι υποσύνδεσμος, αφού $a(t) = sup_X\{x,y\} > sup\{x,y\} = y_1(t) \in C[0,1]$ και παράλληλα $b(t) = inf_X\{x,y\} < inf\{x,y\} = y_2(t) \in C[0,1]$.



1.3 Θετικές Βάσεις

Ορισμός 1.3.1 *Έστω X διανυσματικός χώρος και $Y = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ ένα πεπερασμένο υποσύνολο τού X. Το Y θα λέγεται* ***γραμμικώς ανεξάρτητο*** *αν για κάθε $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει ότι $\sum_i^n \lambda_i x_i = 0$ να έπεται υποχρεωτικά ότι $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$.*

Γενικώς, για να είναι ένα σύνολο γραμμικώς ανεξάρτητο θα πρέπει κάθε πεπερασμένο υποσύνολό του να είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. Διαφορετικά, θα λέμε ότι το σύνολο αυτό είναι γραμμικώς εξαρτημένο.

Ορισμός 1.3.2 *Έστω $G = \{g_1, g_2, ..., g_n\} \subset X$. Το G θα ονομάζεται* ***βάση Hammel*** *τού X αν είναι γραμμικώς ανεξάρτητο και, επιπλέον, τα στοιχεία του παράγουν όλον τον χώρο X. Το τελευταίο συμβολίζεται ως $X = \langle\{g_1, g_2, ..., g_n\}\rangle$.*

Ορισμός 1.3.3 ***Διάσταση*** *ενός διανυσματικού χώρου X ορίζεται να είναι η πληθικότητα μιας Hammel βάσης του και συμβολίζεται με $dim(X)$.*

Αν κάθε x γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός άπειρων στοιχείων τής βάσης, τότε η βάση ονομάζεται **βάση *Schauder*** και είναι καταλληλότερη για περιγραφή απειροδιάστατων διανυσματικών χώρων.

Ορισμός 1.3.4 *Ένα σύνολο $\{e_1, e_2, ..., e_n, ...\} \subset X$ καλείται* ***θετική βάση*** *τού X αν ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) Είναι βάση Hammel (ή Schauder) τού X.

(ii) Για κάθε $x \in X_+$ ισχύει ότι $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i$, όπου $\lambda_i \geq 0$ για κάθε $i \in \{1, 2, ...\}$.

Αν ισχύουν τα παραπάνω η θετική βάση θα είναι μοναδική με την έννοια ότι αν $B = \{b_n\}$ μία άλλη βάση τού X, τότε κάθε στοιχείο b_i θα είναι θετικό πολλαπλάσιο ενός e_j, με $i, j \in \{1, 2, ...\}$.

Παράδειγμα 1.3 *Αν $X = c_0$ με τη σημειακή διάταξη, τότε η ακολουθία $\{e_n\}$ (το διάνυσμα e_n έχει 1 στη θέση n και 0 παντού αλλού) αποτελεί μία θετική βάση τού X. Πράγματι, έστω $x = \{\frac{1}{n}\}$, τότε $x = 1e_1 + \frac{1}{2}e_2 + ... + \frac{1}{n}e_n + ... = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}e_n$, με $\lambda_n = \frac{1}{n} > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

Σύμφωνα με το θεώρημα *Choquet - Kendall* στο [5], αν ο θετικός κώνος X_+ είναι κανονικός και παράγει τον X ($dim(X) = n$), τότε ο X είναι γραμμικός σύνδεσμος αν και μόνον αν μια βάση B τού X είναι ένα (n-1)-διάστατο *simplex*. Σε αυτήν την περίπτωση τα στοιχεία $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$ τής B αποτελούν κορυφές ενός κυρτού πολυτόπου και ορίζουν μία θετική βάση για τον X_+.

Πρόταση 1.3.1 (Choquet-Kendall) *Αν ο X είναι πεπερασμένης διάστασης μερικώς διατεταγμένος διανυσματικός χώρος που παράγεται από τον κλειστό κώνο X_+, τότε ο X είναι γραμμικός σύνδεσμος αν και μόνον αν έχει θετική βάση.*

Αν για παράδειγμα ο E είναι διάστασης 2 και ο E_+ είναι κλειστός και παράγει τον E, τότε ο E είναι γραμμικός σύνδεσμος. Πράγματι, κάθε βάση B για τον E_+ είναι ένα κλειστό ευθύγραμμο τμήμα (όπως στο Παράδειγμα 1.1.1) και συνεπώς, η B είναι ένα 1-simplex.

Ορισμός 1.3.5 *Έστω Y υπόχωρος τού $C(\Omega)$ με βάση το $B = \{b_n\}$. Για δεδομένο $t \in \Omega$ και $m \in \mathbb{N}$, αν $b_m(t) \neq 0$ και $b_n(t) = 0$ για κάθε $n \neq m$, τότε λέμε ότι το σημείο t είναι **m-κόμβος** (ή πιο απλά, κόμβος) τής βάσης B. Αν τώρα για κάθε n υπάρχει ένας n-κόμβος t_n τής B, τότε λέμε ότι η B είναι **βάση τού Y με κόμβους** και ότι η $\{t_n\}$ είναι ακολουθία κόμβων τής $\{b_n\}$.*

Ενότητα 2

Γραμμική Βελτιστοποίηση στον $C(\Omega)$

2.1 Το Πρόβλημα

Στο δεύτερο και κύριο μέρος τής παρούσας εργασίας θα περιγράψουμε το πρόβλημα τής ασφάλισης χαρτοφυλακίου και το πώς οι έννοιες που ορίστηκαν παραπάνω συμβάλλουν καθοριστικά στην επίλυσή του. Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε ότι ο X είναι ο υπόχωρος τού $C(\Omega)$ που παράγεται από n στο πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητα θετικά στοιχεία τού $C(\Omega)$. Μάς ενδιαφέρει να ελαχιστοποιήσουμε το θετικό γραμμικό συναρτησιοειδές $\rho : X \to \mathbb{R}$, υπό ένα πεπερασμένο πλήθος ανισοτήτων. Το εν λόγω πρόβλημα δεν έχει πάντα λύση και, ακόμα και αν εξασφαλίσουμε την ύπαρξη, δεν μπορούμε να την ανιχνεύσουμε. Στην εργασία αυτή θα παρατεθούν τα κατάλληλα θεωρήματα που αποδεικνύουν ότι αν ο X περιέχεται σε έναν πεπερασμένης διάστασης ελαχιστικό σύνδεσμο-υπόχωρο Y τού $C(\Omega)$, τότε το πρόβλημα έχει λύση που προκύπτει από την επίλυση ενός ισοδύναμου προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού στον $\mathbb{R}^m$.

Θα συμβολίζουμε με Ω έναν συμπαγή τοπολογικό χώρο $Hausdorff$ (ένας χώρος X θα λέγεται ***Hausdorff*** αν για κάθε δύο στοιχεία του x, y υπάρχουν ανοικτά σύνολα U, V, με $x \in U$, $y \in V$ και $U \cap V = \emptyset$), ενώ με $C(\Omega)$ θα εννοούμε τον χώρο όλων των πραγματικών συνεχών συναρτήσεων ορισμένες στο Ω. Ως εκ τούτου, ο $C(\Omega)$, ως χώρος συναρτήσεων, θα διατάσσεται από την σημειακή διάταξη και

$$C_+(\Omega) = \{x \in C(\Omega) \big| x(t) \geq 0, \forall t \in \Omega\}$$

θα είναι ο θετικός κώνος τού $C(\Omega)$. Επίσης, θεωρούμε τα $x_1, x_2, ..., x_n$, που είναι γραμμικώς ανεξάρτητα θετικά στοιχεία τού $C(\Omega)$, τέτοια ώστε ο $X = \langle\{x_1, x_2, ..., x_n\}\rangle$ να είναι ο υπόχωρος τού $C(\Omega)$ που παράγεται από τα εν λόγω στοιχεία.

Μελετάμε το ακόλουθο πρόβλημα:

- Ελαχιστοποίησε το $p(z)$ ως προς $z \in X$, υπό τους περιορισμούς $z \geq 0, z \geq z_1, ..., z \geq z_r$ και $p_i(z) \geq \alpha_i, i = 1, 2, ..., l,$ (1)

όπου p είναι ένα γραμμικό θετικό σναρτησιοειδές τού X (συχνά θα αναφερόμαστε στο p ως "τιμή", όπως συνηθίζεται σε προβλήματα οικονομικής φύσης), $z_1, z_2, ..., z_r$ είναι γνωστά στοιχεία τού X, $p_1, p_2, ..., p_l$ είναι γραμμικά συναρτησιοειδή τού X και $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_l$ πραγματικές σταθερές. Στην περίπτωση που τα p_i καθώς και τα α_i είναι ίσα με μηδέν, το πρόβλημα απλοποιείται στο ακόλουθο:

- Ελαχιστοποίησε το $p(z)$ ως προς $z \in X$, υπό τους περιορισμούς $z \geq 0, z \geq z_1, ..., z \geq z_r$. (2)

Το σύνολο με τις εφικτές λύσεις για το (2),

$$P = \{z \in X \big| z \geq 0, z \geq z_1, ..., z \geq z_r\}, \qquad (3)$$

γνωρίζουμε ότι δε θα είναι κενό. Το εν λόγω συμπέρασμα προκύπτει επειδή $X = X_+ - X_+$ και άρα για κάθε i θα ισχύει ότι $z_i = z_{i1} - z_{i2}$ με $z_{i1}, z_{i2} \in X_+$. Δηλαδή, το $\sum\limits_{i=1}^{r} z_{i1}$ θα ανήκει πάντα στο P. Επίσης, παρατηρούμε ότι στην περίπτωση που ο Ω είναι ένα πεπερασμένο σύνολο n στοιχείων, το παραπάνω πρόβλημα είναι ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού στον $\mathbb{R}^n$.

Σε αυτήν την εργασία λύνουμε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης στην περίπτωση που ο Ω είναι απειροδιάστατος, το άθροισμα των x_i αυστηρά θετικό και $X \subset Y$, όπου Y ο ελαχιστικός σύνδεσμος-υπόχωρος τού $C(\Omega)$ που περιέχει τον X. Τότε, σύμφωνα με τα [6,7] έπεται ότι ο Y θα έχει μία θετική βάση $\{b_1, b_2, ..., b_m\}$ με κόμβους τα σημεία $t_1, t_2, ..., t_m \in \Omega$. Επιπροσθέτως, για κάθε $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i b_i$, $y = \sum_{i=1}^m \mu_i b_i \in Y$ θα έχουμε ότι $sup_Y\{x, y\} = \sum_{i=1}^m (\lambda_i \vee \mu_i) b_i$. Ως εκ τούτου, εύκολα δείχνεται ότι η γραφή του τυχαίου y στον Y ως προς τη βάση είναι

$$y = \sum_{i=1}^{m} \frac{y(t_i)}{b_i(t_i)} b_i$$

και, τελικώς, κάθε ανισότητα $x \geq y$ στον X ισοδυναμεί με ένα πεπερασμένο πλήθος ανισοτήτων στον $\mathbb{R}$, τής μορφής $x(t_i) \geq y(t_i)$, για κάθε $i = 1, 2, ..., m$.

Εν συνεχεία, κατασκευάζουμε μία νέα βάση $\left\{\widetilde{b_1}, \widetilde{b_2}, ..., \widetilde{b_n}\right\}$ τού X, την οποία αποκαλούμε **βάση προβολή** επειδή τα στοιχεία της είναι προβολές των στοιχείων τής θετικής βάσης τού Y. Αυτή η βάση έχει την εξής ιδιότητα: για κάθε $x \in X$ οι n πρώτες συντεταγμένες τού x στη θετική βάση τού Y συμπίπτουν με τις συντεταγμένες τού x στη βάση προβολή τού X.

Αξίζει να σημειωθεί πως το πρόβλημα ελαχιστοποίησης δεν έχει πάντοτε λύση αν ο X δεν περιέχεται σε έναν πεπερασμένης διάστασης ελαχιστικό σύνδεσμο-υπόχωρο.

Επίσης, επισημαίνουμε τη χρησιμότητα των αποτελεσμάτων που παρατίθενται στην παρούσα εργασία, αποδεικνύοντας ότι στην περίπτωση που το συναρτησιοειδές p δεν είναι θετικό, το πρόβλημα ελαχιστοποίσης (2) δεν έχει πάντα λύση. Πιο συγκεκριμένα, έστω $w \in X_+$ τέτοιο ώστε $p(w) < 0$. Τότε για κάθε $z \in P$ θα ισχύει ότι $\lambda w + z \geq 0, z_1, ..., z_r$, για κάθε $\lambda > 0$. Συνεπώς, $\lim\limits_{\lambda \to \infty} p(\lambda w + z) = -\infty$ και άρα το πρόβλημα δεν έχει λύση.

Παράδειγμα 2.1 *Έστω $\Omega = [0, 1]$ και X ο υπόχωρος τού $C(\Omega)$ που παράγεται από τις συναρτήσεις $x_1(t) = 1, x_2(t) = t, x_3(t) = t^2$. Ακόμα, υποθέτουμε ότι $z_1(t) = \frac{1}{2} - t$ και ότι η τιμή p είναι το μέτρο Dirac με στήριγμα στο $\frac{1}{2}$. Δηλαδή, για κάθε $z \in X$,*

$$p(z) = \int_{[0,1]} z(t) d\delta_{1/2}(t) = z(1/2).$$

Η ελαχιστοποίηση τού $p(z)$ ως προς $z \in X$, υπό τους περιορισμούς $z \geq 0, z \geq z_1$ δεν έχει λύση. Για την απόδειξη τού ισχυρισμού, θέτουμε τις συναρτήσεις

$$w_n = w_n(t) = nt^2 - nt + \frac{n}{4} + \frac{1}{n}.$$

Εύκολα παρατηρούμε ότι $w_n(t) \geq z_1(t)$ για κάθε $t \in [0, 1]$, επειδή:

$$w_n(t) \geq z_1(t) \Leftrightarrow nt^2 - nt + \frac{n}{4} + \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2} - t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow nt^2 - (n-1)t + (\frac{n}{4} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2}) \geq 0$$

Θέτουμε $y_n(t) = nt^2 - (n-1)t + (\frac{n}{4} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2})$, *το οποίο είναι ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού με διακρίνουσα ίση με* $-3 < 0$. *Συνεπώς, το τριώνυμο δεν έχει πραγματικές ρίζες και άρα διατηρεί το πρόσημό του για κάθε* $t \in [0,1]$. *Για* $t = 0$, *το* $y_n(t)$ *γίνεται ίσο με* $\frac{n}{4} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} = \alpha_n$, *το οποίο είναι θετικό για κάθε* $n \in \mathbb{N}$, *αφού:*

- $n = 1 \Rightarrow \alpha_n = \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{2} > 0$.
- $n \geq 2 \Rightarrow \frac{n}{4} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha_n > 0$.

Ως εκ τούτου, αφού $y_n(t) > 0$ *για* $t = 0$ *και* $y_n(t)$ *συνεχής συνάρτηση χωρίς πραγματικές ρίζες, έπεται ότι:*

$$y_n(t) > 0 \Leftrightarrow w_n(t) > z_1(t) \quad \forall t \in [0,1].$$

Ομοίως, $w_n(t) > 0$, *αφού τα* w_n *είναι ακολουθία τριωνύμων με διακρίνουσα* $\Delta = n^2 - 4n(n/4 + 1/n) = -4 < 0$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$, *ενώ* $w_n(0) = n/4 + 1/n > 0$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.

Άρα, οι συναρτήσεις w_n *ανήκουν στο σύνολο εφικτών λύσεων* P. *Όμως* $p(w_n) = w_n(1/2) = 1/n$ *και άρα το infimum τού* p *στον* P *είναι ίσο με 0, το οποίο δεν μπορεί να επιτευχθεί στον* P.

Θεώρημα 2.1.1 *Αν το διάνυσμα τής τιμής* p *είναι ένα αυστηρώς θετικό γραμμικό συναρτησιοειδές τού* X, *τότε το πρόβλημα ελαχιστοποίσης (2) έχει λύση.*

2.2 Σύνδεσμος-Υπόχωρος

Στην περίπτωση που ο X είναι σύνδεσμος-υπόχωρος το πρόβλημα ελαχιστοποίησης (2) έχει μία μοναδική λύση, ανεξάρτητη τής τιμής p. Αν μπορούμε να βρούμε θετική βάση τού X, τότε μάς δίνεται η δυνατότητα να εντοπίσουμε τη λύση.

Θεώρημα 2.2.1 *Ο χώρος X είναι σύνδεσμος-υπόχωρος τού $C(\Omega)$ αν και μόνον αν για οποιαδήποτε $z_1, z_2, ..., z_r \in X$ το πρόβλημα ελαχιστοποίησης (2) έχει λύση ανεξάρτητη τής τιμής p. Η λύση αυτή είναι το $sup_X\{z_1, z_2, ..., z_r, 0\}$.*

Παρατήρηση 2.2.1 *Αν $\{b_1, b_2, ..., b_r\}$ είναι μία θετική βάση τού X και $z_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ji} b_i$, τότε $sup_X\{z_1, z_2, ..., z_r, 0\} = \sum_{i=1}^{n}(sup\{\lambda_{1i}, \lambda_{2i}, ..., \lambda_{ri}, 0\})b_i$. Συνεπώς, η εύρεση τής θετικής βάσης μάς εξασφαλίζει και την εύρεση τής λύσης.*

Η συνάρτηση

$$\beta(t) = \frac{r(t)}{\|r(t)\|_1},$$

όπου $r(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ και $\|r(t)\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i(t)| = \sum_{i=1}^{n} x_i(t)$, για κάθε $t \in \Omega$, καλείται βασική συνάρτηση (καμπύλη) των $x_1, x_2, ..., x_n$ και λαμβάνει τιμές στο *simplex* $\Delta_n = \{\xi \in \mathbb{R}_+^n \big| \|\xi\|_1 = 1\}$ τού $\mathbb{R}_+^n$.

Θα συμβολίζουμε με $D(\beta)$ το πεδίο ορισμού και με $R(\beta)$ το σύνολο τιμών τής β. Επίσης, με K θα συμβολίζουμε την κυρτή θήκη τής κλειστότητας τού συνόλου τιμών τής β, δηλαδή $K = co\overline{R(\beta)}$.

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση που $\|r(t)\|_1 > 0$ για κάθε $t \in \Omega$, τότε το πεδίο ορισμού τής β είναι όλος ο χώρος Ω. Συνεπώς, το σύνολο τιμών τής β θα είναι συμπαγές ως συνεχής εικόνα συμπαγούς συνόλου και άρα $K = coR(\beta)$.

Θεώρημα 2.2.2 *Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

(i) Ο X είναι σύνδεσμος-υπόχωρος.

(ii) Το K είναι ένα (n-1)-simplex.

Επίσης, αν υποθέσουμε ότι η πρόταση (ii) είναι αληθής και $P_1, P_2, ..., P_n$ είναι οι κορυφές τού πολυτόπου K, τότε θα ισχύουν οι ακόλουθες προτάσεις:

(α΄) *Αν A είναι ο $n \times n$ πίνακας τού οποίου η i στήλη είναι το διάνυσμα P_i, $i = 1, 2, ..., n$ και $b_1, b_2, ., , , b_n$ είναι οι συναρτήσεις που ορίζονται από τον τύπο*

$$(b_1(t), b_2(t), ..., b_n(t))^T = A^{-1}(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)) \qquad (4)$$

τότε $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$ είναι μία θετική βάση τού X.

(β΄) *Αν $\beta(t_i) = P_i$ για κάποιο i, τότε t_i είναι ένας i-κόμβος για την θετική βάση τού X. Δηλαδή, $b_i(t_i) > 0$ και $b_j(t_i) = 0$, για κάθε $i \neq j$.*

(γ΄) *Αν $x_1(t) + x_2(t) + ... + x_n(t) > 0$, για κάθε $t \in \Omega$, τότε $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$ είναι μία θετική βάση με κόμβους.*

2.3 Ελαχιστικός Σύνδεσμος-Υπόχωρος

Ορισμός 2.3.1 *Έστω $L(X)$ το σύνολο με όλους τους συνδέσμους-υποχώρους τού $C(\Omega)$ που περιέχουν τον X. Αν $Y \in L(X)$ και για κάθε γνήσιο υποσύνολο Z τού Y ισχύει ότι $Z \notin L(X)$, τότε θα λέμε ότι ο Y είναι ένας* ***ελαχιστικός σύνδεσμος-υπόχωρος*** *τού $C(\Omega)$ που περιέχει τον X.*

Θεώρημα 2.3.1 ***(Ύπαρξη ενός ελαχιστικού συνδέσμου-υποχώρου, [7])***

Οι ακόλουθες προτάσεις ισχύουν:

(i) *Το σύνολο K είναι ένα πολύτοπο με m κορυφές, αν και μόνον αν, υπάρχει ένας m-διάστατος ελαχιστικός σύνδεσμος-υπόχωρος Y τού $C(\Omega)$.*

(ii) Αν υπάρχει ένας m-διάστατος ελαχιστικός σύνδεσμος-υπόχωρος Y τού $C(\Omega)$, τότε κάθε πεπερασμένος ελαχιστικός σύνδεσμος-υπόχωρος Z τού $C(\Omega)$ είναι διάστασης m.

Θεώρημα 2.3.2 (Κατασκευή ενός ελαχιστικού συνδέσμου-υποχώρου, [7])

Έστω K το πολύτοπο με κορυφές τα $P_1, P_2, ..., P_m$. Υποθέτουμε ότι τα πρώτα n στο πλήθος $P_1, P_2, ..., P_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (στο [7] αποδεικνύεται ότι πάντα υπάρχει τέτοια απαρίθμηση των P_i). Επίσης, υποθέτουμε ότι $\xi_i, i = 1, 2, ..., m$ είναι θετικές, συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις ορισμένες στο $D(\beta)$, τέτοιες ώστε $\sum_{i=1}^m \xi_i(t) = 1$ και $\beta(t) = \sum_{i=1}^m \xi_i(t)P_i$, για κάθε $t \in D(\beta)$ (στο [4] αποδεικνύεται ότι οι συναρτήσεις ξ_i με τις παραπάνω ιδιότητες υπάρχουν πάντα). Τέλος, έστω $x_{n+i}, i = 1, 2, ..., m-n$ συναρτήσεις, τέτοιες ώστε

$$x_{n+i}(t) = \begin{cases} \xi_{n+i}(t)\left\|r(t)\right\|_1, & \text{αν } t \in D(\beta) \\ 0, & \text{αν } t \notin D(\beta) \end{cases}$$

Τότε, ο χώρος

$$Y = \langle \{x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_m\} \rangle$$

είναι ένας ελαχιστικός σύνδεσμος-υπόχωρος τού $C(\Omega)$ που περιέχει τα $x_1, x_2, ..., x_n$, με $dimY = m$. Μία θετική βάση $\{b_1, b_2, ..., b_m\}$ τού Y θα δίνεται από τον τύπο

$$(b_1, b_2, ..., b_m)^T = D^{-1}(x_1, x_2, ..., x_m)^T, \qquad (5)$$

όπου D είναι ο $m \times m$ πίνακας με στήλες τα διανύσματα

$$R_i = \frac{M_i}{\left\|M_i\right\|_1}, \qquad i = 1, 2, ..., m, \qquad (6)$$

όπου $M_i = (P_i, 0)$, για $i = 1, 2, ..., n$ και $M_{n+i} = (P_{n+i}, e_i)$, για $i = 1, 2, ..., l$. Το διάνυσμα $(P_i, 0)$ είναι το διάνυσμα τού $\mathbb{R}^m$ τού οποίου οι n πρώτες συντεταγμένες είναι οι συντεταγμένες τού P_i και όλες οι άλλες ίσες με 0, ενώ το (P_{n+i}, e_i) είναι το διάνυσμα τού $\mathbb{R}^m$ τού οποίου οι n πρώτες συντεταγμένες είναι οι συντεταγμένες τού P_{n+i}, η $n+i$ συντεταγμένη είναι ίση με 1 και όλες οι άλλες ίσες με 0.

Παρατήρηση 2.3.1 *Αν το άθροισμα των συναρτήσεων $x_i, i = 1, 2, ..., n$ είναι αυστηρά θετικό ($\sum_{i=1}^{n} x_i(t) > 0$), για κάθε $t \in \Omega$, τότε το $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$ αποτελεί μία θετική βάση τού Y με κόμβους. Αυτό προκύπτει από την πρόταση (γ′) τού Θεωρήματος 2.2.2 και το γεγονός ότι το άθροισμα των συναρτήσεων $x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_m$ που παράγουν τον Y είναι επίσης θετικό.*

2.4 Βάση Προβολή

Όπως προαναφέραμε, στην περίπτωση που ο X περιέχεται σε έναν ελαχιστικό σύνδεσμο-υπόχωρο Y τού $C(\Omega)$ κατασκευάζομε μία νέα βάση $\{\widetilde{b_1}, \widetilde{b_2}, ..., \widetilde{b_n}\}$, που την αποκαλούμε βάση προβολή, επειδή τα στοιχεία της αποτελούν προβολές των στοιχείων τής θετικής βάσης τού Y. Επίσης, αξίζει να σημειωθεί ότι τότε, ο θετικός κώνος τής βάσης προβολής θα περιέχει τον θετικό κώνο τού X. Η εν λόγω βάση είναι πολύ σημαντική, διότι την χρησιμοποιούμε για να μετατρέψουμε το αρχικό πρόβλημα σε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.

Θεώρημα 2.4.1 *Έστω Y ένας m-διάστατος ελαχιστικός σύνδεσμος-υπόχωρος τού $C(\Omega)$ που περιέχει τα $x_1, x_2, ..., x_n$ και ο οποίος κατασκευάζεται με βάση το Θεώρημα 2.3.2 και έστω $\{b_1, b_2, ..., b_m\}$ η αντίστοιχη θετική βάση που προκύπτει όπως στη σχέση (5). Επίσης, υποθέτουμε ότι $P_1, P_2, ..., P_m$ είναι οι κορυφές τού K όπως απαριθμούνται στο Θεώρημα 2.3.2. Τότε,*

(i) $Y = X \oplus \langle\{x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_m\}\rangle$.

(ii) $b_i = 2x_i$, *για κάθε* $i = n+1, n+2, ..., m$.

(iii) *Αν* $b_i = \widetilde{b_i} + b_i'$, *με* $\widetilde{b_i} \in X$ *και* $b_i' \in \langle\{x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_m\}\rangle$, *για κάθε* $i = 1, 2, ..., n$, *τότε η* $\{\widetilde{b_1}, \widetilde{b_2}, ..., \widetilde{b_n}\}$ *είναι μία βάση τού* X *την οποία αποκαλούμε βάση προβολή και δίνεται από τον τύπο*

$$(\widetilde{b_1}, \widetilde{b_2}, ..., \widetilde{b_n})^T = A^{-1}(x_1, x_2, ..., x_n)^T, \qquad (7)$$

όπου A είναι ο $n \times n$ πίνακας τού οποίου η i στήλη είναι το διάνυσμα P_i, για $i = 1, 2, ..., n$. Η εν λόγω βάση έχει την εξής πολύ χρήσιμη ιδιότητα: Οι πρώτες n συντεταγμένες οποιουδήποτε στοιχείου x τού X στη βάση $\{b_1, b_2, ..., b_m\}$ συμπίπτουν με τις αντίστοιχες συντεταγμένες τού x στη βάση προβολή. Δηλαδή,

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i \in X \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \widetilde{b_i}.$$

2.5 Κριτήριο Πολυτόπου

Γενικώς είναι δύσκολο να μελετήσουμε το κατά πόσο το σύνολο K (υπενθυμίζουμε ότι $K = co\overline{R(\beta)}$) αποτελεί ένα πολύτοπο. Επίσης, αν πράγματι είναι πολύτοπο, τότε είναι δύσκολο να προσδιορίσουμε τις κορυφές του. Παρακάτω παραθέτουμε ένα Θεώρημα και μία Συνέπειά του που αποτελούν κριτήριο. Πιο συγκεκριμένα, η Συνέπεια μάς λέει ότι αν το K είναι πολύτοπο και $\beta(t_0)$ είναι κορυφή τού K, τότε η παράγωγος τής συνάρτησης β περιορισμένη σε κάθε καμπύλη τού Ω, που περιέχει το t_0 ως εσωτερικό σημείο, είναι ίση με 0.

Θεώρημα 2.5.1 *Έστω K πολύτοπο και $\beta(t_0)$ μία κορυφή τού K. Υποθέτουμε ότι $\{a_r\}$ είναι μία ακολουθία πραγματικών αριθμών που συγκλίνει στο 0 με $a_{2r} > 0$ και $a_{2r+1} < 0$ για κάθε r. Τέλος, θεωρούμε μια ακολουθία τού Ω, έστω $\{t_r\}$. Αν $lim_{r\to\infty}(\beta(t_r) - \beta(t_0))/a_r = \ell$, $\ell \in \mathbb{R}^n$, τότε $\ell = 0$.*

Συνέπεια 2.5.1 (Το Κριτήριο τής Παραγώγου) *Έστω K πολύτοπο και $\beta(t_0)$ κορυφή τού K. Υποθέτουμε ότι σ είναι μία συνάρτηση ορισμένη στο πραγματικό διάστημα $(-\epsilon, \epsilon)$ που λαμβάνει τιμές στο Ω, $\sigma(0) = t_0$ και έστω $\phi = \beta_0\sigma$ η σύνθεση των σ, β. Τότε, θα ισχύει ότι*

$$\phi'(0) = 0,$$

όταν υπάρχει η παράγωγος $\phi'(0)$ τής ϕ στο 0.

Παρατήρηση 2.5.1 *Στην περίπτωση που οι προϋποθέσεις τού Κριτηρίου τής Παραγώγου ικανοποιούνται και το άθροισμα των συναρτήσεων x_i είναι αυστηρώς θετικό, τότε ακολουθούμε τα εξής βήματα για να συμπεράνουμε κατά πόσο το K αποτελεί πολύτοπο:*

Επειδή το άθροισμα των x_i είναι αυστηρώς θετικό, έπεται ότι το πεδίο ορισμού τής συνάρτησης β ($D(\beta)$) είναι όλο το Ω και άρα το σύνολο τιμών τής β ($R(\beta)$) είναι κλειστό ως συνεχής εικόνα συμπαγούς συνόλου. Ως εκ τούτου, θα έχουμε ότι $K = coR(\beta)$ και άρα κάθε ακραίο σημείο τού K είναι εικόνα κάποιου στοιχείου τού Ω. Στην πιο απλή περίπτωση όπου $\Omega = [a, b]$ είναι ένα πραγματικό διάστημα, θα ισχύει ότι αν υποθέσουμε πως το K είναι πολύτοπο και ότι $\beta(t_0)$ είναι κορυφή τού K, τότε $\beta'(t_0) = 0$ ή το t_0 δεν είναι εσωτερικό σημείο τού $[a, b]$. Συνεπώς, οι κορυφές τού K θα ανήκουν στο σύνολο

$$G = \{\beta(t) \big| t \text{ είναι ρίζα τής εξίσωσης } \beta'(t) = 0 \text{ ή } t = a \text{ ή } t = b\}.$$

Αν Ω είναι κυρτό υποσύνολο τού $\mathbb{R}^l$, τότε ο συλλογισμός είναι ανάλογος, αλλά πιο περίπλοκος. Εμείς θα σταθούμε στην απλή περίπτωση την οποία θα συναντήσουμε και στα Παραδείγματα τής Ενότητας 4.

2.6 Το Ισοδύναμο Πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού

Θεωρούμε ότι ο Y είναι ένας ελαχιστικός σύνδεσμος-υπόχωρος τού $C(\Omega)$ που περιέχει τον X και ότι $\{b_1, b_2, ..., b_m\}$ είναι μία θετική βάση τού Y, που κατασκευάζεται σύμφωνα με το Θεώρημα 2.3.2. Επίσης, υποθέτουμε ότι το άθροισμα των x_i είναι αυστηρά θετικό. Ως εκ τούτου, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η βάση $\{b_1, b_2, ..., b_m\}$ είναι μία θετική βάση τού Y με κόμβους τα σημεία $t_1, t_2, ..., t_m \in \Omega$, σύμφωνα με την πρόταση (γ′) τού θεωρήματος 2.2.2. Συνεπώς, μπορούμε να εκφράσουμε κάθε στοιχείο z τού Y ως προς την εν λόγω βάση:

$$z = \sum_{i=1}^{m} \frac{z(t_i)}{b_i(t_i)} b_i.$$

Είναι προφανές ότι το z θα είναι θετικό αν και μόνον αν $z(t_k) \geq 0$, για κάθε $k = 1, 2, ..., m$. Επίσης, παρατηρούμε ότι ένα στοιχείο z τού $C(\Omega)$ θα ανήκει στο X αν και μόνον αν γράφεται στη μορφή $z = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \widetilde{b_i}$. Ως εκ τούτου, το σύνολο

$$P = \{z \in X \big| z \geq 0, z \geq z_1, ..., z \geq z_r\},$$

είναι τής μορφής:

$$P = \Big\{ z = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \widetilde{b_i} \Big| z \geq 0, z \geq z_1, ..., z \geq z_r \Big\}$$

ή ισοδύναμα

$$P = \Big\{ z = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \widetilde{b_i} \Big| z(t_k) \geq \sigma_k, k = 1, 2, ..., m \Big\},$$

όπου $\sigma_k = max\{0, z_1(t_k), z_2(t_k), ..., z_r(t_k)\}$. Συνεπώς, για κάθε $z = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \widetilde{b_i} \in P$, θα έχουμε ότι

$$B(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)^T \geq (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_m)^T,$$

όπου B είναι ο $m \times n$ πίνακας με στήλες τα διανύσματα $(\widetilde{b_i}(t_1), \widetilde{b_i}(t_2), ..., \widetilde{b_i}(t_k))$, $i = 1, 2, ..., m$. Δηλαδή, ουσιαστικά απαιτούμε από τα $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ να α-νήκουν στον $\hat{P}$, όπου

$$\hat{P} = \{(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \big| B(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)^T \geq (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_m)^T\}.$$

Αντιστρόφως, αν υποθέσουμε ότι $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \hat{P}$ και $z = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \widetilde{b_i}$ θα έχουμε ότι $z(t_k) \geq \sigma_k$ για κάθε k και άρα, $z \geq 0, z \geq z_1, ..., z \geq z_r$, δηλαδή $z \in P$. Συνεπώς, έχουμε ότι

$$(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) \in \hat{P} \Leftrightarrow z = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \widetilde{b_i} \in P. \qquad (8)$$

Τελικώς, καταλήγουμε στο ακόλουθο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμο-ύ που είναι ισοδύναμο με το αρχικό πρόβλημα ελαχιστοποίησης (1), με την έννοια ότι το $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ είναι η λύση τού προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού, αν και μόνον αν, $z_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \widetilde{b_i}$ είναι η λύση του προβλήματος ελαχιστοποίησης.

- Ελαχιστοποίησε το $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i p(\widetilde{b_i})$ ως προς $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n$, υπό τους περιορισμούς $B(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)^T \geq (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_m)^T$ και $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_j(\widetilde{b_i}) \geq \alpha_j$, $j = 1, 2, ..., l$. (9)

Επίσης, το πρόβλημα ελαχιστοποίησης (2) είναι ισοδύναμο με το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

- Ελαχιστοποίησε το $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i p(\widetilde{b_i})$ ως προς $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n$, υπό τους περιορισμούς $B(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)^T \geq (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_m)^T$. (10)

Θεώρημα 2.6.1 *Έστω Y ένας m-διάστατος ελαχιστικός σύνδεσμος-υπόχωρος τού $C(\Omega)$ που περιέχει τον X και έστω ότι το άθροισμα των συναρτήσεων x_i είναι αυστηρά θετικό. Τότε, το πρόβλημα ελαχιστοποίησης (1) είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού (9). Το πρόβλημα ελαχιστοποίησης (2) έχει τουλάχιστον μία λύση. Οι λύσεις τού (2) καθορίζονται από το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού (10).*

Παρατήρηση 2.6.1 *Το πρόβλημα ελαχιστοποίησης στο Παράδειγμα 2.1.1 δεν έχει λύση παρόλο που το διάνυσμα τιμής p είναι θετικό. Στο Παράδειγμα 3.3.2 παρακάτω θα δείξουμε ότι δεν υπάρχει πεπερασμένης διάστασης ελαχιστικός σύνδεσμος-υπόχωρος που να περιέχει τον υπόχωρο X τού Παραδείγματος 2.1.1. Συνεπώς, στο προηγούμενο Θεώρημα δεν μπορούμε να παραλείψουμε την παραδοχή ότι ο X περιέχεται σε έναν πεπερασμένης διάστασης ελαχιστικό σύνδεσμο-υπόχωρο.*

2.7 Ο Αλγόριθμος

Προκειμένου να μελετήσουμε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης (1), εξετάζουμε κατά πόσο υπάρχει ένας πεπερασμένης διάστασης ελαχιστικός σύνδεσμος-υπόχωρος Y τού $C(\Omega)$ που να περιέχει τον X και στη συνέχεια εντοπίζουμε μία θετική βάση τού Y. Έχοντας σαφή σκοπό, ακολουθούμε τα βήματα τού παρακάτω αλγορίθμου:

(i) Βρίσκουμε τη βασική συνάρτηση β των συναρτήσεων x_i.

(ii) Εξετάζουμε αν το K είναι πολύτοπο και, αν είναι, εντοπίζουμε τις κορυφές του. Απαριθμούμε τις κορυφές $P_1, P_2, ..., P_n, P_{n+1}, ..., P_m$ εις τρόπον ώστε οι πρώτες n να είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

(iii) Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.3.2 κατασκευάζουμε έναν ελαχιστικό σύνδεσμο-υπόχωρο Y που περιέχει τον X και μία βάση $\{b_1, b_2, ..., b_m\}$ τού Y. Επίσης, εντοπίζουμε ένα σύνολο κόμβων $\{t_1, t_2, ..., t_m\}$ για τη βάση $\{b_i\}$.

Αν ο X είναι σύνδεσμος-υπόχωρος και η τιμή p είναι αυστηρά θετική, τότε $sup_X\{0, z_1, z_2, ..., z_r\}$ είναι η λύση τού προβλήματος ελαχιστοποίησης (2).

(iv) Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.4.1 κατασκευάζουμε τη βάση προβολή $\{\widetilde{b_1}, \widetilde{b_2}, ..., \widetilde{b_n}\}$ τού X.

(v) Εντοπίζουμε τον πίνακα B ο οποίος έχει για στήλες τα διανύσματα

$$(\widetilde{b_i}(t_1), \widetilde{b_i}(t_2), ..., \widetilde{b_i}(t_n)), \quad i = 1, 2, ..., n,$$

και υπολογίζουμε τους πραγματικούς αριθμούς $p(\widetilde{b_i})$, $i = 1, 2, ..., n$ και $\sigma_k = max\{0, z_1(t_k), z_2(t_k), ..., z_r(t_k)\}$, $k = 1, 2, ..., m$, όπως και τους αριθμούς $p_j(\widetilde{b_i})$, $j = 1, 2, ..., l$, $i = 1, 2, ..., n$.

(vi) Αν $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ είναι λύση τού προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού (9), τότε

$$z = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \widetilde{b_i},$$

θα αποτελεί λύση τού προβλήματος ελαχιστοποίησης (1).

Ενότητα 3

Ασφάλιση Χαρτοφυλακίου

Στην παρούσα ενότητα εφαρμόζουμε τα προηγούμενα αποτελέσματα στην ασφάλιση χαρτοφυλακίου. Το μοντέλο βασίζεται σε μία διαφορετική μέθοδο σύγκρισης χαρτοφυλακίων, την **κυριαρχημένη διάταξη χαρτοφυλακίων**. Η εν λόγω διάταξη δε συγκρίνει τα χαρτοφυλάκια ως προς τη σημειακή διάταξη τού χώρου χαρτοφυλακίων, αλλά με βάση τη διάταξη των αποδόσεών τους. Με αυτόν τον τρόπο μάς δίνεται η δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε τη διατακτική δομή τού χώρου χαρτοφυλακίων, καθώς και τη θεωρία των συνδέσμων-υποχώρων. Στη μελέτη μας θεωρούμε ότι ο χώρος X περιέχεται σε έναν πεπερασμένης διάστασης ελαχιστικό σύνδεσμο-υπόχωρο τού $C(\Omega)$.

3.1 Κυριαρχημένη Διάταξη Χαρτοφυλακίων

Το μοντέλο τής αγοράς των ασφαλίστρων που μελετάμε αφορά δύο περιόδους: την περίοδο 0 και την περίοδο 1. Θεωρούμε ότι υπάρχουν n στο πλήθος ασφάλιστρα που τα αντιστοιχίζουμε στους φυσικούς αριθμούς $1, 2, ..., n$ και τα οποία αποκτήσαμε τη χρονική περίοδο 0. Τα ασφάλιστρα περιγράφονται μέσω των αποδόσεών τους τη χρονική περίοδο 1. Η απόδοση τού i ασφαλίστρου εν γένει είναι ένα θετικό στοιχείο x_i ενός διατεταγμένου χώρου E, τον οποίο αποκαλούμε **χώρο αποδόσεων**. Επίσης, υποθέτουμε ότι οι αποδόσεις

$x_1, x_2, ..., x_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα (μη περιττά ασφάλιστρα) τού E. Στο μοντέλο μας ο E είναι ο χώρος των πραγματικών συνεχών συναρτήσεων $C(\Omega)$ ορισμένες σε έναν συμπαγή $Hausdorff$ τοπολογικό χώρο Ω. Συνεπώς, τα διανύσματα απόδοσης x_i είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, θετικά στοιχεία τού $C(\Omega)$. Επιπροσθέτως, θεωρούμε ότι το σύνολο Ω εκφράζει όλες τις πιθανές καταστάσεις τής παγκόσμιας οικονομίας στην περίοδο 1 και ότι η τιμή $x_i(t)$ τού x_i στο σημείο t είναι η απόδοση τού ασφαλίστρου i στην κατάσταση t. Ως εκ τούτου, η συνάρτηση x_i περιέχει όλη την πληροφορία για το i ασφάλιστρο τη χρονική περίοδο 1. Ένα χαρτοφυλάκιο περιγράφεται από ένα διάνυσμα $\theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n)$ τού $\mathbb{R}^n$ όπου θ_i είναι το πλήθος των μετοχών τού i ασφαλίστρου. Ο χώρος $\mathbb{R}^n$ καλείται **χώρος χαρτοφυλακίων**, ενώ η απόδοση τού χαρτοφυλακίου θ θα είναι:

$$R(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \theta_i x_i \in C(\Omega).$$

Ο τελεστής R είναι ένα προς ένα και καλείται **τελεστής απόδοσης**. Η σημειακή διάταξη τού $C(\Omega)$, επάγει τη μερική διάταξη $\geq_R$ στον χώρο χαρτοφυλακίων $\mathbb{R}^n$ την οποία αποκαλούμε **κυριαρχημένη διάταξη χαρτοφυλακίων** και ορίζεται ως εξής: Για κάθε θ, $\phi \in \mathbb{R}^n$ έχουμε ότι

$$\theta \geq_R \phi \Leftrightarrow R(\theta) \geq R(\phi).$$

Συνεπώς, το χαρτοφυλάκιο θ θα είναι "καλύτερο" από το χαρτοφυλάκιο ϕ αν και μόνον αν σε κάθε κατάσταση t τής παγκόσμιας οικονομίας στην περίοδο 1, η απόδοση $\theta(t)$ τού χαρτοφυλακίου θ θα είναι μεγαλύτερη ή ίση τής απόδοσης $\phi(t)$ τού χαρτοφυλακίου ϕ. Σύμφωνα με την σημειακή διάταξη τού χώρου χαρτοφυλακίων, $\theta \geq \phi$ αν και μόνον αν $\theta_i \geq \phi_i$, για κάθε $i = 1, 2, ..., n$. Εύκολα παρατηρείται ότι $\theta \geq \phi$ συνεπάγεται $\theta \geq_R \phi$ αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα.

Ο θετικός κώνος $C = \{\theta \in \mathbb{R}^n \big| R(\theta) \geq_R 0\}$ τού χώρου χαρτοφυλακίων με την κυριαρχημένη διάταξη χαρτοφυλακίων περιέχει τον θετικό κώνο $\mathbb{R}^n_+$ τού $\mathbb{R}^n$. Το σύνολο τιμών τού τελεστή απόδοσης, δηλαδή ο υπόχωρος $X =< \{x_1, x_2, ..., x_n\} >$ τού $C(\Omega)$, είναι το σύνολο των αποδόσεων των χαρτοφυλακίων και καλείται **χώρος των εμπορευόμενων ασφαλίστρων**. Ο θετικός κώνος $X_+ = X \cap C(\Omega)$ τού X είναι η εικόνα τού θετικού κώνου C τού χώρου χαρτοφυλακίων, δηλαδή $X_+ = R(C)$. Κάθε διάνυσμα $q = (q_1, q_2, ..., q_n) \in \mathbb{R}^n$, όπου q_i είναι η τιμή τού i ασφαλίστρου, καλείται **διάνυσμα τιμής ασφαλίστρων** και το εσωτερικό γινόμενο $q \cdot \theta = \sum_{i=1}^{n} q_i \theta_i$, θα είναι η **αξία** τού χαρτοφυλακίου θ στην τιμή q. Σε αυτήν την ενότητα, για κάθε διάνυσμα τιμής q, θα θεωρούμε ότι $q \cdot \theta \geq 0$ για κάθε χαρτοφυλάκιο θ με θετική απόδοση και, συνεπώς, για κάθε διάνυσμα τιμής ασφαλίστρου q θα θεωρούμε ότι είναι θετικό ως προς την κυριαρχημένη διάταξη χαρτοφυλακίων (δηλαδή, $q \cdot \theta \geq 0$, για κάθε $\theta \in C$).

3.2 Ασφάλιση Χαρτοφυλακίου

Έστω ότι θ, κ είναι προκαθορισμένα χαρτοφυλάκια. Η ασφάλιση τού χαρτοφυλακίου θ στο "πάτωμα" κ (με τον όρο "πάτωμα" εννοούμε το χαρτοφυλάκιο με την ελάχιστη αποδεκτή απόδοση) πραγματοποιείται στην περίοδο 0 και οι πληρωμές λαμβάνουν χώρα στην περίοδο 1. Κάθε χαρτοφυλάκιο η με απόδοση καλύτερη των αποδόσεων των θ, κ, για κάθε πιθανή κατάσταση τής παγκόσμιας οικονομίας t την περίοδο 1, αποτελεί ένα εγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο ασφάλισης. Η εταιρεία θα είναι υποχρεωμένη να πληρώσει μόνο αν η απόδοση θ στην κατάσταση t την περίοδο 1 είναι μικρότερη από την απόδοση τού κ, δηλαδή αν $R(\theta)(t) < R(\kappa)(t)$. Υποθέτουμε ότι q είναι το διάνυσμα τιμής ασφαλίστρων στην περίοδο 1, καθώς και ότι η εταιρεία έχει την υποχρέωση να πληρώσει. Τότε, η εταιρεία έρχεται αντιμέτωπη με το ακόλουθο πρόβλημα στο οποίο καλείται να προσδιορίσει το ελάχιστο κόστος ασφάλισης:

- Ελαχιστοποίησε το $q \cdot \eta$ ως προς $\eta \in \mathbb{R}^n$, υπό τους περιορισμούς $\eta \geq_R \theta$ και $\eta \geq_R \kappa$. (11)

Θα αναφερόμαστε σε κάθε λύση τού εν λόγω προβλήματος ως μία **ασφάλιση ελαχίστου κόστους τού χαρτοφυλακίου $\boldsymbol{\theta}$ στο "πάτωμα" $\boldsymbol{\kappa}$ και στην τιμή $\boldsymbol{q}$**.

Αν $y_1 = R(\theta)$, $y_2 = R(\kappa)$ και p είναι το γραμμικό συναρτησιοειδές τού X με $p(x_i) = q_i$ για κάθε $i = 1, 2, ..., n$, θα έχουμε ότι: $p(R\theta) = q \cdot \theta$, για κάθε θ. Επειδή η τιμή q είναι θετική ως προς την κυριαρχημένη διάταξη χαρτοφυλακίων και $X_+ = R(C)$, θα έχουμε ότι το p είναι ένα θετικό γραμμικό συναρτησιοειδές τού X. Ως εκ τούτου, το παραπάνω πρόβλημα ελαχιστοποίησης είναι ισοδύναμο με το ακόλουθο:

- Ελαχιστοποίησε το $p(w)$ ως προς $w \in X$, υπό τους περιορισμούς $w \geq y_1$ και $w \geq y_2$, όπου p είναι ένα θετικό γραμμικό συναρτησιοειδές τού X.

Θέτουμε $z = w - y_2$, $z_1 = y_1 - y_2$ και καταλήγουμε στο ακόλουθο ισοδύναμο πρόβλημα ελαχιστοποίησης:

- Ελαχιστοποίησε το $p(z)$ ως προς $z \in X$, υπό τους περιορισμούς $z \geq z_1$ και $z \geq 0$. (12)

Εύκολα μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι z_0 θα είναι λύση τού (12), αν και μόνον αν $\eta_0 = R^{-1}(z_0 + y_2)$ είναι λύση τού (11).

Θεώρημα 3.2.1 *Αν ο χώρος αποδόσεων X περιέχεται σε έναν πεπερασμένης διάστασης ελαχιστικό σύνδεσμο υπόχωρο Y τού $C(\Omega)$ και το άθροισμα των x_i είναι αυστηρώς θετικό, τότε υπάρχει ασφάλιση ελαχίστου κόστους τού χαρτοφυλακίου θ στο "πάτωμα" κ και στην τιμή q, η οποία προσδιορίζεται επιλύοντας το πρόβλημα ελαχιστοποίησης (12).*

Ενότητα 4

Παραδείγματα

Παράδειγμα 4.1 *Έστω* $\Omega = [0,2]$, $x_1(t) = t^2 - 2t + 2$, $x_2(t) = -t^3 + 2t^2 - t + 2$, $x_3(t) = t^3 - 3t^2 + 3t$ *και* X *είναι ο υπόχωρος τού* $C[0,2]$ *που παράγεται από τα* x_1, x_2, x_3. *Μελετάμε το πρόβλημα*

- *Ελαχιστοποίησε το* $p(z)$ *ως προς* $z \in X$, *υπό τους περιορισμούς* $z \geq x_0$ *και* $z \geq 0$.

όπου $x_0 = -3t^3 + 7t^2 - 10t + 8$ *και* p *θετικό. Η βασική συνάρτηση των* x_1, x_2, x_3 *θα είναι*

$$\beta(t) = \frac{1}{4}(x_1(t), x_2(t), x_3(t)).$$

Υποθέτουμε ότι το K *είναι πολύτοπο. Επειδή η παράγωγος τής συνάρτησης* β *μηδενίζεται μόνο στο σημείο 1 τού διαστήματος (0,2), τότε σύμφωνα με την Παρατήρηση 2.5.1, έπεται ότι το σύνολο των πιθανών κορυφών τού* K *θα είναι το* $\{P_1 = \beta(0), P_2 = \beta(1), P_3 = \beta(2)\}$. *Αποδεικνύεται εύκολα ότι κάθε* $\beta(t)$ *γράφεται ως κυρτός συνδυασμός των διανυσμάτων* P_i $\big($*δηλαδή για κάθε* $t \in \Omega$, *υπάρχουν* $\lambda_i \in (0,1)$, *με* $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 1$, *τέτοια ώστε* $\beta(t) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i P_i\big)$. *Συνεπώς, το* K *είναι ένα simplex με κορυφές τα* P_1, P_2, P_3, *ενώ ο* X *θα είναι σύνδεσμος-υπόχωρος. Μία θετική βάση τού* X *δίνεται από τη σχέση (4) τής ενότητας 2.2 και έπειτα από τους υπολογισμούς προκύπτει ότι*

$$b_1(t) = 2(t-1)^2(2-t), \;\; b_2(t) = 4t(2-t), \;\; b_3(t) = 2t(t-1)^2,$$

είναι η θετική βάση τού X. *Παρατηρούμε ότι* $\beta_1(0) \neq 0$, *ενώ* $\beta_2(0) = \beta_3(0) = 0$ *και άρα το* $t_1 = 0$ *αποτελεί κόμβο για το* β_1. *Ομοίως, το* $t_2 = 1$ *και το* $t_3 = 2$.

Συνεπώς, τα $t_1 = 0, t_2 = 1$ *και* $t_3 = 2$ *είναι οι κόμβοι τής βάσης και ως εκ τούτου, το* x_0 *θα γράφεται ως*

$$x_0 = \frac{x_0(0)}{b_1(0)}b_1 + \frac{x_0(1)}{b_2(1)}b_2 + \frac{x_0(2)}{b_3(2)}b_3 = 2b_1 + \frac{1}{2}b_2 - 2b_3.$$

Τελικώς, η λύση τού προβλήματος ελαχιστοποίησης θα είναι το $sup_X\{x_0, 0\} = 2b_1 + \frac{1}{2}b_2$.

Παράδειγμα 4.2 *Ο υπόχωρος* X *τού Παραδείγματος 2.1 δεν είναι σύνδεσμος-υπόχωρος τού* $C[0,1]$, *καθώς επίσης δεν περιέχεται σε έναν πεπερασμένης διάστασης ελαχιστικό σύνδεσμο υπόχωρο* Y *τού* $C[0,1]$. *Για να αποδείξουμε ότι κάτι τέτοιο ισχύει, υποθέτουμε ότι το* K *είναι πολύτοπο. Τότε, το* K *θα πρέπει να έχει τουλάχιστον τρεις κορυφές, έστω* $\beta(t_1), \beta(t_2), \beta(t_3)$. *Συνεπώς, τουλάχιστον ένα από τα* t_i *θα πρέπει να είναι εσωτερικό σημείο τού (0,1), γεγονός που έπεται ότι η παράγωγος σε εκείνο το σημείο θα είναι ίση με 0. Με αυτόν τον συλλογισμό, καταλήγουμε σε άτοπο, επειδή η βασική συνάρτηση είναι*

$$\beta(t) = \frac{1}{1+t+t^2}(1, t, t^2)$$

και η παράγωγός της είναι διάφορη τού μηδενός για κάθε $t \in (0,1)$.

Παράδειγμα 4.3 *Έστω* $\Omega = [0,3]$, $x_1(t) = -t^5+8t^4-26t^3+44t^2-37t+12$, $x_2(t) = -t^5 + 8t^4 - 24t^3 + 35t^2 - 28t + 12$, $x_3(t) = t^5 - 7t^4 + 18t^3 - 19t^2 + 7t$ *και* X *είναι ο υπόχωρος τού* $C[0,3]$ *που παράγεται από τα* x_1, x_2, x_3. *Μελετάμε το πρόβλημα*

- *Ελαχιστοποίησε το* $p(z)$ *ως προς* $z \in X$, *υπό τους περιορισμούς* $z \geq x_0$ *και* $z \geq 0$,

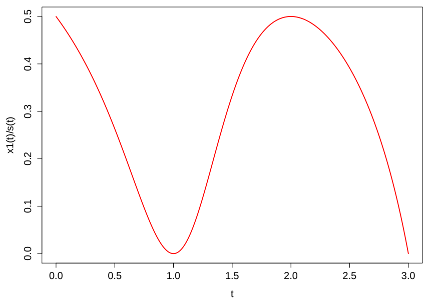
όπου $x_0 = 2x_1 + x_2 - x_3 = -4t^2 + 31t^4 - 94t^3 + 142t^2 - 109t + 36$ *και το διάνυσμα τής τιμής είναι* $p(w) = \int_0^3 tw(t)dt$ *για κάθε* $w \in C(\Omega)$. *Η βασική συνάρτηση είναι*

$$\beta(t) = \frac{1}{s(t)}(x_1(t), x_2(t), x_3(t)),$$

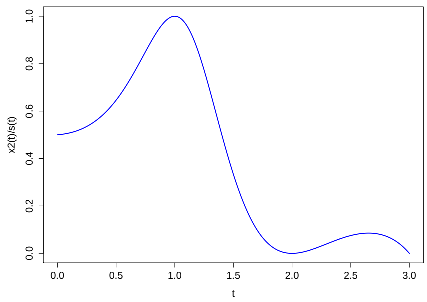
όπου $s(t) = -t^5 + 9t^4 - 32t^3 + 60t^2 - 58t + 24$ *είναι το άθροισμα των συναρτήσεων* x_i *(δηλαδή,* $s(t) = \sum_{i=1}^{3} x_i(t)$*). Χρησιμοποιώντας κάποιο μαθηματικό λογισμικό υπολογίζουμε τις ρίζες τής παραγώγου τής* β *στο διάστημα (0,3).*

Σημείωση: *Εμείς χρησιμοποιήσαμε το Στατιστικό Πακέτο R, λόγω περισσότερης εξοικείωσης με το εν λόγω πρόγραμμα. Παρόλα αυτά, συνιστούμε στον αναγνώστη να προτιμήσει το Mathematica ή το Matlab για αντίστοιχης φύσης προβλήματα.*

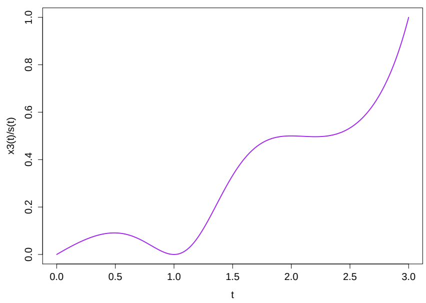
Βρήκαμε, λοιπόν, πως η παράγωγος τής β *στο (0,3) έχει ρίζες τα σημεία 1 και 2. Κάτι τέτοιο διαπιστώνεται και με τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων* β_1, β_2 *και* β_3*.*



(α′) Γραφική Παράσταση τής $\beta_1(t)$



(β′) Γραφική Παράσταση τής $\beta_2(t)$



(γ′) Γραφική Παράσταση τής $\beta_3(t)$

Συνεπώς, το σύνολο των πιθανών κορυφών τού K *θα είναι το*

$$\left\{\beta(0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right),\ \beta(1) = (0,1,0),\ \beta(2) = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right),\ \beta(3) = (0,0,1)\right\}.$$

Εν συνεχεία, απαριθμούμε τα P_i*, εις τρόπον ώστε τα* $n = 3$ *πρώτα να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Έστω, λοιπόν,*

$$P_1 = (0,1,0),\ P_2 = (0,0,1),\ P_3 = \Big(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\Big),\ P_4 = \Big(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\Big).$$

Γνωρίζουμε ότι κάθε $\beta(t)$ γράφεται ως κυρτός συνδυασμός των διανυσμάτων P_i. Παρόλα αυτά, η εύρεση των συντελεστών $\xi_i(t)$ εν γένει αποτελεί ένα απαιτητικό πρόβλημα. Στο παράδειγμά μας ισχύει ότι $\beta(t) = \sum_{i=1}^4 \xi_i(t)P_i$, με $\xi_1(t) = (-t^4+7t^3-16t^2+12t)/s(t)$, $\xi_2(t) = (t^5-6t^4+13t^3-12t^2+4t)/s(t)$, $\xi_3(t) = 2(-t^5+9t^4-31t^3+51t^2-40t+12)/s(t)$, $\xi_4(t) = 2(-t^4+5t^3-7t^2+3t)/s(t)$. Παρατηρούμε ότι $\sum_{i=1}^4 \xi_i(t) = s(t)/s(t) = 1$.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.3.2, ο $Y =< \{x_1,x_2,x_3,x_4\} >$, όπου $x_4 = \xi_4(t)s(t) = 2(-t^4+5t^3-7t^2+3t)$, είναι ένας ελαχιστικός σύνδεσμος-υπόχωρος τού $C(\Omega)$ που περιέχει τον X. Από το ίδιο Θεώρημα, μία θετική βάση τού Y δίνεται από τη σχέση (5), όπου D είναι ο 4×4 πίνακας με στήλες τα διανύσματα R_i τής σχέσης (6). Στο παράδειγμά μας θα είναι

$$M_1 = (0,1,0,0),\ M_2 = (0,0,1,0),\ M_3 = \Big(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0\Big),\ M_4 = \Big(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},1\Big)$$

και άρα

$$R_1 = (0,1,0,0),\ R_2 = (0,0,1,0),\ R_3 = \Big(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0\Big),\ R_4 = \Big(\frac{1}{4},0,\frac{1}{4},\frac{1}{2}\Big).$$

Συνεπώς, θα έχουμε ότι

$$\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3\\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ -1 & 1 & 0 & \frac{1}{2}\\ -1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Δηλαδή, $b_1 = -t^4+7t^3-16t^2+12t$, $b_2 = t^5-6t^4+13t^3-12t^2+4t$, $b_3 = 2(-t^5+9t^4-31t^3+51t^2-40t+12)$, $b_4 = 4(-t^4+5t^3-7t^2+3t)$ είναι μία θετική βάση τού Y και είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι $t_1 = 1, t_2 = 3, t_3 = 0, t_4 = 2$ είναι οι κόμβοι τής βάσης. Η βάση προβολή τού X, σύμφωνα με τη σχέση (7), θα είναι

$$\big(\widetilde{b_1}(t), \widetilde{b_2}(t), \widetilde{b_3}(t)\big)^T = A^{-1}(x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T,$$

όπου A είναι ο 3×3 πίνακας με στήλες τα διανύσματα P_1, P_2, P_3. Ως εκ τούτου,

$$\begin{pmatrix} \widetilde{b_1} \\ \widetilde{b_2} \\ \widetilde{b_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Δηλαδή,

$$\widetilde{b_1} = x_2 - x_1,\ \widetilde{b_2} = x_3,\ \widetilde{b_3} = 2x_1.$$

Επομένως, ο πίνακας B που έχει ως στήλες τα διανύσματα $(\widetilde{b_i}(t_1), \widetilde{b_i}(t_2), \widetilde{b_i}(t_3), \widetilde{b_i}(t_4))$ είναι

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Επίσης, υπολογίζουμε ότι $p(\widetilde{b_1}) = -81/20$, $p(\widetilde{b_2}) = 2097/140$, $p(\widetilde{b_3}) = 558/35$. Οι αριθμοί $\sigma_k = x_0(t_k) \vee 0$ είναι $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 36$, $\sigma_4 = 2$. Ως εκ τούτου, καταλήγουμε στο ακόλουθο ισοδύναμο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

- *Ελαχιστοποίησε το $-(81/20)\lambda_1 + (2097/140)\lambda_2 + (558/35)\lambda_3$ ως προς $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$, υπό τους περιορισμούς*

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 36 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Το παραπάνω πρόβλημα είναι ένα κλασικό πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού και είναι εύκολο να βρούμε ότι η λύση του είναι $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (2, 0, 3/2)$ και συνεπώς, η λύση τού αρχικού προβλήματος θα είναι η

$$\begin{aligned} z_0 &= \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \widetilde{b_i} = 2\widetilde{b_1} + 0\widetilde{b_2} + (3/2)\widetilde{b_3} = \\ &= -3t^5 + 24t^4 - 74t^3 + 114t^2 - 93t + 36. \end{aligned}$$

References

[1] *C.D. Aliprantis, D. Brown, I. Polyrakis and J. Werner* (1998). *Portfolio dominance and optimality in infinite security markets. Journal of Mathematical Economics*, **30**, 347-366

[2] *C.D. Aliprantis, D. Brown and J. Werner* (2000). *Minimum-cost portfolio insurance. J. Economic Dynamics and Control* **24**, 1703-1719.

[3] *C.D. Aliprantis, I. Polyrakis and R. Tourky* (2002). *The cheapest hedge. Journal of Mathematical Economics*, **37**, 269-295.

[4] *J.A. Kalman* (1961). *Continuity and Convexity of Projections and Barycentric Coordinates in Convex Polyhedra*, *pp.* 1017-1022.

[5] *S. Miyajima* (1983). *Structure of Banach quasi-sublattices. Hokkaido Math J.*, **11**, 83-91.

[6] *I.A Polyrakis* (1996). *Finite-dimensional lattice-subspaces of* $C(\Omega)$ *and curves of* $\mathbb{R}^n$. *Trans. American Math. Soc.*, **384**, 2793-2810.

[7] *I.A Polyrakis* (1999). *Minimal lattice-subspaces. Trans. American Math. Soc.*, **351**, 4183-4203.

[8] *R. Webster* (1994). *Convexity. Oxford University Press.*