

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών  
Τομέας Μαθηματικών

Μεταπτυχιακή εργασία

**Το ευθύ και αντίστροφο πρόβλημα της  
ηλεκτροεγκεφαλογραφίας και της  
μαγνητοεγκεφαλογραφίας σε ελλειψοειδή  
γεωμετρία**

Γιαννοπούλου Ουρανία



## **Εξεταστική επιτροπή**

- Χαραλαμπίδης Α. (Επιβλέπων)

Αναπληρωτής Καθηγητής, Τομέας Μαθηματικών, Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

- Γκιντίδης Δ. (Μέλος Τριμελούς)

Αναπληρωτής Καθηγητής, Τομέας Μαθηματικών, Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

- Κυριάκη Κ. (Μέλος Τριμελούς)

Καθηγήτρια, Τομέας Μαθηματικών, Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



## Πρόλογος

Με την ολοκλήρωση της μεταπτυχιακής μου εργασίας στο Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στις Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους ανθρώπους που συνέβαλαν στην αποπεράτωσή της.

Τον Επιβλέποντα μου Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Α. Χαραλαμπίδου, του Τομέα Μαθηματικών της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, για την ευκαιρία που μου έδωσε να βρεθώ υπό την επίβλεψή του στην εκπόνηση αυτής της εργασίας καθώς και για τη βοήθεια, τις πολύτιμες συμβουλές και τις παρατηρήσεις καθόλη την διάρκεια της συγγραφής της.

Ένα ειλικρινές ευχαριστώ στον Καθηγητή κ. Γ. Δάσιο, του Τομέα Μαθηματικών της Σχολής Χημικών Μηχανικών του Πανεπιστημίου Πατρών, του οποίου το ερευνητικό έργο αποτέλεσε πηγή έμπνευσης και ουσιαστικών βιβλιογραφικών αναφορών κατά την ενασχόλησή μου με το παρόν θέμα.

Τα μέλη της εξεταστικής επιτροπής, Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Δ. Γκιντίδη και Καθηγήτρια κ. Κ. Κυριάκη, του Τομέα Μαθηματικών της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, για την συμμετοχή τους στην εξεταστική διαδικασία και για τις γνώσεις που μου έχουν προσφέρει στα πλαίσια της παρακολούθησης των μαθημάτων τους.



## Περίληψη

Στη παρούσα διπλωματική παρουσιάζεται το ευθύ και αντίστροφο πρόβλημα της ηλεκτροεγκεφαλογραφίας και της μαγνητοεγκεφαλογραφίας για ελλειψοειδή αγωγό με μία διπολική πηγή στο εσωτερικό. Το πρώτο κεφάλαιο είναι εισαγωγικό σε ότι αφορά τη φυσιολογία του εγκεφάλου μακροσκοπικά και μικροσκοπικά, τη χρήση των τεχνικών ιατρικής απεικόνισης ηγγ και μεγ, την διαδικασία εφαρμογής τους καθώς και την χρησιμότητά τους σε κλινικές εφαρμογές. Το δεύτερο κεφάλαιο αφορά το μαθηματικό υπόβαθρο του βιοηλεκτρισμού και του βιομαγνητισμού μέσω της σχεδόν στατικής θεώρησης των εξισώσεων Maxwell. Στη συνέχεια παρουσιάζεται η προτυποποίηση των προβλημάτων ηγγ και μεγ στο πλαίσιο αυτό διατυπώνοντας το πρόβλημα διαπερατότητας που χωρίζεται στην επίλυση ενός εσωτερικού προβλήματος Neumann και ενός εξωτερικού προβλήματος Dirichlet. Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται συνοπτικά η επίλυση των προβλημάτων ηγγ και μεγ για ομογενή σφαιρικό αγωγό με μία διπολική πηγή στο εσωτερικό καθώς και οι αντίστοιχοι αλγόριθμοι αντιστροφής που δίνουν την θέση και τη ροπή της διπολικής πηγής. Επίσης γίνεται αναφορά στην μη αντιστρεψιμότητα του προβλήματος της μεγ για την περίπτωση του σφαιρικού και του αστράμορφου αγωγού στη γενική περίπτωση που το δίπολο αντικατασταθεί από μία συνεχή κατανομή ρεύματος. Το τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζεται το ελλειψοειδές σύστημα συντεταγμένων, η αναπαράσταση του τελεστή Laplace σε ελλειψοειδείς συντεταγμένες και η εξίσωση Lamé από την οποία προκύπτει το πλήρες και ορθοκανονικό σύνολο των ελλειψοειδών αρμονικών αποτελούμενο από τις εσωτερικές, επιφανειακές και εξωτερικές ελλειψοειδείς αρμονικές. Στο πέμπτο κεφάλαιο το ευθύ πρόβλημα των ηγγ και μεγ διατυπώνεται και επιλύεται για έναν ελλειψοειδή αγωγό με μία διπολική πηγή. Τέλος στο έκτο κεφάλαιο επιλύεται το αντίστροφο πρόβλημα της ηγγ για ελλειψοειδή αγωγό με μία διπολική πηγή και το αντίστροφο πρόβλημα των ηγγ και μεγ για την περίπτωση του προτύπου των ανομοιογενών φλοιών.





## **Abstract**

In this thesis the direct and inverse problem of electroencephalography and magnetoencephalography for an ellipsoidal conductor with a single dipole source is presented. The first chapter is introductory to the physiology of macroscopic and microscopic brain, the techniques of medical imaging of EEG and MEG, their application process and their utility in clinical applications. The second chapter deals with the mathematical background of bioelectricity and biomagnetism via the quasi-static theory of Maxwell equations. Then the mathematical formulation of EEG and MEG problems is established in the context of a permeability problem divided into an interior Neumann problem and an exterior Dirichlet problem. In the third chapter the forward EEG and MEG problems for spherical conductor with a single dipole source in the interior are presented as well as the corresponding inversion algorithms that give the position and moment of dipolar source are summarized. Reference is also made to the irreversibility of MEG problem for the case of spherical and starlike conductor in the general case where the dipole is replaced by a continuous current distribution. The fourth chapter presents the ellipsoidal coordinate system, the representation of the Laplace operator in ellipsoidal coordinates and Lamé equation which leads to the complete and orthogonal set of ellipsoidal harmonics consisting of interior, surface and exterior ellipsoidal harmonics. In the fifth chapter the direct problem of EEG and MEG for an ellipsoidal conductor and also for the realistic model of a three shell conductor with one dipole source is presented. Finally in the sixth chapter the inverse problem of EEG for ellipsoidal conductor with a single dipole source and the inverse problem of EEG and MEG for the case of the three shell conductor is presented.



# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
1.1	Φυσιολογία του Εγκεφάλου . . . . .	1
1.1.1	Μακροσκοπική Προσέγγιση . . . . .	1
1.1.2	Μικροσκοπική Προσέγγιση . . . . .	3
1.2	Τεχνικές Ιατρικής Απεικόνισης . . . . .	7
1.2.1	Ηλεκτροεγκεφαλογραφία . . . . .	7
1.2.2	Μαγνητοεγκεφαλογραφία . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Βιοηλεκτρισμός και Βιομαγνητισμός</b>	<b>15</b>
2.1	Οι εξισώσεις Maxwell . . . . .	15
2.2	Η σχεδόν στάσιμη θεωρία . . . . .	17
2.3	Μαθηματική τοποθέτηση των προβλήματων ΗΕΓ / ΜΕΓ . . . . .	18
2.4	Οι ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις του Geselowitz . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Ανασκόπηση στα ΗΕΓ και ΜΕΓ σε σφαιρική γεωμετρία</b>	<b>26</b>
3.1	Το ευθύ πρόβλημα . . . . .	26
3.1.1	ΗΕΓ . . . . .	27
3.1.2	ΜΕΓ . . . . .	30

3.2	Αλγόριθμοι αντιστροφής . . . . .	33
3.2.1	HEΓ . . . . .	33
3.2.2	MEΓ . . . . .	34
3.3	Μη αντιστρεψιμότητα του προβλήματος της MEΓ . . . . .	36
3.3.1	Ο ομογενής σφαιρικός αγωγός . . . . .	36
3.3.2	Ο ομογενής αστρόμορφος αγωγός . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Ελλειψοειδείς Αρμονικές</b>	<b>44</b>
4.1	Το ελλειψοειδές σύστημα και η γεωμετρία του . . . . .	44
4.2	Η ελλειψοειδής αναπαράσταση του τελεστή Laplace . . . . .	49
4.3	Εξίσωση Lamé . . . . .	49
4.4	Συναρτήσεις Lamé . . . . .	52
4.5	Ελλειψοειδείς αρμονικές . . . . .	56
<b>5</b>	<b>Τα ευθέα προβλήματα HEΓ και MEΓ σε ελλειψοειδή γεωμετρία</b>	<b>61</b>
5.1	HEΓ . . . . .	63
5.1.1	Το εσωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό . . . . .	63
5.1.2	Το εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό . . . . .	66
5.2	MEΓ . . . . .	67
5.2.1	Το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο . . . . .	67
5.2.2	Το εξωτερικό μαγνητικό δυναμικό . . . . .	72
5.2.3	Το διανυσματικό δυναμικό . . . . .	76
5.2.4	Το βαθμωτό μαγνητικό δυναμικό . . . . .	76
5.3	Το πρότυπο των ανομοιογενών φλοιών . . . . .	79

5.3.1 ΗΕΓ . . . . .	79
5.3.2 ΜΕΓ . . . . .	83
<b>6 Τα αντίστροφα προβλήματα ΗΕΓ και ΜΕΓ σε ελλειψοειδή γεωμετρία</b>	<b>86</b>
6.1 Το ομογενές πρότυπο . . . . .	86
6.1.1 ΗΕΓ . . . . .	86
6.2 Το πρότυπο των ανομοιογενών φλοιών . . . . .	88
6.2.1 ΗΕΓ . . . . .	88
6.2.2 ΜΕΓ . . . . .	89
<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>93</b>



# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

### 1.1 Φυσιολογία του Εγκεφάλου

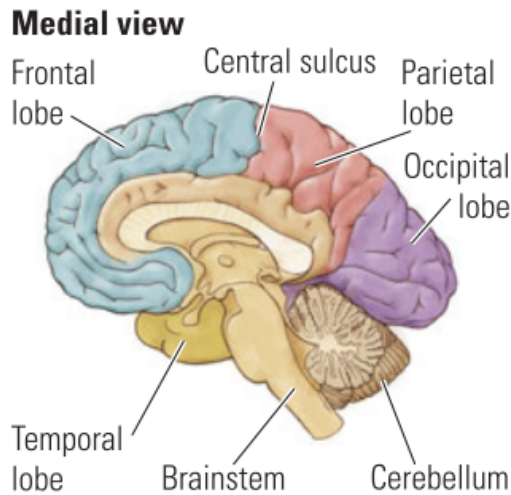
#### 1.1.1 Μακροσκοπική Προσέγγιση

##### Ιστορική αναδρομή

Οι πρώτες θεωρίες εντοπισμού των λειτουργιών του εγκεφάλου επικεντρώνονται στην καρδιά. Ο Αριστοτέλης (324 - 322 π.Χ.) υποστήριζε ότι τα όργανα που βρίσκονταν κοντά στον εγκέφαλο συνδέονταν με την καρδιά μέσω αγγείων και ότι ο εγκέφαλος επειδή ήταν κρύος σε σχέση με την καρδιά, λειτουργούσε ως ρυθμιστής της θερμοκρασίας της. Η προσέγγιση αυτή αμφισβητήθηκε από τον Ιπποκράτη (430 - 350 π.Χ.) ο οποίος υποστήριζε ότι ο εγκέφαλος είναι υπεύθυνος για την συμπεριφορά και τις λειτουργίες που αποδίδονταν στην καρδιά. Η αναζήτηση για τον εντοπισμό των λειτουργιών συνεχίστηκε με διάφορες μορφές, όπως εκείνη του Rene Descartes (1596 - 1650) που πρότεινε στα πλαίσια του προβλήματος σώματος-πνεύματος, ότι η επίφυση, μια μικρή δομή στο εσωτερικό του εγκεφάλου, ήταν η περιοχή όπου οι αισθητήριες πληροφορίες θα συνέκλιναν και θα κατευθύνονταν προς την ψυχή. Σε ό,τι αφορά τις εγκεφαλοκεντρικές θεωρίες για την εγκεφαλική λειτουργία, το 1664 ο γιατρός Thomas Willis δημοσιεύει το βιβλίο του *Cerebri Anatome* όπου υποστηρίζει ότι οι βουλητικές λειτουργίες διεξάγονται στα εγκεφαλικά ημισφαίρια. Τον επόμενο αιώνα, η ανακάλυψη του Luigi Galvani ότι τα νευρικά κύτταρα παράγουν ηλεκτρισμό οδήγησε τον 19ο αιώνα τον Emil DuBois - Reymond και τον Herman Von

Helmholtz στην ανακάλυψη ότι τα νευρικά κύτταρα επικοινωνούν μεταξύ τους με ηλεκτρικά σήματα.

### Δομή του εγκεφάλου



Σχήμα 1.1: Περιοχές του εγκεφάλου, [1].

Το μεγαλύτερο και εξωτερικό μέρος του εγκεφάλου ονομάζεται εγκεφαλικός φλοιός ή φλοιός και χωρίζεται σε δύο σχετικά συμμετρικά ίσα μέρη τα ημισφαίρια, ενώ περιβάλλεται από το εγκεφαλονωτιαίο υγρό. Ο φλοιός αποτελείται από την φαιά ουσία και περιέχει τις πηγές των σημάτων που είναι μετρήσιμα από τις απεικονιστικές τεχνικές. Κάτω από τον φλοιό βρίσκεται η λευκή ουσία όπου περιέχονται οι συνδέσεις μεταξύ των πηγών αυτών. Οι αναδιπλώσεις του φλοιού καλούνται έλικες και οι πτυχώσεις μεταξύ τους αύλακες. Οι μεγαλύτεροι αύλακες καλούνται σχισμές οι βασικότερες από τις οποίες είναι η διαμήκης σχισμή που χωρίζει τον φλοιό σε δύο ημισφαίρια και η πλευρική σχισμή που χωρίζει κάθε ημισφαίριο σε δύο μισά. Ο φλοιός κάθε ημισφαιρίου χωρίζεται σε τέσσερις λοβούς: κροταφικό, μετωπιαίο, βρεγματικό και ινιακό. Η περιγραφή των λειτουργιών που εκτελούνται σε κάθε έναν από τους λοβούς δεν είναι απόλυτη καθώς τα πραγματικά λειτουργικά χαρακτηριστικά τους αλληλεπιδρούν με εκείνα των γειτονικών λοβών. Περιγραφικά όμως μπορεί να γίνει αναφορά στα εξής [1]:

- Ο κροταφικός λοβός περιέχει τον ακουστικό φλοιό ο οποίος είναι εξαιρετικά υπεύθυνος για την ακοή και την περιοχή Wernicke υπεύθυνη για την κατανόηση της γλώσσας. Επιπλέον συμβάλλει στη μνήμη, στη μάθηση, πιθανόν στην οσφρητική αντίληψη, ανίχνευση και κατανόηση.
- Ο μετωπιαίος λοβός περιέχει τον κινητικό φλοιό που είναι υπεύθυνος για την κίνηση, την αλληλουχία εκτέλεσης πολύπλοκων κινήσεων, την επεξεργασία της σκέψης ενώ περιέχει



και την περιοχή Broca υπεύθυνη για τον έλεγχο των μυών της ομιλίας.

- Ο βρεγματικός λοβός περιέχει τον σωματοαισθητικό φλοιό που είναι υπεύθυνος για τις σωματικές αισθήσεις και την κίνηση.
- Ο ινιακός λοβός είναι υπεύθυνος για την πρωτογενή επεξεργασία της πληροφορίας των οπτικών νεύρων και την επιπλέον επεξεργασία του οπτικού ερεθίσματος με χρωματισμό και κίνηση (π.χ. συνειδητή αντίληψη και ερμηνεία).

Κάτω από τον εγκεφαλικό φλοιό βρίσκεται η παρεγκεφαλίτιδα η οποία μεσολαβεί για τις ρυθμιστικές λειτουργίες όπως η τροφή και η κίνηση. Στο κάτω και μπροστινό μέρος της παρεγκεφαλίτιδας βρίσκεται το εγκεφαλικό στέλεχος το οποίο συνδέεται με το νωτιαίο μυελό υπεύθυνο για την αποστολή σημάτων στους μυς και ακολουθεί η σπονδυλική στήλη.

Αυτή η τριμερής διαίρεση του εγκεφάλου είναι χρήσιμη εξελικτικά, ανατομικά και λειτουργικά. Εξελικτικά καθώς τα ζώα με νωτιαίο μυελό προηγήθηκαν αυτών με παρεγκεφαλίτιδα και στη συνέχεια αναπτύχθηκε ο πρόσθιος εγκέφαλος. Ανατομικά καθώς στην προγεννητική ανάπτυξη ο νωτιαίος μυελός σχηματίζεται σε πρώτο στάδιο και ακολουθούν η παρεγκεφαλίτιδα και ο πρόσθιος εγκέφαλος. Τέλος, λειτουργικά καθώς ο πρόσθιος εγκέφαλος μεσολαβεί για της γνωσιακές λειτουργίες, η παρεγκεφαλίτιδα για τις ρυθμιστικές και ο νωτιαίος μυελός για την αποστολή σημάτων στους μυς.

### 1.1.2 Μικροσκοπική Προσέγγιση

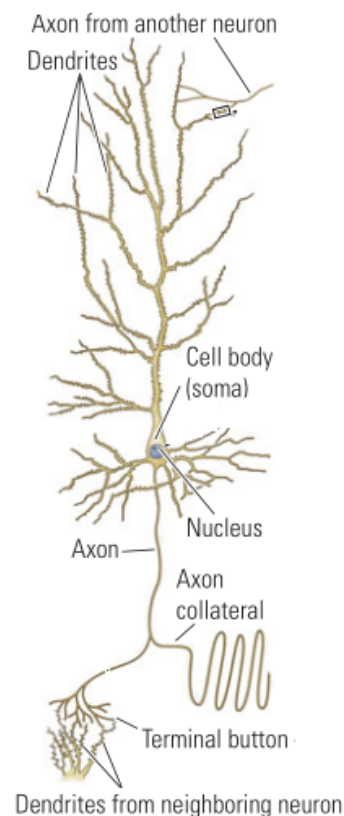
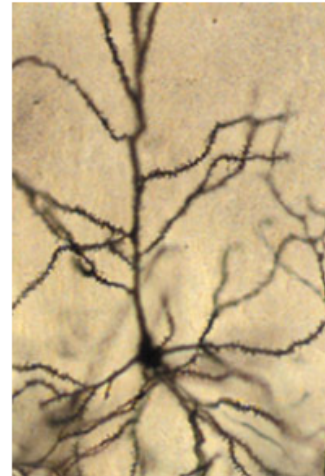
#### Ιστορικά στοιχεία

Οι νευρώνες είναι τα κύτταρα που συλλέγουν και επάγουν την πληροφορία στο νευρικό σύστημα μέσω ηλεκτρικής διέγερσης. Ορόσημο στην ιστορία της νευροεπιστήμης αποτέλεσε η έρευνα του ανατόμου Santiago Ramon y Cajal ο οποίος το 1897 χρησιμοποίησε την τεχνική χρώσης Golgi για να διατύπωσε την ιδέα ότι ο νευρώνας είναι η βασική μονάδα του νευρικού συστήματος και αποτελείται από τους δενδρίτες, το σώμα (κυτταρικό σώμα) και τον άξονα. Η ηλεκτρική δραστηριότητα του νευρώνα μελετήθηκε πειραματικά το 1952 από τους νευροεπιστήμονες Alan Hodgkin και Andrew Huxley που σε μια σειρά από πειράματα θέλησαν να προσδιορίσουν τους

νόμους που καθορίζουν την κίνηση των ιόντων σε ένα νευρικό κύτταρο κατά την διάρκεια ενός δυναμικού δράσης.

## Νευρώνας

Ο φλοιός έχει πάχος λίγων mm και αποτελείται από τουλάχιστον  $10^{10}$  νευρώνες σε μία έκταση περίπου  $2500\text{cm}^2$  οι οποία αναδιπλώνεται δημιουργώντας έλικες και αύλακες. Οι νευρώνες είναι το δομικό στοιχείο του εγκεφάλου και αποτελούνται από το σώμα με τον πυρήνα, τους δενδρίτες και τον άξονα. Στους δενδρίτες γίνεται η είσοδος τους σήματος που προέρχεται από την ηλεκτροχημική διέγερση των άλλων νευρώνων και το σήμα στέλνεται στο σώμα του κυττάρου. Ο άξονας εξάγει το σήμα στέλνοντας ηλεκτρικούς παλμούς μέσω του σώματος στους υπόλοιπους νευρώνες. Τα δύο βασικά είδη φλοιωδών κυττάρων είναι τα πυραμιδικά και τα αστεροειδή. Τα πυραμιδικά κύτταρα, τα οποία έχουν λάβει το όνομά τους από το τριγωνικού σχήματος σώμα, έχουν σχετικά μακριούς δενδρίτες που ευθυγραμμίζονται κάθετα στην επιφάνεια του εγκεφαλικού φλοιού άρα και η ροή ρεύματος κάτι που είναι εξαιρετικά σημαντικό στις τεχνικές απεικόνισης. Κάθε δενδρίτης και σώμα έχουν χιλιάδες συνάψεις από άλλους νευρώνες. Ο νευρώνας πυροδοτείται όταν το δυναμικό στον άξονα φτάσει ένα συγκεκριμένο κατώφλι. Όταν ο παλμός φτάσει στον άξονα του προσυ-



Σχήμα 1.2: Ο νευρώνας και τα δομικά του στοιχεία, [1].

ναπτικού κυττάρου απελευθερώνονται διαβιβαστές που διαχέονται και προσαρτώνται στην επιφάνεια του μετασυναπτικού κυττάρου. Τότε ανοίγουν τα κανάλια ιόντων της μεμβράνης και η εισερχόμενη ροή ιόντων αλλάζει το δυναμικό μεμβράνης στο μετασυναπτικό κύτταρο. Αυτό είναι το μετασυναπτικό δυναμικό (PSP - PostSynaptic Potential).

### **Μηχανισμοί ιόντων**

Ο νευρώνας περιβάλλεται από την κυτταρική μεμβράνη που διαχωρίζει το εσωκυτταρικό από το εξωκυτταρικό υγρό τα οποία έχουν διαφορετικές συγκεντρώσεις ιόντων. Τα ιόντα αυτά είναι  $Na^+$ ,  $K^+$ ,  $Ca^{++}$  και  $Cl^-$  εκ των οποίων τα σημαντικότερα είναι τα  $Na^+$  και  $K^+$ . Η διαφορά στην συγκέντρωση ιόντων διατηρείται λόγω της εισροής τριών ιόντων  $Na^+$  και της εκροής δύο ιόντων  $K^+$  στο κύτταρο ανά κύκλο λειτουργίας [9].

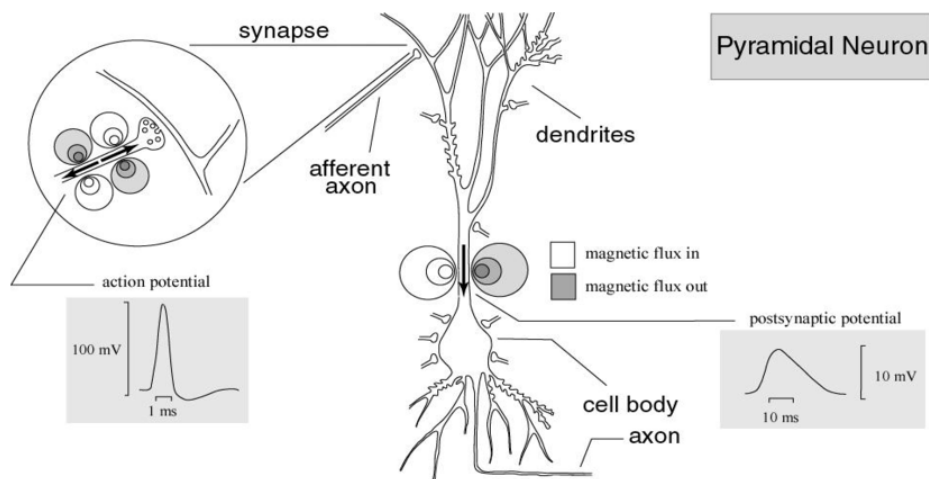
### **Μετασυναπτικό δυναμικό**

Όταν οι διαβιβαστές φτάσουν στο μετασυναπτικό κύτταρο αλλάζει η διαπερατότητα της μεμβράνης σε συγκεκριμένα ιόντα καθώς και το δυναμικό της. Αυτό δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο και ρεύμα στο εσωτερικό του μετασυναπτικού κυττάρου. Το ρεύμα ρέει στο κύτταρο αν είναι ανοικτά τα κανάλια νατρίου, εκπολώνοντας το και δημιουργώντας ένα διεγερτικό μετασυναπτικό δυναμικό (EPSP - Excitatory PostSynaptic Potential). Σε αντίθετη περίπτωση, το ρεύμα ρέει εκτός του κυττάρου αν ενεργοποιηθούν τα κανάλια καλίου ή χλωρίου υπερπολώνοντας το και δημιουργώντας ένα ανασταλτικό μετασυναπτικό δυναμικό (IPSP - Inhibitory PostSynaptic Potential) [9].

### **Δυναμικό δράσης**

Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των δύο πλευρών της μεμβράνης είναι της τάξης των  $80-100mV$  και ονομάζεται δυναμικό ηρεμίας. Όταν ένας παλμός μεταφέρεται κατά μήκος του άξονα, προέρχεται από ένα κύμα εκπόλωσης ακολουθούμενο από ένα κύμα επαναπόλωσης της μεμβράνης. Το δυναμικό δράσης συμβαίνει όταν η τάση στον άξονα φτάσει τα  $-40\mu V$ . Η αλλαγή αυτή στο δυναμικό ενεργοποιεί τις γειτονικές περιοχές και το δυναμικό δράσης διαδίδεται κατά

μήκος του άξονα. Το δυναμικό δράσης είναι διφασικό με διάρκεια περίπου ίση με  $1\text{ms}$ . Το μετασυναπτικό δυναμικό είναι μονοφασικό με διάρκεια περίπου ίση με  $10\text{s}$  του  $\text{ms}$ . Λόγω της πολύ μικρής τάξης μεγέθους τα μετασυναπτικά δυναμικά δεν μπορούν να παράγουν ισχυρά ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία ώστε να είναι εύκολη η καταγραφή τους από τα μέσα που χρησιμοποιούνται στις τεχνικές απεικόνισης. Επιπλέον, τα δυναμικά δράσης μπορεί να μην είναι μετρήσιμα επειδή αλληλοεξουδετερώνονται αν δεν είναι απόλυτα συγχρονισμένα λόγω της πολύ σύντομης διάρκειας τους και της διφασικής τους φύσης. Παρόλα αυτά, παρατηρήσιμες διαφορές στα δυναμικά προκαλούνται από αθροισμένα μετασυναπτικά βαθμωτά δυναμικά χάρη στη μεγαλύτερη διάρκεια ζωής και την μονοφασικότητά τους. Αυτά προκαλούνται από τα πυραμιδικά κύτταρα που δημιουργούν ηλεκτρικά δίπολα μεταξύ του σώματος και των κορυφαίων δενδριτών. Η ευθυγράμμιση των δενδριτών σε συνδυασμό με την συγχρονισμένη δράση τους οδηγεί στα απαιτούμενα αθροιστικά δυναμικά για την καταγραφή των ΗΕΓ και ΜΕΓ [9].



Σχήμα 1.3: Αναπαράσταση του δυναμικού δράσης, [9].

## 1.2 Τεχνικές Ιατρικής Απεικόνισης

### 1.2.1 Ηλεκτροεγκεφαλογραφία

#### Ιστορία του ΗΕΓ

Η ιστορία της ηλεκτροεγκεφαλογραφίας ξεκινά το 1875 όταν ο φυσιολόγος Richard Gatton παρατηρεί την ύπαρξη ηλεκτρικών ρευμάτων στον εγκέφαλο και εδραιώνεται το 1924 όταν ο νευρολόγος Hans Berger ενισχύοντας τα σήματα αυτά με απλό εξοπλισμό ραδίου και αποτυπώνοντας σε μία λωρίδα χαρτιού παρατηρεί ότι εξαρτώνται από την εκάστοτε εγκεφαλική λειτουργία. Την μέθοδο αυτή χαρακτήρισε ως ηλεκτροεγκεφαλογραφία. Στη συνέχεια, το 1934 οι Adrian και Mathews εισάγουν την έννοια των ανθρώπινων εγκεφαλικών κυμάτων με συχνότητα από 10 έως 12Hz, τον αποκαλούμενο ρυθμό άλφα, του πρώτου ρυθμού που μελετήθηκε.

#### Νευρωνική βάση του ΗΕΓ

Η ηλεκτροεγκεφαλογραφία είναι μια απόλυτα μη επεμβατική τεχνική ιατρικής απεικόνισης που στηρίζεται στην καταγραφή των διαφορών δυναμικού πάνω στην εξωτερική επιφάνεια του κρανίου τα οποία λαμβάνονται με την χρήση ηλεκτροδίων και αγωγίμων μέσων. Τα δυναμικά αντιστοιχούν σε ηλεκτρικά δυναμικά στο εσωτερικό του εγκεφάλου. Το αποτέλεσμα αυτής της απεικόνισης καλείται ηλεκτροεγκεφαλογράφημα (ΗΕΓ). Η ενεργοποίηση των νευρώνων παράγει τοπικές ροές ρευμάτων. Το ΗΕΓ μετρά κυρίως τα ρεύματα ροών κατά την διέγερση συνάψεων στους δενδρίτες των πυραμιδικών νευρώνων στον εγκεφαλικό φλοιό. Οι διαφορές του ηλεκτρικού δυναμικού προκαλούνται από αθροιστικά μετασυναπτικά βαθμωτά δυναμικά στα πυραμιδικά κύτταρα που δημιουργούν ηλεκτρικά δίπολα μεταξύ του σώματος και των κορυφαίων δενδριτών. Η καταγραφή της ηλεκτρικής δραστηριότητας απαιτεί μεγάλο αριθμό ενεργών νευρώνων ίσο περίπου με  $10^4$  νευρώνες, ενώ η ύπαρξη του δέρματος, του κρανίου και άλλων στρωμάτων μεταξύ ηλεκτροδίου και νευρωνικών στοιβάδων εξασθενεί το ηλεκτρικό σήμα που είναι περίπου ίσο με  $50\mu V$  και έτσι απαιτείται να ενισχυθεί. Η μεγαλύτερη επίδραση στο ΗΕΓ προέρχεται από την ηλεκτρική δραστηριότητα του εγκεφαλικού φλοιού λόγω της επιφανειακής του θέσης.

## Εγκεφαλικά κύματα

Βασικό χαρακτηριστικό μελέτης του ΗΕΓ είναι τα εγκεφαλικά κύματα. Τα κύματα αυτά έχουν ημιτονοειδή μορφή με εύρος από 0,5 έως και  $100\mu V$ . Από το φάσμα ισχύος του ΗΕΓ γίνεται εμφανές ότι η εκάστοτε εγκεφαλική κατάσταση αναδεικνύει ορισμένες συχνότητες που είναι τα εν λόγω κύματα και κατηγοριοποιούνται σε τέσσερις ομάδες [5]:

Κύματα β (13 - 30Hz): Συνήθως έχουν χαμηλή τάση 5 - 30  $\mu V$ . Σχετίζονται με δραστήρια σκέψη, εστίαση προσοχής στον εξωτερικό κόσμο ή επίλυση προβλημάτων.

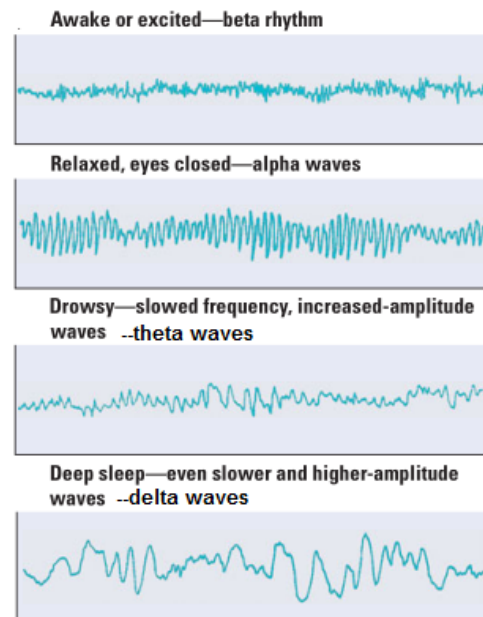
Κύματα α (8 - 13Hz): Έχουν τάση 30 - 50  $\mu V$ . Υποδεικνύουν χαλαρή συγκέντρωση που εξασθενεί μετά το άνοιγμα των ματιών.

Κύματα θ (4 - 8Hz): Έχουν τάση συνήθως μεγαλύτερη από 20  $\mu V$ . Σχετίζεται με συναισθηματικό άγχος, βαθύ στοχασμό και δημιουργικότητα.

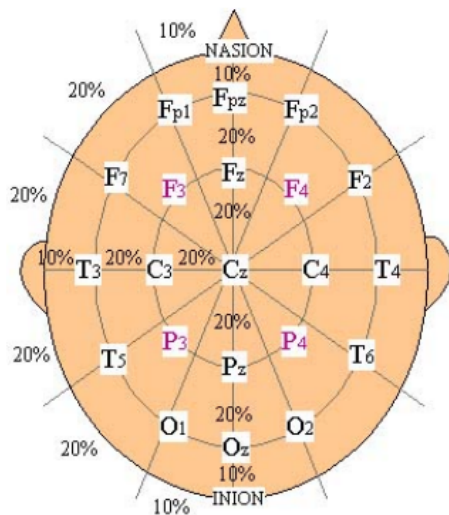
Κύματα δ (0,5 - 4Hz): Έχουν μεταβλητή τάση. Σχετίζονται με βαθύ ύπνο. Με κυρίαρχες τις πιο ήπιες συχνότητες η αποκρισιμότητα σε ερεθίσματα ελαττώνεται.

## Διαδικασία εφαρμογής του ΗΕΓ

Για την μέτρηση των ηλεκτρικών σημάτων που προέρχονται από τον εγκέφαλο, χρησιμοποιούνται ζεύγη ηλεκτροδίων, αποτελούμενα από το συνδυασμό ενός μετάλλου με το αντίστοιχο άλας του. Ένα από τα συνηθέστερα ηλεκτρόδια είναι από άργυρο και χλωριούχο άργυρο. Στα σημεία στα οποία θα τοποθετηθούν τα ηλεκτρόδια, το δέρμα πρέπει να καθαριστεί καλά με οινόπνευμα για να υπάρχει χαμηλή αντίσταση επαφής. Η επαφή τους με το δέρμα γίνεται μέσω μιας κολώδους ουσίας ή μέσω ενός μικρού δακτυλίου που από τη μία μεριά προσκολλάται στο δέρμα και από την άλλη στο κυρίως ηλεκτρόδιο.



Σχήμα 1.4: Εγκεφαλικά κύματα, [1].



Σχήμα 1.5: Τοποθέτηση ηλεκτροδίων κατά την 10-20 τεχνική, [5].

κατάλληλου εξοπλισμού, ενώ τέλος προβάλλεται στην οθόνη του υπολογιστή με την χρήση ενός μετατροπέα A/D [5].

### Εφαρμογές του ΗΕΓ

Η χρήση του ΗΕΓ στην έρευνα και τις κλινικές εφαρμογές είναι ευρύτατη μεταξύ άλλων στην παρακολούθηση της εγρήγορσης, κώματος ή εγκεφαλικού θανάτου, στον εντοπισμό περιοχών βλάβης μετά από τραυματισμό, εγκεφαλικό επεισόδιο ή όγκο, στη διερεύνηση της επιληψίας και στον εντοπισμό της πηγής της, στον έλεγχο της σπασμωδικής επίδρασης φαρμάκων, στον έλεγχο επίδρασης φαρμάκων για την επιληψία, στον έλεγχο των προσαγωγών οδών (μέσω προκλητών δυναμικών) και στη διερεύνηση διαταραχών ύπνου και φυσιολογίας. Ειδικότερες εφαρμογές του ΗΕΓ είναι:

- Τα γνωστικά προκλητά δυναμικά (ERP - Event Related Potential ): Είναι σημαντικές διακυμάνσεις στην τάση ως αποτέλεσμα προκλητής νευρωνικής δραστηριότητας από μία εξωτερική ή εσωτερική διέγερση. Χρησιμοποιούνται στη μελέτη γνωσιακών λειτουργιών όπως η αντίληψη, η επεξεργασία λόγου και η μνήμη. Οι λειτουργίες αυτές εξελίσσονται σε διαστήματα της τάξης των 10 του ms. Η ένταση ενός ERP είναι πολύ μικρότερη ενός ΗΕΓ

Για την επιλογή των θέσεων του κάθε ηλεκτροδίου πάνω στο κεφάλι έχουν δημιουργηθεί διάφορα πρότυπα, το δημοφιλέστερο εκ των οποίων είναι το σύστημα τοποθέτησης 10-20. Το πρότυπο αυτό οφείλει την ονομασία του στην επιλογή του 20 τοις εκατό της απόστασης μεταξύ των δύο αυτιών ως την απόσταση ανάμεσα σε δύο οποιαδήποτε ηλεκτρόδια και επίσης στην επιλογή του 10 τοις εκατό της απόστασης μεταξύ των δύο αυτιών ως την απόσταση από το αυτί στο κοντινότερο προς αυτό ηλεκτρόδιό του . Στην συνέχεια το σήμα ενισχύεται και αποθρομβοποιείται με τη χρήση

και για να απαλλαχθεί το σήμα του από το ΗΕΓ και περιβαλλοντικούς θορύβους πρέπει να εξαχθεί ο μέσος όρος τους αναδεικνύοντας έτσι την απάντηση στο ερέθισμα (time - locked event). Δεδομένου ότι τα ερεθίσματα αυτά προκαλούνται από επαναλαμβανόμενα αισθητηριακά, γνωσιακά και κινησιακά συμβάντα, τα ERPs χρησιμοποιούνται στην αξιολόγηση της εγκεφαλικής λειτουργίας ασθενών με ψυχιατρικές διαταραχές όπως σύνδρομο αλκοολικής εξάρτησης, διπολική συναισθηματική διαταραχή ή κατάθλιψη και νευρωτικές διαταραχές όπως φοβία, διαταραχές πανικού, ιδεοψυχαναγκαστική διαταραχή, μετατραυματική αγχώδης διαταραχή, διασχιστική διαταραχή ή διαταραχή προσωπικότητας [7].

- Η διεπαφή εγκεφάλου υπολογιστή (BCI - Brain Computer Interface): Είναι σύστημα επικοινωνίας που αναγνωρίζει την εντολή του χρήστη αποκλειστικά μέσω των εγκεφαλικών του κυμάτων. Αυτό γίνεται μέσω εκμάθησης του υπολογιστή και του ατόμου. Τα χαρακτηριστικά των κυμάτων που προκύπτουν χρησιμοποιούνται για την αναγνώριση εντολών του χρήστη από τον υπολογιστή (π.χ. κύματα που σχετίζονται με κίνηση και πρόθεση για κίνηση ή συγκεκριμένα ERPs. Οι περισσότερες μελέτες για τις κλινικές εφαρμογές του BCI έχουν γίνει με δεδομένα ΗΕΓ και έχουν δείξει ότι μπορεί να επιτραπέι σε ένα άτομο να ελέγξει τον κέρσορα υπολογιστή, να επιλέξει γράμματα για την επεξεργασία λέξεων, να εκτελέσει προγράμματα υπολογιστή και να ελέγξει τον περιβάλλοντα χώρο. Για αυτό το λόγο ιδιαίτερο κίνητρο για την μελέτη του είναι η αποκατάσταση της ανεξαρτησίας ατόμων με σοβαρή αναπηρία κυρίως λόγω αμυατροφικής πλάγιας σκλήρυνσης, εγκεφαλικής παράλυσης, τραυματισμού σπονδυλικής στήλης και μυικής δυστροφίας [6].

## 1.2.2 Μαγνητοεγκεφαλογραφία

### Ιστορία του ΜΕΓ

Η πρώτες μετρήσεις σημάτων ΜΕΓ έγιναν από τον φυσικό David Cohen το 1968, χρησιμοποιώντας ως ανιχνευτές πηνία χαλκού, σε έναν μαγνητικά μονωμένο χώρο. Αυτό οδήγησε στην ύπαρξη θορύβου κάτι που βελτίωσε με την ανάπτυξη των ανιχνευτών SQUID (Superconducting Quantum Interference Device) ο Jamex E. Zimmerman. Τα μαγνητικά σήματα του εγκεφάλου κυμαίνονται από 50 έως 500  $fT$  που είναι της τάξης του  $10^{-9}$  του γεωμαγνητικού πεδίου της Γης, γεγονός που καταστεί την υπεραγώγιμη συσκευή κβαντικής παρεμβολής (SQUID) τον



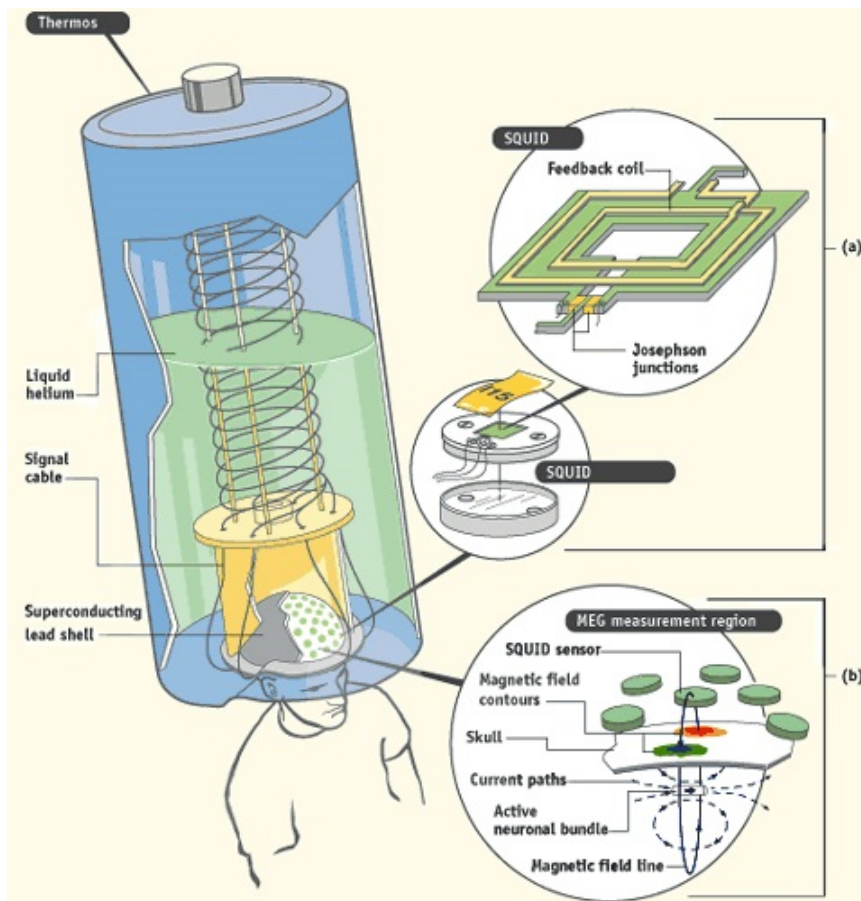
μοναδικό ανιχνευτή αυτών των πεδίων μέχρι και σήμερα. Η τεχνολογία των μαγνητόμετρων SQUID βασίζεται στα υπεραγώγιμα ηλεκτρικά κυκλώματα που εντοπίζουν ασθενή ηλεκτρομαγνητικά πεδία από τα οποία όμως μόνο τα εφαπτομενικά δίπολα μπορούν να ανιχνευθούν και όχι τα ακτινικά όπως στο ΗΕΓ.

### **Νευρωνική βάση του ΜΕΓ**

Η μαγνητοεγκεφαλογραφία (ΜΕΓ) είναι επίσης μία μη επεμβατική νευροαπεικονιστική τεχνική που χαρτογραφεί την δραστηριότητα του εγκεφάλου μετρώντας τα μαγνητικά πεδία που δημιουργούνται από τα νευρωνικά ρεύματα. Το ΜΕΓ συχνά χρησιμοποιείται επιπλέον ή συγχρόνως με το ΗΕΓ καθώς και οι δύο τεχνικές είναι ευαίσθητες στα ίδια νευροφυσιολογικά φαινόμενα. Όπως περιγράφηκε για το ΗΕΓ η συναπτική επίδραση σε μία περιοχή του εγκεφάλου ενεργοποιεί μία πηγή ρεύματος. Η μετακίνηση των ιόντων μέσα στους νευρώνες οδηγεί στην παθητική εμφάνιση χωρικών ρευμάτων στον περιβάλλοντα χώρο του νευρώνα. Η κίνηση των ιόντων στον εσωτερικό χώρο και η επαγόμενη κίνηση στον εξωτερικό χώρο δημιουργούν ένα βρόχο ιοντικής ροής. Το μαγνητικό πεδίο που παράγεται από το κύριο και το επαγόμενο ρεύμα καταγράφεται με το ΜΕΓ.

### **Διαδικασία εφαρμογής του ΜΕΓ**

Η βασική μέτρηση ΜΕΓ εξαρτάται από τον εντοπισμό του ηλεκτρικού ρεύματος σε ένα μικρό βρόχο καλωδίου επαγόμενο από την αλλαγή της κάθετης στην επιφάνεια του βρόχου συνιστώσας του μαγνητικού πεδίου. Με τη χρήση πηνίων ενισχύονται τα σήματα που είναι κοντά στον εγκέφαλο. Ο εντοπισμός του μαγνητικού πεδίου στο εξωτερικό γίνεται μέσω της σύζευξης των πηνίων ανίχνευσης με τα μαγνητόμετρα SQUID τα οποία είναι τοποθετημένα σε κρυογόνο φιάλη με υγρό ήλιο σε θερμοκρασία σχεδόν απόλυτου μηδέν. Τυπικά, σε σύγχρονο εξοπλισμό ΜΕΓ μερικές εκατοντάδες πηνία ανίχνευσης είναι συζευγμένα το κάθε ένα με ένα μαγνητόμετρο και ομοιόμορφα κατανεμημένα στο κάτω μέρος της κρυογόνου φιάλης που έχει σχήμα κράνους. Για να είναι αξιόπιστη η συλλογή των μετρήσεων μια επιπλέον απαίτηση είναι η αποθρομβοποίηση του σήματος που εξασφαλίζεται με παθητική μόνωση (π.χ. επένδυση τοίχων του δωματίου ή του ίδιου του μαγνήτη με φερρομαγνητικά υλικά), με κατάλληλο σχεδιασμό του εξοπλισμού των



Σχήμα 1.6: Αναπαράσταση τρόπου λειτουργίας του μαγνητικού τομογράφου βάση των ανιχνευτών SQUID.

πηνίων και των μαγνητόμετρων καθώς και με την επιλογή της τεχνικής για την επεξεργασία του σήματος [8].

### Εφαρμογές του MEG

Το MEG χρησιμοποιείται στην νευροχειρουργική με έμφαση στα περιστατικά επιληψίας, καθώς δίνει τη δυνατότητα εντοπισμού της πηγής των ηλεκτρικών εκκενώσεων προκαλούμενων από τις επιληπτικές κρίσεις και προχειρουργικά εφαρμόζεται για τον μη επεμβατικό εντοπισμό των κέντρων γλώσσας στον εγκέφαλο. Επιπλέον, εφαρμόζεται στην έρευνα για την μελέτη των κατανομών της εγκεφαλικής δραστηριότητας που σχετίζονται με την γνωσιακή λειτουργία, στη νόσο του Πάρκινσον καθώς μπορεί να ποσοτικοποιήσει τα αποτελέσματα των τεχνικών που χρησιμοποιούνται για την υποχώρηση των συμπτωμάτων και σε ψυχιατρικές διαταραχές όπου η εγκεφαλική λειτουργία με κύμανση σε χαμηλές συχνότητες είναι εντονότερη από ότι σε φυσιολογικά άτομα.

### **Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα των τεχνικών**

Οι πηγές των σημάτων των ΗΕΓ και ΜΕΓ, τα ηλεκτρικά δυναμικά που καταγράφονται μετρώντας εξωτερικά της δερματικής επιφάνειας του κρανίου με το ΗΕΓ είναι ίδιες με τα νευρωνικά ρεύματα που δημιουργούν τα μαγνητικά πεδία που καταγράφονται από το ΜΕΓ. Ως κοινά πλεονεκτήματα έχουν την μη επεμβατικότητα, την κοινή προέλευση των σημάτων τους, την δυνατότητα καταγραφής ταχύτατων μεταβολών ηλεκτρικής δραστηριότητας και την χρονική τους ανάλυση.

- Πλεονεκτήματα ΗΕΓ:
  - Έχει ταχύτερη χρονική ανάλυση που το καθιστά αποτελεσματικό σε πειράματα πραγματικού χρόνου ακόμα και ενώ το άτομο εκτελεί διάφορες δραστηριότητες.
  - Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον άμεσο έλεγχο συσκευών (μέσω βιοανάδρασης).
  - Πολύ οικονομικό και απλό στην χρήση του.
- Μειονεκτήματα ΗΕΓ:
  - Χαμηλή χωρική ανάλυση που μπορεί όμως να ξεπεραστεί με πυκνή κατανομή ηλεκτροδίων.
- Πλεονεκτήματα ΜΕΓ:
  - Παρέχει ταυτόχρονα εξαιρετική χρονική ανάλυση και ακριβή εντοπισμό δραστηριότητας σε διαφορετικές εγκεφαλικές περιοχές.
  - Εξαρτάται ελάχιστα από τις αλλαγές αγωγιμότητας στον εγκέφαλο και επομένως απλά μοντέλα παρέχουν πολύ ακριβείς εκτιμήσεις του μαγνητικού πεδίου που γεννάται από μια πηγή στον εγκέφαλο.
- Μειονεκτήματα ΜΕΓ:
  - Δεν επηρεάζεται από τα ακτινικά ρεύματα και άρα αν πηγή βρίσκεται στο κέντρο του κεφαλιού τότε μπορεί να μην παράγει μετρήσιμο ηλεκτρομαγνητικό σήμα (σιωπηλές πηγές).
  - Λόγω έλλειψης ανατομικού περιεχομένου το ΜΕΓ πρέπει να συνδυάζεται με MRI (Magnetic Resonance Imaging).

- Το άτομο πρέπει να παραμένει ακίνητο.
- Η απαίτηση θωράκισης καθώς και η χρήση υγρού ηλίου αυξάνουν το κόστος του ΜΕΓ.

# Κεφάλαιο 2

## Βιοηλεκτρισμός και Βιομαγνητισμός

### 2.1 Οι εξισώσεις Maxwell

Στη γενική περίπτωση τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία σε ένα μέσο περιγράφονται από το σύστημα των εξισώσεων Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}, \quad \text{Νόμος Faraday,} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} + \mathbf{J}, \quad \text{Νόμος Ampere - Maxwell,} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad \text{Νόμος Gauss για την ηλεκτρική μετατόπιση,} \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \text{Νόμος Gauss για την μαγνητική επαγωγή,} \quad (2.4)$$

όπου  $\mathbf{E}$  η ηλεκτρική ένταση,  $\mathbf{H}$  η μαγνητική επαγωγή,  $\mathbf{D}$  η ηλεκτρική μετατόπιση,  $\mathbf{B}$  η μαγνητική επαγωγή,  $\rho$  η πυκνότητα φορτίου και  $\mathbf{J}$  η πυκνότητα ρεύματος. Τα  $\mathbf{E}$  και  $\mathbf{H}$  απευθύνονται στις εντάσεις των πεδίων στο κενό, ενώ τα  $\mathbf{D}$  και  $\mathbf{B}$  στις εντάσεις των πεδίων παρουσία ύλης και επομένως εξαρτώνται από τα χαρακτηριστικά του μέσου. Σε ένα ομογενές και ισότροπο μέσο οι παράμετροι που περιγράφουν την ηλεκτρομαγνητική του συμπεριφορά είναι η διηλεκτρική σταθερά  $\epsilon$ , η μαγνητική διαπερατότητα  $\mu$  και η αγωγιμότητα  $\sigma$  για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (2.6)$$

και είναι οι καταστατικές εξισώσεις του μέσου. Σε ένα αγώγιμο μέσο με αγωγιμότητα  $\sigma > 0$  η ύπαρξη ηλεκτρικού πεδίου  $\mathbf{E}$  δημιουργεί μέσα στο υλικό ένα δευτερεύον ρεύμα που καλείται επαγωγικό ρεύμα και συμβολίζεται με  $\mathbf{J}^i$  για το οποίο ισχύει:

$$\mathbf{J}^i = \sigma \mathbf{E}, \quad (2.7)$$

επομένως,

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \mathbf{J}^p + \mathbf{J}^i \\ &= \mathbf{J}^p + \sigma \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

όπου  $\mathbf{J}^p$  είναι το πρωτεύον ρεύμα δηλαδή το επιβαλλόμενο ρεύμα. Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2.5), (2.6) και (2.8) στις εξισώσεις Maxwell (2.1) - (2.4), προκύπτει η ισοδύναμη μορφή τους:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}, \quad (2.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \left( \sigma + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathbf{E} + \mu \mathbf{J}^p, \quad (2.10)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon}, \quad (2.11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.12)$$

Παίρνοντας τον στροβιλισμό της σχέσης (2.9), εφαρμόζοντας την ταυτότητα:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{f}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{f}) - \Delta \mathbf{f}, \quad (2.13)$$

και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.11) και (2.12) προκύπτει η κυματική εξίσωση [12]:

$$\Delta \mathbf{E} - \epsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} - \mu \sigma \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon} \nabla \rho + \mu \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J}^p. \quad (2.14)$$

Με ανάλογο τρόπο προκύπτει η κυματική εξίσωση:

$$\Delta \mathbf{B} - \epsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{B} - \mu \sigma \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = -\mu \nabla \times \mathbf{J}^p. \quad (2.15)$$

Αν το μέσο δεν έχει πηγές, τότε τα  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  ικανοποιούν την ίδια ομογενή κυματική εξίσωση:

$$\Delta \mathbf{f} = \epsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{f} - \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{f}, \quad (2.16)$$

η οποία εκφυλίζεται στην αλγεβρική μορφή:

$$k^2 = \epsilon\mu\omega^2 + i\omega\mu\sigma, \quad (2.17)$$

που ονομάζεται εξίσωση διασποράς, όταν η  $\mathbf{f}$  έχει τη φασματική μορφή:

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{a}e^{\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t}, \quad (2.18)$$

όπου  $\mathbf{a}$ , ένα σταθερό διάνυσμα πόλωσης,  $\mathbf{k}$  το διάνυσμα διάδοσης,  $|\mathbf{k}| = k$ , ο κυματικός αριθμός και  $\omega$  η κυκλική συχνότητα, ενώ η φασική ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι: όπου  $T$ , η περίοδος του κύματος.

## 2.2 Η σχεδόν στάσιμη θεωρία

Ο εγκέφαλος προτυποποιείται ως μία ομογενής αγωγίμη μάζα με πυκνότητα 1,3 αυτής του νερού και με μαγνητική διαπερατότητα  $\mu_0$  ίση με αυτή του κενού. Η περιγραφή αυτή αφορά καθαρά τον εγκεφαλικό ιστό, ο οποίος όμως περιβάλλεται από το εγκεφαλονωτιαίο υγρό που έχει επίσης το ίδιο  $\mu_0$ , αλλά διαφορετική αγωγιμότητα από τον εγκεφαλικό ιστό. Το όλο σύστημα περιβάλλεται από το κρανίο και στη συνέχεια από το δέρμα τα οποία έχουν ίδιο  $\mu_0$  και διαφορετικές αγωγιμότητες. Εδώ θα μελετηθεί η περίπτωση όπου το εγκεφαλονωτιαίο υγρό, το κρανίο και το δέρμα έχουν ίδιο  $\mu_0$  και ίδιες αγωγιμότητες. Η τυπική συχνότητα που έχουν τα αναπτυσσόμενα σήματα στον εγκέφαλο είναι περίπου της τάξης των  $100\text{Hz}$ . Εισάγοντας τις τιμές των φυσιολογικών σταθερών  $\epsilon$ ,  $\mu_0$  και  $\sigma$  στην (2.18), προκύπτει  $\lambda \approx 400\text{m}$ , συνεπώς το κύμα δεν έχει χώρο να εξελιχθεί και άρα η μεταβολή των αντίστοιχων πεδίων θα είναι σχετικά μικρή. Λόγω της αναλογίας του χώρου με τον χρόνο μέσω της φασικής ταχύτητας και η αντίστοιχη χρονική μεταβολή θα είναι σχετικά μικρή. Για αυτό το λόγο οι χρονικές παράγωγοι στις εξισώσεις (2.9)

- (2.12) θεωρούνται αμελητέες οδηγώντας στην σχεδόν στάσιμη θεωρία των εξισώσεων Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (2.19)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J}, \quad (2.20)$$

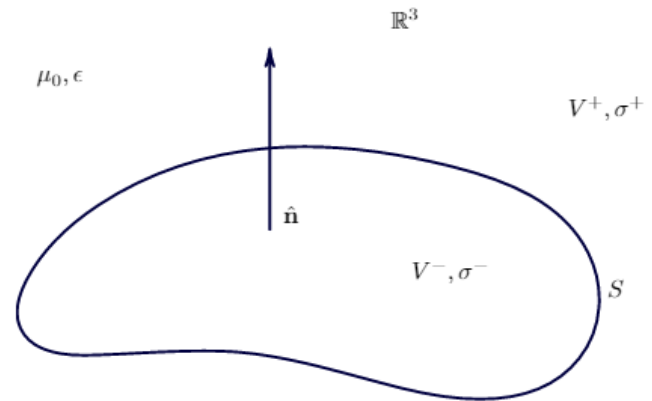
$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon}, \quad (2.21)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.22)$$

## 2.3 Μαθηματική τοποθέτηση των προβλημάτων ΗΕΓ / ΜΕΓ

Το δυναμικό δράσης που ενεργοποιεί τις συνάψεις των νευρώνων, προκαλεί την μετακίνηση ιόντων στους νευρώνες δημιουργώντας ένα αρχικό ρεύμα και έχει ως επακόλουθο την πρόκληση ηλεκτρομαγνητικών πεδίων, αλλά και επαγωγικού ρεύματος.

Στα πλαίσια της σχεδόν στάσιμης θεωρίας του ηλεκτρομαγνητισμού, έστω  $V^- \subset \mathbb{R}^3$  ένα ανοικτό συνεκτικό και φραγμένο χωρίο, με λείο σύνορο  $S$  και εξωτερικό χωρίο  $V^+$ . Η υπόθεση του λείου συνόρου εξασφαλίζει την ύπαρξη και τη συνεχή μεταβολή της εξωτερικής μοναδιαίας καθέτου  $\hat{\mathbf{n}}$  επάνω στο  $S$ . Η αγωγιμότητα του χωρίου  $V^-$  συμβολίζεται με  $\sigma^-$  και αυτή



του χωρίου  $V^+$  με  $\sigma^+$ , ενώ η μαγνητική διαπερατότητα  $\mu_0$  των  $V^-$  και  $V^+$  θεωρείται η ίδια. Επιπλέον, το πρωτεύον ρεύμα  $\mathbf{J}^p$  θεωρείται να έχει το φορέα του στο χωρίο  $V^-$ . Αν το συνολικό ρεύμα αντιστοιχηθεί σε ένα δίπολο  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$  στη θέση  $\mathbf{r}_0$  του  $V^-$  τότε, το ρεύμα αυτό αναλύεται ως:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \mathbf{J}^p(\mathbf{r}) + \mathbf{J}^i(\mathbf{r}), \quad (2.23)$$

$$\mathbf{J}^p(\mathbf{r}) = \mathbf{Q}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad \text{πρωτεύον ρεύμα,} \quad (2.24)$$

$$\mathbf{J}^i(\mathbf{r}) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad \text{επαγωγικό ρεύμα,} \quad (2.25)$$



όπου  $Q$  η ροπή του διπολικού ρεύματος και  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$  η συνάρτηση Dirac. Η εξίσωση (2.20) χαρακτηρίζει το ηλεκτρικό πεδίο ως αστρόβιλο και άρα:

$$\mathbf{E} = -\nabla u, \quad (2.26)$$

όπου  $u$  είναι το ηλεκτρικό δυναμικό. Παίρνοντας την απόκλιση της σχέσης (2.20):

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) &= \nabla \cdot (\mu \mathbf{J}) \\ &= \mu \nabla \cdot (\mathbf{J}^p + \mathbf{J}^i) \\ &= \mu \nabla \cdot \mathbf{J}^p + \sigma \mu \nabla \cdot \mathbf{E} \\ &= \mu \nabla \cdot \mathbf{J}^p - \sigma \mu \Delta u, \end{aligned} \quad (2.27)$$

και επειδή  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0$ , προκύπτει τελικά:

$$\sigma \Delta u = \nabla \cdot \mathbf{J}^p, \quad (2.28)$$

που είναι η εξίσωση Poisson για το ηλεκτρικό δυναμικό. Ειδικότερα, αν με  $u^-$  συμβολίσουμε το εσωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό στο χωρίο  $V^-$  τότε εφόσον το πρωτεύον ρεύμα είναι μη μηδενικό ικανοποιείται η εξίσωση Poisson:

$$\sigma^- \Delta u^-(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \mathbf{J}^p(\mathbf{r}), \quad (2.29)$$

ενώ αν με  $u^+$  συμβολίσουμε το εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό στο χωρίο  $V^+$  όπου το ρεύμα είναι μηδενικό, παίρνουμε την εξίσωση Laplace:

$$\Delta u^+(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.30)$$

Υποθέτοντας ότι το εξωτερικό χωρίο έχει αγωγιμότητα  $\sigma^+$ , με  $\sigma^+ \neq \sigma$ , τότε σε αυτή την περίπτωση ο υπολογισμός της απόκλισης της σχέσης (2.20), δίνει:

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = \nabla \cdot \mathbf{J}^p, \quad (2.31)$$

και επειδή η σχεδόν στάσιμη θεώρηση μεταφέρεται και στην εξίσωση συνέχειας:

$$\nabla \cdot \mathbf{J}^p + \frac{\partial}{\partial t} \rho = 0, \quad (2.32)$$

προκύπτει ότι η παραγωγικότητα της πηγής θα είναι περίπου ίση με το μηδέν:

$$\nabla \cdot \mathbf{J}^p \approx 0, \quad (2.33)$$

όχι όμως μηδενική, καθώς αυτό θα σήμαινε συσσώρευση φορτίου στο  $V^-$ . Επομένως, αντικαθιστώντας στην (2.31) και εφαρμόζοντας νόμο Gauss:

$$\int_{V^-} \nabla \cdot (\sigma \nabla u) \, dv = \int_S \hat{\mathbf{n}} (\sigma \cdot \nabla u) \, ds. \quad (2.34)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής για στοιχειώδη όγκο που διαπερνάται κάθετα από την επιφάνεια  $S$  και λαμβάνοντας το όριο στο οποίο ο στοιχειώδης όγκος συρρικνώνεται σε ένα σημείο προκύπτει:

$$\sigma^- \frac{\partial}{\partial n} u^-(\mathbf{r}) = \sigma^+ \frac{\partial}{\partial n} u^+(\mathbf{r}). \quad (2.35)$$

Η ύπαρξη των κάθετων παραγώγων  $\frac{\partial}{\partial n} u^-$  και  $\frac{\partial}{\partial n} u^+$  έχει ως άμεση συνέπεια την συνέχεια του ηλεκτρικού δυναμικού στο σύνορο  $S$ , δηλαδή:

$$u^-(\mathbf{r}) = u^+(\mathbf{r}). \quad (2.36)$$

Τέλος, για την καλή τοποθέτηση του προβλήματος απαιτείται το εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό να ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$u^+(\mathbf{r}) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r \rightarrow \infty \quad (2.37)$$

Συνοψίζοντας τις παραπάνω σχέσεις, το ηλεκτρικό δυναμικό  $u^\pm$  ικανοποιεί το λεγόμενο πρόβλη-

μα διαπερατότητας [12]:

$$\sigma^- \Delta u^-(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \mathbf{J}^p(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in V^- \quad (2.38)$$

$$\Delta u^+(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in V^+ \quad (2.39)$$

$$u^-(\mathbf{r}) = u^+(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S \quad (\text{συνέχεια δυναμικού}), \quad (2.40)$$

$$\sigma^- \frac{\partial}{\partial n} u^-(\mathbf{r}) = \sigma^+ \frac{\partial}{\partial n} u^+(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S \quad (\text{συνέχεια κάθετης συνιστώσας ρεύματος}), \quad (2.41)$$

$$u^+(\mathbf{r}) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r \rightarrow \infty, \quad (\text{ασυμπτωτική συνθήκη εξωτερικού δυναμικού}), \quad (2.42)$$

όπου  $\frac{\partial}{\partial n}$  η κάθετη εξωτερική παράγωγος επάνω στο  $V^-$ . Στην περίπτωση του εγκεφάλου το χωρίο  $V^-$  είναι ο αγωγίμος εγκέφαλος με αγωγιμότητα  $\sigma^- = \sigma \neq 0$  και το χωρίο  $V^+$  το μη αγωγίμο εξωτερικό του εγκεφάλου με αγωγιμότητα  $\sigma^+ = 0$ . Έτσι, το πρόβλημα (2.38) - (2.42) διασπάται σε δυο προβλήματα συνοριακών τιμών:

Στο εσωτερικό πρόβλημα Neumann:

$$\sigma^- \Delta u^-(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \mathbf{J}^p(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in V^- \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} u^-(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in S \quad (2.44)$$

και στο εξωτερικό πρόβλημα Dirichlet:

$$\Delta u^+(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in V^+ \quad (2.45)$$

$$u^+(\mathbf{r}) = u^-(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S \quad (2.46)$$

$$u^+(\mathbf{r}) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (2.47)$$

Πρώτα επιλύεται το πρόβλημα Neumann και στη συνέχεια, εφόσον είναι γνωστά τα δεδομένα Dirichlet  $u^-$  στο σύνορο  $S$ , επιλύεται το πρόβλημα Dirichlet. Η εύρεση του ηλεκτρικού δυναμικού όταν δίνεται το πρωτεύον ρεύμα  $\mathbf{J}^p$  αποτελεί το ευθύ πρόβλημα της ηλεκτροεγκεφαλογραφίας, ενώ η εύρεση του πρωτεύοντος ρεύματος  $\mathbf{J}^p$  όταν είναι γνωστό το ηλεκτρικό πεδίο  $\mathbf{E}$  αποτελεί το αντίστροφο πρόβλημα της ηλεκτροεγκεφαλογραφίας.

Εφόσον έχει βρεθεί το δυναμικό  $u^-$  στη συνέχεια υπολογίζεται το μαγνητικό πεδίο  $\mathbf{B}$  ως εξής. Από την σχέση (2.22) έπεται ότι το μαγνητικό πεδίο είναι σωληνοειδές και από την σχέση (2.20)

προκύπτει ότι υπάρχει ένα διανυσματικό δυναμικό  $\mathbf{A}$  τέτοιο ώστε:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (2.48)$$

Τότε:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} = 0 &\Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{J} \\ &\Rightarrow \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} \\ &\Rightarrow \Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}, \end{aligned} \quad (2.49)$$

η οποία είναι μία εξίσωση Poisson με λύση που βασίζεται στην θεμελιώδη λύση:

$$F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (2.50)$$

του τελεστή Laplace:

$$\Delta_r F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (2.51)$$

και είναι:

$$\begin{aligned} \Delta_r \left( -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ \Delta_r \left( \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mu_0 \mathbf{J} \right) &= -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mu_0 \mathbf{J} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_r \left( \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mu_0 \mathbf{J} \right) dv(\mathbf{r}') &= \int_{-\infty}^{+\infty} -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mu_0 \mathbf{J} dv(\mathbf{r}') \\ \Delta_r \int_{V^-} \left( \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mu_0 \mathbf{J} \right) dv(\mathbf{r}') &= -\mu_0 \mathbf{J}, \end{aligned} \quad (2.52)$$

Συνεπώς,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V^-} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv(\mathbf{r}'). \quad (2.53)$$

Επομένως αντικαθιστώντας την (2.53) στην (2.48):

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \nabla_r \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V^-} \left( \nabla_r \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') dv(\mathbf{r}') \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V^-} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') dv(\mathbf{r}') \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V^-} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv(\mathbf{r}'), \tag{2.54}
\end{aligned}$$

που είναι ο Νόμος Biot - Savart και αφορά το συνολικό ρεύμα  $\mathbf{J}$ . Ο υπολογισμός της μαγνητικής επαγωγής στο χωρίο  $V^+$  από τη γνώση του ολικού ρεύματος  $\mathbf{J}$  αποτελεί το ευθύ πρόβλημα της μαγνητοεγκεφαλογραφίας, ενώ η εύρεση του πρωτεύοντος ρεύματος  $\mathbf{J}^p$  από τις μετρήσεις του  $\mathbf{B}$  στο χωρίο  $V^+$  αποτελεί το αντίστροφο πρόβλημα της μαγνητοεγκεφαλογραφίας. Η δυσκολία στην επίλυση του αντίστροφου προβλήματος παρουσιάζεται επειδή κατά την αντιστροφή των δεδομένων θα πρέπει να αφαιρεθεί το ρεύμα επαγωγής  $\mathbf{J}^i$ .

## 2.4 Οι ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις του Geselowitz

Αντικαθιστώντας την έκφραση για το ρεύμα (2.23) και την σχέση που εκφράζει τον αστρόβιλο χαρακτήρα του ηλεκτρικού πεδίου (2.26) στην σχέση (2.54), προκύπτει [12]:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V^-} \mathbf{J}^p(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv(\mathbf{r}') + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V^-} -\sigma \nabla_{\mathbf{r}'} u^-(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv(\mathbf{r}') \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V^-} \mathbf{Q} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv(\mathbf{r}') - \frac{\mu_0 \sigma}{4\pi} \int_{V^-} (\nabla_{\mathbf{r}'} u^-(\mathbf{r}')) \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv(\mathbf{r}') \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} - \frac{\mu_0 \sigma}{4\pi} \int_{V^-} (\nabla_{\mathbf{r}'} u^-(\mathbf{r}')) \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv(\mathbf{r}'), \tag{2.55}
\end{aligned}$$

όπου ο όρος αριστερά περιγράφει την συνεισφορά του νευρωνικού ρεύματος από ένα δίπολο με ροπή  $\mathbf{Q}$  στην θέση  $\mathbf{r}_0$ , ενώ το ολοκλήρωμα δεξιά περιγράφει την συνεισφορά του επαγωγικού ρεύματος. Το δυναμικό  $u^-$  δημιουργεί ένα δίπολο επαγωγικού ρεύματος σε κάθε σημείο  $\mathbf{r}'$  του  $V^-$  με ροπή ίση με  $-\sigma \nabla_{\mathbf{r}'} u^-(\mathbf{r}')$ . Ολοκληρώνοντας την συνεισφορά κάθε τέτοιου διπόλου

προκύπτει η συνολική συνεισφορά του επαγωγικού ρεύματος. Παρατηρώντας ότι για  $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ :

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{r}'} \times \left( u^-(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) &= u^-(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \nabla_{\mathbf{r}'} u^-(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &= \nabla_{\mathbf{r}'} u^-(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3},\end{aligned}\quad (2.56)$$

τότε αντικαθιστώντας στην σχέση (2.55) και εφαρμόζοντας το θεώρημα Gauss για  $\mathbf{r}$  στο  $V^+$  δηλαδή με  $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$  προκύπτει:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} - \frac{\mu_0 \sigma}{4\pi} \int_{V^-} \nabla_{\mathbf{r}'} \times \left( u^-(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) dv(\mathbf{r}') \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} - \frac{\mu_0 \sigma}{4\pi} \oint_S u^-(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ds(\mathbf{r}') \quad \text{για κάθε } \mathbf{r} \notin S,\end{aligned}\quad (2.57)$$

που είναι η ολοκληρωτική αναπαράσταση Geselowitz για τη μαγνητική επαγωγή [19]. Ο τύπος Geselowitz μεταφέρει την συνεισφορά της χωρικής κατανομής των διπόλων στον αγωγό  $V^-$ , σε μια επιφανειακή κατανομή διπόλων με ροπές κάθετες επάνω στο σύνορο του αγωγού με ένταση ίση με  $-\sigma u^-(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}')$ . Ο τύπος του Geselowitz για το ηλεκτρικό δυναμικό προκύπτει παρόμοια. Εφαρμόζοντας τον τύπο του Green:

$$\int_{V^-} (f \Delta g - g \Delta f) = \oint_S \left( f \frac{\partial}{\partial n} g - g \frac{\partial}{\partial n} f \right) ds, \quad (2.58)$$

για  $f = u^-$  και  $g = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ :

$$\begin{aligned}&\int_{V^-} \left( u^-(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla_{\mathbf{r}'} u^-(\mathbf{r}') \right) dv(\mathbf{r}') \\ &= \oint_S \left( u^-(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\partial}{\partial n'} u^-(\mathbf{r}') \right) ds(\mathbf{r}').\end{aligned}\quad (2.59)$$

Βάζοντας τις παρακάτω σχέσεις στην (2.59):

$$\Delta_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (2.60)$$

$$\Delta_{\mathbf{r}'} u^-(\mathbf{r}') = \frac{1}{\sigma} \nabla \cdot \mathbf{J}^p(\mathbf{r}') = \frac{1}{\sigma} \nabla \cdot \mathbf{Q} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0), \quad (2.61)$$

$$\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (2.62)$$

$$\frac{\partial}{\partial n'} u^-(\mathbf{r}') = 0, \quad \mathbf{r}' \in S, \quad (2.63)$$

λαμβάνουμε:

$$u^-(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} - \frac{1}{4\pi} \oint_S u^-(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ds(\mathbf{r}'), \quad \text{για κάθε } \mathbf{r} \notin S, \quad (2.64)$$

που είναι ο τύπος του Geselowitz για το ηλεκτρικό δυναμικό, όπου η συνεισφορά του επαγωγικού ρεύματος αντιπροσωπεύεται από μια επιφανειακή κατανομή διπόλων ρεύματος κάθετων στο σύνορο του αγωγού με ροπή ανάλογη της τιμής του ηλεκτρικού πεδίου στο αντίστοιχο σημείο  $(-u^-(\mathbf{r}')\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}'))$ .

## Κεφάλαιο 3

# Ανασκόπηση στα ΗΕΓ και ΜΕΓ σε σφαιρική γεωμετρία

### 3.1 Το ευθύ πρόβλημα

Η μαθηματική βάση των προβλημάτων της ηλεκτροεγκεφαλογραφίας και της ηλεκτροεγκεφαλογραφίας έγινε από τον D. B. Geselowitz το 1969 ο οποίος παρουσίασε σε ολοκληρωτική μορφή το ηλεκτρικό δυναμικό και το μαγνητικό πεδίο που παράγονται από μία ισοδύναμη κατανομή ρεύματος στο εξωτερικό ενός κατά τμήματα μη ομογενούς και ισότροπου αγωγού. Οι ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις του Geselowitz έγιναν η βάση πάνω στην οποία υπολογίστηκε το μαγνητικό πεδίο στο εξωτερικό σφαιρικού, σφαιροειδούς και ημιάπειρου αγωγού με στρώματα διαφορετικής αγωγιμότητας. Η πλήρης λύση σε σφαιρική γεωμετρία δόθηκε το 1984. Από τις σημαντικότερες μελέτες αποτέλεσε αυτή του J. Sarvas το 1987 ο οποίος παρουσίασε σε κλειστή μορφή το μαγνητικό πεδίο στο εξωτερικό ενός σφαιρικού ομογενούς αγωγού που παράγεται από σημειακή διπολική πηγή στο εσωτερικό του. Στο ευθύ πρόβλημα της ηλεκτροεγκεφαλογραφίας έχει συμβάλει η εργασία του J. C. Munck το 1988 ο οποίος υπολόγισε αναλυτικά την κατανομή του ηλεκτρικού δυναμικού στην περίπτωση των ομογενών σφαιρών και ομοεστιακών σφαιροειδών με διαφορετική αγωγιμότητα κατά στρώματα.

Έστω ένας ομογενής σφαιρικός αγωγός ακτίνας  $a$  και αγωγιμότητας  $\sigma$ . Τότε το εσωτερικό



ηλεκτρικό δυναμικό  $u^-$  επιλύει το εσωτερικό πρόβλημα Neumann:

$$\sigma \Delta u^-(\mathbf{r}) = \mathbf{Q} \cdot \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad r > a, \quad (3.1)$$

$$\partial_n u^-(\mathbf{r}) = 0, \quad r = a, \quad (3.2)$$

και το εξωτερικό  $u^+$  επιλύει το εξωτερικό Dirichlet:

$$\Delta u^+(\mathbf{r}) = 0, \quad r > a, \quad (3.3)$$

$$u^+(\mathbf{r}) = u^-(\mathbf{r}), \quad r = a, \quad (3.4)$$

$$u^+(\mathbf{r}) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r \rightarrow \infty, \quad (3.5)$$

τότε το  $u^-$  ή το  $u^+$  χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του  $\mathbf{B}$  από τον τύπο Geselowitz.

### 3.1.1 ΗΕΓ

Το  $u^-$  ως λύση της εξίσωσης Laplace έχει τη μορφή:

$$u^-(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} + w(\mathbf{r}), \quad (3.6)$$

όπου  $w(\mathbf{r})$  είναι μία αρμονική συνάρτηση που ικανοποιεί την:

$$\partial_n w(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\sigma} \partial_n \mathbf{Q} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}, \quad r = a. \quad (3.7)$$

Χρησιμοποιώντας σφαιρικές αρμονικές η λύση γράφεται [15]:

$$u^-(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left[ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} + 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{n+1}{n(2n+1)} \frac{r_0^n r^n}{a^{2n+1}} \cdot Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \right], \quad r < a, \quad (3.8)$$

όπου  $\hat{\mathbf{r}}$  το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα και η παράγωγος κατά κατεύθυνση  $\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0}$  εξαρτάται μόνο από την διπολική πηγή. Επιπλέον,  $Y_n^m$  είναι οι κανονικοποιημένες μιγαδικές σφαιρικές αρμονικές:

$$Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-|m|!)}{(n+|m|!)}} P_n^{|m|}(\cos\theta) e^{im\phi}, \quad (3.9)$$

με  $P_n^m$  να είναι οι συναρτήσεις Legendre πρώτου είδους που ικανοποιούν την σχέση ορθογωνιότητας:

$$\oint_{S^2} Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}) Y_{n'}^{m'}(\hat{\mathbf{r}}) ds(\hat{\mathbf{r}}) = \delta_{nn'} \delta_{mm'}, \quad (3.10)$$

όπου  $S^2$  η μοναδιαία σφαίρα.

Προκειμένου να ληφθεί μία κλειστή μορφή του ηλεκτρικού δυναμικού (3.8) χρησιμοποιείται αρχικά για το άθροισμα των όρων  $m = -n, \dots, n$ , το θεώρημα άθροισης που είναι:

$$\frac{4\pi}{2n+1} \sum_{m=-n}^n Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) = P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0), \quad (3.11)$$

με  $P_n$  να είναι το πολυώνυμο Legendre βαθμού  $n$  και  $\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0$  ορίζει το συνημίτονο της γωνίας μεταξύ των δύο διευθύνσεων  $\hat{\mathbf{r}}$  και  $\hat{\mathbf{r}}_0$ . Το θεώρημα άθροισης εκφράζει κάθε πολυώνυμο Legendre βαθμού  $n$  ως προς τη γωνία των διευθύνσεων  $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}_0$  συναρτήσει των επιφανειακών σφαιρικών αρμονικών που αντιστοιχούν στις διευθύνσεις  $\hat{\mathbf{r}}$  και  $\hat{\mathbf{r}}_0$ . Βάση του θεωρήματος η (3.8) γράφεται [15]:

$$u^-(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left[ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{r_0^n r^n}{a^{2n+1}} P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0) \right]. \quad (3.12)$$

Το άπειρο άθροισμα που απομένει αθροίζεται ορίζοντας την συνάρτηση:

$$f(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{n} P_n(\cos\theta), \quad \rho < 1, \quad (3.13)$$

όπου  $\cos\theta = \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0$ . Επειδή τα πολυώνυμα Legendre είναι φραγμένα από την μονάδα άρα η σειρά συγκλίνει απόλυτα (άρα και απλά) και σχεδόν ομοιόμορφα (δηλαδή σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του διαστήματος σύγκλισης). Επομένως για  $\rho < 1$  μπορεί να εφαρμοστεί κατά όρους παραγωγή και ολοκλήρωση. Εφαρμόζοντας τον τελεστή  $\rho \frac{d}{d\rho}$  και παραγωγίζοντας κατά όρους προκύπτει:

$$\rho f'(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n P_n(\cos\theta), \quad (3.14)$$

και χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Laplace:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2r\cos\gamma + r^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n P_n(\cos\gamma), \quad (3.15)$$

που συγκλίνει απόλυτα και σχεδόν ομοιόμορφα για  $r < 1$ , η  $f$  τελικά επιλύει το πρόβλημα

αρχικών τιμών:

$$\rho f'(\rho) = (1 - 2\rho \cos\theta + \rho^2)^{-1/2} - 1, \quad (3.16)$$

$$f(0) = 0, \quad (3.17)$$

με λύση:

$$f(\rho) = -\ln \frac{1 - \rho \cos\theta + \sqrt{1 - 2\rho \cos\theta + \rho^2}}{2} \quad (3.18)$$

Τέλος, χρησιμοποιείται η αναπαράσταση της θεμελιώδους λύσης του τελεστή Laplace σε σφαιρικές αρμονικές που είναι:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0^n}{r^{n+1}} P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{4\pi}{2n+1} \frac{r_0^n}{r^{n+1}} Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}), \quad \text{για } r_0 < r, \quad (3.19)$$

και αντικαθιστώντας στην (3.12) η κλειστή μορφή για το ηλεκτρικό δυναμικό είναι [15]:

$$u^-(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left[ \frac{1}{P} + \frac{a}{r} \frac{1}{R} - \frac{1}{a} \ln \frac{rR + \mathbf{r} \cdot \mathbf{R}}{2a^2} \right], \quad \text{ή εφαρμόζοντας } \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0}, \quad (3.20)$$

$$= \frac{\mathbf{Q}}{4\pi\sigma} \cdot \left[ \frac{\mathbf{P}}{P^3} + \frac{a}{r} \frac{\mathbf{R}}{R^3} + \frac{1}{aR} \frac{R\mathbf{r} + r\mathbf{R}}{Rr + \mathbf{r} \cdot \mathbf{R}} \right], \quad \mathbf{r} < a. \quad (3.21)$$

όπου  $\mathbf{P} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ ,  $P = |\mathbf{P}|$  και  $\mathbf{R} = \frac{a^2}{r^2} \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ ,  $R = r$ . Επάνω στο σύνορο  $r = a$  το ηλεκτρικό δυναμικό είναι:

$$u^-(a\hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left[ \frac{2}{|a\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0|} - \frac{1}{a} \ln \frac{|a\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0| + \hat{\mathbf{r}} \cdot (a\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0)}{2a} \right], \quad \text{ή εφαρμόζοντας } \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0}, \quad (3.22)$$

$$= \frac{\mathbf{Q}}{4\pi\sigma} \cdot \left[ 2 \frac{a\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0}{|a\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0|^3} + \frac{1}{a|a\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0|} \frac{|a\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0| \hat{\mathbf{r}} + (a\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0)}{|a\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0| + \hat{\mathbf{r}} \cdot (a\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0)} \right], \quad r = a. \quad (3.23)$$

Η λύση του προβλήματος Neumann είναι μοναδική συν μία σταθερά  $c$  η οποία μπορεί να τεθεί μηδενική καθώς οι μετρήσεις του ΗΕΓ είναι πάντα διαφορές δυναμικού από κάποιο σημείο αναφοράς. Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα (3.22) και με παρόμοια επιχειρήματα προκύπτει ότι το εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό που επιλύει το εξωτερικό πρόβλημα Dirichlet είναι:

$$u^+(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{n} \frac{r_0^n}{r^{n+1}} Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}), \quad r > a, \quad (3.24)$$

ενώ η κλειστή μορφή του είναι :

$$u^+(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left[ \frac{2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} - \frac{1}{r} \ln \frac{F(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{2r^2|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right], \quad \text{ή εφαρμόζοντας } \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0}, \quad (3.25)$$

$$= \frac{\mathbf{Q}}{4\pi\sigma} \cdot \left[ 2 \frac{\mathbf{P}}{P^3} + \frac{1}{rP} \frac{P\mathbf{r} + r\mathbf{P}}{Pr + \rho \cdot \mathbf{P}} \right], \quad r > a. \quad (3.26)$$

Προφανώς  $u^+(a\hat{\mathbf{r}}) = u^-(a\hat{\mathbf{r}})$ .

### 3.1.2 ΜΕΓ

Περνώντας τώρα στο ευθύ πρόβλημα της μαγνητοεγκεφαλογραφίας, αυτό αποτελείται από την εύρεση του εξωτερικού μαγνητικού δυναμικού του οποίου η ευρεσή απαιτεί την εύρεση του μαγνητικού πεδίου που δίνεται από τον γνωστό τύπο Geselowitz για ένα δίπολο :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} - \frac{\mu_0\sigma}{4\pi} \oint_S u(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ds(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{r} \notin S, \quad (3.27)$$

Θυμίζοντας ότι ο όρος αριστερά είναι η συνεισφορά του πρωτεύοντος ρεύματος ενώ ο ολοκληρωτικός όρος δεξιά είναι η συνεισφορά του επαγωγικού ρεύματος και λόγω της μορφής του εμπεριέχει όλη την πληροφορία για την γεωμετρία του αγωγού. Στην περίπτωση της σφαιρικής γεωμετρίας, η ακτινική συνιστώσα του  $\mathbf{B}$  που δίνεται από την (3.27) για  $\hat{\mathbf{n}}' = \hat{\mathbf{r}}'$  προκύπτει  $\hat{\mathbf{n}}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{r}} = 0$  και άρα ο όρος του ολοκληρώματος μηδενίζεται, δίνοντας :

$$-\hat{\mathbf{r}}' \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 \cdot \hat{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}. \quad (3.28)$$

Επομένως η ακτινική συνιστώσα του  $\mathbf{B}$  στο εξωτερικό της σφαίρας εξαρτάται απόκλειστικά από το δίπολο εσωτερικά και είναι ανεξάρτητη του ηλεκτρικού δυναμικού  $u$  άρα και ανεξάρτητη της ακτίνας της αγωγίμης σφαίρας. Έτσι ο υπολογισμός του μαγνητικού δυναμικού το οποίο επειδή  $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J} = 0$  είναι αστρόβιλο ( $\mathbf{J} = 0$  εξωτερικά) άρα ανεξάρτητο της διαδρομής ολοκλήρωσης και επειδή  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  είναι και σωληνοειδές, θα δίνεται από την κλίση μιάς αρμονικής συνάρτησης  $\frac{\mu_0}{4\pi} U$ , περιορίζεται στον υπολογισμό της έκφρασης :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla U(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} > a. \quad (3.29)$$

Ολοκληρώνοντας κατά μήκος μίας ευθείας από το  $\mathbf{r}$  έως το άπειρο και χρησιμοποιώντας το ότι το μαγνητικό δυναμικό μηδενίζεται στο άπειρο :

$$U(\mathbf{r}) = - \int_{\mathbf{r}}^{\infty} \frac{\partial}{\partial r'} U(\mathbf{r}') dr' = - \int_{\mathbf{r}}^{\infty} \hat{\mathbf{r}}' \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} U(\mathbf{r}') dr' \quad (3.30)$$

$$= - \frac{4\pi}{\mu_0} \int_{\mathbf{r}}^{\infty} \hat{\mathbf{r}}' \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}') dr' = \mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 \cdot \hat{\mathbf{r}} \int_{\mathbf{r}}^{\infty} \frac{dr'}{|r' \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0|^3} \quad (3.31)$$

$$= \mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 \cdot \hat{\mathbf{r}} \frac{r}{F(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} = \frac{\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}}{F(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}, \quad r > a, \quad (3.32)$$

όπου  $F(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|(r|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| + \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0))$  και άρα η μαγνητική επαγωγή είναι [15]:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0}{F^2(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} \cdot [\tilde{\mathbf{I}} - \mathbf{r} \otimes \nabla] F(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \quad (3.33)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0}{F(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}}{F^2(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} \nabla F(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0), \quad (3.34)$$

όπου  $\tilde{\mathbf{I}}$  είναι ο ταυτοτικός δυαδικός τελεστής και:

$$\begin{aligned} \nabla F(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) &= |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|(r + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|) \hat{\mathbf{r}} \\ &+ [|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2 + 2r|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| + \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)] \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Γράφοντας το μαγνητικό δυναμικό (3.32) και τη μαγνητική επαγωγή (3.34) στις ισοδύναμες μορφές [15]:

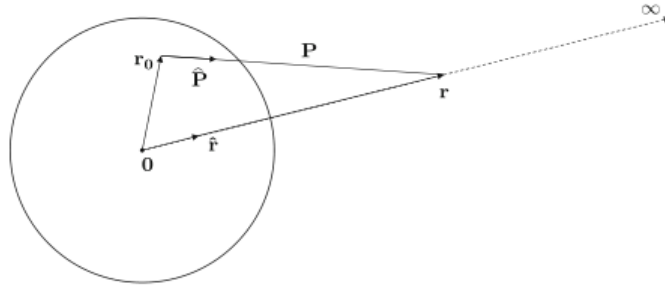
$$U(\mathbf{r}) = \mathbf{Q} \cdot \frac{\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{P}}}{P(1 + \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{P}})}, \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{Q} \times (\mathbf{r} - \mathbf{P})}{rP^2(1 + \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{P}})} - \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \cdot \frac{\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{P}}}{P^2(1 + \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{P}})^2} \times \left[ \left(1 + \frac{P}{r}\right) \hat{\mathbf{r}} + \left(2 + \frac{P}{r} + \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{P}}\right) \hat{\mathbf{P}} \right] \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{Q} \times (\mathbf{r} - \mathbf{P})}{rP^2(1 + \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{P}})} - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{U(\mathbf{r})}{P} \left[ \hat{\mathbf{P}} + \frac{r + P}{r(1 + \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{P}})} (\hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{P}}) \right], \quad (3.38)$$

με  $\mathbf{P} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$  που ορίζει το σημείο παρατήρησης  $\mathbf{r}$  που βρίσκεται εξωτερικά του αγωγού, ως προς το κέντρο 0 του αγωγού και ως προς τη θέση της διπολικής πηγής  $\mathbf{r}_0$ .

Τέλος, μία πιό συμπαγής πληροφοριακή μορφή του μαγνητικού δυναμικού  $U$  προκύπτει γράφοντας το ως ανάπτυγμα εξωτερικών σφαιρικών αρμονικών χρησιμοποιώντας την μορφή



Σχήμα 3.1: Διαδρομή ολοκλήρωσης για τον υπολογισμό του μαγνητικού δυναμικού, [15].

(3.31) ως εξής:

$$\begin{aligned}
 U(\mathbf{r}) &= \mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 \cdot \hat{\mathbf{r}} \int_r^\infty \frac{dr'}{|r'\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0|^3} \\
 &= \mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 \cdot \int_r^\infty \frac{r'\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0}{|r'\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0|^3} \frac{dr'}{r'} \\
 &= \mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \int_r^\infty \frac{1}{|r'\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0|} \frac{dr'}{r'}, \quad \text{θέτοντας } r' = r/t, \\
 &= \mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \int_0^1 \frac{dt}{|\mathbf{r} - t\mathbf{r}_0|}, \quad \text{χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα (3.19),} \\
 &= \mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tr_0)^n}{r^{n+1}} P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0) dt \\
 &= \mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \frac{r_0^n}{r^{n+1}} P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0), \quad \text{χρησιμοποιώντας το θεώρημα άθροισης,} \\
 &= \mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{4\pi}{(n+1)(2n+1)} \frac{r_0^n}{r^{n+1}} Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}), \tag{3.39}
 \end{aligned}$$

όπου παρατηρείται ότι  $U(\mathbf{r}) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)$ ,  $r \rightarrow \infty$  και ότι ο γωνιακός διαφορικός τελεστής  $\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0}$  εξαρτάται μόνο από την θέση της διπολικής πηγής. Η σχέση (3.39) δίνει το ζητούμενο ανάπτυγμα της αρμονικής συνάρτησης  $U$  σε σφαιρικές αρμονικές. Ύστερα, γράφοντας το παραπάνω άθροισμα (3.39) χρησιμοποιώντας τον ορισμό της εφαπτομενικής διανυσματικής σφαιρικής αρμονικής  $\mathbf{C}_n^m$ :

$$\mathbf{r}_0 \times \nabla_{\mathbf{r}_0} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}_0) = \mathbf{C}_n^m(\hat{\mathbf{r}}_0), \tag{3.40}$$

προκύπτει η μορφή:

$$U(\mathbf{r}) = \mathbf{Q} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{4\pi}{(n+1)(2n+1)} \frac{r_0^n}{r^{n+1}} \mathbf{C}_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}). \tag{3.41}$$

Από εδώ παρατηρείται ότι η πηγή του  $U$  που είναι το  $\mathbf{r}_0$ , εκφράζεται αποκλειστικά σε όρους των

διανυσματικών σφαιρικών αρμονικών  $C_n^m$  οι οποίες εξ ορισμού είναι εφαπτομενικές επάνω στη μοναδιαία σφαίρα, και επομένως το μέρος του ρεύματος που χρειάζεται για να δημιουργηθεί το  $U$  βρίσκεται μόνο μέσα στον υπόχωρο των  $C_n^m$ , ενώ το μέρος που βρίσκεται στο ορθογώνιο συμπλήρωμα του  $C_n^m$  και αποτελείται από τις ακτινικές  $P_n^m$  και εφαπτομενικές  $B_n^m$  διανυσματικές σφαιρικές αρμονικές, είναι μαγνητικά σιωπηλό. Αυτό έρχεται σε συμφωνία με τα αποτελέσματα που θα παρουσιαστούν στην παράγραφο για την μη αντιστρεψιμότητα του προβλήματος της ΜΕΓ και είναι χαρακτηριστικό της φυσικής του προβλήματος, ανεξάρτητο από την γεωμετρία του αγωγού.

Δύο τελευταίες παρατηρήσεις οι οποίες θα μας βοηθήσουν να συγκρίνουμε τα αντίστοιχα αποτελέσματα που θα δοθούν για τον ελλειψοειδή αγωγό είναι: πρώτον, ότι κάθε δίπολο με ακτινική ροπή  $Q$  είναι μαγνητικά σιωπηλό αφού τότε  $Q \times r_0 = 0$  και τότε δεν μπορεί να ανιχνευθεί μαγνητικό πεδίο στο εξωτερικό της σφαίρας και δεύτερον, ότι το μαγνητικό δυναμικό  $U$  άρα και το  $B$  είναι ανεξάρτητα της ακτίνας της σφαίρας με αποτέλεσμα η έκταση της αγωγίμης περιοχής να είναι επίσης μαγνητικά σιωπηλή για την σφαίρα.

## 3.2 Αλγόριθμοι αντιστροφής

### 3.2.1 ΗΕΓ

Υποθέτουμε ότι εντός της αγωγίμης ομογενούς σφαίρας ακτίνας  $a$  υπάρχει ένα δίπολο με ροπή  $Q$  στην θέση  $r_0$ . Σύμφωνα με τη λύση του ευθέως προβλήματος το προκαλούμενο ηλεκτρικό δυναμικό επάνω στην επιφάνεια της σφαίρας δίνεται από την σχέση (3.8) υπολογισμένη στο  $r = a$  δηλαδή είναι:

$$u^-(a\hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{Q \cdot \nabla_{r_0} (r_0^n Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0))}{na^{n+1}} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}). \quad (3.42)$$

Τότε η  $u^-$  μπορεί να αναπτυχθεί σε πλήρες και ορθοκανονικό σύστημα επιφανειακών σφαιρικών αρμονικών  $Y_n^m$  όπως αυτές δίνονται από την (3.9) με τη μορφή:

$$u^-(a\hat{\mathbf{r}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_n^m Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}), \quad (3.43)$$

όπου οι συντελεστές είναι γνωστοί και ίσοι με :

$$C_n^m = \oint_{|\hat{\mathbf{r}}|=1} u^-(a\hat{\mathbf{r}}) Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}) ds(\hat{\mathbf{r}}), \quad n = 1, 2, \dots, \quad |m| \leq n. \quad (3.44)$$

Επιπλέον, λόγω της ορθογωνιότητας ισχύει ότι :

$$C_n^m = \frac{1}{\sigma n a^{n+1}} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0^n Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0)). \quad (3.45)$$

Για το αντίστροφο πρόβλημα της ΗΕΓ, από τη γνώση της  $u^-(a\hat{\mathbf{r}})$  υπολογίζονται οι σταθερές  $C_n^m$  και από τη γνώση της λύσης του ευθέως προβλήματος οι σταθερές αυτές θα έχουν την μορφή (3.45) που εξαρτάται μόνο από το δίπολο. Η γνώση του διπόλου απαιτεί τον υπολογισμό έξι αριθμών, τριών για τις συντεταγμένες του  $\mathbf{r}_0$  και τριών για τις συντεταγμένες του  $\mathbf{Q}$ . Επειδή στο ανάπτυγμα (3.43) για  $n = 1$  υπάρχουν 3 συντελεστές και για  $n = 2$  πέντε συντελεστές, περιοριζόμαστε μόνο στους 8 όρους για  $n = 1, 2$ . Έτσι από τις σχέσεις (3.9), (3.45) προκύπτει ένα σύστημα από 8 συντελεστές το οποίο επιλύεται χρησιμοποιώντας μόνο τους 6 δίνοντας [15]:

$$\mathbf{Q} = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \sigma a^2 \left[ C_1^{-1} + C_1^1, i (C_1^{-1} - C_1^1), \sqrt{2} C_1^0 \right], \quad (3.46)$$

$$\mathbf{r}_0 = \frac{a}{\sqrt{5}} \left[ \frac{C_2^{-2}}{C_1^{-1}} + \frac{C_2^2}{C_1^1}, i \left( \frac{C_2^{-2}}{C_1^{-1}} - \frac{C_2^2}{C_1^1} \right), 2 \frac{C_2^1}{C_1^1} - \sqrt{2} \frac{C_1^0}{C_1^1} \frac{C_2^2}{C_1^1} \right], \quad C_1^1 \neq 0. \quad (3.47)$$

Οι δύο σχέσεις που δεν χρησιμοποιούνται κατά την επίλυση του συστήματος αποτελούν κριτήριο για τον αριθμό των διπόλων που παράγουν το δυναμικό. Συγκεκριμένα, επειδή η λύση που δίνει το σύστημα ικανοποιεί όλες τις εξισώσεις αν δεν επαληθεύει κάθε φορά τις δύο επιπλέον σχέσεις τότε το δυναμικό δεν προέρχεται από ένα δίπολο.

### 3.2.2 ΜΕΓ

Όπως και στη περίπτωση του ΗΕΓ θεωρούμε ότι η νευρωνική διέγερση οφείλεται σε ένα δίπολο με ροπή  $\mathbf{Q}$  στη θέση  $\mathbf{r}_0$  και στόχος είναι να βρεθεί η θέση και η ροπή του διπόλου από τις μετρήσεις του μαγνητικού πεδίου στο εξωτερικό του εγκεφάλου ή ισοδύναμα από τη γνώση του εξωτερικού μαγνητικού δυναμικού.

Το μαγνητικό πεδίο στο εξωτερικό του εγκεφάλου δίνεται από την σχέση (3.39) η οποία γράφεται



στη μορφή:

$$U(\mathbf{r}) = 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{(n+1)(2n+1)} \frac{\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0^n Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0))}{r^{n+1}} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}), \quad (3.48)$$

όπου οι  $Y_n^m$  δίνονται από την σχέση (3.9). Αν αναπτύξουμε τη γνωστή συνάρτηση  $U$  που πήραμε από τα μετρούμενα δεδομένα της ΜΕΓ σε επιφανειακές σφαιρικές αρμονικές παίρνουμε:

$$U(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n D_n^m \frac{1}{r^{n+1}} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}), \quad (3.49)$$

όπου:

$$D_n^m = \oint_{|\hat{\mathbf{r}}|=1} U(\mathbf{r}) Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}) ds(\hat{\mathbf{r}}), \quad n = 1, 2, \dots, \quad |m| \leq n. \quad (3.50)$$

Ταυτίζοντας τις σχέσεις (3.48) και (3.49) προκύπτει ότι οι γνωστοί συντελεστές  $D_n^m$  ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$D_n^m = \frac{4\pi}{(n+1)(2n+1)} \mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0^n Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0)), \quad (3.51)$$

όπου τα  $\mathbf{Q}$  και  $\mathbf{r}_0$  είναι άγνωστα. Όπως και στην περίπτωση της ΗΕΓ επιλέγονται οι οκτώ πρώτοι όροι του αναπτύγματος (3.49) που αντιστοιχούν στους όρους με  $n = 1$  και  $n = 2$  και προκύπτουν 8 εξισώσεις με 6 αγνώστους. Επιλύοντας το σύστημα προκύπτουν οι τρεις συνιστώσες της θέσης και οι δύο εφαπτομενικές συνιστώσες της ροπής του διπόλου [15]:

$$\mathbf{r}_0 = \frac{\sqrt{5}}{4} \left[ \frac{D_2^{-2}}{D_1^{-1}} + \frac{D_2^2}{D_1^1}, i \left( \frac{D_2^{-2}}{D_1^{-1}} - \frac{D_2^2}{D_1^1} \right), 2 \frac{D_2^1}{D_1^1} - \sqrt{2} \frac{D_1^0}{D_1^1} \frac{D_2^2}{D_1^1} \right], \quad (3.52)$$

$$Q_{\theta_0} = \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \frac{D_1^{-1} + D_1^1}{r_0 \sin \phi_0} + \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{D_1^0}{r_0 \tan \theta_0 \tan \phi_0}, \quad (3.53)$$

$$Q_{\phi_0} = -\sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{D_1^0}{r_0 \sin \theta_0}. \quad (3.54)$$

Οι δύο σχέσεις που δεν χρησιμοποιούνται αποτελούν όπως και στην ΗΕΓ κριτήριο για τον αριθμό των διπόλων.

### 3.3 Μη αντιστρεψιμότητα του προβλήματος της ΜΕΓ

Σε αυτή την παράγραφο θα αναφερθούμε στη μη αντιστρεψιμότητα του προβλήματος της ΜΕΓ στη γενική περίπτωση που το ρεύμα θεωρείται ως συνεχής κατανομή μέσα στο σφαιρικό αγωγό. Το αντίστροφο πρόβλημα της ΜΕΓ συνοψίζεται στην εύρεση του πρωτεύοντος ρεύματος εσωτερικά του εγκεφάλου από τη γνώση του μαγνητικού πεδίου εξωτερικά του κεφαλιού. Η μη μοναδικότητα στο αντίστροφο πρόβλημα της μαγνητοεγκεφαλογραφίας αποδείχθηκε από τον Helmholtz ήδη από το 1853 ο οποίος έδειξε ότι οι εξωτερικές μετρήσεις του μαγνητικού πεδίου δεν καθορίζουν με μοναδικό τρόπο τις πηγές που το παράγουν. Το αποτέλεσμα αυτό επιβεβαιώθηκε πολύ αργότερα το 2004 [4] αποδεικνύοντας ότι από την γνώση του μαγνητικού δυναμικού στο εξωτερικό σφαιρικού, ομοιογενούς αγωγού που παράγεται από αυθαίρετη κατανομή ρεύματος μπορεί να κατασκευαστεί μόνο το σωληνοειδές τμήμα της εφαπτομενικής συνιστώσας της κατανομής της πηγής. Το αστρόβιλο τμήμα της εφαπτομενικής συνιστώσας και το ακτινικό κομμάτι της δεν συνεισφέρουν στο μαγνητικό πεδίο που μετριέται εξωτερικά. Τελικά δηλαδή από την γνώση του μαγνητικού πεδίου μπορεί να ανακτηθεί μόνο η μία από τις τρεις συνιστώσες που προσδιορίζουν το πρωτεύον ρεύμα. Επιπλέον, ο τρόπος προσδιορισμού αυτής της συνιστώσας γίνεται μέσω της ελαχιστοποίησης της  $L^2$ -νόρμας. Έλλειψη μοναδικότητας έχει αποδειχθεί [16] και για αστρόμορφο πρότυπο ενώ η μη μοναδικότητα είναι εγγενές χαρακτηριστικό της φυσικής του προβλήματος.

#### 3.3.1 Ο ομογενής σφαιρικός αγωγός

##### Εναλλακτική αναπαράσταση του μαγνητικού δυναμικού

Έστω  $\mathbf{J}^p(\mathbf{r}')$  το πρωτεύον ρεύμα που έχει στήριγμα στο εσωτερικό της σφαίρας  $r' < 1$  και ένα σημείο  $\mathbf{r}$  εξωτερικά της σφαίρας. Τότε η μαγνητική επαγωγή δίνεται από τον τύπο που απέδειξε ο Sarvas:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla U(\mathbf{r}), \quad r > 1, \quad (3.55)$$

όπου όπως δείχθηκε το μαγνητικό δυναμικό είναι:

$$U(\mathbf{r}) = \int_{r' \leq 1} \frac{\mathbf{J}^p(\mathbf{r}') \times \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| (|\mathbf{r}| |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| + \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}'))} dv(\mathbf{r}'), \quad (3.56)$$

και είναι μία αρμονική συνάρτηση για  $r > 1$  ώστε  $U(\mathbf{r}) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)$  καθώς  $r \rightarrow \infty$ . Η συνάρτηση πυρήνα που παρουσιάζεται στην έκφραση (3.56) και είναι:

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|(|\mathbf{r}||\mathbf{r} - \mathbf{r}'| + \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}'))}, \quad (3.57)$$

έχει ιδιάζοντα όλα τα σημεία της ευθείας από το 0 μέχρι το  $\mathbf{r}'$  δηλαδή στην  $t\hat{\mathbf{r}}'$  με  $t \in [0, r']$ , όπου το  $\hat{\mathbf{r}}'$  είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα του  $\mathbf{r}'$ . Επομένως, πρέπει να εφαρμοστεί μία επέκταση της δράσης του τελεστή Laplace υπό την έννοια των κατανομών. Μια αναπαράσταση της  $\Delta U$  με:

$$U(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\mathbf{J}^p(\mathbf{r}') \times \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|(|\mathbf{r}||\mathbf{r} - \mathbf{r}'| + \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}'))}, \quad (3.58)$$

είναι η [4]:

$$\int_{\mathbb{R}^3} (\Delta_{\mathbf{r}} U(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) \Phi(\mathbf{r}) dv(\mathbf{r}) = -\frac{4\pi}{|\mathbf{r}'|} \int_0^{|\mathbf{r}'|} \left[ (\mathbf{J}^p(\mathbf{r}') \times \mathbf{r}) \cdot (\nabla_{\mathbf{r}} \Phi(\mathbf{r})) \right] \Big|_{\mathbf{r}=|\mathbf{r}'\hat{\mathbf{r}}'} d|\mathbf{r}|, \quad (3.59)$$

όπου  $\Phi(\mathbf{r}) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ . Ο  $\Delta U$  είναι ιδιάζων στο  $\mathbf{r} = \hat{\mathbf{r}}'$  και άρα το ολοκλήρωμα στο αριστερό μέρος της (3.59) πρέπει να ερμηνεύεται υπό την έννοια των κατανομών. Χρησιμοποιώντας την ασθενή μορφή (3.59) αποδεικνύεται ότι το μαγνητικό δυναμικό  $U$  στην σχέση (3.56) έχει την εναλλακτική αναπαράσταση [4]:

$$U(\mathbf{r}) = - \int_{r' \leq 1} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \left( \frac{1}{|\mathbf{r}'|^2} \int_{|\mathbf{r}'|}^1 \left[ (\nabla_{\mathbf{z}} \times \mathbf{J}^p(\mathbf{z})) \cdot \mathbf{z} \right] \Big|_{\mathbf{z}=|\mathbf{z}'\hat{\mathbf{r}}'} |\mathbf{z}| d|\mathbf{z}| \right) dv(\mathbf{r}'), \quad |\mathbf{r}| > 1. \quad (3.60)$$

Το πλεονέκτημα εδώ είναι ότι η αναπαράσταση (3.60) χρησιμοποιεί την θεμελιώδη λύση του τελεστή Laplace που είναι ανεξάρτητη της γεωμετρίας. Πλέον η σφαιρική γεωμετρία αφορά την συνάρτηση στο εσωτερικό της παρένθεσης στην (3.60) και όχι του πυρήνα. Σκοπός πλέον είναι να βρεθεί μία αναπαράσταση για την ποσότητα  $(\nabla_{\mathbf{z}} \times \mathbf{J}^p(\mathbf{z})) \cdot \mathbf{z}$  που θα υποδεικνύει τις συνιστώσες του ρεύματος που μετέχουν. Καταρχήν, από την αναπαράσταση Helmholtz ισχύει ότι:

$$\mathbf{J}^p(\mathbf{r}) = \nabla \Phi^p(\mathbf{r}) + \nabla \times \mathbf{A}^p(\mathbf{r}), \quad (3.61)$$

και άρα παίρνοντας το  $\nabla \times \mathbf{J}^p(\mathbf{r})$ , το  $\nabla \times (\nabla \Phi^p(\mathbf{r}))$  μηδενίζεται αφού είναι αστρόβιλο. Επομένως το ερώτημα είναι τι συμβαίνει με  $\mathbf{A}^p$ . Στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων το διάνυσμα  $\mathbf{J}^p(\mathbf{r})$

μπορεί να γραφεί μοναδικά [4] στη μορφή:

$$\mathbf{J}^p(\mathbf{r}) = J^r(\mathbf{r})\hat{\mathbf{r}} + J^\theta(\mathbf{r})\hat{\boldsymbol{\theta}} + J^\phi(\mathbf{r})\hat{\boldsymbol{\phi}}, \quad (3.62)$$

όπου  $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}$  είναι τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα των σφαιρικών μεταβλητών  $r > 0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi < 2\pi$  και οι βαθμωτές συναρτήσεις  $J^\theta, J^\phi$  μπορούν να αναπαρασταθούν από τις [4]:

$$J^\theta = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial G}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial F}{\partial \phi} \right), \quad J^\phi = \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial G}{\partial \phi} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \right), \quad (3.63)$$

όπου οι  $G(r, \theta, \phi), F(r, \theta, \phi)$  είναι βαθμωτές συναρτήσεις. Τότε από τις σχέσεις (3.62), (3.62) και τον τελεστή κλίσης σε σφαιρικές συντεταγμένες:

$$\nabla = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad (3.64)$$

προκύπτει:

$$\left( \nabla \times \mathbf{J}^p(\mathbf{r}) \right) \cdot \mathbf{r} = \frac{1}{|\mathbf{r}|} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} \right) = \frac{1}{|\mathbf{r}|} \mathbb{B}F(\mathbf{r}), \quad (3.65)$$

όπου  $\mathbb{B} = \Delta_{\theta, \phi}$  είναι ο τελεστής Beltrami. Άρα τελικά η αναπαράσταση για το μαγνητικό δυναμικό (3.60) γράφεται στη μορφή:

$$U(\mathbf{r}) = - \int_{|\mathbf{r}'| \leq 1} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \left( \frac{1}{|\mathbf{r}'|^2} \int_{|\mathbf{r}'|}^1 \mathbb{B}F(z, \theta, \phi) dz \right) dv(\mathbf{r}'), \quad |\mathbf{r}| > 1. \quad (3.66)$$

Επομένως, μόνο η βαθμωτή συνάρτηση  $F$  της εφαπτομενικής συνιστώσας απαιτείται για τον υπολογισμό του δυναμικού. Οι άλλες δύο συνιστώσες δηλαδή η ακτινική  $J^r$  και η εφαπτομενική  $G$  δεν υπεισέρχονται και άρα δεν μπορούν να ανακτηθούν κατά την αντιστροφή.

### Ελαχιστοποίηση της $L^2$ - νόρμας

Ένας τρόπος να αρθεί η μη αντιστρεψιμότητα είναι η συνθήκη της ελαχιστοποίησης της  $L^2$ -νόρμας του  $J^p$  εντός της σφαίρας. Από την σχέση (3.66) εφαρμόζοντας τον τελεστή Laplace

προκύπτει:

$$\Delta U = \frac{1}{|\mathbf{r}|^2} \int_{|\mathbf{r}|} \mathbb{B}F(z, \theta, \phi) dz, \quad |\mathbf{r}| < 1, \quad (3.67)$$

$$\Delta U = 0, \quad |\mathbf{r}| > 1, \quad (3.68)$$

τότε αν οι  $F, U$  επιδέχονται τα αναπτύγματα σφαιρικών αρμονικών:

$$F(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n f_n^m(r) Y_n^m(\theta, \phi), \quad (3.69)$$

$$U(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n u_n^m(r) Y_n^m(\theta, \phi), \quad (3.70)$$

αντικαθιστώντας στις (3.67), (3.68) προκύπτει [4]:

$$u_n^{m''} + \frac{2}{r} u_n^{m'} - \frac{n(n+1)}{r^2} u_n^m = \begin{cases} -\frac{n(n+1)}{r^2} \int_r^1 f_n^m(r') dr' & r < 1 \\ 0 & r > 1 \end{cases}. \quad (3.71)$$

Η λύση της ομογενούς είναι  $ar^n + br^{-(n+1)}$  για  $a, b$  σταθερές και  $n$  θετικό ακέραιο. Επειδή  $u_n^m \rightarrow 0$  καθώς  $r \rightarrow \infty$  προκύπτει  $u_n^m = c_n^m r^{-(n+1)}$  και αντικαθιστώντας στο ανάπτυγμα του  $U$  (3.70):

$$U(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_n^m r^{-(n+1)} Y_n^m(\theta, \phi). \quad (3.72)$$

Η λύση της μη ομογενούς προκύπτει με την μέθοδο μεταβολής παραμέτρων για  $u_n^m(r) = A_n^m(r) r^n$  και δίνει [4]:

$$n \int_0^1 r^{n+1} f_n^m(r) dr = (2n+1) c_n^m, \quad (3.73)$$

που είναι ένα πρόβλημα προσδιορισμού των ροπών  $f_n^m$  για την  $F$  που πρέπει να επιλυθεί ώστε να βρεθεί το πρωτεύον ρεύμα  $\mathbf{J}^p$  και οι συντελεστές  $c_n^m$  δίνονται από το ανάπτυγμα (3.72). Για να επιλυθεί το πρόβλημα χρησιμοποιείται η μέθοδος ελαχιστοποίησης της  $L^2$ - νόρμας. Έστω το ενεργειακό συναρτησιακό:

$$W = \int_{r \leq 1} |\mathbf{J}^p|^2 dr = \int_{r \leq 1} |J^r|^2 + |J^\theta|^2 + |J^\phi|^2 dr, \quad (3.74)$$

τότε αντικαθιστώντας τα  $J^p, J^\theta, J^\phi$  από τις (3.62), (3.63):

$$W = \int_{r \leq 1} \left[ (J^r)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial G}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial G}{\partial \phi} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial F}{\partial \phi} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial F}{\partial \theta} \right)^2 \right] dr. \quad (3.75)$$

Επειδή ο περιορισμός αφορά μόνο την  $F$ , άρα η (3.75) ελαχιστοποιείται για  $J^r = G = 0$  και η ελάχιστη τιμή είναι:

$$\begin{aligned} H &= \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial F}{\partial \phi} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial F}{\partial \theta} \right)^2 \right] r^2 \sin \theta \, dr d\theta d\phi \\ &= \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[ |\nabla F|^2 - \left( \frac{\partial F}{\partial r} \right)^2 \right] r^2 \sin \theta \, dr d\theta d\phi, \end{aligned} \quad (3.76)$$

εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση και επειδή το στήριγμα της  $F$  βρίσκεται στο εσωτερικό της σφαίρας άρα  $F(r) = 0$  στο  $r = 1$  και προκύπτει:

$$H = - \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[ F \Delta F + \left( \frac{\partial F}{\partial r} \right)^2 \right] r^2 \sin \theta \, dr d\theta d\phi \quad (3.77)$$

όπου:

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \mathbb{B}F. \quad (3.78)$$

Χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση της  $F$  (3.69) σε σφαιρικές αρμονικές, την ιδιότητα του τελεστή Beltrami ότι οι  $Y_n^m$  για  $m = -n, \dots, n$  είναι οι ιδιοσυναρτήσεις του  $\mathbb{B}$  για την ιδιοτιμή  $-n(n+1)$  δηλαδή ότι:

$$\mathbb{B}Y_n^m(\mathbf{r}) = -n(n+1)Y_n^m(\mathbf{r}), \quad (3.79)$$

καθώς και την σχέση ορθογωνιότητας των σφαιρικών αρμονικών:

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_n^m Y_{n'}^{m'} \sin \theta \, d\phi \, d\theta = \delta_{nn'} \delta_{mm'}, \quad (3.80)$$

τότε αντικαθιστώντας η ελάχιστη τιμή είναι [4]:

$$H = - \sum_{n=0}^\infty \sum_{m=-n}^n \int_0^1 \left( \left[ f_n^{m''}(r) + \frac{2}{r} f_n^{m'}(r) - \frac{n(n+1)}{r^2} f_n^m(r) \right] f_n^m(r) + (f_n^m(r))^2 \right) r^2 \, dr, \quad (3.81)$$

$$= - \sum_{n=0}^\infty \sum_{m=-n}^n \int_0^1 \left( \left[ f_n^m(r) f_n^{m'}(r) r^2 \right]' - n(n+1) (f_n^m(r))^2 \right) \, dr, \quad (3.82)$$

εκτελώντας παραγοντική και επειδή  $f_n^m(1) = 0$  και  $f_n^{m'}(1) = 0$  αφού το στήριγμα του  $\mathbf{J}^p$  (άρα και της  $f_n^m(r)$ ) βρίσκεται στο εσωτερικό της σφαίρας:

$$H = - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n n(n+1) \int_0^1 (f_n^m(r))^2 dr. \quad (3.83)$$

Επομένως το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του  $H$  ως προς την  $F(\mathbf{r})$  υποβιβάστηκε σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης του  $H$  ως προς τις ροπές  $f_n^m(r)$  που είναι μονοδιάστατο. Η ελαχιστοποίηση της  $H$  υπό τον περιορισμό (3.73) γίνεται με την μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange και καταλήγει στις [4]:

$$J^r = G = 0, \quad (3.84)$$

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{(2n+1)(2n+3)}{n} c_n^m r^{n+1} Y_n^m(\theta, \phi), \quad r > 1, \quad (3.85)$$

όπου το ανάπτυγμα του  $F$  ξεκινά με  $n = 1$  αφού το δυναμικό  $U(\mathbf{r})$  έχει συμπεριφορά  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)$  για  $r \rightarrow \infty$  άρα από την αναπαράσταση (3.72) του  $U$  θα είναι  $n > 0$  και επειδή  $c_0^0 = 0$  άρα  $n \geq 1$ .

### 3.3.2 Ο ομογενής αστρόμορφος αγωγός

Έστω ένα  $C^1$  λείο και φραγμένο χωρίο  $V$  που αναριστά ένα αστρόμορφο αγωγό. Τότε επιλέγοντας ένα σημείο στο εσωτερικό του αγωγού ως το κέντρο του συστήματος συντεταγμένων, κάθε άλλο σημείο του  $V$  θα προσδιορίζεται ως προς το κέντρο αυτό συναρτήσει των σφαιρικών συντεταγμένων  $(r, \theta, \phi)$ ,  $0 \leq \pi$ ,  $0 \leq 2\pi$  για κάθε κατεύθυνση  $\hat{\mathbf{r}} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$  όπου  $\mathbf{r}$  είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα του  $\mathbf{r} = (r, \theta, \phi)$  με  $\mathbf{r} \in [0, R(\hat{\mathbf{r}})]$  με  $R(\hat{\mathbf{r}})$  να συμβολίζει την ακτινική απόσταση από το κέντρο  $0$  έως το σύνορο  $\partial V$ . Αν  $\mathbf{r}$  είναι ένα σημείο εξωτερικά του αγωγού και  $\mathbf{r}'$  ένα σημείο στο εσωτερικό του αγωγού που συμβολίζει τη διπολική πηγή, τότε το

μαγνητικό δυναμικό κατά μήκος της ευθείας:  $l(\mathbf{r}) = \mathbf{r} + t\hat{\mathbf{r}}$ ,  $t \in [0, \infty)$  είναι [16]:

$$\begin{aligned}
U(\mathbf{r}) &= \int_V U(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dv(\mathbf{r}') \\
&= \int_V \left( - \int_{\mathbf{r}}^{\infty} \hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}''} U(\mathbf{r}'', \mathbf{r}') \right) dv(\mathbf{r}'), \quad \text{όπου χρησιμοποιώντας τον τύπο Geselowitz,} \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_V \mathbf{J}^p(\mathbf{r}') (\mathbf{r}' \times \hat{\mathbf{r}}) \left[ \int_0^{\infty} \frac{dt}{|\mathbf{r} + t\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}'|^3} \right] dv(\mathbf{r}') \\
&\quad - \frac{\sigma}{4\pi} \int_{\partial V} u(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \cdot (\mathbf{r}' \times \hat{\mathbf{r}}) \left[ \int_0^{\infty} \frac{dt}{|\mathbf{r} + t\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}'|^3} \right] ds(\mathbf{r}'), \tag{3.86}
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση:

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{|\mathbf{r} + t\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{r}{\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}, \tag{3.87}$$

τελικά το μαγνητικό δυναμικό είναι:

$$U(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{r}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}^p(\mathbf{r}') \times \mathbf{r}'}{\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} dv(\mathbf{r}') - \frac{\sigma \mathbf{r}}{4\pi} \int_{\partial V} u(\mathbf{r}') \frac{\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{r}'}{\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} ds(\mathbf{r}'), \tag{3.88}$$

όπου η  $u$  είναι το εσωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό που ικανοποιεί το γνωστό πρόβλημα Neumann. Από τη σχέση (3.88) φαίνεται ότι ο πυρήνας  $\mathbf{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 1/\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  είναι εγγενές χαρακτηριστικό της φύσης του προβλήματος, ενώ το δεύτερο ολοκλήρωμα στα δεξιά μηδενίζεται μόνο στην περίπτωση που  $\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{r}' = 0$  που ισχύει στην σφαιρική περίπτωση και άρα αποτελεί ένα μέτρο απόκλισης από την σφαιρική γεωμετρία. Ακόμη και στην περίπτωση που παρέχονται τα δεδομένα ΗΕΓ και ΜΕΓ δηλαδή το  $u(\mathbf{r})$  στην επιφάνεια και το  $U(\mathbf{r})$  εξωτερικά τότε η συνάρτηση  $U_g$  είναι γνωστή όπου [16]:

$$\begin{aligned}
U_g(\mathbf{r}) &= U(\mathbf{r}) + \frac{\sigma \mathbf{r}}{4\pi} \int_{\partial V} u(\mathbf{r}') \frac{\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{r}'}{\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} ds(\mathbf{r}') \\
&= \frac{r}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}^p(\mathbf{r}') \times \mathbf{r}'}{\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} dv(\mathbf{r}'). \tag{3.89}
\end{aligned}$$

Για να αντιστραφεί αυτή η σχέση και επομένως να βρεθεί το  $\mathbf{J}^p$  τότε ακολουθώντας παρόμοια μέθοδο με πριν, η  $U_g$  καταλήγει να έχει την αναπαράσταση:

$$U_g(\mathbf{r}) = - \int_V \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \left( \frac{1}{|\mathbf{r}'|^2} \int_{|\mathbf{r}'|}^{R(\hat{\mathbf{r}}')} \left[ (\nabla_{\mathbf{z}} \times \mathbf{J}^p(\mathbf{z})) \cdot \mathbf{z} \right] \Big|_{\mathbf{z}=|\mathbf{z}'|\hat{\mathbf{r}}'}^{|\mathbf{z}|} d|\mathbf{z}| \right) dv(\mathbf{r}'). \tag{3.90}$$



Τότε χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση Helmholtz  $\mathbf{J}^p(\mathbf{r}) = \nabla\Phi(\mathbf{r}) + \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$  και το γεγονός ότι  $\nabla\mathbf{B} = 0$  άρα το  $\mathbf{B}$  είναι σωληνοειδές άρα εκφράζεται μέσω ενός διανυσματικού δυναμικού  $\mathbf{A}$  στη μορφή:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0, \quad (3.91)$$

προκύπτει:

$$(\nabla \times \mathbf{J}^p(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{r} = -(\Delta\mathbf{A}(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{r}, \quad (3.92)$$

και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα:

$$\Delta(f \cdot g) = (\Delta f) \cdot g + f \cdot (\Delta g) + 2(\nabla f) \cdot (\nabla g), \quad (3.93)$$

γράφεται:

$$(\nabla \times \mathbf{J}^p(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{r} = -\Delta(\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})), \quad (3.94)$$

άρα η  $U_g$  εξαρτάται τελικά μόνο από την ακτινική συνιστώσα του διανυσματικού δυναμικού  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ .

Τελικά, η μορφή του μαγνητικού δυναμικού στην αστρόμορφη γεωμετρία είναι ίδια με αυτήν στην σφαιρική γεωμετρία που σημαίνει ότι υπάρχει ο ίδιος βαθμός ακαθοριστίας όπως και στην σφαιρική περίπτωση, παρά το γεγονός ότι παρέχονται τα δεδομένα από το ΗΕΓ.

# Κεφάλαιο 4

## Ελλειψοειδείς Αρμονικές

### 4.1 Το ελλειψοειδές σύστημα και η γεωμετρία του

Στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο οι επιφάνειες δευτέρου βαθμού περιγράφονται από την τετραγωνική μορφή:

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^3 b_i x_i + c = 0, \quad (4.1)$$

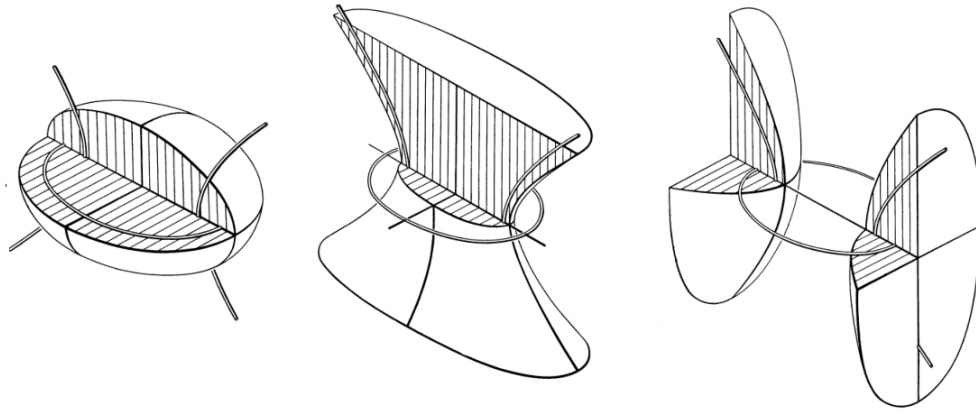
ή ισοδύναμα στη μορφή πινάκων:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c = 0 \quad (4.2)$$

όπου  $\mathbf{A}$  ένας πραγματικός και συμμετρικός πίνακας διάστασης  $3 \times 3$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$  και  $\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, x_3)$ . Θεωρώντας ότι η μορφή (4.2) είναι μη εκφυλισμένη προκύπτει η κανονική μορφή της (4.1) που είναι:

$$\mu_1 x_1^2 + \mu_2 x_2^2 + \mu_3 x_3^2 = 1, \quad (4.3)$$

και αυτή μπορεί να εκφράσει όλες τις επιφάνειες δευτέρου βαθμού, καθώς η διερεύνηση της σχέσης (4.3) οδηγεί στις περιπτώσεις του τριαξονικού ελλειψοειδούς για  $\mu_1 > 0, \mu_2 > 0, \mu_3 > 0$ , του μονόχωνου υπερβολοειδούς για  $\mu_1 > 0, \mu_2 > 0, \mu_3 < 0$  και του δίχωνου υπερβολοειδούς για  $\mu_1 > 0, \mu_2 < 0, \mu_3 < 0$ . Στο ελλειψοειδές σύστημα συντεταγμένων, το ελλειψοειδές αναφοράς είναι το ανάλογο την μοναδιαίας σφαίρας στην περίπτωση του σφαιρικού συστήματος



Σχήμα 4.1: Το ελλειψοειδές, το μονόκωνο υπερβολοειδές και το δίκωνο υπερβολοειδές είναι οι επιφάνειες που ορίζουν το ελλειψοειδές σύστημα συντεταγμένων, [26].

συντεταγμένων και αναπαρίσταται από την εξίσωση [10]:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1, \quad 0 < a_3 < a_2 < a_1 < \infty, \quad (4.4)$$

και τα  $a_1, a_2, a_3$  είναι οι σταθερές παράμετροι που καλούνται ημιάξονες αναφοράς. Οι σταθερές:

$$h_1^2 = a_2^2 - a_3^2, \quad (4.5)$$

$$h_2^2 = a_1^2 - a_3^2, \quad (4.6)$$

$$h_3^2 = a_1^2 - a_2^2, \quad (4.7)$$

ορίζουν τα  $h_1, h_2, h_3$  που καλούνται ημισεσιακές αποστάσεις του συστήματος. Καθώς:

$$h_1^2 - h_2^2 + h_3^2 = 0, \quad (4.8)$$

το ελλειψοειδές σύστημα έχει τις δύο ανεξάρτητες ημισεσιακές αποστάσεις  $h_2, h_3$  ενώ οι έξι συνολικά εστίες του είναι οι  $(\pm h_2, 0, 0)$ ,  $(\pm h_3, 0, 0)$  και  $(0, \pm h_1, 0)$  γεγονός που χαρακτηρίζει το εν λόγω σύστημα ως συνεστιακό. Η συνεστιακή οικογένεια επιφανειών δευτέρου βαθμού περιγράφεται από την εξίσωση:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2 - \lambda} + \frac{x_2^2}{a_2^2 - \lambda} + \frac{x_3^2}{a_3^2 - \lambda} = 1, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (4.9)$$

και αναπαριστά:

1. ελλειψοειδές για  $-\infty < \lambda < a_3^2$ ,
2. εστιακή έλλειψη για  $\lambda = a_3^2$ ,
3. μονόχωνο υπερβολοειδές για  $a_3^2 < \lambda < a_2^2$ ,
4. εστιακή υπερβολή για  $\lambda = a_2^2$ ,
5. δίχωνο υπερβολοειδές για  $a_2^2 < \lambda < a_1^2$ ,

ενώ για  $\lambda \geq a_1^2$  δεν αναπαριστά πραγματική επιφάνεια. Μέσω της σχέσης (4.9) ορίζεται μία ένα προς ένα απεικόνιση :

$$f : \mathbb{R}_0 = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 x_2 x_3 \neq 0\} \rightarrow \mathbb{P} = (-\infty, a_3^2) \times (a_3^2, a_2^2) \times (a_2^2, a_1^2), \quad (4.10)$$

με

$$f(\lambda) = \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{a_i^2 - \lambda} - 1. \quad (4.11)$$

Καθώς κάθε οικογένεια ελλειψοειδών, μονόχωνων και δίχωνων υπερβολοειδών καλύπτει όλο το χώρο μία φορά, κάθε σημείο του χώρου διαπερνάται από ακριβώς ένα ελλειψοειδές, ένα μονόχωνο και ένα δίχωνο υπερβολοειδές. Τα καρτεσιανά επίπεδα τα οποία και καλύπτονται δύο φορές, θεωρούνται ιδιάζουσες επιφάνειες για αυτό και εξαιρούνται από τον ορισμό της παραπάνω απεικόνισης. Επιπλέον, το συνεστιακό ελλειψοειδές σύστημα είναι ορθοκανονικό εφόσον σε κάθε σημείο  $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$  η επιφάνεια του ελλειψοειδούς, του μονόχωνου υπερβολοειδούς και του δίχωνου υπερβολοειδούς που το διαπερνούν, είναι κάθετες μεταξύ τους καθώς ορίζοντας :

$$E(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{a_i^2 - \lambda_3} - 1, \quad \lambda_3 \in (-\infty, a_3^2), \quad (\text{ελλειψοειδές}), \quad (4.12)$$

$$H_1(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{a_i^2 - \lambda_2} - 1, \quad \lambda_2 \in (a_3^2, a_2^2), \quad (\text{μονόχωνο υπερβολοειδές}), \quad (4.13)$$

$$H_2(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{a_i^2 - \lambda_1} - 1, \quad \lambda_1 \in (a_2^2, a_1^2), \quad (\text{δίχωνο υπερβολοειδές}), \quad (4.14)$$

προκύπτει  $\nabla E(\mathbf{r}) \cdot \nabla H_1(\mathbf{r}) = 0$  και  $\nabla E(\mathbf{r}) \cdot \nabla H_2(\mathbf{r}) = 0$  [10]. Έστω  $(\rho, \mu, \nu)$  οι ελλειψοειδείς συντεταγμένες με:

$$\rho^2 = a_1^2 - \lambda_3, \quad (4.15)$$

$$\mu^2 = a_1^2 - \lambda_2, \quad (4.16)$$

$$\nu^2 = a_1^2 - \lambda_1, \quad (4.17)$$

όπου:

$$0 \leq \nu^2 \leq h_3^2 \leq \mu^2 \leq h_2^2 \leq \rho^2 < +\infty \quad (4.18)$$

Έστω  $(\rho, \mu, \nu)$  η ελλειψοειδής αναπαράσταση ενός καρτεσιανού σημείου  $(x_1, x_2, x_3)$ , τότε η  $\rho \in (h_2^2, +\infty)$  ορίζει το ελλειψοειδές:

$$\frac{x_1^2}{\rho^2 - \lambda} + \frac{x_2^2}{\rho^2 - h_3^2} + \frac{x_3^2}{\rho^2 - h_2^2} = 1, \quad (4.19)$$

η  $\mu^2 \in (h_3^2, h_2^2)$  ορίζει το μονόχωνο υπερβολοειδές:

$$\frac{x_1^2}{\mu^2 - \lambda} + \frac{x_2^2}{\mu^2 - h_3^2} + \frac{x_3^2}{\mu^2 - h_2^2} = 1, \quad (4.20)$$

η  $\nu^2 \in (0, h_3^2)$  ορίζει το δίχωνο υπερβολοειδές:

$$\frac{x_1^2}{\nu^2 - \lambda} + \frac{x_2^2}{\nu^2 - h_3^2} + \frac{x_3^2}{\nu^2 - h_2^2} = 1. \quad (4.21)$$

Επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων (4.19) - (4.21), ως προς  $x_1^2, x_2^2, x_3^2$ , προκύπτει [10]:

$$x_1^2 = \frac{\rho^2 \mu^2 \nu^2}{h_2^2 h_3^2}, \quad (4.22)$$

$$x_2^2 = \frac{(\rho^2 - h_3^2)(\mu^2 - h_3^2)(h_3^2 - \nu^2)}{h_1^2 h_3^2}, \quad (4.23)$$

$$x_3^2 = \frac{(\rho^2 - h_2^2)(h_2^2 - \mu^2)(h_2^2 - \nu^2)}{h_1^2 h_2^2}, \quad (4.24)$$

και αποτετραγωνίζοντας, τότε στο πρώτο ογδοημόριο, όπου  $x_1 > 0$ ,  $x_2 > 0$ ,  $x_3 > 0$ , ισχύουν οι σχέσεις:

$$x_1 = \frac{\rho\mu\nu}{h_2h_3}, \quad h_2 < \rho < \infty, \quad (4.25)$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{\rho^2 - h_3^2}\sqrt{\mu^2 - h_3^2}\sqrt{h_3^2 - \nu^2}}{h_1h_3}, \quad h_3 < \mu < h_2, \quad (4.26)$$

$$x_3 = \frac{\sqrt{\rho^2 - h_2^2}\sqrt{h_2^2 - \mu^2}\sqrt{h_2^2 - \nu^2}}{h_1h_2}, \quad 0 < \nu < h_3. \quad (4.27)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.25) - (4.27), η αναπαράσταση ενός σημείου στον  $\mathbb{R}^2$  μέσω ελλειψοειδών συντεταγμένων είναι:

$$\mathbf{r}(\rho, \mu, \nu) = \left( \frac{\rho\mu\nu}{h_2h_3}, \frac{\sqrt{\rho^2 - h_3^2}\sqrt{\mu^2 - h_3^2}\sqrt{h_3^2 - \nu^2}}{h_1h_3}, \frac{\sqrt{\rho^2 - h_2^2}\sqrt{h_2^2 - \mu^2}\sqrt{h_2^2 - \nu^2}}{h_1h_2} \right), \quad (4.28)$$

με μετρικούς συντελεστές:

$$h_\rho = \|\mathbf{r}_\rho\| = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \right\| = \frac{\sqrt{\rho^2 - \mu^2}\sqrt{\rho^2 - \nu^2}}{\sqrt{\rho^2 - h_3^2}\sqrt{\rho^2 - h_2^2}}, \quad (4.29)$$

$$h_\mu = \|\mathbf{r}_\mu\| = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mu} \right\| = \frac{\sqrt{\rho^2 - \mu^2}\sqrt{\mu^2 - \nu^2}}{\sqrt{\mu^2 - h_3^2}\sqrt{h_2^2 - \mu^2}}, \quad (4.30)$$

$$h_\nu = \|\mathbf{r}_\nu\| = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \nu} \right\| = \frac{\sqrt{\rho^2 - \nu^2}\sqrt{\mu^2 - \nu^2}}{\sqrt{h_3^2 - \nu^2}\sqrt{h_2^2 - \nu^2}}. \quad (4.31)$$

Το τοπικό ελλειψοειδές σύστημα δίνεται από τα διανύσματα:

$$\hat{\rho} = \frac{\mathbf{r}_\rho}{\|\mathbf{r}_\rho\|} = \frac{\rho}{h_\rho} \sum_{i=1}^3 \frac{x_i}{\rho^2 - a_1^2 + a_i^2} \hat{\mathbf{x}}_i, \quad (4.32)$$

$$\hat{\mu} = \frac{\mathbf{r}_\mu}{\|\mathbf{r}_\mu\|} = \frac{\mu}{h_\mu} \sum_{i=1}^3 \frac{x_i}{\mu^2 - a_1^2 + a_i^2} \hat{\mathbf{x}}_i, \quad (4.33)$$

$$\hat{\nu} = \frac{\mathbf{r}_\nu}{\|\mathbf{r}_\nu\|} = \frac{\nu}{h_\nu} \sum_{i=1}^3 \frac{x_i}{\nu^2 - a_1^2 + a_i^2} \hat{\mathbf{x}}_i, \quad (4.34)$$

και ορίζουν ένα δεξιόστροφο, ορθοκανονικό σύστημα  $\rho \rightarrow \nu \rightarrow \mu \rightarrow \rho$ .

## 4.2 Η ελλειψοειδής αναπαράσταση του τελεστή Laplace

Ο τελεστής Laplace στο ελλειψοειδές σύστημα έχει την μορφή [10]:

$$\Delta u = \frac{1}{h_\rho h_\mu h_\nu} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{h_\mu h_\nu}{h_\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{h_\nu h_\rho}{h_\mu} \frac{\partial u}{\partial \mu} \right) + \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \frac{h_\rho h_\mu}{h_\nu} \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \right]. \quad (4.35)$$

Υπολογίζοντας τις μερικές παραγώγους από τις σχέσεις (4.29) - (4.31) και αντικαθιστώντας στην σχέση (4.35), η ακριβής μορφή του τελεστή Laplace στο ελλειψοειδές σύστημα συντεταγμένων είναι:

$$\Delta = \frac{1}{h_\rho^2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \left( \frac{\rho}{\rho^2 - h_3^2} + \frac{\rho}{\rho^2 - h_2^2} \right) \frac{\partial}{\partial \rho} \right] + \frac{1}{h_\mu^2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} + \left( \frac{\mu}{\mu^2 - h_3^2} + \frac{\mu}{\mu^2 - h_2^2} \right) \frac{\partial}{\partial \mu} \right] + \frac{1}{h_\nu^2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} + \left( \frac{\nu}{\nu^2 - h_3^2} + \frac{\nu}{\nu^2 - h_2^2} \right) \frac{\partial}{\partial \nu} \right], \quad (4.36)$$

ή σε ισοδύναμη μορφή:

$$\Delta = \frac{1}{(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2)} \left( \sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\rho^2 - h_2^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \left( \sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\rho^2 - h_2^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{(\rho^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu^2)} \left( \sqrt{\mu^2 - h_3^2} \sqrt{h_2^2 - \mu^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \right) \left( \sqrt{\mu^2 - h_3^2} \sqrt{h_2^2 - \mu^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{(\rho^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2)} \left( \sqrt{h_3^2 - \nu^2} \sqrt{h_2^2 - \nu^2} \frac{\partial}{\partial \nu} \right) \left( \sqrt{h_3^2 - \nu^2} \sqrt{h_2^2 - \nu^2} \frac{\partial}{\partial \nu} \right). \quad (4.37)$$

## 4.3 Εξίσωση Lamé

Παρατηρώντας την μορφή (4.37) του τελεστή του Laplace εισάγονται οι μεταβλητές  $\xi, \eta, \zeta$ . Η μεταβλητές αυτές καλούνται θερμομετρικές παράμετροι και επιλέγονται έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι σχέσεις [10]:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\rho^2 - h_2^2} \frac{\partial}{\partial \rho}, \quad (4.38)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \sqrt{\mu^2 - h_3^2} \sqrt{h_2^2 - \mu^2} \frac{\partial}{\partial \mu}, \quad (4.39)$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} = \sqrt{h_3^2 - \nu^2} \sqrt{h_2^2 - \nu^2} \frac{\partial}{\partial \nu}, \quad (4.40)$$

εφαρμόζοντας κανόνα αλυσίδας και ολοκλήρωση προκύπτουν οι μεταβλητές  $\xi, \eta, \zeta$  σε μορφή ελλειπτικών ολοκληρωμάτων :

$$\xi(\rho) = \int_{h_2}^{\rho} \frac{1}{\sqrt{t^2 - h_3^2} \sqrt{t^2 - h_2^2}} dt, \quad h_2 \leq \rho \leq \infty, \quad (4.41)$$

$$\eta(\mu) = \int_{h_3}^{\mu} \frac{1}{\sqrt{t^2 - h_3^2} \sqrt{h_2^2 - t^2}} dt, \quad h_3 \leq \mu \leq h_2, \quad (4.42)$$

$$\zeta(\nu) = \int_0^{\nu} \frac{1}{\sqrt{h_3^2 - t^2} \sqrt{h_2^2 - t^2}} dt, \quad 0 \leq \nu \leq h_3, . \quad (4.43)$$

Οι θερμομετρικές παράμετροι μέσω των ελλειπτικών ολοκληρωμάτων (4.41) - (4.43) εξαρτώνται κάθε φορά αποκλειστικά από μία ελλειψοειδή μεταβλητή, ενώ τα ελλειπτικά ολοκληρώματα βοηθούν στο να εξομαλυνθούν οι ανισοτροπίες του ελλειψοειδούς συστήματος δρώντας ως παράγοντες κλιμακοποίησης των ελλειψοειδών μεταβλητών. Πλέον ο τελεστής του Laplace γράφεται στη μορφή:

$$\Delta = \frac{1}{(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2)} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{(\rho^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu^2)} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{1}{(\rho^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2)} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}, \quad (4.44)$$

και η εξίσωση του Laplace γράφεται στη μορφή:

$$(\mu^2 - \nu^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (\rho^2 - \nu^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + (\rho^2 - \mu^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} = 0. \quad (4.45)$$

Η λαπλασιανή είναι γραμμικός συνδυασμός των δεύτερων μερικών παραγώγων, αλλά με άνισους συντελεστές. Αυτό έχει ως συνέπεια η εξίσωση (4.45) να μην είναι διαχωρίσιμη. Έστω οι ταυτότητες:

$$(\mu^2 - \nu^2) + (\nu^2 - \rho^2) + (\rho^2 - \mu^2) = 0, \quad (4.46)$$

$$\rho^2(\mu^2 - \nu^2) + \mu^2(\nu^2 - \rho^2) + \nu^2(\rho^2 - \mu^2) = 0, \quad (4.47)$$

τότε πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (4.46) με  $Au$  και την εξίσωση (4.47) με  $Bu$  [10], όπου  $A, B$  σταθερές, και προσθέτοντας κατα μέλη τις σχέσεις (4.45), (4.46) και (4.47), προκύπτει η



εξίσωση:

$$(\mu^2 - \nu^2) \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + A\rho^2 + B \right) u + (\nu^2 - \rho^2) \left( -\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + A\mu^2 + B \right) u + (\rho^2 - \mu^2) \left( \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + A\nu^2 + B \right) u = 0, \quad (4.48)$$

η οποία είναι πλέον διαχωρίσιμη ως προς τους αντίστοιχους συντελεστές  $\rho, \mu, \nu$ . Χρησιμοποιώντας την μέθοδο χωριζομένων μεταβλητών, εισάγεται ως λύση της (4.45) η συνάρτηση της μορφής:

$$u(\rho, \mu, \nu) = R(\rho)M(\mu)N(\nu), \quad (4.49)$$

οπότε αντικαθιστώντας στην (4.45):

$$\frac{(\mu^2 - \nu^2)}{R(\rho)} \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + A\rho^2 + B \right) R(\rho) + \frac{(\nu^2 - \rho^2)}{M(\mu)} \left( -\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + A\mu^2 + B \right) M(\mu) + \frac{(\rho^2 - \mu^2)}{N(\nu)} \left( \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + A\nu^2 + B \right) N(\nu) = 0, \quad (4.50)$$

και η παραπάνω εξίσωση ικανοποιείται αν:

$$\frac{\partial^2 R(\rho)}{\partial \xi^2} + (A\rho^2 + B) R(\rho) = 0, \quad (4.51)$$

$$-\frac{\partial^2 M(\mu)}{\partial \eta^2} + (A\mu^2 + B) M(\mu) = 0, \quad (4.52)$$

$$\frac{\partial^2 N(\nu)}{\partial \zeta^2} + (A\nu^2 + B) N(\nu) = 0. \quad (4.53)$$

Υπολογίζοντας τις παραγώγους  $\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$ ,  $\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$  και  $\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}$  από τις σχέσεις (4.38) - (4.40) και αντικαθιστώντας στις σχέσεις (4.51) - (4.53):

$$(\rho - h_3^2)(\rho^2 - h_2^2) \frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \rho (2\rho^2 - h_3^2 - h_2^2) \frac{dR(\rho)}{d\rho} + (A\rho^2 + B) R(\rho) = 0, \quad \rho \in (h_2, +\infty), \quad (4.54)$$

$$(\mu - h_3^2)(\mu^2 - h_2^2) \frac{d^2 R(\mu)}{d\mu^2} + \mu (2\mu^2 - h_3^2 - h_2^2) \frac{dR(\mu)}{d\mu} + (A\mu^2 + B) R(\mu) = 0, \quad \mu \in (h_3, h_2), \quad (4.55)$$

$$(\nu - h_3^2)(\nu^2 - h_2^2) \frac{d^2 R(\nu)}{d\nu^2} + \nu (2\nu^2 - h_3^2 - h_2^2) \frac{dR(\nu)}{d\nu} + (A\nu^2 + B) R(\nu) = 0, \quad \nu \in (h_2, +\infty), \quad (4.56)$$

και επειδή οι εξισώσεις (4.54) - (4.56) έχουν την ίδια μορφή για κάθε μία από τις αντίστοιχες μεταβλητές, θέτοντας  $E(x)$  στην θέση των  $R(\rho)$ ,  $M(\mu)$ ,  $N(\nu)$  προκύπτει η εξίσωση Lamé:

$$(x^2 - h_3^2)(x^2 - h_2^2) \frac{d^2 E(x)}{dx^2} + x(2x^2 - h_3^2 - h_2^2) \frac{dE(x)}{dx} + (Ax^2 + B)E(x) = 0, \quad (4.57)$$

όπου τα  $A, B \in \mathbb{R}$  είναι σταθερές και ικανοποιείται από την συνάρτηση  $E(\rho)$  στο διάστημα  $(h_2, +\infty)$ , από την  $E(\mu)$  στο διάστημα  $(h_3, h_2)$  και από την  $E(\nu)$  στο διάστημα  $(0, h_3)$ . Η επίλυση της εξίσωσης Lamé απαιτεί και την εύρεση των συντελεστών  $A, B$ . Υποθέτοντας ότι η λύση της (4.57) στο σφαιροκωνικό σύστημα συντεταγμένων είναι της μορφής:

$$u(\rho, \mu, \nu) = R(\rho)V(\mu, \nu), \quad (4.58)$$

και υπολογίζοντας τον τελεστή και την εξίσωση Laplace στο σφαιροκωνικό σύστημα, προκύπτει  $A = n(n+1)$  για  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Η εύρεση της σταθεράς  $B$  εξαρτάται από την εκάστοτε κλάση στην οποία ανήκει η συνάρτηση Lamé.

## 4.4 Συναρτήσεις Lamé

Η επίλυση του τελεστή Laplace στο ελλειψοειδές σύστημα συντεταγμένων οδηγεί στην εξίσωση Lamé (4.57) η οποία ικανοποιείται από τις συναρτήσεις  $E(\rho)$ ,  $E(\mu)$ ,  $E(\nu)$  στα αντίστοιχα διαστήματα που ορίζονται οι μεταβλητές  $\rho, \mu, \nu$ . Οι σταθερές  $A$  και  $B$  εκφράζονται μέσω των

ακέραιων αριθμών  $n$  και  $m$  όπου το  $n$  καθορίζει τον βαθμό και το  $m$  την τάξη κάθε λύσης της εξίσωσης, όπως στις σφαιρικές αρμονικές. Η εξίσωση έχει δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις για κάθε  $n = 0, 1, 2, \dots$  και  $m = 1, 2, \dots, 2n + 1$ . Η μία λύση συμβολίζεται με  $E_n^m$ , είναι ομαλή στο μηδέν και καλείται συνάρτηση Lamé πρώτου είδους ή εσωτερική λύση, ενώ η δεύτερη λύση συμβολίζεται με  $F_n^m$  είναι ομαλή στο άπειρο και καλείται συνάρτηση Lamé δεύτερου είδους ή εξωτερική λύση.

### Συναρτήσεις Lamé πρώτου είδους

Για την εύρεση των εσωτερικών λύσεων  $E_n^m$  αρχικά συγκρίνεται το αρμονικό ανάπτυγμα των εσωτερικών ελλειψοειδών αρμονικών  $E(\mu)E(\nu)$  με το αυτό των σφαιρικών αρμονικών οι οποίες δίνονται από τη σχέση:

$$r^n Y_n^m(\theta, \phi) = r^n P_n^m(\cos\theta) e^{im\phi}, \quad (4.59)$$

όπου  $P_n^m$  οι συναρτήσεις Legendre. Προκύπτουν έτσι τέσσερις κλάσεις συναρτήσεων Lamé [10] που συμβολίζονται με  $K, L, M, N$  και έχουν την μορφή:

$$K_n(x) = P_n(x), \quad P_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{n-2k}, \quad (4.60)$$

$$L_n(x) = \sqrt{x^2 - h_3^2} R_{n-1}(x), \quad (4.61)$$

$$M_n(x) = \sqrt{x^2 - h_2^2} R_{n-1}(x), \quad R_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{n-1-2k}, \quad (4.62)$$

$$N_n(x) = \sqrt{x^2 - h_3^2} \sqrt{x^2 - h_2^2} S_{n-2}(x), \quad S_{n-2}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{n-2-2k}. \quad (4.63)$$

Με αυτόν τον τρόπο παράγονται  $2n + 1$  συναρτήσεις από όλες τις κλάσεις όταν το  $n$  είναι άρτιο και όταν το  $n$  είναι περιττό. Αναλυτικά αποτελέσματα για την κλειστή μορφή των συναρτήσεων Lamé υπάρχουν στην βιβλιογραφία για βαθμό  $n \leq 3$ , ενώ για βαθμό  $n \geq 8$  είναι θεωρητικά αδύνατη [10] η εύρεση κλειστής μορφής. Στην παρούσα εργασία θα χρειαστούν οι συναρτήσεις Lamé για βαθμό  $n = 0, 1, 2, 3$  οι οποίες και είναι για  $x = \rho, \mu, \nu$  [10]:

από την κλάση  $K$

$$n = 0 \quad K_0^1(x) = 1, \quad (4.64)$$

$$n = 1 \quad K_1^1(x) = x, \quad (4.65)$$

$$n = 2 \quad K_2^1(x) = x^2 + \Lambda - a_1^2, \quad K_2^2(x) = x^2 + \Lambda' - a_1^2, \quad (4.66)$$

$$n = 3 \quad K_3^1(x) = x^3 + (\Lambda_1 - a_1^2)x, \quad K_3^2(x) = x^3 + (\Lambda'_1 - a_1^2)x, \quad (4.67)$$

όπου

$$\Lambda, \Lambda' = a_1^2 - \frac{h_3^2 + h_2^2}{3} \pm \frac{\sqrt{h_1^4 + h_3^2 h_2^3}}{3}, \quad (4.68)$$

$$\Lambda_1, \Lambda'_1 = a_1^2 - \frac{2h_3^2 + 2h_2^2}{5} \pm \frac{\sqrt{4h_1^2 + h_3^2 h_2^3}}{5}, \quad (4.69)$$

από την κλάση  $L$

$$n = 1 \quad L_1^1(x) = \sqrt{x^2 - h_3^2}, \quad (4.70)$$

$$n = 2 \quad L_2^1(x) = x\sqrt{x^2 - h_3^2}, \quad (4.71)$$

$$n = 3 \quad L_3^1(x) = \sqrt{x^2 - h_3^2}(x^2 + \Lambda_2 - a_1^2), \quad L_3^2(x) = \sqrt{x^2 - h_3^2}(x^2 + \Lambda'_2 - a_1^2), \quad (4.72)$$

όπου

$$\Lambda_2, \Lambda'_2 = a_1^2 - \frac{h_3^2 + 2h_2^2}{5} \pm \frac{\sqrt{3h_4^2 + h_1^4 h_3^2 h_2^2}}{5}, \quad (4.73)$$

από την κλάση  $M$

$$n = 1 \quad M_1^1(x) = \sqrt{x^2 - h_2^2}, \quad (4.74)$$

$$n = 2 \quad M_2^1(x) = x\sqrt{x^2 - h_2^2}, \quad (4.75)$$

$$n = 3 \quad M_3^1(x) = \sqrt{x^2 - h_2^2}(x^2 + \Lambda_3 - a_1^2), \quad M_3^2(x) = \sqrt{x^2 - h_2^2}(x^2 + \Lambda'_3 - a_1^2), \quad (4.76)$$

όπου

$$\Lambda_3, \Lambda'_3 = a_1^2 - \frac{2h_3^2 + h_2^2}{5} \pm \frac{\sqrt{3h_3^4 + h_1^4 h_3^2 h_2^2}}{5}, \quad (4.77)$$

και από την κλάση  $N$

$$n = 2 \quad N_2^1(x) = \sqrt{x^2 - h_3^2} \sqrt{x^2 - h_2^2}, \quad (4.78)$$

$$n = 3 \quad N_3^1(x) = x \sqrt{x^2 - h_3^2} \sqrt{x^2 - h_2^2}. \quad (4.79)$$

### Συναρτήσεις Lamé δεύτερου είδους

Για την εύρεση της εξωτερικής συνάρτησης Lamé  $F_n^m$  χρησιμοποιείται η μέθοδος υποβιβασμού τάξης και αναζητούνται λύσεις της μορφής:

$$F_n(x) = \Psi_n(x)E_n(x), \quad (4.80)$$

όπου  $E_n(x)$  είναι η αντίστοιχη εσωτερική συνάρτηση. Αντικαθιστώντας την σχέση (4.80) στην εξίσωση Lamé (4.57) και εφαρμόζοντας ολοκλήρωση δύο φορές προκύπτει η  $\Psi(x)$  από την οποία καταλήγουμε στην εξωτερική λύση [10]:

$$F_n(x) = E_n(x) \int_{x_0}^x \frac{dt}{(E_n(t))^2 \sqrt{t^2 - h_3^2} \sqrt{t^2 - h_2^2}}. \quad (4.81)$$

Καθώς η ελλειψοειδής μεταβλητή  $\rho$  τείνει στο άπειρο το ελλειψοειδές τείνει να μετασχηματιστεί σε σφαίρα και άρα τα  $\rho$ ,  $r$  είναι ασυμπτωτικά ίσα. Επίσης, η ακτινική εξάρτηση της εσωτερικής αρμονικής  $E_n(\rho)$  και της εξωτερικής αρμονικής  $F_n(\rho)$  είναι  $r^n$  και  $r^{-n} + 1$  αντίστοιχα. Επομένως για να γίνεται κατα την αναγωγή του ελλειψοειδούς σε σφαίρα και η αντίστοιχη αναγωγή της εξωτερικής ελλειψοειδούς αρμονικής στην εξωτερική σφαιρική αρμονική πρέπει οι συναρτήσεις  $F_n(\rho)$  να κανονικοποιούνται με την συνθήκη:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho^{n+1} F_n(\rho) = 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.82)$$

οπότε απαιτώντας:

$$F_n(\rho) = c E_n(\rho) \int_{\rho}^{+\infty} \frac{dt}{(E_n(t))^2 \sqrt{t^2 - h_3^2} \sqrt{t^2 - h_2^2}}, \quad (4.83)$$

και λαμβάνοντας το όριο καθώς το  $\rho$  τείνει στο  $r$ , τότε οι ημιεστιακές αποστάσεις  $h_2, h_3$  τείνουν στο μηδέν και προκύπτει η σταθερά  $c = 2n + 1$ . Οπότε η εξωτερική συνάρτηση Lamé είναι:

$$F_n(\rho) = (2n + 1)E_n(\rho) \int_{\rho}^{+\infty} \frac{dt}{(E_n(t))^2 \sqrt{t^2 - h_3^2} \sqrt{t^2 - h_2^2}}, \quad \rho > h_2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.84)$$

## 4.5 Ελλειψοειδείς αρμονικές

### Εσωτερικές ελλειψοειδείς αρμονικές

Οι εσωτερικές ελλειψοειδείς αρμονικές ορίζονται από τα γινόμενα των εσωτερικών συναρτήσεων Lamé και είναι:

$$\mathbb{E}_n^m(\rho, \mu, \nu) = E_n^m(\rho)E_n^m(\mu)E_n^m(\nu), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 1, 2, \dots, 2n + 1, \quad (4.85)$$

για το πρώτο ογδοημόριο όπου  $\rho \in [h_2, \infty)$ ,  $\mu \in [h_3, h_2]$ ,  $\nu \in [0, h_3]$ . Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.64) - (4.79), υπολογίζονται οι εσωτερικές ελλειψοειδείς αρμονικές για  $n \leq 3$  και είναι [10]:

για  $n = 0$

$$\mathbb{E}_1^1(\rho, \mu, \nu) = 1, \quad (4.86)$$

για  $n = 1$

$$\mathbb{E}_1^1(\rho, \mu, \nu) = \rho\mu\nu, \quad (4.87)$$

$$\mathbb{E}_1^2(\rho, \mu, \nu) = \sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\mu^2 - h_3^2} \sqrt{h_3^2 - \nu^2}, \quad (4.88)$$

$$\mathbb{E}_1^3(\rho, \mu, \nu) = \sqrt{\rho^2 - h_2^2} \sqrt{h_2^2 - \mu^2} \sqrt{h_2^2 - \nu^2}, \quad (4.89)$$

για  $n = 2$

$$\mathbb{E}_2^1(\rho, \mu, \nu) = (\rho^2 + \Lambda - a_1^2)(\mu^2 + \Lambda - a_1^2)(\nu^2 + \Lambda - a_1^2), \quad (4.90)$$

$$\mathbb{E}_2^2(\rho, \mu, \nu) = (\rho^2 + \Lambda' - a_1^2)(\mu^2 + \Lambda' - a_1^2)(\nu^2 + \Lambda' - a_1^2), \quad (4.91)$$

$$\mathbb{E}_2^3(\rho, \mu, \nu) = \rho\sqrt{\rho^2 - h_3^2}\mu\sqrt{\mu^2 - h_3^2}\nu\sqrt{h_3^2 - \nu^2}, \quad (4.92)$$

$$\mathbb{E}_2^4(\rho, \mu, \nu) = \rho\sqrt{\rho^2 - h_2^2}\mu\sqrt{h_2^2 - \mu^2}\nu\sqrt{h_2^2 - \nu^2}, \quad (4.93)$$

$$\mathbb{E}_2^5(\rho, \mu, \nu) = \sqrt{\rho^2 - h_3^2}\sqrt{\rho^2 - h_2^2}\sqrt{\mu^2 - h_3^2}\sqrt{h_2^2 - \mu^2}\sqrt{h_3^2 - \nu^2}\sqrt{h_2^2 - \nu^2}, \quad (4.94)$$

για  $n = 3$

$$\mathbb{E}_3^1(\rho, \mu, \nu) = \rho(\rho^2 + \Lambda_1 - a_1^2)\mu(\mu^2 + \Lambda_1 - a_1^2)\nu(\nu^2 + \Lambda_1 - a_1^2), \quad (4.95)$$

$$\mathbb{E}_3^2(\rho, \mu, \nu) = \rho(\rho^2 + \Lambda'_1 - a_1^2)\mu(\mu^2 + \Lambda'_1 - a_1^2)\nu(\nu^2 + \Lambda'_1 - a_1^2), \quad (4.96)$$

$$\mathbb{E}_3^3(\rho, \mu, \nu) = \sqrt{\rho^2 - h_3^2}(\rho^2 + \Lambda_2 - a_1^2)\sqrt{\mu^2 - h_3^2}(\mu^2 + \Lambda_2 - a_1^2)\sqrt{h_3^2 - \nu^2}(\nu^2 + \Lambda_2 - a_1^2), \quad (4.97)$$

$$\mathbb{E}_3^4(\rho, \mu, \nu) = \sqrt{\rho^2 - h_3^2}(\rho^2 + \Lambda'_2 - a_1^2)\sqrt{\mu^2 - h_3^2}(\mu^2 + \Lambda'_2 - a_1^2)\sqrt{h_3^2 - \nu^2}(\nu^2 + \Lambda'_2 - a_1^2), \quad (4.98)$$

$$\mathbb{E}_3^5(\rho, \mu, \nu) = \sqrt{\rho^2 - h_2^2}(\rho^2 + \Lambda_3 - a_1^2)\sqrt{h_2^2 - \mu^2}(\mu^2 + \Lambda_3 - a_1^2)\sqrt{h_2^2 - \nu^2}(\nu^2 + \Lambda_3 - a_1^2), \quad (4.99)$$

$$\mathbb{E}_3^6(\rho, \mu, \nu) = \sqrt{\rho^2 - h_2^2}(\rho^2 + \Lambda'_3 - a_1^2)\sqrt{h_2^2 - \mu^2}(\mu^2 + \Lambda'_3 - a_1^2)\sqrt{h_2^2 - \nu^2}(\nu^2 + \Lambda'_3 - a_1^2), \quad (4.100)$$

$$\mathbb{E}_3^7(\rho, \mu, \nu) = \rho\sqrt{\rho^2 - h_3^2}\sqrt{\rho^2 - h_2^2}\mu\sqrt{\mu^2 - h_3^2}\sqrt{h_2^2 - \mu^2}\nu\sqrt{h_3^2 - \nu^2}\sqrt{h_2^2 - \nu^2}. \quad (4.101)$$

## Εξωτερικές ελλειψοειδείς αρμονικές

Οι εξωτερικές ελλειψοειδείς αρμονικές ορίζονται από τα γινόμενα των εξωτερικών συναρτήσεων Lamé και είναι:

$$\mathbb{F}_n^m(\rho, \mu, \nu) = F_n^m(\rho)E_n^m(\mu)E_n^m(\nu), \quad (4.102)$$

$$= (2n + 1)E_n^m(\rho)I_n^m(\rho), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 1, 2, \dots, 2n + 1, \quad (4.103)$$

για το πρώτο ογδοημόριο όπου  $\rho \in [h_2, \infty)$ ,  $\mu \in [h_3, h_2]$ ,  $\nu \in [0, h_3]$ . Τα ελλειπτικά ολοκληρώματα δίνονται από την σχέση :

$$I_n^m(\rho) = \int_{\rho}^{+\infty} \frac{dt}{(E_n(t))^2 \sqrt{t^2 - h_3^2} \sqrt{t^2 - h_2^2}}, \quad \rho \geq h_2. \quad (4.104)$$

Επειδή

$$E_n^m(t) = \mathcal{O}(t^n), \quad t \rightarrow \infty, \quad (4.105)$$

και

$$F_n^m(\rho) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\rho^{n+1}}\right), \quad \rho \rightarrow \infty, \quad (4.106)$$

άρα όλες οι εξωτερικές ελλειψοειδείς αρμονικές συναρτήσεις είναι ομαλές στο άπειρο.

### Επιφανειακές ελλειψοειδείς αρμονικές

Οι επιφανειακές ελλειψοειδείς αρμονικές ορίζονται από τα γινόμενα των εσωτερικών συναρτήσεων Lamé που αφορούν όμως μόνο τις γωνιακές μεταβλητές  $\mu$  και  $\nu$  και είναι :

$$S_n^m(\rho, \mu, \nu) = E_n^m(\mu) E_n^m(\nu), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 1, 2, \dots, 2n + 1. \quad (4.107)$$

Το σύνολο των επιφανειακών ελλειψοειδών αρμονικών είναι ορθογώνιο στην επιφάνεια οποιουδήποτε συνεστιακού ελλειψοειδούς με σταθερό  $\rho = a_1$ , ως προς την συνάρτηση βάρους :

$$l_{\rho}(\mu, \nu) = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - \mu^2} \sqrt{\rho^2 - \nu^2}}. \quad (4.108)$$

με σχέση ορθογωνιότητας :

$$\oint_{S_{a_1}} S_n^m(\mu, \nu) S_{n'}^{m'}(\mu, \nu) d\Omega(\mu, \nu) = \gamma_n^m \delta_{nn'} \delta_{mm'}, \quad (4.109)$$

για  $n, n' = 0, 1, 2, \dots$ ,  $m = 1, 2, \dots, 2n + 1$ ,  $m' = 1, 2, \dots, 2n' + 1$ , όπου οι σταθερές  $\gamma_n^m$  είναι οι σταθερές κανονικοποίησης :

$$\gamma_n^m = \oint_{S_{a_1}} [S_n^m(\mu, \nu)]^2 d\Omega(\mu, \nu), \quad (4.110)$$



για  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $m = 1, 2, \dots, 2n + 1$ , και  $d\Omega$  είναι η στερεά γωνία του στοιχειώδους ελλειψοειδούς με:

$$\begin{aligned} l_\rho(\mu, \nu) dS_\rho(\mu, \nu) &= \frac{h_\mu h_\nu}{\sqrt{\rho^2 - \mu^2} \sqrt{\rho^2 - \nu^2}} d\mu d\nu \\ &= \frac{\mu^2 - \nu^2}{\sqrt{\mu^2 - h_3^2} \sqrt{h_2^2 - \mu^2} \sqrt{h_3^2 - \nu^2} \sqrt{h_2^2 - \nu^2}} d\mu d\nu \\ &= d\Omega(\mu, \nu). \end{aligned} \quad (4.111)$$

Πράγματι, έστω οι εσωτερικές αρμονικές συναρτήσεις  $\mathbb{E}_n^m$  και  $\mathbb{E}_{n'}^{m'}$ . Τότε εφαρμόζοντας την δεύτερη σχέση του Green στο ελλειψοειδές χωρίο  $V_\rho$  που φράσσεται από την επιφάνεια  $S_\rho$ :

$$\begin{aligned} &\int_{V_\rho} \left[ \mathbb{E}_n^m(\rho, \mu, \nu) \Delta \mathbb{E}_{n'}^{m'}(\rho, \mu, \nu) - \mathbb{E}_{n'}^{m'}(\rho, \mu, \nu) \Delta \mathbb{E}_n^m(\rho, \mu, \nu) \right] dv(\rho, \mu, \nu) \\ &= \oint_{S_\rho} \left[ \mathbb{E}_n^m(\rho, \mu, \nu) \frac{\partial}{\partial n} \mathbb{E}_{n'}^{m'}(\rho, \mu, \nu) - \mathbb{E}_{n'}^{m'}(\rho, \mu, \nu) \frac{\partial}{\partial n} \mathbb{E}_n^m(\rho, \mu, \nu) \right] dS_\rho(\mu, \nu). \end{aligned} \quad (4.112)$$

Η κάθετη παραγωγήσις πάνω στο ελλειψοειδές είναι:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} &= \hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \nabla = \frac{1}{h_\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} = \frac{\sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\rho^2 - h_2^2}}{\sqrt{\rho^2 - \mu^2} \sqrt{\rho^2 - \nu^2}} \frac{\partial}{\partial \rho} \\ &= \sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\rho^2 - h_2^2} l_\rho(\mu, \nu) \frac{\partial}{\partial \rho}, \end{aligned} \quad (4.113)$$

και επειδή η  $\mathbb{E}_n^m, \mathbb{E}_{n'}^{m'}$  ικανοποιούν την εξίσωση Laplace η (4.112) γράφεται:

$$\begin{aligned} &\oint_{S_\rho} \left[ \mathbb{E}_n^m(\rho, \mu, \nu) \frac{\partial}{\partial \rho} \mathbb{E}_{n'}^{m'}(\rho, \mu, \nu) - \mathbb{E}_{n'}^{m'}(\rho, \mu, \nu) \frac{\partial}{\partial \rho} \mathbb{E}_n^m(\rho, \mu, \nu) \right] l_\rho(\mu, \nu) dS_\rho(\mu, \nu) \\ &= \left[ E_n^m(\rho) \frac{\partial}{\partial \rho} E_{n'}^{m'}(\rho) - E_{n'}^{m'}(\rho) \frac{\partial}{\partial \rho} E_n^m(\rho) \right] \oint_{S_{a_1}} S_n^m(\mu, \nu) S_{n'}^{m'}(\mu, \nu) d\Omega(\mu, \nu) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.114)$$

Ο συντελεστής  $\left[ E_n^m(\rho) \frac{\partial}{\partial \rho} E_{n'}^{m'}(\rho) - E_{n'}^{m'}(\rho) \frac{\partial}{\partial \rho} E_n^m(\rho) \right]$  μηδενίζεται μόνο όταν οι δύο συναρτήσεις Lamé είναι γραμμικά εξαρτημένες. Αυτό σημαίνει ότι  $n = n'$  και  $m = m'$ . Σε κάθε άλλη περίπτωση, μηδενίζεται το ολοκλήρωμα και αυτό αποδεικνύει την σχέση ορθογωνιότητας (4.109).

Στα προβλήματα συνοριακών τιμών είναι αυτή η σχέση καθετότητας που εξασφαλίζει τον προσδιορισμό των συνοριακών δεδομένων σε ελλειψοειδή χωρία, καθώς μια ομαλή συνάρτηση  $F$

πάνω στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς σταθερού  $\rho$ , που έχει την αναράσταση:

$$F(\mu, \nu) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} f_n^m S_n^m(\mu, \nu), \quad (4.115)$$

τότε οι συντελεστές  $f_n^m$  θα δίνονται από την [10]:

$$f_n^m = \frac{1}{\gamma_n^m} \oint_{S_{a_1}} F(\mu, \nu) S_n^m(\mu, \nu) d\Omega(\mu, \nu). \quad (4.116)$$

Η πληρότητα του αναπτύγματος εξασφαλίζεται από την πληρότητα του συνόλου των σφαιρικών αρμονικών [10] καθώς κάθε σφαιρική αρμονική μπορεί να αναπαρασταθεί από μια ελλειψοειδή αρμονική και αντίστροφα. Συγκεκριμένα, η σχέση που εξασφαλίζει την πληρότητα είναι η σχέση κλειστότητας:

$$\frac{\delta(\mu - \mu')\delta(\nu - \nu')}{h_\mu h_\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{1}{\gamma_n^m} S_n^m(\mu', \nu') S_n^m(\mu, \nu), \quad (4.117)$$

με  $\delta$  να συμβολίζει το μέτρο Dirac.

Εκτός από την ορθογωνιότητα και την πληρότητα του συνόλου των επιφανειακών ελλειψοειδών αρμονικών βασική για την επίλυση συνωριακών προβλημάτων σε χωρία με ελλειψοειδές σύνορο είναι η θεμελιώδης λύση του τελεστή Laplace. Η αναπαράσταση θεμελιώδους λύσης του τελεστή Laplace σε ελλειψοειδείς συντεταγμένες βασίζεται στο ανάλογο του θεωρήματος άθροισης για τις ελλειψοειδείς αρμονικές που είναι [10]:

$$P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0) = \frac{4\pi}{(2n+1)} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{1}{\gamma_n^m} S_n^m(\mu, \nu) S_n^m(\mu_0, \nu_0), \quad (4.118)$$

για δύο οποιαδήποτε σημεία  $\mathbf{r}_0 = (\rho_0, \mu_0, \nu_0)$  και  $\mathbf{r} = (\rho, \mu, \nu)$ , όπου  $P_n^m$  το πολυώνυμο Legendre  $n$  βαθμού. Τότε αποδεικνύεται ότι [10]:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{4\pi}{2n+1} \frac{1}{\gamma_n^m} \mathbb{E}_n^m(\rho_0, \mu_0, \nu_0) \mathbb{F}_n^m(\rho, \mu, \nu), \quad \rho_0 < \rho, \quad (4.119)$$

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{4\pi}{2n+1} \frac{1}{\gamma_n^m} \mathbb{E}_n^m(\rho, \mu, \nu) \mathbb{F}_n^m(\rho_0, \mu_0, \nu_0), \quad \rho_0 > \rho. \quad (4.120)$$

## Κεφάλαιο 5

# Τα ευθέα προβλήματα ΗΕΓ και ΜΕΓ σε ελλειψοειδή γεωμετρία

Στην μελέτη των προβλημάτων της ηλεκτροεγκεφαλογραφίας και μαγνητοεγκεφαλογραφίας σε ελλειψοειδή γεωμετρία, αναφέρονται οι εργασίες των Γ. Δάσσιος και Φ. Καριώτου το 2003 [18] και 2004 [11] στις οποίες υπολογίζεται αναλυτικά το ηλεκτρικό δυναμικό και το μαγνητικό δυναμικό σε μορφή σειράς ελλειψοειδών αρμονικών, στο εξωτερικό του ομογενούς ελλειψοειδούς αγωγού, που παράγεται από σημειακό ηλεκτρικό δίπολο στο εσωτερικό του αγωγού. Η αναπαράσταση με αυτόν τον τρόπο προβάλλει τον ανισοτροπικό χαρακτήρα της ελλειψοειδούς γεωμετρίας και την εξάρτηση των πεδίων από την γεωμετρία του προτύπου.

### Διατύπωση του προβλήματος

Έστω  $S$  η επιφάνεια του τριαξονικού ελλειψοειδούς:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1, \quad (5.1)$$

με τις ημιστιακές αποστάσεις:

$$h_1 = \sqrt{a_2^2 - a_3^2}, \quad h_2 = \sqrt{a_1^2 - a_3^2}, \quad h_3 = \sqrt{a_1^2 - a_2^2}. \quad (5.2)$$

Οι ελλειψοειδείς συντεταγμένες  $\rho, \mu, \nu$  συνδέονται με τις καρτεσιανές συντεταγμένες μέσω των μετασχηματισμών:

$$x_1 = \frac{\rho\mu\nu}{h_2h_3}, \quad (5.3)$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{\rho^2 - h_3^2}\sqrt{\mu^2 - h_3^2}\sqrt{h_3^2 - \nu^2}}{h_1h_3}, \quad (5.4)$$

$$x_3 = \frac{\sqrt{\rho^2 - h_2^2}\sqrt{h_2^2 - \mu^2}\sqrt{h_2^2 - \nu^2}}{h_1h_2}, \quad (5.5)$$

για  $\rho \in [h_2, +\infty)$ ,  $\mu \in [h_3, h_2]$  και  $\nu \in [-h_3, h_3]$ . Η επιφάνεια  $S$  που δίνεται για  $\rho = a_1$  αναπαριστά το σύνορο του εγκεφάλου. Ο εσωτερικός του  $S$  χώρος  $V^-$  που δίνεται για  $\rho \in [h_2, a_1)$  έχει ηλεκτρική αγωγιμότητα  $\sigma$  και μαγνητική διαπερατότητα  $\mu_0$ . Ο εξωτερικός του  $S$  χώρος  $V^+$  που δίνεται για  $\rho \in (a_1, +\infty)$  είναι μη αγωγίμος με ίδια μαγνητική διαπερατότητα  $\mu_0$ . Η πυκνότητα ρεύματος είναι:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}^p + \sigma\mathbf{E}. \quad (5.6)$$

Στο πλαίσιο της σχεδόν στάσιμης θεωρίας οι εξισώσεις Maxwell είναι:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (5.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J}, \quad (5.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (5.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (5.10)$$

και άρα το πεδίο  $\mathbf{E}$  είναι αστρόβιλο, συνεπώς:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla u(\mathbf{r}). \quad (5.11)$$

Στο εσωτερικό του ελλειψοειδούς  $\rho = a_1$  το ηλεκτρικό δυναμικό  $u = u^-$  ικανοποιεί το εσωτερικό πρόβλημα Neumann:

$$\sigma^- \Delta u^-(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \mathbf{J}^p(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in V^-, \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} u^-(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in S, \quad (5.13)$$

ενώ στο εξωτερικό το ηλεκτρικό δυναμικό ικανοποιεί το εξωτερικό πρόβλημα Dirichlet:

$$\Delta u^+(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in V^+, \quad (5.14)$$

$$u^+(\mathbf{r}) = u^-(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S, \quad (5.15)$$

$$u^+(\mathbf{r}) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (5.16)$$

## 5.1 ΗΕΓ

### 5.1.1 Το εσωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό

Πρώτα επιλύεται το πρόβλημα Neumann (5.12)-(5.13). Η εξίσωση Poisson (5.12) έχει ως λύση το εσωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό που είναι άθροισμα μίας αρμονικής συνάρτησης  $\Phi$  που ικανοποιεί την εξίσωση Laplace στο εσωτερικό  $h_2 \leq \rho \leq a_1$  και μίας ειδικής λύσης, δηλαδή είναι:

$$\begin{aligned} u^-(\mathbf{r}) &= \Phi(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}, \\ &= \Phi(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}, \end{aligned} \quad (5.17)$$

και η  $\Phi$  ικανοποιεί την συνοριακή συνθήκη (5.13):

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\sigma} \frac{\partial}{\partial \rho} \mathbf{Q} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}, \quad \rho = a_1. \quad (5.18)$$

Λόγω της πληρότητας του συνόλου των ελλειψοειδών αρμονικών, υπάρχει ακολουθία όρων  $\{b_n^m\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $m = 1, 2, \dots, 2n + 1$ , ώστε η συνάρτηση  $\Phi(\mathbf{r})$  να γράφεται ως γραμμικός συνδιασμός εξωτερικών και εσωτερικών ελλειψοειδών αρμονικών, επειδή όμως η  $\Phi$  έχει εσωτερικό χαρακτήρα χρησιμοποιούνται μόνο οι εσωτερικές αρμονικές, άρα:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} b_n^m \mathbb{E}_n^m(\rho, \mu, \nu), \quad \rho \in [h_2, a_1]. \quad (5.19)$$

Για την έκφραση της ποσότητας  $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}$  σε ελλειψοειδείς αρμονικές χρησιμοποιείται η αναπαράσταση [11]:

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{4\pi}{2n+1} \frac{1}{\gamma_n^m} \mathbb{E}_n^m(\rho_0, \mu_0, \nu_0) \mathbb{F}_n^m(\rho, \mu, \nu), \quad \rho_0 < \rho, \quad (5.20)$$

όπου  $r_0 = (\rho_0, \mu_0, \nu_0)$  είναι η θέση της διπολικής πηγής και  $\gamma_n^m$  είναι οι σταθερές κανονικοποίησης και χρησιμοποιείται στη μορφή [11]:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} &= \nabla_{\mathbf{r}_0} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{4\pi}{2n+1} \frac{1}{\gamma_n^m} (\nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_n^m(\rho_0, \mu_0, \nu_0)) \mathbb{F}_n^m(\rho, \mu, \nu), \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{4\pi}{2n+1} \frac{1}{\gamma_n^m} (\nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_n^m(\rho_0, \mu_0, \nu_0)) |_{\rho_0=a_1} F_n^m(\rho) S_n^m(\mu, \nu), \end{aligned} \quad (5.21)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (5.19), (5.20) στην σχέση για το εσωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό (5.17) προκύπτει:

$$u^-(\rho, \mu, \nu) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \left[ b_n^m \mathbb{E}_n^m(\rho, \mu, \nu) + \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_n^m(\rho_0, \mu_0, \nu_0)}{(2n+1)\sigma\gamma_n^m} \mathbb{F}_n^m(\rho, \mu, \nu) \right], \quad (5.22)$$

η οποία χρησιμοποιώντας τις σχέσεις:

$$\mathbb{E}_n^m(\rho, \mu, \nu) = E_n^m(\rho) E_n^m(\mu) E_n^m(\nu), \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_n^m(\rho, \mu, \nu) &= (2n+1) \mathbb{E}_n^m(\rho, \mu, \nu) I_n^m(\rho), \\ &= (2n+1) E_n^m(\rho) E_n^m(\mu) E_n^m(\nu) I_n^m(\rho), \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$\mathbb{E}_0^1(\rho, \mu, \nu) = 1, \quad (5.25)$$

το ηλεκτρικό δυναμικό γράφεται [11]:

$$u^-(\rho, \mu, \nu) = b_0^1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \left[ b_n^m + \frac{1}{\sigma\gamma_n^m} (\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}_0)) I_n^m(\rho) \right] \mathbb{E}_n^m(\rho, \mu, \nu). \quad (5.26)$$

Εφαρμόζοντας την συνοριακή συνθήκη (5.13) στην σχέση (5.22) και χρησιμοποιώντας ιδιότητες καθετότητας, οι συντελεστές υπολογίζονται να είναι [11]:

$$b_n^m = \frac{1}{\gamma_n^m} (\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}_0)) \left[ \frac{1}{a_2 a_3 E_n^m(a_1) E_n^m(a_1)} - I_n^m(a_1) \right], \quad (5.27)$$

για  $n = 1, 2, \dots$ ,  $m = 1, 2, \dots, 2n + 1$ . Αντικαθιστώντας τους συντελεστές  $b_n^m$  στην (5.26) και θεωρώντας  $b_0^1 = 0$ , προκύπτει:

$$u^-(\rho, \mu, \nu) = \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{1}{(2n+1)\sigma\gamma_n^m} (\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}_0)) \frac{F_n^{m'}(a_1)}{E_n^{m'}(a_1)} \mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}). \quad (5.28)$$

και είναι το ηλεκτρικό δυναμικό στο εσωτερικό του ελλειψοειδούς  $\rho = a_1$ . Για την εύρεση του εξωτερικού ηλεκτρικού δυναμικού  $u^+$  επιλύεται το πρόβλημα Dirichlet (5.14)-(5.16). Η συνοριακή συνθήκη (5.15) απαιτεί την γνώση του  $u^-$  το οποίο βρέθηκε να δίνεται από τη σχέση (5.28). Για να εφαρμοστεί η συνοριακή συνθήκη στο πρόβλημα Dirichlet για το  $u^+$  θα πρέπει το  $u^-$  να εκφραστεί με επιφανειακές ελλειψοειδείς αρμονικές. Από την σχέση (5.28) και χρησιμοποιώντας την θεμελιώδη αναπαράσταση του τελεστή του Laplace (5.20) προκύπτει [11]:

$$u^-(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{1}{\sigma\gamma_n^m} (\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}_0)) \cdot \left[ I_n^m(\rho) - I_n^m(a_1) + \frac{1}{a_2 a_3 E_n^m(a_1) E_n^{m'}(a_1)} \right] \mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}) \quad (5.29)$$

$$= \frac{1}{4\pi\sigma} (\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0}) \cdot \left[ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} + 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{1}{\gamma_n^m} \left( \frac{1}{a_2 a_3 E_n^m(a_1) E_n^{m'}(a_1)} - I_n^m(a_1) \right) \cdot \mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}_0) \mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}) \right], \quad (5.30)$$

όπου η πρώτη έκφραση ισχύει στο  $\rho_0 < \rho < a_1$  και η δεύτερη έκφραση ισχύει παντού στο εσωτερικό του ελλειψοειδούς. Επειδή δεν υπάρχει τεχνική άθροισης των σειρών αυτών, δεν υπάρχει και κλειστή μορφή της λύσης για το εσωτερικό δυναμικό. Εκτελώντας πράξεις προκύπτουν οι τρεις διπολικοί όροι για  $n = 1$  και οι πέντε τετραπολικοί όροι για  $n = 2$ .

Είναι ενδιαφέρουσα η αναπαράσταση της λύσης σε καρτεσιανές συντεταγμένες. Αυτό γίνεται υπολογίζοντας τους όρους  $n = 1$  και  $n = 2$  στη σχέση (5.29). Ύστερα, εφαρμόζοντας τον τελεστή

κλίσης και υπολογίζοντας την παράγωγο  $E_n^{m'}$  [11]:

$$\begin{aligned}
u^-(\mathbf{r}) &= \frac{3}{4\pi\sigma} \sum_{m=1}^3 Q_m x_m \left[ I_1^m(\rho) - I_1^m(a_1) + \frac{1}{a_1 a_2 a_3} \right] \\
&\quad - \frac{5}{4\pi\sigma(\Lambda - \Lambda')} \sum_{m=1}^3 Q_m x_{0m} \left[ I_2^1(\rho) - I_2^1(a_1) + \frac{1}{2a_1 a_2 a_3 \Lambda} \right] \frac{\mathbb{E}_2^1(\mathbf{r})}{\Lambda - a_m^2} \\
&\quad + \frac{5}{4\pi\sigma(\Lambda - \Lambda')} \sum_{m=1}^3 Q_m x_{0m} \left[ I_2^2(\rho) - I_2^2(a_1) + \frac{1}{2a_1 a_2 a_3 \Lambda'} \right] \frac{\mathbb{E}_2^2(\mathbf{r})}{\Lambda' - a_m^2} \\
&\quad + \frac{15}{4\pi\sigma} \sum_{i,j=1, i \neq j}^3 Q_i x_{0j} x_i x_j \left[ I_2^{i+j}(\rho) - I_2^{i+j}(a_1) + \frac{1}{a_1 a_2 a_3 (a_i^2 + a_j^2)} \right] + \mathcal{O}(el_3) \\
&= \frac{3}{4\pi\sigma} \sum_{m=1}^3 Q_m x_m \left[ I_1^m(\rho) - I_1^m(a_1) + \frac{1}{a_1 a_2 a_3} \right] \\
&\quad - \frac{5\mathbb{L}}{4\pi\sigma(\Lambda - \Lambda')} \sum_{k=1}^3 \frac{Q_k x_{0k}}{\Lambda - a_k^2} \left[ I_2^1(\rho) - I_2^1(a_1) + \frac{1}{2a_1 a_2 a_3 \Lambda} \right] \left[ \sum_{m=1}^3 \frac{x_m^2}{\Lambda - a_m^2} + 1 \right] \\
&\quad + \frac{5\mathbb{L}'}{4\pi\sigma(\Lambda - \Lambda')} \sum_{k=1}^3 \frac{Q_k x_{0k}}{\Lambda' - a_k^2} \left[ I_2^2(\rho) - I_2^2(a_1) + \frac{1}{2a_1 a_2 a_3 \Lambda'} \right] \left[ \sum_{m=1}^3 \frac{x_m^2}{\Lambda' - a_m^2} + 1 \right] \\
&\quad + \frac{15}{4\pi\sigma} \sum_{i,j=1, i \neq j}^3 Q_i x_{0j} x_i x_j \left[ I_2^{i+j}(\rho) - I_2^{i+j}(a_1) + \frac{1}{a_1 a_2 a_3 (a_i^2 + a_j^2)} \right] + \mathcal{O}(el_3), \quad (5.31)
\end{aligned}$$

όπου  $\mathbb{L} = (\Lambda - a_1^2)(\Lambda - a_2^2)(\Lambda - a_3^2)$  και  $\mathbb{L}' = (\Lambda' - a_1^2)(\Lambda' - a_2^2)(\Lambda' - a_3^2)$ ,  $\mathcal{O}(el_3)$  είναι οι ελλειψοειδείς όροι τάξης μεγαλύτερης ή ίσης του τρία και  $Q_m, x_m, x_{0m}, m = 1, 2, 3$  είναι οι καρτεσιανές συνιστώσες των διανυσμάτων  $\mathbf{Q}, \mathbf{r}, \mathbf{r}_0$ . Σε σχέση με την συμπαγή αναπαράσταση (5.29) σε ελλειψοειδείς συντεταγμένες, η αντίστοιχη καρτεσιανή μορφή (5.31) προβάλλει τις συμμετρίες της γεωμετρίας. Αυτή η συμπεριφορά αντανακλά τον συμμετρικό τρόπο με τον οποίο οι καρτεσιανές συντεταγμένες εισάγονται στην σχέση (5.1) σε αντίθεση με το ελλειψοειδές σύστημα όπου η επιφάνεια (5.1) ορίζεται από το  $\rho = a_1$ , που είναι μία εξίσωση που περιλαμβάνει μόνο την  $\rho$  - εξάρτηση του συστήματος.

### 5.1.2 Το εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό

Το εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό είναι η λύση της εξίσωσης Laplace (5.14) και είναι μία εξωτερική αρμονική συνάρτηση που αναπαρίσταται με ένα ανάπτυγμα εξωτερικών ελλειψοειδών



αρμονικών της μορφής:

$$u^+(\rho, \mu, \nu) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} c_n^m \mathbb{F}_n^m(\rho, \mu, \nu). \quad (5.32)$$

Εφαρμόζοντας την συνοριακή συνθήκη (5.15), χρησιμοποιώντας την σχέση (5.24) και επιχειρήματα ορθογωνιότητας, το εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό γράφεται τελικά στη μορφή [11]:

$$u^+(\rho, \mu, \nu) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{(\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}_0))}{\sigma \gamma_n^m a_2 a_3 E_n^m(a_1) E_n^{m'}(a_1)} \frac{I_n^m(\rho)}{I_n^m(a_1)} \mathbb{E}_n^m(\rho, \mu, \nu), \quad (5.33)$$

ή εφαρμόζοντας τον τελεστή κλίσης επί του  $\mathbb{E}_n^m$  και τις αντίστοιχες παραγώγους στις συναρτήσεις  $E_n^m$  προκύπτει η αναλυτική μορφή [11]:

$$\begin{aligned} u^+(\rho, \mu, \nu) &= \frac{3}{4\pi\sigma a_1 a_2 a_3} \sum_{m=1}^3 Q_m x_m \frac{I_1^m(\rho)}{I_1^m(a_1)} \\ &- \frac{5}{8\pi\sigma a_1 a_2 a_3 (\Lambda - \Lambda')} \sum_{m=1}^3 Q_m x_{0m} \left[ \frac{I_2^1(\rho)}{I_2^1(a_1)} \frac{\mathbb{E}_2^1(\mathbf{r})}{\Lambda(\Lambda - a_m^2)} - \frac{I_2^2(\rho)}{I_2^2(a_1)} \frac{\mathbb{E}_2^2(\mathbf{r})}{\Lambda'(\Lambda' - a_m^2)} \right] \\ &+ \frac{15}{4\pi\sigma a_1 a_2 a_3} \sum_{i,j=1, i \neq j}^3 \frac{Q_i x_{0j} x_i x_j}{a_i^2 + a_j^2} \frac{I_2^{i+j}(\rho)}{I_2^{i+j}(a_1)} + \mathcal{O}(el_3). \end{aligned} \quad (5.34)$$

## 5.2 ΜΕΓ

### 5.2.1 Το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο

Η μέθοδος υπολογισμού του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου που περιγράφεται εδώ, υιοθετεί την μέθοδο του Sarvas για τον υπολογισμό στο σφαιρικό μοντέλο. Στο ελλειψοειδές σύστημα συντεταγμένων  $(\rho, \mu, \nu)$  το ηλεκτρικό δυναμικό που δημιουργείται από ένα ηλεκτρικό δίπολο στη θέση  $\mathbf{r}_0 = (\rho_0, \mu_0, \nu_0)$  στο εσωτερικό του ελλειψοειδούς με ροπή  $\mathbf{Q}$  επιλύει το εσωτερικό πρόβλημα Neumann και είναι:

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} - \frac{1}{\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}_0)}{(2n+1)\gamma_n^m} \frac{F_n^{m'}(a_1)}{E_n^{m'}(a_1)} \mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}). \quad (5.35)$$

Τα δεδομένα Dirichlet του ηλεκτρικού δυναμικού πάνω στο ελλειψοειδές  $\rho = a_1$ , παρέχουν το εξωτερικό μαγνητικό δυναμικό πεδίο μέσω της ολοκληρωτικής αναπαράστασης του Geselowitz:

$$B(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} - \frac{\mu_0 \sigma}{4\pi} \oint_{\rho=a_1} u(\mathbf{r}') \hat{\rho}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ds(\mathbf{r}'), \quad (5.36)$$

όπου

$$\hat{\mathbf{n}}' = \hat{\rho}' = \frac{a_1 a_2 a_3}{h_1 h_2 h_3} l_{a_1}(\mu', \nu') \sum_{m=1}^3 \frac{h_m}{a_m} S_1^m(\mu', \nu') \hat{\mathbf{x}}_m, \quad (5.37)$$

είναι το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα του ελλειψοειδούς  $\rho = a_1$  και  $l_{a_1}$  είναι η συνάρτηση βάρους πάνω στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς. Η διαδικασία υπολογισμού του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου ξεκινάει από το ότι οι συνοριακές τιμές του ηλεκτρικού δυναμικού στο εξωτερικό του αγωγού είναι:

$$u^-(a_1, \mu, \nu) = \frac{1}{\sigma a_2 a_3} \sum_{n=1}^{-\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_n^m(\rho_0, \mu_0, \nu_0)}{\gamma_n^m E_n^{m'}(a_1)} S_n^m(\mu, \nu). \quad (5.38)$$

Επιπλέον:

$$\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{4\pi}{2n+1} \frac{1}{\gamma_n^m} (\nabla_{\mathbf{r}'} \mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}'))|_{\rho'=a_1} F_n^m(\rho) S_n^m(\mu, \nu). \quad (5.39)$$

Στον τύπο Geselowitz ο πρώτος όρος οφείλεται στο διπολικό ρεύμα και ο δεύτερος όρος στην κατανομή διπόλων στο σύνορο της ελλειψοειδούς επιφάνειας. Επειδή το ολοκλήρωμα του δεύτερου όρου περιλαμβάνει γινόμενα ελλειψοειδών αρμονικών, η εμφάνιση της συνάρτησης βάρους  $l_{a_1}$  υποδεικνύει την χρήση των ιδιοτήτων ορθογωνιότητας για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος. Όμως, δεν υπάρχει γενικός τύπος που να εκφράζει το γινόμενο δυο επιφανειακών ελλειψοειδών αρμονικών ως επιφανειακή ελλειψοειδή αρμονική και άρα ο υπολογισμός γίνεται μόνο για

κάποιους όρους χαμηλού βαθμού, συγκεκριμένα εδώ για  $n = 1, 2$ . Έτσι υπολογίζεται ότι [10]:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \Big|_{\rho'=a_1} &= a_1 a_2 a_3 l_{a_1}(\mu', \nu') \\ &\times \left[ \frac{1}{3} \sum_{m=1}^3 (\hat{\mathbf{x}}_m \times \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{x}}_m) + \frac{3}{h_1 h_2 h_3} \sum_{m=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{h_m x_k}{a_m} I_1^k(\rho) (\hat{\mathbf{x}}_m \times \hat{\mathbf{x}}_k) S_1^m(\mu', \nu') \right. \\ &- \frac{1}{3(\Lambda - \Lambda')} \sum_{m=1}^3 (\hat{\mathbf{x}}_m \times \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{x}}_m) \left( \frac{S_2^1(\mu', \nu')}{\Lambda - a_m^2} - \frac{S_2^2(\mu', \nu')}{\Lambda' - a_m^2} \right) \\ &\left. + \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^3 \sum_{i \neq j=1}^3 \frac{a_j}{a_i} \frac{1}{h_{6-(i+j)}} (\hat{\mathbf{x}}_i \times \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{x}}_j) S_2^{i+j}(\mu', \nu') \right] + \mathcal{O}(el'_3), \quad (5.40) \end{aligned}$$

όπου:

$$\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\Lambda - \Lambda'} \sum_{m=1}^3 \left( \frac{\mathbb{F}_2^1(\mathbf{r})}{\Lambda - a_m^2} - \frac{\mathbb{F}_2^2(\mathbf{r})}{\Lambda' - a_m^2} \right) \hat{\mathbf{x}}_m \otimes \hat{\mathbf{x}}_m + 15 \sum_{i=1}^3 \sum_{i \neq j=1}^3 x_i x_j I_2^{i+j}(\rho) \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j. \quad (5.41)$$

Αντικαθιστώντας στον τύπο του Geselowitz προκύπτει:

$$\oint_S u(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ds(\mathbf{r}') = \sum_{m=1}^3 \zeta_m \boldsymbol{\beta}_m \gamma_1^m + \sum_{m=1}^5 \theta_m \boldsymbol{\delta}_m \gamma_2^m + \mathcal{O}(el'_3), \quad (5.42)$$

όπου οι συντελεστές που περιλαμβάνουν όρους πρώτης τάξης είναι:

$$\zeta_m = \frac{3a_m h_m Q_m}{4\pi a_1 a_2 a_3 h_1 h_2 h_3}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (5.43)$$

$$\boldsymbol{\beta}_m = 3 \frac{a_1 a_2 a_3}{h_1 h_2 h_3} \frac{h_m}{a_m} \sum_{k=1}^3 x_k I_1^k(\rho) (\hat{\mathbf{x}}_m \times \hat{\mathbf{x}}_k), \quad m = 1, 2, \dots \quad (5.44)$$

ενώ οι συντελεστές  $\theta_m, \boldsymbol{\delta}_m$   $m = 1, 2, 3, 4, 5$ , που περιλαμβάνουν όρους δεύτερης τάξης δίνονται στο [18]. Περαιτέρω πράξεις δίνουν την έκφραση:

$$\sum_{m=1}^3 \zeta_m \boldsymbol{\beta}_m \gamma_1^m = \frac{3}{\sigma} \sum_{m=1}^3 x_m I_1^m(\rho) (\mathbf{Q} \times \hat{\mathbf{x}}_m). \quad (5.45)$$

Ο αντίστοιχος όρος του αναπτύγματος (5.39) είναι:

$$\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = 3 \sum_{m=1}^3 x_m I_1^m(\rho) \hat{\mathbf{x}}_m + \mathcal{O}(el_2), \quad (5.46)$$

που αν συνδιαστεί με τη σχέση (5.45) προκύπτει ότι η έκφραση του μαγνητικού πεδίου από τον τύπο του Geselowitz δεν περιλαμβάνει όρους πρώτου βαθμού, διότι κάνοντας πράξεις προκύπτει ότι οι όροι πρώτου βαθμού είναι:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \times \left( 3 \sum_{m=1}^3 x_m I_1^m(\rho) \hat{\mathbf{x}}_m \right) - \frac{\mu_0 \sigma}{4\pi} \left( \frac{3}{\sigma} \sum_{m=1}^3 x_m I_1^m(\rho) (\mathbf{Q} \times \hat{\mathbf{x}}_m) \right) + \mathcal{O}(el_2) \\ &= \mathcal{O}(el_2). \end{aligned} \quad (5.47)$$

Οι επόμενοι όροι που είναι δευτέρου βαθμού είναι:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{d} \cdot \left[ \frac{1}{\Lambda - \Lambda'} \sum_{m=1}^3 \left( \frac{\mathbb{F}_2^1(\mathbf{r})}{\Lambda - a_m^2} - \frac{\mathbb{F}_2^2(\mathbf{r})}{\Lambda' - a_m^2} \right) \hat{\mathbf{x}}_m \otimes \hat{\mathbf{x}}_m \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{h_1^2 h_2^2 h_3^2} \sum_{i,j=1, i \neq j}^3 h_i h_j \mathbb{F}_2^{i+j}(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j \right] + \mathcal{O}(el_3), \end{aligned} \quad (5.48)$$

όπου:

$$\mathbf{d} = \frac{a_2^2 Q_2 x_{03} - a_3^2 Q_3 x_{02}}{a_2^2 + a_3^2} \hat{\mathbf{x}}_1 + \frac{a_3^2 Q_3 x_{01} - a_1^2 Q_1 x_{03}}{a_1^2 + a_3^2} \hat{\mathbf{x}}_2 + \frac{a_1^2 Q_1 x_{02} - a_2^2 Q_2 x_{01}}{a_1^2 + a_2^2} \hat{\mathbf{x}}_3, \quad (5.49)$$

και είναι το διάνυσμα που ανάλογό του είναι το γινόμενο  $\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0$  για το σφαιρικό μοντέλο. Η διαφορά είναι ότι στην ελλειψοειδή περίπτωση οι συντελεστές του διανύσματος θέσης  $\mathbf{r}_0$  έχουν συναρτήσεις βάρους τις  $\frac{a_j^2}{a_j^2 + a_k^2}$ . Συγκρίνοντας την δυαδική αναπαράσταση (5.48) του μαγνητικού πεδίου του ελλειψοειδούς με αυτή που προκύπτει για το σφαιρικό πρότυπο και είναι:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{Q} \times (\mathbf{r} - \mathbf{P})}{r P^2 (1 + \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{P}})} - \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \frac{\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{P}}}{P^2 (1 + \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{P}})^2} \times \left[ \left( 1 + \frac{P}{r} \right) \hat{\mathbf{r}} + \left( 2 + \frac{P}{r} + \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{P}} \right) \hat{\mathbf{P}} \right], \quad (5.50)$$

παρατηρείται ότι πρώτον, στη σφαιρική περίπτωση η ακτίνα της αγωγίμης σφαίρας δεν εμφανίζεται στην έκφραση του  $\mathbf{B}$ , ενώ στον ελλειψοειδή αγωγό εξαρτάται από τους ημιάξονες του  $a_1, a_2, a_3$  και επομένως ο ανισοτροπικός χαρακτήρας εκφράζεται ρητά στο αποτέλεσμα. Δεύτερον, παρόλο που συνεισφέρει ο όρος του ολοκληρώματος από τον τύπο του Geselowitz, ο οποίος εξαρτάται από το ηλεκτρικό δυναμικό, το μαγνητικό πεδίο είναι ανεξάρτητο της αγωγιμότητας. Τρίτον, τουλάχιστον για τον τετραπολικό όρο, οι ακτινικές πηγές που ήταν πριν σιωπηλές για τη σφαίρα δεν είναι για το ελλειψοειδές. Αντιθέτως, οι σιωπηλές πηγές της τετραπολικής λύσης καθορίζονται από το διάνυσμα  $\mathbf{d}$ .

### Μαγνητικά σιωπηλές πηγές

Για τον τετραπολικό όρο οι ακτινικές πηγές που ήταν σιωπηλές για τη σφαίρα δεν είναι για το ελλειψοειδές. Αντί αυτού, οι σιωπηλές πηγές για την τετραπολική λύση του ελλειψοειδούς αγωγού καθορίζονται από το διάνυσμα  $\mathbf{d}$ , που με τη βοήθεια δυαδικών γράφεται στη μορφή:

$$\mathbf{d} = (\mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{M}}(a_1) \times \mathbf{r}_0) \cdot \tilde{\mathbf{N}}(a_1), \quad (5.51)$$

όπου:

$$\tilde{\mathbf{M}}(a_1) = \sum_{i=1}^3 a_i^2 \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_i, \quad (5.52)$$

$$\tilde{\mathbf{N}}(a_1) = \sum_{i=1}^3 \frac{\hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_i}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_i^2}. \quad (5.53)$$

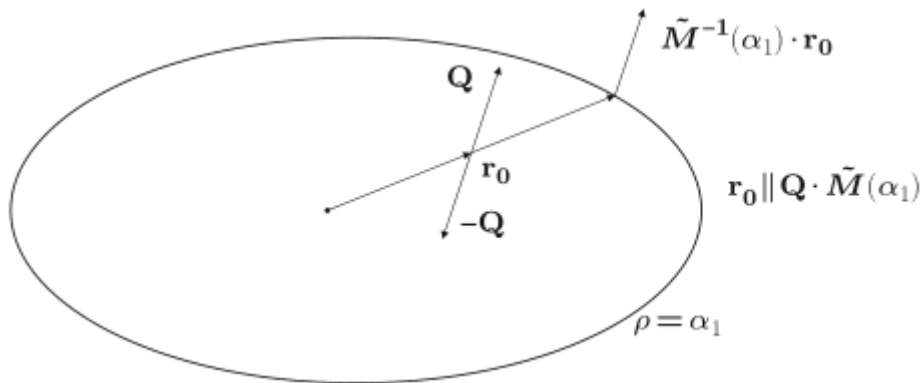
Χρησιμοποιώντας τον τελεστή  $\tilde{\mathbf{M}}$ , ο ελλειψοειδής αγωγός γράφεται:

$$\mathbf{r} \cdot \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \cdot \mathbf{r} = 1, \quad (5.54)$$

και παίρνοντας την κλίση, προκύπτει η απεικόνιση Gauss:

$$\hat{\rho}(\mathbf{r}) = \frac{\tilde{\mathbf{M}}^{-1}(a_1) \cdot \mathbf{r}}{\|\tilde{\mathbf{M}}^{-1}(a_1) \cdot \mathbf{r}\|}. \quad (5.55)$$

Επομένως το δυαδικό  $\tilde{\mathbf{M}}^{-1}(a_1)$  απεικονίζει διανύσματα θέσης του ελλειψοειδούς σε εξωτερικά



Σχήμα 5.1: Σιωπηλές πηγές του ελλειψοειδούς. [27]

διανύσματα που είναι κάθετα στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς. Άρα το δυαδικό  $\tilde{\mathbf{M}}(a_1)$  απεικονίζει κάθετες διευθύνσεις στην επιφάνεια στα αντίστοιχα διανύσματα θέσης στην επιφάνεια.

Αυτό σημαίνει ότι το διάνυσμα  $\mathbf{Q}\widetilde{\mathbf{M}}(a_1)$  είναι παράλληλο στο  $\mathbf{r}_0$  όταν το  $\mathbf{Q}$  είναι παράλληλο στη εικόνα Gauss του σημείου όπου η διεύθυνση  $\mathbf{r}_0$  συναντά την συνοριακή επιφάνεια  $\rho = a_1$ , όπως φαίνεται στο σχήμα. Σε αυτή την περίπτωση  $\mathbf{d} = 0$  και η πηγή γίνεται σιωπηλή.

Στην περίπτωση της σφαίρας  $\widetilde{\mathbf{M}} = a^2\widetilde{\mathbf{I}}$  και η απεικόνιση Gauss διατηρεί τον προσανατολισμό του διανύσματος θέσης άρα μόνο οι ακτινικές συνιστώσες του  $\mathbf{Q}$  είναι σιωπηλές.

Σε ότι αφορά τον οκταπολικό όρο του μαγνητικού πεδίου σε ελλειψοειδή γεωμετρία για τον ομογενή αγωγό, αριθμητικά αποτελέσματα δείχνουν ότι μία σιωπηλή πηγή του τετραπολικού όρου δεν είναι σιωπηλή για τον οκταπολικό όρο [14]. Το αποτέλεσμα αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι πηγές με διπολική ροπή οποιασδήποτε κατεύθυνσης και διεύθυνσης συνεισφέρουν στο μαγνητικό πεδίο. Επομένως η προσέγγιση του μαγνητικού πεδίου με οκταπολικό όρο εμπεριέχει αρκετή πληροφορία για την αντιστροφή καθώς δεν παρουσιάζει μαγνητικά σιωπηλή πηγή. Συνεπώς κατά την αντιστροφή του προβλήματος ΜΕΓ στην περίπτωση του ομογενούς προτύπου σε ελλειψοειδή γεωμετρία δεν χάνουμε καμία πληροφορία αλλά ανακατασκευάζονται όλες οι πηγές που παράγουν το μαγνητικό πεδίο.

Σε ότι αφορά τον τετραπολικό όρο του μαγνητικού πεδίου στο πρότυπο των ανομοιογενών φλοιών σε ελλειψοειδή γεωμετρία, αριθμητικά αποδεικνύονται τα εξής [13]: Πρώτον, μία σιωπηλή πηγή της σφαίρας δεν είναι σιωπηλή για το ελλειψοειδές πρότυπο των φλοιών, δεύτερον, μία σιωπηλή πηγή του ομογενούς ελλειψοειδούς προτύπου δεν είναι σιωπηλή για το ανομοιογενές πρότυπο.

Τα αποτελέσματα αυτά αρκούν πλέον για την εύρεση και των τριών συνιστωσών της διπολικής ροπής, όπως αυτή θα γίνει κατά την επίλυση του αντίστροφου προβλήματος της ΜΕΓ που θα παρουσιαστεί στο τελευταίο κεφάλαιο.

### 5.2.2 Το εξωτερικό μαγνητικό δυναμικό

Εδώ παρουσιάζεται η μέθοδος με την οποία είναι δυνατό να προκύψει το πλήρες ανάπτυγμα του μαγνητικού δυναμικού. Από τη σχέση (5.30), χρησιμοποιώντας τη θεμελιώδη αναπαράσταση του τελεστή του Laplace για  $\rho_0 < \rho$  το εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό γράφεται [25]:

$$u^-(\rho, \mu, \nu) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}_0)}{\sigma(2n+1)\gamma_n^m} \left[ \frac{F_n^m(\rho)}{E_n^m(\rho)} - \frac{F_n^{m'}(a_1)}{E_n^{m'}(a_1)} \right] \mathbb{E}_n^m(\rho, \mu, \nu), \quad (5.56)$$

για  $\rho_0 < \rho \leq a_1$ . Εφαρμόζοντας τη συνοριακή συνθήκη Neumann αυτή ικανοποιείται καθώς επαληθεύεται η σχέση:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left[ F_n^m(\rho) - \frac{F_n^{m'}(a_1)}{E_n^{m'}(a_1)} E_n^m(\rho) \right] \Big|_{\rho=a_1} = 0. \quad (5.57)$$

Ειδικότερα, επειδή:

$$\frac{F_n^m(a_1)}{E_n^m(a_1)} - \frac{F_n^{m'}(a_1)}{E_n^{m'}(a_1)} = \frac{2n+1}{E_n^{m'}(a_1)E_n^m(a_1)a_2a_3}, \quad (5.58)$$

τότε αντικαθιστώντας, στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς το ηλεκτρικό δυναμικό γράφεται:

$$u(a_1, \mu, \nu) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}_0)}{\sigma \gamma_n^m} \left[ \frac{1}{E_n^{m'}(a_1)E_n^m(a_1)a_2a_3} \right] \mathbb{E}_n^m(\rho, \mu, \nu) \quad (5.59)$$

δηλαδή έχει τη μορφή:

$$u(a_1, \mu, \nu) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} A_n^m(\mathbf{r}_0) E_n^m(\mu) E_n^m(\nu), \quad (5.60)$$

όπου:

$$A_n^m(\mathbf{r}_0) = \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}_0)}{\sigma a_2 a_3 \gamma_n^m E_n^{m'}(a_1)}. \quad (5.61)$$

Αναπτύσσοντας το πεδίο των διπόλων ως προς την μεταβλητή  $\mathbf{r}'$  για  $\rho > \rho' = a_1$ :

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \Big|_{\rho'=a_1} &= -\nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \Big|_{\rho'=a_1} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{4\pi}{2n+1} \frac{1}{\gamma_n^m} (\nabla_{\mathbf{r}} \mathbb{F}_n^m(\mathbf{r})) \mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}') \Big|_{\rho'=a_1} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \mathbf{B}_n^m(\mathbf{r}) E_n^m(\mu') E_n^m(\nu'), \end{aligned} \quad (5.62)$$

όπου:

$$\mathbf{B}_n^m(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{(2n+1)\gamma_n^m} (\nabla_{\mathbf{r}} \mathbb{F}_n^m(\mathbf{r})) E_n^m(a_1). \quad (5.63)$$

Τότε ο όρος του ολοκληρώματος στον τύπο του Geselowitz γράφεται:

$$-\int_{\rho'=a_1} u(\mathbf{r}') \hat{\boldsymbol{\rho}}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ds(\mathbf{r}') = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \sum_{\lambda=1}^{2\kappa+1} A_{\kappa}^{\lambda}(\mathbf{r}_0) \mathbf{C}_{n\kappa}^{m\lambda} \times \mathbf{B}_n^m(\mathbf{r}), \quad (5.64)$$

όπου:

$$\mathbf{C}_{n\kappa}^{m\lambda} = \int_{\rho'=a_1} E_n^m(\mu') E_n^m(\nu') E_\kappa^\lambda(\mu') E_\kappa^\lambda(\nu') \hat{\rho}(\mu', \nu) ds(\mu', \nu). \quad (5.65)$$

Η χρησιμότητα του αναπτύγματος (5.64) είναι ότι διαχωρίζει την  $\mathbf{r}_0$  εξάρτηση, δηλαδή την θέση της πηγής, από την  $\mathbf{r}$  εξάρτηση, δηλαδή την θέση που παρατηρείται το μαγνητικό πεδίο. Περαιτέρω, η  $\mathbf{r}_0$  εξάρτηση, η οποία εισάγεται στο ηλεκτρικό δυναμικό  $u$ , εδώ γίνεται ακριβής μέσω του παράγοντα  $\mathbf{Q} \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_\kappa^\lambda(\mathbf{r}_0)$  που περιέχεται στην έκφραση του  $A_n^m(\mathbf{r}_0)$ . Σε ότι αφορά τον πρώτο όρο του τύπου Geselowitz που είναι το μαγνητικό πεδίο που οφείλεται στη διπολική πηγή, αυτός γράφεται στη μορφή:

$$\mathbf{Q} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} = -\mathbf{Q} \times \nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = -\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{4\pi}{2n+1} \mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}_0) \mathbf{Q} \times \nabla_{\mathbf{r}} \mathbb{F}_n^m(\mathbf{r}). \quad (5.66)$$

Εισάγοντας τις σχέσεις (5.64) και (5.66) στον τύπο Geselowitz και αντικαθιστώντας τις σχέσεις (5.61) και (5.63) προκύπτει:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = & \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{\nabla_{\mathbf{r}} \mathbb{F}_n^m(\mathbf{r})}{(2n+1)\gamma_n^m} \\ & \times \left[ \mathbf{Q} \mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}_0) - \frac{1}{a_2 a_3} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \sum_{\lambda=1}^{2\kappa+1} \mathbf{C}_{n\kappa}^{m\lambda} \frac{E_n^m(a_1)}{E_\kappa^\lambda(a_1)} \cdot \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_\kappa^\lambda(\mathbf{r}_0)}{\gamma_\kappa^\lambda} \right], \end{aligned} \quad (5.67)$$

όπου ο όρος  $n = 0$  μηδενίζεται. Πράγματι, για  $n = 0$ :

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = \mu_0 \frac{\nabla_{\mathbf{r}} I_0^1(\rho)}{\gamma_0^1} \times \left[ \mathbf{Q} - \frac{1}{a_2 a_3} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \sum_{\lambda=1}^{2\kappa+1} \mathbf{C}_{0\kappa}^{1\lambda} \frac{1}{E_\kappa^\lambda(a_1)} \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_\kappa^\lambda(\mathbf{r}_0)}{\gamma_\kappa^\lambda} \right], \quad (5.68)$$

και:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{0\kappa}^{1\lambda} &= \frac{a_1 a_2 a_3}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^3 \frac{h_i}{a_i} \hat{\mathbf{x}}_i \int_{\rho'=a_1} E_\kappa^\lambda(\mu') E_\kappa^\lambda(\nu') E_1^i(\mu') E_1^i(\nu') l(\mu', \nu) ds' \\ &= \frac{a_1 a_2 a_3}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^3 \frac{h_i}{a_i} \hat{\mathbf{x}}_i \gamma_1^i \delta_{\kappa 1} \delta_{i\lambda} \\ &= \frac{4\pi}{3} a_1 a_2 a_3 h_1 h_2 h_3 \sum_{i=1}^3 \frac{\hat{\mathbf{x}}_i}{a_i h_i} \delta_{\kappa 1} \delta_{i\lambda} \\ &= \frac{4\pi}{3} a_1 a_2 a_3 h_1 h_2 h_3 \frac{\hat{\mathbf{x}}_\lambda}{a_\lambda h_\lambda} \delta_{\kappa 1}. \end{aligned} \quad (5.69)$$



Εισάγοντας την σχέση (5.69) στην σχέση (5.68):

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla_{\mathbf{r}} I_0^1(\rho) \times \left[ \mathbf{Q} - \sum_{\lambda=1}^3 \hat{\mathbf{x}}_{\lambda} \frac{h_{\lambda}}{h_1 h_2 h_3} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left( \frac{h_1 h_2 h_3}{h_{\lambda}} x_{0\lambda} \right) \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla_{\mathbf{r}} I_0^1(\rho) \times \left[ \mathbf{Q} - \sum_{\lambda=1}^3 \mathbf{Q} \cdot \hat{\mathbf{x}}_{\lambda} \hat{\mathbf{x}}_{\lambda} \right] = 0. \end{aligned} \quad (5.70)$$

Το παραπάνω αποδεικνύει ότι η συμβολή της διπολικής κατανομής από την πηγή στο  $\mathbf{r}_0$  και αυτή από το σύνορο  $\rho = a_1$  αλληλοεξουδετερώνονται και άρα το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο ξεκινά με τετραπολικό όρο δηλαδή:

$$\nabla_{\mathbf{r}} F_1^i(\mathbf{r}) = \mathcal{O} \left( \frac{1}{r^3} \right). \quad (5.71)$$

Παρατηρώντας ότι τα  $C_{1\kappa}^{m\lambda}$  για  $\kappa \geq 3$  μηδενίζονται λόγω ορθογωνιότητας, επειδή τα γινόμενα των επιφανειακών ελλειψοειδών αρμονικών  $E_n^m(\mu)E_n^m(\nu)E_1^i(\mu)E_1^i(\nu)$  ανήκουν στον υπόχωρο που δημιουργείται από τις επιφανειακές αρμονικές βαθμού μικρότερου ή ίσου του  $n + 1$  και άρα από ορθογωνιότητα  $C_{n\kappa}^{m\lambda} = 0$ ,  $\kappa \geq n + 2$ , επειδή κάθε επιφανειακή αρμονική  $E_{\kappa}^{\lambda}(\mu)E_{\kappa}^{\lambda}(\nu)$  με  $\kappa \geq n + 2$  ανήκει στο ορθογώνιο συμπλήρωμα του παραπάνω υποχώρου. Άρα η σχέση (5.67) γράφεται:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{\nabla_{\mathbf{r}} \mathbb{F}_n^m(\mathbf{r})}{(2n+1)\gamma_n^m} \\ &\quad \times \left[ \mathbf{Q} \mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}_0) - \frac{1}{a_2 a_3} \sum_{\kappa=1}^{n+1} \sum_{\lambda=1}^{2\kappa+1} C_{n\kappa}^{m\lambda} \frac{E_n^m(a_1)}{E_{\kappa}^{\lambda}(a_1)} \cdot \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_{\kappa}^{\lambda}(\mathbf{r}_0)}{\gamma_{\kappa}^{\lambda}} \right], \end{aligned} \quad (5.72)$$

και μπορεί επιπλέον να αναπαρασταθεί με την συμπαγή δυαδική μορφή:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{D}}_n^m(\mathbf{r}_0) \times \nabla_{\mathbf{r}} \mathbb{F}_n^m(\mathbf{r}), \quad (5.73)$$

όπου το εξαρτώμενο από την πηγή δυαδικό δίνεται από:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{D}}_n^m(\mathbf{r}_0) &= \frac{1}{(2n+1)\gamma_n^m} \\ &\quad \left[ -\mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}_0) \tilde{\mathbf{I}} + \frac{1}{a_2 a_3} \sum_{\kappa=1}^{n+1} \sum_{\lambda=1}^{2\kappa+1} \frac{1}{\gamma_{\kappa}^{\lambda}} \frac{E_{\kappa}^{\lambda}(a_1)}{E_{\kappa}^{\lambda}(a_1)} (\nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_{\kappa}^{\lambda}(\mathbf{r}_0)) \otimes C_{n\kappa}^{m\lambda} \right]. \end{aligned} \quad (5.74)$$

Η σχέση (5.73) δίνει το πολυπολικό ανάπτυγμα του μαγνητικού πεδίου στο εξωτερικό του ελλειψοειδούς και διαχωρίζει ρητά την γραμμική εξάρτηση της ροπής  $\mathbf{Q}$ , την εξάρτηση από την θέση  $\mathbf{r}_0$  και την εξάρτηση από την θέση  $\mathbf{r}$  του σημείου παρατήρησης.

### 5.2.3 Το διανυσματικό δυναμικό

Το επαγόμενο πεδίο  $\mathbf{B}$  είναι σωληνοειδές και άρα περιγράφεται ως:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}), \quad (5.75)$$

όπου  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  είναι το διανυσματικό δυναμικό του  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ . Γράφοντας τον τύπο Geselowitz στην μορφή:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla_{\mathbf{r}} \times \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{Q}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} - \frac{\mu_0 \sigma}{4\pi} \oint_{\rho'=a_1} u(\mathbf{r}') \frac{\hat{\rho}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds(\mathbf{r}') \right]. \quad (5.76)$$

Τότε το διανυσματικό δυναμικό είναι:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{Q}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} - \frac{\mu_0 \sigma}{4\pi} \oint_{\rho'=a_1} u(\mathbf{r}') \frac{\hat{\rho}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds(\mathbf{r}'). \quad (5.77)$$

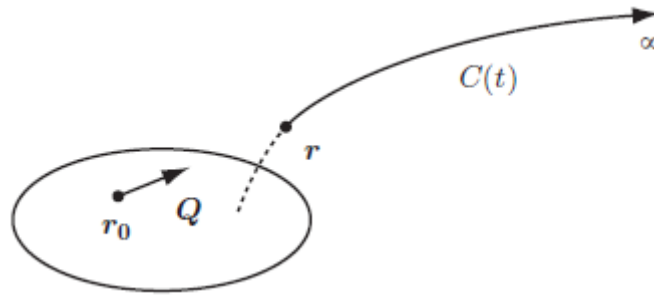
### 5.2.4 Το βαθμωτό μαγνητικό δυναμικό

Καθώς το  $\mathbf{B}$  είναι αστρόβιλο στο εξωτερικό του ελλειψοειδούς, άρα μπορεί να περιγραφεί από την σχέση:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \nabla_{\mathbf{r}} U(\mathbf{r}), \quad (5.78)$$

όπου  $U(\mathbf{r})$  είναι μία αρμονική συνάρτηση που αναπαριστά το μαγνητικό πεδίο και πρέπει να μηδενίζεται στο άπειρο. Στην περίπτωση της σφαίρας αυτό το μαγνητικό δυναμικό έχει υπολογιστεί κατά μήκος μίας διαδρομής στην κατεύθυνση του  $\hat{\mathbf{r}}$ , από το σημείο  $\mathbf{r}$  όπου υπολογίζεται το δυναμικό, έως το άπειρο. Η συγκεκριμένη επιλογή διαδρομής ολοκλήρωσης αντιστοιχεί στην  $(\theta, \phi)$ , καμπύλη συντεταγμένων του σφαιρικού συστήματος που γεννάται από την τομή του κυκλικού κώνου  $\theta = \text{σταθερό}$  και του ημιεπιπέδου  $\phi = \text{σταθερό}$ . Το εφαπτόμενο διάνυσμα  $\hat{\mathbf{r}}$  είναι η κατεύθυνση που καθορίζεται από τις γωνίες  $(\theta, \phi)$ . Για τον υπολογισμό του δυναμικού χρειάστηκε μόνο η ακτινική συνιστώσα του  $\mathbf{B}$  και επειδή το  $\hat{\mathbf{r}}$  είναι συνεχώς εφαπτόμενο στη δια-

δρομή ολοκλήρωσης οι υπολογισμοί απλοποιούνται. Για την περίπτωση του ελλειψοειδούς, η



Σχήμα 5.2: Διαδρομή ολοκλήρωσης για το ελλειψοειδές σύστημα [10].

διαδρομή ολοκλήρωσης είναι η  $(\mu, \nu)$  καμπύλη συντεταγμένων του ελλειψοειδούς συστήματος, με παραμετρική μορφή:

$$\mathbf{C}(t) = t \frac{\mu\nu}{h_2 h_3} \hat{\mathbf{x}}_1 + \sqrt{t^2 - h_3^2} \frac{\sqrt{\mu^2 - h_3^2} \sqrt{h_3^2 - \nu}}{h_1 h_3} \hat{\mathbf{x}}_2 + \sqrt{t^2 - h_2^2} \frac{\sqrt{h_2^2 - \mu^2} \sqrt{h_2^2 - \nu^2}}{h_1 h_2} \hat{\mathbf{x}}_3, \quad (5.79)$$

για  $t \in [\rho, \infty)$  και ορίζεται από την τομή του μονόχωνου υπερβολοειδούς  $\mu = \text{σταθερό}$  και του δίχωνου υπερβολοειδούς  $\nu = \text{σταθερού}$ , όπου το  $(\mu, \nu)$  καθορίζει τη θέση του σημείου παρατήρησης  $\mathbf{r} = (\rho, \mu, \nu)$  πάνω στο ελλειψοειδές  $\rho = \text{σταθερό}$ . Τότε η εφαπτομένη της  $C$  σε κάθε σημείο συμπίπτει με την κατεύθυνση  $\hat{\rho}$  σε κάθε σημείο. Επειδή το ελλειψοειδές σύστημα είναι ορθογώνιο η εφαπτομένη του  $\hat{\rho}$  παραμένει κάθετη στα  $\hat{\mu}, \hat{\nu}$  κατά μήκος της καμπύλης  $C$ . Άρα επειδή:

$$\nabla = \frac{\hat{\rho}}{h_\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\hat{\mu}}{h_\mu} \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{\hat{\nu}}{h_\nu} \frac{\partial}{\partial \nu}, \quad (5.80)$$

τότε:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} = h_\rho \hat{\rho} \cdot \nabla, \quad (5.81)$$

και επομένως το δυναμικό θα δίνεται από την:

$$U(\mathbf{r}) = - \int_\rho^\infty \frac{\partial}{\partial \rho'} U(\rho, \mu, \nu) d\rho' = - \frac{4\pi}{\mu_0} \int_\rho^\infty h_{\rho'} \hat{\rho}' \cdot \mathbf{B}(\rho', \mu, \nu) d\rho'. \quad (5.82)$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση :

$$\begin{aligned}
\nabla \mathbb{F}_n^m(\rho, \mu, \nu) &= \nabla (F_n^m(\rho) E_n^m(\mu) E_n^m(\nu)) \\
&= (\nabla F_n^m(\rho)) E_n^m(\mu) E_n^m(\nu) + F_n^m(\rho) (\nabla E_n^m(\mu) E_n^m(\nu)) \\
&= \left( \frac{\hat{\boldsymbol{\rho}}}{h_\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} F_n^m(\rho) \right) E_n^m(\mu) E_n^m(\nu) + F_n^m(\rho) \left( \frac{\hat{\boldsymbol{\mu}}}{h_\mu} \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{\hat{\boldsymbol{\nu}}}{h_\nu} \frac{\partial}{\partial \nu} \right) E_n^m(\mu) E_n^m(\nu),
\end{aligned} \tag{5.83}$$

οπότε και είναι :

$$\hat{\boldsymbol{\rho}}' \cdot (\mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{D}}_n^m) \times \nabla \mathbb{F}_n^m(\rho', \mu, \nu) = F_n^m(\rho') \left( \left( \frac{\hat{\boldsymbol{\nu}}}{h_\nu} \frac{\partial}{\partial \nu} - \frac{\hat{\boldsymbol{\mu}}}{h_\mu} \frac{\partial}{\partial \mu} \right) S_n^m(\mu, \nu) \right) \cdot (\mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{D}}_n^m). \tag{5.84}$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση [25]:

$$\left( \frac{\hat{\boldsymbol{\nu}}}{h_\nu} \frac{\partial}{\partial \nu} - \frac{\hat{\boldsymbol{\mu}}}{h_\mu} \frac{\partial}{\partial \mu} \right) S_n^m(\mu, \nu) = \sum_{i=1}^3 \frac{E_1^i(\rho')}{\sqrt{\rho'^2 - \mu^2} \sqrt{\rho'^2 - \nu^2}} f_{ni}^m(\mu, \nu) \hat{\mathbf{x}}_i, \tag{5.85}$$

όπου :

$$f_{ni}^m(\mu, \nu) = \frac{h_i S_2^5(\mu, \nu)}{h_1 h_2 h_3 (\mu^2 - \nu^2)} (E_1^i(\mu) E_1^{i'}(\nu) E_n^{m'}(\mu) E_n^m(\nu) - E_1^{i'}(\mu) E_1^i(\nu) E_n^m(\mu) E_n^{m'}(\nu)). \tag{5.86}$$

και αντικαθιστώντας στην σχέση (5.82) προκύπτει το μαγνητικό δυναμικό του ελλειψοειδούς [25]:

$$U(\rho, \mu, \nu) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \sum_{i=1}^3 (\mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{D}}_n^m(\mathbf{r}_0) \cdot \hat{\mathbf{x}}_i) \left( \int_{\rho}^{\infty} \frac{F_n^m(\rho') E_1^i(\rho')}{\sqrt{\rho'^2 - h_3^2} \sqrt{\rho'^2 - h_2^2}} d\rho' \right) \times f_{ni}^m(\mu, \nu), \tag{5.87}$$

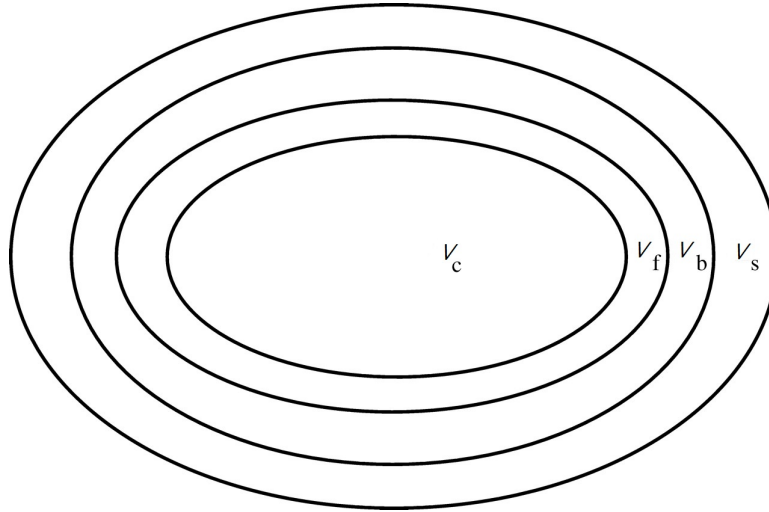
το οποίο δίνεται από συντελεστές που εξαρτώνται από την πηγή, δηλαδή τους  $(\mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{D}}_n^m(\mathbf{r}_0) \cdot \hat{\mathbf{x}}_i)$ , επιπλέον από τις ακτινικές (λόγω της εμφάνισης του  $\rho$ ) ελλειψοειδείς συναρτήσεις που δίνονται από τα ελλειπτικά ολοκληρώματα καθώς και τις ελλειψοειδείς συναρτήσεις  $f_{ni}^m(\mu, \nu)$  οι οποίες εξαρτώνται από την κατεύθυνση. Η  $\rho$  εξάρτηση του  $U$  εισάγεται μέσω του ολοκληρώματος, η  $(\mu, \nu)$  εξάρτηση μέσω αποκλειστικά των  $f_{ni}^m$  και η εξάρτηση από την διπολική πηγή μέσω των  $\mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{D}}_n^m$ . Άρα η μορφή αυτή παρέχει ένα διαχωρίσιμο ανάπτυγμα του μαγνητικού πεδίου σε ελλειψοειδείς συντεταγμένες. Το κρίσιμο σημείο εδώ είναι η διαδρομή που επιλέχθηκε για τον υπολογισμό του  $U$ , όπου μιμείται η σφαιρική περίπτωση και χρησιμοποιείται μόνο η μεταβλητή

$\rho$  του μαγνητικού πεδίου για την κατασκευή του  $U$ . Από τη άλλη μεριά, αυτή η διαδικασία δεν εξαλείφει τον όρο του ολοκληρώματος στον τύπο Gezelowitz, όπως δηλαδή γίνεται στην σφαιρική περίπτωση λόγω ακτινικής συμμετρίας, και έτσι ο υπολογισμός του ηλεκτρικού δυναμικού δεν μπορεί να αποφευχθεί.

## 5.3 Το πρότυπο των ανομοιογενών φλοιών

### 5.3.1 ΗΕΓ

Χάρην πληρότητας αναφέρουμε σύντομα το πρότυπο των τριών ανομοιογενών φλοιών με διαφορετική αγωγιμότητα που αποτελεί ρεαλιστικότερο μοντέλο προσέγγισης του εγκεφάλου. Έστω



Σχήμα 5.3: Ο χώρος  $V_c$  (εγκέφαλος), φραγμένος από το  $S_c$ , ο χώρος  $V_f$  (εγκεφαλονωτιαίο υγρό), από τα  $S_c, S_f$ , ο χώρος  $V_b$  (οστό) από τα  $S_f, S_b$  και ο χώρος  $V_s$  (δέρμα) από τα  $S_b, S_s$ .

$S_s, S_b, S_f, S_c$  οι ελλειψοειδείς επιφάνειες των φλοιών οι οποίες δίνονται αντίστοιχα από τα εξής ελλειψοειδή αναφοράς:

$$\frac{x_1^2}{s_1^2} + \frac{x_2^2}{s_2^2} + \frac{x_3^2}{s_3^2} = 1, \quad 0 < s_3 < s_2 < s_1 < \infty, \quad (5.88)$$

$$\frac{x_1^2}{b_1^2} + \frac{x_2^2}{b_2^2} + \frac{x_3^2}{b_3^2} = 1, \quad 0 < b_3 < b_2 < b_1 < \infty, \quad (5.89)$$

$$\frac{x_1^2}{f_1^2} + \frac{x_2^2}{f_2^2} + \frac{x_3^2}{f_3^2} = 1, \quad 0 < f_3 < f_2 < f_1 < \infty, \quad (5.90)$$

$$\frac{x_1^2}{c_1^2} + \frac{x_2^2}{c_2^2} + \frac{x_3^2}{c_3^2} = 1, \quad 0 < c_3 < c_2 < c_1 < \infty, \quad (5.91)$$

όπου  $c_i < f_i < b_i < s_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  οι ημιάξονες αναφοράς. Τα ελλειψοειδή είναι συνεστιακά και αντιστοιχούν στο ελλειψοειδές σύστημα  $\rho, \mu, \nu$  με ημιστιακές αποστάσεις  $h_1, h_2, h_3$  όπου :

$$h_1^2 = c_2^2 - c_3^2 = f_2^2 - f_3^2 = b_2^2 - b_3^2 = s_2^2 - s_3^2, \quad (5.92)$$

$$h_2^2 = c_1^2 - c_3^2 = f_1^2 - f_3^2 = b_1^2 - b_3^2 = s_1^2 - s_3^2, \quad (5.93)$$

$$h_3^2 = c_1^2 - c_2^2 = f_1^2 - f_2^2 = b_1^2 - b_2^2 = s_1^2 - s_2^2, \quad (5.94)$$

και οι ελλειψοειδείς συντεταγμένες συνδέονται με τις καρτεσιανές μέσω των σχέσεων (5.4). Οι συνοριακές επιφάνειες  $S_s, S_b, S_f, S_c$  αντιστοιχούν στις σχέσεις  $\rho = s_1, \rho = b_1, \rho = f_1, \rho = c_1$ . Το εσωτερικό χωρίο του  $S_c, V_c$  αντιστοιχεί στο διάστημα  $\rho \in [h_2, c_1)$  και έχει αγωγιμότητα  $\sigma_c$ . Το χωρίο μεταξύ των  $S_c$  και  $S_f, V_f$  αντιστοιχεί στο  $\rho \in (c_1, f_1)$  με  $\sigma_f$ . Το χωρίο μεταξύ  $S_f$  και  $S_b, V_b$  στο  $\rho \in (f_1, b_1)$  με  $\sigma_b$ . Το χωρίο μεταξύ  $S_b$  και  $S_s, V_s$  στο  $\rho \in (b_1, s_1)$  με  $\sigma_s$ . Ο εξωτερικός χώρος του  $S_s, V$  στο  $\rho \in (s_1, \infty)$  είναι μη αγωγίμος. Στο σημείο  $r_0 \in V_c$  υπάρχει διπολική πηγή με ροπή  $\mathbf{Q}$  και άρα η συνάρτηση πυκνότητας ρεύματος είναι :

$$J^p(\mathbf{r}) = \mathbf{Q}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (5.95)$$

Το επαγόμενο ρεύμα είναι :

$$J^i(\mathbf{r}) = \sigma_c \mathbf{E}_c(\mathbf{r}) X_{V_c}(\mathbf{r}) + \sigma_f \mathbf{E}_f(\mathbf{r}) X_{V_f}(\mathbf{r}) + \sigma_b \mathbf{E}_b(\mathbf{r}) X_{V_b}(\mathbf{r}) + \sigma_s \mathbf{E}_s(\mathbf{r}) X_{V_s}(\mathbf{r}), \quad (5.96)$$

όπου  $X_A(\mathbf{r})$  η χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου  $A$ . Άρα το συνολικό ρεύμα σε κάθε σημείο του αγωγού είναι :

$$J(\mathbf{r}) = J^p(\mathbf{r}) + J^i(\mathbf{r}). \quad (5.97)$$

Τα ηλεκτρικά δυναμικά ικανοποιούν τα παρακάτω προβλήματα :

$$\Delta u_c(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sigma} \nabla \cdot \mathbf{J}^p(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in V_c, \quad (5.98)$$

$$\Delta u_f(\mathbf{r}) = 0 \quad \mathbf{r} \in V_f, \quad (5.99)$$

$$\Delta u_b(\mathbf{r}) = 0 \quad \mathbf{r} \in V_b, \quad (5.100)$$

$$\Delta u_s(\mathbf{r}) = 0 \quad \mathbf{r} \in V_s, \quad (5.101)$$

$$\Delta u(\mathbf{r}) = 0 \quad \mathbf{r} \in V, \quad (5.102)$$

με τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες σε κάθε διεπιφάνεια, οι οποίες εξασφαλίζουν τη συνέχεια της συνάρτησης δυναμικού και την συνέχεια της κάθετης παραγώγου του ηλεκτρικού πεδίου σε κάθε επιφάνεια και είναι :

$$u_f(\mathbf{r}) = u_c(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S_c, \quad (5.103)$$

$$\sigma_f \partial_n u_f(\mathbf{r}) = \sigma_c \partial_n u_c(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S_c, \quad (5.104)$$

$$u_b(\mathbf{r}) = u_f(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S_f, \quad (5.105)$$

$$\sigma_b \partial_n u_b(\mathbf{r}) = \sigma_f \partial_n u_f(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S_f, \quad (5.106)$$

$$u_b(\mathbf{r}) = u_s(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S_b, \quad (5.107)$$

$$\sigma_b \partial_n u_b(\mathbf{r}) = \sigma_s \partial_n u_s(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S_b, \quad (5.108)$$

$$u_s(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S_s, \quad (5.109)$$

$$\partial_n u_s(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in S_s, \quad (5.110)$$

και τέλος η ασυμπτωτική συνθήκη που πρέπει να ικανοποιείται από το εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό για την μοναδικότητα και είναι :

$$u(\mathbf{r}) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right). \quad (5.111)$$

Σε κάθε περιοχή μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα αντίστοιχα ηλεκτρικά δυναμικά επιδέχονται αναπτύγματα ελλειψοειδών αρμονικών και γράφονται στη μορφή:

$$u_c(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} t_n^m \mathbb{E}_n^m(\rho, \mu, \nu), \quad \rho < c_1, \quad (5.112)$$

$$u_f(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} [p_n^m \mathbb{E}_n^m(\rho, \mu, \nu) + q_n^m \mathbb{F}_n^m(\rho, \mu, \nu)], \quad c_1 < \rho < f_1, \quad (5.113)$$

$$u_b(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} [k_n^m \mathbb{E}_n^m(\rho, \mu, \nu) + m_n^m \mathbb{F}_n^m(\rho, \mu, \nu)], \quad f_1 < \rho < b_1, \quad (5.114)$$

$$u_s(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} [g_n^m \mathbb{E}_n^m(\rho, \mu, \nu) + h_n^m \mathbb{F}_n^m(\rho, \mu, \nu)], \quad c_1 < \rho < f_1, \quad (5.115)$$

$$u^+(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} f_n^m \mathbb{E}_n^m(\rho, \mu, \nu), \quad \rho > s_1. \quad (5.116)$$

Χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση (5.20) και περνώντας στο εσωτερικό την παραγωγήση η σχέση (5.112) γράφεται [22]:

$$u_c(\mathbf{r}) = t_0^1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \left[ t_n^m + \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}_0)}{\sigma_c \gamma_n^m} I_n^m(\rho) \right] \mathbb{E}_n^m(\rho, \mu, \nu). \quad (5.117)$$

Υστερα επειδή η έκφραση (5.117) ισχύει για  $\rho > \rho_0$  άρα ισχύει σε όλους στους εξωτερικούς φλοιούς και μπορούν να εφαρμοστούν οι συνοριακές συνθήκες. Αντικαθιστώντας τις συνοριακές συνθήκες (5.103)-(5.110) μετά από αρκετούς υπολογισμούς προκύπτει [22]:

$$\begin{aligned} g_0^1 &= k_0^1 = p_0^1 = t_0^1 = f_0^1 I_0^1(s_1), \\ h_0^1 &= m_0^1 = q_0^1 = 0, \end{aligned} \quad (5.118)$$

ενώ για  $n = 1, 2, \dots$ ,  $m = 1, 2, \dots, 2n + 1$  προκύπτουν εκφράσεις για τις σταθερές  $f_n^m, g_n^m, h_n^m, k_n^m, l_n^m, p_n^m, q_n^m, t_n^m$  που περιλαμβάνουν συναρτήσεις Lamé πρώτου και δεύτερου είδους.

Ορίζοντας το ολοκλήρωμα:

$$I_n^m(x, y) = I_n^m(x) - I_n^m(y) = \int_x^y \frac{dt}{[E_n^m(t)]^2 \sqrt{t^2 - h_2^2} \sqrt{t^2 - h_3^2}}, \quad (5.119)$$



το ηλεκτρικό δυναμικό είναι [22]:

$$u(\mathbf{r}) = g_0^1 \frac{I_0^1(\rho)}{I_0^1(s_1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{I_n^m(\rho)}{I_n^m(s_1)} \frac{1}{S_n^m G_{3,n}^m} \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla \mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}_0)}{\gamma_n^m} \mathbb{E}_n^m(\rho, \mu, \nu), \quad \rho > s_1, \quad (5.120)$$

$$u_s(\mathbf{r}) = u(s_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} I_n^m(\rho, s_1) \frac{1}{G_{3,n}^m} \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla \mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}_0)}{\gamma_n^m} \mathbb{E}_n^m(\rho, \mu, \nu), \quad b_1 < \rho < s_1, \quad (5.121)$$

$$u_b(\mathbf{r}) = u_s(b_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} I_n^m(\rho, b_1) \frac{G_{1,n}^m}{\sigma_b G_{3,n}^m} \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla \mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}_0)}{\gamma_n^m} \mathbb{E}_n^m(\rho, \mu, \nu), \quad f_1 < \rho < b_1, \quad (5.122)$$

$$u_f(\mathbf{r}) = u_b(f_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} I_n^m(\rho, f_1) \frac{G_{2,n}^m}{\sigma_f G_{3,n}^m} \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla \mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}_0)}{\gamma_n^m} \mathbb{E}_n^m(\rho, \mu, \nu), \quad c_1 < \rho < f_1, \quad (5.123)$$

$$u_c(\mathbf{r}) = u_f(c_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} I_n^m(\rho, c_1) \frac{1}{\sigma_c} \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla \mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}_0)}{\gamma_n^m} \mathbb{E}_n^m(\rho, \mu, \nu), \quad \rho < c_1, \quad (5.124)$$

όπου  $S_n^m$ ,  $G_{1,n}^m$ ,  $G_{2,n}^m$ ,  $G_{3,n}^m$  είναι πολύπλοκες σταθερές που εξαρτώνται από τις αγωγιμότητες και τις εσωτερικές και εξωτερικές ελλειψοειδείς αρμονικές. Όπως και στα προηγούμενα υπάρχει μία άγνωστη σταθερά  $f_0^1$  την οποία μπορούμε να θεωρήσουμε όμως μηδενική καθώς μας ενδιαφέρουν μόνο οι διαφορές δυναμικού. Ερμηνεύοντας τις εκφράσεις (5.120)-(5.124) αναφέρουμε τα εξής. Η έκφραση (5.120) παρέχει το εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό παντού εξωτερικά. Η έκφραση (5.121) που υπολογίζει το ηλεκτρικό δυναμικό στον εξωτερικό φλοιό  $V_s$  είναι το εξωτερικό δυναμικό  $u$  υπολογισμένο πάνω στην επιφάνεια  $S_c$  του δέρματος που είναι το κοινό τους σύνορο συν ένα ανάπτυγμα που υπολογίζεται στο σημείο παρατήρησης που αναπαριστά τη συνεισφορά από τον εξωτερικό φλοιό  $V_s$ . Με τον ίδιο τρόπο ερμηνεύονται και οι υπόλοιπες εκφράσεις. Η μορφή τους παραμένει η ίδια και αλλάζουν μόνο οι λόγοι των αγωγιμοτήτων και τα αντίστοιχα ελλειπτικά ολοκληρώματα που υπολογίζονται κάθε φορά σε διαφορετική επιφάνεια. Οι αγωγιμότητες κανονικοποιούνται κάθε φορά ως προς την επιρροή όλων των αγωγιμοτήτων του μοντέλου  $G_{3,n}^m$ .

### 5.3.2 ΜΕΓ

Έστω δύο συνεσιακά ελλειψοειδή διαφορετικής αγωγιμότητας:

$$S_b : \quad \frac{x_1^2}{b_1^2} + \frac{x_2^2}{b_2^2} + \frac{x_3^2}{b_3^2} = 1, \quad 0 < b_3 < b_2 < b_1 < \infty, \quad (5.125)$$

$$S_a : \quad \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1, \quad 0 < a_3 < a_2 < a_1 < \infty, \quad (5.126)$$

όπου το  $S_b$  αντιστοιχεί στην  $\rho = b_1$  και το  $S_a$  αντιστοιχεί στην  $\rho = b_a$  με  $b_1 < a_1$ . Τότε ο τύπος Geselowitz γράφεται στη μορφή:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = & \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} - \frac{\mu_0 \sigma_a}{4\pi} \oint_{S_a} u_a(\mathbf{r}') \hat{\boldsymbol{\rho}}' \times \left( \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) ds(\mathbf{r}') \\ & + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S_b} (\sigma_a u_a(\mathbf{r}') - \sigma_b u_b(\mathbf{r}')) \hat{\boldsymbol{\rho}}' \times \left( \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) ds(\mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (5.127)$$

Τα  $u_a, u_b$  δίνονται από τις (5.120)-(5.124) θέτοντας  $\sigma_c = \sigma_f = \sigma_b = \sigma_a$  και  $\sigma_s = \sigma_b$ . Τότε παίρνουμε [27]:

$$\begin{aligned} u_a(\mathbf{r}) = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla \mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}_0)}{\gamma_n^m C_n^m} \\ & \times \left( I_n^m(\rho) - I_n^m(a_1) + \frac{1}{E_n^m(a_1) E_n^{m'}(a_1) a_2 a_3} \right) \mathbb{E}_n^m(\rho, \mu, \nu), \quad \mathbf{r} \in V_a, \end{aligned} \quad (5.128)$$

$$\begin{aligned} u_b(\mathbf{r}) = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla \mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}_0)}{\gamma_n^m C_n^m} \left[ \frac{C_n^m}{\sigma_b} (I_n^m(b_1) - I_n^m(\rho)) \right. \\ & \left. + \left( I_n^m(b_1) - I_n^m(a_1) + \frac{1}{E_n^m(a_1) E_n^{m'}(a_1) a_2 a_3} \right) \right] \mathbb{E}_n^m(\rho, \mu, \nu), \quad \mathbf{r} \in V_b, \end{aligned} \quad (5.129)$$

όπου οι σταθερές  $C_n^m$  δίνονται από [27]:

$$\begin{aligned} C_n^m = & \sigma_a + (\sigma_b - \sigma_a) \left[ I_n^m(b_1) - I_n^m(a_1) + \frac{1}{E_n^m(a_1) E_n^{m'}(a_1) a_2 a_3} \right] \\ & \times E_n^m(b_1) E_n^{m'}(b_1) b_2 b_3. \end{aligned} \quad (5.130)$$

Όπως και πριν η σταθερά που αντιστοιχεί στο πρόβλημα Neumann θεωρείται μηδενική. Μετά από πράξεις που αφορούν τα ολοκληρώματα στον τύπο Geselowitz προκύπτει [27]:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = (\mathbf{d} - \mathbf{d}_b + \mathbf{d}_a) \cdot \left[ \frac{\mathbb{F}_2^1(\mathbf{r})}{\Lambda - \Lambda'} \tilde{\boldsymbol{\Lambda}} - \frac{\mathbb{F}_2^2(\mathbf{r})}{\Lambda - \Lambda'} \tilde{\boldsymbol{\Lambda}}' - 15 \sum_{i,j=1, i \neq j}^3 x_i x_j I_2^{i+j}(\rho) \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j \right] + \mathcal{O}(el_3), \quad (5.131)$$

όπου

$$\mathbf{d} = (\mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{M}}(b_1) \times \mathbf{r}_0) \cdot \tilde{\mathbf{N}}(b_1), \quad \mathbf{d}_b = (\mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{M}}(b_1) \times \mathbf{r}_0) \cdot \tilde{\mathbf{N}}_c(b_1), \quad \mathbf{d}_a = (\mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{M}}(a_1) \times \mathbf{r}_0) \cdot \tilde{\mathbf{N}}_c(a_1) \quad (5.132)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}(b_1) = \sum_{i=1}^3 b_i^2 \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_i, \quad \tilde{\mathbf{M}}(a_1) = \sum_{i=1}^3 a_i^2 \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_i, \quad (5.133)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{N}}(b_1) &= \sum_{i=1}^3 \frac{\hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_i}{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - b_i^2}, & \tilde{\mathbf{N}}_c(b_1) &= \sum_{i=1}^3 C^{6-i} \frac{\hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_i}{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - b_i^2}, \\ \tilde{\mathbf{N}}_c(a_1) &= \sum_{i=1}^3 C^{6-i} \frac{\hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_i}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_i^2}, \end{aligned} \quad (5.134)$$

$$C^{6-i} = \frac{\sigma_a}{C_2^{6-i}} = \frac{\sigma_a}{\sigma_a + (\sigma_b - \sigma_a)T}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.135)$$

$$T = (I_2^{6-i}(b_1) - I_2^{6-i}(a_1))(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - b_i^2) + \frac{(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - b_i^2)b_1 b_2 b_3}{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_i^2)a_1 a_2 a_3}, \quad (5.136)$$

και  $C_2^{6-i}$  να δίνονται από την (5.135).

Συγκρίνοντας την λύση του ανομοιογενούς μοντέλου για το μαγνητικό πεδίο (5.131) με την αντίστοιχη για το ομοιογενές (5.48) παρατηρείται ότι η μόνη διαφορά βρίσκεται στον όρο  $(\mathbf{d} - \mathbf{d}_b + \mathbf{d}_a)$  ο οποίος αφορά τις αγωγιμότητες  $\sigma_a, \sigma_b$ , τις γεωμετρικές παραμέτρους  $a_i, b_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  και τα χαρακτηριστικά της πηγής  $\mathbf{Q}, \mathbf{r}_0$ . Επιπλέον, οι φλοιοί διαφορετικής αγωγιμότητας αναγνωρίζονται από την ΜΕΓ καθώς η λύση (5.131) εξαρτάται από την αγωγιμότητα  $\sigma_a$  και την διαφορά  $(\sigma_b - \sigma_a)$  πάνω στην διεπιφάνεια  $\rho = b_1$  μέσω των σταθερών  $C_2^{6-1}$  που τις περιλαμβάνουν. Αυτή η ιδιότητα δεν ισχύει για την σφαιρική γεωμετρία.

## Κεφάλαιο 6

# Τα αντίστροφα προβλήματα ΗΕΓ και ΜΕΓ σε ελλειψοειδή γεωμετρία

### 6.1 Το ομογενές πρότυπο

#### 6.1.1 ΗΕΓ

Έστω ότι ο εγκέφαλος αναπαρίσταται από το ελλειψοειδές αναφοράς:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2}, \quad (6.1)$$

και ένα δίπολο στην θέση  $\mathbf{r}_0$  με ροπή  $\mathbf{Q}$ . εσωτερικά του εγκεφάλου. Στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς το ηλεκτρικό δυναμικό δίνεται από την σχέση (5.31) υπολογισμένη στο  $\rho = a_1$  είναι [10]:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}) = & \frac{3}{4\pi\sigma a_1 a_2 a_3} \sum_{m=1}^3 Q_m x_m \\ & - \frac{5}{8\pi\sigma a_1 a_2 a_3 (\Lambda - \Lambda')} \sum_{m=1}^3 Q_m x_{0m} \left( \frac{\mathbb{E}_2^1(a_1, \mu, \nu)}{\Lambda(\Lambda - a_m^2)} - \frac{\mathbb{E}_2^2(a_1, \mu, \nu)}{\Lambda'(\Lambda' - a_m^2)} \right) \\ & + \frac{15}{4\pi\sigma a_1 a_2 a_3} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1, j \neq i}^3 Q_i x_{0j} \frac{x_i x_j}{a_i^2 + a_j^2} + \mathcal{O}(el_3), \end{aligned} \quad (6.2)$$

όπου οι καρτεσιανές συντεταγμένες  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  είναι υπολογισμένες στο  $\rho = a_1$ . Ένα εγκεφαλογράφημα πάνω στην επιφάνεια του εγκεφάλου παρέχει δεδομένα με τη μορφή του αναπτύγματος:

$$U(a_1, \mu, \nu) = \sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^{2n+1} U_n^m S_n^m(\mu, \nu) + \mathcal{O}(el_3), \quad (6.3)$$

όπου οι συντελεστές  $U_n^m$  είναι γνωστοί. Οι εκφράσεις για τις καρτεσιανές συντεταγμένες στο  $\rho = a_1$  είναι:

$$x_m \Big|_{\rho=a_1} = \frac{a_m h_m}{h_1 h_2 h_3} S_1^m(\mu, \nu), \quad m = 1, 2, 3, \quad (6.4)$$

$$\frac{x_1 x_2 x_3}{x_m} \Big|_{\rho=a_1} = \frac{a_1 a_2 a_3}{h_1 h_2 h_3} \frac{1}{a_m h_m} S_2^{6-m}(\mu, \nu), \quad m = 1, 2, 3. \quad (6.5)$$

Οποτε αντικαθιστώντας στην σχέση (6.2) και χρησιμοποιώντας επιχειρήματα ορθογωνιότητας προκύπτει [10]:

$$\frac{3Q_m}{4\pi\sigma a_1 a_2 a_3} \frac{a_m h_m}{h_1 h_2 h_3} = U_1^m, \quad m = 1, 2, 3, \quad (6.6)$$

$$-\frac{5}{8\pi\sigma a_1 a_2 a_3 (\Lambda - \Lambda')} \sum_{m=1}^3 \frac{Q_m x_{0m}}{\Lambda - a_m^2} = U_2^1, \quad (6.7)$$

$$\frac{5}{8\pi\sigma a_1 a_2 a_3 (\Lambda - \Lambda')} \sum_{m=1}^3 \frac{Q_m x_{0m}}{\Lambda' - a_m^2} = U_2^2, \quad (6.8)$$

$$\frac{15}{4\pi\sigma h_1 h_2 h_3} \frac{Q_1 x_{02}}{(a_1^2 + a_2^2) a_3 h_3} = U_2^3, \quad (6.9)$$

$$\frac{15}{4\pi\sigma h_1 h_2 h_3} \frac{Q_3 x_{01}}{(a_3^2 + a_1^2) a_2 h_2} = U_2^4, \quad (6.10)$$

$$\frac{15}{4\pi\sigma h_1 h_2 h_3} \frac{Q_2 x_{03}}{(a_2^2 + a_3^2) a_1 h_1} = U_2^5. \quad (6.11)$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτουν, από την πρώτη, οι συντελεστές της διπολικής ροής που είναι:

$$\mathbf{Q} = \frac{4\pi\sigma a_1 a_2 a_3 h_1 h_2 h_3}{3} \left( \frac{U_1^1}{a_1 h_1}, \frac{U_1^2}{a_2 h_2}, \frac{U_1^3}{a_3 h_3} \right), \quad (6.12)$$

και εισάγοντάς την στις επόμενες εξισώσεις προκύπτει η πλήρης περιγραφή της θέσης της διπολικής πηγής:

$$\mathbf{r}_0 = \frac{h_1 h_2 h_3}{5} \left( \frac{a_1^2 + a_3^2}{a_1 h_1} \frac{U_2^4}{U_1^3}, \frac{a_1^2 + a_2^2}{a_2 h_2} \frac{U_2^3}{U_1^1}, \frac{a_2^2 + a_3^2}{a_3 h_3} \frac{U_2^5}{U_1^2} \right), \quad (6.13)$$

και οι εκφράσεις αυτές παρέχουν την μοναδική λύση για το αντίστροφο πρόβλημα της ηλεκτροεγκεφαλογραφίας για μία διπολική πηγή στο εσωτερικό του ελλειψοειδούς αγωγού.

## 6.2 Το πρότυπο των ανομοιογενών φλοιών

Έστω  $S_s, S_b, S_f, S_c$  οι ελλειψοειδείς επιφάνειες των φλοιών οι οποίες δίνονται από τα ελλειψοειδή αναφοράς (5.88) - (5.91), με ημιάξονες αναφοράς  $c_i < f_i < b_i < s_i, i = 1, 2, 3$  και ημιοστικάς αποστάσεις  $h_1, h_2, h_3$  που ικανοποιούν τις (5.92) - (5.94). Υποθέτουμε ότι το πρωτεύον ρεύμα δημιουργείται από ένα δίπολο με ροπή  $\mathbf{Q}$  στη θέση  $\mathbf{r}_0$ :

$$\mathbf{J}^p(\mathbf{r}) = \mathbf{Q}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (6.14)$$

### 6.2.1 ΗΕΓ

Όπως παρουσιάστηκε το ηλεκτρικό δυναμικό στο χωρίο  $V_c$  ικανοποιεί το πρόβλημα :

$$\sigma_c \Delta u_c(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \mathbf{J}^p(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in V_c, \quad (6.15)$$

$$\sigma_c \partial_n u_c(\mathbf{r}) = \sigma_f \partial_n u_f(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S_c. \quad (6.16)$$

Οι συναρτήσεις  $u_f(\mathbf{r}), u_b(\mathbf{r}), u_s(\mathbf{r})$  ικανοποιούν προβλήματα (5.99) - (5.102) με τις αντίστοιχες συνθήκες (5.105) - (5.110) αντίστοιχα. Επιλύοντας τα προβλήματα και υπολογίζοντας το δυναμικό  $u_s$  στο  $S_s$  αυτό προκύπτει να είναι [21]:

$$u_s(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0) = \frac{1}{s_2 s_3} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}_0)}{\gamma_n^m G_{3,n}^m E_n^{m'}(s_1)} E_n^m(M) E_n^m(N), \quad \mathbf{r}' \in S_c, \quad \mathbf{r}_0 \in V_c, \quad (6.17)$$

όπου οι σταθερές  $G_{3,n}^m$  είναι συναρτήσεις των αγωγιμοτήτων  $\sigma_c, \sigma_f, \sigma_b, \sigma_s$  και των ημιάξονων  $c_i, f_i, b_i, s_i$  για  $i = 1, 2, 3$  και μπορούν να βρεθούν στο [22] και  $(s_1, M, N)$  είναι οι ελλειψοειδείς συντεταγμένες του  $\mathbf{r}' \in S_s$ . Οι συντελεστές των  $E_n^m(M) E_n^m(N)$  στο ανάπτυγμα (6.17) καθορίζονται από τις μετρήσεις του ΗΕΓ. Θέτοντας αυτοί να είναι  $U_n^m$  προκύπτει:

$$U_n^m = \frac{1}{s_2 s_3} \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}_0)}{\gamma_n^m G_{3,n}^m E_n^{m'}(s_1)} \Rightarrow U_n^m s_2 s_3 \gamma_n^m G_{3,n}^m E_n^{m'}(s_1) = \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}_0), \quad (6.18)$$

όπου τέλος θέτουμε :

$$g_n^m = U_n^m s_2 s_3 \gamma_n^m G_{3,n}^m E_n^{m'}(s_1). \quad (6.19)$$

Οπότε αν το ανάπτυγμα (6.17) γραφεί στη μορφή :

$$u_s(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} U_n^m E_n^m(M) E_n^m(N), \quad \mathbf{r}' \in S_c, \quad \mathbf{r}_0 \in V_c, \quad (6.20)$$

και οι σταθερές  $U_n^m$  δίνονται από τις μετρήσεις του ΗΕΓ τότε υπολογίζοντας τις σταθερές  $g_n^m$  από την σχέση (6.19) μπορούν να υπολογιστούν η θέση και η ροπή της διπολικής πηγής από την σχέση :

$$g_n^m = \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}_0), \quad (6.21)$$

Τελικά, προκύπτει ότι τα  $\mathbf{Q}, \mathbf{r}_0$  δίνονται συναρτήσει των  $g_1^1, g_1^2, g_1^3, g_2^3, g_2^4, g_2^5$  η καρτεσιανή μορφή των οποίων είναι [21]:

$$\mathbf{Q} = \left( \frac{g_1^1}{h_2 h_3}, \frac{g_1^2}{h_1 h_3}, \frac{g_1^3}{h_1 h_2} \right), \quad (6.22)$$

$$\mathbf{r}_0 = \left( \frac{1}{2h_2 h_3} \left[ \frac{g_2^3}{g_1^2} + \frac{g_2^4}{g_1^3} - \frac{g_1^1 g_2^5}{g_1^2 g_1^3} \right], \frac{1}{2h_1 h_3} \left[ \frac{g_2^3}{g_1^1} + \frac{g_2^5}{g_1^3} - \frac{g_1^2 g_2^4}{g_1^1 g_1^3} \right], \frac{1}{2h_1 h_2} \left[ \frac{g_2^4}{g_1^1} + \frac{g_2^5}{g_1^2} - \frac{g_1^3 g_2^3}{g_1^1 g_1^2} \right] \right). \quad (6.23)$$

### 6.2.2 ΜΕΓ

Γράφοντας το  $\mathbf{E}$  στην μορφή :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla u_j(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in V_j, \quad j = c, f, b, s, \quad (6.24)$$

και επιλύοντας την εξίσωση  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J}^p + \sigma \mathbf{E})$ , προκύπτει ότι το μαγνητικό πεδίο εξωτερικά του αγωγού για ένα δίπολο θα είναι :

$$\frac{4\pi}{\mu_0} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{Q}(\mathbf{r}_0) \times \nabla_{\mathbf{r}_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} + \sum_{i=1}^4 \int_{V^+} \sigma_j \nabla u_j(\mathbf{r}') \times \nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv(\mathbf{r}'), \quad (6.25)$$

όπου  $V$  είναι ο εξωτερικός χώρος. Τότε η ακτινική συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου εξωτερικά του κεφαλιού, που δημιουργείται από ένα δίπολο είναι [21]:

$$\frac{1}{\mu_0} \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{1}{(2n+1)\gamma_n^m} \left[ \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{Q} \times \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}_0) - \frac{1}{4\pi} \sum_{l=1, l \neq m}^{2n+1} (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{H}_n^{ml}) (\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}_0)) \right] \mathbb{F}_n^m(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in V^+, \quad \mathbf{r}_0 \in V_c, \quad (6.26)$$

όπου οι καρτεσιανοί συντελεστές των διανυσμάτων  $\mathbf{H}_n^{ml}$  είναι συναρτήσεις των αγωγιμοτήτων  $\sigma_c$ ,  $\sigma_f$ ,  $\sigma_b$ ,  $\sigma_s$  και των ημιαξόνων  $c_i, f_i, b_i, s_i$  για  $i = 1, 2, 3$  και μπορούν να βρεθούν στο [23]. Ο διπολικός όρος που αντιστοιχεί στο  $n = 1$  του αναπτύγματος (6.26) μηδενίζεται [18] και άρα το ανάπτυγμα ξεκινά με τετραπολικό όρο. Οι συντελεστές των  $\mathbb{F}_n^m(\mathbf{r})$  στο ανάπτυγμα (6.26) καθορίζονται από τις μετρήσεις του ΜΕΓ. Θέτοντας αυτοί να είναι  $B_n^m$  προκύπτει ότι η θέση και η ροπή του διπόλου ικανοποιούν τις αλγεβρικές εξισώσεις:

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{Q} \times \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}_0) - \frac{1}{4\pi} \sum_{l=1, l \neq m}^{2n+1} (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{H}_n^{ml}) (\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}_0)) = (2n+1)\gamma_n^m B_n^m, \quad (6.27)$$

για  $n = 2, m = 1, 2, 3, 4, 5$  και  $n = 3, m = 7$ . Παρατηρούμε ότι από τη γνώση των  $B_n^m$  προκύπτουν σχέσεις ανάμεσα στις σταθερές  $g_n^m$  και τις σταθερές  $G_n^m$  που είναι οι:

$$\mathbf{G}_n^m = \mathbf{Q} \times \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}_0), \quad \mathbf{r}_0 \in V_c, \quad (6.28)$$

και ένα κατάλληλο υποσύνολο από αυτές είναι επαρκές για τον προσδιορισμό των χαρακτηριστικών του διπόλου. Οπότε αν το ανάπτυγμα (6.26) γραφεί στη μορφή:

$$\frac{1}{\mu_0} \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} B_n^m \mathbb{F}_n^m(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in V, \quad (6.29)$$

και οι σταθερές  $B_n^m$  δίνονται από τις μετρήσεις του ΜΕΓ τότε προκύπτουν η θέση και η ροπή του διπόλου από τις εξισώσεις (6.27).

Επομένως, σε ό,τι αφορά το ΗΕΓ, δοθέντων των δεδομένων για το ηλεκτρικό δυναμικό  $u_s$ , και υποθέτοντας ότι είναι δυνατόν να εκτιμηθούν οι συντελεστές του διπολικού ( $n = 1$ ) και του τετραπολικού ( $n = 2$ ) όρου του ελλειψοειδούς αναπτύγματος του  $u_s$  τότε είναι δυνατόν να υπολογιστούν οι έξι σταθερές που καθορίζουν τη θέση και τη ροπή της διπολικής πηγής.



Σε ό,τι αφορά το ΜΕΓ, δοθέντων των δεδομένων για την ακτινική συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου  $\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{B}$  εξωτερικά και υποθέτοντας ότι είναι δυνατόν να καθοριστούν οι συντελεστές του τετραπολικού ( $n = 2$ ) και του οκταπολικού ( $n = 3$ ) όρου του ελλειψοειδούς αναπτύγματος του  $\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{B}$ , τότε είναι δυνατόν να προσδιοριστούν οι έξι σταθερές που καθορίζουν τη θέση και τη ροπή της διπολικής πηγής. Επιπλέον, για την περίπτωση της ΜΕΓ τα αποτελέσματα δείχνουν ότι δεν υπάρχουν σιωπηλές πηγές στην περίπτωση της ελλειψοειδούς γεωμετρίας, δηλαδή και οι τρεις συνιστώσες της ροπής  $\mathbf{Q}$  συμβάλλουν στο μαγνητικό πεδίο σε αντίθεση με την σφαιρική περίπτωση γεωμετρίας όπου η ακτινική συνιστώσα της ροπής δεν συμβάλλει στο μαγνητικό πεδίο.

## Συμπεράσματα

Σε αυτή την εργασία παρουσιάστηκε η λύση για το ευθύ και αντίστροφο πρόβλημα των ΗΕΓ και ΜΕΓ σε ελλειψοειδή γεωμετρία στα πλαίσια της σχεδόν στάσιμης θεωρίας υπό δύο υποθέσεις: ότι ο ανθρώπινος εγκέφαλος προσεγγίζεται ως ομογενής ελλειψοειδής αγωγός ή ως ανομοιογενής αγωγός τριών ομοιοστατικών ελλειψοειδών και ότι το πρωτεύον ρεύμα προέρχεται από μία διπολική πηγή στο εσωτερικό του αγωγού. Η υπόθεση της διπολικής πηγής απλοποιεί αρκετά το πρόβλημα αλλά παρόλα αυτά παρέχονται χρήσιμες πληροφορίες από τις εκφράσεις που προκύπτουν μελετώντας τις λύσεις του εσωτερικού και εξωτερικού ηλεκτρικού δυναμικού καθώς και τον τετραπολικό όρο του πολυπολικού αναπτύγματος του μαγνητικού πεδίου επαγωγής. Αρχικά, παρατηρούμε ότι η μη αντιστρεψιμότητα είναι οριστική τόσο για την ΗΕΓ όσο και την ΜΕΓ, επομένως δεν μπορεί να ανακτηθεί το πλήρες πρωτεύον ρεύμα δηλαδή και οι τρεις συνιστώσες του ακόμη και αν έχουμε πλήρη γνώση για τα δεδομένα που παρέχονται και από τις δύο απεικονιστικές μεθόδους. Ο τρόπος με τον οποίο μπορεί η μη αντιστρεψιμότητα να παρακαμφθεί είναι η μεθοδος ελαχιστοποίησης της  $\Lambda_2$ -νόρμας. Επίσης, παρατηρούμε ότι παρά το μηδενισμό του πρώτου όρου στο ανάπτυγμα του μαγνητικού πεδίου δηλαδή ο όρος  $n = 0$  είναι μαγνητικά σιωπηλός άρα υπάρχει διεύθυνση στην οποία δεν μπορεί να ανιχνευθεί, τα αριθμητικά αποτελέσματα που συναντώνται στη βιβλιογραφία δείχνουν ότι ο όρος  $\mathcal{O}(el_3)$  δεν μηδενίζεται στην ίδια διεύθυνση. Αυτό σημαίνει ότι στο ελλειψοειδές μοντέλο με ένα δίπολο δεν υπάρχουν σιωπηλές πηγές. Άρα η συμπληρωματικότητα του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου που ισχύει στην περίπτωση της σφαιρικής γεωμετρίας δεν ισχύει πλέον στην ελλειψοειδή οδηγώντας στο συμπέρασμα ότι τόσο η ΗΕΓ όσο και η ΜΕΓ παρέχουν ουσιώδη δεδομένα για την μελέτη του εγκεφάλου. Επιπλέον, η εξάρτηση του μαγνητικού πεδίου από την αγωγιμότητα του φλοιού αλλά και από την διαφορά αγωγιμότητας που παρουσιάζεται επάνω στις διεπιφάνειες οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η ΜΕΓ μπορεί να ανιχνεύσει αυτή τη διαφορά στην αγωγιμότητα

και πάλι σε αντίθεση με την περίπτωση της σφαιρικής γεωμετρίας. Τέλος, ο μη μηδενισμός του οκταπολικού όρου στην περίπτωση που θεωρηθεί μηδενισμός του τετραπολικού όρου για μία τυχαία αλλά σιωπηλή πηγή οδηγεί στην επίλυση του αντίστροφου προβλήματος στο ανομοιογενές πρότυπο με μία διπολική πηγή χωρίς να υπάρχουν πλέον σιωπηλές πηγές. Τα παραπάνω υποδεικνύουν ότι εφόσον ο ανθρώπινος εγκέφαλος προσεγγίζεται με πιο ρεαλιστικό τρόπο από ένα ελλειψοειδές θα πρέπει να λαμβάνονται υπόψη οι ανομοιογένειές του καθώς με αυτό τον τρόπο αίρονται οι περιορισμοί που παρέχονται από το σφαιρικό πρότυπο.

# Bibliography

- [1] B. Kolb and I.Q. Whishaw. *Fundamentals of Human Neuropsychology*. Worth Publishers, 2009.
- [2] G.N. Martin. *Human Neuropsychology*. Pearson Education. Prentice Hall, 1998.
- [3] A S Fokas and Y Kurylev. Electro-magneto-encephalography for the three-shell model: minimal  $l_2$ -norm in spherical geometry. *Inverse Problems*, 28(3):035010, 2012.
- [4] A S Fokas, Y Kurylev, and V Marinakis. The unique determination of neuronal currents in the brain via magnetoencephalography. *Inverse Problems*, 20(4):1067, 2004.
- [5] M. Teplan. Fundamentals of eeg measurement. In *In: Measurement Science Review, Volume 2, Section*, 2002.
- [6] J.N. Mak and J.R. Wolpaw. Clinical applications of brain-computer interfaces: Current state and future prospects. *Biomedical Engineering, IEEE Reviews in*, 2:187–199, 2009.
- [7] Shravani. Sur and V. Sinha. Event-related potential: An overview. *Industrial Psychiatry Journal*, 18(1):70–73, 2009.
- [8] AndreasA. Ioannides. Magnetoencephalography. In MarcD. Binder, Nobutaka Hirokawa, and Uwe Windhorst, editors, *Encyclopedia of Neuroscience*, pages 2225–2229. Springer Berlin Heidelberg, 2009.
- [9] Matti Hämäläinen, Riitta Hari, Risto J. Ilmoniemi, Jukka Knuutila, and Olli V. Lounasmaa. Magnetoencephalography—theory, instrumentation, and applications to noninvasive studies of the working human brain. *Rev. Mod. Phys.*, 65:413–497, Apr 1993.

- [10] G. Dassios. *Ellipsoidal Harmonics: Theory and Applications*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 2012.
- [11] Fotini Kariotou. Electroencephalography in ellipsoidal geometry. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 290(1):324 – 342, 2004.
- [12] Καριώτου Β. Φ. *Μαθηματικά προβλήματα ηλεκτρομαγνητικής δραστηριότητας στη νευροφυσιολογία του εγκεφάλου*. Διδακτορική Διατριβή, Πανεπιστήμιο Πατρών, Σχολή Χημικών Μηχανικών, 2002.
- [13] George Dassios, Sofia N. Giapalaki, Anastasia N. Kandili, and Fotini Kariotou. The exterior magnetic field for the multilayer ellipsoidal model of the brain. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 60(1):1–25, 2007.
- [14] Χατζηλοΐζη Δ. *Αντίστροφα προβλήματα στη μαθηματική θεωρία της ηλεκτρο-μαγνητοεγκεφαλογραφίας*. Διδακτορική Διατριβή, Πανεπιστήμιο Πατρών, Σχολή Χημικών Μηχανικών, 2009.
- [15] Δάσιος Γ. *Μαθηματική θεμελίωση της ηλεκτρικής και μαγνητικής δραστηριότητας του εγκεφάλου*. Υπό έκδοση, 2012.
- [16] G Dassios, A S Fokas, and F Kariotou. On the non-uniqueness of the inverse meg problem. *Inverse Problems*, 21(2), 2005. Cited By (since 1996): 15.
- [17] G Dassios and D Hadjiloizi. On the non-uniqueness of the inverse problem associated with electroencephalography. *Inverse Problems*, 25(11), 2009. Export Date: 27 October 2010.
- [18] George Dassios and Fotini Kariotou. Magnetoencephalography in ellipsoidal geometry. *Journal of Mathematical Physics*, 44(1):220–241, 2003.
- [19] David B. Geselowitz. On the magnetic field generated outside an inhomogeneous volume conductor by internal current sources. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 6(2):346–347, Jun 1970.
- [20] David B. Geselowitz. On bioelectric potentials in an inhomogeneous volume conductor. *Biophysical Journal*, 7(1):1 – 11, 1967.

- [21] G. Dassios and A. S. Fokas. Electro-magneto-encephalography for the three-shell model : a single dipole in ellipsoidal geometry. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 35(12):1415–1422, 2012.
- [22] S. N. Giapalaki and F. Kariotou. The complete ellipsoidal shell-model in eeg imaging. *Abstr. Appl. Anal.*, 2006:1–18, 2006.
- [23] A.S Fokas. Electro-magneto-encephalography for a three-shell model: distributed current in arbitrary, spherical and ellipsoidal geometries. *Journal of The Royal Society Interface*, 6(34):479–488, 2009.
- [24] J Sarvas. Basic mathematical and electromagnetic concepts of the biomagnetic inverse problem. *Physics in Medicine and Biology*, 32(1):11, 1987.
- [25] G. Dassios. The magnetic potential for the ellipsoidal meg problem. *journal of computational mathematics*, 25(2):145–156, 2007.
- [26] D. Hilbert and S. Cohn-Vossen. *Anschauliche Geometrie*. AMS Chelsea Publishing Series. Chelsea Publishing Company, 1952.
- [27] H. Ammari. *Mathematical Modeling in Biomedical Imaging I: Electrical and Ultrasound Tomographies, Anomaly Detection, and Brain Imaging*. Lecture Notes in Mathematics / Mathematical Biosciences Subseries. Springer, 2009.