

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Δ.Π.Μ.Σ. Υπολογιστικής Μηχανικής  
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών  
Τομέας Ρευστών  
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής  
& Βελτιστοποίησης

Αεροδυναμική Βελτιστοποίηση Δίτροχου  
Μηχανοκίνητου Οχήματος Με Χρήση Της Συνεχούς  
Συζυγούς Μεθόδου

Μεταπτυχιακή Εργασία

Θεόδωρος Λύρας

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2016



## Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον επιβλέποντα καθηγητή, Δρ. Κυριάκο Γιαννάκογλου, για την επιστημονική καθοδήγησή και υποστήριξή που μου παρείχε κατά τη διάρκεια της μεταπτυχιακής αυτής εργασίας, αλλά και καθ' όλη τη διάρκεια του ΔΠΜΣ.

Θα ήθελα ακόμα να ευχαριστήσω όλα τα μέλη της Μονάδας Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου και ιδιαίτερα τον Δρ. Ευάγγελο Παπουτσή - Κεχαγιά για την πολύτιμη βοήθειά του.

Τέλος, ευχαριστίες θα αξίζουν πάντα οι αγαπημένοι μου γονείς και λίγοι ακόμα άνθρωποι, χωρίς τους οποίους τίποτα δεν θα ήταν τόσο εύκολο.



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
Δ.Π.Μ.Σ. ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ  
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ  
ΜΟΝΑΔΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΡΕΥΣΤΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ  
& ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

## Αεροδυναμική βελτιστοποίηση δίτροχου μηχανοκίνητου οχήματος με χρήση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου

Μεταπτυχιακή Εργασία  
του

**Θεοδώρου Λύρα**

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου  
Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Φεβρουάριος 2016

### Περίληψη

Σκοπός της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας είναι η αεροδυναμική ανάλυση και, εν συνεχεία, η βελτιστοποίηση της μορφής του ανεμοθώρακα δίτροχου αγωνιστικού μηχανοκίνητου οχήματος με τελικό στόχο τη μείωση του συντελεστή της οπισθέλκουσας δύναμης. Η αεροδυναμική ανάλυση πραγματοποιήθηκε με χρήση του ανοιχτού λογισμικού OpenFOAM ενώ η βελτιστοποίηση μορφής διεξήχθη με λογισμικό που βασίζεται στις συζυγείς μεθόδους και έχει αναπτυχθεί από τη Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης (ΜΠΥΡ&Β) του τομέα ρευστών της Σχολής Μηχανολόγων Μηχανικών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου (ΕΜΠ).

Συγκεκριμένα, στο πρώτο τμήμα της εργασίας, πραγματοποιείται ανάλυση ευαισθησίας της λύσης ως προς την πυκνότητα του υπολογιστικού πλέγματος και παρατίθενται τα αποτελέσματα. Επιλύονται, με χρήση του OpenFOAM, οι Reynold-Averaged Navier-Stokes (RANS) εξισώσεις θεωρώντας χρονικά σταθερή ροή ασυμπίεστου ρευστού με τα μοντέλα τύρβης  $k - \epsilon$ , SST (shear stress transport)  $k - \omega$  και Spalart-Allmaras. Τέλος, υπολογίζονται ο συντελεστής οπισθέλκουσας δύναμης του διτρόχου, η συνολική οπισθέλκουσα δύναμη που δέχονται δίτροχο και αναβάτης όπως επίσης και η οπισθέλκουσα δύναμη η οποία ασκείται από τη ροή στον ανεμοθώρακα και παρουσιάζονται

τα αντίστοιχα αποτελέσματα.

Το δεύτερο τμήμα της εργασίας υλοποιείται με χρήση κώδικα συζυγών μεθόδων της ΜΠΥΡ&Β. Βελτιστοποίηση μορφής της γεωμετρίας λαμβάνει χώρα με κώδικα ο οποίος βασίζεται στη Συνεχή Συζυγή Μέθοδο. Ο κώδικας εκτελεί τη μέθοδο της απότομης καθόδου χρησιμοποιώντας όμως τη συνεχή συζυγή μέθοδο για τον προσδιορισμό της κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης για περιορισμό του υπολογιστικού κόστους. Ως αντικειμενική συνάρτηση λαμβάνεται ο συντελεστής οπισθέλκουσας δύναμης του διτρόχου. Η διαδικασία συμπληρώνεται με εκτέλεση λογισμικού παραμετροποίησης και αυτοματοποιημένης μετατόπισης του υπολογιστικού πλέγματος, η λειτουργία του οποίου βασίζεται σε ογκομετρικές B-spline. Η μεταπτυχιακή αυτή εργασία κλείνει με την παράθεση και σχολιασμό των αποτελεσμάτων.

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS  
MSC OF COMPUTATIONAL MECHANICS  
SCHOOL OF MECHANICAL ENGINEERING  
FLUIDS DEPARTMENT  
PARALLEL CFD & OPTIMIZATION UNIT

## Shape Optimization Of A Powered Two-Wheel Motor Vehicle Using The Continuous Adjoint Method

MSc Thesis  
by

**Theodoros Lyras**

Supervisor: Kyriakos C. Giannakoglou  
Professor NTUA

Athens, February 2016

### **Abstract**

The aim of this MSc thesis is to conduct the numerical flow analysis and, then, perform shape optimization of the windshield of a powered two-wheel motor vehicle having as an objective, the decrease of the drag force coefficient. CFD analysis has been performed with the use of OpenFOAM, an open license software, while the shape optimization was carried out with the use of software that was developed by the Parallel CFD & Optimization Unit (PCOpt) of the Fluids Department of the School of Mechanical Engineering of the National Technical University of Athens (NTUA).

Initially, the sensitivity of the solution of flow equations with respect to the mesh cell size is being investigated and the results are presented. The steady-state Reynolds-Averaged Navier-Stokes (RANS) equations for incompressible fluids are being computed using OpenFOAM. For the modeling of turbulence,  $k - \epsilon$ , SST (shear stress transport)  $k - \omega$  and the Spalart–Allmaras models were used for comparison. Moreover, the drag force coefficient of the vehicle, the total drag force applied to both vehicle and rider and the total drag force exerted on the windshield are computed and results are presented.

Subsequently, the shape optimization software, which has been developed by PCOpt/LTT, is used. Optimization is carried out based on the Continuous Adjoint Method by implementing the steepest descent optimization algorithm, which uti-

lizes, however, the continuous adjoint method for the computation of the gradient of the objective function in order to limit the computational cost of the procedure. The vehicle's drag force coefficient is used as the objective function. The procedure is coupled with a parameterization and mesh displacement software based on volumetric B-spline functions. The final results are presented and commented upon.



## Ακρωνύμια

EMΠ	Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
ΜΠΤΡ&Β	Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης
ΥΡΔ	Υπολογιστική Ρευστοδυναμική
<hr/>	
CAD	Computer-Aided Design
CAM	Computer-Aided Manufacturing
CFD	Computational Fluid Dynamics
DNS	Direct Numerical Simulation
GBM	Gradient Based Method
GPL	General Public Licence
LES	Large Eddy Simulation
MPI	Message Passing Interface
NTUA	National Technical University of Athens
NURBS	Non-Uniform Rational Basis Spline
OpenFOAM	Open source Field Operation And Manipulation
PCopt	Parallel CFD & Optimization unit
RANS	Reynolds-Averaged Navier-Stokes
SIMPLE	Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations
SOO	Single Objective Optimization
SST	Shear Stress Transport



# Περιεχόμενα

Περιεχόμενα	i
<b>1 Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
1.1 Σκοπός της διπλωματικής εργασίας . . . . .	1
1.2 Ελεύθερο λογισμικό OpenFOAM . . . . .	2
1.3 Λογισμικό βελτιστοποίησης της ΜΠΥΡ&Β . . . . .	4
1.4 Δομή μεταπτυχιακής εργασίας . . . . .	5
<b>2 Γένεση υπολογιστικού πλέγματος</b>	<b>7</b>
2.1 Περιγραφή του φυσικού προβλήματος . . . . .	7
2.2 Γένετης πλέγματος SnappyHexMesh . . . . .	9
2.3 Έλεγχος τελικού πλέγματος και ανάλυση ευαισθησίας . . . . .	14
<b>3 Εξισώσεις κίνησης των ρευστών</b>	<b>19</b>
3.1 Οι εξισώσεις Navier - Stokes . . . . .	19
3.2 Οι εξισώσεις Reynolds - Averaged Navier - Stokes (RANS) . . . . .	22
3.3 Μοντέλα τύρβης . . . . .	24
3.4 Δυνάμεις σε στερεά σώματα περιρρεόμενα από ρευστό . . . . .	28
<b>4 Παραμετρικές καμπύλες B-spline και NURBS</b>	<b>31</b>
4.1 Πεπλεγμένες και παραμετρικές μορφές . . . . .	32
4.2 Πολυωνυμικές καμπύλες Bezier και ρητές καμπύλες Bezier . . . . .	33
4.3 Επιφάνειες ταυυστικού γινομένου . . . . .	36
4.4 Καμπύλες B-spline: Ορισμοί και ιδιότητες . . . . .	38
4.5 Επιφάνειες B-spline: Ορισμοί και ιδιότητες . . . . .	40

4.6	Καμπύλες NURBS: Ορισμοί και ιδιότητες . . . . .	42
4.7	Επιφάνειες NURBS: Ορισμοί και ιδιότητες . . . . .	46
4.8	Παραμετροποίηση και μετατόπιση πλέγματος για βελτιστοποίηση μορφής	48
<b>5</b>	<b>Αεροδυναμική βελτιστοποίηση και η συνεχής συζυγής μέθοδος</b>	<b>53</b>
5.1	Μέθοδος απότομης καθόδου . . . . .	54
5.2	Εύρεση παραγώγων ευαισθησίας με χρήση της συνεχούς συζυγούς με- θόδου . . . . .	55
5.3	Παρουσίαση βρόχου βελτιστοποίησης . . . . .	62
<b>6</b>	<b>Αποτελέσματα</b>	<b>65</b>
6.1	Σύγκριση μοντέλων τύρβης . . . . .	66
6.2	Αποτελέσματα επίλυσης εξισώσεων ροής . . . . .	67
6.3	Βελτιστοποίηση μορφής ανεμοθώρακα . . . . .	72
<b>7</b>	<b>Συμπεράσματα - Επίλογος</b>	<b>79</b>
	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>83</b>

# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

### 1.1 Σκοπός της διπλωματικής εργασίας

Στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία, υποβάλλεται σε αεροδυναμική ανάλυση και εν συνεχεία σε διαδικασία βελτιστοποίησης η γεωμετρία δίτροχου αγωνιστικού μηχανοκίνητου οχήματος με σκοπό τη μείωση του συντελεστή της οπισθέλκουσας δύναμης. Συγκεκριμένα, το τμήμα του διτρόχου που βελτιστοποιείται είναι ο ανεμοθώρακας ο οποίος βρίσκεται στο μπροστινό τμήμα του οχήματος, καλύπτει τα όργανα ελέγχου (ταχύμετρο, στροφόμετρο) και παρέχει αεροδυναμική κάλυψη στον αναβάτη. Τα πεδία ταχύτητας και πίεσης περί του διτρόχου, προσδιορίστηκαν με την επίλυση των εξισώσεων Reynolds-Averaged Navier-Stokes (RANS) θεωρώντας χρονικά σταθερή ροή ασυμπίεστου ρευστού. Το πρόβλημα προσεγγίστηκε ως χρονικά αμετάβλητο αφού το υπολογιστικό κόστος που συνεπάγεται η δυναμική επίλυση του είναι εξαιρετικά μεγάλο. Η βελτιστοποίηση της γεωμετρίας πραγματοποιήθηκε χρησιμοποιώντας την αιτιοκρατική μέθοδο της απότομης καθόδου (Steepest Descent). Ως αντικειμενική συνάρτηση επιλέχθηκε η εξίσωση του συντελεστή οπισθέλκουσας δύναμης του διτρόχου ( $C_d$ ) ενώ ο υπολογισμός της κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης έγινε με την εφαρμογή της συνεχούς συζυγούς μεθόδου (continuous adjoint method). Η πορεία των βημάτων που ακολουθήθηκαν είναι η εξής:

α. Προσδιορισμός των γεωμετρικών χαρακτηριστικών της συνολικής γεωμετρίας (διαστάσεις και μετωπική επιφάνεια) όπως επίσης και προσδιορισμός γεωμετρικών χαρακτηριστικών των τμημάτων του διτρόχου που παρουσιάζουν ενδιαφέρον και συγκεκριμένα ο ανεμοθώρακας του μπροστινού τμήματος του οχήματος. Τα στοιχεία αυτά είναι αναγκαία στα επόμενα βήματα της βελτιστοποίησης και δεν ήταν γνωστά εκ των προτέρων, αφού η γεωμετρία του διτρόχου προέρχεται από τα παραδείγματα εκμάθησης του λογισμικού υπολογιστικής ρευστοδυναμικής (ΥΡΔ) OpenFOAM.

β. Γένεση υπολογιστικού πλέγματος με βάση τη δεδομένη γεωμετρία, με χρήση του πλεγματοποιητή SnappyHexMesh στο περιβάλλον του «ανοιχτού» λογισμικού OpenFOAM. Συγκεκριμένα, δημιουργήθηκαν έξι (6) πλέγματα διαφορετικής πυκνότητας κελιών. Κάθε πλέγμα από αυτά ελέγχθηκε και βρέθηκε να πληρεί τις προδιαγραφές ποιότητας που απαιτεί ο επιλύτης των εξισώσεων ροής.

γ. Επίλυση των εξισώσεων RANS σε υπολογιστικό χωρίο γύρω από το δίτροχο, με χρήση του μοντέλου τύρβης SST (shear stress transport)  $k - \omega$  [1], για κάθε ένα από τα έξι πλέγματα διαφορετικής πυκνότητας, με χρήση του λογισμικού ΥΠΔ OpenFOAM. Ανάλυση της ευαισθησίας της λύσης σε σχέση με την πυκνότητα του πλέγματος και εξαγωγή συμπερασμάτων. Υπολογισμός του συντελεστή οπισθέλκουσας δύναμης του διτρώχου, υπολογισμός της συνολικής οπισθέλκουσας δύναμης που δέχονται δίτροχο και αναβάτης όπως επίσης και της οπισθέλκουσας δύναμης που ασκείται από τη ροή μόνο στον ανεμοθώρακα, προσδιορίζοντας τελικά την ποσοστιαία επίδρασή του τελευταίου στη συνολική οπισθέλκουσα δύναμη.

δ. Επιλογή ενός εκ των έξι πλεγμάτων λαμβάνοντας υπόψη τις «αντικρουόμενες» παραμέτρους της υπολογιστικής ακρίβειας και υπολογιστικού κόστους. Εκ νέου επίλυση των εξισώσεων ροής στο επιλεγθέν πλέγμα με χρήση δύο ακόμα μοντέλων τύρβης, του μοντέλου  $k - \epsilon$  [2] και του μοντέλου Spalart–Allmaras [3]. Παρουσίαση και σχολιασμός των αποτελεσμάτων.

ε. Αεροδυναμική βελτιστοποίηση της γεωμετρίας του ανεμοθώρακα με χρήση κώδικα από τη «Μονάδα παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης» (ΜΠΥΡ&Β) του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου (ΕΜΠ). Για τη βελτιστοποίηση, ο κώδικας αρχικά παραμετροποιεί το υπάρχον πλέγμα στο σημείο του ανεμοθώρακα με χρήση ογκομετρικών B-spline. Με αυτόν τον τρόπο, οι μεταβλητές βελτιστοποίησης, οι οποίες σε άλλη περίπτωση θα ήταν οι κόμβοι του πλέγματος και θα ανέρχονταν σε εκατοντάδες χιλιάδες, περιορίζονται σε λίγες εκατοντάδες κάνοντας τη βελτιστοποίηση εφικτή από άποψης χρόνου και υπολογιστικού κόστους. Με αντικειμενική συνάρτηση τον συντελεστή οπισθέλκουσας και με μεταβλητές τις συντεταγμένες των σημείων ελέγχου των ογκομετρικών B-spline, ο κώδικας βελτιστοποίησης υλοποιεί τη μέθοδο της απότομης καθόδου χρησιμοποιώντας όμως τη συνεχή συζυγή μέθοδο για τον προσδιορισμό της κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης για περιορισμό του υπολογιστικού κόστους. Το αποτέλεσμα της εκτέλεσης του κώδικα βελτιστοποίησης είναι μια νέα γεωμετρία η οποία παρουσιάζει χαμηλότερη τιμή του συντελεστή οπισθέλκουσας, το οποίο ήταν και το ζητούμενο. Παρουσίαση, σύγκριση και σχολιασμός των λύσεων των εξισώσεων ροής, πρό και μετά την βελτιστοποίηση.

## 1.2 Ελεύθερο λογισμικό OpenFOAM

Το OpenFOAM (Open source Field Operation And Manipulation) είναι λογισμικό υπολογιστικής ρευστοδυναμικής ανοιχτού κώδικα. Σήμερα ανήκει στο OpenFOAM

Foundation και διανέμεται αποκλειστικά υπό την άδεια τύπου GPL (General Public Licence). Εντός των όρων της άδειας GPL δίνεται στον χρήστη η ελευθερία να χρησιμοποιήσει, να μετατρέψει και να επαναδιανέμει το λογισμικό. Το OpenFOAM άρχισε να αναπτύσσεται από το 1989 στο Imperial College του Λονδίνου από τον Henry Weller και το 2004 κυκλοφόρησε η πρώτη έκδοσή του από την OpenCFD Ltd .[4]

Το OpenFOAM έχει γραφτεί στη γλώσσα προγραμματισμού C++ και διαθέτει ένα ευρύ φάσμα δυνατοτήτων που εκτείνονται από εφαρμογές υπολογιστικής ρευστοδυναμικής για την επίλυση διάφορων τύπων ροών (που εμπλέκουν χημικές αντιδράσεις, τύρβη, μεταφορά θερμότητας κ.α.) μέχρι και εφαρμογές επίλυσης εξισώσεων δυναμικής ανάλυσης στερεών σωμάτων, ηλεκτρομαγνητισμού ακόμα και εξισώσεις που εμπίπτουν στην επιστήμη των οικονομικών. Η επίλυση των εξισώσεων μπορεί να γίνει παράλληλα αξιοποιώντας έτσι, στο μέγιστο βαθμό, την υποδομή σε υλικό/λογισμικό που διαθέτει ο χρήστης, στον οποίον παρέχει και τη δυνατότητα να συντάξει και να χρησιμοποιήσει δικούς του επιλύτες για τις εξισώσεις που τον ενδιαφέρουν. Για αυτόν τον λόγο αλλά και γενικά λόγω της «ανοιχτής» φύσης του χρησιμοποιείται ευρέως στην ακαδημαϊκή κοινότητα ενώ βρίσκει και εμπορική εφαρμογή . Η τελευταία διαθέσιμη έκδοση είναι η 3.0.1 η οποία κυκλοφόρησε τον Δεκέμβριο του 2015, ενώ η έκδοση που χρησιμοποιήθηκε για τις ανάγκες της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας είναι η έκδοση 2.2.1 η οποία κυκλοφόρησε τον Ιούλιο του 2013.[5]

Εκτός της βασικής του λειτουργίας, δηλαδή την επίλυση εξισώσεων ρευστοδυναμικής, το OpenFOAM παρέχει στον χρήστη περαιτέρω εργαλεία για την αντιμετώπιση αναγκών που προκύπτουν προ και μετά τη διαδικασία της επίλυσης. Συγκεκριμένα, για την γένεση υπολογιστικού πλέγματος προ της διαδικασίας της επίλυσης, παρέχει τον παραλληλοποιημένο γενέτη πλέγματος SnappyHexMesh, ενώ το κύριο εργαλείο για την επεξεργασία των αποτελεσμάτων μετά την επίλυση είναι το ParaView στο οποίο έχει γίνει η απαραίτητη προσθήκη λογισμικού για να είναι συμβατό με τη μορφή στην οποία αποθηκεύει τα αποτελέσματα το OpenFOAM.[4]

Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας, μας ενδιαφέρει, όπως αναφέρθηκε νωρίτερα, η επίλυση των εξισώσεων που περιγράφουν την χρονικά μόνιμη, τυρβώδη, ασυμπίεστη ροή αέρα γύρω από στερεό αντικείμενο (δίτροχο μηχανοκίνητο όχημα) το οποίο βρίσκεται επί στερεού εδάφους. Για τη συγκεκριμένη εφαρμογή, έγινε χρήση του επιλύτη SIMPLE (semi-implicit method for pressure-linked equations) που παρέχει το OpenFOAM και ο οποίος μπορεί να εκτελεστεί επιλέγοντας το επιθυμητό μοντέλο τύρβης από μία εκτεταμένη λίστα. Το μοντέλο τύρβης  $k - \epsilon$  [2], το μοντέλο SST (Shear Stress Transport)  $k - \omega$  [1] και το μοντέλο Spalart–Allmaras [3] είναι αυτά τα οποία επιλέχθηκαν να χρησιμοποιηθούν στη μοντελοποίηση.

### 1.3 Λογισμικό βελτιστοποίησης της ΜΠΥΡ&Β

Η διαδικασία της βελτιστοποίησης της μορφής του ανεμοθώρακα δίτροχου οχήματος πραγματοποιήθηκε με χρήση λογισμικού της ΜΠΥΡ&Β. Το λογισμικό υλοποιεί τη μέθοδο βελτιστοποίησης της απότομης καθόδου κάνοντας χρήση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου για την εύρεση της κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού. Το λογισμικό συμπληρώνεται από κώδικα παραμετροποίησης της προς βελτιστοποίηση γεωμετρίας και αυτόματη μετατόπιση του υπολογιστικού πλέγματος σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης.

Πιο συγκεκριμένα, η μέθοδος της απότομης καθόδου ανήκει στις αιτιοκρατικές μεθόδους βελτιστοποίησης και είναι η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε για τη βελτιστοποίηση της γεωμετρίας του ανεμοθώρακα του διτρόχου. Χαρακτηριστικό της μεθόδου είναι ότι απαιτεί σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης τον υπολογισμό της κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού και είναι πλεονέκτημά της ότι δεν απαιτεί πληροφορία για το Εσσιανό μητρώο του συστήματος (δεύτερες παραγώγους)[6]. Η απόδοσή της εξαρτάται από την αρχική λύση, από την οποία ξεκινά η αναζήτηση ελαχίστου, από τη βαθμωτή ποσότητα  $\eta$  η οποία ρυθμίζει το μήκος του βήματος με το οποίο προσεγγίζει η μέθοδος τη βέλτιστη λύση και τέλος από τη μορφή της συνάρτησης.

Για τον υπολογισμό της κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης γίνεται χρήση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου (continuous adjoint method). Γενικά, η συζυγής μέθοδος αποτελεί υπολογιστικό-μαθηματικό εργαλείο για τον υπολογισμό της κλίσης μιας συνάρτησης (της αντικειμενικής συνάρτησης του συντελεστή οπισθέλκουσας δύναμης στην συγκεκριμένη περίπτωση), εξασφαλίζοντας παράλληλα την ικανοποίηση των βασικών εξισώσεων του εκάστοτε προβλήματος (εδώ, των εξισώσεων της ασυμπίεστης, χρονικά αμετάβλητης, τυρβώδους ροής)[6]. Η εύρεση της κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης είναι πρακτικά η εύρεση των μερικών παραγώγων της συνάρτησης ως προς καθεμιά από τις μεταβλητές της (μεταβλητές σχεδιασμού), πλήθους  $N$ , ο αριθμός των οποίων προκύπτει από την παραμετροποίηση της γεωμετρίας ενδιαφέροντος. Στην παρούσα εργασία ο αριθμός των μεταβλητών σχεδιασμού ήταν  $N = 375$ . Συγκριτικά με άλλες μεθόδους, στις συζυγείς μεθόδους η παραμετροποίηση της προς βελτιστοποίηση γεωμετρίας είναι περισσότερο σημαντική, αφού εκτός του ότι καθορίζει το εύρος των πιθανών τελικών γεωμετριών, εμπλέκεται και στη μαθηματική διατύπωση της μεθόδου βελτιστοποίησης. Ένα σημαντικό πλεονέκτημα της μεθόδου είναι το γεγονός, ότι το υπολογιστικό κόστος για τον προσδιορισμό της κλίσης είναι ανεξάρτητο του πλήθους  $N$  των μεταβλητών σχεδιασμού.

Η παραμετροποίηση του τμήματος του ανεμοθώρακα του μηχανοκίνητου διτρόχου έγινε με κώδικα ο οποίος βασίζεται σε ογκομετρικών B-spline. Ο κώδικας της ΜΠΥΡ&Β υλοποιεί την παραμετροποίηση δίνοντας τη δυνατότητα στο χρήστη να ορίσει «τυχαία» σημεία ελέγχου στο χώρο γύρω από την περιοχή ενδιαφέροντος, οι συντεταγμένες των οποίων αποτελούν τις μεταβλητές σχεδιασμού. Εκτός της παραμετροποίησης, ο κώδικας



υλοποιεί και την μετατόπιση του υπολογιστικού πλέγματος στο τέλος του εκάστοτε κύκλου βελτιστοποίησης. Η ικανότητα της αυτόματης μετατόπισης του πλέγματος είναι εξαιρετικά σημαντική και επιταχύνει σε τεράστιο βαθμό τη διαδικασία βελτιστοποίησης αφού απαλείφει την ανάγκη της εκ νέου δημιουργίας πλέγματος, χειροκίνητα, σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης.[7]

## 1.4 Δομή μεταπτυχιακής εργασίας

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία απαρτίζεται από επτά κεφάλαια. Η διαδικασία γένεσης υπολογιστικού πλέγματος όπως επίσης και τα αποτελέσματα της ανάλυσης ευαισθησίας της λύσης σε σχέση με την πυκνότητα του πλέγματος, περιγράφονται στο κεφάλαιο 2. Οι εξισώσεις Navier-Stokes, οι οποίες διέπουν τη ροή του αέρα γύρω από το δίτροχο μηχανοκίνητο όχημα παρατίθενται στο κεφάλαιο 3. Στο ίδιο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι εξισώσεις Reynolds-Averaged Navier-Stokes (RANS) και τα μοντέλα τύρβης  $k - \epsilon$ ,  $k - \omega$ , SST  $k - \omega$  και Spalart-Allmaras. Οι ιδιότητες των καμπυλών B-spline και NURBS αναφέρονται στο κεφάλαιο 4 το οποίο περιέχει και μια περιγραφή της λειτουργίας του λογισμικού παραμετροποίησης και μετατόπισης πλέγματος της ΜΠΥΡ&Β. Το κεφάλαιο 5 αναφέρεται στη μέθοδο της απότομης καθόδου και περιέχει το θεωρητικό υπόβαθρο της συνεχούς συζυγούς μεθόδου. Το κεφάλαιο κλείνει με την αλγοριθμική περιγραφή ενός κύκλου βελτιστοποίησης. Τα αποτελέσματα της επίλυσης των εξισώσεων RANS γύρω από το όχημα με χρήση των μοντέλων τύρβης  $k - \epsilon$ , SST  $k - \omega$  και Spalart-Allmaras, όπως επίσης και τα αποτελέσματα της διαδικασίας αεροδυναμικής βελτιστοποίησης του ανεμοθώρακα του διτρόχου, παρουσιάζονται στο κεφάλαιο 6. Τέλος, το κεφάλαιο 7 περιέχει τα συμπεράσματα που εξάγονται από τα αποτελέσματα της εργασίας αυτής.



# Κεφάλαιο 2

## Γένεση υπολογιστικού πλέγματος

### 2.1 Περιγραφή του φυσικού προβλήματος

Όπως ήδη αναφέρθηκε, το ενδιαφέρον στην παρούσα εργασία στρέφεται στη βελτιστοποίηση της μορφής του ανεμοθώρακα του μπροστινού τμήματος δίτροχου μηχανοκίνητου οχήματος ο οποίος καλύπτει τα όργανα ελέγχου (ταχύμετρο, στροφόμετρο) και παρέχει αεροδυναμική κάλυψη στον αναβάτη. Στο σχήμα 2.1 παρουσιάζεται οπτικοποίηση της ροής εντός αεροδυναμικής σήραγγας. Ο ανεμοθώρακας του οχήματος επιδρά στη ροή κατευθύνοντάς την όσο το δυνατόν πάνω από το προστατευτικό κράνος του αναβάτη για ελαχιστοποίηση της οπισθέλκουσας δύναμης.

Η γεωμετρία του δίτροχου οχήματος με αναβάτη προέρχεται από τα παραδείγματα εκμάθησης του λογισμικού υπολογιστικής ρευστοδυναμικής OpenFOAM. Είναι δεδομένη σε αρχείο τύπου .obj το οποίο παρουσιάζεται στο σχήμα 2.2 με χρήση του ελεύτερου λογισμικού ParaView.

Οι διαστάσεις της γεωμετρίας είναι:

Μήκος οχήματος	2,032 μέτρα
Πλάτος οχήματος	0,664 μέτρα
Ύψος οχήματος (χωρίς αναβάτη)	1,118 μέτρα
Ύψος συνολικό (με αναβάτη)	1,351 μέτρα
Μεταξόνιο	1,440 μέτρα

Η αρχή των αξόνων  $(0, 0, 0)$  είναι το σημείο επαφής του μπροστινού τροχού της μοτοσυκλέτας με το έδαφος ενώ ο πίσω τροχός εφάπτεται στο έδαφος στο σημείο με συντεταγμένες  $(1,44, 0, 0)$ . Τα σημεία αυτά αναφέρονται για την περίπτωση που

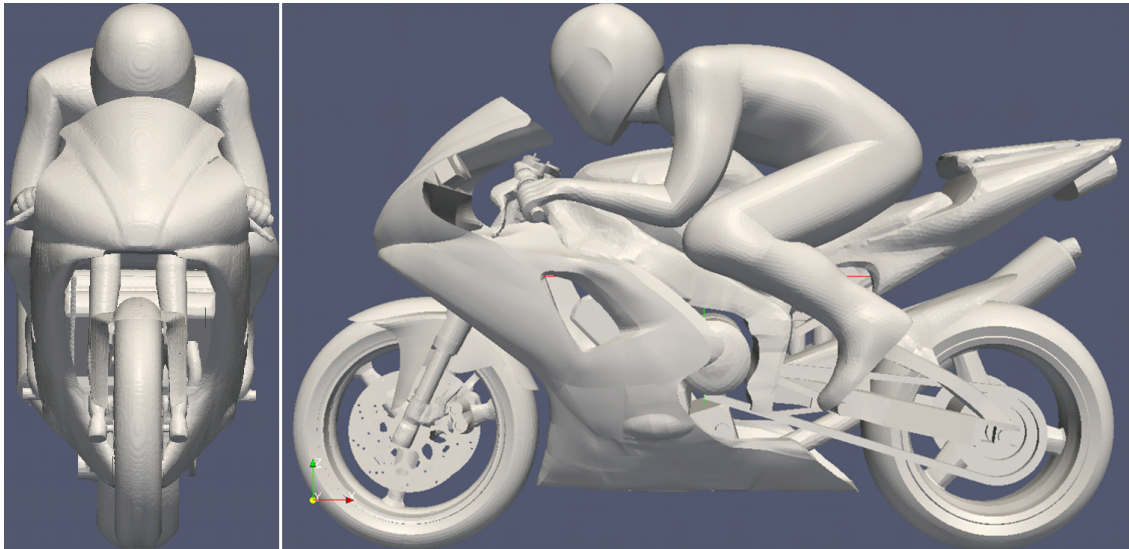


**Σχήμα 2.1:** Αγωνιστικό δίτροχο μηχανοκίνητο όχημα και αναβάτης σε αεροδυναμική σήραγγα.[8]

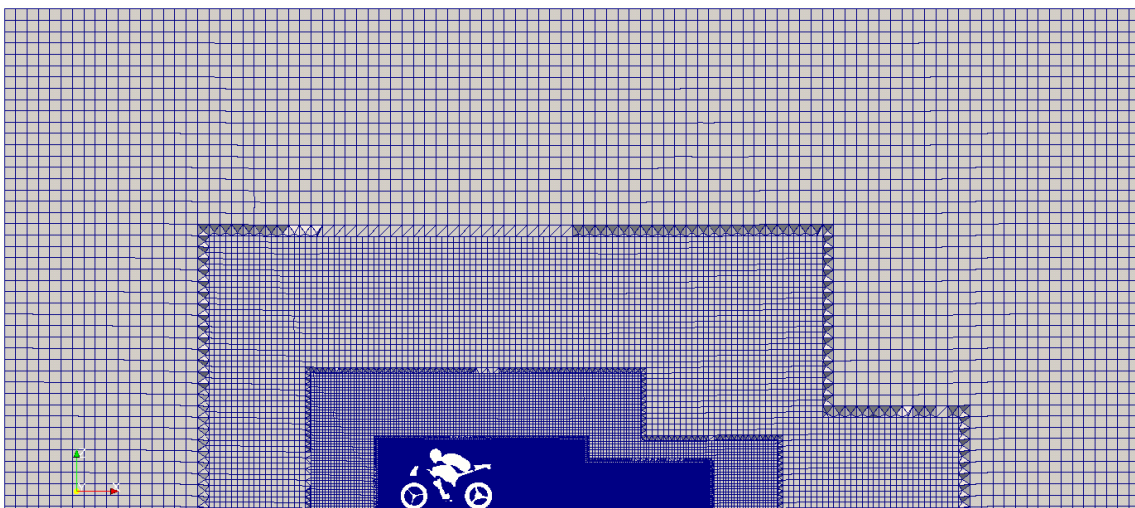
επιθυμείται ο υπολογισμός του συντελεστή άνωσης του μπροστινού και πίσω τμήματος αντίστοιχα. Η γεωμετρία του διτρώχου θα μελετηθεί εντός παραλληλόγραμμου χωρίου (βλέπε σχήμα 2.3) με διαστάσεις (σε μέτρα):

$$\begin{array}{lcl}
 \text{Μήκος} & L = 25 & ( \quad x_{min} = -9, \quad x_{max} = 16 \quad ) \\
 \text{Πλάτος} & W = 5 & ( \quad y_{min} = -2,5, \quad y_{max} = 2,5 \quad ) \\
 \text{Ύψος} & H = 11 & ( \quad z_{min} = 0, \quad z_{max} = 11 \quad )
 \end{array}$$

Το πλέγμα εντός του υπολογιστικού χωρίου δημιουργήθηκε με χρήση της εφαρμογής "blockMesh" η οποία παρέχεται από το OpenFOAM και δίνει τη δυνατότητα στο χρήστη να δημιουργήσει πλέγματα εντός απλών γεωμετριών. Για παραλληλόγραμμο χωρίο, το πλέγμα που παράγει η εφαρμογή "blockMesh" είναι ορθογωνικό. Με βάση το ορθογωνικό αυτό πλέγμα έγινε η γένεση πλέγματος γύρω από τη γεωμετρία του διτρώχου με την εφαρμογή "SnappyHexMesh" η οποία περιγράφεται στη συνέχεια. Τα υπολογιστικά κελιά στα όρια του χωρίου είναι κύβοι πλευράς 0.25 μέτρων, ενώ στο εσωτερικό έχουν επιβληθεί διαδοχικές πυκνώσεις του πλέγματος. Στο σχήμα 2.3 απεικονίζεται το χωρίο και οι επιμέρους πυκνώσεις στις περιοχές που βρίσκονται εγγύτερα στο δίτροχο.



**Σχήμα 2.2:** Απεικόνιση αρχείου .obj το οποίο περιέχει την προς βελτιστοποίηση γεωμετρία αγωνιστικού δίτροχου μηχανοκίνητου οχήματος.



**Σχήμα 2.3:** Διδιάστατη απεικόνιση του συνολικού υπολογιστικού χώριου, των επιμέρους πυκνώσεων και της θέσης του δίτροχου εντός αυτού.

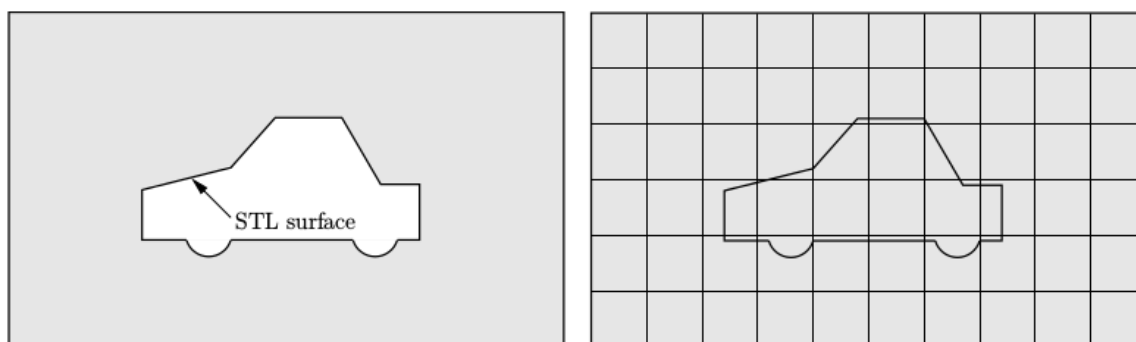
## 2.2 Γένετης πλέγματος SnappyHexMesh

Η ελεύθερη εφαρμογή SnappyHexMesh, η οποία παρέχεται μαζί με το λογισμικό OpenFOAM, χρησιμοποιείται για την αυτόματη γένεση πλέγματος τριών διαστάσεων από πολύπλοκες γεωμετρίες που προέρχονται από προγράμματα σχεδιασμού σε υπολογιστή CAD και οι οποίες μπορεί να δίνονται σε αρχεία τύπου .stl (Stereolithography) ή .obj (Wavefront Object). Με τη χρήση του SnappyHexMesh παράγεται πλέγμα το οποίο γενικά εγγυάται την απαραίτητη ποιότητα ώστε να μπορέσει να εκτελεστεί εν συνεχεία

η επίλυση των επιθυμητών εξισώσεων χωρίς προβλήματα από το OpenFOAM και δίνει τη δυνατότητα για παράλληλη εκτέλεση (σε περιβάλλον MPI) κατά την οποία εξισορροπεί το επεξεργαστικό φορτίο μεταξύ των επεξεργαστών, με συνέπεια το τελικό πλέγμα να έχει περίπου τον ίδιο αριθμό κελιών ανά επεξεργαστή για βέλτιστη επίδοση. Για τους παραπάνω λόγους είναι ο γενέτης πλέγματος που χρησιμοποιήθηκε και στην παρούσα εργασία. Η μέθοδος γένεσης πλέγματος που χρησιμοποιεί ο SnappyHexMesh περιλαμβάνει τρία διακριτά βήματα:

- (α) τη διαίρεση και αφαίρεση κελιών,
- (β) την προσκόλληση των κορυφών των κελιών επί της γεωμετρίας ενδιαφέροντος και
- (γ) την προσθήκη στοιβάδων από κελιά επί της επιφάνειας της γεωμετρίας ενδιαφέροντος, όπου αυτό κρίνεται αναγκαίο από τον χρήστη.

Τα βήματα αυτά μπορούν να εκτελεστούν διαδοχικά ή το κάθε ένα ξεχωριστά. Προαπαιτούμενο για την εκτέλεση του SnappyHexMesh είναι η δημιουργία ενός «πλέγματος-οδηγού» γύρω από το συνολικό υπολογιστικό χωρίο και το οποίο θα περιέχει τη γεωμετρία ενδιαφέροντος, κάνοντας χρήση της εφαρμογής blockMesh (βλέπε σχήμα 2.4).



**Σχήμα 2.4:** Διδιάσταστο απλοποιημένο παράδειγμα γένεσης πλέγματος.[9] Η γεωμετρία STL προς ανάλυση (αριστερά) και πλέγμα προερχόμενο από την εφαρμογή «blockMesh» το οποίο αποτελείται από τετράπλευρα (εξάεδρα για τριδιάστατη περίπτωση) και εντός του οποίου εδρεύει η προς μελέτη γεωμετρία (δεξιά).

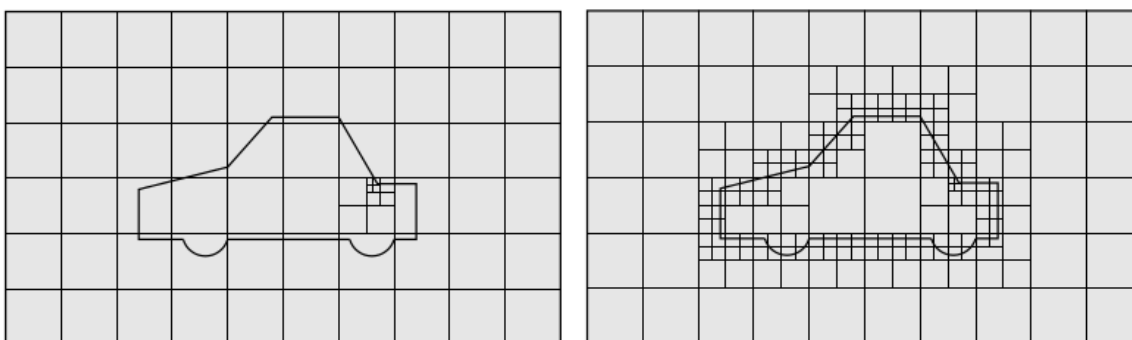
Το πλέγμα που παράγεται από την εφαρμογή «blockMesh», κατασκευάζεται συνήθως αραιό και το επίπεδο πυκνότητας των κελιών του ορίζει το μηδενικό επίπεδο πυκνώσης (level 0). Με βάση το επίπεδο μηδέν, μπορούν να οριστούν και υψηλότερα επίπεδα πυκνώσης. Αύξηση πυκνότητας πλέγματος κατά ένα επίπεδο, μειώνει το μήκος ακμής των εξαεδρικών στοιχείων κατά το ήμισυ και, συνεπώς, οκταπλασιάζει τον αριθμό κελιών στην αντίστοιχη περιοχή.

Για να αρχίσει η γένεση πλέγματος γύρω από τη γεωμετρία STL πρέπει ο λόγος πλευρών των κελιών του πλέγματος που δημιουργήθηκε με την εφαρμογή «blockMesh» να είναι περίπου μονάδα και να υπάρχει τουλάχιστον μία τομή ανάμεσα σε ακμή εξάεδρου κελιού και στη γεωμετρία ενδιαφέροντος.

Το εξαεδρικό πλέγμα, θα λειτουργήσει ως η βάση για τη λειτουργία του SnappyHex-Mesh γενέτη πλέγματος. Το τελικό αποτέλεσμα, ελέγχεται από τον χρήστη μέσω αρχείου με όνομα snappyHexMeshDict το οποίο περιέχει όλες τις μεταβλητές ελέγχου του γενέτη πλέγματος. Ακολουθεί περιγραφή των βημάτων γένεσης πλέγματος.

#### α. Διαίρεση και αφαίρεση κελιών

Κατά τη διαδικασία διαίρεσης κελιών ο κώδικας SnappyHexMesh εντοπίζει τα κελιά του αρχικού πλέγματος «μηδενικής» πυκνότητας τα οποία τέμνονται με οποιοδήποτε τμήμα της επιφάνειας της γεωμετρίας ενδιαφέροντος και, εν συνεχεία, διαιρεί τα κελιά αυτά έως το επίπεδο σχετικής πυκνότητας (refinement level) που επιθυμεί και έχει καθορίσει ο χρήστης. Οι ακμές στις οποίες έχει ειδικά οριστεί συγκεκριμένο επίπεδο πύκνωσης είναι οι πρώτες τις οποίες επεξεργάζεται ο κώδικας. (βλέπε σχήμα 2.5).



**Σχήμα 2.5:** Διαίρεση κελιών για πύκνωση πλέγματος.[9]

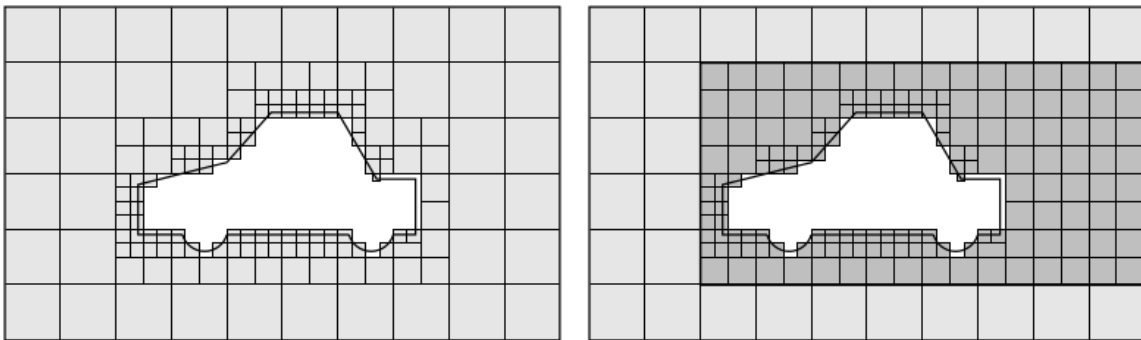
Αριστερά: Αρχική πύκνωση κελιών τα οποία τέμνονται με ακμές της γεωμετρίας που έχουν επιλεγθεί συγκεκριμένα από τον χρήστη.

Δεξιά: Πύκνωση των υπολοίπων κελιών τα οποία τέμνονται με την επιφάνεια ενδιαφέροντος.

Μετά την ολοκλήρωση της διαδικασίας διαίρεσης των κελιών, ακολουθεί η διαδικασία αφαίρεσης κελιών η οποία απαιτεί τουλάχιστον μία περιοχή εντός του συνολικού χωρίου, να περιέχεται πλήρως εντός μιας κλειστής επιφάνειας. Η περιοχή τα κελιά της οποίας διατηρούνται, προσδιορίζεται με τον ορισμό ενός σημείου στον χώρο εντός της περιοχής. Ο κώδικας διατηρεί εν συνεχεία τα κελιά, το 50% του όγκου των οποίων βρίσκεται εντός της περιοχής (βλέπε σχήμα 2.6, αριστερά). Τέλος, λαμβάνει χώρα η περαιτέρω διαίρεση κελιών, τα οποία έχουν παραμείνει μετά τη διαδικασία της αφαίρεσης και βρίσκονται εντός ορισμένου όγκου, εντός του οποίου απαιτείται αυξημένη πυκνότητα πλέγματος (βλέπε σχήμα 2.6, δεξιά).

#### β. Προσχόληση κορυφών κελιών επί της γεωμετρίας

Το επόμενο βήμα της διαδικασίας γένεσης πλέγματος περιλαμβάνει τη μετατόπιση των σημείων των κορυφών των κελιών που έχουν απομείνει επί της επιφάνειας της γεωμετρίας ενδιαφέροντος. Η διαδικασία αυτή υλοποιείται σύμφωνα με τον παρακάτω επαναλαμβανόμενο βρόχο, μέχρι ικανοποίησης των απαιτήσεων για την ποιότητα του



**Σχήμα 2.6:** Διαδικασία αφαίρεσης κελιών (αριστερά) και περαιτέρω πύκνωση κατ' επιλογή του χρήστη (δεξιά).[9]

πλέγματος. Οι απαιτήσεις αυτές ορίζονται από τον χρήστη εντός του αρχείου snappy-HexMeshDict το οποίο, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, ελέγχει την διαδικασία.

1. Μετατόπιση των κορυφών των κελιών που βρίσκονται στο όριο της επιφάνειας STL, ακριβώς πάνω στην επιφάνεια.
2. Μετατόπιση (χαλάρωση) του εσωτερικού πλέγματος ανάλογα με τη θέση των νέων μετατοπισμένων κορυφών.
3. Εντοπισμός των κορυφών των επιφανειακών κελιών, η θέση των οποίων προκαλεί την παραβίαση των απαιτήσεων ποιότητας του πλέγματος. Αν οι απαιτήσεις ποιότητας ικανοποιούνται τότε επέρχεται τερματισμός της διαδικασίας.
4. Μείωση της αρχικής μετατόπισης αυτών των κορυφών και επιστροφή στο δεύτερο βήμα.

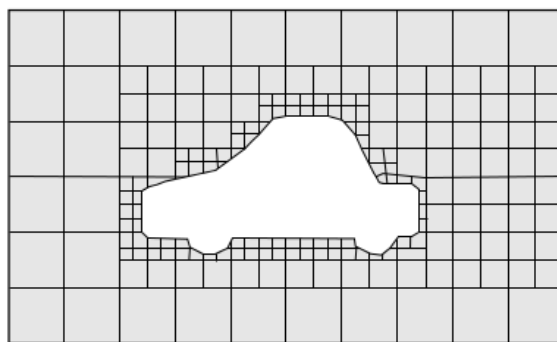
Οι βασικότερες επιλογές ελέγχου της ποιότητας του πλέγματος που παρέχει ο γενέτης SnappyHexMesh σχετίζονται με την ορθογωνικότητα του πλέγματος, τη στρέβλωση (skewness) την κυρτότητα/κοιλότητα (concaveness), τον ελάχιστο όγκο κελιού κ.α. Μετά το πέρας της διαδικασίας προσκόλλησης (snapping), το πλέγμα ακολουθεί τη δεδομένη γεωμετρία και συμμορφώνεται με τις απαιτήσεις ποιότητας (σχήμα 2.7). Το πλέγμα που παράγεται κατά το βήμα αυτό, σε πολλές περιπτώσεις είναι κατάλληλο για χρήση, παρότι μπορεί να περιέχει κάποια ιδιόμορφα κελιά επί των οριακών επιφανειών.

#### γ. Προσθήκη επιπλέον στοιβάδων κελιών

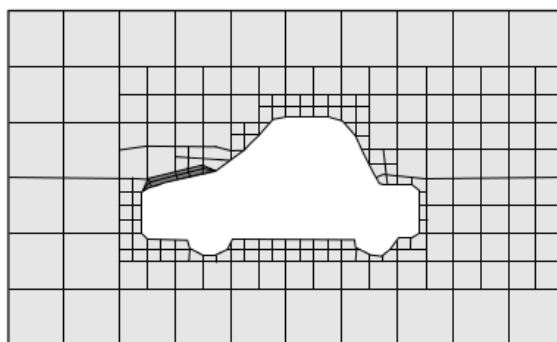
Το τρίτο (και προαιρετικό) βήμα της διαδικασίας γένεσης πλέγματος, λαμβάνει χώρα στην περίπτωση κατά την οποία το πλέγμα που προήλθε από το προηγούμενο βήμα (snapping) περιέχει αρκετές ιδιομορφίες και δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Κατά τη φάση αυτή, ο κώδικας εισάγει επιπλέον στοιβάδες από εξαεδρικά κελιά ευθυγραμμισμένα στις οριακές επιφάνειες που ορίζει ο χρήστης, όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.8.

Η διαδικασία προσθήκης στοιβάδων κελιών υλοποιείται συρρικνώνοντας το υπάρχον πλέγμα από το όριο και προς τα έσω, και εισάγοντας στοιβάδες κελιών. Συγκεκριμένα:





**Σχήμα 2.7:** Μορφή πλέγματος μετά την προσκόλληση στη γεωμετρία, των σημείων των κορυφών των κελιών.[9]



**Σχήμα 2.8:** Προσθήκη επιπλέον στοιβάδων κελιών σε επιλεγμένες επιφάνειες επί του ορίου.[9]

1. Το πλέγμα απομακρύνεται από την οριακή επιφάνεια με κατεύθυνση κάθετη σε αυτήν και κατά ορισμένο πάχος.
2. Γίνεται χαλάρωση του εσωτερικού πλέγματος με τις νέες θέσεις των οριακών κορυφών των κελιών.
3. Ελέγχεται αν ικανοποιούνται τα κριτήρια ύπαρξης έγκυρου πλέγματος. Αν όχι, το πάχος μετατόπισης του αρχικού πλέγματος μειώνεται και η διαδικασία επιστρέφει στο βήμα 2. Αν δεν είναι δυνατόν να προκύψει έγκυρο πλέγμα για κανένα πάχος στοιβάδας κελιών, ο κώδικας δεν εισάγει νέα κελιά.
4. Αν τα κριτήρια ικανοποιούνται, γίνεται εισαγωγή στοιβάδας κελιών.
5. Το πλέγμα ελέγχεται ξανά. Αν ο έλεγχος αποτύχει, η νέα στοιβάδα απομακρύνεται και ο κώδικας επιστρέφει στο βήμα 2.

## 2.3 Έλεγχος τελικού πλέγματος και ανάλυση ευαισθησίας

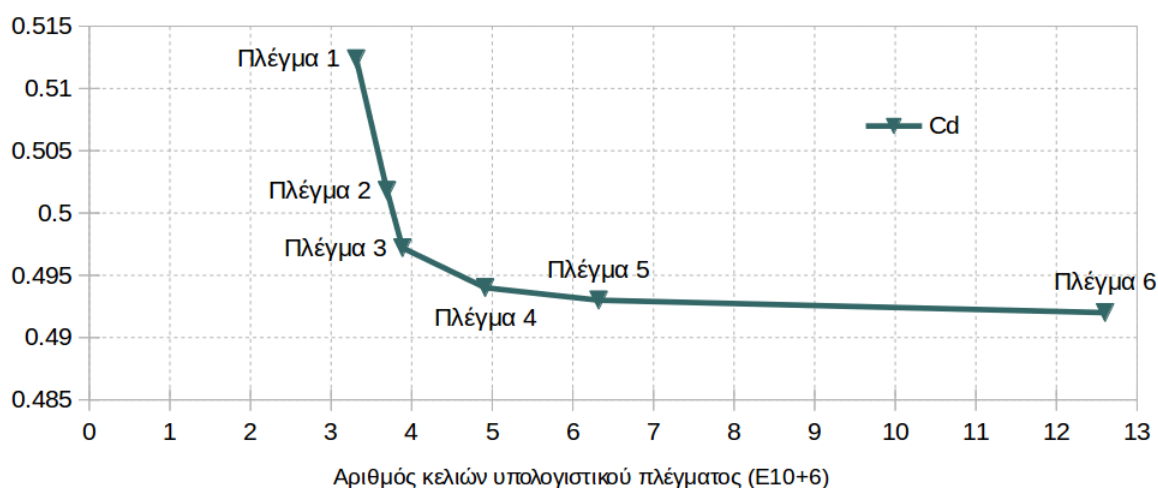
Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η ποιότητα και η πυκνότητα του τελικού υπολογιστικού πλέγματος, μπορεί να καθοριστεί από τον χρήστη μέσω των εγγραφών στο αρχείο snappyHexMeshDict. Η επιλογή της πυκνότητας σχετίζεται άμεσα με την ακρίβεια με την οποία το πλέγμα αναπαριστά την επιθυμητή γεωμετρία και, συνεπώς, αύξηση της πυκνότητας οδηγεί σε μεγαλύτερη ακρίβεια αποτελεσμάτων κατά την επίλυση των εξισώσεων της ροής. Ένα άλλο θετικό που προσφέρει το πυκνότερο πλέγμα είναι ότι διευκολύνει τη σύγκλιση της μεθόδου που χρησιμοποιείται για βελτιστοποίηση της γεωμετρίας. Από την άλλη πλευρά όμως, η πυκνότητα του πλέγματος είναι ανάλογη του συνολικού αριθμού στοιχείων από τα οποία αποτελείται. Μεγαλύτερη πυκνότητα πλέγματος οδηγεί προφανώς σε μεγαλύτερο αριθμό στοιχείων κάτι που σημαίνει αύξηση του υπολογιστικού κόστους σε όλες τις φάσεις του κύκλου βελτιστοποίησης και όχι μόνο σε χρόνο επεξεργασίας αλλά πιθανώς και σε επίπεδο υλικού (hardware) π.χ. ανάγκες για περισσότερη μνήμη ή χώρου αποθήκευσης δεδομένων.

Για να προσδιοριστεί το βέλτιστο μέγεθος (σε αριθμό κελιών) του πλέγματος που θα χρησιμοποιηθεί για βελτιστοποίηση, διεξήχθη ανάλυση ευαισθησίας της λύσης των εξισώσεων της ροής ως προς τον συνολικό αριθμό κελιών του πλέγματος.

Με χρήση του γενέτη πλέγματος SnappyHexMesh κατασκευάστηκαν έξι πλέγματα διαφορετικού αριθμού κελιών. Εν συνεχεία επιλύθηκαν οι ροϊκές εξισώσεις σε καθένα από αυτά και προσδιορίστηκε ο συντελεστής οπισθέλκουσας δύναμης του διτράχου αφού ο εν λόγω συντελεστής θα αποτελέσει την αντικειμενική συνάρτηση με βάση την οποία θα βελτιστοποιηθεί η γεωμετρία του ανεμοθώρακα. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης ευαισθησίας παρουσιάζονται στο διάγραμμα 2.9.

Στο διάγραμμα 2.9 φαίνεται ότι η αύξηση του αριθμού των κελιών μέχρι την τάξη των 5.000.000 επιφέρει αισθητή αλλαγή στην τιμή του συντελεστή οπισθέλκουσας, όπως αυτός προκύπτει από την επίλυση των εξισώσεων της ροής. Περαιτέρω αύξηση της πυκνότητας του πλέγματος, οδηγεί σε μια δυσανάλογα μικρή βελτίωση της τιμής του. Συγκεκριμένα, θεωρώντας ως «λύση αναφοράς», τη λύση η οποία προέκυψε με χρήση του πυκνότερου πλέγματος (Πλέγμα 6) μεγέθους 12.603.090 κελιών, μπορεί να σχηματιστεί ο πίνακας 2.1.

Η πρώτη στήλη του πίνακα 2.1 περιέχει τον αύξοντα αριθμό των πλεγμάτων. Η δεύτερη στήλη περιέχει τον αριθμό των κελιών του κάθε πλέγματος ενώ η τρίτη στήλη, το ποσοστό κατά το οποίο είναι μειωμένος αυτός ο αριθμός  $c(\%)$ , σε σχέση με το πλέγμα αναφοράς. Η τέταρτη στήλη περιέχει την απόλυτη ποσοστιαία απόκλιση της λύσης  $s(\%)$ , από τη λύση αναφοράς. Το ζητούμενο είναι να επιλεγεί το πλέγμα που με το μικρότερο δυνατό αριθμό κελιών, οδηγεί στον προσδιορισμό της λύσης με την μικρότερη μεταβολή από τη λύση αναφοράς. Σχηματίζοντας το γινόμενο  $100 \cdot (s/c)$



**Σχήμα 2.9:** Γράφημα ευαισθησίας της τιμής του συντελεστή οπισθέλκουσας ως προς την πυκνότητα του υπολογιστικού πλέγματος.

Αριθμός πλέγματος	Αριθμός κελιών	Μείωση αριθμού κελιών: $c(\%)$	Απόκλιση από λύση αναφοράς: $s(\%)$	$100s/c$
1	3.312.311	73,72	4,25	5.76
2	3.694.255	70,69	2,1	2.965
3	3.887.046	69,16	1,16	1.677
4	4.913.133	61,02	0,59	<b>0.967</b>
5	6.321.396	49,84	0,49	0.980

**Πίνακας 2.1:** Συγκριτικός πίνακας πλεγμάτων.

κατασκευάζεται μια (προφανής) αντικειμενική συνάρτηση για την επιλογή πλέγματος, της οποίας αναζητείται το ελάχιστο. Οι τιμές του γινομένου παρουσιάζονται για κάθε πλέγμα στη δεξιά στήλη του πίνακα 2.1.

Με βάση τα στοιχεία αυτά, και λόγω της ανάγκης συμβιβασμού ανάμεσα στην απαίτηση για υπολογιστική ακρίβεια και στον περιορισμό του να διατηρηθεί το υπολογιστικό κόστος σε διαχειρίσιμο επίπεδο, επιλέχθηκε το πλέγμα υπ' αριθμόν 4 για την περαιτέρω βελτιστοποίηση μορφής. Ποσοτικά και ποιοτικά χαρακτηριστικά του υπολογιστικού πλέγματος παρατίθενται στον πίνακα 2.2 ενώ μορφολογικές λεπτομέρειες παρουσιάζονται στα σχήματα 2.10 έως 2.13.

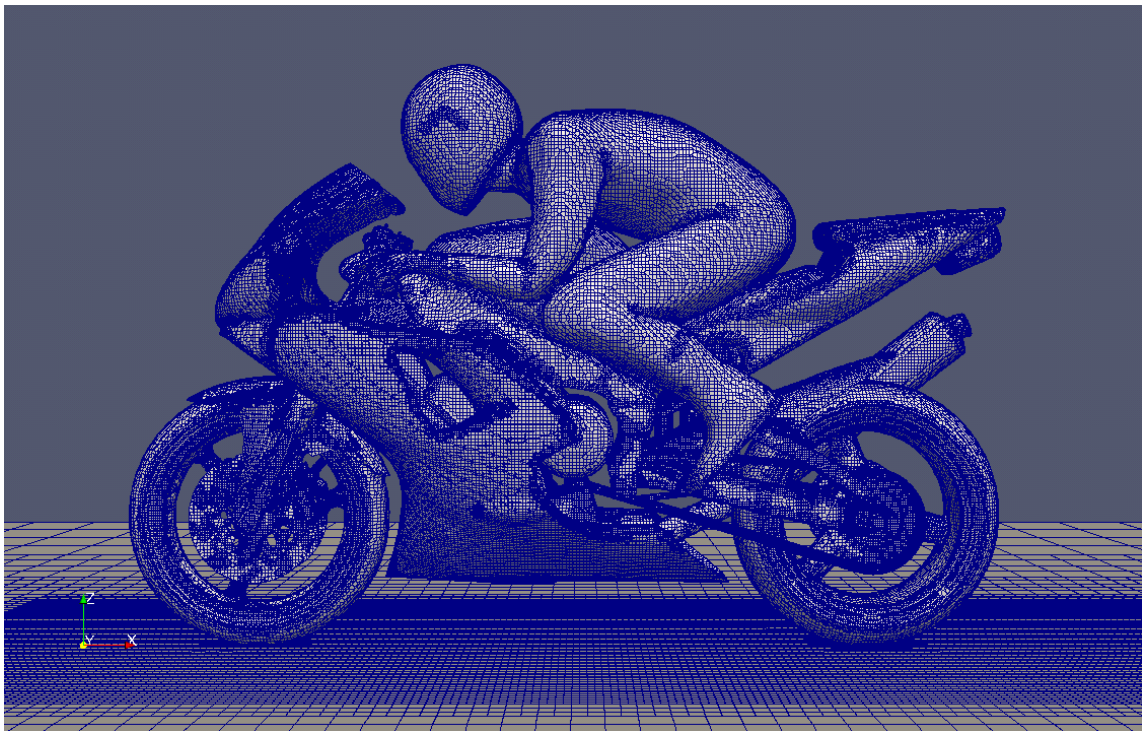
Αριθμός κελιών: 4.913.133  
 Αριθμός κόμβων: 5.557.167

Αριθμός κελιών ανά τύπο

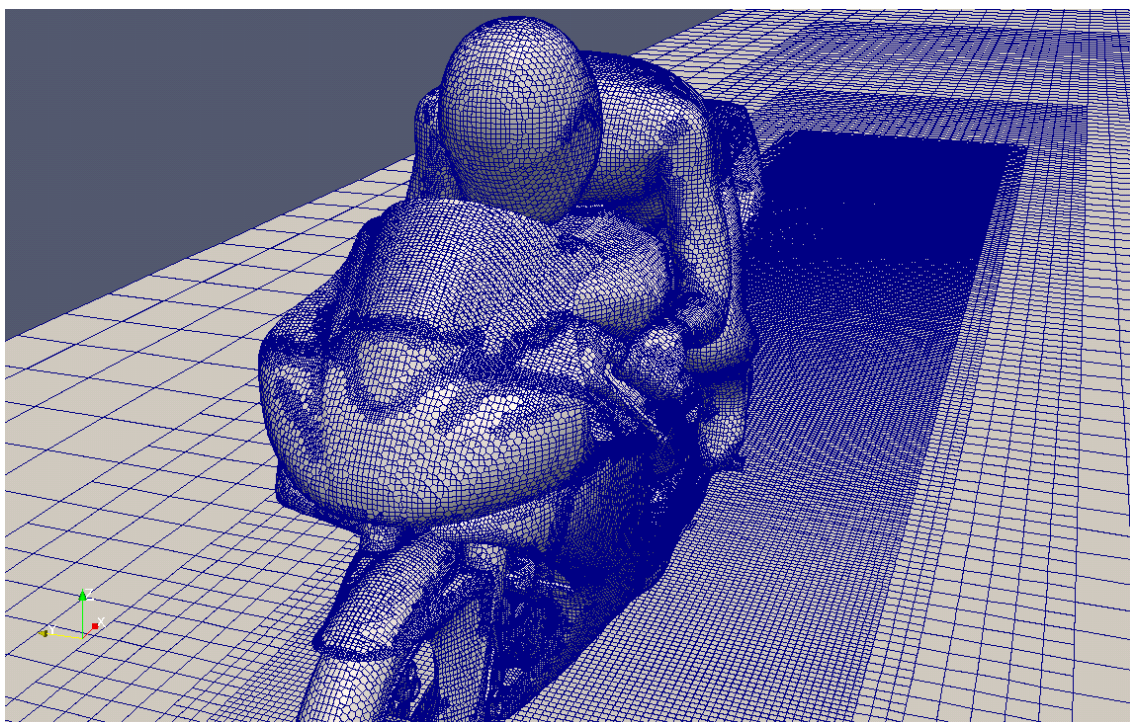
εξάεδρα	4.358.474
πρίσματα	88.985
σφήνες	6.090
πυραμίδες	3
τετραεδρικές σφήνες	8.560
τετράεδρα	567
πολύεδρα	450.454

Μέγιστος λόγος πλευρών	36,12
Ελάχιστο / μέγιστο μήκος ακμής κελιού ( $m$ )	5,67E-08 / 0,066
Ελάχιστη / μέγιστη επιφάνεια πλευράς κελιού ( $m^2$ )	5,67E-08 / 0,066
Ελάχιστος / μέγιστος όγκος κελιού ( $m^3$ )	3,32E-10 / 0,016
Μέση μη-ορθογωνικότητα	8,96
Αριθμός κελιών με στρέβλωση (skewness) > 4	29 κελιά

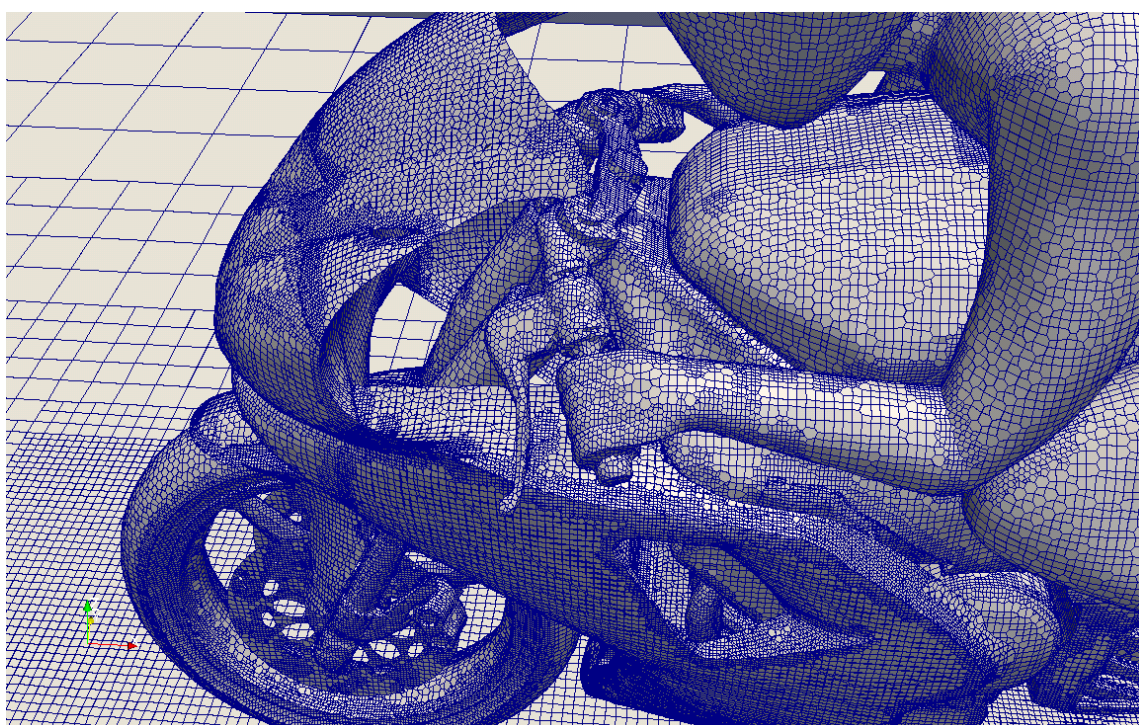
**Πίνακας 2.2:** Στοιχεία υπολογιστικού πλέγματος.



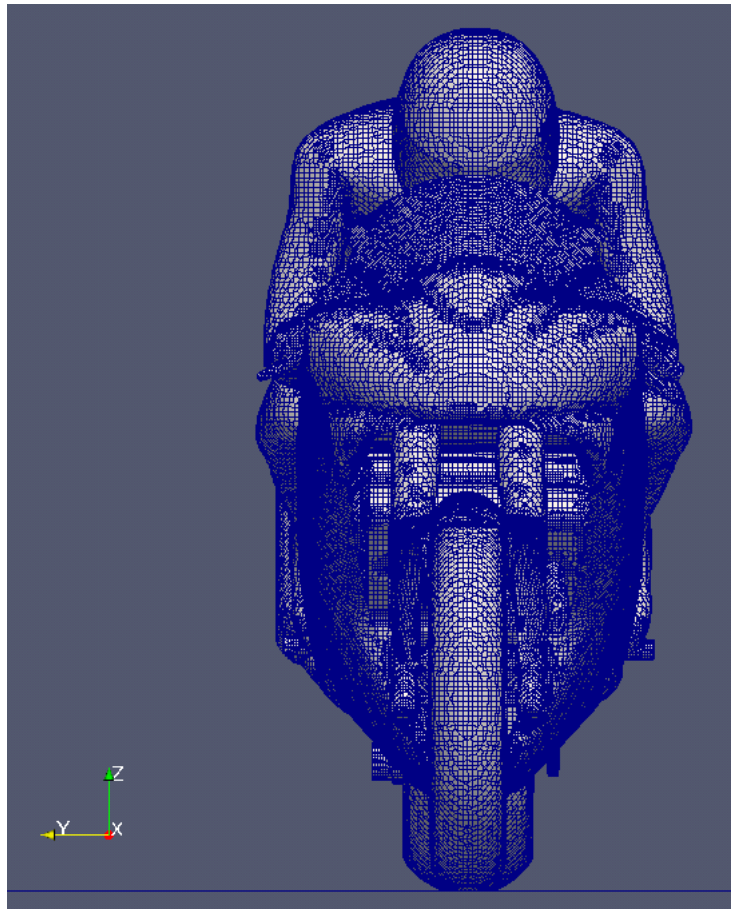
**Σχήμα 2.10:** Πλευρική απεικόνιση του υπολογιστικού πλέγματος υπ' αριθμόν 4.



**Σχήμα 2.11:** Απεικόνιση του υπολογιστικού πλέγματος υπ' αριθμόν 4. Επί του ορίου του οδοστρώματος φαίνονται τα διαφορετικά επίπεδα πυκνωσης του πλέγματος.



**Σχήμα 2.12:** Απεικόνιση του υπολογιστικού πλέγματος υπ' αριθμόν 4. Στα σημεία τα οποία η αρχική γεωμετρία περιέχει γωνίες ή ιδιαιτερότητες, το επίπεδο πυκνωσης αυξάνεται.



Σχήμα 2.13: Μετωπική απεικόνιση του υπολογιστικού πλέγματος υπ' αριθμόν 4.

## Κεφάλαιο 3

# Εξισώσεις κίνησης των ρευστών

Η μηχανική των ρευστών, εξετάζοντας τη συμπεριφορά της ύλης σε μακροσκοπική κλίμακα, διεξάγει τα συμπεράσματα της για την κίνηση των ρευστών, με τη χρήση εξισώσεων που προκύπτουν από τους νόμους της φυσικής και της κλασικής μηχανικής. Οι εξισώσεις διατήρησης της μάζας, διατήρησης της ορμής, διατήρησης της στροφορμής, η εξίσωση διατήρησης ενέργειας αλλά και το δεύτερο αξίωμα της θερμοδυναμικής σε συνδυασμό με υλικές και καταστατικές εξισώσεις για ειδικές περιπτώσεις ρευστών σωμάτων οδηγούν σε εξισώσεις οι οποίες περιγράφουν την κίνηση του ρευστού δίνοντας πληροφορίες για μεγέθη όπως η ταχύτητα και η πίεση. Παραδείγματα τέτοιων εξισώσεων είναι η εξίσωση Euler για το μη-συνεκτικό ρευστό, η εξίσωση Bernoulli για το μη-συνεκτικό ασυμπίεστο ρευστό σε μόνιμη χρονικά ροή ή οι εξισώσεις Navier - Stokes για το συμπιεστό ή το ασυμπίεστο ρευστό.

### 3.1 Οι εξισώσεις Navier - Stokes

Στη μηχανική του συνεχούς μέσου, Νευτώνιο ρευστό ονομάζεται ένα ρευστό του οποίου οι διατμητικές τάσεις που αναπτύσσονται λόγω της συνεκτικής ροής του, είναι σε κάθε σημείο γραμμικά ανάλογες του τοπικού ρυθμού παραμόρφωσης. Το Νευτώνιο ρευστό είναι το απλούστερο μοντέλο ρευστού το οποίο περιέχει την έννοια της συνεκτικότητας και πολλά συνήθη ρευστά, όπως ο αέρας, το νερό και το λάδι, μπορούν να θεωρηθούν Νευτώνια. Οι εξισώσεις 3.1 και 3.2 [10] αποτελούν τις υλικές εξισώσεις των Νευτώνιων ρευστών και περιγράφουν τις ορθές ( $\sigma_{ij}$ ) και διατμητικές τους τάσεις

$(\tau_{ij})$ .

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (3.1)$$

$$\tau_{ij} = 2 \mu D_{ij} + \lambda D_{kk} \delta_{ij} \quad (3.2)$$

όπου  $p$  είναι η πίεση,  $\mu$  είναι ο δυναμικός συντελεστής συνεκτικότητας ή ιξώδες,  $\lambda$  είναι το ιξώδες όγκου,  $\delta_{ij}$  είναι το σύμβολο Kronecker και  $D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$  είναι ο τανυστής του ρυθμού παραμόρφωσης του ρευστού. Για τις εξισώσεις που γράφονται σε τανυστική μορφή στην παρούσα εργασία, ισχύει, εάν δεν τονιστεί το αντίθετο, η σύμβαση του Einstein κατά την οποία η πολλαπλή χρήση ενός δείκτη υπονοεί άθροιση. Κάνοντας χρήση της διαφορικής εξίσωσης του θεωρήματος διατήρησης της μάζας (εξίσωση συνέχειας) 3.3,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0, \quad (3.3)$$

η εξίσωση διατήρησης της ορμής απλοποιείται και καταλήγει στη μορφή της εξίσωσης 3.4,

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i, \quad (3.4)$$

όπου  $\rho$  είναι η πυκνότητα του ρευστού,  $v_i$  συνιστώσα της ταχύτητας του ρευστού,  $f_i$  συνιστώσα του αθροίσματος των πεδίων εξωτερικών δυνάμεων (π.χ. επιτάχυνση της βαρύτητας) και  $\frac{Dv_i}{Dt}$  είναι η υλική παράγωγος της ταχύτητας,

$$\frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}. \quad (3.5)$$

Αντικαθιστώντας τις υλικές εξισώσεις 3.1 και 3.2 σε καρτεσιανές συντεταγμένες στις εξισώσεις διατήρησης της ορμής 3.4, προκύπτουν οι εξισώσεις Navier - Stokes για το συμπίεστο ρευστό (εξισώσεις 3.6) οι οποίες μαζί με την εξίσωση διατήρησης της μάζας, την εξίσωση διατήρησης της ενέργειας και τις απαραίτητες αρχικές-οριακές συνθήκες, αποτελούν ένα πλήρες σύστημα, η λύση του οποίου θεωρείται ότι περιγράφει πλήρως την ροή ρευστού.

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) + \rho f_i \quad (3.6)$$

Η πολυπλοκότητα των εξισώσεων Navier-Stokes μπορεί να περιοριστεί αν γίνουν κάποιες παραδοχές σχετικά με τις ιδιότητες του ρευστού ή της κίνησής του, εφόσον βέβαια οι



υποθέσεις αυτές μπορούν να οδηγήσουν σε αποτελέσματα τα οποία θα έχουν την επιθυμητή ακρίβεια ή θα σέβονται τους φυσικούς περιορισμούς του εκάστοτε προβλήματος. Μια τέτοια απλοποιητική παραδοχή είναι αυτή της χρονικά αμετάβλητης ροής (steady-state flow) κατά την οποία, όλες οι μεταβλητές της ροής θεωρούνται αμετάβλητες με τον χρόνο.

Άλλη απλοποιητική παραδοχή που μπορεί να γίνει για συγκεκριμένες συνθήκες ροής, είναι η παραδοχή του ασυμπίεστου ρευστού. Ως κριτήριο για το αν μπορεί να γίνει μια τέτοια απλουστευτική παραδοχή χρησιμοποιείται συνήθως κάποιος αδιάστατος αριθμός ομοιότητας, ο οποίος ενσωματώνει στον ορισμό του κάποια από τα χαρακτηριστικά που διέπουν ένα πρόβλημα ρευστοδυναμικής. Συγκεκριμένα, κριτήριο για το εάν μια ροή ρευστού μπορεί να θεωρηθεί ασυμπίεστη είναι συνήθως ο αριθμός Mach (εξίσωση 3.7),

$$M = \frac{V}{c} \quad (3.7)$$

όπου  $V$  είναι η ταχύτητα του ρευστού και  $c$  είναι η τοπική ταχύτητα του ήχου. Για τιμές  $M < 0.3$  μπορούμε να υποθέσουμε ασυμπίεστο ρευστό ( $\rho = \text{σταθερό}$ ) και, συνεπώς, οι εξισώσεις 3.6 μπορούν να απλοποιηθούν αφού για το ασυμπίεστο ρευστό ισχύει ότι  $\text{div} \vec{v} = \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0$ , ενώ υποθέτοντας σταθερό ιξώδες  $\mu$  προκύπτουν οι εξισώσεις Navier-Stokes για το ασυμπίεστο ρευστό σε καρτεσιανές συντεταγμένες (εξισώσεις 3.8).

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \rho f_i \quad (3.8)$$

Οι εξισώσεις 3.8, μαζί με την εξίσωση της συνέχειας για ασυμπίεστο ρευστό,  $\text{div} \vec{v} = \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0$ , αποτελούν ένα σύστημα τεσσάρων εξισώσεων με τέσσερις αγνώστους ( $v_1, v_2, v_3, p$ ) η λύση του οποίου μπορεί, σε συνδυασμό με τις κατάλληλες οριακές και αρχικές συνθήκες, να περιγράψει το πεδίο ροής ασυμπίεστου ρευστού, σταθερού ιξώδους. Στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία, έχει γίνει η υπόθεση της χρονικά σταθερής ροής ασυμπίεστου ρευστού (αέρα) σταθερών ιδιοτήτων.

Εκτός του αριθμού Mach, άλλος σημαντικός αδιάστατος αριθμός ομοιότητας είναι ο αριθμός Reynolds,

$$Re = \frac{VL}{\nu} \quad (3.9)$$

όπου  $V$  είναι η ταχύτητα της ελεύθερης ροής του ρευστού,  $L$  είναι ένα χαρακτηριστικό μήκος του προβλήματος (π.χ. μήκος χορδής εάν επρόκειτο για αεροτομή) και  $\nu = \mu/\rho$  είναι η κινηματική συνεκτικότητα του ρευστού. Ποιοτικά, ο αριθμός Reynolds είναι ο λόγος της κλίμακας των δυνάμεων αδράνειας της ροής προς τις δυνάμεις συνεκτικότητας. Έτσι, για πολύ μικρές τιμές του αριθμού Reynolds ( $Re \ll 1$ ) η επίδραση των αδρανειακών όρων ( $\rho \frac{D\vec{v}}{Dt}$ ) των εξισώσεων 3.6 μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα και, συνεπώς, να παραλειφθούν [11]. Τέτοιες περιπτώσεις ροών ονομάζονται έρπουσες ρο-

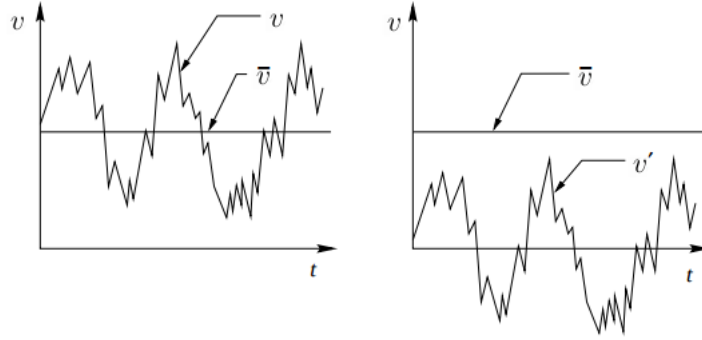
ές. Αντίστοιχα, για μεγάλες τιμές,  $Re \gg 1$ , οι δυνάμεις συνεκτικότητας μπορούν να αμεληθούν (υπόθεση μη συνεκτικού ρευστού,  $\mu = 0$ ). Τέλος, η τιμή του αριθμού Reynolds μπορεί να δώσει πληροφορία για το εάν μια ροή είναι στρωτή (laminar) ή τυρβώδης (turbulent). Υψηλοί αριθμοί Reynolds (ενδεικτικά,  $Re > 4000$ , για ροή εντός σωληνώσεως), προδίδουν την ύπαρξη τύρβης στη ροή ενώ χαμηλότερες τιμές (ενδεικτικά,  $Re < 2300$ , για ροή εντός σωληνώσεως) συνδέονται με στρωτές ροές ρευστών. Οι ενδεικτικές τιμές  $Re$  που αναφέρονται, διαφοροποιούνται ανάλογα με τη γεωμετρία εντός της οποίας ρέει ένα ρευστό. Στις ενδιάμεσες τιμές,  $2300 < Re < 4000$ , η ροή θεωρείται ότι βρίσκεται σε μεταβατική κατάσταση (transient flow).

### 3.2 Οι εξισώσεις Reynolds - Averaged Navier - Stokes (RANS)

Οι εξισώσεις Navier-Stokes είναι μη-γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης οι οποίες θεωρείται πως περιγράφουν με ακρίβεια την κίνηση των ρευστών σωμάτων ακόμα και στις περιπτώσεις που υπάρχει εμφάνιση τύρβης. Σε αυτές τις περιπτώσεις όμως, οι ροές είναι ιδιαίτερα πολύπλοκες και ακόμα και η αριθμητική επίλυση είναι εξαιρετικά δύσκολη μιας και η εύρεση σταθερής λύσης απαιτεί πολύ υψηλή πυκνότητα υπολογιστικού πλέγματος για τη διακριτοποίηση του υπολογιστικού χωρίου και πολύ μικρά χρονικά βήματα [12]. Οι απαιτήσεις αυτές οδηγούν σε πολύ μεγάλο υπολογιστικό κόστος - ανάλογο του  $Re^3$ . Για το λόγο αυτό, η άμεση αριθμητική επίλυση (Direct Numerical Simulation - DNS) των εξισώσεων Navier-Stokes για υψηλούς αριθμούς Reynolds απαιτεί εξαιρετικά μεγάλη υπολογιστική ισχύ.

Μια προσέγγιση του προβλήματος του υπολογισμού του πεδίου ταχυτήτων της τυρβώδους ροής, η οποία μειώνει σημαντικά το υπολογιστικό κόστος σε σύγκριση με την DNS, είναι αυτή της προσομοίωσης μεγάλων δινών (Large Eddy Simulation - LES). Με την προσέγγιση αυτή, μόνο η ανάπτυξη δινών μεγάλων κλιμάκων προσομοιώνεται, ενώ η γένεση και κίνηση δινών μικρότερης κλίμακας περιγράφεται μέσω εξισώσεων προσεγγιστικών μοντέλων και δεν προσομοιώνονται άμεσα. Με τον τρόπο αυτό, παρότι το υπολογιστικό κόστος για LES είναι μεγάλο, είναι σαφώς μειωμένο σε αντιπαράβολή με την DNS αφού περιορίζεται η ανάγκη της αυξημένης πυκνότητας πλέγματος και του εξαιρετικά μικρού χρονικού βήματος.

Για περαιτέρω μείωση του υπολογιστικού κόστους μπορεί να γίνει χρήση των εξισώσεων Navier-Stokes μετασχηματισμένων/σταθμισμένων κατά Reynolds, γνωστών ως εξισώσεων Reynolds-averaged Navier-Stokes (RANS) [13]. Η ιδέα πίσω από το μετασχηματισμό αυτό είναι ότι η στιγμιαία τιμή ενός μεγέθους  $\mathbf{a}(x, y, z, t)$  μπορεί να γραφτεί ως το άθροισμα δύο τιμών, μιας μέσης χρονικά τιμής  $\bar{\mathbf{a}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  και μιας διαταραχής  $\mathbf{a}'(x, y, z, t)$  της οποίας εξ ορισμού η μέση τιμή ισούται με μηδέν ( $\bar{\mathbf{a}'} = 0$ ).



**Σχήμα 3.1:** Γράφημα της ταχύτητας  $v$  (αριστερά) και των συνιστωσών της  $\bar{v}$  και  $v'$  κατά Reynolds (αριστερά) [14].

Με χρήση του μετασχηματισμού Reynolds, οι συνιστώσες της ταχύτητας και η πίεση μπορούν να γραφούν όπως παρουσιάζεται στο σχήμα 3.1 ως  $v_i = \bar{v}_i + v'_i$ ,  $p = \bar{p} + p'$  και να αντικατασταθούν στις εξισώσεις Navier-Stokes (3.8) οι οποίες για ασυμπίεστο ρευστό σταθερού ιξώδους μετασχηματίζονται ως εξής[13]:

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_j^2} + \rho f_i - \rho \frac{\partial}{\partial x_j} \underbrace{\left( \overline{v'_i v'_j} \right)}_{\tau'_{ij}} \quad (3.10)$$

Παρατηρώντας την εξίσωση 3.10 γίνεται αμέσως αντιληπτό ότι η χρήση του μετασχηματισμού Reynolds εισάγει στο σύστημα, μέσω του τανυστή  $\tau'_{ij} = \overline{v'_i v'_j}$ , ο οποίος ονομάζεται τανυστής τάσεων Reynolds, έξι νέες άγνωστες ποσότητες. Ο αριθμός των αγνώστων ποσοτήτων είναι πλέον μεγαλύτερος από τον αριθμό των διαθέσιμων εξισώσεων. Το σύστημα των τριών εξισώσεων της σχέσης 3.10 σε συνδυασμό με την εξίσωση της συνέχειας δεν είναι ολοκληρωμένο και απαιτεί επιπλέον εξισώσεις ώστε να επέλθει το λεγόμενο «κλείσιμο» του προβλήματος της τύρβης (closure problem) [12][10]. Για τις επιπλέον αυτές εξισώσεις έχουν προταθεί αρκετές ημιεμπειρικές προσεγγίσεις οι οποίες συνιστούν διαφορετικά μοντέλα τύρβης. Κάποια από τα μοντέλα αυτά παρουσιάζονται στην παράγραφο 3.3. Στη συνέχεια της εργασίας, το σύμβολο που χρησιμοποιήθηκε για τον διαχωρισμό των μέσων τιμών των μεταβλητών ( $\bar{\quad}$ ) θα παραλείπεται αφού όλα τα μεγέθη των εξισώσεων θα αναφέρονται στις μέσες τιμές.

Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση των εξισώσεων RANS, μόνο οι μέσες χρονικά τιμές των πεδίων ταχύτητας και πίεσης υπολογίζονται αριθμητικά ενώ οι διακυμάνσεις τους στο χρόνο λόγω τύρβης μοντελοποιούνται μέσω κατάλληλων μοντέλων τύρβης. Έτσι, το υπολογιστικό κόστος για την εύρεση λύσης είναι κατά πολύ μικρότερο σε σύγκριση με τις μεθόδους DNS ή LES. Η μέθοδος των χρονικά σταθμισμένων εξισώσεων RANS χρησιμοποιείται σε πρακτικές εφαρμογές ΥΠΔ κατά τη μοντελοποίηση τυρβώδων ροών και είναι η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα εργασία.

### 3.3 Μοντέλα τύρβης

Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας επιλύονται, όπως αναφέρθηκε νωρίτερα, οι εξισώσεις RANS για την χρονικά αμετάβλητη, τυρβώδη, ασυμπίεστη ροή αέρα γύρω από στερεό αντικείμενο επί στερεού εδάφους. Τα μοντέλα  $k - \epsilon$ , SST (shear-stress transport)  $k - \omega$  και Spalart–Allmaras είναι αυτά τα οποία επιλέχθηκαν να χρησιμοποιηθούν και να συγκριθούν για τη μοντελοποίηση της τύρβης και μαζί με το κλασικό  $k - \omega$  μοντέλο, παρουσιάζονται στη συνέχεια. Και τα τέσσερα μοντέλα τύρβης που ακολουθούν είναι γραμμικά μοντέλα τυρβώδους συνεκτικότητας ( $\mu_t$ ). Τέτοια μοντέλα, βασίζονται στην υπόθεση Boussinesq:

$$\tau'_{ij} = 2\mu_t \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}. \quad (3.11)$$

Συχνά, αντί της τυρβώδους συνεκτικότητας  $\mu_t$ , χρησιμοποιείται η τυρβώδης κινηματική συνεκτικότητα  $\nu_t = \mu_t/\rho$ , δηλαδή η τυρβώδης συνεκτικότητα διαιρεμένη με την πυκνότητα του ρευστού. Υπενθυμίζεται ότι οι μεταβλητές της σχέσης 3.11 αντιστοιχούν στις μέσες τιμές των μεγεθών που αντιπροσωπεύουν. Με χρήση της υπόθεσης Boussinesq είναι δυνατό να καταστρωθούν οι απαραίτητες εξισώσεις που προσδιορίζουν την τιμή της τυρβώδους συνεκτικότητας και κατ' επέκταση τον ταυιστή των τάσεων Reynolds, ολοκληρώνοντας έτσι το σύστημα των εξισώσεων RANS.

#### Μοντέλο τύρβης $k - \epsilon$

Το μοντέλο  $k - \epsilon$  ανήκει στην κατηγορία των μοντέλων δύο εξισώσεων αφού εισάγει στο σύστημα των εξισώσεων RANS, δύο επιπλέον εξισώσεις μεταφοράς (και αντίστοιχα μεταβλητές). Η πρώτη μεταβλητή είναι η τυρβώδης κινητική ενέργεια,  $k$ , ενώ δεύτερη μεταβλητή είναι η καταστροφή της τυρβώδους κινητικής ενέργειας,  $\epsilon$ . Είναι ένα πολύ διαδεδομένο μοντέλο τύρβης και είναι ενσωματωμένο στους περισσότερους εμπορικούς κώδικες CFD.

Οι εξισώσεις του μοντέλου  $k - \epsilon$  για ασυμπίεστο ρευστό, όπως παρουσιάστηκε από τον Chien (1982) [2], είναι:

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \tau'_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \rho \epsilon \quad (3.12)$$

$$\rho \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} \tau'_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - C_{\epsilon 2} \rho \frac{\epsilon^2}{k} \quad (3.13)$$

όπου η τυρβώδης συνεκτικότητα  $\mu_t$  δίνεται από τη σχέση Prandtl-Kolmogorov-Taylor

$$\mu_t = \frac{\rho C_\mu k^2}{\epsilon} \quad (3.14)$$

ενώ οι τιμές των συντελεστών των εξισώσεων 3.12 έως 3.14 έχουν υπολογιστεί ημειμπερικά και είναι:

$$C_{\epsilon 1} = 1.44, \quad C_{\epsilon 2} = 1.92, \quad C_\mu = 0.09, \quad \sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\epsilon = 1.3 .$$

### Μοντέλο τύρβης $k - \omega$

Τα μοντέλα  $k - \omega$  είναι και αυτά μοντέλα δύο εξισώσεων, με μεταβλητές την τυρβώδη κινητική ενέργεια,  $k$  και την ειδική διάχυση,  $\omega$ . Οι εξισώσεις που διέπουν το μοντέλο  $k - \omega$  για ασυμπίεστο ρευστό είναι , κατά Wilcox (1988) [15][16], οι εξής:

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \tau'_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \beta^* \rho k \omega \quad (3.15)$$

$$\rho \frac{\partial \omega}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + \alpha \frac{\omega}{k} \tau'_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \beta \rho \omega^2 \quad (3.16)$$

όπου η τυρβώδης συνεκτικότητα  $\mu_t$  δίνεται από τη σχέση

$$\mu_t = \frac{\rho k}{\omega} \quad (3.17)$$

ενώ οι τιμές των συντελεστών των εξισώσεων 3.15, 3.16 είναι

$$\alpha = 5/9, \quad \beta = 3/40, \quad \beta^* = 9/100, \quad \sigma_k = 1/2, \quad \sigma_\omega = 1/2 .$$

### Μοντέλο τύρβης Shear-Stress Transport (SST) $k - \omega$

Τα δύο μοντέλα που παρουσιάστηκαν νωρίτερα έχουν διαφορετικά πλεονεκτήματα. Το μοντέλο  $k - \omega$  είναι πιο στιβαρό και ακριβές στις περιοχές κοντά σε τοίχο ενώ το μοντέλο  $k - \epsilon$  αποδίδει καλύτερα στην περιοχή της ελεύθερης ροής.

Το μοντέλο τύρβης SST  $k - \omega$  αναπτύχθηκε από τον Menter (1993) [1][17] και αποτελεί

μια μίξη των μοντέλων  $k - \epsilon$  και  $k - \omega$  με τρόπο που εκμεταλλεύεται τα πλεονεκτήματα και των δύο. Είναι παρόμοιο με το κλασικό μοντέλο  $k - \omega$  με τη διαφορά ότι περιλαμβάνει και έναν μετασχηματισμό του μοντέλου  $k - \epsilon$ . Και τα δύο μοντέλα πολλαπλασιάζονται στις εξισώσεις με έναν συντελεστή ο οποίος ανάλογα με την απόσταση από τον κοντινότερο τοίχο, ενεργοποιεί τους κατάλληλους όρους.

Οι εξισώσεις του μοντέλου SST  $k - \omega$  είναι:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j k)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \tau'_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \beta^* \rho \omega k \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j \omega)}{\partial x_j} = & \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + \frac{\rho \gamma}{\mu_t} \tau'_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \beta \rho \omega^2 + \\ & + 2(1 - F_1) \frac{\rho \sigma_{\omega 2}}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (3.19)$$

όπου η τυρβώδης συνεκτικότητα  $\mu_t$  δίνεται από τη σχέση

$$\mu_t = \frac{\rho \alpha_1 k}{\max(\alpha_1 \omega, \Omega F_2)} \quad (3.20)$$

Οι σταθερές στις εξισώσεις 3.18 και 3.19 είναι συνδυασμός μιας εσωτερικής σταθεράς (συμβολίζεται με δείκτη 1) και μιας εξωτερικής σταθεράς (συμβολίζεται με δείκτη 2) σύμφωνα με τη σχέση  $\phi = F_1 \phi_1 + (1 - F_1) \phi_2$ . Επιπροσθέτως ορίζονται:

$$\begin{aligned} F_1 &= \tan h (arg_1^4) \\ arg_1 &= \min \left[ \max \left( \frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega d}, \frac{500\nu}{d^2 \omega} \right), \frac{4\rho \sigma_{\omega 2} k}{CD_{k\omega} d^2} \right] \\ CD_{k\omega} &= \max \left( 2\rho \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 10^{-10} \right) \\ F_2 &= \tan h (arg_2^2) \\ arg_2 &= \max \left( 2 \frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega d}, \frac{500\nu}{d^2 \omega} \right) \end{aligned}$$

όπου  $d$  η απόσταση από το στερεό τοίχωμα και  $\Omega = \sqrt{2W_{ij}W_{ij}}$  με  $W_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$  να είναι ο τανυστής ρυθμού στροβιλότητας (vorticity tensor). Τέλος, οι τιμές των

σταθερών είναι:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{\beta_1}{\beta^*} - \frac{\sigma_{\omega 1} \kappa^2}{\sqrt{\beta^*}} & \gamma_2 &= \frac{\beta_2}{\beta^*} - \frac{\sigma_{\omega 2} \kappa^2}{\sqrt{\beta^*}} \\ \sigma_{k1} &= 0.85 & \sigma_{\omega 1} &= 0.5 & \beta_1 &= 0.075 \\ \sigma_{k2} &= 1.0 & \sigma_{\omega 2} &= 0.856 & \beta_2 &= 0.0828 \\ \beta_* &= 0.09 & \kappa &= 0.41 & \alpha_1 &= 0.31 \end{aligned}$$

## Μοντέλο τύρβης Spalart–Allmaras

Τέλος, το μοντέλο Spalart–Allmaras [3] είναι μοντέλο μίας εξίσωσης. Εισάγει και επιλύει την εξίσωση μεταφοράς για το μέγεθος  $\tilde{\nu}$ , το οποίο αναφέρεται και ως μεταβλητή Spalart–Allmaras. Το μοντέλο έχει σχεδιαστεί για εφαρμογές «εξωτερικής» αεροδυναμικής ενώ η χρήση του σε εφαρμογές στροβιλομηχανών αυξάνεται σταθερά. Το μοντέλο περιγράφεται από την εξίσωση 3.21 [18] [19],

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} + v_j \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} &= c_{b1}(1 - f_{t2}) \tilde{S} \tilde{\nu} - \left[ c_{w1} f_w - \frac{c_{b1}}{\kappa^2} f_{t2} \right] \left( \frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2 + \\ &+ \frac{1}{\sigma} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( (\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right) + c_{b2} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_i} \right], \end{aligned} \quad (3.21)$$

ενώ η τυρβώδης συνεκτικότητα  $\mu_t$  υπολογίζεται από τη σχέση

$$\mu_t = \rho \tilde{\nu} f_{v1}, \quad (3.22)$$

όπου  $f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3}$  και  $\chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu}$ . Επιπλέον, ορίζονται οι συναρτήσεις:

$$\tilde{S} = \Omega + \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2} f_{v2} \quad \text{όπου} \quad \Omega = \sqrt{2W_{ij}W_{ij}} \quad \text{και} \quad W_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

$$f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}}, \quad f_w = g \left[ \frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right]^{1/6}, \quad g = r + c_{w2}(r^6 - r)$$

$$r = \min \left[ \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S} \kappa^2 d^2}, 10 \right] \quad f_{t2} = c_{t3} \exp(-c_{t4} \chi^2)$$

Τέλος, οι τιμές των σταθερών είναι:

$$\begin{aligned}
 c_{b1} &= 0.1355 & c_{b2} &= 0.622 & \sigma &= 2/3 & \kappa &= 0.41 \\
 c_{w2} &= 0.3 & c_{w3} &= 2 & c_{v1} &= 7.1 & c_{t3} &= 1.2 & c_{t4} &= 0.5 \\
 c_{w1} &= \frac{c_{b1}}{\kappa^2} + \frac{1 + c_{b2}}{\sigma}
 \end{aligned}$$

### 3.4 Δυνάμεις σε στερεά σώματα περιρρεόμενα από ρευστό

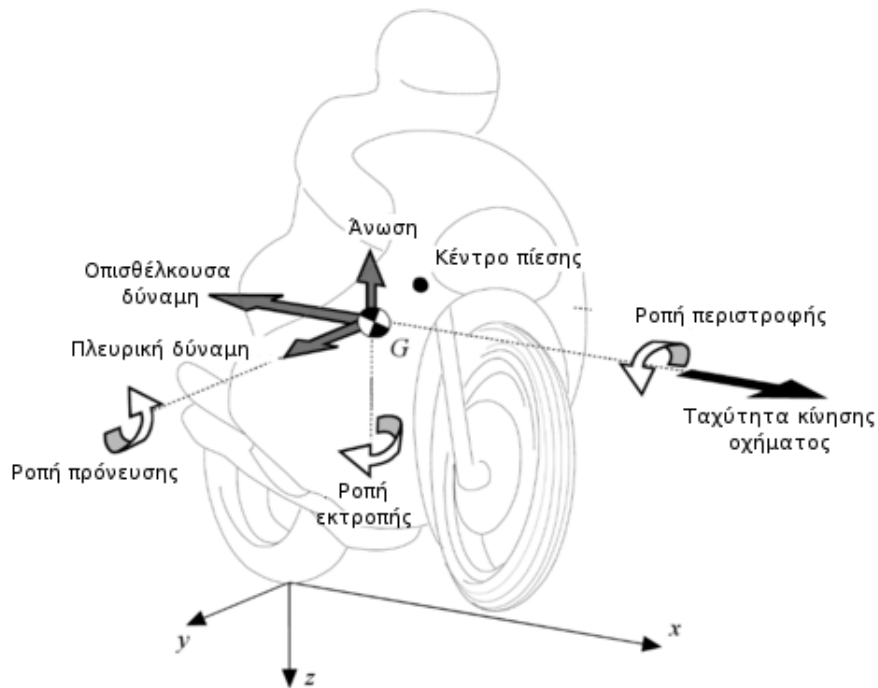
Όταν μεταξύ ενός στερεού σώματος  $M$  (στην συγκεκριμένη περίπτωση ενός δίτροχου μηχανοκίνητου οχήματος) και ενός ρευστού που περιβάλλει το σώμα (αέρας) υπάρχει σχετική κίνηση, τότε ασκείται επί του στερεού σώματος δύναμη  $\vec{F}_M$  η οποία οφείλεται στην επενέργεια του ρευστού. Η συνολική δύναμη που ασκείται από το ρευστό στο στερεό ισούται με το ολοκλήρωμα του διανύσματος των τάσεων  $\vec{t}_M$  που ασκούνται σε στοιχείο επιφανείας  $dE$  του στερεού όπως φαίνεται στην εξίσωση 3.23 όπου  $\vec{\tau}_M^T$  είναι ο τανυστής των διατμητικών τάσεων και  $p$  είναι η πίεση του ρευστού. Σημειώνεται ότι το μοναδιαίο και κάθετο στην επιφάνεια  $E$  διάνυσμα  $\vec{n}_M$  έχει κατεύθυνση από το ρευστό προς το στερεό.[10]

$$\vec{F}_M = \int_{E_M} \vec{t}_M dE = \int_{E_M} p \vec{n}_M dE - \int_{E_M} \vec{\tau}_M^T \vec{n}_M dE \quad (3.23)$$

Ο προσδιορισμός της συνολικής δύναμης αυτής είναι εφικτός είτε πειραματικά, είτε θεωρητικά υπολογίζοντας το πεδίο ροής και εφαρμόζοντας τη σχέση 3.23. Η συνολική δύναμη  $\vec{F}_M$  που ασκείται στο στερεό, μπορεί να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες. Μία συνιστώσα  $\vec{D}$  κατά την κατεύθυνση παράλληλη της ταχύτητας  $\vec{V}$  του ρευστού (έστω άξονας  $x$ ) η οποία ονομάζεται οπισθέλκουσα ή αντίσταση (drag force) και μία συνιστώσα  $\vec{L}$  κάθετη στην ταχύτητα του ρευστού (έστω άξονας μείον  $z$ ) η οποία ονομάζεται άνοση (lift force). Στην περίπτωση των δίτροχων οχημάτων αλλά και γενικά στην αεροδυναμική μελέτη στερεών σωμάτων, οι δύο αυτές δυνάμεις είναι οι πιο σημαντικές. Η εφαρμογή γίνεται στο κέντρο πίεσης, το οποίο γενικά δεν συμπίπτει με το κέντρο μάζας αλλά συνήθως βρίσκεται υψηλότερα από αυτό. Το αποτέλεσμα της δράσης των δύο αυτών δυνάμεων είναι η ροπή πρόνευσης (pitching moment) η οποία τείνει να περιστρέψει το όχημα γύρω από τον άξονα  $y$  όπως φαίνεται στο σχήμα 3.2.

Η οπισθέλκουσα δύναμη  $D$  έχει αρνητική επίδραση στις ανώτερες τιμές ταχύτητας και επιτάχυνσης που δύναται να σημειώσει το όχημα. Είναι ανάλογη με το τετράγωνο της





Σχήμα 3.2: Δυνάμεις και ροπές που επενεργούν σε κινούμενο δίτροχο όχημα. [20]

ταχύτητας κίνησης του οχήματος  $V$  και περιγράφεται από την εξίσωση 3.24:

$$D = \frac{1}{2} \rho C_D A V^2 \quad (3.24)$$

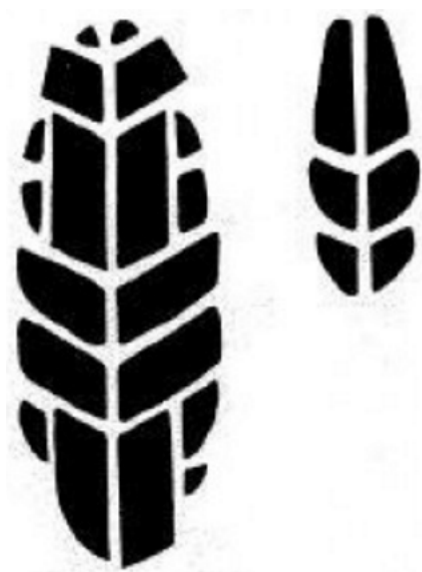
όπου  $\rho$  η πυκνότητα του αέρα ίση με  $1.167 \text{ kg/m}^3$  σε ατμοσφαιρική πίεση 987 mbar, στους  $20^\circ\text{C}$ ,  $A$  μια επιφάνεια αναφοράς (εδώ η μετωπική επιφάνεια του οχήματος) και  $C_D$  ο συντελεστής οπισθέλκουσας δύναμης (drag coefficient) του οχήματος. Στα δίτροχα, η μετωπική επιφάνεια ποικίλει ανάλογα με τον τύπο χρήσης του διτροχού και επηρεάζεται έντονα από τον τύπο σώματος και τη θέση οδήγησης του αναβάτη. Τιμές αναφοράς από  $0.6$  έως  $0.9 \text{ m}^2$  για δίτροχα ταξιδιωτικού σχεδιασμού μεγάλου όγκου,  $0.40$  έως  $0.60 \text{ m}^2$  για δίτροχα αγωνιστικού τύπου και  $0.40$  έως  $0.50 \text{ m}^2$  για αμιγώς αγωνιστικά δίτροχα. Το δίτροχο όχημα που εξετάζεται στην παρούσα εργασία ανήκει στη δεύτερη κατηγορία και η μετωπική του επιφάνεια, χωρίς αναβάτη, είναι  $0.46 \text{ m}^2$ . Η τιμή του συντελεστή οπισθέλκουσας δύναμης επηρεάζεται έντονα από τη μορφή του οχήματος και, κυρίως, από την παρουσία ή όχι ανεμοθώρακα και συνήθεις τιμές του είναι από  $0.4$  έως  $0.5$ . [20] Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία έχει ως στόχο τη βελτιστοποίηση της μορφής του ανεμοθώρακα δίτροχου μηχανοκίνητου οχήματος χρησιμοποιώντας ως αντικειμενική συνάρτηση τον συντελεστή οπισθέλκουσας.

Η δύναμη άνωσης που ασκείται στο δίτροχο λόγω της αλληλεπίδρασης του με τη ροή του αέρα είναι επίσης ανάλογη με το τετράγωνο της ταχύτητας κίνησης του οχήματος

$V$  και περιγράφεται στην εξίσωση 3.25:

$$L = \frac{1}{2} \rho C_L A V^2 \quad (3.25)$$

όπου  $\rho$ ,  $A$  ως άνωθεν και  $C_L$  ο συντελεστής άνωσης του οχήματος. Η δύναμη της άνωσης, από την σκοπιά των επιδόσεων είναι επιθυμητή αφού η αύξησή της μέχρι ενός ορίου μπορεί να συμβάλει στην μείωση της οπισθέλκουσας δύναμης. Η επίδρασή της, όμως, στην ευστάθεια ενός επίγειου οχήματος μπορεί να είναι αρνητική. Η άνωση μπορεί να είναι επικίνδυνη στα δίτροχα αφού μειώνει το φορτίο του εμπρόσθιου αλλά σε κάποιες περιπτώσεις και του οπίσθιου τροχού και, κατ' επέκταση, την πρόσφυση των ελαστικών στο οδόστρωμα. Συνεπώς, το θέμα της ευστάθειας σε σχέση με τη δύναμη άνωσης πρέπει να λαμβάνεται υπόψη κατά το σχεδιασμό ανεμοθώρακα. Το σχήμα 3.3 απεικονίζει την επιφάνεια ελαστικού μπροστινού τροχού διτροχού η οποία βρίσκεται σε επαφή με το οδόστρωμα, σε διαφορετικές ταχύτητες κίνησης του οχήματος. Όσο αυξάνεται η ταχύτητα κίνησης, τόσο αυξάνεται η δύναμη της άνωσης, μειώνεται το φορτίο του τροχού και, συνεπώς, μικρότερη επιφάνεια ελαστικού βρίσκεται σε επαφή με το οδόστρωμα.



**Σχήμα 3.3:** Επιφάνεια επαφής εμπρόσθιου τροχού διτροχού με το οδόστρωμα. Ταχύτητα κίνησης οχήματος: (α) 80 km/h (αριστερά), (β) 200 km/h (δεξιά).[21]

## Κεφάλαιο 4

# Παραμετρικές καμπύλες B-spline και NURBS

Ο μηχανικός του σήμερα, και κυρίως ο μηχανικός που ασχολείται με τον σχεδιασμό και την παραγωγή νέων προϊόντων ή τη βελτιστοποίηση ήδη υπάρχοντων προϊόντων είναι βέβαιο ότι θα χρειαστεί να αλληλεπιδράσει με κάποιο πρόγραμμα σχεδίασης (CAD) και μετέπειτα κατασκευής (CAM) με τη βοήθεια υπολογιστή. Η αναπαράσταση στερεών σωμάτων στα προγράμματα αυτά γίνεται με τη χρήση καμπυλών και επιφανειών, η διαχείριση των οποίων πραγματοποιείται από τον υπολογιστή σε παραμετρική μορφή.

Η ιστορία των παραμετρικών αυτών μορφών ξεκινά από τα τέλη του 19ου αιώνα αλλά η πρώτη αναφορά σε τέτοιες καμπύλες γίνεται το 1946 από τον μαθηματικό Isaac Jacob Schoenberg[22]. Αμέσως μετά τον 2ο Παγκόσμιο Πόλεμο, οι ανάγκες της βιομηχανίας (της αεροναυπηγικής αλλά κυρίως της αυτοκινητοβιομηχανίας) οδηγούν στην περαιτέρω διερεύνηση των χαρακτηριστικών των καμπυλών αυτών. Μέχρι τα μέσα της δεκαετίας του 1960, οι παραμετρικές καμπύλες Bezier και B-spline μελετήθηκαν εκτενώς, χάρη στο έργο χάρη στο έργο επιστημόνων όπως οι Pierre Bézier, Paul de Casteljaou, Garrett Birkhoff, Paul Garabedian, Carl R. de Boor κ.α. Η εισαγωγή των υπολογιστών στη διαδικασία σχεδίασης, οι απαιτήσεις για μεγαλύτερη ακρίβεια στην αναπαράσταση επιφανειών και κωνικών τομών όπως επίσης και η ανάγκη για τοπικό έλεγχο μιας καμπύλης ή επιφάνειας, οδηγούν σε περαιτέρω εξέλιξη των καμπυλών B-spline η οποία καταλήγει στη χρήση των παραμετρικών καμπυλών και επιφανειών NURBS (Non-uniform rational basis spline)[23].

Αρχικά η χρήση των NURBS περιοριζόταν στο ιδιόκτητο λογισμικό CAD των αυτοκινητοβιομηχανιών, σήμερα όμως χρησιμοποιούνται σε πολλά εμπορικά προγράμματα σχεδίασης, παραγωγής και μελέτης (CAD, CAM, CAE) και σε πολλά βιομηχανικά πρότυπα όπως τα IGES, STEP, ACIS και PHIGS [23]. Για τον σχεδιαστή μηχανικό,

η χρήση B-spline και NURBS επιτρέπει τον εύκολο έλεγχο και επεξεργασία καμπυλών και επιφανειών μέσω σημείων ελέγχου και κατανομή βαρών στα σημεία αυτά. Οι λεπτομερείς σχέσεις που διέπουν τη λειτουργία των καμπυλών και επιφανειών NURBS και οι ιδιότητές τους αναπτύσσονται στις παραγράφους 4.6 και 4.7 αντίστοιχα, αφού πρώτα αναφερθούν κάποια προαπαιτούμενα σχετικά με τις παραμετρικές καμπύλες (παράγραφος 4.1), τις καμπύλες Bezier (παράγραφος 4.2), τις επιφάνειες τανυστικού γινομένου (παράγραφος 4.3) και τις καμπύλες και επιφάνειες B-spline (παράγραφοι 4.4, 4.5).

## 4.1 Πεπλεγμένες και παραμετρικές μορφές

Οι δύο πιο συνηθισμένες μέθοδοι αναπαράστασης καμπυλών και επιφανειών στη γεωμετρική μοντελοποίηση είναι οι πεπλεγμένες εξισώσεις και οι παραμετρικές συναρτήσεις.

Η πεπλεγμένη εξίσωση μιας καμπύλης επί του επιπέδου  $xy$  έχει τη μορφή  $f(x, y) = 0$ . Αυτή η εξίσωση περιγράφει μια πεπλεγμένη σχέση μεταξύ των  $x$  και  $y$  συντεταγμένων των σημείων της καμπύλης. Για δεδομένη καμπύλη, η εξίσωση είναι μοναδική. Ένα παράδειγμα είναι ο κύκλος μοναδιαίας ακτίνας, με κέντρο την αρχή των αξόνων, ο οποίος ορίζεται από την εξίσωση  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ .

Στην παραμετρική μορφή, οι συντεταγμένες του κάθε σημείου της καμπύλης ορίζονται ξεχωριστά η καθεμιά, ως μια μη-πεπλεγμένη συνάρτηση μίας ανεξάρτητης παραμέτρου [24]

$$\mathbf{C}(u) = (x(u), y(u)) \quad a \leq u \leq b$$

Έτσι, η  $\mathbf{C}(u)$  είναι μια διανυσματική συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής  $u$ . Παρότι το διάστημα  $[a, b]$  είναι τυχαίο, συνήθως θεωρείται το κανονικοποιημένο διάστημα  $[0, 1]$ . Στο παράδειγμα του κύκλου, το πρώτο τεταρτημόριο, ορίζεται από τις παραμετρικές συναρτήσεις

$$\begin{aligned} x(u) &= \cos(u) \\ y(u) &= \sin(u) \quad 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Θέτοντας όμως  $t = \tan(\frac{u}{2})$ , προκύπτει μια εναλλακτική αναπαράσταση

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y(t) &= \frac{2t}{1+t^2} \quad 0 \leq t \leq 1 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Συνεπώς η παραμετρική αναπαράσταση μια καμπύλης, δεν είναι μοναδική.

Η πεπλεγμένη εξίσωση μίας επιφάνειας, είναι μια εξίσωση της μορφής  $f(x, y, z) = 0$ , όπως το παράδειγμα της σφαίρας μοναδιαίας ακτίνας με κέντρο την αρχή των αξόνων, η οποία ορίζεται από την εξίσωση  $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ . Μια παραμετρική αναπαράσταση (μη μοναδική) της ίδιας σφαίρας, δίνεται από τη σχέση  $\mathbf{S}(u) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ , όπου

$$\begin{aligned}x(u, v) &= \sin(u)\cos(v) \\y(u, v) &= \sin(u)\sin(v) \\z(u, v) &= \cos(u) \quad 0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v \leq 2\pi\end{aligned}\tag{4.3}$$

Όπως είναι εμφανές, χρειάζονται δύο παράμετροι για να οριστεί μια επιφάνεια. Συγκρίνοντας τις πεπλεγμένες με τις παραμετρικές μορφές, δεν είναι πάντα εύκολο να επιλεγεί η καταλληλότερη αφού και οι δύο έχουν πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα και μπορούν και οι δύο να χρησιμοποιηθούν με επιτυχία για γεωμετρική μοντελοποίηση. Στα επόμενα κεφάλαια αναλύονται αποκλειστικά οι παραμετρικές μορφές.

## 4.2 Πολυωνυμικές καμπύλες Bezier και ρητές καμπύλες Bezier

Παρότι στις παραμετρικές μορφές, οι συναρτήσεις των συντεταγμένων  $x(u), y(u), z(u)$  μπορούν να είναι τυχαίες, ιδανικό θα ήταν να περιορίζονταν σε τύπους συναρτήσεων οι οποίες

- έχουν την ικανότητα να αναπαραστήσουν με ακρίβεια όλες τις καμπύλες που ενδέχεται να χρειαστεί ένας χρήστης,
- είναι εύκολα, αποδοτικά και με ακρίβεια διαχειρίσιμες από έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή και
- είναι απλοί και μαθηματικά κατανοητοί.

Τα πολυώνυμα, είναι ένας τύπος συναρτήσεων που χρησιμοποιείται ευρέως. Παρότι ικανοποιούν τα δύο τελευταία κριτήρια της παραπάνω λίστας, υπάρχει ένας σημαντικός αριθμός καμπυλών και επιφανειών που δεν μπορούν να αναπαραστήσουν με ακρίβεια. Για αυτές τις καμπύλες, η αναπαράσταση γίνεται προσεγγιστικά. Χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιων παραμετρικών πολυωνυμικών καμπυλών, είναι οι πολυωνυμικές καμ-

πύλες Bezier. Μια καμπύλη Bezier βαθμού  $n$  ορίζεται από τη σχέση[24]

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) \mathbf{P}_i \quad (4.4)$$

Οι συναρτήσεις βάσης  $\{B_{i,n}(u)\}$ , είναι τα πολυώνυμα Bernstein βαθμού  $n$  που ορίζονται ως εξής

$$B_{i,n}(u) = \frac{n!}{i!(n-i)!} u^i (1-u)^{n-i} \quad (4.5)$$

Οι γεωμετρικοί συντελεστές  $\{\mathbf{P}_i\}$  ονομάζονται σημεία ελέγχου. Να σημειωθεί ότι ο ορισμός της καμπύλης Bezier απαιτεί ότι  $u \in [0, 1]$ .

Οι πολυωνυμικές καμπύλες Bezier (και γενικά τα πολυώνυμα) παρέχουν πολλά πλεονεκτήματα, ωστόσο, υπάρχουν κάποιοι τύποι σημαντικών καμπυλών και επιφανειών οι οποίοι δεν μπορούν να αναπαρασταθούν με ακρίβεια με τη χρήση τους π.χ. κύκλοι, ελλείψεις, υπερβολές, κύλινδροι, κώνοι, σφαίρες κ.α.

Είναι όμως γνωστό από τα κλασικά μαθηματικά ότι όλες οι κωνικές καμπύλες συμπεριλαμβανομένου και του κύκλου, μπορούν να αναπαρασταθούν με χρήση ρητών συναρτήσεων, οι οποίες ορίζονται ως ο λόγος δύο πολυωνύμων. Είναι, δηλαδή, εφικτό οι κωνικές καμπύλες να παρασταθούν με ρητές συναρτήσεις της μορφής

$$x(u) = \frac{X(u)}{W(u)} \quad y(u) = \frac{Y(u)}{W(u)} \quad (4.6)$$

όπου  $X(u)$ ,  $Y(u)$  και  $W(u)$  είναι πολυώνυμα και, βέβαια, και οι δύο συναρτήσεις συντεταγμένων έχουν τον ίδιο παρονομαστή.

Ορίζεται η ρητή καμπύλη Bezier[24] βαθμού  $n$  ως εξής:

$$\mathbf{C}(u) = \frac{\sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) w_i \mathbf{P}_i}{\sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) w_i} \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (4.7)$$

όπου  $\{\mathbf{P}_i = (x_i, y_i, z_i)\}$  είναι τα σημεία ελέγχου και  $\{B_{i,n}(u)\}$  τα πολυώνυμα Bernstein. Οι τιμές  $w_i$  είναι βαθμωτά μεγέθη τα οποία ονομάζονται βάρη (weights). Συνεπώς, η συνάρτηση  $W(u) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) w_i$  είναι ο κοινός παρονομαστής των συναρτήσεων συντεταγμένων. Αν δεν αναφέρεται κάπου ρητά, θεωρείται ότι  $w_i > 0$  για κάθε  $i$ , το

οποίο εξασφαλίζει ότι  $W(u) > 0$  για κάθε  $u \in [0, 1]$ . Αν τεθεί

$$R_{i,n}(u) = \frac{B_{i,n}(u)w_i}{\sum_{j=0}^n B_{j,n}(u)w_j}$$

τότε μπορεί να γραφτεί

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^n R_{i,n}(u)\mathbf{P}_i \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (4.8)$$

Οι συναρτήσεις  $R_{i,n}(u)$  είναι οι ρητές συναρτήσεις βάσης της καμπύλης. Οι ιδιότητες των ρητών συναρτήσεων βάσης  $R_{i,n}(u)$  όπως προκύπτουν από την εξίσωση 4.8 και τις ιδιότητες των πολυωνύμων Bernstein είναι:

Ιδιότητα 4.2.1: Μη - αρνητικότητα.  $R_{i,n}(u) \geq 0$  για κάθε  $i, n$  και  $u \in [0, 1]$ .

Ιδιότητα 4.2.2: Μοναδιαίο άθροισμα.  $\sum_{i=0}^n R_{i,n}(u) = 1$  για κάθε  $u \in [0, 1]$ .

Ιδιότητα 4.2.3:  $R_{0,n}(0) = R_{n,n}(1) = 1$ .

Ιδιότητα 4.2.4: Όλες οι συναρτήσεις  $R_{i,n}(u)$  έχουν ακριβώς ένα μέγιστο στο διάστημα  $u \in [0, 1]$ .

Ιδιότητα 4.2.5: Αν  $w_i = 1$  για κάθε  $i$ , τότε  $R_{i,n}(u) = B_{i,n}(u)$  για όλα τα  $i$ . Δηλαδή, οι συναρτήσεις  $B_{i,n}(u)$  είναι ειδικές περιπτώσεις των  $R_{i,n}(u)$ .

Από τις παραπάνω ιδιότητες απορρέουν τα παρακάτω σημαντικά γεωμετρικά χαρακτηριστικά των καμπυλών Bezier:

Ιδιότητα 4.2.6: Οι καμπύλες περιέχονται εντός των κυρτών πολυγώνων που σχηματίζονται από τα σημεία ελέγχου  $\mathbf{P}_i$  που τις ορίζουν.

Ιδιότητα 4.2.7: Αναλλοίωτες σε συναφείς μετασχηματισμούς (αφφινε τρανσφορματιονς). Οι μετασχηματισμοί πραγματοποιούνται με εφαρμογή τους στα σημεία ελέγχου.

Ιδιότητα 4.2.8: Δεν υπάρχει ευθεία γραμμή (επίπεδο) που να τέμνει μια διδιάστατη (τριδιάστατη) καμπύλη Bezier περισσότερες φορές από ότι τέμνει το πολύγωνο ελέγχου της.

Ιδιότητα 4.2.9:  $\mathbf{C}(0) = \mathbf{P}_0$  και  $\mathbf{C}(1) = \mathbf{P}_n$ .

Ιδιότητα 4.2.10: Η παράγωγος  $k$  τάξης στο  $u = 0$  ( $u = 1$ ) εξαρτάται από τα πρώτα (τελευταία)  $k + 1$  σημεία ελέγχου και βάρη. Συγκεκριμένα, οι πρώτες παράγωγοι,  $\mathbf{C}'(0)$  και  $\mathbf{C}'(1)$  είναι παράλληλες στα διανύσματα  $\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0$  και  $\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_{n-1}$ , αντίστοιχα.

Ιδιότητα 4.2.11: Οι πολυωνυμικές καμπύλες Bezier είναι ειδική περίπτωση των ρητών καμπυλών Bezier.

### 4.3 Επιφάνειες τανυστικού γινομένου

Η καμπύλη  $\mathbf{C}(u)$  είναι μια διανυσματική συνάρτηση μίας παραμέτρου. Είναι μια απεικόνιση ενός ευθύγραμμου τμήματος στον τριδιάστατο Ευκλείδειο χώρο. Αντίστοιχα, η επιφάνεια, είναι μία διανυσματική συνάρτηση δύο παραμέτρων,  $u$  και  $v$ , και αναπαριστά μια απεικόνιση περιοχής,  $\mathcal{R}$ , επι του επιπέδου  $uv$ , στον τριδιάστατο Ευκλείδειο χώρο. Συνεπώς, έχει τη μορφή  $\mathbf{S}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), (u, v) \in \mathcal{R}$ . Υπάρχουν πολλοί τρόποι αναπαράστασης επιφανειών που διαφέρουν μεταξύ τους στις συναρτήσεις συντεταγμένων που χρησιμοποιούν και στον τύπο της επιφάνειας  $\mathcal{R}$ . Πιθανότατα, η απλούστερη και πιο διαδεδομένη μέθοδος στις εφαρμογές γεωμετρικής μοντελοποίησης είναι αυτή του τανυστικού γινομένου.

Η μέθοδος του τανυστικού γινομένου είναι, κατά βάση, ένα σύστημα καμπυλών σε δύο κατευθύνσεις που χρησιμοποιεί συναρτήσεις βάσης και γεωμετρικούς συντελεστές. Οι συναρτήσεις βάσης, είναι συναρτήσεις των  $u$  και  $v$  και κατασκευάζονται σχηματίζοντας γινόμενα μεταξύ των μονοπαραγοντικών συναρτήσεων βάσης. Οι γεωμετρικοί συντελεστές είναι κατανομημένοι (χωρικά) σε ένα πλέγμα  $n \times m$  σημείων. Έτσι, μία επιφάνεια τανυστικού γινομένου, έχει την μορφή[24]

$$\mathbf{S}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m f_i(u)g_j(v)\mathbf{b}_{i,j} \quad (4.9)$$

όπου

$$\begin{cases} \mathbf{b}_{i,j} = (x_{i,j}, y_{i,j}, z_{i,j}) \\ 0 \leq u, v \leq 1 \end{cases}$$

Να σημειωθεί ότι το χωρίο  $(u, v)$  της παραπάνω απεικόνισης είναι τετράγωνο (γενικά είναι παραλληλόγραμμο). Ακόμα, να αναφερθεί ότι η επιφάνεια  $\mathbf{S}(u, v)$  γράφεται σε μητρική μορφή ως εξής:

$$\mathbf{S}(u, v) = [f_i(u)]^T [\mathbf{b}_{i,j}] [g_j(v)]$$

όπου  $[f_i(u)]^T$  είναι ένα  $(1) \times (n + 1)$  διάνυσμα-σειρά,  $[g_j(v)]$  είναι ένα  $(m + 1) \times (1)$  διάνυσμα-στήλη και  $[\mathbf{b}_{i,j}]$  είναι ένα  $(n + 1) \times (m + 1)$  μητρώο τριδιάστατων σημείων.

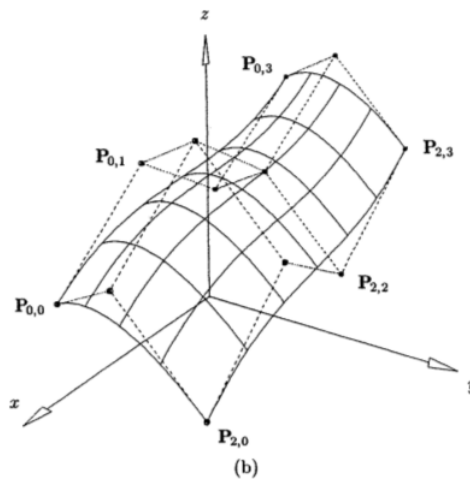
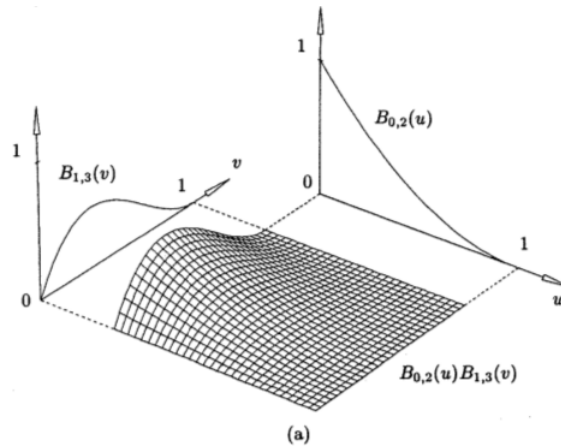
Είναι δυνατός ο σχηματισμός μη-ρητών επιφανειών Bezier παίρνοντας ένα πλέγμα σημείων ελέγχου σε δύο κατευθύνσεις και γινόμενα (μονοπαραγοντικών) πολυωνύμων



Bernstein.

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_{i,n}(u) B_{j,m}(v) P_{i,j} \quad 0 \leq u, v \leq 1 \quad (4.10)$$

Το σχήμα 4.1 (α) δείχνει τη συνάρτηση βάσης  $B_{0,2}(u)B_{1,3}(v)$ , ενώ το σχήμα 4.1 (β) παρουσιάζει μία τετραγωνική  $\times$  κυβική επιφάνεια Bezier.



**Σχήμα 4.1:** (α) Η συνάρτηση βάσης τανυστικού γινομένου επιφάνειας Bezier,  $B_{0,2}(u)B_{1,3}(v)$ . (β) τετραγωνική  $\times$  κυβική επιφάνεια Bezier.[24]

Για σταθερό  $u = u_0$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C}_{\mathbf{u}_0}(v) &= \mathbf{S}(u_0, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_{i,n}(u_0) B_{j,m}(v) \mathbf{P}_{i,j} \\
 &= \sum_{j=0}^m B_{j,m}(v) \left( \sum_{i=0}^n B_{i,n}(u_0) \mathbf{P}_{i,j} \right) \\
 &= \sum_{j=0}^m B_{j,m}(v) \mathbf{Q}_j(u_0)
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

όπου η  $\mathbf{Q}_j(u_0) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(u_0) \mathbf{P}_{i,j}$   $j = 0, \dots, m$  είναι μια καμπύλη Bezier επί της επιφάνειας. Κατ' αναλογία, η  $\mathbf{C}_{\mathbf{v}_0}(u) = \sum_{i=0}^m B_{i,m}(v_0) \mathbf{Q}_i(u)$  είναι μια καμπύλη σταθερού  $v$  επίσης επί της επιφάνειας.

## 4.4 Καμπύλες B-spline: Ορισμοί και ιδιότητες

Καμπύλες αποτελούμενες από ένα πολυωνυμικό ή και ρητό τμήμα παρουσιάζουν τα παρακάτω σημαντικά μειονεκτήματα που τις καθιστούν μη χρηστικές:

- Για να ικανοποιηθεί μεγάλος αριθμός περιορισμών απαιτείται αντίστοιχα καμπύλη υψηλού βαθμού. Απαιτείται, για παράδειγμα, μια πολυωνυμική καμπύλη Bezier βαθμού  $(n-1)$  για να παρεμβάλει  $n$  δεδομένα σημεία. Όμως, οι καμπύλες υψηλού βαθμού είναι αριθμητικά ασταθείς και η επεξεργασία τους μη αποδοτική.
- Για την αναπαράσταση πολύπλοκων σχημάτων και γεωμετριών απαιτούνται καμπύλες υψηλού βαθμού.
- Μονοτμηματικές καμπύλες (ή και επιφάνειες) δεν είναι κατάλληλες για διαδραστικό σχεδιασμό. Παρά το γεγονός ότι οι καμπύλες Bezier μπορούν να διαμορφωθούν μέσω των σημείων ελέγχου τους και των βαρών, ο έλεγχος που προσφέρουν δεν είναι επαρκώς τοπικός αλλά επηρεάζει συνολικά την καμπύλη.

Η λύση στα μειονεκτήματα αυτά είναι η χρήση καμπυλών οι οποίες είναι τμηματικά πολυωνυμικές ή τμηματικά ρητές, δηλαδή μια καμπύλη της μορφής[24]

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^n f_i(u) \mathbf{P}_i \tag{4.12}$$

όπου  $\mathbf{P}_i$  είναι τα σημεία ελέγχου ενώ οι  $\{f_i(u), i = 0, \dots, n\}$  είναι τμηματικά πολυωνυμικές εξισώσεις οι οποίες σχηματίζουν τη βάση για τον διανυσματικό χώρο όλων των τμηματικά πολυωνυμικών συναρτήσεων του επιθυμητού βαθμού και συνέχειας. Τέτοιες συναρτήσεις είναι οι συναρτήσεις βάσης των καμπυλών B-spline. Έστω  $U = \{u_0, \dots, u_m\}$  είναι μια μη-φθίνουσα αλληλουχία πραγματικών αριθμών, δηλαδή  $u_i \leq u_{i+1}$  για κάθε  $i = 0, \dots, m-1$ . Τα  $u_i$  ονομάζονται κόμβοι (nodes ή knots) και το  $U$  είναι το διάνυσμα κόμβων. Τότε, η  $i$ -στή συνάρτηση βάσης B-spline βαθμού  $p$  (και τάξης  $p+1$ ) συμβολίζεται με  $N_{i,p}(u)$  και ορίζεται ως εξής:

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{αν } u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases}$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u) \quad (4.13)$$

Έχοντας ορίσει τις συναρτήσεις βάσης, μπορεί τώρα να οριστεί μια καμπύλη B-spline βαθμού  $p$  ως εξής:

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \mathbf{P}_i \quad a \leq u \leq b \quad (4.14)$$

όπου  $\{\mathbf{P}_i\}$  είναι το διάνυσμα των σημείων ελέγχου και  $\{N_{i,p}(u)\}$  είναι οι B-spline συναρτήσεις βάσης βαθμού  $p$  που ορίζονται από το μη-περιοδικό (και μη-ομοιόμορφο) διάνυσμα κόμβων  $U$  (με  $m+1$  κόμβους):

$$\mathbf{U} = \{\underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_{m-p-1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1}\}$$

Εάν δεν αναφέρεται διαφορετικά, συνήθως θεωρείται  $a = 0$  και  $b = 1$ . Το πολύγωνο που σχηματίζουν τα σημεία  $\mathbf{P}_i$  ονομάζεται πολύγωνο ελέγχου. Οι ιδιότητες των καμπυλών B-spline ακολουθούν παρακάτω:

Ιδιότητα 4.4.1: Αν  $n = p$  και  $U = \{0, \dots, 0, 1, \dots, 1\}$  τότε  $\mathbf{C}(u)$  είναι μια καμπύλη Bezier.

Ιδιότητα 4.4.2: Ο βαθμός  $p$ , ο αριθμός των σημείων ελέγχου  $n+1$  και ο αριθμός των κόμβων  $m+1$  συνδέονται μέσω της σχέσης

$$m = n + p + 1 \quad (4.15)$$

Ιδιότητα 4.4.3:  $\mathbf{C}(0) = \mathbf{P}_0$  και  $\mathbf{C}(1) = \mathbf{P}_n$

Ιδιότητα 4.4.4: Αναλλοίωτες σε συναφείς μετασχηματισμούς (αφφινε μετασχηματισμούς). Οι μετασχηματισμοί πραγματοποιούνται με εφαρμογή τους στα σημεία ελέγχου.

- Ιδιότητα 4.4.5: Μια καμπύλη B-spline περιέχεται εντός του κυρτού κελιού του πολυγώνου ελέγχου της. Πράγματι, αν  $u \in [u_i, u_{i+1})$ ,  $p \leq i < m - p - 1$ , τότε η καμπύλη  $\mathbf{C}(u)$  περιέχεται στο κυρτό πολύγωνο που ορίζουν τα σημεία ελέγχου  $\mathbf{P}_{i-p}, \dots, \mathbf{P}_i$ .
- Ιδιότητα 4.4.6: Δυνατότητα τοπικής τροποποίησης. Μετατόπιση του σημείου ελέγχου  $\mathbf{P}_i$  μεταβάλλει την καμπύλη  $\mathbf{C}(u)$  μόνο στο διάστημα  $[u_i, u_{i+p+1})$ . Η ιδιότητα αυτή απορρέει από το γεγονός ότι η συνάρτηση βάσης  $N_{i,p}(u) = 0 \quad \forall u \notin [u_i, u_{i+p+1})$ .
- Ιδιότητα 4.4.7: Το πολύγωνο ελέγχου αναπαριστά μια τμηματική γραμμική προσέγγιση της καμπύλης. Η προσέγγιση αυτή βελτιώνεται με την εισαγωγή κόμβων ή με αύξηση του βαθμού  $p$ . Γενικά, όσο μικρότερος ο βαθμός μιας καμπύλης B-spline, τόσο πιο κοντά στο πολύγωνο ελέγχου κινείται, ενώ στην ακραία περίπτωση που  $p = 1$  η καμπύλη ταυτίζεται με το πολύγωνο.
- Ιδιότητα 4.4.8: Κατά τη μετακίνηση επί της καμπύλης, από  $u = 0$  έως  $u = 1$ , οι συναρτήσεις  $N_{i,p}(u)$  ενεργούν ως διακόπτες, δηλαδή, όταν το  $u$  περάσει από έναν κόμβο, μία συνάρτηση βάσης «απενεργοποιείται» ενώ η επόμενη «ενεργοποιείται».
- Ιδιότητα 4.4.9: Ο αριθμός τομών μεταξύ οποιοδήποτε επιπέδου (ή ευθείας για την περίπτωση της διδιάστατης καμπύλης) και μιας καμπύλης B-spline είναι μικρότερος ή ίσος από τον αριθμό τομών του επιπέδου με το πολύγωνο ελέγχου της καμπύλης.
- Ιδιότητα 4.4.10: Στα ενδιάμεσα των κόμβων σημεία της καμπύλης, η  $\mathbf{C}(u)$  είναι απείρως παραγωγίσιμη ενώ είναι τουλάχιστον  $p - k$  φορές παραγωγίσιμη στους κόμβους πολλαπλότητας  $k$ .
- Ιδιότητα 4.4.11: Είναι δυνατό (και συχνά χρήσιμο) να χρησιμοποιούνται σημεία ελέγχου με πολλαπλότητα μεγαλύτερη της μονάδας.

## 4.5 Επιφάνειες B-spline: Ορισμοί και ιδιότητες

Μια επιφάνεια B-spline μπορεί να κατασκευαστεί παίρνοντας ένα διδιάστατο πλέγμα σημείων ελέγχου  $\mathbf{P}_{i,j}$ , δύο διανύσματα κόμβων  $U, V$  και τα γινόμενα δύο εξισώσεων βάσης B-spline μίας μεταβλητής  $N_{i,p}(u)$  και  $N_{j,q}(v)$ , ως εξής[24]:

$$\mathbf{S}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) \mathbf{P}_{i,j} \quad (4.16)$$

με

$$U = \underbrace{\{0, \dots, 0\}}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_{r-p-1}, \underbrace{\{1, \dots, 1\}}_{p+1} \quad (r+1 \text{ κόμβοι})$$

$$V = \underbrace{\{0, \dots, 0\}}_{q+1}, v_{q+1}, \dots, v_{s-q-1}, \underbrace{\{1, \dots, 1\}}_{q+1} \quad (s+1 \text{ κόμβοι})$$

ενώ οι σχέσεις μεταξύ των  $(r, n, p)$  και  $(s, m, p)$  γίνονται

$$r = n + p + 1 \quad \text{και} \quad s = m + q + 1. \quad (4.17)$$

Ακολουθούν οι ιδιότητες των συναρτήσεων βάσης τανυστικού γινομένου.

Ιδιότητα 4.5.1: Μη-αρνητικότητα.  $N_{i,p}(u)N_{j,q}(v) \geq 0$  για κάθε  $i, j, p, q, u$  και  $v$ .

Ιδιότητα 4.5.2: Μοναδιαίο άθροισμα.  $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u)N_{j,q}(v) = 1$  για κάθε  $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$ .

Ιδιότητα 4.5.3: Αν  $n = p, m = q, U = \{0, \dots, 0, 1, \dots, 1\}$  και  $V = \{0, \dots, 0, 1, \dots, 1\}$ , τότε  $N_{i,p}(u)N_{j,q}(v) = B_{i,n}(u)B_{j,m}(v)$  για κάθε  $i, j$ , δηλαδή γινόμενα B-spline συναρτήσεων εκφυλίζονται σε γινόμενα πολυωνύμων Bernstein.

Ιδιότητα 4.5.4: Τοπικός έλεγχος. Η  $N_{i,p}(u)N_{j,q}(v) = 0$  αν τα  $(u, v)$  βρίσκονται εκτός του παραλληλογράμμου  $[u_i, u_{i+p+1}) \times [v_j, v_{j+q+1})$ .

Ιδιότητα 4.5.5: Σε κάθε δεδομένο παραλληλόγραμμο,  $[u_{i_0}, u_{i_0+1}) \times [v_{j_0}, v_{j_0+1})$ , κατά μέγιστο  $(p+1)(p+1)$  εκ των συναρτήσεων βάσης είναι μη-μηδενικές και συγκεκριμένα οι  $N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)$  για  $i_0 - p \leq i \leq i_0$  και  $j_0 - q \leq j \leq j_0$ .

Ιδιότητα 4.5.6: Ακρότητα. Αν  $p > 0$  και  $q > 0$ , η  $N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)$  έχει ακριβώς ένα μέγιστο.

Ιδιότητα 4.5.7: Διαφορισιμότητα. Στο εσωτερικό των παραλληλογράμμων που σχηματίζονται από τις γραμμές των  $u$  και  $v$  κόμβων υπάρχουν όλες οι μερικές παράγωγοι των  $N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)$ , ενώ, επί ενός κόμβου  $u$  (ή  $v$ ), οι  $N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)$ , είναι  $p - k$  (ή  $q - k$  αντίστοιχα) φορές διαφορίσιμες κατά την  $u$  (ή  $v$  αντίστοιχα) κατεύθυνση, όπου  $k$  η πολλαπλότητα του κόμβου.

Οι επιφάνειες B-spline  $(\mathbf{S}(u, v))$  έχουν αντίστοιχα τις παρακάτω ιδιότητες:

Ιδιότητα 4.5.8: Αν  $n = p, m = q, U = \{0, \dots, 0, 1, \dots, 1\}$  και  $V = \{0, \dots, 0, 1, \dots, 1\}$ , τότε η  $\mathbf{S}(u, v)$  είναι επιφάνεια Bezier.

Ιδιότητα 4.5.9: Τα τέσσερα γωνιακά σημεία ελέγχου είναι και σημεία της επιφάνειας,

δηλαδή,  $S(0,0) = P_{0,0}$ ,  $S(1,0) = P_{n,0}$ ,  $S(0,1) = P_{0,m}$  και  $S(1,1) = P_{n,m}$ .

Ιδιότητα 4.5.10: Αναλλοίωτες σε συναφείς μετασχηματισμούς (αφφινε τρανσφορματιονς). Οι μετασχηματισμοί εφαρμόζονται στην επιφάνεια με εφαρμογή τους στα σημεία ελέγχου.

Ιδιότητα 4.5.11: Αν  $(u, v) \in [u_{i_0}, u_{i_0+1}) \times [v_{j_0}, v_{j_0+1})$ , τότε η επιφάνεια  $\mathbf{S}(u, v)$  περιέχεται στο κυρτό πολύγωνο που ορίζουν τα σημεία ελέγχου  $\mathbf{P}_{i,j}$ ,  $i_0 - p \leq i \leq i_0$  και  $j_0 - q \leq j \leq j_0$ .

Ιδιότητα 4.5.12: Αν τριγωνοποιηθεί, το πλέγμα ελέγχου σχηματίζει μια προσέγγιση με επίπεδα τμήματα της επιφάνειας B-spline. Όπως και στην περίπτωση των καμπυλών, όσο μικρότερος ο βαθμός της επιφάνειας, τόσο καλύτερη η προσέγγιση.

Ιδιότητα 4.5.13: Δυνατότητα τοπικής τροποποίησης. Μετατόπιση του σημείου ελέγχου  $\mathbf{P}_{i,j}$  επηρεάζει την επιφάνεια μόνο εντός του παραλληλογράμμου  $[u_i, u_{i+p+1}) \times [v_j, v_{j+q+1})$ .

Ιδιότητα 4.5.14: Διαφορισιμότητα. Η επιφάνεια  $\mathbf{S}(u, v)$ , επί ενός κόμβου  $u$  (ή  $v$ ) πολυπλοκότητας  $k$ , είναι  $p - k$  (ή  $q - k$ ) φορές διαφορίσιμη κατά την  $u$  (ή  $v$  αντίστοιχα) κατεύθυνση.

## 4.6 Καμπύλες NURBS: Ορισμοί και ιδιότητες

Μια καμπύλη NURBS βαθμού  $p$  ορίζεται από την εξίσωση 4.18 [24].

$$\mathbf{C}(u) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i \mathbf{P}_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i} \quad (4.18)$$

όπου  $\{\mathbf{P}_i\}$  είναι το διάνυσμα των σημείων ελέγχου (που σχηματίζουν το πολύγωνο ελέγχου),  $\{w_i\}$  είναι το διάνυσμα των βαρών, και  $\{N_{i,p}(u)\}$  είναι οι B-spline συναρτήσεις βάσης βαθμού  $p$  που ορίζονται από το μη περιοδικό (και μη ομοιόμορφο) διάνυσμα κόμβων  $U$  με

$$\mathbf{U} = \underbrace{\{a, \dots, a\}}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_{m-p-1}, \underbrace{\{b, \dots, b\}}_{p+1}$$

Εάν δεν ορίζεται διαφορετικά, συνήθως θεωρείται  $a = 0$ ,  $b = 1$  και  $w_i > 0$  για κάθε  $i$ . Θέτοντας

$$\mathbf{R}_{i,p}(u) = \frac{N_{i,p}(u)w_i}{\sum_{j=0}^n N_{j,p}(u)w_j} \quad (4.19)$$

η εξίσωση 4.18 ξαναγράφεται στη μορφή

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^n R_{i,p}(u)\mathbf{P}_i \quad (4.20)$$

Στην παραπάνω εξίσωση,  $\{R_{i,p}(u)\}$  είναι οι ρητές συναρτήσεις βάσης οι οποίες είναι τμηματικά ρητές συναρτήσεις στο διάστημα  $u \in [0, 1]$ .

Οι ιδιότητες των ρητών συναρτήσεων βάσης  $\{R_{i,p}(u)\}$  όπως προκύπτουν από τη συνάρτηση 4.19 και από τις αντίστοιχες ιδιότητες των B-spline συναρτήσεων βάσης  $\{N_{i,p}(u)\}$  είναι οι ακόλουθες:

Ιδιότητα 4.6.1: Μη - αρνητικότητα.  $R_{i,p}(u) \geq 0$  για κάθε  $i, p$  και  $u \in [0, 1]$ .

Ιδιότητα 4.6.2: Μοναδιαίο άθροισμα.  $\sum_{i=0}^n R_{i,p}(u) = 1$  για κάθε  $u \in [0, 1]$ .

Ιδιότητα 4.6.3:  $R_{0,p}(0) = R_{n,p}(1) = 1$ .

Ιδιότητα 4.6.4: Για  $p > 0$ , όλες οι συναρτήσεις  $R_{i,p}(u)$  έχουν ακριβώς ένα μέγιστο στο διάστημα  $u \in [0, 1]$ .

Ιδιότητα 4.6.5: Δυνατότητα τοπικού ελέγχου.  $R_{i,p}(u) = 0$  για  $u \notin [u_i, u_{i+p+1}]$ . Επιπρόσθετα, σε κάθε δεδομένο διάστημα μεταξύ δύο κόμβων, κατά μέγιστο  $p + 1$  εκ των συναρτήσεων  $R_{i,p}(u)$  είναι μη μηδενικές (γενικά, στο διάστημα  $[u_i, u_{i+1}]$ , μη μηδενικές είναι οι συναρτήσεις  $R_{i-p,p}(u), \dots, R_{i,p}(u)$ ).

Ιδιότητα 4.6.6: Όλες οι παράγωγοι των συναρτήσεων  $R_{i,p}(u)$  ορίζονται στα εσωτερικά διαστήματα μεταξύ κόμβων, στα οποία οι  $R_{i,p}(u)$  είναι ρητές συναρτήσεις με μη-μηδενικό παρονομαστή. Επί των κόμβων, η  $R_{i,p}(u)$  είναι  $p - k$  φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, όπου  $k$  ορίζεται η πολλαπλότητα του κόμβου.

Ιδιότητα 4.6.7: Αν  $w_i = 1$  για κάθε  $i$ , τότε  $R_{i,p}(u) = N_{i,p}(u)$  για όλα τα  $i$ . Δηλαδή, οι συναρτήσεις  $N_{i,p}(u)$  είναι ειδικές περιπτώσεις των  $R_{i,p}(u)$  και μάλιστα, αν  $a \neq 0$ , και  $w_i = a \forall i$  τότε  $R_{i,p}(u) = N_{i,p}(u)$  για κάθε  $i$ .

Από τις παραπάνω ιδιότητες απορρέουν τα παρακάτω σημαντικά γεωμετρικά χαρακτηριστικά των καμπυλών NURBS:

Ιδιότητα 4.6.8:  $\mathbf{C}(0) = \mathbf{P}_0$  και  $\mathbf{C}(1) = \mathbf{P}_n$ , όπως προκύπτει από την ιδιότητα 4.6.3.

Ιδιότητα 4.6.9: Αναλλοίωτες σε συναφείς μετασχηματισμούς (αφφινε μετασχηματισμούς).

Οι μετασχηματισμοί πραγματοποιούνται με εφαρμογή τους στα σημεία ελέγχου. Οι καμπύλες NURBS παραμένουν επίσης αμετάβλητες σε προοπτικές προβολές, γεγονός ιδιαίτερα σημαντικό στα γραφικά υπολογιστών.

Ιδιότητα 4.6.10: Αν το  $u \in [u_i, u_{i+1})$ , τότε η καμπύλη  $\mathbf{C}(u)$  περιέχεται στο κυρτό πολύγωνο που ορίζουν τα σημεία ελέγχου  $\mathbf{P}_{i-p}, \dots, \mathbf{P}_i$ .

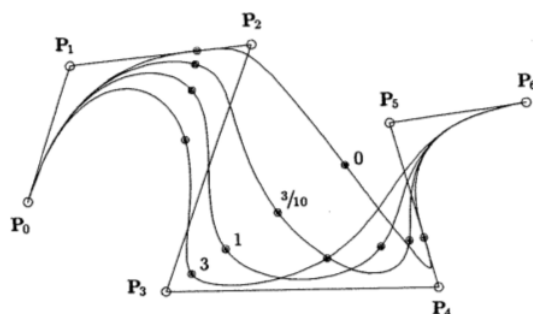
Ιδιότητα 4.6.11: Στα ενδιάμεσα των κόμβων σημεία της καμπύλης, η  $\mathbf{C}(u)$  είναι απείρως παραγωγίσιμη ενώ είναι  $p - k$  φορές παραγωγίσιμη στους κόμβους πολλαπλότητας  $k$ .

Ιδιότητα 4.6.12: Αριθμός τομών επιπέδου (ή ευθείας για την περίπτωση της διδιάστατης καμπύλης) με την καμπύλη είναι μικρότερος ή ίσος από τον αριθμό τομών του επιπέδου με το πολύγωνο ελέγχου.

Ιδιότητα 4.6.13: Μια καμπύλη NURBS χωρίς εσωτερικούς κόμβους είναι μία ρητή καμπύλη Bezier μιας και οι  $N_{i,p}(u)$  εκφυλίζονται στις  $B_{i,n}(u)$ . Η ιδιότητα αυτή σε συνδυασμό με την ιδιότητα 4.6.7 υποδηλώνουν ότι οι μη-ρητές πολυωνυμικές καμπύλες B-spline και οι ρητές και μη-ρητές καμπύλες Bezier είναι ειδικές περιπτώσεις των καμπυλών NURBS.

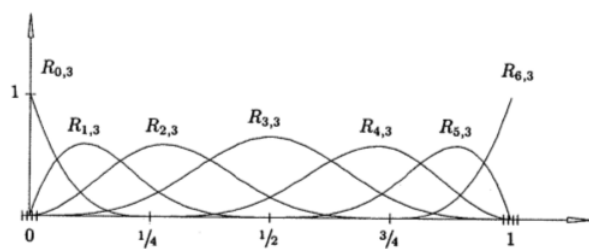
Ιδιότητα 4.6.14: Τοπικότητα. Μετακίνηση ενός σημείου ελέγχου,  $\mathbf{P}_i$ , ή/και αλλαγή του βάρους του  $w_i$ , επηρεάζει μόνο το τμήμα της καμπύλης με  $u \in [u_i, u_{i+1})$ . Η ιδιότητα αυτή είναι πολύ σημαντική σε ότι έχει να κάνει με το διαδραστικό σχεδιασμό.

Πρακτικά, με τη χρήση καμπυλών NURBS επιτυγχάνεται τοπικός έλεγχος επί της μορφής του επιθυμητού αντικειμένου μέσω της κίνηση των σημείων ελέγχου αλλά και μέσω της τροποποίησης των αντίστοιχων βαρών. Τα γραφήματα 4.2 - 4.3 παρουσιάζουν την επίδραση της μεταβολής ενός βάρους στη μορφή της καμπύλης. Ποιοτικά, η επίδραση είναι η ακόλουθη. Έστω  $u \in [u_i, u_{i+p+1})$ . Τότε, αν το  $w_i$  αυξάνεται (μειώνεται), τα σημεία της καμπύλης  $\mathbf{C}(u)$  πλησιάζουν (απομακρύνονται από) το σημείο ελέγχου  $\mathbf{P}_i$ . Επιπλέον, τα σημεία της καμπύλης  $\mathbf{C}(u)$  για σταθερό  $u$  και μεταβαλλόμενο βάρος, κινούνται επί ευθείας γραμμής (βλέπε σχήμα 4.4).

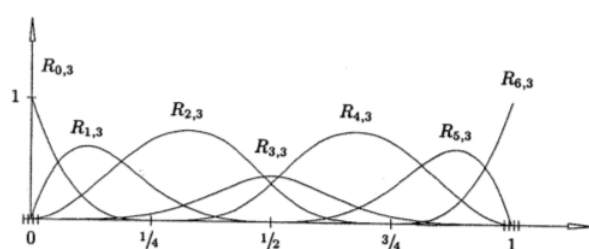


Σχήμα 4.2: Ρητή καμπύλη B-spline με το βάρος  $w_3$  να μεταβάλεται.[24]

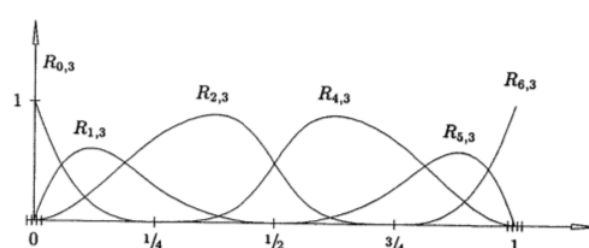




(a)

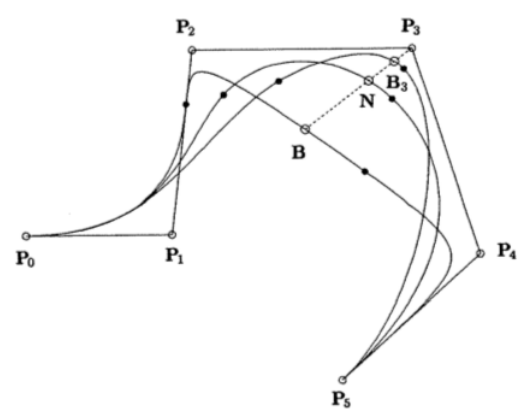


(b)



(c)

Σχήμα 4.3: Κυβικές συναρτήσεις βάσης της καμπύλης του σχήματος 4.2[24]. (α)  $w_3 = 1$  (β)  $w_3 = \frac{3}{10}$  (γ)  $w_3 = 0$ .



Σχήμα 4.4: Μεταβολή του βάρους  $w_3$ . [24]

## 4.7 Επιφάνειες NURBS: Ορισμοί και ιδιότητες

Μια επιφάνεια NURBS βαθμού  $p$  κατά την κατεύθυνση  $u$  και βαθμού  $q$  κατά την κατεύθυνση  $v$  είναι μια διμεταβλητή, κατά τμήματα ρητή συνάρτηση της μορφής[24]

$$\mathbf{S}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j} \mathbf{P}_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j}} \quad 0 \leq u, v \leq 1 \quad (4.21)$$

Τα σημεία  $\{\mathbf{P}_{i,j}\}$  σχηματίζουν ένα διδιάστατο πλέγμα ελέγχου,  $\{w_{i,j}\}$  είναι τα βάρη, και  $\{N_{i,p}(u)\}$  και  $\{N_{j,q}(v)\}$  είναι οι πολυωνυμικές B-spline συναρτήσεις βάσης βαθμού  $p$  και  $q$  αντίστοιχα, που ορίζονται από τα διανύσματα κόμβων

$$\mathbf{U} = \{\underbrace{0, \dots, 0}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_{r-p-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1}\}$$

$$\mathbf{V} = \{\underbrace{0, \dots, 0}_{q+1}, v_{q+1}, \dots, v_{s-q-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{q+1}\}$$

όπου  $r = n + p + 1$  και  $s = m + q + 1$ . Εισάγοντας τις κατά τμήματα ρητές συναρτήσεις βάσης

$$\mathbf{R}_{i,j}(u, v) = \frac{N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j}}{\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m N_{k,p}(u) N_{l,q}(v) w_{k,l}} \quad (4.22)$$

η εξίσωση 4.21 μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\mathbf{S}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(u, v) \mathbf{P}_{i,j} \quad (4.23)$$

Οι ιδιότητες των συναρτήσεων  $\{R_{i,j}(u, v)\}$  είναι παρόμοιες με αυτές των πολυωνυμικών συναρτήσεων βάσης  $N_{i,p}(u) N_{j,q}(v)$ . Περιληπτικά είναι:

Ιδιότητα 4.6.1: Μη-αρνητικότητα.  $R_{i,j}(u, v) \geq 0$  για κάθε  $i, j, u$  και  $v$ .

Ιδιότητα 4.6.2: Μοναδιαίο άθροισμα.  $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(u, v) = 1$  για κάθε  $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$ .

Ιδιότητα 4.6.3: Δυνατότητα τοπικού ελέγχου.  $R_{i,j}(u, v) = 0$  αν τα  $(u, v)$  βρίσκονται εκτός του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται από  $[u_i, u_{i+p+1}] \times$

$$[v_j, v_{j+q+1}).$$

Ιδιότητα 4.6.4: Σε κάθε δεδομένο παραλληλόγραμμο της μορφής  $[u_{i_0}, u_{i_0+1}) \times [v_{j_0}, v_{j_0+1})$ , κατά μέγιστο  $(p+1)(q+1)$  εκ των συναρτήσεων βάσης είναι μη μηδενικές και, συγκεκριμένα, οι  $R_{i,j}(u, v)$  για  $i_0 - p \leq i \leq i_0$  και  $j_0 - q \leq j \leq j_0$ .

Ιδιότητα 4.6.5: Ακρότητα. Για  $p > 0$  και  $q > 0$ , η  $R_{i,j}(u, v)$  έχει ακριβώς ένα μέγιστο.

Ιδιότητα 4.6.6:  $R_{0,0}(0, 0) = R_{n,0}(1, 0) = R_{0,m}(0, 1) = R_{n,m}(1, 1) = 1$ .

Ιδιότητα 4.6.7: Διαφορισιμότητα. Στο εσωτερικό των παραλληλογράμμων που σχηματίζονται από τις γραμμές των  $u$  και  $v$  κόμβων υπάρχουν όλες οι μερικές παράγωγοι των  $R_{i,j}(u, v)$ , ενώ, επί ενός κόμβου  $u$  (ή  $v$ ), οι  $R_{i,j}(u, v)$ , είναι  $p - k$  (ή  $q - k$  αντίστοιχα) φορές διαφορίσιμες κατά την  $u$  (ή  $v$  αντίστοιχα) κατεύθυνση, όπου  $k$  η πολλαπλότητα του κόμβου.

Ιδιότητα 4.6.8: Αν για όλα τα  $w_{i,j}$  ισχύει  $w_{i,j} = a$  για  $0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m$ , και  $a \neq 0$ , τότε  $R_{i,j}(u, v) = N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)$  για όλα τα  $i, j$ .

Από τις παραπάνω ιδιότητες απορρέουν τα παρακάτω σημαντικά γεωμετρικά χαρακτηριστικά των επιφανειών NURBS:

Ιδιότητα 4.6.9:  $\mathbf{S}(0, 0) = \mathbf{P}_{0,0}$ ,  $\mathbf{S}(1, 0) = \mathbf{P}_{n,0}$ ,  $\mathbf{S}(0, 1) = \mathbf{P}_{0,m}$  και  $\mathbf{S}(1, 1) = \mathbf{P}_{n,m}$ .

Ιδιότητα 4.6.10: Αναλλοίωτες σε συναφείς μετασχηματισμούς (αφφινε τρανσφορματισμούς). Οι μετασχηματισμοί εφαρμόζονται στην επιφάνεια με εφαρμογή τους στα σημεία ελέγχου.

Ιδιότητα 4.6.11: Ιδιότητα κυρτού πολυγώνου. Υποθέτοντας ότι  $w_{i,j} \geq 0$  για κάθε  $i, j$ . Αν  $(u, v) \in [u_{i_0}, u_{i_0+1}) \times [v_{j_0}, v_{j_0+1})$ , τότε η επιφάνεια  $\mathbf{S}(u, v)$  περιέχεται στο κυρτό πολύγωνο που ορίζουν τα σημεία ελέγχου  $\mathbf{P}_{i,j}$ ,  $i_0 - p \leq i \leq i_0$  και  $j_0 - q \leq j \leq j_0$ .

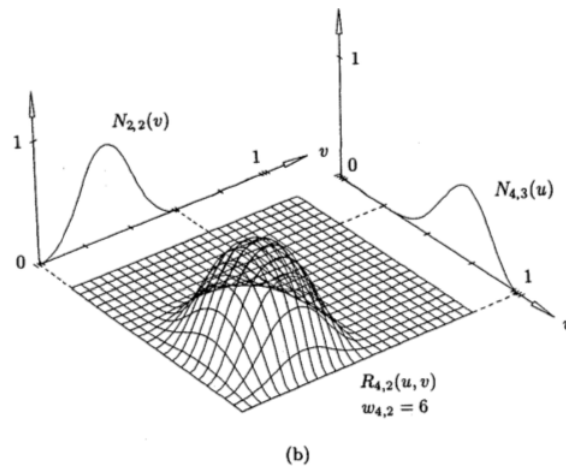
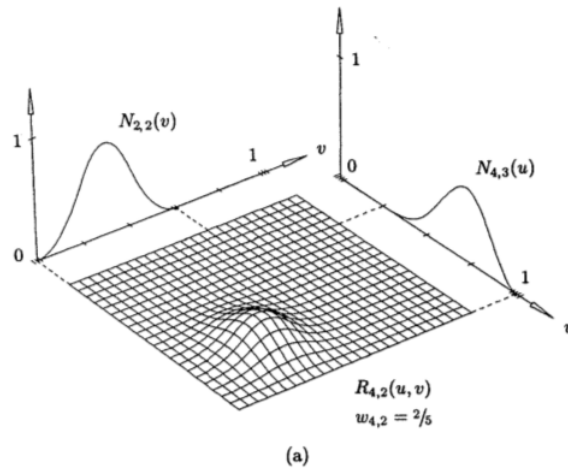
Ιδιότητα 4.6.12: Οι μη-ρητές B-spline και Bezier, όπως επίσης και οι ρητές Bezier επιφάνειες είναι ειδικές περιπτώσεις των επιφανειών NURBS.

Ιδιότητα 4.6.13: Διαφορισιμότητα. Η επιφάνεια  $\mathbf{S}(u, v)$ , επί ενός κόμβου  $u$  (ή  $v$ ) πολλαπλότητας  $k$ , είναι  $p - k$  (ή  $q - k$ ) φορές διαφορίσιμη κατά την  $u$  (ή  $v$  αντίστοιχα) κατεύθυνση.

Όπως στις καμπύλες, έτσι και στις επιφάνειες NURBS, ο χρήστης μπορεί να εκμεταλλευτεί την κίνηση των σημείων ελέγχου ή/και να τροποποιήσει τις τιμές των βαρών για να επέμβει τοπικά στη μορφή της επιφάνειας. Τα γραφήματα 4.5 και 4.6 παρουσιάζουν την επίδραση της μεταβολής ενός βάρους στη μορφή της συνάρτησης βάσης  $R_{i,j}(u, v)$ .

Ποιοτικά, η επίδραση είναι η ακόλουθη. Έστω  $(u, v) \in [u_i, u_{i+p+1}) \times [v_j, v_{j+q+1})$ . Τότε, αν το  $w_{i,j}$  αυξάνεται (μειώνεται), τα σημεία της επιφάνειας  $\mathbf{S}(u, v)$  πλησιάζουν στο (απομακρύνονται από) το σημείο ελέγχου  $\mathbf{P}_{i,j}$ . Όπως και στην περίπτωση των

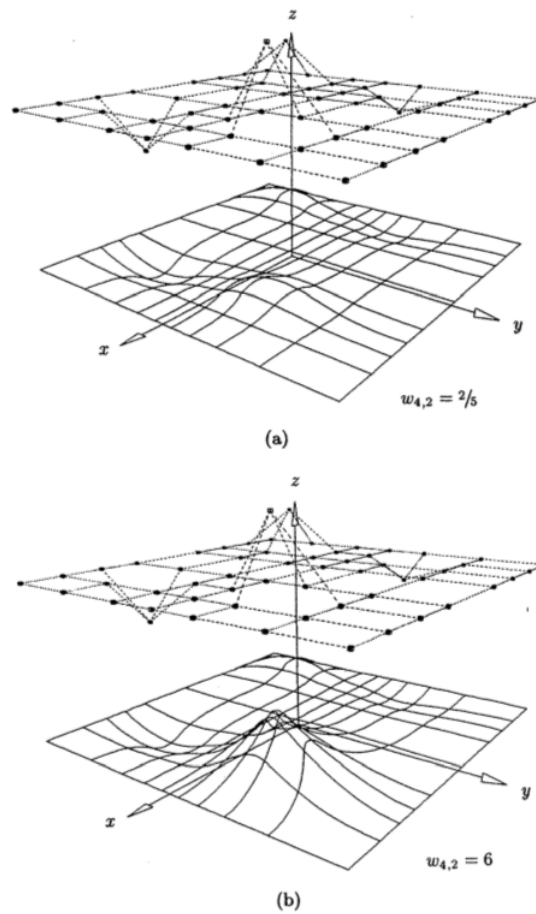
καμπυλών, η κίνηση των σημείων της επιφάνειας  $\mathbf{S}(u, v)$  γίνεται επί ευθείας γραμμής (βλέπε σχήμα 4.7).



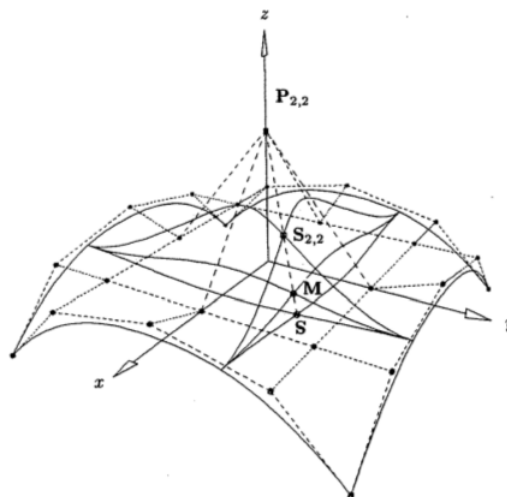
**Σχήμα 4.5:** Συνάρτηση βάσης  $R_{4,2}(u, v)$ ,  $\mu \in U = \{0, 0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1, 1\}$  και  $V = \{0, 0, 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, 1, 1\}$ .  $w_{i,j} = 0$  για κάθε  $(i, j) \neq (4, 2)$ . (a)  $w_{4,2} = \frac{2}{5}$  (b)  $w_{4,2} = 6$ . [24]

## 4.8 Παραμετροποίηση και μετατόπιση πλέγματος για βελτιστοποίηση μορφής

Οι ιδιότητες των καμπυλών B-spline και NURBS όπως παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες παραγράφους, τις καθιστούν ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο στο χώρο της παραμετροποίησης μορφής (shape parameterization). Η παραμετροποίηση παίζει ιδιαίτερα



Σχήμα 4.6: Κυβική  $\times$  τετραγωνική επιφάνεια NURBS που αντιστοιχεί στα δεδομένα του σχήματος 4.5, με το πλέγμα ελέγχου να απεικονίζεται πάνω από την επιφάνεια για καλύτερη εποπτεία. (a)  $w_{4,2} = \frac{2}{5}$  (b)  $w_{4,2} = 6$ . [24]



Σχήμα 4.7: Μεταβολή του βάρους  $w_{2,2}$  επιφάνειας NURBS. [24]

σημαντικό ρόλο στα θέματα βελτιστοποίησης αεροδυναμικών μορφών αφού καθορίζει τον αριθμό των ελεύθερων μεταβλητών τον οποίο θα διαχειριστεί το λογισμικό βελτιστοποίησης [6]. Στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία, η παραμετροποίηση του υπολογιστικού πλέγματος στην περιοχή του ανεμοθώρακα του διτρόχου έγινε με χρήση λογισμικού που αναπτύχθηκε από τη ΜΠΥΡ&Β της Σχολής Μηχανολόγων Μηχανικών του ΕΜΠ. Το λογισμικό αυτό, βασίζεται σε ογκομετρικές B-spline και υλοποιεί την παραμετροποίηση του σημείου ενδιαφέροντος ορίζοντας τυχαία σημεία ελέγχου στο χώρο, οι συντεταγμένες των οποίων αποτελούν τις μεταβλητές σχεδιασμού. Εκτός της παραμετροποίησης, το λογισμικό υλοποιεί και τη μετατόπιση του υπολογιστικού πλέγματος σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης. Η ικανότητα μετατόπισης του πλέγματος απλοποιεί (επιταχύνει) σε τεράστιο βαθμό τη διαδικασία βελτιστοποίησης αφού απαλείφει την ανάγκη της εκ νέου δημιουργίας πλέγματος σε κάθε κύκλο.

Η παραμετροποίηση της γεωμετρίας ενδιαφέροντος γίνεται με βάση τις θέσεις των σημείων ελέγχου στο χώρο, οι οποίες καθορίζονται από το χρήστη. Τα σημεία ελέγχου σχηματίζουν στο χώρο ένα τριδιάστατο δομημένο πλέγμα  $I \times J \times K$  κόμβων, όπου  $I, J, K$  είναι ο αριθμός των σημείων ελέγχου κατά τις αντίστοιχες κατευθύνσεις του πλέγματος. Έτσι, οι καρτεσιανές συντεταγμένες του εκάστοτε σημείου ελέγχου μπορούν να συμβολιστούν ως  $b_m^{ijk}$ ,  $m = 1, 2, 3$  και  $i \in [1, I]$ ,  $j \in [1, J]$ ,  $k \in [1, K]$ . Αν οι καρτεσιανές συντεταγμένες ενός κόμβου του υπολογιστικού πλέγματος (ο οποίος βρίσκεται εντός του πλέγματος των σημείων ελέγχου) είναι  $x_m$  ( $m = 1, 2, 3$ ) τότε η σχέση ανάμεσα στις καρτεσιανές και τις παραμετρικές συντεταγμένες  $\vec{u} = [u_1, u_2, u_3]^T = [u, v, w]^T$  του ίδιου κόμβου είναι [7]

$$x_m(u, v, w) = U_{i,pu}(u)V_{j,pv}(v)W_{k,pw}(w)b_m^{ijk} \quad (4.24)$$

όπου  $U, V, W$  είναι οι συναρτήσεις βάσης των  $B - spline$  και  $pu, pv, pw$  είναι οι αντίστοιχοι βαθμοί τους. Το υπολογιστικό κόστος για την εύρεση των καρτεσιανών συντεταγμένων οποιουδήποτε παραμετροποιημένου σημείου είναι αμελητέο αν οι παραμετρικές συντεταγμένες  $\vec{u}$  είναι γνωστές. Οι παραμετρικές συντεταγμένες μπορούν να υπολογιστούν με ακρίβεια με μια απεικόνιση  $\mathfrak{R}^3(x_1, x_2, x_3) \rightarrow \mathfrak{R}^3(u_1, u_2, u_3)$ . Συνεπώς, οι ογκομετρικές B-spline μπορούν να αναπαραστήσουν οποιαδήποτε γεωμετρία με «ακρίβεια μηχανής» κάτι που δεν συμβαίνει με τις επιφάνειες NURBS όπου γίνεται η προσεγγιστική απεικόνιση  $\mathfrak{R}^3(x_1, x_2, x_3) \rightarrow \mathfrak{R}^2(u_1, u_2)$ .

Με δεδομένες θέσεις σημείων ελέγχου, δεδομένα διανύσματα κόμβων και βαθμούς συναρτήσεων βάσης, οι παραμετρικές συντεταγμένες  $\vec{u}$  τυχαίου σημείου με καρτεσιανές συντεταγμένες  $\vec{r} = [x_{1,r}, x_{2,r}, x_{3,r}]^T$  μπορούν να υπολογιστούν λύνοντας το σύστημα εξισώσεων

$$\mathbf{R}(u_1, u_2, u_3) = \begin{bmatrix} x_1(u_1, u_2, u_3) - x_{1,r} = 0 \\ x_2(u_1, u_2, u_3) - x_{2,r} = 0 \\ x_3(u_1, u_2, u_3) - x_{3,r} = 0 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

όπου  $x_m(u_1, u_2, u_3)$  υπολογίζονται από την εξίσωση 4.24. Το σύστημα  $3 \times 3$  εξισώσεων 5.35 μπορεί να λυθεί ανεξάρτητα για κάθε ένα παραμετροποιημένο σημείο του υπο-

λογιστικού πλέγματος και συνεπώς μπορεί να εκτελεστεί παράλληλα. Η επίλυση του συστήματος 5.35 χρειάζεται να πραγματοποιηθεί μόνο μία φορά και μπορεί να χαρακτηριστεί ως «στάδιο εκπαίδευσης» του αλγορίθμου. Μετά το στάδιο αυτό, για οποιαδήποτε μετατόπιση των σημείων ελέγχου, οι καρτεσιανές συντεταγμένες κάθε κόμβου του υπολογιστικού πλέγματος μπορούν να προσδιοριστούν με ελάχιστο υπολογιστικό κόστος από την εξίσωση 4.24. Οι καρτεσιανές συντεταγμένες  $x_m$  ( $m = 1, 2, 3$ ) εξαρτώνται από τις παραμετρικές ( $\vec{u}$ ) οι οποίες δεν μεταβάλλονται, και από τις θέσεις των σημείων ελέγχου. Συνεπώς, δύο πλέγματα τα οποία έχουν υποστεί παραμόρφωση θα έχουν την ίδια ποιότητα, εάν η τελικές θέσεις των σημείων ελέγχου που τα ορίζουν είναι ίδιες, ανεξάρτητα με τις ενδιάμεσες παραμορφώσεις που μπορεί να έλαβαν χώρα.





## Κεφάλαιο 5

# Αεροδυναμική βελτιστοποίηση και η συνεχής συζυγής μέθοδος

Κάθε πρόβλημα βελτιστοποίησης στοχεύει στην ελαχιστοποίηση μιας συνάρτησης,  $F$ , στον χώρο σχεδιασμού στον οποίο λαμβάνει τιμές το διάνυσμα  $\vec{b}$  των μεταβλητών σχεδιασμού, πλήθους  $N$ . Η συνάρτηση  $F$  ονομάζεται συνάρτηση σκοπού ή αντικειμενική συνάρτηση και, στην περίπτωση προβλημάτων βελτιστοποίησης ενός στόχου (Single Objective Optimization - S.O.O.), μπορεί, χωρίς απώλεια γενικότητας, να θεωρηθεί βαθμωτή. Στην «εσωτερική» αεροδυναμική χρησιμοποιείται συχνά ως αντικειμενική συνάρτηση οι απώλειες ολικής πίεσης, ενώ σε προβλήματα «εξωτερικής» αεροδυναμικής, οι σχέσεις της παραγράφου 3.4 που περιγράφουν την οπισθέλκουσα δύναμη (σχέση 3.24) ή/και τη δύναμη άνωσης (σχέση 3.25) [25]. Για τη μονοκριτηριακή βελτιστοποίηση μορφής που πραγματοποιήθηκε στην παρούσα εργασία, επιλέχθηκε ως αντικειμενική συνάρτηση ο συντελεστής οπισθέλκουσας δύναμης  $C_d$ , δηλαδή  $F(\vec{b}) = C_d(\vec{b})$ . Ως μεταβλητές σχεδιασμού,  $\vec{b} \in \mathfrak{R}^N$  όπου  $N = 375$ , ελήφθησαν οι συντεταγμένες των σημείων ελέγχου των ογκομετρικών B-spline που χρησιμοποιήθηκαν για την παραμετροποίηση της μορφής του ανεμοθώρακα. Η βελτιστοποίηση έγινε με χρήση της μεθόδου απότομης καθόδου (Steepest Descent Method), η οποία βασίζεται στην εύρεση της κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης  $F$  (gradient based method - GBM) για τον εντοπισμό τοπικού ελαχίστου και παρουσιάζεται στην παράγραφο 5.1. Ο προσδιορισμός της κλίσης της συνάρτησης του συντελεστή οπισθέλκουσας δύναμης, έγινε με την συνεχή συζυγή μέθοδο όπως έχει αναπτυχθεί από τη ΜΠΥΡ&Β. Οι βασικές μαθηματικές σχέσεις που διέπουν τη συνεχή συζυγή μέθοδο αναπτύσσονται στην παράγραφο 5.2. Η τελευταία παράγραφος του κεφαλαίου (5.3) περιέχει μια, αλγοριθμικού τύπου, παρουσίαση της διαδικασίας βελτιστοποίησης που πραγματοποιήθηκε.

## 5.1 Μέθοδος απότομης καθόδου

Η ελαχιστοποίηση της οπισθέλκουσας δύναμης και κατ' επέκταση του συντελεστή οπισθέλκουσας  $C_d$  έγινε με χρήση της μεθόδου της απότομης καθόδου. Όπως όλες οι επιταχυνόμενες επαναληπτικές μέθοδοι ανίχνευσης κατά γραμμή, η μέθοδος της απότομης καθόδου ξεκινάει από ένα αρχικό σημείο ( $\vec{b}^0$ ) εντός του πεδίου ορισμού  $\mathfrak{R}^N$  της αντικειμενικής συνάρτησης το οποίο παρέχεται από τον χρήστη. Σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης  $n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) το σημείο αυτό προσδιορίζεται εκ νέου σύμφωνα με τη σχέση

$$\vec{b}^{n+1} = \vec{b}^n + \eta^n \vec{r}^n \quad (5.1)$$

όπου  $\eta^n$  είναι το μήκος βήματος (step length) και  $\vec{r}^n$  το μοναδιαίο διάνυσμα της κατεύθυνσης ανίχνευσης ελαχίστου, η κατεύθυνση του οποίου, για τη μέθοδο της απότομης καθόδου, είναι το αντίθετο του τοπικού διανύσματος κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης, δηλαδή

$$\vec{r}^n = -\nabla F(\vec{b}^n). \quad (5.2)$$

Η επιλογή αυτή του  $\vec{r}^n$  δικαιολογείται αν εξεταστεί το ανάπτυγμα κατά Taylor της διαφορίσιμης εξίσωσης  $F(\vec{b})$  στην περιοχή γύρω από σημείο  $\vec{b}^n$ . Ισχύει για τυχαίο μοναδιαίο διάνυσμα  $\vec{r}^n \in \mathfrak{R}^N$  με μικρή τιμής νόρμας  $\|\vec{r}^n\|$  ότι

$$F(\vec{b}^n + \vec{r}^n) \approx F(\vec{b}^n) + \nabla F(\vec{b}^n) \cdot \vec{r}^n \quad (5.3)$$

Αν θεωρηθεί η προσέγγιση αυτή ικανοποιητική, τότε για να προσδιοριστεί σημείο στη γειτονιά του  $\vec{b}^n$  με μικρότερη τιμή αντικειμενικής συνάρτησης, το διάνυσμα  $\vec{r}^n$  πρέπει να επιλεγεί έτσι ώστε το εσωτερικό γινόμενο  $\nabla F(\vec{b}^n) \cdot \vec{r}^n$  να έχει τιμή αρνητική. Για  $\nabla F(\vec{b}) \neq 0$ , αυτό είναι εμφανές ότι εξασφαλίζεται αν τεθεί  $\vec{r}^n = -\nabla F(\vec{b}^n)$ .

Μετά τον υπολογισμό της κατεύθυνσης ανίχνευσης  $\vec{r}^n$ , ορίζεται το μήκος βήματος κατά τον  $n$ -οστό κύκλο βελτιστοποίησης,  $\eta^n$ . Η τιμή του  $\eta^n$  στην υλοποίηση του αλγόριθμου που χρησιμοποιήθηκε στην εργασία αυτή, εξαρτάται από την τιμή που ορίζει ο χρήστης ως μέγιστη επιτρεπόμενη μετατόπιση σημείου του πλέγματος. Με βάση τη μέγιστη μετατόπιση σημείου, ο αλγόριθμος επιλέγει την ανώτερη τιμή  $\eta^n$  για την οποία θα είναι «σεβαστός» ο περιορισμός αυτός.

Ακολουθεί ο αλγόριθμος της μεθόδου της απότομης καθόδου:

**Βήμα 0:** Επιλογή σημείου εκκίνησης της μεθόδου,  $\vec{b}^0$ . Αρχικοποίηση μετρητή  $n = 0$

**Βήμα 1:** Υπολογισμός της κατεύθυνσης ανίχνευσης,  $\vec{r}^n = -\nabla F(\vec{b}^n)$ . Αν  $\vec{r}^n = 0$  υπάρχει σύγκλιση και τερματισμός του αλγορίθμου.

**Βήμα 2:** Υπολογισμός του μήκους βήματος,  $\eta^n$ , με βάση τη μέγιστη επιτρεπτή μετατόπιση των σημείων ελέγχου.

**Βήμα 3:** Ανανέωση της λύσης  $\vec{b}^{n+1} = \vec{b}^n + \eta^n \vec{r}^n$ .

**Βήμα 4:** Ανανέωση τιμής μετρητή  $n \rightarrow n + 1$  και επιστροφή στο βήμα 1.

## 5.2 Εύρεση παραγώγων ευαισθησίας με χρήση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου

Ο βασικός παράγοντας που επηρεάζει το υπολογιστικό κόστος της υλοποίησης ενός αλγόριθμου βελτιστοποίησης είναι ο τρόπος υπολογισμού της κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού. Ο υπολογισμός, δηλαδή, των ποσοτήτων  $\delta F / \delta b_n$  για  $n = 1, \dots, N$ , οι οποίες παρακάτω θα αναφέρονται και ως παράγωγοι ευαισθησίας. Στην παρούσα εργασία, η εύρεση των παραγώγων ευαισθησίας, η υλοποίηση, δηλαδή, του βήματος υπ' αριθμόν ένα του αλγόριθμου της απότομης καθόδου, επετεύχθη με την εφαρμογή της Συνεχούς Συζυγούς Μεθόδου (continuous adjoint method). Η μέθοδος αυτή υπολογίζει την κλίση μιας συνάρτησης, εξασφαλίζοντας ταυτόχρονα την ικανοποίηση των εξισώσεων που διέπουν το εκάστοτε πρόβλημα. Το μεγάλο πλεονέκτημα της συνεχούς συζυγούς μεθόδου σε σχέση με άλλες μεθόδους, είναι το γεγονός ότι το κόστος υπολογισμού των  $\delta F / \delta b_n$  είναι ανεξάρτητο του πλήθους  $N$  των μεταβλητών σχεδιασμού[6]. Πριν την παρουσίαση της μεθόδου, είναι απαραίτητο να αναφερθεί ότι κατά τη διαδικασία εξαγωγής της σχέσης που υπολογίζει τις παραγώγους ευαισθησίας, δεν έγινε παραγωγή των μερικών διαφορικών εξισώσεων του μοντέλου τύρβης με τις οποίες υπολογίζεται το πεδίο της τυρβώδους συνεκτικότητας  $\nu_t$ . Ανάλογα με το είδος του αεροδυναμικού προβλήματος (τιμή αριθμού Reynolds, τοπικές ιδιαιτερότητες της ροής κ.α.), η μη-παραγωγή των εξισώσεων της τυρβώδους συνεκτικότητας, γνωστή και ως «υπόθεση παγωμένης τύρβης» ίσως να οδηγήσει σε παραπλανητικά αποτελέσματα [26][27][28].

Υπενθυμίζεται πως οι εξισώσεις οι οποίες περιγράφουν τη μέση ροή ασυμπίεστου ρευστού, θεωρώντας χρονικά σταθερή ροή είναι:

$$R^p = -\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0, \quad (5.4)$$

$$R_i^v = v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.5)$$

όπου  $v_i$  οι συνιστώσες της ταχύτητας,  $p$  η στατική πίεση δια την (σταθερή) πυκνότητα,  $\nu$  είναι η κινηματική συνεκτικότητα του ρευστού (σταθερή) και  $\nu_t$  η κινηματική τυρβώδης συνεκτικότητα η οποία υπολογίζεται με την ταυτόχρονη επίλυση των μερικών διαφορικών εξισώσεων του μοντέλου τύρβης. Οι εξισώσεις 5.4, 5.5 μαζί με τις εξισώσεις του μοντέλου τύρβης και τις οριακές τους συνθήκες θα αναφέρονται ως

πρωτεύουσες εξισώσεις (primal equations) ή εξισώσεις κατάστασης (state equations). Οι συνιστώσες της ταχύτητας  $u_i$ , η πίεση  $p$  και οι μεταβλητές του μοντέλου τύρβης αποτελούν τον διάνυσμα των πρωτευουσών μεταβλητών  $\vec{U}$ .

Όπως έχει αναφερθεί στην παράγραφο 3.4, η συνολική δύναμη που δέχεται το δίτροχο όχημα,  $\vec{F}_M$ , είναι

$$\vec{F}_M = \int_{E_M} (p - \overleftrightarrow{\tau}_M^T) \vec{n}_M dE \quad (5.6)$$

ενώ, συγκεκριμένα, η οπισθέλκουσα δύναμη είναι

$$F_{drag} = \int_{E_M} (p - \overleftrightarrow{\tau}_M^T) \vec{f}_d \vec{n}_M dE \quad (5.7)$$

όπου  $\vec{f}_d = [1, 0, 0]$  είναι το μοναδιαίο διάνυσμα με κατεύθυνση αυτήν της οπισθέλκουσας δύναμης. Με χρήση της σχέσης 3.24 η οποία συνδέει τον συντελεστή οπισθέλκουσας με την ίδια την οπισθέλκουσα δύναμη, η αντικειμενική συνάρτηση  $F$  γράφεται

$$F = \frac{F_{drag}}{\frac{1}{2} \rho A V^2}. \quad (5.8)$$

Η βαθμωτή  $F$  εξαρτάται από τις,  $N$  το πλήθος, μεταβλητές σχεδιασμού  $b_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) όπως επίσης και από τα χαρακτηριστικά της ροής  $\vec{U}$ . Τέλος, το διάνυσμα  $\vec{U}$  είναι συνάρτηση και του διανύσματος των μεταβλητών σχεδίασης  $\vec{b}$  αφού αλλαγές στη μορφή του ανεμοθώρακα επηρεάζουν το πεδίο της ταχύτητας και πίεσης. Η σχέση εξάρτησης της  $F$  από τα διανύσματα  $\vec{U}$  και  $\vec{b}$  μπορεί, λοιπόν, να γραφεί ως  $F = F(\vec{b}, \vec{U}(\vec{b}))$ . Με δεδομένη αυτή τη συσχέτιση μεταξύ των  $F, \vec{U}$  και  $\vec{b}$  προσδιορίζεται παρακάτω το διάνυσμα των παραγώγων της  $F$  ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού  $b_n$ , δηλαδή  $\delta F / \delta b_n$ , ( $n = 1, 2, \dots, N$ ).

## Σχηματισμός επαυξημένης αντικειμενικής συνάρτησης $F_{aug}$

Η συνεχής συζυγής μέθοδος προϋποθέτει τον σχηματισμό της επαυξημένης (augmented) αντικειμενικής συνάρτησης  $F_{aug}$  με την πρόσθεση των ολοκληρωμάτων όγκου των εξισώσεων 5.4 και 5.5 πολλαπλασιασμένες με τα πεδία των αντίστοιχων συζυγών μεταβλητών [25].

$$F_{aug} = F + \int_{\Omega} u_i R_i^v d\Omega + \int_{\Omega} q R^p d\Omega \quad (5.9)$$

όπου  $\Omega$  το υπολογιστικό χωρίο,  $u_i$  οι συνιστώσες της συζυγούς ταχύτητας και  $q$  η συζυγής πίεση. Δεδομένου ότι για τον σχηματισμό του συζυγούς προβλήματος έχει γίνει η υπόθεση της «παγωμένης τύρβης», το δέξι μέλος της εξίσωσης 5.9 δεν περιέχει

ολοκληρώματα προερχόμενα από τις εξισώσεις των μοντέλων τύρβης. Από τον τρόπο σχηματισμού της επαυξημένης αντικειμενικής συνάρτησης ισχύει ότι  $F_{aug} \equiv F$ , αφού οι εξισώσεις κατάστασης του πρωτεύοντος προβλήματος 5.4 και 5.5 ικανοποιούνται πάντα και, συνεπώς,  $R^p = R_i^v = 0$ .

Κάνοντας χρήση επί της εξίσωσης 5.9, του θεωρήματος Leibniz σχετικά με τη διαφοράση χωρικών ολοκληρωμάτων, προκύπτει

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_n} &= \frac{\delta F}{\delta b_n} + \frac{\delta}{\delta b_n} \int_{\Omega} u_i R_i^v d\Omega + \frac{\delta}{\delta b_n} \int_{\Omega} q R^p d\Omega \\ &= \frac{\delta F}{\delta b_n} + \int_{\Omega} u_i \frac{\partial R_i^v}{\partial b_n} d\Omega + \int_{\Omega} q \frac{\partial R^p}{\partial b_n} d\Omega + \int_S (u_i R_i^v + q R^p) n_k \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS \end{aligned} \quad (5.10)$$

όπου το όριο  $S$ , εντός του  $\Omega$ , κατατμείται έτσι ώστε  $S = S_I \cup S_O \cup S_W \cup S_{W_p}$ . Τα τμήματα  $S_I, S_O, S_W$  και  $S_{W_p} = S_{W_p}(\vec{b})$  που απαρτίζουν πλέον το όριο  $S$  συμβολίζουν την επιφάνεια εισόδου (inlet) της ροής, την επιφάνεια εξόδου (outlet), το σταθερό όριο επί του διτρόχου (wall) και το ελεγχόμενο όριο επί του διτρόχου, παραμετροποιημένο με ογκομετρικά B-spline. Ο όρος  $n_k$  αναπαριστά τις συνιστώσες του μοναδιαίου κάθετου στην επιφάνεια διανύσματος. Αφού το  $S_{W_p}$  είναι το μόνο ελεγχόμενο τμήμα του  $S$  η 5.10 μπορεί να γραφεί[25]

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_n} = \frac{\delta F}{\delta b_n} + \int_{\Omega} u_i \frac{\partial R_i^v}{\partial b_n} d\Omega + \int_{\Omega} q \frac{\partial R^p}{\partial b_n} d\Omega + \int_{S_{W_p}} (u_i R_i^v + q R^p) n_k \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS. \quad (5.11)$$

Αξίζει να αναφερθεί εδώ για λόγους πληρότητας ο συσχετισμός της ολικής παραγώγου  $\delta()/\delta b_n$  τυχαίας ποσότητας  $\Phi$ , με τη μερική παράγωγο  $\partial()/\partial b_n$ :

$$\frac{\delta \Phi}{\delta b_n} = \frac{\partial \Phi}{\partial b_n} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \quad (5.12)$$

ενώ εάν η ολική παράγωγος της ποσότητας  $\Phi$  υπολογίζεται επί επιφανείας  $S$ , η σχέση 5.12 μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\frac{\delta_s \Phi}{\delta b_n} = \frac{\partial \Phi}{\partial b_n} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} n_k \frac{\delta x_m}{\delta b_n} n_m \quad (5.13)$$

αφού, για παραμορφώσεις της επιφάνειας, μπορεί να θεωρηθεί ότι μόνο οι κάθετες στην επιφάνεια συνιστώσες της ταχύτητας παραμόρφωσης συμβάλλουν στη μεταβολή του  $\Phi$ .

## Αντικειμενική συνάρτηση $F$ και παραγωγή της

Η γενική έκφραση αντικειμενικής συνάρτησης  $F$ , η οποία αποτελείται από επιφανειακά ολοκληρώματα και ολοκληρώματα όγκου, μπορεί να γραφτεί

$$F = \int_S F_S dS + \int_\Omega F_\Omega d\Omega = \int_S F_{S_i} n_i dS + \int_\Omega F_\Omega d\Omega \quad (5.14)$$

όπου  $F_S$  και  $F_\Omega$ , ολοκληρώματα στο όριο και στον όγκο του υπολογιστικού χωρίου αντίστοιχα. Για τις επιμέρους συναρτήσεις επί του ορίου, έχει υποθεθεί ότι περιέχουν το μοναδιαίο, κάθετο στην επιφάνεια διάνυσμα  $\vec{n}$  με συνιστώσες  $n_i$ . Στην παρούσα εργασία, η αντικειμενική συνάρτηση βάσει της οποίας εκτελείται ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης δεν περιέχει ολοκληρώματα όγκου αφού η οπισθέλκουσα δύναμη η οποία ασκείται στο όχημα εξαρτάται μόνο από ολοκληρώματα στην επιφάνειά του. Συνεπώς η διαφορίση της  $F$  ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού οδηγεί στη σχέση

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta b_n} &= \frac{\delta}{\delta b_n} \int_S F_{S_i} n_i dS \\ &= \int_S \frac{\delta_s F_{S_i}}{\delta b_n} n_i dS + \int_S F_{S_i} \frac{\delta n_i}{\delta b_n} dS + \int_S F_{S_i} n_i \frac{\delta(dS)}{\delta b_n} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Από τον κανόνα αλυσίδας

$$\frac{\partial F_{S_i}}{\partial b_n} = \frac{\partial F_{S_i}}{\partial v_k} \frac{\partial v_k}{\partial b_n} + \frac{\partial F_{S_i}}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial b_n} + \frac{\partial F_{S_i}}{\partial \tau'_{kj}} \frac{\partial \tau'_{kj}}{\partial b_n} \quad (5.16)$$

όπου  $\tau'_{kj} = (\nu + \nu_t) \left( \frac{v_k}{x_j} + \frac{v_j}{x_k} \right)$  είναι ο τανυστής τάσεων Reynolds και με χρήση των σχέσεων 5.12 και 5.13 για την ολική παράγωγο, η σχέση 5.15 καταλήγει στη μορφή [25]

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta b_n} &= \int_S \frac{\partial F_{S_i}}{\partial v_k} n_i \frac{\partial v_k}{\partial b_n} dS + \int_S \frac{\partial F_{S_i}}{\partial p} n_i \frac{\partial p}{\partial b_n} dS + \int_S \frac{\partial F_{S_i}}{\partial \tau'_{kj}} n_i \frac{\partial \tau'_{kj}}{\partial b_n} dS + \\ &+ \int_S n_i \frac{\partial F_{S_i}}{\partial x_m} n_m \frac{\delta x_k}{\delta b_n} n_k dS + \int_S F_{S_i} \frac{\delta n_i}{\delta b_n} dS + \int_S F_{S_i} n_i \frac{\delta(dS)}{\delta b_n} \end{aligned} \quad (5.17)$$

## Σχηματισμός των συζυγών πεδιακών εξισώσεων

Από την παραγωγή των εξισώσεων 5.4 και 5.5 προκύπτουν οι εξισώσεις

$$\frac{\partial R^p}{\partial b_n} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_j}{\partial b_n} \right), \quad (5.18)$$

$$\frac{\partial R_i^v}{\partial b_n} = \frac{\partial v_j}{\partial b_n} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial b_n} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\nu + \nu_t) \frac{\partial}{\partial b_n} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial p}{\partial b_n} \right) \quad (5.19)$$

όπου ο όρος  $\partial \nu_t / \partial b_n$  έχει παραληφθεί από την εξίσωση 5.19 λόγω της υπόθεσης της «παγωμένης τύρβης».

Από την επεξεργασία των εξισώσεων 5.18 και 5.19, την χρήση της εξίσωσης 5.17 και αντικατάσταση αυτών στην εξίσωση 5.11 προκύπτει η έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_n} &= \int_S \mathcal{BC}_i^u \frac{\partial v_i}{\partial b_n} dS + \int_S (u_j n_j + \frac{\partial F_{S_i}}{\partial p} n_i) \frac{\partial p}{\partial b_n} dS + \int_S (-u_i n_j + \frac{\partial F_{S_k}}{\partial \tau'_{ij}} n_k) \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial b_n} dS \\ &+ \int_{S_{W_p}} n_i \frac{\partial F_{S_i}}{\partial x_m} n_m \frac{\delta x_k}{\delta b_n} n_k dS + \int_{S_{W_p}} F_{S_i} \frac{\delta n_i}{\delta b_n} dS \\ &+ \int_{S_{W_p}} F_{S_i} n_i \frac{\delta(dS)}{\delta b_n} + \int_{S_{W_p}} (u_i R_i^v + q R^p) \frac{\delta x_k}{\delta b_n} n_k dS \\ &+ \int_{\Omega} \left\{ u_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial(v_j u_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\partial q}{\partial x_i} \right\} \frac{\partial v_i}{\partial b_n} d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} \left( -\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \frac{\partial p}{\partial b_n} d\Omega \end{aligned} \quad (5.20)$$

όπου

$$\mathcal{BC}_i^u = u_i v_j n_j + \tau'_{a,ij} n_j - q n_i + \frac{\partial F_{S_k}}{\partial v_i} n_k \quad (5.21)$$

$$(5.22)$$

με τον ταυιστή των συζυγών τάσεων να είναι

$$\tau'_{a,ij} = (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (5.23)$$

$$(5.24)$$

Η ανάγκη υπολογισμού των μερικών παραγώγων των  $p$  και  $v_i$  ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, παρακάμπτεται θέτοντας τους συντελεστές των όρων  $\partial v_i / \partial b_n$  και  $\partial p / \partial b_n$  στα ολοκληρώματα όγκου της εξίσωσης 5.20, ίσους με μηδέν. Με τον τρόπο αυτό, προκύπτουν οι συζυγείς εξισώσεις για τη μέση ροή

$$R^q = -\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (5.25)$$

$$R_i^u = u_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial (v_j u_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\partial q}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.26)$$

Η εξίσωση 5.25 είναι η συζυγής εξίσωση της συνέχειας, ενώ οι εξισώσεις 5.26 αποτελούν τις συζυγείς εξισώσεις διατήρησης της ορμής. Με την ικανοποίηση των συζυγών πεδριακών εξισώσεων, οι όροι που παραμένουν στην εξίσωση 5.20 είναι [25]

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_n} &= \int_S \mathcal{B} C_i^u \frac{\partial v_i}{\partial b_n} dS + \int_S (u_j n_j + \frac{\partial F_{S_i}}{\partial p} n_i) \frac{\partial p}{\partial b_n} dS + \int_S (-u_i n_j + \frac{\partial F_{S_k}}{\partial \tau'_{ij}} n_k) \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial b_n} dS \\ &+ \int_{S_{W_p}} n_i \frac{\partial F_{S_i}}{\partial x_m} n_m \frac{\delta x_k}{\delta b_n} n_k dS + \int_{S_{W_p}} F_{S_i} \frac{\delta n_i}{\delta b_n} dS \\ &+ \int_{S_{W_p}} F_{S_i} n_i \frac{\delta (dS)}{\delta b_n} + \int_{S_{W_p}} (u_i R_i^v + q R^p) \frac{\delta x_k}{\delta b_n} n_k dS. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Από την εξίσωση 5.27 εξάγονται οι συζυγείς οριακές συνθήκες και η τελική έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας.

## Συζυγείς οριακές συνθήκες

Στα όρια εισόδου,  $S_I$ , είναι  $\delta v_i / \delta b_n = \partial v_i / \partial b_n = 0$  αφού  $\delta x_k / \delta b_n = 0$  γεγονός που οδηγεί στην απαλοιφή του πρώτου ολοκληρώματος του δεξιού μέλους της 5.27. Το



δεύτερο και τρίτο ολοκλήρωμα μπορούν επίσης να απαλειφθούν αν τεθεί:

$$u_{\langle n \rangle} = u_j n_j = -\frac{\partial F_{S_I, i}}{\partial p} n_i \quad (5.28\alpha')$$

$$u_{\langle t \rangle}^I = \frac{\partial F_{S_I, k}}{\partial \tau'_{ij}} n_k t_i^I n_j + \frac{\partial F_{S_I, k}}{\partial \tau'_{ij}} n_k t_j^I n_i \quad (5.28\beta')$$

$$u_{\langle t \rangle}^{II} = \frac{\partial F_{S_I, k}}{\partial \tau'_{ij}} n_k t_i^{II} n_j + \frac{\partial F_{S_I, k}}{\partial \tau'_{ij}} n_k t_j^{II} n_i \quad (5.28\gamma')$$

όπου  $t_i^I, t_i^{II}$  είναι οι συνιστώσες των μοναδιαίων, εφαπτομενικών στην επιφάνεια διανυσμάτων και  $u_{\langle t \rangle}^I, u_{\langle t \rangle}^{II}$  οι συνιστώσες της συζυγούς ταχύτητας στις αντίστοιχες κατευθύνσεις.

Επί των ορίων εξόδου  $S_O$ , είναι  $\delta p / \delta b_n = \partial p / \partial b_n = 0$ . Με αυτό δεδομένο, το δεύτερο ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους της 5.27 μηδενίζεται, ενώ υποθέτοντας ομοιόμορφη κατανομή ταχύτητας επί του  $S_O$  το τρίτο ολοκλήρωμα μπορεί να θεωρηθεί αμελητέο. Η απαίτηση για απαλοιφή του πρώτου ολοκληρώματος οδηγεί στον σχηματισμό τριών οριακών συνθηκών.

Επί του σταθερού ορίου  $S_W$  ισχύουν οι εξισώσεις 5.28 με μόνη διαφορά την αντικατάσταση του  $F_{S_I}$  από το  $F_{S_W}$ . Επί του παραμετροποιημένου ορίου  $S_{W_p}$ , ισχύει ότι  $v_i = 0$  και, συνεπώς,  $\delta v_i / \delta b_n = 0$ . Επειδή όμως  $\delta x_k / \delta b_n \neq 0$ , από την εξίσωση 5.13 προκύπτει ότι

$$\frac{\delta v_i}{\delta b_n} = -\frac{\partial v_i}{\partial x_k} n_k \frac{\delta x_m}{\delta b_n} n_m \quad (5.29)$$

και έτσι τό πρώτο ολοκλήρωμα του δεύτερου μέλους της 5.27 μπορεί να γραφεί

$$\int_{S_{W_p}} \mathcal{BC}_i^u \frac{\partial v_i}{\partial b_n} dS = - \int_{S_{W_p}} \mathcal{BC}_i^u \frac{\partial v_i}{\partial x_k} n_k \frac{\delta x_m}{\delta b_n} n_m dS \quad (5.30)$$

Το δεύτερο και τρίτο ολοκλήρωμα της 5.27 μπορούν να απαλειφθούν θέτοντας

$$u_{\langle n \rangle} = -\frac{\partial F_{S_{W_p}, i}}{\partial p} n_i \quad (5.31\alpha')$$

$$u_{\langle t \rangle}^I = \frac{\partial F_{S_{W_p}, k}}{\partial \tau'_{ij}} n_k t_i^I n_j + \frac{\partial F_{S_{W_p}, k}}{\partial \tau'_{ij}} n_k t_j^I n_i \quad (5.31\beta')$$

$$u_{\langle t \rangle}^{II} = \frac{\partial F_{S_{W_p}, k}}{\partial \tau'_{ij}} n_k t_i^{II} n_j + \frac{\partial F_{S_{W_p}, k}}{\partial \tau'_{ij}} n_k t_j^{II} n_i \quad (5.31\gamma')$$

## Υπολογισμός παραγώγων ευαισθησίας

Αφού ικανοποιήθηκαν οι συζυγείς εξισώσεις της μέσης ροής και οι οριακές τους συνθήκες και λαμβάνοντας υπόψη τις εξισώσεις 5.27, 5.30 και τους όρους που προκύπτουν από την εξαγωγή των εξισώσεων 5.31, η τελική έκφραση για τις παραγώγους ευαισθησίας εκφράζεται ως:

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_n} = \mathcal{S} \mathcal{T}_L \quad (5.32)$$

όπου

$$\begin{aligned} \mathcal{S} \mathcal{T}_L = & - \int_{S_{W_p}} \mathcal{B} C_i^u \frac{\delta v_i}{\delta x_k} n_k \frac{\delta x_m}{\delta b_n} n_m dS + \int_{S_{W_p}} n_i \frac{\partial F_{S_{W_p},i}}{\partial x_m} n_m \frac{\delta x_k}{\delta b_n} n_k dS + \int_{S_{W_p}} F_{S_{W_p},i} \frac{\delta n_i}{\delta b_n} dS \\ & + \int_{S_{W_p}} F_{S_{W_p},i} n_i \frac{\delta(dS)}{\delta b_n} + \int_{S_{W_p}} (u_i R_i^v + q R^p) \frac{\delta x_k}{\delta b_n} n_k dS \\ & - \int_{S_{W_p}} \left( -u_{(n)} + \frac{\partial F_{S_{W_p},k}}{\partial \tau'_{lm}} n_k n_l n_m \right) \mathcal{T} \mathcal{S}_1 dS - \int_{S_{W_p}} \frac{\partial F_{S_{W_p},k}}{\partial \tau'_{lm}} n_k t_l^I t_m^I \mathcal{T} \mathcal{S}_2 dS \\ & - \int_{S_{W_p}} \left( \frac{\partial F_{S_{W_p},k}}{\partial \tau'_{lm}} n_k (t_l^{II} t_m^I + t_l^I t_m^{II}) \right) \mathcal{T} \mathcal{S}_3 dS - \int_{S_{W_p}} \frac{\partial F_{S_{W_p},k}}{\partial \tau'_{lm}} n_k t_l^{II} t_m^{II} \mathcal{T} \mathcal{S}_4 dS \end{aligned} \quad (5.33)$$

και

$$\mathcal{T} \mathcal{S}_1 = \tau'_{ij} \frac{\delta(n_i n_j)}{\delta b_n} + \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_m} n_m \frac{\delta x_k}{\delta b_n} n_k n_i n_j \quad (5.34\alpha')$$

$$\mathcal{T} \mathcal{S}_2 = \tau'_{ij} \frac{\delta(t_i^I t_j^I)}{\delta b_n} + \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_m} n_m \frac{\delta x_k}{\delta b_n} n_k t_i^I t_j^I \quad (5.34\beta')$$

$$\mathcal{T} \mathcal{S}_3 = \tau'_{ij} \frac{\delta(t_i^{II} t_j^I)}{\delta b_n} + \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_m} n_m \frac{\delta x_k}{\delta b_n} n_k t_i^{II} t_j^I \quad (5.34\gamma')$$

$$\mathcal{T} \mathcal{S}_4 = \tau'_{ij} \frac{\delta(t_i^{II} t_j^{II})}{\delta b_n} + \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_m} n_m \frac{\delta x_k}{\delta b_n} n_k t_i^{II} t_j^{II} \quad (5.34\delta')$$

## 5.3 Παρουσίαση βρόχου βελτιστοποίησης

Στην παράγραφο 4.8 παρουσιάστηκε το λογισμικό παραμετροποίησης και μετατόπισης πλέγματος της ΜΠΥΡ&Β. Το λογισμικό αυτό αποτελεί μέρος της διαδικασίας βελτιστοποίησης και εντάσσεται στον αλγόριθμο βελτιστοποίησης της απότομης κα-

θόδου που παρουσιάστηκε στην παράγραφο 5.1, σε σύζευξη με λογισμικό επίλυσης της συζυγούς ροής μέσω του οποίου υπολογίζονται οι παράγωγοι ευαισθησίας της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, με βάση τις σχέσεις της παραγράφου 5.2. Η διαδικασία της αεροδυναμικής βελτιστοποίησης του ανεμοθώρακα δίτροχου μηχανοκίνητου οχήματος περιγράφεται στα παρακάτω βήματα [7]. Αποσαφηνίζεται, έτσι, η αλληλεπίδραση μεταξύ των διαφόρων λογισμικών που χρησιμοποιήθηκαν στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας.

**Βήμα 1:** Χρήση του λογισμικού OpenFOAM και εκτέλεση της εφαρμογής SnappyHex-Mesh για τη γένεση του υπολογιστικού πλέγματος του δίτροχου μηχανοκίνητου οχήματος.

**Βήμα 2:** Χρήση λογισμικού βελτιστοποίησης της ΜΠΥΡ&Β για την παραμετροποίηση της περιοχής του ανεμοθώρακα. Το βήμα αυτό περιλαμβάνει:

(α) Ορισμό του πλέγματος ελέγχου το οποίο εμπεριέχει την προς βελτιστοποίηση γεωμετρία.

(β) Προσδιορισμό των κόμβων του υπολογιστικού πλέγματος οι οποίοι βρίσκονται εντός του πλέγματος ελέγχου.

(γ) Υπολογισμό των παραμετρικών συντεταγμένων  $\vec{u}$  των κόμβων που προσδιορίστηκαν στο βήμα 3, επιλύοντας, για κάθε έναν από αυτούς (κατά το λεγόμενο «στάδιο εκπαίδευσης») το σύστημα εξισώσεων

$$\mathbf{R}(u_1, u_2, u_3) = \begin{bmatrix} x_1(u_1, u_2, u_3) - x_{1,r} = 0 \\ x_2(u_1, u_2, u_3) - x_{2,r} = 0 \\ x_3(u_1, u_2, u_3) - x_{3,r} = 0 \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

**Βήμα 3:** Χρήση του λογισμικού OpenFOAM και εκτέλεση του αλγορίθμου SIMPLE για την επίλυση των εξισώσεων ροής RANS. Υπολογισμός τιμής αντικειμενικής συνάρτησης ( $C_d$ ). Εφαρμογή κριτηρίου τερματισμού της διαδικασίας βελτιστοποίησης.

**Βήμα 4:** Χρήση λογισμικού βελτιστοποίησης της ΜΠΥΡ&Β για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού. Το βήμα αυτό περιλαμβάνει:

(α) Επίλυση των συζυγών πεδιακών εξισώσεων 5.25 και 5.26.

(β) Υπολογισμό της κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τους οριακούς κόμβους του υπολογιστικού πλέγματος, δηλαδή  $\delta F / \delta x_m$  (επιφανειακές παράγωγοι ευαισθησίας).

(γ) Προβολή των επιφανειακών παραγώγων ευαισθησίας στα σημεία ελέγχου για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας ως προς τις μεταβλητές

σχεδιασμού, σύμφωνα με τη σχέση

$$\frac{\delta F}{\delta b_i} = \sum_{j=1}^{n_p} \sum_{m=1}^3 \frac{\delta F}{\delta x_m^j} \frac{\delta x_m^j}{\delta b_i} \quad (5.36)$$

όπου  $n_p$  είναι ο αριθμός των οριακών κόμβων του πλέγματος οι οποίοι πρόκειται να μετατοπιστούν. Η ποσότητα  $\frac{\delta x_m^j}{\delta b_i}$  υπολογίζεται αναλυτικά από την παραγωγή της σχέσης 4.24 ως προς  $b_i$ .

- Βήμα 5: Χρήση λογισμικού βελτιστοποίησης της ΜΠΥΡ&Β. Εφαρμογή της μεθόδου απότομης καθόδου κάνοντας χρήση της κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης από το προηγούμενο βήμα. Ανανέωση των τιμών των συντεταγμένων των σημείων ελέγχου. Τα οριακά σημεία του πλέγματος ελέγχου παραμένουν σταθερά για να αποτραπεί αλληλοκάλυψη ανάμεσα στους παραμετροποιημένους και μη-παραμετροποιημένους κόμβους του πλέγματος.
- Βήμα 6: Χρήση λογισμικού βελτιστοποίησης της ΜΠΥΡ&Β για τον υπολογισμό των νέων καρτεσιανών συντεταγμένων των κόμβων του πλέγματος από την εξίσωση 4.24, με χρήση των παραμετρικών συντεταγμένων  $\vec{u}$  όπως αυτές προσδιορίστηκαν στο βήμα 2,γ.
- Βήμα 7: Επιστροφή στο βήμα 3.

# Κεφάλαιο 6

## Αποτελέσματα

Η επίλυση των εξισώσεων της ροής γύρω από τη γεωμετρία του διτρόχου έγινε με το «ανοιχτό» λογισμικό OpenFOAM το οποίο βασίζεται στη μέθοδο πεπερασμένων όγκων και χρησιμοποιεί τον αλγόριθμο SIMPLE για την επίλυση των εξισώσεων RANS. Η επίλυση των εξισώσεων ροής με τη χρήση τριών διαφορετικών μοντέλων τύρβης, έγινε επί του υπολογιστικού πλέγματος, 4.913.133 κελιών, που παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 2. Οι οριακές συνθήκες των μεταβλητών της ροής και των τυρβωδών μεγεθών παρουσιάζονται στον πίνακα 6.1.

Μεταβλητή	Συνθήκες στην επιφάνεια εισόδου (Inlet)	Συνθήκες στην επιφάνεια εξόδου (Outlet)	Συνθήκες επί των στερεών ορίων (Wall)
Μεταβλητές ροής			
Ταχύτητα $V$ (m/s)	20	20	0
Πίεση $p$ (N/m <sup>2</sup> )	$\nabla p = 0$	0	$\nabla p = 0$
Μεταβλητές μοντέλων τύρβης			
$k$ (m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )	0,24	0,24	Συνάρτηση τοίχου $k$
$\epsilon$ (m <sup>2</sup> /s <sup>3</sup> )	0,0432	0,0432	Συνάρτηση τοίχου $\epsilon$
$\omega$ (1/s)	2,0	2,0	Συνάρτηση τοίχου $\omega$
$\tilde{\nu}$ (m <sup>2</sup> /s)	6,0E-05	6,0E-05	0

**Πίνακας 6.1:** Πίνακας οριακών συνθηκών των μεταβλητών της ροής.

## 6.1 Σύγκριση μοντέλων τύρβης

Η χρήση διαφορετικών μοντέλων τύρβης οδήγησε σε διαφοροποιήσεις στην τιμή του συντελεστή οπισθέλκουσας δύναμης  $C_d$ . Η χαμηλότερη τιμή  $C_d$ , προήλθε από τη χρήση του μοντέλου SST k- $\omega$  και είναι 0,4947. Ελάχιστα υψηλότερη (0,34%) τιμή  $C_d = 0,4964$  υπολόγισε το μοντέλο Spalart-Allmaras ενώ το μοντέλο k- $\epsilon$  έδωσε την υψηλότερη τιμή  $C_d = 0.4994$  (+0,95%). Οι τιμές του συντελεστή  $C_d$  όπως υπολογίστηκαν με τη χρήση των τριών μοντέλων παρουσιάζονται στον πίνακα 6.2.

Μοντέλο τύρβης	Τιμή $C_d$
k- $\epsilon$	0,4994
SST k- $\omega$	0,4947
Spalart-Allmaras	0,4964

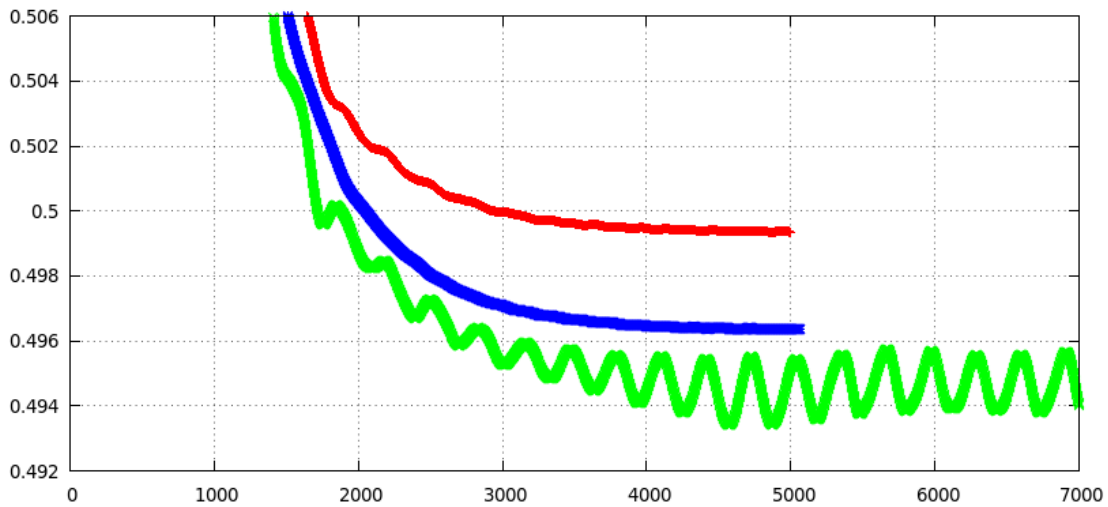
**Πίνακας 6.2:** Συγκριτικός πίνακας αποτελεσμάτων για χρήση τριών διαφορετικών μοντέλων τύρβης.

Η τιμή του συντελεστή  $C_d$ , όπως υπολογίζεται από τον αλγόριθμο επίλυσης των εξισώσεων ροής παρουσιάζει μικρές ταλαντώσεις ακόμα και όταν έχει επιτευχθεί ένα σχετικά ικανοποιητικό επίπεδο σύγκλισης. Αυτό οφείλεται στον μη-μόνιμο χαρακτήρα της ροής. Με τη χρήση του μοντέλου τύρβης SST k- $\omega$ , οι ταλαντώσεις ήταν μεγαλύτερες κλίμακας και για να επιβεβαιωθεί ότι η τιμή του συντελεστή δεν θα μεταβληθεί περαιτέρω, ο αλγόριθμος επίλυσης επιλέχθηκε να εκτελέσει 7.000 επαναλήψεις σε σχέση με τις 5.000 επαναλήψεις στις οποίες αποφασίστηκε ο τερματισμός του αλγορίθμου για τα δύο άλλα μοντέλα τύρβης. Ως τελική τιμή  $C_d$  θεωρήθηκε η μέση τιμή των τελευταίων 1.000 επαναλήψεων. Το σχήμα 6.1 παρουσιάζει την πορεία σύγκλισης της τιμής  $C_d$  με την πάροδο των επαναλήψεων και για τα τρία μοντέλα.

Ο απαιτούμενος χρόνος για την παράλληλη εκτέλεση σε 116 επεξεργαστές, 5000 επαναλήψεων του αλγορίθμου ήταν 4 ώρες και 38 λεπτά με χρήση του μοντέλου k- $\epsilon$ , σχεδόν παρόμοιος χρόνος (4 ώρες και 33 λεπτά) με χρήση του μοντέλου SST k- $\omega$  και 3 ώρες και 58 λεπτά με χρήση του μοντέλου Spalart-Allmaras το οποίο επέδειξε την καλύτερη σύγκλιση

Εκτός από τη συνολική οπισθέλκουσα δύναμη που ασκείται στο δίτροχο ( $D_{total}$ ), υπολογίστηκε και η οπισθέλκουσα δύναμη η οποία ασκείται μεμονωμένα στον ανεμοθώρακα ( $D_{windshield}$ ) ώστε να προσδιοριστεί το ποσοστό του συντελεστή  $C_d$  που οφείλεται στον τελευταίο. Η αρχική μετωπική επιφάνεια του ανεμοθώρακα είναι  $0,26 \text{ m}^2$  η οποία αντιστοιχεί στο 38,8% της συνολικής μετωπικής επιφάνειας του δικύκλου. Η ποσοστιαία συνεισφορά του ανεμοθώρακα στην τιμή του  $C_d$  όπως προσδιορίστηκε από τρία μοντέλα, παρατίθεται στον πίνακα 6.3 ενώ το σχήμα 6.2 παρουσιάζει την πορεία σύγκλισης της τιμής  $D_{windshield}$  με την πάροδο των επαναλήψεων για τα τρία μοντέλα τύρβης.

Το ποσοστό συνεισφοράς στον  $C_d$  που υπολογίστηκε (περίπου 29%) είναι μικρότερο από το ποσοστό της συνολικής μετωπικής επιφάνειας που καλύπτει ο ανεμοθώρακας.



**Σχήμα 6.1:** Γράφημα σύγκλισης της τιμής του συντελεστή οπισθέλκουσας δύναμης  $C_d$  για τρία διαφορετικά μοντέλα τύρβης. Η άνω καμπύλη (κόκκινη) αντιστοιχεί στο μοντέλο  $k-\epsilon$ , η ενδιάμεση (μπλε) στο μοντέλο *Spalart-Allmaras* ενώ η κάτω καμπύλη (πράσινη) αντιστοιχεί στο *SST  $k-\omega$* .

Μοντέλο τύρβης	$D_{windshield} (N)$	$D_{total} (N)$	(%)
k-ε	19,23	66,92	28,74
SST k-ω	19,13	66,28	28,87
Spalart-Almaras	19,42	66,51	29,20

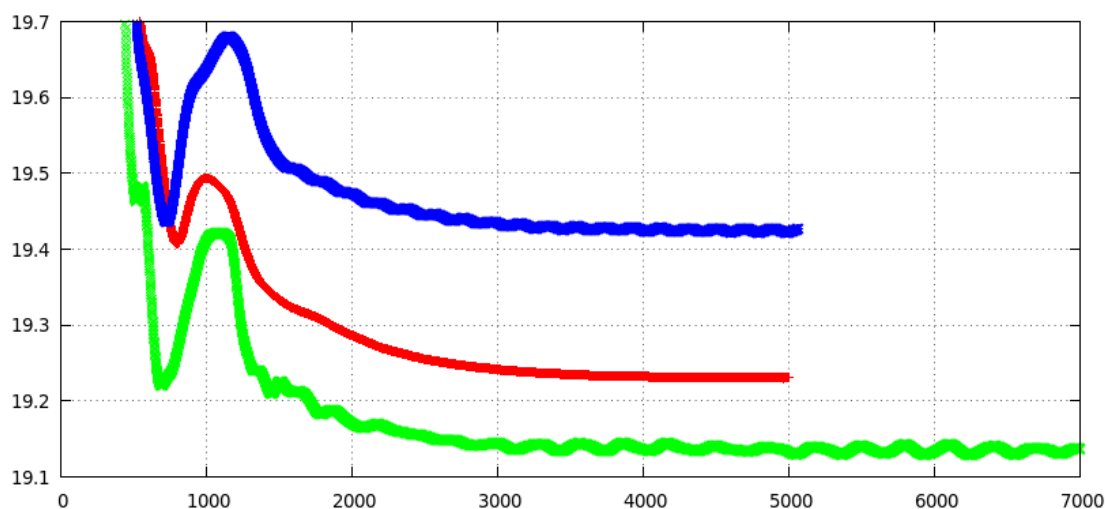
**Πίνακας 6.3:** Συγκριτικός πίνακας αποτελεσμάτων για χρήση τριών διαφορετικών μοντέλων τύρβης.

Το γεγονός αυτό είναι αναμενόμενο αφού πρόκειται για τμήμα της μηχανής με καλο αεροδυναμικό σχεδιασμό σε αντίθεση με τμήματα όπως ο εμπρόσθιος τροχός, που η συνεισφορά τους στον συντελεστή οπισθέλκουσας είναι δυσανάλογα μεγαλύτερη του ποσοστού επιφάνειας που καλύπτουν[21].

## 6.2 Αποτελέσματα επίλυσης εξισώσεων ροής

Ο πίνακας 6.4 περιέχει τις ακραίες τιμές που λαμβάνουν η πίεση και το μέτρο της ταχύτητας ανά μοντέλο τύρβης, σύμφωνα με τα αποτελέσματα στα οποία κατέληξε ο επιλύτης SIMPLE στην τελευταία επανάληψη. Η ελάχιστη τιμή του μέτρου της ταχύτητας εμφανίζεται, βέβαια, επί των σταθερών ορίων και είναι μηδενική.

Τα σχήματα 6.3 και 6.4 απεικονίζουν τα πεδία της ταχύτητας και πίεσης αντίστοιχα όπως αυτά προσδιορίστηκαν με χρήση του μοντέλου k-ε. Η απεικόνιση έγινε επί του επιπέδου συμμετρίας του οχήματος το οποίο ορίζεται από τους άξονες  $x$  και  $z$ . Κατά



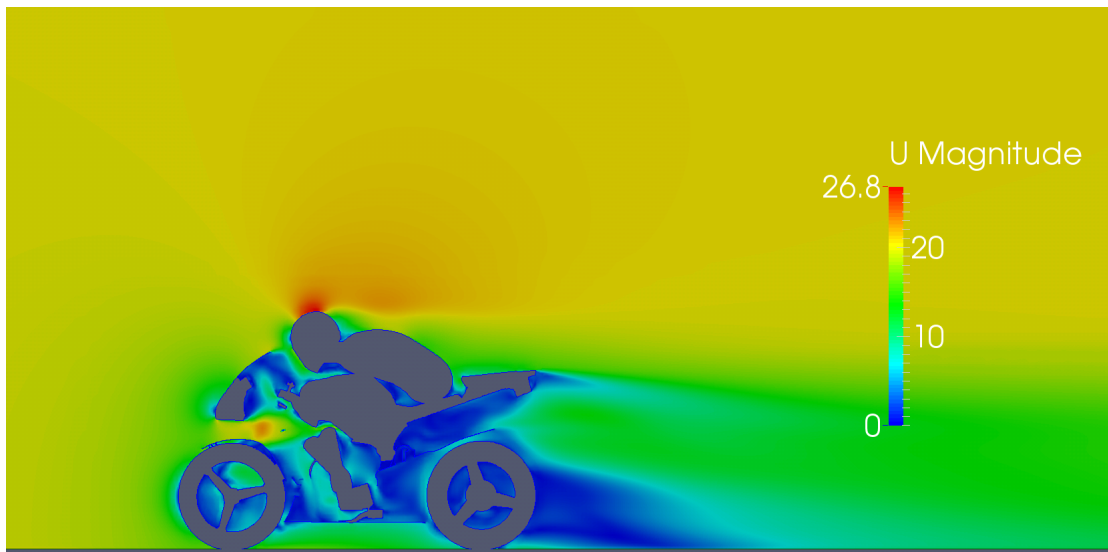
**Σχήμα 6.2:** Γράφημα σύγκλισης της τιμής οπισθέλκουσας δύναμης  $D_{windshield}$  που δέχεται ο ανεμοθώρακας για τρία διαφορετικά μοντέλα τύρβης. Η άνω καμπύλη (μπλε) αντιστοιχεί στο μοντέλο *Spalart-Allmaras*, η ενδιάμεση (κόκκινη) στο μοντέλο *k-ε*, ενώ η κάτω καμπύλη (πράσινη) αντιστοιχεί στο *SST k-ω*.

Μοντέλο τύρβης	$\max V$ m/s	$\min p$ N/m <sup>2</sup>	$\max p$ N/m <sup>2</sup>
k-ε	28, 2	-506	253
SST k-ω	29, 6	-534	213
Spalart-Almaras	28, 8	-534	253

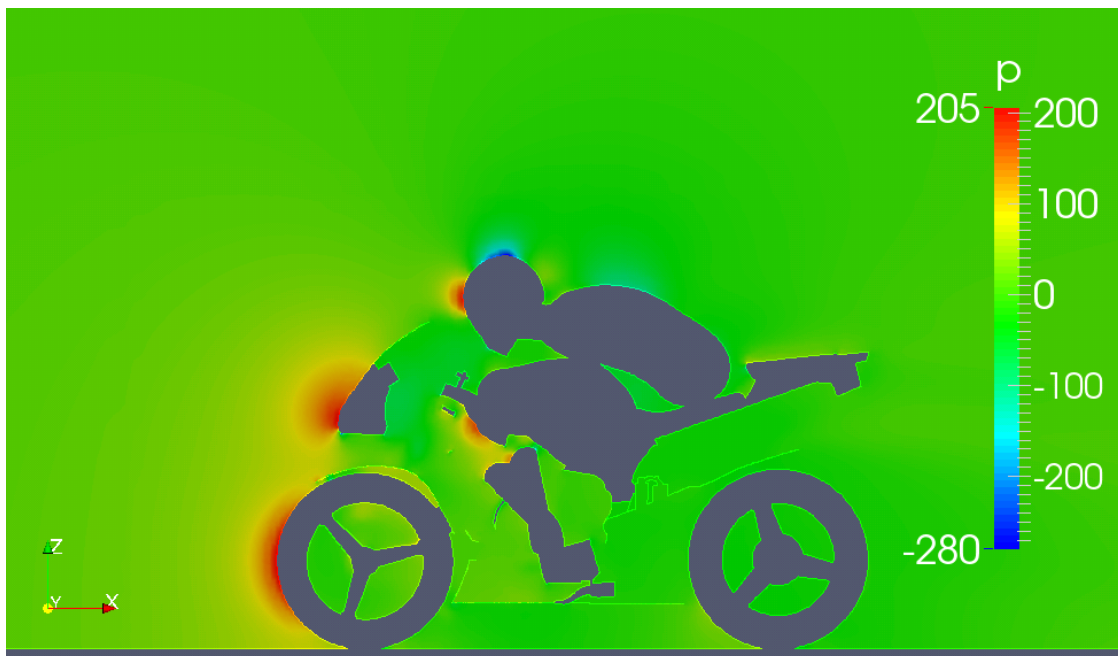
**Πίνακας 6.4:** Ακρότατες τιμές των ταχύτητας και πίεσης ανά μοντέλο τύρβης.

τον ίδιο τρόπο απεικονίζονται τα αποτελέσματα της χρήσης του μοντέλου SST k-ω (σχήματα 6.5 και 6.6) και Spalart-Allmaras (σχήματα 6.7 και 6.8). Τέλος το σχήμα 6.9 απεικονίζει το πεδίο της πίεσης επί της επιφάνειας του διτρόχου και του αναβάτη. Οι διαφορές ανά μοντέλο πίεσης δεν είναι διακριτές γι αυτό παρατίθενται μόνο τα αποτελέσματα με το μοντέλο Spalart-Allmaras. Σκοπός είναι να γίνουν εμφανείς οι περιοχές στις οποίες η τιμή της πίεσης είναι αυξημένη.

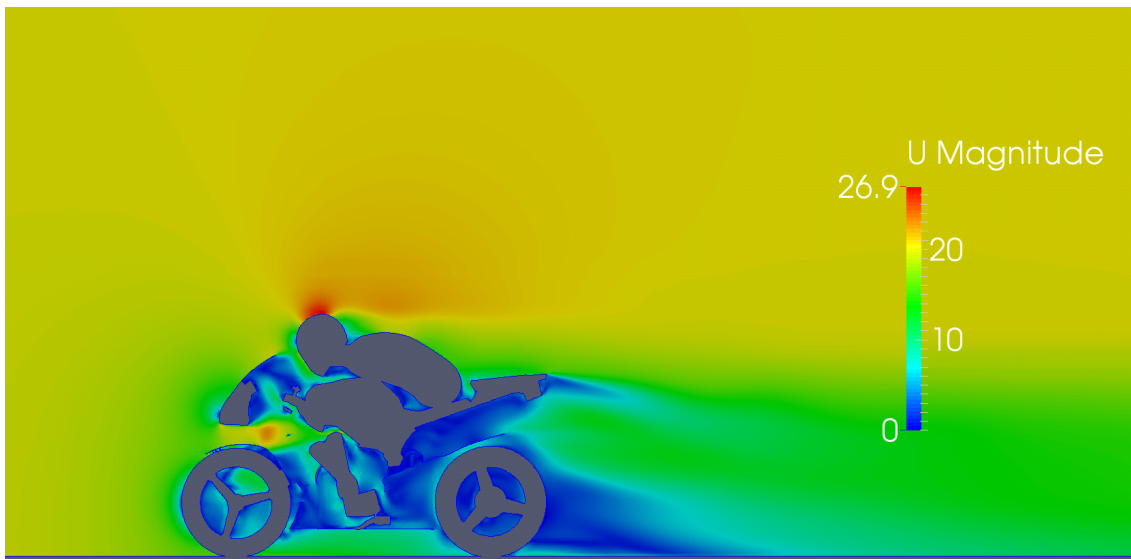




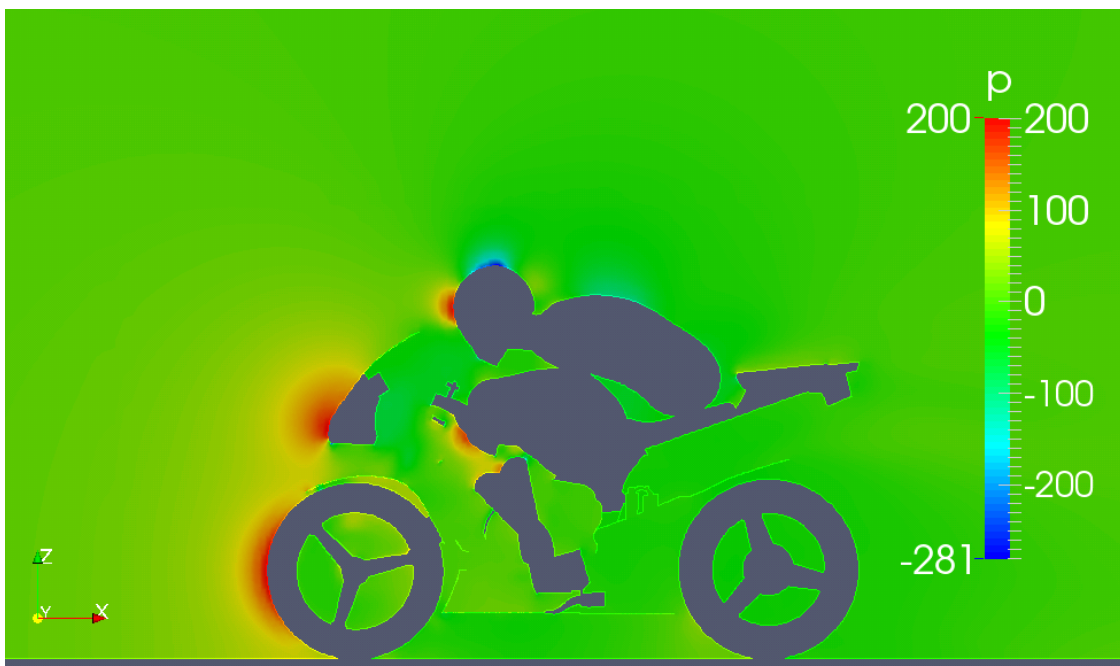
**Σχήμα 6.3:** Απεικόνιση του πεδίου ταχύτητας της ροής επί του επιπέδου  $x - z$  στον άξονα συμμετρίας του οχήματος. Αποτελέσματα με χρήση του μοντέλου τύρβης  $k-\epsilon$ .



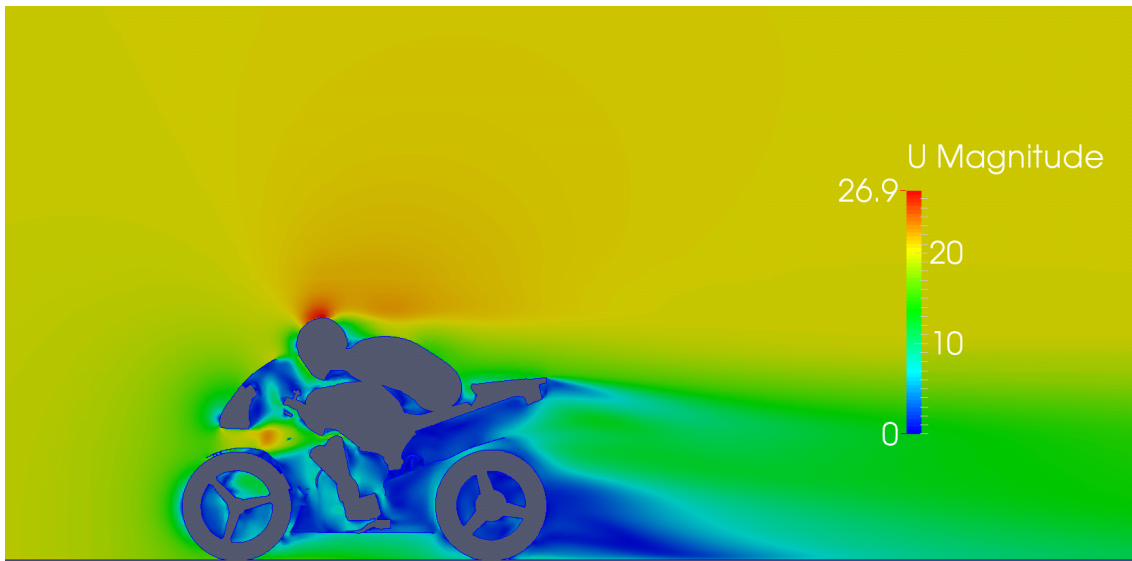
**Σχήμα 6.4:** Απεικόνιση του πεδίου πίεσης επί του επιπέδου  $x - z$  στον άξονα συμμετρίας του οχήματος. Αποτελέσματα με χρήση του μοντέλου τύρβης  $k-\epsilon$



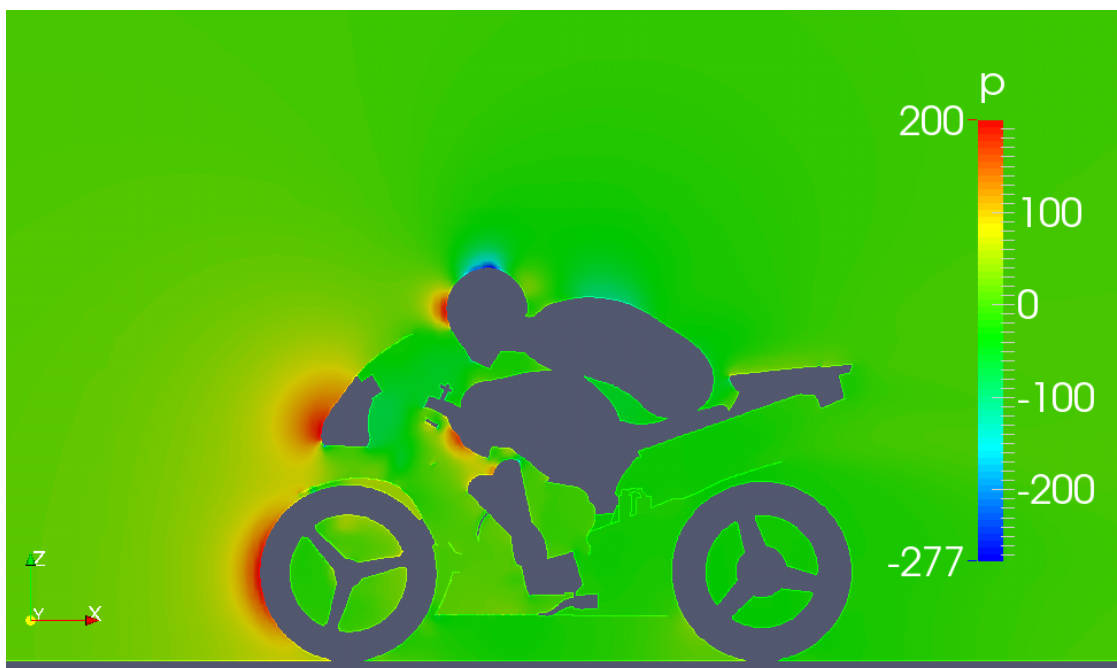
**Σχήμα 6.5:** Απεικόνιση του πεδίου ταχύτητας της ροής επί του επιπέδου  $x - z$  στον άξονα συμμετρίας του οχήματος. Αποτελέσματα με χρήση του μοντέλου τύρβης SST  $k-\omega$ .



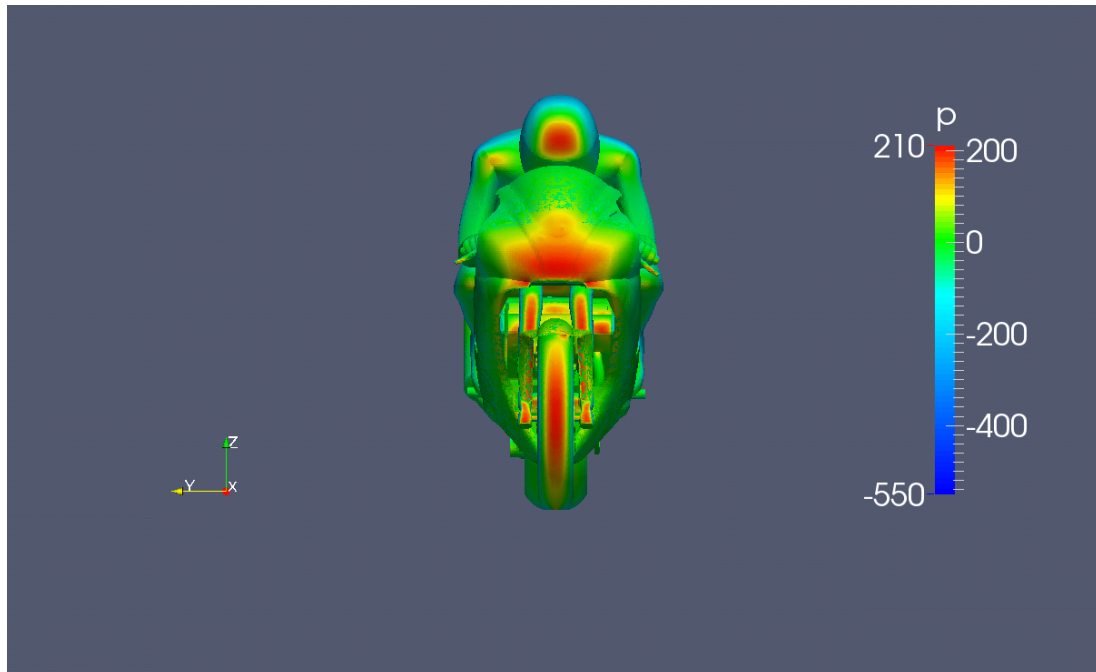
**Σχήμα 6.6:** Απεικόνιση του πεδίου πίεσης επί του επιπέδου  $x - z$  στον άξονα συμμετρίας του οχήματος. Αποτελέσματα με χρήση του μοντέλου τύρβης SST  $k-\omega$ .



Σχήμα 6.7: Απεικόνιση του πεδίου ταχύτητας της ροής επί του επιπέδου  $x - z$  στον άξονα συμμετρίας του οχήματος. Αποτελέσματα με χρήση του μοντέλου τύρβης *Spalart-Allmaras*.



Σχήμα 6.8: Απεικόνιση του πεδίου πίεσης επί του επιπέδου  $x - z$  στον άξονα συμμετρίας του οχήματος. Αποτελέσματα με χρήση του μοντέλου τύρβης *Spalart-Allmaras*.



Σχήμα 6.9: Απεικόνιση πεδίου πίεσης επί της επιφάνειας διτροχού και αναβάτη.

### 6.3 Βελτιστοποίηση μορφής ανεμοθώρακα

#### Παραμετροποίηση χωρίου ενδιαφέροντος

Η παραμετροποίηση του ανεμοθώρακα έγινε με το λογισμικό το οποίο βασίζεται σε ογκομετρικές B-spline και ο τρόπος λειτουργίας του περιγράφηκε στην παράγραφο 4.8. Ο πίνακας 6.5 παρουσιάζει τις ρυθμίσεις σχετικά με τις ιδιότητες των ογκομετρικών B-spline.

	Κατά άξονα $x$	Κατά άξονα $y$	Κατά άξονα $z$
Αριθμός σημείων ελέγχου	9	9	9
Βαθμός συναρτήσεων βάσης	3	3	3
Τάξη συνέχειας στα όρια	2	2	2

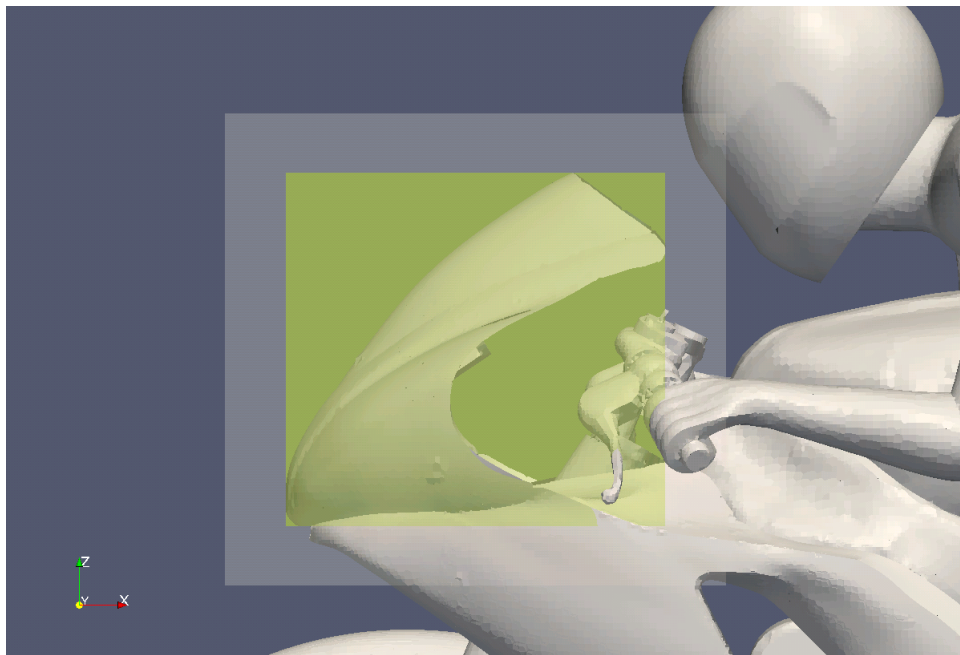
Πίνακας 6.5: Πίνακας ρυθμίσεων ογκομετρικών B-spline.

Ως χώρος παραμετροποίησης επιλέχθηκε το ορθογωνικό παραλληλεπίπεδο χωρίο το οποίο απεικονίζεται στα σχήματα 6.10,6.11 και περικλείει την περιοχή του ανεμοθώρακα με τις διαστάσεις που παρουσιάζονται στον πίνακα 6.6. Η μέγιστη επιτρεπτή μετατόπιση του εκάστοτε σημείου ελέγχου ορίζεται στα 0,01 μέτρα.

	Άξονας $x$ (m)	Άξονας $y$ (m)	Άξονας $z$ (m)
Συντεταγμένες κέντρου χωρίου	0,124	0	0,929
Διάσταση χωρίου	0,544	0,72	0,512

**Πίνακας 6.6:** Πίνακας θέσης και διαστάσεων του χωρίου παραμετροποίησης.

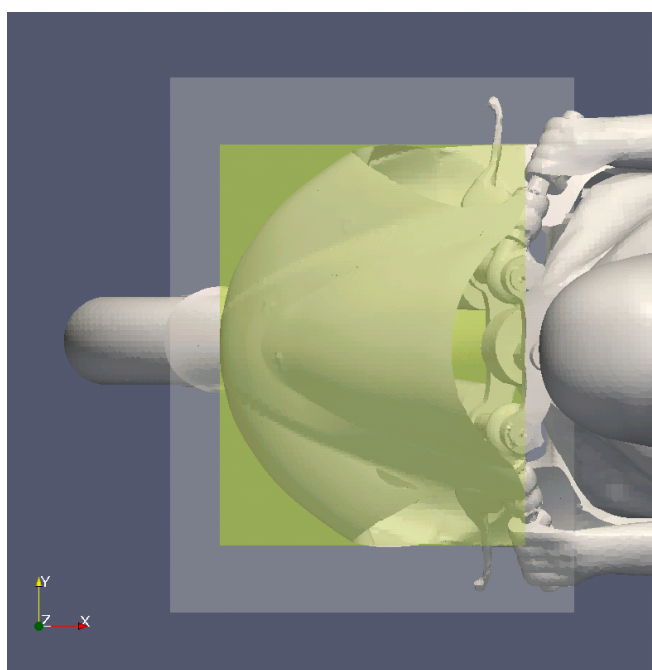
Οι διαστάσεις αυτές αντιστοιχούν στο εξωτερικό παραλληλεπίπεδο που διακρίνεται στα σχήματα 6.10 και 6.11 και περιέχει το σύνολο των σημείων ελέγχου των ογκομετρικών B-spline. Από τα σημεία αυτά, λόγω των ρυθμίσεων, οι δύο εξωτερικοί κόμβοι προς κάθε κατεύθυνση θα παραμείνουν σταθεροί για να ικανοποιηθούν οι απαιτήσεις συνέχειας. Το εσωτερικό παραλληλεπίπεδο περιέχει τα σημεία ελέγχου που τελικά έχουν τη δυνατότητα να μετακινήθούν. Τελικά από τα 9 σημεία ελέγχου ανά κατεύθυνση, 5 σημεία ανά κατεύθυνση έχουν την ελευθερία κίνησης ή 125 σημεία συνολικά. Μεταβλητές σχεδιασμού είναι οι συντεταγμένες των σημείων ελέγχου και το πλήθος τους είναι  $N = 3 \times 125 = 375$ .



**Σχήμα 6.10:** Απεικόνιση παραμετροποιημένου χωρίου στο επίπεδο  $x - z$ .

## Αποτελέσματα βελτιστοποίησης

Η χρήση του αλγόριθμου βελτιστοποίησης έγινε με το μοντέλο τύρβης Spalart-Allmaras και, συνεπώς, αρχική τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης  $C_d = 0,496$ . Ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης πραγματοποίησε 10 κύκλους οι οποίοι οδήγησαν στο αποτέλεσμα του πίνακα 6.7. Ο αλγόριθμος δεν προχώρησε σε επόμενο κύκλο βελτιστοποίησης αφού



**Σχήμα 6.11:** Απεικόνιση παραμετροποιημένου χωρίου στο επίπεδο  $x - y$ .

έφτασε στο μέγιστο αριθμό κύκλων, όπως αυτός είχε οριστεί από τον χρήστη. Ο αναγκαίος χρόνος για την παράλληλη εκτέλεση σε 226 επεξεργαστές ήταν 14 ώρες και 30 λεπτά.

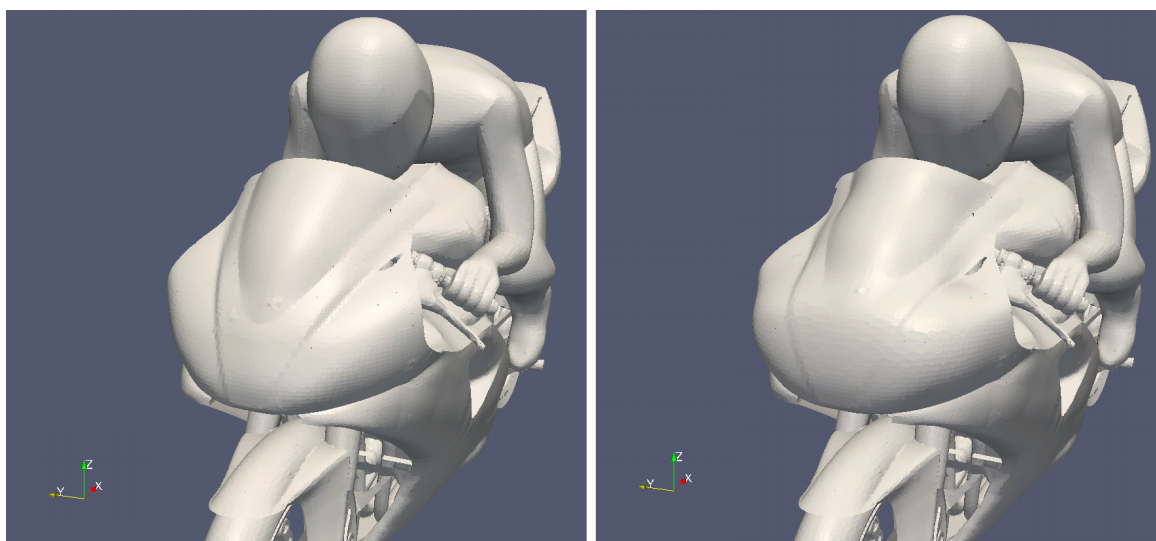
	Αρχική τιμή	Τελική τιμή	Μείωση (%)
Συντελεστής οπισθέλκουσας $C_d$	0,496	0,477	3,83

**Πίνακας 6.7:** Πίνακας αποτελέσματος βελτιστοποίησης.

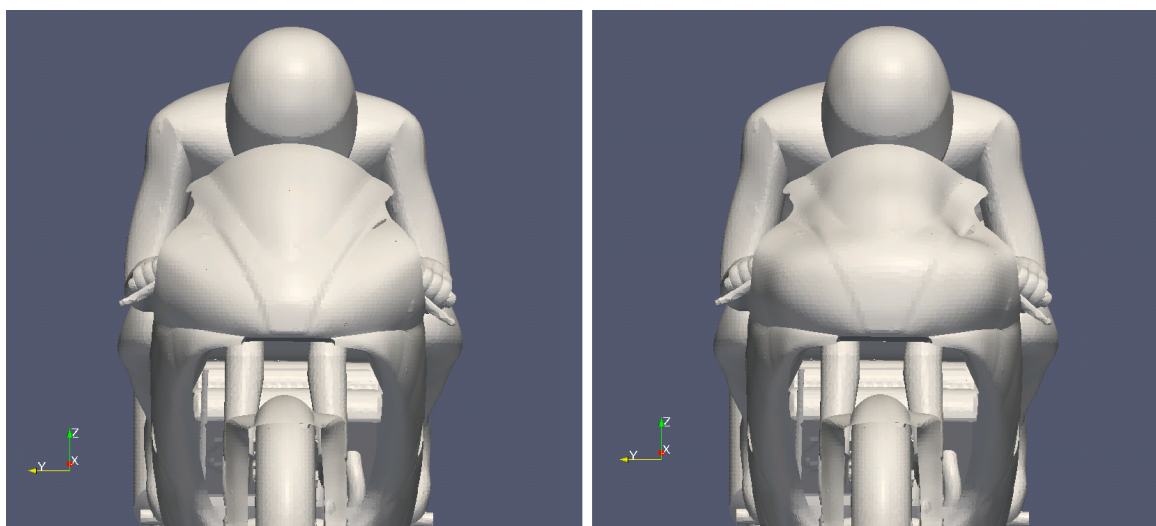
Η αλλαγή στη γεωμετρία παρουσιάζεται στα σχήματα 6.12 και 6.13. Αριστερά στο κάθε σχήμα παρουσιάζεται η αρχική γεωμετρία ενώ δεξιά η βελτιστοποιημένη. Στο σχήμα 6.15 οπτικοποιείται το μέτρο της μετατόπισης των σημείων του πλέγματος από την αρχική τους θέση ενώ το σχήμα 6.16 οπτικοποιείται η μετατόπιση του κάθε σημείου ως προς τους άξονες  $x, y, z$ . Συγκρίνοντας τα αρχικά με τα τελικά αποτελέσματα εξάγονται οι παρακάτω παρατηρήσεις:

1. Η μέγιστη μετατόπιση των σημείων του αρχικού πλέγματος ήταν 0,00543 μέτρα με μέγιστη επιτρεπόμενη τα 0,01 μέτρα.
2. Μιας και τα σημεία του ανεμοθώρακα που βρίσκονται επί των ορίων του εσωτερικού παραλληλεπιπέδου των σχημάτων 6.12 και 6.13 ήταν ακίνητα, η μετατόπιση έγινε με τέτοιο τρόπο ώστε η ροή να κινηθεί όσο το δυνατόν πάνω από το κράνος του αναβάτη και δεξιά και αριστερά από τους ώμους του ώστε να μειωθεί η αυξημένη πίεση που ασκείται στα σημεία αυτά (σχήμα 6.9).

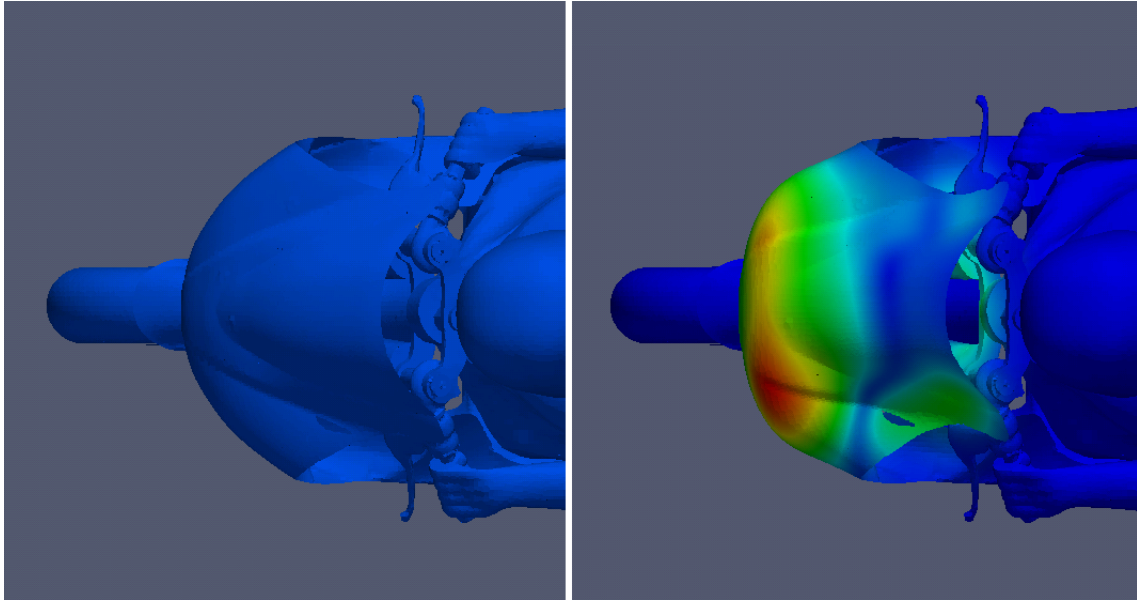
3. Είναι εμφανής η τάση αύξησης της καμπυλότητας στο μπροστινό τμήμα του ανεμοθώρακα το οποίο υποδέχεται και τη ροή (σχήμα 6.14).
4. Υπάρχει τάση ελαχιστοποίησης της μετωπικής επιφάνειας του ανεμοθώρακα όπως μπορεί να διακριθεί στο σχήμα 6.13. Βέβαια, επειδή η μετωπική επιφάνεια του αναβάτη υπερκαλύπτει αυτή του ανεμοθώρακα, η συνολική μετωπική επιφάνεια της γεωμετρίας αναβάτη-διτρούχου παραμένει σταθερή.
5. Η ύπαρξη ατέλειας στη αρχική γεωμετρία οδηγεί σε μη συμμετρικό τελικό αποτέλεσμα αφού ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης «μεταχειρίζεται» διαφορετικά το μικρό διάκενο που υπάρχει στη μία πλευρά του ανεμοθώρακα (σχήμα 6.14 (δεξιά)).



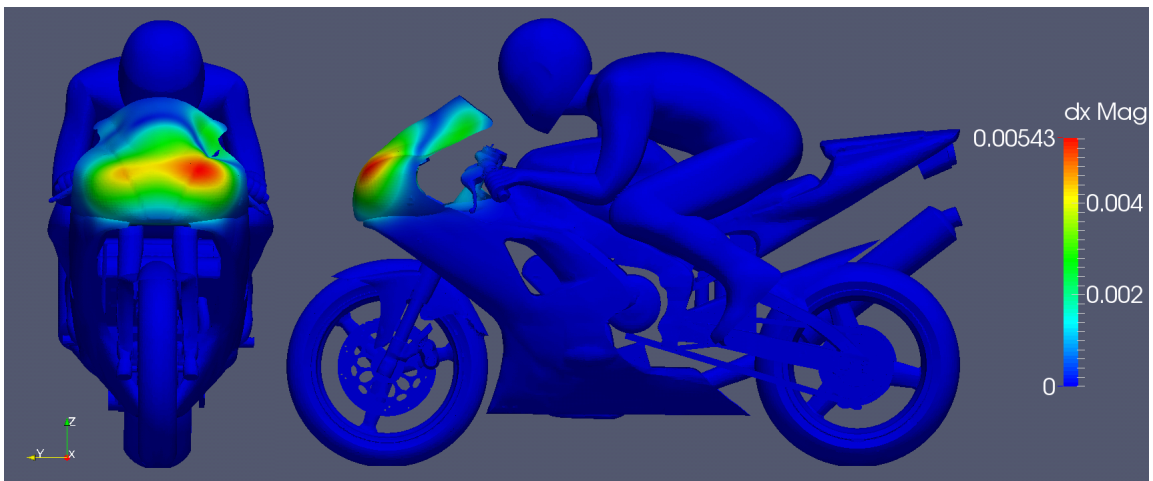
Σχήμα 6.12: Αρχική (αριστερά) και τελική (δεξιά) μορφή του ανεμοθώρακα.



Σχήμα 6.13: Αρχική (αριστερά) και τελική (δεξιά) μορφή του ανεμοθώρακα.

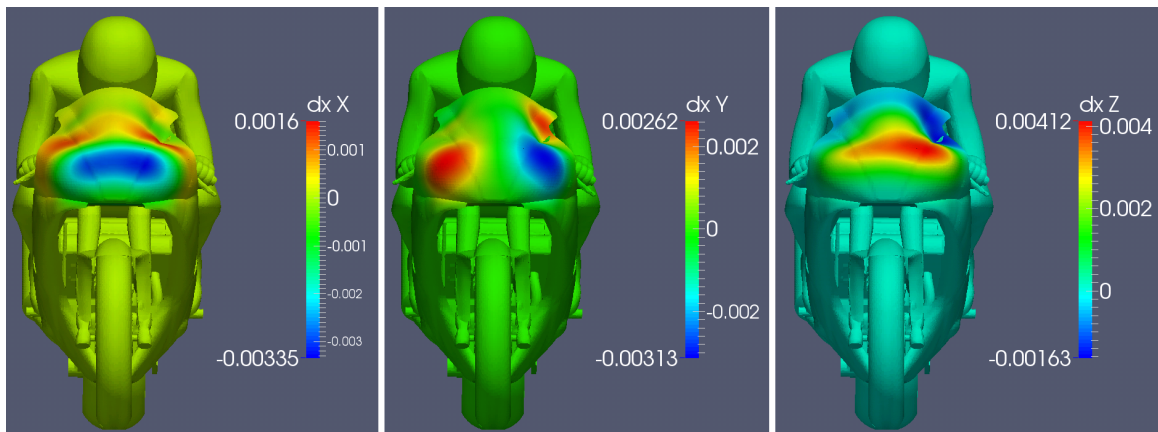


Σχήμα 6.14: Αρχική (αριστερά) και τελική (δεξιά) μορφή ανεμοθώρακα.



Σχήμα 6.15: Οπτικοποίηση του μέτρου της μετατόπισης των κόμβων του υπολογιστικού πλέγματος από την αρχική τους θέση.





**Σχήμα 6.16:** Οπτικοποίηση της μετατόπισης των κόμβων του υπολογιστικού πλέγματος από την αρχική τους θέση κατά τους άξονες  $x$  (αριστερά),  $y$  (κέντρο)  $z$  (δεξιά).



# Κεφάλαιο 7

## Συμπεράσματα - Επίλογος

Στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία ακολουθήθηκε μια διαδικασία βελτιστοποίησης μορφής. Η διαδικασία εφαρμόστηκε σε τμήμα της γεωμετρίας δίτροχου μηχανοκίνητου οχήματος αλλά μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε άλλα συναφή προβλήματα αεροδυναμικού σχεδιασμού. Από πλευράς λογισμικού, χρησιμοποιήθηκε το ελεύθερο λογισμικό OpenFOAM για την επίλυση των εξισώσεων της ροής, αλλά στο ιδιαίτερα ενδιαφέρον κομμάτι της βελτιστοποίησης επιστρατεύτηκε λογισμικό ανεπτυγμένο στη ΜΠΥΡ&B του ΕΜΠ.

Συνοψίζοντας, κατά την πορεία της εργασίας διερευνήθηκαν τα βασικά βήματα της προαναφερθείσας διαδικασίας ακολουθούμενα από τη διεξαγωγή των αντίστοιχων συμπερασμάτων. Ακολουθεί αναφορά των βημάτων και σχολιασμός των συμπερασμάτων.

### **Γένεση υπολογιστικού πλέγματος.**

Εξαιρετικά σημαντικό βήμα αφού οι συνέπειες της επιλογής του χρήστη μπορούν να γίνουν αισθητές καθ' όλη τη διαδικασία βελτιστοποίησης. Η πυκνότητα του πλέγματος πρέπει να επιλεγεί με τρόπο τέτοιο, ώστε τα αποτελέσματα της αεροδυναμικής ανάλυσης να είναι αξιόπιστα αλλά συγχρόνως να μην αυξηθεί κατακόρυφα το κόστος επίλυσης. Οι κατά τόπους πυκνώσεις του πλέγματος στις περιοχές που αναμένεται μεγαλύτερη αυξομείωση των μεταβλητών της ροής, αυξάνει την ακρίβεια της λύσης αποφεύγοντας, έτσι, την καθολική πύκνωση η οποία θα αύξανε κατά πολύ το μέγεθος του πλέγματος.

Επιλύσεις της ροής με πλέγματα διαφορετικής πυκνότητας παρέχουν τα απαραίτητα δεδομένα για την επιλογή του κατάλληλου πλέγματος. Η ανάλυση ευαισθησίας της λύσης είναι σημαντικό εργαλείο αλλά η τελική απόφαση, εξαρτάται από τις ιδιαιτερότητες του εκάστοτε προβλήματος και είναι προϊόν συμβιβασμού ανάμεσα στην απαίτηση για υπολογιστική ακρίβεια και στον περιορισμό του να διατηρηθεί το υπολογιστικό κόστος σε διαχειρίσιμο επίπεδο. Εκτός από το μέγεθος του πλέγματος πρέπει και η ποιότητά του να πληρεί τα κριτήρια του κάθε επιλύτη. Η οπτική παρατήρηση του πλέγματος χρειάζε-

ται για να εξακριβωθεί ότι το πλέγμα «σέβεται» την αρχική γεωμετρία αλλά ο έλεγχος μέσω αλγορίθμων αξιολόγησης πλέγματος είναι, επίσης, αναγκαίος. Να σημειωθεί ότι η ποιότητα της αρχικής γεωμετρίας επηρεάζει την τελική ποιότητα πλέγματος και, συνεπώς, πρέπει να ελέγχεται και αν υπάρχουν προβληματικές περιοχές να διορθώνονται. Στην παρούσα εργασία η αρχική γεωμετρία ήταν δεδομένη.

Η εφαρμογή "SnappyHexMesh", η οποία παρέχεται με το OpenFOAM, χρησιμοποιήθηκε για τη γένεση πλέγματος. Είναι εξαιρετικά φιλική προς το χρήστη και δίνει τη δυνατότητα δημιουργίας πλεγμάτων εκατομμυρίων κελιών σε μικρό χρονικό διάστημα χάρη στη δυνατότητα παράλληλης εκτέλεσης. Ενδεικτικά, το πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε για την βελτιστοποίηση, αποτελείται από 4.933.133 κελιά και χρειάστηκε 41 περίπου λεπτά για την δημιουργία του με παράλληλη εκτέλεση 116 νημάτων (threads) σε αντίστοιχο αριθμό επεξεργαστών χρονισμού 2261 MHz ο καθένας. Η εφαρμογή υποστηρίζεται από αλγορίθμους ελέγχου του πλέγματος μετά το πέρας της πλεγματοποίησης.

### **Επίλυση εξισώσεων ροής.**

Γενικά, σε μια διαδικασία βελτιστοποίησης, στο βήμα αυτό λαμβάνει χώρα η αξιολόγηση της «βελτιωμένης» λύσης στην οποία καταλήγει ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης. Στη παρούσα εργασία η επίλυση των εξισώσεων ροής πραγματοποιήθηκε για τον προσδιορισμό του συντελεστή της οπισθέλκουσας δύναμης  $C_d$  η οποία ασκείται σε δίτροχο το οποίο κινείται με ταχύτητα  $20 \text{ m/s}$  ( $72 \text{ km/h}$ ). Οι εξισώσεις RANS επιλύθηκαν για την χρονικά αμετάβλητη, τυρβώδη, ασυμπίεστη ροή αέρα με τις κατάλληλες οριακές συνθήκες. Για τη μοντελοποίηση της τύρβης επιλέχθηκαν και συγκρίθηκαν τρία μοντέλα. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα, η χαμηλότερη τιμή συντελεστή υπολογίστηκε με το μοντέλο SST k- $\omega$  με  $C_d = 0.4947$ . Με βάση αυτήν την τιμή, το μοντέλο Spalart-Allmaras υπολόγισε την τιμή του συντελεστή αυξημένη κατά 0,34% ενώ το μοντέλο k- $\epsilon$  αυξημένη κατά 0,95%.

Η αριθμητική επίλυση έγινε με τον επιλύτη SIMPLE όπως υλοποιείται στο OpenFOAM. Ο επιλύτης εκτελέστηκε για 5000 επαναλήψεις για όλα τα μοντέλα τύρβης εκτός από το k- $\epsilon$ , για το οποίο εκτελέστηκαν 7000 επαναλήψεις αφού η σύγκλιση ήταν χειρότερη. Για όλες τις μεταβλητές επιλέχθηκαν συντελεστές χαλάρωσης ίσοι με 0,7 εκτός της ταχύτητας που επιλέχθηκε ίσος με 0,3 για να επιτευχθεί ικανοποιητική σύγκλιση του αλγόριθμου επίλυσης. Ο απαιτούμενος χρόνος για την παράλληλη εκτέλεση σε 116 επεξεργαστές, 5000 επαναλήψεων του αλγορίθμου ήταν 4 ώρες και 38 λεπτά με χρήση του μοντέλου k- $\epsilon$ , σχεδόν παρόμοιος χρόνος (4 ώρες και 33 λεπτά) με χρήση του μοντέλου SST k- $\omega$  και 3 ώρες και 58 λεπτά με χρήση του μοντέλου Spalart-Allmaras το οποίο επέδειξε την καλύτερη σύγκλιση.

### **Παραμετροποίηση και μετατόπιση πλέγματος.**

Πριν την έναρξη της βελτιστοποίησης έγινε παραμετροποίηση του αρχικού πλέγματος στο σημείο του ανεμοθώρακα με χρήση ογκομετρικών B-spline. Η χρήση του λογισμικού παραμετροποίησης της MPTP&B είναι απλή και απαιτεί από τον χρήστη τον ορισμό των επιθυμητών σημείων ελέγχου στον χώρο του αρχικού πλέγματος. Ορίστηκαν 729

σημεία ελέγχου, 9 ανά καρτεσιανή κατεύθυνση στην περιοχή του ανεμοθώρακα. Από αυτά, τα 2 ακραία ανά κατεύθυνση σημεία απαιτήθηκαν να παραμείνουν σταθερά ώστε στα όρια του χωρίου παραμετροποίησης να ικανοποιείται η απαίτηση για δεύτερης τάξης συνέχεια. Τελικά, 5 σημεία ανά κατεύθυνση, 125 σημεία ελέγχου συνολικά, είχαν τη δυνατότητα μετατόπισης κατά τη διαδικασία βελτιστοποίησης. Οι καρτεσιανές συντεταγμένες των σημείων αυτών, συνολικά  $N = 375$ , ορίστηκαν ως μεταβλητές σχεδιασμού. Το υπολογιστικό κόστος της παραμετροποίησης σχετίζεται κυρίως με την «εκπαίδευση» του αλγορίθμου, δηλαδή, τον άπαξ υπολογισμό των παραμετρικών συντεταγμένων των κόμβων του πλέγματος της περιοχής ενδιαφέροντος. Το κόστος αυτό είναι ελάχιστο. Ενδεικτικά, για την παραμετροποίηση 369.106 σημείων του αρχικού πλέγματος χρειάστηκαν 4 λεπτά και 20 δευτερόλεπτα. Εκτός της παραμετροποίησης, το λογισμικό ήταν υπεύθυνο και για τη μετατόπιση του πλέγματος σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης. Η ικανότητά του αυτή είναι εξαιρετικά σημαντική γιατί πρακτικά αυτοματοποιεί την αλληλουχία των κύκλων βελτιστοποίησης και αφαιρεί από τον χρήστη την ευθύνη της εκ νέου γένεσης πλέγματος.

### **Βελτιστοποίηση μορφής.**

Η λύση των εξισώσεων ροής που προσδιορίστηκε με το μοντέλο τύρφης Spalart-Allmaras χρησιμοποιήθηκε ως σημείο εκκίνησης για την εκτέλεση του λογισμικού βελτιστοποίησης της ΜΠΤΡ&Β. Με αντικειμενική συνάρτηση τον συντελεστή οπισθέλκουσας και με μεταβλητές τις συντεταγμένες των σημείων ελέγχου των ογκομετρικών B-spline, ο κώδικας υλοποίησε τη μέθοδο της απότομης καθόδου. Μέσω της επίλυσης του συζυγούς προβλήματος έγινε σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης ο υπολογισμός της κλίσης της συνάρτησης του  $C_d$ . Ο αναγκαίος χρόνος για την παράλληλη εκτέλεση σε 226 επεξεργαστές, 10 κύκλων βελτιστοποίησης ήταν 14 ώρες και 30 λεπτά. Παράγωγο της εκτέλεσης του κώδικα ήταν το αρχείο με τις μετατοπισμένες συντεταγμένες των σημείων του υπολογιστικού πλέγματος. Με το αρχείο αυτό ορίστηκε η νέα μορφή του ανεμοθώρακα του διτρόχου.

Το αποτέλεσμα της διαδικασίας βελτιστοποίησης, το οποίο επετεύχθη στον πρώτο κύκλο, ήταν μια γεωμετρία διτρόχου με συντελεστή οπισθέλκουσας δύναμης  $C_d$  μειωμένο κατά 3,83% σε σχέση με τον αρχικό. Ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης πραγματοποίησε 10 κύκλους για την επίτευξη του αποτελέσματος αυτού και εν συνεχεία τερματίστηκε αφού έφτασε στο μέγιστο αριθμό κύκλων, όπως αυτός είχε οριστεί από τον χρήστη. Η μέγιστη μετατόπιση των σημείων του αρχικού πλέγματος ήταν 0,00543 μέτρα, με μέγιστη επιτρεπόμενη τα 0,01 μέτρα. Η οπτική παρατήρηση της τελικής γεωμετρίας έρχεται σε συμφωνία με το αναμενόμενο αποτέλεσμα. Η μετατόπιση του ανεμοθώρακα έγινε με τέτοιο τρόπο ώστε η ροή να οδηγηθεί πάνω από το κράνος του αναβάτη και δεξιά και αριστερά από τους ώμους του ενώ παρατηρήθηκε μια τάση ελαχιστοποίησης της μετωπικής επιφάνειάς του. Η καμπυλότητα του μπροστινού στήμματος του ανεμοθώρακα αυξήθηκε ενώ η ύπαρξη ατέλειας στην αρχική γεωμετρία οδήγησε σε ασύμμετρη μετατόπιση ως προς το επίπεδο συμμετρίας του διτρόχου.

Συνολικά, η μείωση στον συντελεστή οπισθέλκουσας δύναμης που επετεύχθη στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία κρίνεται ικανοποιητική δεδομένου ότι ο ανεμοθώρα-

κας των δίτροχων οχημάτων και ειδικά των δίτροχων αγωνιστικής χρήσης, αποτελεί ήδη προϊόν καλού αεροδυναμικού σχεδιασμού. Επίσης, ο ανεμοθώρακας αποτελεί μικρό ποσοστό της συνολικής μετωπικής επιφάνειας με ακόμα μικρότερη συνεισφορά στον συντελεστή οπισθέλκουσας, ενώ επιφάνειες όπως αυτές του αναβάτη δεν μπορούν να βελτιστοποιηθούν. Ως συνέχεια της εργασίας αυτής, προτείνεται η εφαρμογή της μεθόδου βελτιστοποίησης σε δίτροχο μηχανοκίνητο όχημα σε υψηλή ταχύτητα, λαμβάνοντας υπόψη και τη δύναμη της άνωσης η οποία, αυξανόμενη της ταχύτητας, επιδρά έντονα στην ευστάθεια του οχήματος.

## Βιβλιογραφία

- [1] Menter, F. R.: *Zonal two equation k-omega turbulence models for aerodynamic flows*. AIAA Conference Paper 93-2906, January 1993.
- [2] Chien, K. Y.: *Predictions of channel and boundary-layer flows with a low-reynolds-number turbulence model*. AIAA Journal, 20 No. 1:33–38, 1982.
- [3] Spalart, P. and Allmaras, S.: *A one-equation turbulence model for aerodynamic flows*. AIAA Paper 1992-439, 30th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, Nevada, USA, January 6–9 1992.
- [4] *CFD Direct*. <http://cfd.direct/>.
- [5] *The OpenFOAM Foundation*. <http://www.openfoam.org/>.
- [6] Γιαννάκογλου, Κ.: *Μέθοδοι Βελτιστοποίησης στην Αεροδυναμική*. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., 2005.
- [7] Papoutsis, E. M. and Giannakoglou, K. C.: *A parameterization and mesh movement strategy based on volumetric b-splines. applications to shape optimization*, January 2015.
- [8] *Motogp*. <http://www.motogp.com/>.
- [9] OpenCFD Ltd.: *OpenFOAM User Guide*, 1.6 edition, July 2009.
- [10] Τσαγγάρης, Σ.: *Μηχανική των ρευστών*. Εκδόσεις Συμewών Ο.Ε., 1995.
- [11] Landau, L. D. and Lifshitz, E. M.: *Fluid Mechanics, Second Edition*. Pergamon Press, 1987.
- [12] Pope, S. B.: *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, 2000.
- [13] Tennekes, H. and Lumley, J. L.: *A First Course in Turbulence*. The MIT Press, 1972.
- [14] McDonough, J. M.: *Introductory lectures on turbulence*, 2007.
- [15] Wilcox, D. C.: *Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models*. AIAA Journal, 26 No. 11:1299–1310, 1988.

- [16] Wilcox, D. C.: *Turbulence Modeling for CFD 1st edition*. DCW Industries, Inc., La Canada CA, 1993.
- [17] Menter, F. R.: *Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications*. AIAA Journal, 32 No. 8:1598–1605, 1994.
- [18] Spalart, P. R.: *Trends in turbulence treatments*. pages 33–38, June 2000.
- [19] Spalart, P. R. and Rumsey, C. L.: *Effective inflow conditions for turbulence models in aerodynamic calculations*. AIAA Journal, 45 No. 10:2544–2553, 2007.
- [20] Cossalter, V.: *Motorcycle Dynamics*. Lulu.com, 2006.
- [21] *Motorcycles Aerodynamics*. <http://hubpages.com>.
- [22] Schoenberg, I. J.: *Spline functions and the problem of graduation*. page 947–950, August 1964.
- [23] Rogers, D. F.: *An Introduction to NURBS with Historical Perspective*. Morgan Kaufmann Publishers, 2001.
- [24] Piegl, L. and Tiller, W.: *The NURBS Book, Second Edition*. Springer-Verlag, 1997.
- [25] Papoutsis, E. M. and Giannakoglou, K. C.: *Continuous adjoint methods for turbulent flows, applied to shape and topology optimization: Industrial applications*. Archives of Computational Methods in Engineering, pages 1–45, 2014.
- [26] A. S. Zymaris, D.I. Papadimitriou, K.C. Giannakoglou C. Othmer: *Continuous adjoint approach to the spalart-allmaras turbulence model for incompressible flows*. Computers & Fluids, 38:1528–1538, 2009.
- [27] A. S. Zymaris, D.I. Papadimitriou, K.C. Giannakoglou C. Othmer: *Adjoint wall functions: A new concept for use in aerodynamic shape optimization*. Journal of Computational Physics, 229(13):5228–5245, 2010.
- [28] A. S. Zymaris, D.I. Papadimitriou, E. M. Papoutsis Kiachagias K.C. Giannakoglou C. Othmer: *The continuous adjoint method as a guide for the design of flow control systems based on jets*. Engineering Computations, 30(4):494–520, 2013.