

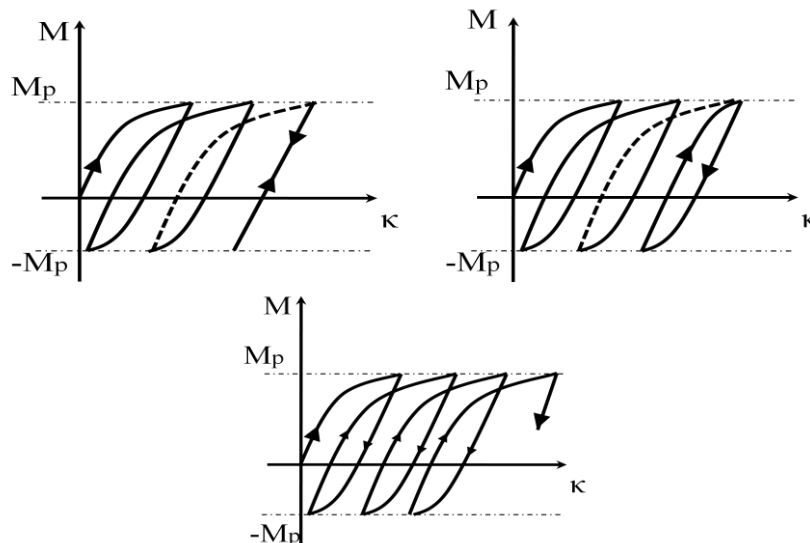


ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ

Ανάπτυξη λογισμικού για την αποτίμηση ανακυκλικής συμπεριφοράς ανελαστικών πλασιακών κατασκευών

Μεταπτυχιακή Διατριβή

Καρβέλας Γ. Χαράλαμπος



Επιβλέπων Καθηγητής : Σπηλιόπουλος Β. Κωνσταντίνος, Καθηγητής ΕΜΠ

ΑΘΗΝΑ
ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2016

Ευχαριστίες

Με την παρούσα εργασία ολοκληρώνεται ο κύκλος μεταπτυχιακών σπουδών μου στη σχολή Πολιτικών Μηχανικών του ΕΜΠ. Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Σπηλιόπουλο Κωνσταντίνο για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε στην ανάθεση του θέματος της εργασίας αυτής, όπως επίσης και για την καθοδήγηση, τις συμβουλές του, την συνεχή ενασχόληση και κυρίως την υπομονή του όλους τους μήνες εκπόνησής της.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον υποψήφιο διδάκτορα ΕΜΠ και φίλο Γιάννη Καπογιάννη για την στήριξη και καθοδήγησή του στην προσπάθειά μου αυτή, όπως επίσης και τον μεταδιδάκτορα στο πολυτεχνείο του Aachen Κωνσταντίνο Παναγιώτου για την βοήθεια του στην κατανόηση δύσκολων εννοιών της μεθόδου.

Τέλος, δεν θα μπορούσα να μην αναγνωρίσω την συνεισφορά του στενού μου κύκλου, κυρίως της οικογένειάς μου αλλά και των στενών μου φίλων, οι οποίοι μου έδιναν κουράγιο και κίνητρο για την συνέχιση και ολοκλήρωση της εργασίας αυτής.

Περίληψη

Σε μια προσπάθεια να επιμηκυνθεί η ζωή μιάς κατασκευής, η οποία υπόκειται σε ανακυκλιζόμενες φορτίσεις, είναι σημαντικό να παρέχονται όρια ασφαλείας για την αποφυγή μεγάλων παραμορφώσεων ή κατάρρευσης. Οι άμεσες μέθοδοι και ιδιαίτερα η ανάλυση ελαστικής σταθεροποίησης (shakedown analysis) παρέχουν ένα μέσο για την επίτευξη του παραπάνω. Οι περισσότερες από τις προσεγγίσεις για την ανάλυση σταθεροποίησης βασίζονται στα δύο θεωρήματα πλαστικότητας, αυτά του άνω και κάτω ορίου.

Σε αυτή την εργασία γίνεται χρήση μιας νέας μεθόδου, που προσεγγίζει το πρόβλημα από έναν διαφορετικό δρόμο. Η μέθοδος ονομάζεται Residual Stress Decomposition Method (RSDM), η οποία υποθέτει την ανάπτυξη των παραμενουσών ροπών σε σειρές Fourier στον χρόνο. Η μέθοδος αυτή μπορεί να προβλέψει την ελαστοπλαστική κατάσταση κατασκευής για μία δοθείσα ιστορία φόρτισης. Με την παρούσα προσέγγιση, μία φόρτιση γνωστών ορίων μετατρέπεται σε μία ισοδύναμη φόρτιση, η οποία έχει γνωστή χρονοϊστορία. Η διαδικασία προσεγγίζει το φορτίο ελαστικής σταθεροποίησης από ψηλά ξεκινώντας από μια πολύ μεγάλη τιμή, η οποία πλαστικοποιεί κάθε διατομή. Η διαδικασία παράγει μία φθίνουσα ακολουθία του συντελεστή σταθεροποίησης, μέχρις ότου ο μοναδικός όρος των σειρών Fourier να είναι ο σταθερός όρος.

Η παρούσα εργασία χωρίζεται σε **5 κεφάλαια**. Στο **κεφάλαιο 1**, γίνεται μια εισαγωγή στη χρησιμοποιούμενη μέθοδο και μια σύντομη βιβλιογραφική ανασκόπηση γύρω από τις ανεπτυγμένες μεθόδους για ελαστοπλαστική ανάλυση και εύρεση φορτίων σταθεροποίησης. Στο **κεφάλαιο 2**, παρατίθενται στοιχεία της θεωρίας της ελαστικής σταθεροποίησης. Πιο συγκεκριμένα δίνονται τα θεωρήματα άνω και κάτω ορίου και γίνονται παρατηρήσεις επί αυτών. Μέσω των θεωρημάτων αυτών υπολογίζονται οι συντελεστές φόρτισης που οδηγούν μία πλαισιακή κατασκευή σε μία από τις τρεις δυνατές καταστάσεις: ελαστική σταθεροποίηση, κατά την οποία γίνεται παύση της επαύξησης των πλαστικών παραμορφώσεων και ελαστική μεταβολή τους με τον χρόνο, επαυξητική κατάρρευση, κατά την οποία υπάρχει ανεξέλεγκτη αύξηση των πλαστικών παραμορφώσεων και εναλλασσόμενη πλαστικότητα, με εναλλαγή των προσήμων των επαυξητικών παραμορφώσεων και κατάρρευση της κατασκευής λόγω ολικοκυκλικής κόπωσης. Τέλος, παρουσιάζονται οι αποδείξεις των θεωρημάτων αυτών. Στο **κεφάλαιο 3**, αναπτύσσεται η μέθοδος RSDM-S, η οποία αποτελεί μία άμεση μέθοδο για την εύρεση του φορτίου ελαστικής σταθεροποίησης (shakedown). Στη συνέχεια προτείνεται διαδικασία για την ανάλυση σταθεροποίησης, ενώ τέλος παρουσιάζεται και η υπολογιστική διαδικασία για την υλοποίησή της. Στο **κεφάλαιο 4**, γίνεται αναφορά στο πρόγραμμα GID, το οποίο χρησιμοποιείται για την εισαγωγή των δεδομένων και την παρουσίαση των αποτελεσμάτων μέσα από γραφικό περιβάλλον. Παρουσιάζεται ο τρόπος εισαγωγής της γεωμετρίας και των χαρακτηριστικών του προβλήματος και ο τρόπος εξαγωγής των απαιτούμενων αποτελεσμάτων μετά την ανάλυση. Στο **κεφάλαιο 5**, παρουσιάζονται πέντε παραδείγματα επιπέδων πλαισίων που υπόκεινται σε κυκλική φόρτιση και σταθεροποιούνται

ελαστικά. Τα τρία πρώτα αποτελούν χαρακτηριστικά παραδείγματα πλαισίων και χρησιμοποιούνται για την τεκμηρίωση της μεθόδου και του συνταχθέντος προγράμματος. Τα δύο τελευταία αποτελούν μεγαλύτερα πλαίσια, που αποδυναμώνουν ότι το φορτίο ελαστικής σταθεροποίησης βρίσκεται χαμηλότερα του οριακού. Για τα δύο τελευταία υπολογίζονται οι μέγιστες τιμές της φόρτισης μέσω του κανονισμού και μετατρέπονται σε συνάρτησεις φόρτισης με τον χρόνο, δευτέρου βαθμού. Αυτές εφαρμόζονται σαν πλευρικές φορτίσεις. Για όλα τα πλαίσια γίνεται τόσο ανάλυση για ελαστική σταθεροποίηση, όσο και οριακή ανάλυση. Ειδικά για τα δύο τελευταία, γίνεται επιπρόσθετα και στατική υπερωθητική ανάλυση. Τέλος, στο **παράρτημα Α** παρουσιάζεται η θεωρία των στοιχείων επιπέδου πλαισίου και η διαδικασία ανάλυσης της κατασκευής, μέσω της ανάπτυξης του μητρώου δυσκαμψίας και της αριθμητικής επίλυσης των εξισώσεων, όπως έγινε από το πρόγραμμα. Στο **παράρτημα Β** δίνεται η θεωρία για την ολοκλήρωση κατά Gauss-Legendre που χρησιμοποιήθηκε στο πρόγραμμα.

Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας και όπως έχει υπονοηθεί νωρίτερα αναπτύχθηκε πρόγραμμα σε Fortran 90/95, για την εφαρμογή της παραπάνω διαδικασίας σε επίπεδους πλαισιακούς φορείς. Η κατασκευή εισάγεται μέσω του γραφικού προγράμματος GID. Στη συνέχεια και με χρήση του παραχθέντος αρχείου εισόδου γίνεται ελαστική ανάλυση αυτής με χρήση στοιχείων επιπέδου πλαισίου. Υπολογίζεται μια αρχική υψηλή τιμή του συντελεστή σταθεροποίησης, η οποία πλαστικοποιεί κάθε διατομή και γίνεται χρήση της για την εκκίνηση της διαδικασίας. Ύστερα γίνεται χρήση του αλγορίθμου της RSDM-S, μέσω της οποίας υπολογίζεται ο συντελεστής φόρτισης που θα οδηγήσει σε ελαστική σταθεροποίηση. Παράλληλα κάνοντας χρήση κατάλληλης φόρτισης, γίνεται υπολογισμός του οριακού φορτίου. Τέλος, πρέπει να αναφερθεί ότι για σύγκριση τόσο με το οριακό όσο και με το φορτίο σταθεροποίησης, αναπτύχθηκε μικρότερο πρόγραμμα με την μέθοδο βήμα-προς-βήμα, κάνοντας χρήση της τροποποιημένης Newton-Raphson.

Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή.....	1
2. Θεωρία Ελαστική Σταθεροποίησης	4
2.1 Θεωρήματα ελαστικής σταθεροποίησης (Shakedown)	4
2.1.1 Ορισμοί	5
2.1.2 Θεώρημα κάτω ορίου	6
2.1.3 Θεώρημα άνω ορίου.....	8
2.1.4 Παρατηρήσεις επι των θεωρημάτων.....	9
2.2 Αποδείξεις Θεωρημάτων	10
2.2.1 Απόδειξη θεωρήματος Ελαστικής Σταθεροποίησης	10
2.2.2 Απόδειξη θεωρήματος Άνω Ορίου	13
3. Η μέθοδος RSDM-S	16
3.1 Ανάπτυξη των παραμενουσών εντάσεων	16
3.2 Υπολογισμός του ρυθμού μεταβολής των παραμενουσών εντάσεων	17
3.3 Υπολογιστική διαδικασία.....	21
3.4 Προτεινόμενη διαδικασία για ανάλυση ελαστικής σταθεροποίησης.....	24
3.4.1 Αναλογικός τρόπος μεταβολής φορτίων	24
3.4.2 Μη-αναλογικός τρόπος μεταβολής φορτίων	25
3.5 Εκτίμηση του αρχικού γ	26
4. Γραφικό περιβάλλον	27
4.1 Σχεδιασμός του μοντέλου.....	27
4.1.1 Εισαγωγή κόμβων.....	27
4.1.2 Εισαγωγή στοιχείων.....	28
4.2 Εισαγωγή των δεδομένων του προβλήματος	29
4.2.1 Συνθήκες στήριξης	30
4.2.2 Φορτισμένοι κόμβοι και τιμές των φορτίων	30
4.2.3 Υλικά και αντιστοίχιση αυτών με τα στοιχεία	31
4.2.4 Γενικά δεδομένα για την RSDM-s	33
4.3 Σχεδιασμός διαγαραμμάτων εντατικών μεγεθών.....	35

5. Παραδείγματα Εφαρμογής.....	36
5.1 Εισαγωγή.....	36
5.2 Μονώροφο πλαίσιο με ένα υλικό και δύο φορτίσεις	36
5.2.1 Ανάλυση Ελαστικής Σταθεροποίησης (Elastic Shakedown)	37
5.2.2 Οριακή ανάλυση (Limit Analysis).....	40
5.3 Διώροφο πλαίσιο με δύο υλικά και δύο πλευρικές φορτίσεις	41
5.3.1 Ανάλυση Ελαστικής Σταθεροποίησης (Elastic Shakedown)	42
5.3.2 Οριακή ανάλυση (Limit Analysis).....	45
5.4 Μονώροφο πλαίσιο δύο ανοιγμάτων, δύο υλικών, με 2 συγκεντρωμένα και ένα καταναμημένο φορτίο	46
5.4.1 Ανάλυση Ελαστικής Σταθεροποίησης (Elastic Shakedown)	47
5.5 Πεντάροφο πλαίσιο τριών ανοιγμάτων με πέντε πλευρικά φορτία	49
5.5.1 Μέγιστες Φορτίσεις.....	49
5.5.2 Ανάλυση Ελαστικής Σταθεροποίησης (Elastic Shakedown)	51
5.5.3 Οριακή ανάλυση (Limit Analysis).....	53
5.6 Δεκαώροφο πλαίσιο τριών ανοιγμάτων με 10 πλευρικά φορτία	55
5.6.1 Μέγιστες Φορτίσεις.....	56
5.6.2 Ανάλυση Ελαστικής Σταθεροποίησης (Elastic Shakedown)	57
5.6.3 Οριακή ανάλυση (Limit Analysis).....	61
6. Συμπεράσματα.....	64
Παράρτημα	65
Α. Ανάλυση πλαισίων με στοιχεία δοκού	65
Α.1. Στοιχείο Δοκού Επίπεδου Πλαισίου	65
Α.2. Υπολογισμός καθολικού μητρώου δυσκαμψίας φορέα	70
Α.3. Αποθήκευση καθολικού μητρώου δυσκαμψίας.....	71
Α.4. Αλγόριθμος επιλύσεως των εξισώσεων-Μέθοδος Cholesky	71
Β. Ολοκλήρωση Gauss-Legendre	74
Βιβλιογραφία	75

1. Εισαγωγή

Κατασκευές που υπόκεινται σε επαναλαμβανόμενη υψηλή φόρτιση, αναγκάζονται σήμερα να ξεπερνούν την ελαστική περιοχή και να αναπτύσσουν εκτεταμένες πλαστικές παραμορφώσεις. Για κατασκευές πολιτικού μηχανικού, όπως γέφυρες, οδοστρώματα, κτίρια, κατασκευές ανοικτής θαλάσσης, τα φορτία που μπορούν να προκαλέσουν τις παραπάνω παραμορφώσεις είναι τα μεγάλα φορτία κυκλοφορίας, σεισμοί και κυματισμοί. Επίσης, η συνύπαρξη θερμικών και μηχανικών φορτίων σε μηχανολογικές κατασκευές, όπως πυρηνικοί αντιδραστήρες και κινητήρες αεροσκαφών, οδηγεί τις κατασκευές σε καταστάσεις έντασης πολύ υψηλότερες από το ελαστικό τους όριο.

Όταν η ακριβής χρονοϊστορία φόρτισης δεν είναι γνωστή, κάποιος μπορεί να υπολογίσει την μακροπρόθεσμη συμπεριφορά της κατασκευής με χρήση υπολογισμών ανά χρονικό βήμα. Μια καλύτερη εναλλακτική, με πολύ μικρότερο υπολογιστικό κόστος είναι η χρήση άμεσων μεθόδων (direct methods), οι οποίες μπορούν να προβλέψουν εάν υπό την δεδομένη φόρτιση η κατασκευή θα τεθεί εκτός λειτουργίας, λόγω κατάρρευσης ή εκτεταμένων πλαστικών παραμορφώσεων. Επίσης, συνήθως η ακριβής χρονοϊστορία φόρτισης της κατασκευής δεν είναι γνωστή, αλλά μόνο κάποια όρια αυτής. Σε αυτή την περίπτωση, οι άμεσες μέθοδοι είναι ο μόνος τρόπος για την εξαγωγή ασφαλούς εκτίμησης.

Βασιζόμενοι στο γεγονός ότι για κατασκευές, από σταθερό υλικό (1), τείνουν οριακά σε μια ασυμπτωτική κατάσταση, οι άμεσες μέθοδοι προσπαθούν να εκτιμήσουν την κατάσταση αυτή από την αρχή. Χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιων μεθόδων είναι η οριακή ανάλυση (limit analysis) για μονοτονική φόρτιση και η ανάλυση σταθεροποίησης (shakedown analysis), για φορτίο που μεταβάλλεται κυκλικά. Για μικρές μετακινήσεις και ελαστικό-τέλεια πλαστικό υλικό, η αναζήτηση για το καθεστώς σταθεροποίησης βασίζεται συνήθως στα θεωρήματα κάτω (2) και άνω ορίου (3).

Πάνω σε αυτές τις θεωρίες, έχουν γίνει πολλές προσθήκες για να συμπεριληφθούν και άλλα φαινόμενα, όπως η γεωμετρική μη-γραμμικότητα, ή ακόμα και συνθήκες για τη διεύρυνση του στατικού θεωρήματος σε ελαστικά-τέλεια πλαστικό ρηγματωμένο υλικό (4), (5).

Αναφορικά με προσθήκες για ελαστοπλαστική συμπεριφορά υλικού, πολλοί ερευνητές έχουν επίσης μελετήσει προβλήματα περιορισμένης γραμμικής και μη-γραμμικής κινηματικής σκλήρυνσης. Πρόσφατες εξελίξεις σε αυτό το θέμα έχουν παρουσιαστεί στα (6), (7), (8). Οι περισσότερες από τις αριθμητικές προσεγγίσεις για την επίλυση του προβλήματος shakedown βασίζονται είτε στο θεώρημα κάτω, είτε στο άνω όριο. Εμφανίζονται στο πλαίσιο του μαθηματικού προγραμματισμού (MP) με στόχο την ελαχιστοποίηση ή μεγιστοποίηση μιας αντικειμενικής συνάρτησης, που αντιπροσωπεύει συνήθως το συντελεστή φόρτισης. Ανάλογα με το αν η αντικειμενική συνάρτηση και / ή οι περιορισμοί είναι γραμμικοί ή μη γραμμικοί το πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί ως γραμμικό (LP) (π.χ. για τα ερευνητικά έργα (9), (10)), ή μη γραμμικό (NLP) πρόβλημα προγραμματισμού (7). Η διακριτοποίηση ενός συνεχούς μέσου από ένα μεγάλο αριθμό πεπερασμένων στοιχείων και αντίστοιχα μεγάλο αριθμό περιορισμών, συχνά

οδηγούν στη λύση μεγάλων προβλημάτων βελτιστοποίησης. Για την επίλυση αυτών των προβλημάτων έχουν αναπτυχθεί πολλές αριθμητικές τεχνικές. Μπορεί κανείς να αναφέρει εδώ τη μέθοδο **reduced basis technique** (11), (12) ή αλγόριθμους που βασίζονται στην επαναληπτική διαδικασία του Newton. Το πρόβλημα βελτιστοποίησης λύθηκε στο (13) βασιζόμενο στην επαυξημένη Λαγκρανζιανή σε συνδυασμό με τη μέθοδο **BFGS**. Η εξέλιξη των αλγορίθμων εσωτερικού σημείου (IPM) για την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης μεγάλης κλίμακας, οδήγησε στην εκτεταμένη διαμόρφωση και λύση των οριακών και shakedown προβλημάτων με τη χρήση αυτών των αλγορίθμων. Σε αυτές τις εργασίες έχουν αναφερθεί διάφορες εφαρμογές αυτών των διαδικασιών σε πολλούς τομείς της μηχανικής των στερεών και του εδάφους. Για τις πιο πρόσφατες εφαρμογές μπορεί κανείς να εξετάσει την (14). Πολύ λίγες εναλλακτικές προσεγγίσεις για την εύρεση του σταθερού σημείου μιας αντικειμενικής συνάρτησης υπάρχουν στη βιβλιογραφία για την αξιολόγηση του φορτίου shakedown. Μια τέτοια προσέγγιση είναι η μέθοδος **eigen-mode** (15). Επίσης, ένας αλγόριθμος που βασίζεται σε τεχνικές μήκους τόξου και συγκρίνεται με την IPMS παρουσιάζεται στο (16). Μια άλλη προσέγγιση που χρησιμοποιεί εσωτερικές μεταβλητές, καθεμία από τις οποίες αντιστοιχεί σε έναν ανελαστικό μηχανισμό, παρουσιάζεται στο (17), (18). Χρησιμοποιώντας πιο φυσικές μεθόδους, η μέθοδος γραμμικής αντιστοίχισης (LMM) (19) είναι μια γενίκευση της **elastic compensation method** (20), (21) και βασίζεται στην αντιστοίχιση ενός γραμμικού με σε ένα πρόβλημα πλαστικότητας. Είναι ουσιαστικά μια μέθοδος άνω ορίου, που παράγει μια ακολουθία γραμμικών λύσεων, με χωρικά μεταβλητούς συντελεστές, η οποία συγκλίνει είτε στο φορτίο κατάρρευσης (22) είτε στο φορτίο shakedown (23), (24). Πρόσφατες δημοσιεύσεις περιλαμβάνουν εφαρμογές για χαλύβδινους σωλήνες (25) και δοκούς (26). Η μέθοδος έχει επίσης εφαρμοσθεί στο shakedown προβλήματα στη μηχανική του εδάφους (27), (28). Έχει επίσης διευρυνθεί πέραν του shakedown για να παρέχει μια εκτίμηση του ορίου επαυξητικής κατάρρευσης, για φορτίσεις που μπορούν να αναλυθούν σε διαρκή και χρονικά μεταβαλλόμενες συνιστώσες (29), (30). Μια πρόσφατη ενημέρωση της μεθόδου εμφανίζεται στο (31). Στο (32) παρουσιάστηκε μια αριθμητική διαδικασία που χρησιμοποιεί τις ίδιες παραδοχές φόρτισης. Μια σχετικά απλή άμεση μέθοδος, που ονομάζεται **RSDM**, παρουσιάστηκε πρόσφατα (33), (34). Αυτή μπορεί να προβλέψει τη μακροπρόθεσμη συμπεριφορά ενός ελαστικού-τέλεια πλαστικού υλικού, όταν υποβάλλεται σε μια δεδομένη κυκλική ιστορία φόρτισης. Αποτελεί μέθοδο που κάνει χρήση ενός φυσικού τρόπου, με βάση την αναμενόμενη κυκλική φύση των παραμενουσών τάσεων. Οι παραμένουσες τάσεις αναλύονται σε σειρές Fourier, ως προς τον χρόνο και οι συντελεστές αυτών υπολογίζονται επαναληπτικά ικανοποιώντας την ισορροπία και τη συμβιβαστότητα σε χρονικά σημεία στο εσωτερικό του κύκλου. Η μέθοδος είναι ικανή να προβλέψει κάθε διαφορετική κατάσταση της κατασκευής είτε αυτή είναι shakedown, είτε εναλλασσόμενη πλαστικότητα, είτε επαυξητική κατάρρευση.

Στην παρούσα εργασία, έγινε ανάπτυξη λογισμικού για την αξιολόγηση του φορτίου shakedown ελαστοπλαστικών πλαισιακών κατασκευών υπό κυκλική φόρτιση. Δεδομένου ότι μόνο τα διαστήματα διακύμανσης των φορτίων είναι τώρα γνωστά, κάθε καμπύλη μπορεί να χαραχθεί μεταξύ αυτών, κυμαινόμενη χρονικά. Το πρόβλημα έτσι μετατρέπεται σε ένα

ισοδύναμο πρόβλημα φόρτισης. Μέσα από μια ελαστική ανάλυση οι αρχικές παράμετροι αυτής της φόρτισης υπολογίζονται, έτσι ώστε να πλαστικοποιείται όλη η δομή. Αυτή η φόρτιση είναι προφανώς πολύ υψηλότερη αυτής που θα προκαλέσει ελαστική σταθεροποίηση (shakedown). Η διαδικασία δημιουργεί μια φθίνουσα ακολουθία φορτικών λύσεων μέσω της χρήσης της RSDM. Το όριο αυτής της αλληλουχίας είναι η φόρτιση που προκαλεί σταθεροποίηση, όπου ο μόνος όρος της σειράς Fourier των παραμενουσών τάσεων που απομένει είναι ο σταθερός όρος (2).

2. Θεωρία Ελαστική Σταθεροποίησης

Η φόρτιση σε μια κατασκευή μπορεί να μεταβάλλεται αισθητά, κατά τη διάρκεια του χρόνου ζωής της. Για παράδειγμα, εκτός από τα μόνιμα φόρτια σε ένα πλαίσιο θα ασκηθούν τόσο φορτία χιονιού και ανέμου, όσο και σεισμικά. Τα μεγέθη αυτών δεν μπορούν να προβλεφθούν. Ο τύπος αυτός φόρτισης χαρακτηρίζεται σαν ανακυκλιζόμενη φόρτιση.

Είναι δυνατόν, όπως πρώτα αναγνωρίστηκε από τους Grüning (1926) και Kazinczy (1931), ότι υπό μεταβαλλόμενη φόρτιση, ένα πλαίσιο θα καταρρεύσει εξαιτίας της αυξημένης πλαστικής ροής, αν και κανένας συνδυασμός φόρτισης δεν είναι αρκετά ισχυρός για να προκαλέσει πλαστική κατάρρευση. Αν υποθεθεί ότι ένα πλαίσιο υπόκειται σε φορτία $\lambda P_1, \lambda P_2, \dots, \lambda P_r, \dots, \lambda P_n$, με το λ να είναι ο πολλαπλασιαστής σε κάθε φορτίο. Η τιμή κάθε φορτίου, μπορεί να μεταβάλλεται μεταξύ των ορίων ($\lambda P_r^{\max}, \lambda P_r^{\min}$), ανεξάρτητα των μεταβολών, οι οποίες ίσως συμβαίνουν στις τιμές των άλλων φορτίων. Τα όρια ($\lambda P_r^{\max}, \lambda P_r^{\min}$), υποτίθεται ότι είναι γνωστές, χαρακτηριστικές τιμές.

Υπάρχουν δύο τρόποι, με τους οποίους μπορεί να συμβεί κατάρρευση, εξαιτίας επαναλαμβανόμενης φόρτισης. Αν τα φορτία σε κάποιο πλαίσιο αλλάζουν σε φορά, κάποιο μέλος μπορεί να κάμπτεται, με αντίθετη φορά ροπής κάμψης κάθε φορά, έτσι ώστε η διαρροή να συμβαίνει σε ίνες που υπόκεινται μεταβαλλόμενα σε εφελκυσμό και θλίψη. Αυτή η συμπεριφορά, η οποία ονομάζεται εναλλασσόμενη πλαστικότητα, μπορεί να οδηγήσει σε κατάρρευση λόγω ολιγοκυκλικής κόπωσης. Υπάρχει ένας συντελεστής λ_a , πάνω από τον οποίο προκαλείται κατάρρευση μέσω του παραπάνω μηχανισμού.

Ένας άλλος τύπος κατάρρευσης μπορεί να συμβεί, εάν κρίσιμοι συνδυασμοί φόρτισης διαδέχονται ο ένας τον άλλο. Εάν ο συντελεστής λ ξεπερνά μια τιμή λ^* , η πλαστική στροφή σε κάθε κόμβο αυξάνεται με κάθε κύκλο. Εάν το λ , ενώ ξεπερνά το λ^* , είναι μικρότερο μιας κρίσιμης τιμής λ_c , οι επαυξησεις στις στροφές προοδευτικά γίνονται μικρότερες, καθώς ο αριθμός των κύκλων μεγαλώνει. Τελικά, το φαινόμενο φτάνει σε μια κατάσταση, στην οποία, δεν υπάρχουν επιπλέον αλλαγές στις καμπτικές ροπές και σε μεταγενέστερους κύκλους, υπάρχουν μόνο ελαστικές μεταβολές στις ροπές κάμψης του πλαισίου. Όταν κάτι τέτοιο συμβεί, το πλαίσιο θεωρείται ότι έχει σταθεροποιηθεί (shakedown). Ωστόσο, εάν το λ είναι μεγαλύτερο μιας κρίσιμης τιμής λ_c , οι επαυξησεις στις στροφές προοδευτικά γίνονται μεγαλύτερες, καθώς ο αριθμός των κύκλων μεγαλώνει. Έτσι, εάν συμβεί ένας επαρκής αριθμός κύκλων φόρτισης, θα προξενηθούν ανεπίτρεπτα υψηλές πλαστικές στροφές. Το πλαίσιο τότε θεωρείται ότι καταρρέει μέσω επαυξητικής κατάρρευσης. Ο συντελεστής αυτός λ_c , ονομάζεται συντελεστής επαυξητικής κατάρρευσης.

2.1 Θεωρήματα ελαστικής σταθεροποίησης (Shakedown)

Όταν μια κατασκευή υπόκειται σε μεταβαλλόμενη φόρτιση, είναι πιθανό για την πλαστική ροή να συνεχίζει ακαθόριστα, με την κατασκευή να καταρρέει μέσω εναλλασσόμενης πλαστικότητας ή επαυξητικής κατάρρευσης. Τα θεωρήματα ελαστικής σταθεροποίησης (elastic shakedown theorems) αφορούν τις συνθήκες υπό τις οποίες η πλαστική ροή τελικά θα

σταματήσει, ανεξάρτητα από τον ρυθμό επιβολής των φορτίων. Εδώ δίνονται αρχικά κάποιιοι ορισμοί, πριν αναφερθούν τα θεωρήματα.

2.1.1 Ορισμοί

Σε οποιοδήποτε στάδιο κατά τη διάρκεια της φόρτισης, έστω M_j η ροπή κάμψης σε μια συγκεκριμένη διατομή j . Εάν όλα τα φορτία πάψουν πλήρως να ενεργούν, και το πλαίσιο συμπεριφέρθηκε ελαστικά κατά τη διάρκεια αυτής της απομάκρυνσης, θα υπάρξει μια παραμένουσα ροπή κάμψης m_j σε αυτό το τμήμα που ορίζεται από

$$m_j = M_j - M_j \quad (2.1)$$

όπου M_j η καμπτική ροπή εάν το κτίριο συνέχιζε να ανταποκρίνεται ελαστικά.

Κάθε διανομή της παραμένουσας ροπής m_j που ορίζεται με αυτόν τον τρόπο θα είναι στατικά αποδεκτή με μηδενική εξωτερική φόρτιση, αφού τόσο η M_j όσο και η M_j πρέπει να είναι στατικά αποδεκτές με την τρέχουσα φόρτιση.

Όπως και παραπάνω, υποτίθεται ότι ένα πλαίσιο, που υπόκειται σε φορτία $\lambda P_1, \lambda P_2, \dots, \lambda P_r, \dots, \lambda P_n$ και ότι κάθε φορτίο μπορεί να μεταβάλλεται μεταξύ των ορίων ($\lambda P_r^{\max}, \lambda P_r^{\min}$). Η αρχή της υπέρθεσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό των μέγιστων και ελάχιστων πιθανών τιμών των ελαστικών ροπών, όταν λαμβάνονται υπόψιν όλες οι πιθανές μεταβολές των φορτίων μεταξύ των καθορισμένων φορτίων. Αυτές οι τιμές μπορούν να συμβολίζονται σαν λM_j^{\max} και λM_j^{\min} . Ο υπολογισμός γίνεται εύκολα όταν κάθε φορτίο λP_x μπορεί να μεταβάλλεται ανεξάρτητα από τα άλλα. Θα υπάρχει ένα φορτίο που προκαλεί ελαστική σταθεροποίηση λ_s πάνω από το οποίο το πλαίσιο δεν θα καταρρεύσει μέσω σταθεροποίησης, αλλά μέσω εναλλασσόμενης πλαστικότητας ή επαυξητικής κατάρρευσης. Έτσι λοιπόν

Για εναλλασσόμενη πλαστικότητα $\lambda_s = \lambda_a$

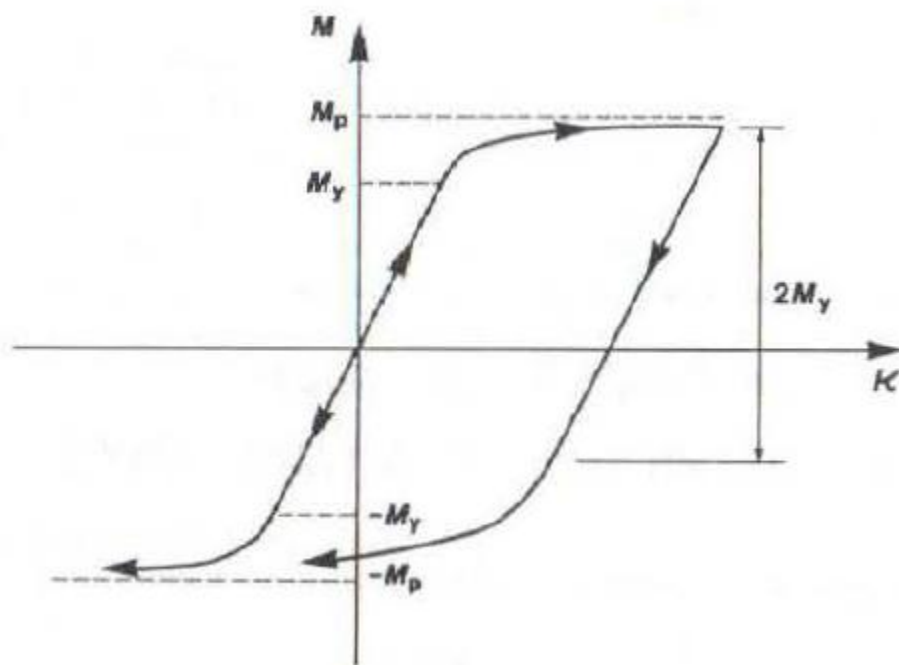
Για επαυξητική κατάρρευση $\lambda_s = \lambda_I$

όπου λ_a και λ_I είναι τα φορτία που προκαλούν εναλλασσόμενη πλαστικότητα και επαυξητική κατάρρευση αντίστοιχα.

Σε κάθε περίπτωση, αυτό περιλαμβάνει την επανάληψη συγκεκριμένων κύκλων φόρτισης με έναν σταθερό φορτικό συντελεστή. Οι τιμές των λ_a , λ_I και λ_s είναι ανεξάρτητες της ακριβούς εφαρμογής των φορτίων στις οποίες θα υποβληθεί η κατασκευή, όπως θα φανεί και από την μορφή των θεωρημάτων σταθεροποίησης.

Οι σχέσεις ροπής κάμψης-καμπυλότητας, οι οποίες συνήθως χρησιμοποιούνται στην ανάλυση σταθεροποίησης φαίνονται στο Σχήμα 2.1. Αυτή η σχέση είναι κατάλληλη για μια δοκό ιδεατού πλαστικού υλικού, με διατομή διπλής συμμετρίας και κάμψη περί ενός των δύο αξόνων συμμετρίας. Οι μέγιστες τιμές M_y και M_{pl} των ροπών διαρροής και πλαστικοποίησης, είναι οι ίδιες για κάμψη σε κάθε έννοια. Επιπλέον, το όριο για την διαρροή της ροπής κάμψης, εντός

του οποίου θα προκύψει εξ ολοκλήρου ελαστική συμπεριφορά παραμένει $2M_y$ ανεξάρτητα από την ιστορία φόρτισης.



Σχήμα 2.1

2.1.2 Θεώρημα κάτω ορίου

Για την σχέση (M, κ) , αναπτύχθηκε το **θεώρημα κάτω ορίου (lower bound theorem)**. Εάν υπάρχει κάποια κατανομή των παραμενουσών καμπτικών ροπών \tilde{m} σε ένα πλαίσιο, στο οποίο ισχύει η ισορροπία, χωρίς την επιβολή εξωτερικής φόρτισης και που ικανοποιεί σε κάθε διατομή τις παρακάτω συνθήκες

$$\tilde{m}_j + \lambda M_j^{\max} \leq (M_p)_j \quad (2.2)$$

$$\tilde{m}_j + \lambda M_j^{\min} \geq (M_p)_j \quad (2.3)$$

$$\lambda (M_j^{\max} - M_j^{\min}) \leq 2(M_y)_j \quad (2.4)$$

τότε, η τιμή του λ θα είναι μικρότερη ή ίση με τον συντελεστή σταθεροποίησης λ_s .

Οι παραπάνω συνθήκες αναφέρονται σαν στατικές συνθήκες. Είναι εμφανές ότι εάν δεν ικανοποιούνται, δεν μπορεί να συμβεί σταθεροποίηση και άρα είναι απαραίτητες. Το θεώρημα δηλώνει ότι είναι επαρκείς. Ένα πλαίσιο φαίνεται να προσαρμόζεται σε μεταβαλλόμενη ανακυκλιζόμενη φόρτιση, με τον πλέον αποτελεσματικό τρόπο. Η πλαστική ροή συνεχίζει ακαθόριστα, όταν το λ αυξάνει ξεπερνώντας το λ_s , πάνω από το οποίο είναι αδύνατον να βρεθεί μια σειρά παραμενουσών ροπών, οι οποίες ικανοποιούν τις απαραίτητες συνθήκες για την αποφυγή πλαστικής ροής. Παρόμοια, υπό αναλογικό φορτίο, ένα πλαίσιο καταρρέει μέσω πλαστικής κατάρρευσης, όταν ο φορτικός συντελεστής λ φτάνει σε μια τιμή λ_c , πάνω από την οποία δεν υπάρχει ασφαλής και στατικά αποδεκτή κατανομή καμπτικών ροπών.

Εάν το λ υποτεθεί ότι αυξάνεται διαρκώς από το μηδέν, προοδευτικά θα είναι δυσκολότερη η ικανοποίηση των παραπάνω ανισοτήτων. Μια πιθανότητα είναι η ανισότητα (2.4) να μην μπορεί να ικανοποιηθεί σε μια συγκεκριμένη διατομή εάν το λ ξεπερνά το λ_s , αν και οι υπόλοιπες συνθήκες θα ικανοποιούνται. Σε αυτή την περίπτωση η κατάρρευση μπορεί να προέρχεται από εναλλασσόμενη πλαστικότητα, με το $\lambda_s = \lambda_a$. Η άλλη πιθανότητα είναι να μην ικανοποιούνται οι συνθήκες (2.2), (2.3) ταυτόχρονα, αν και η συνθήκη (2.2) να ικανοποιείται. Η κατάρρευση τότε θα προέρχεται από επαυξητική κατάρρευση, με $\lambda_s = \lambda_I$.

Μια ανισότητα μπορεί να γραφεί για κάθε διατομή από τις (2.2) και (2.3), όπως παρακάτω

$$-(M_p)_j - \lambda M_j^{\min} \leq \tilde{m}_j \leq (M_p)_j - \lambda M_j^{\max}$$

$$\lambda(M_j^{\max} - M_j^{\min}) \leq 2(M_p)_j \quad (2.5)$$

Αυτή συγκρινόμενη με την ανισότητα (2.4), φαίνεται να είναι λιγότερο περιοριστική, αλλά γίνεται όμοια με αυτήν, για την περίπτωση δοκού με συντελεστή σχήματος ν ίσο με 1, έτσι ώστε $M_y = M_p$. Σε αυτή την ειδική περίπτωση η ανισότητα (2.4) μπορεί να αφαιρεθεί από τις συνθήκες για ελαστική σταθεροποίηση, αφού περιλαμβάνεται στις (2.2) και (2.3).

Το θεώρημα *shakedown* διατυπώθηκε πρώτη φορά από τον **Bleich** (35), αλλά η απόδειξή του, κάλυπτε μόνο πλαίσια. Μια γενική απόδειξη για υποθετικά αρθρωτά δικτυώματα, υποθέτοντας ιδεατή πλαστική συμπεριφορά, τόσο σε εφελκυσμό, όσο και σε θλίψη, δόθηκε από τον **Melan** (36), και απλοποιήθηκε αργότερα από τους **Symonds και Prager** (37). Η απόδειξη του **Melan** υιοθετήθηκε από τον **Neal** (1950,1951) σε πλαίσια.

Όπως υποδείχθηκε αργότερα από τον **Koiter** (38), οι τρεις αρχικές συνθήκες είναι κατάλληλες, μόνο όταν τα μέλη της κατασκευής υπακούουν στις συνθήκες που οδηγούν στη σχέση ροπής-καμπυλότητας που παρουσιάστηκε νωρίτερα στο Σχήμα 2.1. Εάν αυτές οι υποθέσεις δεν ισχύουν, οι συνθήκες για σταθεροποίηση πρέπει να διατυπωθούν σωστότερα σε όρους τάσεων,

παρά σε όρους ροπών. Παρόλα αυτά οι συνθήκες καλύπτουν την συνήθη περίπτωση μελών με δύο άξονες συμμετρίας και ίση τάση διαρροής σε εφελκυσμό και θλίψη.

2.1.3 Θεώρημα άνω ορίου

Το θεώρημα άνω ορίου αναφέρεται σε τιμές του λ , που έχουν προκύψει από μηχανισμούς εναλλασσόμενης πλαστικότητας ή επαυξητικής κατάρρευσης. Εναλλασσόμενη πλαστικότητα θα αναπτυχθεί αρχικά στην διατομή του πλαισίου, στην οποία η διαφορά ($M_k^{\max} - M_k^{\min}$) είναι μεγαλύτερη. Εάν η διατομή συμβολίζεται με k , ο φορτικός συντελεστής, με τον οποίο ξεκινά η εναλλασσόμενη πλαστικότητα δίνεται απο

$$\lambda_a (M_k^{\max} - M_k^{\min}) = 2 (M_y)_k \quad (2.6)$$

Η τιμή λ_a , που υπολογίζεται με αυτό τον τρόπο είναι ουσιαστικά η τιμή του λ , που αντιστοιχεί σε ένα μηχανισμό εναλλασσόμενης πλαστικότητας, αποτελούμενο από μια πλαστική άρθρωση στην διατομή k .

Εάν υποθεθεί ένας μηχανισμός επαυξητικής κατάρρευσης, μπορεί να υπολογιστεί η αντίστοιχη τιμή του λ_I του φορτικού συντελεστή λ . Έστω ότι θ_j συμβολίζει την στροφή στην πλαστική άρθρωση της διατομής j , κατά τη διάρκεια μικρής κίνησης του υποτιθέμενου μηχανισμού. Θετικές και αρνητικές τιμές του θ_j αναγνωρίζονται από τους εκθέτες, θ_j^+ και θ_j^- . Για τον παρόν σκοπό ο υποτιθέμενος μηχανισμός αντιμετωπίζεται σαν ο πραγματικός μηχανισμός επαυξητικής κατάρρευσης, με φορτικό συντελεστή επαυξητικής κατάρρευσης λ_I . Εάν το m_j συμβολίζει την παραμένουσα καμπτική ροπή στο πλαίσιο στην διατομή j , όταν αυτό σταθεροποιείται, η τιμή αυτού μπορεί να υπολογιστεί με χρήση μίας από τις παρακάτω δύο εξισώσεις

$$m_j + \lambda_I M_j^{\max} = (M_p)_j \text{ για κάθε } \theta_j^+ \quad (2.7)$$

$$m_j + \lambda_I M_j^{\min} = (M_p)_j \text{ για κάθε } \theta_j^- \quad (2.8)$$

Αφού το m_j είναι στατικά αποδεκτό με μηδενική εξωτερική φόρτιση, προκύπτει από την αρχή των δυνατών έργων ότι

$$\sum m_j \theta_j = 0 \quad (2.9)$$

όπου το άθροισμα καλύπτει όλες τις θέσεις των πλαστικών αρθρώσεων. Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω εξισώσεις έχω ότι

$$\begin{aligned} \Sigma[(Mp)_j - \lambda_l M_j^{max}] \theta_j^+ + \Sigma[-(Mp)_j - \lambda_l M_j^{min}] \theta_j^- &= 0 \\ \lambda_l \Sigma[M_j^{max} \theta_j^+ + M_j^{min} \theta_j^-] &= \Sigma((Mp)_j) |\theta_j| \end{aligned} \quad (2.10)$$

Η παραπάνω εξίσωση επιτρέπει τον υπολογισμό της τιμής του λ_l που αντιστοιχεί σε κάθε μηχανισμό επαυξητικής κατάρρευσης. Ακολουθεί η διατύπωση του θεωρήματος άνω ορίου.

Θεώρημα άνω ορίου. Η τιμή του λ που αντιστοιχεί σε κάθε υποτιθέμενο μηχανισμό επαυξητικής κατάρρευσης ή εναλλασσόμενης πλαστικότητας πρέπει να είναι μεγαλύτερη ή ίση του συντελεστή σταθεροποίησης λ_s . Κάθε τιμή του λ υπολογισμένη από έναν υποτιθέμενο μηχανισμό θα θεωρείται ότι ικανοποιεί τις κινηματικές συνθήκες του θεωρήματος άνω ορίου.

Ένα θεώρημα άνω ορίου αναπτύχθηκε από τον **Koiter** [(39), (40)]. Αυτό το θεώρημα επικεντρώνεται σε υποθετικούς κύκλους πλαστικής παραμόρφωσης. Παρόλα αυτά, δεν αποτελεί μια βάση για μια απλή μέθοδο υπολογισμού του άνω ορίου του λ_s , όπου το θεώρημα άνω ορίου που αναφέρθηκε είναι κατάλληλο για αυτό τον σκοπό. Οι σχέσεις μεταξύ των δύο αυτών θεωρημάτων επεξηγήθηκαν από τον **Smith** (41).

2.1.4 Παρατηρήσεις επι των θεωρημάτων

Το θεώρημα ελαστικής σταθεροποίησης ισχύει επίσης σε περιπτώσεις, κατά τις οποίες εμφανίζονται θερμικές τάσεις, όπως αποδείχθηκε από τον **Prager** (42). Το μόνο που είναι αναγκαίο να γίνει, είναι να επεκταθεί ο ορισμός του M , για να καλυφθούν και οι ροπές που εμφανίζονται λόγω θερμοκρασιακών μεταβολών, υποθέτοντας ελαστική συμπεριφορά.

Η παρουσία των αρχικών παραμενουσών ροπών, σε πλαίσιο λόγω αρχικών ατελειών, η μέθοδος κατασκευής, ή η κίνηση των στηρίξεων δεν έχει επιρροή στις συνθήκες για κατάρρευση μέσω shakedown και έτσι στην τιμή του λ_s . Παρόλα αυτά η κατανομή της ελαστικής ροπής κάμψης εξαρτάται από τις συνδέσεις και τις στηρίξεις και έτσι το λ_s θα εξαρτάται επίσης από αυτούς τους παράγοντες. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με την κατάσταση σε μια ανάλυση πλαστικής κατάρρευσης, αφού η τιμή του πλαστικού φορτικού συντελεστή λ_c είναι ανεξάρτητη από τα παραπάνω.

Το θεώρημα σταθεροποίησης προσδιορίζει συνθήκες, οι οποίες εάν ικανοποιούνται, διασφαλίζουν ότι η πλαστική ροπή τελικά θα μηδενιστεί. Δεν επιτρέπει να τίθενται άνω όρια στις μετακινήσεις, οι οποίες θα αναπτυχθούν σε ένα πλαίσιο που υπόκειται σε ανακυκλιζόμενη

φόρτιση όταν το λ δεν ξεπερνά το λ_s . Έχουν γίνει αρκετές προσπάθειες να εφαρμοστούν τέτοια όρια, για παράδειγμα από τον **Capurso** (43), αλλά κανένα από αυτά δεν ήταν τελείως πετυχημένο.

Ένα θεώρημα μοναδικότητας για την τιμή λ_s μπορεί να αναπτυχθεί, συνδυάζοντας τα θεωρήματα άνω και κάτω ορίου. Για λόγους πληρότητας αναφέρεται εδώ :

Θεώρημα Μοναδικότητας : Εάν πληρούνται οι στατικές συνθήκες του θεωρήματος κάτω ορίου και οι κινηματικές συνθήκες του άνω ορίου, τότε το προκύπτον λ είναι ίσο με τον συντελεστή λ_s .

2.2 Αποδείξεις Θεωρημάτων

2.2.1 Απόδειξη θεωρήματος Ελαστικής Σταθεροποίησης

Εάν υπάρχει μια κατανομή των παραμενουσών καμπτικών ροπών \tilde{m} σε ένα πλαίσιο, η οποία είναι στατικά αποδεκτή με μηδενική εξωτερική φόρτιση και η οποία επίσης ικανοποιεί σε κάθε διατομή j τις συνθήκες

$$\tilde{m}_j + \lambda M_j^{\max} \leq (M_p)_j$$

$$\tilde{m}_j + \lambda M_j^{\min} \geq (M_p)_j$$

$$\lambda (M_j^{\max} - M_j^{\min}) \leq 2(M_y)_j$$

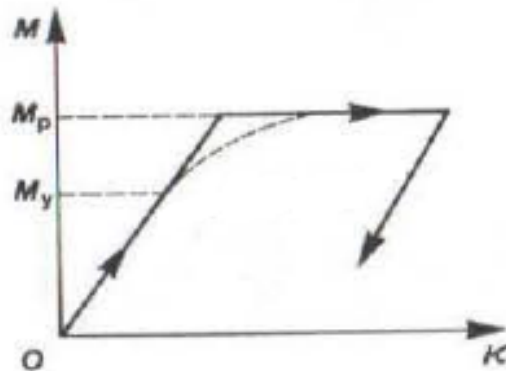
η τιμή του λ θα είναι μικρότερη ή ίση με τον φορτικό συντελεστή σταθεροποίησης λ_s .

Αυτό το θεώρημα θα αποδειχθεί για την περίπτωση, στην οποία όλα τα μέλη έχουν συντελεστή σχήματος ίσο με 1, έτσι ώστε $M_y = M_p$. Σε αυτή την περίπτωση οι ανισότητες (2.4) μπορεί να αγνοηθεί, αφού περιέχεται στις (2.2) και (2.3). Αυτή η παραδοχή συνεπάγεται ότι η σχέση ροπής-καμπυλότητας (M - κ) για κάθε μέλος μπορεί να εξιδανικευτεί στο παρακάτω Σχήμα 2., για την οποία

$$M = M_p, \delta\theta > 0$$

$$M = -M_p, \delta\theta < 0$$

$$|M| < M_p, \delta M = EI\delta\kappa$$



Σχήμα 2.2 Εξιδανικευμένη σχέση Ροπής-Καμπυλότητας (Μ-κ)

Το θεώρημα αυτό αποδεικνύεται, θεωρώντας την θετική ποσότητα U , η οποία ορίζεται από

$$U = \int \frac{(m_j - \tilde{m}_j)^2}{2(EI)_j} ds_j \quad (2.11)$$

Σε αυτή την εξίσωση το m_j αναπαριστά τις πραγματικές εναπομείνουσες ροπές στην διατομή j , κατά τη διάρκεια κάθε σταδίου φόρτισης και το \tilde{m}_j είναι η κατανομή των καμπτικών ροπών, που ικανοποιούν τις συνθήκες (2.2) και (2.3). $(EI)_j$ και ds_j είναι η δυσκαμψία και το μήκος του μέλους αντίστοιχα στη διατομή j και η ολοκλήρωση γίνεται για όλα τα μέλη της κατασκευής. Υποθεθεί τώρα ότι κατά τη διάρκεια ενός μικρού χρονικού διαστήματος, υπάρχει μια μικρή μεταβολή στα φορτία, που θα αναφέρεται με το πρόθεμα δ . Από την παραπάνω εξίσωση θα έχουμε

$$\delta U = \int (m_j - \tilde{m}_j) \frac{\delta m_j}{(EI)_j} ds_j \quad (2.12)$$

Θα δειχθεί τώρα ότι η δU είναι πάντα αρνητική.

Όπως δείχθηκε νωρίτερα, οι εναπομείνουσες ροπές ορίζονται για τον σκοπό της ανάλυσης σταθεροποίησης από την εξίσωση

$$m_j = M_j - M_j$$

το οποίο σε βηματική μορφή γράφεται σαν

$$\delta m_j = \delta M_j - \delta M_j \quad (2.13)$$

Αν υπάρχουν αλλαγές στην στροφή της πλαστικής άρθρωσης $\delta\theta_k$ σε διατομή που συμβολίζεται με κ , αυτές θα είναι συμβατές με τις πραγματικές αλλαγές στην καμπυλότητα $\delta M_j / (EI)_j$. Οι αλλαγές στην καμπυλότητα $\delta M_j / (EI)_j$, οι οποίες θα έχουν συμβεί εάν η κατασκευή αποκριθεί ελαστικά στις ίδιες μικρές μεταβολές του φορτίου, πρέπει να ικανοποιούν τις απαιτήσεις της συμβιβαστότητας με μηδενική αλλαγή στις στροφές των πλαστικών αρθρώσεων. Από αυτό προκύπτει ότι η μεταβολή στην καμπυλότητα $(\delta M_j - \delta M_j) / (EI)_j$, η οποία από την παραπάνω εξίσωση είναι ίση με $\delta M_j / (EI)_j$, πρέπει να είναι συμβατή με την στροφή στην πλαστική άρθρωση $\delta\theta_k$. Χρησιμοποιώντας αυτές τις συμβατές μεταβολές της καμπυλότητας και στροφής στην άρθρωση στην εξίσωση των δυνατών έργων, μαζί με την κατανομή των παραμενουσών ροπών $(m_j - \tilde{m}_j)$, οι οποίες πρέπει να είναι στατικά αποδεκτές με μηδενική εξωτερική φόρτιση, έχει βρεθεί ότι

$$\int (m_j - \tilde{m}_j) \frac{\delta m_j}{(EI)_j} d_{sj} + \sum (m_k - \tilde{m}_k) \delta\theta_k = 0 \quad (2.14)$$

Από την εξ.2.12 προκύπτει ότι

$$\delta U = - \sum (m_k - \tilde{m}_k) \delta\theta_k \quad (2.15)$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι σε μια συγκεκριμένη διατομή κ ισχύει,

$$(m_k - \tilde{m}_k) < 0$$

Χρησιμοποιώντας την εξ.2.2 έχω

$$m_k < \tilde{m}_k < (M_p)_k - \lambda M_k^{\max}$$

$$m_k + \lambda M_k^{\max} < (M_p)_k$$

Αυτό το αποτέλεσμα δείχνει ότι η πλαστική άρθρωση, η οποία υπόκειται στροφή σε αυτή την διατομή δεν μπορεί να είναι θετική, ώστε $\delta\theta_k < 0$. Από την εξίσωση προκύπτει ότι

$$(m_k - \tilde{m}_k) \delta\theta_k > 0 \quad (2.16)$$

Με παρόμοιο τρόπο μπορεί να δειχθεί ότι $(m_k - \tilde{m}_k) > 0$, και άρα ο όρος $\delta\theta_k$ πρέπει να είναι θετικός, ώστε να ισχύει η παραπάνω εξίσωση. Απο εκεί μπορεί να εξαχθεί ότι

$$(m_k - \tilde{m}_k) \delta\theta_k \geq 0 \quad (2.17)$$

με την ισότητα να ισχύει για διατομές όπου $m_k = \tilde{m}_k$. Συνδυάζοντας αυτές τις εξισώσεις προκύπτει ότι

$$\delta U \leq 0 \quad (2.18)$$

Είναι εμφανές από την εξ.2.15 ότι το δU θα είναι μηδέν, εάν δεν συμβεί στροφή της πλαστικής άρθρωσης, κατά το διάστημα που εξετάζεται και το $\delta\theta_k$ θα είναι επίσης μηδέν. Έτσι το U μειώνεται, όταν κάποια πλαστική άρθρωση στρίβει και παραμένει σταθερή όταν η συμπεριφορά είναι τελείως ελαστική. Αφού το U είναι θετικά ορισμένο, πρέπει είτε τελικά να γίνει μηδέν, στην οποία περίπτωση η κατανομή των m_j και \tilde{m}_j θα ήταν πανομοιότυπη, είτε να λαμβάνει μια σταθερή τιμή και στη συνέχεια να παραμένει αμετάβλητη. Σε κάθε περίπτωση το πλαίσιο θα έχει σταθεροποιηθεί.

2.2.2 Απόδειξη θεωρήματος Άνω Ορίου

Σε αυτό κάθε τιμή του φορτικού συντελεστή λ που θα οδηγεί σε εναλλασσόμενη πλαστικότητα ή επαυξητική κατάρρευση, πρέπει να είναι μεγαλύτερη ή ίση του συντελεστή shakedown. Το πρώτο μέρος του θεωρήματος, στο οποίο $\lambda_a' \geq \lambda_s$, είναι προφανές. Σταθεροποίηση δεν μπορεί να συμβεί εάν το διάστημα των καμπτικών ροπών σε κάθε διατομή, $\lambda (M^{\max} - M^{\min})$ ξεπερνά την διαθέσιμη ροπή $2M_p$. Έτσι έχουμε

$$\lambda_s (M^{\max} - M^{\min}) \leq 2M_p \leq \lambda_a' (M^{\max} - M^{\min})$$

έτσι ώστε

$$\lambda_s \leq \lambda_a'$$

Ο φορτικός συντελεστής λ_1 που αναφέρεται σε μηχανισμό επαυξητικής κατάρρευσης υπολογίζεται από την παρακάτω εξίσωση

$$\lambda_1 \sum [M_k^{max} \theta_k^+ + M_k^{min} \theta_k^-] = \sum (M_p)_k |\theta_k| \quad (2.19)$$

Σε αυτή την εξίσωση οι στροφές των πλαστικών αρθρώσεων συμβολίζονται με θ_k και στο αριστερό μέρος οι εκθέτες χρησιμοποιούνται για να υποδειχθεί το πρόσημο κάθε στροφής. Απο το θεώρημα shakedown η συνθήκη δίνει

$$\lambda_s M_k^{max} \leq (M_p)_k - \tilde{m}_k$$

Σε κάθε θέση πλαστικής άρθρωσης όπου η στροφή είναι θετική, συνεπάγεται ότι

$$\lambda_s M_k^{max} \theta_k^+ \leq (M_p)_k \theta_k^+ - \tilde{m}_k \theta_k^+ \quad (2.20)$$

Παρόμοια, οι συνθήκες του θεωρήματος σταθεροποίησης συνεπάγονται ότι

$$\lambda_s M_k^{min} \geq - (M_p)_k - \tilde{m}_k$$

και έτσι σε κάθε θέση πλαστικής άρθρωσης, όπου η στροφή είναι αρνητική, θα έχω

$$\lambda_s M_k^{min} \theta_k^- \leq (M_p)_k \theta_k^- - \tilde{m}_k \theta_k^- \quad (2.21)$$

Χρησιμοποιώντας τις ανισότητες και αθροίζοντας για κάθε πλαστική άρθρωση στον μηχανισμό, βρίσκουμε ότι

$$\lambda_s \sum [M_k^{max} \theta_k^+ + M_k^{min} \theta_k^-] \leq \sum (M_p)_k |\theta_k| - \sum \tilde{m}_k \theta_k \quad (2.22)$$

Αφού η εναπομείνασα καμπτική ροπή \tilde{m}_k είναι στατικά αποδεκτή με μηδενικό εξωτερικό φορτίο, συνεπάγεται από την Αρχή των Δυνατών Έργων ότι

$$\sum \tilde{m}_k \theta_k = 0 \quad (2.23)$$

και έτσι

$$\lambda_s \sum [M_k^{max} \theta_k^+ + M_k^{min} \theta_k^-] \leq \sum (M_p)_k |\theta_k| \quad (2.24)$$

συγκρίνοντας τα αποτελέσματα με την εξ.10 προκύπτει αμέσως ότι

$$\lambda_s \leq \lambda_I'$$

που καθορίζει το θεώρημα.

3. Η μέθοδος RSDM-S

3.1 Ανάπτυξη των παραμενουσών εντάσεων

Αφού η συνολική ροπή, ασυμπτωτικά θα γίνει κυκλική και η ελαστική ροπή που ισορροπεί την κυκλική φόρτιση είναι επίσης κυκλική, η παραμένουσα ροπή θα γίνει επίσης κυκλική. Έτσι μπορεί να αναλυθεί σε σειρές Fourier. Έτσι λοιπόν έχουμε

$$Q_{g,r}(\tau) = \frac{a_{0,ij}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,ij} \cos(2k\pi\tau) + b_{k,ij} \sin(2k\pi\tau) \quad (3.1)$$

Και έτσι για να υπολογιστεί η κατανομή των παραμενουσών ροπών, πρέπει να υπολογιστούν οι συντελεστές των σειρών Fourier. Εάν παραγωγίσουμε την παραπάνω σχέση έχουμε,

$$\dot{Q}_{g,r}(\tau) = 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} \{(-ka_{k,ij}) \sin(2k\pi\tau) + kb_{k,ij} \cos(2k\pi\tau)\} \quad (3.2)$$

αναπτύσσοντας την παραπάνω εξίσωση έχουμε

$$\dot{Q}_{g,r}(\tau) = 2\pi \{-a_{1,ij} \sin(2\pi\tau) + (-2a_{2,ij}) \sin(4\pi\tau) + \dots + (-ka_{k,ij}) \sin(2k\pi\tau) + b_{1,ij} \cos(2\pi\tau) + 2b_{2,ij} \cos(4\pi\tau) + \dots + kb_{k,ij} \cos(2k\pi\tau)\} \quad (3.3)$$

Εάν πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση αυτή με $\sin(2k\pi\tau)$ και ύστερα ολοκληρώσουμε σε ένα κύκλο, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες ορθογωνιότητας των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, προκύπτει πώς ένας χαρακτηριστικός συντελεστής της σειράς των συνημιτόνων είναι ο παρακάτω

$$a_{k,ij} = -\frac{1}{\kappa\pi} \int_0^1 \{\dot{Q}_{g,r}(\tau) \sin(2k\pi\tau)\} d\tau \quad (3.4)$$

Εάν αντίστοιχα πολλαπλασιάσουμε την εξ.3.3 με $\cos(2k\pi\tau)$ και εκτελέσουμε τους ίδιους υπολογισμούς προκύπτει ένας χαρακτηριστικός συντελεστής για τη σειρά των ημιτόνων

$$b_{k,ij} = \frac{1}{\kappa\pi} \int_0^1 \{\dot{Q}_{g,r}(\tau) \cos(2k\pi\tau)\} d\tau \quad (3.5)$$

Επίσης, αν ολοκληρώσουμε την εξ.3.2 σε ένα κύκλο, παίρνουμε την ακόλουθη έκφραση

$$\int_0^1 \dot{Q}_{g,r}(\tau) = Q_{g,r}(1) - Q_{g,r}(0) = \left[\frac{a_{0,ij}}{2}(1) + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,ij}(1) \right] - \left[\frac{a_{0,ij}}{2}(0) + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,ij}(0) \right] \quad (3.6)$$

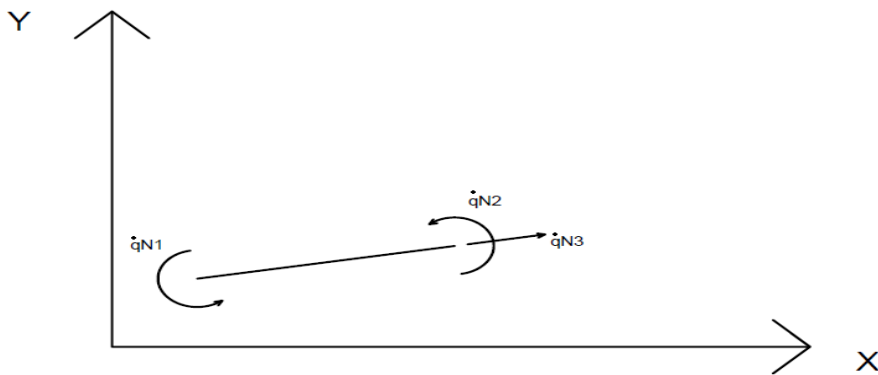
Με όλους τους συντελεστές τώρα γνωστούς στην αρχή του κύκλου και τους συντελεστές των συνημιτόνων επίσης γνωστούς στο τέλος του κύκλου, οι σταθεροί όροι στο τέλος του κύκλου μπορούν να υπολογιστούν χρησιμοποιώντας την εξ.3.6

$$\frac{a_{0,ij}}{2}(1) = \left[\frac{a_{0,ij}}{2}(0) + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,ij}(0) \right] - \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,ij}(1) + \int_0^1 \dot{Q}_{g,r}(\tau) \quad (3.7)$$

Οι όροι αυτοί βρίσκονται ήδη στη μορφή μη-γραμμικών εξισώσεων $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$, όπου το \mathbf{x} είναι το διάνυσμα των αγνώστων συντελεστών Fourier. Το σύστημα αυτό μπορεί να λυθεί επαναληπτικά. Σε κάθε επανάληψη υπολογίζεται η παράγωγος της παραμένουσας ροπής σε κάθε χρονικό βήμα. Αυτό επιτυγχάνεται, ικανοποιώντας την ισορροπία και το συμβιβαστό των μετακινήσεων σε αυτά τα σημεία. Για τις κατασκευές η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων μπορεί να χρησιμοποιηθεί για αυτόν τον σκοπό.

3.2 Υπολογισμός του ρυθμού μεταβολής των παραμενουσών εντάσεων

Ο ρυθμός μεταβολής της αξονικής μετακίνησης και των δύο στροφών μπορεί να δοθεί μέσω του παρακάτω διανύσματος



Σχήμα 3.1

$$\dot{q}_N = \begin{Bmatrix} \dot{q}_{N1} \\ \dot{q}_{N2} \\ \dot{q}_{N3} \end{Bmatrix}$$

όπου

\dot{q}_{N1} : ο ρυθμός μεταβολής της στροφής στο άκρο 1

\dot{q}_{N2} : ο ρυθμός μεταβολής της στροφής στο άκρο 2

\dot{q}_{N3} : ο ρυθμός μεταβολής της αξονικής μετακίνησης στο μέλος

κάθε ένα από τα παραπάνω μπορεί να αναλυθεί όπως παρακάτω

$$\dot{q}_N = \dot{q}_N^{el} + \dot{q}_{N,r}^{el} + \dot{q}_N^{pl} \quad (3.8)$$

όπου

\dot{q}_N^{el} : ο ρυθμός μεταβολής των ελαστικών μετακινήσεων

$\dot{q}_{N,r}^{el}$: ο ρυθμός μεταβολής των ελαστικών παραμενουσών μετακινήσεων, που απαιτείται για να υπάρχει ισορροπία

\dot{q}_N^{pl} : ο ρυθμός μεταβολής των πλαστικών μετακινήσεων

και τα αντίστοιχα εντατικά μεγέθη (ροπές και αξονική) θα είναι

$$\dot{Q}_N^{el} = k_N \dot{q}_N^{el} \quad (3.9)$$

$$\dot{Q}_{N,r}^{el} = k_N \dot{q}_{N,r}^{el} \Rightarrow \dot{Q}_{N,r}^{el} = k_N (\dot{q}_N - \dot{q}_N^{el} - \dot{q}_N^{pl}) \quad (3.10)$$

ο ρυθμός μεταβολής των μετακινήσεων στο φυσικό σύστημα έχει προκύψει από τον πολλαπλασιασμό του μητρώου μετασχηματισμού D με τον ρυθμό μεταβολής των μετακινήσεων στο τοπικό σύστημα. Δηλαδή,

$$\dot{q}_N = \begin{bmatrix} 0 & 1/l & -1 & 0 & -1/l & 0 \\ 0 & 1/l & 0 & 0 & -1/l & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_{g1} \\ \dot{q}_{g2} \\ \dot{q}_{g3} \\ \dot{q}_{g4} \\ \dot{q}_{g5} \\ \dot{q}_{g6} \end{Bmatrix} = D \dot{q}_g$$

ο ρυθμός μεταβολής της ελαστικής παραμένουσας παραμόρφωσης είναι

$$\dot{q}_{N,r}^{el} = \begin{Bmatrix} \dot{q}_{N1,r}^{el} \\ \dot{q}_{N2,r}^{el} \\ \dot{q}_{N3,r}^{el} \end{Bmatrix}$$

ενώ ο ρυθμός μεταβολής της πλαστικής παραμένουσας παραμόρφωσης είναι

$$\dot{q}_N^{pl} = \begin{Bmatrix} \dot{q}_{N1}^{pl} \\ \dot{q}_{N2}^{pl} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ο ρυθμός μεταβολής των παραμενουσών εντατικών μεγεθών στο τοπικό σύστημα είναι

$$\dot{Q}_{g,r} = D^T \dot{Q}_{N,r} = D^T k_N (\dot{q}_N - \dot{q}_N^{el} - \dot{q}_N^{pl}) =$$

$$D^T k_N \dot{q}_N - D^T k_N \dot{q}_N^{el} - D^T k_N \dot{q}_N^{pl} = \bar{k}_g \dot{q}_g - \bar{k}_g \dot{q}_g^{el} - D^T k_N \dot{q}_N^{pl} \quad (3.11)$$

Ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής των παραμενουσών εντατικών μεγεθών στο καθολικό σύστημα είναι

$$\dot{Q}_{g,r} = L^T \dot{Q}_{g,r} = L^T (\bar{k}_g L \dot{q}_g - \bar{k}_g L \dot{q}_g^{el} - D^T k_N \dot{q}_N^{pl}) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\dot{Q}_{g,r} &= (\mathbf{L}^T \bar{k}_g \mathbf{L}) \dot{q}_g - (\mathbf{L}^T \bar{k}_g \mathbf{L}) \dot{q}_g^{el} - \mathbf{L}^T \mathbf{D}^T k_N \dot{q}_N^{pl} \Rightarrow \\ \dot{Q}_{g,r} &= k_g \dot{q}_g - k_g \dot{q}_g^{el} - \mathbf{L}^T \mathbf{D}^T k_N \dot{q}_N^{pl}\end{aligned}\quad (3.12)$$

Ο ρυθμός μεταβολής των παραμενουσών μετακινήσεων στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων πρέπει να είναι μηδέν. Τελικά, προκύπτει

$$\begin{aligned}\mathbf{K} \dot{u} - \mathbf{A}^T k_g \mathbf{A} \dot{u}^{el} - \mathbf{A}^T \mathbf{L}^T \mathbf{D}^T k_N \dot{q}_N^{pl} &= 0 \Rightarrow \\ \dot{u} &= \mathbf{K}^{-1} \{ \dot{R} + \mathbf{A}^T \mathbf{L}^T \mathbf{D}^T k_N \dot{q}_N^{pl} \}\end{aligned}\quad (3.13)$$

Για τον δεύτερο όρο της παρένθεσης έχω

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^T \mathbf{L}^T \mathbf{D}^T k_N \dot{q}_N^{pl} &= \mathbf{A}^T \mathbf{L}^T \mathbf{D}^T \begin{Bmatrix} m_1^{res} \\ m_2^{res} \\ 0 \end{Bmatrix} = \mathbf{A}^T \mathbf{L}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1/l & 1/l & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/l & -1/l & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_1^{res} \\ m_2^{res} \\ 0 \end{Bmatrix} = \\ &= \mathbf{A}^T \mathbf{L}^T \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{m_1^{res} + m_2^{res}}{l} \\ m_1^{res} \\ 0 \\ -\frac{m_1^{res} + m_2^{res}}{l} \\ m_2^{res} \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

3.3 Υπολογιστική διαδικασία

Βασιζόμενοι στην παραπάνω θεωρητική διαδικασία, μπορούμε να γράψουμε μια υπολογιστική διαδικασία, την οποία καλούμε Residual Stress Decomposition Method (RSDM) ((33), (34)).

1. Αρχικά λύνουμε για την εξωτερική φόρτιση, θεωρώντας ελαστική συμπεριφορά και παίρνουμε για κάθε σημείο του κύκλου τα ελαστικά εντατικά μεγέθη σε κάθε κόμβο.

2. Πολλαπλασιάζοντας με το μητρώο μετασχηματισμού L , μετατρέπουμε τα παραπάνω εντατικά μεγέθη στο τοπικό σύστημα. Ύστερα, από αυτά επιλέγω μόνο τις ροπές στους κόμβους και την αξονική δύναμη στο άκρο του στοιχείου.

3. Ανάλογα με τις ροπές βρίσκω αρχικό συντελεστή γ_{sh} , σαν $\gamma_{sh} = \max \frac{M_p^i}{|M_{el}^i|}$. Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι όταν οι ελαστικές ροπές είναι μικρότερες του 10^{-3} και για να αποφευχθεί η ύπαρξη υπερβολικά μεγάλων τιμών του γ_{sh} , αυτές τίθενται ίσες με μηδέν και δεν συμπεριλαμβάνονται στον υπολογισμό του γ_{sh} .

4. Αφού έχει δοθεί ο αριθμός των σημείων του κύκλου φόρτισης, ο οποίος συμπίπτει με τον αριθμό σημείων ολοκλήρωσης, καλείται κατάλληλη υπορουτίνα, η οποία δίνει τα σημεία του κύκλου φόρτισης και τα αντίστοιχα βάρη ολοκλήρωσης για αυτά.

5. Με τις τιμές της συνάρτησης φόρτισης και της παραγώγου της και για κάθε χρονικό σημείο, πολλαπλασιάζω τις τιμές των ελαστικών ροπών και παίρνω το $M^{(k)}(\tau) = \gamma^{(\mu)} (\alpha(\tau) M^{el}) + Q_{g,r}^{(k)}(\tau)$ και το $\dot{M}^{(k)}(\tau) = \gamma^{(\mu)} (\dot{\alpha}(\tau) M^{el})$, που είναι οι τιμές των ροπών σε κάθε χρονικό σημείο και σε κάθε άκρο στοιχείου.

6. Στη συνέχεια και με χρήση κατάλληλης υπορουτίνας γίνεται ο παρακάτω έλεγχος

$$|M_i^k(\tau)| > M_{pl}^k$$

$$|M_j^k(\tau)| > M_{pl}^k$$

και προκύπτουν οι δύο εγκάρσιες δυνάμεις στο μέλος για να πληρείται η ισορροπία

$$V_i = \frac{M_i^k(\tau) + M_j^k(\tau)}{l} \text{ και}$$

$$V_j = - \frac{M_i^k(\tau) + M_j^k(\tau)}{l}$$

Εδώ σημειώνεται ότι οι παραπάνω δυνάμεις βρίσκονται στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων και μέσω πολλαπλασιασμών με κατάλληλα μητρώα αυτές μετατρέπονται στο φυσικό σύστημα (οι εγκάρσιες απαλείφονται).

7. Παράλληλα για κάθε χρονικό βήμα αθροίζω τις παραπάνω προκύπτουσες δυνάμεις και ροπές σε κάθε κόμβο και έτσι προκύπτει το διάνυσμα φόρτισης που αντιστοιχεί πρακτικά

στο $A^T L^T D^T k_N \dot{q}_N^{pl}$

8. Έπειτα, σχηματίζω το $\dot{R}'(\tau) = \gamma^{(u)} \{ \dot{a}_1(\tau) R_{p1} + \dot{a}_2(\tau) R_{p2} + \dots \} + A^T L^T D^T k_N \dot{q}_N^{pl}$. Με αυτό σαν φόρτιση, πλέον, λύνεται ολόκληρη η κατασκευή και προκύπτει ο όρος $K \dot{u}$ της (εξ. 3.13) στο καθολικό σύστημα και μετατρέπεται με κατάλληλες πράξεις στον όρο $k_g \dot{q}_g$

9. Τέλος, ο όρος $k_g \dot{q}_g^{el}$ της (εξ.3.13) έχει υπολογιστεί νωρίτερα (βήμα 5), σαν $\dot{M}^{(k)}(\tau)$. Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι τα μητρώα αυτά έχουν διάσταση 3x1 και περιέχουν μόνο τις 2 ροπές στα άκρα του στοιχείου και την αξονική δύναμη που εδώ είναι μηδέν.

10. Έχοντας τους τρεις παραπάνω όρους υπολογίζεται ο όρος $\dot{Q}_{g,r}$ σαν

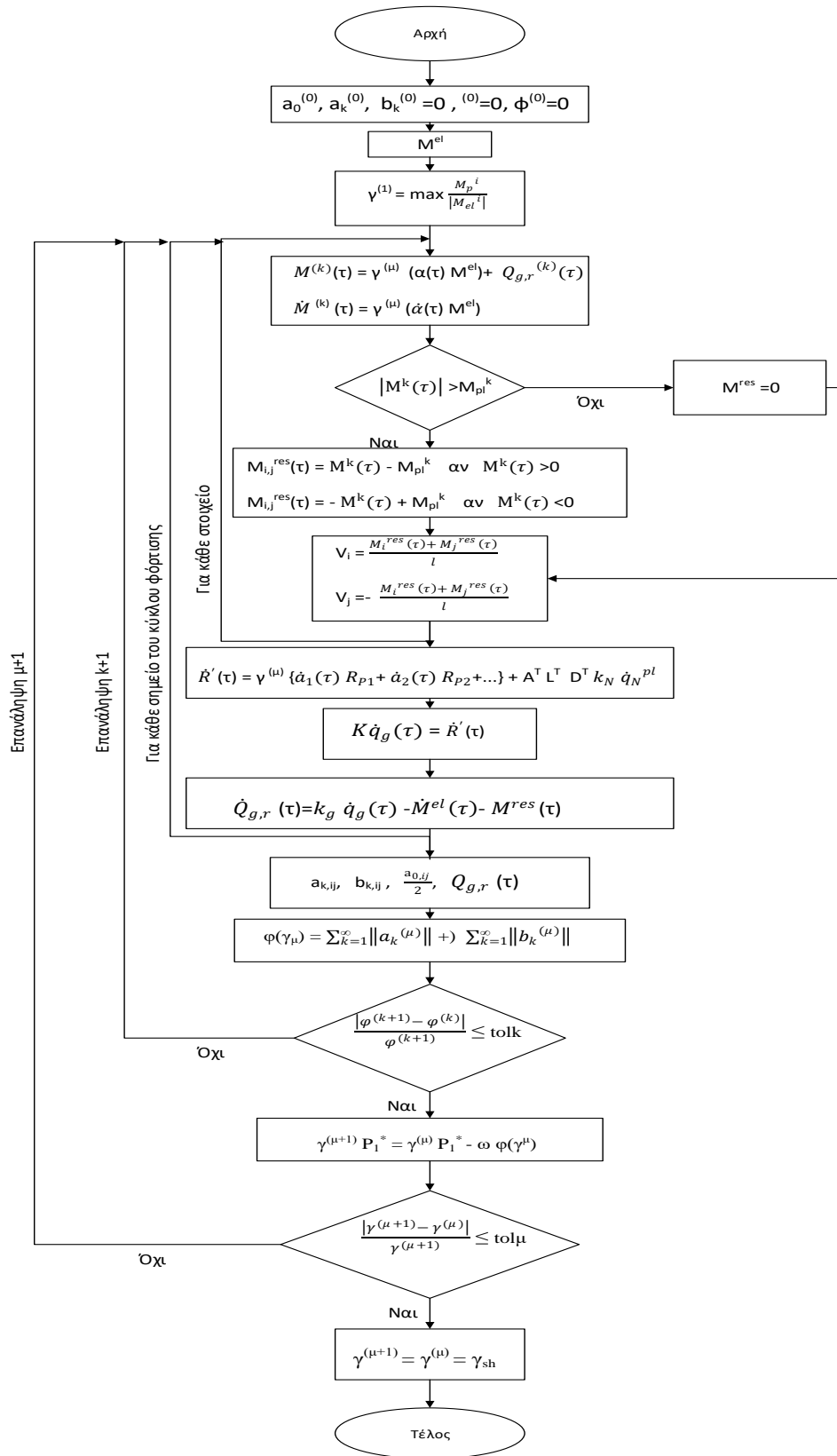
$$\dot{Q}_{g,r} = k_g \dot{q}_g - k_g \dot{q}_g^{el} - L^T D^T k_N \dot{q}_N^{pl}$$

11. Ολοκλήρωση σε ένα κύκλο και υπολογισμός των συντελεστών των σειρών Fourier με χρήση της διανυσματικής μορφής των εξ.3.4, εξ.3.5, εξ.3.7

12. Υπολογισμός μιας νέας προσέγγισης του διανύσματος των παραμενουσών n ροπών $Q_{g,r}(\tau)$ μέσω της εξ.3.1.

13. Έλεγχος της σύγκλισης μεταξύ δύο διαδοχικών επαναλήψεων, χρησιμοποιώντας την ευκλείδια νόρμα των συντελεστών των σειρών Fourier a_k και b_k .

Όλα τα παραπάνω συνοψίζονται στο διάγραμμα ροής που ακολουθεί



Σχήμα 3.2 Διάγραμμα Ροής Προγράμματος

3.4 Προτεινόμενη διαδικασία για ανάλυση ελαστικής σταθεροποίησης

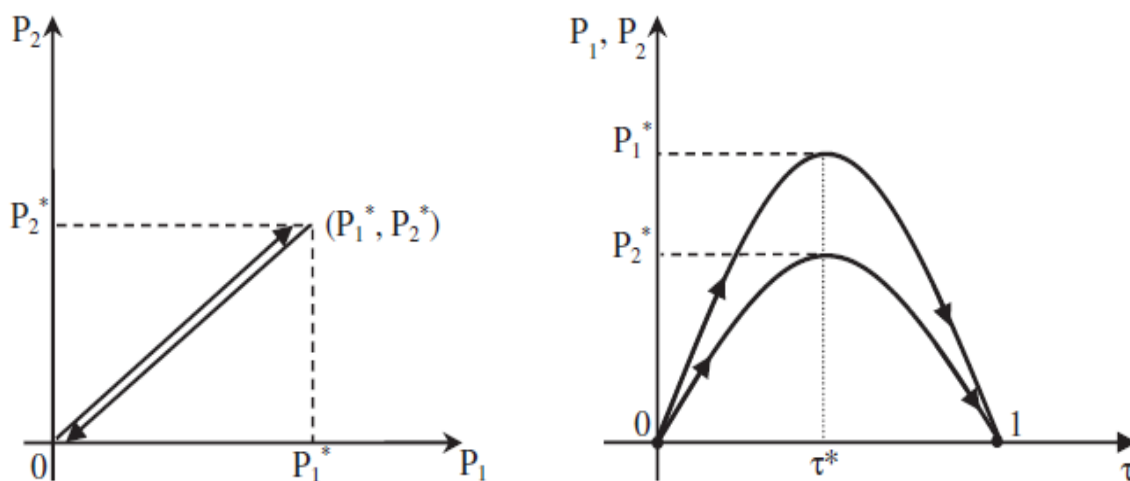
Η διαδικασία παρουσιάζεται για κατασκευή δύο διαστάσεων. Αν και η αυτή μπορεί να εφαρμοστεί για περισσότερα των δύο φορτία, για απλούστευση, εδώ παρουσιάζονται μόνο δύο φορτία.

Τα φορτία αυτά έχουν κυκλική μεταβολή μεταξύ μιας μέγιστης και μιας ελάχιστης τιμής. Χωρίς άρση της γενικότητας, υποθέτουμε ότι η ελάχιστη τιμή των δύο φορτίων είναι μηδέν. Μπορούμε να γράψουμε οποιαδήποτε καμπύλη που διέρχεται από τα δύο αυτά άκρα. Στην αναζήτηση ενός φορτίου σταθεροποίησης τα φορτία αυτά μπορούν να μεταβάλλονται αναλογικά ή με διαφορετικό τρόπο.

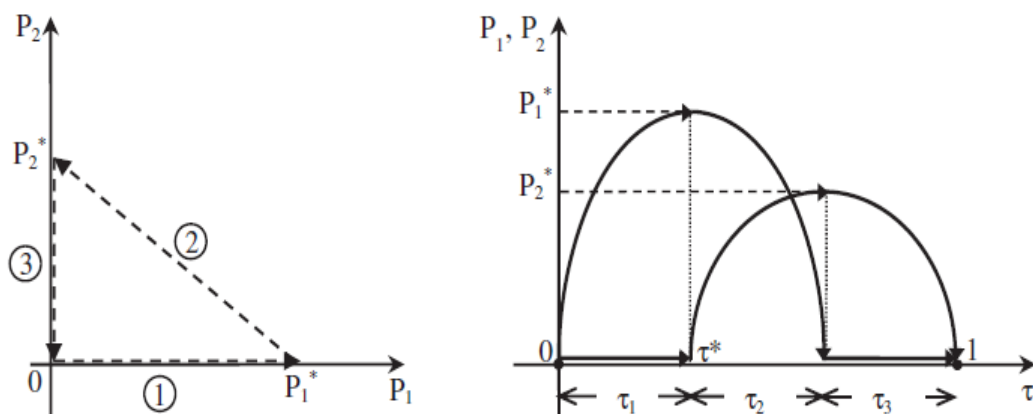
3.4.1 Αναλογικός τρόπος μεταβολής φορτίων

Στο σχήμα 3.2 παρουσιάζεται μια αναλογική μεταβολή του κυκλικού φορτίου στον τομέα του φορτίου, ενώ αντίστοιχα φαίνεται μια αντίστοιχη μεταβολή στον τομέα του χρόνου, η οποία δίνεται από

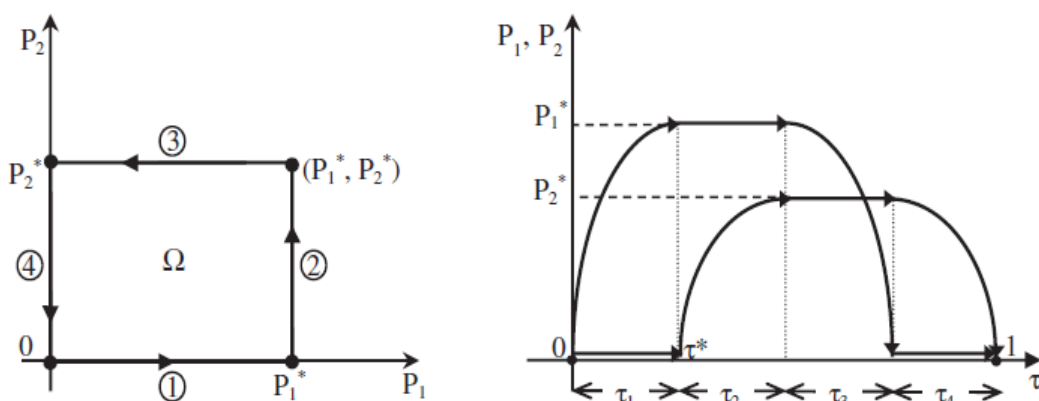
$$\mathbf{P}(\tau) = \begin{Bmatrix} P_1(\tau) \\ P_2(\tau) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1^* \alpha(\tau) \\ P_2^* \alpha(\tau) \end{Bmatrix}$$



Σχήμα 3.2 Αναλογικός τρόπος μεταβολής του φορτίου



Σχήμα 3.3



Σχήμα 3.4

όπου $\alpha(\tau)$ είναι μια συνάρτηση που περιγράφει μια μεταβολή σε σχέση με τον χρόνο μέσα στον κύκλο, κοινή και για τα δύο φορτία.

3.4.2 Μη-αναλογικός τρόπος μεταβολής φορτίων

Τα φορτία μπορούν να εφαρμοστούν ξεχωριστά, όπως ο κύκλος $(0 \rightarrow P_1^* \rightarrow P_2^* \rightarrow 0)$. Στον τομέα του χρόνου η κυκλική φόρτιση μπορεί να εκφραστεί όπως παρακάτω

$$\mathbf{P}(\tau) = \begin{Bmatrix} P_1(\tau) \\ P_2(\tau) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1^* \alpha(\tau) \\ P_2^* \alpha(\tau) \end{Bmatrix}$$

Χαρακτηριστικές μεταβολές των δύο φορτίων μπορούν να φανούν στο σχήμα 3.3.

Η κυρτότητα της επιφάνειας διαρροής εγγυάται ότι εάν μια κατασκευή σταθεροποιείται σε ένα κύκλο φόρτισης, που περιορίζεται από τρία σημεία, τότε θα σταθεροποιείται υπό οποιοδήποτε φορτίο που περικλείεται μέσα σε αυτή την κυρτή περιοχή, ο οποίος είναι ο τριγωνικός τομέας φορτίου του σχήματος 3.3.

Ο πιο συνηθισμένος τομέας φορτίου που χρησιμοποιείται στην ανάλυση σταθεροποίησης είναι το κυρτό υπερ-πολύεδρο, το οποίο περιορίζεται από τις μέγιστες και ελάχιστες εφαρμοζόμενες τιμές, δηλαδή ο ορθογωνικός τομέας Ω , που φαίνεται στο σχήμα 3.4.

Μια κυκλική φόρτιση που περιέχει τις τέσσερις κορυφές του Ω φαίνεται στο σχήμα 3.4. ($0 \rightarrow P_1^* \rightarrow (P_1^*, P_2^*) \rightarrow P_2^* \rightarrow 0$). Αποδεικνύεται ότι εάν μια κατασκευή σταθεροποιείται σε έναν τέτοιο κύκλο, τότε σταθεροποιείται σε κάθε κύκλο που εσωκλείεται στον Ω . Οι τομείς φόρτισης ή οι αντίστοιχοι τομείς χρόνου μπορούν να μεταβάλλονται αναλογικά πολλαπλασιαζόμενοι με ένα συντελεστή γ . Μέσω της προτεινόμενης επαναληπτικής διαδικασίας ψάχνουμε να βρούμε τον συντελεστή γ_{sh} που προκαλεί ελαστική σταθεροποίηση στην κατασκευή.

3.5 Εκτίμηση του αρχικού γ

Για την περίπτωση αναλογικής φόρτισης, μπορεί να ληφθεί η κατανομή των εντάσεων σε κάθε μία από τις μέγιστες τιμές των φορτίων P_1 και P_2 . Με την άθροιση τους, μπορεί κανείς να πάρει τα ελαστικά εντατικά μεγέθη κατά το χρόνο του κύκλου τ^* για την ταυτόχρονη ενέργεια των δύο φορτίων.

Για τις μεμονωμένες περιπτώσεις φόρτισης, από την άλλη πλευρά, μπορεί κανείς να βρει τις ελαστικές εντάσεις στο χρόνο τ^* , ο οποίος είναι το χρονικό σημείο του κύκλου, όπου ένα από τα φορτία φθάνει στο μέγιστο του και το άλλο είναι μηδέν.

Υπολογίζοντας τις ελάχιστες ελαστικές ροπές, μπορεί να υπολογιστεί ένας αρχικός συντελεστής γ . Αυτός υπολογίζεται σαν το μέγιστο από τα πηλίκα της ροπής διαρροής του κάθε μέλους προς την απόλυτα ελάχιστη τιμή της ελαστικής ροπής στο μέλος.

$$\gamma^{(1)} = \max \left(\frac{M_Y^i}{\min M_{el}^i} \right) \quad (3.14)$$

4. Γραφικό περιβάλλον

Για την εύκολη εισαγωγή του μοντέλου, των παραμέτρων του προβλήματος, αλλά και την επεξεργασία και παρουσίαση των αποτελεσμάτων της παραπάνω ανάλυσης, έγινε χρήση του λογισμικού GID 13.0. Αυτό αποτελεί ένα εύχρηστο εργαλείο για δημιουργία γραφικού περιβάλλοντος και χρήση τόσο για επεξεργασία πριν την ανάλυση (pre-processing), όσο και μετά την ανάλυση (post-processing). Μέσω αυτού γίνεται

- Επεξεργασία προ της ανάλυσης
 - Σχεδιασμός του μοντέλου
 - Εισαγωγή των παραμέτρων για την RSDM-S

- Επεξεργασία μετά την ανάλυση
 - Σχεδιασμός διαγραμμάτων εντατικών μεγεθών
 - Παρουσίαση των αποτελεσμάτων

4.1 Σχεδιασμός του μοντέλου

4.1.1 Εισαγωγή κόμβων

1.Mesh->Edit Mesh->Create Node

2.Utilities->Tools->Coordinates Window

Δίνοντας απλά τις συντεταγμένες των κόμβων, αυτοί εμφανίζονται στο κεντρικό παράθυρο, ενώ μπορεί να γίνει και η αντίστοιχη αρίθμησή τους.

41	42	43	44
37	38	39	40
33	34	35	36
29	30	31	32
25	26	27	28
21	22	23	24
17	18	19	20
13	14	15	16
9	10	11	12
5	6	7	8
1	2	3	4

Σχήμα 4.1. Κόμβοι κατασκευής και αριθμηση τους

4.1.2 Εισαγωγή στοιχείων

1. Mesh->Edit Mesh->Create Element->Linear

Συνδέοντας απλά τους κόμβους μεταξύ τους σχηματίζεται η κατασκευή, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.2. Ανάλογα με τον τρόπο σύνδεσης των κόμβων, σχηματίζεται και το αντίστοιχο μητρώο συνδεσμολογίας.

	68	69	70	
10		20	30	40
	65		66	67
9		19	29	39
	62		63	64
8		18	28	38
	59		60	61
7		17	27	37
	56		57	58
6		16	26	36
	53		54	55
5		15	25	35
	50		51	52
4		14	24	34
	47		48	49
3		13	23	33
	44		45	46
2		12	22	32
	41		42	43
1		11	21	31

Σχήμα 4.2. Μέλη κατασκευής και αρίθμηση τους

4.2 Εισαγωγή των δεδομένων του προβλήματος

Για την εισαγωγή των δεδομένων του προβλήματος, είναι απαραίτητη η εισαγωγή αρχείου τύπου προβλήματος (problem type), το οποίο θα περιέχει τα δεδομένα αυτού. Αυτό γίνεται μέσω των ακόλουθων εντολών

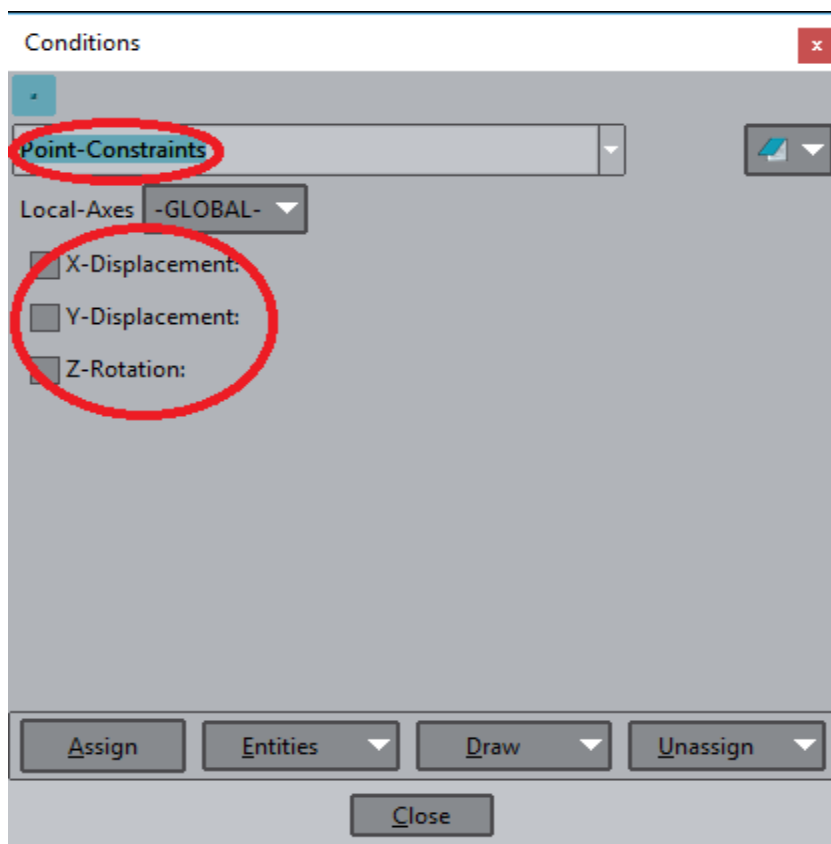
Data -> Problem Type -> ProblemType_name

Αφού γίνει η εισαγωγή του τύπου του προβλήματος, μπορούν να εισαχθούν τα δεδομένα αυτού.

4.2.1 Συνθήκες στήριξης

Επιλέγουμε διαδοχικά

Data -> Conditions



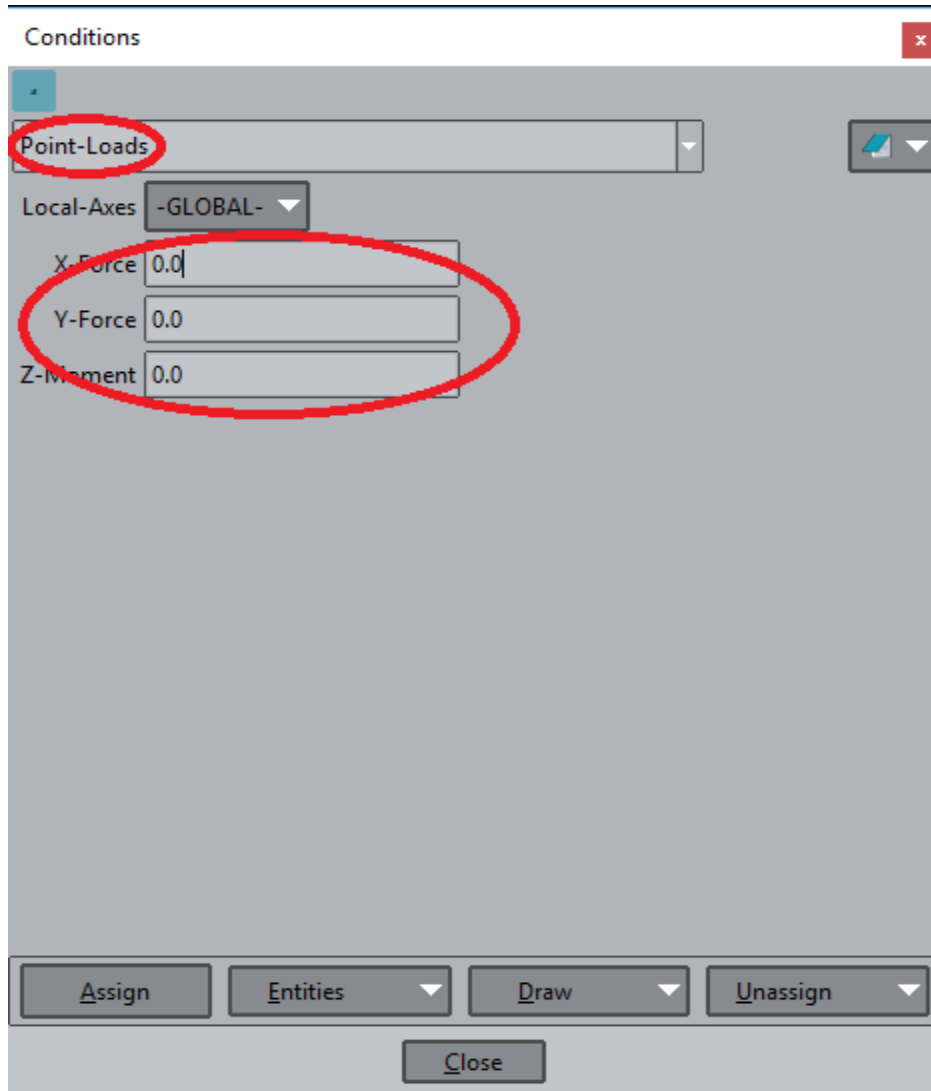
Εικόνα 4.1. Εισαγωγή οριακών συνθηκών

Στην καρτέλα αυτή επιλέγουμε Point-Constraints και επιλέγουμε ποιά απο τις μετακινήσεις θα απελευθερωθεί. Μη-επιλεγμένες μετακινήσεις σημαίνουν δεσμευμένες μετακινήσεις. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας την εντολή Assign εφαρμόζουμε τις παραπάνω συνθήκες στους επιθυμητούς κόμβους.

4.2.2 Φορτισμένοι κόμβοι και τιμές των φορτίων

Επιλέγουμε διαδοχικά

Data -> Conditions



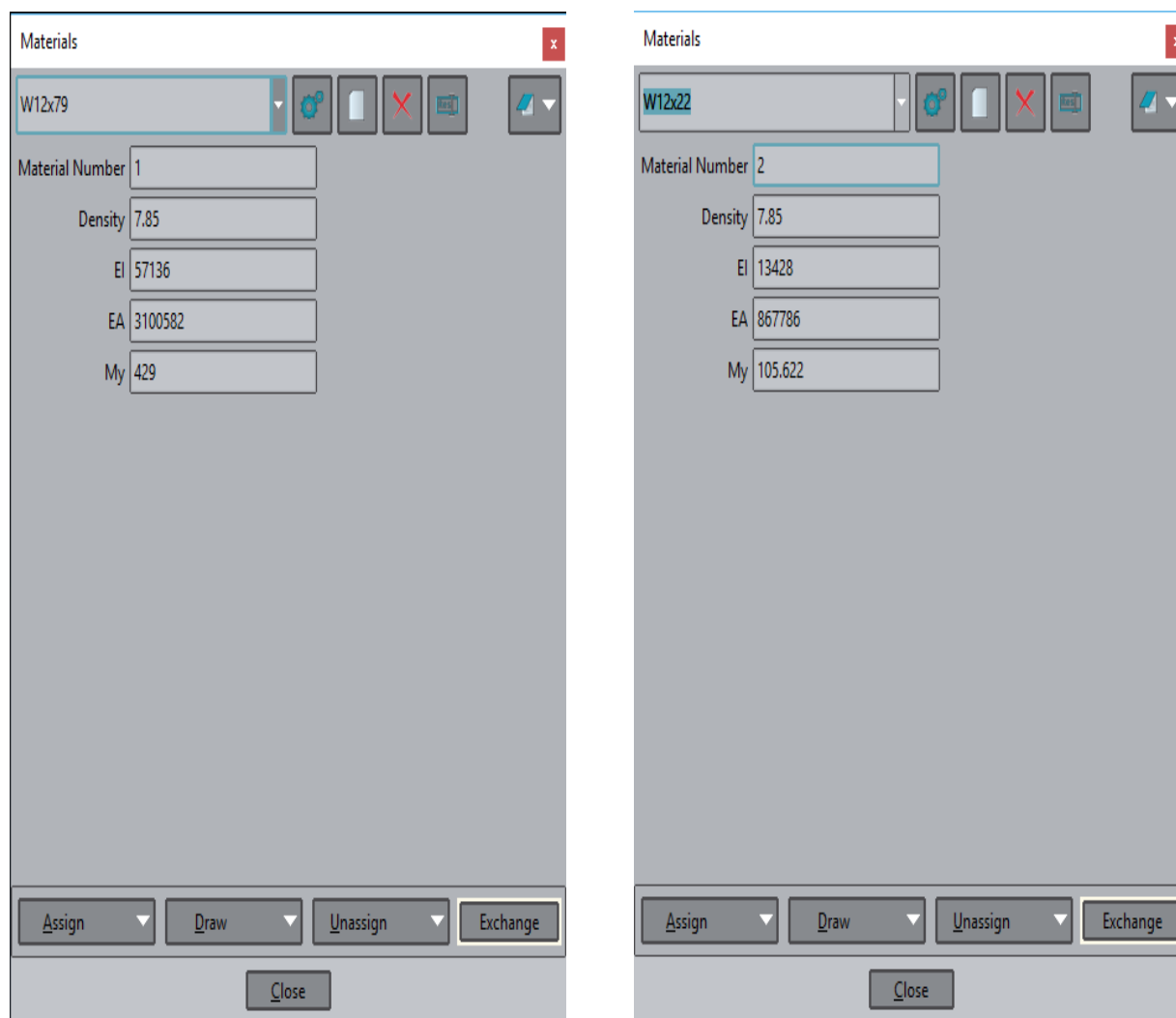
Εικόνα 4.2. Εισαγωγή φορτίων

Εδώ επιλέγουμε την επιλογή Point-Loads και εισάγουμε την τιμή της φόρτισης που επιθυμούμε. Ύστερα, με την εντολή Assign η τιμή αυτή εφαρμόζεται στον επιθυμητό κόμβο.

4.2.3 Υλικά και αντιστοίχιση αυτών με τα στοιχεία

Επιλέγουμε διαδοχικά

Data -> Materials



Εικόνα 4.3. Εισαγωγή χαρακτηριστικών υλικών

Δίνεται η ονομασία του υλικού/διατομής καθώς και τα παρακάτω στοιχεία

- Αριθμός υλικού
- Πυκνότητα υλικού (Density)
- Γινόμενο μέτρου ελαστικότητας επί ροπής αδρανείας (EI)
- Γινόμενο μέτρου ελαστικότητας επί επιφάνεια διατομής (EA)
- Ροπή διαρροής διατομής (My)

Αφού εισαχθούν τα στοιχεία αυτά για κάθε διατομή, γίνεται εφαρμογή αυτών στα μέλη μέσω της εντολής Assign.

4.2.4 Γενικά δεδομένα για την RSDM-s

Unit System	SI
Title	10storey
NUMBER OF CONSTRAINED NODES	4
NUMBER OF LOADED NODES	10
ndime	2
NPROPS	3
NPTYPES	2
MAX ITERATION NUMBER K	10000
MAX ITERATION NUMBER M	10000
TOLERANCE K	0.01
TOLERANCE M	0.01
NUMBER OF INTEGRATION POINTS	40
NUMBER OF FOURRIER COEFFICIENTS	3

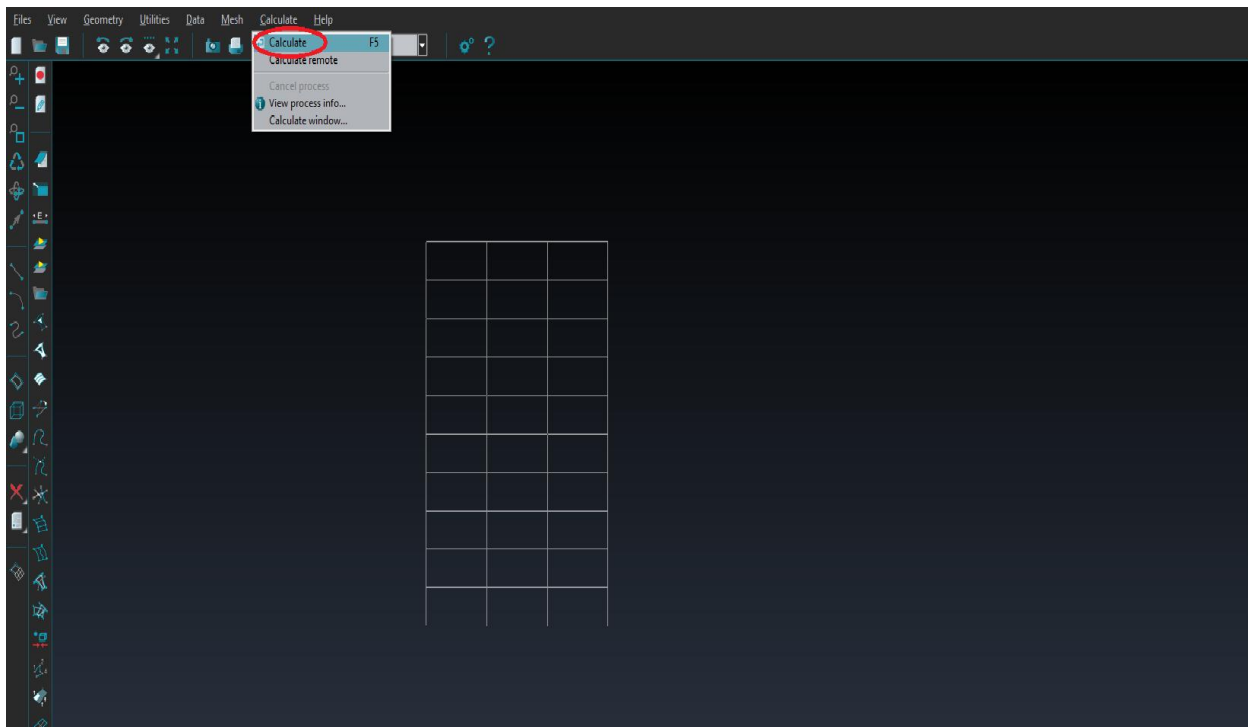
Εικόνα 4.4. Εισαγωγή γενικών στοιχείων κατασκευής και RSDM-S

Εδώ δίνονται γενικά στοιχεία για την κατασκευή και την RSDM-S

- Τίτλος προβλήματος (Title)
- Αριθμός δεσμευμένων κόμβων (NUMBER OF CONSTRAINED NODES)
- Αριθμός φορτισμένων κόμβων (NUMBER OF LOADED NODES)
- Αριθμός διαστάσεων (ndime)
- Αριθμός ιδιοτήτων υλικού (NPROPS)
- Πλήθος υλικών (NPTYPES)
- Μέγιστος επιτρεπόμενος αριθμός επαναλήψεων για την RSDM (MAX ITERATION NUMBER K)

- Μέγιστος επιτρεπόμενος αριθμός επαναλήψεων για την RSDM-S RSDM (MAX ITERATION NUMBER M)
- Ακρίβεια για την RSDM (TOLERANCE K)
- Ακρίβεια για την RSDM-S (TOLERANCE M)
- Αριθμός σημείων ολοκλήρωσης συνάρτησης φόρτισης (NUMBER OF INTEGRATION POINTS)
- Αριθμός συντελεστών των σειρών Fourier (NUMBER OF FOURRIER COEFFICIENTS)

Έχοντας δώσει όλα τα παραπάνω και κάνοντας χρήση του Calculate παράγεται αρχείο .dat, το οποίο και αποτελεί το αρχείο εισόδου (input file) για το ανεπτυγμένο πρόγραμμα.



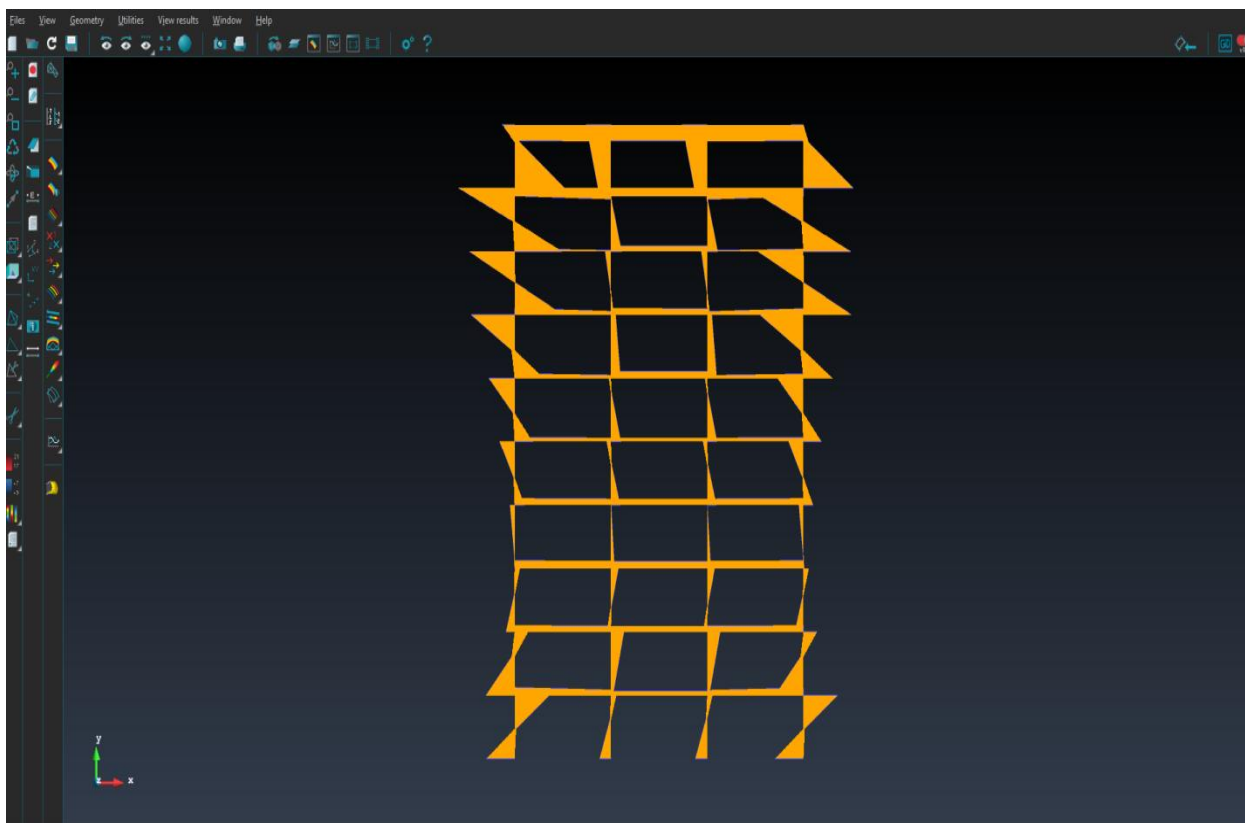
Εικόνα 6. Έναρξη δημιουργίας αρχείου εισόδου

4.3 Σχεδιασμός διαγραμμάτων εντατικών μεγεθών

Για να γίνει σχεδιασμός και παρουσίαση των διαγραμμάτων των ζητούμενων εντατικών μεγεθών, πρέπει πρώτα να εισαχθεί στο λογισμικό, αρχείο κατάλληλης και αναγνώσιμης από αυτό, μορφής, το οποίο θα περιέχει τόσο την κατασκευή και την διακριτοποίησή της όσο και τα απαιτούμενα μεγέθη. Ύστερα από την εισαγωγή αυτού και ακολουθώντας τις εντολές

View results -> Line diagram -> Scalar -> Forces_name

παράγεται γράφημα σαν το χαρακτηριστικό παρακάτω. Το γράφημα που παρουσιάζεται αποτελεί αυτό των παραμενουσών ροπών σε δεκαόροφο επίπεδο πλαίσιο.



Εικόνα 7. Διάγραμμα παραμενουσών ροπών σε δεκαόροφο πλαίσιο

5. Παραδείγματα Εφαρμογής

5.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται, αρχικά, χαρακτηριστικά παραδείγματα πλαισίων, με φορτίσεις που τα οδηγούν σε ελαστική σταθεροποίηση (shakedown). Επίσης, για αυτά γίνεται οριακή ανάλυση και συγκρίνονται τα αποτελέσματα. Έπειτα, παρουσιάζονται δύο πλαίσια, ένα πεντάροφο και ένα δεκάροφο, στα οποία γίνεται ανάλυση για ελαστική σταθεροποίηση, οριακή και στατική υπερωθητική ανάλυση και συγκρίνονται τα αποτελέσματα. Οι συναρτήσεις φόρτισης δίνονται σε κάθε παράδειγμα. Για τα πρώτα τρία παραδείγματα, για τα οποία υπάρχουν λύσεις, τόσο το φορτίο shakedown, όσο και το οριακό συγκρίνονται με τις αντίστοιχες υπάρχουσες τιμές και ερμηνεύονται τυχούσες (μικρές) αποκλίσεις. Τα παραδείγματα που παρουσιάζονται είναι

- Μονώροφο πλαίσιο με ένα υλικό και 2 φορτίσεις
- Διώροφο πλαίσιο με 2 υλικά και 4 φορτίσεις
- Μονώροφο πλαίσιο δύο ανοιγμάτων, με 2 υλικά, 2 συγκεντρωμένες φορτίσεις και μια κατανεμημένη
- Πεντάροφο πλαίσιο, με δύο υλικά και 5 πλευρικές φορτίσεις
- Δεκάροφο πλαίσιο, με δύο υλικά και 10 πλευρικές φορτίσεις

5.2 Μονώροφο πλαίσιο με ένα υλικό και δύο φορτίσεις

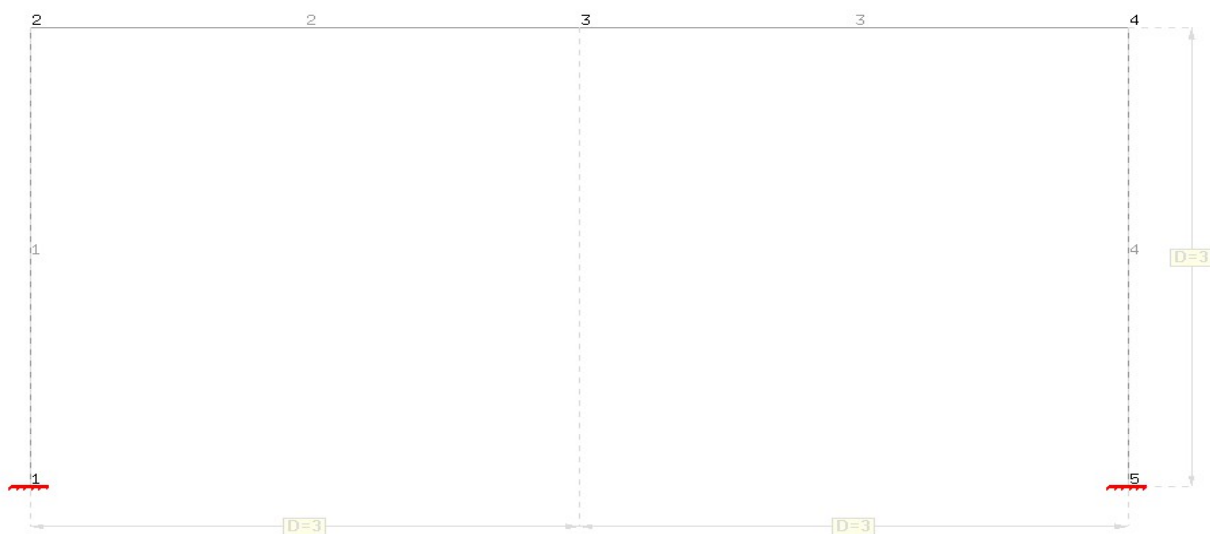
Σαν πρώτο παράδειγμα, εξετάστηκε ένα απλό μονώροφο πλαίσιο με 2 φορτίσεις (Σχήμα 5.1). Χρησιμοποιήθηκαν 4 στοιχεία. Όλα τα στοιχεία είχαν τα παρακάτω χαρακτηριστικά

$$E=210 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$$

$$A=0.00509 \text{ m}^2$$

$$I_z=0.0000809 \text{ m}^4$$

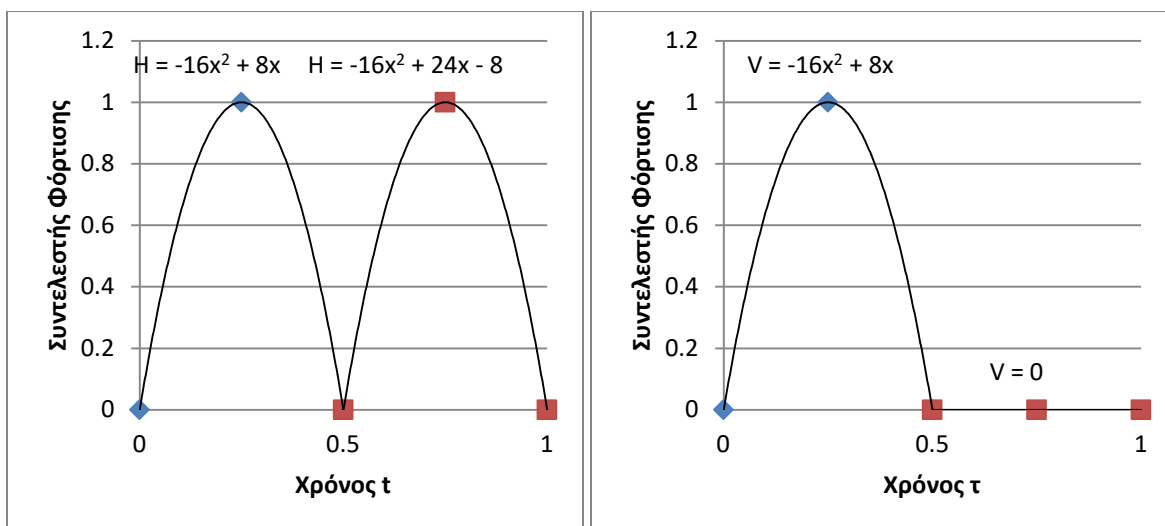
$$M_p=150 \text{ kNm}$$



Σχήμα 5.1. Μονώροφο πλαίσιο με 2 φορτίσεις

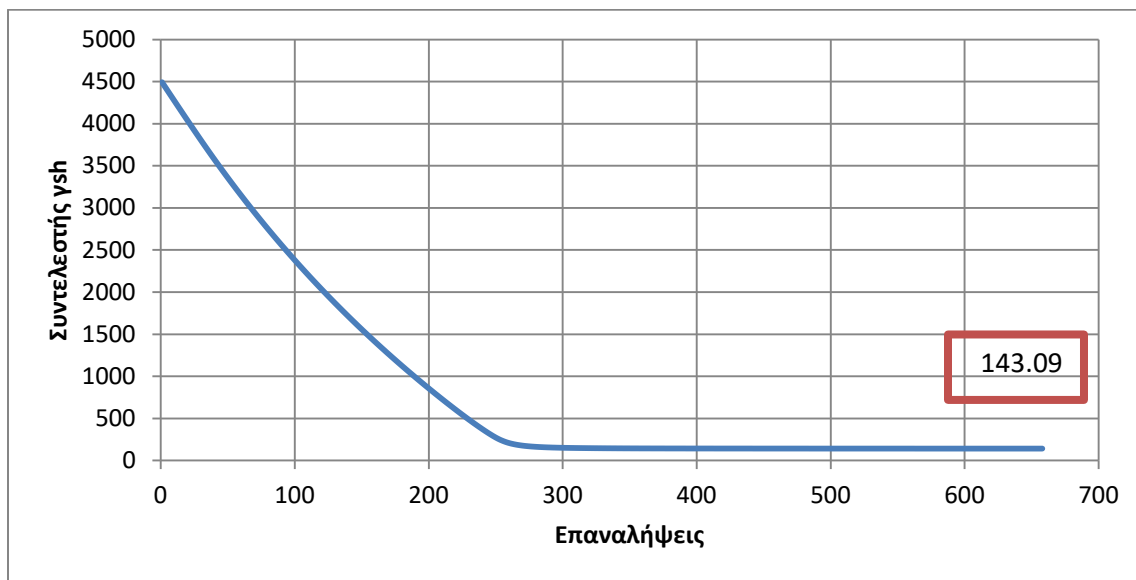
5.2.1 Ανάλυση Ελαστικής Σταθεροποίησης (Elastic Shakedown)

Οι φορτίσεις είχαν τις συναρτήσεις με διάγραμμα φόρτισης όπως φαίνεται παρακάτω (Διάγραμμα 5.1).

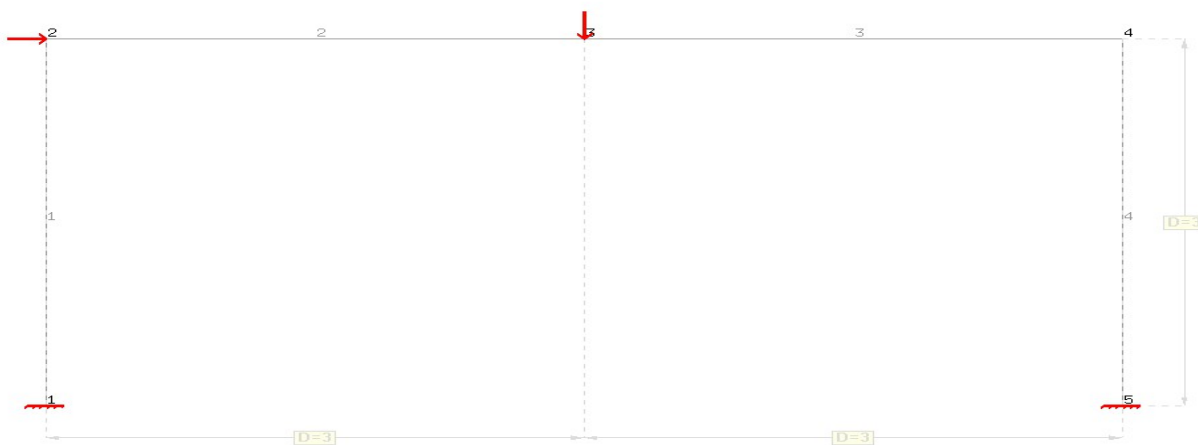


Διάγραμμα 5.1. Συνάρτηση φόρτισης στο πεδίο του χρόνου (φόρτιση αναλογικού τύπου), αριστερά για οριζόντια και δεξιά για κατακόρυφη φόρτιση

Από την ανάλυση που έγινε, ο συντελεστής γ_{sh} ξεκίνησε από μια πολύ μεγάλη τιμή (4510.3) και στη συνέχεια μειωνόταν, ακολουθώντας το παρακάτω διάγραμμα (Διάγραμμα 5.2) και φτάνοντας στην τιμή 143.09



Διάγραμμα 5.2. Σύγκλιση της RSDM-S στον συντελεστή σταθεροποίησης





Σχήμα 5.2. Πρόγραμμα φόρτισης πλαισίου

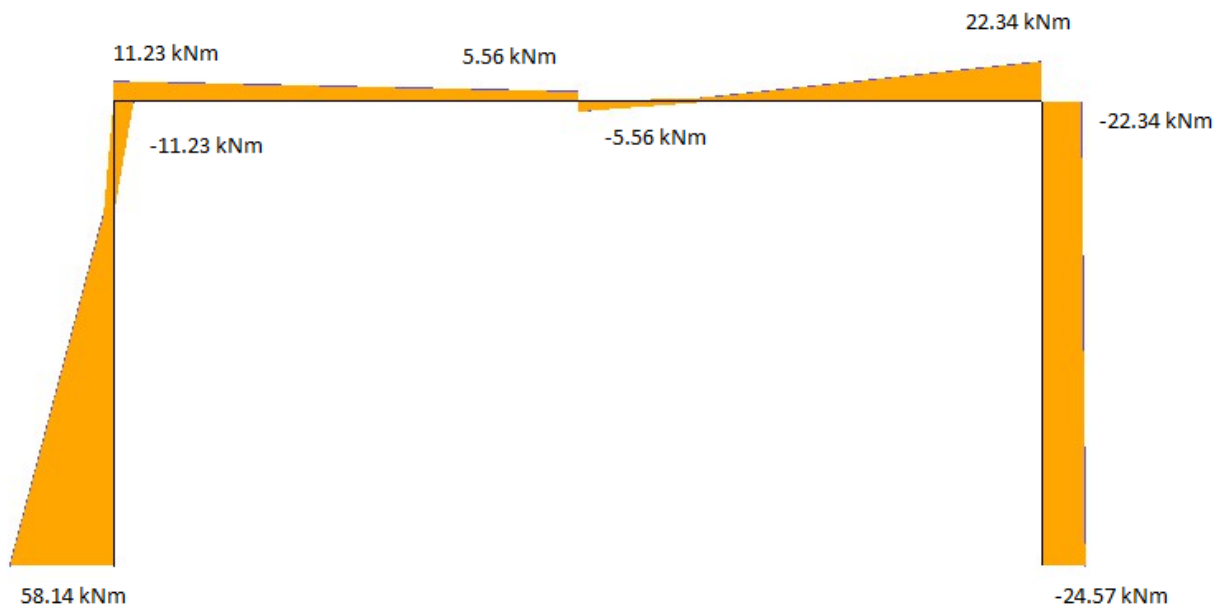
Για την παραπάνω τιμή έχω ότι

$$\gamma_{sh} = 143.09 = 2.86 \frac{M_p}{l}$$

Η αντίστοιχη του Martin (44) είναι

$$\gamma_{sh} = 2.857 \frac{M_p}{l}$$

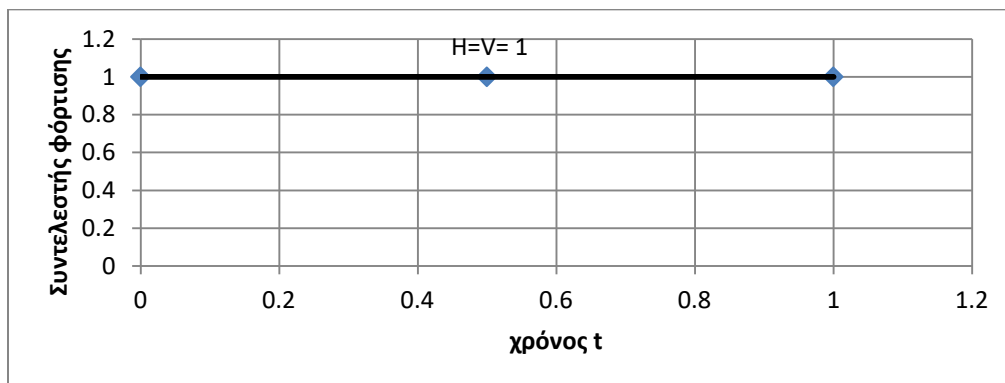
Το διάγραμμα των παραμενουσών ροπών κατά την σύγκλιση της όλης διαδικασίας ήταν το παρακάτω (Σχήμα 5.2)



Σχήμα 5.3. Διάγραμμα παραμενουσών ροπών

5.2.2 Οριακή ανάλυση (Limit Analysis)

Οι φορτίσεις είχαν την ίδια συνάρτηση $P=1$, με διάγραμμα φόρτισης όπως φαίνεται παρακάτω (Διάγραμμα 5.3).



Διάγραμμα 5.3. Συνάρτηση φόρτισης στο πεδίο του χρόνου (σταθερή φόρτιση)

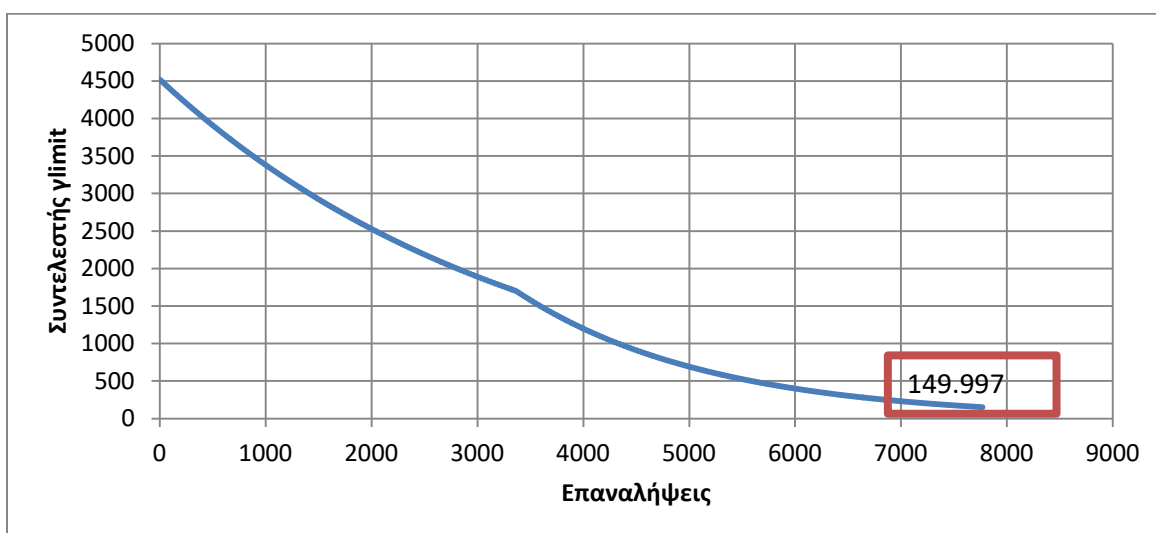
Από την ανάλυση που έγινε, ο συντελεστής γ_{limit} υπολογίστηκε 149.997.

Για την παραπάνω τιμή έχω ότι

$$\gamma_{\text{limit}} = 149.997 \approx 3 \frac{M_p}{l}$$

Η αντίστοιχη του Martin (44) είναι

$$\gamma_{\text{limit}} = 3 \frac{M_p}{l}$$



Διάγραμμα 5.4. Σύγκλιση της RSDM-S στο οριακό φορτίο

Τύπος Ανάλυσης	Συνθήκη Φόρτισης	Martin	RSDM-s	Σφάλμα %
Ελαστική Σταθεροποίηση	H=1 V=1	2.857 Mp/l	2.86 Mp/l	0.1
Οριακή	0<H<1 0<V<1	3 Mp/l	3 Mp/l	0

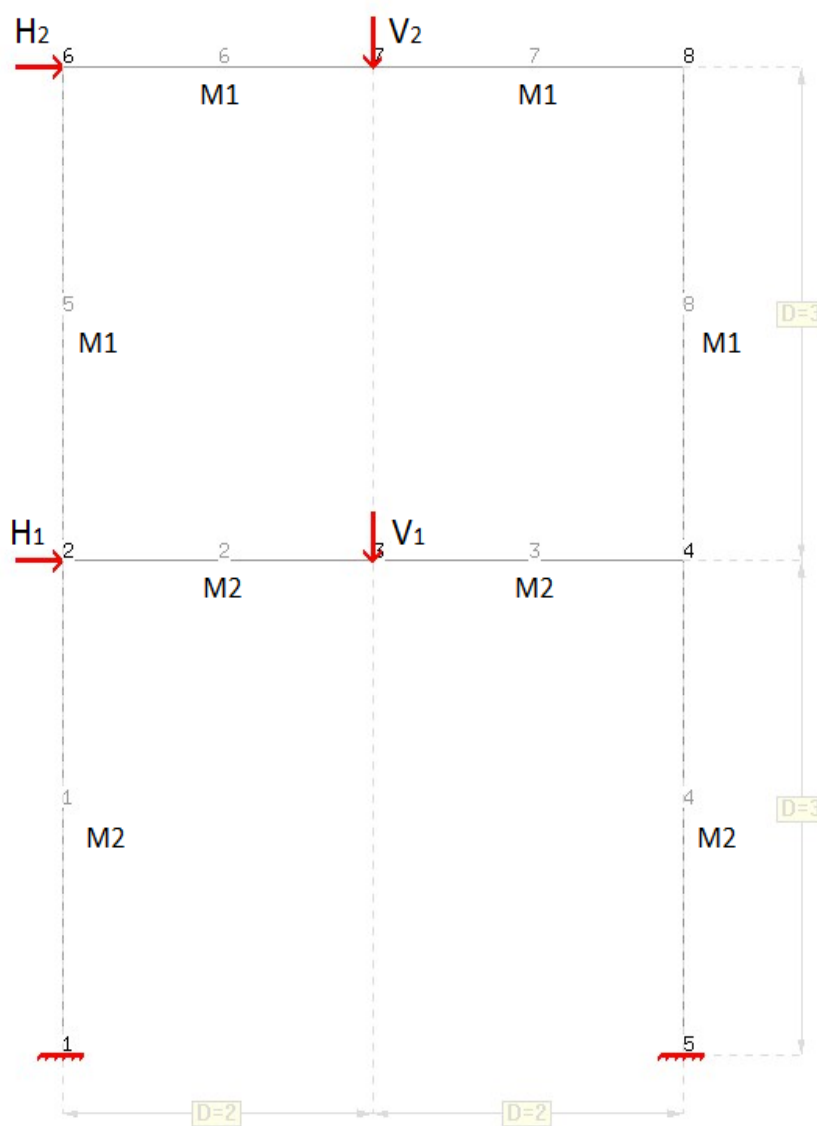
Πίνακας 5.1. Σύγκριση θεωρητικών και υπολογιστικών τιμών του συντελεστή σταθεροποίησης

5.3 Διώροφο πλαίσιο με δύο υλικά και δύο πλευρικές φορτίσεις

Σαν δεύτερο παράδειγμα, εξετάστηκε ένα διώροφο πλαίσιο (Σχήμα 5.3), ενός ανοίγματος με 2 υλικά και 2 πλευρικές φορτίσεις. Χρησιμοποιήθηκαν 8 στοιχεία. Όλα τα στοιχεία είχαν τα παρακάτω χαρακτηριστικά

Υλικό	E (kN/m ²)	A(m ²)	Iz (m ⁴)	Mp (kNm)
HEB160 (M1)	210*10 ⁶	0.005425	0.00002492	97.35
HEB200 (M2)	210*10 ⁶	0.007808	0.00005696	176.825

Πίνακας 2. Υλικά και χαρακτηριστικά διατομών κατασκευής



Σχήμα 5.4. Δύοροφο πλαίσιο με 4 φορτίσεις

5.3.1 Ανάλυση Ελαστικής Σταθεροποίησης (Elastic Shakedown)

Οι φορτίσεις είχαν τις συναρτήσεις

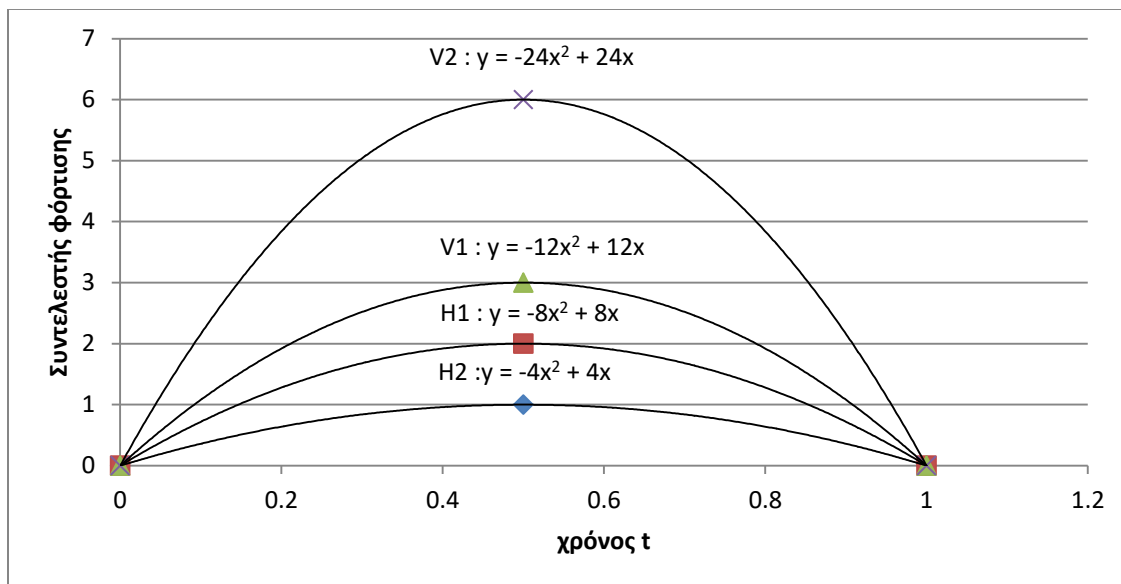
$$H1 : -8x^2 + 8x$$

$$H2 : -4x^2 + 4x$$

$$V1 : -12x^2 + 24x$$

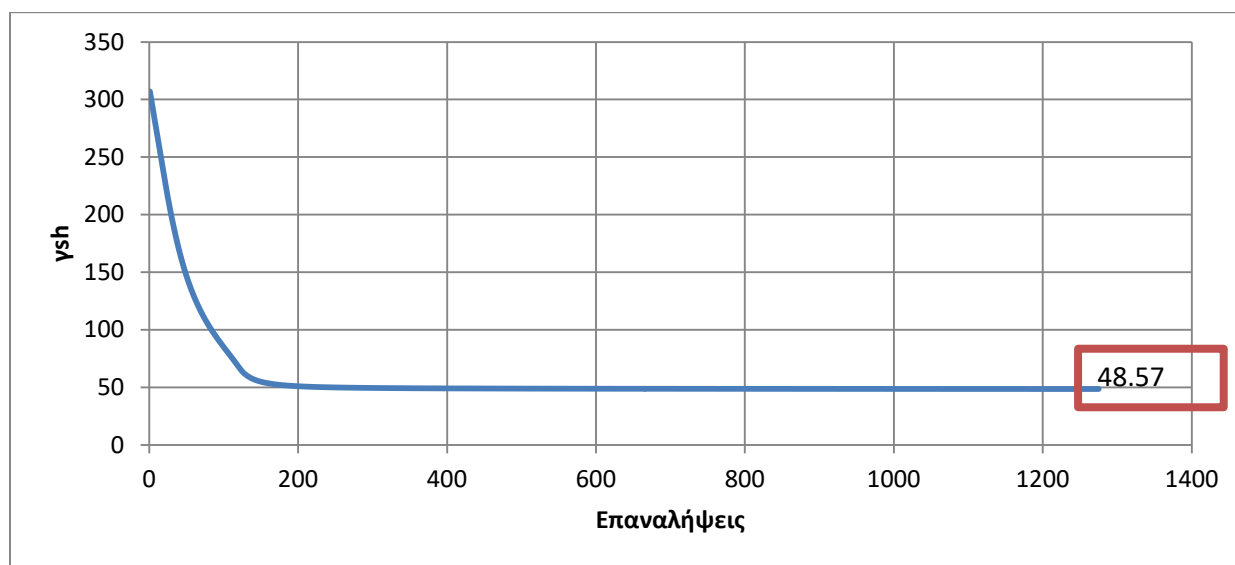
$$V2 : -12x^2 + 12x$$

με διάγραμμα φόρτισης όπως φαίνεται παρακάτω (Διάγραμμα 5.5).



Διάγραμμα 5.5. Συνάρτηση φόρτισης στο πεδίο του χρόνου (φόρτιση αναλογικού τύπου)

Απο την ανάλυση που έγινε, ο συντελεστής γ_{sh} ξεκίνησε από την τιμή 306 και μειούμενος ακολουθώντας το παρακάτω διάγραμμα (Διάγραμμα 5.6) έφτασε στην τιμή 48.57



Διάγραμμα 5.6. Σύγκλιση της RSDM-S στον συντελεστή σταθεροποίησης

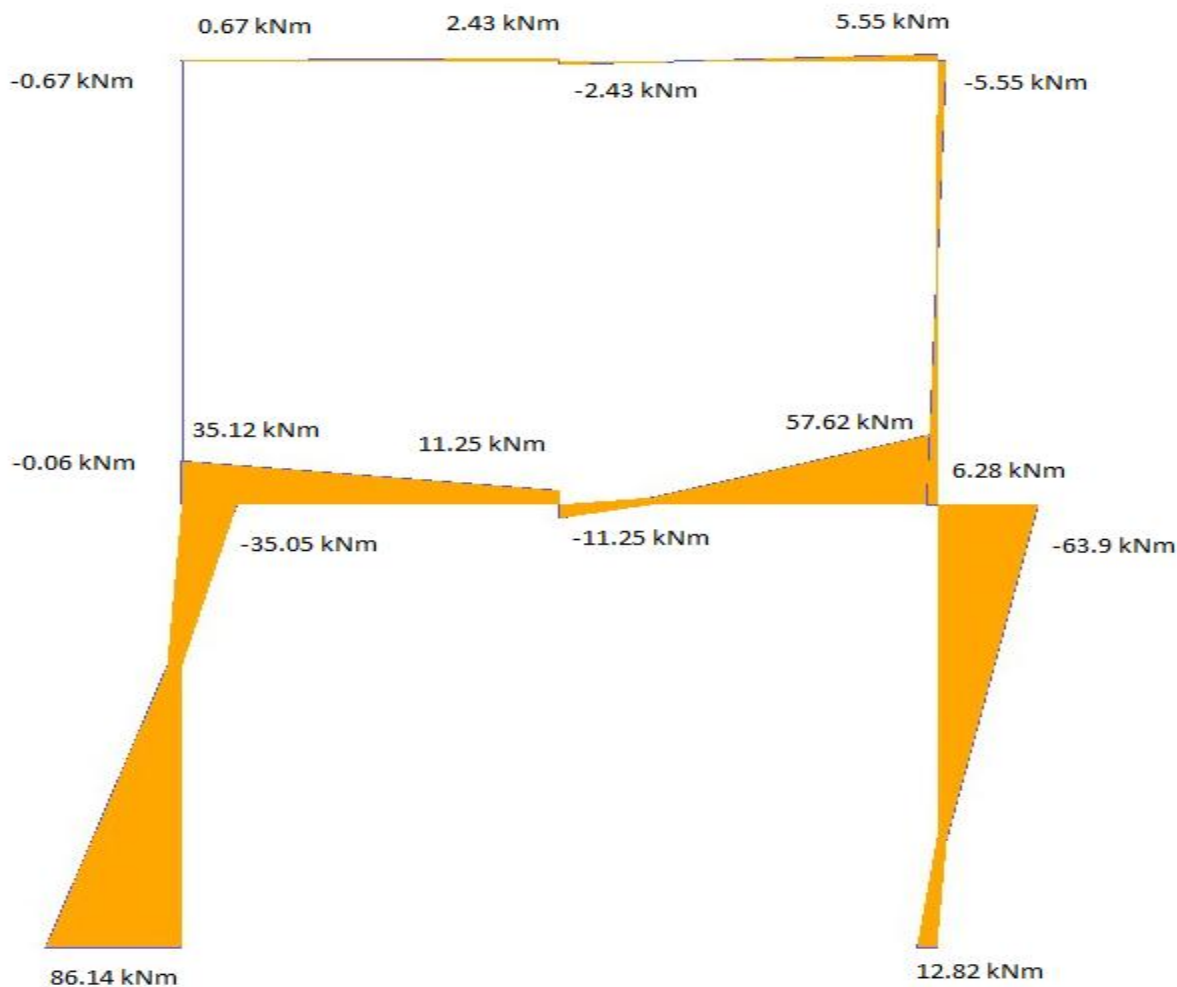
Για την παραπάνω τιμή έχω ότι

$$\gamma_{sh} = 48.57 = 0.499 \frac{M_{p1}}{l}$$

Η αντίστοιχη των Cohn, Ghosh και Parimi (45) είναι

$$\gamma_{sh} = 0.508 \frac{M_{p1}}{l}$$

Το διάγραμμα των παραμενουσών ροπών κατά την σύγκλιση της όλης διαδικασίας ήταν το παρακάτω (Σχήμα 5.4)



Σχήμα 5.5. Διάγραμμα παραμενουσών ροπών

5.3.2 Οριακή ανάλυση (Limit Analysis)

Οι φορτίσεις είχαν τις συναρτήσεις

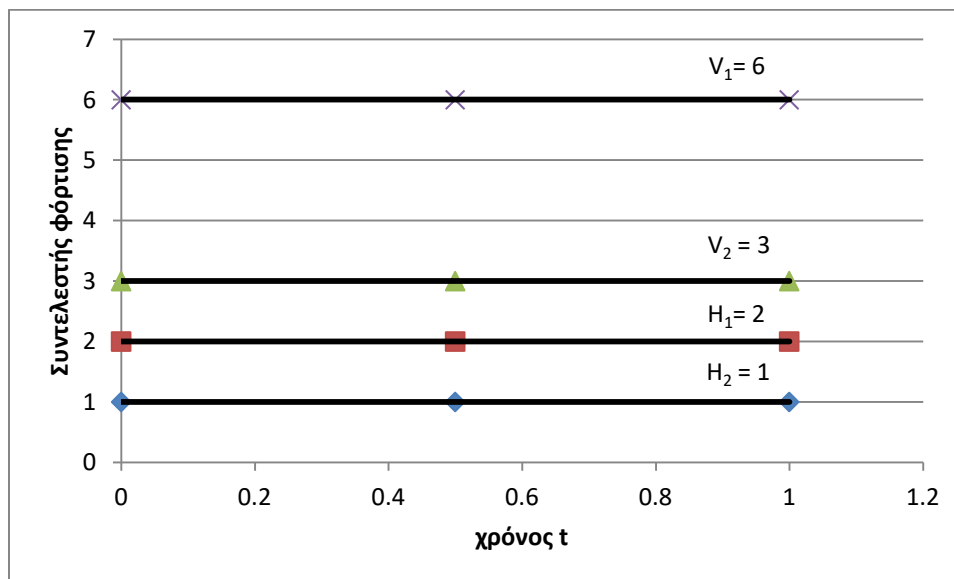
H1 : 2

H2 : 1

V1 : 6

V2 : 3

με διάγραμμα φόρτισης όπως φαίνεται παρακάτω (Διάγραμμα 5.7).



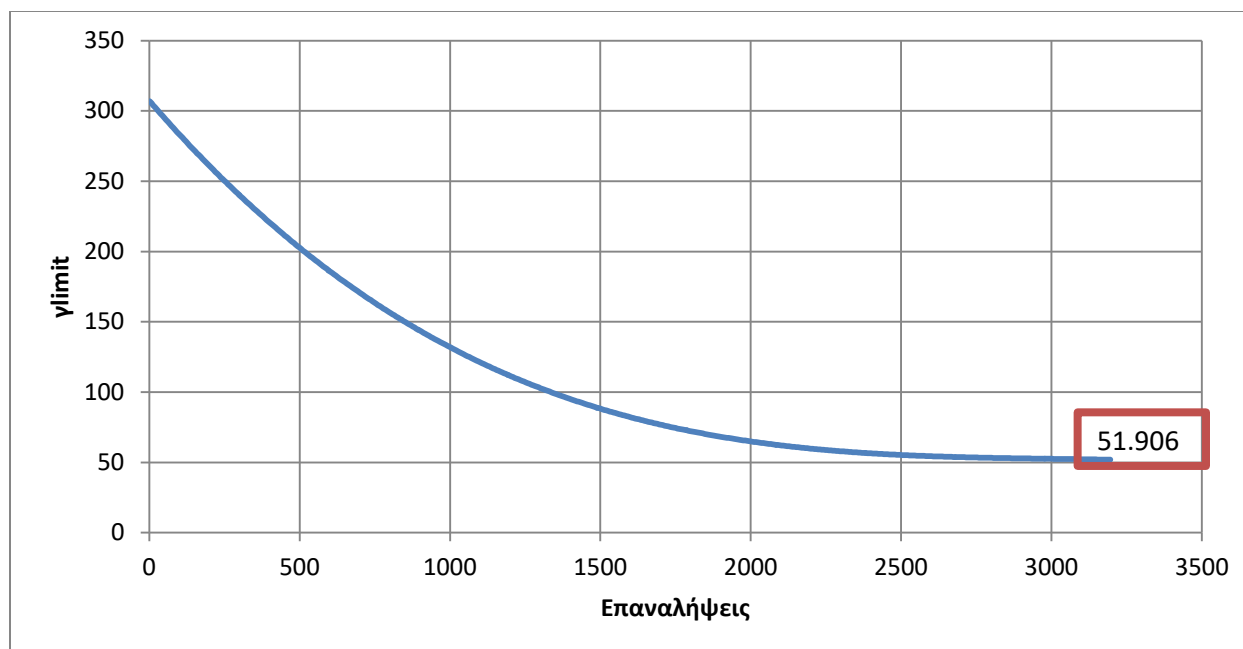
Διάγραμμα 5.7. Συνάρτηση φόρτισης στο πεδίο του χρόνου (σταθερή φόρτιση)

Από την ανάλυση που έγινε, ο συντελεστής γ_{limit} ξεκίνησε από την τιμή 342.22 και μειούμενος έφτασε στην τιμή 51.906

Για την παραπάνω τιμή έχω ότι

$$\gamma_{\text{limit}} = 51.906 \approx 0.533 \frac{M_{p1}}{l}$$

Η αντίστοιχη των Cohn, Ghosh και Parimi (45) είναι $\gamma_{\text{limit}} = 0.533 \frac{M_{p1}}{l}$



Διάγραμμα 5.8. Σύγκλιση της RSDM-S στο οριακό φορτίο

Τύπος Ανάλυσης	Συνθήκη Φόρτισης	Cohn, Ghosh, Parimi	RSDM-S	Σφάλμα %
Οριακή	H=1 V=3	0.533 Mp/l	0.533 Mp/l	0.000
Ελαστική Σταθεροποίηση	0<H<1 0<V<3	0.508 Mp/l	0.499 Mp/l	0.20

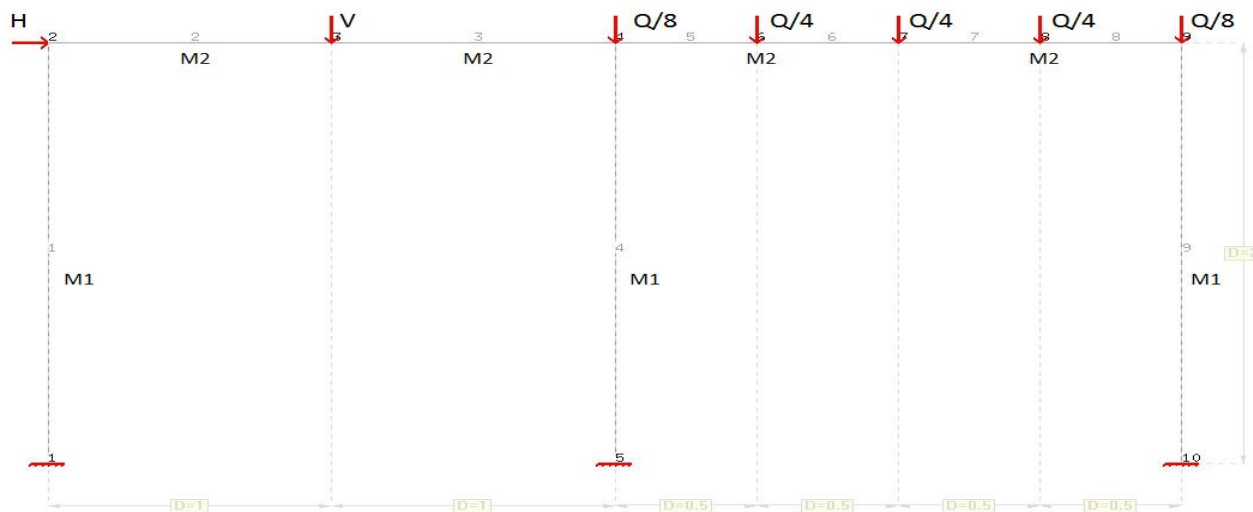
Πίνακας 5.2. Σύγκριση θεωρητικών και υπολογιστικών τιμών του συντελεστή σταθεροποίησης

5.4 Μονώροφο πλαίσιο δύο ανοιγμάτων, δύο υλικών, με 2 συγκεντρωμένα και ένα κατανεμημένο φορτίο

Σαν τρίτο παράδειγμα, εξετάστηκε μονώροφο πλαίσιο, δύο ανοιγμάτων με 2 υλικά, 2 συγκεντρωμένες φορτίσεις και μία κατανεμημένη (Σχήμα 5.5). Η τελευταία μετατράπηκε σε συγκεντρωμένη, όπως φαίνεται στο σχήμα. Χρησιμοποιήθηκαν 9 στοιχεία. Όλα τα στοιχεία είχαν τα παρακάτω χαρακτηριστικά

Υλικό	E (kN/m ²)	A(m ²)	Iz (m ⁴)	Mp (kNm)
HEB160 (M1)	210*10 ⁶	0.005425	0.00002492	97.35
HEB200 (M2)	210*10 ⁶	0.007808	0.00005696	176.825

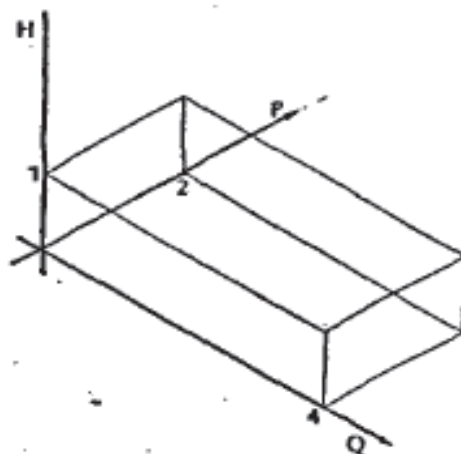
Πίνακας 3. Υλικά και χαρακτηριστικά διατομών κατασκευής



Σχήμα 5.6. Μονώροφο πλαίσιο δύο ανοιγμάτων

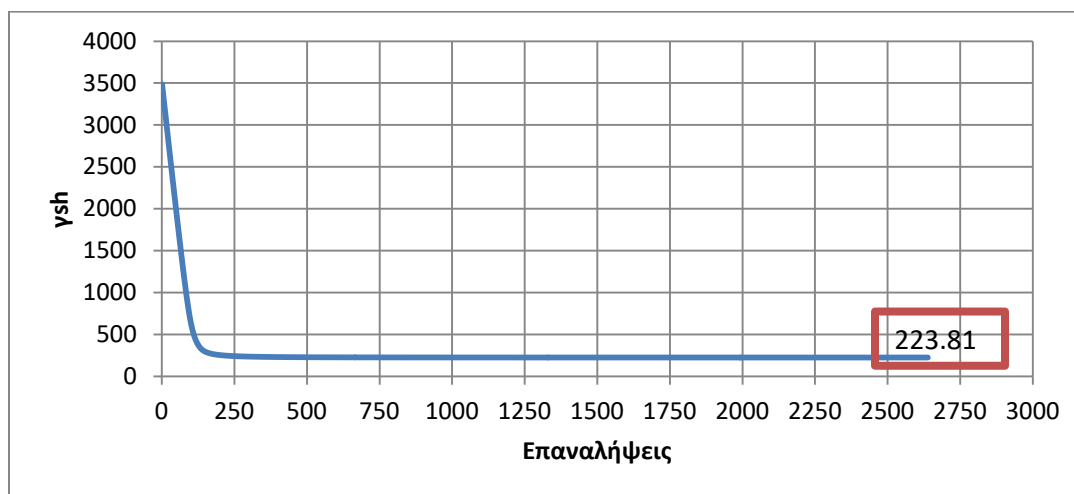
5.4.1 Ανάλυση Ελαστικής Σταθεροποίησης (Elastic Shakedown)

Σε αυτή την περίπτωση έγινε χρήση των φορτίσεων με διάγραμμα φόρτισης στο πεδίο του φορτίου, όπως φαίνεται παρακάτω (Διάγραμμα 5.8)



Διάγραμμα 5.9. Συνάρτηση φόρτισης στο πεδίο του φορτίου

Από την ανάλυση που έγινε, ο συντελεστής γ_{sh} ξεκίνησε από την τιμή 3499 και έφτασε στην τιμή 223.81 (Διάγραμμα 5.9).



Διάγραμμα 5.10. Σύγκλιση της RSDM-s στον συντελεστή σταθεροποίησης

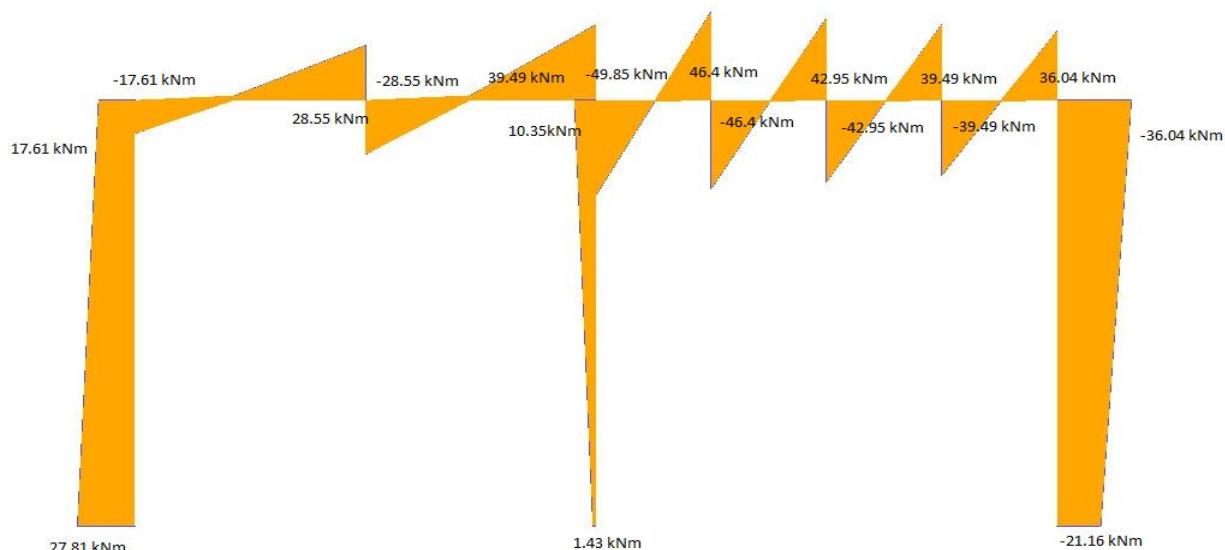
Για την παραπάνω τιμή έχω ότι

$$\gamma_{sh} = 223.81 = 2.29 \frac{M_{p1}}{l}$$

Η αντίστοιχη των Baker, Horne και Heyman (46) υπολογίστηκε σε

$$\gamma_{sh} = 2.3 \frac{M_{p1}}{l}$$

Το διάγραμμα των παραμενουσών ροπών κατά την σύγκλιση της όλης διαδικασίας ήταν το παρακάτω (Σχήμα 5.6)



Σχήμα 5.7. Διάγραμμα παραμενουσών ροπών

5.5 Πενταώροφο πλαίσιο τριών ανοιγμάτων με πέντε πλευρικά φορτία

Σαν τέταρτο παράδειγμα, εξετάστηκε πενταώροφο πλαίσιο, τριών ανοιγμάτων με 2 υλικά και 5 συγκεντρωμένες πλευρικές φορτίσεις (Σχήμα 5.7). Χρησιμοποιήθηκαν 35 στοιχεία. Όλα τα στοιχεία είχαν τα παρακάτω χαρακτηριστικά. Πρέπει να αναφερθεί ότι οι διατομές W 12x79 χρησιμοποιήθηκαν για τα υποστυλώματα ενώ οι W 12x22 για τις δοκούς.

Υλικό	E (kN/m ²)	A(m ²)	Iz (m ⁴)	Mp (kNm)
W 12x79	210*10 ⁶	0.014762	0.00027	429
W 12x22	210*10 ⁶	0.004132	0.00006342	105.6

Πίνακας 4. Υλικά και χαρακτηριστικά διατομών κατασκευή

5.5.1 Μέγιστες Φορτίσεις

Οι μέγιστες τιμές των φορτίων προέκυψαν από τον ΕΑΚ2000 (47). Πιο συγκεκριμένα, αφού έγινε ιδιομορφική ανάλυση της παραπάνω κατασκευής, η πρώτη ιδιοπερίοδος υπολογίστηκε στα $T=0.84s$. Από αυτή και με χρήση του φάσματος του ΕΑΚ2000, για έδαφος κατηγορίας Β έχω

$$T_2 < T \text{ άρα}$$

$$\Phi_d(T) = \gamma_I A \frac{\eta \theta \beta_0}{q} \left(\frac{T_2}{T}\right)^{2/3} \text{ με τα παρακάτω}$$

$$\gamma_I = 1$$

$$A = 0.16 \text{ g}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{7}{2+\zeta\%}} = \sqrt{\frac{7}{2+4}} = 1.08$$

$$\theta = 1$$

$$\beta_0 = 2.5$$

$$q = 4$$

$$T_2 = 0.6 \text{ s}$$

$$T = 0.84 \text{ s}$$

Τελικά $\Phi_d(T) = 0.85 \text{ m/s}^2$. Η μάζα του κάθε ορόφου υπολογίστηκε ίσο με $M=18000$ και η μέγιστη δύναμη σε κάθε όροφο

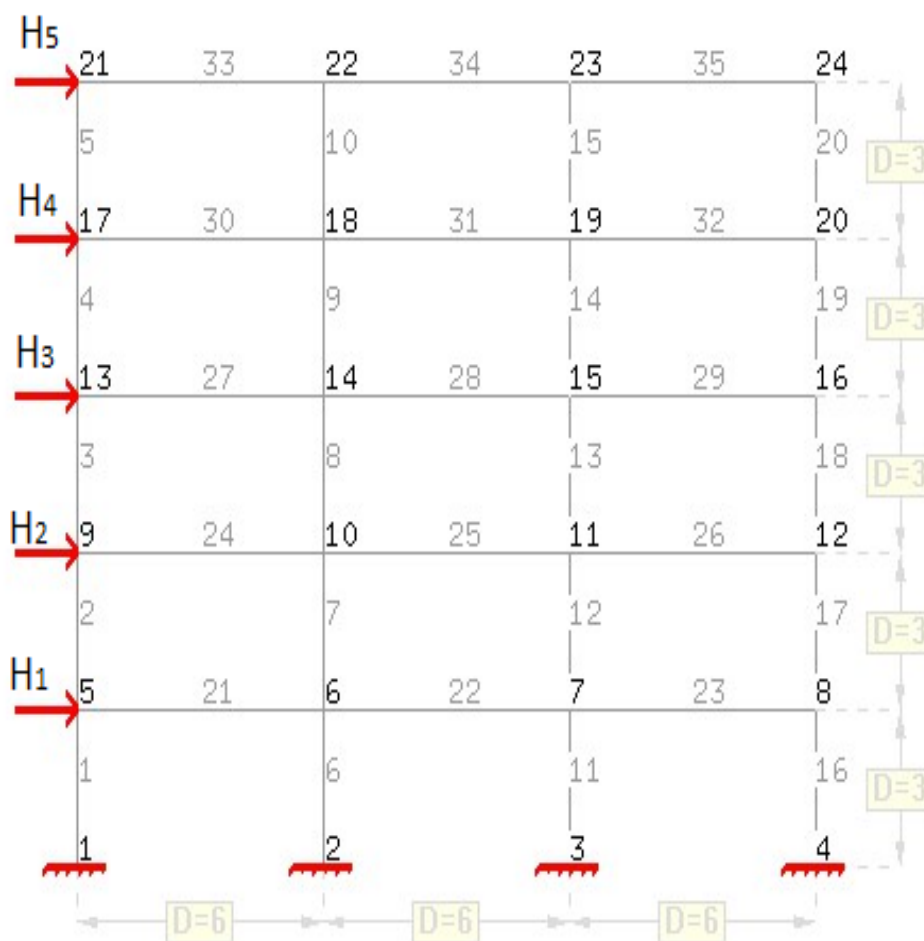
$$F_1 = V_0 \frac{m_1 h_1}{\sum_{j=1}^k m_j h_j} = 5.079 \text{ kN}$$

$$F_2 = V_0 \frac{m_2 h_2}{\sum_{j=1}^k m_j h_j} = 10.16 \text{ kN}$$

$$F_3 = V_0 \frac{m_3 h_3}{\sum_{j=1}^k m_j h_j} = 15.24 \text{ kN}$$

$$F_4 = V_0 \frac{m_4 h_4}{\sum_{j=1}^k m_j h_j} = 20.32 \text{ kN}$$

$$F_5 = V_0 \frac{m_5 h_5}{\sum_{j=1}^k m_j h_j} = 25.4 \text{ kN}$$



Σχήμα 5.8. Πενταώροφο πλαίσιο τριών ανοιγμάτων

5.5.2 Ανάλυση Ελαστικής Σταθεροποίησης (Elastic Shakedown)

Οι φορτίσεις είχαν τις συναρτήσεις

$$H_1 : -20.318 x^2 + 20.318 x$$

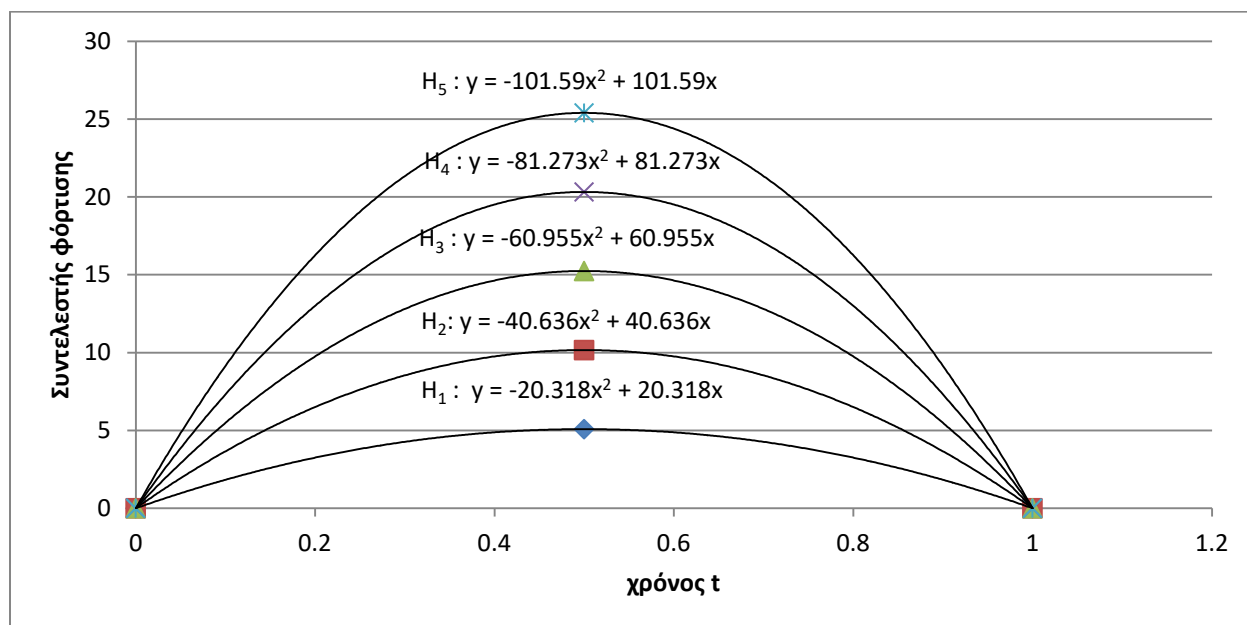
$$H_2 : 40.636 x^2 + 40.636 x$$

$$H_3 : 60.955 x^2 + 60.955 x$$

$$H_4 : 81.237 x^2 + 81.237 x$$

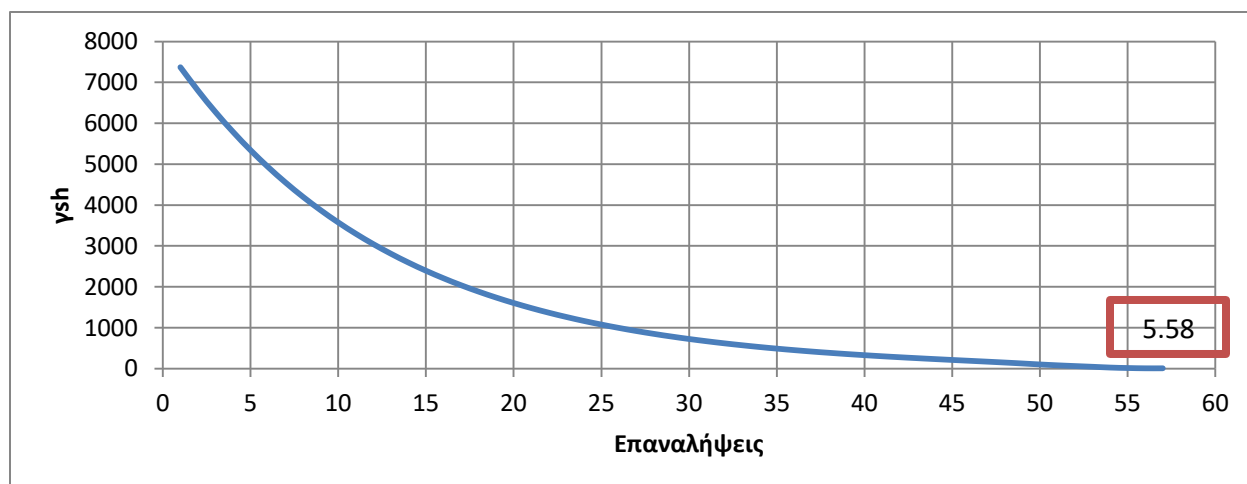
$$H_5 : 101.59 x^2 + 101.59 x$$

με διάγραμμα φόρτισης όπως φαίνεται παρακάτω (Διάγραμμα 5.10)

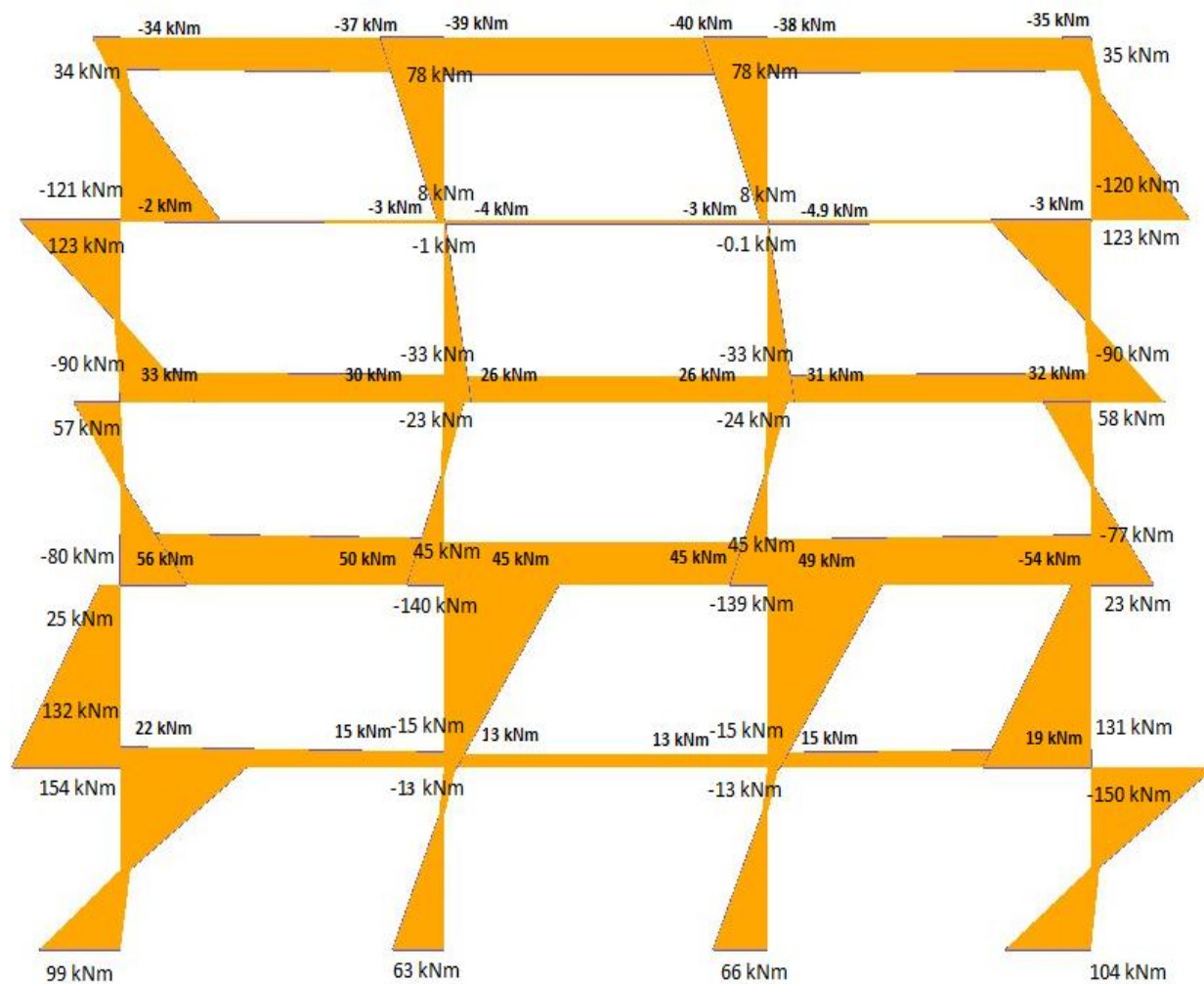


Διάγραμμα 5.11. Συνάρτηση φόρτισης στο πεδίο του χρόνου (φόρτιση αναλογικής μορφής)

Από την ανάλυση που έγινε, ο συντελεστής γ_{sh} ξεκίνησε από την 7372.62 και μειούμενος ακολουθώντας το παρακάτω διάγραμμα (Διάγραμμα 5.11) έφτασε στην τιμή 5.58. Το συνολικό φορτίο που θα προκαλέσει κατάρρευση μέσω ελαστικής σταθεροποίησης είναι $P=5.58*76.19=425.14$ kN.



Διάγραμμα 5.12. Σύγκλιση της RSDM-s στον συντελεστή σταθεροποίησης



Σχήμα 5.9. Διάγραμμα παραμενουσών ροπών

5.5.3 Οριακή ανάλυση (Limit Analysis)

Οι φορτίσεις είχαν τις συναρτήσεις

$$H_1 : 5.07$$

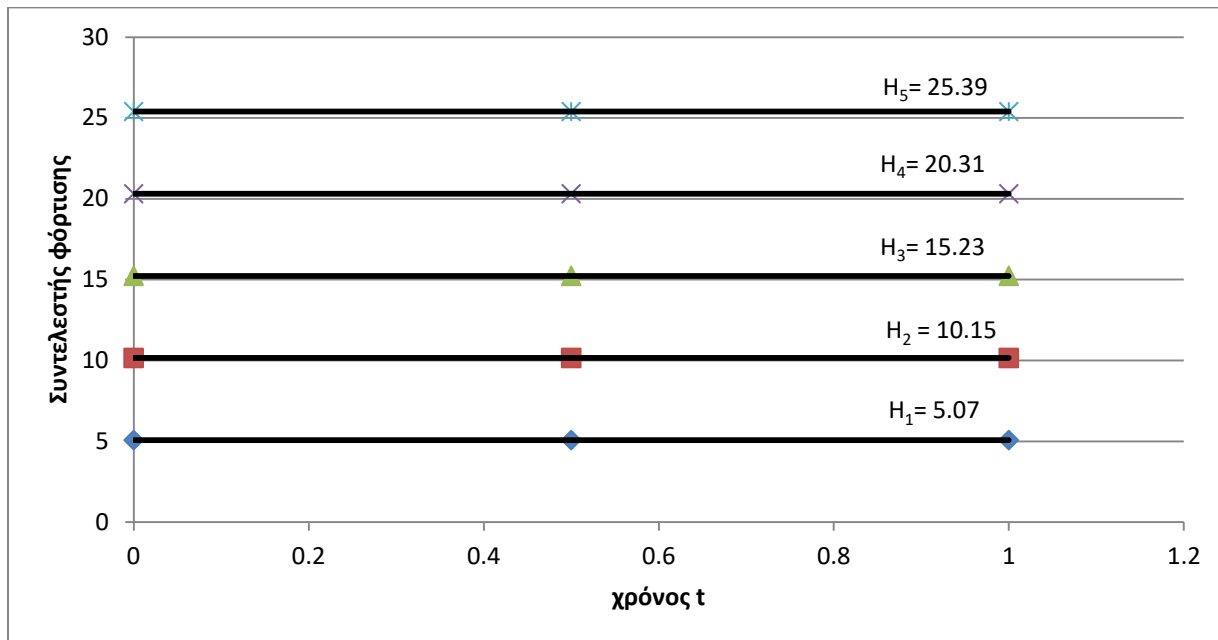
$$H_2 : 10.15$$

$$H_3 : 15.23$$

$$H_4 : 20.31$$

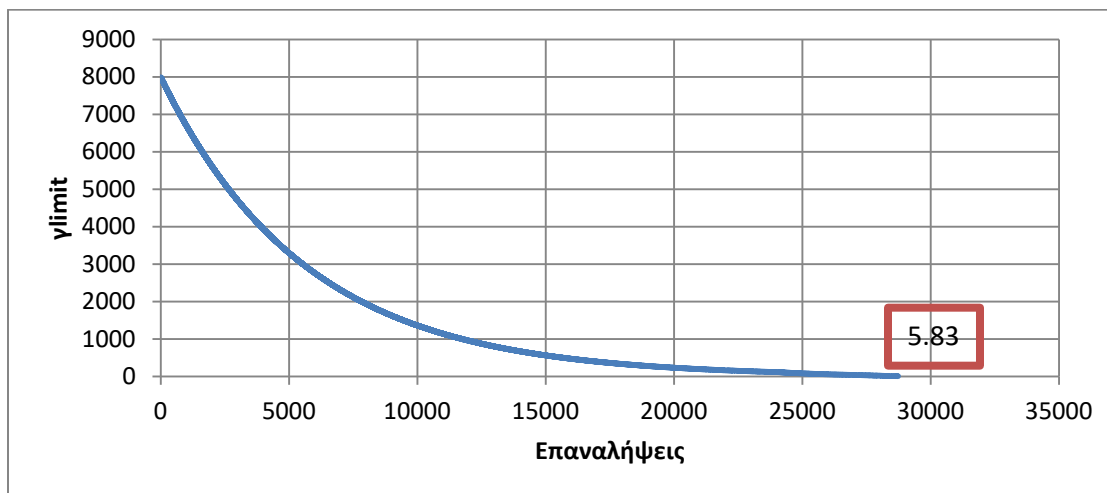
$H_5 : 25.39$

με διάγραμμα φόρτισης όπως φαίνεται παρακάτω (Διάγραμμα 5.12)



Διάγραμμα 5.13. Συνάρτηση φόρτισης στο πεδίο του χρόνου (σταθερή φόρτιση)

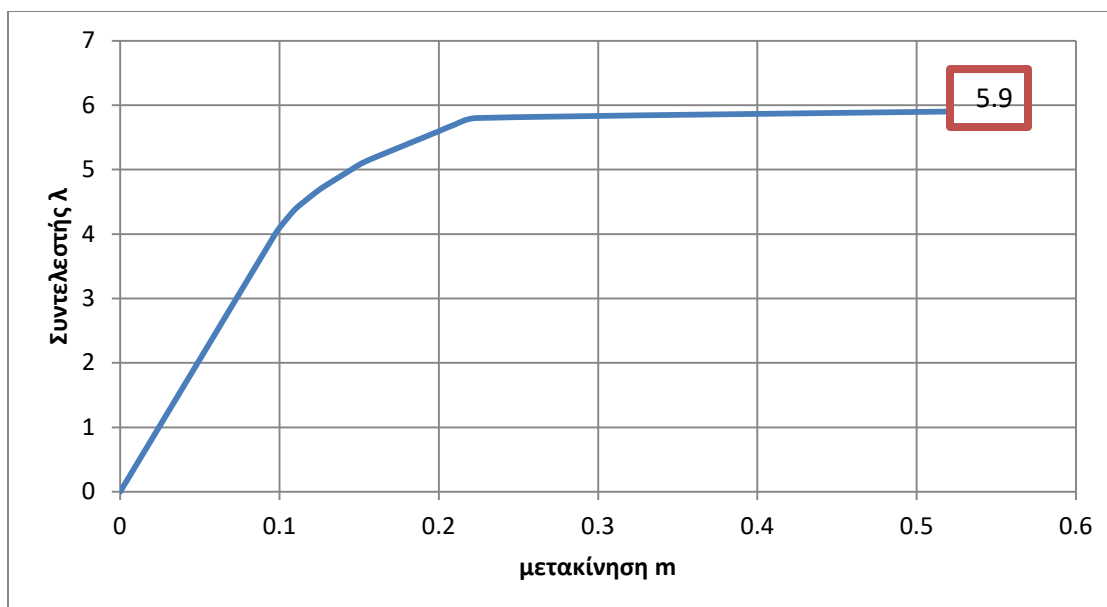
Από την ανάλυση που έγινε, ο συντελεστής γ_{limit} ξεκίνησε από την τιμή 7989 και μειούμενος έφτασε στην τιμή 5.83 (Διάγραμμα 5.13).



Διάγραμμα 5.14. Σύγκλιση της RSDM-S στον συντελεστή οριακού φορτίου

Το φορτίο κατάρρευσης δηλαδή υπολογίστηκε $P=5.83*76.19=444.187$ kN

η αντίστοιχη καμπύλη pushover (Διάγραμμα 5.14) που προέκυψε είναι η παρακάτω. Ο συντελεστής μεγέθυνσης των φορτίων βρέθηκε $\lambda=5.9$. Δηλαδή το φορτίο που θα προκαλέσει κατάρρευση σύμφωνα με την υπερωθητική ανάλυση είναι $P=5.9*76.19= 449.521$ kN



Διάγραμμα 5.15. Καμπύλη υπερωθητικής ανάλυσης

Παρατηρούμε ότι το οριακό φορτίο, υπολογισμένο τόσο από την μέθοδο RSDM-S, όσο και από την στατική υπερωθητική ανάλυση, βρίσκεται υψηλότερα από αυτό που προκαλεί κατάρρευση μέσω της ελαστική σταθεροποίησης. Το τελευταίο μάλιστα είναι 4.29% μικρότερο συγκριτικά με το οριακό φορτίο.

5.6 Δεκαώροφο πλαίσιο τριών ανοιγμάτων με 10 πλευρικά φορτία

Σαν πέμπτο παράδειγμα, εξετάστηκε δεκαώροφο πλαίσιο, τριών ανοιγμάτων με 2 υλικά και 10 συγκεντρωμένες πλευρικές φορτίσεις (Σχήμα 5.9). Χρησιμοποιήθηκαν 70 στοιχεία. Όλα τα στοιχεία είχαν τα παρακάτω χαρακτηριστικά. Πρέπει να αναφερθεί ότι οι διατομές W 12x79 χρησιμοποιήθηκαν για τα υποστυλώματα ενώ οι W 12x22 για τις δοκούς.

Υλικό	E (kN/m ²)	A(m ²)	Iz (m ⁴)	Mp (kNm)
W 12x79 (M1)	210*10 ⁶	0.014762	0.00027	429
W 12x22 (M2)	210*10 ⁶	0.004132	0.00006342	105.6

Πίνακας 5.5. Υλικά και χαρακτηριστικά διατομών κατασκευής

5.6.1 Μέγιστες Φορτίσεις

Οι μέγιστες τιμές των φορτίων προέκυψαν από τον ΕΑΚ2000 (47). Πιο συγκεκριμένα, αφού έγινε ιδιομορφική ανάλυση της παραπάνω κατασκευής, η πρώτη ιδιοπερίοδος υπολογίστηκε στα $T=1.91s$. Από αυτή και με χρήση του φάσματος του ΕΑΚ2000, για έδαφος κατηγορίας Β έχω

$$T_2 < T \text{ άρα}$$

$$\Phi_d(T) = \gamma_1 A \frac{\eta \theta \beta_0}{q} \left(\frac{T_2}{T}\right)^{2/3} \text{ με τα παρακάτω}$$

$$\gamma_1 = 1$$

$$A = 0.16 \text{ g}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{7}{2+\zeta\%}} = \sqrt{\frac{7}{2+4}} = 1.08$$

$$\theta = 1$$

$$\beta_0 = 2.5$$

$$q = 4$$

$$T_2 = 0.6s$$

$$T = 1.91s$$

Τελικά $\Phi_d(T) = 0.5 \text{ m/s}^2$. Η μάζα του κάθε ορόφου υπολογίστηκε ίσο με $M=18000$ και η μέγιστη δύναμη σε κάθε όροφο

$$F_1 = V_0 \frac{m_1 h_1}{\sum_{j=1}^k m_j h_j} = 1.63 \text{ kN}$$

$$F_2 = V_0 \frac{m_2 h_2}{\sum_{j=1}^k m_j h_j} = 3.26 \text{ kN}$$

$$F_3 = V_0 \frac{m_3 h_3}{\sum_{j=1}^k m_j h_j} = 4.9 \text{ kN}$$

$$F_4 = V_0 \frac{m_4 h_4}{\sum_{j=1}^k m_j h_j} = 6.53 \text{ kN}$$

$$F_5 = V_0 \frac{m_5 h_5}{\sum_{j=1}^k m_j h_j} = 8.16 \text{ kN}$$

$$F_6 = V_0 \frac{m_6 h_6}{\sum_{j=1}^k m_j h_j} = 9.8 \text{ kN}$$

$$F_7 = V_0 \frac{m_7 h_7}{\sum_{j=1}^k m_j h_j} = 11.43 \text{ kN}$$

$$F_8 = V_0 \frac{m_8 h_8}{\sum_{j=1}^k m_j h_j} = 13.06 \text{ kN}$$

$$F_9 = V_0 \frac{m_9 h_9}{\sum_{j=1}^k m_j h_j} = 14.7 \text{ kN}$$

$$F_{10} = V_0 \frac{m_{10} h_{10}}{\sum_{j=1}^k m_j h_j} = 16.33 \text{ kN}$$

5.6.2 Ανάλυση Ελαστικής Σταθεροποίησης (Elastic Shakedown)

Οι φορτίσεις είχαν τις συναρτήσεις

$$H_1 : - 6.53 x^2 + 6.53 x$$

$$H_2 : - 13.067 x^2 + 13.067 x$$

$$H_3 : - 19.6 x^2 + 19.6 x$$

$$H_4 : - 26.134 x^2 + 26.134 x$$

$$H_5 : - 32.667 x^2 + 32.667 x$$

$$H_6 : - 39.2 x^2 + 39.2 x$$

$$H_7 : - 45.374 x^2 + 45.374 x$$

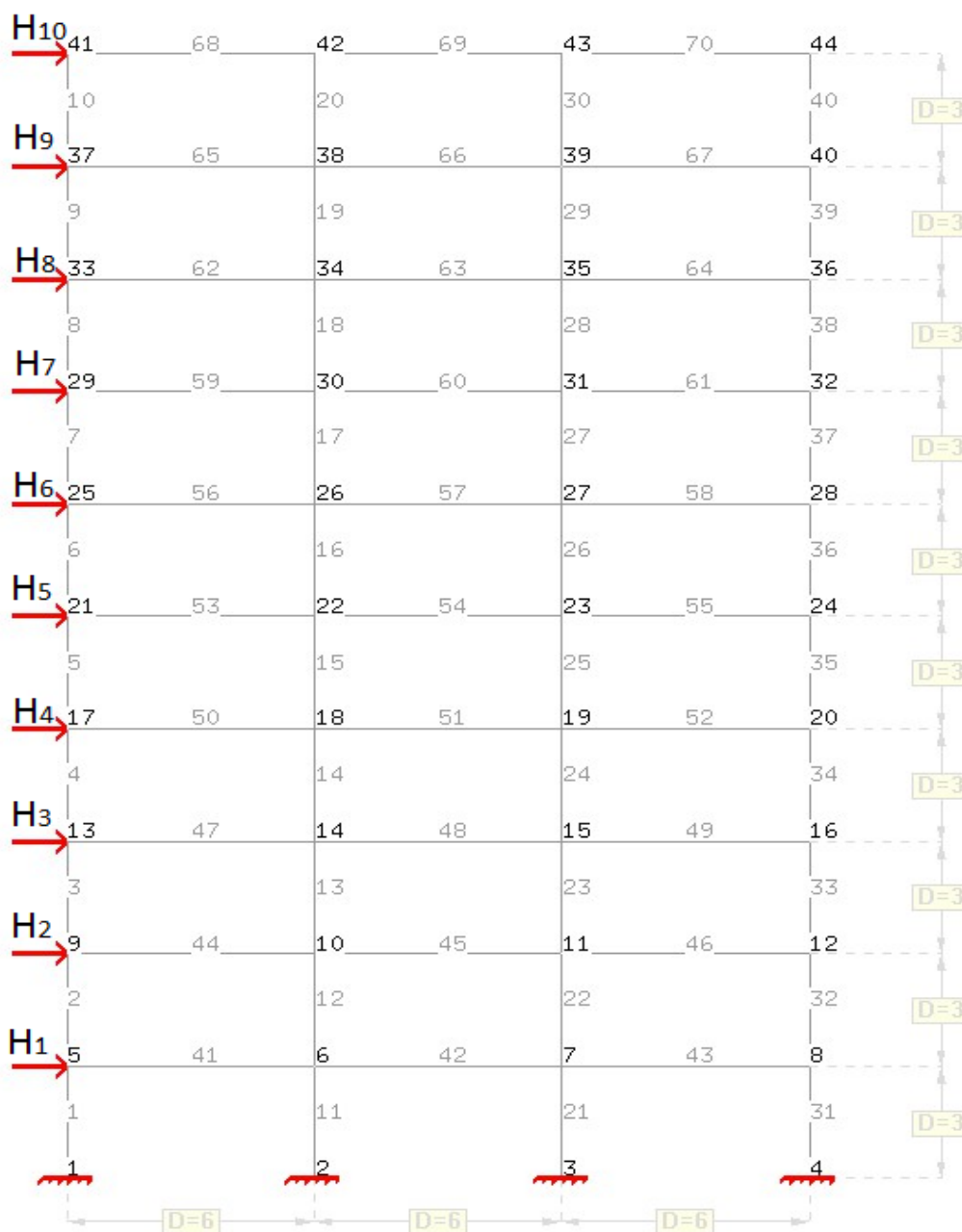
$$H_8 : - 52.267 x^2 + 52.267 x$$

$$H_9 : - 58.801 x^2 + 58.801 x$$

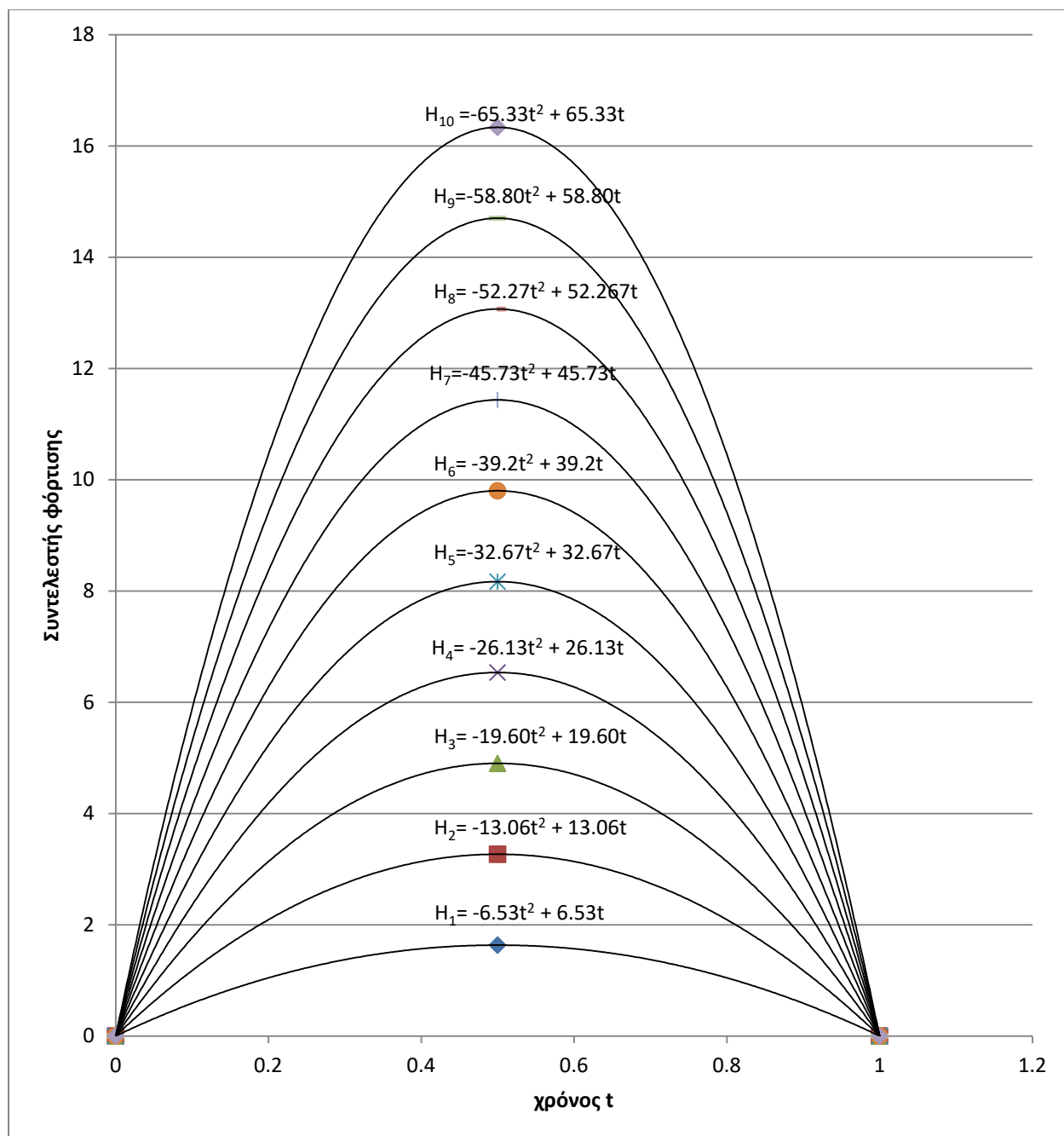
$$H_{10} : - 65.334 x^2 + 65.334 x$$

με διάγραμμα φόρτισης όπως φαίνεται παρακάτω (Διάγραμμα 5.15). Τα μέγιστα των φορτίσεων ήταν αυτά που υπολογίστηκαν στην 5.6.1

Από την ανάλυση που έγινε, ο συντελεστής γ_{sh} ξεκίνησε από την 1378.77 και μειούμενος ακολουθώντας το διάγραμμα 5.16 έφτασε στην τιμή 3.68. Το συνολικό φορτίο που θα προκαλέσει κατάρρευση μέσω ελαστικής σταθεροποίησης είναι $P=3.68*89.83= 330.57$ kN.

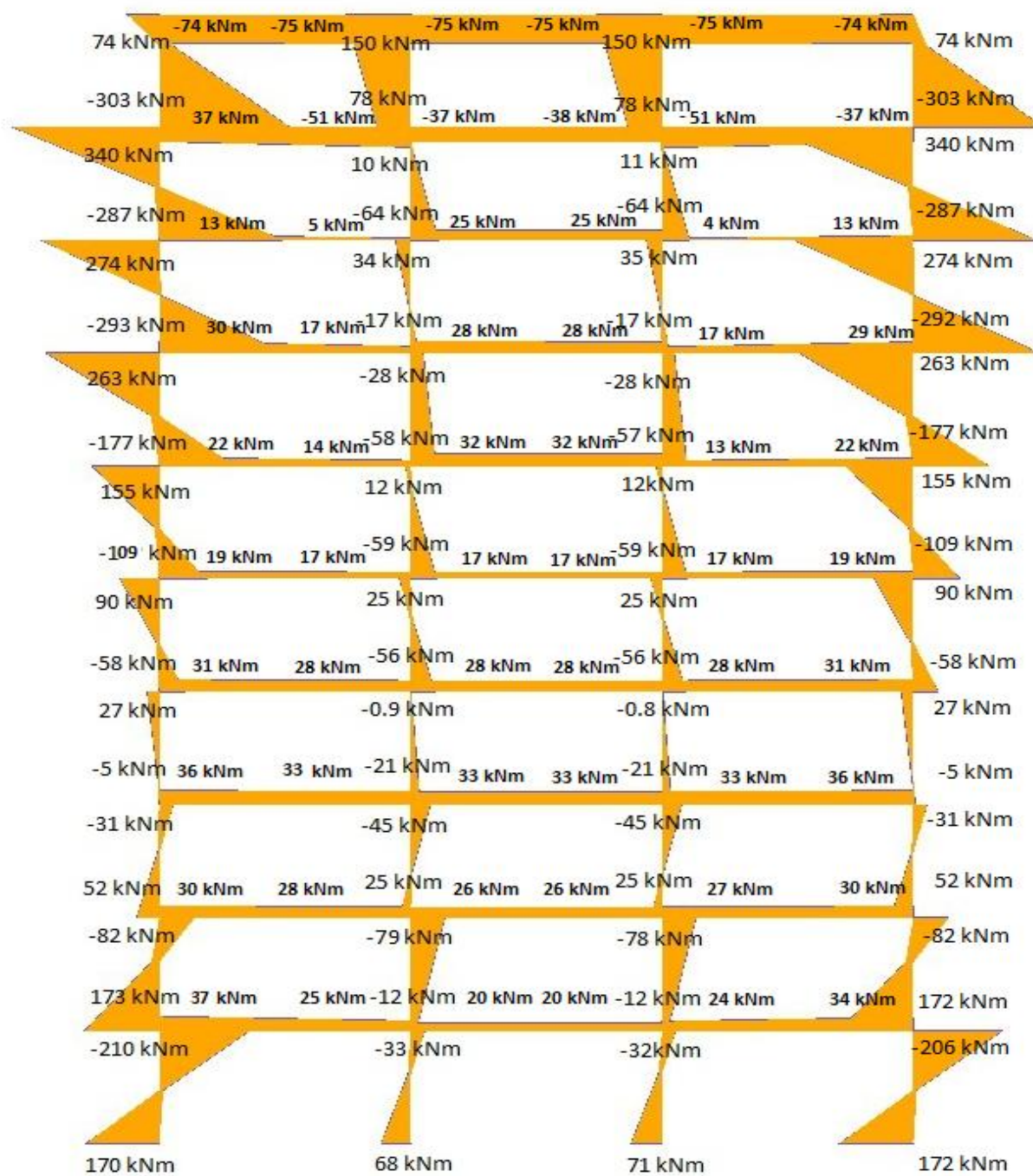


Σχήμα 5.10. Δεκαώροφο πλαίσιο τριών ανοιγμάτων

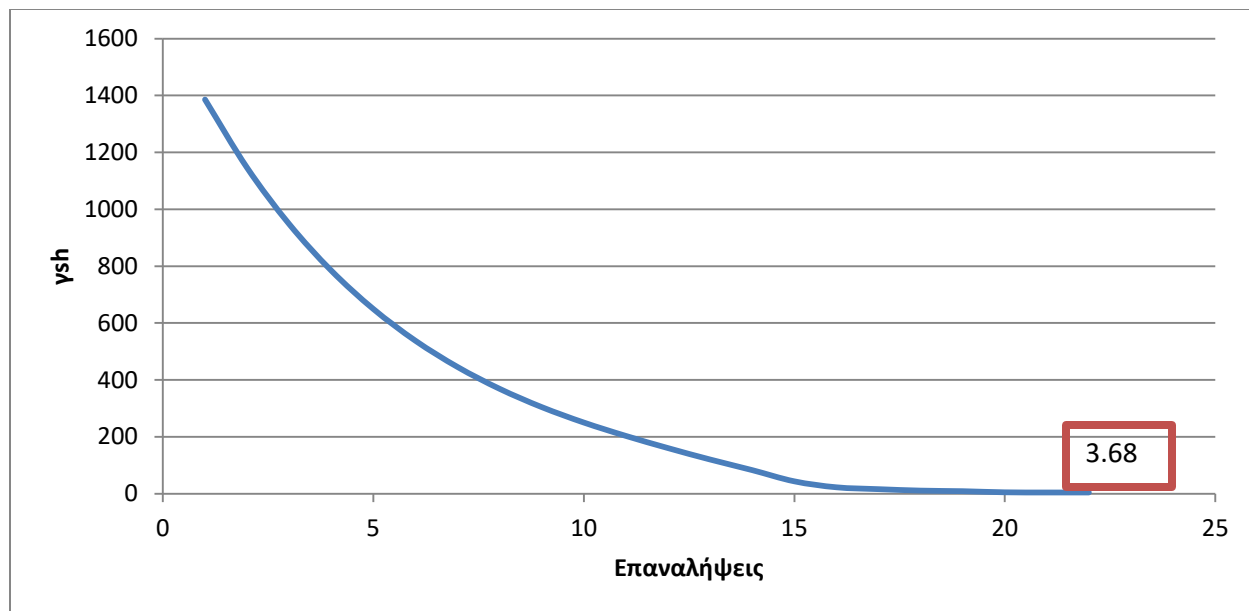


Διάγραμμα 5.16. Συνάρτηση φόρτισης στο πεδίο του χρόνου (φόρτιση αναλογικής μορφής)

Το διάγραμμα των παραμενουσών ροπών κατά την σύγκλιση της όλης διαδικασίας ήταν το παρακάτω (Σχήμα 5.10)



Σχήμα 5.11. Διάγραμμα παραμενουσών ροπών



Διάγραμμα 5.17. Σύγκλιση της RSDM-S στον συντελεστή σταθεροποίησης

5.6.3 Οριακή ανάλυση (Limit Analysis)

Οι φορτίσεις είχαν τις συναρτήσεις

H1 : 1.63

H2 : 3.26

H3 : 4.9

H4 : 6.53

H5 : 8.16

H6 : 9.80

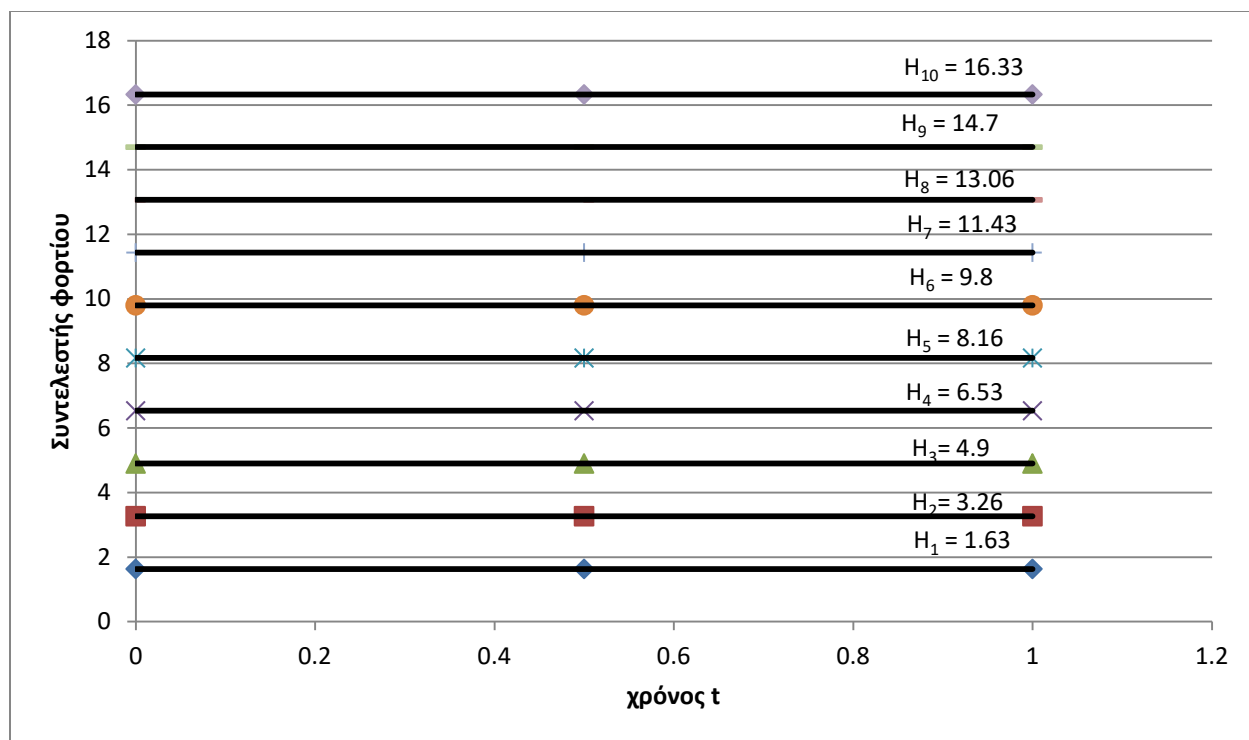
H7 : 11.43

H8 : 13.06

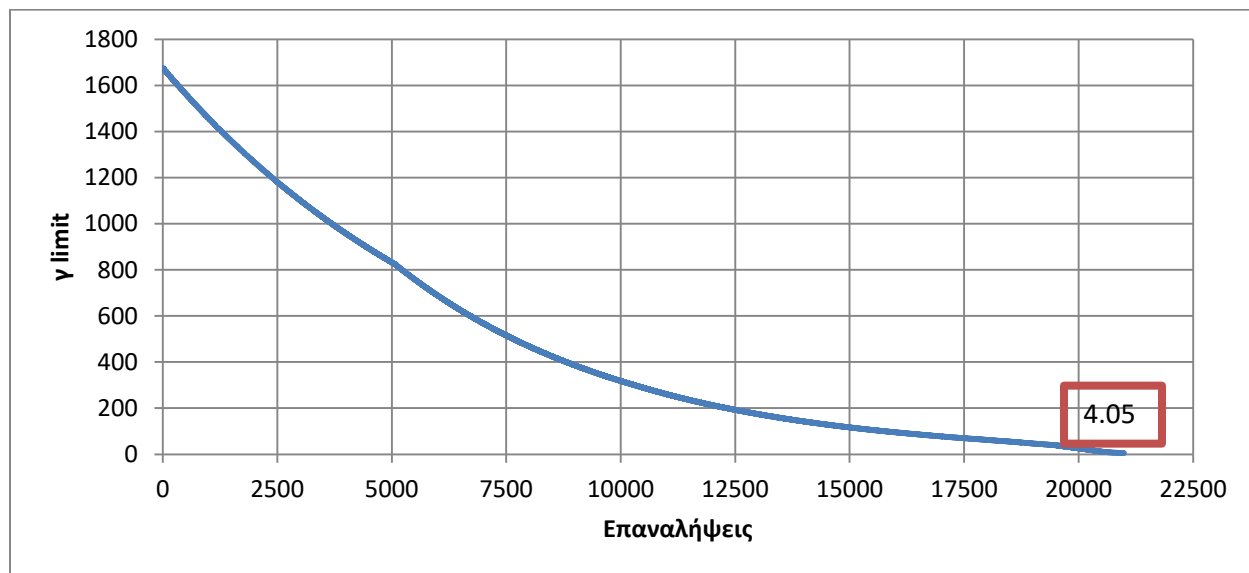
H9 : 14.7

H10 : 16.33

με διάγραμμα φόρτισης όπως φαίνεται παρακάτω (Διάγραμμα 5.17)



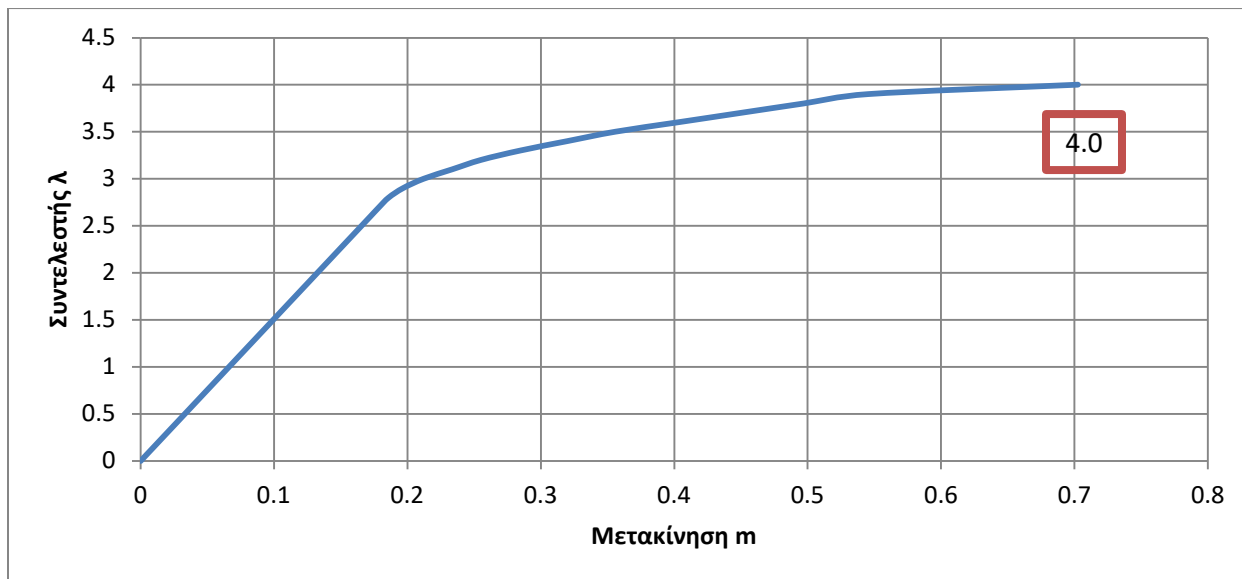
Διάγραμμα 5.18. Συνάρτηση φόρτισης στο πεδίο του χρόνου (σταθερή φόρτιση)



Διάγραμμα 5.19. Σύγκλιση της RSDM-S στον συντελεστή οριακού φορτίου

Το φορτίο κατάρρευσης δηλαδή υπολογίστηκε $P=4.05 \cdot 89.83 = 363.81 \text{ kN}$

η αντίστοιχη καμπύλη pushover (Διάγραμμα 5.19) που προέκυψε είναι η παρακάτω. Ο συντελεστής μεγέθυνσης των φορτίων βρέθηκε $\lambda=4.0$. Δηλαδή το φορτίο που θα προκαλέσει κατάρρευση σύμφωνα με την υπερωθητική ανάλυση είναι $P=4.0 \cdot 89.83 = 360 \text{ kN}$



Διάγραμμα 5.20. Καμπύλη υπερωθητικής ανάλυσης

Παρατηρούμε ότι το οριακό φορτίο, υπολογισμένο τόσο από την μέθοδο RSDM-S, όσο και από την στατική υπερωθητική ανάλυση, βρίσκεται υψηλότερα από αυτό που προκαλεί κατάρρευση μέσω της ελαστικής σταθεροποίησης. Το τελευταίο είναι 9.13% μικρότερο συγκριτικά με το οριακό φορτίο.

6. Συμπεράσματα

Από την όλη ανάλυση που έγινε στην εργασία προέκυψαν τα παρακάτω συμπεράσματα

- Η μέθοδος RSDM-S αποτελεί μία αξιόπιστη και αρκετά γρήγορη μέθοδο για την εξαγωγή του φορτίου σταθεροποίησης πλαισιακών κατασκευών
- Η ίδια μέθοδος μπορεί να τροποποιηθεί ελαφρώς, μετατρέποντας τη φόρτιση από αναλογικής μορφής σε σταθερή, και να χρησιμοποιηθεί για την εύρεση του οριακού φορτίου κατάρρευσης
- Από την ανάλυση των πλαισίων προκύπτει ότι το φορτίο ελαστικής σταθεροποίησης είναι μικρότερο του οριακού. Το εύρος των διαφορών που προέκυψαν ήταν από 4.29% για το πεντάροφο πλαίσιο του παραδείγματος 4 έως 9.14% για το δεκαρόφο πλαίσιο του παραδείγματος 5.
- Είναι εμφανές ότι κυκλικές φορτίσεις, όπως οι σεισμικές ή του ανέμου, οδηγούν τις πλαισιακές κατασκευές σε κατάρρευση λόγω σταθεροποίησης με ένταση μικρότερη από την οριακή που χρησιμοποιείται σήμερα από τους κανονισμούς.
- Τέλος, πρέπει να σημειωθεί ότι η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε μπορεί να διευρυνθεί για την ανάλυση τρισδιάστατων φορέων, όπως επίσης και να συμπεριληφθεί και η αλληλεπίδραση καμπτικής ροπής-αξονικής δύναμης για μια πιο πλήρη και κοντινή στην πραγματικότητα ανάλυση.

Παράρτημα

A. Ανάλυση πλαισίων με στοιχεία δοκού

A.1. Στοιχείο Δοκού Επίπεδου Πλαισίου

Ένα στοιχείο δοκού επίπεδου πλαισίου έχει έξι επικόμβιους βαθμούς ελευθερίας u_1 , v_1 , θ_1 και u_2 , v_2 , θ_2 . Προκειμένου να υπολογίσουμε το μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων θα πρέπει να υποθέσουμε μία κατανομή του πεδίου των μετατοπίσεων u και v κατά μήκος του στοιχείου, η οποία να αποδίδει κατά το δυνατόν πιστότερα την πραγματική παραμόρφωση του στοιχείου. Οι αξονικές μετατοπίσεις u ορίζονται με μια γραμμική, όμοια με εκείνη του στοιχείου δικτυώματος, ενώ η εγκάρσια μετατόπιση v εκφράζεται με μια κυβική κατανομή κατά μήκος του στοιχείου. Έτσι έχουμε τις σχέσεις

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x$$

$$v = \alpha_3 + \alpha_4 x + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 x^3$$

ή

$$u = [1 \ x] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

$$v = [1 \ x \ x^2 \ x^3] \begin{bmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Για τον υπολογισμό των γενικευμένων συντεταγμένων α_1 και α_2 έχω

$$\text{όταν } x=0 \quad u = u_1$$

$$\text{όταν } x=L \quad u = u_2 \quad (\text{A.3})$$

έτσι με την αντικατάσταση των σχέσεων στην παραπάνω προκύπτει ότι

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{ή } \{d\} = [A] \{\alpha\} \quad (\text{A.4})$$

η επίλυση ως προς $\{\alpha\}$ δίνει

$$\{\alpha\} = [A]^{-1} \{d\}$$

ή

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

με αντικατάσταση παραπάνω έχω

$$u = [1 \ x] [A]^{-1} \{d\}$$

$$\text{ή } u = [N] \{d\} \quad (\text{A.6})$$

όπου το μητρώο N δίνεται από τη σχέση

$$[N] = [1 \ x] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} = \left[1 - \frac{x}{L} \quad \frac{x}{L} \right] \quad (\text{A.7})$$

Για τον υπολογισμό του μητρώου δυσκαμψίας απαιτείται ο υπολογισμός του μητρώου παραμορφωσιμότητας. Η ανηγμένη παραμόρφωση συνδέεται με τις μετατοπίσεις του στοιχείου, μέσω της σχέσης

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} \quad (\text{A.8})$$

η οποία σε συνδυασμό με την παραπάνω γράφεται

$$\epsilon_x = \frac{dN_1}{dx} u_1 + \frac{dN_2}{dx} u_2 = -\frac{1}{L} u_1 + \frac{1}{L} u_2$$

ή σε μητρική μορφή

$$\epsilon_x = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = [B] \{d\} \quad (\text{A.9})$$

Το μητρώο δυσκαμψίας προκύπτει από την σχέση

$$[k] = \int_{V_e} [B]^T E [B] dV_e = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

Για τον υπολογισμό των καμπτικών συναρτήσεων σχήματος ακολουθείται η παρακάτω παρόμοια διαδικασία. Οι γενικευμένες συντεταγμένες $\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ συνδέονται με τις επικόμβιες μετατοπίσεις μέσω των συνοριακών συνθηκών του στοιχείου

$$v=v_1, \frac{dv}{dx}=\theta = \theta_1 \quad \text{όταν } x=0$$

$$v=v_2, \frac{dv}{dx}=\theta = \theta_1 \quad \text{όταν } x=L \tag{A.11}$$

Έτσι με την αντικατάσταση των σχέσεων προκύπτει η παρακάτω σχέση

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix}$$

ή

$$\{d_b\} = [A_b] \{\alpha_b\} \tag{A.12}$$

όπου ο δείκτης b αναφέρεται στα αντίστοιχα καμπτικά μεγέθη του στοιχείου. Η επίλυση της εξίσωσης ως προς $\{\alpha_b\}$ δίνει τη σχέση

$$\{\alpha_b\} = [A_b]^{-1} \{d_b\}$$

ή

$$\begin{bmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \tag{A.13}$$

$$v = [1 \ x \ x^2 \ x^3] [A_b]^{-1} \{d_b\} = [N_b] \{d_b\}$$

όπου το μητρώο των καμπτικών συναρτήσεων σχήματος δίνεται απο τη σχέση

$$[N_b] = \left[1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \quad x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \quad -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right] \tag{A.14}$$

Οι σχέσεις συνδυάζονται στη γενική σχέση

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & N_3 & 0 & N_5 & N_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

Οι μετατοπίσεις ενός εγκάρσιου επίπεδου της δοκού κατά τη διεύθυνση του άξονα x και σε απόσταση y από τον ουδέτερο άξονα της δοκού δίνονται από τη σχέση

$$u = u(x) - y \theta(x) \quad (\text{A.16})$$

η μοναδική ανηγμένη παραμόρφωση ϵ_x που υπάρχει στη δοκό εκφράζεται από τη σχέση

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} \quad (\text{A.17})$$

αφού οι διατμητικές παραμορφώσεις, λόγω της παραδοχής δοκού Bernoulli

$$2\epsilon_{xy} = \frac{\theta u}{\theta y} + \frac{\theta v}{\theta x} \text{ μηδενίζονται}$$

άρα η σχέση γίνεται

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} - y \frac{d^2u}{dx^2} \quad (\text{A.18})$$

Το μητρώο παραμορφώσεως $[B]$ θα προκύψει από τη μητρική σχέση που συνδέει τις ανηγμένες παραμορφώσεις με τις επικόμβιες μετατοπίσεις του στοιχείου. Οι παράγωγοι $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$ της σχέσης σε συνδυασμό με τις σχέσεις εκφράζονται ως εξής

$$\frac{du}{dx} = N_{1,x} u_1 + N_{2,x} u_2 \quad (\text{A.19})$$

ή

$$\frac{du}{dx} = [N_{1,x} \ N_{2,x}] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

και

$$\frac{d^2v}{dx^2} = N_{3,xx} v_1 + N_{4,xx} \theta_1 + N_{5,xx} v_2 + N_{6,xx} \theta_2 \quad (\text{A.20})$$

ή

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = [N_{3,xx} \ N_{4,xx} \ N_{5,xx} \ N_{6,xx}] \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.21})$$

$$\text{όπου } N_{i,xx} = \frac{d^2 N_i}{dx^2}$$

η ανηγμένη παραμόρφωση ε_x ορίζεται από τη σχέση

$$\varepsilon_x = [N_{1,x} \ -y N_{3,xx} \ -y N_{4,xx} \ N_{2,x} \ -y N_{5,xx} \ -y N_{6,xx}] \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

ή

$$\varepsilon_x = [B] \{d\} \quad (\text{A.22})$$

όπου οι όροι του μητρώου παραμορφώσεως δίνονται από τις σχέσεις

$$B_1 = -\frac{1}{L}$$

$$B_2 = -y \left[-\frac{6}{L^2} \left(1 - \frac{2x}{L} \right) \right]$$

$$B_3 = -y \left[-\frac{2}{L} \left(2 - \frac{3x}{L} \right) \right] \quad (\text{A.23})$$

$$B_4 = \frac{1}{L}$$

$$B_5 = -y \left[\frac{6}{L^2} \left(1 - \frac{2x}{L} \right) \right]$$

$$B_6 = -y \left[-\frac{2}{L} \left(1 - \frac{3x}{L} \right) \right]$$

Παρατηρούμε ότι οι όροι του μητρώου παραμορφώσεως, που αναφέρονται στην κάμψη είναι σταθερές ποσότητες, όπως οι όροι της αξονικής παραμόρφωσης. Οι καμπτικοί όροι, όπως είναι αναμενόμενο, εξαρτώνται από την απόσταση y του σημείου της διατομής από τον ουδέτερο άξονα της δοκού.

Το μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου δοκού επίπεδου πλαισίου υπολογίζεται από τη γενική έκφραση μετά την αντικατάσταση των μητρώων $[E]$ και $[B]$ με τα αντίστοιχα μητρώα στοιχείου που εξετάζουμε

$$[k] = \int_{V_e} [B]^T E [B] dV_e$$

και το προκύπτον μητρώο δυσκαμψίας είναι το παρακάτω

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (A.24)$$

A.2. Υπολογισμός καθολικού μητρώου δυσκαμψίας φορέα

Ο υπολογισμός του καθολικού μητρώου δυσκαμψίας του φορέα εκφράζεται ως εξής

$$[K] = \sum_m [t^{(m)}]^T [k^{(m)}] [t^{(m)}]$$

όπου $[k^{(m)}]$ είναι το μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου m στο καθολικό σύστημα και στους τοπικούς βαθμούς ελευθερίας, ενώ $[t^{(m)}]$ είναι το μητρώο, το οποίο αντιστοιχεί τους τοπικούς με τους καθολικούς βαθμούς ελευθερίας των κόμβων του στοιχείου

Το καθολικό διάνυσμα των επικόμβιων δράσεων υπολογίζεται αντίστοιχα από τη σχέση

$$\{R\} = \sum_m [t^{(m)}]^T \{r^{(m)}\} \quad (\text{A.25})$$

A.3. Αποθήκευση καθολικού μητρώου δυσκαμψίας

Ο τρόπος αποθήκευσης του μητρώου δυσκαμψίας του φορέα εξαρτάται από τη μέθοδο επίλυσης των εξισώσεων ισορροπίας καθώς και από την τεχνική διαχείρισης του μητρώου δυσκαμψίας που έχει επιλεγεί. Στο πρόγραμμα που συντάχθηκε για την εργασία, χρησιμοποιείται αποθήκευση τύπου ενεργού στήλης ή γραμμής του ορίζοντα, καθώς είναι μια οικονομική και εύχρηστη μέθοδος αποθήκευσης. Αυτή συνδυάζεται με την άμεση μέθοδο επίλυσης του Gauss ή του Cholesky. Στη μέθοδο αυτή αποθηκεύονται μόνο οι ενεργές στήλες του μητρώου δυσκαμψίας, οι οποίες περιέχουν τους όρους που απαιτούνται κατά την παραγοντοποίηση του μητρώου δυσκαμψίας. Το ύψος της ενεργού στήλης καθορίζεται από το τελευταίο μη-μηδενικό στοιχείο της αντίστοιχης στήλης του μητρώου δυσκαμψίας

A.4. Αλγόριθμος επίλυσης των εξισώσεων-Μέθοδος Cholesky

Η μέθοδος Cholesky είναι μια παραλλαγή της απαλοιφής Gauss, η οποία εφαρμόζεται όταν έχουμε να υπολογίσουμε τις μετατοπίσεις για διανύσματα ισοδυνάμων δράσεων. τα οποία δεν είναι γνωστά τη στιγμή της αρχικής επίλυσης. Τέτοιες περιπτώσεις συναντώνται συχνά στη μη γραμμική ανάλυση και στη δυναμική ανάλυση φορέων.

Η μέθοδος Cholesky παραγοντοποιεί το μητρώο δυσκαμψίας στη μορφή

$$[K] = [L] [L]^T \quad (\text{A.26})$$

όπου L είναι ένα κάτω τριγωνικό μητρώο. Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται σε συμμετρικά και θετικώς ορισμένα μητρώα. Μια παραλλαγή της μεθόδου Cholesky εφαρμόζεται σε μη συμμετρικά μητρώα και έχει τη μορφή

$$[K] = [L] [U] \quad (\text{A.27})$$

όπου [L] και [U] είναι κάτω και άνω τριγωνικά μητρώα, αντίστοιχα.

Μια άλλη παραλλαγή της μεθόδου Cholesky, η οποία εφαρμόζεται σε μη γραμμικές αναλύσεις φορέων, είναι η παραγοντοποίηση κατά Crout κατά την οποία το αρχικό μητρώο εκφράζεται από το γινόμενο

$$[K] = [L][Q][L]^T \quad (\text{A.28})$$

όπου L είναι ένα κάτω τριγωνικό μητρώο με μοναδιαίους διαγώνιους όρους και $[Q]$ είναι ένα διαγώνιο μητρώο. Η μέθοδος αυτή αν και διαφέρει ελάχιστα από την αρχική μέθοδο Cholesky είναι πιο ευσταθής και αξιόπιστη και γι' αυτό το λόγο χρησιμοποιείται ευρύτατα.

Μετά την παραγοντοποίηση του μητρώου δυσκαμψίας η επίλυση της μητρωικής εξίσωσης εκφράζεται αλγεβρικά ως εξής

$$\{D\} = [L]^{-1} [Q]^{-1} [L]^{-1} \{R\} \quad (A.29)$$

και πραγματοποιείται σε δύο στάδια

Στάδιο 1 - Επίλυση του υποπροβλήματος

$$[L] \{x\} = \{R\} \quad (A.30)$$

με μια εμπρός αντικατάσταση

$$\{x\} = [L]^{-1} \{R\} \quad (A.31)$$

Στάδιο 2 - Επίλυση του υποπροβλήματος

$$\{Q\}[L]^T \{D\} = \{x\} \quad (A.32)$$

με μια διαίρεση με διαγώνιο μητρώο

$$\{y\} = [Q]^{-1} \{x\} \quad (A.33)$$

και μια πίσω αντικατάσταση

$$\{D\} = [L]^{-T} \{y\} \quad (A.34)$$

ο υπολογισμός των ορίων των μητρώων $[L]$ και $[Q]$ προκύπτει με την εκτέλεση των πράξεων της εξίσωσης που αποτελεί το ανάπτυγμα της εξίσωσης

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & & & \\ & Q_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & Q_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & l_{21} & \dots & l_{n1} \\ & 1 & \dots & l_{n2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad (A.35)$$

Η παραπάνω διαδικασία θα πρέπει να τροποποιηθεί για να λαμβάνει υπόψη την αποθήκευση του μητρώου δυσκαμψίας με την μορφή της ενεργού στήλης. Μια σύντομη διατύπωση της διαδικασίας παραγοντοποίησης εκφράζεται ως εξής

$$Q_{11} = K_{11}$$

Για $j=2, n$

$$g_{mj,j} = K_{mj,j}$$

$$g_{ij} = K_{ij} - \sum_{r=m_j}^{i-1} l_{ri} g_{rj}, \quad i=(m_j + 1) \text{ έως } (j-1) \quad (\text{A.36})$$

$$l_{ij} = \frac{g_{ij}}{Q_{ii}}, \quad i= m_j \text{ έως } (j-1) \quad (\text{A.37})$$

$$Q_{ij} = K_{ij} - \sum_{r=m_j}^{j-1} l_{rj} g_{rj} \quad (\text{A.38})$$

τα στοιχεία l_{ij} που υπολογίζονται στη σχέση αναφέρονται στο άνω τριγωνικό μητρώο $[L]^T$. Αξίζει να σημειωθεί ότι τα αθροίσματα των σχέσεων, δεν περιέχουν όρους οι οποίοι βρίσκονται εκτός της ενεργού στήλης του μητρώου δυσκαμψίας.

Ο υπολογισμός των μετατοπίσεων γίνεται με την εκτέλεση της εμπρός και πίσω αντικατάστασης των σχέσεων, οι οποίες στην περίπτωση της ενεργού στήλης τροποποιούνται ως εξής

Εμπρός αντικατάσταση

$$x_1 = R_1$$

$$x_j = R_j - \sum_{r=m_j}^{j-1} l_{rj} x_r, \quad j=2 \text{ έως } n \quad (\text{A.39})$$

Πίσω αντικατάσταση

$$y_j = \frac{x_j}{Q_{jj}}, \quad j=1 \text{ έως } n$$

$$\{y^{(n)}\} = \{y\}$$

$$D_n = y_n^{(n)}$$

Για $j=n$ έως 2

$$y_r^{(r-1)} = y_r^{(j)} - l_{rj} D_j, \quad r=m_j \text{ έως } (j-1) \quad (\text{A.40})$$

$$D_{j-1} = y_{j-1}^{(j-1)}$$

Με τον αλγόριθμο αυτό η λύση $\{D\}$ αποθηκεύεται στη θέση των επικόμβιων δράσεων $\{R\}$.

B. Ολοκλήρωση Gauss-Legendre

Στο πρόγραμμα που αναπτύχθηκε, έγινε αριθμητική ολοκλήρωση με χρήση της μεθόδου Gauss-Legendre. Ένα ολοκλήρωμα με πεπερασμένα όρια, $\int_a^b f(x)dx$, μπορεί πάντα να μετασχηματιστεί σε ολοκλήρωμα στο διάστημα $[0,1]$ αν επιλέξουμε κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής. Έτσι, θέτουμε $x = \lambda t + \mu$ και ζητούμε να ισχύει $x = a$ όταν $t = -1$ και $x = b$ όταν $t = 1$. Τότε

$$x = \frac{b-a}{2} t + \frac{b+a}{2}$$

$$dx = \frac{b-a}{2} dt$$

Συνεπώς, μπορούμε πάντα να μετασχηματίσουμε ένα ολοκλήρωμα στο διάστημα $[a,b]$ σε άλλο στο διάστημα $[0,1]$ με τον τύπο

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_0^1 f\left(\frac{b-a}{2} t + \frac{b+a}{2}\right) dt \quad (\text{B.1})$$

Ο βασικός τύπος ολοκλήρωσης

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) \quad (\text{B.2})$$

μετασχηματίζεται στον ζητούμενο μέσω της παραπάνω αλλαγής ορίων ολοκλήρωσης

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) \quad (\text{B.3})$$

όπου x_i σταθερά σημεία στο $[0,1]$ και w_i συντελεστές βάρους.

Στη γενική περίπτωση, τα σημεία x_i , $i = 1, \dots, m$ είναι οι ρίζες του πολυωνύμου Legendre m τάξης, $P_m(x)$, και μπορούν να υπολογιστούν εύκολα, χωρίς τη λύση μη γραμμικών συστημάτων. Οι συντελεστές w_i δίνονται από την παρακάτω σχέση

$$W_i = \frac{2}{(1-x_i^2)[P'_m(x_i)]^2} \quad (\text{B.4})$$

Βιβλιογραφία

1. *A definition of stable inelastic material.* **Drucker, D.C.** 1959, ASME J. Appl. Mech. 26, σσ. 101–106.
2. *Zur plastizität des räumlichen Kontinuums.* **Melan, E.** 1938, Ing. Arch. 9, σσ. 116–.
3. **Koiter, W.** *General theorems for elastic–plastic solids.* North-Holland, Amsterdam : I.N. Sneddon, R. Hill (Eds.), 1960.
4. *A shakedown matrix theory allowing for workhardening and second-order effects.* **Maier, G.** Warsaw : s.n., 1972. Proceedings of the Symposium on Foundations of Plasticity.
5. *On the influence of geometrical nonlinearities on the shakedown of elastic–plastic structures.* **Weichert, D.** 1986, Int. J. Plast. 2, σσ. 135–.
6. *Shakedown theory for elastic plastic kinematic hardening bodies.* **Pham, D.C.** 2007, Int. J. Plast. 23, σσ. 1240–1259.
7. *Shakedown with nonlinear strain-hardening including structural computation using finite element.* **E. Stein, G. Zhang, J.A. König.** 1992, Int. J. Plast. 8, σσ. 1-31.
8. *Plasticity with non-linear kinematic hardening: modelling and shakedown analysis by the bipotential.* **G. Bodoville´, G. de Saxce.** 2001, Eur. J. Mech. A/Solids 20, σσ. 99-112.
9. *Shakedown theory in perfect elastoplasticity with associated and nonassociated flow-laws: a finite element, linear.* **Maier, G.** 1969, Meccanica 4, σσ. 1-11.
10. *Structural shakedown analysis by dual finite-element formulations.* **Morelle, P.** 1984, Eng. Struct. 6, σσ. 70-79.
11. *Modeling and computation of shakedown problems for nonlinear hardening materials.* **E. Stein, G. Zhang, Y. Huang.** 1993, Comput. Methods Appl. Mech Eng. 103, σσ. 247-272.
12. **M. Heitzer, M. Staat.** Basis reduction technique for limit and shakedown problems. [συγγρ. βιβλίου] M. Heitzer M. Staat. *Numerical methods for limit and shakedown analysis.* 2003, σσ. 1-55.
13. *Numerical shakedown analysis of damaged structures.* **Hachemi, A.,D. Weichert.** 1998, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 160, σσ. 57-70.
14. **K. Spiliopoulos, D. Weichert.** *Direct Methods for Limit States in Structures and Materials.* s.l. : Springer, 2014.
15. *An eigen-mode method in kinematic shakedown analysis.* **T. Zhang, L. Raad.** 2002, Int. J. Plast. 18, σσ. 71-90.

16. *A unified mathematical programming formulation of strain driven and interior point algorithms for shakedown and limit analysis.* **G. Garcea, L. Leonetti.** 2011, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 88, σσ. 1085-1111.
17. *On a simplified inelastic analysis of structures.* **J. Zarka, J.J. Engel, G. Inglebert.** 1980, *Nucl. Eng. Des.* 57, σσ. 333–368.
18. **J. Zarka, J. Frelat, G. Inglebert, P. Kasmal-Navidi.** *A New Approach to Inelastic Analysis of Structures.* Dordrecht : Martinus Nijhoff Pub, 1990.
19. *Shakedown state simulation techniques based on linear elastic solutions.* **A.R.S. Ponter, K.F. Carter.** 259-179, *Comput. Methods Appl. Mech, Eng.* 140, σ. 1997.
20. *A method of estimating limit loads by iterative elastic analysis I – simple examples.* **D. Mackenzie, T. Boyle.** 1993, *Int. J. Press. Vessel Pip.*, σσ. 77-95.
21. *The elastic compensation method for limit and shakedown analysis: a review.* **D. Mackenzie, J.T. Boyle, R. Hamilton.** 2000, *J. Strain Anal.*, σσ. 171-188.
22. *Limit analysis for a general class of yield conditions.* **A.R.S. Ponter, P. Fuschi, M. Engelhardt.** 2000, *Eur. J. Mech. A/Solids* 19, σσ. 401-421.
23. *Shakedown limits for a general yield condition: implementation and application for a von Mises yield condition.* **A.R.S. Ponter, M. Engelhardt.** 2000, *Eur. J. Mech. A/Solids* 19, σσ. 423–445.
24. *Shakedown and limit analyses for 3-D structures using the linear matching method.* **H.F. Chen, A.R.S. Ponter.** 2001, *Int. J. Press. Vessel Pip.* 78, σσ. 443–451.
25. *On the shakedown analysis of welded pipes.* **T. Li, H. Chen, W. Chen, J. Ure.** 2011, *Int. J. Press. Vessel Pip.* 88, σσ. 301–310.
26. *Peak loads and failure modes of steel-reinforced concrete beams: predictions by limit.* **A.A. Pisano, P. Fuschi, D. de Domenico.** 2013, *Eng. Struct.* 56, σσ. 477–488.
27. *Shakedown of unbound pavements.* **M. Boulbibane, I.F. Collins, A.R.S. Ponter, D. Weichert.** 2005, *Road Mat. Pavem. Des.* 6, σσ. 81-96.
28. *The linear matching method for the shakedown analysis of geotechnical problems.* **M. Boulbibane, A.R.S. Ponter.** 2006, *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.* 30, σσ. 157-179.
29. *A minimum theorem for cyclic load in excess of shakedown, with application to the evaluation of a ratchet.* **A.R.S. Ponter, H. Chen.** 2001, *Eur. J. Mech. A/Solids* 20, σσ. 539–553.
30. *A method for the evaluation of a ratchet limit and the amplitude of plastic strain for bodies subjected to cyclic loading.* **H.F. Chen, A.R.S. Ponter.** 2001, *Eur. J. Mech. A/Solids* 20, σσ. 555–571.

31. *A direct method on the evaluation of ratchet limit*. **H. Chen, A.R.S. Ponter**. 2010, ASME J. Press. Vessel Technol. 132 (4), σσ. 1-8.
32. *Non-cyclic shakedown/ratcheting boundary determination. Part 2: numerical implementation*. **R. Adisi-Asl, W. Reinhardt**. 2011, Int. J. Press. Vessel Pip. 88, σσ. 21–329.
33. *A direct method to predict cyclic steady states of elastoplastic structures*. **K.V. Spiliopoulos, K.D. Panagiotou**. 2012, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 223–224, σσ. 186–198.
34. **K.V. Spiliopoulos, K.D. Panagiotou**. The residual stress decomposition method (RSDM): a novel direct method to predict cyclic elastoplastic states. [συγγρ. βιβλίου] D. Weichert K. Spiliopoulos. *Direct Methods for Limit States in Structures and Materials*. s.l. : Springer, 2014, σσ. 139–155.
35. '*Über die Bemessung11 statisch unbeslimmter Stahltragwerke unter Beriicksichti3unz des elastiscll-plastischen Verllaltens des Baustoffes*'. **Bleich, H.** 1932, Bauingenieur, 13, σ. 261.
36. *Theorie stalisch unbestlimmter Systeme*. **Melan, E.** Berlin : s.n., 1936. 2nd Congr. Int. Assoc. Bridge Struct. 13ng., 43.
37. '*Elastic-plastic analysis of structures subjected to loads varying arbitrarily between prescribed lImHs*'. **Symonds, P. S. and Prager, W.** 1950, J. Appl. Mech, σσ. 17,315.
38. *Some remarks on plasttc shakedown theorems*. **Koiter, W. T.** 1952, 8th Int. Congr. Theor. Appl. Mech.
39. *A new general theorem on shake-down of elastic-plastic structures*. **Koiter, W. T.** 1956. Proc. k. Ned. Akad. Wet. (8). σσ. 59, 24.
40. '*General theorems for elastic-plastic solids*', *Progress in Solid Mechanics, vol. I*. **Koiter, W. T.** Amsterdam : s.n., 1960.
41. **Smith, D. L.** *Plastic limit analysis and synthesis of structures by linear programming*. London Univ. : Ph.D thesis, 1974.
42. *Plastic design and thermal stresses*. **Prager, W.** 1956, B. Weld. J., σσ. 3,355.
43. *A displacement bounding principle in shakedown of structures subjected to cydic loads*. **Capurso, M.** 1974, Int. J. Solids Stmcturu, σσ. 10, 77.
44. **J.B., Martin**. *Plasticity: Fundamentals and general results*. s.l. : M.I.T. Press, 1975.
45. *Unified Approach toTheory of Plastic Structures*. **Cohn, M.Z., Ghosh, S.K. and Parimi, S.R.** s.l. : Journal of the Engineering Mechanics,ASCE, October 1975, Τόμ. Vol 98.
46. **Baker, J.F., Horne, M.R. and Heyman, J.** *The Steel Skeleton Vol II*. s.l. : Cambridge University Press, 1956.

47. **ΟΑΣΠ. ΕΑΚ 2000.** Αθήνα : ΟΑΣΠ, Απρίλιος 2001.

48. *The calculation of failure loads on plane frames under arbitrary loading programmes'*. **Symonds, P. S. and Neal, B. G.** 1950, J. Inst. Civil Engrs, σσ. 35,41.

49. *Recent progress in the plastic methods of structural analysis.* **Symonds, P. S. and Neal, B. G.** 1951, J. Franklin Inst., σσ. 252, 383, 469.